輻射科学研究会資料

誘電体装荷強磁性体メーバ

牧本利夫

張年錫

（大阪大学　産業科学研究所）

昭和38年4月20日

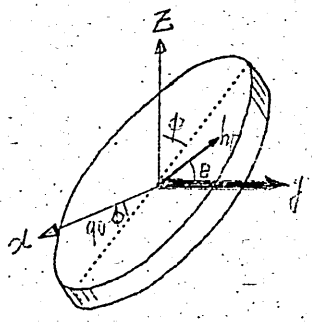
（於　住友電気研究所）

誘電体装荷強磁性体メーバ

§1. まえがき

強磁性体を使ったパラメトリック増巾器はその持つ性質からわかるように，系を動作さすに必要な電力が高い。この増巾器は理論的には早くから提案され，実験的にも証明されたが，実用という段階では未だにその例をみないのはその理由である。低電力で動作さすための色々な工夫がなされて来た。その一つは高周波磁界と静磁界とが平行になっている場合である。これは強磁性体の静磁姿態を信号，アィドリング系としたものでその実験結果が報告[1]されている。0.5Wのポンプ電力で増巾させているが，帯域は非常に狭い。これに対して電磁動作による増巾器では，試料はただ信号回路とアィドリング回路を結合する役割のみをはたしている。ポンプ電力の大，小の目やすになる充満係数（F）の値は小さい。通常の場合についてみるとき，MS-Modeを利用した時$F \approx 1$に対してEM-Modeでは$F = 10^{-2}$でもかなり大きい方になる。我々はEM-Modeを用いた増巾器について，Thresholdの特性改善を試みた。この様な系に誘電体を装荷することは試料の大きさを変えないで，系の幾何学的な寸法を小さくしうる。このような考えで実験[2]を行っている。この結果ではポンプ電力数W程度で増巾を確認している。然し前の場合と同様にthrsholdを与えてない。又ポンプ回路を共振さしているために特性の安定度は悪いように思われる。我々は信号回路の共振系を$\lambda/4$波長のストリップ線路によって構成し，高誘電率の誘電体を挿入することによって，信号回路を小型化し，特に誘電体の装荷を色々考慮することによってポンプ回路の改善[3]を行なった。この時のthresholdは100W以下であった。

§2. 一 般 論



第1図

電磁形動作のメーバで，信号，アィドリング周の結合集子としての強磁性体（YIG）が信号周波数及びアィドリング周波数に共振しているマイクロ波回路中に置かれ，外部静磁場H_0，高周波ポンプ磁場h_p，と座標系が第1図のような関係になっていて，$f_p = f_1 + f_2$ の周波数関係を満足しているとする。f_p はポンプ周波数（Mc/s），f_1，f_2 は信号，アィドリング周波数である。h_p はy軸を含むDisk面内にある。

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\gamma[\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}] + \frac{\alpha}{|\boldsymbol{M}|}[\boldsymbol{M} \times (\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H})] \qquad (1)$$

そこでランダウーリフシツツの式(1)を $\alpha^2 \ll 1$，$h_p \ll H_0$，$M_z \ll M$ の条件と一次近似で解く。こゝでαは損失をあらわし$\gamma\Delta H/\omega$である。γは磁気回転比である。強磁性体がポンプ角周波数（ω）で共鳴吸収をおこなっている時，系の発振に必要な電力は次の式[4]であらわされる。

$$P_{th} = \frac{\mu_0 \omega M_0 V f \Delta H}{2F^2 Q_1 Q_2} \frac{R \sin^2\theta \sin^2\phi + S\cos^2\theta}{\omega_{ni}^2 (\sin\theta\cos\phi)^2 (2\omega_0 + \omega_{mx} - 2\omega_{mz})}$$

$$\times \frac{1}{\sin^2\theta \sin^2\phi (C+F)^2 + \cos^2\theta (E+G)^2} \qquad (2)$$

こゝで

ここで

$$F = \frac{\int_f H_1 H_2 \, dv}{\left[\int_{C_1} H_1^2 \, dv \int_{C_2} H_2 \, dv \right]^{\frac{1}{2}}}$$

上の積分は試料(f)，信号(C_1)，アイドリング(C_2)の空胴について行う。

$$\omega_0 = \gamma H_0$$

$$\omega_m = 4\pi\gamma M_0 \, , \quad \omega_{mx} = 4\pi N_x M_0 \, , \quad \omega_{mz} = 4\pi N_z M_0$$

N_x, N_z は x，z 方向の反磁場係数をあらわす。

Q_1, Q_2 = 信号，アイドリング周波数に対する負荷 Q

$4\pi M_0$ = 飽和磁化

$\triangle H$ = 強磁性共鳴の半値巾

V_f = YIGの体積

R = $\omega_0 - \omega_{mz}$

S = $\omega_0 + (\omega_{mx} - \omega_{mz})$

C, F, E, G = ポンプ周波数の磁化成分と信号，或いはアイドリング周波数を含むものである。

我々の場合は縮退形である。この時は $f_1 = f_2$，$C_1 = C_2$ である。$\phi = 0$，$\theta = 45°$ とすると(2)式は簡単な(3)式のようになる。

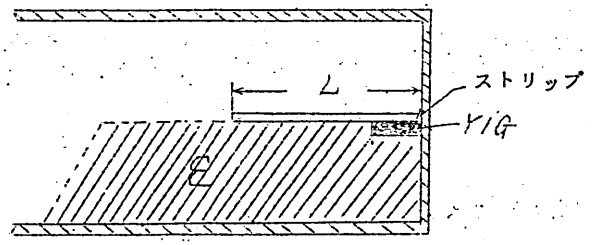
$$P_{th\,\phi=0,\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{32} \frac{\omega_0(\omega_0+\omega_m)(2\omega_0+\omega_m)}{\omega_m^2 (\frac{3}{2}\omega_0+\omega_m)^2} \frac{\mu_0 \omega M_0 V_f \triangle H}{F^2 Q_1^2} \qquad (3)$$

(3)式からわかるように，右辺は試料がきまっている場合（ΔH，$4\pi M_0$ 既知）はV_f，Q_1，Fによって支配される。我々の場合は$F = V_f / V_c$と考えられるから右辺は

$$\frac{9}{32} \frac{\omega_0(\omega_0+\omega_m)(2\omega_0+\omega_m)}{\omega_m^2(\frac{3}{2}\omega_0+\omega_m)^2} \frac{\mu_0 \omega M_0 V_c^2 \Delta H}{V_f Q_1^2}$$

となりV_c^2に比例し，$V_f Q_1^2$ に逆比例する。だから空胴の容積を小さくし，YIGの体積を大きくした方がよい。所が試料の大きさは高周波磁界の等しい所に挿入する必要性から，やたらに大きくは出来ない（このことは一様歳差運動以外の姿態の励起となり，ポンプ磁界が一部これに寄与することになる）。このためにQ_1の値が制限されていれば，V_cを小さくすることに期待がよせられる。

誘電率εの媒質中を伝播する電磁波の波長は自由空間の波長λに対して$\lambda/\sqrt{\varepsilon}$の割合で短縮されることはすでによく理解されている。



第２図

第２図のように誘電体を挿入すれば，εが完全につまった場合の関係にならず$\lambda/\sqrt{\varepsilon'}$（$\varepsilon > \varepsilon'$）できいてくる。この時の高周波ポンプ磁界の状態が

どうなっているかが問題である。(3)式には陽にポンプ磁界 hp を含んでいないが，共鳴時に YIG に吸収される電力の関係式(4)をみればよくわかる。即ち

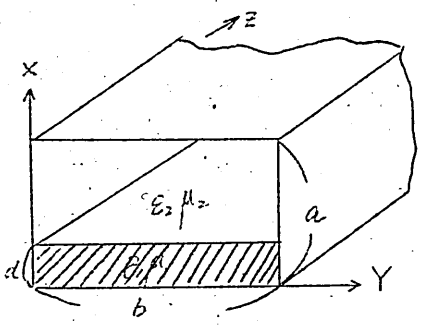
$$P_{ab}{}_{\phi=0,\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\omega\mu_0 M_0 V_f}{4\Delta H} \quad \frac{(\omega_0+\omega_m)}{(2\omega_0+\omega_m)} \tag{4}$$

一定入力電力に対して吸収量を大きくするためには，試料の定数によって決定されるもの以外としては，hp を大きくする必要がある。これは簡単な関係 $M_p = \frac{M_0}{\Delta H} hp$ （Mp は高周波磁化の横成分）から諒解出来る。そこで誘電体装荷導波管の hp の関係を調べてみる。

§ 3. 部分的に誘電体を含む導波管内の電磁界

§ 3.1 理 論

第 3 図のように誘電率，導磁率の異なる 2 つの媒質が挿入されている時の電磁界を調べる。この場合 z 方向に進行する波を考えると，ハイブリッド姿態で伝播する。



第 3 図

今 X 方向に対して TM 一波がのるとすれば，第 1 の領域（ε_1, μ_1），第 2 の領域（ε_2, μ_2）で次のポテンシャル函数は Maxwell の方程式を満足する。

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= C_1 \cos {}^{k}x_1 \; X \sin \frac{n\pi}{b} Y_c^{-\gamma z} \qquad o < x d(a) \\ \varphi_2 &= C_2 \cos[{}^{k}x_2 (a-x)] \sin \frac{n\pi}{b} Y_e^{-\gamma z} \qquad d < x < a(b)\end{aligned}\right\} \quad ----(5)$$

こゝで C_1 , C_2 は振巾をあらわす常数で，γ は伝播常数をあらわし，k_{x1}，k_{x2} はX方向の両領域に於ける波数をあらわす。又 n は正の数で $n = 1$, 2, 3・・・・ である。(b)の関係から電磁界の各成分が求まる。

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + R^2\right)\varphi & H_x &= 0 \\ E_y &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & H_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ E_z &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x \partial z} & H_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

各成分は

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)}\; E_{x1} = \frac{C_1}{j\omega\varepsilon_1}\left(k_1^2 - k_{x1}^2\right)\cos k_{x1} x \sin k_y \, Y_c^{-\gamma z} \\
&\text{b)}\; E_{y1} = -\frac{C_1}{j\omega\varepsilon_1}\, k_{x1} k_y \sin k_{x1} x \cos k_y \, Y_e^{-\gamma z} \\
&\text{c)}\; E_{x2} = \frac{C_2}{j\omega\varepsilon_2}\left(k_2^2 - k_{x2}^2\right)\cos k_{x2}(a-x) \sin k_y Y_e^{-\gamma z} \\
&\text{d)}\; E_{y2} = \frac{C_2}{j\omega\varepsilon_2}\, k_{x2} k_y \sin[k_{x2}(a-x)] \cos k_y \, Y_e^{-\gamma z}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(7)$$

e) $H_{y1} = -\gamma C_1 \cos k_{x1} x \sin k_y Y e^{-\gamma z}$

f) $H_{y2} = -\gamma C_2 \cos k_{x2}(a-x) \sin k_y Y e^{-\gamma z}$

所で $\gamma = jkz$, $\sigma = 0$, $k_y = \frac{n\pi}{b}$ ..... (8)

各軸方向の波数や伝播常数の間には次の関係がある。

$$\left.\begin{aligned} k_{x1}^2 + k_y^2 &= \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 + \gamma^2 \\ k_{x2}^2 + k_y^2 &= \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 + \gamma^2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (8)$$

こゝで2つの媒質の境界即ち y z 平面内での電磁界の連続条件，($x=y$ で $E_{y1} = E_{y2}$, $E_{z1} = E_{z2}$, $H_{y1} = H_{y2}$)を利用すれば次の関係式をうる。

(7)の b , d から

$$\frac{1}{\varepsilon_1} C_1 k_{x1} \sin k_{x1} d = -\frac{1}{\varepsilon_2} C_2 k_{x2} \sin k_{x2}(a-d) \quad \cdots\cdots (9)$$

同様に(9)の(e) , (f)から

$$C_1 \cos k_{x1} d = C_2 \cos k_{x2}(a-d) \quad \cdots\cdots (10)$$

(9) , (10)式から(11)式をうる。

$$\frac{k_{x1}}{\varepsilon_1} \tan k_{x1} d = -\frac{1}{\varepsilon_2} k_{x2} \tan k_{x2}(a-d) \quad \cdots\cdots (11)$$

(11)式は(8)式からわかるように，k_{x1}, k_{x2} が γ (未知数)を含むから超越方程式となる。だから(11)によって k_{x1}, k_{x2} が求まれば(8)によって γ

が求まる。同様に C_1/C_2 は(9)，(10)のどちらからでも求められる。こゝで $k_{x2}=y$ ，$k_{x1}=x$ として(8)式を調べてみよう。(8)式は両方の差から

$$y^2-x^2=\omega^2(\varepsilon_2\mu_2-\varepsilon_1\mu_1)$$

となり両媒質の導磁率が等しいとして即ち $\mu_1=\mu_2=\mu$ ならば

$$y^2-x^2=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \qquad (12)$$

(8)式で γ が純虚数（ k_z :純実 ）であるから次の関係が成立する。

$$\begin{aligned}\omega_1\ \varepsilon_1\ \mu_1-k_{x1}^2-k_y^2>0\\ \omega_2\ \varepsilon_2\ \mu_2-k_{x2}^2-k_y^2>0\end{aligned} \qquad (13)$$

導磁率が等しく誘電率がちがう時は，y ，x の間には次の関係がある。

i) $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ ，$\varepsilon_2>\varepsilon_1$ ，$y^2=x^2+\omega^2(\varepsilon_2\mu_0-\varepsilon_1\mu_0)$ で

a) x が実数ならば，y は実数

b) x が純虚数ならば

$\omega^2(\mu_2\varepsilon_2-\varepsilon_1\mu_0)>x^2$ の時，y は実数

$\omega^2(\mu_2\varepsilon_2-\mu_1\varepsilon_1)<x^2$ 〃 y は純虚数

ii) $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ ，$\varepsilon_1>\varepsilon_2$ ，$y^2=x^2-\omega^2(\mu_0\varepsilon_1-\mu_0\varepsilon_2)$ で

a) x が実数の時

$x^2>\omega^2(\mu_0\varepsilon_1-\mu_0\varepsilon_2)$ の時，y は実数

$x^2<\omega^2(\mu_0\varepsilon_1-\mu_0\varepsilon_2)$ 〃 ，y は純虚数

b) x が純虚数の時は，y は純虚数

上のことを考慮して，我々は，誘電率が（$\varepsilon_1=12, \varepsilon_2=1$ と $\varepsilon_1=2.08, \varepsilon_2=1$）で導磁率が同じ（$\mu_0=\mu_1=\mu_2$）場合について計算した。

例　$\mu_1=\mu_2=\mu_0$ ，$\varepsilon_1=12$(スタイキャスト) $\varepsilon_2=\varepsilon_0=1$ (12)式から

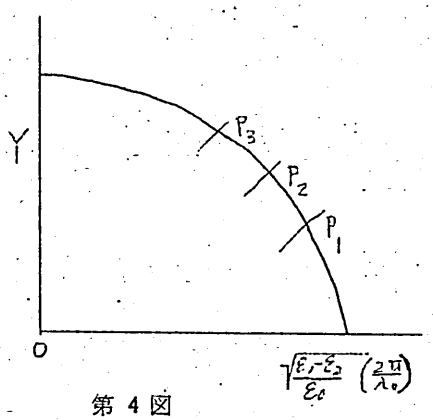
$$y^2=x^2-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \text{ となる。}$$

$x^2>\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2$ の場合求めた根が(13)式を満足しない。そこで

$x^2<\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2$ の場合を考えればよい。この時は x が実数で y は純虚数となる。今 $y=jY$ とすれば $y^2=-Y^2$ となる。$k_{x2}=jk_{x2}'$ として(9)式に入れてみれば(9)′式のようになる。

$$\frac{k_{x1}}{\varepsilon_1}\tan k_{x1}d=\frac{1}{\varepsilon_2}k_{x2}'\tanh k_{x2}'(a-d) \qquad (9)'$$

又(12)式は $Y^2+x^2=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)$ となり半径 $\sqrt{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)$ の円となる。第4図にその一部を示す。(9)と(9)′式のちがいは右辺の tangent が hypabolic tangent に変っているだけである。(9)′式から d に対する x，Y の値を求め，この関係を第5図に図示すれば円周との交点 p を得る。各 d に対する x，Y の関係は交点に対する x，Y の値からわかる。これらの値は(13)式を満足する。



第 4 図

振巾常数 C_1（或は C_2）は第3図

で z 方向に波が伝播する時の電力の流れから求める。

$$P = \frac{1}{2}\iint (\vec{E} \times \vec{H}^*)_t \, ds \qquad \cdots\cdots (14)$$

2つの領域を伝播する電力を P_1 , P_2 とすれば (14)は(15)のように分けられる。

$$P = P_1 + P_2 \qquad \cdots\cdots (15)$$

(7) 式をこれに代入した結果は (16)式のようになる。

$$P = \frac{1}{2} C_1^2 \frac{(R_1^2 - R_{x1}^2)}{\omega \varepsilon_1} kz \iint \cos^2 k_{x1} x \sin^2 k_y dx dy$$

$$+ \frac{1}{2} C_2^2 \frac{(R_2^2 - R_{x2}^2)}{\omega \varepsilon_2} k_z \iint \cos^2 k_{x2}(a-x) \sin^2 k_y dx dy$$

$$\cdots\cdots (16)$$

こゝで $k_{x2} = j k'_{x2}$ を考慮して，上の式を導波管の断面で積分すれば (17)式をうる。

$$P = \frac{b}{8}\left[\left\{C_1^2 \frac{(k_1^2 - k_{x1}^2)}{\omega \varepsilon_1} k_z \left(d + \frac{\sin 2 k_{x1} d}{2 k_{x1}}\right)\right\}\right.$$

$$\left. + C_2^2 \frac{(k_2^2 + k'^2_{x2})}{\omega \varepsilon_2} R_z \left\{(a-d) + \frac{\sinh k'_{x2}(a-d)}{2 k'_{x2}}\right\}\right] \qquad (16)$$

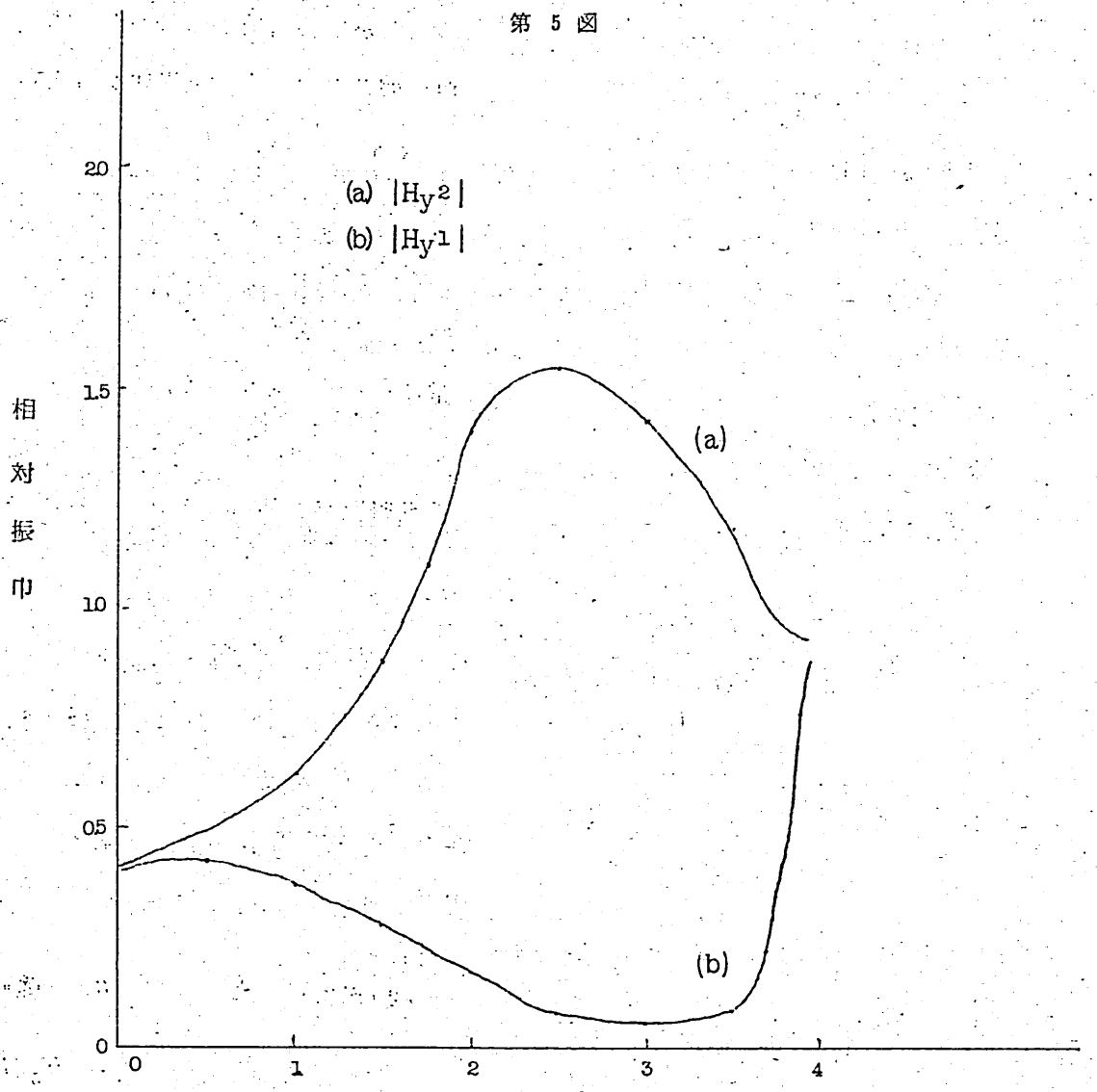
(17)式から入力電力，周波数 ω ，誘電率 ε_1 , ε_2 導波管の寸法 a , b , ε の厚み d と k_{x1} , k_{x2} がわかれば C_1/C_2 の値が求められる。これ等の常数から最後に $z = 0$, $y = \frac{b}{2}$ の所での横磁界成分は

$$\left.\begin{aligned} |H_{y1}| &= C_1 R_z \cos R_{x1} d \\ |H_{y2}| &= C_2 R_z \cos h R'_{x2} (a-d) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

こゝで $C_1, C_2, k_z, k_{x1}, k'_{x2}$ はすべて d の函数である。

1例として $\varepsilon_1 = 12$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$, $f = 9060$ Mc/s, $a = 0.4$ cm,

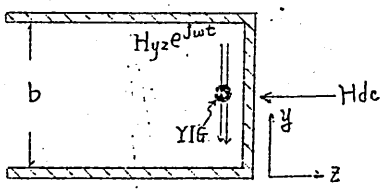
第 5 図



b=2.29 cm で計算した結果を第5図に示す。これからわかることは誘電体中と空気中の磁界成分は振巾に於いて，誘電体の厚みに対して，非常な違いがあり，特に空気（ε_0 の領域）中では d の或値に対して最大値を示すということである。所が一方 ε_1=2.08，ε_2=1の場合の計算では殆んど変化はみられなかった。このことから誘電率の高いもの程 d に対する依存度が大きくなることが期待出来る。このことは高誘電率の誘電体と強磁性体の組合せに面白い問題を提起する可能性が考えられる。

§3－2　測　定

第3図で $|H_{y2}|$ の成分が誘電体の変化に対する依存度として，これを測定するためには $Y=\frac{b}{2}$ の所に磁界を結合するプローグを挿入してやればよい。この時挿入された誘電体の誘電率がかなり高い時は誘電体中の波長は非常に短かくなっているから，プローブの形，大きさ等については極力注意する必要がある。我々は第5図の性質をたしかめるために，実験の都合上強磁性共鳴吸収を利用した。第6図は第3図の第2の領域に試料が挿入されている場合である。これは高周波磁界 $H_{y2}e^{j\omega t}$ の均一な場所である。（試料は $\lambda/\sqrt{\varepsilon'}$ に対し対して非常に小さいことが必要である）H_{dc} は H_{y2} に直角に加える。こゝで H_{dc}, H_{y2} は試料円板の面内にある。この時は



第6図

(19)式で示される静磁界 H_0 で強磁性共鳴吸収がおこる。

$$\omega_r=\gamma\sqrt{H_0(H_0+4\pi M_0)} \qquad \text{----------(19)}$$

共鳴によって吸収される電力は（20)式であるわされる。

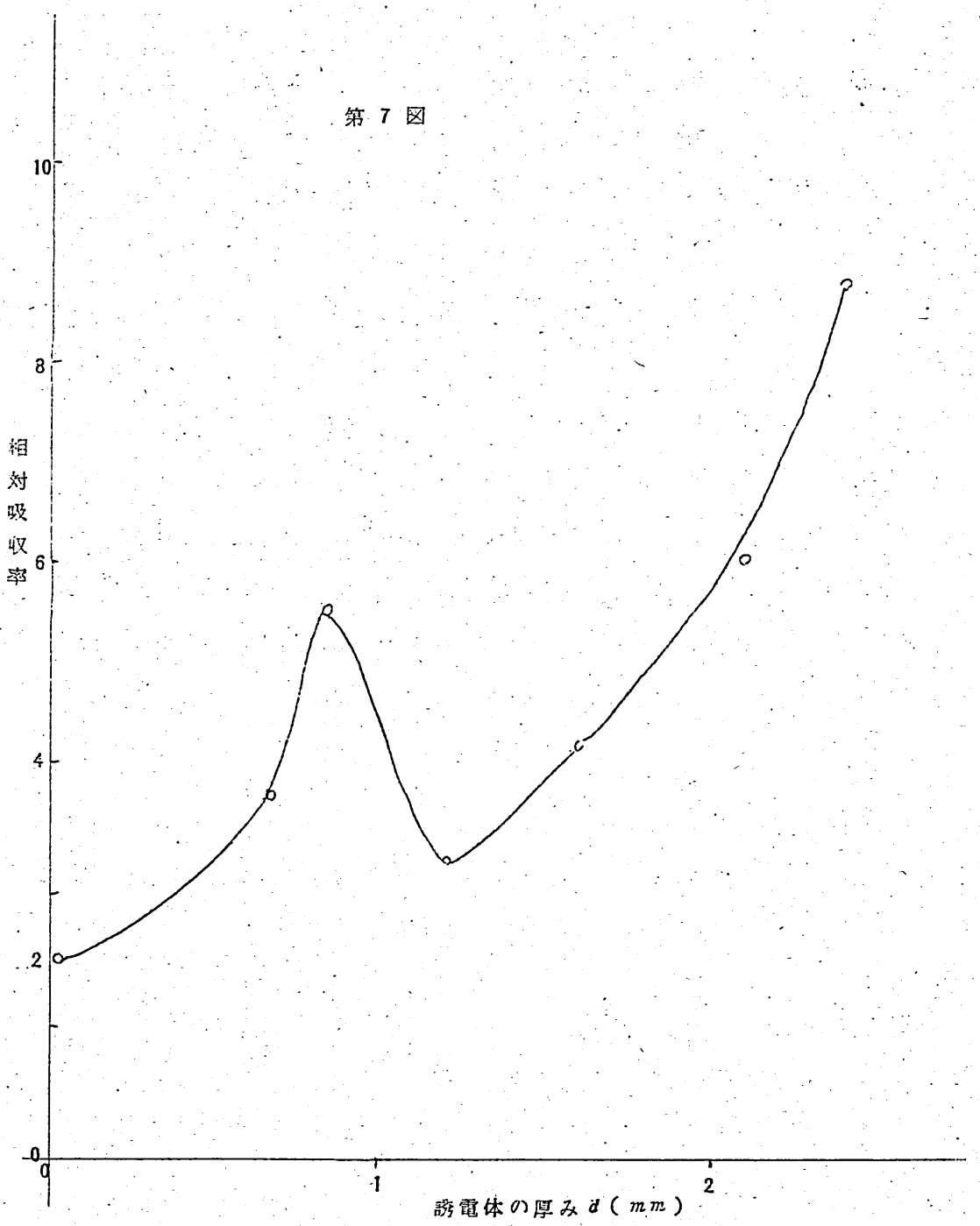
$$\int H \frac{dB}{at}\, dt \qquad \text{---------- (20)}$$

(20)式のBは$M_x(\omega)$，$M_y(\omega)$成分のみを含む。これ等の値は文献4で求めてある。これ等を(20)式に代入すれば，単位周期あたり吸収される電力が求まる。YIGの体積がV_fであるからこの電力は（21)式のようになる。

$$P_{ab} = \frac{\mu_0\ 4\pi M_0(\omega_0+\omega_m)}{2\Delta H(2\omega_0+\omega_m)}\omega V_f (H_{y2})^2 \qquad \text{----------(21)}$$

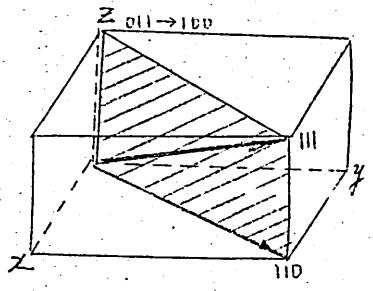
（21）式で資料の吸収巾，飽和磁化，周波数，試料の体積等がわかっていればP_{ab},H_{y2}の関係がわかる。もし測定範囲内で試料が吸収する電力による温度上昇の影響を無視することが出来れば，一定入力電力に対して吸収量を測定することによって$H_{y2}=\left[P_{ab}\ \ 2\Delta H(2\omega_0+\omega_m)/4\pi(\omega_0+\omega_m)\omega V_\phi\right]^{\frac{1}{2}}$ の関係からdの変化に対するH_{y2}の変化がわかる。実験結果の一例を第7図に示す。

第 7 図



§4　メーバの実験

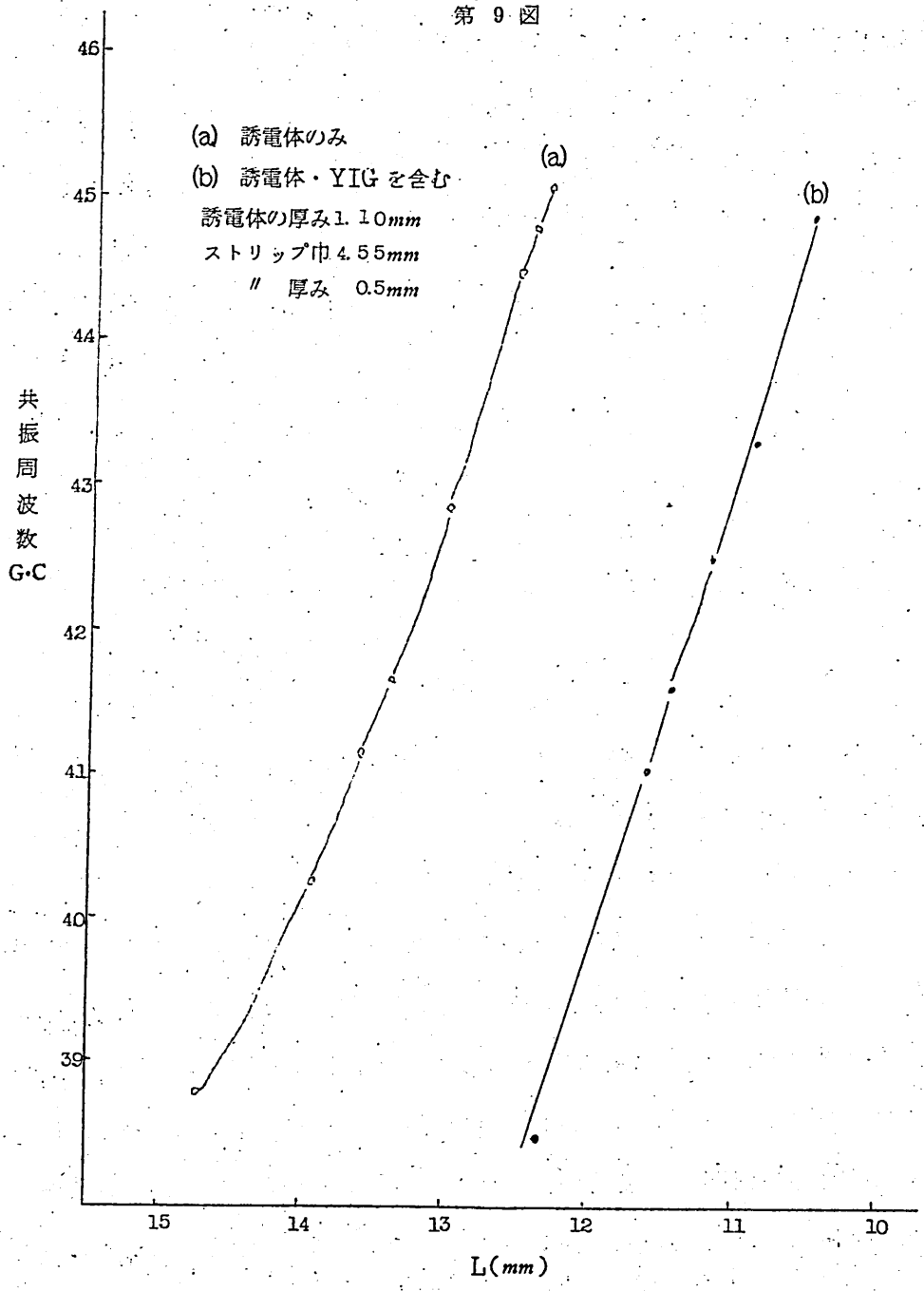
信号共振系を $\lambda/2$ 波長の平面波ストリップ線を用いた縮退形強磁性体メーバについては先に詳しく報告[6]した。こゝでは信号空胴の V_c を小さくするために $\lambda/2$ 波長のものを $\lambda/4$ とし，さきに述べた理由によって誘電体を装荷した。試料は YIG の単結晶体から，容易軸を含む様に $<1\bar{1}0>$ の面に平行に切取った。第8図にそれを示す。切取られた板状のものを整形し直径4 mm，厚み 1mm の円板にした。特に公称 ΔH が 0.5 O_e の試料であったので表面の状態が試料の吸収巾に影響を及ぼすので，研磨材として，1200番のものを使用した。然し結晶は完全でなく，切断面にきれつやすのようなものがみられた。この試料のメーバ動作状態での磁気特性は測定しなかった。測定回路は文献6と同様である。



第　8　図

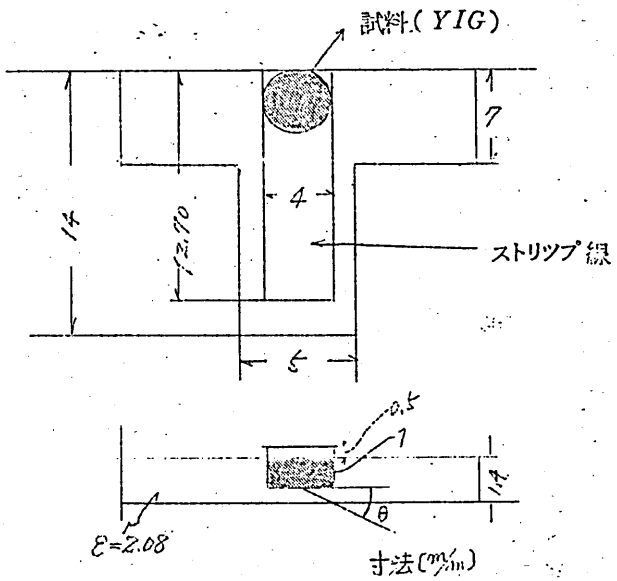
空胴の構造は第2図と同じで，誘電体（テフロン）を装荷し，誘電体とストリップだけの場合と，試料を含めた場合のストリップの長さ L に対する共振周波数の関係を測定した。これを第9図に示す。図で周波数と L の関係は $\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}$ とは異なっている。これはさきにも述べたように完全に誘電体がみたされてないからだと考えられる。(a)は試料を含めない時で，(b)は試料を含めポンプ周波数で共振すべき静磁界をかけた状態である。ε の厚みが一様であっても試料が入っている時は，同じ L に対して共振周波数は非常に低くなっている。これは試料による μ 成分にもとずいているように思われる。これ等をもとにして，信号周波数 4530Mc/s 付近，ポンプ周波数 9060Mc/s で

第 9 図


(a) 誘電体のみ
(b) 誘電体・YIG を含む
誘電体の厚み 1.10mm
ストリップ巾 4.55mm
〃 厚み 0.5mm
(a)
(b)
共振周波数 G·C
46
45
44
43
42
41
40
39
15
14
13
12
11
10
L(mm)

実験を行なった。

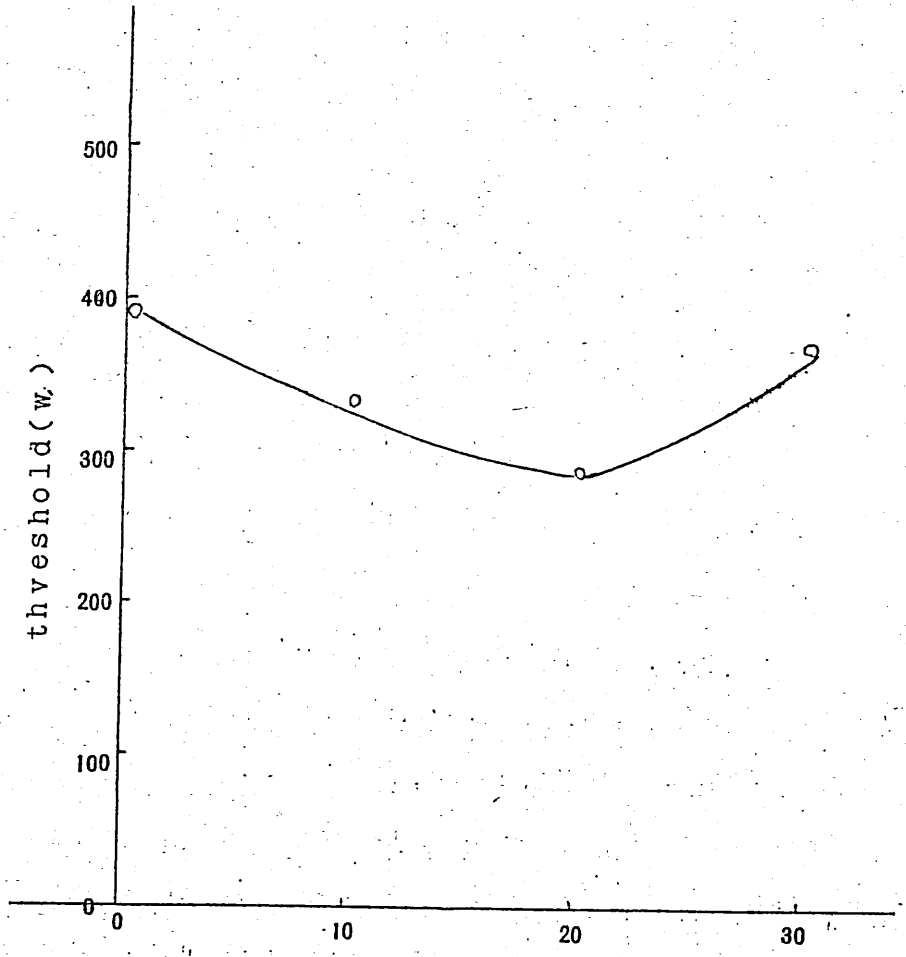
§ 4 − 1　誘電率 (2.0 8)を利用した場合



第　1 0　図

ストリップ共振器，試料，誘電体の構造等を第 1 0図 に示す。このようにしてメーバ動作を行なった時の threshold は試料と高周波磁界及び外部磁場の関係が第 1 図のようになっていて，θ=45°で ϕ を若干変えた場合である。第 1 1 図にその特性を示す。ϕ = 2 0° で特性はよく threshold は 2 9 0 W である。ϕ = 0 の所で L = 1 2.7 0 mm である。第 1 1 図の結果では ϕ = 0 で調整されたが，ϕ を変化すれば，共鳴磁界が変化する。そのために信号系の共振周波数も変化する。だから ϕ の各値に対して L を調整しなければならない。ϕ のある値で例えば 20° で特性がよくなっている理由は(2)式で

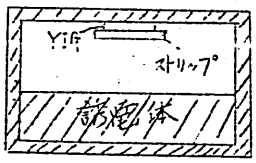
第 11 図



$\sin^2\theta \sin^2\phi (C+F)^2$ の頂が単位より大きい[11]からである。誘電体を装荷しない時同じ共振周波数に対する L は 14.25 mmであった。誘電体の構造が第10図のように丁字型になっているのは，信号入力を空胴に結合する際ポンプ電力を強く誘起するのを防ぐためであった。

§ 4 − 2　高誘電率を利用した場合

まえに述べた如く，誘電率が小さい場合は第2図のように装荷出来たが $\varepsilon = 12$ の場合は第2図のようには装荷出来ない。第12図のように装荷した

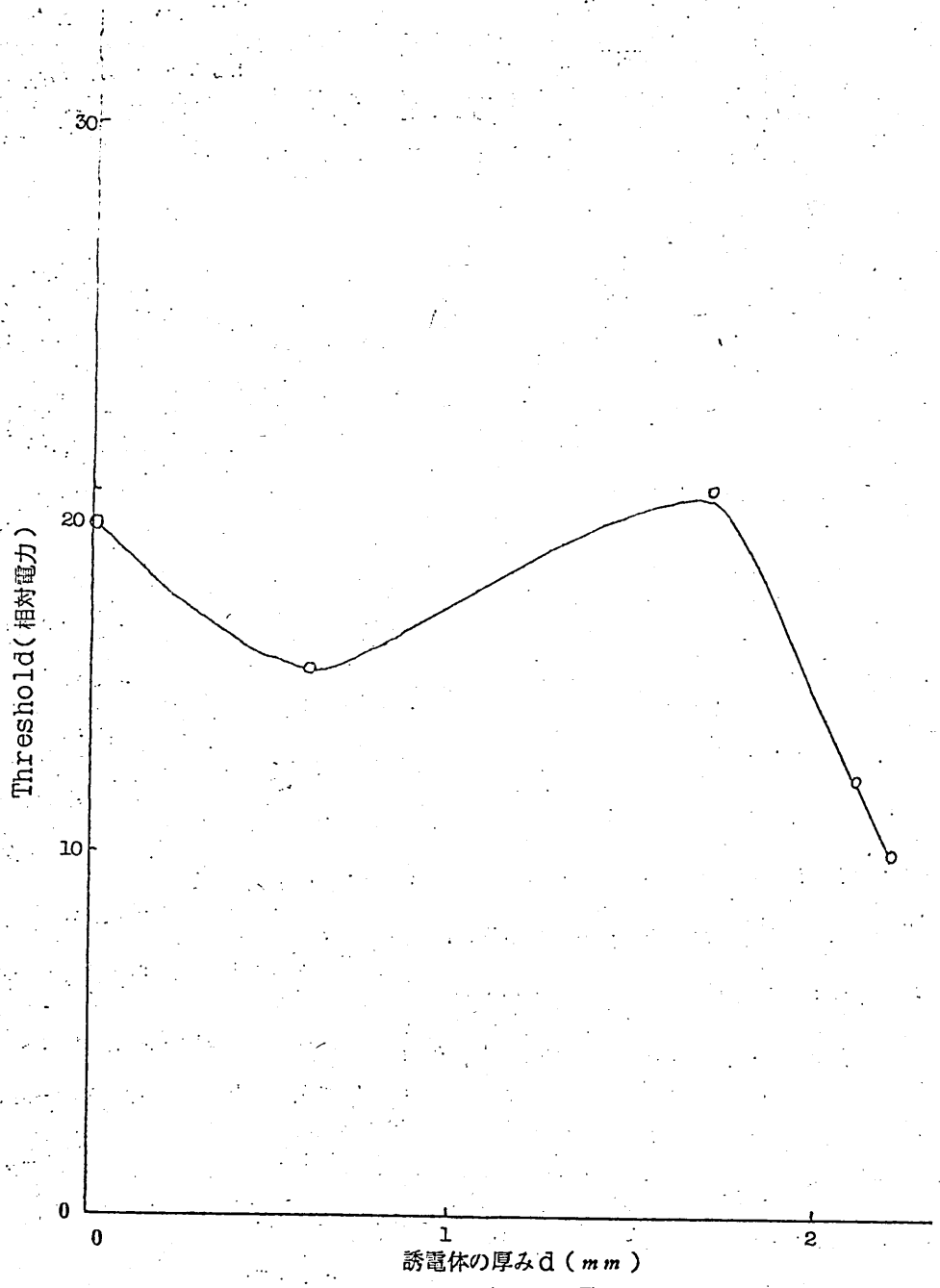


第12図

この場合のストリップ長 L と共振周波数の関係は非常に鋭敏で $\lambda/\sqrt{\varepsilon'}$ のような単純な関係でなくこれを定式化することは困難である。誘電体の厚みを順次厚くして，それぞれに対応する共振周波数と L の関係を実験的に決定した。厚みが厚くなる程波長短縮率は大きくなり，この時の信号周波数に対する共振時に於けるストリップ長の決定は非常に困難となった。誘電体の厚み d に対するメーバ特性のうち threshold との関係を第13図に示す。第6図では $d = 2.4$ mm 付近磁界成分が最大であるが，第7図の吸収の測定では或る相違がある。特に $d = 1$ mm 付近で吸収のピークがあり，メーバ特性でも $d = 1.6$ mm 付近でやゝ高い threshold を示している。この理由は明白でない。ストリップ共振器と試料の厚みの関係で d の最良値に持って行けなかった。

$d = 2.2$ mmでの threshold は 100W以下であった。この場合も d が小さい間は誘電体の形状は板状で差支えなかったが d の大きい値に対しては，第10図のような構造にした。$d = 2.2$ mmでの L の値は 7.00 mmであった。猶結

晶軸を変化させた実験は行なってない。



第 1 3 図

§5　thresholdに対する考察

誘電体を装荷した時の複雑なポンプ磁界の関係を(3)式に陽に含めることが困難であるので単純化*した状態を取扱かつてみよう。$d = 2.2mm$ の時，試料のVf，$Q_L=150$，$L=7.00mm$，$\triangle H$未知・$4\pi M_0 = 1785\ Oe$，H_0 の値を(3)式に代入すると次の式をうる。

$$P_{th} = 4.88\triangle H \quad (W) \tag{22}$$

公称0.5 Oe の半値巾のものであるから数値的には約2.5 Wで発振する筈である。所が実験的には約$\triangle H$が200 Oe に等価なものとなつている。これは公称値に対して40倍の大きさに達する。一般にこの値は低電力での測定値であることを考慮に入れ，単結晶の場合に結晶の不完全性から体積の増大と共に$\triangle H$ の増大は考えられる。又先に述べたように試料は完全（表面的にも）でなかつた。その外にも考えられる問題がある。それはポンプ電力の飽和である。さて試料の損失，歳差角と磁界の関係は $\theta_c = \sqrt{2\triangle H_k / 4\pi M_0}$，$\theta_c = h_c / \triangle H$ から（23）式となる。

$$h_c = \triangle H \sqrt{2\triangle H_k / 4\pi M_0} \tag{23}$$

こゝで$\triangle H_k$はスピン波の半値巾，θ_c, h_cは臨界歳差角及び磁界である。もし$\triangle H = \triangle H$とすれば（23）式の$h_c$は0.018 Oe となる。この値はX－Bandの導波管でH_{10}の基本姿態伝送に対して約35mwの電力に相当する。我々の場合はポンプ電力は10 Wのオーダであるからはるかに大きいことに

---

* 誘電体の挿入は信号系空胴のV_cの変化のみを与えると近似して考える

なる。このためポンプ電力の飽和がおきそれはΔHの増大に寄与しているごとになる。h_c 以上の電力はスピン姿態等に吸収され試料の温度上昇をきたすことになる。又誘電率がかなり高いために，波長の短縮率が大きくなり我々の試料の大きさは，高周波磁界の一様な領域にあると云えない。そのために一様歳差以外のモードの励起をおこし，それによる影響がΔHの増大を与えているように思える。温度上昇を防ぐ立場も考慮して試料が(12)図のように導波管に密着されているが，試料と導波管壁面間は非常にうすいマイカ板で絶縁されている。猶温度上昇による特性の劣化を防ぐために，ドライアイスで増巾器全体を冷却したが，顕著な変化はみられなかった。試料の側面が導波管の端面に接する時は，磁気特性が変化し増巾特性が悪くなる（このことについては文献1にも指摘している）そこで，試料の側面と端面との距離を色々変化さしたが0.15 mm 位の所がよかった。上に述べた様に色々な理由でそれ等は試料のΔHを増大する原因となる。

動作状態でΔHを測定していないのでその値はわからないが，ΔHを200e位に増大したと仮定すれば，理論値とほぼ一致すると云える。上に述べたことは計算値と実験値との相違を定性的に述べたものであるが，誘電体装荷によるh_p への影をも含めた場合の解析については今後にまたなければならない。

§6 結論

誘電体を強磁性体メーバ空胴に挿入することによつて，信号空胴を小型化し得た。特に誘電率が比較的小さい場合は第2図のように装荷した方が良く，計算と実験が示すように高誘電率のものは，第12図のように挿入した方がよい。

高誘電率で低損失の誘電体装荷は系のThreshold を EM 一姿態に於いても著しく下げることが可能であると云える。

文　　献

(1) R.T. Denton "Theoretical and Experimental Charactristic of a Ferrornagnetic Amplifier Using Longitudinal pumping", JAP, Supp. to Vol. 32, No, 3, 1961.

(2) H.Gruenberg "A Ferromagnetic Amplifier Using Dieleetric Loading", IRE. VoL. 48, No, 10, 1960.

(3) 牧本利夫　張　年錫　"½波長空胴を使つた誘電体装荷強磁性体メーバ" 電気連大No. 1370, 1963, 04.

(4) 牧本利夫　張　年錫　"強磁性体を使つたパラメトリック増巾器（円板状資料に対する解折）" MLTR-503, 1962.04.

(5) 牧本利夫　張　年錫　"部分的に装荷された誘電体による導波管内の横磁界成分"　MLTR-506, 1962.10.

(6) 牧本利夫　張　年錫　"フエライトパラメトリック増幅器"マイクロ波専門委　1961.09.

誘電体装荷強磁性体メーバ

正誤表

頁	行	誤	正
5	3	$P_{ab\,\phi=0,\theta=\pi/4}=\frac{\omega\mu_0 M_0 V_f}{4\Delta H}\frac{(\omega_0+\omega_m)}{(2\omega_0+\omega_m)}$	$P_{ab\,\phi=0,\theta=\pi/4}=\frac{\omega_0\mu_0 M_0 V_f}{4\Delta H}\frac{(\omega_0+\omega_m)}{(2\omega_0+\omega_m)}h_p^2$
6	1	$\varphi_1=C_1\cos k_{x1}X\sin\frac{n\pi}{b}Y e^{-\gamma z}$ $0<x\,d$ (a)	$\varphi_1=C_1\cos k_{x1}x\sin\frac{n\pi}{b}Y e^{-\gamma z}$ $0<x<d$ (a)
	6	$E_x=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+R^2\right)\varphi$	$E_x=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2\right)\varphi$
7	2	$H_{y2}=-\gamma C_2\cos k_{x2}(a-x)x\sin k_y Y e^{-\gamma z}$	$H_{y2}=-\gamma C_2\cos k_{x2}(a-x)\sin k_y Y e^{-\gamma z}$
	7	($x=y$で	($x=d$で
	6	同様に(9)の	同様に(7)の
9	10	$Y^2+x^2=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)$	$Y^2+x^2=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2$
			第4図の横軸にxを入れる
10			16式の中の$R_1^2, R_2^2, R_{x1}^2, R_{x2}^2$はすべて$K_1^2, K_2^2, K_{x1}^2, K_{x2}^2$とする
11	1	図中 (a) $\lvert H_y^2\rvert$, (b) $\lvert H_y^1\rvert$ を $\lvert H_{y1}\rvert=C_1 R_z\cos R_{x1}d$ $\lvert H_{y2}\rvert=C_2 R_z\cosh R'_{x2}(a-d)$	(a) $\lvert H_{y2}\rvert$, (b) $\lvert H_{y1}\rvert$ に $\lvert H_{y1}\rvert=C_1 K_z\cos K_{x1}d$ $\lvert H_{y2}\rvert=C_2 K_z\cos K'_{z2}(a-d)$
13	3	$H_{y2}=\left[P_{ab}2\Delta H(2\omega_0+\omega_m)/4\pi(\omega_0+\omega_m)\omega V_\psi\right]^{\frac{1}{2}}$	$H_{y2}=\left[P_{ab}2\Delta H(2\omega_0+\omega_m)/4\pi(\omega_0+\omega_m)\omega V_f\right]^{\frac{1}{2}}$
18			第11図の横軸にϕ°を入れる
21	3	$\Delta H=\Delta H$	$\Delta H_K=\Delta H$

進行波管用
ら線インピーダンスの測定

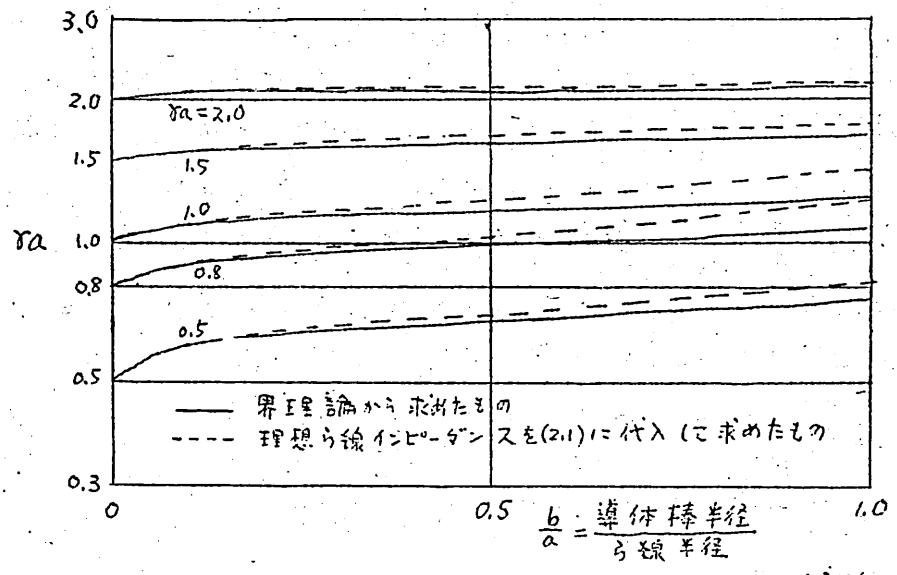
西原浩, 裏克己, 寺田正純
(大阪大学工学部)

昭和38年4月20日

輻射科学研究会

ないときの伝播定数，$E_z(b)$は$r=b$での最大電界値，従ってK_bは$r=b$でみたインピーダンスである。bを小さくしていき$b=0$なる極限におけるK_bが求める$K=E_z(0)/2\beta^2 P$である。実験ではこの$b=0$の極限値を外挿によって求めることになる。この式はKinoが固有モード展開法によって導いているが[2]，等価回路法によってもこの式が導けることを附録に示してある。

インピーダンス測定公式の導出の際には導体棒の挿入による伝播定数の変化が小さいことが仮定されている。測定上の問題として，挿入する導体棒の半径が大きい程伝播定数のずれが大きく精度が高いが，一方ではインピーダンスの測定公式の適用範囲から逸脱するおそれがある。この点を予め理論的に解析可能な理想ら線回路のときに検討しておく必要がある。第1図の実線は理想ら線中に導体棒を挿入した場合の伝播定数をMaxwellの方程式を解いて得たものである。実線は



第1図　理想ら線に導体棒を挿入したときの伝播定数

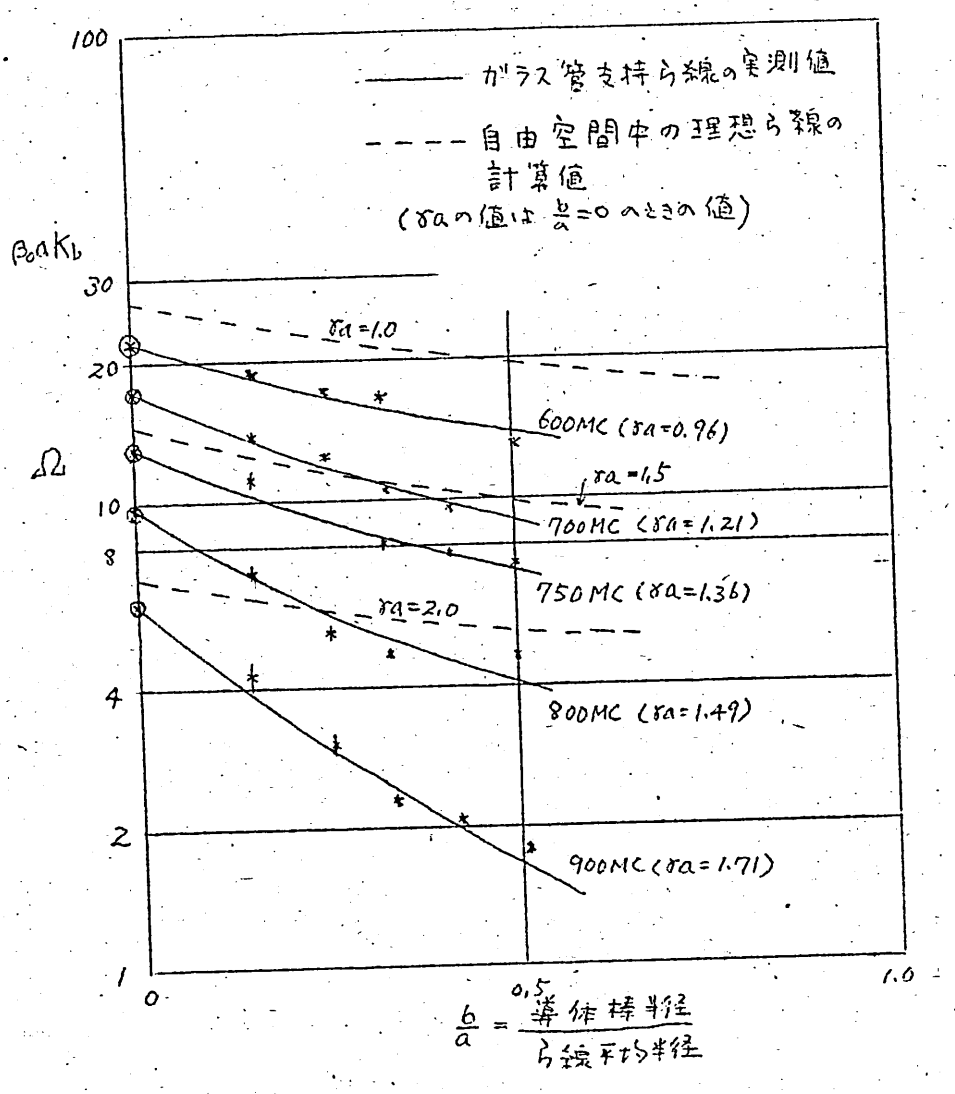
同じモデルについてインピーダンス測定公式に理想ら線インピーダンスを代入して計算したものである。両者を比較すると γa が 0.5～2.0 の範囲で $b/a=0.3$ でも2～3％で一致している。

次に実際の測定に対応して第1回の実線の γa を用い，(2.1)式からインピーダンスを求めたのが第2回である。$b/a \to 0$ の極限へ延長したインピーダンスの値が求めるものである。$\gamma a=0.8$～2.0 の範囲ではこの値が理想ら線の結合インピーダンスとつながる。従って(2.1)は $\gamma a=0.8$～2.0 の範囲では妥当であるといえる。ところが $\gamma a=0.5$ に対しては $b/a \to 0$ の値が理想ら線のインピーダンスとつながらない。従って(2.1)は $\gamma a=0.5$ では適用できない。実はインピーダンス測定公式(2.1)はその導出の途中で展開式の第2項以下を無視して得られたものであり，第2項までとって(2.1)を補正したものが第2回(の実線)である。このように補正すると $\gamma a=0.5$ に対しても適用できるが，実際の進行波管で使用する γa の範囲は 0.8 以上であるので(2.1)式はそのまま使用できる。

§3. 実験結果

ガラス管で支持されたら線の軸上に同心になるように注意深く導体棒を挿入し，ら線上に定在波を立たせて結合度 20db 程度のループをら線に沿って移動して管内波長を測定した。その結果が第3.1回に示してある。管内波長の測定結果から $\Gamma=\Gamma_1$ を計算し(2.1)式に代入して求めたのが第3.2回である。$b/a \to 0$ に外挿する際には多少の自由度がある。これを考慮するとインピーダンスには大目にみて±10％程度の巾がある。

(2.1)式から明らかなように求めるインピーダンスの精度は



第3.2図　インピーダンスの決定

文献

(1) J. R. Pierce; "Traveling-wave tubes" Van Nostrand (1950)

(2) G. S. Kino, "Normal mode theory in perturbed transmission systems" Stanford Univ. Electronic Res. Lab. Tech. Rep. No. 84. (1955-03)

(3) P. K. Tien, "Travelling-wave tube helix impedance" Proc. I.R.E. 41 pp. 1617-1623 (1953-11)

(4) H. Schnitger and D. Weber; Die experimentelle Prüfung der Theorie kleiner Signale der Wanderfeldwendel röhren" A.E.Ü. 6, pp. 369-376, 1952

(5) C. M. Chu, "Propagation of waves in helical waveguides" J.A.P. 29 No.1, pp. 88-99, (1958-1)

(6) B. J. McMurtry, "Fundamental interaction impedance of a helix surrounded by a dielectric and a metal" Trans. I.R.E., vol. ED-9; pp. 210-216. (1962-03)

附錄　等価回路法によるインピーダンス測定公式 (2.1) の導出

導体棒が存在しないとき伝送回路系(ら線)を伝送する電力を P, 伝播定数を Γ, ら線の軸上の電界を $E_z(0)$ とする。ら線の等価回路として直列インダクタンス jX_0 と並列キャパシタンス jB_0 の分布定数回路を考え, その回路電圧及び電流を V_0, および I_0 とする。ここで $E_z(0) = -\frac{\partial V_0}{\partial z}$ なるように関係づけると, 我々の結合インピーダンスは

V_0, I_0 の k倍 即ち kV_0, kI_0 と自由空間中にある導体棒表面に流れる I_2 によって生じる導体棒表面の界 V', I' とを重畳したもので書けると仮定する。即ち

$$\begin{cases} V = kV_0 + V' \\ I = kI_0 + I' \end{cases} \tag{A.6}$$

そしてインピーダンスは

$$K_b = \frac{V^2}{\Xi} = \sqrt{\frac{X_b}{B_b}} \approx \sqrt{\frac{X_0}{B_0}} \tag{A.7}$$

とかける。(A.5) に (A.6) と (A.3) を代入すると,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I'}{\partial z} = -jB_0 V' + J \\ \dfrac{\partial V'}{\partial z} = -jX_0 I' \end{cases} \tag{A.8}$$

或いは

$$\begin{cases} -\Gamma I' = -jB_0 V' + J \\ -\Gamma V' = -jX_0 I' \end{cases} \tag{A.9}$$

I' を消去すると

$$V' = -\frac{\Gamma_1 K_b}{\Gamma^2 - \Gamma_1^2} J = -\frac{\Gamma \Gamma_1 K_b}{\Gamma^2 - \Gamma_1^2} I_2 \tag{A.10}$$

となる。

一方自由空間中の $r=b$ に中空円筒電流 $I_2 e^{-\Gamma z}$ をおいた場合の電界は，界理論から　($\gamma = \sqrt{-\Gamma^2 - k^2}$)

$$E' = -\frac{\gamma^2 I_2}{2\pi j\omega\epsilon} I_0(\gamma b) K_0(\gamma r) \qquad r \geq b \tag{A.11}$$

となり，従って $r=b$ の導体棒上の電界は

$$E' = -\frac{\gamma^2 I_2}{2\pi j\omega\epsilon} I_0(\gamma b) K_0(\gamma b) \tag{A.12}$$

(A.12), (A.10) の E', V' を $E' = -\dfrac{\partial V'}{\partial z} = \Gamma V'$ を用いて消去すると

§1. 緒言

電子ビームと ら線回路の結合インピーダンス K は次式で与えられる。[11]

$$K = \frac{E_z^2(0)}{2\beta^2 P}$$

ここで $E_z(0)$ は ら線の中心軸上での z 成分の電界の最大値, β は z 方向の位相定数, P は回路を伝播する電磁波の電力である。このインピーダンス K は進行波管の利得を決定する最も重要なパラメーターである。

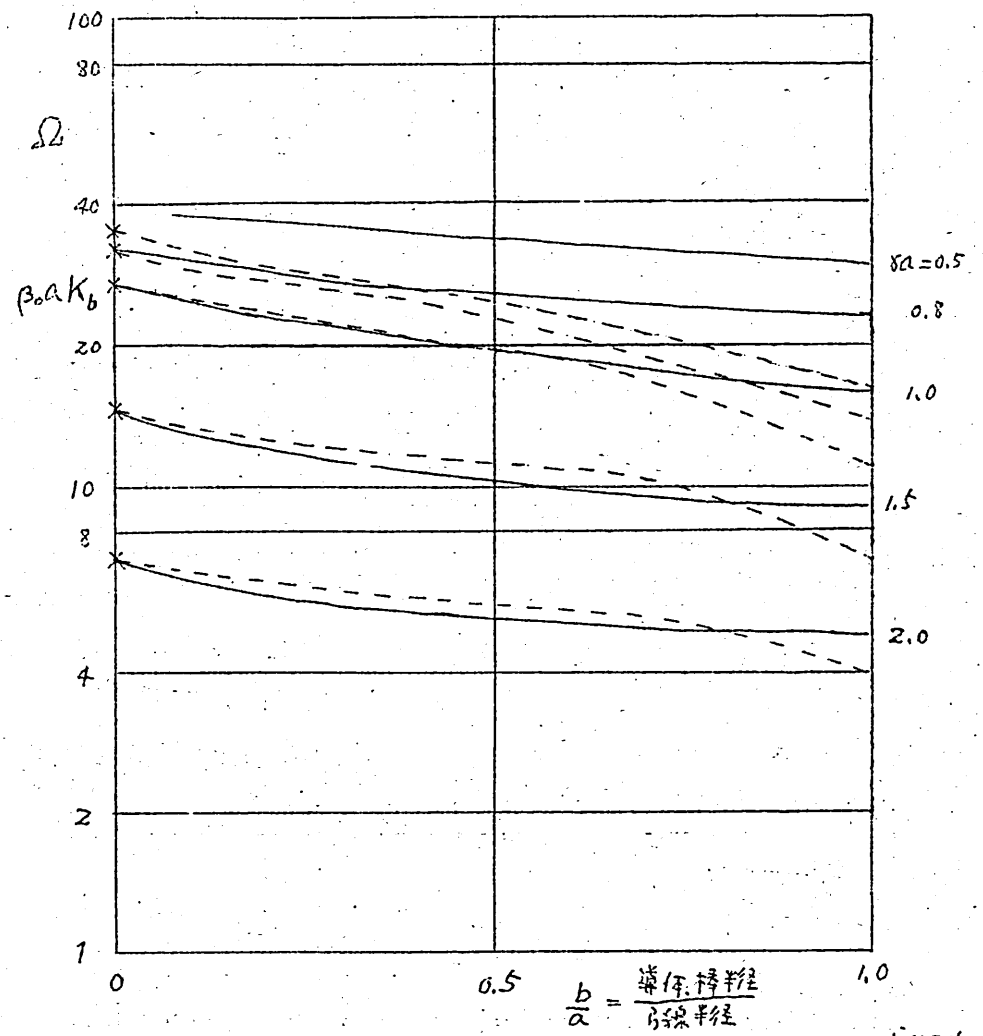
Pierce は自由空間中にある理想ら線の結合インピーダンス K_S を計算している。[11] 実際の進行波管の ら線回路はガラス管支持でしかも理想ら線でなく有限の線径をもったら線であるため, Pierce の計算した K_S を補正せねばならない。この補正係数は Pierce[1], Schnitger[4], Tien[3], Chu[5] らによって計算されているがそれらはいずれも簡単化したモデルについてのものであるから, 実験的に検討しておくことが必要である。ら線インピーダンスの実測については, 測定原理[2]と結果[6]のみが発表されているだけで詳細は一切不明であるので, 我々は測定精度を中心にして検討してみた。

§2. ら線インピーダンス測定理論

ら線の軸上に種々の半径の導体棒を挿入し, その際の伝播定数の変化からインピーダンスを求める。軸に沿って半径 b なる導体棒を挿入した際の伝播定数の変化とその回路のインピーダンスとの関係式は次式で与えられる。

$$K_b = \frac{E_z^2(b)}{2\beta^2 P} = (\Gamma - \Gamma_1)\frac{120}{j\beta_0} I_0(\gamma b) K_0(\gamma b) \quad (2.1)$$

ここで Γ_1 および Γ はそれぞれ導体棒の存在するとき及び存在し



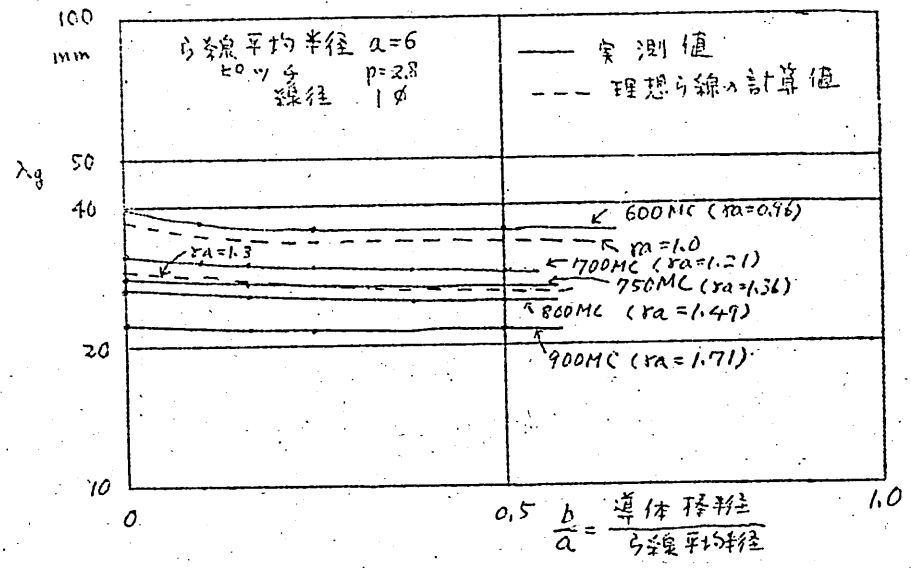
——— 理想ら線の γa (オ1図の実線) を(2.1)式に代入して求めたもの

- - - - インピーダンス測定公式(2.1)を補正したもの

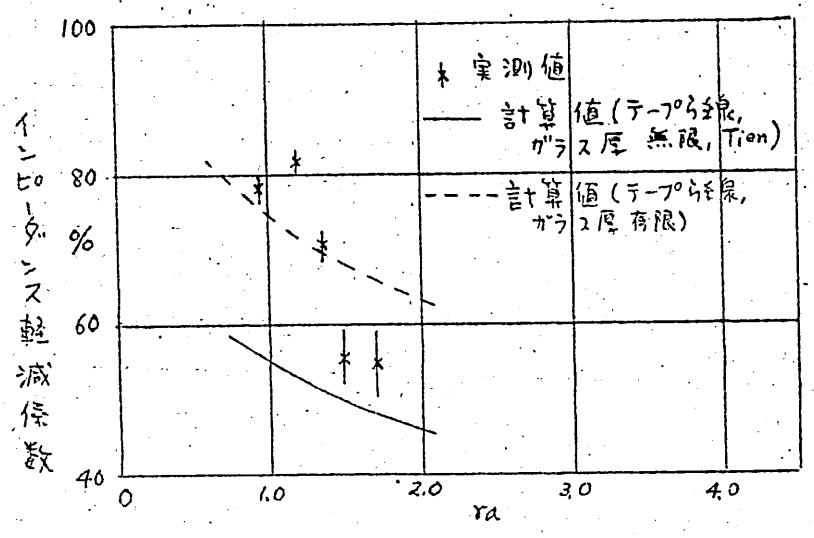
× 印は理想ら線のインピーダンスで $\gamma a = 0.8 \sim 2.0$ の実線は $\frac{b}{a} \to 0$ への計算値が×印とつながるが, $\gamma a = 0.5$ の実線はつながない。点線はすべて×印につながる。

(γa の値は $b/a = 0$ のときの値である)

オ2図 理想ら線に対するインピーダンスの決定



第1図　管内波長の測定



第3図 インピーダンス軽減係数

直接 $(\Gamma-\Gamma_1)a \simeq \Delta\gamma a$ の精度である。今 $\gamma_1 a=\frac{2\pi a}{\lambda_1}$, $\gamma a=\frac{2\pi a}{\lambda}$, $\lambda=\lambda_1+\Delta\lambda$, 及び λ, λ_1 の測定絶対誤差 $\pm\varepsilon$ とすると, $\Delta\gamma a$ は $\gamma_1 a\frac{\Delta\lambda}{\lambda}(1\pm 2\frac{\varepsilon}{\Delta\lambda})$ とかける。ε は測定器及び測定法で最小値は定まってしまう。ところが b/a を小さくしていくと $\Delta\lambda$ も小さくなる。従って b/a が小さくなればなるほど $2\varepsilon/\Delta\lambda$ が大きくなるため, $\Delta\gamma a$ の精度が悪くなり, 結局インピーダンスの値も精度が悪くなる。

第3.3図にインピーダンス軽減係数について実測値と Tien による計算値, 及び筆者等による計算値が示してある。Tien のモデルは厚さ無限大の誘電体中にあるテープ ら線を採っている。筆者等は Tien のモデルで誘電体の厚みを考慮した。この詳細については別の機会に報告したい。我々のモデルも尚実際のものを相当に簡単化したものである。例えば, ガラスとテープ ら線との間隔は零として, 等価誘電率を λ_g の実測値から求めている。何れがよい近似であるかはもっと実験値を集積しなければ最終的な結論は下せない。

§4 結言

インピーダンス測定公式 (2.1) が等価回路法によっても得られることが判った。このインピーダンス測定公式を理想ら線に適用した例では $\gamma a \geq 0.8$ で使用できることが判った。$b \to 0$ に外挿するときの操作にかなりの任意性があるので約 ±5% よりも精度の高いインピーダンスの実測はむずかしい。

実験用ら線を製作戴いた三菱電機研究所の建石氏, 実験に協力戴いた池谷君 (阪大大学院) に感謝します。

$$K_0 = \frac{E_z^2(0)}{2\beta^2 P} = \frac{V_0^2}{2P} \qquad (A.1)$$

となり等価回路の特性インピーダンスになる。この K_0 と Γ とから jX_0, jB_0 は次のように定められる。

$$\Gamma = j\sqrt{X_0 B_0} \quad , \quad K_0 = \sqrt{X_0/B_0} \qquad (A.2)$$

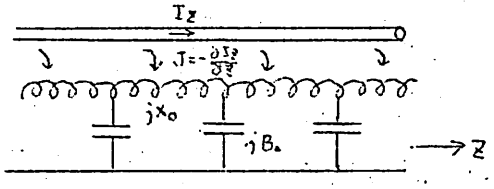
これを用いると等価回路の伝送方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I_0}{\partial z} = -jB_0 V_0 \\ \dfrac{\partial V_0}{\partial z} = -jX_0 I_0 \end{cases} \qquad (A.3)$$

となる。さて導体棒を挿入した際に全系の電磁界が $e^{-\Gamma z}$ で変化していると仮定する。導体棒の表面電流 $I_z e^{-\Gamma z}$ により ら線の単位長当りに流入する電流 J は、全電流一定であるから、

$$J = -\frac{\partial I_z}{\partial z} = \Gamma I_z \qquad (A.4)$$

となる。ここまでは Pierce が進行波管の回路基本式を導出した方法と同一である。



ら線中に導体棒の存在する場合の等価回路

さて導体棒が存在することによる界の乱れが少なければ、jX_0, jB_0 は不変とみなせる。このとき伝送方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial z} = -jB_0 V + J \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -jX_0 \end{cases} \qquad (A.5)$$

とかける。このとき V, I は導体棒が存在していないときの界

$$\Gamma - \Gamma_1 = \frac{\Gamma' \Gamma_1 K_b}{\Gamma + \Gamma_1} \times \frac{2\pi j\omega\epsilon}{\gamma' I_0(\gamma b) K_0(\gamma b)}$$

$$= j\pi\omega\epsilon K_b \cdot \frac{1}{I_0(\gamma b) K_0(\gamma b)} \qquad (A.13)$$

$$(\Gamma \approx \Gamma_1)$$

(A.13) は Kino が固有モード展開による摂動法によって求めた (2.1) 式と完全に一致する。

— 以上 —

研技弱－84　　輻射科学研究会資料

平行平板間の電磁波ビームモード

中原恒雄

（住友電気工業株式会社）

昭和38年4月20日

於 住友電気工業株式会社

まえがき

平行平板間の電磁波ビームを応用して非常に低損失な線路形式があることを提案したが、*この報告ではその理論的根拠の詳細を報告する。この報告書は1961年筆者が米国ブルックリン工科大学マイクロ波研究所で米政府との研究契約のために英文で執筆したものであり、いまだに邦訳していないので原文のまま予稿として利用させて頂く点、御容赦願いたい。

Goubau[1]が電磁波ビーム導波管を提案してから、多くの人々が興味を示した。Schwering** は方形位相変成器系の問題を取扱い、Beyer, Scheibe はGoubauの円形位相変成器系の高次モードについて論じる+と共に基本波の共振実験を行なった。++本報告はこれらの報告よりも前に検討したことをのべているので、現時点では引用など完全ではないので附記しておく。

---

* 中原 "平行平板間の電磁波ビームモード"、昭38電四学会連大、1285

** Schwering ; AEÜ, 15, 12, pp. 555 ~ 564 (1961)

\+ J. B. Beyer, E. H. Scheibe, IRE Trans. AP-10. P. 349 (May 1962)

++ J. B. Beyer. E. H. Scheibe, IEEE Trans. MTT-11. pp. 18 -22 (Jan. 1963)

THE GUIDED PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVE BEAMS BETWEEN TWO PARALLEL PLATES

by T. Nakahara

1. Introduction

G. Goubau et al have reported a new waveguide system in which "beam modes" are conveyed by using iterative phase transformers[1)2)]. By modifying this concept, one can easily get a new transmission system (H-beam waveguide)as shown in Fig. 1. The new system can be considered as combination of electromagnetic and quasi-optical techniques.

Physically, it seems there is no problem on the existence of the wave guided if G. Goubau's beam mode exists. Mathematically, however, it is necessary to find the most convenient expressions for elementary beam modes.

This report describes an analysis of beam modes in the H-beam waveguide as well as in a infinite plane wave structure in which phase transformers of Fig. 1 extend infinitely in y direction and there are no metallic plates.

2. Derivation of Fundamental Form

Let us first consider wave beams which propagate between

---

1) G. Goubau, F. Schwering. "On the Guided Propagation of Electromagnetic Wave Beams", IRE Transactions AP-9, No.3, pp 248-256, May, 1961.

2) J.R. Christian, G.Goubau; "Experimental Studies on a Beam Waveguide for Millimeter Waves", ibid., pp. 256-263.

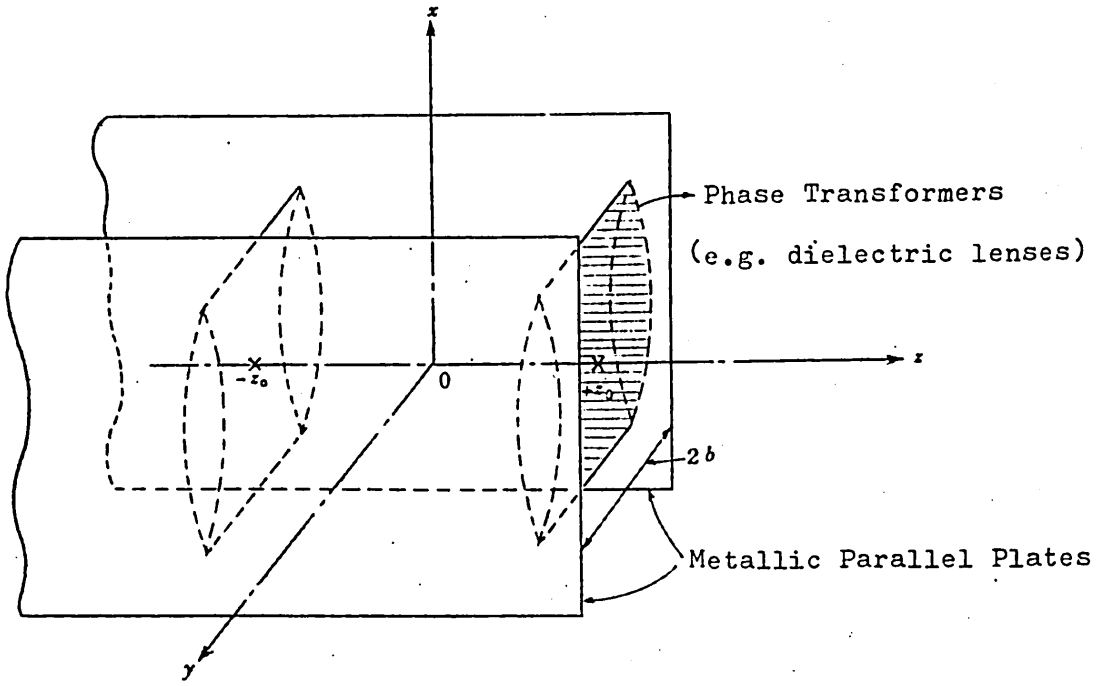


Fig. 1. H-beam waveguide

two metallic plates along the z-axis of the Cartesian coordinate system as shown in Fig.1. Let h stand for the propagation constant in the z-direction of an elementary wave. Then the solution of Maxwell's equations for a homogeneous space (ε_0, μ_0) free of sources can be expressed as follows.

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \frac{j}{h^2-k^2}\left(h\frac{\partial E_z}{\partial x}+k\zeta\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\\
E_y &= \frac{j}{h^2-k^2}\left(h\frac{\partial E_z}{\partial y}-k\zeta\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\\
E_z &= A\,E(x,y)\,e^{-j(hz-\omega t)}\\
H_x &= \frac{-j}{h^2-k^2}\left(k\eta\frac{\partial E_z}{\partial y}-h\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\\
H_y &= \frac{j}{h^2-k^2}\left(k\eta\frac{\partial E_z}{\partial x}+h\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\\
H_z &= B\eta\,H(x,y)\,e^{-j(hz-\omega t)}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

where each symbol signifies the meaning commonly associated with these letters. $\zeta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, $\eta=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ $k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, A, B: constants with respect to (x,y) and $E(x,y)$, $H(x,y)$ are functions of x,y which satisfy the following.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}&=(h^2-k^2)E\\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}&=(h^2-k^2)H\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

On the other hand, the general expression ψ for any component of wave beams can be written as

$$\psi=\frac{1}{2\pi}e^{-j(hz-\omega t)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(k_1,k_2)\,e^{-j(k_1x+k_2y)}\,dk_1\,dk_2 \qquad (3)$$

where $f(k_1,k_2)$ is the amplitude or weighting function.

Taking the equations (1)-(3) and the boundary conditions of Fig.1 into consideration, one can write the general expression for wave beams in the structure of Fig.1 as follows.

$$E_x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\frac{m\pi}{2b}y+\delta_m\right)\cdot$$
$$\int_0^{\infty}\frac{\beta f(\beta)}{h^2-k^2}\left(Ah\beta+Bk\frac{m\pi}{2b}\right)\begin{pmatrix}\sin\\ -j\cos\end{pmatrix}\beta x\,e^{-jhz}\,d\beta \qquad (4a)$$

$$E_y=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(\frac{m\pi}{2b}y+\delta_m\right)\cdot$$
$$\int_0^{\infty}\frac{\beta f(\beta)}{h^2-k^2}\left(Ah\frac{m\pi}{2b}-Bk\beta\right)\begin{pmatrix}\cos\\ j\sin\end{pmatrix}\beta x\,e^{-jhz}\,d\beta \qquad (4b)$$

$$E_z=j\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\frac{m\pi}{2b}y+\delta_m\right)\cdot$$
$$\int_0^{\infty}Af(\beta)\begin{pmatrix}\cos\\ j\sin\end{pmatrix}\beta x\,e^{-jhz}\,\beta\,d\beta \qquad (4c)$$

$$H_x=\eta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(\frac{m\pi}{2b}y+\delta_m\right)\cdot$$
$$\int_0^{\infty}\frac{\beta f(\beta)}{h^2-k^2}\left(-Ak\frac{m\pi}{2b}+Bh\beta\right)\begin{pmatrix}\cos\\ j\sin\end{pmatrix}\beta x\,e^{-jhz}\,d\beta \qquad (4d)$$

$$H_y = \mp \eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \cdot \int_0^\infty \frac{\beta f(\beta)}{h^2 - k^2} \left(A k \beta + B h \frac{m\pi}{2b}\right) \begin{pmatrix} \sin \\ -j\cos \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \tag{4e}$$

$$H_z = -j\tau \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \cdot \int_0^\infty B f(\beta) \begin{pmatrix} \sin \\ -j\cos \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, \beta \, d\beta \tag{4f}$$

where $\delta_m = \left\{ \begin{matrix} 0 \text{ for } m = 1, 3, 5, \cdots \\ \frac{\pi}{2} \text{ for } m = 0, 2, 4, \cdots \end{matrix} \right\}$, $e^{-j\omega t}$ is omitted,

β : the wave number in the x direction, $f(\beta)$: the amplitude function, and the upper line within the parentheses denotes even made, in which $f(\beta)$ is an even function of β, and the lower, odd mode, $f(\beta)$ is an odd function of β.

Among the propagation constants the following relation should be held.

$$h^2 + \left(\frac{m\pi}{2b}\right)^2 + \beta^2 = k^2 \tag{5}$$

In the case $m = 0$, the field components are only E_y, H_x and H_z and the wave beams become TE plane waves which are the same as the ones in a infinite plane wave structure (Fig.2).

In this case (4) and (5) become (put $B = 1$),

$$\left.\begin{aligned} E_y &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty k f(\beta) \begin{pmatrix} \cos \\ j\sin \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \\ H_x &= -\eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty h f(\beta) \begin{pmatrix} \cos \\ j\sin \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \\ H_z &= -j\eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\beta) \begin{pmatrix} \sin \\ -j\cos \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, \beta \, d\beta \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$h^2 + \beta^2 = k^2 \tag{7}$$

In the case $m \geqq 1$, one might be able to assume two cases:

$H_z = 0$ and $E_z = 0$, namely $\left[A = 1, B = \frac{km\pi}{h\beta 2b}\right]$ and $\left[A = \frac{1}{\beta}, B = -\frac{2hb}{km\pi}\right]$

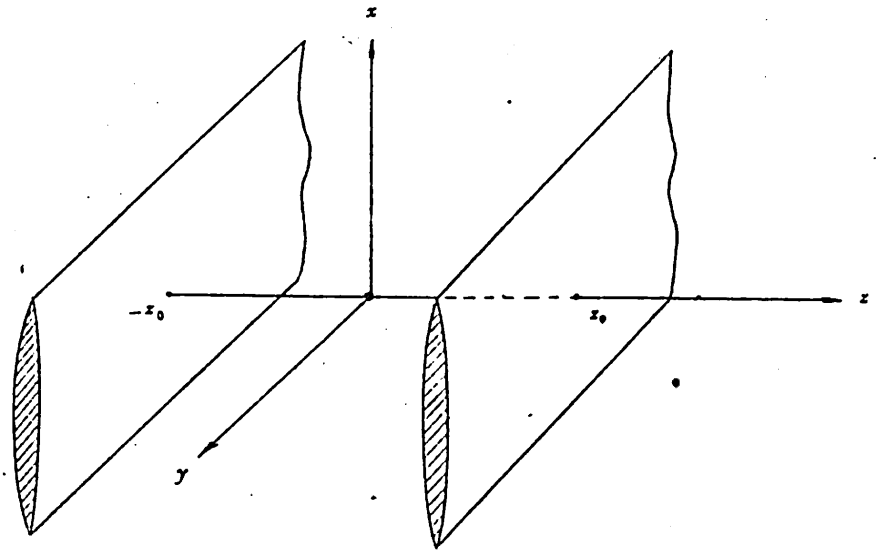


Fig.2 Infinite Plane Beam Waveguide

For$\left[\ A=1\ ,\ B=\frac{k m \pi}{h \beta 2 b}\right]$, the equations (4) become

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \int_0^{\infty} \frac{k^2-\beta^2}{h} f(\beta) \begin{pmatrix} \sin \\ -j\cos \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \\
E_y &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \frac{m\pi}{2b} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{h} f(\beta) \begin{pmatrix} \cos \\ j\sin \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \\
E_z &= j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \int_0^{\infty} \beta f(\beta) \begin{pmatrix} \cos \\ j\sin \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \\
H_x &= 0 \\
H_y &= -\eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \int_0^{\infty} k f(\beta) \begin{pmatrix} \sin \\ -j\cos \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \\
H_z &= -j \eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \frac{m\pi}{2b} \int_0^{\infty} \frac{k}{h} f(\beta) \begin{pmatrix} \sin \\ -j\cos \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

For$\left[A=\frac{1}{\beta},\ \ B=-\frac{h 2 b}{k m \pi}\right]$, the equations (4) become

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= 0 \\
E_y &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \frac{2b}{m\pi} \int_0^{\infty} h f(\beta) \begin{pmatrix} \cos \\ j\sin \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \\
E_z &= j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \int_0^{\infty} f(\beta) \begin{pmatrix} \cos \\ j\sin \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
H_x &= \eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \frac{2b}{m\pi} \cdot \\
&\qquad \int_0^{\infty} (k^2 - \beta^2) f(\beta) \begin{pmatrix} \cos \\ j\sin \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \\
H_y &= -\eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \int_0^{\infty} \frac{\beta}{k} f(\beta) \begin{pmatrix} \sin \\ -j\cos \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta \\
H_z &= -j\eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \frac{2b}{m\pi} \cdot \\
&\qquad \int_0^{\infty} \frac{h}{k} \beta f(\beta) \begin{pmatrix} \sin \\ -j\cos \end{pmatrix} \beta x \, e^{-jhz} \, d\beta
\end{aligned}
\right\} \quad (9)
$$

Since $f(\beta)$ has not been decided yet, it is always valid to let A and/or B be an arbitrary constant with respect to x and y. Thus one can assume three mode sets: H modes, EH modes and HE modes represented by (6),(8) and (9) respectively.

In order to make approach possible, the assumption that β is small in comparison with the other propagation constants is made here. In other words, we assume $\beta^2 \ll k^2$ for H mode and $\beta^2 \ll k_m^2 \left[= k^2 - \left(\frac{m\pi}{2b}\right)^2 \right]$ for HE or EH mode. According to Goubau's explanation[1], this assumption makes it possible to find beam wave modes in the reiterative phase transformer structure of Fig.1 or Fig.2.

These beams are characterized by a β-spectrum substantially limited to values of $\beta^2 \ll k^2$ (or k_m^2). In other words, the functions $f(\beta)$, assumed real here, have appreciable values only within a range $0 < \beta \leqslant \beta_c$ where $\beta_c^2 \ll k^2$ (or k_m^2). Let z_0 be a half of the separation of phase transformers. Assuming that $\beta_c^2 z_0 / 2k$ (or k_m) remains within the order of 2π, the propagation constant h in the terms "e^{-jhz}" of (6),(8), and (9) can be replaced by $[h$ (or k_m) $-\beta^2/2k$ (or k_m)$]$. In the amplitude terms of (6),(8) and (9), h can be replaced by k (or k_m) and $(k^2 - \beta^2)$ can be replaced by k^2. Thus

(6),(8) and (9) become as follows:

For H modes,

$$\left.\begin{aligned} E_y &= k\, e^{-jkz} \begin{pmatrix} g_c(x) \\ g_s(x) \end{pmatrix} \\ H_x &= -\eta\, k\, e^{-jkz} \begin{pmatrix} g_c(x) \\ g_s(x) \end{pmatrix} \\ H_z &= -\eta\, e^{-jkz} \begin{pmatrix} G_s(x) \\ G_c(x) \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

where,

$$\left.\begin{aligned} g_c(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_c(\beta) \cos \beta x\, e^{j\frac{\beta^2}{2k}z}\, d\beta \\ g_s(x) &= j\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_s(\beta) \sin \beta x\, e^{j\frac{\beta^2}{2k}z}\, d\beta \\ G_c(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_c(\beta) \cos \beta x\, e^{j\frac{\beta^2}{2k}z}\, \beta\, d\beta \\ G_s(x) &= j\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_s(\beta) \sin \beta x\, e^{j\frac{\beta^2}{2k}z}\, \beta\, d\beta \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$f_c(\beta)$: an even function of β

$f_s(\beta)$: an odd function of β

For EH modes:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= j\cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \frac{k^2}{k_m} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{sm}(x) \\ g_{cm}(x) \end{pmatrix} \\ E_y &= \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \left(\frac{m\pi}{2b}\right) \frac{1}{k_m} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} G_{cm}(x) \\ G_{sm}(x) \end{pmatrix} \\ E_z &= j\cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} G_{cm}(x) \\ G_{sm}(x) \end{pmatrix} \\ H_x &= 0 \\ H_y &= j\eta\cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) k\, e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{sm}(x) \\ g_{cm}(x) \end{pmatrix} \\ H_z &= -\eta \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \frac{m\pi}{2b} \frac{k}{k_m} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{sm}(x) \\ g_{cm}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

where

$$
\left.
\begin{aligned}
g_{cm}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{cm}(\beta) \cos \beta x \, e^{j\frac{\beta^2}{2k_m}z} \, d\beta \\
g_{sm}(x) &= j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{sm}(\beta) \cos \beta x \, e^{j\frac{\beta^2}{2k_m}z} \, d\beta \\
G_{cm}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{cm}(\beta) \cos \beta x \, e^{j\frac{\beta^2}{2k_m}z} \, \beta \, d\beta \\
G_{sm}(x) &= j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{sm}(\beta) \sin \beta x \, e^{j\frac{\beta^2}{2k_m}z} \, \beta \, d\beta
\end{aligned}
\right\} \quad (13)
$$

($f_{cm}(\beta)$:an even function of β, $f_{sm}(\beta)$:an odd function of β)

For HE modes,

$$
\left.
\begin{aligned}
E_x &= 0 \\
E_y &= \sin\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \frac{2b}{m\pi} k_m \, e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{cm}(x) \\ g_{sm}(x) \end{pmatrix} \\
E_z &= j \cos\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{cm}(x) \\ g_{sm}(x) \end{pmatrix} \\
H_x &= \eta \sin\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \frac{2b}{m\pi} k^2 \, e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{cm}(x) \\ g_{sm}(x) \end{pmatrix} \\
H_y &= j\eta \cos\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \frac{1}{k} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} G_{sm}(x) \\ G_{cm}(x) \end{pmatrix} \\
H_z &= -\eta \sin\left(\frac{m\pi}{2b} y + \delta_m\right) \frac{2b}{m\pi} \frac{k_m}{k} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} G_{sm}(x) \\ G_{cm}(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\right\} \quad (14)
$$

Since the field is uniquely determined by the transverse field components and the energy transmitted depends upon $(-E_y H_x)$ for H- and HE- modes or $(E_x H_y)$ for EH-modes, only these components are considered in the following. From (10), (12) and (14), it is possible to obtain the field distribution functions if $g_c(x)$, $g_s(x)$ or $g_{cm}(x)$, $g_{sm}(x)$ can be evaluated.

In other words, if the integral formulas given by $g_c(x)$ and $g_s(x)$ can be evaluated, the properties of the fields can be known. Thus, mathematically speaking, the fundamental forms of the field representation are $g_c(x)$ and $g_s(x)$, which will be treated in the next section.

3. Evaluation of Field Distribution Functions

The fundamental forms derived in the last section are:

$$\left.\begin{aligned} g_c(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_c(\beta) \cos \beta x \, e^{j\frac{\beta^2}{2k}x} \, d\beta \\ g_s(x) &= j\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_s(\beta) \sin \beta x \, e^{j\frac{\beta^2}{2k}x} \, d\beta \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

In this case, it is most convenient to represent $f(\beta)$ in (15) by the following series of orthogonal functions:

$$f(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(\beta) \quad (16)$$

$$\varphi_n(\beta) = e^{-\frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\beta_0^2}} H_{en}\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right) \quad (17)$$

$$C_n = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\beta_0^2}} H_{en}\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right) f(\beta) \, d\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right) \quad (18)$$

where β_0 is an arbitrary constant, $H_{en}(x)$ are the Hermite polynomials[3] which are defined by:

$$\left.\begin{aligned} H_{en}(x) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) \\ &= \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r (2r-1)!! \binom{n}{2r} x^{n-2r} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left(\begin{aligned} &(2r-1)!! = (2r-1)(2r-3) \cdots 3.1 \\ &[\, n/2 \,]: \text{the maximum integer which is not greater than } \frac{n}{2} \end{aligned} \right)$$

The Hermite polynomials $H_{en}(x)$ form a complete system of orthogonal functions for the range $-\infty < x < \infty$ with the weight function $e^{-\frac{x^2}{2}}$ as follows:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{en}(x) H_{em}(x) \, dx = \delta_{nm} n! \sqrt{\pi} \quad (20)$$

---

3) W.Magnus and F.Oberhettinger, "Functions of Mathematical Physics", Chelsea Publishing Co., N.Y., pp. 80 -83, 1955.

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

In the case n : even, $H_{en}(x)$ is an even function of x , and in the case n : odd, an odd function. Therefore,

$$\left.\begin{aligned} f_c(\beta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu}\, \varphi_{2\nu}(\beta) \\ f_s(\beta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1}\, \varphi_{2\nu+1}(\beta) \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Substituting (21) into (15),

$$\left.\begin{aligned} g_c(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta^2}{4\beta_0^2} + j\frac{\beta^2}{2k}z} H_{e2\nu}\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right) \cos \beta x \, d\beta \\ g_s(x) &= j\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta^2}{4\beta_0^2} + j\frac{\beta^2}{2k}z} H_{e\,2\nu+1}\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right) \sin \beta x \, d\beta \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Putting

$$u = \beta_0 x, \quad v = \frac{2\beta_0^2}{k} z \quad (23)$$

$$t = \frac{\beta}{\sqrt{2}\beta_0} (1 - j v)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

$$p = \sqrt{2}\, (1 - j v)^{-\frac{1}{2}} \quad (25)$$

$$q = \sqrt{2}\, u\, (1 - j v)^{-\frac{1}{2}} \quad (26)$$

(22) become

$$\left.\begin{aligned} g_c(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu}\, \beta_0 (1 - j v)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} H_{e2\nu}(pt) \cos qt \, dt \\ g_s(x) &= j\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1}\, \beta_0 (1 - j v)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} H_{e2\nu+1}(pt) \sin qt \, dt \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

The integrals in (27) can be easily evaluated by the following formulas[4].

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} H_{e2\nu}(pt) \cos qt \, dt \\ &\qquad = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - p^2)^{\nu} \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right) H_{e2\nu}\left[\frac{pq}{(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} H_{e2\nu+1}(pt)\sin qt\,dt$$

$$=(-1)^\nu\sqrt{\frac{\pi}{2}}(p^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right)H_{e2\nu+1}\left[\frac{pq}{(p^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right] \qquad (28)$$

Putting back the notations,

$$g_c(x)=\frac{\sqrt{2}\beta_0}{\sqrt{1-jv}}\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{2\nu}(-1)^\nu\left(\frac{1+jv}{1-jv}\right)^\nu\cdot \exp\left(\frac{-u^2}{1-jv}\right)H_{e2\nu}\left(\frac{2u}{\sqrt{1+v^2}}\right)$$

$$g_s(x)=\frac{\sqrt{2}\beta_0'}{\sqrt{1-jv}}\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{2\nu+1}(-1)^{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1+jv}{1-jv}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}\cdot \exp\left(\frac{-u^2}{1-jv}\right)H_{e2\nu+1}\left(\frac{2u}{\sqrt{1+v^2}}\right) \qquad (28')$$

In terms of amplitudes and phases, (28) will become as follows:

$$g_c(x)=\frac{2\beta_0}{\sqrt{1+v^2}}e^{-\frac{u^2}{1+v^2}}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu C_{2\nu}H_{e2\nu}\left(\frac{2u}{\sqrt{1+v^2}}\right)\cdot \exp\left[-j\frac{u^2v}{1+v^2}+j(2\nu+1)\tan^{-1}v\right]$$

$$g_s(x)=\frac{2\beta_0}{\sqrt{1+v^2}}e^{-\frac{u^2}{1+v^2}}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+\frac{1}{2}}C_{2\nu+1}H_{e2\nu+1}\left(\frac{2u}{\sqrt{1+v^2}}\right)\cdot \exp\left[-j\frac{u^2v}{1+v^2}+j2(\nu+1)\tan^{-1}v\right] \qquad (29)$$

The beam can thus be considered as the superposition of elementary beams having the same expressions as the ones for each terms of (29). Obviously the elementary beams or "beam modes" satisfy the same orthogonarity relations as the modes in an ordinary loss-less waveguide. Let n be 2ν or $2\nu+1$, then we can define the H_{n0} modes, the EH_{nm} modes and the HE_{nm} mode, because, with $n=2\nu$ for the upper equations of (28), (29) and with $n=2\nu+1$

---

4) Erdélyi et al., "Table of Integral Transforms", Vol.-2, p.290, McGraw-Hill, 1954.

for the lower, both equations coinside with each other.

4. Property of Field Distribution Functions

Each beam mode has a plane phase surface at $z=0$.

The phase distribution in a plane $z \neq 0$ is given by the factor.

$$\exp\left\{ j \left[(n+1) \tan^{-1} v - \frac{u^2 v}{1+v^2} \right] \right\} = \exp\left\{ j \left[\phi_n(z) + \psi(x, z) \right] \right\} \tag{30}$$

where

$$\phi_n(z) = (n+1) \tan^{-1} \left(\frac{2\beta_0^2 z}{k} \right) \tag{31}$$

is independent of x and

$$\psi(x, z) = - \frac{\frac{2\beta_0^2}{k} z}{1 + \left(\frac{2\beta_0^2}{k} z \right)^2} \beta_0^2 x^2 \tag{32}$$

is independent of the order n of the Hermite polynomials.

If a phase transformation is performed at the plane $z = +z_0$ by a factor $\exp\left[- j\, 2\psi(x, z_0) \right]$ the field distribution at $z = -z_0$, of each beam mode is repeated at $z = +z_0$ disregarding the constant phase shift $2\phi_n(z_0)$. Thus, any elementary beam can be restored at intervals $2z_0$ by phase correcting methods which make an x—dependent phase shift

$$\hat{\psi}(x) = -2\psi(x, z_0) + \psi_0 = \frac{4 \frac{\beta_0^2}{k} z_0}{1 + \left(\frac{2\beta_0^2}{k} - z_0 \right)^2} \beta_0^2 x^2 + \psi_0 \tag{33}$$

where ψ_0 is an arbitrary constant. Although any beam mode is iterated by the same transformation given by (33), wave beams composed of several modes are not iterated since the independent phase shift (31) different for every mode. The conditions are exactly the same as those in Goubau's lens system.

The concentration of energy in a beam mode can be charac-

terized by the fraction p_n of the total energy which passes through a plane $z =$ constant within a rectangle of $x = \pm x_p$ and metallic plates. If a certain p_n is considered, x_p varies with z. The $x_p(z)$ which characterizes the envelope of constant energy flux can be derived from (29).

Substituting $t = \frac{2u}{\sqrt{1+v^2}}$, one can obtain

$$p_n = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_0} e^{-\frac{t^2}{2}} \{H_{en}(z)\}^2 \, dt \tag{34}$$

where

$$t_0 = \frac{2\beta_0 x_p}{\sqrt{1+(\frac{2\beta_0^2}{k}z)^2}} \tag{35}$$

(35) shows that the dependency of p_n on x_p and z is only contained in t_0. The relation between x_p and z for p_n : constant, i. e., t_0 : constant, can be normalized to

$$(\frac{x_p}{\xi_0})^2 = (\frac{z}{z_0})^2 \, v_0 + \frac{1}{v_0} \tag{36}$$

where

$$v_0 = \frac{2\beta_0^2}{k} z_0, \quad \xi_0 = t_0 \sqrt{\frac{z_0}{2k}} \tag{37}$$

The relation (36) is exactly the same as (12) of Goubau's paper[1] if one puts $x_p \to \rho_1$, $\xi_0 \to R_0$. Therefore Fig.2 of the above paper and the discussion followed are available for the present case intact. Shortly, the relation $v_0 = 1$ for $z = z_0$ gives the value of of β_0 which yields the highest energy concentration. This condition for maximum energy concentration is independent of n and, therefore, is the same for each beam mode. The corresponding phase transformation is

$$\hat{\psi}(x) = \frac{k}{2z_0} x^2 + \psi_0 \tag{38}$$

5. Effect of Cross-Sectional Limitation

In the preceeding discussion, the assumption had been made that the phase transformation is performed over the entire plane $x = x_0$ and corresponding planes at intervals of $2x_0$.

Actually, the phase transformation can only be achieved over a finite area. Although the field of the beam modes, particularly the lowest one, decreases rapidly in the x-direction, some distortion will be introduced if the phase is corrected only within a finite area. The energy outside this area can be considered lost, since the uncorrected field diverges and is radiated into space. This will cause some additional attenuation factor.

In the following, the assumption is made that the phase correction at the planes $x = (\pm 2\nu + 1)x_0$, where $\nu = 0,1,2,\cdots$, is performed within a region of $x = \pm \xi$, while the area outside this region is covered with an ideal absorber which prevents the field from being reflected or transmitted into the succeeding space section.

The field distribution function at $x = -x_0$, after being subjected to the phase transformation, is according to (15),

$$\left.\begin{aligned} g_c(x,-x_0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_c(\beta)\cos\beta x\, e^{-j\frac{\beta^2}{2k}x_0}\,d\beta \\ g_s(x,-x_0) &= j\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_s(\beta)\sin\beta x\, e^{-j\frac{\beta^2}{2k}x_0}\,d\beta \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

where $f_c(\beta)$ or $f_s(\beta)$ may be complex. $g_c(x,-x_0)$ and $g_s(x,-x_0)$ can be considered as the Fourier cosine trasform of $f_c(\beta)\exp(-j\frac{\beta^2}{2k}x_0)$ and the Fourier sine transform of $f_s(\beta)\exp(-j\frac{\beta^2}{2k}x_0)$ respectively. Therefore, if $g_e(x,x_0)$

or $g_s(x,-z_0)$ is given $f_c(\beta)$ or $f_s(\beta)$ is obtained by the inverse transformation

$$\left.\begin{aligned} f_c(\beta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{j\frac{\beta^2}{2k}z_0} \int_0^{\xi} g_c(x,-z_0)\cos\beta x\, dx \\ f_s(\beta) &= -j\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{j\frac{\beta^2}{2k}z_0} \int_0^{\xi} g_s(x,-z_0)\sin\beta x\, dx \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

The integration is only extended from zero to ξ instead of infinity, because $g_c(x,-z_0)$ or $g_s(x,-z_0)$ is limited to this range by the absorbing screen.

The field at $z=+z_0$ before being subjected to the phase correction is obtained by inserting $f_c(\beta)$ or $f_s(\beta)$ of (40) in (15).

$$\left.\begin{aligned} g_c(x,+z_0) &= \frac{2}{\pi}\int_{\beta=0}^{\infty}\int_{\zeta=0}^{\xi} g_c(\zeta,-z_0)\cos\beta\zeta\cos\beta x\, e^{j\frac{\beta^2}{k}z_0}\, d\beta\, d\zeta \\ g_s(x,+z_0) &= \frac{2}{\pi}\int_{\beta=0}^{\infty}\int_{\zeta=0}^{\xi} g_s(\zeta,-z_0)\sin\beta\zeta\sin\beta x\, e^{j\frac{\beta^2}{k}z_0}\, d\beta\, d\zeta \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

The integration over β can be performed[4)]

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\infty}\cos\beta\zeta\cos\beta x\, e^{j\frac{\beta^2}{k}z_0}\, d\beta \\ &\qquad = \frac{1}{2}\left(j\frac{\pi k}{z_0}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-j\frac{k}{4z_0}(\zeta^2+x^2)\right]\cos\left(\frac{k\zeta x}{2z_0}\right) \\ &\int_0^{\infty}\sin\beta\zeta\sin\beta x\, e^{j\frac{\beta^2}{k}z_0}\, d\beta \\ &\qquad = \frac{1}{2}j\left(\frac{j\pi k}{z_0}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-j\frac{k}{4z_0}(\zeta^2+x^2)\right]\sin\left(\frac{k\zeta x}{2z_0}\right) \\ &\qquad\qquad \left[R_e\left(j\frac{\beta^2}{k}z_0\right)>0\right] \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Thus,

---

4) Erdélyi, "Table of Integral Transformers" VCL.I, McGraw Hill, 1954, p. 21 and p. 78.

$$g_c(x,+z_0)=\left(\frac{j\,k}{\pi\,z_0}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\zeta=0}^{\xi} g_c(x,-z_0)\cos\left(\frac{k\zeta x}{2z_0}\right)e^{-j\frac{k}{4z_0}(\zeta^2+x^2)}\,d\zeta$$

$$g_s(x,+z_0)=\left(\frac{j\,k}{\pi\,z_0}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\zeta=0}^{\xi} g_s(x,-z_0)\sin\left(\frac{k\zeta x}{2z_0}\right)e^{-j\frac{k}{4z_0}(\zeta^2+x^2)}\,d\zeta \qquad (43)$$

This field, after being subjected to the phase correction, becomes zero in the range $|x| > |\xi|$, which is covered by the absorbing screen. Although the field is a little modefied within the range $|x| > |\xi|$, the modification may be neglected with a suitable value of ξ.

The effects of the modification will be minimized if the phase correction is adapted to maximum field concentration at $z = z_0$, as given in (38). Then, the field distribution functions at $z = z_0$, after being subjected to the phase correction, are

$$g_c(x,+z_0)\,e^{j\left(\frac{k}{2z_0}x^2+\phi_0\right)}$$

$$g_s(x,+z_0)\,e^{j\left(\frac{k}{2z_0}x^2+\phi_0\right)} \qquad 0<|x|<|\xi| \qquad (44)$$

The above expressions shall be the same as the field distribution functions $g_c(x,-z_0)$ and $g_s(x,-z_0)$ respectively except for a complex factor p. Thus, we can write

$$g_c(x,+z_0)\,e^{j\left(\frac{k}{2z_0}x^2+\phi_0\right)}=p\,g_c(x,-z_0)$$

$$g_c(x,+z_0)\,e^{j\left(\frac{k}{2z_0}x^2+\phi_0\right)}=p\,g_s(x,-z_0) \qquad 0<|x|<|\xi| \qquad (45)$$

Substituting (43) in (45),

$$p\,g_c(x,-z_0)\,e^{-j\frac{k}{4z_0}x^2}$$

$$=e^{j\phi_0}\left(\frac{j\,k}{\pi\,z_0}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\xi} g_c(\zeta,-z_0)\cos\left(\frac{k\zeta x}{2z_0}\right)e^{-j\frac{k}{4z_0}\zeta^2}\,d\zeta \qquad (46)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& p\,g_s(x,-z_0)\,e^{-j\frac{k}{4z_0}x^2} \\
& \qquad = e^{j\phi_0}\,j\left(\frac{j\,k}{\pi z_0}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t g_s(\zeta_1-z_0)\sin\left(\frac{k\zeta x}{2z_0}\right) e^{-j\frac{k}{4z_0}\zeta^2}\,d\zeta
\end{aligned}
\right\} (46)
$$

Putting

$$
\left.
\begin{aligned}
& t=\sqrt{\frac{k}{2z_0}}\,x,\quad \tau=\sqrt{\frac{k}{2z_0}}\,\zeta,\quad T=\sqrt{\frac{k}{2z_0}}\,\xi \\
& F(t)=g(x,-z_0)\exp\left(-j\frac{t^2}{2}\right) \\
& q=\frac{1}{p}\,e^{j(\phi_0+\frac{\pi}{4})}
\end{aligned}
\right\} (47)
$$

(46) become the following normalized homogeneous integral equations.

$$
\left.
\begin{aligned}
& F_c(t)=q\int_0^T F_c(\tau)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(t\tau)\,d\tau \\
& F_s(t)=q\int_0^T F_s(\tau)\,j\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(t\tau)\,d\tau
\end{aligned}
\right\} (48)
$$

whose eigenfunctions and eigenvalues are real and only depend on the quantity T .

If the phase corrections at $z=(\pm 2\nu+1)\,z_0$ are thought to be performed in two equal steps, then, $F_c(t)$ or $F_s(t)$ represents the field distribution in between these two steps. Since $F_c(t)$ or $F_s(t)$ is real, the field in the middle planes of the phase transformers has uniform phase.

The eigenfunctions $F_c(t)$ and $F_s(t)$ form a complete orthogonal system and determine an orthogonal system for the transverse field vector. They characterize the modes of the system with cross-sectional beam limitation. The eigenvalues q are greater than 1. $1/|q|=p$ represents the attenuation of the field between two successive phase corrections.

If $T\to\infty$ the modes transform into the unlimited beam modes.

In order to solve (48) one can use the following technique.

The kernel $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(t\tau)$ or $j\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(t\tau)$ can be expanded into a series of the mode functions of the unrestricted system

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(t\tau)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{\nu}}{(2\nu)!\sqrt{\pi}}\cdot\\&\qquad e^{-\frac{1}{2}(t^2+\tau^2)}H_{e2\nu}(\sqrt{2}\,t)\,H_{e2\nu}(\sqrt{2}\,\tau)\\ j\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(t\tau)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}{(2\nu+1)!\sqrt{\pi}}\cdot\\&\qquad e^{-\frac{1}{2}(t^2+\tau^2)}H_{e2\nu+1}(\sqrt{2}\,t)\,H_{e2\nu+1}(\sqrt{2}\,\tau)\end{aligned}\right\}\quad(49)$$

An approximate solution of the problem can be obtained if $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(t\tau)$ or $j\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(t\tau)$ is replaced by the first N terms of the series. The resulting approximated integral equation can be solved rigorously. Expanding $F_c(t)$ or $F_s(t)$ also into the mode functions.

$$\left.\begin{aligned}F_c(t)&=\sum_{\nu=0}^{N}a_{2\nu}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}H_{e2\nu}(\sqrt{2}\,t)\\ F_s(t)&=\sum_{\nu=0}^{N}a_{2\nu+1}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}H_{e2\nu+1}(\sqrt{2}\,t)\end{aligned}\right\}\quad(50)$$

the approximated integral equation yields,

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{N}a_{2\nu}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}H_{e2\nu}(\sqrt{2}\,t)\\&\qquad=q\sum_{\mu=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{N}(-1)^{\nu}\,b_{c\mu\nu}\,a_{2\mu}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}H_{e2\nu}(\sqrt{2}\,t)\\&\sum_{\nu=0}^{N}a_{2\nu+1}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}H_{e2\nu+1}(\sqrt{2}\,t)\\&\qquad=q\sum_{\mu=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{N}(-1)^{\nu+\frac{1}{2}}\,b_{s\mu\nu}\,a_{2\mu+1}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}H_{e2\nu+1}(\sqrt{2}\,t)\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

where

$$\left.\begin{aligned}b_{c\mu\nu}&=\frac{\sqrt{2}}{(2\nu)!\sqrt{\pi}}\int_0^T H_{e2\mu}(\sqrt{2}\,\tau)\,H_{e2\nu}(\sqrt{2}\,\tau)\,e^{-\tau^2}\,d\tau\\ b_{s\mu\nu}&=\frac{\sqrt{2}}{(2\nu+1)!\sqrt{\pi}}\int_0^T H_{e2\mu+1}(\sqrt{2}\,\tau)\,H_{e2\nu+1}(\sqrt{2}\,\tau)\,e^{-\tau^2}\,d\tau\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

(52) resolves into a system of linear homogeneous equations for the coefficients $a_{2\mu}$ or $a_{2\mu+1}$, since the equation must be satisfied for any t.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{N} a_{2\mu}\left[\delta_{\mu\nu} - q(-1)^{\nu} b_{c\mu\nu}\right] = 0 \\ &\sum_{\mu=0}^{N} a_{2\mu+1}\left[\delta_{\mu\nu} - q(-1)^{\nu+\frac{1}{2}} b_{s\mu\nu}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le \mu \le N \qquad (53)$$

where

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

The determinant of this system must be zero. This condition leads to an algebraic equation of N th degree. The roots are the desired approximations for the eigenvalues.

The corresponding coefficients a_n determine the approximated eigenfunctions.

6. Conclusion

The possibility of an H -beam waveguide was discussed. The new contributions of this paper are mainly : 1) the derivation of the fundamental wavebeam representations in an H-structure, 2) the mathematical treatments of the field distribution functions. And it has been pointed out that the properties of the field distribution in the open direction in H -beam waveguide are very similar to those in the radial direction in Goubau's lens system.

Further discussion on this waveguide system and numerical examples will given later.

7. Acknowledgement.

The author should like to express his gratitude to Professor J. W. E. Griemsmann for his kind discussions. He is also indebted to his colleagues at the Microwave Research Institute, in particular to L. Birenbaum for his criticisms and correction of munuscript.

The work reported on herein has been sponsored by the U. S. Army Signal Research and Development Laboratory under Contract No. DA-36-039 sc-85321. The essentials of this report were submitted to the Polytechnic Institute of Brooklyn in partial fulfillment of the work as a research staff of the visiting Research Associate in 1961.

輻射科学研究会資料

TE_{01}° 姿態導波管用不要 TE_{0n}° 姿態除去沪波器

熊谷信昭　　倉薗貞夫
（大阪大学工学部）

中原恒雄　　倉内憲孝
（住友電気工業株式会社）

1963年6月22日

1. 序　言

円形 TE_{01}^{o} 姿態導波管によってミリ波の低損失伝送を行なう場合には、伝送路の途中で発生する不要姿態を直ちに除去することが基本的な条件として要求される。円形ら旋導波管はこの要求に応ずるために開発された不要姿態除去効果を有するミリ波伝送導波管である。ら旋導波管を用いると管壁上に伝送軸方向の電流成分をもつすべての不要姿態に対して減衰を与えることができる。しかし、ら旋導波管はその機構から明らかなとおり、伝送軸方向の壁面電流成分をもたない円形電界姿態群（TE_{0n}^{o} 姿態群）に対しては原理的に姿態除去効果がない。したがって，このような不要円形電界姿態が発生した場合には、ら旋導波管とは全く異なった原理による姿態除去沪波器が必要となる。

本資料は伝送すべき信号 TE_{01}^{o} 姿態にはほとんど影響を与えることなく，これらの不要 TE_{0n}^{o} 姿態（$n \neq 1$）の電力のみを吸収除去する機能をもった姿態除去沪波器について述べたものである。まずこのような不要 TE_{0n}^{o} 姿態除去沪波器の原理，設計の基準となる理論式，ならびに構成例等について一般的に述べ，次に実際上最も問題になると考えられる TE_{02}^{o} 姿態に対する除去沪波器の場合について具体的な数値設計例とその理論的な動作特性，ならびに実験結果等を示す。また，信号 TE_{01}^{o} 姿態に対する挿入損失や，姿態除去沪波器と円形導波管との接続部に関する問題，あるいは製作誤差が動作特性におよぼす影響等については付録において理論的に検討する。

なお，筆者等は数年前に上記のような不要 TE_{0n}^{o} 姿態除去沪波器の構成法についての着想を得，種々検討を続けてきたのであるが、最近、筆者等とは独立に米国においても類似の検討が行われていることがわかった。[1] また、ごく最近，筆者等が検討したものの一例についてその概要が報告されている。[2]

2. 動作原理

一般に半径Rなる円形導波管におけるTE_{0n}^{0} 姿態（$n=1, 2, 3\cdots$）の電磁界成分は円柱座標（r, φ, Z）を用いて次のように書き表すことができる。

$$E_{\varphi} = A J_0' \left(\frac{\chi_n}{R} r \right) e^{\mp j\beta_n^0 Z} \tag{1}$$

$$H_r = -\frac{A}{\zeta} \frac{\lambda}{\lambda_{gn}^0} \cdot J_0' \left(\frac{\chi_n}{R} r \right) e^{\mp j\beta_n^0 Z} \tag{2}$$

$$H_Z = -j \frac{A}{\zeta} \frac{\lambda}{\lambda_{cn}^0} J_0 \left(\frac{\chi_n}{R} r \right) e^{\mp j\beta_n^0 Z} \tag{3}$$

$$E_r = E_Z = H_{\varphi} = 0 \tag{4}$$

ここで

$$\beta_n^0 = \frac{2\pi}{\lambda_{gn}^0} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cn}^0} \right)^2} \quad : \text{位相定数} \tag{5}$$

$$\lambda_{cn}^0 = \frac{2\pi R}{\chi_n} \quad : TE_{0n}^{0} \text{ 姿態の遮断波長} \tag{6}$$

ζは固有インピーダンス，λは自由空間波長，χ_nは$J_0'(\chi)=0$の第n番目の根を表わす。ただし正弦的時間変化を示す項は省略してある。

以上の一般式からTE_{01}^{0}姿態とTE_{0n}^{0} 姿態（$n \neq 1$）との間には次の2つの相違点があることがわかる。1つは式（5）からわかるとおり、その位相定数が異なることである。もう1つは電磁界分布の相違であって，たとえば軸方向磁界成分H_Zは式（3）からわかるとおり、図1の

ような半径方向分布をしている。したがってこれらの相違点に着目すれば，TE^{o}_{01}姿態とTE^{o}_{0n}姿態（$n \neq 1$）との分離を行なうことができるはずである。

第1の点を利用するものとしては分布結合によって不要TE^{o}_{0n}姿態のみを別の線路に結合，移換せしめ，これを吸収する方法が考えられる。第2の点を利用するものとしてはTE^{o}_{01}姿態に影響を与えないような位置にたとえば損失物質を配置すること等によって不要TE^{o}_{0n}姿態のみを減衰せしめる方法が考えられる。筆者等はこれらの方法について検討を加えてきたが，本資料では上記の2点を同時に利用する方法について述べる。

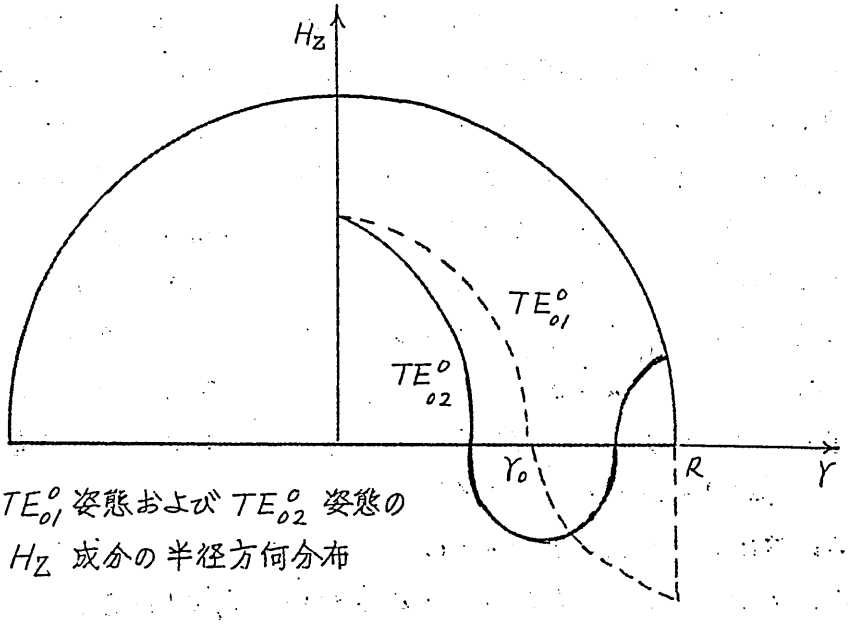


図1. TE^{o}_{01}姿態およびTE^{o}_{02}姿態のH_z成分の半径方向分布

そのために，まず円形導波管を導体板によって，たとえば2つの半円形導波管に分割する。式(1)～(4)から明らかなとおり，TE^{o}_{0n}姿態（$n=1, 2, 3, \cdots$）の電界成分は円周（φ）方向成分のみであるから，このように分割しても電磁界分布の模様には変化はない。任意の扇形導波管に分割しても全く同様であることはもちろんである。

このような分割導体板上では式(3)から直ちに求まるごとく

$$r_0 = \frac{u_1}{x_1} R = 0.6276 R \qquad (7)$$

なる位置で TE^{o}_{01} 姿態の H_z 成分，したがって半径方向電流成分，が零となる。ただし，$u_1 = 2.4048$ および $x_1 = 3.8317$ はそれぞれ $J_0(x) = 0$ および $J_0'(x) = 0$ の第1番目の根である。

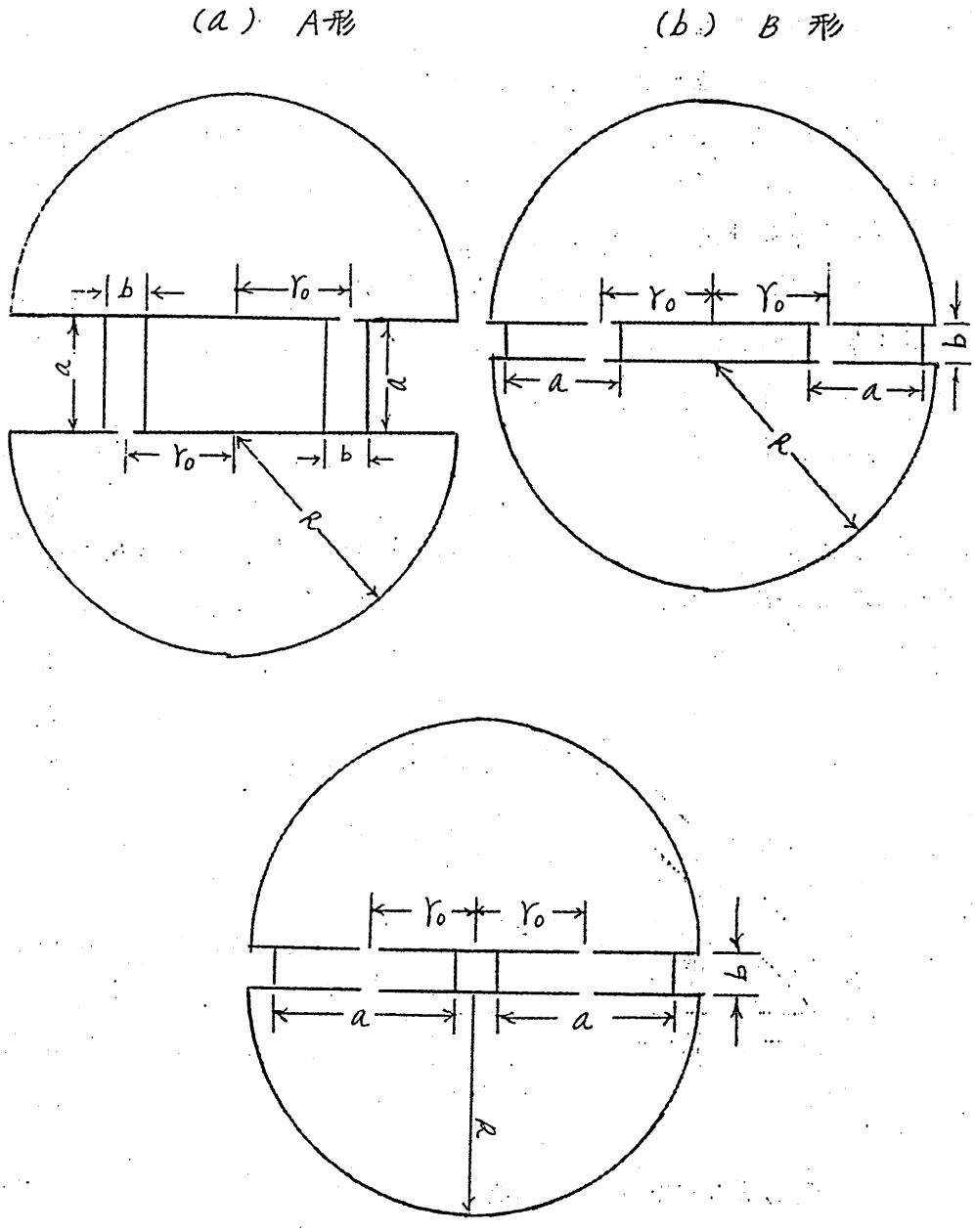
ところで図1に示したとおり，TE^{o}_{on} 姿態（$n \neq 1$）の H_z 成分は上記の位置で有限の値をもつ。したがってこのような位置 $r = r_0$ に H_z 成分に対する結合素子をもうけて方形導波管と結合させると，TE^{o}_{on} 姿態（$n \neq 1$）の H_z 成分のみが方形導波管内姿態の H_z 成分と結合し、信号 TE^{o}_{01} 姿態にはほとんど影響を与えない。

さらにこのような結合導波管系で，結合された2つの姿態間の伝播定数が等しくなるように選ぶと，一方の導波管内を進行する結合姿態の電力は、結合部分をある特定の距離だけ進むと完全に他方の導波管の結合姿態に移換されることが *Miller* の結合姿態理論から予測される。[3]

したがっていまの場合，たとえば半円形 TE^{o}_{02} 姿態の伝播定数と方形 $TE^{\square}_{10}$ 姿態の伝播定数とが等しくなるように設計すれば不要 TE^{o}_{02} 姿態の電力のみが完全に方形導波管側の $TE^{\square}_{10}$ 姿態に移換されてしまうはずである。したがって方形導波管側をたとえば整合負荷で終端しておけばその電力はそこで吸収されてしまう。最後にこのような2つの半円形導波管を合せて再び1つの円形導波管にもどせば所要の不要 TE^{o}_{on} 姿態除去沪波器が得られるわけである。

具体的には、たとえば図2 (a)～(c) のような構造のものが考えられる。(a) および (b) はいずれも不要 TE^{o}_{on} 姿態を方形 $TE^{\square}_{10}$ 姿態に変換するものであり，(c) は同じく方形 $TE^{\square}_{20}$ 姿態に変換するものである。

図2　TE_{0n}^{o} 姿態除去沙波器の構成例



3. 設計に必要な理論式

3・1 スロット結合の場合

一般に図3のように扇形 TE^{o}_{on} 姿態導波管（n キノ）と方形 $TE^{\square}_{m0}$ 姿態導波管（$m=1, 2, 3, \cdots$）を，$r=r_0$ の位置にもうけたN個の小孔（スロット），（図4），によって結合する場合を考える。以下，系の導体損失は無視する。壁面の厚さを零としてスロット1個あたりの振幅結合係数 C_0 を Bethe の理論[4]にしたがって計算すると次式のようになる。[5]

$$C_0 = \sqrt{C^{o}_{n}\, C^{\square}_{m}} \qquad (8)$$

ただし，C^{o}_{n} は同じスロットによって2つの扇形 TE^{o}_{on} 姿態導波管を結合した場合の結合係数，$C^{\square}_{m}$ は同じく2つの方形 $TE^{\square}_{m0}$ 姿態導

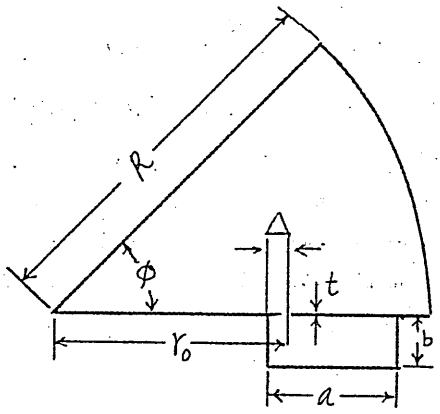


図3　扇形導波管と方形導波管との結合

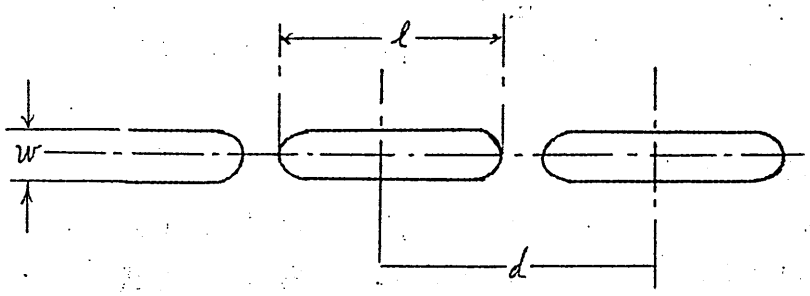


図4.　結合スロット列

波管を結合した場合の結合係数であって，それぞれ次式で与えられる。

$$C_n^{\circ} = \frac{\chi_n^2 \lambda_{gn}^{\circ} M_Z J_0(\chi_n/R \cdot r_0)}{2\pi\phi R^4 J_0^2(\chi_n)} \qquad (9)$$

$$C_m^{\square} = \frac{\pi m^2 \lambda_{gm}^{\square} M_Z \cos^2(m\pi\Delta/a)}{2a^3 b} \qquad (10)$$

ここで，ϕおよびRは扇形導波管の頂角および半径，aおよびbは方形導波管の長辺および短辺の長さ，Δは方形導波管の側壁からスロットの中央までの距離を表わす。（図3参照）。M_Zはスロットの軸方向磁気的分極率であって，その値はスロットの形状，寸法によって定まり，たとえば楕円形スロットの場合には

$$M_Z \fallingdotseq \frac{\pi}{24} l w^2, \qquad w \ll l \qquad (11)$$

となる。[6] ただしlおよびwはそれぞれ楕円形スロットの長径および短径を表わす。その他の形状のスロットのM_Zについては，たとえば Cohn の求めた測定値を設計資料として用いることができる。

スロットをもうける導体板の厚さを考慮すると，式（8）の結合係数 C_0 はつぎのように補正しなければならない。

$$C = \delta C_0 \tag{12}$$

ただし δ はスロットをもうける導体板が有限の厚さを有する結果生ずる結合係数の減少率を表わし

$$20 \log_{10} \delta = -\alpha \tag{13}$$

から求められる。α はスロットを遮断域にある導波管とみなしたときの減衰定数に相当し，たとえば方形スロットの場合には

$$\alpha = 27.29 \sqrt{1-\left(\frac{2\ell}{\lambda}\right)^2}\ \frac{t}{\ell} \tag{14}$$

となり，円形スロットの場合には

$$\alpha = 15.99 \sqrt{1-\left(\frac{3.413}{\lambda} r\right)^2}\ \frac{t}{r} \tag{15}$$

で与えられる。ただし，t は導体板の厚さ，ℓ は方形スロットの長辺の長さ，r は円形スロットの半径である。

次に，このような結合スロットが存在すると各導波管内を伝播する結合姿態の位相定数はじょう乱をうけて，それぞれが独立の場合の値とは異ってくる。このじょう乱分を考慮に入れた結合姿態の位相定数は Miller 等によれば次のようになる。[3), 8)]

$$\beta_{pn}^{o} = \beta_{n}^{o} + \frac{C_n^o}{d} \tag{16}$$

$$\beta_{pm}^{\square} = \beta_{m}^{\square} + \frac{C_m^{\square}}{d} \tag{17}$$

ただし，β_{pn}^{o} および $\beta_{pm}^{\square}$ はそれぞれじょう乱を考慮した場合の扇形 TE_{on}^{o} 姿態および方形 $TE_{mo}^{\square}$ 姿態の位相定数を表わし，β_n^o および $\beta_m^{\square}$ は結合がない場合，したがってじょう乱がない場合，のそれぞれの姿態の位相定数を表わす。β_n^o は式（5）で与えられ，$\beta_m^{\square}$ は

$$\beta_m^{\square} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}^{\square}}\right)^2} \tag{18}$$

$$\lambda_{cm}^{\square} = \frac{2a}{m}$$

から求められる。 d はスロットの中心間の間隔である。（図4参照）

以上のようなスロットをN個，$\gamma = \gamma_0$ の位置に軸方向にもうけて扇形 TE_{on}^{o} 姿態導波管と方形 $TE_{om}^{\square}$ 姿態導波管を結合したとき，一方から他方へ100％の電力移換が行われるための条件は、Millerの結合姿態理論[3]から

$$\beta_{pn}^{o} = \beta_{pm}^{\square} \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sin^{-1} C_i = \frac{\pi}{2} \tag{20}$$

で与えられる。ただし C_i は式（12）で与えられるスロット1個あたりの結合係数である。N個のスロットがすべて等しい結合係数 C を有する場合には，式（20）は

$$N \sin^{-1} C = \frac{\pi}{2} \tag{21}$$

となり，結合係数が小さい場合には近似的に

$$NC = \frac{\pi}{2} \tag{22}$$

となる。図2(a)～(c)のような半円形一方形結合の場合には以上の

諸式で$\phi=\pi$とおけばよいことはもちろんである。

3・2　スリット結合の場合

扇形TE_{0n}^{o}姿態導波管（ネキ1）と方形$TE_{m0}^{\square}$姿態導波管を，N個のスロットのかわりに，1本の長いスリット*によって結合した場合を考える。スリットは信号TE_{01}^{o}姿態に影響を与えないように，式(7)で示した$\gamma=\gamma_0$なる位置にもうけることはもちろんである。

この場合，Pascherのスリット結合理論[9]を適用すると結合姿態間の最大電力移換係数Kは次のようになる。

$$K=\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{U_1}{U_2}-\frac{U_2}{U_1}+\frac{\eta_1^2-\eta_2^2}{\tau U_1 U_2}\right)^2\right]^{-1} \tag{23}$$

ここで

$$U_1=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2}{\phi}}\,\frac{J_0(\chi_n/R\cdot\gamma_0)}{J_0(\chi_n)} \tag{24}$$

$$U_2=\sqrt{\frac{2}{ab}}\,\cos\frac{m\pi\Delta}{a} \tag{25}$$

$$\eta_1=\frac{\chi_n}{R}\quad,\quad \eta_2=\frac{m\pi}{a} \tag{26}$$

$$\tau=\frac{\Delta}{t}\quad,\quad \Delta\ll t \tag{27}$$

---

* 本資料では便宜上軸方向の長さが波長にくらべて小さい小孔の列による結合をスロット結合とよび，結合部の全長にわたる1本の細長い細隙による結合をスリット結合とよんで両者を区別する。

ただし，tはスリットをもうける導体板の厚さ，dはスリットの幅である。U_1，U_2はそれぞれ扇形TE^{o}_{on}姿態および方形$TE^{\square}_{mo}$姿態の$r=r_0$における適当に規準化されたH_z成分の値を示し，η_1およびη_2はそれぞれの姿態の固有値を表わす。その他の記号はすべて前項までの場合と全く同様である。

したがって$K=1$となるための条件，すなわち100%の電力移換が行われるための条件は

$$(U_1^2 - U_2^2)\tau = \eta_2^2 - \eta_1^2 \qquad (28)$$

で与えられる。このような条件が満足されているとき，スリット結合部分を距離Lだけ進むと

$$L = \frac{\pi\beta}{U_1 U_2 \tau} \qquad (29)$$

のところで結合姿態の一方の電力が他方に完全に移換される。ただし，式(29)のβはじょう乱を考慮した位相定数であって，いまの場合

$$\beta \fallingdotseq \beta_n^o \qquad (30)$$

としても実際上十分よい近似を与える。

図2(a)～(c)のような半円形一方形結合の場合には以上の試式で$\phi=\pi$とすればよいことはもちろんである。

なお以上の設計理論では分割導体板の厚さtにくらべてスリットの幅dは十分小さいと仮定している。tとdとが同程度の場合には*Pascher*の求めた補正曲線[9]を利用することができる。

4. 姿態除去効果の理論的特性

前節で述べたように設計された結合部分を不要 TE^{o}_{on} 姿態（$n \neq 1$）が通過する場合の挿入損失，すなわち不要姿態除去効果，は結合部分に入射した TE^{o}_{on} 姿態の振幅（単　位）と結合部分を通過した後の TE^{o}_{on} 姿態の振幅 E^{o}_{n} との比をとって次式のように表わすことができる。

$$P_n = -20 \log_{10} \left| E^{o}_{n} \right| \tag{31}$$

ただし $\left| E^{o}_{n} \right|$ はスロット結合の場合には

$$\left| E^{o}_{n} \right| = \sqrt{1 - \frac{1}{1+\xi^2} \sin^2 \left(\sqrt{1+\xi^2}\, NC \right)} \tag{32}$$

$$\xi = \frac{\beta^{o}_{pn} - \beta^{\square}_{pm}}{2\frac{C}{d}}$$

となり[3]，スリット結合の場合には

$$\left| E^{o}_{n} \right| = \sqrt{1 - K \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{\beta_0}{\beta} \right)} \tag{33}$$

となる。式（32）における C は前述のとおりスロット1個あたりの結合係数で式（12）から求められる。d はスロットの中心間の間隔，N はスロットの数である。

式（33）における K はスリットによる最大電力移換係数であって式(22)から求められる。100%の電力移換が行われるように設計された場合には $K=1$ となることは前述のとおりである。β は式(30)に示した位相定数であって，β_0 はその中心周波数における値を示す。

図2（a），（b）および（C）のような構造の TE^{o}_{02} 姿態除去沪波器（以下それぞれA形，B形およびC形とよぶ）の特性を上式を用いて計算し

た結果が図5～7である。図5は中心周波数を24GCに選び，前節の諸式を用いて表1のように設計したスロット結合によるTE_{02}^{o}姿態除去沪波器の特性を示す。図6および7は中心周波数をそれぞれ24GCおよび50GCに選び，表2のように設計したスリット結合によるTE_{02}^{o}姿態除去沪波器の特性を示す。

実際に数値設計を行なってみるとわかるとおり，50GC帯ではスロット結合よりもスリット結合による方が実用上有利である。その理由は、周波数が高くなるにしたがってスロットの結合係数の値が小さくなり、そのために姿態沪波器の全長が非常に長くなるからである。たとえば半径Rが25.5mmの場合について設計するとスロット結合部分の長さは数メートルの程度になる。半径Rを小さくしていくと結合係数の値が大きくなり，したがって結合部分の長さも短かくなるが、そのかわり周波数特性が狭帯域になることが予想され，しかも半径を小さくするためのテーパも必要となるので姿態沪波器の全長はその分だけ再び長くなる。これに対してスリット結合を行なわせると結合部分の長さは約1メートルの程度ですむ。以上のような理由から，50GC帯ではスリット結合の方がスロット結合よりも実用上優れていると考えられる。

表1　スロット結合によるTE_{02}^{o}姿態除去沪波器の設計例
（中心周波数24GC，寸法単位mm）

	A形	B形	C形
R	25.50	25.50	25.50
a	10.40	9.21	18.72
b	2.80	2.30	1.50
l	4.80	5.00	5.00
w	2.40	1.00	1.00
d	5.50	5.50	5.50
t	0.50	0.50	0.50
N	152個	74個	71個

表2．スリット結合による TE_{02}^{0} 姿態除去沪波器の設計例

（中心周波数24GCおよび50GC，寸法単位mm）

		A 形	B 形	C 形
R		25.50	25.50	25.50
a		12.00	12.50	24.00
b		6.00	6.00	5.00
t		0.37	0.37	0.37
Δ		0.21	0.215	0.172
L	24GC	843.3	460.6	632.3
	50GC	1993.0	1075.0	1494.2

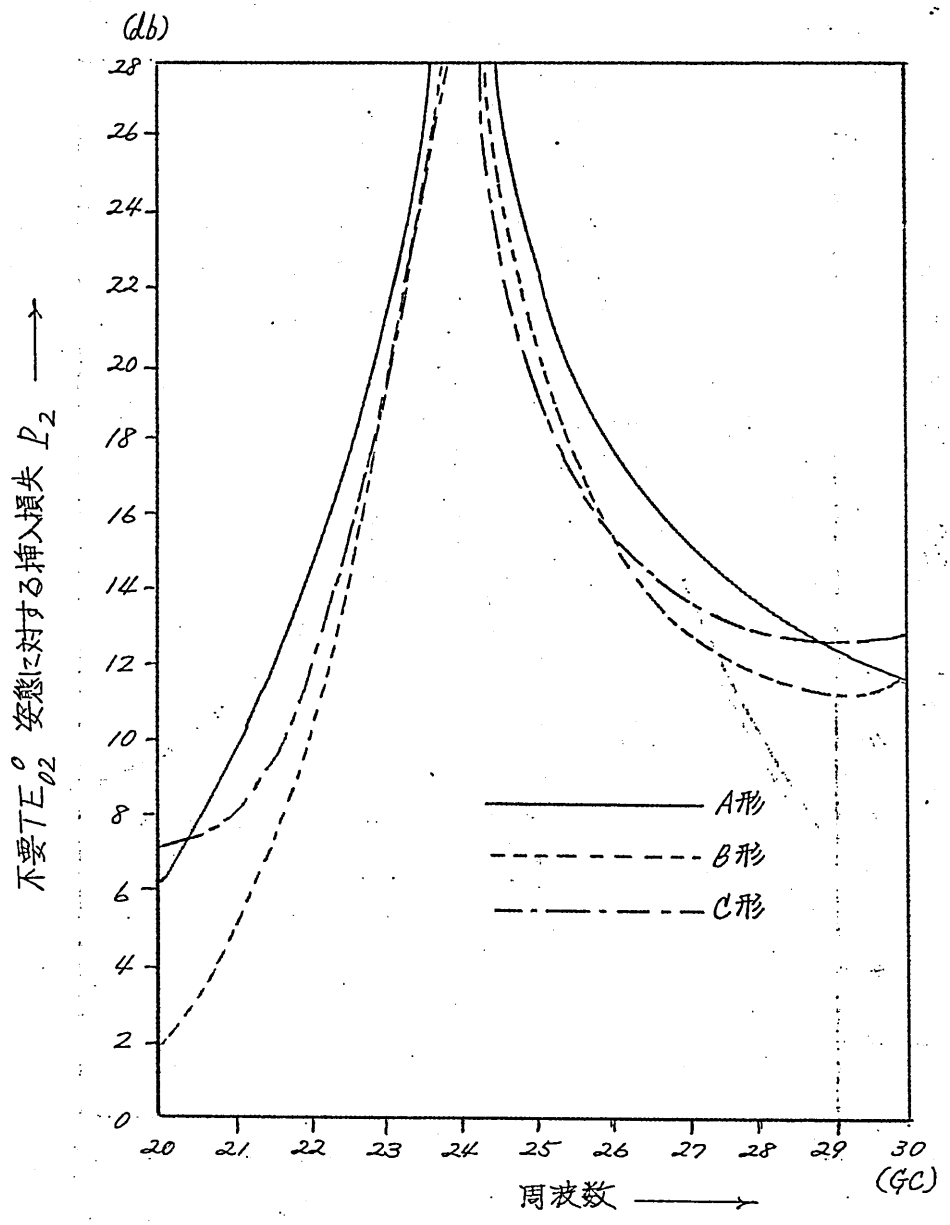


図5　表1のように設計されたスロット結合によるA形，B形およびC形 TE_{02}^{0} 姿態除去沪過器の特性。
（中心周波数24GC）。

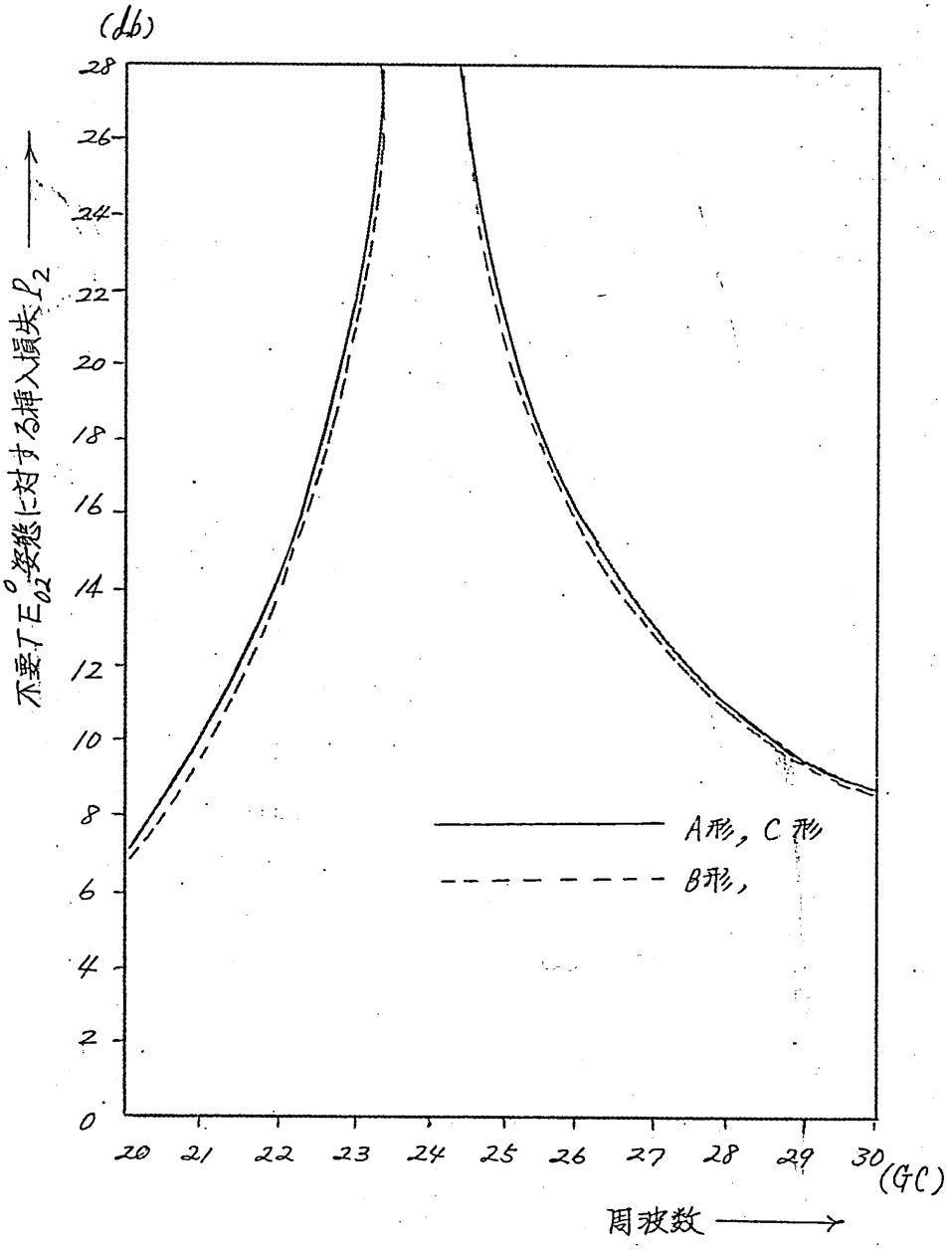


図6．表2のように設計されたスリット結合によるA形，B形，およびC形 TE_{02}^{0} 姿態除去沪波器。
（中心周波数24GC）

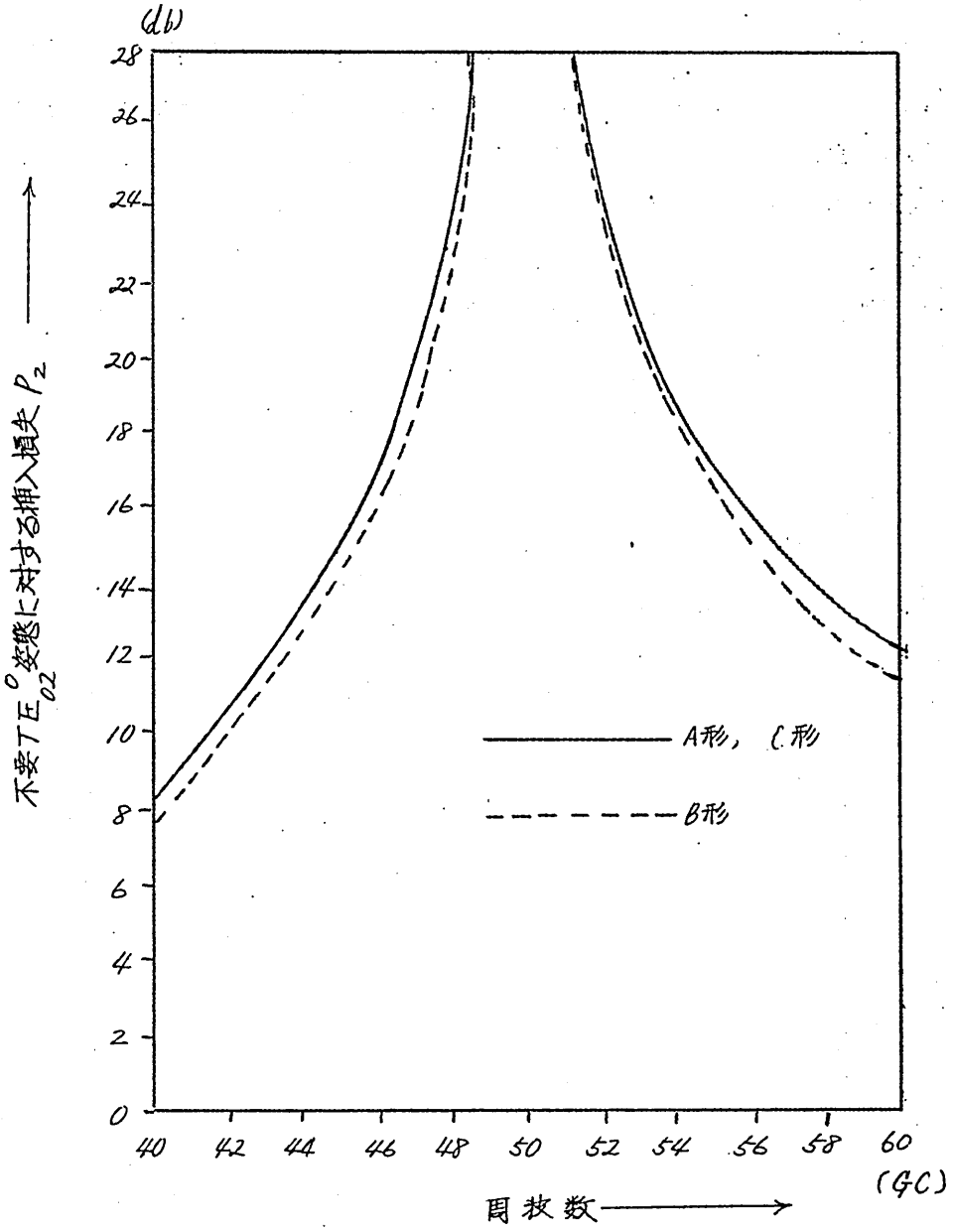


図7　表2のように設計されたスリット結合によるA形，B形およびC形 TE_{02}^{0} 姿態除去沪波器．
（中心周波数　5 0 GC ）．

5. 試作 TE_{02}^{0} 姿態除去沪波器の実験結果

以上の理論的考察をたしかめるために Z4GC 帯で行なった試作実験の1例として，図8にスロット結合による C形 TE_{02}^{0} 姿態除去沪波器の特性を示す。約 1,500 MC の周波数帯域にわたり 12 db 以上の姿態除去効果が得られており、最大挿入損失は約 Z4 db となっている。また信号 TE_{01}^{0} 姿態に対する挿入損失は 0.5 db 以下であった。以上の結果は測定系および姿態沪波器の製作精度を向上させること等により、さらに改善される見込みである。

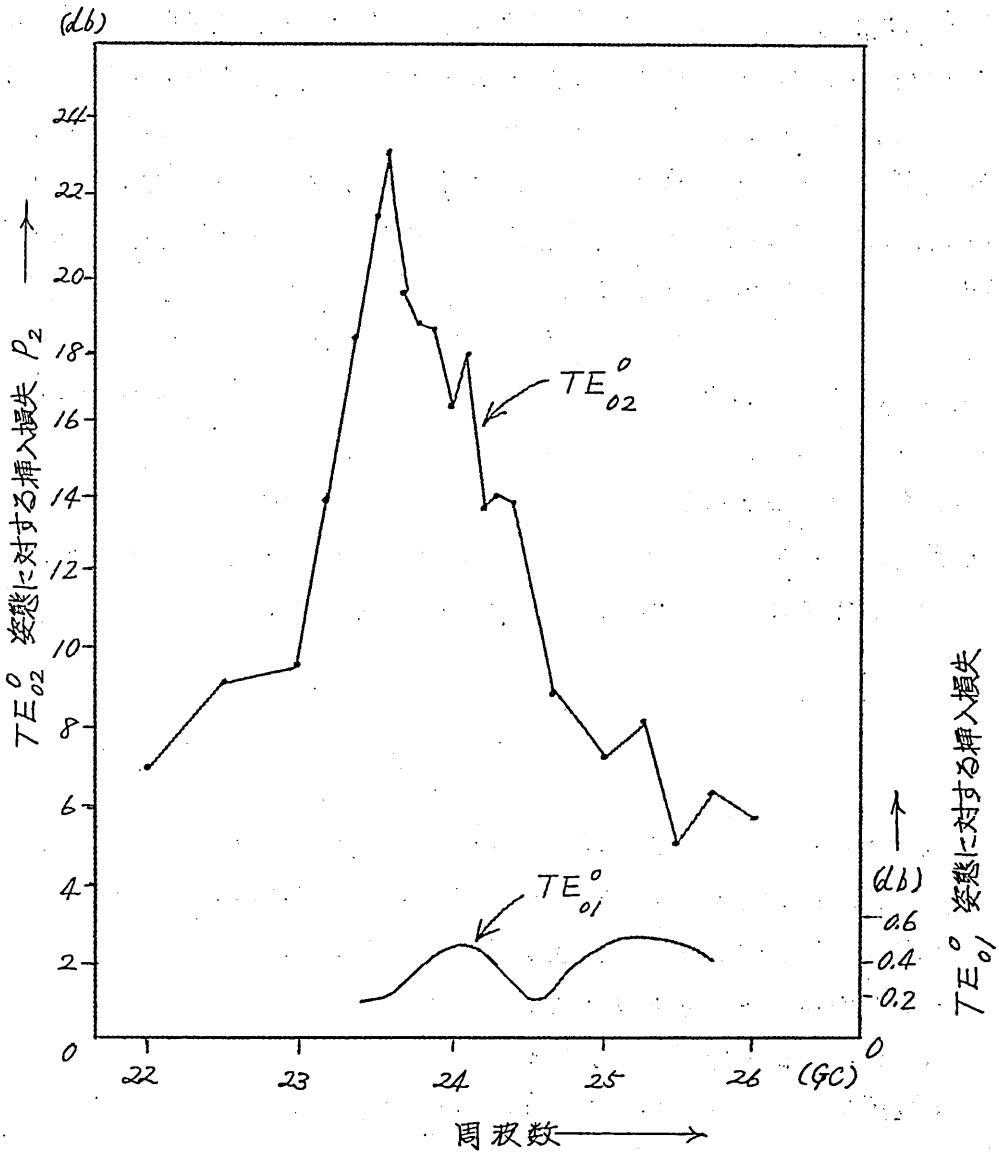


図8　スロット結合による試作C形 TE_{02}^{0} 姿態除去汙波器の姿態除去効果。（実測値）。

6. 結　言

ら旋導波管では取り除くことのできなかった不要TE_{0n}^{0}姿態に対する姿態除去沙波器の構成法とその特性を理論的ならびに実験的に示した。

なお，分割導体板の壁面損失による信号TE_{01}^{0}姿態の挿入損失は付録A・1に示すとおり問題となるほど大きくはならない。また円形一半円形変換部で新たに不要TE_{0n}^{0}姿態がある程度以上の大きさで発生したのでは姿態除去沙波器を挿入する意味が失われてしまうが，このような変換部における$TE_{01}^{0} \rightarrow TE_{0n}^{0}$姿態変換量は付録A・2に示すとおり，適当に設計すれば十分小さな値におさえることができる。また結合素子を介しての$TE_{01}^{0} \rightarrow TE_{02}^{0}$結合，あるいは$TE_{01}^{0} \rightarrow TE_{m0}^{\square}$結合による信号$TE_{01}^{0}$姿態の挿入損失についても理論的に検討し，それらが実用上無視し得ることをたしかめた。製作誤差が動作特性におよぼす影響については付録A・3で検討し，製作精度を規定する基準を示した。

謝　辞

本研究について種々御指導いただいた大阪大学工学部板倉清保教授，有益なる御討論，御助言をたまわった電気通信研究所小口文一博士，御激励いただいた住友電気工業株式会社杉正男博士ならびに楠井健蔵博士に深く感謝の意を表す。

また、御協力いただいた松尾義一，上田康弘，神戸史全，短岡祥晃，汐見修三の諸氏に厚く御礼申上げる。

付　　録

A・1　分割導体板の導体損失

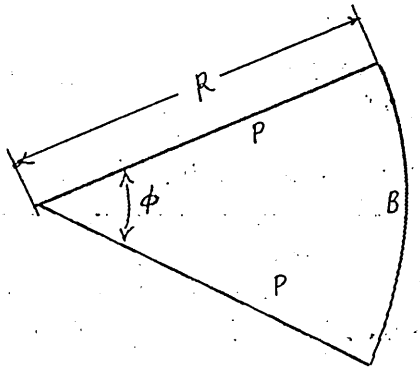
図A・1のような扇形導波管における TE_{on}^{o} 姿態（$n=1,2,3,\cdots$）の導体損失にもとおく減衰定数を計算すると次式のようになる。

$$\alpha = \alpha_B + \alpha_P \qquad (db/m) \qquad (A\cdot 1)$$

ここで α_B は扇形導波管の円周部分Bにおける導体損失による減衰量を表わし、次式で与えられる。

$$\alpha_B = 8.686 \frac{R_S}{\zeta R} \frac{\nu^2}{\sqrt{1-\nu^2}} \qquad (db/m) \qquad (A\cdot 2)$$

ただし，$\nu = \lambda/\lambda_{c.n}^{o}$，$R_S = \sqrt{\pi f \mu_c / \sigma}$，$f$，$\sigma$ および μ_c はそれぞれ周波数，導体の導電率および透磁率を表わす。



A・1　扇形導波管

また α_p は扇形導波管の側辺部分 P における導体損失による減衰量を表わし，次式で与えられる。

$$\alpha_P = \alpha_B \frac{2}{\phi \chi_n J_0^2(\chi_n)} \left[I_n + \left(\frac{1}{\nu^2} - 1 \right) I_n' \right] \quad (db/m) \quad (A\cdot 3)$$

ただし

$$I_n = \int_0^{\chi_n} J_0^2(\chi) d\chi = \begin{cases} 1.2599, & n=1 \\ 1.4615, & n=2 \end{cases} \quad (A\cdot 4)$$

$$I_n' = \int_0^{\chi_n} J_1^2(\chi) d\chi = \begin{cases} 0.6393, & n=1 \\ 0.8296, & n=2 \end{cases} \quad (A\cdot 5)$$

その他の記号はすべて本文中で用いたものと全く同様である。

図２(a)～(c)のような半円形導波管（$\phi = \pi$）の場合について TE_{01}^0 姿態および TE_{02}^0 姿態に対する減衰定数を上式を用いて計算すると表A・1のようになる。

表A・1　半円形導波管における TE_{01}^0 姿態および TE_{02}^0 姿態の減衰定数
（半円形導波管の半径 $R = 25.5$ mm）

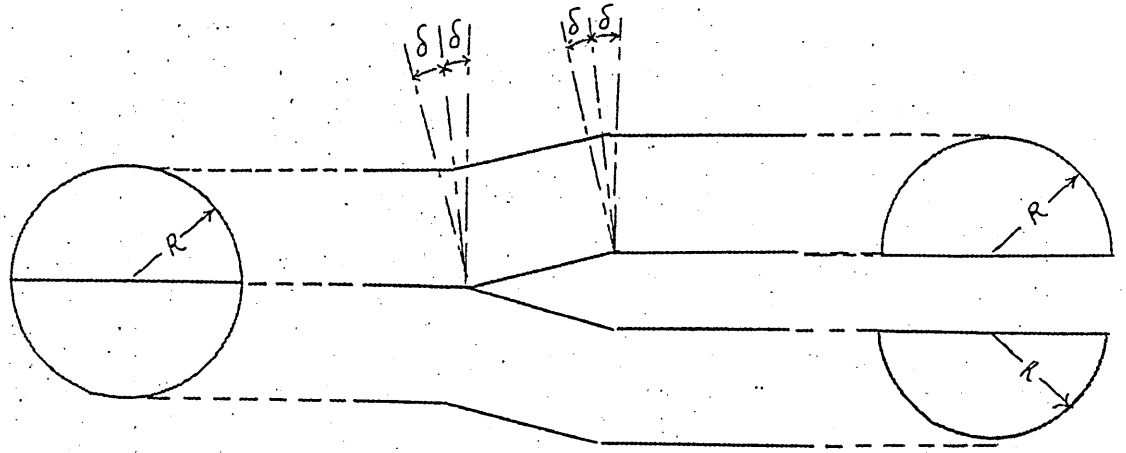
	24 GC		50 GC	
	α (db/m)	α_P/α_B	α (db/m)	α_P/α_B
TE_{01}^0	0.030	7.962	0.036	32.44
TE_{02}^0	0.058	3.428	0.051	12.75

ただし半径Rを25.5mmとし，周波数を24GCおよび50GCに選んで計算してある。この表が示すとおり，減衰は主として分割導体板の導体損失α_pによって生ずるが，いまの場合特に重要な信号TE_{01}^{o}姿態の減衰は問題になるほど増加しないことがわかる。

A・2　円形ー半円形2分岐変換部における姿態変換

図2(a)～(c)のような構造の姿態除去沪波器を円形導波管と接続するためには，図A・2に示すような円形ー半円形2分岐変換部が必要である。この場合，このような半円形導波管の折れ曲りによって新たに不要TE_{on}^{o}姿態がある程度以上の大きさで発生すると姿態除去沪波器を挿入する意味が失われてしまう。そこで，折れ曲り角δの2乗以上の項を省略した1次近似理論によって，半円形導波管の僅かな折れ曲りによ入射TE_{01}^{o}姿態の姿態変換をしらべてみると次のようになる。計算の方法は飯口眞一氏によって行なわれた円形TE_{01}^{o}姿態導波管の僅かな折れ曲りによる姿態変換の理論[10]と同じであるが，結果はもちろん全く違ったものとなる。すなわち円形導波管の僅かな折れ曲りでは入射TE_{01}^{o}姿態に対してTM_{11}^{o}姿態とTE_{1n}^{o}姿態群（$n=1, 2, 3, \cdots$）とが発生するのに対し，半円形導波管ではTM_{mn}^{o}姿態群のうちmが偶数となる姿態およびTE_{mn}^{o}姿態群のうちmが零または偶数となる姿態が発生する。[11] 半円形導波管の場合にはTM_{11}^{o}姿態およびTE_{1n}^{o}姿態群は発生しない。

いまの場合，特に問題となるのは入射TE_{01}^{o}姿態の反射および姿態変換によって生ずる透過および反射TE_{02}^{o}姿態の大きさである。そこでA・1の場合と同様，半径Rを25.5mm，周波数を24GCおよび50GCに選び，入射TE_{01}^{o}姿態の電力を単位として折れ曲り角2δに対するこれらの電力を計算すると表A・2に示すような結果が得られる。したがってこの例のような場合，50GC帯では折れ曲り角2δを0.01 rad．程度以下に設計すれば，信号TE_{01}^{o}姿態の反射量は−78db以下，透過および反射TE_{02}^{o}姿態の発生量はそれぞ



図A・2　　円形－半円形２分岐変換部

表A・2　単位電力の入射TE_{a1}^{o}姿態に対し，半円形導波管の僅かな曲折部で生ずる反射TE_{01}^{o}姿態，透過TE_{02}^{o}姿態，および反射TE_{02}^{o}姿態の各電力。
（半円形導波管の半径R＝25.5mm）

2δ (rad.)	反射 TE_{01}		透過 TE_{02}		反射 TE_{02}	
	24GC	50GC	24GC	50GC	24GC	50GC
0.01	−71 db	−78 db	−38 db	−31 db	−84 db	−87 db
0.02	−65 db	−72 db	−32 db	−25 db	−78 db	−81 db
0.03	−62 db	−69 db	−29 db	−22 db	−75 db	−78 db
0.04	−51 db	−58 db	−18 db	−11 db	−64 db	−67 db

れ−31 db および−87 db 以下の程度におさえることができる。さらに高次の不要円形電界姿態への姿態変換量はもちろんこれよりもふさくなるはずである。

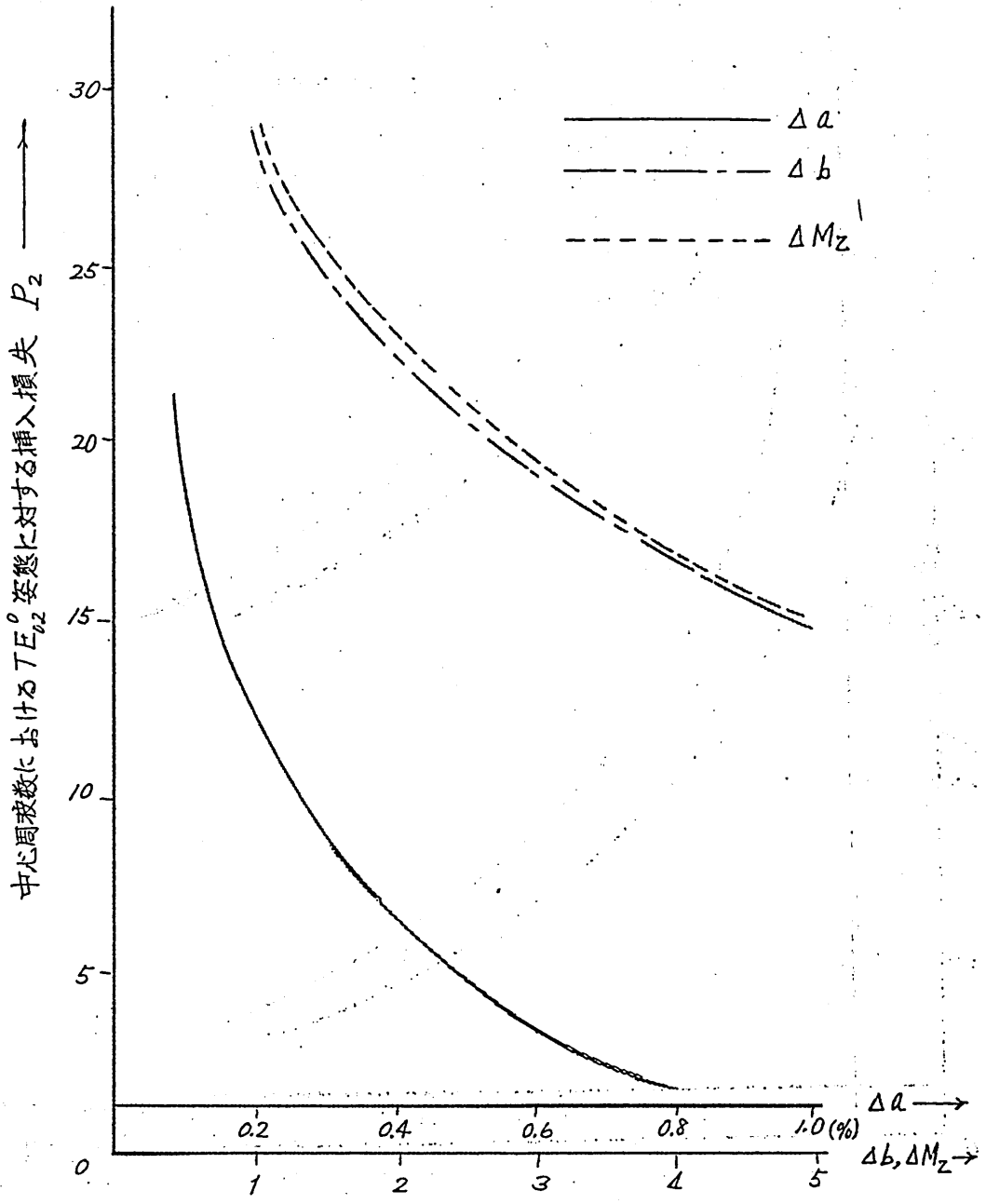
A・3　製作誤差の影響

製作誤差がTE_{02}^{o}姿態除去沪波器の動作特性におよぼす影響を理論的に検討した結果が図A・3～A・9である。図A・3～A・5はそれぞれ中心周波数50GCで設計されたスロット結合によるA形，B形，およびC形沪波器に対する製作誤差の影響を示したものであって方形導波管の長辺a，短辺b，およびスロットの寸法，したがって軸方向磁気的分極率M_z，の値がそれぞれ独立にΔa，Δb，およびΔM_zだけ設計値から偏差した場合の中心周波数における姿態除去効果の変化を示したものである。

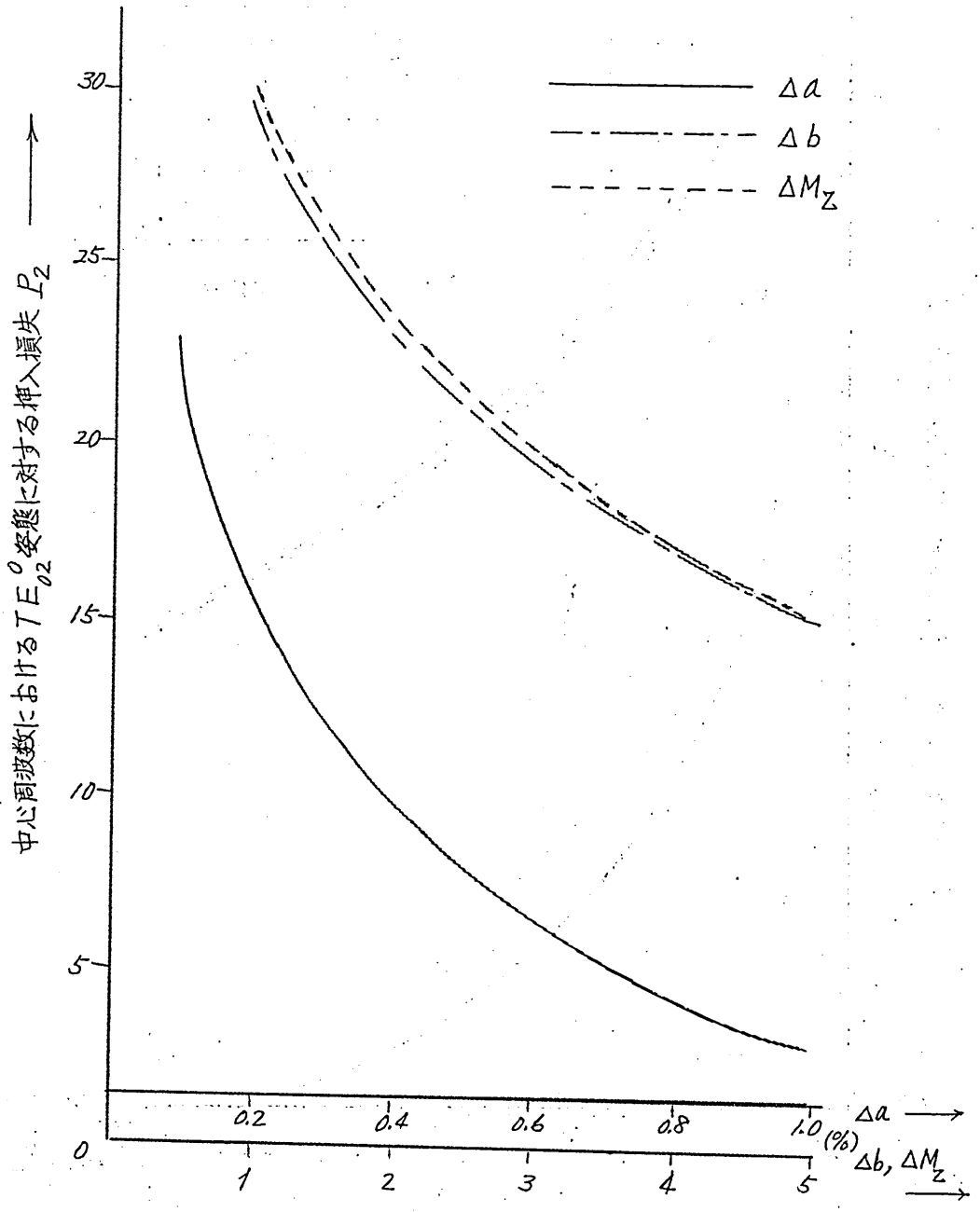
図A・6～A・9は同じく中心周波数50GCで設計されたスリッ

ト結合によるA形，B形，およびC形方波器に対する製作誤差の影響を示したものであって，a，b，およびスリットの寸法，したがって $\zeta = d/t$，の値がそれぞれ独立に Δa，Δb，および Δt だけ設計値から偏差した場合の中心周波数における姿態除去効果の変化を示したものである。ただし前述のとおり d はスリットの幅，t はスリットをもうける分割導体板の厚さである。

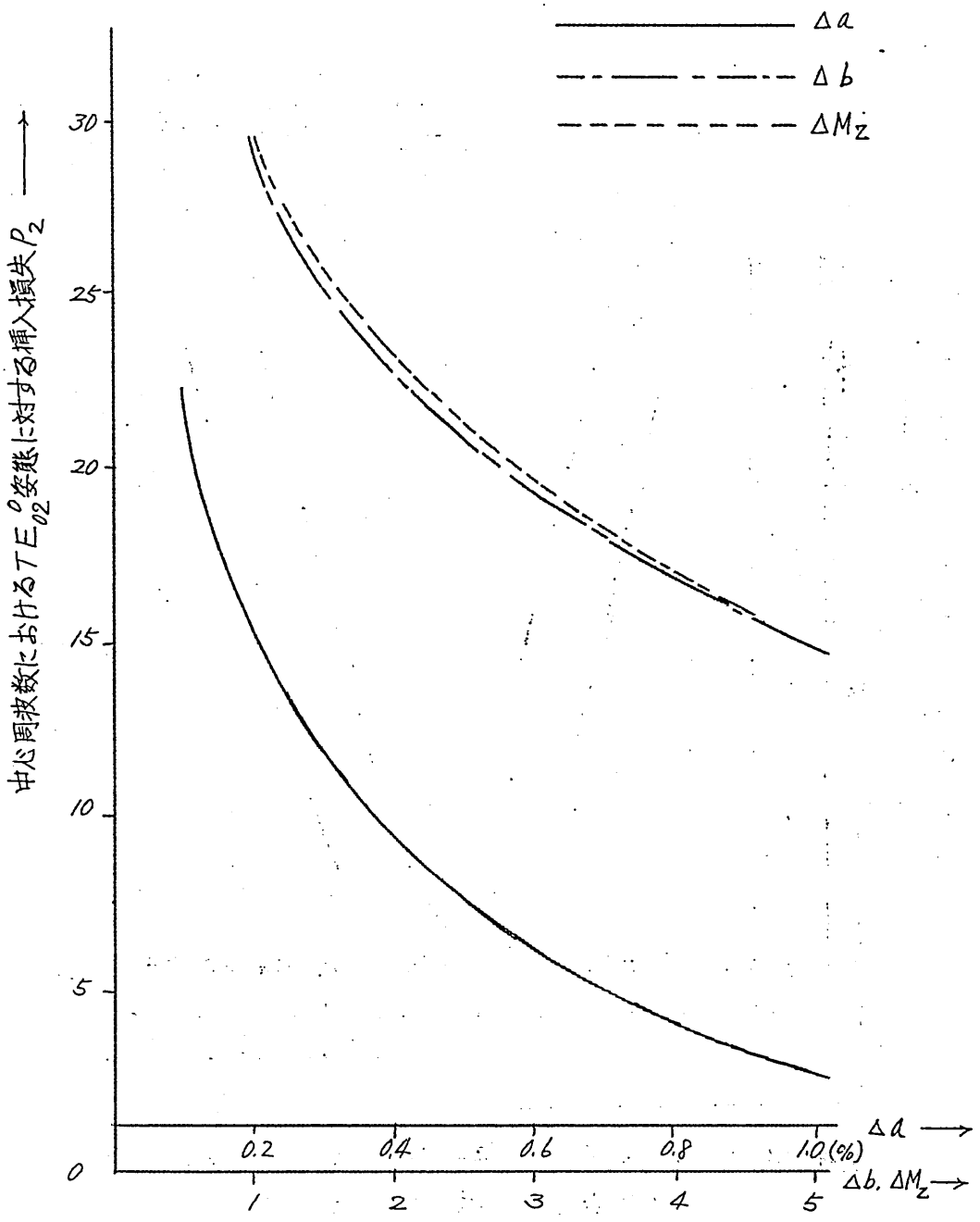
いずれの場合でも方形導波管の長辺 a の製作誤差が最も大きな影響をおよぼすことがわかる。24GC帯の場合について以上と同様の結果が得られた。



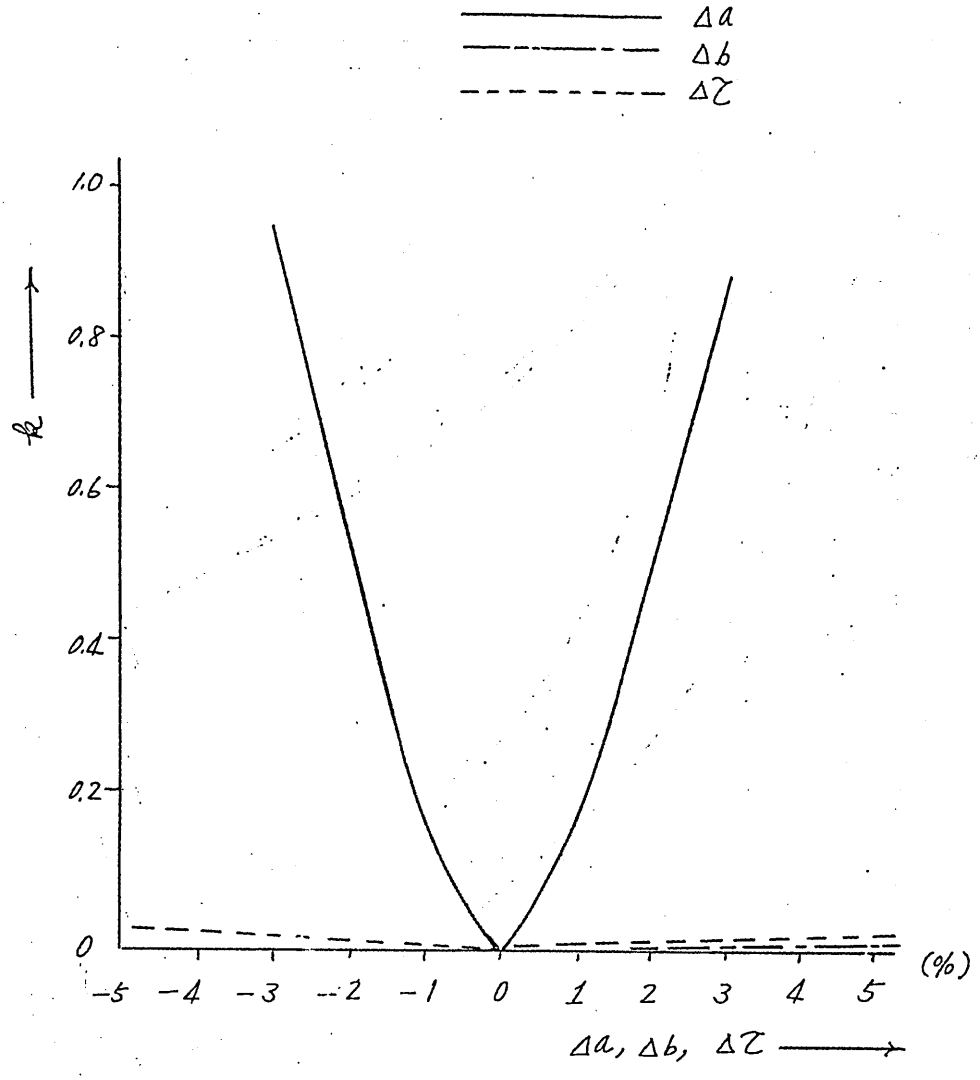
図A・3　スロット結合によるA形 TE_{02}^{0} 姿態除去沪波器の製作誤差と姿態除去効果との関係。中心周波数50GC。



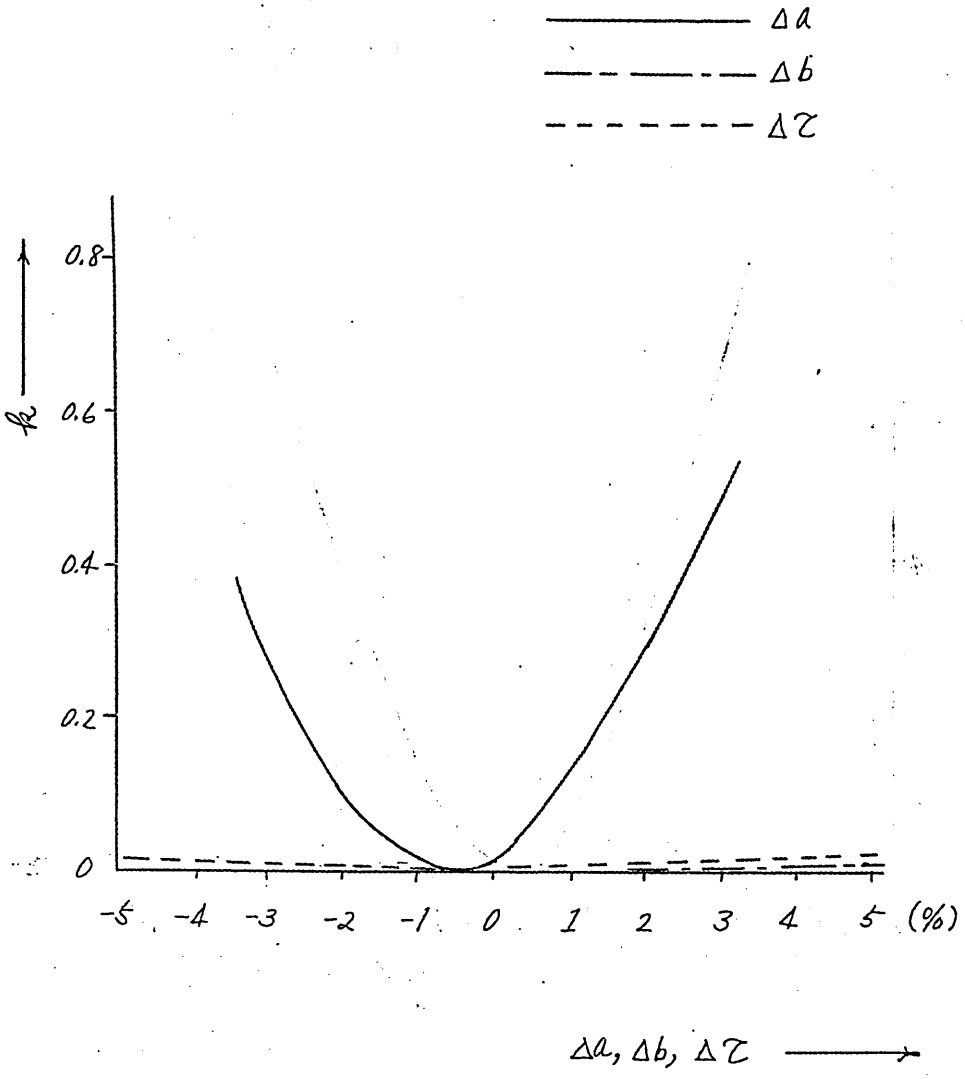
図A・4 スロット結合によるB形 TE_{02}^{0} 姿態除去沪波器の製作誤差と姿態除去効果との関係。中心周波数 50GC。



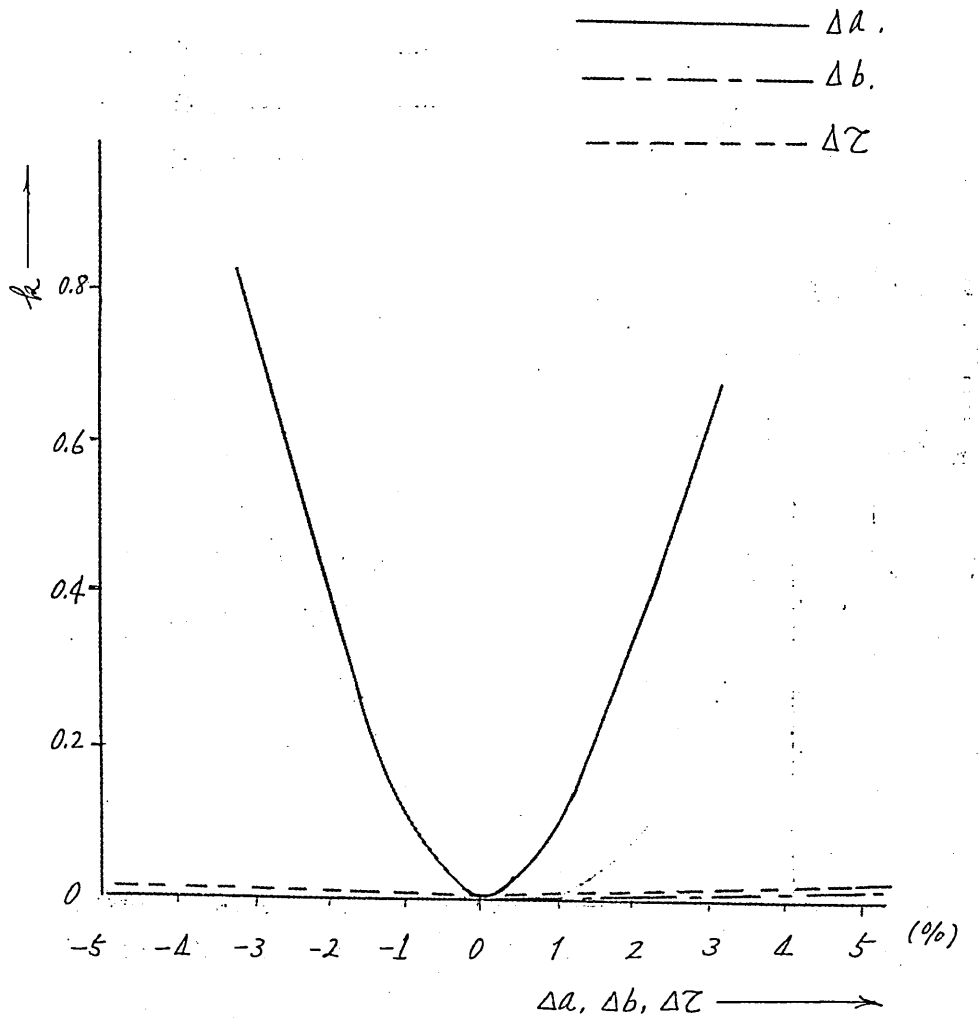
図A・5　スロット結合によるC形 TE_{02}^{0} 姿態除去沪波器の製作誤差と姿態除去効果との関係。中心周波数 50GC,



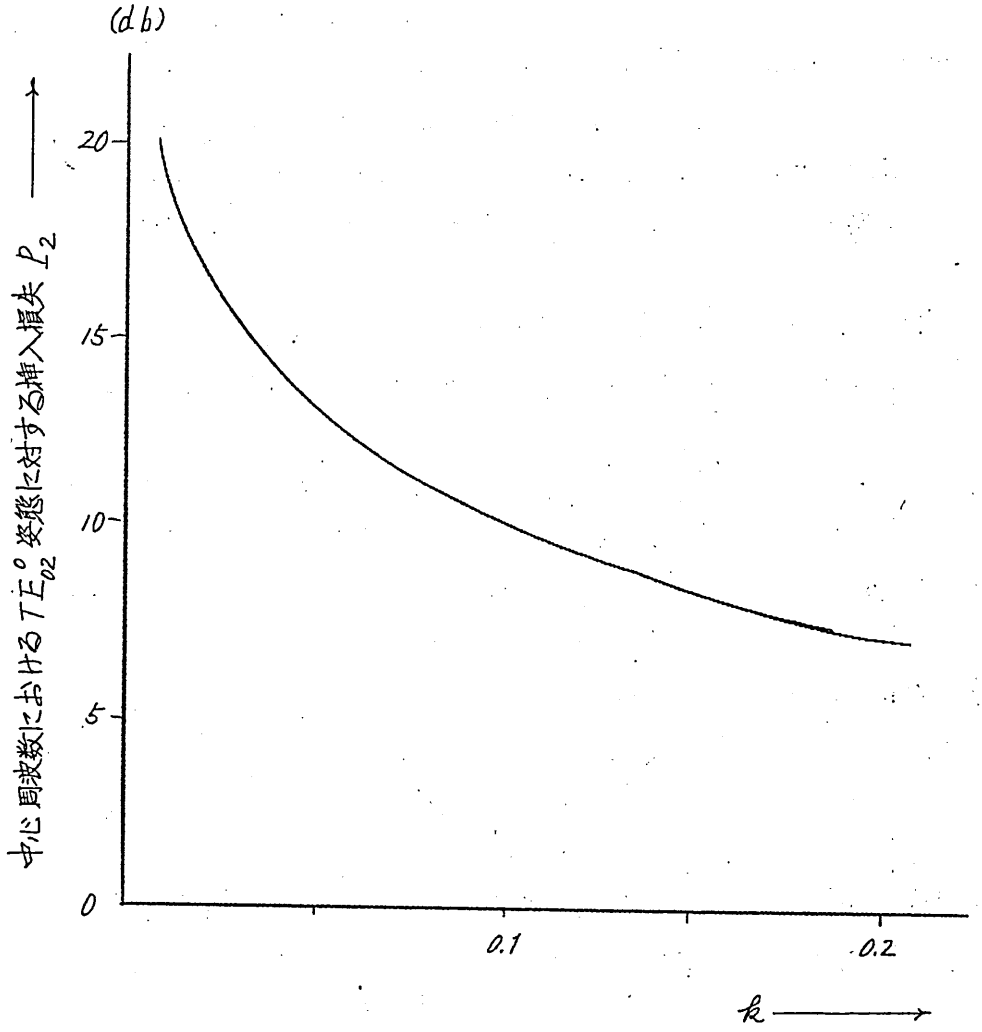
図A・6　スリット結合によるA形 TE_{02}^{c} 姿態除去沪波器の製作誤差とρとの関係。
中心周波数 50GC。



図A・7　スリット結合によるB形 TE_{02}^{0} 姿態除去汙波器の製作誤差と ρ との関係。
中心周波数 50 GC。



図A・8　スリット結合によるC形TE_{02}^{0}姿態除去沪波器の製作誤差とRとの関係。
中心周波数50GC。



図A・9　スリット結合による TE_{02}^{o} 姿態除去沪波器の中心周波数における姿態除去効果と k との関係。
（A形，B形，C形に共通）

文　献

(1) W. K. Kahn : "A TE_{02} Mode Suppressor for TE_{01} mode circular waveguide"
Microwave Res. Inst., 3rd Quarterly Rep. 718
Polytechnic Inst. of Brooklyn (1959-01)

(2) 島田 禎晉 "円形導波管 TE_{02} モードフィルタ"
昭和37 電気通信学会全国大会論文集II, 301 (昭37-11)

(3) S. E. Miller : "Coupled wave theory and waveguide applications"
B. S. T. J., 33, 661/719 (1954-05)

(4) H. A. Bethe : "Theory of diffraction by small holes"
Phys. Rev., 66, 163/182 (1944-10)

(5) 飯口 真一, 山口 和男 : "4SGC中心励振形ハイブリッド"
通研実報, 9, 565/570 (1960-05)

(6) N. Marcuvitz : "Waveguide Handbook"
MIT Rad. Lab. Series. 10, 241 (1951)

(7) S. B. Cohn : "Determination of aperture parameters by electrolytic tank measurement"
Proc. IRE., 39, 1416/1421 (1951-11)

(8) 小口 文一, 山口 和男 : "中心励振形 $TE_{10}^{\square}$ - TE_{01}° モード変換器"
通研実報, 7, 827/836 (1958-10)

(9) H. Pascher : "Langschlitz-Richtungskoppler für H-Wellen"
A. E. Ü., 13, 76/82 (1958-11)

(10) 飯口真一 : "TE_{01} 波円形導波管の僅かな曲折による姿態変換"
信学誌, 40, 870/876 (1957-08)

(11) 熊谷 信昭, 松尾義一 : "半円形導波管の僅かな折れ曲りによる TE_{0n} 姿態の反射および姿態変換"
輻射科学研究会資料 (1963-06)

輻射科学研究会資料

半円形導波管の僅かな折れ曲りによる TE_{0n} 姿態の反射および姿態変換

熊谷信昭　　松尾義一
（大阪大学工学部）

1963年6月22日

ミリ波伝送に用いられる円形導波管のTE_{01}姿態は，周知のとおり円周方向の電界成分しかないために，半径方向に導体板を挿入して2つの半円形導波管に分割しても電磁界分布の様相は変化しない。この性質を利用して各種の円形TE_{01}姿態用回路素子，たとえば励振器[1]，ハイブリッド[2]，不要姿態除去沪波器[3]等，を2つの半円形導波管に分割して構成する方法が提案されている。ところで，このような2つの半円形導波管を円形導波管と接続するためには，図1（a）または（b）のような半円形導波管の曲折部が必要となるが，このような曲折部を伝号TE_{01}姿態が通過すると反射を生ずると同時に，姿態変換によって他の不要姿態が発生する可能性がある。そのなかでも，簡単に除去することのできない不要円形電界姿態（TE_{0s}，$s \neq 1$）の発生量等は特に問題である。

そこで，一般にこのような半円形導波管の僅かな曲折部にTE_{0n}姿態（$n=1, 2, 3 \cdots$）が入射した場合の反射および姿態変換の様相を，折れ曲り角δの2乗以上の項を省略した1次近似理論によってしらべたところ，次のような結果を得た。計算の方法は飯口貞一氏によって行なわれた円形TE_{01}姿態導波管の僅かな折れ曲りによる反射および姿態変換の理論[4]と同じであるが，結果はもちろん全く違ったものとなる。すなわち，円形導波管の僅かな折れ曲りでは入射TE_{01}姿態に対し，折れ曲り角δの1次近似の範囲で発生する姿態はTM_{11}姿態とTE_{1n}姿態群のみであるのに対し，半円形導波管の場合にはTM_{mn}姿態群のうちmが偶数となる姿態，およびTE_{mn}姿態群のうちmが零または偶数となる姿態はすべて発生する可能性がある。円形導波管の折れ曲りの方が発生姿態の種類が少ないのは，折れ曲りの外側と内側の半円同士で発生する姿態が打ち消し合うためであると考えられる。しかし半円形導波管の場合には分割導体板が存在するために，円形導波管の場合に発生するTM_{11}姿態およびTE_{1n}姿態群は発生しない。

図1（a）または（b）に示したような半円形導波管の僅かな曲折部に，電界の振幅$V_{[0n]}$なるTE_{0n}姿態が入射した場合の透過波および反

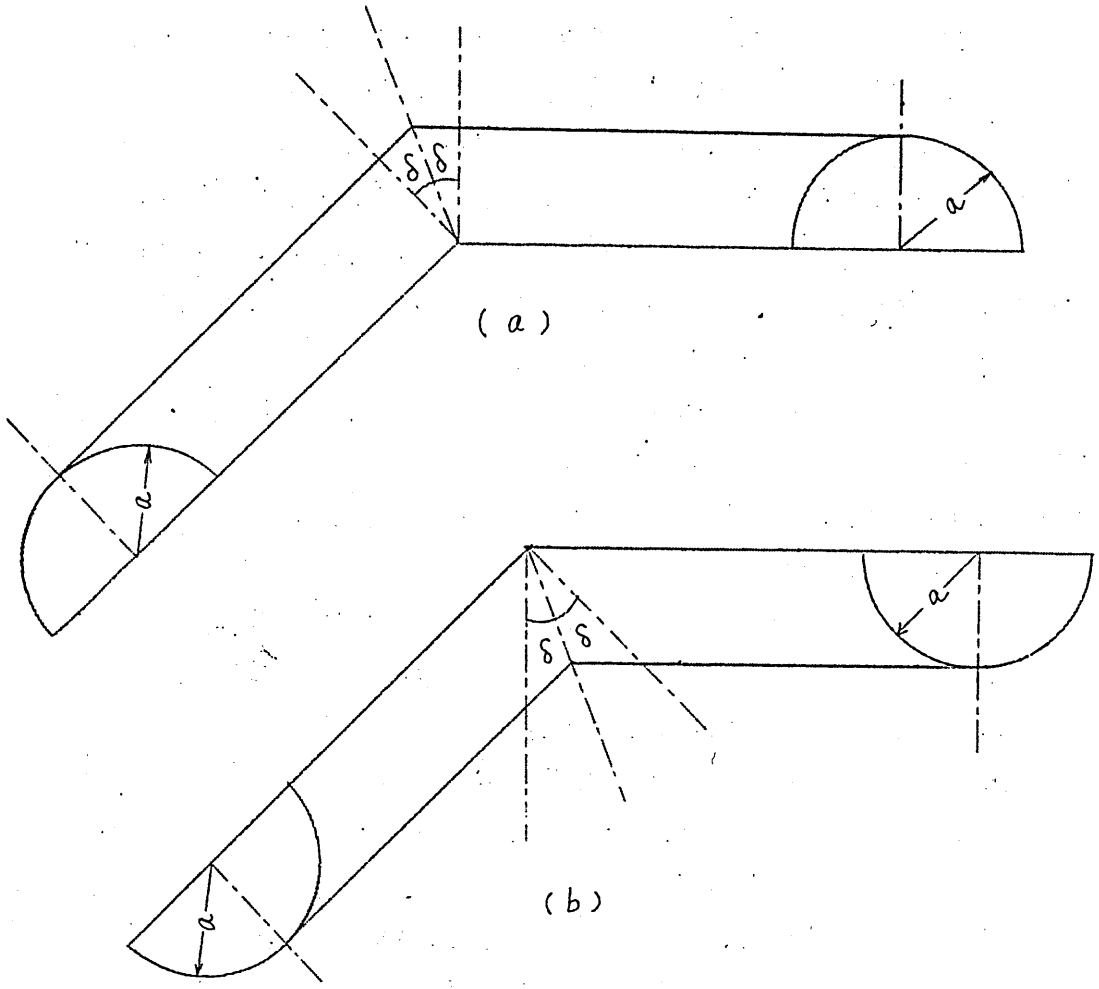


図 1.　半円形導波管の僅かな折れ曲り

射波，ならびに姿態変換によって新らしく発生する透過および反射 TE_{mn}，TM_{mn} 姿態群の電界の振幅を表わす式を示すと次のようになる。ただし、理論的取扱の方法は前述のとおり飯口氏の場合と全く類似であるから途中の計算はすべて省略し、得られた結果のみを示す。また、記号も特にことわらない限り飯口氏の論文にしたがったが、読書の便宜を考え、いまの場合に必要な記号のみを次に記しておく。

$[mn]$	TE姿態を表わす
(mn)	TM姿態を表わす
$V_{[0n]}$	入射 TE_{0n} 姿態の電界の振幅
$TV_{[0n]}$	透過 TE_{0n} 姿態の電界の振幅
$RV_{[0n]}$	反射 TE_{0n} 姿態の電界の振幅
U_{mn}	姿態変換によって生ずる透過波の電界の振幅
V_{mn}	姿態変換によって生ずる反射波の電界の振幅
$\chi_{[mn]}$	$J'_m(x)=0$ の n 番目の根
$\chi_{(mn)}$	$J_m(x)=0$ の n 番目の根
$k_{[mn]}$	$\chi_{[mn]}/a$
$k_{(mn)}$	$\chi_{(mn)}/a$
β_{mn}	位相定数
Y_{mn}	波動アドミタンス
λ_{gmn}	管内波長
λ	自由空間波長
η	空間の固有アドミタンス
a	半円形導波管の半径
2δ	折れ曲り角（rad.）

(1) 入射 TE_{0n} 姿態の透過波および反射波

透過 TE_{0n} 姿態：$TV_{[0n]} = V_{[0n]} + 2I_1 + I_2$ (1)

反射 TE_{0n} 姿態：$R V_{[0n]} = I_2$ (2)

ここで

$$I_1 = \mp j 2\beta_{[0n]} \alpha^3 V_{[0n]} F^2_{[0n]\varphi} \delta i_1 \quad (3)$$

$$i_1 = \int_0^1 J_1^2(\chi_{[0n]} Z) Z^2 dZ$$

$$I_2 = \mp j\eta \frac{\lambda \chi_{[0n]} a}{\pi} V_{[0n]} F^2_{[0n]\varphi} \frac{1}{Y_{[0n]}} \delta i_2 \quad (4)$$

$$i_2 = \int_0^1 J_0(\chi_{[0n]} Z) J_1(\chi_{[0n]} Z) Z dZ$$

$$F_{[0n]\varphi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a J_0(\chi_{[0n]})}$$

ただし，複号は図1(a)の場合には上側，(b)の場合には下側をとる．以下同様とする．

(2) 姿態変換によって生ずる TE_{0s} 姿態群 ($s \neq n$)

透過 TE_{0s} 姿態：$U_{[0s]} = \left(\frac{Y_{[0n]}}{Y_{[0s]}} + 1 \right) I_1' + \frac{Y_{[0n]}}{Y_{[0s]}} I_2'$ (5)

反射 TE_{0s} 姿態：$V_{[0s]} = \left(\frac{Y_{[0n]}}{Y_{[0s]}} - 1 \right) I_1' + \frac{Y_{[0n]}}{Y_{[0s]}} I_2'$ (6)

ここで

$$I_1' = \mp j 2\beta_{[0n]} \alpha^3 V_{[0n]} F_{[0n]\varphi} F_{[0s]\varphi} \delta i_1' \quad (7)$$

$$i_1' = \int_0^1 J_1(\chi_{[0n]} Z) J_1(\chi_{[0s]} Z) Z^2 dZ$$

$$I_2' = \mp j\eta \frac{\lambda \chi_{[0n]} a}{\pi} V_{[0n]} F_{[0n]\varphi} F_{[0s]\varphi} \frac{1}{Y_{[0n]}} \delta i_2' \quad (8)$$

$$i_2' = \int_0^1 J_0(\chi_{[0n]} Z) J_1(\chi_{[0s]} Z) Z dZ$$

(3) 姿態変換によって生ずる TE_{ml} 姿態群

(ただし $ml = 0$ を除く)

透過 TE_{ml} 姿態 : $$U_{[ml]} = \left(\frac{Y_{[0l]}}{Y_{[ml]}} + 1 \right) I_3 + \frac{Y_{[0l]}}{Y_{[ml]}} I_4 \quad (9)$$

反射 TE_{ml} 姿態 : $$V_{[ml]} = \left(\frac{Y_{[0l]}}{Y_{[ml]}} - 1 \right) I_3 + \frac{Y_{[0l]}}{Y_{[ml]}} I_4 \quad (10)$$

ここで

$$I_3 = \mp j\beta_{[0l]} V_{[0l]} \frac{2}{m^2-1} F_{[0l]\varphi} F_{[ml]\varphi} \delta i_3, \quad m: \text{偶数}$$
$$= 0, \quad m: \text{奇数} \qquad (11)$$

$$i_3 = \int_0^a J_1(k_{[0l]} r) J_m'(k_{[ml]} r) r^2 dr$$

$$I_4 = \mp j\eta \frac{\lambda \chi_{[0l]}}{2\pi a} V_{[0l]} \frac{2}{m^2-1} F_{[0l]\varphi} \frac{1}{Y_{[0l]}} \delta (i_4 + i_4'), \quad m: \text{偶数}$$
$$= 0, \quad m: \text{奇数} \qquad (12)$$

$$i_4 = F_{[ml]\varphi} \int_0^a J_0(k_{[0l]} r) J_m'(k_{[ml]} r) r dr$$

$$i_4' = mF_{[ml]r} \int_0^a J_0(k_{[0l]} r) J_m(k_{[ml]} r) dr$$

ただし

$$F_{[ml]\varphi} = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\pi}} \frac{\chi_{[ml]}}{\sqrt{\chi^2_{[ml]} - m^2}} \cdot \frac{1}{a J_m(\chi_{[ml]})}$$

$$F_{[ml]r} = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\pi}} \frac{m}{\sqrt{\chi^2_{[ml]} - m^2}} \cdot \frac{1}{J_m(\chi_{[ml]})}$$

$$\varepsilon_m = 2 \ (m = 0), \quad \varepsilon_m = 4 \ (m \neq 0)$$

したがって m が奇数の場合には

$$U_{[ml]} = V_{[ml]} = 0$$

となって TE_{ml} 姿態 ($m \neq 0$) は発生しない.

(4) 姿態変換によって生ずるTM$_{mn}$姿態群

透過TM$_{mn}$姿態：$U_{(mn)} = \left(\frac{Y_{[0n]}}{Y_{(mn)}} + 1 \right) I_5 + \frac{Y_{[0n]}}{Y_{(mn)}} I_6$ (13)

反射TM$_{mn}$姿態：$V_{(mn)} = \left(\frac{Y_{[0n]}}{Y_{(mn)}} - 1 \right) I_5 + \frac{Y_{[0n]}}{Y_{(mn)}} I_6$ (14)

ここで

$$I_5 = \mp j\beta_{[0n]} V_{[0n]} \frac{2}{m^2-1} F_{[0n]\varphi} F_{(mn)\varphi} \delta i_5, \quad m: \text{偶数}$$
$$= 0, \quad m: \text{奇数} \qquad (15)$$

$$i_5 = \int_0^a J_1(k_{[0n]} r) J_m(k_{(mn)} r) r dr$$

$$I_6 = \mp j\eta \frac{\lambda \chi_{[0n]}}{2\pi a} V_{[0n]} \frac{2}{m^2-1} F_{[0n]\varphi} \frac{1}{Y_{[0n]}} \delta (i_6 + i_6'), \quad m: \text{偶数}$$
$$= 0, \quad m: \text{奇数} \qquad (16)$$

$$i_6 = F_{(mn)\varphi} \int_0^a J_0(k_{[0n]} r) J_m(k_{(mn)} r) dr$$

$$i_6' = m F_{(mn)r} \int_0^a J_0(k_{[0n]} r) J_m'(k_{(mn)} r) r dr$$

ただし

$$F_{(mn)\varphi} = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\pi}} \frac{m}{\chi_{(mn)}} \frac{1}{J_{m+1}(\chi_{(mn)})}$$

$$F_{(mn)r} = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\pi}} \frac{1}{a J_{m+1}(\chi_{(mn)})}$$

$\varepsilon_m = 2$ ($m = 0$)，$\varepsilon_m = 4$ ($m \neq 0$)

したがって，mが零または奇数の場合には

$$U_{(mn)} = V_{(mn)} = 0$$

となって，TM$_{mn}$姿態は発生しない．

以上の諸式から，半円形導波管の僅かな曲折部に入射したTE$_{0n}$姿態の透過および反射波、ならびに姿態変換波の振幅の大きさをす

べて求めることができる.
振幅が求まれば, 電力は

$$P_{[mn]} = \frac{\eta}{2} \frac{\lambda}{\lambda_{g[mn]}} |V_{[mn]}|^2 \qquad (17)$$

$$P_{(mn)} = \frac{\eta}{2} \frac{\lambda_{g(mn)}}{\lambda} |V_{(mn)}|^2 \qquad (18)$$

から計算できる.

以上の諸量は仮口氏の定義した電力の平方根の dimension を示す記号によって表すこともできる. たとえば, 折れ曲り角 2δ なる半円形導波管の曲折部に単位電力の TE_{0n} 姿態が入射したとき, 透過または反射する TE_{0n} 姿態の大きさ, および姿態変換によって生ずる透過または反射 TE_{0s} 姿態 ($s \neq n$) の大きさを上述の S で表示すると次のようになる.

$${}_{T}S^{[0n]}_{[0n]} = 1 + 2I_{nn} + I'_{nn} \qquad (19)$$

$${}_{T}S^{[0n]}_{[0s]} = I'_{ns} \qquad (20)$$

$${}_{T}S^{[0n]}_{[0s]} = \left(\frac{\lambda_{g[0s]}}{\lambda_{g[0n]}} + 1 \right) I_{ns} + I'_{ns}, \quad (s \neq n) \qquad (21)$$

$${}_{R}S^{[0n]}_{[0s]} = \left(\frac{\lambda_{g[0s]}}{\lambda_{g[0n]}} - 1 \right) I_{ns} + I'_{ns}, \quad (s \neq n) \qquad (22)$$

記号 ${}_{T}S^{[0n]}_{[0n]}$, ${}_{R}S^{[0n]}_{[0n]}$, ${}_{T}S^{[0n]}_{[0s]}$ および ${}_{R}S^{[0n]}_{[0s]}$ はそれぞれ入射 TE_{0n} 姿態から透過 TE_{0n}, 反射 TE_{0n}, 透過 TE_{0s} および反射 TE_{0s} 各姿態への結合の大きさを示す.
ただし.

$$I_{ns} = \mp j \frac{4\pi a^3}{\sqrt{\lambda_{g[0n]} \lambda_{g[0s]}}} F_{[0n]\varphi} F_{[0s]\varphi} \delta i', \qquad (23)$$

$$I'_{ns} = \mp j \frac{\chi_{[on]} a}{\pi} \sqrt{\lambda g_{[on]} \lambda g_{[os]}}\, F_{[on]\psi} F_{[os]\psi} \delta i'_2 \qquad (24)$$

i'_1, i'_2 はそれぞれ式(7)および(8)に用いたものと同じである.

以上の諸式において, 複号は最初に述べたとおり上側が図(a)の場合, 下側が図(b)の場合に対応する.

数値例として半円形導波管の直径 $2a$ を 51 mm, 周波数を 50 GC に選んで単位電力の TE_{01} 姿態が入射した場合を考え, 折れ曲り角 (2δ) 1ラディアン当または1度当の反射 TE_{01}, 透過 TE_{02}, 反射 TE_{02} 各姿態に対する上述の S の値を計算すると表1のようになる.

表1. 折れ曲り角 (2δ) 1ラディアン当または1度当の S の値 (半円形導波管の直径 $2a = 51$ mm, 周波数 50 GC)

S ＼ 姿態	反射 TE_{01}	透過 TE_{02}	反射 TE_{02}
1 rad 当	$\mp j\, 0.0124$	$\mp j\, 2.772$	$\pm j\, 0.00445$
1 度 当	$\mp j\, 0.216 \times 10^{-3}$	$\mp j\, 0.0483$	$\pm j\, 0.777 \times 10^{-4}$

文　献

(1) 小口文一, 山口和男: "中心励振型 $TE_{10}^{\square} - TE_{01}^{\circ}$ モード変換器" 通研実報, 7, 827/836 (1958-10)

(2) 飯口眞一, 山口和男: "48 GC 中心励振形ハイブリッド" 通研実報 9 565/570 (1960-05)

(3) 熊谷信昭, 倉薗貞夫, 中原恒雄, 倉内憲孝: "TE_{01}° 姿態導波管用不要 TE_{0n}° 姿態除去沪波器" 輻射科学研究会資料 (1963-06)

(4) 飯口眞一: "TE_{01} 波円形導波管の僅かな曲折による姿態変換" 信学誌, 40 870/876 (1957-08)

輻射科学研究会資料

広帯域サーキュレータ形エサキダイオード増巾器

（三菱電機株式会社研究所）

喜連川　　隆

白　幡　　潔

武　富　大　児

（昭和３８年６月２２日）

1 まえがき

最近注目されている マイクロ波低雑音増巾器の一つにエサキダイオード増巾器がある。エサキダイオード増巾器については 今迄 種々の形につき研究が行われてきたが 増巾が二方向に行われるのでアイソレータとハイブリッド回路或いはサーキュレータにより増巾が一方向に行われるようにした形が雑音特性及び実用性の点で勝れている。エサキダイオード増巾器はメーザ、パラメトリック増巾器に比較して、

(1) 構造が簡単。アイドラ回路 ポンプ回路不要。
(2) 高周波ポンプ電力が不要、エネルギ源として小さな乾電池があればよい。
(3) 増巾帯域巾を広くできる。
(4) 安 定
(5) 小形 軽量 安価

という 特色をもつ

しかし 欠点は エサキダイオードでは 雑音指数の点で前二者より やゝ劣り 1000 Mc 附近で 3～3.5 dB 程度が現状である。

この増巾器の実験は 1300 M で行った。特に留意したのは次の諸点である。

(1) ダイオードからみた外部コンダクタンスを調節するため $\frac{1}{4}$ 波長変成器 直列スタブを用いた報告があるが この方法では外形が非常に大形となるので外形を大きくせずに外部コンダクタンスを調節する方法を考案した。

(2) 並列容量の小さいダイオードを用いると並列共振回路の Q が低くなりサーキュレータのインピーダンス特性との加減で発振するため Q を高くして発振を防いだ。

(3) サーキュレータのインピーダンス特性を積極的に利用し 増巾帯域巾の広帯域化を行った。

2 理 論

2.1 エサキダイオードの等価回路

エサキダイオードの等価回路を図2.1.1に示す。

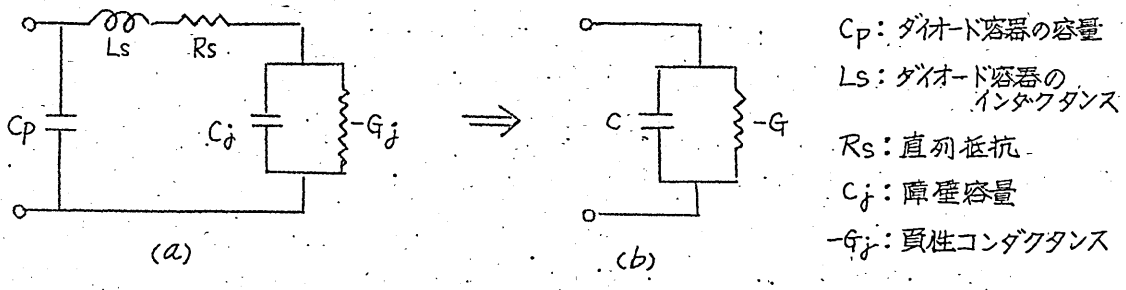


図2.1.1 エサキダイオードの等価回路

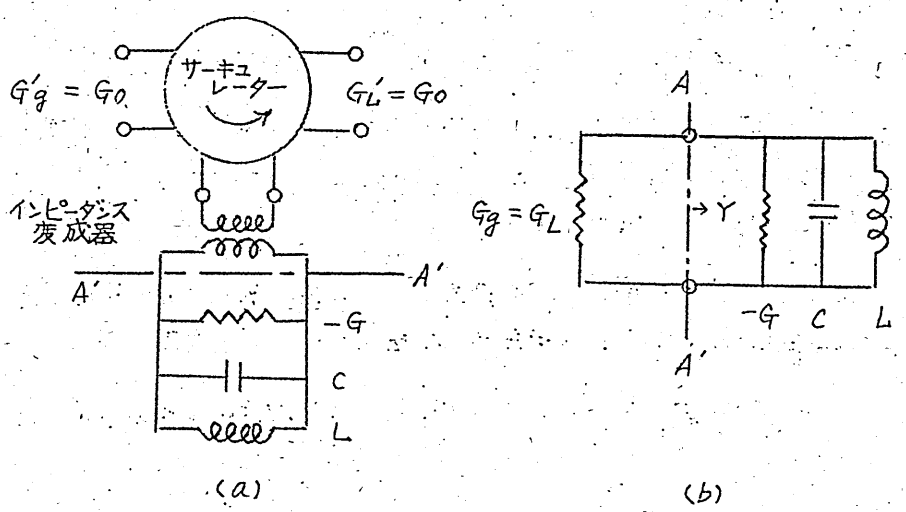
増巾器を設計する場合には図2.1.1(b)の回路が便利である。C, −Gは図2.1.1(a)の各定数より、次式で求まる。

$$-G = \frac{-G_j + R_S(G_j^2 + \omega^2 C_j^2)}{1 + (R_S^2 + \omega^2 L_S^2)(G_j^2 + \omega^2 C_j^2) - 2(\omega^2 L_S C_j + R_S G_j)} \qquad (2.1.1)$$

$$C = \frac{C_j - L_S(G_j^2 + \omega^2 C_j^2)}{1 + (R_S^2 + \omega^2 L_S^2)(G_j^2 + \omega^2 C_j^2) - 2(\omega^2 L_S C_j + R_S G_j)} + C_P \qquad (2.1.2)$$

2.2 利　得

サーキュレータ形エサキダイオード増巾器の等価回路を図2.2.1(a)に示す。サーキュレータが理想的でそのコンダクタンスが目的の周波数帯域内でG_0に等しいとし図2.2.1(a)に示す。サーキュレータが理想的でそのコンダクタンスが目的の周波数帯域内でG_0に等しいとし、図2.2.1(b)の回路で考える。



G_0 ; 線路の特性コンダクタンス
G'_g : 電源コンダクタンス
G'_L : 負荷コンダクタンス
$G_g = G_L$: A − A' よりみた電源負荷コンダクタンス
−G : ダイオードの負性コンダクタンス
C : ダイオードの並列容量
L : 同調用インダクタンス.

図2.2.1 サーキュレータ形エサキダイオード増巾器の等価回路.

この回路の電力利得 $A(\omega)$ は $A-A'$ より、並列共振回路をみた電圧反射係数 Γ の平方で表わされる。

$$A(\omega)=\Gamma^2=\left|\frac{G_L-Y}{G_L+Y}\right|^2=\left|\frac{G_L+G-j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}{G_L-G+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}\right|^2$$

$$=\frac{(G_L+G)^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}{(G_L-G)^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}\simeq\frac{(G_L+G)^2+4C^2(\omega-\omega_0)^2}{(G_L-G)^2+4C^2(\omega-\omega_0)^2}\qquad(2.2.1)$$

従って、増巾中心周波数

$$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\qquad(2.2.2)$$

における電力利得 $A(\omega_0)$ は

$$A(\omega_0)=\left(\frac{G_L+G}{G_L-G}\right)^2\qquad(2.2.3)$$

となり、$A-A'$ よりサーキュレータ側をみたコンダクタンス G_L を安定条件 $G_L>G$ が成立する範囲で G に近づけば $A(\omega_0)$ が大きくなる。

利得を調整するためには次の二つの方法がある。

(1) バイアス電圧を変化させる。
(2) ダイオード負性コンダクタンスよりみた外部コンダクタンスを調整する。

(1)の方法は 後述するように 増巾器を雑音指数最小点で動作させるという点からみれば望ましくない。従って(2)の方法をとる必要があり これには次のインピーダンス変成器を用いる二つの方法がある。

(イ) 1/4 波長インピーダンス変成器
(ロ) 直並列 LC型インピーダンス変成器

次に(ロ)の原理を、LC形インピーダンス変成器を用いた図2.2.2のサーキュレータ形増巾器の等価回路につき アドミッタンス チャートで説明する。

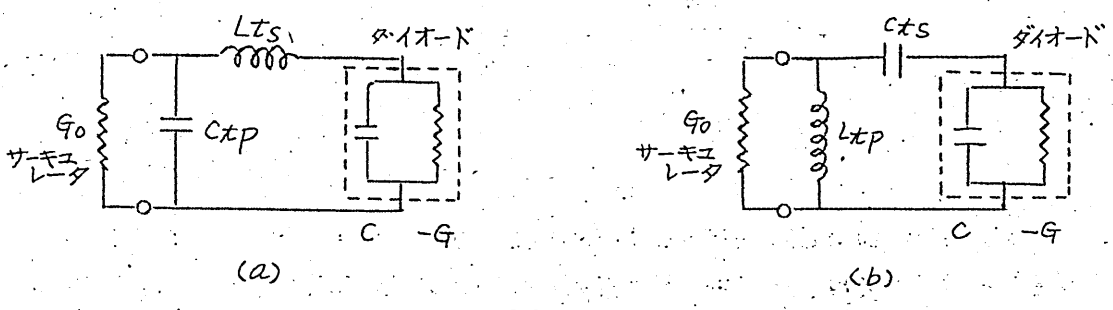


図 2.2.2

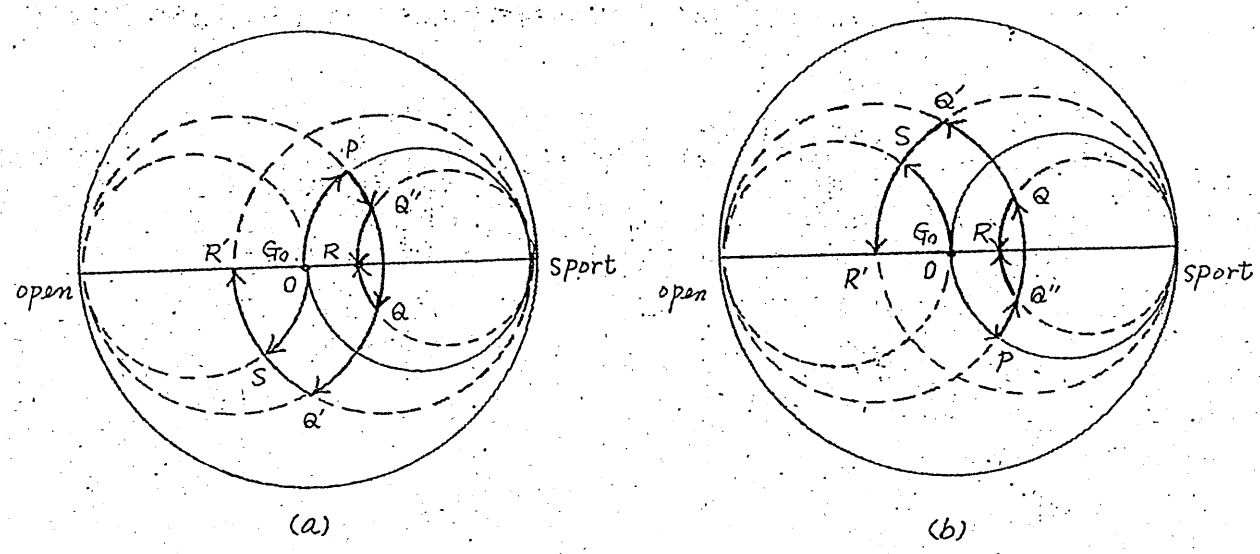


図 2.2.3

図2.2.2 (a)の−Gよりみたコンダクタンスは図2.2.3(a)で説明すると先ずサーキュレータのコンダクタンスG_0がアドミッタンスチャートの中心にあったとし、これに並列にC_{tp}を挿入するとC_{tp}から左を見たアドミッタンスはP点となる。次に直列にL_{ts}を挿入するとQ点となり、さらにダイオードの並列容量Cによりサセプタンス分のR点となる。この点はG_0よりコンダクタンスが大きくなっている。G_0よりコンダクタンスを小さくするためにはL_{ts}を大きくしP点をQ'点まで延ばせば−GよりみたコンダクタンスはR'点となる。

又 図2.2.2.(a)の変形として、小さいL_{ts}を挿入してP点をQ'点まで動かし次にダイオードと並列にインダクタンスを挿入してダイオードの並列容量と共にサセプタンス分を打消しR点へ持ってくる方法(図2.2.4)も考えられる。

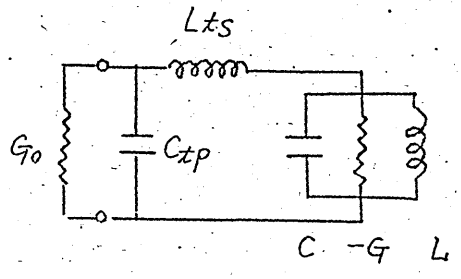


図 2.2.4

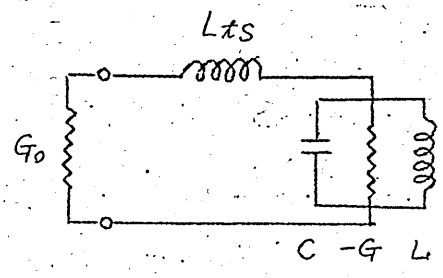


図 2.2.5

又 図2.2.2 (a)のC_{tp}を挿入せずL_{ts}により、S点まで動かし、ダイオードの並列容量Cのみで、又は ダイオードと並列にインダクタンスを挿入してこれとCにより

サセプタンスを打消しR'実に持ってくることもできる。(図2.2.5)

図2.2.2(b)についても全く同様の考え方ができ これの変形として図2.2.6、2.2.7が考えられる。図2.2.3(b)はこれらにつき、アドミッタンスチャートで説明したものである。

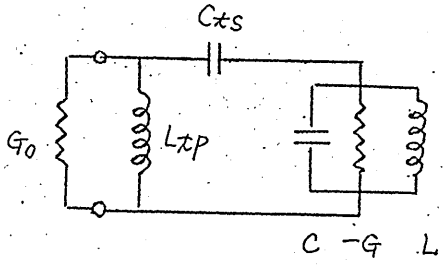


図2.2.6

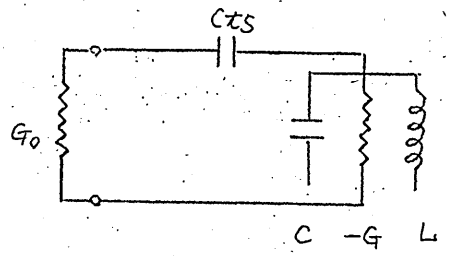
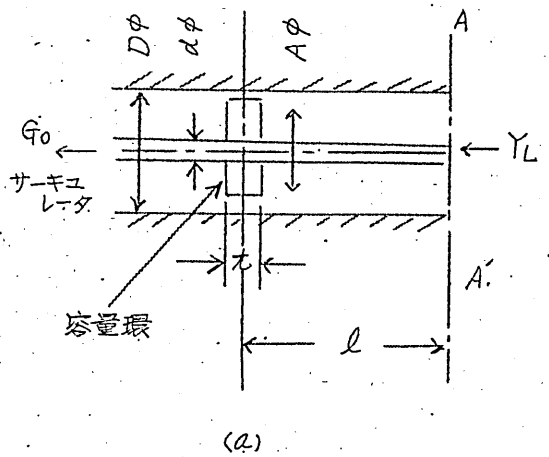


図2.2.7

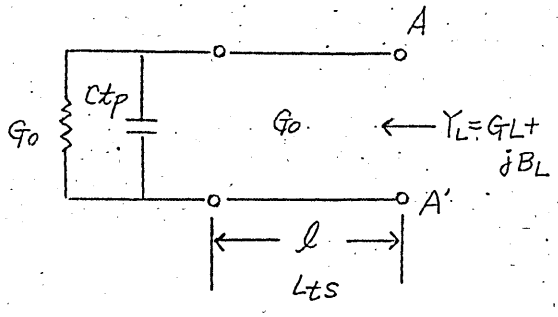
以上の諸法のどれを用いるかは 回路の構成 ダイオードの特性等により決定しなければならない。

本実験は同軸線路により行ったが ダイオードの負性コンダクタンスから、サーキュレータ側をみたコンダクタンスを高くする必要が生じ、上記各種の方法の中から同軸線路に採用して調整が行い易いこと及び 小形化の点を考え 図2.2.4を採用した。

実際の構造は図2.2.8に示すものを新しく考案した。次にこれにつきやゝ詳しく説明する。



(a)



(b)

図 2.2.8 A-A' からサーキュレータ側をみたコンダクタンスを高くする方法.

図2.2.4に於いて並列に挿入するC_{tp}は特性コンダクタンスG_0の同軸線路内に挿入した金属製容量環によってつくられ、これを挿入した点からA-A'までの間の線路長で直列に挿入するL_{ts}を構成する。C_{tp}は次式により与えられる。

$$C_{tp} = \frac{0.556\ \varepsilon \cdot t}{\log_e\left(\frac{D}{A}\right)} \quad (pF) \qquad (2.2.4)$$

- D : 同軸線路外径
- A : 容量環の径
- t : 容量環の厚さ (cm)
- ε : 容量環と外導体との間の比誘電率

図2.2.8 (b)でA-A'よりみたアドミッタンスY_Lは次式で計算できる。

$$Y_L = G_0 \cdot \frac{(G_0 + j\omega C_{tp}) + j G_0 \tan \beta l}{G_0 + j(G_0 + j\omega C_{tp}) \tan \beta l} \quad \left(\text{ただし } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$$= G_0 \cdot \frac{G_0^2(1+\tan^2\beta l) + j\omega C_{tp}\{G_0(1-\tan^2\beta l) - \omega C_{tp} \tan \beta l\}}{(G_0 - \omega C_{tp} \tan \beta l)^2 + G_0^2 \tan^2 \beta l} \qquad (2.2.5)$$

従ってY_Lの実数部G_Lは

$$\frac{G_L}{G_0} = \frac{G_0^2(1+\tan^2\beta l)}{(G_0 - \omega C_{tp} \tan \beta l)^2 + G_0^2 \tan^2 \beta l} \qquad (2.2.6)$$

$\tan \beta l$を変数とし、上式の変化の様子をグラフにしたのが、図2.2.9である。

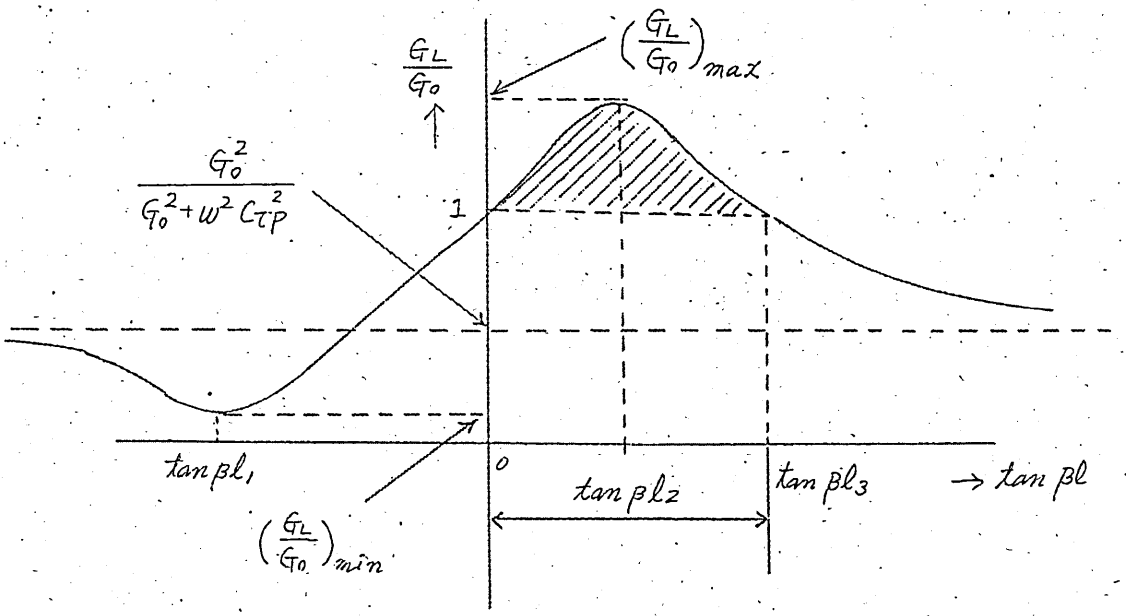


図 2.2.9

図中の l_1, l_2, l_3 及び $\left(\frac{G_L}{G_0}\right)_{max}$, $\left(\frac{G_L}{G_0}\right)_{min}$ は次の様に表わせる。

$$l_1 = \frac{1}{\beta}\tan^{-1}\left(\frac{-\omega C_{tp}-\sqrt{\omega^2 C_{tp}^2+4G_0^2}}{2G_0}\right) \qquad (2.2.7)$$

$$l_2 = \frac{1}{\beta}\tan^{-1}\left(\frac{-\omega C_{tp}+\sqrt{\omega^2 C_{tp}^2+4G_0^2}}{2G_0}\right) \qquad (2.2.8)$$

$$l_3 = \frac{1}{\beta}\tan^{-1}\left(\frac{2G_0}{\omega C_{tp}}\right) \qquad (2.2.9)$$

$$\left(\frac{G_L}{G_0}\right)_{max} = \frac{2G_0^2}{2G_0^2+\omega^2 C_{tp}^2-\omega C_{tp}\sqrt{\omega^2 C_{tp}^2+4G_0^2}} \qquad (2.2.10)$$

$$\left(\frac{G_L}{G_0}\right)_{min} = \frac{2G_0^2}{2G_0^2+\omega^2 C_{tp}^2+\omega C_{tp}\sqrt{\omega^2 C_{tp}^2+4G_0^2}} \qquad (2.2.11)$$

ただし. $0 \leqq l \leqq \frac{\lambda}{2}$ の場合を考えた.

図から. 明らかなように

$$0 < l < l_3 < \frac{\lambda}{4}$$

の範囲では $\frac{G_L}{G_0}$ は1より大となり、図2.2.8(b)は集中的にインダクタンスを直列に.

挿入するのと等価になる. C_{tp} 及び l を変えれば G_0 より大きい任意の値がえられる。

2.3 帯域巾

増巾帯域巾を電力利得最大中心周波数の電力利得 $A(\omega_0)$ の $1/2$ になる周波数巾と定義すれば

$$A(\omega_0+\Delta\omega)=\frac{1}{2}A(\omega_0) \qquad (2.3.1)$$

から $\Delta\omega$ を求めることにより 帯域巾 B は

$$B=\frac{\Delta\omega}{\pi} \qquad (2.3.2)$$

となる.

式(2.2.1), 式(2.3.1)より

$$\Delta\omega=\frac{(G_L+G)(G_L+G)}{2C\sqrt{(G_L+G)^2-2(G_L-G)^2}} \qquad (2.3.3)$$

となり 高利得の場合

$$(G_L+G)^2 \gg (G_L-G)^2 \qquad (2.3.4)$$

とみなせるから $\Delta\omega$ は次の如く表わせる.

$$\Delta\omega \simeq \frac{G_L-G}{2C} \qquad (2.3.5)$$

従って: 増巾帯域巾 B は式(2.3.2). 式(2.3.5)より

$$B=\frac{G_L-G}{2\pi C} \qquad (2.3.6)$$

である. この結果は、サーキュレータのコンダクタンスが目的の周波数帯域内で一定と考えて得たものである。

ところがサーキュレータの開口からみたアドミッタンス特性は図2.3.1に示す傾向をもつ。矢印は周波増加の方向を示しており 曲線(a)と曲線(b)とは互に $\frac{1}{4}$ 波長離れた点からみたアドミッタンスである. 曲線(C)は, $-G$, L, C より成る共振回路アドミッタンスでコンダクタンス分はその絶対値をもって示してある.

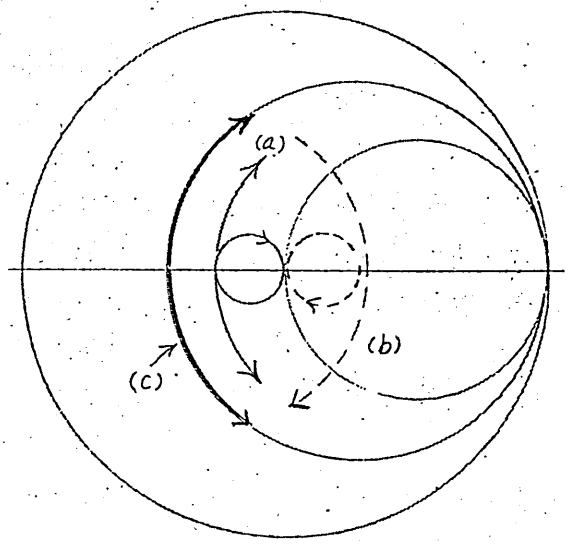
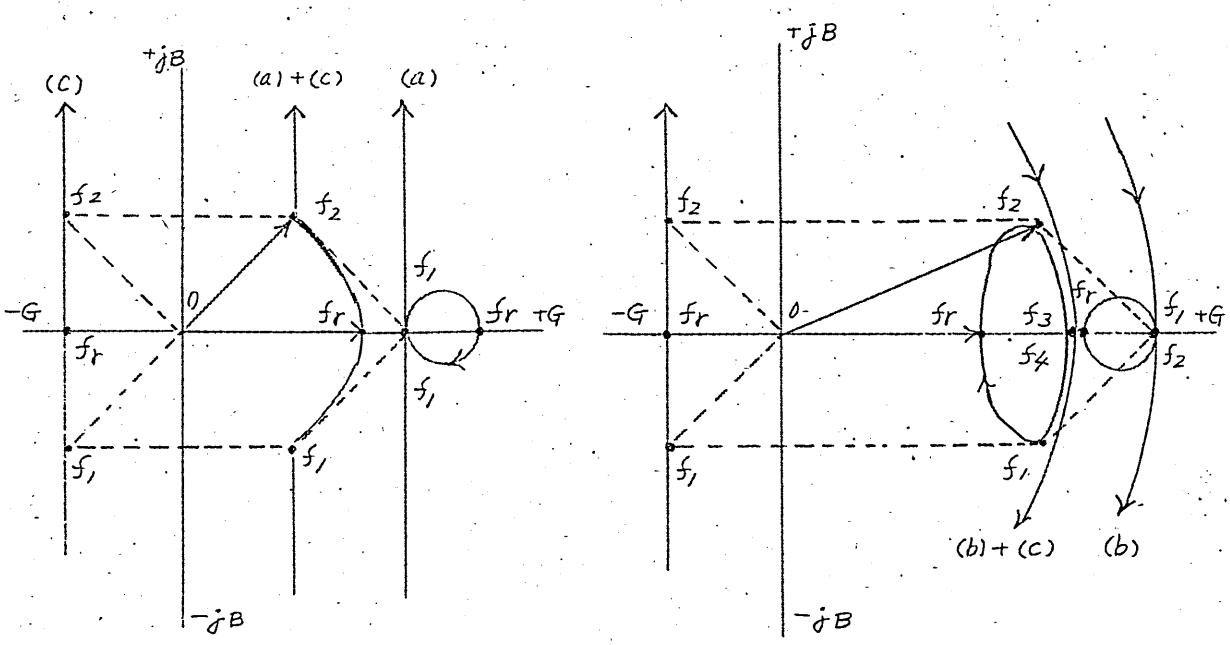


図2.3.1　サーキュレータ　及び共振回路の
アドミッタンス　特性.

図2.3.1で曲線(c)と曲線(a)又は曲線(b)とより・増幅器全体のアドミッタンスが求まり. 周波数変化に対する利得変化の様子がわかるが　直交座標で考えた方がわかり易い　これを　図2.3.2 (a)・(b)に示す.



(a)　広帯域　　(b)　狭帯域

図 2.3.2

理想的な広帯域化を行うには、増巾器全体のサセプタンス分を0とし コンダクタンス分を周波数に無関係に一定としなければならない。しかし サーキュレータのアドミッタンスは図2.3.1に示す如く コンダクタンス分も変化するため 図2.3.2(a)に示すように共振周波数附近でサセプタンス分を打消し 全体のアドミッタンスと原点との距離を共振周波数 f_r を中心として f_1 と f_2 との間でほゞ一定とすれば f_1 と f_2 との間で利得変動は少くなり 広帯域化が行える。全体のアドミッタンスと原点との距離を一定にすれば利得変動が少くなるのは 式(2.2.1)の分母がその距離の平方を表わしていることからわかる。サーキュレータのアドミッタンスが 図2.3.2(b)のようであれば 増巾器全体のアドミッタンスと原点との距離が共振周波数 f_r の場合と f_1, f_2 の場合とで大きく変化し、狭帯域となる。図2.3.2(a)及び(b)の場合に得られる増巾特性を図2.3.3に示す。

以上の考察から広帯域化を行うには ダイオードとサーキュレータとの距りを適当に選ぶ必要がある。

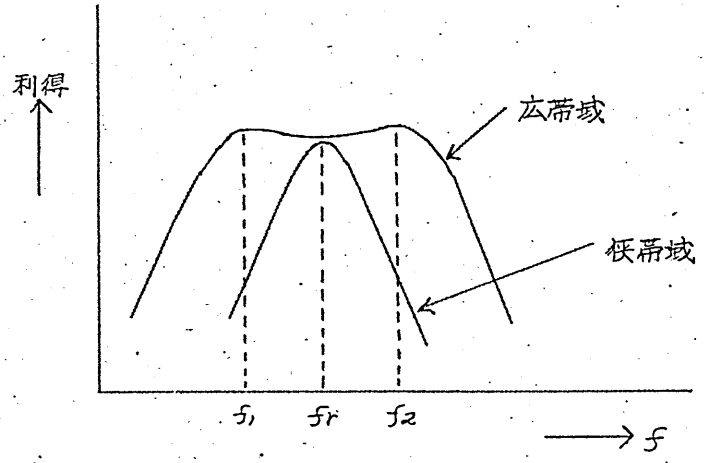


図 2.3.3

2.4 雑音指数

エサキダイオード増巾器の雑音指数を求めるため図2.4.1の雑音等価回路を考える。

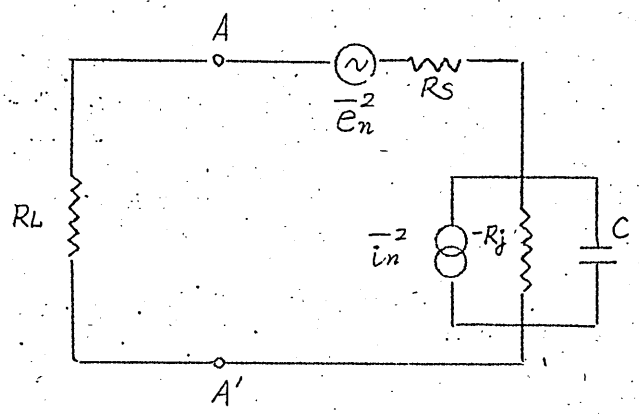


図2.4.1　エサキダイオード増巾器の雑音等価回路

エサキダイオード増巾器内部から発生する雑音としては

(1) 直列抵抗 R_s から発生する熱雑音

(2) PN接合を正負両方向に流れるトンネル電流に基づくショット雑音

があり、各々を定電圧源 e_n、定電流源 i_n で表わすと、これらの二乗平均値は

$$\overline{e_n^2} = 4kTR_sB \qquad (2.4.1)$$

$$\overline{i_n^2} = 2eI_oB \qquad (2.4.2)$$

である。ただし

$k = 1.38 \times 10^{-23}$ joule/°K

$e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb

T = ダイオードの温度（°K）

I_o = PN接合を正負両方向に流れるトンネル電流の和で、ほぼ外部電流と等しい。

B = 帯域巾

A－A′から右の可抜雑音電力 P_e を求めるためA－A′を開放したときA－A′に生ずる全雑音開放電圧 $\overline{V_n^2}$ は次式で与えられる。

$$\overline{V_n^2} = \frac{R_j^2}{1+(\omega C R_j)^2} \cdot 2eI_oB + 4kTR_sB \qquad (2.4.3)$$

$-R_j$ = ダイオードの負性抵抗

A－A′から右のインピーダンスZは

$$Z = Rs - \frac{Rj}{1+(\omega C Rj)^2} - j\,\frac{\omega C Rj^2}{1+(\omega C Rj)^2} \qquad (2.4.4)$$

であるから、可換雑音電力は

$$Pe = \frac{\overline{Vn}^2}{4\,Re(Z)} = \frac{\dfrac{Rj^2}{1+(\omega C Rj)^2}\cdot 2eI_0B + 4kTRsB}{4\left\{Rs - \dfrac{Rj}{1+(\omega C Rj)^2}\right\}} \qquad (2.4.5)$$

となる。

A－A′での中心周波数に於ける電力反射係数 P^2（＝電力利得 $A(\omega_0)$）は式（2.2.3）を変形すれば

$$P^2 = \left(\frac{Rj+RL}{Rj-RL}\right)^2 = A(\omega_0) \qquad (2.4.6)$$

となる。ただし $Rs \ll Rj$ で高利得の場合を考え、Rs の寄与は無視した。

負荷に入る雑音有能電力 Nout は入力からの雑音が $A(\omega_0)$ 倍されたものと Pe に $(1-P^2)$ をかけたものとの和であるから

$$Nout = kT_0 B\cdot A(\omega_0) + Pe\cdot(1-P^2) \qquad (2.4.7)$$

である。従って増幅器の雑音指数Fは定義により

$$F = \frac{Nout}{kT_0 B\cdot A(\omega_0)} = 1 + \frac{1-P^2}{P^2}\cdot\frac{Pe}{kT_0 B} \qquad (2.4.8)$$

となり 高利得の場合を考えているから（$P^2 \gg 1$, $Pe < 0$）

$$F = 1 - \frac{Pe}{kT_0 B}$$

$$= 1 - \frac{1}{4kT_0}\cdot\frac{\dfrac{Rj^2}{1+(\omega C Rj)^2}\cdot 2eI_0 + 4kTRs}{\left\{Rs - \dfrac{Rj}{1+(\omega C Rj)^2}\right\}} \qquad (2.4.9)$$

となる。

上式を式（2.4.4）の実数部が零となる遮断角周波数

$$\omega_c = \frac{1}{CRj}\cdot\sqrt{\frac{Rj}{Rs}-1} \simeq \frac{1}{C\sqrt{RjRs}} \quad (Rs \ll Rj \text{ のとき}) \qquad (2.4.10)$$

を用いて、表わせば式（2.4.11）となる。ただし $\omega = 2\pi f$, $\omega_c = 2\pi f_c$, $T = T_0$ とした。

$$F = 1 + \frac{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2} + \frac{I_0 R_j}{\frac{2kT_0}{e}} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2} + 20 I_0 R_j \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \qquad (2.4.11)$$

上式から雑音指数を下げるためには

(1) 遮断周波数 f_c の高いダイオードを用いる.

(2) $I_0 R_j$ の小さいダイオードを用い $I_0 R_j$ の小さいバイアス点で動作させることが必要である.

I_0 が外部電流に等しいとすれば $I_0 R_j$ はダイオードの電圧ー電流特性にそのバイアス点で接線を引き この接線を引き この接線がV軸交わる点とバイアス点との間の電圧差で与えられる。

しかしショット雑音は P-N接合を 正・負両方向に流れる電流により生ずるので I_0 は 外部電流 I よりも大きく Geでは I_0 は I の 20～30% 増し Ge Si では $I_0 \fallingdotseq I$ といわれている.

$I_0 R_j$ の小さいバイアス点は必ずしも負性抵抗最小点とは一致しない。これは I_0, R_j が バイアス電圧により 図2.4.2の如く変化しているためである。

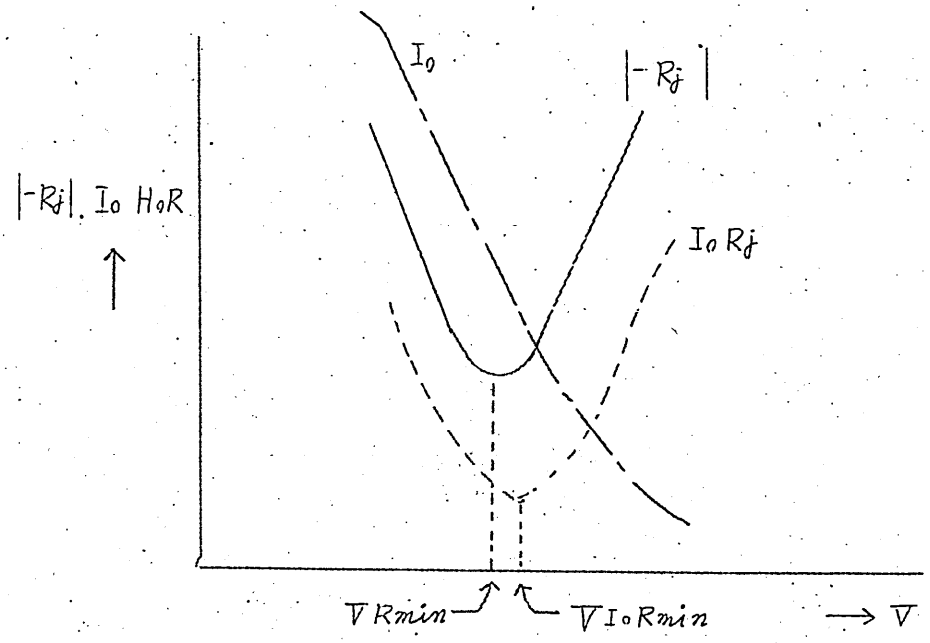


図2.4.2

3 増巾空胴の構成

3.1 ダイオードの特性とそのダイオードで得られる増巾器の特性

用いたダイオードは IT1103 (Ge, Sony) 及び MS 1504 (GaSb. micro state) である.

V－I特性を図 3.1.1 に示す.

等価回路の各パラメータ及び遮断周波数は表3.1.1の通りである. なお等価並列容量CはLバンドでの実測値である. このダイオードを用いて得られる増巾器の特性の理論値を表3.1.2に示す.

	IT 1103	MS 1504
$-R_j$ (Ω)	−70	−65
C_j (pF)	6	1.3
R_s (Ω)	1.5	4.5
L_s (mμH)	0.4	0.3
C_p (pF)	0.8	0.35
C (pF)	5.0	2.2
f_c (Gc)	3	7

表3.1.1 ダイオードの特性

	IT 1103	MS 1504
利得 (dB)	20	20
帯域巾 (Mc)	100	250
雑音指数 (dB)	4.7	2.9

表 3.1.2 増巾器特性の理論値
(利得は 20 dBと仮定した)

3.2 空胴の構造

図3.2.1に増巾空胴の構造を示す. 空胴は 50 オームの同軸線路よりなりダイオードの並列容量を打消すためL性ショートプランジャを設けた. 容量環Aはコンダクタンス調整用でその径とダイオードからの位置が変化でき 容量環Bはダイオードと並列にCを挿入し共振回路のQを高める。

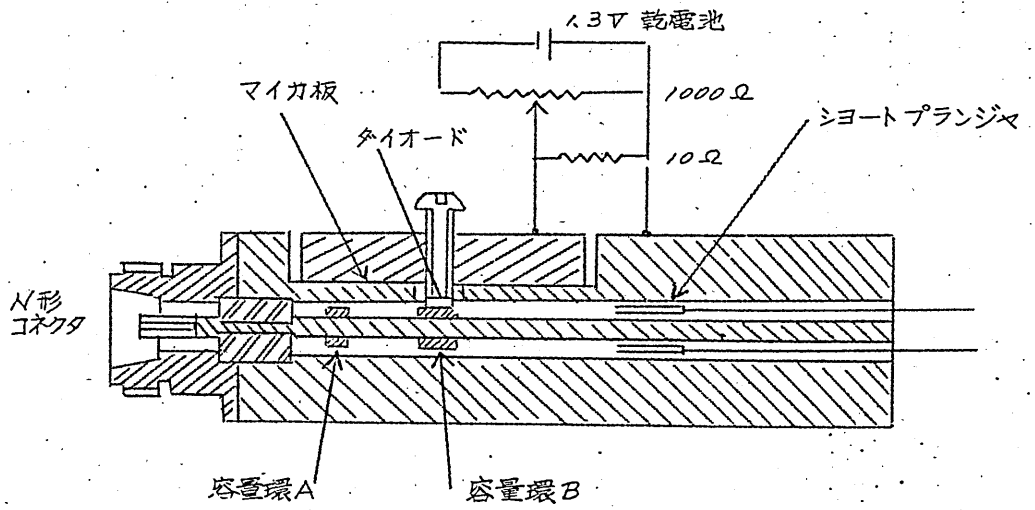


図3.2.1 増巾空胴の構造

図 3.1.1 V-I 特性

3.3 ショートプランジャ

ダイオードから短絡面までの距りは次式により求まる.

$$L = \frac{v}{2\pi f} \cdot \cot^{-1}(2\pi f C Z_0) \qquad (3.3.1)$$

たゞし

$v = 3\times10^{11}$ mm/sec

C = ダイオードの並列容量

Z_0 = 線路の特性インピーダンス

上記2本のダイオードにつき

$f = 1300$ Mc

$Z_0 = 50\Omega$

として、Lを求めた結果を表3.3.1に示す.

	1T1103	MS1504
C (pF)	5.0	2.2
L (mm)	16.7	30.8

表3.3.1 ダイオードから、ショートプランジャ短絡面までの距離 L(mm)

4 実験結果

4.1 増巾特性

図4.1.1にIT1103を用いた場合の増巾特性を示す. ダイオードと、サーキュレータとの距りは広帯域になるように選んだ. IT1103は 並列容量が大きいため共振回路のQは高く発振は起らない. Qが低いとサーキュレータの特性のため、Nyquistの安定条件を満足せず発振する. 特性インピーダンス50オームの同軸線路に負性抵抗 -70 オームのダイオードをマウントすれば発振は起らないはずであるが実際にはマウント部分の電界の乱れにより ダイオードと直列にインダクタンスが入った形となり 負性抵抗最小点附近で発振するため ダイオードからサーキュレータをみたインピーダンスを下げるため 図3.2.1の容量環Aを用いた。図4.1.1の ①②は. この容量環とダイオードとの距離を変化させた時の増巾特性である.

図4.1.2 に MS1504を用いた場合の増巾特性を示す. MS1504は並列容量が小さいため共振回路のQを高くしないと発振するためダイオードと並列にCを挿入する. 図3.2.1の 容量環Bを用いた。またダイオードからサーキュレータをみたインピーダンスを下げるため容量環Aを用いたが これはIT1103の場合と同様の理由である。

図4.1.3 は実験に用いたサーキュレータのある点を基準とした インピーダンス特性である. この図から 広帯域化を行うためには、図4.1.3を測定したときの基準面から

$$(0.25-0.11)\lambda = 0.14\lambda = 0.14 \times \frac{3\times10^{11}}{1300\times10^{6}} \quad (mm)$$

だけ サーキュレータに近づく方向へ寄った点にダイオード側をみたサセプタンス零の基準面をもってくればよい。図4.1.1 及び図4.1.2はこれに近い状態にして得られた結果である.

図4.1.4 に共振回路の同調を少しずつずらせた場合の増巾特性変化の様子を示す. これは 図2.3.2の方法で説明できる. 即ち 共振回路の同調を共振周波数f_rより低い f_1にとった場合は. 図4.1.5 (a)から明らかなように f_1で利得が最大となる

又. 共振周波数f_rより高いf_2に同調をとれば 図4.1.5 (b) から明らかなようにf_2で利得最大となる。

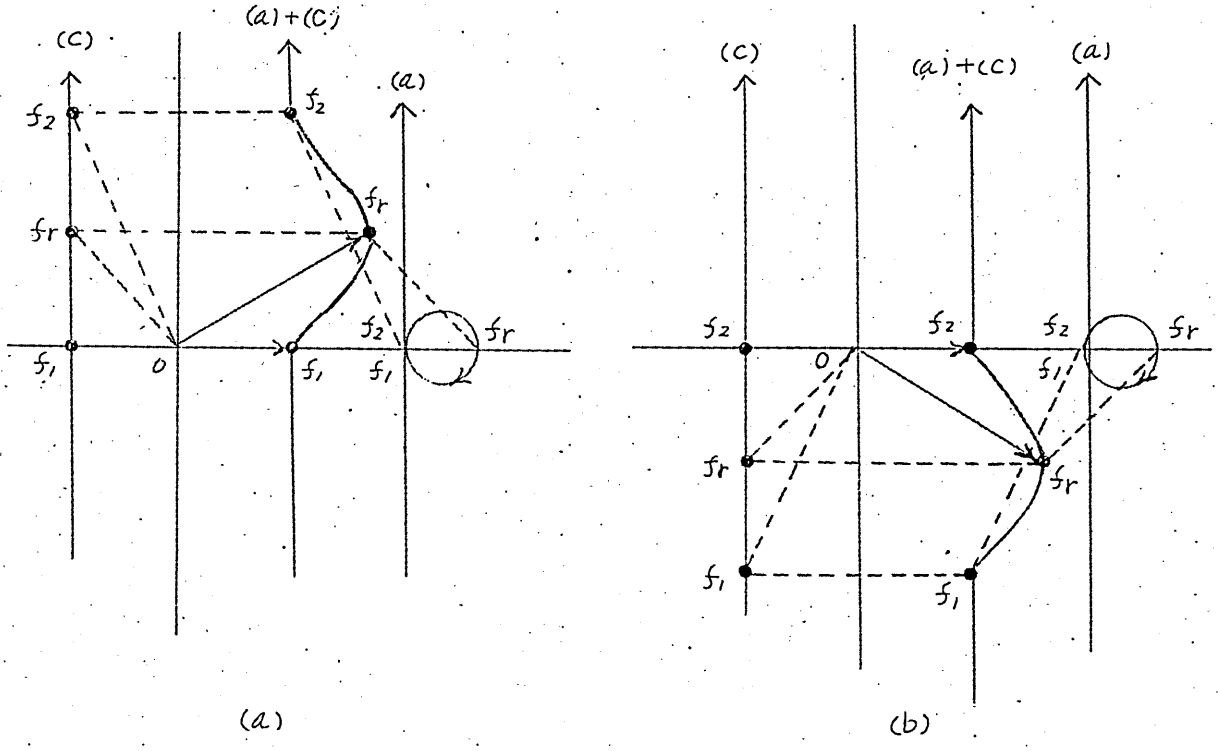


図 4.1.5

図4.1.6は、図4.1.4の各場合に対し ダイオードとサーキュレータとの距りを狭帯域になるよう 1300 MCで 約 1/4 波長 長くした場合の増巾特性である。1300 MCを中心に 約±200 MCで利得があるのはサーキュレータの特性のためで、図2.3.2 (b) に於て f_1, f_2 よりも f_3 f_4 に於ける利得が大きいために生ずるものと思われる。

図4.1.7は 利得飽和特性の一例で −45 dBm の入力で 1dB の利得圧縮が生じている。

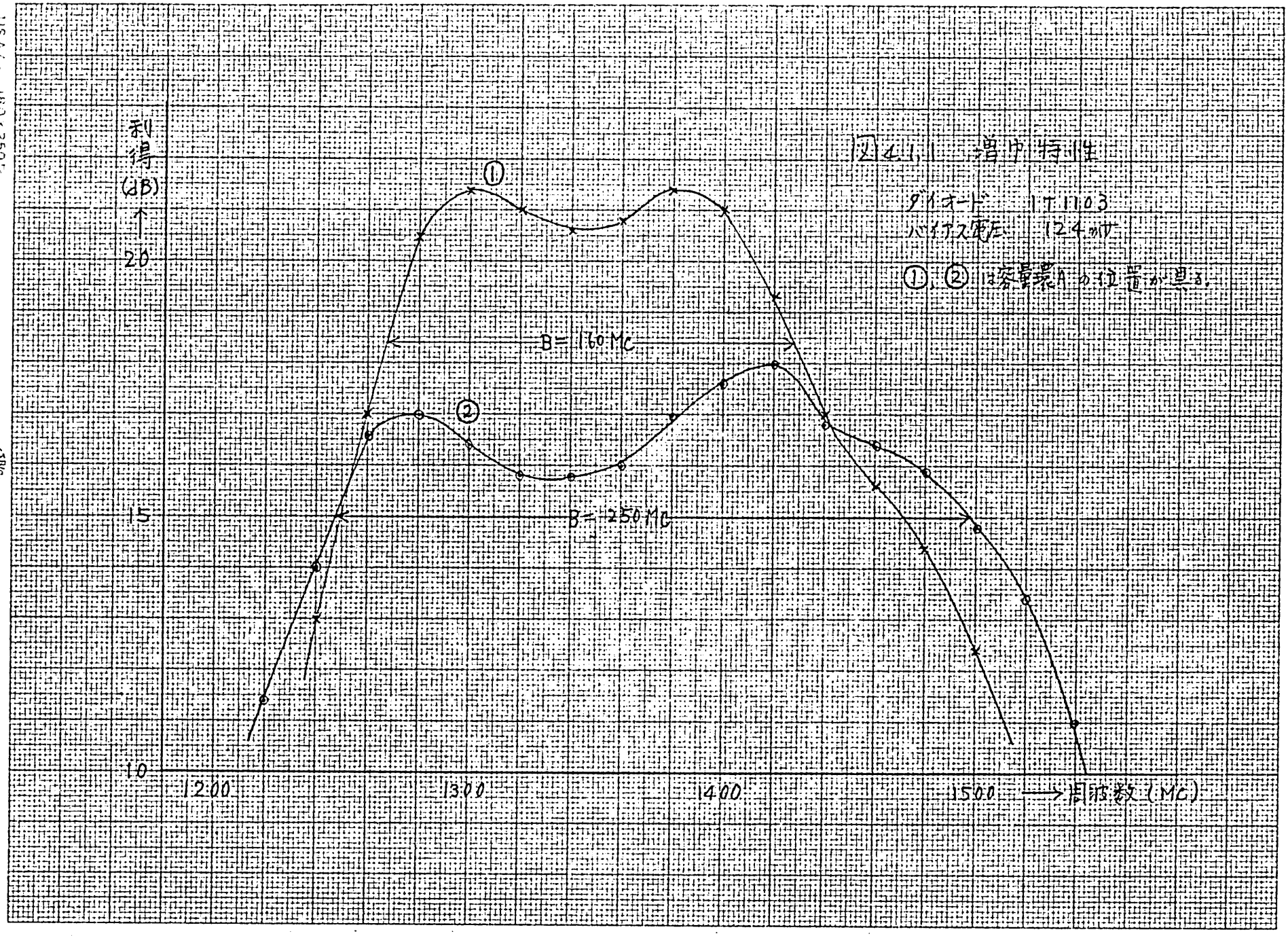


図4.1 増巾特性

ダイオード 1T1103
バイアス電圧 12.4ボルト

①, ②は容量素Aの位置を表す。

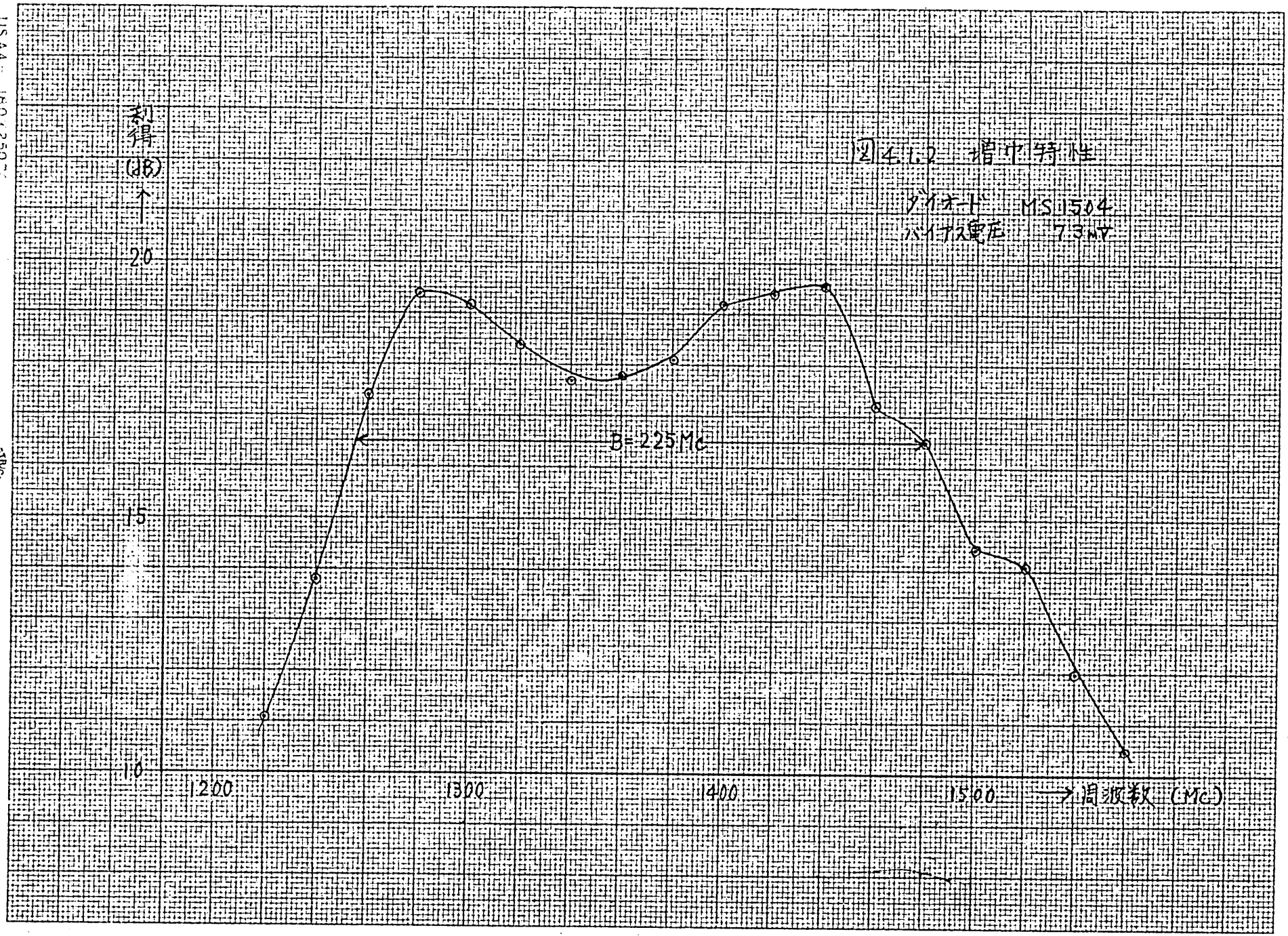


図 4L2 増中特性

ダイオード MS1504
バイアス電圧 7.3mV

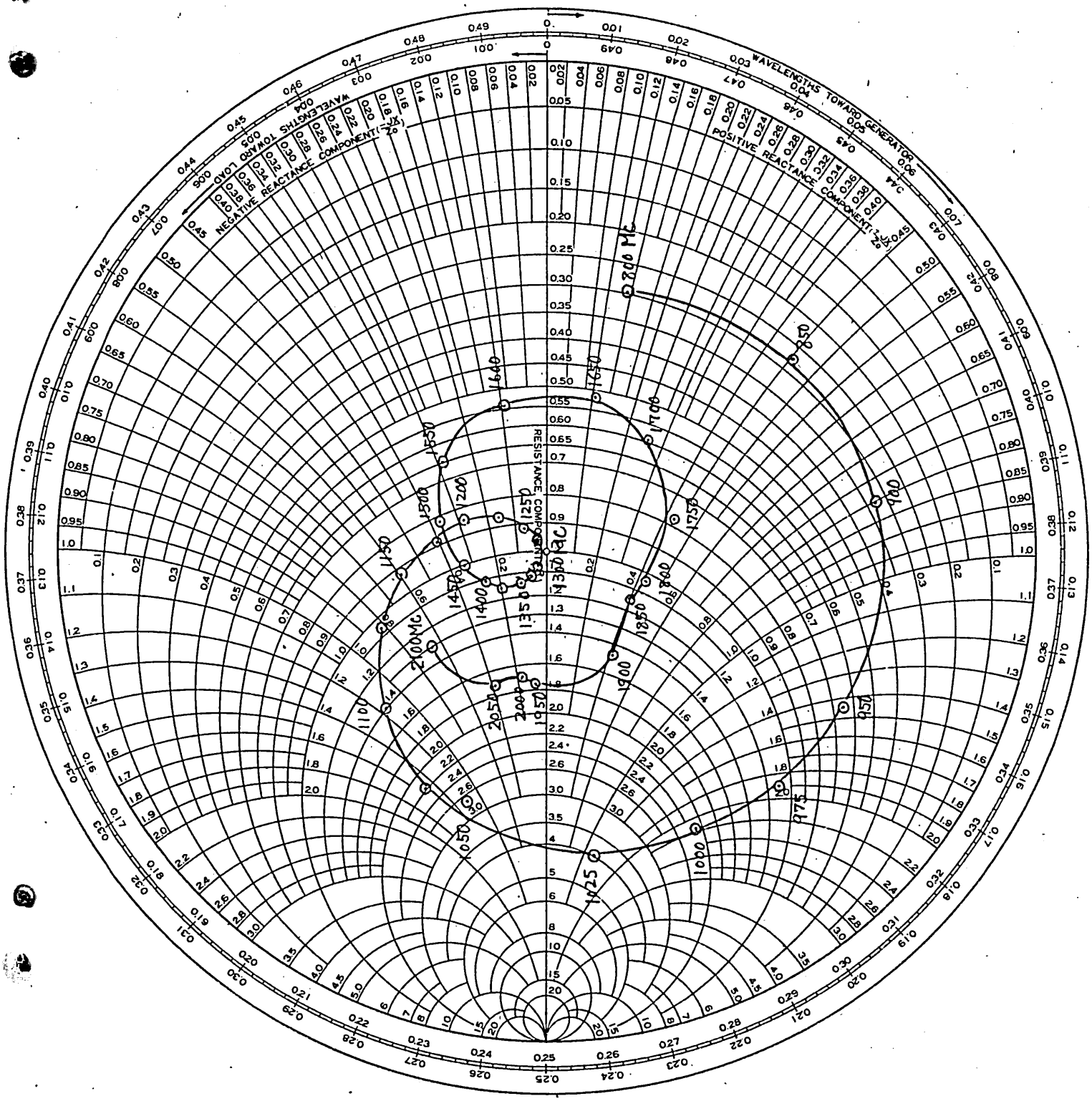


図 4.1.3　1300 MC サーキュレータのインピーダンス

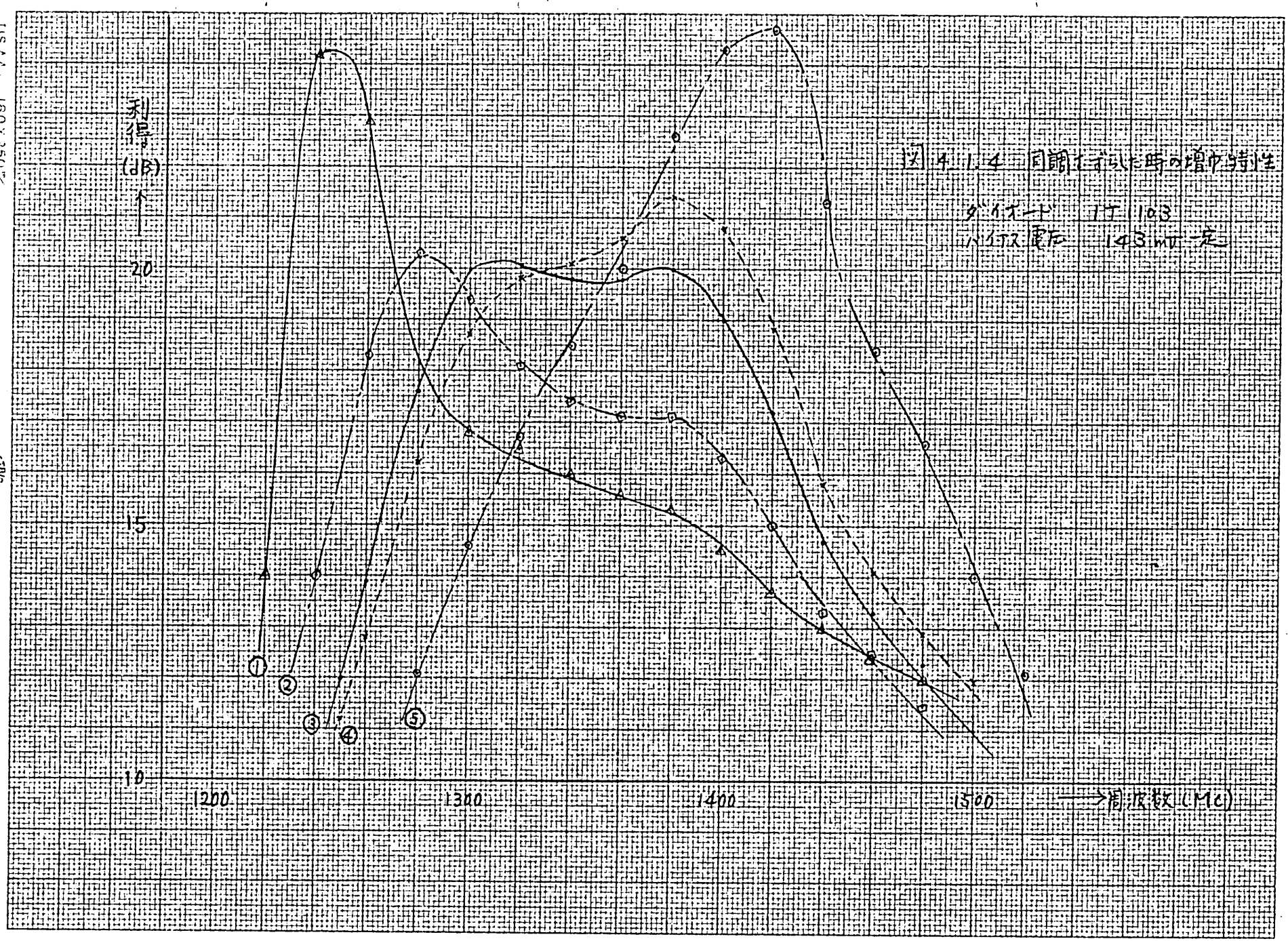


図 4.1.4 同調ずらした時の増幅特性

ダイオード 1T 1103

バイアス電圧 143mV 一定

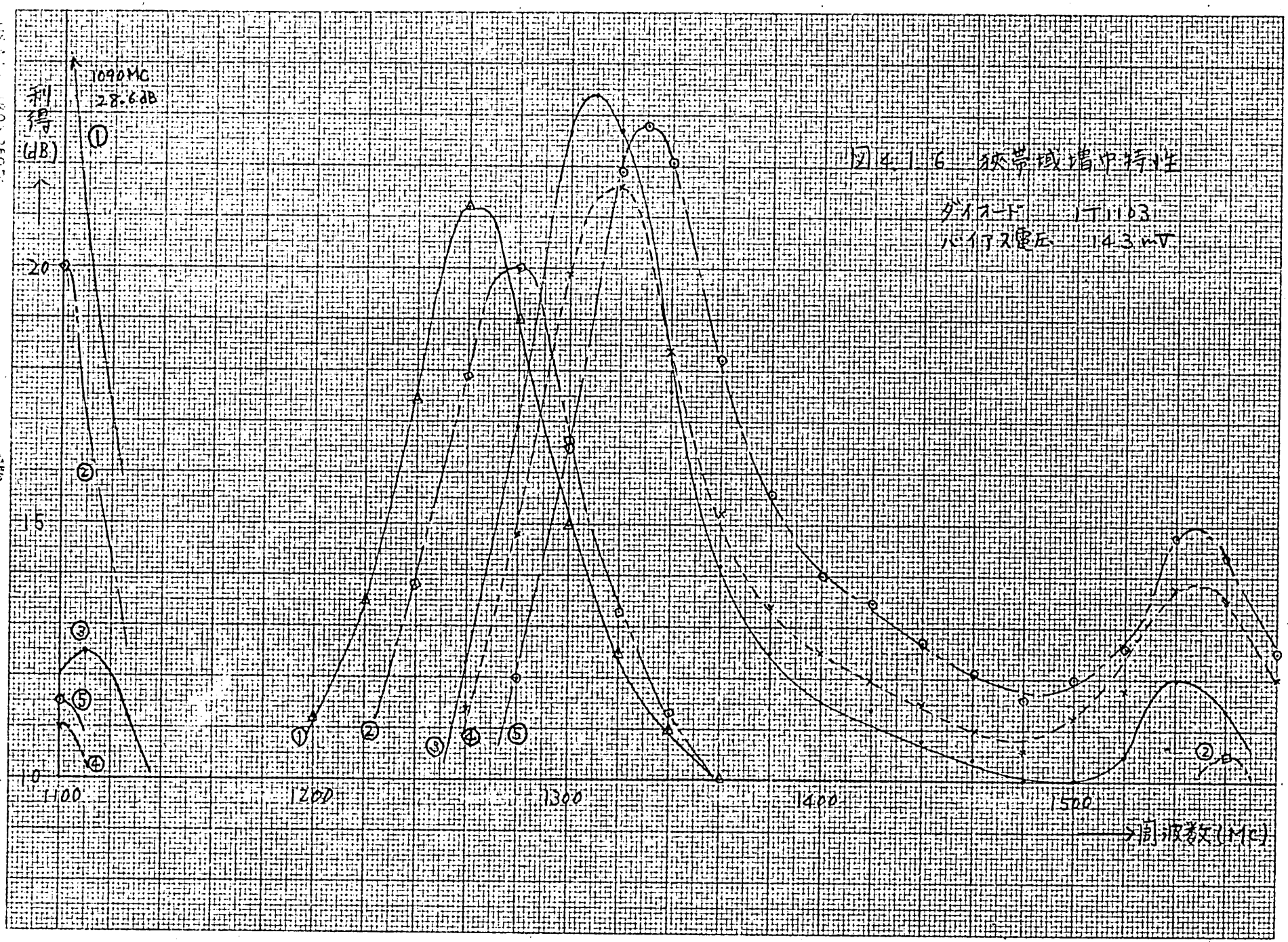
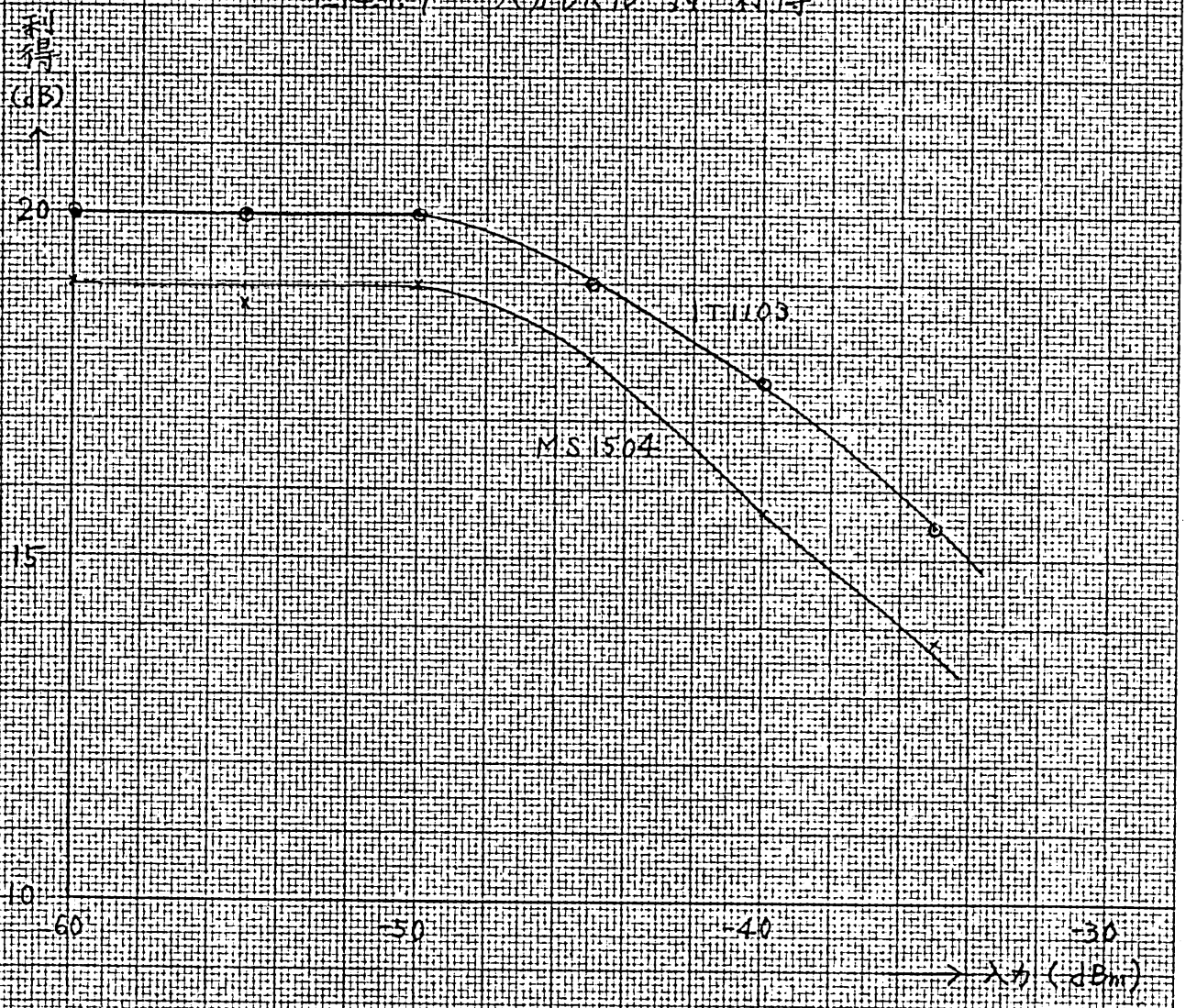


図4.16 狭帯域増幅特性

ダイオード 1T1103
バイアス電圧 143mV

図4.1.7 入力レベル対利得



JIS A4- 180×250㎜

4.2 雑音指数

雑音指数測定は図4.2.1の回路で行った．エサキダイオード増巾器の帯域巾が広いため イメージレスポンス スプリアスレスポンスが入り．測定誤差が大きくなりやすいのでサーキュレータとミキサとの間に狭帯域の Band pass Filter を挿入し．測定誤差を少くした．このフィルタは特性インピーダンス 50Ωのストリップ線路で構成したがその特性を図4.2.2に示す．

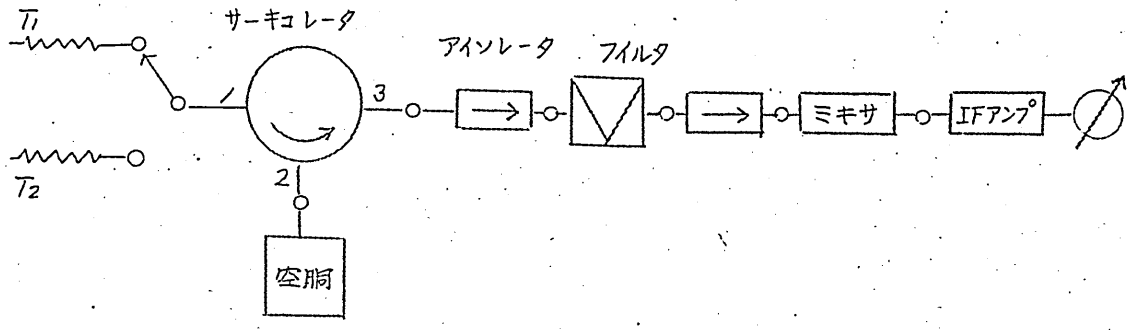


図4.2.1 雑音測定回路

雑音源としては エサキダイオード増巾器を含む系全体の雑音指数測定では雑音指数が小さいので液体窒素温度（77.3°K）に冷却した Cold Load と加熱（373.1°K）した Hot Load，エサキダイオード増巾器を含まぬ系の雑音指数測定では雑音指数が大きいのでアルゴン放電灯（10100°K）と常温のダミーを用い．2つの雑音源を切り換えた時の出力側での雑音電力の比Yを求める．Y係数法により 雑音指数を求めた．これらの雑音源は1300 Mcで VSWR 1.1以下であり切換えた時の増巾器利得変化は認められず 又．反射による雑音温度の誤差（例えばアルゴン放電灯の場合．VSWR 1.1とすれば見かけ上10091°K）もエサキダイオード増巾器の雑音指数を測定する場合には無視できる．

入力側で雑音温度 T_1°Kの 雑音源を切り換えた時．出力側での雑音電力の比がYであれば 系の雑音指数Fは次式で与えられる．

$$F = \frac{\left(\frac{T_2}{T_0}-1\right)-Y\left(\frac{T_1}{T_0}-1\right)}{Y-1} \qquad (T_0 = 290°K) \qquad (4.2.1)$$

又．雑音指数 F_1．利得 G_1 の増巾器を雑音指数 F_2 の増巾器の前段に接続したとき全体の雑音指数 F_T は次式で与えられる．

$$F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} \qquad (4.2.2)$$

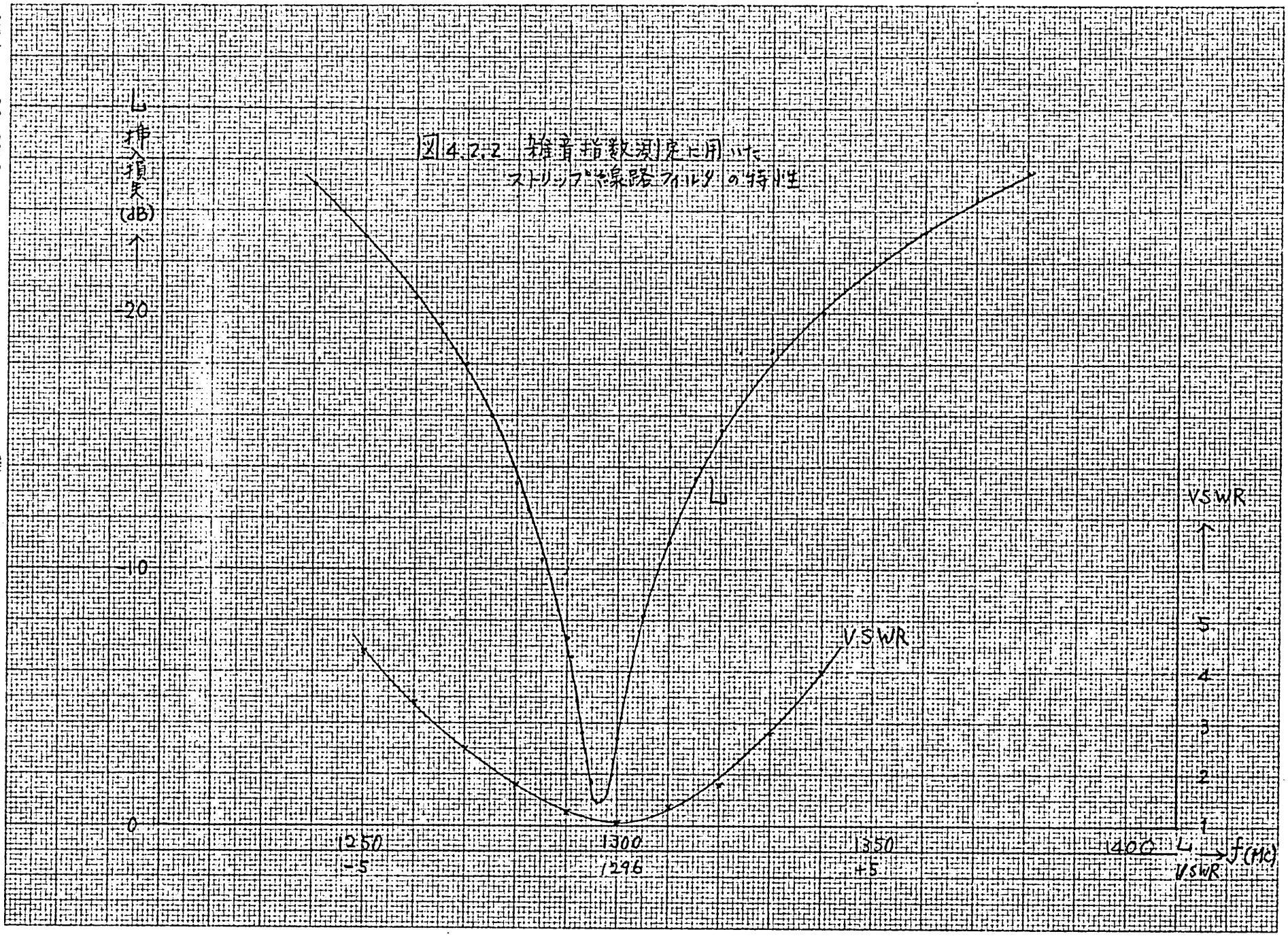


図4.2.2 特許出願測定に用いた
ストリップ線路フィルタの特性
挿入損失 (dB)
-20
-10
0
VSWR
5
4
3
2
1
1250
-5
1300
1296
1350
+5
1400
L
VSWR
f(MC)

サーキュレータの開口2以降の雑音指数 F_2 は

$T_1 = 290°K$

$T_2 = 10100°K$

とし Yを求めれば 式(4.2.1)より

$F_2 = 11.3$ dB.

である.

総合雑音指数 F_T, エサキダイオード増巾器本体の雑音指数 F_1 は

$T_1 = 77.3$ °K

$T_2 = 373.1$ °K

とし 式(4.2.1)、式(4.2.2)よりバイアス電圧を変化させて求めれば、表4.2.1 表4.2.2の通りである. なおサーキュレータ 1 → 2 の順方向損失は 0.25dB である. F_T, F_1 をバイアス電圧を横軸にとりグラフにしたのが図4.2.2であり 本体の最小雑音指数は 1T 1103で 5.1 dB MS1504で 3.4 dB である.

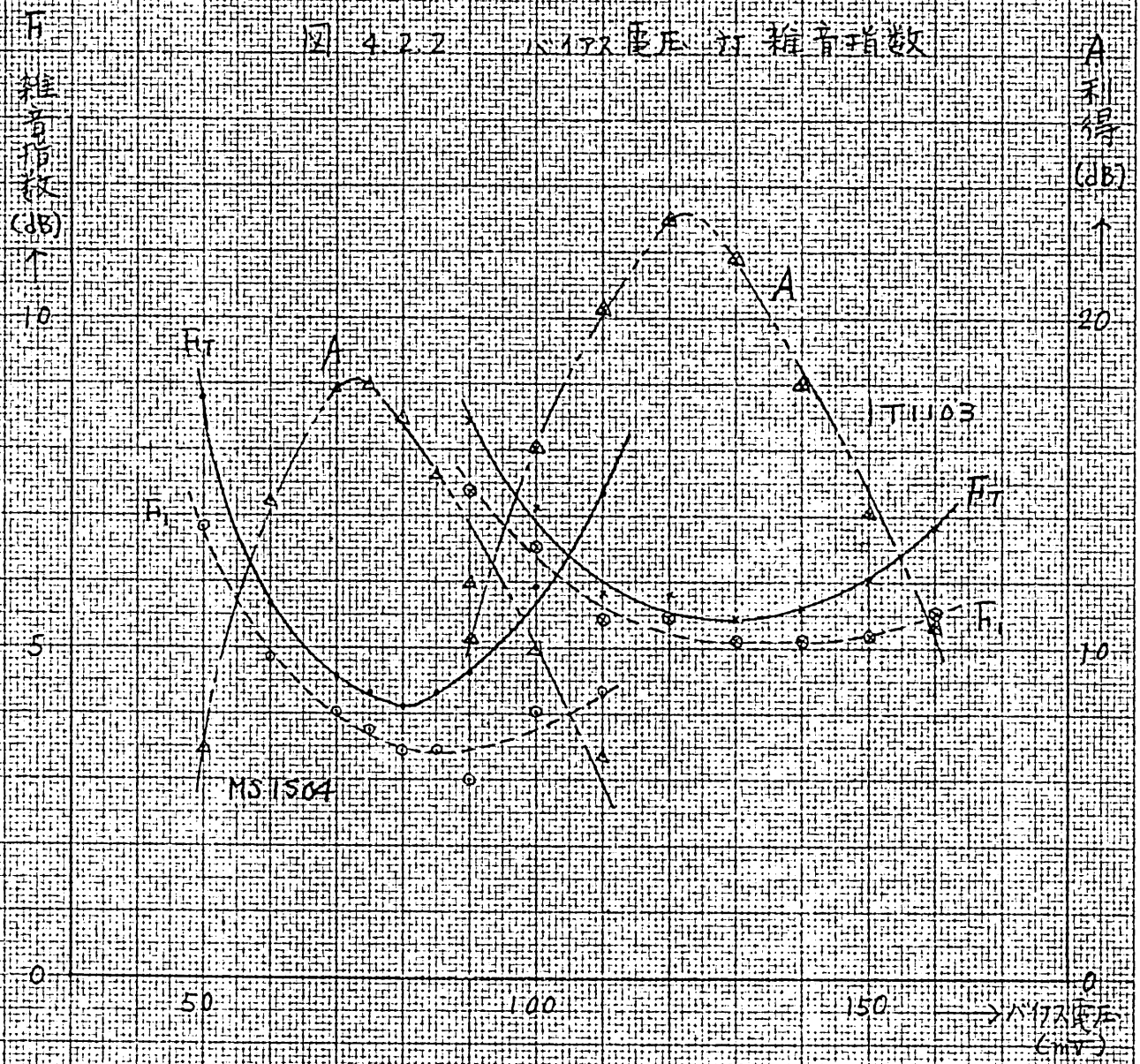
バイアス電圧 (mV)	利 得 (dB)	総合 NF F_T (dB)	本体の NF F_1 (dB)
90	10.2	8.45	7.39
100	16.0	7.13	6.53
110	20.3	5.83	5.45
120	23.0	5.80	5.48
130	21.8	5.47	5.12
140	18.0	5.62	5.12
150	14.1	6.02	5.20
160	10.7	6.85	5.53

表4.2.1 1T 1103を用いた場合の雑音指数

バイアス電圧 (mV)	利 得 (dB)	総合 NF F_T (dB)	本体の NF F_1 (dB)
50	7.0	8.80	6.83
60	14.5	5.68	4.88
70	17.9	4.62	4.06
75	18.0	4.35	3.77
80	17.0	4.13	3.44
85	15.3	4.35	3.46
90	12.0	4.62	3.00
100	10.0	5.73	4.02
110	6.8	7.38	4.32

表4.2.2 MS.1504 を用いた場合の雑音指数

図 4.2.2 バイアス電圧 対 雑音指数



1T 1103, MS 150Y の負性抵抗最小のバイアス電圧は各々 73mV, 124mV で、利得はこの点で最大となるが 図4 2.2からわかるように雑音指数はこの点で最小となつておらず やゝ高いバイアス点で最小となっている。これは節2.4の 図2.4.2で説明したようにI₀が最小点がR最小点と異るからである。

6 あとがき

以上 Ge エサキダイオード 1T 1103 と GaSb エサキダイオード MS 150Y とを用いた1300Mc 広帯域サーキュレータ形増巾器の理論と諸特性につき述べた。

増巾帯域巾はサーキュレータの周波数特性が全くない場合には表3.1.2に示した通り利得20dBでは 1T 1103 で 100Mc MS 150Y で 250Mc となるが 当所で開発した特定のサーキュレータを用いた場合には 前者で 160Mc、後者で 225Mc であった。1T 1103の場合ダイオードからサーキュレータ側をみたインピーダンスを測定し ダイオードとサーキュレータとの距りを適当に選ぶことにより サーキュレータの周波数特性が全くないとした場合に比し 60% 帯域巾を広くできたが MS 150Y の場合ダイオードの並列容量が小さく並列共振回路のQが低いため、サーキュレータの周波数特性の加減で発振するため 止むをえずダイオードと並列に容量を挿入し Qを高くした結果 サーキュレータの周波数特性が全くないとした場合に比べ10%帯域巾は狭くなった。 増巾器の帯域巾を更に広くするには もっと帯域巾の広いサーキュレータを使う必要がある。

増巾器本体の最小雑音指数は 1T 1103 で 5.1dB MS 150Y で 3.4dB である。この値はダイオードのV-I特性から予想される 4.7dB, 2.9dB と非常に近い。0.5dB程多いのは雑音に寄与する電流がみかけ上の電流より多いために生ずるのか 測定誤差によるのかさらに検討する必要がある。

サーキュレータ形エサキダイオード増巾器は構造が簡単なため 安定条件にさえ十分注意すれば取扱いは非常に簡単で 他の低雑音増巾器の調整が非常に煩雑であるに比すると格段の差があるから 今後ますます注目され実用化されてゆくであろう。なお雑音指数はダイオードの進歩発達により2dBくらいまでは下ると予想されているようである。

参考文献

(1) H. M. Wachowshi, " A Junable L-Band Tunnel-Diode Amplifier"
IRE Int Con Rec. Vol.9. Pt 3 P64/75 1961

(2) 黒川 兼行, " UHF低雑音広帯域エサキダイオード増幅器 "
パラメトリック増幅器専門委員会資料 1962. 3. 16

(3) M.E. Heines, " High Frequency Negative Resistance Circuit Principles for Esaki Diode Applications "
BSTJ P477/513 may, 1960.

輻射科学研究会．第2.3.4部会資料

マイクロ波フェライト回路研究の最近の趨勢

昭和38年6月22日

（於 三菱電機株式会社）

三菱電機株式会社

中原昭次郎

マイクロ波フェライト回路研究の最近の趨勢

中　原　昭次郎
（三菱電機械株式会社）

1．まえがき

フェライトおよびガーネットなどのフェリ磁性体をマイクロ波領域で使用することにより，種々の可逆および非可逆回路が得られることが知られてからすでに10年以上を経過し，この間，単向管，サーキュレータ，移相器，スイッチ，電力制限器およびフィルタなどを主とする数多くの回路部品が研究，開発され，すでに多種多様の製品が市販されている。

これらのうち，単向管，サーキュレータおよび非可逆移相器などの非可逆回路は，フェライトの他にも，磁化されたプラズマの呈するテンソル誘電率や半導体のホール効果を利用しても得られるが，それら性能はまだ相当劣っており，当分はフェライト利用回路がもっぱら使用されるものと思われる。したがって，各形式の回路に対する性能改善，小形軽量化，および周波数範囲の拡大などについての努力が，今後も引続き行われるであろう。

つぎに可逆移相器やスイッチは，半導体を用いても実現でき，フェライト形に比し，移相およびスイッチング速度が早いこと，駆動電力が小さくて済むこと，小形であることなどの利点を有している。これに対しフェライト形の回路は電力容量が大きいこと，マイクロ波に対する特性が良好なことなどの特長があり，寿命も長い。したがって今後は，用途に応じて両方を使いわける必要がある。

最後に電力制限器やフィルタなどいわゆる強磁性共振器を利用した回路素子は，数年来活発な研究がなされており，一部は米国で製品として市販されているが，広く実用されるためにはなお多くの研究が必要と思われる。

今回はこれら諸回路のうち，単向管，サーキュレータ，移相器およびスイッチに関して，最近とくに問題となっている諸点を述べ，マイクロ波フェライト回路研究の現況と今後の方向を考察する一助にしたいと思う。

2．単向管

単向管は，フェライト回路のうちで最も早くから研究されてきたものであり，すでに数百MCからミリ波にわたる全周波数帯をカバーする各種の単向管が市販されている。しかし，種々の用途に対する要求を満たすために，なお多くの問題が残っている。今回はそのうち広帯域化，小形化およびUH下帯単向管について述べることにする。

なお，参考のため現在までに発表されている単向管の代表的性能を，表1に列挙する。

特徴	伝送路の形式	周波数 KMC	挿入損失 (max) dB	結合量 (min) dB	VSWR (max)	電力容量 平均	電力容量 ピーク	単向管の形式	重量 g	寸法 cm	備考
広帯域	同軸形	4～11	1.3	10	1.25				900	直径5 長さ19	E&M Laboratories 社 (カタログ)
	導波管形	8.2～12.4	1.0	30	1.15			共鳴形			Microwave Journal Oct. 1961 P125
大電力容量	導波管形	1.255～1.385	0.5	10	1.2	15 KW	3.5 MW	共鳴形	3.000	長さ56	Microwave Journal Dec. 1961 P31 水冷式
周波数最高	導波管形	140	0.7	17	1.25			ファラデー回転形			TRG社 (カタログ)
周波数最低	同軸形	0.35～0.38	1.0	10	1.25	-		共鳴形	200	9×6×3	Electronics vol. 34 Sept. 1961 P37
小形	導波管形	9.2±0.4	0.3	20	1.25				60	5×4×1.3	Micromega Carp 社 (カタログ)

表 1

2.1 広帯域単向管

単向管の特性の広帯域化の研究は，種々の回路部品の広帯域化と平行して行われ，特に最近はBWOなどによる広い範囲の周波数掃引装置などの利用のため，および実験室用として，広帯域単向管の特性改善が要求されるようになった。

同軸形単向管では図1に示すような構造のもので広帯域の特性が得られており[1]，逆方向損失20dB以上，順方向損失1dB以下のオクターブ・単向管が作られている。

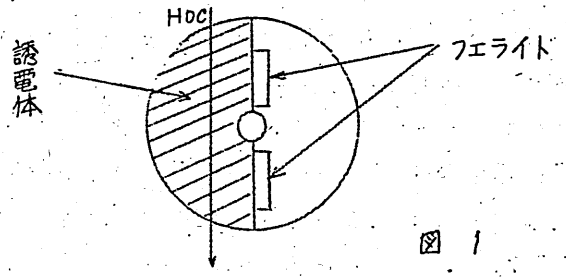


図 1

導波管形については，比帯域10%程度までは電界変位形単向管の方が順逆損失比が大きいが，それ以上の帯域特に導波管の使用周波数全域を考える場合は共鳴形単向管の方が性能が良くなってくる。共鳴形単向管で広帯域な特性を得るためには，第1にはフェライトとして共鳴吸収曲線の半値幅ΔHがある程度大きいものを用いることが望ましく，ファラデー効果および電界変位効果を利用する普通のフェライトのΔHが大体300～400エルステッドであるのに比し，大体800～1,000エルステッドのものが用いられている。

次に回路に関しては，導波管にリッジをつけたり[2]，強誘電体を装荷したりする方法がとられているようであるが，ここでは強誘電体を装荷することの効果について述べる。

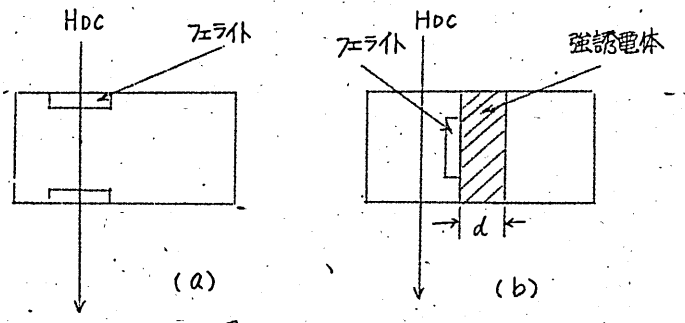


図 2

周波数 (Gc)	楕円偏波率
8、2	0、65
10、3	1、0
12、4	1、33

表 2

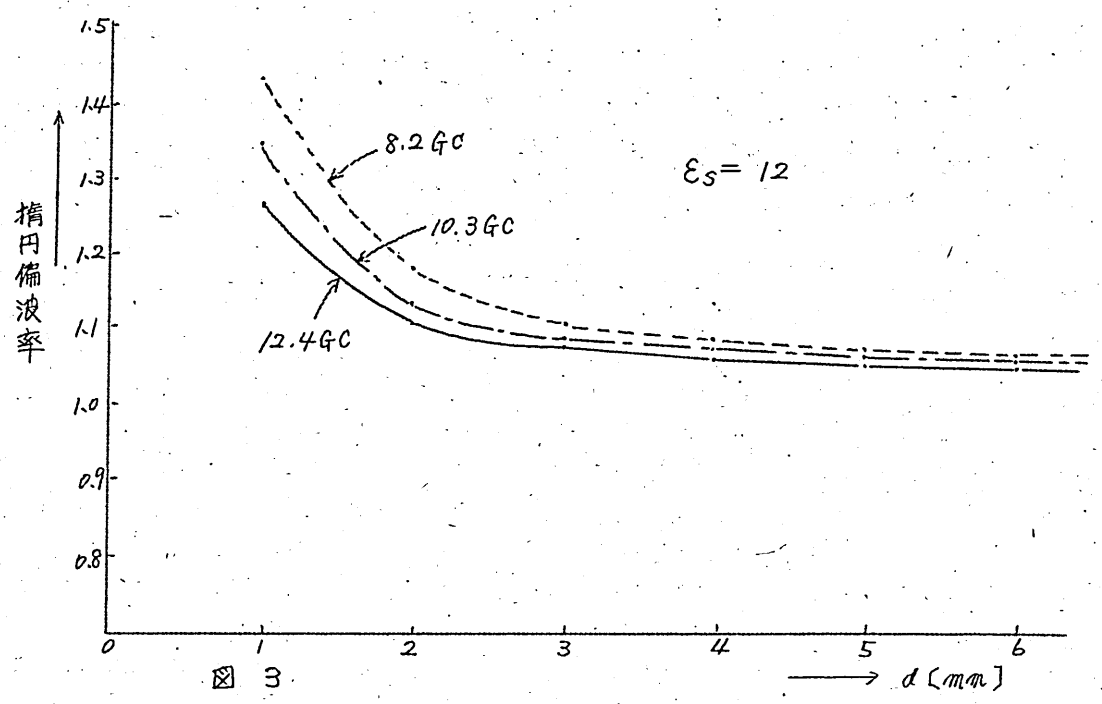


図 3

従来の共鳴形単向管は図２(a)のように，導波管内で円偏波の高周波磁界の生ずる位置にフェライトをおいていたが，この場合はX－bandを例にとると，中心の10．３Gcで円偏波を生ずる位置における両端の周波数での楕円偏波率は，表２に示すように，大きく変化する。これに対し導波管の中央にε＝12の種々の厚みをもった誘電体板をおいたとき，その表面における楕円偏波率を３周波数について計算したのが，図３である。これによると厚み２mm以上では周波数による楕円偏波率の変化は数％以下となっており，特性の広帯域化が期待される。

この方法に，印加磁界の傾斜その他の工夫を加えることによって国内でも順逆損失比20のX－band単向管が作られている[3]。

今後使用強誘電体の損失の減少，フェライトの材質の改善などによって性能の向上が期待されるが，通常の実験に用いて十分と思われる逆方向減衰量は30dB以上と思われるので，順逆比も30～40以上のものは必要であろう。

2.2 小形単向管

単向管を機器に組込む場合には小形軽量であることが望ましいのは明らかであり，とくにミサイルなど飛しょう体に搭載する目的もあって米国では小形単向管の研究が盛んで，最近1/2インチの長さで，800Mcの帯域にわたって逆方向減衰20dB以上，順方向損失0.3dB以下というX－band単向管が作られているが，その構造，動作原理の詳細は不明である

当社においても3年程前に共鳴形を用い，全長30mm（但し両端のフランジを除いて米国と同じ形式にすれば全長20mm）で，帯域200MCにわたって，逆方向減衰15dB以上，順方向損失0.8dB以下という単向管を製作したことがあり，フェライトおよび装荷誘電体の改善によって上記性能に近づけることは可能ではないかと考えられる。

またいわゆる臨界変位形においても，フェライトの形状，抵抗膜を適当に選ぶと，図4に示すように抵抗膜の長さがある特定の長さで，逆方向減衰が著しく増大する現象があり[4]，この現象を利用すると小形で性能の良い単向管を得ることができる。1例をあげると，約25mmの長さで，帯域300MCにわたって，逆方向減衰20dB以上順方向損失0.15dB以下という1GC帯単向管が得られている。この形の単向管の特長はとくに順方向損失が少くできること，および共鳴形に比し磁石がずっと小さくできることなどであり，たゞ現在のところ帯域が十分とれないこと，調整がやゝ厄介であるなどの欠点があるのでその点の改善に努めるつもりである。

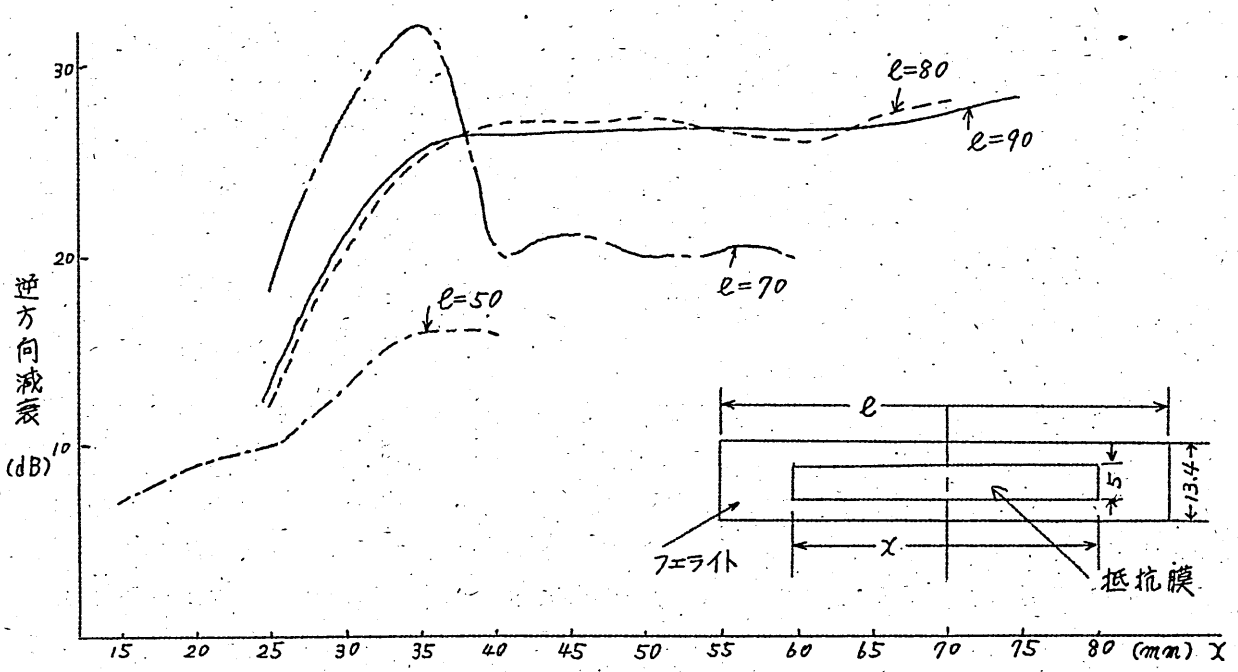


図 4

2.3 低周波数用単向管

単向管の研究において常に大きな分野をなしてきたのは周波数限界の拡大である。このため材料的には，周波数の高いミリ波領域には$4\pi M_s$の大きいフェライトまたは内部異方性磁場の大きいバリユウム・フェライトなどを用いることが望ましく，周波数の低いところには共鳴吸収半値巾が小さく，かつ$4\pi M_s$の小さい，種々の元素で置換されたYIGの使用が望ましいことが明らかになっている。

こゝでは回路上の問題の一例として，低い周波数帯の単向管を小形にする，集中パラメータ形単向管[5]について簡単に紹介する。

この形の単向管の構造，等価回路およびベクトル図を図5 (a), (b), に示す。二つのL－C回路は共鳴周波数に対し同調がとれている。したがって，L_2, C_2は開放回路とみなされ，L_1, C_1は短絡回路となる。それ故$I_1 = V/Z_0$，$I_2 = V/j\omega L_2 = -jV/\omega L_2$である。もし$Z_0 = \omega L_2$であれば$I_2 = -jV/Z_0$であり，$I_2 = -jI_1$となる。また$L_1$と$L_2$とが構造上互いに90度をなしていると，$I_1$と$I_2$とは空間的にも直交していることに

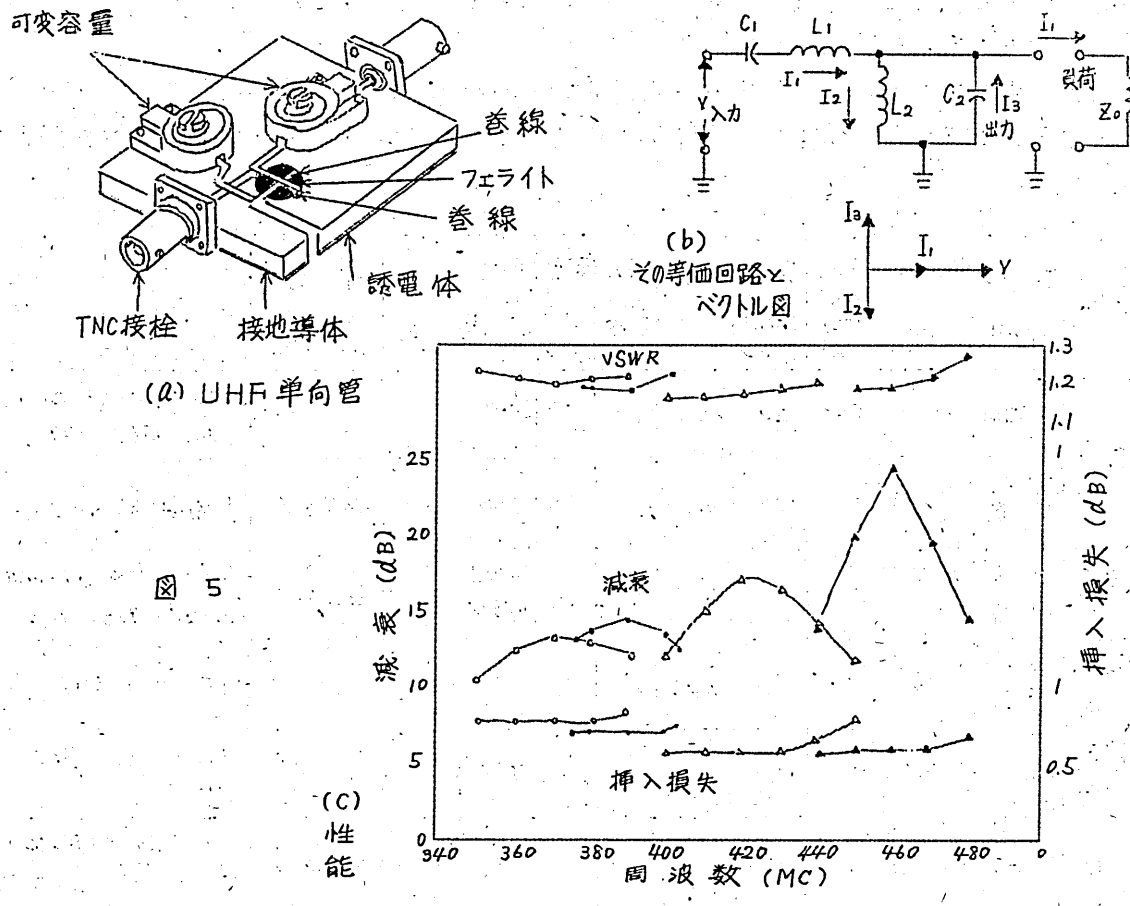


図 5

なり，L1とL2との交点で円偏波磁界を生ずることになる。回路の入出力端を，逆にすると，I1の方向のみ逆になるので，円偏波の回転方向は逆転することになり，共鳴形単向管の構成が可能となる。

400MC前後での特性を図5(C)に示す。

このように集中パラメータ回路をストリップ線路と置きかえることによって全体の大きさを相当小さくすることができる。この考えを押し進めて，更に低い周波数で小形な単向管が実現されるであろう。

次に述べるサーキュレータとも関連のあることであるが，マイクロ波フェライト回路の技術を用いたもので，現在まで報告されている最も低い周波数は150MCである。一方最近ピエゾ効果を利用して数十KCから数百KCの間で実験した非可逆回路の報告[6]があるが，この方式での上限は数MC位と推定される。したがって現状では数十MC帯が空白なわけであり，この範囲を埋めるために，材料面の開発と相まって，上述の集中パラメータ回路の研究が必要と思われる。

3. サーキュレータ

サーキュレータは単向管と並んで代表的なフェライト回路であり，送受共用回路および負性抵抗形増幅器の入出力分離回路への使用の他，低い周波数帯では共鳴形単向管より性能が良好なので単向管として用いたり，切替スイッチとして使用したりして，その利用度は急速に増大しつつある。

サーキュレータの種類としては，ファラデー回転形，非可逆移相形，電界変位形および Junction 形などが考えられてきたが，Junction 形の大幅な進歩により，大部分はYまたは丁形のサーキュレータを用いるようになつてきた。ただ極めて大きな電力を通す場

合だけ非可逆移相形が使用されており，現在までの記録はLバンドでピーク20MW，平均75KWのものが発表されている。

今回はYサーキュレータに関する諸問題とJunction形の特殊回路について述べる。

なお参考のため，現在までに発表されているサーキュレータの代表的性能を表3に列挙する。

特徴	伝送路の形式	周波数 KMC	挿入損失 (max) dB	減結合量 (min) dB	VSWR (max)	電力容器 平均 KW	電力容器 ピーク MW	サーキュレータの形式	重量 gr	寸法 cm	備考
広帯域	同軸形	2~4	0.4	20	1.25	0.5		Y形			Microwave Journal Jan. 1963 P49
	導波管形	4.9~6.2	0.5	20	1.1	0.1	0.01	Y形		6×7×4	Hughes社（カタログ）
大電力容器	導波管形	1.25~1.35	0.3	20	1.15	75	20	非可逆移相形		長さ260	Microwave Journal april 1963 P103
周波数最高	導波管形	140	2	35	1.25	10		Y形			TRG社（カタログ）
周波数最低	同軸形	0.15	1	20				Y形			Proc. IRE Feb. 1961 P518
小形	同軸形	5.4~5.9	0.3	15	1.3	0.005		T形	85	2.5×2.5×2	E&M Labaratories社（カタログ）

表 3

3.1 Yサーキュレータの諸問題

Yサーキュレータは小形，軽量でかつ性能も良好であるが周波数特性が良くなかったので，最近の研究は主として広帯域化に重きがおかれてきた。

中心周波数f_0で良好な特性を示しているとすると，三つの端子対から同時に入射する零相，正相，逆相の各相対称成分の電波に対する反射係数Γ_0，Γ_+，Γ_-の位相は図6の実線に示すように，互に120度の角をなしている。ところが周波数を変化させると，接合部の実効透磁率の変化が各相対称成分に対して異るので，そのときのΓ_0，Γ_+，Γ_-は図6の点線のようになり，各ベクトル間の角度は120度からずれてしまう。これがサーキュレータの特性を悪くするわけである。したがって周波数特性を改善するためには，このような位相関係のずれを補正することが必要となる。

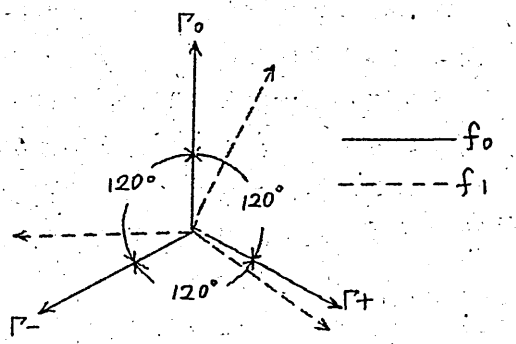


図 6

このための手段として，同軸形では図7に示すように誘電体の装荷と，内部導体接合部の形状変化とを併用している。[5] 導波管の場合は金属三角板を装荷するのが普通である。このような方法で最近は同軸形で減結合量20dB以上の帯域が1GCから2GCというオクターブサーキュレータが得られている。

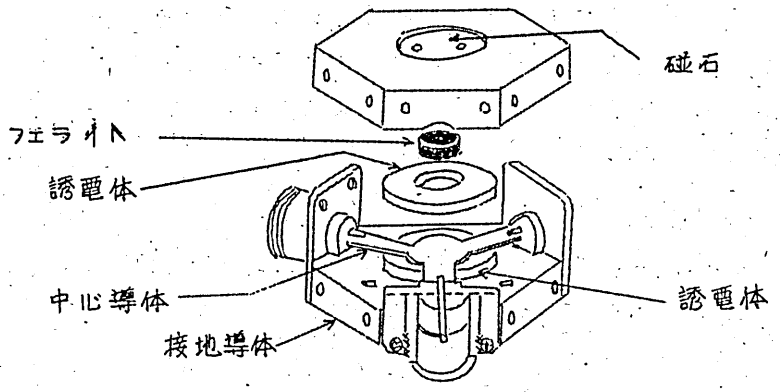


図 7

つぎにサーキュレータにおいても，他のフェライト回路同様温度特性が問題であり，使用する材料としてキュリー点の高いものを選ぶのが良いのであるが，ＹＩＧの場合はイットリウムをガドリニウムで置換していくと，$4\pi M_S$ の温度特性は図８のように変化して行き，Gd の置換量６０％のとき０℃前後で $4\pi M_S$ の温度変化は相当小さくなるので，このような材料を使用するとサーキュレータの温度特性は改善される[7]。

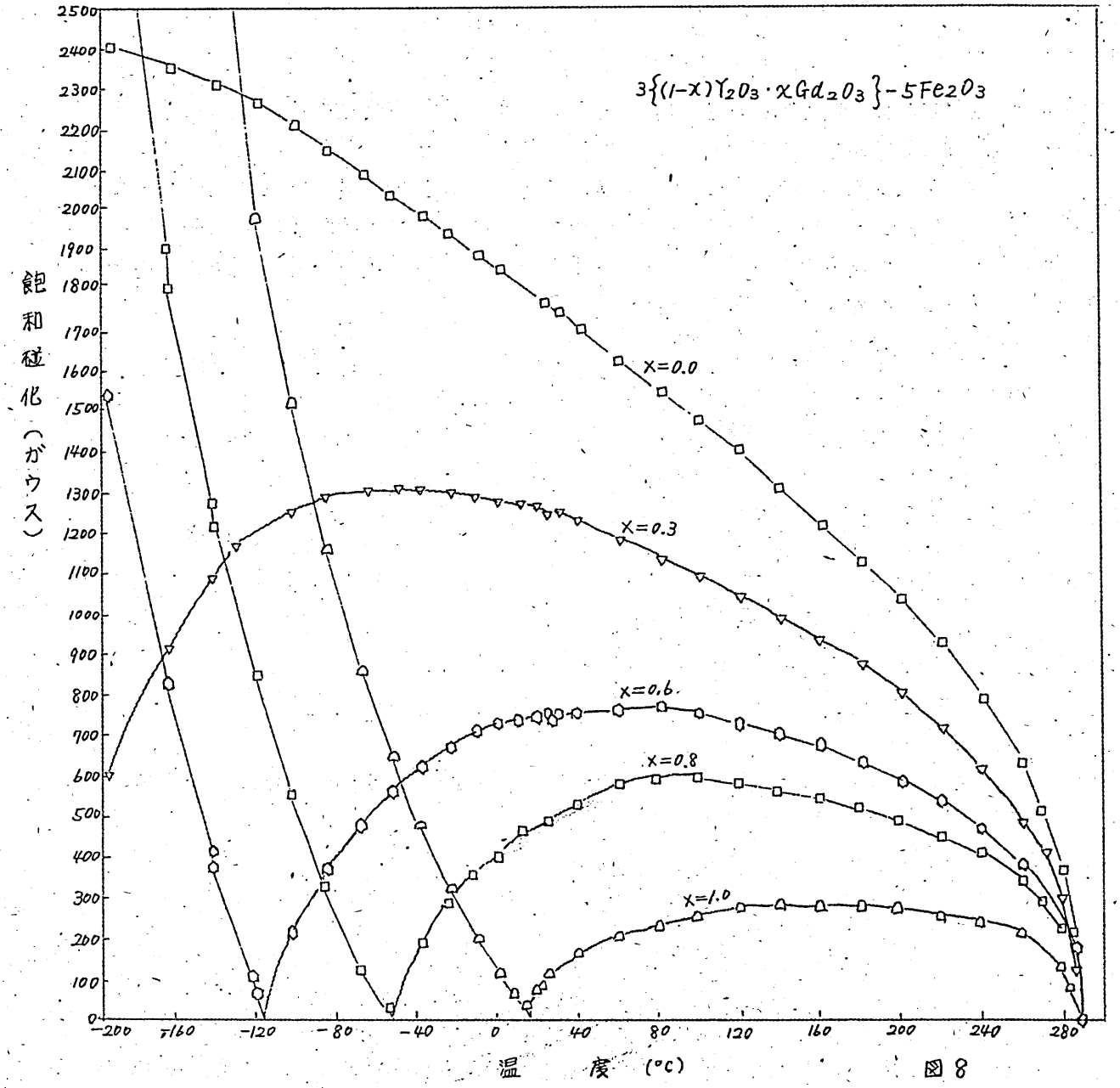


図８

なお実用上，3端子対サーキュレータより4端子対サーキュレータの方が望ましい場合が多いが，接合部一つの4端子対サーキュレータより3端子対サーキュレータ2個を組合わせた方が，作り易さ，周波数特性などで優れており，減結合量を倍にとれる個所を作り得るので，もっぱら後者が使われている。

3.2 Junction 形の特殊回路

第一は図9に示すように，相異る2周波数で同時にサーキュレータの動作を示し，その循環方向が逆であるような回路[8]である。

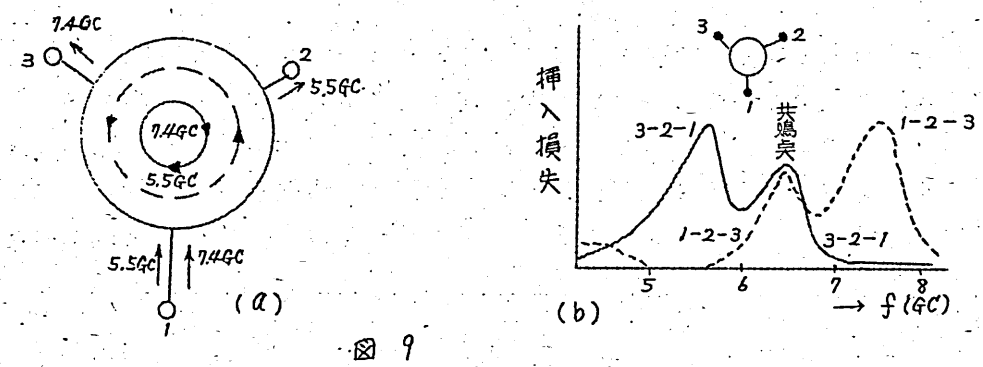


図 9

この回路の周波数特性は同図 (b) の通りであり，低い周波数の方は共鳴磁界より上で，高い周波数のときは共鳴磁界より下で動作していることがわかる。テンソル透磁率の実数部の磁界特性から，正の円偏波に対する透磁率 M_+ と負の円偏波に対する透磁率 M_- との大小が共鳴磁界の前後で逆になっていることから循環方向が逆なことが理解できる。この回路を用いて図10に示すような，同時に2周波数で動作する送受共用回路，Quadruplexer[9]，が提案されている。

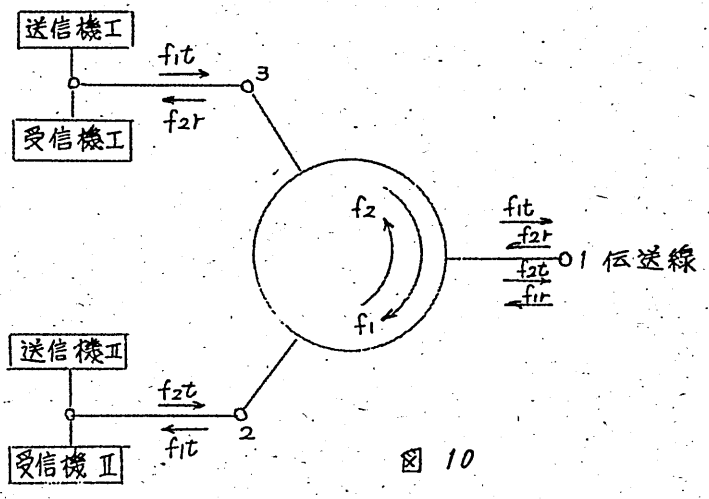


図 10

第二は方向性電力分配回路[10]と筆者が呼んでいる回路で，3端子対形では次のようなS行例を有するものである。

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & i1/\sqrt{2} \\ 0 & -i1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち図11で①からの入射波は無反射で全電力が③へ透過されるが，③からの入射波はやはり無反射であるが，①と②とに等分される。

この回路を用いて図12に示すような送受共用回路が得られる。この場合送信波が

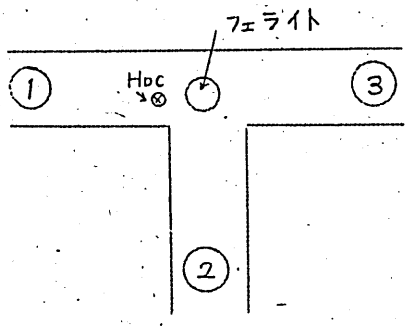


図 11

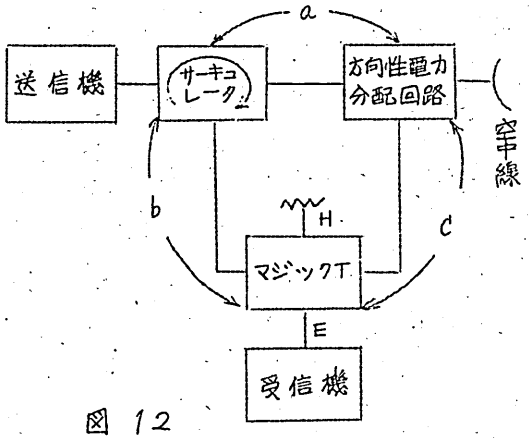


図 12

大部分空中線から放射されることは明らかである。このときサーキュレータおよび方向性電力分配回路の漏洩波の透過係数が位相，大きさともに等しいとし，図示の各電気長 a, b, c 間に $a+c-b=2n\pi$ の関係があると，全漏洩波はマジックTのH分岐に透過することになり，送信機と受信機との遮断量は極めて大きな値となる。

つぎに空中線からの受信波は，方向性電力分配回路の性質によって等分され，$a+b-c=(2m+1)\pi$ とすると，等振幅，逆位相でマジックTの両側分岐に到達するので全受信波を受信機側にとり出し得る。この送受共用回路はCWにも使用し得るのが最大の特長である。

4. 移相器およびスイッチ

フェライト移相器はアンテナのビーム走査用およびスペース・ダイバシティ受信の位相合成用などに用いられているが，移相量対磁化電流の直線性および周波数特性に問題がある。

まず移相量対磁化電流の関係はフェライトの磁化特性のため，磁化し初めた部分と飽和に近い部分とでかなり弯曲する。したがって直線性を改善するためには，磁化電流の範囲を限って反射形として使うのが有効である。しかしそれでもなおフェライト自体の特性および反射の存在によって一般には図13(a)のような形の曲線となる。この場合反射形移相器の手前の適当な位置にビスを挿入することにより直線性をさらに改善し得る[11]。反射形移相器の移相量の変化にともなって，その手前の導波管内の定在波も移動するので，一個所に固定したビスのきき方が変化する。これを利用して，ビスの挿入場所を適当にすることにより，各移相量に対するビスの移相効果を図13(b)のようにすると，総合移相特性は直線に近くなる。この方法によると直線性を180度の移相範囲で±4度以内におさめることができ，フェライト移相器以外にも適用可能である。

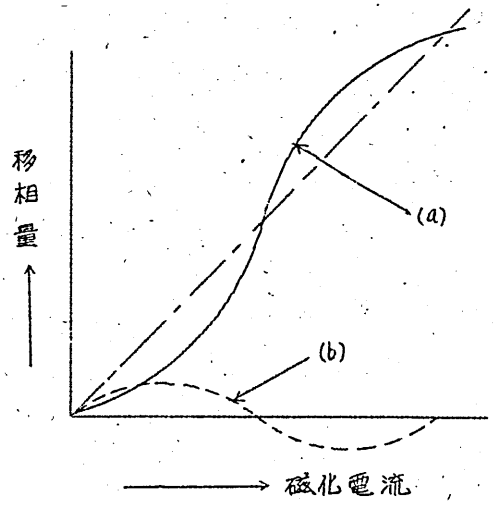


図 13

種々のフェライト移相器中，特性，能率の両方から Reggia-Spencer 形が優れており，

特に大きな電力を通さない場合には大体この形が使用されている。ただこの形の難点は周波数特性が非常に悪いことである。図14に示すようにフェライトを2分して上下の壁につけると，周波数特性は改善されるが，移相能率は非常に悪くなる。したがって能率が良くしかも広帯域な移相器の開発が必要である。

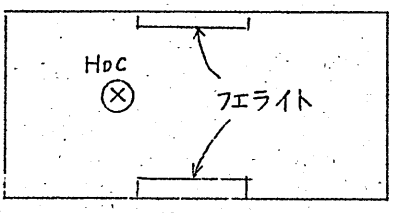


図14

つぎに移相器の用途によっては，出力端の位相が同一方向に連続して無限に変化することが望ましい場合があり，この無限移相器としては回転形移相器が考えられ，フェライトを用いた場合に必要な回転磁界が容易に得られる方法について種々の工夫が行われている。

これに対し駆動電力が少なくてすみ，低い周波数帯での特性の良い Reggia－Spencer 形移相器とフェライト・スイッチとを組合わせて得られるフェライト形無限移相器については，昨年報告した[12]。この無限移相器とデイジタル式制御装置とを組合せて，連続位相変移および位相の自動最適値制御を行わせる位相調整器[11]を製作し良好な結果を得ているが，無限移相器自体として，小形，低損失化，広帯域化などの問題が残っている。

最後にフェライト・スイッチについて簡単に述べる。まえがきにも述べたように半導体スイッチと比較すると切替時間はやゝ劣るけれども，電力の大きい所での使用に適し，現在のところ損失特性も優れている。最近ストリップ線路形のカット・オフ・スイッチで透過時の挿入損失 0.1dB，遮断量 60dB 以上という高性能のものが報告されている[13]。

この他フェライト・スイッチには種々の形式のものがあり，それぞれ一長一短がある[14]。しかし遮断量の大きいことを必要とするオン・オフ・スイッチではカット・オフ形および Reggia 形，切替スイッチとしてはファラデー回転形またはサーキュレータ形，切替時間をとくに短かくするためにはファラデー回転形を使用するのが良いようである。

いずれにしても，能率よく高遮断量を得るための研究はなお今後の課題であろう。

5. むすび

以上各種マイクロ波フェライト回路の最近の問題点について述べたわけであるが，今後とも使用する領域が拡大するにつれて要求性能を満すための研究を続けると共に新しい形式の回路の開発にも努力すべきであると考える。

参考文献

(1) B. J. Duncan, L. Swern, K. Tomiyasu and J. Hannwacker "Design Considerations for Broad-band Ferrite Coaxial Isolator" IRE, 47, PP.483~490, April, 1957.

(2) W. W. Anderson and M. E. Hines "Wide-band Resonance Isolators" IRE Trans. MTT. vol. 9. P.63. 1961.

(3) 藤沢, 稲垣 "共振形超広帯域単向管" 昭和37年度電気通信学会全国大会論文集 P.315

(4) T. Kitsuregawa and S. Nakahara "Multimode propagation and its Effects on the Reverse Attenuation in the Field Displacement Isolator" Mitsubishi Denki Laboratory Reports. vol. 2 No.4, P432. Oct, 1961.

(5) J. C. Cacheris and N. G. Sakiotis "Ferrite Components for UHF and Microwave Systems." Electronics. vol, 34, No. 38. P. 37, 1961

(6) J. H. Silverman "Now you Can Use Nonreciprocal Divices at Low Frequencies" Electronics. PP. 56~59, Feb. 22. 1963.

(7) J. Clark, G. R. Harrison, "Miniaturized Coaxial Ferrite Devices" Microwave Journal, vol. 5. No. 6. PP. 108~118, June. 1962.

(8) J. Brown, J. Clark "a Unique Solid-State Diplexer" IRE. Trans. vol. MTT-10. P.298, July, 1962.

(9) L. V. D. Hint, E. Schanda "a Microwave Quadruplexer" IEEE, Trans. vol, MTT-11. PP. 90~92. Janu., 1963,

(10) 中原 "方向性電力分配回路" 昭和38年電気四学会連合大会講演論文集. 1342.

(11) 野村, 近藤. 喜連川. 中原. 近藤 "5GC 位相調整器" 電気通信学会マイクロ波伝送研究会資料. 昭和37年9月20日

(12) 喜連川, 中原. 近藤 "5Gc フェライト形無限移相器" 輻射科学研究会. 第2, 3, 4部会資料. 昭和37年6月30日

(13) C. E. Fay "Ferrite Switches in Coaxial or Strip Transmission Line" IRE. Trans. vol. MTT-10. PP. 455~458. Nov, 1962.

(14) 中原 "マイクロ波フェライトスイッチの問題点" エレクトロニクス・ダイジェスト. vol. 49, トレーニングコースその206. PP. 143~149. 1962.

輻射科学研究会資料

75 Gc 帯後進波発振管

加藤義郎

柳岡功

鴻巣理

菊地実

（松下電子工業株式会社研究所）

昭和38年9月28日

（於　電子会館）

75 Gc 帯後進波発振管

加藤義郎，柳岡　功
鴻巣　理，菊地　実
（松下電子工業株式会社研究所）

概　要

ミリ波帯の中でも短ミリ波帯で動作する連続波発振管はまだ研究開発されていないので，波長4ミリ帯，周波数75Gc帯で，くし歯形回路を用いた後進波発振管の設計，試作を行なった。試作管MEL 6114は，外観37㎜φ×220㎜の強制空冷金属管で，ビーム電圧1600～3700V，ビーム電流45mA，発振周波数66～81Gc，発振波長4.5～3.7㎜，有用発振出力1～10mW，最大20mW，集束磁界2000 gaussの有望な発振特性を得た。これら発振特性は，理論的に予想される値に近く，今後の特性の向上，発振波長の短縮への有力な手掛りを得た。

1. まえがき

ミリ波通信，レーダ，物性測定等の進歩とともに，ますます短波長で広帯域に動作するミリ波発振管が要求されてきた。ミリ波の発振管としては，単一周波数用のマグネトロン，一般測定用の反射形クライストロンがまず研究開発され，すでに波長6ミリまではわが国でも数種の製品があるが，波長4ミリになると製品は極めて少なく，波長3ミリ以下は利用できるものがない。

われわれはこのような波長4ミリ以下の短ミリ波帯発振管に着目し，動作原理，設計試作技術を検討した結果，このような未開拓の領域では，電子的に極めて広い範囲に周波数を変化できる後進波発振管が最も有望であるとの確信を得て，数年前より波長4ミリ帯，周波数75Gc帯のO形後進波発振管の研究に着手した。これら研究成果の一部はすでに発表したが[1][2]，設計，試作，発振特

性を中心に 75 Gc 帯後進波発振管 MEL 6114 について述べる。

2. 後進波発振管の動作原理と発振開始条件

O形後進波発振管では，波と電子の相互作用は，図1に示すような周期構造

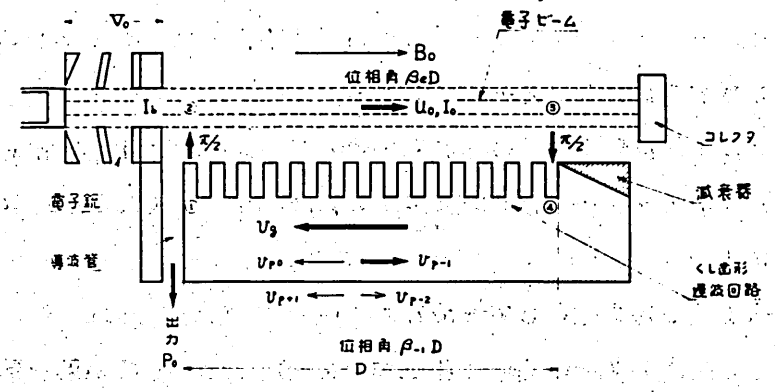


図 1. O形後進波発振管の動作原理図

を有する遅波回路部で行なわれ，回路上の後進波と回路に極めて接近して流れる電子ビームが主役を演ずる。

遅波回路上に U_g なる群速度でエネルギが左方に向って伝搬する波を考えると，周期構造のため同じ U_q を有しながら位相速度 U_p の異なる空間高調波の合成として表わされる。図1では，左向きの U_{p0}, U_{p+1} …等の位相速度の波は前進波で，右向きの U_{p-1}, U_{p-2} … 等の位相速度の波は後進波である。光の速度を U_c とすれば，こゝで取り扱う範囲では，これら位相速度の大きさは次の通りである。$|U_c| > |U_{p0}| > |U_{p-1}| > |U_{p+1}| > |U_{p-2}| > \cdots\cdots$

また遅波回路の分散特性から，U_{p-1} 等の後進波の位相速度は周波数の変化とともに連続的に変わる。

いま U_{p-1} なる後進波にのみ注目し，ビーム電圧 V_0 を調整して，U_{p-1} と

同方向で大きさのほゞ等しい電子速度 u_0 をもつ電子ビームを作ると，この後進波と電子の間に相互作用がはじまり，これはDなる回路有効全長にわたって累積的に行なわれる。この結果，変調電子ビーム上の高周波電流は右方のコレクタに近づくとともに増大するが，回路波の高周波電界はエネルギの伝搬方向すなわち左方の電子銃に向って増大する。従って図①→②→③→④→①のような帰還ループが自然に形成され，このループを一周する間の位相変化が一周期の整数倍になり，相互作用による波の利得が回路損失以上になると v_{p-1} の位相速度に相当する周波数で発振がはじまる。[3]

このような動作原理から，後進波発振管の特徴は次のようになる。

(1) ビーム電圧を変えるだけで非常に広範囲に発振周波数を変化さすことができる。

(2) 発振周波数は負荷の影響を受けにくい。

(3) 遅波回路上の多数の間隙で相互作用を行なわせ，その効果を累積させる原理は，短ミリ波帯においても極めて有効である。

いま電子ビームの空間電荷を無視し，回路損失もないとすれば，発振開始条件は次のように表わせる。

位相条件：

$$(\beta_{-1}-\beta_e)D=\left(\frac{\omega}{v_{p-1}}-\frac{\omega}{u_0}\right)D\simeq(2n+1)\pi \qquad (1)$$

$$\omega=2\pi f$$

$$n=0,1,2,\cdots\cdots$$

$$u_0=\sqrt{2\eta V_0} \qquad (2)$$

振幅条件：

$$(CN)_s=\left[\left(\frac{\bar{K}_{-1}\cdot I_s}{4V_0}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{fD}{u_0}\right)\right]_s=\text{const.} \qquad (3)$$

$$\bar{K}_{-1}=\frac{|E_{z-1}|^2}{2\beta_{-1}^2 P} \qquad (4)$$

β_{-1} ： －１次空間高調波（後進波）の位相定数

β_e ： 電子速度に相当する波の位相定数

f ： 周波数　　ω：角周波数

η ： 電子の電荷と質量の比

C ： 結合係数（利得係数）

N ： 回路有効全長にのる電子速度に相当する波の波長総数

I_s ： 発振開始有効電流

$\bar{K}_{-1}$ ： 電子ビームが通る位置における－１次空間高調波の有効結合インピーダンス

E_{z-1} ： 電子ビーム進行方向の有効な－１次空間高調波の電界成分

P ： 回路を伝わる高周波の電力流

従って，発振動作中の有効電流を I_o とすると，

$$I_o > I_s , \qquad (CN) > (CN)_s$$

にしなければならない。こゝでCは次式より求められる。

$$C = \left(\frac{\bar{K}_{-1} \cdot I_o}{4 V_o}\right)^{1/3} \qquad (5)$$

従って後進波発振管では，所要の周波数帯で，用いる遅波回路，電子ビームの形状，寸法に応じて，β_{-1}，$\bar{K}_{-1}$，V_o，I_o，C，Nを計算し，I_s および発振出力 P_o を求めることが主なる電気設計となる。

3. 75Gc 帯後進波発振管の設計

3.1 後進波発振管に重要な二つのパラメータ

ミリ波後進波発振管においては，電子ビームの空間電荷と遅波回路の回路損失は最も重要なパラメータとなる。空間電荷の影響は (QC) なる空間電荷係数によつて表わされ，回路損失は dB で表わした回路有効全長の分布損失 Lc で表わされる。

後進波発振管の小信号理論[4]から，(QC) および Lc をパラメータとして，

後進波発振開始条件は表１のように計算されている。この表は(1)式の n = 0 に

	Lc (dB)	(CN) s	$(\beta_{-1}-\beta_e)D$	Q/N
(QC) = 0	0	0.3141	3.003	0
	10	0.3847	3.324	0
	20	0.4627	3.695	0
(QC) = 0.25	0	0.3434	3.238	0.7280
	10	0.4329	3.754	0.5775
	20	0.5348	4.415	0.4675
(QC) = 0.50	0	0.3990	3.843	1.2530
	10	0.5207	5.048	0.9602
	20	0.6344	6.198	0.7881
(QC) = 1.00	0	0.4914	6.397	2.035
	10	0.6218	8.060	1.608
	20	0.7537	9.779	1.327

表１　後進波発振管の発振開始条件　（Johnsonの文献から）

相当する発振である。表から明らかなように (QC) および Lc の増加により (CN)s が増加し，(3)式より I_s が高くなる。また $(\beta_{-1}-\beta_e)D$ も増加し，(1)式の u_0 と v_{p-1} の差も増加する。

(QC) は，Q と C の積であるが，軽減されたプラズマ角周波数 ω_q と次式により関係づけられる。[5]

$$2C\sqrt{(QC)} = \frac{\omega_q/\omega}{1+(\omega_q/\omega)} \simeq \frac{\omega_q}{\omega} \qquad (6)$$

ω_q は，プラズマ角周波数を ω_p，プラズマ周波数軽減係数を R_p，回路中における電子ビームの電流密度を J_0，電子ビームの有効断面積を S_0，自由

空間の誘電率を ε_0 とすれば次式で与えられる。(6)

$$\omega_q = R_p \cdot \omega_p$$

$$= R_p \cdot \left(\frac{\eta \cdot J_0}{\varepsilon_0 \cdot U_0}\right)^{1/2}$$

$$= R_p \cdot \left[\frac{\eta^{1/2} \cdot I_0}{(2V_0)^{1/2} \cdot \varepsilon_0 \cdot S_0}\right]^{1/2} \qquad (7)$$

従って(5)，(6)，(7)式より

$$Q = \frac{R_p^2 \ (2\eta V_0)^{1/2}}{2\,\bar{K}_{-1} \cdot \varepsilon_0 \cdot S_0 \cdot \omega^2} \qquad (8)$$

となり，I_0 に無関係の量として Q が求められる。従って設計に際しては，(8)式と(5)式の積として (QC) を求めた。

75Gc帯のようなミリ波帯では，回路に使用する金属の導電率，金属の表面粗さ，金属の表面組織，金属の鑞付部分の抵抗等回路損失に影響する因子が複雑であるので，回路損失を理論的に計算し設計に用いることは難しい。従ってあらかじめ実験的に求められた測定値を用いて設計を行なうべきである。

そこで Lc としては75Gc帯に近い50Gc帯で測定された値に，周波数，回路有効全長等の相違を補正した推定値を用いることにした。

3.2 くし歯形遅波回路の設計

75Gc帯後進波発振管の設計目標として，発振周波数範囲を65～80Gcとし，ビーム電圧変化範囲を1000V 以上，5000V 以下として，遅波回路の設計を行なった。

遅波回路としては，有効結合インピーダンス $\bar{K}_{-1}$ の大きいものでなければならないが，75Gc帯にもなると次の各要求を満たすものでなければならない。

(1) 遅波回路の主要寸法が極めて小さく（約0.1㎜～0.3㎜），精度の高いものになるので，機械的に丈夫で，製作容易な構造でなければならない。

(2) 電流密度の高い電子ビームを遅波回路に接近して通す必要があるので，電子ビームの損失は避けられなくなり，遅波回路としては熱放散の非常によいものでなければならない。

(3) 回路損失が増加するので，回路損失の少ない金属材料，遅波回路構造でなければならない。

図2は現在までに提案された後進波発振管の遅波回路の代表的なものを示したものである。

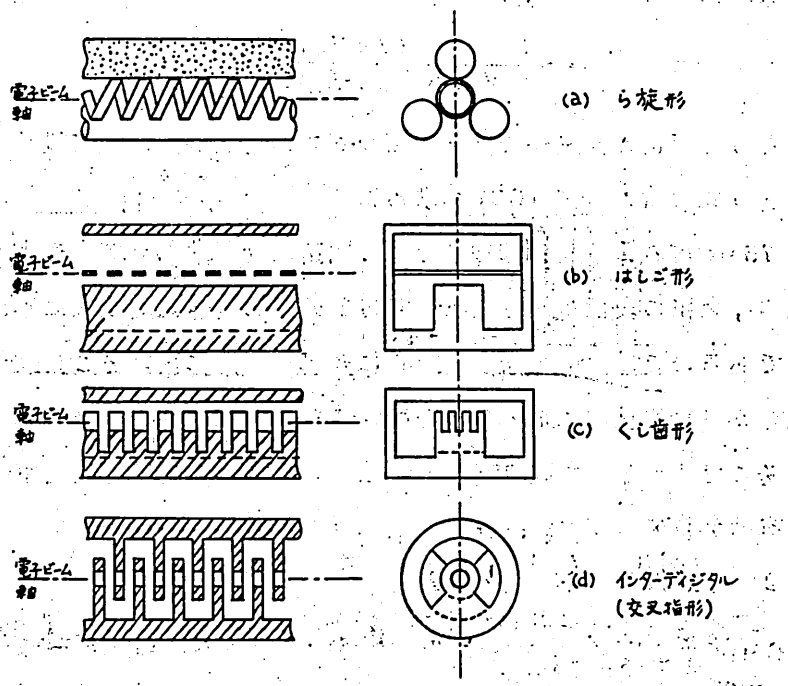


図 2. 後進波発振管用各種遅波回路

ら旋形回路は巻線技術を使えるが，(1)，(2)，(3)いずれにも問題があり使用は難しい。はしご形回路は(1)はよいが，(2)，(3)に問題があり，発振出力は余り期待できない。交叉指形回路はK_{-1}が大きく有望であるが，2個の周期回路が交互に組み合わさった構造なので(1)に問題がある。

くし歯形回路は，(2)の熱放散の点で最も優れており，(1)，(3)もよいので，遅波回路としてくし歯形回路を採用した。

進行波管の発展に関連して，ら旋形回路は最も設計資料が多く後進波発振管の理論に関する論文も主にら旋形回路を取り扱っている。

くし歯形回路を用いた後進波発振管については数種の研究実験報告[7)~10)]があるにすぎず，具体的設計法について述べた論文はない。こゝでは，われわれが行なった具体的設計について述べる。

くし歯形回路の構造は図3に示すようなもので，この回路の位相定数と結合

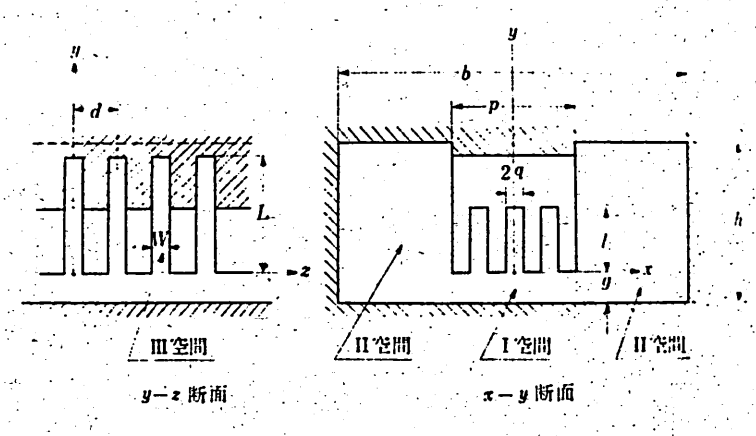


図3. くし歯形回路

インピーダンスは，われわれの一人が前に電磁界の解析から理論的に導いている。[11)12)] その結果の理論式は次の通りである。

n を空間高調波の次数とすれば，波の伝搬方向の位相定数 β_n は次式により計算される。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin(\beta_n W/2)}{\beta_n W/2}\right]^2\cdot\left[\frac{\coth(\gamma_n g)}{\gamma_n g}\right]=\frac{dL}{gW}\left[\frac{\cot(\sqrt{\beta_c^2-k_0^2}\cdot L)}{\sqrt{\beta_c^2-k_0^2}\cdot L}\right] \qquad (9)$$

$$\beta_n=\beta_0+\frac{2\pi n}{d} \qquad (10)$$

$$\beta_c=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \qquad (11)$$

$$\gamma_n^2 = \beta_n^2 - (\beta_c^2 - k_0^2) \qquad (12)$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_\ell} \qquad (13)$$

こゝでdはくし歯横溝の周期長，Lは横溝深さ，Wは横溝幅，gはくし歯の歯先間隙，β_cは自由空間の固有位相定数，μ_0は自由空間の透磁率，γ_nは波の伝搬に直交するy方向のn次空間高調波の伝搬定数，λ_ℓはくし歯形回路の下の遮断波長である。λ_ℓはくし歯形回路と同じ横寸法のリッジ導波管の遮断波長に等しいとおくことができる。

(9)式からn＝0の基本波位相定数β_0を計算し，(10)式に代入してn＝－1とおけば位相定数β_{-1}がfの関数として求められる。

n次空間高調波の結合インピーダンスK_nは，横溝内の電界成分E_{zn}を平均して計算し，近似式として次式が得られている。

$$K_n = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{Mn}{M_0}\right)^2\left(\frac{\beta_0}{\beta_n}\right)^2\left(\frac{\gamma_0}{\beta_0}\right)^3\left(\frac{\beta_c}{\alpha_0}\right)^2\left(\frac{1}{\beta_c p}\right)\left[\frac{k_0 p+\sin k_0 p}{k_0 p(1+\cos k_0 p)}\right]}{\frac{1}{4}\left[\frac{k_0 p+\sin k_0 p}{k_0 p(1+\cos k_0 p)}\right]\left(\coth \gamma_0 g+\frac{\gamma_0 g}{\sinh^2 \gamma_0 g}\right)+2\frac{C_d}{\varepsilon_0}\frac{1}{\gamma_0 p}}$$

$$\times\left[\frac{\alpha_0\ell-\sin\alpha_0\ell\cdot\cos(2\alpha_0 L-\alpha_0\ell)}{2\alpha_0\ell\cdot\sin^2\alpha_0 L}\right] \qquad (14)$$

$$M_n = \frac{\sin(\beta_n W/2)}{\beta_n W/2} \qquad (15)$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\beta_c^2 - k_0^2} \qquad (16)$$

こゝでpはくし歯の横幅，ℓは電子ビーム用縦溝の深さ，Cdは図3のくし歯形回路xy断面において，歯先空間（Ⅰ空間）とくし歯側空間（Ⅱ空間）の境界における電界の乱れに等価な不連続容量である。

Cdを伝送線路の不連続部容量から推定し，(14)式においてn＝－1とおけば，電子ビーム用縦溝幅2q＝0なる場合の結合インピーダンスK_{-1}がfの関数として求められる。

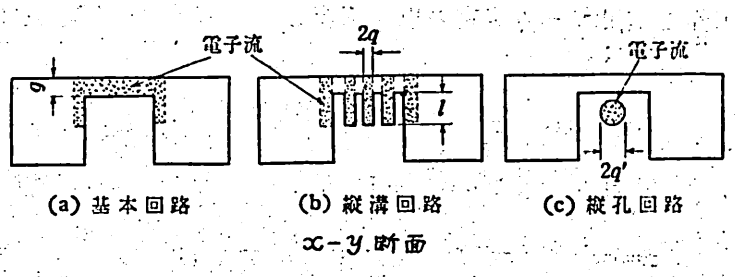


図 4. くし歯形回路用電子ビームの通路

電子ビームの通路としては，図 4 の(a)，(b)，(c)が考えられるが，(a)の歯先間隙では E_{z-1} が弱く，(b)又は(c)のように回路の縦方向に溝又は孔を設け，横溝内空間の E_{z-1} と相互作用させるのがよい。しかし(c)の縦孔回路では電流密度が非常に高くなるので，こゝでは(b)の縦溝回路を採用した。縦溝回路では相互作用の場が広くなり，電流密度をあまり高くする必要がなくなる。

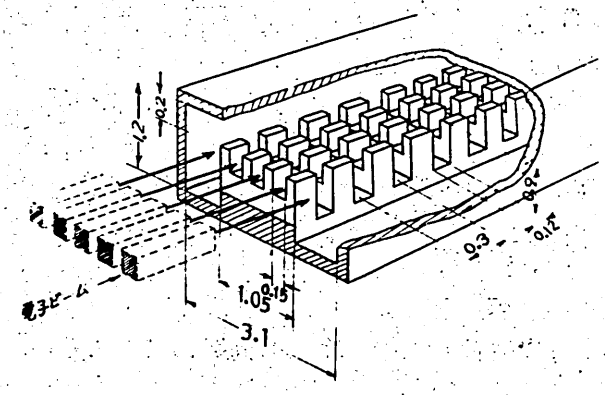


図 5. 75 Gc 帯用くし歯形回路

図 5.は 75 Gc 帯用として設計したくし歯形回路主要部の寸法と，使用する電子ビームの形状を示す。$d = 0.3\ mm$，$W = 0.12\ mm$，$L = 0.9\ mm$，$g = 0.2\ mm$ である。

横溝総数は多いほど回路有効全長Dが増し，(3)式の I_s を下げることができるが，機械工作と電子ビーム集束の点を考慮して，有効な横溝総数は 73 個に選んだ。

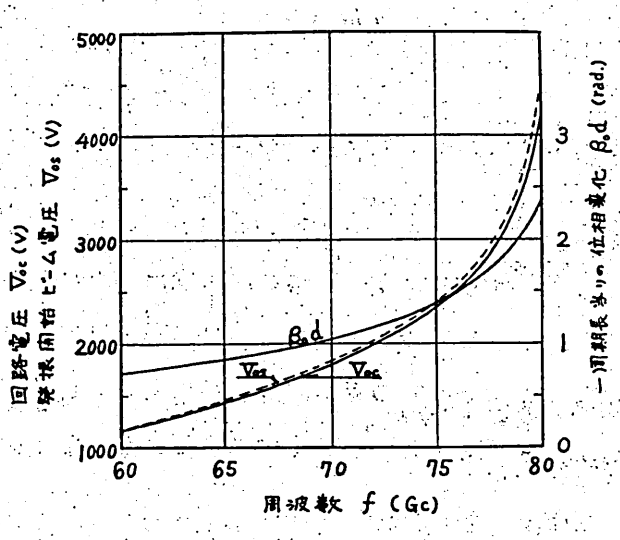


図 6. 周波数に対する一周期長当りの位相変化と回路電圧

図 6 は (9)式で計算した 75 Gc 帯用くし歯形回路の周波数と一周期長当りの位相変化 $\beta_0 d$ の関係，周波数と回路電圧 V_{oc} および発振開始ビーム電圧 V_{os} の関係を示す。

f と V_{oc} の関係は，後進波と電子が完全に同期しているという条件，すなわち $v_{p-1} = u_0$ および(10)式より求められる。

$$V_{oc} = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{2\pi f \cdot d}{\beta_0 d - 2\pi}\right)^2 \qquad (17)$$

また V_{os} は(1)式の $(\beta_{-1} - \beta_e)D$ に，後に示す (QC) および Lc (図 11 参照) に対する表 1 の値を代入して求めたもので，V_{os} は V_{oc} より数十 V 高くなることが分かる。図 6 から 75 Gc 帯後進波発振管のビーム電圧変化範囲は 1400

～4500 Vになる。

電子ビームは図7に示すように5本の矩形ビームに分けて幅 $2q=0.15$ ㎜，深さ $\ell=0.45$ ㎜の縦溝内およびくし歯両側に通すが，このように小さな溝になると，電子ビームの損失なしにコレクタまで通すことは困難である。

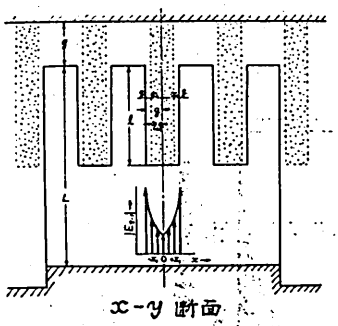


図7. くし歯形回路内の矩形ビームと有効電界成分の分布

すなわちくし歯形回路の電子銃側入口における全矩形ビーム電流に対するコレクタ側出口における全矩形ビーム電流の比は1より小さくなる。この比を回路部のビーム透過率とよび，η_b で表わす。

この原因は，矩形ビーム横幅の変動と，回路全長にわたる矩形ビームの回転にあるが，横幅の変動が支配的である。

一方，この矩形ビームと相互作用をする $|E_{z-1}|$ は，図7に示すように変化し，$x=\pm q$ に相当する金属壁の位置が最大で，この位置の $|E_{z-1}|$ の平均値から求めた結合インピーダンスが，(14)式の K_{-1} である。

矩形ビームの内，この金属壁に近い所を通るビームは最初の変動で取られてしまうので，矩形ビームは平均として $2q$ よりせまい横幅となり，弱い $|E_{z-1}|$ と相互作用をすることになり，電子ビームが通る位置における有効結合インピーダンス $\bar{K}_{-1}$ は K_{-1} より小さくなる。

そこで，理論計算においては，電子ビームの損失は回路入口で生じ，回路部のビーム透過率に応じて矩形ビーム横幅が変化し，この矩形ビーム内の電流密度は一様であると仮定して取り扱う。

このように仮定すれば，矩形ビーム横幅は $2\eta_b q$ になるので，$\bar{K}_{-1}$ は $x=-\eta_b q$ から $x=+\eta_b q$ の $|E_{z-1}|$ の平均値を用いて，次のように求めることができる。

$$\overline{K}_{-1}=\frac{K_{-1}}{2\cosh^2(\beta_{-1}q)}\left\{\frac{\sinh(\beta_{-1}\eta_b q)\cdot\cosh(\beta_{-1}\eta_b q)}{\beta_{-1}\eta_b q}+1\right\} \qquad (18)$$

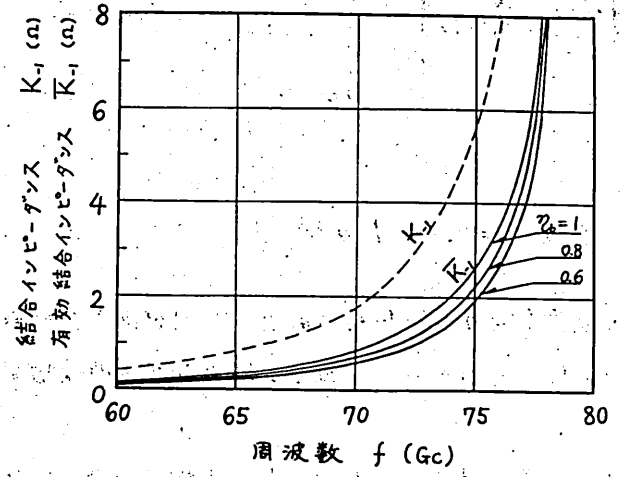


図 8. 周波数に対する結合インピーダンスと有効結合インピーダンス

図 8 は(14)式および(18)式で計算した 75 Gc 帯用くし歯形回路の周波数と K_{-1} および周波数と $\overline{K}_{-1}$ の関係を示す。

3.3 電子ビームの集束とビーム透過率

75 Gc 帯では，電子ビームの電流密度が高くなる上に，ビーム電圧が最高と最低で約 3 倍変化するので，電子ビームの形成と集束は重要な問題となる。

電子ビームの集束には，電子ビーム進行方向に磁界を加えるのが普通で，ここでは平行ビーム用電子銃の使用を予定して，電子銃の陰極からコレクタまでを一様な磁界 B_0 に浸たす confined flow を用いることにした。

図 9 はくし歯形回路の一個の縦溝を通る矩形ビームのリップルを示したものである。くし歯形回路の電子銃側端部には，縦溝に一致する 5 個のスリットを

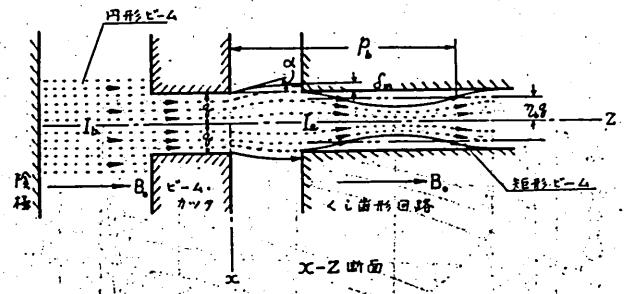


図 9. 矩形ビームのリップル

設けたビーム・カッタが取り付けられており，陰極を出てビーム電圧で加速された円形平行ビームは，このビーム・カッタにより５本の矩形ビームに変形される。

いま，このスリットを通過する矩形ビームの周辺が電子ビーム軸となす角を α，ビーム・リップルの波長を P_b，矩形ビームの最大横幅を $2q_{max}$，リップルの振幅を δ_m とすると，ストリップビームの理論 [13][14] から次の関係式を得る。

$$q_{max} = q + \delta_m \tag{19}$$

$$\delta_m = q\left[\left(\frac{I_e}{2q\ell \cdot \varepsilon_0 \eta U_0 B_0^2}\right)^2 + \left(\frac{U_0 \cdot \tan\alpha}{q\eta B_0}\right)^2\right]^{1/2} \tag{20}$$

$$P_b = \frac{2\pi U_0}{\eta_b B_0} \tag{21}$$

$$I_e = \frac{I_0}{n} \tag{22}$$

ここではnはくし歯形回路縦溝の数で，n＝５である。矩形ビームのｙ方向の変動および矩形ビーム全体の回転を無視すると，η_b は次式になる。

$$\eta_b \simeq \frac{q}{q+\delta_m} \qquad (23)$$

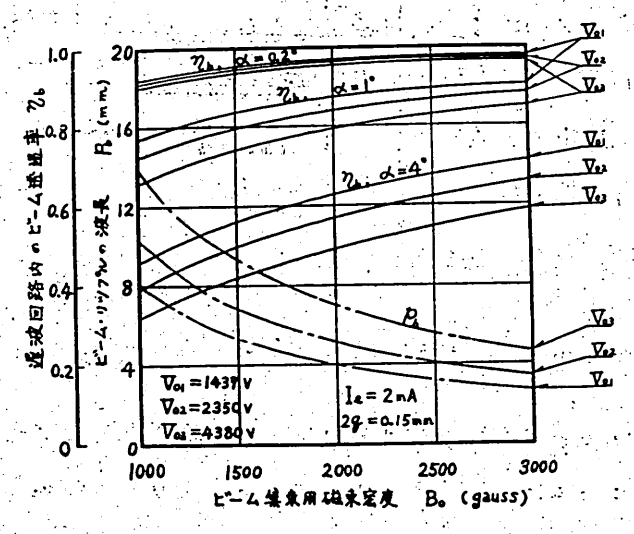


図10. ビーム電圧をパラメータとするビーム集束用磁束密度に対するビーム・リップルの波長とビーム透過率

図10は(19)～(23)式により計算したビーム集束用磁束密度 B_0 に対するビーム・リップルの波長 P_b とビーム透過率 η_b を示したもので，ビーム電圧がパラメータである。こゝで用いた V_{01}，V_{02}，V_{03} の値は図6に示した65Gc 75Gc，80Gcに相当する V_{0c} の値である。

P_b は B_0 に逆比例して減少するが，2000gauss の P_b は4～7㎜となりこの長さのほゞ $\frac{1}{4}$ の所で周辺の電子は回路に取られるから，電子ビーム損失の大きな部分はくし歯形回路の入口附近で生ずることになり，前に述べた仮定が成り立つことを示している。

(20)式の才1項は I_e に関するもの，才2項は α に関するものであるが，$I_e = 2mA$，$I_0 = 10mA$ 程度では，才2項の α に関する項がビーム・リップ

ルに大きく影響する。ビーム・カッタのスリットのレンズ作用による発散角は約0.2°であるから，αをこれ以上に大きくする原因は電子銃側にあることになり，矩形ビームを作る最初のビームが大切である。実際には，$\alpha < 4°$ が実現可能と考えられるので，設計目標として$\eta_b = 0.6$ とすれば，

$B_0 \geq 2000$ gauss となり，集束磁界が求まる。

3.4 発振開始電流と発振出力

(3)式より，発振開始電流 I_s は次式となる。

$$I_s = \frac{4 V_0}{K_{-1}} \frac{(2\eta \cdot V_0)^{3/2} (CN)_s^3}{(f \cdot D)^3} \qquad (24)$$

図1に示すように，くし歯形回路の電子銃端部における発振出力 P_0 は，電子ビーム中の高周波電流の飽和値を仮定することにより，小信号理論の拡張から導かれている。[15] 後進波発振管の効率は，電子ビームの空間電荷，くし歯形回路の回路損失，回路両端の反射，電子ビームの速度分布等によって変わるが主なる因子として空間電荷係数 (QC)，回路損失 Lc のみを考慮し，その他を無視すると，

$0 < (QC) < 0.25$ の範囲では

$$P_0 = F(Lc) \cdot C \cdot I_0 \cdot V_0 \qquad (25)$$

$0.25 < (QC)$ の範囲では

$$P_0 = F(Lc) \cdot C\sqrt{4(QC)} \cdot I_0 \cdot V_0 \qquad (26)$$

で表わされる。ここで $F(Lc)$ は回路損失による出力低減係数で

$$F(Lc) = \exp(-0.115\,Lc) \frac{\cosh(0.115\,Lc)}{1 + \left(\frac{0.230\,Lc}{\pi}\right)^2} \qquad (27)$$

$$\simeq \exp(-0.115\,Lc)$$

で与えられる。

図11は，目標としている $\eta_b = 0.6$ の場合について，(5)式から計算した結合係数C，この結果と(8)式から計算した空間電荷係数 (QC) および50Gc帯の

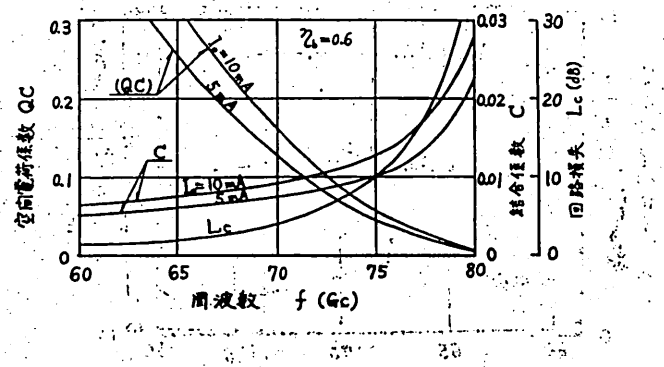


図 11　周波数に対する結合係数，空間電荷係数および回路損失

測定値より推定した回路損失 Lc の周波数特性を示したものである。有効電流 I_0 は，5 mA，および 10 mA である。

C は周波数の増加とともに増し，80 Gc に近づくにつれて増大するが，これは図 8 に示した $\overline{K_{-1}}$ の増大のためである。75 Gc で C の値は約 0.01 である。

(QC) は周波数の増加とともに減少し，65 Gc 以上では (QC) $\leq$ 0.25 となり，発振出力の計算は大体(25)式になることを示している。

Lc は低周波側では小さく 75 Gc で 10 dB であるが，75 Gc より周波数が増加し，くし歯形回路の上の遮断周波数に近づくとともに，Lc は急激に増す。

図 12 は，図 11 の計算結果を用い，(24)式および(25)式より計算した $\eta_b = 0.6$ の場合の発振開始電流 I_s および発振出力 P_0 の周波数特性を示す。

I_s は，低周波側においては (QC) の増大のため増加し，60 Gc では $I_0 > 15$ mA でなければ発振しない。しかし設計周波数範囲 65 ～ 80 Gc では $I_s < 4$ mA となり，$I_0 > 4$ mA でこの周波数範囲の発振が得られることになる。

P_0 は (QC) の値によって(25)式又は(26)式より求めた。計算結果は図 12 に示すように，70 ～ 75 Gc の間で P_0 が最大となり，$I_0 = 5$ mA の場合

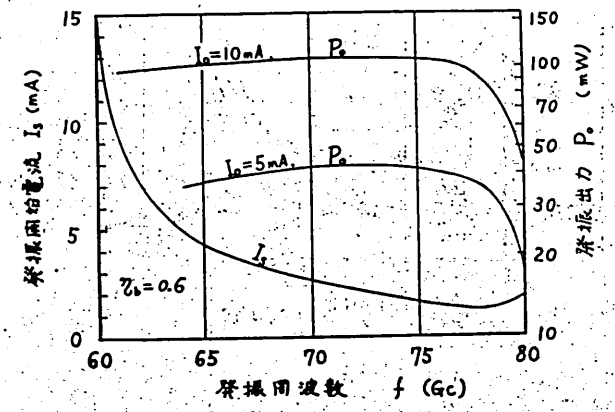


図 12　発振周波数に対する発振開始電流と発振出力

$[P_0]_{max} \simeq 40$mW，$I_0 = 10$mA の場合 $[P_0]_{max} \simeq 100$mW になる。P_0 が高周波側で低下するのは回路損失のためである。

発振出力は大信号理論に基づかなければ，正確な値が得られないが，後進波発振管の大信号理論はまだ確立されていない。しかし小信号理論を適用しても発振動作中では回路有効全長Dが変化して短かくなるものとすればよいという提案[16]もある。この取扱いによれば回路損失が減少するので，図12の P_0 は周波数の増加とともに増加し，78Gcで発振出力が最大となり，$I_0 = 5$mA の場合，$[P_0]_{max}$ は約70mWになる。

こゝに計算した発振出力 P_0 は回路の電子銃端部における値であることに注意する必要があり，測定値は後に述べるようにこれらの値より低下する。

4. 試作管MEL6114の構造

電気設計に基づいて試作された75Gc帯後進波発振管MEL6114の構造を図13に，試作管本体および永久磁石を用いる形式の放熱器付試作管の外観を図14に示す。

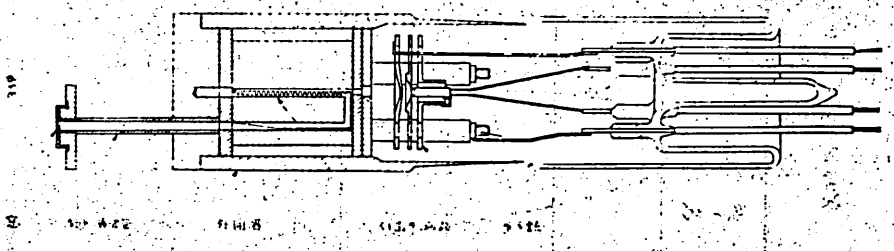


図 13.　75Gc帯後進波発振管ME L6114の構造

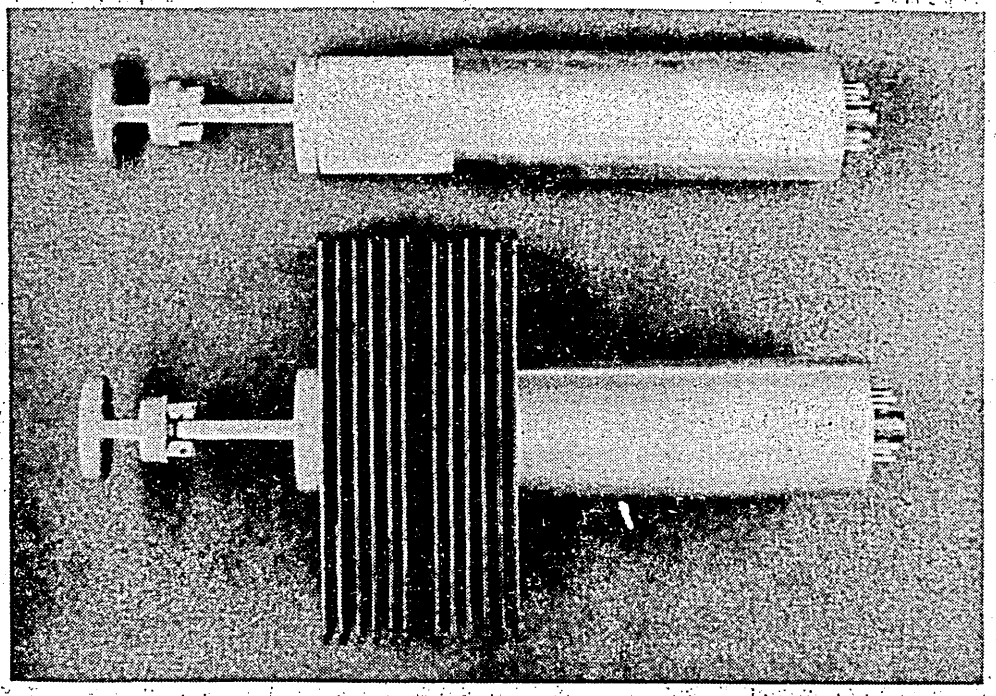


図 14.　75Gc帯後進波発振管ME L6114の試作管本体および放熱器付試作管

くし歯形回路は外囲器内部のほぼ中央部に位置し，発振出力は，電子銃端部から出力結合回路とよばれる立体回路系を経てコレクタ端部に導き，ＷＲＪ－７５矩形導波管および円形ガラス導波管窓を経て外部に取り出される構造である。電気伝導，熱伝導がよくガス放出が少ない非磁性金属という点から，くし歯形回路，外囲器には主として真空溶解銅が使用され，外囲器のステムには硬質ガラスが使用されている。

外形寸法は，ＢＲＪ－７５導波管フランジからオクタル・ベース端までの全長が２２０㎜，放熱器を除く最大外径が３７㎜φで，使用上は強制空冷金属管である。

試作管ＭＥＬ６１１４は，電気設計，構造設計，試作技術等の良否を確かめ，今後の設計資料を得ることを目的として試作された才一次試作管で，ＢＲＪ－７５導波管フランジ端から取り出しうる有用発振出力数 mW以上を目標とした。

4.1　電　子　銃

有効電流 $I_0 = 5$ mA，$\eta_b = 0.6$ のとき約４０ mW の発振出力が期待できるが，発振出力を外部へ導き出すための立体回路系や導波管気密窓の損失を０にすることは困難である。従って発振出力が40mWでも，有用発振出力は数分の一に低下することを予想していなければならない。

そこで，$I_0 = 5$ mA 実現を才一次試作管の目標とした。$I_0 = 5$ mA，$I_e = 1$ mA のとき電流密度は約 $2\ A/cm^2$ であるから，電子放射密度の高い陰極を使用すれば，平行ビーム用電子銃が使用できる。

電子銃の設計はPierceの方法によって行なった。図１３に示すように円形平行三電極電子銃とし，才一陽極，才二陽極の間隔は，円形ビームのリップルがビーム電圧変化範囲で平均して小さくなるように選んだ。(17)

円形ビームの直径は1.35㎜で，ビーム・カッタにより５本の矩形ビームに変形される。

円形ビームの断面積を S_b，全ビーム電源を I_b，ビーム・カッタのスリット総面積を S_s，回路中の電子ビーム有効断面積を S_0 とすると，有効ビーム

電流 I_0 と I_b の関係は次式になる。

$$I_0 = I_b \cdot \frac{S_s}{S_b} \cdot \eta_b = I_b \cdot \frac{S_0}{S_b} \qquad (28)$$

I_b は余裕をみて45mAまで流し得るように設計しているが，このときの陰極電流密度は約 $3\,A/cm^2$ である。そのため陰極には含浸形陰極を使用している。

円形ビームを使用したため，S_s/S_b の比は0.34であるが，これは矩形ビーム用電子銃を採用すれば0.55まで向上できる。

くし歯形回路および電子銃の設計から，試作管MEL6114の設計仕様は次の通りである。

発振周波数	：	65～80Gc
ビーム電圧	：	1400～4500V
ビーム電流	：	45mA
有用発振出力	：	数mW以上
集束磁界	：	2000 gauss

4.2　くし歯形回路と出力結合回路

くし歯形回路とWRJ－75矩形導波管の間に設けられる出力結合回路は，15Gc 以上の広帯域伝送特性が要求される。従来この目的には，くし歯に向き合う広い壁面に短辺を小さくした低インピーダンスの矩形導波管を直角に設け，これをさらに90°曲げてコレクタ端部に導く構造が採用されていたが，工作が面倒な上，周波数帯域幅も十分でなかった。

そこで，新たにくし歯に連続してリッジ導波管部を設け，リッジ導波管系を中心とする方法を検討した。図15は，考案した出力結合回路の構造[18]と10Gc 帯拡大模型回路で測定された全回路系の電圧定在波比（VSWR）を示したものである。この構造の要点を述べると次の通りである。

① リッジ導波管コーナーは直角で，2ケ所にあるが，リッジ間隙が0.2㎜でせまいため，伝送特性には余り影響せず，全体の構造が簡単になる。

② くし歯に直角なリッジ導波管部の長さは伝送特性にはほとんど影響しな

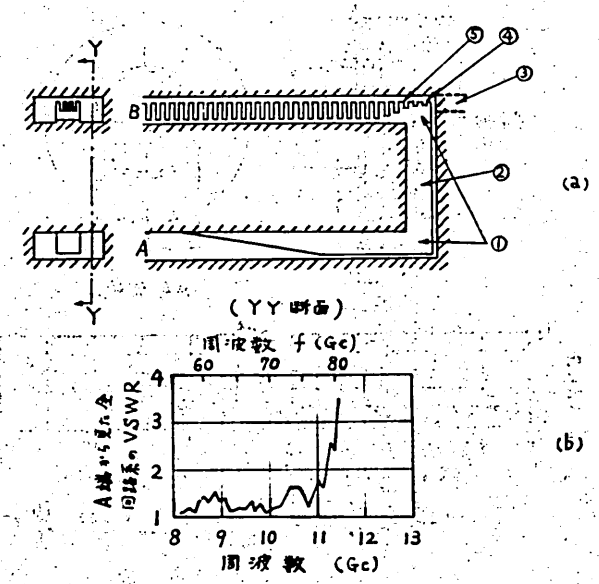


図15. 出力結合回路の構造と周波数に対するVSWR の測定値

いので短くできる。

③ 電子銃側の壁面にはビーム・カッタ用スリットを設けているが，伝送特性にはほとんど影響しない。

④ リッジ導波管コーナ近くまで浅い横溝を設けた方が伝送特性がよい。

⑤ 数個の深さが徐々に変化する横溝が必要である。

10Gc帯の測定結果によると，矩形導波管側から見たVSWR は所要の周波数帯域のほとんど全域で，1.7以下となり，理想的な値ではないが，工作容易な構造で十分使用できる出力結合回路が得られた。この結果より，くし歯横溝の総数はくし歯形回路全長で85個に選んだ。

導波管気密窓についても広帯域に反射が少なく且つ75Gc帯で実現容易な構造について検討し，図16 (a) に示す円形導波管窓の構造を考案[19]し，図16 (b) に示すような極めて良いVSWR および損失の特性を得た。10Gc帯の

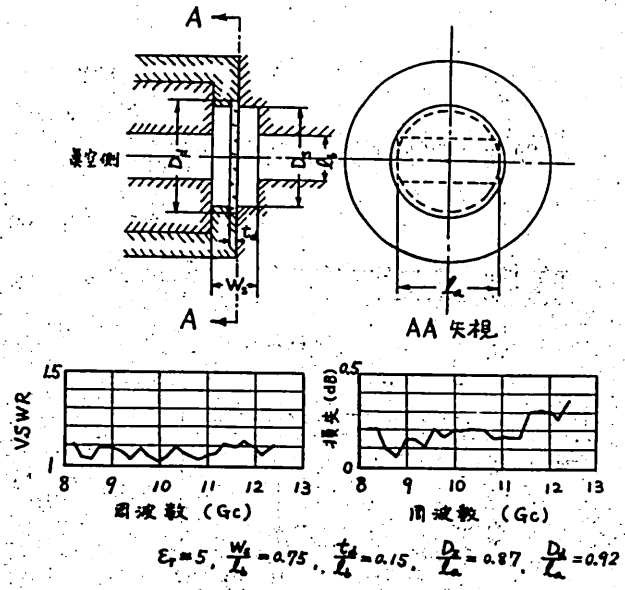


図 16.　円形導波管窓の構造と周波数に対する VSWR および損失の測定値

拡大模型による測定では，図に示すような簡単な円形ガラス導波管窓で，8～12.4Gcの範囲で，VSWR≦1.1にでき，所要の周波数範囲を十分満足している。

5.　試作管ME L6114 の特性

5.1　測定値と理論値

測定値と理論値を比較する場合には，設計で述べた諸式に電子ビームの実験で得られたビーム透過率の値を代入して行なった。

75Gc帯の発振特性の測定には，1N53 鉱石検波器と，1Z16 バレッタを用いた。バレッタ効率は測定していないが，整合をとった状態で 0.6 とし，試作管の BRJ－75導波管フランジ端における有用発振出力を求め，発振出力測定値とした。

導波管窓は，図16に示す構造では，75Gc帯用でガラス円板の厚さが約0.2㎜になるが，今回の試作管では0.5㎜としたので損失は少し増加した。72Gcから77Gcの間の測定によると，導波管窓の損失は1～3 dB の間に分布している。そこで導波管窓および出力結合回路の損失は2～4 dB として，図12に示したような発振出力 P_0 の理論値を補正し，導波管フランジ端における有用発振出力を計算し，発振出力理論値とした。試作管MEL6114では，コレクタを回路から絶縁していないので，発振動作中の有効電流 I_0，発振開始電流 I_s を直接測定することはできない。そこで，(28)式に示した全ビーム電流 I_b を測定値として用いた。I_b には，オ二陽極電流，ビーム・カッタ電流くし歯形回路にとられる電流，くし歯形回路を通りぬける電流 I_c 等が含まれるが，I_0 は大体 I_b に比例すると考えられる。

ビーム透過率 η_b は，別に試作したビーム・テスト管による測定から，集束磁界2000gaussから2700gaussの間で 0.4～0.5であることが分ったので発振開始電流，発振出力の理論値はこの値を用いて計算した。

5.2　発振周波数範囲と発振開始電流

数本の試作管について測定した結果は，何れも同じような傾向を示しているが，細部については多少の差がある。

くし歯形回路の主要寸法が図5の通りで，工作精度が±1％以内のときにはビーム電圧—発振周波数特性は，ほとんど図6の発振開始ビーム電圧 — 周波数特性に一致した。

図17以下に述べる発振特性は，数本の内の一つの試作管について測定した値である。この試作管は，使用したくし歯形回路の横溝深さが約20μ，横溝幅が約10μ小さかったので，上の遮断周波数が少し高周波側にずれたが，82Gc 附近まで発振した。

図17はビーム電圧—発振周波数特性で，主要寸法の僅かなずれを補正した理論値は測定値と大体合っている。ビーム電圧1600～3700 V の変化に対し発振周波数は66～81Gc，発振波長は4.5～3.7㎜である。また75Gcにおけ

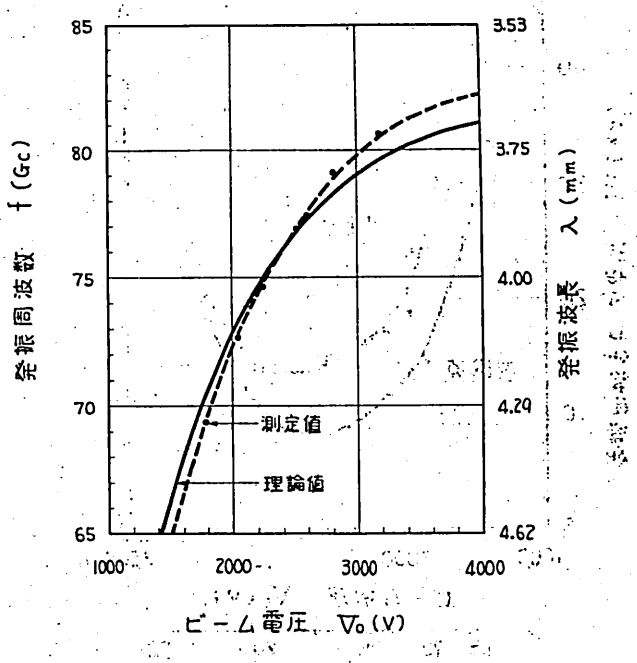


図17. ビーム電圧—発振周波数特性の測定値と理論値

る周波数変調感度は約8 Mc/Vであった。

図18はビーム電圧—発振開始全ビーム電流特性で，測定した発振開始全ビーム電流の周波数による変化の傾向は，$\eta_b = 0.5$ として計算した理論値に大体合っている。設計通り75 Gc附近の発振開始電流が低い。

5.3 有用発振出力

図19は全ビーム電流—発振出力特性で，測定周波数は73 Gcである。発振は全ビーム電流 $I_b = 18$ mA ではじまり，電流の増加とともに出力は急激に増すが，設計値45 mA附近では，(5)式で分かるように発振出力は電流の $4/3$ 乗

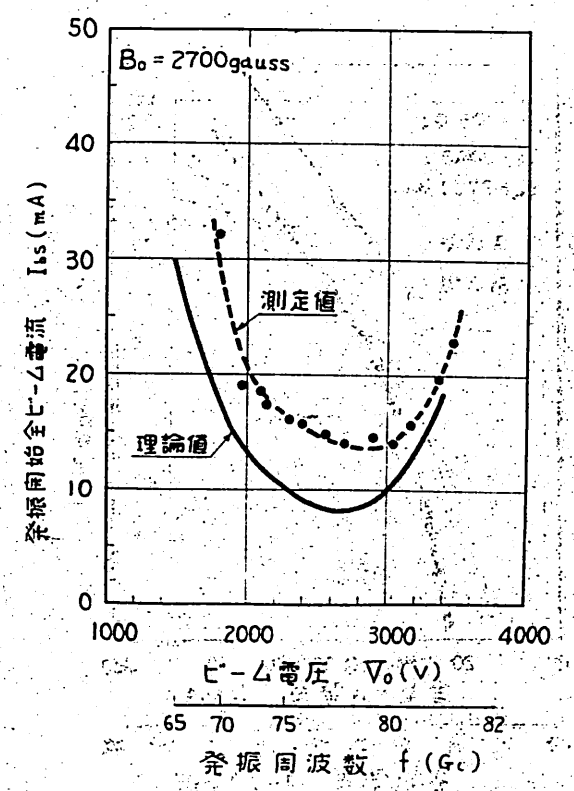


図 18. ビーム電圧—発振開始全ビーム電流特性の測定値と理論値

に比例して増加している。これまでの測定で得られた最大発振出力は20 mWである。

理論値に対して発振出力の測定値は約 1/2 になっているが，これは前に述べた通り，パレッタ効率等推定した値を使用している上に，発振動作中のビーム透過率，回路損失等十分測定されていない部分もあるので，この関係が正しいか否かは今後の測定に待たなければならない。

図19にはビームの電流密度も示してあるが，現在の測定値を基にして，有用発振出力の増加を考えるならば，数十mWの目標に対しては，電流密度を約 10 A/cm^2 まで増加すればよいことが分かる。この場合には収斂ビーム用電子

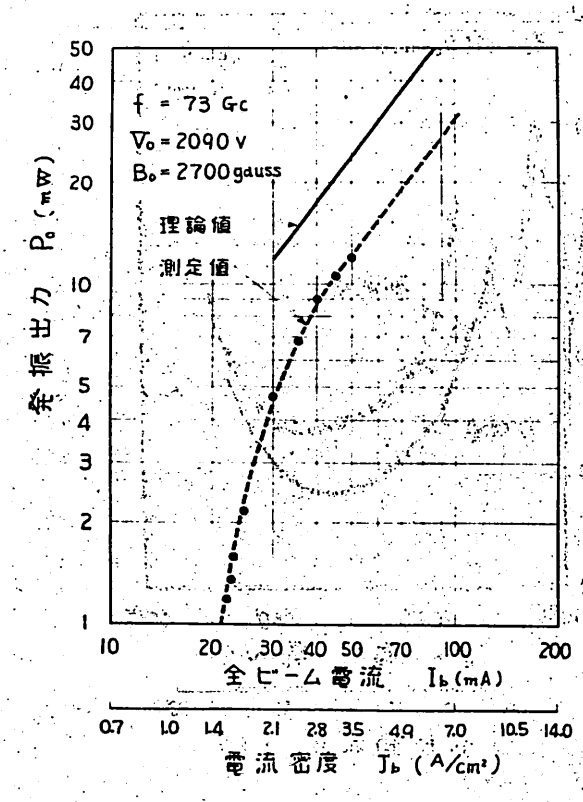


図19. 全ビーム電流—発振出力特性の測定値と理論値

銃を採用しなければならないが，実現困難な値ではない。一方，くし歯形回路は熱放散がよいので，現在の構造の内，電子銃のみ改良すれば有用発振出力をさらに向上できることが分った。

図20図はビーム電圧—発振出力特性で，発振周波数—発振出力特性になる。これは $I_b = 45$ mA，$B_0 = 2700$ gauss のときの測定値である。発振出力は周波数によって多少変動しているが，設計で予想した通り67～77 Gcの間は最も発振出力が大きく，1 mWから10 mWの間にあり，回路損失が増大する77～81 Gcの間でも1～2 mWの発振出力が得られた。

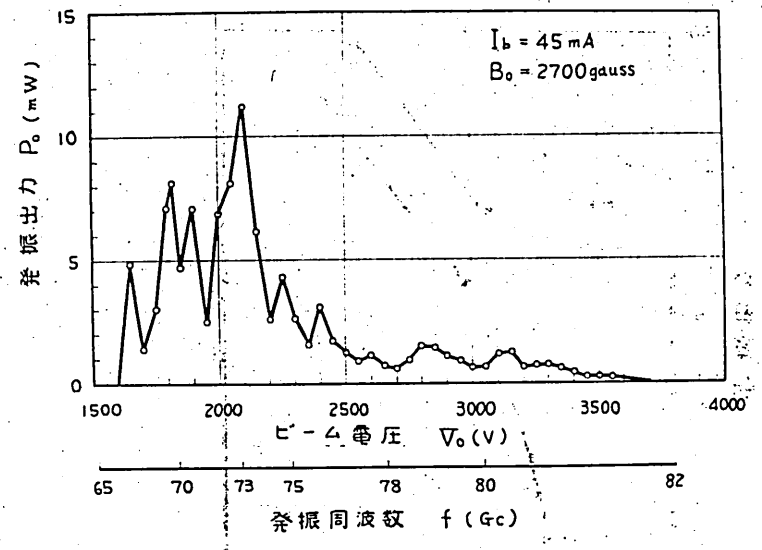


図 20. ビーム電圧—発振出力特性の測定値

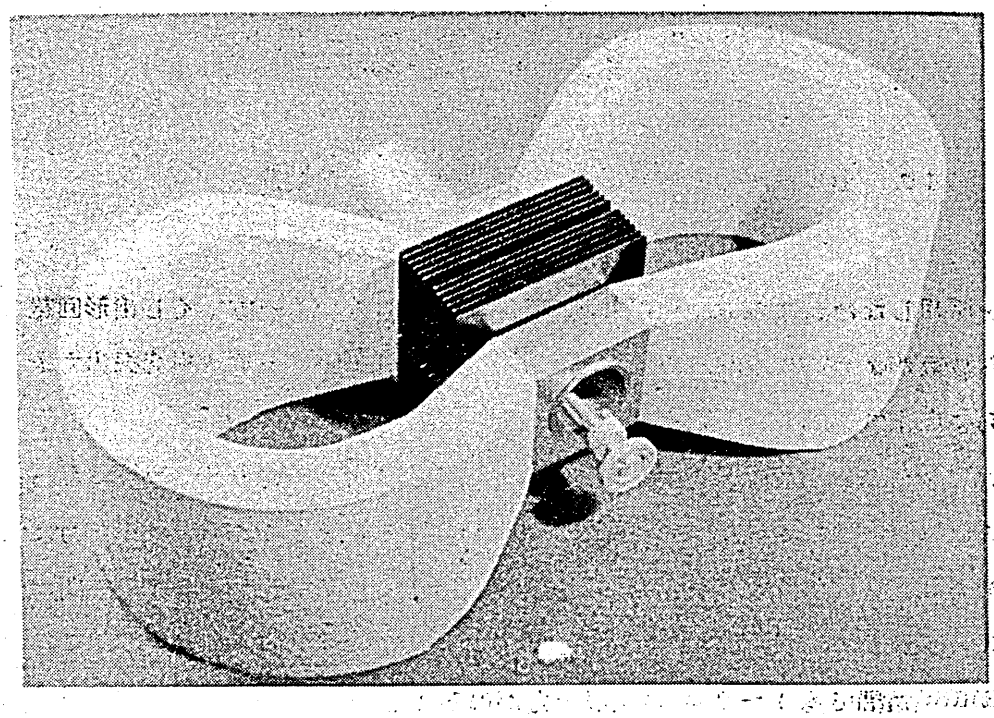


図 21. 永久磁石に装着された 75 Gc 帯後進波発振管 ME L 6114

この試作管ではまだコレクタ側に減衰器が使用されていないが，減衰器付くし歯形回路の使用を別に検討している。これら試作管の測定には，水冷ソレノイド形電磁石を使用し，集束磁界を変えて測定したが，実用上は集束磁界は2000 gaussでよいことが分った。

図21は，図14に示した放熱器付試作管を2000 gaussの永久磁石に装着したものである。

6. むすび

75 Gc帯後進波発振管MEL6114の研究で得られた結果を要約すると次の通りである。

(1) 設計仕様をほゞ満足するミリ波後進波発振管が得られた。こゝで述べた試作管の例では次の通りである。

発振周波数	：	66～81 Gc
発振波長	：	4.5～3.7 mm
ビーム電圧	：	1600～3700 V
ビーム電流	：	45 mA
有用発振出力	：	1～10 mW，最大20 mW
集束磁界	：	2000 gauss

(2) 電気設計で予想される理論的に近い発振特性が得られた。

(3) ミリ波帯全域に広く応用できるくし歯形回路および出力結合回路が得られた。

(4) 精密なくし歯を製作する技術が確立され，さらに短波長帯のものも作れる見通しを得た。

くし歯形回路は，機械的に丈夫で，洗滌，熱処理等を行なっても何ら変形なく，動作中も熱放散が良好であることが確かめられたので，今後は，

(1) 発振特性に影響する各パラメータの測定を積み重ねて設計資料を豊富にするとともに，減衰器の挿入等を行なって発振出力—周波数特性の平滑

化をはかり，商品化をすゝめる。

(2) 矩形ビーム用電子銃，収斂形電子銃等の採用を考慮して有用発振出力の一層の向上をはかる。

(3) くし歯形後進波発振管の設計技術，試作技術をミリ波帯全域に拡張して行く。

等を行なう計画である。

7. 参考文献

(1) 加藤義郎，鴻巣　理，菊地　実，中川喜夫，土井健市，柳岡　功　：昭和38年4月連合大会講演論文集，1420，1963

(2) 加藤義郎，柳岡　功，鴻巣　理，　菊地　実　：　昭和38年7月　電気通信学会マイクロ波真空管研究会資料，　1963

(3) H.Heffner : Proc.IRE, 42, №6, 930/937, 1954

(4) H.R.Johnson : Proc.IRE, 43, №6, 684/697, 1955

(5) C.K.Birdsall, G.R.Brewer : IRE. Trans., ED-1, 1/11, 1954

(6) G.M.Branch, T.G.Mihran : IRE Trans., ED-2, 3/11, 1955

(7) R.Kompfer, N.T.Williams : Proc.IRE, 41, №11, 1602/1611, 1953

(8) J.Laborderie, G.Vincent, T.Yeou : Le Vide, 12, №70, 318/326, 1957

(9) G.Convert, T.Yeou, B.Pasty : "Millimeter Waves" 313/339, Polytechnic Press, New York, 1959

(10) 上領香三，柴田幸男，鹿野哲生，福島美文：昭和35年1月ミリメートル波開発綜合研究委員会資料　1960

(11) 加藤義郎：昭和33年1月マイクロ波真空管研究専門委員会資料，　1958

(12) 加藤義郎，小林寿郎：研究実用化報告，8, №6, 754/781, 1959

(13) J.D.Lawson : Proc.IRE, 42, 1147/1151, 1954

(14) G.Bolz : Nachrichtentech.Zeit., 15, №8, 365/370, 1962

(15) R.W.Grow, D.A.Watkins : Proc.IRE,
43, №7, 848/856, 1955

(16) 松尾幸人，張　吉夫：電気通信学会雑誌，45, №6, 764/772, 1962

(17) 長谷川 晃，岡本隆三：National Technical Report,
7, №3, 237/244, 1961

(18) 特許出願中

(19) 特許出願中

輻射科学研究会資料

単振動波(Simple Harmonic Motion Wave)の理論とその応用に就いて

松尾幸人，戎谷圭介，楠　陽

（大阪大学　産業科学研究所）

昭和38年9月28日

（於　電子会館）

§1. 緒 言

電子が抛物線電場内を往復運動する時には，その電極の大きさ並びに電圧によって与えられる，或る決った固有振動周波数，ω_0，を有する。この様な固有振動周波数をもった電子が，その単振動に対して，直角方向に漂流する時に位相速度が

$$v_{f.s.} = \frac{u_0}{1 \mp \omega_0/\omega}$$

で与えられる，二つの電子ビーム波動を生ずる。[1][2]上式で負符号の場合は位相速度が直流速度より大きく，正符号のものは直流速度よりも小さい波動でこれらの波を単振動波（Simple Harmonic Motion Wave）と呼ぶことにする。これらの波動の中で速い位相速度をもった波動は正のエネルギーを運び遅い位相速度をもつ波動は負のエネルギーを運んでいるが，特に正のエネルギーを運ぶ波動を利用したマイクロ波管を総称してFawshmotronと名付けることにする。*

扨て，この新しい型のFast Waveは正のエネルギーを運ぶことを述べたがその位相速度が$\omega_0/\omega \gtrless 1$の条件の選び方によって，正になったり，負になったりするが，この正の位相速度をもったFast Waveと回路波との干渉を利用したマイクロ波管をB－型Fawshmotronと呼び，負の位相速度のFast Waveと回路波との結合を利用したものをC－型Fawshmotronと呼んでいる。尚このFast Waveを用い，Pumping電力を加える事によって横型のパラメトリック増巾も可能で，これをA－型Fawshmotronと呼ぶ。

本報告は，この型の波動のモード結合方程式を導き，これによって上述の各型のマイクロ波管の働作を統一的に述べたものである。

---

* これはFast Wave Simple Harmonic Motionの文字をとって名付けたものである。

以上の働作機構は，特にFast Waveを用いたものであるが，この種のFast WaveとSlow Waveとの結合に依る増巾管が提案されている。[3]

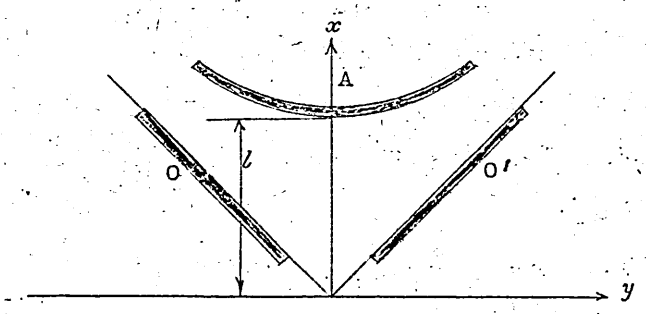
§2．一般的働作

第1図はここで新しく提案した単振動波の励振方法の一つの例を与えるもので零電位に保たれた$x=\pm y$を満足する電極0，0′と

$$\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{y}{l}\right)^2=1 \qquad (2.1.)$$

を満足する電極，A，とによって作用空間にy軸方向に次の様な抛物線電位を形成している。

$$V(x,y)=V_0\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{y}{l}\right)^2\right\} \qquad (2.2.)$$



第1図　抛物線電位を与える電極構造

y軸方向の磁界H_yが極めて大きいとすれば，電子の運動はy方向のみを考慮してx方向の運動は無視してよい。即ちy方向の運動方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{e}{m}E_{0y}=-\frac{e}{m}\frac{2V_0}{l^2}y=-\omega_0^2y \qquad (2.3.)$$

になる。ここで

$$\omega_0^2=\frac{e}{m}\frac{2V_0}{l^2} \qquad (2.4.)$$

で与えられている。時間微分を

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \qquad (2.5.)$$

の様に書直して，且つ解を $e^{j(\omega t - \Gamma z)}$ の形に仮定して（2，3）式に代入して位相定数Γを求めると

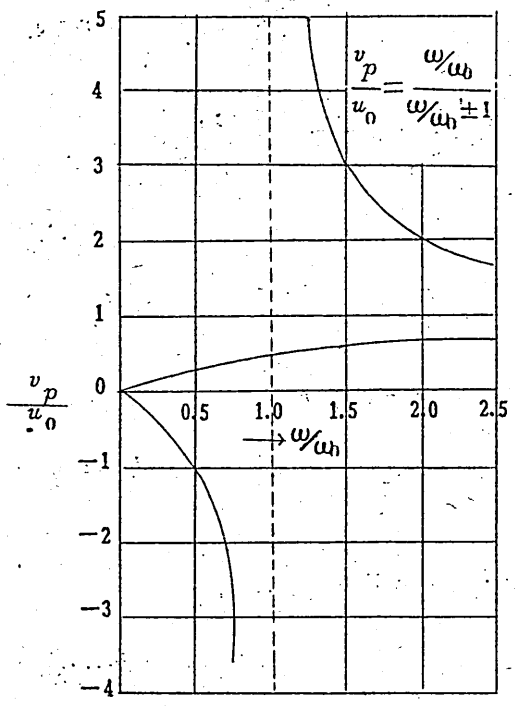
$$\Gamma = \frac{\omega \pm \omega_0}{u_0} \qquad (2.6.)$$

となり，従って位相速度は

$$v_{f\cdot s} = \frac{u_0}{1 \mp \frac{\omega_0}{\omega}} \qquad (2.7.)$$

で与えられる。

第2図はこれらの位相速度をω/ω_0対比で画いたものである。



第2図　v_p/u_0 対 ω/ω_0 曲線

§ 3. モード結合方程式

3・1 電子ビーム波の規格化モード方程式

最初に，回路に高周波電界が存在しない時の規格化モード方程式を与える。この時の運動方程式は

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_0{}^2 y \qquad (3.1.1.)$$

で与えられる。 次にカイネテイック電圧及び電子ビームの横方向の変位に基づく見掛けの変位電流，K_y [4]，を次の様に定義する

$$U_y = -\frac{m}{e} u_0 v_y \qquad (3.1.2.)$$

$$K_y = j\omega\sigma_0 y \qquad (3.1.3.)$$

ここで σ_0 は電荷密度で，（$\sigma_0 < 0$）である。
上式を書直すと

$$\left(\frac{d}{dz} + j\beta_e\right) U_y = \frac{m\omega_0{}^2}{e} y = -j\frac{m\omega_0{}^2}{e\,\omega\sigma_0} K_y \qquad (3.1.4.)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + j\beta_e\right) K_y = j\frac{\omega\sigma_0}{u_0} v_y = -j\frac{e\omega\sigma_0}{mu_0{}^2} U_y \qquad (3.1.5.)$$

になる。 ここで $\beta_e = \omega/u_0$ である。

つぎに規格化モード振巾，a_1，a_2 を

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{2z_0}}\left(U_y + z_0 K_y\right) = Y\left(v_y + j\omega_0 y\right) \qquad (3.1.6.)$$

$$a_2 = \frac{1}{2\sqrt{2z_0}}\left(U_y - z_0 K_y\right) = Y\left(v_y - j\omega_0 y\right) \qquad (3.1.7.)$$

とおく。ここでz_0はFawshmotronの電子ビーム特性インピーダンスで

$$z_0 = \frac{m\omega_0 u_0^2}{e\,\omega_1 |I_0|} \qquad (3.1.8.)$$

で与えられる。更にYはアドミッタンス係数で

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{2z_0}} \quad \frac{mu_0}{e} = \left(\frac{m\omega_1 |I_0|}{8\,e\,\omega_0}\right)^{1/2} \qquad (3.1.9.)$$

である。(3,1,4),(3,1,5),(3,1,6),(3,1,7)及(3,1,8)より規格化モード振巾で表わした電子ビーム波の方程式は

$$\left[\frac{d}{dz} + j(\beta_e - \beta_0)\right] a_1 = 0 \qquad (3.1.10.)$$

$$\left[\frac{d}{dz} + j(\beta_e + \beta_0)\right] a_2 = 0 \qquad (3.1.11.)$$

となる。 ここで$\beta_0 = \omega_0/u_0$である。

ここで，a_1はFast wave, a_2はSlow waveのモード振巾を表わす。

式(3,1,6),(3,1,7)(3,1,10)及(3,1,11)より

$$\begin{aligned} U_y &= \sqrt{2z_0}\,(a_1 e^{j\beta_0 z} + a_2 e^{-j\beta_0 z})\, e^{-j\beta_e z} \\ K_y &= \sqrt{\frac{2}{z_0}}\,(a_1 e^{j\beta_0 z} - a_2 e^{-j\beta_0 z})\, e^{-j\beta_e z} \end{aligned} \qquad (3.1.12.)$$

となり，そのカイネティック・パワーは

$$R_e\left(\frac{1}{2} U_y K_y^*\right) = |a_1|^2 - |a_2|^2 \qquad (3.1.13.)$$

の様に求まる。これよりa_1モードは正，一方，a_2モードは負のカイネティック・パワーを伝送する事が解る。

3・2 回路波の規格化モード方程式

回路は基本波のTEM波が伝播するとして，回路に電子ビームが存在しない

場合の回路方程式は次式で与えられる。

$$\frac{dV}{dz} = -j\beta_c z_c I \qquad (3.2.1.)$$

$$\frac{dI}{dz} = -j\frac{\beta_c}{z_c} V \qquad (3.2.2.)$$

ここでV，Iは夫々回路電圧，電流で，z_cは回路インピーダンス，又β_cは回路の位相定数である。

ここで規格化モード振巾，$a_\pm$，を

$$a_+ = \frac{1}{2\sqrt{2z_c}}(V + z_c I) \qquad (3.2.3)$$

$$a_- = \frac{1}{2\sqrt{2z_c}}(V - z_c I) \qquad (3.2.4)$$

とおくと，回路方程式は規格化モード振巾で次の様に書直せる。

$$\left[\frac{d}{dz} + j\beta_c\right] a_+ = 0$$

$$\left[\frac{d}{dz} - j\beta_c\right] a_- = 0$$

ここで，a_+モードは前進波，a_-モードは後進波モードの振巾を表わす。

3・3 モード結合方程式

3・1節では回路に高周波電界が存在しない場合を取扱ったが，この節では高周波電界の影響を考慮する。この場合，式（3.1.4）を変形して

$$\left(\frac{d}{dz} + j\beta_e\right) U_y = -j\frac{m\omega_0^2}{e\omega\sigma_0} k_y + \hat{E}_y \qquad (3.3.1)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + j\beta_e\right) k_y = -j\frac{e\omega\sigma_0}{mu_0^2} U_y \qquad (3.3.2)$$

で与えられる。　前節と同様な方法で式（3.3.1）$\pm z_0 \times$（3.3.2）を取って

$$\left[\frac{d}{dz}+j(\beta_e-\beta_0)\right]a_1=\frac{1}{2\sqrt{2z_0}}E_y=-\frac{V}{2y_0\sqrt{2z_0}}$$

$$\left[\frac{d}{dz}+j(\beta_e+\beta_0)\right]a_2=\frac{1}{2\sqrt{2z_0}}E_y=-\frac{V}{2y_0\sqrt{2z_0}}$$

ここで$V=-E_y\cdot y_0$で，y_0はビームをinjectionした$x=$cont一面での振動電極間の線積分長である。更に式（3.2.3）及（3.2.4）を用いて

$$\left[\frac{d}{dz}+j(\beta_e-\beta_0)\right]a_1=-\frac{1}{2y_0}\sqrt{\frac{z_c}{z_0}}(a_++a_-) \qquad (3.3.3)$$

$$\left[\frac{d}{dz}+j(\beta_e+\beta_0)\right]a_2=-\frac{1}{2y_0}\sqrt{\frac{z_c}{z_0}}(a_++a_-) \qquad (3.3.4)$$

を得る。

次に3.2節では，回路に電子流が存在しない場合を取扱ったが，ここでは電子流の存在する場合の回路方程式に拡張する。

$$\frac{dV}{dz}=-j\beta_c z_c I \qquad (3.3.5)$$

$$\frac{dI}{dz}=-j\frac{\beta_c}{z_c}V-\frac{di}{dz} \qquad (3.3.6)$$

前と同様に，式（3.3.5）$\pm z_c\times$（3.3.6）を取り（3.2.3）及（3.2.4）を用いると

$$\left(\frac{d}{dz}+j\beta_c\right)a_+=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z_c}{2}}\frac{di}{dz} \qquad (3.3.7)$$

$$\left(\frac{d}{dz}-j\beta_c\right)a_-=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z_c}{2}}\frac{di}{dz} \qquad (3.3.8)$$

を得る。更に$\frac{di}{dz}$に就いて書直してみる。今回路上の全電力（$P+jQ$）の距離と共に変化する割合は

$$\frac{d}{dz}(P+jQ)=\frac{1}{2}\frac{d}{dz}(VI^*)$$

$$=\frac{1}{2}j\left\{\frac{\beta_c}{z_c}VV^*-\beta_c z_c II^*\right\}-\frac{1}{2}V\frac{di^*}{dz} \qquad (3.3.9)$$

一方，電子ビームより回路え変換する電力は

$$\frac{d}{dz}(P+jQ)=\frac{1}{2}Ei^*=\frac{1}{2}E_y i_y{}^*=\frac{1}{2}E_y\sigma_0 u_y{}^*=j\frac{\omega\sigma_0 V}{2y_0}y^* \qquad (3.3.10.)$$

で与えられる。上の両式より

$$\frac{di^*}{dz}=-j\frac{\omega\sigma_0}{y_0}y^*=\frac{k_y^*}{y_0} \qquad (3.3.11.)$$

を得る。これを式（3.3.7）又（3.3.8）に代入すると

$$\left[\frac{d}{dz}+j\beta_c\right]a_+=-\frac{1}{2y_0}\sqrt{\frac{z_c}{z_0}}(a_1-a_2) \qquad (3.3.12.)$$

$$\left[\frac{d}{dz}-j\beta_c\right]a_-=\frac{1}{2y_0}\sqrt{\frac{z_c}{z_0}}(a_1-a_2) \qquad (3.3.13.)$$

になる。ここで結合係数，κ，を

$$\kappa=\frac{\sqrt{z_c}}{2y_0}\sqrt{\frac{e|I_0|}{\omega\omega_0 m}} \qquad (3.3.14)$$

と置くと，式（3.3.3），（3.3.4），（3.3.7）及（3.3.8）は，最終的に

$$\left[\frac{d}{dz}+j\beta_e(1-\alpha)\right]a_1=-j\beta_e\kappa(a_++a_-) \qquad (a)$$

$$\left[\frac{d}{dz}+j\beta_e(1+\alpha)\right]a_2=-j\beta_e\kappa(a_++a_-) \qquad (b)$$

(3.3.15)

※(3.3.15)

$$\left[\frac{d}{dz}+j\beta_e(1-b)\right]a_+=-j\beta_e\kappa(a_1-a_2) \qquad (c)$$

$$\left[\frac{d}{dz}-j\beta_e(1-b)\right]a_-=j\beta_e\kappa(a_1-a_2) \qquad (d)$$

を得る。ここで

$$\alpha=\frac{\beta_0}{\beta_e}\quad,\qquad b=1-\frac{\beta_c}{\beta_e} \qquad (3.3.16)$$

と置いてある。

§ 4. Fast wave 結合器

4・1 無損失回路の" Kompfner" Dip Coudition

前節で得られた結果より解る様に a_- モードは回路波の後進波モードで，その位相速度の方向は逆方向であるから，結合は無視出来る。そして又 a_2 モードは電子ビーム波の Slow wave モードであるから，才 2 図より解る様に $\omega\cong\omega_0$ の近傍では，その位相速度は十分に分離されており，結合は考えない。従って a_1 モードと a_+ モードとの両モード間の結合のみを考慮する。式 (3.3.15) より，この場合には

$$\left[\frac{d}{dz}+j\beta_e(1-b)\right]a_+=-j\beta_e\kappa a_1$$

$$\left[\frac{d}{dz}+j\beta_e(1-\alpha)\right]a_1=-j\beta_e\kappa a_+ \qquad (4.1.1)$$

となり，上式を解く為に

$$a_+=exp(-j\beta_e z)A$$

$$a_1 = exp(-j\beta_e z)\, A_+(z) \qquad (4.1.2)$$

と置き，更に

$$\zeta = \beta_e z \qquad (4.1.3)$$

と置換すると，式(4.1.1)はmatrix form,

$$j\frac{d}{d\zeta}\begin{bmatrix} A_+(\zeta) \\ A_1(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & \kappa \\ \kappa & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_+(\zeta) \\ A_1(\zeta) \end{bmatrix} \qquad (4.1.4)$$

で与えられる。これは更に一般的に次式の様に書ける。

$$j\frac{d}{d\zeta}\Psi = H\Psi \qquad (4.1.5)$$

上記の波動方程式を通常の方法によって冪級数解のmatrix表示法[5]に従って解くと，

固有値は次の永年方程式の根で与えられる。

$$\begin{vmatrix} -(b+E) & \kappa \\ \kappa & -(\alpha+E) \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.1.6)$$

こゝで根を次の様に指定する。

$$E_1 = -\frac{(\alpha+b)}{2} + \beta_b$$
$$E_2 = -\frac{(\alpha+b)}{2} - \beta_b \qquad (4.1.7)$$

尚

$$-\frac{\alpha-b}{2} = \beta_a \quad , \quad \beta_a^2 + \kappa^2 = \beta_b^2 \qquad (4.1.8)$$

と置いてある。次に常数matrix である $S-$ matrixは，次の様に与えられている。

$$\sum_{\lambda=1}^{2}(H_{i\lambda}-E_{(j)}\,\delta_{\lambda j})\,S_{\lambda j}=0 \qquad (4.1.9)$$

こゝで $\delta_{\lambda j}$はクロネッカー記号で

$$\delta_{xj}=\begin{cases}0 & \lambda\neq j\\ 1 & \lambda=j\end{cases} \qquad (4.1.10)$$

である。式(4.1.9)を展開して整理するとそのエレメントは

$$S=\begin{pmatrix}\dfrac{\kappa S_{21}}{b+E_1} & \dfrac{\kappa S_{22}}{b+E_2}\\ S_{21} & S_{22}\end{pmatrix} \qquad (4.1.11)$$

になる。次に $T=S^{-1}$ で与えられる $T-$ matrix を求めると

$$T=\begin{pmatrix}\dfrac{-(b+E_1)(b+E_2)}{\kappa S_{21}(E_1-E_2)} & \dfrac{(b+E_1)}{S_{21}(E_1-E_2)}\\ \dfrac{(b+E_1)(b+E_2)}{\kappa S_{22}(E_1-E_2)} & \dfrac{-(b+E_2)}{S_{22}(E_1-E_2)}\end{pmatrix} \qquad (4.1.12)$$

を得る。

最後に，M－matrixは

$$\mathrm{Mij}=\sum_{\rho=1}^{2}S_{i\rho}\,T_{\rho j}\,e\times P(-jE_\rho\zeta) \qquad (4.1.13)$$

で与えられる。上式に式(4.1.7)，(4.1.8)，(4.1.11)及(4.1.12)で得た値を代入して，展開すると，

$$M_{11}=e\times p\left(j\frac{\alpha+b}{2}\zeta\right)\left\{\cos\beta_b\zeta-j\frac{\alpha-b}{2\beta_b}\sin\beta_b\zeta\right\} \qquad (a)$$

$$M_{12} = exp\left(j\frac{\alpha+b}{2}\zeta\right)\cdot -j\frac{\kappa}{\beta_b}\sin\beta_b\zeta \qquad (b)$$

$$M_{21} = exp\left(j\frac{\alpha+b}{2}\zeta\right)\cdot j\frac{(\alpha-b+2\beta_b)(\alpha-b-2\beta_b)}{4\kappa\beta_b}\sin\beta_b\zeta \qquad (4.1.14)$$

$$(c)$$

$$M_{22} = exp\left(j\frac{\alpha+b}{2}\zeta\right)\left\{\cos\beta_b\zeta + j\frac{\alpha-b}{2\beta_b}\sin\beta_b\zeta\right\} \qquad (d)$$

を得，解はmatrix表示で次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} A_+(\zeta) \\ A_1(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(\zeta) & M_{12}(\zeta) \\ M_{21}(\zeta) & M_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_+(0) \\ A_1(0) \end{bmatrix} \qquad (4.1.15)$$

ここで，境界条件として，$\zeta = 0$の入力端では，電子ビーム波は励振されていないので

$$A_1(0) = 0$$

を適用して

$$A_+(\zeta) = M_{11}(\zeta)\, A_+(0)$$

$$A_1(\zeta) = M_{21}(\zeta)\, A_+(0) \qquad (4.1.16)$$

を得る。其故，$A_+(0)$モードが$A_1(\zeta)$に変換される為には，所謂"Kompfner" *Dip* Conditionは

$$M_{11}(\zeta) = 0 \qquad (4.1.17)$$

で与えられる。上式は式〔4.1.14(a)〕によって

$$\cos\beta_b\zeta = 0$$

$$\frac{\alpha-b}{2\beta_b}\sin\beta_b\zeta = 0 \qquad (4.1.18)$$

なる事が必要であって，これは

$$\alpha - b = 0$$
$$\beta_b \zeta = (n+\frac{1}{2})\pi \qquad (4.1.19)$$

ならば満足される。もし$\alpha = b$ならば式(4.1.8)によって

$$\kappa = \pm \beta_b$$
$$\beta_b \zeta = \kappa \beta_e L = (n+\frac{1}{2})\pi$$

を得る。今$n = 0$の場合は

$$(L)_{dip} = \frac{\pi}{2\kappa\beta_e} \qquad (4.1.20)$$

で求まる。

4・2 回路損失の影響

前節では，回路損失を無視したが，この節では回路損失を考慮して，それが*Dip*長に及ぼす影響を検討する。損失パラメーター，d，を次式で与えた。

$$d = \frac{\alpha_A}{\beta_e}$$

ここでα_Aは回路の減衰定数である。この場合のモード結合方程式は

$$\left[\frac{d}{dz} + j\beta_e (1 - b + jd)\right] a_+ = -j\beta_e \kappa a_1$$
$$\left[\frac{d}{dz} + j\beta_e (1 - \alpha)\right] a_1 = -j\beta_e \kappa a_+ \qquad (4.2.1)$$

になる。前節と同一手順に従って解きその得られた結果のみを示すと*M*-matrixのM_{11} elementは

$$M_{11}(\zeta) = exp\left(j\frac{\alpha + b - jd}{2}\right)\left\{\cos\beta_b\zeta - j\frac{\alpha - b + jd}{2}\sin\beta_b\zeta\right\} \qquad (4.2.2)$$

になる。其故"Kompfner" Dip Condition は

$$\cos\beta_b\zeta + \frac{d}{2\beta_b}\sin\beta_b\zeta = 0$$

$$\frac{\alpha - b}{2\beta_b}\sin\beta_b\zeta = 0 \qquad (4.2.3)$$

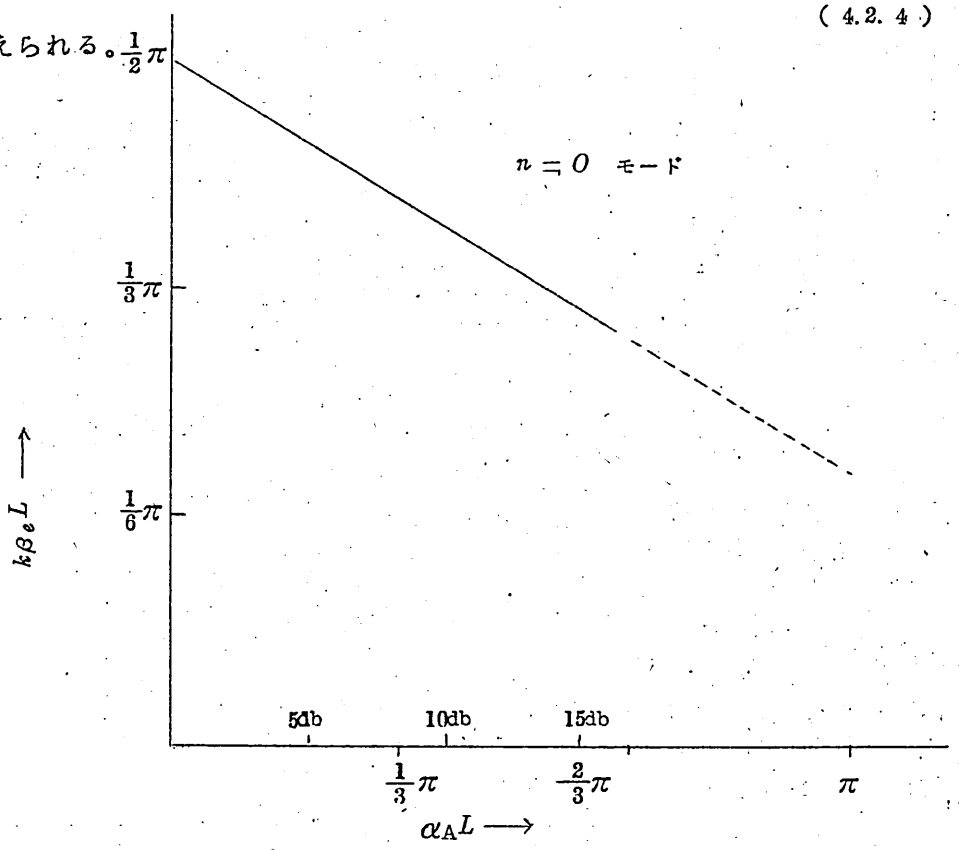
の時に満足される。もし$\alpha - b = 0$ならば

$$-\frac{d}{2} = \sqrt{\kappa^2 - \frac{1}{4}d^2}\cot\sqrt{\kappa^2 - \frac{1}{4}d^2}\cdot\beta_e L$$

或は

$$-\frac{1}{2}\alpha_A L = \sqrt{(\kappa\beta_e L)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_A L)^2}\cot\sqrt{(\kappa\beta_e L)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_A L)^2} \qquad (4.2.4)$$

で与えられる。

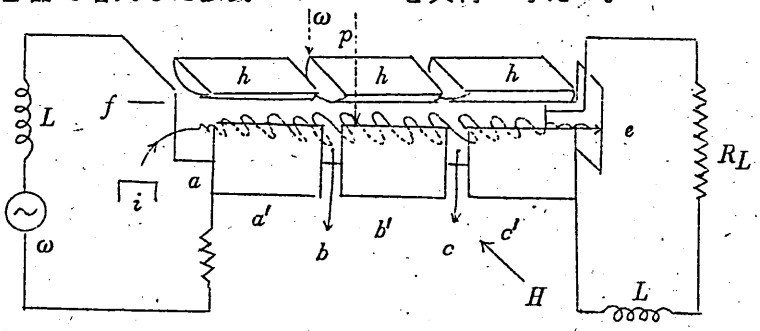


第3図　回路損失を考慮した場合の"Kompfner" dip length

式（4.2.4）の解を才3図に示してある。この図より回路損失がある時には，*Dip* length は無い場合に比して幾分短くなる事が解る。

§5. A—型 Fawshmotron

この場合の電極構成を才4図に示す。即ち Fast wave 結合器でωの角周波数の信号エネルギーは電子ビーム，エネルギーに変換され，b，b' 間のパラメトリック領域で，角周波数 $\omega_p \cong 2\omega \cong 2\omega_0$ のポンピング電力で励振され出力結合器で増大した振動エネルギーを負荷に与える。



第4図　A—型 Fawshmotron

既に，パラメトック増巾の理論は電子の運動論及び波動論の立場より詳細に検討して報告して来たが[6],[7],[8],[9]，才3節で導いたモード結合論の観点より再考してみる。

パラメトリック領域での電子の運動方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 y = -\frac{e}{m}E_y \qquad (5.1)$$

で与えられる。電位及び電界は

$$V(x,y)=(V_0+V_1\cos\omega_p t)\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2-\left(\frac{y}{l}\right)^2\right\}$$

$$E_y=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}=(V_0+V_1\cos\omega_p t)\frac{2y}{l^2} \qquad (5.2)$$

で与えられる。一方，変位 y は式（3.1.6）及び（3.1.7）より

$$y = \frac{1}{j2\omega_0 Y}(a_1 - a_2) \qquad (5.3)$$

で与えられる。上記の関係式を式（5.1）に代入して，モード結合方程式に書直すと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 a_1 = -\omega_0^2(1+M\cos\omega_p t)\,a_1 \qquad (5.4)$$

になる。ここで a_2 モードは結合が無いとして無視してある。更に

$$M = \frac{V_1}{V_0} \qquad (5.5)$$

と置いてある。式（5.4）を解く為に解を

$$a_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{1,n}(z)\,e^{j\omega_n t} \qquad (5.6)$$

の形に仮定する。ここで

$$\omega_n = \omega + n\omega_p \quad , \quad (n = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots) \qquad (5.7)$$

と置き，上の関係を式（5.5）に代入すると

$$\left(j\omega_n + u_0\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 a_{1,n} = -\omega_0^2\left(1 + Me\,\frac{j\omega_p t + e^{-j\omega_p t}}{2}\right)a_{1,n}$$

$$= -\omega_0^2\left[a_{1,n} + \frac{M}{2}(a_{1,n-1} + a_{1,n+1})\right] \qquad (5.8)$$

になる。上式は全ての n の値について成立するが，パラメトリック増巾器として信号及びアイドラー周波数（$n = 0, -1$）の場合を考える。

解を $e^{-\Gamma z}$ と仮定して上式に代入すると

$$(j\omega-\Gamma u_0)^2 a_{1,0}=-\omega_0^2\left(a_{1,0}+\frac{M}{2}a_{1,-1}\right)$$
$$\left[j(\omega-\omega_p)-\Gamma u_0\right]^2 a_{1,-1}=-\omega_0^2\left(a_{1,-1}+\frac{M}{2}a_{1,0}\right) \qquad (5.9)$$

を得る。

non trivial な解が存在する為には，係数の determinantal eq. が零でなければならず，即ち

$$\begin{vmatrix} (j\beta_e-\Gamma)^2+\beta_0^2 & \dfrac{\omega_0^2 M}{2u_0^2} \\ \dfrac{\omega_0^2 M}{2u_0^2} & \left[j(\beta_e-\beta_p)-\Gamma\right]^2+\beta_0^2 \end{vmatrix}=0 \qquad (5.10)$$

を満足せねばならない。上式を展開すると

$$\{(j\beta_e-\Gamma)+j\beta_0\}\{(j\beta_e-\Gamma)-j\beta_0\}\{[j(\beta_e-\beta_p)-\Gamma]+j\beta_0\}$$
$$\{[j(\beta_e-\beta_p)-\Gamma]-j\beta_0\}=\frac{\omega_0^4 M^2}{4u_0^4}$$

になる。ここで$\Gamma=j(\beta_e-\beta_0)$の近傍の解が必要である。この時上式は次の様に書直せる。

$$\{j(\beta_e-\beta_0)-\Gamma\}\{j(\beta_e+\beta_0-\beta_p)-\Gamma\}=\left(\frac{\omega_0 M}{4u_0}\right)^2 \qquad (5.11)$$

次に

$$\Gamma=j(\beta_e-\beta_0)-\left(\frac{\omega_0 M}{4u_0}\right)\delta \qquad (5.12)$$

とせよ。更に$\omega_p=2\omega_0$からの周波数のずれを許す為に，パラメーター，p，を

$$p=\frac{4}{\omega_0 M}(2\omega_0-\omega_p) \qquad (5.13)$$

とおく。上記の二式を用いて，式（ 5.11 ）を書直すと

$$\delta(\delta+jp)=1 \qquad (5.14)$$

になり，δについて解くと

$$\delta=-j\frac{p}{2}\pm\left\{1-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right\}^{1/2} \qquad (5.15)$$

を得る。これより明かな様に，増大波は$\omega_p=2\omega_0$，（$p=0$），の時に最大になる事が解る。更に増大波を得る為には式（ 5.14 ）より

$$\left|2\omega_0-\omega_p\right|<\frac{\omega_0 M}{2} \qquad (5.16)$$

なる事が必要である。ここで，$p=0$の時

$$\delta=\pm 1$$

になり，伝播定数Γは

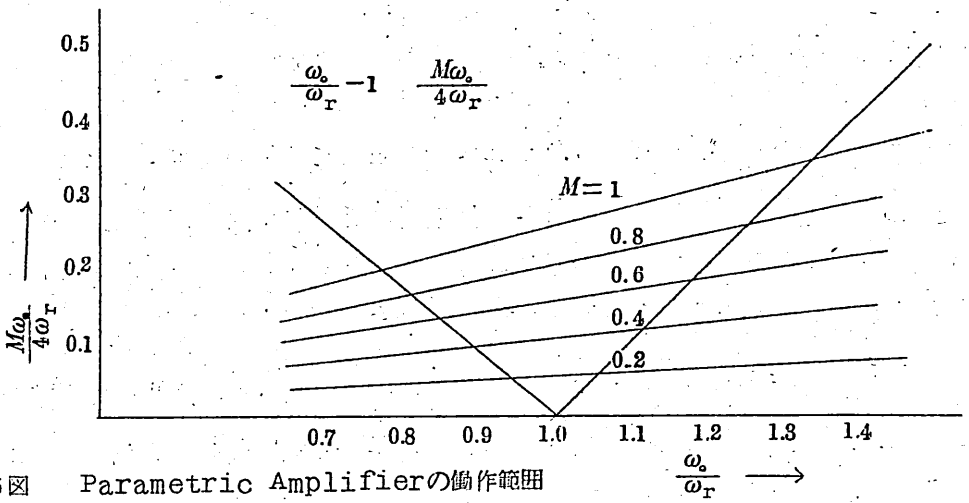
$$\Gamma=j(\beta_e-\beta_0)\pm\frac{M\omega_0}{4u_0}$$

になる。故に利得は

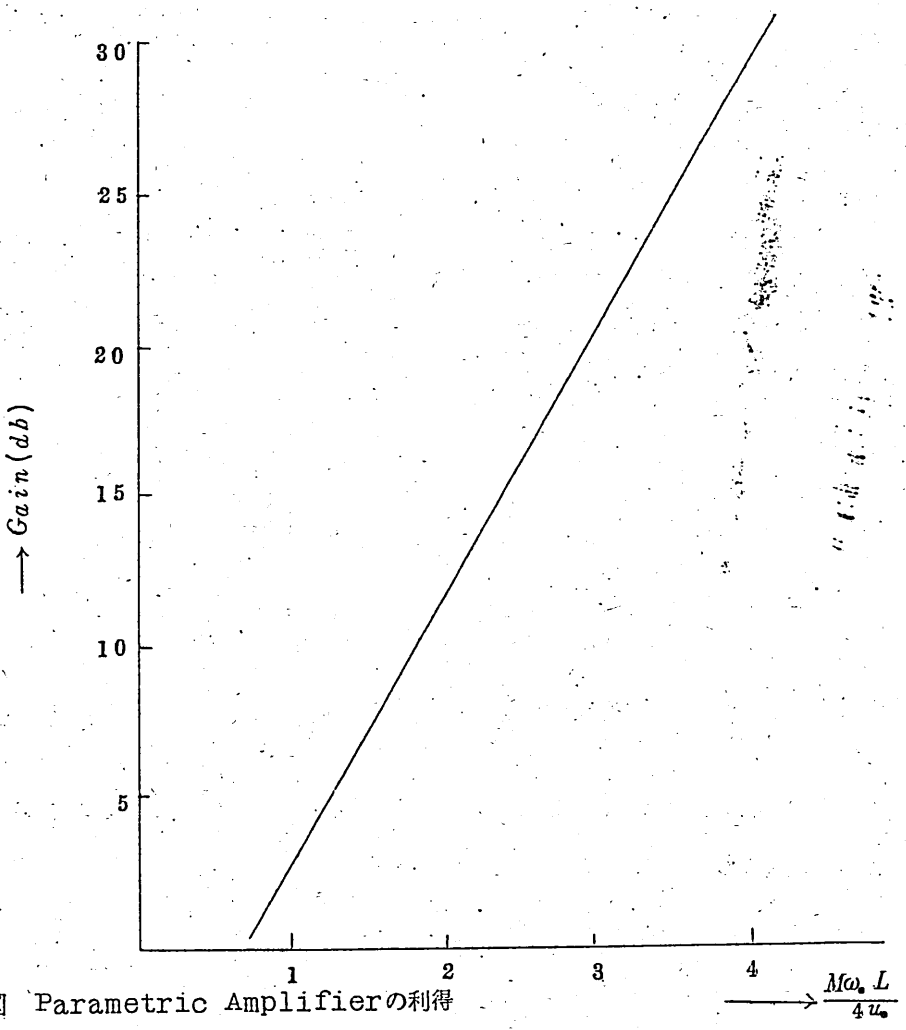
$$G=A+20\log_{10}\left(\frac{M\omega_0 L}{4u_0}\right) \qquad (5.17)$$

$$=-6+8.686\left(\frac{M\omega_0 L}{4u_0}\right)$$

で与えられる。式（ 5.16 ）及び（ 5.17 ）を第 5 図及第 6 図に示したこの得られた結果は当然の事乍ら前の報告[9]と全く一致する。



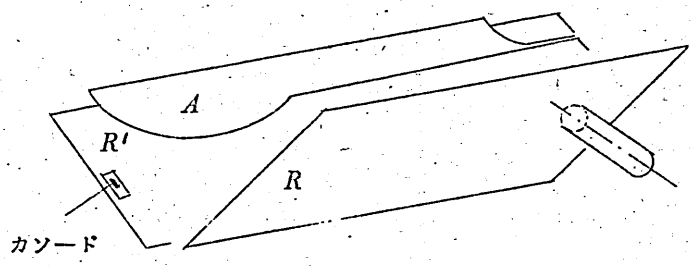
第5図　Parametric Amplifierの働作範囲



第6図　Parametric Amplifierの利得

§ 6. B—型 Fawshmotron

才 2 図より明らかな様に $\omega_0/\omega \cong 1$ では位相速度は無限大とする事も可能で，特に $\omega_0/\omega < 1$ の範囲では正の位相速度をもち，遅波回路を持たない回路上の回路波との同期も容易にとれる。この場合，電子ビーム波と回路波の電力方向は同方向になりエネルギーの変換が行なわれる。



第 7 図　B—型 Fawshmotron

才 7 図はこの型の管の原理図である。この場合は電子ビームは Fast wave 結合器と異って，振動電極面の一端より入射させる。従って才 4 節で得た結果式をその儘適用する事が出来るが，然し乍ら境界条件は異る。式 (4.1.15) を再記する

$$\begin{pmatrix} A_+(\zeta) \\ A_1(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}(\zeta) & M_{12}(\zeta) \\ M_{21}(\zeta) & M_{22}(\zeta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+(0) \\ A_1(0) \end{pmatrix} \qquad (4.1.15)$$

今ここで，境界条件は $\zeta = 0$ の入力端では回路波は励振されていないので

$$A_+(0) = 0 \qquad (6.1)$$

其故式 (4.1.15) は

$$A_+(\zeta) = M_{12}(\zeta) A_1(0)$$

$$A_1(\zeta) = M_{22}(\zeta) A_1(0) \qquad (6.2)$$

と書ける。其故，最も能率よく A_1 モードより A_+ モードにエネルギーが変換される為には，$M_{22}(\zeta)=0$ ，でなければならない。これは式〔4.1.14(d)〕から

$$\begin{aligned} &\cos\beta_b\zeta = 0 \\ &\frac{\alpha-b}{2\beta_b}\sin\beta_b\zeta = 0 \end{aligned} \qquad (6.3)$$

が満足されねばならない。もし $\alpha=b$ ならば

$$\beta_b\zeta = \kappa\beta_e L = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad (6.4)$$

で，$n=0$ の時

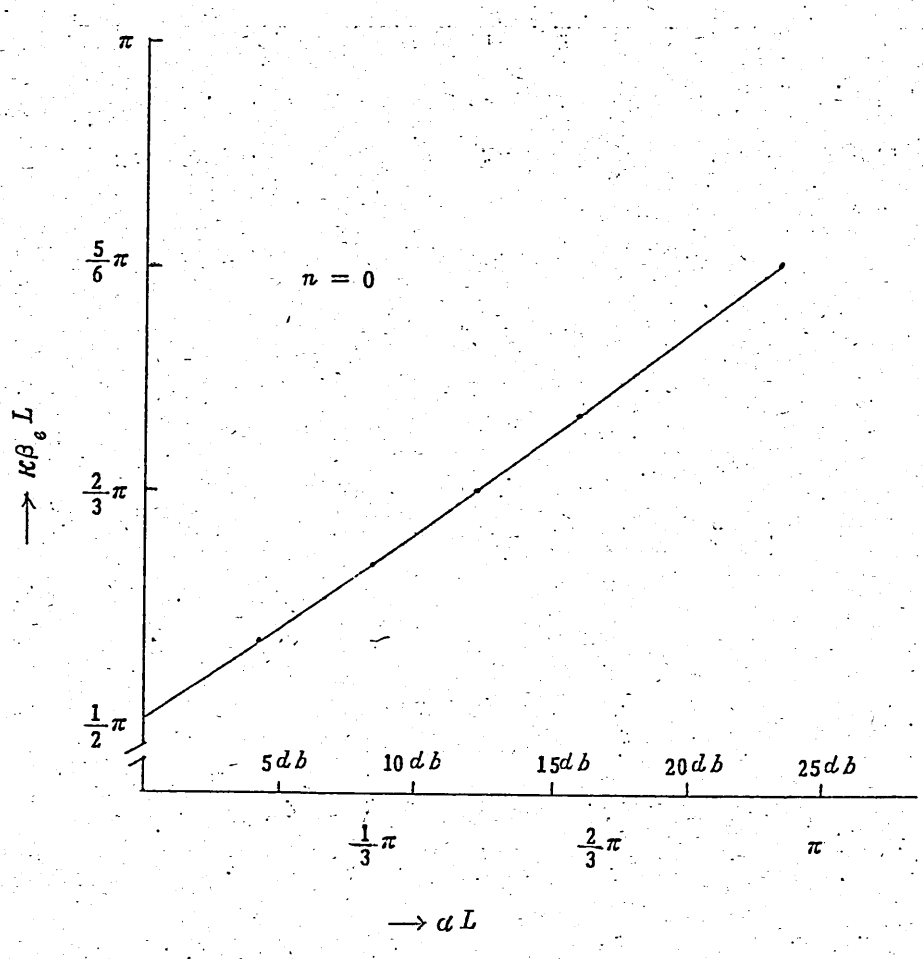
$$\kappa\beta_e L = \frac{\pi}{2} \qquad (6.5)$$

になり，長さ L を与えた場合の発振開始電流が求まる。

次に回路の損失を考えた場合には，$M_{22}(\zeta)=0$ の条件から

$$\frac{1}{2}\alpha_A L = \sqrt{(\beta_e\kappa L)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_A L)^2}\ \cot\sqrt{(\beta_e\kappa L)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_A L)^2} \qquad (6.8)$$

が求まって，この式の解を才8図に示した



第8図　回路損失を考慮した時の発振開始電流

§7. 結　言

抛物線電界中の電子に働く復元力を利用した電子ビーム波の特性インピーダンスを求めて，これによって規格化モード振巾を導入してモード結合方程式を示した。このモード結合論の立場よりモード間の結合を明かにした。電子ビームの特性インピーダンスと回路の特性インピーダンスの比に比例する結合係数，κによってFast wave 結合器の Dip Length を与える解を求めると共に，回路に損失のある場合の Dip Length に及ぼす影響を検討して設計上の基礎を与える事が出来た。A型 Fawshmotron の働作（増大）領域及増巾利得を

C型 Fawshmotron

この場合のモード結合方程式は次式で与へられる

$$\left[\frac{d}{dz}-j\beta_e(\alpha-1)\right]a_1=-j\beta_e k a_-$$

$$\left[\frac{d}{dz}-j\beta_e(1-b)\right]a_-=j\beta_e k a_1$$

前節と同様な手順に従って解く，但しこの場合には

$$a_1=e^{j\beta_e z}A_1(z)$$

$$a_-=e^{j\beta_e z}A_-(z)$$

と置換へてある。その得られた結果のみを示すと，M-matrix を用いて，入出力間の関係は

$$\begin{bmatrix}A_1(\zeta)\\A_-(\zeta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{11}(\zeta) & M_{12}(\zeta)\\M_{21}(\zeta) & M_{22}(\zeta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1(0)\\A_-(0)\end{bmatrix}$$

で与へられ，M-matrix の各エレメントは，位相速度が同期して居る場合には

$$M_{11}(\zeta)=\cosh(k\beta_e z)$$

$$M_{12}(\zeta)=-j\sinh(k\beta_e z)$$

$$M_{21}(\zeta)=j\sinh(k\beta_e z)$$

$$M_{22}(\zeta)=\cosh(k\beta_e z)$$

である。

今ここで境界條件として

$\zeta=\beta_e z=0$ に於て $A_1(0)=1$

$\zeta=\beta_e z=\beta_e L$ 〃 $A_-(\beta_e L)=0$

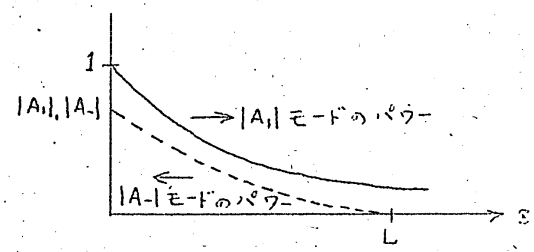
を与へて，式を整理すると

$$A_1(z)=\frac{\cosh[k\beta_e(L-z)]}{\cosh(k\beta_e L)}$$

$$A_-(z)=-j\frac{\sinh[k\beta_e(L-z)]}{\cosh(k\beta_e L)}$$

になる。

上式を図示するとか9図の様に書ける図は縦軸に夫々のモード振巾の絶対値，横軸に距離 z を取ってある。之の型の管のパワーの取出しは電子銃側で取出すので，前節の様な取出しに就いて考慮する必要がない。



求めて，前報告の波動論より導いた結果と全く一致する事が明かになった。B型管に就いてはビーム・エネルギーが回路エネルギーに完全に変換する為の最適の回路長を与える解を求めた。又逆にこれは回路長を与えた場合の最小の発振開始電流を与える。

表題に関する前報告以後の考察の結果を述べ，あわせて関連のある従来の理論との比較紹介を行った。

〔文　献〕

1) 松尾幸人；新しい型のFast Waveとこれを用いたマイクロ波管(Fawshmotron)に就いて
マイクロ波真空管研究専門委員会資料　1960, 1,18

2) Y.Matsuo ; New Microwave Tube Devices " Fawshmotron " Using the Fast Electron Wave
I.R.E　Vol. 48, Nov. 1960

3) 浜田博，寺田正純；周期横型増巾管の一例
マイクロ波真空管研究専門委員会資料　昭和38年7月

4) 斎藤成文；電子ビーム電磁回路論
オーム社，

5) W.H.Louisell; Coupled mode and parametric electronics
John Willy & Sons, Inc.　New York·London

6) 戎谷，楠，松尾；　A型Fawshmotron(Fast Wave Amplifier)の解析について
電通全国大会　昭和35年7月

7) 戎谷，楠，松尾；　A型Fawshmotronに就いて
電通全国大会　昭和36年4月

8) 松尾，楠，戎谷；　A型Fawshmotron(Fast Wave Amplifier)の理論的考案
電通全国大会　昭和37年11月

9) 松尾，戎谷，楠；　A－型Fawshmotronの研究
マイクロ波真空管研究専門委員会資料　1962, 11, 9

輻射科学研究会資料

導波管反射型エサキ・ダイオード増巾器

牧　本　利　夫

豊　田　幸　弘

（大阪大学　産業科学研究所）

昭和３８年９月２８日

（於　電　子　会　館）

§1. まえがき

最近，特に超高周波用の増巾素子として，エサキダイオードが用いられ，これらの増巾器について多くの研究がなされ，報告されている。

エサキダイオード増巾器は電源として直流電源だけでよくパラメトリック増巾器のようにポンプ源を必要としない特長を持っている。しかしエサキダイオードは元来，2端子素子であるから入出力を分離出来ないので，サーキュレータ，あるいは方向性結合器を用いなければならないとか，電源電圧の変動に対して敏感であるという使いにくい面を持っている。

ここでは導波管にエサキダイオードをマウントした反射型増巾器で機構が簡単で消費電力も少なく小型に出来て魅力的である。これらの増巾器の実験を行なったので報告する。

§2. 一　般　論

2・1　エサキダイオードの特性

代表的なエサキダイオードの特性は図1に示す。エサキダイオードの特長はこの図に見られるように，順方向の微小電圧領域のダイナトロン特性（負性抵抗）を生じる。この負性抵抗領域において，信号の変化分に対して増巾作用を生ずるので，交流信号の増巾あるいは発振が可能になる。

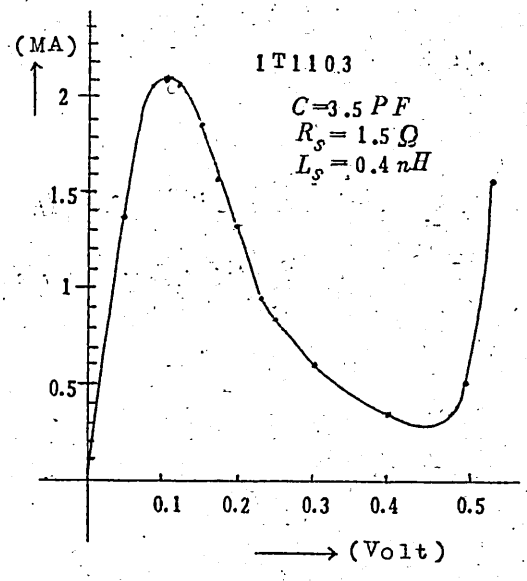


図1　エサキダイードの静特性

次にエサキダイオードの小信号等価回路は図2のようになる。

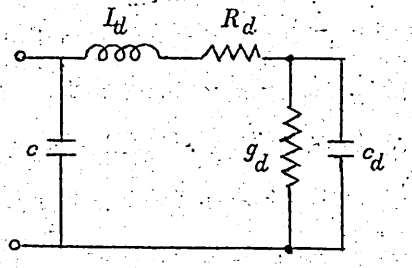


図2　小信号等価回路

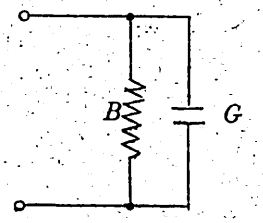


図3　等価回路

Cd：ダイオードの障壁容量

gd：負抵コンダクタンス

c：電極管の漂遊容量

Ld：導入線自体のインダクタンス

Rd：直列抵抗

図2の小信号等価回路において漂遊容量 c は通常小さく，$Cd \gg c$ の場合が多く，しかも負荷に含めて考えることが出来るので一般に図2の c を省略して図示されることが多い。

増巾器等価回路を考える場合，図2を図3に書き直すと何かと便利がよい。

2端子間より右をみたアドミクタンス Y は

$$Y = G + jB \cdot \tag{1}$$

とおくと，(1)式の G と B は

$$G = \frac{\frac{1}{g_d} \cdot \frac{1}{1+(\omega/\omega_o)^2} + R_d}{\{\frac{1}{g_d} \cdot \frac{1}{1+(\omega/\omega_o)^2} - R_d\}^2 + \{\frac{1}{\omega c_d} \cdot \frac{1}{1+(\omega/\omega_b)^2} - \omega L_d\}^2} \tag{2}$$

$$B=\frac{\frac{1}{\omega c_d}+\frac{1}{1+(\omega_g/\omega)^2}-\omega L_d}{\left\{\frac{1}{g_d}\cdot\frac{1}{1+(\omega/\omega_0)^2}-R_d\right\}^2+\left\{\frac{1}{\omega c_d}\cdot\frac{1}{1+(\omega_0/\omega)^2}-\omega L_d\right\}^2} \tag{3}$$

となる。

次にエサキダイオードの端子間より見たインピーダンスの周波数特性を複素平面上に表現すると，図4のようになる。

$$Z_d=j\omega L_d+R_d+\frac{r_d\cdot\frac{1}{j\omega c_d}}{r_d+\frac{1}{j\omega c_d}}$$

$$=\frac{\omega^2 c_d{}^2 r_d{}^2 R_d{}^2+R_d+r}{\omega^2 c_d{}^2 r_d{}^2+1}+j\frac{\omega^3 r_d{}^2 c_d{}^2 L_d+\omega(L_d-c_d r_d{}^2)}{\omega^2 c_d{}^2 r_d{}^2+1} \tag{4}$$

この実験に用いたエサキダイオードのインピーダンス対周波数特性で $fr\fallingdotseq 4.3Gc$, $fs\fallingdotseq 4.5Gc$ となった。

2・2 反射型増巾器の利得

方向性結合器（あるいはサーキュレータ）を用いた導波管反射型エサキダイオード増巾器の等価回路を図5 a に示す。

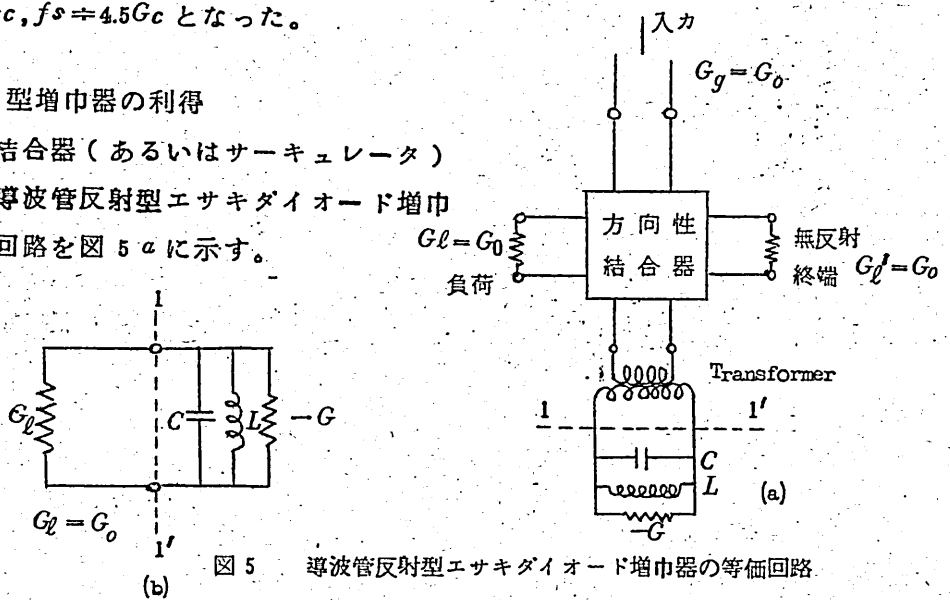


図5　導波管反射型エサキダイオード増巾器の等価回路

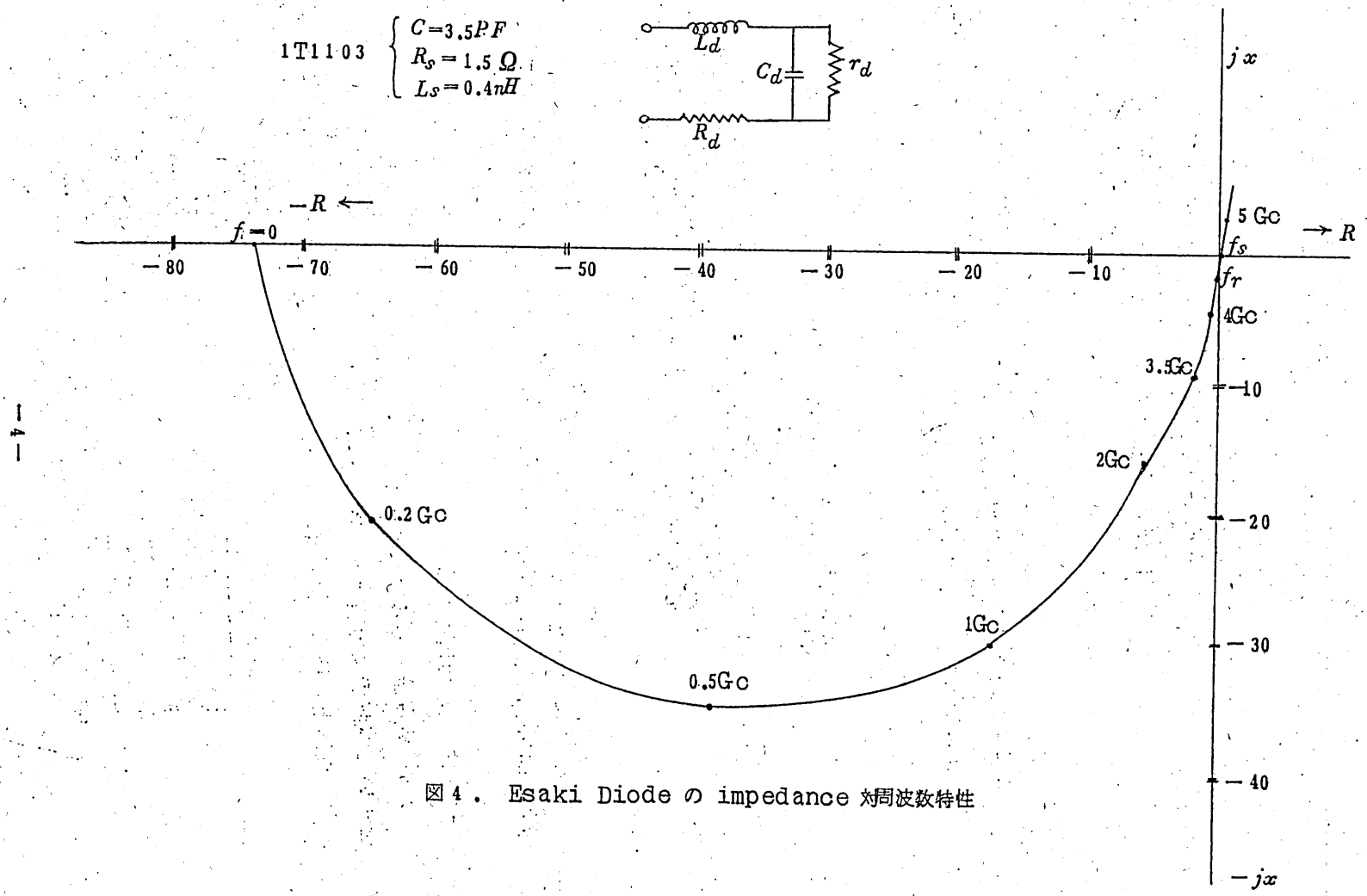


図4． Esaki Diode の impedance 対周波数特性

Go ：線路の特性コンダクタンス

Gg ：電源のコンダクタンス

GL ：負荷のコンダクタンス

$-G$ ：エサキダイオードの負性コンダクタンス

C ：エサキダイオードの障壁容量

L ：空胴のインダクタンス

このようなエサキダイオード増巾器の有能電力利得は，エサキダイオードの入力端子における反射係数の自乗で与えられる。

次に電源コンダクタンス Gg ，線路の特性コンダクタンス Go ，負荷コンダクタンス G_ℓ が等しいと仮定すると，

$$Gg = Go = G_\ell \tag{5}$$

$$g_p = \Gamma^2 = \left|\frac{G_\ell - Y}{G_\ell + Y}\right|^2 \quad \left(\text{但し} Y = -G + j\left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right) \right)$$

$$= \left| \frac{G_\ell + G - j\omega c + \frac{j}{\omega L}}{G_\ell - G + j\omega c - \frac{j}{\omega L}} \right|^2 = \frac{(G_\ell + G)^2 + \left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right)^2}{(G_\ell - G)^2 + \left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \tag{6}$$

となる。そして共振時において

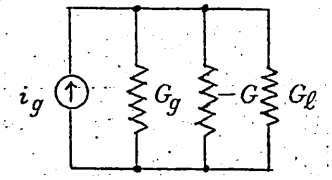


図6　共振時におけるエサキダイオードの増巾器の等価回路

$$g_p = \left(\frac{G_\ell + G}{G_\ell - G}\right)^2 \tag{7}$$

（但し $G_g = G_\ell$ とする）

となる。

$1 - 1'$ 端子より負荷側を見たコンタクタンス GL を安定条件

$$G_\ell > G \tag{9}$$

が成立する範囲で G に近づけば gp は最大になる。

帯域巾 B は

$$B = \frac{G_\ell - G}{2\pi c} \qquad (1)$$

となる。

§ 3. 導波管反射型エサキダイオード増巾器の構造

導波管反射型エサキダイオード増巾器の構造は図 7 に示してある。

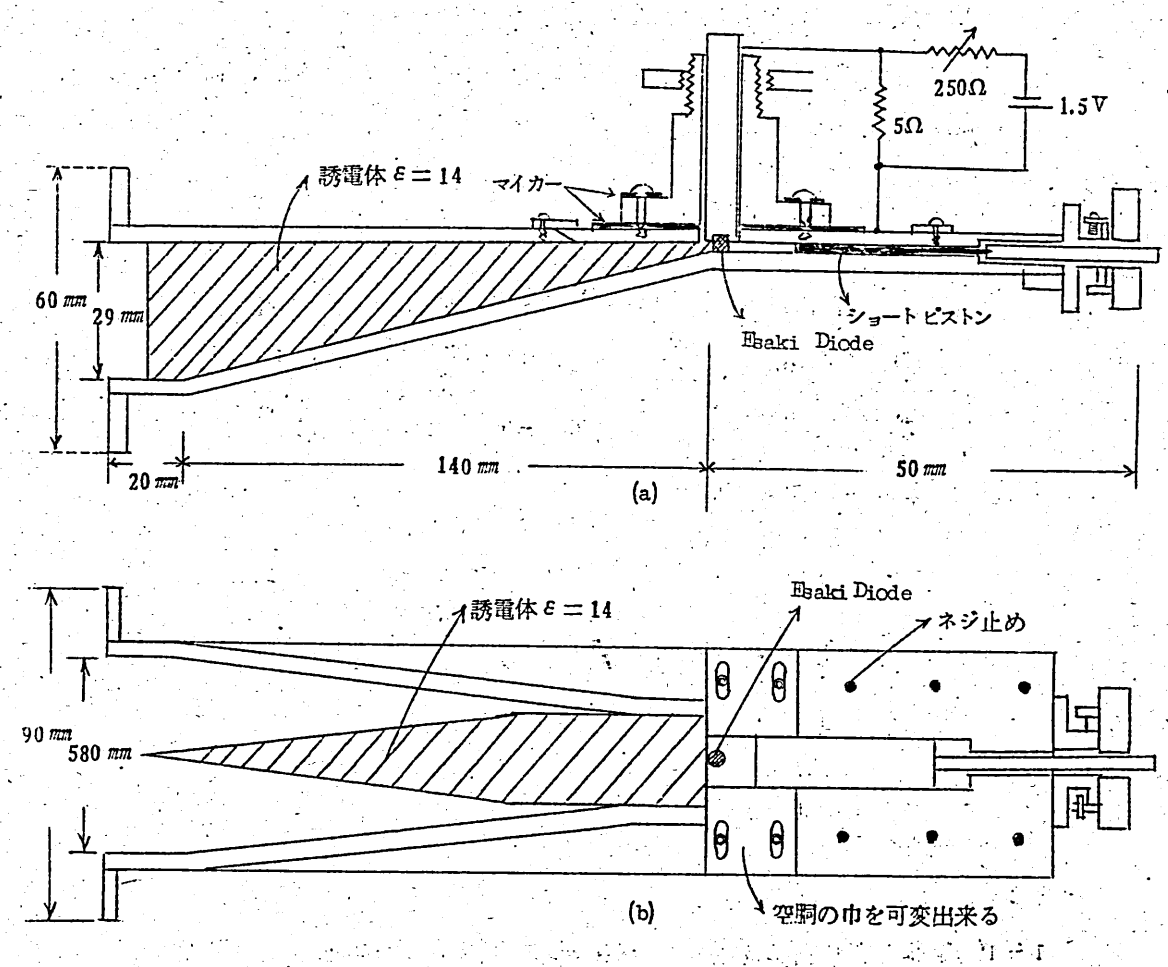


図 7　導波管反射型エサキダイオード増巾器の構造

エサキダイオードをマウントしている空胴と導波管とを結合するために $\varepsilon = 14$ の誘電体を用いて結合した。

誘電体を用いた理由としては，空胴と導波管との結合にループで結合した場合に十分強く結合することが出来ないため発振を起こし，増巾器として働かすことが出来ない。この点を改善するために誘電体をループの代わりに用いた。

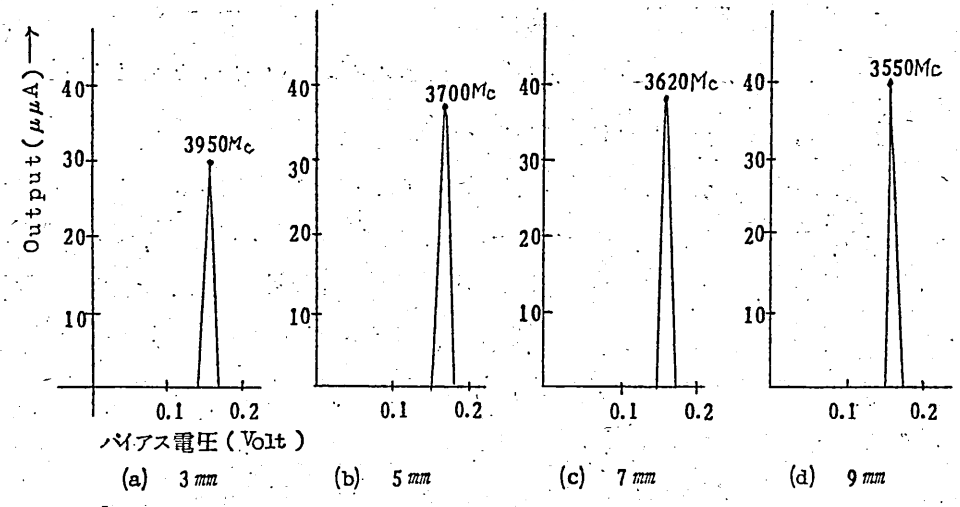
エサキダイオードの空胴は図 7(b)に示すように周波数の同調をとるために *Short Piston* にし，又空胴の大きさも変化出来るようにしてある。又，エサキダイオードの並列容量 c を打ち消すために，エサキダイオードをマウントしている後はカットオフになっているから，この誘導性リアクタンスとで打ち消している。

図 7(a)に示すように，エサキダイオードのマウントしているところの高さは 0.6㎜で，標準の高さ 290㎜まで傾斜（周波数 3 Gc で 1 λg の長さ）をつけている。エサキダイオードをマウントしている部分の高さを 0.6㎜位にしたのは特性インピーダンスが高さに比例するので，エサキダイオードを安定に動作させるためには特性インピーダンスを低くすればよく，高さを 0.6㎜にしたのである。そして空胴の入力のところまで $\varepsilon = 14$ の誘電体を挿入してある。空胴の近くでは導波管の幅を 20㎜にせばめているが，$\lambda = \sqrt{\varepsilon} \times 2a$ によって，導波管のカットオフ周波数は約 2 Gc となる。[*1] この部分は誘電体がなければ，カットオフとなる。次に(b)図に示すように誘電体にテーパをつけているのは整合をとるためである。

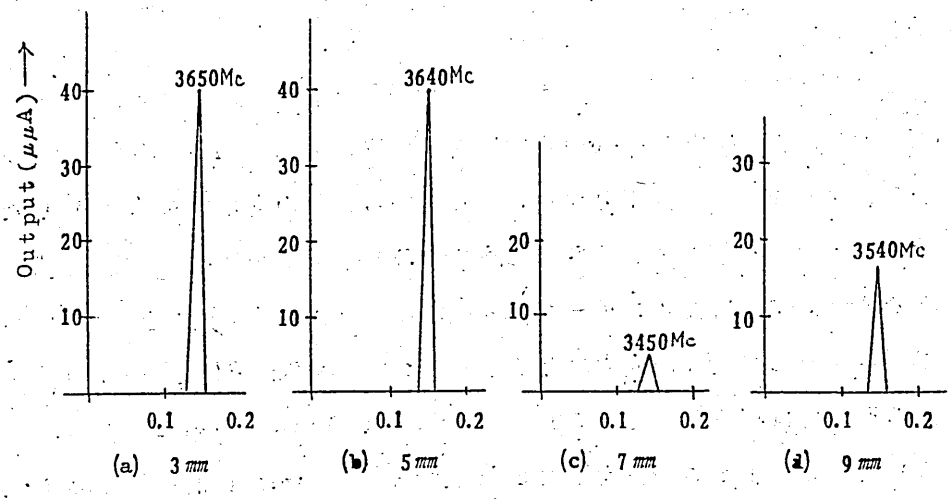
§ 4. 実験結果

4・1 実験回路

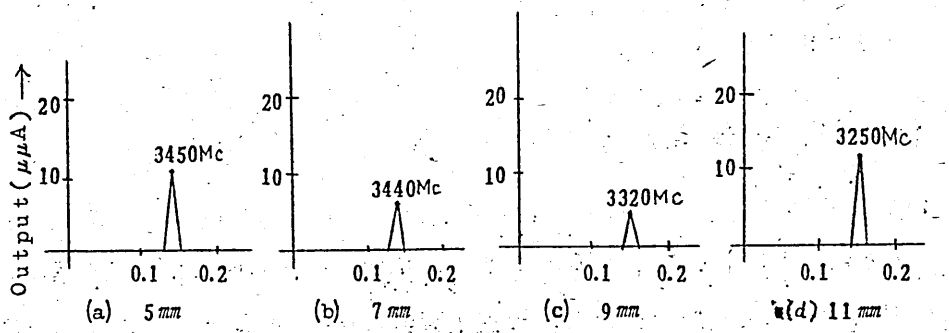
図 8 の回路において，$S.G$ とエサキダイオードとの間に低抗減衰器 Att_2 6dB を挿入して発振を止めた。抵抗減衰器 Att_1 20dB は $S.G$ の出力を調整するために挿入した。周波数は 3.2Gc から 3.7Gc までで，入，出力レベルは方向性結合器で分け，切換器 S_1 の 1 と 2 に切り換えて測定し，これらの比較から



a) 空胴の巾を 6 mmにしショートプランジャを変化させた時の発振周波数と出力特性



b) 空胴の巾を 8 mmにしショートプランジャを変化させた時の発振周波数と出力特性



c) 空胴の巾を 10 mmにしショートプランジャを変化させた時の発振周波数と出力特性

図 9

増巾特性を求めた。

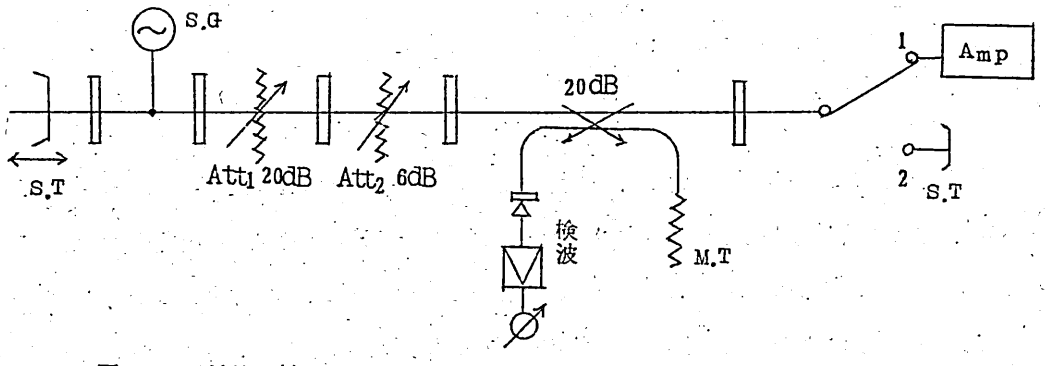
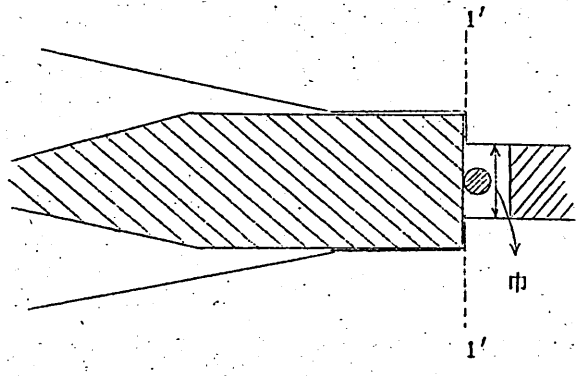


図8　導波管反射型エサキダイオード増巾器の測定回路

4・2 増巾特性

図9 a，b，cはエサキダイオード（1T 1103 $c=3.5\,pF$，$Rs=1.5\,\Omega$，$Ls=0.4\,nH$）のマウントしている空胴の幅を 6㎜，8㎜，10㎜にした時の発振周波数と出力特性を図示している。



（図10） 図7の(b)の構造と同じ

空胴の幅を 6㎜，8㎜，10㎜の場合に，エサキダイオードのバイアス電圧を $0.14\,Volt$ 附近に近づけると，図9のような発振をする。今図10の 1－1′ 端子から左を見た特性インピーダンス，誘電体 $\varepsilon=14$ が完全に満たされていると仮定して計算すると（この時，特性インピーダンスをV－Iで定義された式を用いる）

$$Z_{(V.I)} = \frac{\pi b}{2a} \frac{377}{\sqrt{\varepsilon_1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda c}\right)^2}} = 57.5\,[\Omega] \qquad (11)$$

a : 20 mm

b : 6 mm

λ : 8.8 cm

λc : 4 cm

f : 3.4 Gc

となる。次に 1－1′ 端子から右側を見たインピーダンスは共振している場合であるから，L，C，は打ち消されてエサキダイオードの $-R$ だけが残るので，この $-R = 75\Omega$ であるから，(9)式の安定条件が満足されるはずであるが，エサキダイオードをマウントしている部分の電磁界の乱れにより，エサキダイオードに直列にインダクタンス L が加わって 1－1′ 端子から右を見たインピーダンスは下がり，又結合度が弱いという 2 つの点から，発振したものと思われる。ところが空胴の幅を 10 mm にした時 6 mm，8 mm の時に比べて発振出力は非常に小さい。この発振している附近を避けて増巾特性を求めたのが図 11 である。

次に空胴の幅を 12 mm 以上にすれば，エサキダイオードの負抵抗領域のどの点にバイアス電圧をもって来ても，発振は起こらなかった。

このように空胴の幅が広くなった場合，前の場合と異なり，結合度が非常に強くなり，又(9)式の安定条件も満足されているから，発振は起こらないと思われる。

次に図 8 の測定回路で，エサキダイオード増巾器と S.G との間に Att_2 6dB ほど挿入して発振を止めた。この時エサキダイオードの V－I 特性を直視装置で観測した場合，負性抵抗領域で発振は認められず，又直流電源に切り換えて調べても発振を認めなかったので，6dB を定めた。（この時 Att_1 を 0dB）そして 5dB 以下にすれば，発振を生じた。Att_2 6dB の V.S.W.R は定量的に測定したが，1.34 であった。

V.S.W.R が 1.34 以下ならば安定領域となるが，1.34 以上は不安定領域になって発振を起こす。

これを図 12 に示す。

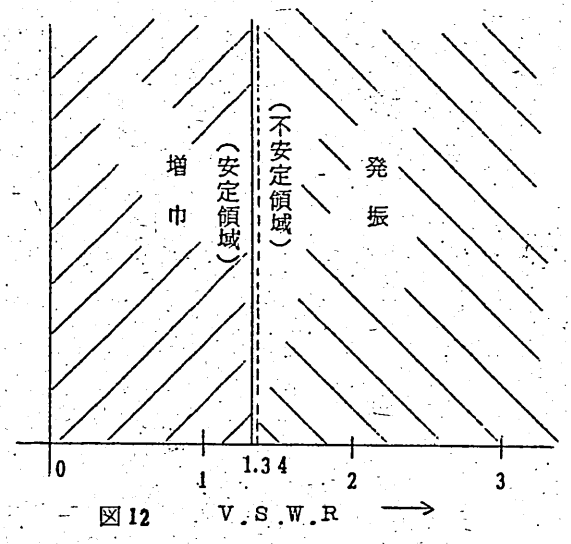


図12

上述の状態でAtt_2を6dBに置き，空胴の幅とショートピストンを変化させた時の増巾特性を求めたのが図11～図19にある。

§5. 結　論

以上GeエサキダイオードIT1103を用いて3Gc帯での導波管反射型エサキダイオード増巾器の理論と諸特性を述べた。

増巾帯域巾は図11で約120Mc程度しか得られなかった。図17～図18では増巾特性が非常に悪い。これらは空胴の幅が広くなった場合に誘電体との結合もかなり強くなり，インピーダンスの低下で整合がうまくいかない点が生じて，このような特性が生じたものと思う。故に誘電体と空胴との結合を色々変えて考察せねばならないと思う。

終りに，当研究室の方々，古河電工K.K弱電研究課の方々の御援助に感謝致します。

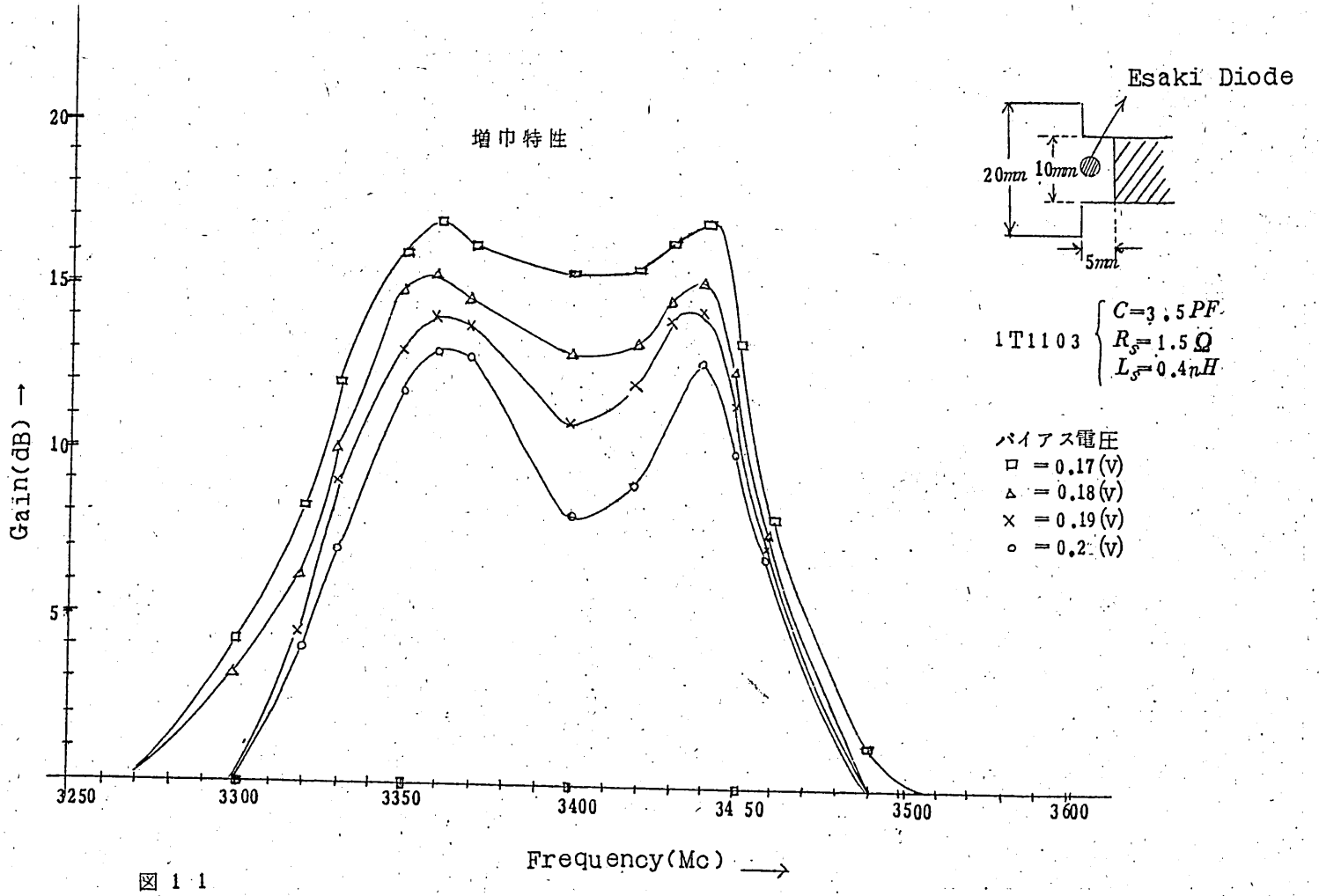
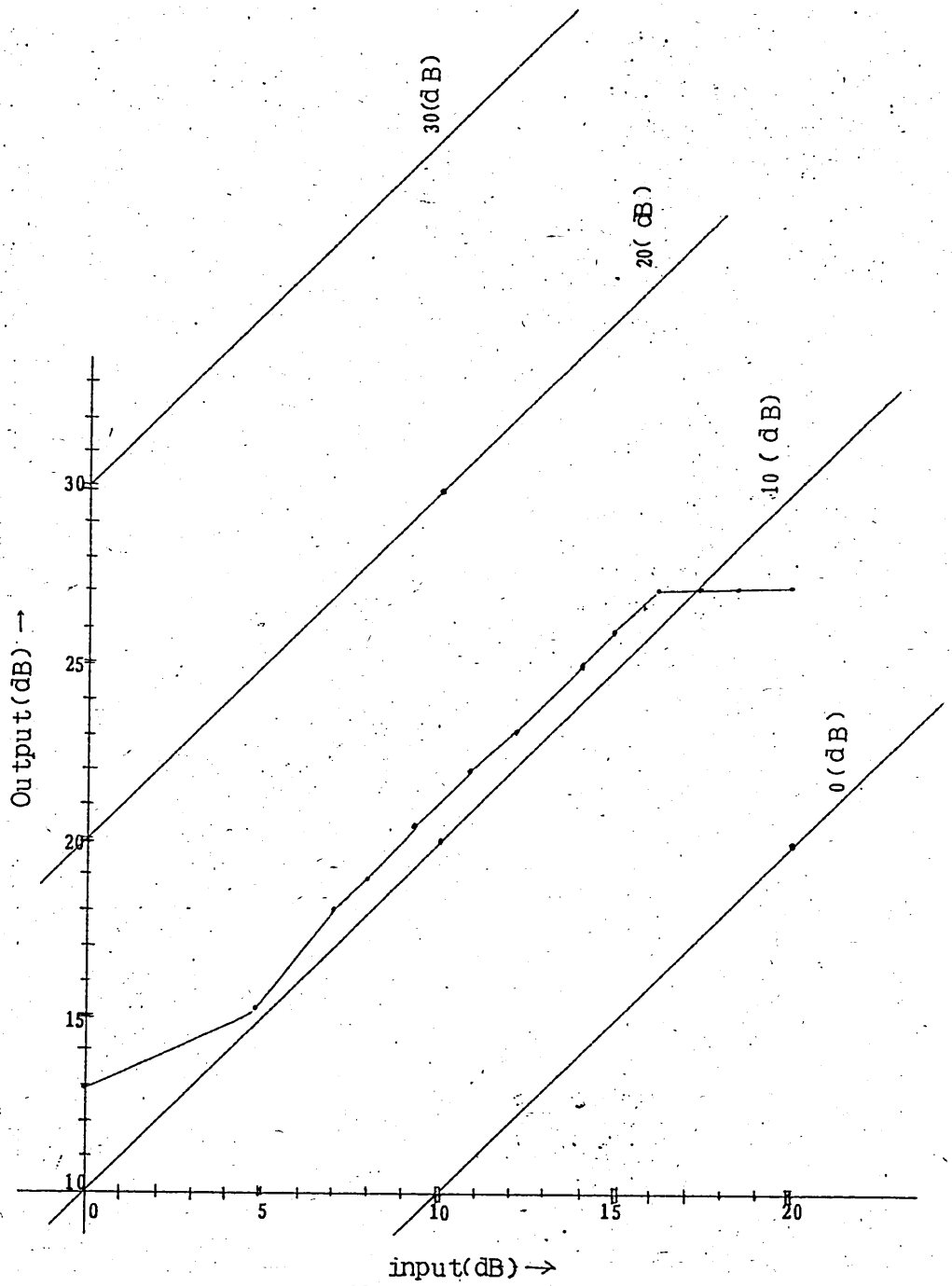

増巾特性
Gain(dB) →
20
15
10
5
3250
3300
3350
3400
34 50
3500
3600
Frequency(Mc) →
Esaki Diode
20mm
10mm
5mm
1T1103
C=3.5PF
Rs=1.5Ω
Ls=0.4nH
バイアス電圧
□ =0.17(V)
△ =0.18(V)
× =0.19(V)
○ =0.2 (V)

図 1 1



Frequency 3400Mc
バイアス電圧 0.18(v)

図13

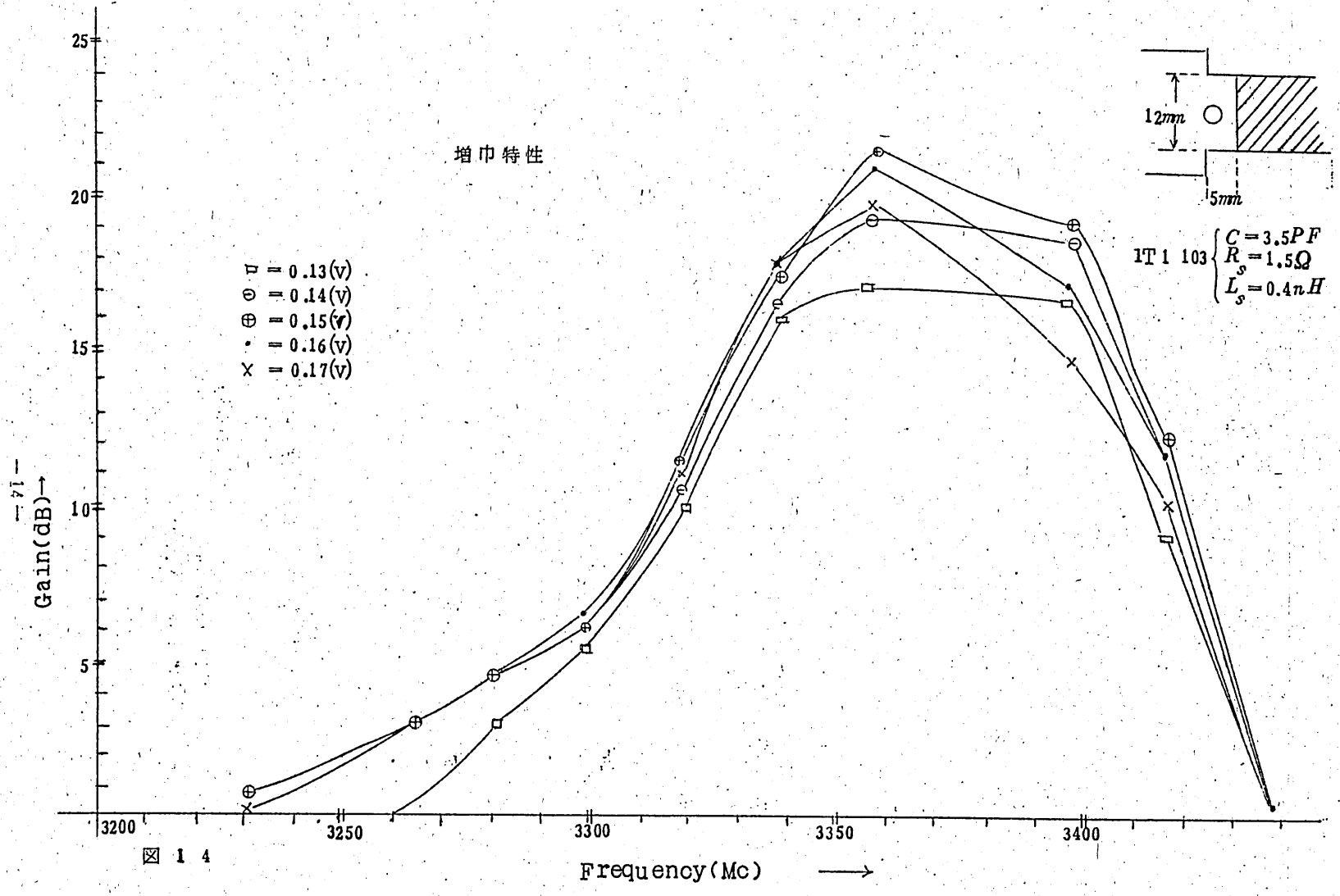

増巾特性
□ = 0.13(v)
⊖ = 0.14(v)
⊕ = 0.15(v)
• = 0.16(v)
× = 0.17(v)
12mm
5mm
1T1 103 { C = 3.5PF, Rs = 1.5Ω, Ls = 0.4nH
Gain(dB)→
Frequency(Mc) →
25
20
15
10
5
3200
3250
3300
3350
3400

図 1 4

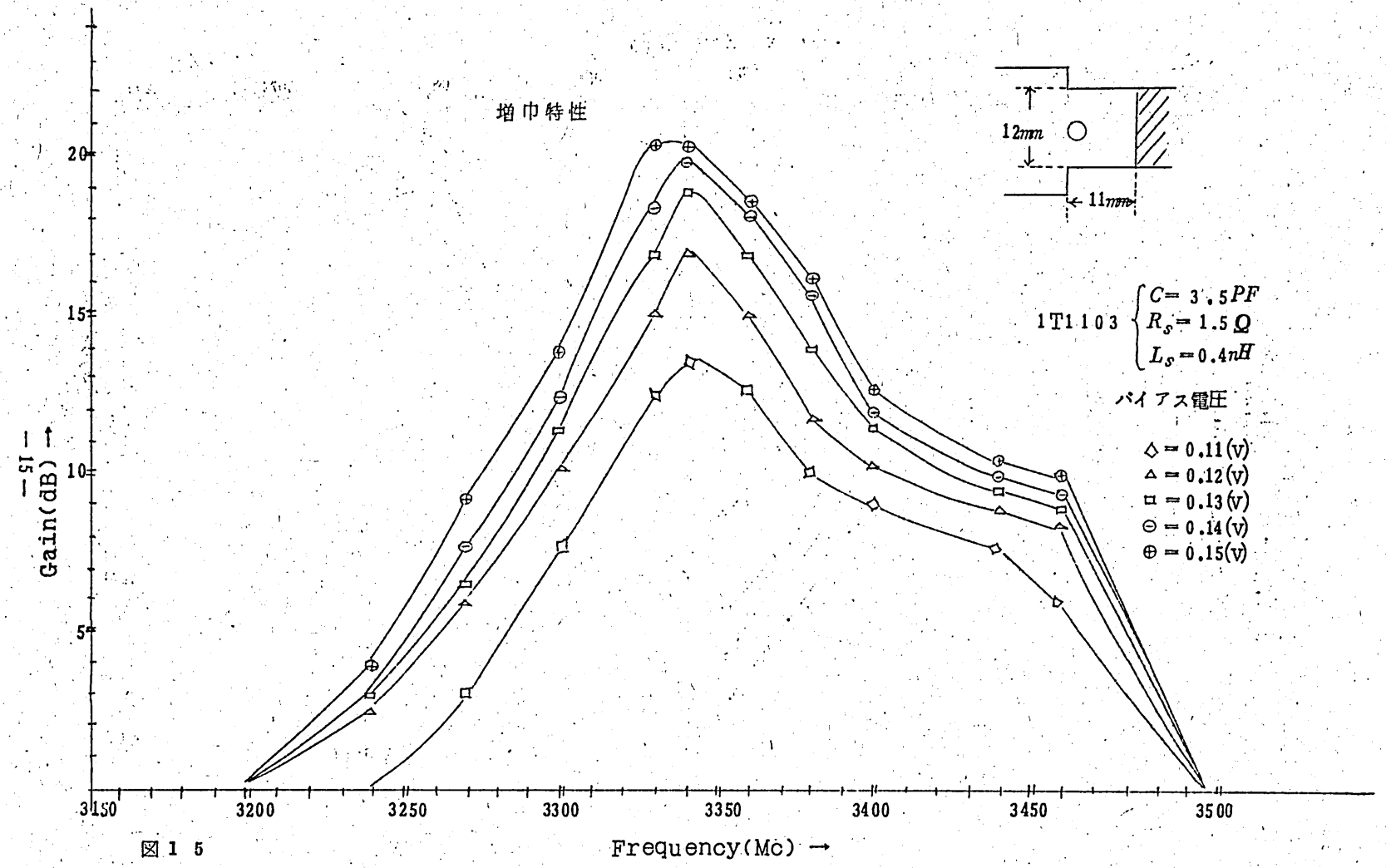

増巾特性
12mm
11mm
1T1103 C= 3.5PF
Rs= 1.5Ω
Ls= 0.4nH
バイアス電圧
◇= 0.11(v)
△= 0.12(v)
□= 0.13(v)
⊖= 0.14(v)
⊕= 0.15(v)
Gain(dB) →
Frequency(Mc) →
3150
3200
3250
3300
3350
3400
3450
3500
5
10
15
20

図 1 5

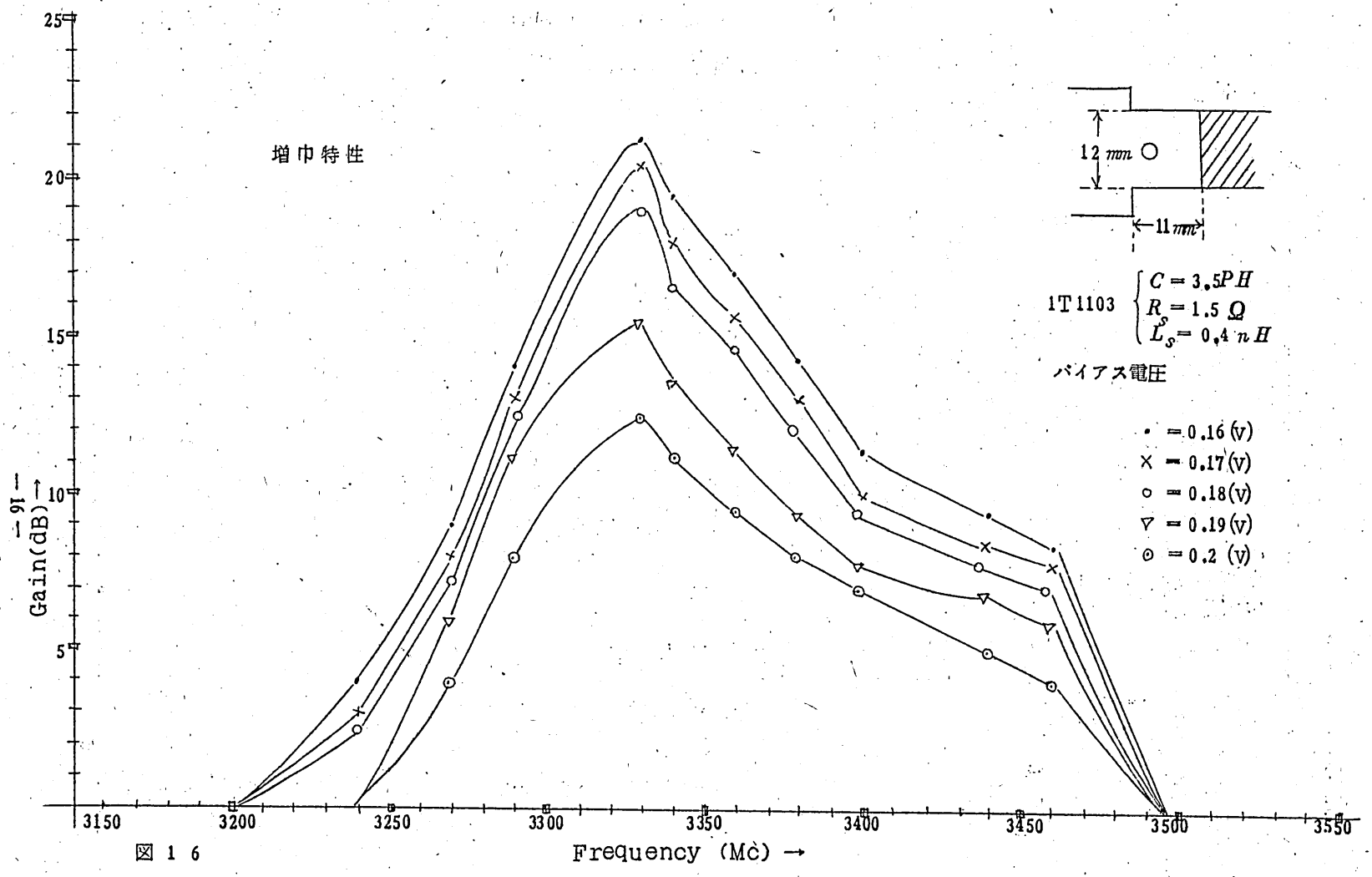

増巾特性
12 mm
11 mm
1T1103
C = 3.5PH
R_S = 1.5 Ω
L_S = 0.4 nH
バイアス電圧
• = 0.16 (V)
× = 0.17 (V)
○ = 0.18 (V)
▽ = 0.19 (V)
⊙ = 0.2 (V)
Gain(dB) →
Frequency (Mc) →
25
20
15
10
5
3150
3200
3250
3300
3350
3400
3450
3500
3550

図 1 6

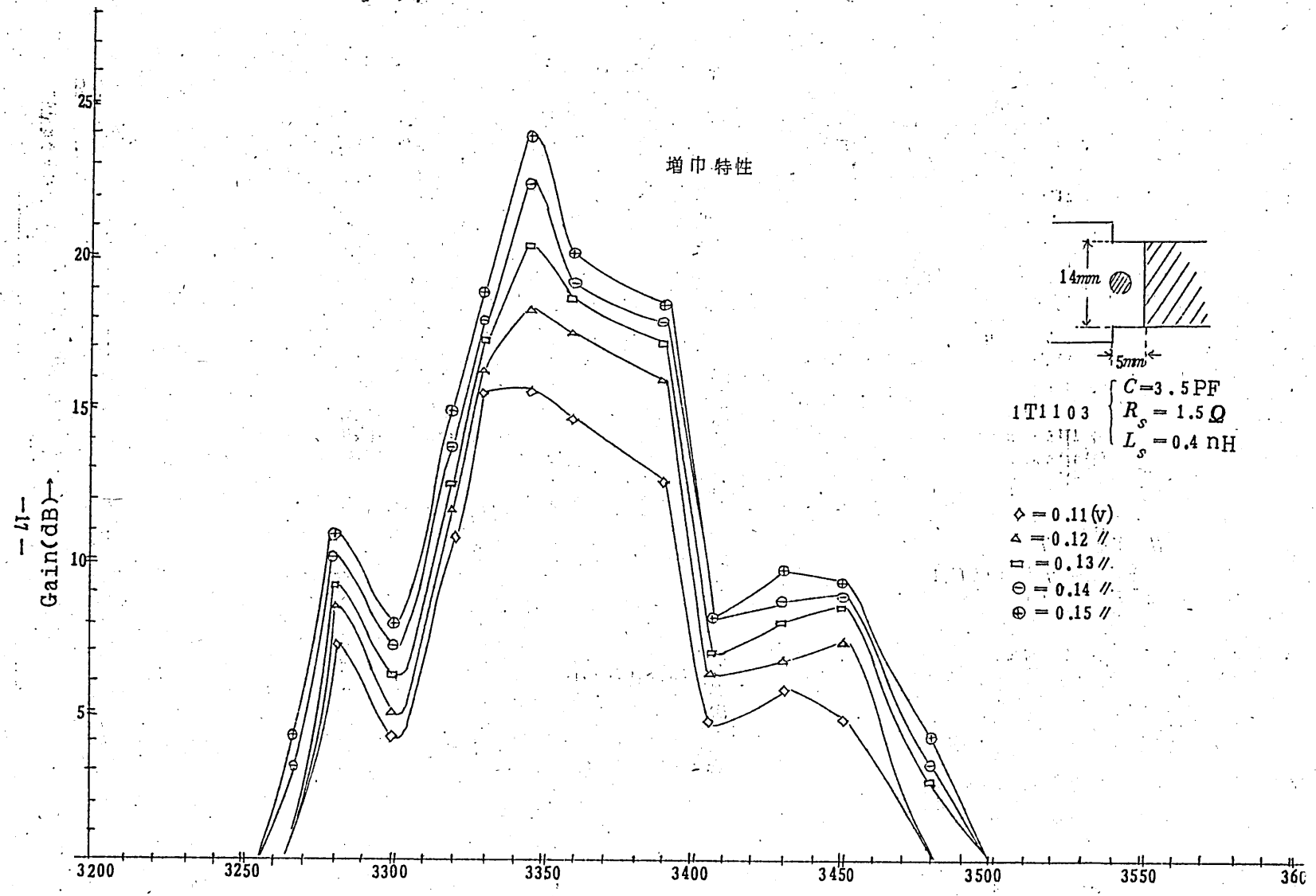

増巾特性
14mm
5mm
1T1103
C=3.5PF
Rs=1.5Ω
Ls=0.4 nH
◇=0.11(v)
△=0.12 //
□=0.13 //
⊖=0.14 //
⊕=0.15 //
Gain(dB)→
Fvequency(Mc) →
25
20
15
10
5
3200
3250
3300
3350
3400
3450
3500
3550

図 1 7

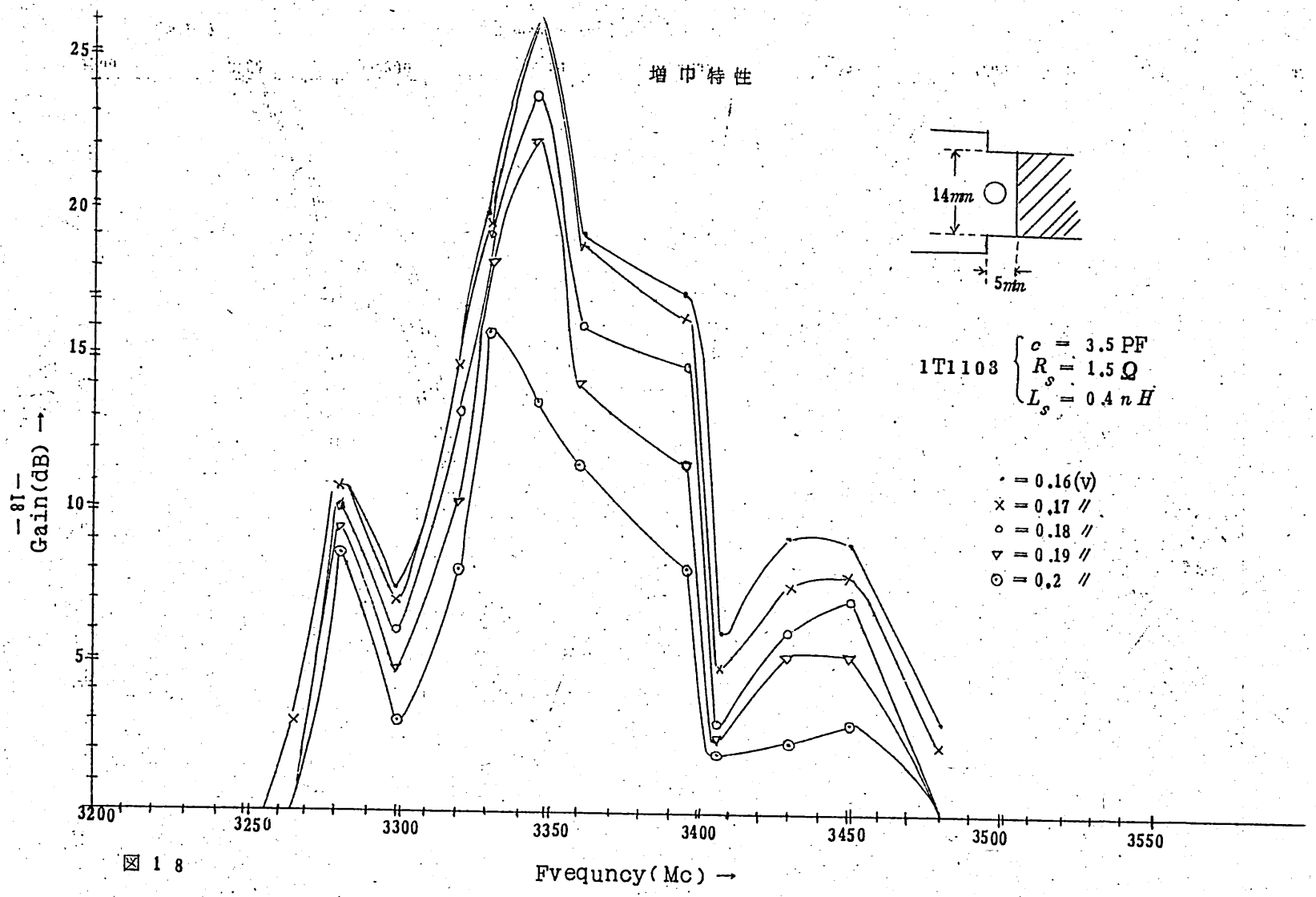

増巾特性
14mm
5min
1T1103
c = 3.5 PF
R_s = 1.5 Ω
L_s = 0.4 nH
· = 0.16(v)
× = 0.17 //
○ = 0.18 //
▽ = 0.19 //
⊙ = 0.2 //
Gain(dB) →
Fvequncy(Mc) →
25
20
15
10
5
3200
3250
3300
3350
3400
3450
3500
3550

図 1 8

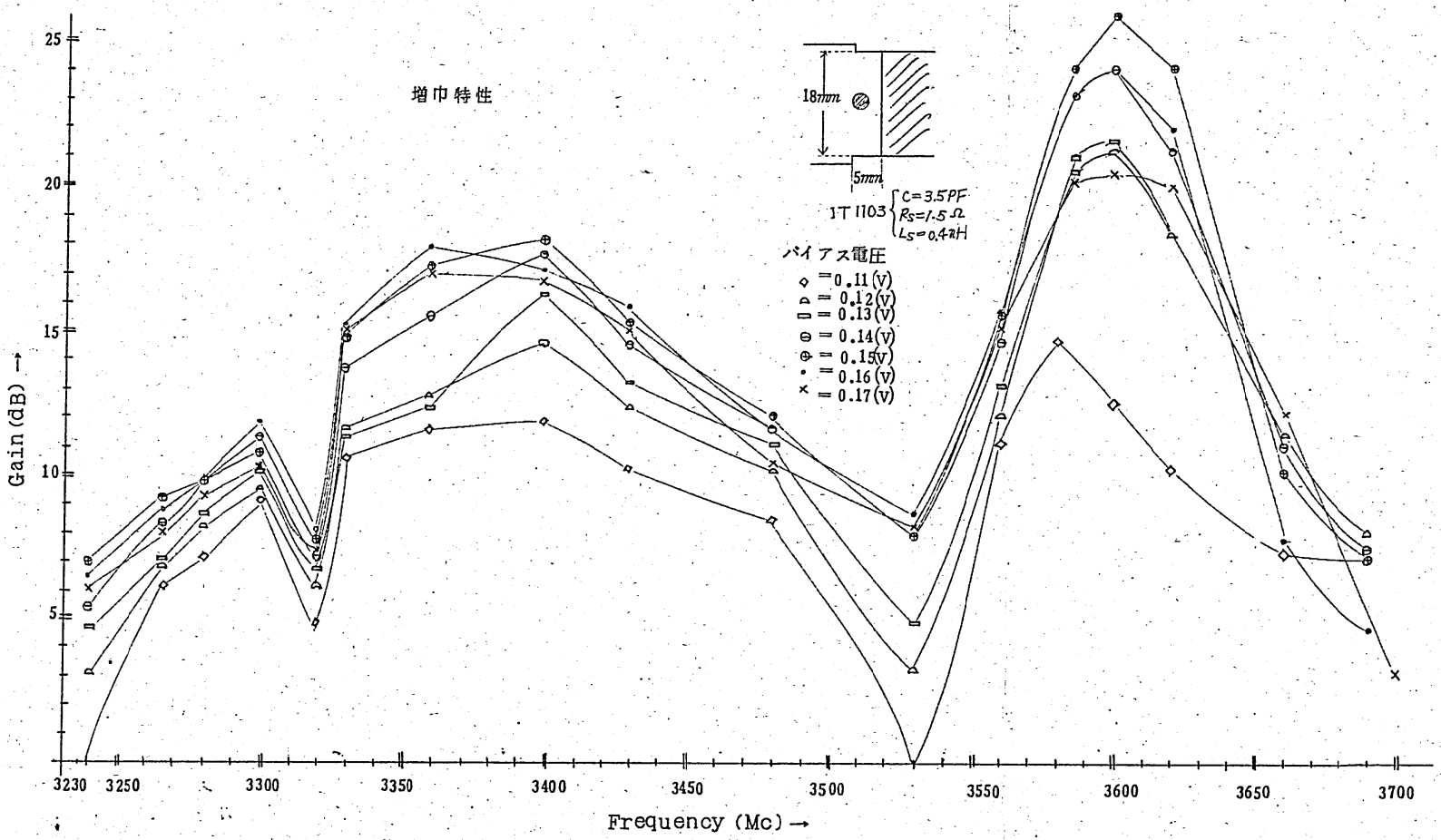

増巾特性
18mm
5mm
1T 1103
C=3.5PF
Rs=1.5Ω
Ls=0.4nH
バイアス電圧
◇ = 0.11(V)
△ = 0.12(V)
□ = 0.13(V)
⊖ = 0.14(V)
⊕ = 0.15(V)
• = 0.16(V)
× = 0.17(V)
Gain(dB) →
25
20
15
10
5
3230
3250
3300
3350
3400
3450
3500
3550
3600
3650
3700
Frequency (Mc) →

図 1 9

参 考 文 献

1) M.E.Heines. HighFreguency Negatıve Resistance Circuit Principles for Esaki Diode Application BSTJ PP447/513 May 1960.

2) J.S.Look. Operation of an Esaki Diode. Microwave Amplifier Proceeding of I.R.E.(Correspondence) P1153 June 1960.

輻射科学研究会資料

レーザー光による光高調波

玉井徳迪

阿知波正義

（松下電子工業株式会社　研究所）

昭和38年9月28日

（於　電子会館）

レーザー光による光高調波

概　　説

ルビーレーザー（6943 Å）による光高調波（3472 Å）の生成の実験をKDP結晶を用いて行なった。理論的には，高調波の強さは入射レーザー光の強さの二乗に比例することがわかっているが，我々はこれを実験的に確めた。さらにルビーレーザーのいろいろなスパイクの形についてそのCoherencyに関する知見を得た。

§1. まえがき

従来取り扱われてきた光と物質との相互作用の問題（例えば物質による光の吸収，放出，散乱等）は，理論的には一次の摂動の範囲で解釈され，実験との一致をみてきた。しかしこれは光が比較的弱い場合で，光の場が非常に強くなると，以前には見出せなかった現象が観測される。量子論的には，光の場が強くなると，摂動の第一項を用いただけでは不十分であり，より高次の項が必要になってくる。

この様な現象は，Non-Linear Effectとして最近，理論的にも又実験的にもいろいろ研究されており[1]その主なものには

（1）　Harmonic Generation and Optical Mixing.

（2）　Multi-Photon Absorption.

等がある。

実験的には，最近各方面で研究されているレーザーの出現により，この様な現象の観測が可能になった。

レーザーの特長は，単一モードのエネルギーが非常に大きいこと，Coherencyがよいことなどである。すなわち，強い光の場を作ることが出来ることである。

こゝでレーザー発振光による電磁場の強さを見積ると，単位面積を垂直に単

位時間に通過するエネルギーはPoynting Vector S により

$$S = \frac{C}{4\pi}\{\mathbb{E} \times \mathbb{H}\}$$

こゝに　$\mathbb{E}$：電場のVector

$\mathbb{H}$：磁場のVector

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E$$

を用いて

$$S = \frac{C}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E^2$$

こゝに　ε_0：真空中の誘電率

μ_0：真空中の透磁率

ルビーレーザーの光は，Pulse 巾1 μ sec位の数多くのスパイクから構成されており，発振出力は1ジュールぐらいである。これを実効的な出力に直すと，数KWから数百KWにもなる。今実効出力1KWのものをレンズで10^{-6} cm^2 に集束したときは焦点面における場の強さは

$H \sim 10^6$ oersted

$E \sim 10^8$ volts／cm

となる。ルビーレーザーから出てくる光は完全な平行光線ではなく10^{-2}ラジアン程度の「ひろがり」をもっているといわれている。我々の実験では0.5×10^{-2}ラジアン位であった。この場合には電磁場の強さは10^3oersted，10^5volts／cm のオーダーと推定される。

我々は，この様に強い光の場を用いて，二次光高調波の実験を行なった。

§2. 理論的考察

今簡単に，物質に電場Eが作用する場合を考えると分極Pが

$$P = \alpha E$$

の様にEに対しLinearに生じる。しかしEが非常に強い場合にはPはもはやEに対しLinearではなく

$$P = \alpha E + \beta E^2 + \cdots\cdots$$

の様に Non-Linear な項が入ってくる。今Eの二次の項までとりEが $E = E_0 e^{i\omega t}$ と振動する場合を考えると

$$P = \alpha E_0 e^{i\omega t} + \beta E_0^2 e^{i2\omega t}$$

となり分極Pがもとの振動数 ω とその二倍の振動数 2ω で振動する二つのモードをもつ。Pの振動は電磁波を放射するから，物質を適当に選び，ω としてレーザー光を用いるなら，2ω の光が放出される可能性が出てくる。

こゝでは 2ω の光を問題とするから，Eの二次の項のみを考え，結晶光学的にもう少しくわしく考察すると誘電分極Pは

$$P = d \cdot EE$$

こゝにEEは6個の成分 $E_xE_x, E_yE_y, E_zE_z, E_yE_z, E_xE_z, E_xE_y$ をもつ対称Tensorである。dもTensorでありその物質のPiezoelectric Tensorと同じ型で，次の3行6列のMatrixである。

$$d = \begin{pmatrix} d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{15}, d_{16} \\ d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{24}, d_{25}, d_{26} \\ d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}, d_{35}, d_{36} \end{pmatrix}$$

これは一見複雑であるが，用いる結晶の対称性を考慮すれば，かなり簡単になる。

我々は，二次光高調波を生成するためにPiezoelectric Crystalとして有名なKDP（KH_2PO_4）を用いた。KDP結晶はその外見からも予想される様に（Fig. 1）空間群 $V_d = D_{2d}$ に属する。この対称性を考慮すればMatrix d はかなり簡単になり

$$d = \begin{pmatrix} 0, 0, 0, d_{14}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, d_{14}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, d_{36} \end{pmatrix}$$

となる。したがって誘電分極Pは

$$P_x = d_{14} E_y E_z$$

$$P_y = d_{14} E_z E_x$$

$$P_z = d_{36} E_x E_y$$

この式より，ωで振動する常光線により２ωの異常光線が生成されることがわかる。その強さＩはＶをレーザー光により照射されている体積とすると

$$I \sim \frac{\omega^4}{C^3} (Pv)^2 \frac{V}{v} \qquad 2)$$

こゝにｖは実効的にCoherentな体積である。この式より入射レーザー光の強さの二乗に比例して光高調波が出ることがわかる。

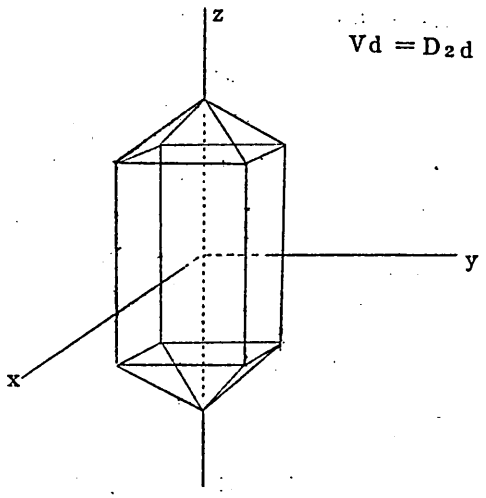


Fig 1. ＫＤＰ結晶

今レーザー光をｘ方向に入射した波数Vector Kr なる平面波 $e^{i(\omega t - kr \cdot x)}$ とするとPolarizationは $P = P_0 e^{i(2\omega t - 2kr \cdot x)}$ にしたがって出来る。これにより作られる波数Vector k_b なる光 $e^{i(2\omega t - k_b \cdot x)}$ は回折像を生じその最大強度は

$$|K_b| = 2\,|K_r|$$

なるときである。[3),4)] すなわち二次高調波と入射レーザー光が同じ方向でかつ速さも等しいときである。この条件を屈折率で書けば，n_r^o をレーザー光の常光線の屈折率，n_b^e を二次光高調波の異常光線の屈折率，とすると

$$n_r^o = n_b^e$$

なる方向である。ＫＤＰは負の単軸結晶であるから屈折率楕円体は入射レーザー光の常光線に対しては

$$\frac{x^2}{n_r^{o2}} + \frac{y^2}{n_r^{o2}} + \frac{z^2}{n_r^{o2}} = 1$$

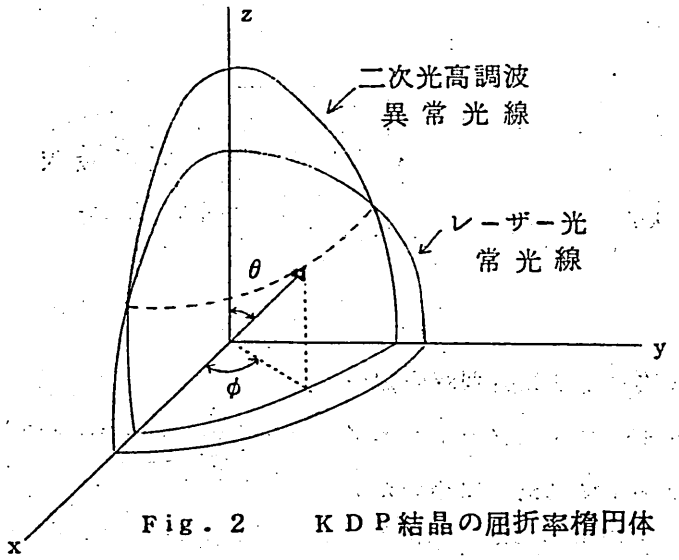
二次光高調波の異常光線に対しては

$$\frac{x^2}{n_b^{o2}} + \frac{y^2}{n_b^{o2}} + \frac{z^2}{n_b^{e2}} = 1$$

これを作図すれば　Fig．2　の様になる。[4]　$n_r^o = n_b^e$　となる角θは簡単に求めることが出来

$$\theta = \sin^{-1}\sqrt{\frac{n_b^{e2} - n_r^{o2}}{n_b^{e2} - n_b^{o2}}}$$

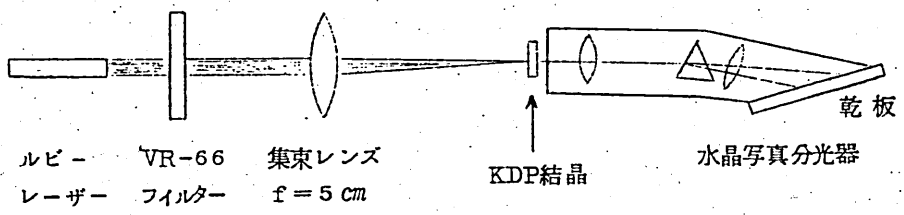
ＫＤＰの場合θは約52°，ϕはPolarizationを最大にする値として簡単に求まり45°である。二次光高調波の強度のＫＤＰ結晶の方向による変化はθに関しては著しいが，ϕに関してはあまり変化しない。



Fig．2　　ＫＤＰ結晶の屈折率楕円体
と光のMatchingの方向（$\theta = 52°$　$\phi = 45°$）

§3. 実験と結果

ＫＤＰ結晶は再結晶法により２×２×３㎝ぐらいのひずみのないものを作成した。この結晶を光学軸（ｚ軸）に対し52°，ｘ－ｙ軸に対し各々45°をなす方向に垂直な平面で，厚さ２㎜，たて，よこ，それぞれ１０㎜ぐらいにカットして研磨した。こうして作成した結晶にレーザー光をレンズで集束してあてた。光高調波とレーザー光は先づ水晶写真分光器で検知した（Fig.3 及び補図（a）参照）。ルビーロッドはロッドの方向がｚ軸に平行で、直径 1/4 インチ長さ２インチ。Cr^{+3} の含有量は 0.05 重量％である。ロッドの両面は 1/10 波長（Na のＤ線，5896 Å ）以下の平面度で，平行度は２秒以内である。ロッドの両端は銀の蒸着膜で，一方は完全にレーザー光を透過しないが，他方は３％透過するようにしてある。励起はスパイラル形キセノン放電管で電源は 210 μF のコンデンサーと５０００Ｖ の高圧発生装置からなっている。我々のセットでは，Threshold 入力（レーザー発振を起し始める最低入力エネルギー）は２K joule であった。実験は最大入力 2.6 K joule まで行った。この入力エネルギーで励起した時の出力は大体１ joule 位と推定される。Fig．４はこうして得られた分光写真である。写真の上部にはカドミウムのスペクトルが波長目盛として入れてある。



Fig．3.　分光器による光高調波の観察
VR-66 フィルターはキセノンランプのBack Ground をカットするために用いた。

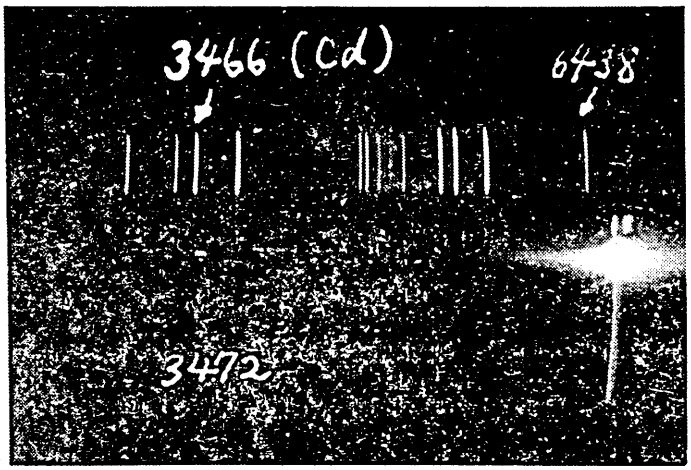


Fig. 4　光高調波（3472 Å）とレーザー光（6943 Å）の分光写真，写真上部は波長目盛としてのカドミウムスペクトル。

なお，結晶を液体窒素でキューリー点（123°K）近くまで冷却したが光高調波の強度には著しい変化はみとめられなかった。その理由は多分，dの値が静電場や低周波の電場に対するのと同じ性質を示せばキューリー点の近傍で急激に大きくなり，強い高調波が得られるであろうが光の様に速い振動電場に対しては，その様な性質を示さないためだろうと思われる。

次にレーザー光と光高調波を，光電子増倍管6217と1P28で各々受光しDual-Beam Oscilloscope で観察した。実験のBlock Diagram は Fig.5 に示してある。VR-66フィルターはキセノンランプのBack Ground をカットするため，又1P28 の前のUV-D1Bフィルター及び硫酸銅溶液はレーザー光をカットするために用いた（補図（a），（b）参照）。Fig. 6はこうして得られたOscilloscope 波形であり，Scaleは50μsec/div.，上のTrace が光高調波，下の Trace がレーザー光である。これにより解ることはレーザー光の各スパイクと光高調波は対応がつくがその強度は必ずしも対応していない，ということである。その理由は各スパイクによりCoherency の良さ，集束の度合，及び入射方向が異るためと思われる。

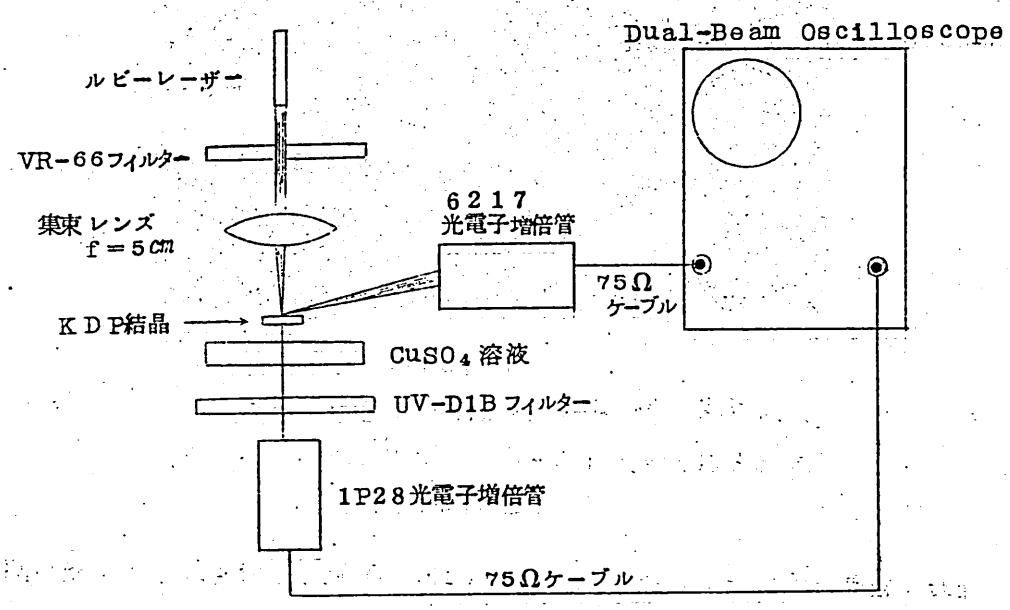


Fig. 5. 光電子増倍管による光高調波とレーザー光観察の Block Diagram.

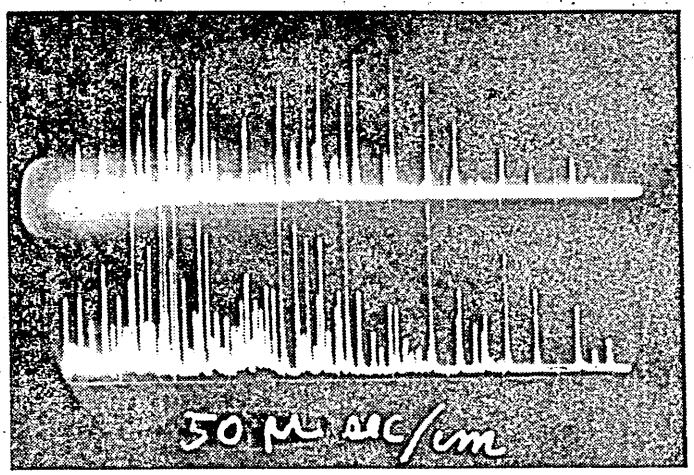


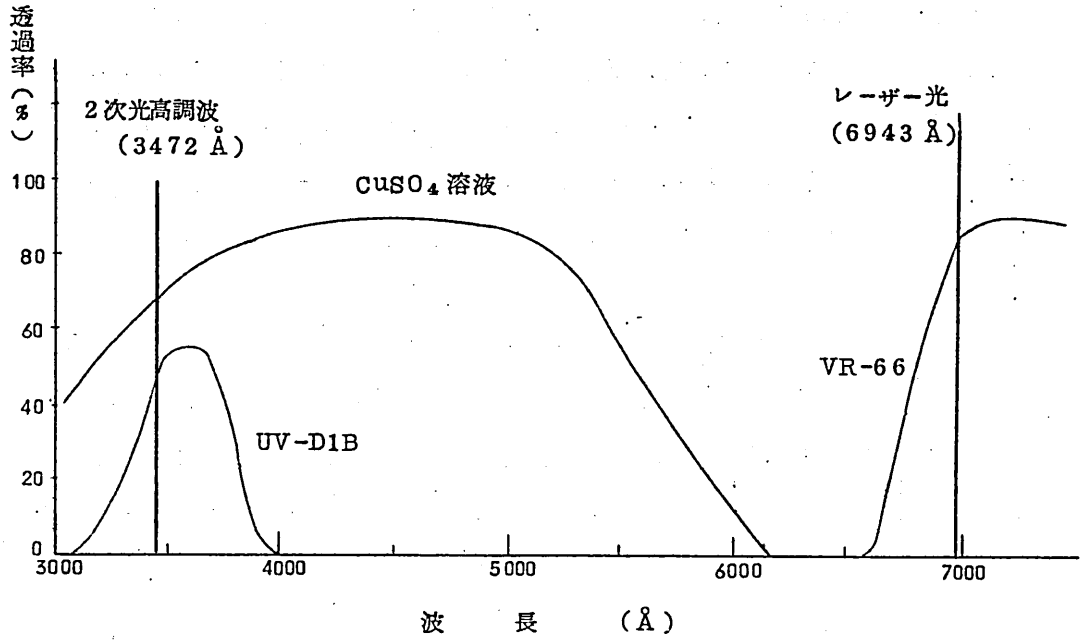
Fig. 6. 光高調波（上）とレーザー光（下）のOscilloscope 波形，50 μsec/div.

文献別刷Fig.1(a), (b)はFig.6を時間的に拡大して観測したもので，多くの波形のうちの典型的なものである。Fig.1(a) (b)いづれも上が光高調波，下がレーザー光の波形である。時間目盛は0.5 μsec/div.である。別刷Fig.1(a)の場合，光高調波の強さはレーザー波形の尾の部分をのぞいて，理論的に示されている様にレーザー光の強さの二乗に比例している。この関係がFig.2に○印で示してある。この様に，光高調波がレーザー光の強さの二乗に比例している時は，レーザー光のスパイクの形は，ガウシアンよりも鋭く尖っており，一つのモードが圧倒的に強いと思われる。レーザー光のスパイクが別刷Fig.1(b)に示してあるような場合には上に述べた様な二乗に比例する関係は成立せず，別刷Fig.2に●印で示した様になりレーザー光のスパイクは，いくつかのモードから構成されているものと思われる。我々の実験では大部分がこの形のスパイクであった。

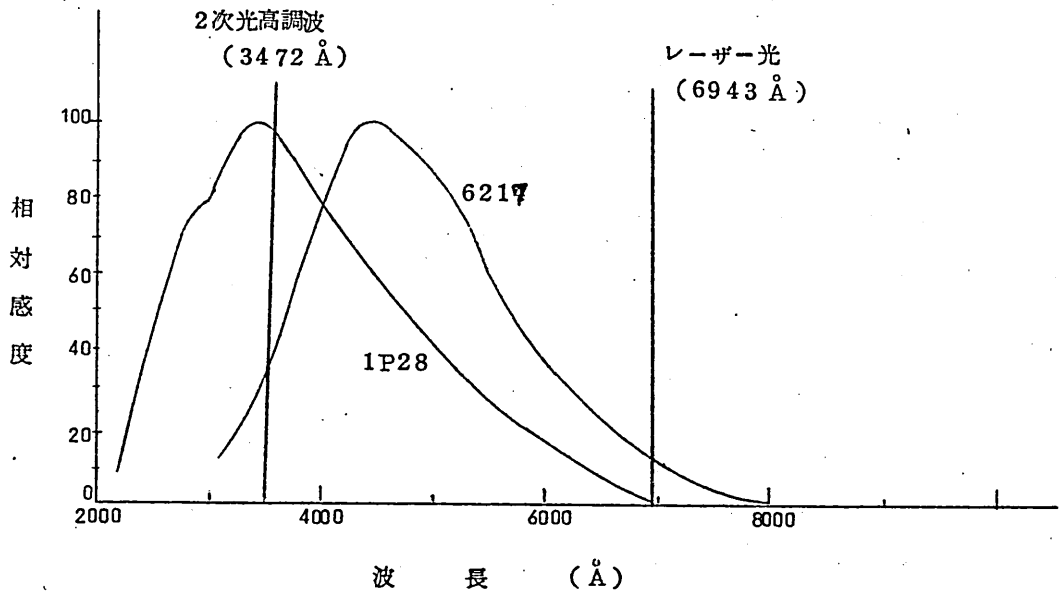
§4. 結　　論

ルビーレーザーの光は，多くのスパイクにより構成されているが，大部分のスパイクは，非常に多くのモードから成っており，Coherencyもあまりよくないと思われる。割合にCoherencyの良い波形は，ガウシアンよりも尖った形をしている。上の様な実験はレーザー発振光の性質を知るのに，有効な手段の一つと考えられる。

最近，He-Neガスレーザーによって上と同じ様な実験が行われている。[5)]



補図（a）　フィルターの透過率



補図（b）　光電子増倍管の分光感度

参 考 文 献

1) 水島正番　日本物理学会誌
Vol. 18 №4 196(1963)

M.Bass, P.A.Franken, A.E.Hill, C.W.Peters, and C.Weinreich P.R.L. 8 18(1962)

B.Lax et.al P.R.L. 8 166(1962)

R.W.Terhune P.R.L. 8 404(1962)

D.A.Kleinman P.R. 126 1777(1962)

J.A.Armstrong et.al P.R. 127 1918(1962)

A.Savage and R.C.Miller
App. Optics 1 661(1962)

H.S.Boyne and W.C.Martin
J.O.S.A. 52 880(1962)

D.A Kleinman P.R. 128 1761(1962)

R.C.Miller and A.Savage
P.R. 128 2175(1962)

P.A.Franken et.al
Rev.Mod.Phys. 35 23(1962)

2) P.A.Franken, A.E.Hill, C.W.Peters and G.Weinreich P.R.L. 7 118(1961)

3) J.A.Giordmaine P.R.L. 8 19(1962)

4) P.D.Marker, R.W.Terhune, M.Nisenoff and C.M.Savage P.R.L. 8 21(1962)

5) A.Ashkin et.al. P.R.L. 11 14(1963)
N.I.Adams App.Phys.L. 3 19(1963)

J. PHYS. SOC. JAPAN 18 (1963) 917

Ruby Laser and Second Harmonic Generation

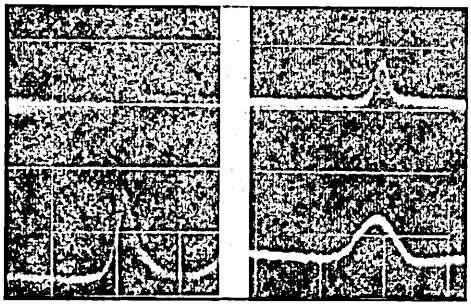
By Tokumichi TAMAI and Masayoshi ACHIWA

Research Laboratory, Matsushita Electronics Corporation, Takatsuki, Osaka, Japan

(Received April 1, 1963)

Generation of the second harmonic of light in a piezoelectric crystal has been investigated both theoretically and experimentally by many authors.[1),2)] Theoretically the intensity of the second harmonic is proportional to the square of the intensity of the incident light (coherent laser beam). The authors confirmed this theory and found that in general each spike of the pulsed ruby laser beam consisted of several different modes.

In our experiments we used a pulsed ruby laser. The ruby light beam is suitably filtered to eliminate xenon-flash background and is brought to focus inside a KDP crystal with the same orientation as in Maker's experiment.[2)] The incident light and the second harmonic light are detected respectively by a type 6217 and a type 1P28 photomultipliers, the signals of which are observed by a dual beam oscilloscope. These signals are shown in Fig. 1. In each oscillogram the upper trace shows the second harmonic and the lower trace the incident fundamental. In the case of Fig. 1a the intensity of the second harmonic light is proportional to the square of the intensity of the incident light in one spike except



(a) (b)

Fig. 1. Second harmonic generation of the ruby laser beam in KDP. In each oscillogram, the upper trace shows the second harmonic, and the lower trace the incident fundamental. The time scale is 0.5 μsec/division.

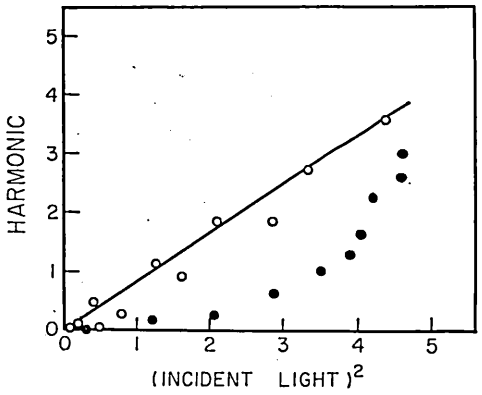


Fig. 2. The intensity of the second harmonic is shown as a function of the square of the intensity of the incident fundamental. The open circles correspond to Fig. 1a and the filled ones to Fig. 1b. Each scale is arbitrary unit.

the trailing end as shown in Fig. 2 with open circles. The shape of the spike is more pointed than that of the Gaussian curve. In this case it is reasonable to conclude that the main part of the spike from the ruby laser has only one mode. But in the case of Fig. 1b the intensity of the second harmonic is not proportional to the square of the incident light as shown in Fig. 2 with filled circles. This means that there are several modes in one spike, and an investigation of this phenomenon will be useful to examine the properties of the laser oscillation. In our experiments most of the spikes were superpositions of different mode oscillations. Further investigations are now in progress.

References

1) P. A. Fraken et al.: P.R.L. **7** (1961) 118.
M. Bass et al.: P.R.L. **8** (1962) 18.
J. A. Giordmaine: P.R.L. **8** (1962) 18.
A. Savage and R. C. Miller: App. Cptics **1** (1962) 661.
H. S. Boyne and W. C. Martin: JOSA **52** (1962) 880.
D. A. Kleinman: Phys. Rev. **128** (1962) 1761.
R. C. Miller and A. Savage: Phys. Rev. **128** (1962) 2175.
2) P. D. Maker et al.: P.R.L. **8** (1962) 21.

輻射科学研究会資料

不要共振姿態の発振抑制効果を有するレーザ共振器

熊谷信昭　松原正則　森　弘喜
（大阪大学工学部）

1963年12月14日

要　約

本資料は3個またはそれ以上の反射板によって構成された複合ファブリ・ペロー・レーザ共振器の発振特性について理論的に検討し，最も有効な不要共振姿態の発振抑制効果を有するレーザ共振器の構成を示したものである。対象とするレーザー共振器はすべて電気的等価回路に変換して回路論的に取扱い，物理的意味の明らかな，きわめて見通しのよい一般的な解析結果を与えた。具体例としてヘリウム・ネオン・ガスレーザをとりあげ，本資料で導かれる解析結果にしたがって共振器を構成すれば、すべての不要縦共振姿態を最も効果的に抑制し、唯1個の縦共振姿態のみで発振させ得ることを示した。このような共振器を用いることにより，いままでに報告されたいかなるレーザよりも周波数単一性のよい安定なレーザ発振が期待できる。

1. 序　言

レーザの基本的構成はレーザ物質と，その両側に置かれた相対向する2枚の反射板，いわゆるファブリ・ペロー共振器，よりなっている．このようなレーザの発振波長は，レーザ物質からの誘導放射スペクトルと，共振器の共振波長とによって決定される。

ところで，ファブリ・ペロー共振器は本来多数の縦および横共振姿態を有する多重姿態共振器であるが，[1] レーザ物質からの放射スペクトル幅は各共振姿態の共振波長間隔よりも大きいため，そのスペクトル内には多くの共振姿態が含まれ，それらのいくつかが発振することになる。そのため出力光にはこれらの共振波長に相当するいくつかの周波数が含まれることになる。しかし，通信工学や計測その他多くの目的にレーザを応用する場合，発生される光の周波数はできるだけ単一であることが

望ましい。そのための最も有効な手段の1つは，レーザー物質からの放射スペクトル内で唯1個の共振姿態のみが発振し，他の不要共振姿態の発振はすべて抑制されてしまうようにすることである。

本資料はこのような目的に応ずるため，2枚の反射板よりなる通常のファブリ・ペロー共振器に，さらに1個またはそれ以上の反射板を付加した複合ファブリ・ペロー・レーザ共振器の発振特性について理論的に考察し，適当な設計によって，きわめて効果的に不要共振姿態の発振を抑制し得ることを示し，具体例によってその模様を明らかにしたものである。

通常のファブリ・ペロー共振器の外部に2枚の反射板を付加した場合と等価のレーザ共振器については，Kleinman および Kisliuk [2] が理論的な解析を行っているが，これは実際には反射板は2枚だけで，かつ共振器が対称に構成された特別の場合についてのみ論じられたものであって一般性にとぼしく，しかも本資料で示すように，このような対称構造の複合ファブリ・ペロー共振器による不要共振姿態抑制効果は最適ではない。

本資料では対称とするレーザ共振器をすべて電気的等価回路に変換し、回路論的に，はるかに統一的，一般的に解析している。その結果，物理的意味の明快な，非常に見通しのよい設計の指針が得られ，それにもとずいてきわめて有効な不要共振姿態抑制効果を有するレーザ共振器を設計することが可能となった。

具体例としてヘリウム・ネオン・ガスレーザをとりあげ，数値計算によって不要縦共振姿態の発振が完全に抑制される模様を示した。

2. 理　論

2・1 理論的解析の基礎

ファブリ・ペロー共振器は図1（a）に示すように2枚の反射板IおよびIIによって構成されている。反射板I，IIの間に立つ定在波の

波数（縦次数）および反射板上の界分布の変化の数（横次数）によって特性づけられる定常的振動姿態をこのような共振器の共振姿態と定義する[1]。反射板としては通常，誘電体多層膜が用いられるが，その反射特性はレーザ物質からの誘導放射スペクトルのような狭い周波数範囲ではほとんど変化せず，したがって，各共振姿態はほとんど同じ共振Q値をもつ。そのために，このような共振器内にレーザ物質をそう入して励起した場合，レーザ物質からの放射スペクトル内に共振波長をもつような多数の共振姿態が同時に発振のthresholdに達して発光し，出力光にはこれらの共振波長に相当するいくつかの波長が含まれることになる。

これに対して，図1（b）あるいは（C）に示すように，さらに1枚あるいはそれ以上の反射板を付加した場合を考えてみると，たとえば（b）のような場合[3]，反射板Ⅱおよび Ⅱ′ は一つのファブリ・ペロー共振器を構成することになり，この共振器Ⅱ－Ⅱ′がレーザ物質のⅡ端から右側をみた一つの反射板として働くことになる。したがってこの場合には，レーザ共振器の一方の反射板（Ⅱ－Ⅱ′）の反射特性がファブリ・ペロー共振器としての鋭い周波数特性をもつことになり，

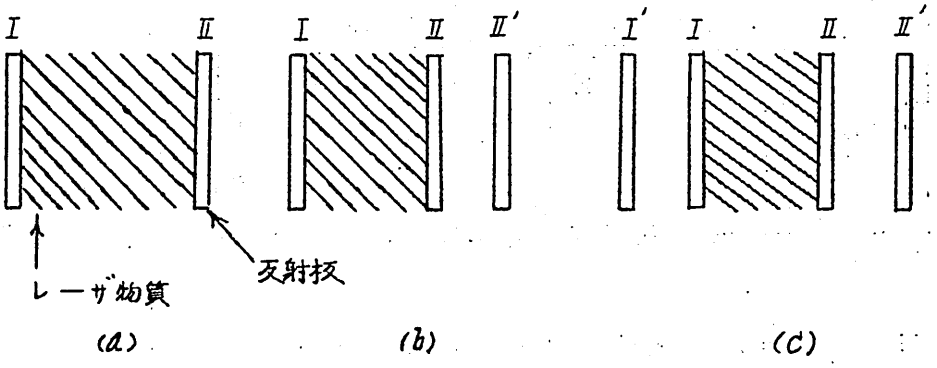


図1．　レーザ共振器の各種の構成

そのため共振波長の異なる不要共振姿態の共振Q値をいちじるしく低下せしめて，その発振を抑制する可能性が期待できるようになる。（C）の場合についても全く同様である。

本資料はこのような共振器による上述のような効果を理論的に検討し、不要共振姿態の発振を抑制するのに最も効果的なレーザ共振器の構成を見出すのが目的である。

以下，レーザ物質，反射板等はすべて電気的等価回路に変換し，回路論的に考察する。すなわち，図２（a）のようなレーザ共振器は同図（b）のような等価分布定数回路で表現する。ただし，Z_I および Z_{II} はそれぞれレーザ物質の両端 T_1 および T_2 から左または右をみた等価インピーダンスを表す。また，レーザ物質が利得をもつ能動性媒質であるということは負の導電率を考えることと等価である。

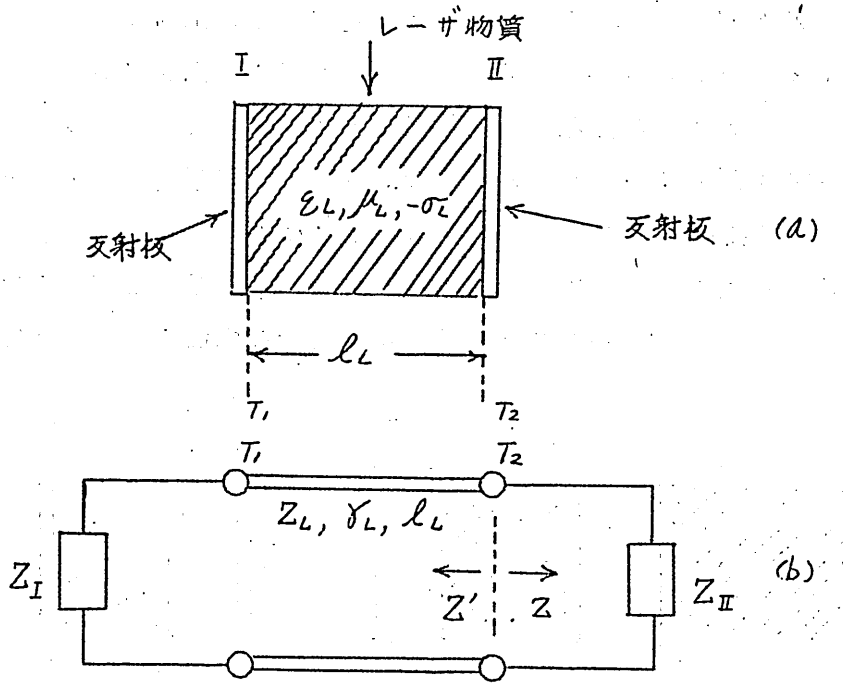


図２．　レーザ共振器の等価回路表示

そこでレーザ物質によって与えられる利得が系の全損失を補償して，図２の回路が発振の threshold に達するために必要な負の導電率を考え，これを $-\sigma_L$ で表すことにする。したがって，ある励起入力に対してレーザ物質が実際に呈する負の導電率を $-\sigma_{act}$ とすれば，

$\sigma_{act} \geqq \sigma_L$ を満足する共振姿態のみが発振し得ることになる。Qの値の高い共振姿態ほど必要な σ_L は小さく，したがって発振しやすいということになる。

さて，発振の threshold におけるレーザ物質の波動インピーダンスを Z_L，伝播定数を γ_L，誘電率，透磁率，および負導電率をそれぞれ ε_L，μ_L，および $-\sigma_L$ とすれば，実際の場合，$\sigma_L \ll \omega\varepsilon_L$ であるから，次のような近似を行うことが許される。すなわち，

$$Z_L = \sqrt{\mu_L / \varepsilon_L} \tag{1}$$

$$\gamma_L = -\alpha_L + j\beta_L \tag{2}$$

ただし

$$\alpha_L = \frac{\sigma_L}{2}\sqrt{\frac{\mu_L}{\varepsilon_L}} \tag{3}$$

$$\beta_L = \omega\sqrt{\varepsilon_L \mu_L} \tag{4}$$

$-\alpha_L$ は負の減衰定数，すなわちレーザ物質の単位長当りの増幅定数を表す。

次に，図2の回路の発振条件はよく知られているとおり，

$$Z + Z' = 0 \tag{5}$$

で与えられる。ただし，Z および Z' は図2に示したとおり，それぞれ端子 T_2 から右および左をみたインピーダンスであって，いまの場合はそれぞれ次式で与えられる。

$$Z' = \frac{Z_I \cosh \gamma_L l_L + Z_L \sinh \gamma_L l_L}{\frac{Z_I}{Z_L} \sinh \gamma_L l_L + \cosh \gamma_L l_L}$$

$$Z = Z_{II}$$

したがって，発振条件式（5）は次のようになる。

$$\gamma_L l_L = -\tanh^{-1}\left[\frac{\frac{Z_I}{Z_L}+\frac{Z_{II}}{Z_L}}{1+\frac{Z_I}{Z_L}\cdot\frac{Z_{II}}{Z_L}}\right] \tag{6}$$

ここで，$Z_{II}=0$ および $Z_I=0$ とした場合の γ_L をそれぞれ γ_{LI} および γ_{LII} とすれば，

$$\gamma_{LI} l_L = -\tanh^{-1}\left(\frac{Z_I}{Z_L}\right) \tag{7}$$

$$\gamma_{LII} l_L = -\tanh^{-1}\left(\frac{Z_{II}}{Z_L}\right) \tag{8}$$

となる．したがって，上式および式（6）より

$$\gamma_L = \gamma_{LI} + \gamma_{LII} \tag{9}$$

なる関係があることがわかる．すなわち，一方の反射板のインピーダンスを零（完全反射）とした場合の γ_{LI}，γ_{LII} を求めておけば，γ_L は式(9)から，これらの和として求められる。したがって解析はこのような特別の場合について行っておけば十分である。

また，発振条件を与える式（6）を

$$\gamma_L l_L = -\eta_L + j\theta_L \tag{10}$$

ただし式（2）より

$$\eta_L = \alpha_L l_L \ , \quad \theta_L = \beta_L l_L$$

とおけば，実数部 η_L より発振に必要な利得，すなわち発振の *threshold* が求められ，虚数部 θ_L より発振周波数が求められる。

一方，共振器の共振の鋭さ Q_c は

$$Q_c = \frac{\beta_L}{2\alpha_L} = \frac{\theta_L}{2\eta_L} \tag{11}$$

で与えられる。したがって，レーザ共振器に不要共振姿態の発振抑制効果をもたせるためには，Z_{I}，Z_{II} を適当に設計し，各共振姿態の発振の *threshold* を与える η_L，すなわち各共振姿態の Q_c にできるだけ大きな差をつけてやればよいことになる。

2・2 発振特性の理論的解析

そこでまず本節では Z_{I} または Z_{II} のいずれか一方を零とした場合すなわちレーザ物質の両端 T_1 または T_2 から左または右をみたインピーダンスのうちいずれか一方を零，すなわち完全反射とした場合の発振特性を理論的に考察する。この結果から式(9)の関係を用いて一般の場合が求められることは前述のとおりである。以下，本節では式を簡潔にするため，IまたはIIなる添字を省略する。

まず図1(a)のような通常のファブリ・ペロー共振器の一方の反射板のインピーダンスを零とした場合には図3のような等価回路が成立する。ここで A，B，C，D は他方の反射板の等価4端子定数を表し、反射板が誘電体多層膜よりなる場合には，層数が奇数であるか，偶数であるかによってそれぞれ次式のように表される。
(付録1参照)

$$\left.\begin{aligned} A &= D = 0 \\ B &= \frac{1}{C} = jKZ_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{奇数層の場合} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{D} = H \\ B &= C = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{偶数層の場合} \qquad (13)$$

ただし，$Z_0 = 377\ \Omega$，K，H はそれぞれ付録1に示すような定数である。したがって，図3の等価回路に示したインピーダンス Z は，

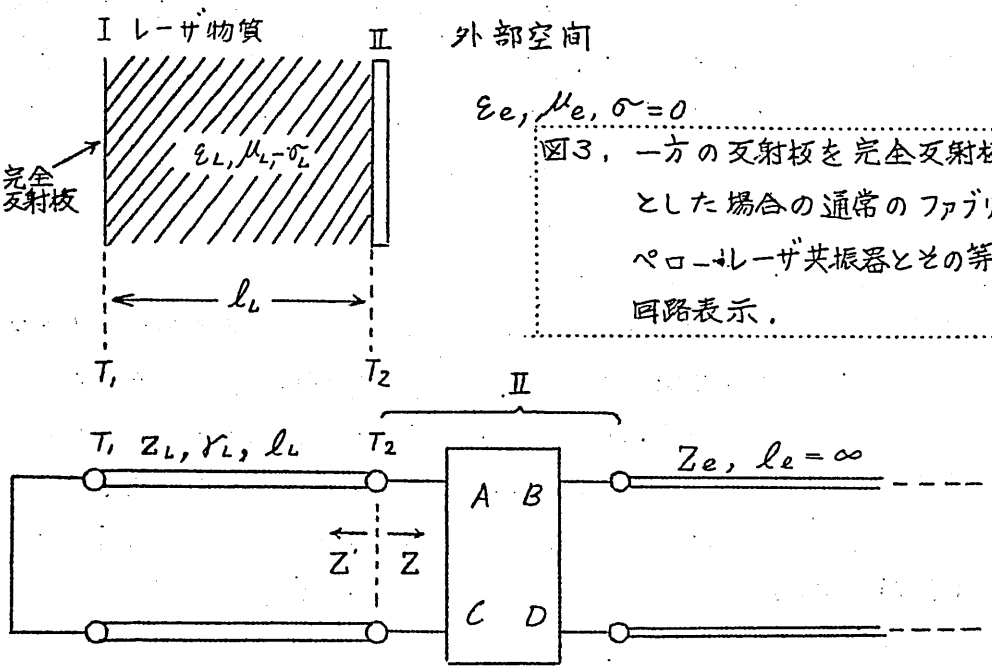


図3．一方の反射板を完全反射板とした場合の通常のファブリ・ペロー・レーザ共振器とその等価回路表示．

$$Z = \begin{cases} \dfrac{K^2 Z_0^2}{Z_e} & : \text{奇数層の場合} \\ H^2 Z_e & : \text{偶数層の場合} \end{cases} \tag{14}$$

となる。以上の結果を発振条件式（7）または（8）に代入して

$$\gamma_L l_L = -\eta_L + j\theta_L = -\tanh^{-1} \frac{1}{P} \tag{15}$$

ただし

$$\frac{Z}{Z_L} = \frac{1}{P} \tag{16}$$

式(15)の実数部η_Lより発振のthresholdが求まり，虚数部θ_Lより発振周波数が定まる。

式(14)から，反射板の反射係数 Γ は

$$\Gamma = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L} = \frac{1 - P}{1 + P} \qquad (17)$$

で表される．実際のレーザー共振器では反射板の反射係数は非常に大きな値（$|\Gamma| \fallingdotseq 1$）となるように選ばれるのでPの値は $P >> 1$ または $P << 1$ となるのが普通である。このことから

(i) $P >> 1$ の場合

$$\eta_L = \tanh^{-1} \frac{1}{P} \fallingdotseq \frac{1}{P} \qquad (18)$$

$$\theta_L = n\pi \quad n：任意の整数$$

(ii) $P << 1$ の場合

$$\eta_L = \tanh^{-1} P \fallingdotseq P \qquad (19)$$

$$\theta_L = (n + \tfrac{1}{2})\pi \quad n：任意の整数$$

となる。式(18)および(19)から明らかなとおり，発振の threshold を与える η_L は周波数に無関係となり，したがってこのような共振器では各共振姿態のQ，すなわち発振の threshold に差をつけて不要姿態の発振を抑制することはできない。

そこで，さらにもう1枚の反射板を付加したレーザ共振器について考えてみよう。この場合の等価回路は図4のように表される。ここで Z_R は反射板II'の左端面から右をみたインピーダンスを表し，その値は式(14)から求められる。したがって，図4の等価回路に示したインピーダンスZ（反射板II'の左端面 T_2 から右をみたインピーダンス）は次のように表される。

$$Z = \begin{cases} \dfrac{K^2 Z_0^2}{Z_2} \coth\left(j\theta_2 + \tanh^{-1}\dfrac{Z_R}{Z_2}\right) & \text{：反射板IIが奇数層の場合} \\ H^2 Z_2 \tanh\left(j\theta_2 + \tanh^{-1}\dfrac{Z_R}{Z_2}\right) & \text{：反射板IIが偶数層の場合} \end{cases} \qquad (20)$$

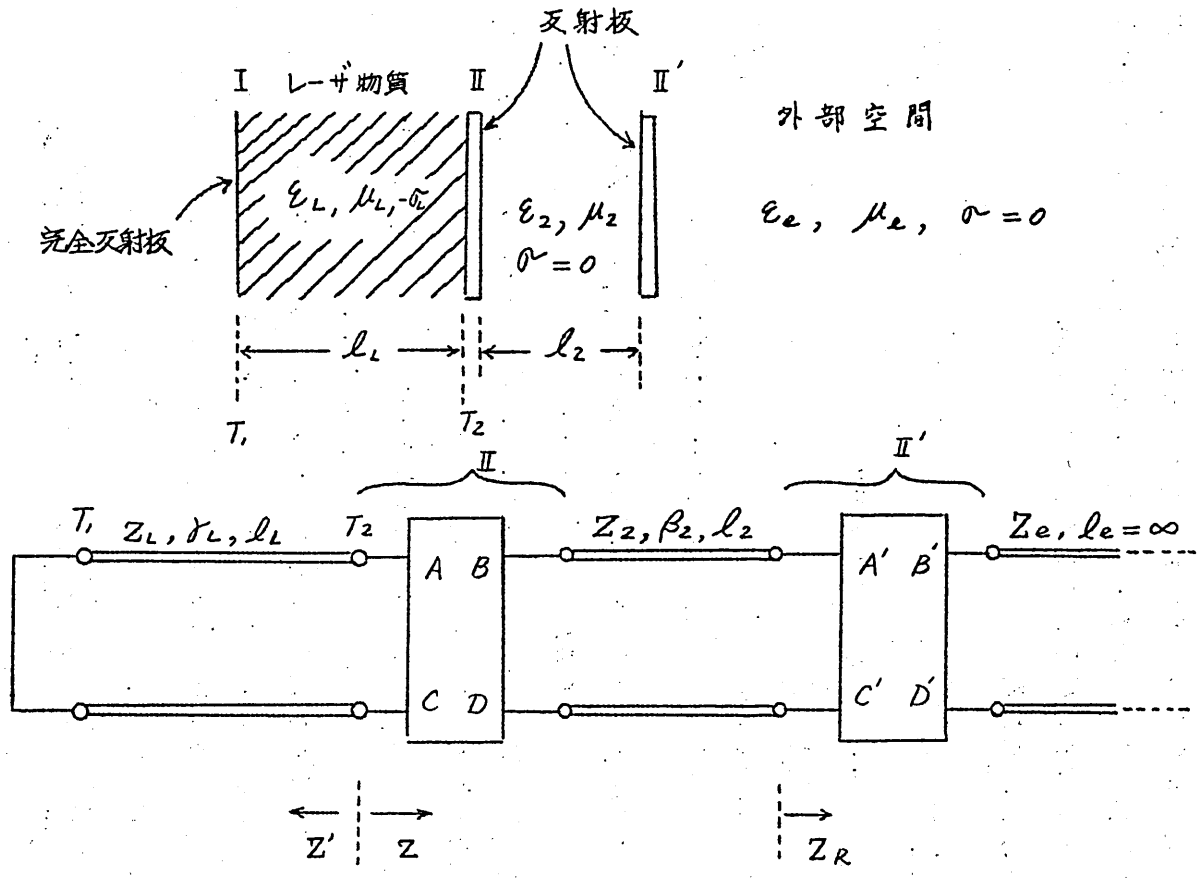


図4, 一方の反射板を完全反射板とした場合の複合ファブリ・ペロー レーザ共振器とその等価回路表示。

ただし，$\theta_2 = \beta_2 l_2$，$Z_0 = 377\ ohm$ とおいてある。したがってこの場合の発振条件式は，反射板Ⅱが奇数層の誘電体多層膜よりなる場合，式(7)または(8)より

$$\tanh \gamma_L l_L = -\frac{Z}{Z_L} = -\frac{K^2 Z_0^2}{Z_L Z_2} \coth\left(j\theta_2 + \tanh^{-1}\frac{Z_R}{Z_2}\right) \quad (21)$$

となる。こゝで，

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_L l_L = -\eta_L + j\theta_L \\ &\frac{K^2 Z_0^2}{Z_L Z_2} = \frac{1}{P}, \quad \frac{Z_R}{Z_2} = \frac{1}{S} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

とおけば，式(21)の実数部および虚数部より次式が得られる。

$$\tanh \eta_L = S\,\frac{1 - P\tan\theta_L \tan\theta_2}{P - \tan\theta_L \tan\theta_2} \quad (23)$$

$$\tanh \eta_L = \frac{1}{S}\,\frac{P\tan\theta_L + \tan\theta_2}{\tan\theta_L + P\tan\theta_2} \quad (24)$$

同様に反射板Ⅱが偶数層の誘電体多層膜よりなる場合には

$$\frac{H^2 Z_2}{Z_L} = \frac{1}{P}, \quad \frac{Z_R}{Z_2} = S \quad (25)$$

とおくことによって，式(23)および(24)と全く同じ関係が導かれる．PおよびSは前と同様，反射板の反射係数に関係する量である。

式(23)，(24)から $\tan\theta_L$ を消去すると

$$\tanh^2 \eta_L - 2a \tanh \eta_L + 1 = 0 \quad (26)$$

となる。ただし

$$2a = \frac{P^2 + S^2 + (1 + P^2 S^2)\tan^2\theta_2}{PS\,(1 + \tan^2\theta_2)} \quad (27)$$

$|\tanh \eta_L| \leqq 1$ なることを考慮すれば，式(26)の解は次のようになる。

$$\eta_L = \mathrm{Tanh}^{-1}\left(a - \sqrt{a^2-1}\right) \qquad (28)$$

式(28)はこの場合の発振の threshold を与えるものであって，η_L は $\tan^2\theta_2$，したがって角周波数 ω，の関数となる。簡単な計算によって η_L は $\tan^2\theta_2$ に関する単調関数であることがわかる。また同じく簡単な計算によって $a \geqq 1$ になることもたしかめられる。次に，発振周波数を定める θ_L は式(28)を(23)または(24)に代入し，

$$\frac{\theta_L}{\theta_2} = \frac{\beta_L l_L}{\beta_2 l_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_L \mu_L}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \frac{l_L}{l_2}$$

なる関係を用いることによって求められる。

以上のようにして，発振の模様を知るのに必要な η_L および θ_L の値を厳密に求めることができる。しかし実際には，前にも述べたとおり，レーザー共振器に用いられる反射板の反射係数は非常に大きな値に選ばれるので，PおよびSはいずれも1にくらべて非常に大きいか，または小さな値となる。そのため，η_L max のごく近傍を除いて，次に示すような簡単な発振条件の近似式が実用上十分よい精度で成立する。（付録2参照）　このような近似式を用いても本資料が目的とする議論の一般性は事実上完全に保たれる。

(i) $P \gg 1$, $S \gg 1$ の場合

$$\eta_L = \eta_{L\,min} \frac{1}{\sin^2\theta_2}, \qquad (29)$$

$$\theta_L = n\pi, \quad n：任意の整数.$$

ただし，$\theta_2 = m\pi/2$ （m：任意の整数）とき，η_L は最小となり，その値は

$$\eta_{L\,min} = \frac{1}{PS}$$

(ii) $P \ll 1$, $S \ll 1$ の場合，

$$\eta_L = \eta_{L\,min} \frac{1}{\sin^2\theta_2} \qquad (30)$$

$$\theta_L = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\pi$$

ただし，$\theta_2 = m\pi/2$ のとき η_L は最少となり，
その値は $\eta_{L\,min} = PS$

(iii) $P \gg 1$, $S \ll 1$ の場合

$$\eta_L = \eta_{L\,min} \frac{1}{\cos^2\theta_2} \qquad (31)$$
$$\theta_L = n\pi$$

ただし，$\theta_L = m\pi$ のとき η_L は最小となり，その値は．

$$\eta_{L\,min} = \frac{S}{P}$$

(iv) $P \ll 1$, $S \gg 1$ の場合

$$\eta_L = \eta_{L\,min} \frac{1}{\cos^2\theta_2} \qquad (32)$$
$$\theta_L = (n + \tfrac{1}{2})\pi.$$

ただし，$\theta_2 = m\pi$ のとき η_L は最小となり，
その値は

$$\eta_{L\,min} = \frac{P}{S}$$

なお，付録3に示すとおり，不要共振姿態の発振を抑制する効果は (i), (ii) の場合には $P \approx S$, (iii), (iv) の場合には $PS \approx 1$ に選んだとき最適となる。また，反射板として誘電体多層膜が基板（たとえばガラス）の上に積層されたような構造のものを用いる場合にも付録4に示すようなわずかの修正を加えて上述の理論をそのまま適用することができる。

2・3 不要共振姿態の発振抑制効果

前節で行った一方の反射板を完全反射板とした場合の解析結果から式 (9) の関係を用いて一般の場合の発振特性を容易に求めることができる。すなわち，図1(a) のような通常のファブリ・ペロー共振器の場合には式 (18), (19) を，図1(b) あるいは (c) のような複合ファブリ・ペロー共振器の場合には式 (29)～(32) を，それぞれ式 (9) に代入し，

$$\eta_L = \eta_{LI} + \eta_{LII}$$
$$\theta_L = \theta_{LI} + \theta_{LII} \qquad (33)$$

から，それぞれの場合の発振 threshold および発振周波数を求めることができる．θ_L はいずれの場合でも

$$\theta_L = p\pi, \quad \text{または} \quad (p+\tfrac{1}{2})\pi \qquad (34)$$

p ：任意の整数

となる。

ところで，レーザの定常発振状態においては，共振器の共振の鋭さ Q_c は式(11)で与えられるから，$\eta_{L\,min}$ に対応する $Q_{c\,max}$ で Q_c を規格化すると次のようになる。

$$\frac{Q_c}{Q_{c\,max}} = \frac{\eta_{L\,min}}{\eta_L} = \frac{(\eta_{LI}+\eta_{LII})_{min}}{\eta_{LI}+\eta_{LII}} \qquad (35)$$

この式を用いて，たとえば図1(b)のような3枚の反射板よりなるレーザー共振器の $Q_c/Q_{c\,max}$ の周波数に対する変化を求めてみると図5のようになる。ここで η_{LI} は反射板IIを完全反射板としたときの η_L，η_{LII} は反射板Iを完全反射板としたときの η_L を表す。η_{LI} は周波数に無関係に一定であるが，η_{LII} は周波数の関数となる。$\theta_2 = \beta_2 l_2$ は反射板IIとII′との間の電気長である。m および m' は，それぞれ，発振条件が式(31)または(32)，および(29)，(30)で与えられる場合の任意の整数を表わす。図5からわかるように，この場合，共振周波数の相違による最も大きな Q_c の差，すなわち，最も有効な不要共振姿態の発振抑制効果は $\eta_{LI} \ll \eta_{LII\,min}$ としたときに得られる．$\eta_{LI} \ll \eta_{LII\,min}$ とするためには，反射板Iに反射板II，II′よりも大きな反射係数を与えればよい．

次に図1(c)のような4枚の反射板よりなるレーザ共振器について同様の検討を行ってみると図6に示すような結果が得られる．ただ

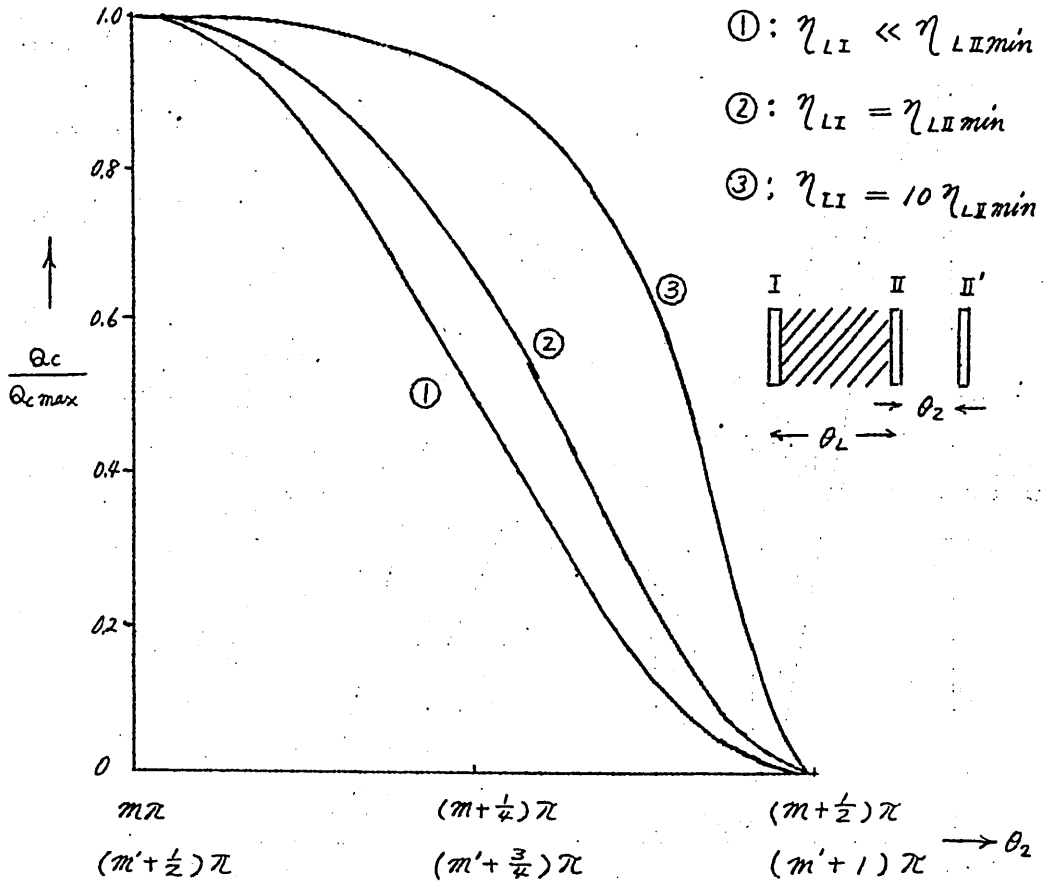


図5.　3枚の反射板よりなる複合ファブリ・ペロ・レーザ共振器の不要共振姿態抑制効果

し，$\theta_2 \fallingdotseq 3\theta_1$　と選んである。η_{LI}，η_{LII}，θ_1，θ_2，m，m'，n，n' 等の意味は図5の場合と同様である。図6からわかるように，この場合最も有効な不要共振姿態の発振抑制効果は

$\eta_{LI\,min} \fallingdotseq \eta_{LII\,min}$ としたときに得られる。

図7は $\eta_{LI\,min} \fallingdotseq \eta_{LII\,min}$ とした場合の，種々の構成に対する $Q_c/Q_{c\,max}$ の周波数特性を比較したものである。

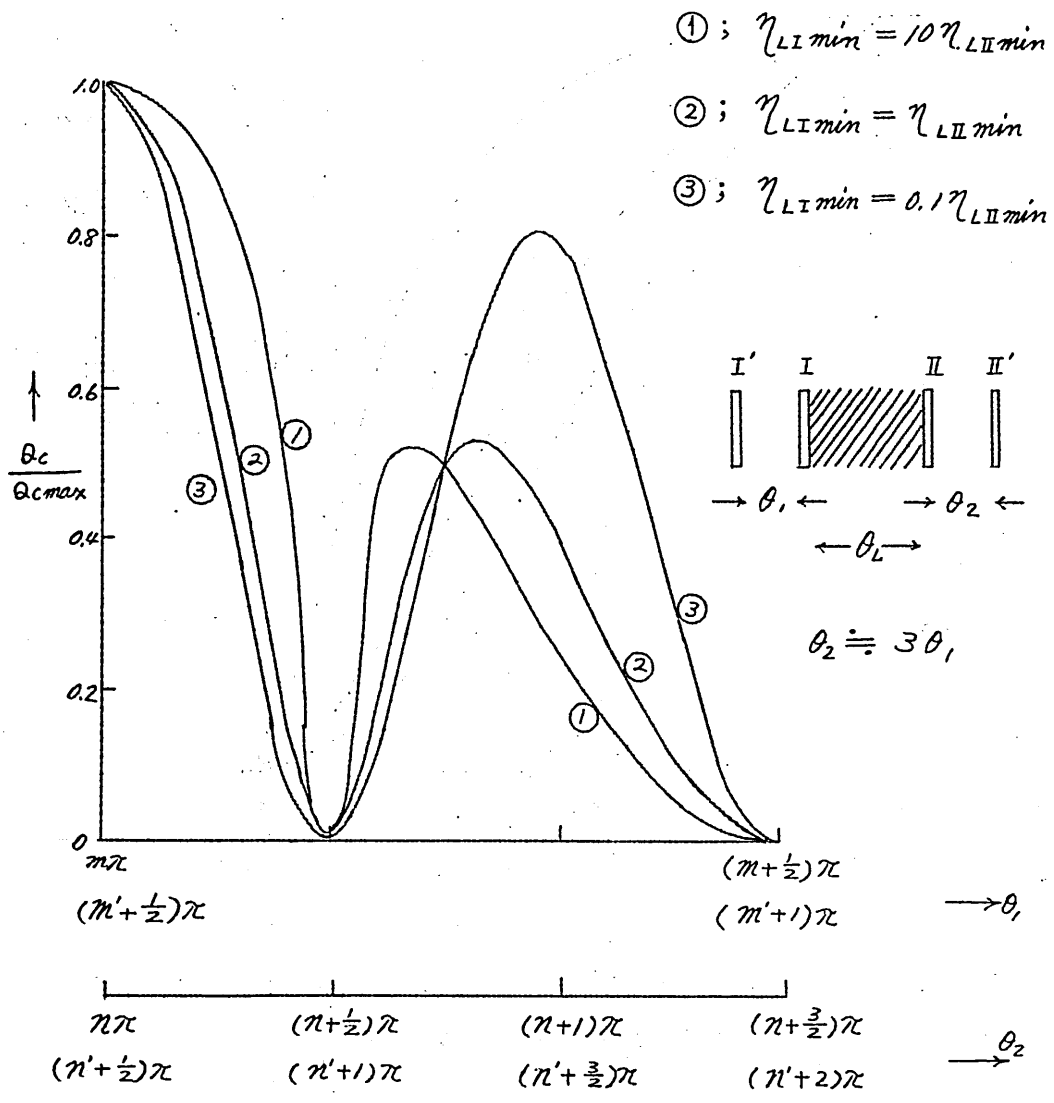
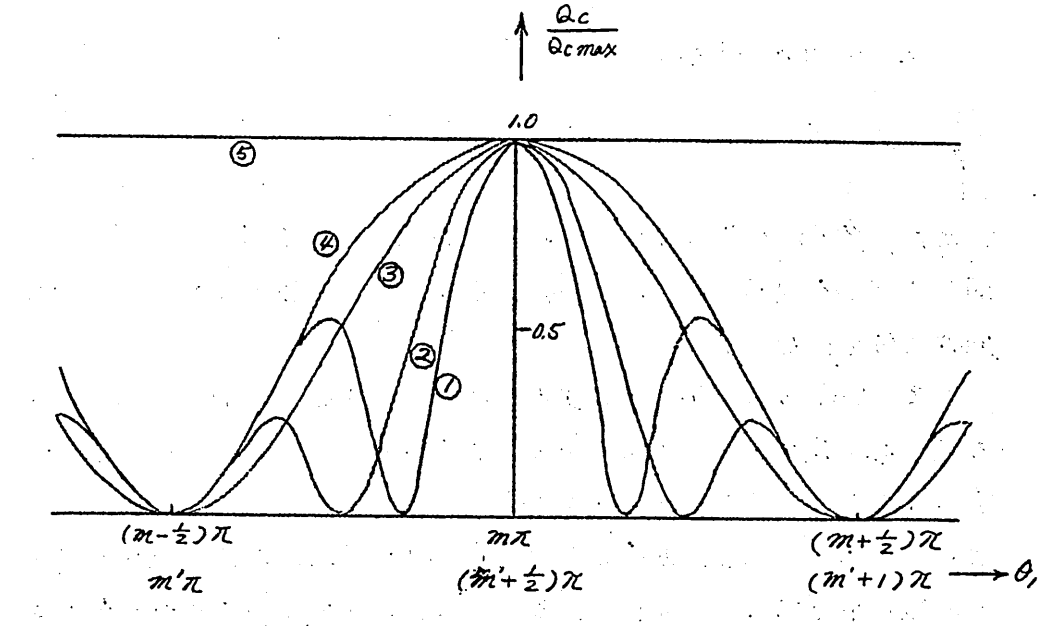
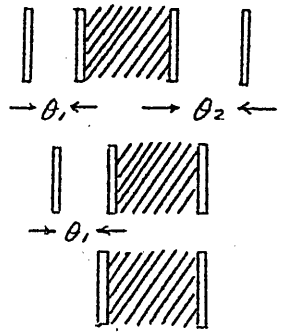


図6． 4枚の反射板よりなる複合ファブリ・ペロー・レーザ共振器の不要姿態抑制効果





① ； $\theta_2 = 3\theta_1$ のとき

② ； $\theta_2 = 2\theta_1$ のとき

③ ； $\theta_2 = \theta_1$ のとき

④ ； 3枚の反射板のとき

⑤ ； 2枚の反射板のとき

図7　複合ファブリ・ペロー・レーザ共振器の種々の構成に対する不要共振姿態抑制効果の比較

希望するレーザ発振はもちろん $Q_{c\,max}$ となる共振姿態によって行われるわけであるが，ある周波数でこのような共振を得るための条件は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= m\pi, \text{ または } (m+\tfrac{1}{2})\pi \\ \theta_2 &= n\pi, \text{ または } (n+\tfrac{1}{2})\pi \\ \theta_L &= p\pi, \text{ または } (p+\tfrac{1}{2})\pi\end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

また，θ_2/θ_1 が整数の場合には $Q_c/Q_{c\,max}$ は θ_1 ($\leqq \theta_2$) に関して π なる周期をもつ．θ_2/θ_1 が整数でない場合にはこのような周期性は存在しない。

さて，実際のレーザを構成する場合には，共振器の $Q_{c\,max}$ となる共振周波数が，レーザ物質からの誘導放射スペクトルの中心周波数と一致するよう式(36)の条件を満足せしめることはもちろんである，さらに，$Q_c/Q_{c\,max}$ の一周期幅がレーザ物質からの誘導放射スペクトル線の半値幅とほぼ等しくなるように選ぶのが妥当であると考えられる。　すなわち

$$\Delta\theta_1 = 2\pi\,\Delta\nu\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,l_1 = \pi \qquad (37)$$

と選ぶのがよい。ただし，$\Delta\nu$ は誘導放射スペクトル線の半値幅である。これより

$$l_1 = \frac{1}{2\Delta\nu\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} \qquad (38)$$

ところで，励起状態でレーザ物質が実際に呈する η_{act} は次式で与えられる。[4]

$$\eta_{act} = \alpha_M \frac{g(\nu)}{g(\nu_c)} l_L \qquad (39)$$

ここで $g(\nu)$ は放射スペクトル線の模様を表す関数であって，誘導放射がローレンツ型の場合には

$$g(\nu) = \frac{\Delta\nu}{2\pi\left[(\nu-\nu_c)^2+\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2\right]} \qquad (40)$$

となる。ただし，ν_c は放射スペクトル線の中心周波数，α_M は中心周波数においてレーザ物質の呈する振幅増幅係数を表す。[5]

一方，前述のとおり，発振の *threshold* に達する共振姿態は $\eta_{act} \geqq \eta_L$ を満足する姿態のみである。したがって発振の *threshold* を与える式は次のようになる。

$$Q_M \leqq Q_c \times \frac{g(\nu)}{g(\nu_c)} \qquad (41)$$

ただし

$$Q_M = \frac{\theta_L}{2\alpha_M l_L}, \quad Q_c = \frac{\theta_L}{2\alpha_L l_L}$$

Q_M は中心周波数における誘導放射に関するレーザ物質の Q と定義する[5]。Q_c は前に式 (11) で示した共振器の共振 Q 値である。

3. 単一縦共振姿態のみで発振するヘリウム・ネオン・ガスレーザの設計例

ヘリウム・ネオン・ガスレーザを例にとり，前節までの理論を用いて，唯一個の縦共振姿態のみで発振するレーザ共振器が設計できることを示そう。

$l_L = 100\ cm$

$\varepsilon_L = \varepsilon_0$

$\mu_L = \mu_0$

$\Delta\nu = 800\ MC$

$\lambda = 11,523\ \text{Å}$

であるとする，λ は誘導放射の中心周波数 ν_c に対応する自由空間波長である。隣り合う縦共振姿態間の共振周波数の間隔は $\Delta\theta_L = \pi$ より，

$$\Delta f = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_L \mu_L}\, l_L} \fallingdotseq 150\ MC$$

となる。したがって誘導放射スペクトル線の半値幅 $\Delta\nu$ 中には5~6個の縦共振姿態が含まれることになる。図1(a)のような通常のファブリ・ペロー共振器を用いた場合には，前述のとおり，これらの共振姿態はすべてほとんど等しい共振Q値をもち，したがってそのいくつかが発振の *threshold* に達して発振している。

そこで，図8のような4枚の反射板よりなる複合ファブリ・ペロー共振器を用い，前述の理論にもとずいて誘導放射スペクトルの中心周波数 ν_c に一致した共振周波数をもつ縦共振姿態のみを発振せしめ，他のすべての不要共振姿態の発振を抑制するよう設計してみよう。

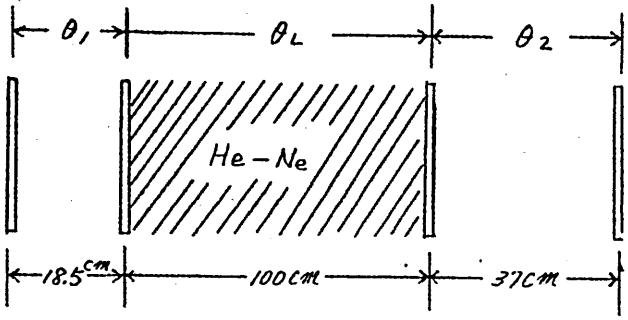


図8. 複合ファブリ・ペロー共振器を用いた単一縦共振姿態のみで発振するヘリウム・ネオン・ガスレーザの構成例

$\theta_2/\theta_1 \fallingdotseq 2$, $\eta_{LI\,min} \fallingdotseq \eta_{LII\,min}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$
$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

とすれば，式(38)から

$$l_1 = 18.5\ cm$$

したがって，

$$l_2 = 2l_1 = 37.0\ cm$$

ただし，l_1，l_2，l_L はいずれも中心周波数 ν_c において式（36）の関係を厳密に満足するよう調整されるものとする。以上の数値を用い，式（34）および（35）から共振周波数および $Q_c/Q_{c\,max}$ を計算すると図9のようになる。さらに，誘導放射のスペクトル分布をローレンツ型とすれば，$Q_c/Q_{c\,max} \times \frac{g(\nu)}{g(\nu_c)}$ は図10のようになる。この図からわかるとおり，

$$1 > \frac{Q_c}{Q_{c\,max}} \times \frac{g(\nu)}{g(\nu_c)} > 0.2$$

すなわち

$$1 > \frac{Q_M}{Q_{c\,max}} > 0.2$$

となるように励起すれば，放射スペクトル線の中心周波数 ν_c において唯一個の縦共振姿態のみが発振し，他のすべての不要縦共振姿態の発振はことごとく抑制されてしまうことになる。

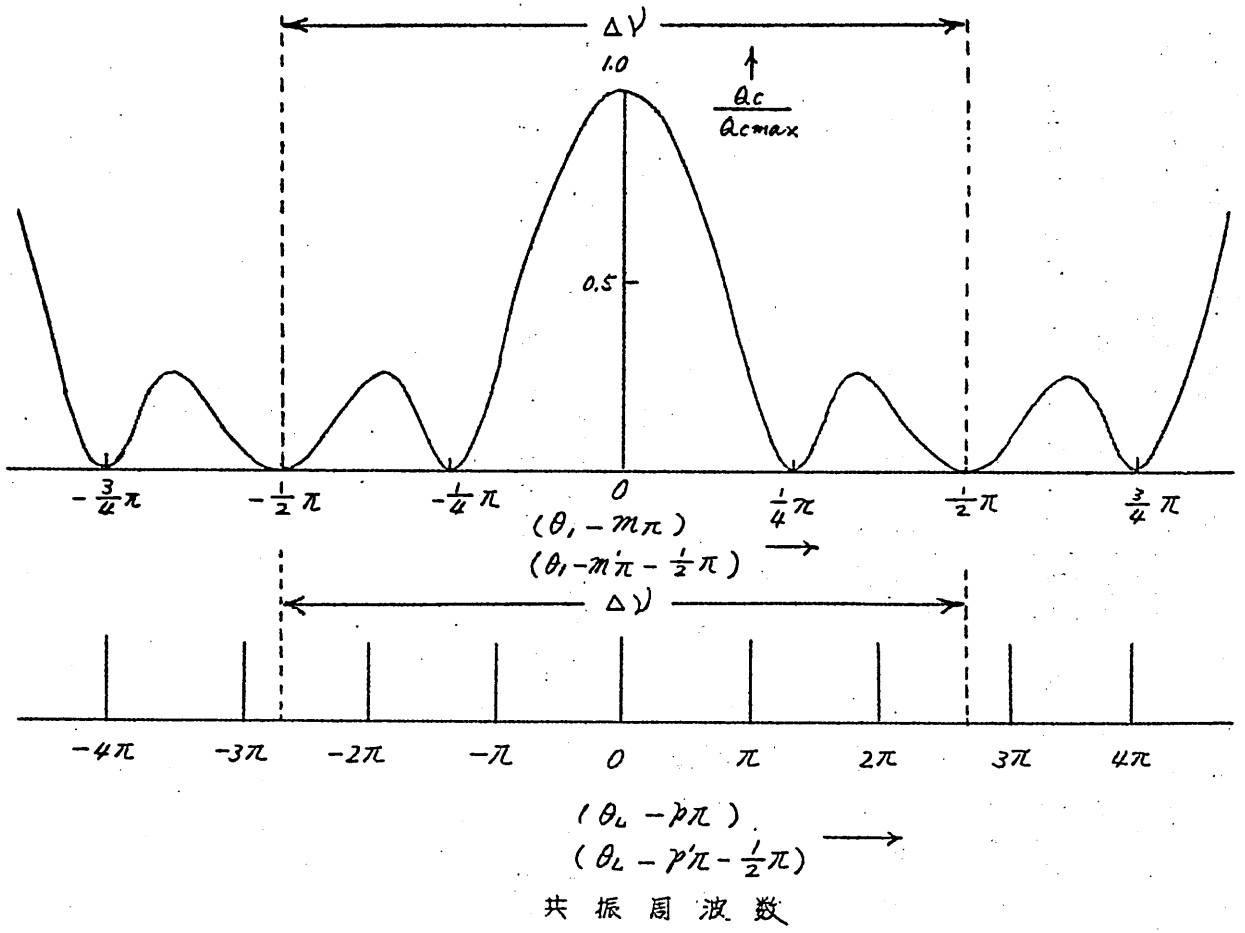


図9. 図8のようなヘリウム・ネオン・ガス・レーザの Q_c/Q_{cmax} および低共振姿態の共振周波数

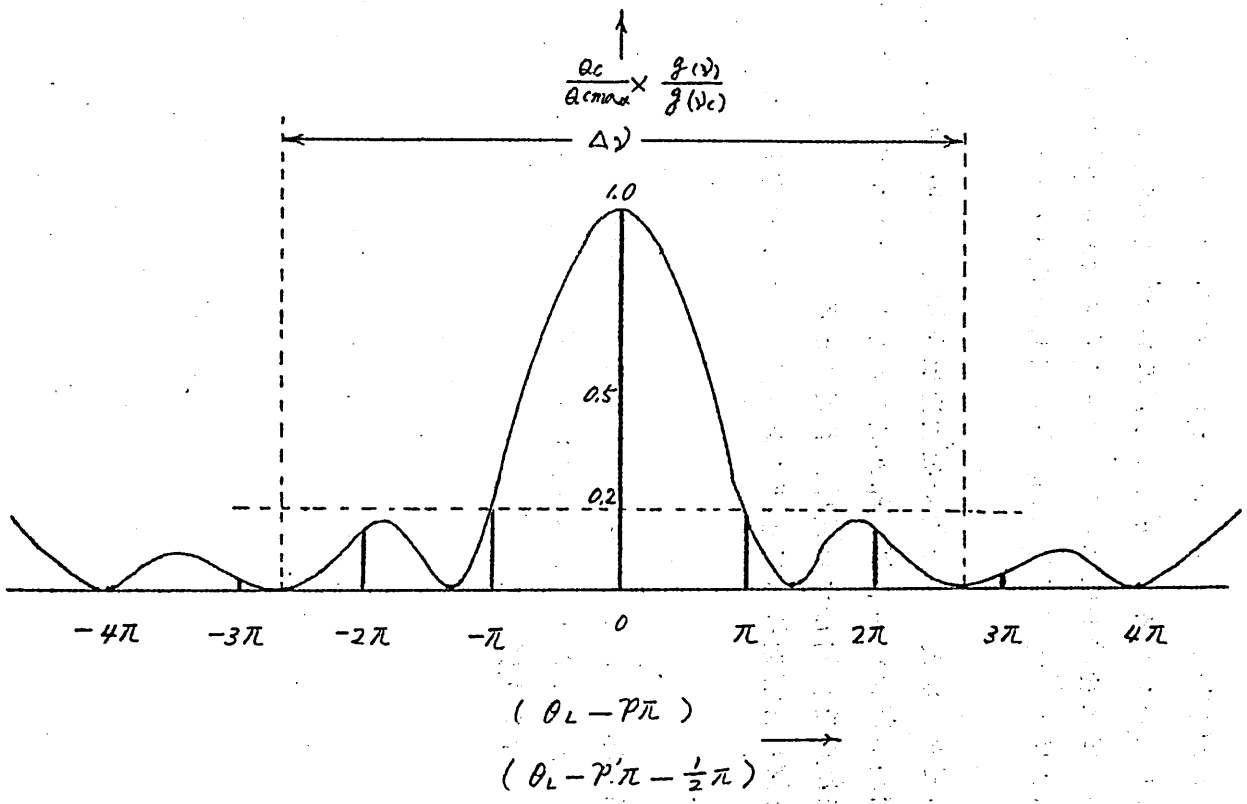


図10. 図8のようなヘリウム・ネオン・ガスレーザですべての不要縦共振姿態の発振を抑制する模様.

4. 結　　言

適当に設計された複合ファブリ・ペロー共振器を用いることによって，いままでに報告されたいかなるレーザよりも周波数単一性の鋭いレーザ発振が可能となることを理論的に示した。単一共振姿態のみで発振するレーザでは，出力の増大[3]や安定性の向上等も同時に期待できるものと思われる。

本資料では共振器を一次元の電気的等価回路に変換して一般的に論じてあるから，本資料の解析結果は第3節の例で示したような縦共振姿態のみならず，横共振姿態に対しても同様に適用できる。

また，本資料の解析は反射板が平面状であっても，球面状であっても同様に適用できる。

種々御指導，御鞭撻いただいた大阪大学工学部板倉清保教授ならびに，有益なる御討論をいただいた大阪大学産業科学研究所赤田正助教授に対し深く感謝の意を表する次第である。

付　　録

1. 誘電体多層膜反射板の4端子定数

誘電体多層膜反射板は図A-1のような4分の1波長線路の縦続接続と等価である。誘電体は無損失であるとすれば，線路Ⅰのみの場合の4端子定数は

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & jZ_1 \\ j\frac{1}{Z_1} & 0 \end{bmatrix}$$

となり，線路ⅠおよびⅡの縦続接続では，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & jZ_1 \\ j\frac{1}{Z_1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & jZ_2 \\ j\frac{1}{Z_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j^2\frac{Z_1}{Z_2} & 0 \\ 0 & j^2\frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$$

となる。以下，順次同様にして（$2n+1$）個の4分の1波長線路の縦続接続（奇数層）の場合には

$$\left.\begin{aligned} &A = D = 0, \\ &B = \frac{1}{C} = j^{2n+1}\frac{Z_1 Z_3 \cdots Z_{2n+1}}{Z_2 Z_4 \cdots Z_{2n}} = jKZ_0 \end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 1)$$

となり，$2n$個の縦続接続（偶数層）の場合には

$$\left.\begin{aligned} &A = \frac{1}{D} = j^{2n}\frac{Z_1 Z_3 \cdots Z_{2n-1}}{Z_2 Z_4 \cdots Z_{2n}} = H, \\ &B = C = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 2)$$

となる。ただし，K，Hは定数，$Z_0 = 377\,ohm$，

2. 式(29)～(32)の誘導

例として，式(29)の場合について説明する。

$P \gg 1$, $S \gg 1$ の場合には $\tan^2\theta_2 \approx 0$ を除いて a は1よりもはるかに大きい。したがって式(28)は，

$$\eta_L = \mathrm{Tanh}^{-1}\left(a - \sqrt{a^2-1}\right)$$

$$\fallingdotseq \mathrm{Tanh}^{-1}\frac{1}{2a} \fallingdotseq \frac{1}{2a}$$

一方，式(27)から

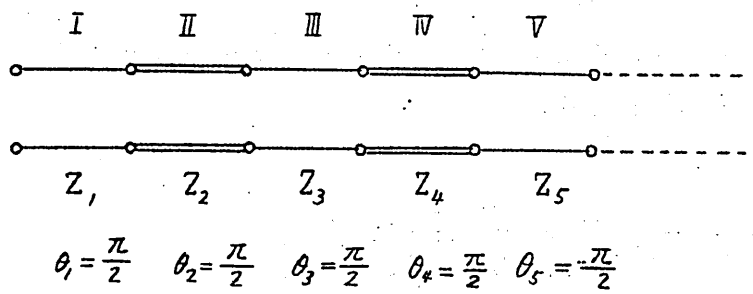
$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{PS}\,\frac{1+\tan^2\theta_2}{\frac{1}{P^2}+\frac{1}{S^2}+\left(\frac{1}{P^2S^2}+1\right)\tan^2\theta_2}$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{PS}\,\frac{1+\tan^2\theta_2}{\tan^2\theta_2} = \frac{1}{PS}\,\frac{1}{\sin^2\theta_2}$$

したがって $\eta_L \fallingdotseq \eta_{L\min}\dfrac{1}{\sin^2\theta_2}$ (A·3)

ただし

$$\eta_{L\min} = \frac{1}{PS} \quad \text{at} \quad \theta_2 \frac{m\pi}{2}$$



$\theta_1=\frac{\pi}{2}$ $\theta_2=\frac{\pi}{2}$ $\theta_3=\frac{\pi}{2}$ $\theta_4=\frac{\pi}{2}$ $\theta_5=\frac{\pi}{2}$

図 A·1　誘電体多層膜反射板の等価回路

次に，式(23)より

$$\left(-\frac{P}{S}\tanh\eta_L+1\right)=\left(-\frac{1}{S}\tanh\eta_L+P\right)\tan\theta_L\cdot\tan\theta_2$$

に $\tanh\eta_L = a-\sqrt{a^2-1}$ を代入し，$P \gg 1$, $S \gg 1$, $|\tanh\eta_L| \leq 1$ · なる条件を考慮すると，

$$\theta_L = Tan^{-1}\left[\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{S}+\frac{1}{P}\right)\cot\theta_2\right] + n\pi$$

$\cot\theta_2 = \pm\infty$ の近傍を除いては

$$Tan^{-1}\left[\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{S}+\frac{1}{P}\right)\cot\theta_2\right] \ll \pi$$

$$\therefore \quad \theta_L \fallingdotseq n\pi \qquad (A\cdot 4)$$

その他の場合についても以上と類似の計算によって求められる。

3. 反射板の最適反射係数

反射板の反射係数に関する量 P および S の最適の選びかたを，(i) の場合（$P \gg 1$, $S \gg 1$ の場合）を例にとって求めてみる。与えられた $\eta_{L\,min}$ に対して最良の不要共振姿態抑制効果を得る条件を求めればよいわけである。励起入力を一定と考えて $\eta_{L\,min} = const.$ とすれば，式 (27), (28) から

$$\eta_{L\,min} = Tanh^{-1}\frac{1}{PS} = const.$$

$$\therefore \quad S = C\frac{1}{P}, \quad C\ ;\ 定数$$

したがって $S = C/P$ に係ちながら，次式が最大となるように P および S を選べばよいことになる。

$$\eta_L = Tanh^{-1}\left(a-\sqrt{a^2-1}\right).$$

上式の最大値を与える P は

$$P = \sqrt{C}$$

となる。したがって，最良の不要共振姿態の発振抑制効果を得る条件は

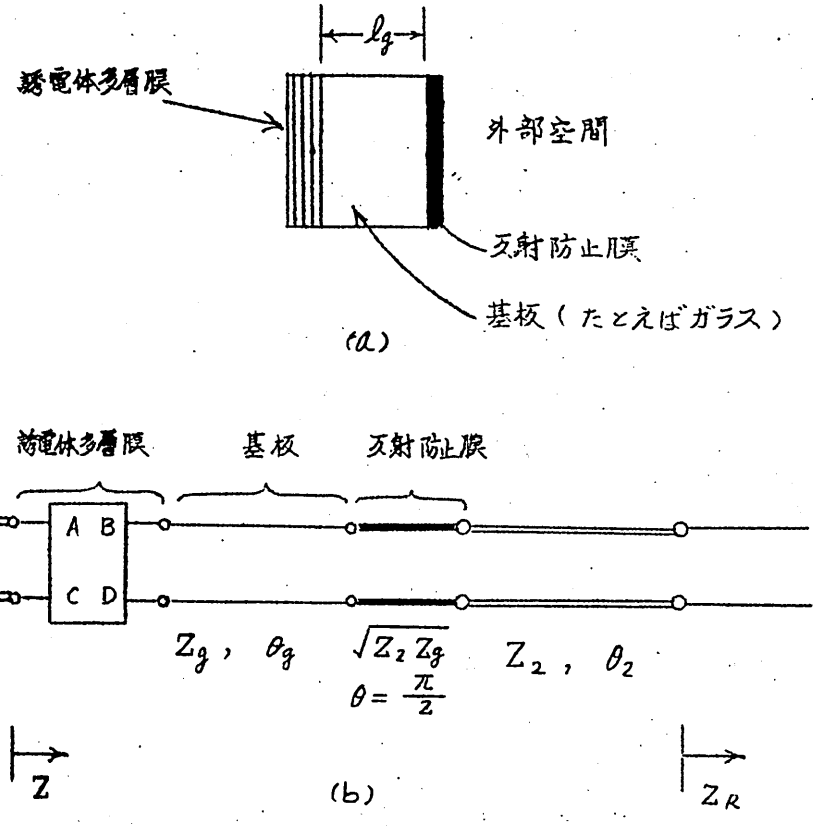
$$P = S \qquad (A\cdot 5)$$

となる。その他の場合についても以上と類似の計算によってそれぞれ

最適のPおよびSの選びかたを求めることができる。ただし，これらの条件はいずれも余り厳密に満足させる必要はなく，上述の関係が大体満たされておれば実際上それで十分である。

4. 基板上に積層された誘電体多層膜反射板の等価インピーダンス

図A·2 (a)のように基板（たとえばガラス）上に積層された誘電体多層膜反射板の等価回路は同図(b)のように表される。ただし基板に反射防止膜を塗布して，基板と外部空間との境界における反射が生じないように整合されているものとする。このような反射防止膜は長さ



図A·2 基板上に積層された誘電体多層膜反射板(a)とその等価回路(b)

を4分の1波長，インピーダンスを $\sqrt{Z_2 Z_g}$ とすればよい．したがって求めるインピーダンス Z は結局次のようになる。

$$Z=\begin{cases}\dfrac{K^2Z_0^2}{Z_g}\coth\left[j(\theta_2+\theta_g+\dfrac{\pi}{2})+\tanh^{-1}\dfrac{Z_R}{Z_2}\right] : \text{奇数層}\\[2ex] H^2Z_g\tanh\left[j(\theta_2+\theta_g+\dfrac{\pi}{2})+\tanh^{-1}\dfrac{Z_R}{Z_2}\right] : \text{偶数層}\end{cases}\qquad(A\cdot6)$$

ただし，Z_g および θ_g は基板のインピーダンスおよび電気長を表す。したがって，本文の図4において，このような構造の反射板を用いる場合には式（20）の代りに上式（A·6）を使えばよいことになる。

また，$Z_2=Z_R$，すなわちインピーダンス Z_2 なる線路が無限長の場合には

$$Z=\begin{cases}\dfrac{K^2Z_0^2}{Z_g} & : \text{奇数層}\\[2ex] H^2Z_g & : \text{偶数層}\end{cases}\qquad(A\cdot7)$$

となる。したがって，本文の図3において，このような構造の反射板を用いる場合には，式（14）の代りに上式（A·7）を使えばよいことになる。

参 考 文 献

1) A.G. Fox. T.Li: "Resonant Modes in a Maser Interferometer", B.S.T.J., 40, 453/458 (Mar., 1961)

2) D.A. Kleinman, P.P. Kisliuk, "Discrimination Against Unwanted Orders in the Fabry-Perot Resonator", B.S.T.J., 41, 453/462 (Mar, 1962)

3) H. Kogelnik, C.K.N. Patel, "Mode suppression and single frequency operation in gaseous optical masers"
Proc. IRE., 50, 2365/2366 (Nov., 1962)

4) J. Katik, M.C. Newstein, "Theory of laser oscillation in Fabry-Perot resonators", J.A.P., 32, 178/186 (Feb., 1961)

5) T.H. Maiman, "Stimulated Optical Emission in Fluorescent Solids. I. Theoretical Considerations", Phys. Rev., 123, 1145 (Aug., 1961)

輻射科学研究会資料

不要共振姿態の発振抑制効果を有するレーザ共振器

熊谷信昭　松原正則　森　弘喜
（大阪大学工学部）

1963年12月14日

輻射科学研究会資料

フェリ磁性体を含んだ空胴の電磁界

熊谷三郎　中西義郎
（大阪大学 工学部）

岡本允夫
（近畿大学理工学部）

昭和38年12月14日
（於 早川電機 中央研究所）

フェリ磁性体を含んだ空胴の電磁界

1. はしがき

フェリ磁性体を含んだ空胴の電磁界は，これまでにも数多く取扱われてきているが，それらは真空空胴の電磁界をもとにして，空胴中のフェリ磁性体の効果をこれに対する摂動として解いたものであるか，または，フェリ磁性体を単なる異方性媒質として境界値問題によって解いたものである.[1] いずれにしても，これらの理論はフェリ磁性体の特性を限定した形でとらえているもので，そのようなとらえ方が許される範囲で良い近似を与えるに過ぎない.

もともと，フェリ磁性体はその強磁性共鳴現象によって明らかなように，その寸法に拘らずマイクロ波電磁界と共鳴を起す．この共鳴はフェリ磁性体の磁化ベクトルの振動として説明できるもので，フェリ磁性体の寸法が波長に比べて無視できる極限では，その寸法に関係なく形状にのみ依存する振動姿態(静磁姿態)をとり，[2] その寸法が波長に対して無視できないときは寸法に関係した振動姿態をとる.[1][4]

この事実は，フェリ磁性体がマイクロ波に対して単なる異方性媒質ではなくて境界条件できまる振動姿態をもつ共振系であることを示している．したがって，フェリ磁性体を含む空胴は磁化ベクトルと電磁界の結合した1つの系であり，そこでの電磁界はフェリ磁性体中では

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times E &= -j\omega\mu_0 (H + M) \\ \nabla \times H &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E \\ j\omega M &= \gamma M_s H \times a_z - \gamma H_0 M \times a_z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

空間部分では

$$\nabla \times E = -j\omega\mu_0 H, \qquad \nabla \times H = j\omega\varepsilon_0 E \qquad (2)$$

を満足し，かつ，導体面上およびフェリ磁性体表面での境界条件を満足するものである．ここに，ε_r はフェリ磁性体の比誘電率，a_z は z 方向の単位ベクトル，H_0 は直流磁界(z方向にかける)，M_s はフェリ磁性体の飽和磁化，$\gamma = \mu_0 e/m$ (M.K.S.) である.

以上でわかるように，(1)式(2)式を境界条件のもとで解くことによって，はじめて，フェリ磁性体を含んだ空胴の電磁界を明らかにすることができる．任意の形状についてはこの解を求めることは困難であるが，円筒空胴中に円筒形のフェリ磁性体を同心的に挿入した場合には解きうる．後で述べるようにこの場合の特別な姿態群についての数値的な解は求められているが，[*] ここではより一般的な形でこの問題を論じフェリ磁性体を含んだ空胴の固有振動姿態がとの[redacted].

(*) А.П. Михаэлян, А.К. Столяров, А.А. Васильев; РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА Том V, 27, (1960).

ようなものであるかを明らかにした。(*)

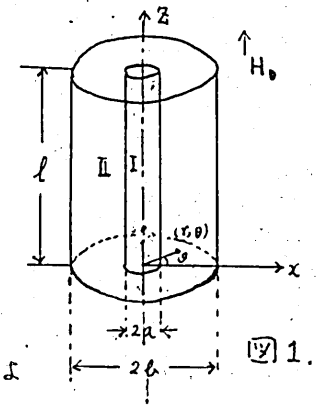


図1.

2. 特性方程式

こゝで考える空胴共振器は図1で示されるように，フェリ磁性体円柱を同心的に含む円筒状のものである．フェリ磁性体が軸方向に飽和にまで磁化されているとし，座標軸を図のようにとれば，(1)式 (2)式から，フェリ磁性体中では

$$\left.\begin{aligned} \nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{\mu^2-\kappa^2}{\mu}\varepsilon_r k_0^2 E_z &= -\frac{\kappa}{\mu}\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial z} \\ \nabla_t^2 H_z + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon_r H_z &= \frac{\kappa}{\mu}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial E_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

空間部分では

$$\nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_0^2 E_z = 0 \quad , \quad \nabla_t^2 H_z + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2 H_z = 0 \qquad (4)$$

がなりたつ．こゝに，フェリ磁性体はテンソル透磁率 (μ) で表わされ

$$(\mu) = \mu_0\begin{bmatrix} \mu & j\kappa & 0 \\ -j\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mu - 1 = \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2-\Omega^2} \quad , \quad \kappa = \frac{\Omega}{\Omega_H^2-\Omega^2} \quad , \quad \Omega_H = \frac{\omega_H}{\omega_M}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_M} \quad , \quad \omega_M = \gamma M_s, \quad \omega_H = \gamma H_0, \quad \gamma = \frac{\mu_0 e}{m} \ (MKS)$$

および

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} .$$

である．z 方向に正弦的に変化する電磁界を考えて，$E_z = E_z \sin\beta z$, $H_z = H_z \cos\beta z$ とおくと，(3)式 (4)式は，それぞれ

$$\nabla_t^2 E_z + a E_z + b H_z = 0 \qquad \nabla_t^2 H_z + c H_z + d E_z = 0 \qquad (5)$$

$$\nabla_t^2 E_z + (k_0^2-\beta^2) E_z = 0 \qquad \nabla^2 H_z + (k_0^2-\beta^2) H_z = 0 \qquad (6)$$

となる．こゝに，

$$a = \frac{\mu^2-\kappa^2}{\mu}\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2, \quad b = -\frac{\kappa}{\mu}\beta\omega\mu_0 , \quad c = k_0^2 - \frac{\beta^2}{\mu} , \quad d = \frac{\kappa}{\mu}\beta\omega\varepsilon_0\varepsilon_r$$

である．(5)式は $E_z = h_1\psi_1 + h_2\psi_2$, $H_z = g_1\psi_1 + g_2\psi_2$ とおいて $h_1 g_2 \neq h_2 g_1$ なる条件のもとに

$$\nabla_t^2\psi_i + \sigma_i\psi_i = 0$$

(*) この系を真空空胴姿態と静磁姿態の結合として扱う試みがある．(5)

に変換できる．σ_i は a, b, c, d の関数である．フェリ磁性体中の電磁界は ψ_i から求まる．(6) こゝで，境界条件に使われる電磁界成分を書くと，フェリ磁性体中では

$$\left.\begin{aligned} E_{1z} &= [A J_n(k_1 r) \Lambda_2 - B J_n(k_2 r) \Lambda_1] e^{-jn\theta} \cos\beta z \\ H_{1z} &= [A J_n(k_1 r) - B J_n(k_2 r)] e^{-jn\theta} \sin\beta z \\ \Omega_1 E_{1\theta} &= [A F_2(k_1 r) - B F_1(k_2 r)] e^{-jn\theta} \sin\beta z \\ \Omega_1 H_{1\theta} &= [A G_2(k_1 r) - B G_1(k_2 r)] e^{-jn\theta} \cos\beta z \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

空間部分には

$$\left.\begin{aligned} E_{2z} &= C F(kr) e^{-jn\theta} \cos\beta z \\ H_{2z} &= D G(kr) e^{-jn\theta} \sin\beta z \\ \Omega_2 E_{2\theta} &= [-C\alpha_n F(kr) + jD\Omega_2 G'(kr)] e^{-jn\theta} \sin\beta z \\ \Omega_2 H_{2\theta} &= [D\alpha_n G(kr) - jC\Omega_2 F'(kr)] e^{-jn\theta} \cos\beta z \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

となる．こゝに，A, B, C, D は励振によるる常数である．$z=0$, $z=\ell$ における境界条件から $\beta = m\pi/\ell$ とはる．また，

$$F_i(k_h r) = \frac{jn}{r} p_i J_n(k_h r) + j q_i \chi_h J_n'(k_h r)$$
$$G_i(k_h r) = \frac{jn}{r} u_i J_n(k_h r) + j v_i \chi_h J_n'(k_h r) \qquad (i=1,2;\ h=1,2)$$

$$F(kr) = \frac{J_n(kr)}{J_n(kb)} - \frac{N_n(kr)}{N_n(kb)}, \quad G(kr) = -j\left\{\frac{J_n(kr)}{J_n'(kb)} - \frac{N_n(kr)}{N_n'(kb)}\right\}$$
$$F'(kr) = \frac{J_n'(kr)}{J_n(kb)} - \frac{N_n'(kr)}{N_n(kb)}, \quad G'(kr) = -j\left\{\frac{J_n'(kr)}{J_n'(kb)} - \frac{N_n'(kr)}{N_n'(kb)}\right\}$$

$$\Lambda_1 = \frac{k_0}{2\beta P_H}\left\{[(1-\mu)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu P_H^2] - \sqrt{\left\{(1-\mu)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu P_H^2\right\}^2 + 4\frac{\beta^2}{k_0^2} P_H^2}\right\}$$

$$\Lambda_2 = \frac{k_0^2}{2\beta P_H}\left\{[(1-\mu)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu P_H^2] + \sqrt{\left\{(1-\mu)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu P_H^2\right\}^2 + 4\frac{\beta^2}{k_0^2} P_H^2}\right\}$$

$$p_{1,2} = (\frac{\beta}{k_0}\Lambda_{1,2} - \mu P_H)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu P_H, \quad q_{1,2} = (\frac{\beta}{k_0}\Lambda_{1,2} - \mu P_H) P_H + \mu(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2})$$

$$\chi_{1,2}^2 = \mu(1-P_H^2 - \frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \frac{\beta\Lambda_{1,2}}{k_0} P_H, \quad \Omega_1 = \mu\left[(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2})^2 - P_H^2\right]$$

$$\Omega_2 = 1 - \frac{\beta^2}{k_0^2}, \quad \alpha_n = -\frac{j\beta n}{k_0^2 a}, \quad k^2 = k_0^2 - \beta^2, \quad k_{1,2} = \chi_{1,2} k_0$$

$$u_{1,2} = -\frac{\beta}{k_0}(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) - P_H \Lambda_{1,2}, \quad v_{1,2} = -\beta P_H - (1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2})\Lambda_{1,2}, \quad P_H = -\frac{\kappa}{\mu}$$

である．$r=a$ において $E_{1z} = E_{2z}$, $H_{1z} = H_{2z}$, $E_{1\theta} = E_{2\theta}$, $H_{1\theta} = H_{2\theta}$ であるから次の

特性方程式をうる.

$$\frac{[\Omega_2 F_2(k_1a) + \Omega_1 \Lambda_2 \alpha_n J_n(k_1a)]\, G(ka) - j\Omega_1\Omega_2 J_n(k_1a)\, G'(ka)}{[\Omega_2 G_2(k_1a) - \Omega_1 \alpha_n J_n(k_1a)]\, F(ka) + j\Omega_1\Lambda_2\Omega_2 J_n(k_1a)\, F'(ka)}$$
$$= \frac{[\Omega_2 F_1(k_2a) + \Omega_1 \Lambda_1 \alpha_n J_n(k_2a)]\, G(ka) - j\Omega_1\Omega_2 J_n(k_2a)\, G'(ka)}{[\Omega_2 G_1(k_2a) - \Omega_1 \alpha_n J_n(k_2a)]\, F(ka) + j\Omega_1\Lambda_1\Omega_2 J_n(k_2a)\, F'(ka)} \qquad (9)$$

3. 固有振動姿態

任意の整数 n, m については (9) 式を解いて, それに対応する固有振動数を見出すことができる. ここでは $m=0$ にした場合を例にとって説明を進める.

(9) 式を $m=0$ の場合について書き直すと

$$\xi \frac{J_n'(\xi)}{J_n(\xi)} = \frac{H_n(\rho|\Omega) + n\cdot K}{M}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\Omega^2 - (\Omega_H+1)^2}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H+1)}}\sqrt{\varepsilon_r}\,\frac{s}{\rho}\Omega \qquad (10)$$

となる. ここに,

$$H_n(\rho|\Omega) = \frac{s}{\rho}\Omega \frac{J_n(s\Omega) N_n'(\frac{s}{\rho}\Omega) - J_n'(\frac{s}{\rho}\Omega) N_n(s\Omega)}{J_n(s\Omega) N_n'(\frac{s}{\rho}\Omega) - J_n'(\frac{s}{\rho}\Omega) N_n(s\Omega)}, \quad s = \omega_M\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\, b$$

$$\xi = k_1 a, \quad \rho = \frac{b}{a}, \quad K = \frac{\Omega}{(\Omega_H+1)^2 - \Omega^2}, \quad M = \frac{\Omega_H(\Omega_H+1) - \Omega^2}{(\Omega_H+1)^2 - \Omega^2}.$$

である. (10) 式は図式的に解くことができる (図2a). 与えられた n に対して (10) 式は無限個の根をもっている. この根は次の2組

(I) $\infty > \Omega_i' > 1+\Omega_H$, $\Omega_{i+1}' > \Omega_i'$, $i = 1, 2, 3, \cdots$

(II) $\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)} > \Omega_i'' > 0$, $\Omega_{i+1}'' > \Omega_i''$, $i = 1, 2, 3, \cdots$

に大別できる.(*) また, 各根の Ω_H に対する変化を調べると図3のようになる. Ω_i'' 組の根はすべての Ω_H に対して存在するが, Ω_i' 組では, 各根について, 臨界磁界 Ω_{Hc} が存在し, $0 < \Omega_H < \Omega_{Hc}$ の範囲で根がある. ここに, [redacted] は $n=0$ に対しては

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_r}\,\frac{s}{\rho}\Omega = H_0(\rho|\Omega)$$

の根であり, $n \neq 0$ のときは $H_n(\rho|\Omega)$ の極である. s が大きくなると, Ω_i' 組は Ω_H の大きいところで, Ω_i'' 組は Ω_H の小さなところでほぼ一定値をもち, しかも両者はほとんど等しい. この傾向は s が大きいほど強い. $\Omega_H \to \infty$ の極限では, (10) 式の根は

(*) $M<0$ のとき, すなわち, $1+\Omega_H > \Omega > \sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$ のとき, $\xi\frac{I_n'(\xi)}{I_n(\xi)} = \frac{H_n(\rho|\Omega)+nK}{M}$ となって Ω_H のある範囲で1根存在する. この根は $s\to\infty$ のとき $\Omega \to \Omega_H + \frac{1}{2}$ となる.

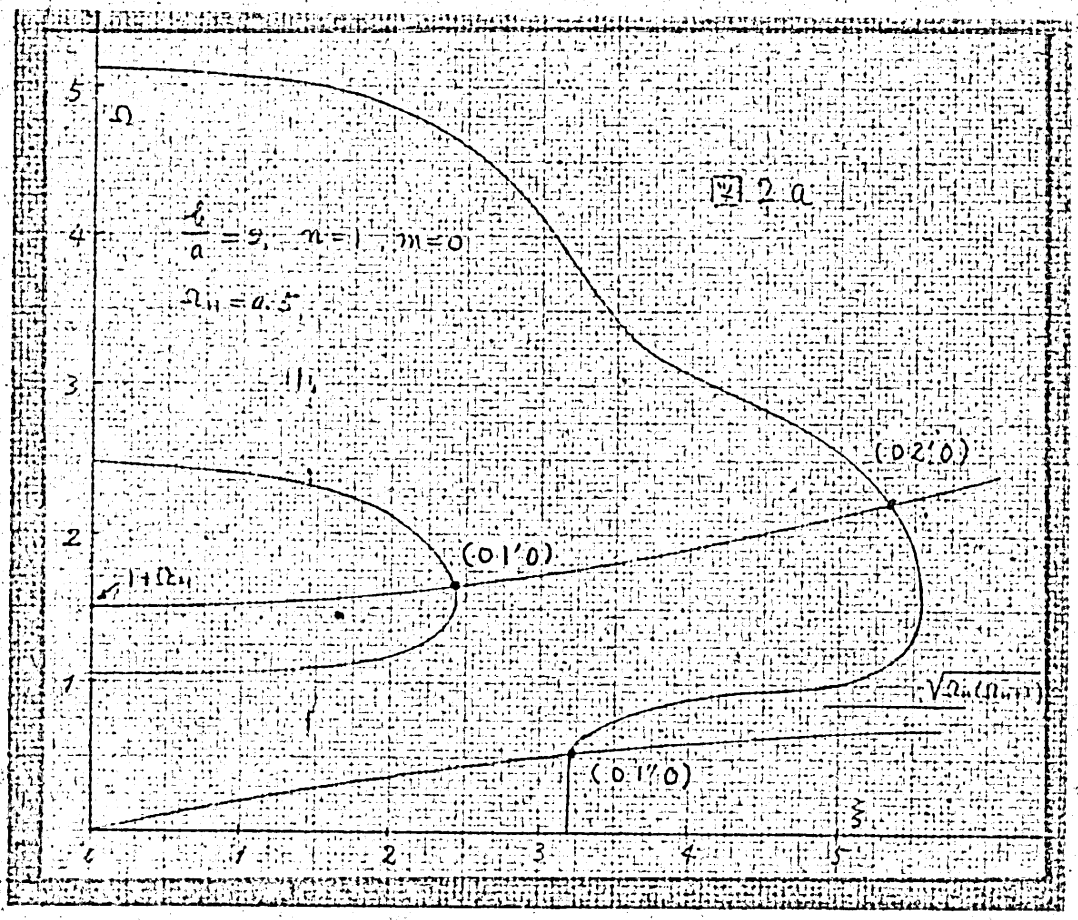

Ω
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
ξ
$\frac{b}{a}=2$, $n=1$, $m=0$
$\Omega_{11}=a\cdot\xi$
$1+\Omega_{11}$
$\sqrt{\Omega_{11}(\Omega_{11}+1)}$
(0 1' 0)
(0 2' 0)
(0 1'' 0)

図 2 a

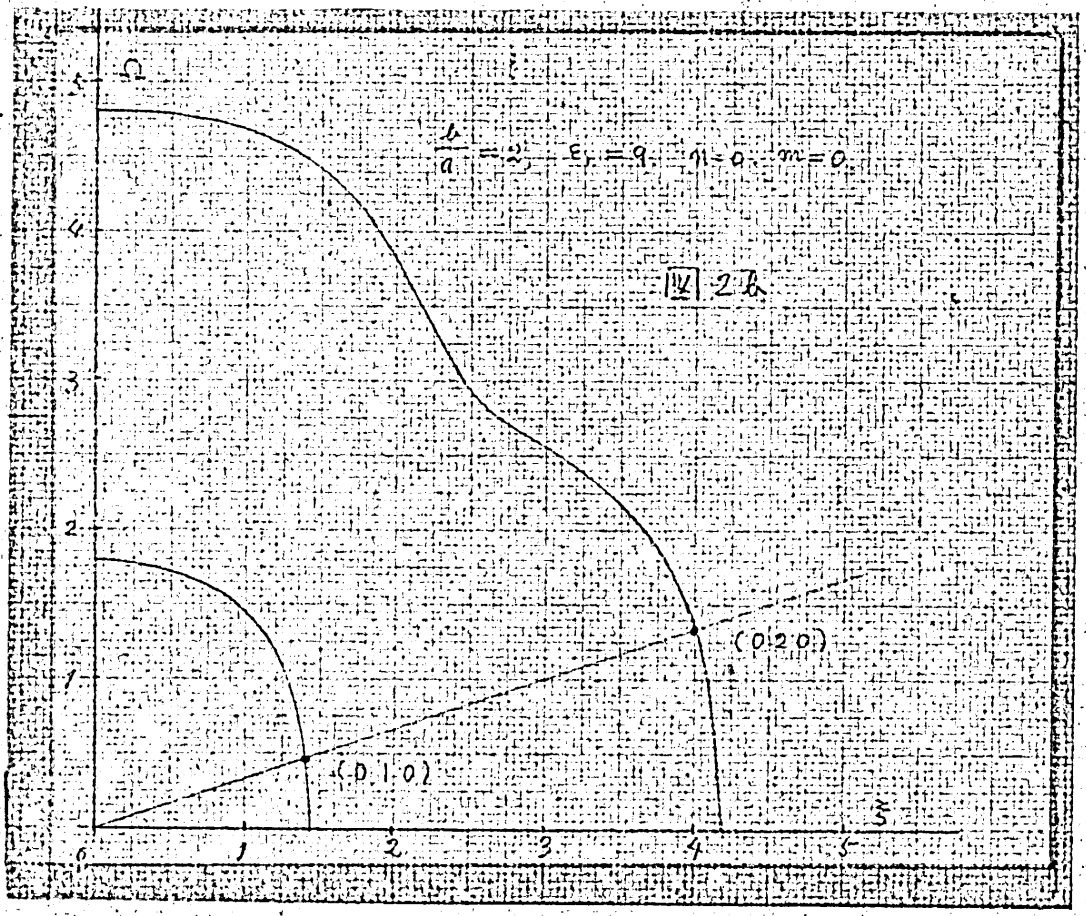
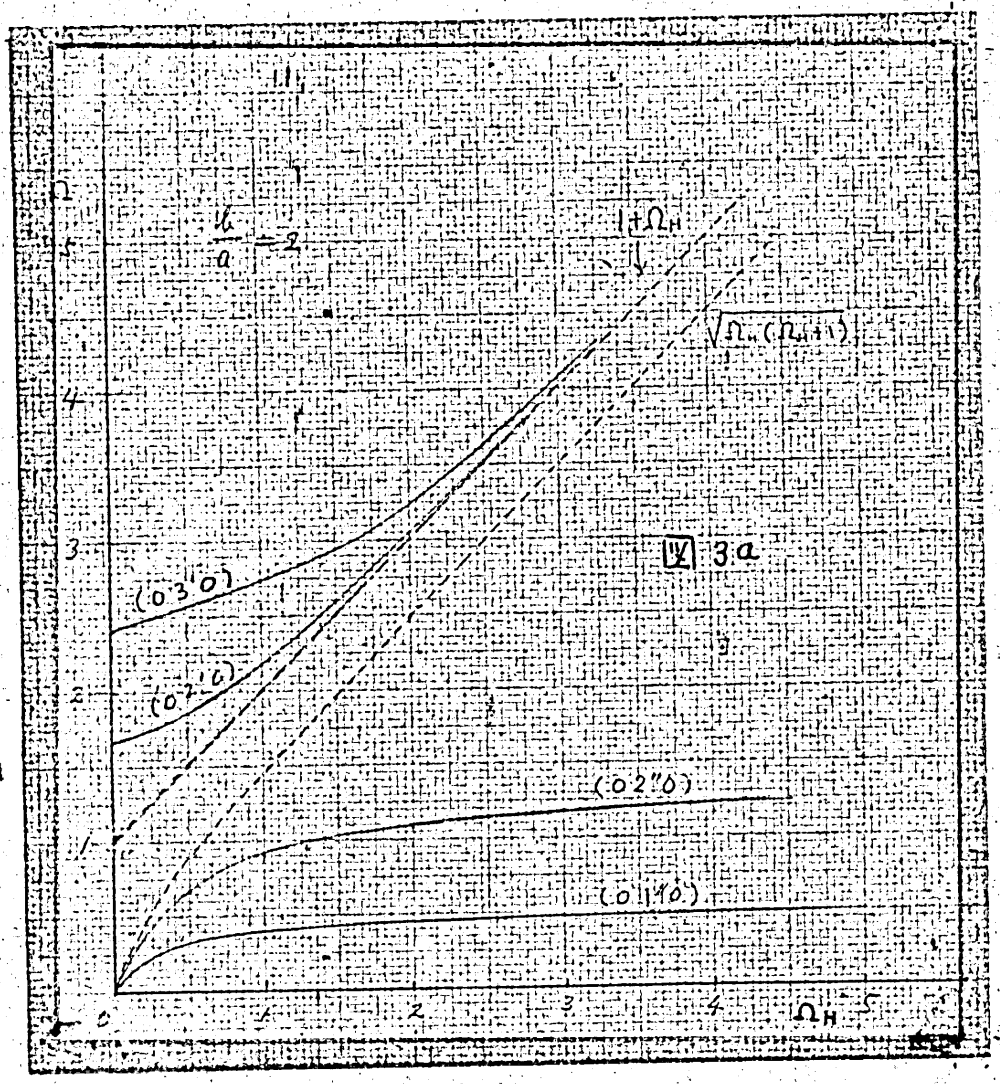
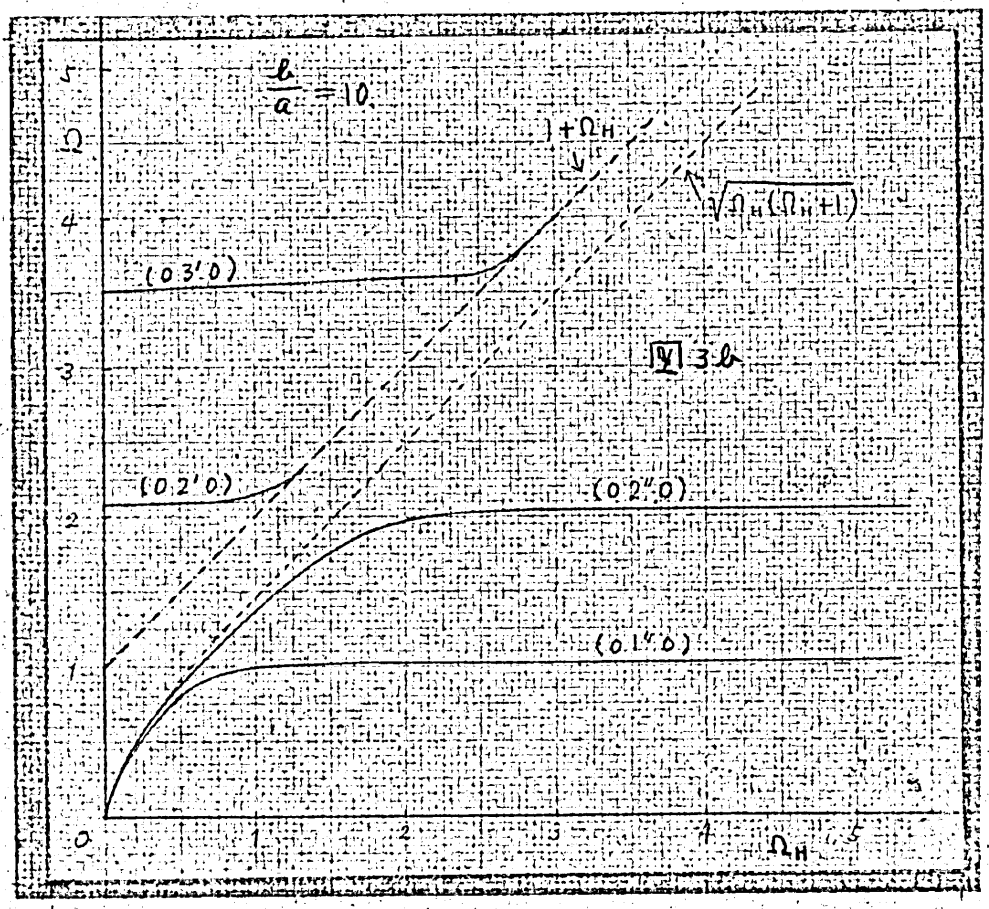

Ω
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
ξ
$\frac{b}{a}=2$, $\varepsilon_1=9$, $n=0$, $m=0$
(0 1 0)
(0 2 0)

図 2 b


$\frac{b}{a}=2$
$1+\Omega_H$
$\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$
(0 3' 0)
(0 2' 0)
(0 2'' 0)
(0 1'' 0)
Ω
Ω_H
0
1
2
3
4
5

Ⅳ 3a


$\frac{b}{a}=10$
$1+\Omega_H$
$\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$
(0 3' 0)
(0 2' 0)
(0 2'' 0)
(0 1'' 0)
Ω
Ω_H
0
1
2
3
4
5

Ⅳ 3b

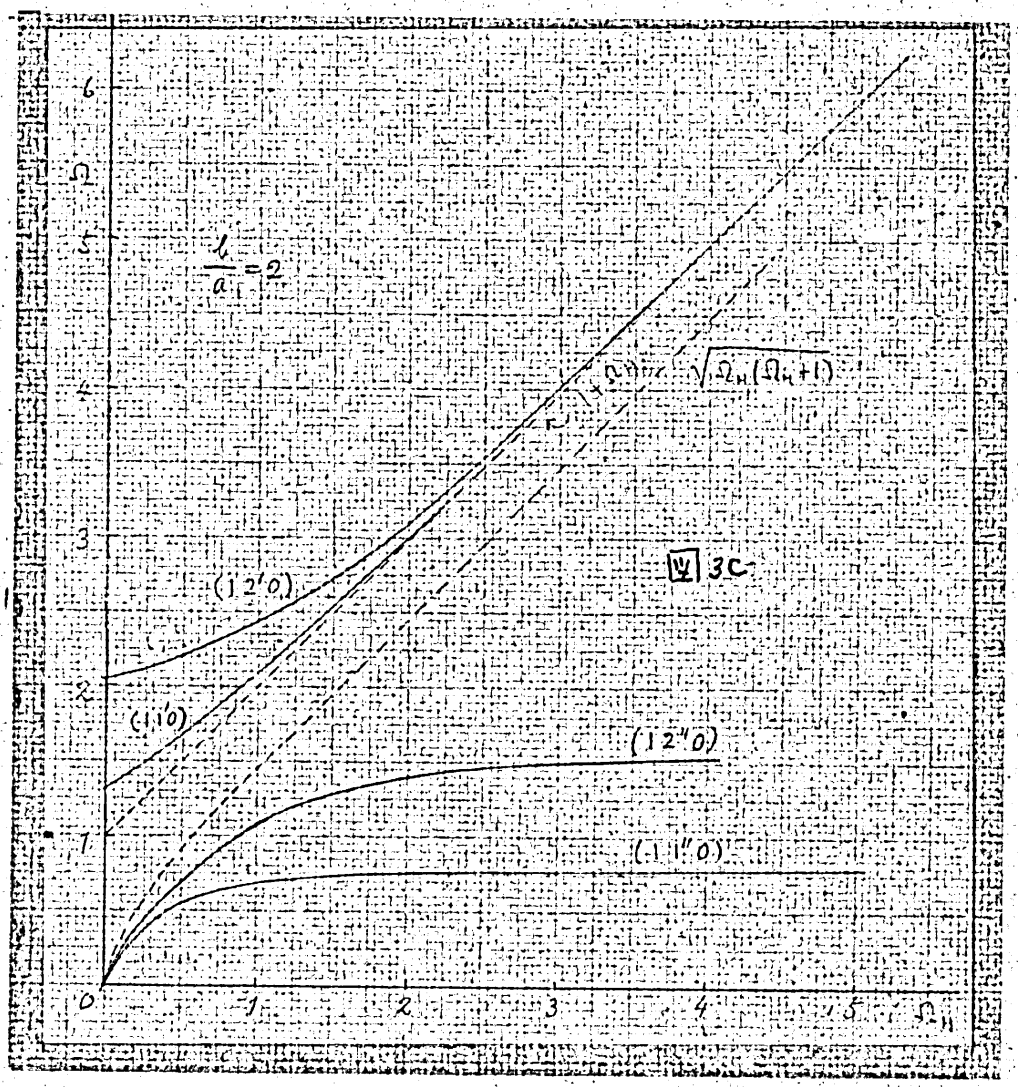


図3C

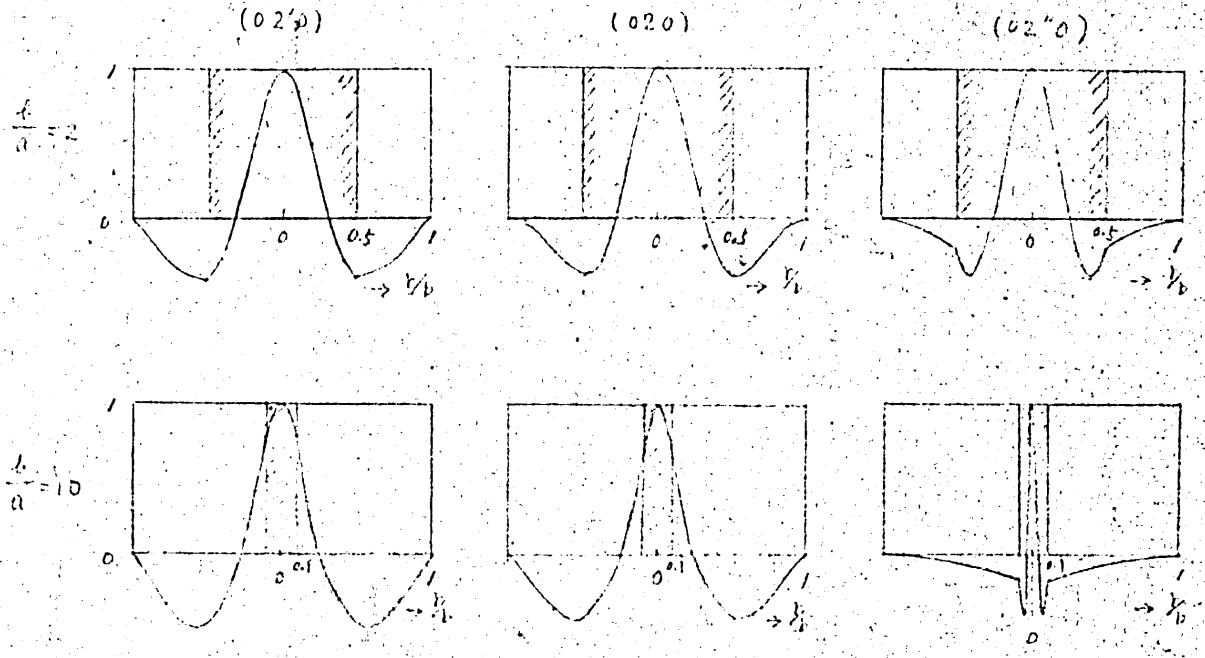


図4. $\Omega_H=0.5$ のときの E_z の径分布

$$\xi \frac{J_n'(\xi)}{J_n(\xi)} = H_n(\rho|\Omega) \quad , \quad \xi = \sqrt{\varepsilon_r}\cdot\frac{s}{\rho}\cdot\Omega \qquad (11)$$

の根に一致する.(図2a). (11)式は誘電体ε_rを含む空胴の固有振動数を与える. (11)式の異なる根を整数rで区別し, 誘電体－空胴姿態を$(n,r,0)$で表わしておく. (10)式の異なる根を区別するために, Ω_i'組に対して整数r'を, Ω_i''組に対して整数r''を導入し, フェリ磁性体－空胴姿態を$(n,r';0)$, $(n,r'';0)$で表わす. 両者とも$(n,r,0)$から派生したもので, 固有振動数はΩ_Hに対して $(n,r';0) > (n,r,0) > (n,r'';0)$ となっている. $(n,r';0)$姿態は周波数が$1+\Omega_H$より高く, $(n,r'';0)$は$\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$より低い. ρが大きくなると $\Omega_{(n,r';0)} \to \Omega_{(n,r,0)}$であり, $\Omega_H \to \infty$の極限では. $\Omega_{(n,r'';0)} \to \Omega_{(n,r,0)}$である. ρが大きくなると, $(n,r'';0)$姿態はほとんど縮退に近かく, $\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$に近ずく. $\rho\to\infty$の極限では $\Omega_{(nr''0)} \to \sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$となって縮退してしまう. $(n,r';0)$の高次姿態では, ξが非常に大きいので, 電磁界成分は

$$E_{1z} \cong 0 \quad , \quad H_{1r} \cong \frac{1}{j\omega\mu_0}\left\{-jK k_1 J_n'(k_1 r)\, e^{-jn\theta}\right\}$$

$$H_{1\theta} \cong \frac{1}{j\omega\mu_0}\left\{-K\frac{n}{r} J_n(k_1 r)\, e^{-jn\theta}\right\}$$

となって, $\mathrm{curl}\, H_1 \cong 0$ が満足されるから, ほぼ静磁界である. 周波数$\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$は1つの静磁姿態に対応しているから[7], $\rho\to\infty$の極限では1つの静磁姿態に無数のフェリ磁性体－空胴姿態$(n,r'';0)$が縮退している. ρを小さくすると, いいかえれば, フェリ磁性体の径寸法を大きくしていくと縮退は解ける.

$(n,r';0)$姿態は$\rho\to\infty$の極限では円筒空胴姿態に収束する. したがって, 円筒空胴姿態も静磁姿態も極限的な意味で1つのフェリ磁性体－空胴姿態と考えることができる. $(n,r';0)$と$(n,r'';0)$の界分布を図4に示す.

4. フェリ磁性体－空胴姿態の直交性

添字λ,μで, 上に述べた姿態の異なったものを表わすと, フェリ磁性体中では

$$\nabla\times E_\lambda = -j\omega_\lambda\mu_0(H_\lambda + M_\lambda), \quad \nabla\times H_\lambda = j\omega_\lambda\varepsilon E_\lambda,$$

$$j\omega_\lambda M_{1\lambda} = \gamma M_s H_\lambda \times a_z - \gamma H_0 M_\lambda \times a_z$$

空間部分では $\nabla\times E_\lambda = -j\omega_\lambda\mu_0 H_\lambda$, $\nabla\times H_\lambda = j\omega_\lambda\varepsilon_0 E_\lambda$

で, かつ, 境界条件(導体面上, フェリ磁性体表面)を満足しているから

$$\int_{V_I+V_{II}} \nabla\cdot(\bar{E}_\lambda \times H_\mu + E_\mu \times \bar{H}_\lambda)\, dv = j(\omega_\lambda - \omega_\mu) \int_{V_I+V_{II}} [\varepsilon \bar{E}_\lambda E_\mu + \mu_0 \bar{H}_\lambda H_\mu + \mu_0 \Omega_H \bar{M}_\lambda M_\mu]\, dv$$

をうる．ここに，V_I はフェリ磁性体部分を，V_{II} は空間部分を表わす．Gauss の定理によって左辺は

$$\int_{\text{空胴面}} dS + \int_{\substack{\text{フェリ磁性体}\\ \text{面のII側}}} dS + \int_{\substack{\text{フェリ磁性体}\\ \text{面のI側}}} dS$$

になるが，境界条件によってこの面積分は0になる．したがって，

$$\int_{V_I+V_{II}} [\varepsilon \bar{E}_\lambda E_\mu + \mu_0 \bar{H}_\lambda H_\mu + \mu_0 \Omega_H \bar{M}_\lambda M_\mu]\, dv = \delta_{\lambda\mu} N \qquad (12)$$

がなりたつ．これは，フェリ磁性体－空胴姿態は(12)式の意味で直交していることを表わす．

5. むすび

フェリ磁性体を含んだ空胴の固有振動姿態を明らかにしたが，これは次のようなものであるといえる．

(1) フェリ磁性体－空胴姿態は(12)式の直交関係の意味で存在する．

(2) 円筒空胴姿態も静磁姿態も極限的な意味でフェリ磁性体－空胴姿態である．

(3) フェリ磁性体－空胴姿態は振動数が $\gamma(H_0+M_s)$ 以上のものと，$\gamma\sqrt{H_0(H_0+M_s)}$ 以下のものの2つに大別できる．フェリ磁性体の占有率が小さい場合（ρ が大きい場合）は前者はほとんど誘電体－空胴姿態に近く，後者は振動数 $\gamma\sqrt{H_0(H_0+M_s)}$ なる静磁姿態にほとんど縮退し，$\rho\to\infty$ の極限では完全に縮退している．これに反して，フェリ磁性体の占有率が大きい場合（ρ が1に近かい場合）は，前者の固有振動数は磁界によって変化し，後者では，静磁姿態への縮退が解ける．

終りに電子計算機使用にご尽力下さった松下電器中研の中部孝治氏に謝意を表わす．

参考文献

(1) H. E. Bussey and L. E. Steinert, An Exact Solution for a Cylindrical Cavity Containing a Gyromagnetic Material, Proc. I.R.E., Vol. 45, No. 5, pp693-694, 1957.

(2) L.R. Walker, Magnetostatic Modes in Ferromagnetic Resonance, Phys. Rev. Vol. 105, No. 2, Jan. 15, 1957.

(3) W. H. Steier and P. D. Coleman, Dipolar Magnetodynamic Ferrite Modes, J.A.P. Vol. 30, pp 1454, 1959.

(4) W. B. Ribbens, Effect of Electromagnetic Propagation on the Magnetostatic Modes, J. A. P. Vol. 34, No. 9, pp 2639 -2645, 1963..

(5) B. A. Auld, Coupling of Electromagnetic and Magnetostatic Modes in Ferrite-Loaded Cavity Resonator, J. A. P., Vol. 34, No. 6, pp 1629 -1633, 1963.

(6) H. Suhl and L. R. Walker, Topics in guided wave propagation through gyromagnetic media I, B. S. T. J., Vol. 33, pp 579 -659, 1954

(7) R. I. Joseph and E. Schlömann, Theory of Magnetostatic Modes in Long Axially Magnetized Cylinders, J. A. P., Vol. 32, No. 6, pp 1001-1005, 1961.

輻射科学研究会資料

フェリ磁性体を含んだ空胴の電磁界

熊谷三郎　中西義郎
（大阪大学 工学部）

岡本允夫
（近畿大学理工学部）

昭和38年12月14日
（於 早川電機 中央研究所）

フェリ磁性体を含んだ空胴の電磁界

1. はしがき

フェリ磁性体を含んだ空胴の電磁界は，これまでにも数多く取扱われてきているが，それらは真空空胴の電磁界をもとにして，空胴中のフェリ磁性体の効果をこれに対する摂動として解いたものであるか，または，フェリ磁性体を単なる異方性媒質として境界値問題によって解いたものである.[1] いずれにしても，これらの理論はフェリ磁性体の特性を限定した形でとらえているもので，そのようなとらえ方が許される範囲で良い近似を与えるに過ぎない.

もともと，フェリ磁性体はその強磁性共鳴現象によって明らかなように，その寸法に拘らずマイクロ波電磁界と共鳴を起す．この共鳴はフェリ磁性体の磁化ベクトルの振動として説明できるもので，フェリ磁性体の寸法が波長に比べて無視できる極限では，その寸法に関係なく形状にのみ依存する振動姿態（静磁姿態）をとり，[2] その寸法が波長に対して無視できないときは寸法に関係した振動姿態をとる.[3][4]

この事実は，フェリ磁性体がマイクロ波に対して単なる異方性媒質ではなくて境界条件できまる振動姿態をもつ共振系であることを示している．したがって，フェリ磁性体を含む空胴は磁化ベクトルと電磁界の結合した1つの系であり，そこでの電磁界はフェリ磁性体中では

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times E &= -j\omega\mu_0 (H+M) \\ \nabla \times H &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E \\ j\omega M &= \gamma M_s H \times a_z - \gamma H_0 M \times a_z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

空間部分では

$$\nabla \times E = -j\omega\mu_0 H, \qquad \nabla \times H = j\omega\varepsilon_0 E \qquad (2)$$

を満足し，かつ，導体面上およびフェリ磁性体表面での境界条件を満足するものである．ここに，ε_r はフェリ磁性体の比誘電率，a_z はz方向の単位ベクトル，H_0 は直流磁界（z方向にかける），M_s はフェリ磁性体の飽和磁化，$\gamma = \mu_0 e/m$ (M.K.S.) である.

以上でわかるように，(1)式(2)式を境界条件のもとで解くことによって，はじめて，フェリ磁性体を含んだ空胴の電磁界を明らかにすることができる．任意の形状についてはこの解を求めることは困難であるが，円筒空胴中に円筒形のフェリ磁性体を同心的に挿入した場合には解きうる．後で述べるようにこの場合の特別な姿態群についての数値的な解は求められているが，(*) ここではより一般的な形でこの問題を論じフェリ磁性体を含んだ空胴の固有振動姿態がとの[redacted]

[redacted].

(*) А.Л. Михаэлян, А.К. Столяров, А.А. Васильев; РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА Том V, 27, (1960).

ようなものであるかを明らかにした。(*)

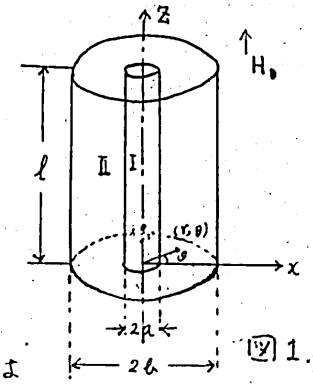


図1.

2. 特性方程式

こゝで考える空胴共振器は図1で示されるように，フェリ磁性体円柱を同心的に含む円筒状のものである．フェリ磁性体が軸方向に飽和にまで磁化されているとし，座標軸を図のようにとれば，(1)式 (2)式から，フェリ磁性体中では

$$\left.\begin{aligned}\nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{\mu^2-\kappa^2}{\mu}\varepsilon_r k_0^2 E_z &= -\frac{\kappa}{\mu}\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial z}\\ \nabla_t^2 H_z + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon_r H_z &= \frac{\kappa}{\mu}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial E_z}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

空間部分では

$$\nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_0^2 E_z = 0 \ , \quad \nabla_t^2 H_z + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2 H_z = 0 \quad (4)$$

がなりたつ．こゝに，フェリ磁性体はテンソル透磁率 (μ) で表わされ

$$(\mu) = \mu_0\begin{bmatrix}\mu & j\kappa & 0\\ -j\kappa & \mu & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mu-1 = \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2-\Omega^2}, \quad \kappa = \frac{\Omega}{\Omega_H^2-\Omega^2}, \quad \Omega_H = \frac{\omega_H}{\omega_M}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_M}, \quad \omega_M = \gamma M_s, \quad \omega_H = \gamma H_0, \quad \gamma = \frac{\mu_0 e}{m}. \ (MKS)$$

および

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

である．z方向に正弦的に変化する電磁界を考えて，$E_z = E_z \sin\beta z$，$H_z = H_z \cos\beta z$ とおくと，(3)式 (4)式は，それぞれ

$$\nabla_t^2 E_z + aE_z + bH_z = 0 \qquad \nabla_t^2 H_z + cH_z + dE_z = 0 \quad (5)$$

$$\nabla_t^2 E_z + (k_0^2-\beta^2)E_z = 0 \qquad \nabla^2 H_z + (k_0^2-\beta^2)H_z = 0 \quad (6)$$

となる．こゝに，

$$a = \frac{\mu^2-\kappa^2}{\mu}\varepsilon_r k_0^2 - \beta^2, \quad b = -\frac{\kappa}{\mu}\beta\omega\mu_0, \quad c = k_0^2 - \frac{\beta^2}{\mu}, \quad d = \frac{\kappa}{\mu}\beta\omega\varepsilon_0\varepsilon_r$$

である．(5)式は $E_z = h_1\psi_1 + h_2\psi_2$，$H_z = g_1\psi_1 + g_2\psi_2$ とおいて $h_1g_2 \neq h_2g_1$ なる条件のもとに

$$\nabla_t^2\psi_i + \sigma_i\psi_i = 0$$

(*) この系を真空空胴姿態と静磁姿態の結合として扱う試みがある．(5)

に変換できる．σ_i は a, b, c, d の関数である．フェリ磁性体中の電磁界は ψ_i から求まる．(6) こゝで，境界条件に使われる電磁界成分を書くと，フェリ磁性体中では

$$\left.\begin{aligned} E_{1z} &= [A J_n(k_1 r) \Lambda_2 - B J_n(k_2 r) \Lambda_1] e^{-jn\theta} \cos\beta z \\ H_{1z} &= [A J_n(k_1 r) - B J_n(k_2 r)] e^{-jn\theta} \sin\beta z \\ \Omega_1 E_{1\theta} &= [A F_2(k_1 r) - B F_1(k_2 r)] e^{-jn\theta} \sin\beta z \\ \Omega_1 H_{1\theta} &= [A G_2(k_1 r) - B G_1(k_2 r)] e^{-jn\theta} \cos\beta z \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

空間部分では

$$\left.\begin{aligned} E_{2z} &= C \bar{F}(kr) e^{-jn\theta} \cos\beta z \\ H_{2z} &= D G(kr) e^{-jn\theta} \sin\beta z \\ \Omega_2 E_{2\theta} &= [-C\alpha_n \bar{F}(kr) + j D \Omega_2 G'(kr)] e^{-jn\theta} \sin\beta z \\ \Omega_2 H_{2\theta} &= [D\alpha_n G(kr) - j C \Omega_2 \bar{F}'(kr)] e^{-jn\theta} \cos\beta z \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

となる．こゝに，A, B, C, D は境界条件できまる常数である．$z=0$，$z=\ell$ における境界条件から $\beta = m\pi/\ell$ となる．また，

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}_i(k_h r) &= \frac{jn}{r} p_i J_n(k_h r) + j q_i \chi_h J_n'(k_h r) \\ G_i(k_h r) &= \frac{jn}{r} u_i J_n(k_h r) + j v_i \chi_h J_n'(k_h r) \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2;\ h=1,2)$$

$$\bar{F}(kr) = \frac{J_n(kr)}{J_n(kb)} - \frac{N_n(kr)}{N_n(kb)}, \quad G(kr) = -j\left\{\frac{J_n(kr)}{J_n'(kb)} - \frac{N_n(kr)}{N_n'(kb)}\right\}$$

$$\bar{F}'(kr) = \frac{J_n'(kr)}{J_n(kb)} - \frac{N_n'(kr)}{N_n(kb)}, \quad G'(kr) = -j\left\{\frac{J_n'(kr)}{J_n'(kb)} - \frac{N_n'(kr)}{N_n'(kb)}\right\}$$

$$\Lambda_1 = \frac{k_0}{2\beta p_H}\left\{[(1-\mu)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu p_H^2] - \sqrt{\{(1-\mu)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu p_H^2\}^2 + 4\frac{\beta^2}{k_0^2} p_H^2}\right\}$$

$$\Lambda_2 = \frac{k_0^2}{2\beta p_H}\left\{[(1-\mu)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu p_H^2] + \sqrt{\{(1-\mu)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu p_H^2\}^2 + 4\frac{\beta^2}{k_0^2} p_H^2}\right\}$$

$$p_{1,2} = (\frac{\beta}{k_0}\Lambda_{1,2} - \mu p_H)(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \mu p_H, \quad q_{1,2} = (\frac{\beta}{k_0}\Lambda_{1,2} - \mu p_H) p_H + \mu(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2})$$

$$\chi_{1,2}^2 = \mu(1 - p_H^2 - \frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) + \frac{\beta \Lambda_{1,2}}{k_0} p_H, \quad \Omega_1 = \mu\left[(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2})^2 - p_H^2\right]$$

$$\Omega_2 = 1 - \frac{\beta^2}{k_0^2}, \quad \alpha_n = -\frac{j\beta n}{k_0^2 a}, \quad \because k^2 = k_0^2 - \beta^2, \quad k_{1,2} = \chi_{1,2} k_0$$

$$u_{1,2} = -\frac{\beta}{k_0}(1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2}) - p_H \Lambda_{1,2}, \quad v_{1,2} = -\beta p_H - (1-\frac{\beta^2}{\mu k_0^2})\Lambda_{1,2}, \quad p_H = -\frac{\kappa}{\mu}.$$

である．$r=a$ において $E_{1z} = E_{2z}$, $H_{1z} = H_{2z}$, $E_{1\theta} = E_{2\theta}$, $H_{1\theta} = H_{2\theta}$ であるから次の

特性方程式をうる.

$$\frac{[\Omega_2 F_2(k_1a) + \Omega_1 \Lambda_2 \alpha_n J_n(k_1a)]\, G(ka) - j\Omega_1\Omega_2 J_n(k_1a)\, G'(ka)}{[\Omega_2 G_2(k_1a) - \Omega_1 \alpha_n J_n(k_1a)]\, F(ka) + j\Omega_1\Lambda_2\Omega_2 J_n(k_1a)\, F'(ka)}$$
$$= \frac{[\Omega_2 F_1(k_2a) + \Omega_1 \Lambda_1 \alpha_n J_n(k_2a)]\, G(ka) - j\Omega_1\Omega_2 J_n(k_2a)\, G'(ka)}{[\Omega_2 G_1(k_2a) - \Omega_1 \alpha_n J_n(k_2a)]\, F(ka) + j\Omega_1\Lambda_1\Omega_2 J_n(k_2a)\, F'(ka)} \qquad (9)$$

3. 固有振動姿態

任意の整数 n, m については (9)式を解いて, それに対応する固有振動数を見出すことができる. ここでは $m=0$ にした場合を例にとって説明を進める.

(9)式を $m=0$ の場合について書き直すと

$$\xi \frac{J_n'(\xi)}{J_n(\xi)} = \frac{H_n(\rho|\Omega) + n\cdot K}{M}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\Omega^2 - (\Omega_H+1)^2}{\Omega^2 - \Omega_H(\Omega_H+1)}}\sqrt{\varepsilon_r}\,\frac{s}{\rho}\Omega \qquad (10)$$

となる. ここに,

$$H_n(\rho|\Omega) = \frac{s}{\rho}\Omega \frac{J_n(s\Omega) N_n'(\frac{s}{\rho}\Omega) - J_n'(\frac{s}{\rho}\Omega) N_n(s\Omega)}{J_n(s\Omega) N_n(\frac{s}{\rho}\Omega) - J_n(\frac{s}{\rho}\Omega) N_n(s\Omega)}, \quad s = \omega_M\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,b$$

$$\xi = k_1 a, \quad \rho = \frac{b}{a}, \quad K = \frac{\Omega}{(\Omega_H+1)^2 - \Omega^2}, \quad M = \frac{\Omega_H(\Omega_H+1) - \Omega^2}{(\Omega_H+1)^2 - \Omega^2}.$$

である. (10)式は図式的に解くことができる(図2a). 与えられた n に対して(10)式は無限個の根をもっている. この根は次の2組

(I) $\infty > \Omega_i' > 1+\Omega_H$, $\Omega_{i+1}' > \Omega_i'$, $i = 1, 2, 3, \cdots$

(II) $\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)} > \Omega_i'' > 0$, $\Omega_{i+1}'' > \Omega_i''$, $i = 1, 2, 3, \cdots$

に大別できる.(*) また, 各根の Ω_H に対する変化を調べると図3のようになる. Ω_i'' 組の根はすべての Ω_H に対して存在するが, Ω_i' 組では, 各根について, 臨界磁界 Ω_{Hc} が存在し, $0 < \Omega_H < \Omega_{Hc}$ の範囲で根がある. ここに, Ω_{Hc} は $n=0$ に対しては

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_r}\,\frac{s}{\rho}\Omega = H_0(\rho|\Omega)$$

の根であり, $n \neq 0$ のときは $H_n(\rho|\Omega)$ の極である. ρ が大きくなると, Ω_i'' 組は Ω_H の大きいところで, Ω_i' 組は Ω_H の小さなところでほぼ一定値をもち, しかも両者はほとんど等しい. この傾向は ρ が大きいほど強い. $\Omega_H \to \infty$ の極限では, (10)式の根は

(*) $M<0$ のとき, すなわち, $1+\Omega_H > \Omega > \sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$ のとき, $\xi\frac{I_n'(\xi)}{I_n(\xi)} = \frac{H_n(\rho|\Omega)+nK}{M}$ となって Ω_H のある範囲で1根存在する. この根は $\rho \to \infty$ のとき $\Omega \to \Omega_H + \frac{1}{2}$ となる.

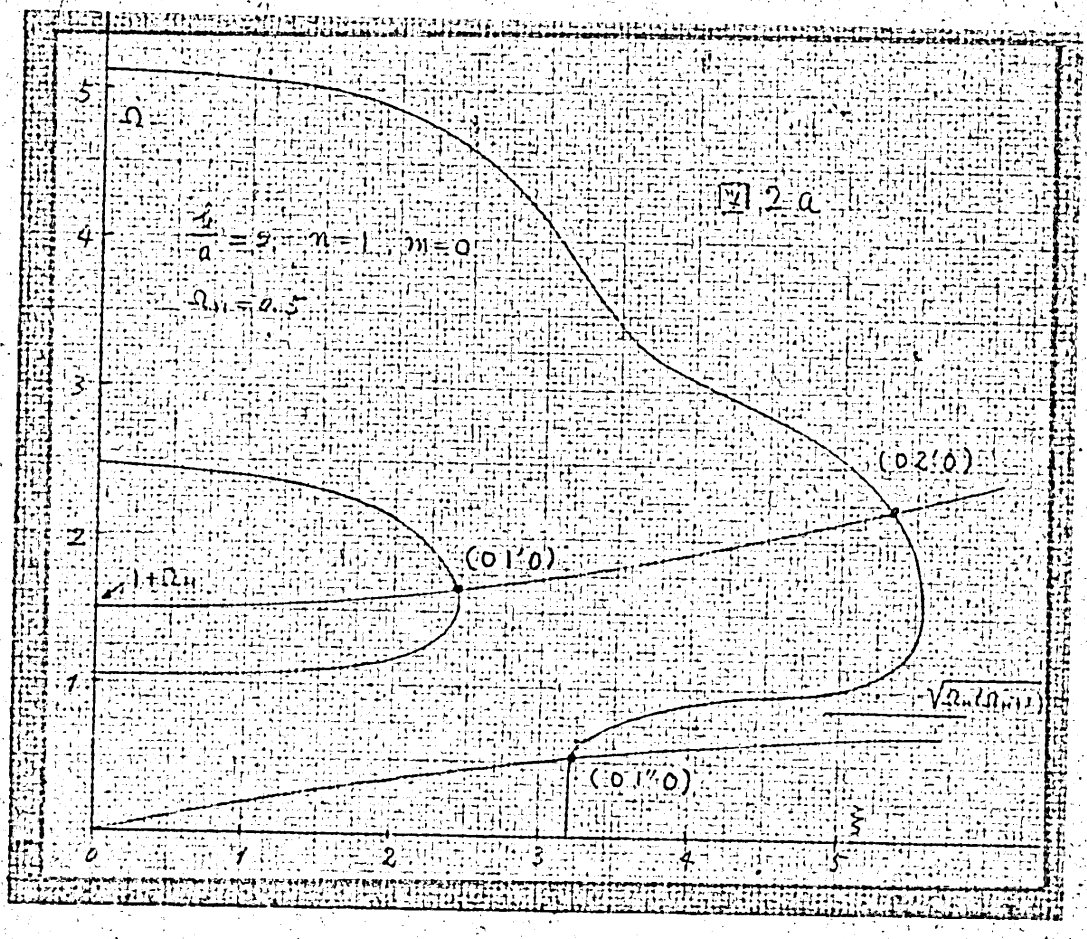

Ω
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
ξ
$\frac{b}{a}=2,\ n=1,\ m=0$
$\Omega_{11}=0.5$
$1+\Omega_{11}$
(0 2' 0)
(0 1' 0)
$\sqrt{\Omega_{11}(\Omega_{11}+1)}$
(0 1'' 0)

図 2 a

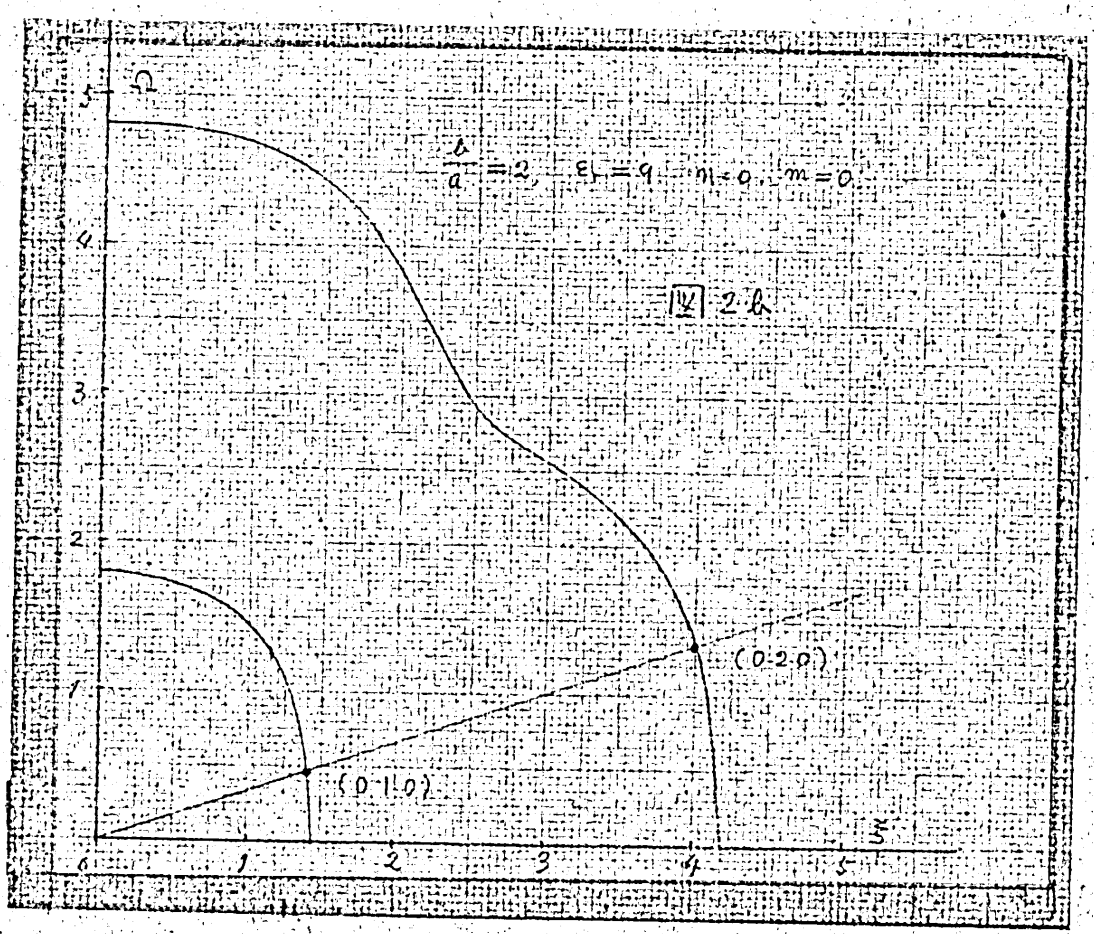

Ω
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
ξ
$\frac{b}{a}=2,\ \varepsilon_1=9,\ n=0,\ m=0$
(0 2 0)
(0 1 0)

図 2 b

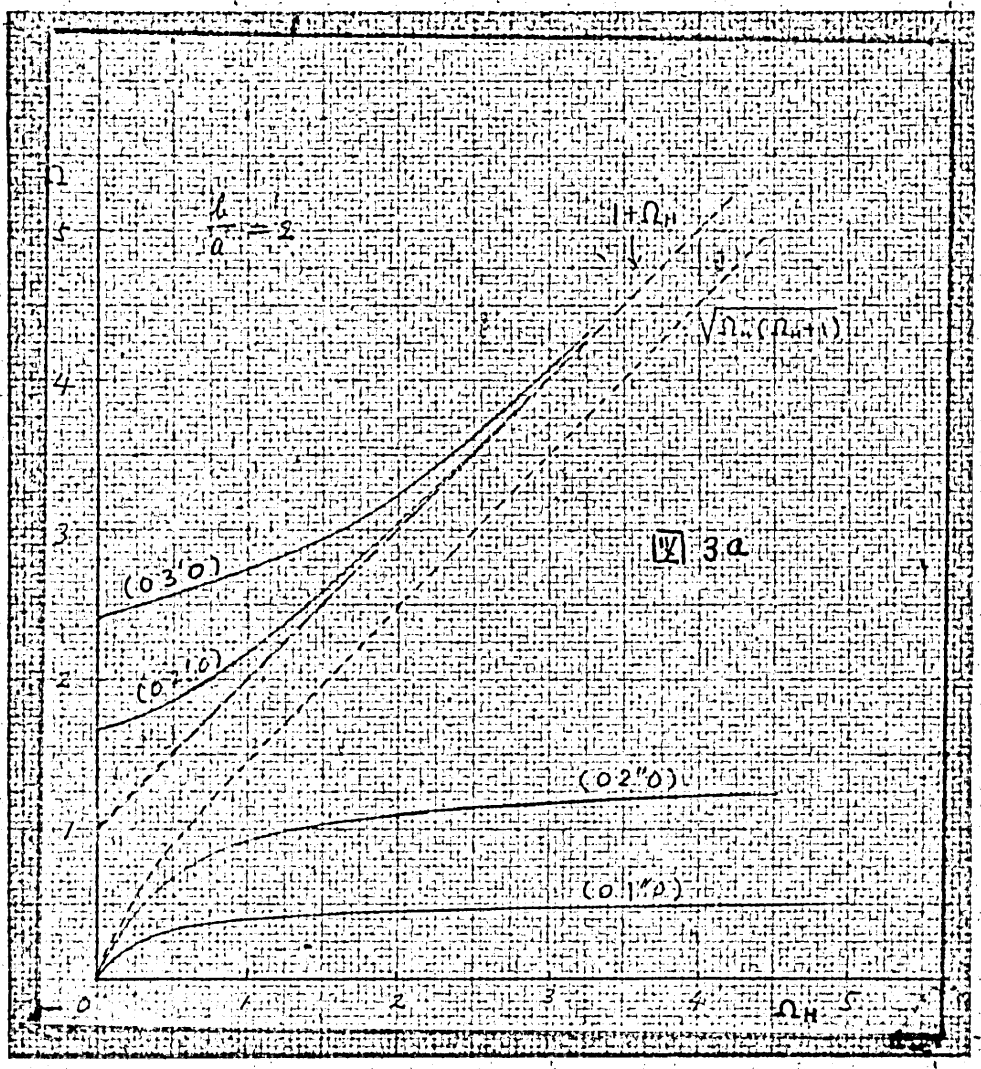

Ω
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
Ω_H
$\frac{b}{a}=2$
$1+\Omega_H$
$\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$
(0 3' 0)
(0 2' 0)
(0 2'' 0)
(0 1'' 0)

図 3a

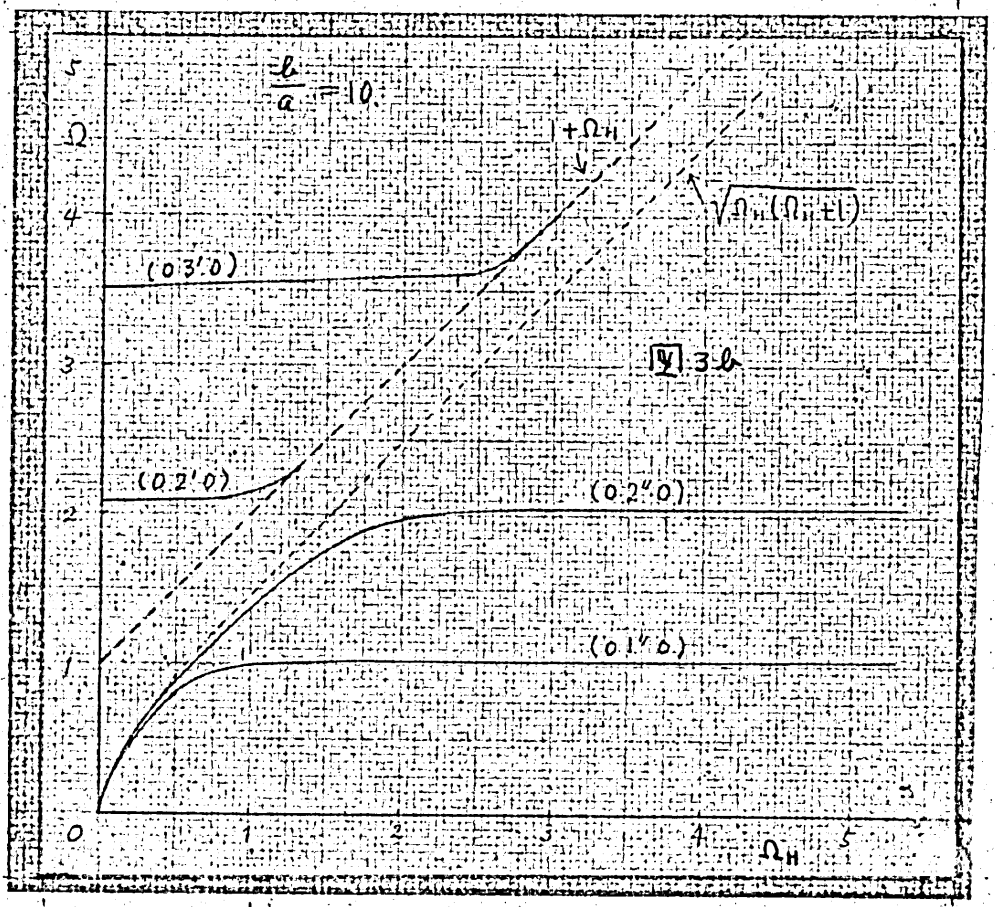

Ω
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
Ω_H
$\frac{b}{a}=10$
$1+\Omega_H$
$\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$
(0 3' 0)
(0 2' 0)
(0 2'' 0)
(0 1'' 0)

図 3b

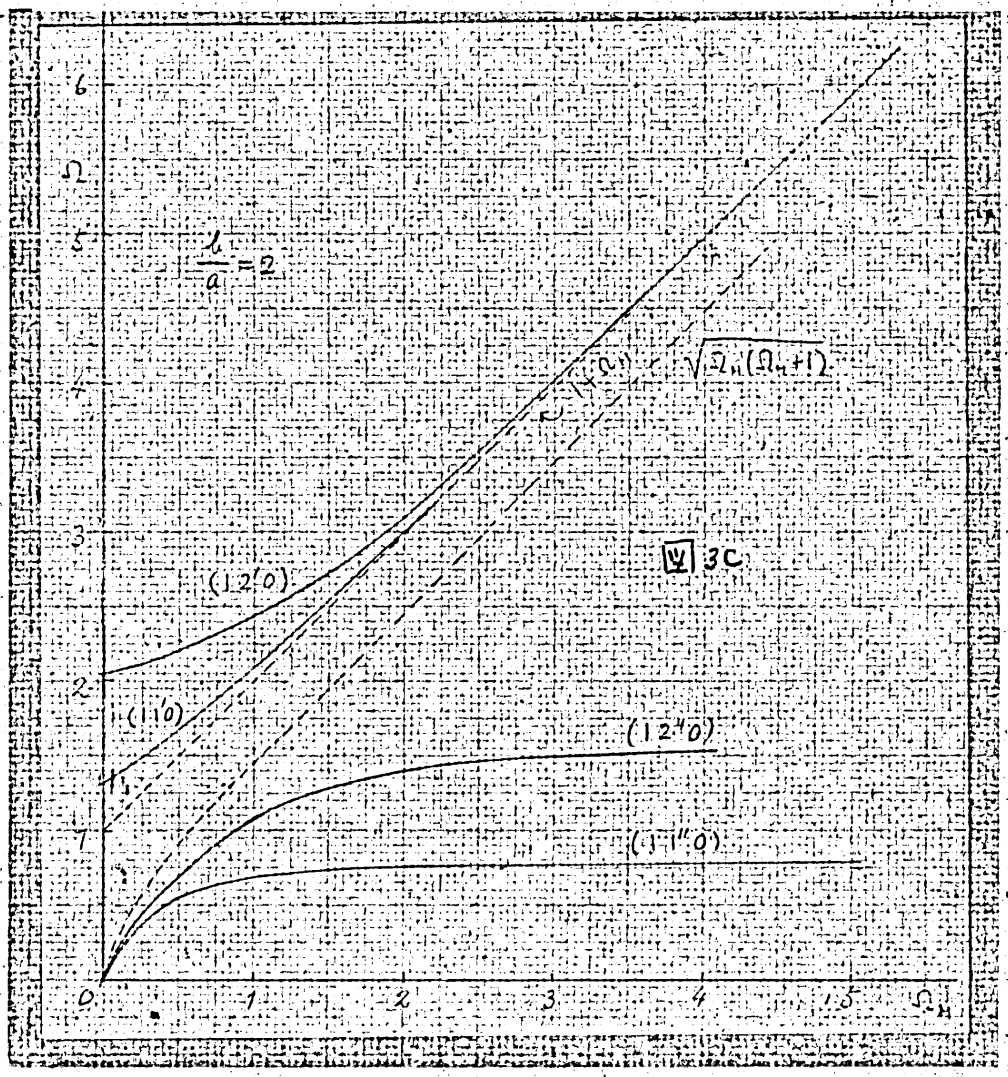


図 3c

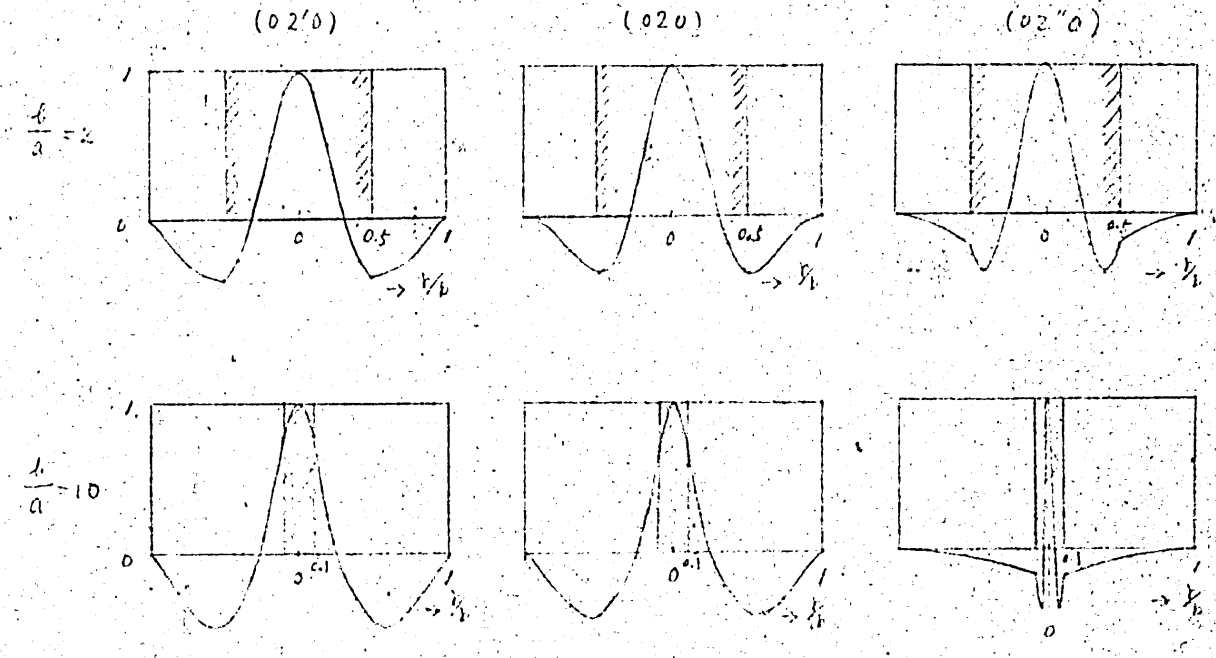


図 4. $\Omega_H=0.5$ のときの E_z の径分布

$$\xi \frac{J_n'(\xi)}{J_n(\xi)} = H_n(\rho | \Omega) \quad , \quad \xi = \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \frac{s}{\rho} \cdot \Omega \qquad (11).$$

の根に一致する.(図2a). (11)式は誘電体ε_rを含む空胴の固有振動数を与える. (11)式の異なる根を整数rで区別し, 誘電体－空胴姿態を$(n, r, 0)$で表わしておく. (10)式の異なる根を区別するために, Ω_i'組に対して整数r'を, Ω_i''組に対して整数r''を導入し, フェリ磁性体－空胴姿態を$(n, r', 0)$, $(n, r'', 0)$で表わす. 両者とも$(n, r, 0)$から派生したもので, 固有振動数はΩ_Hに対して $(n, r', 0) > (n, r, 0) > (n, r'', 0)$となっている. $(n, r', 0)$姿態は周波数が$1+\Omega_H$より高く, $(n, r'', 0)$は$\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$より低い. sが大きくなると $\Omega_{(n,r',0)} \to \Omega_{(n,r,0)}$であり, $\Omega_H \to \infty$の極限では $\Omega_{(n,r'',0)} \to \Omega_{(n,r,0)}$である. sが大きくなると, $(n, r'', 0)$姿態はほとんど縮退に近づく, $\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$に近ずく. $\rho \to \infty$の極限では $\Omega_{(n,r'',0)} \to \sqrt{\Omega_n(\Omega_n+1)}$となって縮退してしまう. $(n, r'', 0)$の高次姿態では, ξが非常に大きいので, 電磁界成分は

$$E_{1z} \cong 0 \quad , \quad H_{1r} \cong \frac{1}{j\omega\mu_0} \left\{ -jK k_1 J_n'(k_1 r)\, e^{-jn\theta} \right\}$$

$$H_{1\theta} \cong \frac{1}{j\omega\mu_0} \left\{ -K \frac{n}{r} J_n(k_1 r)\, e^{-jn\theta} \right\}$$

となって, $\mathrm{curl}\, H_1 \cong 0$ が満足されるから, ほゞ静磁界である. 周波数$\sqrt{\Omega_n(\Omega_n+1)}$は1つの静磁姿態に対応しているから[7], $\rho \to \infty$の極限では1つの静磁姿態に無数のフェリ磁性体－空胴姿態$(n, r'', 0)$が縮退している. ρを小さくすると, いいかえれば, フェリ磁性体の径寸法を大きくしていくと縮退は解ける.

$(n, r', 0)$姿態は$\rho \to \infty$の極限では円筒空胴姿態に帰来する. したがって, 円筒空胴姿態し静磁姿態も極限的な意味で1つのフェリ磁性体－空胴姿態と考えることができる. $(n, r', 0)$と$(n, r'', 0)$の界分布を図4に示す.

4. フェリ磁性体－空胴姿態の直交性

添字λ, μで, 上に述べた姿態の異なったものを表わすと, フェリ磁性体中では

$$\nabla \times E_\lambda = -j\omega_\lambda \mu_0 (H_\lambda + M_\lambda), \quad \nabla \times H_\lambda = j\omega_\lambda \varepsilon E_\lambda ,$$

$$j\omega_\lambda M_{1\lambda} = \gamma M_s H_{1\lambda} \times a_z - \gamma H_0 M_{1\lambda} \times a_z$$

空間部分では $\nabla \times E_\lambda = -j\omega_\lambda \mu_0 H_\lambda$, $\nabla \times H_\lambda = j\omega_\lambda \varepsilon_0 E_\lambda$

で, かつ, 境界条件(導体面上, フェリ磁性体表面)を満足しているから

$$\int_{V_I+V_{II}} \nabla\cdot(\bar{E}_\lambda \times H_\mu + E_\mu \times \bar{H}_\lambda)\,dv = j(\omega_\lambda - \omega_\mu) \int_{V_I+V_{II}} [\varepsilon \bar{E}_\lambda E_\mu + \mu_0 \bar{H}_\lambda H_\mu + \mu_0 \Omega_H \bar{M}_\lambda M_\mu]\,dv$$

をうる．ここに，V_I はフェリ磁性体部分を，V_{II} は空間部分を表わす．Gauss の定理によって左辺は

$$\int_{\text{空胴面}} dS + \int_{\substack{\text{フェリ磁性体}\\ \text{面のII側}}} dS + \int_{\substack{\text{フェリ磁性体}\\ \text{面のI側}}} dS$$

になるが，境界条件によってこの面積分は0になる．したがって，

$$\int_{V_I+V_{II}} [\varepsilon \bar{E}_\lambda E_\mu + \mu_0 \bar{H}_\lambda H_\mu + \mu_0 \Omega_H \bar{M}_\lambda M_\mu]\,dv = \delta_{\lambda\mu} N \qquad (12)$$

がなりたつ．これは，フェリ磁性体－空胴姿態は(12)式の意味で直交していることを表わす．

5. むすび

フェリ磁性体を含んだ空胴の固有振動姿態を明らかにしたが，これは次のようなものであるといえる．

(1) フェリ磁性体－空胴姿態は(12)式の直交関係の意味で存在する．

(2) 円筒空胴姿態も静磁姿態も極限的な意味でフェリ磁性体－空胴姿態である．

(3) フェリ磁性体－空胴姿態は振動数が $\gamma(H_0+M_s)$ 以上のものと，$\gamma\sqrt{H_0(H_0+M_s)}$ 以下のものの2つに大別できる．フェリ磁性体の占有率が小さい場合（ρ が大きい場合）は前者はほとんど誘電体－空胴姿態に近かく，後者は振動数 $\gamma\sqrt{H_0(H_0+M_s)}$ なる静磁姿態にほとんど縮退し，$\rho\to\infty$ の極限では完全に縮退している．これに反して，フェリ磁性体の占有率が大きい場合（ρ が1に近かい場合）は，前者の固有振動数は磁界によって変化し，後者では，静磁姿態への縮退が解ける．

終りに電子計算機使用にご尽力下さった松下電器中研の中部孝治氏に謝意を表わす．

参考文献

(1) H. E. Bussey and L. E. Steinert, An Exact Solution for a Cylindrical Cavity Containing a Gyromagnetic Material, Proc. I.R.E., Vol. 45, No. 5, pp693-694, 1957.

(2) L.R. Walker, Magnetostatic Modes in Ferromagnetic Resonance, Phys. Rev. Vol. 105, No. 2, Jan. 15, 1957.

(3) W. H. Steier and P. D. Coleman, Dipolar Magnetodynamic Ferrite Modes, J.A.P. Vol. 30, pp 1454, 1959.

(4) W. B. Ribbens, Effect of Electromagnetic Propagation on the Magnetostatic Modes, J. A.P. Vol. 34, No. 9, pp 2639 -2645, 1963.

(5) B. A. Auld, Coupling of Electromagnetic and Magnetostatic Modes in Ferrite-Loaded Cavity Resonator, J. A. P., Vol. 34, No. 6, pp 1629 -1633, 1963.

(6) H. Suhl and L. R. Walker, Topics in guided wave propagation through gyromagnetic media I, B. S. T. J., Vol. 33, pp 579 -659, 1954

(7) R. I. Joseph and E. Schlömann, Theory of Magnetostatic Modes in Long Axially Magnetized Cylinders, J. A. P., Vol. 32, No. 6, pp 1001-1005, 1961.

輻射科学研究会資料　　1964年3月19日

結合ら線の近似解法

裏　克己

寺田正純

（大阪大学工学部）

§1. 緒　　言

結合ら線は分布結合を利用した方向性結合器の1種である。その原理は位相速度の略等しいモードをもった2つの伝送線路を分布結合させると，新しく2つのモードが伝播する。この新しいモードの位相定数は互に僅か異っていて，励起を適当に行うと等振幅の2つのモードが同時に存在し，完全なビートを形成する。このビート現象を利用して，一方の線路から他の線路へ電力を完全移行させ得る。

結合ら線の場合は，1つのら線の外側に同心的に他のら線を配置し，そのピッチ角を内側のものの等量異符号にとる。こうすると，両者の間に強い分布結合を生じて方向性結合器として動作する。結合ら線は主として進行波管の入出力回路として用いられ，広帯域のために重用されている。

これを設計する際に必要な量はビート波長である。これは，ら線の半径比，管内波長，ら線径，ピッチ，ら線間の誘電体のε^*などによって決まる。結合ら線のビート波長の解析には，Cook-Kompfner-Quate の等価回路法および界理論によるものが知られている。[1] 等価回路によるものは直観的であるのが長所でもありそれと同時に短所にもなっていて，結合度の評価の仕方に問題がある。界理論は正確には違いないが，誘電体の存在を無視し，ら線を仮想的な理想ら線でおき換えざるを得ないのが欠点である。

ここで報告するのは，固有モード展開を利用した摂動論であって，両ら線間の結合が弱いときの解法である。

§2. 結合ら線の近似解法

一般的な固有モード展開理論によると，ある線路（z方向には均一な）の固有モードを$\{\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n\}$としたとき，その線路に摂動が与えられたとき

には，界は全モードの一次結合で表わされる。すなわち

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathbf{E}_n \\ \mathbf{H} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathbf{H}_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

さらにこの摂動を電流 J で表わしたとき，n－モードについて

$$(\Gamma - \Gamma_n)\, 4\, A_n\, P_n = \int \mathbf{J}\,\mathbf{E}^*\, dS \qquad (2)$$

ここでΓは摂動後の伝播定数，P_n は n モードの電力であり，右辺の積分は，z 方向に直角な全断面で行う。（附録参照）

つぎに半径 a ，b（$a < b$）に 2 つのら線が独立に存在するときの諸量を，それぞれ

$$\left.\begin{aligned} &I^a_{z1}\ ,\ I^a_{\theta 1}\ ,\cdots\cdots\ ,\ E_{z1}\ ,\ E_{\theta 1}\ ,\cdots\cdots \\ &I^b_{z2}\ ,\ I^b_{\theta 2}\ ,\cdots\cdots\ ,\ E_{z2}\ ,\ E_{\theta 2}\ ,\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

と書く。I_z ，I_θ はら線に流れる表面電流である。さてこの 2 つのら線を同心的に配置して両者を結合する。ら線 2 の存在はら線 1 に対して摂動の原因と見てよい。この立場から，ら線 1 の最低次モードに対して(2)を適用すると

$$(\Gamma - \Gamma_1)\, 4\, A_1\, P_1 = \int \mathbf{J}^b \mathbf{E}_1^{*b}\, dS \qquad (3)$$

が成立する。逆にら線 2 に対してはら線 1 が摂動の原因であるから (3) と同様にして

$$(\Gamma-\Gamma_2)\,4A_2P_2=\int \mathbf{J}^a\mathbf{E}_2^{*a}\,dS \tag{4}$$

$\mathbf{J}^b$, $\mathbf{J}^a$ として結合している状態でら線 2 , 1 に流れる電流をとれば , (3) , (4)は正確に成立する。そこで今はこの結合が十分弱くて , $\mathbf{J}^b$, $\mathbf{J}^a$ が結合前の(1)で表わされるものとする。すなわち

$$\left.\begin{aligned}\lim_{d\to 0}\ d\cdot\mathbf{J}^b &= \frac{1}{2\pi b}A_2\,(\,I^b_{zz}\mathbf{z}_0+I^b_{\theta z}\boldsymbol{\theta}_0\,)\\ \lim_{d\to 0}\ d\cdot\mathbf{J}^a &= \frac{1}{2\pi a}A_1\,(\,I^a_{z1}\mathbf{z}_0+I^a_{\theta 1}\boldsymbol{\theta}_0\,)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\int dS = d\,2\pi a \quad or \quad d\cdot 2\pi b$$

このとき , (3) , (4)は

$$\left.\begin{aligned}(\Gamma-\Gamma_1)\,4A_1P_1 &= A_2\,(\,I^b_{zz}E^{b*}_{z1}+I^b_{\theta z}E^{b*}_{\theta 1}\,)\\ (\Gamma-\Gamma_2)\,4A_2P_2 &= A_1\,(\,I^a_{z1}E^{a*}_{zz}+I^a_{\theta 1}E^{a*}_{\theta z}\,)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(6)で A_1 , A_2 を消去すると

$$(\Gamma-\Gamma_1)(\Gamma-\Gamma_2)=-\frac{1}{4}\beta_c^2 \tag{7}$$

$$\beta_c^2=-\frac{1}{4}\frac{1}{P_1P_2}(\,I^b_{zz}E^{b*}_{z1}+I^b_{\theta z}E^{b*}_{\theta 1}\,)(\,I^a_{z1}E^{a*}_{zz}+I^a_{\theta 1}E^{a*}_{\theta z}\,) \tag{8}$$

(7)の根を $j\beta_t$, $j\beta_e$ とおくと

$$\begin{matrix}\beta_t \\ \beta_e\end{matrix} = \frac{1}{2}\left[\beta_1+\beta_2 \pm \sqrt{(\beta_1-\beta_2)^2+\beta_c^2}\right] \tag{9}$$

これからビート位相定数 β_b は

$$\beta_b = \beta_t - \beta_e = \sqrt{(\beta_1-\beta_2)^2+\beta_c^2} \tag{10}$$

さて (8) を変形すると

$$\left.\begin{aligned}\beta_c^2 = -K_{1a}K_{2b}\gamma_1^2\gamma_2^2 \left(\frac{E_{z1}^b}{E_{z1}^a}\right)^*\left(\frac{E_{z2}^b}{E_{z2}^b}\right)^* \frac{I_{z1}^a}{E_{z1}^a}\,\frac{I_{z2}^b}{E_{z2}^b}\left(1+\frac{I_{\theta 2}^b E_{\theta 1}^{b*}}{I_{z2}^b E_{z1}^{b*}}\right) \\ \times\left(1+\frac{I_{\theta 1}^a E_{\theta 2}^{a*}}{I_{z1}^a E_{z2}^{a*}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$K_{1a} = \frac{|E_{z1}^a|^2}{2P_1\gamma_1^2},\quad K_{2b} = \frac{|E_{z2}^b|^2}{2P_2\gamma_2^2}$$

$$\gamma = \sqrt{\beta^2-k^2}$$

この(9)および(11)は結合が弱いとき，理想ら線に限らず一般的に成り立つ公式である。#)

Cook 等が等価回路法で求めた結果は (9) と一致し，この意味で等価回路法

(注) # は次頁に掲載します。

を裏付けたことになる。しかし β_c^2 の計算が等価回路法では

$$\beta_c^2 = 4\beta_1\beta_2 e^{-2\sqrt{\beta_1\beta_2}(b-a)} \tag{12}$$

として与えられていて，これに関しては等価回路法は不正確である。

以上の結果を理想ら線に応用する。界成分[2]から β_c^2 を計算すると

$$\beta_c^2 = \left(\frac{k}{60}K_{1a}\right)\left(\frac{k}{60}K_{2b}\right)\frac{I_0(\gamma_2 a)}{I_0(\gamma_1 a)}\cdot\frac{K_0(\gamma_1 b)}{K_0(\gamma_2 b)}\cdot\frac{1}{I_0^2(\gamma_2 b)K_0^2(\gamma_1 a)}$$

$$\times\left[1-\cot\psi_1\cot\psi_2\frac{k^2}{\gamma_1^2}\frac{I_1(\gamma_1 a)K_1(\gamma_1 b)}{I_0(\gamma_1 a)K_0(\gamma_1 b)}\right]\left[1-\cot\psi_1\cot\psi_2\frac{k^2}{\gamma_2^2}\right.$$

$$\left.\times\frac{K_1(\gamma_2 b)I_1(\gamma_2 a)}{K_0(\gamma_2 b)I_0(\gamma_2 a)}\right] \tag{13}$$

$\gamma_1 a$, $\gamma_2 a$, $\gamma_1 b$, $\gamma_2 b \gg 1$ のときには (13) は

$$\beta_c^2 = \beta_1\beta_2 e^{(\gamma_2-\gamma_1)(b+a)} e^{-2(\gamma_2 b-\gamma_1 a)}\left(1-\frac{\cot\psi_2}{\cot\psi_1}\right)\left(1-\frac{\cot\psi_1}{\cot\psi_2}\right)$$

(14)

\# 実際のら線はz方向に周期構造を持っている。この場合，E_z , I_z^a などは最低次の空間高調波成分に対するものを意味する。（$b \approx a$ でなければ実際の結合がこの成分で行われるから）

(14) で $cot\psi_2 / cot\psi_1 = -1$, $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \beta$ とおくと

$$\beta_c^2 = 4\beta^2 e^{-2\beta(b-a)} \qquad (15)$$

となり，これは (12) と一致する。つまり，等価回路法で求めた β_c^2 は $\gamma_1^a, \gamma_2^a, \gamma_1^b, \gamma_2^b \gg 1$ のとき，よい近似になることが判る。

§ 3. 結　　言

一般的な場合の結合ら線のビート波長を与える公式を結合が十分弱いとき固有モード展開理論を用いて求め，理想ら線を仮定し，誘電体を挟まないときの計算式を与えた。誘電体がら線間に存在し，かつ理想ら線でないときの補正に関する計算および，実験は後日報告する。

文　　献

1. J.S. Cook, R. Pompfner, C.F. Quate ;
   Coupled helices. B.S.T.J., 35, 127-178, 1956.01.
2. J.R. Pierce ; Traveling-wave tubes. 1950. Nostrand.
3. G.S.Kino ; Normal mode theory in perturbed transmission systems. Stanford Univ. Res. Lab. Rep. No.84. (1955.03)

附　録．　電磁界の固有モード展開[3)]

界方程式から

$$\nabla(\mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_n) = j\omega\mu \mathbf{H}_n \mathbf{H}_m^* - j\omega\varepsilon \mathbf{E}_m^* \mathbf{E}_n - \mathbf{E}_m^* \mathbf{J}_n$$

$$= \nabla_t(\mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_n) + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_n \qquad (1)$$

(1) を z 軸に直角な断面で積分する。積分範囲は無限遠にとると，そこでの周辺積分は消えて

$$(\Gamma_m^* + \Gamma_n) \int (\mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_n) \mathbf{z}_0 dS = \int \left[-j\omega\mu \mathbf{H}_n \mathbf{H}_m^* + j\omega\varepsilon \mathbf{E}_n \mathbf{E}_m^* + \mathbf{J}_n \mathbf{E}_m^* \right] dS \qquad (2)$$

(2) を導いたのと同様にして

$$(\Gamma_m^* + \Gamma_n) \int (\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m^*) \mathbf{z}_0 dS = \int \left[j\omega\mu \mathbf{H}_n \mathbf{H}_m^* - j\omega\varepsilon \mathbf{E}_n \mathbf{E}_m^* + \mathbf{E}_n \mathbf{J}_m^* \right] dS \qquad (3)$$

(2) ÷ (3) を作ると，

$$(\Gamma_m^* + \Gamma_n) \int (\mathbf{E}_{tn} \times \mathbf{H}_{tm}^* + \mathbf{E}_{tm}^* \times \mathbf{H}_{tn}) \mathbf{z}_0 dS = \int (\mathbf{E}_n \mathbf{J}_m^* + \mathbf{J}_n \mathbf{E}_m^*) dS \qquad (4)$$

摂動電流がなければ $\mathbf{J}_n$, $\mathbf{J}_m^*$ は導体表面に平行であり， $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{E}_m^*$ はそれに直角であるので (4) の右辺は消える。また無損失のとき $\Gamma_m^* = -\Gamma_m$ であるから，

$$\Gamma_m \neq \Gamma_n \text{ のとき } \int (\mathbf{E}_{tn} \times \mathbf{H}_{tm}^* + \mathbf{E}_{tm}^* \times \mathbf{H}_{tn}) \mathbf{z}_0 dS = 0 \qquad (5)$$

$$\Gamma_m = \Gamma_n \text{ のとき } \int (\mathbf{E}_{tn} \times \mathbf{H}_{tm}^* + \mathbf{E}_{tn}^* \times \mathbf{H}_{tn}) \mathbf{z}_0 dS = 4P_n \qquad (6)$$

つぎに摂動電流 $\mathbf{J}$ があるときの界は

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathbf{E}_{tn} \\ \mathbf{H}_t &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathbf{H}_{tn} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

のように展開される。 (7) に (5), (6) を適用すると，

$$\int (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_{tn}^* + \mathbf{E}_{tn}^* \times \mathbf{H}_t) \mathbf{z}_0 dS = 4A_n P_n \qquad (8)$$

(4) において，添字の n をとって (8) に代入すると，

$$(\Gamma - \Gamma_n) 4A_n P_n = \int \mathbf{J} \mathbf{E}_n^* \, dS \qquad (9)$$

すなわち本文の (2) である。

輻射科学研究会資料

昭和３９年３月１９日

ラダートロンの理論と最近の試作結果

藤沢和男

大阪大学基礎工学部

1. 序　言

ラダートロンと命名した高出力ミリ波発振管は１９５４年に著者の発明したもので[1]，細隙群を設けた２板の導体板を接近させて対向させ，これを方形空胴共振器の中央部に挿入して共振回路を形成し，上記の対向導体板間に平板状電子ビームを流通させ，細隙群を通じて空胴電界と結合させて発振させるものである（図１）。この場合に対向導体板上に一様な細隙群を設けたものと，長短２種類の細隙群を交互に設けたものの２種類が区別される。前者においては空胴の基本モードは各細隙上の振動電界が同振巾同方向である０モードであるのに対し，後者においてはその基本モードは相隣る各細隙上の振動電界が逆方向で，１つおきに同振巾同方向となるπモードである。そこで前者を０モードラダートロン，後者をπモードラダートロンと呼ぶ。本文においては夫々の場合の振動モードの解析を行い。また電子ビームと細隙群との相互作用についても解析を行い，試作管の発振特性について述べている。

2. ０モードラダートロンの振動モード

図１に０モードラダートロン空胴の構造を示す。各細隙上では電界は細隙に垂直で，その長さ方向に半波長の正弦波的定在波分布をなすものとし，このような細隙電界により励振される空胴内の電磁界を考える。図の如く座標軸をとると空胴内の振動電界成分としては E_y と E_z のみで，これらは磁界成分 H_x と次式で関係づけられる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k^2 E_y &= -j\omega\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial Z} , \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k^2 E_z &= j\omega\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial y} , \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial H^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial Z^2} + k^2 H_x = 0 , \qquad (2)$$

さて各細隙上の振動電界の強度分布として一般に次式を仮定する。すなわち端から数えてｐ番目の細隙上で，

$$\left.\begin{aligned} E_{z,p} &= E_0 \cos\frac{\pi x}{a} \cos\left(\frac{2p-1}{2N} n'\pi\right) , \\ p &= 1, 2, \cdots\cdots, N ; \quad n' = 0, 1, 2, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ここでNは細隙数である。この分布は図2に示すように空胴内にその高さ方向（Z方向）に両端が山になる正弦波的電界分布を仮定し，この分布に対応する各細隙上の電界分布を考えるものである。n'の値により振動モードが区別され，これはモードの次数を与える。n'＝Nの場合には(3)式から分るように各細隙上の振動電界はすべて0になってしまうから以下にはn'≒Nの場合のみを考える。

上記のような細隙の電界分布を仮定すると，細隙をあけた導体板y＝b_1上で次の境界条件を得る。

$$(E_z)_{y=b_1} = \begin{cases} E_0 \cos\frac{\pi x}{a} \cos\left(\frac{2p-1}{2N} n'\pi\right), & \frac{2p-1}{2N} h-d \leqq Z \leqq \frac{2p-1}{2N} h+d \\ 0 \quad , & \text{上記以外の場所} \end{cases} \tag{4}$$

この境界条件のもとに(1)，(2)両式の解を求めると空胴内の電磁界の値として次式が得られる。

$0 \leqq y \leqq b_1$ において

$$H_x = \sum_{n=0}^{\infty} C_{on} \cos\frac{\pi x}{a} \cosh(\gamma_{on} y) \cos\frac{n\pi Z}{h} \quad , \tag{5}$$

$$E_z = j\omega\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_{on} \cos\frac{\pi x}{a} \frac{\gamma_{on} \sinh(\gamma_{on} y)}{k^2 - (\pi/a)^2} \cos\frac{n\pi Z}{h}$$

ここで

$$\gamma_{on}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 - k^2 \tag{6}$$

また

$$C_{on} = \begin{cases} \frac{(-1)^r E_0}{j\omega\mu_0} \frac{1+\delta_{n'0}}{1+\delta_{n,0}} \frac{2Nd}{h} \frac{\sin(n\pi d/h)}{n\pi d/h} \frac{k^2-(\pi/a)^2}{\gamma_{on} \sinh(\gamma_{on} b_1)} \\ \qquad n=(2rN \pm n') > 0 \text{ の場合} \\ 0 \quad , \qquad n=(2rN \pm n') \text{ の場合}, \\ \qquad \text{ただしrは0又は正整数} \end{cases} \tag{7}$$

ここで

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ の時} \\ 0, & i \neq j \text{ の時} \end{cases} \qquad (8)$$

つぎに電子ビームが通る所の2枚の対向導体板間の領域（作用空間）を考える。まず空胴が左右対称（$b_1 = b_1'$）で作用空間の中央面 $y = b_3$ が電界の山になっている場合を考えると，その電磁界の値は(5)式中の $\cosh(\gamma_{on} y)$，$\sinh(\gamma_{on} y)$ をそれぞれ $\sinh[\gamma_{on}(y-b_3)]$，$\cosh[\gamma_{on}(y-b_3)]$ で置換し，係数 C_{on} 中の $\sinh(\gamma_{on} b_1)$ を $\cosh[\gamma_{on}(b_3-b_2)]$ で置換したものになる。

さてp番目の細隙より空胴側および作用空間側を見た入力アドミッタンスをそれぞれ $Y_{c,p}$ および $Y_{i,p}$ とすると，これらは次式で与えられる。

$$Y_{c,p} = -\frac{\iint_{\text{p-th slot}} [E_z H_x]_{y=b_1} dx' dz}{[2d\, E_{z,p}]^2_{x=0}} \qquad (9)$$

$Y_{i,p}$ は上式の被積分関数の値を $y = b_2$ 面上で求め負符号を除けばよい。上式の意味は明らかに細隙を通して送られる電力を細隙電圧の2乗で割ったものである。

上述の電磁界の値を用いてこの入力アドミッタンスを計算すると次式のようになる。

$$\left.\begin{matrix} Y_{c,p} \\ Y_{i,p} \end{matrix}\right\} = j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{Na}{2h}\,\frac{k^2-(\pi/a)^2}{k}\sum_{\substack{n=(2rN\pm n') \\ \geqq 0}}^{\infty}\frac{1+\delta_{n',0}}{1+\delta_{n,0}} \cdot \left(\frac{\sin n\pi d/h}{n\pi d/h}\right)^2 \frac{1}{\gamma_{on}} \cdot \left\{\begin{matrix} \coth(\gamma_{on} b_1) \\ \tanh[\gamma_{on}(b_3-b_2)] \end{matrix}\right\} \qquad (10)$$

そして細隙自身は横巾がa，高さが2d，長さが（$b_2 - b_1$）なる短い長さの方形導波管と見做され，(9)式と同じような定義による次式のような特性アドミッタンス Y_{eo} と管内波長 λ_g とを持つ。

$$Y_{so} = \frac{a}{4d}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\sqrt{k^2-(\pi/a)^2}}{k} \qquad (11)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_g} = \sqrt{k^2-(\pi/a)^2} \qquad (12)$$

そして上記の $Y_{c,p}$ と $Y_{i,p}$ とはこの細隙部分を通じて次式により結ばれる。

$$-Y_{c,p} = Y_{so}\,\frac{Y_{i,p} + jY_{so}\tan\left[2\pi(b_2-b_1)/\lambda_g\right]}{Y_{so} + jY_{i,p}\tan\left[2\pi(b_2-b_1)/\lambda_g\right]} \qquad (13)$$

ここで（$b_2 - b_1$）が波長に比べて非常に小さいことに注目して次の近似式が得られる。

$$Y_{c,p} + Y_{i,p} + jY_{so}\sqrt{k^2-(\pi/a)^2}\,(b_2-b_1) \simeq 0 \qquad (14)$$

これが細隙におけるアドミッタンス整合条件である。

この式は実際の値を入れてみると p には無関係である。故に任意の一つの細隙について両側のアドミッタンスを整合さすと他のすべての細隙についてアドミッタンス整合条件が自動的に満足され，求める解が得られることになる。(14)式をkについて解けば n' 次モードの共振周波数が求まる。次には各振動モードにつき詳しい考察を進めて行く。

ここではすべて

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 < k^2 < \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \qquad (15)$$

なる周波数範囲を考える。

まず $n \geqq 1$ なる高次モードを考えると。上記の周波数範囲に対しては(6)式の γ_{on} は全て実数である。故に(10)式の $Y_{c,p}$ と $Y_{i,p}$ とは共に容量性のサセプタンスになり(14)式を満足することが

できない。すなわち(15)式で与えられるような周波数範囲では高次モードは存在しないことが明らかである。そこで以下にはn'＝0とおいて0モードのみを考えて行く。

0モードに対しては次の諸関係式が成立する。

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{oo} = j\,2\pi/\lambda_g \quad , \quad \coth(\gamma_{oo} b_1) = -j \cot(2\pi b_1/\lambda_g) \\ &\tanh\left[\gamma_{oo}(b_3-b_2)\right] \simeq \gamma_{on}(b_3-b_2) \\ &\gamma_{on} \simeq n\pi/h \quad , \quad (r \geqq 1 \text{に対し}), \\ &\coth(\gamma_{on} b_1) \simeq \tanh\left[\gamma_{on}(b_3-b_2)\right] \simeq 1 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

(10)式及び(16)式を用いて(14)式を書き直すと次式が得られる。

$$-jY_o \cot(2\pi b_1/\lambda_g) + Y_i + Y_f + Y_s \simeq 0 \qquad (17)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} &Y_o = \frac{Na}{2h}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\,\frac{\sqrt{k^2-(\pi/a)^2}}{k} \quad , \quad Y_i = j\omega C_i + \frac{1}{j\omega L_i}, \\ &Y_f = j\omega C_f + \frac{1}{j\omega L_f} \quad , \quad Y_s = j\omega C_s + \frac{1}{j\omega L_s}, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

で，上式中の各常数は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \varepsilon_0 \frac{a}{2} \frac{b_3-b_2}{h/N} \quad , \qquad L_i = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{C_i}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \quad , \\ C_f &= \varepsilon_0 \frac{a}{2} \frac{4d}{h/N} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2rN\pi d/h)}{(2rN\pi d/h)^3} \quad , \quad L_f = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{C_f}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \quad , \\ C_s &= \varepsilon_0 \frac{a}{2} \frac{b_2-b_1}{2d} \quad , \qquad L_s = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{C_s}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

明かに Y_0 は空胴をN分割して細隙1個を含む部分空胴を考えた場合のその特性アドミッタンス，Y_i は同じく部分作用空間の内で対称面 $y=b_3$ で2分された部分のアドミッタンス，Y_f は細隙近傍のfringing field に対応するアドミッタンス，Y_s は細隙のアドミッタンスである。このように考えると(17)式のもつ物理的意味は極めて明瞭である。これまでは空胴が左右対称（$b_1=b_1'$）で，作用空間の中央面が電界の山である場合につき考えてきたが，(17)式の物理的意味からこれを空胴が左右非対称の一般の場合に拡張することは極めて容易で，この一般の場合に対し(17)式に代るものとして次式が得られることは明らかである。

$$-Y_0\left(\cot\frac{2\pi b_1}{\lambda_g}+\cot\frac{2\pi b_1'}{\lambda_g}\right)+2(Y_i+Y_f+Y_s)\simeq 0 \quad . \qquad (20)$$

故に，この場合の等価回路表示として図3に示すようなものが考えられる。図中の $Y^{(e)}$ は後節で導かれる電子アドミッタンスで，細隙間の電子走行角の適当な値に対して負性コンダクタンスを持ち，これにより発振が可能になる。(20)式による共振周波数の計算値を実測値と比較した1例を図4に示すが両者は非常に良く一致する。b_1' を変えることにより共振周波数が大巾に変化するので，このOモードラダートロンは相当な範囲の機械的同調が可能である。

3．π モードラダートロンの振動モード

π モードラダートロンは図5に示すように長短2種類の細隙群を交互に用いる点で0モードラダートロンと異っている。前節と同様に各細隙上にはその長さ方向に半波長の正弦波的電界分布があるとすると，細隙を設けた導体板 $y=b_1$ 上で次の境界条件を生ずる。

$$\left[E_z\right]_{y=b_1}=\left[E_z^{(1)}\right]_{y=b_1}+\left[E_z^{(2)}\right]_{y=b_1}. \tag{21}$$

ここで

$$\left[E_x^{(1)}\right]_{y=b_1}=\begin{cases} E_0\cos\dfrac{\pi x}{a}\cos\left(\dfrac{p}{N}n'\pi\right), & ph/N-(1-\delta_{p,0})d\leqq Z\leqq ph/N+(1-\delta_{p,n})d \\ & p=0,1,\cdots\cdots N, \\ 0, & \text{上記以外の場合} \end{cases} \tag{22}$$

$$\left[E_z^{(2)}\right]_{y=b_1}=\begin{cases} -E_1\cos\dfrac{\pi x}{a_1}\cos\left(\dfrac{2q-1}{2N}n'\pi\right), & -\dfrac{a_1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{a_1}{2}, \\ \dfrac{2q-1}{2N}h-d\leqq Z\leqq\dfrac{2q-1}{2N}h+d, & q=1,2,\cdots\cdots N, \\ 0, & \text{上記以外の場合} \end{cases} \tag{23}$$

上記の細隙電界分布を図示すると図6のようになる。明らかに基本モードの $n'=0$ は π モードになっている。

さて Maxwell の方程式は線形方程式であるから，この場合の解は境界条件がそれぞれ(22)式および(23)式で単独に与えられる場合の解の和で与えられる。それぞれの解を(1)及び(2)なる肩付の添数で区別すると，次式が得られる。

$0\leqq y\leqq b_1$ において

$$\left.\begin{aligned} H_x^{(1)}&=\sum_{n=0}^{\infty}C_{on}^{(1)}\cos\frac{\pi x}{a}\cosh(\gamma_{on}y)\cos\frac{n\pi Z}{h}, \\ E_z^{(1)}&=j\omega\mu_0\sum_{n=0}^{\infty}C_{on}^{(1)}\cos\frac{\pi x}{a}\frac{\gamma_{on}\sinh(\gamma_{on}y)}{k^2-(\pi/a)^2}\cos\frac{n\pi Z}{h} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} H_x^{(2)}&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{mn}^{(2)}\cos\left(\frac{2m+1}{a}\pi x\right)\cosh(\gamma_{mn}y)\cos\frac{n\pi Z}{h}, \\ E_z^{(2)}&=j\omega\mu_0\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{mn}^{(2)}\cos\left(\frac{2m+1}{a}\pi x\right)\frac{\gamma_{mn}\sinh(\gamma_{mn}y)}{k^2-\left[(2m+1)\pi/a\right]^2} \\ &\quad\cdot\cos(n\pi Z/h). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ここで

$$\gamma_{mn}^2=\left(\frac{2m+1}{a}\pi\right)^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-k^2 \tag{26}$$

また

$$C_{on}^{(1)}=(-1)^rC_{on},\quad n=(2rN\pm n')\geqq 0\text{の場合} \tag{27}$$

但し $r=0,1,2,\cdots$

$$C_{mn}^{(2)} = \begin{cases} -\dfrac{(-1)^r}{j\omega\mu_0}\ \alpha_m E_1 \dfrac{1+\delta_{n',0}}{1+\delta_{n,0}}\ \dfrac{\sin(n\pi d/h)}{n\pi d/h}\ \dfrac{k^2-\{(2m+1)\pi/a\}^2}{\gamma_{mn}\ \sinh(\gamma_{mn}\ b_1)}\ , \\ \qquad n=(2rN\pm n')\geqq 0 \text{ の場合} \\ \qquad \text{但し } r=0,1,2,\cdots\cdots \\ 0\ , \qquad n\neq(2rN\pm n') \text{ の場合} \end{cases} \tag{28}$$

ここで

$$\alpha_m = \frac{\dfrac{4\pi}{a\,a_1}\cos\left\{(2m+1)\dfrac{a_1\pi}{2a}\right\}}{\left(\dfrac{\pi}{a_1}\right)^2-\left\{(2m+1)\dfrac{\pi}{a}\right\}^2}\ , \qquad m=0,1,2,\cdots\cdots \tag{29}$$

特に $m=0$ の場合には次の近似式が成立する。

$$\alpha_0 \simeq 1\ \ \frac{a-a_1}{2a} \simeq \sqrt{\frac{a_1}{a}} \tag{30}$$

そして空胴内の合成場は次式から求まる。

$$\left.\begin{aligned} H_x &= H_x^{(1)} + H_x^{(2)} \\ E_z &= E_z^{(1)} + E_z^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

この式を用いて(9)式を計算すれば長短各細隙から空胴側を見た入力アドミッタンスの値を得る。その結果は次式のようになる。

p番目の長細隙上で

$$Y_{c,p} = j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\ \frac{Na}{2h}\ \frac{k^2-(\pi/a)^2}{k}\ \sum_{\substack{n=(2rN\pm n')\\ \geqq 0}}^{\infty} \frac{1+\delta_{n',0}}{1+\delta_{n,0}}\left\{1-(-1)^r\frac{\alpha_0 E_1}{E_0}\right\} \cdot\left\{\frac{\sin(n\pi d/h)}{n\pi d/h}\right\}^2\ \frac{\coth(\gamma_{0n}\ b_1)}{\gamma_{0n}}\ , \tag{32}$$

q番目の短細隙上で

$$\begin{aligned} Y_{c,q} = {} & j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\ \frac{Na}{2h}\ \frac{k^2-(\pi/a)^2}{k}\ \sum_{\substack{n=(2rN\pm n')\\ \geqq 0}}^{\infty} \alpha_0^2\ \frac{1+\delta_{n',0}}{1+\delta_{n,0}}\left\{1-(-1)^r\frac{E_0}{\alpha_0 E_1}\right\} \\ & \cdot\left\{\frac{\sin(n\pi d/h)}{n\pi d/h}\right\}^2\ \frac{\coth(\gamma_{0n}b_1)}{\gamma_{0n}} \\ & +j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\ \frac{Na}{2h}\ \sum_{m=1}^{\infty}\ \sum_{\substack{n=(2rN\pm n')\\ \geqq 0}}^{\infty} \alpha_m^2\ \frac{1+\delta_{n',0}}{1+\delta_{n,0}}\ \frac{k^2-\{(2m+1)\pi/a\}^2}{k} \\ & \cdot\left\{\frac{\sin(n\pi d/h)}{n\pi d/h}\right\}^2\ \frac{\coth(\gamma_{mn}\ b_1)}{\gamma_{mn}}\ . \end{aligned} \tag{33}$$

つぎに各細隙から作用空間側を見た入力アドミッタンス $Y_{i,p}$ と $Y_{i,q}$ も同様にして求められ，その結果は空胴が左右対称（$b_1 = b_1'$）の場合，(32)，(33) 両式中の $\coth(\gamma_{mn} b_1)$ の代りに $\tanh[\gamma_{mn}(b_3 - b_2)]$ を代入したものになる（m＝0の場合も含めて）。そして前節同様にこの空胴側を見た入力アドミッタンスと作用空間側を見た入力アドミッタンスが細隙部分を通じて結びつけられ，次のアドミッタンス整合条件を生ずる。

$$Y_{c,p} + Y_{i,p} + j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{k^2 - (\pi/a)^2}{k}\,\frac{a(b_2-b_1)}{4d} \simeq 0 , \qquad (34)$$

$$Y_{c,q} + Y_{i,q} + j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{k^2 - (\pi/a_1)^2}{k}\,\frac{a_1(b_2-b_1)}{4d} \simeq 0 , \qquad (35)$$

この2つの式は上述の各アドミッタンスの値を代入してみれば分る如くそれぞれp及びqには無関係である。すなわち任意の1つの長細隙と短細隙とについてその両側のアドミッタンスを整合させれば，他のすべての細隙についてアドミッタンス整合条件が自動的に満足される。かくしてこの場合の解が得られたことになる。(34)，(35) 両式を連立させて解けば E_1/E_0 と共振周波数の値が求まることは明らかである。ここで注意すべきことはこのように各細隙について整合条件が満足される解が得られるのは (22)式と (23)式とで同一の n′ の値を用いた場合だけであって，この両式中の n′ の値が異る場合にはこのような解は存在しない。

次にまず基本モードたるπモード（n′＝0）について考える。上記の各アドミッタンスの表現式中で n′＝0 とおき，(16)式で与えられる諸関係式を用い (34)式を書き直すと次式が得られる。

$$\begin{aligned} &E_b\left[Y_{c,p} + Y_{i,p} + j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{k^2 - (\pi/a)^2}{k}\,\frac{a(b_2-b_1)}{4d}\right] \\ &\simeq (E_b - \alpha_0 E_1)\left[-jY_0 \cot(2\pi b_1/\lambda_g) + Y_i\right] + E_b(Y_f + Y_s) - E_1 Y_t \\ &\simeq 0 \end{aligned} \qquad (36)$$

ここで Y_0 , Y_i , Y_f , Y_s は (18)式で与えられるものと同一である。また Y_t は長短両細隙間のトランスファーアドミッタンスで次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= j\omega C_t + \frac{1}{j\omega L_t} \\ C_t &= \varepsilon_0 \frac{\sqrt{a a_1}}{2}\,\frac{4d}{h/N}\,\alpha_t \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{\sin^2(2rN\pi d/h)}{(2rN\pi d/h)^3} , \\ L_t &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{C_t}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

つぎに (35)式中で (16)式の他につぎの近似を行い

$$\left.\begin{aligned} &k^2 - [(2m+1)\pi/a]^2 \simeq (\pi/a)^2 - [(2m+1)\pi/a]^2 , \\ &\gamma_{mo} \simeq (2\pi/a)\sqrt{m(m+1)} , \quad \coth(\gamma_{mo} b_1) \simeq 1 , \\ &\tanh[\gamma_{mo}(b_3 - b_2)] \simeq \gamma_{mo}(b_3 - b_2) , \\ &\gamma_{mn} \simeq n\pi/h . \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

(35)式に代入してこれを書き直すと次式を得る。

$$E\Big[Y_{c,g}+Y_{i,g}+j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\ \frac{k^2-(\pi/a_1)^2}{k}\ \frac{a_1(b_2-b_1)}{4d}$$

$$\simeq\ \alpha_0(\alpha_0E_1-E_0)\Big[-jY_0\cot\left(2\pi b_1/\lambda_g\right)+Y^i\Big]$$

$$+E_1\alpha_0^2Y_f-E_0Y_t+E_1\,j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\ \frac{k^2-(\pi/a)^2}{k}\ \frac{a_1(b_2-b_1)}{4d}$$

$$-E_1\,j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\ \frac{Na_1}{2h}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_m}{\alpha_0}\right)^2 m(m+1)\Big[\frac{1}{\gamma_{mo}}+(b_3-b_2)+4d\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin^2(2rN\pi d/h)}{(2rN\pi d/h)^3}\Big]$$

$$\simeq\alpha_0(\alpha_0E_1-E_0)\Big[-jY_0\cot\left(2\pi b_1/\lambda_g\right)+Y_i\Big]+E_1(Y'_f+Y'_s)-E_0Y_t \qquad (39)$$

$$\simeq\ 0$$

ここで

$$Y'_f=\alpha_0^2\ Y_f\ , \qquad (40)$$

$$\left.\begin{aligned} Y'_s&=j\omega C'_s+\frac{1}{j\omega L'_s}\\ C'_s&=\alpha_0^2\ C_s\ ,\qquad L'_s=\frac{\varepsilon_0\mu_0}{C'_s}\left(\frac{a'_1}{\pi}\right)^2\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

明かに Y'_f は短細隙の近傍の Fringing field に対応し，Y'_s は短細隙の等価細隙アドミッタンスである。上式中の a'_1 は短細隙の有効長で次式で与えられる。

$$\left(\frac{\pi}{a'_1}\right)^2\simeq\left(\frac{\pi}{a_1}\right)^2+\frac{2Nd}{h(b_2-b_1)}\Big\{\frac{2\pi}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{m(m+1)}\left(\frac{\alpha_m}{\alpha_0}\right)^2$$

$$+\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\sum_{m=1}^{\infty}m(m+1)\left(\frac{\alpha_m}{\alpha_0}\right)^2\Big[(b_3-b_2)+4d\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin(2rN\pi d/h)}{(2rN\pi d/h)^3}\Big]\Big\} \qquad (42)$$

さて(36)式と(39)式のもつ物理的意味は極めて明瞭である。この両式は空胴が左右対称（$b_1=b'_1$）である場合に導かれたものであるが，その物理的意味から洞察により空胴が左右非対称の一般の場合にも拡張することは容易である。この拡張した式は次のようになる。

$$(E_0-\alpha_0E_1)\Big[-jY_0\Big(\cot\frac{2\pi b_1}{\lambda_g}+\cot\frac{2\pi b'_1}{\lambda_g}\Big)+2Y_i\Big]+2E_0(Y_f+Y_s)-2E_1Y_t$$

$$\simeq\ 0 \qquad (43)$$

$$\alpha_0(\alpha_0E_1-E_0)\Big[-jY_0\Big(\cot\frac{2\pi b_1}{\lambda_g}+\cot\frac{2\pi b'_1}{\lambda_g}\Big)+2Y_i\Big]+2E_1(Y'_f+Y'_s)-2E_0Y_t$$

$$\simeq\ 0 \qquad (44)$$

この2つの連立方程式を解くことによりπモードの共振周波数と E_1/E_0 とを決定することができる。５０ＧＣ帯の３つの空胴について数値計算した例を図７及び図８に示す。図７の１つの場合には発振周波数がプロットしてあるが，共振周波数計算値とよく一致している。

なお(43)，(44)両式から容易に図９に示す如きπモードの等価回路を得る。図中の $Y_0^{(e)}$，$Y_1^{(e)}$ $Y_t^{(e)}$ はそれぞれ長細隙の電子アドミッタンス，短細隙の電子アドミッタンス，及び長短両細隙間のトランスファー電子アドミッタンスで次節で誘導されている。

以上は基本モードたるπモードについての議論であるが，次には $n \geqq 1$ なる高次モードについて述べる。この場合も前と同様に (32) ～ (35) 式よりその共振周波数と E_1/E_0 を決定することができる。我々が高次モードに関心を持つのはπモードとの分離の観点からであるから，高次モードについての詳しい解析は省略し，ここでは数値計算した結果だけを述べる。前出の図7には50 GC 帯の3つの空胴について高次モードの共振周波数がプロットしてある。この図面からわかるように高次モードの共振周波数は空胴の厚み b'_1 によって殆んど変化せず，しかもその変化の方向はπモードのそれとは逆である。πモードの電磁界がある程度空胴全体に分布しているのに反し，高次モードのそれは殆んど細隙付近にのみ集中していると考えられ，従って b'_1 が非常に小さい値をとる時にのみ b'_1 の影響を受けると考えられる。

4．細隙群と電子ビームとの相互作用

本節では細隙群と電子ビームとの相互作用について考察する。0モードの場合に対しては前に断片的に発表したことがあり[2]，またHechtel により詳しく論じられた[3]。ここではπモードの場合も含めて一般的に取り扱つてみる。

解析を進めるに当って次の諸記号を定義する。

$\bar{V}_b$ = 直流ビーム電圧　　$\bar{I}_b$ = 直流ビーム電流

$\bar{G}_b = \bar{I}_b/\bar{V}_b$　　$\bar{\theta}$ = 相隣る細隙間の電子走行角

I_c = 細隙における空胴の誘導電流

β_0 , β_1 = 長細隙および短細隙の有効間隙係数

$V_0 = 2dE_0$ = 長細隙の振動電圧振巾

$V_1 = 2dE_1$ = 短細隙の振動電圧振巾

まず0モードの場合につき電子ビームと細隙電界との相互作用につき考察を進める。小振巾動作を仮定すると V_0 の2乗以上の項を省略でき，各細隙の変調効果をそれぞれ独立に計算して重畳し細隙群の総合効果を求めることができる。普通の直進型クライストロンの場合と同じく第2細隙に生ずる誘導電流 I_{c2} は第1細隙で受けた速度変調ビームの集群効果によるもので次式のようになる。

$$I_{c2} = \frac{1}{2}\beta_a^2 \bar{G}_b V_0 \quad j\bar{\theta} e^{-j\bar{\theta}} \tag{45}$$

次に第3細隙に生ずる誘導電流は第1細隙で受けた速度変調に基く項と，第2細隙で受けた速度変調による項の和として次式で与えられる。

$$I_{c3} = \frac{1}{2}\beta_0^2 \bar{G}_b V_0 \left(j2\bar{\theta} e^{-j2\bar{\theta}} + j\bar{\theta} e^{-j\bar{\theta}} \right) \tag{46}$$

以下同様な考え方で各細隙における誘導電流を求めることができる。そしてこのような各細隙の誘導電流の総和をとり，これをNで割って部分空胴に含まれる1個の細隙についての平均値を求め，更にこれを細隙電圧で割ることにより電子アドミッタンスを求めることができる。

$$Y^{(e)} = \frac{1}{V_0 N} \sum_{p=1}^{N} I_{cp} \equiv \frac{1}{2} \beta_0^2 \bar{G}_b f(\bar{\theta}, N) . \qquad (47)$$

ここで

$$f(\bar{\theta}, N) = \frac{N-1}{N} j\bar{\theta} e^{-j\bar{\theta}} + \frac{N-2}{N} j2\bar{\theta} e^{-j2\bar{\theta}} + \cdots + \frac{1}{N} j(N-1)\bar{\theta} e^{-j(N-1)\bar{\theta}}$$
$$\equiv f_r + j f_i \qquad (48)$$

fは正規化電子アドミッタンスで$2\pi(1-1/N) < \theta < 2\pi$の範囲で大きな負値をとり，負性電子コンダクタンスを与え発振の原動力となる。表1には負性電子コンダクタンスが最大になる時の最適電子走行角$\bar{\theta}_{op}$とfの実数部及び虚数部の値を示す。最大負性電子コンダクタンスは近似的に$(N-1)^2$に比例して増大するので，Nが大きい方が発振し易いことが

N	$\bar{\theta}_{op}$	f_r	f_i
2	281.5°	− 2.43	0.49
4	323.1°	−11.90	3.48
6	335.5°	−28.02	8.33
8	341.6°	−51.22	15.09
10	345.3°	−81.09	23.78

表1．正規化電子アドミッタンスfの実数部が負の最大値をとる時の電子走行角$\bar{\theta}_{op}$の値とfの値

わかる。

次にπモードの場合に対し同様な解析を行ってみる。

以下長細隙の諸量には(1)なる肩付の添数を，短細隙のそれには(2)なる肩付の添数をつけて区別すると各細隙上の誘導電流は次式のようになる。※

※ 前節までは図5および図6から明かなようにπモード空胴の両端にある長細隙の巾は普通のものの半分に選んでいる。併し製作上の都合もあつて実際の空胴は両端も含めて一様な巾の(N+1)個の長細隙を用いる。そこで本節ではこのように(N+1)個の一様な長細隙群がある場合について解析を進める。

$$I_{c1}^{(2)} = \frac{1}{2}\beta_e\beta_1\bar{G}_b V_o \; j\bar{\theta}e^{-j\bar{\theta}} \qquad q=1 \text{ の細隙上で}$$

$$I_{c1}^{(1)} = \frac{1}{2}\beta_0^2\bar{G}_b V_o \; j2\bar{\theta}e^{-j2\bar{\theta}} - \frac{1}{2}\beta_0\beta_1\bar{G}_b V_1 j\bar{\theta}e^{-j\bar{\theta}}$$

$$p=1 \text{ の細隙上で}$$

$$I_{c2}^{(2)} = \frac{1}{2}\beta_0\beta_1\bar{G}_b V_o(j\bar{\theta}e^{-j\bar{\theta}} + j3\bar{\theta}e^{-j3\bar{\theta}}) - \frac{1}{2}\beta_1^2\bar{G}_b V_1 j2\bar{\theta}e^{-j2\bar{\theta}}$$

$$q=2 \text{ の細隙上で}$$

$$I_{c2}^{(1)} = \frac{1}{2}\beta_0^2\bar{G}_b V_o(j2\bar{\theta}e^{-j2\bar{\theta}} + j4\bar{\theta}e^{-j4\bar{\theta}}) - \frac{1}{2}\beta_0\beta_1\bar{G}_b V_1(j\bar{\theta}e^{-j\bar{\theta}} + j3\bar{\theta}e^{-j3\bar{\theta}})$$

$$p=2 \text{ の細隙上で}$$

— — — — — — — — — —

故に全体の空胴をN分割して得られる部分空胴に含まれるそれぞれ1個づつの長細隙および短細隙の平均誘導電流として次式が得られる。

$$\frac{1}{N}\sum_{p=o}^{N} I_{cp}^{(1)} = \frac{1}{2}\beta_0^2\bar{G}_b V_o \frac{N+1}{N} f(2\bar{\theta}, N+1) - \frac{1}{2}\beta_0\beta_1\bar{G}_b V_1 g(\bar{\theta}, N) \qquad (49)$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{q=1}^{N} I_{cq}^{(2)} = \frac{1}{2}\beta_1^2\bar{G}_b V_1 f(2\bar{\theta}, N) - \frac{1}{2}\beta_0\beta_1\bar{G}_b V_o g(\bar{\theta}, N) \qquad (50)$$

ここで

$$g(\bar{\theta}, N) = j\bar{\theta}e^{-j\theta} + \frac{N-1}{N} j3\bar{\theta}e^{-j3\bar{\theta}} + \cdots + \frac{1}{N}j(2N-1)\bar{\theta}e^{-j(2N-1)\bar{\theta}} \qquad (51)$$
$$= g_r + jg_i$$

(49)，(50) 両式の右辺のアドミッタンス係数より長細隙の自己電子アドミッタンス $Y_o^{(e)}$，短細隙の自己電子アドミッタンス $Y_1^{(e)}$，長短両細隙間のトランスファー電子アドミッタンス $Y_t^{(e)}$ を次式のように定義することができる。

$$Y_o^{(e)} = \frac{1}{2}\beta_0^2\bar{G}_b\frac{N+1}{N} f(2\bar{\theta}, N+1),$$
$$Y_1^{(e)} = \frac{1}{2}\beta_1^2\bar{G}_b f(2\bar{\theta}, N), \qquad (52)$$
$$Y_t^{(e)} = \frac{1}{2}\beta_0\beta_1\bar{G}_b g(\bar{\theta}, N)$$

そしてOモードの場合には $Y^{(e)}$ が図3に示すように等価回路上に接続され，π モードの場合には $Y_o^{(e)}$，$Y_1^{(e)}$，$Y_t^{(e)}$ である。これより発振特性を完全に解明し得る。なお正規化トランスファー電子アドミッタンスgの値の実数部 g_r が最大値をとる時の $\bar{\theta}$ の値 $\bar{\theta}'_{op}$ とその時の g_r と g_i の値を表2に示す。表1と表2とより次の近似式が成立していることがわかる。

$$\bar{\theta}'_{op} \simeq \frac{1}{2}\bar{\theta}_{op} \qquad (53)$$

そこで $\bar{\theta} \simeq \bar{\theta}'_{op}$ の時(49),(50)両式の誘導電流の実数部はそれぞれ近似的に負の最大値をとり，従つて最大のマイクロ波変換電力が得られる。

N	$\bar{\theta}'_{op}$	gr	g_i
2	149.6°	5.24	− 2.17
4	163.6°	17.28	− 5.84
6	168.5°	36.08	−11.52
8	171.3°	61.70	−18.55
10	173.0°	94.09	−28.67

表2．正規化トランスファー電子アドミッタンス gの実数部が正の最大値をとる時の電子走行角 $\bar{\theta}'_{op}$の値と gの値。

5．発振特性及び考察

0モードラダートロンとπモードラダートロンとを比較した場合に目立つ相異点として，図4と図7とを比べればわかるように空胴の厚み b'_1 を変化した場合の共振周波数の変化が，0モードの場合の方がπモードの場合に比べてはるかに急激であることである。このことはπモードの場合の空胴内の電磁界のエネルギー密度が小さいことを意味している。これはπモードラダートロンの長短両細隙上の振動電界が逆方向で，それによる電磁界が空胴内で互いに打消し合うためである。空胴内の蓄積エネルギー密度が小さいことは空胴壁損が小さいことを意味し，従ってπモードの方が発振し易い訳である。またπモードラダートロンは同じ空胴高に対し0モードラダートロンの場合の約2倍の数の細隙を用い得るから，この点からも非常に発振し易くなる。従って空胴と出力導波管との結合も十分密にできるので，比較的高い回路能率で低い負荷Qの空胴を使用でき，電子同調範囲が広くとれる利点がある。

0モードラダートロンは上述のように機械的同調が容易であるが，十分な動作をするためには十分な高密度平板状電子流を流す必要がある。電子銃の設計さえ良好であれば大出力が得られ，機械的同調範囲も広い。著者の研究室では空胴固定型の組立管で，V_b = 2.0 ～ 2.2 kV，I_b = 100 ～ 120 mA の時最高出力約7 Wが得られている[4]。この時のビーム透過率は90％位で最高電子流密度16 A／cm^2が得られた。また電子同調範囲は30～40 MC 位であった。現在この0モードラダートロンは沖電気工業株式会社で製品化されており，34 G.C帯でV_b = 1.7 ～ 1.9 KV，I_b = 100 ～ 140 mA ，最高出力10～15 W，電子同調範囲60 MC，機械的同調範囲2 G.C以上の性能のものが作られている[5]。また最近三菱電機株式会社でもほぼこれに近い性能の試作管が得られた[6]。今後0モードラダートロンがどこまで波長を短縮できるかということは，すべて高密度平板状電子ビームの形式の問題にかかっており，この意味で電子銃の改良が非常に重要である。

次に　モードラダートロンの発振特性について述べる。発振特性として重要なのは出力と同調範囲の2点であって，この場合この両者に重要な影響を及ぼすのは長短両細隙長の比a_1/aで

ある。図7にはa/a= 2.5/3.5 ，2.6/3.4 ，2.7/3.3 の3つの場合の共振周波数が計算してあるが，この図面よりわかるようにa/aが1に近づく程機械的同調範囲は狭くなり，πモードと高次モードとの周波数差も小さくなる。他方図8よりわかるようにこのa/aの値が1に近づく程R/Qの値は大きくなり，従って発振し易くなりまた発振出力も増大する。そこで総合的にみてa/a として適当な値を選ぶ必要がある訳で，図7に示す3つの例ではa/a = 2.6/3.4 の場合が最も適当のように思われる。　この場合を組立管で発振実験を行つたところ図10に示すような発振特性が得られた。この時の発振周波数を計算値と比較したものが図7に示してある。この試作管はV_b= 1.9 ～ 2.6 kVで発振し，I_b = 160 mA位で最高出力約10Wが得られた※。この時のビーム透過率は75%位で，最高電子流密度17A/cm^2が得られた。電子同調範囲は300MC位あり，0モードラダートロンに比べてはるかに広いことが注目される。また機械的同調範囲も2.5 G.C 以上あり，総合特性は非常に良好である。

6. 結　言

以上により0モードラダートロンとπモードラダートロンのそれぞれについて振動モードおよび電子流と細隙群との相互作用について解析がなされ，その等価回路表示が導かれ，その動作が解明された。これにより各振動モードの共振周波数を数%の精度で計算できるようになり，ラダートロンの設計理論が確立されたと言える。また50 G.C帯πモードラダートロンの試作に成功し，最高出力10W，電子同調範囲300M C，機械的同調範囲2.5 G.C を得たが，これをほぼ同じビーム電圧で動作する普通の反射型クライストロンと比較すると，出力において100倍以上，電子同調範囲で2倍以上になっており，総合特性は仲々優秀である。現在使用している電子流密度が最高17 A/cm^2 位であることを考えると，電子銃の改良により今後まだ大巾に波長短縮ならびに高出力化の余地を残していると思われ，今後の発展に期待がもてる。

終りに本研究の数値計算と実験遂行に当られた上村鉄雄助手と島田充浩技官に深く感謝する。また本研究が一応の成果をあげるまでの前段階の下積みの長い研究期間において貴重な貢献をされたかつての協力者たる金児壮至姫路工大助教授と野中忠彦三菱電機社員の両氏に心から感謝するものである。なお本研究遂行に当っては第2回東洋レーヨン科学技術研究助成金の補助を受け，また沖電気工業株式会社と三菱電機株式会社より御援助頂いたことを記して深く謝意を表わすものである。

※　電力測定は方向性結合器，精密級可変抵抗減衰器，日立電子製サーミスタマウントの組合せ回路により行い，サーミスタマウントの変換能率を70%とした（公称値）。これによる電力の指示値7W以上で出力導波管中にマッチの軸を挿入すると10秒間位で点火するところをみると，この指示値は高過ぎる値ではないであろう。

文　　献

(1)藤沢：特許第234537号，特公昭３２－４７２（昭３２－０１）

(2)藤沢：＂新型１空胴多間隙クライストロンの設計＂電気通信学会大会（昭３２－１１）

(3)R. Hechtel ： " Das Vielschlitzklystron ein Generator für kurze electro maßnetische Wellen,"
Tele.– Röhre. 35 , p .5, (sept 1958)

(4)藤沢，金児，野中：＂５０GC 帯大出力平板ビーム多間隙クライストロン (Laddertron) の組立管の試作＂電気通信学会マチクロ波真空管委員会（昭３６－０５）

(5)中島，新井，溝上，脇：＂３４GC 帯ラダートロン＂，沖電気時報，30,4, p.9, (和38)

(6)＂３４GC 帯ラダートロン＂，三菱電機中研ニュース，109, .3, (昭３８－１１)

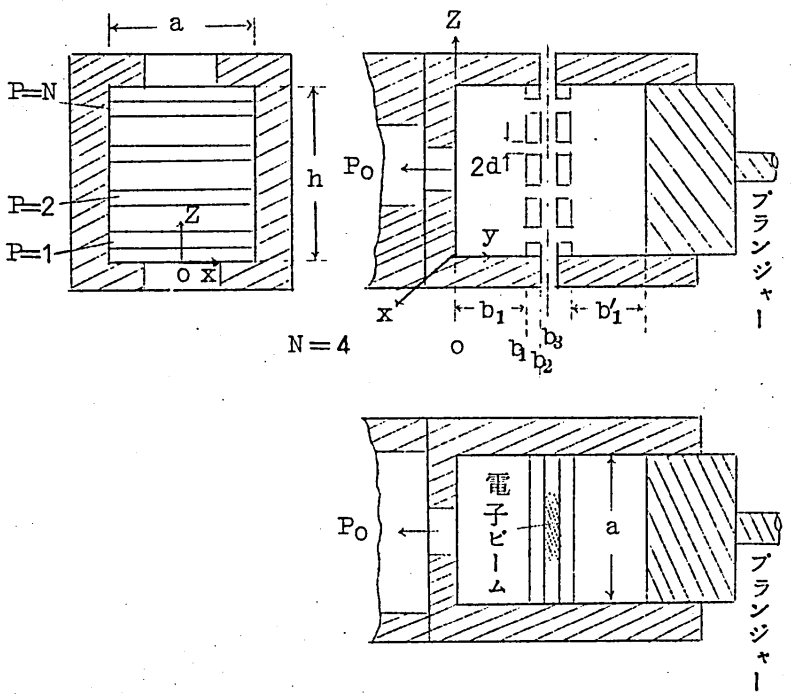


図1　0モードラダートロン空胴

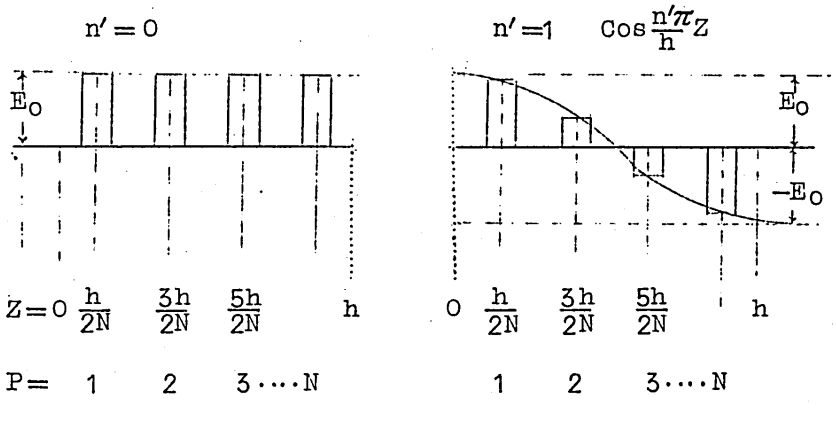


図2　0モードラダートロンの細隙電界分布

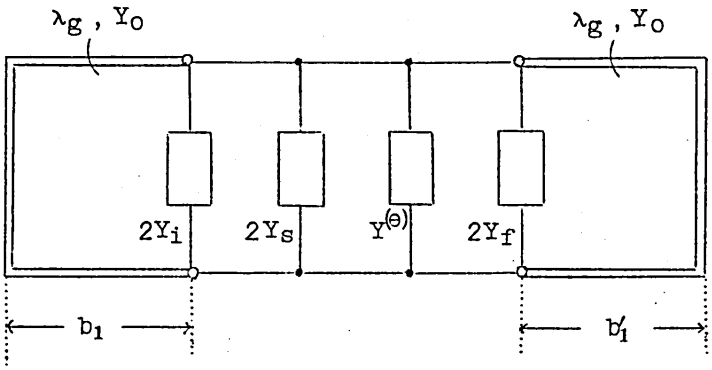


図３　０モードラダートロンの等価回路

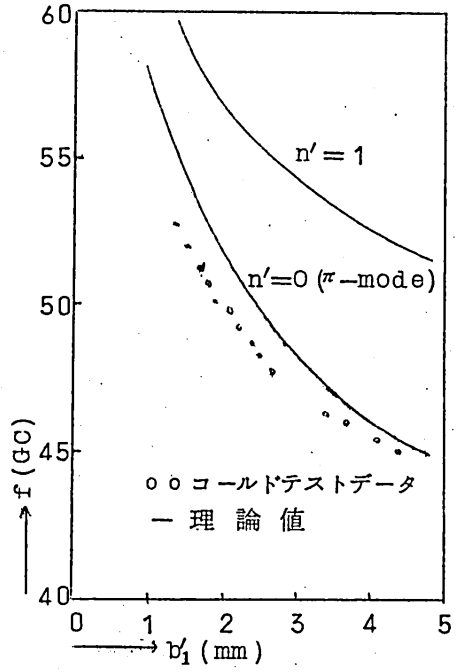


図４　０モードラダートロン空胴の共振周波数の１例

a＝3.8mm , h＝5.76mm , b_1＝1.5mm , N＝12

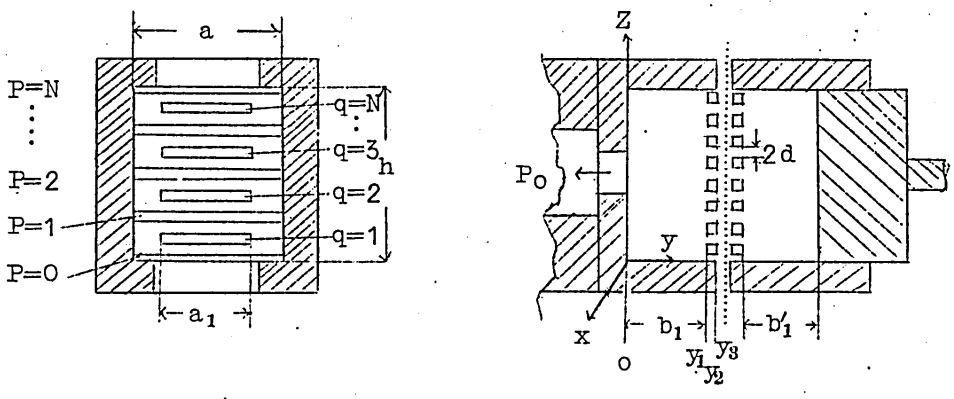


図5　π モードラダートロン空胴

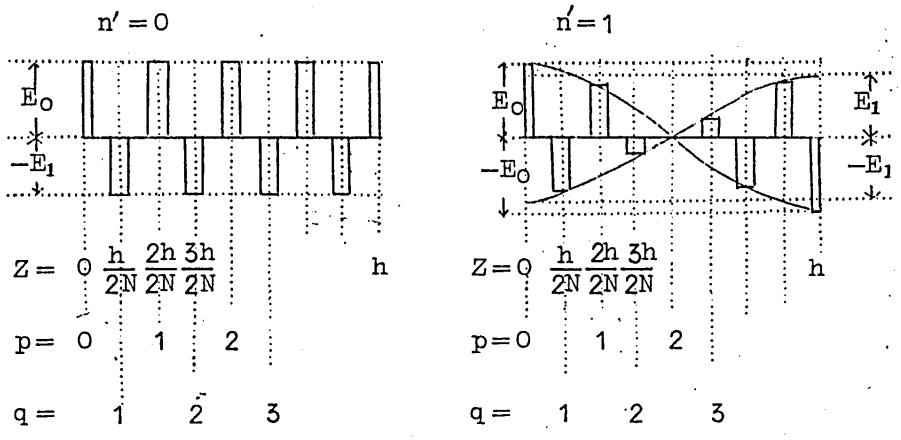


図6　π モードラダートロンの細隙電界分布

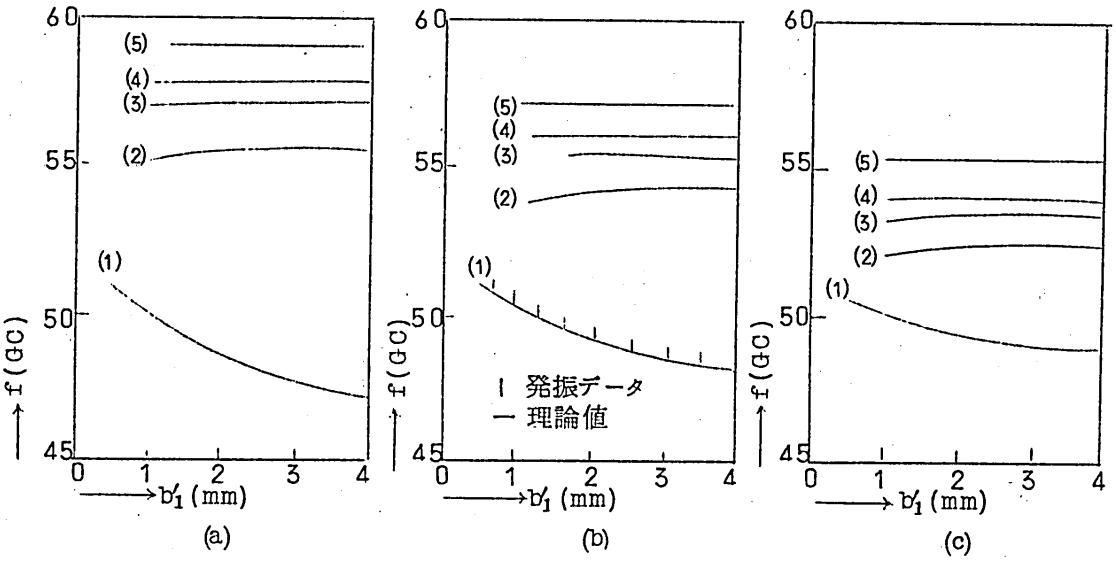


図7　3つのπモードラダートロン空胴の共振周波数分布

(a) $a_1/a = 2.5/3.5$　(b) $a_1/a = \cancel{2.4/3.6}\ 2.6/3.4$　(c) $a_1/a = \cancel{2.3/3.7}\ 2.7/3.3$（単位mm）

(1) $n' = 0$モード（πモード）(2) $n' = 1$モード (3) $n' = 2$モード (4) $n' = 3$モード

(5) $n' = N-1$モード　$h = 5.2$mm　$b_1 = 1.5$mm　$N = 10$

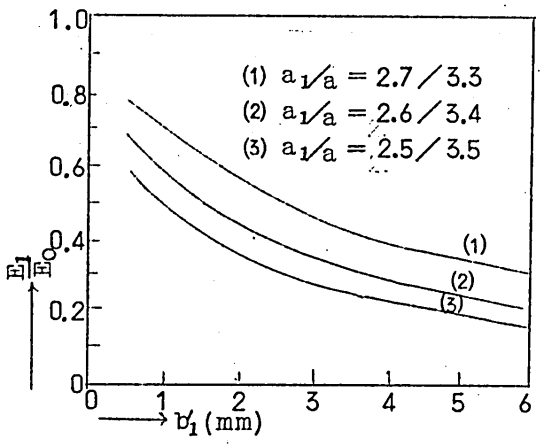


図8　πモードラダートロン空胴（図7のものと同一）の長短両細隙の振動電界の比 E_1/E_0

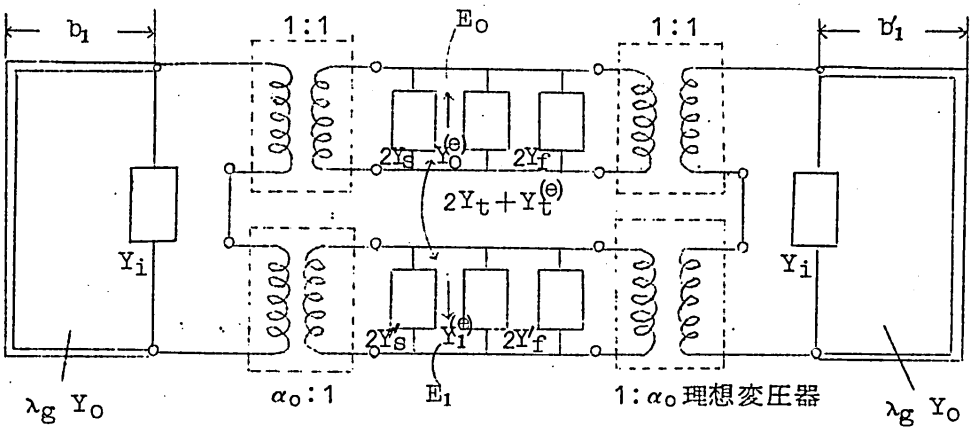


図9　π モードラダートロンの等価回路

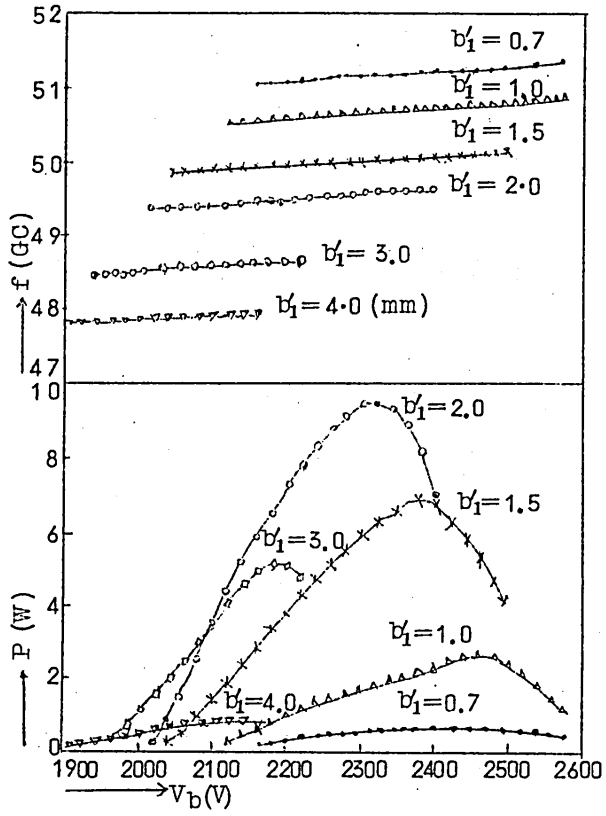


図10　50GC帯πモードラダートロンの発振特性

h = 5.2 mm , b_1 = 1.5 mm , N = 10

a = 3.4 mm , a_1 = 2.6 mm

輻射科学研究会資料

ガスレーザの二、三の特性

松尾幸人・張　吉夫
小林俊夫
（大阪大学 産業科学研究所）
波々伯部圭佑
（大阪大学 工学研究科）

昭和39年3月19日
（於　大阪大学工学部 メモリアルホール）

§1. はしがき

我々の研究室では、レーザからのコヒーレント光の通信への利用について研究を始めたところである。先ず第一段階として、連続なコヒーレント信号源を得るため最もポピュラーな He-Ne のガスレーザを設置し、安定な発振が得られる状態になった。現在までに得られたデータには何等新しいところはなく初歩的な結果だけしか得られていないが、発振開始の操作など、我々の経験が何かの御参考になればと思い、以下に報告させていただく。

§2. 装置の概要

本ガスレーザは、ヘリウムとネオンとの混合気体による、いわゆる He-Ne ガスレーザであり、これによるレーザ波長は10数本まで観測されているが、本実験はそのうち最も波長が短かく、可視領域に入る 6328 Å の波長についてのものである。(1) He-Ne 可視レーザの発振に関係のある He と Ne のエネルギーダイアグラムを、そのレーザ動作のプロセスと共に Fig 1 に示した。すなわち可視レーザに用いられるのは Ne の $3s_2 \rightarrow 2p_4$ の遷移であって、その正確な波長は 6328.1646 Å とされている。(2) 我々が用いた放電管は日立製のもので、He, Ne の分圧、全圧は不明である。* そこで実験に先立ってまず放電管の分光スペクトル（発振状態でない場合の）をチェックした。** Fig 2 にそのうちの関係ある部分を示した。この分光特性で特に注意しなければならないのは図中Aで示した問題の $3s_2 \rightarrow 2p_4$ のスペクトルが、He との共鳴励起のため非常に強化されている点である。

Ne 単独の放電スペクトルでは図中の A, B, C の3本のスペクトルは同程度の強さのもので、問題の A のスペクトルは非常に弱いものである。図では A と B との強度比は約 25:1 であり、この程度強化されておれば

*通常全圧 1~1.5 mmHg, 分圧 He:Ne ≒ 10:1

** 島津製作所の好意による。

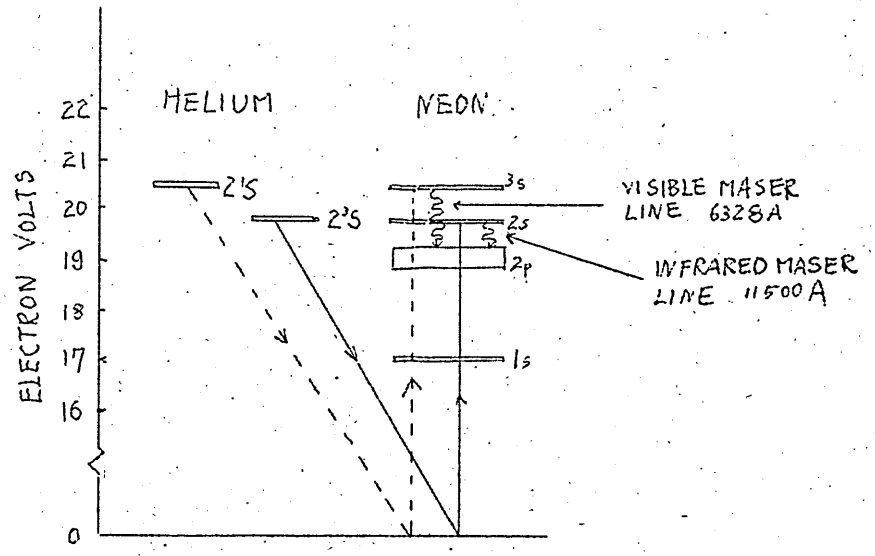


Fig 1 Energy level diagram for helium and neon

レーザ動作が十分期待できる。又、この様な分光特性から、他の不純気体の存在もチェックする事ができるので、レーザ動作に先だって放電管の分光スペクトルをとることはかなり有用である。

放電管の外形はFig 3に示す様に、いわゆるブリュースター窓を両端に有する形で[3]、ブリュースター窓は光学研磨された石英板からなり、その厚さ、面精度、平行度は不明である。窓面の法線と管軸とのなす角は実測の結果約55°にとってあった。管の全長は両端のブリュースター窓の中心間の距離で約77cm、内径は約8mmである。両端の反射鏡はいずれも島津製で、開口径、曲率半径ともそれぞれ異なってあり、以下の様になっている。

反射鏡	開口径(直径)	曲率半径
A	2.8 cm	130 cm
B	5.1 cm	160 cm

いずれの反射鏡も15層の誘電体多層膜からなり、反射係数は6328Å附近で公称100%となっているが実際には、この

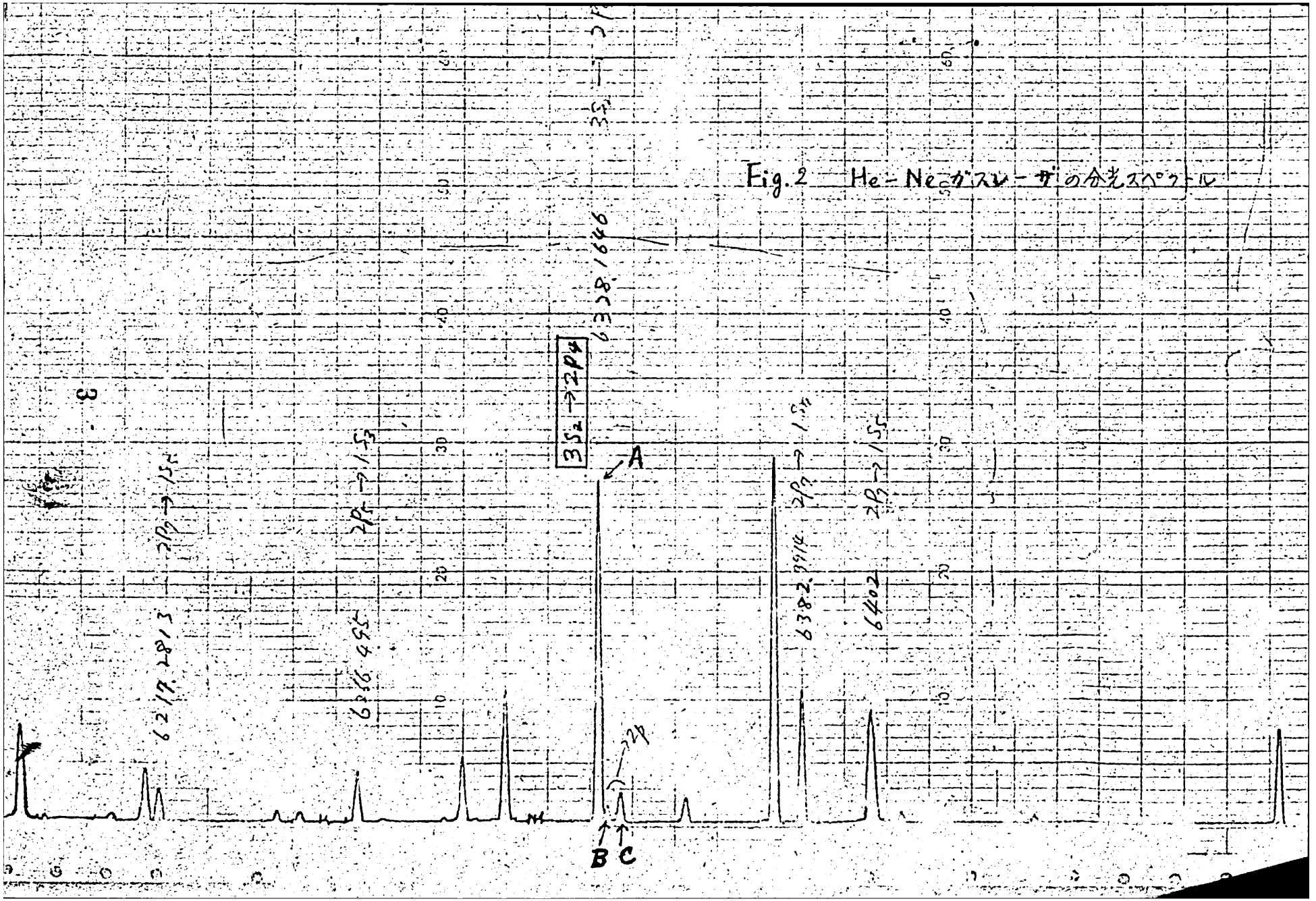


Fig. 2 He-Neガスレーザの分光スペクトル

反射鏡から出力を取り出すのであるから、実際の値は100%以下であるが正確な値は出からない。鏡Aの透過係数の分光特性をFig 4に示す。

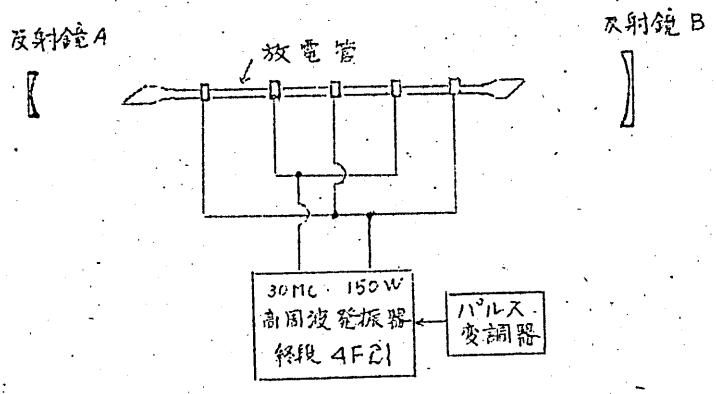


Fig 3 He-Ne ガスレーザ装置

反射鏡A, Bは回転台にマウントされ、回転台、放電管はさらに光学ベンチ上にセットされる。

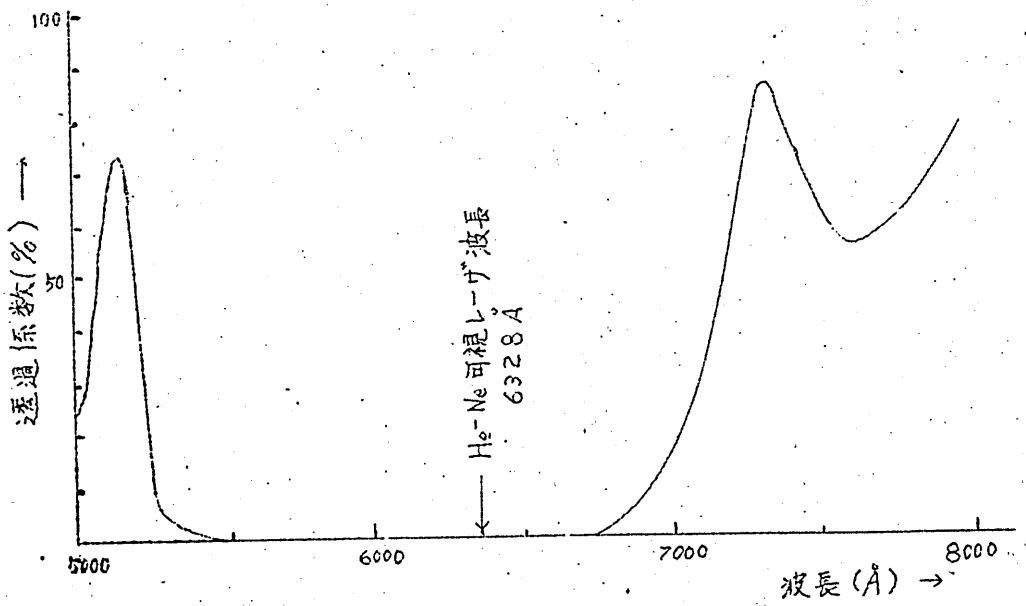


Fig 4 誘電体多層膜反射鏡の分光透過特性

希望波長附近で透過係数に0%に近いが正確な値は分光器の雑音のため測定不能であった。しかしこの程度の透過係数であれば発振可能である。一方反射係数公称99.5%のものでは前述の放電管との組合せで発振が得られなかった。鏡A,Bはいずれも水平軸、垂直軸のまわりに回転可能な台にマウントされ、鏡Bの回転台では読取り精度、水平軸に関して16″、垂直軸に関して15″になっている。

鏡Aは回転台に取付けた上、更に放電管軸に垂直な平面内で水平、垂直方向に平行移動できる様読取顕微鏡の台に取り付けた。

以上の放電管、反射鏡は2.5mの光学台にセットされ、管軸方向に自由に移動できる様になっており、種々の測定装置を一直線上に配置できる様に考慮されている。

放電管の励振には終段出力管4F21を用いた30 Mc/s、最大出力150 Wの高周波発振器を用いた。この発振器はパルス動作が可能で、通常の測定に対しては、放電管の温度上昇をおさえるためパルスで動作させている。高周波は管外に取付けた5ヶの電極によって管内に無極放電の形で注入される。

但しこの際高周波の輻射が相当大きく、周囲の他の実験に相当影響を及ぼすのでシールドの必要を痛感している。

§3. 実験

3.1 発振開始までの操作

実際にガスレーザを発振させてみて気付いた事を二、三述べる。発振開始までの操作として、先ず放電管、反射鏡のアライメントはオートコリメータ等を使用せずに行なった。反射鏡、放電管を自動でか、又はトースカンを用いて大体水平で一直線に配置する。

次に放電管を発振開始に充分と思われる程度に放電させ、一方の反射鏡と放電管との間に頭を入れて放電管の一方の端から

他方の端
~~スリット~~を見通して放電管と、反射鏡に写る放電管の像（凹面鏡の場合少し広がった像が見られるが）とが一直線上に並ぶ様に反射鏡を調整して、他の反射鏡についても同様に行う。反射鏡の角度調節がすめば、2ヶの反射鏡を発振可能な範囲内（3.3節(iii)の項参照）の距離だけ離して光学ベンチに固定する。この様にして反射鏡の外側より共振器内を見ると放電管の断面を見る事ができる。反射鏡、放電管の並べ方が良好な場合放電管断面の中心部分に円形の明るい像が現われている。これは放電管の断面が反射鏡で多重反射されて明るく見えているためである。並べ方が良好でないと、この像が円形にならなかったり、又は全く現われない事もある。しかしこの時でも反射鏡の外側より内側をのぞきながら両側の反射鏡を調節して円形の明るい像となる様にする。その有様をFig 5に示す。

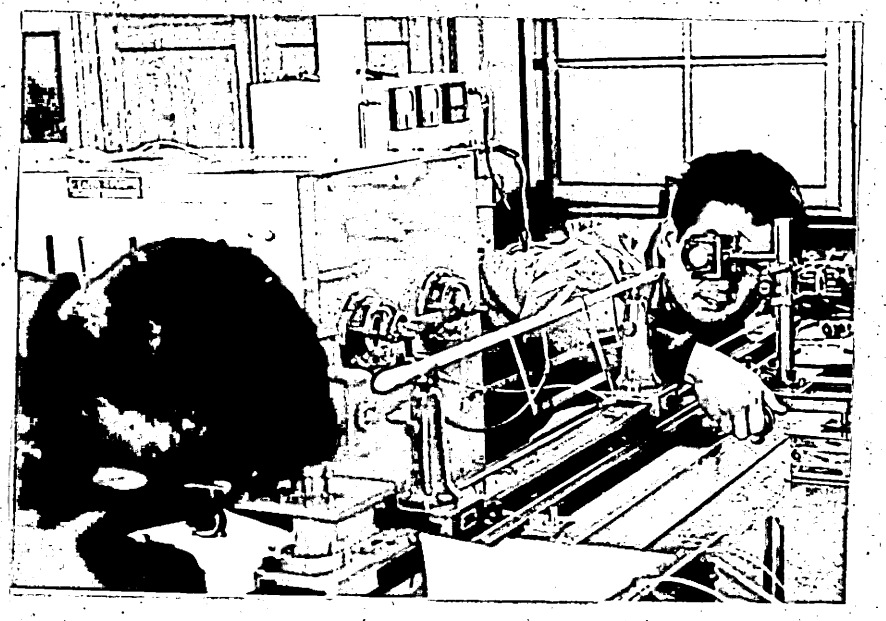


Fig 5　レーザ共振器アライメントの調整

この様に調節すれば その像の一点が 突然 非常にまぶしく光り出す。
これで 発振がはじまった事になる。 この段階までは サングラスをかけてやった方がよい。後は反射鏡上の発振ビームのスポットを見ながら調節すればよい。場合によっては 上述の円形の像が 完全に放電管の断面の中心部にくるとは限らず 隅の方にかたよった像が見える場合でも発振する事がある。この小さな丸い像は完全に円形に見えるときは、反射鏡を調節するにつれて 満月が山の端に出入する様子に見える。

ところで以上の様な調節で発振しない場合は 放電管のブリュースター窓をアルコールでふいてやるとよい。この際アルコールには新しいものを用い、新しい脱脂綿をピンセットで持って、これにアルコールを含ませてふくとよい。脱脂綿を直接手でつかむと手の脂肪がアルコールにとけて、これがブリュースター窓につき、かえって汚す事がある。

又古い汚れたアルコールを使うとかえって窓面を汚す事になる。ブリュースター窓に着いているホコリ、汚れは特に発振開始に影響する様で、例えば装置を2,3日放置しておいて再び動作させる場合、発振開始しない時は アライメントをさわる事なく、ブリュースター窓をアルコールでふくだけで直ちに発振をはじめる。又発振開始する場合でも窓面をアルコールでふいてやると、出力が急激に増加する。

我々の研究室は防塵について何の考慮も払われておらないので、通常は 先づスイッチインに先立って必ず窓面をふく事にしている。又試みに窓面を軽く指先で押して指紋を残すと発振は起らなかった。反射鏡についたホコリは誘電体膜をいためるおそれがあるため、ふきとる事ができないので、軽く吹き飛ばすにとどめている。又反射鏡表面には特に室内の温度、湿度の変化のため表面に非常に細かい水滴が着くことがあるが、これが一旦着くと汚れとなって取除く事ができないので、通常使用時以外はデシケータ等に保管することにしている。

目で見て極くうすく 汚れが付着していると思われる反射鏡(平面 公称反射係数100%)では発振が得られなかった。

一旦 発振すれば反射鏡の角度 位置を調整したり、放電管

を回転させたりすると 発振パターンが拡がり 発振の強度が増大する。なお この際反射鏡上の発振ビームのスポットが 全く中心からずれたところに現われるときには 以上の各種の調整によって 鏡の中心にもってくるのがよい。

3.2 発振出力

発振出力の絶対値を測定するには 熱電堆、カロリメータ等の道具が必要であるが、我々の場合 手もとに その様なものがなかったので、とりあえず 通常のマイクロ波の電力測定に用いる サーミスタと、これに組合わせる自動平衡形ブリッジとによって、出力の大ざっぱな 測定を行なった。 まず最初に用いたのは 島田理化製の 8.2～12.4 GHz 用サーミスタマウント(1T350)である。 これは直径 約 0.4 mm の サーミスタが裸で導波管中にマウントされたものである。 レーザを連続波で動作させ 反射鏡の一端から出た光線を 焦点距離 9 cm の単玉レンズで 上記のサーミスタ上に集光し、サーミスタブリッジ(最高感度目盛 フルスケール 0.1 mW)で 出力を読取った。

Fig 6 の実線はこの場合の 高周波ポンプ電力の相対値(目盛は 発振器終段管の陽極電圧)に対する 発振出力の変化を示している。 図の範囲では まだ 発振出力の最大値に達していないが 測定された最大値は 0.15 mW である。この様な測定法ではサーミスタ自体の表面の吸収係数が 電力計全体の能率を支配すると考えられるが、用いた サーミスタについて、その表面は大体黒いが 幾分光沢があり レーザ光を集光した場合、かなりの反射が認められる。 サーミスタを"ススでいぶすなど すればかなり改善されるのではないかと思う。 A.D. White と J.D. Rigden[4] の可視 He-Ne レーザについての最初の測定では、出力は 片側の光線について 0.1 mW と報告されているから 上記の結果もそう桁はずれな値ではないと考えられる。 又ガラス容器に封入された サーミスタについても測定を行なった。これは 大泉製作所製の マイクロ波電力測定用 32BC で サーミスタそのものは やはり直径 0.4 mm である。

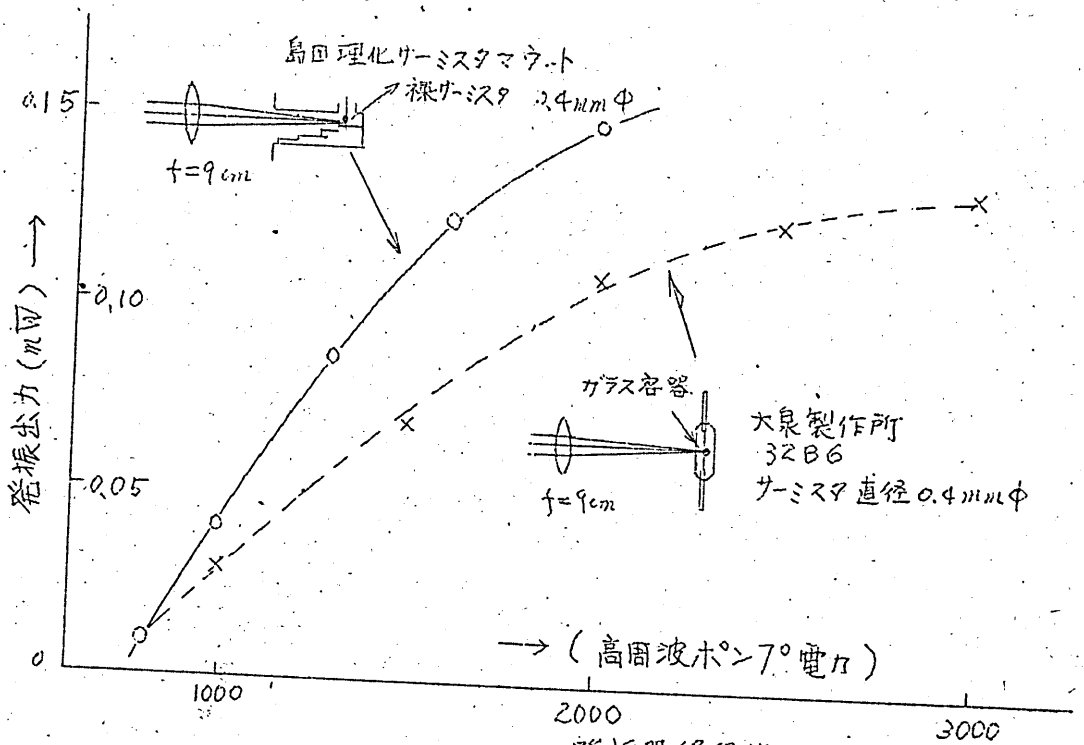


Fig 6 サーミスタによる発振出力の測定

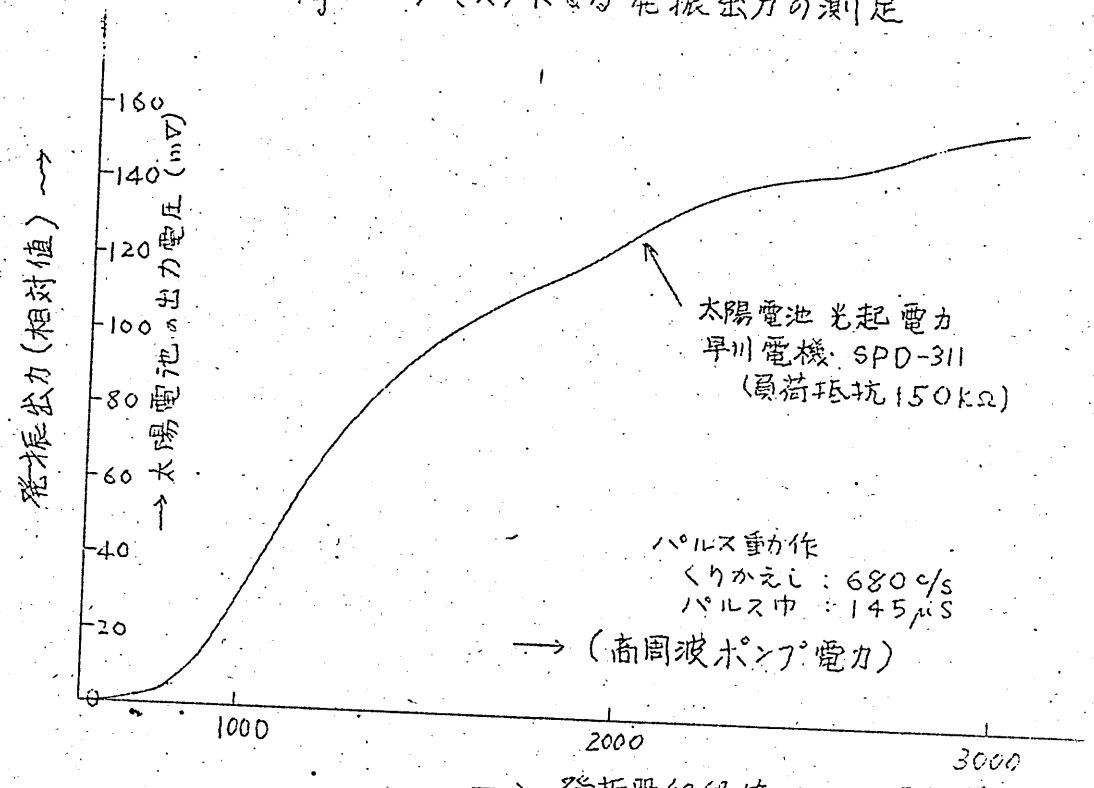


Fig 7 太陽電池による発振出力 — 相対値の測定

それによる測定結果をFig 6に破線で示す。ガラス容器での反射散乱のため能率が先の裸の場合に比して70%程度に低下している事がわかる。熱電堆によってサーミスタの能率を較正すれば手持ちのマイクロ波電力計で比較的簡単にレーザ出力を測定する事ができそうである。　通常の相対的な測定には以上のサーミスタは受光面が小さく取扱いが不便なので以下に述べる大部分の実験には太陽電池を用いた。

用いた太陽電池は早川電機製のSPD-311で受光面は約8mm直径の円形であり、この面に集光する事なくレーザ光を投射した。　レーザ光による光起電力は負荷15KΩで最大0.2V程度であった。　太陽電池の特性から考えて、この程度の出力電圧範囲では入力光電力と出力電圧の間に十分な直線性が成立っている。Fig 7にレーザをパルス動作させたときの太陽電池による、高周波ポンプ電力対発振出力の相対的変化を示してある。サーミスタによる測定結果の傾向と一致している事が見られる。

3.3　反射鏡の配置による出力の変化

ガスレーザの共振器を形成している反射鏡の角度を変えた場合、平行移動した場合、反射鏡間の間隔を変化させた場合のそれぞれについて出力の変化を測定した。出力の測定には前述の様に太陽電池を用い、その相対値だけを求めた。

(i)　反射鏡の角度

レーザの発振が最も良好と見られる様に両側の反射鏡を調整して反射鏡Bを垂直軸、水平軸のまわりに回転させた。この場合の出力の変化をFig 8に示す。出力の測定は反射鏡Bからのレーザビームを太陽電池に照射して行なった。この際、鏡の回転につれてレーザビームが太陽電池

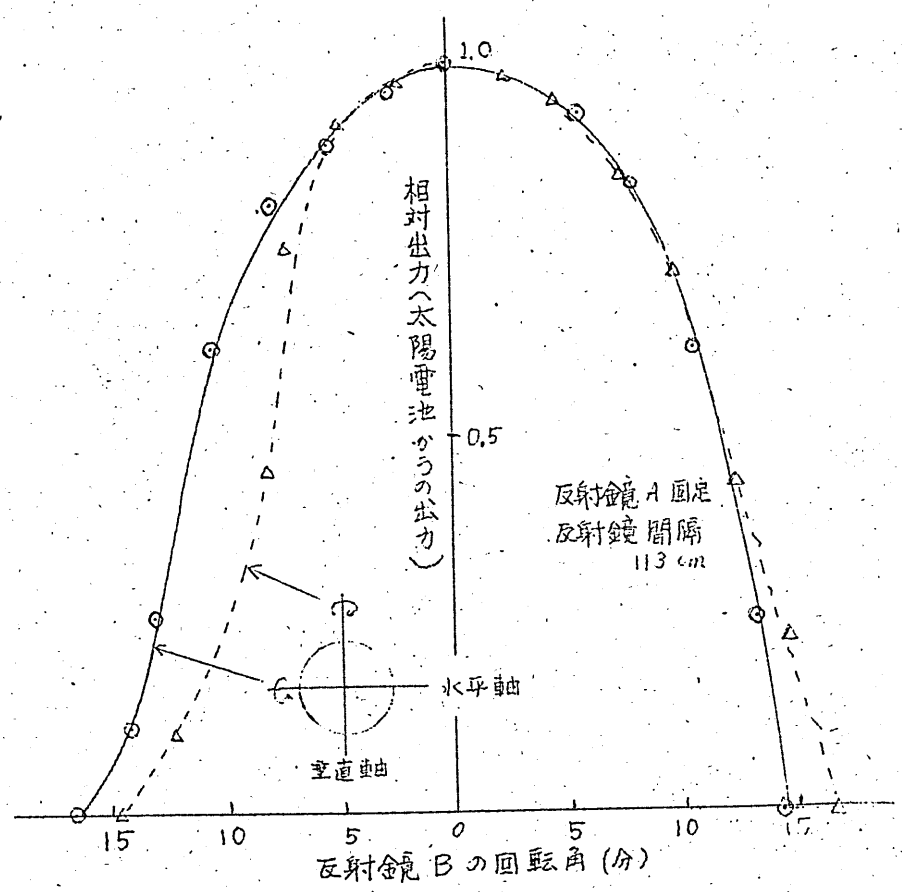


Fig. 8 反射鏡Bの回転角による発振出力の変化

面から外れない様に注意した。その結果は Fig 8 に見る様に 水平 垂直軸共に 約 ±15分の範囲で発振状態が存在し、半値巾で 20～23分程度であった。又、別の測定では 半値巾で 25分程度であった。なお W.W. Rigrod 等の実験では[5] 半値巾 24～27分と報告されている。反射鏡の角度を変化するということは、共振器内の回折損失を増大する事に相当し、発振が停止する角度では、共振器内の光線の 1行程当りの利得が 1行程当りの損失と一致する事を意味している。

利得と損失との間には適当な余裕がなければ安定な発振を得る事ができないから反射鏡の角度はFig 8の中心にくる様に調節するのが望ましい。

(ii) 反射鏡の管軸に垂直な面内での平行移動

反射鏡Bを(i)でのべた最良の状態に固定し、反射鏡Aを管軸に対して垂直な面内で垂直ならびに水平方向に移動したときの出力の変化を測定した。その結果をFig 9に示す。

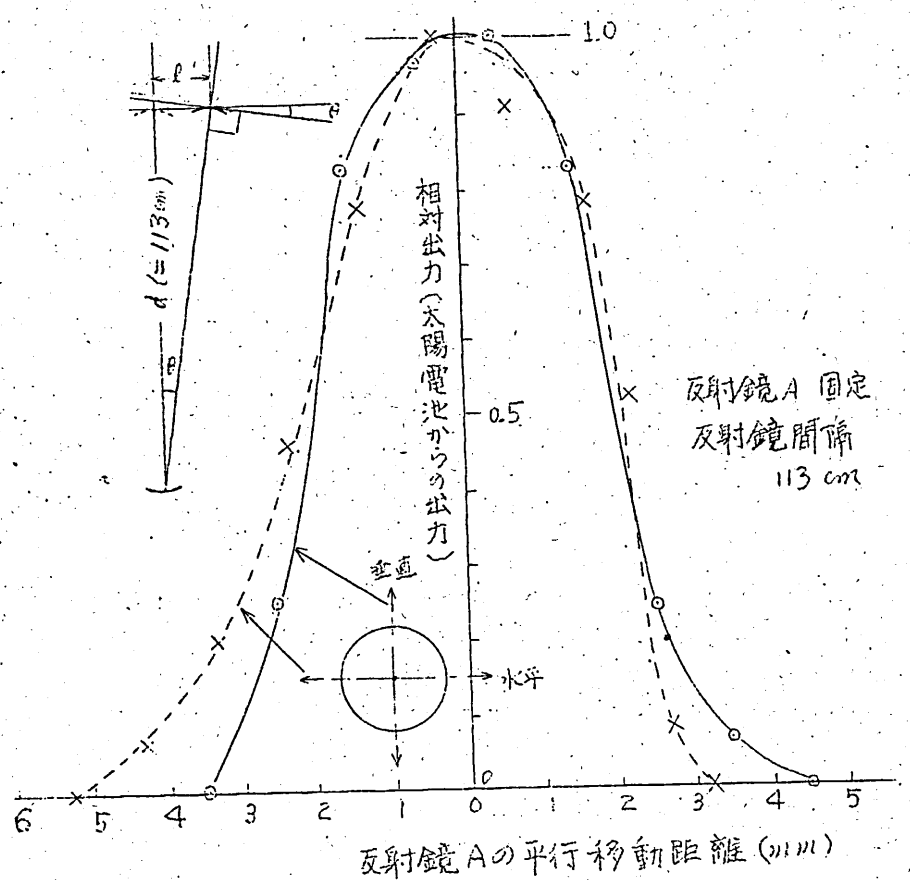


Fig 9. 反射鏡の管軸に対して垂直な面内での平行移動による発振出力の変化。

得られた結果では垂直、水平方向とも発振可能の範囲で約±4mmであり、半値巾で約4mmであった。反射鏡を管軸に対して垂直な面内で平行移動する事は Fig 9 中に示してある様に反射鏡の管軸に対する回転角度を変化する事に相当すると考えられる。反射鏡間隔をdとし反射鏡の平行移動距離をℓとすれば、これに相当する反射鏡の回転角θは $\ell \ll d$ の場合 $\theta = \tan^{-1}(\ell/d)$ で与えられる。上に得られた発振可能範囲 ±4mm, ℓ=113cm を代入すれば θ=±3分となり、(i)の結果にほぼ一致し上の考えが確められた。

(iii) 反射鏡間の間隔

反射鏡A及びBを前項(i)(ii)で述べた角度平行移動の調整 ~~おこな~~ 最良の状態においた後、反射鏡Aを固定し、反射鏡Bを管軸方向に光学ベンチ上を移動させて、反射鏡間の間隔を変えた場合の発振出力の変化を太陽電池で観測した。反射鏡間の間隔の変化に対する発振出力の変動は非常にはげしくかも不規則であったためX-Y記録計にて測定した。Fig 10 はその結果の一例で出力の変動に応じて発振モードのパターンも急激に変動しており、特に出力の減少する点ではパターンの寸法が小さくなる。この様な波形は不規則ではあるが再現性がある。又この不規則性が光学ベンチなどに付づいた不整によるものでない事はチェックした。出力の減少する点では回折損失が増大し、低次モードのパターンだけが残るものと考えられるが、しかし何故この様な急激な変動があるかは説明がつかない。

反射鏡間隔130cmのところで発振が急に停止する。これは間隔dが鏡Aの曲率半径Rに一致した点であり、この点で発振が停止することは G.D. Boyd と H. Kogelnik が球面鏡

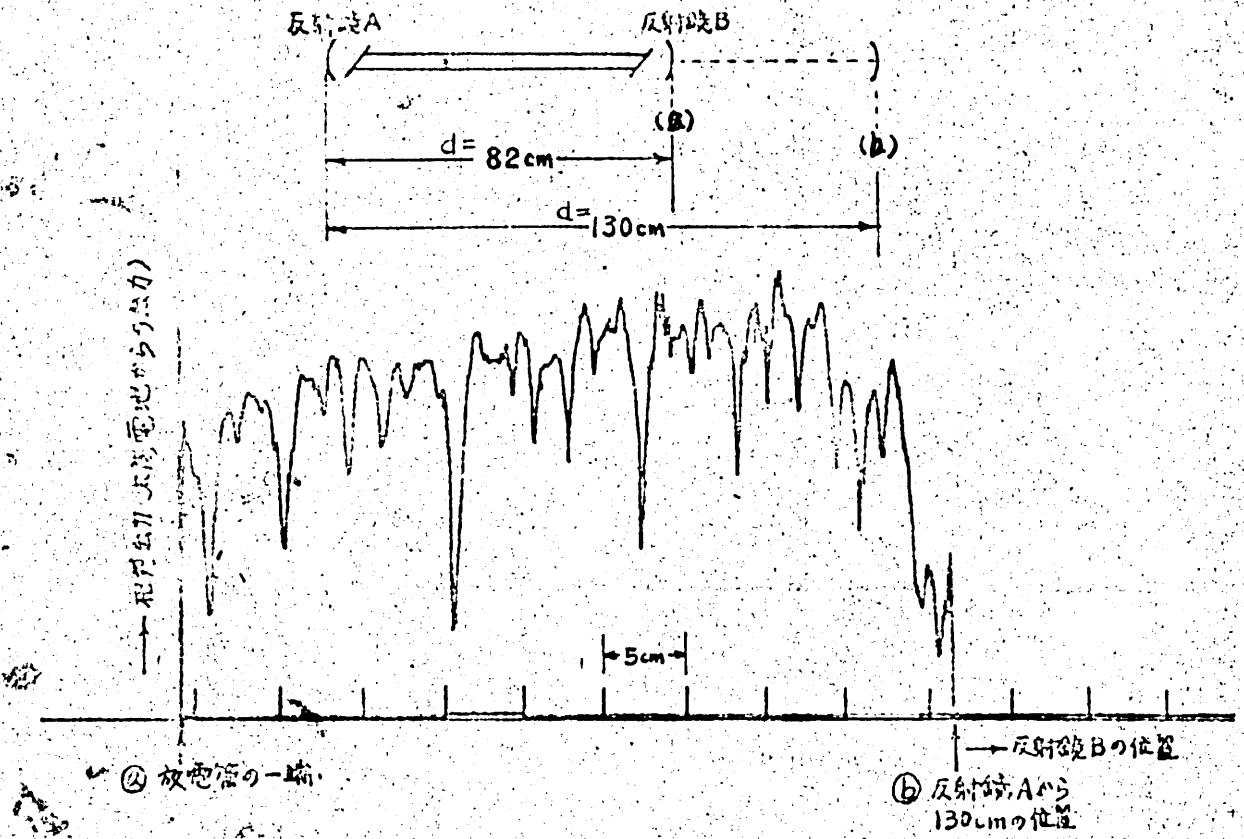


Fig. 10 反射鏡間隔を変えたときのレーザ出力の変化

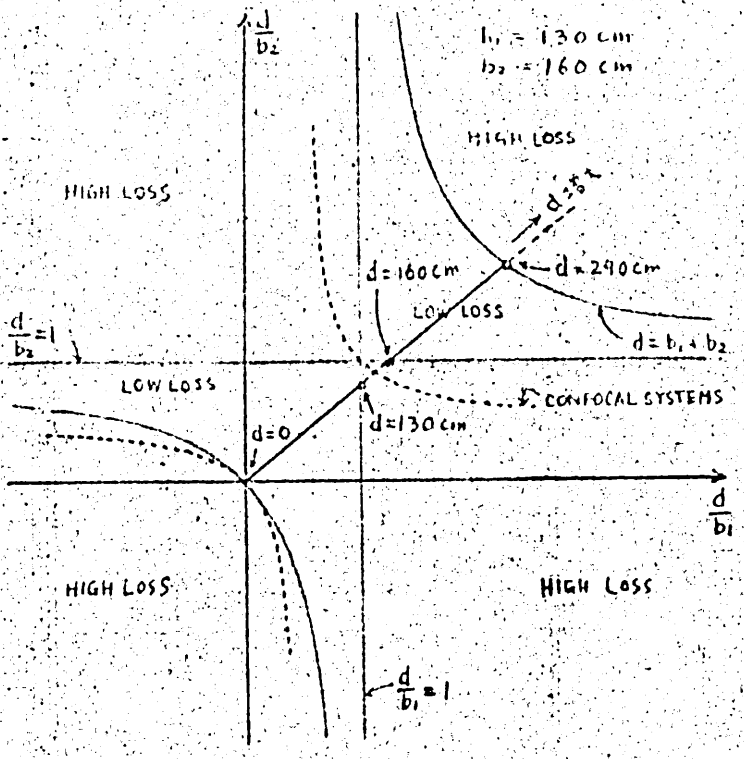


Fig. 11 2つの反射鏡で構成される共振器についての回折損失の小さい領域と、大きい領域。
反射鏡の曲率半径 b_1, b_2, 間かく d。直線は本実験で用いた反射鏡について、dを変化したときの軌跡。Boyd, Kogelnik (文献 b) の Fig. 6 より。

共振器の一般論[6]で指摘している点である。その理論によれば発振可能な領域は二つの反射鏡で構成される共振器の回折損失の小さい領域に一致する。二つの反射鏡のそれぞれの曲率半径を b_1, b_2 とし間隔を d とすれば回折損失の小さい領域は文献(6)の(53), (54)式により次の様に与えられる。

$$\left(\frac{d}{b_1}-1\right)\left(\frac{d}{b_2}-1\right) \leqq 1 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{d}{b_1}-1\right)\left(\frac{d}{b_2}-1\right) \geqq 0 \qquad (2)$$

これは d/b_1, d/b_2 座標について示せば Fig.11 の様になり, 白い部分が低回折損失の領域である。我々の実験では $b_1 = 130$ cm, $b_2 = 160$ cm で間隔 d を変化させたとき, この平面上での軌跡は図中の直線で示される。$d = b_1 = 130$ cm の点は高損失領域との境界である。$d = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$, つまり共焦点配置は我々の場合発振不能域中にあることがわかる。$d = b_2 = 160$ cm で再び発振可能となるが, 実際, 我々の場合にもその事が確かめられた。発振可能な間隔 d の最大点はいわゆる共心配置, 即ち $d = b_1 + b_2 = 290$ cm で起るが, これは光学ベンチの関係上確められなかった。

3.4 レーザ発振光の偏光

ブリュースター窓を用いたガスレーザでは発振光が完全偏光していると言われている。これはブリュースター角を満足する光が入射面(入射光線と面法線とを含む平面)内に偏光面をもつものに限られるからで, 従って発振光はブリュースター窓の入射面内に完全偏光しているものと予想される。反射鏡の一端からの出力を偏光フィルターを通して太陽電池にて投射して測定した。Fig 12 にその結果を示す。偏光フィルターを管軸に垂直な面内で回転し, 横軸に偏光フィルターの偏光方向とブリュースター窓の入射面とがなす角 θ をとり, 縦軸に

その太陽電池相対出力電圧を目盛ってある。　太陽電池からの出力電圧は入射レーザ光のパワーに比例し，パワーは太陽電池面上の電界の2乗に比例する。　レーザの発振光が完全直線偏光で，偏光フィルターの偏光度が完全であるならば透過光の電界強度はθの変化に対して$\cos\theta$に比例して変化する。　従って太陽電池からの出力電圧はθに対して$\cos^2\theta$で変化するはずである。Fig 12 中に測定値と比較して示してある。　用いた偏光フィルターは三菱電機製のDS-1C-20で，偏光度99%以上となっており，θ=90°附近の若干の透過光は，偏光フィルターの偏光度の不完全さのためと考えられる。　従ってレーザ光の偏光度の定量的な測定はできなかったが，ほぼ完全に直線偏光になっていることが示された。

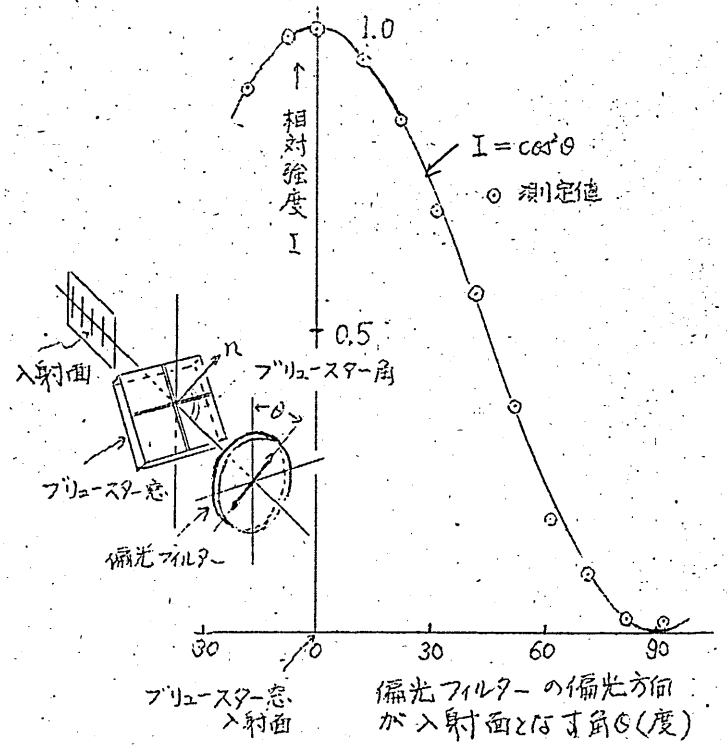


Fig 12　レーザ発振光の偏光性

3.5 ブリュースター窓からの反射

我々の用いたレーザ放電管では ブリュースター窓から発振光がかなり反射されているのが見られた。 もちろん, この場合窓面は十分にアルコールでふいてある。 反射光は Fig 13 に示す様に各々のブリュースター窓の両面から二方向に出ている。 これらの反射光パワーを測定すると, ブリュースター窓の外表面から反射する光線Aは出力光の約 1/3 であり, 内表面からの反射光Bは Aのまた 1/10 程度である。 反射光Aは出力と同じモードパターンをもっているが, 反射光Bは管壁に当るので変形されたパターンになる。 ブリュースター窓の面法線と管軸とのなす角度は前述の様に実測の結果約 55° であり, これに相当する窓の屈折率は $n=\tan 55^\circ = 1.43$ となる。 石英ガラスの屈折率は 6300 Å で 1.457 程度[17] であり, これに対するブリュースター角は $i_B = \tan^{-1} 1.457 \cong 55^\circ 30'$ となるから このズレが反射の一つの原因と考えられるが, その他に窓表面の汚れが影響しているものと考えられる。 反射鏡の反射係数, 透過係数が正確に分かっていれば 出力光と反射光とのパワー比からブリュースター窓での反射係数を知り得るが 前述の様に反射鏡の正確な特性が不明のため 窓の反射係数の推定はできなかった。 いずれにしてもブリュースター窓での反射は意外に大きく, 共振器の Q に相当大きく影響することがわかる。

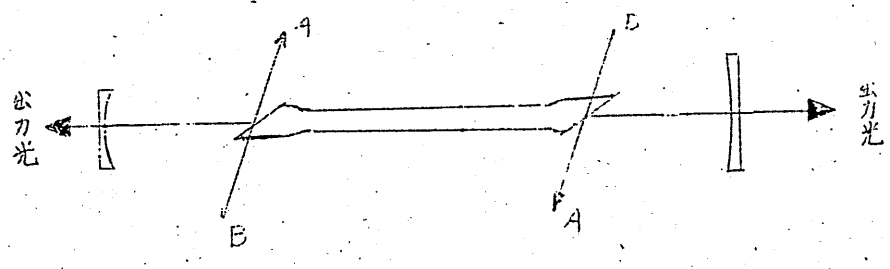


Fig 13 ブリュースター窓からの反射

3.6 発振モードパターン

(i) 反射鏡上のパターン寸法

発振が起ると まず反射鏡の表面上に発振パターンが見られる。反射鏡上のパターンの大きさは反射鏡間の間隔 d, 鏡Aの曲率半径 $b_1 = 130\,cm$ に一致するまでの範囲では, (Fig 11 参照) 鏡A上のパターンの寸法 $2w_{s1}$ の方が 鏡B上のパターンの寸法 $2w_{s2}$ よりも大きく, $d = 120\,cm$ で $2w_{s1} \cong 4\,mm$ $2w_{s2} \cong 2\,mm$ 程度であった。又 d が 鏡Bの曲率半径 $b_2 = 160\,cm$ から共心配置 $b_1 + b_2 = 290\,cm$ までの範囲では $2w_{s2}$ の方が $2w_{s1}$ よりも大きかった。上に得られたパターン寸法の大小関係は G.D. Boyd と H. Kogelnik の行なった TEM_{00} モードについての解析結果[6]に一致している。(文献(6)の(39),(40)式及び Fig 4 参照) 我々の測定は高次モードが多重に発振している状態で行っているが, 回折損失の d に関する変化はすべてのモードについてほぼ一様に変化すると考えられるから, 実験結果が TEM_{00} モードについての解析結果と一致することは当然予想される。

(ii) モードパターン

反射鏡間の間隔, 反射鏡の角度, 反射鏡の管軸に垂直な面内での位置などを調整 (§3 3.3 で述べた各種の調整) したり また放電管を回転したりすると, 発振モードパターンが様々に変化する。そこで反射鏡Bから出ている発振光をレンズを通さずに写した。結果の一部を Fig 14 (a), (b) に示す。撮影条件は反射鏡Bから約 120 cm の位置に1眼レフカメラ (ニコンF) をおき, 富士の SSS, 又はコダックの Tri-X (ASA 400) のフィルムを用い, シャッタースピード 1/30 ~ 1/125 秒であった。小西六の赤外フィルムも用いてみたが感度不足であった。2枚の反射鏡中での normal mode については, Fox, と Li が解析しており[5] これらのモードは全て純粋な意味での TEM 波ではないが, 電磁界成分の大部分が横断面内に入っているという意味で TEM 波と呼んでいる。これらの TEM 波

TEM LASER MODE PATTERNS

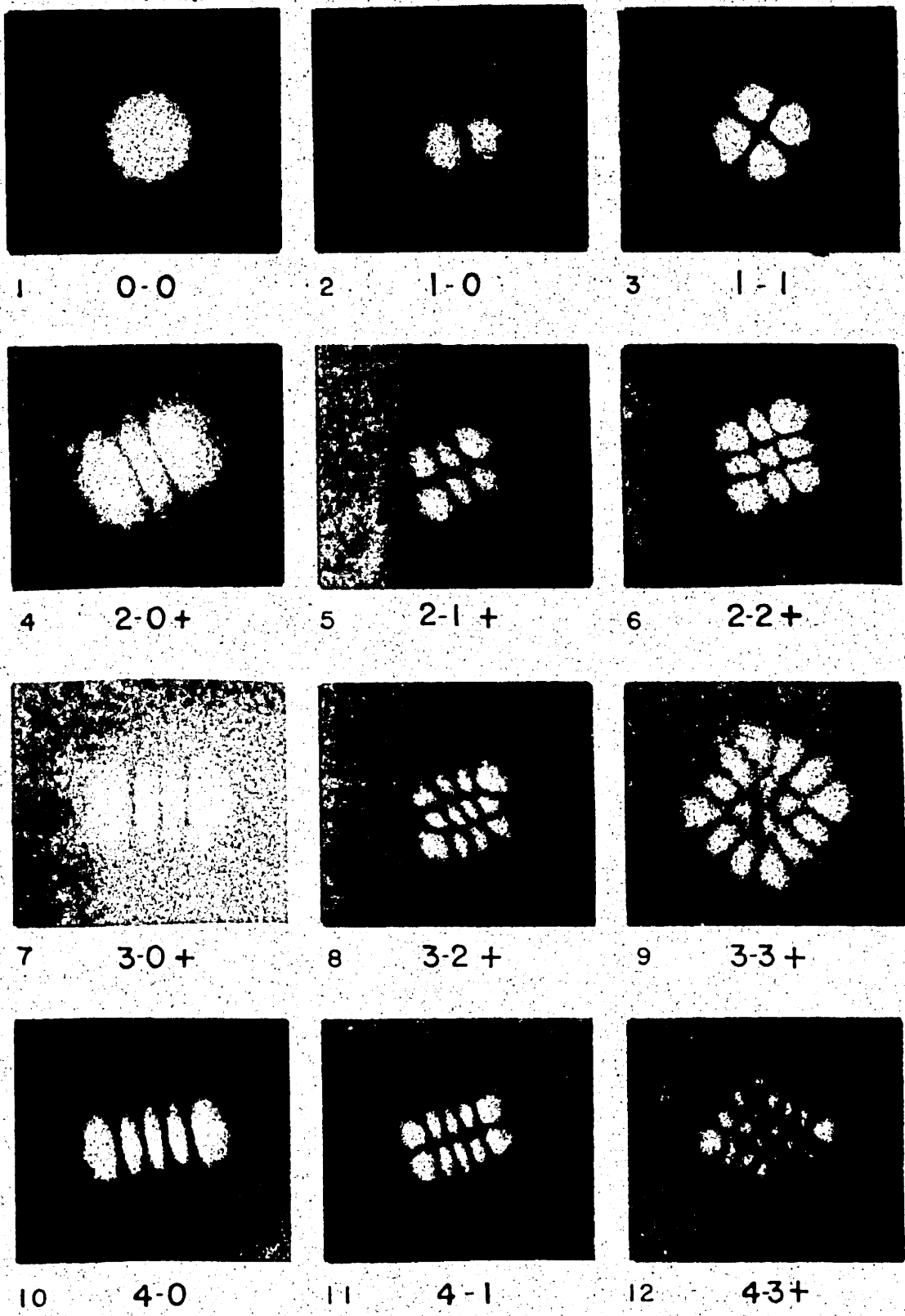
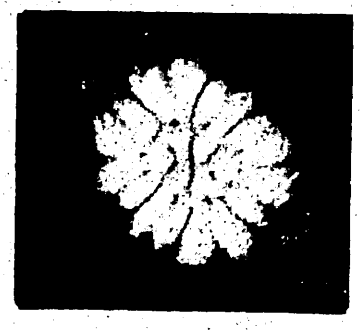
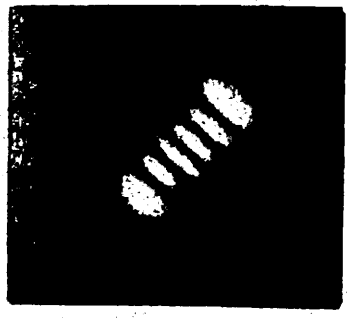


Fig 14(a) TEM_{mn} LASER MODE PATTERNS

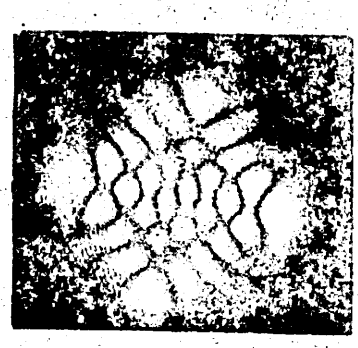
TEM LASER MODE PATTERNS



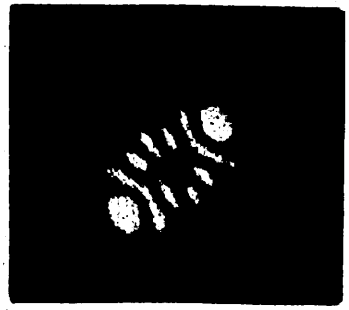
1



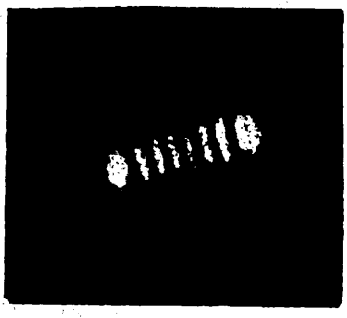
2 5-0



3 5-4 +

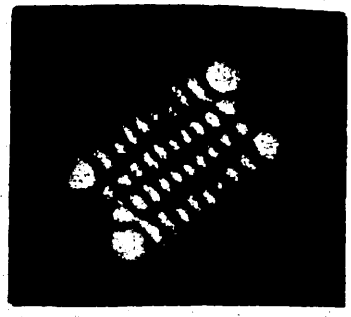


4 6-0 +



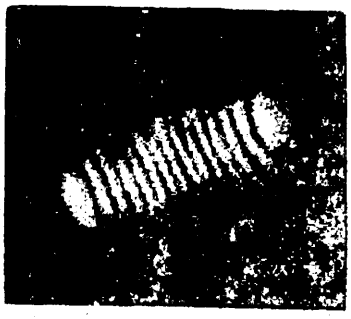
5 7-0

6 9-0 +

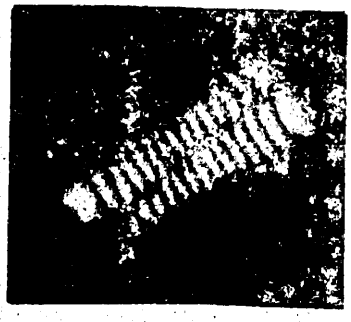


7 9-3 +

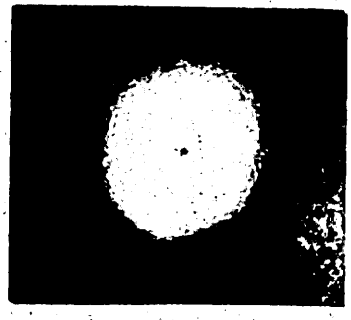
8 12-1 +



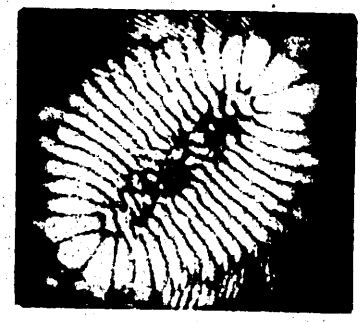
9 14-0 +



10 14-1 +



11 10+01



12

Fig 14(b)

には，導波管や表面波線路上の波の様に進行方向に沿って電磁界に課せられる境界条件が存在しない（無限遠において消滅するという条件以外には存在しない）から，横断面内での電磁界の方向を規定する条件は何もない．直角座標を用いた場合，通常導波管などでは導波管壁面を座標軸方向にとっているが，いま境界面は存在しないから，座標の取り方は自由である．従って直角座標を用いる場合，反射鏡系の normal mode を TE_{lmn} と表わす場合，導波管中における如く lmn の添字の順序と座標軸の順序とについて一定の規約を設ける必要はない．通常は多い方の数を先に書くことになっている様である[8]．

Fig 14 には比較的低次のモードパターンを示した．ほとんど全てドミナントなモードが直角座標についての TE_{lmn} で現われている．これらを直角座標 TE_{lmn} モードと見て，添字 mn だけを図中に示した．これは共振器内に直角座標系に沿う様な不整が存在するときに生ずることが考えられ，不整の原因は主に二つの反射鏡の回転軸がお互いに平行でそれでお互いに垂直な二つの回転軸をもつためと考えられる．比較的純粋なモードパターンを出すには多少のテクニックが必要で，大体目的のモードパターンが出るところまで反射鏡などを調整して高周波ポンプ入力を減少すると純粋なパターンになる事が多い．これは不要なモードに対する回折損失を大きくする状態に反射鏡を調整して，不要モードと希望モードとの間に threshold condition の差を与えたことに相当すると考えられる．図中の 1, 2, 3, 10, 11 番のものは比較的純粋な直角座標 TE_{lmn} モードのパターンをもっているが，それ以外のものは他のモードが若干混入している様である．その様なパターンはドミナントなモードに他のモードが混入していることを表わすため，モード番号の後に"+"を記してある．どの様なモードが混入しているかはパターンだけからは判別困難で，横方向モード間のビート周波数を周波数分析器で測定して混入モードを判別している例がある[9]．

図中5,6,8,12番などパターンはいずれも節線（強度0の線）が完全に直交していないが，これは2ヶの反射鏡の回転軸が完全に一致していないためと考えられ，又多少ダ円双曲線座標ででも表わすべきモードが混入している様である。

円筒座標 TEM_{lp} モード（添字 l は周方向モード次数，p は半径方向モード次数）と直角座標 TEM_{mn} モードは

$$2p + l = m + n \qquad (3)$$

の関係を満足するとき，同一の等位相面を満足するから[6]，(3)式の関係を満足する直角座標モードと円筒座標モードとは同時に発振する可能性がある。この様な場合の例は図中4,7番のパターンに見られる。これらのパターンは通常予想される節線（直角座標では強度分布はエルミートガウス分布で近似される[6]）よりも細い節線をもっているが，これは他のモードの混入によるものと考えられる。4番では $m, n = 2, 0$ で，(3)式を満足する l, p の組は $l, p = 0, 1$（かつ2,0）であり，7番では $m, n = 3, 0$ 同様に $l, p = 1, 1$（かつは3,0）でなければならない。円筒座標 TEM_{01}，TEM_{11} モードの分布はそれぞれ ◎，⊕ であるから直角座標 TEM_{20}，TEM_{30} にそれぞれこれらのパターンを若干混入すれば4番，7番の図形が得られるものと考えられる。

Fig 14 (b) には比較的高次なモードパターンを示してある。これらの図形も，一応直角座標 TEM_{mn} として示してある。2,5番などは比較的純粋な直角座標モードである。4,6,7,8,9,10番などには若干ダ円双曲線座標モードが混入している。1,12番等の高次のモードは通常発振させやすいが，必らず他の低次モードの発振を伴うので，モード次数の判別が困難である。11番のドーナツ形のモードはお互いに直交した直角座標 TEM_{10} モードが同程度に混合した場合と考えられ，図には $TEM_{10} + TEM_{01}$ と記入したが，この様なモードも又直角座標 TEM_{01} モードと名づけられる[8]

又、この様なパターンが上記の様なモードの混合であるということはビートの周波数分析で実験的に確められている。[9]
なお、上記の実験中、特に測定しなかったが、ブリュースター窓の方向、従って偏光面の方向とパターンの節線の方向とは一致していなかった様である。これは前述の様に横断面内に電磁界を規定する境界条件が存在しないことから当然である。従ってモードパターンを決める不整は前述の様に、主に鏡の回転角の組合わせでおこるものと考えられる。しかしほとんど全ての図形にあらわれている9円双曲線座標形のモードの混入はブリュースター窓の影響であると考えられるので、ブリュースター窓もモードパターン決定の一要素となる様である。

§4 あとがき

実験の途中で放電管を破損してしまったので、大ざっぱな結果しか得られなかったが、以上推論も含めて、結論を箇条書にすると、

1. 凹面鏡共振器を用いたレーザの調整には、通常オートコリメータなどの必要はない。
2. 通常のマイクロ波サーミスタ電力計がそのまま、手軽にレーザ出力計に使える。
3. 発振出力は、サーミスタによる測定では大体、一光線当り 0.1 ~ 0.2 mW であった。
4. 反射鏡のアライメント精度はかなりゆるやかで、鏡の回転角で言って半値巾約15分程度である。
5. G.D. Boyd, H. Kogelnik などの言う発振領域が確かめられた。又発振領域内でも出力に急激な変動があることが小かった。

6. ブリュースター窓を用いたガスレーザの光はほぼ完全に直線偏光になっている。
7. ブリュースター窓からかなりの反射があるが、この原因は多分、窓の角度よりも表面の状態であろう。
8. モードパターンを決定するものは主に反射鏡の角度であり、ブリュースター窓は従属的な役割を演ずる。

この研究は38年度文部省機関研究費により行なったものである。
おわりにあたって、御教示、御協力をたまわった島津製作所の鈴木範人氏、また有益な御討論をたまわった産研牧本研究室の方々に感謝する。
また実験データの整理など、終始協力された田中法子嬢に感謝する。

参照文献

(1) A.D. White, J.D. Rigden,
"Continuous Gas Maser Operation in the Visible,"
Proc. IRE, 50 1967 (1962.07)

(2) American Institute of Physics Handbook.
McGraw-Hill, 1957

(3) W.W. Rigrod, H. Kogelnik, D.J. Brangaccio, D.A. Herriott,
"Gaseous Optical Maser with External Concave Mirrors,"
J. Appl. Phys, 33 743~744 (1962.02)

(4) 文献(1)に同じ

(5) 文献(3)に同じ

(6) G.D. Boyd, H. Kogelnik,
"Generalized Confocal Resongtor Theory,"
Bell System Tech. J., 41, 1347/1369 (1962.07)

(7) 芝亀吉
物理常数表 岩波 (昭22.)

(8) A.G. Fox, Tingyle Li,
"Resonant Modes in a Maser Interferometer"
Bell System Tech. J., 453/488 (1961.03)

(9) J.P. Goldborough,
"Beat Frequencies Between Modes of a Concave-Mirror Optical Resonator."
Appl. Optics. 3 267/275 (1964.02)

以上