輻射科学研究会資料

Fabry Perot 共振器の空胴理論

池上淳一

小倉久直

吉田靖夫

（京都大学工学部）

1964年5月

目　　次

第１章　緒　　論 …… 1

第２章　従来のレーザ共振器理論（interferometer theory）

のreviewと批判 …… 3

第３章　レーザー共振器の空胴理論（Cavity theory） …… 7

§３－１　概　括 …… 7

§３－２　スカラー波の共振理論 …… 8

§３－３　表面よりの輻射と振動 …… 9

§３－４　円筒外部のGreen函数 …… 11

積分表示 …… 11

積分路　a），b） …… 12

§３－５　表面積分　I_0 ，I_1 …… 16

§３－６　数値計算（レーザー共振器の場合） …… 17

§３－７　特徴，比較，応用 …… 21

a）　Fox，Liとの比較 …… 21

b）　Vaĭnshteĭnとの比較 …… 21

c）　特徴，応用 …… 22

附録　１～６ …… 27

参考文献 …… 38

レーザー共振器の空胴理論

第1章 緒　論

Laserでは，共振器はcoherentな光を取出すといういみでも最も重要な部分である。誘導輻射は外部電磁場とcoherentな（つまり位相関係をもつた）ものである（time-cohevercy）ことはよくしられているが，誘導輻射が外部電磁場にfeedbackされて更に大きい誘導輻射をおこさせるとき，共振器は単にfeedbackの役割を果すだけでなく，共振器の内部の各場所におけるLaser center（原子，分子）の位相をcoherentにする（space coherency）役割も果しているのである。でないかぎり，いくら誘導輻射が外部電磁場とcoherentであつてもLaser beamはcoherentにはならない。このことはmaserのように，共振器の大きさと波長とが同程度の場合には，とかくあたりまえのように感じられて見すごされがちであるが，Laserの場合には十分認識されねばならない。

Laserの共振器には，波長が光学的であるので通常Fabry Perot resonatorが用いられている。これは丁度次のようなモデルを描いた方がよいかもしれない：直径2～300米の平面鏡を比叡山と伊吹山の頂上に向いあわせ，その間に波長10cm程度のマイクロ波を共振させる。この様な共振器では平面波が共振していても，回折によつて共振が減衰する。其他の要素としては不均質媒質による散乱，平面鏡の歪による散乱，平面鏡又は媒質の導電性によるもの等があり，いずれも大きいfactorであるが，これらは補正によつて考慮できるので，Laser共振器の理論は通常回折損失を含めた共振を記述するものである。実験的にも，理論的にも各種の共振パターンが得られ，それは平面波共振とは異なるものであることが知られている。しかしながら，現在までのところLaser共振器の理論はあまり統一的なものではなく，簡単に答を求めることも，modificationも困難である。その原因は共振器が単に反射板を向い合わせただけのもので，しかも，反射面の間が波長の何万倍と隔たつていることにある。

これまでの研究者がとらえていたLaser共振のpictureは，平面波が進んでいつて反射してくるといつたものである。その往復する間に回折によつて失われる損失をもつて共振の減衰をあらわそうとしていた。この様なpicture に基ずく理論は interferometer theory（干渉計理論）とよんでよいであろう。

この様な理論の欠点の源は別の云い方をするならば，diffractionという概念とreso-

nanceという概念とが理論の上でうまく結びつかないのでformulationが透明にならないことにある。

池上研究室では討論の結果，異なつた観点から出発して新しいLaser共振器の理論を進めた。それは上の理論に対して，cavity theory（空胴理論）とよぶことが出来る。これはinterferometer theoryのもつ種々の欠点はすべて免がれており，しかも後者に比してはるかにpracticalでありfruitfulであることが§3－6，§3－7の結果に見ることが出来る。例えば，後者の理論の困難な数値計算にもとずくプロットの外挿式を，cavity theoryでは理論的に美しい形で導びくことが出来，interferometer theoryの結果を修正したのみならず，しかも種々のモードに対する関連をも与えることが出来た。又§3－7に示すような数多くのmodificationが可能である。

そこで示したプログラムに従つて計算を引続き行なつている。Cavity theoryは，interferometer pictureを捨てて，空胴共振器としての理論を正攻法で最後までおしとおしたものである。マイクロ波共振器とFabry perot共振器との相異点は，前者が殆んど閉じた空胴であるのに反し，後者は開いた空胴であるところが異なつている。前者ではwall lossと導波管との結合に対してはimpedanceという便利な言葉があつたために話が簡単に済ますことが出来たが，後者では開いた面よりの波動の洩れを一種のantenna theoryで求める。その点この理論はcavity theoryとantenna theoryとのcombinationであるといえる。ただここでは，antenna theoryはもつと一般的な形で（境界値問題として）適用されている。この理論の構成順序は第3章のはじめに要約した。

第二章では今までのLaser resonatorの理論の主なものを簡単にreviewして批判を加えた。第三章ではGreen函数の積分表示の計算の途中Helmholtz potential函数をHankel函数による積分表示で表わす新しい積分公式がえられた。その証明は附録2に示した。第三章はすべて昨秋よりの研究室における討論をまとめ，京大電子工学教室の研究談話会でのべたものを少しく改めたものである。(1) 多小冗長であることをお断わりしておく。

レーザー共振器の空胴理論

第1章 緒　論

Laserでは，共振器はcoherentな光を取出すといういみでも最も重要な部分である。

誘導輻射は外部電磁場とcoherentな（つまり位相関係をもつた）ものである（time-cohevercy）ことはよくしられているが，誘導輻射が外部電磁場にfeedbackされて更に大きい誘導輻射をおこさせるとき，共振器は単にfeedbackの役割を果すだけでなく，共振器の内部の各場所におけるLaser center（原子，分子）の位相をcoherentにする（space coherency）役割も果しているのである。でないかぎり，いくら誘導輻射が外部電磁場とcoherentであつてもLaser beamはcoherentにはならない。このことはmaserのように，共振器の大きさと波長とが同程度の場合には，とかくあたりまえのように感じられて見すごされがちであるが，Laserの場合には十分認識されねばならない。

Laserの共振器には，波長が光学的であるので通常Fabry Perot resonatorが用いられている。これは丁度次のようなモデルを描いた方がよいかもしれない：直径2～300米の平面鏡を比叡山と伊吹山の頂上に向いあわせ，その間に波長10 cm程度のマイクロ波を共振させる。この様な共振器では平面波が共振していても，回折によつて共振が減衰する。其他の要素としては不均質媒質による散乱，平面鏡の歪による散乱，平面鏡又は媒質の導電性によるもの等があり，いずれも大きいfactorであるが，これらは補正によつて考慮できるので，Laser共振器の理論は通常回折損失を含めた共振を記述するものである。実験的にも，理論的にも各種の共振パターンが得られ，それは平面波共振とは異なるものであることが知られている。しかしながら，現在までのところLaser共振器の理論はあまり統一的なものではなく，簡単に答を求めることも，modificationも困難である。その原因は共振器が単に反射板を向い合わせただけのもので，しかも，反射面の間が波長の何万倍と隔たつていることにある。

これまでの研究者がとらえていたLaser共振のpictureは，平面波が進んでいつて反射してくるといつたものである。その往復する間に回折によつて失われる損失をもつて共振の減衰をあらわそうとしていた。この様なpicture に基ずく理論はinterferometer theory（干渉計理論）とよんでよいであろう。

この様な理論の欠点の源は別の云い方をするならば，diffractionという概念とreso-

nanceという概念とが理論の上でうまく結びつかないのでformulationが透明にならないことにある。

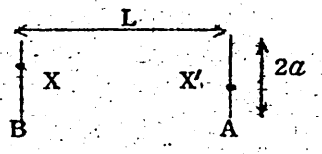
池上研究室では討論の結果，異なつた観点から出発して新しいLaser共振器の理論を進めた。それは上の理論に対して，cavity theory（空胴理論）とよぶことが出来る。これはinterferometer theoryのもつ種々の欠点はすべて免がれており，しかも後者に比してはるかにpracticalでありfruitfulであることが§3－6，§3－7の結果に見ることが出来る。例えば，後者の理論の困難な数値計算にもとずくプロットの外挿式を，cavity theoryでは理論的に美しい形で導びくことが出来，interferometer theoryの結果を修正したのみならず，しかも種々のモードに対する関連をも与えることが出来た。又§3－7に示すような数多くのmodificationが可能である。

そこで示したプログラムに従つて計算を引続き行なつている。Cavity theoryは，interferometer pictureを捨てて，空胴共振器としての理論を正攻法で最後までおしとおしたものである。マイクロ波共振器とFabry perot共振器との相異点は，前者が殆んど閉じた空胴であるのに反し，後者は開いた空胴であるところが異なつている。前者ではwall lossと導波管との結合に対してはimpedanceという便利な言葉があつたために話が簡単に済ますことが出来たが，後者では開いた面よりの波動の洩れを一種のantenna theoryで求める。その点この理論はcavity theoryとantenna theoryとのcombinationであるといえる。ただここでは，antenna theoryはもつと一般的な形で（境界値問題として）適用されている。この理論の構成順序は第3章のはじめに要約した。

第二章では今までのLaser resonatorの理論の主なものを簡単にreviewして批判を加えた。第三章ではGreen函数の積分表示の計算の途中Helmholtz potential函数をHankel函数による積分表示で表わす新しい積分公式がえられた。その証明は附録2に示した。第三章はすべて昨秋よりの研究室における討論をまとめ，京大電子工学教室の研究談話会でのべたものを少しく改めたものである。[1]多小冗長であることをお断わりしておく。

第 2 章　従来のレーザー共振器理論（Interferometer theory）のreviewと批判

最も代表的なものがFox・Li[2]のものである。基後の論文の多くはこのmodificationであり，或いはこの方法に帰着できるものである。唯解を求めるのに多少の差がみられる。この基本になる考え方は，波がMirroの間で何回も反射されていつたりきたりしているうちに，振巾が指数的にdecayしてrelativeなfield distributionの形は変化しなくなるだろうから，これをこのresonatorの一つのnormalmode とみなそうとするものである。そしてその時の1 transitの間のdecay rateがdiffraction lossを与えるものとする（計算は自由な空間の中で行われる）。上の考えを式に書くためには，一つの面から一方の面に波が伝播していく模様はHuygheu's principleを使用する。第n回の端面Aでの振巾$u_n(X)$とすると第$(n+1)$回目の端面Bでのfield distributionは



$$u_{n+1}(X) = \int K(X|X')\,u_n(X')\,ds \tag{1}$$

$$K(X|X') = \frac{-i}{2\lambda}\,\frac{e^{i\omega R}}{R}\left(1+\frac{L}{R}\right) \qquad R = |X-X'| \tag{2}$$

と書かれる。もしsteady stateが$n\to\infty$でえられたとするならば，

$$\gamma u_{n+1} = u_n \quad (n \to \infty) \tag{3}$$

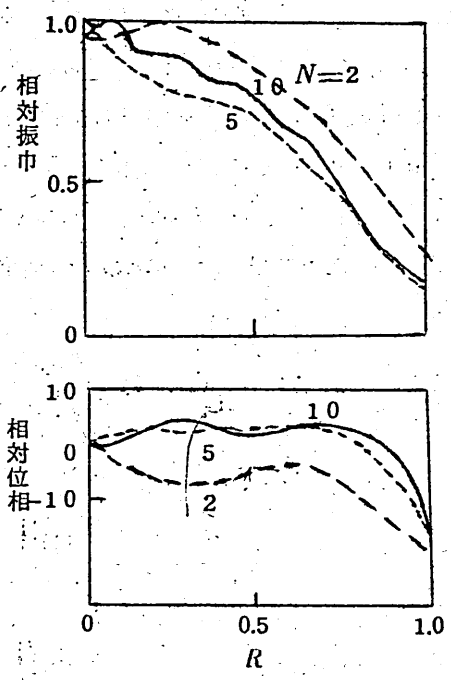
となるから，Steady stateのfield distribution uは次の積分方程式

$$u(X) = \gamma \int_A K(X|X')\,u(X')\,ds' \tag{4}$$

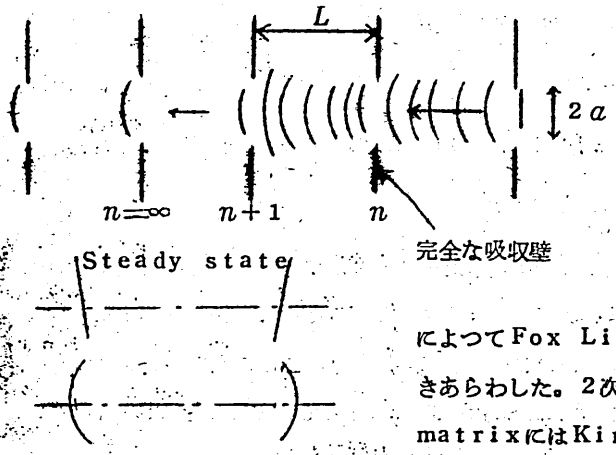
を満足する。ここにγは1 transitの間に生じたuの振巾と位相の変化をあらわす一つの複素数（当然$|\gamma| \geq 1$）である（実さい共振という立場からみるならば，一往復で位相がもとにもどらねばならぬから，γは$\pm\gamma$（但しこのγは実数≥ 1）でなければならない。これがFox Liの方程式であるが，この解を得るのにFox Liはu_0として初期分布を入れて，(1)によつて(3)が近似的に満たされるまで計算機にくりかえしを行なわせてそれを(4)の解とした。その計算のさい積分核(2)が更に簡単な形をとるように

$$N \equiv \frac{a}{L}\cdot\frac{a}{\lambda} \ll \left(\frac{L}{a}\right)^2 \tag{5}$$

の仮定をして，種々の形，円，矩形，球形のMirrorに対してuとγを求めたのである。そしてu_0として予想されるべきModeの初期分布をいれて，えられたuを対応するsteady modeであるとした。例えば円形のmirrorの最低次の対称モードについては図のような結果が出ている。



Fox Liにのべられているようにその計算は，次の様なモデルと同等である。このような計算機による方法は傾斜面或いは球面状のものにも，各面において波の出発の位相差分布を面の変形に応じて与えるならば，全く同様な計算が遂行される。球面が共焦点でない場合とか，曲率がひとしくない場合等々について，面の変形が波長に比して非常に小さい場合に行われている。[2][3] 特に共焦点の球面鏡の場合には異なつたapproachがある。[4]

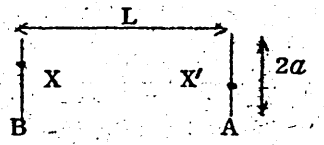


一方，Kotik & Newstein[5]及びその系統のもの[6]は，Fox Liのものとは異なつて，Huyghen's principleを使用せずに，面の反射をscattering matrixで記述して，それによつてFox Liの方程式(4)と同様な共振の条件を書きあらわした。2次元のみを取扱つてscattering matrixにはKirchhoff近似

$$a_0(p,p') = \frac{\sin\left[a(p-p')\right]}{\pi(p-p')} \tag{6}$$

第 2 章　従来のレーザー共振器理論（Interferometer theory）のreviewと批判

最も代表的なものがFox・Li[2]のものである。基後の論文の多くはこのmodificationであり，或いはこの方法に帰着できるものである。唯解を求めるのに多少の差がみられる。この基本になる考え方は，波がMirroの間で何回も反射されていつたりきたりしているうちに，振巾が指数的にdecayしてrelativeなfield distributionの形は変化しなくなるだろうから，これをこのresonatorの一つのnormalmode とみなそうとするものである。そしてその時の1 transitの間のdecay rateがdiffraction loss を与えるものとする（計算は自由な空間の中で行われる）。上の考えを式に書くためには，一つの面から一方の面に波が伝播していく模様はHuygh en's principleを使用する。第n回の端面Aでの振巾$u_n(X)$とすると第$(n+1)$回目の端面Bでの field distributionは



$$u_{n+1}(X) = \int K(X|X')\,u_n(X')\,ds \tag{1}$$

$$K(X|X') = \frac{-i}{2\lambda}\,\frac{e^{i\omega R}}{R}\left(1+\frac{L}{R}\right) \quad R = |X-X'| \tag{2}$$

と書かれる。もしsteady state が$n\to\infty$でえられたとするならば，

$$\gamma u_{n+1} = u_n \quad (n \to \infty) \tag{3}$$

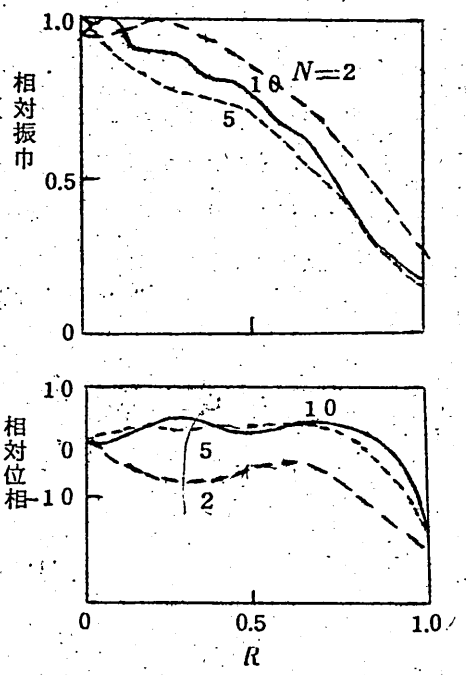
となるから，Steady stateのfield distribution uは次の積分方程式

$$u(X) = \gamma \int_A K(X|X')\,u(X')\,ds' \tag{4}$$

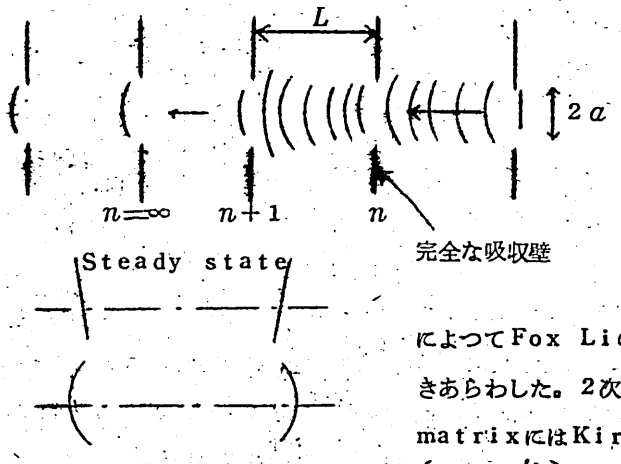
を満足する。ここにγは1 transitの間に生じたuの振巾と位相の変化をあらわす一つの複素数（当然$|\gamma| \geq 1$）である（実さい共振という立場からみるならば，一往復で位相がもとにもどらねばならぬから，γは$\pm\gamma$（但しこのγは実数≥ 1）でなければならない。これがFox Li の方程式であるが，この解を得るのにFox Li はu_0として初期分布を入れて，(1)によつて(3)が近似的に満たされるまで計算機にくりかえしを行なわせてそれを(4)の解とした。その計算のさい積分核(2)が更に簡単な形をとるように

$$N \equiv \frac{a}{L}\cdot\frac{a}{\lambda} \ll \left(\frac{L}{a}\right)^2 \qquad (5)$$

の仮定をして，種々の形，円，矩形，球形のMirrorに対してuとγを求めたのである。そしてu_0として予想されるべきModeの初期分布をいれて，えられたuを対応するsteady modeであるとした。例えば円形のmirrorの最低次の対称モードについては図のような結果が出ている。



Fox Liにのべられているようにその計算は，次の様なモデルと同等である。このような計算機による方法は傾斜面或いは球面状のものにも，各面において波の出発の位相差分布を面の変形に応じて与えるならば，全く同様な計算が遂行される。球面が共焦点でない場合とか，曲率がひとしくない場合等々について，面の変形が波長に比して非常に小さい場合に行われている。[2][3] 特に共焦点の球面鏡の場合には異なつたapproachがある。[4]



一方，Kotik & Newstein[5]及びその系統のもの[6]は，Fox Liのものとは異なつて，Huyghen's principleを使用せずに，面の反射をscattering matrixで記述して，それによつてFox Liの方程式(4)と同様な共振の条件を書きあらわした。2次元のみを取扱つてscattering matrixにはKirchhoff近似

$$a_0(p,p') = \frac{\sin[a(p-p')]}{\pi(p-p')} \qquad (6)$$

を用い，

$$S_{\pm}(p)=\int e^{iq\frac{L}{2}}\,a_0(pp')\,e^{iq'\frac{L}{2}}\,S_{\mp}(p')\,dp' \qquad (7)$$

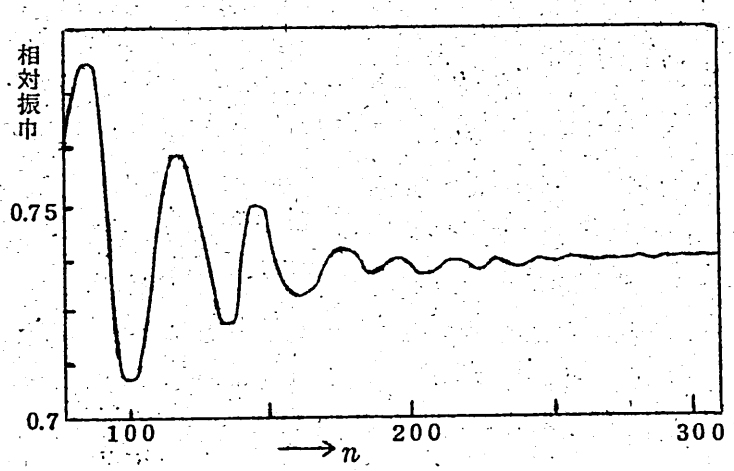
（但しここで $p^2+q^2=\omega^2$　　$(c=1)$。

Kotik　Newsteinは発振の条件を求めるべく，(4)に対応するγは1にひとしくおき，diffractionによる損失を媒質の複素誘電率ϵの虚部分が補なつているものとみなした。ϵの虚部分はLaser物質のpumpの状態できまるから，これによつて発振の条件を得ようとしたのである。この考え方によれば面の変形の状態もそれに対するScattering matrixを修正することによつてくりこまれてしまうわけである。しかしながら，これら二つの異なつた考え方に基ずく方法は実は本質的に同等なものであることがわかる。つまりこれは互いにフーリェ変換の関係にあつて，丁度量子力学におけるx表示とp表示の関係になつており，解く問題によつて便利な方をとるべきである。もし発振条件でなくてfield distributionを求める上からいえばx表示の方が都合がよいわけである。このことはBaroneにも一部書かれている。

Newsteinは第0次近似として散乱行列が$\delta(p-p')$の場合（$a\to\infty$）つまり完全な平面波の場合を方程式の中に代入してえられた結果が第1次近似であるとして発振条件を求めようとした。これはFox Liの場合u_0からu_1を求めたことに相当している。しかしこれは決して第0次よりよい近似にはなつてないことに注意しよう。又，いかに左辺から右辺への繰返しを行なつても方程式を近似的にといたことになつていない。

つまり，方程式(4)又は(7)のtypeの方程式は斉次方程式であつて，固有値問題として解かれるべきで，非斉次方程式のような遂次近似によつては近似されえないのである。近似を求めるのは例えば，摂動計算によつてなされねばならない。（摂動論を使えば第1次近似でも十分共振の像がえられる。）従つてFox Liの解き方も一般には正しくない。つまり(3)の関係が$n\to\infty$において成立するという保証はない。ただnを200以上にとることによつて，大体(3)が満足されることが計算機で確かめられたから，(4)の解として採ることが出来ただけである。

これが出来たのは問題が丁度減衰をあらわすものであつたために，丁度うまく収束して(3)が満たされたのである。又，仮に(3)が正しいとしてもu_1はu_0よりよい近似になるとはかぎらない。これはFox Li[2]に示されているように$n\to\infty$の過程において解の収束が非常に振動していることからも一見できる。この場合，繰返しによつてsteady stateになつたのは



偶々問題の性質がそのようなものであつたからである。一旦(3)が確かめられてしまつた以上は計算の結果は正しいであろう。

又，摂動によつて近似を求めようとするには，問題を十分大きい有限の箱の中に関するものにおきかえて，積分核を書直さないとこのままでは適用出来ない。

一方，方程式(4)又は(7)は停留値問題の形で記述することもできる。

即ち

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\iint_A u(X)\, K(X|X')\, u(X')\, ds ds'}{\int_A (u(X))^2\, ds}$$

が停留値をとるようなuを求めることである。[5][7][8] Tang[7]は適当な近似を行なうとKが対称核となるので，適当なmodeに対応するtrial functionをえらんでγを求めて，Fox Liの結果とよく一致するという結果を出した。しかしながら積分核は対称ではあるがエルミツトでないためにRitz の方法が適用出来るという証明がなくFox等により批判された。[9]

以上のpaperはいずれも出発点は共通しており解法と適用する対象に差があるだけである。

このtheoryは本質的には(4) によつてγとuを求め，固有値γの絶対値をもつてその伝播モードの1 transitの間のdiffractionによるspilt over lossをあらわそうとするのである。この方法には次の様な釈然としない矛盾を含んでいるように思われる。それはHuyghens principleは元来は境界値問題から出てきたもので時間的な概念は使わなくともすむものであるが，ここでは平面間のtransitの間のlossという時間的な感じが入つている。もしγを時間的なパラメタの変数についての運動方程式より導びこうと試みても波動方程式のtypeに書くことが出来ない不自然さを含んでいる。別の不自然さは complete absorber があるために第1のtransitの間の波動と第2のtransitの間の波動等の干渉は少しも考慮することが出来ない。又最初から積分核に近似が使われているだけでなく，

又パラメタNの制限(5)は実際のレーザ共振器の寸法では満足されないことが多い。したがつて，制限内でのNの値からえられる結果を外挿する以外に方法がない。Fox Liは$N=20$までの計算結果を外挿して$N=250$での値を推定した。又初期分布u_0の振巾，位相の多少の変化がu_∞に変化をもたらさないという保証がなければsteady stateと呼ぶことはふさわしくない。又高次のモードはどのようにsteady stateがえられるのか疑わしい。ルビーレーザーの様に誘電率が共振器の内外で変わつている場合には，その様なmodificationは(4)では全く不可能であるし，更に又上記の様な計算機による実験は非常にぜい沢なもので手軽には行なうことはできない。

以上の様な不自然と困難をさけるには，最初から問題の物理的に自然な定式化を行わねばならない。第3章に示した方法では，これらの不自然と困難はあらわれないだけでなく，今までに得られない量や応用が得られる。

第 3 章　レーザー共振器の空胴理論（Cavity theory）

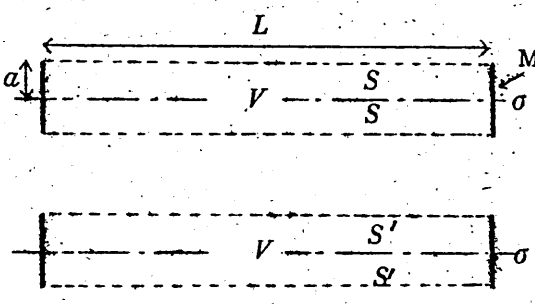
§3－1　概　　括

緒論において述べたように，Fox, Liで代表される理論では，平面波がMirrorの間を進んでいつて反射してくるというpictureをとらえ，各transitの間で失われるdiffraction Lossを求めようとしていた。しかしこのような考えを出発点にとろうとすると前章にのべたような種々の不自然さと困難が伴なう。したがつてこれは，はじめから波が共振しているという像をとらえ，その共振波が開口面から輻射によつて減衰してゆくものと見なければならない。つまり再び空胴共振器の理論に立戻るわけである。通常の共振器の理論と異なるところは，共振が非常な高次のモードでおこるということと，開口面が非常に大きいというところである。したがつて境界値問題は，空胴理論とアンテナ理論の結合という形であらわれ時間的な変化は空胴のQ値によつてあらわされる。この理論は次の順序で行われる。

最初は簡単のため，波動はスカラー波であらわされるものとして，電磁場の場合のスタンダードな空胴理論(10)をスカラー波に対して書きあらわす。そこではもしMirrorの間に完全な平面波共振があつたとすれば，どのようなQを与えるかを見るために，最低次のモードに平面波を含むような固有振動（S'）と，境界面で振巾が0になるような固有振動（S）との二種類の固有振動について理論を平行に進める。開口よりの輻射は境界値問題として取扱いGreen

函数を使つて開口における面積分を計算する（§３－３）。この理論を最初，円形板の間の共振について適用するために，§３－４で円筒の外部に対するGreen函数を求める。§３－５においてこのGreen函数を用いて各モードについての面積分を求める。§３－６において，はじめてレーザー共振器であるという特殊事情つまりnが非常に大きいことと，実際の寸法を使つてこの面積分を数値計算する。ここでは開口面よりの損失のみの計算を与えた。更にFox Liの外挿式に対応するものを各モードに対して導出する。§３－７では他の応用問題，及びFox Liとの比較等をのべ最後に結果をグラフに示した。途中の計算の長い部分は附録にまとめた。

§３－２　スカラー波の共振理論



第　１　図

レーザー共振器は図のような柱状のもので，頂面σが反射板であつて，内外部は自由空間とし，柱面Sは開いているものとする（V内と外部とで媒質がことなる場合も一般化される。）

スカラー波に対する波動方程式は（$c=1$の単位系）

$$\nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

Vの中に固有振動があるとすれば，それはSよりの輻射で減衰してゆく。どのよう固有振動が最も少ない輻射損失を与えるかは前もつては知ることはできない。そこでここでは２種類の固有函数系を比較のために考えることにする。そうしてそれらのうちの低次のモードについて輻射損失を求めることにする。

Vの中の固有函数系$\{u_\nu\}$として次のHelmholtzの方程式をみたすものをとる。

$$\nabla^2 u_\nu + \omega^2_\nu u_\nu = 0 \tag{2}$$

SとS'に分割し，頂面σはS typeの面とする。ここで，

$$S \text{ type} : u_\nu = 0 \tag{3}$$

$$S'\ \text{type}\ :\ \frac{\partial u_\nu}{\partial n}=0\quad (n\text{は面の外向き法線}) \tag{4}$$

と定義し，2種類の固有函数系$\{u_\nu\}$として，一つは開いた柱面でS typeの境界条件をみたすものをとる。これらはそれぞれVの中で直交完全系をつくつており，且規格化されているものとする。S' typeをとりあげた理由は前にものべたように最低次のモードがV内で完全な平面波共振をあらわしているからである（他にも固有函数系のとり方はあろうし，且その時の固有振動の方が更に小さい損失を与えるかもしれない。）

(1)を満足するuはVの中では$\{u_\nu\}$で展開されるから，(1)は次の運動方程式（無限ケの）にreduceする

$$-\ddot{A}_\nu-\omega_\nu^2 A_\nu-\int_\sigma u\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\,d\sigma-\int_s u\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\,ds=0 \tag{5}$$

$$-\ddot{A}_\nu-\omega_\nu^2 A_\nu-\int_\sigma u\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\,d\sigma+\int_{s'}\frac{\partial u}{\partial n}u_\nu ds=0 \tag{6}$$

但しここで

$$u=\Sigma A_\nu u_\nu\quad A_\nu\equiv\int u u_\nu dV \tag{7}$$

$$\nabla^2 u=\Sigma B_\nu u_\nu\ B_\nu\equiv\int\nabla^2 u\cdot u_\nu dV=-\omega_\nu^2 A_\nu-\int_{s,\sigma}u\frac{\partial u_\nu}{\partial n}\,ds+\int_{s'}\frac{\partial u}{\partial n}u_\nu ds \tag{8}$$

特に一つの特別なu_νのみについて考え，上記の境界面での積分がu_νのフーリエ係数A_νの運動方程式に摂動として効いてくるものと考える。

その時0次近似では

$$u\ \sim\ A_\nu u_\nu \tag{9}$$

であつて，1次近似のcorrectionが面積分の中のuに対して行われる。

§3－3　表面よりの輻射と摂動

uの第1次近似のcorrectionは境界面から波動が外部に輻射されるために生ずる。これを求めるのに境界面の外部でのGreen函数を使用する。（Green函数を使うときは，V

の外部を内部と考えているから，法線の定義が前の場合（3式，4式）と逆になる。以後外部とはVの外部を意味し，外向きとはVに対する外向きであるとする）Vの外部のGreen函数を$G(X|X')$：

$$(\nabla_X^2+\omega^2)G(X|X') = -\delta(X-X') \tag{10}$$

とすると，外部のfieldはGreenの定理によつて

$$u(X) = -\int_S G(X|X')\frac{\partial u(X')}{\partial n'}dS \quad (S \text{ type}) \tag{11}$$

$$= \int_{S'}\frac{\partial G(X|X')}{\partial n'}u(X')\,dS \quad (S' \text{ type}) \tag{12}$$

で与えられる。したがつて運動方程式の中の面積分は

$$-\int_S u\frac{\partial u_\nu}{\partial n}dS = A_\nu\int_S\int\frac{\partial u_\nu(X)}{\partial n}G(X|X')\frac{\partial u_\nu(X')}{\partial n'}dSdS' \tag{13}$$

$$\equiv A_\nu I_0 \qquad (S \text{ type})$$

$$\int_{S'}\frac{\partial u}{\partial n}u_\nu dS = A_\nu\int_{S'}\int u_\nu(X)\frac{\partial^2 G(X|X')}{\partial n\partial n'}u_\nu(X')\,dSdS' \tag{14}$$

$$\equiv A_\nu I_1 \qquad (S' \text{ type})$$

と書かれる。したがつて（13），（14）の面積分を実行すればA_νの唯一ケの方程式をしらべるだけとなる。

$$I_0 \equiv \alpha_0 + i\beta_0\ ,\quad I_1 \equiv \alpha_1 + i\beta_1 \tag{15}$$

とおくと，(5),(6)から（A_νのcomplex frequency ω），

$$\omega^2 - \omega_\nu^2 + I = 0 \tag{16}$$

$$\omega \sim \left(\omega_\nu - \frac{\alpha}{2\omega_\nu}\right) - i\frac{\beta}{2\omega_\nu} \tag{17}$$

したがつて，u_νの固有振動数の変化は$\Delta\omega_\nu$と共振のQは

$$\Delta\omega_\nu = -\frac{\alpha}{2\omega_\nu} \tag{18}$$

$$Q = \frac{\omega_\nu^2}{\beta} \tag{19}$$

で与えられる。

（13），（14）の面積分を求めるためのGreen函数はどの様なものをとつても計算できるわけではなく，面の形状やu_νの形に応じて面積分が容易なものを使わねばならない。次節では円板のFabry Perot共振器について行うために円筒の外部についてのGreen函数を求める。

§3－4　円筒外部のGreen函数

積分表示

（10）式を円筒外標でexplicitに書き下せば

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}+\omega^2\right) G(r\theta Z|r'\theta' Z')$$

$$= -\frac{\delta(r-r')\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(Z-Z')}{|r-r'|} \tag{20}$$

（但しここで$|r-r'|$は2点の間の距離を$(r\theta)$面に射影したものをあらわす。）これをθ部分にはFourier級数，Z部分にはFourier積分，r部分にはFourier-Bessel積分を用いて解くことにする。

$G(r\theta Z|r'\theta' Z')$をそれらで書くと

$$G(r\theta Z|r'\theta' Z') = \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda\cdot\lambda g(k\cdot\lambda)\, J_m(\lambda r)\, J_m(\lambda r')\, e^{im(\theta-\theta')}\, e^{ik(Z-Z')} \tag{21}$$

と書かれる。ここで$g(k\lambda)$はmに関係しないFourier係数である。便宜上$r'=0$，$\theta'=0$，$Z'=0$とおいて解き，後にargumentの置き換えを行なう。上の表示での各δ函数を代入すれば，$g(k\lambda)$が求まつて（附録1）

$$G(r\theta Z|0)=\frac{-1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_0^{\infty}d\lambda\frac{\lambda J_0(\lambda r)e^{ikz}}{\omega^2-k^2-\lambda^2} \tag{24}$$

求めるGreen函数の積分表示は，argumentのtranslationを行なつてえられるがtranslation

$$(r,\theta,Z)\rightarrow(r-r',\theta-\theta',Z-Z') \tag{25}$$

を行なう際，rのところには

$$|r-r'|=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')} \tag{26}$$

を使用しなければならない。ここθ，θ'はr，r'がそれぞれ原線となす角度である。

Gegenbauerの加法定理：

$$J_0(\lambda|r-r'|)=J_0(\lambda r)J_0(\lambda r')+2\sum_{m=1}^{\infty}J_m(\lambda r)J_m(\lambda r')\cos m(\theta-\theta') \tag{27}$$

を用いて（21）として

$$G(r\theta Z|r'\theta'Z')$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_0^{\infty}d\lambda\frac{\lambda J_0(\lambda r)J_0(\lambda r')e^{ik(z-z')}}{\omega^2-k^2-\lambda^2}$$

$$-\frac{2}{(2\pi)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_0^{\infty}d\lambda\frac{\lambda J_m(\lambda r)J_m(\lambda r')\cos m(\theta-\theta')e^{ik(z-z')}}{\omega^2-k^2-\lambda^2} \tag{28}$$

が求めるものである。面白いのは（24）で一時消えていたmについての和が再び現われたことである。（24）でΣが消えていたのはδ函数が円対称であるという事情があらわれていたのである。我々はGreen函数として（28）を使うわけであるが，argumentの置きかえは必要の生じたときに最終的に行なうことにして，Green函数としては都合のつくかぎり（24）のまま使用していつてよい。（附録3参照）

積分路

（24），（28）の被積分函数は分母に0点をもつから，これは2変数の複素函数として定義され，各変数の積分のpathを指定しなければならない。このえらび方は，えられる結果

が物理的な事情を正しく反映しているように行なう。

積分（２４）は２重積分であるから，積分の順序の変更が許されるならば結果は積分をどちらについて先に行なうかに依らない。もし，上の事情を考慮しながら（２４）の積分を実行してしまうとよく知られたHelmholtz方程式の球対称なポテンシャルが出てしまう。物理的には当然そうあるべきことながら，数学の公式としては大変興味深い。

Helmholtz potential が2重積分の形に書けたことから，potentialとBessel函数とを結ぶ新しい公式がえられることを後に示す。

(A) kについて先に積分する場合

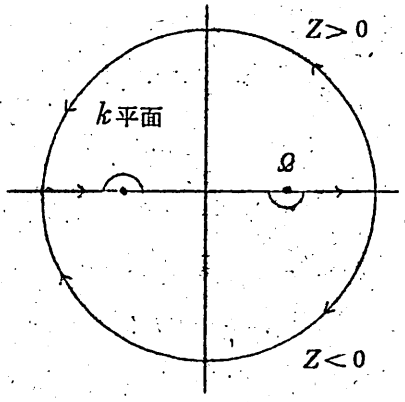
kについての積分路は，えられる結果がoutgoing waveであることを要請することによつて定める。時間因子は$e^{-i\omega t}$とする。（２４）の被積分函数はkについて

$$\Omega \equiv (\omega^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (29)$$

に極をもつ。このΩは実は変数λについての２価の函数になつていることに注意する（したがつてλの函数としては，λの値に対して$\Omega(\lambda)$の偏角を指定しなければ定義できない）。我々は今Ωの偏角が０（正の実数）の時にoutgoing waveをあらわすように積分路を指定する。そのために$Z \gtrless 0$に応じて積分路は第２図のように上又は下をまわるようにとる。そうすれば

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikZ}\,dk}{\omega^2-\lambda^2-k^2} = i\,\frac{e^{i\Omega|Z|}}{2\Omega} \qquad (30)$$

となる。これでΩが正の実数の時の積分がえられてたから，他の複素数のΩに対しては，定義できるはんいでこれからの解析接続によつて積分を定義する（このようなことを云わなければならないのは再びλについての積分を行わねばならぬからである）。したがつて



第 2 図

$$G(r\theta Z|0) = \frac{i}{4\pi}\int_0^{\infty} d\lambda\lambda \cdot J_0(\lambda r)\frac{e^{i\Omega(\lambda)|Z|}}{\Omega(\lambda)} \qquad (31)$$

更にここでλについての積分路を結果がoutgoing waveをあらわすようにλが実軸の下

側をすぎるようにえらぶと[11]

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{exp\{i\omega\sqrt{r^2+Z^2}\}}{\sqrt{r^2+Z^2}} \qquad (32)$$

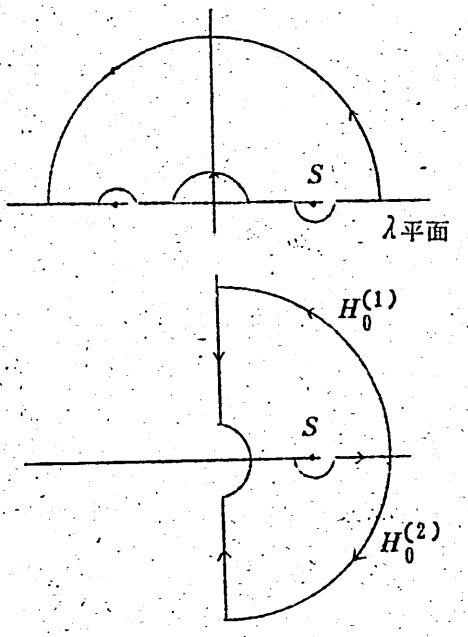
がえられる。これはHelmholtzの球対称なpotentialになつている／したがつて我々の求めたBessel函数表示のGreen函数が正しいことがjustifyされたわけである。（31）から（32）を導びくことはWatson (p-416) ではSonineの積分の特別形として与えられている，（32）の関係は又Levine, Schwinger[12] によつて円形孔による回折の計算に用いられていることを後になつて偶然に知つた。

(B) λについて先に積分する場合

前の項ではkの積分路を選んでZ方向にoutgoing waveを与えていることを確認できていたが，（24）式のFourier Besselの積分の形では，$J_0(\lambda\gamma)$はγ方向の完全な定在波をあらわしているわけであるから$J_0(\lambda\gamma)$の和，つまり積分がγ方向にoutgoing waveを与えているかどうかは明らかではない。しかしここに示すようにλについての積分路を図のように選んでexplicitにout-going wave $Ho^{(1)}(\lambda\gamma)$の積分であらわすことが出来る。まず（24）の被積分函数はλについて

$$S \equiv (\omega^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (33)$$

に極をもつ。前と同様にしてSが正の実数の場合にoutgoing waveを与えるようにλの積分路を定める。Watson[11] (p. 424) にあるように$H_0^{(1)}$を第3図上のように積分するか，又は第3図下のようにJ_0を$H_0^{(1)}$と$H_0^{(2)}$に分割して積分して加えてもよい。その時



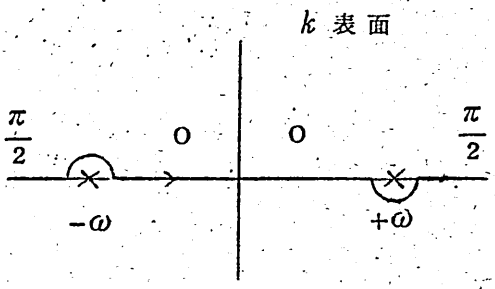
第 3 図

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\gamma)\,\lambda d\lambda}{\lambda^2 - S^2} = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(S\gamma) \qquad (34)$$

なるoutgoing waveがえられる。もしSの上をとおる積分路であれば，右下図よりすぐわかるように $-\frac{\pi i}{2} H_0^{(2)}(S\gamma)$ なるincoming waveになる。これでSの偏角が0の場合の積分がえられる。Sが（33）によつてkの函数として複素数値をとる場合には，これから解析接続によつて（34）を定義する。2価函数$S(k)$の偏角は複素変数kの値に対して指定しなければならない。それによつてkの積分が定義できる。したがつて，

$$G(\gamma\theta Z|0)=\frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\cdot H_0^{(1)}(S(k)\gamma)\,e^{ikz} \qquad (36)$$

$S(k)$の分岐点$k=\pm\omega$をさけて通るpathを図のよう指定する。$k=\pm\omega$では$S=0$であつて，ここは又$H_0^{(1)}$の特異点でもあるから，これをまわるようなpathをとつている。その時の$S(k)$の偏角は$k=0$で0になるように定義しておくと第4図に示したようになる。したがつて積分は$k=\pm\omega$での小円の積分の寄与が無視できれば，k平面の虚軸に関し対称になる。その時次の新しい積分公式がえられる（cf. (31)）。



第 4 図

$$\frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dkH_0^{(1)}(\sqrt{\omega^2-k^2}\,\gamma)\,e^{ikz}$$

$$=\frac{i}{4\pi}\int_{0}^{\infty} dkH_0^{(1)}(\sqrt{\omega^2-k^2}\,\gamma)\cos kZ=\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\{i\omega\sqrt{\gamma^2+Z^2}\}}{\sqrt{\gamma^2+Z^2}} \qquad (37)$$

これを直接証明することは困難であるが，積分路を変形して（31）式の積分で，λの積分路が分岐点ωの下側を通る場合に帰着させる証明を附録2に与えた。（37）は又実部と虚部について書いたものも新しい積分公式とみなせる。

（31）と（37）の積分表示をGreen函数に使用する場合は，問題によつて適当な方をえらべばよい。軸方向の輻射には（31）が、半径方向の輻射には（37）の表示が数値計算には都合がよいようである。（37）の場合，argumentのtranslationを行なうときは$H_0^{(1)}$の加法定理を使用する。

§3－5　表面積分 I_0, I_1

上に求めたGreen函数を使用してVの中の2種類の固有函数系について(13)，(14)の表面積分を行なうわけであるが，Green函数としては(31)の形のものを使うことにする。しばらくは柱面のみについて計算することにし，頂面は完全反射面としておく。頂面よりの輻射はexternal Qに対応する。　$dSdS' = a^2 d\theta\ d\theta'\ dZ\ dZ'$

であるが，θ部分はGreen函数とu_νの形から直ちに求められ，Z部分の積分のみが計算するものである(附録3)。したがって

$$I_0 \equiv \iint_S \frac{\partial u_\nu}{\partial \gamma} G(X|X') \frac{\partial u_\nu}{\partial \gamma'} dSdS' = i\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Lambda_n^2 \frac{2a}{L}\left\{2I_0' + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left(\frac{L}{a}\right)^3 I_0''\right\} \quad (S\text{-type}) \qquad (38)$$

$$I_1 \equiv \iint_{S'} u_\nu(X) \frac{\partial^2 G(X|X')}{\partial \gamma\ \partial \gamma'} u_\nu(X')\, dSdS' = i\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{2a}{L}\left\{2I_1' + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left(\frac{L}{a}\right)^3 I_1''\right\} \quad (S'\text{ type}) \qquad (39)$$

但し

$$\left.\begin{matrix} I_0' \\ I_1' \end{matrix}\right\} = \int_0^\infty \frac{\left[1 \mp e^{i\sqrt{(\omega a)^2 - \Lambda^2}\left(\frac{L}{a}\right)}\right]}{\left[(\omega a)^2 - \left(n\pi\frac{a}{L}\right)^2 - \Lambda^2\right]^2} \frac{\left\{\begin{matrix} J_0(\Lambda) \\ \Lambda J_1(\Lambda) \end{matrix}\right\}^2}{\sqrt{(\omega a)^2 - \Lambda^2}} \Lambda d\Lambda \qquad (40)$$

$$\left.\begin{matrix} I_0'' \\ I_1'' \end{matrix}\right\} = i\int_0^\infty \frac{\left\{\begin{matrix} J_0(\Lambda) \\ \Lambda J_1(\Lambda) \end{matrix}\right\}^2 \Lambda d\Lambda}{(\omega a)^2 - \left(n\pi\frac{a}{L}\right)^2 - \Lambda^2} \qquad (41)$$

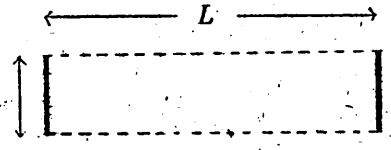
但し$\mp$はnが偶か奇かに従ってとる。

asymmetricなmodeに対しては$\{\ \}$の中を置きかえるだけでえられる(附録3)。

上の積分I_0, I_1の被積分函数について注意すべきこと，積分を他の形に書きかえること，Iをωの函数とみたときに注意しなければならないこと，特にcavity内が真空でない媒質でつまっているときのmodificationおよびI_0, I_1の積分値が物理的に矛盾を含んでいないことなどについての註を附録4と附録5にのべた。

§３－６　数値計算（レーザー共振器の場合）

前節までの結果は固有函数さえ適当であるならば（つまりむやみに積分値が大きくならないようならば），パラメタに関係なく成立する。我々の注目したいのは特にLaser用のFabry Perot resonator であるから，それに対する実用の寸法を使用して積分を行なう。



例えば

$$\frac{L}{a}=10\sim100 \quad a=0.5\sim2\ cm \quad L=5\sim200\ cm$$

波長　$\eta=5,000\sim10,000\,A^{\circ}$, $m=0\sim10$

とすると

$$n\sim\frac{2L}{n}\sim10^{5}\sim10^{7}\left(\frac{n\pi}{L}a\right)\gg\Lambda m \qquad (42)$$

のようになる。Fox Li ではパラメタNに制限があつて：

$$N\equiv\frac{a^{2}}{L\eta}\ll\left(\frac{L}{a}\right)^{2} \qquad (43)$$

そこでは$N=0.5\sim10$程度までの値に対して計算されており，実用のFabry Perot 共振器に対しては$N\sim500$位で到底満たされていない（§３－７参照）。我々の場合には任意の寸法に対して計算が出来る。

附録５，附録４に述べられていることから，積分は$\omega=\omega_{\nu}$ とおいてよく，しかもI^{s} は０になるのでI' のみを計算すればよい。（４２）のような関係に対してQ又は平面波の１ transit 当りのpower loss δ_{d}，及び $\Delta\omega_{\nu}$は（附録６），

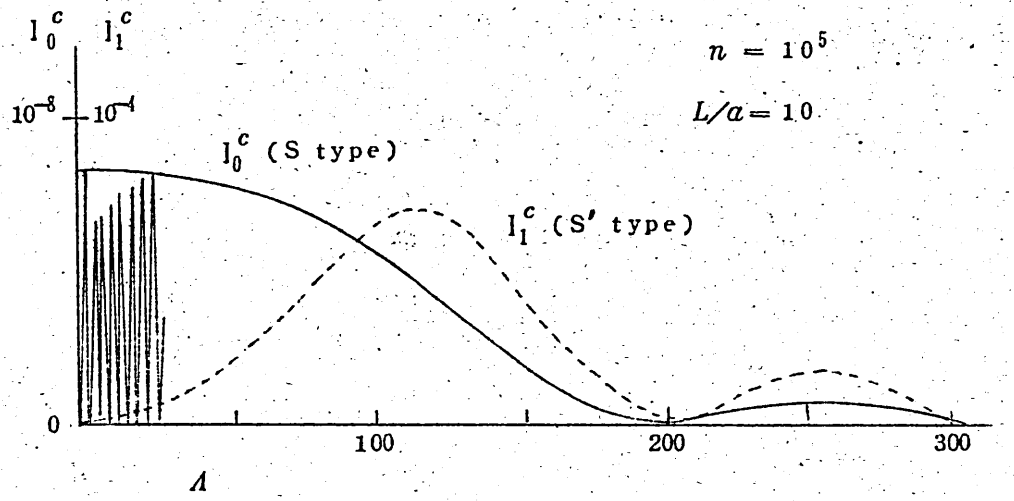
$$\frac{1}{Q}=\frac{2\mu}{\pi L}\begin{Bmatrix}\Lambda_{n}^{2}\\1\end{Bmatrix}I^{c} \quad , \quad \delta_{d}=4\begin{Bmatrix}\Lambda_{n}^{2}\\1\end{Bmatrix}I^{c} \qquad (44)$$

$$\Delta\omega_{\nu}=-\frac{2}{L}\begin{Bmatrix}\Lambda_{n}^{2}\\1\end{Bmatrix}I^{s} \qquad (45)$$

$$I^{c}(N)\equiv P\int_{0}^{\infty}\frac{\left[1-\cos\frac{\Lambda^{2}-\Lambda_{m}^{2}}{4\pi N}\right]}{\left[\Lambda^{2}-\Lambda_{m}^{2}\right]^{2}}\begin{Bmatrix}J_{0}(\Lambda)\\\Lambda J_{1}(\Lambda)\end{Bmatrix}^{2}\Lambda d\Lambda \qquad (46)$$

$$I^{S}(N) \equiv P\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{\Lambda^2-\Lambda_m^2}{4\pi N}}{\dfrac{\Lambda^2-\Lambda_m^2}{2}}{}^{2} \left\{\begin{matrix} J_0(\Lambda) \\ \Lambda J_1(\Lambda) \end{matrix}\right\}^{2} \Lambda d\Lambda \qquad (47)$$

ここで{ } の中はS type , S′ type にしたがい上，下をとるものとする。



このI_cの被積分函数の形は大体第5図の様になる。こまかい周期はBessel 函数によるもので大きい周期は正弦函数によるものである。§3－5でのべたように，この図は輻射の指向性をあらわしていると考えることができる。μ＝10,000A°　a＝0.5 cm として，Λ＝200のところで10^{-2} radianであるから，殆んどの輻射が軸方向に出ていることになる。つまりdiffraction loss の別の表現になつている。積分にきいてくる範囲では殆んどのΛに対してBessel 函数は漸近形を使うことが出来るので積分は容易に行なえる。又著しいことはこの積分値はΛmの値に殆んど依存しない。たとえば$\Lambda_0 \rightarrow \Lambda_1$ の場合0.2％程度の変化しかあらわれない。この2つのことを使うと，$I(N)$のパラメタNに対する函数関係が非常に簡単な形で求められる。即ち，$N \rightarrow AN$とおいたとき$\Lambda_m \rightarrow A\,\Lambda_m$ による積分値の変化が無視できることから

$$I(AN) = \left\{\begin{matrix} A^{-\frac{3}{2}} \\ A^{-\frac{1}{2}} \end{matrix}\right\} I(N)$$

となつて，$I(N)$はNの同次函数であることがわかる。したがつてパラメタNの種々の値に対して積分を求める必要はなく，その係数のみを求めれば，すべて求められたことになる。係数はたとえば$N=100$における$I(N)$の値から決められる。そのようにして求められた結果は

$$Q=258\frac{1}{\Lambda_m^2}\frac{L}{\mu}N^{1.5}\quad,\quad \delta_d=2.40\times10^{-2}\Lambda_m^2N^{-1.5}\quad(S\ \text{type}) \tag{48}$$

$$Q=13.7\frac{L}{\mu}N^{0.5}\qquad \delta_d=0.450^{-}\quad N^{-.5}\qquad(S'\ \text{type}) \tag{49}$$

但しNはFox Liのパラメタで

$$N\equiv\frac{a^2}{L\mu}\quad(a：半径，L長さ，\mu：波長) \tag{43}$$

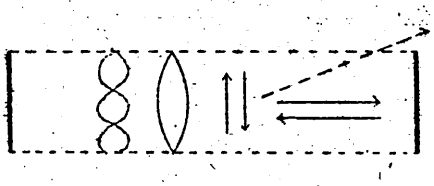
上の結果は円対称なモード($l=0$)に対して求められた。(48)は丁度伝播モードでいつてTEM$_{om}$に相当する。しかしながら附録3でのべたように円対称でないモード($l\neq0$)に対しては，附録3米式に与えた置き換えと，規格化常数N_νの置換のみを行なえば後は同じであるので，(48)は一般のモード(伝播モードでTEM$_{lm}$に相当)に対しても成立つことが示される。その場合Λmは

$$J_l(\Lambda l_m)=0\qquad\begin{cases}l=0,1,2,\cdots\cdots\\ m=0,1,2,\cdots\cdots\end{cases} \tag{50}$$

を満たす。Λl_mはJ_lの第m番目の根であることを意味する。S' typeに対しても附録にのべたように拡張は出来るが，グラフに示すように，$N=100$のところでもδdはSの場合に比して10^3倍近く大きいので，S' typeに対しては平面波共振の場合のδdがS typeの場合に比して大きいことを確かめただけで十分である。

(48)，(49)式で興味深いことは(48)はモードにdependしているが(49)はmodeにdependしていないことである。その代りに(49)式は(48)($m=0$)に比べて3桁～4桁大きい(図6.7参照)。この事情の示すところは，S′ typeの固有振動では面S′上で$u\neq0$であるため輻射量が多きく，しかもモードによつて面S'上のuの値はあまり変化しないが，S' typeの固有振動では面S上では$u=0$であるので輻射量は少なく，

輻射は専ら$\partial u/\partial r$によるものであるが，大きさはモード次数が大きくなるほど大きくなるのである。モードdependenceは又次のように考えてもよい。たとえば次数mは半径方向の定在波が出来ていることを示すが，mが大きくなるほど定在波の波長は短かくなる。固有振動がおきているときは，Z方向にも定在波が出来ているがこの二つの定在波があるということは，共振器内の平面波に軸方向からずれたものが存在することをいみするから，これによつてWalk off lossが生じるのである。mが大きくなるほどこのWalk off lossは大きくなるわけである。



$TEM_{\ell m}$モードに対する（48），（49）のδdの係数をℓ，m=0～4まで表に示した。対応するQの係数はδdの係数の逆数に2πを乗じたものである。

$-m$ \ ℓ	0	1	2	3	4
0	0.138	0.352	0.633	0.977	1.38
1	0.731	1.18	1.70	2.29	2.94
2	1.80	2.48	3.24	4.07	4.96
3	3.34	4.26	5.26	6.31	7.45
4	5.35	6.51	7.74	9.05	10.4

（ℓ，m）モードに対するδdの係数

これによつて一定のNに対して，δdの大きさの順と，モードとの関係が一見出来る。

δdが又パラメタNのみで与えられることはFox Liの計算にあらわれていることに符号している。周波数の変化$\Delta\omega_q$に対してもI^sを求められるが，これは小さいということのみを確かめれば，レーザー共振器の理論には重要ではない。（第8図参照）唯，$I^c(N)$と$I^s(N)$は計算によると殆んど一致している。或種のdispersion relationが成立しているものと思われるが今のところ不明である。

§3－7　特長，比較，応用

a）Fox　Liとの比較

前にのべたように，Fox Li の方法はNが小さいところでしか計算出来ないし，しかもQが大きい場合には計算機によるtransif の回数が数百回位では到達収束しないはずである。そこでFox Li は δdを$N=20$まで数値計算で求めてlog－log グラフにplotして外挿式はTEMoo モードに対し

$$\delta d=0.207N^{-1.4} \qquad (51)$$

である。我々の場合（48）は

$$\delta d=0.138N^{-1.5} \qquad (52)$$

となる。Fox Li の求めたstable state が我々の考えているStypeのモードであると云う保証はないが，Fox Li の得たパターンをみれば大体それに近いことを推察できる。（51）（52）はグラフに示したように，オーダーはかなり合致している。実際（48），（49）を導いた計算過程を見てもわかるように，δdがNの同次式となつたのはFox Li にとつては幸運であつたといつてよいであろう。でなければ$N=20$の値から$N=100$以上の場合まで外挿することは全く出来ないことである。又，Fox Li では他にTEM_{10}が求められるが，Fox Li 流の計算機による実験で求めるやり方では，高次のモードに対ではおそらく希望するモードに収束するような結果を得ることにむつかしいし誤差も大きくなるであろう。しかしながら我々の場合ではℓ，mがそれほど大きくならないかぎりは，（48），（49）式で十分与えられる。我々の得た（48）式の最も有利な点はmode に対するdependence が$\Lambda\ell m$ のみでexplicitに与えられることである。

b）Vainshtein の結果との比較

この研究が，この段階に達して後，偶然に新しいAppr oach が Vainshtein[13][14] によつて為されていたことを知つた。これは取扱いからいえば，interferometer theory に属しており，共振条件をWiener－Hopf法によつて解いたものである。円型のFabry perot 共振器に対する解を我々の場合と比較すると，よい近似で，（48）式に対応するものがえられ，しかもMode に対するdependence は，（48）と同様$\Lambda_m^2\ell$で決定しれることがわかる。（48）又は（52）に対応するVainshtein の結果は

$$\delta d = 0.30 N^{-1.5} \qquad (53)$$

となる。このグラフも第7図に記入した。結果は，Fox Li の方に近よつているが，mode dependence は我々の場合と同じであるから，図を平行に移動すれば全く重なつてしまう。(5.2)と(53)とは，約2倍の差があるが，これは，近似の差によるものなのか，どうか，今のところ不明である。

c)特長，応用

Fox Li の型の理論ではそれをmodify することが殆んど困難であつた。たとえば，共振器の媒質の屈折率が1より大きい場合，共振器の励振，変調，媒質の非線型性，Line との結合，等実在の共振器で問題となることに対しては適用さええない。それらの問題はすべてここにのべた空胴理論で取扱うことが出来る。基本になるpicture が確立されたので，そのvariationとして次のような種々のプログラムが生じる。

i) σでの透過率を与えて正確にexternal Q を求めること。

ii) 頂面が円以外のたとえば，矩形の場合を計算すること。この場合は通常のFourier 積分のみの計算であつて，むしろ上の円の場合よりも容易であろう。

iii) §3－5でのべたように，共振器内の屈折率が1より大きい場合又は複素屈折率をもつ場合にも簡単なmodificationで求められる。ただ(38)式の第2項の積分も現われて計算は複雑になる。

iv) 頂面が変形，又は傾いた場合。変形の波長に比して小さい場合は計算は容易である。変形の度合に応じて各modeに対するQ値の順が入れかわるであろう。それを求めることは非常に興味がある。変形が波長以上の場合は，これも実際上ありうることであるが，取扱いには多少の変更が必要である。

v) 媒質の常数が時間的に変化する場合，(変調)，励振電流又は面での励振(line との結合，アンテナ)，媒質が非線型性，及び周波数特性をもつ場合(弱いポンプなど)などはクライストロンの理論と同じように進められるが現実の実験はまだそれを問題にするには至つていない。

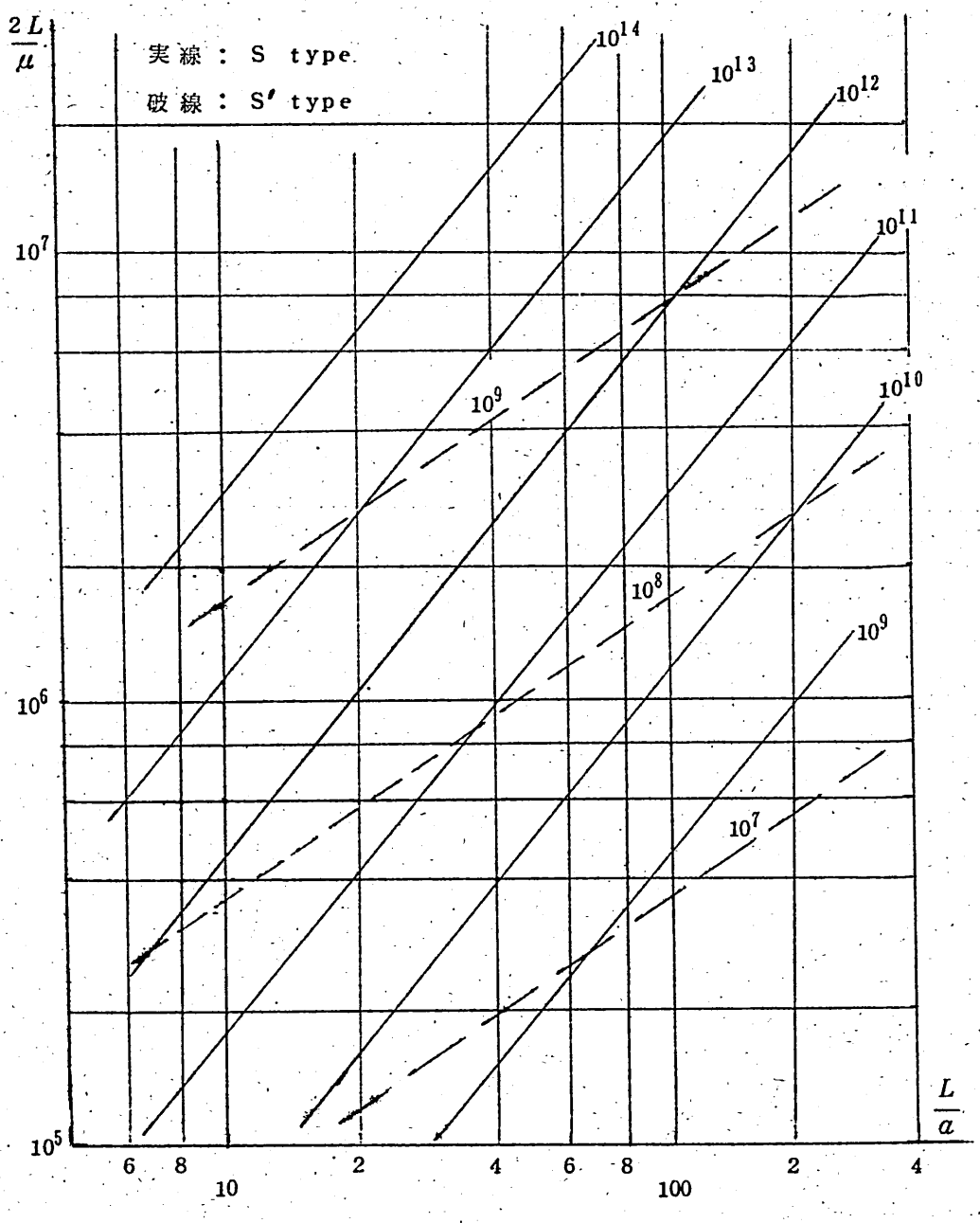
vi) 上ではスカラー波の場合を論じたが，一般の電磁場(ベクトル場)に適用することはこの拡張にすぎない。

vii) 実際のレーザー発振が最大のQをもつ固有振動でおこるものとすれば，maximum Q を与える固有振動を求める問題が生じる。この問題に於ては更に，固有函数がどの領域を

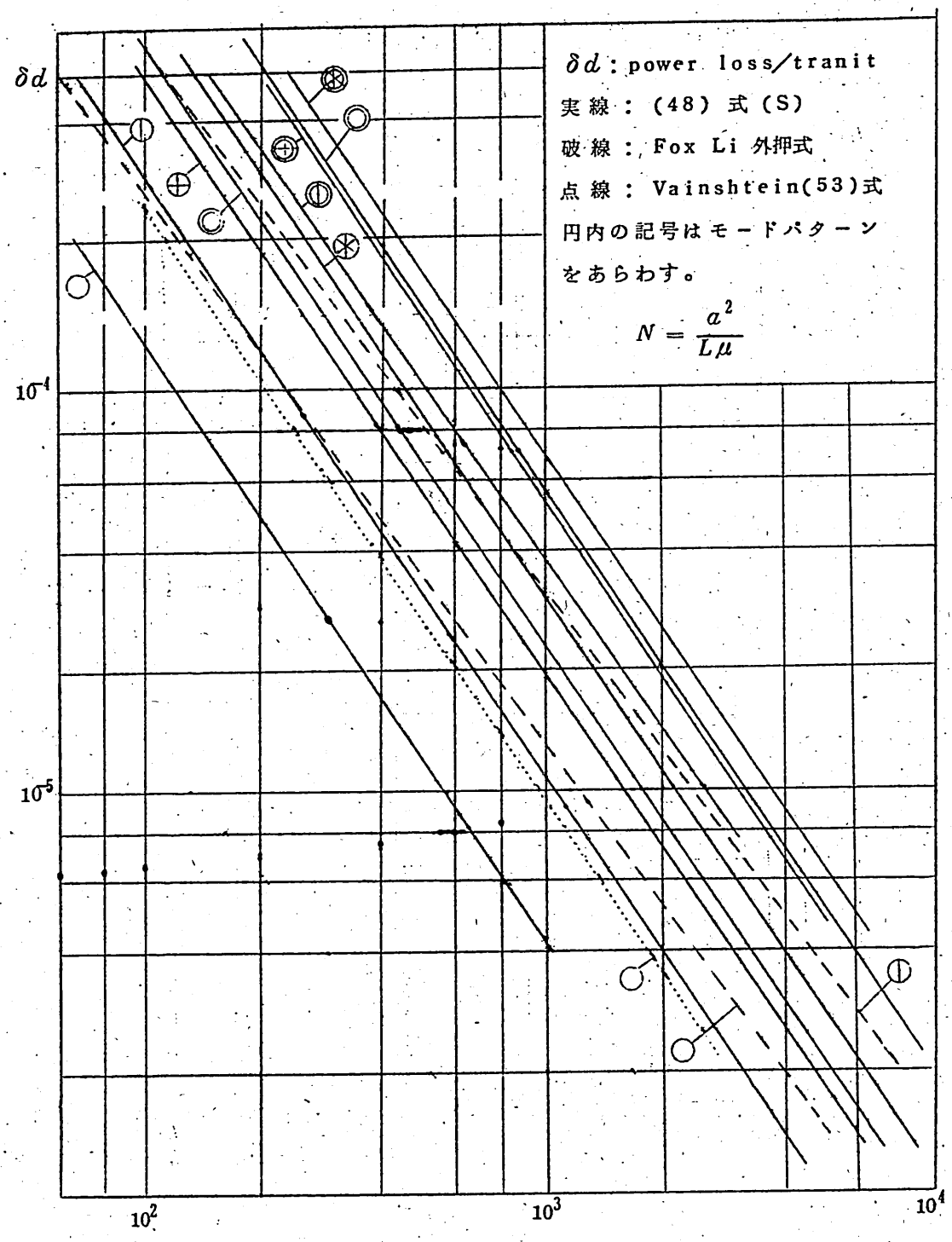
占めるかということも問題にされねばならない。ここでは，この数学的に興味のある問題を解くことは試みないが，以下の理由によつて，その様な固有函数は非常にS型のモードに近いであろうと相像される。つまり，こゝに示されたように，S 型は，振巾が境界面で0でないために，S型と比べると随分輻射の量が多い。したがつて，第三種の境界条件，つまり，SとS型との混合型の境界条件をもつ固有函数を考えねばならぬ必要はないであろう。又，固有振動の占める領域に関しては，筒面は，二つの鏡の間の領域をかこむ面のうちで最小の面積をもつということと，レーザー共振器の場合には，共振器の寸法が波長比べてはるかに大きいという事実を考えると，振動領域は十分同筒に近いであろうと考えられる。

この研究は，この点は明確にしたと主張はしないが，この段階では，回折損失に対し，十分取扱い易い式を得たということで満足できるであろう。特に又表面積分Ⅰの式を利用して問題を変分表現に書くことも出来るであろう。それらのことについては又別の機会にめずりたい。

(O, O) mode の Q　(パラメタ: $\frac{2L}{\mu}$, $\frac{L}{a}$)

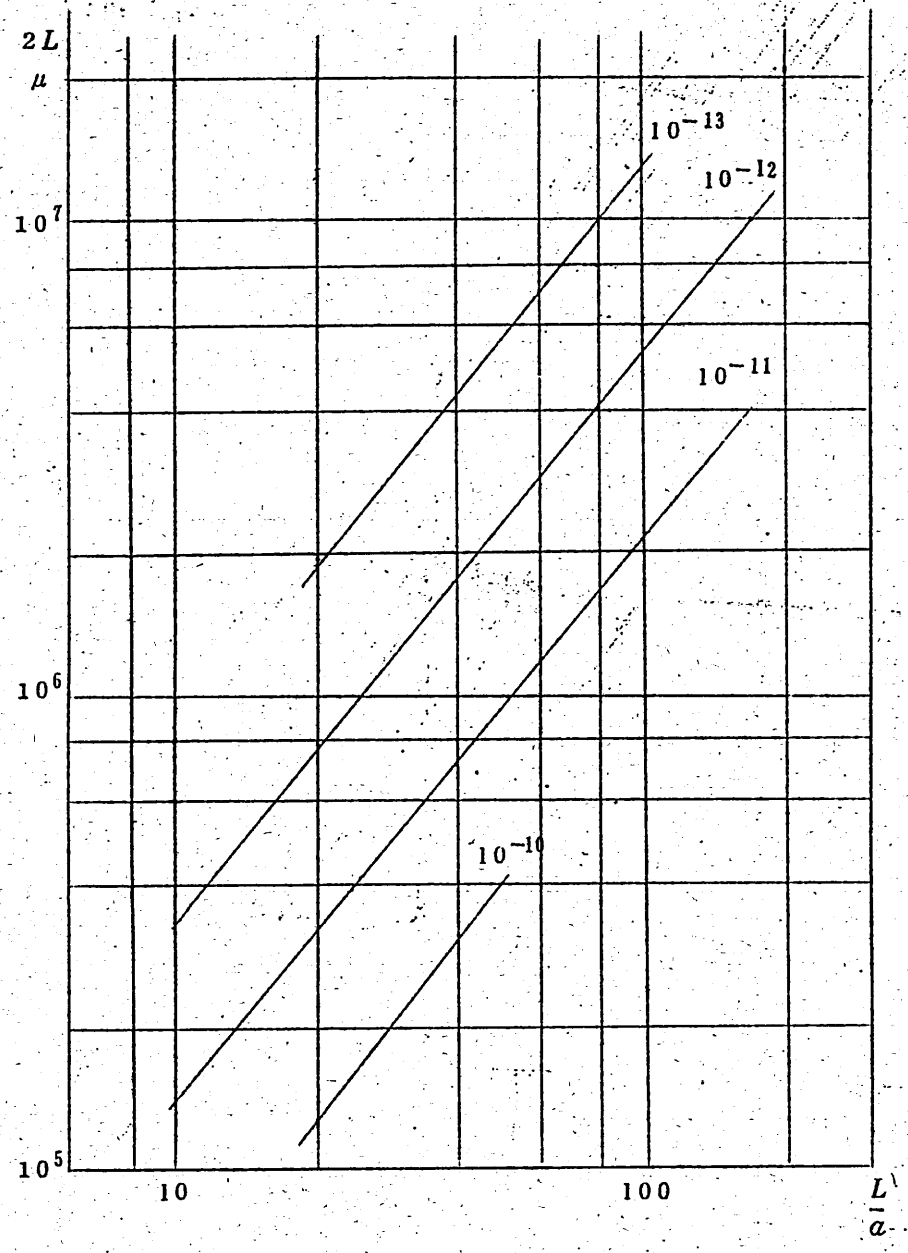


第 6 図


δd
δd : power loss/tranit
実線 : (48) 式 (S)
破線 : Fox Li 外押式
点線 : Vainshtein(53)式
円内の記号はモードパターン
をあらわす。
$N = \frac{a^2}{L\mu}$
10^{-4}
10^{-5}
10^2
10^3
10^4

第 7 図

(0 , 0) mode の $-\frac{\Delta\omega}{\omega}$ パラメタ：$\frac{2L}{\mu}$，$\frac{L}{a}$



第 8 図

附　録　1

$$\delta(\theta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{im\theta}\ (0<\theta<2\pi)\ ,\ \delta(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikz}dk\ (-\infty<z<\infty)$$

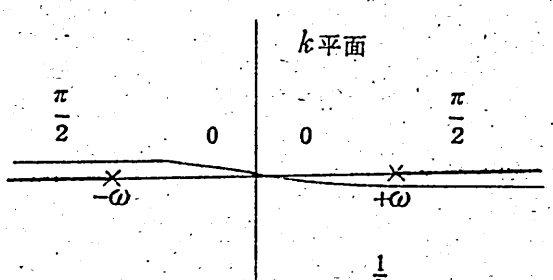
$$\delta(r)=r\int_{0}^{\infty}J_{0}(\lambda r)\,\lambda d\lambda\ (0<r<\infty) \qquad (22)$$

$$(\nabla^2+\omega^2)\,J_{0}(\lambda r)\,e^{ikz}=[\omega^2-k^2-\lambda^2]\,J_{0}(\lambda r)\,e^{ikz} \qquad (23)$$

を用いて（２０）に代入すればえられる。

附　録　2.　積分公式（３７）の証明

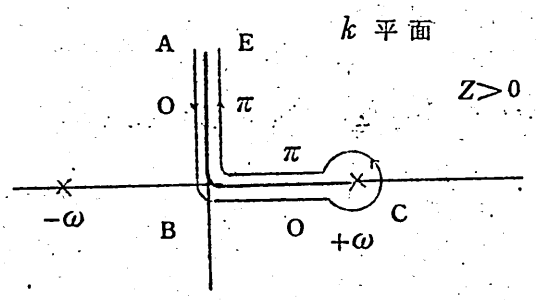
このようなType の公式では，多価函数である$H_0^{(1)}$の argument $S(k)$が更に又kの多価函数になつているので直接の証明は難しい。J_ν の場合にはSchlafli の積分表示のようにargument の２乗があらわれるようなものがあるので，それを利用して積分順序を変更することによつて積分が遂行できることがある（たとえばSonine の積分など[11]）。しかしHankel 函数の場合には，そのような積分表示は見当たらないので，公式を証明するのに適当にpath を変更して（３６）の積分を（31）にreduce させることにする。第１図の積分路はZの正負に関係がないが（３１）にreduce させるためには第２図，第３図のようにZの正負に応じてpath を変更する。$k=\pm\omega$は分岐点であり，図中の太線はcut である。第１図で$S(k)$の偏角は$k=0$で0になるように定義している。しかるとき



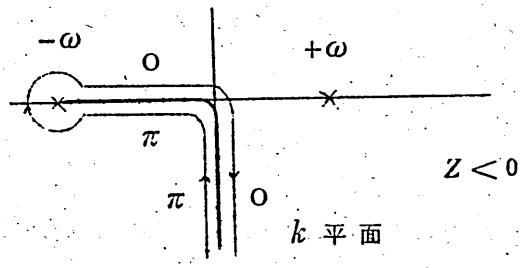
数字は$S(k)\equiv(\omega^2-\omega^2)^{\frac{1}{2}}$の偏角

第　1　図

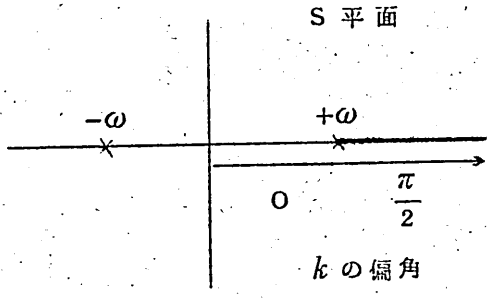
の被積分函数は$Z<0$の場合，上の上半面で解析的であり，しかも半径無限大の半円上の積分は消えることが示される。したがつて第1図の積分路を第2図のように折りまげて変形してもよい。　分岐点$k=\omega$（$S(k)=0$）は又，$H_o^{(1)}$の特異点でもある。$+\omega$のまわりの円の上の積分は半径を小さくとつてゆくと消えることが示される（以後に行なう積分の変数の置き換えをしたあとの式をしらべるとわかる。）第2図のpath上の$S(k)$の偏角は図中に示されている。k（偏角θ：$0<\theta<2\pi$）に対する2価函数$S(k)$の対応はこれできまつたから



第 2 図



第 3 図



第 4 図

$$\omega^2-k^2\equiv S \qquad (\text{偏角}0)$$

とおいて

$$\int_{AB}^{+}\int_{BC}^{+}\int_{CD}^{+}\int_{DF}=-\int_{-\infty}^{\omega}H_o^{(1)}(s\gamma)\,e^{ikz}\,\frac{sds}{k}\int_{\omega}^{c}H_o^{(1)}(s\gamma)\,e^{ikz}\,\frac{sds}{k}$$

$$-\int_{o}^{\omega}H_o^{(1)}(e^{i\pi}s\gamma)\,e^{ikz}\,\frac{sds}{k}-\int_{\omega}^{\infty}H_o^{(1)}(e^{i\pi}s\gamma)\,e^{ikz}\,\frac{sds}{k}$$

$$= 2\int_0^{\infty} J_0(sr)\, e^{ikz}\, \frac{s\,ds}{k} \qquad (z>0)$$

となる。但し $H_0^{(1)}(e^{i\pi}z) = H_0^{(1)}(z) - 2J_0(z)$ の関係を使つた。上の各切片上での s に対する k の偏角は図の対応よりとるものとする。第3図の場合（$z<0$）も全く同様に行われる。注意することは，上の積分の書換えにおいて k の偏角が上の式にあらわれている k よりも偏角が π だけすすんでいることから，上と同じ k を使うならば k $-k$ と書くことによつて

$$2\int_0^{\infty} J_0(sr)\, e^{-ikz}\, \frac{s\,ds}{k} \qquad (z<0)$$

がえられる。したがつて $s \to \lambda$ と書けば（３７）は（３１）にreduceできた。

これで積分公式（３７）の証明は出来たが，二，三注意を補つておく。たとえば $z>0$ の第２図の場合，積分が s について $0 \to \infty$ でうごくと，k の偏角は $C \xrightarrow{0} B \xrightarrow{\frac{\pi}{2}} A$ と変化する。

これは丁度 s 平面（第４図ににおいて z の積分路が $+\omega$ の下を通つたことに相当している（上側を通つたのでは決してこのようにならない）。つまり（３１）の積分を定義したときの条件にに符号している。又，上で k の２価函数 $s(k)$ に対する k の対応を積分の書換えで使つたが，その時

$$k(s) = (\omega^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}$$

と書かなかつたのは，k が s の函数として２価であることと混同するからである。しかし，$z<0$ の場合も含めると，その時は（３１）にもつてゆくのに，偏角 π の違いを負符号として出して同じ k で書いたから，その時はもはや $k(s)$ は今度は s についての２価函数のように見てもよいことになり，$s = \pm\omega$ を分岐点と思つて差支えない。

附録３　固有函数と積分

V の中の固有函数系は，$\nu \equiv (\ell, m, n)$

$$u_\nu = \frac{1}{N_\nu} J_\ell\left(\frac{\Lambda_m}{a} r\right) \cos \ell\theta \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right)$$

（S type）

$$J_\ell(\Lambda_m)=0 \qquad \omega_\nu^2=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{\Lambda_m}{a}\right)^2$$

$$u_\nu=\frac{1}{N'_\nu}J_\ell\left(\frac{\Lambda_m}{a}r\right)\cos\ell\theta\cdot\sin\frac{n\pi}{L}z \qquad (S' \text{ type})$$

$$J'_\ell(\Lambda_m)=0$$

である。我々が最初に注目するののはCirculay symmetric な mode (o,m,n) であるから，その時は

$$u_\nu=\frac{1}{N}J_0\left(\frac{\Lambda_m}{a}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right), \qquad (S \text{ type})$$

$$J_0(\Lambda_m)=0 \qquad N_\nu^2=\frac{L\pi a^2}{2}\left[J_1(\Lambda_m)\right]^2$$

$$\omega_\nu^2=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{\Lambda_m}{a}\right)^2$$

$$u_\nu=\frac{1}{N'_\nu}J_0\left(\frac{\Lambda_m}{a}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \qquad (S' \text{ type})$$

$$J_1(\Lambda_m)=0 \qquad N'^2_\nu=\frac{L\pi a^2}{2}\left[J_0(\Lambda_m)\right]^2$$

$$ds\,ds'=a^2\,d\theta\,d\theta'\,dz\,dz'$$

であるから，柱面の積分でθ部分は直ちに積分されて，

$$a^2\int G(X\mid X')\,d\theta\,d\theta'=-a^2\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_0^{\infty}d\lambda\,\frac{\lambda\left[J_0(\lambda a)\right]^2e^{ik(z-z')}}{\omega^2-k^2-\lambda^2} \qquad (S)$$

$$a^2\int\frac{\partial^2 G(X\mid X')}{\partial r\partial r'}d\theta d\theta'=-a^2\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_0^{\infty}d\lambda\,\frac{\lambda\left[J_1(\lambda a)\,\lambda\right]^2 e^{ik(z-z')}}{\omega^2-k^2-\lambda^2}\qquad (S')$$

となる。又，一般にN_νのangular part が第i次のmode であるときは

$$a^2\int\cos\ell\theta\,G(X\mid X')\cos\ell\theta'\,d\theta d\theta'=-$$

$$=-\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_0^{\infty}\frac{d\lambda\lambda\left[J_\ell(\lambda a)\right]^2 e^{ik(z-z')}}{\omega^2-k^2-\lambda^2}\qquad (S)$$

$$a^2\int\cos\ell\theta\,\frac{\partial^2 G(X\mid X')}{\partial r\partial r'}\cos\ell\theta'\,d\theta d\theta'$$

$$=-\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_0^{\infty}\frac{d\lambda\lambda\left[\frac{\lambda}{2}\left(J_{\ell-1}-J_{\ell+1}\right)^2\right]e^{ik(z-z')}}{\omega^2-k^2-\lambda^2}\qquad (S')$$

つまり（２４）の簡単な形と比べるとJ_0のところがそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}
&\ell=0\quad J_0(\lambda a)\to(2\pi a)^2\left[J_0(\lambda a)\right]^2 && (S)\\
&\qquad\qquad (2\pi a)^2\left[\lambda J_1(\lambda a)\right]^2 && (S')\\
&\ell\neq 0\quad J_0(\lambda a)\to\frac{(2\pi a)^2}{2}\left[J_\ell(\lambda a)\right]^2 && (S)\\
&\qquad\qquad \frac{(2\pi a)^2}{2}\left[\frac{\lambda}{2}\left(J_{\ell-1}-J_{\ell+1}\right)\right]^2 && (S')
\end{aligned}\right\}\ (\text{※})$$

とおきかえるだけでよく，あとは面積分は $dzdz'$ について行なうだけでよい。したがって面積分を実行するさい（２４）のまま $dzdz'$ の積分を行ない，最後に上の置きかえを行なえば，各modeについてS，S' type の場合に計算ができる。それ故§３－４にものべたように，便宜上この置きかえの操作を出来るかぎりあとで行なうことにする。

z部分の積分は

$$I(\lambda)=I(\lambda\omega)\equiv\int_0^L\int_0^L e^{i\Omega|z-z'|}\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)z\quad\sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right)dzdz'$$

$$=\frac{2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left[1\mp e^{i\sqrt{\omega^2-\lambda^2}L}\right]}{\left[\omega^2-\lambda^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]^2}+i\frac{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}L}{\omega^2-\lambda^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

$$=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2a^4\left\{\frac{2\left[1\mp e^{i\sqrt{(\omega a)^2-\Lambda^2}\left(\frac{L}{a}\right)}\right]}{(\omega a)^2+\left(\frac{n\pi}{L}a\right)^2-\Lambda^2}\right.$$

$$\left.+i\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2\left(\frac{L}{a}\right)^3\frac{\sqrt{(\omega a)^2-\Lambda^2}}{(\omega a)^2-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2-\Lambda^2}\right\}$$

但し，$\mp$の符号はnが偶か奇かによつてえらぶものである。よつて

$$I_0=\iint_S\frac{\partial u_a}{\partial\gamma'}G(X|X')\frac{\partial u_a}{\partial\gamma}dsds'$$

$$=\frac{i}{4\pi}\frac{1}{N^2}\left[\frac{\Lambda_n}{a}J_1(\Lambda_n)\right]^2(2\pi a)^2\int_0^\infty\frac{\lambda[J_0(\lambda a)]^2I(\lambda)}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}d\lambda$$

$$=i\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\Lambda_n^2\frac{2a}{L}\left\{2I'_0+\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2\left(\frac{L}{a}\right)^3I''_0\right\}$$

$$I_1=\iint_S\frac{\partial u_a}{\partial\gamma}G(X|X')\frac{\partial u_a}{\partial\gamma'}dsds'$$

$$=\frac{i}{4\pi}\frac{1}{N'^2}\left\{J_0(\Lambda_m)\right]^2(2\pi a^2)\int_0^\infty\frac{\lambda[\lambda J_1(\lambda a)]^2}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}I(\lambda)d\lambda$$

$$=i\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{2a}{L}\left\{2I'_1+\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2\left(\frac{L}{a}\right)^3I''_1\right\}$$

ここでI'_0 I''_0 I'_1 I''_1 は§3−5（40），（41）で与えたものである。

附　録　4

積分 I'　被積分函数は

$$\Lambda' \equiv \sqrt{(\omega a)^2 - n\pi\left(\frac{a}{L}\right)^2} \qquad (\quad$$

に2位の極をもつ。分子の因子は

$$1 \mp \cos\left[\sqrt{(\omega a)^2 - \Lambda^2}\cdot\frac{L}{a}\right] \qquad (1)$$

$$\mp i \sin\left[\sqrt{(\omega a)^2 - \Lambda^2}\ \frac{L}{a}\right. \qquad (2)$$

のかかつた二つのものにわけられる。前者が輻射による損失，後者は輻射による共振周波数の変化に寄与する。しかしながら，(1) の場合には分子がやはり2位の零点をもつために integrand は singular ではなくなる。(2) の場合は分子が1位の零点をもつので被積分函数は1位の極をもつことになるから，主値の他に虚部があらわれる。次の公式を利用する。

$$\frac{1}{x-a} = P\left(\frac{1}{x-a}\right) + i\pi\delta(x-a) \qquad (3)$$

$$\frac{1}{(x-a)^2} = P\left(\frac{1}{(x-a)^2}\right) - i\pi\delta'(x-a) \qquad (4)$$

一の外

下の場合は $f(a)=0$ でないと今の場合積分は収束しない。

積分 I''　これは同様に $\Lambda = \Lambda'$ は1位の極をもつから上と同じように考えてもよいが

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\Lambda)\Lambda d\Lambda}{\Lambda'^2 - \Lambda^2} \qquad (5)$$

の積分は Λ が実軸の下側をとおるので，§3－4－(B)の型と同じ積分で積分値は

$$-\frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\Lambda') \qquad (6)$$

を与える。附録3に与えたと同様の操作を，$H_0^{(1)}$ の加法定理を利用して行うと

$$I_0'' = \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(\Lambda') J_0(\Lambda') = \frac{\pi}{2}\left\{\left[J_0(\Lambda')\right]^2 + i J_0(\Lambda') N_0(\Lambda')\right\} \qquad (7)$$

$$I_1'' = \frac{\pi}{2} \Lambda'^2 H_1^{(1)}(\Lambda') J_1(\Lambda') = \frac{\pi}{2} \Lambda'^2 \left[J_1(\Lambda')\right]^2 + i J_1(\Lambda') N_1(\Lambda') \tag{8}$$

がえられる。

$\eta = 1$ の場合　この時は $\omega = \omega_\nu$ とおくと

$$\Lambda' = \Lambda m \tag{9}$$

となるから，$J_0(\Lambda m) = 0$　（S type）

$J_1(\Lambda m) = 0$　（S′ type）

であるから，積分 I'' 全部，及び I' の特異点よりの寄与はすべて消えてしまつて，結果は非常にかんたんになる。したがつて積分 I を求めるには，I' の主値だけ求めればよい。（7），（8）の type の積分値は $\eta \neq 1$ の場合には必要である。

積分の収束及び積分の変形について

上のような積分は被積分函数に特異点をもつから，積分が計算機にかけるのに容易なように，積分の path をかえて主値を求める必要のないように試みることは今の場合うまくゆかない。又適当な変数変換によつて被積分函数自身は多少簡単にはなるが，物理的意味を考察したり，数値計算をする点からいえばむしろ不利となるので，このままの形で積分を実行する。又，これらの積分は被積分函数をしらべればわかるように $\Lambda \to \infty$ で十分速く fall off し収束する。

附　録　5

積分 I_0, I_1 に関する注意

a）ωの函数として　$I_0\ I_1$ には ω があらわれているが，これは円筒外部（自由空間）の Green 函数を求めたときの angular frequency である。我々は円筒内部でも $c = 1$ とおいたが，もし内部の媒質の屈折率が η であるときは，$\omega_\nu \to \eta\omega_\nu$ のおきかえしなければならぬことに注意しよう。即ち

$$(\eta\omega_\nu)^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Lambda m}{a}\right)^2$$

である。

この共振周波数は，表面によりの輻射による摂動をうけて周波数 ω_ν より変化し，その効果を I_0 I_1 があらわしているがこれは一般に ω の函数である。したがつて§3－3の代数方程式（16）をとくのには $I(\omega)$ を ω_ν の近傍で展開して近似的に解かねばならない。しかし $I(\omega)$ が $\omega=\omega_\nu$ の附近で連続であつて且十分なめらかであれば，共振器の Q が十分高いときには，$I(\omega)\sim I(\omega_\nu)$ とおいてよい。

したがつて $I(\omega)$ が ω_ν の附近で急激な変化をしないことが確かめられれば，$\omega=\omega_\nu$ とおいて積分をすることができる。上の様に $\eta>1$ の場合にも $\omega_\nu \to \eta\omega_\nu$ とおいてから $\omega=\omega_\nu$ とおけば内部の媒質の屈折率が1より大きい場合にも適用できる。このときには表面での全反射つまり表面波の効果も自動的に含まれている。

b） 積分の physical consistency.　上でえられる積分 I' I'' のうち real part は常に正になつていることに注意する。これは Green 函数を outgoing に採つた効果，つまり輻射による損失があらわれているのである。特に I' の被積分函数の実部をみれば，すべての λ について正定符号になつている。つまりいかなる部分波も輻射による損失を与えていることがわかる。一方，虚部の方は不定符号であり，部分波のあるものは周波数を上げ，あるものは下げる働きをしていることがわかる。とくに，被積分函数として書いたものはこの場合の輻射の指向性を与えていることになる（§3－6参照）。λ と輻射角との関係は，z軸となす角を φ とおくと，

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{\omega}$$

で与えられる。

附　録　6

附録5の（a）及び附録4において，I'（40）式において $\omega=\omega_\nu$ とおいたものは

$$\begin{Bmatrix} I_0' \\ I_1' \end{Bmatrix} = P\int_0^\infty \frac{1\mp e^{i\sqrt{(\omega_\nu a)^2-\Lambda^2}\left(\frac{L}{a}\right)}}{\left[\Lambda_m^2-\Lambda^2\right]} \frac{\begin{Bmatrix} J_0(\Lambda) \\ \Lambda J_1(\Lambda) \end{Bmatrix}^2 \Lambda d\Lambda}{\sqrt{(\omega_\nu a)^2-\Lambda^2}} \qquad (1)$$

但しここに P は積分の主値を意味する。又

$$\Lambda_m^2 + \left(n\pi\frac{a}{L}\right)^2 = (\omega_\nu a)^2 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} J_0(\Lambda m)=0 &: \Lambda_0=2.40\ ,\ \Lambda_1=5.52\ ,\ \Lambda_2=8.65\ ,\ \cdots\cdots \\ J_1(\Lambda m)=0 &: \Lambda_0=0\ \ ,\ \Lambda_1=3.83\ ,\ \Lambda_2=7.02\ ,\ \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

我々の現在扱つている特殊事情

$$\frac{\Lambda^2}{\omega_\nu^2 a^2} \ll 1$$

のもとでは

$$1 \mp e^{i\sqrt{(\omega_\nu a)^2-\Lambda^2}\ \frac{L}{a}} = 1 - e^{i\left(\sqrt{(\omega_\nu a)^2-\Lambda^2}-\sqrt{(\omega_\nu a)^2-\Lambda_n^2}\right)\left(\frac{L}{a}\right)}$$

$$\simeq 1-\exp\ i\omega_\nu L\left(-\frac{\Lambda^2-\Lambda_n^2}{2\omega_\nu^2 a^2} - + \frac{1}{8}\left(\frac{\Lambda^4-\Lambda_n^4}{\omega_\nu^4-a^4}\right)\cdots\cdots\right) \quad (4)$$

$$\simeq \begin{cases} 1-\cos\omega_\nu L\left(\dfrac{\Lambda^2-\Lambda_n^2}{2\omega_\nu^2 a^2}\right) & \text{実部} \\ -i\ \sin\omega_\nu L\ -\left(\dfrac{\Lambda^2-\Lambda_n^2}{2\omega_\nu^2 a^2}\right) & \text{虚部} \end{cases} \quad (5)$$

と近似することがゆるされる。§3-6(44):$\omega a \sim 10^4 \sim 10^6$ であるから，上の近似の領域では，上の正弦函数の Λ に対する周期は非常に大きい。Fox Li のパラメタ(47)

$$N \equiv \frac{a^2}{L\mu}$$

を使用すれば (5) は次のように書いてよい。

$$= \begin{cases} 1-\cos\dfrac{\Lambda^2-\Lambda_m^2}{4\pi N} \\ -i\ \sin\dfrac{\Lambda^2-\Lambda_m^2}{4\pi N} \end{cases} \quad (5)'$$

又更に

$$\omega_\nu L\left(\frac{\Lambda^2}{2\omega_\nu^2 a^2}\right) \sim \frac{\Lambda^2}{4\pi N} \ll 1$$

の時には

$$\sim \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\Lambda^2-\Lambda_n^2}{4\pi N}\right]^2 \\ i\,\dfrac{\Lambda^2-\Lambda_n^2}{4\pi N} \end{cases}$$

となつて，(1) の積分の実部では分母と分子の零点が打消しあつていることがわかる。又，虚部の方は sin項により一つの分母の零点が打消し，一つは $J(\Lambda)$ 項によつて打消されているので事実上被積分函数には特異点はあらわれていない。被積分函数は $\Lambda\to\infty$ では分母のために速く fall off するので，積分の上限は事実上 $\omega_\nu a$ よりもはるかに小さいことが示されるから，$\sqrt{(\omega_\nu a)^2-\Lambda^2}\sim\omega_\nu a$ とおいても十分正確である。それ故，(38)，(39) の面積分は

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{Bmatrix} = i\,\frac{n\pi}{L}\,\frac{2}{\omega_\nu}\frac{4}{L}\begin{Bmatrix} \Lambda_n^2 \\ 1 \end{Bmatrix} P\int_0^\infty \frac{\left[1-e^{\,i\frac{\Lambda^2-\Lambda_m^2}{4\pi N}}\right]}{\left[\Lambda_m^2-\Lambda^2\right]^2}\begin{Bmatrix} J_0(\Lambda) \\ \Lambda J_1(\Lambda) \end{Bmatrix}^2 \Lambda d\Lambda$$

参 考 文 献

第 1 章 , 第 2 章

(1) 小倉久直 : 京都大学電気関係教室. 研究談話会記録
No. 124 レーザー共振器とその共振 昭和39年3月6日.

(2) Fox, Li BSTJ. 40 453 (1961).

(3) Fox, Li P. IEEE 51 80 (1963).

(4) Boyd. Gordon BSTJ 40 489 (1961).
Boyd. Kogelnik BSTJ 41 1347 (1962).

(5) Kotik Newstein J. App. Phys. 32 178 (1961).

(6) Barone J. App. Phys. 34 831 (1963).

(7) Tang App. Opt 1 768 (1962).

(8) Culshaw Trans MTT. 10 331 (1962).

(9) Fox. Li. Morgan. App. Opt. 2 544 (1963).

第 3 章

(10) Slater : Microwave Electronics Van Nostrand (1950).

(11) Watson : Theory of Bessel functions. Cambridge Univ. Press. 1945. P416 P.424 .

(12) Levine. Schvinger : Phys Rev 74 958 (1948).

(13) L.A.Vainshtein : Soviet Physics. J. Exp. Theo. Phys. Vol 17. No.3 (1963) translation P.709 .

(14) B.Noble : Methods based on the Wiener-Hopf Technique. Pergamon pvess. (1958).

輻射科学研究会資料

$TE_{0,1}$ 姿態帯域濾波器

杉浦寅彦，菅　博，東上床哲雄
（大阪工業大学）

昭和39年 5月23日

緒言

ミリ波通信に使用されるであろうと思われる円形導波管TE_{01}°姿態伝送機器の研究はこのところ停滞気味である。これらの伝送機器の中でTE_{01}°姿態帯域消去濾波器はベル研究所で開発され通研においてもその線に沿った研究が行われた。ところがTE_{01}°姿態帯域濾波器に関する文献はいまだに見当らない。そこで筆者等はTE_{01}°姿態帯域濾波器の研究に着手し、ほぼ所期の成果が得られたので、ここに御報告する次第である。

素子空胴

矩形導波管TE_{01}°姿態の帯域濾波器の最も普通のものは、矩形導波管中に設けた二つの窓により構成された空胴共振器を管内波長の奇数倍の長さの導波管により数つか縦続に接続したものである。このことから円形導波管TE_{01}°姿態帯域濾波器は、TE_{01}°姿態空胴共振器から構成出来るであろうと考えられる。このような濾波器の素子として使用される空胴共振器を素子空洞と呼ぶことにする。

TE_{01}°姿態素子空胴としては不要姿態の発生が十分小さなものが要求される。中心周波数の挿入損失として特に低損失が要求されない限り、素子空胴の直径は円筒導波管の直径と同一にとることが、構造上からも、不要姿態発生の面からも、又負荷Qを自由にとれることからも望ましい。従って素子空胴は円筒導波管又は螺旋導波管中に二つの障害物を設けることにより構成すればよい。障害物としては不要姿態を発生し難いものがよい。このため図1に示すような銅の円輪を障害物として採用した。二ヶの銅の円輪で構成された素子空胴を図1に示す。

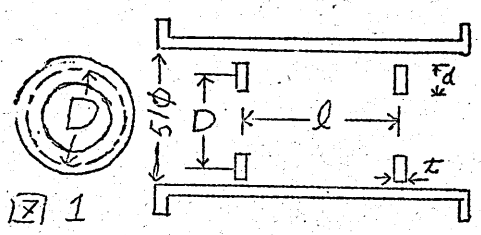


図1

円輪の間隔は当然ほぼTE₀₁姿態の管内波長の½の整数倍にとる。又円輪の中心直径はTE₀₁姿態の$H_\theta=0$である場所の直径と等しくとる。円輪の巾dを変化させるとこの素子空胴の負荷Qが変化する。その変化の模様を図2に示す。

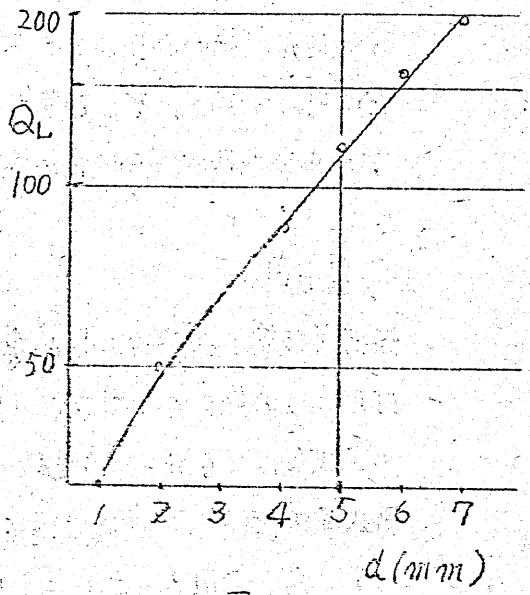


図 2

この図から普通に必要な負荷Qの値をとるために必要な円輪の寸法に工作上の困難さがないことがわかる。円輪支持法について種々試みたが、ポリフォームの円柱の両端面に円輪をとりつけるのが最も簡単であった。

測定は直径51mmφの円筒導波管を用いてGCで行った。

素子空胴出力側で測定した$|H_\theta|^2$のθ方向分布の最大、最小の比と円輪の巾dとの関係を図3に示す。

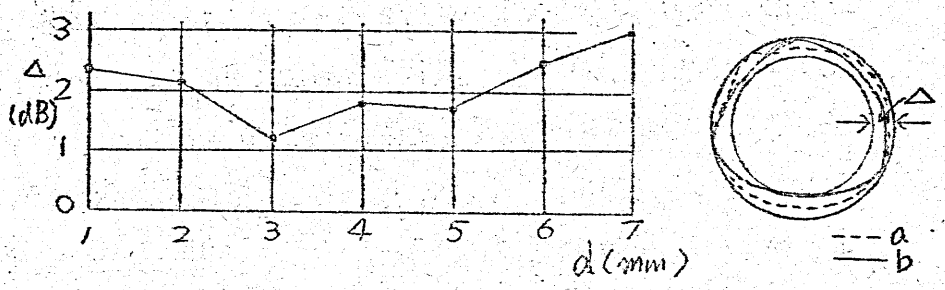


図 3

図3の右側に示した図形のaは素子空胴をとり去った状態の$|H_\theta|^2$のθ方向分布でありbはD=32、d=5 t=1 l=22の場合の分布を示す。これは姿態純度が余り良好でない状態で測定した値であるが

素子空胴挿入によってさして姿態純度が悪化しないことを示している。

図4に素子空胴の共振曲線の一例を示す。

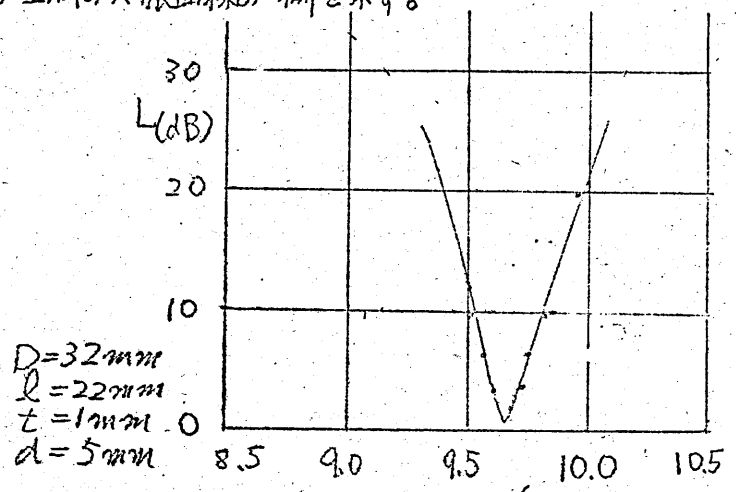


図4

この素子空胴ではTE^{0}_{01}姿態で共振させるのであるから管壁に立てたねじによって共振をとるのは有効でない。しかもねじは不要姿態発生の原因となる。このため共振周波数の調整は二つの円輪を支持するポリフォームの端面をけずることにより行った。もっとも図5のような構造にすれば組立て後にも調整することが出来る。外側の円筒hの内径AはTE^{0}_{02}姿態がa,b部で起りその$E_0=0$の面が直径Bの場所にくるようにとってある。導波管Cは固定され、導波管fは外部からねじにより左右に微動出来るようにする。

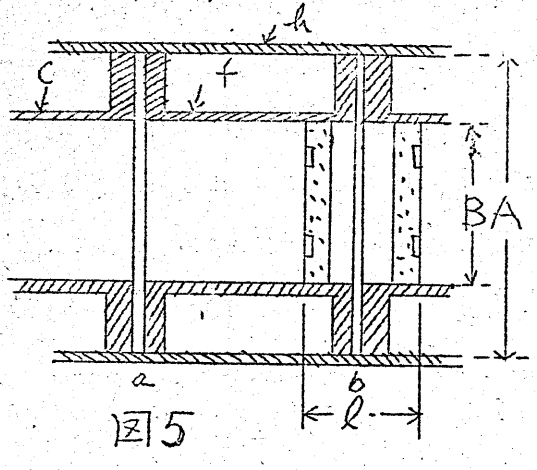


図5

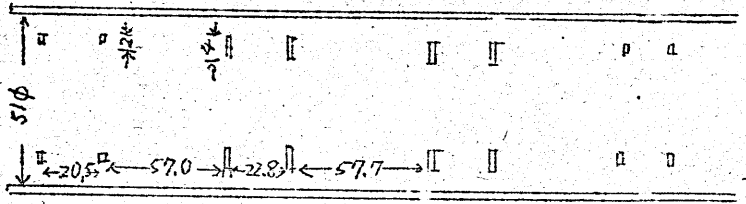
導波管gは固定でも可動でもよい。このようにすれば、fを微調することにより、lを微調することが出来、共振周波数の微調が出来る。

この際a, b部の遊びの間隔だけ調整可能である。又負荷Qの調整は円輪の巾を変えてもよいが、これは工作が面倒である。円輪の厚さを変えても負荷Qが変るから円輪の厚さを石研磨によりへらすことによって、負荷Qの微調整を行った。

帯域濾波器

不要姿態の発生が少ない場合はTE_{01}^{0}姿態の帯域濾波器の設計も、普通のマイクロ波帯域濾波器と同様にして設計することが出来る。たとえば導波長結合TE_{01}^{0}姿態帯域濾波器は中心周波数, 帯域巾, 特性が与えられること、与えられた特性の原形の低域濾波器の各素子の価から各空胴共振器の負荷Qが与えられ各素子空胴の設計が出来る。その素子空胴の等価位相面を測定すれば結合導波管の長さを設計することが出来る。ただ矩形導波管の場合と異り、不要姿態が発生すると円形導波管を伝送され特性が悪くなるから、幾何学的構造に十分注意しなければならない。これを幾分でも救うため銅の円輪は螺旋導波管内に設置し結合導波管も全て螺旋導波管を使用した。円輪がTE_{01}^{0}姿態のE_θ最大の点にあるから、TE_{02n}^{0}姿態が発生するが帯域沪波器部分の導波線直径を細くしてそれらの姿態が遮断域にあるようにえらべばそれらの不要姿態は伝送されないからその原因による特性悪化はおさえられる。

1例として、図6に示すような最大平坦特性4素子のTE_{01}^{0}姿態沪波器について実験を行った。



第6図

この寸法で9GC帯で実験を行ったからTE_{02}^{0}も遮断域に入っている。この場合の挿入損失周波数特性の測定結果を図7に示す。

理論値と実測値はよく一致している。

[illegible]のブロック図を図9に示す。

濾波器挿入前及び挿入後の $1H_3{}^1$ のθ方向分布の変化は図8の様になる。

不要姿態の発生が多い場合は当然中心周波数の挿入損失の悪化をきたし又スカート部の挿入損失の減少をきたすはずであるが図7に示すように、そのような特性悪化が殆んど認められないから不要姿態の発生は問題にならない程度であったと言える。

終始熱意をもって実験に協力された武藤正二郎氏に深く感謝する。

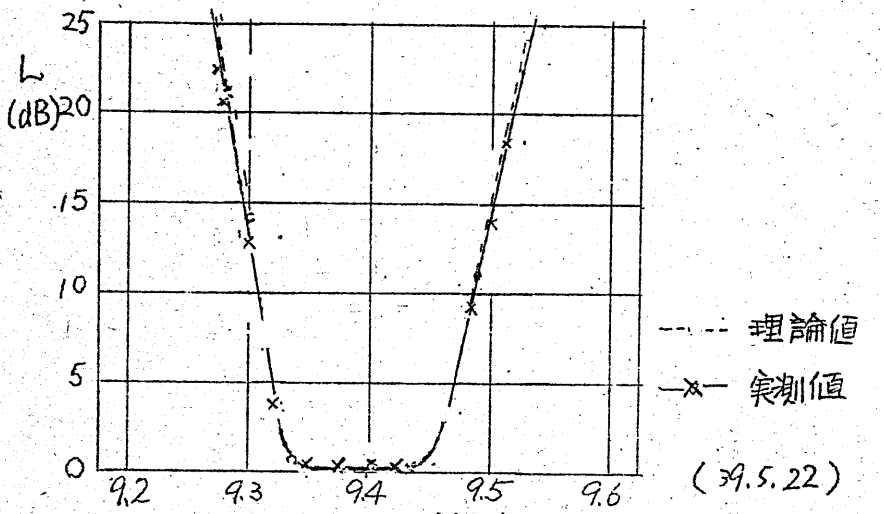
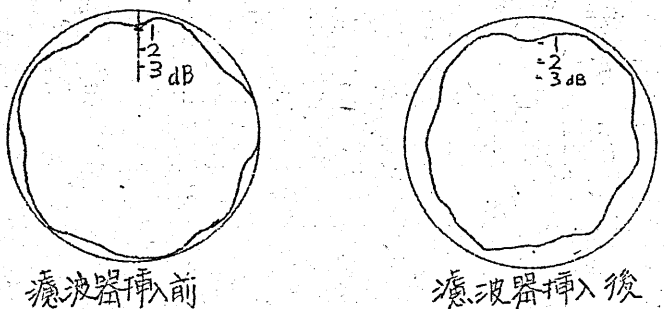


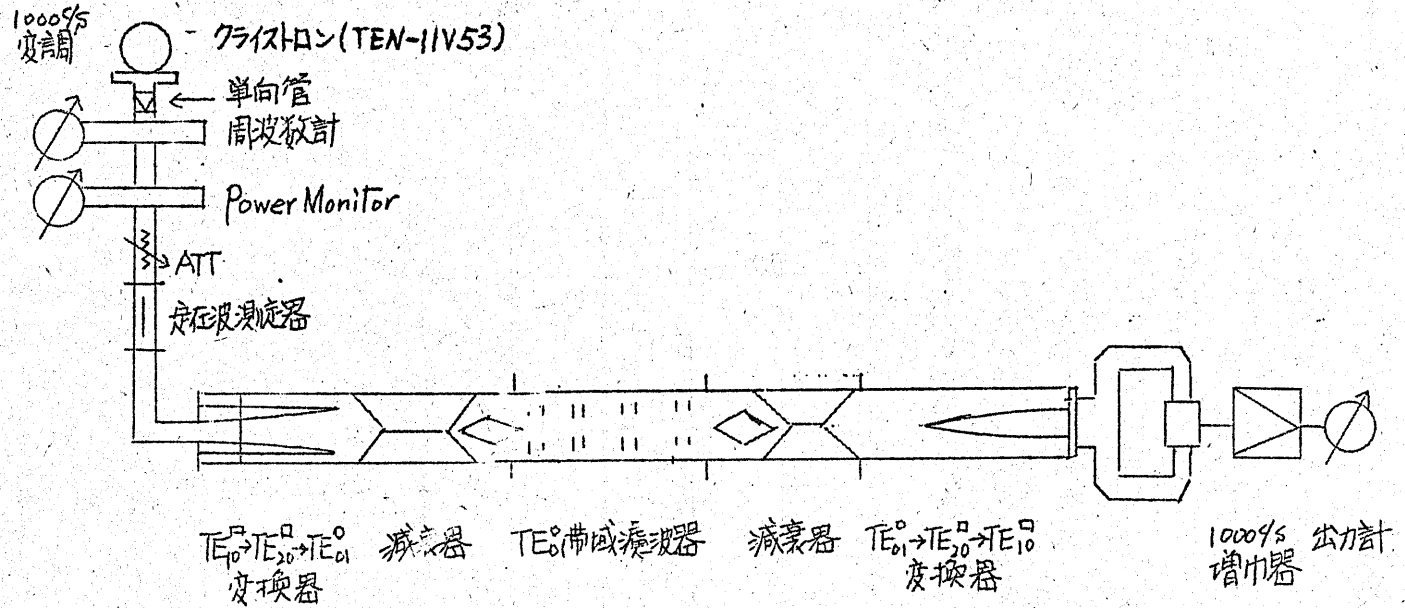
図 7



中心周波数に於ける $1H_3{}^1$ のθ方向分布

図 8

文献、杉浦、菅、栗坂　昭和39年4月電気四学会連合大会論文集1149


10000/s
変調器
クライストロン(TEN-11V53)
単向管
周波数計
Power Monitor
ATT
定在波測定器
TE10→TE20→TE01
変換器
減衰器
TE0帯域濾波器
減衰器
TE01→TE20→TE10
変換器
10000/s
増巾器
出力計

第1図　ブロック図

輻射科学研究会資料　　1964年5月23日

進行波管用抵抗減衰器

西原　浩
裏　克己
寺田正純

（大阪大学工学部）

進行波管用抵抗減衰器

西原浩
裏克己
寺田正純
（大阪大学工学部）

§1. 緒言

進行波管を発振させずに安定に動作させるためにはその遅波回路の中央部に減衰部を設け，出力端での不整合によって生ずる反射波を吸収させることが必要である。この減衰器は所定の減衰量をもち長さが短かく，しかも出力側からみた反射係数が所定の周波数帯域で所定の値以下であることが要求される。広い周波数帯域で反射係数をできるだけ小さくするためには減衰器にできるだけゆるやかにテーパーをつければよいが，こうすると必要な減衰量をうるためには減衰器を長くしなければならなくなる。そこでテーパーの最適設計が問題となる。従来無損失線路に対するテーパーの設計に関しては多くの研究[3]があるが損失のある線路のテーパーの設計に関してはほとんどなされていない。*
抵抗膜を挿入したときの反射係数がどのように与えられるかという問題それ自体も充分考察されていなかった。
構造のわずかに異なる二つの線路を接続した場合反射係数を与える一般式を導いた。つぎにこれを理想ら線の外部に抵抗膜円筒が存在する場合の反射係数を求める問題に適用した。さらにここで得られた反射係数の式が，理想ら線の外部で抵抗値のわずかに異なる2つの抵抗膜円筒が接続している場合に，その接続点における反射の問題にも適用できるものとしてテーパーの設計を試みた。

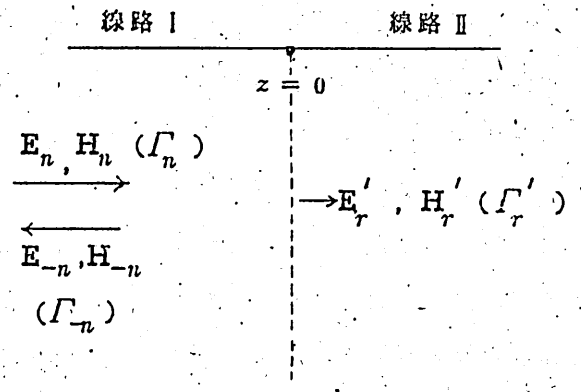
---

* G.Latimirai[4]が特殊なパラメーターに対して電子計算機で数値解を求めているだけである。

ここでは減衰器としては，ら線がガラス管で支持され，そのまわりにアカダッグが塗布されているものを対象にしている。

§ 2. 抵抗膜による反射

まずはじめに一般的な議論として，構造がわずかに異なった二つの線路，Ⅰ（$z<0$；Γ_n，$\mathbf{E}_n$，$\mathbf{H}_n$）およびⅡ（$z>0$，Γ_τ'，$\mathbf{E}_\tau'$，$\mathbf{H}_\tau'$）が$z=0$で接続している場合の接続点における反射係数を求める。（第1図参照）（我々の場合，線路Ⅰは自由空間中の理想ら線に対応し，線路Ⅱは外部に抵抗膜円筒をもった理想ら線に対応する。）



第 1 図

解析を容易にするために，この回路系はτ方向にはclosedされているものとする。とこのとき線路ⅠおよびⅡの各線路のモードの伝播定数はdiscreteであり，またこの回路系の電磁界は次のように各線路のモードの和で表わすことができる。ただし線路Ⅱの右端は整合されているものとする。

線路Ⅰ：

$$\begin{cases} \mathbf{E}e^{j\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_n (\mathbf{E}_{tn} + k\mathbf{E}_{zn}) e^{j\omega t - \Gamma_n z} \\ \qquad\qquad + A_{-n} (\mathbf{E}_{t-n} + k\mathbf{E}_{z-n}) e^{j\omega t - \Gamma_{-n} z} \} \\ \mathbf{H}e^{j\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_n (\mathbf{H}_{tn} + k\mathbf{H}_{zn}) e^{j\omega t - \Gamma_n z} \\ \qquad\qquad + A_{-n} (\mathbf{H}_{t-n} + k\mathbf{H}_{z-n}) \times e^{j\omega t - \Gamma_{-n} z} \} \end{cases} \tag{2.1}$$

線路Ⅱ：

$$\begin{cases} \mathbf{E}' e^{j\omega t} = \sum_{r=1}^{\infty} B_r (\mathbf{E}'_{tr} + k\mathbf{E}'_{zr}) e^{j\omega t - \Gamma'_r z} \\ \mathbf{H}' e^{j\omega t} = \sum_{r=1}^{\infty} B_r (\mathbf{H}'_{tr} + k\mathbf{H}'_{zr}) e^{j\omega t - \Gamma'_r z} \end{cases} \tag{2.2}$$

ここでA_n（$n=1.2.\cdots$）およびB_r（$r=1.2.\cdots$）はそれぞれ線路Ⅰおよび Ⅱの前進波の振巾をあらわし，A_{-n}（$n=1.2.\cdots$）は線路Ⅰの反射波の振巾をあらわしている。$z=0$で横方向成分は連続でなければならないから

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathbf{E}_{tn} + A_{-n} \mathbf{E}_{t-n}) = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \mathbf{E}'_{tr} & (2.3\,a) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathbf{H}_{tn} + A_{-n} \mathbf{H}_{t-n}) = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \mathbf{H}'_{tr} & (2.3\,b) \end{cases}$$

（2.3 a）の両辺に$\mathbf{H}_{t-1}$を右から，（2.3 b）の両辺に$\mathbf{E}_{t-1}$を左からかけると

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathbf{E}_{tn} \times \mathbf{H}_{t-1} + A_{-n} \mathbf{E}_{t-n} \times \mathbf{H}_{t-1}) = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \mathbf{E}'_{tr} \times \mathbf{H}_{t-1} & (2.4\,a) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathbf{E}_{t-1} \times \mathbf{H}_{tn} + A_{-n} \mathbf{E}_{t-1} \times \mathbf{H}_{t-n}) = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \mathbf{E}_{t-1} \times \mathbf{H}'_{tr} & (2.4\,b) \end{cases}$$

(2.4 a), (2.4 b)の両辺にz方向の単位ベクトルkをスカラー的にかけて断面にわたって積分を行い，両辺相い引くと次式がえられる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\int (\mathbf{E}_{tn} \times \mathbf{H}_{t-1} - \mathbf{E}_{t-1} \times \mathbf{H}_{tn}) \mathbf{k}\, ds \right]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} \left[\int (\mathbf{E}_{t-n} \times \mathbf{H}_{t-1} - \mathbf{E}_{t-1} \times \mathbf{H}_{t-n}) \mathbf{k}\, ds \right] \qquad (2.5)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} B_r \left[\int (\mathbf{E}'_{tr} \times \mathbf{H}_{t-1} - \mathbf{E}_{t-1} \times \mathbf{H}'_{tr}) \mathbf{k}\, ds \right.$$

$\mathbf{H}_{t-1}$, $\mathbf{E}_{t-1}$の代りに$\mathbf{H}_{t1}$, $\mathbf{E}_{t1}$を用いて同様の計算をすると次式がえられる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\int (\mathbf{E}_{tn} \times \mathbf{H}_{t1} - \mathbf{E}_{t1} \times \mathbf{H}_{tn}) \mathbf{k}\, ds \right]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} \left[\int (\mathbf{E}_{t-n} \times \mathbf{H}_{t1} - \mathbf{E}_{t1} \times \mathbf{H}_{t-n}) \mathbf{k}\, ds \right]$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} B_r \left[\int (\mathbf{E}'_{tr} \times \mathbf{H}_{t1} - \mathbf{E}_{t1} \times \mathbf{H}'_{tr}) \mathbf{k}\, ds \right] \qquad (2.6)$$

(2.5), (2.6)に次の直交条件[2]を適用する。

$$\int (\mathbf{E}_{tm} \times \mathbf{H}_{tn} - \mathbf{E}_{tn} \times \mathbf{H}_{tm}) \mathbf{k}\, ds = \delta_{mn} p_{mn} \qquad (2.7)$$

$$\begin{cases} \Gamma_m = -\Gamma_n \text{ ならば } \delta_{mn} = 1 \\ \Gamma_m \neq -\Gamma_n \text{ ならば } \delta_{mn} = 0 \end{cases}$$

普通用いられているような線路では$\Gamma_{-n} = -\Gamma_n$ である。*

* 同軸線路，導波管のモード，および理想ら線の回転対称モードに対してはこの関係が成立する。[1]

(2.5), (2.6) から

$$\begin{cases} A_1\left[\int(\mathbf{E}_{t1}\times\mathbf{H}_{t-1}-\mathbf{E}_{t-1}\times\mathbf{H}_{t1})\,\mathbf{k}\,ds\right] \\ \quad =B_1\left[\int(\mathbf{E}_{t1}'\times\mathbf{H}_{t-1}-\mathbf{E}_{t-1}\times\mathbf{H}_{t1}')\,\mathbf{k}\,ds\right. \\ \quad\quad \left.+\sum_{r=2}^{\infty}B_r\left[\int(\mathbf{E}_{tr}'\times\mathbf{H}_{t-1}-\mathbf{E}_{t-1}\times\mathbf{H}_{tr}')\,\mathbf{k}\,ds\right]\right. \\ A_{-1}\left[\int(\mathbf{E}_{t-1}\times\mathbf{H}_{t1}-\mathbf{E}_{t1}\times\mathbf{H}_{t-1})\,\mathbf{k}\,ds\right. \\ \quad =B_1\left[\int(\mathbf{E}_{t1}'\times\mathbf{H}_{t1}-\mathbf{E}_{t1}\times\mathbf{H}_{t1}')\,\mathbf{k}\,ds\right] \\ \quad\quad +\sum_{r=2}^{\infty}\left[\int(\mathbf{E}_{tr}'\times\mathbf{H}_{t1}-\mathbf{E}_{t1}\times\mathbf{H}_{tr}')\,\mathbf{k}\,ds\right] \end{cases} \tag{2.8}$$

(2.9)

ここで $\mathbf{E}_{tr}'$ は抵抗膜が存在しないときの $\mathbf{E}_{tr}(\Gamma_r)$ にある定数 C_r をかけたものと，抵抗膜が存在することによって生ずる電磁界の変化分 $\mathbf{e}_{pr}$ との和で表わすことができる。すなわち

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{tr}' \equiv C_r\mathbf{E}_{tr}(\Gamma_r)+\mathbf{e}_{pr} \\ \mathbf{H}_{tr}' \equiv C_r\mathbf{H}_{tr}(\Gamma_r)+\mathbf{h}_{pr} \end{cases} \tag{2.10}$$

(2.10) を (2.8) (2.9) に代入すると

$$\begin{cases} A_1 P_{1-1} = B_1C_1P_{1-1} + B_1\Delta P_{1-1} + \sum_{r=2}^{\infty}B_r\Delta P_{r-1} \\ A_{-1}P_{-11} = B_1\Delta P_{11} + \sum_{r=2}^{\infty}B_r\Delta P_{r2} \end{cases} \tag{2.11}$$

ただし

$$\begin{cases} P_{1-1}=\int(\mathbf{E}_{t1}\times\mathbf{H}_{t-1}-\mathbf{E}_{t-1}\times\mathbf{H}_{t1})\,\mathbf{k}\,ds \\ P_{-11}=\int(\mathbf{E}_{t-1}\times\mathbf{H}_{t1}-\mathbf{E}_{t1}\times\mathbf{H}_{t-1})\,\mathbf{k}\,ds \\ \Delta P_{11}=\int(\mathbf{e}_{p1}\times\mathbf{H}_{t1}-\mathbf{E}_{t1}\times\mathbf{h}_{p1})\,\mathbf{k}\,ds \\ \Delta P_{1-1}=\int(\mathbf{e}_{p1}\mathbf{H}_{t-1}-\mathbf{E}_{t-1}\times\mathbf{h}_{p1})\,\mathbf{k}\,ds \\ \Delta P_{r-1}=\int(\mathbf{e}_{pr}\times\mathbf{H}_{t-1}-\mathbf{E}_{tr}\times\mathbf{h}_{p-1})\,\mathbf{k}\,ds \\ \Delta P_{rz}=\int(\mathbf{e}_{pr}\times\mathbf{H}_{tz}-\mathbf{E}_{tz}\times\mathbf{h}_{pr})\,\mathbf{k}\,ds \end{cases} \qquad (2.12)$$

ここで抵抗膜による界の乱れが小さいと仮定する。具体的には次の仮定をする。

(i) $r\geq 2$ なる高次モードの寄与は無視できる。

(ii) $|B_1C_1P_{1-1}|\gg|B_1\Delta P_{1-1}|$

$z=0$ での反射係数 $R(0)$ は，(2.11) から

$$R(0)=\frac{A_{-1}}{A_1}\approx\frac{P_{1-1}}{P_{-11}}\cdot\frac{\Delta P_{11}}{C_1P_{-11}}=\frac{\Delta P_{11}}{C_1P_{-11}} \qquad (2.13)$$

が与えられる。これは $z>0$ に均一な薄い抵抗膜を装着したとき，$z=0$ での反射係数を表わす一般的な公式である。

つぎに理想ら線のまわりに抵抗膜円筒があるモデルに対して実際に (2.12) (2.13) を計算してみる。まず (2.12) 中の $\mathbf{e}_{p1}$，$\mathbf{h}_{p1}$ は次のように書くことができる。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{p1}=C_1[\mathbf{E}_{t1}(\Gamma_1')-\mathbf{E}_{t1}(\Gamma_1)]+\mathbf{e}_1(\Gamma_1') \\ \mathbf{h}_{p1}=C_1[\mathbf{H}_{t1}(\Gamma_1')-\mathbf{H}_{t1}(\Gamma_1)]+\mathbf{h}_1(\Gamma_1') \end{cases} \qquad (2.14)$$

(2.14) の右辺の第1項は抵抗膜円筒のために伝播定数が変化したことによって生ずる E_{t1} の変化分であり，第2項は抵抗膜円筒のために生じた界の乱れである。この e_1 , h_1 としては，厳密には理想ら線と抵抗膜円筒で境界条件を満足する界に基ずくものを用いるべきであるが計算がきわめて繁雑になるので，ここでは界の乱れが小さいとして抵抗膜円筒においてのみ境界条件を満足する界で近似することにする。(附録 A) 理想ら線に対する界成分を代入して計算すると $\left| {}^{\Delta\Gamma}/_{\Gamma_1} \right| \ll 1$ のとき次式が得られる。*

$$R \approx \frac{\Delta\Gamma}{2\Gamma_1} \qquad (2.15)$$

これは理想ら線に対する結果であるが，実際のら線回路の場合と比較するために実験を行った。

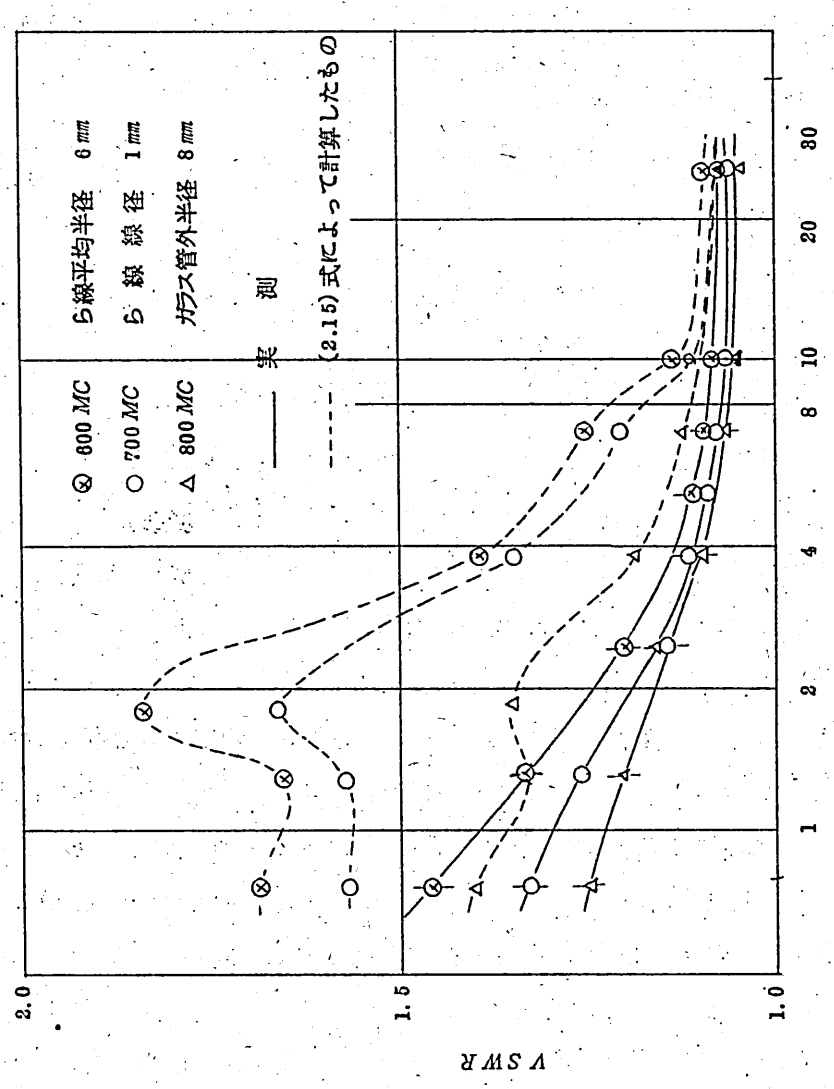
平均半径 6 mmのら線をガラス管で支持し，これを内径 60 ϕ の導体円筒の軸上においた。抵抗膜はマイラー上にアカダッグを噴霧機で塗布したものをガラス管上にまきつけた。ら線に沿って探針を移動し，ら線上の定在波比を実測した。これが第2図の実線である。また抵抗膜上の電磁界の減衰および抵抗膜上の管内波長から減衰定数 α ，および位相定数のずれ $\Delta\beta$ を実測する。
これを (2.15) に代入して反射係数を求めた。これを第2図に点線で示した。(2.15) によって計算した $VSWR$ は実際の値よりかなり大きくなることが判る。R_F が 2 kΩ附近では反射係数になおすと 2 倍以上も大きくなる。両者の反射係数の比を計算したものを第3図に示す。$R_F \to \infty$ すなわち $\Delta\Gamma \to 0$ のとき，R の平均値は ${}^{\Delta\Gamma}/_{2\Gamma_1}$ に漸近していることが見られる。(ただし R_F が大きくなると実測した $\Delta\beta$ の値にかなりのバラツキがあるた

---

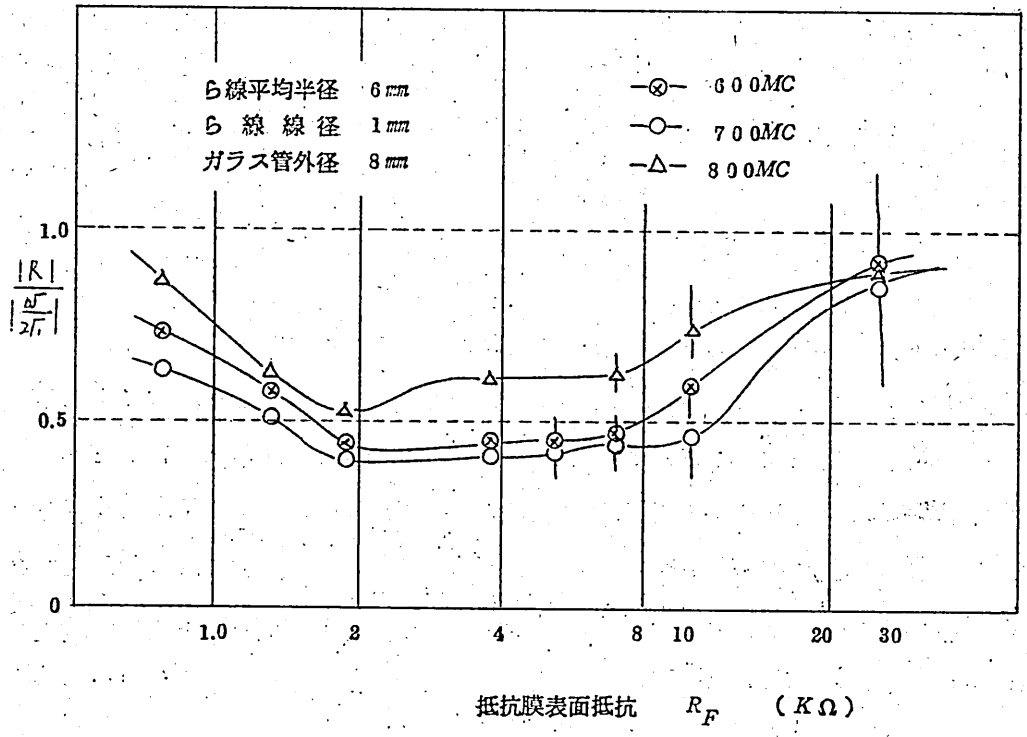
* わずかに異なる特性インピーダンス K_1 , K_2 をもった2つの線路を接続した場合の反射係数は

$R = \dfrac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} \approx {}^{\Delta K}/_{2K_1}$ で与えられる。(2.15) はこれとよく似た形であることが注目に値する。

めそれを用いて計算した R にもバラツキがあるのでもう少し測定点を増す必要がある。）



第 2 図



第 3 図

§ 3. 減衰器のテーパーの設計

テーパーを設計するには所定の周波数帯域内での反射が所定値以下であることが必要であるが，この際通常テーパー長が最小なものが要求される。

前節では，抵抗膜の存在していない線路（伝播定数Γ_1）と抵抗膜の存在している線路（伝播定数$\Gamma_1' = \Gamma_1 + \Delta\Gamma$）が接続されているときの反射係数が$R = \Delta\Gamma/2\Gamma_1$で支えられることが判った。ところが減衰器のテーパーの途中における反射の問題は，抵抗値のわずかに異なる2つの抵抗膜の存在している線路（その伝播定数をそれぞれΓ_1'および$\Gamma_1' + \Delta\Gamma'$）が接続されているときの反射の問題であるが，反射係数はやはり$R = \Delta\Gamma'/2\Gamma_1'$で表わされるものと考えてよいであろう。（§ 2.の解析を拡張すれば証明できると考えられる。）そのときにはテーパーの途中におけるΔz間での伝播定数の変化分$\Delta\Gamma'$はその点の伝播定数Γ_1'にくらべて充分小さいので（2.15）式の近似度はかなり高いと考えられる。

さて，この線路（テーパー部）と反射係数に関して等価な線路（特性インピーダンスはこれから定義される）を考える。すなわちこの線路の Δz 間の反射係数は，等価線路の特性インピーダンス $K(z)$ を用いて次式のようにあらわせる。

$$R(z) = \frac{\Delta K}{2K(z)}$$

ただし ΔK は Δz 間における特性インピーダンスの変化分である。このようにテーパー部における反射の問題は，$\Gamma(z)$ と同じ関数形の $K(z)$ をもつ線路の反射の問題に変換される。以下この等価な線路について考えていくことにする。$\Gamma(z)$，$K(z)$ が変化している線路の波動関数の厳密な解は $\Gamma(z)$，$K(z)$ のある限られた関数に対してだけ得ることができる。その他の場合にはその変化がゆるやかであるとして WKB 法などの近似解法によるか，数値解法によらねばならない。

1. 数値解法による解

テーパーの長さ L で $z = L$ で整合されているとき $z = 0$ からみた反射係数は多重反射を無視すると次式で与えられる。[8]

$$R(0) = \int_0^L e^{-2\int_0^z \Gamma(\xi)\,d\xi} R(z)\,dz \qquad (3.1)$$

ここで $R(z)$ は点 z における単位距離当りの反射係数である。この場合には等価線路を用いる必要はない。

例として $\Gamma(z)$，$K(z)$ が直線的に変化している場合に次のように（3.1）を和の形にかえて積分する。テーパー部を N 分割* して $\Gamma(z)$，$K(z)$ が第4図のよう

---

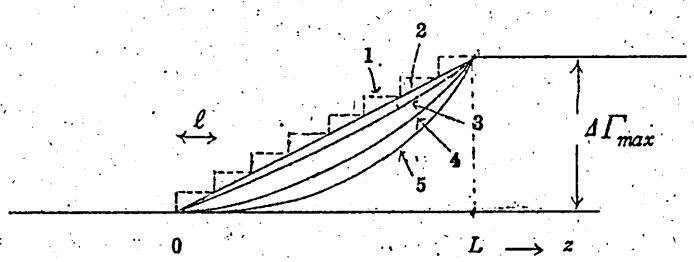
* 分割数を決めるのに $L/\lambda_1 = 1$ の場合に，分割数を増加していくと，$N = 8$ 以上で反射係数が一定値に収斂することを確めた。

に階段状に変化しているテーパーにおきかえる。各階段での反射係数を等しいとすると（3.1）は次のようになる。

$$R(0)=\frac{\Delta\Gamma_{max}}{2\Gamma_1}\frac{\ell}{L}\left[1+e^{-j4\pi\frac{\ell}{\lambda_1}}xy+e^{-j8\pi\frac{\ell}{\lambda_1}}x^3y^3+e^{-j12\pi\frac{\ell}{\lambda_1}}x^6y^6+\cdots\right]$$

$$x=e^{-jz\Delta\beta\frac{\ell}{L}\ell},\quad y=e^{-z\alpha_m\frac{\ell}{L}\ell} \qquad (3.2)$$

ここでℓは分割した一区間の長さである。（第4図）



第　4　図　　テーパーの形状

1.階段状　2.$\Gamma(z)=\Gamma_1(1+\mu z)$，$\mu=\frac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1}\frac{1}{L}$（直線）

3.$\Gamma(z)=\Gamma_1 e^{\mu z}$，$\mu=\frac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1}\frac{1}{L}$，（指数関数）

4.$\Gamma(z)=\Gamma_1(1+\mu z^2)$，$\mu=\frac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1}\frac{1}{L^2}$（2乗）

5.$\Gamma(z)=\Gamma_1(1+\mu z^3)$，$\mu=\frac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1}\frac{1}{L^3}$（3乗）

2. 厳密解（$\Gamma(z)$，$K(z)$が指数関数の場合）

テーパーの長さL，テーパー部の始端と終端の伝播定数の差を$\Delta\Gamma_{max}$とする。

$$\begin{cases} \Gamma(z) = \Gamma_1 e^{\mu z} \\ K(z) = K_1 e^{\mu z} \end{cases} \qquad \mu = \frac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1} \cdot \frac{1}{L} \tag{3.3}$$

この線路の伝送方程式は

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial z} = jX_0 e^{z\mu z} I \\ -\dfrac{\partial I}{\partial z} = jB_0 V \end{cases} \tag{3.4}$$

$z = L$で$K(L) = K_1 e^{\mu L}$で終端したとき点zからみたインピーダンスを計算すると，

$$K(z) = K_0 e^{\mu L} \frac{[Y_0(\zeta_L)J_1(\zeta_z) - J_0(\zeta_L)Y_1(\zeta_z)] + j[Y_1(\zeta_L)J_1(\zeta_z) - J_1(\zeta_L)Y_1(\zeta_z)]}{[J_1(\zeta_L)Y_0(\zeta_z) - Y_1(\zeta_L)Y_0(\zeta_z)] + j[Y_0(\zeta_L)J_0(\zeta_z) - J_0(\zeta_L)Y_0(\zeta_z)]}$$

ただし

$$\zeta_L = \frac{2\pi}{\lambda_1 \mu} e^{\mu L}, \quad \zeta_z = \frac{2\pi}{\lambda_1 \mu} e^{\mu z} \tag{3.5}$$

となる。ここで

$$J_0(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{1/2} \cos\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi} \tan\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \tag{3.6}$$

等の漸近式を用いると，$z=0$ からみた反射係数は

$$R(0)=j\frac{\left(\frac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1}\right)}{8\pi\left(\frac{L}{\lambda_1}\right)}\left\{e^{-\frac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1}}e^{-j4\pi\frac{L}{\lambda_1}}-1\right\} \qquad (3.7)$$

となる。

3. WKB法による解

$$\begin{cases}\Gamma(z)=\Gamma_1\left(1+g(z)\right),\ g(z)=\mu z^n\\ \qquad\qquad \mu=\dfrac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1}\ \dfrac{1}{D^n}\\ K(z)=K_1\left(1+g(z)\right)\end{cases} \qquad (3.8)$$

この線路の伝送方程式は

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial V}{\partial z}=jX_0\left(1+g(z)\right)^z I\\ -\dfrac{\partial I}{\partial z}=jB_0V\end{cases} \qquad (3.9)$$

(3.9) で V を消去すると

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}+X_0B_0\left(1+g(z)\right)^z I=0 \qquad (3.10)$$

$g(z)$ がゆるやかに変化している場合には，WKB 法によれば次の形の一般解が

えられる。

$$I(z)=\frac{1}{\sqrt{1+g(z)}}\left[C e^{j\phi(z)}+De^{-j\phi(z)}\right] \qquad (3.11)$$

但し，　$\phi(z)=\int_0^z \beta_1(1+g(z))\,dz$　　(3.12)

(3.9)の第2式と(3.11)とから$V(z)$がえられる。

$$V(z)=-\frac{1}{jB_0}\frac{\partial I}{\partial z}$$

$$=K_0\left[-\left\{\left(1+\frac{1}{2}g+j\frac{1}{2}\frac{g'}{\beta_1}\right)Ce^{j\phi(z)}+\left(1+\frac{1}{2}g-j\frac{1}{2}\frac{g'}{\beta_1}\right)De^{-j\phi}\right\}\right] \qquad (3.13)$$

ここで$g'=\frac{dg(z)}{dz}$がゆるやかに変化していなければ，WKB法の解である(3.13)は正しくない。いま$g(z)=\mu z^n$を例にとると$g'(z)=\mu n z^{n-1}$となり，$n>1$でnが1に近づいたとき$z=0$の近傍では$g'(z)$ははげしく変化するので，$|<n<2$に対して，$z=0$の近傍において解は(3.13)で近似できない。したがって$z=0$近傍で良い近似解を与えるnの値は1および2以上である。

$z=L$で$K(L)=K_1(1+g(L))$で終端したとき$z=0$からみた反射係数は

$$R(0)=j\frac{g'(L)}{4\beta_1}e^{-j2\phi(L)}-j\frac{1}{4}\frac{g'(0)}{\beta_1} \qquad (3.14)$$

$n=1$のときは

$$g'(L)=\mu=g'(0) \qquad (3.15)$$

となるから

$$R(0) = j \frac{\left(\frac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1}\right)}{8\pi\left(\frac{L}{\lambda_1}\right)} \left(e^{-j2\phi(L)} - 1 \right) \qquad (3.16)$$

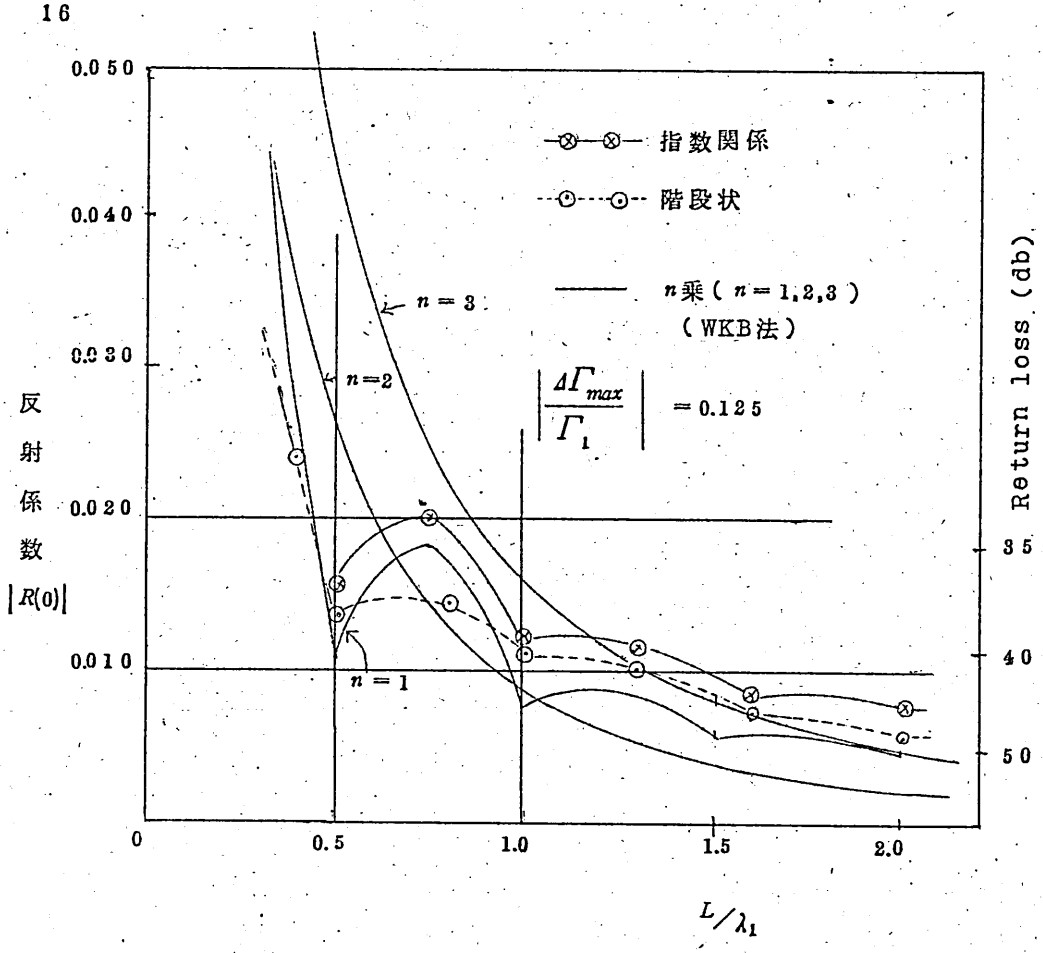
$$\phi(L) = \beta_1 L - j\Delta\Gamma_{max} L$$

又 $n \geq 2$ のときは $g'(0) = 0$ であるから

$$R(0) = j \frac{\left(\frac{\Delta\Gamma_{max}}{\Gamma_1}\right)}{8\pi\left(\frac{L}{\lambda_1}\right)} e^{-j2\phi(L)} \qquad (3.17)$$

G. Landauer の計算[5]によると $b/a = 1.3$, $\gamma a = 1.3$ のとき $\Delta\Gamma_{max} a = 0.25 + j\ 0.2$ である。この場合に (3.2) (3.7) (3.16) (3.17) の計算結果を第5図に示す。

階段状で求めた場合とWKB法で求めた直線の場合と一致しないのは解法の近似の程度の相違によるものと考えられる。テーパの形状が直線の場合と指数関数の場合は L/λ_1 の変化に対して反射係数は凸凹するが，距離の2乗，3乗で変化しているようなテーパーでは，L/λ_1 の変化に対してなめらかである。前者はテーパーの始端で勾配をもち，後者はその始端での勾配が零である。テーパー長が1波長以上では2乗変化のテーパーの反射係数が最も小さい。テーパーの始端附近での勾配が小さいほど始端附近での反射は小さいが，あまり始端附近での勾配が小さすぎると，テーパーの終端附近での勾配が大きくなるため反射が大きくなり，しかもその反射波はテーパーの始端附近で充分吸収されないため，全体としてかえって反射係数は大きくなる。2乗変化より3乗変化のテーパーの反射係数の方が大きいのはこの理由によるものと考えられる。



第 5 図　種々のテーパーの反射係数

§ 4. むすび

進行波管用抵抗減衰器の設計に必要な基本的な量である抵抗膜の反射係数が第1近似として伝播定数の変化の割合で表わすことができることが判った。この式は伝播定数の差が小さく，従って反射係数の小さいときに適用できる。これを用いていくつかの種類のテーパーに対してその反射係数を計算した。

実験用ら線を製作戴いた三菱電機研究所の建石氏，抵抗膜を製作して下さった神戸工業の三杉氏，徳平氏，計算に協力下さった植田君（阪大大学院）に感謝します。

文　献

(1) G.S. Kino: "Normal mode theory in perturbed transmission systems" Stanford Univ. Res. Lab. TR. No. 84. (1955-03)

(2) A.D. Bresler, G.H. Joshi, & N. Marcuvitz; "Orthogonality properties for modes in passive and active uniform wave guides" J.A.P. vol. 29, No.5, pp.794-799, (1958-05)

(3) 次の書にまとめられている。
R.N. Ghose, "Microwave circuit theory and Analysis" McGrawHill Co. 1963. ch.12.

(4) G. Latmiral, "Nonuniform transmission lines or stratified layers" Electromagnetic theory and Antenna, Part I, Pergamon Press. pp.643-648, 1963

(5) G. Landauer, "Die Wendelleitung mit Koaxialer zylindrischer Dämpfungsschicht" A.E.Ü. vol. 11, pp.267-277, (1957-07)

(6) J.R. Pierce, "Traveling-wave tube" Van Nostrand (1950)

付録　A，

抵抗膜円筒をもった理想ら線の近似電磁界

半径 a なる理想ら線の外部に半径 b なる抵抗膜をおくと，抵抗膜中にら線の電界 E_z によって電流 I_z が流れてTMモードを励起し，又電界 E_θ によって I_θ が流れてTEモードを励起する。ところが b における E_z と E_θ の大きさをくらべると

$$\frac{E_\theta}{E_z} = -\frac{K_0(\gamma a)K_1(\gamma b)}{K_1(\gamma a)K_0(\gamma b)} \cdot \tan\psi \approx -\frac{v}{c} \ll 1 \qquad (B.1)$$

となるので抵抗膜中の電流 I_θ は I_z に対して無視することができる。従って抵抗膜によって励起される界はTMモードで近似できる。

すなわち

$$0 \leq r \leq b \quad : \quad \begin{cases} e_z = C\, I_0(\gamma r) \\ e_r = C\, j \dfrac{\beta}{\gamma} I_1(\gamma r) \\ h_\theta = C\, j \dfrac{k}{\gamma z_0} I_1(\gamma r) \end{cases} \qquad (B.2)$$

$$r > b \quad : \quad \begin{cases} e_z = D\, K_0(\gamma r) \\ e_r = -Dj \dfrac{\beta}{\gamma} K_1(\gamma r) \\ h_\theta = -Dj \dfrac{k}{\gamma z_0} K_1(\gamma r) \end{cases} \qquad (B.3)$$

抵抗膜円筒が存在しない場合の理想ら線の界は次式で与えられる[6]

$0 \leq r \leq a$

$$E_z = A\, I_0(\gamma r)$$

$$E_r = j A \frac{\beta}{\gamma} I_1(\gamma r)$$

$$E_\theta = -A \frac{I_{0a}}{I_{1a}} \tan\psi\, I_1(\gamma r) \qquad \text{(B. 4)}$$

$$H_z = -j A \frac{\gamma}{z_0 k} \frac{I_{0a}}{I_{1a}} \tan\psi\, I_0(\gamma r)$$

$$H_r = A \frac{\beta}{z_0 k} \frac{I_{0a}}{I_{1a}} \tan\psi\, I_1(\gamma r)$$

$$H_\theta = j A \frac{k}{z_0 \gamma} I_1(\gamma r)$$

$r \geq a$:

$$E_z = A \frac{I_{0a}}{K_{0a}} K_0(\gamma r)$$

$$E_r = -j A \frac{\beta}{\gamma} \frac{I_{0a}}{K_{0a}} K_1(\gamma r)$$

$$E_\theta = -A \frac{I_{0a}}{K_{1a}} \tan\psi K_1(\gamma r) \qquad \text{(B. 5)}$$

$$H_z = j \frac{A\, \gamma}{z_0 k} \frac{I_{0a}}{I_{1a}} \tan\psi K_0(\gamma r)$$

$$H_r = A \frac{\beta}{z_0 k} \frac{I_{0a}}{K_{1a}} \tan\psi K_1(\gamma r)$$

$$H_\theta = -j \frac{A}{z_0} \frac{k}{\gamma} \frac{I_{0a}}{K_{0a}} K_1(\gamma r)$$

但し，ψはら線のピッチ角，$I_{0a} \equiv I_0(\gamma a)$ ，$K_{0a} \equiv K_0(\gamma a)$ ・・・等。

（B．2），（B．3），（B．5）の合成界 E'，H' が半径 b での境界条件

$$\begin{cases} E_z'(b+0) = E_z'(b-0) \\ H_\theta'(b+0) - H_\theta'(b-0) = \dfrac{E_z'(b)}{R_F} \end{cases} \qquad (B.6)$$

（但し，R_F は抵抗膜の表面抵抗）

を満足するように C，D をきめると

$$\begin{cases} C = \dfrac{1}{\Delta} \cdot \dfrac{I_{0a} K_{0b}^2}{K_{0a}} \cdot A \cdot \\ D = \dfrac{1}{\Delta} \cdot \dfrac{I_{0a} I_{0b} K_{0b}}{K_{0a}} \cdot A \end{cases} \qquad (B.7)$$

但し，$\Delta = -j \dfrac{k R_F}{\gamma z_0(\gamma b)} - I_{0b} K_{0b}$

§ 2. ではこうして得られた電磁界を用いた。

輻射科学研究会資料

サブミリ波のヘテロダインビートの発生

村井　昭

(大阪市立大学工学部)

昭和39年 5月 23日

於 松下電器産業株式会社 生産技術研究所

「サブミリ波のヘテロダインビートの発生」

村井　昭
(大阪市立大学工学部)

概　要

点接触型の鉱石検波器の非線型効果を用いて発生可能な高周波限界を知るため、最小公倍数関係をもつ周波数 f_1 と f_2 の二本のミリ波反射型速度変調管出力を1ケ鉱石に加え、鉱石内でそれぞれの周波数の周波数逓倍を行わせると同時に、その混合作用で最小公倍周波数附近に60MCビート成分を作り、これを狭帯域高周波増巾器およびビデオ増巾器を介してシンクロスコープ上で観測した。

実験は室温で行った。発生したビートスペクトルの中で最高周波数は基本波75GCの10倍と50GCの15倍とで作られたビートで、750GC、波長にして400ミクロンのものが明瞭に認められた。此の場合鉱石は1N53である。

これまでは雑音低減の工夫をしていないので、技術的には更に周波数限界を上昇出来る可能性があり、既にシンクロスコープ像の写真の上では1000GC附近のスペクトルが分離している。

種々の応用が可能と考えられるが、一例として鉱石の近傍に400ミクロンの吸収をもつ物質を置けばこのヘテロダインビートの振巾は減小するであろうから、此のような構成で遠赤外分光計が作られるであろう。

本　論

サブミリ波域の検波器としては光伝導を用いたInSb検波器，気体熱膨張を利用したGolay cell，温度抵抗効果を用いた炭素膜，不純物ドープのGe，超電導錫ボロメータ等があり，何れも高感度で働作しているが　一方応動時間が可成り長いようである。

ミリ波域で有効に働作する点接触ダイオードが，もう一桁高い周波数帯で使えるならば応動時間の点では極めて優れている事と併せて，最も使い易いものであろう。鉱石検波器は周波数上昇と共に，その接触点の容量による短絡効果から，必然的に働作の劣化を来たす事はよく知られているが，非線型抵抗自身がサブミリ波域でどのように劣化するかどうかは明らかでないと思われる。考えられる事は金属－半導体間の空欠層 $D=\left\{\frac{2\varepsilon(\phi-V)}{eN}\right\}^{\frac{1}{2}}$ を電子が通過するのに必要な時間と同程度の周期の波になると，等価抵抗が非常に高くなって整流作用が低下するであろうという事である。周波数に直してこれは～10^{13} cps になるので　サブミリ波帯 $3\cdot10^{11}$～$3\cdot10^{12}$ では次第にその傾向が出てくるであろうが，非線型性は未だ残っているであろう。

非線型性が残っていればミリ波帯入力を高調波展開してサブミリ波域のスペクトルを発生させる事が出来る筈である。通常行われているマイクロ波帯の逓倍は逓倍鉱石に可成りの大電力を加え，それから発生した高調波を検波混合用の鉱石で受信する。此の方法では鉱石の抵抗損が2ヶ入った事と，発生用鉱石からの出力整合，検

波用鉱石の入力整合と整合が必要な事で非整合損を生じ易い。それで上述の目的からこの両鉱石の役目を1ケの鉱石で行わせた。検波したいサブミリ波スペクトルに対しては逓倍用の可成りの大電力入力から生じた雑音により微小信号が埋められるので此の点改善の工夫をこらしたいが周波数的には紛れはないと考えている。

理　論

周波数 f_1 および f_2 の2本の速度変調管出力を鉱石検波器に加えたとし，発生した自己バイアスまたは外部より加えた直流バイアス V_0 と上記二交流分の電圧の和

$$V = V_0 + V_1 \sin 2\pi f_1 t + V_2 \sin 2\pi f_2 t \qquad (1)$$

が定常状態として検波部に加わったとし，また鉱石の電圧－電流特性を

$$i = i_0 (e^{\alpha V} - 1) \qquad (2)$$

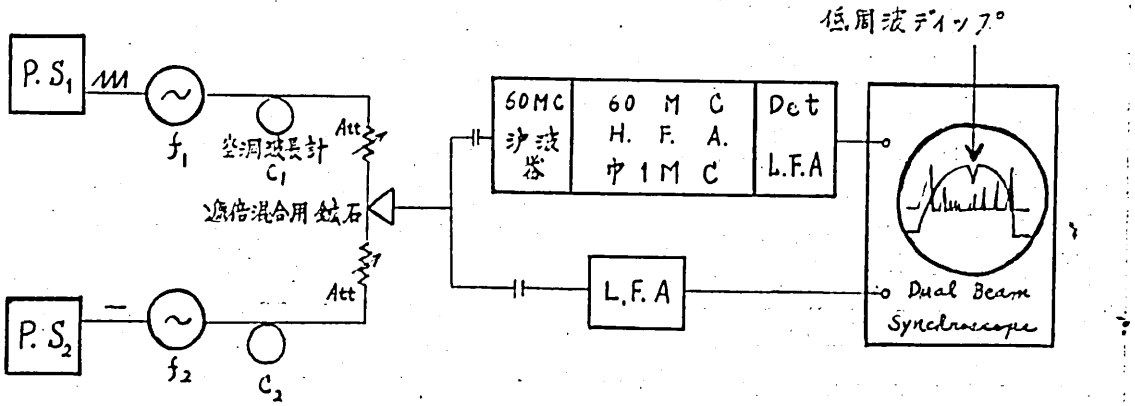
とする。(2)を(1)に代入して次の結果をうる．

$$i = i_0 e^{\alpha V_0} \left[\left\{ I_0(\alpha V_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(\alpha V_1) \cos 4\pi n f_1 t \right. \right.$$
$$\left. \left. + 2i \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}(\alpha V_1) \sin (2n+1) 2\pi f_1 t \right\} \right.$$

$$\times \left\{ I_0(\alpha V_2) + 2\sum_{m=1}^{\infty} I_{2m}(\alpha V_2)\cos 4\pi m f_2 t + 2i\sum_{m=0}^{\infty} I_{2m+1}(\alpha V_2)\sin(2m+1)2\pi f_2 t \right\} \Big] - i_0 \quad (3)$$

I_0, I_{2n} ---- I_{2m+1} は変型ベッセル函数である。(3)式から両入力信号の高調波同志の各ビート信号に対する振巾係数が得られる。

実験



オ1図　　実験回路ブロックダイヤグラム

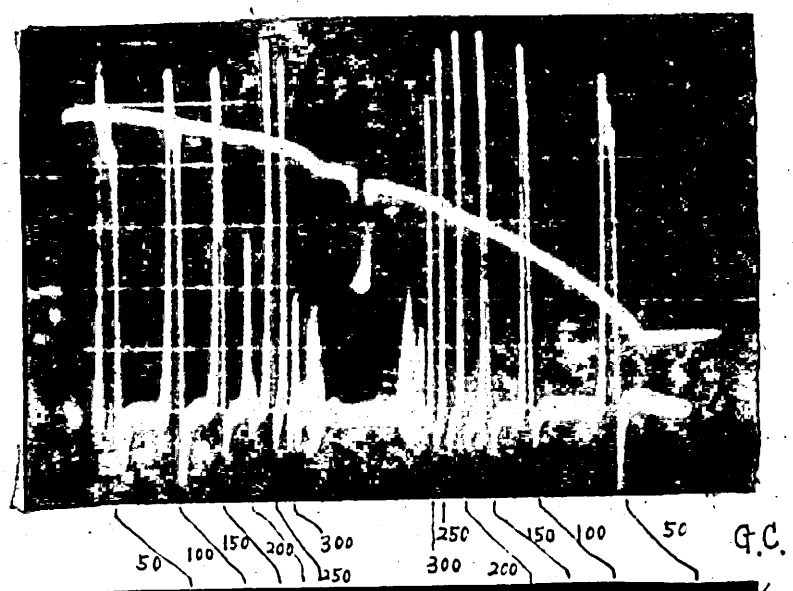
オ1図に装置のブロックダイヤグラムを示す。サブミリ波域に最小公倍数をもつ二つのミリ波帯周波数 f_1, f_2 を択ぶ。今 $f_1 < f_2$ とすれば、一般に出力は $P_1 > P_2$ 故 f_1 の方に低周波鋸歯状波変調を加え、f_2 は連続発振をさせる。f_1, f_2 の関係は 2：3 位だと、そのままでは密結合の引込み効果で振巾が不安定になるのでアイソレーターを使用すれば良いであろう。

鉱石からの出力のうち低周波増中器（第1図 L.F.A.）で増中されたものはシンクロスコープ上にVM管f_1の掃引パターンを示し、f_2は連続波であるからそのまゝ直流バイアスとして加わっている。今$f_2 \fallingdotseq 2f_1$とすれば、f_1或はf_2を僅か調整すればその掃引パタンの上に図に示した低周波ディップが表われ、此処で丁度$f_2 = 2f_1$である事を示している。

$f_1 : f_2 = 1 : 3$の時にはごく僅かしか表われない。

この状態で60MC高周波増中器側の利得を増大すると、上の低周波ディップを中心として略対称に一連の60MCスペクトルパターン群がえられ、それぞれ外側から中側に$|f_2 - 2f_1|$, $|2f_2 - 4f_1|$, $|3f_2 - 6f_1|$---で生じたものである。第2図にこのパターンを示す。第2図aは$f_1 = 25$GC, $f_2 = 50$GCで60MC増中器の利得は100dbである。次数の低い両端は飽和している。b図は増中器利得を80dbに低下した場合のパターンである。C図はa図の中央部附近丈で、速度変調管f_1の鋸歯状波掃引振中を減小して得られたものである。此の場合、使用鉱石は1N26であるが、鉱石を交換すると、強度分布は大中に変化する。

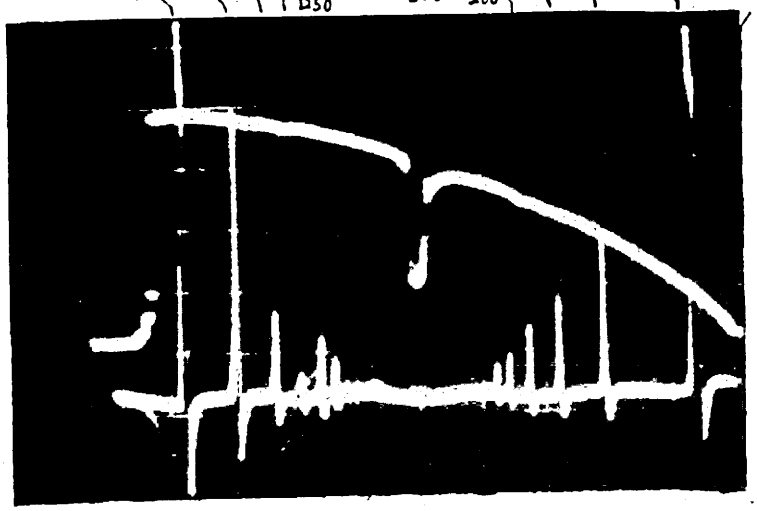
d図は$f_1 = 50$GC $f_2 = 75$GCで得られたパターンで、最小公倍数の周波数150GCごとに外側から150, 300, 450, 600, 750, GCのビートを示している。この使用鉱石は1N53であるが1ケしか無かったため取換えていない。



第2図 a.

f_1 = 25GC 掃引 (50サイクル鋸歯状波)

f_2 = 50GC連続
外側から内側へ 50GC, 100, 150 ... と略対称に並ぶ。60MC増中器利得 100db. 低周波増中器を通ったものは f_1 の鋸歯状波変調出力を示し, 中央部に低周波ディップが現われる。

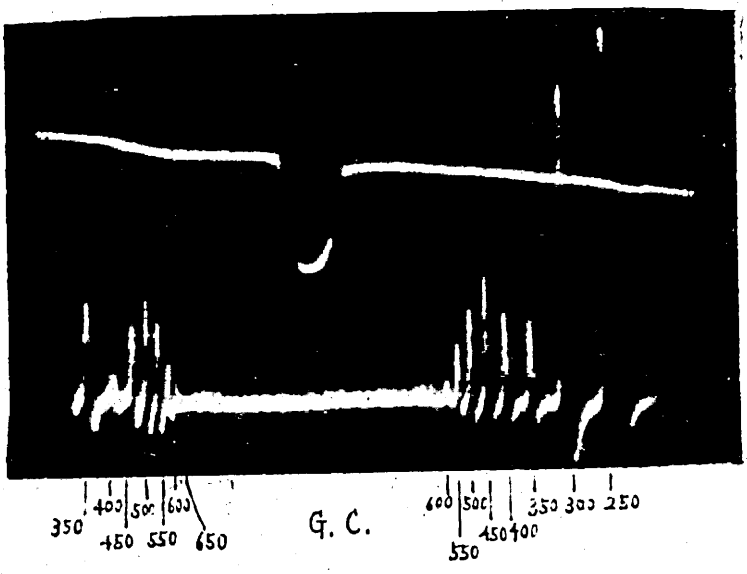


第2図 b.

f_1 = 25GC 掃引

f_2 = 50GC連続

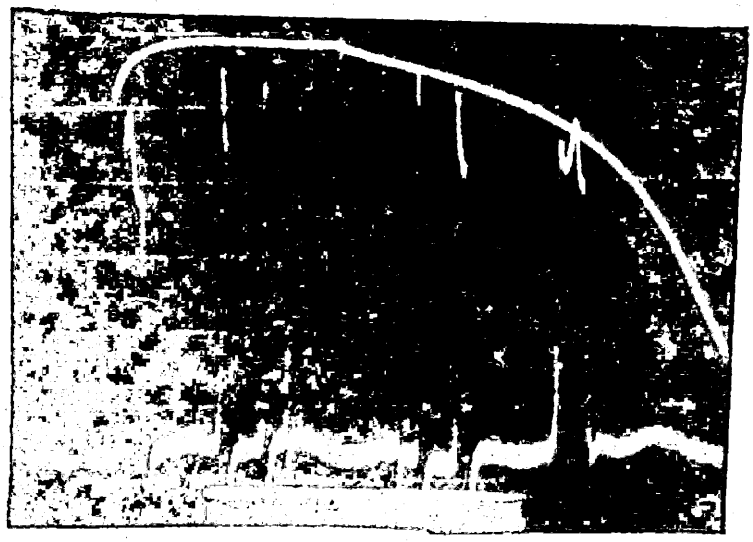
60MC増中器利得 80db



第2図 C.

f_1 = 25GC 掃引 (a図より掃引中減小)

f_2 = 50GC連続
中央部が詳しく見え. また写真では 650GC以上のスペクトルも見えるが. シンクロスコープを目で見た所では雑音に覆われてよく見えない



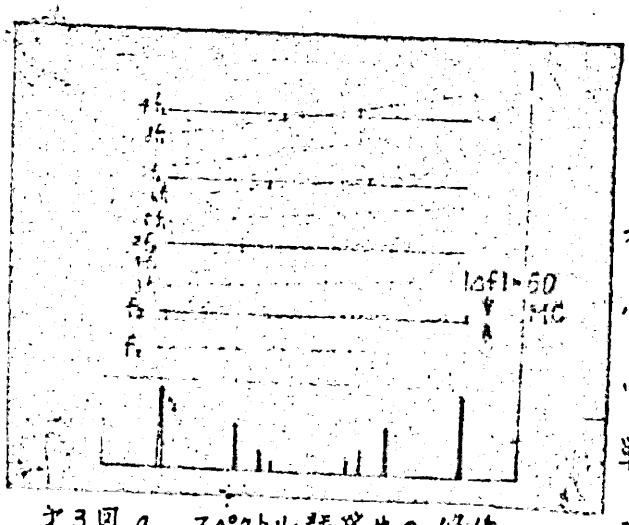
第2図 d

f_1 = 50GC掃引 (50サイクル鋸歯状波)

f_2 = 75GC連続.

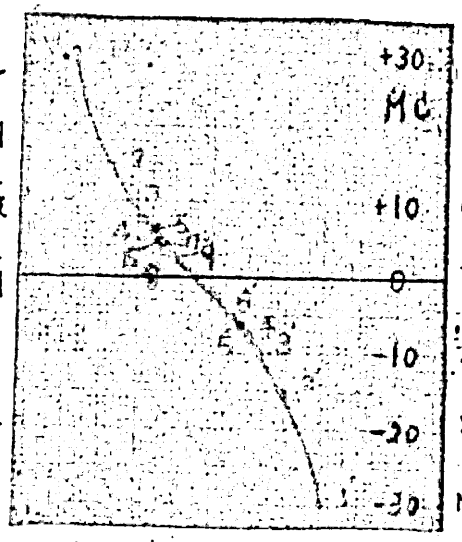
外側より 150GC, 300GC, 450GC, 600GC, 750GC, のスペクトルが見える。

60MC増中幅利得 100 db.



第3図 a. スペクトル群発生の條件

掃引周波数 f_1 の各逓倍 nf_1 と連続周 f_2 の各逓倍 mf_2 の各段のビートとして得られる60MCビートの模式図を第3図aに示す. 速度変調管の掃引周波数中は小さいので複雑なスペクトルは発生しないが, 特に $f_1 : f_2 = 1 : 2$ の時は, 簡単になり, また多数のスペクトル群を得る事がわかる.

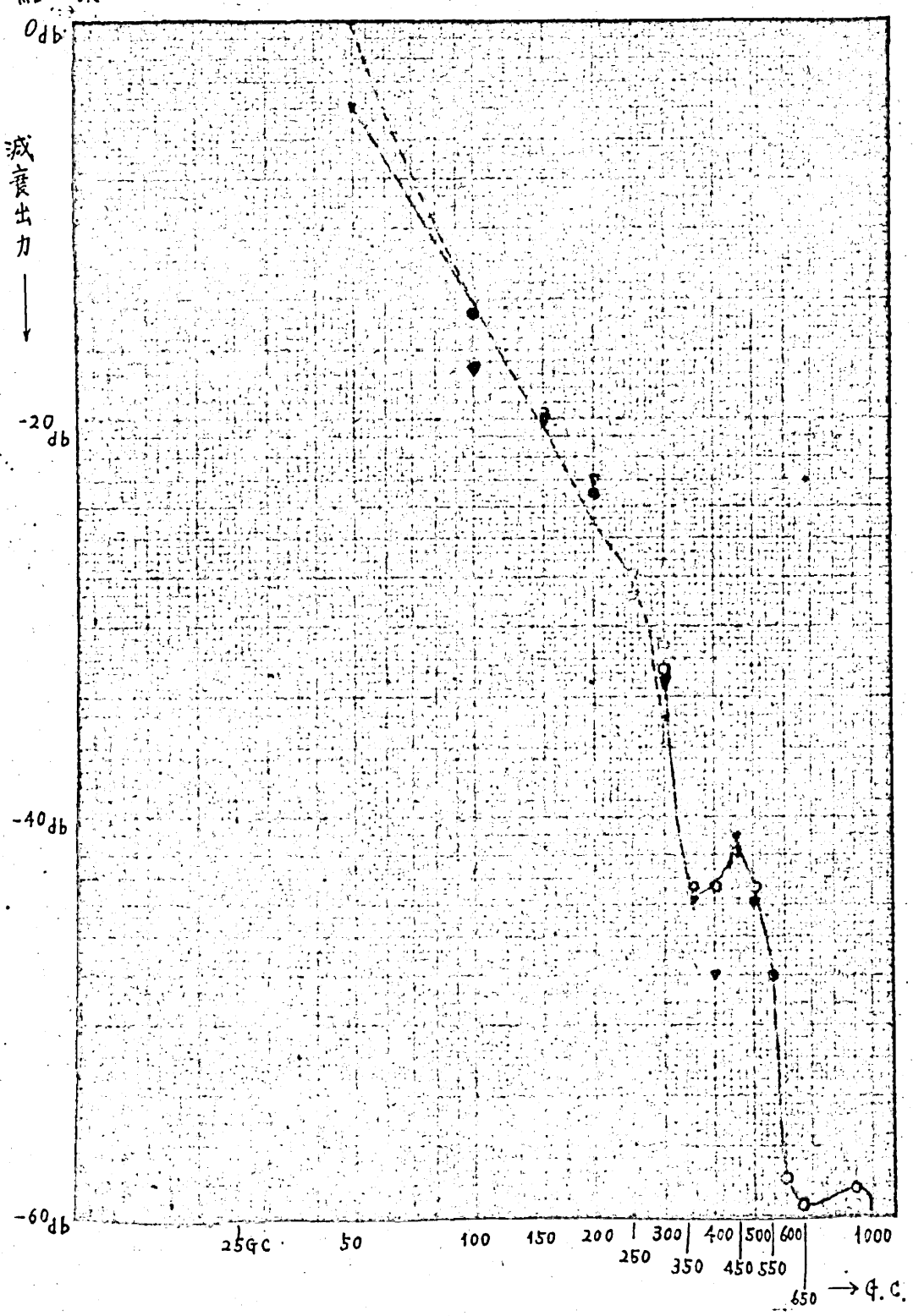


第3図 b. 被変調周波数 f_1

→ CRT横軸 (第2図 a.b.c の横軸)

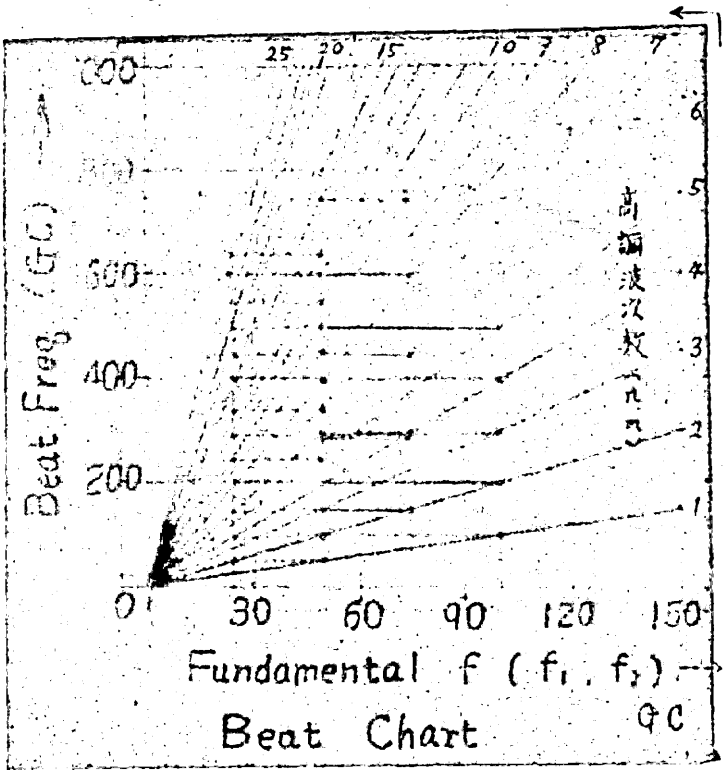
第3図 b は第2図 a. b の横軸 (f_1 掃引電圧) 上の各スペクトルの発生した位置に, 各々のスペクトルの原周波数 f_1 の中心からのズレ 60MC/n を縦軸にとってえられた図で, 丁度速度変調管 f_1 の反射電極電圧変化に対する周波数変化図と全く同じものが得られる。 此の図から, 各60MCビートは確かに $|nf_1 - mf_2| = 60$ MC である事がわかる.

結　果



第４図　f_1 = 25GC　f_2 = 50GCの高調波ビートの出力低下を示す
（第2図 a. b. C 等の写真から得た）

オ2図と同様の各ビートの振中比のうち飽和したものを除き、増中器の増中度及び先の挿引による振中変化を較正して全周波数成分に対する減衰比を与えたものが、オ4図である。中心対称のスペクトルなので左右の振中に対し横軸上でそれぞれ二点が得られるが、これは殆どよく一致した。鉱石を択べばこのような高い周波数範囲で著く程減衰の少ない特性が得られる。



オ5図　これ迄に得られたビートの原周波数関係

オ5図はこれ迄に得たサブミリ波域のビートスペクトラムを図示したもので、横軸上に用いた二本の速度変調管の周波数 f_1, f_2 をとり、高調波混合によって60MCビートの元られた各高調波周波数を縦軸にとって画いたもので、図中二点間を結ぶ水平線がその間で60MCビートを得た事を示している。用いた速度変調管は、24V10, 50V10, 60V10, 80V10 および100V10で、反射によるヒステリシスを起さない程度まで減衰器を挿入した。速度変調管出力は略30～10 mWである。各組合せで得られたスペクトラムに対する最小公倍周波数並びに観測した最高周波数をオ1表に示す。600GCまでは容易に得られるがこれ以上も750GCまでは比較的簡単である。

オ1図の60MC沖波器部より鉱石に直流バイアスを加え、これを変化すると各段のスペクトラムの振中が様々に変化する。

f_1 + f_2	最小公倍数 周波数	観測した最高周波数	鉱 石
25 + 50	50 GC	650 GC	1N26
50 + 75	150 GC	750 GC	1N53
60 + 75	300 GC	600 GC	1N26
100 + 50	100 GC	500 GC	1N53

検 討

実験途中では750 GC以上のスペクトラムのビートも時折表われ明らかにこれ以上のスペクトラムも発生可能であって、①より入力を増大する ②回路損を減らす ③鉱石を取替える 等で幾分の改善はすぐに可能であるが、根本的には ④受信機系の雑音レベルを下げる事 ⑤鉱石の電流雑音減少 この為にはドープ量を変えた鉱石を準備し低温実験を行う事等が必要であろう。

750 GC帯の出力は第4図から見て $3\cdot10^{-8}$ ワット程度と考えられる。シンクロスコープ上の60MCビートは逓倍次数の増大と共に揺らぎが増大し、コヒーレンシイの低下を思わせる。第1図中に示したが、60MC高周波増巾器の帯域巾は1MCであるので、750 GC同志の混合によって作られた60MC成分のうち、60MC±500KCの成分が全部増巾され、検波、低周波増巾されてパターンを生じている。それで $\Delta\nu = 1MC$ とし、コヒーレント時間 Δt との不確定性関係 $\Delta\nu\Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$ に入れると $\Delta l = C\Delta t \sim 24\,m$ となるので、例

えば長さ12mの導波管を鉱石近傍に接続し，他端で短絡板を動かせても干渉効果が無いことになる。コヒーレンシイをよくするには高周波帯域中を狭めればよいが，そうすると増中器入力エネルギーが減小するであろう。このような実験から逓倍器動作に附随する不確定性が求められないだろうか。

鉱石内部の非線型電線からサブミリ波スペクトルを得たといっても実接觸した導体針の境界條件を考えればサブミリ波電磁界の一部は空間に表われているものと考えられる。それで鉱石附近を気密にして吸收性気体を封入すればその吸收スペクトルに対応する高調波のビート振中（およびそれより高次ビート振中）は減小するであろう。液体，固体の吸收も同様にして測定出来るのではないかと考えている。もう一つの夢は，光学的に発生した3～400μの波（コヒーレント，インコヒーレント何れでもよい）とミリ波逓倍で作った同波長の波との混合実験である。　低温実験と併せて計画を練っている。

謝　辞

実験に当り絶大な御援助，御協力を戴いた沖電気工業の中島課長新井室長に深謝する。また種々御討論戴いた早川電機研究所三戸所長，実験に，データ整理に種々尽力戴いた本学大学院岡本君，学生片山，野原，逸見君に感謝する。

文 献

Crystal Rectifiers Torrey Whitmer
MIT Rad. Series Mc Graw-Hill co. 1948

The Detection of Sub-mm Radiation E. H. Putley
Proc. I.E.E.E. Nov. 1963. PP. 1412 - 1423.

（輻射科学研究会資料）

ＩＴＶの無線操縦

昭和３９年５月２３日

(於：松下電器・生産技術研究所)

龍沢善信　　福本寛

（松下電器・中央研究所）

I T V 無線操縦

1. 緒言

ＩＴｖの発展にともない、遠隔地に無人設置したカメラを無線により操作したいという要望が生ずる場合がある。

このような目的をできるだけ経済的に高信頼性をもつて実現する一方式を考案し、試作実験を行なつたので、その概要を報告すると共に、実験を御覧いたゞきたいと思います。

伝送周波数は、周波数割当の状況及び、機器の経済性映像の品質等よりして、１４,０００ＭＣ帯のマイクロ波を使用することにした。

送・受信機系は制御信号の送信、映像信号の受信をできるだけ共用の装置で兼用できるようにすると共に高価なクライストロン発振器を一個で送受兼用して経済性を計つた。また送受の周波数割当ても容易なるようにした。

カメラの各部の制御は容易に制御項目が増加できて同時動作が可能な方式である。

立体回路部も簡易化され消費電力も僅少である。

2. 構成及び動作原理

本装置の主要部はマイクロ波送・受信機、制御信号発生器と復号器工業用テレビジョン（I.T.V）及びその附属品から成る。

2.1 マイクロ波送・受信機

マイクロ波送・受信機は立体回路部と制御部を多芯ケーブルで接続して使用する。即ち、送受信機の高周波部は、直接パラボラ空中線の背後に取付けられている。

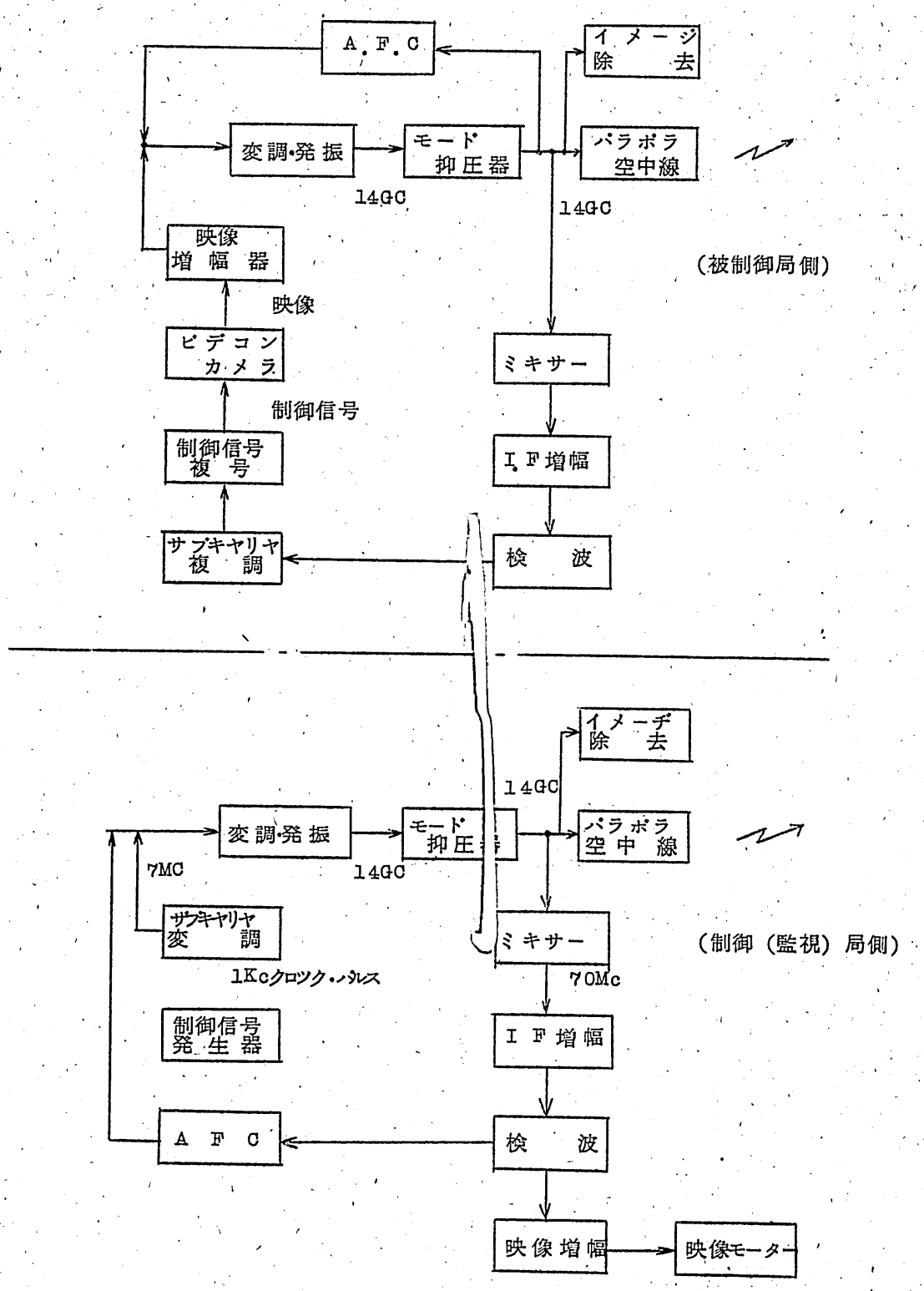
パラボラ空中線は直径１.２ｍで、偏波面が送・受信波で各々９０°異なる水平及び垂直偏波を利用して、送・受信共用している。

送信機は反射形クライストロン：VA －９２Ｃ（*Varian* 製）を用い、リペラーにて周波数変調及A.F.C（自動周波数制御）を行なつている。（才１図参照）また、上記反射形クライストロンの１部の電力（－20dB*down*）が局発用として受信機のミキサー（ＩＮ２６３）に供給されている。従つて相手局の送信周波数と自局の送信周波数との差が中間周波数になるように選ばれている。受信機の影像（イメージ）周波数は２段の空胴共振器にて除去される。（才２図参照）送信機としては上記以外に変調回路独立A.F.C回路、映像（音声）増幅回路等を含む。

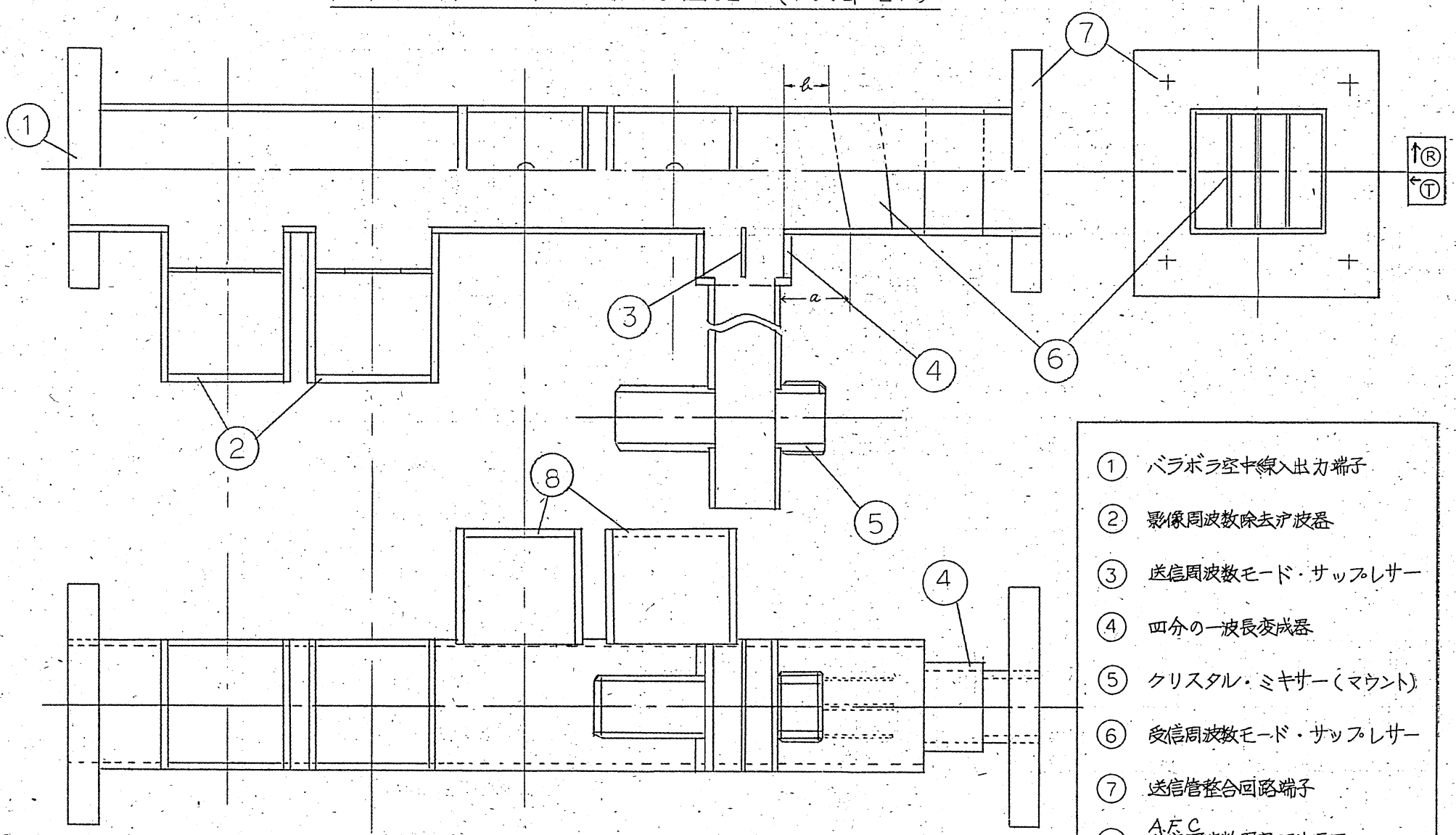
受信機には中間周波数増幅器、A.G.C（自動利得制御）回路、追従A.F.C回路、映像増幅回路、L.P.F（低域通過沪波器）等を含む。

また送・受信機共用のものとして上記の空中線系及び立体回路部の外に反射形クライストロンとその高圧電源及び低電圧電源等から成る。

オ 1 図　系 統 図


A.F.C
イメージ除去
変調・発振
モード抑圧器
パラボラ空中線
14GC
14GC
映像増幅器
(被制御局側)
映像
ビデコンカメラ
ミキサー
制御信号
制御信号複号
I.F増幅
サブキャリヤ複調
検波
イメージ除去
14GC
変調・発振
モード抑圧
パラボラ空中線
7MC
14GC
サブキャリヤ変調
ミキサー
(制御(監視)局側)
1Kcクロック・パルス
70Mc
制御信号発生器
I F 増幅
A F C
検波
映像増幅
映像モータ

第２図　14GC帯送・受信共用立体回路（主要部略図）



① バラボラ空中線入出力端子
② 影像周波数除去沪波器
③ 送信周波数モード・サップレサー
④ 四分の一波長変成器
⑤ クリスタル・ミキサー（マウント）
⑥ 受信周波数モード・サップレサー
⑦ 送信管整合回路端子
⑧ A.F.C 送信周波数用空胴共振器

2.2　制御回路

制御信号は１４個のパルス符号の繰返しよりなり７ＭＣの副搬送波によりＦＭ－ＦＭ伝送される。

映像信号は６０ＭＣ以下の周波数帯域でＦＭされて制御信号と逆方向に伝送される。

両信号は両受信端共、混合して取り出されるが簡易なフイルターにより周波数分割される。

本質的に両信号のクロストークは動作上問題にならない。

即ち映像信号への制御信号の漏れは、解像度以上の周波数になるので支障がない。

制御信号への映像の漏れはパルス符号を整形することによりＣ／Ｎは改善される。

制御項目は次の１４項目でありモニターの画面を見ながらキースイッチで操作する。

1）カメラ右回転。　　8）絞り開閉　　（開）

2）カメラ左〃。　　9）〃　　（閉）

3）カメラ上向　　10）ビディコンビーム電流増

4）カメラ下向　　11）〃　　減

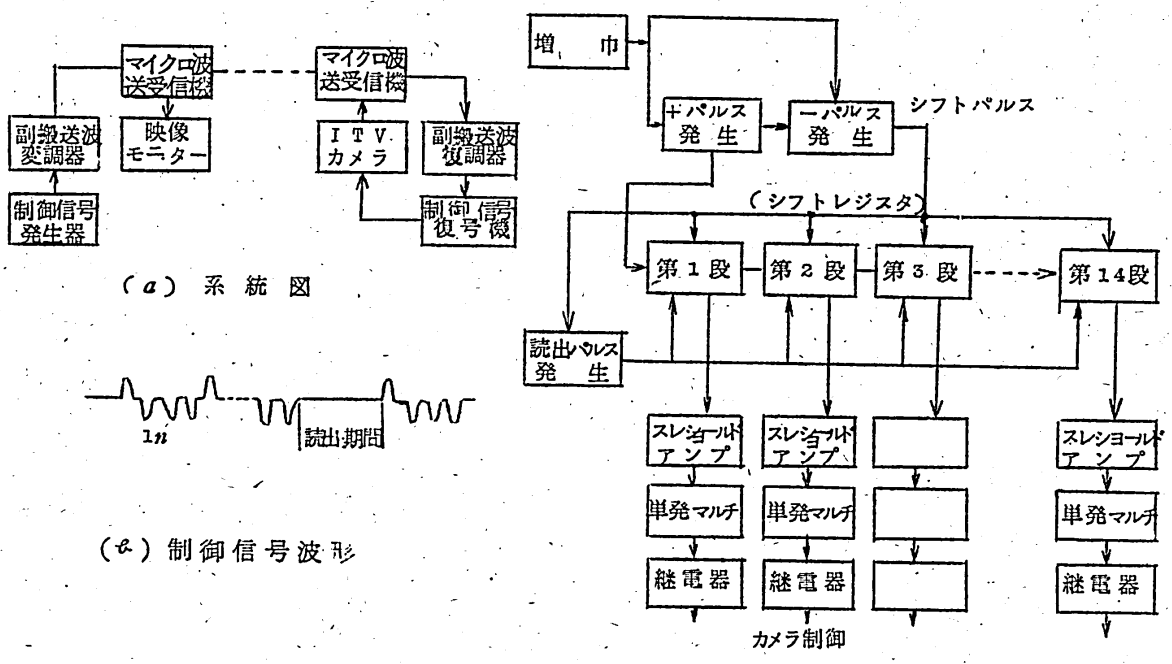
5）レンズ交換　　12）ビディコン・電子焦点調整

6）焦点調整　（遠）　　13）〃

7）〃　（近）　　14）電源開閉

１４個のパルス符号は各々の制御項目に相当し、作動中のときは正パルス、停止のときは負パルスとなつている。

１組のパルス符号は６ｍｓｅｃの読出し期間をおいて、連続繰返えされている。（オ３図参照）



第３図制御信号系

復号器はフエライトメモリコアよりなるシフトレジスターにより構成され、正パルスを検出してリレーにより動作される。厳密には順次操作方式であるが、繰返えしが速いので実用上は同次操作方式と同等である。

制御項目数はパルス数を増加して容易に無制限に増しうる。

なお、順次操作方式にするときはパルスの組合せにより2^n（nはパルス数）の項目が制御可能である。

2.3 I.T.Vカメラ

ビディコン7038を使用した標準走査方式のI.T.V.システムであつて、インダクション・モーターにより駆動される雲台上に設置されている。ビディコンのビーム電流、電子焦点符の調整用ポテンショ・メータ等はモータにより遠隔制御可能になつている。

3. 主 要 規 格

マイクロ波送・受信機

空中線利得	39.2dB （V.S.w.R≦1.1）
放射ビーム幅	2° （水平、垂直面共）
送信周波数	14.200～14.270Mc
送信出力	0.1W
周波数偏移	映像信号 6MC
	制御信号 600KC
信号入力インピーダンス	75Ω ±10%
信号出力 〃	75Ω ±10%
信力入力レベル	1.4V（P－P
信号出力 〃	1.4V（P－P）
受信周波数	14.270～14.200MC
中間周波数	70±10Mc

中間周波帯域内の偏差：1dB（±10Mc）

雑音指数 14dB以下

A.F.C引込範囲 ±8Mc

プリエンファシス f ＝400KC，12db

総合映像周波数帯域幅：30%～6Mc

偏差±1dB以内

ハムレベル　　－５０dB以下（$^{P-P}/_{P-P}$）

クロストーク　{映像信号　－３５dB以下
制御信号　－３５dB以下}

制御信号発生器

１トレインのパルス数	１４
クロック周波数	１KC
パルス巾	0.5 m sec
読み出し期間	6 m sec
周波数帯域幅	３００%～３KC
副搬送波周波数	７Mc
〃　偏移	最大　±３０　KC）

I.T.V カメラ

撮像管：Vidicon 7038

レンズ：ズームレンズ　焦点距離、２５～１００㎜

F＝1.8

標準走査方式を採用

周波数特性　６Mc（－１dB）

実用上の最小照度≒１００lux

解像度≒５００本

４．主　要　部　の　説　明

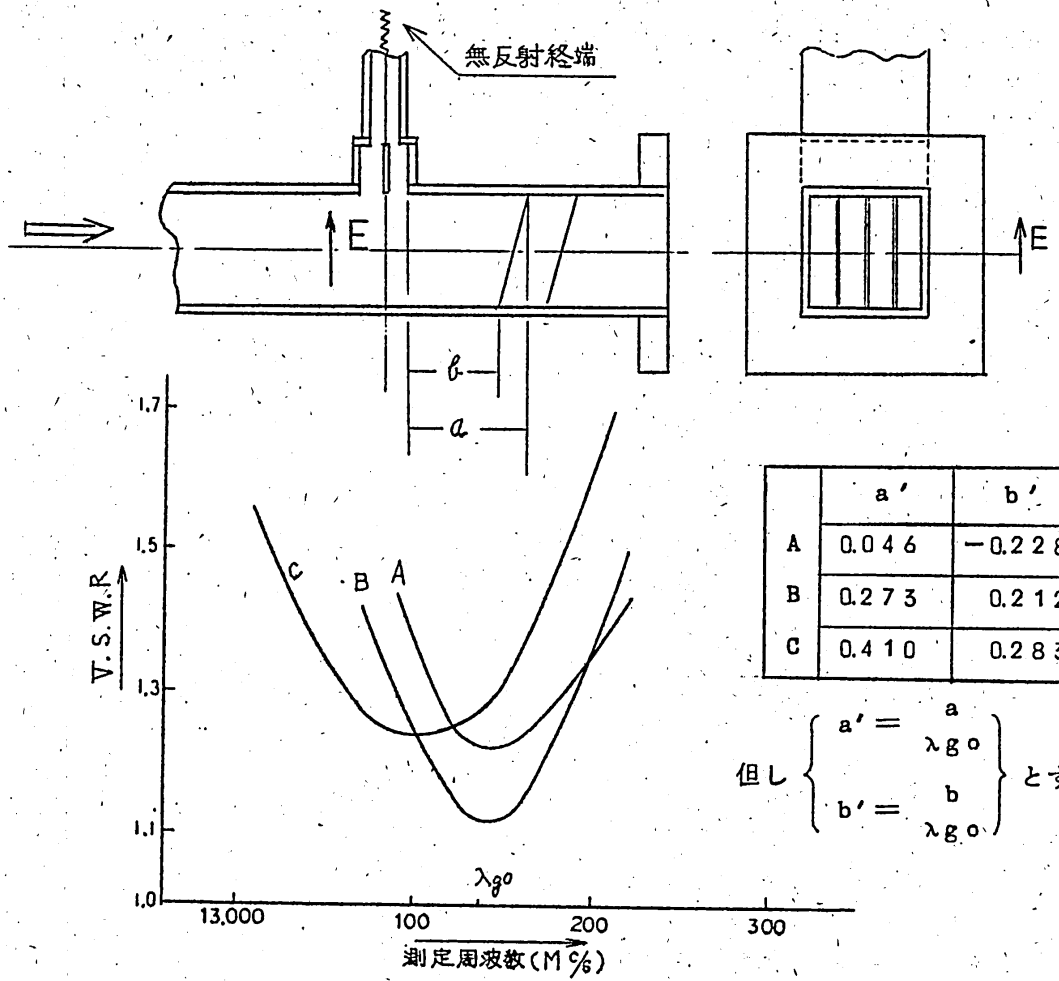
4.1　送受分岐回路

電線は方形導波管（１５.８×１５.８㎜）を使用し、送受信波は９０°異なる偏波面を使用している。

送信波はλ／４ステップトランスにより矩形標準導波管（１５.８㎜×７.９㎜）よりインピーダンス変換を行なつた後第２図の如き独特な構成のモードサプレッション用スクリーン※⑥を通り空中線に導かれる。　モードサプレッション用スクリーンは、λ／４の長さの薄い銅板の３枚から構成されていて外側（空中線側）の切口が、受信波の整合用素子として適当となるように構成されている。

これの最適寸法は、測定器の都合上（すべてを２倍の大きさに試作した回路により½の周波数）７０００MC帯により、実験的に決定した。結果は第４図に示してある。

第４図：送受信周波数分岐回路

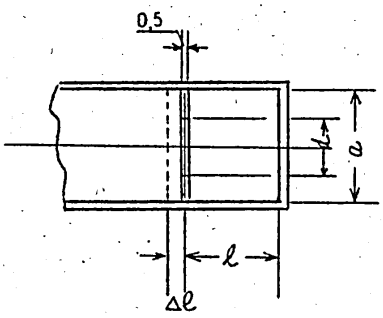


	a′	b′
A	0.046	−0.228
B	0.273	0.212
C	0.410	0.283

但し $\left\{ \begin{array}{l} a' = \dfrac{a}{\lambda g o} \\ b' = \dfrac{b}{\lambda g o} \end{array} \right\}$ とする

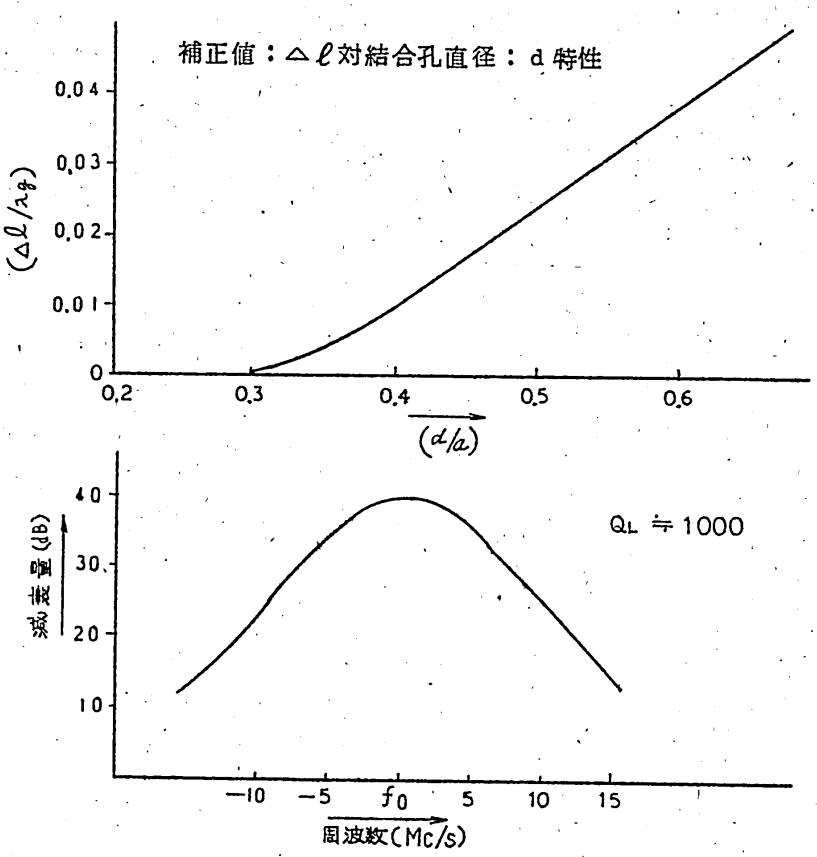
受信波は９０°Ｅコーナ※により曲げられたのち、$\frac{\lambda}{4}$のステップトランス④で標準導波管に整合される。ステップトランス中には送信波のモードサプレッサーとして薄板③が置かれている。受信波のイメージ除去のために並列に附加された２個のフイルター②により、　電線は等価的に短絡され、除去されている。（第５図参照）

第５図　映像周波数除去濾波器の補正値



$$\ell = \frac{\lambda_g}{2} - \Delta\ell$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = 14.500\ (\mathrm{Mc/s}) \\ \lambda_g \fallingdotseq 2.734\ (\mathrm{cm}) \end{array} \right\}$$



送信波は立体回路、アンテナ等の非対称により僅かにモード変換されて、受信ミキサーに達するが、更に斜に挿入したネジにより結合されて、その強さは調整されて、局発信号として、利用される。

4.2 制 御 回 路

制御符号パルス列は簡単のため、デカトロンにより２０進のパルス列を作り、６パルス分を抜いて、読み出し、期間としている。（第３図：参照）

復号器の動作は次の如くである。

＋パレスは選別されて、シフトレジスターの第１段目に書き込まれる。

＋パルス及び－パルスは共にシフトパルスを発生し、シフトレジスターの記憶を順次一段づつシフトさせる作用をする。

従つて、１トレインのパルス列が送られた直後には、第１４段目より逆順に、それぞれ送信パルス符号がシフトレジスターに記憶されている。

次にシフトパルス列を積分し、シユミツト回路を動作させることにより、読み出し期間を判定し読み出しパルスを発生して、各段を一斉に読み出しを行なう。

このとき、＋パルスが記憶されていた段はスレツショルド増巾器が作動してリレーを動作する。

この動作は＋パルスが継続する制御期間中、持続される

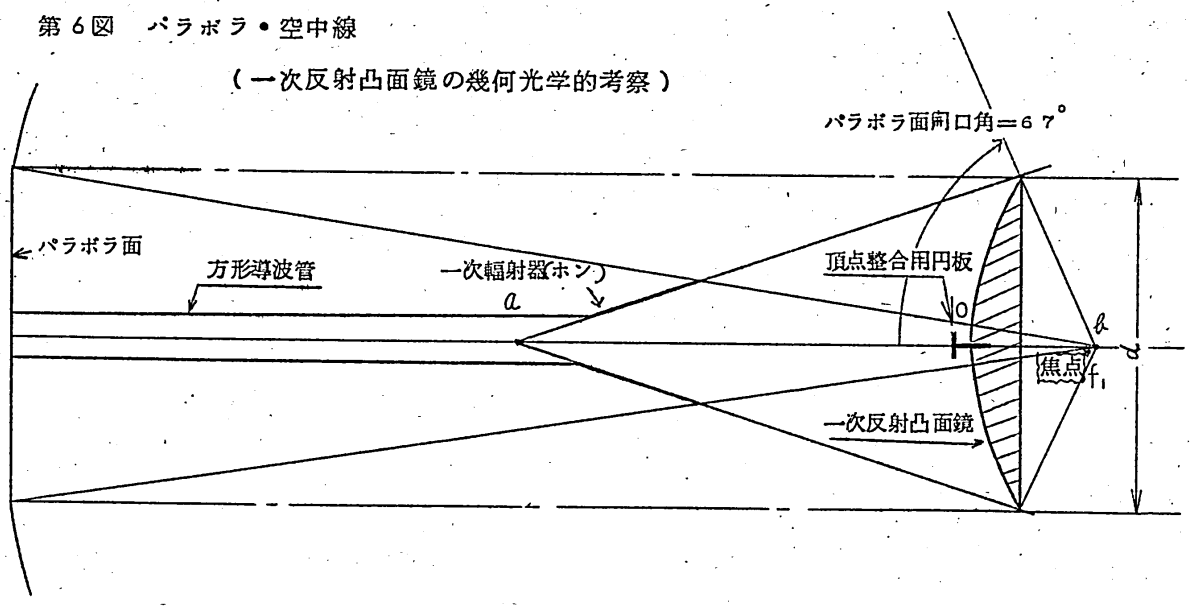
4.3 空 中 線

空中線は第６図に示すごとく、一次輻射器の中央に一次反射凸面鏡を有する直径1.2ｍのパラ

ボラ空中線である。※②その特性は第７図に示す通りで、水平偏波及び垂直偏波に同時に共同できるように一次輻射器に方形導波管を使用した。

第６図　パラボラ・空中線

（一次反射凸面鏡の幾何光学的考察）



$\left\{\begin{matrix} o\,a=a \\ o\,b=b \end{matrix}\right\}$とすると、　$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{-1}{f_1}$

所が、一方、　$b=\frac{a f_1}{a+f_1}=50.4\ (m/m)$

$\left\{\begin{matrix} a=180 \\ f1=70 \end{matrix}\right\}$

$f=450$（決定済み）

第６図よりパラボラの焦点（距離：f）から距離：ｂの位置に一次反射凸面鏡を置くと、幾何光学的に次式が成立しなければならない。

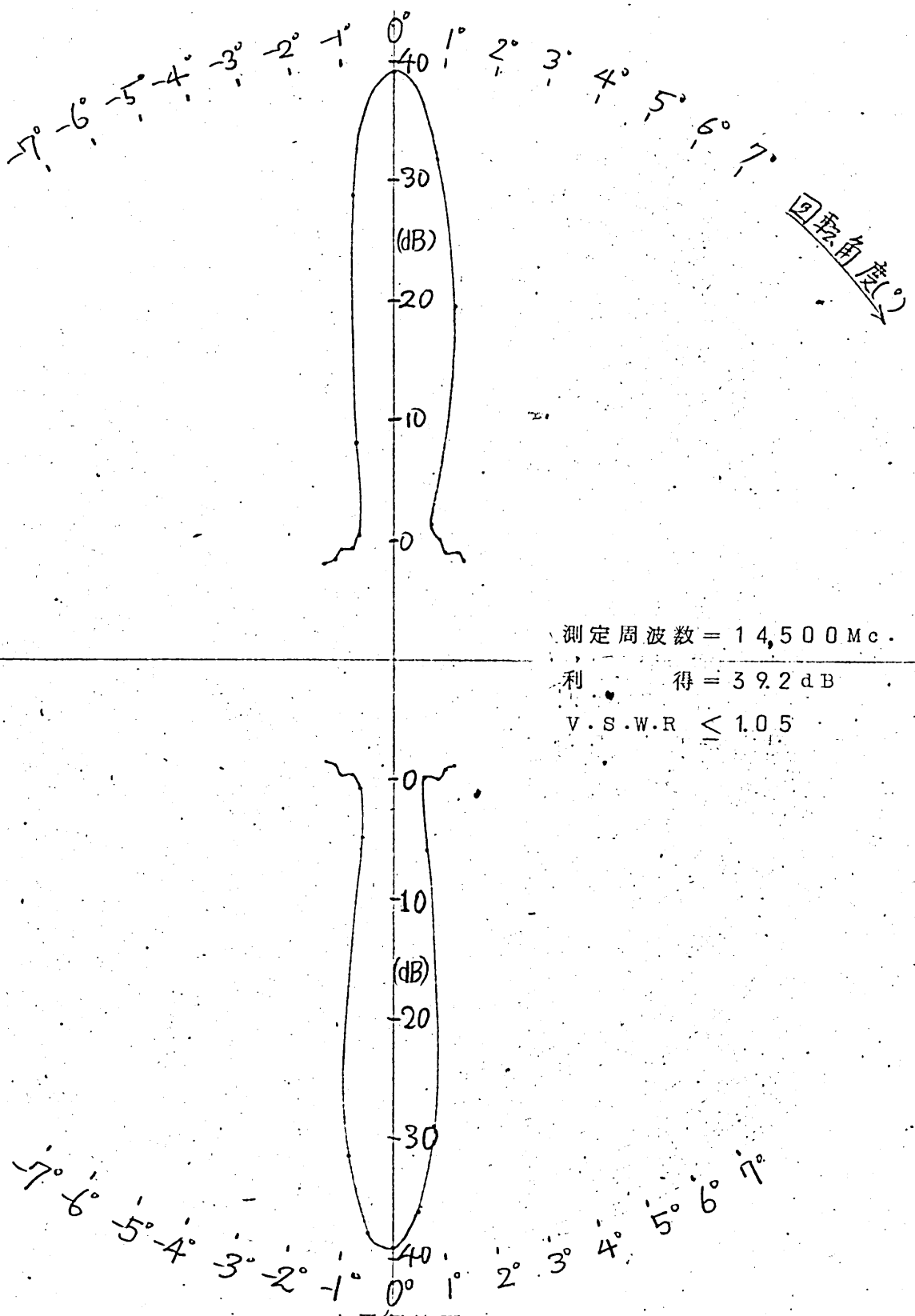
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{-1}{f_1}$$

$$\therefore\ a=\frac{b f_1}{f_1-b}$$

従つて、凸面鏡の焦点距離：f_1が決まれば、ｂの位置に虚像を結ぶためのａの値が決定される。この際凸面鏡の直径ｄはその焦点距離とパラボラの開口角によつて定まる。

一次輻射器（ホーン）のビーム幅はこの直径ｄの中に充分入るように設計しなければならない。また、一次反射凸面鏡の中央部ではビームが反射面に直角となりReaction を生じ、反射係数が大きくなるので、これを補正する頂点整合用円板を設け　Ｖ．Ｓ．Ｗ．Ｒ ≦ 1.1以下になるように調整した。このようなすることにより、交叉偏波成分が、一次輻射器、一次反射凸面鏡及び二

第７図　　パラボラ空中線の指向性



次反射パラボラ面等の不均一により、約１０%程度、生じたが、働作上問題はない。

また、背後及び側面結合についても単独で使用するために問題としなかつた。

※②市販のパラボラ反射鏡を購入したので、その直径：D及び焦点距離が決まつていた。

5、結　合

以上Ｉ．Ｔ．Ｖの無線操縦の一方式について簡単に述べたが、以下にその幾つかの特長を列挙してみると、

(1) マイクロ波発振管が自局の受信機の局部発振器をも兼ね１本しか使用していない。

(2) 特殊なフイルター※①により立体回路及びパラボラ空中線が送・受信機（周波数）に整合共用されている。

(3) 工業用テレビジョン設地局側は無人化することができる。この場合の命令はすべて、制御局側で行なうことができる。

(4) 特殊管以外はすべてトランジスター化されて装置全体がコンパクトにでき上つて、真空管式より、はるかに長寿命である。

(5) 電源は直流２４Ｖでも働作する故、電池をフロートすることにより、停電時でも瞬断することがない。

(6) 従つて消費電力が少なく（真空管式の¼で不要の熱を発生せず）設備費、維持保守費が僅少ですむ。

(7) 情報の書き込み、読み出し及び消去等は、すべて無接点であるから機械的に強く半永久的である。

(8) 制御信号パルスは、１ＫＣの繰り返しで、情報量が大きく、それに必要な帯域幅は３ＫＣである。

等々の利点を有する。

終りに御指導御協力いたゞいた当社安岡部長始め電気部関係各位に深謝する。

参　考　文　献

① 昭和３７年電気四学会連合大会予稿集１３０４

② ＲＣＡ Review P153～180 March 1959

③ ＩＲＥ Trans. Electronic Computers p51～56 March 1961

※1. 第２図のモードーサップレサー参照

輻射科学研究会資料

広帯域および帯域共用円偏波発生装置

立川 清兵衛 . 小畑 哲男
(三菱電機株式会社 中央研究所)

1964年7月25日
(於 三菱電機株式会社)

1. まえがき

円偏波は反射に際して旋回の向きが逆転するから，マイクロ波アンテナに円偏波を用いると，フィード・ホーン，レンズ，あるいは反射鏡等の反射が給電線に戻ってこないようにすることができる。とくに，パラボラ・アンテナの場合には，フィード・ホーンの開口面に付着した雨滴，雪等による反射を吸收除去することができて，我が国のような多雨多雪地の多い国にはきわめて適している。[1][2] 公衆通信のマイクロ波中継に円偏波アンテナを使用することが国際無線諮問委員会CCIRで認められたのは，我が国においてこれを用いて好成積をおさめているからである。こうした公衆通信のための広帯域伝送用アンテナに円偏波を用いる場合には特性の広帯域化が問題となる。

また，近年脚光を浴びてきた宇宙通信においては，サテライトの姿勢の関係で，地上局の送信，受信あるいは追尾用のアンテナは何れも円偏波を用いるのが通例である。そして，かかる宇宙通信用地上局においては，これら三つのアンテナの全部，あるいは，どれか二つを1台のアンテナで共用することが屢々行なわれる。[3] しかも，これら送信，受信および追尾用の各信号は周波数が異っているので，帯域共用の円偏波発生器が必要となる。

なおこの外，円偏波アンテナは，サテライトあるいはロケットのような時間とともに姿勢の変る飛しょう体搭載アンテナ，未知電波探索機器用アンテナ，ならびに，各種レーダ用アンテナとして今後ますますその重要度を増すものと考えられる。

以上のようなわけで，これまでに種々の広帯域用および帯域共用の円偏波発生器の開発，製品化を行ってきたが，[1][2] ここに，それらのものをまとめて報告することにする。

2. 誘電体板入り1/4波長板④⑤⑥

図2.1の誘電体板入り1/4波長板において，誘電体板の両端に反射がなく，かつ，誘電体板が無損失なるものと仮定すると

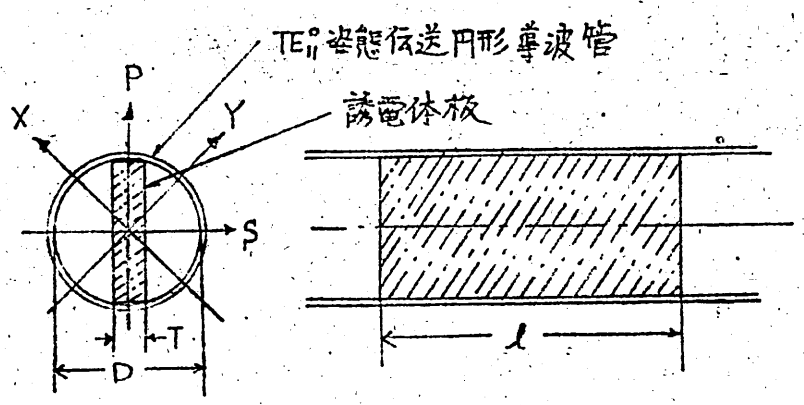


図2.1 誘電体板入り1/4波長板

$$\Phi = \phi_p - \phi_s = 2\pi l\left(\frac{1}{\lambda_{gp}} - \frac{1}{\lambda_{gs}}\right) \quad \cdots\cdots (2.1)$$

ただし　ϕ_p = P方向成分に対する移相量，　ϕ_s = S方向成分に対する移相量
　　λ_{gp} = P方向成分に対する管内波長，　λ_{gs} = S方向成分に対する管内波長

であらわされるΦが$\pi/2$なる場合に，一端から入射したXあるいはY方向に偏波した直線偏波は他端において完全な円偏波となる。ところで，管内波長λ_{gp}，λ_{gs}を測定し，その結果を

$$\lambda_{gp} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_p - (\lambda/\lambda_c)^2}}, \qquad \lambda_{gs} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_s - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad \cdots\cdots (2.2)$$

ただし　$\lambda_c = 1.706D$.

なる式に代入してε_pおよびε_sを求めると，ε_pおよびε_sは当然管径D，板厚Tおよび誘電体板の比誘電率εの関数であり，20%程度の比帯域にわたっては周波数に無関係にほぼ一定値をもつことがわかる。この結果を式(2.1)に代入すれば

$$\Phi(a) = \frac{2\pi l}{\lambda_c}\frac{1}{a}\left[\sqrt{\varepsilon_p - a^2} - \sqrt{\varepsilon_s - a^2}\right] \quad \cdots\cdots (2.3)$$

ただし　$a = \lambda/\lambda_c$ $\cdots\cdots (2.4)$

となり，この$\Phi(a)$は

$$a_0 = \sqrt{(\varepsilon_p \cdot \varepsilon_s)/(\varepsilon_p + \varepsilon_s)} \quad \cdots\cdots (2.5)$$

において極小値をもつ図2.2の如き曲線となる。したがって，使用周波数帯の中

中心周波数附近で式(2.5)が満足するように板厚Tを選定し，かつ，板長lを

$$l \fallingdotseq \frac{\lambda_c}{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left[4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2\right]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.6)$$

に選定すれば，図2.2において，

$$\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta \quad \cdots\cdots (2.7)$$

なり，広帯域特性が得られる。

なお，この場合，帯域内の最大電圧楕円偏波率 e_v

$$e_v = \sqrt{\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}} \quad \cdots (2.8)$$

を一定値以下に保つべき帯域幅は

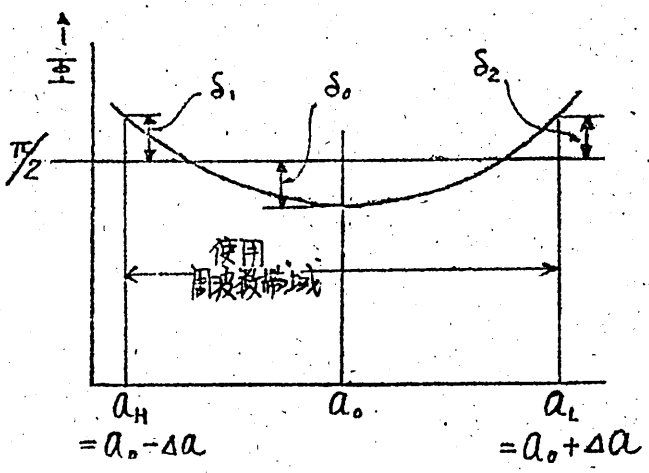


図2.2 誘電体板入り1/4波長板の特性

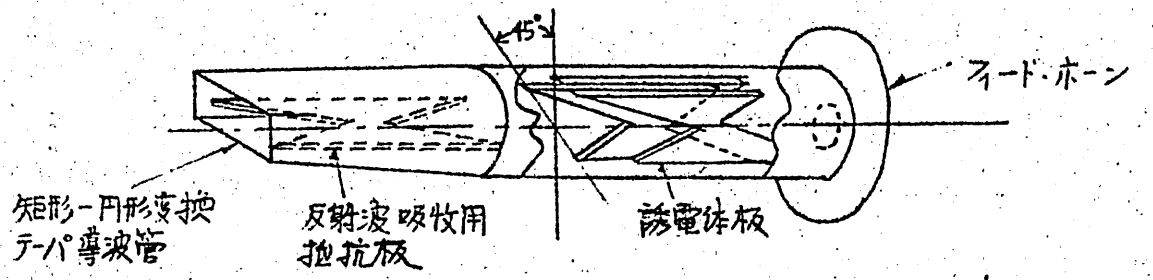
$$\frac{\lambda_L-\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{a_L-a_0}{a_0} > \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{e_v^2-1}{e_v^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0.798\left(\frac{e_v^2-1}{e_v^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots (2.9)$$

で与えられ，今 $e_v = 1.10$ とすれば，

$$\frac{\lambda_L-\lambda_0}{\lambda_0} > 0.25$$

となり，大雑把にみて約50%の比帯域，例えば3,200～5,400 Mcの帯域がとれることになる。

図2.3は日本電信電話公社の4,000 Mc帯円偏波パラボラアンテナ[2]の一次放射器に用いた誘電体板入り1/4波長板の構造と実測結果の一例である。入力VSWR特性をよくするために，誘電体板両端にテーパを付し，かつ，3枚構成として中央部と両側部とを管軸方向に約 $\frac{1}{4}\lambda_g$ ずらすという構造であるため，楕円偏波率特性は図2.2の曲線から予想されるものとかなり違っているが，3,600～4,200 Mcの帯域にわたって $e_v < 1.06$ という良好な結果が得られている。



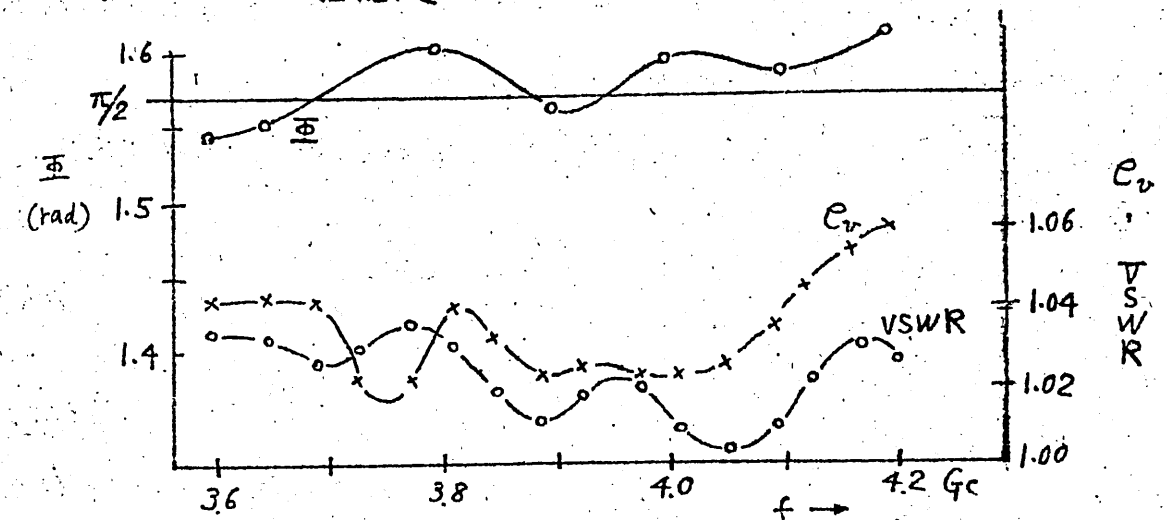


図2.3 4Gc帯誘電体板入り1/4波長板の実測結果

3. 差動形金属鰭付1/4波長板 ⑭⑰

TE_{11}° 姿態伝送円形導波管に金属鰭を装荷した形式の1/4波長板において，図3.1に示すような単一鰭の場合のP成分とS成分との間の移相差亜は

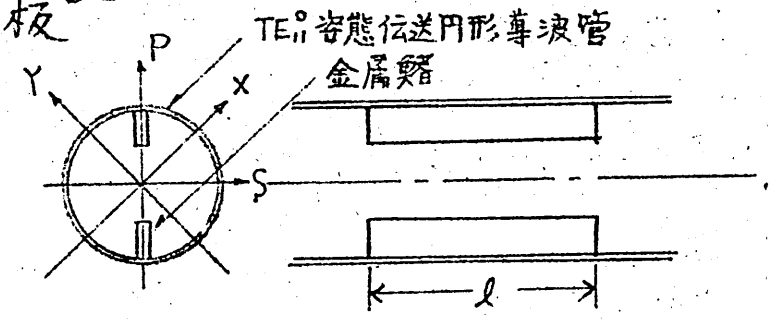


図3.1 単一金属鰭付1/4波長板

$$亜 = \phi_P - \phi_S = 2\pi l\left[\frac{1}{\lambda_{gP}} - \frac{1}{\lambda_{gS}}\right] = \frac{2\pi l}{\lambda}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cP}}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cS}}\right)^2}\right] \quad \cdots\cdots (3.1)$$

ただし

λ_{cP} = P成分に対する遮断波長

λ_{cS} = S成分に対する遮断波長

であり，$\partial 亜/\partial\lambda$ は

$$\frac{\partial 亜}{\partial\lambda} = \frac{\lambda_{gP}\cdot\lambda_{gS}}{\lambda^3}亜 \quad \cdots\cdots (3.2)$$

であって，亜はλとともに単調に変化する。すなわち，亜$=\pi/2$となる周波数は1点であって，到底広帯域特性は望み見ない。

ところで，式(3.2)において，$\lambda_{gp}\cdot\lambda_{gs}$ が小さく亜の大きいものと，$\lambda_{gp}\cdot\lambda_{gs}$ が大きく亜の小さいものとが，与えられた波長において同じ大きさの $\partial\text{亜}/\partial\lambda$ をとることができる．したがって，両者の亜の差が $\pi/2$ になるようにすれば，周波数特性の良い差動形広帯域 1/4 波長板，あるいは，特定の2周波数附近で楕円偏波率特性の良好な帯域共用 1/4 波長板が実現できる．

図.3.2に示すように，2種類の金属鍔付導波管を直列に並べた場合を考え，

$$\text{亜} = \frac{\pi}{2} + S = \text{亜}_1 + \text{亜}_2 \qquad (3.3)$$

$$\text{亜}_i = 2\pi l_i\left[\frac{1}{\lambda_{gpi}} - \frac{1}{\lambda_{gsi}}\right], \quad i=1,2 \qquad (3.4)$$

と記す．ここで，一般性を損うことなく，

$$\pi > \text{亜} > 0 \qquad (3.5)$$

および

$$\text{亜}_1 > 0 \qquad (3.6)$$

と仮定することができる．これらの仮定より

$$\text{亜}_1 > -\text{亜}_2 \qquad (3.7)$$

$$\lambda_{gp1} < \lambda_{gs1} \qquad (3.8)$$

$$\partial\text{亜}_1/\partial\lambda > 0 \qquad (3.9)$$

が得られる．さて，

$$\frac{\partial\text{亜}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\text{亜}_1}{\partial\lambda} + \frac{\partial\text{亜}_2}{\partial\lambda} = \frac{\lambda_{gp1}\cdot\lambda_{gs1}}{\lambda^2}\frac{\text{亜}_1}{\lambda} + \frac{\lambda_{gp2}\cdot\lambda_{gs2}}{\lambda^2}\frac{\text{亜}_2}{\lambda} = 0 \qquad (3.10)$$

を満足する波長 λ_0 が存在すれば，単一金属鍔付の場合より遙かに周波数特性のよいものが得られる．式(3.10)を書き換えると，

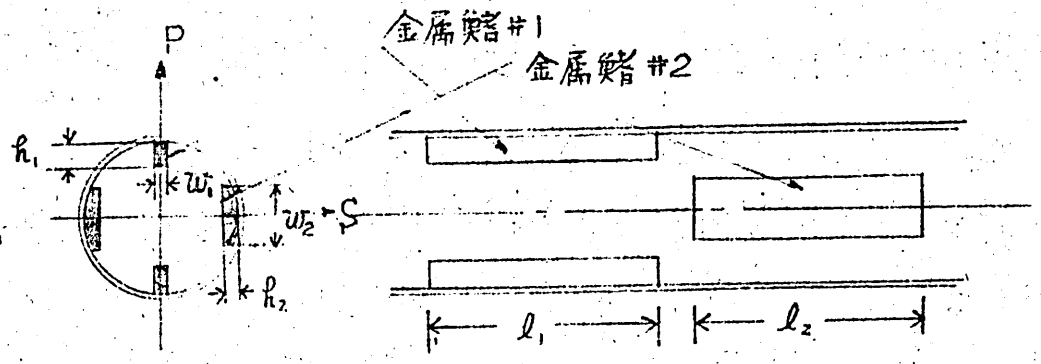


図 3.2 差動形金属鍔付 1/4 波長板

$$\partial \Phi_2/\partial \lambda = -\partial \Phi_1/\partial \lambda < 0 \quad \cdots\cdots (3.11)$$

$$-\Phi_2/\Phi_1 = (\lambda_{gp1}\cdot\lambda_{gs1})/(\lambda_{gp2}\cdot\lambda_{gs2}) \quad \cdots\cdots (3.12)$$

$$-l_2/l_1 = (\lambda_{gs1}-\lambda_{gp1})/(\lambda_{gs2}-\lambda_{gp2}) \quad \cdots\cdots (3.13)$$

となる。$-l_2/l_1$ を適当にえらべば，少くともλの一点で式(3.10)が満足されることが明らかである。上記各式より

$$-\Phi_2 > 0 \quad \cdots\cdots (3.14)$$

$$\lambda_{gp2} > \lambda_{gs2} \quad \cdots\cdots (3.15)$$

$$\lambda_{gp2}\cdot\lambda_{gs2} > \lambda_{gp1}\cdot\lambda_{gs1} \quad \cdots\cdots (3.16)$$

なる関係が得られる。式(3.8)と式(3.15)より2対の鰭は図3.2に示すように，互に直交するように取付けなければならぬことが知れる。

また，式(3.16)は λ_{gpi} および λ_{gsi} の大小にしたがって，波長λの特定の範囲においてのみ成立しうるものであって，式(3.13)の根の数もまた λ_{gpi} および λ_{gsi} の大小によって定る。λ_{gpi} および λ_{gsi} の種々の大小関係の場合について検討すると，

$$\lambda_{gs1} > \lambda_{gp2} > \lambda_{gs2} \geq \lambda_{gp1} \quad \cdots\cdots (3.17)$$

の場合に，式(3.13)は二つの根を有すること，換言すれば，図3.3(a)に示すように，Φが極値をとるλが2点あり，鰭の長さを適当に選ぶと，3点において $\Phi = \pi/2$，すなわち，電圧楕円偏波率 e_v が1となる。式(3.16)の条件が満足されていて，式(3.17)以外の場合には，式(3.13)は唯1個の根をもち，図3.3(b)に示すように，Φの極値をとるλは唯1個で，鰭の長さを適当に選ぶと，2点において $\Phi = \pi/2$，すなわち，電圧楕円偏波率 e_v が1となる。

ところで，このような関係を満足する金属鰭の実際の形状としては，図3.2に示したように，高さhが大で幅wが小なる鰭と，高さhが小で幅wが大なる鰭との組合せが有効である。図3.4は3.65～4.2 Gcの帯域を対象にした4Gc帯広帯域1/4波長板の実測結果であり，図3.5は4.17Gcと6.39Gcとを対象にした2波共用1/4波長板の実測結果である。これらは何れも図3.3(b)の形式のものである。後者のものは，国際電信電話株式会社の茨城宇宙通信実験所の

直径 20m カセグレン アンテナ のテルスター衛星用 6Gc 右旋円偏波送信，4Gc 左旋円偏波受信の送受共用一次放射器[8]に使用されている．

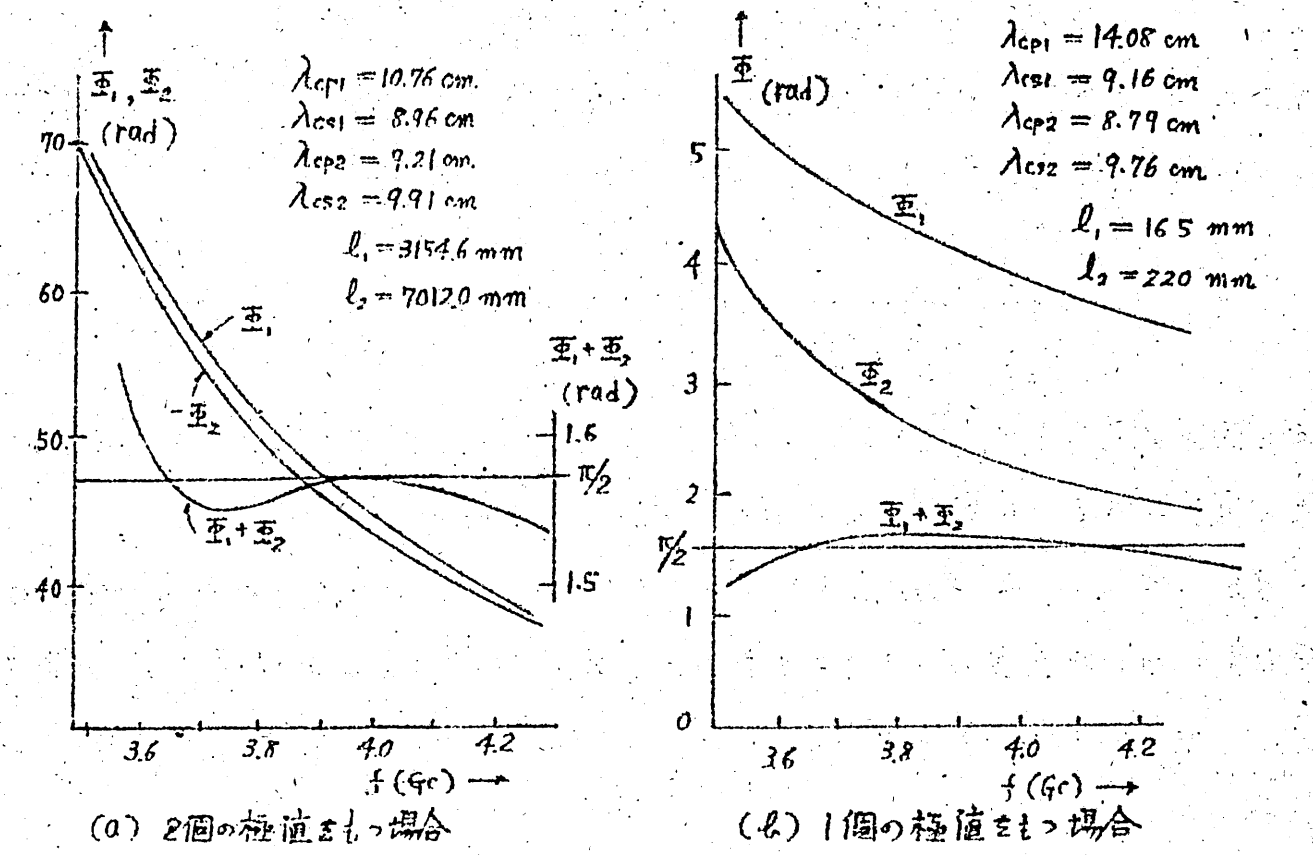


図 3.3 差動形金属鍔付 1/4 波長板の特性計算結果

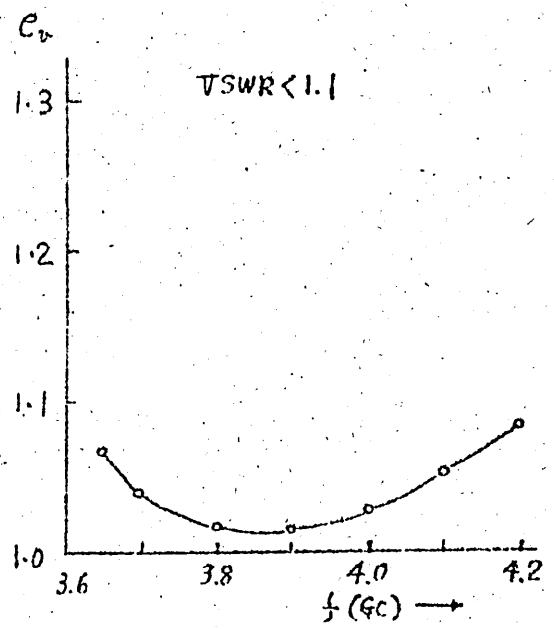


図 3.4 4Gc 帯広帯域差動形金属鍔付 1/4 波長板実測結果

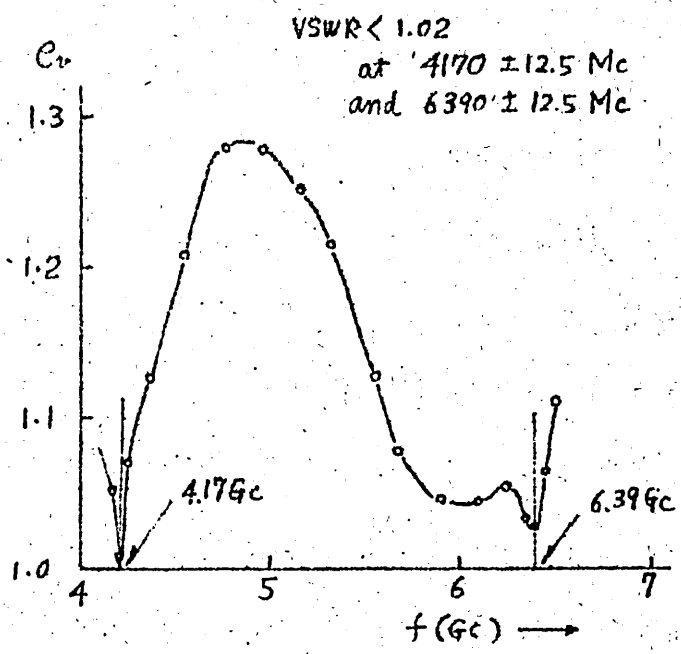


図 3.5 4, 6 Gc 帯共用差動形金属鍔付 1/4 波長板実測結果

4. 和動形容量性棒付金属鍔装荷1/4波長板 ⑧⑨⑩

金属鍔付導波管の直交2波間の移相差の周波数特性を次章で述べる複数個の容量性棒を用いた広帯域無反射移相器の移相周波数特性にて打消して楕円偏波率特性を広帯域化せんとするものである。実際の形状としては，図4.1(a)のように，金属鍔の上に容量性棒を立てる形式と，金属鍔付導波管移相器と容量性棒装荷導波管移相器とを直列につないだ形式とが考えられる。

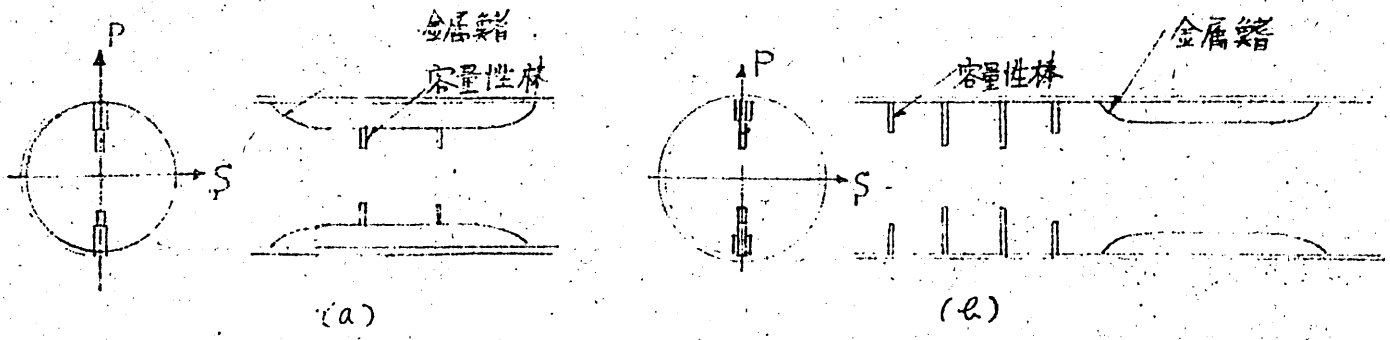


図4.1　和動形容量性棒付金属鍔装荷1/4波長板

まず，金属鍔による直交2波間移相差 θ_1 の周波数特性は前出の式

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \lambda} = \frac{\lambda_{gp1} \cdot \lambda_{gs1}}{\lambda^3} \theta_1 \qquad (4.1)$$

で与えられるから，$\theta_1 > 0$ と仮定すれば，

$$\partial \theta_1 / \partial \lambda > 0 \qquad (4.2)$$

となり，θ_1 は λ とともに単調に増大して図4.2の曲線Iのようになる。

つぎに，容量性棒装荷広帯域無反射移相器の直交2波間移相差 θ_2 の周波数特性は，棒を装荷する部分の導波管の遮断波長および棒の直径を適当にえらぶと，

$$\partial \theta_2 / \partial \lambda < 0 \qquad (4.3)$$

であって，θ_2 は λ とともに単調に減少して図4.2の曲線IIの様になる。したがって，両者を組合せた図4.1の構造のものの特性は図4.2の曲線IIIの様になり，既述のものと同様

$$S_0 = S_1 = S_2 \qquad (4.4)$$

を満足するように各部寸法を選定すれば広帯域1/4波長板が実現できる。

なお，図4.1(a)の形式のものについて，周波数帯内での最大電圧楕円偏波率 ρ_v を一定値以下に保つべき帯域幅を算出すると，

$$\left(\frac{\lambda_L-\lambda_0}{\lambda_0}\right) > \frac{1.59}{\sqrt{H}}\left(\frac{e_v^2-1}{e_v^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.4)$$

ただし $H = p\delta\left(-2p^2 - p\Delta - 2 + \frac{6p\Delta + 2\Delta^2 + 4}{2 - p^2 + p\Delta}\right)$

$p = \lambda_{gp}/\lambda \qquad \Delta = \lambda_{gs}/\lambda$

なる関係が得られる。今 $e_v = 1.1$ とし，H の値を少し大きくみて $H=2$ とすると，

$$\frac{\lambda_L-\lambda_0}{\lambda_0} > 0.33$$

となる。すなわち大雑把にみて 60% 強の比帯域，例えば 3,000～5,800 Mc の帯域がとれることになる。

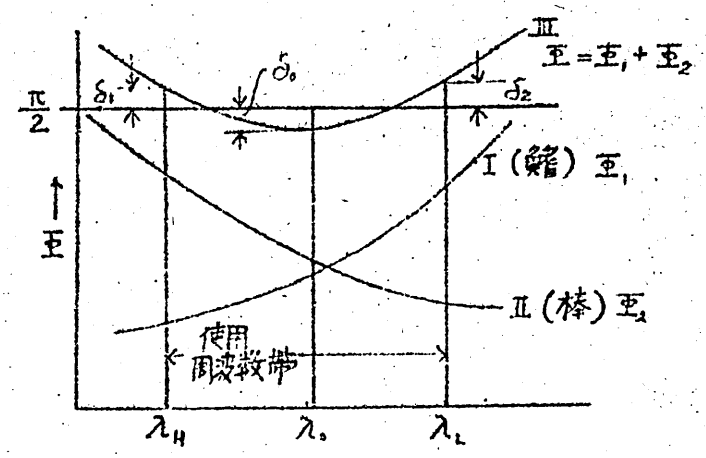


図42 和動形 1/4 波長板の原理

図43は実測結果の一例である。計算上は $e_v < 1.006$ 程度になるが，実験を行ったものは鍋のほとんど全長にわたってテーパを付けてあるので，計算結果ほどには理想的になっていない。玉および e_v 曲線が複雑な形をしているのは，鍋および棒の反射の影響および両端にテーパをつけたためである。

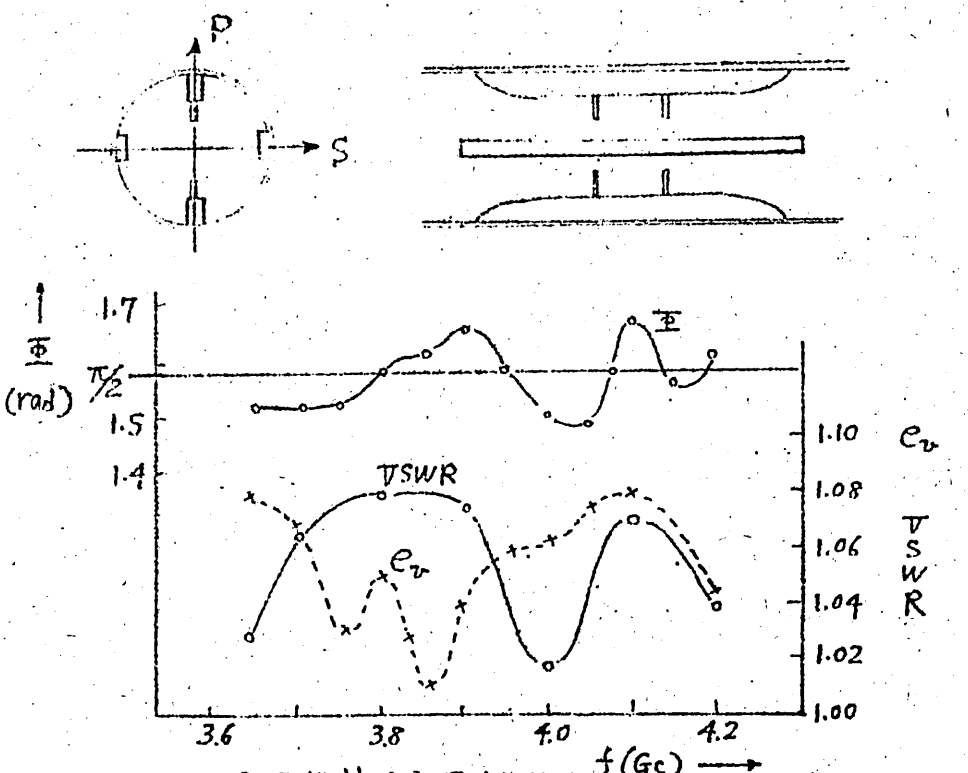


図4.3 和動形容量性棒付金属鍋装荷 1/4 波長板の実測結果

5. 容量性棒荷広帯域無反射移相器を用いた円偏波発生器③⑪

容量性棒荷移相器とは図5.1に示すように，複数個の容量性棒を適当な間隔で左右対称に配列したものである。この移相器の移相量亜および電圧反射係数Γに次の条件を与えることにする。

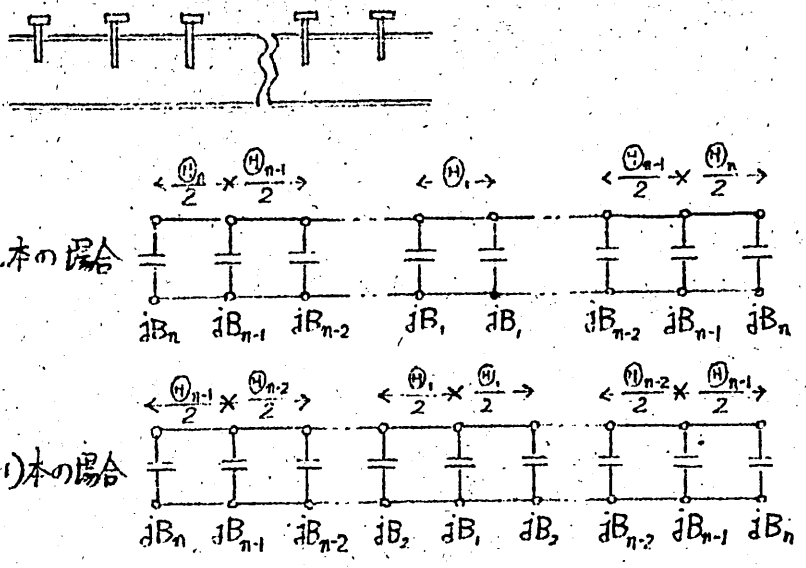


図5.1 容量性棒荷無反射移相器と等価回路

$$亜_{f=f_0} \equiv 亜(B_{10}, \cdots, B_{n0}, \Theta_{10}, \cdots, \Theta_{n0}) = 亜_0 \tag{5.1}$$

$$\left(\partial 亜/\partial\lambda\right)_{f=f_0} \equiv 亜'(B_{10}, \cdots, B_{n0}, \Theta_{10}, \cdots, \Theta_{n0}, B_{10}', \cdots, B_{n0}') = 亜_0' \tag{5.2}$$

$$\Gamma_{f=f_0} \equiv \Gamma(B_{10}, \cdots, B_{n0}, \Theta_{10}, \cdots, \Theta_{n0}) = 0 \tag{5.3}$$

$$\left(\partial\Gamma/\partial\lambda\right)_{f=f_0} \equiv \Gamma'(B_{10}, \cdots, B_{n0}, \Theta_{10}, \cdots, \Theta_{n0}, B_{10}', \cdots, B_{n0}') = 0 \tag{5.4}$$

式(5.3)および(5.4)は広帯域にわたって無反射とするための条件式であり，式(5.1)および(5.2)はそれぞれ移相量およびその周波数特性を所要の値にするための条件式である。この移相器単独で広帯域円偏波発生器を実現するためには，$亜_0 = \pi/2$，$亜_0' = 0$ にする必要があり，前述の和動形1/4波長板，あるいは，後述の定位相差発生装置に用いる場合には，$亜_0'$ は負の所要値にする必要がある。条件式が4個であるから，自由に与えるべき変数も少くとも4個が必要である。

図5.2に示すように，容量性棒が4本の場合について考える。この場合の式(5.3)は

$$\left.\begin{aligned} \tan\Theta_{10} &= 2/B_{10} \\ \tan(\Theta_{20} - \Theta_{10}) &= 2/B_{20} \end{aligned}\right\} \cdots \tag{5.5}$$

式(5.4)は

$$4B_0' + \frac{\cos\Theta_{10}}{\cos(\Theta_{20}-\Theta_{10})}(2+B_{20}^2)\left\{(4+B_{10}^2)K\Theta_{10} - 2B_{10}'\right\}$$
$$+\left\{-K\Theta_{10}(2+B_{10}^2)+2B_{10}'-2K\Theta_{20}\right\}(4+B_{20}^2)=0 \quad \cdots\cdots (5.6)$$

ただし　$K=\lambda_{g0}^2/\lambda_0^3$

式(5.1)は

$$2\pi - 2\Theta_{20} = \Phi_0$$

式(5.2)は

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{\cos\Theta_{10}}{\sin(\Theta_{20}-\Theta_{10})}B_{20}(4+B_{10}^2) - \left(\frac{B_{10}^2}{2}+1\right)\left(\frac{B_{20}^2}{2}+1\right)+1\right\}K\Theta_{10} - \frac{B_{20}^2}{2}K\Theta_{20}$$
$$+B_{10}'\left\{\left(\frac{B_{20}^2}{2}+1\right) - \frac{B_{20}\cos\Theta_{10}}{\sin(\Theta_{20}-\Theta_{10})}\right\} + B_{20}' = \Phi_0' \quad \cdots\cdots (5.7)$$

であらわされる。$B_{10}'=B_{20}'=0$，すなわち，容量性棒自身の等価サスセプタンスに周波数特性がないと仮定したときの所要移相量Φ_0を得るためのB_{10}，B_{20}，Θ_{10}，Θ_{20}およびそのときのΦ_0'を図5.3に示す。図5.4はこのようにして設計した広帯域無反射$\pi/2$移相器の特性実測結果である。

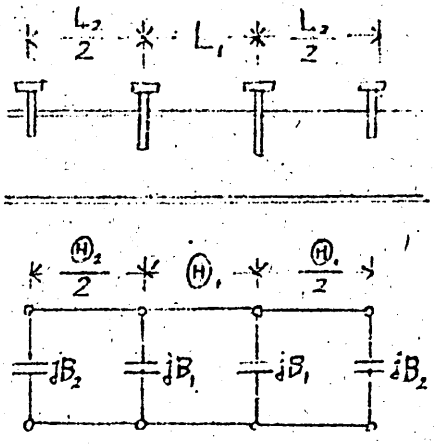


図5.2　4本容量性棒装荷広帯域無反射移相器

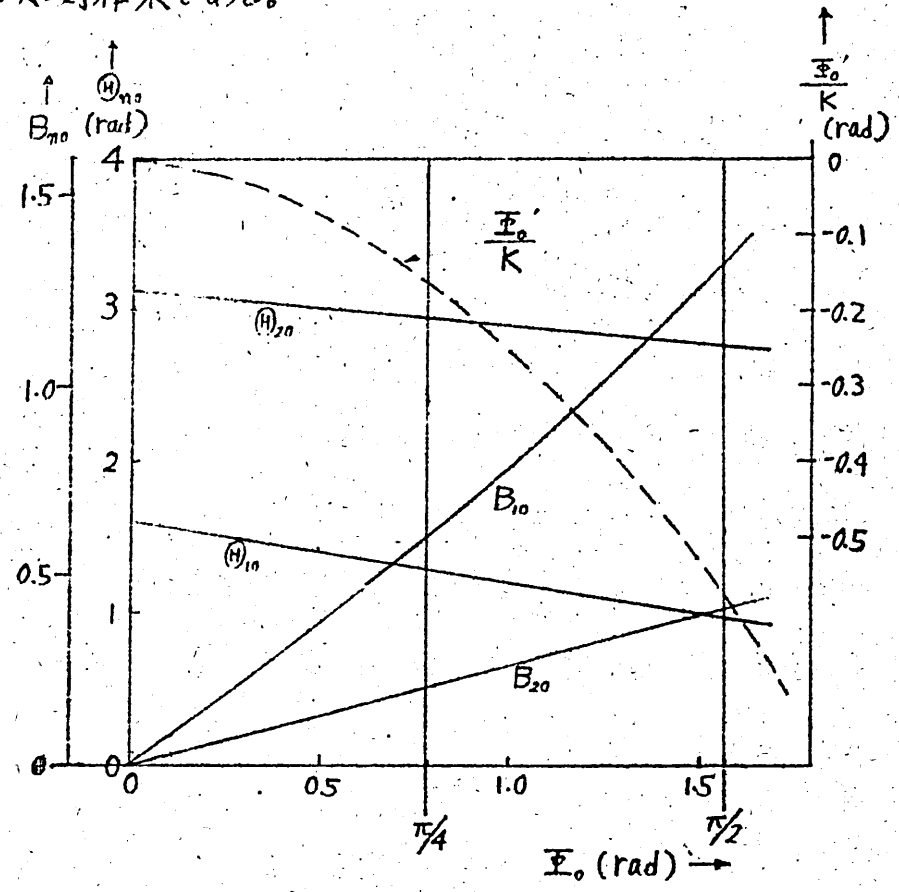


図5.3　4本容量性棒装荷広帯域無反射移相器の設計図表
$B_{10}'=B_{20}'=0$の場合

容量性棒の数を5本にすると変数の数が増して，棒の挿入位置を固定したままでその挿入長を変化することにより移相量可変形の広帯域無反射移相器が実現できる。35φ円形導波管を用いた場合，5.925～6.175 Mc の帯域にわたって VSWR＜1.02 の条件の下で，中心周波数での移相量 Φ_0 を 0.6～1.3 rad の範囲可変にすることができた。なおこの場合の移相量周波数特性は，上記周波数帯域および可変範囲で $\Phi = \Phi_0 \pm 0.03$ rad 以内であった。この形式の移相器と広帯域整合円形管ハイブリッド回路[12]とを組合せた図5.5の一次放射器は日本電信電話公社の超広帯域伝送用 6Gc 帯左右両旋共用円偏波パラボラアンテナ[13]に用いられている。

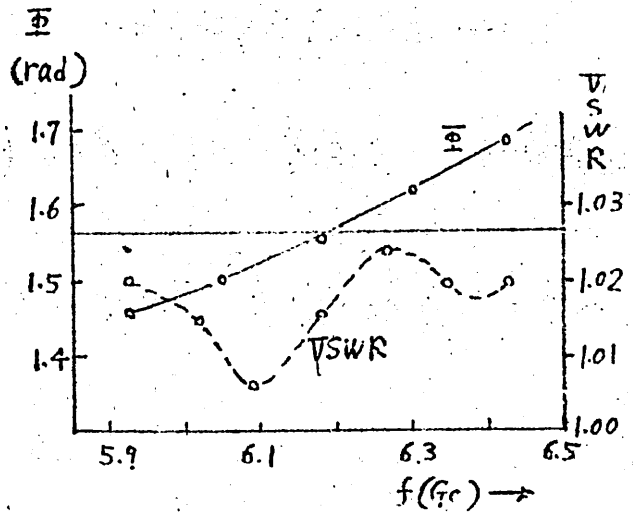


図5.4 4本容量性棒装荷広帯域無反射移相器実測結果の一例
(使用導波管 =35φ円形)

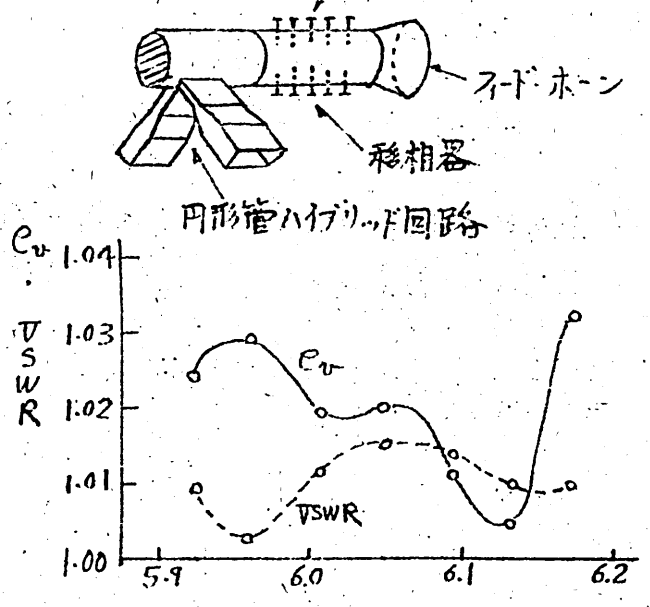


図5.5 5本容量性棒装荷広帯域無反射移相器と円形管ハイブリッド回路とを用いた左右両旋共用円偏波パラボラアンテナ一次放射器の構造と特性.

6 定位相差発生装置を用いた円偏波発生器[4][14]

円偏波発生器を広帯域化することは，入力VSWR，楕円偏波率 e_v の両者をともに広帯域にわたって良好にすることを意味する。そして e_v を広帯域にわたってよくするためには，一般には，移相量の周波数特性の良好な移相器が必要である。しかし，移相特性の広帯域でない移相器を用いて，広帯域にわたって e_v 特性の良好な円偏波発生器を実現することは不可能でない。

図6.1の構成で，円形導波管側にあらわれる波のP成分とS成分との間の位相

差 φ は

$$\varphi = \frac{2\pi(L+\ell)}{\lambda_g} - \left(\frac{2\pi L}{\lambda_g} + \text{玉}\right)$$

$$= \frac{2\pi\ell}{\lambda_g} - \text{玉} \quad \cdots (6.1)$$

であり $\partial\varphi/\partial\lambda$ は

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = -\frac{2\pi\ell\lambda_g}{\lambda^3} - \frac{\partial\text{玉}}{\partial\lambda} \quad \cdots (6.2)$$

となる。中心周波数 $f=f_0$ において

$$\varphi_{f=f_0} = \pi/2 \quad \cdots (6.3)$$

$$\frac{2\pi\ell\lambda_{g0}}{\lambda_0^3} = -\left(\frac{\partial\text{玉}}{\partial\lambda}\right)_{f=f_0} \quad \cdots (6.4)$$

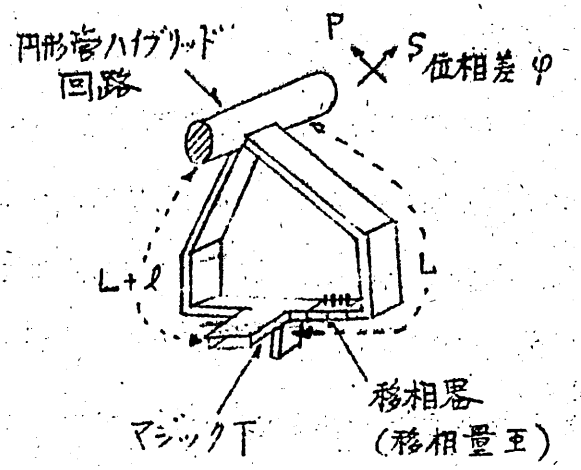


図 6.1 定位相差発生装置を用いた広帯域左右両旋共用円偏波発生器

を同時に満足するように ℓ および移相器を選定すると広帯域にわたって e_r 特性の良好な円偏波発生器が得られる。

前章で述べた4本容量性棒装荷無反射移相器と広帯域整合マジック T とを組合せた図6.2 (a)の構成で，両口①および②を無反射終端したとき，ならびに，短絡したときのマジック T H分岐よりの入力 VSWR 実測結果を図 6.2 (b)に示す。短絡時の VSWR は，図6.1の構成で，各ハイブリッド回路が理想的で，かつ，移相器が完全無反射であると仮定したときの発生円偏波の e_r の自乗を示すことになる。

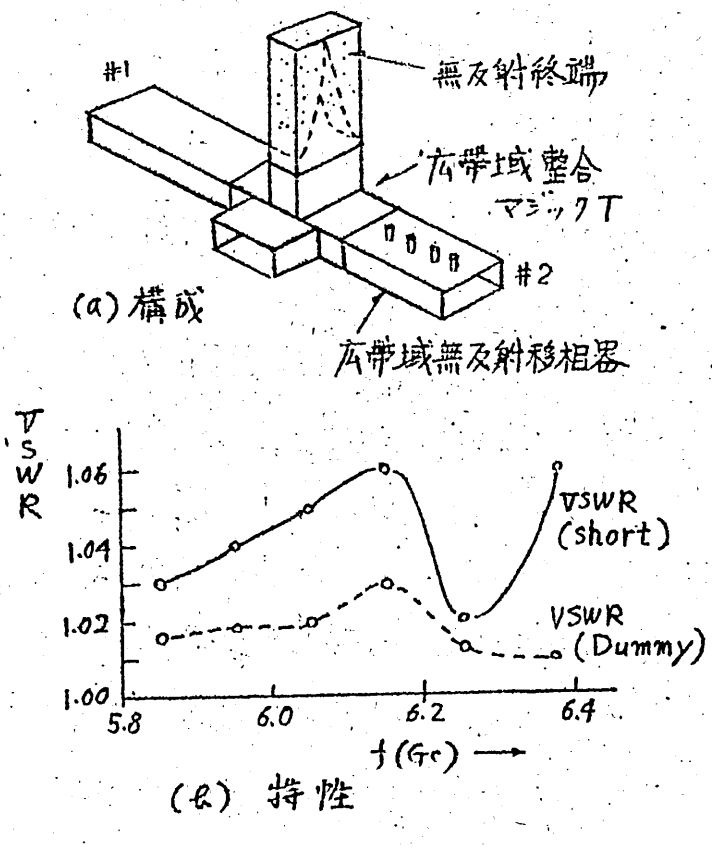


図 6.2 広帯域定位相差発生器の構造と特性

7. 2点の周波数にてそれぞれ $\eta/4\lambda$ 板および $1/4\lambda$ 板となる2波共用円偏波発生器

既述のように単一溝付円形導波管の直交2波間移相差は周波数が高くなるにつれて単調に減少する。したがって，f_1 および f_2 の2点の周波数で動作する2波共用円偏波発生器として，f_1 にて $\eta/4\lambda$ 板となり，f_2 にて $1/4\lambda$ 板となるものを考えることができる。（ただし，$f_1 < f_2$）。この方法は f_2/f_1 が大きい場合に有効であるが，各周波数帯，とくに f_1 にて余り帯域がとれないのが欠点である。

f_1 および f_2 にて，それぞれ $\eta/4\lambda$ 板および $1/4\lambda$ 板になるための条件式は，

$$\eta\sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{cp}}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{cp}}\right)^2}=\eta\sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{cs}}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{cs}}\right)^2} \quad \cdots\cdots (7.1)$$

で与えられる。この式を検討すると，η のとり得べき値としては，

$$\eta > \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{f_2}{f_1} \quad \cdots\cdots (7.2)$$

でなければならないことがわかる。全長 l は

$$l=\lambda_1\frac{\frac{\eta}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{cp}}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{cs}}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{cp}}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{cs}}\right)^2}} \quad \cdots\cdots (7.3)$$

で，また，f_1 および f_2 での移差差の周波数特性は，

$$\frac{\partial\Xi_1}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda_1}\frac{\frac{\eta}{2}\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{cp}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{cs}}\right)^2}} \quad \cdots (7.4)$$

$$\frac{\partial\Xi_2}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda_2}\frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{cp}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{cs}}\right)^2}} \quad \cdots (7.5)$$

で与えられる。$f_2/f_1=2.42$，$\eta=5$ の場合について，式(7.1)を満足するための λ_1/λ_{cp} と λ_1/λ_{cs} との関係，ならびにそのときの l および $(\partial\Xi_1/\partial\lambda)\Xi_1$ を図7.1に示す。l を大にすれば，$\partial\Xi_1/\partial\lambda$ は小さくなるが，その限界は，

$$\left(\frac{\partial\Xi_1}{\partial\lambda}\right)_{min}=\frac{1}{\lambda_1}\frac{\frac{\eta}{2}(\eta^2-1)\pi}{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2-1} \quad (7.6)$$

である。

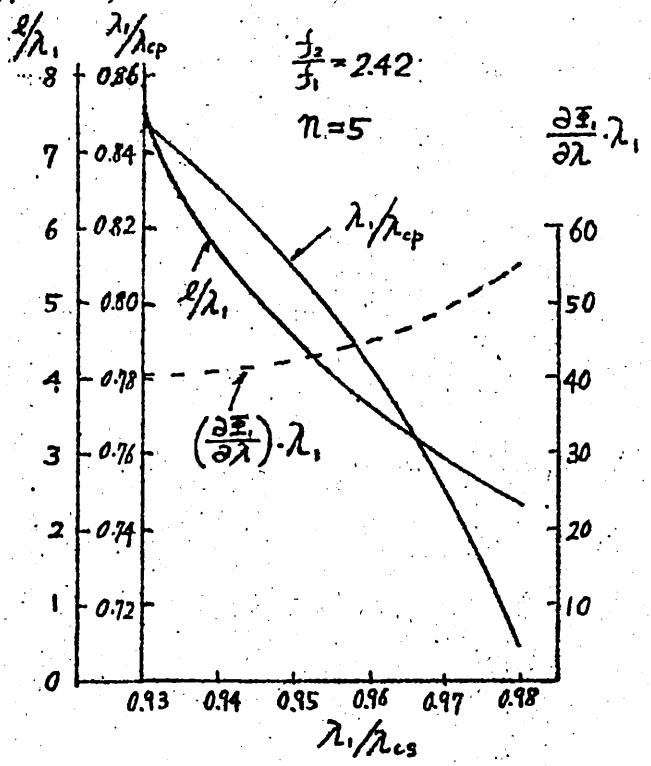
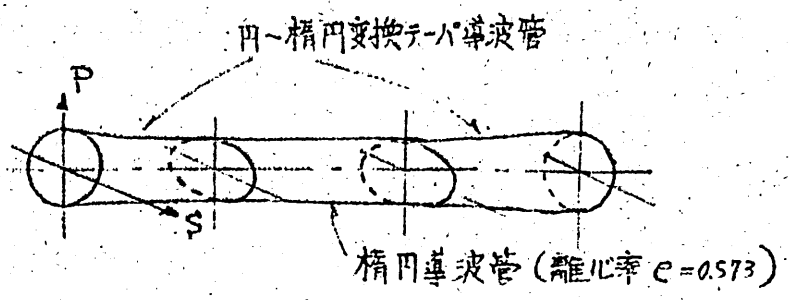


図7.1 f_1 および f_2 でそれぞれ $\eta/4\lambda$ 板および $1/4\lambda$ 板となる2波共用円偏波発生器

図7.2はこの方法で製作した $f_1 = 1.725$ Mc $f_2 = 4.170$ Mc の2波共用円偏波発生器の構造と特性である。鏡付導波管では4Gc帯での高次姿態を抑制することが困難なことが実験の結果判ったので，楕円導波管を使用した。楕円導波管の遮断波長 λ_{cp}, λ_{cs} の計算式としては木原氏の近似式[15]を用いた。移相差 π の計算に際しては円～楕円変換テーパ導波管による移相量も考慮してある。なお，この2波共用円偏波発生器は国際電信電話株式会社茨城宇宙通信実験所の直径20mカセグレン・アンテナのリレー衛星を対象とした日本放送協会用1.7Gc右旋円偏波送信，4Gc左旋円偏波受信の送受共用一次放射器に使用されている。



(a) 構造

周波数 (Mc)	至 (計算値)	C_v (計算値)	C_v (実測値)
4157.5	$\pi/2 + 0.049$	1.05	1.11
4170	$\pi/2 + 0.044$	1.04	1.12
4182.5	$\pi/2 + 0.039$	1.04	1.10
1717	$5\pi/2 + 0.213$	1.24	1.23
1725	$5\pi/2$	1.00	1.02
1733	$5\pi/2 - 0.191$	1.22	1.26

(b) 特性

図7.2 楕円導波管を用いた2波共用円偏波発生器の構造と特性。

8. むすび

以上，種々の広帯域および帯域共用の円偏波発生器の原理，構造および特性について記した。これらのものの持つ特長を活かして使い分ければ，今後ますます重要度を増す円偏波使用機器にきわめて有用なものと考えられる。なお，これら円偏波発生器はこの数年来研究開発してきたものであって，この間，日本電信電話公社，国際電信電話株式会社および日本放送協会の関係各位の御指導御鞭撻を得たことを付記して厚く御礼申し上げる。

[参考文献]

① 三戸, 浅井, 村井, 薄井, 津村, 喜連川: "マイクロ波円偏波アンテナ" 三菱電機, vol. 29, no. 7, 昭和30年度無線特集, pp. 348～355, 昭30-7.

② 河津, 樫本, 喜連川: "直線偏波円偏波の広帯域パラボラアンテナ," 三菱電気, vol. 30, no. 9, 昭和31年度無線特集, pp. 561～567, 昭31-9.

③ 喜連川: "宇宙通信用アンテナ" 電気通信学会雑誌 近刊掲載予定.

④ T. Kitsuregawa, S. Nakahara and S. Tachikawa: "Broad-band Microwave Quarter-wave Plate," Mitsubishi Denki Lab. Reports, vol. 1, no. 4, pp. 21-52, Oct., 1960.

⑤ 喜連川, 立川 "誘電体板入り導波管型1/4波長板の広帯域化" 輻研 2.3.4部会, 昭31-4-21.

⑥ 喜連川, 立川 "誘電体板入り1/4波長板の広帯域化" 昭和31年度電気通信学会全国大会講演論文集, P. 89, 昭31-11.

⑦ 喜連川, 信岡, 中原 "差動形鰭付導波管広帯域1/4波長板" 昭和31年電気三学会連合大会講演論文集, P. 591, 昭31-4

⑧ 喜連川, 立川, 小畑 "4Gc, 6Gc 共用1/4波長板" 昭和37年度電気通信学会全国大会講演論文集, #176, 昭37-11

⑨ 喜連川, 信岡 "小型広帯域マイクロ波1/4波長板" 三菱電機, vol. 30, no. 2, pp. 114～117, 昭31-2.

⑩ 喜連川, 信岡, 中原 "小型広帯域全金属製マイクロ波1/4波長板" 電気通信学会マイクロ波伝送研究専門委員会資料, 昭31-1.

⑪ 喜連川, 立川 "容量性棒装荷広帯域無反射移相器" 電気通信学会マイクロ波伝送研究専門委員会資料, 昭36-10

⑫ たとえば 喜連川, 立川 "導波管ハイブリッド回路の広帯域整合" 三菱電機, vol. 34, no. 11, pp. 1419-1428, 昭35-11,

⑬ 土井, 青木, 河津, 大橋, 加藤, 沼野, 樫本, 森川, 大林, 喜連川, 立川 "6000 Mc帯超広帯域伝送用左右両旋共用円偏波パラボラアンテナ" 三菱電機, vol. 34, no. 12, pp. 1515～1523, 昭35-12.

⑭ 喜連川, 立川 "導波管型広帯域定位相差発生装置" 輻研 2.3.4部会, 昭33-7.

⑮ 木原 "導波管" pp. 34～40, 修教社, 昭23-10.

輻射科学研究会２，３，４部会資料

追尾用レーダ・スロット・アレイ・アンテナ

竹　島　　忠　昭

（神戸工業株式会社）

昭和39年7月25日

（於　三菱電機株式会社）

追尾用レーダ・スロット・アレイ・アンテナ

竹島　忠昭
（神戸工業株式会社）

1 序　　言

モノパルス・レーダ等追尾用レーダ・アンテナとして、和と差の放射特性を同時に形成させる、いわゆるSimultaneous Radiationに関する研究は、種々行なわれているが[1][2]ここでは、1個の矩形導波管形スロット・アレイ・アンテナに、中心き電方式を採用し同時放射特性をうる場合について報告する。

C.B. Watts[3]やC.J. Sletten ら[4]は、Dual Terminal Linear Arrayとして、1個のアレイ・アンテナの両端にき電線を接続し、そのき電点から等路長の所にハイブリッド回路を設けて同時放射特性のえられることを報告している。しかしながらこのアンテナは、き電線による重量の増大、き電線路長差による特性の劣化等の欠点をもっている。これに対し、ここに報告するものは、十分素子数の大きい均一分布アレイ・アンテナにおいては、その中心放射素子の放射性性におよぼす影響を無視しうる点に着目し、アレイ中心にハイブリッド回路を設け、いわゆる中心き電方式による種々の利点をもち、かつ、き電線等をとくに必要としない、構造簡単な同時放射スロット・アレイ・アンテナである。

まず、アレイ・アンテナの中心放射素子が、その放射特性におよぼす役割についてのべ、つぎに、ハイブリッド回路としてマジックTを用いた同時放射特性について検討を行なう。最後に、試作アンテナの概要とその特性をのべる。

2 中心放射素子の寄与

矩形導波管形スロット・アレイ・アンテナにおいては、（ここでは、Resonant Type, Broadside Arrayのみを対象とする）一般に、相

隣るスロットからの放射電界の位相を同相とするために、いわゆる Phase Reversal 法をとり、スロット間隔は $\lambda_g/2$ に選定される。(λ_g は導波管管内波長) いま、導波管を10GC帯規格導波管WRJ-10に例をとると、$f=9375$ MC において、$\lambda_g/2 \simeq 22.35$ となる。ここでアレイ中心部にハイブリッド回路としてマジックTを付加しようとすると、とくにHアームにおいて、導波管内径寸法が10.2×22.9(mm)であるため、その分岐部分にスロットが配置されることになる。このため、分岐部におけるモードの乱れにより、スロットの励振振幅に影響を与え、放射特性の劣化をもたらすのみでなく、その入力インピーダンス特性にも悪影響を与えることになる。そこで、この中心部のスロット間隔を拡げて、何ら特性上の変化をもたらすことなく、中心部にハイブリッド回路を付加することが必要となる。

ここで、奇数個のスロット・アレイ・アンテナを考え、中心スロットの放射特性におよぼす役割、およびその中心スロットを除去した場合、すなわち、中心部スロット間隔を λ_g とした場合について検討を行なう。中心スロットの問題については、Nonreciprocal Radar Antenna[5] あるいは Non-linear Processing Antenna[6] として種々取り扱われているが、ここではアレイ理論の基本にたちかえってみることにする。

いま、図1に示すように、等間隔 d で配置された奇数個 $(2n+1)$ の等方性放射素子のアレイを考える。その振幅分布は、中心放射素子に対して対称で、図に示すようにとると、ϕ 方向の遠方における奇数個の放射素子による合成電界Eは

$$E = 2A_0 + 2A_1 \cos\psi + 2A_2 \cos 2\psi + \cdots + 2A_k \cos(n\psi) \quad (1)$$

と与えられる。ここに $k=0,\ 1,\ 2\ \cdots$ とする。式(1)をまとめると

$$E = 2\sum_{k=0}^{n} A_k \cos\left(2k\frac{\psi}{2}\right) \quad (2)$$

ただし、$\psi = 2\pi d/\lambda \cdot \sin\phi + \delta$

δは隣接した2個の放射素子の位相差である。

式(1)(2)の級数は、項数nの有限なフーリエ級数である。そして$k=0$に対しては、中心放射素子の寄与を表わす定数項$2A_0$をうる。$k=1, 2$ ---- に対しては、それぞれ、対称的に組み合わされた一対の放射素子の寄与を示す高調波成分の項をうる。したがって、合成の放射特性は、単に、級数の各項の和として表わされる。[7] したがって均一分布アレイを考えると、十分大きいnに対しては、定数項を与える中心放射素子を除去しても、その放射特性への影響は無視しうることが明らかとなる。さらにこのことは、アレイ理論によっても証明することができる。すなわち、同一振幅、同一間隔の場合を考えると、$(2n+1)$個のアレイのアレイ係数E_{2n+1}は、周知のように次式で与えられる。

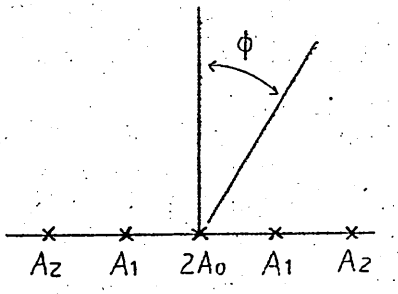


図1　素子配列

$$E_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\sin\left[(2n+1)\psi/2\right]}{\sin(\psi/2)} \qquad (3)$$

ここで、中心放射素子を除去した素子数$2n$個のアレイについて考えると、そのアレイ係数は、片翼n個のアレイ係数E_nと、両翼アレイの合成アレイ係数E_aとの積として与えられる。ここでE_nは、

$$E_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(n\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \qquad (4)$$

と与えられる。式(4)で表わされた片翼アレイの位相中心は、そのアレイの中心とみることができるから、両翼アレイの位相中心間距離をd'とすると、両翼アレイは同相配列のため

$$E_a = \cos\left(\frac{\psi'}{2}\right) \qquad (5)$$

ただし $\psi' = 2\pi d'/\lambda \cdot \sin\phi$; $d' = (n+1)d$

したがって式(5)は

$$E_a = \cos\left[(n+1)\frac{\psi}{2}\right] \qquad (6)$$

となり、中心放射素子を除去したアレイのアレイ係数 E_{2n} は

$$E_{2n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin\left(n\cdot\frac{\psi}{2}\right)}{\sin(\psi/2)} \cdot \cos\left[(n+1)\frac{\psi}{2}\right] \qquad (7)$$

として与えられる。式(7)を変形すると、

$$E_{2n} = \frac{1}{2n}\left[\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\psi}{2}\right]}{\sin(\psi/2)} - 1\right] \qquad (8)$$

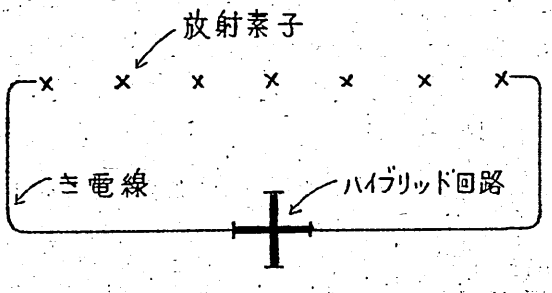
となる。ここで式(3)と式(8)を比較すると、nの十分大きな値に対しては、その相異を無視しうることが明らかとなる。実際このことは35および34素子のスロット・アレイ・アンテナにより実験的確認を行なった。

3. 中心き電によるSimultaneous Radiation

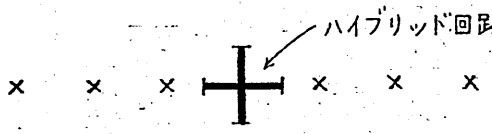
C.B.Wattsの示したDual Terminal Linear Arrayは、図2(a)に示すように、アレイ・アンテナの両端から等路長の所にハイブリッド回路を設けるものである。そして、そのスロット間隔 d を

$$d = \frac{\lambda_g}{2} + S$$

としたいわゆる非共振形アレイである。いま、スロット数が偶数個の場合を考えると、ハイブリッド回路の並列分岐からき電した場合(同相き電)差の放射特性が得られ、直列分岐からき電した場合(逆相き電)和の放射特性が得られる。さらに、スロット数が奇数個の場合は、この条件が逆転することは明らかである。



(a) Dual terminal array



(b) Center fed array.

図－2　同時放射アレイ

これに対し、ここに報告するものは、アレイ・アンテナの中心にハイブリッド回路を付加するもので、とくに、き電線等を必要とせず、構造簡単であるのみならず、中心き電を採用した共振形アレイであるため、完全なBroadside Arrayを形成し、かつ入力インピーダンス特性も良好となる。

10GC帯矩形導波管形スロット・アレイ・アンテナにおいて、その放射特性を犠牲にすることなく、中心スロット間隔をλ_gとなしうることが確認され、したがって、その中心部にマジックT回路を付加することが容易となった。ここで、図3に導波管形エッジ・シャント・スロット・アレイ・アンテナの場合の、中心き電の分岐方式とスロット配列の関係を示す。同図から明らかなように、両翼アレイの位相関係は、その水平偏波成分に対して(a)(d)が同相、(b)(c)が逆相となる。したがって、き電分岐回路方式とスロット配列の関係が図3(a)(d)のとき和の放射特性がえられ、(b)(c)の場合、差の放射特性がえられる。和の放射特性は、両翼アレイの位相が同相配列になった場合で、式

(7)によって与えられる。また、差の放射特性は、両翼アレイが逆相に配列された場合で、両翼アレイのアレイ係数は

$$E_a = \sin(\Psi/2) \tag{9}$$

で与えられる。したがって和の放射特性をE_Σ、差の放射特性をE_Δとすると

$$E_\Sigma = \frac{1}{n}\,\frac{\sin(n\cdot\frac{\Psi}{2})}{\sin(\Psi/2)}\cdot\cos\left[(n+1)\frac{\Psi}{2}\right] \tag{10}$$

$$E_\Delta = \frac{1}{n}\,\frac{\sin(n\cdot\frac{\Psi}{2})}{\sin(\Psi/2)}\cdot\sin\left[(n+1)\frac{\Psi}{2}\right] \tag{11}$$

として与えられる。式(10)(11)を用いて$\lambda = 32\,mm$　$d = 22.35\,mm$　$n = 34$の場合の計算結果を図4に示す。

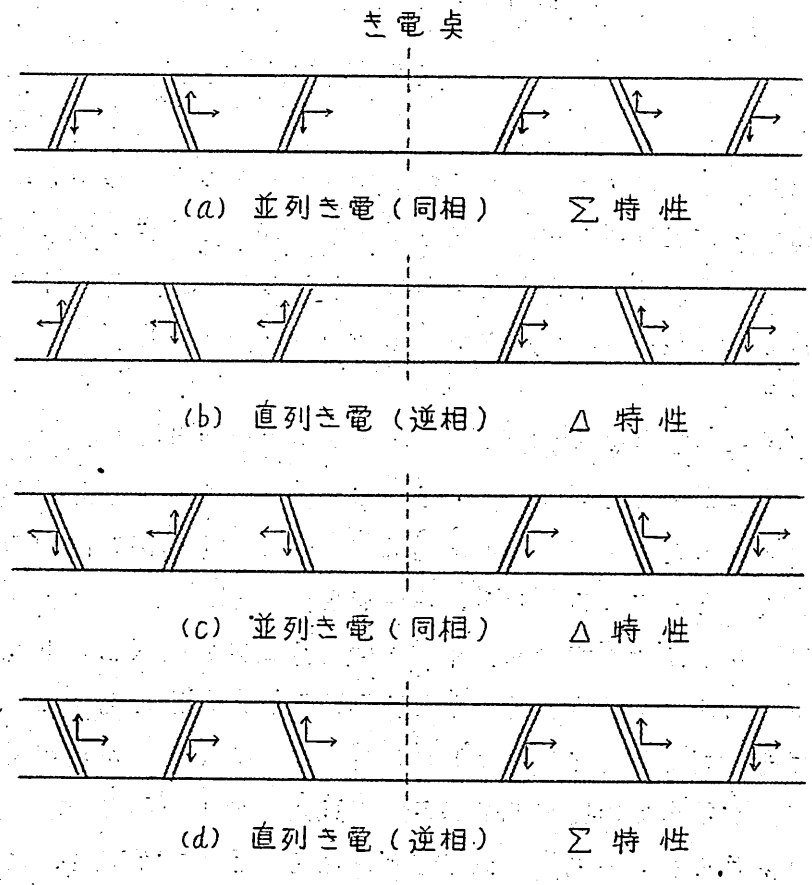


図　3　中心き電方式スロット配列

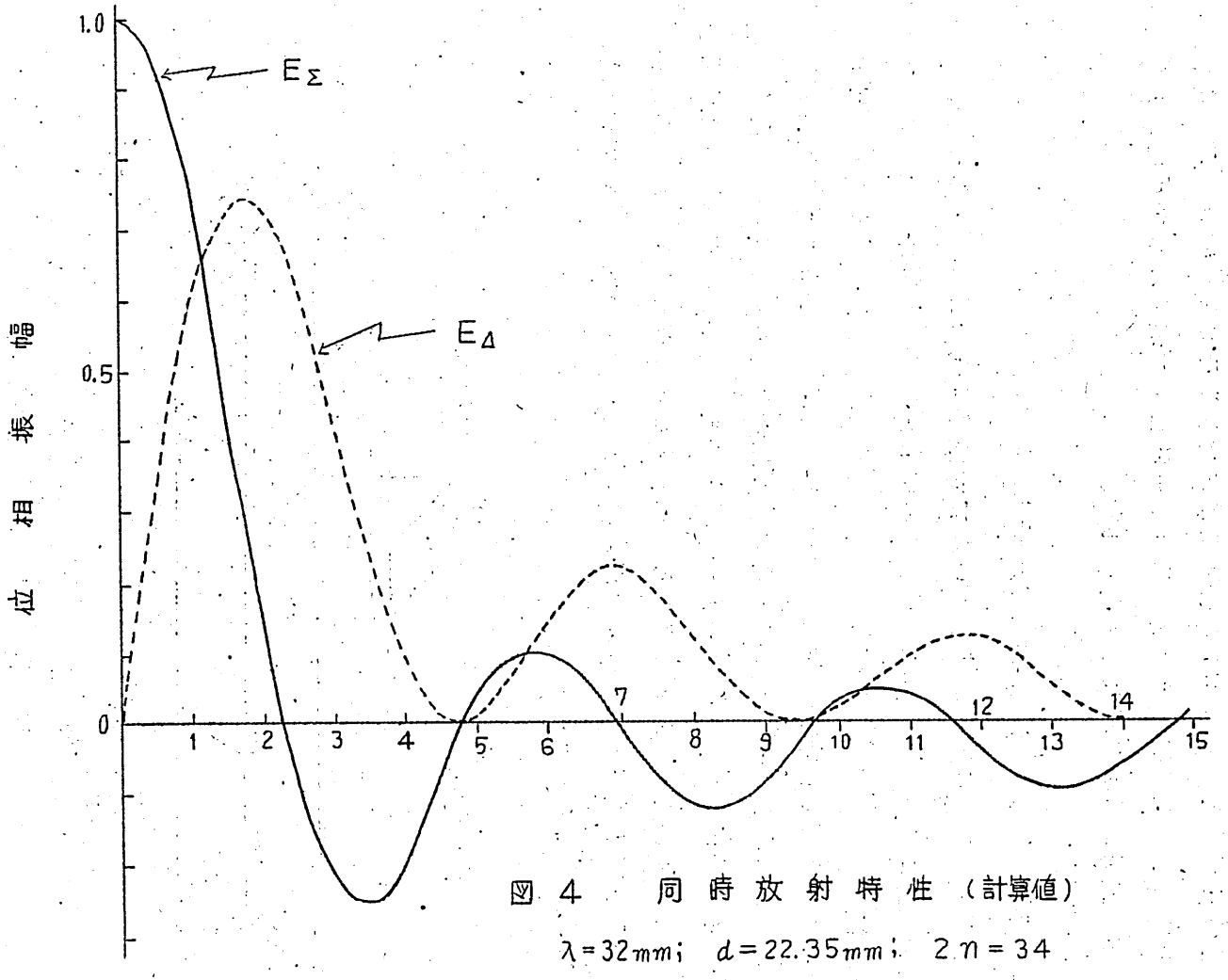


図 4　同時放射特性（計算値）

$\lambda = 32mm$;　$d = 22.35mm$;　$2n = 34$

また、スロットから放射される交さ偏波成分の位相関係については、図3から明らかなように、(a)(c)の配列において左右両翼が同相となりΣ特性が、また(b)(d)の配列では逆相、すなわちΔ特性がえられる[8]。したがって、送信アンテナとしては、一般に交さ偏波成分抑圧比の大きい(d)を用いるのが得策と考えられる。

4. 試作アンテナの概要と特性

試作アンテナは、WRJ－10導波管に34個のエッジ・シャント・スロットを設け、図5のように、その中心部スロット間隔をλgとし、その部分にマジックTを付加して、き電を行なった。したがって、Hアームからき電した場合、和の放射特性を、Eアームからき電した場合、差の放射特性をうることができる。その放射特性の実測結果を、図6、7、8、9に示す。また、各アームからの入力インピーダンス特性を図10に示す。これは共振形であるため、比較的狭帯域であるが、いわゆる端き電による共振形アレイの周波数特性に比較すると、かなりよい結果とみることができる。

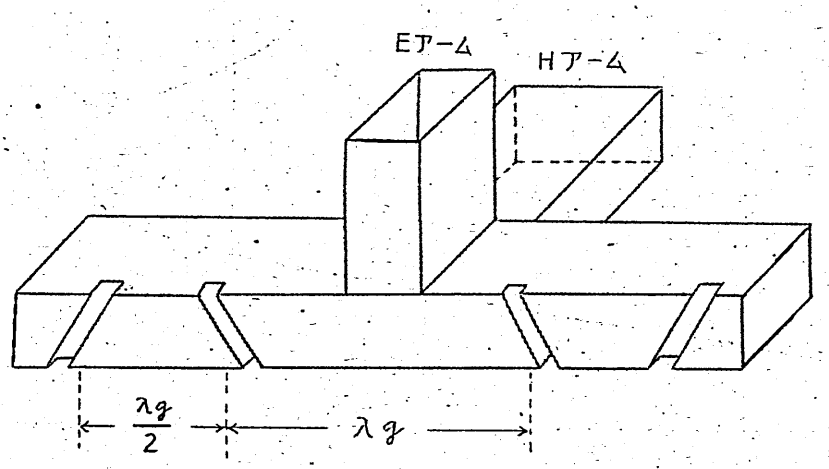


図 5　中心き電構造

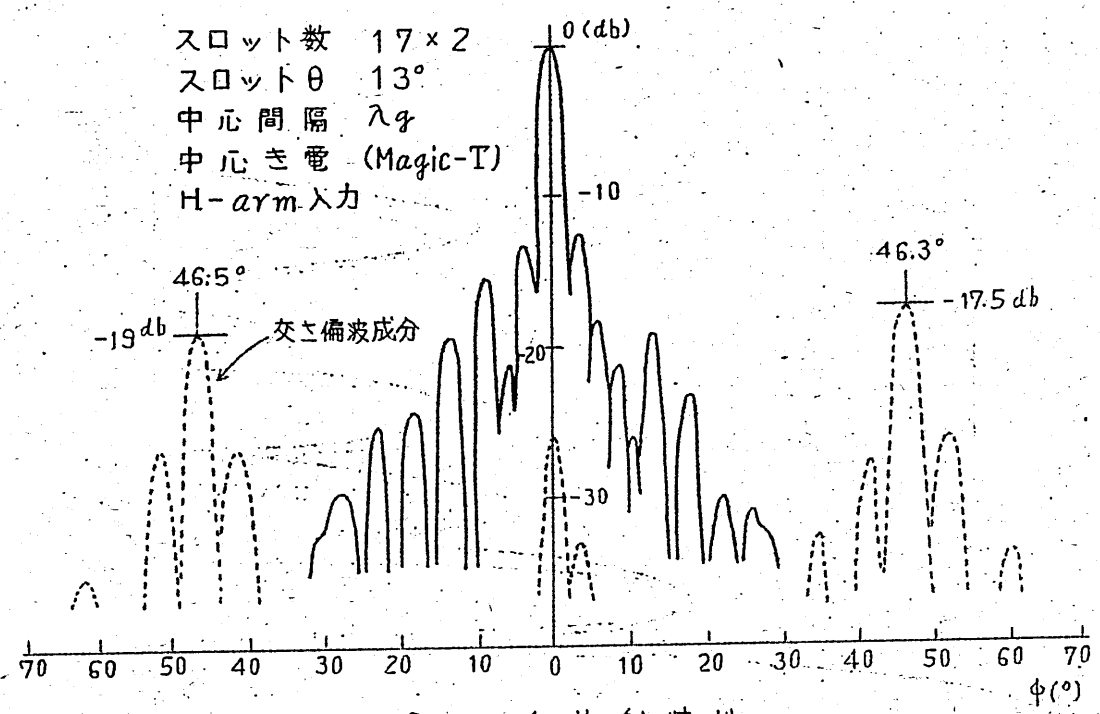


図 6 和放射特性

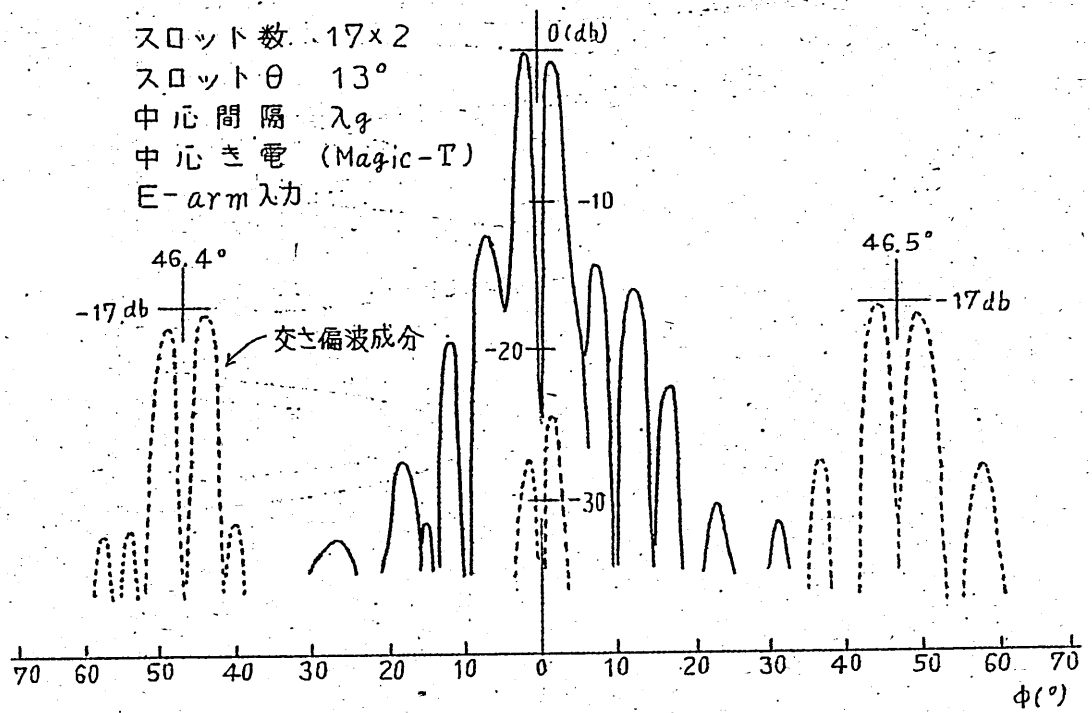


図 7 差放射特性

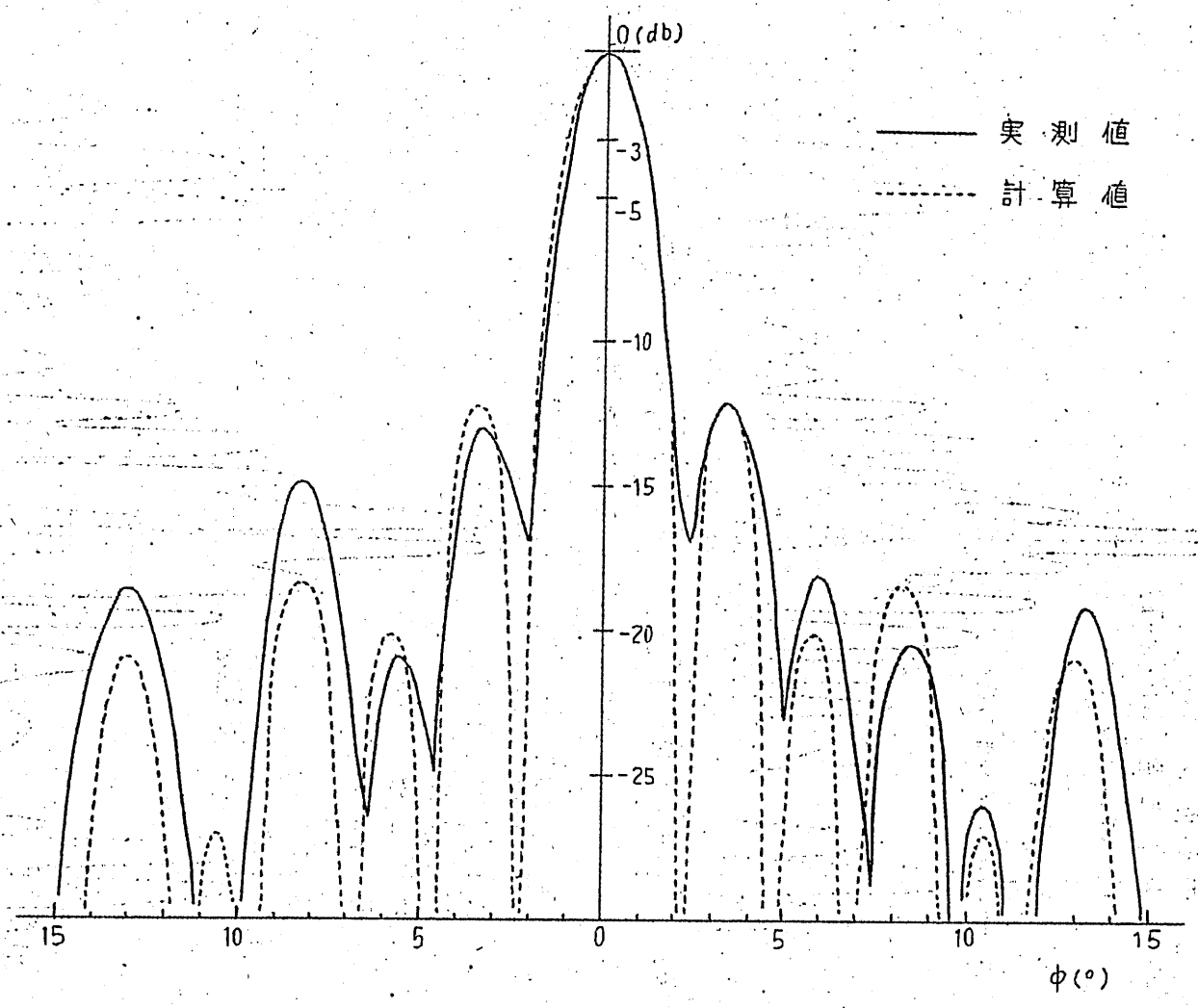


図 8 和放射特性

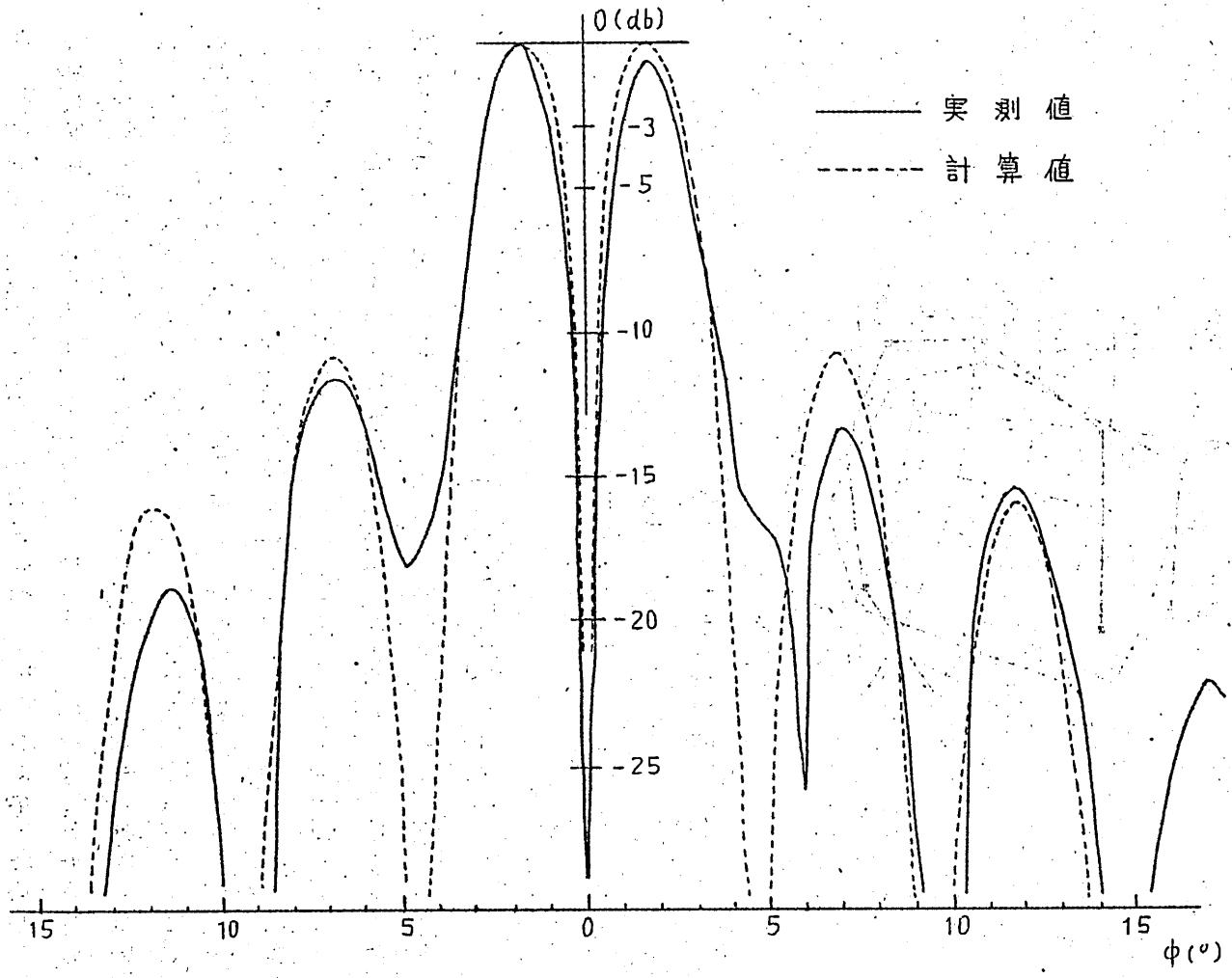


図 9　差放射指向

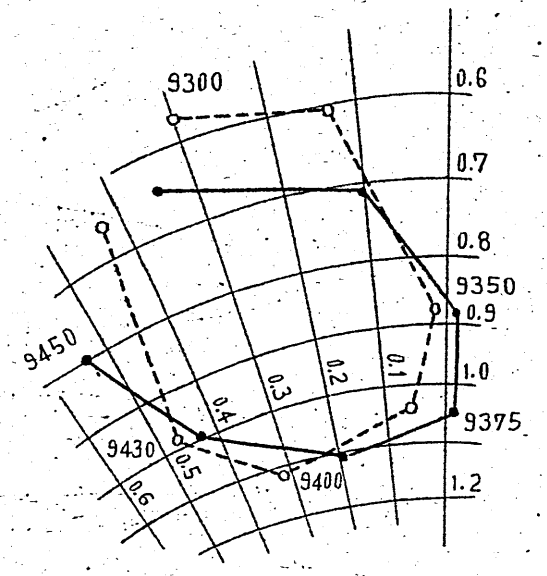


図１０　入力インピーダンス特性

●：Ｈアーム入力

○：Ｅアーム入力

5　レーダ・アンテナとしての検討

一般に、追尾用レーダ・アンテナに対する評価は、和と差の放射特性における利得、サイドローブ抑圧比、差放射特性の角度０における傾斜等により決定されるが、これは、レーダ・システム上の要求と相まって評価されるべきもので、ここに一般的結論を与えることはできない。

また、和と差の放射特性をそれぞれ別々のアンテナによって形成する場合は、たとえば、和のアンテナに対しては、ビーム幅とサイドローブ抑圧比の最適条件を与えるドルフ・チェビシェフ分布を適用し[9]、また、差のアンテナに対して、サイドローブ抑圧比を最少にする必要ある場合は、その変形分布を[10]、また、差放射特性の利得に重点をおく場合[11]、傾斜最大条件を満足する場合[12]、等それぞれのシステム的要求にしたがって分布形を決定することが可能である。

しかしながら、ここで取り扱っているような、１個のアレイ・アンテ

ナによって和と差の放射特性を同時にうる場合については、そのいずれかを犠牲にせざるをえない。換言すれば、そのシステムの最も要求する所にしたがって、アンテナ系の設計、評価が行なわれなければならない。

ここで、1個のアレイ・アンテナに関する一例をあげて評価の参考とする。W.H.Nester[13]は、Max. Sensitivity をうるために、和の放射特性の利得と、差の放射特性の傾斜の積が最大となる条件を求めた。もちろん、和の放射特性の利得最大は、uniform excitation の場合であり、差の放射特性の傾斜最大は、linear odd excitatation の場合である[12] W.H.Nester の結論によれば、One dimentional array においては、8.7 dB の振幅傾斜をもつ場合、この条件が満足される。この場合の放射特性は、

Sum Gain Factor	0.3 dB
Difference Gain Factor	2.4 dB
Max. Sum Sidelobe	8.4 dB
Max. Difference Sidelobe	11.3 dB

である。これに対し我々の試作したアンテナは、均一分布アレイであるため

Sum Gain Factor	0 dB
Difference Gain Factor	2.5 dB
Max. Sum Sidelobe	13.0 dB
Max. Difference Sidelobe	11.0 dB

であり、差アンテナの可能な Gain Factor が 2.15 dB である所から、差放射特性の傾斜が若干悪いが、十分実用に供しうるものと判断される。

6. 結　　言

以上のべたことを要約すると、10 GC帯矩形導波管共振形、均一分布スロット・アレイ・アンテナの中心スロットを除去し、その部分にマジック T 回路を付加した同時放射アンテナは、構造がきわめて簡単で、放射特性としても十分実用に供しうるものであることが明らかとなった。

また、ここでは簡単のために、均一分布アレイに限定してきたが、さきに示した範囲内においては、他の傾斜分布にも適用することができる。

さらに、レーダ・システムをも含めた評価については、稿をあらたに別途報告の予定である。

最後に、ご指導、ご検討を頂いた当社無線技術部西岳部長、松田課長に深謝の意を表する。

参考文献

(1) D.R.Rhodes: "Introduction to Monopulse"
Mc-Graw Hill 1959

(2) G.H.Brown: "Pattern Synthesis – Simplified methods of array design to obtain a desired directive pattern"
RCA Rev. p398 (Sept. 1959)

(3) C.B.Watts: "Simultaneous radiation of odd and even patterns by a linear array"
IRE 40, 10, p1236 (Oct. 1952)

(4) C.J. Sletten and Others: "A new satellite tracking radar"
IRE Wescon Conv. Record Pt1 p244 (1957)

(5) R.L.Mattingly: "Nonreciprocal radar antenna"
IRE 48, 4, p795 (April. 1960)

(6) A. Ksienski: "Signal processing antenna"
the microwave journal p77 (Oct. 1961)

(7) J.D. Kraus: "Antennas"
Mc Graw Hill (1950)

(8) 松田, 竹島, 磯貝: "スロット・アレイ・アンテナの交さ偏波放射ビーム"
信学誌 47, 6, p918 (昭39-06)

(9) C.L.Dolph: "A current distribution for broadside arrays with optimizes the relationship between beam width and sidelobe level"
IRE 34, 6, p335 (June. 1946)

(10) O.R. Price & R.F. Hyneman : "Distribution functions for monopulse antenna difference patterns"
IRE Trans. AP-8, 6, p567 (Nov. 1960)

(11) P.W. Hannan : "Maximum gain in monopulse difference mode"
IRE. Trans. AP-9, 3, p314 (May. 1961)

(12) E.J. Powers: "Analysis and synthesis of a general class of difference patterns"
ASTIA AD 231217 (July. 1959)

(13) W.H. Nester : "The optimum excitation for a phase comparison array"
the microwave journal 6, 4, p67 (April 1963)

輻射科学研究会2, 3, 4部会資料

10Gc帯無指向性スロット・アンテナ

松田　季彦
竹島　忠昭
磯貝　保広
（神戸工業株式会社）

昭和39年7月25日
（於　三菱電機株式会社）

１０Ｇｃ帯無指向性スロット・アンテナ

松田季彦　竹島忠昭　磯貝保広
（神戸工業株式会社）

1. 序言

ＵＨＦ・ＳＨＦ帯における水平偏波・水平面内無指向性アンテナに関する研究は，テレビ放送用アンテナ，あるいは，レーダ・ビーコン用アンテナを目的として，かなり古い歴史をもつており，最近の研究に至つてその設計理論は，ほぼ完成の域に達したと見ることができる。しかしながら，無指向性アンテナとして一般に用いられている円筒スロット・アンテナにおいては，スロット励振機構の設計ならびに，具体的構造に関して，若干の問題を残しているように思われる。

ここでは，小形・軽量・構造簡単な，１０Ｇｃ帯ビーコン用アンテナを目的とする。水平偏波・水平面内無指向特性の短形導波管形スロット・アレイ・アンテナについて，従来の円筒スロット・アンテナとの比較を行ない，その実験的検討の結果から，十分実用性のあるアンテナが試作されるに至つたので報告する(1)

まず，従来用いられている円筒導波管形スロット・アンテナ，同軸形スロット・アンテナ等について，その概要をのべ，比較の資料とする。つぎに考察の対象である短形導波管形スロット・アンテナの基本原理，および，その実験的検討結果を示し，さらに設計上の問題点を明らかにして，実用性の確認を行なう。

2. マイクロ波無指向性アンテナ

まず，ここでは一般に実用化されている無指向性アンテナの概要をのべ

る。その構造から分類すると，

2.1　円筒導波管形スロット・アンテナ

この種アンテナは，一般に大形となるため，主としてＳＨＦ帯において用いられ，電力容量の大きい特色を生かして，ビーコン送信アンテナ[2][3]，テレビ放送アンテナ[4]として用いられている。このアンテナは，円筒導波管にＴＭ01 波を励振させ，その円周方向に管径に応じて数個の軸に平行なスロットを設け，水平面内無指向特性を得ようとするものである。スロットに対する励振は，その近傍に適当なスタブをそう入して，部分的に高次モード（ＴＥモード）を発生させ，水平偏波の放射の行なつている。垂直面内放射特性に対しては，スロットの軸方向段数を増加して要求に応ずることができる。しかしながら，このアンテナに関する問題点は，

（１）　円筒導波管の基本モードはＴＭ01 であり，ＴＥ11　ＴＥ21　モードのしや断波長を考慮に入れると，その管径がかなり太くなる。すなわち，円筒導波管の内径を a とすると，

ＴＥ11　波のしや断波長　$\lambda_{c_{11}} = 3.412\,a$

ＴＭ01　波のしや断波長　$\lambda_{c_{01}} = 2.613\,a$

ＴＥ11　波のしや断波長　$\lambda_{c_{21}} = 2.057\,a$

であるから，a はＴＥ21 波に対しては，しや断になるよう，またＴＭ01 波に対しては励振できるよう選定されねばならず，自由空間波長 λ に対するしや断領域の半径 a は，

$$\frac{\lambda}{2.613} < a < \frac{\lambda}{2.06}$$

を満足せねばならない。したがつて，この円筒導波管の肉厚をも考慮すると，その外径は，９３７５ＭＣに対して約３０㎜，７０００ＭＣに対して

約４０㎜となる。このように太い円筒スロット・アンテナにおいては，無指向特性を得るため当然円周方向のスロット数を増大しなければならない。一例をあげると，S.Silver[5] が示すように，３㎝帯において外径１1/4吋の円筒導波管に対して７個のスロットを必要としている。筆者等の行なつた実験においても，９３７５ＭＣにおいて，外径３２㎜の円筒導波管に対して円周方向スロット数７個で，指向性最大・最小比（Circularity）は約２ｄＢであつた。また岩片氏等の論文[4]によれば，７０１２.５ＭＣにおいて，外径４０.６㎜の円筒導波管に対して円周方向スロット数８個で，指向性最大・最小比１.７ｄＢ　Ｍａｘ．となつている。

以上のように，この種円筒スロット・アンテナにおいては，その１段当りのスロット数が多いと言う欠点をもつ。

（２）　また，短形導波管TE_{10}モードから円筒導波管TM_{01}モードへのモード変換器，さらに，TE_{11}モード除去フィルタ，吸収体等の付加装置を必要とし，構造上の複雑さをまぬがれない。

（３）　円筒導波管TM_{01}モードの管内波長λ_gは，

$$\lambda_g = \sqrt{\frac{\lambda_c^2 \cdot \lambda^2}{\lambda_c^2 - \lambda^2}}$$

（ただし　λ：自由空間波長　λ_c：TM_{01}波のしや断波長．）で与えられ，軸方向アレイ素子に同相き電を行なう場合，（進行波アンテナとしてではなく，定在波アンテナとして使用する場合）いわゆるPhase Reversal 法をとり，スロット間隔$d = \lambda_g / 2$　とする。したがつて，$\lambda = 32$㎜，$a = 15$㎜の場合$d = \lambda_g / 2 = 27.6$㎜，$d/\lambda \fallingdotseq 0.862$となる。また，$\lambda = 42.8$㎜（$f = 7012.5$ＭＣ）$a = 19.5$㎜の場合，$d = \lambda_g / 2 = 39.1$㎜．$d/\lambda = 0.914$となる。この両者いずれの場

合も，スロット間隔dは0.75λを越え，空間波長に近い値をとるため，主ビームの幅は狭まくなるが，不要放射ビーム[6]による垂直面内放射特性の劣化をもたらす。

（4） 励振スタブは，スロットから水平偏波を放射させるために，絶対不可欠のものであり，その位置，太さ，そうλ長は，スロットからの放射電界強度，および，アンテナ側を見た入力インピーダンスを左右するものである。前記岩片氏等の論文[4]には，各段の最適スタブ長の一例が示されているが，この一般的設計理論は確立されていないように思われる。また整合，広帯域化のための同調スタブは[5]，さらにその構造，調整を複雑化せしめる。

2.2 同軸形スロット・アンテナ

このアンテナは，円筒導波管形スロット・アンテナに対して，き電系が同軸（TEMモード）に代つたもので，水平面内放射特性に関して，いわゆるCircular Array 方式（ターンスタイル形をも含めて）をとつていることにおいて変りはない。このアンテナは，Pulon Autenna[7]として知られているように，主としてUHF帯において，テレビ放送用アンテナ，あるいは，小形ビーコン・アンテナとして広く実用化されているものである。スロットに対する励振は，円筒導波管形スロット・アンテナと同様に，スロットの近傍に設けられた励振スタブによる方法と，[8]同軸中心導体から直接分岐励振する。いわゆるBranching — Type Feeder System [9] [10]によるものとに大別される。前者に対しては，円筒導波管形と同様に，スタブの構造に難があり，細い同軸による狭帯域性の改善に関する研究[11]も行なわれているが，小形アンテナに対しては，構造上の複雑さが難点となる。後者に対しては，き電点インピーダンスに関する基

本的設計資料[12]もあり，また励振機構を簡単化するための一点給電法等[13]が考えられているが，ＳＨＦ帯における小形化されたビーコン・アンテナの構造を考えると，同様に複雑さを否定することはできない。

2.3　短形導波管形スロット・アンテナ

上記２種は，円筒形であるのに対し，ここでのべるものは，短形導波管そのものを用いて無指向特性を得ようとするものである。

（１）　短形導波管広面に，導波管軸と平行に設けられたスロット・アレイ・アンテナ，いわゆるLongitudinal Shunt Slot Arrayを，数個円周上に配列してCircular Arrayを形成させるものである。[14][15]これは，特に大電力テレビ放送用として，電力容量の大きい特徴をもつが，きわめて大形化するためここではその対象から除外する。

（２）　ここにのべるものが，今検討の対象とするもので，短形導波管広面にLongitudinal Shunt Slotを設け無指向特性を得ようとするものである。（以下複スロット・アンテナと呼ぶ）この思想は，すでに，Streamlined Waveguide Array[5]として知られ，またGrounded－Based Beacon Antenna[16]としても知られているが，その無指向特性に関する資料に乏しく，その指向性最大，最小比もたかだか３ｄＢ程度にとどまるものである。このアンテナは，周知のShunt Slot Arrayであり，スロットに対して何等の励振機構なく水平偏波を放射することができ，また，垂直面内放射特性に関しては，要求に応じて周知のアレイ理論を簡単に適用実現することが可能である。

3.　短形導波管形複スロット・アンテナ

3.1　Longitudinal Shunt Slotは，周知のように導波管広面にそ

の軸と平行にスロットを有するもので，偏波面は軸と直角面内にある。短形導波管に励振された基本モード（TE_{10}モード）の模様は，図1に示す通りで，スロットは導波管中心線から偏位配置される。この偏位量によりスロットの励振振幅が決まり，またその偏位量からスロットの共振長が決定される。

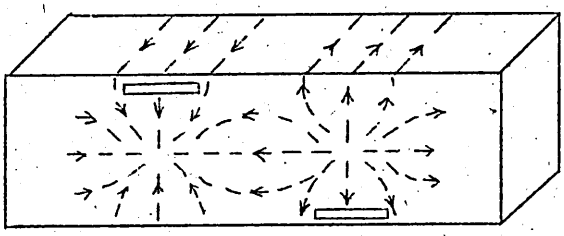


図1　導波管基本モード

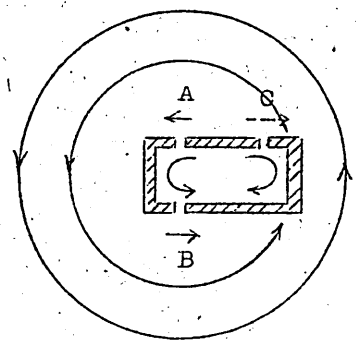


図2　放射機構

まず，図2に示すように導波管広面の両面にA，B，Cなる3個のスロットを考える。同図において，電流方向は矢印の示す通りであるから，スロットA，Bは同相に，スロットB，Cは逆相配列となり，スロットB，Cを考えるとその放射特性は8字形となる。したがつて，ここではスロットの配列をA，B対についてのみ考えることにする。この短形導波管形複スロット・アンテナにより，無指向特性を得るには2つの方法が考えられる。オ1の方法は，図3（a）に示すように，導波管狭面にGround Pl-Plane を付加するもので，これはGround Plane を極端に大きくし，無限大平板にスロットのある場合の理想化放射特性は半円となると言う考え方に立脚したものである。実際，図3（a）のGround Plane の全長 $a=3\lambda$ の場合，指向性最大，最小比約6dBのものが得られている。(17)

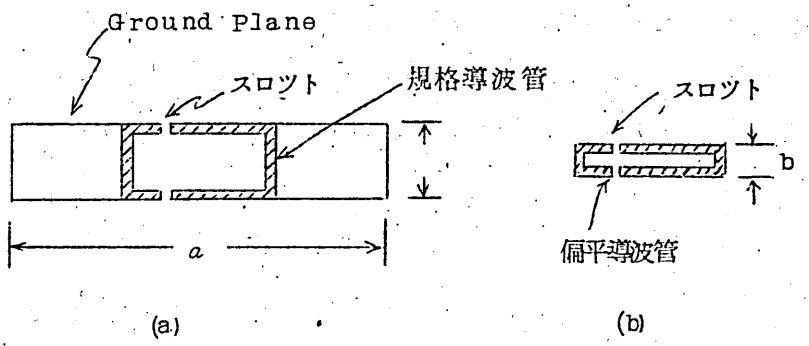


図3　スロット構成

オ2の方法は，図3（d）に示すもので，規格導波管のb寸法を次オに小さくする方法である。これはb→0になつた理想化の状態で無指向特性が得られると云う思想によるものである。この方法によつて，指向性最大・最小比3dBのものが報告されている。[16] また，この両者の方法を同時に採用したものとして岡田氏等の報告[18]があるが，前者の方法によると，Ground Plane の付加により，大形化し，無指向特性の改善も余り期待できないので，実験の過程として参考に供する程度に止め，ここでは後者の方法を採用することにする。

3.2　実験的確認とその検討

測定はWRJ－10規格導波管を加工各種のアンテナを製作行なつた。導波管b寸法によりA，B，Cと区分し，それぞれにおいて，a寸法を変へ，スロットが片面にある場合と，両面にある場合について放射特性の測定を行なつた。試料の区別は，図4，表1に示す通りであり，測定周波数は註記のないもの総て9375MCである。

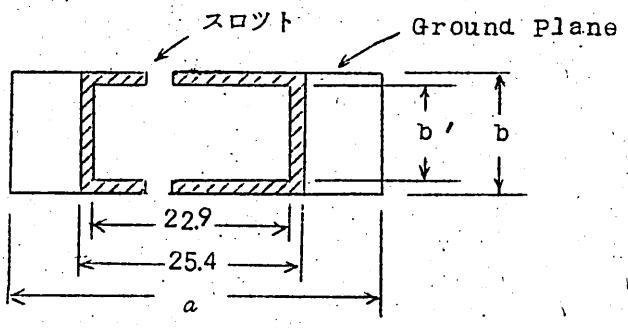


図4　試料寸法

試　料	b'	b	b/λ
A	10.2	12.7	0.3969
B	3.8	6.35	0.1988
C	2.2	3.2	0.1

表1　試料区分

試　料	a/λ	b/λ	3dB 幅
A	0.794	0.3969	90°
A	3.0	〃	140°
B	0.794	0.1988	98°
B	3.0	〃	153°
C	0.794	0.1	105°
C	3.0	〃	158°

表2　片面スロット・アンテナ
放射特性実測結果

まず，片面スロットにつき，試料A，B，Cでそのa寸法が，規格導波管の場合，すなわち $a=0.794\lambda$ と $a=3\lambda$ の場合の3dB幅の実測結果を表2に示す。

この実測結果から判明することは，

（1） 導波管b寸法を小さくしても，放射特性上の極端な変化は認められない。

（2） a寸法，すなわちGround Planeを大きくすれば，その3dB幅は飛躍的に増大する。

実際，規格導波管b寸法でも，（$b=0.397\lambda$）$a=15\lambda$ のGround Planeを付加すれば，3dB幅を165度迄拡げることが可能である。(17)

つぎに，3種の試料について，Ground Planeを次第に大きくした場合，複スロット・アンテナとしての放射特性実測結果を示す。図5～図14の実測結果をまとめたものが表3である。

試料	a／λ	b／λ	指向性最大・最小比(dB)	図番
A	0.794	0.3969	8.2	図 5
A	1.5	〃	7.0	〃 6
A	2.0	〃	6.0	〃 7
A	3.0	〃	5.7	〃 8
B	0.794	0.1988	3.8	〃 9
B	1.5	〃	3.6	〃 10
B	2.0	〃	3.4	〃 11
B	3.0	〃	3.4	〃 12
C	0.794	0.1	1.0	〃 13
C	3.0	〃	1.0	〃 14

表3 複スロット・アンテナ指向性最大・最小比

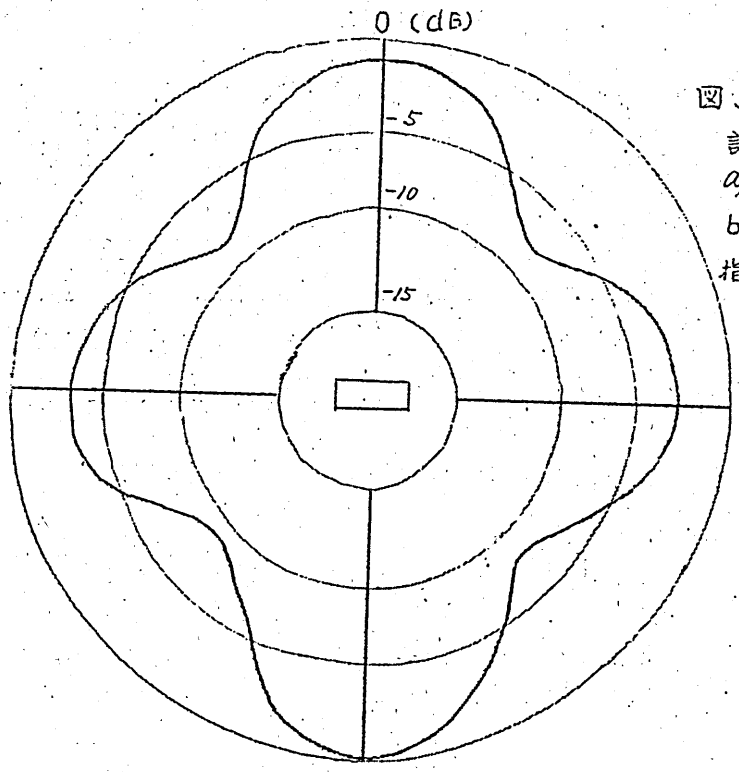


図5

試料：A

a/λ = 0.794

b/λ = 0.3969

指向性最大最小比

：8.2 dB

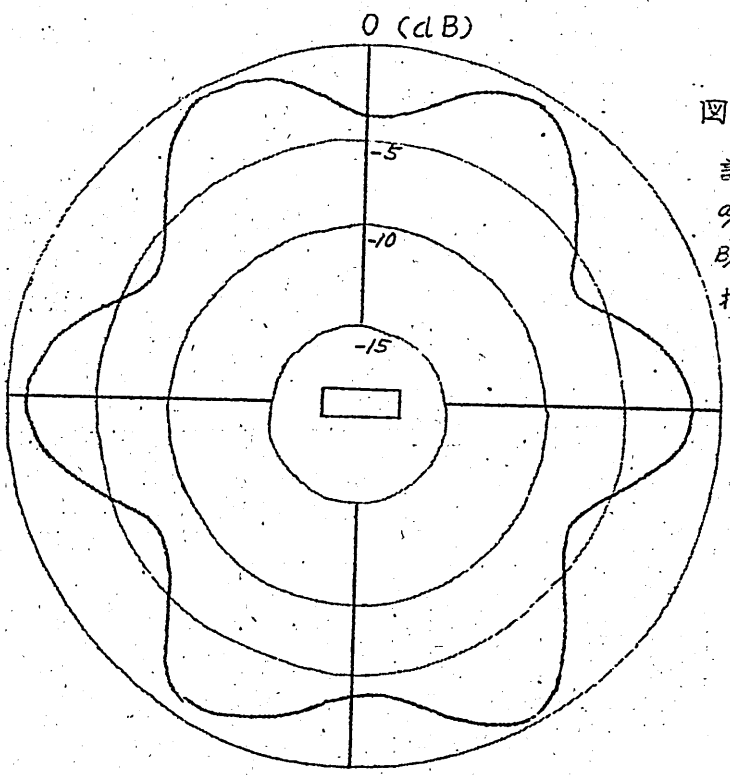


図6

試料：A

a/λ = 1.5

B/λ = 0.3969

指向性最大最小比

：7.0 dB

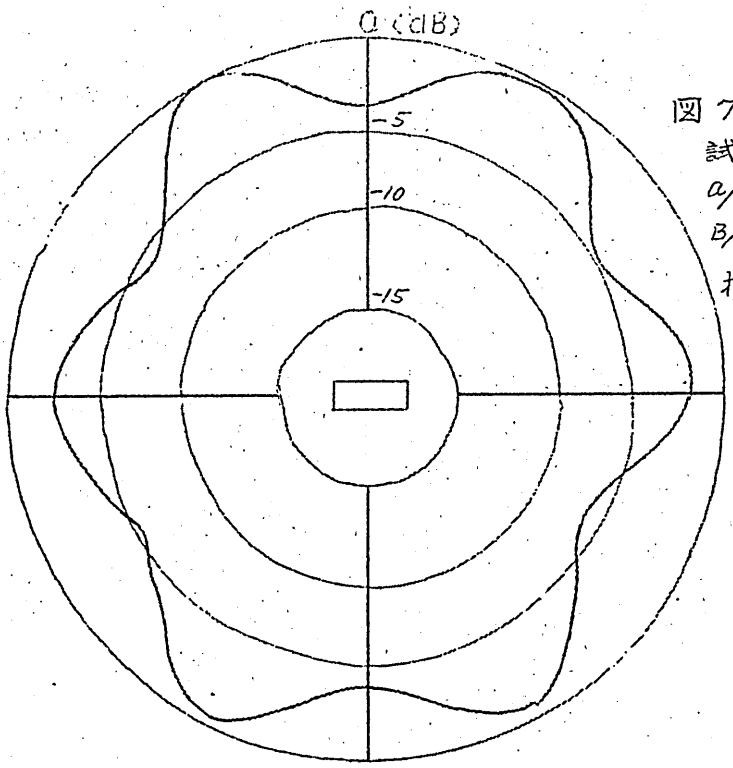


図 7

試料：A

$a/\lambda = 2.0$

$B/\lambda = 0.3969$

指向性最大・最小比

：6.0 dB

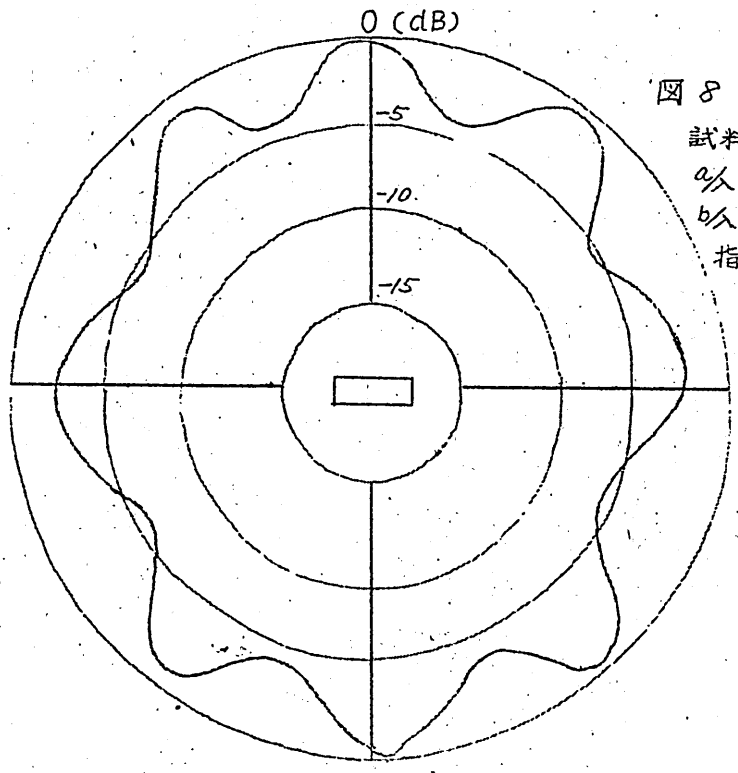


図 8

試料：A

$a/\lambda = 3.0$

$b/\lambda = 0.3969$

指向性最大・最小比

：5.7 dB

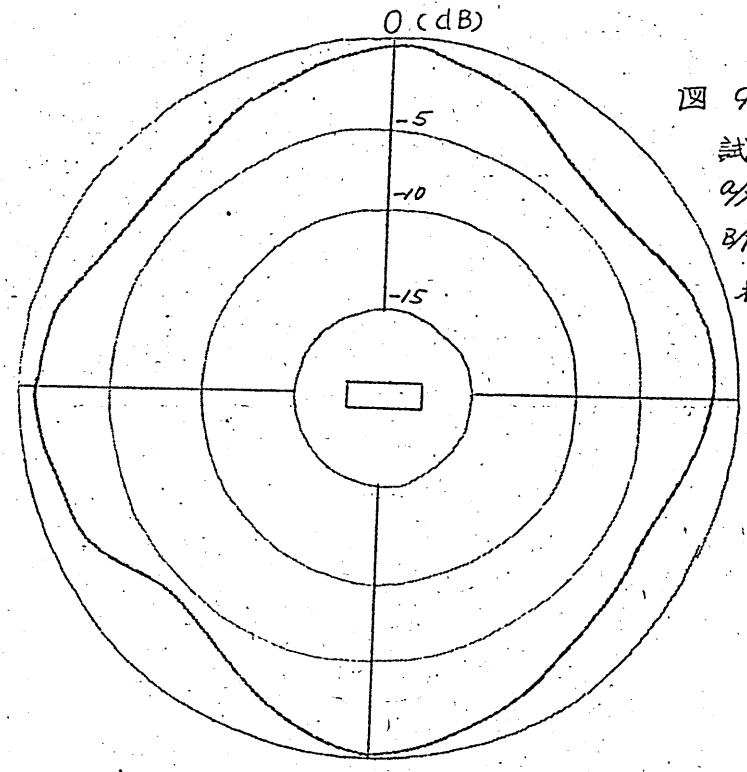


図 9

試料：B

a/λ = 0.794

B/λ = 0.1988

指向性最大・最小比

：3.8 dB

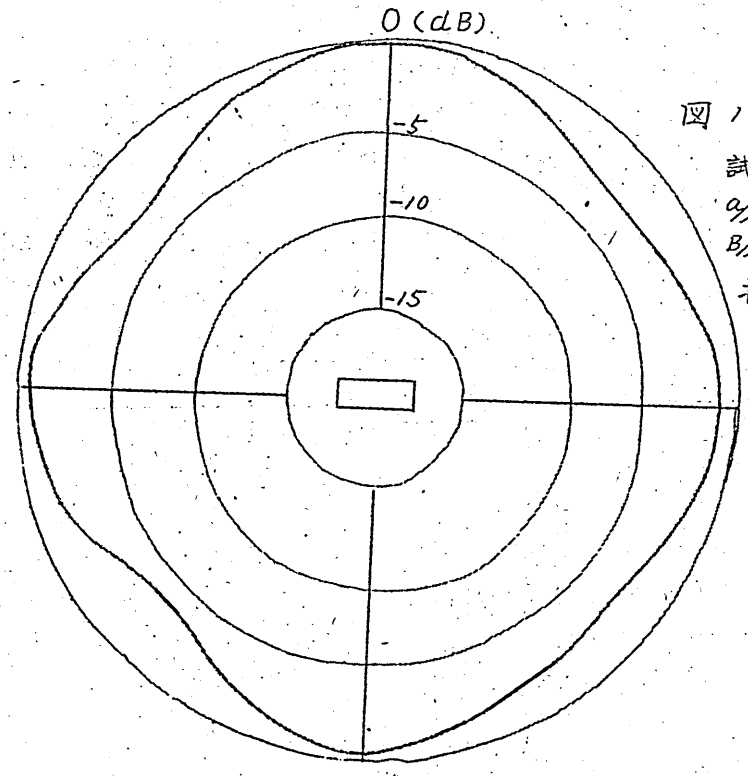


図 10

試料：B

a/λ = 1.5

B/λ = 0.1988

指向性最大・最小比

：3.6 dB

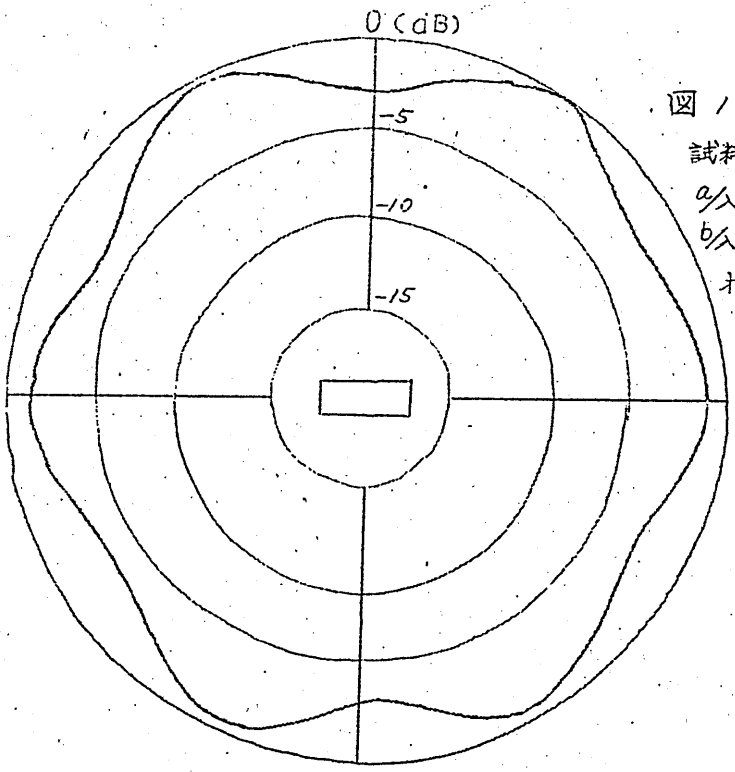


図 11

試料：B

$a/\lambda = 2.0$

$b/\lambda = 0.1988$

指向性最大・最小比

：3.4 dB

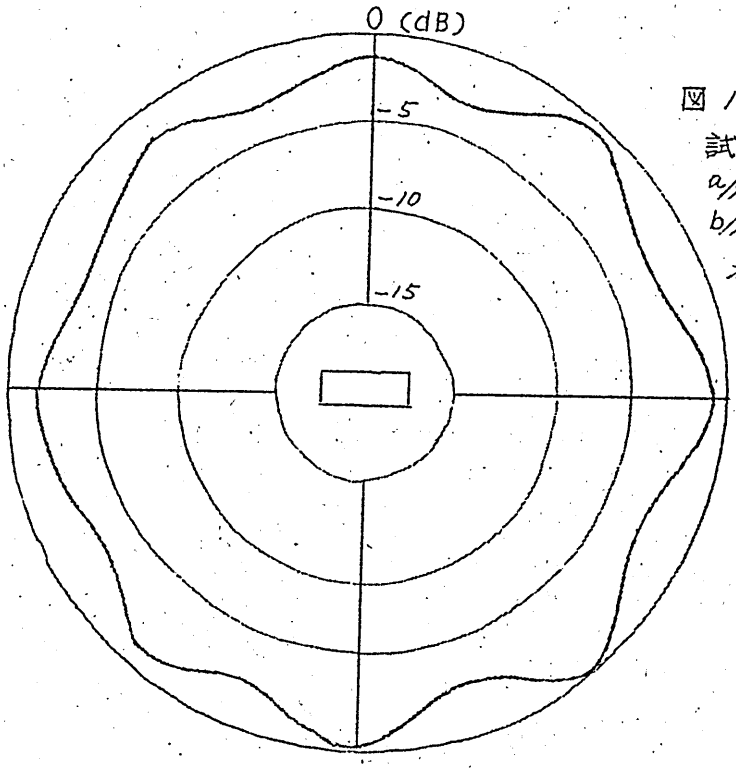


図 12

試料：B

$a/\lambda = 3.0$

$b/\lambda = 0.1988$

指向性最大・最小比

：3.4 dB

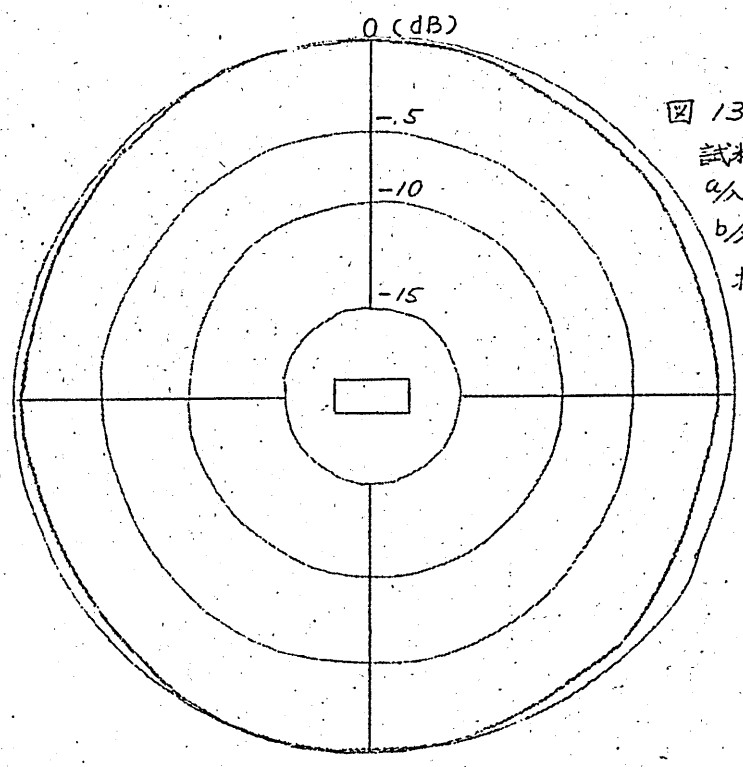


図 13
試料：C
$a/\lambda = 0.794$
$b/\lambda = 0.1$
指向性最大最小比
：1.0 dB

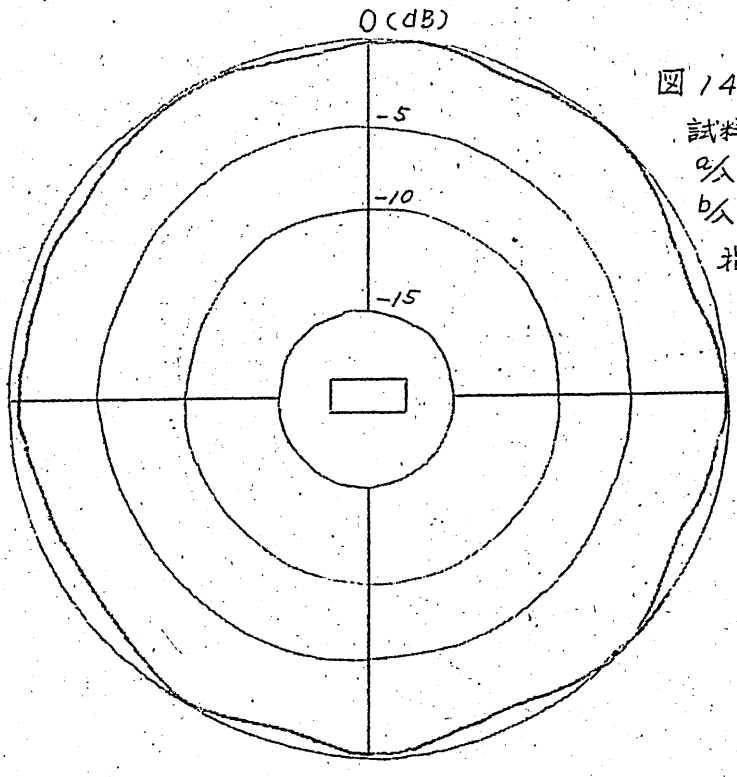


図 14
試料：C
$a/\lambda = 3.0$
$b/\lambda = 0.1$
指向性最大最小比
：1.0 dB

結論からさきにのべると，試料C，すなわち，規格導波管のb寸法を0.1λとした偏平導波管複スロット・アンテナは，優れた放射特性をもつことが確認された。実測結果から明らかなように，試料Aに関しては，Ground Plane による効果は，放射特性上の極大・極小値の数の増加と共に認められるが，試料Cに至つては殆んどその効果を認めることができない。またGround Plane の付加による極大・極小の発生は，$a=3\lambda$ に至つて特に明瞭となるが，これはA.Z.Fradin [19]，A.Dorne & D.Lazarus [20]の方法により説明し得るものである。

3.3　円筒スロット・アンテナとの比較

上記複スロット・アンテナの放射特性に対し，いわゆる円筒スロット・アンテナとの比較検討を行なう。

すでにのべたように，円筒スロット・アンテナは，き電方法に問題があり，き電構造が複雑になると言う難はあるが，その放射特性に関しては数多くの研究がなされ，ほぼ満足な結論が得られている。

G.Sinclair [21][22] によれば，円筒スロットの座標系を図15のようにとり，スロット上の電界は軸上に均一に分布していると仮定すると，その電界は$E\phi$成分のみとなり，$\rho=a$ の面において，

$$E\phi = E_0 e^{j\omega t} \qquad -\delta<\phi<\delta \qquad (1)$$

$$E\phi = 0 \qquad \phi>|\delta|$$

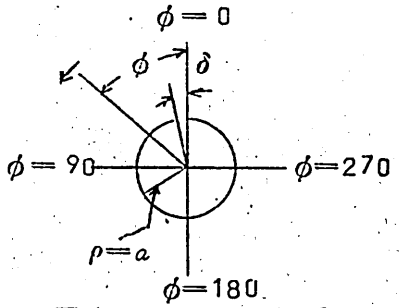


図15　スロット座標系

ただし，2δ はスロットの角度幅である。ここでスロットの幅は，波長，円筒直径に比べ非常に小さいと仮定すると，円筒から遠方における電界は，

$$E\phi \simeq \frac{A}{j\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\phi \right] \qquad (2)$$

ただし

$$a_0 = \frac{1}{2H_0^{(2)\prime}(ka)} \qquad a_n = \frac{j_n}{H_n^{(2)\prime}(ka)}$$

$$k_a = 2\pi a / \lambda$$

A：励振振幅による定数

として与えられる。したがつて，円筒直径が波長に比べて小さい場合，単一スロットにより無指向特性が得られる。円筒直径が太くなつた場合は，円周方向にスロットをアレイすれば特性の改善が行なわれる。いま，№1スロットが$\phi = \phi_1$に№2スロットが$\phi = \phi_2$に配置された場合№1スロットによる電界は，

$$E\phi_1 = \frac{A}{j\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\phi \right] \qquad (3)$$

№2スロットによる電界は，

$$E\phi_2 = \frac{MA}{j\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\phi_2 - \phi) \right] e^{j\Psi} \qquad (4)$$

と与えられる。ここにMは№1，№2スロットの振幅比，Ψはその位相差である。したがつて2個のスロットによる合成電界は式(3)(4)の和として与えられる。したがつて，$M=1$，$\Psi=0$，$\phi_2 = 180°$の場合が，複スロット・アンテナと比較の対象になる。しかしながら，円

筒スロットの場合は，直径D＝0.1λのとき，単一スロットで，指向性最大・最小比約1.7dBが得られるのに対し，短形導波管形においては，b＝0.1λとしても単一スロットでは，表2に示す程度の特性で無指向特性にはなり得ない。複スロット・アンテナは，表裏2個のスロットによる放射電界の合成として始めて無指向特性の得られるもので，円筒スロットの場合とその無指向特性形成の過程を異にする。しかしながら，10GC帯においては，円筒直径を0.1λとすることは不可能で，ここに複スロット・アンテナの価値が認められる。

さらに式（3）（4）により与えられる円筒2スロット・アンテナの指向

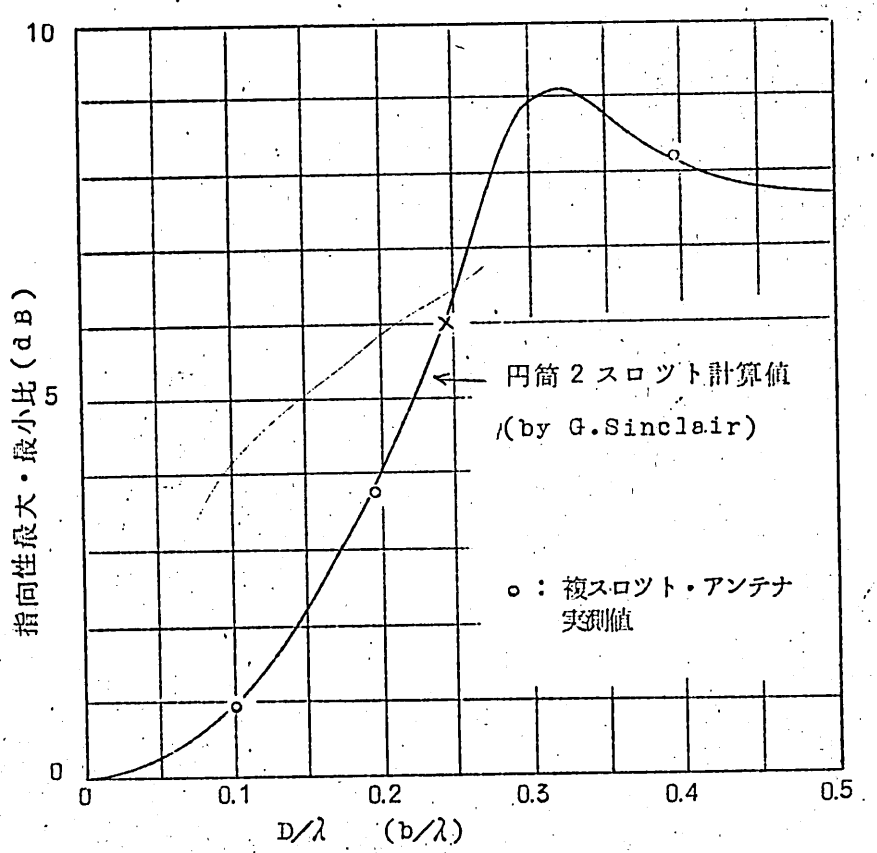


図16　指向性最大・最小比の比較

性最大・最小比と複スロット・アンテナの特性を比較すると図１６に示すようにほとんどその値が一致する。筆者等の行なつた実験は１０ＧＣ帯であるが，岡田氏等の[18]行なつた５５５０ＭＣの報告によれば，$b/\lambda = 13.2/54 \fallingdotseq 0.244$（$a/\lambda = 50/54 \fallingdotseq 0.926$）において指向性最大・最小比約６ｄＢであり，図１６中×印で示すように，この場合も円筒２スロットの特性と一致することが確認される。これらの結果から，$a/\lambda \leqq 1$ 程度の複スロット・アンテナの指向性最大・最小比は，図１６より予測可能と考えられる。

3.4　垂直面内放射特性

垂直面内放射特性に関しては，周知のアレイ理論を適用して簡単に設計することが可能である。ここでは簡単のため，共振形・均一分布アレイを採用した。実測結果を図１７に示す。

(a) スロット　3段

ビーム幅　24.3°(24.4°)

(b)　スロット　4段

ビーム幅　18.6°(18.3°)

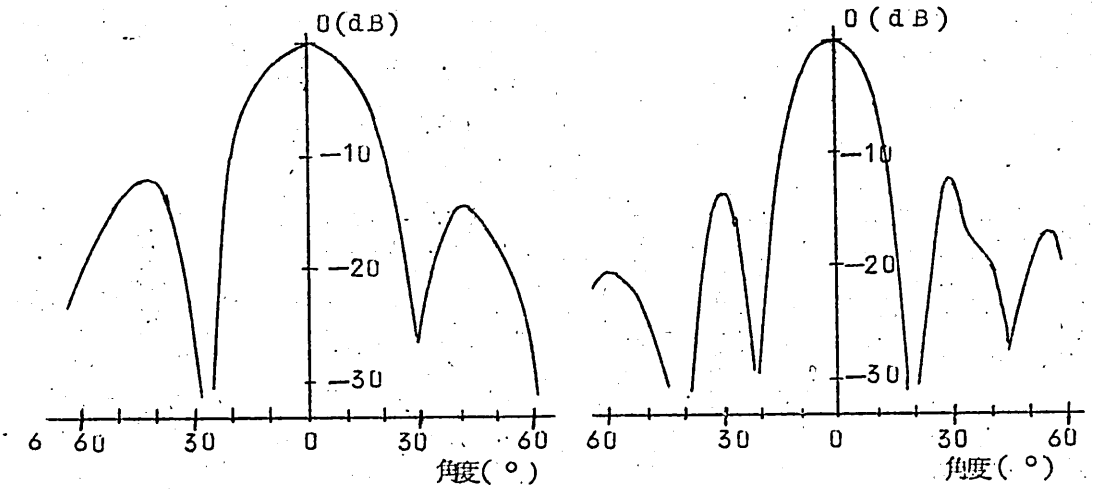
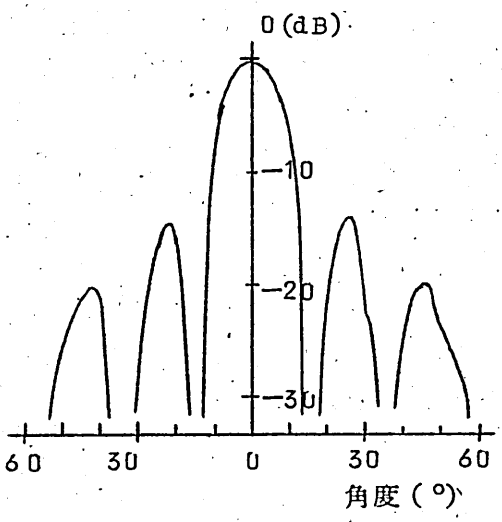


図17　複スロット・アレイ垂直面内放射特性
(　)内は計算値

(C) スロット 3段

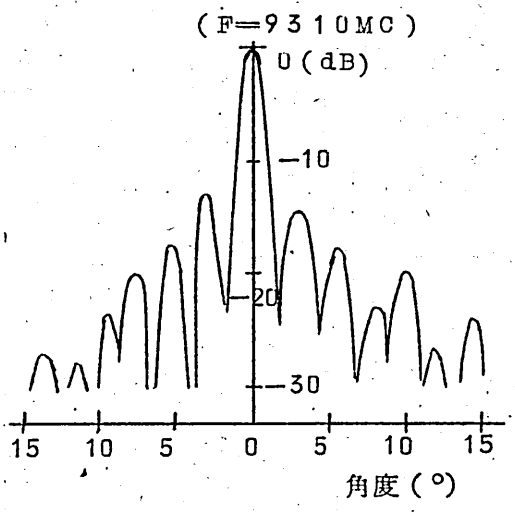
ビーム幅 24.3°(24.4°)



(d) スロット 4段

ビーム幅 18.6°(18.3°)

(F=9310MC)



4. 設計上の問題点

4.1 スロット・コンダクタンスと入力インピーダンス Longitudinal Shunt Slot のコンダクタンス g は，理論的に次のように与えられる。[23]

$$g = g_1 \sin \frac{\pi x}{a} \tag{5}$$

$$g_1 = 2.09 \frac{\lambda g}{\lambda} - \frac{a}{b} \cos^2 \frac{\pi \lambda}{2 \lambda g}$$

ここに，x はスロットの中心線よりの偏位量を示す。したがつて，偏位化された場合のスロット・コンダクタンスは，導波管 b 寸法に逆比例して大となる。すでに標準導波管のスロット・コンダクタンスに関しては，数多くの資料，実験式[24]等がある故，偏平化された導波管のスロット・コンダクタンスの決定は容易に行ない得る。

また，スロット間相互結合に関する M.J.Ehzlich[25] の与えた結論は，

スロットの外部における結合のみを対象として与えられたもので，導波管内内部における結合は無視している。しかしながら，ここで取り扱う複スロット・アンテナ，とくに偏平導波管においては，相対するスロット間距離が，きわめて小さくなるので，その影響を実験的に検討し，無視し得ることを確認した。

さらに，機械的寸法精度については，L.L.Bailin[26]の示すように，ここで取り扱っている均一分布アレイにおいては，その特性上ほとんど問題とするに足らない。むしろ，複スロット・アンテナにおいては，相対するスロットの偏位誤差による励振振幅の相異が，無指向特性の劣化に寄与するものと考えられる。

最後に，試作された複スロット・アンテナの入力インピーダンスの実例結果を図18に示す。これは共振形アレイを用いているため比較的狭帯域であるが，非共振形とすれば，さらに広帯域化が可能である。

4.2 電力容量 (Power Handling Capacity)

試作されたアンテナは，規格WRJ－10導波管寸法を基準とし，内径22.9×2.2である。一般に短形導波管の電力容量の基本式は次のように与えられている。[27][28]

$$p = E_{max}^{2} \times 6.63 \times 10^{-4} \, a \cdot b \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)$$

ただし，p (W)，E_{max} (V/cm) a，b (cm)

ここで，$E_{max} = 15000$ V/cm，$\lambda = 3.2$　$\lambda_g = 4.47$

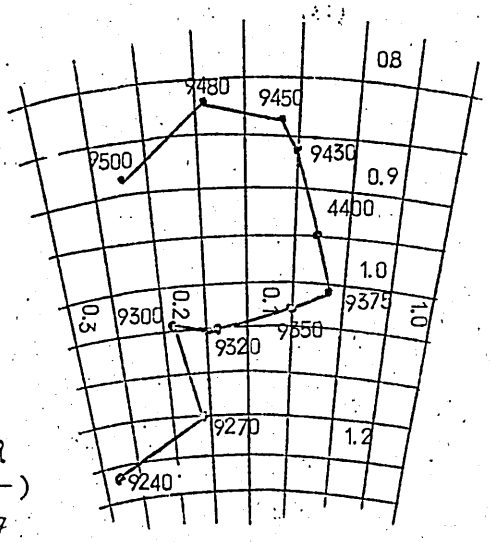


図18 4段複スロット・アンテナ入力インピーダンス

$a=229$　$b=0.22$とすると，

$$p \simeq 53\ (kw)$$

となる。さらにReduction Factorを0.2とすれば，

$p \simeq 10\ (kw)$となり，この複スロット・アンテナは受信アンテナのみならず，小電力送信アンテナとしても十分実用に供し得ることが確認される。

4.3　偏位ビームの発生

一般に，この種無指向性アンテナがビーコン・アンテナとして使用される場合，垂直面内主ビームを，いわゆるNormal Beamとしてではなく，アレイ法線方向から若干偏位させた方が都合のよい場合がある。この場合円筒導波管形スロット・アンテナでは，円筒軸と直角な面内に反射板を付加して偏位ビームを発生させているが，[4][29]この複スロット・アンテナでは；非共振形による方法，あるいは，E.M.Rutz [30]の示したスロット長変化法を用いれば，容易に偏位ビームの発生が可能である。

5　結言

短形導波管形複スロット・アレイ・アンテナが無指向アンテナとして，きわめて優れた特性を示し，また十分実用性のあることを示してきたが，これを要約すると，

（1）円筒スロット・アンテナに比べ，小形・軽量である。

（2）1段当りスロット数が少ない。

（3）き電導波管への変換は，インピーダンス変換器のみで簡単。

（4）スロット励振機構を特に必要としない。

（5）垂直面内放射特性に対し任意性がある。

（6）電力容量の小となる欠点はあるが，小電力用として送信アンテナに利用可能である。

最後に，種々ご検討を頂いた大阪大学産業科学研究所牧本教授，当社西岳部長に深謝の意を表する。

参考文献

(1) 松田，竹島，磯貝：" 10GC帯無指向性スロット・アンテナ" 信学誌．47，5，P．767（昭39－05）

(2) H.J.Riblet: " Microwave Omnidirectional Antenna " IRE 35 P474 (May 1947)

(3) A.Roberts: " Radar Beacons " Mc-Graw 1949.

(4) 岩片，副島，木村，荷口，福田：" 7GC帯無指向性スロット・アンテナ" テレビジョン学会誌 17 P．514（Sept. 1962）

(5) S.Silver: " Microwave Antenna Theory & Design " Mc-Graw 1949

(6) L.A.kurtz & J.S.Yee: " Second - order Beams of Two - Dimmentional Solt Arrays " IRE Trans. AP - 5 P.356 (Oct 1957)

(7) "UHF TV Pylon Antenna " RCA Technical Information B - 5650 (July 1954)

(8) O.O.Fiet: " Ultra - High FreQuency Antenna & System for Television Transmission " RCA Review P.212 (June 1950)

(9) J.Epstein; D.W. Peterson & O.M. Woodward: " Some Type of Omnidirectional High - Gain Antenna for Use at Ultra - High FreQuencies " RCA Review P.137 (June 1952)

(10) E.C. Jordan & W.E. Miller: " Slotted Cylinder

Antenna " electronics P.90 (Feb.1947)

(11) 松下，高山.："進行波給電ダイポールつきスロット・アンテナ"
昭３８年 通信学会全国大会 №１５９

(12) 藤沢： "円筒スロット・アンテナの給電点インピーダンス"
信学誌 ３８，２，Ｐ１０３ (昭３０－０２)

(13) 内田，平野： "ＵＨＦ円筒スロット・アンテナ"
信学誌 ３９，３，Ｐ２０６ (昭３１－０３)

(14) J.R.Wait: " Radiation Characteristics of Axial Slots on a Conducting Cylinder "
Wireless Eng. P.316 (Dec 1955)

(15) O.M.Woodward & J.Gibson: " The Omniguide Antenna"
RCA Review P.13 (March 1956)

(16) C.E.Thonias: " Automatically Deiced X — Band Beacon Antenna " electronics P.152 (Jan.1954)

(17) R.J.Stegen: " UHF TV Radiators Using Slot Arrays" electronics P.152 (July 1953)

(18) 岡田，北里，小野沢： "無指向性スロット・アンテナ"
昭３９年 電四連大 №１０９１

(19) A.Z.Fradin: " Microwave Antennas "
Pergamon Press 1961

(20) A.Dorne & D.Lazarus: " Very High FreQuency TechniQues" Mc — Graw 1947

(21) G.Sinclair; E.C.Jordan & E.W.Vaughan: " Measure — ments of Aircraft — Antenna pattens using models"

IRE 35 P.1451 (Dec.1947)

(22) G.Sinclair: " The pattern of Slotted — Cylinder Antennas" IRE 36 P.1487 (Dec.1948)

(23) A.F.Stevenson: " Theory of Slots in Rectangular Waveguides"
J.Appl. Phys. 19 P.24 (Jan. 1948)

(24) A.F.kay & A.J.Simmons: " Mutual Coupling of Shunt Slots "
IRE Trans AP — 8 P.389 (July 1960)

(25) M.J.Ehrlich & J. Short: " Mutual Coupling Considerations in Linear — Slot Array Design "
IRF 42 P.956 (June 1954)

(26) L.L.Bailin & M.J.Ehrlich: " Factors Attecting the Performance of Linear Arrays "
IRE 41 P235 (Feb. 1953)

(27) L.E.Sherbin: " Waveguide Data "
electronics P.112 (Jan.1947)

(28) L.N.Ridenour: " Microwave Transmission Circuits "
Mc — Graw 1948

(29) AN/APN — 69 Radar Beacon Construction Manual
(Jan. 1957)

(30) E.M.Rutz: "Resonant Antenna Array with Tilted Beam"
IRE Trams. AP — 8 P.435 (July 1960)

輻射科学研究会資料

昭和39年7月25日

50Gc ラダートロン封止切り管の試作

建石昌彦
野中忠彦
武田文雄

三菱電機株式会社

§1. 緒　言

50 GC帯0－モードラダートロンの封止切管LT－5010を試作し、約5W，CWの発振出力を得たので報告する．50 GC帯0－モードラダートロンについては組立管によって7Wの発振に成功したことが既に藤沢教授によって発表されているが[1]我々のものはこれを封止切管にしたもので周波数可変ピストンをつけてあり機械的同調範囲は約2GCであった．ラダーの加工は放電加工の他に写真蝕刻法も試みたが後者の方が仕上りが良くQも高いようである．

発振を容易にするために間隙数の多いものも試作したが異常発振を認めた．これについてはラダーを遅波回路的に考察した。なお今回は50 GC帯について報告するが昨年11月には35 GC帯に於ても封止切管で出力10W，機械的同調範囲2000MCの0－モードラダートロンLT－3510を完成している．

§2. 原　理[2]

ラダートロンは、方形空胴内に設けられた細隙群を有する対向板の各細隙上に生じる振動電界とその対向板間を通過する平板電子ビームを適当に結合させ発振させる1空胴多間隙クライストロンである．

現在まで構造的に対向板上の細隙群が等しい長さの細隙よりなるものと、相隣る細隙が長短二種の細隙よりなるものと二種類が主として研究されている．

等しい長さの細隙群が対向板上に構成されている場合には細隙上の電界は

$$E_z\Big|_{y=b_1} \begin{cases} E_0 \cos\frac{\pi x}{a} \cos\left(\frac{2p-1}{2N}\right)n'\pi & \frac{2p-1}{2N}h-d \leqq x \leqq \frac{2p-1}{2N}h+d \\ 0 & \frac{2p-1}{2N}h+d < x < \frac{2p+1}{2N}h-d \end{cases}$$

P：細隙の番号　　(1)

となる，n'はモードを区別する値であり、$n'=0, 1, 2 \cdots\cdots N-1$ なる値を取る．

(1)式から明らかな様に、細隙上に生じる電界と電子ビームを最も有効に結合さすのは$n'=0$なる時である．この時は細隙上の電界が同位相、同振巾となる．これがいわゆる0－モードラダートロンである．

0－モードラダートロンの対向板間を通過する電子ビームと細隙に生じる電界との結合は小信号，小集群でかつ電子がEz成分のみと結合し、空間電荷を無視すると仮定すると第1細隙により第2細隙に誘導される電流は、

$$I_{c2} = \frac{1}{2}\beta^2 G_b V_0 j\theta e^{-j\theta}$$

β：結合係数
G_b：ビームコンダクタンス
V_0：細隙の振動電圧振巾
θ：細隙間の電子走行角

同様に第3細隙に誘導される電流は、第1．第2細隙で受けた速度変調によるもので、

$$I_{C3} = \frac{1}{2}\beta^2 G_b V_0 \left(2j\theta \ell^{-j2\theta} + j\theta \ell^{-j\theta} \right)$$

となり、全く同様に I_{CP} を求める事が出来る。一つの細隙についての電子アドミッタンスはN ケの細隙の場合

$$Y(\ell) = \frac{1}{V_0 N} \sum_{P=1}^{N} I_{CP} = \frac{1}{2}\beta^2 G_b f(\theta, N)$$

$$f(\theta, N) = \frac{N-1}{N} j\theta \ell^{-j\theta} + \frac{N-2}{N} j2\theta \ell^{-j2\theta} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{1}{N} j(N-1)\theta \ell^{-j(N-1)\theta} \qquad \text{——— (2)}$$

となる。この電子アドミッタンスの呈する負のコンダクタンス分の絶対値が空胴の損失に等価なコンダクタンスより大きければ発振するわけである。

又図－1に示した空胴の共振周波数は、(1)式によって表わされる細隙上の電界により空胴が励振されるとして、マックスウエルの方程式を解くことにより求まり、$(b_3 - b_2)$ が波長に比して充分小さくかつ $\frac{2N\gamma}{h}\pi \gg \frac{\pi}{a}$, $\frac{\pi}{a}$ (γ は0又は正の整数) と仮定すると、次の近似式によって計算できる。

$$\frac{N}{h} \frac{\cot\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\, b_1}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \frac{b_2 - b_1}{2d} + \frac{b_3 - b_2}{h/N} + \frac{2N}{h} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{2\gamma N}{h}} \left(\frac{\sin \frac{2N\gamma\pi}{h} d}{\frac{2N\gamma\pi}{h} d} \right)^2$$

——— (3)

この(3)式と(2)式により0－モードラグートロンを設計することができる。

§3. 構　造

a). 空　胴

高さ h は電子ビームの透過率、モード分離、発振開始電流に影響してくる。これらの点を考慮して、細隙数は 12～15 に選ばれている。対向板間の距離は主として電子銃の性能によって決められる値で 0.3～0.28 の値となっている。

細隙の巾 ($2d$) と導体の巾 ($\frac{h}{N} - 2d$) の値は有効ビーム結合係数、空胴の並列インピーダンス 等を考慮して

$$2d \leq \frac{h}{2N}$$

に作ってある。対向板の板厚 ($b_2 - b_1$) は厚いと電気的には容量Cが大きくなり、又加工も困難になる。特にホトエッチングで製作する場合には、$2d$ に比べて ($b_2 - b_1$) が大きい時はエッチングが困難になる。逆に薄くなると直流熱損失に耐え難くなる。図－2の構造の場合 Heat sink を 100°C とすると約 4 watt で焼損する。(3)

b) ピストン

空胴の一方の壁には、円形導波管がつながれそれに空胴横巾と同じ径をもつ円形の可動短絡器が設けられこれを動かすことによって機械同調範囲約 2GC を得ることが出来る。この可動短絡器は接触部の損失を小さくするため 1/4 波長多段型変成器の構造となっており、又工作をしやすくするために円形とした。

更に空胴及び短絡器を改良することにより2.5Gc以上可変にすることができるであろう。又空胴の他方の壁には結合孔が設けられそれより出力は回路能率＝30～40％で外部に取り出される。

c) 出力気密窓

[redacted]セラミック板を導波管内に挿入しロー付けしている気窓の部分で導波管の不連続部ができずチョークが不用で構造が非常に簡単になり、又セラミック板がガラス窓などに比べて精度良くできる為、電気的特性が均一なものが得られる。この窓の特性を図－3に示してある。帯域巾はやゝ狭いがラダートロンの機械的同調範囲は2.5Gc程度であるのでVSWR 1.5以下で使用することができる。

d) その他

ビーム通過率を知るためにコレクターを空胴その他の部分から分離し、コレクター部分は水冷になっている。従って他の部分は全く冷却されていない。この様な管では陽極損失が60Wもあると、10時間運転の後には手のつけられない程熱くなる。この為実験段階が終つたものはコレクターを分離せず管全体を水冷する様にした。パッケージに使う永久磁石は飽和させて使用しておりコレクター前面で約4500 gauss 程度となっている。この管全体の重さは約12kgである。図－4に管全体を水冷する構造の50Gc帯ラダートロン（右側）を示す。（左側はコレクターを分離した35Gc帯 ラダートロン）

§4. 実験結果

a) 発振特性及び考察

発振特性を図－5並びに図－6に示す。

巌沢教授等により発表[1]されている50Gc帯0－モードラダートロンで出力7Wの組立管は周波数可変機構（ピストン）を有していないが、我々の封止切管はピストンを有している。0－モードラダートロンの場合はπ－モードラダートロンに比して、空胴内の蓄積エネルギーが大きい為、特にピストンの良、不良が出力特性に大きな影響を及ぼす様である。図－5に機械的同調範囲を示す。最高出力は5.5Wで約2Gcの同調範囲を有している。この特性曲線は周波数の低い所で高出力を示し周波数の高い所では急激に出力が低下している。これはピストンが周波数50.8Gcあたりから空胴内に挿入される為ピストンに設けられたチョークが有効に働かなくなるからである。

図－6に各ピストンの位置に対する発振特性を示す。図中曲線に付せられた数字は空胴壁からピストン先端までの距離を示す。（負符号はピストン先端が空胴壁より内側に挿入された事を示す）動作電圧は1950 Vから2250 V程度で、陽極電流100mA で最高出力5.5Wが得られた。この時の能率は約2％でビーム通過率は77％で最高電子流密度は12A/cm²である。

b) 不要モード発振について

50Gc帯0－モードラダートロンについて発振実験中に、36Gc附近において次の様な発振をした。

陽極電圧	周波数	走行角
1260 V	36,510 Gc	1.736 π
1600 V	35,925 Gc	1.510 π

この不要モードは上記の二点の電圧に対してのみ発振したのではなく、二点の電圧附近で100V程度の電圧範囲を有していた。Power は微弱であったため測定していない。データー不足であるが一応検討してみた。

これに使用した空胴を図－7に示す。(3)式より明らかな様に0－モードラダートロンの共振存在範囲は

$$k^2 > \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad 37.5\,\mathrm{Gc} < f \qquad (a = 4)$$

であるが、この不要モードはそれよりも周波数が低い所で発振し、しかも遅波回路的に考えると、基本波後進波回路の特性を示している。この為この不要モードは前述の理論では解明できない。そこで Fletcher[4] の遅波回路の解析方法を適用してみた。この方法を適用する場合、ラダー折り曲げ部のテーパーになっている微小区間の取扱いが複雑になってくる。そこで図－7を図－8の如き構造と考え、δが波長に比し充分小さいと考えて計算した。

① ② 領域の特性アドミッタンスをそれぞれ、Y_1、Y_2 とするとこれらの値は Walling[5] により求められており、この場合

$$Y_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\frac{8t}{2d}\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 4(1-\alpha)\sin\frac{\phi}{2}\,S_1(W_1\partial)\right]$$

$$Y_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\frac{8t}{2d}\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + 4(1-\alpha)\sin\frac{\phi}{2}\left\{S_1(W_2\partial) + S_2(W_3\partial)\right\}\right] \qquad \text{—— 4}$$

こゝで

$$\begin{bmatrix} S_1(W\partial) \\ S_2(W\alpha) \end{bmatrix} = \sum_{m=\infty}^{\infty} (-1)^m \begin{bmatrix} \coth \\ \tanh \end{bmatrix} \left\{\frac{W}{H}(\phi + 2m\pi)\right\}$$

$$\times \frac{\sin\{(1-\alpha)(\phi/2 + m\pi)\}\sin\{\alpha(\phi/2 + m\pi)\}}{(1-\alpha)(\phi/2 + m\pi)\ \alpha(\phi/2 + m\pi)}$$

ϕ：導体間の位相差

$\alpha = \frac{2d}{H}$

$m = 0 \ \pm 1 \ \pm 2 \cdots\cdots$

となる。又分散方程式は、センターに於て E_z が open であり空胴壁においては Short であるから

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \tan kl_1 \tan kl_2 \qquad \text{—— 5}$$

となる。この計算結果を図－9に示す。これによると実験データーの発振周波数も、特性が基本波後進波回路となっていることもうなづける。又周波数の誤差は解析方法自体の誤差とδの部分の誤差によるものと思われる。又位相差については

1600Vの場合　$|\phi| = \frac{7.35}{15}\pi \simeq \frac{7}{15}\pi$

1260Vの場合　$|\phi| = \frac{4.06}{15}\pi \simeq \frac{4}{15}\pi$

となる。1600 Vの場合 $\frac{\pi}{15}$ の整数倍となっていないが、これは一点の電圧のみについて測定している為と思われる。

§5 結 言

X50GC帯0-モードラダートロンの封止切管の試作結果について報告した。連続波発振出力5W、電子同調範囲100MC、機械的同調範囲2000MC、能率2%で出力においては藤沢教授等の組立管の結果よりやゝ劣っているが、出力窓、ピストン等の改良によって更に特性を改善し得る見通しをもっている。折曲げラダーを用いたラダートロンにおいてはTE10主発振モードの他にTEMモードによる異常発振も存在し得ることがわかった。この異常発振は微弱で、その有効利用は考えられないが、遅波回路としての理論を適用してこの現象を解明した。

ラダートロンの開発について懇切な御指導を賜っている大阪大学基礎工学部藤沢教授に深謝します。

参考文献

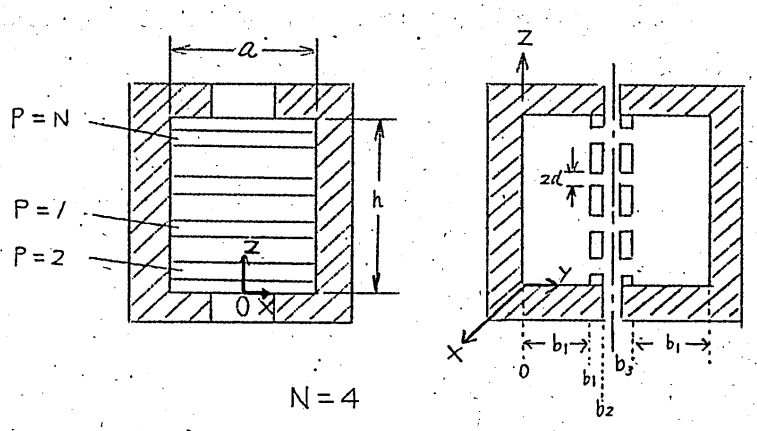
(1) 藤沢、金児、野中：“50GC帯大出力平板ビーム多間隙クライストロン(Laddertron)の組立管の試作”
マイクロ波真空管研究専門委員会資料 1961. 5. 15

(2) 藤沢：“ラダートロンの理論と最近の試作結果”
電研資料 39. 3. 19

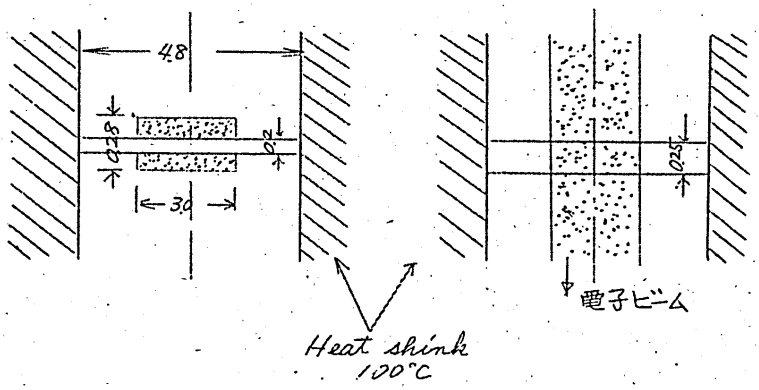
(3) A. Pearson and J. Froom：“Temperature Distribution along a uniform Bar Which Intercepts an Electron Beam”
J of E & cont Vol XII P215~P222 1963

(4) Fletcher：“A Broad-Band Interdigital Circuit for use in traveling wave type Amplifiers”
Pro IRE P951 1952

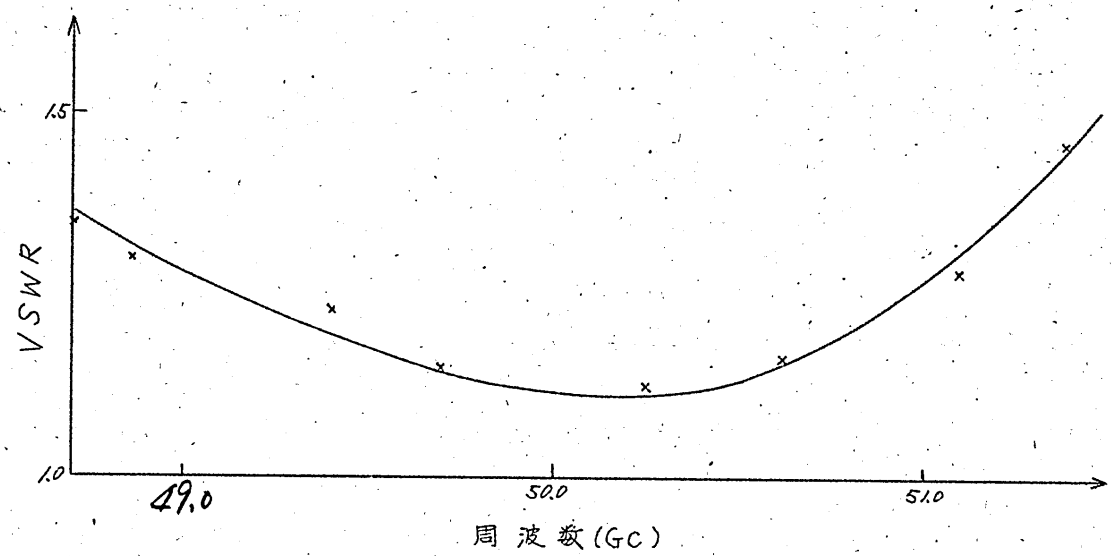
(5) Walling：“Interdigital and Other Slow wave Structures”
J of E & cont Vol 3 P239~P258 1957



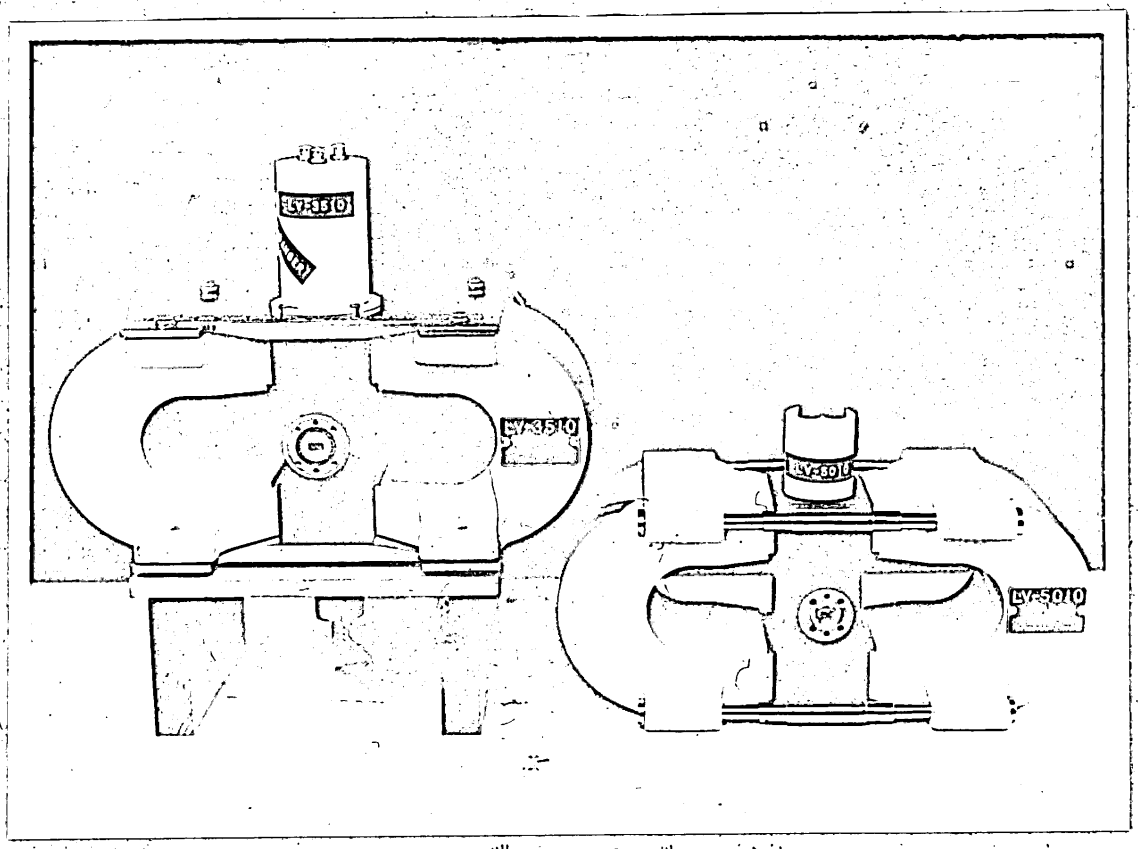
図－1　　0－モードラダートロン空胴



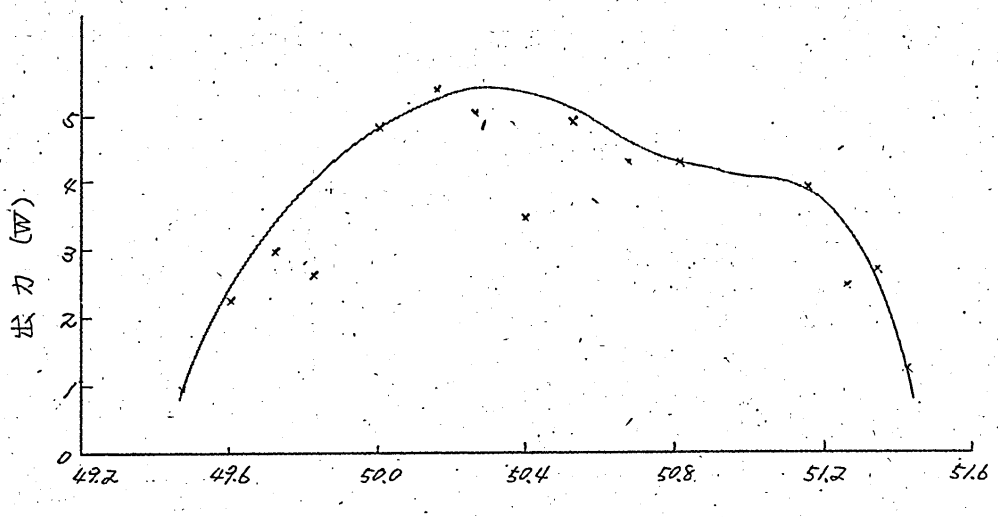
図－2



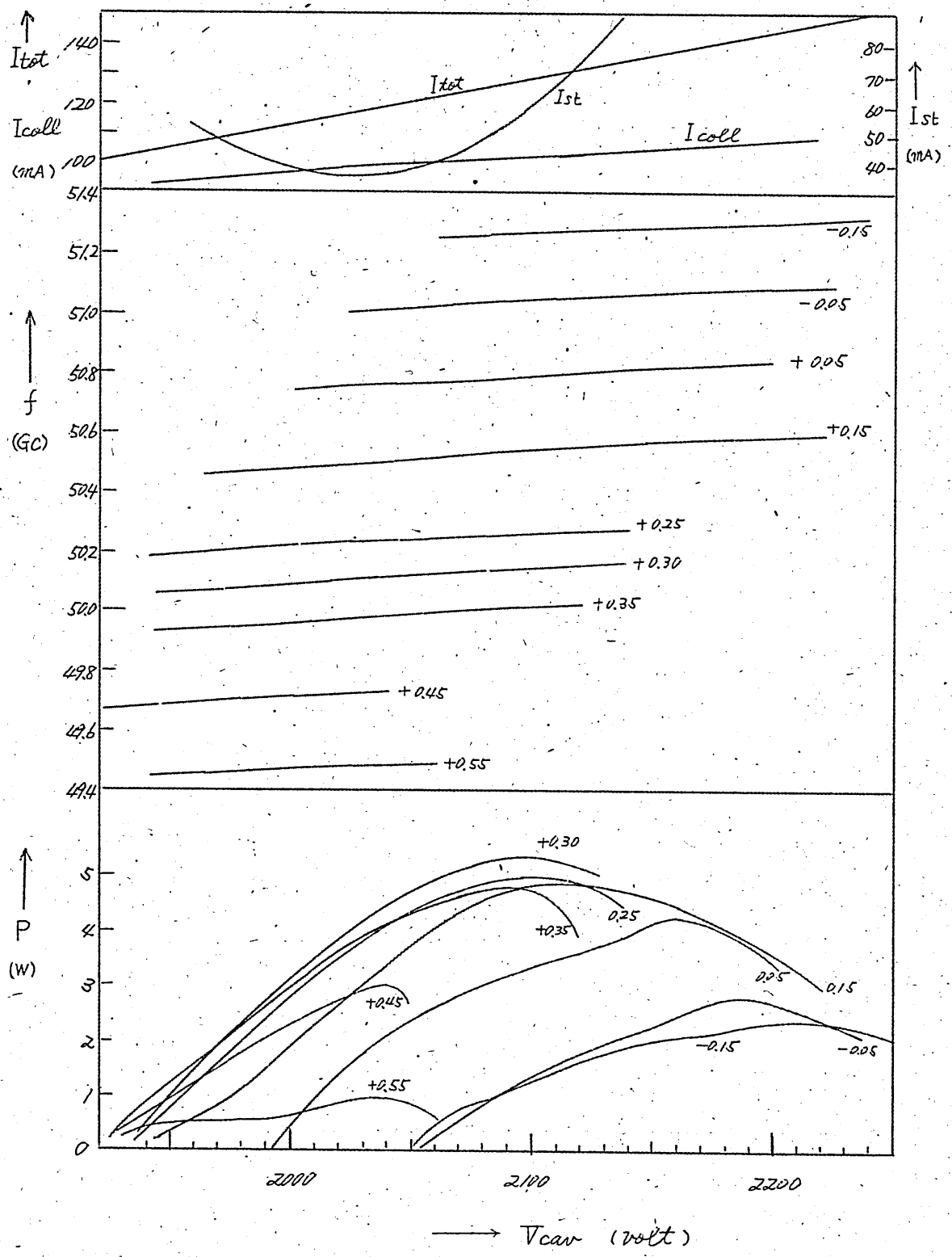
図－3　　出力気密窓周波数特性



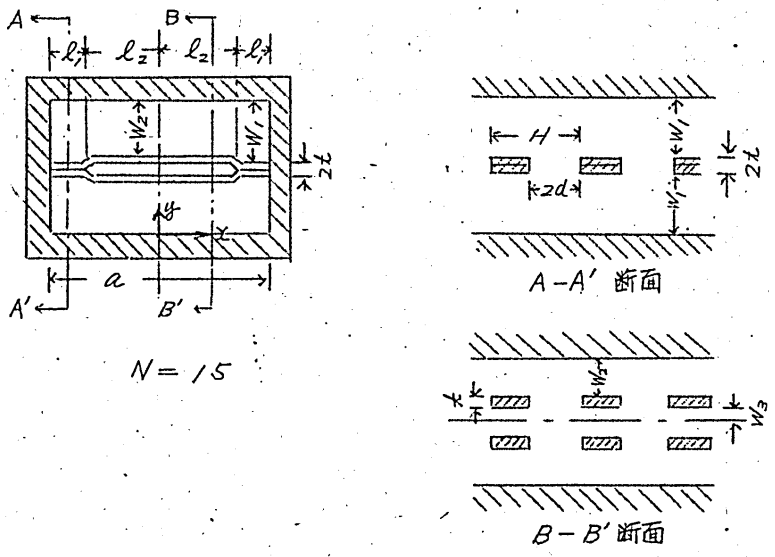
図－4　35Gc帯，50Gc帯 ラダートロン



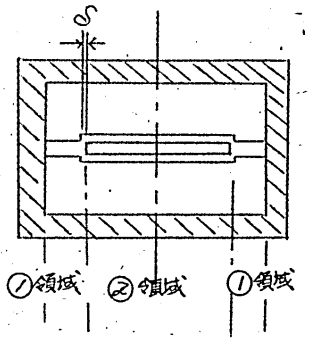
図－5　機械的同調範囲



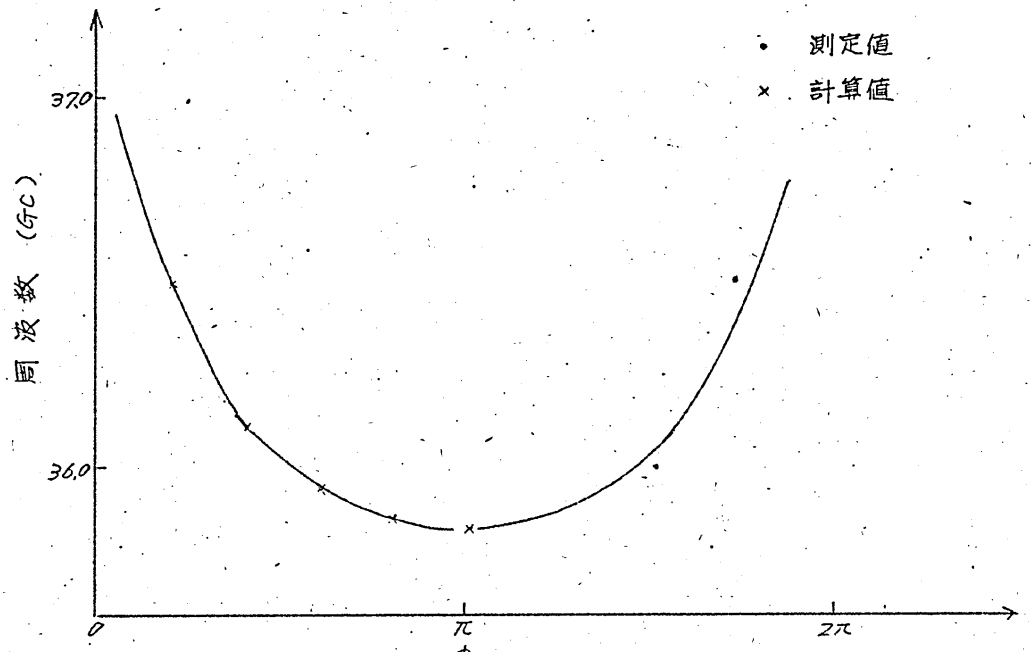
図－6　LV5010の発振特性



図－7　　0－モード折曲げラダーの空胴



図－8



図－9　Φ分散特性

輻射科学研究会資料

列車無線用アンテナ

喜連川 隆・武市吉博・水沢正雄

（三菱電機株式会社中央研究所）

1964年7月25日

（於 三菱電機株式会社）

列車無線用アンテナ

喜連川 隆・武市吉博・水沢丕雄
（三菱電機株式会社中央研究所）

1. まえがき

鉄道における無線通信の利用は早くから行なわれ，わが国においても入換機関車用，除雪車用などに実施されるとともに，空間波を用いない誘導無線も行なわれているが，昭和35年に国鉄東海道本線で「こだま」，「つばめ」などのいわゆるビジネス特急を対象として400Mc帯列車無線が実用化され，また本年10月開通予定の国鉄東海道新幹線には運転指令用および業務ならびに公衆通信用の400Mc帯多重列車無線と構内連絡用の150Mc帯列車無線とが使用される．

列車と地上とを結ぶ通信方式は，現在実用あるいは研究されているものを大別すると表1.1のようになるが，これらのうちここではわが国における最近の列車無線のアンテナの紹介を兼ねて，VHF・UHF帯の空間波を用いた列車無線のアンテナについて述べる．

表1.1　列車と地上とを結ぶ通信方式

方　式		周波数帯
空間波方式		VHF・UHF・SHF
導波方式	誘導無線方式	LF
	表面波方式	VHF・UHF
	導波管方式	SHF

列車無線用アンテナでとくに問題になるのは移動局である列車のアンテナであって，無線系としての電気的必要条件だけでなく，列車用としての特殊な必要条件，すなわち(1)鉄道の車両限界内におさまること，さらにできるだけ小形軽量であること，(2)流線形車体に取付ける場合にはその美観を損わないこと，(3)列車走行時の風圧，振動などに耐えること，(4)架線切断事故時に架線によって加えられる機械的衝撃に耐えること，(5)耐候性，雪害対策が十分であること，(6)架線電圧に対する考慮が十分であること　などを満たさなければならない．

以下においては上記の諸条件を満たし用途に応じてそれぞれ長所をもつ列車用各種アンテナを無指向性アンテナ，指向性アンテナ，および特殊な多機能アンテナに分けて記述するとともに，列車用アンテナに対向して用いられる地上固定局用アンテナについても略述する．なお参考のために新旧両東海道線列車無線のアンテナを表1.2にまとめてある．

表1.2　国鉄新旧両東海道線列車無線用アンテナ

鉄道	用途	周波数帯	移動局（列車）	固定局（基地）
東海道本線	業務通信 公衆通信	400Mc	環状スロットアンテナ （無指向性，埋込み形）	八木アンテナ （指向性）
東海道新幹線	運転指令 業務通信 公衆通信	400Mc	頂部装荷ユニポールアレーアンテナ （指向性，2方向切換，埋込み形）	ダイポール2素子コーナリフレクタアンテナ 一部パラボラアンテナ使用 （指向性）
	構内連絡	150Mc	旅客電車には 静電誘導兼無線周波アンテナ （無指向性，60%・150Mc共用） 入換機関車には 頂部装荷ユニポールアンテナ （無指向性）	局により種々の形式

2. 列車用無指向性アンテナ

列車走行方向に対する地上固定局の方向は種々に変るから，列車用には垂直偏波水平面内無指向性アンテナが用いられる場合が多い．この場合の適当なアンテナ形式は，使用電波の波長と鉄道の車両限界との関係に大きく左右される．

VHF帯でも米国の例に見るように30Mc帯のような低い周波数領域では波長が10m程度もあるから，車両限界のために逆L形[1]あるいはT形アンテナが適している．VHF帯でも周波数が高くなって150Mc帯あるいはその前後の波長が短かい領域になると，太い円筒形放射導体の使用[2]により，あるいは頂部円板装荷[3]により高さを縮小したユニポールアンテナが適してくる．さらにUHF帯になると，たとえば400Mc帯では波長は約70cm程度であるから，車両の屋根に埋込んで設置しうる環状スロットアンテナ[4]が，どのような大形車両にもその最上部に車両限界内で取付けうること，列車の美観を損わないこと，耐風圧・耐振動その他の機械的強度の面ですぐれていることなどの点で，列車用無指向性アンテナとして最適の形式になる．

図2.1のアンテナは150Mc帯列車無線用として研究し良い試作試験結果を得た垂直偏波水平面内無指向性アンテナであって，国鉄東海道新幹線の入換機関車の構内連絡に使用される．このアンテナは頂部円板装荷により放射導体の

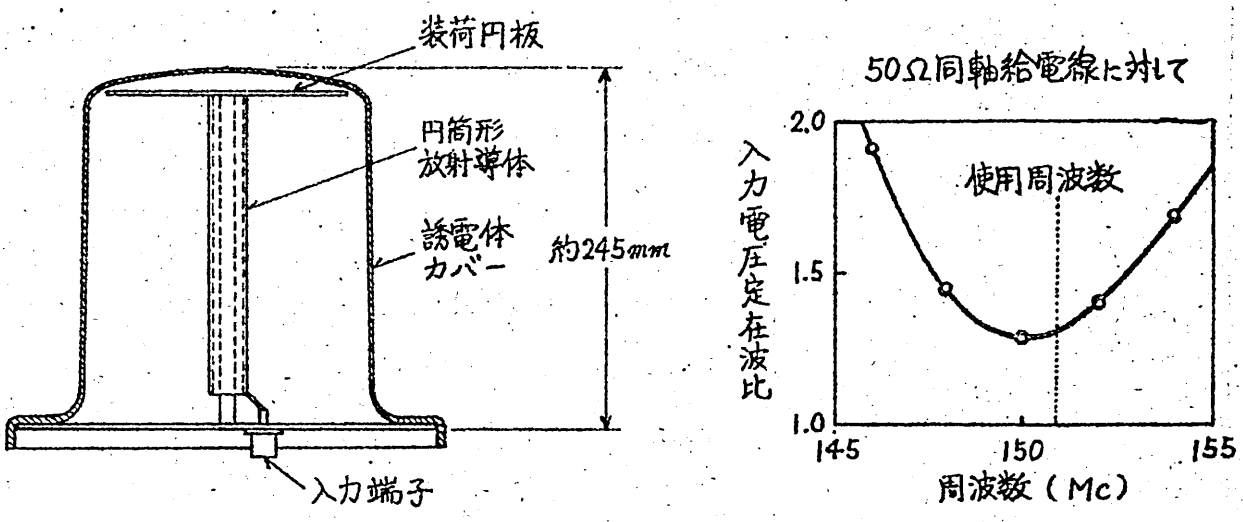
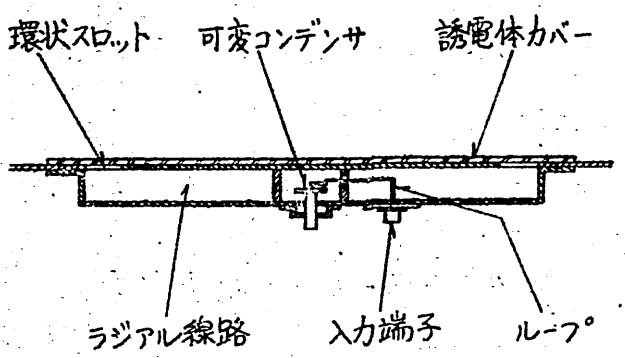
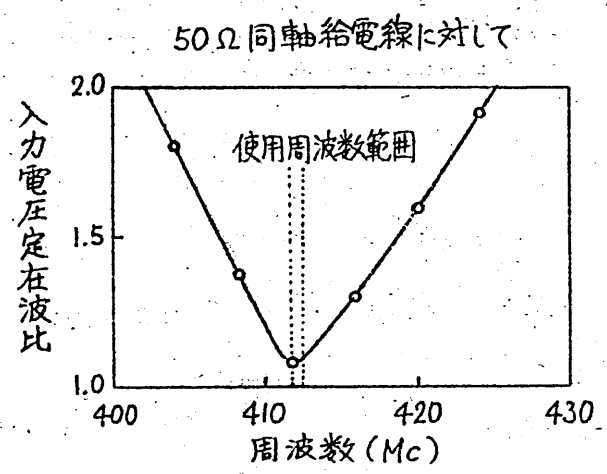


図2.1　東海道新幹線入換機関車用150Mc帯頂部装荷ユニポールアンテナとその入力電圧定在波比

高さを8分の1波長以下に縮小したもので，非常に簡単な構造で列車用としての必要条件を満たしている．

図2.2のアンテナは現在の東海道本線の列車用400Mc帯垂直偏波水平面内無指向性環状スロットアンテナ(4)であって，業務通信および公衆通信に使用されている．特急「こだま」，「つばめ」などの車両の屋根には，400Mc帯において半波長以上の高さをもつユニットクーラキセ（車内冷房装置のカバー）が並んでいるため，アンテナを屋根に直接取付けると放射パターンがいちじるしく害されるので，これを避けるためにアンテナをきわめて偏平な構造の環状スロットアンテナにしてキセの上すなわち車両の最上部に取付けてある．このアンテナは放射導体が地板からすこしも突出していないにもかかわらず，普通のホイップアンテナと同様の放射パターンをもっているのが特長である．





［送信用アンテナの例］

図2.2　東海道本線列車用400Mc帯環状スロットアンテナとその入力電圧定在波比

3. 列車用指向性アンテナ

列車無線，とくに国鉄東海道新幹線におけるように多重通信方式の列車無線においては，列車用に指向性アンテナを用いると，多重反射によるエコーひずみの軽減，定在波によるフェージングの防止，信号対雑音比の改善などの点で

非常に有利である．しかし列車走行方向に対する地上固定局の方向は一定でないから，指向性アンテナの場合にはビームの方向を水平面内で連続的に変えるか，あるいはビーム幅をやや広くしておいてビーム方向を不連続的に切換える[5]～[7]という方法をとる必要がある．

図3.1は前述の無指向性環状スロットアンテナに方形ループを付加した複合アンテナ[6]であって，これはビームを簡単に双方向性にしたり単方向性にしたりして，指向性アンテナを列車用に使用したときの効果を調べる試験用の準埋込み形アンテナである．

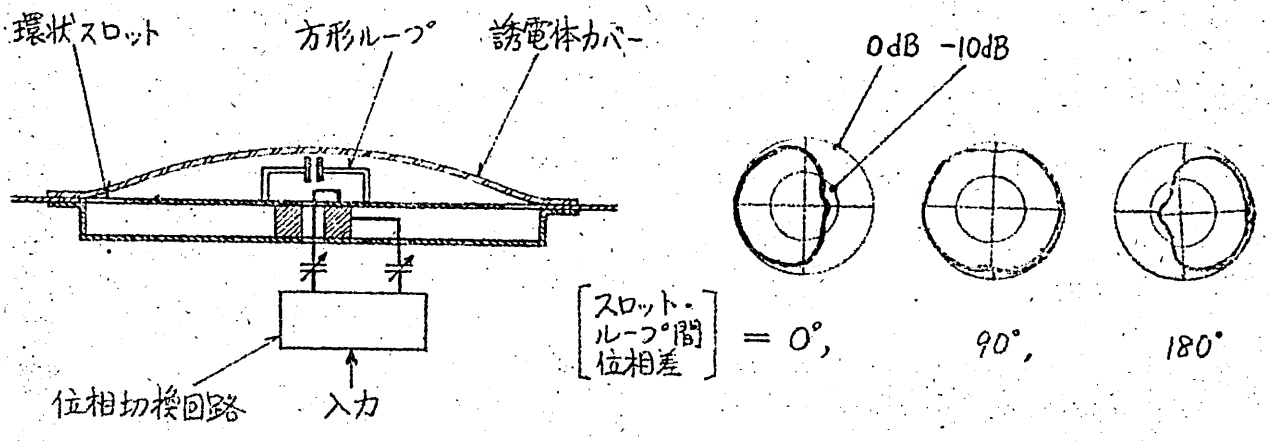
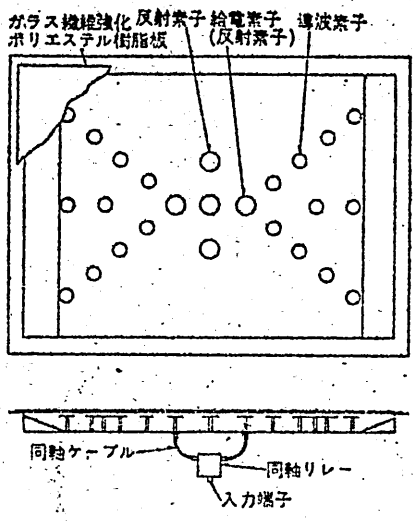
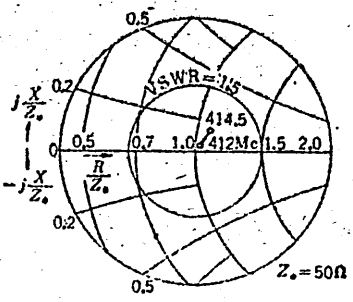


図3.1　列車用400Mc帯環状スロット・方形ループ複合アンテナとその放射パターン

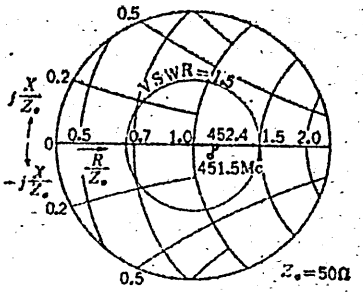
図3.2のアンテナは国鉄東海道新幹線の列車用400Mc帯垂直偏波指向性埋込み形アンテナ[7]であって，頂部装荷を施したユニポールを25個配列することにより放射パターンを合成している．水平面内ビーム幅を広くし，かつビームを2方向に切換え，また垂直面内ビーム幅を狭くするとともにそのビームをできるだけ水平方向に向けて利得を大きくし，さらに前後比を大きくしてある．給電素子を2個設けてあって，通常は必要なビームの向きに応じて同軸リレーによりどちらか一方にのみ給電し，他の一方の素子は適当な長さのケーブルで装荷されて反射素子として働くようにしてある．またなんらかの故障が起って同軸リレーが働かないときには両方の給電素子に給電され，ビームは前後2方向を向くようにしてある．



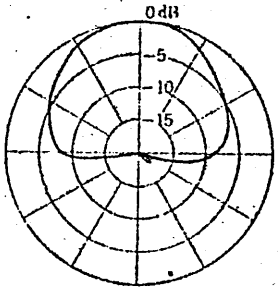
構造
(縦約1.6m, 横約1.2m)



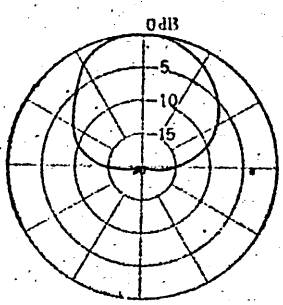
送信用アンテナインピーダンス



受信用アンテナインピーダンス



送信用アンテナ放射パターン



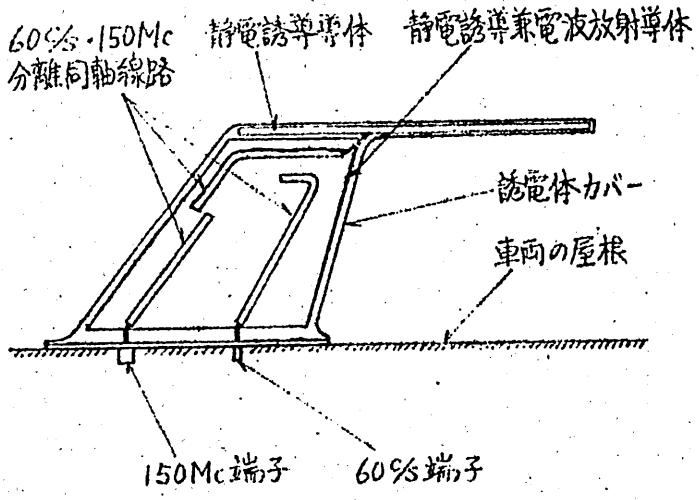
受信用アンテナ放射パターン

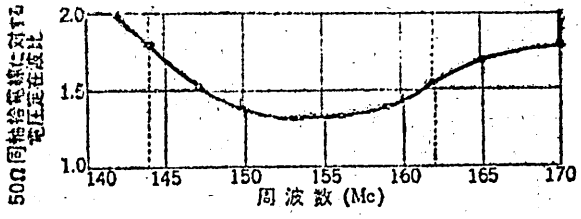
図3.2 東海道新幹線列車用400Mc帯頂部装荷ユニポールアレーアンテナとその電気的性能
送信用 412.0～414.5Mc, 受信用 451.5～452.4 Mc.

4. 列車用多機能アンテナ

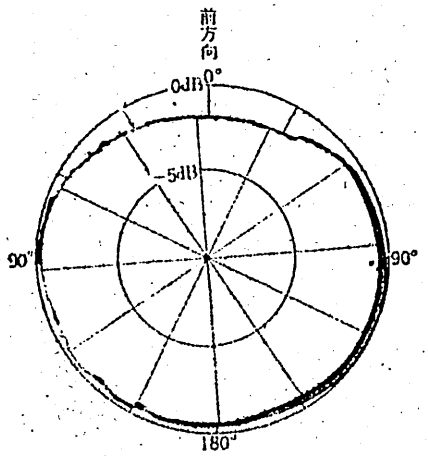
列車の高速化に伴ない, 列車に搭載する電気・電子装置は多種多様になり, それに使用するアンテナも増加するが, 一方実装上の許容場所, 許容占有空間, 列車の美観などの点から, 一つのアンテナで多くの機能を兼ね備えたアンテナが要望されるようになる.

図4.1のアンテナは国鉄東海道新幹線の列車用の, 60c/s 架線電圧検知と150Mc帯構内無線との両機能をもつアンテナ[8]である. このアンテナは板状導体を静電誘導兼電波放射素子とし, さらに静電誘導を大きくするための水平棒状導体を付加し, これらに 60c/s・150Mc分離用の同軸線路を設け, その全体を車体と意匠的に適合した誘電体カバーで覆ったものである. 静電系と無線周波系とが上記同軸線路により独立に働くのがこのアンテナの特長である.





入力電圧定在波比



水平面内放射パターン

図4.1 東海道新幹線列車用60%s架線電圧検知・150Mc帯構内無線共用アンテナとその電気的性能

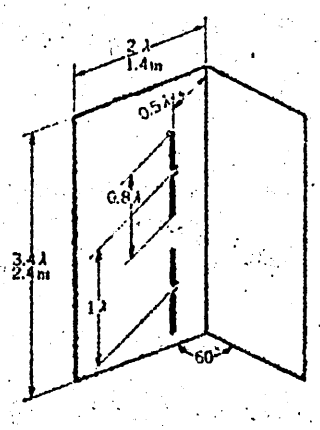
5. 列車対向固定局用アンテナ

列車のアンテナに対向する地上固定局のアンテナ形式は，鉄道に沿う固定局配置から定まる所要通達区間の長さ，所要通達角度範囲などにより，列車無線回線設計上最適のものが定まる．

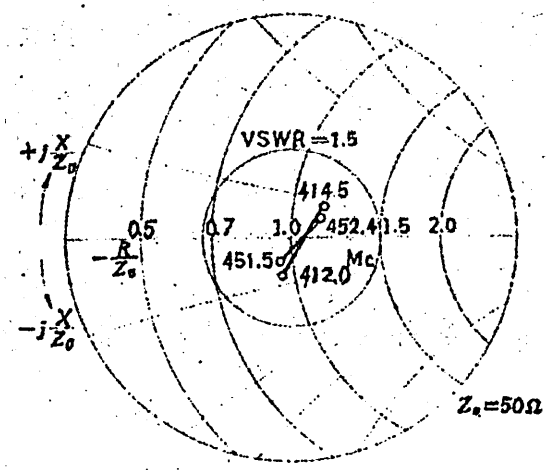
現在の国鉄東海道本線の400Mc帯列車無線の固定局には八木アンテナを用いている[9]が，東海道新幹線の400Mc帯列車無線の固定局には回線設計上最適のダイポール2素子60°コーナリフレクタアンテナ[10]が用いられている．アンテナの構造および電気的性能は図5.1のとおりで，相対利得14dB以上，しかも水平面内ビーム幅が広く，前方後方比・前方側方比が良く，かつ送受2周波数帯共用ができるのが特長である．

なお東海道新幹線においてはトンネルが非常に多く，全トンネル長は全線路長の13%を占めているので，トンネル内通話を確保するための対策が重要で

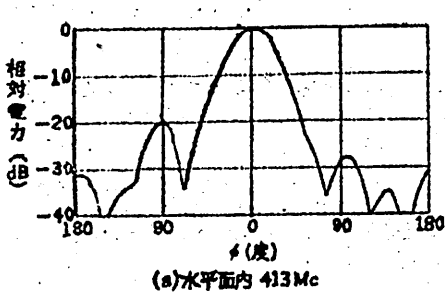
ある．簡単で経済的な方式として，平行2線形線路と中継増幅器とを組合わせた設備[11]によりトンネル内通話を可能にしている．



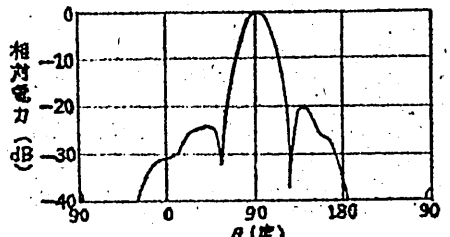
構　造



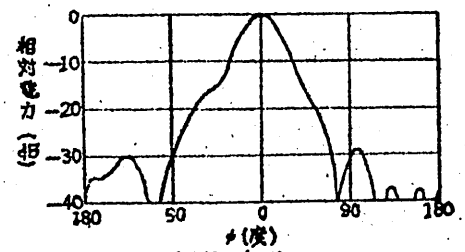
インピーダンス



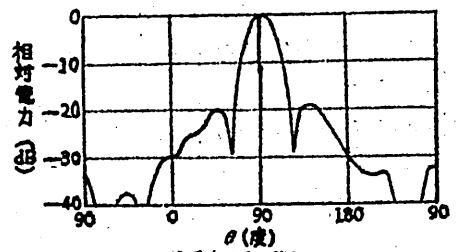
(a)水平面内 413Mc



(b)垂直面内 413Mc



(c)水平面内 452Mc



(d)垂直面内 452Mc

放射パターン

図5.1　東海道新幹線列車無線固定局用
400Mc帯ダイポール2素子60°コーナリフレクタアンテナとその電気的性能

6. むすび

以上，東海道本線および東海道新幹線の列車無線のアンテナを主にして述べたが，今後列車無線の高度化に伴ないAdaptive antennaなどが，また搭載電気・電子装置の多様化に伴ない多機能アンテナが注目されるべきであろう．

終始ご指導をいただいている日本国有鉄道関係各位に深く謝意を表する．

参考文献

(1) N. Monk : "Experimental Radio-Telephone Service for Train Passengers", Proc. IRE, Vol. 39, No. 8, pp. 873~881 (Aug., 1951).

(2) M. Lohr : "Die Messung des Antennenwirkungsgrades von kurzen unsymmetrischen Meterwellen-Antennen", NTZ, Jahrgang 10, Heft 3, s. 120~124 (März, 1957).

(3) M. Walter and M. Dugas : "The First Year's Operation of the Public Telephone on the Paris-Lille Trains", French Railw. Tech., Vol. 4, No. 1, pp. 1~10 (1961).

(4) 喜連川・武市・水沢："列車無線用環状スロットアンテナ"，昭35連大，No. 1157 (昭35-07). および 喜連川・奥村・武市・水沢："列車用400Mc帯環状スロットアンテナ"，三菱電機，Vol. 35, No. 8, pp. 1195~1198 (昭36-08).

(5) 喜連川・武市・水沢："UHF帯ビーム切換用アンテナアレー方式"，昭36関西支部連大，No. 13-5 (昭36-10).

(6) 喜連川・武市・水沢："列車用環状スロット・方形ループ複合アンテナ"，昭37連大，No. 859 (昭37-04).

(7) 喜連川・阿部・武市・水沢："列車用指向性埋込み形アンテナ"，昭37信学全大，No. 150 (昭37-11). および 喜連川・阿部・武市・大林・水沢："東海道新幹線 列車用400Mc帯指向性埋込み形アンテナ"，三菱電機技報，Vol. 38, No. 3, pp. 488~491 (昭39-03).

(8) 喜連川・黒田・久保田・武市・永岡："東海道新幹線 架線電圧検知・構内無線共用アンテナ"，三菱電機技報，Vol. 38, No. 4, pp. 680~683 (昭39-04).

(9) 寺井・佐藤・北垣・上野・奥村・桂川："国鉄列車電話"，三菱電機，Vol. 34, No. 12, pp. 1487～1493 (昭35-12).

(10) 喜連川・阿部・武市・水沢："400Mc帯列車無線用コーナリフレクタアンテナ"，昭38連大，No. 1228 (昭38-04). および 喜連川・阿部・武市・大林・水沢："列車無線用400Mc帯高利得コーナリフレクタアンテナ"，三菱電機技報，Vol. 37, No. 11, pp. 1321～1325 (昭38-11).

(11) 北垣・阿部・奥村・笹田・水沢："国鉄新幹線試作車用列車無線電話装置"，三菱電機技報，Vol. 37, No. 8, pp. 1036～1043 (昭38-08).

研技弱 － 182

輻射科学研究会資料

FMレーダーによる円形導波管の不均等点測定

1964年11月7日

住友電気工業株式会社

1. 緒　　言

導波管の不均等性測定で課題になることには、まず布設後に生じた故障を発見することがあり、又製造時においては品質管理上不均等性をある限度以下に抑えることがある。これらの要求を充すためには単一の反射点を検出しうると共に多重反射点をも検出し直視することが望まれる。

不均等点検方法としてはパルスレーダー方式や広帯域VSWR直視装置を利用して反射点を見出す方法などがある。前者では高分解能を得るには情報検出に至る装置全体が広帯域性を要求され、後者では単一反射点の周波数特性を求めうるが、複数個の反射点の誘電場合解析が複雑である。

又、多重姿態導波管内の発生不要姿態から反射点の有無を検出する方法もある。例えば、断面内電磁界分布を測定して姿態解析する方法、パルス多重反射法において可動ピストンを利用してパルス高の変化とその周期を観測する方法、高Q測定において可動ピストンを利用してQ値の変化を観測する方法などである。しかしこれらはいずれも間接的測定法であり、距離情報が明確に表われず、多重反射点の場合には解析が複雑である。

FMレーダーは以上述べたような方法に比して距離分解能並びに微少反射点検出にすぐれた性能をもっており、当社では導波管測定用としてBWO（CSF社製 CO-1308B）を用いて35GC帯のFMレーダーを試作した。

この報告ではFMレーダーの理論及び試作機の概要と、試作機を用いて円形導波管内に故意に設けた不均等点（すきま、折れ曲がり、喰い違いなど）の測定結果について述べる。

2. FMレーダーの設計理論 (1)

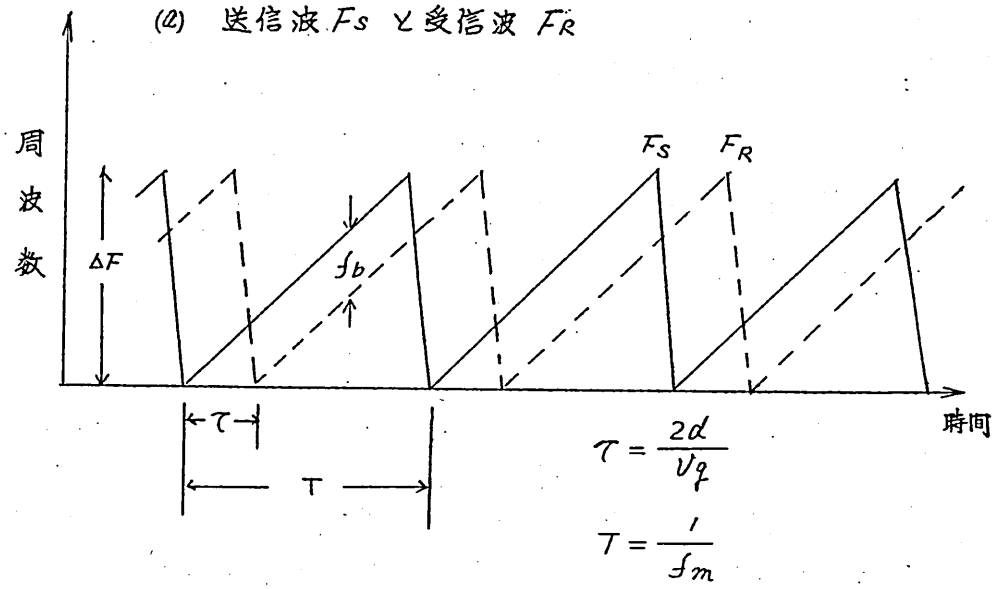
FMレーダーの用途によって周波数変調のかけ方が異なる。たとえば導波管不均等点測定には鋸歯状波変調が適しているし、Doppler効果を利用する速度測定用レーダーでは三角波の如き対称波形が適していると考えられる。又、電波高度計に用いられているものは正弦波変調を行っている。ここでは鋸歯状波変調を行ったFMレーダーの設計理論について述べる。

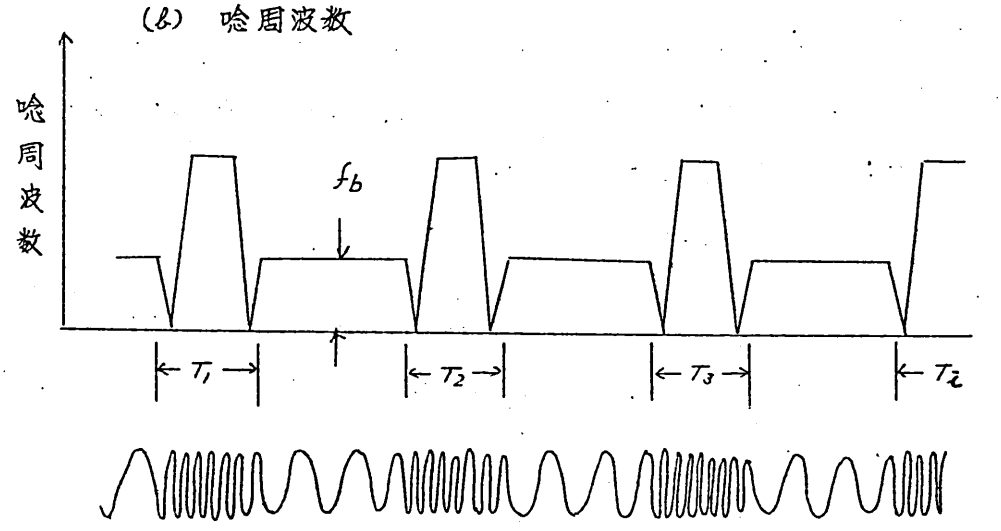
2.1 測定原理

発振源の送信波周波数を次ノ図(a)のF_Sで示す如く周期Tで鋸歯状に変調する。ある目標物に到達した波は反射して次ノ図(a)のF_Rの如く受信される。目標物までの距離をdとし、伝播速度をv_gとすればF_SとF_Rとの時間差は$\tau = 2d/v_g$となる。ここで送信波F_Sを局部発振出力として、同時に利用し、受信はF_Rと混合すると、次ノ図(b)の如き$F_S - F_R = f_b$なる唸周波数を得る。一般に$T \gg \tau$であるのでT_1、T_2、T_xなる区間を無視すれば、一定の唸周波数f_bとなり、最大周波数偏移をΔF、変調繰返し周波数を$f_m = \frac{1}{T}$とすれば、これらの関係は次式で与えられる。

$$f_b = \frac{2d}{v_g} \Delta F \, f_m \qquad (2\text{-}1)$$

なお、送信波と受信波を混合した場合、上に述べた差の周波数の他に和の周波数も同時に得られるが、これは時間と共に変化し、f_bに比してかなり大きい成分となるので低域沪波器特性をもつ差動増巾器を用いて除去し、f_bを以って距離情報とすることができる。





第1図　送信波と受信波の周波数関係

2.2　固定誤差について

情報として用いる唸周波数の波形を分析すると、変調繰返し周波数 f_m を周期とするスペクトラムとして表われる。その中で最大振巾をもつものを情報として取扱うなら距離が連続的に

変化しても情報出力は不連続的となり量子化されたことになる。すなわち $f_b = \frac{2d}{v_g} \Delta F f_m$ という唸周波数は必ず f_m の整数倍で $f_b = n f_m$ となる。従って $\frac{2d_n}{v_g} \Delta F = n$ から $\frac{2d_{n+1}}{v_g} \Delta F = n+1$ に変化して初めて情報に変化が出る。そのため $d_{n+1} - d_n$ は量子化による固定誤差 d_{error} となる。

$$d_{error} = \frac{v_g}{2\Delta F} \qquad (2\text{-}2)$$

これより固定誤差を減少させるには掃引周波数巾 ΔF をできるだけ大きく送べばよいことがわかる。固定誤差はFMレーダーにおける距離分解能の目安を与えるものであるが、パルスレーダーにおける距離分解能と比較してみる。パルスレーダーでは送信、受信パルスの間隔がパルス巾以上離れた時分解しうるものとすれば、パルス巾を τ として

$$\Delta L = \frac{1}{2} v_g \tau \qquad (2\text{-}3)$$

このパルス巾を用いる時、送信、受信系の帯域は $\Delta f_0 = \frac{1}{\tau}$ を必要とするので Δf_0 を用いて上式を書き更めると次のようになる。

$$\Delta L = \frac{v_g}{2\Delta f_0} \qquad (2\text{-}4)$$

このことからFMレーダーにおける掃引周波数巾 ΔF をパルスレーダーにおける帯域巾と等しくすれば距離分解能が等しいということができる。しかしパルスレーダーでは送信系、受信系ともに広帯域性を必要とするのに対し、FMレーダーでは受信部の帯域は被測定全長距離に対し唸周波数の出る周波数巾だけ

あればよいので高分解能性の実現が比較的容易である。

2.3 掃引周波数直線性の影響

(2-2)式によれば固定誤差を 50 cm 程度に抑えるためには数百 MC の掃引が必要となる。発振源として比較的広帯域性をもつといわれている後進波発振管を用いても非直線的な掃引となる。ここでは直線性の影響と非直線性の許容度について述べる。

直線的に掃引される傾斜を k_0. 最大傾斜度ずれを Δk とし、直線性からのずれは正弦的に変化するものとすれば傾斜度 k は次式で与えられる。(第2図参照)

$$k = k_0 + \Delta k \cos \frac{\pi}{T} t \qquad (2\text{-}5)$$

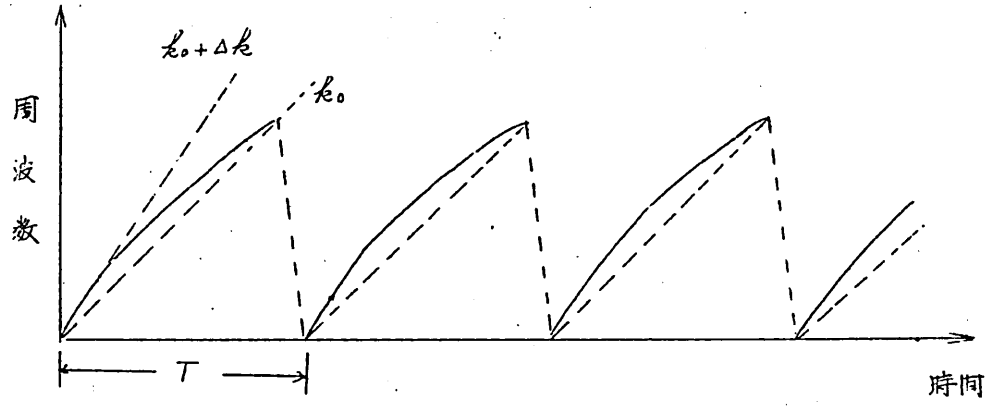
直線掃引の場合の検波形は

$$V(t) = V_0 \sin 2\pi k_0 t t \qquad (2\text{-}6)$$

で示されこれに対応して非直線掃引の場合の検波形は

$$V(t) = V_0 \sin 2\pi t \left\{ \int k \, dt \right\}$$

$$= V_0 \sin 2\pi t \left\{ k_0 t + \frac{\Delta k}{\pi} T \sin \frac{\pi}{T} t \right\} \qquad (2\text{-}7)$$



第2図 掃引の非直線性

となり唸周波数 k_0 τ なる信号が変調指数 $\beta = 2\Delta k T\tau$ なる周波数変調を受けたことになる。

$$\left.\begin{aligned} 2\pi k_0 \tau &= \omega_0 \\ 2\Delta k T \tau &= \beta \\ \frac{\pi}{T} &= p \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}8)$$

とおくと次式が得られる。

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 \sin(\omega_0 t + \beta \sin pt) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \sin(\omega_0 t + np)t \end{aligned} \qquad (2\text{-}9)$$

前節で述べたように唸波形は変調繰り返し周波数 f_m を周期とするスペクトラムとして表わされるが、(2-9) 式を f_m に関して Fourier 級数に展開し

$$\left.\begin{aligned} a_{sn} &= \frac{2}{T}\int_0^T J_n(\beta) \sin(\omega_0 + np)t \cos 2\pi S f_m t\, dt \\ b_{sn} &= \frac{2}{T}\int_0^T J_n(\beta) \sin(\omega_0 + np)t \sin 2\pi S f_m t\, dt \end{aligned}\right\} (2\text{-}10)$$

を求めた時 $V(t)$ は次のようになる。

$$V(t) = V_0 \sum_{S=0}^{\infty}\left\{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{sn}\right)\cos 2\pi S f_m t + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{sn}\right)\sin 2\pi S f_m t\right\} \qquad (2\text{-}11)$$

$$n_f = \frac{\omega_0}{2p} = k_0 \tau T \qquad (2\text{-}12)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{sn} &= \frac{J_n(\beta)}{\pi}\left\{\frac{n_f + \frac{n}{2}}{\left(n_f + \frac{n}{2}\right)^2 - S^2}\right\}\left(1 - \cos 2\pi\left(n_f + \frac{n}{2}\right)\right. \\ b_{sn} &= \frac{J_n(\beta)}{\pi}\left\{\frac{S}{\left(n_f + \frac{n}{2}\right)^2 - S^2}\right\} \sin 2\pi\left(n_f + \frac{n}{2}\right) \end{aligned}\right\} (2\text{-}13)$$

ただし　$S \neq n_f + \frac{n}{2}$ の時

$a_{sn} = 0$

$b_{sn} = J_n(\beta)$

ただし　$S = n_f + \frac{n}{2}$ の時　　(2-14)

この a_{sn}, b_{sn} を用いる時、搬周波数のうち Sf_m なる成分の大きさは次式で与えられる。

$$A_S = \sqrt{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{sn}\right)^2 + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{sn}\right)^2} \qquad (2\text{-}15)$$

第3図は β に対する $J_n(\beta)$ の変化を示しており、これより β の値による側帯波の広がり、いい換えれば A_S の大きさを検討できる。$0 < \beta < 1.4$ の範囲では (2-9) 式における搬送波成分 W_0 が最大スペクトラムとなるが、$\beta > 1.4$ となると側帯波成分の方が大きくなる。従って $\beta < 1.4$ であればスペクトラム分布はさほど広がらないだろうと予想される。第4図、第5図第6図は $n_f = 50 \sim 51$ の値に対し、それぞれ $\beta = 0, 1.4, 2.0$, の場合についての A_S の変化を示している。$\beta = 0$ の時、すなわち掃引の直線性が完全な時でも n_f が整数ならば単一スペクトラムとはならず、(b), (c), (d) の各場合のようにスペクトラムが分散する。これは繰り返し周期 T の初めと終りで搬周波数 f_b の位相が一致しないために起る現象であって、位相不連続性により位相変調がかかったことに相等し f_b 近傍の同波数成分が発生したとも解釈される。しかし、この現象は周波数分析が量子化されて出て来る以上さけ難いものである。

$\beta = 0$ と $\beta = 1.4, 2.0$ の各場合を比較すると $\beta \neq 0$ の時明らかに固定誤差範囲以上にスペクトラムが広がって距離分解能が

劣化することがわかる。$\beta = 1.4$ と $\beta = 2.0$ では分布に大差はなく、$\beta = 1.4$ まで許容した場合、直線掃引時の固定誤差に対して非直線掃引効果による安全度を設定することにする。第5図よりスペクトラムの主要分布巾を $4f_m$ とみなしこの巾の半分すなわち $2f_m$ だけ分布がずれた時をもって非直線掃引を考慮した固定誤差とすれば、

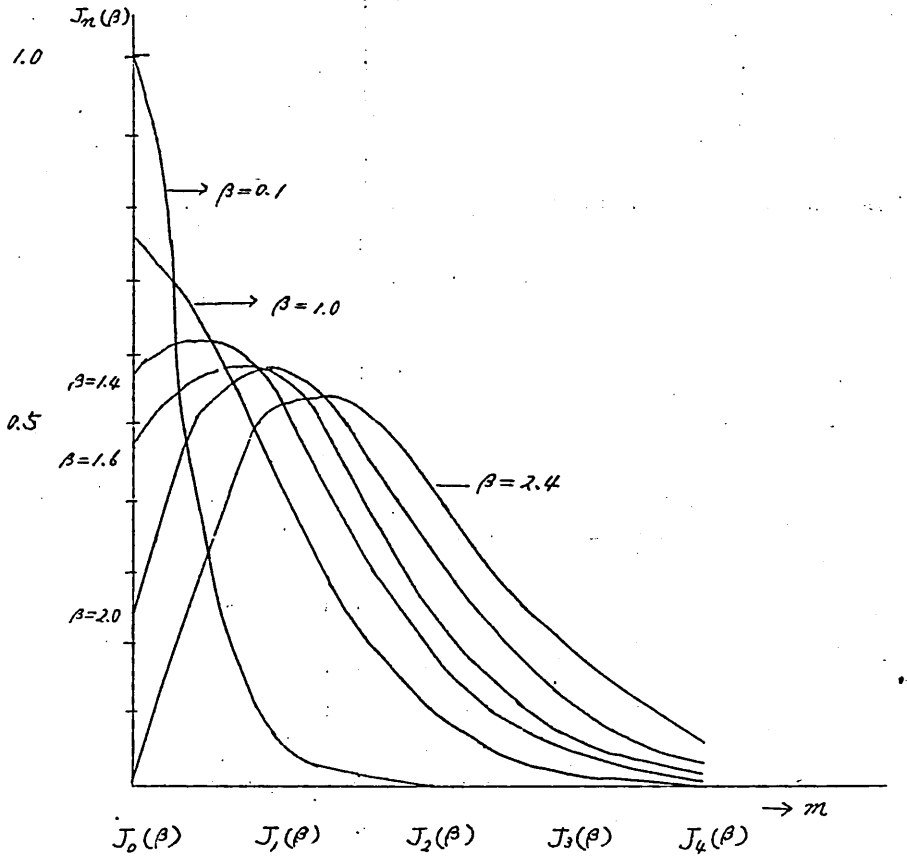
$$d'_{error} = 2d_{error} = \frac{v_g}{\Delta F} \qquad (2\text{-}16)$$

となる。

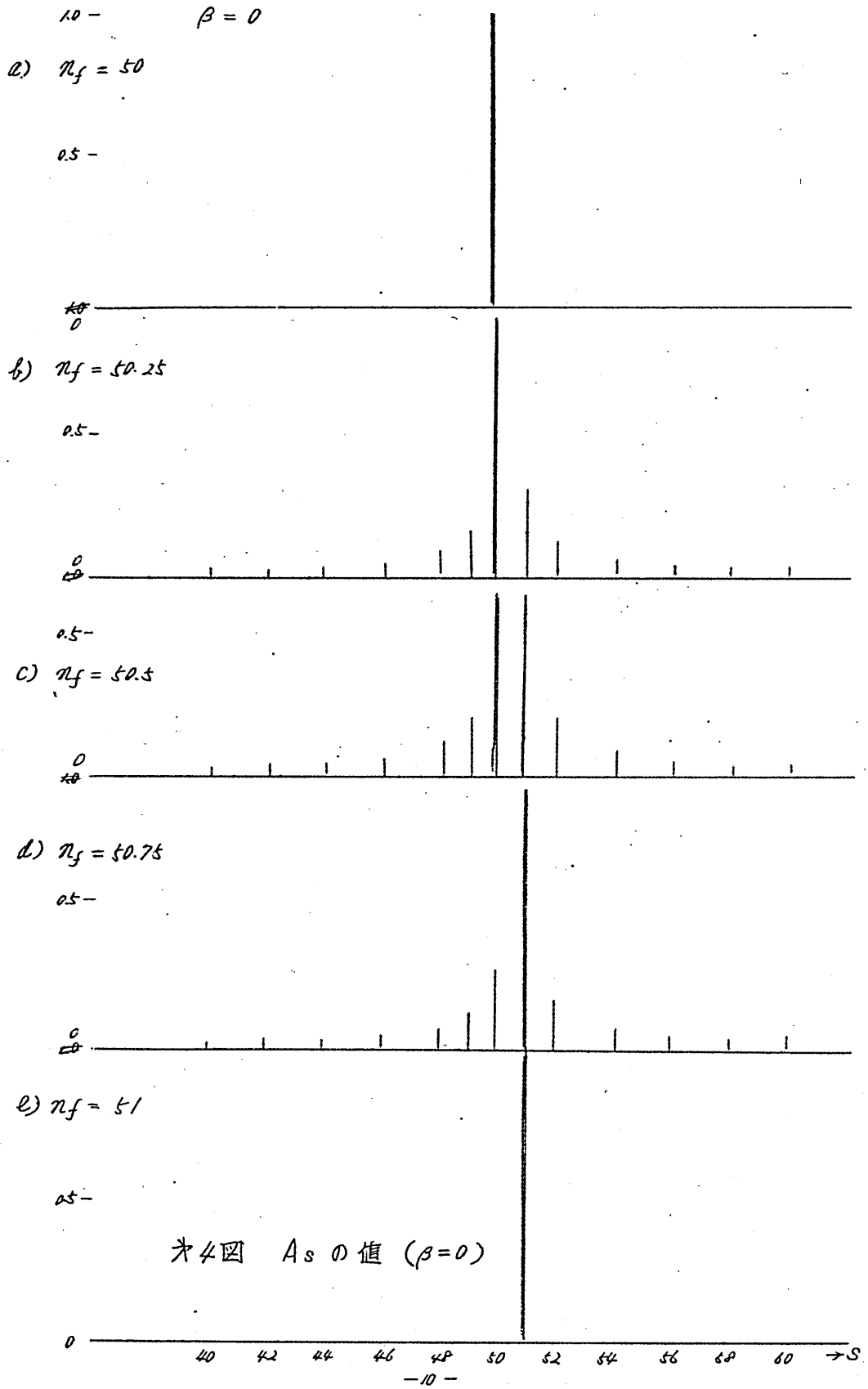
上に設定した β より非直線性百分率の許容度を求めると次式が得られる。

$$\beta = 2\Delta k\, T\tau = 2\frac{2d}{v_g}\,\Delta F\,\frac{\Delta k}{k_0} < 1.4 \qquad (2\text{-}17)$$

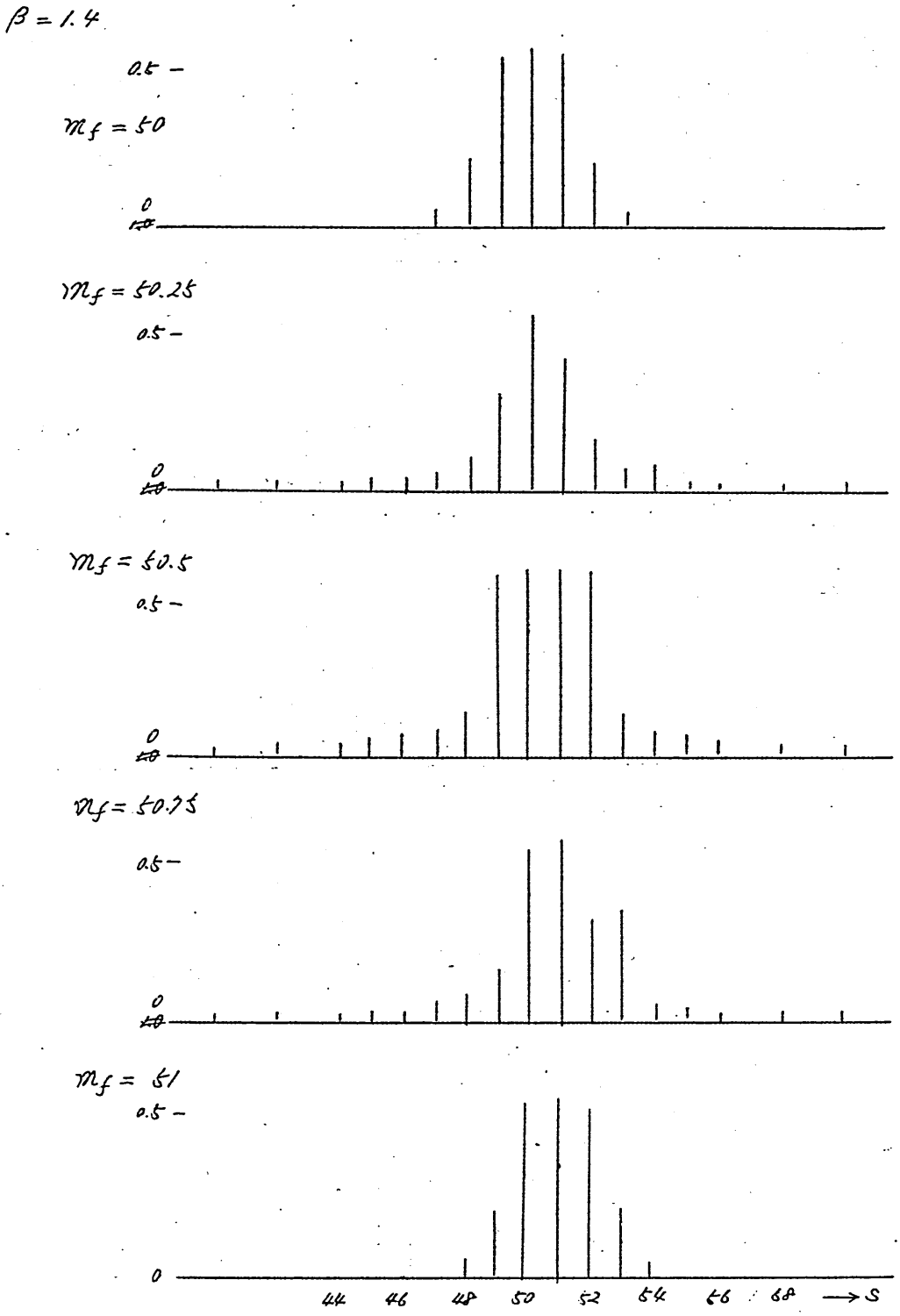
この式より分解能要求で ΔF、最大測定距離で $2d/v_g$ が決まると $\Delta k/k_0$ が与えられる。例えば $d'_{error} = 0.5\,m$ とするには $\Delta F = 600\,MC$ となり、$100\,m$ 測定に対して $\tau_{max} = 0.7\,\mu s$ となり、$\Delta k/k_0 = 0.16\,\%$ という値が要求される。



第3図　ベッセル関数 $J_n(\beta)$ の n と β の関係

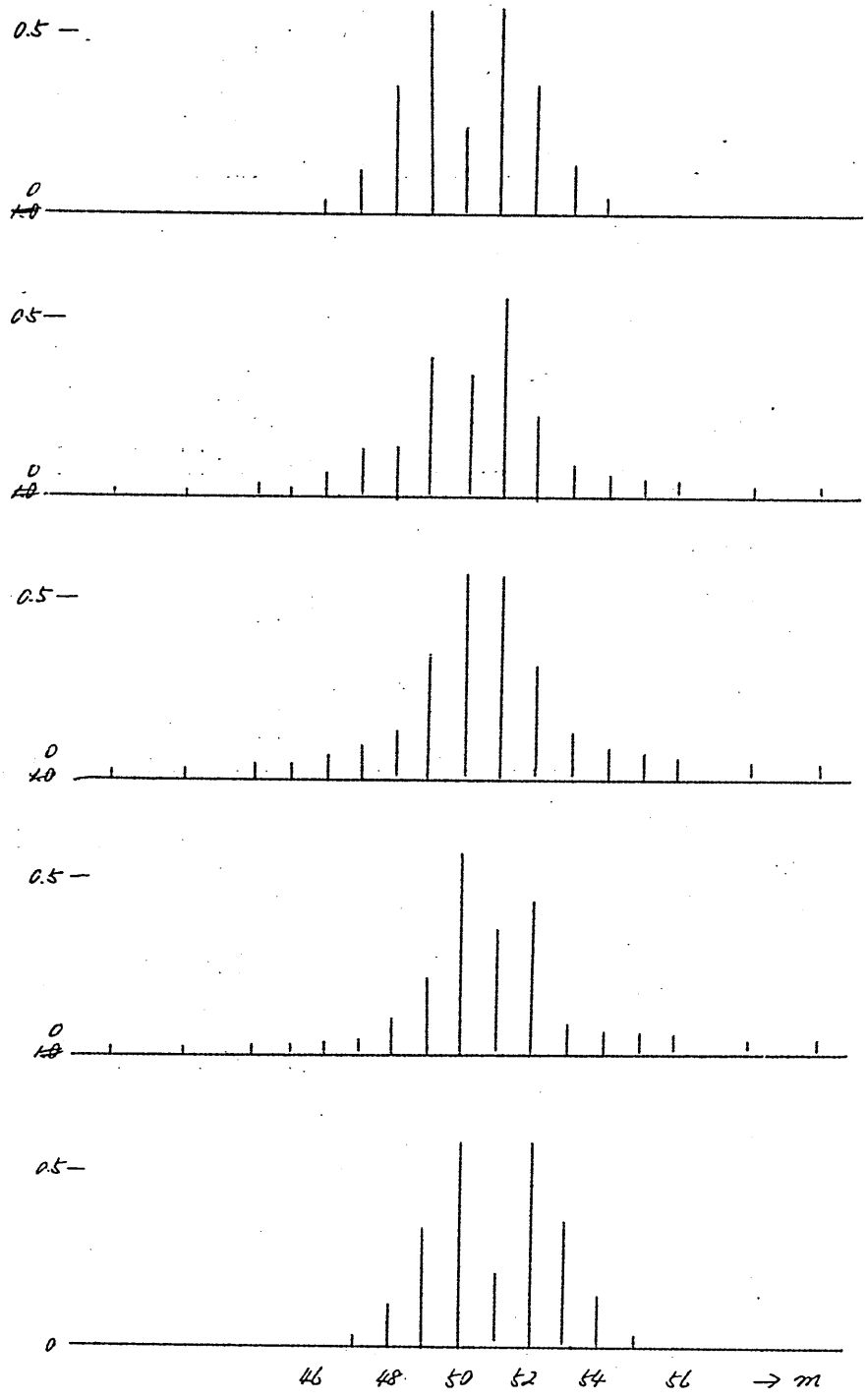

1.0 –
β = 0
a) n_f = 50
0.5 –
0
b) n_f = 50.25
0.5 –
0
0.5 –
c) n_f = 50.5
0
d) n_f = 50.75
0.5 –
0
e) n_f = 51
0.5 –
0
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60
→S

第4図　As の値 (β=0)


β = 1.4
0.5
m_f = 50
0
m_f = 50.25
0.5
0
m_f = 50.5
0.5
0
m_f = 50.75
0.5
0
m_f = 51
0.5
0
44
46
48
50
52
54
56
58
→ S

第5図　Asの値（β= 1.4）

$\beta = 2.0$



第6図　As の値　($\beta = 2.0$)

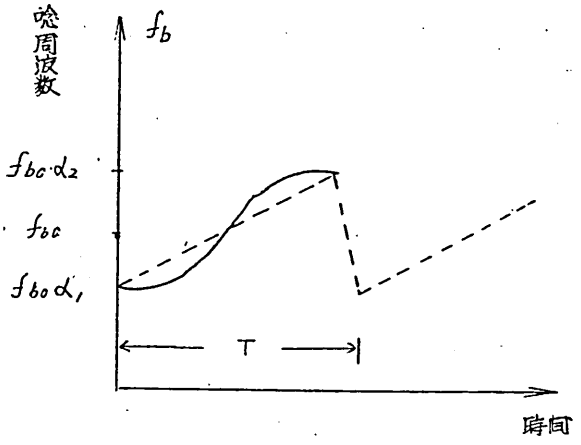
2.4 導波管測定時の分散特性の影響

FMレーダーを導波管測定に用いた場合，導波管内での伝播速度が異なるために、送信波を直線的に周波数変調しても一定距離伝播した後の受信波の瞬間周波数の傾斜度は送信波とは異なったものとなる。従って唸周波数は一定とならず、唸周波数そのものが周波数変調されて、スペクトラムを分散させる可能性がある。この分散性の影響について述べる。

掃引の中心周波数をF_0とし、掃引周波数巾をΔFとする。$F_0 - \frac{1}{2}\Delta F$ 及び $F_0 + \frac{1}{2}\Delta F$ の時の唸周波数をそれぞれ $f_{b0}\alpha_1$, $f_{b0}\alpha_2$ とし、第7図に示すように余弦曲線状にf_bが変化するものとすれば、

$$f_b = f_{b0}\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{T}t\right] \qquad (2\text{-}18)$$

$$f_{b0} = \frac{2\alpha}{\lambda_0}\,v_g \quad (\text{分散のない時の } f_b) \qquad (2\text{-}19)$$



第7図　分散性を考慮した唸周波数

が得られ、(2-9) 式と同様の考慮により変調指数βに対応するものは次の式で与えられる。

$$\beta_1 = k_0 \frac{2d}{v_g}(\alpha_2 - \alpha_1)\, T = \Delta F \frac{2d}{v_g}(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad (2\text{-}20)$$

前節でも述べたように $\beta = \pi/4$ を目安として ΔF と d の関係を決定することができる.

2.5 反射係数の測定について

繰り返し同期のために出力はスペクトラム分布をなしこのため反射係数の測定精度は本質的に低下する. 周波数分析を行った時のスペクトラムの振巾でもって. 反射係数の情報をしなければならないが. 映周波数 f_b の大きさに対応する n_f によって第4図 $a \sim e$ の如きスペクトラム分布をする. 従って同じ反射係数のものであっても n_f の値により最大振巾が異なり誤差を伴う. 直線掃引における最大振巾の変化は第4図から約3dB%である. どうしても精度を向上したい時には主要スペクトラムを選択し. その振巾の平方和から情報を得るという方法がある. エネルギーを考えれば. スペクトラムの平方和の比は反射係数の自乗値に比例し. スペクトラムの出方によらないからである.

3. 試作機の設計並びに構成

ミリ波導波管及び素子の研究並びに検査用測定器として使用することを目的に設計を行なった。設計当初の目標は大別次の通りである。

(1) 導波管の選択

単長 5m であるが多数本接続して不均等点の有無を調べ. 良好なものを選択する.

(2) 布設試験

中継距離は20 Km と考えられるが、数 Km の布設後における欠陥の有無を調べる。

(3) 姿態分析

ミリ波用素子における不要姿態発生状態を群速度差を利用して測定する。

これら3項目のうち、主たる目的は(1)及び(2)であって、この目的に沿うように各パラメータが決定された。

3.1 中心周波数 F_0 の選定

2-2節に述べたように固定誤差の点からは ΔF を大きくとる方が望ましく、周波数掃引時の比帯域を考慮すれば中心周波数 F_0 は大きい方が有利である。又導波管の分散特性からいっても F_0 を大きく選ぶ方が望ましく、得られる発振管を考慮に入れて、34GC 帯の一周波数にとることとした。F_0 の正確な値は 34.075 GC となっている。

3.2 掃引周波数巾 ΔF の決定

ΔF の値は固定誤差 d_{error} に関係する（(2-2)式）他、(2-20)式より測定距離との関係、(2-17)式より非直線性百分率 $\Delta k/k_0$ との関係が決定される。ΔF の若干の値に対する d_{error} の値が第1表に示されている。第2表は ΔF の 1000 Mc と 200 Mc に対する測定可能最大距離 d_{max}、第3表は $\Delta k/k_0$ を1% 又は 0.1% と仮定した時の測定可能最大距離 d'_{max} を

それぞれ示している。実際に測定する距離を数十米から数千米の範囲と考えてΔFの値は500 MC・200 MC. 40 MC の切り換え可能とし・各周波数において微調可能として測定に便利なようにした。

第 1 表

ΔF と d_{error} の関係（(2-2) 式による）

1000 MC	15 cm
500 MC	30 cm
200 MC	75 cm
40 MC	375 cm

第 2 表

ΔF と d_{max} の関係（(2-20) 式による）

ΔF	1000 MC	200 MC
α_2	0.9994	0.99937
α_1	1.0006	1.00063
d_{max}	175 m	875 m

第 3 表

ΔF. $\Delta k/k_0$ と d'_{max} の関係（(2-17) 式による）

$\Delta k/k_0$ ＼ ΔF	1000 MC	200 MC
1%	10 m	50 m
0.1%	100 m	500 m

3.3　繰り返し周波数 f_m の決定

(2-2) 式に示されているように距離の測定精度は f_m に無関係である．しかし次に述べるような要因から f_m を決定する必要がある

(1)　周波数分析器の帯域巾との関連

周波数スペクトラムの最小単位が f_m となるため選択フィルターの最小を f_m に選ぶ必要がある。

(2)　掃引速度との関連

分析速度すなわち分析周波数範囲を記録するに必要な時間は f_m に反比例する。

(3)　唸周波数との関連

(2-1) 式より最小探知距離 d_{min} に対応する f_{bmin} が分析器の分析上有利であること．

(4)　周波数分析器の周波数安定度との関連

唸波形のスペクトラムの最小単位が f_m であり．その頂より選択フィルターの帯域巾が f_m であるから分析器の安定度は f_m でなければならない．

(5)　掃引直線性制御との関連

掃引程度における応答速度は f_m に比例し．制御系の遅延時間に求められる要求は f_m に逆比例して厳しくなり．それだけ制御系の帯域巾が広く要求される．これらの点を考慮して f_m の値は 200 c/s．600 c/s 切換え可能とし．周波数は 0.1 % 以下の誤差範囲に保たれている．

3.4　周波数掃引直線性に対する要求

2.3 節に述べた $\Delta f_0/f_0$ は第3表の数値例に示した如くかなり厳しい規格が要求されている。この試作機では周波数の最大

ずれ δf_{max} を第4表に示す如く決定した。なお、第8図に示すような周波数ずれの曲線を正弦曲線と放物線とで近似した場合 $\Delta k/k_0$ と $\delta f_{max}/\Delta F$ との関係は次の通りである。

正弦曲線近似の場合

$$\frac{\Delta k}{k_0} = \pi \frac{\delta f_{max}}{\Delta F} \qquad (3-1)$$

放物線近似の場合

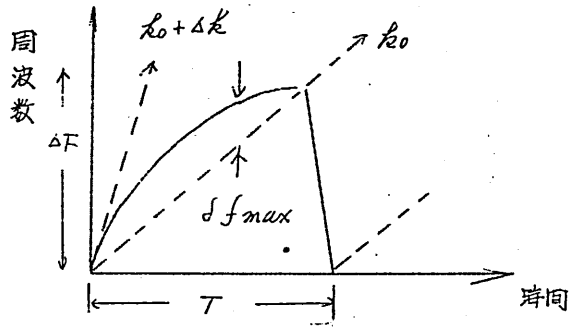
$$\frac{\Delta k}{k_0} = 4 \frac{\delta f_{max}}{\Delta F} \qquad (3-2)$$

第4表に示された直線性を得るために測定回路とは別に遅延線を用いて送信波受信を混合した回路を設け、この出力を情報として、後進波発振管にかける掃引波形に帰還することにより、直線性を制御している。用いられた立体回路の概略は第9図に

第 4 表

第4表　周波数の最大ずれの規格

ΔF	δf_{max}
500 MC	370 KC
200 MC	150 KC
40 MC	160 KC



第8図　周波数の最大ずれ

示されているが．情報出力として．立体回路からとり出された鋸波形の位相零となる点を検出して鋸波形の周期の長さを電圧値に変換して帰還する。この関係の詳しい理論並びに実験結果については畑氏らによって報告されている。[2]

3.5　周波数分析器

周波数分析器は特にこのレーダー用に設計されたものであり．その概略規格を第5表に示す。

第 5 表

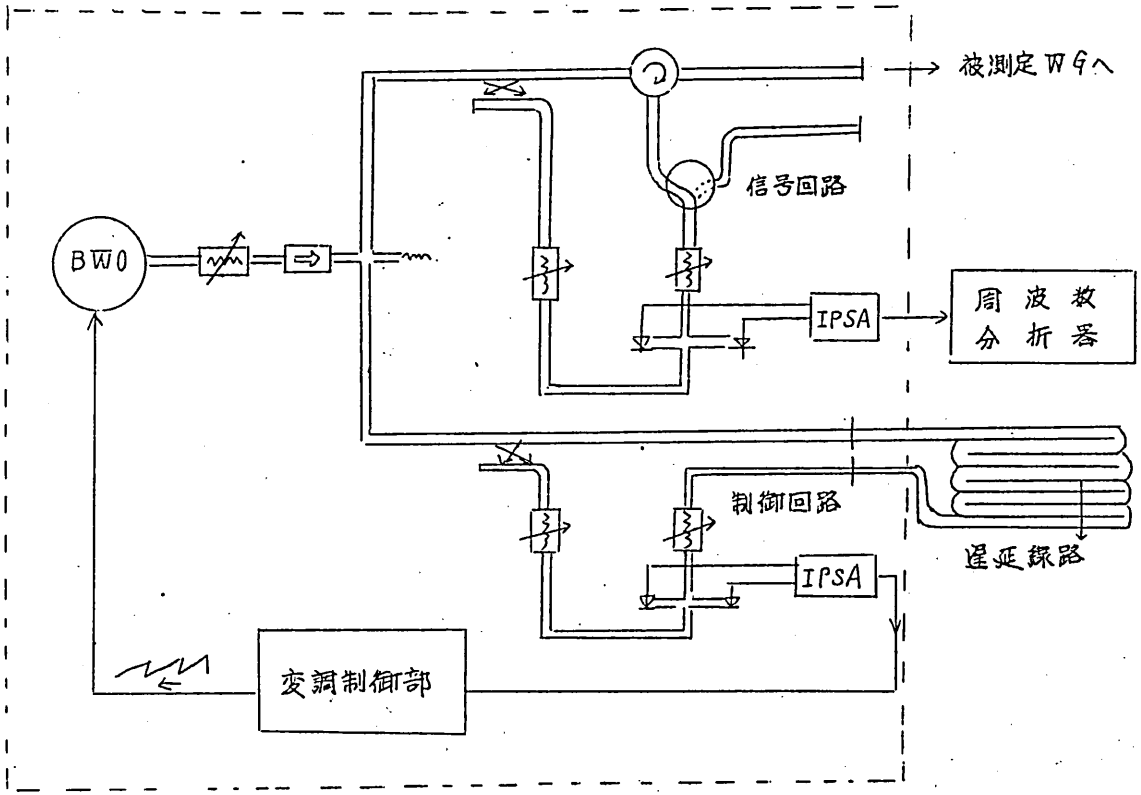
周波数分析器の規格

入力インピーダンス	75Ω
測定周波数範囲	1KC ～ 1MC
測定電圧レベル	−100 dB m以上
信号対雑音比	+20 dB 以上
測定確度	± 1dB 以内
表示方法	ブラウン管及び レコーダー 両者共 入力信号をマーカー を同時に表示できる（2現象） 対数．．直線切換え可能
掃引周波数範囲	0 ～ 1MC 連続可変
掃引中心周波数	0 ～ 1MC 〃
表示周期　バンドスコープ	5 ～ 1/60秒　及び外部同期
レコーダー	100秒、400秒
分解能	0.1 KC. 0.2 KC. 0.5 KC. 1KC 2 KC. 5 KC.

3.6 試作機の構成

FMレーダーの主要部である立体回路の概略を第9図に示す。使用した発振源はCSF社の後進波発振管 CO-1308B であつてこの発振管の発振周波数は 28～39 GC 出力は 20～100 mW が保証されている。しかし発振特性は直線的でないために3.4節で述べたような制御が行われている。第9図のうち下半分は制御用の回路となっており、上半分の信号回路とほぼ同様の機構を有している。信号回路について簡単に説明すると、後進波発振管より信号回路に送り込まれた送信波はサーキュレーターを通して被測定導波管に行く。被測定系を反射型として使う時には同様の回路から戻り、サーキュレーターを通り導波管切換器に向う。被測定系を透過型として使う時には別の回路から戻って導波管切換器に向う。この受信波と方向性結合器から分岐された送出波の一部とは平衡型混合器にて混合され、IPSA（同相負帰還増巾器）で増巾され、周波数分析器に入る。なお周波数掃引に伴う帰線部分の影響を除くためにこの試作機ではトランスミッションゲート回路を用いて、帰線期間の信号消去を行っている。

本機による実験結果では検出感度は出力に対して約 −90 dB 最小距離分解能は 1m 以下を得ている。



IPSA： 同相負帰還増巾器

第9図　FMレーダーのブロックダイヤグラム

4. 円形導波管内不均等点の測定

円形導波管として51φを使用し、主姿態はTE_{01}とする。矩形TE_{10}と円形TE_{01}の姿態変換器が完全な場合、すなわち変換損失がなく、円形導波管不要姿態の発生のない場合に検出されるのは不均等点におけるTE_{01}姿態の反射波のみである。しかし姿態変換器が不完全で不要姿態との結合がある場合には次の3つの場合を考慮しなければならない。

(1) 姿態変換器で励振されたTE_{01}姿態が不均等点で不要姿態の反射波となり、姿態変換器で矩形TE_{10}姿態となって検出された場合。

(2) 姿態変換器で励振された不要姿態が不均等点でTE_{01}姿態の反射波となって、姿態変換器を通って検出された場合。

(3) 姿態変換器で励振された不要姿態が不均等点で同一か又は別の不要姿態の反射波となり、姿態変換器で矩形TE_{10}姿態となって検出された場合。

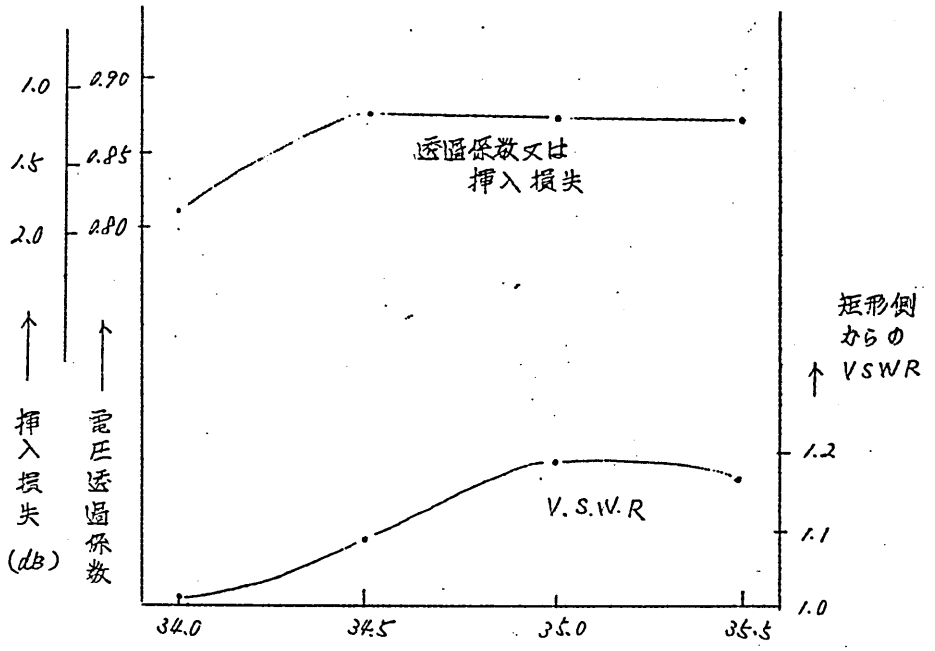
いずれの場合も、姿態変換器における不要姿態励振量及び導波管の不要姿態減衰定数が問題になる。又、姿態変換器に反射のある場合には他の反射点、例えば第9図のサーキュレータとの間に多重反射が起り、近距離反射点の検出に影響を及ぼすことがある。この章では測定に用いた回路と得られた結果について述べる。

4.1 測定回路

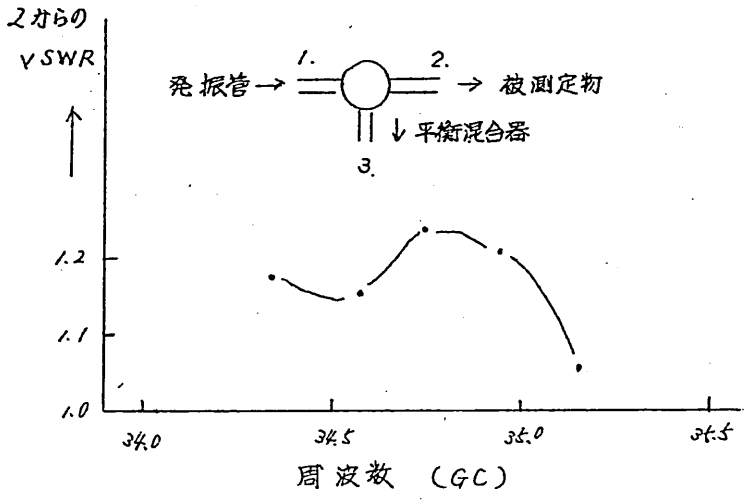
FMレーダー本体から姿態変換器までは矩形導波管WRJ-320で接続し、姿態変換器は中心励振形のものを用いた。その特性を第10図に示す。

姿態変換器の円形側直径は16.8mmで、テーパー管の都合により、直線テーパーで12φmmに変換し、その後に約1.4m

の raised cosine らせんテーパー管を接続して 51 ϕ_{mm} に変換した。導波管は 6m 単長の 51 ϕ_{mm} 銅管外装らせん導波管 8本（40m）を用い、30m 又は 36m の距離の接続部に不均等点を設け、不均等点の後約 6m の点に木製のダミーを置いた。銅管外装らせん導波管は巻線径 0.2 mm、外装銅管内径 52 ϕ_{mm} であり、巻線と外装管の間はガラス繊維と エポキシ樹脂で固められている。接続部は嵌合部を有するバットフランジとなっている。なお次節で述べる回路系のチェックに用いた導波管だけは少し異なっており単長 4.5m の鉄管外装らせん導波管 6本（全長 27.8m）であり、その接続部はスリーブ になっている。



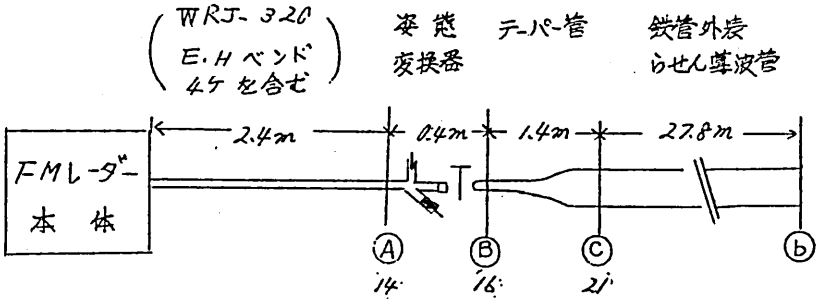
第10図　中心励振型 $TE_{10}^{\square} \Leftrightarrow TE_{01}^{\circ}$
姿態変換器の特性



第11図　サーキュレータのVSWR

4.2　回路系のチェック

この章の初めに述べたように姿態変換器とサーキュレーターなどとの間に多重反射の起る可能性がある。第12図に示す各点において短絡，開放，ダミー終端の各場合について分析した結果を以下に示す。第13図は矩形導波管の終端部Ⓐについて測定した結果である。数字は何番目のスペクトラムであるかを示している。短絡と開放の各場合には指数関数的に減少するスペクトラム列が得られ，多重反射の影響が明らかにみられた。スペクトラムの位置から推察するに，サーキュレーターとの間の多重反射ではないかと思われる。第11図の特性によれば，サーキュレーターによる反射係数は約－20dBである。第14図は姿態変換器通過後Ⓑについて測定したものである，最初のピークが第13図では14番目であったのに対し第14図では16番目になっている，ダミー終端した場合でも多重反射がみられるが，姿態変換器の部分で反射が起っているものと思われる。第10図によれば姿態変換器での反射係数は約－20dB



第12図　チェックに用いた導波管系

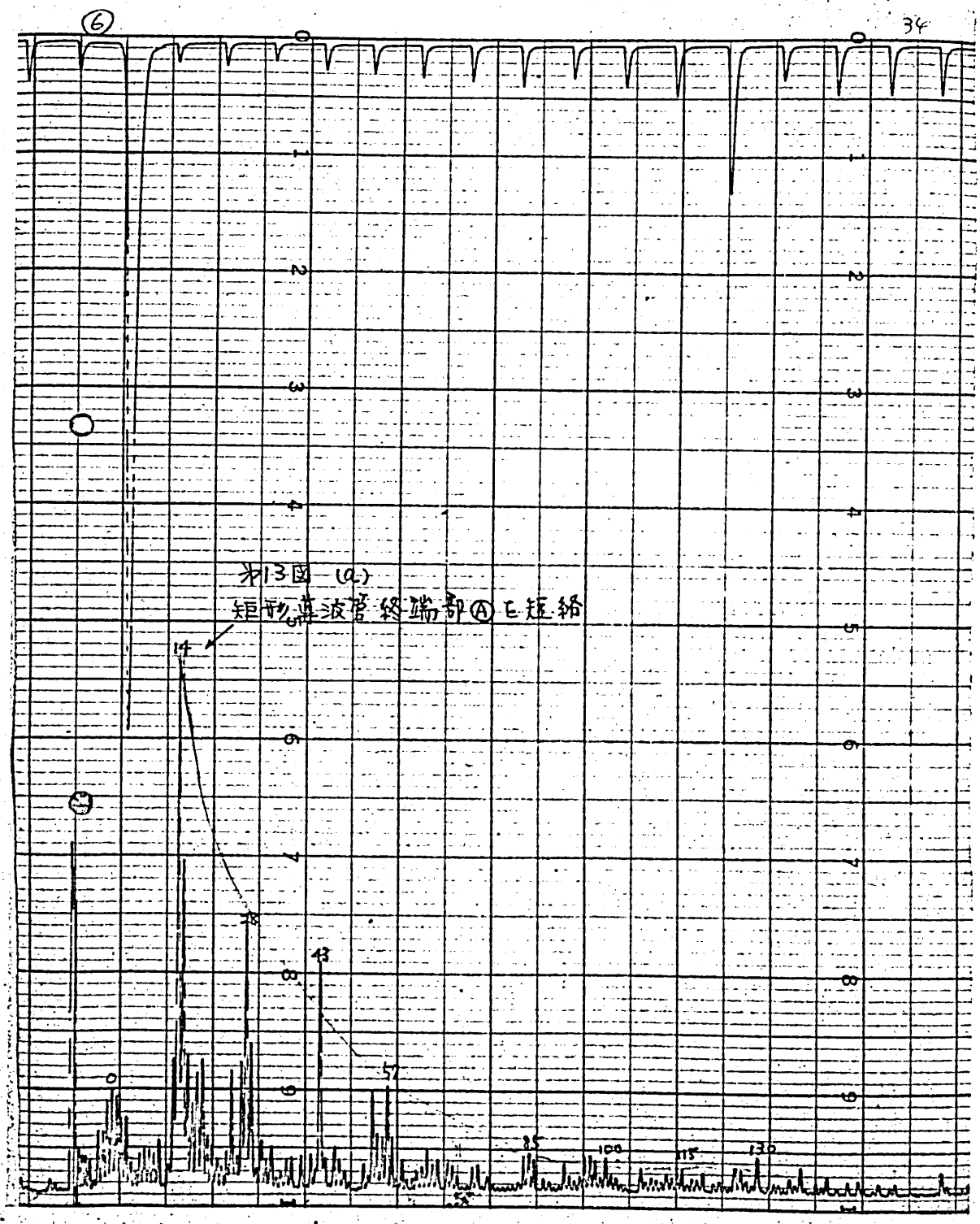
（数字は第13～16図において何番目のスペクトラムが対応するかを示している）

である。なお、姿態変換器の前設にEHチューナーを入れて調整しているが、多重反射をなくすることはできなかった。

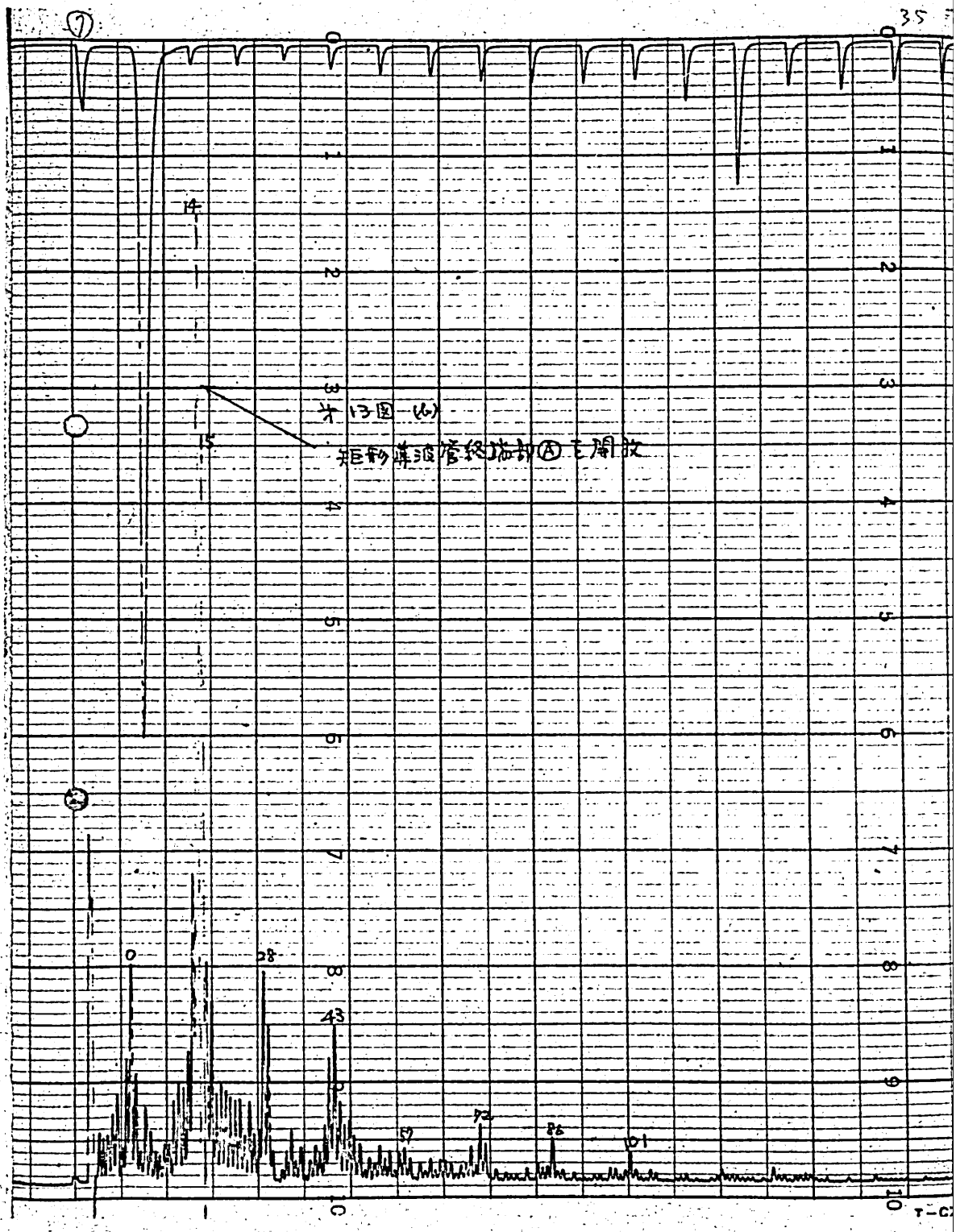
第15図はテーパー管後部Ⓒについて測定したものである。短絡の場合のピークは21番目のスペクトラムに変っているが、開放とダミー終端の場合は姿態変換器での反射（16番目）の方が大きい。又、ダミー終端の場合でも多重反射の影響はかなり長い範囲に亘っていることがわかる。第16図は22.8mの鉄管外装らせん導波管の後部Ⓓについて測定した結果である。短絡した場合は導波管後部に対応する周波数のエネルギーが大部分であるために周波数分析に至るまでの回路で飽和現象を起し姿態変換器などによる反射は殆んどマスクされてしまっている。ダミー終端の場合をみればわかるように、導波管の不均等性の検出は例えば第15図(c)と比較して変化の有無を調べることによって行うことができる。

以上の結果からわかることは姿態変換器などに反射があるために多重反射を起し、不均等点測定に影響を及ぼすことである。これを除くには姿態変換器を完全なものにするか、又は姿態変

換器の位置をできるだけFMレーダー本体に近づけて使用することが考えられるが，実験室では姿態変換器の位置は容易にかえられるので後者による方法が有効である。

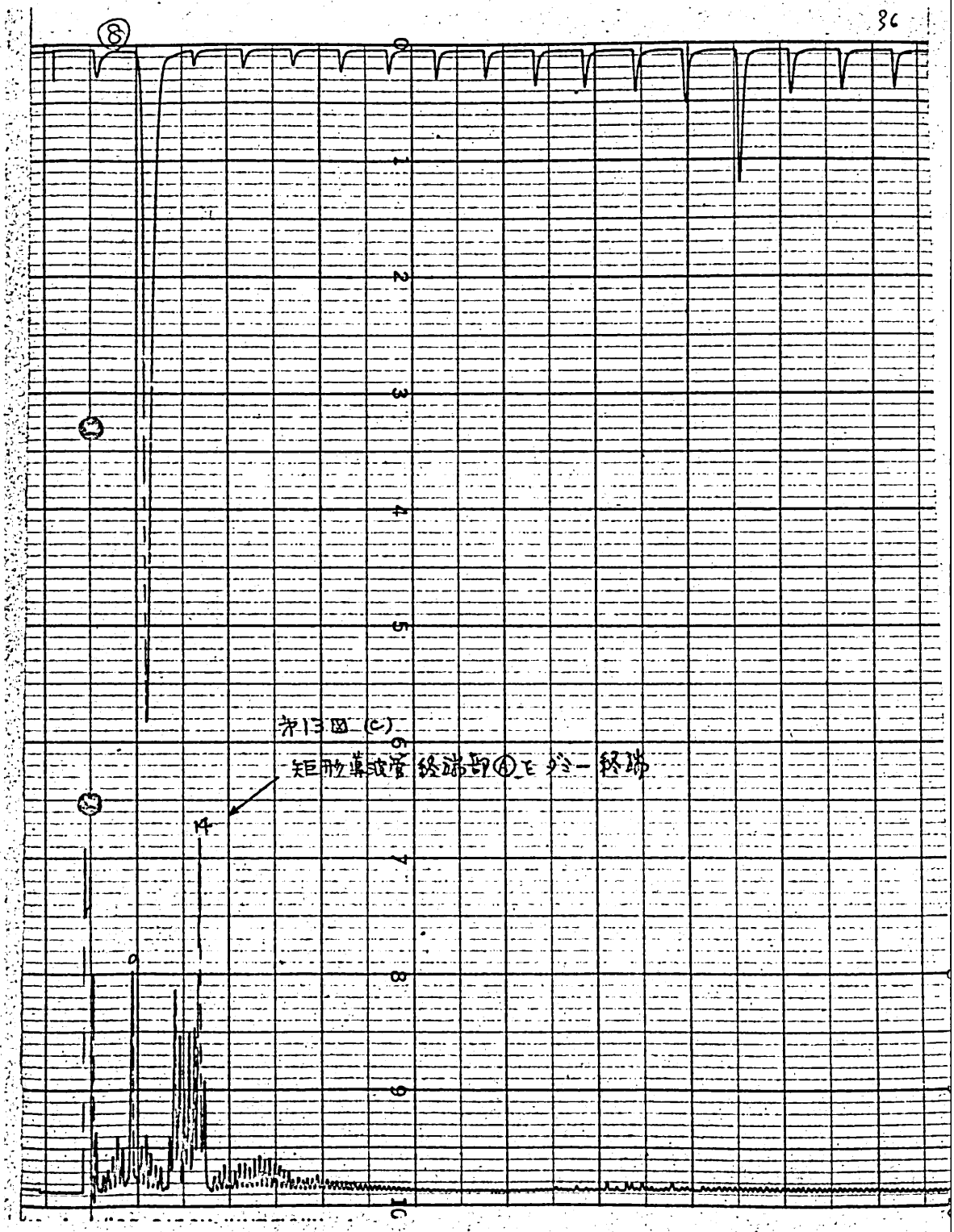


第13図 (a)
短形導波管終端部Ⓐと短絡

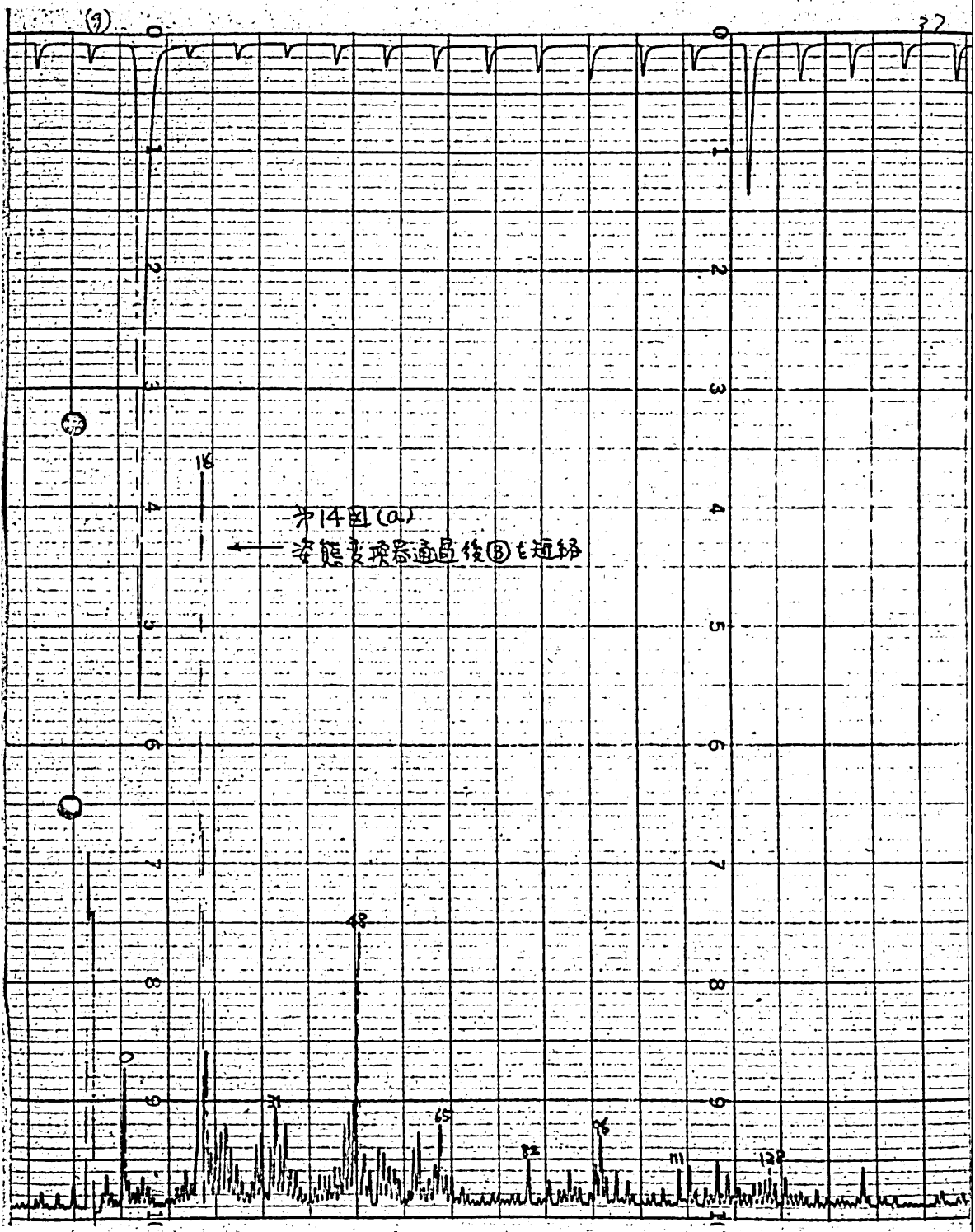


第13図 (b)

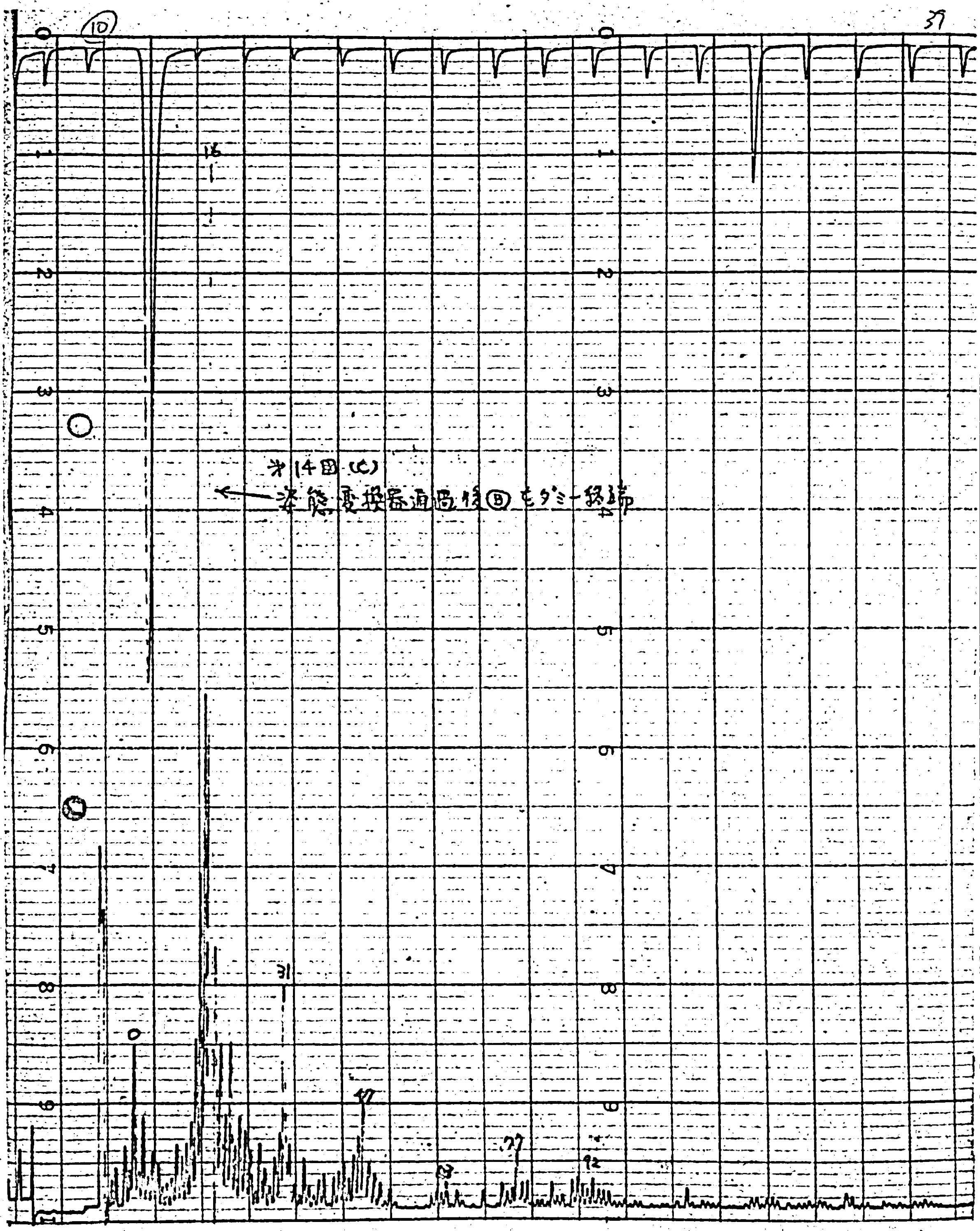
矩形導波管終端部Ⓐを開放



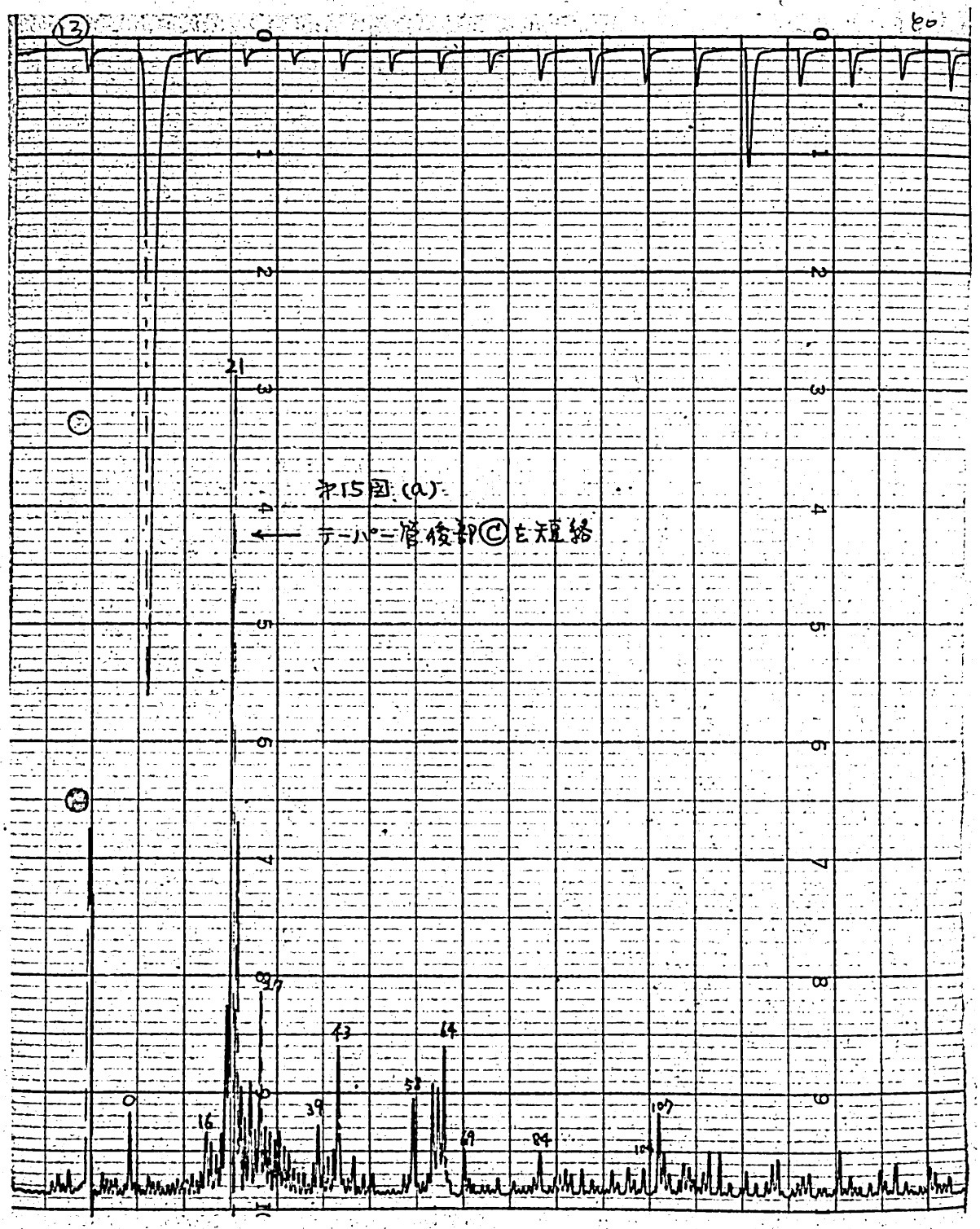
第13図 (c)
矩形導波管 終端部Ⓐをダミー終端


(g)
第14図(a)
姿態変換器通過後Ⓑを短絡
16
48
0
31
65
82
96
111
128

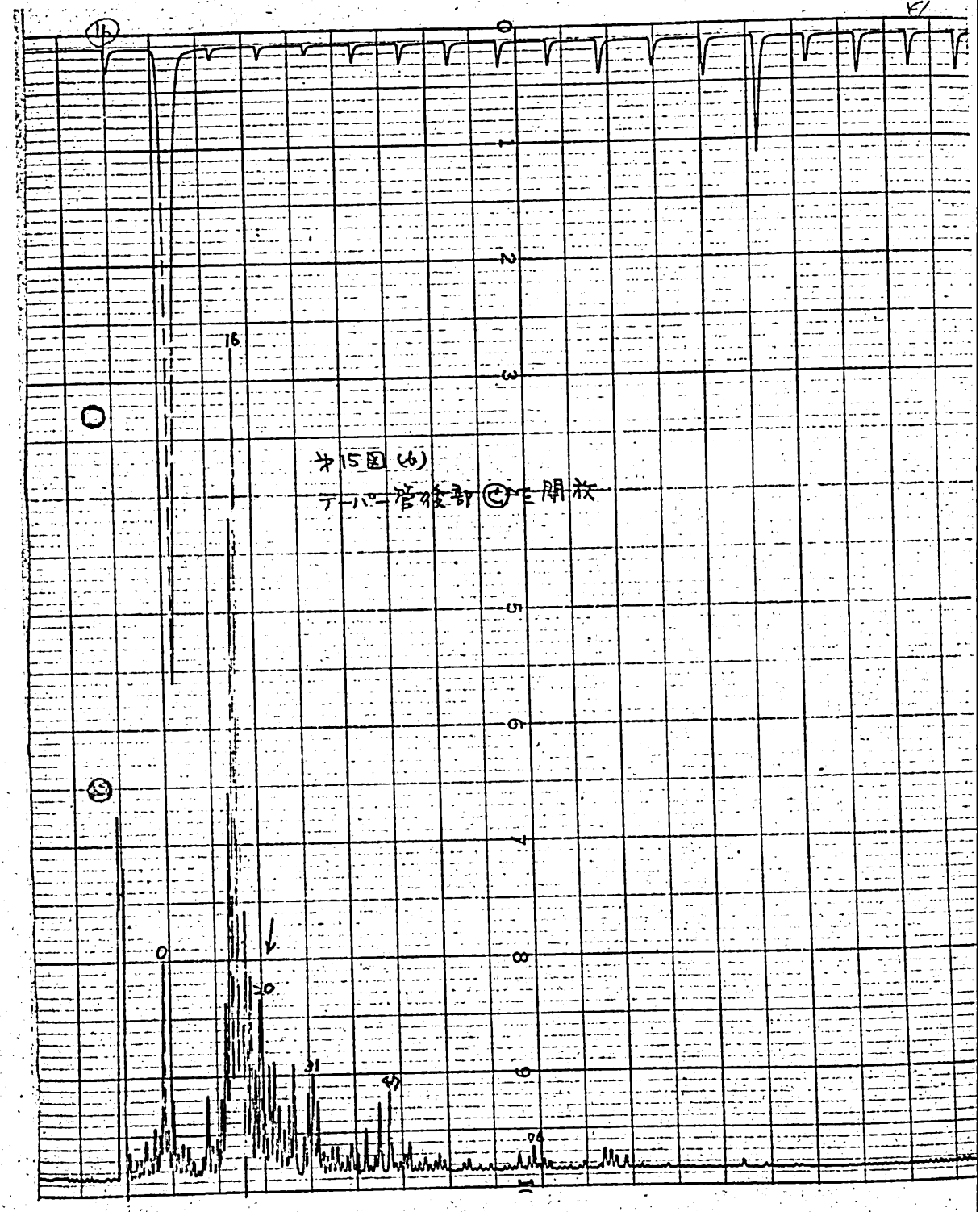
5



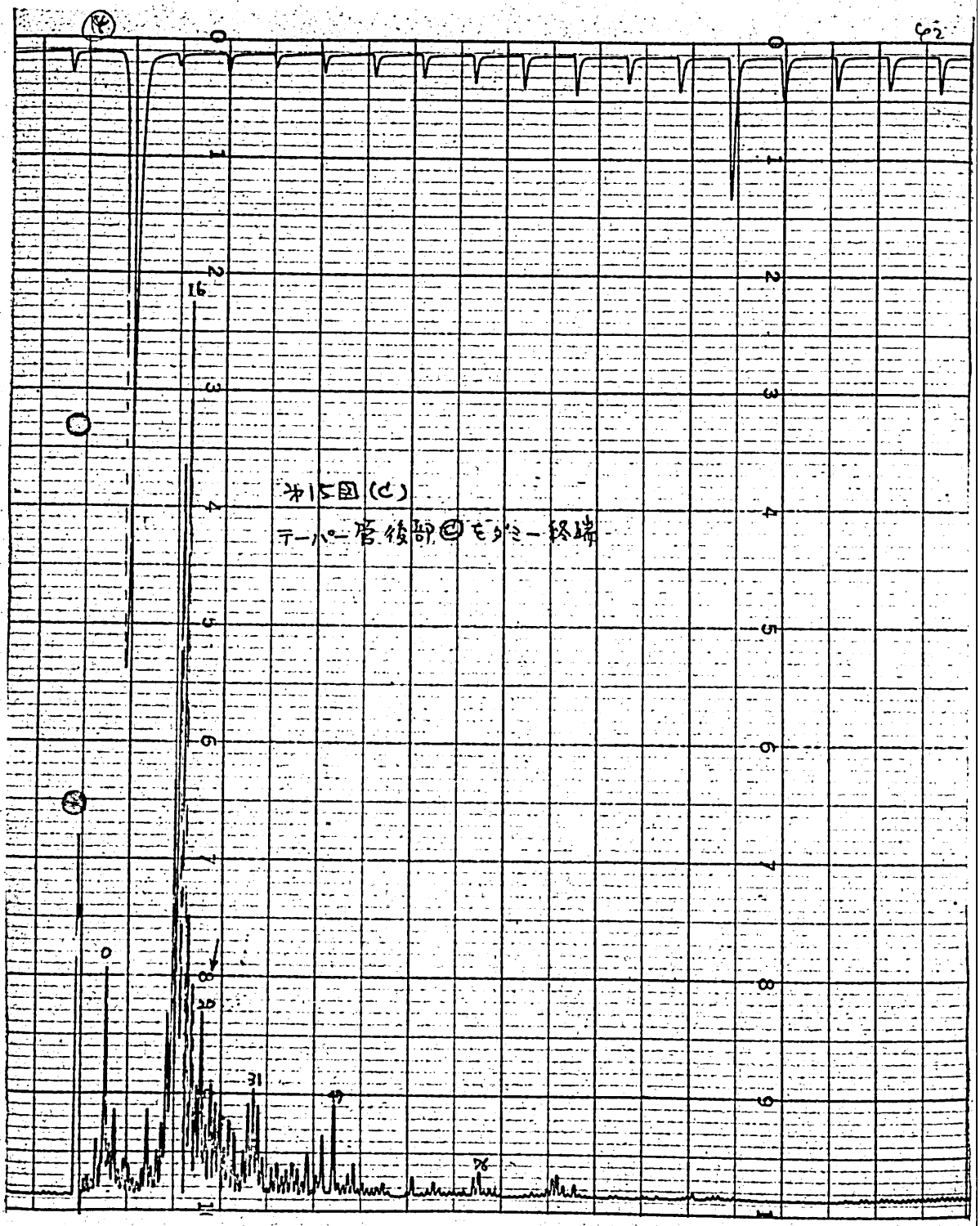
第14回 (C)
姿態変換器通過後 ダミー終端



9

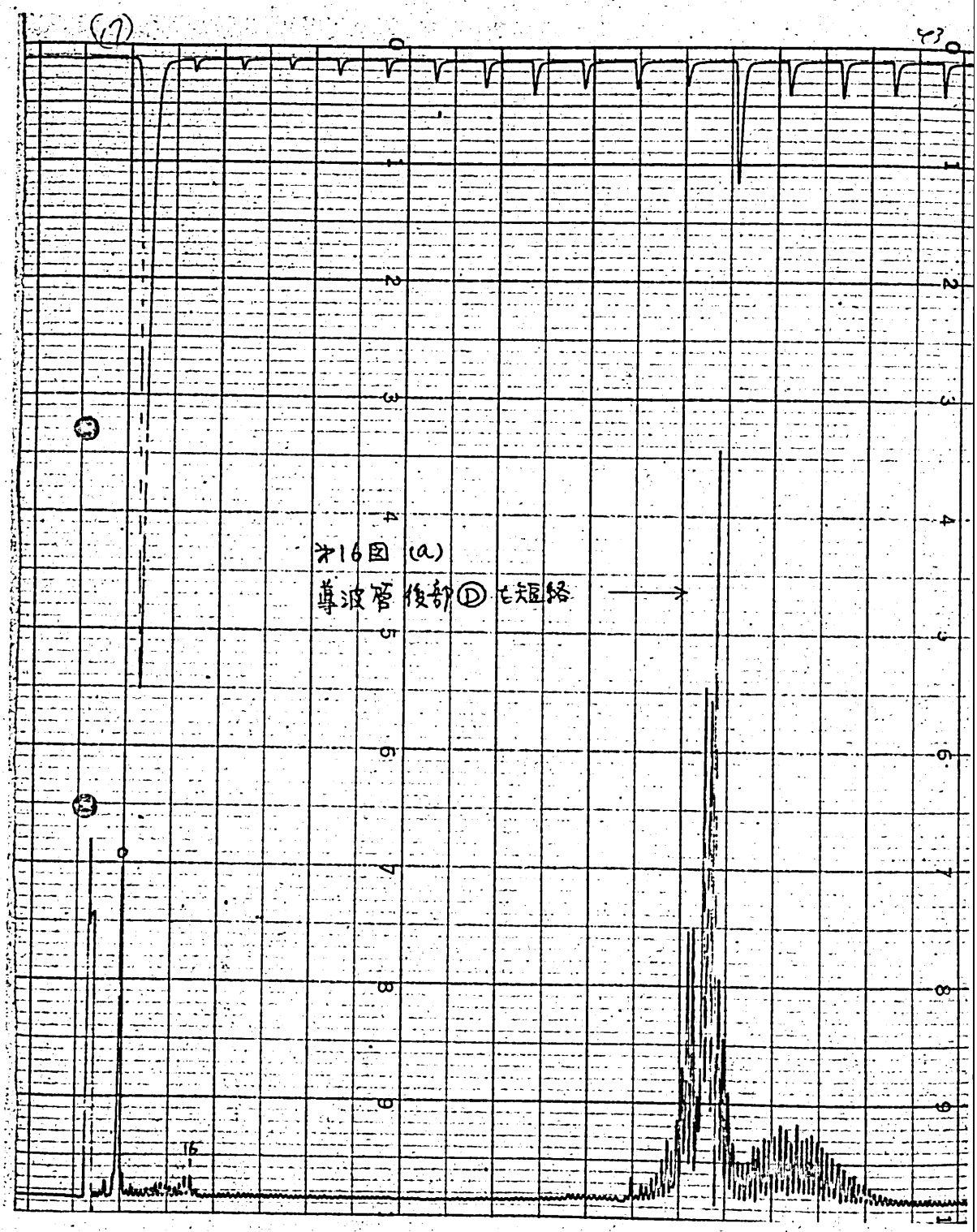


第15図 (b)
テーパー管後部Ⓒ左開放

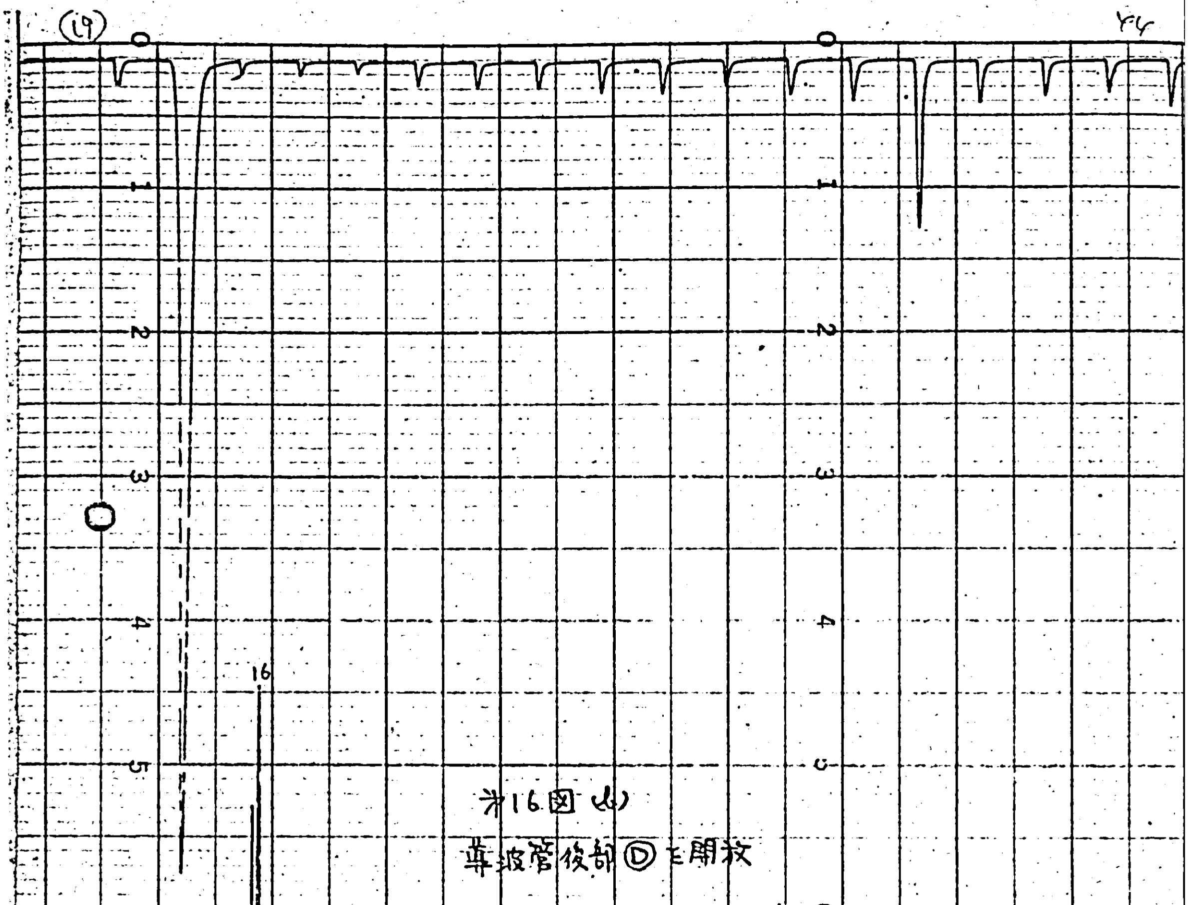


第15図(C)

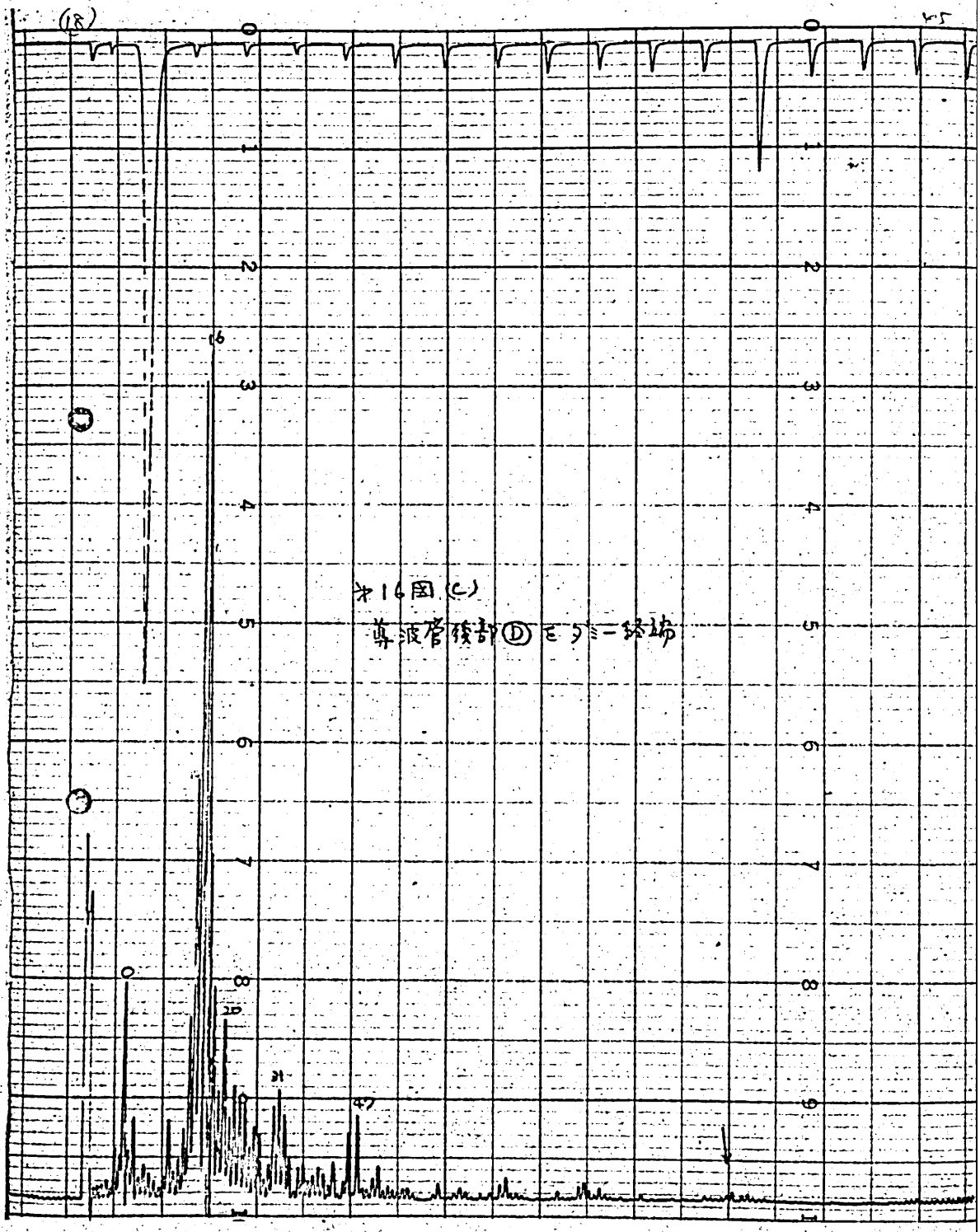
テーパー管後部◎モダミー終端



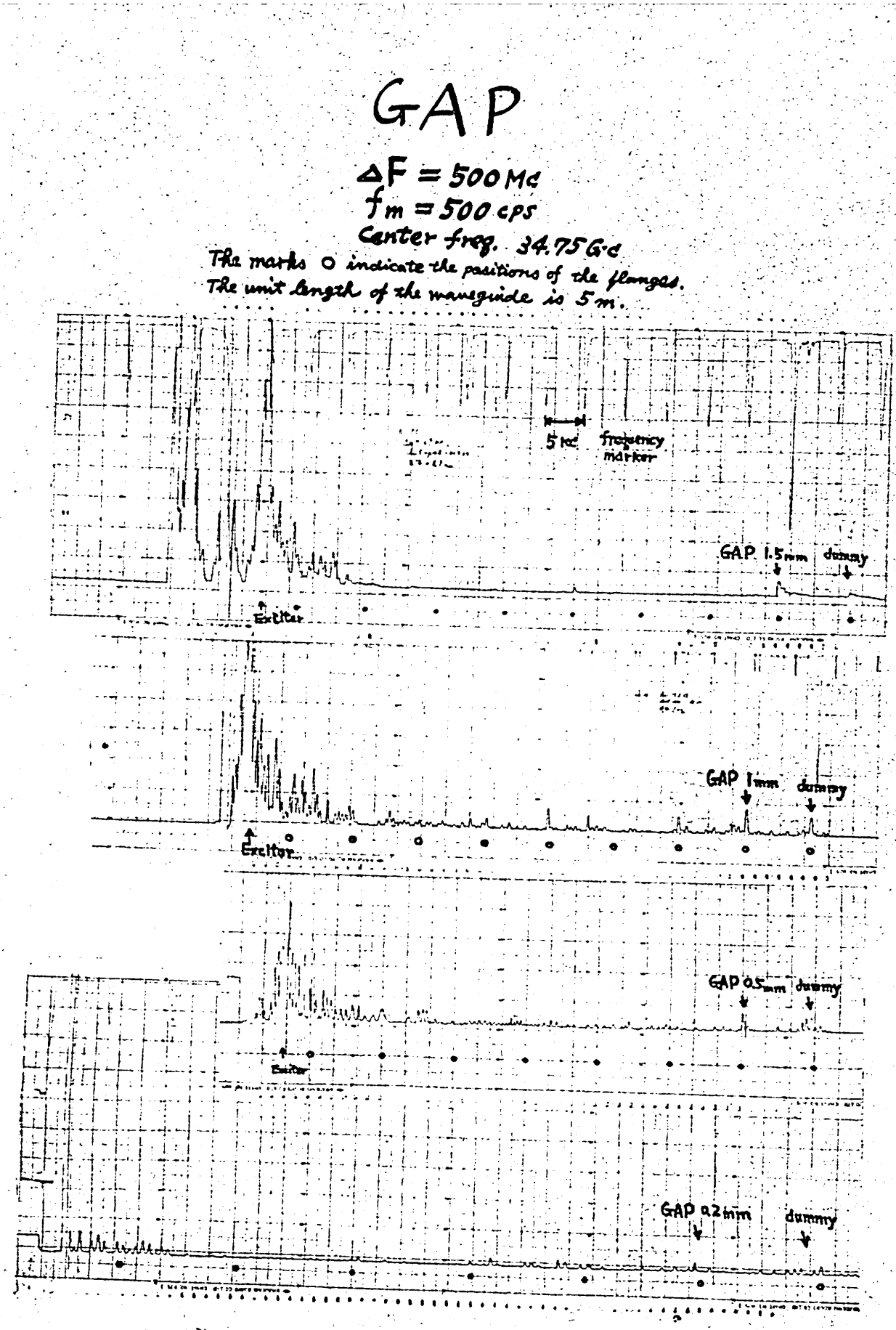
第16図 (a)
導波管後部Ⓓと短絡 ⟶



第16図 (d)
導波管後部Ⓓを開放



第16図(C)
導波管後部Ⓓをダミー終端

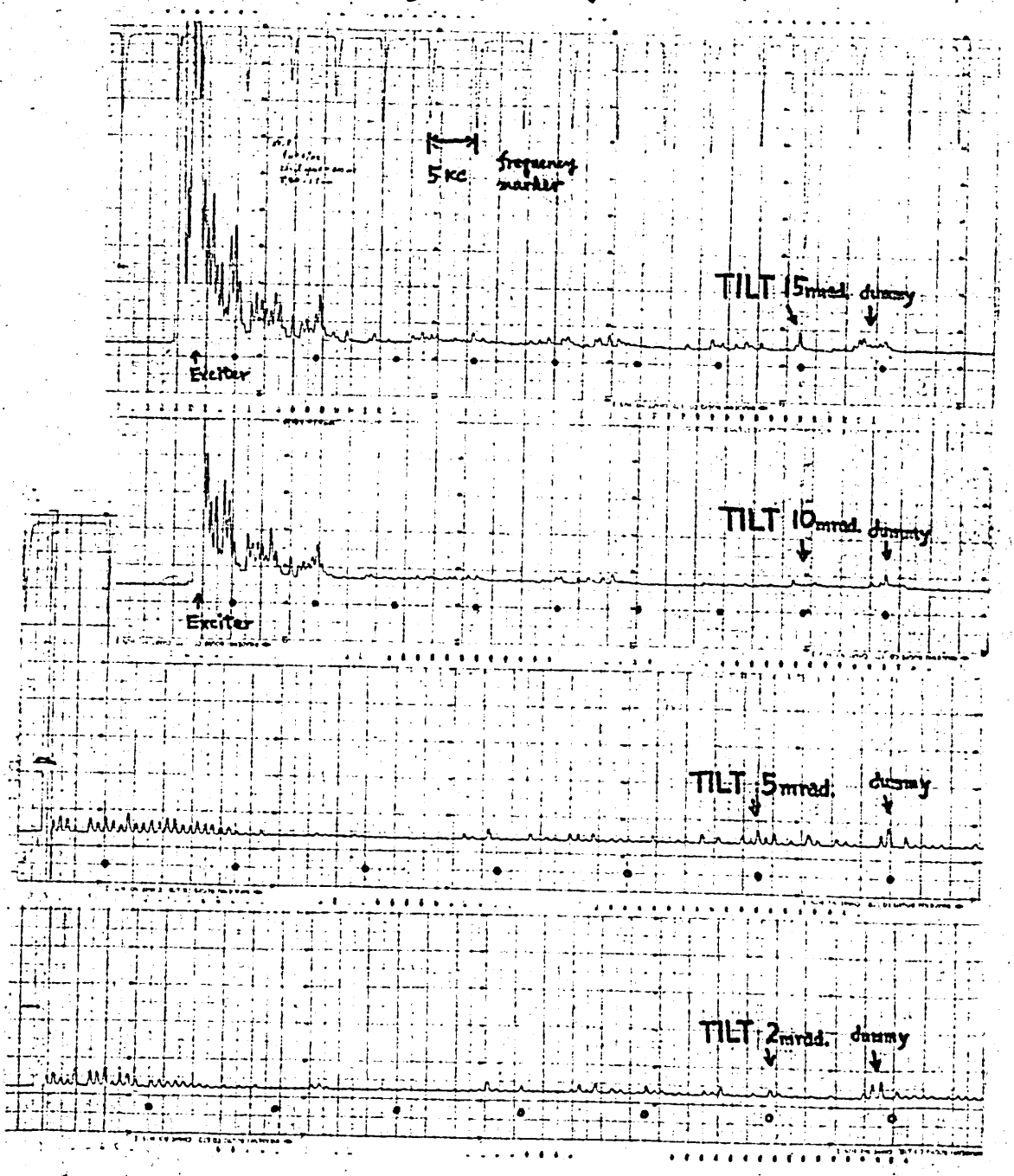

GAP
ΔF = 500 Mc
fm = 500 cps
Center freq. 34.75 G·c
The marks ○ indicate the positions of the flanges.
The unit length of the waveguide is 5 m.
5 mc
frequency marker
GAP 1.5mm
dummy
Exciter
GAP 1mm
dummy
Exciter
GAP 0.5mm
dummy
Exciter
GAP 0.2mm
dummy

第17図　すきまの測定

TILT

$\triangle F = 500MC$
$f_m = 500$ cps
Center freq. 34.75Gc

The marks ○ indicate the positions of the flanges.
The unit length of the waveguide is 5m.

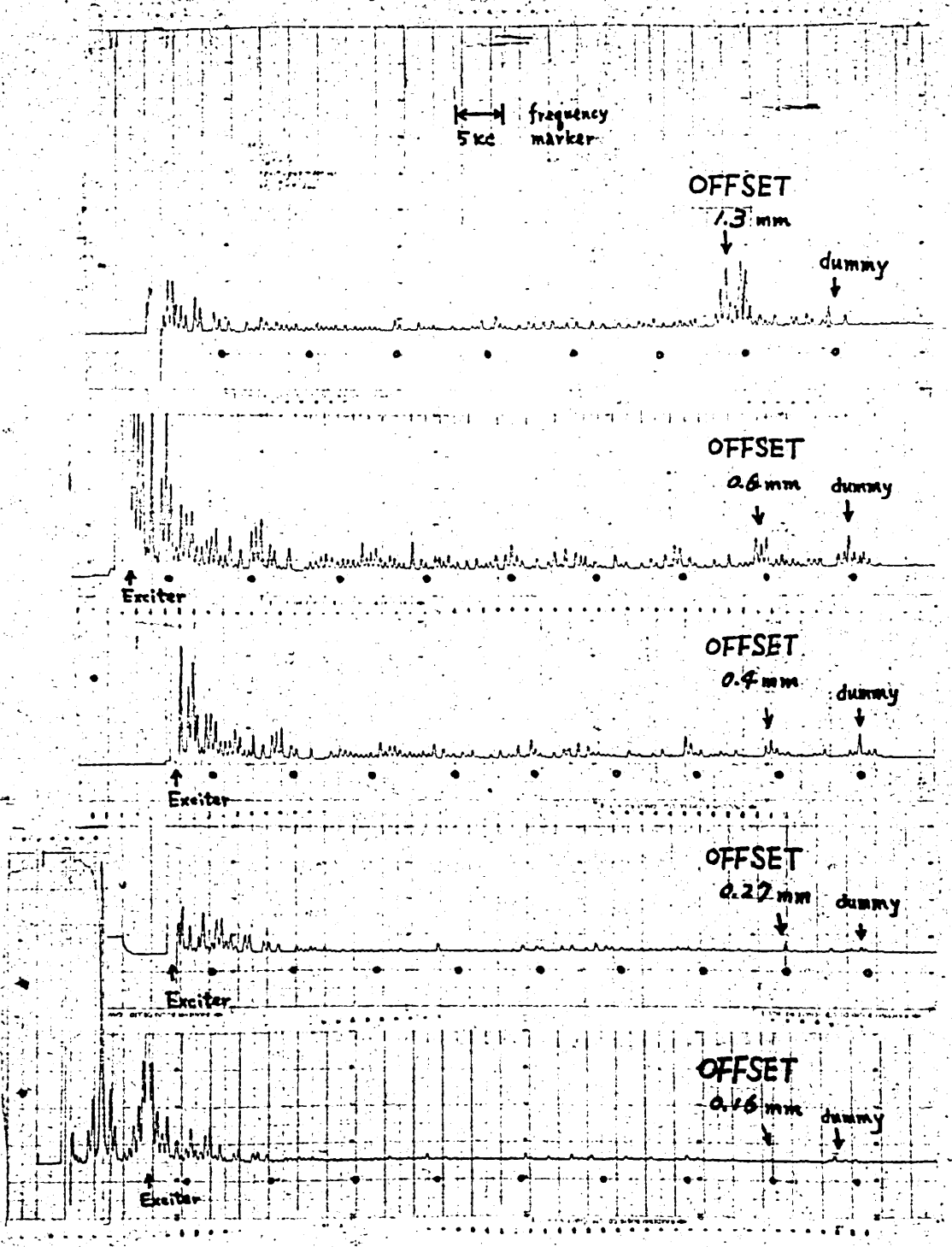


第18図　折れまがりの測定

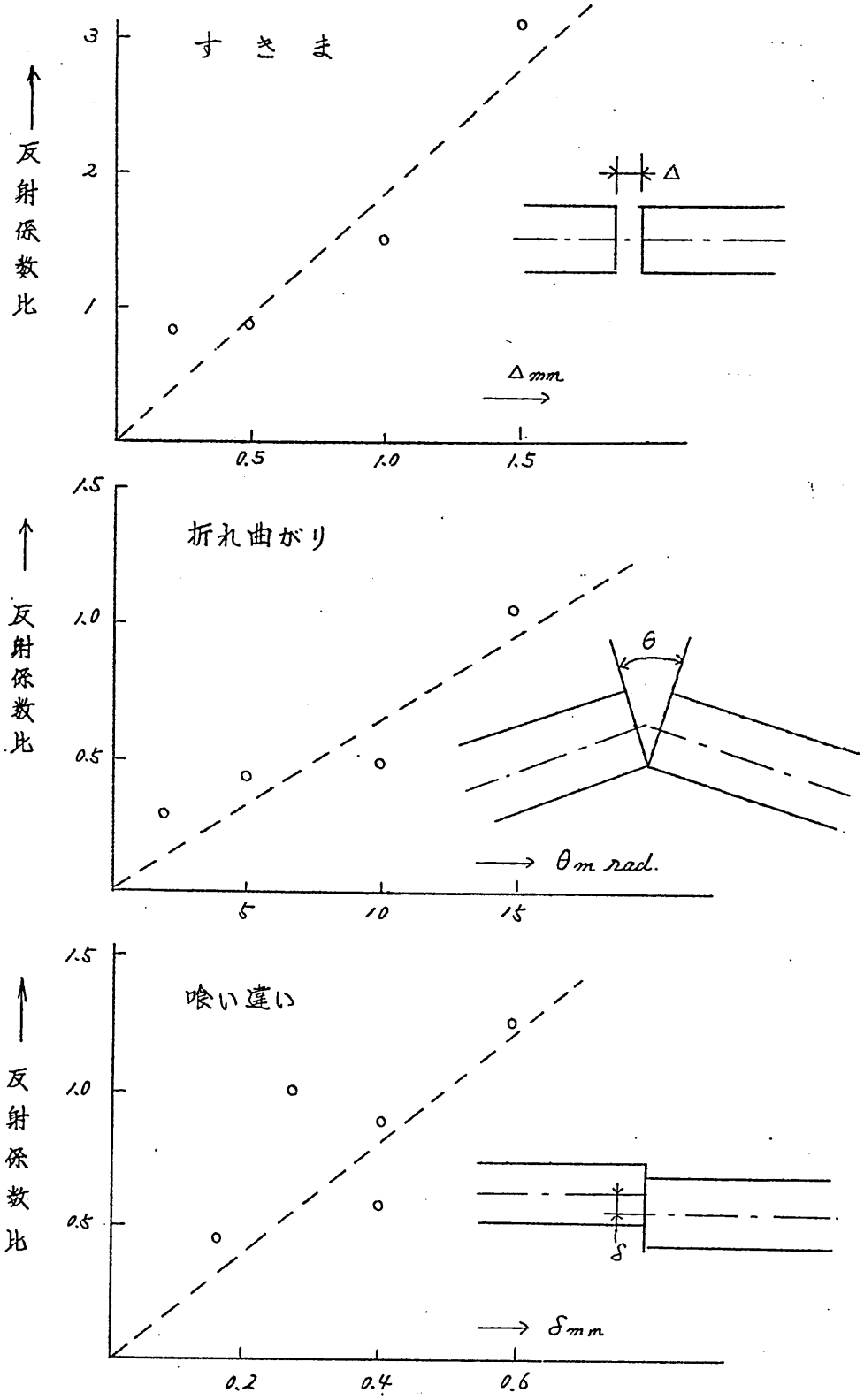
OFFSET

$\Delta F = 500MC$
$fm = 500 cps$
center freq. 34,756c

The marks ○ indicate the positions of the flanges.
The unit length of the waveguide is 5 m.



第19図　喰い違いの測定



第20図　不均等点の反射係数比

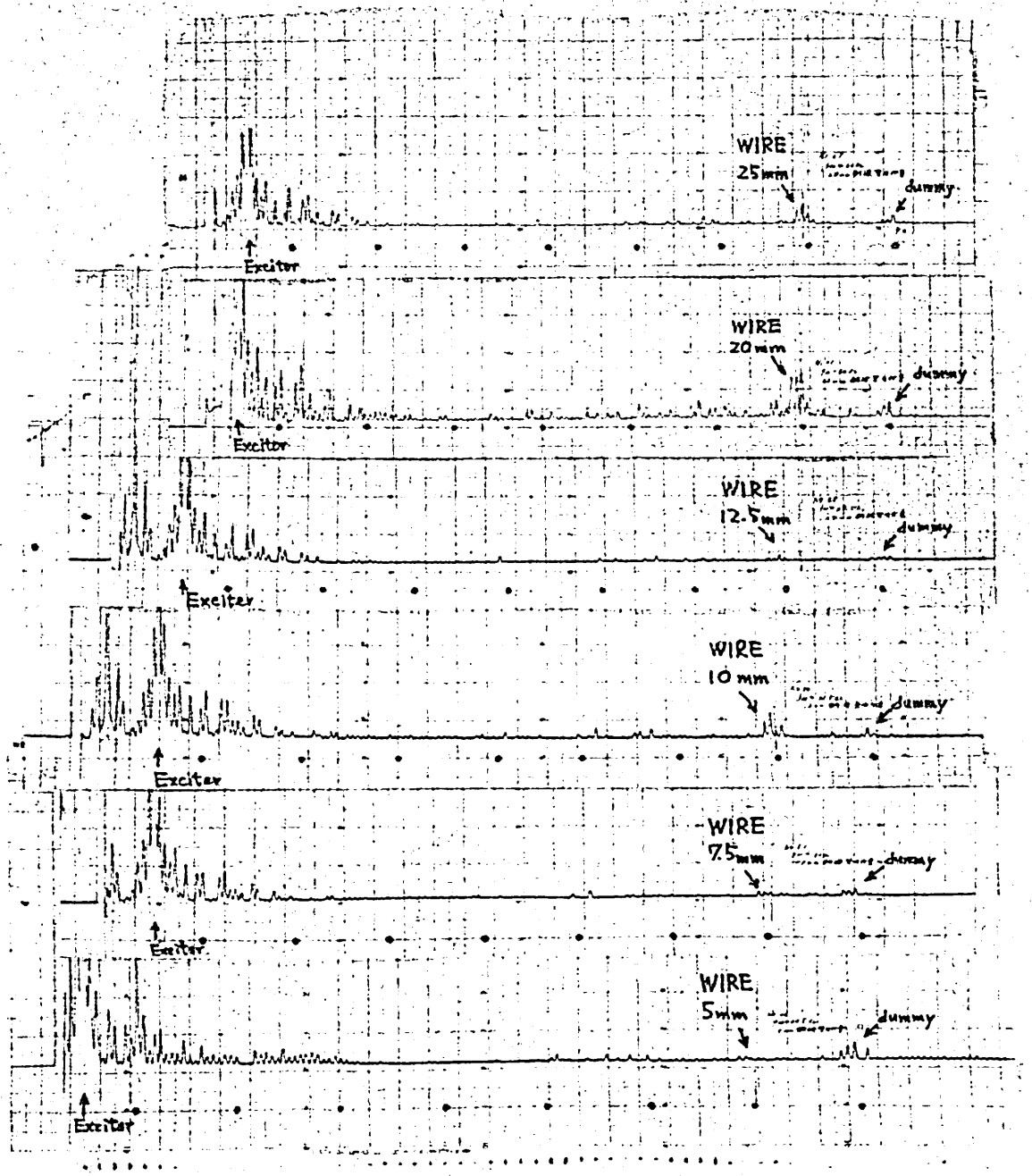
ATTACHED WIRE (0.2 φ) TO THE WALL

$\Delta F = 500$ Mc

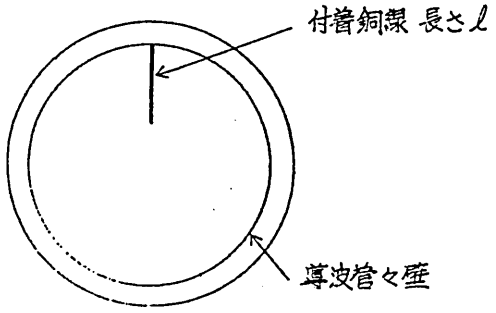
$f_m = 500$ cps

center frq. 34.75Gc

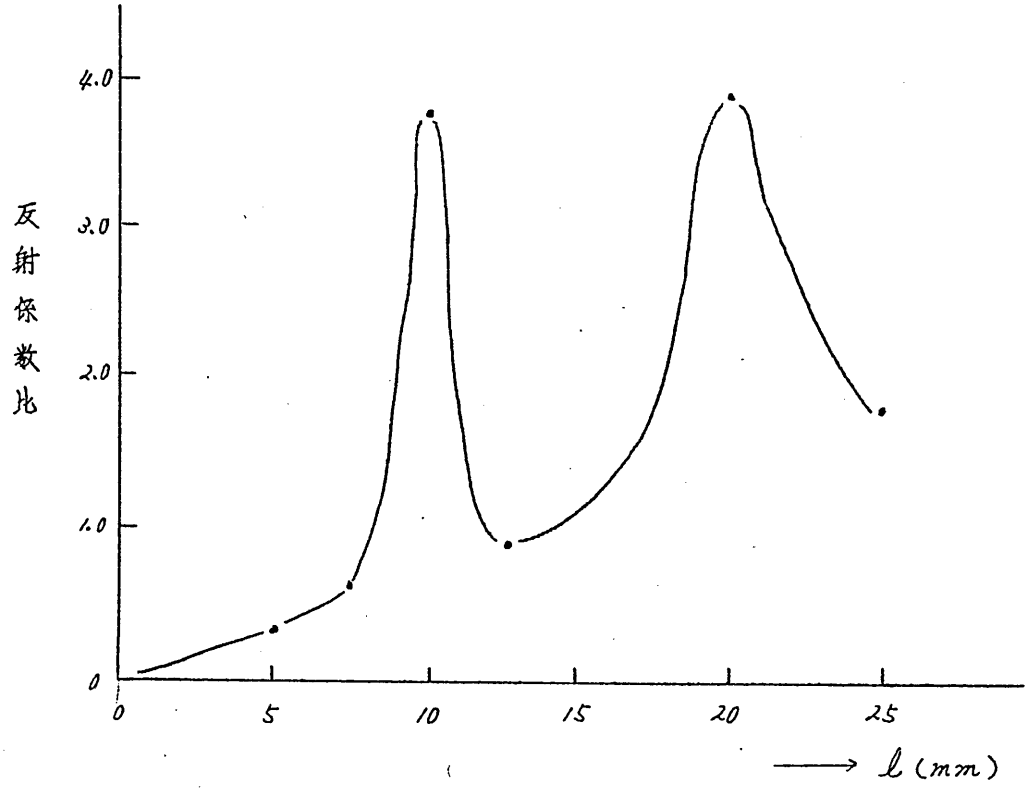
The marks ○ indicate the positions of the flanges.
The unit length of the waveguide is 5 m.



第21図　付着銅線の測定



第22図　銅線の管内付着



第23図　付着銅線の反射係数化

4.3　不均等点の測定

51φmm の銅管外装らせん導波管 40m（又は 35m）を直線状に架設し．最後部の接続部にすきま．折れ曲がり．喰い違いなどを故意に設けて観測した。すきまはバットフランジの締め付けボルトの部分にワッシャーを一様に入れ．折れ曲がりはワッシャーを片方だけに入れてそれぞれ模擬的に実現した。喰い違いはオスフランジ同志を対向させて軸心を喰い違わせ．depth micrometer で測定した．前節に述べた多重反射影響の範囲を短くするためにFMレーダー本体と姿態変換器との距離は約1.2mにしてある．すきま．折れ曲がり．喰い違いに対する分析波形図が第17～19図に示されている。各分析波形図は必ずしも連続した実験として行っていないので．少しずつ利得が異なっており、掃引周波数巾 ΔF も若干異なる。

従って不均等点の近傍以外のスペクトラムが異なっているものがあるが．これは条件の設定が必ずしも一定でないためと思われる。不均等点反射量が小さいと雑音のような部分にマスクされてしまうことになるが．分析波形図によれば．検知できる限界は．すきまでは 0.2 mm 程度，折れ曲がりは 5 mrad 程度．喰い違いは 0.3 mm 程度と考えられる。なおこれらの測定を不要姿態波衰の大きい鉄管外装らせん導波管を用いて行ってもほぼ同様の結果が得られた。今の測定ではどこに不均等点があるかはあらかじめわかっているので対応する不均等点が容易に識別できるが．不均等点の有無を検出するには前節でも触れたようにテーパー管後部をダミー終端として測定し．その分析波形図と被測定導波管の分析波形図とを比較して判断を下せばよい。又．テーパー管後部をダミー終端として得た分析波形図の中で

の異常点（例えば第15図(C)の76本目のスペクトラム）に対応する距離に異常点があるかどうかを知るには，掃引周波数 ΔF を少し変えて異常点の位置を移動させて同様の操作を行えばよい．

不均等性の大小による反射係数の変化を比較するために不均等点に対応するスペクトラムの電力和を電圧に換算し，基準反射点（この場合は木製のダミー）の電圧反射量との比率を求め設けられた，すきま，折れ曲がり，喰い違いの各量との関係を第20図に示した。

らせん導波管の接続部に発生する可能性のある不均等性としては，巻線のほぐれがある。これを模擬的に実現するために接続部の近くに 0.2 ϕmm の銅線を第22図のように付着して観測した。この分析波形図を第21図に示す．先ほどと同様，電圧反射係数比を求めたのが第23図である。この図をみてわかることは反射係数は付着銅線の長さに比例していないことで，実験例では 10 mm と20 mm に反射係数のピークが観測された。この原因については明らかではないが長さによって発生不要姿態が異なるためではないかと思われる。分析波形図によれば，10 mm 程度以上の巻線のほぐれは検知できるものと思われる。

近似理論では，折れ曲がりや喰い違いでは，TE_{11}，TE_{12}，TE_{1n} などの各姿態が発生して反射するとされている．（第6表）らせん導波管の 35 GC 帯でのこれらの姿態の減衰定数は未測定であるが，50 GC 帯での測定結果から類推して 35 m での減衰量は鉄管外装らせん導波管の場合 100 dB 以上と考えられ不要姿態は無視してよいと思われる．そうだとすれば前節で得

第 6 表

近似理論による折れ曲がり、喰い違いにおける
各姿態反射量 （文献(3)による）

	変位量	TE_{11}	TE_{12}	TE_{13}	TE_{14}
折れ曲がり	5 m rad.	-108 db	-100 db	-96 db	-94 db
喰い違い	0.3 mm	-78	-71	-67	-64

られた結果は TE_{01} 姿態が不均等点において反射された TE_{01} 姿態を検出したものである。すきまの場合は当然のことながら TE_{01} の反射波が出る。又折れ曲がりの測定は完全な折れ曲がり導波管でなく模擬的にワッシャーを入れて実現したために若干のすきまがある。（布設後の測定を目標にすればこの実験で充分である。何となれば、導波管そのものは布設前に端部の検査が充分に行われてからである。）用いたフランジの当り面の径は 95 ϕ mm であり ワッシャーは平面径 80 ϕ mm の位置に入っている。従って例えば 5 m rad. の折れまがりの時には導波管端部は小さい方で約 0.1 mm 、大きい方で約 0.4 mm のすきまがあることになり、この部分から出ている TE_{01} 姿態の反射波をも検出していることになる。接続部がスリーブ式などのように当り面の径がもう少し小さくなれば検出可能な折れ曲がり量はもう少し大きくなるだろうと思われる。喰い違いについては一次近似理論では TE_{01} 波が発生しないことになっているが、更に低いオーダーの反射波が検出されているものと思われる。これらの理論的な数値との比較については今後検討を要する。尚、距離分解能は第17～19図を参照すれば 1m 程度であり反射点の種類によっては数十 cm まで分解可能である。

5. 結　　言

35GC帯FMレーダーを試作し、それを用いてバットフランジを用いた51/8mmの円形導波管接続部における不均等点を測定したところ、測定しうる限界は、すきまは0.2mm、折れ曲がりは5mrad.　喰い違いは0.3mm程度であることがわかった。現在らせん導波管接続部の伝送特性を考慮した許容量は、すきまは線径の2.5倍、折れ曲がりは6分（1.6mrad.）、喰い違いは0.1mmとなっているので、周波数分析時の雑音を考慮しても現在の接続部許容量の数倍の変位量をもつ欠陥は検知できることがわかった。又巻線のほぐれについては反射係数比が必ずしもほぐれた線長に比例しないが10mm程度以上であれば検知できることがわかった。又分解能は1m以下であり反射点の種類によっては数十cmの測距精度があることがわかった。

本研究に際し、御指導いただいた東京大学工学部岡村総吾教授、柳井久義教授、設計理論に関して御検討いただいた東京大学大学院池田謙一氏、測定器を製作していただいた沖電気工業研究所大和久修三課長はじめスタッフの方々、実験の際御協力いただいた阪大学生伏見仁志氏、並びに導波管の特性解明で日頃御指導いただいている電々公社電気通信研究所藤井俊男氏ス無線研究室長はじめスタッフの方々に深謝する。又、本研究に関して御配慮いただいた当社杉正男通信事業部長、楠井健蔵技術を始め関係各位に感謝の意を表する。

文　献

(1) 池田謙一　「FMレーダー方式による導波管不均等性の測定」昭35. 3. 修士論文
柳井久義，池田謙一　「FMレーダー方式による導波管不均等性の測定」　昭35. 11. 電気通信学会全国大会 1294.

(2) 畑　雅恭　「ミリ波BWTの広帯域周波数掃引の直線性制御」昭37. 3. ミリ波の開発に関する総合研究会資料.
大和久修三，畑　雅恭，村上　董　「遅延素子によるミリ波BWOの周波数掃引の直線性改善」　昭38. 11. 電気通信学会全国大会 1318.

(3) 唐水幸夫　「ミリ波の伝送」電気通信工学講座. 共立出版

Excitation of Longitudinal Plasma Oscillations Near Electron Cyclotron Harmonics

A. HASEGAWA

Faculty of Engineering Science, Osaka University,

Microwave absorption near the harmonics of the electron cyclotron frequency exhibits structure (the peaks a,b,c,d ... in Fig. 1) which consists of many lines as a function of static magnetic field.[1] Similar, but less prominent, lines were also reported in microwave emission.[2] The origin of this resonant structure has not been understood heretofore. In this note we present the observed properties of these resonances and develop the theory for them. We attribute the resonances to excitation of longitudinal plasma oscillations similar in nature to Tonks-Dattner resonances so extensively studied in plasma columns in the absence of a static magnetic field.[3,4] However, in the presence of the magnetic field and near cyclotron harmonics the nature of the resonances differs in an essential way from those in the absence of a field.

As shown most impressively by Nickel, Parker and Gould,[3] the resonances observed in the absence of a magnetic field result from the excitation of electron plasma oscillations. In an infinite, spatially uniform plasma they obey the dispersion relation

$$\omega^2 = \omega_p^2 + (eT/m)k^2 \qquad (1)$$

with $\omega_p = (ne^2/m\varepsilon_o)^{\frac{1}{2}}$ the electron plasma frequency and T the temperature (measured in eV). It is clear from Eq. (1) that in a uniform plasma the frequency of oscillation must exceed the

plasma frequency. In a plasma column of finite radius, whose density decreases from the axis towards the walls, oscillations can be excited at a frequency lower than the plasma frequency at the axis of the column, ω_{po}, but they are then confined to a narrow annular region near the wall of the tube, where the plasma frequency is below the oscillation frequency. As shown by Nickel et al,[3] and by others,[4] the actual frequency spectrum depends strongly on the nature of density gradients in and near the sheath.

In the presence of a magnetic field plasma oscillations can be excited at frequencies lower than subharmonics of the electron cyclotron frequency, provided the plasma frequency exceeds a certain critical value (which is a function of magnetic field). These oscillations are thus confined to a region near the axis of the plasma column and are relatively insensitive to what happens in the sheath. They are responsible for the resonances shown in Fig. 1.

The absorption spectrum reproduced in Fig. 1 was obtained as follows. The positive column (8mm in diameter) of a hot-cathode arc discharge in Helium was inserted coaxially into a cylindrical cavity oscillating in a TE_{011} mode. The resonant frequency of the empty cavity was 5000 mc/s. A static magnetic field uniform over the volume of the plasma to better than 0.5% was applied parallel to the axis of plasma column, and the microwave absorption by the plasma was measured as a function of the magnetic field (keeping the microwave frequency on cavity resonance) by monitoring the microwave power transmitted through

the cavity. The TE_{011}-mode simulates very well the interaction between a cylindrical extraordinary wave propagating radially in a plasma column. The broad absorption background results from the cold-plasma resonance at $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$; its shape is governed by radial density gradients within the plasma column.[5] Superimposed on this background absorption is the resonant structure under discussion here. The peak A is not part of the series of peaks a,b,c, ..., etc. It is thought to result from resonant absorption of the extraordinary electromagnetic wave itself. At constant microwave and plasma frequencies, the series of peaks a,b,c,d . . . appear at fields higher than $B_n = \frac{m\omega}{en}$ where n = 2,3,4 ... . Their amplitude is largest for n = 2, but they are still clearly discernible for n = 3 and 4. As the plasma frequency is increased, the lines crowd closer together and appear to approach the value $B = \frac{m\omega}{en}$. This experimentally observed behavior is plotted in Fig. 2a.

In order to account for this resonant structure we adopt the following model. The cylindrical plasma column is replaced by a plasma slab with its faces at $x = \pm \ell$. The density is assumed to vary such that $\omega_p^2 = \omega_{po}^2\, g(x)$ where ω_{po}^2 is the plasma frequency at x = 0 and g(0) = 1. The dc magnetic field is along the z-axis and the oscillations propagate only along x, that is, in the direction along which there is a density gradient. This model proved sufficient to account for most aspects of the Tonks-Dattner resonances in the absence of a magnetic field.[4] It has the great virture that for certain quite realistic g(x) closed form solutions will prove possible.

Unlike the case with no magnetic field it is not sufficient to use the first two moments of the Boltzmann equation to describe the particle density and current. To bring out the resonant features near cyclotron harmonics, the linearized Boltzmann equation must be employed.[6] This equation may be formally integrated (as shown by Bernstein[7]) if the spatial derivative d/dx is retained as an operator.[8] Then the use of the distribution function in Poisson's equation yields

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -2\pi\omega_{po}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{-\infty}^{\infty} du(-1)^n$$

$$\times \left[1 + \frac{\omega}{n\omega_c}\right]^{-1} I_n^2\left(\frac{u}{\omega_c}\frac{d}{dx}\right)\left(\varphi g \frac{df_o}{du}\right) \quad . \qquad (2)$$

Here, φ is the potential ($E = -d\varphi/dx$), f_o is the unperturbed electron distribution function in velocity space, $u = (v_y^2+v_z^2)^{\frac{1}{2}}$, I_n is the modified Bessel function of order n, and $\omega_c = eB/m$ is the cyclotron frequency. The derivative d/dx is to operate on the functions to the right of it. We take for $f_o(v_z,u)$ a Maxwellian at temperature T.

If the width of the plasma slab, 2ℓ, is much larger than the Larmor radius, the Bessel function can be expanded with $(u/\omega_c)(d/dx)$ as the expansion parameter. To study the absorption near $\omega \simeq 2\omega_c$ it is sufficient to take those terms in the expansion which are linear in the temperature T. This leads to the following equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{\lambda^2}\left(E - \frac{1}{g(x)}\right) y = 0 \qquad (3)$$

where $y = g(x)\, d\varphi/dx$,

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{(\omega^2-\omega_c^2)(4\omega_c^2-\omega^2)}{(3eT/m)\ \omega_{po}^2}$$

and

$$E = \frac{\omega_{po}^2}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Note that λ^2 and E are positive when $\omega_c < \omega < 2\omega_c$. Equation (3) has the form of a Schroedinger wave equation with E and $g(x)^{-1}$ being regarded as kinetic and potential energy respectively. For a uniform density, $g(x) = 1$, the solutions are sinusoids, with eigenvalues such that $(E-1) = \lambda^2\left(\frac{n\pi}{2\ell}\right)^2$, or

$$(4\omega_c^2-\omega^2)(\omega_c^2-\omega_p^2-\omega^2) - \left(\frac{3eT}{m}\right)\omega_p^2\left(\frac{n\pi}{2\ell}\right)^2 = 0 \qquad (4)$$

with $n = 1,2 \ldots$. Equation (4) is nearly, but not quite, sufficient to account for the experimental results. It fails mainly in that it predicts too small a spacing between the resonal lines increasing as n^2 while the experimentally observed lines are nearly uniformly space.

As in the Tonks-Dattner case, this discrepancy is resolved by taking account of density variation along x. We take $1/g(x) = 1 + \gamma(x/\ell)^2$ as a good approximation for the actual density variation in the plasma. Then Eq. (3) becomes

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{\lambda^2}\left[E - 1 - \gamma\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right] y = 0 \qquad (5)$$

Equation (5) is immediately soluble in terms of the parabolic cylinder function[9] as

$$y = c_1[D_\nu(x/c) + D_\nu(-x/c)], \text{ (even about } x = 0)$$

$$\text{or} \quad y = c_2[D_\nu(x/c) - D_\nu(-x/c)], \text{ (odd about } x = 0) \tag{6}$$

where

$$c = \left[\frac{3\omega_{po}^2 \frac{eT}{m} \ell^2}{4\gamma(\omega^2-\omega_c^2)(4\omega_c^2-\omega^2)}\right]^{\frac{1}{4}} \tag{7}$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{(4\omega_c^2-\omega^2)\ell^2}{3\gamma\omega_{po}^2 \frac{eT}{m}(\omega^2-\omega_c^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}(\omega_c^2 + \omega_{po}^2 - \omega^2) - 1\right] \tag{8}$$

The function $D_\nu(x/c)$ has $(\nu + 1)$ zeros. It vanishes exponentially for large x/c, that is, it exhibits a wave-like behavior near $x \simeq 0$ [actually where $E - 1 - \gamma(x/\ell)^2 > 0$], and a "tunneling"-like behavior of a particle trapped in a parabolic potential well for large x/c, that is, for x near ℓ.

The eigenvalues of solutions are obtained by applying the boundary condition that y vanishes at $x = \pm \ell$,

$$D_\nu(\ell/c) \pm D_\nu(-\ell/c) = 0 \tag{9}$$

Equation (9) is solved for ω_c/ω as a function of ω_{po}^2/ω^2 and shown in Fig. 2 (as solid curves) for T = 10 eV, ℓ = 2.5mm and ν = 0.25. As $[D_\nu(x) + D_\nu(-x)]$ and $[D_\nu(x) - D_\nu(-x)]$ are even and odd functions respectively, the + curves represent radiation peaks and the - curves the absorption curves. [Note that the ac density is essentially proportional to the derivative of the D_ν functions and "odd" in density gives the dipole-type radiation].

For certain values of ω_{po} approximate solutions with a simple physical interpretation may be constructed. For small ω_{po}, E is small and $[E - \gamma(x/\ell)^2 - 1]$ is negative. As ω_{po} is increased, $[E - \gamma(x/\ell)^2 - 1]$ becomes positive but only near $x = 0$. Then, the wave is trapped by the potential well and is quantized by it rather than by the walls at $x = \pm \ell$. Such quantization condition is $\nu + 1 = n$, where $n = 1,2 \ldots$. The dotted curves in Fig. 2 show the results of such quantization with ν obtained for Eq. (8). It can be seen that the approximate solution very well approximates the exact one at low ω_{po}. As ω_{po} increases, the boundary at $x \pm \ell$ becomes more and more important and dotted curves deviate from the solid ones. However, the spacings of the curves in ω_c/ω remain fairly uniform because the zeros of $D_\nu(x)$ crowd closer for large x. In the approximate solutions there is only one independent parameter, $\ell^2/\gamma T$.

The agreement between the calculated and observed curves is sufficiently good to lend credence to the model adopted. It can be improved (or made worse) by changing γ, T, or ℓ. This, we feel, is not worth doing, because the actual experimental geometry is cylindrical and not planar, and not enough is known about actual density distribution in the presence of a magnetic field.

Acknowledgments

We wish to thank Drs. J. A. Morrison and J. McKenna for helpful discussions regarding the validity of the method used in solving the Boltzmann equation.

REFERENCES

1. S. J. Buchsbaum, Bull. Amer. Phys. Soc. 9, 317 (1964); S. J. Buchsbaum and A. Hasegawa, Bull. Amer. Phys. Soc. (to be published), Denver Meeting (1964).
2. K. Mitani, H. Kubo and S. Tanaka, J. Phys. Soc. Japan 19, 211 (1964).
3. J. Nickel, J. Parker and R. W. Gould, Phys. Rev. Letters 11, 183 (1963).
4. A. Dattner, Ericsson Technics 8, 1 (1963); F. W. Crawford, Physics Letters 5, 244 (1963); A. M. Messiaen and P. E. Vandeplass, Physics 28, 537 (1963); F. C. Hoh, Phys. Rev. 133, A1016 (1964).
5. G. E. Bekefi, J. D. Coccoli, E. B. Hooper and S. J. Buchsbaum, Phys. Rev. Letters 9, 6 (1962).
6. In the linearized Boltzmann equation we neglected the linear term $f_1 E_o$ as compared with the term $f_o E_1$, where the subscripts 0 and 1 refer to unperturbed and perturbed quantities. Dimensional analysis shows that the neglected term is of the order $(\ell_D/\lambda)^2$ smaller than $f_o E_1$, where ℓ_D is the Debye length and λ is a measure of the wavelength of the oscillation.
7. I. B. Bernstein, Phys. Rev. 109, 10 (1958).
8. This method may be used to solve the Boltzmann-Maxwell equation for arbitrary finite geometries.
9. H. Bateman, Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill Book Co., Inc., (1953).

FIGURE CAPTIONS

Fig. 1. Microwave absorption (in relative units) in a plasma column as a function of magnetic field with current I as a parameter. The curves for different I's are displaced for display purposes.

Fig. 2. a) Position of peaks of a,b,c ... of Fig. 1 as a function of ω_{po}^2/ω^2. The values of ω_{po}^2 are deduced from the onsets of cold-plasma absorption in Fig. 1 due to resonance at $\omega^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$).

b) Calculated resonant frequencies of the odd (-) and even (+) solutions in a plasma slab. The solid lines are the solution of Eq. (9) and the dotted lines are given by $\nu + 1 = n$, $n = 1,2 \ldots$.

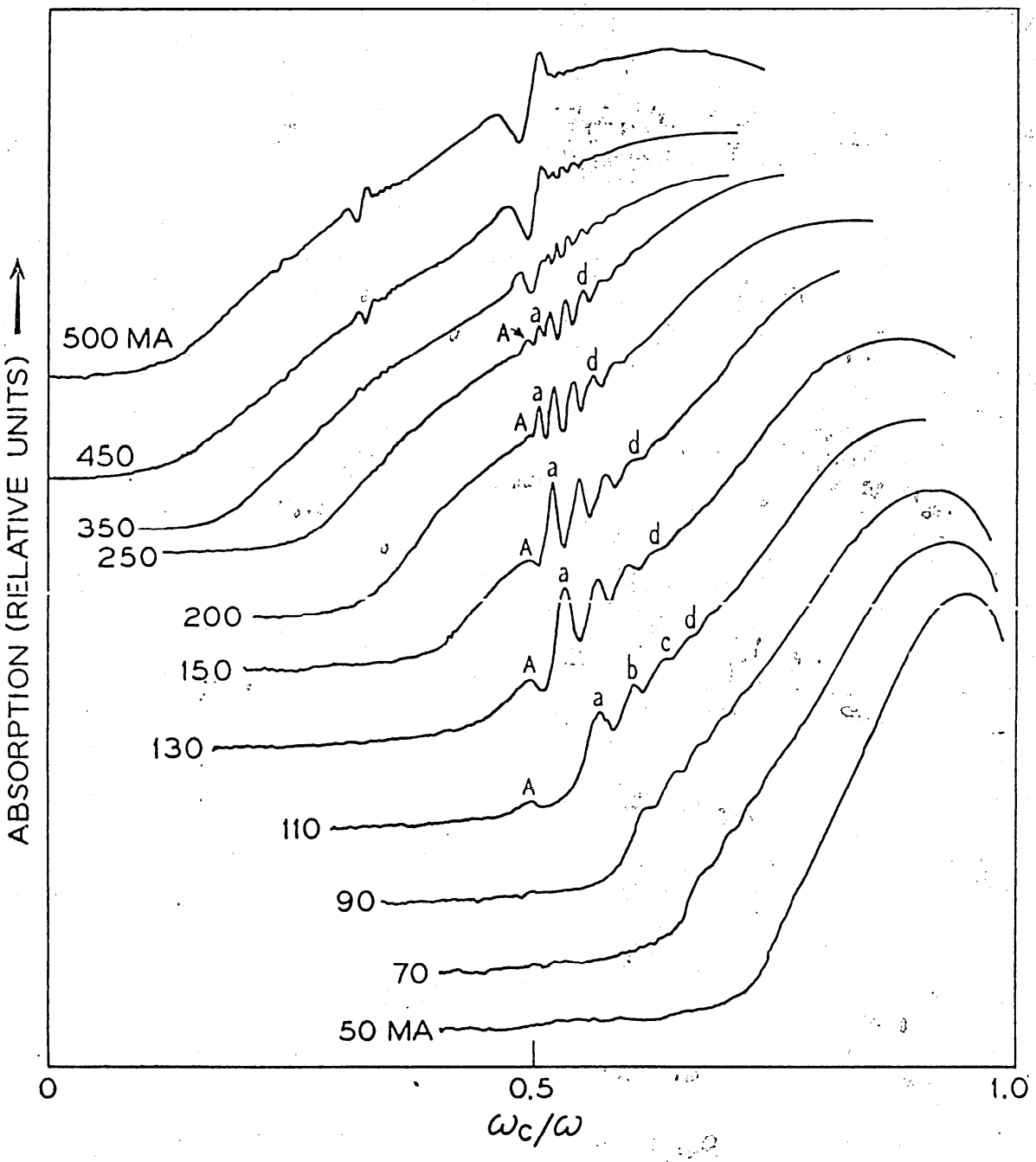

ABSORPTION (RIELATIVE UNITS)
500 MA
450
350
250
200
150
130
110
90
70
50 MA
A
a
b
c
d
0
0.5
1.0
ωc/ω

Fig. 1

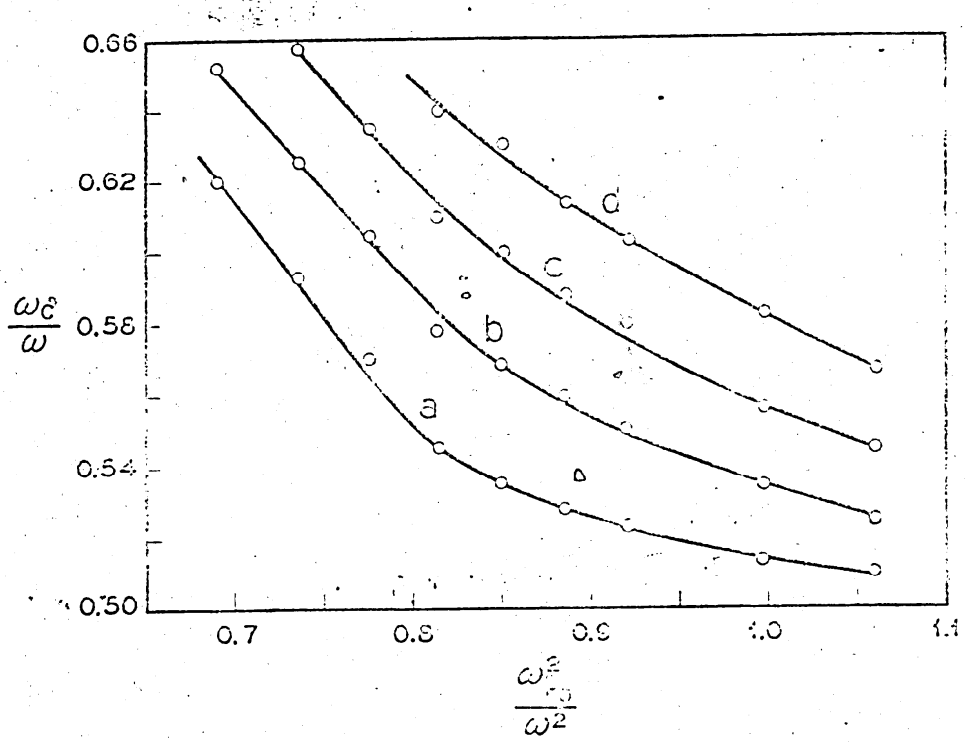

0.66
0.62
0.58
0.54
0.50
$\frac{\omega_c}{\omega}$
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
$\frac{\omega_{p_0}^2}{\omega^2}$
a
b
c
d

Fig. 2a

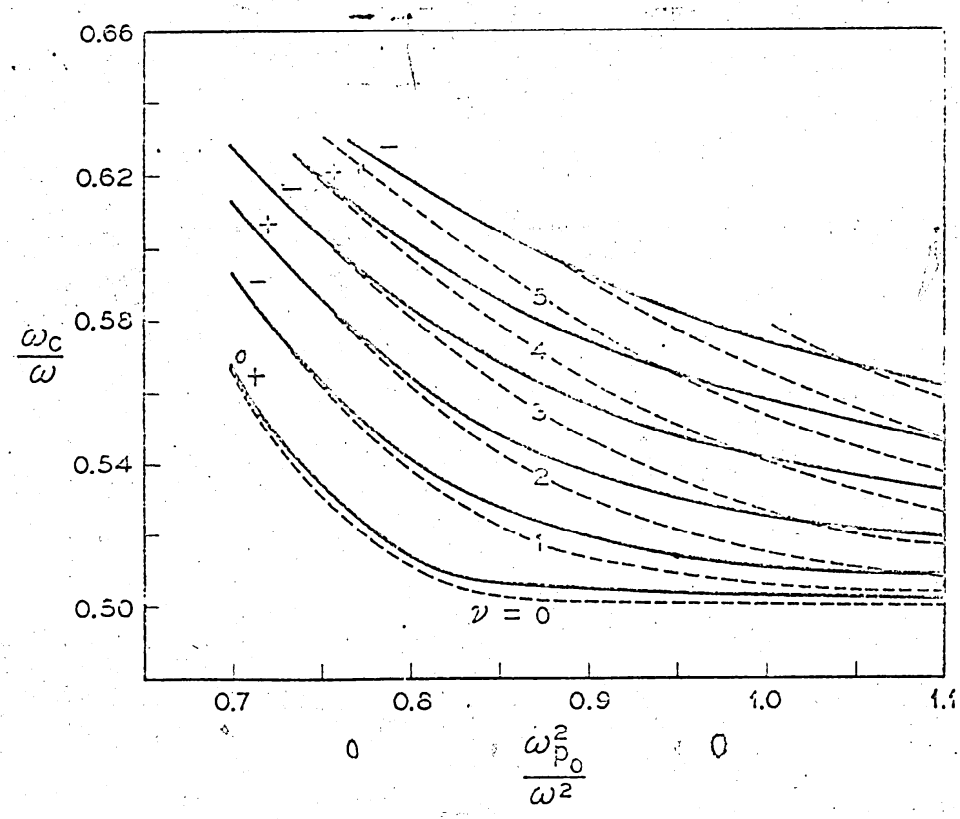

0.66
0.62
0.58
0.54
0.50
$\frac{\omega_c}{\omega}$
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
$\frac{\omega_{p_0}^2}{\omega^2}$
$\nu = 0$
1
2
3
4
5

Fig. 2b

輻射科学研究会資料

変形したFabry Perot共振器の理論

池上淳一

小倉久直

吉田靖夫

（京都大学工学部）

1964年11月

目　　次

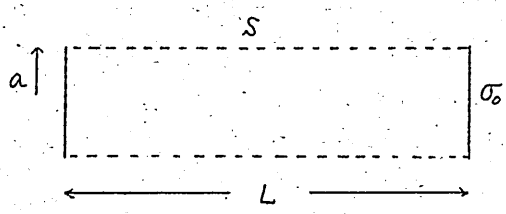
§1　序　　論 …… 1
　§1－1　空胴理論 …… 1
　§1－2　反射鏡の微小変形 …… 2
§2　運動方程式と摂動 …… 3
§3　Iの行列要素 …… 6
§4　Hの行列要素 …… 7
　§4－1　微小変形の摂動 …… 7
　§4－2　傾斜変形の場合 …… 8
　§4－3　球面変形の場合 …… 9
§5　変形による損失の変化 …… 10
　§5－1　傾斜変形 …… 10
　§5－2　球面変形による損失の変化 …… 13
§6　変形による損失の数値計算 …… 13
　§6－1　傾斜変形 …… 13
　§6－2　球面変形 …… 24
§7　Discussions …… 24
　変形によるQの低下 …… 24
　損失最小モードの地図 …… 29
　δdの表式の形について …… 30
　Fox, Liとの比較 …… 31
§8　境界条件の摂動から直接波動函数を導びく方法 …… 33

変形したFabry-Perot共振の理論

§1. 序　論

§1-1 空胴理論

開いた面Sをもつ空胴共振器において、S上で $u=0$ なる境界条件をもつ固有函数系（以下 S type の固有函数系と称する）は低次のモード（ここでは、ことわらないかぎり）Z方向の量子数*は非常に大きいとして、モード次数には考慮しないとする）に関するかぎり、反射鏡向の共振を十分よく記述していることを前の論文[1]で示した。（勿論、開いた面による効果が上の固有振動に少しく摂動を与えたものが、実さいの固有振動であるとする）図のように開口面をSのような完全な円筒面にとる空胴近似の正当性は、厳密な理論は後の機会にゆずることにして、次のことによっている。即ち、Z方向の量子数が非常に大きく、軸長が波長に比して非常に長いために、円筒外部の場を求めるのに、円筒波に対してキルヒホッフ近似が、当然非常によい近似になっていることとそれが反射鏡の裏面を無視したことと等価であるから、円筒外部においては外向き波のみ、つまり、輻射のみの場になっていることである。したがって、逆に空胴近似が不当である場合は、波長が空胴の軸長に比して無視できない時と、モード次数が大きく、損失が大きいときにモードの識別が不能な時である。



オ 1 図

空胴理論の結果と、干渉計理論によってえられる結果を円筒型共振器について以下に比較してみよう。1 Transit 当りの損失 δ_d は、$N \gg 1$ の場合

---

* 固有振動の状態を指定する一組の数を量子数と呼ぶ。量子物理学のことばは便利であるので以下においてもしばしば使用する。（例えば、転移、状態等）

$$\delta\alpha = 5.23 \times 10^{-2} \Lambda_{lm}^{2} N^{-1.5} \quad (\text{Vainstein})^{(2)} \qquad (1-1)$$

$$\delta\alpha = 2.39 \times 10^{-2} \Lambda_{lm}^{2} N^{-1.5} \quad (\text{Bergstein \& Schachter})^{(3)} \qquad (1-2)$$

空胴理論では．

$$\delta\alpha = 2.40 \times 10^{-2} \Lambda_{lm}^{2} N^{-1.5} \quad (\text{Cavity Theory}^{(1)}) \qquad (1-3)$$

但し、$N \equiv a^2/\mu L$．　μ：波長，Λ_{lm} は．Bessel 函数 $J_l(\Lambda)$ の m 番目の根である。(1-1)は Wiener-Hopf 法．(1-2)は．直交展開法によるものである。Fox，L_1[4] による数値計算は（$l=0$，$m=0$）と（$l=1$，$m=0$）に相当するものが与えられており、比較は、前論文[1]において行なった．$N \gg 1$ に対する外挿式は．N依存性は $N^{-1.4}$．モード依存性は Λ_{lm}^{2} で与えられるものと一致して居り、数値的には(1-1)に近い。更に共振周波数は、平面波共振の周波数より：いずれも大きくなっており、それが解析的に与えられたものは（$N \gg 1$）

$$\omega_{lm} - \left(\frac{n\pi}{L}\right) \sim \frac{\Lambda_{lm}^{2}}{4\pi L} \cdot N^{-1} \quad (\text{Bergstein \& Schachter})^{(3)} \qquad (1-4)$$

である。この式は．S型の空胴共振の周波数を与える式

$$\omega_{lm}^{2} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2} + \left(\frac{\Lambda_{lm}}{a}\right)^{2} \quad (n \gg 1) \qquad (1-5)$$

からも導びくことが出来る。　$N < 1$ になると、開口面による摂動が大きく効いてきて、N－依存性は変わってくる。以上の考察によって、空胴理論と干渉計理論とは矛盾する結果を生じないとしてよいであろう。唯、損失が大きくなって、摂動論の適用限界をこえるところでは、方程式を解くいみからは共振の定義は別問題として後者は依然意味をもつ。

§1－2．反射鏡の微小変形

前節において、空胴理論と干渉計理論は、平行平面間共振を同様に記述しているとがわかった。しかし、前者の利点は、平行平面間共振の像を簡単な像でとらえているので、種々の応用が出来ることである。本題の微小変形を取扱うには、干渉計理論では Smatrix による方法がある[5]。鏡の変形によって modify された Smatrix を用いて共振を記述する方程式を取扱うことである。これは逐次近似で解くことは正当でなく、又摂動計算を行なうことも種々の困難があるので、解を解析的に書き下すことはされていな

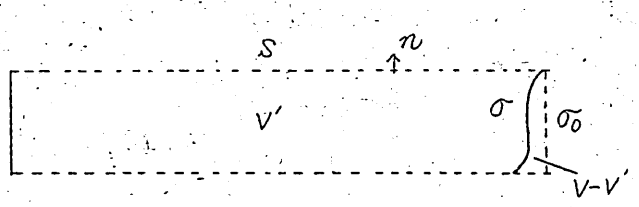
い。又、微小変形は、波の反射の際に位相差を付加えることによって近似される（このことは又 Smatrix の取扱いから Fourier 変換によっても出てくる）。このことを使って、Fox. Li[6] は計算機に反復計算を行なわせることによって、無限長の strip の傾斜変形に対して、数値計算を行なった。

計算の性質上、これを遂行することは非常に困難で、又種々のモード、変形に対して、解析的にこれを記述することは未だなされていないようである。

空胴理論では、この種の問題は、摂動論により容易に遂行される。前論文[1]では、$\delta\alpha$ を求めるのに、開口面Sの摂動行列Iの対角線要素から求めた。更に鏡の変形による摂動Hが存在する場合には、我々は、Hを対角化するような表示でIの対角要素を求めることにしよう。そうすれば、考え方は変形のない場合と同様である。これらのことを：鏡の傾斜変形、球面変形の場合 $\delta\alpha$ を変形のパラメタKによって各モードについて計算を行なう。同じ考えはランダム変形、媒質の不均質に対しても適用されうる。

取扱いにさいしては、次のことに十分注意しなければならない。摂動展開は、2乗平均収束のいみでなされるが、摂動が十分小さいときには、低次のモードのみで速く収束するのみならず、項別微積分が出来ることを暗黙のうちに仮定していることである。変形が波長に比して無視出来なくなると、摂動論は可能でも、後者の仮定は破れるであろう。

§2. 運動方程式と摂動



第 2 図

変形後の領域V'においてS面上S型の境界条件（$u=0$, on S）を満たす固有函数 $\{u_\nu\}$ の振巾の運動方程式は

$$\ddot{A}_\nu + \omega_\nu^2 A_\nu - \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial n} u_\nu d\sigma + \int_{S'} U \frac{\partial u_\nu}{\partial n} dS = 0 \qquad (2\cdot1)$$

（σ 上 $U=0$；S 型）

$$\ddot{A}_\nu + \omega_\nu^2 A_\nu + \int_\sigma U \frac{\partial u_\nu}{\partial n} d\sigma + \int_S U \frac{\partial u_\nu}{\partial n} dS = 0 \qquad (2\cdot2)$$

（σ 上 $\frac{\partial U}{\partial n}=0$：S' 型）

但し、

$$A_\nu \equiv \int_V U \cdot u_\nu \, dV \quad , \quad U = \Sigma A_\nu u_\nu \tag{2·3}$$

(2·1)は、U が、σ上S型、(その場合には $\{u_\nu\}$ もσ上S型)。

(2·2)はUがσ上S'型(その場合には $\{u_\nu\}$ もσ上S'型)であるようなUに対する方程式である。* nは外向き法線である。第3項、第4項が変形σ及びSよりの輻射による2つの摂動項 H, 及びIである。我々は前節に従がい、Hを対角化するような表示で、Iの行列要素を求める。そのために、$I=0$の場合を先に考える。

鏡の変形は σ_0 から内部に向って、図のσの様に与えられたとしよう。これは $\{u_\nu\}$ がU の外部では定義されていないからである。しかし変形が微小であれば、この特殊性は不用で、σ_0 は変形σの平均の位置にあるとしてよい。それは、σの平均のずれは単に共振周波数のみを変化させるだけであることと、u_ν を σ_0 の外側に外挿して定義していることと結果に差を生じないからである。変形σによるS面の変化は無視する。(2·1)、(2·2) は (2·3) のひが項別微積分を許す範囲で、次のようにまとめられる。

$$\ddot{A}_\nu + \omega_\nu^2 A_\nu + \Sigma H_{\mu\nu} A_\mu = 0 \tag{2·4}$$

ここに $H_{\nu\mu}$ は それぞれ (附録1)

$$H_{\mu\nu} \equiv \begin{cases} -\int_\sigma u_\nu \dfrac{\partial u_\mu}{\partial n} d\sigma \sim \int_{V-V'} \nabla u_\nu \cdot \nabla u_\mu \, dV & (\sigma\text{上S型}) \quad (2·5) \\ \int_\sigma \dfrac{\partial u_\nu}{\partial n} u_\mu d\sigma \sim \omega_\nu^2 \int_{V-V'} u_\nu \cdot u_\mu dV & (\sigma\text{上S'型}) \quad (2·6) \end{cases}$$

---

* S上でS型、σ_0 上でS'型の境界条件をもつ固有函数は、電磁場では、TM波共振モード、又、前論文[1]で考えた、S上S'型、σ_0 上S型の境界条件をもつ固有函数は、TE波共振モードに対応している。電磁場は上のスカラー固有函数を流れの函数として導びかれる。[7] 前論文[1]の所論によればTE共振は、TM共振より3桁近く損失が大きいわけである。

0次近似（$H=0$）の固有函数をu_0と記し、摂動Hをうけた固有函数をU_0と記す。縮退がないとして2次まで書くと*

$$U_0 = u_0 + \sum_{\mu\neq 0} \frac{u_\mu H_{\mu 0}}{\omega_0^2 - \omega_\mu^2}$$

$$+ \sum_{\nu\neq 0} u_\nu \left\{ \sum_{\mu\neq 0} \frac{H_{\nu\mu} H_{\mu 0}}{(\omega_0^2-\omega_\nu^2)(\omega_0^2-\omega_\mu^2)} - \frac{H_{\nu 0} H_{00}}{(\omega_0^2-\omega_\nu^2)^2} \right\} \qquad (2\cdot 7)^{**}$$

したがって、Sよりの輻射による摂動Iの、この表示における対角線要素は

$$J_{00} \equiv \iint_S \frac{\partial U_0(x)}{\partial n} G(x|x') \frac{\partial U_0(x')}{\partial n'} dS\, dS' \qquad (2\cdot 8)$$

$$= I_{00} + 2\sum_{\mu\neq 0} \frac{I_{0\mu} H_{\mu 0}}{\omega_0^2-\omega_\mu^2} - \sum_{\nu\neq 0} \frac{H_{\nu 0}\cdot H_{00}\cdot I_{\nu 0}}{(\omega_0^2-\omega_\nu^2)^2}$$

$$+ \sum_{\mu,\nu\neq 0} \frac{H_{\mu 0} H_{\nu 0} I_{\mu\nu}}{(\omega_0^2-\omega_\mu^2)(\omega_0^2-\omega_\nu^2)} + 2\sum_{\mu,\nu\neq 0} \frac{H_{\nu\mu} H_{\mu 0} I_{\nu 0}}{(\omega_0^2-\omega_\mu^2)(\omega_0^2-\omega_\nu^2)} \qquad (2\cdot 9)$$

但し

$$I_{\mu\nu} = \iint_S \frac{\partial u_\mu}{\partial n} G(x|x') \frac{\partial u_\nu}{\partial n'} dS\, dS' \qquad (2\cdot 10)$$

ここで、JはHについて2次までとり、Hが実行列、Iが対称行列であるこ

---

*：$\{u_\nu\}$は実さいは縮退しているが、§4でわかるように、今の問題では、その間の行列要素は0になる。又、2次まで書いたのは、傾斜変形の場合に1次の項が消えるからである。

**：これは(2·4)と$H_{\mu\nu}$とから、直接固有値問題の摂動論の結果[8]を使ったものである。しかし、(2·7)が実さいに上でS型又はS'型の境界条件をどの程度満たしているか保証はうすいから、境界条件の摂動のみを積極的に使用して直接にU_0を求めそれによって(2·9)を計算することも考えられる。それは一度は確かめてみなければならないことである。そのように境界の摂動を取扱うと、2次までは(2·7)の最後の項のみをのぞいて(2·7)と一致することが示される。その取扱いは最終の節§8にのべることにする。

とを用いた。第一項 I_{00} は変形のない場合の項である。ここでは輻射による損失に関しては、1次の近似のみで（対角要素のみで）すませようとしているが、Iの摂動の2次の項が、Hを2次までとった補正項よりも効いて来ない範囲を考えることにする。（附録2） 我々の注目するのは、損失であるので、Jの虚部のみをしればよく、

$$\frac{1}{Q} = \frac{Im(J_{00})}{\omega_0^2} \qquad (2\cdot11)$$

特に、Laser 用 Fabry Perot 共振器では軸方向の共振の量子数が非常に大きいので、波の 1 transit 当りの輻射損失 δ_d を定義することができて、

$$\delta_d = \frac{n\pi}{Q} \sim \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} Im(J_{00}) \qquad (2\cdot12)$$

§3. Iの行列要素

$$I_{\mu\nu} = \iint \frac{\partial u_\mu}{\partial n} G(x|x') \frac{\partial u_\nu}{\partial n'} dS dS' \qquad (3\cdot1)$$

この対角要素は、円筒型共振器の場合、前論文[1]で求めた。ただ Green 函数にあらわれる ω は今の場合 ω_μ にとることは出来ない。量子数（l, m, n）の同じ l に属する固有函数は、2重に縮退していて、因子に $\cos l\theta$ をもつものと $\sin l\theta$ をもつものとがある。前者を＋，後者を－の記号で区別する。微小変形であるので、量子数 n の異なる状態間の転移は n が非常に大きいので考慮しなくてもよい（附録3）。行列 $I_{\mu\nu}$ の著しい性質として、i) μ, ν について対称，ii) l について対角，つまり $\Delta l = 0$，iii) ＋，－について対角である。（附録4）

$$I_{\mu\nu} = \frac{i\pi}{2} \frac{[\Lambda_{lm} J_{l+1}(\Lambda_{lm}) \Lambda_{lm'} J_{l+1}(\Lambda_{lm'})]}{N_{lm},\ N_{lm'}} \int_0^\infty \frac{\lambda [J_l(\lambda a)]^2 I(\lambda\omega)}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}} d\lambda \qquad (3\cdot2)$$

$$I(\lambda,\omega) \equiv \int_0^L \int_0^L e^{i\sqrt{\omega^2-\lambda^2}|z-z'|} \left\{ \begin{matrix} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}z'\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}z'\right) \end{matrix} \right\} dz dz' \qquad (3\cdot3)$$

但し、$I_{\mu\nu}$ は、$l=0$ の時は2倍し、又 (3·3) の { } の中は、σ_0 上 S 型，σ_0 上 S' 型に応じ上又は下をとる。N_{lm} は規格因子である。我々が考えている場合、n は非常に大きいので、$I(\lambda,\omega)$ は、σ_0 上 S 型又は S' 型には殆んど

依らない。（附録5）したがって（3·2），（3·3）は（文献[1]参照）

$$I_{\mu\nu} = i\frac{1}{\omega L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 4\Lambda_{\ell m}\Lambda_{\ell m'}\left\{I' + \frac{N^{-1}}{4\pi} I''\right\} sign \qquad (3\cdot4)$$

$N \equiv \frac{a^2}{\mu L}$ ： Fresnel parameter，μ：波長

$$I'(\omega) \equiv \int_0^\infty \frac{\left[1 \mp e^{i\sqrt{(\omega a)^2-\Lambda^2}\left(\frac{L}{a}\right)}\right]}{\left[(\omega a)^2-(n\pi\frac{a}{L})^2-\Lambda^2\right]^2}\left[J_\ell(\Lambda)\right]^2\Lambda d\Lambda \qquad (3\cdot5)$$

$$I''(\omega) \equiv i\int_0^\infty \frac{\left[J_\ell(\Lambda)\right]^2\Lambda d\Lambda}{(\omega a)^2-(n\pi\frac{a}{L})^2-\Lambda^2} \qquad (3\cdot6)$$

$$sign \equiv sing\left\{J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m})J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m'})\right\} \qquad (3\cdot7)$$

今の場合，一般には，$\omega \neq \omega_{\ell m}$ であつて，前の場合（$\omega = \omega_{\ell m}$）と異なり，I', I''から，余分の寄与があらわれる。しかし，それらの実部は打消し合うことが示されるので，（附録6），結局，実部については

$$Re\, I' \equiv I_C(N) = 0.60 \times 10^{-2}\cdot N^{-1.5} \qquad (3\cdot8)$$

と書いてもよい。したがって，最終的に

$$\ell m(I_{\mu\nu}) = \left\{\frac{1}{\omega_0 L}\cdot\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right\}\Lambda_{\ell m}\Lambda_{\ell m'}\left\{2.40\times10^{-2}\cdot N^{-1.5}\right\}\cdot sign \qquad (3\cdot9)$$

この式のはじめの{　}の中の2因子は$\delta\alpha$を書くとき落ちる項である。ここにあらわれる sign は，同様にH行列要素よりもあられ，最終的に§5で$\delta\alpha$を書き下す時あらわれない。

§4　Hの行列要素

§4-1　微小変形の振動

§2の一般論を，円筒型の共振器に対し，一方の鏡が傾斜した場合と，球面変形している場合について適用する。m, ℓは0～10程度，nは10^3～10^6のような大きい数とする。附録3によって$\Delta n = 0$である。(2·5)から

$$H_{\nu\mu} \simeq \int \left\{ \frac{\partial u_\nu}{\partial r}\frac{\partial u_\mu}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\nu}{\partial \theta}\frac{\partial u_\mu}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\nu}{\partial z}\frac{\partial u_\mu}{\partial z} \right\} dV$$

$$\simeq \int \frac{\partial u_\nu}{\partial z}\frac{\partial u_\mu}{\partial z}\, r\cdot dr\cdot d\theta\cdot dz. \qquad (4\cdot1)$$

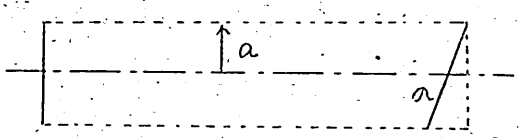
$$= \frac{1}{N_\nu N_\mu}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \int_{\nu\text{-}\nu'} J_\ell\left(\frac{\lambda_m}{a}r\right) J_{\ell'}\left(\frac{\lambda_{m'}}{a}r\right) \begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\ell'\theta\\ \sin\ell'\theta\end{Bmatrix}$$

$$\times \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}z\right) r\,dr\,d\theta\,dz \qquad (4\cdot2)$$

上式は、σ_0 上S型の場合であるが $n \gg 1$ であるので $\omega_\nu^2 \sim \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ であることを考慮すると（4·2）は、σ_0 上S′型に対する（2·6）と等しい。したがって、以後 <u>σ_0 上S型及びS′型による差は生じない。</u>

§4-2 傾斜変形の場合

最大傾斜の方向を φ とし、鏡の傾斜の勾配を D とすれば、σ は次式で書きあらわされる。



オ 3 図

$$\sigma : Z(r,\theta) = Dr\cos(\theta-\varphi) \qquad (4\cdot3)$$

ここで、前にものべたように、σ の平均の変形は0とおいた。平均の変形は $n = n'$ の場合に限れば、他のモードを発生しえないので、$H_{\mu\nu}$ の対角要素のみに寄与するが、これは、周波数の変化のみに寄与し、しかもこれははじめからLをそのようにずらしたことと等価であるからである。したがって以下 u_ν, ω_ν は平均の位置におけるものをとることにしておく。
したがって

$$H_{\nu\mu} \sim \frac{D}{N_\nu N_\mu}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\ell'\theta\\ \sin\ell'\theta\end{Bmatrix}\cos(\theta-\varphi)\,d\theta \times$$

$$\times \int_0^a J_\ell\left(\frac{\lambda_m}{a}r\right) J_{\ell'}\left(\frac{\lambda_{m'}}{a}r\right) r^2\,dr \qquad (4\cdot4)$$

このθの積分から、転移則 $\ell = \ell' \pm 1$ がえられ（附録7）、rについての

積分は附録9の等式(1)で積分が求められる。

(2·8) の振動計算をするさい、附録8でわかるように、実は φ に関係するのは $\ell=1$ の状態だけであるので、ここではまず $\varphi=0$ (+→+転移)の行列要素を書き下す。$\varphi\neq 0$ の場合は附録7によって $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ 等の項がつく。

$\ell\geq 2$ の場合、$\mu\equiv(\ell-1, m, n, +)$, $\nu\equiv(\ell, M, n, +)$

行列の添字は ℓ を上に m は下に示す。規格化因子 N_ν は、附録4で与えられている。

$$H^{\ell-1,\ell}_{m,M}=\frac{D}{N_\mu N_\nu}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)a^3\frac{2\Lambda_{\ell M}\Lambda_{\ell-1,m}}{\left[\Lambda_{\ell M}^2-\Lambda_{\ell-1,m}^2\right]^2}J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell M})J_\ell(\Lambda_{\ell-1,m})$$

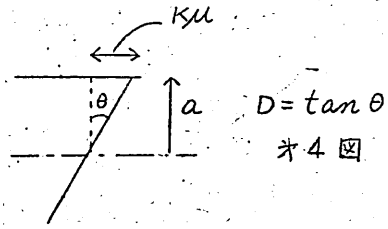
$$=4D\cdot\frac{a}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{\Lambda_{\ell M}\Lambda_{\ell-1,m}}{\left[\Lambda_{\ell M}^2-\Lambda_{\ell-1,m}^2\right]^2}\,\mathrm{sign}\left\{J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell M})J_\ell(\Lambda_{\ell-1,m})\right\}$$

$$=(4\pi)^2\frac{K}{\mu L}\frac{\Lambda_{\ell M}\Lambda_{\ell-1,m}}{\left[\Lambda_{\ell M}^2-\Lambda_{\ell-1,m}^2\right]^2}\,\mathrm{sign}\left\{J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell M})J_\ell(\Lambda_{\ell-1,m})\right\}\qquad(4\cdot5)$$

$$H^{\ell+1,\ell}_{m,M}=(4\pi)^2\frac{K}{\mu L}\frac{\Lambda_{\ell M}\Lambda_{\ell+1,m}}{\left[\Lambda_{\ell M}^2-\Lambda_{\ell+1,m}^2\right]^2}\,\mathrm{sign}\left\{J_{\ell+2}(\Lambda_{\ell+1,m})J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell M})\right\}\qquad(4\cdot6)$$

但し、

$$D\equiv K\frac{\mu}{a}\qquad(4\cdot7)$$



第4図

$\ell=1$ の場合は、附録(7)によって、$H^{0,1}$ は(4·5)の2倍、$H^{2,1}$ は、(4·6)のままである。$\ell=0$ の場合は、$H^{1,0}$ のみで(4·6)の2倍である。

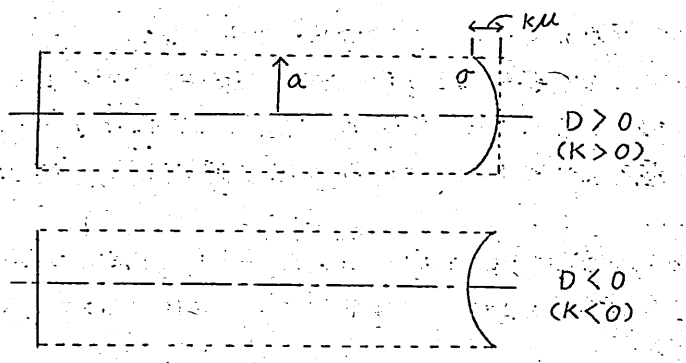
§4-3 球面変形の場合

微小変形としているので

$$\sigma : Z=Dr^2$$

($D>0$ の時、外に凸)と書いてよい。前と同様、常数のずれはのぞいて

いる。



$$H_{\nu\mu} = \frac{D}{N_\nu N_\mu}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \pi \cdot \delta_{\ell\ell'} \int_0^a J_\ell\left(\frac{\Lambda_m}{a} r\right) J_\ell\left(\frac{\Lambda_{m'}}{a} r\right) r^3 dr \quad (4.8)$$

変形が軸対称なので、$\ell = \ell'$ 以外への転移は禁止される。しかも、$+,-$ の向も禁止される。積分は、附録9の b) に与えられている。$\delta_{\ell\ell'}$ ははずしておく。

$$H^{\ell\ell}_{mM} = \frac{D}{N_\nu N_\mu}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \pi \cdot \frac{4\Lambda_{\ell m}\Lambda_{\ell M}}{\left[\Lambda_{\ell m}^2 - \Lambda_{\ell M}^2\right]^2} J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m}) J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell M})$$

$$= 16\, D\left(\frac{a^2}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{\Lambda_{\ell m}\Lambda_{\ell M}}{\left[\Lambda_{\ell m}^2 - \Lambda_{\ell M}^2\right]^2} \operatorname{sign}\left\{J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m}) J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell M})\right\}$$

$$= (8\pi)^2 \frac{K}{L\mu} \frac{\Lambda_{\ell m}\Lambda_{\ell M}}{\left[\Lambda_{\ell m}^2 - \Lambda_{\ell M}^2\right]^2} \operatorname{sign}\left\{J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m}) J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell M})\right\} \quad (4.9)$$

$$D \equiv \frac{K\mu}{a^2} \quad (4.10)$$

§5. 変形による損失の変化

§5-1. 傾斜変形

(2.9) の1次の項は、ℓ についての転移則が H は $\Delta\ell = \pm 1$. I は $\Delta\ell = 0$ であるので、消えてしまう。2次の項のうち (2.9) の第3項も同じ理由で0になる。したがって求める計算は、第4項、第5項について行なう。1次の効果は現われないから、傾斜変形による損失の増加は、変形の2乗に比例することがわかる。

第4項に対応する損失の増加を $\delta\alpha''$ と書く。尚この節では便宜上 $\ell m \to (I_{\mu\nu})$ をすべて $I_{\mu\nu}$ と略記する。

$$\delta\alpha'' = \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \cdot \sum_{\mu,\nu\neq 0} \frac{H_{\mu 0} H_{\nu 0} I_{\mu\nu}}{(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)} \qquad (5\cdot 1)$$

I は $\Delta l = 0$ であるから、μ, ν は共に $\Delta l = 1$ か $\Delta l = -1$ の項以外、l についての和はあらわれない。中間状態には $+, -$ の双方があらわれる。附録8に初期状態を $0 : (l, M, n, +)$ とすると、よって φ 依存性は $l=1$ のみに出る。

$l \gg 2$ の場合

$$\delta\alpha'' = 4(4\pi)^4 \left(\frac{K}{\mu L}\right)^2 a^4 I^C(N) \Lambda_{lM}^2 \times$$

$$\times \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{l+1,m}^2}{(\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{l+1,m}^2)^3} \right]^2 + \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Lambda_{l-1,m}^2}{(\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{l-1,m}^2)^3} \right]^2 \right\}$$

$$= 4(4\pi)^4 K^2 N^2 I^C(N) \Lambda_{lM}^2 \left\{ [\ \ ]^2 + [\ \ ]^2 \right\}$$

ここで、$I^C(N) = 0.6 \times 10^{-2} \cdot N^{-1.5}$ である。同様に才5項に対応して、

$$\delta\alpha''' = 2 \cdot \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sum_{\mu,\nu\neq 0} \frac{H_{\nu\mu} \cdot H_{\mu 0} I_{\nu 0}}{(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)} \qquad (5\cdot 3)$$

この場合は、$I_{\nu 0}$ では $\Delta l = 0$、つまり $l' = l$ であるので、μ については $l \pm 1$ の2つの和があらわれる。

$$\delta\alpha''' = 2 \cdot \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \left\{ \sum_{\substack{m,m' \\ m\neq m'}} \frac{(H_{m'}^{l\,l+1})(H_{M}^{l+1\,l}) I_{mM}^{ll} \cdot a^4}{(\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{l+1,m'}^2)(\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{lm}^2)} \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{m,m' \\ m\neq m'}} \frac{(H_{m'}^{l\,l-1})(H_{M}^{l-1\,l}) I_{mM}^{ll} \cdot a^4}{(\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{l-1,m'}^2)(\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{lm}^2)} \right\} \qquad (5\cdot 4)$$

$$= 8 \cdot (4\pi)^4 \cdot K^2 N^2 I^C(N) \Lambda_{lM}^2 \times$$

$$\times \left\{ \sum_{m'} \frac{(\Lambda_{l+1,m'})^2}{(\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{l+1,m'}^2)^3} \sum_{m\neq M} \frac{(\Lambda_{lm})^2}{(\Lambda_{l+1,m'}^2 - \Lambda_{lm}^2)^2 (\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{lm}^2)} \right.$$

$$\left. + \sum_{m'} \frac{(\Lambda_{l-1,m'})^2}{(\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{l-1,m'}^2)^3} \sum_{m\neq M} \frac{(\Lambda_{lm})^2}{(\Lambda_{l-1,m'}^2 - \Lambda_{lm}^2)^2 (\Lambda_{lM}^2 - \Lambda_{lm}^2)} \right\} \qquad (5\cdot 5)$$

求める損失の増加は

$$\delta\alpha' \equiv \delta\alpha'' + \delta\alpha''' \tag{5·6}$$

$\ell=0$ の場合

附録7によって、中間状態は $\ell' = \ell+1 = 1$ のみで

$$\delta\alpha'' = \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sum_{\substack{mm' \\ \neq M}} \frac{(H^{1\,0}_{mM})(H^{1\,0}_{m'M})\, I^{1\,1}_{m\,m'} \cdot a^4}{(\Lambda_{0M}^2 - \Lambda_{1m}^2)(\Lambda_{0M}^2 - \Lambda_{1m'}^2)}$$

$$= 8(4\pi)^4 K^2 N^2 I^C(N) \cdot \Lambda_{0M}^2 \left[\sum_m \frac{\Lambda_{1m}^2}{(\Lambda_{0M}^2 - \Lambda_{1m}^2)^3} \right]^2 \tag{5·7}$$

$$\delta\alpha''' = 2 \frac{\omega L}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sum_{m,m'} \frac{(H^{0\,1}_{m\,m'})(H^{1\,0}_{m'M}) I^{0\,0}_{m\,M} \cdot a^4}{(\Lambda_{0M}^2 - \Lambda_{1m'}^2)(\Lambda_{0M}^2 - \Lambda_{1m}^2)}$$

$$= 16(4\pi)^4 K^2 N^2 I^C(N) \Lambda_{0M}^2 \times$$

$$\times \sum_{m'} \frac{(\Lambda_{1m'})^2}{(\Lambda_{0M}^2 - \Lambda_{1m'}^2)} \sum_{m \neq M} \frac{(\Lambda_{0m})^2}{(\Lambda_{1m'}^2 - \Lambda_{0m}^2)^2 (\Lambda_{0M}^2 - \Lambda_{0m}^2)} \tag{5·8}$$

$\ell = 1$ の場合

この場合だけ特別であって、傾きの方向 φ に依存する（附録8）これは附録7からわかるように、中間状態が＋と－の場合に $1 \to 0$ の転移の行列要素が対称に出ないためである。Qが極大（損失が極小）になるようなものを求めている立場では φ を最大になるように定めればよい。以下では φ-dependence もあらわに書いておく。

$$\delta\alpha'' = 4(4\pi)^4 K^2 N^2 I^C(N) \Lambda_{1M}^2 \times$$

$$\left\{ (2\cos^2\varphi) \left[\sum_m \frac{(\Lambda_{0m})^2}{(\Lambda_{1M}^2 - \Lambda_{0m}^2)^3} \right]^2 + \left[\sum_m \frac{(\Lambda_{2m})^2}{(\Lambda_{1M}^2 - \Lambda_{2m}^2)^3} \right]^2 \right\} \tag{5·9}$$

$$\delta\alpha''' = 8(4\pi)^4 K^2 N^2 I^C(N) \Lambda_{1M}^2 \times$$

$$\left\{ 2\cos^2\varphi \left[\sum_{m'} \frac{(\Lambda_{0m'})^2}{(\Lambda_{1M}^2 - \Lambda_{0m'}^2)^3} \sum_{m \neq M} \frac{(\Lambda_{1m})^2}{(\Lambda_{0m'}^2 - \Lambda_{1m}^2)^2 (\Lambda_{1M}^2 - \Lambda_{1m}^2)} \right] \right.$$

$$\left. + \sum_{m'} \frac{(\Lambda_{2m'})^2}{(\Lambda_{1M}^2 - \Lambda_{2m'}^2)^3} \sum_{m \neq M} \frac{(\Lambda_{1m})^2}{(\Lambda_{2m'}^2 - \Lambda_{1m}^2)^2 (\Lambda_{1M}^2 - \Lambda_{2m}^2)} \right\} \tag{5·10}$$

$\delta\alpha' = \delta\alpha'' + \delta\alpha'''$ の極小は、φについて $\frac{\pi}{2}$ のところでおこる。つまり、傾きの軸は、モードの軸と直角になっているときに $\ell = 1$ のモードは、損失極小を与える。

§ 5-2 球面変形による損失の変化

この場合はIもHもℓについて対角であるので（2·9）の1次の項のみを評価すればよい。したがって損失の変化は、変形に比例し、しかも変形の正、負に応じ、損失の変化も符号を変える。

$$\delta\alpha' = 2\frac{\omega L}{\left(\frac{\pi\pi}{L}\right)^2}\sum\frac{H_{\mu 0}\cdot \ell m(I_{0\mu})}{\omega_0^2 - \omega_\mu^2}$$

$$= 8\frac{K}{L\mu}a^2 I^C(N)\sum_{m\neq M}\frac{\Lambda_{\ell m}\Lambda_{\ell M}}{\Lambda_{\ell M}^2-\Lambda_{\ell m}^2}\frac{\Lambda_{\ell m}\Lambda_{\ell M}}{\left[\Lambda_{\ell m}^2-\Lambda_{\ell M}^2\right]^2}$$

$$= -4.8\times 10^{-2}\cdot K N^{-0.5}\Lambda_{\ell M}^2\sum_{m\neq M}\frac{\Lambda_{\ell m}^2}{\left[\Lambda_{\ell m}^2-\Lambda_{\ell M}^2\right]^3} \qquad (5\cdot 11)$$

但し、$|K|$（$\ll 1$）は、波長に対する変形の比である。

§6. 変形による損失の数値計算

§6-1 傾斜変形

結局、共振器の 1 transit あたりの損失は、増加分を含め、

$$\delta\alpha = A_{\ell m}N^{-1.5} + B_{\ell m}K^2 N^{0.5} \qquad (6\cdot 1)$$

$N \equiv \frac{a^2}{\mu L}$ ： Fresnel パラメタ

$K \equiv \frac{Da}{\mu}$ ： 変形パラメタ（波長に対する変形の比）

a ： 半径， L ： 軸長， μ ： 波長， D ： 傾斜勾配

の形にまとめられる。$A_{\ell m}$, $B_{\ell m}$ はモード (ℓ, m) に依存する数であって、オ1表に示されている。Aは変形のないときの損失 $\delta\alpha^0$ に対応し、前論文[1]で既に求められているが、便宜上再び掲げた。Bは（5·2）～（5·10）式における和を電子計算機によって求めたものである（附録10）。和は十分速く収

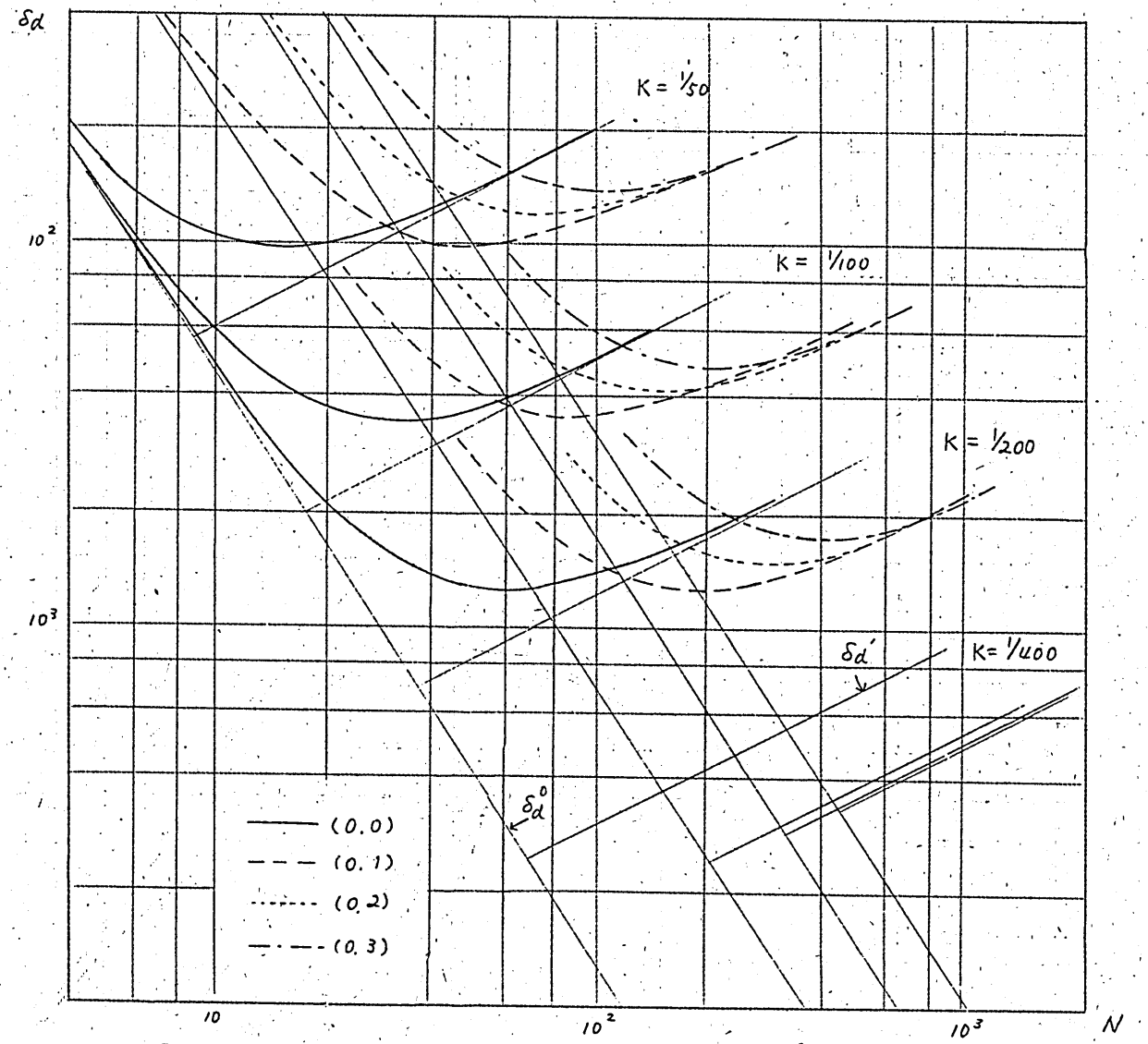
求することを確認している。

第1表　A_{lm}, B_{lm} の数値（上段A，下段B）

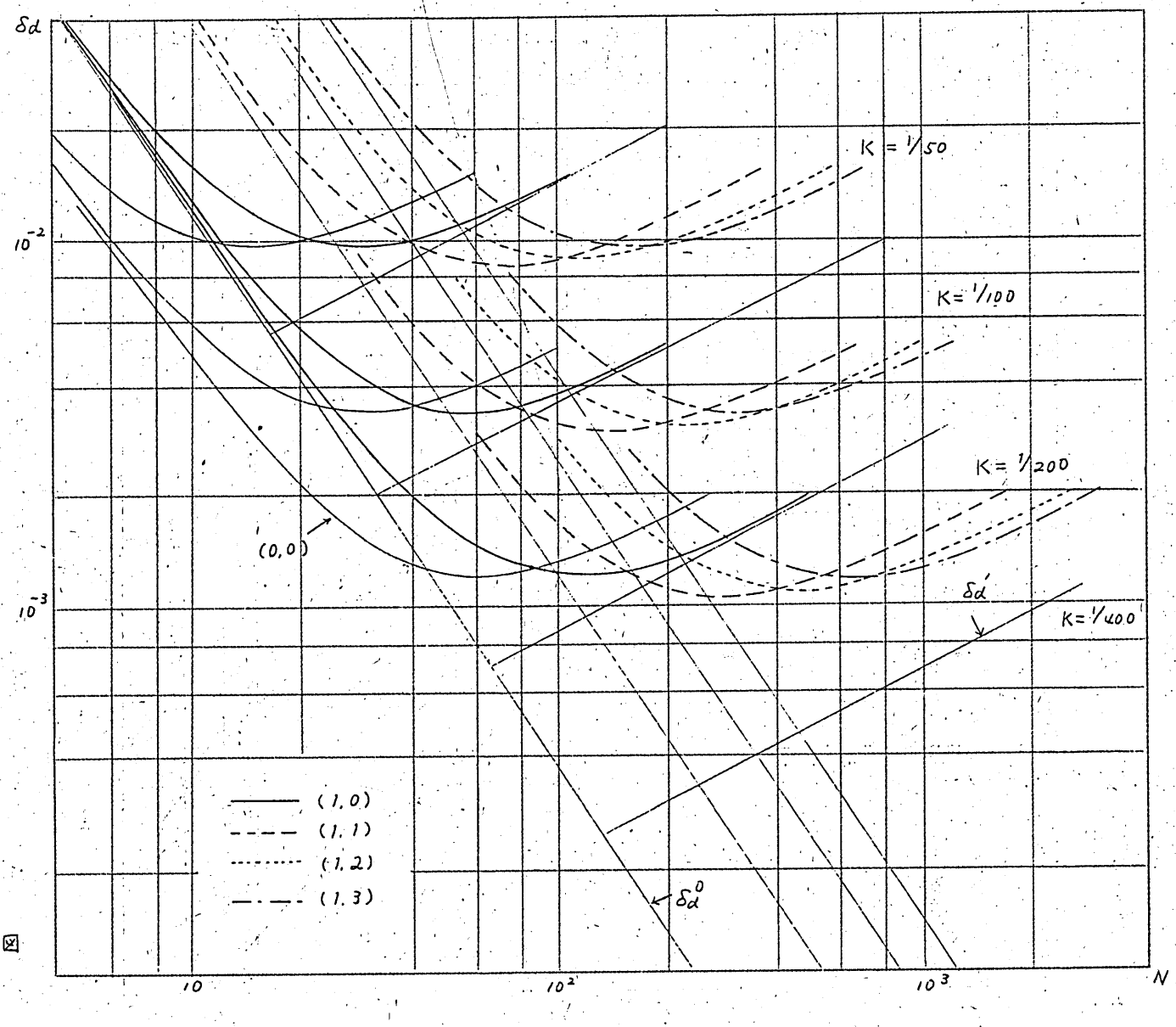
m \ l	0	1	2	3
0	0.138 4.83	0.352 $3.45+0.965\cos^2\varphi$	0.633 4.75	0.977 5.65
1	0.731 2.77	1.18 $1.91+2.04\cos^2\varphi$	1.70 3.36	2.29 3.86
2	1.80 2.60	2.48 $2.27+1.56\cos^2\varphi$	3.24 2.95	4.07 3.27
3	3.34 2.54	4.26 $2.37+1.43\cos^2\varphi$	5.26 2.78	6.31 2.99

（6.1）を変形Kをパラメタにして、Nに対してプロットしたものを第6-1～6-4図に示した。各々、量子数lが一定のモードについてまとめた。

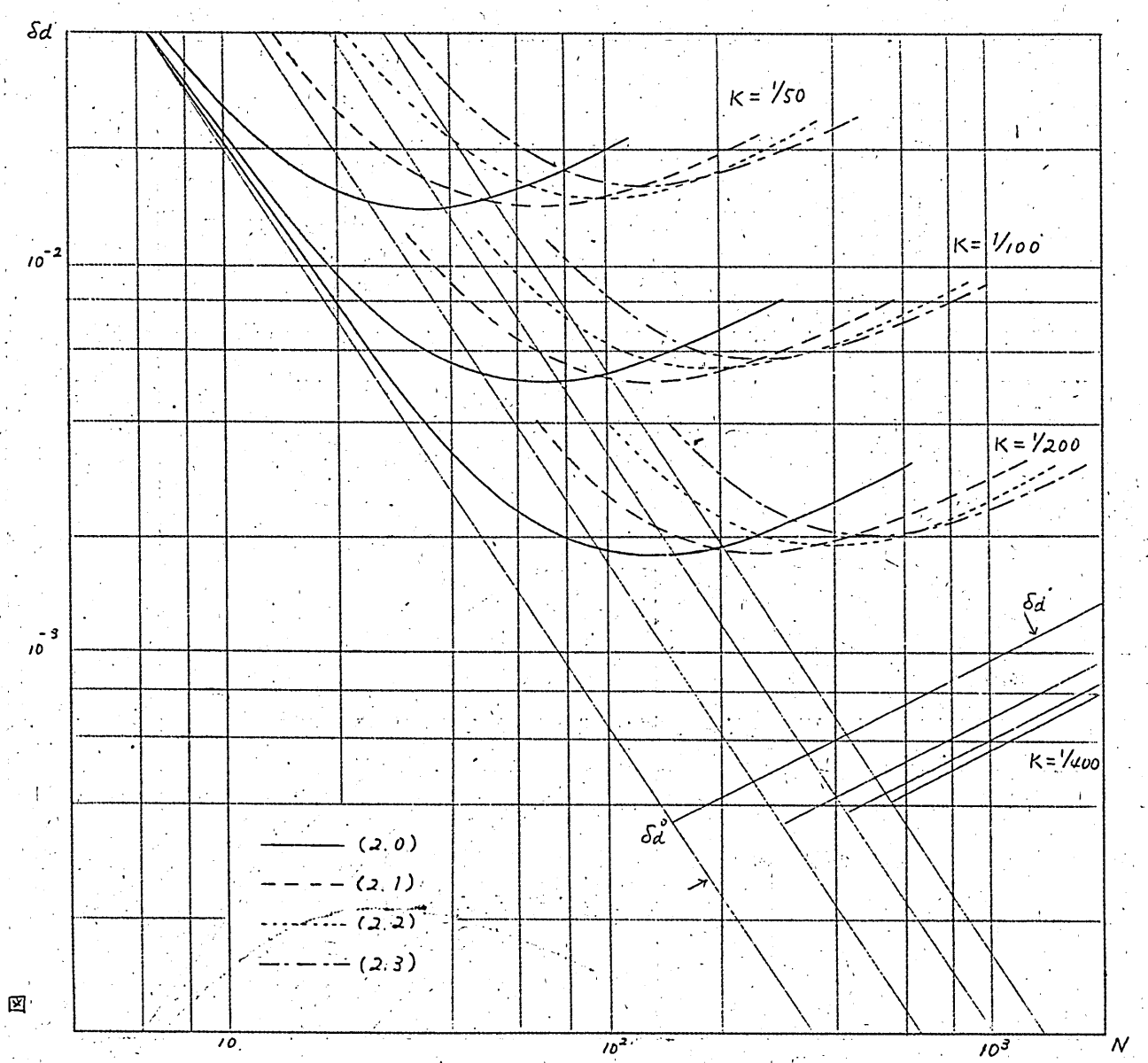
図中$\delta\alpha^0$は（6.1）の第1項（K=0 無変形）に対応するもの、$\delta\alpha'$は第2項（損失の増加分）に対応する2つの漸近線をあらわす。$\delta\alpha$が10^{-2}（損失1%）を大きく越えるところは、摂動論を適用した立場を守って図には描かれなかった。発振は、$\delta\alpha$が極小値をとるようなモードで実現していると考えられるので、$l=1$のモードのφ-依存性を示す項は、0とおいてよいであろう。　Nが増大すると変形による損失は増加してゆき、モードによって、$\delta\alpha$の大きさの順番が入れ替わることがわかる。各図を比較すればわかるように、損失$\delta\alpha$が最小になるモードは、(0,0)モードと、$l=1$のモードである。第6-2図はそれをみるために、(0,0)モードの線も付加した。第7-1～7-3図，第8図，第9図は、一定のN（つまり同じ共振器）に対して、変形Kが増加すると各モードの損失$\delta\alpha$の大きさの順が入れ替わる様子を示したものである。



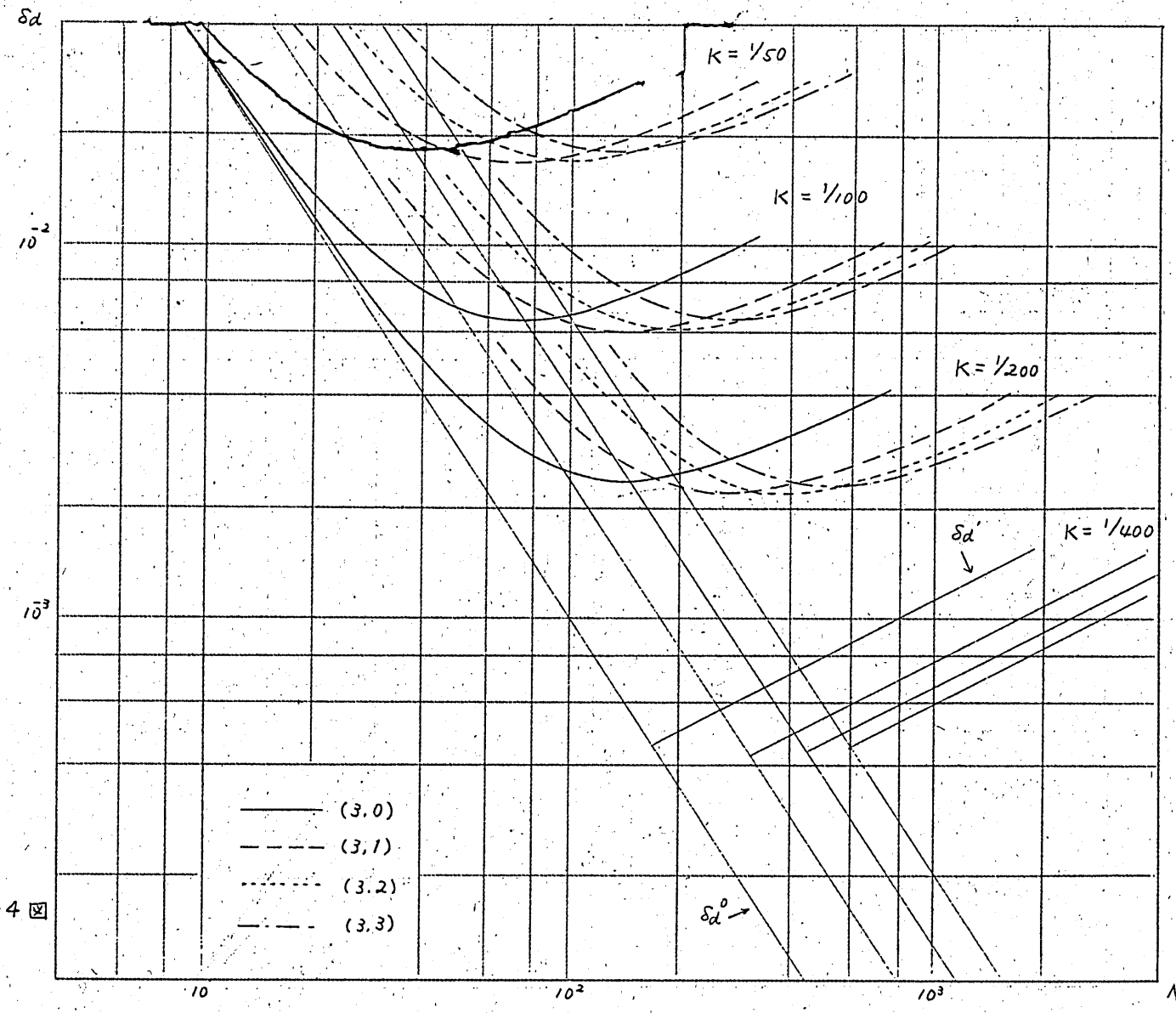
第6-1図　Nに対する損失 δα の変化　　K：波長に対する変形の比　　$N: a^2/\mu L$


δα
10^-2
10^-3
K = 1/50
K = 1/100
K = 1/200
K = 1/400
(0,0)
δα'
δα^0
(1,0)
(1,1)
(1,2)
(1,3)
10
10^2
10^3
N

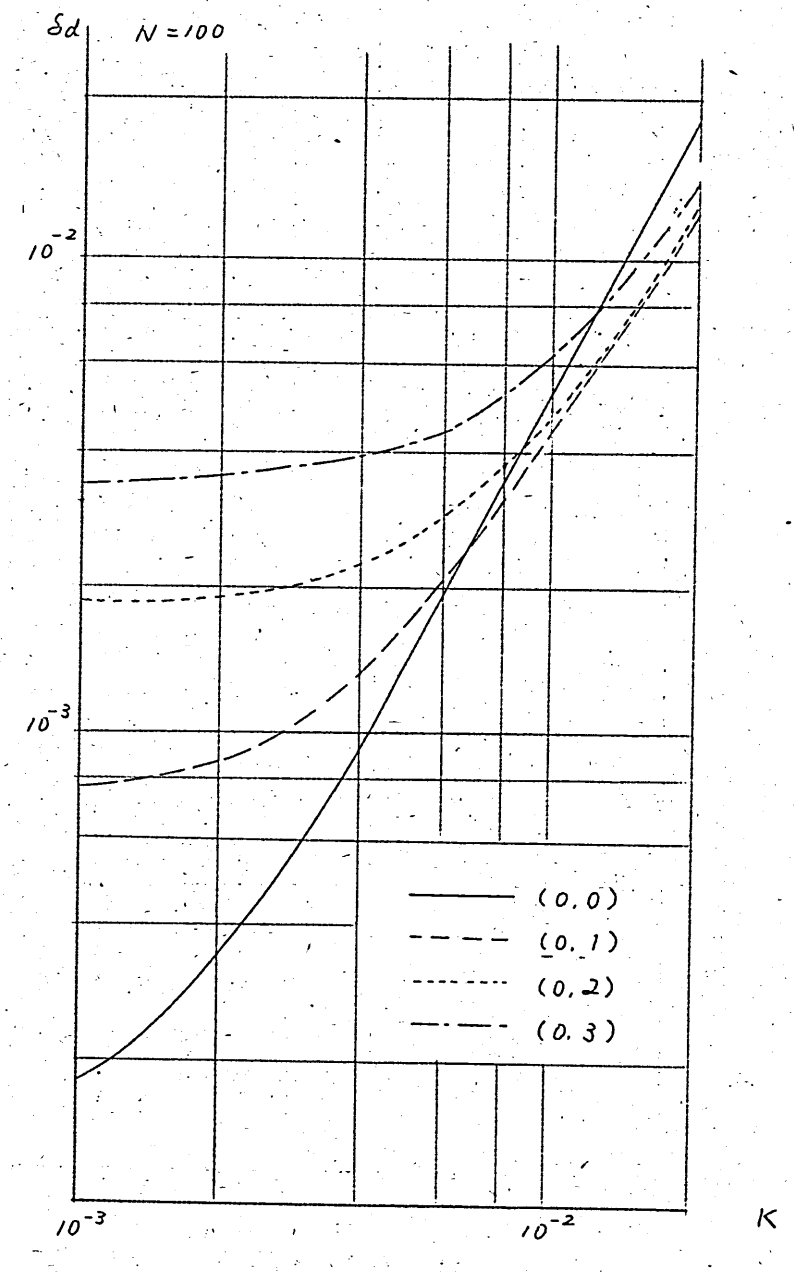
※6-2図



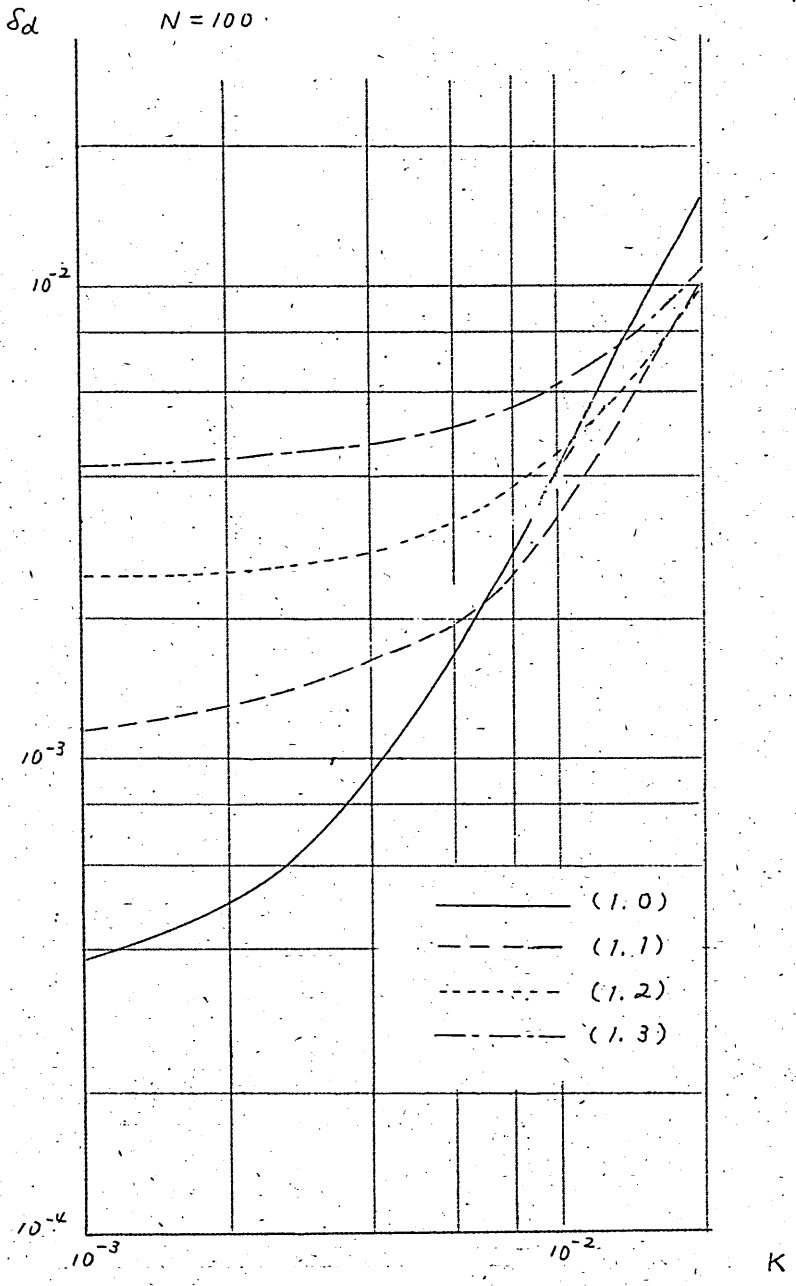
第6-3図



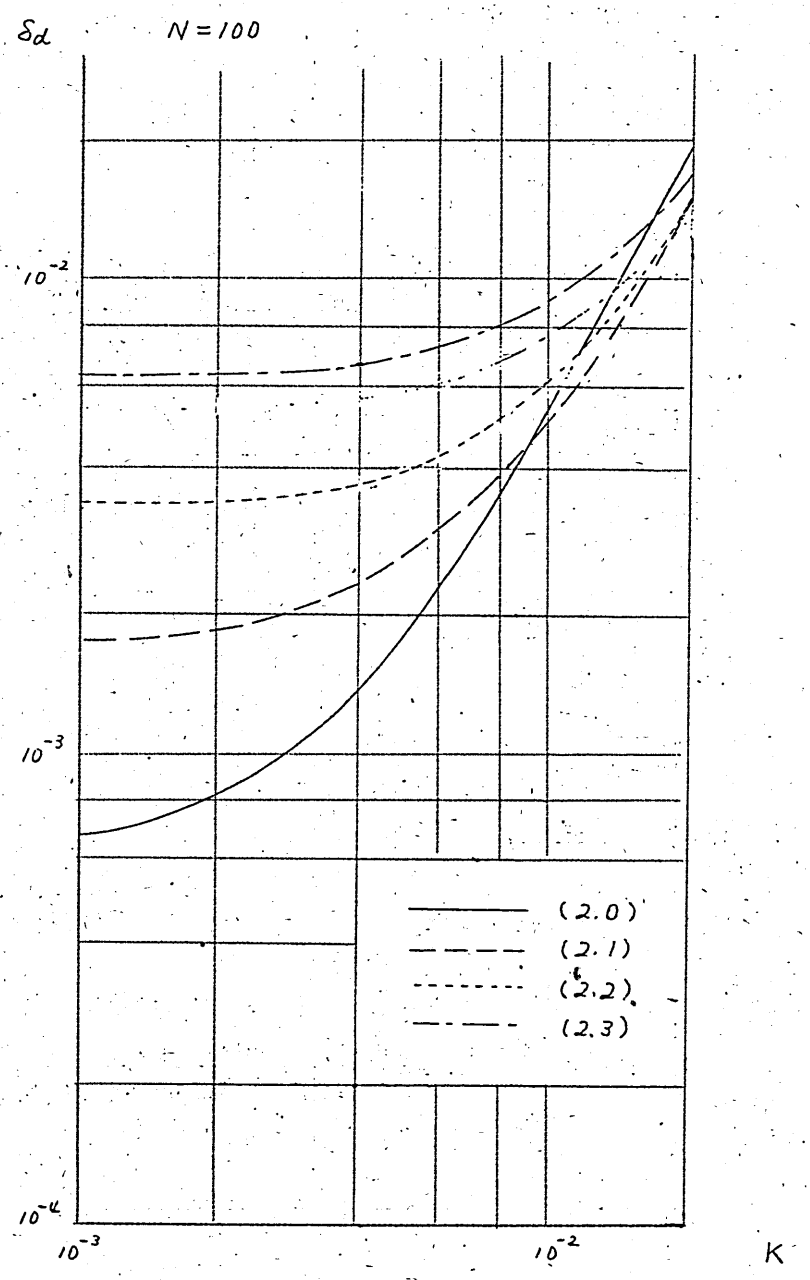
第6-4図



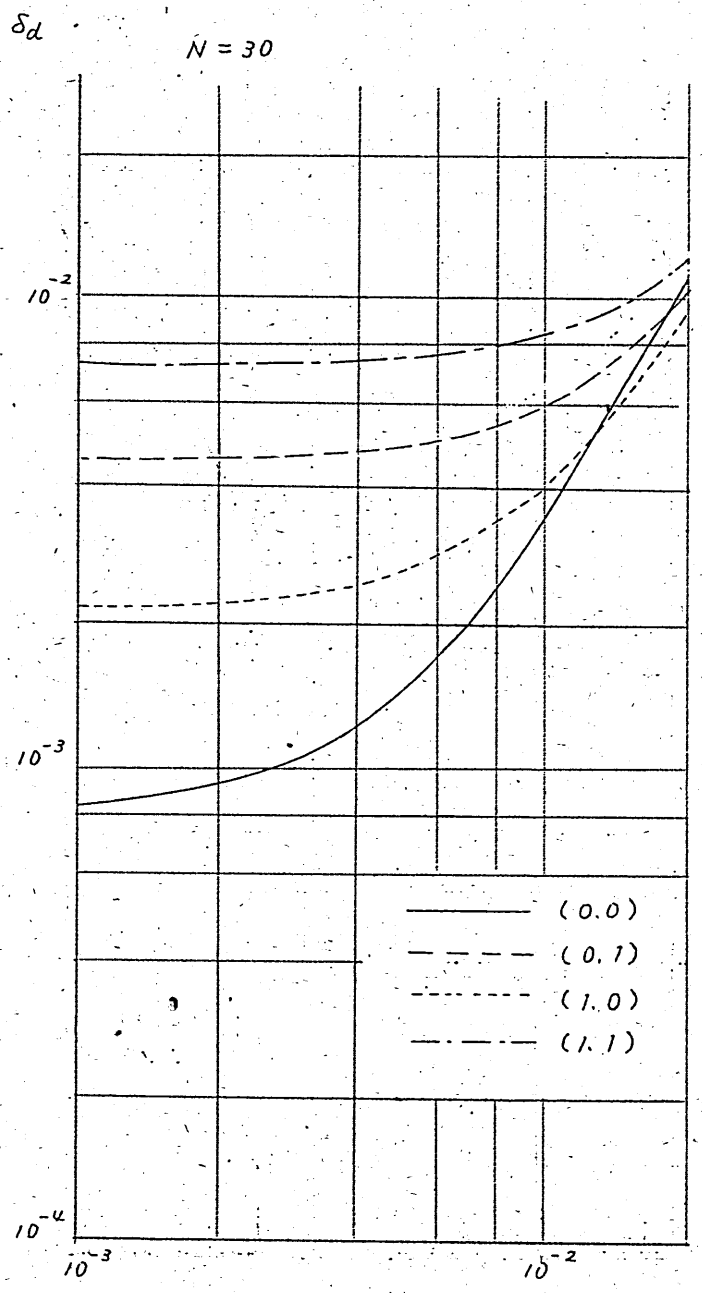
オク－1図　変形に対する損失 δ_d の変化（$\ell=0$）
（$N=100$）



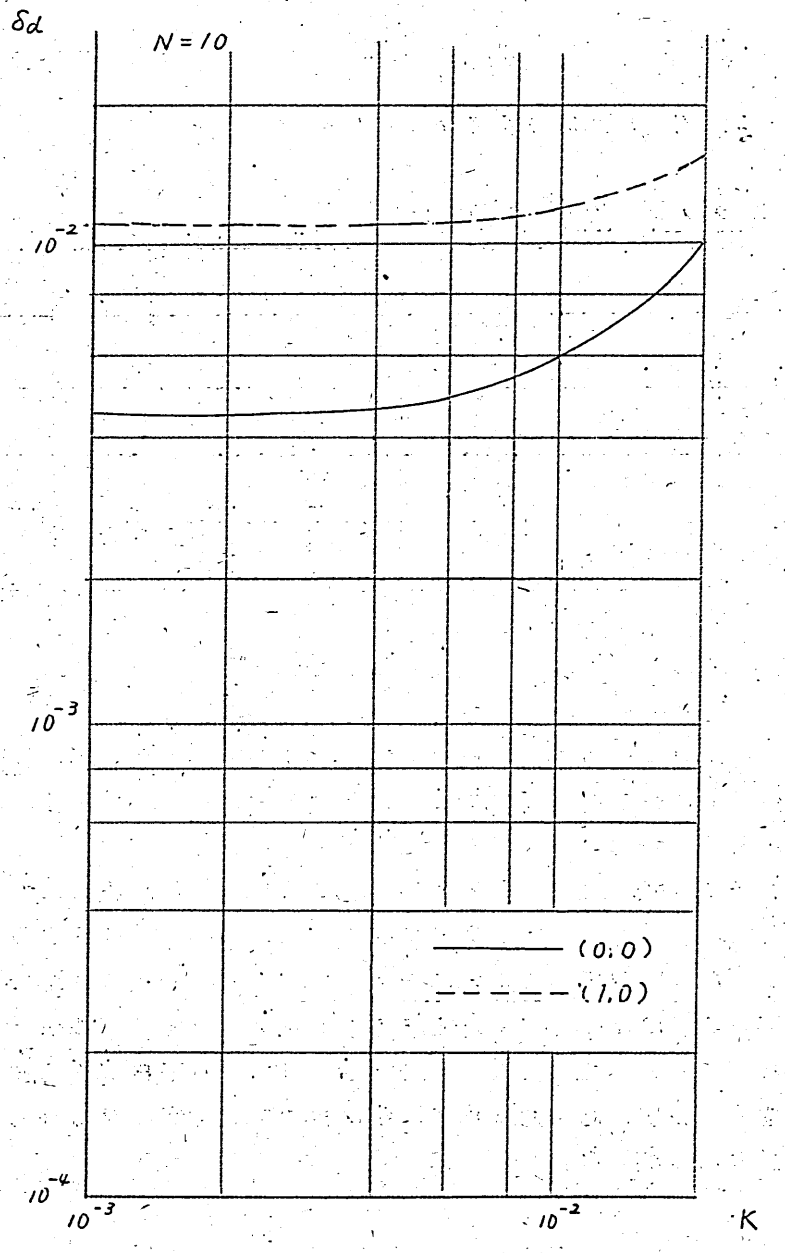
第7-2図　($\ell = 1$) ($N = 100$)



オ7-3図　($\ell = 2$)　($N = 100$)



第 8 図　　(N = 30)



オ9図　　変形に対する損失の変化 (N=10)

§6-2 球面変形

この場合（5·11）によって結局

$$\delta_d = A_{lm} N^{-1.5} - C_{lm} K N^{-0.5} \qquad (6\cdot2)$$

の形になる。C_{lm} は次の表で与えられる。

第2表 C_{lm} の数値

m \ l	0	1	2	3	4
0	$\times 10^{-4}$ 6.54	10^{-4} 9.99	10^{-3} 1.23	10^{-3} 1.39	10^{-3} 1.52
1	9.34	9.99	1.08	1.17	1.24
2	9.73	9.98	1.04	1.09	1.14
3	9.84	9.98	1.03	1.06	1.10

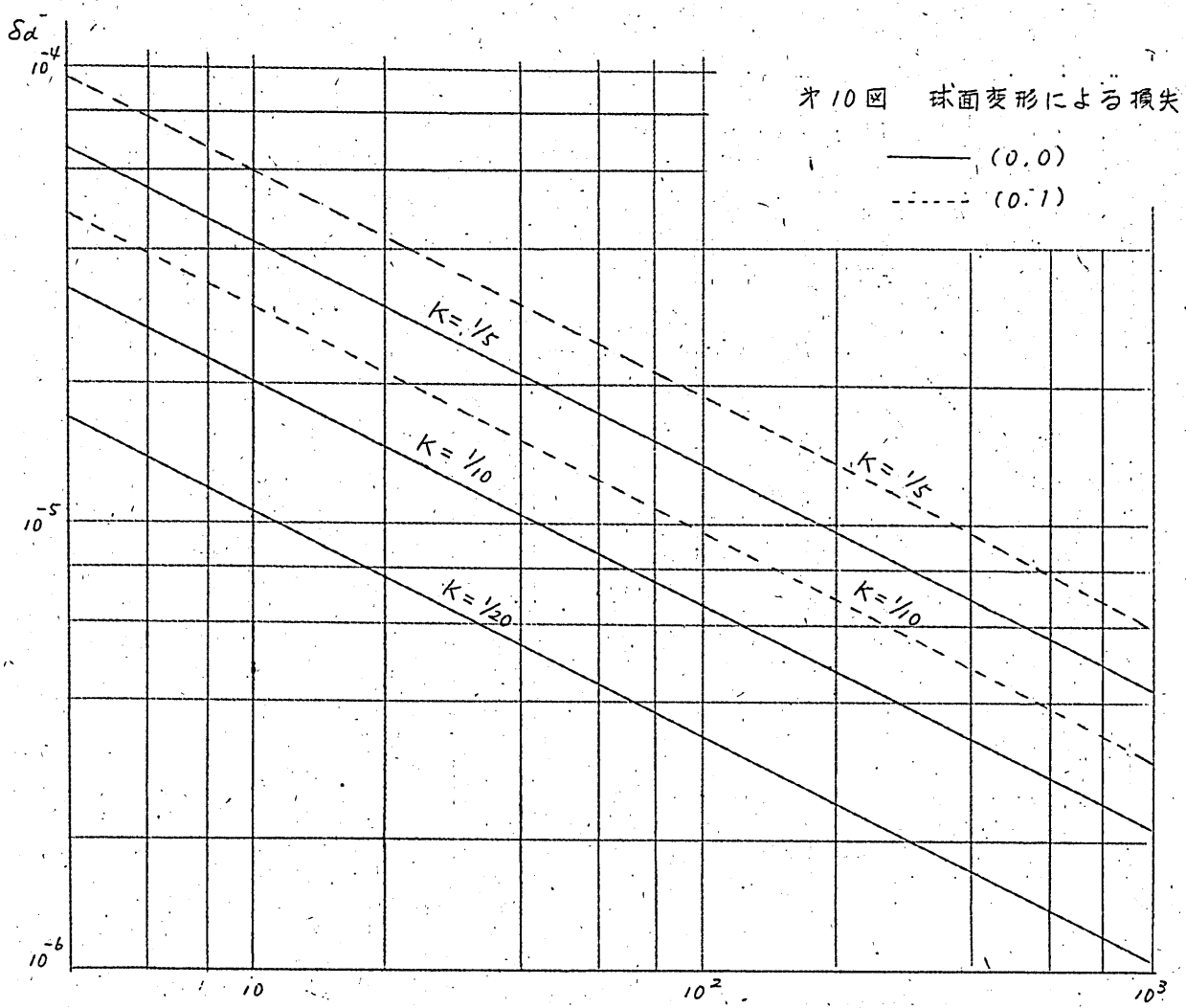
これを見てわかるように不思議なことにCの値が、殆んどモードに依らず略々10^{-3}の値をもっている。結果からみて、このことは偶然ではないと思われるが、物理的な理由はよくわからない。（6·2）は又 K<0 の場合（内側に凸の変形）には損失が増加することを示している。

（6·2）を（0,0）モード，（0,1）モードに対して、第2項、つまり変形によって変化する付加損失のみを第10図に示した。球面変形に対してはたとえ $K=\frac{1}{10}$ に対してでも、この変化分は、第1項の10％程度であり、球面変形は傾斜変形ほど敏感には損失に寄与しないことがわかる。逆にいえば鏡はわずかな凹変形によっては損失を著るしく減少させることは出来ないことをも意味する。よく使用される共焦点の場合には K=N で摂動論の適用範囲をはるかに越えており、他にえられている2,3の計算のデータも（6·2）と比較できるものがなかった。

§7 Discusions

変形によるQの低下

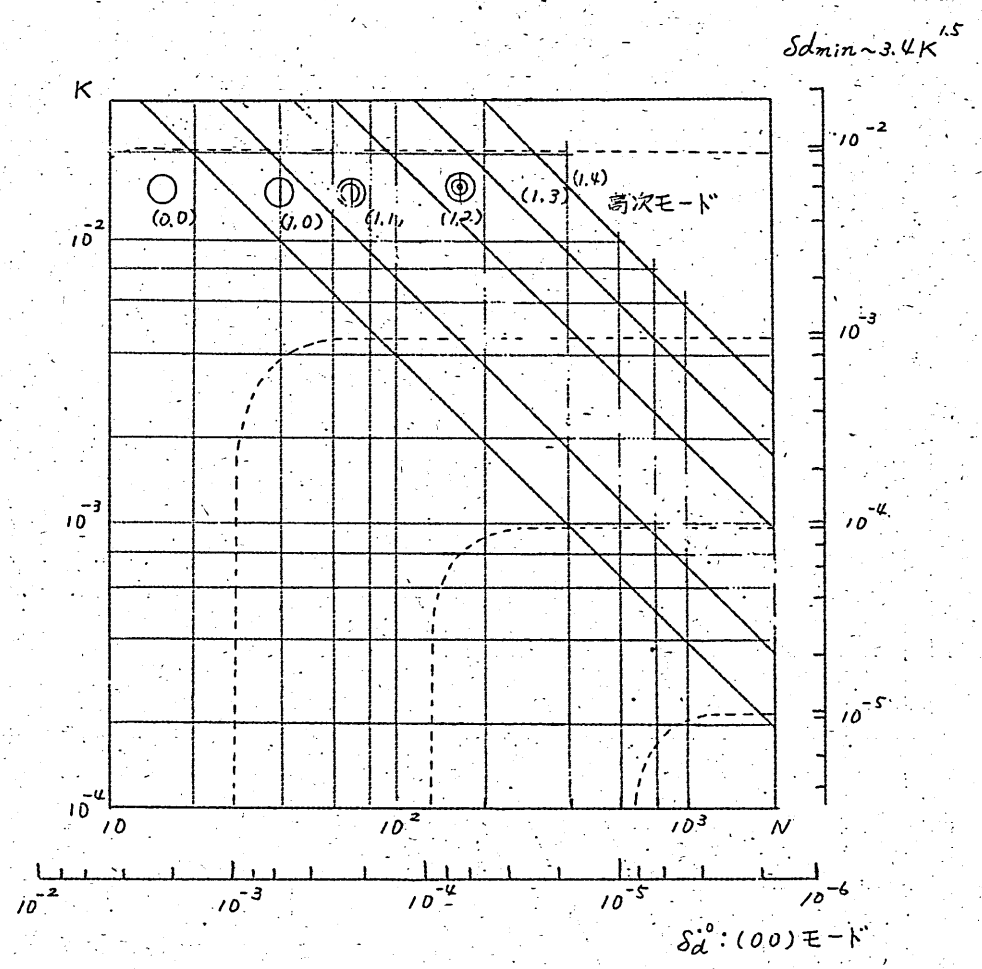
理論的には、平行平面ならば、Nさえ大きくすればいくらでもQの大きい



第10図　球面変形による損失の変化分 $\delta\bar{\alpha}$

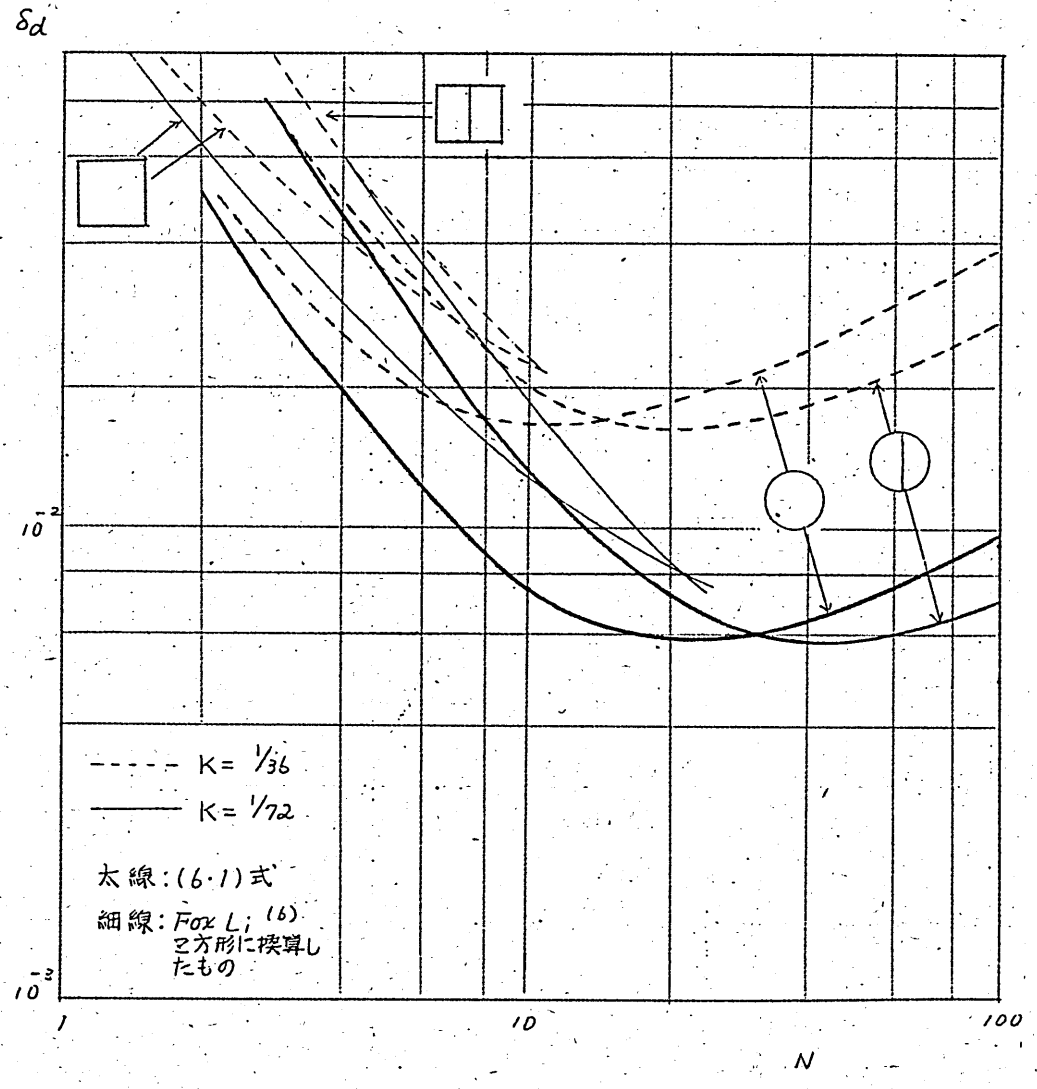
——— (0.0)

- - - - - (0.1)

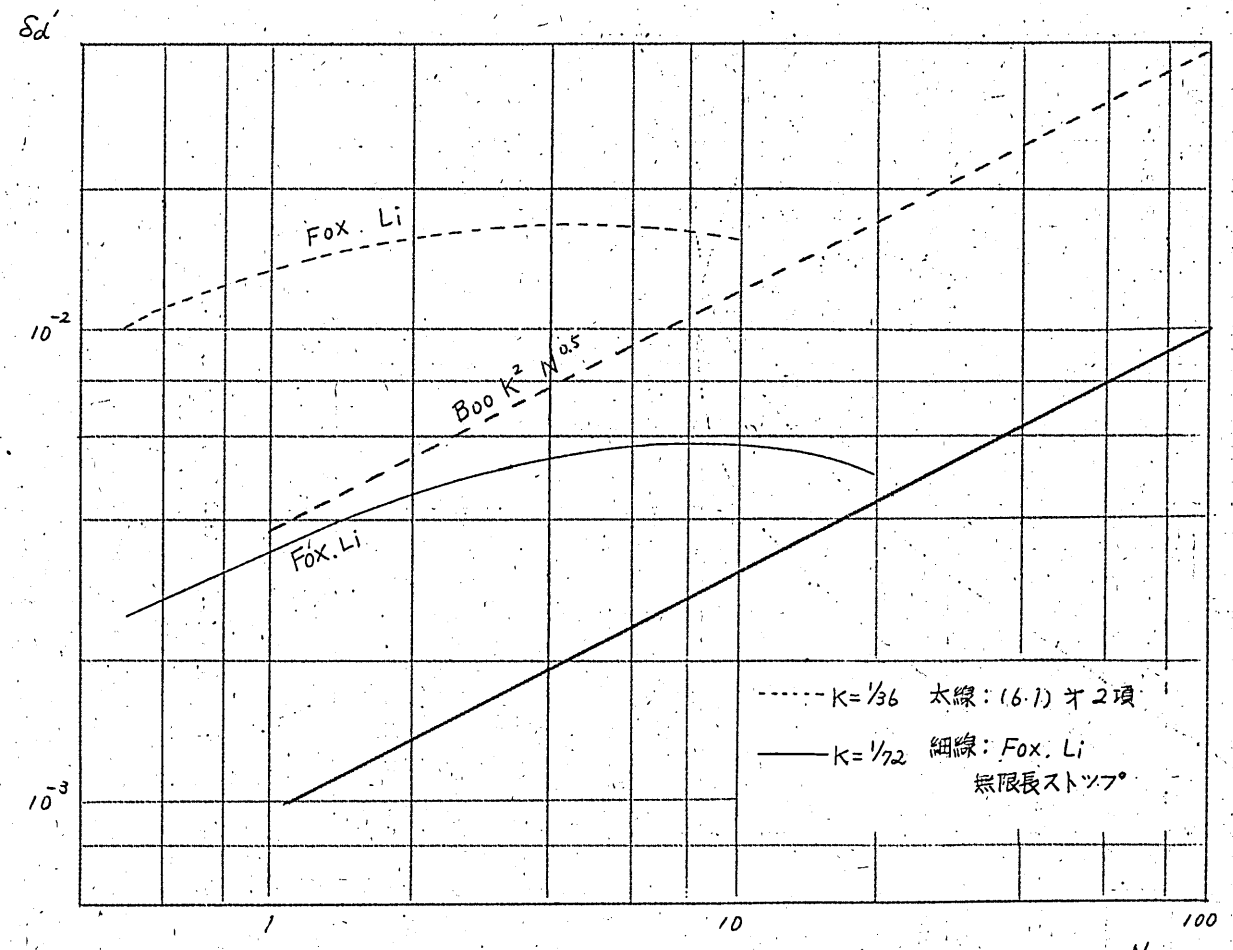


オ 11 図　　損失 δ_d 最小のモード地図

（点線は等損失線）



第12図　Fox Li の計算結果との比較



オ13図　変形による損失増分 δ_α' の比較（(10,0)モード）

共振器が実現できることになる（$\delta\alpha^0$の直線を参照）。常識的には、そのように高いQをもつ共振系をつくることは実現困難と思われるが、その困難の理由の一つはここにのべた鏡の変形である。予期したように、傾斜変形が存在すると、ごくわずかな傾斜（たとえば波長の 1/100）でもNが大きいと、$\delta\alpha$ は $\delta\alpha^0$ から大きくはずれてきて、いくらでも高いQをもつような共振系を実現することが非常に困難であることが図からよく理解できる。又、逆に、共振器の寸法や、反射率が定まれば、許容される鏡の平行度を、これから見積ることができる。

損失最小モードの地図

鏡面の平行度の調整の仕方によって、発振モードの変わることがあることが報告されている。発振が最小損失のモードで実現されると考えられるから、平行度がわるくなるにつれて、他のモードの損失が最小になるためであると推察される。円型の Fabry-Perot 共振器に対しては、我々の理論によってこのことは定量的に裏書きされた。一定のN（つまり一定の共振器）に対して、傾斜が大きくなると、損失も大きくなってゆくが、それにつれて、各モードの損失の大いさの順が入れかわるのである。（第7図～第9図）。あるN，Kの値に対して、最小の損失を与えるモードは決まる。第6-2図、又は第7図を他の図と比較すればわかるように、変形が大きくなるにつれて（0,0）→（1,0）→（1,1）→（1,2）→（1,3）→… とモードが移行する。したがって K-N図上に損失最小モードに対する Map を描くことができる。これを損失最小モードの地図と呼ぼう。2つのモードに対して等しい $\delta\alpha$ を与えるような K, N は、(6·1) によって、次の関係

$$KN = \sqrt{\frac{A_1 - A_2}{B_2 - B_1}} \qquad (7\cdot1)$$

を満たすことがわかる。但し、

$$\delta\alpha_1 = A_1 N^{-1.5} + B_1 K^2 N^{0.5}$$

$$\delta\alpha_2 = A_2 N^{-1.5} + B_2 K^2 N^{0.5}$$

である。即ち、Map の境界線はK-N図上で双曲線になる。しかも異なる境界線は決して交わらないから、ある K_0, N_0 でそのモードが損失最小であれば $KN = K_0N_0$ なるK, Nに対しても常にそのモードが損失最小であることがわかる。第11図はその Mode Map を (7·1) によって対数グラフ上に

示したものである。(7·1)の右辺の常数は才1表から求められる。

	$KN <$	0.394	(0.0)モード
0.394 $<$	$KN <$	0.73	(1.0) 〃
0.73 $<$	$KN <$	1.9	(1.1) 〃
1.9 $<$	$KN <$	3.6	(1.2) 〃
3.6 $<$	$KN <$	5.9	(1.3) 〃

更に目立った事実として、才6·2図からわかるように、(0.0)モードのNの小さいところを除けば、一定の変形に対しては、損失最小モードの損失δ_dは、Nにもモードにも関係せずほぼ一定であることである。これには物理的な説明が出来るのかもしれないが、不思議なことである。その時の最小損失のKに対する依存性は、次のようにして大体決めることが出来る。上記の各モードに対するδ_dのNについての極小値は(6·1)によって、

$$\delta_{d\,min} = 4 \cdot A^{\frac{1}{4}} \left(\frac{B}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot K^{\frac{3}{2}} \qquad (7\cdot2)$$

となるが、この$K^{\frac{3}{2}}$の前の常数因子を上記の各モードについて求めてみると3.46, 3.40, 2.77, 3.07, 3.30, となって、予期したようにほぼ一定となる。

損失最小モード地図(才11図)の右側に示した目盛は(7·2)をKに対して示したものである。一方(0.0)モードはK又はNの小さいところでδ_d最小のモードであるが、Kが小さくなると損失は(6·1)の才1項δ_d^0のみで決まるから、損失はNのみの函数になる。モード地図の下側に示した目盛はNに対応するδ_d^0の目盛を示しており、モード地図上、等損失線を点線で示した。これによって、共振器の寸法と平行度がわかれば、発振モードと損失δ_dを読みとることが出来る。

δ_dの表式の形について

$$\delta_d = A_{lm} N^{-1.5} + B_{lm} K^2 N^{0.5} \qquad (6\cdot1)$$

及び(6·2)等は、一見したところ、この形のままでは、δ_dはKのべキについての摂動級数展開のようであり、したがって、変形による才2項が、才1項をしのぐようなところでは正当性が疑がわれるように見えるが、実はそうではないことを注意しておこう。

Kのべキについての展開はU_0を(2·7)の形に求めるときにつかったの

であり、そこで K^3 以上の項が小さければ（2·8）によって $\delta\alpha$ が（2·9）又は（6·1）の形になったのである。（2·9）を書くときに改めて、K^3 以上の項をおとしたが、それは、第2項の K^2 の項と比べて小さいところを問題にしようとしておとしたのであって、第1項と比べているのではないのである。つまり（6·1）全体が、変形があるときの第一近似式になっているのであるといってもよい。又更にくわしくしらべると、実はH及びIの転移規則によって K^3 の項は禁止されて0になるので、（6·1）は K^3 の order まで正しいことがわかる。Kが大きくなってきたときの（6·1）の近似の度合は正確には（2·7）式の K^3 の項を求めて（2·8）で議論しなければならないが、複雑であるので行なわなかった。

Fox. Li [6] との比較

§1でのべたように、入射波が平面波に近い場合の散乱には、微小変形の場合、変形と鏡でそれに対応する位相差を与えることと近似的に等価であるから、Fox, Li はそれを利用して無限長の傾斜した strip の間の共振について、計算機による反復計算により結果を出した。その計算はNの太きさに対して適用範囲があるが、strip を正方形鏡面の場合に換算した結果を第13図に示し、同時に対応する円形モードの変形に対する我々の結果をも図示した。傾向も数値もかなり合っているようである。

我々の結果（6·1）式は $N \gg 1$ （例えば $N > 5$）に対してよい近似であり、更に $\delta\alpha$ 自身が大きくならない（10^{-2} 程度）ような、KとNの範囲で成立っている筈であることも注意しなければならない。

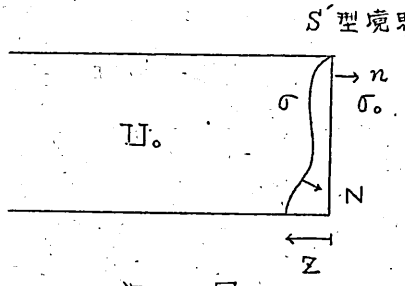
Fox. Li の計算では、鏡が双方とも変形しているので、我々の場合のKは2倍しなければならないから、$\delta\alpha$ の増加分 $\delta\alpha'$ は4倍して比較しなければならない。Fox. Li の数値計算は〔0·0〕と〔1.0〕の形のモードに対し、各パラメータにつき各点毎に反復計算を行なうことによってなされたが、我々が解析的に求めた式（6·1），（6·2）では、各モードについて、N及びKについての依存性が、簡潔にしかも一挙に求められている点非常に有利であり、しかも実用のレーザ共振器は（6·1）（6·2）の計算の適用範囲にふくまれている。Fox, Li の場合は、適用範囲からはずれているので、そこにおける傾向を外挿することによってレーザ共振器の場合を推察できるだけである。

第13図には、$\delta\alpha$ の増大分 $\delta\alpha'$ のみを（0, 0）モード，〔0, 0〕モードについて比較した。鏡の形に円と方形の差はあっても、Nに対する依存性は

($N^{0.5}$に比例)，および変形Kに対する依存性(K^2に比例)はよくあっている。Nに対する依存性はFox. Li の場合まがっているが，Fox Li の計算ではNの大きいところでは，計算の性質上信用度がおち，しかもこの増加分の曲線のまがり具合を云々するためにはかなり精度が要求されるはずであるから，これは，比較にさいし留意せねばならない。

§8. 境界条件の摂動から直接波動函数を導びく方法

§2,(2.7)では，固有値問題の摂動という形で，境界の変化に対応する摂動項から摂動をうけた固有函数を通常の摂動論の公式によって書きあらわした。この考えでは，先に摂動をうけた固有値を求め，ついで固有函数を求めるという順序にしたがっている。これとは別に，固有値の摂動量を求めるという経過をへないで，直接に，境界条件そのものの摂動から，波動函数(この場合固有函数といわない方がよいであろう)を摂動展開で求めることは，しばしば，導波管や，金属板の歪による散乱に対して取扱われている。[9][10] この場合，固有値を求めることは，波動函数を求めたあとで求めることになる。今の場合にそのような方法を適用した場合，固有値問題の摂動論からみちびかれたものとどのように合致するか比べることは興味がある。というのは，固有値問題の摂動論による展開式は，固有値そのものや，空胴内のパワーについては信用できるが，境界"値"については，どの程度正確か不明であるから。



第 14 図

まず，σ上S'型境界を取扱う。

$$\sigma : Z - \epsilon f(r,\theta) = 0 \qquad (8.1)$$

無摂動の場合の波動函数を u_0 とし，摂動をうけたものを U_0 と記す。

$$-\frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial Z} = 0 \qquad (\sigma_0 上) \qquad (8.2)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} = IN \cdot \mathrm{grad}\, U_0 = 0 \qquad (\sigma 上) \qquad (8.3)$$

ここで IN は，σに対する法線で

$$IN = -\frac{\mathrm{grad}\,\sigma}{|\mathrm{grad}\,\sigma|} = \frac{1}{N}\left(-1+\theta(\epsilon^2), \epsilon f_r + O(\epsilon^3), \epsilon\frac{f_\theta}{r} + O(\epsilon^3)\right)$$

$$N \equiv \sqrt{1+\epsilon^2 f_r^2 + \frac{\epsilon^2 f_\theta^2}{r^2}}\,, \quad \frac{1}{N} \sim 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2\left(f_r^2 + \frac{f_\theta^2}{r^2}\right) + \cdots \qquad (8.4)$$

ここで添字は偏微分係数をあらわす。微小変形をあらわしているので、ϵ は微小量である。

$$U_0 = u_0 + \epsilon U' + \epsilon^2 U'' + \cdots \qquad (8.5)$$

の様に、領域 V の中で展開したものとし、更に

$$u_0(r,\theta,z) = u_0(r,\theta,0) + \frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 u_0(r,\theta,0)}{\partial z^2} + O(z^4)$$

$$U'(r,\theta,z) = U'(r,\theta,0) + z\frac{\partial U'(r,\theta,0)}{\partial z} + \cdots \qquad (8.6)$$

等と、z のべキに展開する。U'' も同様である。これらを、(5) に代入し、(1) を考慮して、ϵ の昇べキに整理すると、

$$U_0(z) = u_0(0) + \epsilon U'(0) + \epsilon^2\left(U''(0) + f\frac{\partial U'(0)}{\partial z} + \frac{f^2}{2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}\right)$$

$$+ \epsilon^3\left(U''' + f\frac{\partial U''}{\partial z} + \frac{f^2}{2}\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} + \frac{f^3}{3!}\frac{\partial^3 u_0}{\partial z^3}\right) + \cdots$$

となる。したがって、これから、$z = \epsilon f$ における gradient の各成分は、

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial U_0(r\theta,\epsilon f)}{\partial z} = \epsilon\left(\frac{\partial U'}{\partial z} + f\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\right) + \epsilon^2\left(\frac{\partial U''}{\partial z} + f\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} + \frac{f^2}{2}\frac{\partial^3 u_0}{\partial z^3}\right) + \cdots \\
&\frac{\partial U_0(r,\theta,\epsilon f)}{\partial r} = \frac{\partial u_0}{\partial r} + \epsilon\frac{\partial U'}{\partial r} + O(\epsilon^2) \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial U_0(r\theta,\epsilon f)}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \epsilon\frac{\partial U'}{\partial \theta} + O(\epsilon^2)\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

u_0 についての境界条件を用い、(7) と (4) によって、直交条件 (3) を ϵ のべ次まで各べキについて書くと (ϵ^0 はあらわれない)

$$\epsilon^1 : \quad -\left(\frac{\partial U'}{\partial z} + f\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\right) + f_r\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{f_\theta}{r^2}\frac{\partial u_0}{\partial \theta} = 0 \qquad (8.8)$$

$$\epsilon^2 : \quad -\left(\frac{\partial U''}{\partial z} + z\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2}\right) + f_r\frac{\partial U'}{\partial r} + \frac{f_\theta}{r^2}\frac{\partial U'}{\partial \theta} = 0 \qquad (8.9)$$

がえられる。ϵ^3 以上は多少複雑になる。(8) は 1 次の摂動項 U' の σ_0 上 ($z=0$) の値を、u_0 によって与えている。したがって、空洞

領域 V に Green の定理を利用して、一挙に Φ' を求めることが出来る。考えている問題では，空洞内部の Green 函数を用いることになるが，その時の固有振動数 ω には，無摂動の場合の固有振動数 ω_0 を使用すると，Green 函数は、初から、$\omega=\omega_0$ を取除いたものを使用しなければならない。[10] 即ち

$$G(x|x') = \sum_{\nu\neq 0} \frac{u_\nu(x)\,u_\nu(x')}{\omega_0^2-\omega_\nu^2} \tag{8.10}$$

これは，u_ν と同じ境界条件をみたす Green 函数であるから，(8) によって

$$\Phi'(x) = -\int_{\sigma_0} G(x|x')\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\,d\sigma = \sum_{\nu\neq 0}\frac{u_\nu(x)}{\omega_0^2-\omega_\nu^2}\int_{\sigma_0} n_\nu(x')\frac{\partial \Phi'(0)}{\partial z}\,d\sigma$$

$$= \sum_{\nu\neq 0}\frac{u_\nu(x)}{\omega_0^2-\omega_\nu^2}\int_{\sigma_0} u_\nu(x')\left\{-f\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}+f_r\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{f_\theta}{r^2}\frac{\partial u_0}{\partial \theta}\right\}d\sigma \tag{8.11}$$

(2.6) に行った積分は、この第1項のみを近似したことと等価である。一方，固有値問題の摂動論からは、

$$H_{\nu 0} \equiv \int_\sigma u_\nu \frac{\partial u_0}{\partial n}\,d\sigma = \int_\sigma u_\nu \cdot N\cdot \mathrm{grad}\, u_0\, d\sigma$$

$$= \int_{\sigma_0}(u_\nu(0)+\epsilon^2 f^2\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial z^2}+\cdots)\left\{\epsilon\left(-f\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}+f_r\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{f_\theta}{r^2}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\right)+O(\epsilon^3)\right\}$$

$$= \epsilon\int_{\sigma_0} u_\nu\left\{-f\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}+f_r\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{f_\theta}{r^2}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\right\}d\sigma + O(\epsilon^3) \tag{8.12}$$

これは、上式の積分と ϵ^2 の order まで完全に一致しており、<u>変形の1次の項までは、二つの方法は一致する。</u>

2次についても (11) と (9) とから，同様な手法によって

$$\Phi''(x) = -\int_{\sigma_0} G(x|x')\frac{\partial \Phi''}{\partial n}\,d\sigma$$

$$= \sum_{\mu\neq 0}\frac{u_\mu(x)}{\omega_0^2-\omega_\mu^2}\int_{\sigma_0} u_\mu(x')\left\{-f\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2}+f_r\frac{\partial \Phi'}{\partial r}+\frac{f_\theta}{r^2}\frac{\partial \Phi'}{\partial\theta}\right\}d\sigma$$

これに今求めた(11)式（つまり，χ，積分には(12)を用いて書いたもの）を用いて書くと

$$= \sum_{\mu \neq 0} \frac{u_\mu(x)}{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} \sum_{\nu \neq 0} \frac{H_{\nu 0}}{\omega_0^2 - \omega_\nu^2} \int_{\sigma_0} u_\mu(x') \left\{ -f \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial z^2} + f_r \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial r} + \frac{f_\theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} d\sigma \qquad (8.13)$$

ところが，この積分は(12)を考慮すると，$H_{\mu\nu}$ と書けるから，

$$= \sum_{\mu \neq 0} \frac{u_\mu(x)}{\omega_0^2 - \omega_\mu^2} \sum_{\nu \neq 0} \frac{H_{\mu\nu} H_{\nu 0}}{\omega_0^2 - \omega_\nu^2} \qquad (8.14)$$

となる。これは，摂動論の公式(2.7)の2次の項のうち第1項であり，第2項は，あらわれていない。第2項は，Green 函数に対する補正からあらわれるのかどうか不明である。とにかく，摂動に対する2つの取扱いは，かなりよく一致することがわかった。

σ_0，σ 上S型 の場合は，上記よりも簡単に得られる。考え方は同様である。(5)に対応して

$$\Gamma_0 = u_0 + \epsilon \Gamma' + \epsilon^2 \Gamma'' + \cdots \qquad (8.15)$$

(6)に対応して

$$u_0 = z \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{z^3}{3} \frac{\partial^3 u_0}{\partial z^3} + \cdots \qquad (8.16)$$

Γ'，Γ'' も同様に展開して，条件(3)に対応するものとしては，今の場合

$$\Gamma_0 = 0 \qquad (\text{on } \sigma ;\ z = \epsilon f(r, \theta)) \qquad (8.17)$$

であるので上式を代入して，ϵ のベキについて，(17)式を書けば，(8)(9)に対応して

$$\epsilon^1 :\ \Gamma' + f \frac{\partial u_0(0)}{\partial z} = 0 \qquad (8.18)$$

$$\epsilon^2 :\ \Gamma + f \frac{\partial \Gamma'(0)}{\partial z} = 0 \qquad (8.19)$$

ϵ^3 以上は，多少項数が増える。Green 函数には (10) の形を用いる。但し，u_ν は今の場合，σ_0 上S型である。したがって，(10)も u_ν と同じ境界条件をみたす。したがって (11) に対応して (18) を用いると，

$$\Psi'(x)=\int_{\sigma_0}\frac{\partial G_\nu(x|x')}{\partial n'}\Psi'(0)\,d\sigma$$

$$=\sum_{\mu\neq 0}\frac{u_\mu(x)}{\omega_0^2-\omega_\mu^2}\int_\sigma\frac{\partial u_\mu}{\partial z}\frac{\partial u_0}{\partial z}f\cdot d\sigma \qquad (8.20)$$

となる。(2.5) で与えたHは

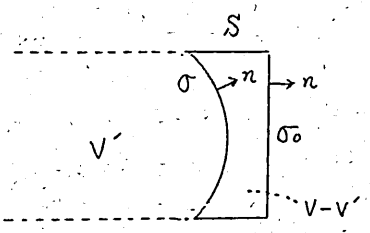
$$H_{\nu 0}\equiv-\int_\sigma u_0\frac{\partial u_\nu}{\partial n}d\sigma=-\int_{\sigma_0}\left\{f\frac{\partial u_0}{\partial z}+O(\epsilon^3)\right\}\left\{-\frac{\partial u_\nu}{\partial z}+O(\epsilon^2)\right\}d\sigma$$

したがって，これは上式の積分とは，$O(\epsilon^2)$ まで一致しているので，やはり，一次までは，2つの方法は完全に一致することがわかった。

2次の場合も(19)から，全く同じように進められ，(19)と(18)が同じ形をしていることから，S´ の場合と同じ結論即ち，(2.7) の2次の摂動項の対角項は一致し，対角項はあらわれない．ことがわかる。

附録：1

Green の対角公式を右の領域に適用すると，



$$-\int_\sigma u_a\frac{\partial u_b}{\partial n}d\sigma+\int_{S+\sigma_0}u_a\frac{\partial u_b}{\partial n}dS$$

$$=\int u_a\nabla^2u_b\,dV+\int_{V-V'}\nabla u_a\cdot\nabla u_b\cdot dV$$

左辺は σ_0 上 $\{u_\mu\}$ が S型，S´型にかゝわらず，対角項が消えるので，

$$H_{ab}\equiv-\int_\sigma u_a\frac{\partial u_b}{\partial n}d\sigma=\int_{V-V'}(\nabla u_a\cdot\nabla u_b-\omega_b^2\cdot u_a u_b)\,dV$$

(σ 上S型境界)

時に，σ が波長に比して，小さい微小変形であると次の様に近似できて

$$\sim\int_{V-V'}\nabla u_a\cdot\nabla u_b\cdot dV \qquad (\sigma\text{ 上 S型})$$

又，σ上S′型の場合

$$H_{ab}\equiv\int\frac{\partial u_a}{\partial n}u_b\,d\sigma=-\int_{V-V'}(\nabla u_a\cdot\nabla u_b-w_a^2u_au_b)\,dV$$

（σ上S型境界）

$$\sim w_a^2\int_{V-V'}u_a\cdot u_b\cdot dV$$

と書かれる．上の行列要素は，レーザー用の共振器のモードに対しては同じになる（§4-1）。

附録：2

$H=0$ の場合で，Iによる2次の摂動を計算するとき，（3.5）を用いて（文献1参照）

$$\Delta_{l0}\equiv\sum_{\nu}\frac{I_{0\nu}I_{\nu0}}{w_0^2-w_\nu^2}=\sum_{m\neq0}\frac{(I_{\nu0})^2\cdot\alpha^2}{\Lambda_{l0}^2-\Lambda_{lm}^2}$$

$$=\left\{\frac{1}{w_0L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2(2.40\times10^{-2}\cdot N^{-1.5})\right\}^2\Lambda_{l0}^2\sum_{m\neq0}^{\infty}\frac{\Lambda_{lm}^2(1+i)^2}{\Lambda_{l0}^2-\Lambda_{lm}^2}$$

を求める必要がある。$(1+i)$ は，Iの実部，虚部が等しいことからきている。この和の各項は，$m\to\infty$につれて減少して1になるので収束しない。これは，Iの表式（3.9）等が，実さいのレーザ共振器のモードに近い低次のモードのみに対して，$N\gg1$，$n\gg1$，等の条件をもった近似式であったためである。運動方程式そのものが，低次の固有函数のみで収束するような範囲で意味をもつものであって，したがって，上の2次の和をとるときも，高々最初の10～20項くらいまではいみをもつ。そのはんいで，Δ_{l0}の大きさを評価して，1次の項に対し補正にもならないならば，Iに関しては1次の摂動計算で十分であることをあるいみで確認できると考えてよい。対1項I_{00}との比をとれば

$$\frac{\Delta_{l0}}{Im(I_{00})}=\frac{1}{w_0L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2(2.40\times10^{-2}\cdot N^{-1.5})\sum_{m\neq0}\frac{\Lambda_{lm}^2}{\Lambda_{l0}^2-\Lambda_{lm}^2}$$

$$=2\delta d\cdot\frac{1}{\Lambda_{l0}^2}\sum\frac{\Lambda_{lm}^2}{\Lambda_{l0}^2-\Lambda_{lm}^2}$$

実さいの $\delta\lambda$ は、$10^{-4}\sim10^{-6}$ 程度であるので，$\Lambda_{\ell m}$ と $\Lambda_{\ell,m+1}$ の差が π 程度であることを考えると、20項とっても 1% 以下の補正である

附録：3

Laser 共振器のモードとして考えている場合，n は非常に大きく，且 m，ℓ が小さい場合には、量子数 n の転移は殆んど生じないと考えてよい。摂動論が適用出来るはんいでは，固有値の接近したモードへの転移が dominant であり，しかも，m，ℓ については速く収束するような事情しか考えることが出来ないということから，$n\to n+1$ への転移による固有値の変化は

$$\omega_0^2-\omega_\nu^2=\left(\frac{\Lambda_{\ell m}}{a}\right)^2-\left(\frac{\Lambda_{\ell' m'}}{a}\right)^2+(2n+1)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

となり，$\ell-\ell'$，$m-m'$ が小さいことを考えると量子数 ℓ，m の変化による固有値の変化より、量子数 n の変化による固有値の変化が決定的に大きく，摂動計算の分母にこの固有値の変化が入るので，事実上，$H_{\mu\nu}$ は、n に関しては対角的であるとして計算してよい。(原子論の話で言えば，エネルギーの非常に異ったレベルへの転移は殆んどおこらないということに対応する。) 勿論，変形が波長に比して小さくないならば，n の転移も生じえて，上のことは言えないが，その時は，摂動論以前の問題で，モードの平均収束が，項別微積分可能で各点でも収束するという仮定が使えないので，問題の形式化を変えねばならない。

附録：4

考えている固有函数系は，

$$u_\nu=\frac{1}{N_\nu}J_\ell\left(\frac{\Lambda_{\ell m}}{a}r\right)\left\{\begin{matrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{matrix}\right\}\left[\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\right]$$

$$J_\ell(\Lambda_{\ell m})=0,\qquad \omega_\nu^2=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{\Lambda_{\ell m}}{a}\right)^2$$

$$N_\nu=\sqrt{\frac{L\pi a^2}{2}}\,|J_1(\Lambda_{om})|\qquad \ell=0$$

$$= \sqrt{\frac{L\pi a^2}{4}} \left| J_{l+1}(\lambda_{lm}) \right| \qquad l \neq 0$$

と書ける。U_ν の右辺の $\{\ \}$ の中の上，下は、＋及び－状態に対応し，$[\ ]$ の中の上及び下は，固有函数の境界条件が S。上 S 型又は、S′型の場合である。Laser 用の Fabry Perot 共振器に適用したいわけであり，$m,\ l \simeq 0 \sim 10$，$n \simeq 10^4 \sim 10^6$ の場合を考えている。

I の行列要素（3.1）にあらわれる積分から，まず i) は明らかである。ii)，iii) は，I の θ に関する 2 重積分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \cdot d\theta' \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \cos l'\theta' \\ \sin l'\theta' \end{matrix} \right\} \cos m(\theta - \theta')$$

が，$\cos l\theta \cdot \sin l'\theta$ の様に cross した場合は 0，になり，0 になるないのは，cross しない項で，しかも

$$l = l' = m$$

のときにかぎる、ことから得られる。

$$= \left\{ \begin{matrix} \pi^2 \\ \pi^2 \end{matrix} \right\} \qquad l \neq 0$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 4\pi^2 \\ 0 \end{matrix} \right\} \qquad l = 0$$

但し，$\{\ \}$ の中の上は $\cos l\theta \cos l\theta'$ の時，下は $\sin l\theta \cdot \sin l\theta'$ のときである。

附録：5

附録3によって，$n' = n$ としてよいから，その時は

$$I(\lambda, w) \equiv \int_0^L\int_0^L e^{i\Omega|z-z'|} \left\{ \begin{matrix} \sin kz \cdot \sin kz' \\ \cos kz \cdot \cos kz' \end{matrix} \right\} dz\, dz'$$

$$= \frac{\left\{ \begin{matrix} k^2 \\ \Omega^2 \end{matrix} \right\}}{(\Omega^2 - k^2)^2} \left(1 \mp e^{i\Omega L} \right) + \frac{i\Omega L}{2(\Omega^2 - L^2)}$$

但し，

$$\Omega \equiv \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \quad , \qquad k \equiv \frac{n\pi}{L}$$

である，Laser 共振器のように，$n \gg 1$，であって，しかも，I の行列要素の積分は，λ の小さいところのみしかきかないので，正確に

$$k^2 \sim \Omega^2$$

が成立つとしてよく，したがって，σ 上，S 型，S′型境界とは，I に関するかぎり差はあらわれない。これは，直観的にもあきらかなことである。

附録：6

$$I''(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[(J_e(\tilde{\lambda}))^2 + i J_e(\tilde{\lambda}) N_0(\tilde{\lambda}) \right]$$

但し，$\tilde{\lambda}$ は積分（3.6）の分母の零点

$$\tilde{\lambda} \equiv + \sqrt{(\omega a)^2 - (n\pi \frac{a}{L})^2}$$

である，(文献1)附録参照)。$\omega \neq \omega_{em}$ したがって，$\tilde{\lambda} \neq \lambda_{em}$ であるから，I'' は0にはならない。一方，積分 I' の重要な性質としてわかっていることは，$\omega = \omega_{em}$ のときは殆んど，ω-independent であることである。それは，分母の2重零点が分子の零点と打消したことが主な理由である。$\omega \neq \omega_{em}$ の場合，被積分函数の実部はやはり2重零点が一致するので，$\omega = \omega_{em}$ の場合と同じことが言えるが，被積分函数の虚部の場合分子は一重零点であるので，積分は主値の他に極よりの寄与が生じて，これは積分の実部に寄与する。(3.4) 式において，この項は上の I'' よりの寄与，即ち，$\frac{1}{8} N^{-1} [J_e(\tilde{\lambda})]^2$ を打消すことを以下に示そう。

公式

$$\frac{1}{(x-a)^2} = P\left(\frac{1}{(x-a)^2}\right) - i\pi\delta'(x-a)$$

の右辺項が，被積分函数の虚部から，余分の実部を生ずる。即ち (3.5) の主値以外から生ずる実部は，

$$i\pi \frac{d}{d\Lambda}\left[\frac{\left\{1 \mp e^{i\sqrt{(wa)^2-\Lambda^2}\left(\frac{L}{a}\right)}\right\}\left\{J_\ell(\Lambda)\right\}^2\Lambda}{(\Lambda+\tilde{\Lambda})^2}\right]_{\Lambda=\tilde{\Lambda}}$$

$$= i\pi\left[\frac{d}{d\Lambda}\left\{\mp e^{i\sqrt{(wa)^2-\Lambda^2}\left(\frac{L}{a}\right)}\right\}\right]_{\Lambda=\tilde{\Lambda}} \frac{\left[J_\ell(\tilde{\Lambda})\right]^2}{(2\tilde{\Lambda})^2}\tilde{\Lambda}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\frac{\left(\frac{L}{a}\right)}{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}\left(J_\ell(\tilde{\Lambda})\right)^2 = -\frac{N^{-1}}{8}J_\ell^2 \qquad \left(N=\frac{a^2}{\mu L}\right)$$

したがって、"積分 I" からは実部の寄与はなく、I' の主値からの実部のみであるとしてよいので前論文の結果がそのまゝつかえるのである。

附録：7

無摂動状態（initial state）は、$\cos\ell'\theta$としておいて一般性を失わないので、

$$\int_0^{2\pi}\cos\ell\theta\cdot\cos\ell'\theta\cdot\cos(\theta-\varphi)\,d\theta = \pi\cos\varphi\begin{Bmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{Bmatrix} \quad \text{for} \begin{matrix}(\ell\ \ell')\\(0,1)\\(1,0)\\(\ell-1\ \ell)\\(\ell+1\ \ell)\end{matrix} \quad \text{transition}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\ell\theta\cdot\cos\ell'\theta\cos(\theta-\varphi)\,d\theta = \pi\sin\varphi\begin{Bmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{Bmatrix} \quad \text{for} \begin{matrix}(1\ 0)\\(0\ 1)\\(\ell-1,\ \ell)\\(\ell+1,\ \ell)\end{matrix} \quad \text{transition}$$

これによって、ℓと、+, − についての行列要素がわかる。

附録：8

δ_d の φ − 依存性は、初期状態が $\ell=1$ 以外の場合はすべてなくなることを示す。附録7からわかるように、H は（+ −）については対角ではないから、一般に δ_d の中には、初期状態が + でも中間状態には + − があらわれる。

$\delta\alpha''$の代表的な項について考下してみる。Iが，lと十一について対角であることから，（$l \geq 2$に対しては，以下、行列要素に十，一の添字もつける。初期状態 $0 \equiv (l, M+)$ とする）

$$\sum_{\mu,\nu \neq 0} \frac{H_{\mu 0} H_{\nu 0} I_{\mu\nu}}{(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)}$$

$$= \sum_{\substack{L=l+1, \\ l-1,}} \frac{\left(H^{+,+}_{L,M}\right)\left(H^{++}_{L,M}\right)\left(I^{++}_{L,L}\right) + \left(H^{-+}_{L,M}\right)\left(-H^{-+}_{L,M}\right)\left(I^{--}_{L,L}\right)}{(\omega_{lM}^2 - \omega_{L,m}^2)(\omega_{lM}^2 - \omega_{L,m'}^2)}$$

$$= \sum_{L,m,m'} \frac{(H)(H)(I)\cos^2\varphi + (H)(H)(I)\sin^2\varphi}{(\omega_{eM}^2 - \omega_{L,m}^2)(\omega_{lM}^2 - \omega_{Lm'}^2)}$$

$$= \sum_{L,m,m'} \frac{(H)(H)(I)}{(\omega_{eM}^2 - \omega_{Lm}^2)(\omega_{lM}^2 - \omega_{Lm'}^2)}$$

となって，φに無関係になる。ここでHは，$\varphi = 0$ の時の行列である。$l = 0$ の時は，$L = 1$ のみであり、やはりφに依存しない。<u>$l = 1$ の時</u>は，$L = 2$の項は，上と同じくφに依存しないが，$L = 0$ の項は附録7によって

$$\sum \frac{(H^{01})(H^{01})I^{00} \cdot \cos^2\varphi}{(\omega_{1M}^2 - \omega_{0m}^2)(\omega_{1M}^2 - \omega_{0m'}^2)} + \sum \frac{(H^{21})(H^{21})I^{22}}{(\omega_{1M}^2 - \omega_{2m}^2)(\omega_{1M}^2 - \omega_{2m'}^2)}$$

によって、<u>φ－依存性が現われる</u>。数値計算によると，$\delta\alpha''$のφ－依存性の項は殆んど0か又は0になる（附録10）。

$\delta\alpha'''$の場合も同様に

$$\sum_{\mu\nu} \frac{H_{0\mu} H_{\mu 0} I_{\nu 0}}{(\omega_0^2 - \omega_\mu^2)(\omega_0^2 - \omega_\nu^2)}$$

$$= \sum_{\substack{L=l+1,l-1 \\ m,\ m'}} \frac{\left(H^{++}_{l,L}\right)\left(H^{++}_{L,l}\right)\left(I^{++}_{l,l}\right) + \left(H^{+-}_{l,L}\right)\left(H^{-+}_{L,l}\right)\left(I^{++}_{l,l}\right)}{(\omega_{lM}^2 - \omega_{Lm'}^2)(\omega_{lM}^2 - \omega_{lm}^2)}$$

もヌ，上と同じ理由でφ－に無関係となる。$l = 0$ の場合は$L = 1$ の項のみでφに無関係である。$l = 1$ のみ上と同様 $\cos^2\varphi$ があらわれ<u>$\delta\alpha$が$l = 1$ の場合にはφに依存する</u> ことがわかる。

附録：9

(a) 等式 $$\int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_{\nu-1}(\beta x) x^2 dx = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2-\beta^2)^2} J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) \quad (1)$$

但し

$$J_\nu(\alpha) = 0 \quad , \quad J_{\nu-1}(\beta) = 0 \quad (2)$$

証明. 降次演算子：

$$\frac{d}{dz}\left[z^\nu \cdot J_\nu(z) \right] = z^\nu J_{\nu-1}(z) \quad (3)$$

を利用する。(3) はヌ、書直すと、

$$\frac{1}{\beta^\nu} \frac{d}{d\beta} \left[\beta^\nu J_\nu(\beta x) \right] = x J_{\nu-1}(\beta x) \quad (4)$$

微分方程式から容易に導びかれる次の公式：

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) x dx = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \left\{ \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \right\} (5)$$

を使用する。

(4) に $xJ_\nu(\alpha x)$ を乗じて $x=0$ から 1 まで積分すると，(5) を利用して

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_{\nu-1}(\beta x) x^2 dx = \frac{1}{\beta^\nu} \frac{d}{d\beta} \left[\beta^\nu \int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) x dx \right]$$

$$= \left\{ \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \right) \right\} \cdot \left\{ \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \right\}$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \cdot \frac{1}{\beta^\nu} \frac{d}{d\beta} \left[\beta^\nu \left\{ \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \right\} \right]$$

これに (4) を反復使用して

$$= \frac{2\beta}{(\alpha^2-\beta^2)^2} \left\{ \alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) \right\}$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \left\{ \alpha J_{\nu-1}(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_\nu(\beta) \right\} \quad (6)$$

特に、(2) の条件があるときは、証明すべき等式 (1) を得る。

(b) 等式

$$\int_0^1 J_{\nu-1}(\alpha x)\, J_{\nu-1}(\beta x)\, x^3 dx = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2-\beta^2)^2} J_\nu(\alpha) J_\nu(\beta) \qquad (7)$$

但し　$J_{\nu-1}(\alpha)=0$,　$J_{\nu-1}(\beta)=0$　　(8)

証明。　まず (8) が成立するとき、次の関係が成立つことを示す。

$$\alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta) = 0 \qquad (9)$$

これは、公式 $2\nu J_\nu(z) = z\left[J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)\right]$ において、$z=\alpha, \beta$ とおいたものをつくり、はじめのものに $J_\nu(\beta)$、あとのものに $J_\nu(\alpha)$ を乗じて辺々引算すればえられる。

(4) 式と、(4) 式で β の代りに α とおいたものと辺々相乗じて、x を乗じて $x=0$ から 1 まで積分すると

$$\int_0^1 J_{\nu-1}(\alpha x)\, J_{\nu-1}(\beta x)\, x^3 dx$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^\nu}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^\nu\right)\left(\frac{1}{\alpha^\nu}\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha^\nu\right)\left[\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta)\right\}\right]$$

前小節 (a) の時と同様なやり方で微分演算を実行して (4) を反復使用すれば

$$= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\alpha J_{\nu-1}(\beta) J_\nu(\alpha) - \beta J_{\nu-1}(\alpha) J_\nu(\beta)\right\}$$

$$+ \frac{2\beta}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\left\{\alpha J_\nu(\beta) J_\nu(\alpha) - \beta J_{\nu-1}(\alpha) J_{\nu+1}(\beta)\right\}$$

$$- \frac{2\alpha}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\left\{\alpha J_{\nu-1}(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_\nu(\beta)\right\}$$

$$- \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2-\beta^2)^3}\left\{\alpha J_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta)\right\}$$

特に (8) が成立するときは、(9) を考慮すると、(7) 式がえられる。

附録：10

傾斜波形 δ_d'' : $\left[\sum_{m=0} \frac{\Lambda_{L,m}^2}{[\Lambda_{eM}^2 - \Lambda_{L,m}^2]^3}\right]^2$ の数値 $\begin{pmatrix} \text{上段} & L = \ell - 1 \\ \text{下段} & L = \ell + 1 \end{pmatrix}$

M \ ℓ	0	1	2	3
0	4.67×10^{-4}	2.60×10^{-16} > $2.88 \cdot 10^{-5}$	2.25×10^{-5} $2.02 \cdot 10^{-4}$	3.77×10^{-5} $1.51 \cdot 10^{-4}$
1	$1.68 \cdot 10^{-5}$	$5.60 \cdot 10^{-16}$ > $2.58 \cdot 10^{-5}$	$3.12 \cdot 10^{-6}$ $2.80 \cdot 10^{-5}$	$6.89 \cdot 10^{-6}$ $2.75 \cdot 10^{-5}$
2	$2.78 \cdot 10^{-6}$	$1.08 \cdot 10^{-15}$ > $5.83 \cdot 10^{-6}$	$8.58 \cdot 10^{-7}$ $7.71 \cdot 10^{-6}$	$2.18 \cdot 10^{-6}$ $8.71 \cdot 10^{-6}$
3	$8.04 \cdot 10^{-7}$	$4.84 \cdot 10^{-17}$ $1.98 \cdot 10^{-6}$	$3.26 \cdot 10^{-7}$ $2.93 \cdot 10^{-6}$	$9.03 \cdot 10^{-7}$ $3.61 \cdot 10^{-6}$

δ_d''' : $\left[\sum_{m'} \frac{\Lambda_{L,m'}^2}{(\Lambda_{eM}^2 - \Lambda_{L,m'}^2)^3} \sum_{m \neq M} \frac{\Lambda_{em}^2}{(\Lambda_{L,m'}^2 - \Lambda_{em}^2)^2 (\Lambda_{eM}^2 - \Lambda_{em}^2)}\right]$ の数値

M \ ℓ	0	1	2	3
0	1.15×10^{-4}	2.75×10^{-5} $5.16 \cdot 10^{-5}$	9.88×10^{-6} $2.73 \cdot 10^{-5}$	4.26×10^{-6} $1.74 \cdot 10^{-5}$
1	$2.97 \cdot 10^{-5}$	$1.73 \cdot 10^{-5}$ $1.94 \cdot 10^{-5}$	$1.09 \cdot 10^{-5}$ $1.31 \cdot 10^{-5}$	$7.30 \cdot 10^{-6}$ $9.31 \cdot 10^{-5}$
2	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$9.19 \cdot 10^{-6}$ $9.67 \cdot 10^{-6}$	$6.69 \cdot 10^{-6}$ $7.29 \cdot 10^{-6}$	$5.03 \cdot 10^{-6}$ $5.62 \cdot 10^{-6}$
3	$7.25 \cdot 10^{-6}$	$5.57 \cdot 10^{-6}$ $5.74 \cdot 10^{-6}$	$4.37 \cdot 10^{-6}$ $4.59 \cdot 10^{-6}$	$3.50 \cdot 10^{-6}$ $3.74 \cdot 10^{-6}$

球面変形 $\sum_{m \neq M} \frac{\Lambda^2_{\ell m}}{(\Lambda^2_{\ell m} - \Lambda^2_{\ell M})^3}$ の数値

M \ ℓ	0	1	−2	3	4
0	$2.35^{\times 10^{-3}}$	$1.41^{\times 10^{-3}}$	$9.69^{\times 10^{-4}}$	$7.12^{\times 10^{-4}}$	$5.50^{\times 10^{-4}}$
1	$6.38^{10^{-4}}$	$4.23^{10^{-4}}$	$3.18^{10^{-4}}$	$2.55^{10^{-4}}$	$2.11^{10^{-4}}$
2	$2.70^{10^{-4}}$	$2.01^{10^{-4}}$	$1.61^{10^{-4}}$	$1.37^{10^{-4}}$	$1.15^{10^{-4}}$
3	$1.47^{10^{-4}}$	$1.17^{10^{-4}}$	$9.76^{10^{-5}}$	$8.38^{10^{-5}}$	$7.35^{10^{-5}}$

文　献

1. Ogura, Yoshida : Jap. J. App. Phys. Vol 3. No.9 P.546
池上、小倉、吉田 ; 輻研資料 1964年5月

2. L. A. Vainstein : Soviet Physics. J. Exp. Theo. Phys. Vol. 17. No.3. (1963). Translation P. 709

3. L. Bergstein . H Schachter : J. Opt. Soc. America. Vol. 54. No.7. 887. (1964)

4. Fox. Li. B.S.T.J. Vol 40. 453 (1961)

5. Kotik. Newstein : J. App. Phys. Vol 32. 178 (1961)

6. Fox. Li. P.IEEE. Vol 51. 80. (1963)

7. Schelknoff. Electromagnetic Waves. Van Nostrand

8 量子力学のテキスト参照

9 Rice : "Reflection of electromagnetic Waves from slightly rough surfaces" Electromagnetic Wares. (Interscience publishers) 1950

10. Morgan. J. App. Phys. 21 : 4, 329 (1950)

11. Sommerfeld : Partial Differential Equations in physics (Academic Press) 1949. § 27

超広帯域マイクロ波発振管(Fawshmotron)

大阪大学 産業科学研究所
松尾幸人
戎谷圭介
楠陽

(輻射科学研究会資料. 昭和40.1.30.)

§. 緒言

電子は放物線電場内では固有周波数ω_cで単振動し、このω_cは放物線電場を形成する電極間隔および電極間電圧で定まる。而して単振動の方向に静磁界が加えられば、電子は単振動の方向と直角に漂流し、その方向に

$$v_{ph} = \frac{u_0}{1 \mp \omega_c/\omega} \qquad (u_0: \text{漂流速度}) \qquad (1)$$

の位相速度を持つ2つの電子ビーム波動が生じ、単振動と名付けた。

(1)式で負符号の場合、位相速度v_{ph}は$\omega_c/\omega \simeq 1$でu_0より充分大きく速波となる。正符号の場合は位相速度v_{ph}はω_c/ωの全ての範囲でu_0より小さく遅波となる。これら波動の内v_{ph}の波動は正エネルギを運び、一方v_{ph}の波動は負のエネルギを運んでいるが、この内正エネルギを運ぶ波動を利用した管をFawshmotronと名付けている。

さて$\omega_c/\omega \lessgtr 1$の条件により、速波の位相速度$v_{ph}$は正負いずれの値をとり得るが、特に正の$v_{ph}$を持つ電子ビーム波と回路波との結合を利用したものをB型Fawshmotron，負のv_{ph}を持つ電子ビーム波と回路波との結合を利用したものをC型Fawshmotronと分類している。尚、正のv_{ph}の電子ビーム波を入、出力結合器に用い、ポンプ電力を加えれば横型パラメトリック増巾管が可能となり、これをA型Fawshmotron[1]と呼んでいる。A型Fawshmotronは実験的に増巾動作することが未だ確められていないが、これは主として静磁束密度の不均一による電子ビーム波位相速度の変動によるものと考えられている。B，C型Fawshmotronは実験の結果、可成り広範囲に電圧同調の可能な発振管となることが判ったので、一部結果を報告する。

§ 動作理論の概説

今、x, y面上で任意の点の電位Vが $V = V_0 \{(x/x_0)^2 - (y/y_0)^2\}$ で表わされると仮定する。電子はy方向に単振動するように強い静磁界が加えられた場合、y方向に同時に高周波電界 $\hat{E}_y e^{j\omega t}$ が重畳されていると、電子の運動方程式は

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_0^2 y - \frac{e}{m}\hat{E}_y e^{j\omega t} \qquad (2)$$

となる。$\omega_0 = (2eV_0/mx_0^2)^{1/2}$ は電子の単振動の固有角周波数で、x_0 は座標原点と電極間の距離である。

次にカイネティック電圧 $U_y = -\frac{m}{e}u_0 v_y$ および電子ビームのy方向変化による変位電流 $K_y = j\omega\sigma_0 y$、($\sigma_0 < 0$ の電荷密度) および、電子ビーム波の規格化モード振巾 a_1, a_2 を次式で定義する。

$$a_{1\atop 2} = \frac{1}{2\sqrt{2Z_0}}(U_y \pm Z_0 K_y) = \gamma(v_y \pm j\omega_0 y) \qquad (3)$$

ここで、電子ビーム特性インピーダンス $Z_0 = m\omega_0 u_0^2/e\omega I_0$、また伝ドミタンス係数 $\gamma = -(1/2\sqrt{2Z_0})m\omega_0/e = -(m\omega I_0/8e\omega_0)^{1/2}$ とする。従って電子ビーム波の規格化モード方程式は

$$\left[\frac{d}{dz} + j(\beta_e - \beta_0)\right]a_1 = -\frac{\nabla}{2y_0\sqrt{2Z_0}}$$
$$\left[\frac{d}{dz} + j(\beta_e + \beta_0)\right]a_2 = -\frac{\nabla}{2y_0\sqrt{2Z_0}} \qquad (4)$$

となる。ここで、$\beta_e = \omega/u_0$, $\beta_0 = \omega_0/u_0$ および $\nabla = -\hat{E}_y \cdot y_0$ (y_0 は電子入射点での振動電極間距離である) と置くことにする。

一方、TEM基本波が伝播している無損失回路に接近して電子流が存在する場合は

回路方程式は

$$\frac{d\nabla}{dz} = -j\beta_c Z_c I, \quad \frac{dI}{dz} = -j\frac{\beta_c}{Z_c}\nabla + \frac{di}{dz} \qquad (5)$$

が成立つ。∇, I はそれぞれ回路電圧、電流、Z_c は回路インピーダンスおよび β_c は回路の位相常数である。従って規格化モード振巾 a_+, a_- を

$$a_\pm = \frac{1}{2\sqrt{2Z_c}}(\nabla \pm Z_c I) \qquad (6)$$

と定義すれば回路の規格化モード方程式は次式になる。

$$\left(\frac{d}{dz}+j\beta_c\right)a_+=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z_c}{2}}\frac{dI}{dz}$$

$$\left(\frac{d}{dz}-j\beta_c\right)a_-=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z_c}{2}}\frac{dI}{dz} \qquad (7)$$

小信号理論では、結合後の電力流の符号およびz方向は結合前とは変らないと考えられるから(4)式で$V=0$と置けば、電子ビームのカイネティックパワは$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}U_K\cdot I_y^*\right)=|a_1|^2-|a_2|^2$ となり、遅波モードa_1は正、遅波モードa_2は負の電力の流れを表わす。一方回路波に対しては(7)式で$\frac{dI}{dz}=0$と置けばa_+, a_- 各モードは各々入射波モード、および反射波モードを表わすことが分る。

回路上の電力のz方向の変化割合$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}(VI^*)$と電子ビームから回路え変換される電力 $\frac{1}{2}E_yI_y^*=\frac{V}{2y_0}K_y^*$ は等しいから

$$\frac{dI}{dz}=j\frac{\omega\omega_0}{y_0}y=\frac{K_y}{y_0} \qquad (8)$$

となる。 今結合係数$K=(\sqrt{Z_c}/2y_0)\sqrt{eI_0/\omega\omega_{0m}}$ と置けばモード結合方程式は

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{d}{dz}+j\beta_e(1-N)\right]a_1=-\beta_eK(a_++a_-)\\
&\left[\frac{d}{dz}+j\beta_e(1+N)\right]a_2=-\beta_eK(a_++a_-)\\
&\left[\frac{d}{dz}+j\beta_e(1-b)\right]a_+=\beta_eK(a_1-a_2)\\
&\left[\frac{d}{dz}-j\beta_e(1-b)\right]a_-=-\beta_eK(a_1-a_2)
\end{aligned} \qquad (9)$$

となる。但し、$N=\beta_0/\beta_e$, $b=1-(\beta_c/\beta_e)$ とする。

1) B型 Fawshmotron.

$\omega_0/\omega\ge 1$ の範囲では電子ビームの速波は正の位相速度をもち、遅波構造のない回路上の回路波　　と同期させることができる。また両波動の電力流の符号およびz方向は同じであるから、互にエネルギ交換が行われる。この場合には、電子ビーム波の遅波モードa_2、および回路波のa_-モードはa_1, a_+ モードと結合しないから無視できる。

$a_+ = A_+(z)e^{-j\beta_e z}$, $a_1 = A_1(z)e^{-j\beta_e z}$, $\beta_e z = \theta$ と置けばB型の結合方程式は

$$\begin{bmatrix} A_+(\theta) \\ A_1(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & M_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_+(0) \\ A_1(0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

と書ける。

入力端で回路波が励振されていない。即ち $\theta = 0$ で $A_+(0) = 0$ とすれば(10)式は

$$\begin{aligned} A_+(\theta) &= M_{12}(\theta) A_1(0) \\ A_1(\theta) &= M_{22}(\theta) A_1(0) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。最も能率よく電子ビーム波エネルギを回路波エネルギーに変換するためには(11)式中 $M_{22}(\theta) = 0$ でなければならない。今 $x = b$ の時には

$$K\beta_e L = (n + \tfrac{1}{2})\pi \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \quad (12)$$

を満足する電極長 L を持てば電子ビーム波と回路波間の結合が最も強く、エネルギ変換が行われる。

従ってB型Fawshmotronは陰極に近い反射板電極に信号入力を与え、集電子極側に出力を持ち、入力に近い反射板電極面より電子を放出させるような構造を持てば実現できる。(第2図参照)

2) C型 Fawshmotron

$\omega_0/\omega \geq 1$ の範囲では電子ビーム波の速波は後進波となり負の位相速度を持つので、回路の反射波との間に同期が取れる。電力流の符号は正で等しく方向は反対となる。従ってC型の結合方程式は(9)式で $a_1 = A_1(z)e^{j\beta_e z}$, $a_- = A_-(z)e^{j\beta_e z}$ と置けば

$$\begin{bmatrix} A_1(\theta) \\ A_-(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & M_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(0) \\ A_-(0) \end{bmatrix} \quad (13)$$

今出力端で電子ビーム波の振巾が有限で、出力端より L の点で回路波が励振されていない時を考え、即ち $\theta = 0$ で $A_1(0) = 1$, $\theta = \beta_e L$ で $A_-(\beta_e L) = 0$ とすれば(13)式は

$$A_1(z) = \frac{\cosh[K\beta_e(L-z)]}{\cosh K\beta_e L}, \quad A_-(z) = j\frac{\sinh[K\beta_e(L-z)]}{\cosh K\beta_e L} \quad (14)$$

となる。(14)式を図示すれば第1図のようになり電子ビーム波の振巾の絶対値は出力端から入力端に向うにつれてその振巾を減じ、一方回路波は入力端から出力端に向うにつれ電子ビーム波からエネルギを受取り振巾を増して行きエネルギ交換が為される。
C型FawshmotronはB型Fawshmotronと同じ構造で入、出力を入換えれば実現される。

§ 実験結果

試作管は電極寸法が極端に小さくなうず、また電圧、静磁界が取扱い易い範囲になる周波数として1000 MC/s附近で動作するように選定した。電極内部で放物線電位分布になるように電位0に保たれた夾角90°の2枚の平板反射電極、および断面が放物線（実際には適当な半径の円で近似する）をなす陽極より構成されている。
2枚の反射電極の両端は各々平行伝送線に接続され、信号の入出力となっている。また回路上の高周波電界と強く結合し、かつ電極長も余り短かくなり過ぎないように（フリンヂング効果による悪影響を避ける為）留意し、第2図に示したようなヘアピン形陰極を設け反射板電極に小さい角孔をあけ電子を入射させることにした。集電子極は直流電界強度と静磁束密度で定るドリフト電子を集める一方電極内電位分布をできるだけ乱さないように適当な電位を持つ細いタングステン線を作用空間内にプルーブ状に挿入されている。
電極長は(12)式を参考に決定したが、それは同式中Z_c、I_0の正確な値が不明の為であって特にB型に対してはこれ等は静磁界および電流I_0を調整すれば臨界値に近付け得る為である。

尚 試作に当っては $\omega \simeq \omega_0$附近で動作させる為、電極間隔の保持および静磁界分布が一様になるように注意しなければならない。
微小信号を反射電極の集電子極側より入れ陰極側より取出すように（C型に相当）回路を接続し、陽極電流0.1 mA、集電子極電圧370 V、静磁束密度1180 G、一定に保ちながら、直流電源に鋸歯状電圧を重畳した陽極電圧に対する出力波形をCROで観測した。同一入力信号波長に対してC型はB型動作に比して同期陽極電圧は高くな

ることが判っているのでCROの図形よりB，C型は分離できる。
第3図はC型に相当する陽極電圧を入力信号波長に対してプロットしたもので、同期が近似的に $\omega=\omega_0$ で起るとすれば $l_0=2.309$ m/m となり l_0 の実測値 2.361 m/m とよく一致し、その特性曲線の勾配も一致している。僅かな不一致の原因として約6%の磁束密度の不均一による漂流速度の場所的な変動，電極の直および空間電荷の影響によるものであろう。

第4図は入力端に無反射負荷を，出力端は検波器に接続される。磁束密度1180Gの下で，集電子極電圧、電流を370V、0.37mAに保ちながら，陽極電圧に対する発振波長をB型およびC型に適した回路接続で測定したものである。また同時に各場合の出力も示してある。

第5図は $l_0=2.361$ m/m，電子入射位置 0.75 m/m，磁束密度1180G，およびC反射電圧上のTEM波の位相速度を 3×10^8 m/s として，B型およびC型に対する。波長対同期陽極電圧を計算した結果を示しており，第4図の実験結果を対比すればその傾向はよく一致しているのが判る。

第6図はC型に対しては $R=\frac{A-(0)}{A-(\beta)}$ を，B型に対しては $R=\frac{A+(\beta)}{A+(0)}$ を各々近似的に $\omega=\omega_0$ として計算したもので第4図の発振出力は第5図のRに比例すると考えられるので実験結果の傾向は一致している。これは発振波長が短かくなれば同期陽極電圧は高くなり，磁束密度が一定の時には，漂流速度 u_0 が増加し，電子ビームと回路との等価的な結合長が短くなり、当然出力の低下を来すことに対応する。出力特性がうねっているのは回路の整合に問題があるように思われる。この実験中整合をとる為に同軸スタッブを調整した。当然出力の変動を来すが，発振波長の変化はほとんど認められていない。これは回路系の周波数特性が発振波長に影響なく電子ビーム波の位相速度が波長決定の為に強く働いている証拠で，B型、C型Fawshmotronが広範囲の電子同調発振器として動作する原因でもある。即ち $\omega=\omega_0$ 附近では電子ビーム波の位相速度は ω/ω_0 に対して非常に急激に変化し，電子ビーム波の見掛けのQはかなり大き

くなっている。

オ4図は陽極電圧、集電子極電圧、および磁束密度を一定に保って集電子極電流を変化した時の発振波長の変化、いわゆる周波数プッシング特性を示している。これは空間電荷による電位分布変化によるものであろうか詳しいことは判明していない。

§ 結論。

B型、C型 Faulshmotron についての理論と実験との一応の一致は証明できた。またその結果発振波長は回路の影響を受け難く広帯域の電子同調発振管になる可能性も知ることができた。オB型は単純伝播形[3]であり，同期的に電子ビーム波と回路波の間のエネルギ変換が行われる。従って回路波について着目すれば増巾、発振が可能である。またC型は表退波に属し、単に距離と共に減衰する波で電力の流れは存在しないことになっている。然し実験的にはC型に相当する動作が得られており、(3)の結論とは一致しないように見える。これは境界条件としての電子ビーム波の速波エネルギ(多分電子の位相揃えによるものであるが)によるものであろうか生成の理由は未明である。

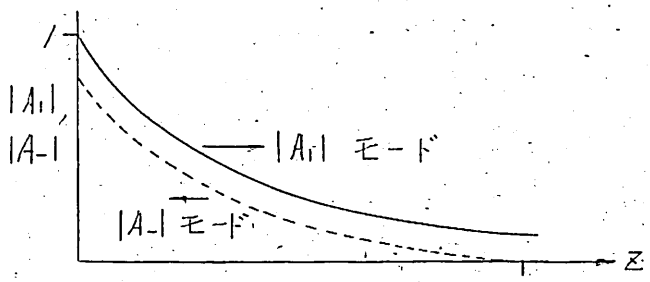
現在磁束密度の変動を避けうるように電子軌道を円形にした管を試作中であり；より詳細な実験を計画している。

文献

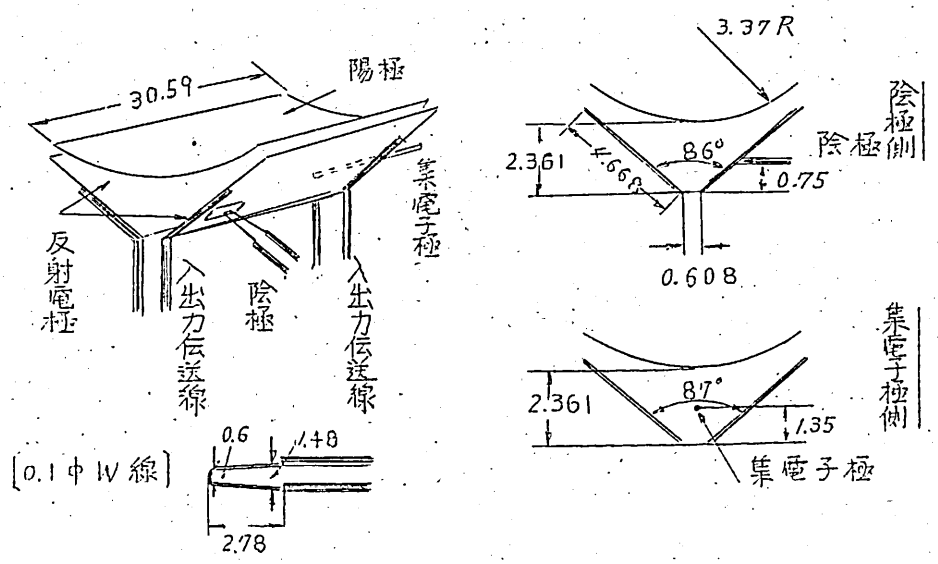
(1) 松尾幸人　；新しい型の Fast Wave ヒこれを用いたマイクロ波管（Fawshmotron）について
マイクロ波真空管研究専門委員会資料 1960.1.18

(2) 松尾・戎谷・楠　；単振動波（Simple Harmonic Motion wave）の理論とその応用について.
マイクロ波真空管専門委員会資料 1962.11.9

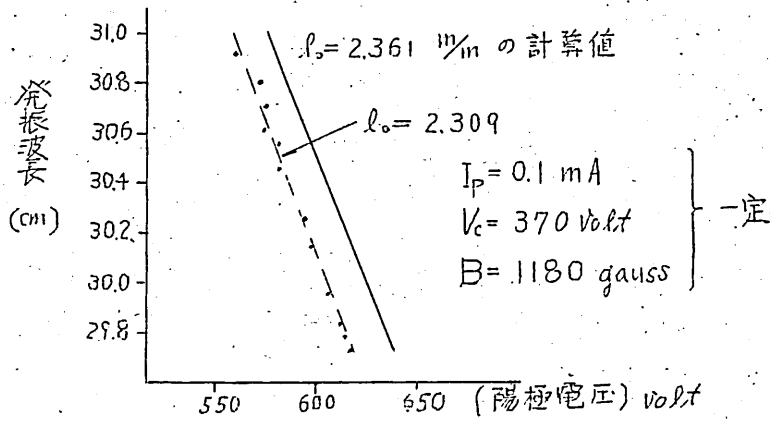
(3) 沢山美彦　；増大波の運動学的考察
マイクロ波真空管専門委員会資料 1962.1.16



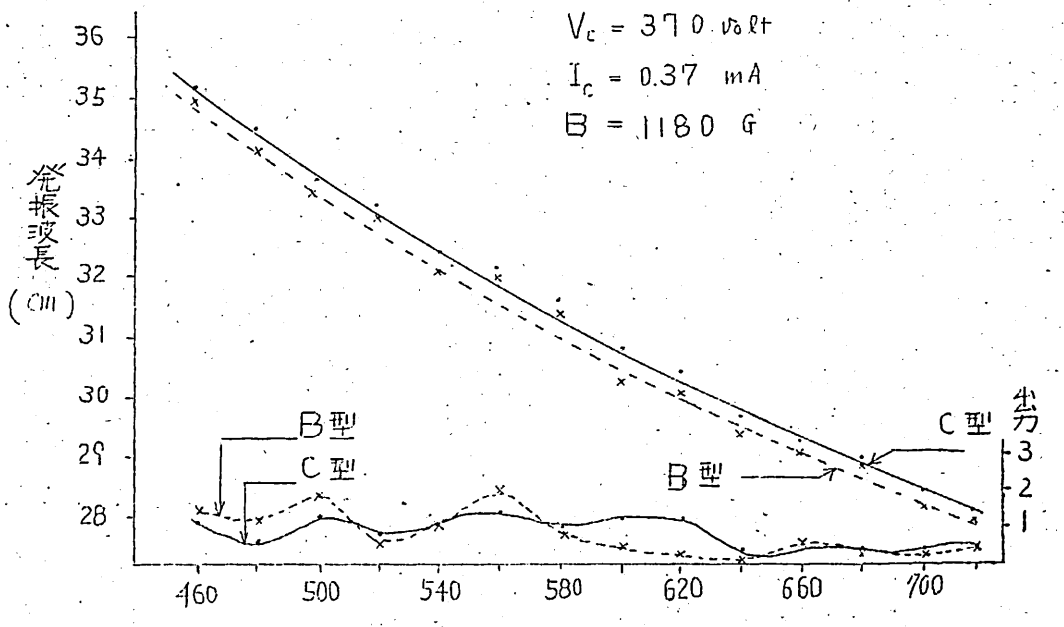
第1図　C型 Fawshmotron のモード振巾パターン



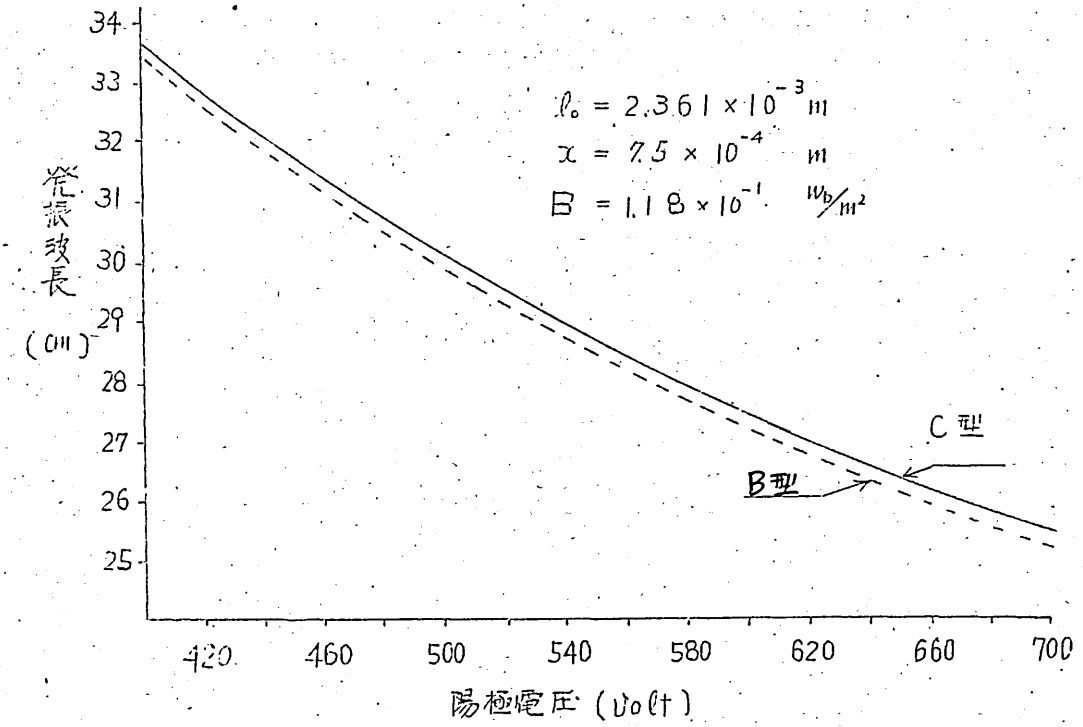
第2図　Fawshmotron の寸法図



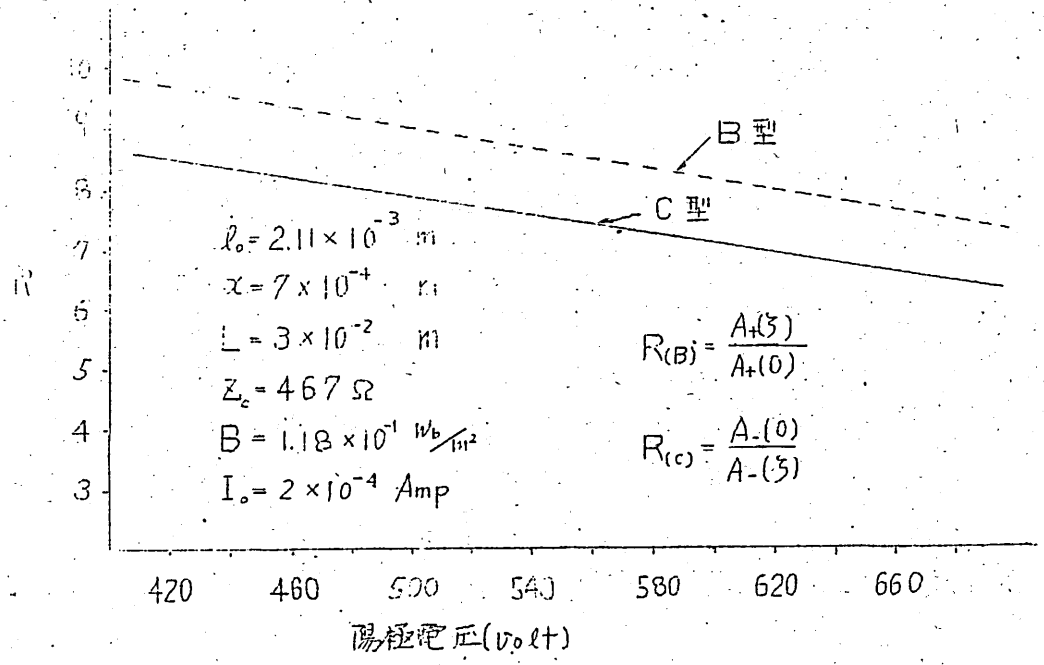
第3図　Fawshmotron の共振特性



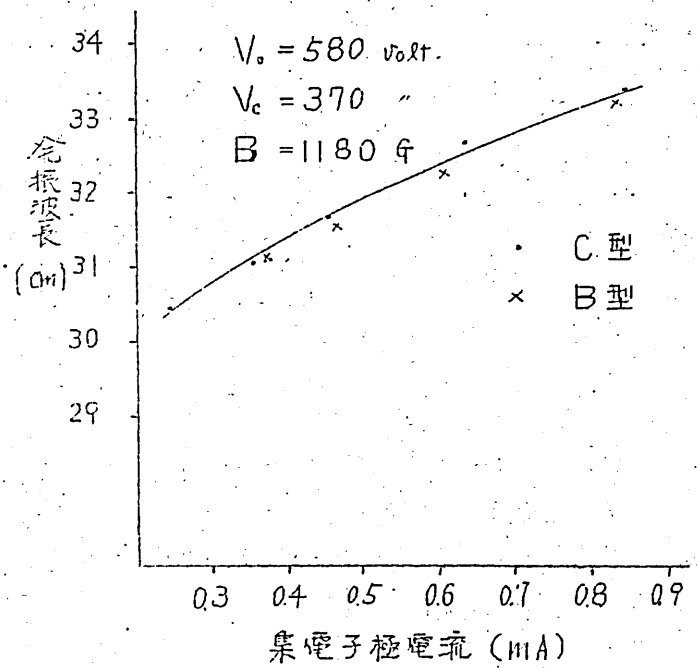
第4図 Fawshmotron の発振特性(実験値)



第5図 Fawshmotron の発振特性 (計算値)



文6図 Rの計算値



文7図 B, C型 Fawshmotron の Freq. Pushing

輻射科学研究会資料

5周波縮退型負性抵抗増幅器及びアップコンバーター

太田智三
繁沢宏
滝山敬
(同志社大学工学部)

1965年 1月

1. 緒言

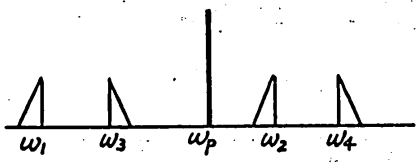
3周波，4周波パラメトリック増幅器及びアップコンバーターに対する解析及び実験結果はよく知られ数多くの報告がなされている。特に4周波パラメトリック増幅器については DAVID K. ADAMS, K.H. BLANKENBURG により異った2方法が発表され，又4周波アップコンバーターとしての実験結果が J.A. LUKSCH 等により報告されている。

本論文においては，5周波パラメトリック増幅器とそのアップコンバーターについて解析を行い一応の結果を得たので御報告する。尚解析，実験をより簡略化するため縮退型として扱っている。

2. 5周波パラメトリック増幅器の等価回路

ここに述べる5周波とは(図2-1)の周波数スペクトルで示され，ポンプ周波数を介して次の関係にある。

$$\omega_2 = \omega_p + \omega_1$$
$$\omega_3 = \omega_p - \omega_1$$
$$\omega_4 = 2\omega_p - \omega_1$$



(図2-1)

図の周波数成分の存在が可能な場合可変リアクタンスのマトリクス表示は周知の如く開放仮定により次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} V_4^* \\ V_3^* \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{j\omega_4 K_0} & \frac{1}{j\omega_3 K_1} & -\frac{1}{j\omega_1 K_2} & 0 \\ \frac{1}{j\omega_4 K_1} & -\frac{1}{j\omega_3 K_0} & -\frac{1}{j\omega_1 K_1} & -\frac{1}{j\omega_2 K_2} \\ \frac{1}{j\omega_4 K_2} & \frac{1}{j\omega_3 K_1} & \frac{1}{j\omega_1 K_0} & -\frac{1}{j\omega_2 K_1} \\ 0 & \frac{1}{j\omega_3 K_2} & -\frac{1}{j\omega_1 K_1} & \frac{1}{j\omega_2 K_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4^* \\ I_3^* \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (2-1)$$

ここで $V_{1,2\cdots}$, $I_{1,2\cdots}$, は $\omega_{1,2\cdots}$ に対応する電圧，電流で $K_{0,1,2}$ は可変容量を次のように展開したものである。

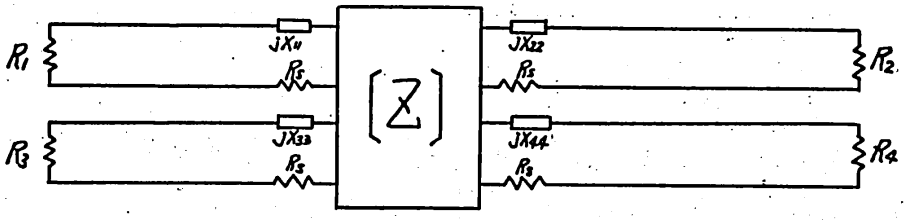
$$\frac{1}{C(t)} = \frac{1}{K_0} - \frac{2}{K_1}\cos\omega_p t - \frac{2}{K_2}\cos 2\omega_p t \qquad (2-2)$$

有能指数 M, m を (2-3) の如く定義し (2-1) を書き改めれば (2-4) を得る。

$$Q = \frac{1}{\omega K_0 R_s} \qquad \gamma_1 = \frac{1/K_1}{1/K_0} \qquad \gamma_2 = \frac{1/K_2}{1/K_0}$$
$$M = \gamma_1 Q \qquad m = \gamma_2 Q \qquad (2-3)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3^* \\ V_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -jX_1 & jM_2R_s & -jM_3R_s & -jM_4R_s \\ jM_1R_s & -jX_2 & -jm_3R_s & 0 \\ jM_1R_s & jm_2R_s & jX_3 & -jM_4R_s \\ jm_1R_s & 0 & -jM_3R_s & jX_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3^* \\ I_4^* \end{bmatrix} \qquad (2-4)$$

jX は可変リアクタンスの変化しない リアクタンス分を示す。
(2-4) にて jX の項を 0 とおき、インピーダンスマトリクスを $[Z]$ とすれば 5 周波パラメトリック増幅器に対する等価回路は (図 2-2) の如くなる。



(図 2-2)

R_s ; 拡がり抵抗
R ; 電源乃至負荷抵抗
jX ; 全受動リアクタンス

3. 縮退時に於ける信号及び和周波数回路のインピーダンス特性

縮退時に於いては角周波数 ω_1 と ω_3, ω_2 と ω_4 がそれぞれ一つの回路で共用され

次の縮退条件が成立する。

$$\begin{aligned} &\omega_1 \approx \omega_3 \ , \quad \omega_2 \approx \omega_4 , \quad 3\omega_1 \approx \omega_2 \\ &R_1 \approx R_3 \ , \quad R_2 \approx R_4 \\ &M_1 \approx M_3 \ , \quad M_2 \approx M_4 , \quad M_2 = M_1/3 \\ &m_1 \approx m_3 \ , \quad m_2 \approx m_4 , \quad m_2 = m_1/3 \end{aligned} \qquad (3-1)$$

可変リアクタンスの第2次変化以降が非常に小さい場合，各共振周波数において行列式 $\triangle$ を次の如く定義する。

$$\triangle = \begin{vmatrix} R_{T1} & jM_2R_S & -jM_3R_S & 0 \\ jM_1R_S & R_{T2} & 0 & 0 \\ jM_1R_S & 0 & R_{T3} & -jM_4R_S \\ 0 & 0 & -jM_3R_S & R_{T4} \end{vmatrix} \qquad (3-2)$$

(3-2)において

$$R_{T1} = R_1 + R_S \ , \quad R_{T2} = R_2 + R_S$$
$$R_{T3} = R_3 + R_S \ , \quad R_{T4} = R_4 + R_S$$

今中心周波数にて(3-1)の縮退条件を考慮し，信号及び和周波数回路のインピーダンスの総和を求めれば純抵抗となり，(3-3)，(3-4)により示される。

$$R_{T1} = \frac{\triangle}{\triangle_{11}} = \frac{\triangle}{\triangle_{33}} = R_{T1} + \frac{M_1^2R_S^2}{3R_{T2}} - \frac{M_1^2R_S^2R_{T2}}{R_{T1}R_{T2} + \frac{1}{3}M_1^2R_S^2} \qquad (3-3)$$

$$R_{T2} = \frac{\triangle}{\triangle_{22}} = \frac{\triangle}{\triangle_{44}} = R_{T2} + \frac{\frac{1}{3}M_1^2R_S^2R_{T1}R_{T2} + \frac{1}{9}M_1^4R_S^4}{(R_{T1}^2 - M_1^2R_S^2)R_{T2} + \frac{1}{3}M_1^2R_S^2R_{T1}} \qquad (3-4)$$

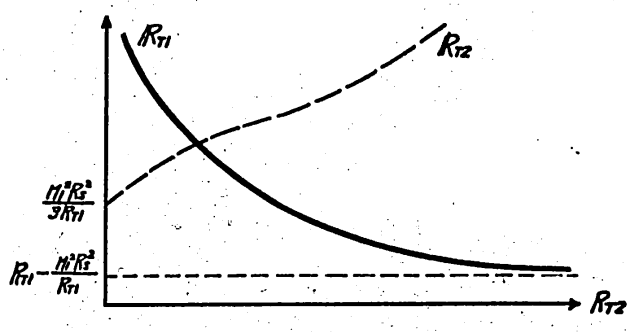
上式において R_{T1}，R_{T2} はそれぞれ信号及び和周波数回路の全インピーダンスの和である。

R_{T1}，R_{T2} の R_{T2} に対するインピーダンス変化を図示すれば（図3-1），（図3-2）の如くなる。

i) $R_{T1} \geq M_1 R_S$ の場合

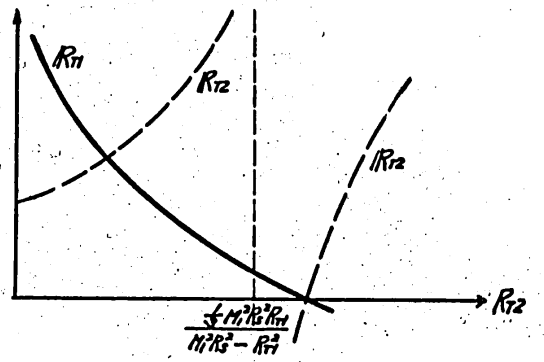
$R_{T1} > 0$

$R_{T2} > 0$



(図3－1)

ii) $R_{T1} < M_1 R_S$ の場合



(図3－2)

回路が安定であるためには $R_{T1} \geq 0$, $R_{T2} \geq 0$ が同時に満足されねばならなり。
(厳密には前述の Δ の複素周波数平面での零点が発振解とならぬことが必要である。)

i)の場合は3周波縮退型パラメトリック増幅器の安定条件に相当し、この状態にあっては如何なる R_{T2} の値に対しても R_{T1}, R_{T2} は常に正となり回路は安定である。しかし、ii)の場合には(図3－2)の如く、R_{T2} の有限値において R_{T2} に不連続が生じ $R_{T1} \geq 0$, $R_{T2} \geq 0$ であるためには次の条件が必要となる。

$$0 < R_{T2} \leq \frac{\frac{1}{3} M_1^2 R_S^2 R_{T1}}{M_1^2 R_S^2 - R_{T1}^2} \qquad (3-5)$$

以下 i), ii) の二つの場合にわけ各種利得及び雑音指数について検討する。

4. 利得，雑音指数表示式の誘導

4－1．$R_{11} \geq M_1 R_S$ なる場合

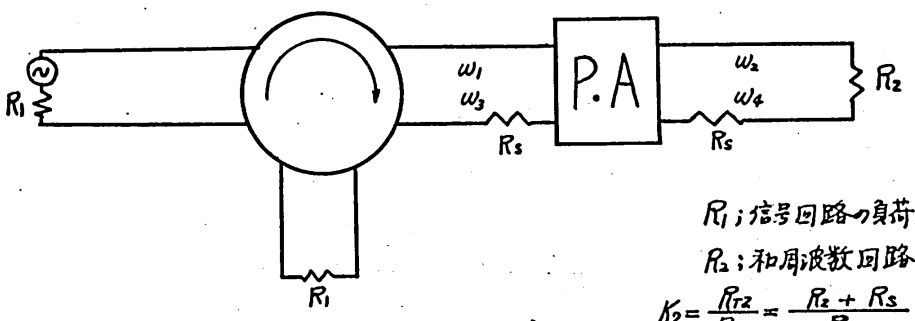
負性抵抗型増幅器及びアップコンバーターとして高利得を持つためにはR_{11}が非常に小さくなることが必要となり，そのためには（図3－1）より判る如く$R_{11} \simeq M_1 R_S$（3周波縮退型P.Aの高利得条件）とおき，R_{12}により制御する方法が考えられる．以下 $R_{11} = M_1 R_S$ なる条件のもとに論ずることにする．

[1] 負性抵抗型増幅器

3周波縮退型P.Aと同様直接利得と変換利得及びそれに対応する単側帯波受信の雑音指数が考えられ，高利得において次の如く求められる．

$$
\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{4R_1^2}{|R_{11}|^2} = \frac{4(M_1-1)^2}{\left(M_1 + \frac{M_1^2}{3K_2} - \frac{M_1}{1+\frac{M_1}{3K_2}}\right)^2} \\
F_{11} &= \frac{M_1}{M_1-1}\left\{1 + \frac{M_1}{9K_2} + \frac{K_2^2 + \frac{1}{9}M_1K_2}{(K_2+\frac{1}{3}M_1)^2}\right\} \\
G_{13} &= 4R_1^2\left|\frac{\Delta_{13}}{\Delta}\right|^2 = \frac{9(M_1-1)^2}{M_1^4}\frac{K_2^4}{(K_2+\frac{M_1}{6})^2} \\
F_{13} &= \frac{M_1}{M_1-1}\left\{1 + \frac{M_1}{9K_2} + \frac{(K_2+\frac{1}{3}M_1)^2(K_2+\frac{1}{9}M_1)}{K_2^3}\right\}
\end{aligned}
\qquad (4-1)
$$

利得，雑音指数に用いた添字は左から右への周波数の変換を意味し，$R_{1,2}$，K_2 なる記号は次の等価回路中に示したものに対応する．



R_1；信号回路の負荷及び電源抵抗
R_2；和周波数回路の負荷
$K_2 = \frac{R_{12}}{R_S} = \frac{R_2 + R_S}{R_S}$

（図4－1）

次に両側帯波受信に対する雑音指数を検討する。
(図4-2)の如く ω_1, ω_3 の出力を同時に取り出す場合で，信号は ω_1, ω_3 両成分を考慮しなければならない，つまり ω_1 回路の電源抵抗 R_1 の雑音が直接増幅され負荷 R_1 に生ずる雑音電力 N_{11} と ω_1 より ω_3 に変換され負荷 R_1 に生ずる雑音電力 N_{13}，及び ω_3 より直接増幅され ω_3 で負荷 R_1 に生ずる雑音電力 N_{33} と変換雑音電力 N_{31} とを考える。又 ω_n 回路の全雑音電力が ω_1 で負荷 R_1 に現われる雑音電力を N_n，ω_3 に変換され負荷に現われる雑音電力を N_n' とすれば雑音指数は次のように求められる。

$$F_{asb} = \frac{N_1+N_2+N_3+N_4+N_1'+N_2'+N_3'+N_4'}{N_{11}+N_{13}+N_{33}+N_{31}} \qquad (4-2)$$

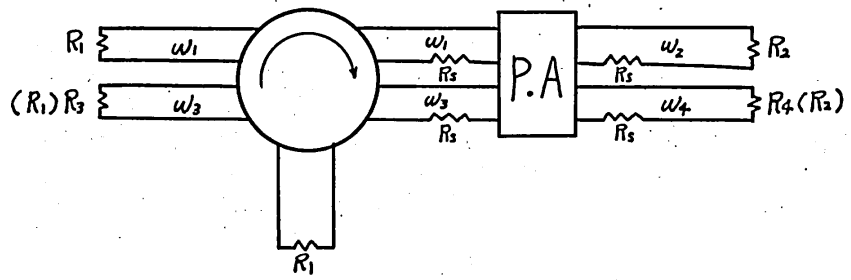
(4-2)において

$$N_{11}=P_0R_1^2\left|\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\right|^2,\quad N_{33}=P_0R_1^2\left|\frac{\Delta_{33}}{\Delta}\right|^2,\quad N_{13}=P_0R_1^2\left|\frac{\Delta_{13}}{\Delta}\right|^2,\quad N_{31}=P_0R_1^2\left|\frac{\Delta_{31}}{\Delta}\right|^2$$

$$N_1=P_0R_{n1}R_1\left|\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\right|^2,\quad N_1'=P_0R_{n1}R_1\left|\frac{\Delta_{13}}{\Delta}\right|^2,\quad N_2=P_0R_{n2}R_1\left|\frac{\Delta_{31}}{\Delta}\right|^2,\quad N_2'=P_0R_{n2}R_1\left|\frac{\Delta_{33}}{\Delta}\right|^2$$

$$N_3=P_0R_{n1}R_1\left|\frac{\Delta_{31}}{\Delta}\right|^2,\quad N_3'=P_0R_{n1}R_1\left|\frac{\Delta_{33}}{\Delta}\right|^2,\quad N_4=P_0R_{n2}R_1\left|\frac{\Delta_{41}}{\Delta}\right|^2,\quad N_4'=P_0R_{n2}R_1\left|\frac{\Delta_{43}}{\Delta}\right|^2$$

$$P_0=4KBT$$



(図4-2)

回路の対称性より

$$N_1=N_3',\quad N_2=N_4',\quad N_3=N_1',\quad N_4=N_2'$$

$$N_{11}=N_{33},\quad N_{13}=N_{31}$$

従って(4-2)は，

$$F_{asb(neg)} = \frac{N_1+N_2+N_3+N_4}{N_{11}+N_{13}}$$

従って次式を得る。

$$F_{asb(neg)} = \frac{M_1}{M_1 - 1}\left\{1 + \frac{M_1}{9K_2}\right\} \qquad (4-3)$$

(4-3)においてK_2を無限大(和周波数回路を開放)にすれば

$$F_{asb(neg)} = \frac{M_1}{M_1 - 1} \qquad (4-4)$$

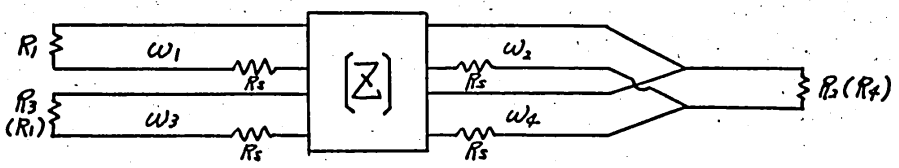
(4-4)は3周波縮退型負性抵抗増幅器の両側帯波受信の場合の雑音指数となり大きなK_2に対し,即ち高利得に於いて5周波縮退型増幅器の雑音指数は3周波のそれと大差のない事が判る。

[2] 5周波縮退型アップコンバーター

このアップコンバーターは信号周波数をポンプ周波数との和,即ち3倍の周波数として取り出すもので前と同様2種の利得及び雑音指数が考えられる。結果だけを示せば次の如くなる。

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{9(M_1-1)(K_2-1)}{M_1^2}\,\frac{(K_2+\frac{1}{3}M_1)^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2} \\ F_{12} &= \frac{M_1}{M_1-1}\left\{1+\frac{K_2^2+\frac{1}{3}M_1K_2+\frac{1}{9}M_1}{(K_2+\frac{1}{3}M_1)^2}\right\} \\ G_{14} &= \frac{9(M_1-1)(K_2-1)}{M_1^2}\,\frac{K_2^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2} \\ F_{14} &= \frac{M_1}{M_1-1}\left\{1+\frac{M_1}{9}\frac{(K_2+1)}{K_2^2}+\left(1+\frac{M_1}{3K_2}\right)^2\right\} \end{aligned} \qquad (4-5)$$

以上は単側帯波受信による雑音指数であるが,ここでもアップコンバーターの両側帯波受信に対する雑音指数を考える事が出来る。
前述の[1]に於けるが如く次の等価回路により検討する。



(図4-3)

[1]と同様信号はW_1, W_3で入るものと考え，W_1の電源抵抗より発生した雑音電力がW_2で負荷R_2に現われる電力をN_{12}，W_4に変換され生ずる電力をN_{14}，W_3の電源抵抗の雑音がW_2で負荷R_2に生ずる雑音電力をN_{32}，W_4で生ずるそれをN_{34}とする．又W_n回路の全雑音電力がW_2で負荷に現われる電力をN_n，W_4で生ずるそれをN_n'とすれば雑音指数は次のように示される．

$$F_{asb(up)} = \frac{N_1+N_2+N_3+N_4+N_1'+N_2'+N_3'+N_4'}{N_{12}+N_{14}+N_{32}+N_{34}} \qquad (4-6)$$

又　　$N_1=N_3'$, $N_2=N_4'$, $N_3=N_1'$, $N_4=N_2'$

$N_{12}=N_{34}$, $N_{14}=N_{32}$

となるから

$$F_{asb(up)}=\frac{N_1+N_2+N_3+N_4}{N_{12}+N_{14}}=\frac{R_{T1}}{R_1}+\frac{R_S|\Delta_{22}|^2+R_{T2}|\Delta_{42}|^2}{R_1(|\Delta_{12}|^2+|\Delta_{14}|^2)}$$

これを求めれば

$$F_{asb(up)}=\frac{M_1}{M_1-1}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}M_1(K_2+1)}{(K_2+\frac{M_1}{2})^2+K_2^2}\right\} \qquad (4-7)$$

ちなみにダウンコンバーターとしての利得，雑音指数を求めれば次の如くなる．

$$G_{21}=\frac{(M_1-1)(K_2-1)}{M_1^2}\frac{(K_2+\frac{1}{2}M_1)^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2}$$

$$G_{23}=\frac{(M_1-1)(K_2-1)}{M_1^2}\frac{K_2^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2} \qquad (4-8)$$

$$F_{asb(down)}=\frac{K_2}{K_2-1}\left(1+\frac{9K_2}{M_1}\right)$$

以上得られた結果よりK_2に対する利得変化，及び雑音指数の変化を示せば表－1，表－2，表－3，の如くなる．表にて$G_{(neg)}$はG_{11}，$G_{(up)}$はG_{12}として示されている．

4-2. 負性抵抗型増幅器，アップコンバーター，及びダウンコンバーターの利得関係

次に以上得られた3種の利得に対し如何なる関連が存在するかを検討する．再び各種の利得表示式を整理し，表記すれば次のようになる．

$$G_{11}=\frac{9(M_1-1)^2K_2^2}{M_1^4}\cdot\frac{(K_2+\frac{1}{3}M_1)^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2}=G_{33}$$

$$G_{13}=\frac{9(M_1-1)^2K_2^2}{M_1^4}\cdot\frac{K_2^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2}=G_{31}$$

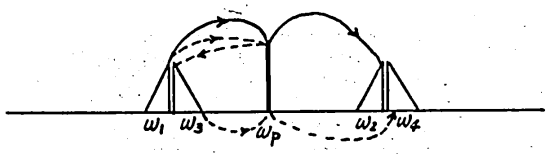
$$G_{12}=\frac{9(M_1-1)(K_2-1)}{M_1^2}\cdot\frac{(K_2+\frac{1}{3}M_1)^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2}=G_{34}$$

$$G_{14}=\frac{9(M_1-1)(K_2-1)}{M_1^2}\cdot\frac{K_2^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2}=G_{32}\qquad(4-9)$$

$$G_{21}=\frac{(M_1-1)(K_2-1)}{M_1^2}\cdot\frac{(K_2+\frac{1}{3}M_1)^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2}=G_{43}$$

$$G_{23}=\frac{(M_1-1)(K_2-1)}{M_1^2}\cdot\frac{K_2^2}{(K_2+\frac{1}{6}M_1)^2}=G_{41}$$

ω_1, ω_3 回路の入力インピーダンスは負性抵抗を呈し，ω_2, ω_4 回路の入力インピーダンスは正抵抗を示す，従って ω_1 での直接利得及び ω_1 から ω_3 への変換利得は3周波 P.A より類推して高利得をもつことは容易に考えられる．今アップコンバーターの変換利得を考えるに，ここでは非直線性エラスタンスの第1次変化のみを考慮しているのであるから各周波数スペクトル間にはポンプ周波数を介して(図4-4)の結合が生じる．ω_1 から ω_2 への変換をパラナトリック増幅による作用と単なる周波数変換（スペクトルの一致したアップコンバーター）の組合せと考え G_{12} を G_{11} と g_{up}（3周波アップコンバーターに類似した仮想的な利得）の積として表わす，又 ω_1 から ω_4 への変換利得に対しても，まず ω_1 から ω_3 に変換され更に ω_p を介して ω_4 に変換されるものと見做す。



(図4-4)

然らば次の関係式が仮定され得る。

$$G_{12} = G_{11} \times g_{up} \qquad (4-10)$$
$$G_{14} = G_{13} \times g_{up}$$

g_{up}を求めれば

$$g_{up} = \frac{M_1^2}{K_2^2} \frac{(K_2-1)}{(M_1-1)} \qquad (4-11)$$

同様にダウンコンバーターに対しても周波数スペクトルの一様なダウンコンバーターとパラメトリック作用の組合せと考えるならば

$$G_{21} = g_{down} \times G_{11} \qquad (4-12)$$
$$G_{23} = g_{down} \times G_{13}$$

g_{down}を求めれば

$$g_{down} = \frac{M_1^2}{9K_2^2} \frac{(K_2-1)}{(M_1-1)} \qquad (4-13)$$

g_{up}とg_{down}の関係は

$$g_{down} = \frac{1}{9} g_{up} \qquad (4-14)$$

(4-14)は周波数関係を1:3に選んだ3周波解析によるアップコンバーターとダウンコンバーター(この場合の周波数スペクトルは同方向)の利得関係と全く一致する。以上の解析により5周波縮退型アップコンバーター，ダウンコンバーターはパラメトリック増幅作用により利得が得られるものと見做される。

4-3. $R_{T1} < M_1 R_S$なる場合

$R_{T1} \geq M_1 R_S$の場合にはR_{T1}，R_{T2}はR_{T2}に関係なく常に正となった，しかし$R_{T1} < M_1 R_S$なる場合には3.で述べた如く和周波数回路の入力インピーダンスに不連続が生じ$R_{T2} \geq 0$が保たれるためにはR_{T2}に(3-5)の条件が課せられた。この状態において各利得を検討するためその一般式を変形し(4-15)の如く表記する。

$$G_{11} = \frac{4(K_1-1)^2}{K_1^2} \frac{1}{\left[1 + \frac{M_1^2}{3K_1K_2} - \frac{M_1^2}{K_1^2} \frac{1}{1+\frac{M_1^2}{3K_1K_2}}\right]^2}$$

$$G_{13} = \frac{4(K_1-1)^2 M_1^2}{\left[(K_1^2-M_1^2) + \frac{2M_1^2K_1}{3K_2} + \frac{M_1^4}{9K_2^2}\right]^2} \qquad (4-15)$$

$$G_{12}=\frac{4M_1^2(K_1-1)(K_2-1)\left(K_1+\frac{M_1^2}{3K_2}\right)^2}{\left[(K_1^2-M_1^2)K_2+\frac{2}{3}M_1^2K_1+\frac{M_1^4}{9K_2}\right]^2}$$

$$G_{14}=\frac{4M_1^4(K_1-1)(K_2-1)}{\left[(K_1^2-M_1^2)K_2+\frac{2}{3}M_1^2K_1+\frac{M_1^4}{9K_2}\right]^2}\qquad\left(K_1=\frac{P_{T1}}{P_S}\right)$$

(4-15)よりG_{11}, G_{13}, G_{14}に対してはK_2が大なる程利得は大きくなる事が容易にわかり最大利得はP_{T2}の上限,即ち(4-16)において起こる。

$$K_2=\frac{M_1^2K_1}{3(M_1^2-K_1^2)}\qquad(4-16)$$

しかしG_{12}の分母はK_2に対し単調に減少するが分子の項は他の利得と異なった変化をする。分子をK_2で微分しその方程式が0となるK_2の値を求めれば

$$K_2=\frac{M_1^2}{6K_1}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{24K_1}{M_1^2}}\right]$$

今問題にしているのは$M_1>K_1$なる状態であるから少なくとも$M_1\leq\sqrt{24}$であればG_{12}はP_{T2}に対し単調増加函数となる,従ってこの場合もK_2が(4-16)に於いて最大利得をもつことが分かる。($M_1>\sqrt{24}$なる場合には上記のP_{T2}にて利得最大とは一概にはいえず更に詳細な検討を要する)
(4-16)に於いて各利得を計算すれば

$$G_{11}=\frac{4(K_1-1)^2K_1^2}{(M_1^2-K_1^2)^2}$$

$$G_{12}=\frac{36(K_1-1)\left(\frac{1}{3}M_1^2K_1-M_1^2+K_1^2\right)}{M_1^2(M_1^2-K_1^2)}$$

$$G_{13}=\frac{4(K_1-1)^2K_1^4}{(M_1^2-K_1^2)^2M_1^2}\qquad(4-17)$$

$$G_{14}=\frac{36(K_1-1)\left(\frac{1}{3}M_1^2K_1-M_1^2+K_1^2\right)K_1^2}{(M_1^2-K_1^2)M_1^4}$$

このとき雑音指数は(4-16)を前述の解析に適用して次式を得る。

$$F_{asb(neg)}=\frac{K_1}{K_1-1}\left\{1+\frac{M_1^2-K_1^2}{3K_1}\right\}$$

$$F_{asb(up)}=\frac{K_1}{K_1-1}\left\{1+\frac{M_1^2-K_1^2}{3(M_1^2+K_1^2)}\right\}\qquad(4-18)$$

(4-17)(4-18)を種々のMに対して示せば表-4，表-5，表-6，となる。表-7，はM=3として各種のK1に対しK2制御による利得変化を示したものである。

5. 利得の安定度

次に3周波P.Aと5周波P.Aのポンプ電力変動に対する利得変化について解析を行い比較検討する，再び両者の直接利得に対する一般式は高利得に於いて，

$$G_T = \frac{4(K_1-1)^2}{K_1^2}\frac{1}{\left[1-\frac{M_1^2}{K_1^2}\right]^2} \qquad (5-1)$$

$$G_F = \frac{4(K_1-1)^2}{K_1^2}\frac{}{\left[1+\frac{M_1^2}{3K_1K_2}-\frac{M_1^2}{K_1^2}\frac{}{1+\frac{M_1^2}{3K_1K_2}}\right]^2} \qquad (5-2)$$

ポンプ電圧変動による励振率の変化は励振率の小さい領域にて直線的と見做すことが出来る，即ち

$$M_1 = \gamma Q \propto V_p \propto \sqrt{P_p}$$

ここで次のようにポンプ電力により変化する要素Q，他の定数をFe，Aとおけば

$$Q = \frac{M_1^2}{K_1^2}, \quad Fe = \frac{K_1}{3K_2}, \quad A = \frac{4(K_1-1)^2}{K_1^2} \qquad (5-3)$$

(5-1)，(5-2)は次のようになる。

$$G_T = \frac{A}{[1-Q']^2} \qquad (5-1)'$$

$$G_F = \frac{A(1+FeQ)^2}{[(1+FeQ)^2-Q]^2} \qquad (5-2)'$$

上式にてQ'，Qは3周波及び5周波P.Aに関するもので，K1は両者とも同一とする。

ポンプ電力に対する利得の変動感度を次のようにおけば

$$S = \frac{dG/G}{dQ/Q}$$

3周波及び5周波P.Aに対する感度S'，Sは次式にて与えられる。

$$S' = \frac{2Q'}{1-Q'} \qquad (5-4)$$

$$S = \frac{2a}{1+\rho a}\,\frac{[1-(1+\rho a)^2\rho]}{[(1+\rho a)^2 - a]} \qquad (5-5)$$

3周波P.Aと5周波P.Aが同じK_1の値に対し同一利得をもつためにはaとa'との間に次の関係が成立しなければならない，

$$a' = \frac{a-\rho a(1+\rho a)}{1+\rho a} \qquad 0<a'<1 \qquad (5-6)$$

(5-6)よりa/a'をP_rとおけば

$$P_r = \frac{1+\rho a}{[1-\rho(1+\rho a)]} \qquad (5-7)$$

(5-7)は3周波P.Aと5周波P.Aとが等しい利得を得るためのポンプ電力の割合を示している．尚感度の比較に際して$a \leqq 1$なるときには(5-6)を満足する如何なるρの値でも取り得るが，$a>1$の場合には前述の安定条件よりρに次の条件が要求される．

$$\rho > \frac{a-1}{a} \qquad (5-8)$$

一例として4-1.で用いた$K_1 = M_1$なる条件を5周波P.Aに適用すれば，即ち$a=1$とおくと(5-6)は

$$a' = \frac{1-\rho(1+\rho)}{1+\rho} \qquad (5-9)$$

(5-9)を用いてS'，Sを求めると

$$S' = \frac{2[1-\rho(1+\rho)]}{[(1+\rho)^2 - 1]} \qquad (5-10)$$

$$S = \frac{2}{1+\rho}\,\frac{[1-(1+\rho)^2\rho]}{[(1+\rho)^2-1]} \qquad (5-11)$$

従って

$$\frac{S}{S'} = \frac{[1-(1+\rho)^2\rho]}{[(1+\rho)-(1+\rho)^2\rho]} \qquad (5-12)$$

$1-(1+\rho)^2\rho > 0$のとき

(5-12)は常に1より小さく，取り得る全てのρに対し5周波P.Aの方が3周波P.Aよりも安定となることが分かる．

このとき同一利得を得るためのポンプ電力比P_rは(5-7)より次の如くなる．

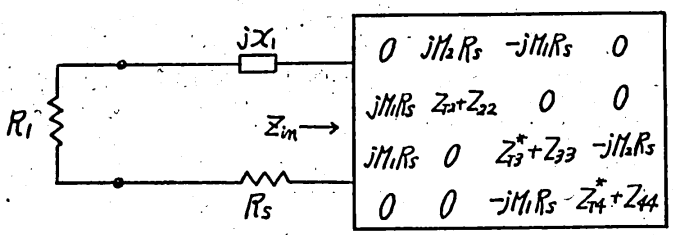
$$P_r = \frac{1+\beta}{[1-\beta(1+\beta)]} \qquad (5-13)$$

表－8は利得に対する3周波P.Aと5周波P.Aの感度を示す。

6. 負性抵抗型増幅器の周波数特性

3周波縮退型P.Aの周波数特性に対する平滑化はチューナーの使用及び他の共振回路の挿入により実現されるが，ここでは5周波縮退型とすることにより周波数特性に種々の変化がみられることを示す。

ω_1 回路のみに注目しその等価回路をかけば(図6－1)を得る。



(図 6 － 1)

ここで Z_{22}, Z_{33}, Z_{44} は可変リアクタンスの変化しないリアクタンス分で jX_1 は ω_1 回路の全受動リアクタンスを示す，(図6－1)の Z_{in} を計算すれば，

$$Z_{in} = \frac{M_1^2 R_S^2}{3}\frac{1}{Z_{T2}+Z_{22}} - M_1^2 R_S^2 \frac{Z_{T4}^* + Z_{44}}{(Z_{T3}^*+Z_{33})(Z_{T4}^*+Z_{44}) + \frac{M_2^2 R_S^2}{3}} \qquad (6-1)$$

各共振周波数 Ω_n よりのずれを次の如くおく，

$$\delta_1 = \frac{\omega_1 - \Omega_1}{\Omega_1} \qquad \delta_2 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\delta_1 = \frac{1}{3}\delta_1$$
$$\delta_3 = -\delta_1 \qquad \delta_4 = -\frac{\Omega_1}{\Omega_4}\delta_1 = -\frac{1}{3}\delta_1 \qquad (6-2)$$

(6-2)を用いて各共振回路の受動インピーダンスを表わせば，

$$Z_{T1} + Z_{11} = R_{T1}(1+j2\delta_1 Q_1), \qquad Z_{T2} + Z_{22} = R_{T2}(1+j\tfrac{2}{3}\delta_1 Q_2) \qquad (6-3)$$
$$Z_{T3}^* + Z_{33} = R_{T1}(1+j2\delta_1 Q_1), \qquad Z_{T4}^* + Z_{44} = R_{T2}(1+j\tfrac{2}{3}\delta_1 Q_2)$$

$(\because R_{T1} \approx R_{T3},\ R_{T2} \approx R_{T4},\ Q_1 \approx Q_3,\ Q_2 \approx Q_4)$

(6-1)の第1項のインピーダンスはω_2回路，第2項はω_3，ω_4回路の寄与を示し，ρ，γを次のようにおき(6-1)を書きなおせば(6-5)となる。

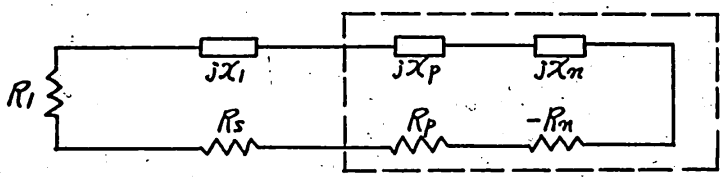
$$\rho = 2\delta_1 Q_1 \quad , \quad \gamma = \Omega_2/\omega_1 Q_1 \qquad (6-4)$$

$$Z_{in} = R_p + jX_p - R_n + jX_n \qquad (6-5)$$

$$R_p = \frac{M_1^2 R_S^2}{3R_{T2}} \frac{1}{1+\rho^2\gamma^2} \qquad X_p = -\frac{M_1^2 R_S^2}{3R_{T2}} \frac{\rho\gamma}{1+\rho^2\gamma^2}$$

$$R_n = \frac{M_1^2 R_S^2}{R_{T1}} \frac{(1+R_p/R_{T1})}{(1+R_p/R_{T1})^2+(\rho+X_p/R_{T1})^2} \qquad X_n = \frac{M_1^2 R_S^2}{R_{T1}} \frac{(\rho+X_p/R_{T1})}{(1+R_p/R_{T1})^2+(\rho+X_p/R_{T1})^2}$$

従って(図6-1)は(図6-2)の等価回路となる。



(図6-2)

5周波縮退型PAの特徴として(図6-2)の点線内のインピーダンスの周波数特性がR_{T1}，γの値により種々異なった変化をすることにある。
直接利得の周波数特性は高利得において近似的に次式により求められる。

$$G_{aeg} = \frac{4R_1^2}{|(R_{T1}+R_p-R_n)+j(X_1+X_p+X_n)|^2} \qquad (6-6)$$

更にR_Sで正規化すれば

$$G_{aeg} = \frac{4(K_1-1)^2}{K_1^2} \frac{1}{R_T^2+X_T^2} \qquad (6-7)$$

(6-7)に於いて

$$R_T = 1 + R_{p0} - R_{n0}$$
$$X_T = \rho + X_{p0} + X_{n0}$$

$$R_{p0} = \frac{M_1^2}{3K_1K_2} \frac{1}{1+\rho^2\gamma^2} \qquad -R_{n0} = -\frac{M_1^2}{K_1^2} \frac{1+R_{p0}}{(1+R_{p0})^2+(\rho+X_{p0})^2}$$

$$x_{po}=-\frac{M_1^2}{3K_1K_2}\frac{\rho\gamma}{1+\rho^2\gamma^2} \qquad x_{no}=\frac{M_1^2}{K_1^2}\frac{\rho+x_{po}}{(1+R_{po})^2+(\rho+x_{po})^2}$$

7. 5周波縮退型アップコンバーターの周波数特性

(6-2),(6-3)を用い信号周波数が共振周波数よりδだけずれた場合、アップコンバーターの利得表示式は次の如くなる。

$$G_{up}=4(K_1-1)(K_2-1)M_1^2\frac{\left|K_1K_2(1+j\beta)(1+j\beta\gamma)+\frac{M_1^2}{3}\right|^2}{\left|\{K_1^2(1+j\beta)^2-M_1^2\}K_2^2(1+j\beta\gamma)^2+\frac{2}{3}M_1^2K_1K_2(1+j\beta)(1+j\beta\gamma)+\frac{M_1^4}{9}\right|^2} \qquad (7-1)$$

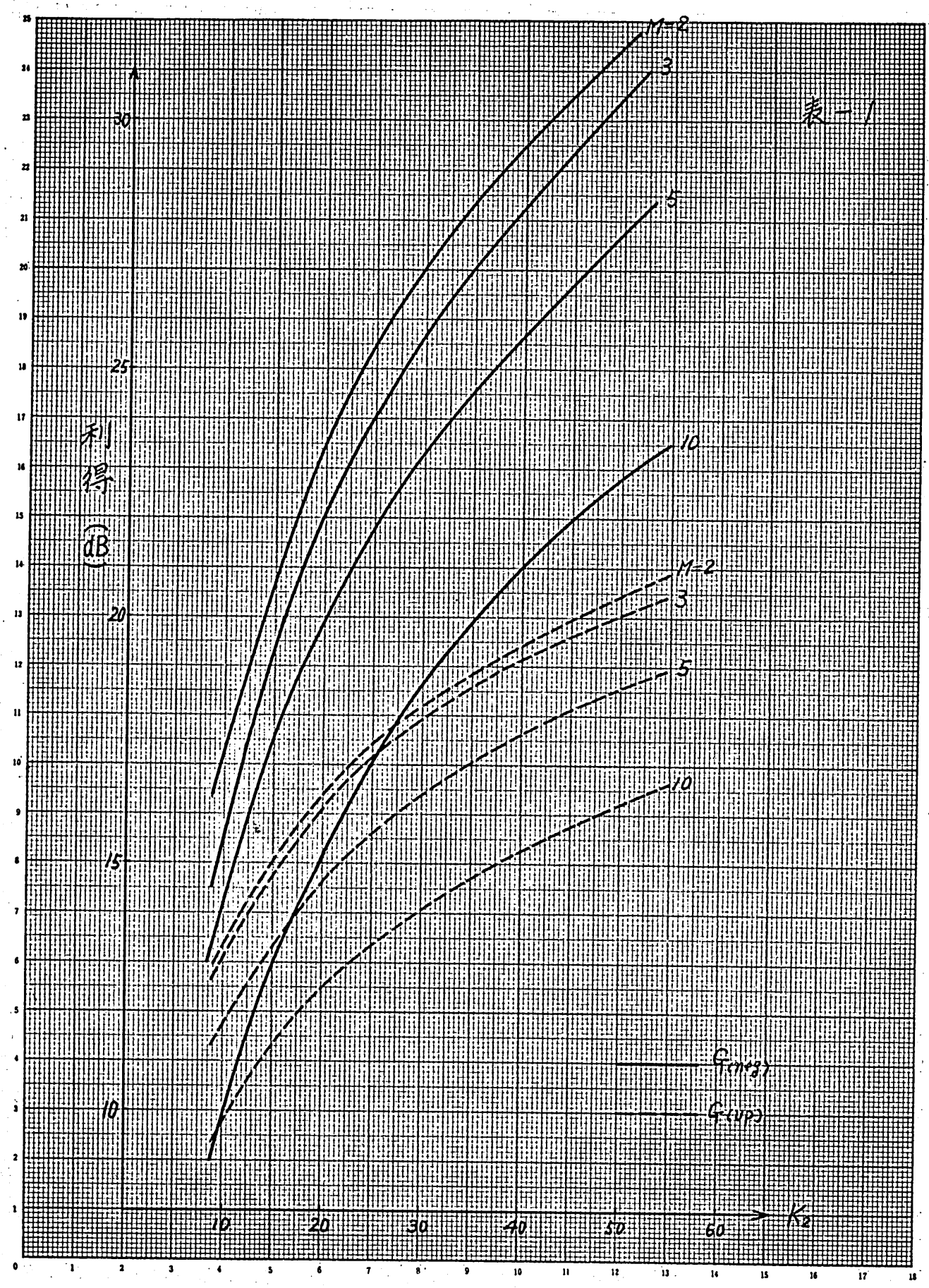
更に次のようにおけば、

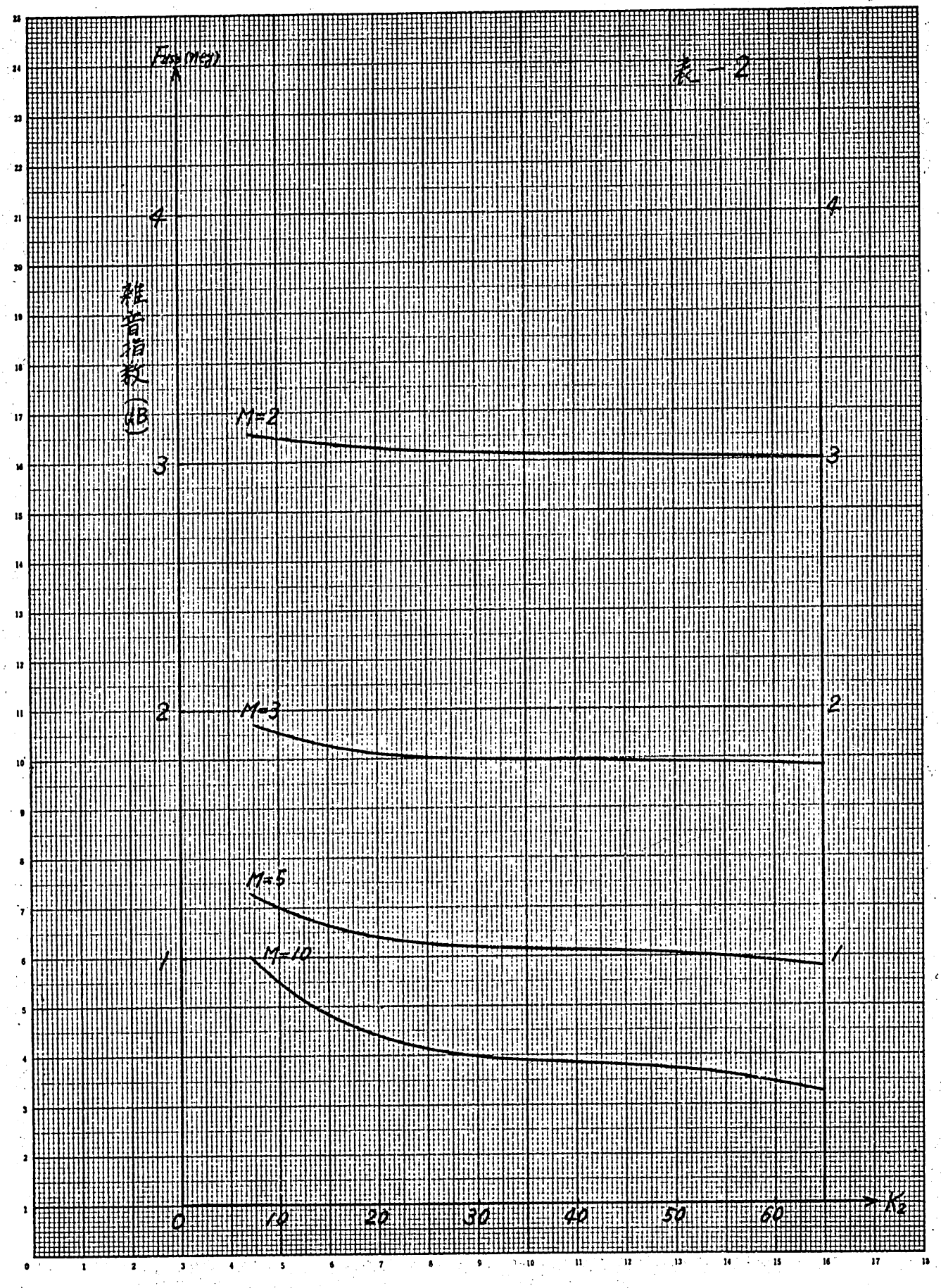
$$\alpha=\frac{M_1^2}{K_1^2}\ ,\quad \beta=\frac{M_1^2}{3K_1K_2}$$
$$p=1-\delta^2\gamma\ ,\quad q=\delta(1+\gamma) \qquad (7-2)$$
$$p'=1-\delta^2\gamma^2\ ,\quad q'=\delta\gamma$$

(7-1)は(7-3)となる。

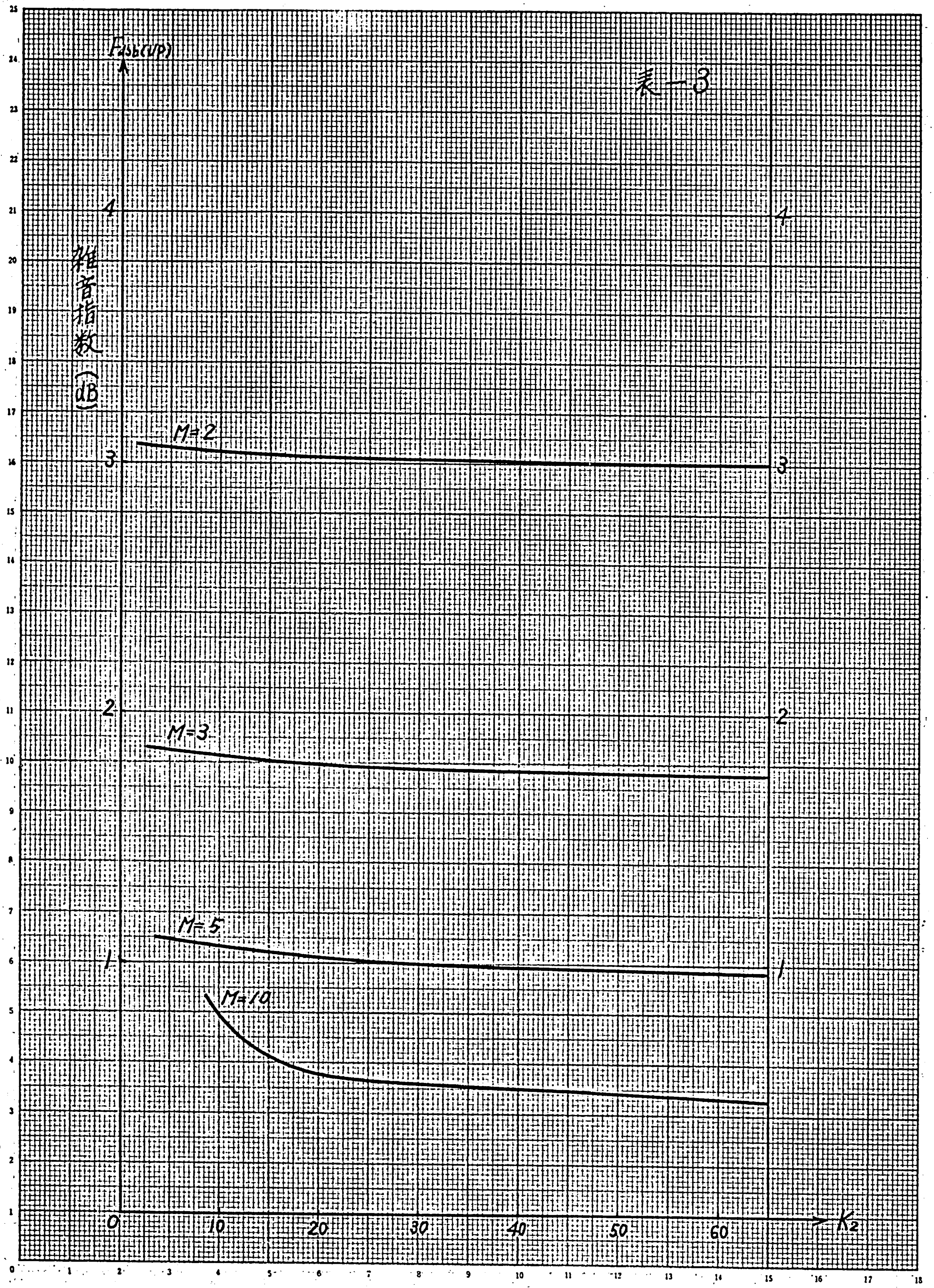
$$G_{up}=\frac{4(K_1-1)(K_2-1)M_1^2}{K_1^2K_2^2}\frac{(p+\beta)^2+q^2}{\left[(p+\beta)^2-(q^2+p'\alpha)\right]^2+4\left[q(p+\beta)-q'\alpha\right]^2} \qquad (7-3)$$

表-9は$K_1=M_1=3$、中心周波数にて$G_{neg}=20$[dB]となるようK_2を選び、γをパラメーターとした周波数特性を示す。表-10はそれに対応する周波数特性である。

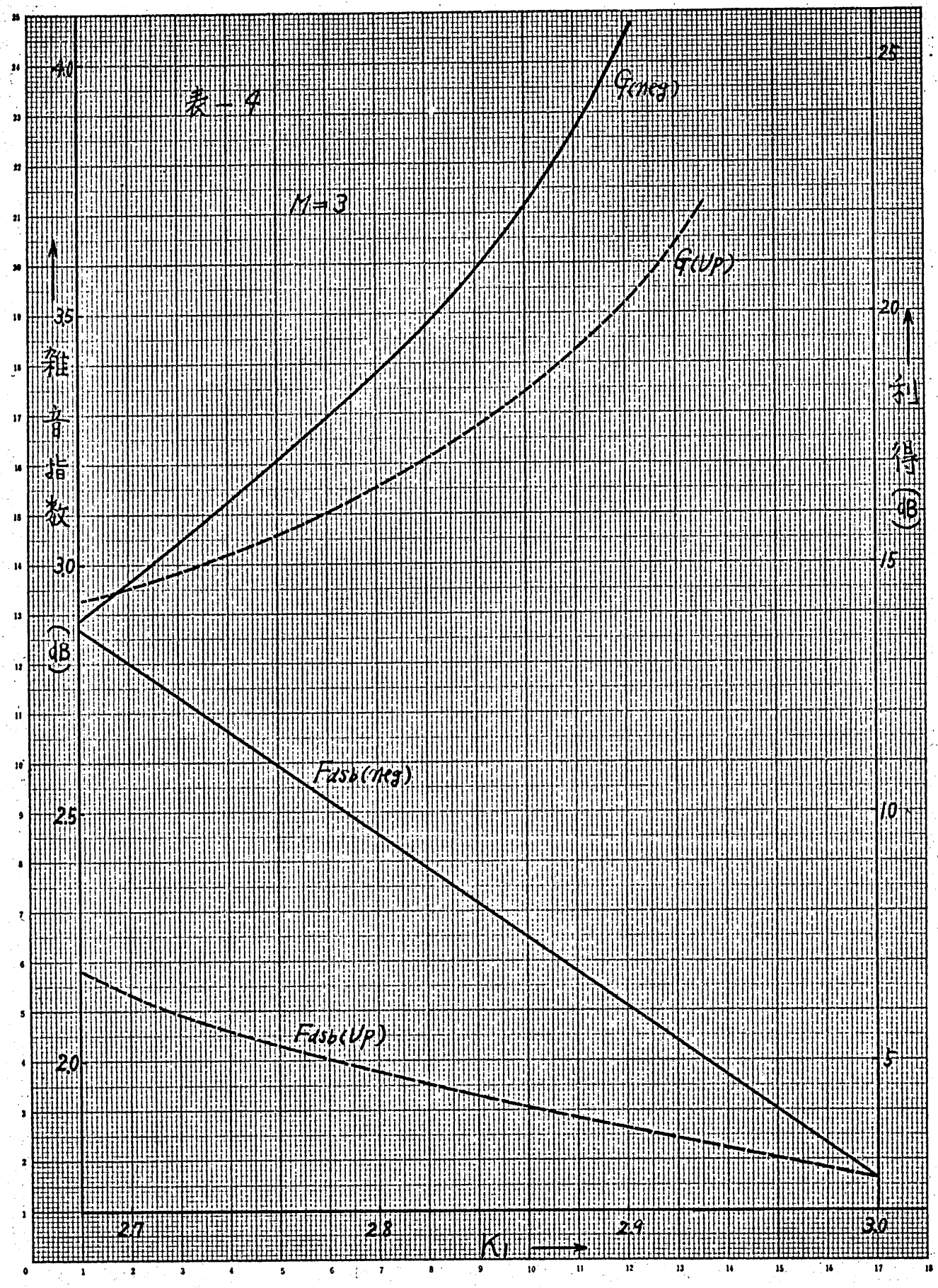

表－1
M=2
3
5
10
M=2
3
5
10
利得 (dB)
30
25
20
15
10
$G_{(n+3)}$
$G_{(UP)}$
10
20
30
40
50
60
K_2

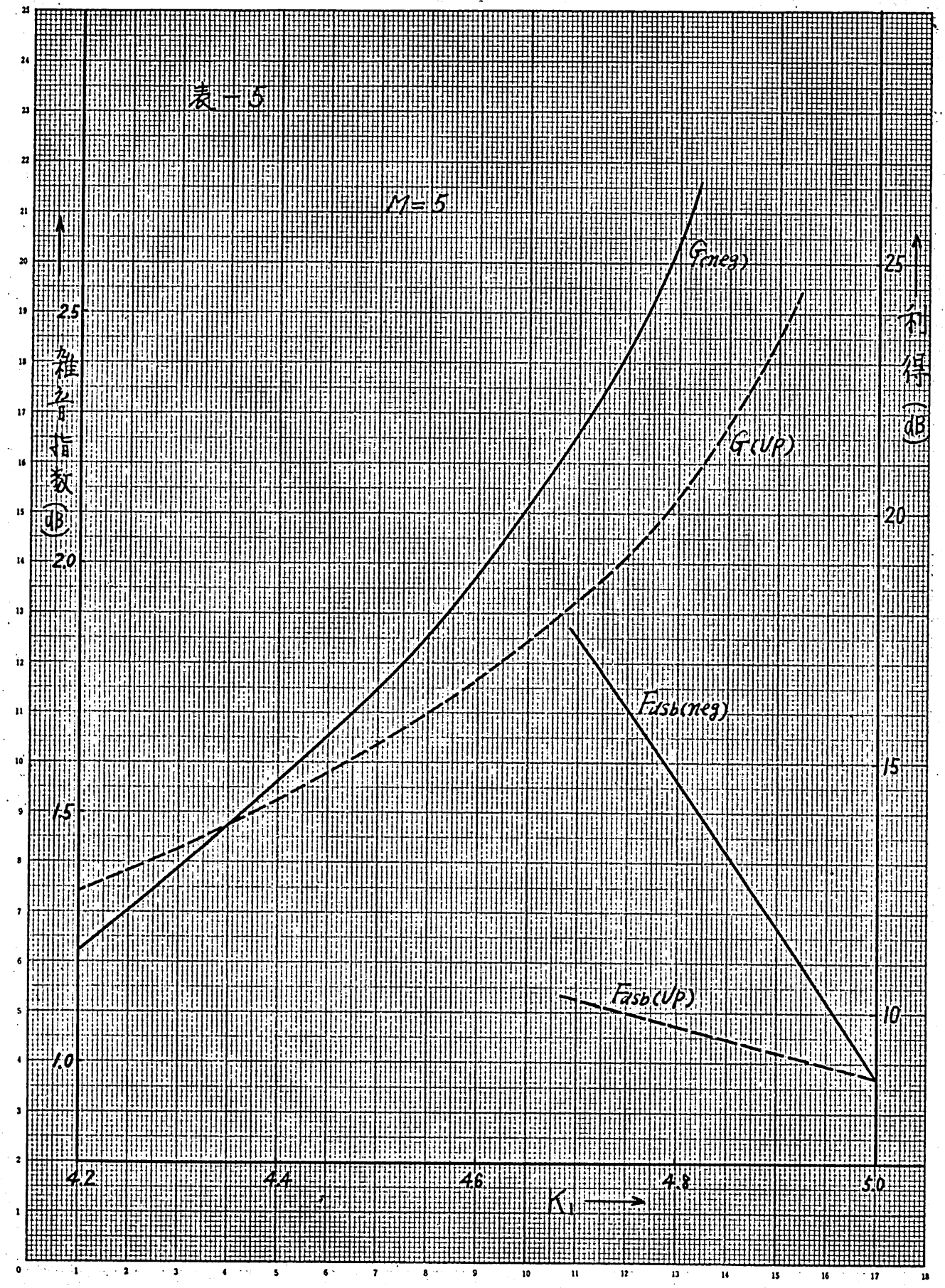


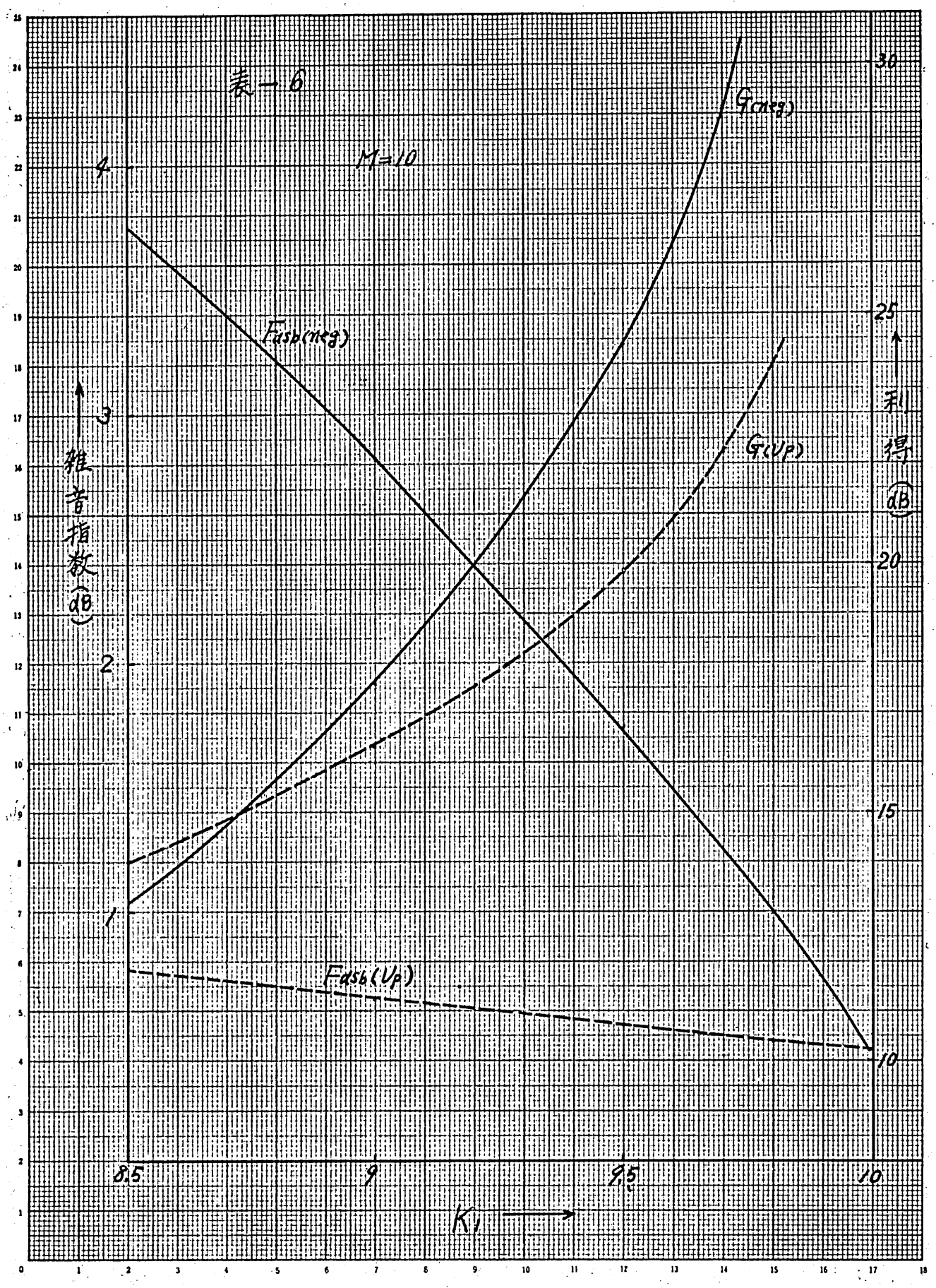
表－2
Fuse (Meg)
雑音指数 (dB)
M=2
M=3
M=5
M=10
4
3
2
1
0
10
20
30
40
50
60
K2

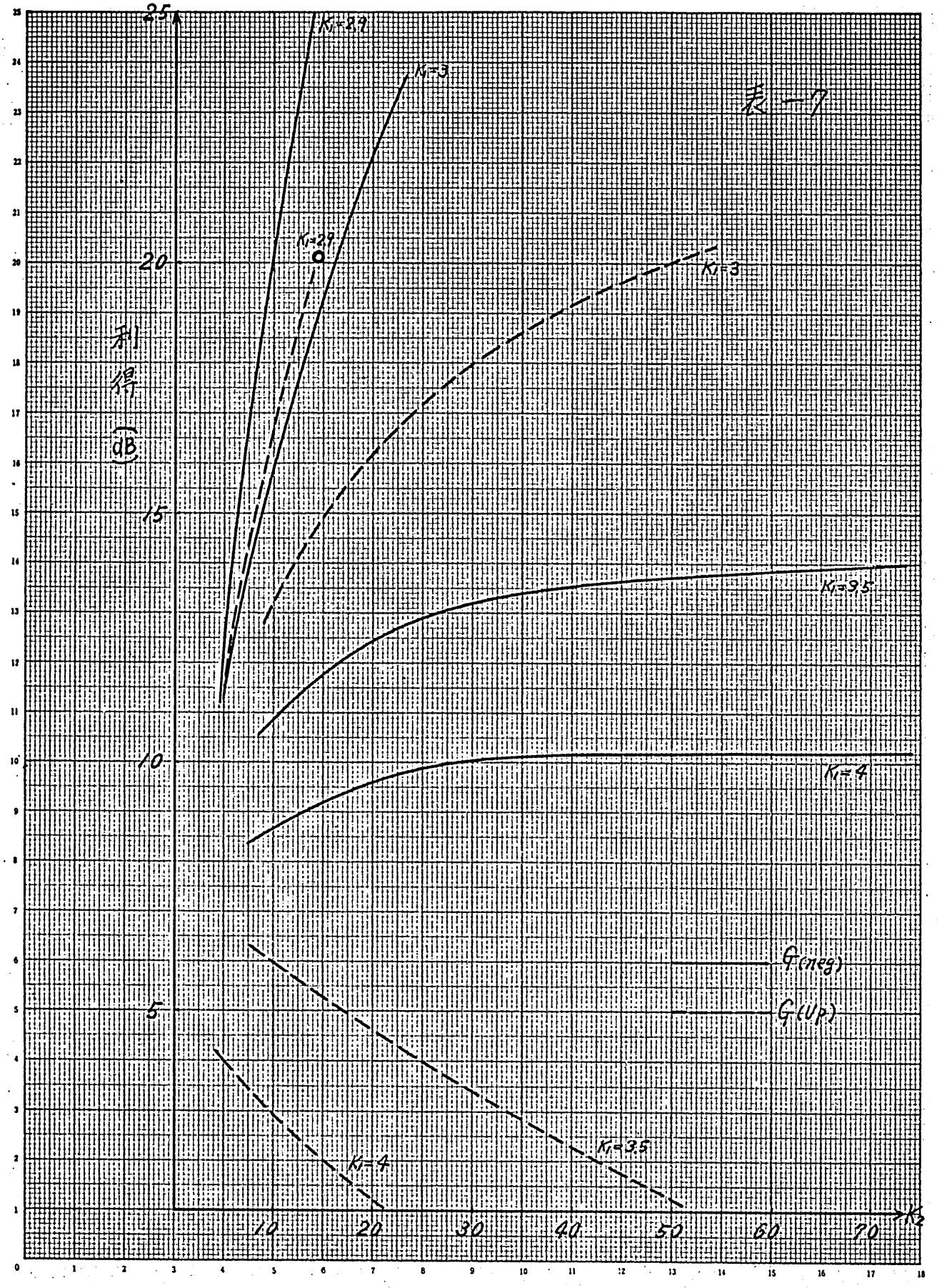


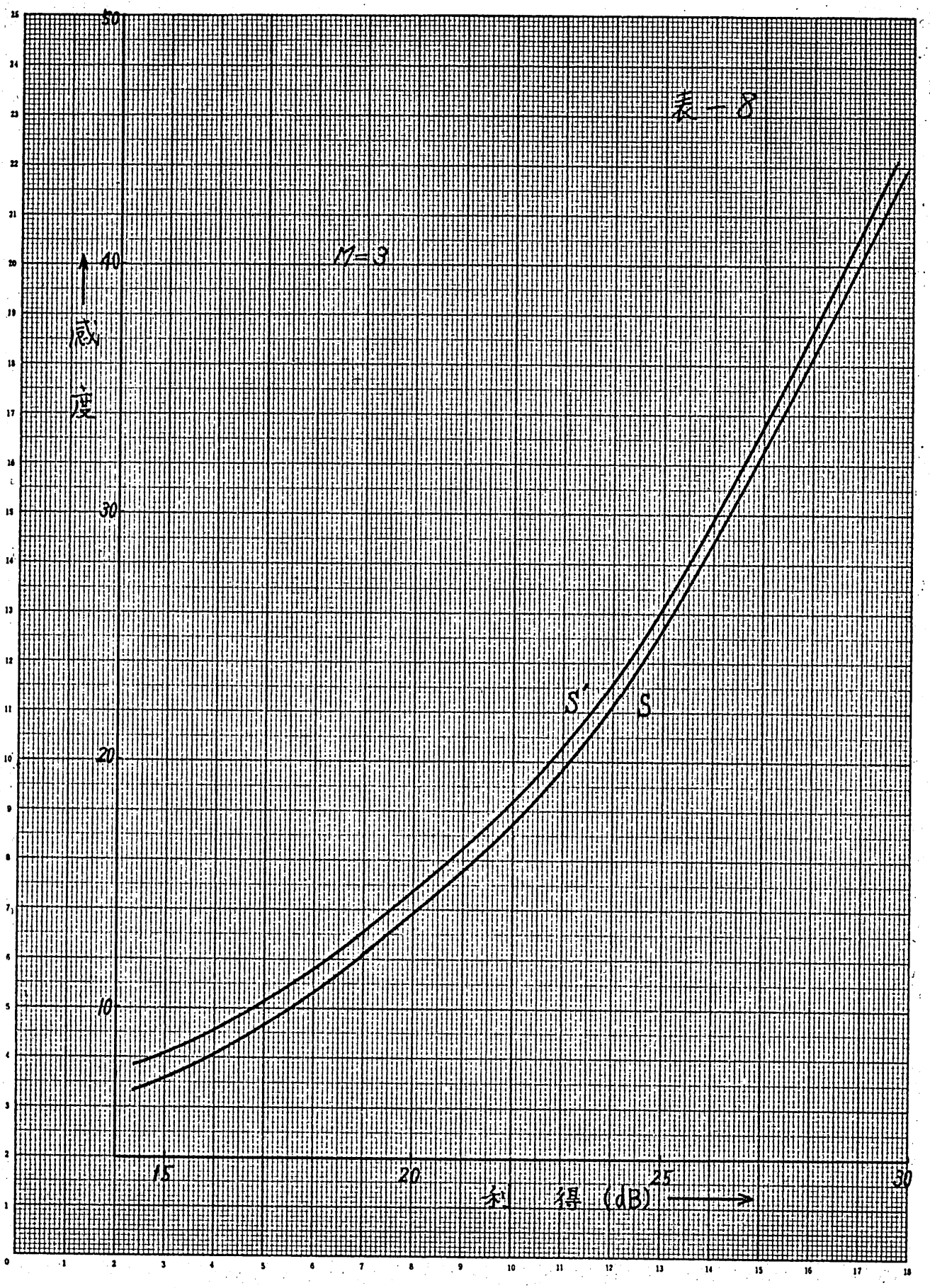
$F_{2SB}(UP)$
表－3
雑音指数(dB)
M=2
M=3
M=5
M=10
K_2
0
10
20
30
40
50
60
1
2
3
4


表－4
M=3
G(neg)
G(UP)
Fasb(neg)
Fasb(UP)
雑音指数 (dB)
利得 (dB)
K1
40
35
30
25
20
25
20
15
10
5
2.7
2.8
2.9
3.0

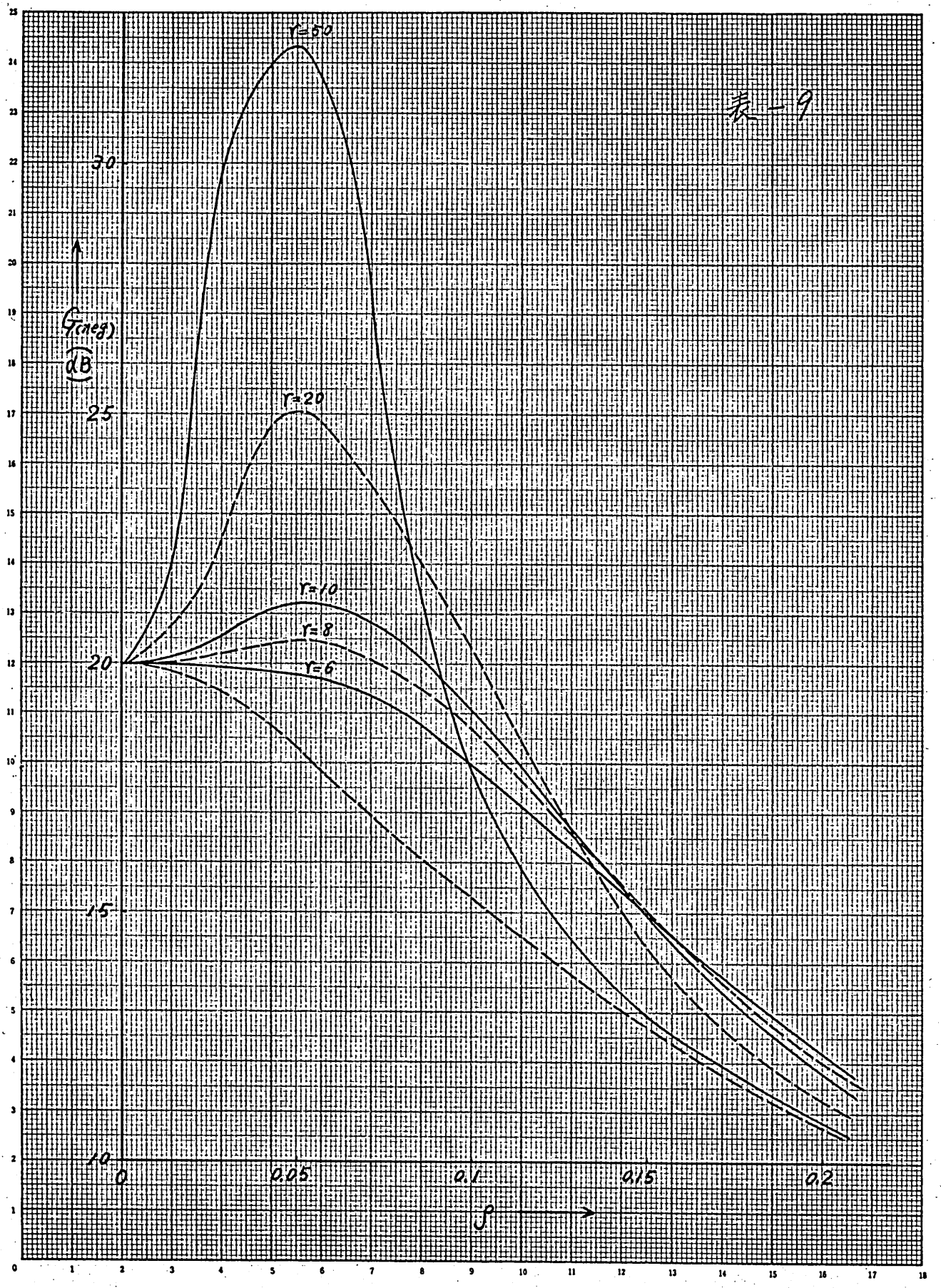

表－5
M=5
推力指数 (dB)
利得 (dB)
G(neg)
G(UP)
Fasb(neg)
Fasb(UP)
K
4.2
4.4
4.6
4.8
5.0
1.0
15
20
25
10
15
20
25


表－6
M=10
4
3
2
1
雑音指数 (dB)
$F_{asb(neg)}$
$F_{asb(Vp)}$
$G_{(neg)}$
$G_{(Vp)}$
30
25
20
15
10
利得 (dB)
8.5
9
9.5
10
K_1


25
20
15
10
5
利得 (dB)
K_1=2.7
K_1=3
K_1=2.9
K_1=3
K_1=9.5
K_1=4
$G_{(neg)}$
$G_{(up)}$
K_1=3.5
K_1=4
10
20
30
40
50
60
70
K_2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18



表－8
M=3
感度
50
40
30
20
10
S'
S
15
20
25
30
利 得 (dB)


表一9
r=50
r=20
r=10
r=8
r=6
30
25
20
15
10
0
0.05
0.1
0.15
0.2
ρ
G(neg)
dB

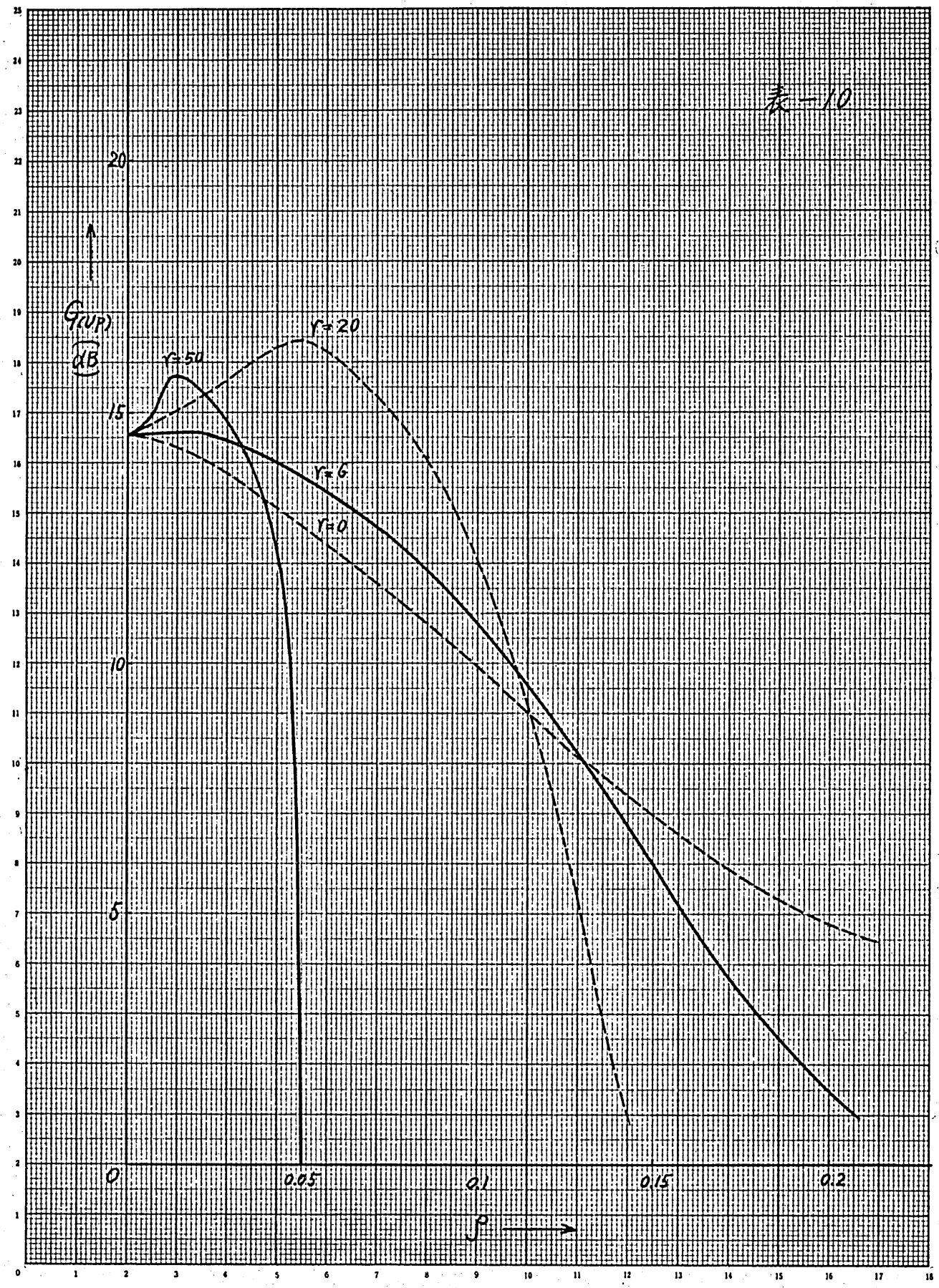
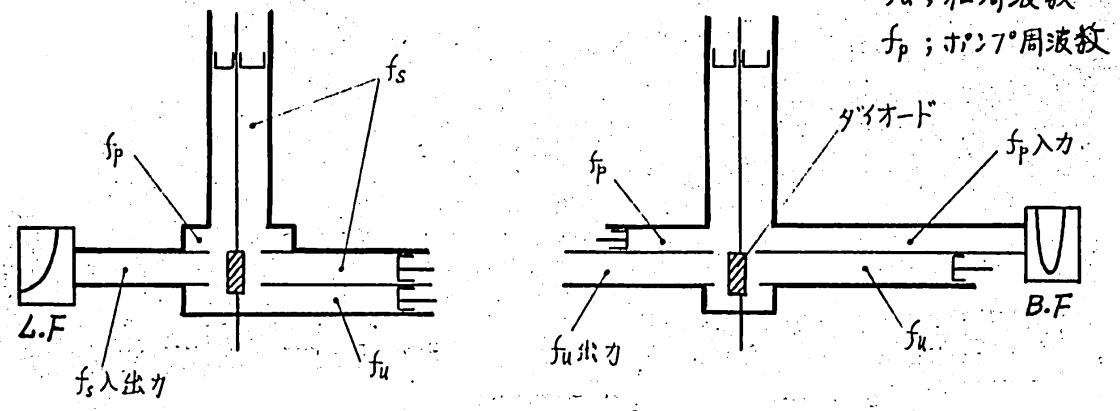


表-10
20
15
10
5
0
$G_{(UP)}$
(dB)
r=50
r=20
r=6
r=0
0.05
0.1
0.15
0.2
ρ

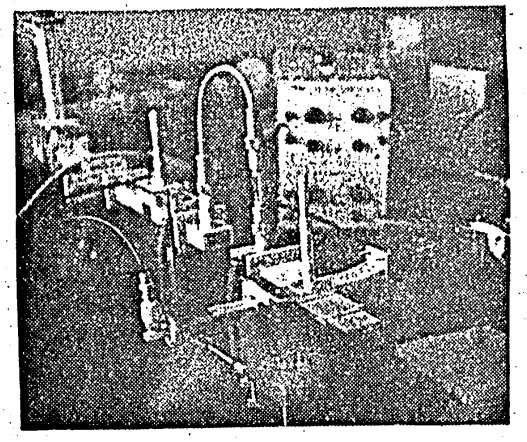
8. 5周波縮退型P.Aの構造

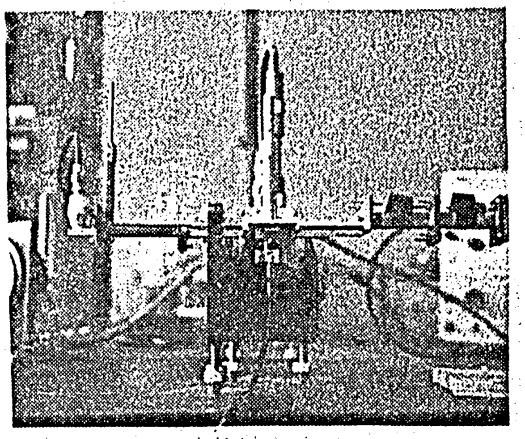
以上の解析より5周波縮退型P.A及びアップコンバーターを任意に動作させるためには信号周波数及び和周波数回路の結合係数を自由に選び得る事が必要である。従って設計にあたってはまず"この点に留意し、周波数特性の善し悪しは次の問題とした。その大まかな構造を示せば"下図の如きものである。

f_s；信号周波数
f_u；和周波数
f_p；ポンプ周波数



(図8－1)

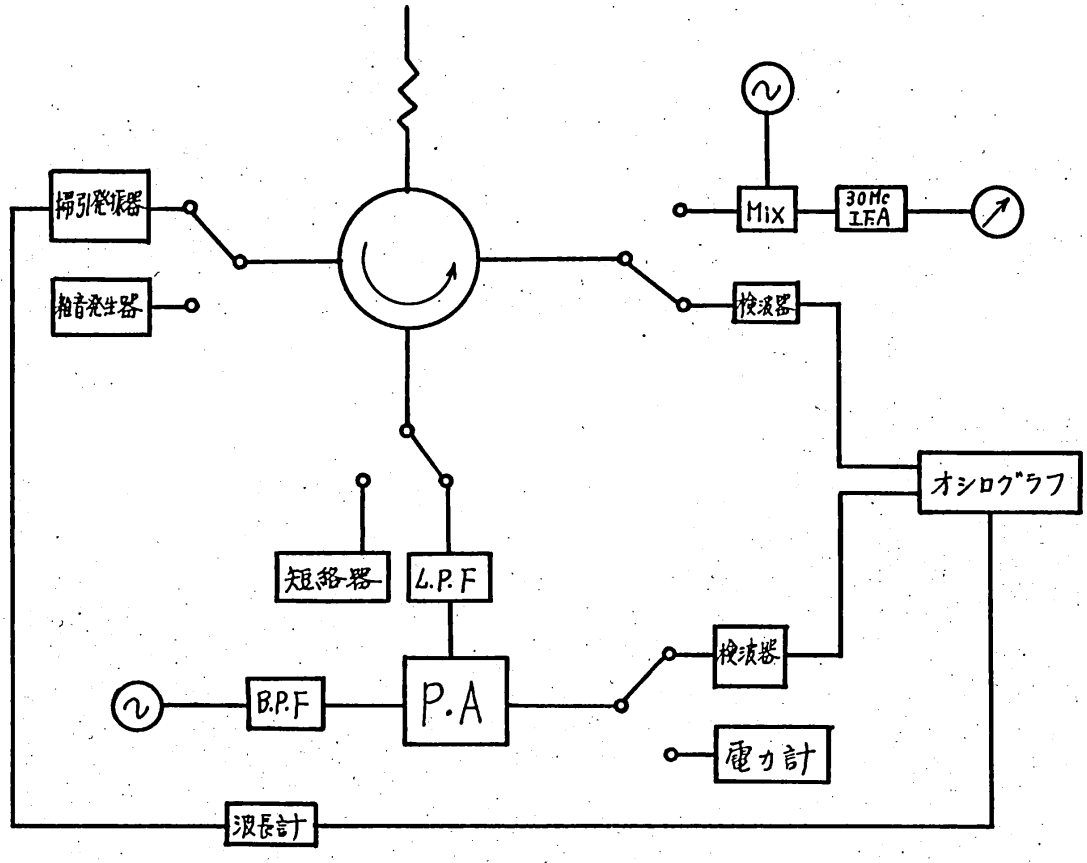




9. 実験結果

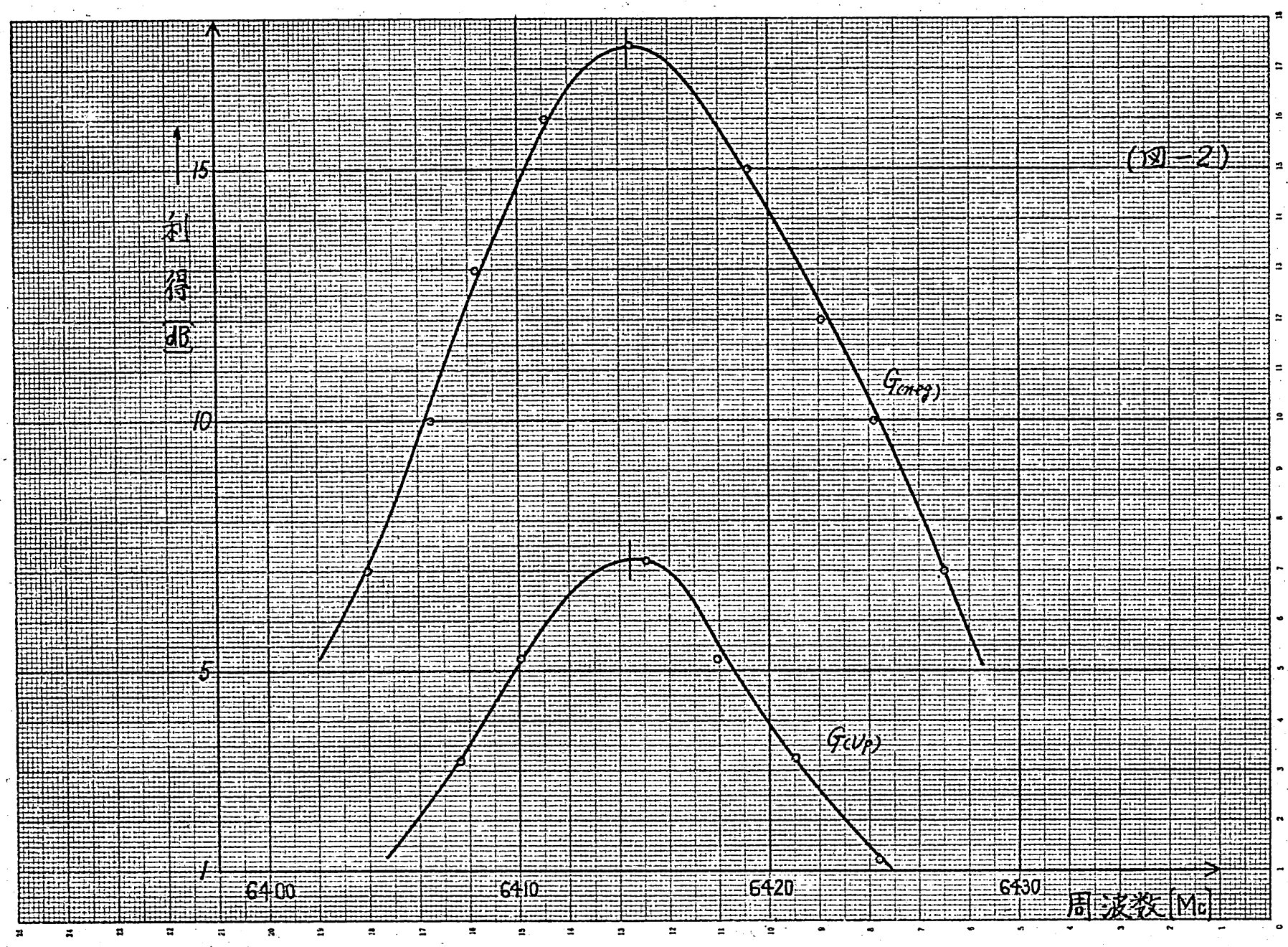
本実験においては信号周波数6.4Gc，ポンプ周波数12.8Gc，和周波数19.2Gcと選び6.4Gcでの直接利得及びその雑音指数（両側帯波受信），アップコンバーターとしての変換利得を同時に測定し，その後和周波数回路をとり除き（和周波数用のショートプランジャーを適当な位置に固定し，ポンプ回路のB.P.Fを取り除き，和周波数の存在する回路をなくする）3周波縮退型P.Aをなし，5周波縮退型P.Aと比較するものである．用いたダイオードは日本電気 4SB1B.

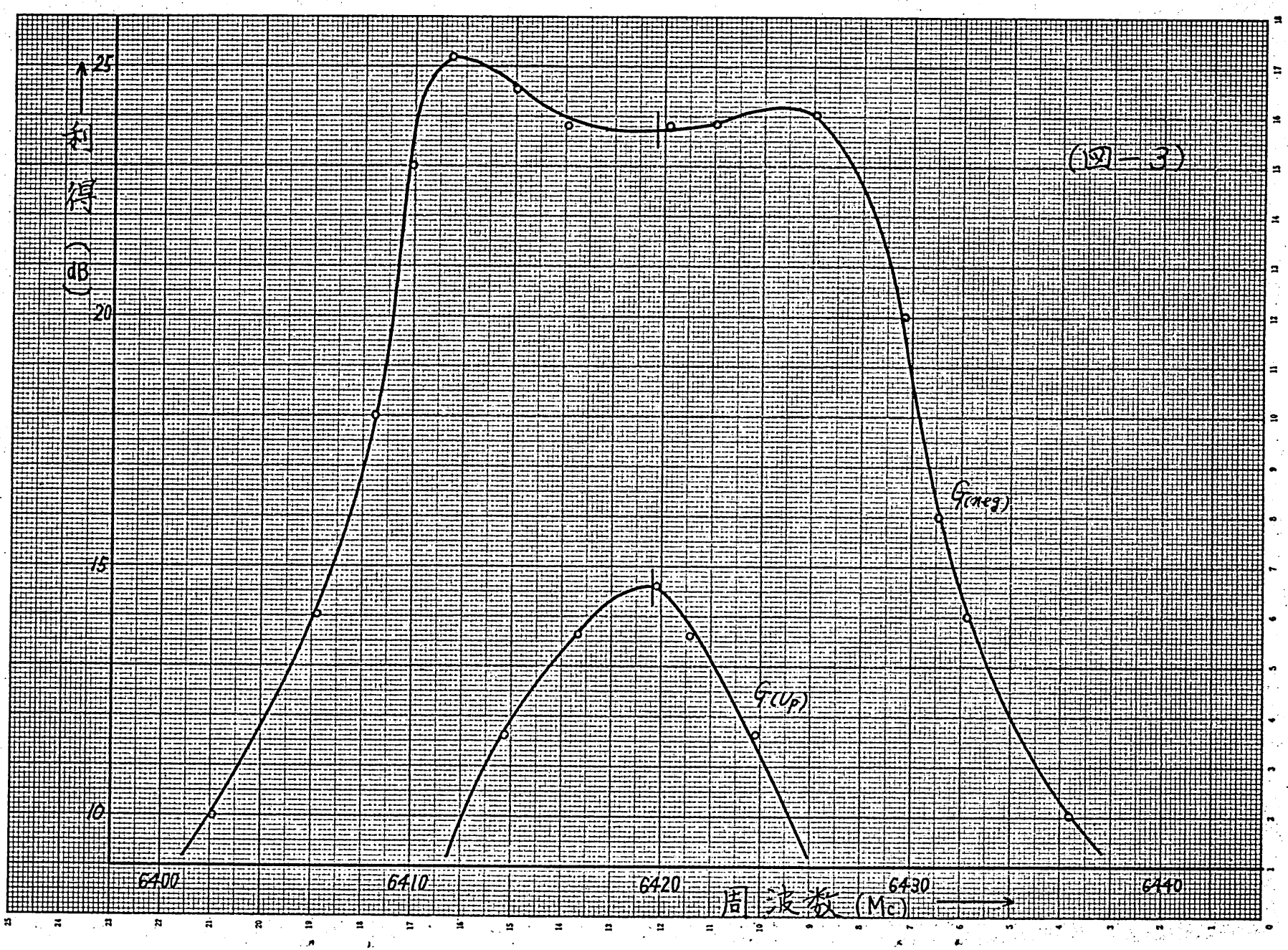
実験回路を（図9-1）に示す．



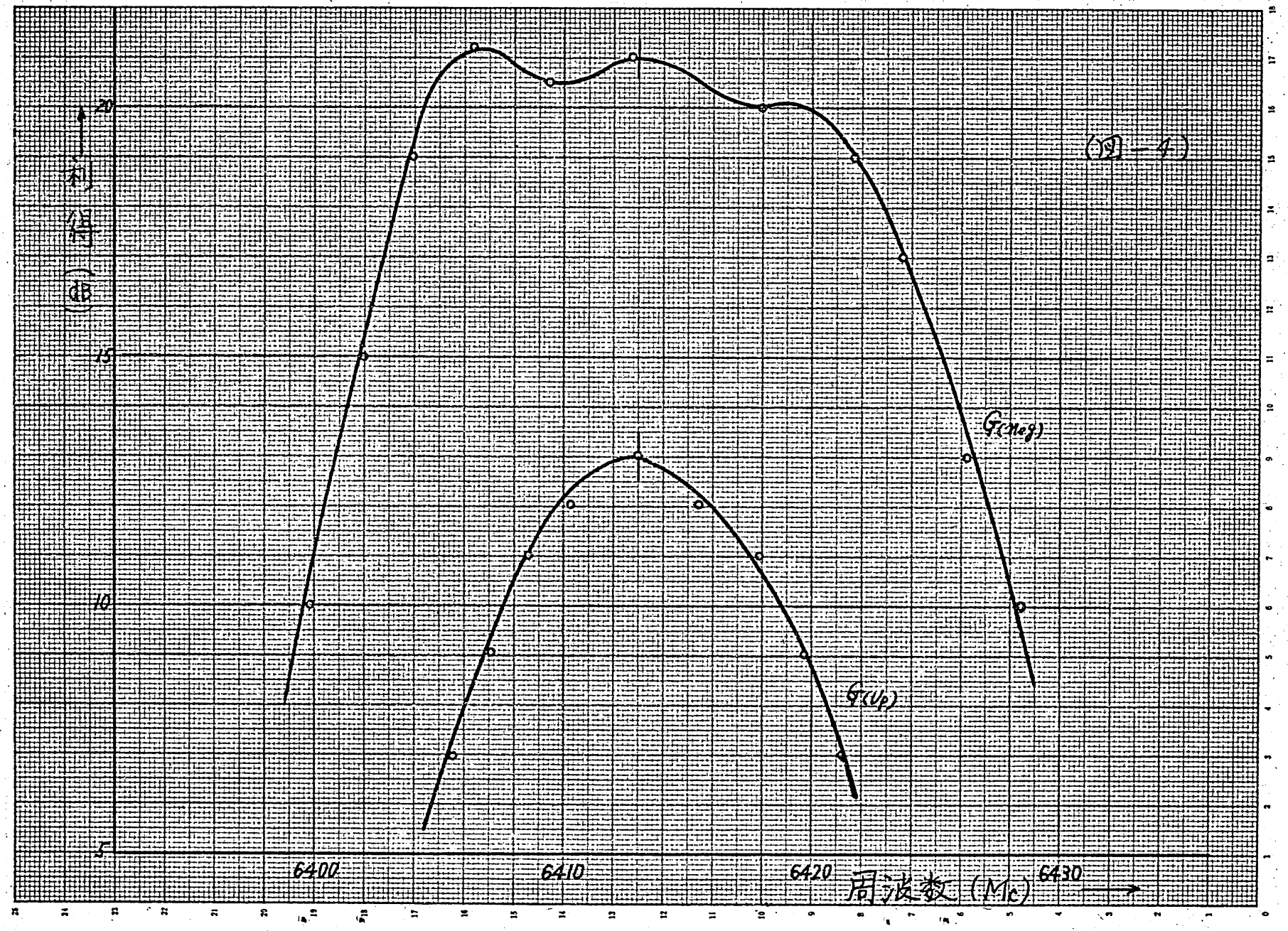
（図9-1）

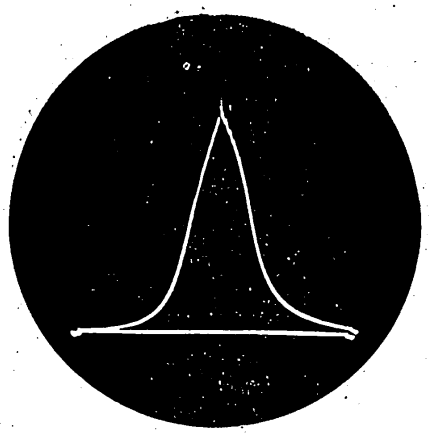
(図−2), (図−3), (図−4)は和周波数回路調整による負性抵抗増幅器及びアップコンバーターの種々の周波数特性を示し、いずれの場合もアップコンバーターの周波数特性は負性抵抗増幅器のそれよりも狭くなっている。(図−2′), (図−3′), (図−4′)はオシログラフ上の特性を写真撮影したもので、信号周波数及び和周波数の検波電流の大いさがそのまま比較される。写真にみられるビートは和周波数回路に2つの周波数が反転して発生している事を意味し、明らかに5周波を形成していることが分る。又そのビート周波数が信号側でのビート周波数の3倍になっていることも確めた。(図−5)は、5周波縮退型P.Aの状態から信号回路の状態を一定に保ったまま3周波縮退型P.Aに変換した時、和回路が如何に信号の増幅特性に影響を与えるかを示している。曲線①は5周波縮退型P.A、②、③は3周波縮退型P.Aとした時の周波数特性で、ダイオード電流は①、1.07μA、②、0.7μA、③0.51μAである。
(図−6), (図−7)は3周波縮退型P.A及び5周波縮退型P.Aのダイオード電流に対する利得・雑音指数(ミクサー・受信機を含む)を測定したもので両者とも信号回路は同じ状態に保たれている。両図は全く異なった回路状態であるがいずれもよく似た傾向を示している。図より、3周波縮退型P.Aと5周波縮退型P.Aにおいて同じダイオード電流が流れたとき同じポンプ電力がダイオードに与えられていると見做せば、当然のことながら両者において同利得を得るためには、5周波P.Aの方がより大きなポンプ電力を必要とすることが分る。又6Gcでの直接利得と18Gcへの変換利得を比較すると、常に8dB程利得差が生じている。雑音指数においては5周波P.Aをなす事によりやや悪化するが大差のないことが示され、雑音指数の最小点は、3周波の場合より幾分大きなポンプ電力において生じている。

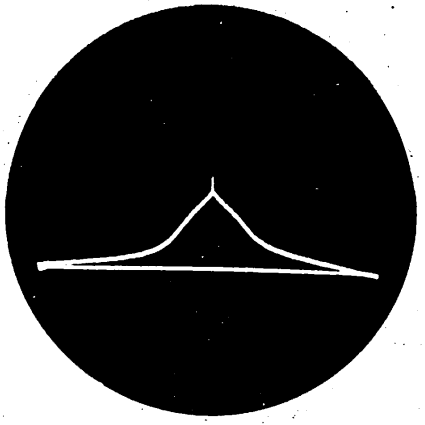

(図－2)
利得 dB
15
10
5
1
6400
6410
6420
6430
周波数 [Mc]
$G_{(H-P)}$
$G_{(V-P)}$



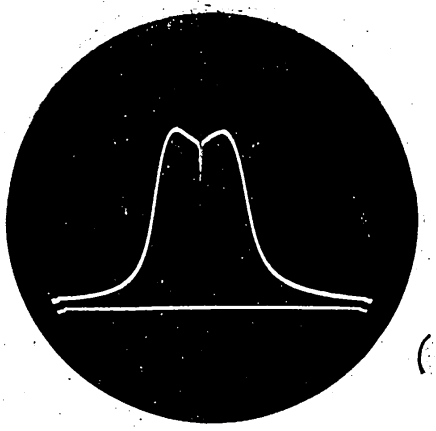
(図－3)

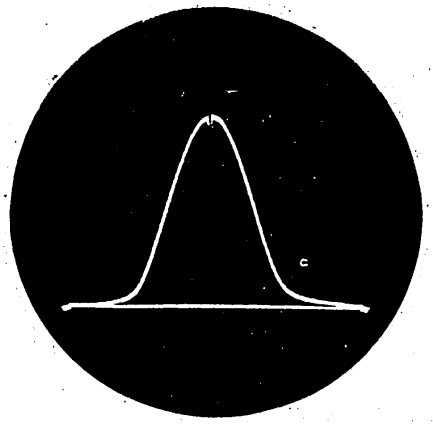

(図－4)
利得 (dB)
20
15
10
5
G(neg)
G(up)
6400
6410
6420
6430
周波数 (Mc)



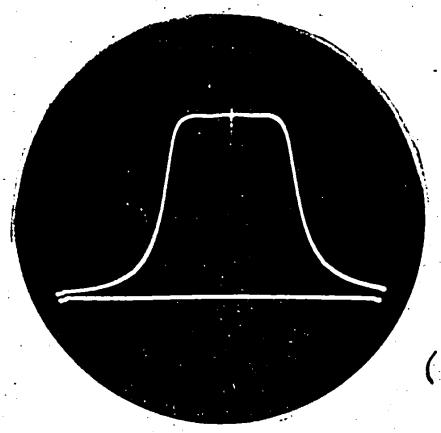


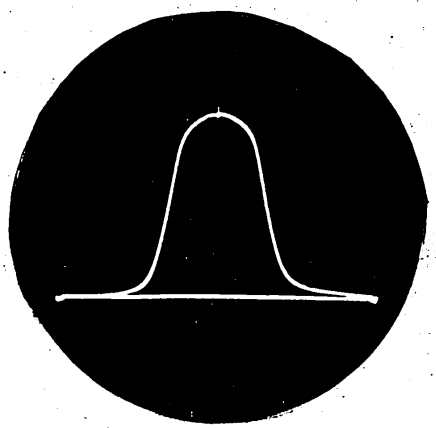
(図－2′)



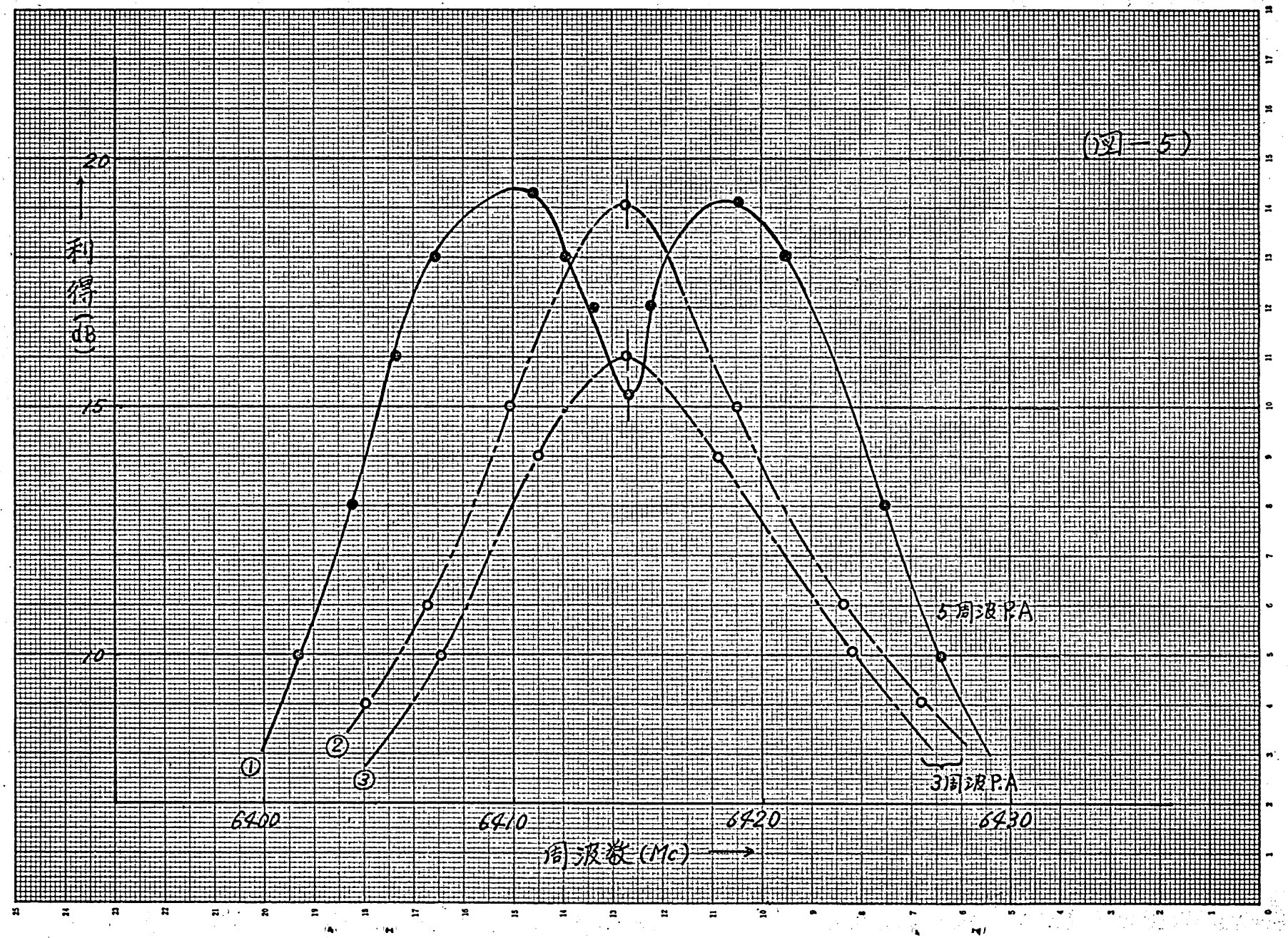


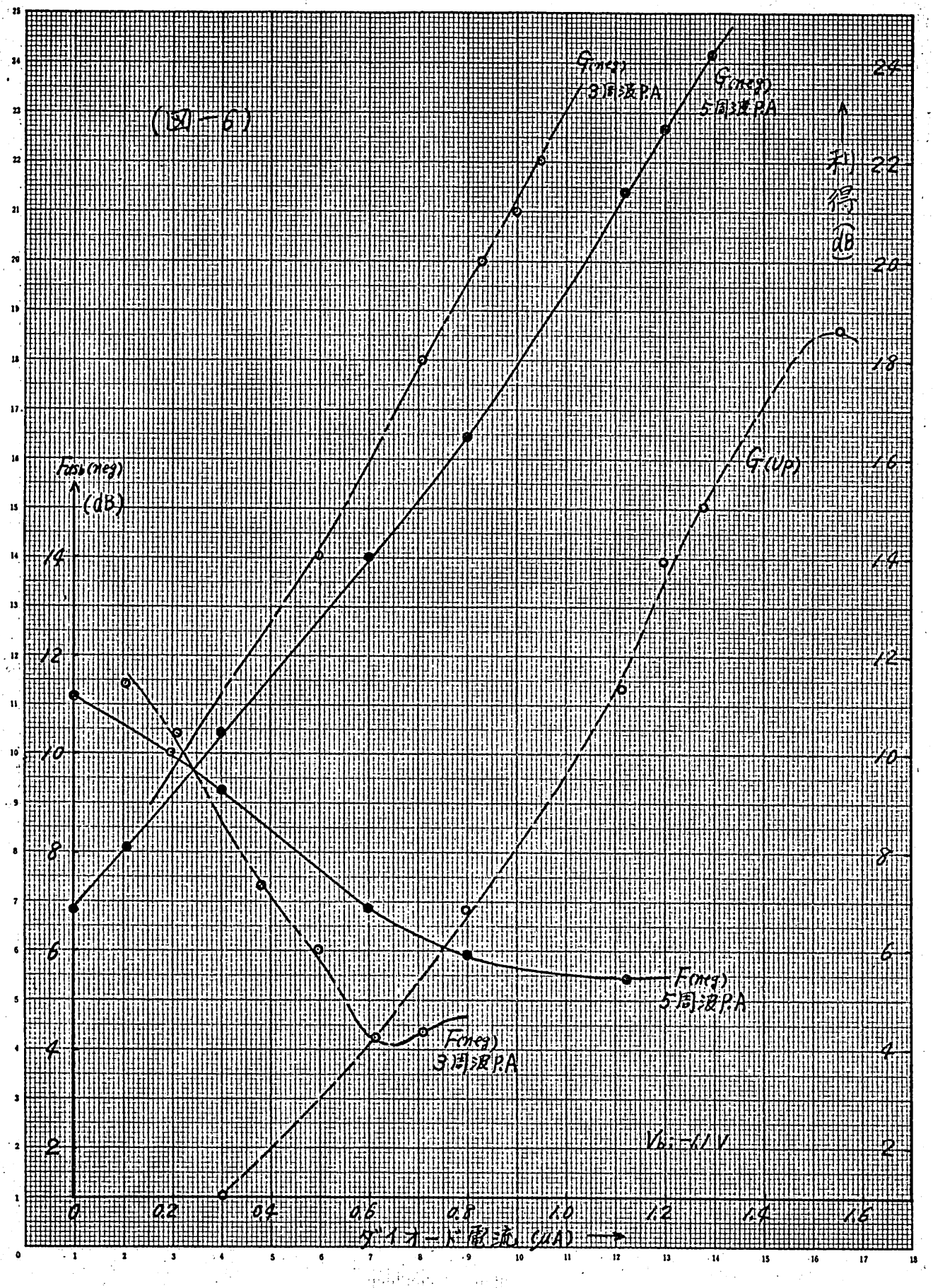
(図－3′)

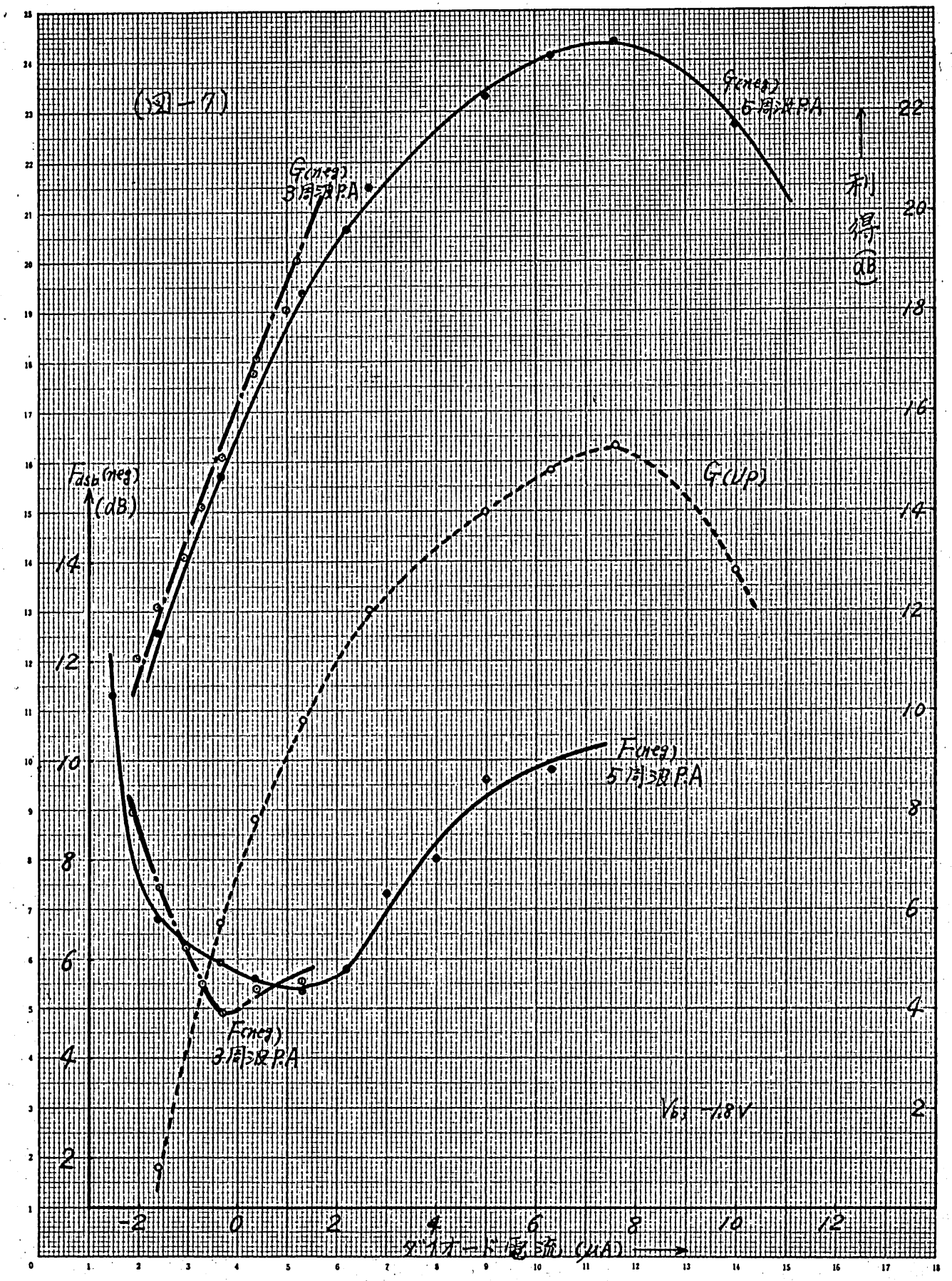




(図－4′)


(図－5)
20
利得 (dB)
15
10
5周波P.A
3周波P.A
①
②
③
6400
6410
6420
6430
周波数 (Mc) ⟶


(図-6)
G(max) 3周波P.A
G(max) 5周波P.A
利得 (dB)
G(UP)
Fmin(neg) (dB)
F(neg) 5周波P.A
F(neg) 3周波P.A
VD: -1.1 V
ダイオード電流 (μA)



(図-7)
G(neg) 6周波P.A
G(neg) 3周波P.A
G(Up)
F(neg) 5周波P.A
F(neg) 3周波P.A
F_{dsb}(neg) (dB)
利得 (dB)
V_b: -1.8V
ダイオード電流 (μA)

10. 結言

以上5周波縮退型負性抵抗増幅器とアップコンバーターに対し解析、実験を試み理論計算に近い結果が得られた。3周波縮退型P.A.と比較すれば、アップコンバーターとして同時に働き、信号の3倍の周波数変換においても高利得が得られる。信号周波数での直接利得及びその雑音指数も3周波縮退型P.Aにくらべて著しい低下がなく、単一共振回路でも種々周波数特性を変化させることが出来、広帯域化が可能となる。更に解析によれば縮退型アップコンバーターを形成しているため従来のアップコンバーターより低雑音であることが予想される。又ポンプ電力変動に対する利得の安定性も3周波縮退型P.Aにくらべて改善されるものと思われる。これらの特徴は5周波非縮退P.Aに対しても得、持されるであろう。

終りに本研究に対し終始御指導頂きました電気通信研究所、岡島 徹氏、及び御討論頂きました大阪大学、中西教授、京都大学、中島氏に深く感謝の意を表します。

文献

(1) 岡島；多重通信用パラメトリック増幅器，通研成果報告 2206

(2) DAVID K. ADAMS; An Analysis of Four-Frequency Nonlinear Reactance Circuits. IRE Trans. on Microwave Theory and Technique, vol 8 May. 1960

(3) K.H. Blankenburg; Reaktanzverstärker hoher Verstärkungskonstanz. FREQUENZ. Bd 17/1963 Nr. 9

輻射科学研究会資料

2探針反射係数測定器

（三菱電機株式会社　中央研究所）

喜連川　　隆

白　幡　　潔

（昭和４０年１月３０日）

1. まえがき

マイクロ波領域における反射係数の測定法には、測定すべき反射係数の値、測定精度 および測定の簡便さなどによって種々の方法があるが、反射係数が 0 に近い場合は、いわゆる定在波測定法が一般的であり、測定器も単1プローブ・スロッテッドラインと決まっている。

しかしバラクタ・ダイオードの測定では 反射係数が1に近くなり、従来の測定法、測定器系では 測定不能となることがしばしばである。もっとも可変減衰器を補助に用いたり、定在波パターンの谷の形から算定する等して、大きな反射係数を求め得るが不便である。その他 3プローブ法、4プローブ法、ブリッジ法等もあるが、簡便さ広帯域性という点で劣っている。

我々は 先に2乗検波定在波パターンの規準化勾配又は2点間の規準化電流差が反射係数を示すことを見出していたが、此度この原理に基づく2探針反射係数測定器を実用化したので報告する。この測定器は 反射係数が1に近い場合の簡便な測定を意図したものであるが、0に近い場合でもよく、0から1まで均一な Weight で測定できる。

なお、この方法は 米国WILTRON社製 Phase Meter に示唆を受けた。

2. 原　　理

無損失線路上 $\ell - \Delta L$ 点の電圧を

$$V(\ell-\Delta L) = V_i e^{-j\beta(\ell-\Delta L)} + V_{re}^{j\beta(\ell-\Delta L)} \quad \cdots\cdots (1)$$

とすれば、2乗検波し、増幅された検波電流は

$$I_1 = K_1 G_1 V_i^2 \left\{ 1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma| \cos(\theta + 2\beta\ell - 2\beta\Delta L) \right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\Gamma(\ell-\Delta L) = |\Gamma| e^{j(\theta+2\beta\ell-2\beta\Delta L)} \quad \cdots\cdots (3)$$

となる。ただし K_1 は 検波感度等を含む係数、G_1 は 増幅器の利得、Γ は反射係数である。

また、$\ell + \Delta L$ の点の2乗検波電流は、同様に

$$I_2 = K_2 G_2 V_i^2 \left\{ 1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma| \cos(\theta + 2\beta\ell + 2\beta\Delta L) \right\} \quad \cdots\cdots (4)$$

である。いま

$$K_1 G_1 V_i^2 = K_2 G_2 V_i^2 \equiv M \quad \cdots\cdots (5)$$

と調整した後、差電流をとれば

$$\Delta I = I_1 - I_2 = |\Gamma| M \cdot 4 \sin 2\beta\Delta L \sin(\theta + 2\beta\ell) \quad \cdots\cdots (6)$$

を得る。

この測定器は 測定に先立ち次のように調整しておく。$|\Gamma_0| = 1$, $\theta = \theta_0$ なる完全反射終端を接続し、M および ℓ を適当に調節して

$$4M \sin 2\beta\Delta L = 1 \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\sin(\theta_0 + 2\beta\ell) = 1 \quad \cdots\cdots (8)$$

としたときには、

$$\Delta I = 1$$

となる。この時，差電流が指示器の最大目盛を指すようにする。

以上の調整状態で 任意の被測定物 $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$ を接続したときには，

$$\Delta I = |\Gamma| \sin(\theta + 2\beta\ell) \quad \cdots\cdots (9)$$

である，ℓ を適当に選んで，

$$\sin(\theta + 2\beta\ell) = \pm 1 \quad \cdots\cdots (10)$$

としたときの ΔI を ΔI_{MAX} とすれば

$$\pm \Delta I_{MAX} = |\Gamma| \quad \cdots\cdots (11)$$

となる。即ち $|\Gamma|$ が 均一目盛で直読できる。

θ は 単一プローブ測定器の場合と同様にして測定するが，本測定法では $\partial \Delta I / \partial \ell$ が極大，かつ $\Delta I = 0$ の点となり 検出し易くなる。

3. 構　造

章2で述べたものの原理図は 図1である。2ΔL は 感度を上げる点からは $\lambda/4$ に選ぶのが良い。しかし，この間隔は $\lambda/12$ であっても感度は $1/2$ に減ずるのみであり，更にMが調節できるから，2ΔL 間隔が固定でも，測定可能周波数範囲は、実用上2～3オクタブはとれる。

実際の装置では 図2に示すように，マイクロ波源に振幅変調をかけ，検波器の後に差動トランスをおき，差出力をロックイン増幅器で増幅している。プローブは 非同調形を挿入長僅かにして用いるが，バラクタ，ダイオードの測定のように，測定電力が微弱であることを要する場合は、同調形プローブに差し換えて感度を上げる。

4. あ と が き

世の中には 対になっているものが多い。定在波測定器もプローブを2本にすることにより，2乗検波という仮定のもとに，反射係数が近似なしに直接読みとれることを明らかにした。一般の定在波測定器あるいは 3.4プローブ法では，比をとるという考え方をしているのに対し，本測定法は差をとる 或いは 勾配を測るという考え方に基づいている。測定点と被測定物の間に存在する僅少な損失は 測定値に入ってこないように、あらかじめ調整されてしまうのも特長と言えよう。写真は 島田理化工業株式会社で製作された 1～10GCの測定器系を示す。なお最近似た考え方が，下記文献に発表されたことを付記する。

文　献

F. C. deRonde ICMCI, M7-4, Sept 1964 Tokyo

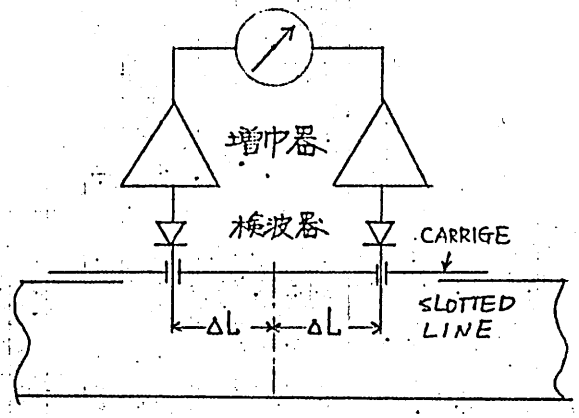


図 1

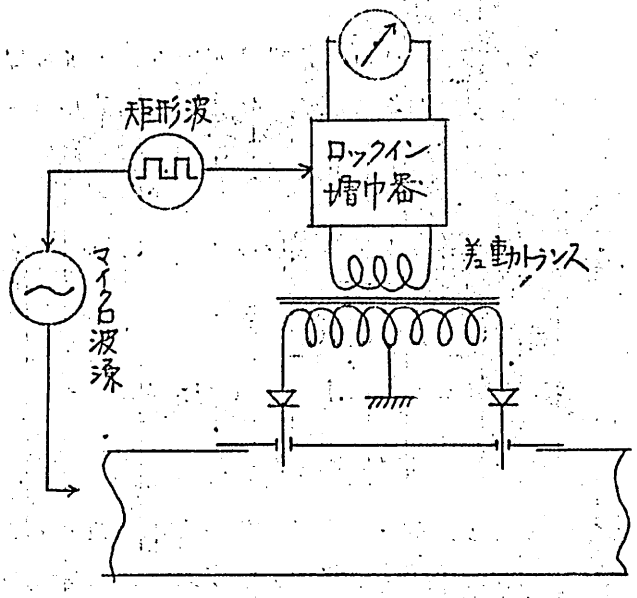
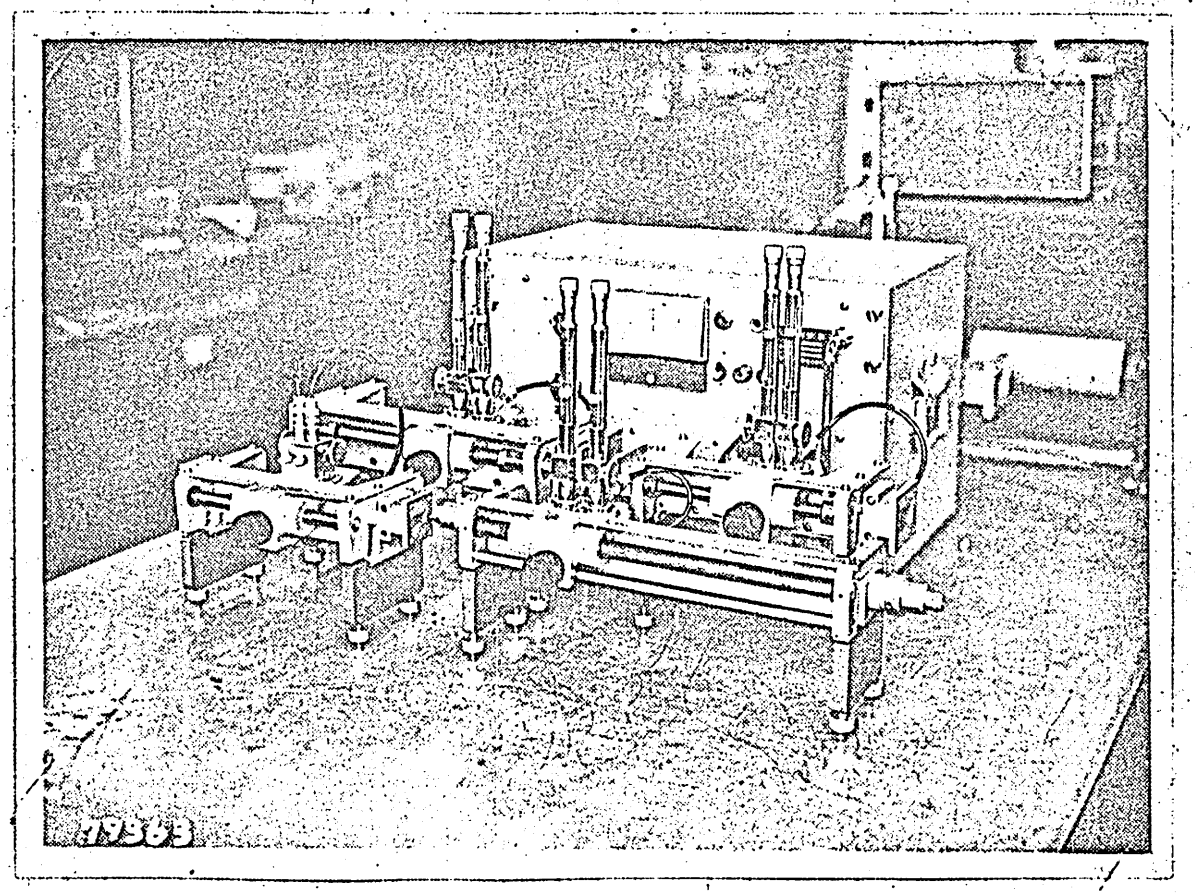


図 2



2探針反射係数測定器一式（島田理化工業株式会社製）

輻射科学研究会資料

シリコン太陽電池について

1965年1月30日

木村謙次郎

（早川電機工業株式会社）

シリコン太陽電池について

まえがき

半導体の結晶に光を照射すると電子正孔対が生成してＰＮ接合により分離され、ＰＮ両端に電圧が生じこれに負荷を接合すると電流が得られる。この装置が太陽電池である。

最近の半導体技術の進歩により、シリコン太陽電池もいろいろの改良がなされ、地上で応用される電力用太陽電池に関する限り、殆んど完成の域に達したものと思われる。

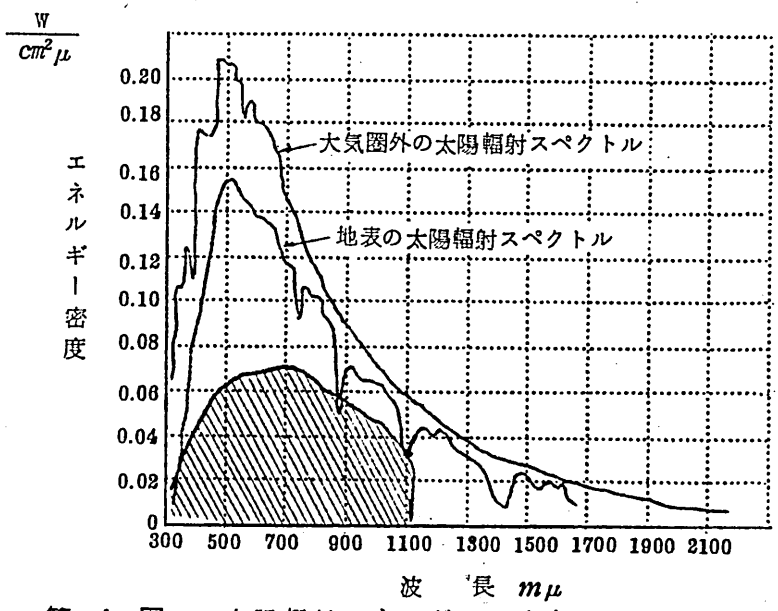
一方１９５７年、人類最初の人工衛星スプートニクが打上げられて以来数々のの実験がおこなわれて、通信衛星、気象衛星を始めとするこれ等多数の人工衛星にシリコン太陽電池が搭載された。

太陽電池の応用は産業分野においても光学的に又、工業的にホトセルとしてその範囲を広げつつあるが、これには次の二つが主である。その第一は光電流が照度に比例するという性質を応用した測光や反射率の測定など光学上の応用で、第二は光の断続に対する応答をリレーと組合せるもので遠隔測定や自働制御に関する工業的用途である。

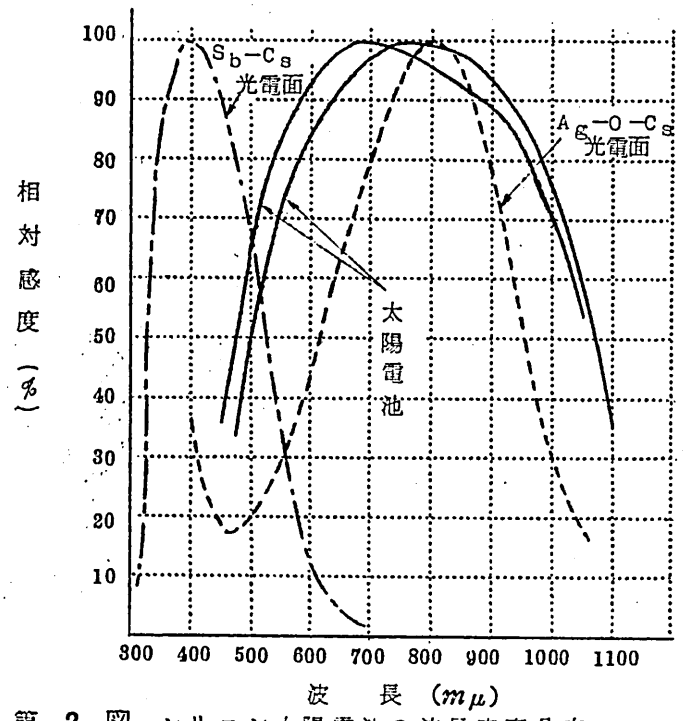
太陽電池が太陽輻射及び人工光源を対称とする光エネルギー変換器である以上、スペクトル感度が先づ問題となり、従来のシリコン太陽電池に比し、特に青や緑の短波長の光に対して優れた感度をもつものについてはこれをブルーセル(Blue Sensitive Cell)と呼ぶこととする。

今回はこのブルーセル等を中心として最近の太陽電池の動向について簡単に解説を加えることにする。

1. シリコン太陽電池のスペクトル感度特性



第 1 図　太陽輻射エネルギーの分布



第 2 図　シリコン太陽電池の波長感度分布

$$Eg = \frac{hc}{\lambda t} \fallingdotseq \frac{1.24}{\lambda t(\mu)} \text{〔ev〕} \quad \cdots\cdots(1)$$

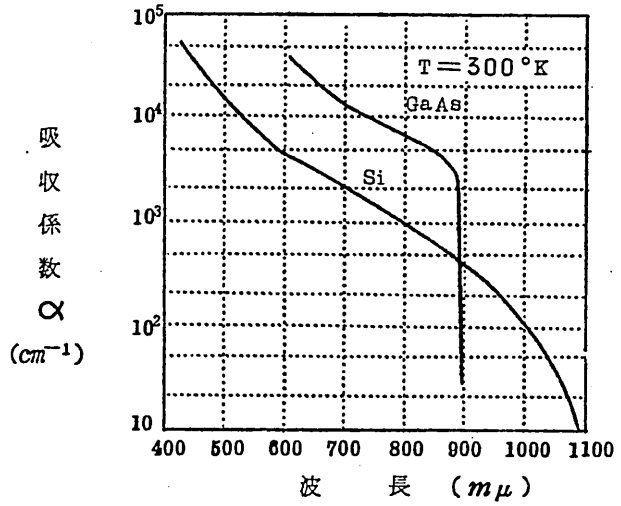
Eg ：禁止帯のエネルギーギャップ

h ：plankの定数

c ：光の速度

λt ：限界波長

2. キャリヤーの収集効率



第 3 図　吸収係数対光の波長

(i) 表面からできるだけうすくＰＮ接合を形成する。

(ii) 少数キャリヤーの拡散長をできるだけ長くとる。

(iii) 表面における光の反射の損失を最小にする。

$$n = n_0 e^{-t/\tau} \quad \cdots\cdots(2)$$

t ：時　間

n_0 ：時間 t＝0 のキャリヤー濃度

n ：t時間後のキャリヤー濃度

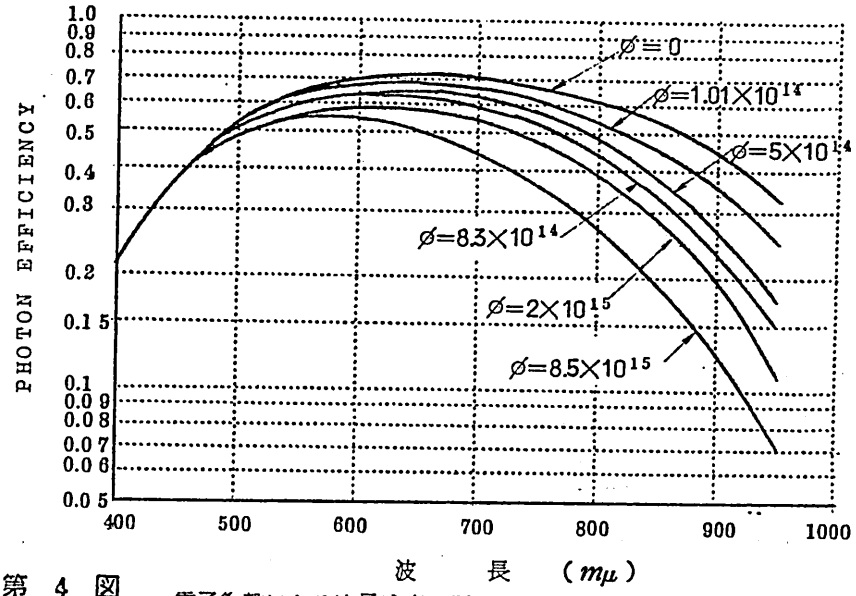
τ ：平均寿命

$$\ell = \sqrt{D\tau} \quad \cdots\cdots(3)$$

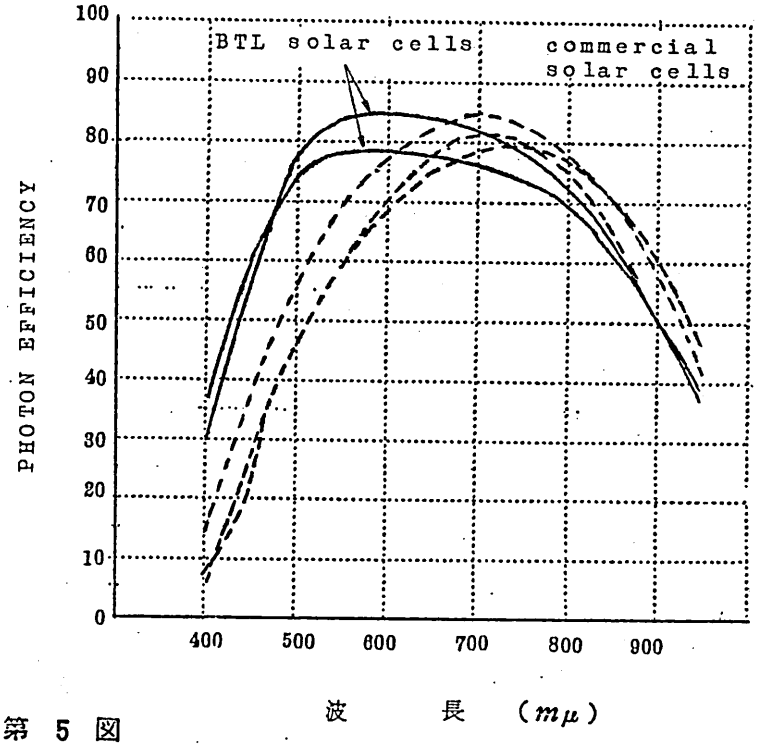
ℓ ：拡散長

D ：キャリヤーの拡散定数

3. 人工衛星用太陽電池とブルーセル



第 4 図　電子衝撃による波長感度の影響



第 5 図

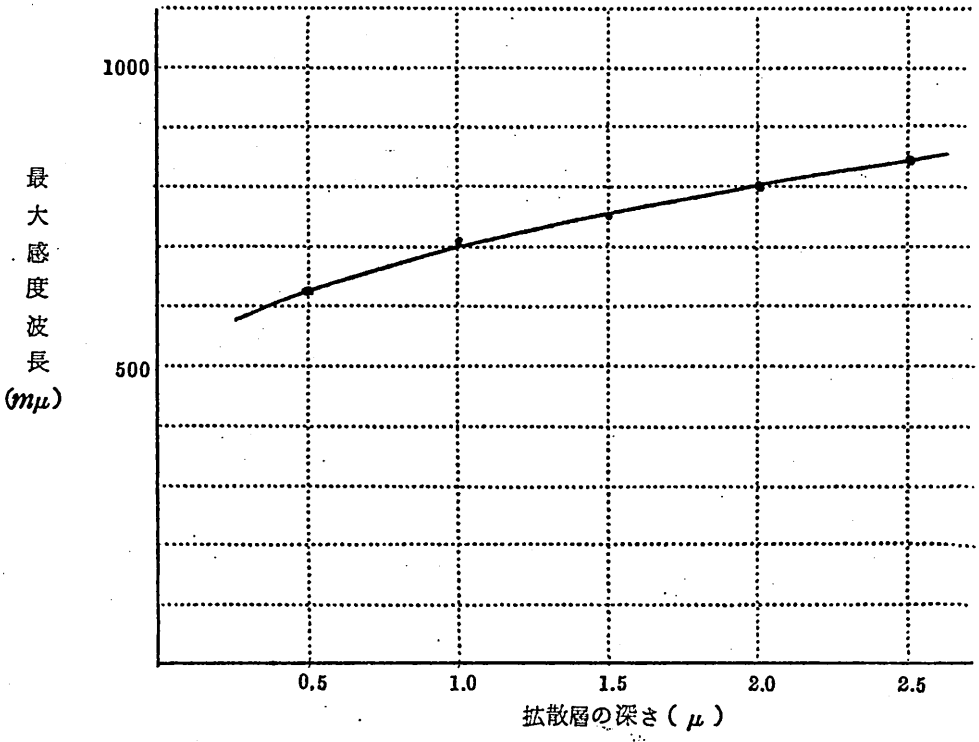
4. ホトセルとしての応用とブルーセル

従来のシリコンホトセルは近赤外部に最大感度をもっており、可視光線における感度は極めて弱いものであったが、工学的応用についてもこの点の改良が望まれている。照度計、露出計、各種の自働読取等への応用はその例であり、視感度曲線に似た分光感度特性を得ることができれば従来、光電管、Cds光導電セル、Se光電池などにより行なわれていた部分は応答速度の速いシリコンブルーセルを利用することができる。

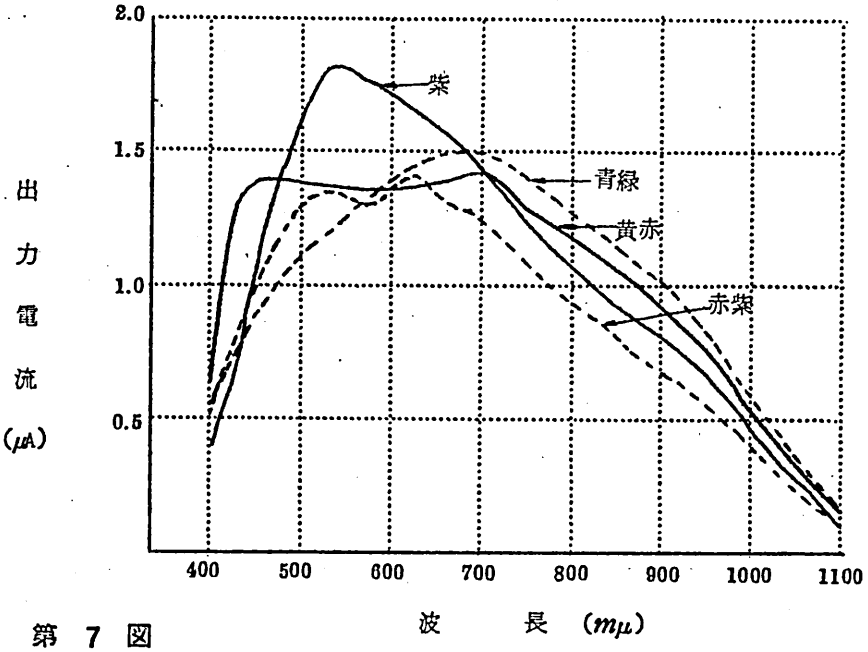
5. ブルーセルの試作及びその特性

(i) N on P型構造とし

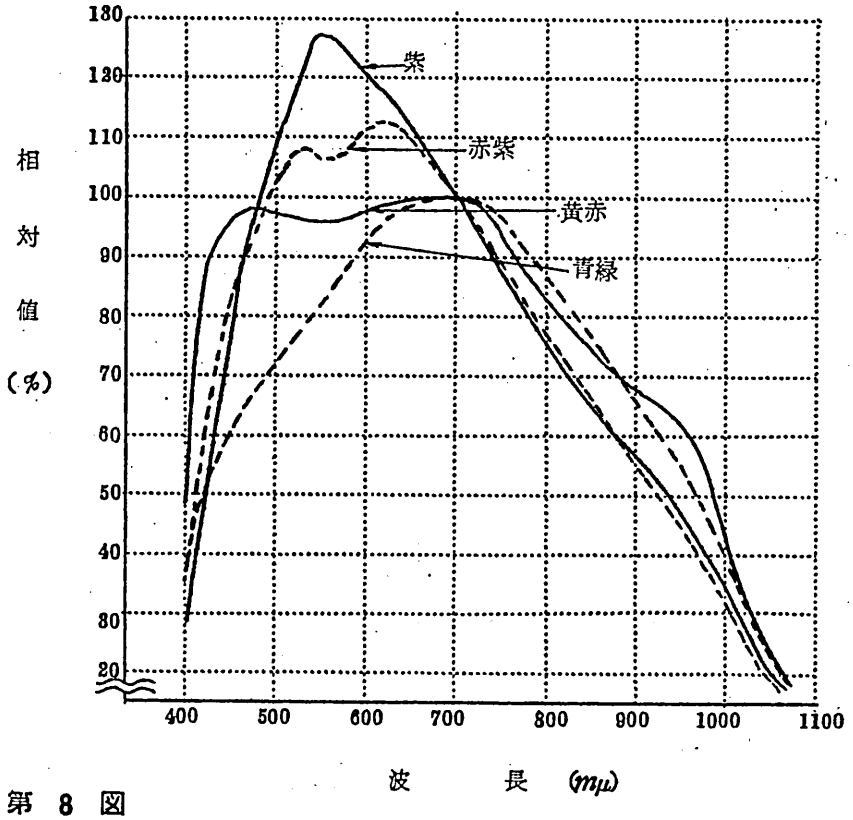
(ii) 視感度領域で最大波長感度を有するものを目的とした。



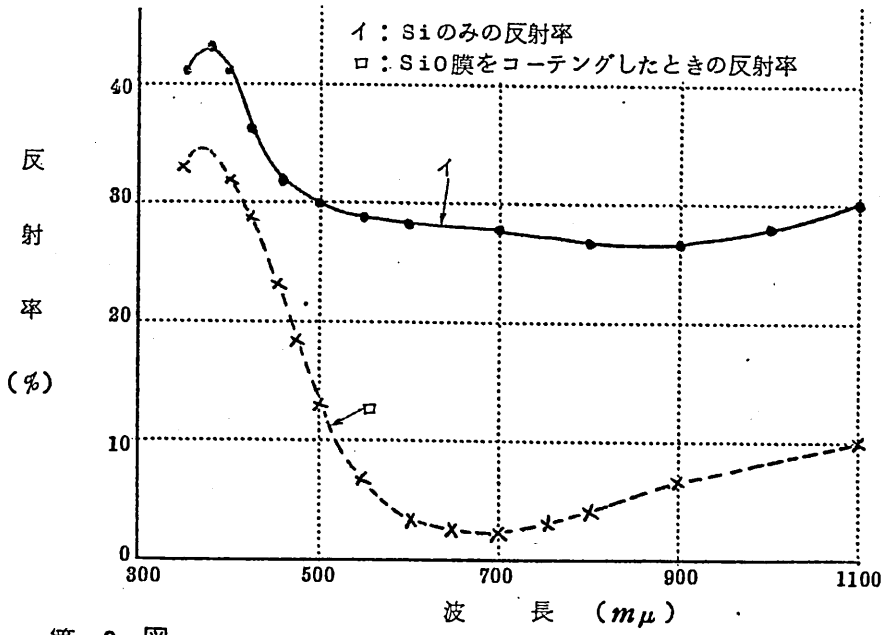
第 6 図　　拡散層の深さと最大感度波長の関係


2.0
1.5
1.0
0.5
出力電流 (μA)
紫
青緑
黄赤
赤紫
400
500
600
700
800
900
1000
1100
波長 (mμ)

第 7 図


180
130
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
相対値 (%)
紫
赤紫
黄赤
青緑
400
500
600
700
800
900
1000
1100
波長 (mμ)

第 8 図



第 9 図　反射防止膜の効果

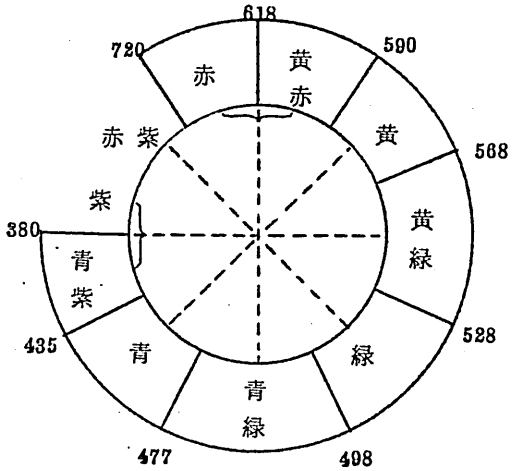
反射防止条件（単層膜）

$$nd = m\frac{\lambda}{4} \quad m = 1, 3, 5, \cdots\cdots \quad \cdots\cdots(4)$$

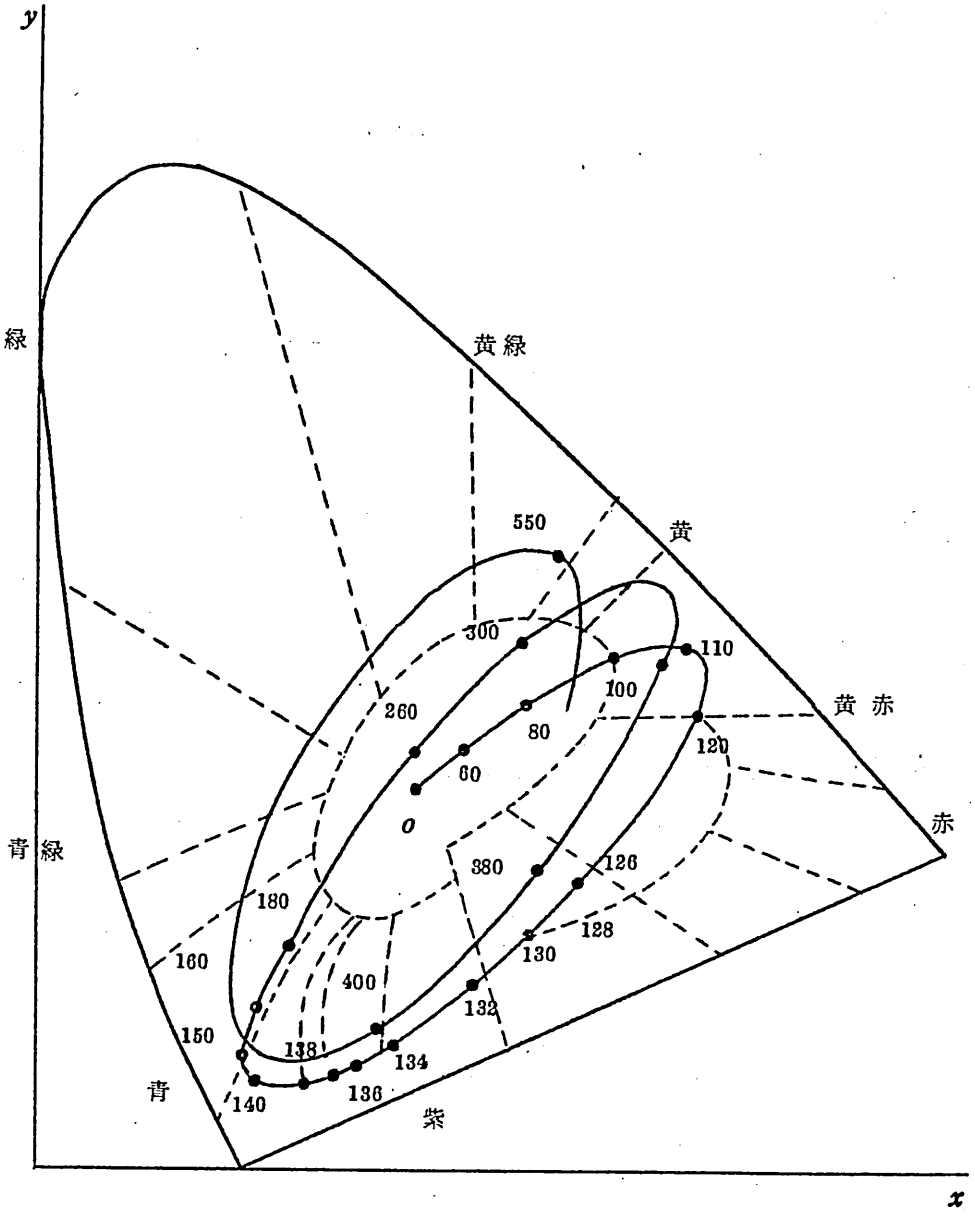
$$n = \sqrt{n_{Si}} \quad \cdots\cdots(5)$$

n ：薄膜の屈折率

d ：膜　厚



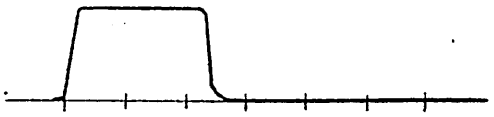
第 10 図　色相環及びスペクトル光の波長（mμ）


y
緑
黄緑
黄
黄赤
赤
青緑
青
紫
x
550
300
260
110
100
80
60
120
O
380
126
180
128
160
130
400
132
150
138
134
136
140

第 11 図　　ＣＩＥ色度図

6. シリコン太陽電池の応答特性

第 12 図　シリコン太陽電池のパルス応答特性の一例

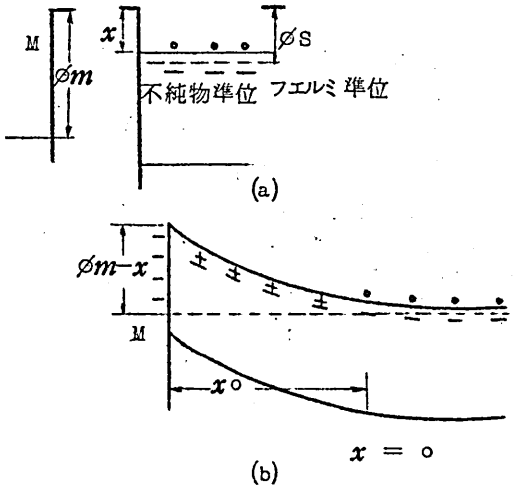


入力パルス　5 μ sec/cm

太陽電池出力　5 μ sec/cm

入　力　：　パルス巾：10 μ sec
　　くり返し：20 cps
出　力　：　SPD−102
　　出力負荷抵抗　　R＝100 Ω
　　逆バイアス　　V_B＝0

7. 其他のシリコン ホトセルの応用



第 13 図　金属と半導体の接触による障壁の生成

参 考 文 献

(1) "Solar Cells A Status Report" pp. 26～29
International Electronics Sep. 1964
By P. Rappaport

(2) "Solar Cells for Communication Satellites in the Van Allen Belt" pp. 161～169 Journal Brit. I. R. E.
Aug. 1961 By F. M. SMITS, K. D. SMITH, W. L. BROWN

(3) "シリコン太陽電池の反射防止膜" 学振第131研究会資料 №12
36. 11. 15 井上弘

(4) "半導体放射線検出器" 一宮虎雄

(5) "光学" 共立全集 56 石黒浩三

(6) "新しい半導体素子" 半導体工学 №5 酒井善雄

放射科学研究会 資料

自動霧探知装置について

早川電機工業株式会社 中央研究所

井内 優

各方面の交通の障害となつているものの一つに霧の発生による視界の減退が挙げられるが、特に最近では市街地などでは空気の汚染によるスモッグが問題となつている。此れは陸上の交通のみならず、海上の交通に於ても相当大きな問題であり、各地の基地の発生状況を検知し交通担当者に速報し、事故の発生を未然に防ぐことが才一の問題であると考えられる。現在海上交通に於ては陸上に監視員を置き霧の発生に伴い視界があるレベル以下に落ちたとき霧警報として音声を吹鳴することによつて行つている。この視界の決定は陸上の監視員がある目標物を定めておき、その目標物が見えるか見えないかによつてなされているが、これは一日のうちでも昼夜によつてその決定方法を変えないといけないし、個人誤差も相当大きいことも考えられ、充分な信頼性を期待出来るとはいえない。

そこで霧の状況を物理的に判断して、その結果から自動的に霧警報を吹鳴する装置を試作することの必要性が痛感される。

この装置の実用化により将来はその検出データをテレメタリングし各地の検出器からの霧の状況を中央でキヤツチした交通担当者に情報を提供できる可能性を秘めている。またすでに行つている霧警報の操作は全部自動化され各地の保守員2～3名を必要とはせず、人件費の節減にもなり、合理化のための一助となることも期待出来る。

霧検出の方法

光は霧の中を通過するとき、その霧を形成している水の粒子によつて散乱することは、通常我々が経験することであるが、この物理現象を用いて霧の濃さの検出を実現させようとするものである。

霧のない澄みきつた空気中では、この散乱は殆んどなく、その濃度が増すにつれて散乱光が増加し、光源附近に設置された受光面の照度が増加する。非常に霧の密度が高くなると重畳した散乱光によつてその状況は複雑になるが実際には受光面での照度は我々が経験する視界の最少の状態までは連続的に増加し霧の濃さと受光面の照度

との関係は一価関数になることが英国の実験で知られている。
そこで意識的に発光させた光をその発光源の附近で発光体からの直接光がへらないように霧による散乱光のみを受光器によつて受ければ受光器の受光量の大小によつて霧の濃度、即ち視界を定量的に見出すことが出来る。この場合昼間は太陽光線による光と区別する必要があるため光源を何らかの形で変調する必要がある。そこで本装置では保守費の経済性を考慮して瞬間発行を行い、そのパルス状の発光による散乱光を受光すれば定常的な太陽光線と区別しパルス信号のみを取出し読取ることができるようになる。また瞬間発光の発光体としてクセノンランプを使用している。
なお、発光の時間間隔は霧の変化状況を考慮して２０秒～３０秒にするのが妥当のように思われる。その間の船や鳥などの移動体からの反射による変化は発光期間のみ受光素子に続く増幅器に信号を通過させるゲートを設計指示されないようにすることは簡単である。
受光素子の分光感度特性と発光体の分光光度特性とをできるだけ一致させることが受光素子として最近開発されたミリコン光検出素子を用いるとクセノンランプに対して有効である。
できるだけビーム状になるようにクセノンランプをパラボラの反射鏡の前面に取付け、光のパルスをビーム状に発射させる。霧が存在するときはその濃度に応じて散乱した光が発光体のすぐ近くにある受光部に戻つてくるが受光部では発光体から直接光が入射しないようにフードを取付け望遠レンズによつて集光し、その焦点上にある絞りを通過してシリコン光検出素子に到る。この素子は受光面の照度に応じた起電力を発生するから適当な増巾度を有する交流増巾器によつてこの変換された電気信号は増巾されるが、この信号はパルス状のものであるからパルスの波高値又はその相対値を適当な回路によつて表示するようになつている。　値を報信号を出すのに必要な視界のレベルに対応する電圧になるように設定すれば、自動報信

号発生装置を得ることができるし、視界を定量的に表わすためにメータの指示を利用してもよい。

Sharp

仕　様　書

◦受投光部

光　源	ウシオ電機製　クセノンランプ　UF－670	
	入　力	60 WS
	寿　命	200万回
反射鏡	集点距離	140㎜
	直　径	540㎜
等価光度	10^8 燭光	
発散角	1°	
受光素子	シャープシリコンフオトダイオード SPD－111	
受光フード	内　径	72㎜
	長　さ	670㎜
絞　り	直　径	8㎜
レンズ	集点距離	150㎜
	直　径	60㎜
視　角	1°	

◦制　御　部

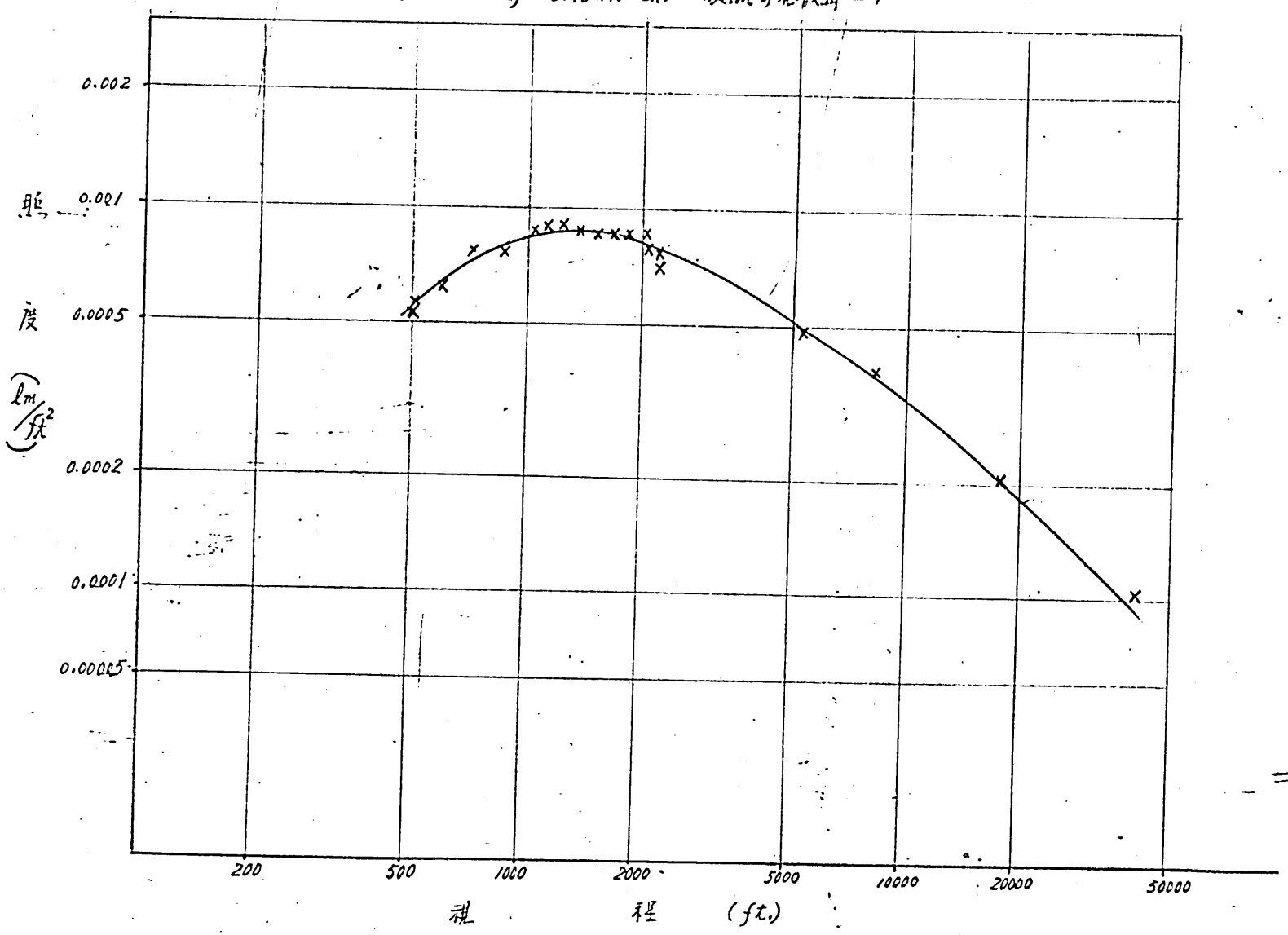
大きさ	720×（横）×1180（高さ）×415（奥行）㎜
入　力	170 VA
電　源	AC100V±10V
表　示	視程の相対値を直流電流計にて指示 記録計による記録可能
発光指令間隔	30　秒
発光時間	約1msec
メーター表示時間	7　秒
利得較正	発光8回に1回の割で較正、減衰器を系全体の利得に応じて自動的に上下させる。
警報回路	レベル設定　任意 設定されたレベル以上の入力信号が5回連続にあつたとき警報リレーを動作させる。
ランプ交換	万一ランプが発光しない時は自動的に他のランプと交換

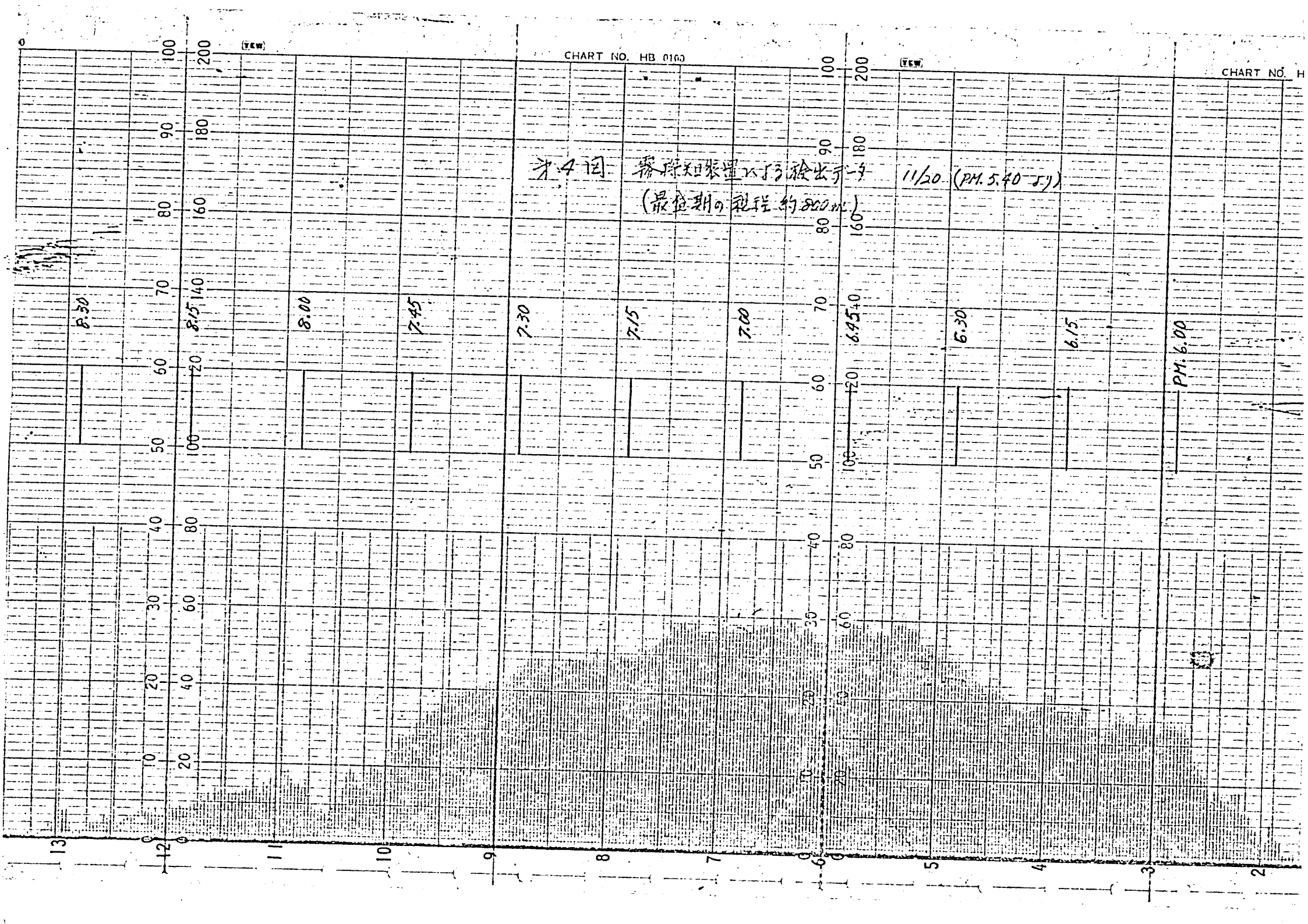
以　上

早川電機工業株式会社

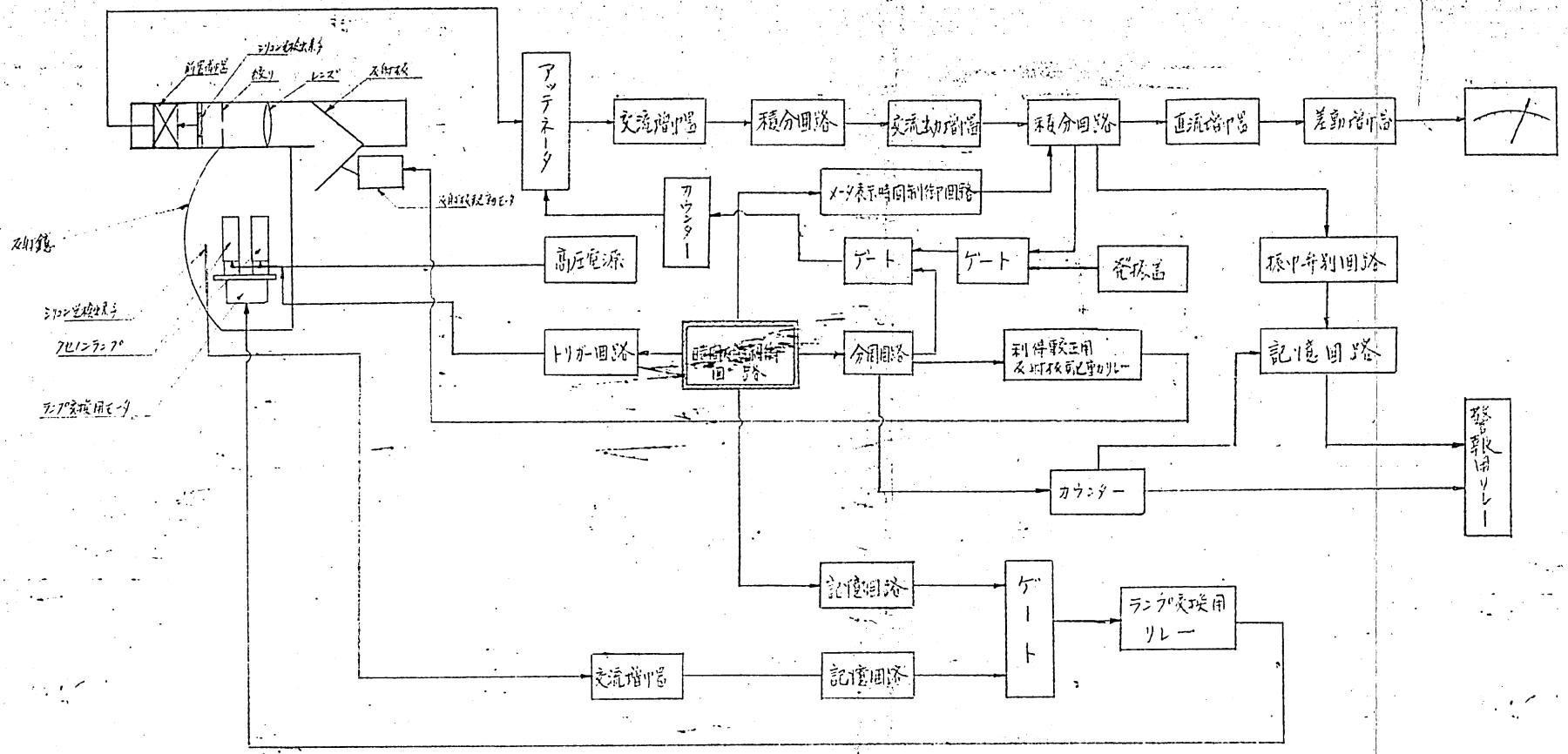
第3図　霧による散乱光のための照度と視程との関係
（Trinity House 研究所の実験データ）

Beam Intensity = 3.15×10^7 Cd.　Beamの発散角 = 1°





第4図 霧探知装置による検出データ 11/20 (PM. 5.40 より)
(最盛期の視程約800m)



オ 1 図

符号	名称	規格番号	材質	仕上	員数	備考

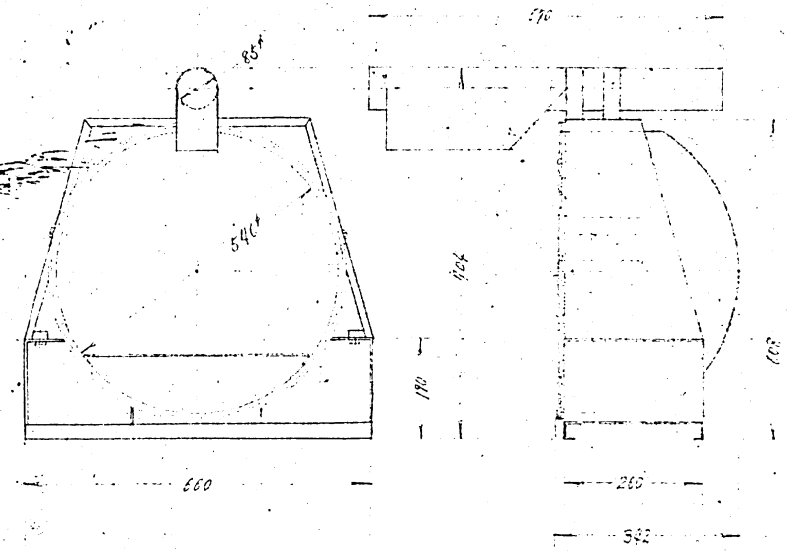
適用機種	名称	尺度	3角図法	年・月・日	適要
	自動霧探知装置 ブロックダイヤグラム				

製図	写図	主任	課長	部長	早川電機工業株式会社	記事
					関連事業部 技術部	昭和39年12月1日 図番

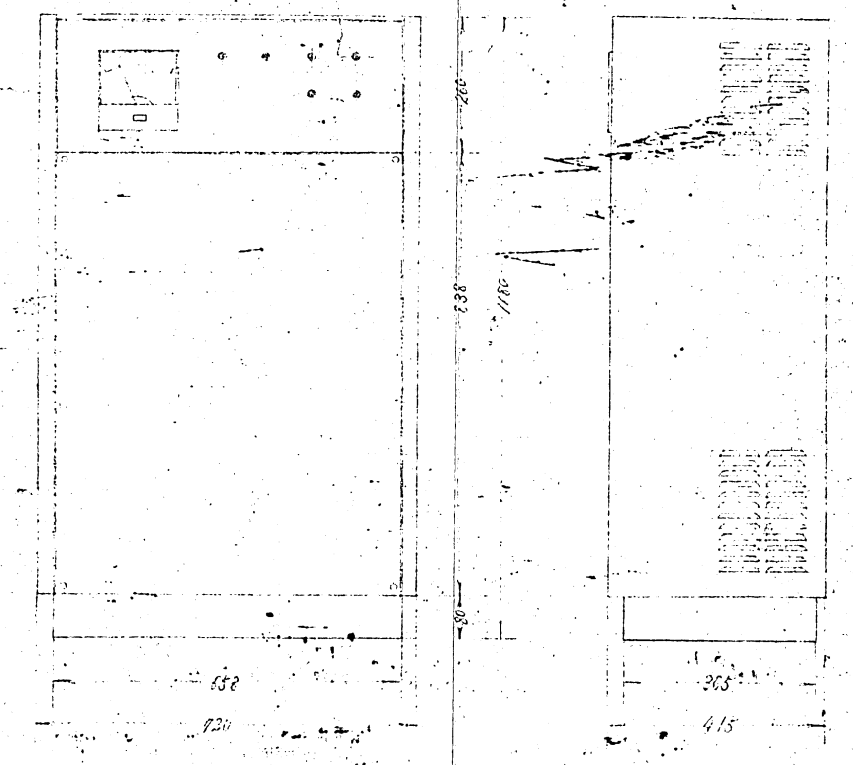
A3 420×297mm

Sharp

受投光部



制御部



第2図

符号	名称	規格番号	材質	仕上	員数	備考

適用機種		名称	
		自動霧探知装置 外海図 AFD-1	

製図	写図	主任	課長	部長	早川電機工業株式会社
					図連事業部 技術部

尺度	1/10	3角図法	年・月・日	適要
記事				
昭和 31 年 11 月 16 日		図番		

A3 420X297mm

“電界内の電子ビームに及ぼす磁界の影響”

輻射科学研究会　資料

三菱電機中央研究所

岡田武夫　橋本　勉　岩越和大

§1 緒言

大阪大学と共同で開発研究しているU.H.F－大電力進行波管においては、電子ビームの集束方法として、陰極磁界界浸型を採っている。従って、電子銃の加速領域における磁力線が磁界のない場合の電気力線に沿うように調整する必要がある。一般には適当な形に整型した鉄等の磁性材料を用いて、この調整を行っているが、我々の場合は、主磁界コイルの外に逆磁界コイルを用いてこの調整を行なっている。

先に、この逆磁界コイルの励磁電流を変えると、進行波管の動作特性が大巾に変化することを報告した[1]。この原因については色々と考えられるが、未だ決定的な解釈を行ないうるに至っていない。こゝでは、この点についての直接的原因として考えられるビームの形状を調べる目的で作成した"ビームテスト管"を用いて行った実験結果を報告する。

§2 実験装置

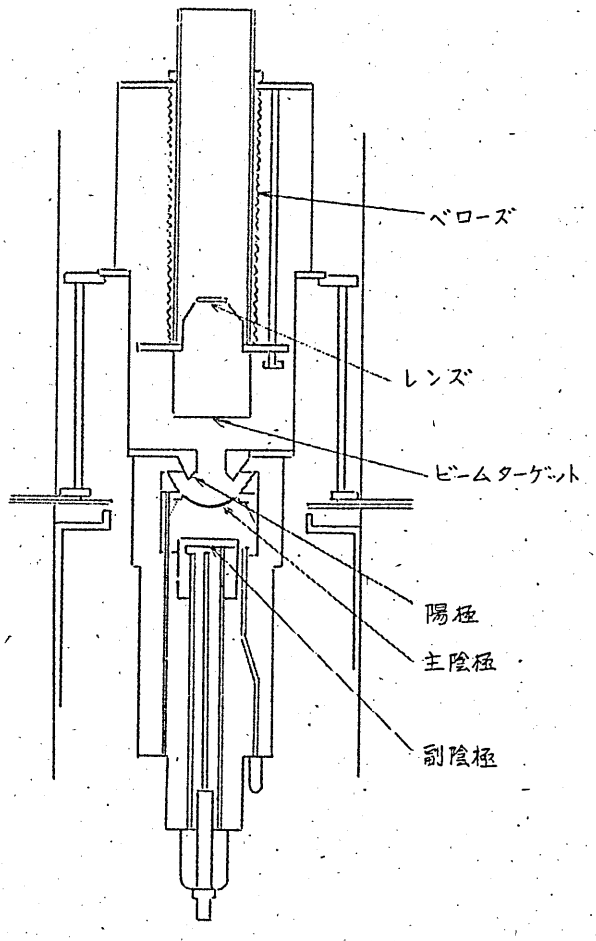
1. ビームテスト管

ビームテスト管としては、ファラデーケージ等色々考えられるが、我々の場合次のような条件で考えた。

(イ) 出来るだけ実際の進行波管の動作状態と同じ状態において、ビームの形状が測定出来る。

(ロ) ビームの全体の形状が直接的に知ることが出来る。

以上のような考えから、薄い金属板に直接電子ビームを当てゝ、その温度分布よりビーム形状を知ることにした。作成したビームテスト管の概要を第1図に示す。電子銃部は、進行波管に使用するものと、全く同じで、陰極は、電子衝撃型陰極でタンタル板を用いている。この陰極の利点は放出電流の値が真空度の影響をほとんど受けないことである。



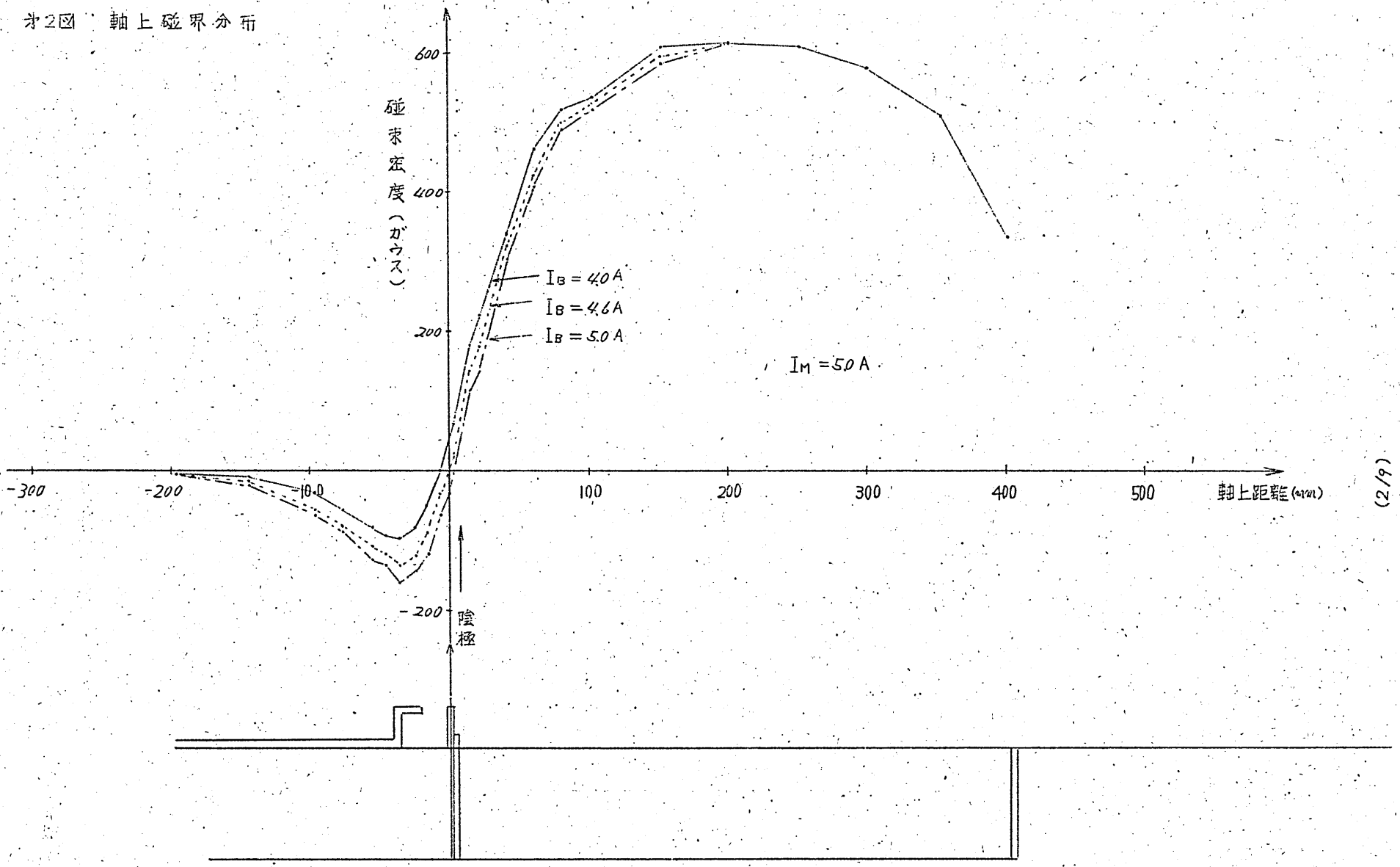
第1図 ビームテスト管

ビームターゲットとしては、0.25mm～0.5mm の厚さのタンタル板を用いこのターゲットの陽極面に対する位置は、ベローズによって、30mm～40mm 程度変えることが出来る。測定はターゲットの裏面から衝撃ビームによるターゲットの温度上昇を写真測定して行った。

2. 磁界分布

磁界は、ポールピース（厚さ5mmの軟鉄の板）をはさんで主磁界と逆磁界とから成る。主磁界の主コイル励磁電流、I_M と 逆磁界の逆コイル励磁電流、I_B、とは方向が逆で、互いに打ち消し合うようになっている。第2図に $I_M = 5.0A$ の場合の軸上の磁界分布を I_B をパラメーターとして示す。

第2図　軸上磁界分布


600
400
200
-200
磁束密度（ガウス）
$I_B = 4.0\,A$
$I_B = 4.6\,A$
$I_B = 5.0\,A$
$I_M = 5.0\,A$
-300
-200
-100
100
200
300
400
500
軸上距離(mm)
陰極

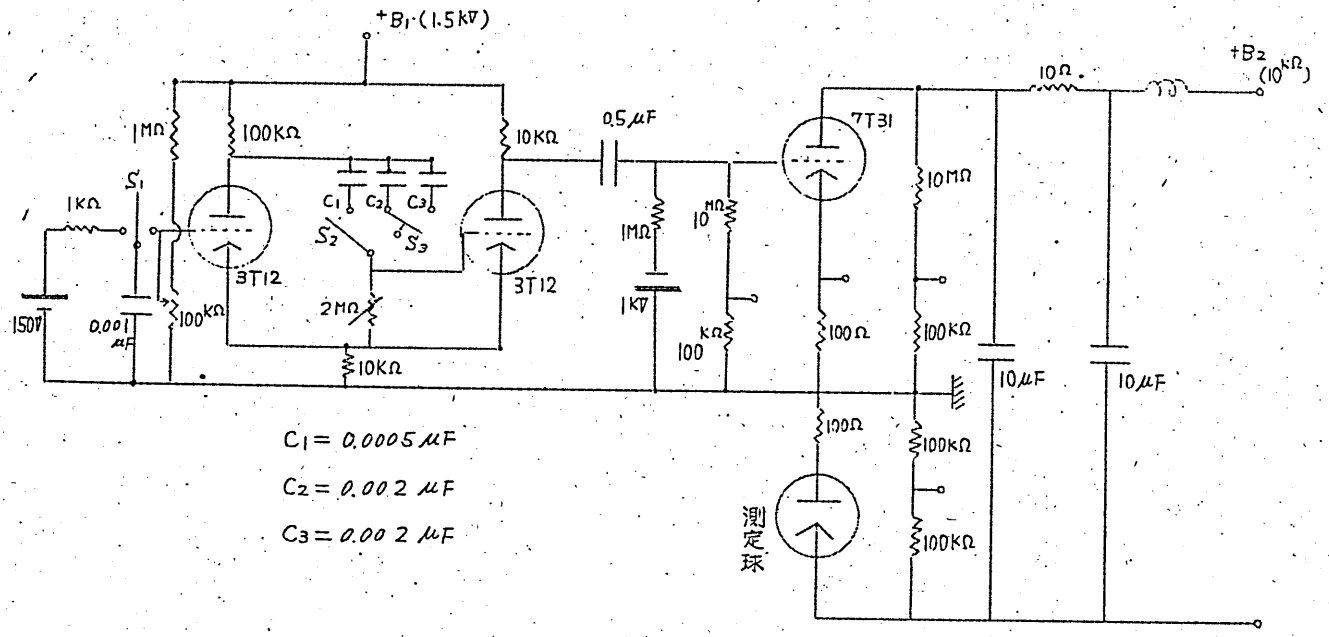
図より解るように、I_M を一定にして I_B を増していくと軸上の磁界分布の変曲は、陽極側へ移り、磁界分布の立上りは次第に急になる。

この磁界分布とビームテスト管との相対的位置は、実際の進行波管の場合と同様にポールピースの中心が主陰極中心前面より、4mm だけ副陰極側へずれている。

3. 測定電源

後述のように測定はターゲットの熱容量と熱伝導とを考慮して測定条件に応じた短形波パルスを陽極及びターゲットに加えて行なうのであるから、その条件に合うパルサーが必要である。

加速電圧が、3KV程度まではパルス巾は 100m sec ~ 500m sec であるから直流電圧の印加時間を市販のタイマーによって調整することが可能であるが、6~7KV程度になると1A以上の電流容量をもった数msecの可変のパルス巾をもったパルサーが必要となる。我々はパルサーとして第3図に示すような回路のものを用いた。

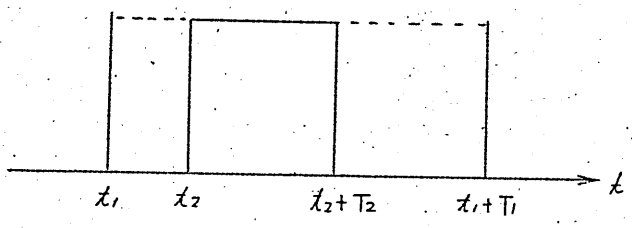


第3図 パルス回路

即ち、数msecまで可変のパルス巾は、一安定マルチバイブレーターを用いて作り、これで三極送信管を動作させる。トリガーは手動によって行う。この回路により7KV程度で30msec程度までのパルスを得ることが出来た。

4. 測定精度

測定は、第4図に示すように t_1 なる時間にシャッターを開き、それから数msecおく



第4図

れて t_2 なる時間にパルスが発生し、T_2 だけ続く。シャッターの閉じるのは更におくれて T_1+t_1 なる時間である。$T_1 \gg T_2$ ($T_1=0.5$ sec　$T_2=$数msec) なる関係を常に満足している。この場合、測定精度として問題となるのは周辺のぼけである。即ち、あまり温度が高くなると熱伝導によって周辺の温度が上昇することによる誤差である。従って温度を色々と変えて、写真測定し、大体 1000°C 程度で測定出来ることを確認し、大体この温度において測定した。

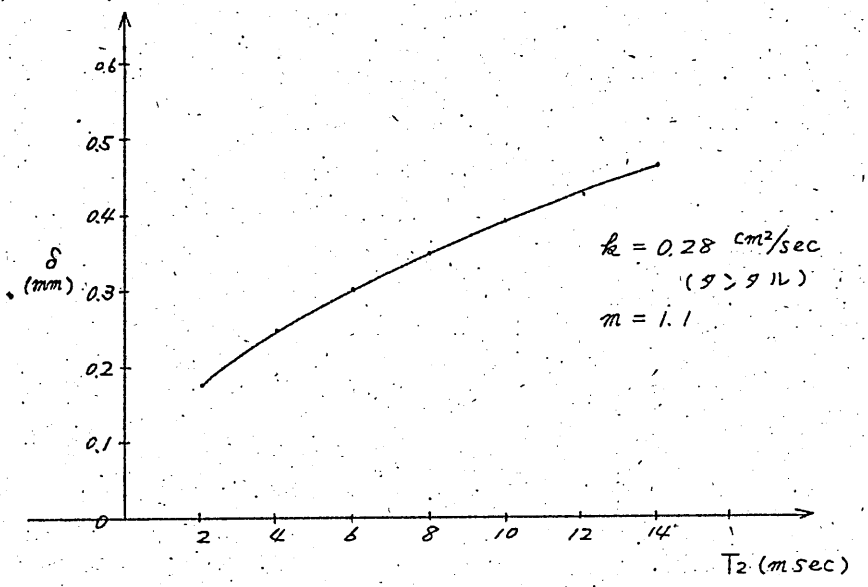
この場合の誤差について検討する。

衝撃した電子は衝撃部分のみの温度を均一に上昇させると仮定すると、熱伝導による周辺のぼけ δ は、次式で与えられる。

$$\delta = \sqrt{4kn T_2 \ln m} \qquad (1)$$

但し　$k = \frac{K}{C\rho}$ (K: 熱伝導度　C: 比熱　ρ: 密度), $n = \frac{m-1}{m}$

上式は、衝撃部の温度を T_0 としたとき、T_0/m までフイルムが感光するとして概算した値である。第5図に $m=1.5$ の場合に、T_2 に対する δ を示している。kとしては、



第5図

タンタルの値がとってある。

測定範囲内においては、誤差は直至で1mm以内であると考えることが出来る。

§3. 測定結果及び考察

測定は排気しながら行ない、ポンプ側にて $3\sim4\times10^{-6}$ Torr の真空度にて行った。使用した電子銃の設計値を第1表に示す。

第1表

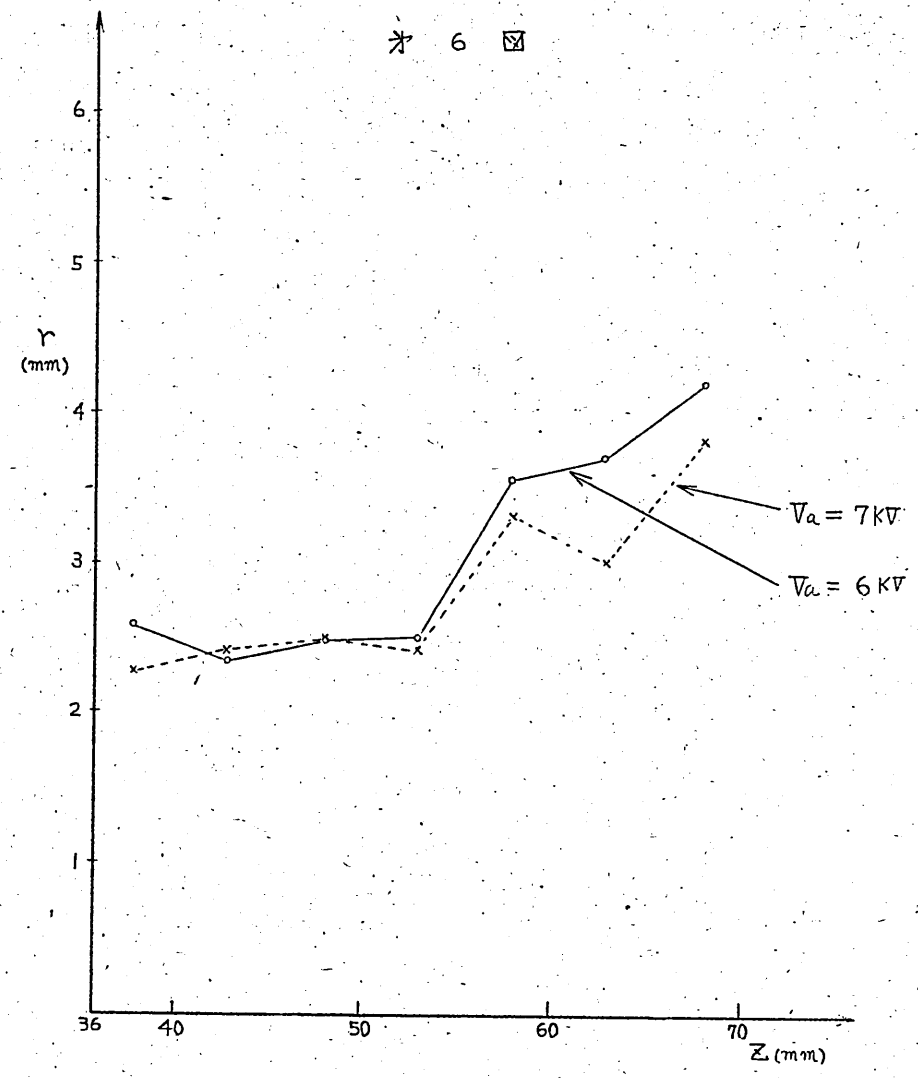
パービアンス	2×10^{-6} A/V$^{\frac{3}{2}}$
$\bar{r}_c$	40 mm
$\bar{r}_a$	20.3 mm
$\bar{r}_c/\bar{r}_a$	1.97
r_c	17.4 mm
r_a	8.8 mm
θ	25°45′
r_m	5.2 mm
Z_m	36 mm

測定した電子銃のパービアンスは 1.7×10^{-6} A/V$^{\frac{3}{2}}$ で設計値よりやゝ小さい。

1. 磁界のない場合

第6図に、磁界のない場合のビーム半径を陽極面からの距離 Z(mm) に対して示す。

オ 6 図



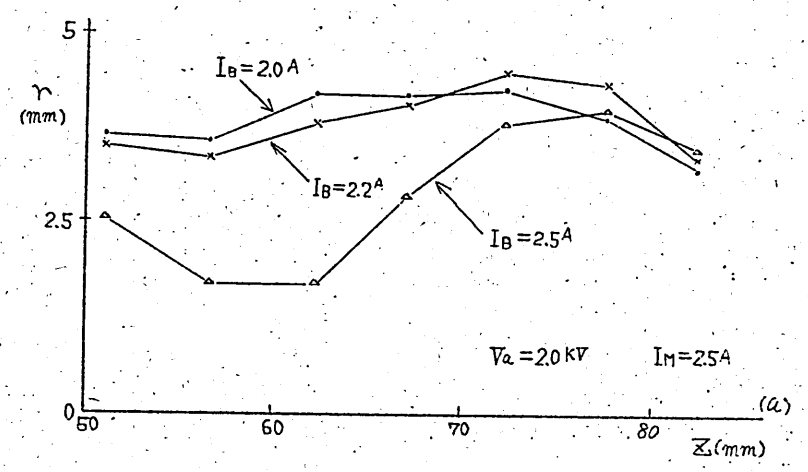
この場合のターゲットのタンタル板の厚さは 0.25 mm である。

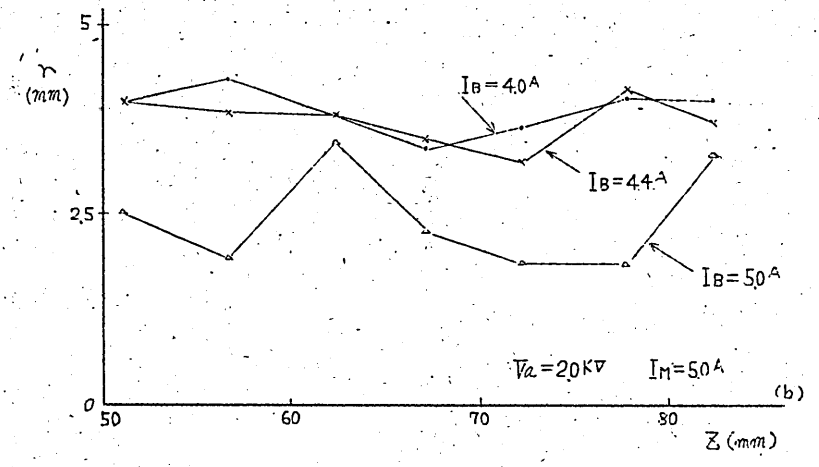
ビーム径が、設計値よりも小さい理由としては、工作上の問題の外に真空度の影響が考えられる。管内の真空度は、ポンプ側より1桁程度悪いと推定される。又ビームの電流密度に疎密があり、得られた形状は Z = 50mm のあたりでは円形であったが Z = 80mm あたりでは楕円形をなし、ビームの軸対称性はあまりよくないと考えられる。

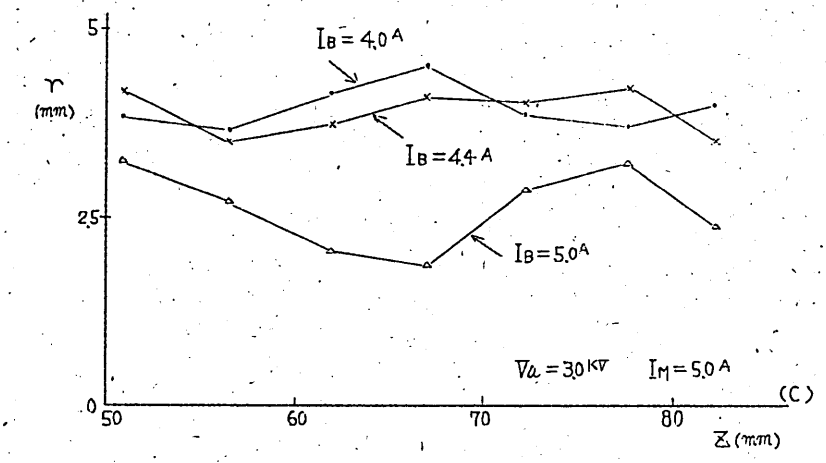
2. 磁界の存在する場合

(1) 加速電圧の低い場合

オ 7 図







第7図に、電圧が比較的低い場合のビーム半径と距離の関数として示す。(b). (C) は、$I_M = 5.0$A で、加速電圧が $V_a = 2.0$KV 及び $V_a = 3.0$KV の場合である。(a) は、$V_a = 8$KV 附近の様子を推論するために $V_a = 2.0$KV $I_M = 2.5$A としてスケールインクを行って測定したものである。

この場合の測定は、§2.3に述べたパルサーは使用せずビームの導通時間は、市販のタイマーで調整し、カメラのシャッター時間を色々と変えて、§2.4で与えた m の値を出来るだけ、1に近くとることによって誤差を小さくして行ったものである。

この場合のタンタル板の厚さは 0.5mm である。

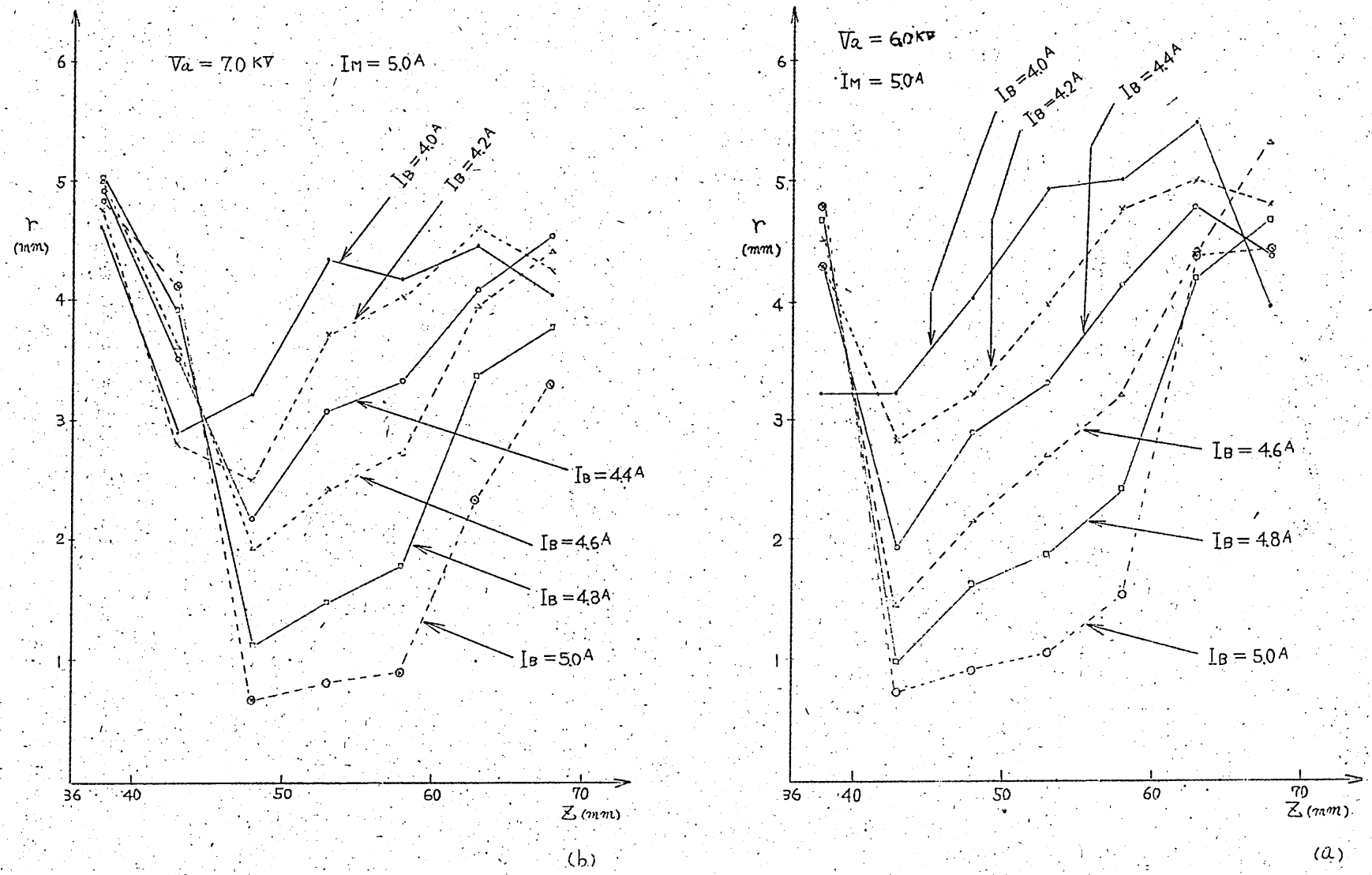
リップル波長は、$V_a = 2.0$KV の場合、$\lambda \cong 20$mm であるが、その他の実験の場合にも大体次の関係式を満足している。

$$\lambda \propto \frac{\sqrt{V_a}}{B} \qquad (2)$$

$V_a = 2.0$KV、$r_0 = 2.6$mm、とすると プラズマ周波数 ω_p は $\omega_p = 2.32 \times 10^9$、従って、$\omega_L/\omega_p \approx 1.9$ (ω_L：ラーマー角周波数) 磁界の陰極合浸率 $K \fallingdotseq 1.0$ と仮定すると $\frac{1}{2}\lambda \fallingdotseq 0.52\lambda_c$[2] ($\lambda_c$：サイクロトロン波長) この場合 $\lambda = 19.7$mm で大体実験値と一致している。

(ロ) 加速電圧が高い場合

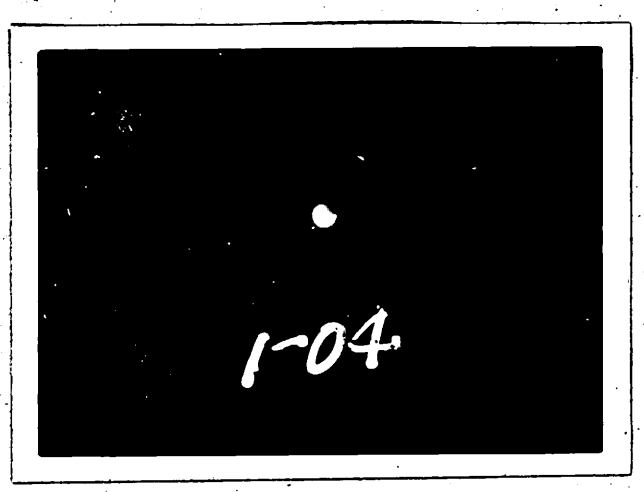
第8図に、$V_a = 6.0$KV 及び 7.0KV の場合のビーム半径が I_B をパラメーターとして、陽


Va = 7.0 KV
IM = 5.0A
IB = 4.0A
IB = 4.2A
IB = 4.4A
IB = 4.6A
IB = 4.8A
IB = 5.0A
r (mm)
Z (mm)
(b)
Va = 6.0KV
IM = 5.0A
IB = 4.0A
IB = 4.2A
IB = 4.4A
IB = 4.6A
IB = 4.8A
IB = 5.0A
r (mm)
Z (mm)
(a)

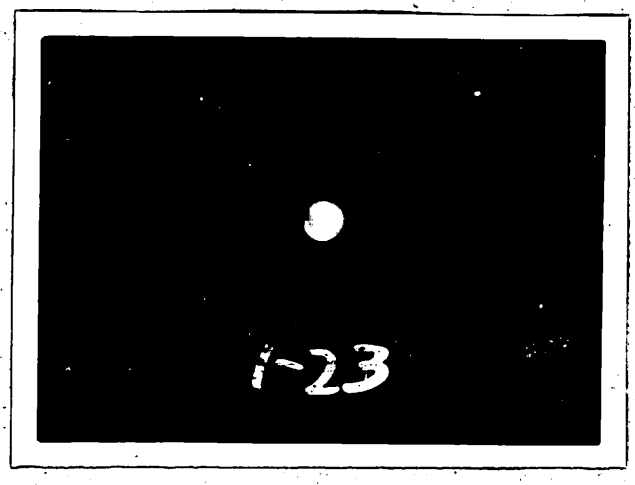
(b/a)

第 8 図

陰面よりの距離に対して示してある。又代表的測定写真例を第9図に示す。



(a) V_a = 6KV　　磁界なし



(a) V_a = 6KV　I_M=5.0A　I_B =4.2A

第 9 図

測定範囲内においては、I_B の増加は、電子ビームのリップルの増大をきたし、更に、電子ビームの平均半径の減少をきたすことがわかる。これは、磁界集束比が大きくなるとビームと磁界とが交叉し、サイクロトロン周波数での回転半径が大きくなるためと考えられる。

次に、リップル波長については、測定におけるターゲットの可動範囲が小さいため正確にはわからないが、大体、測定においては V_a = 6.0KV　$\lambda \cong 40mm$ である。

この場合 $\omega_p = 4\times10^9$ 従って、$\omega_L/\omega_p \approx 1.1$、$K = 1.0$ として $\frac{1}{2}\lambda = 0.55\lambda_c$ であるから $\lambda = 36.4\,mm$ で大体近い値を示していると考えられる。又測定の傾向としては、I_B の減少と共にリップル波長は減少している。これは $\omega_p^2 \propto V_a/r_0^2$ なる関係において平均半径が増大することによるプラズマ周波数の減少、従って ω_L/ω_p の増加更に磁界の陰極合浸率 K の増加等による効果と考えている。

§4. 結論及び謝辞

荒い金属板を直接電子ビームで衝撃し、その温度分布より電子ビームの形状を測定する方法について述べ、加速電圧 V_a = 7.0KV までの実験結果を示した。実験においてはビームターゲットの可動範囲が小さく、少々不満足な点もあるが、次のことが結論される。

(1) 磁界集束比 I_B/I_M が 0.8～1.0 の範囲においては集束比の増大は、ビームのリップルを増大し、平均半径を減少させる

(2) リップル波長は、大体次の関係に従う。

$$\lambda \propto \frac{\sqrt{V_a}}{B}$$

尚、この研究は、U.H.F 帯の 大電力進行波管の利得の変化、及び発振の原因を究明するために行ったものである。

最後に、この研究を行うに当って、ご指導いただいた大阪大学、寺田教授、裏助教授、及び浜田講師に感謝の意を表します。

(1) 岡田. 橋本. 岩越 "電子銃加速領域の磁界分布の影響" 昭和40. 電通全会

(2) J. L. Palmer "Laminar Flow in magnetically focused cylindrical Electron beam"
I.R.E Trans 1959 Jnly

輻射科学研究会資料

斜入射による自然複屈折バイアスを利用した単軸結晶形光変調器

牧　本　利　夫
末　田　　正
滝　北　清　道
（大阪大学基礎工学部）

昭和40年3月27日

斜入射による自然複屈折バイアスを利用した単軸結晶形光変調器

§1 はしがき

レーザ技術の発展に伴ない、その通信への応用等に関連して、光を電気信号で変調することが問題となった。光変調器としては、音響光学効果、電気光学効果、磁気光学効果等を利用するものがある。このうち、マイクロ波程度までの変調に対しては、電気光学効果、特に結晶のポッケル効果が注目されている。本文では、KDP, ADPのような単軸結晶形光変調器を取扱い、斜入射による新しいバイアス方式を提案する。

ポッケル効果を利用した単軸結晶形光変調器は、通常、光軸方向に変調電界を加えた結晶を直交ニコルの間においたもので構成され、光を光軸に平行に入射させて用いる。このままでは、出力光の強度が、加えた電界の自乗に比例して変化するため、得られた波形は、印加電界の周波数の2倍波で変調され、変調効率が悪い。その対策として、通常マイカ等の4分の1波長板を用いたり、直流バイアスを加えたりする。しかし、マイカ等は、反射損失を伴なう上、光学的性質があまり良くないので、レーザ光の場合、コヒレンス度を低下させる恐れもある。そこで、最近では直流バイアス法が良く用いられる。しかし、そのためには、かなりの高圧（KDPの場合、約4.5KV）が必要なので、変調器の構造が問題となる。特にマイクロ波変調器の場合、空洞共振器等立体回路を用いると絶縁のために構造が複雑となる。

一方、KDPは、元来単軸結晶であるので、入射光が完全に光軸に平行な場合以外は、自然複屈折を伴なう。そこで、光軸に対して

光の進行方向を適当に傾ければ、変調器の動作に必要なバイアスの得られることが予想される。しかし、光の進行方向を傾けたことによって変調器としては本質的な誘導複屈折の値が小さくなってしまっては困らない。以下、本文では、斜入射に対する自然および誘導複屈折を計算し、変調器としての動作を検討する。又、計算をたしかめるため簡単な実験を行なった。

§2 単軸結晶形光変調器

まず、従来の単軸結晶形（KDP、ADP）光変調器の概要を述べる。(1)

図1に示すように、KDP（又はADP）を直交ニコルの間に入

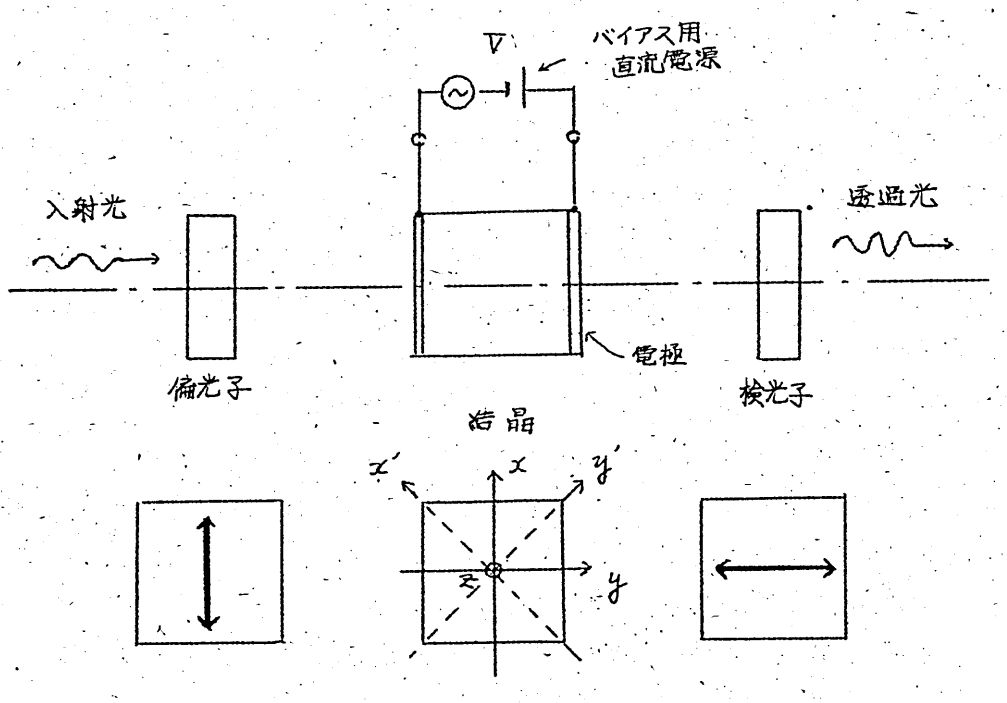


図1. 単軸結晶形光変調器

れ、光を結晶の光軸に平行に入射させる。z方向の両端につけた電極により、変調電界Eを加える。偏光子の偏光方向は、結晶のx軸（又はy軸）に平行にしておく。光源が直線偏光になっているときには、偏光方向をxあるいはy方向にしておくと偏光子は不要である。

KDPは単軸結晶なので、電界を加えないときには、光がz方向へ進む場合、どのような偏光に対しても、屈折率（したがって、位相速度）は一定である。したがって、入射光の偏光方向は結晶を通過した後も不変である。検光子は、偏光子と直角におかれているから、この場合、透過光はゼロとなる。

電界Eを加えると、KDPはz軸性となり、x, y軸をz軸のまわりに−45°回転した（x′, y′, z）軸が新しい電気主軸になり、主屈折率 $n_{x'}$, $n_{y'}$, n_z は、

$$\left.\begin{aligned} n_{x'} &= n_o + \frac{1}{2} n_o^3 \gamma_{63} E \\ n_{y'} &= n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \gamma_{63} E \\ n_z &= n_e \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

となる。n_o, n_e は、常光線および異常光線の屈折率、γ_{63} は、電気光学定数である。$n_{x'}$ と $n_{y'}$ との差 Δn は、

$$\Delta n = n_o^3 \gamma_{63} E = \frac{n_o^3 \gamma_{63} V}{L} \qquad (2)$$

となり、いわゆる誘導複屈折のみを生ずる。ここで、Lは結晶のz方向の長さ、$V = EL$ は印加電圧である。

入射光は、x′, y′ 両偏光を持つようにしてあるので、電界をかけた場合、結晶を通過した光は、一般に楕円偏光になる。したがって、直交ニコルに対しても透過光を生ずる。x′, y′ 両偏光に対する位相差 $\Delta\phi$ は、

$$\Delta\phi = \frac{2\pi n_0^3 \gamma_{63} V}{\lambda_0} \qquad (3)$$

で与えられる。λ_0は、真空中の波長である。透過光の強度Iは、

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2} = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{V}{V_0}\right) \qquad (4)$$

で表わされる。I_0は結晶に入射した光の強度である。V_0は、$\Delta\phi = \pi$、すなわち、偏光面を90°回転させるに要する電圧(あるいは100%変調に必要な電圧)である。

図2は、これらの関係を表わすもので、横軸に位相差$\Delta\phi$、又は印加電圧Vをとり、縦軸に透過光の強度Iをとっている。

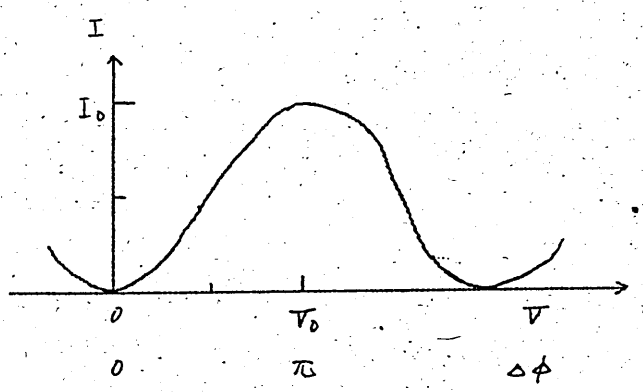
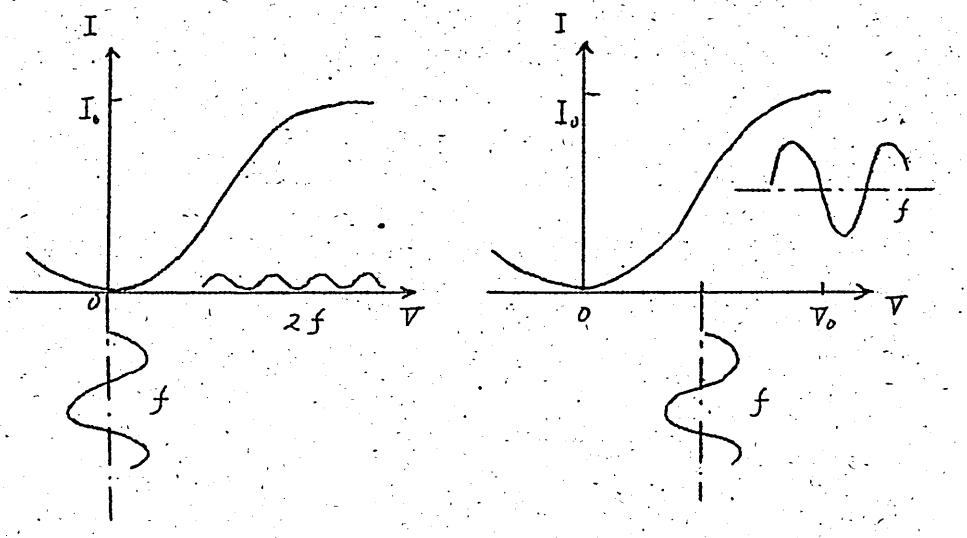


図2. 透過光の強度Iと印加電圧V(あるいは、位相差$\Delta\phi$)との関係。

図3aは、Vとして、周波数fの交流電圧を加えたときの透過光強度を示す。周波数が2倍になっている上、能率の悪いことが分る。図3bは、直流バイアス$V_0/2$を加えて、動作点を直線部へ移動させたときの模様を示す。透過光は、変調周波数と同じ周波数で変調され、能率もよい。直流バイアスを加える代りに、4分の1波長板を用いて、固定位相差$\pi/2$を加えてもよい。



(a) バイアス無し、　　(b) $V_0/2$ のバイアスを加えたとき

図3. 変調された透過光とバイアスとの関係

§3. 斜入射を行なったときの自然および誘導複屈折

前節では、入射光が光軸に平行であるとしたが、これを人為的にわずかに傾けた場合について考察する。結晶は、光軸（z軸）に垂直な面で切られており、電界はz軸方向にかけるものとする。

図4は、結晶軸と入射方向との関係を示す。入射光線とz軸との

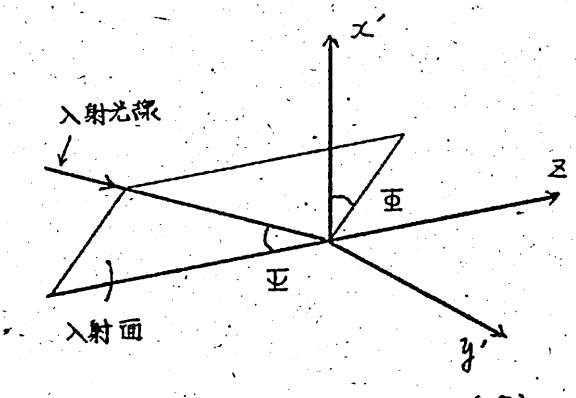


図4. 結晶軸と入射方向との関係

なす角を Ψ、入射面と x' 軸とのなす角を Φ とする。すなわち、（x', y', z）座標系における入射光線方向は、方向余弦で表わすと次のようになる。

$$(\sin\Psi\cos\Phi,\ \sin\Psi\sin\Phi,\ \cos\Psi) \qquad (5)$$

図5は、入射面内における入射、屈折、透過各光線（波面法線で表わす）の模様を示す。入射光は、結晶に入ると二つに分れ、図の

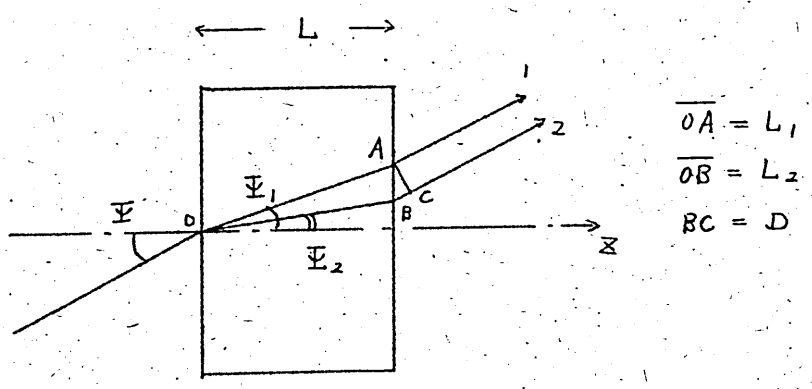


図5　波面法線で表わした入射光、屈折光、透過光の間の関係

ような経路をとり、平行光線となって結晶を出る。電界をかけた状態のKDPは2軸性であるから、上記2光線はいずれも異常光線の如く振舞う。2光線の位相差 $\Delta\phi$ は、

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left[n_1 L_1 - (n_2 L_2 + D)\right] \qquad (6)$$

として求められる。n_1, n_2, は光線1および2に対する屈折率である。

詳しい計算は付録を参照することにして、結果のみを記すことにする。入射角 Ψ が充分小さく、又

$$n_o^3 \Gamma_{63} E_z \ll \frac{n_o^2 - n_e^2}{2 n_o n_e^2} \sin^2 \varphi \qquad (7)$$

のとき、すなわち 自然複屈折バイアスに比べて誘導複屈折の小さいときには、

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L}{\lambda_0} \left\{ \frac{n_o^2 - n_e^2}{2 n_o n_e^2} \sin^2 \varphi + n_o^3 \Gamma_{63} E (1 - 2\cos^2 \varphi) \right\}$$

---------- (8)

となる.

式(8)を、前節の式(3)と比較すると斜入射の効果がよく分る。式(8)の第一項は電界に依存しないから自然複屈折を表わす。式(3)にはこれに相当するものがなく、予想通り、斜入射によって、バイアスに用いる自然複屈折が得られたことになる。

式(8)の第二項は、誘導複屈折を表わす項で、式(2)との相異は、$(1 - 2\cos^2 \varphi)$ の因子がかかっていることである。斜入射を行なう場合、$\varphi = 0°$ あるいは $90°$ すなわち、x'軸あるいは y'軸に沿って入射光線を傾ければこの因子は ± 1 となり、誘導複屈折は垂直入射の場合と変らないことが分る。

§4 斜入射形光変調器

図6は、斜入射形光変調器の構成図を示す。図1に示すものと異なる点は、光の入射方向を傾けている点だけである。ただし、図面の都合上、この図では、図1のものを光の入射方向のまわりに45°回転した所を示している。

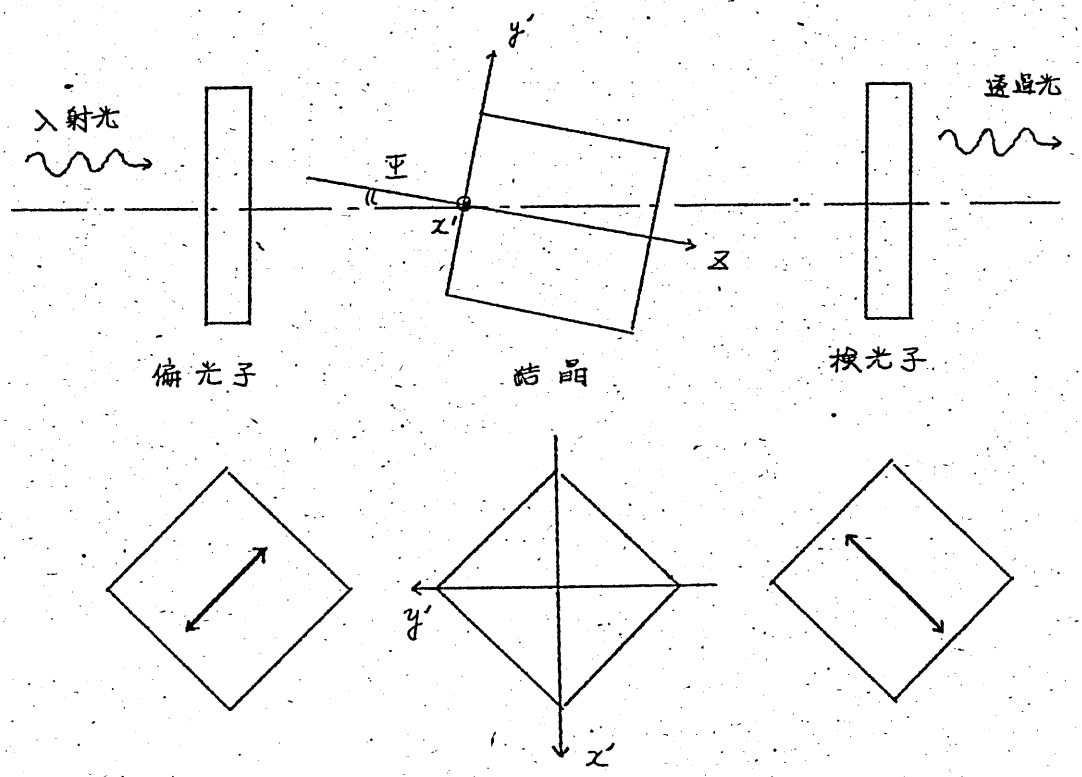


図6 斜入射形光変調器

傾ける角度は、式(8)のうち自然複屈折を表わす項が $\pi/2$ になる条件から、

$$\varphi = \pm \sin^{-1} \sqrt{\frac{\lambda_0 n_0 n_e^2}{2L(n_0^2 - n_e^2)}} \qquad (9)$$

となる．又、傾ける方向は、x'あるいはy'軸の方向（$\varphi=0°$あるいは$90°$）である．こうすれば、必要なバイアスが得られ、しかも変調効率は、直流バイアス法、4分の1波長板法と変らないことになる．

例として、KDPの場合、$n_o=1.51$, $n_e=1.47$, $l=9\,mm$, $\lambda_0=6328\,Å$ として計算すると、$\varphi=1°47'$ となる。

§5 実　験

以上のような考え方をたしかめるため、簡単な実験を行なった。試料としては、$10\times10\times9\,(mm)$のZ－カットKDP単結晶を用い、透明電極（ネサガラス）でZ方向に電界をかけた。光源としては、He－Neガスレーザ（6328Å）を用い、光電子増倍管（浜松テレビ R132）で検出した．図7は、実験装置の概略図である。

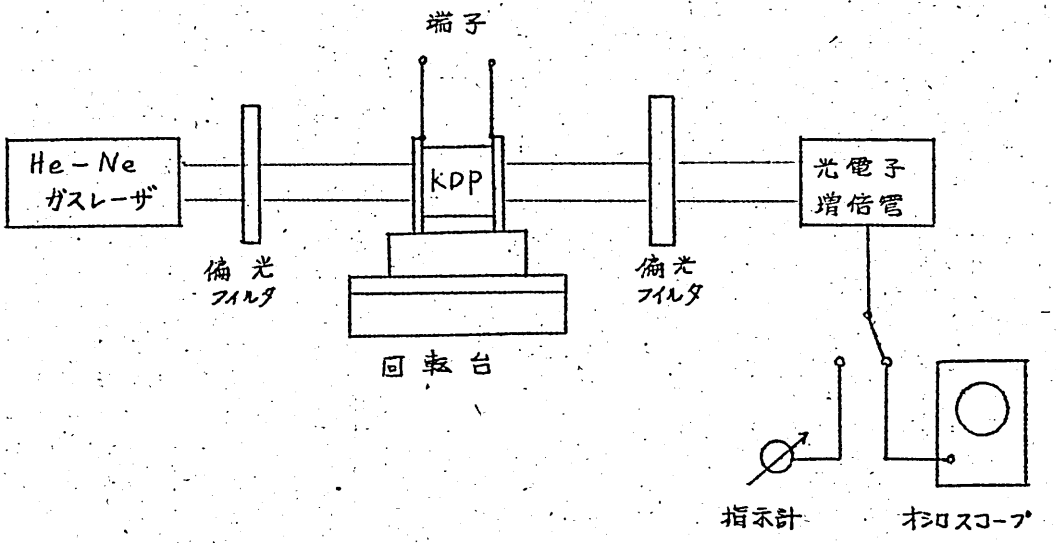


図7　実験装置の概略図

(1) 自然複屈折

電界をかけないで、KDPを光の入射方向から傾けて行くと、式(8)の第1項が、0、2π、4π、…… になる所で透過光はゼロになる等である。表1は、この場合の計算値と測定値とを示す一例である。両者はよく一致していることが分る。この値は Ψ には無関係の筈であるが、実際には、2′程度の差が見られた。

表1 斜入射による自然複屈折（$\Psi = 90°$）

$(\Delta\phi)_n$	0	2π	4π	6π	8π
Ψ（計算値）	0°	3°33′	5°3′	6°8′	7°6′
Ψ（測定値）	0°	3°29′	4°58′	6°5′	7°1′

(2) 誘導複屈折（直流電界）

図8は、$\Psi = 1°47'$、$\Psi = 90°$ のときの誘導複屈折による透過光の強度変化を示す。実線は計算値で、予期した誘導複屈折の得られていることが分る。

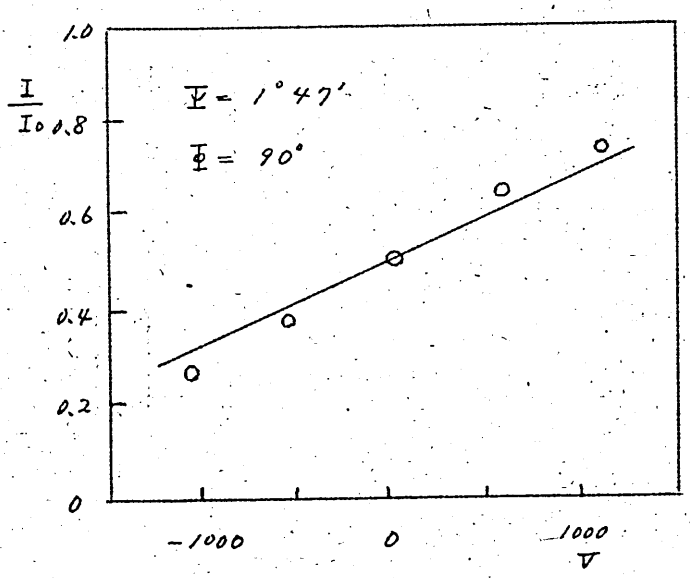


図8. 斜入射時の誘導複屈折による透過光強度の変化

—— 計算値
○ 測定値

なお KDP の電気光学定数を

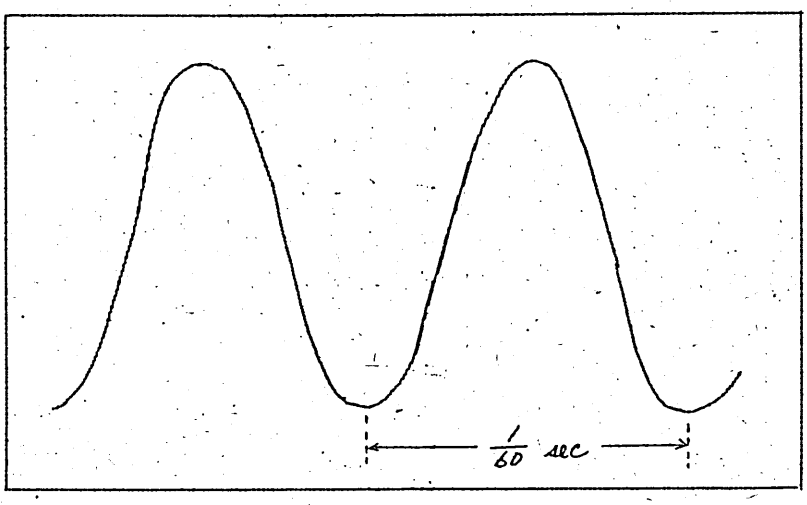
$\Gamma_{63} = 1.05 \times 10^{-9}$ (m/V)

とした

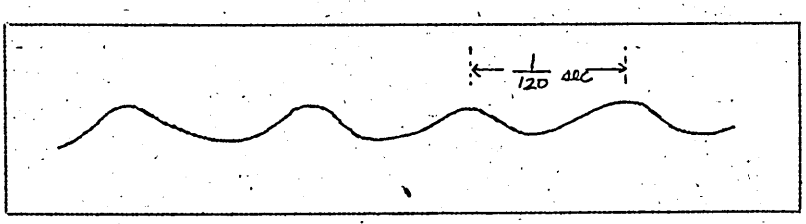
(3) 変調実験

$\varphi = 90°$（すなわち y' 軸）の方向へ、$1°47'$ だけ傾けたときに予期した変調が行なわれるか否かを 60 サイクルの交流電圧をかけることによってたしかめた。

図9.aは、入射光線とKDPの光軸とが平行の場合で、透過光の強度は120サイクルで変化し振幅も小さい。図9.bは、同じ状態で、KDPを $\varphi = 90°$ の方向へ $1°47'$ だけ回転したときの透過光強度で、60サイクルの変化をし振幅も大きくなっており、変調器として有効に動作していることが分る。



(b) $\varphi = 1°47'$ ($\varphi = 90°$)



(a) $\varphi = 0°$

図9 変調された透過光強度の波形

§6. 結　言

KDP、ADP等の単軸結晶形光変調器においては、入射光線を結晶の光軸からわずかに傾けることにより、必要な光学バイアスを得ることができ、直流バイアス、4分の1波長板等を用いなくても有効な変調を行なうことができる。

実験に協力された松島明史君に感謝する。
又、御援助いただいた早川電機株式会社馬場部長に感謝する。

文　献

(1) R. H. Blumenthal : "Design of a Microwave - Frequency Light Modulator", Proc. IRE., vol 50, No. 4, PP 452/456, (1962)

(2) M. Born and E. Wolf : "Principles of Optics, 2nd Ed.", Pergamon Press, Sec. 14.3, (1964)

(3) 滝北清道 : "レーザ光変調器", 大阪大学基礎工学部電気工学科特別研究報告, (1965)

付　録

電界を加えた状態では，KDPは2軸性となる。2つの光軸方向はEの正負により

$$(\pm \sin\Omega,\ 0,\ \cos\Omega) \quad , E>0 \qquad (A1)$$

$$(0,\ \pm \sin\Omega,\ \cos\Omega) \quad , E<0 \qquad (A2)$$

となる。ただし，

$$\Omega = \sin^{-1}\left(\frac{n_z}{n_{y'}}\sqrt{\frac{n_{x'}^2 - n_{y'}^2}{n_{x'}^2 - n_z^2}}\right) \qquad (A3)$$

KDPの場合，式(1)を(A3)に代入すると，

$$\Omega \approx \sqrt{\frac{2\, n_o^2\, n_e^2\, \Gamma_{63}\, E}{n_o^2 - n_e^2}} \qquad (A4)$$

2軸性結晶中を伝ぱんする光に対しては，一つの波面法線方向に対して，互に通交する2つの偏波が定まる。各偏波方向は，原点を通って波面法線方向に垂直な平面が屈折率楕円体を切るときに得られる楕円の長・短軸方向として定まり，対応する屈折率は，長・短軸の長さから、次式のように与えられる。

$$\left.\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{2\, n_z^2\, n_{x'}^2}{(n_{x'}^2 + n_z^2) - (n_{x'}^2 - n_z^2)\cos(\psi \pm \psi')}}$$

ここで，ψ，ψ' は波面法線方向が2つの光軸となす角度である。

斜入射の場合，1つの入射光に対し，屈折光線方向は n_1，n_2 の値によって異なる。n_1 に対応する光線の波面法線方向がZ軸となす角を α_1 とすれば，この方向の方向余弦は，

$(\sin\Psi,\ \cos\Psi,\ \sin\Psi,\ \sin\Psi,\ \cos\Psi,)$ (A6)

となり．2つの光軸との角 ψ_1, ψ_1' は，$E>0$ とすれば，式 (A1) (A6) から

$$\begin{matrix}\cos\psi_1 \\ \cos\psi_1'\end{matrix} = \pm \sin\Omega \sin\Psi_1 \cos\Psi + \cos\Omega \cos\Psi_1 \quad \text{----- (A7)}$$

から定められる．式 (A5) の＋符号のものに，式 (A6) から求めた ψ_1, ψ_1' を代入すると，n_1 と Ψ_1 とに対する一つの関係式が得られる。

一方，Snell の法則により．n_1 と Ψ_1 との間には，

$$\sin\Psi = n_1 \sin\Psi_1 \qquad (A8)$$

の関係が成立する。これら2つの式から，n_1, Ψ_1 がそれぞれ求められる。同様にすれば，n_2, Ψ_2 も求められる。

$\sin^2\Omega \ll 1$, $\sin^2\Psi \ll 1$ と仮定し，KDP の場合について n_1, n_2 を求めると，高次の項を省略して，

$$\begin{matrix}n_1 \\ n_2\end{matrix} = n_o \left[1 - \frac{1}{4} \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_o^2\ n_e^2} \sin^2\Psi \right.$$
$$\left. \mp \frac{n_o^2 - n_e^2}{2 n_e^2} \left\{ \sin^4\Omega + 2\sin^2\Omega \sin^2\Psi (1 - 2\cos^2\Psi) + \sin^4\Psi \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \text{-------- (A9)}$$

となる．Ψ_1, Ψ_2 は，式 (A8)(A9) から容易に求められる。

上の結果と本文式 (6) とから位相差 $\Delta\phi$ が求められる。