輻射科学研究会資料

三導体分布結合ストリップ線路

板倉清保　阿座上孝　山本錠彦

（大阪大学　工学部）

1965年5月15日

§1. 緒　　言

分布結合二本線路を利用した回路素子の導入により、分布定数回路網の構成理論は著しい発展をとげてきたが、最近、結合線路数をさらに増した多線条分布結合線路の応用が注目されるようになった。

この報告では、分布結合三本線路をとりあげ、線路形式としては、ストリップ線路をもちいて、実際に回路素子を設計するために必要なインピーダンス・マトリクスおよび特性インピーダンスの値より線路の構造寸法をあたえる設計公式を求めている。

さらに集中定数回路網における設計法とまったく同一の過程で構成する際に必要な結合三本線路をもちいた2端子対回路の等価回路を求めている。

§2 基本姿態

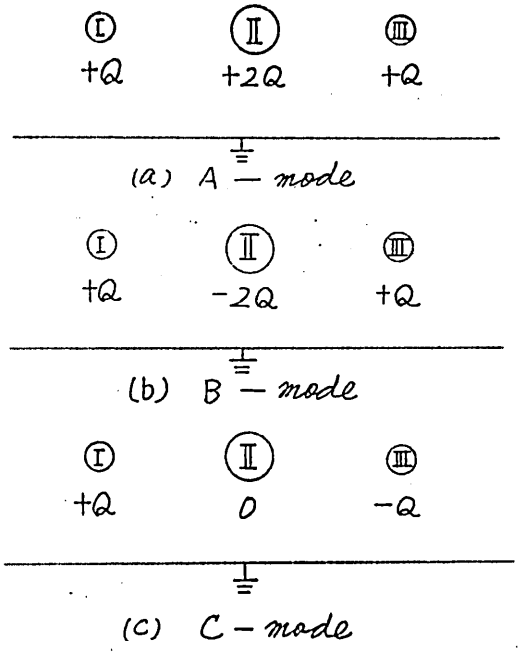


図2-1 三導体分布結合ストリップ線路の基本姿態

三導体分布結合ストリップ線路の独立な基本TEM姿態として、図2-1に示す三個の姿態を考え、これらをA, BおよびC−modeとする。

図2−1の如く、電荷をあたえた時の各導体の電位は表2-1のようになる。

表2-1　基本姿態における各導体の電位

基本姿態	A-mode			B mode			C-mode		
導体	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
電荷	+Q	+2Q	+Q	+Q	−2Q	+Q	+Q	0	−Q
電位	$+\bar{V}_A$	$+\gamma_A\bar{V}_A$	$+\bar{V}_A$	$+V_B$	$-\gamma_B V_B$	$+V_B$	$+V_C$	0	$-V_C$

ただし、線路は導体Ⅱに関して対称とする。

つぎに、導体上の電荷と電位の関係は、電位係数を用いて次式であらわされる。

$$\begin{bmatrix} V_{\mathrm{I}} \\ V_{\mathrm{II}} \\ V_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{12} \\ p_{13} & p_{12} & p_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\mathrm{I}} \\ Q_{\mathrm{II}} \\ Q_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \qquad (2-1)$$

式(2-1)より

$$\begin{cases} V_A = (V_{\mathrm{I}})_{Q_{\mathrm{I}}=\frac{Q_{\mathrm{II}}}{2}=Q_{\mathrm{III}}=Q} = (p_{11}+2p_{12}+p_{13})Q \\ \gamma_A V_A = (V_{\mathrm{II}})_{Q_{\mathrm{I}}=\frac{Q_{\mathrm{I}}}{2}=Q_{\mathrm{III}}=Q} = (2p_{22}+2p_{12})Q \end{cases} \qquad (2-2)$$

$$\begin{cases} V_B = (V_{\mathrm{I}})_{Q_{\mathrm{I}}=-\frac{Q_{\mathrm{II}}}{2}=Q_{\mathrm{III}}=Q} = (p_{11}-2p_{12}+p_{13})Q \\ -\gamma_B V_B = (V_{\mathrm{II}})_{Q_{\mathrm{I}}=-\frac{Q_{\mathrm{II}}}{2}=Q_{\mathrm{III}}=Q} = -(2p_{22}-2p_{12})Q \end{cases} \qquad (2-3)$$

$$V_C = (V_{\mathrm{I}})_{\substack{Q_{\mathrm{I}}=-Q_{\mathrm{III}}=Q \\ Q_{\mathrm{II}}=0}} = (p_{11}-p_{13})Q \qquad (2-4)$$

各基本姿態における各導体の単位長あたりの静電容量はつぎのようになる．

$$\begin{cases} C_{\mathrm{I}A} = C_{\mathrm{III}A} = \dfrac{1}{p_{11}+2p_{12}+p_{13}} \\ C_{\mathrm{II}A} = \dfrac{1}{p_{22}+2p_{12}} \end{cases} \qquad (2-5)$$

$$\begin{cases} C_{\mathrm{I}B} = C_{\mathrm{III}B} = \dfrac{1}{p_{11}+2p_{12}+p_{13}} \\ C_{\mathrm{II}B} = \dfrac{1}{p_{22}-p_{12}} \end{cases} \qquad (2-6)$$

$$C_{\mathrm{I}C} = C_{\mathrm{III}C} = \frac{1}{p_{11}-p_{13}} \qquad (2-7)$$

ここで $\dfrac{C_{\mathrm{II}A}}{2} = C_{\mathrm{I}A}$, $\dfrac{C_{\mathrm{II}B}}{2} = C_{\mathrm{I}B}$ (2-8)

とすれば $2p_{22} = p_{11} + p_{13}$ (2-9)

となり，式(2-2)および式(2-3)において

$$\gamma_A = \gamma_B = 1 \qquad (2-10)$$

となる。したがってA-modeにおいては，各導体の電位は等しくなり，一方B-modeにおいては導体ⅠおよびⅢの電位は等しく，また，導体Ⅱは，それ

らに対して．絶対値が等しく逆符号の電位となる．

§3. インピーダンス・マトリクス

インピーダンス・マトリクスを求めるために．まずA，BおよびCの各基本姿態における各導体の特性インピーダンスを表3-1のように定める．

表3-1　特性インピーダンス

基本姿態＼導体	I	II	III
A－mode	Z_{0a}	Z_{0A}	Z_{0a}
B－mode	Z_{0b}	Z_{0B}	Z_{0b}
C－mode	Z_{0c}	—	Z_{0c}

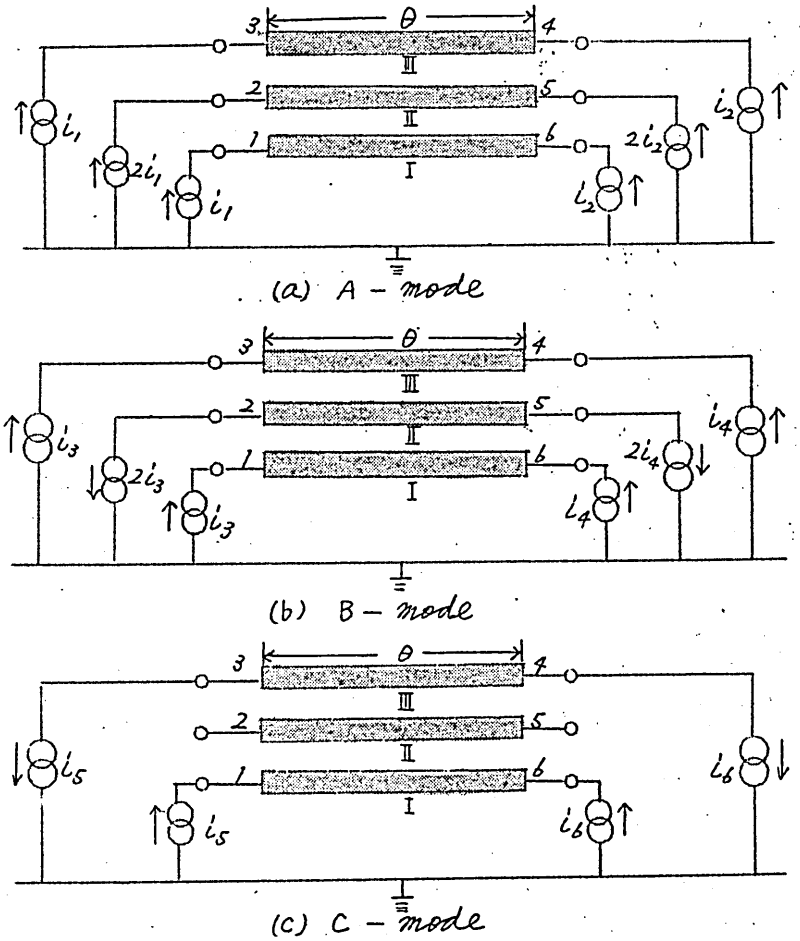


図3-1　インピーダンス・マトリクスを求める場合の電流源のあたえかた

図2-1の基本姿態に対応して図3-1のように各端子に電流源をあたえ．基本姿態における各線についてのインピーダンス・マトリクスを重畳すれば．任意長の三導体分布結合ストリップ線路を6端子対回路網と考えた時のインピーダンス・マトリクスは次式のように求まる．

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\alpha & R_\alpha & S_\alpha & S_\beta & R_\beta & P_\beta \\ R_\alpha & Q_\alpha & R_\alpha & R_\beta & Q_\beta & R_\beta \\ S_\alpha & R_\alpha & P_\alpha & P_\beta & R_\beta & S_\beta \\ S_\beta & R_\beta & P_\beta & P_\alpha & R_\alpha & S_\alpha \\ R_\beta & Q_\beta & R_\beta & R_\alpha & Q_\alpha & R_\alpha \\ P_\beta & R_\beta & S_\beta & S_\alpha & R_\alpha & P_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} \qquad (3-1)$$

ここに

$$\begin{cases} P = \frac{1}{4}(Z_{0a} + Z_{0b} + 2Z_{0c}) \\ Q = \frac{1}{2}(Z_{0A} + Z_{0B}) \\ R = \frac{1}{2}(Z_{0A} - Z_{0B}) = \frac{1}{4}(Z_{0a} - Z_{0b}) \\ S = \frac{1}{4}(Z_{0a} + Z_{0b} - 2Z_{0c}) \\ \alpha = -j\cot\theta \\ \beta = -j\,\mathrm{cosec}\,\theta \qquad \theta：電気長 \end{cases} \qquad (3-2)$$

導体の単位長当りの静電容量と特性インピーダンスとの関係は

$$\sqrt{\varepsilon_r}\, Z_0 = \frac{\eta}{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)} \qquad (3-3)$$

η = 自由空間の特性インピーダンス

ε = 媒質の誘電率

ε_r = 媒質の比誘電率

とあらわせるから、式(2-8)を式(3-3)に代入すれば

$$2Z_{0A} = Z_{0A}, \qquad 2Z_{0B} = Z_{0b} \qquad (3-4)$$

なる関係式を得る．したがって式(3-2)のP. Q. R およびSは次式のようになる．

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2}(Z_{0A} + Z_{0B} + Z_{0c}) \\ Q = \frac{1}{2}(Z_{0A} + Z_{0B}) \\ R = \frac{1}{2}(Z_{0A} - Z_{0B}) \\ S = \frac{1}{2}(Z_{0A} + Z_{0B} - Z_{0c}) \\ 2Q = P + S \end{cases} \qquad (3-5)$$

§4. 特性インピーダンス

§3で定義したところの各基本姿態における各線の特性インピーダンスの値は等角写像法を用いて求めることが出来る。対象とする三導体分布結合ストリップ線路は図4－1に示す2種類のものであり、上下共に無限平面板で対称的に遮へいされた極めて薄い中心導体および均質媒質よりなるもので、導体はすべて完全導体とする。

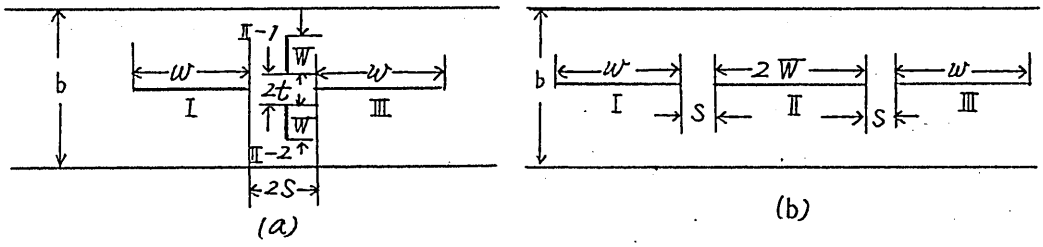
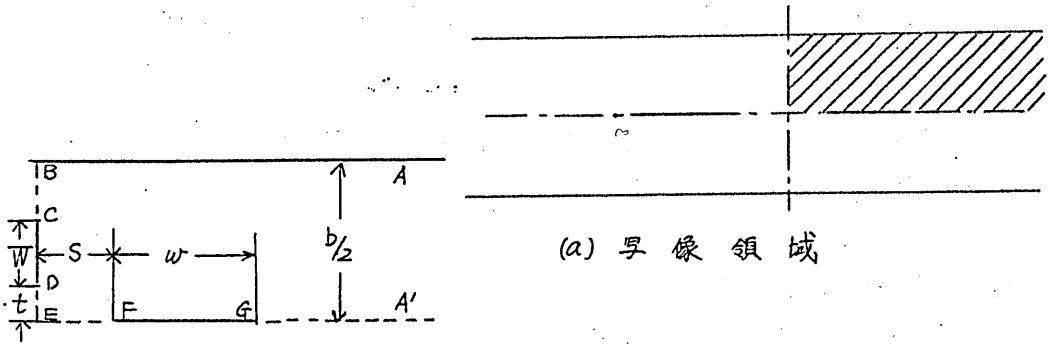


図4－1　2種類の3導体分布結合ストリップ線路

4－1. 図4－1(a)に示す構造の線路の特性インピーダンス

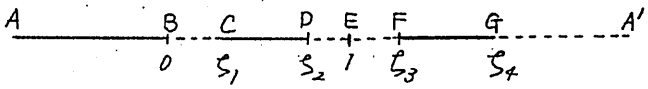
図4-1(a)に示す線路は構造上は中心導体が4本であるが、導体II-1.およびII-2は常に同電位とするから実質的には中心導体は3本である。

(i) AおよびB－mode における特性インピーダンス



(a) 写 像 領 域

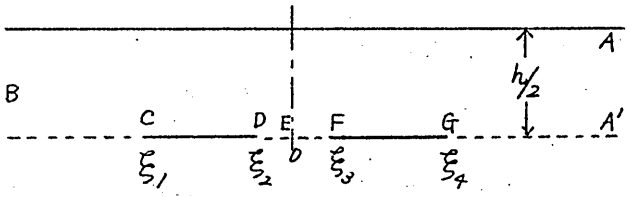
(b) 実像面 z－plane



(c) 媒介面－(I) ζ－plane

構造および基本姿態の対称性より図4－2(a)の一点鎖線の位置に磁気的壁が存在するから写像領域としては斜線部を考えればよい。z－plane から ζ－plane への変換式は

$$z = \frac{b}{\pi}\cosh^{-1}\sqrt{\zeta} \qquad (4-1)$$



(d) 媒介面 -(II) ξ-plane
図4-5 C-modeの特性インピーダンスを求める場合の写像図

であり、ζ-plane から ξ-plane への変換式は次式であたえられる

$$\zeta = \exp\left(2\pi \frac{\xi}{h}\right) \qquad (4-2)$$

さらに式(2-8)あるいは式(2-9)の条件より図4-2(d)において

$$\xi_4 - \xi_3 = \xi_2 - \xi_1 \qquad (4-3)$$

となる。したがって特性インピーダンスの厳密解が求まり、その結果は次のようになる。

$$\begin{cases} 2Z_{0A} = Z_{0a} = \dfrac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \dfrac{K(k_a')}{K(k_a)} \\ 2Z_{0B} = Z_{0b} = \dfrac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \dfrac{K(k_b')}{K(k_b)} \end{cases} \qquad (4-4)$$

$$\begin{cases} k_a = \tanh\left[\frac{1}{2}\log\left\{\cosh\left(\pi\frac{w+s}{b}\right)\mathrm{sech}\left(\pi\frac{s}{b}\right)\right\}\right]\cdot\tan\left[\frac{1}{2}\log\left\{\cosh\left(\pi\frac{w+s}{b}\right)\sec\left(\pi\frac{t}{b}\right)\right\}\right] \\ k_a' = \sqrt{1-k_a^2} \\ k_b = \tanh\left[\frac{1}{2}\log\left\{\cosh\left(\pi\frac{w+s}{b}\right)\mathrm{sech}\left(t\frac{s}{b}\right)\right\}\right]\coth\left[\frac{1}{2}\log\left\{\cosh\left(\pi\frac{w+s}{b}\right)\sec\left(t\frac{t}{b}\right)\right\}\right] \\ k_b' = \sqrt{1-k_b^2} \end{cases} \qquad (4-5)$$

こゝに

K：第一種完全楕円積分

ε_r：媒質の比誘電率

また式(4-3)より $\cosh\left(\pi\frac{w+s}{b}\right)\cos\left(\pi\frac{W+t}{b}\right) = \cosh\left(\pi\frac{s}{b}\right)\cos\left(\pi\frac{t}{b}\right)$ (4-6)

(ii) C-mode における特性インピーダンス

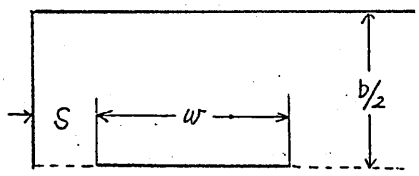


図4-3 C-modeの特性インピーダンスを求める場合の実像面

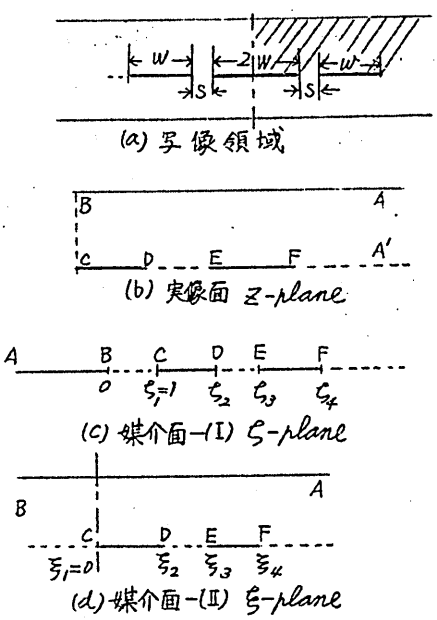
C-mode においては基板に垂直な方向の中心線上に電気的壁が存在するから、実像面として図4-3を考えると特性インピーダンスの値は次式であたえられる。

$$Z_{oc}=\frac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}\frac{K(k_c')}{K(k_c)} \qquad (4-7)$$

$$\begin{cases} k_c=\tanh\left(\frac{\pi}{2}\frac{w}{b}\right)\coth\left(\frac{\pi}{2}\frac{w+2S}{b}\right) \\ k_c'=\sqrt{1-k_c^2} \end{cases} \qquad (4-8)$$

4-2　図4-1(b)に示す構造の線路の特性インピーダンス

(i)　A および B-mode



(a) 写像領域

(b) 実像面 z-plane

(c) 媒介面-(I) ζ-plane

(d) 媒介面-(II) ξ-plane

図4-4　A および B-mode の特性インピーダンスを求める場合の写像図

4-1 の場合と同様に、写像領域としては全体の右上半分を考え同じ変換式を用いて ζ-plane, さらに ξ-plane へと写像する結果のみを挙げれば A, B-mode における特性インピーダンスは

$$\begin{cases} 2Z_{0A}=Z_{0A}=\frac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}\frac{K(k_a')}{K(k_a)} \\ 2Z_{0B}=Z_{0b}=\frac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}\frac{K(k_b')}{K(k_b)} \end{cases} \qquad (4-4)$$

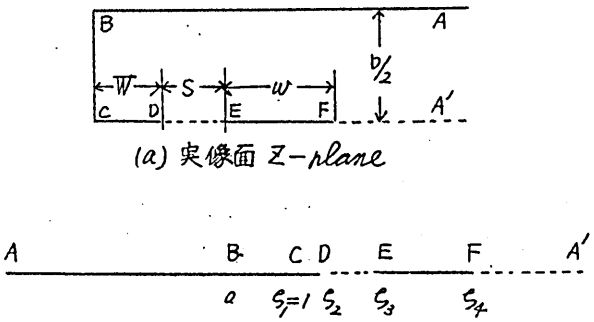
$$k_a=\tanh^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{W}{b}\right)\tanh^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{W+S}{b}\right)$$

$$k_b=\tanh^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{W}{b}\right)\coth\left(\frac{\pi}{2}\frac{W+S}{b}\right) \qquad (4-9)$$

また式(4-3)より

$$\cosh\left(\pi\frac{W+w+S}{b}\right)=\cosh\left(\pi\frac{W+S}{b}\right)\cosh\left(\pi\frac{W}{b}\right) \qquad (4-10)$$

(ii)　C-mode



(a) 実像面 z-plane

(b) 媒介面-(I) ζ-plane

4-1の場合と同様に C-mode においては基板に垂直な方向の中心線上に電気的壁が存在するから、実像面として図4-5(a)を考える。z-plane から ζ-plane への変換式は式(4-1)であり ζ-plane から η-plane への変換式は

$$\eta=\frac{\zeta-\zeta_2}{\zeta_3-\zeta_2} \qquad (4-11)$$

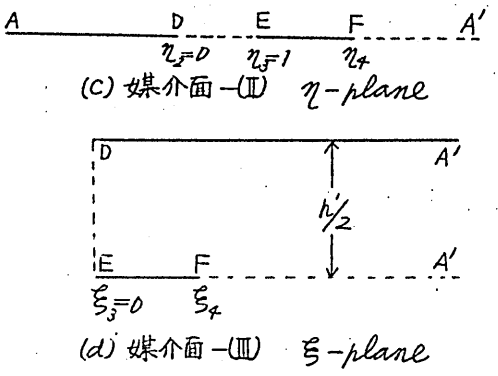


図4-5 C-modeの特性インピーダンスを求める場合の写像図

である。さらにη-planeからξ-planeへの変換式は

$$\xi=\frac{h'}{\pi}\cosh^{-1}\sqrt{\eta} \qquad (4-12)$$

となり式(4-1)と同じになる。

したがつてC-modeにおける特性インピーダンスは次式であたえられる。

$$Z_{oc}=\frac{60\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}\cdot\frac{K(k_c')}{K(k_c)} \qquad (4-13)$$

$$k_c=\tanh\left(\pi\frac{W}{b}\right)\coth\left(\pi\frac{W+S}{b}\right) \qquad (4-14)$$

§5. 設計公式

設計にあたってはまず始めに特性インピーダンスがあたえられ、これらの値から線路の構造寸法を決定することが必要である。§4で誘導した特性インピーダンスをあたえる式を逆に解けば設計公式が得られる。

5-1 図4-1(a)に示す構造の線路の設計公式

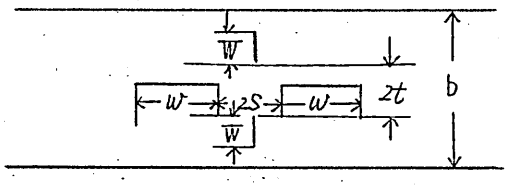


図4-1(a)

$$\begin{cases} \dfrac{w}{b}=\dfrac{1}{\pi}\tanh^{-1}\left[\dfrac{2\sqrt{k_c\lambda}}{1+k_c\lambda}\right] \\ \dfrac{S}{b}=\dfrac{1}{\pi}\tanh^{-1}\left[\dfrac{1-k_c}{1-\lambda}\sqrt{\dfrac{\lambda}{k_c}}\right] \\ \dfrac{t}{b}=\dfrac{1}{\pi}\cos^{-1}\left[\dfrac{1-\mu}{1+\mu}\dfrac{(1+\lambda)\sqrt{k_c}}{\sqrt{(k_c-\lambda)(1-k_c\lambda)}}\right] \\ \dfrac{W}{b}=\dfrac{1}{\pi}\cos^{-1}\left[\dfrac{1-\mu}{1+\mu}\dfrac{(1-\lambda)\sqrt{k_c}}{\sqrt{(k_c-\lambda)(1-k_c\lambda)}}\right]-\dfrac{t}{b} \end{cases} \qquad (5-1)$$

ただし

$$\lambda=\sqrt{k_a k_b} \qquad \mu=\sqrt{\frac{k_a}{k_b}} \qquad (5-2)$$

回路網構成上必要とされる特性インピーダンスから式(4-4)および式(4-7)によってkを求め、これらを式(5-1)に代入して各部の寸法を決定できる。

5-2　図4-1(b) に示す構造の線路の設計公式

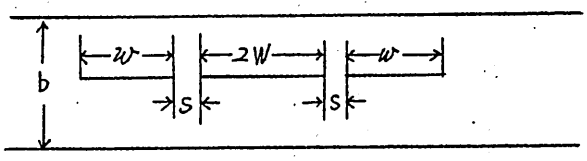


図4-1 (b)

$$\begin{cases} \dfrac{W}{b} = \dfrac{2}{\pi}\tanh^{-1}\sqrt[4]{R_a R_b} \\ \dfrac{S}{b} = \dfrac{2}{\pi}\tanh^{-1}\left[\dfrac{1-\sqrt{R_b}}{1-\sqrt{R_a}}\sqrt[4]{\dfrac{R_b}{R_a}}\right] \\ \dfrac{w}{b} = \dfrac{1}{\pi}\cosh^{-1}\left[\cosh\left(\pi\dfrac{W+S}{b}\right)\cosh\left(\pi\dfrac{W}{b}\right)\right] - \dfrac{W+S}{b} \end{cases} \qquad (5-3)$$

また図4-1(b) に示す構造の線路においては R_a, R_b, R_c は互いに独立なものではなく、次の関係がある。

$$R_c = \frac{\sqrt{R_a}+\sqrt{R_b}}{1+\sqrt{R_a R_b}} \qquad (5-4)$$

したがって

$$\frac{K(R_c)}{K(R_c')} \fallingdotseq \frac{K(R_a)}{K(R_a')} + \frac{K(R_b)}{K(R_b')} \qquad (5-5)$$

すなわち

$$4\frac{1}{Z_{0C}} \fallingdotseq \frac{1}{Z_{0A}} + \frac{1}{Z_{0B}} \qquad (5-6)$$

したがって式(3-5)において　$QS \fallingdotseq R^2$　(5-7)

なる関係が成立する。

§6 等価回路

§3において求めた6端子対回路網としての三導体分布結合ストリップ線路のインピーダンス・マトリクスを基礎にして、任意の2端子対を入出力端とし、残りの4端子対に、適当な終端条件をあたえて得られる、2端子対回路網の等価回路を求める。これらの等価回路は各種の回路素子を構成する際の基本回路となる。

式(3-2)において

$$s = j\tan\theta = j\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\right) \qquad f_0：規準周波数 \qquad (6-1)$$

なる周波数変換をおこなえば、インピーダンス・マトリクスは次式のようになる。

$$
[\mathbb{Z}]=\begin{bmatrix}
P\frac{1}{\Delta} & R\frac{1}{\Delta} & S\frac{1}{\Delta} & S\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & R\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & P\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} \\
R\frac{1}{\Delta} & Q\frac{1}{\Delta} & R\frac{1}{\Delta} & R\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & Q\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & R\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} \\
S\frac{1}{\Delta} & R\frac{1}{\Delta} & P\frac{1}{\Delta} & P\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & R\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & S\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} \\
S\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & R\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & P\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & P\frac{1}{\Delta} & R\frac{1}{\Delta} & S\frac{1}{\Delta} \\
R\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & Q\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & R\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & R\frac{1}{\Delta} & Q\frac{1}{\Delta} & R\frac{1}{\Delta} \\
P\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & R\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & S\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & S\frac{1}{\Delta} & R\frac{1}{\Delta} & P\frac{1}{\Delta}
\end{bmatrix} \qquad (6-2)
$$

入出力端および終端条件のえらび方によって種々の回路が得られるが、大別すれば

〔1〕両端開放あるいは両端接地の線路を含まない回路

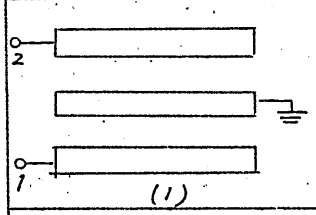
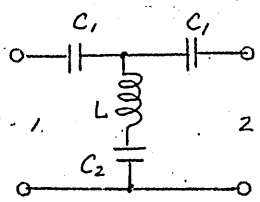
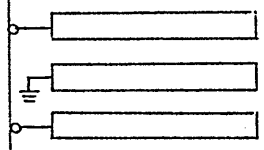
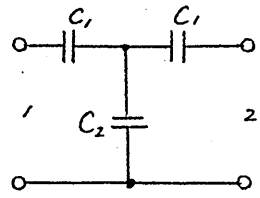
〔2〕両端開放あるいは両端接地の線路を含む回路

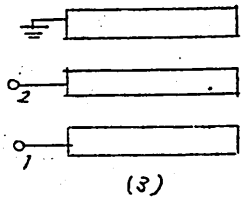
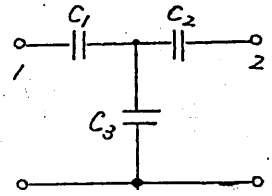
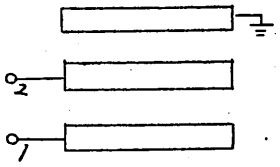
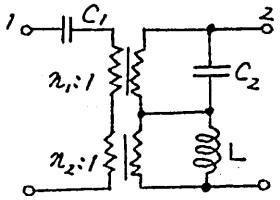
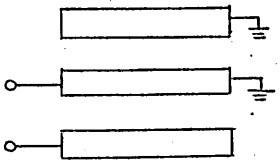
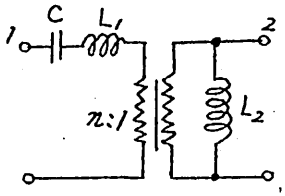
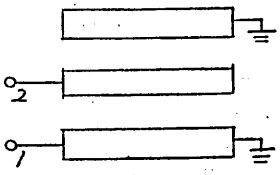
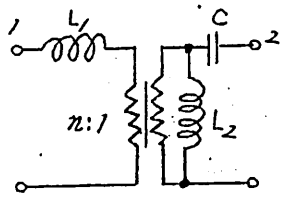
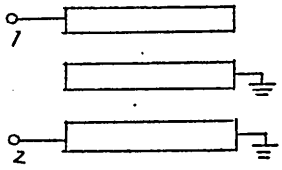
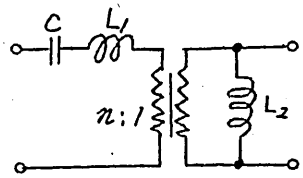
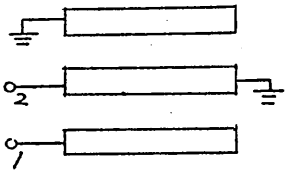
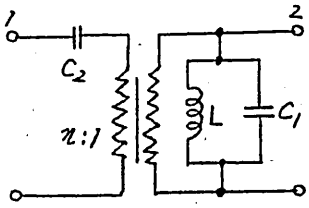
の2種類となる。ここで〔2〕の場合は構造上は結合三本線路であるが、本質的には結合二本線路となり、これを用いれば非対称型二導体分布結合ストリップ線路の厳密解を求めることができる。

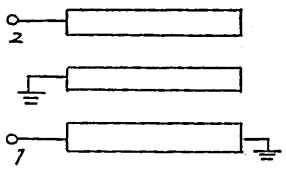
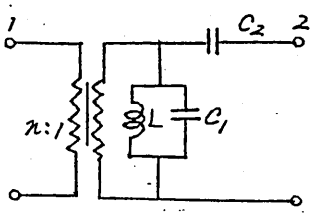
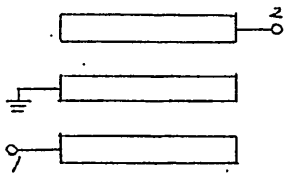
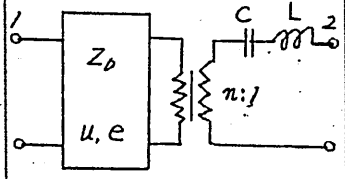
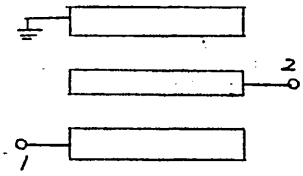
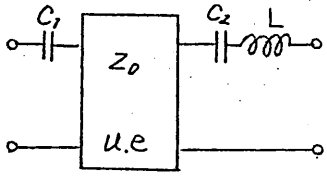
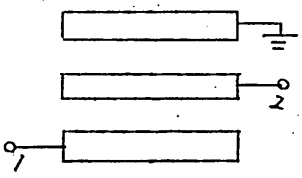
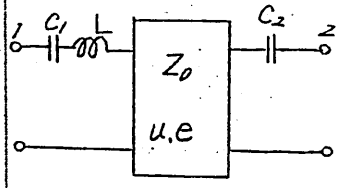
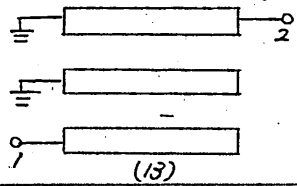
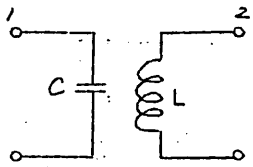
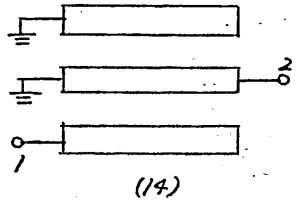
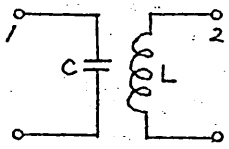
6-1. 両端開放あるいは両端接地の線路を含まない回路

式(6-2)のインピーダンス・マトリクスに種々の終端条件をあたえてえられる2端子対回路の等価回路は表(6-1)のようになる。

表6-1　3導体分布結合ストリップ線路を用いた2端子対回路の等価回路

原回路	等価回路	素子値
 (1)		$C_1=\frac{1}{P-S}$　$C_2=\frac{Q}{QS-R^2}$ $L=\frac{R^2}{Q}$
 (2)		$C_1=\frac{1}{P-S}$ $C_2=\frac{Q}{QS-R^2}$

原　回　路	等　価　回　路	素　子　値
 (3)		$C_1=\frac{P}{(P-S)(P+S-R)}$ $C_2=\frac{P}{(PQ-R^2)-R(P-S)}$ $C_3=\frac{P}{R(P-S)}$
 (4)		$C_1=\frac{P(PQ-R^2)}{(P^2-S^2)(PQ-R^2)-(P^2-RS)^2}$ $C_2=\frac{P}{PQ-R^2}$　$n_1=\frac{P^2-RS}{PQ-R^2}$ $L=\frac{R^2}{P}$　$n_2=\frac{S}{R}$
 (5)		$C=\frac{PQ-R^2}{2(P-S)(Q^2-R^2)}$　$L_2=Q$ $L_1=\frac{(QS-R^2)^2}{Q(PQ-R^2)}$　$n=\frac{R}{Q}$
 (6)		$C=\frac{Q}{Q^2-R^2}$　$n=\frac{Q}{R}$ $L_1=Q-S$ $L_2=\frac{R^2}{Q}$
 (7)		$C=\frac{PQ-R^2}{2(P-S)(Q^2-R^2)}$　$L_2=P$ $L_1=\frac{R^2(P-S)^2}{P(PQ-R^2)}$　$n=\frac{S}{P}$
 (8)		$C_1=\frac{R^2}{Q(PQ-R^2)}$　$L=Q$ $C_2=\frac{PQ-R^2}{2(P-S)(Q^2-R^2)}$ $n=\frac{R(P-S)}{PQ-R^2}$

原　回　路	等　価　回　路	素　子　値
 (9)		$C_1=\frac{R^2}{F}$　$L=\frac{F}{PQ-R^2}$ $C_2=\frac{PQ-R^2}{2(P-S)(Q^2-R^2)}$　$n=\frac{P(QS-R^2)}{F}$ ここに $F=\frac{(PQ-R^2)(PR^2+S^2Q-2SR^2)-2R^2(P-S)(Q^2-R^2)}{PQ-R^2}$
 (10)		$Z_0=\frac{PQ-R^2}{Q}$　$n=\frac{PQ-R^2}{QS-R^2}$ $C=\frac{PQ-R^2}{2(Q^2-R^2)(P-S)}$　$L=\frac{R^2}{Q}$
 (11)		$Z_0=\frac{R(P-S)}{P}$　$L=\frac{R^2}{P}$ $C_1=\frac{P}{(P-S)(P+S-R)}$ $C_2=\frac{P}{(PQ-R^2)-R(P-S)}$
 (12)		$Z_0=\frac{R(P-S)}{P}$　$L=\frac{S^2}{P}$ $C_1=\frac{P}{(P-S)(P+S-R)}$ $C_2=\frac{P}{(PQ-R^2)-R(P-S)}$
 (13)		$C=\frac{PQ-R^2}{2(P-S)(Q^2-R^2)}$ $L=P$
 (14)		$C=\frac{PQ-R^2}{2(P-S)(Q^2-R^2)}$ $L=Q$

原　回　路	等　価　回　路	素　子　値
(15)		$C=\frac{Q}{Q^2-R^2}$ $L=P$
(16)		$Z_0=\frac{2(P-S)(Q^2-R^2)}{PQ-R^2}$ $L=\frac{PR^2+QS^2-2SR^2}{PQ-R^2}$
(17)		$Z_0=\frac{Q^2-R^2}{Q}$ $L=\frac{R^2}{Q}$

6-2　非対称型二導体分布結合ストリップ線路

三導体分布結合ストリップ線路の第Ⅲ線の両端を開放あるいは接地すれば、非対称型二導体分布結合ストリップ線路となる。三導体分布結合ストリップ線路の特性インピーダンスについては§4で厳密解を求めたので、これを用いれば非対称型すなわち幅の異なる二導体分布結合ストリップ線路の特性インピーダンスの厳密解を求めることができる。

i）第Ⅲ線両端開放の場合

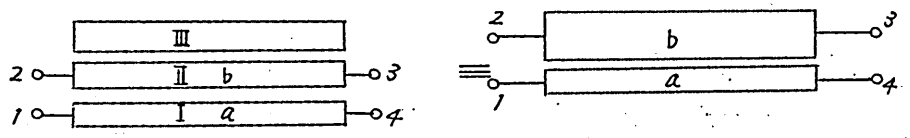


図6-1　第Ⅲ線両端開放回路

図6-1のように、第Ⅲ線の両端をともに開放した時のインピーダンス・マトリクスは次式のようになる。

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
P\frac{1}{s} & R\frac{1}{s} & R\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & P\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} \\
R\frac{1}{s} & Q\frac{1}{s} & Q\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & R\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} \\
R\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & Q\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & Q\frac{1}{s} & R\frac{1}{s} \\
P\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & R\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & R\frac{1}{s} & P\frac{1}{s}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}
\qquad (6-3)
$$

一方、非対称型二導体分布結合ストリップ線路のインピーダンス・マトリクスは次式であらわされる。

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{Z_{oe}^a+Z_{oo}^a}{2}\cdot\frac{1}{s} & \frac{Z_{oe}^a-Z_{oo}^a}{2}\cdot\frac{1}{s} & \frac{Z_{oe}^a-Z_{oo}^a}{2}\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & \frac{Z_{oe}^a+Z_{oo}^a}{2}\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} \\
\frac{Z_{oe}^b-Z_{oo}^b}{2}\cdot\frac{1}{s} & \frac{Z_{oe}^b+Z_{oo}^b}{2}\cdot\frac{1}{s} & \frac{Z_{oe}^b+Z_{oo}^b}{2}\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & \frac{Z_{oe}^b-Z_{oo}^b}{2}\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} \\
\frac{Z_{oe}^b-Z_{oo}^b}{2}\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & \frac{Z_{oe}^b+Z_{oo}^b}{2}\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & \frac{Z_{oe}^b+Z_{oo}^b}{2}\frac{1}{s} & \frac{Z_{oe}^b-Z_{oo}^b}{2}\frac{1}{s} \\
\frac{Z_{oe}^a+Z_{oo}^a}{2}\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & \frac{Z_{oe}^a-Z_{oo}^a}{2}\frac{\sqrt{1-s^2}}{s} & \frac{Z_{oe}^a-Z_{oo}^a}{2}\cdot\frac{1}{s} & \frac{Z_{oe}^a-Z_{oo}^a}{2}\frac{1}{s}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}
\qquad (6-4)
$$

ここに　$Z_{oe}^a(Z_{oe}^b)$＝a線（b線）の偶励振特性インピーダンス

$Z_{oo}^a(Z_{oo}^b)$＝a線（b線）の奇励振特性インピーダンス

$Z_{oe}^a - Z_{oo}^a = Z_{oe}^b - Z_{oo}^b$

式(6-3)と式(6-4)を比較すれば

$$
\begin{cases}
Z_{oe}^a = Z_{oA} + \frac{Z_{oc}}{2}, & Z_{oo}^a = Z_{oA} \\
Z_{oo}^a = Z_{oB} + \frac{Z_{oc}}{2}, & Z_{oo}^b = Z_{oB}
\end{cases}
\qquad (6-5)
$$

ii）第Ⅲ線両端接地の場合

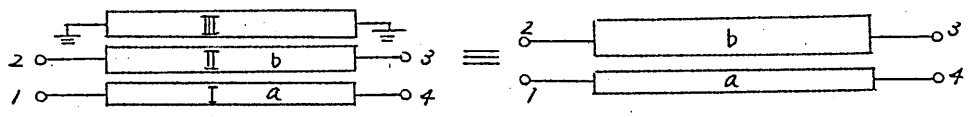


図6－2　第Ⅲ線両端接地回路

この場合のインピーダンス・マトリクスは次のようになる。

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{P^2-S^2}{P}\frac{1}{\Delta} & \frac{R(P-S)}{P}\frac{1}{\Delta} & \frac{R(P-S)}{P}\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & \frac{P^2-S^2}{P}\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} \\
\frac{R(P-S)}{P}\frac{1}{\Delta} & \frac{PQ-R^2}{P}\frac{1}{\Delta} & \frac{PQ-R^2}{P}\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & \frac{R(P-S)}{P}\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} \\
\frac{R(P-S)}{P}\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & \frac{PQ-R^2}{P}\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & \frac{PQ-R^2}{P}\frac{1}{\Delta} & \frac{R(P-S)}{P}\frac{1}{\Delta} \\
\frac{P^2-S^2}{P}\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & \frac{R(P-S)}{P}\frac{\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta} & \frac{R(P-S)}{P}\frac{1}{\Delta} & \frac{P^2-S^2}{P}\frac{1}{\Delta}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}
\qquad (6-6)
$$

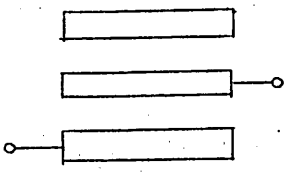
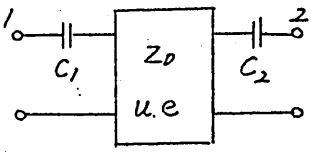
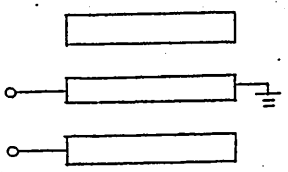
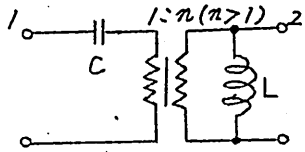
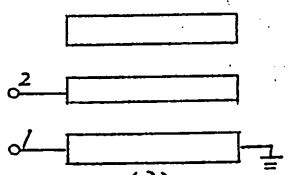
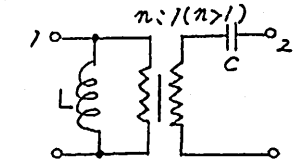
式(6-4)と式(6-6)を比較すれば

$$
\begin{cases}
Z_{oe}^{a} = \dfrac{(P-S)(2Q+R)}{P} & Z_{oe}^{b} = \dfrac{P(Q+R)-R(R+S)}{P} \\
Z_{oo}^{a} = \dfrac{(P-S)(2Q-R)}{P} & Z_{oo}^{b} = \dfrac{P(Q-R)-R(R-S)}{P}
\end{cases}
\qquad (6-7)
$$

iii) 等価回路

式(6-3)および式(6-6)を用いて種々の終端条件をあたえた場合にえられる2端子対回路の等価回路は次の表のようになる。

表6-2　第Ⅲ線両端開放回路の等価回路

原回路	等価回路	素子値
 (1)	 条件 $C_1 < \frac{C_2}{2}$	$Z_{0A} = 2Z_0 + \frac{1}{C_2}$ $Z_{0B} = \frac{1}{C_2}$ $Z_{0C} = 2(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2})$
 (2)	 $n^2 > LC(n^2-1)$	$Z_{0A} = L(1+\frac{1}{n})$ $Z_{0B} = L(1-\frac{1}{n})$ $Z_{0C} = 2[\frac{1}{C} - L(1-\frac{1}{n^2})]$
 (3)	 $LC(n^2-1) > n^2 > LC(n-1)$	$Z_{0A} = \frac{1}{C} + L\frac{n+1}{n^2}$ $Z_{0B} = \frac{1}{C} - L\frac{n-1}{n^2}$ $Z_{0C} = 2[L(1-\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{C}]$

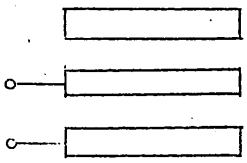
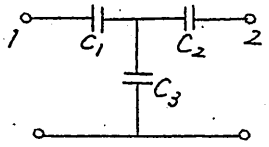
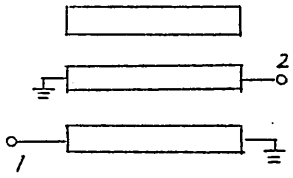
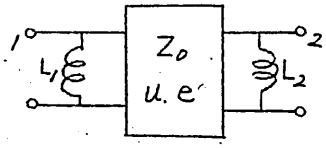
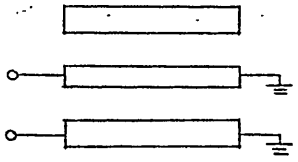
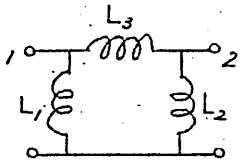
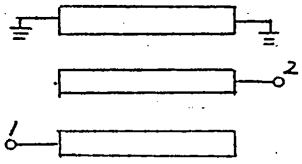
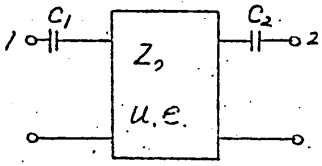
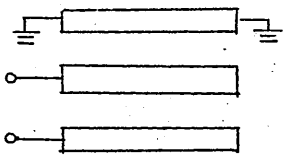
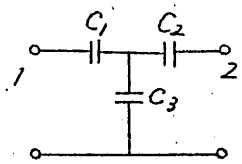
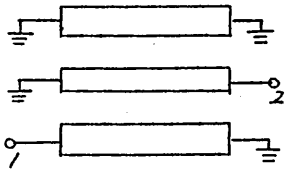
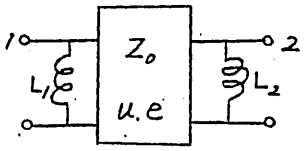
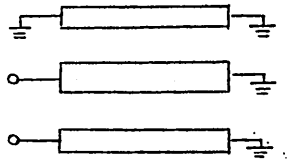
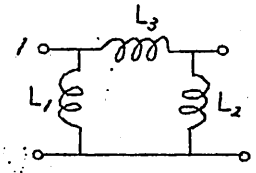
原　回　路	等　価　回　路	素　子　値
 (4)	 $C_1 < \frac{C_2}{2}$	$Z_{0A} = \frac{1}{C_2} + \frac{2}{C_3}$ $Z_{0B} = \frac{1}{C_2}$ $Z_{0C} = 2\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right)$
 (5)	 $L_1 > 2L_2$	$\frac{Z_{0A}+Z_{0B}}{\xi} = \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{L_1}$ $\frac{Z_{0A}+Z_{0B}+Z_{0C}}{\xi} = \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{L_2}$ $\frac{4Z_{0B}+Z_{0C}}{\xi} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$
 (6)	 $L_1 > 2L_2$	$\frac{Z_{0A}+Z_{0B}}{\xi} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3}$ $\frac{Z_{0A}+Z_{0B}+Z_{0C}}{\xi} = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$ $\frac{4Z_{0B}+Z_{0C}}{\xi} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ こゝに $\xi = 2Z_{0A}Z_{0B} + \frac{Z_{0C}}{2}(Z_{0A}+Z_{0B})$

表6-3　第Ⅲ線両端接地回路の等価回路

原　回　路	等　価　回　路	素　子　値
 (1)	 $C_1 < \frac{C_2}{2}$	$A = \frac{2Q(P-S)}{P} = Z_0 + \frac{1}{C_1}$ $B = \frac{PQ-R^2}{P} = Z_0 + \frac{1}{C_2}$ $C = \frac{1}{P}[2(P-S)(Q-R)+(PQ-R^2)]$ $= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
 (2)	 $C_1 < \frac{C_2}{2}$	$A = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}$ $B = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ $C = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

原　回　路	等　価　回　路	素　子　値
 (3)	 $L_1 > 2L_2$	$\frac{2}{\zeta}A = \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{L_2}$ $\frac{2}{\zeta}B = \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{L_1}$ $\frac{2}{\zeta}C = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$
 (4)	 $L_1 > 2L_2$	$\frac{2}{\zeta}A = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$ $\frac{2}{\zeta}B = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3}$ $\frac{2}{\zeta}C = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

§7 緒　言

基本姿態を仮定し、それらを重畳することによって、任意長の三導体分布結合ストリップ線路を6端子対回路網とみた時のインピーダンス・マトリクスを導びいた。

また、等角写像法を用いて各基本姿態における線路の特性インピーダンスおよび特性インピーダンスの値より線路の構造寸法をあたえる設計公式を求めた。さらに線路端を適当に開放あるいは接地することによってえられる種々の2端子対回路の等価回路を求めた。

これらの等価回路を集中定数回路から分布定数回路へ変換する際の基本回路として用いることによって、低域・高域および帯域通過沪波回路を構成することができる。えられた回路の特性は全周波数にわたって厳密に保証されるので、狭帯域、広帯域、いずれの目的に対しても用いることができる。

等価回路のなかには、変成器を有するものも含まれているが、これをうまく利用できれば都合がよい。また線路数を増したために終端条件のあたえかたが豊富になり、一つの等価回路に対していくつもの結合三本線回路が存在するが、これらのうちで実現容易なものをとりあげればよい。

最後に非対称型二導体分布結合ストリップ線路としての応用について考察し

異なった幅の結合ストリップ線路の特性インピーダンスの厳密解を求めた。

参　考　文　献

1) G. L. Matthaei : IRE Trans, vol MTT-10. November. 1962
2) J. T. Bolljahn and G. L. Matthaei : Proc. IRE, vol. 50. March 1962
3) E. G. Cristal : IEEE Trans, vol MTT-12, 4. July, 1964
4) E. M. T. Jones and J. T. Bolljahn : IRE Trans, vol MTT-4. 2. April. 1956
5) S. B. Cohn : IRE Trans, vol. MTT-3. October, 1955.
6) H. Ozaki and J. Ishii : IRE, Trans, vol. CT-5, June. 1958
7) R. J. Wenzel : IEEE Trans, vol. MTT-12. January, 1964.
8) 永井. 佐藤. 斉藤 : 信学会, 全国大会論文予稿 328, 昭和32年
9) 斉藤. 永井 : 信学会, 全国大会論文予稿 33, 昭和36年
10) 斉藤, 永井 : 東北大学電通談話会記録 32巻 2号 昭和38年6月
11) 永井. 松本 : 電気四学会, 連合大会論文予稿 21. 昭和39年
12) A. Matsumoto : I.C.M.C.I 資料, C-2-3. 1964
13) 石井順也 : 信学会, 全国大会論文予稿 180. 昭和34年
14) 板倉, 阿座上. 石井. 木下 : マイクロ波伝送研究専門委員会資料 昭和36年12月
15) B. M. Schiffman and G. L. Matthaei : IEEE Trans, vol. MTT-12, January, 1964
16) 池田. 斉藤. 佐藤. 永井 : 電気関係学会東北支部連合大会論文予稿, 3C-5. 昭和38年

輻射科学研究会資料

円偏波利用による符号識別方式

滝山　敬
豊永俊郎
崔　丞　燦

（同志社大学工学部）

1965年5月15日

1. 序言

マイクロ波を用いた符号識別方式については，すでに1962年アメリカにてO.F. Namann等によって相当具体的な論文[1]が発表され，又国内でも東北大学[2]，富士通信機，国鉄技研等にて基礎的研究が盛んに進められている。然し以上で行はれている方式は，すべて符号素子として，ダイポールを用い，その直線偏波の反射波を利用した識別方式（図1）であるため，種々検討改善がなされてはいるが，実用上の本質的な欠点が認められる。それは識別自動化の上で最も忌避すべき信号波と誤信号との区別がむづかしいと云う欠点である。この欠点を除き信頼度の高い方式として吾々は"円偏波を利用した符号識別方式"を提案する。即ち，マイクロ波のビーム（直線偏波）を円偏波発生装置で構成された符号素子（2進記号によって取りつける）（図2）に照射し，この素子から発生する右又は左回り円偏波の輻射波を受信して，符号を識別するもので，こゝにその実験結果を報告する。

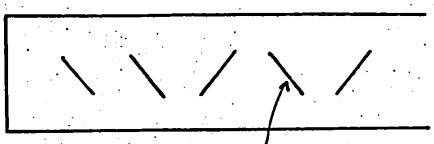


図1

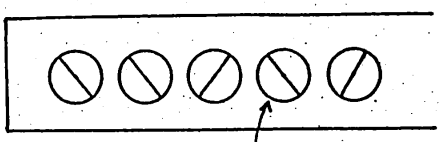


図2.

2. 実験装置

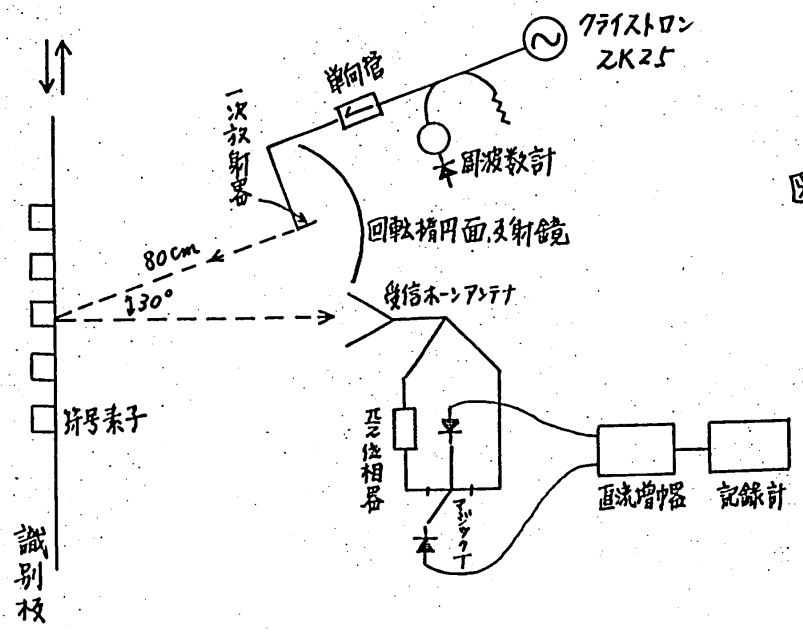


図3

試作した実験装置のブロックダイアグラムを図3に示す。実験周波数は9500Mcで，図の主要部について説明する。

(a) 一次放射器 ：矩形導波管(WRJ-10)の開口面アンテナで，輻射パターンの半値巾は水平面120°，垂直面80°である。

(b) 回転楕円面反射鏡 ：図4に試作した反射鏡の寸法を示す。材質は銅板。才1焦点(F_1)に一次放射器の開口面を置き，才2焦点(F_2)にビームを集束する。焦点間距離は設計値とほゞ一致し，焦点での電界分布の半値巾は水平面で3.8cm，垂直面で7cmである。(写真1)

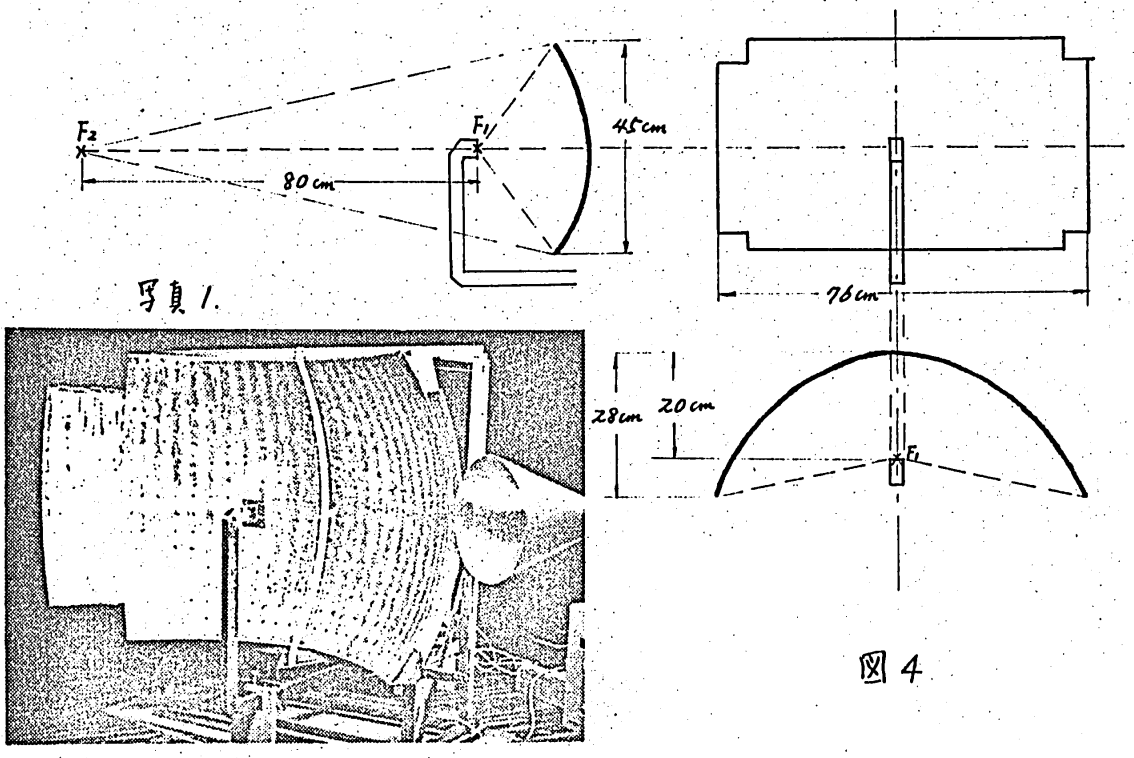


写真1.

図4

(c) 受信装置 ：この装置は本方式の特徴を発揮さす為に重要なものである。ホーンアンテナにて受信した円偏波を直交偏波分波器(結合度−17dB)によって①，②のアームに分ける。①のアームに挿入した$\pi/2$位相器により，右回り円偏波はマジックTの両側アームで同位相となってHアームに，左回り円偏波は逆位相となってEアームに各々取り出すことが出来る。次に直線偏波の反射波に対しては，どの様な角度の偏波(雑音＝誤信号)でもE，Hアームに等分に取り出される為，これを逆位相に合成することによって消去することができる。従ってこの装置は簡単な構造にて，円偏波による信号波のみを取り出すことを可能としている。

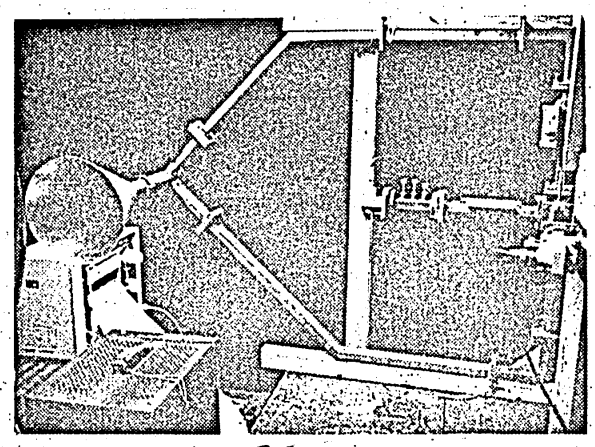


写真2

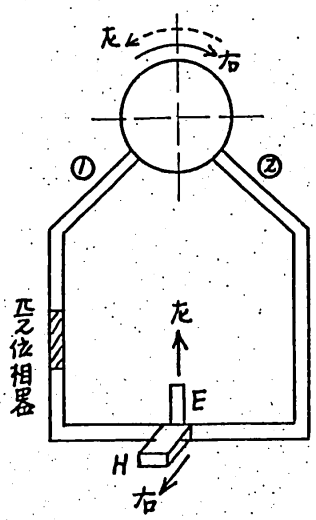


図5

(d) 符号素子：図6の如く，円形導波管に誘電体片を挿入したもので，誘電体と45°に入射した直線偏波の電界を，xとy方向の直交成分に分けて考え各々の管内波長をλ_{gx}，λ_{gy}とすると，両成分の位相差ϕは

$$\phi = 2\pi l\left(\frac{1}{\lambda_{gy}} - \frac{1}{\lambda_{gx}}\right)$$

で表はされ，$\phi = \pi/2$のとき円偏波となる。図の如く終端短絡した場合は，$\phi = \pi/4$になる様，誘電体の寸法lを決定すればよい。従ってこれを符号素子とすれば，直線偏波の入射波が円偏波の信号波に変換されて輻射されることになる。試作した素子の寸法は図の如くで，これから輻射される円偏波の楕円率はほゞ1に近い。この符号素子については更に小型化を検討中である。

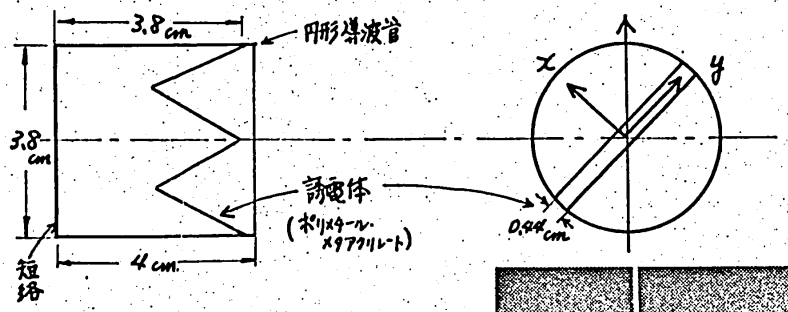
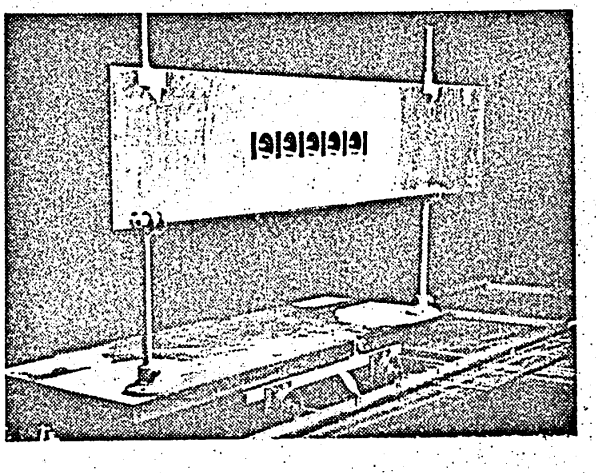


図6

(e) 識別板：符号素子を取りつけた基板を総称したもので，基板の材質としては主としてアルミ板，電波吸収体(ヘアロック)を用いて実験を行った。(写真3)

写真3



3. 実験結果の検討

(a) 送受信角度：種々実験を行ったが，符号素子からの輻射電力は，垂直方向が最大であるから，受信角度 θ_2 は垂直方向 0° とした。送信角度 θ_1 は余り大きいと符号素子への入射角が大きくなり，直→円変換能率を悪くする。又 θ_1 が小さくなると基板からの強い直線偏波の反射波を弱い円偏波の信号波に重畳して受信することになるので，この様な無駄は避けるべきで，結局 $\theta_1 = 30°$ として実験を行った。

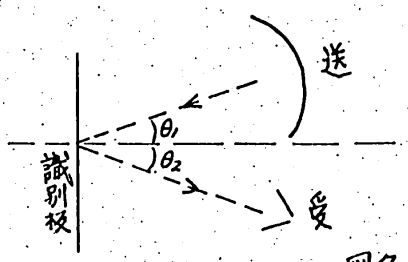


図7

(b) 分解能：素子1個の場合の受信出力の記録を図8に示す。EH各アームからの出力及びその合成した結果であって，識別基板にアルミ板の如き金属板を用いた場合，基板の端部や凹凸から発生する直線偏波の反射波は合成されて殆んど消去され，円偏波成分のみを取り出していることがわかる。

こゝでわづかに残っている直線偏波分はE.H各アームのクリスタル検波器の検波特性の不揃によるもので，その特性を揃えることにより，又廻子回路を通すことによって完全に除去できる。

素子2個以上ならべ，素子間隔をかえた場合の受信出力の模様を図9 a, b, c, d, に示す。これらより，同じ回転方向の素子をならべた場合は，間隔4cmで信号が不明瞭になり，分解能が落ちて来る。逆方向の素子をならべた場合は，間隔に関係なく分解能は高い。

吸収体を基板とした場合は，基板が柔らかく符号素子の取り付けが正確でない為，測定結果が不揃で，間隔1cmでも高い分解能を示した場合（図10, a）と，4cmですでに分解能の落ちた例（図10, b）があり，再検討を行っている。

(c) 分解能の改善：信号の分解能を高くして，尚かつ素子間隔をせばめることは，識別板を小型にする為の重要な問題である。信号の分離をよくする対策として素子間の基板に空隙をもうけた。図11は間隔2cmの場合，空隙の有無による信号出力の比較をしたもので，図12は間隔1cmの場合を示す。これらより，素子間に空隙を作ると云う簡単な方法によって間隔1～2cmでも高い分解能の得られることがわかった。又このことから基板に金属板を用いる場合には，基板に同寸法等間隔に素子穴をあけ，素子間に空隙を作っておけば，素子の

回転方向の如何にかゝはらず，あらゆる符号が自由に組立てられるので，この方法は基板製作の量産面からも有用である。

(d) 現在までの識別方式との比較

	現在までの識別方式	本提案による識別方式
信号波	直線偏波	円偏波
符号素子	ダイポールアンテナ	円偏波変換器
感度	* −31.4dB（ダイポールを21本ならべた場合）	アルミ基板 −26.6dB 空隙を作った場合 −29.2dB 吸収体基板 −33.3dB
素子中心間の間隔	** 約 1.5 波長	約 1.5 波長
識別の信頼性	直線偏波の信号波に類似の雑音を消去できないので，信頼性が低い。	円偏波の信号波以外はすべて消去でき，信頼性が高い。
経済性	符号素子については安価，	やゝ高い。
基板	電波吸収体のごとき反射波の少ないものが必要である。	特殊なものを必要としない。
備考	* ダイポール列を作り実測した値。 1次放射器出力を 0dBとする。 ** 文献 2) の34Gcでの寸法を波長に換算した値。	

4. 結言

直線偏波による識別方式の欠点を除く為提案した本方式が，比較的簡単な構成にて，安定な信頼度の高い識別のできることを示した。今後の問題として識別基板の選定，円偏波変換器の小型化，送受共用アンテナの検討，気象その対策，空隙によって生じる現象の検討等多くの点が残されている。

終りに本研究に関し種々御指導いたゞいた国鉄技研 富田三郎氏 並びに種々御配慮いたゞいた日本カーボン戸田開発部長に深盡の謝意を表すと共に熱心に実験に協力された本学々生今井弘，村井弘尚両君に感謝する。

文献

1) O.F. Hamann & S.H. Boyd, "Microwaves Identify Freight Cars", Control Engineering, P.102, March 1962

2) 石川．安達．出明，"ミリ波の反射による符号の識別" 39年電気通信学会全国大会 39.11.

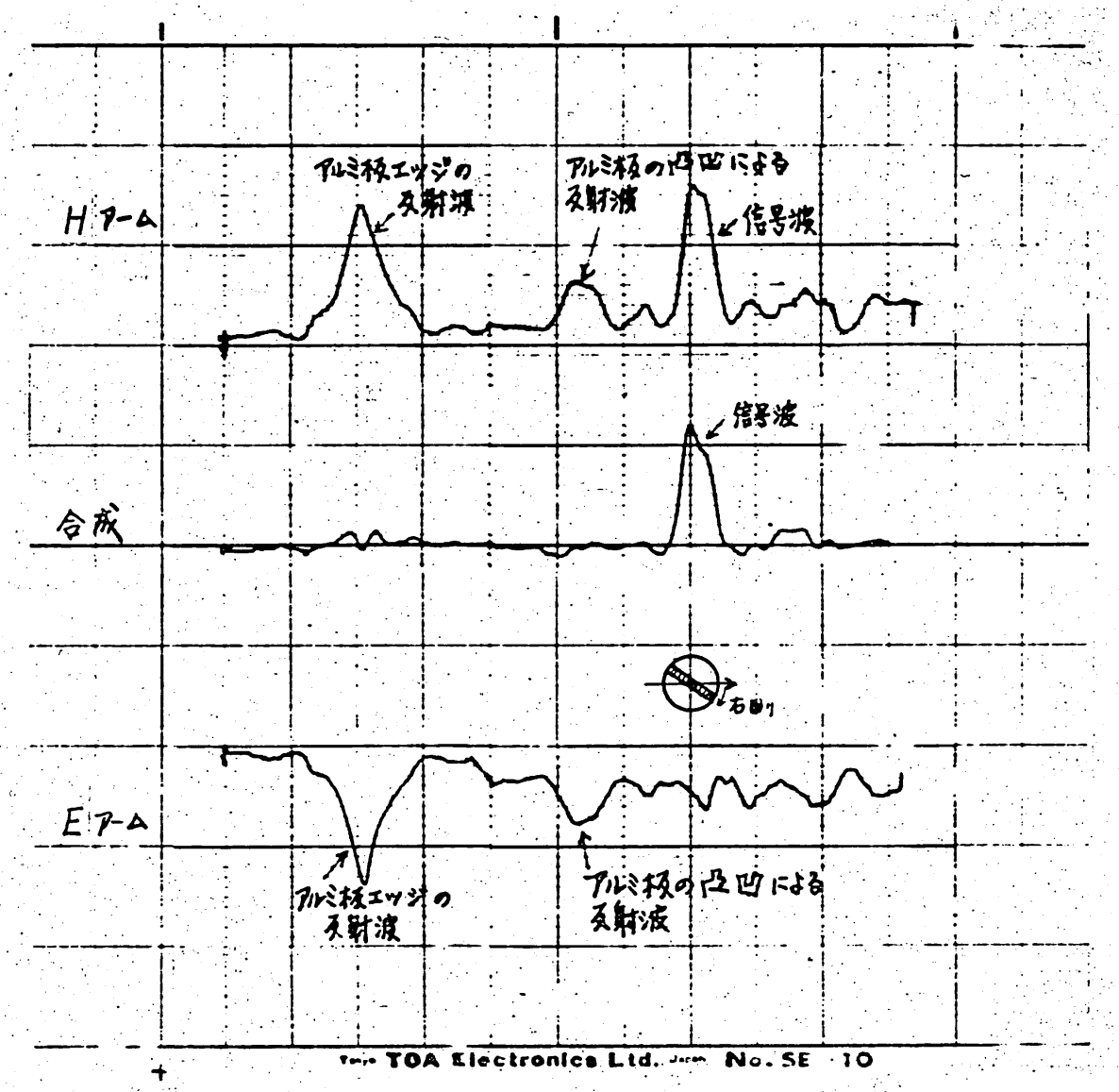

Hアーム
アルミ板エッジの反射波
アルミ板の凸凹による反射波
信号波
合成
信号波
右曲り
Eアーム
アルミ板エッジの反射波
アルミ板の凸凹による反射波
TOA Electronics Ltd. No. SE 10

図 8

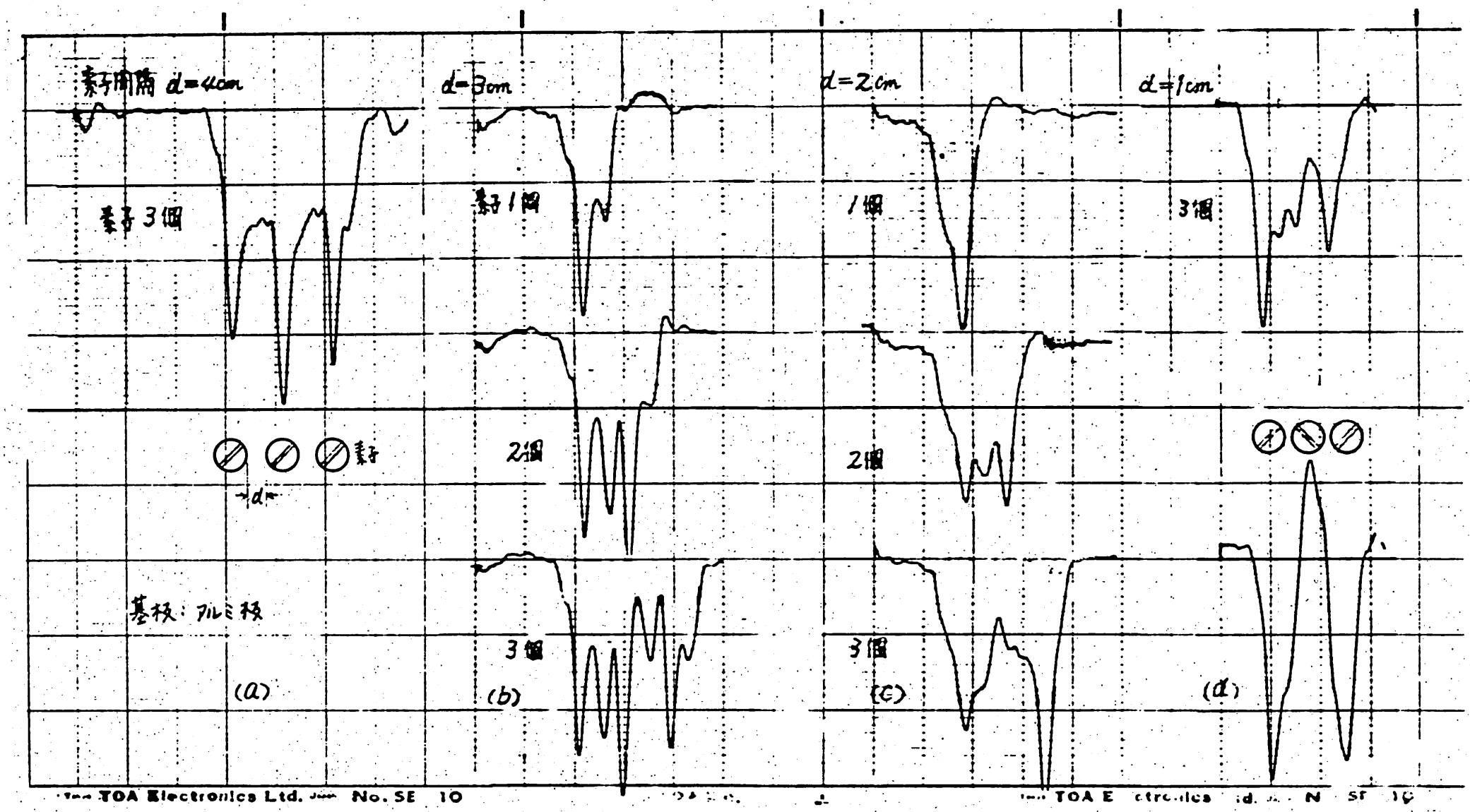

素子間隔 d=4cm
d=3cm
d=2cm
d=1cm
素子3個
素子1個
1個
3個
素子
d
2個
2個
基板：アルミ板
3個
3個
(a)
(b)
(c)
(d)
TOA Electronics Ltd. No. SE 10

図9

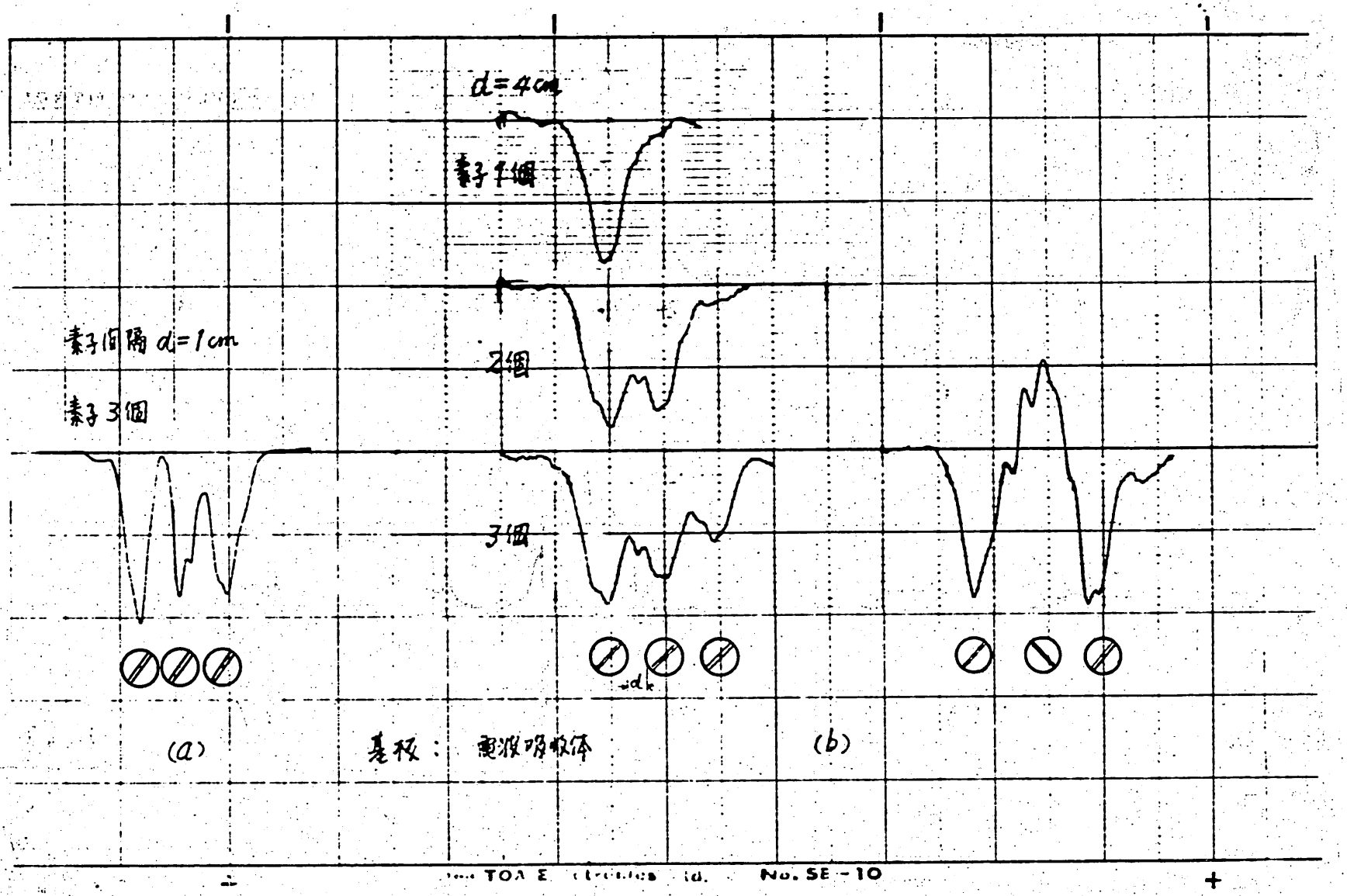

d=4cm
素子1個
素子間隔 d=1cm
素子3個
2個
3個
d
(a)
基板：電波吸収体
(b)
TOA ELECTRONICS Ltd. No. SE-10

図10

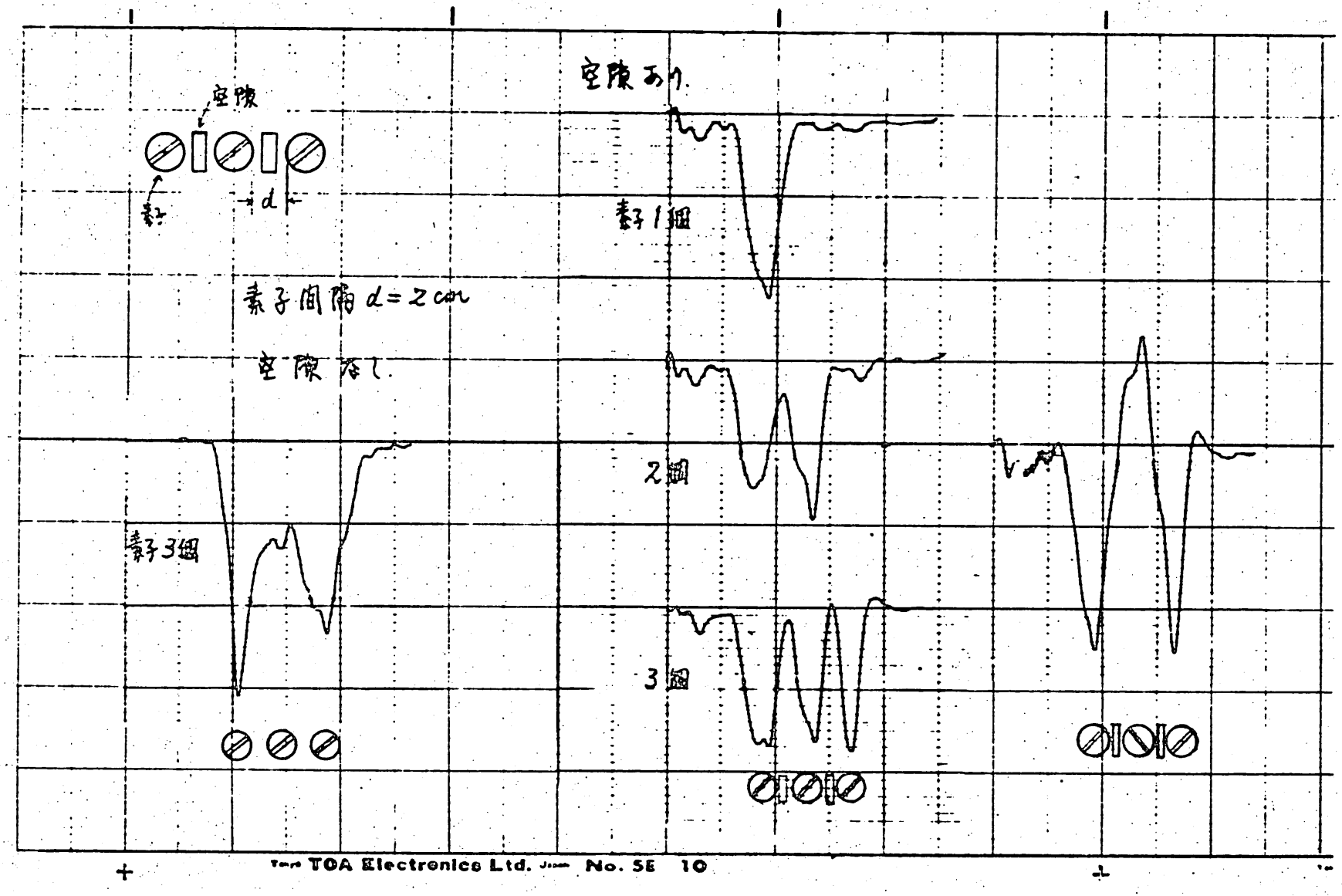

空隙
素子
d
素子間隔 d=2cm
空隙なし
素子3個
空隙あり
素子1個
2個
3個
TOA Electronics Ltd. No. SE 10

図11

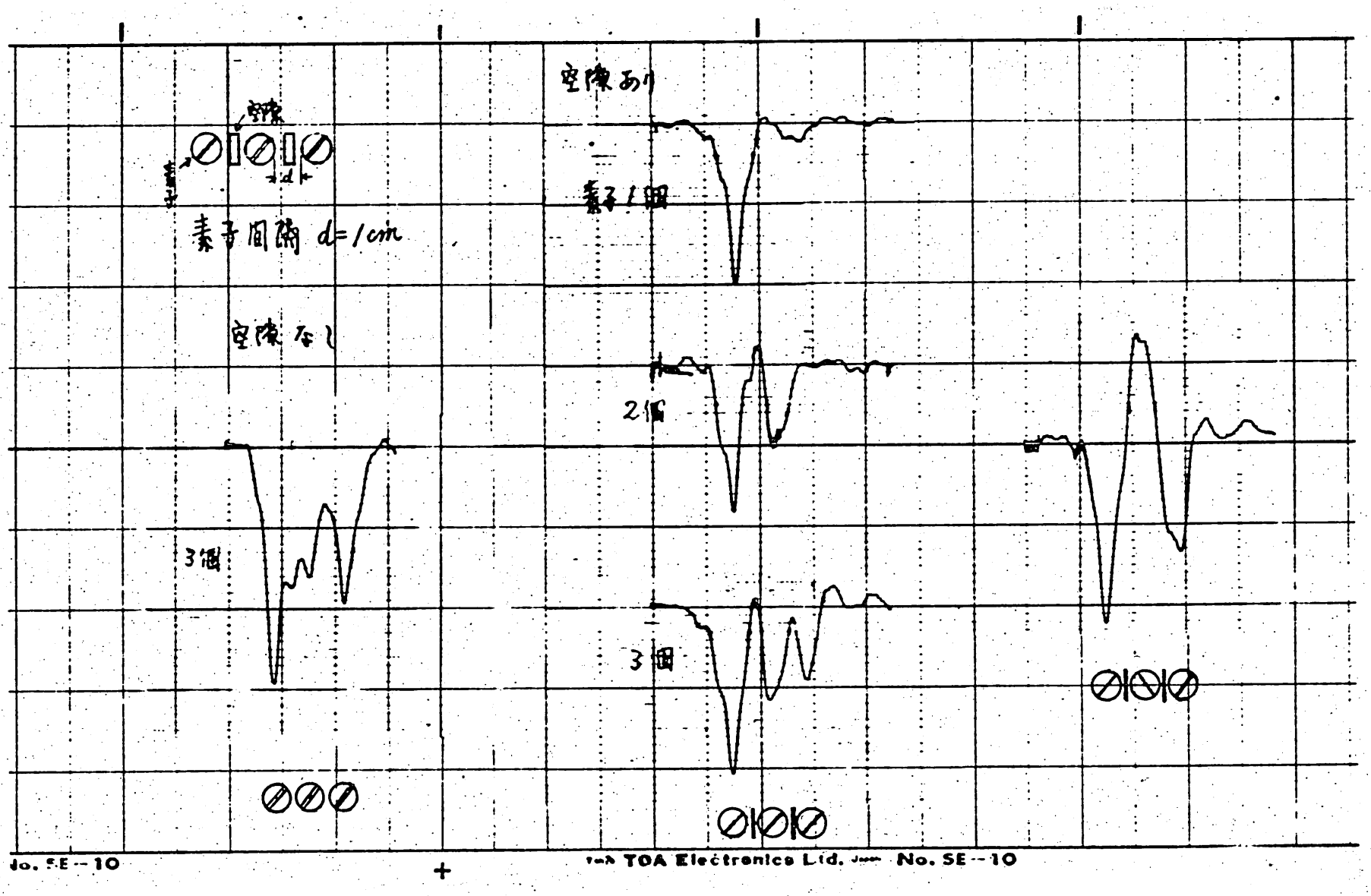

空隙
素子間隔 d=1cm
空隙なし
3個
空隙あり
素子1個
2個
3個
No. SE-10
TOA Electronics Ltd.
No. SE-10

図12

輻射科学研究会資料

無格子間隙による空間電荷波励振
－ Electronic Waveguideとしての取り扱い

裏　　克己

寺　田　正　純

（大阪大学工学部）

1965年7月24日

§諸　言

直流電界の存在しないDrift Tube内での電子ビームの動的特性は，交流成分が十分小さい微小信号領域では，空間電荷波理論で記述される。すなわちビーム中を，電子の平均速度u_0より僅かに速い波と遅い波とが伝播するが，これらの空間電荷波によってビームの動的諸特性を説明するのである。この際各空間電荷波の振巾は間隙条件から決まる。

Drift Tube中では無数の空間電荷波が存在し得るが，大抵の解析では，最低次のモードのみが考慮されている。　無格子間隙を通過したビームに含まれる一般の空間電荷波の振巾について解析したのはBeckである。[1] 彼は

$$u = \sum_n u_n \ , \quad 0 = \sum_n i_n \ , \quad 0 = \sum_n E_{zn} \tag{1}$$

を間隙中央において与え，各空間電荷波の振巾を求めた。ここにuは，この間隙を通過したビームのもつ速度変調の大きさである。[2] 無格子間隙のときには，間隙電界は$-\infty$から$+\infty$まで存在する。このとき，速度変調を計算するために，電界は間隙による電界のみを考慮し，空間電荷界は無視する。勿論間隙電界は，間隙から遠くなるに従って急速に減小するから，間隙の寸法が実効プラズマ波長に比べて十分小さければ，この方法も良好な近似となるわけであろう。

ここで示す新しい方法は，ビームを含んだDrift TubeをElectronic Waveguideと考え，間隙を含むDrift Tube内の界をフーリエ積分表示し，各空間電荷波成分の振巾は単なる留数計算によって求めるもので，着目する成分の振巾が他の成分とは独立に計算できる点に1つの特長がある。Beckのように有限Hankel変換を用いた解析に比べ，計算は著るしく簡単である。

解析は軸対称系で中実ビームについて行うが他の系，例えば2次元系にも容易に拡張できる。仮定として，(i)電子の運動は z 方向のみに限る。(ii)小信巾領域，(iii)非相対論領域を用いる。

§ 2. ビームがDrift Tubeを満しているとき

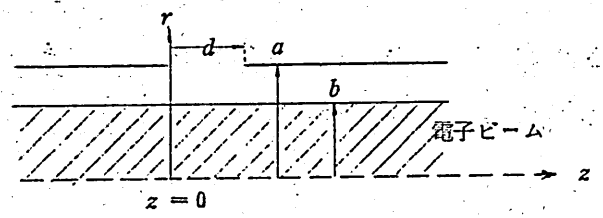


図1　無格子間隙
Drift 半径：a
ビーム半径　：b

図1のように半径 a の Drift Tube が $0 \leqq z \leqq d$ に間隙を持ち，内部をビームが一杯に満している $a = b$ の場合を考える。このときの $E_z(r, z)$ は

$$J_0(\lambda_n r/a)e^{\pm\Gamma_n z}, \quad J_0(\lambda_n r/a)e^{-j\beta_e z \pm j\beta_{qn} z} \tag{1}$$

の1次結合で表わされる。ここで

$$\left.\begin{aligned} & J_0(\lambda_n) = 0 \\ & \lambda_n^2 = (k^2 - \beta_n^2)\, n_{en}^2 a^2, \quad n_{en}^2 = 1 - \left(\frac{\beta_p}{\beta_n - \beta_e}\right)^2 \\ & \beta_n = \begin{cases} \beta_e \pm \beta_{qn} \cdots\cdots \text{空間電荷波} \\ \pm j\Gamma_n \cdots\cdots\cdots \text{Perturbed Cut-off waves} \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\beta_p^2 = \frac{1}{u_0^2} \quad \frac{\eta I_0}{\varepsilon \pi b^2 u_0}$$

電子ビームの存在は，実効屈折率 n_{en} を持つ誘電体として表されている。この n_{en} は電子の運動方程式，電流連続方程式から上記のように計算される。

$z \geqq d$ では $e^{+\Gamma_n z}$ の型の波は存在しないから

$$\left.\begin{aligned} E_z(r,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r/a)(A_{+n} e^{-\Gamma_n z} + B_{sn} e^{-i\beta_{sn} z} + B_{fn} e^{-i\beta_{fn} z}) \\ \beta_{sn} &= \beta_e \pm \beta_{qn} \\ \beta_{fn} & \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$0 \leqq z \leqq d$ では凡ての型の波が存在して

$$E_z(r,z) = \sum_n J_0(\lambda_n r/a)(C_{+n} e^{-\Gamma_n z} + C_{-n} e^{\Gamma_n z} + D_{sn} e^{-i\beta_{sn} z} + D_{fn} e^{-i\beta_{fn} z}) \quad (4)$$

ところで $z \leqq 0$ では空間電荷波は存在せず次のようになる。

$$E_z(r,z) = \sum_n J_0(\lambda_n r/a) A_{-n} e^{\Gamma_n z} \quad (5)$$

というのは(1)で表わされる各成分は，互に独立に $r = a$ での境界条件を満足しているから，$z \leqq 0$ での成分は，$z = 0$ での条件だけで，その振巾が決定される。ところで $-z$ 方向に伝播する空間電荷波は存在しないから，結局 $z < 0$ では空間電荷波は存在せず(5)式が成立する。しかし，これは $z = 0$ での速度変調分，密度変調が零であることを意味するのではない。各モードについて

$$J_z = -j\omega\varepsilon \left(\frac{\beta_p}{\beta - \beta_e}\right)^2 E_z, \quad v = \frac{\eta E_z}{j u_0 (\beta - \beta_e)} \quad (6)$$

が成立している。これはcut－off波（ビームの存在によって摂動を受けているが）についても成立し，$z=0$でもそれらの総和は一般には零でない。もっともcut－off波のβは虚であるので，その$\beta-\beta_e$は空間電荷波に対するものに比べてはるかに大きく，従ってcut－off波のJ_z，vも，$z>0$では空間電荷波に附随するそれらに比べてはるかに小さい。

問題は間隙条件すなわち$r=a$における$E_z(r,z)$分布を与えたときに，各モード振巾を決定することである。間隙条件としてよく用いられるのは

$$E_z(a,z)=\begin{cases}0 & , \quad z<0\ ,\ z>d \\ -\dfrac{V}{d} & , \quad 0\leqq z\leqq d\end{cases} \tag{7}$$

である。[2] 他の分布例えば逆平方根分布をとっても以下の解析の筋道を変えることなく，(7)を仮定して得られた結果において，単なる置換を行うだけで対応する結果が得られる。また$\beta_e d<1$ならば空間電荷波の励振振巾は間隙条件のとり方には余り関係しないことが知られている。

さて$E_z(r,z)$のフーリエ変換を$e(r,\beta)$と書く。

$$e(r,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}E_z(r,z)e^{j\beta z}dz \tag{8}$$

(7)式を用いると

$$e(a,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^d\frac{-V}{d}e^{i\beta z}dz=-\frac{V}{\sqrt{2\pi}}e^{i\theta/2}\frac{\sin\theta/2}{\theta/2} \tag{9}$$

$$\theta=\beta d$$

一方$E_z(r,z)$はMaxwell方程式を満足するから

$$\left.\begin{aligned}e(r,\beta)&=A(\beta)\ J_0(\lambda r/a)\\ \lambda^2&=(k^2-\beta^2)n_e^2a^2\end{aligned}\right\}\text{----} \tag{10}$$

(9)式と(10)式とから

$$e(r,\beta)=e(a,\beta)\ \frac{J_0(\lambda r/a)}{J_0(\lambda)} \tag{11}$$

$e(r,\beta)$ の逆変換をとると

$$E_z(r,z)=\lim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C_N,C_N'} e(r,\beta)e^{-j\beta z}d\beta \tag{12}$$

ここで C_N , C_N' は図2のようにとる。無数の空間電荷波が存在することに対応して図2において $\beta=\beta_e$ の近傍に極が無数に存在し，その極は $\beta=\beta_e$ に集積する。その内で $\beta>\beta_e$ での極は遅い空間電荷波，$\beta<\beta_e$ は速い空間電荷波，$\beta=\pm j\Gamma_n$ は cut－off 波に対応する。

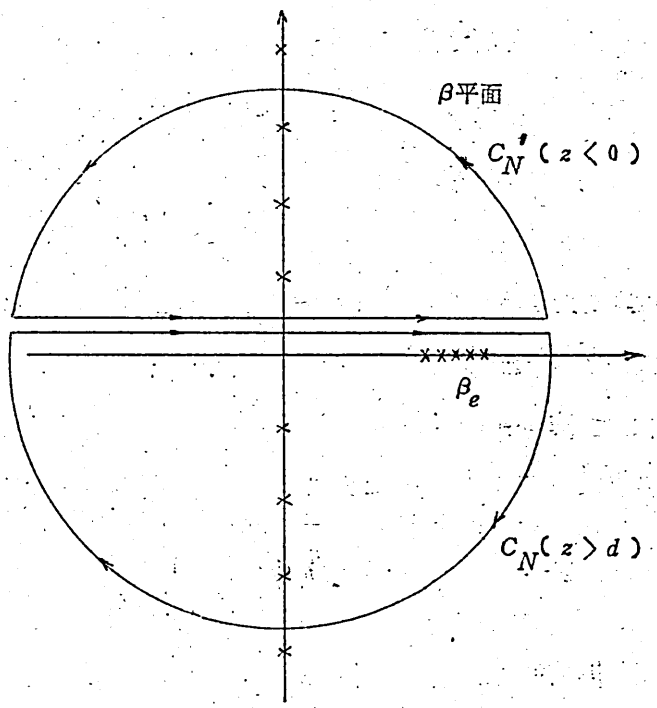


図2　β平面上の積分路
　　×は　$e(r,\beta)$ の極

(12)の積分路 C_N , C_N' の選択はつぎのように $|\beta| \to \infty$ での $e(r,\beta)e^{-j\beta z}$ の振舞から決まる。

$$e(a,\beta)e^{-j\beta z} = \left[\frac{1}{\beta d} e^{j\beta(z-d)} - \frac{1}{\beta d} e^{-j\beta z} \right] \times \mathrm{const}$$

である。いま $j\beta = j(\sigma + j\tau) = j\sigma - \tau$ とおくと

$z > d$ のときは　$\tau < 0$　すなわち　C_N　(13)

$z < 0$　〃　$\tau > 0$　〃　C_N'　(14)

をとればよい。

$$\left.\begin{array}{lll} 0 < z < d \text{ のときは} & e^{-j\beta(z-d)} \text{に対しては} & \tau < 0 \text{ , } \to C_N \\ & e^{-j\beta z} \quad 〃 & \tau > 0 \text{ , } \to C_N' \end{array}\right\} \quad (15)$$

をとればよい。

積分路として(13), (14), (15)をとり留数計算すれば(3), (4), (5)式の形になることは明らかである。注1) 留数計算すれば

$z > d$ に対して $|\beta_n - \beta_e| \ll \beta_e$ として

$$B_{sn} = -B_{fn} = -\sqrt{2\pi} \cdot j e(a,\beta_e) \frac{\lambda_n R_n \beta_p}{J_1(\lambda_n)} \frac{1}{\lambda_n^2 + \beta_e^2 a^2} \quad (16)$$

これで空間電荷波の振巾が決定した。

この結果を用いて Beck の解析を検討すると，Beck の解析は

(注 1.) $\beta = k$ で $e(r,\beta)$ が分岐点を持たないことは (10), (11) 式から明らかである。

$$\beta_{qn}\frac{d}{2} = R_n\ \beta_p\frac{d}{2} \ll 1 \tag{17}$$

のときに良い近似となっていることが証明できる。これは当初に予想した通りとなっている。

(16)式から，各成分の振巾の比を求めて見ると

$$\frac{B_n}{B_1} = \frac{J_1(\lambda_1)}{J_1(\lambda_n)}\ \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^2+\beta_e^2 a^2}{\lambda_n^2+\beta_e^2 a^2}\right)^{3/2} \tag{18}$$

これから成分比は $e(a,\beta)$ すなわち $r=a$ における間隙条件に無関係であることが判る。

§3. 一般の場合

ビーム半径 b が Drift 半径 a よりも小さい一般の場合は，前節の方法をそのまま拡張することによって解が得られる。結果だけ示すと

$z > d$ に対して

$$E_z(r,z) = \sum_n E_{zn}(r,z)$$

$$E_{zn}(r,z) = -\sqrt{2\pi}\cdot j e^{-j\beta_n z}$$

$$\times\begin{cases}\left[I_0(n_e\gamma b)G_{01}(\gamma r,\gamma b)+n_e I_1(n_e\gamma b)G_{00}(\gamma r,\gamma b)\right]_{\beta_n} F_n, & b\leqq r\leqq a\\ \dfrac{1}{\gamma_n b}\ I_0(n_{en}\gamma_n r)\ F_n, & 0\leqq r\leqq b\end{cases} \tag{3,1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma=\sqrt{\beta^2-k^2}\,,\\
&\left[I_0(n_e\gamma b)G_{01}(\gamma a,\gamma b)+n_e I_1(n_e\gamma b)G_{00}(\gamma a,\gamma b)\right]_{\beta=\beta_n}=0\\
&G_{01}(x,y)=I_0(x)K_1(y)+K_0(x)I_1(y)\\
&G_{00}(x,y)=I_0(x)K_0(y)-K_0(x)I_0(y)
\end{aligned}\right\}\quad(3,2)$$

$$F_n=\left\{\frac{n_e\gamma b}{I_1(n_e\gamma b)}\cdot G_{01}(\gamma a,\gamma b)\,c(a,\beta)\right.\quad(3,3)$$

$$\left.\times\left[\beta b\,\frac{1-n_e^2}{\beta-\beta_e}\left(\beta b G_{01}^2(\gamma a,\gamma b)-n_e^2\beta_e b G_{00}^2(\gamma a,\gamma b)\right)+\frac{n_e^2}{\beta}\right]^{-1}\right\}_{\beta=\beta_n}$$

$|\beta-\beta_e|\ll\beta_e$ のとき

$$\left.\begin{aligned}
&F_n=\pm\frac{\lambda_n}{J_1(\lambda_n)}\,\frac{R_n\beta_p G_{01}\,c(a,\beta_e)}{(\lambda_n^2+\beta_e^2b^2)\left(G_{01}^2+G_{00}^2\dfrac{\lambda_n^2}{\beta_e^2b^2}\right)}\\
&R_n=\frac{\beta_e b}{\sqrt{\lambda_n^2+\beta_b^2b^2}}\,,\quad \lambda_n=j\,n_{en}\beta_e b
\end{aligned}\right\}\quad(3,4)$$

(3,4)の±はそれぞれ空間電荷波の遅い波および速い波に対応している。

$$\frac{F_n}{F_1}=\frac{J_0(\lambda_1)}{J_0(\lambda_n)}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_1^2+\beta_e^2b^2}{\lambda_n^2+\beta_e^2b^2}\right)^{3/2}\frac{G_{01}^2\beta_e^2b^2+\lambda_1^2G_{00}^2}{G_{01}^2\beta_e^2b^2+\lambda_n^2G_{00}^2}\quad(3,5)$$

$$G_{01}=G_{01}(\beta_e a,\beta_e b),\quad G_{00}=G_{00}(\beta_e a,\beta_e b)$$

この場合も成分比F_n/F_1は間隙条件に無関係である。$|F_n/F_1|$の漸近値を求めると

〔a/b ＝一定，$\beta_e b \to 0$ のとき〕

$$\frac{F_n}{F_1} \to \frac{J_0(\lambda_1)}{J_0(\lambda_n)} \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \frac{1+\lambda_1^2(\ln a/b)^2}{1+\lambda_n^2(\ln a/b)^2} \qquad (3,6)$$

〔$\beta_e a$ ＝一定，　$\beta_e b \to 0$ のとき〕

$$\frac{F_n}{F_1} \to \frac{J_0(\lambda_1)}{J_0(\lambda_n)} \frac{\lambda_1^3}{\lambda_n^3} \to 0 \qquad (3,7)$$

〔$a = b$，　$\beta_e b \to 0$ のとき〕

$$\frac{F_n}{F_1} \to \frac{J_1(\lambda_1)}{J_1(\lambda_n)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2 \neq 0 \qquad (3,8)$$

図3に$|F_n/F_1|$を示す。この図あるいは(3，6)～(3，8)から次の事実が引き出せる。

すなわち空間電荷波理論において最低次モードのみを考慮することは，ただビームが細い($\beta_e b \to 0$)だけでなく$a/b \gg 1$でなければならない。

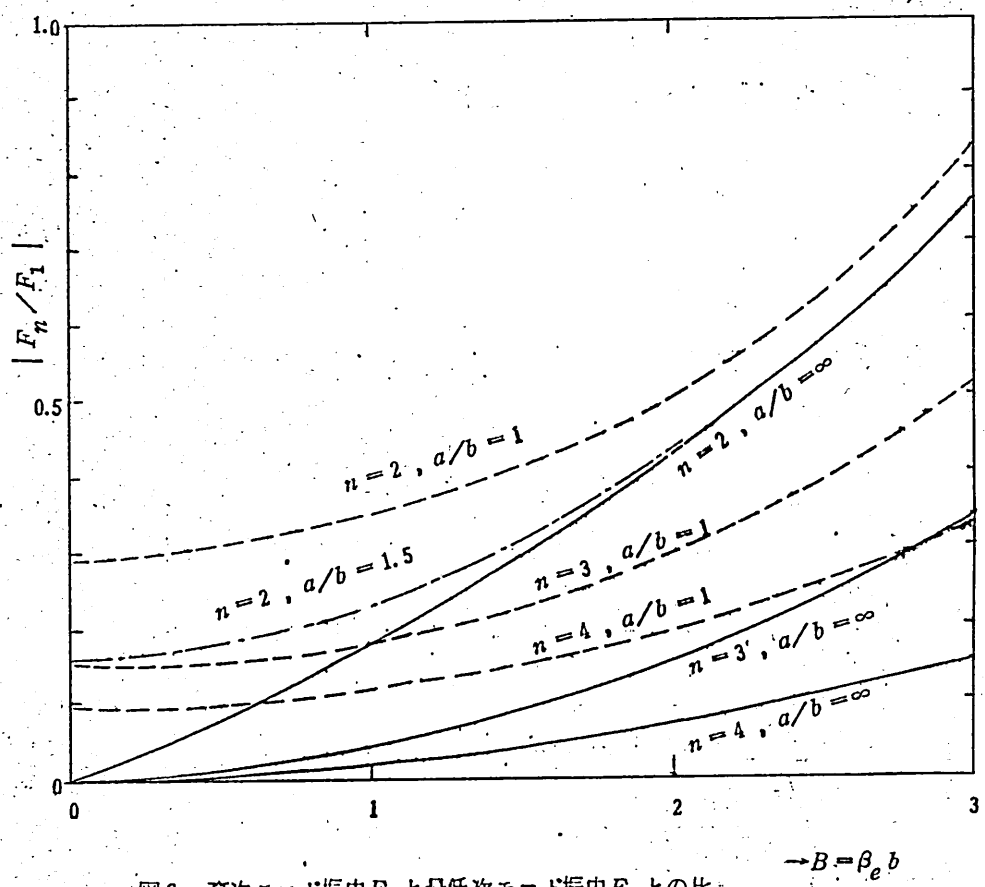


図3　高次モード振巾F_nと最低次モード振巾F_1との比

§ 4.　ビーム負荷の計算

ビームに速度変調を与えるためには，一般に電力を必要とする。これによる負荷効果をビーム負荷と呼んでいる。これを計算するには，従来からも，2，3の方法があった。[2),3),4)]ここでは空間電荷波が運ぶエネルギからビームに与られねばならない電力を計算する。この際空間電荷波の遅い波は負のエネルギーを運び速い波では正のエネルギを運ぶので，その和を計算するとき

には諸量を $R_n \beta_p / \beta_e$ の L 次微小量まで計算しておく必要がある。

ビームによって運ばれるエネルギは

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\int (E_r H_\theta^* + U J^*) dS \\ U &= -\frac{v_0 v_1}{\eta} = -\frac{E_z}{j(\beta-\beta_e)} \end{aligned}\right\} \quad (4,1)$$

で与えられる。

§ 3.の結果を用いて(4,1)の積分を計算するとビーム負荷(コンダクタンス分)は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{G}{G_0} &= \sum_n \frac{G_n}{G_0} \\ \frac{G_n}{G_0} &= \frac{\lambda_n^{02} R_n^4 \mu^2}{B^4 (B^2 G_{01}^2 + \lambda_n^{02} G_{00}^2)} (2 - 2\theta_e \mu^1/\mu + 2X_n + P_n) \end{aligned}\right\} \quad (4,2)$$

$$\mu = \frac{\sin\theta/2}{\theta/2}, \quad \mu' = \frac{d\mu}{d\theta}, \quad B = \beta_e b, \quad A = \beta_e a \quad (4,3)$$

$$\begin{aligned} r_n X_n = -3x_n + \frac{1}{B^2 G_{01}^2 + \lambda_n^{02} G_{00}^2} \Big[-2 \frac{\lambda_n^1}{\lambda_n^0} B^2 G_{01}^2 + r_n \{ B^2 G_{01}^2 \\ + A(\beta^2 G_{01} G_{11} + \lambda_n^{02} G_{10} G_{00}) - B G_{01} G_{00} (\lambda_n^{02} + B^2) \\ - \frac{\lambda_n^{02}}{B^2} R_n^2 \} \Big] \end{aligned} \quad (4,4)$$

$$r_n P_n = 3x_n + \frac{B^2 G_{01}^2}{B^2 G_{01}^2 + \lambda_n^{02} G_{00}^2} \Big[2 \frac{\lambda\lambda_n^1}{\lambda_n^0} \frac{\lambda_n^0}{B} \frac{G_{00}}{G_{01}}$$

$$+ r_n \left(\frac{\lambda_n^0}{B}\right)^2 \frac{G_{00}^2}{G_{01}^2}\left(1+\frac{R_n^2}{B^2 G_{00}^2}\right)\Bigg] \qquad (4,5)$$

$$x_n = r_n \frac{\lambda_n^{02}}{\lambda_n^{02}+B^2}\left\{1+G_{00}^2(\lambda_n^{02}+B^2)\right\}(B^2 G_{01}^2+\lambda_n^{02} G_{00}^2)^{-1} \qquad (4,6)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\lambda_n^1}{\lambda_n^0} = r_n - \frac{x_n}{1-R_n^2}, \quad J_0(\lambda_n^0) = \frac{\lambda_n^0}{B} J_1(\lambda_n^0)\frac{G_{00}}{G_{01}} \\ &\frac{1}{R_n^2} = \frac{\lambda_n^{02}+B^2}{B^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4,7)$$

$$\beta_n = \beta_e \pm r_n \beta_e + r_n x_n \beta_e \qquad (4,8)$$

（4，3）で与えられるμは平行平板間隙の間隙係数，λ_n^0は固有値λ_nの第1近似値で（4，7）で与えられ，プラズマ低減係数R_nとの間に（4，7）の関係がある。空間電荷波の位相定数の第2近似値は（4，8）で与えられる。正符号は遅い波,負符号は速い波に対応する。（4，8）の右辺第3項は，第2近似値に対応して入って来る。λ_nの第2近似値は$\lambda_n^0+\lambda_n^1$とおいたものである。なお§3の結果の中で（3，4）でなく（3，3）を用いて計算しなければならない。

（4，2）の級数の収斂は速いものではなく，また解析的に総和を求めることは一般の場合には困難であるが，次の特別な場合には簡単な形に表わせる。

〔$\beta_e a = A =$一定，$B = \beta_e b \to 0$のとき〕

$$\left.\frac{G_1}{G_0} \to \frac{\mu^2}{2I_0^2(A)}\left(-\theta_e \mu'/\mu + A\frac{I_1(A)}{I_0(A)}\right)\right\} \qquad (4,9)$$

$$\frac{G_n}{G_0} \to 0 \quad (n \geqq 2)$$

〔$a = b$ のとき〕

$$\frac{G_n}{G_0} = \frac{\lambda_n^{02}}{(\lambda_n^{02}+B^2)^2}\left(4 - 2\theta_e \mu'/\mu - 4\frac{\lambda_n^{02}}{\lambda_n^{02}+B^2}\right) \qquad (4,10)$$

ここで附録に示すように

$$\sum_n \frac{\lambda_n^{02}}{(\lambda_n^{02}+B^2)^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{I_1^2(A)}{I_0^2(A)}\right) \qquad (4,11)$$

$$\sum \frac{\lambda_n^{04}}{(\lambda_n^{02}+B^2)^3} = \frac{1}{8}\left[2 - \frac{I_1^2(A)}{I_0^2(A)} - A\frac{I_1(A)}{I_0(A)}\left(1 - \frac{I_1^2(A)}{I_0^2(A)}\right)\right] \qquad (4,12)$$

を用いると

$$\frac{G}{G_0} = \frac{\mu^2}{2}\left[\left(1 - \frac{I_1^2(A)}{I_0^2(A)}\right)\left(1 - \theta_e \mu'/\mu + A\frac{I_1(A)}{I_0(A)}\right) - 1\right] \qquad (4,13)$$

〔a/b ＝一定，　$\beta_e b \to 0$ のとき〕

$$\frac{G_n}{G_0} \to -2\mu^2 \frac{\theta_e \mu'/\mu}{\lambda_n^{02}(1+\lambda_n^{02} \ln^2 a/b)} \qquad (4,14)$$

附録に示すように

$$\sum \frac{1}{\lambda_n^{02}(1+\lambda_n^{02} \ln^2 a/b)} = \frac{1}{4} \qquad (4,15)$$

であるから

$$\frac{G}{G_0} \to \frac{1}{2}\mu^2(-\theta_e\mu'/\mu) \qquad (4,16)$$

一方空間電荷効果を無視した弾道理論によると[3),4)]

$$\frac{G}{G_0} = \frac{1}{2}\mu^2\left[\frac{I_0^2(B)-I_1^2(B)}{I_0^2(A)}\left(1+A\frac{I_1(A)}{I_0(A)}-\theta_e\mu'/\mu\right)-\frac{I_0^2(B)}{I_0^2(A)}\right] \qquad (4,17)$$

(4, 17)において上記の〔A＝一定，$B\to 0$〕，〔$a=b$〕，〔a/b＝一定 $B\to 0$〕とおくとそれぞれ(4, 9)，(4, 13)，(4, 17)と一致する。このことから一般の場合も(4, 2)は(4, 17)に一致することが予想される。

ところでこの両者が一致すると，一つの困難が生ずる。それは弾道理論では空間電荷効果を無視しているのに，ここでの解析では空間電荷効果が考慮されていることになっている。それにも拘らず両者による結果が一致するのは何故であろうか。少くとも間隙長がプラズマ波長に比べて同程度になればその差が現れても当然であろう。この困難は次のように説明される。

間隙条件は $e(a,\beta_n)$ に集約して表わされている。上で見たようにビームローディングの計算には $e(a,\beta_n)$ が $R_n\beta_p/\beta_e$ の1次微小量の程度まで正確に計算されていなければならない。すなわち間隙における $r=a$ での界分布をこの程度まで正確に与えなければ，ビームローディングは正解に計算できない。ところで間隙長が大きくなりビーム中に電流交流成分が生ずるようになると間隙の $r=a$ での電界はビームが存在しないときの値から異って

来る。この差は，ビーム電流の直流成分あるいは β_p^2 が大きければ大きい程大きくなる。すなわち $r=a$ での界分布は，ビームのないときに比べて β_p の大きさに対応して僅か異って来る。この僅かの差は上述のようにビームローディングの計算値に大きな影響を及ぼすことになる。ところが $e(a,\beta_n)$ を計算するときには，この界分布の僅かの変化を考慮していないので，この節のビームローディングの計算値は空間電荷効果を完全にとり入れたものとは言えない。

しかし $r=a$ での界分布の1次微小量の差がビームローディングには0次量の差となっても，空間電荷波の振巾そのものには1次微小量の差であるから，変調電流などの計算の場合にはそれで十分であろう。

§ むすび

空間電荷波理論はuniformな系を仮定し，系が不連続になる効果は弾道理論を援用して取扱って来た。ここでは弾道理論とは無関係に，電子導波管系における不連続の問題として一貫した界理論を展開したことに意味がある。

文　献

1) A.H.W.Beck : Space - Charge Waves. p.163. Pergamon 1958年,

2) 藤沢；クライストロンの金属網を欠いた中空円筒変調間隙について，信学誌．　1953．11．

E.Feeberg : Note on velocity modulation..Sperry Gyroscope Co. Lab.Rep. No. 5221-1043. Chapt. Ⅲ. 1945. 09

J.H.Fremlin et al : Principle of velocity modulaltni. P,IEEE. 93 - ⅢA, 875, 1946.

3) G.M.Branch : Electron beam coupling in interaction gaps of cylindrical symmetry. IRE Trans. ED - 8 193. (1961)

4) 菅田，寺田，裏：無格子間隙クライストロンの解析，昭34年，電気4学会連大，予稿p. 890. (1959)

5) Erdilyi etal : High Transcendental Functions. 2 72. McGraw - Hill (1953)

6) K.Ura. M.Terada : Field theory on the excitation of longitudinal waves in finite electron beam. ICMCI Tokyo, M-15-2, (1964) Tokyo

附録　本文（4．11），（4．12），（4．15）の級数の和

ベッセル関数の定理から[5]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{J_n(xz)}{J_n(z)} = 2\sum_m \frac{\lambda_m J_n(\lambda_m x)}{(\lambda_m^2 - z^2) J_{n+1}(\lambda_m)}, \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ &J_n(\lambda_m) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

この式において $n=0$ とおき，両辺に x を乗じ x に関して0から1まで積分する。それに直交関係，規格化条件を代入し，$z = jA$ とおくと次式が得られる。

$$1 - \frac{I_1^2(A)}{I_0^2(A)} = 4\sum_m \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + A^2)^2} \tag{2}$$

(2)を A に関して微分すると

$$\sum_m \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + A^2)^3} = -\frac{1}{16A}\left[-\frac{2I_1(A)}{I_0^2(A)}\left\{I_0(A) - \frac{I_1(A)}{A}\right\} + 2\frac{I_1^3(A)}{I_0^3(A)}\right] \tag{3}$$

一方

$$\sum_m \frac{\lambda_m^4}{(\lambda_m^2 + A^2)^3} = \sum_m \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + A^2)^2} - A^2 \sum_m \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + A^2)^3} \tag{4}$$

(2)と(3)を(4)に代入すると

$$\sum_m \frac{\lambda_m^4}{(\lambda_m^2 A^2)^3} = \frac{1}{8}\left[2 - \frac{I_1^2(A)}{I_0^2(A)} - A\frac{I_1(A)}{I_d(A)}\left(1 - \frac{I_1^2(A)}{I_0^2(A)}\right)\right] \tag{5}$$

さらにベッセル関数の定理によると[5)]

$$\left.\begin{aligned} J_n(xz) &= 2\sum_m \frac{\lambda_m^2 J_n(\lambda_m x)\left[\lambda_m J_{n+1}(\lambda_m) J_n(z) - z J_n(\lambda_m) J_{n+1}(z)\right]}{(\lambda_m^2 - z^2)\left[\lambda_m^2 J_n'^2(\lambda_m) + (\lambda_m^2 - z^2) J_n^2(\lambda_m)\right]} \\ \lambda_m J_n'(\lambda_m) &+ C J_n(\lambda_m) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(6)において $z = 0$, $n = 0$ とおき両辺に x を乗じ x に関して 0 から 1 まで積分すると

$$\sum_m \frac{J_1^2(\lambda_m)}{\lambda_m^2 \{ J_1^2(\lambda_m) + J_0^2(\lambda_m) \}} = \frac{1}{4} \quad (7)$$

本文では

$$J_0(\lambda_m^0) = \lambda_m^0 J_1(\lambda_m^0) \ln a/b \quad (8)$$

であるからこれを代入すると

$$\sum_m \frac{1}{\lambda_m^{0\,2}(1 + \lambda_m^{0\,2} \ln^2 a/b)} = \frac{1}{4} \quad (9)$$

輻射科学研究会資料

不等寸法多導体ユニポールアンテナ

武　市　吉　博

(三菱電機株式会社中央研究所)

1965年7月24日

1. 序　言

ユニポールアンテナの広帯域化，多帯域化，小形広帯域化および小形多帯域化の一方法として，寸法を異にするn個（n＝2,3,4…）の放射導体から成る"不等寸法多導体ユニポールアンテナ"を考え，その概念から導かれる諸形式のうち，不等長平行多導体ユニポールアンテナ，不等長円すい状配置多導体ユニポールアンテナおよび不等頂部装荷多導体ユニポールアンテナについて，それらのインピーダンス特性の理論的および実験的研究を行なった。なおこれらの不等寸法多導体ユニポールアンテナにおいては，配列放射導体の間隔が波長に比べて無視し得ない場合、地板に平行な面内で完全な無指向性放射が得られず，無指向性放射パターンに若干のひずみが生じることが予想されるので，放射指向特性についても理論的考察を行なった。

従来この種のアンテナとしては，不等長平行多導体ユニポールアンテナのn＝2の場合に相当の，非対称平行線で構成されるアンテナが，零相系および正相系の電圧および電流の理論によって解析され[1]，テレビジョン受信アンテナの広帯域化に応用されている[2]が，この論文においてはそのような場合を含め，一般にn個の場合の不等寸法多導体ユニポールアンテナについて，各導体の自己インピーダンスおよび各導体間の相互インピーダンスを用いて解析してある。

2. 基礎概念

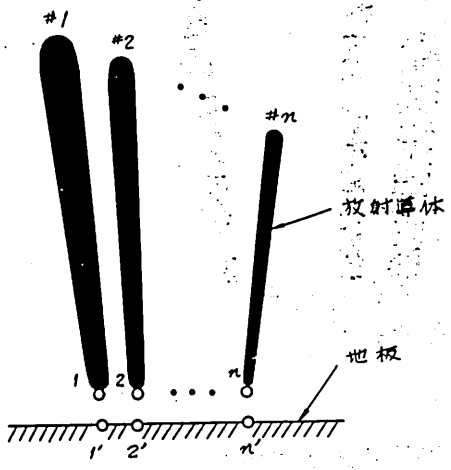


図 1　多導体放射系

一般に図1のような地板上n個の放射導体から成る系において，端子対 $i-i'$ （$i=1,2,\cdots,n$）における電圧を V_i，端子対 $k-k'$（$k=1,2,\cdots,n$）における電流を I_k とすると，それらの間には式(1)が成り立つ。

$$[V_i]=[Z_{ik}][I_k]. \tag{1}$$

ここで $[V_i]$ および $[I_k]$ はn次列ベクトル，$[Z_{ik}]$ はn次正方行列であり，Z_{ik} は $i=k$ のときは自己インピーダンス，$i \neq k$ のときは相互インピーダンスを表わし，いずれも端子対 $i-i'$ あるいは $k-k'$ から見た値である。式(1)から

$$[I_k]=[Y_{ki}][V_i] \tag{2}$$

を得る。ただし

$$Y_{ki}=\frac{\triangle_{ik}}{\triangle} \tag{3}$$

であり，$\triangle$ は $[Z_{ik}]$ の行列式，$\triangle_{ik}$ は $\triangle$ における Z_{ik} の余因数である。

図1において，導体#1ないし#nの横方向の広がりが波長に比べて十

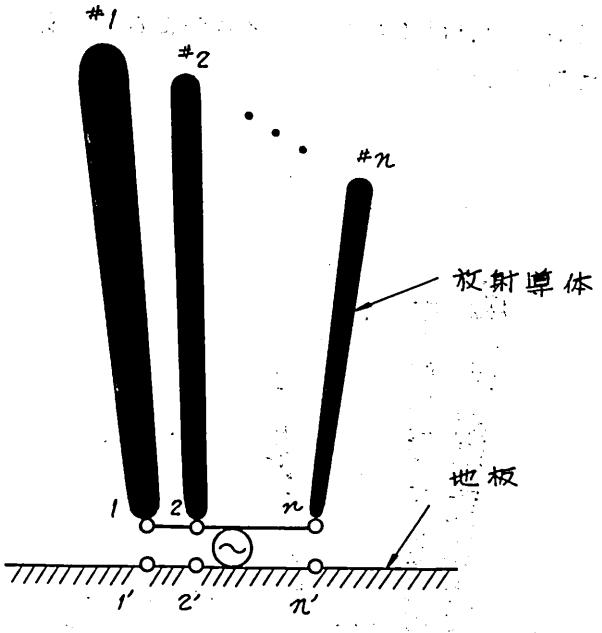


図2　不等寸法多導体ユニポールアンテナ

分に小さいと仮定して，図２のように端子 1, 2,… n を短絡すれば

$$V_1 = V_2 = \cdots = V_i = \cdots = V_n$$

となるから，今

$$V_i = V_o$$

と置けば，式(2)から

$$I_k = V_o \sum_{i=1}^{n} Y_{ki} \tag{4}$$

となる。上式の $\sum_{i=1}^{n} Y_{ki}$ は導体#k の給電点における電流と電圧との比を表わすから，

$$\sum_{i=1}^{n} Y_{ki} = Y_k \tag{5}$$

と置けば

$$I_k = Y_k V_o \tag{6}$$

となる。したがって図２の系を一つのユニポールアンテナと考えたときの給電点アドミタンスＹは

$$Y = \frac{\sum_{k=1}^{n} I_k}{V_o} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \tag{7}$$

となる。

式(7)からわかるように，n個の放射導体の寸法を近接したn周波数で共振するように選べば，共振周波数を異にするn個の有損失共振器を並列接続した回路のような性質を，不等寸法多導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンスＹに期待することができる。

以上の考えから，実用上その用途に適した形状あるいは特性をもつ種々の多導体ユニポールアンテナを導き出すことができる。すなわち線状導体を平行に配列して長さあるいは太さを異にする寸法，線状導体を不平行に配列する方法，板状導体による方法，頂部装荷を施してその装荷量を異にする方法などによるアンテナである。それらのうち，つぎの節においては，代表的なものとして不等長平行多導体ユニポールアンテナを考え，その性質を調べる。

3. 不等長平行多導体ユニポールアンテナ

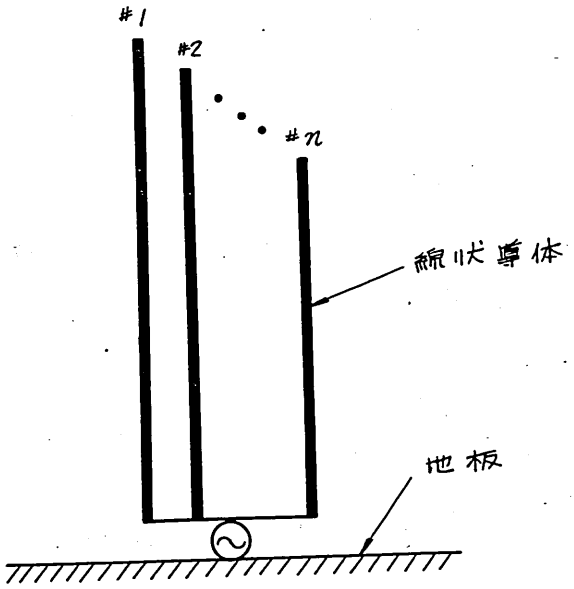


図 3　　不等長平行多導体ユニポールアンテナ

このアンテナは，図3のように，n本（n = 2, 3, 4,…）の線状導体から成り，各導体は太さが等しくてかつ軸方向に一様であるが長さが異なり，それぞれたがいに平行であるものとする。以下においては，線状導体の半径をa，ただし非円形断面の場合は等価半径をa，導体#k の長さをℓ_k，導体#k と#i との間の距離をd_{ki}とし，周波数f_o における自由空間波長をλ_oとして，式(8)の条件のもとに，このアンテナがもつ性質を調べる。

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\lambda_o}{400}, \\ \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \ell_k} &= \frac{\lambda_o}{4}, \\ \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell_2}{\ell_3} = \cdots &= \frac{\ell_k}{\ell_{k+1}} = \cdots = \frac{\ell_{n-1}}{\ell_n} = \tau \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

3.1　インピーダンス特性

図3のアンテナについては，既知のインピーダンスZikの式を用いて，式(3)，(5)および(7)により，そのインピーダンス特性を求めることができる。

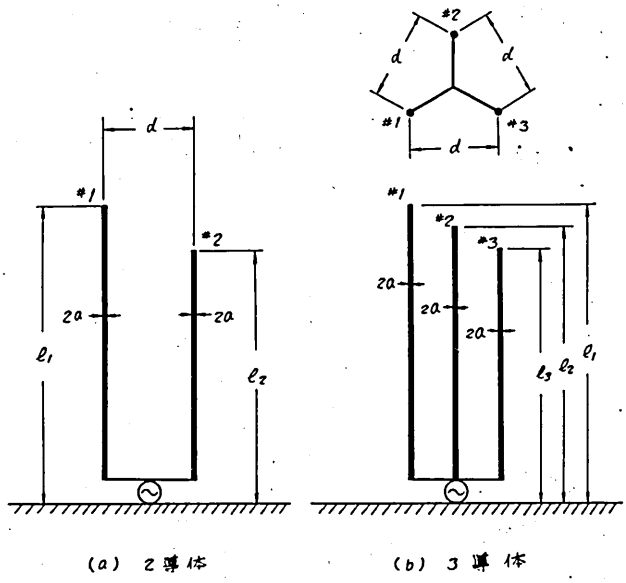
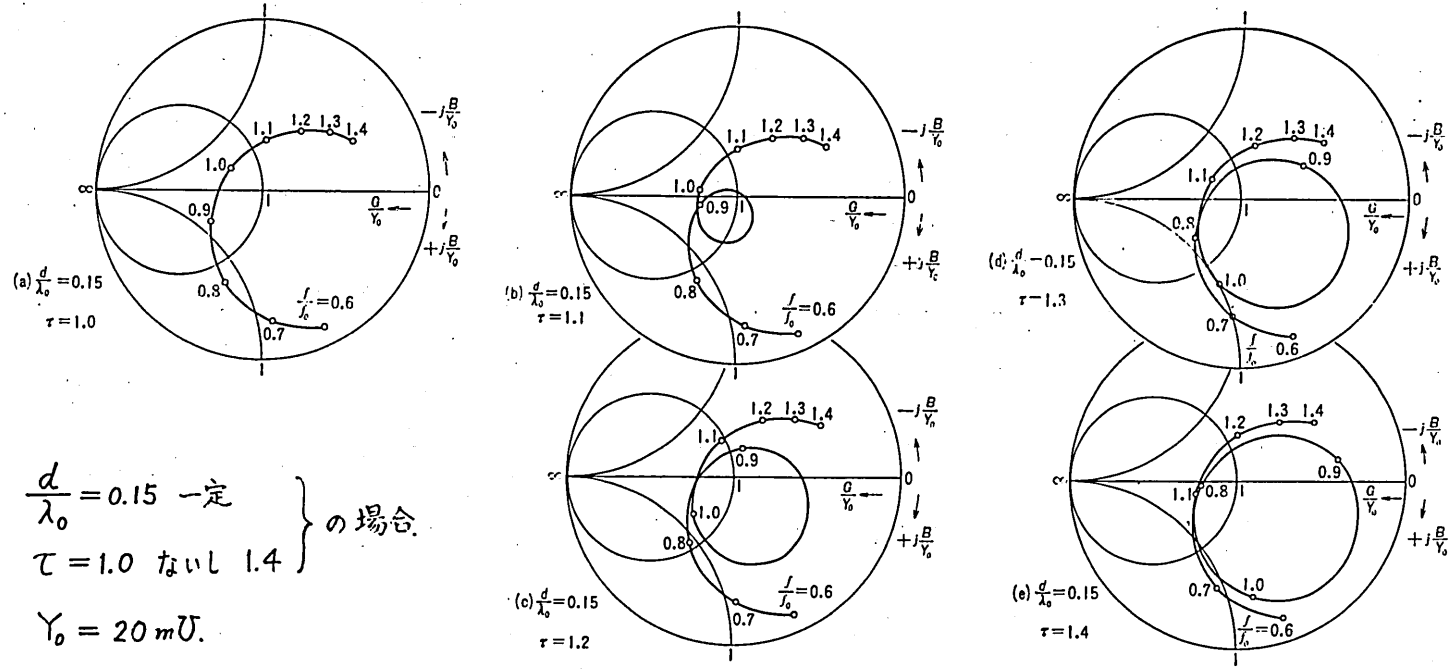


図 4　不等長平行2導体および3導体ユニポールアンテナ

基礎的な特性を知るために，図4に示すようなn＝2および3の場合について，起電力法[(3),(4)]によりZ_{ik}を求め，給電点アドミタンスYの周波数特性を計算した結果のうち，特長がよく現われている代表例を図5ないし8に示す。ただしこれらの図においてf/f_0は相対周波数を表わす。

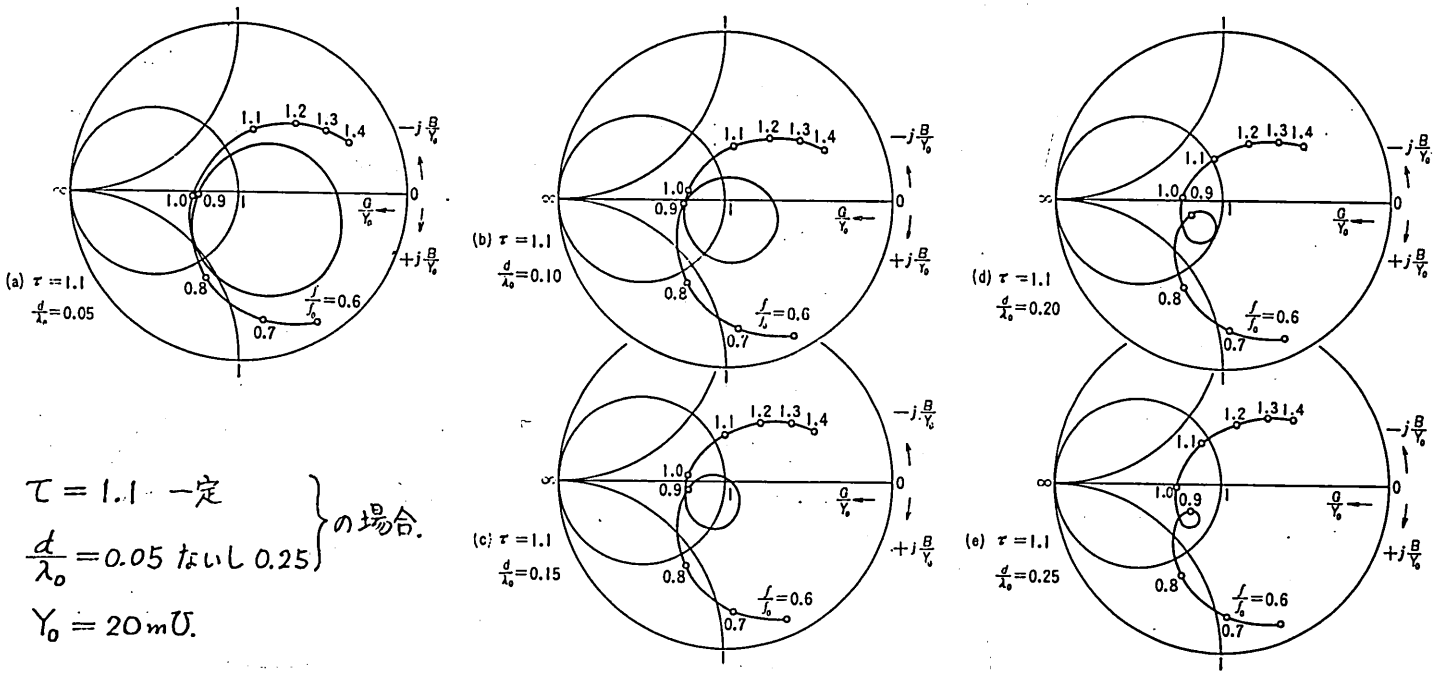
これらの結果からわかるように図4のアンテナは，$\tau=1$のときには単一導体ユニポールアンテナと同様の周波数特性を呈するが，$\tau \neq 1$のときにはスミスチャート上のアドミタンス曲線に（n－1）個のループが周波数f_0の近傍に現われ，同時にその曲線上の$0.6f_0$，$0.7f_0$などの点および$1.3f_0$，$14f_0$などの点が$\tau=1$のときに比べてf_0の点付近に近寄っている。すなわち$\tau \neq 1$とすると給電点アドミタンスに広帯域性が生じる。τの値を次第に大きくして行くとアドミタンス曲線のループ



$\frac{d}{\lambda_0}=0.15$ 一定
$\tau=1.0$ ないし 1.4 } の場合.

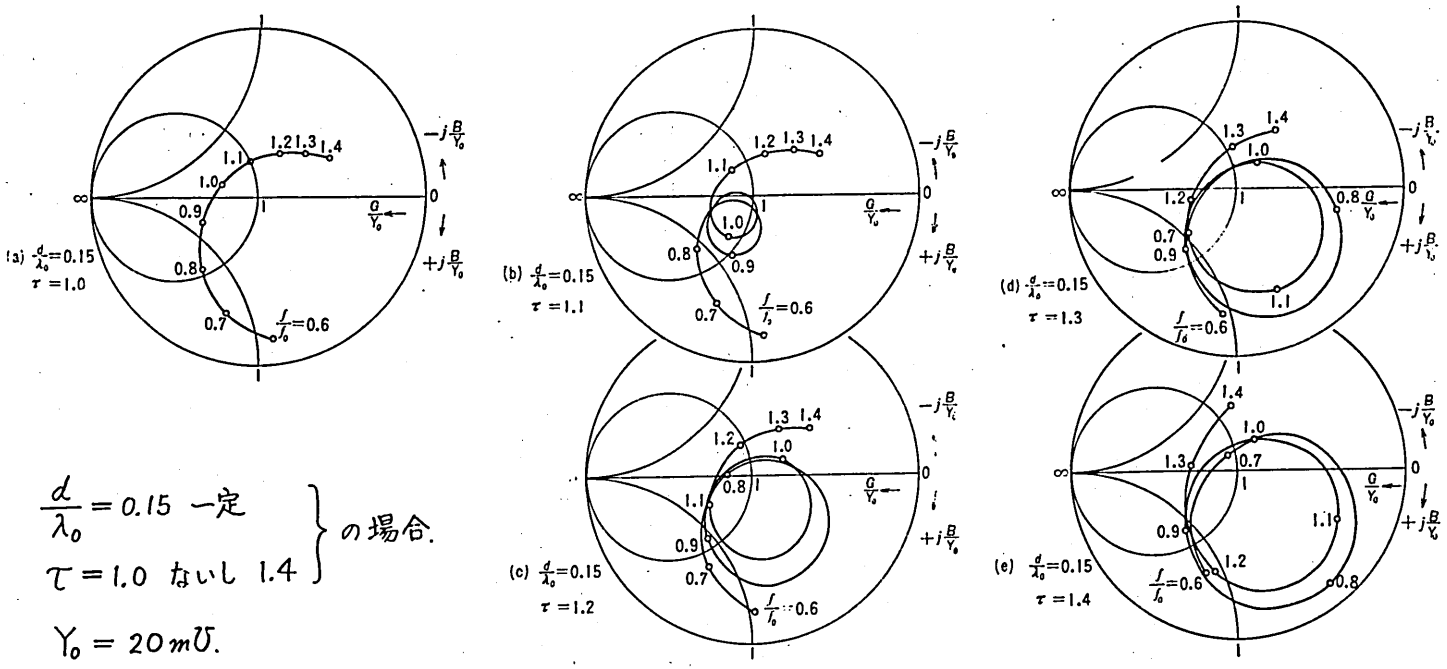
$Y_0=20\,m\mho$.

図 5.　不等長平行２導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンス（計算値）その１



τ = 1.1 一定
d/λ₀ = 0.05 ないし 0.25 } の場合.
Y₀ = 20 m℧.

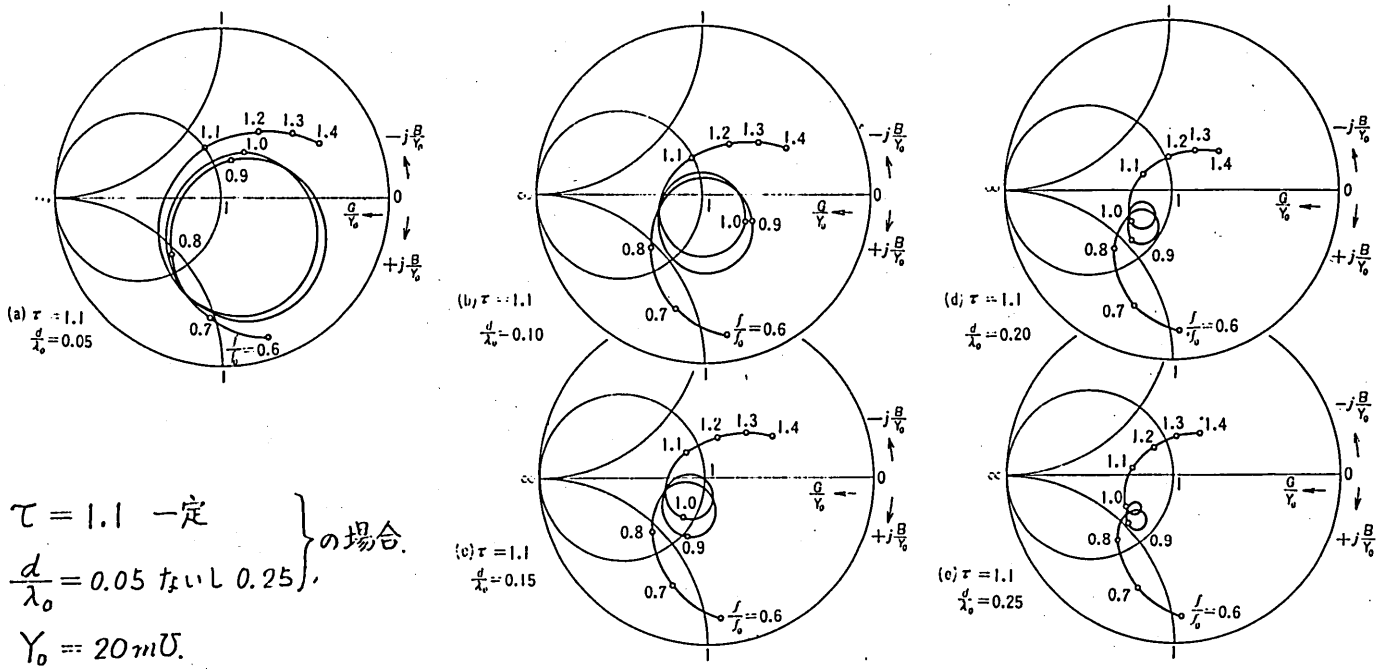
図 6.　不等長平行２導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンス（計算値）その２



$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{\lambda_0}=0.15 \text{ 一定} \\ \tau=1.0 \text{ ないし } 1.4\end{array}\right\}$ の場合.

$Y_0 = 20\,m\mho$.

図 7.　不等長平行 3 導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンス（計算値）その 1



τ = 1.1 一定
d/λ0 = 0.05 ないし 0.25 の場合.
Y0 = 20m℧.

図 8.　不等長平行 3 導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンス（計算値）その 2

の大きさが増してきて，広帯域性というよりもむしろ n 周波数共用が可能な多帯域性が現われてくる。なおこのような性質は d_{ki}によっても大きく影響される。

以上のような理論計算によって求めたアンテナの性質を実験によって確めるために，図 9 のような供試アンテナについてアドミタンス測定を行った結果の代表例を図 10 および 11 に示す。これらの実験結果から，理論によって導き出した性質がそのまま実験によって得られていることがわかる。

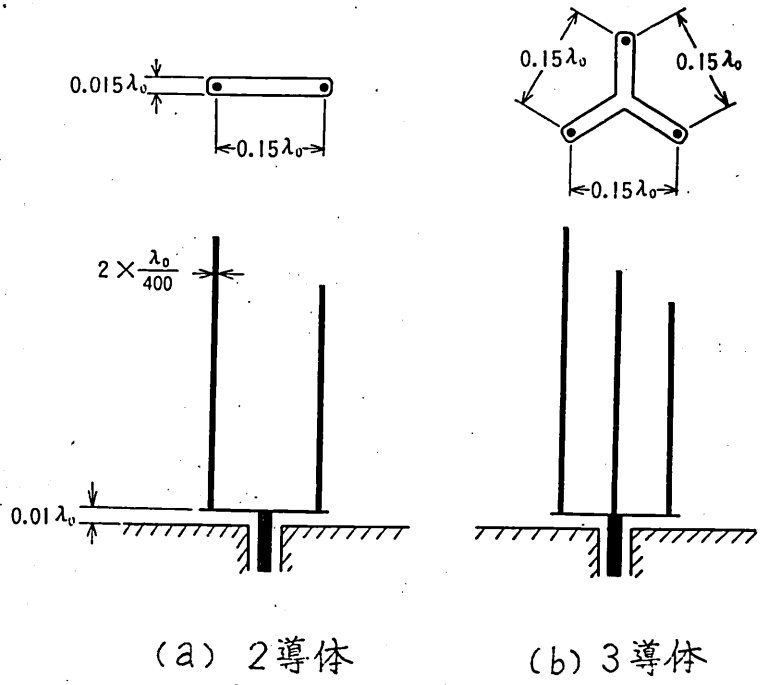


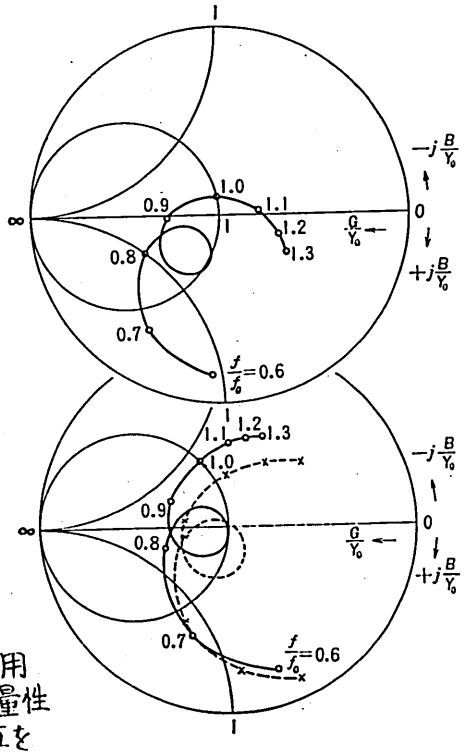
図 9. 供試不等長平行 2 導体および 3 導体ユニポールアンテナ構造

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \ell_k} = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$\tau = 1.1$$

$\tau = 1.1,\ \frac{d}{\lambda_0} = 0.15$ の場合

$Y_0 = 20\,m\mho$



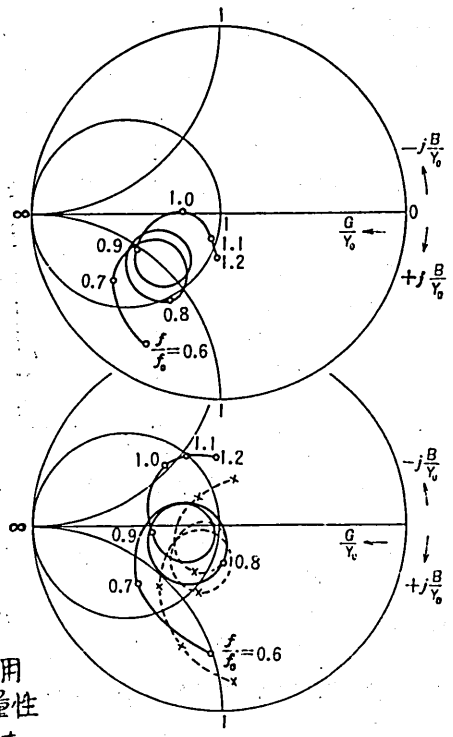
(a) 測定値

(b) アンテナ基部の給電用ストリップが呈する容量性サセプタンスの測定値を(a)の測定値から差引いた補正値(実線)および計算値(破線)

図10. 不等長平行2導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンスの測定値およびそれと計算値との比較

$\tau = 1.1,\ \frac{d}{\lambda_0} = 0.15$ の場合

$Y_0 = 20\,m\mho$



(a) 測定値

(b) アンテナ基部の給電用ストリップが呈する容量性サセプタンスの測定値を(a)の測定値から差引いた補正値(実線)および計算値(破線)

図 11. 不等長平行 3 導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンスの測定値およびそれと計算値との比較

3.2　放射指向特性

無限地板に単一線状導体を垂直に立てて構成したユニポールアンテナからの放射は地板に平行な面内において無指向性であるが，図3のように2本以上の線状導体で構成したユニポールアンテナにおいては，導体間隔が波長に比べて無視し得ないときには，無指向性パターンに若干のひずみが生じることが予想される。

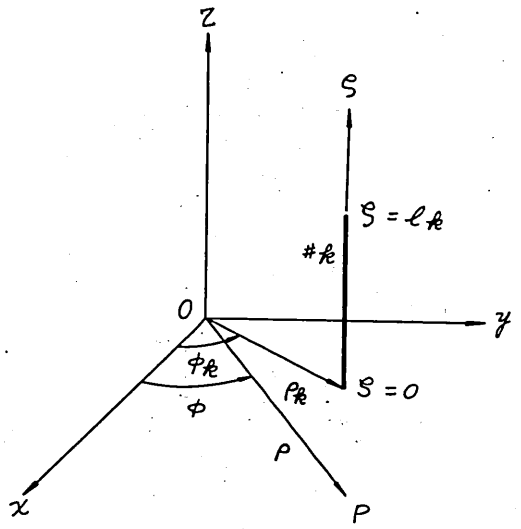


図12　不等長平行多導体ユニポールアンテナの導体#kと座標系

無限地板の面をxy面とし，不等長平行多導体ユニポールアンテナの導体#kの位置を一般に図12のように表わし，影像を含めた線状導体上，すなわち$-\ell_k \leqq \zeta \leqq \ell_k$の間に正弦状電流分布：

$$I_k(\zeta) = I_{km} \sin\beta(\ell_k - |\zeta|) \tag{9}$$

を仮定する。ここでβは自由空間における位相定数である。このときxy面内における導体#kの放射電界E_kは，$\rho \gg \rho_k$で，かつ位相の中心を原点Oにとるという条件のもとに，

$$E_k = j30\beta \frac{e^{-j\beta\{\rho-\rho_k\cos(\phi-\phi_k)\}}}{\rho} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} I_k(\zeta)\,d\zeta$$

$$= j\,60\,I_{km}\,\frac{e^{-j\beta\{\rho-\rho_k\cos(\phi-\phi_k)\}}}{\rho}\,(1-\cos\beta\ell_k) \tag{10}$$

となる。式(9)から得られる関係：

$$I_{km} = \frac{I_k(O)}{\sin\beta\ell_k} \tag{11}$$

を式(10)に代入すれば，

$$E_k = j\,60\,I_k(O)\,\frac{e^{-j\beta\{\rho-\rho_k\cos(\phi-\phi_k)\}}}{\rho}\,\frac{1-\cos\beta\ell_k}{\sin\beta\ell_k} \tag{12}$$

となる。したがって不等長平行多導体の電流 I_1 ，I_2 ，…，I_k ，…，I_n によって生じる x y 面内放射電界 E は

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k = j\,60\,I_1\,\frac{e^{-j\beta\rho}}{\rho}\,\frac{1-\cos\beta\ell_1}{\sin\beta\ell_1}\,D(\phi) \tag{13}$$

で表わすことができる。ここで

$$D(\phi) = \frac{\sum_{k=1}^{n} I_k\,\frac{1-\cos\beta\ell_k}{\sin\beta\ell_k}\,e^{j\beta\rho_k\cos(\phi-\phi_k)}}{I_1\,\frac{1-\cos\beta\ell_1}{\sin\beta\ell_1}} \tag{14}$$

であって，x y 面内放射指向特性を表わす。上式は式(6)により

$$D(\phi) = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k\,\frac{1-\cos\beta\ell_k}{\sin\beta\ell_k}\,e^{j\beta\rho_k\cos(\phi-\phi_k)}}{Y_1\,\frac{1-\cos\beta\ell_1}{\sin\beta\ell_1}} \tag{15}$$

となる。

今，この理論的考察の目的である x y 面内放射電界振幅パターンのひずみがどの程度であるかを知るために，図 13 のように，もっとも簡単な場合として

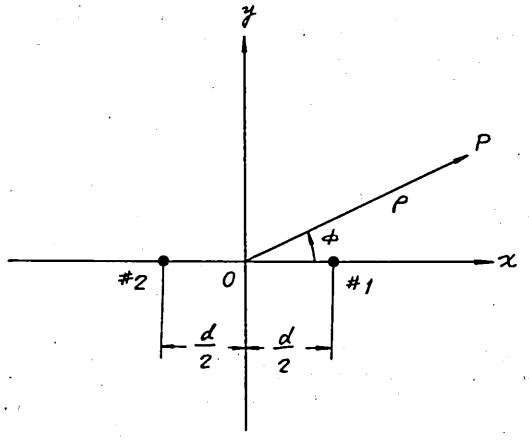


図13　不等長平行2導体ユニポールアンテナのxy面内導体配置

$$n=2,\ \rho_1=\rho_2=\frac{d}{2},\quad \phi_1=0^\circ,\ \phi_2=180^\circ$$

の場合を考える。このとき式(15)は

$$D(\phi)=e^{j\frac{\beta d}{2}\cos\phi}+\frac{Y_2}{Y_1}\,\frac{1-\cos\beta\ell_2}{1-\cos\beta\ell_1}\,\frac{\sin\beta\ell_1}{\sin\beta\ell_2}\,e^{j\frac{\beta d}{2}\cos\phi} \tag{16}$$

となる。上式において

$$\beta d\cos\phi=\Phi \tag{17}$$

$$\frac{Y_2}{Y_1}=M+jN, \tag{18}$$

$$\frac{1-\cos\beta\ell_2}{1-\cos\beta\ell_1}\,\frac{\sin\beta\ell_1}{\sin\beta\ell_2}=L \tag{19}$$

と置き，xy面内放射電界振幅パターンを表わす$|D(\phi)|$を求めると

$$|D(\phi)|=\sqrt{1+L^2(M^2+N^2)+2L(M\cos\Phi+N\sin\Phi)} \tag{20}$$

を得る。

式(20)により，

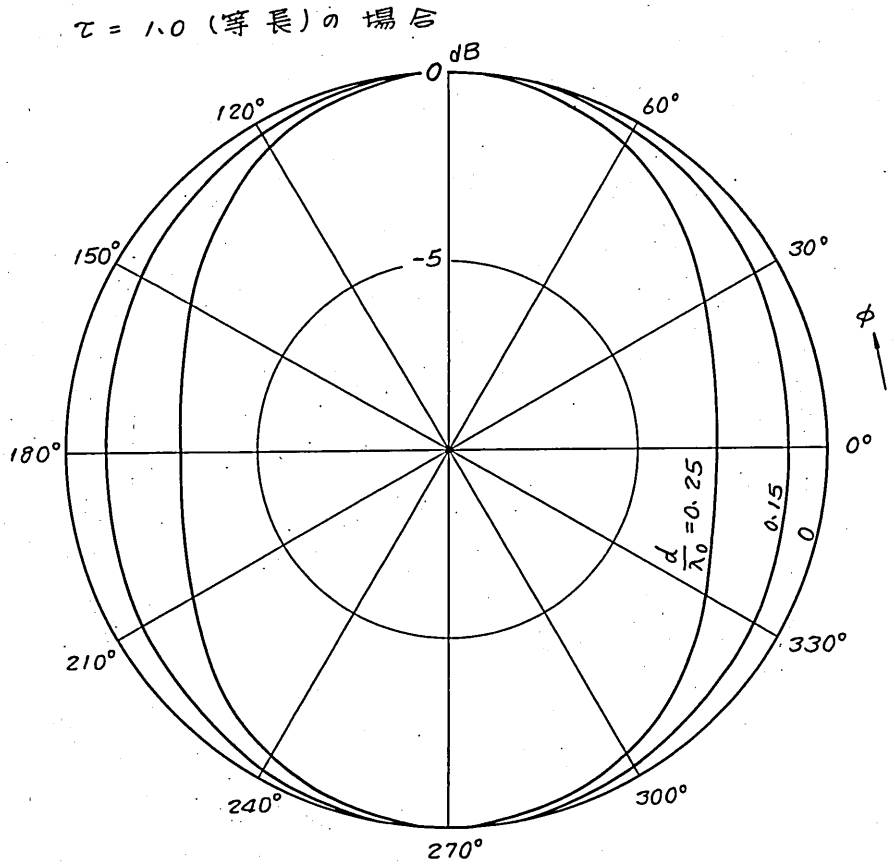


図 14　不等長平行 2 導体ユニポールアンテナの f_0 における
x y 面内放射振幅パターン（計算値）その 1

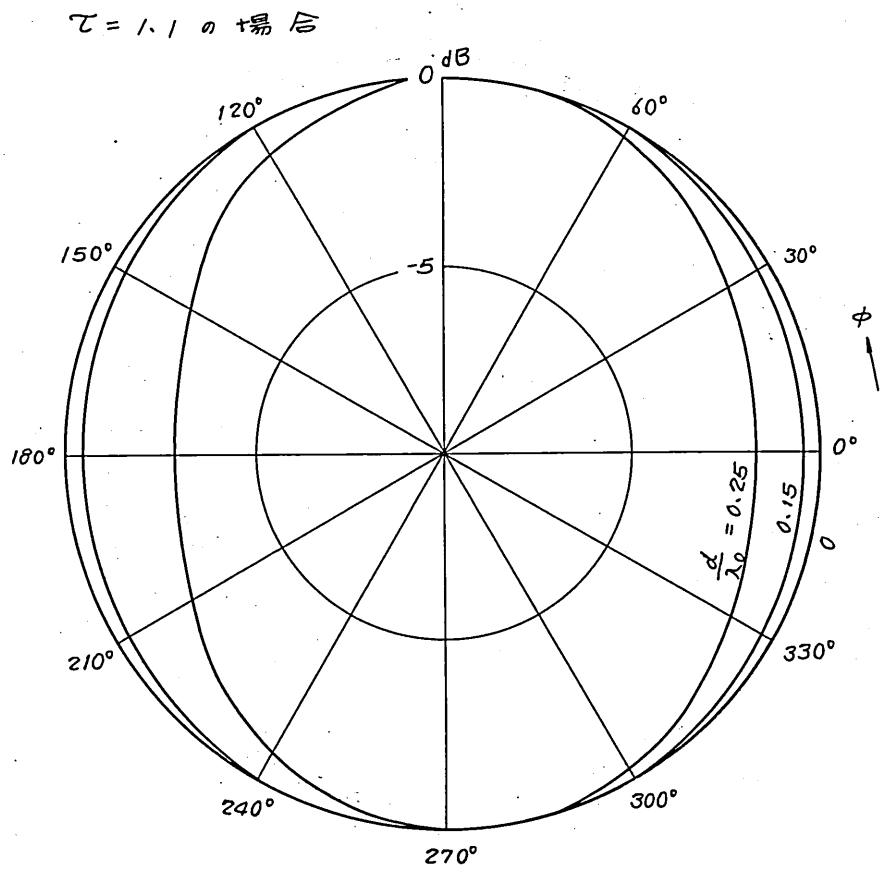


図 15　不等長平行 2 導体ユニポールアンテナの f_0 における
x y 面内放射振幅パターン（計算値）その 2

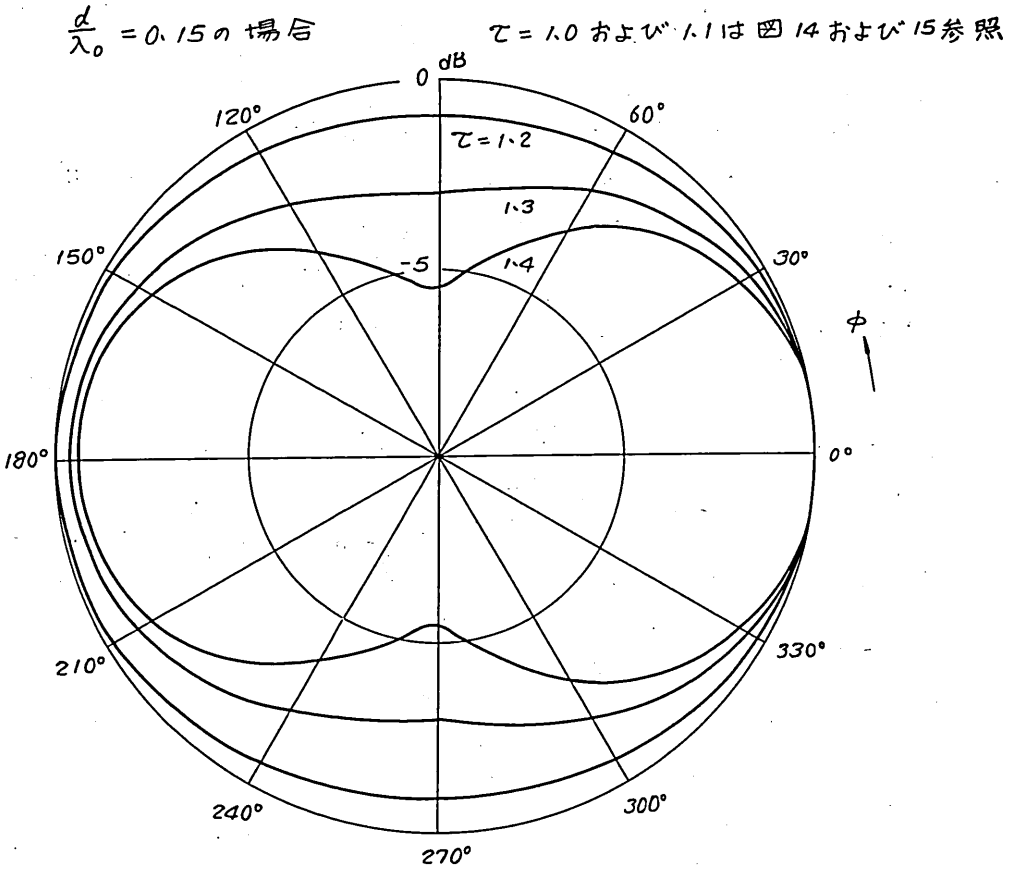


図 16　不等長平行 2 導体ユニポールアンテナの f_0 における
x y 面内放射振幅パターン（計算値）その 3

周波数 f_0 におけるｘｙ面内振幅パターンを計算した結果を図14ないし18に示す。

これらの結果から，不等長平行２導体ユニポールアンテナは，$d/\lambda_0 \leqq 0.15$，$\tau \leqq 1.2$ 程度であれば，f_0 におけるｘｙ面内利得変化は± 0.5 dB以下であって，ｘｙ面内無指向性アンテナとして実用しうることがわかる。

4. 他の不等寸法多導体ユニポールアンテナ

他の不等寸法多導体ユニポールアンテナとして不等長円すい状配置多導体ユニポールアンテナおよび不等頂部装荷多導体ユニポールアンテナを考え，それらのインピーダンス特性についての実験結果を以下に述べる。

4.1 不等長円すい状配置多導体ユニポールアンテナ

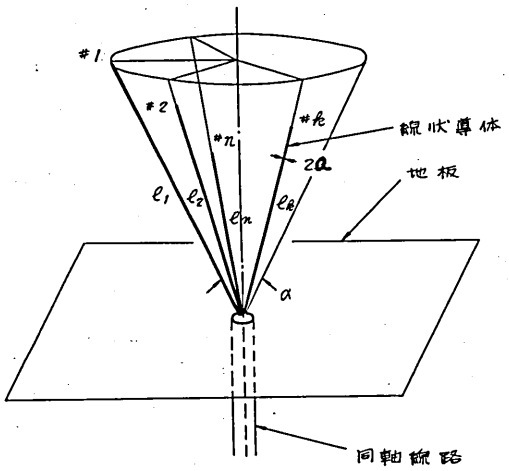


図 17　　不等長円すい状配置多導体ユニポールアンテナ

このアンテナは線状導体を図 17 のように配置したもので，実験においては線状導体の半径および長さの関係は節３におけると同じにした。この場合，アンテナの特性を左右するのは線状導体の長さの比 τ および円すい頂角 α である。n ＝ 2および３の場合について給電点アドミタンスＹの周波数特性を測定した結果の代表例を図 18 ないし 20 に示してある。

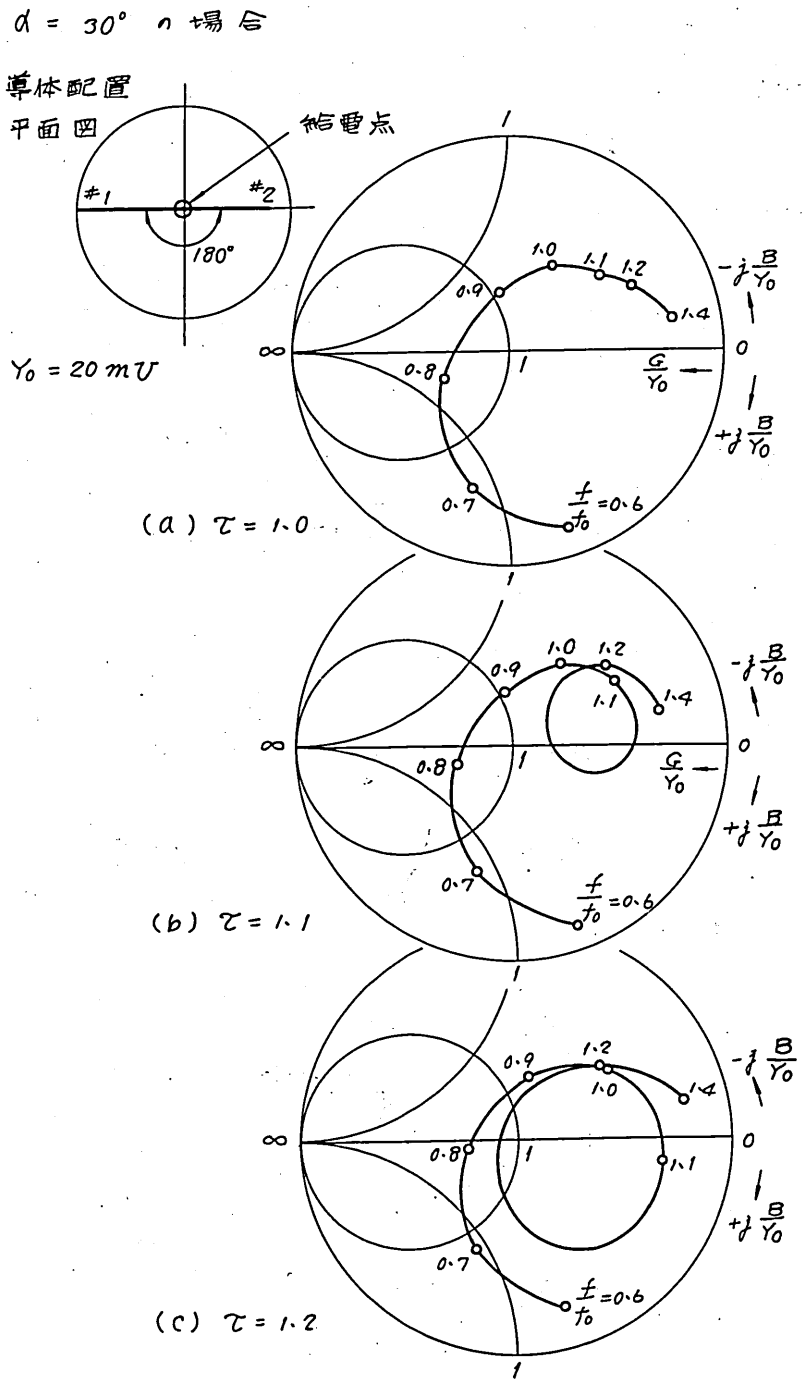


図 18　不等長円すい状配置 2 導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンス（測定値）その 1

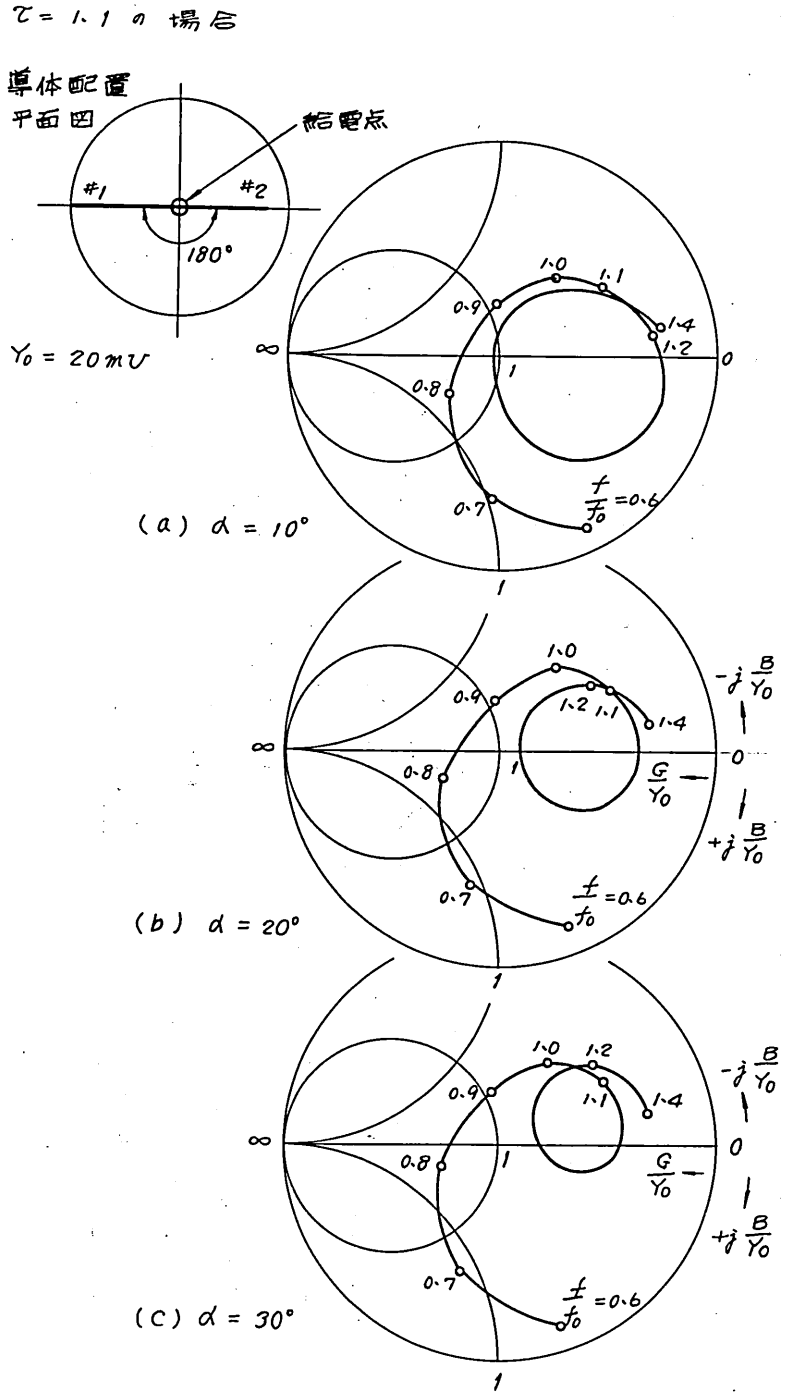


図 19　不等長円すい状配置 2 導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンス（測定値）その 2

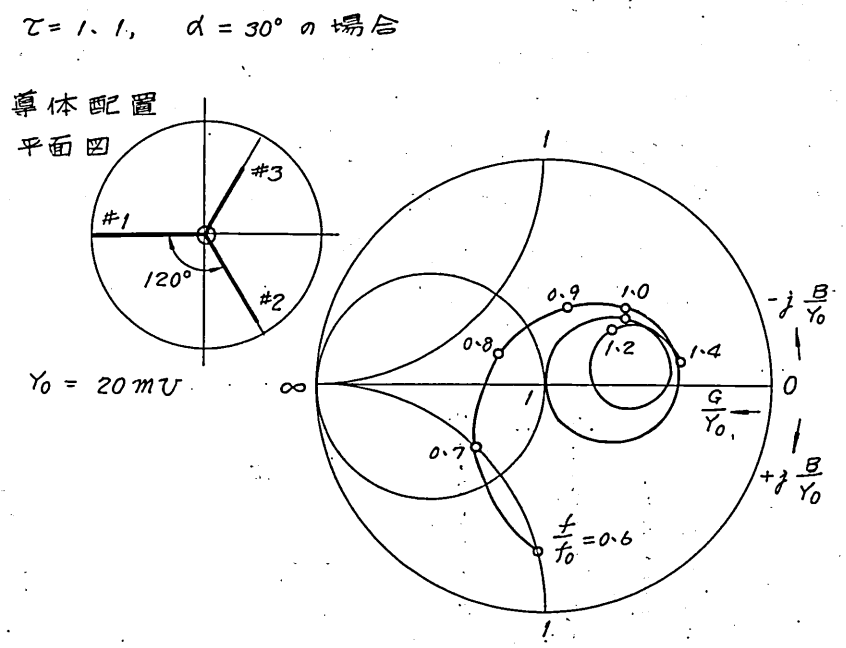


図20　不等長円すい状配置3導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンス（測定値）

これらの結果から，このアンテナにおいても節3で述べたと同様の性質が認められる。ただし，節3の不等長平行多導体ユニポールアンテナではスミスチャート上のアドミタンス曲線の結節点が20mΩあるいはそれよりも高アドミタンス側に生じるのに対し，この節の不等長円すい状配置多導体ユニポールアンテナでは結節点が5ないし10mΒ程度の低アドミタンス側に生じるので，前者が50Ω程度の同軸線路給電のユニポールアンテナとして適しているのに対し，後者は300Ω程度の平行線路給電のダイポールアンテナとしても適している。

4.2　不等頂部装荷ユニポールアンテナ

式(7)におけるY_kに共振特性を与えるためには，線状導体の長さを必ずしも4分の1波長の近傍に選ばなくてもよく，線状導体の長さをそれよりも短くしてたとえば頂部装荷の方法をとることができる。したがって節2で述べた概念によれば，図21のようにそれぞれに頂

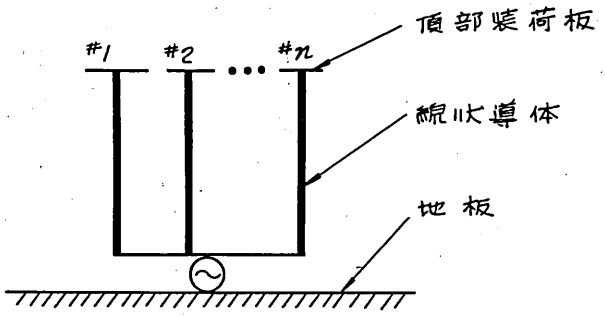
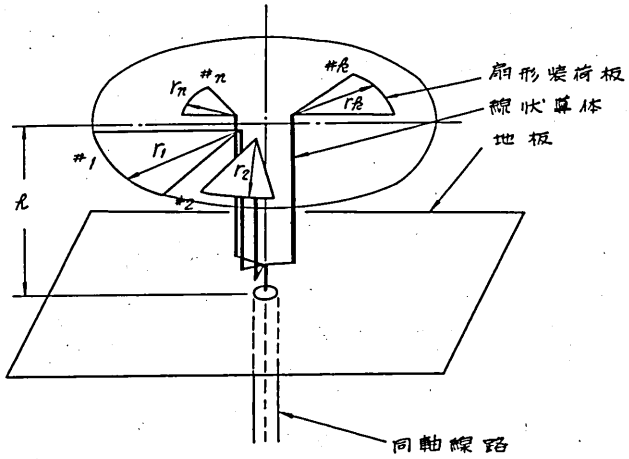


図21　不等頂部装荷多導体ユニポールアンテナ

部装荷を施したn本の等長線状導体でユニポールアンテナを構成して頂部装荷量を違えれば，前述の不等長多導体ユニポールアンテナの特性と同様の特性が得られるはずである。



図－22　不等扇形板装荷多導体ユニポールアンテナ

図22は頂部装荷量を増える手段として扇形装荷板の半径 r_k（k＝1, 2, …, n）を増える方法を示したものである。図22のアンテナの実験結果の一例として，n＝2で半円形装荷板の場合について，

$$a = \frac{\lambda_0}{400}, \quad h = 0.15\,\lambda_0, \quad d = 0.15\,\lambda_0, \quad \sqrt{r_1 r_2} = 0.04\,\lambda_0$$

とし，

$$\tau' = \frac{r_1}{r_2} \tag{21}$$

を変えたときの給電点アドミタンスYの周波数特性を図23に示してある。

$\frac{h}{\lambda_0} = 0.15,\ \frac{d}{\lambda_0} = 0.15\quad \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\lambda_0} = 0.04$ の場合

$Y_0 = 20\ m\mho$

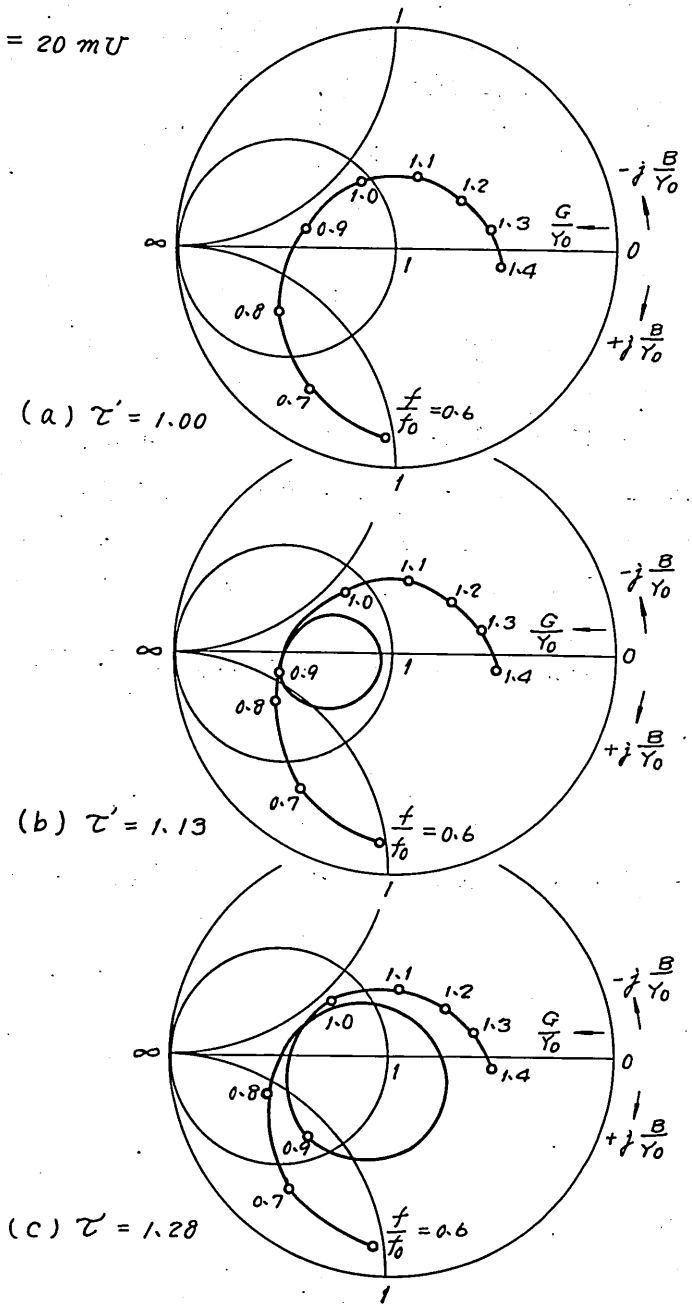


図 23　不等半円形板装荷 2 導体ユニポールアンテナの給電点アドミタンス（測定値）

この結果から，線状導体の長さの代りに頂部装荷板の大きさを違えても，節3で述べたと同様の性質が得られることがわかる。このアンテナは，不等長多導体ユニポールアンテナに比べて，その高さを低くしうる特長があるので，移動体用に適している。

5. 結　言

寸法を異にする2個以上の放射導体から成るユニポールアンテナを考え，その概念から導かれる不等長平行多導体ユニポールアンテナ，不等長円すい状配置多導体ユニポールアンテナ，および不等頂部装荷多導体ユニポールアンテナの性質を解明した。これらのアンテナは，アドミタンス曲線がスミスチャート上で（n－1）個のループをもつという共通の基礎的性質を有するとともに，構成方法の選定によって実用上その用途に適した形状あるいは特性が得られるので，広帯域，多帯域，小形広帯域あるいは小形多帯域アンテナとして有用であると考えられる。なお放射指向特性については，単一線上導体ユニポールアンテナの完全無指向性放射パターンからのひずみの程度を知り得た。

アンテナ研究に当り常にご指導ごべんたついただいている三菱電機株式会社中央研究所高周波機器研究部長喜連川隆博士に深く謝意を表する。なお計算および測定には水沢丕雄氏および小野誠氏の協力を得た。

参考文献

(1) 内田英成，佐藤利三郎，永井淳："非対称平行線で構成される空中線"，信学会アンテナ研専委資，（昭32－10）；昭32信学全大118，（昭32－11）；"平行線によって構成される空中線"，信学誌，41，5，P548，（昭33－05）。

(2) 内田英成，佐藤利三郎，永井淳："広帯域八木空中線"，昭33 信学全大101，（昭33－10）；"テレビジョン受信空中線の広帯域化"，信学会アンテナ研専委資，（昭34－05）。

(3) 内田英成，虫明康人："超短波空中線"，P 89，コロナ社，（昭30－07）。

(4) H. E. King："Mutual impedance of unequal length antennas in echelon"，IRE Trans.，AP－5，3，P 306，(July 1957)。

輻射科学研究会資料

共焦点 Fabry Perot 共振器の微小変形

池上淳一
小倉久直
吉田靖夫
古浜洋治

（京都大学工学部）

1965年7月

目　次

§1　序　論 …… 1
§2　基礎方程式 …… 3
§3　摂動論 …… 6
§4　行列要素 $S_{\alpha\beta}$ …… 10
　§4.1　鏡の傾斜 …… 10
　§4.2　行列要素 $S_{\alpha\beta}$ の計算 …… 11
§5　数値計算 …… 14
　§5.1　パラメタの間の関係 …… 14
　§5.2　±モードの縮退 …… 15
　§5.3　損失 δ_d 数値計算 …… 16
　§5.4　振巾および位相分布 …… 16
§6　Discussion …… 18
参考文献 …… 25

共焦点 Fabry Perot 共振器の微小変形

§1. 序　　論

実用のレーザー共振器は、ほとんど球面反射鏡間の共振を利用する Fabry Perot 共振器であり、平行平面鏡を利用することは、発振させることが困難なために実験程度にとどまっている。平面鏡共振は球面鏡共振よりも輻射損失が大きいというのがその理由のように言われるが、理論的には、平行平面鏡 Fabry Perot 共振器の損失は Fresnel 数を増せばいくらでも小さくできるから、それは正確な議論とはいえないようである。筆者等が昨年報告した研究[1]で明らかになったことは、平行平面共振器では、平面鏡が波長に比して十分小さい、たとえば 1/100 波長程度の傾斜変形が生じて、理想平行配置がくずれたとしても、輻射損失は著しく増大する。つまり平行平面共振は傾斜変形に対し非常に敏感であるということである。このことは平行平面鏡を調節してレーザー発振をさせることが困難であることを示すと同時に、たとえ平面鏡は理想的に平行であっても、レーザーガスの非均質性によって等価的な鏡面の変形を生じて損失が増大する可能性があることを意味している。一方、共焦点球面共振器は、損失が非常に小さいことは理論的にわかっており[2]、しかもレーザー発振は球面共振器のもとでは容易に行なわせ得る。このことは、球面鏡共振器の損失は変形に対して安定あるいは鈍感であることを暗示するが、これは又直観的にも推察されることである。このようなことは Fox Li 流の反復数値計算をやれば確かめられるであろうが、いまだなされてはいない。我々は前に平面鏡共振器の変形の問題を取り扱ったのにひきつづいて、共焦点球面共振器の傾斜変形による損失の変化を理論的に調べた。その結果、予想どおり僅かな傾斜に対しては損失は大きく増加しないことが確かめられた。又同時に Goubau and Schwering[3], Beyer and Scheibe[4] による種々の Beam 波伝送

モードに対する損失もかなり簡単な摂動計算の結果として再び求められた。

共焦点球面共振器の取り扱いは Fox Liによる干渉計理論に基いて摂動計算により行なった。平行平面鏡共振器の場合には、前に紹介したように、cavity pictureによる理論[5]を自然に応用することにより波長以下の程度の変形に対する輻射損失を解析的に簡単な形で求めることができた。しかし共焦点球面共振器の場合には cavity picture は直ちには適用されえない。それは caustic surfaceが球面鏡間の内部に出来て[6]それは鏡の半径が十分大きければ半径には関係がないからである。

§3.にのべるように、以下のような考えに基づいて共焦点球面共振器の傾斜を取り扱う。ここで我々が利用することは、よくしられているLaguerre多項式を含む実数値関数が直交完全系をつくり、かつそれが共焦点配置の球面鏡間の共振を記述すること、および共焦点配置の球面鏡上にくり抜くべき円形球面の中心が、共焦点球面鏡の回転軸をわずかにはなれているならば、それは有限半径の円形共焦点球面を傾斜させることと近似的に等価であることである。このことによって干渉計理論の積分方程式を摂動論によって解いた。この場合我々は(m, n)で指定される固有関数をすべて使わなければならないが、その特別な場合として傾斜のない場合には Goubau and Schwering による $m=0$ の場合および Beyer and Scheibe による $m \geqq 1$ の場合がえられるのである。傾斜のない場合には共振モードは位相分布をもたないが、傾斜のある場合にはモードにはわずかであるが位相分布があらわれる。

ここでのべる計算方法は鏡の曲率が共焦点の場合からわずかに変化した場合、あるいは共焦点配置の鏡が前後した場合にも同様に応用することは可能である。又、空洞理論で取り扱った計算では変形は波長に比べて小さくなければならなかったが、ここではその様な制限はない。

§2. 基礎方程式

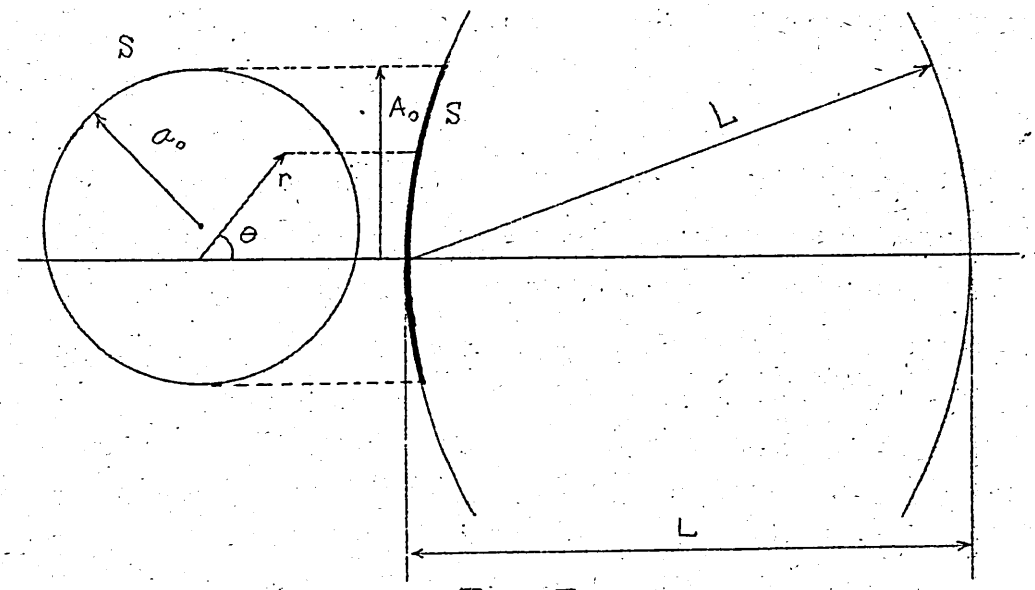
序論にのべたように、スカラー波の場合をよく知られたFox Liの干渉計理論によって取り扱う。曲率Lの2枚の球面鏡を共焦点配置した場合を考える。一方の球面上の開口Sにおける界分布を $u_1(r,\theta)$ とすれば他方の球面上での界分布 $u_2(r',\theta')$ はKirchhoff近似によって次のようにあらわされる。(7)

$$u_2(r'\theta') = \frac{i e^{-ikL}}{\lambda L} \iint_S u_1(r,\theta) e^{ik\frac{rr'}{L}\cos(\theta-\theta')} r\,dr\,d\theta \qquad (2.1)$$

ただし波長λは共振器の寸法に比して十分短く、かつ、

$$\frac{A_0^2}{L\lambda} \ll \left(\frac{L}{A_0}\right)^2, \qquad \frac{A_0}{L} \ll 1 \qquad (2.2)$$

と仮定している。ここで A_0 は開口面（あるいは切りとった鏡面）S上の点の最大動径距離を意味し、これは又 $u_2(r'\theta')$ の r' を考える範囲をもあらわすとする。もしSが球面の回転軸上に中心をもつ円板形ならば、A_0 は円鏡面の半径 a_0 に一致する。



第 1 図

共振状態では2つの球面上で同じ界分布がくりかえされるとして、(2.1)で、

$$u_2(r,\theta) = p\,u_1(r,\theta) \qquad p：定数 \qquad (2.3)$$

とおいて共振条件を記述する方程式がえられるが、これは次のように書き直される。

$$q\,u(x',\theta') = \int_S K(x'\theta'|x\theta)\,u(x,\theta)\,dS \qquad (2.4)$$

ただし、ここでrの代わりに無次元の変数

$$x = r\sqrt{\frac{k}{L}} \qquad (2.5)$$

を用い、

$$u_1(r,\theta) \equiv u(x,\theta) \qquad (2.6)$$

$$q \equiv ipe^{-ikL} \qquad (2.7)$$

$$K(x'\theta'|x\theta) \equiv \frac{1}{2\pi}e^{ixx'\cos(\theta-\theta')} \qquad (2.8)$$

$$dS \equiv x\,dx\,d\theta \qquad (2.9)$$

とおいた。

(2.4)でSを無限領域にとると、

$$q\,u(x'\theta') = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} K(x'\theta'|x\theta)\,u(x\theta)\,d\theta\,x\,dx \qquad (2.10)$$

となるが、このようにSを無限領域にとることは(2.2)の制限によって物理的には許されえない。数学的には(2.10)の固有値問題の解として次のものを採ることができる。

$$u_\nu(r,\theta) = \frac{1}{N_\nu}L_n^m(x^2)\,x^m e^{-\frac{1}{2}x^2}\begin{Bmatrix}\cos m\theta \\ \sin m\theta\end{Bmatrix} \qquad (2.11)$$

$$\nu \equiv (m,n), \qquad m,n = 0,1,2,\cdots\cdots$$

ただしここで $L_n^m(x)$ は Laguerre の陪多項式

$$L_n^m(x) = \sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p!}\binom{n+m}{n-p}x^p \qquad (2.12)$$

であり，N_ν は便宜上規格化のために入れた因子で，

$$N_\nu = \sqrt{\frac{(n+m)!}{\varepsilon_m n!}\pi} \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_m \equiv \begin{cases} 1 & m=0 \\ 2 & m \neq 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

又、u_ν に対応する固有値 g は

$$g_\nu = i^m(-1)^n = e^{i\frac{\pi}{2}(m+2n)} \tag{2.15}$$

で与えられる。したがって（n, m）のあらゆる組合わせに対し固有値は ± 1，$\pm i$ の４種類の値しかとり得ず、無限重に縮退していることがわかる。この事情はもとの積分方程式を極座標でなく直交座標で変数分離する際にもあらわれる。[2]（一般的にいって、同じ固有値方程式を異なる座標系で変数分離ができるならば、実は縮退しているのである。[8]）（2.11）が（2.10）を満たしていることは、（2.8）に対して、

$$e^{ixx'\cos(\theta-\theta')} = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r\, i^r \cos r(\theta-\theta')\, J_r(xx') \tag{2.16}$$

の展開ができること、および（2.11）の動径部分が Hankel 変換の固有関数であること：[9]

$$(-1)^n L_n^m(x'^2)\, x'^m\, e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_0^\infty L_n^m(x^2)\, x^m e^{-\frac{x'^2}{2}} J_m(xx')\, x\,dx \tag{2.17}$$

を用いて直ちに示される。

（2.11）は上にのべた注意によって、すべては物理的に意味をもっているわけではない。比較的低次の m, n に対しては界分布は中心に集中しているために、（2.2）の制限があってもSが広い領域での近似のない基礎方程式の近似的な解になっているとみなすことができるであろうが、我々が利用したいのは、（2.11）が（x, θ）面上で完全直交系をつくるということである。（2.11）は無限重縮退のために共振のモードと呼ぶことはそれほど適当ではないことに注意しよう。

それは（2.11）以外にも同じ積分方程式の固有関数系で完全直交系を

なすものはいくらでもつくれることと、有限円板の半径を無限大にしていくとき、(2.11) が正しい無摂動固有関数（0次近似）になるということが示せないからである。このことは§6のDiscussionで再びふれるが、以下では(2.11)の(m, n)に対応する固有関数を便宜上やはりモードと呼ぶことにしよう。

§3. 摂動論

§2.では、Sが無限領域の場合の方程式(2.10)の解として(2.11)を示した。上にのべたように、(2.11)のすべてのものが物理的に意味をもつわけではないが、(2.2)の制限と両立すると予想される低次の固有関数はSが(2.2)をみたすような有限領域に対する(2.4)の1つの0次近似にとることはできよう。もちろんたしかにそれが言えるかどうかは仮定して得る計算結果によって判定される。そのような場合に、方程式(2.4)の解を摂動論によって求めることにしよう。積分方程式(2.4)に対する摂動論の形式化は通常の量子力学等の場合と多少異なってくるが、原理は同じである。

(2.4)を次のように書なおす。

$$q\,U(x',\theta') = \int K(x'\theta'|x\theta)\,S(x,\theta)\,U(x,\theta)\,dS \qquad (3.1)$$

ただし $U(x,\theta)$ は摂動をうけた求めるべき固有関数を示し、$S(x,\theta)$ は開口面S上で1，その他の処では0となる関数をあらわす。したがって(3.1)の積分領域としては全領域をおおうものとする。摂動は小さいとして q, U を微小パラメタεのベキに展開する。この摂動パラメタは後に(3.6)においてS面による cut のために生ずるものである。

$$q = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + \varepsilon^2 q^{(2)} + \cdots\cdots \qquad (3.2)$$

$$U = U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \cdots\cdots \qquad (3.3)$$

ここで肩の(0), (1), (2)……は摂動の0次，1次，2次……の項を示すものである。0次近似すなわち無摂動状態は縮退しているから、同じ固

有値 $q^{(0)}$ に属する固有関数の和にかかれる。

$$U^{(0)} = \sum_{\alpha} A_\alpha u_\alpha \qquad \alpha : (m, n, \pm) \tag{3.4}$$

添字αはモード$(m, n, \pm)$を指定するものとする。ここで$\pm$は(2.11)における $\cos m\theta$, $\sin m\theta$ を意味する。以下この節では、固有値 $q^{(0)}$ に属する固有関数をα, β 等で固有値 $q^{(0)}$ に属さない固有関数は $\alpha' \beta'$ 等で指定することにしよう。その時 $U^{(1)}$ は $q^{(0)}$ に属さない固有関数で展開される：

$$U^{(1)} = \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} u_{\alpha'} \tag{3.5}$$

$U^{(2)}$ も同様である。次に Su_α, $Su_{\alpha'}$ は次のように展開されるものとする。

$$\left.\begin{aligned} Su_\alpha &= u_\alpha + \varepsilon\left(\sum_{\beta} S_{\alpha\beta} u_\beta + \sum_{\beta'} S_{\alpha\beta'} u_{\beta'}\right) \\ Su_{\alpha'} &= u_{\alpha'} + \varepsilon\left(\sum_{\beta} S_{\alpha'\beta} u_\beta + \sum_{\beta'} S_{\alpha'\beta'} u_{\beta'}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= S_{\beta\alpha} \equiv (\alpha|S|\beta) - \delta_{\alpha\beta} \\ S_{\alpha\beta'} &= S_{\beta'\alpha} \equiv (\alpha'|S|\beta') \\ S_{\alpha'\beta'} &= S_{\beta'\alpha'} \equiv (\alpha|S|\beta') - \delta_{\alpha'\beta'} \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

ここで

$$(\alpha|S|\beta) \equiv \int u_\alpha S u_\beta \, dS = \int_S u_\alpha u_\beta \, dS \tag{3.8}$$

(3.6)は、u_α が<u>Sによって cut されるために摂動が入る</u>ことを示す。

U および Su_α, $Su_{\alpha'}$ の 展開を用いてSUを展開すると、

$$SU = SU^{(0)} + \varepsilon SU^{(1)} + \varepsilon^2 SU^{(2)} + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{\alpha} A_{\alpha} S u_{\alpha} + \varepsilon \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} S u_{\alpha'} + \varepsilon^2 S U^{(2)} + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{\alpha} A_{\alpha} u_{\alpha} + \varepsilon \Big\{ \sum_{\alpha} A_{\alpha} \Big(\sum_{\beta} S_{\alpha\beta} u_{\beta} + \sum_{\beta'} S_{\alpha\beta'} u_{\beta'} \Big) + \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} u_{\alpha'} \Big\}$$

$$+ \varepsilon^2 \Big\{ \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} \Big(\sum_{\beta} S_{\alpha'\beta} u_{\beta} + \sum_{\beta'} S_{\alpha'\beta'} u_{\beta'} \Big) + U^{(2)} \Big\} + \cdots\cdots \qquad (3.9)$$

以上によって、(3.2),(3.3),(3.9)を(3.1)に代入して(2.10)(2.11)を用いεのベキを比較すると、ε^0 の項は(2.10)であってTrivialである。ε^1 の項からは、

$$q^{(0)} \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} u_{\alpha'} + q^{(1)} \sum_{\alpha} A_{\alpha} u_{\alpha} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \Big(q^{(0)} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} u_{\beta} + \sum_{\beta'} q_{\beta'}^{(0)} S_{\alpha\beta'} u_{\beta'} \Big)$$
$$+ \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} q_{\alpha'}^{(0)} u_{\alpha'} \qquad (3.10)$$

ε^2 の項からは、

$$q^{(0)} U^{(2)} + q^{(1)} \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} u_{\alpha'} + q^{(2)} \sum_{\alpha} A_{\alpha} u_{\alpha}$$
$$= \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} \Big(q^{(0)} \sum_{\beta} S_{\alpha'\beta} u_{\beta} + \sum_{\beta'} S_{\alpha'\beta'} q_{\beta'}^{(0)} u_{\beta'} \Big) + \int K U^{(2)} dS \qquad (3.11)$$

がえられる。上式で $U^{(2)}$ を(3.5)の様にあらわに書かなかったのは、以下の手続からもわかるように、$U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, までを求めるためには必要でないからである。

(3.10)の両辺に u_{β} をかけて積分することにより、<u>0次近似(3.4)を決定する連立方程式</u>

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} \big(q^{(1)} \delta_{\alpha\beta} - q^{(0)} S_{\alpha\beta} \big) = 0 \qquad (3.12)$$

をうる。すべての A_{α} が0でないための条件から、<u>1次近似の固有値の摂動 $q^{(1)}$ を決定する永年方程式</u>

$$\big| q^{(1)} \delta_{\alpha\beta} - q^{(0)} S_{\alpha\beta} \big| = 0 \qquad (3.13)$$

がえられる。$q^{(1)}$ が求められれば(3.12)より $U^{(0)}$ の規格化条件と

あわせて A_α を求めることができる。又(3.10)の両辺に $u_{\beta'}$ を乗じて積分すると、$B_{\beta'}$ を求める式が得られ、

$$B_{\beta'} = \frac{q_{\beta'}^{(0)}}{q^{(0)} - q_{\beta'}^{(0)}} \sum_\alpha A_\alpha S_{\alpha\beta'} \tag{3.14}$$

をうる。これによって固有関数の1次摂動(3.5)が求まる：

$$U^{(1)} = \sum_{\beta'} u_{\beta'} \frac{q_{\beta'}^{(0)}}{q^{(0)} - q_{\beta'}^{(0)}} \sum_\alpha A_\alpha S_{\alpha\beta'} \tag{3.15}$$

同様にして、(3.11)の両辺に u_β を乗じて積分すると、

$$q^{(2)} A_\beta = q^{(0)} \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} S_{\alpha'\beta} \tag{3.16}$$

両辺に A_β を乗じて β について加えると $\sum_\alpha A_\alpha^2 = 1$ であるから、固有値の2次摂動 $q^{(2)}$ が求められ、

$$\begin{aligned} q^{(2)} &= q^{(0)} \sum_{\alpha'} B_{\alpha'} \sum_\beta A_\beta S_{\alpha'\beta} \\ &= q^{(0)} \sum_{\alpha'} B_{\alpha'}^2 \frac{q^{(0)} - q_{\alpha'}^{(0)}}{q_{\alpha'}^{(0)}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる。

以上によって、(3.7)で定義される $S_{\alpha\beta}$ が求められるならば、(3.12)～(3.17)によって求める量 $U^{(0)}$, $U^{(1)}$ $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ を計算することができる。しかしながら無摂動方程式の解(2.11)は無限に縮退しているから、永年方程式(3.13)が再び無限次元の行列方程式となって、0次近次を正しく求めることができないという困難が生ずる。ここで再びといったのは、解くべき方程式(3.1)そのものが無限次元の行列方程式と等価であるからである。よく行なわれるように、ある場合には、無限次元行列を有限次元行列の積で近似することにより、永年方程式の根を求めることができるが、そのような近似が許されるためにはかなりの制限がつくことになる。

有限の大きさの鏡に対しては適当なパラメタに対し解は(2.11)の低次の項でよく展開されることがわかっているので[3]、ここでは u_ν とし

て $m, n = 0, 1, 2, 3$ の 16 ケのモードを採る。固有値は4種類あるから固有値の摂動を求めるには 16 次の行列方程式を解く必要はなく、4次の永年方程式 (3, 13) を解けばよい。モード (m, n) の固有値は (2, 15) によって次の表に求められる。

固有値	モード (m, n)			
1	(0.0)	(0.2)	(2.1)	(2.3)
i	(1.0)	(1.2)	(3.1)	(3.3)
-1	(0.1)	(0.3)	(2.0)	(2.2)
$-i$	(1.1)	(1.3)	(3.0)	(3.2)

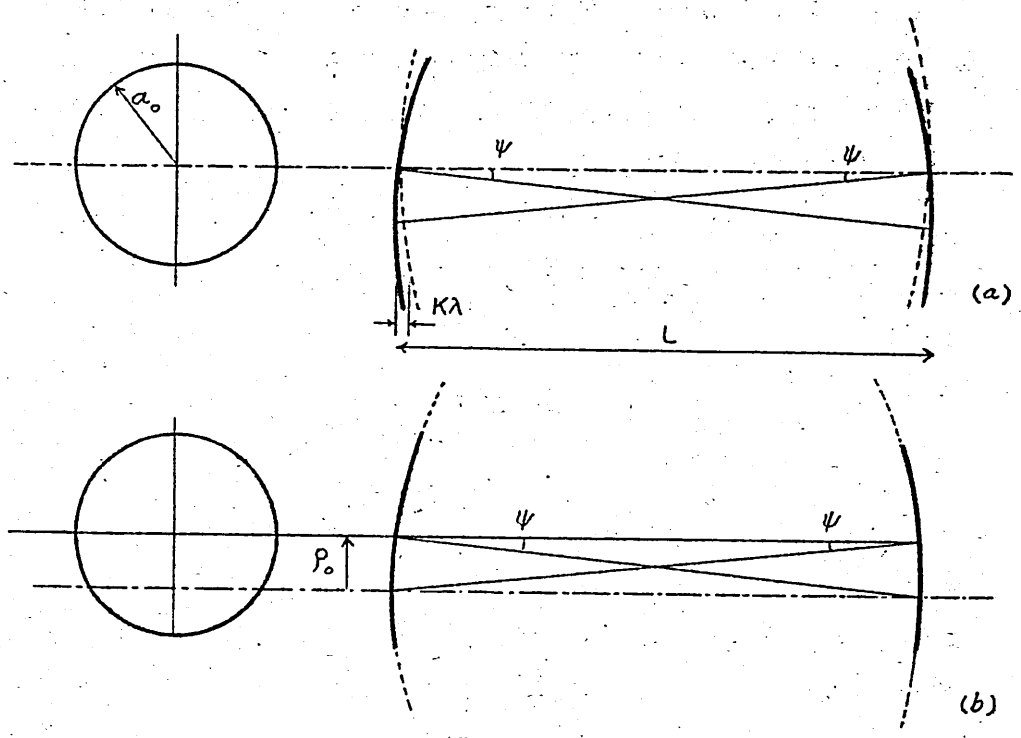
第 1 表

上では 16 ケのモードとよんだが、$m \neq 0$ のモードは更に cos, sin による2重の縮退があることに注意するならば、正確には 28 ケである。したがって又、永年行列方程式も4次ではなく、固有値 ± 1 の場合は6次、$\pm i$ の場合は8次になる。しかし §5.2 にのべるように、cos, sin による $\pm$ の縮退は今取扱っている鏡の傾斜に対しては $S_{\alpha\beta}$ が容易に対角化されるので、実さいに解くべき行列方程式の次数は最大4次である。又変形のない場合には、Goubau 等に行なわれた計算において、我々の近似は4つのモードまでとったことに対応しているが、摂動論の助けによって解くべき行列方程式は4次ではなく、2次で済んでいる利点がある。

§4. 行列要素 $S_{\alpha\beta}$

§4.1 鏡の傾斜

共焦点配置における一方の円形球面鏡が角 2ψ だけ僅かに傾斜することは、2枚の鏡が共に角 ψ だけ傾いたものと考えることができる。(Fig. 2(a)) これは又、角 ψ が適当に小さければ第2図(b)のように球面鏡の形成する球面に沿って鏡を滑らせて移動したのとほとんど同じとみ



第 2 図

なすことができる。この移動距離を ρ_0 とすれば、

$$\psi = \frac{\rho_0}{L} \tag{4.1}$$

の関係がある。したがって円形の共焦点 Fabry Perot 共振器の微小傾斜がある場合の回折損失およびモードを求めるには (2.4) および (3.9) の積分領域 S として、軸を中心とする球形円板領域 (Fig. 2 (a)) の代わりにすこし軸のずれた円板領域 (Fig. 2 (b)) をとればよい。

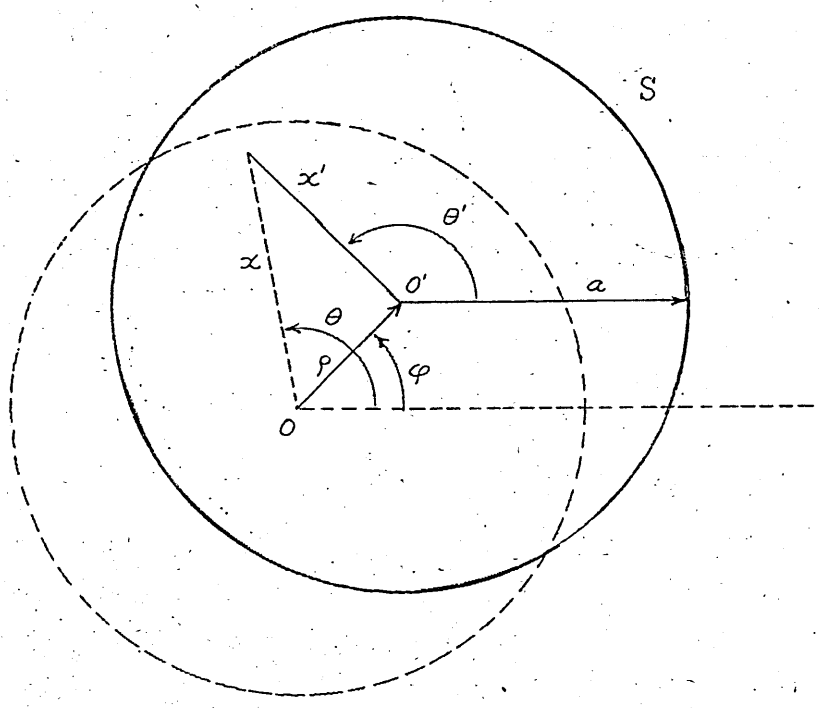
§4.2 行列要素 $S_{\alpha\beta}$ の計算

(3.8) より、

$$(\alpha|S|\beta) = \int_S u_\alpha u_\beta \, dS = \frac{1}{N_\alpha N_\beta} \int_S L_n^m(x^2) L_{n'}^{m'}(x^2) x^{m+m'} e^{-x^2} \begin{Bmatrix} \cos m\theta \cos m'\theta \\ \sin m\theta \cos m'\theta \\ \cos m\theta \sin m'\theta \\ \sin m\theta \sin m'\theta \end{Bmatrix} dS \tag{4.2}$$

ただし　$\alpha=(m, n, \pm)$,　$\beta=(m', n', \pm)$

鏡に傾きのある場合には $(\alpha|S|\beta)$ の積分は原点Oより (ρ, φ) だけ移動した点 O' を中心とする半径 a の領域で積分しなければならない（第3図）。ただし φ は座標軸 $(\theta=0)$ と移動方向のなす角である。ρ は移動距離 ρ_0 に対する．又 a は鏡の半径 a_0 に対する無次元数であって次式で定義される変数である。



第 3 図

$$\rho=\rho_0\sqrt{\frac{k}{L}}\quad,\quad a=a_0\sqrt{\frac{k}{L}} \tag{4.3}$$

積分を行なうために O を原点とする座標系 (x, θ) を O' を原点とする座標系 (x', θ') に変換する。両座標系間の関係は、

$$x e^{i\theta}=x' e^{i\theta'}+\rho e^{i\varphi} \tag{4.4}$$

$$x^2=x'^2+\rho^2+2x'\rho\cos(\theta-\varphi) \tag{4.5}$$

で与えられる。(4.4) または (4.5) を用いて (4.2) 式中の $(x\ \theta)$ を $(x'$

θ')に変換する。このとき $\rho \ll a$, $\rho<1$ として ρ についてTaylor展開し、$S_{\alpha\beta}$ が ρ の2次の項まで求まるようにする。各項は次のように展開される。

$$x^m = [x'^2+\rho^2+2x'\rho\cos(\theta'-\varphi)]^{\frac{m}{2}}$$

$$= x'^m - mx'^{m-1}\cos(\theta'-\varphi)\cdot\rho + \frac{m}{4}x'^{m-2}\{(m-2)\cos 2(\theta'-\varphi)+m\}\rho^2+\cdots\cdots$$

$$e^{-x^2} = e^{-\{x'^2+\rho^2+2x'\rho\cos(\theta'-\varphi)\}} \qquad (4.6)$$

$$= e^{-x'^2}\{1-2x'\cos(\theta'-\varphi)\rho+\{x'^2\cos 2(\theta'-\varphi)+x'^2-1\}\rho^2+\cdots\cdots]$$

(4.7)

$$x^m\cos m\theta = x'^m\cos m\theta' + mx'^{m-1}\cos[(m-1)\theta'+\varphi]\rho$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}x'^{m-2}\cos[(m-2)\theta'+2\varphi]\rho^2+\cdots\cdots \qquad (4.8)$$

$$x^m\sin m\theta = x'^m\sin m\theta' + mx'^{m-1}\sin[(m-1)\theta'+\varphi]\rho$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}x'^{m-2}\sin[(m-2)\theta'+2\varphi]\rho^2+\cdots\cdots \qquad (4.9)$$

これらの式および(4.2)のLaguerreの多項式には定義(2.12)に(4.5)を代入して、(4.6)～(4.9)の展開を使って(4.2)の被積分関数を ρ^2 の項まで求める。$x' \lesssim \rho$ の領域は全体の積分領域に比して十分小さいと考えられるので、そこでの近似の破れの積分への寄与は少ないと考えて差支えない。したがって積分は($x'\theta'$)に関し半径 a の円内で行なえばよい。θ'に関する積分は容易に行なえる。xに関する積分は、$x^2=t$ とおいて公式

$$\int_0^a e^{-t}t^n dt = n!\left[1-e^{-a}\sum_{r=0}^{n}\frac{a^r}{r!}\right] \qquad (4.10)$$

で求められる。計算の結果は、最終的に次のようになる。

$$S_{\alpha\beta}=\sqrt{\frac{n!\,n'!}{(m+n)!(m'+n')!}}\sum_{p=0}^{n}\sum_{p'=0}^{n'}\frac{(-1)^{p+p'}}{p!\,p'!}\binom{n+m}{n-p}\binom{n'+m'}{n'-p'}e^{-a^2}$$

$$\times\left[-\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\1\end{Bmatrix}\left\{(p+p'+m)!\sum_{r=0}^{p+p'+m}\frac{a^{2r}}{r!}+\rho^2 a^{2(p+p'+m)}(a^2-\overline{p+p'+m})\right\}\delta_{mm'}\right.$$

$$+\sqrt{\frac{\varepsilon_{m'}}{2}}\rho\left\{\left[\begin{Bmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\\sin\varphi\\\cos\varphi\end{Bmatrix}a^{2(p+p'+1)}-2\begin{Bmatrix}0\\\sin\varphi\\\sin\varphi\\0\end{Bmatrix}(p+p')!\left(e^{a^2}-\sum_{r=0}^{p+p'}\frac{a^{2r}}{r!}\right)\right]\delta_{1,m+m'}\right.$$

$$\left.+\begin{Bmatrix}\cos\varphi\\-\sin\varphi\\\sin\varphi\\\cos\varphi\end{Bmatrix}a^{2(p+p'+m'+1)}\delta_{1,m-m'}\right\}+\sqrt{\frac{\varepsilon_{m'}}{2}}\frac{\rho^2}{2}\left\{\left[\begin{Bmatrix}\cos 2\varphi\\\sin 2\varphi\\\sin 2\varphi\\-\cos 2\varphi\end{Bmatrix}a^{2(p+p'+1)}\right.\right.$$

$$\times(a^2-\overline{p+p'+2})+4\begin{Bmatrix}0\\\sin 2\varphi\\\sin 2\varphi\\0\end{Bmatrix}(p+p')!\left(e^{a^2}-\sum_{r=0}^{p+p'}\frac{a^{2r}}{r!}\right)\Bigg]\delta_{2,m+m'}$$

$$\left.\left.+\begin{Bmatrix}\cos 2\varphi\\-\sin 2\varphi\\\sin 2\varphi\\\cos 2\varphi\end{Bmatrix}a^{2(p+p'+m'+1)}(a^2-\overline{p+p'+m'+2})\,\delta_{2,m-m'}\right\}\Bigg] \qquad (4.11)$$

ただし、一般性を失なうことなく $m \geq m'$ としている。又 { } の中の4つの項は（4.2）の { } の中の4つの項に対応している。

§5. 数値計算

§5.1 パラメタの間の関係

$$a^2=\frac{a_0^2 k}{L}=2\pi N \qquad (5.1)$$

$$N\equiv\frac{a_0^2}{\lambda L} \quad : \text{Fresnel 数} \qquad (5.2)$$

又鏡のずれのパラメタ ρ と傾斜角との関係は（4.1）によって、

$$\rho=\begin{cases}\sqrt{kL}\,\psi & (\psi:\text{radian})\\ \dfrac{\pi}{180}\sqrt{kL}\,\psi & (\psi:\text{degree})\end{cases} \qquad (5.3)$$

である。又、変形のパラメタとして鏡面の最大変位と波長λとの比をKとおけば、（第2図参照）

$$K = \frac{\psi a_0}{\lambda} = \rho\sqrt{\frac{N}{2\pi}} = \frac{\rho}{a}N \qquad (5.4)$$

このパラメタは今までに傾斜のある場合の問題[1][10]において使われている。今の計算では $K \ll 1$ である必要はないが、計算が $N \sim 1$ の附近に限られているために数値計算では $K<1$ になっている。$\lambda = 10^{-6}$ meter（1 micron），$L = 1$ meter のとき、(5.3)は、

$$\rho = 0.0122\,\psi \quad (\psi:\ \text{second}) \qquad (5.5)$$

となるが、以下の数値計算においては、$\psi = 10$ second の場合 ρ の値0.122の倍数をパラメタにとって計算がなされている。

§5.2 土モードの縮退

§3の終りに述べたように、第1表の (m, n) 縮退の他に、$m \neq 0$ の各モードは $\cos m\theta$，$\sin m\theta$，すなわち＋，－の2重の縮退がある。したがって、解くべき有限次切断した永年行列方程式（3.13）の次数は増えて、たとえば固有値 $\pm i$ の場合には8次になる。永年方程式を解くということは、縮退したモードを基底にとった摂動行列を対角化するという操作にほかならないことに注意しよう。我々は $S_{\alpha\beta}$ の計算において、円板の移動を任意の方向 φ にとって求めたが、(4.11)を見ればすぐわかるように、$\varphi=0$ の場合には $S_{\alpha\beta} \neq 0$ であるのは、(＋，＋)(－，－)の間の行列要素であり、(＋，－)，(－，＋)では $S_{\alpha\beta}=0$ である。つまりこの場合はすでに対角化されているから、たとえ $\varphi \neq 0$ の場合でも $S_{\alpha\beta}$ は各モードに角度 φ だけ回転するユニタリ変換したものを基底にとって計算するならば、やはり(＋，－)については対角化されることになる。これははじめから $\varphi=0$ とおいたのと同じことであるから(3.13)の行列方程式の計算では、行列要素(4.11)で $\varphi=0$ とおいたものを用いればよく、上の8次の行列式は2つの4次の行列式の積に因数分解され、又6次の行列式は4次と2次とに分解されることにな

る。一般に摂動が入れば、土のモードは縮退がとれて、二つの異なる固有値をもつ。又今の場合言いかえれば二つのわずかに異なる損失をもつモードになって区別する必要が生じる。しかしながら第1表において固有値 l の場合には、行列要素（4.11）をしらべればわかるように、その様な splitting は生じない。固有値 i の $m=1$ の場合にはそのような splitting があらわれる。

以下では、その様な2つの場合のうち、＋モードのみの変形による効果を計算している。－モードは求められていない。

§5.3 損失 δ_d 数値計算

1 transit 当りの損失 δ_d は、方程式（3.1）の固有値 g から、

$$\delta_d = 1 - |g|^2 \qquad (5.6)$$

によって計算される。g として（3.13）（3.17）によって2次摂動まで求め、

$$g = g^{(0)} + g^{(1)} + g^{(2)} \qquad (5.7)$$

とおいて、δ_d をパラメタ N, ρ に対して書きあらわしたものを第4図に示した。図に描かれているモードは第一表における4つの固有値に属する各縮退したモードのうち δ_d の最も小さいモードをえらんだものである。其他のものは損失は大きい。

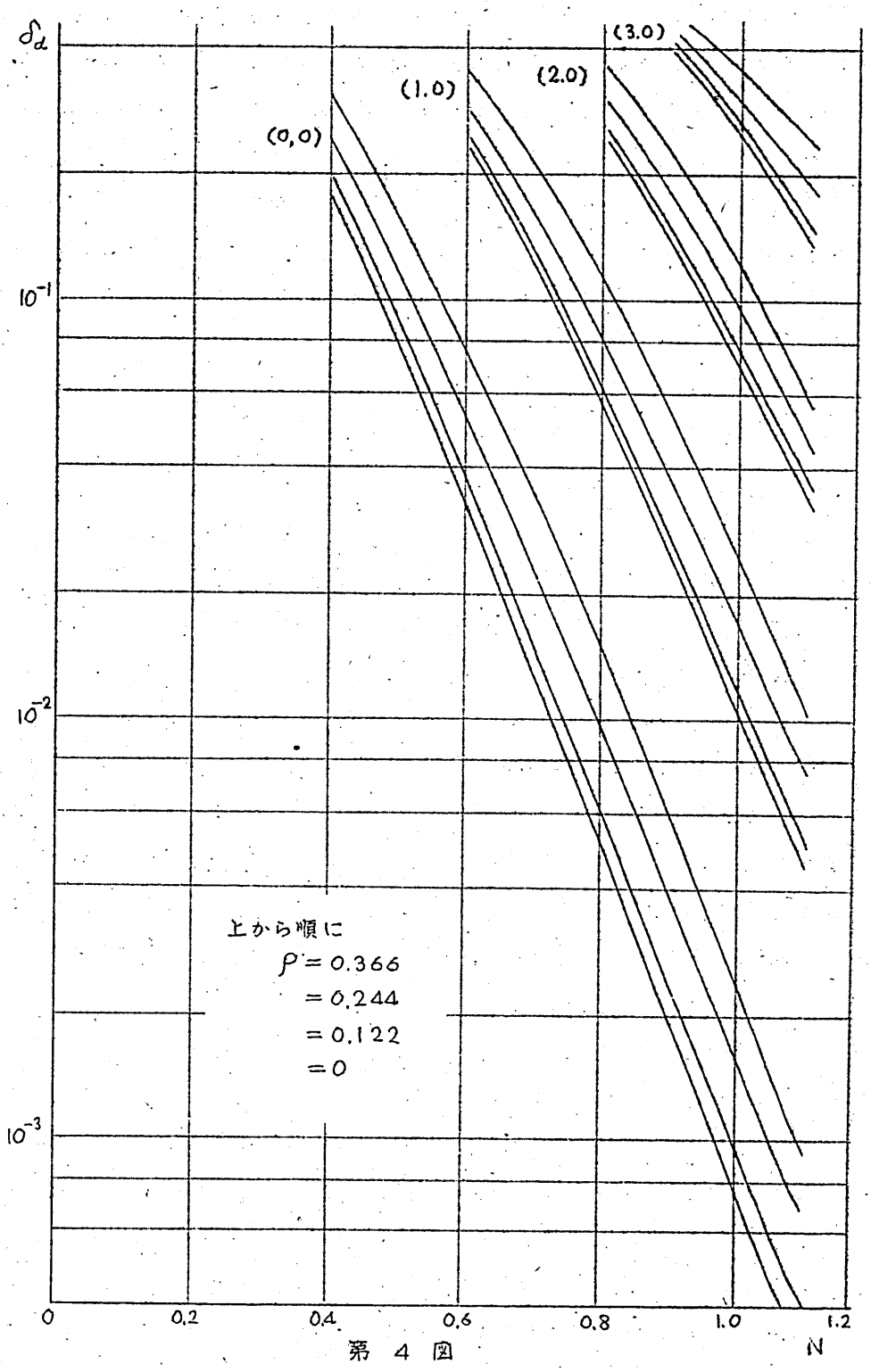
又固有値 g の位相部分から生じる共振周波数の変化は、非常に小さいことがわかるので示していない。

§5.4 振幅および位相分布

摂動をうけた時の界分布は（3.4）（3.12）（3.15）によって1次摂動項まででは、

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} \qquad (5.8)$$

で与えられる。U は一般的には複素数値関数であって、その絶対値からは振幅分布、又その位相部分からは位相分布を求めることができる。


δ_d
(0,0)
(1.0)
(2.0)
(3.0)
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
上から順に
$\rho = 0.366$
$= 0.244$
$= 0.122$
$= 0$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
N

第 4 図

第５図は（0,0）モードの場合 $N=0.8$, $\rho=0.244$ に対してそれらを $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ の直線上において図示したものである。同時に比較のために、$\rho=0$（無変形）および、無摂動の Gauss-Laguerre 関数（2.11）も点線で示した。傾斜による振幅分布は中心部では $\rho=0$ の分布とほとんど変らず、周辺部においてわずかに鏡の移動方向にずれていることがわかる。図の分布は鏡面の存在領域上でのみ描かれている。又目盛は規格化した固有関数の各点における絶対値の大きさを示している。

§6 Discussion

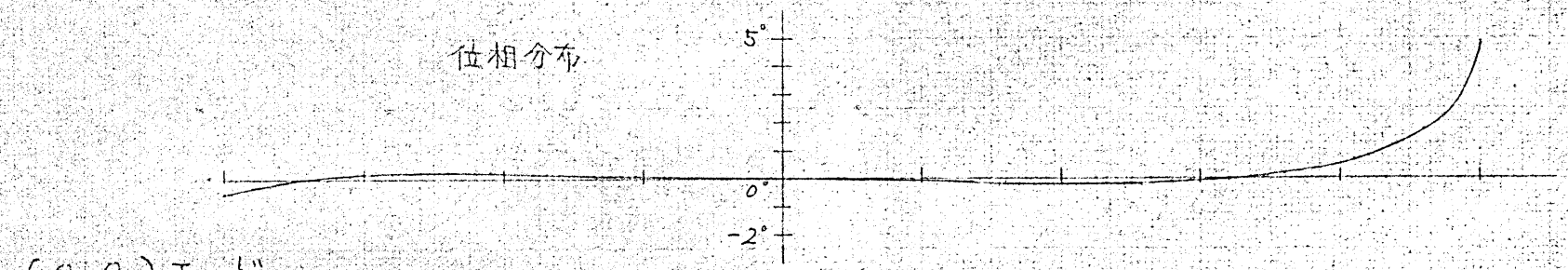
Fox Li, Goubau Schwering, Beyer Scheibe との比較

第４図の数値計算の結果は、$\rho=0$ の場合には文献（7),(3),(4）の上記の研究者による計算結果と比較され、彼等の反復数値計算あるいは直接固有値行列方程式を解く方法と、ここに述べた摂動計算による簡単な方法との比較が行なえる。$\rho=0$ の場合の我々の結果は、Goubau Schwering, Beyer Scheibe の方法において固有関数を、４項で近似したことと等価であり、我々はそれを４次の固有値行列方程式の代わりに摂動論を用いて２次の固有値行列方程式で済ましているのである。比較は第６図において示している。更によい近似をうるために摂動論を用いて４次の固有値行列方程式を解くならば、それは彼等の方法で８項で展開近似したことと同等になるが、我々の目的は $\rho\neq0$ の場合であったので、上記の近似にとどめているのである。

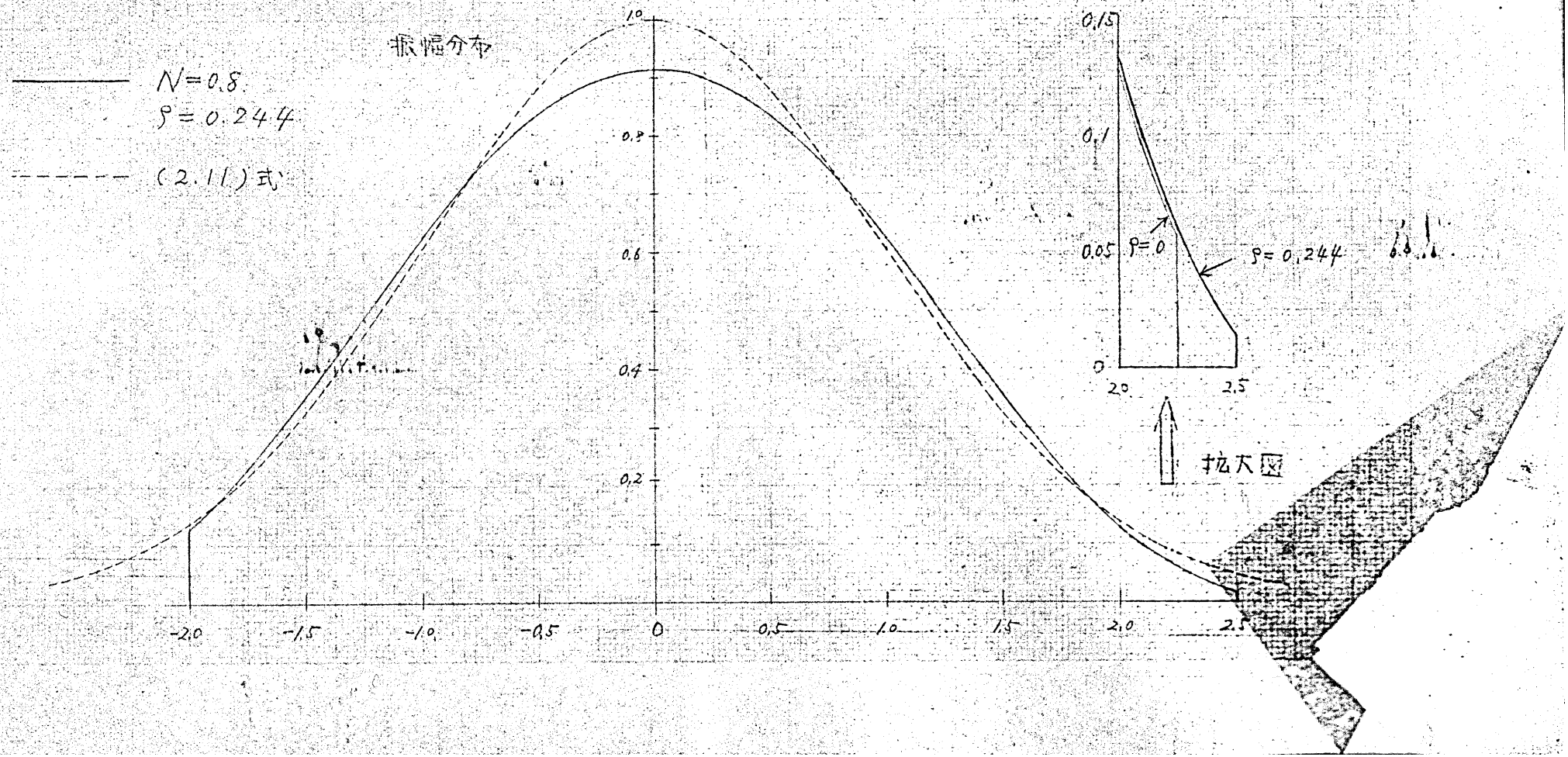
Boyd and Gordon による remarks との比較

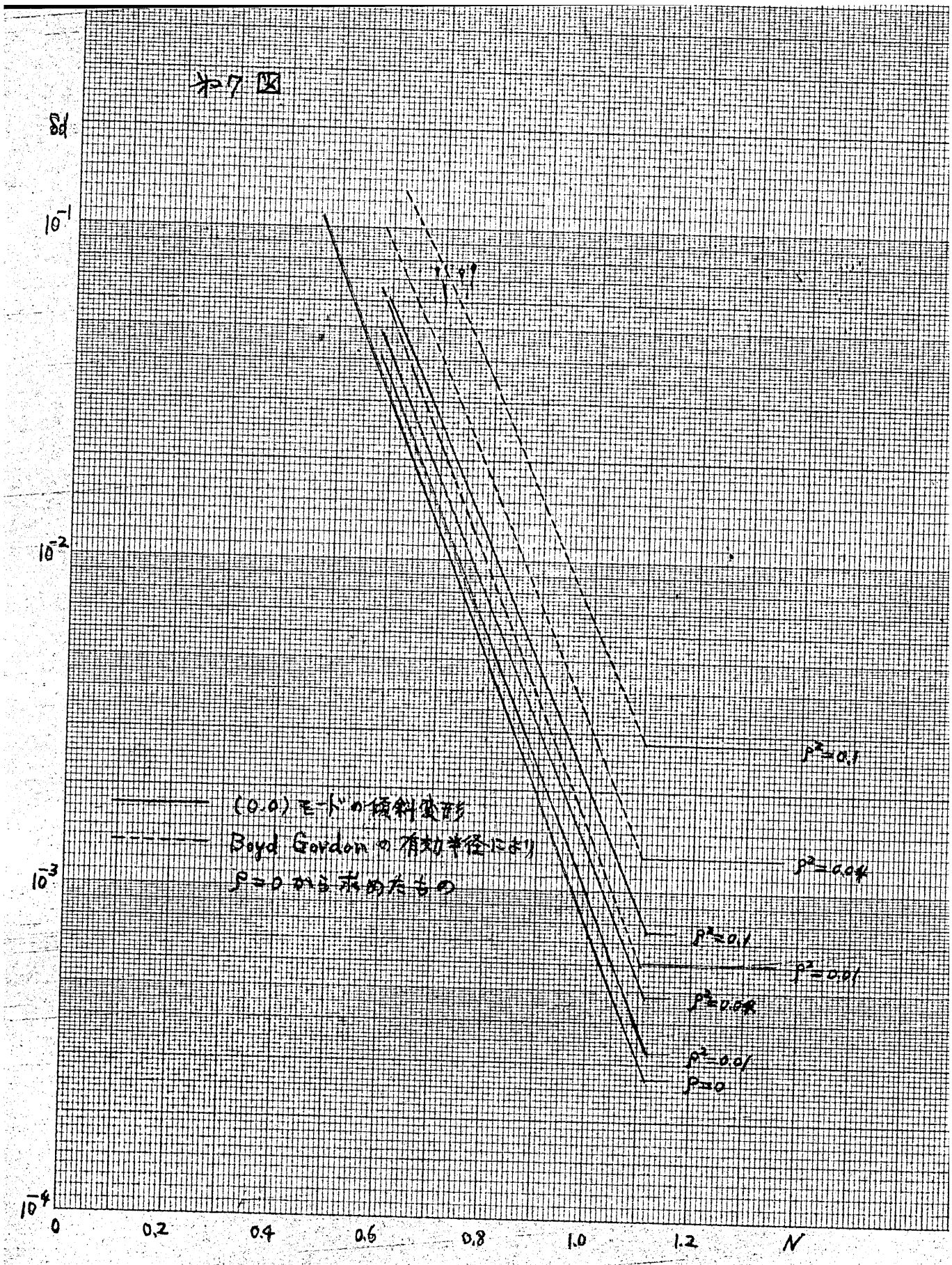
Boyd and Gordon[2]は、彼等の論文の終り（p. 506）において共焦点 Fabry Perot 共振器が傾斜した場合には、損失は有効半径（effective aperture radius）の低下によって生ずるとし、その有効半径は、共焦点面の回転軸から鏡の縁への最短距離で近似されるとした。

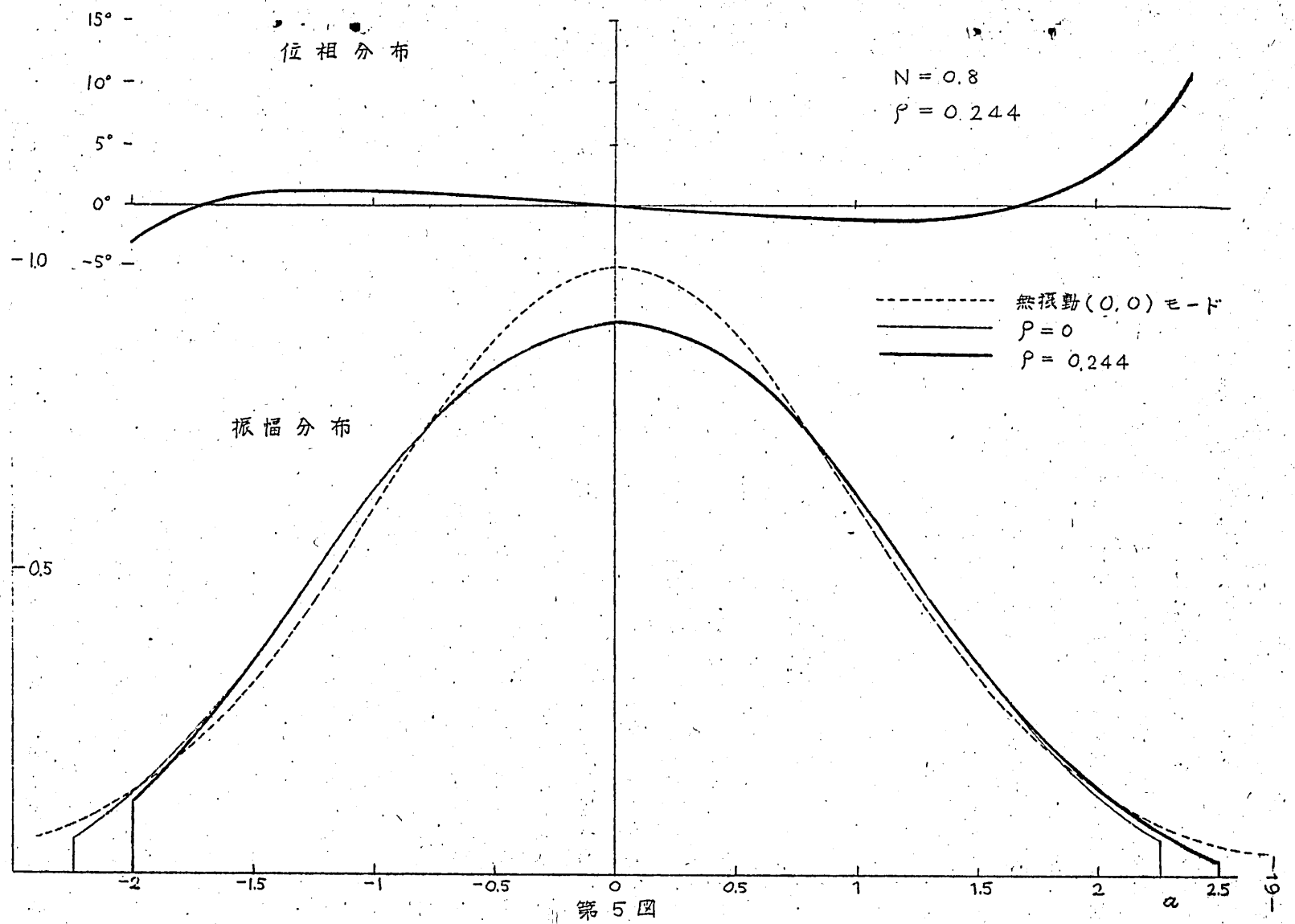
第5図


位相分布
5°
0°
-2°

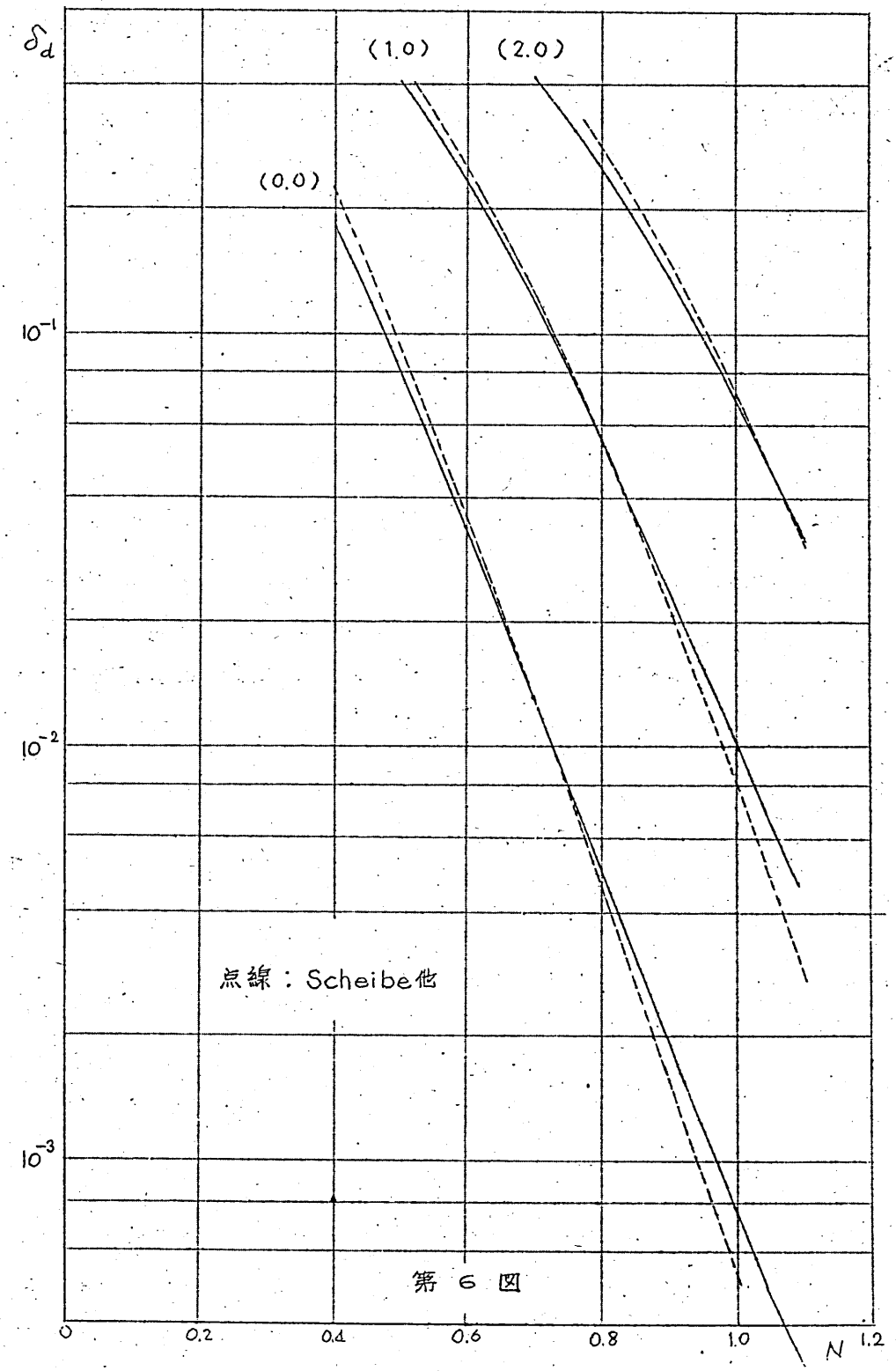
(0, 0) モード


振幅分布
N=0.8
ρ=0.244
(2.11)式
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
0.15
0.1
0.05
0
ρ=0
ρ=0.244
2.0
2.5
拡大図


第7図
δd
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
N
$\rho^2=0.1$
$\rho^2=0.04$
$\rho^2=0.1$
$\rho^2=0.01$
$\rho^2=0.04$
$\rho^2=0.01$
$\rho=0$
(0.0)モードの傾斜変形
Boyd Gordonの有効半径により
$\rho=0$から求めたもの

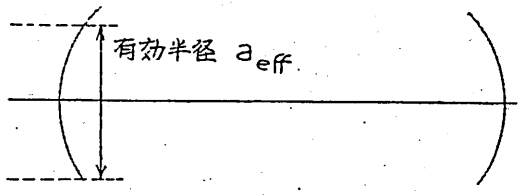

位相分布
15°
10°
5°
0°
-5°
N = 0.8
ρ = 0.244
1.0
無振動(0,0)モード
ρ = 0
ρ = 0.244
振幅分布
0.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
a

第5図



第 6 図

そのような場合は、傾斜のある場合の損失を傾斜のない場合の損失から描くことができる。このようにして描いたグラフと我々の求めたグラフとの比較を（0,0）モードに対して第7図に示した。図において、点線はBoyd and Gordon の考えによるもの、実線は第4図によるものである。損失は、我々の求めた場合の方が低いが、それは傾斜した鏡から有効半径外を切落とすBoyd Gordon の近似に対し、切落された部分が損失の低下に効いていることを示しているのである。勿論この有効半径の概念は $m=0$ のモードに対してのみ適用できる考えであって、$m \neq 0$ に対しては

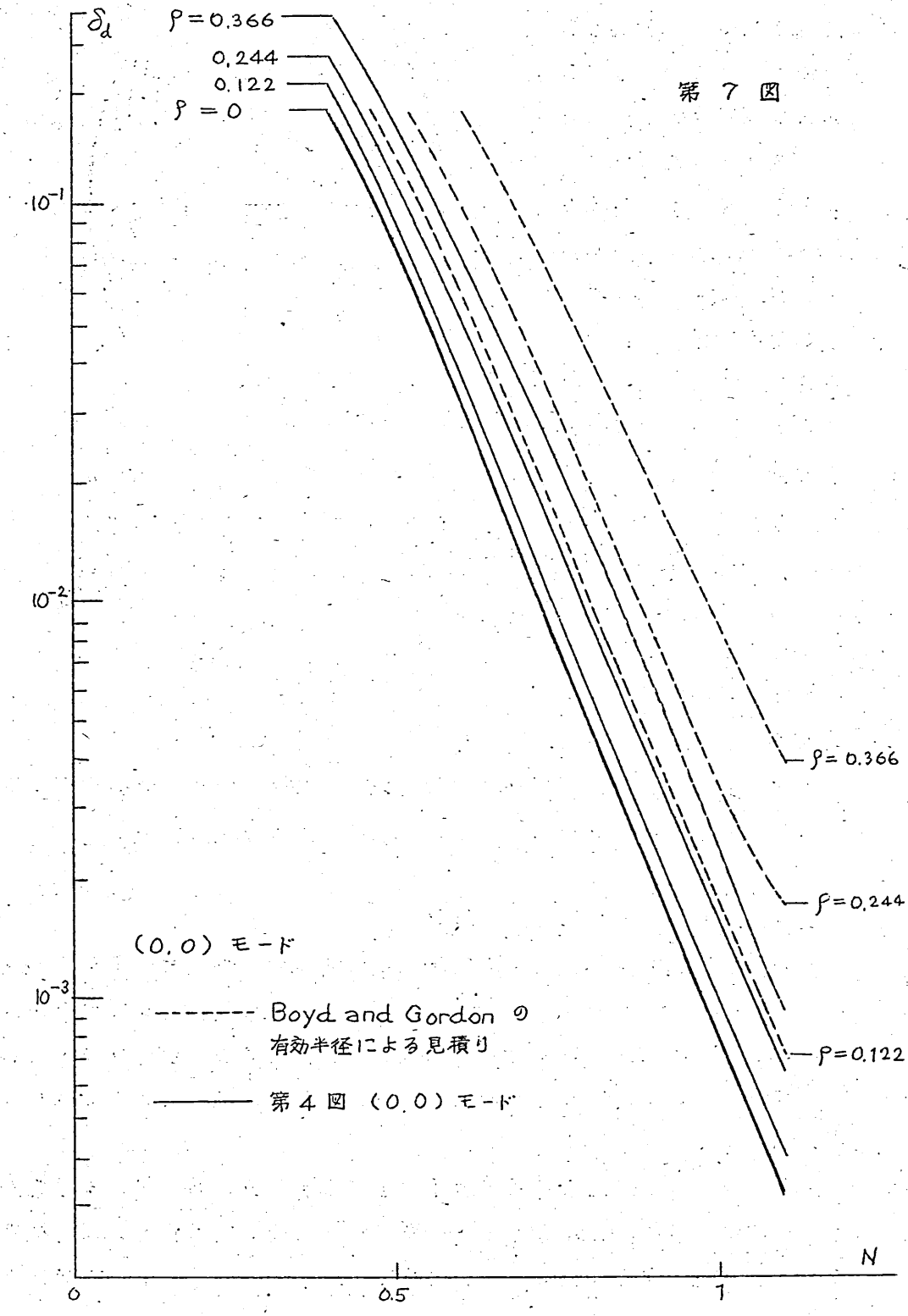


無意味である。というのは、モードの対称軸は中心から鏡の周辺縁への最短距離の方向に対して任意に取ることは物理的には不可能であるからである。これは $m \neq 0$ に対してモード対称軸が傾斜による摂動の0次近似を定めないかぎり決定されないという事実をも反映している。

位相分布

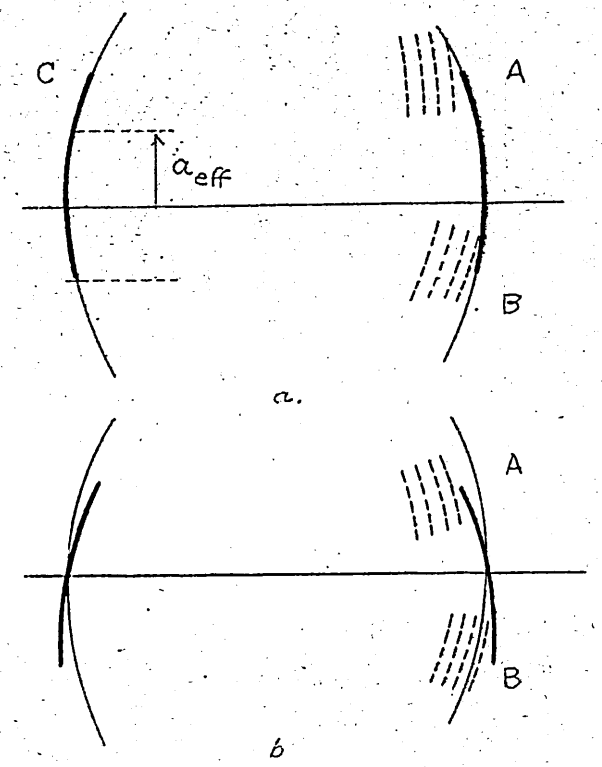
位相分布は変形のない場合にはあらわれないことに注意しよう。そのことはこの摂動論でも明らかであって、$\rho=0$ の場合にはSが回転対称な領域であるために $S_{\alpha\beta}$ は m が異なる状態間では0になり、（転移則 $\Delta m=0$）、摂動計算の中では m が一定の状態しかあらわれない。このことと $g_\alpha^{(0)}$ が（2.15）で与えられることから、正負以外の位相変化はあらわれないことがわかる。しかしながら、$\rho \neq 0$ の場合には $\Delta m \neq 0$ の項もあらわれて位相分布があらわれるのである。

第5図に例示された位相分布の意味は次のように考えられるであろう。位相の分布は球面に相対的にあらわれたものであり、内側に傾斜した方つまり球面鏡を移動した方（A）で位相が進み、他方（B）で遅れていることは共振の波面が図の点線のようになっていると考えてよい。これ


δ_d
$\rho = 0.366$
0.244
0.122
$\rho = 0$
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
$\rho = 0.366$
$\rho = 0.244$
$\rho = 0.122$
(0, 0) モード
Boyd and Gordon の
有効半径による見積り
第4図 (0, 0) モード
N
0
0.5
1

第 7 図

はAの側では多少とも鏡面内に入りこむような波面Bの側では鏡面から外に出るような波面であることを意味する。つまりBoyd Gordonのいわゆる有効半径 a_{eff} で切落される鏡面Cの部分が効いてきて、a_{eff} で切りとった小さい共焦点球面鏡間の共振ならば波面はもとの共焦点配置の球面上で等位相になるのが、図の点線のように波面を曲げるようになるのである。これはa図がb図の等価的配置であったことを考えると、b図において波面の等位相面は、もとの傾斜以前の波面に近くなろうとする傾向があらわれているとも考えられる。



第 8 図

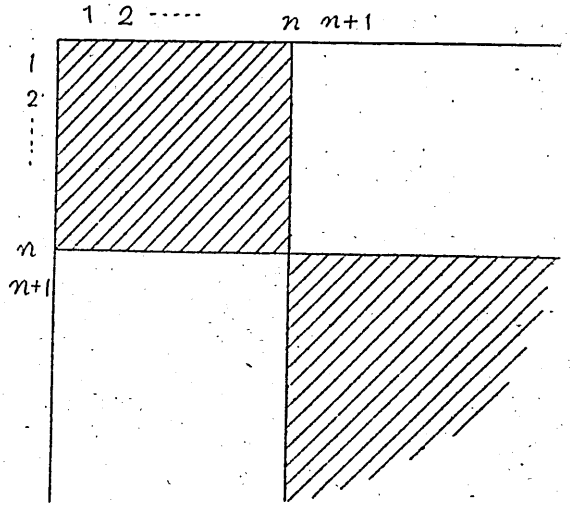
大きいFresnel数に対する困難

上では数値計算は $N \lesssim 1.2$ 程度までの共振器について行った。Fox Li, Goubau Schwering, Beyer Scheibeにも N はこの程度の大いさに対してのみしか計算は行なわれていない。そこでは理由はのべられていないが、我々の行なった計算からわかることは次の理由によるものである。

我々は（3. 13）の無限次元の永年方程式を解くのに有限次元の低次の行列が因数分解されて出るものと仮定した。この仮定はたとえば n 次までとった場合の固有値と $(n+1)$ 次までとった場合のはじめの有限ケの

固有値を比較することによって固有値が収束していくことをみればよい。又これは第９図のハッチのない非対角部分が、nが大きくなるに従い、急速に０に近づくならば、そのような因数分解が近似的に正しいという目安にもなるであろう。

（このようなことをしらべねばならないのは無限重縮退のためである）しかしながら（4.11）に求めた行列要素は $e^{-2\pi N}$ の因子のかかったNの多項式の形に書かれており、多項式の次数はnと共に増大する。そうしてNが大きい場合には有限のnで切った行列方程式の根はnを大きくすると共に収束しない。つまり有限のnで切断する近似が許されないことがわかる。これは実際の数値計算によっても確認される。これに反してNが小さいところでは、nが大きければ非対角の部分は実質的に効かなくなって因数分解は近似的に許される。（あまりNが小さくなって積分領域Sが Caustic surface よりかなり小さくなる場合は別の問題に属するから除外して考える。）しかもその時各縮退のグループのうち、最低の損失をもつモードについては（計算は表１の各グループの最低損失のモードに対応するものについてのみしか行なわなかった。）小行列は最初からほとんど対角化されていて、Gauss-Laguerre関数であらわされた（2.11）のそのモードは正しい０次近似であることが確かめられる。つまり、小さいNに対しては無限重に縮退していてもモードと呼ぶことができる。これに反し、上のことを逆にのべるならば、Nが大きい場合、有限次元である限りは永年行列方程式の解は収束してゆかないのであるから、（2.11）の Gauss-



第 9 図

Laguerre 固有関数系は摂動がなくなった場合の正しい 0 次近似を与えるという保証がないから、物理的ないみでは正しくモードと呼びうる保証もないのである。モードと呼びうるための正否は、もし傾斜していない場合に（3.1）の方程式の解が正確に explicit に求まっているならばもちろんすぐ判明するわけである。直交座標で分離する場合には、解はすべての場合に正しく求められていて、[2] prolate spheroidal angular function であり、これはたしかに $N \to \infty$ の極限で、無限重縮退している Gauss-Hermit 関数である無摂動固有関数に近づいていることが確かめられるから、この場合には Gauss-Hermit 関数は無摂動の場合の正しい 0 次近似になっていることがわかる。

上記のように我々は因数分解の近似が言える N の領域を数学的に求めることは困難なことであるから行なわずに、実際の数値計算によって可能な範囲のみについて求めたのである。

参 考 文 献

(1) H. Ogura, Y. Yoshida and J. Ikenoue : Theory of Deformed Fabry Perot Resonator, J. Phys. Soc. of Japan 20, No. 4. 598 (1965).
池上, 小倉, 吉田 ; 輻研資料, 1964 年 11 月.

(2) G. D. Boyd and J. P. Gordon ; Bell Syst. Tech. J. 40, 489 (1961).

(3) G. Goubau and F. Schwering : IRE Trans. AP. 9 248 (1961).

(4) J. B. Beyer and E. H. Scheibe : IRE Trans. AP 10, 349 (1962).

(5) H. Ogura, Y. Yoshida : Cavity theory of Fabry Perot Resonator Jap. J. App. Phys. 3, No. 9, 546 (1964).

池上，小倉，吉田：輻研資料 1964年5月

(6) L. A. Vainstein. : Sov. Phys. JETP. 18, No.2, 471. (1964)

(7) A. G. Fox and T. Li. : Bell Syst. Tech. J. 40, 453 (1961)

(8) Schiff : "Quantum Mechanics"

(9) A. Erdélyi : "Tables of Integral Transforms" McGraw Hill Vol. 2. (1954).

(10) A. G. Fox and T. Li : Proc. IEEE 51, 80 (1963).

輻射科学研究会資料

クライストロンの最適負荷インピーダンス

岡田武夫・建石昌彦
小野寺俊男・家喜洋司
（三菱電機株式会社 中央研究所）

1965年10月30日(土)

（於 電子会館）

§1. 諸言

大電力パルスクライストロンは線形加速器及び特殊レーダー等の高周波源の最終段増巾器として使用され、近年増々その需要度を高めて来た。これらのクライストロンが高能率であることは単に消費電力の節減のためばかりでなく、管の長寿命化・パルス電源の低価格化、広帯域化及びX線の減少をもたらすために不可欠の条件である。

クライストロンの能率は空胴間隔と空胴の離調度、出力空胴の間隙寸法と負荷インピーダンス、ドリフト管長と磁界分布等の種々のパラメータの関数であるが、これ等のパラメータは出力間隙を励振する集群ビームの特性に寄与する部分とこの集群ビームに作用する出力空胴の特性に関係する部分とに大別される。集群能率は前者の特性を表わす量として知られ、すでに数多くの研究が為され、又設計資料もかなり豊富である。これに反してビームと空胴との間のエネルギーの授受に関する後者の問題は Feenberg[1] 及び Webber[2] の数値計算があるのみで、実験的にも十分検討されていない。

我々は5MW出力のパルスクライストロンを開発して来たが、その設計に際して出力空胴の負荷インピーダンスを如何に選定するかに関して十分な資料の無いことを痛感した。定性的には次の考察によってこの負荷インピーダンスに最適値があることがわかる。即ちもし負荷インピーダンスが極端に小さい場合には、出力間隙に誘起される高周波電圧はビームの加速電圧に比べて小さく、出力空胴は電流励振の状態になって出力は負荷抵抗に比例して増加する。又負荷抵抗が大き過ぎると、空胴に現われる間隙電圧はビーム電圧を越えてビームの一部が発散及び反転することによって能率の低下を招くことになる。このため出力空胴に現われる間隙電圧が特別の値の時、即ち負荷抵抗が特別の値の時最大出力が得られる。ここではこの時の負荷抵抗のことを最適負荷インピーダンスと呼ぶ。

この論文は負荷インピーダンス及び間隙電圧の最適値を知るために筆者等が行なった実験を報告している。即ち出力空胴と負荷との結合度（Q_{ext}）を可変にした特別のクライストロンを作って Q_{ext} と出力との関係を求め、更に負荷時の出力空胴の特性インピーダンス（R_{sh}/Q_0）を測定して、負荷インピーダンス及び間隙電圧と能率との関係を求め、具体的にはこれ等の改善によって能率40％以上のクライストロンを開発することができた。以下にその大要を報告し、諸賢の御批判御検討をそう次第です。

第 1 表

ビーム電圧	: 130 KV
ビーム電流	: 95 A
パービアンス	: 2.0×10^{-6}
ビーム速度	: 0.604 C
相対論補正係数	: 1.254
ブルリアン磁界値	: 560 ガウス
低減プラズマ波長	: 81 cm
空胴間隔	: 0.1 λ_q & 8.0 rad
空胴間隙長	: 0.96 rad & 1.25 rad
ドリフト管径	: 1.98 rad
平均直流ビーム径	: 1.22 rad

	第1空胴	第2空胴	第3空胴	第4空胴	第5空胴
共振周波数 (MC)	2760	2760	2770～2790	2790～2810	2760
R_{sh}/Q_0 (Ω)	55	55	55	55	75
Q_{ext}	200	—	—	—	30

§2. 空胴の離調度と磁界分布

筆者等は昭和38年より線形加速器用のパルスクラスストロンとして中心周波数2760MCにおいてビーム電圧130KV，ビーム電流95Aで尖頭出力5MWを目標としたクライストロンを開発して来た．第1表に主なパラメータの値を示す．設計に際してこれらの値を選んだ理由及びこの管の開発至過に関してはすでに別の所[2]で報告して居るのでここでは省略する．特に以下の説明に必要な空胴の離調度及び磁界分布とクライストロンの能率について簡単に述べる．

電子銃はパービアンスが $2\mu A/V^{3/2}$ のピアース形集束電子銃で，カソードに130KVの負のパルス電圧を印加することによりビーム径が約16φの円筒ビームを形成する。このビームは更に4ケのコイルとヨークから

なる電磁石で磁界集束される．この場合電磁石の端板とそれに接続されるクライストロンのアノード磁極板とで形成される磁気遮蔽板により陰極面に磁界が入り込まないように工夫して居る．

このクライストロンは5ケの空胴を内蔵し、この内出力空胴を除く残りの4ケの空胴はその共振周波数を自由に変化することが出来る．この4ケの空胴は適当な高周波入力に対して出力空胴での集群電流の基本波分を出来るだけ大きくするように調整される。即ち利得と（集群）能率の二つが要求される．入力周波数に同調された二つの空胴間の小信号利得は、約20dBで，従って理論的にはシンクロナス同調時の全利得は80dB程度であるはずであり，実際にもこれに近い値（73dB）が得られる．しかしこのような状態では寄生振動等が起り動作が不安定であり又能率も悪い。これを改善するために第4空胴をシンクロナス同調から高い方に離調した際の入出力特性を図1に示す．60MC以上離調しても能率の改善および

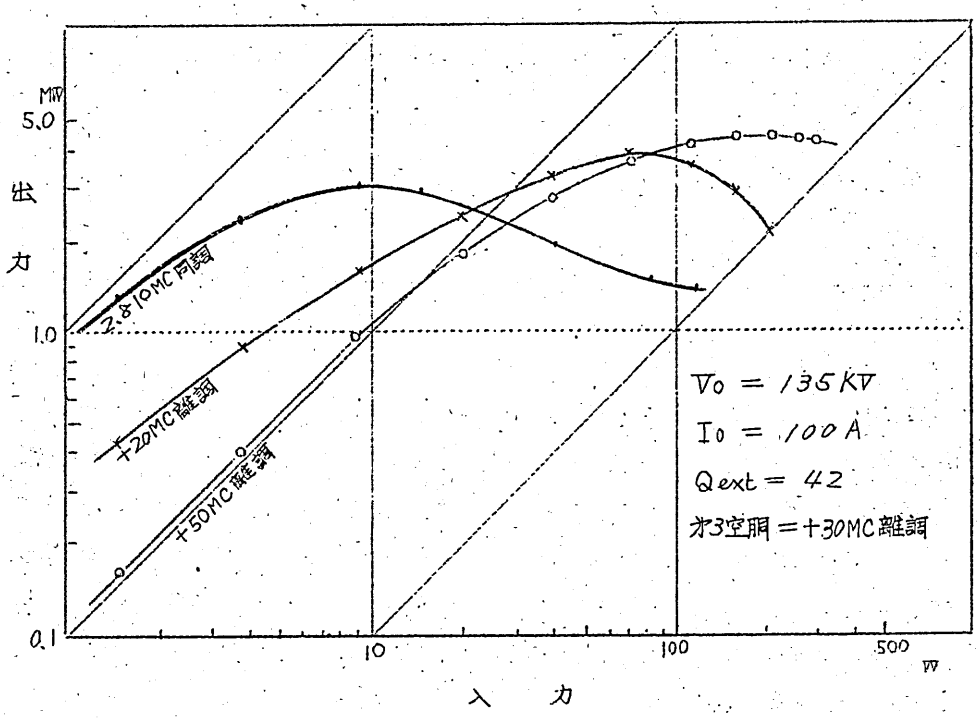


図1　第4空胴の離調と入力出力特性

利得の減少に飽和の傾向が見られる．50MC離調時の利得の減少が−12dBで能率が40％程度改善される。同様にして第3空胴についても高い方に離調することにより10数％程度の能率改善がなされる．測定結果を図2に示す．第2空胴に関しては利得の減少に比して能率は余り増加しない．

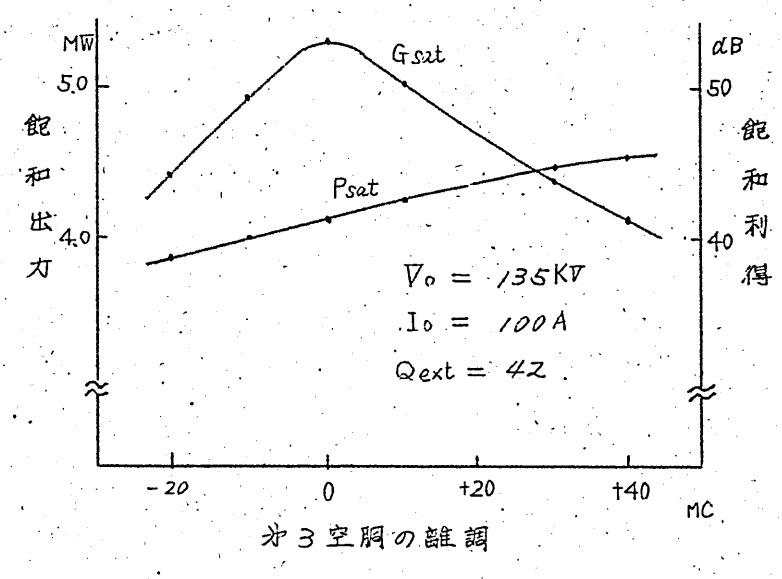


図2　第3空胴の離調と飽和出力及び飽和利得

高周波入力の不足及び空胴の共振周波数の可変範囲等の関係で十分離調した場合の様相は不明であるが，空胴の離調と能率及び利得との大まかな関係を得ることが出来たと思う．

図3に示す二つの磁界分布は共に高周波の無い時のビーム透過率が約98％であるが、飽和出力時の様相は大いに異なる．即ち分布aの場合は透過率が50％程度迄減少し，出力も約20％減少する．これに対して分布bでは透過率がわずかに減少するのみで，更にこれ以上磁界を強くしても出力は逆に減少する傾向を示す。これら二つの分布の大きな相異は第2空胴から出力空胴間の磁界値にあり、分布aでは大体ブリルアン値の1.1倍に等しく、分布bではブリルアン値の1.5倍程度である．次にこの磁界値と飽和出力の関係を図4に示す．このように第2空胴から出力空胴間の磁界値に最適値が存在することが分る。これ等の物理的意味は次のように考えられる．陰極に磁界が入り込まないという条件で動作しているクライス

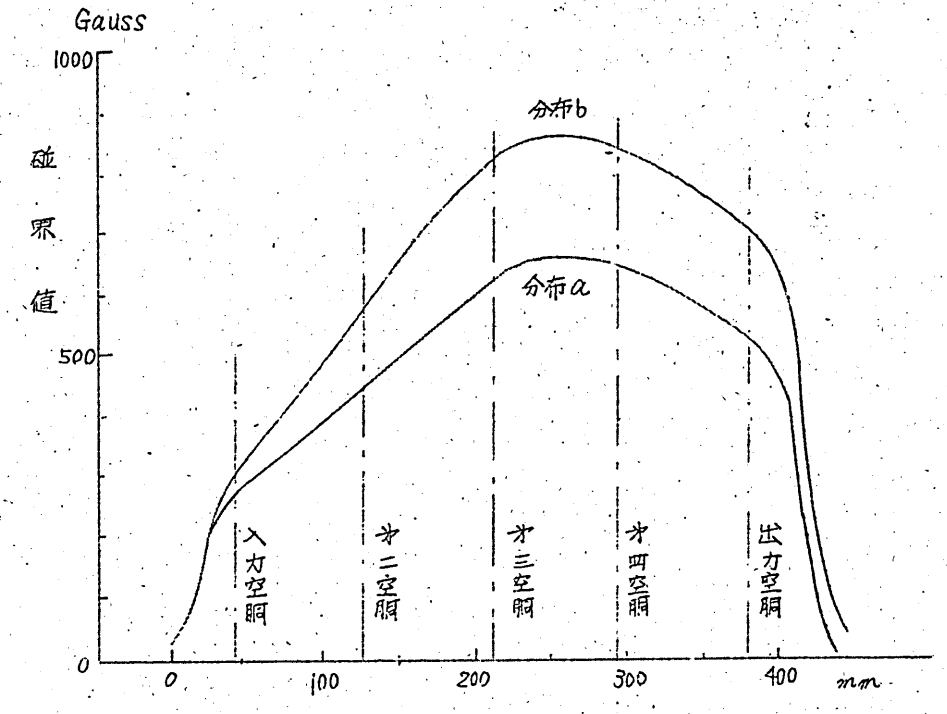


図3　磁界分布

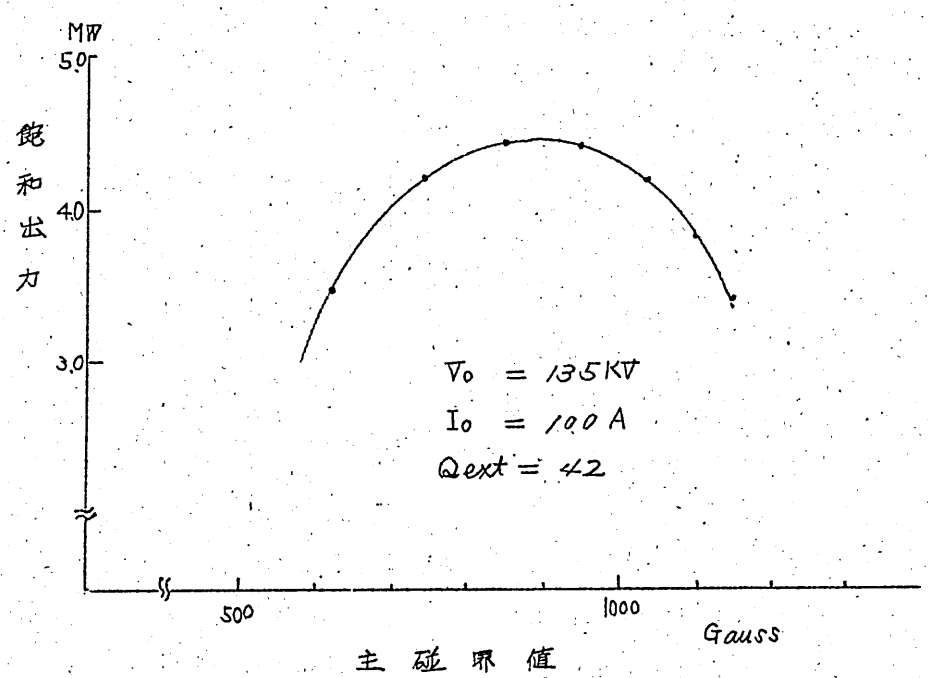


図4　主磁界値と飽和出力

トロンでは空間電荷による発散力は集束磁界によるビームの回転によって相殺され，ビーム径はこれ等の二つの力の平衡点に落着く．入力空胴での速度変調により，才2・才3空胴を通過するにつれて次才にビームは集群され，才4空胴と出力空胴の間で集群度は最大になる。従って集群内の空間空荷力は出力空胴に近づくにつれて増加し、一定の集束磁界を使用する場合（ブリルアン集束の場合）にはビームが発散して透過率の減少を引き起す．このため集群度の増加と共に集束磁界を強くし、出力空胴の作用間隙をビームがすれすれに通過するような磁界分布が最適であり、集束磁界の最適値はドリフト管径に関係すると考えられる．

§3　最適負荷インピーダンス

先ず入出力空胴のように外部回路（主に伝送線）と結合している空胴共振器の一般的性質について振り返ってみたい．このような場合に空胴、結合回路及び伝送線の境界をはっきり区別することが難しい。このため通常は空胴が十分離調された時に，伝送線上の（空胴に一番近い）電圧最少点を基準面として、空胴及び結合回路を伝送線上に置換して考える。この電圧最少点の事を *Detuned Short Position* 略して D.S.P と呼ぶ．低周波回路との類似から D. S. P における等価回路は図 5a のように書ける。

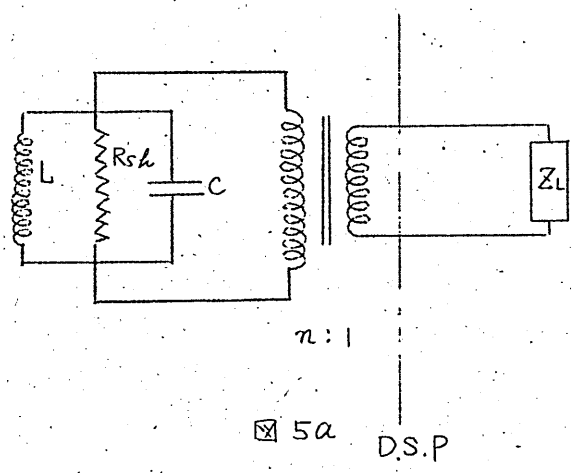


図 5a

ここで Z_L は D.S.P を基準面として負荷側を見たインピーダンスである．一般に次のようになる．

$$\frac{1}{Z_L} = G_L + jB_L \quad \text{----------} \quad (1)$$

特に整合負荷の時は Z_L は Z_0 に等しく，純抵抗負荷の場合には $R_L = 1/G_L$ になる．一般の場合は純抵抗負荷の場合の共振周波数からずれて，そのずれ Δf は(2)式で与えられる．

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{1}{2}\frac{B_L}{\omega_0 C} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -} \quad (2)$$

低周波において負荷と結合した共振回路の特性は L, C, R_{sh} 及び n の4つのパラメータで完全に表わされる．これと同じように外部回路と結合した空胴共振器の特性も f_0, Q_0, Q_{ext} 及び R_{sh}/Q_0 の4つのパラメータで表わされるが，同時に電圧を定義する電界の積分路を指定しなければならない。クライストロンの空胴の場合は空胴間隙の中心軸を積分路に取るのが便利である．又上記の4つのパラメータの間には次の関係が成立つ．

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{又は } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}) \quad \text{- - - - - - - -} \quad (3)$$

$$R_{sh}/Q_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 C \quad \text{- - - - - - - - - - - -} \quad (4)$$

$$Q_0 = \omega_0 C \cdot R_{sh} = R_{sh}/\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{- - - - - - - - - - - -} \quad (5)$$

$$Q_{ext} = \omega_0 C \cdot n^2 R_L = n^2 R_L/\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{- - - - - - - -} \quad (6)$$

但しこの関係は外部回路が純抵抗負荷の場合である．

出力空胴は空胴内を流れる電流が大きく，共振周波数を変化するダイヤフラムのオーム損が無視出来なくなるので、このクライストロンではダイヤフラムの無い共振周波数の固定した空胴を使用して居る．このため Q_0 が非常に高く（約4000程度），回路能率は99％以上である．従って空胴のオーム損は外部負荷に比べて無視出来る。又出力空胴と外部回路とは誘導性窓で電磁的に結合される。結合度 Q_{ext} は窓の開口面積に関係し，通常は Q_{ext} はこの窓の開口面積を調整して変化できる。これは(6)式の n を変化することに相当する．この方法は実際の管で Q_{ext} を連続的に変化することには向かないので、次のようにして R_L を変化することにより Q_{ext} を可変にした．図5.bに実験用クライストロンの出力回路の略図を示す．

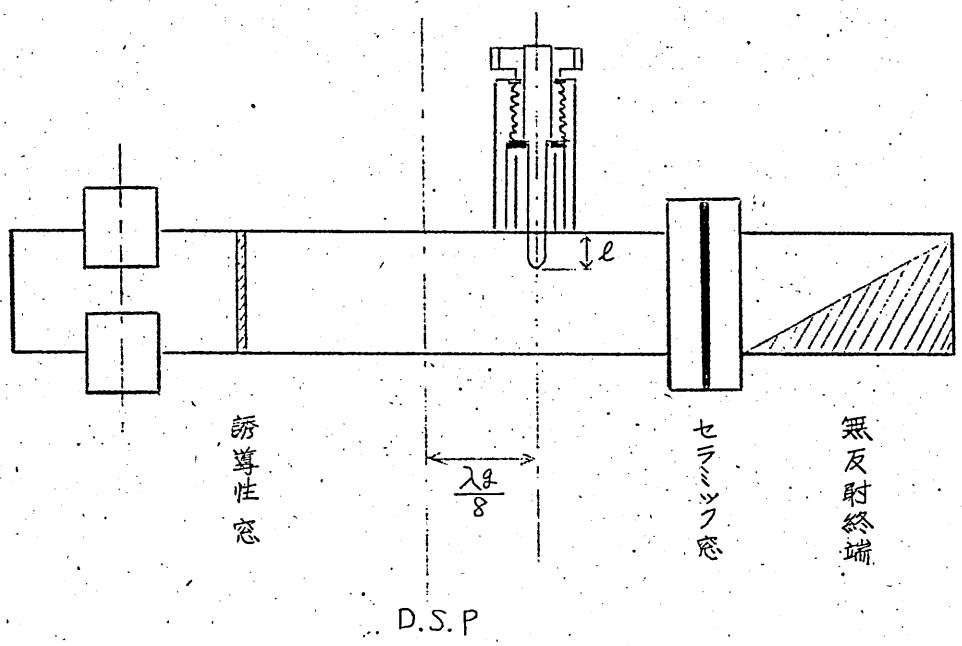


図5.b

通常の管と異なる所は出力導波管に容量性スタブ（先端を丸めた6φのステンレス棒）を取り付け、その長さを可変にした。このスタブの可変範囲はベローズの可動距離やスタブの先端でのマイクロ波電界による放電等を考慮して，0から12 mmに選んだ。又導波管とスタブとの接触面での放電をさけるため折返しチョークを使用した．今基準面をスタブの位置に取った時のスタブのアドミタンスを測定すると当然の事ながら図6のAのように変化する。これを空胴側にλg/8だけ移動した点を基準面にした時のアドミタンスはBのように出力導波管の特性アドミタンスより大きなコンダクタンスになる．従って後者の基準面をD.S.Pと一致させることにより、出力空胴に並列に特性アドミタンスより大きな可変コンダクタンスが接続されたと等価になりQextはスタブの無い場合から連続的に低下する．図7に(6)式を使って計算したQext と位相法で測定したQextを示す。この種の実験用クライストロンを2台作り，ビーム電圧130KVにおいて最大出力が得られるように各空胴の離調度及び磁界分布を調整した後で，各ビーム電圧での飽和出力をQextに対して求めた．この実験結果を図8に示す。

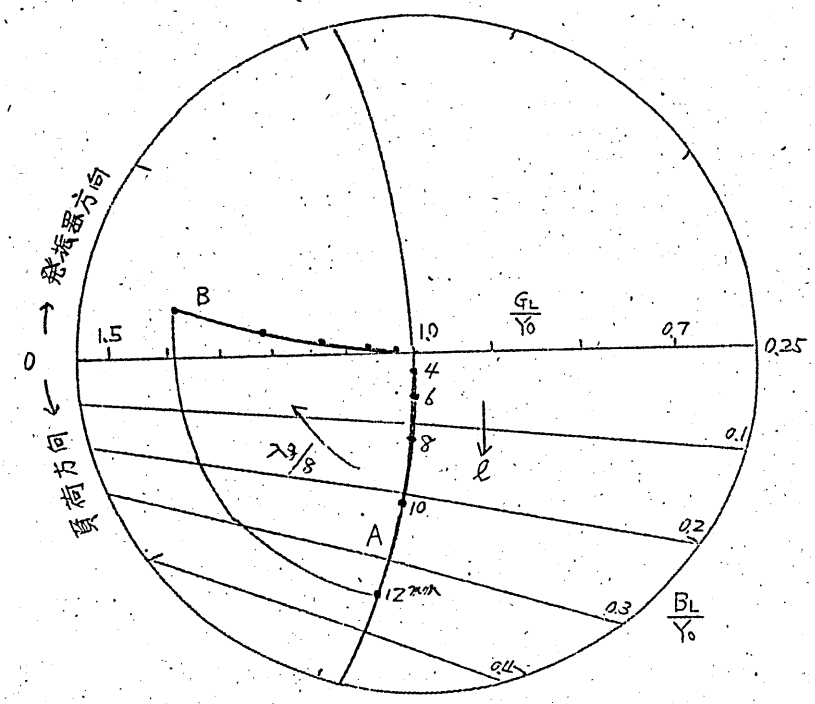


図6 アドミタンス線図

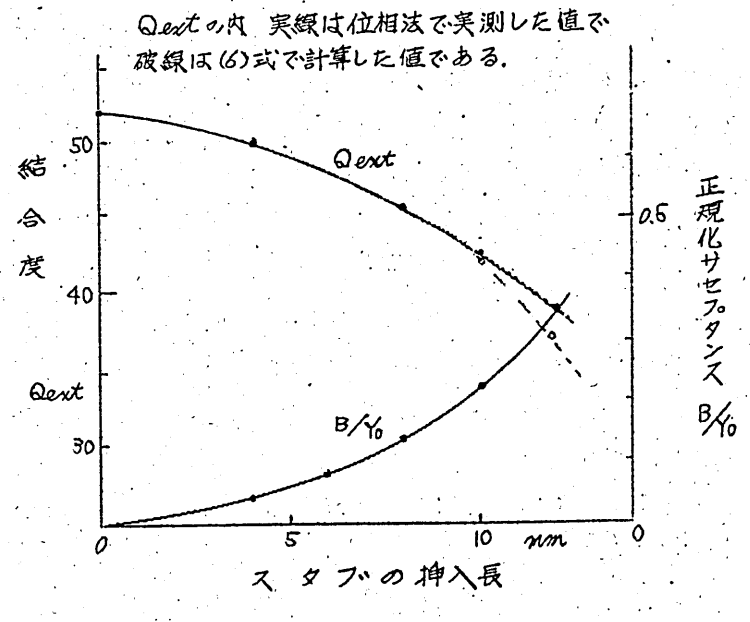


図7 正規化サセプタンスと結合度

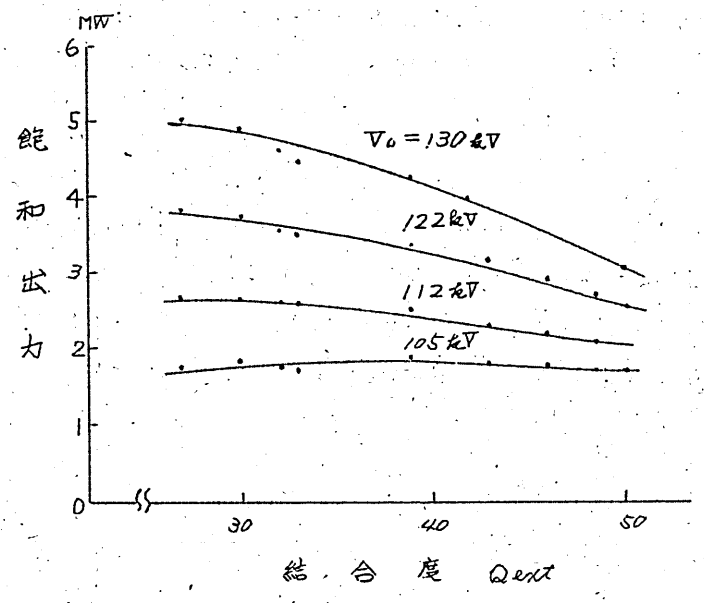


図8 結合度と飽和出力

Qextの減少と共に出力は増大し、ビーム電圧の低い所では次第に飽和する傾向を示す。ビーム電圧120KV以上ではこゝで実験したQextの値よりもっと低い所に最適値があると思われる。このため更にもう1本の実験球を準備中であるが、Qextの十分小さい所では理論的にも能率が減少するはずであり、これらのデータからでもQextの最適値は大体予想できる。

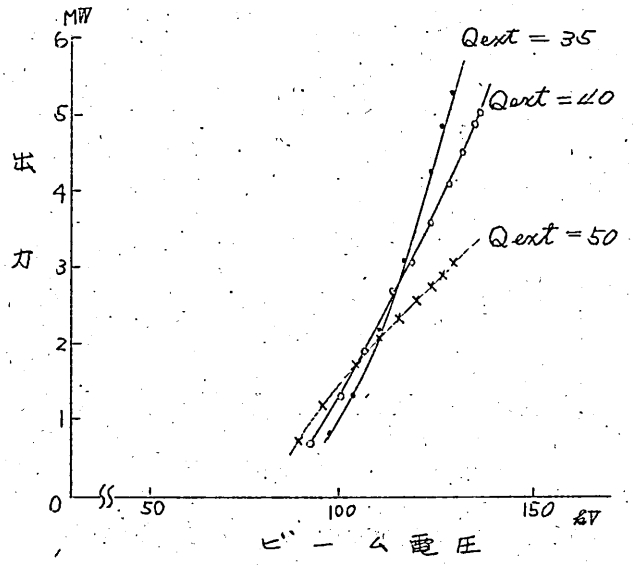


図9 ビーム電圧と出力

更にスタブを取り去り，誘導性窓を調整して Q_{ext} を低くしたクライストロンにおいても，Q_{ext} の減少と共に能率は増加する．この関係を図9に示す。

§4. 結　論

前節では Q_{ext} と能率の関係を調べたが，この関係は我々のクライストロンヌはこのクライストロンの出力空胴に対して成り立つものであり，これを一般化するためには出力空胴の特性インピーダンス (R_{sh}/Q_0) を測定しなければならない．この量は次のように定義される．

$$R_{sh}/Q_0 = \frac{\left[\int E\, dS\right]^2}{2\omega_0 U} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - -} \quad (7)$$

ここで U はその空胴内に貯えられる全エネルギーである．電界の積分路は空胴間隙の中心軸に選ぶ。この量は摂動法と呼ばれる方法で測定されるがこの詳細は次の機会に報告する予定である．図10に Q_{ext} の異なる2つの空胴について大きさの違う3つの摂動球に対して R_{sh}/Q_0 の値を示す．

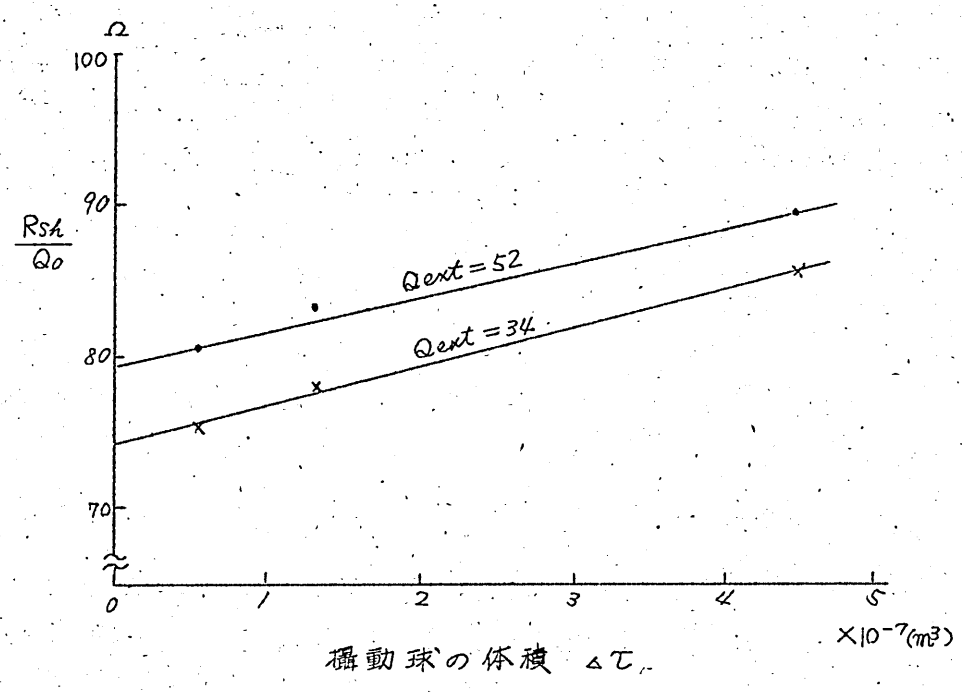


図10　出力空胴の特性インピーダンス

振動球の大きさによる誤差は3つの測定点の極限値を求めることによって消失すると考えられる。又 Q_{ext} の変化によって R_{sh}/Q_0 の値が変化するか否かはデータが不足なため何とも言えないが、Q_{ext} が52から34まで変化したのに R_{sh}/Q_0 は79Ωから74Ωになっただけで、余り大きな変化をしないと言える。それ故我々が実験した Q_{ext} の範囲では R_{sh}/Q_0 は一定で75Ωとし、この値を使って図8を書き直したものが図11である。各ビーム電圧に対して最大出力を与える負荷インピーダンス即ち最適負荷インピーダンスはビーム電圧の増加と共に減少する傾向を示す。

更にこの実験結果の物理的意味を明確にするために以下のような考察を

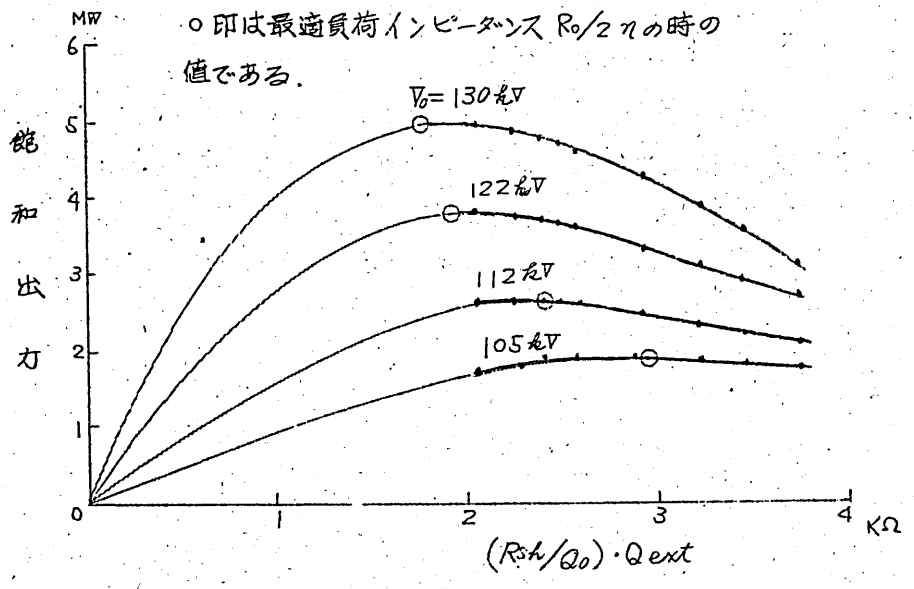


図11 負荷インピーダンスと飽和出力

行なった。即ち出力空胴のように回路能率が100%に近い時には次式が成り立つ。

$$\frac{v^2}{2(n^2R_L)} = \eta V_0 I_0 \quad \text{----------} \quad (8)$$

ここで v は間隙電圧の尖頭値で、積分路は(7)式と同じである。V_0 はビーム電圧、I_0 はビーム電流、η は能率を表わす。今相対間隙電圧 $v/V_0 = \alpha$ とし、ビームインピーダンスを R_0 とすれば、(6)式と(8)式から次の(9)式が得られる。

$$\alpha^2 = 2\eta \cdot \frac{(R_{sh}/Q_0)\cdot Q_{ext}}{R_0} \quad \text{----------} \quad (9)$$

(9)式を使って図8又は図11を相対間隙電圧と能率の関係に書き直したものが図12である．比較のためにFeenbergとWebberの計算結果を同時に示した。この実験結果から特に次の2点が結論される．

(1) 能率最大を与える相対間隙電圧即ち最適間隙電圧はビーム電圧によらず

○ Feenbergの計算結果は $\alpha_1 = 0.4$，$D=1$ の場合の2空胴クライストロンの変換能率についてである．

○ Webberの計算結果は $2\mu A/V^{3/2}$ の場合における変換能率についてである．

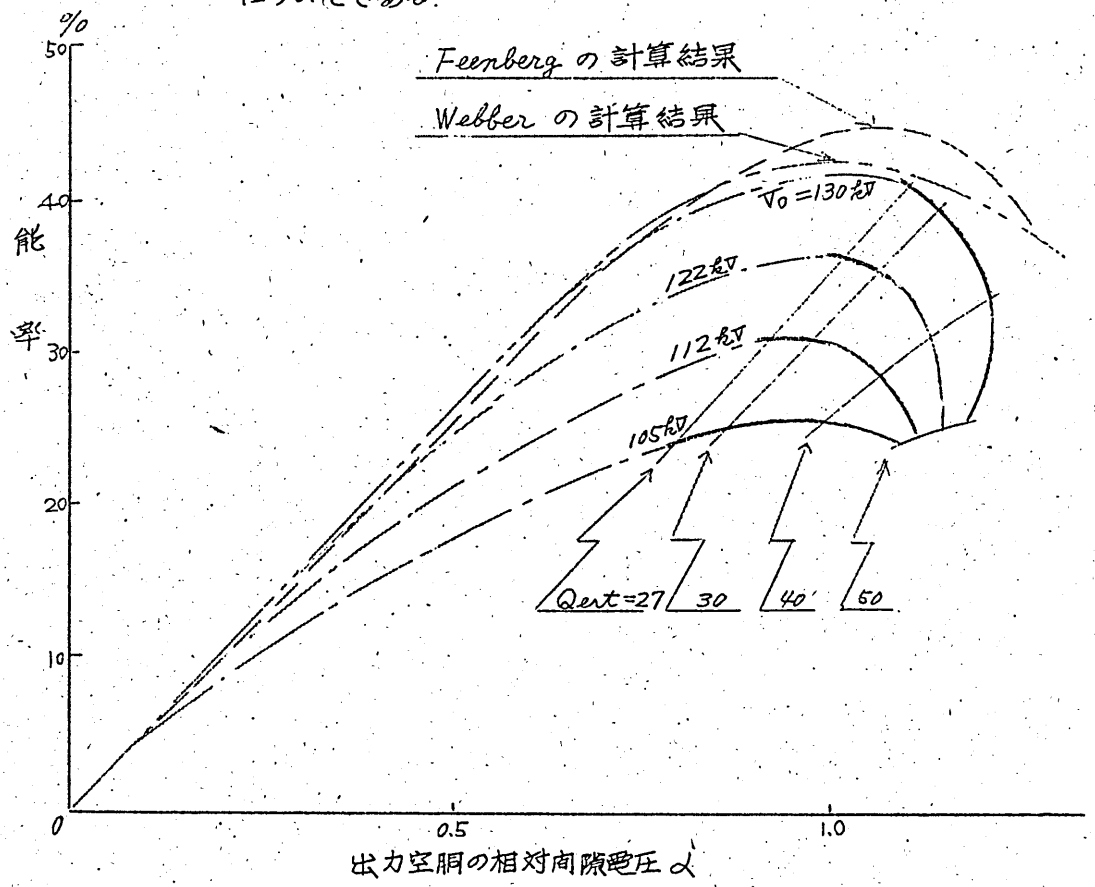


図12　出力空胴の相対電圧と能率

1.0附近にあり，従って最適負荷インピーダンスは $R_0/2\eta$ に等しい．

(2) α が1.1から1.2の間で能率に急激な減少が見られ，且つ能率の減少を与える α の値はビーム電圧と共に上昇する．

才1の結論はこの実験の最終の目標であり、と同時に他の場合にも適用できる一般性のある結果と思う。これを使って実際のクライストロンの出力空胴と外部回路との結合度は，その出力空胴の幾何学的形状で決まる R_{sh}/Q_0 を測定して，次式で与えられる。

$$Q_{ext} = \frac{1}{2\eta}\cdot\frac{R_0}{(R_{sh}/Q_0)} = \frac{1}{2\eta}\cdot\frac{1}{p\sqrt{V_0}}\cdot\frac{1}{(R_{sh}/Q_0)} \quad \cdots\cdots (10)$$

こゝで p はパービアンスで電子銃の幾何学的形状で決まる定数である．また能率はビーム電圧の増加函数であるので，最適結合度はビーム電圧の増加と共に減少するはずであり、事実このことは図12（又は図8）からも分る．

次に才2の結論は Feenberg 及び Webber の計算結果と食い違いを示す．即ちこの実験結果では出力空胴の間隙電圧がビーム電圧より大きくなると能率が減少しはじめ、ビーム電圧によって決まる α のある臨界値に達すると能率はほとんど垂直に降下し，間隙電圧はそれ以上は高くなり得ない。計算結果は集束磁界が無限大で、ビームの横方向の運動を禁じているのに対して．実験は陰極に磁界が交叉しないようにし．且つ有限磁界でビーム集束しているので．両者の間にはその前提条件において大きな相違がある．前者の変換能率の減少は電子の反転によるものであるが，有限磁界の場合はその様相がかなり複雑で、理論解析よりも実験で解明するのに適した問題である．

Nelson[4]等は $1\mu p$ の電子銃と特別な2空胴クライストロンとを使って．有限磁界の場合のクライストロンの能率についての実験結果を報告している．それによると特にブリルアン集束の場合にはビーム断面の高周波電流の分布はビームの周辺部に集中していて，このため出力空胴の間隙電界による周辺電子の発散によって高周波電流が著しく減少することを述べ．更に磁界界浸型の場合はビームの stiffness の増加及びビーム断面での高周波電流の分布が異なること等のためブリルアン集束の場合と様相が異なる事等を述べている．これ等の点更に能率の減

少を与えるαの臨界値がビーム電圧と共に増加する点については今後検討する予定である。

終りに当って御指導にあづかった東京大学原子核研究所の田中、堀越、馬場、石井の各先生並びに御協力と御助言を戴いた八十田部長をはじめ社内の各位に対し深甚なる謝意を表する次第である。

参考文献

(1) E. Feenberg "Notes on velocity modulation" Sperry Gyroscope Company, Report No. 5221-1093. (1945)

(2) S. E. Webber "Some calculations on The large Signal energy exchange mechanisms in linear tubes" I.R.E. trans. Vol. ED-7 P.154-162 (July 1960)

(3) 岡田武夫外 "大電力パルスクライストロン" 三菱電機技報 Vol. 39 P.1062-1068 (Sept. 1965)

(4) C. G. Nelson & M. Chodorow "Effects of Electron-Beam Confinement on Klystron Efficiency" I.R.E trans. Vol. ED-11 P.539-544 (Dec. 1964)

輻射科学研究会資料

皮膜抵抗を用いた広帯域整合負荷

滝山　敬
豊永　俊郎
西村　万平

（同志社大学工学部）

1965年10月30日

1 緒言

本研究は皮膜抵抗を1/4波長間隔に配置した整合負荷を用いることにより薄層の電波吸収体を製作することを目的としたもので，今までもその抵抗値の配列方法については、いろいろ述べられており[1][2]末武・高島氏[3]は電圧定在波比を1.1以下とする最大帯域巾についてスミス図表を用いて定性的に論じている。

この研究ではn段形の入力アドミタンスを回路理論で取扱い最平坦形特性と波形特性を与えるための設計方法について述べ，1～4段形について最適値における周波数特性を示した。又かかる整合負荷の斜め入射に対する検討も付け加えた。

2 n段形入力アドミタンス

抵抗皮膜を$\lambda_0/4$の間隔をおいて配置し後方に短絡板をおいた整合負荷に平面波が垂直に入射した場合の等価回路をFig. 1に示す。

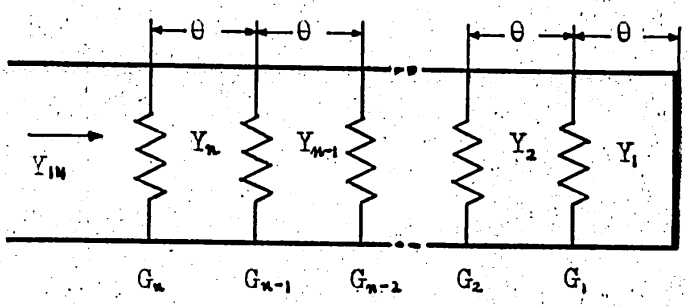


Fig. 1

$y_{in}=\dfrac{Y_{IN}}{Y_0}$ 正規化入力アドミタンス

$y_n=\dfrac{Y_n}{Y_0}$ 正規化特性アドミタンス

$g_n=\dfrac{G_n}{Y_0}$ 正規化コンダクタンス

θ＝電気角

Fig. 1より入力アドミタンスを計算する為に次のマトリックスを考える。

$$[Y]=\begin{bmatrix} AY_L & B \\ CY_L & D \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & G_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Shunt element matrix}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & jY_n\tan\theta \\ j\dfrac{\tan\theta}{Y_n} & 1 \end{bmatrix}}_{\text{transmission matrix}}\begin{bmatrix} \cdots\cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & jY_2\tan\theta \\ j\dfrac{\tan\theta}{Y_2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & G_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} Y_L & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{load termination matrix}} \qquad (2\cdot1)$$

茲に　$Y_L = -jY_1 \cot\theta$

入力アドミタンスY_{in}は，

$$Y_{in} = \frac{AY_L + B}{BY_L + D} \tag{2・2}$$

ここで $j\theta = \varphi$ とすると $j\tan\theta = \tanh\varphi = T(\varphi)$ となる。これを(2・1)式に代入して(2・2)式を計算しn段形の正規化入力アドミタンスを求めると，

$$y_{in} = \frac{A_0 + A_1T(\varphi) + A_2T(\varphi)^2 + A_3T(\varphi)^3 + \cdots\cdots + A_nT(\varphi)^n}{B_1T(\varphi) + B_2T(\varphi)^2 + B_3T(\varphi)^3 + \cdots\cdots + B_nT(\varphi)^n} \tag{2・3}$$

となる。茲に，$A_0 \sim A_n$，$B_1 \sim B_n$は，$g_1 \sim g_n$，$y_1 \sim y_n$の関数であり，それらの値を適当に選ぶことによりいろいろな特性が得られる。ここでは最平坦形特性と波形特性の設計方法について述べる。Table Ⅰに1～4段形における$A_0 \sim A_n$，$B_1 \sim B_n$の値を示す。

Table 1

1段形	$A_0 = y_1$　　$B_1 = 1$ $A_1 = g_1$
2段形	$A_0 = y_1 y_2$　　$B_1 = y_1 + y_2$ $A_1 = y_2 g_1 + g_2(y_1 + y_2)$　　$B_2 = g_1$ $A_2 = y_2^2 + g_1 g_2$
3段形	$A_0 = y_1 y_2 y_3$ $A_1 = g_1 y_2 y_3 + g_2(y_1 + y_2)y_3 + g_3 B_1$ $A_2 = y_3(y_2^2 + g_1 g_2) + y_3^2(y_1 + y_2) + g_3 B_2$ $A_3 = y_3^2 g_1 + g_3 B_3$ $B_1 = (y_1 + y_2)y_3 + y_1 y_2$ $B_2 = y_3 g_1 + g_1 y_2 + g_2(y_1 + y_2)$ $B_3 = y_2^2 + g_1 g_2$
4段形	$A_0 = y_1 y_2 y_3 y_4$ $A_1 = g_1 y_2 y_3 y_4 + g_2(y_1 + y_2)y_3 y_4 + g_3 y_4(y_1 y_2 + y_3 y_2 + y_3 y_1) + B_1 g_4$ $A_2 = (y_2^2 + g_1 g_2)y_3 y_4 + y_4 y_3^2(y_1 + y_2) + g_1 g_3 y_4(y_2 + y_3) + g_2 g_3 y_4(y_1 + y_2)$ $+ y_4^2(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) + B_2 g_4$ $A_3 = y_3^2 y_4 g_1 + g_3 y_4(y_2^2 + g_1 g_2) + g_1 y_4^2(y_2 + y_3) + g_2 y_4^2(y_1 + y_2) + B_3 g_4$

	$A_4 = y_4^2(y_2^2 + g_1 g_2) + B_4 g_4$ $B_1 = y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 + y_3 y_4 y_1 + y_4 y_1 y_2$ $B_2 = g_1 y_2 y_3 + g_2(y_1 + y_2) y_3 + g_3(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1) + g_1 y_4(y_2 + y_3) + g_2 y_4(y_1 + y_2)$ $B_3 = y_3(y_2^2 + g_1 g_2) + y_3^2(y_1 + y_2) + g_3 g_1(y_2 + y_3) + g_3 g_2(y_1 + y_2) + y_4^2(y_2^2 + g_1 g_2)$ $B_4 = y_3^2 g_1 + g_3(y_2^2 + g_1 g_2)$

3. 最平坦形特性

設計周波数f_0での整合條件は，(2·3)式で $\varphi = j\frac{\pi}{2}$ と置いて次式で示される。

$$y_{in}\Big|_{\varphi = j\frac{\pi}{2}} = \frac{A_n}{B_n} = 1 \qquad (3\cdot 1)$$

上式より $A_n = B_n$ を満たす $g_1 \sim g_n$, $y_1 \sim y_n$ のうち平坦特性を得るため，

$$\frac{\partial y_{in}}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi = j\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad (3\cdot 2)$$

と置くと(3·1), (3·2)式より

$$A_{n-1} = B_{n-1} \qquad (3\cdot 3)^*$$

さらに

$$\frac{\partial^2 y_{in}}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi = j\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad (3\cdot 4)$$

と置くと(3·1), (3·2), (3·3)式より

$$A_{n-2} = B_{n-2} \qquad (3\cdot 5)$$

以下 $A_{n-3} = B_{n-3}$ (3·6)

$$\vdots$$

$$A_1 = B_1 \qquad (3\cdot 7)$$

となるまでn段形にて$(n-1)$回微分まで零とすることが可能で

*Appendix I

ある。(3.1)～(3·7)式を(2·3)式に代入すると，最平坦特性を得たときの入力アドミタンスは，

$$y_{in} = 1 + \frac{A_0}{B_1 T(\varphi) + B_2 T(\varphi)^2 + \cdots\cdots + B_n T(\varphi)^n} \qquad (3\cdot8)$$

となり段数を増すことにより設計点付近での特性が改善されることがわかる。

$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$ とすると2段形では(3·1)，(3.3)式，3段形では，(3·1)，(3·3)，(3·5)式，4段形では，(3·1)，(3.3)，(3.5)，(3·6)式の各連立方程式を解くことによって2～4段形における g_1，g_2，g_3，g_4 を決定することが出来る。g の値の計算結果をTable II に示し，その周波数特性をFig A に示す。

Table II

n	2	3	4
g_1	1.414	1.650	1.766
g_2	0.293	0.509	0.665
g_3		0.110	0.238
g_4			0.048

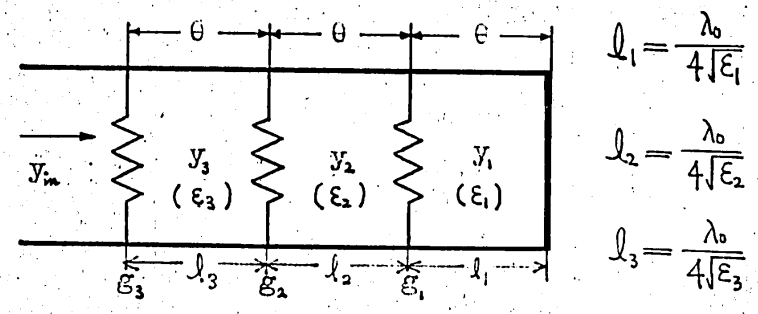


Fig.2

次にFig.2に示すように誘電体を装置した時の全長($l_1+l_2+l_3$)と周波数特性の変化を知るために，先ず全長を与え，その値を満たす全長を与え，その値を満たす y_1，y_2，y_3 のいろいろな組のうち，V.S.W.R. 1.1にて最大の帯域巾を得る y_1，y_2，y_3 を見つけ出し，全長と帯域巾の関係を2～3段形にて計算した

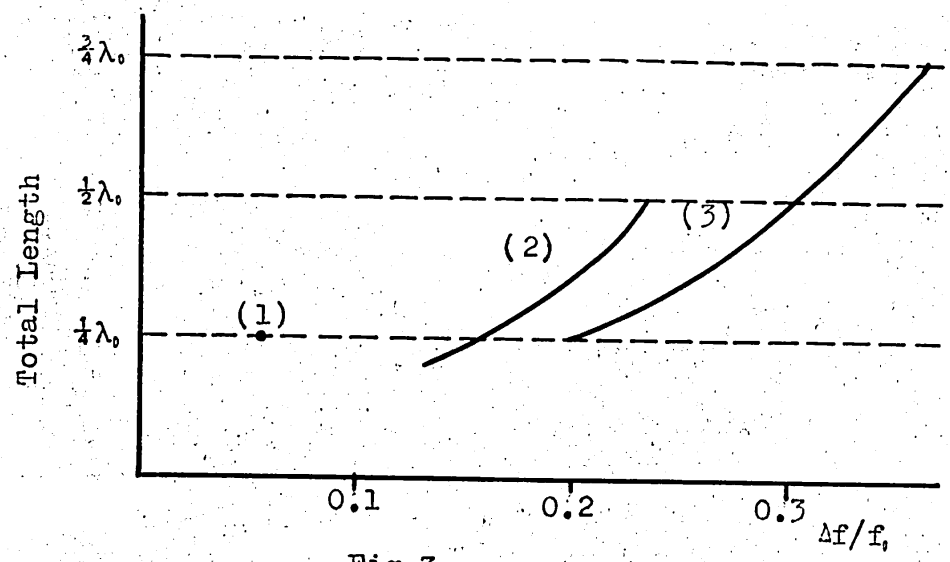


Fig.3

結果をFig.3に示す。詳しい数値とグラフはAppendix Ⅱに示した。又，Fig.4に示すように抵抗膜の前面に誘電体を装荷する事により1枚の抵抗膜で周波数特性を改善する事が出来る。

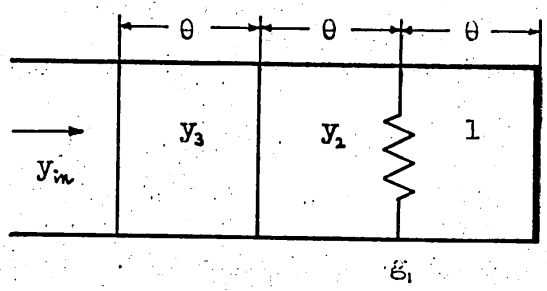


Fig.4

2段形では，(3·1)，(3·3)式より g_1，y_2 が決定出来，3段形では(3·1)，(3·3)，(3·5)式より g_1，y_2，y_3 が決定出来る。その数値と周波数特性をFig.Bに示す。

4. 波形特性

Fig.6に示すように電圧定在波比一定値以下での広帯化をはかるため，数点で整合を取ることを考える。(1·3)式より入力アドミタンスを次のように置く。

$$y_{in} = 1 + \frac{M(\varphi)}{N(\varphi)}$$

$$= 1 + \frac{A_0 + (A_1 - B_1)T(\varphi) + (A_2 - B_2)T(\varphi)^2 + \cdots + (A_n - B_n)T(\varphi)^n}{B_1 T(\varphi) + B_2 T(\varphi)^2 + \cdots + B_n T(\varphi)^n} \qquad (4\cdot1)$$

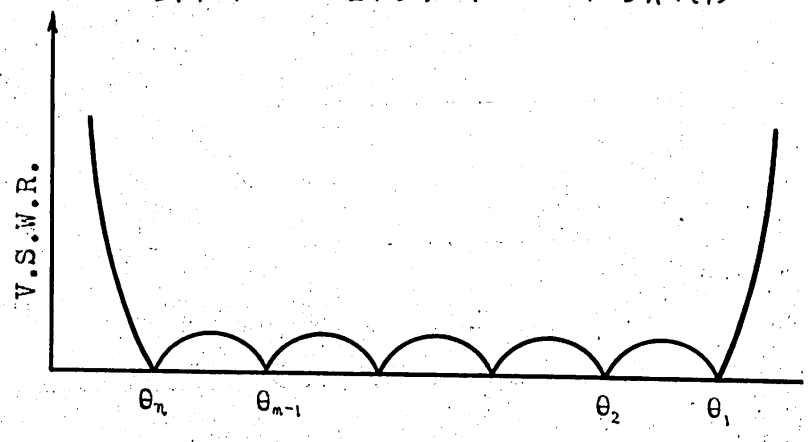


Fig.5

茲で，nが偶数の場合はFig.6(a)に示すように設計点にて凸形の特性となり，nが奇数の場合は設計点で整合を取り凹形の特性とすることが出来る。nが奇数の場合は，まず$A_n = B_n$として設計周波数にて整合を取ると，$M(\varphi)$の最高次数は偶数となる。従って零点の配置方法，即ち，整合を取ることについては，最高次数が偶数である多項式$M(\varphi)$の零点を論ずればよい。今，$M(\varphi) = 0$ の根をT_1，T_2，$\cdots T_n$とすると，

$$(T(\varphi) - T_1)(T(\varphi) - T_2)(\cdots\cdots\cdots)(T(\varphi) - T_n) = 0 \qquad (4\cdot2)$$

となり実周波数$\varphi = j\theta$では$T(\varphi)$は純虚数であり，$A_0 \sim A_n$，$B_1 \sim B_n$は正の実数であるから，$T_1 \sim T_n$は互に共役な値をもつ純虚数である。従って$T_1 = -T_2$，$T_3 = -T_4$，$\cdots\cdots T_{n-1} = -T_n$とすると(4·2)式は，

$$(T(\varphi)^2 - T_2^2)(T(\varphi)^2 - T_4^2)(\cdots\cdots)(T(\varphi)^2 - T_n^2) = 0 \qquad (4\cdot3)$$

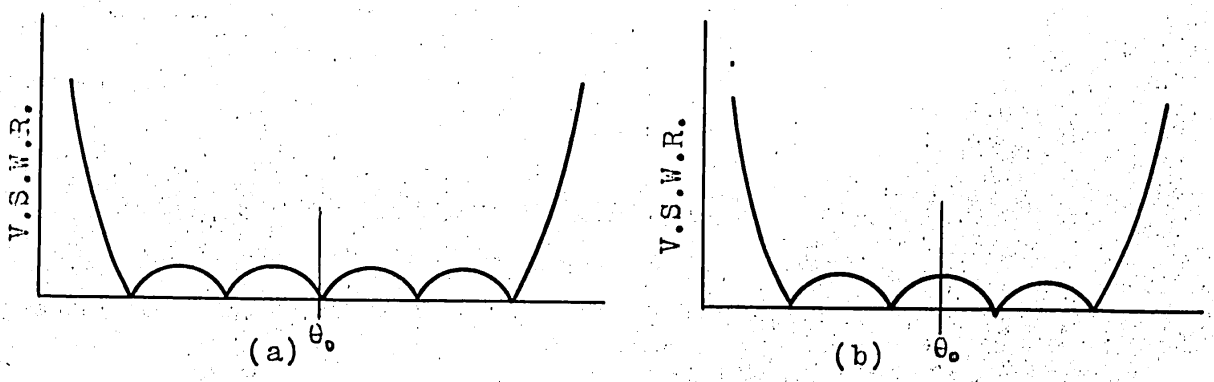


Fig.6

上式を展開し$M(\varphi)$と各係数を等しいと置けば，n段形にてn点で整合を取ることが可能である。しかしここで$M(\varphi)/N(\varphi)$が$T(\varphi)=0$以外で極を持たないためには，多項式

$$N'(\varphi)=B_1+B_2T(\varphi)+B_3T(\varphi)^2+\cdots\cdots+B_nT(\varphi)^{n-1} \qquad (4.4)$$

が実周波数にて零点を持たぬことが必要である。係数はすべて零になることがないから，偶数部と奇数部の零点が隔離していれば良い。

(a) 2段形；　2段形では$\varphi_1=j(\frac{\pi}{2}-\Delta\theta)$及び$\varphi_2=j(\frac{\pi}{2}+\Delta\theta)$従って，$T_1=j\cot\Delta\theta$及び$T_2=-j\cot\Delta\theta$の2点で整合を取る事が出来る。(4.3)式より零点の配置は，

$$-T_2^2+T^2(\varphi)=0 \qquad (4.5)$$

なる式より与えられる。一方，(4.1)式より

$$M(\varphi)=A_0+(A_1-B_1)T+(A_2-B_2)T^2=0$$

従って

$$\frac{A_0}{A_2-B_2}+\frac{A_1-B_1}{A_2-B_2}T(\varphi)+T^2(\varphi)=0 \qquad (4.6)$$

茲で，(4.5)と(4.6)式の各係数を比較することにより回路定数を決定する設計式は，

$$\begin{cases} A_0-(A_2-B_2)\cot^2\Delta\theta \\ A_1-B_1=0 \end{cases} \qquad (4.7)$$

上式で$y_1=y_2=1$とすると$\Delta\theta$に対して，g_1，g_2を決定することが出来る。各$\Delta\theta$についてのg_1，g_2の値とその周波数特性をFig. Cに示した。周波数変化に対する入力アドミタンスの代表的な軌跡をFig. 7に示す。

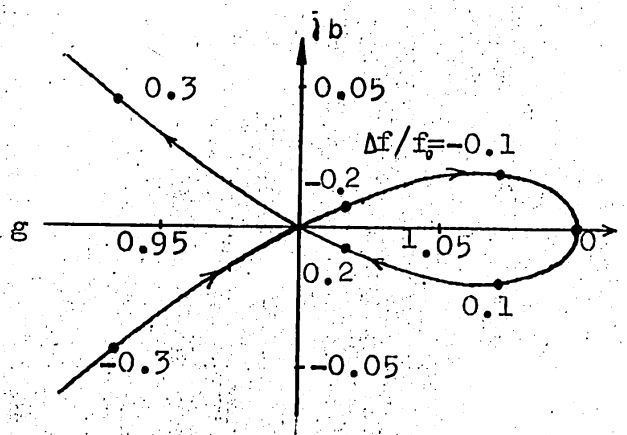


Fig. 7

(b) 3段形；　$\varphi_1 = j\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = j(\frac{\pi}{2} - \Delta\theta)$, $\varphi_3 = j(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta)$ の3点で整合を取ることが出来る。先ず，設計周波数にて整合を取る為に，

$$A_3 = B_3 \tag{4.8}$$

と置く。次に(a)と同様に(4.1)式と(4.3)式を比較して，

$$\begin{cases} A_0 - (A_2 - B_2)\,T(\varphi)^2 = 0 \\ A_1 = B_1 \end{cases} \tag{4.9}$$

同様に，$y_1 = y_2 = y_3 = 1$ とすると，$\Delta\theta$ に対して g_1, g_2, g_3 を決定することが出来る。各 $\Delta\theta$ についての g_1, g_2, g_3 の値とその周波数特性を Fig. D に示し入力アドミタンスの代表的な軌跡を Fig. 8 に示す。

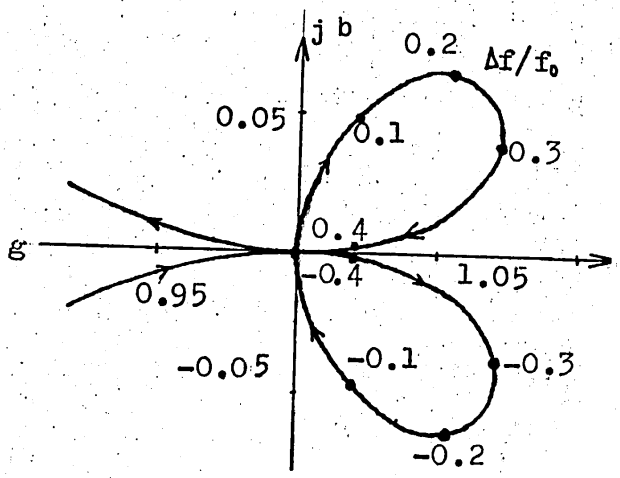


Fig.8

以上の結果より，V.S.W.R.=1.1 以下での帯域巾 $\Delta f/f_0$ を表にすると Table III となる。

n	最平坦形特性の帯域幅	波形特性の帯域幅	末武・高島氏による最大帯域幅
1		0.121	0.122
2	0.442	0.630	0.63
3	0.723	1.01	1.009

Table III　V.S.W.R.≦1.1 における帯域幅 $2\Delta f/f_0$

表より，筆者らが回路理論的に計算した波形特性の帯域巾は東工大にて末武・高島氏がスミス図表を用いて定性的に明らかにされた最大帯域巾とよく一致する。即ち，筆者等の設計理論により，皮膜抵抗値と容易に決定出来て，定性的な取扱いの煩

雑さをなくす事が出来る。

5. 斜め入射に対する特性の検討

$\lambda_0/4$ の共振で整合を取っているため，斜め入射に対しては，特性が劣化する。この影響を知るため，Fig. 9(a) の様に，入射角 i で平面波が入射し，その電界 E_i が入射面内にある場合について考える。その時の等価回路は Fig. 9(b) となり，図より，

$$\begin{cases} \lambda_g = \dfrac{\lambda}{\cos i} \\ Y_0' = \dfrac{H_y}{E_x} = \dfrac{H}{E\cos\theta} = \dfrac{Y_0}{\cos i} \end{cases}$$

とすると入力アドミタンスは，

$$(Y_{in})_E = G_1 - jY_0 \cot\frac{2\pi}{\lambda_g} l$$

Y_0' で正規化すると，

$$(y_{in})_E = \frac{g_1}{\cos i} - j\cot\left(\frac{\pi}{2}\cos i\right) \qquad (5\cdot1)$$

同様にして，入射波の電界が入射面に垂直な場合の正規化入力アドミタンスは

$$(y_{in})_H = g_1\cos i - j\cot\left(\frac{\pi}{2}\cos i\right) \qquad (5\cdot2)$$

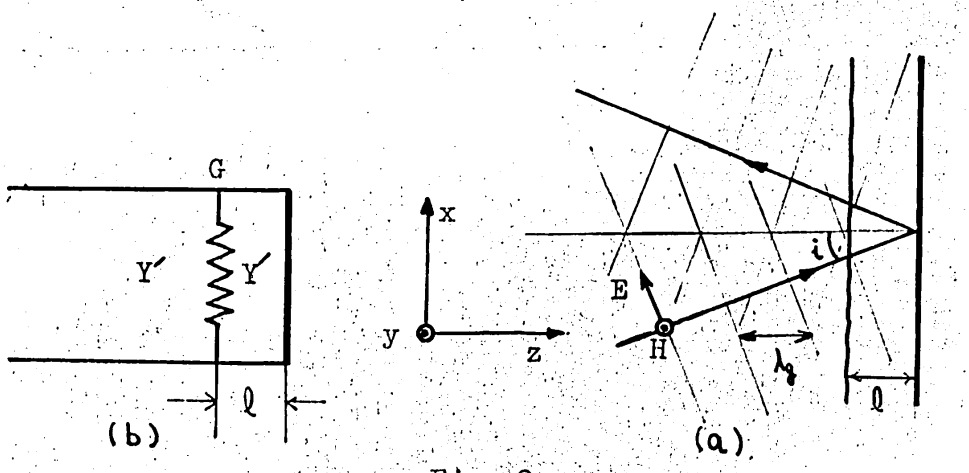


Fig. 9

(5·1), (5·2)式の i の変化に対する電圧定在波比の変化をFig.10に示す。2段形においても同様に計算して，その角度に対する変化をFig.10に示す。

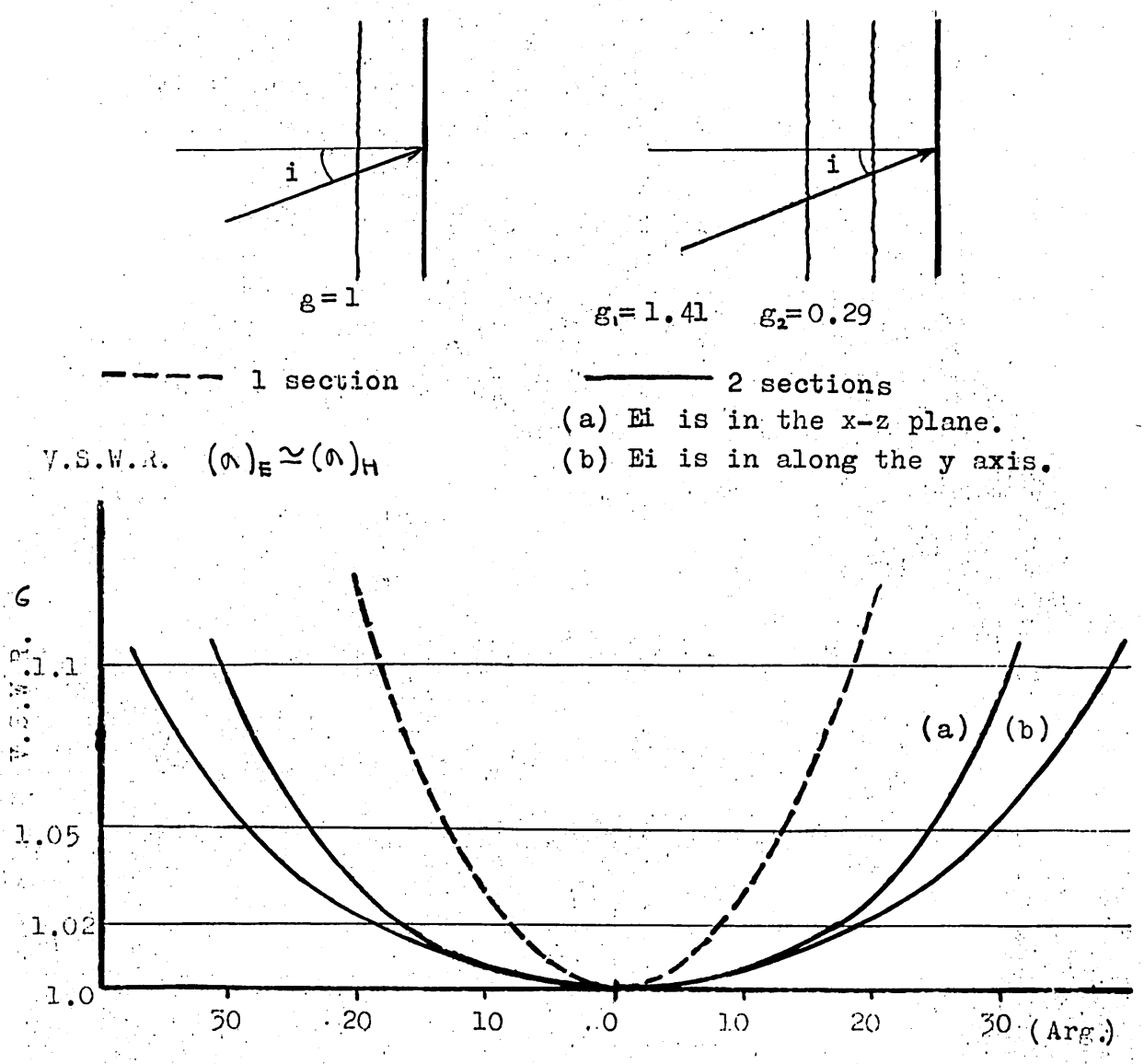


Fig. 10

6. 実際の皮膜抵抗と実験結果

皮膜抵抗としては均一な表面抵抗をもつ純抵抗であり，温度，湿度などに対し安定な抵抗値を示すことが必要であるが，実際に製作することは困難である。我々はポリ・フォーム(比誘電率 ε_r = 1.0)にドータイト・ペイントを薄く数回にわたり塗布すること

により所定の抵抗値を得るようにした。(膜の厚みは約 $1 \sim 5\times10^{-5}$ m) 試作の抵抗膜は4Gcで $g_1=1.45+j0.25$, $g_2=0.28+j0.19$ であり，かなり大きなサセプタンスが生じた。このサセプタンスを消すため伝送線路を $\lambda_0/4$ より幾分短かくした。実験はFig.11に示すように抵抗膜前面にてプローブを移動して電圧定在波比を求めた。その理論値と実験値をFig.12に示す。

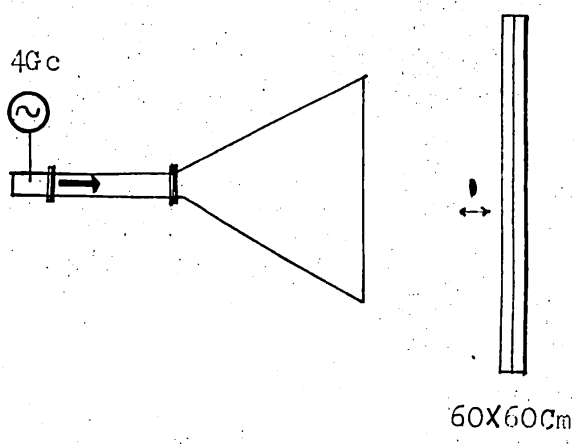


Fig. 11

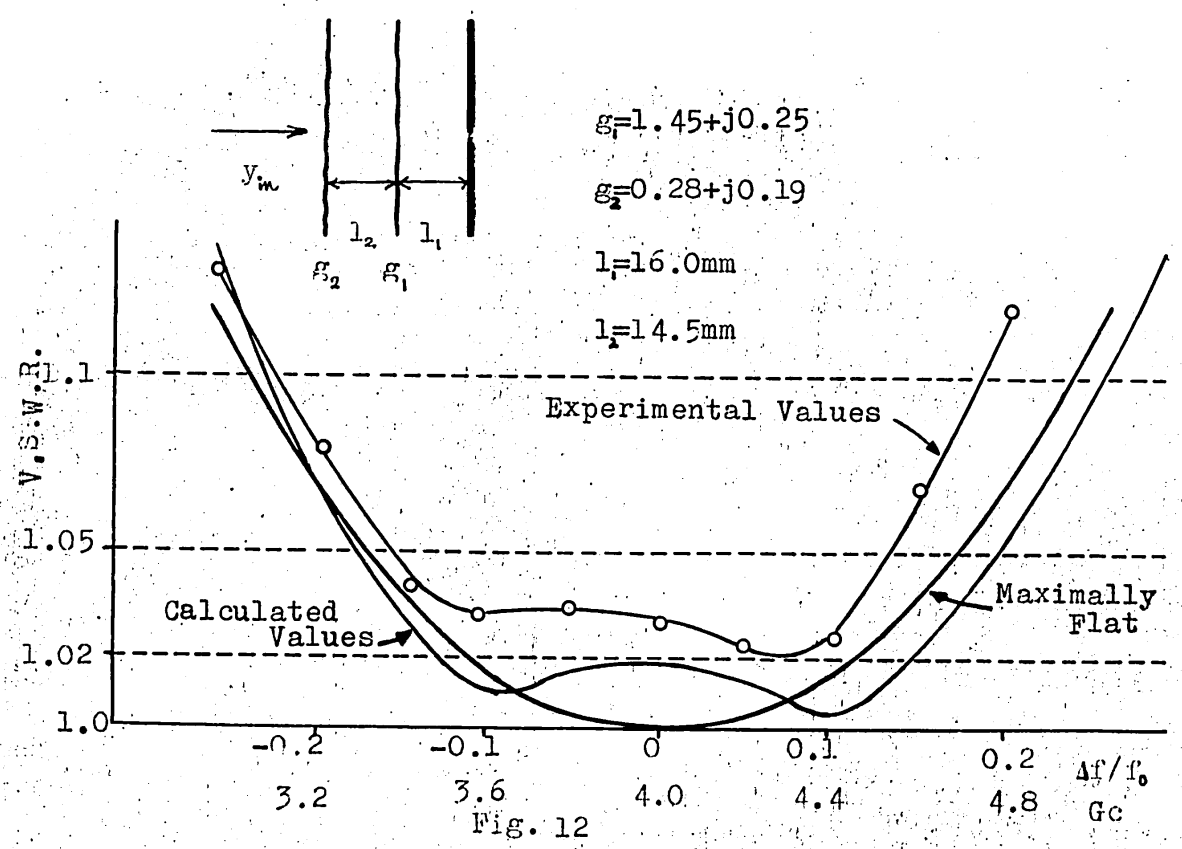


Fig. 12

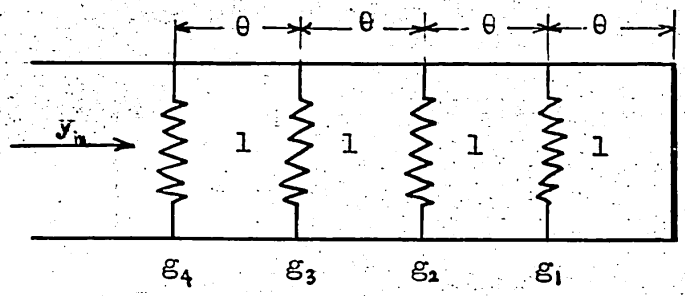
7 結言

本研究により，n段形の整合負荷について，入力アドミタンスの周波数に対する変化を(n-1)回微分まで零とする最平坦形特

性の設計方法及び，n点で整合のとれる波形特性の設計方法が明らかになった。更に1～4段形について，上の一般理論を適用して理論的に皮膜抵抗の値を決定し，かつ，その周波数特性を示した。また2段形の最平坦形整合負荷を試作して実験を行ない，理論値と実験値を比較検討した。終りに種々御配慮いただいた日本カーボン研究開発部長戸田文雄氏に深謝の謝意を表す。なお，本文の数値計算の大部分は，同志社大学電子計算機センターで行なったものである。

参考文献

1) C.G. Montgomery : "Principles of Microwave Circuits" Mcgraw Hill 1948
2) Louis Coltun : "Multisection Microwave Terminating Structures" Air Force Office of Scientific Research. Report R-573-57 (April 24, 1957)
3) 末武国弘・高島　貢；抵抗皮膜列整合端の広帯域化，電通学会マイクロ波伝送研究会資料 (1965, 8)
4) 滝　保夫；伝送回路 (共立)



n	1	2	3	4
g_1	1	1.414	1.650	1.766
g_2		0.293	0.509	0.665
g_3			0.110	0.238
g_4				0.048

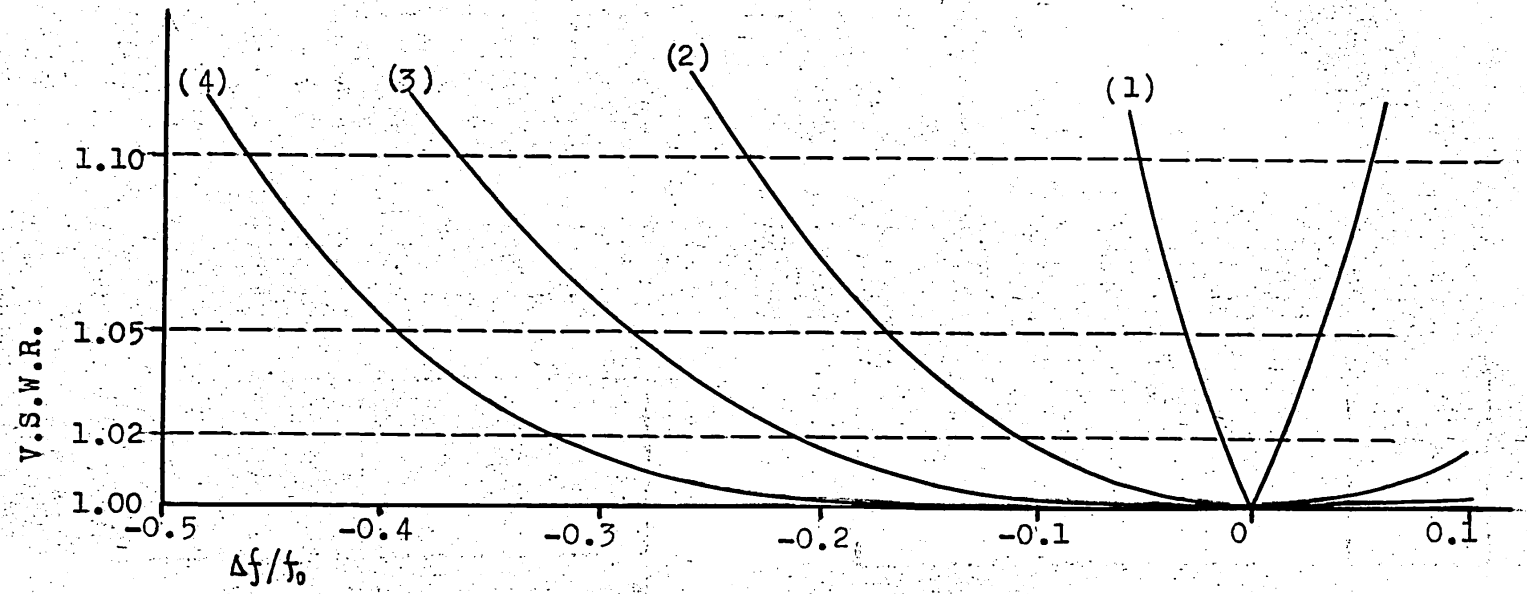
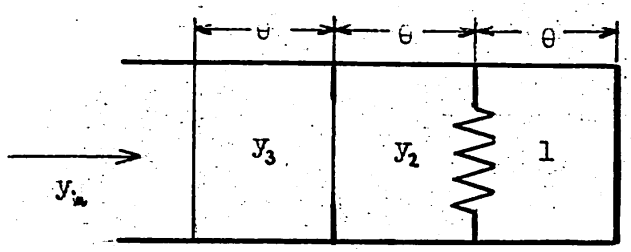


Fig. A



g

n	g	y_1	y_2	y_3
1	1	1	1	1
2	1.75	1	1.33	1
3	2.44	1	1.78	1.14

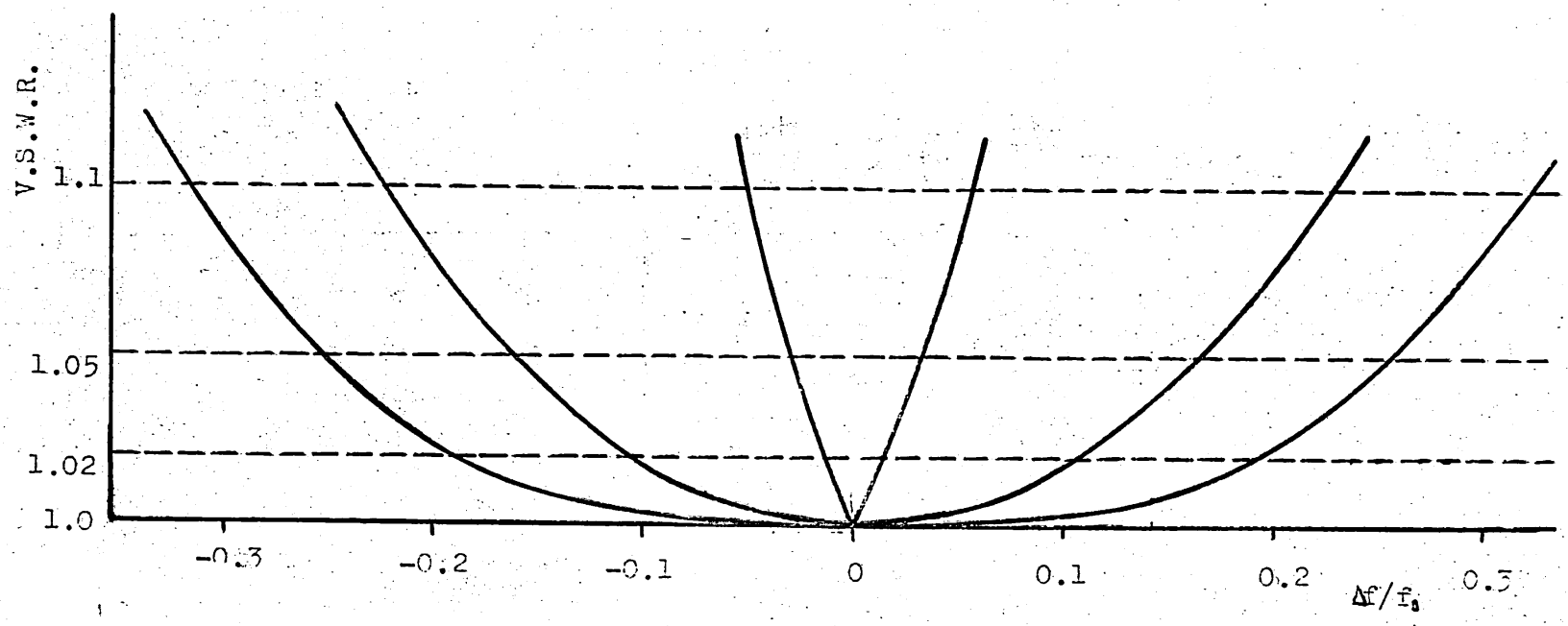
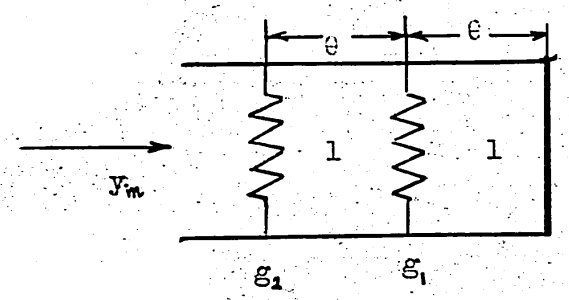


Fig. B



No	g_1	g_2	$\Delta\theta$
1	1.40	[illegible].30	0.15
2	1.39	0.31	0.20
3	1.37	0.32	0.25
4	1.35	0.33	0.30
5	1.32	0.34	0.35

θ=Radian

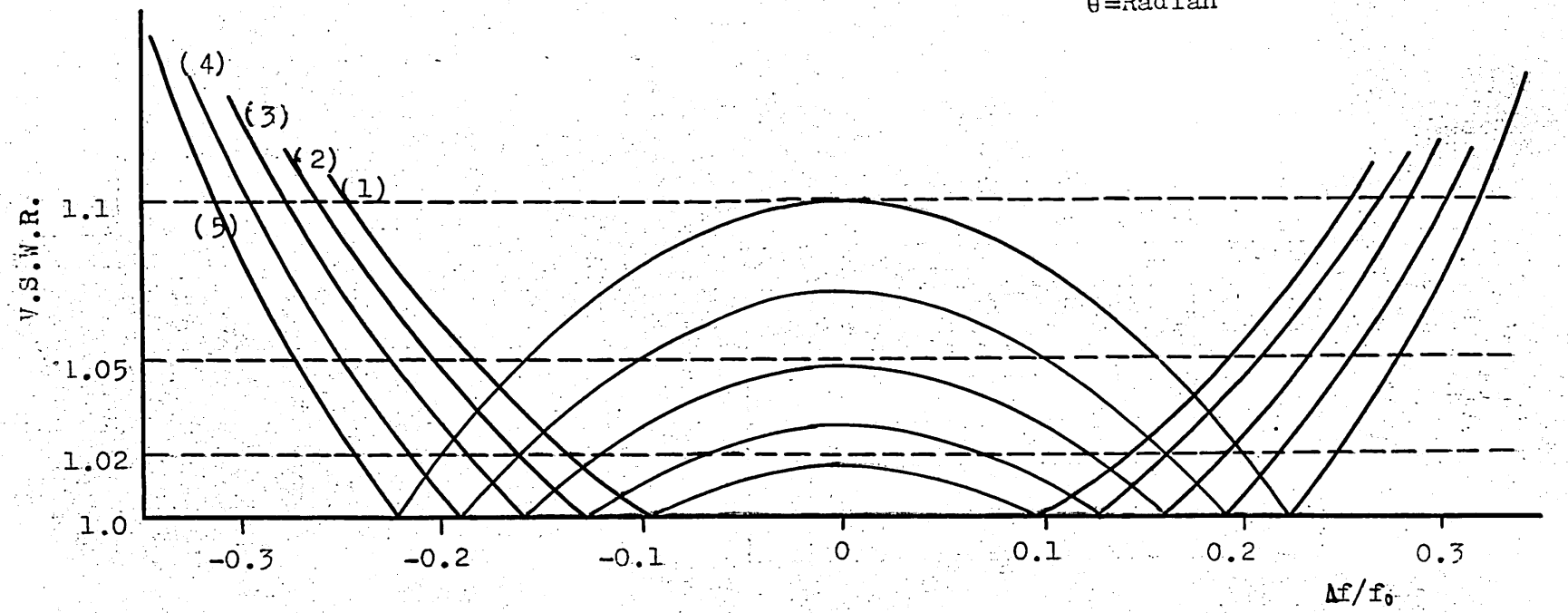
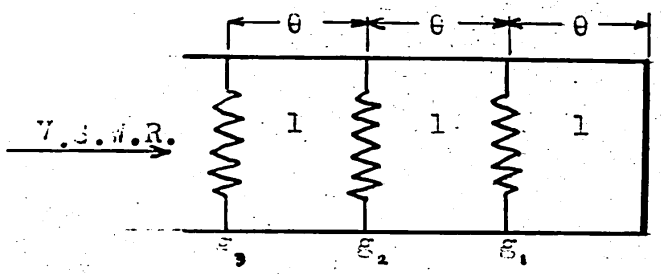


Fig. C



No.	g_1	g_2	g_3	$\Delta\theta$
1	1.558	0.508	0.131	0.40
2	1.540	0.511	0.136	0.50
3	1.487	0.515	0.148	0.55
4	1.451	0.517	0.171	0.60
5	1.406	0.518	0.190	0.65
6	1.355	0.518	0.203	0.70

θ=Radian

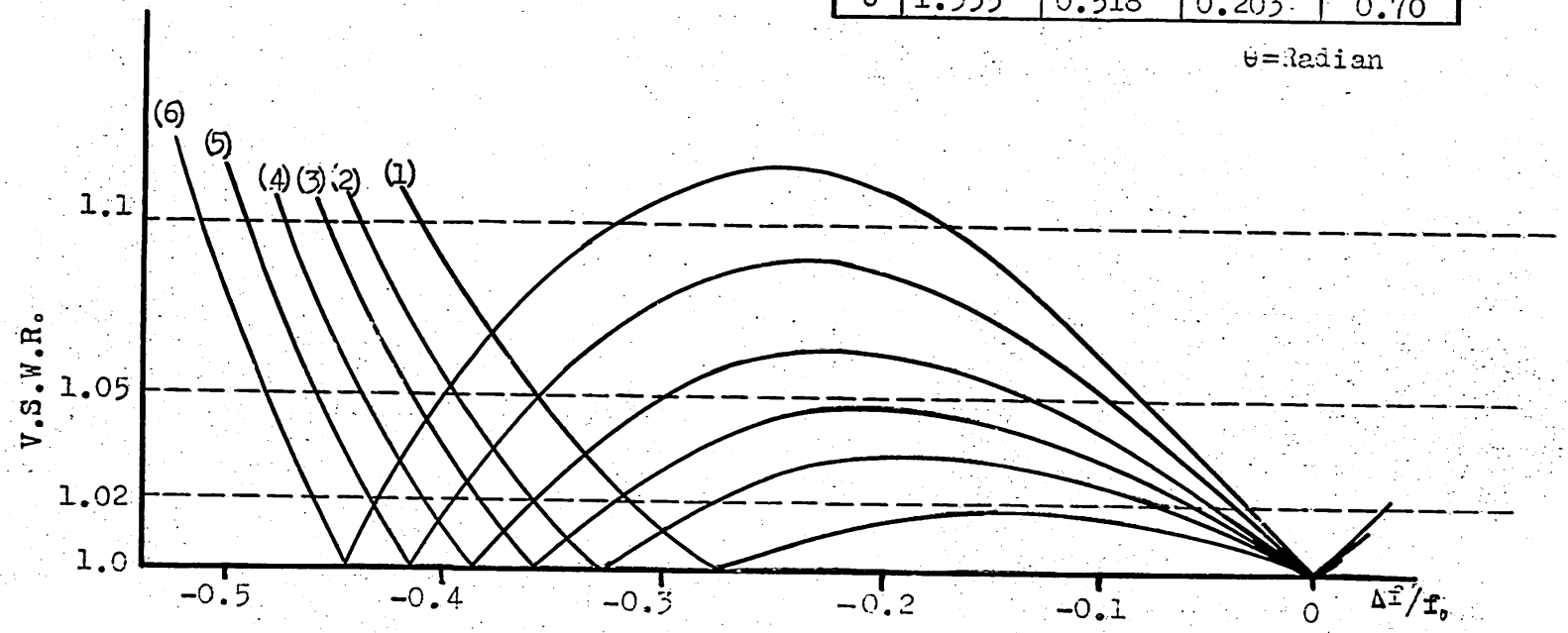


Fig. D

Appendix I

(2·3)式より

$$y_{in}=\frac{A_0+A_1T(\varphi)+\cdots+A_{n-2}T(\varphi)^{n-2}+A_{n-1}T(\varphi)^{n-1}+A_nT(\varphi)^n}{B_1T(\varphi)+\cdots+B_{n-2}T(\varphi)^{n-2}+B_{n-1}T(\varphi)^{n-1}+B_nT(\varphi)^n}$$

ここで $T(\varphi)=T,\ \frac{\partial T}{\partial\varphi}=1-T^2$ より

$$\frac{\partial y_{in}}{\partial\varphi}=(1-T^2)\Big[(A_1+\cdots+(n-2)A_{n-2}T^{n-3}+(n-1)A_{n-1}T^{n-2}+nA_nT^{n-1})$$

$$\times(B_1T+\cdots+B_{n-2}T^{n-2}+B_{n-1}T^{n-1}+B_nT^n)-(A_0+A_1T+\cdots+A_{n-2}T^{n-2}+A_{n-1}T^{n-1}$$

$$+A_nT^n)(B_1+\cdots+(n-2)B_{n-2}T^{n-3}+(n-1)B_{n-1}T^{n-2}+nB_nT^{n-1})\Big]\Big/\Big[B_1T+\cdots$$

$$\cdots+B_{n-2}T^{n-2}+B_{n-1}T^{n-1}+B_nT^n\Big]^2$$

$$=\frac{-A_0B_1+\cdots+2[A_{n-2}B_n-A_nB_{n-2}]T^{2n-1}+[A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n]T^{2n}}{[B_1T+\cdots+B_{n-2}T^{n-2}+B_{n-1}T^{n-1}+B_nT^n]^2}$$

ここで

$$\left.\frac{\partial y_{in}}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=j\frac{\pi}{2}}=\frac{A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n}{B_n^2}=0$$

故に $A_n=B_n$ より上式は

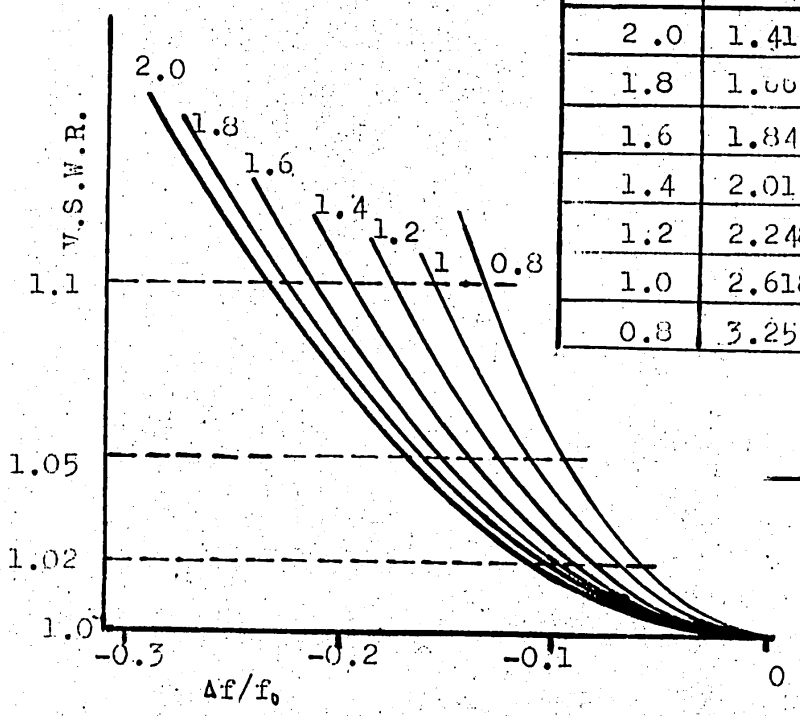
$$A_{n-1}=B_{n-1}$$

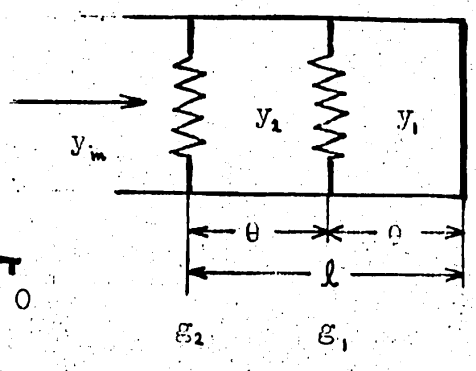
となり本文の(3·3)式となる.

Appendix II

Total Length=nλ/4

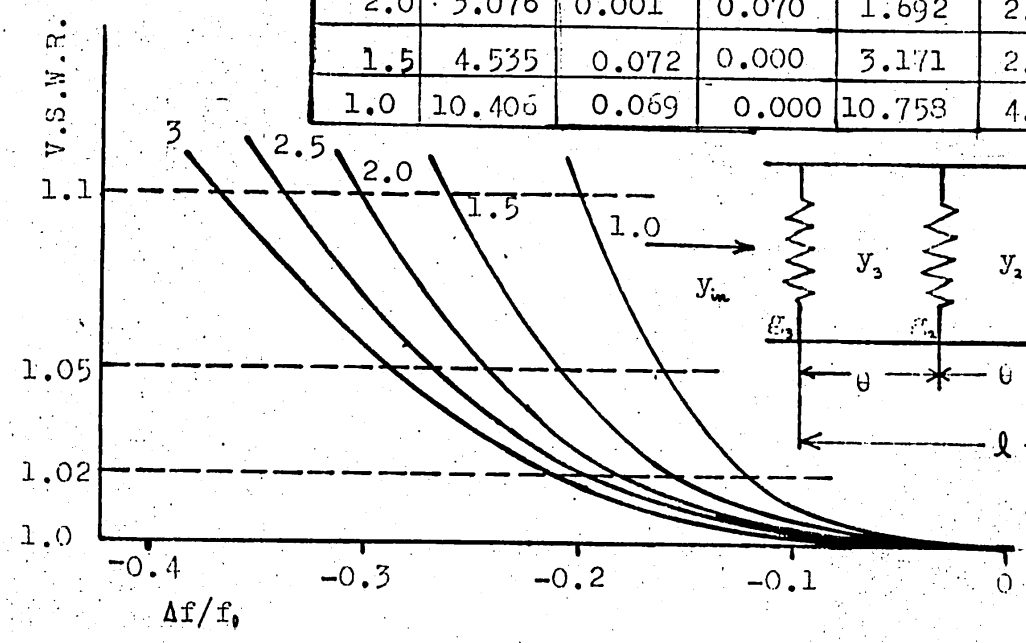
n	g_1	g_2	y_1	y_2
2.0	1.414	0.293	1	1
1.8	1.665	0.084	1.010	1.235
1.6	1.846	0.005	1.160	1.355
1.4	2.012	0.002	1.440	1.417
1.2	2.248	0.003	1.880	1.497
1.0	2.618	0.001	2.620	1.617
0.8	3.255	0.000	4.070	1.804

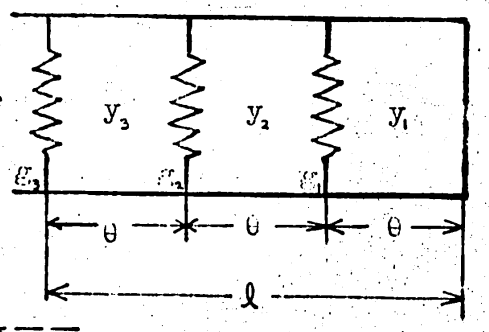




Total Length=nλ/4

n	g_1	g_2	g_3	y_1	y_2	y_3
3	1.650	0.509	0.110	1	1	1
2.5	2.028	0.829	0.000	1.586	1.000	1.150
2.0	3.076	0.001	0.070	1.692	2.000	1.100
1.5	4.535	0.072	0.000	3.171	2.600	1.250
1.0	10.406	0.069	0.000	10.758	4.600	1.450





輻射科学研究会資料

不平衡伝送線路を含む折返しユニポールアンテナ

喜連川　　隆
武　市　吉　博

（三菱電機株式会社中央研究所）

1965年10月30日

不平衡伝送線路を含む折返しユニポールアンテナ

喜連川隆
武市吉博
（三菱電機株式会社中央研究所）

1. まえがき

一般に移動体用ユニポールアンテナはその寸法ができるだけ小さいことが望まれる。しかし普通の単一線状導体ユニポールアンテナで，その高さをただ低くするだけで，給電線に対する整合は別個の整合回路をアンテナに付加することによって達しようとすると，二つの好ましくない問題がある。才1は付加整合回路のためにそれを含めたアンテナ全体の占有空間が増大することであり，才2は才1の問題を避けるために寸法の小さい集中定数整合回路を用いたときその損失のためにその回路を含めたアンテナ全体の電力伝達能率が低下することである。したがって移動体用ユニポールアンテナでは，寸法が小さくてかつそれ自体で整合がとれているようにすることが重要で，この小形化がこの論文に述べる研究の目的である。

折返しアンテナ[1]はこの小形化の問題解決に近づくための有効な形式であると考えられる。その理由は，折返しアンテナはそれ自体が，理想変成器，並列リアクタンス素子，直列リアクタンス素子などの働きをもつからである。すでに平行2線状導体で構成した折返しユニポールアンテナで，その基部にリアクタンス装荷を行なう方法[2],[3]，あるいは接地側線状導体基部を地板に対して開放するとともに給電点を線状導体に沿って移動させる方法[4],[5]による小形化が示され，また平行3線状導体で構成した折返しアンテナの研究[6],[7]によれば，その種々の変形の中に小形化に適したものが認められる。

この論文では，上述のような折返しアンテナの性質を考慮に入れて，まず図1.1のような一般化した平行多線状導体折返しユニポールアンテナを考えてその給電点インピーダンスの一般式を理論的に求め，つぎにそれに基ずいて平行4線状導体の場合のうち，とくにそのうちの2導体がそれぞ

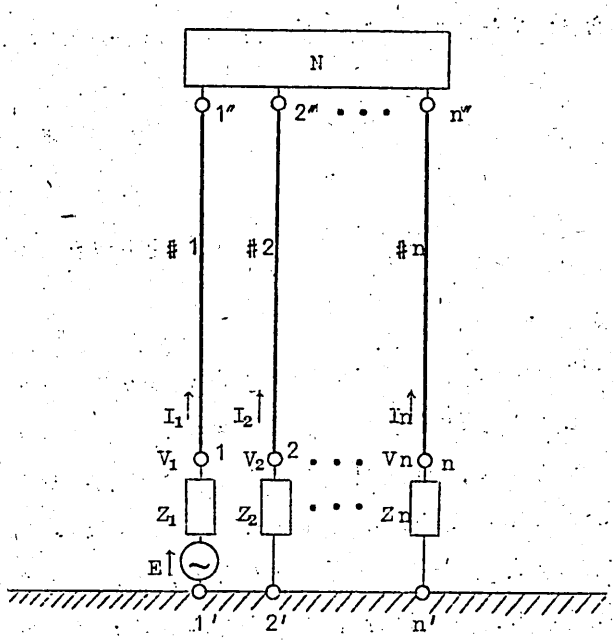


図1.1　一般化した平行多線状導体折返しユニポールアンテナ

れ他の2導体の内側に包まれているもの，すなわち後掲図3.3のように同軸線路などの不平衡伝送線路が放射導体内部に形成されている折返しユニポールアンテナにつき回路的性質を調べて小形化に適したアンテナ構成方法を見出し，最後にこの不平衡伝送線路を含む折返しユニポールアンテナの整合条件を考察して二，三の新らしい形の小形化アンテナを導出した。

2. 一般化した平行多線状導体折返しユニポールアンテナの給電点インピーダンス

前掲図1.1のアンテナの解析を行なう。その方法は従来の折返しアンテナの理論[1],[8],[9]による。図のアンテナはたがいに平行なn本（n＝2，3，4，……）の線状導体＃1，＃2，……，＃n，基部装荷インピーダンスZ_1，Z_2，……，Z_n，および頂部回路網Nから成り，給電点は線状導体＃1の基部であってその起電力をEとする。

端子対1－1′，2－2′，……，n－n′における電圧をそれぞれV_1，

V_2, ……, V_n とし，端子1，2，……，nを流れる電流をそれぞれ I_1, I_2, ……, I_n とするとき，これらの電圧および電流はそれぞれn本の平行線状導体上のn個の直交モード[1],[9]の電圧および電流の1次結合で表わすことができる。ここではそれらの関係を式（2.1）および（2.2）で与える。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \vdots \\ \hat{V}_n \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1n} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \cdots & \nu_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n1} & \nu_{n2} & \cdots & \nu_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \vdots \\ \hat{I}_n \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

ここで，$\hat{V}_1$ および $\hat{I}_1$ は，n本の平行線状導体上を電流が同方向に流れて放射に寄与するモードの電圧および電流であり，また $\hat{V}_2$, ……, $\hat{V}_n$ および $\hat{I}_2$, ……, $\hat{I}_n$ は放射に寄与しない（n－1）個の伝送モードの電圧および電流である。なお μ_{ik} および ν_{ik}（i，k＝1，2，……，n）はそれぞれ才kモードの電圧および電流の線状導体#i に対する配分率を意味している。

V_1, V_2, ……, V_n と I_1, I_2, ……, I_n との間には式（2.3）が成り立ち，また $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$, ……, $\hat{V}_n$ と $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, ……, $\hat{I}_n$ との関係を式（2.4）で表わす。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}, \qquad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \vdots \\ \hat{V}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{Z}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{Z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_1 \\ \vdots \\ \hat{I}_n \end{bmatrix}, \qquad (2.4)$$

以上の四つの式（2.1）ないし（2.4）から，給電点インピーダンス $Z = E / I_1$ を，$\hat{Z}_1$，$\hat{Z}_2$，……，$\hat{Z}_n$ ；Z_1，Z_2，……，Z_n ；μ_{ik} ；ν_{ik} の関数として解くと，

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} \mu_{11}\hat{Z}_1 + \nu_{11}Z_1 & \mu_{12}\hat{Z}_2 + \nu_{12}Z_1 & \cdots\cdots & \mu_{1n}\hat{Z}_n + \nu_{1n}Z_1 \\ \mu_{21}\hat{Z}_1 + \nu_{21}Z_2 & \mu_{22}\hat{Z}_2 + \nu_{22}Z_2 & \cdots\cdots & \mu_{2n}\hat{Z}_n + \nu_{2n}Z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1}\hat{Z}_1 + \nu_{n1}Z_n & \mu_{n2}\hat{Z}_2 + \nu_{n2}Z_n & \cdots\cdots & \mu_{nn}\hat{Z}_n + \nu_{nn}Z_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots\cdots & \nu_{1n} \\ \mu_{21}\hat{Z}_1 + \nu_{21}Z_2 & \mu_{22}\hat{Z}_2 + \nu_{22}Z_2 & \cdots\cdots & \mu_{2n}\hat{Z}_n + \nu_{2n}Z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n1}\hat{Z}_1 + \nu_{n1}Z_n & \mu_{n2}\hat{Z}_2 + \nu_{n2}Z_n & \cdots\cdots & \mu_{nn}\hat{Z}_n + \nu_{nn}Z_n \end{vmatrix}} \qquad (2.5)$$

を得る。

3. 不平衡伝送線路を含む折返しユニポールアンテナ

3.1 一般的考察

式（2.5）において　n＝4　とし，さらに線状導体構成が左右対称であるとして，4本の線状導体上の4個の直交モードを図3.1[9]のようにとり，かつ　$\nu_1 = \nu_2 = 0$　とすると

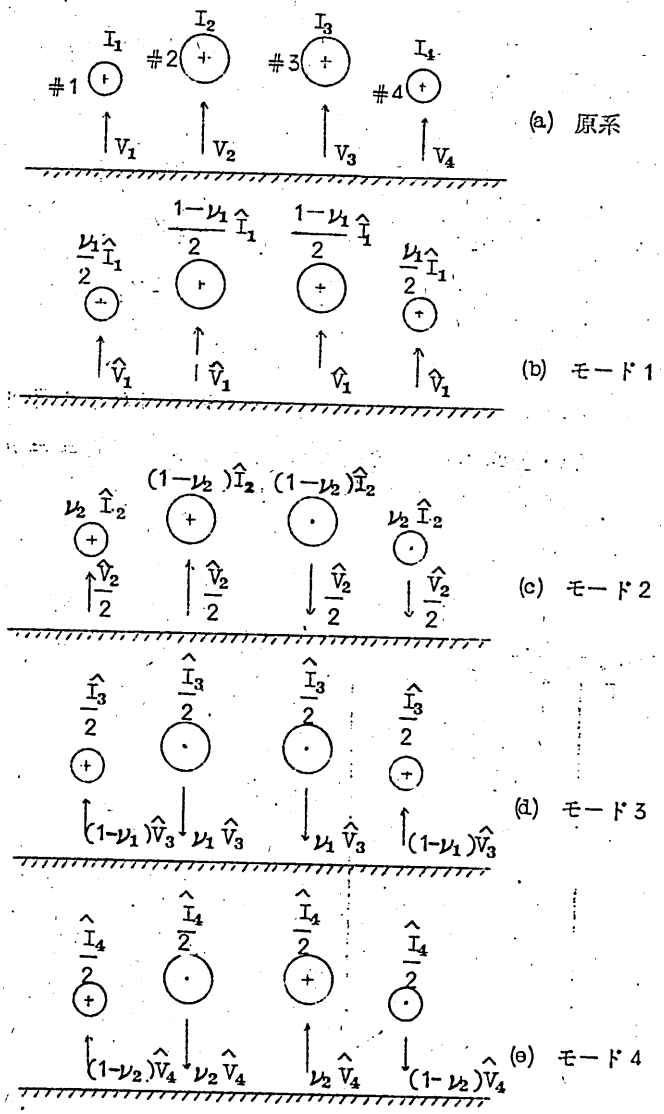


図3.1　左右対称平行4線状導体系の直交モード[9]

$$
Z=\frac{\begin{vmatrix} \hat{Z}_1 & -\frac{1}{2}\hat{Z}_2 & \hat{Z}_3+\frac{1}{2}Z_1 & \hat{Z}_4+\frac{1}{2}Z_1 \\ \hat{Z}_1+\frac{1}{2}Z_2 & -\frac{1}{2}\hat{Z}_2+Z_2 & -\frac{1}{2}Z_2 & -\frac{1}{2}Z_2 \\ \hat{Z}_1+\frac{1}{2}Z_3 & -\frac{1}{2}\hat{Z}_2-Z_3 & -\frac{1}{2}Z_3 & \frac{1}{2}Z_3 \\ \hat{Z}_1 & -\frac{1}{2}\hat{Z}_2 & \hat{Z}_3+\frac{1}{2}Z_4 & -\hat{Z}_4-\frac{1}{2}Z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hat{Z}_1+\frac{1}{2}Z_2 & -\frac{1}{2}\hat{Z}_2+Z_2 & -\frac{1}{2}Z_2 & -\frac{1}{2}Z_2 \\ \hat{Z}_1+\frac{1}{2}Z_3 & -\frac{1}{2}\hat{Z}_2-Z_3 & -\frac{1}{2}Z_3 & \frac{1}{2}Z_3 \\ \hat{Z}_1 & -\frac{1}{2}\hat{Z}_2 & \hat{Z}_3+\frac{1}{2}Z_4 & -\hat{Z}_4-\frac{1}{2}Z_4 \end{vmatrix}} \qquad (3.1)
$$

を得る。これは，図3.2のような二つの相等しい同軸線路などの不平衡伝送線路を内側に形成している導体系で構成した図3.3の折返しユニポールアンテナの給電点インピーダンスを表わしている。

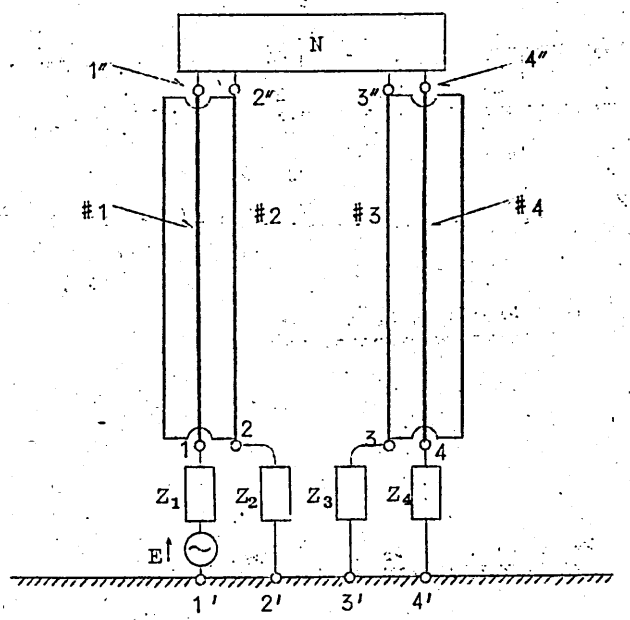


図3.3　同軸線路を内部にもつ折返しユニポールアンテナ

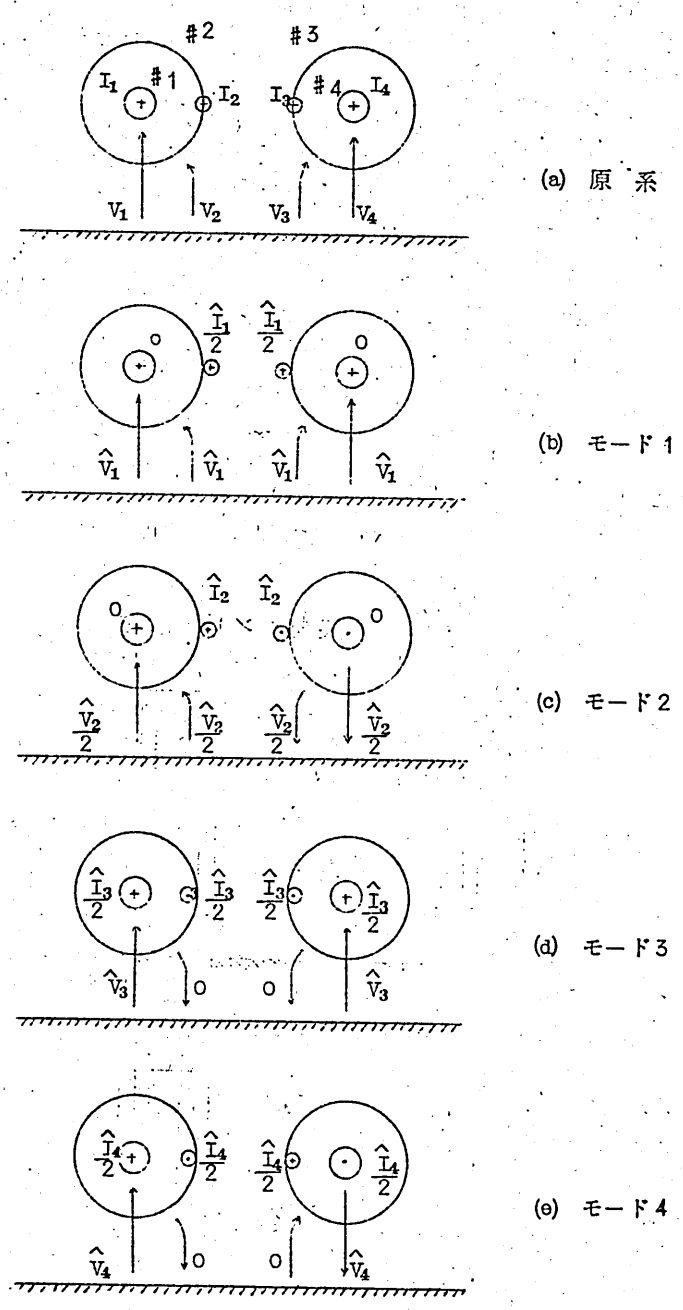


図 3.2　二つの相等しい同軸導体から成る系の直交モード

つぎに図3.3において，装荷インピーダンスZ_1，Z_2，Z_3，Z_4のそれぞれを0あるいは∞と置いてできる種々の場合を考えると，それらの場合の総数は重複順列 ${}_2\Pi_4 = 16$ だけあるが，それらのうち系がアンテナとして働くのは表3.1の五つの場合に限られることは明らかである。具体例として，図3.3に示す頂部回路網Nによって二つの放射導体内同軸線路が

装荷インピーダンス＼場合	1	2	3	4	5
Z_1	0	0	0	0	0
Z_2	∞	0	∞	∞	∞
Z_3	0	∞	∞	0	∞
Z_4	0	0	0	∞	∞

表3.1　装荷インピーダンス

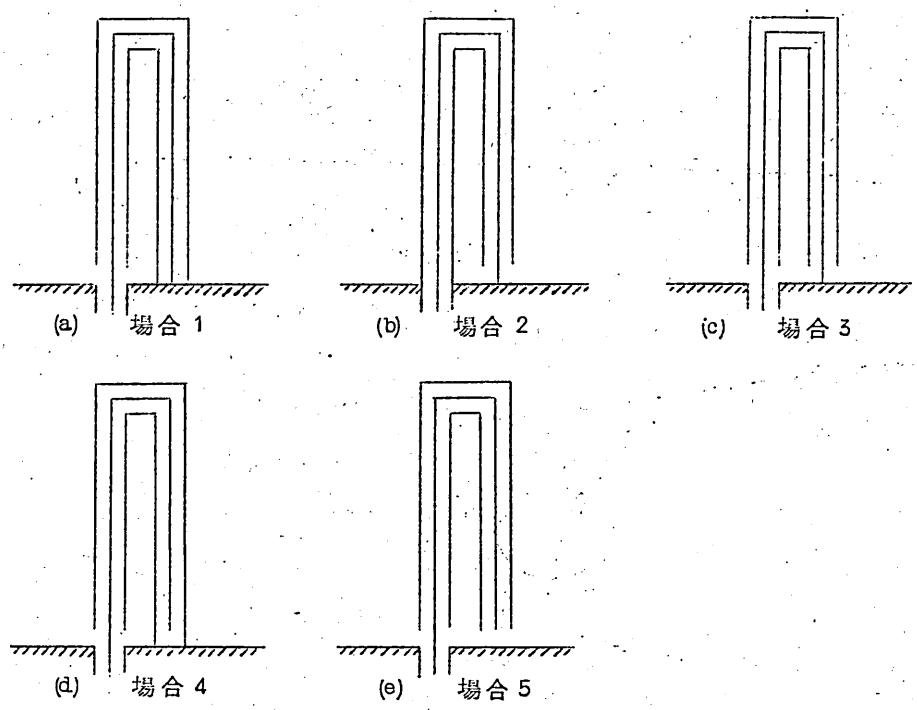


図3.4　表3.1の五つの場合に対応するアンテナの形の具体例

縦続接続されるようにしたときについて，表3.1の五つの場合を示すと図3.4のようになる。五つの場合のうち，図の(a)，(b)，(d)および(e)は平行2線状導体のアンテナとしても容易に取扱うことができ，式（3.1）から導かれるそれらの給電点インピーダンスの式が平行2線状導体のアンテナとして取扱って導かれる式と一致することを示しうるが，ここで目的としている小形化には直接有用ではないので省略し，以下，図の(c)のような $Z_1 = Z_4 = 0$，$Z_2 = Z_3 = \infty$ の場合につき，図3.3に帰って回路的性質を調べる。

3.2 $Z_1 = Z_4 = 0$，$Z_2 = Z_3 = \infty$ の場合

この場合には式（3.1）は

$$Z = \frac{1}{\dfrac{1}{4(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3)} + \dfrac{1}{\hat{Z}_2 + 4\hat{Z}_4}} \qquad (3.2)$$

となる。式（2.4）による定義に基ずいて

$$\left.\begin{aligned} \hat{Z}_1 &= \hat{R}_1 + j\hat{X}_1, \\ \hat{Z}_k &= j\hat{X}_k \quad (k = 2, 3, 4) \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

と置けば

$$Z = \frac{1}{\dfrac{1}{4\{\hat{R}_1 + j(\hat{X}_1 + \hat{X}_3)\}} + \dfrac{1}{j(\hat{X}_2 + 4\hat{X}_4)}} \qquad (3.4)$$

となる。これからわかるように，等価回路的に見ると，放射インピーダンス $\hat{R}_1 + j\hat{X}_1$ に対して (1)直列に $j\hat{X}_3$ が接続され，さらに理想変成器を介して (2)並列に $j(\hat{X}_2 + 4\hat{X}_4)$ が接続されている。とくに $\hat{X}_1$ を $\hat{X}_3$ で打消しうる形であることは小形化の目的に対してきわめて有用である。

つぎにアンテナの給電線の特性インピーダンスをZ_0 として，式（3.4）のZの実数部$Re(Z)=Z_0$，虚数部 $Im(Z)=0$ と置いて，それらを満す $\hat{R}_1$，$\hat{X}_1$，$\hat{X}_2$，$\hat{X}_3$，$\hat{X}_4$，およびZ_0 の関係を求めると，アンテナの整合条件として

$$\left.\begin{aligned}\hat{X}_3 &= -\hat{X}_1 \pm \hat{R}_1\sqrt{\frac{Z_0}{4\hat{R}_1}-1}\,,\\ \hat{X}_2 + 4\hat{X}_4 &= \mp\frac{Z_0}{\sqrt{\frac{Z_0}{4\hat{R}_1}-1}}\,,\end{aligned}\right\}\qquad(3.5)$$

ただし　複号同順

を得る。これから $\hat{R}_1 \leqq Z_0/4$ でなければならないことがわかる。これは，アンテナの高さが低くて放射抵抗が小さいときの整合に役立つことを意味する。$\hat{R}_1 = Z_0/4$ ならば式（3.5）は $\hat{X}_3 = -\hat{X}_1$，$\hat{X}_2 + 4\hat{X}_4 = \mp\infty$ となる。

4. 二，三の新しい小形化アンテナ

式（3.5）に基ずいて，二，三の新らしい小形化アンテナを導出しうる。

4.1 二つの不平衡伝送線路が頂部において縦続接続されている場合

これは前掲図3.4(c)の場合で，各モードの電圧および電流を考えると，

$$\hat{X}_2 = Z_{op}\tan\beta\ell_p,\quad \hat{X}_3 = -\frac{Z_{oc}}{2}\cot\beta\ell_c,\quad \hat{X}_4 = \frac{Z_{oc}}{2}\tan\beta'\ell_c \qquad (4.1)$$

$$\hat{X}_3\hat{X}_4 = -\frac{Z_{oc}^2}{4} \qquad (4.2)$$

を得る。ここで Z_{op}，β，ℓ_p はそれぞれ導体＃2と＃3 とで形成されている平行線路の特性インピーダンス，位相定数，長さであり，Z_{oc}，β'，ℓ_c はそれぞれ導体＃2および＃3の内部に形成されてい

るたとえば同軸線路の特性インピーダンス，位相定数，縦続接続されている二つの線路を合わせた全線路長の半分である。

式（4.2）と前節の式（3.5）とによりこの場合の整合条件を表わすと，

$$\left.\begin{aligned}
\hat{X}_2 &= \frac{Z_0\left(\hat{R}_1 \mp \dfrac{\hat{X}_1}{\sqrt{Z_0/4\hat{R}_1 - 1}}\right) - Z_{0c}^2}{\hat{X}_1 \mp \hat{R}_1\sqrt{Z_0/4\hat{R}_1 - 1}}, \\
\hat{X}_3 &= -\hat{X}_1 \pm \hat{R}_1\sqrt{Z_0/4\hat{R}_1 - 1}, \\
\hat{X}_4 &= \frac{Z_{0c}^2}{4\left(\hat{X}_1 \mp \hat{R}_1\sqrt{Z_0/4\hat{R}_1 - 1}\right)}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

となる。さらに特殊の場合として，$\hat{X}_2 = 0$ と置けば

$$Z_{0c} = \sqrt{Z_0\left(\hat{R}_1 \mp \frac{\hat{X}_1}{\sqrt{Z_0/4\hat{R}_1 - 1}}\right)} \qquad (4.4)$$

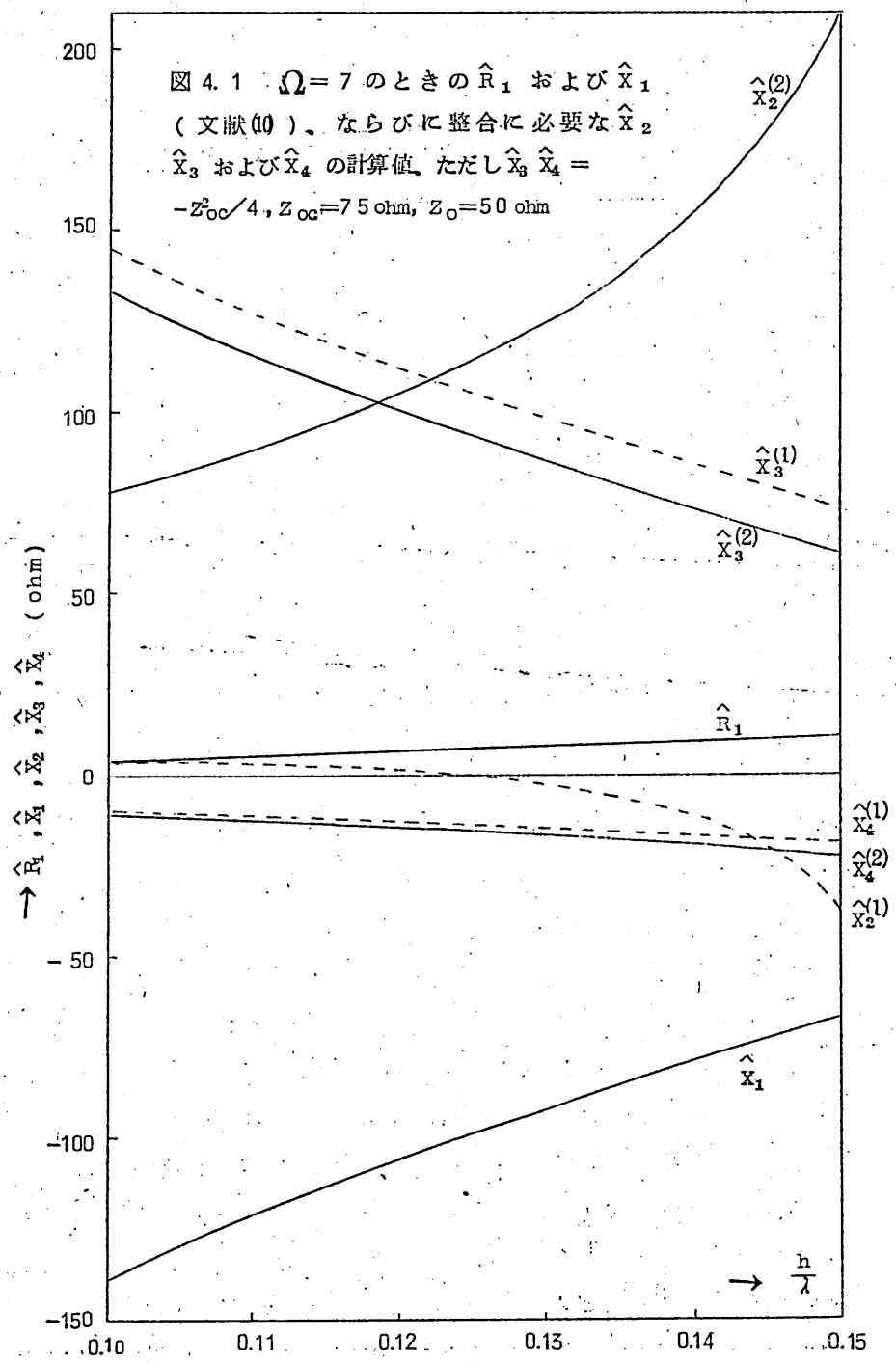
を得，この Z_{0c} を用いればアンテナは折返し形である必要はない。

例として

$$\Omega = 2\ell_n(2h/a_e) = 7, \quad Z_{0c} = 75\ \mathrm{ohm}, \quad Z_0 = 50\ \mathrm{ohm} \qquad (4.5)$$

のときを考える。ただし h および a_e はそれぞれアンテナの高さおよび等価半径である。なお式（4.5）のように各値を定めると，自由空間波長で測った高さ $h/\lambda = 1/8$ のとき，すでに知られている $\hat{R}_1$ および $\hat{X}_1$ の値[10]を用いれば，$\hat{R}_1$，$\hat{X}_1$，Z_{0c} および Z_0 はたまたま式（4.4）を満たしている。式（4.5）のときの整合に必要な $\hat{X}_2$，$\hat{X}_3$ および $\hat{X}_4$ の値を式（4.3）により計算した結果を，その計算に用いた $\hat{R}_1$ および $\hat{X}_1$ の値[10]とともに，h/λ の関数として図4.1に示す。なお図で $\hat{X}_2^{(1)}$，$\hat{X}_2^{(2)}$ などの(1)，(2)は式（4.3）における複号の順序を表わ

し，複号において上の符号をとるものを(1)，下の符号をとるものを(2)で示す。図4.1に基ずく小形化アンテナの二つの具体例を図4.2および



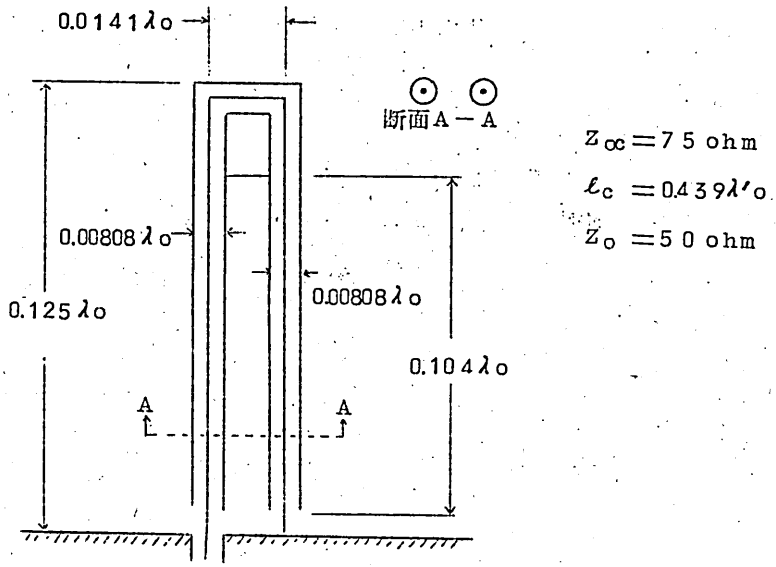


図4.2　図 4.1の$\hat{X}_2^{(2)}$, $\hat{X}_3^{(2)}$ および$\hat{X}_4^{(2)}$による小形化アンテナの例

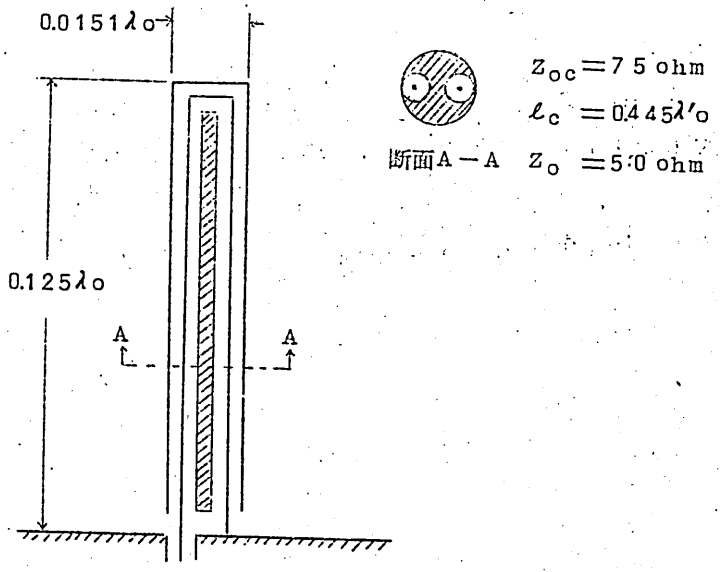


図4.3　図4.1の$\hat{X}_2^{(1)}$, $\hat{X}_3^{(1)}$および$\hat{X}_4^{(1)}$による小形化アンテナの例

4.3に示す。これらのアンテナの高さはともに8分の1波長である。なお図で，λ_0 は設計周波数 f_0 における自由空間波長，λ'_0 は f_0 における同軸線路内伝ぱん波長である。

4.2　二つの不平衡伝送線路がともに頂部において短絡されている場合

これは前掲図3.3において端子 $1''$ と $2''$ と，$3''$ と $4''$ とをそれぞれ短絡した場合で，二つの同軸線路の長さをともに ℓ_c とすれば，

$$\hat{X}_3 = \hat{X}_4 = \frac{Z_{0c}}{2} \tan\beta' \ell_c \qquad (4.6)$$

が得られる。

式（4.6）と前節の式（3.5）とによりこの場合の整合条件を表わすと，

$$\left.\begin{aligned} \hat{X}_2 &= 4\left(\hat{X}_1 \mp \frac{Z_0/2-\hat{R}_1}{\sqrt{Z_0/4\hat{R}_1-1}}\right) \\ \hat{X}_3 &= \hat{X}_4 = -\hat{X}_1 \pm \hat{R}_1\sqrt{Z_0/4\hat{R}_1-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

となる。

例として式（4.5）のときの整合に必要な $\hat{X}_2$，$\hat{X}_3$ および $\hat{X}_4$ の値を式（4.7）により計算した結果を，計算に用いた $\hat{R}_1$ および $\hat{X}_1$ の値[10]とともに，h/λ の関数として図4.4に示し，それに基ずく小形化アンテナの具体例を図4.5に示す。

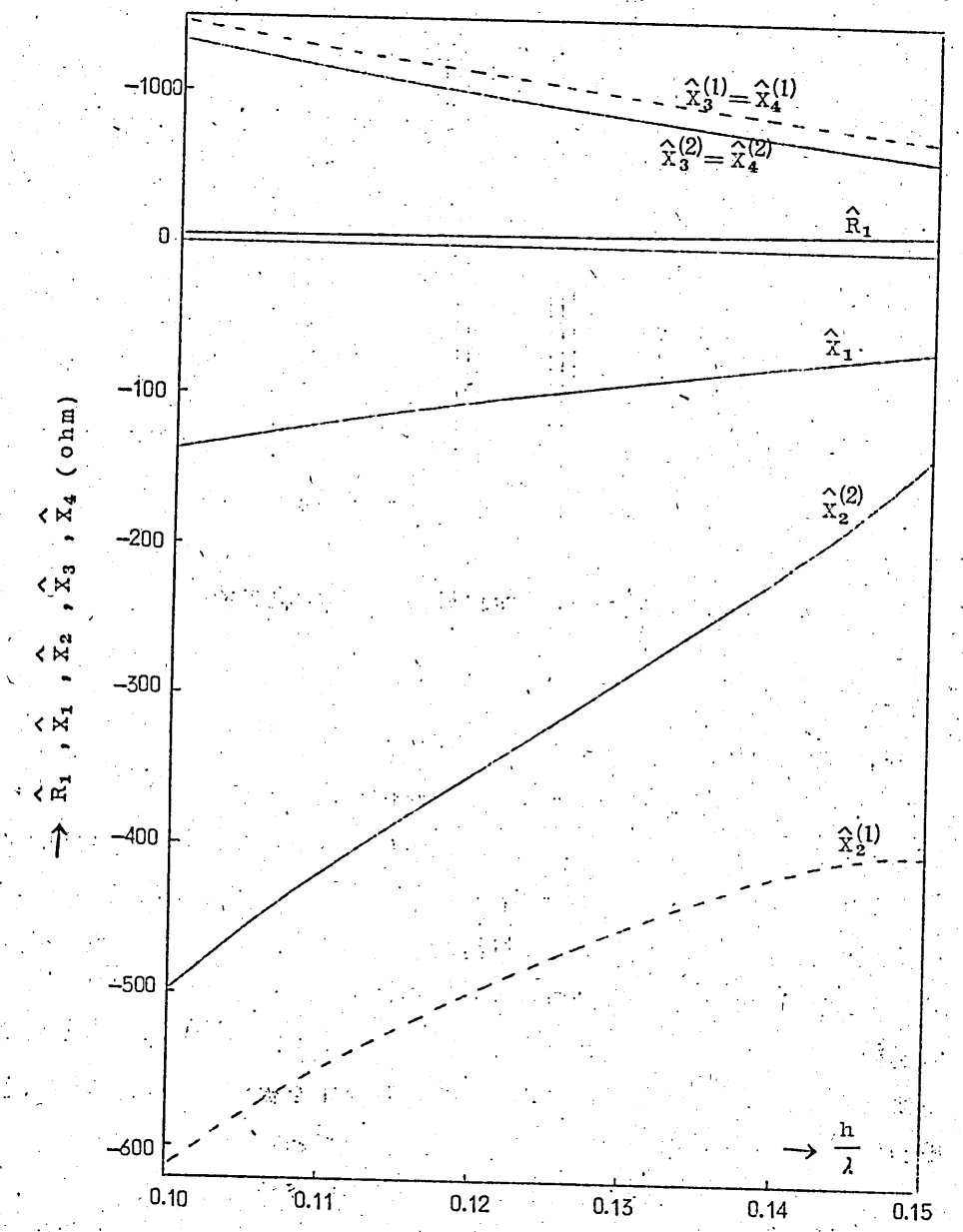


図4.4　$\Omega=7$のときの$\hat{R}_1$および$\hat{X}_1$（文献(10)），ならびに整合に必要な$\hat{X}_2$，$\hat{X}_3$および$\hat{X}_4$の計算値。ただし，$\hat{X}_3=\hat{X}_4$　Zoc＝75 ohm，Z_0＝50 ohm　の場合

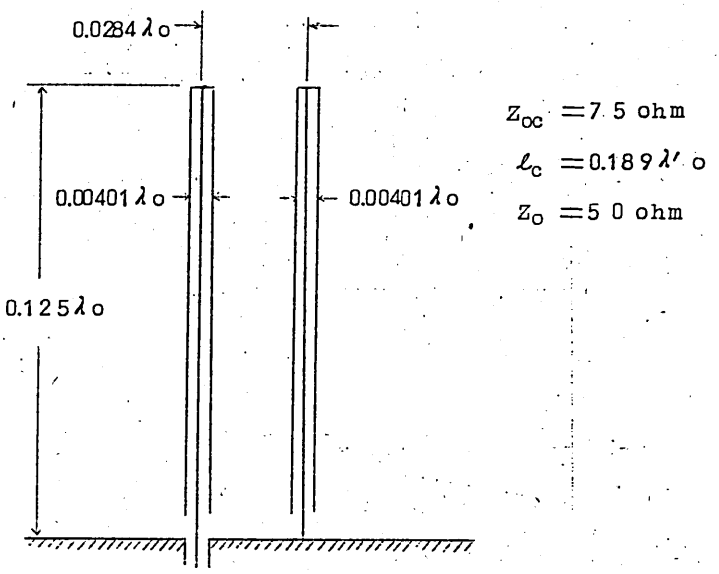


図4.5　図4.4の$\hat{X}_2^{(2)}$，$\hat{X}_3^{(2)}$，および$\hat{X}_4^{(2)}$による小形化アンテナの例

5. むすび

平行多線状導体折返しユニポールアンテナの給電点インピーダンスの式を求め，その式から二，三の新らしい小形化アンテナを導出した。これらのアンテナの共通の特長は，式（3.4）からわかるように，等価回路的に見ると放射インピーダンス $\hat{Z}_1 = \hat{R}_1 + j\hat{X}_1$ に対して直列に $\hat{Z}_3 = j\hat{X}_3$ が接続されていて $\hat{X}_1$ を $\hat{X}_3$ によって打消すことができ，かつそれを放射に関係しない放射導体内伝送線路の長さの調整によって行ないうることである。伝送線路としては同軸ケーブルなどを用いてもよく，構造簡単な点が実用上便利である。なおこれらのアンテナは放射導体を板状にして，内部伝送線路をストリップ線路にするなどの変形が可能である。

これらのアンテナの給電点インピーダンスの周波数特性を計算すると，仮に同じΩの単一線状導体ユニポールアンテナを直列および並列インダクタンスから成る集中定数回路で整合をとったときよりもやや狭帯域性になることがわかり，したがってここに述べた小形化アンテナは1周波数あるいは狭帯域で使用する場合に適している。

参考文献

(1) 内田英成："折返アンテナ"，信学誌，48，4，p584，(昭40－04)

(2) J. Leonhard, R.D. Mattuck and A.J. Poté: "Folded unipole antennas", IRE Trans., AP-3, 3, p 111, (July 1955).

(3) T. Kitsuregawa, Y. Takeichi and M. Mizusawa: "A one-eighth-wave broadband folded unipole antenna ", Electromagnetic Theory and Antennas (Proceedings of a Symposium held at Copenhagen, June 1962), p 1201, Pergamon Press Ltd., (1963).

(4) B. Josephson: "The quarter-wave dipole", IRE WESCON Convention Record, 1, Pt 1, p 77. (1957).

(5) K. Nagai, R. Sato and H. Uchida: "The antenna constructed by parallel wires", The Reports of the Research Institute of Electrical Communication, Tôhoku University, 12, 2, p 73, (1960).

(6) 永井　淳："三本線折り返し空中線"，信学会アンテナ研資，(昭37－08)．

(7) 桜井雅実："平行三本線アンテナ"，信学会アンテナ研資．(昭37－08)．

(8) 内田英成，虫明康人："超短波空中線"，p157，コロナ社，(昭30－07)

(9) 内田英成："多巻ループアンテナの動作理論"，信学会アンテナ研資，(昭39－12)

(10) R.W.P. King: "The theory of linear antennas", p 169, Harvard University Press, (1956).

輻射科学研究会

Si－PINダイオードの順方向負性抵抗現象

加納剛太
岩佐仁雄
高柳重敏

松下電子工業株式会社研究所

昭和40年10月30日
於電子会館

§1 緒　　言

逆耐圧の高い半導体ダイオードあるいはトランジスタは一般に同じ材料の中で、比抵抗の高いものを基板として、これにPN接合を形成させることによってつくられる。

PN接合を有する半導体素子において、基板の比抵抗が非常に高い場合には、比抵抗の低い場合にあまり問題にならなかった、高比抵抗領域における深い不純物準位あるいは欠陥準位によるキャリヤーのトラップや高比抵抗領域へのキャリヤーの注入急増などの現象が極めて重要な役割を演ずるようになる。その代表的なものがPIN構造をもつダイオードの電圧一電流特性の順方向特性にあらわれるS字型の負性抵抗現象である。

この種負性抵抗現象に関しては、先ずLampert によって、電子および正孔のDouble Injectionモデルを用いて理論的に予言され(1)〜(4)，Holonyakによって実験的に確められた。(5)〜(7) また、Stafeev (8)〜(9)やGibson(10)達はLampert とは本質的に異るモデルを用いてこの種負性抵抗を観測した。その後多くの研究がなされてきたが、未だ、この負性抵抗現象を十分に説明することは困難とされている。

われわれは、拡散法によって作ったPIN構造を持つSi ダイオードを作り、この種負性抵抗現象に関し、(i)電位分布、(ii)電圧一電流特性、(iii)分光感度特性、(iv)パルス応答などを測定し、Lampert のDouble Injecfionモデルを用いて解析を行った。

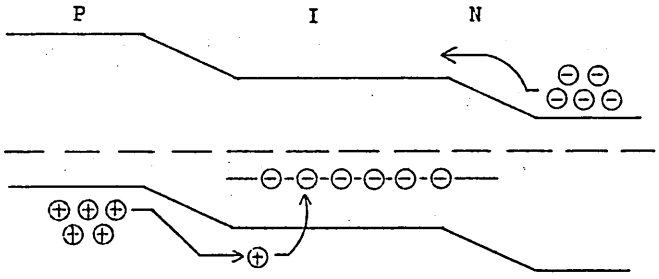
§2 Donble Injection Diodeモデル (1)〜(4)

第1図に示すようなPIN構造をもち、かつI層に深いトラップがある場合には、ダイオードの順方向特性に負性抵抗現象が現われることがLampert

によって予言された。いまダイオードの順方向にバイアスした時にP層、N層からそれぞれI層へinject される電子、正孔の伝導を考えてみよう。図に示した深いトラップ（再結合中心）はσ_p σ_n という捕獲断面積をもちその意味は

$$\begin{cases} \sigma_p & \text{：電子が入っている時の正孔に対する捕獲断面積} \\ \sigma_n & \text{：電子が抜けている時の電子に対する捕獲断面積} \end{cases}$$

である。いま$\sigma_p \gg \sigma_n$と仮定する（実際Si,Ge などでは$\sigma_p/\sigma_n \sim 10^2$ という値が十分想像される。）



第 1 図
Double Injection
Diodeのバンドモデル

電圧がかかっていない時は、フエルミ準位は再結合中心より上にあるから、初め電子は全部の再結合中心を占めている。したがって正孔の寿命はσ_p で決定される。

この状態から電流が流れ始めると、σ_p が大きいからinjectされた正孔に対して、再結合中心はSink となり、正孔はI層を通り抜けることができない。電圧がさらに上って、正孔が十分に早く結晶を渡り切る速度を得れば、結局正孔はそのlife time $\tau_p \cdot low$（低いinjection levelでのlife time）内にI層を横断できるようになる。走行時間をt_p，I層の長さをLとすれば、ある電圧V_{TH} に達した時に、走行時間

$$t_p = \frac{L}{\mu_p \frac{V_{TH}}{L}} = \frac{L^2}{\mu_p V_{TH}} \quad \cdots\cdots (1)$$

但しμ_p は正孔の易動度

と、その時の正孔の life time

$$\tau_{p\cdot low} = \frac{1}{V_p \cdot \sigma_p \cdot N_R} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

但し　V_p：正孔の速度

N_R：トラップの密度

とが等しくなり、正孔はトラップされずにＩ層を渡り切ることができる。V_{TH} は(1)，(2)式から　$V_{TH} = L^2/\mu p \cdot \tau_{p\cdot low}$ …… (3)
と与えられる。

この時、injeet されてくる電子ｎと正孔ｐの数は等しくなって、プラズマが形成されたということになる。

この状態が起る近傍では、再結合中心は正孔を捕えて中和することによって電子が抜けている時間が支配的になり、そのため再結合は電子に対する捕獲断面積 σn （$\ll \sigma_p$）によって支配される。
この時、電子の life time $\tau_{n\cdot high}$ は

$$\tau_{n\cdot high} = \frac{1}{V_n \cdot \sigma_n \cdot N_R} \cdots\cdots\cdots\cdots$$ (4)と表わされる。然るにこの状態

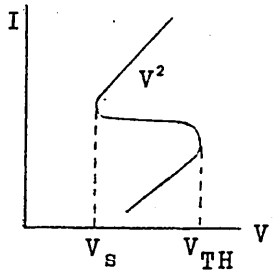
では $n = p$ であるから $\sigma_{p\cdot high} = \sigma_{n\cdot high}$ ……(5)でなければならない。
(2)，(4)，(5)式から　$\dfrac{\tau_{p\cdot high}}{\tau_{p\cdot low}} = \dfrac{\sigma_p}{\sigma_n}$ ……(6)となる。

$\sigma_p \gg \sigma_n$ の仮定によって $\tau_{p\cdot high} \gg \tau_{p\cdot low}$ であることが分る。実際、Si,Ge どでは $\sigma_n/\sigma_p \sim 10^2$ が期待されるから、$\tau_{p\cdot high}/\tau_{p\cdot low} \sim 10^2$ であることが期待される。$n = p$ において正孔の life time が $\tau_{p\cdot low}$ から $\tau_{p\cdot high}$ に移るときのことを更に詳しく説明すると、プラズマが形成され始めると、正孔はＩ層の再結合中心を空にする効果を、Ｐ層側からＮ層側に向っておよぼし、これによって正孔の life time は増々長くなっていく。即ち、正孔は injection level が増すにつれて、lifeがのびＩ層中を横切りや

すくなる。これは先にも述べた正の帰還であって負性抵抗に他ならない。電流が増すにつれて端子電圧は小さくなり第２図に示すような電圧一電流特性が期待される。同図に示した V_S は、先に V_{TH} を求めたと同様の方法で、正孔が大きくなった life:$\tau_{p\cdot high}$ の間にＩ層を通り抜ける条件から

$$V_S = \frac{L^2}{\mu_p \cdot \tau_{p\cdot high}} \quad \cdots\cdots (7)$$ と求められる。

なお(3)，(6)，(7)式から $\frac{V_{TH}}{V_S} = \frac{\sigma_p}{\sigma_n}$ …… (8)となる。



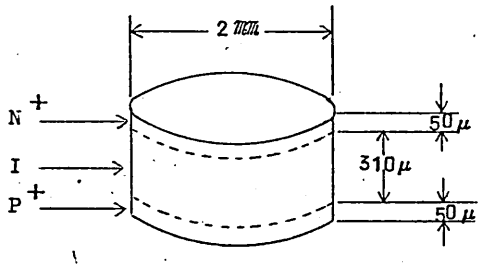
第２図　Double Injection Diodeの電圧一電流特性

§３　実験および実験結果の考察

＜３－１＞ 試料および実験方法

(3-1-1) 試 料 の 作 成

直径１８㎜、厚さ500μのＰ型4500Ω－㎝Siスライスを1100℃に保ち、その両面に酸素気流中で P_2O_5 を蒸着した後、片側の面を２０μラップし、この面に B_2O_3 を塗布する。このスライスを1200℃で約20時間加熱してＰ及びＢを拡散させる。Ｐ及びＢの拡散層の厚さは、共に約５５μである。再び両面をラップして５μづつ落す。その後Ni メッキを行い、第３図に示すように直径２㎜の円板に切り取って試料とした。このときＩ層の比抵抗は 10^6 Ω-㎝程度に変化していた。



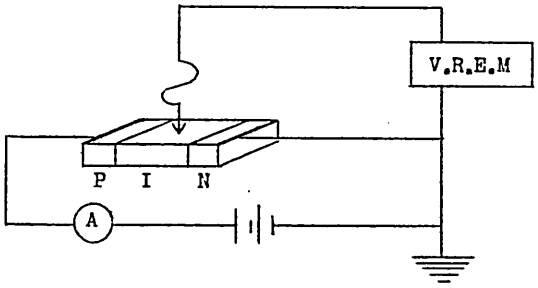
第　３　図

タイオートの構造

(3-1-2) 実 験 方 法

(i) 電 位 分 布

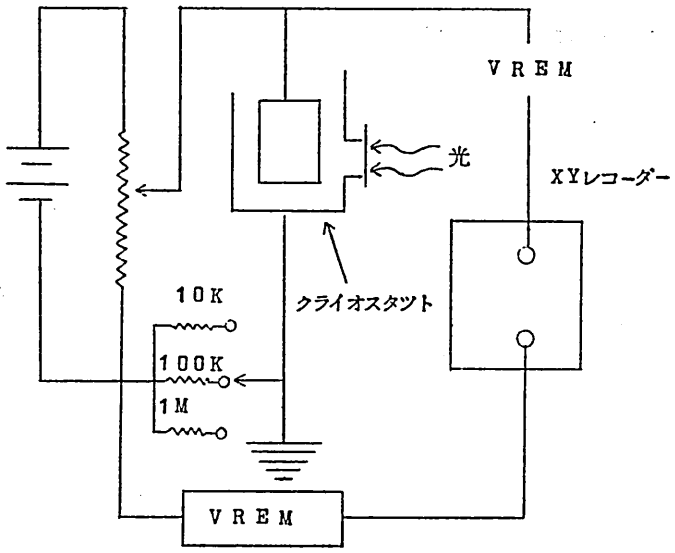
第4図に示すように、直径5μのタングステン針をマイクロマニュプレータで送りながら、樹脂に埋められた試料の断面の電位を20μ毎に測定した。



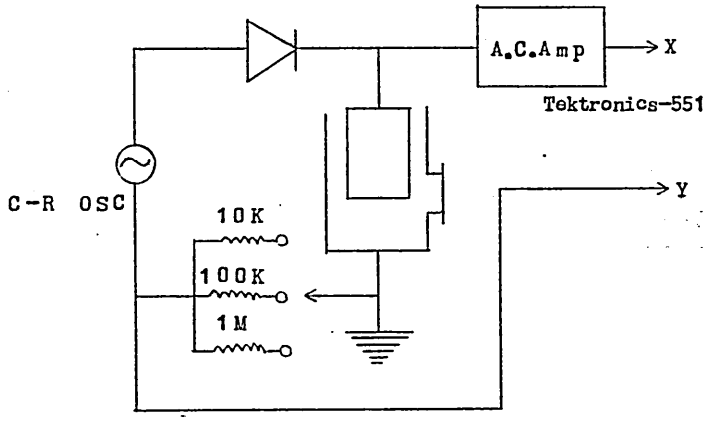
第 4 図
電位分布の測定法

(ii) 電圧一電流特性

第5図、第6図に示すような方法で、直流法および交流法により電圧一電流特性を測定した。負性抵抗領域を安定に描かせるには、負荷抵抗を大きくして定電流で測定しなければならない。試料により、10KΩ、100KΩ、あるいは1MΩの負荷抵抗を用いた。



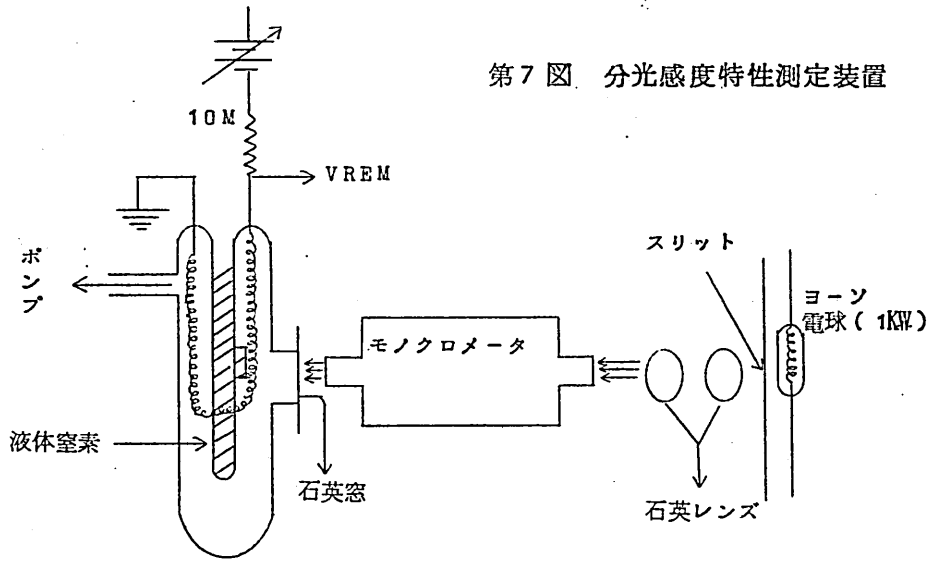
第5図
電圧一電流特性
測定法(直流)



第６図
電圧一電流特性
測定法（交流）

(iii) 分光感度特性

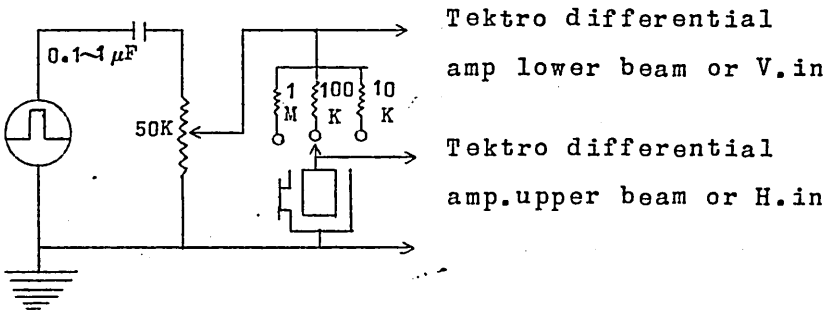
第７図に示すような方法で、試料の抵抗より高い抵抗（1.0MΩ）を試料と直列につないで、試料に流れる電流を一定に保ち、光を照射した時の threshold 電圧の変化を測定した。必要な波長領域は Si の吸収端より長波長（１～３μ）であるが、この領域では一般に光の強度が極めて小さいので光源として、１KWのヨーソ電球を用い、第７図に示すように石英レンズを使って試料に当る光の強度を上げた。なお光のエネルギー分布は thermo pile により測定した。



第７図　分光感度特性測定装置

(iv) パルス測定

パルス状の電圧を印加したときダイオードに流れる電流又はダイオードの端子電圧を第8図に示すように、岩崎MT500パルス発生器および2ビームのTektronics-551を用いて測定した。パルス波形はCとRにより変化させた。



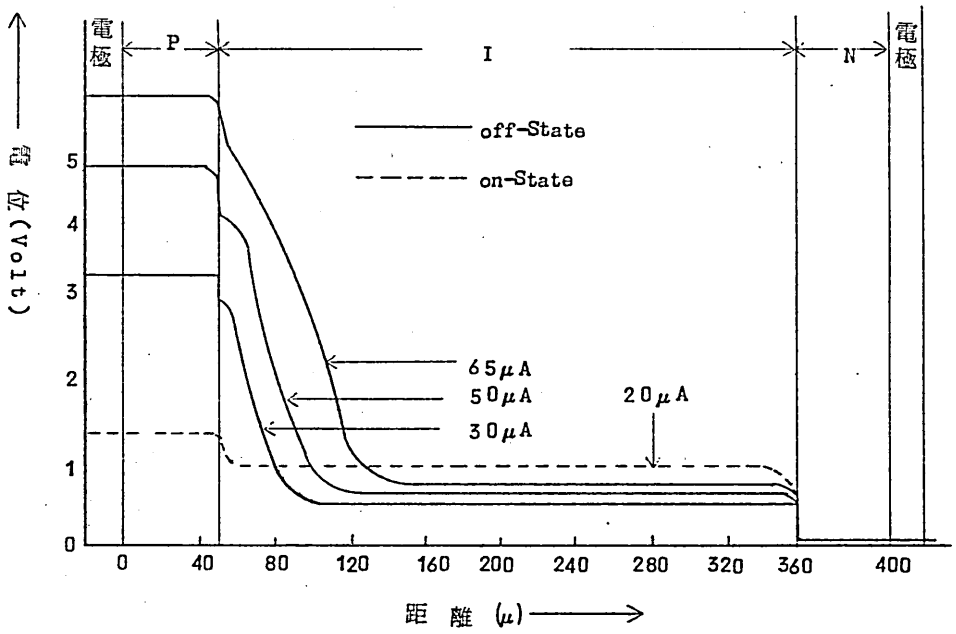
第8図　パルス応答測定法

<3-2> 実験結果及び検討

(3-2-1) 電位分布

第9図に試料断面の電流方向に平行な電位分布の測定結果を示す。P層およびN層と電極との間には電位降下はなくohmicであり、P-I間およびI-N間に接合が形成され、それぞれ0.4V程度の内部電位が形成されている。

P層側からinjectされた正孔は、再結合中心にトラップされて空間電荷を形成し電流が大きくなるに従って、即ちInjection level を大きくするに従って、この効果がI層の内部に向って拡がっていく様子が良く分る。



第9図　電位分布測定結果

同図の電流 65μA に於ける電位分布は threshold に近い限界の "off-state" であって更に電圧を増すと、点線で示した "on state" になる。この限界状態でのI層に於ける電界強度の最大値は 10^3 V/cm 程度であって、この電界により avalanche が発生すると考えるのは困難なようである。従って、正の帰還を、伝導に寄与する電荷の Self Multiplication と考えるより、Double Injection Diode モデルで考えたように、正孔の life time の急激な変化によると考えた方が事実と良く一致する。即ち、off 状態で Injection を増していくと、正孔がトラップを埋めていく効果（再結合中心を空にする）がP層側からI層内部に向ってのびてゆき、続いて inject されてくる正孔の life time を長くしていく。Injection をある level まであげると、正孔の life time は正孔がI層を渡り切る時間と等しくなり（(1)〜(3)式）、次に inject される正孔は自由にI層を渡り切ることができる。（この効果に対しては電界の強度は直接関係しない）この時、Inject される電荷の neutrality が成立しプラズマが形成され、前節で述べたよ

うに、負性抵抗が発生するものと考えられる。このときはすでにトラップされた正孔による空間電荷が消失している。

(3-2-2) 電圧一電流特性（直流特性）

第10図に負性抵抗があらわれるダイオードについて直流法で測定した電圧一電流特性の代表例を示す。Threshold 電圧 V_{th}までの特性を詳細に測定した結果を第１１図、第１２図に示す。

V_{th}までの特性は ohmic 領域と非 ohmic 領域とに分けることができる。これらの特性曲線の結果について解析を行なってみる。

いま、I層の厚さをLとし、このI層に、thermal に存在する電子および正孔の濃度を n_0 , p_0 ,印加電圧Vで inject される電子および正孔の濃度をn、pとする。また電子および正孔の易動度を μ_n,μ_p 拡散係数をDn,Dp, とすると、電子および正孔の流れは次のように表わされる。

$$\frac{1}{e} J_n = \mu_n (n+n_0)\mathcal{E} - D_n \frac{dn}{dx}$$

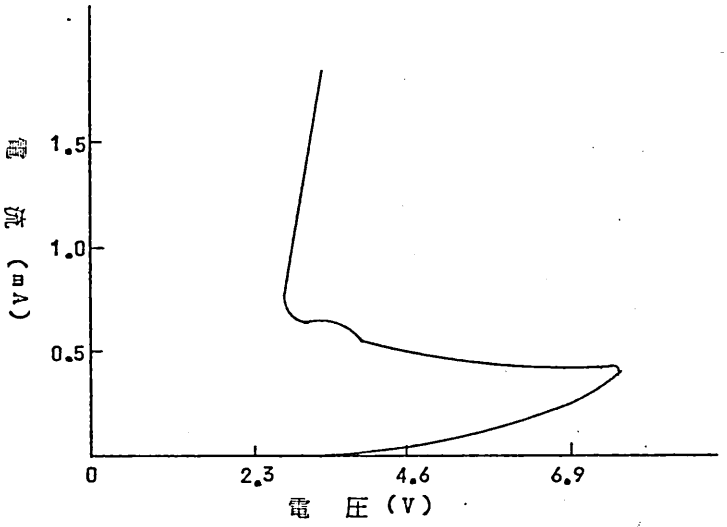
$$\frac{1}{e} J_p = \mu_p (p+p_0)\mathcal{E} - D_p \frac{dp}{dx} \quad \cdots\cdots (9)$$

但し$\mathcal{E}$は電界強度で e は電子の電荷である。

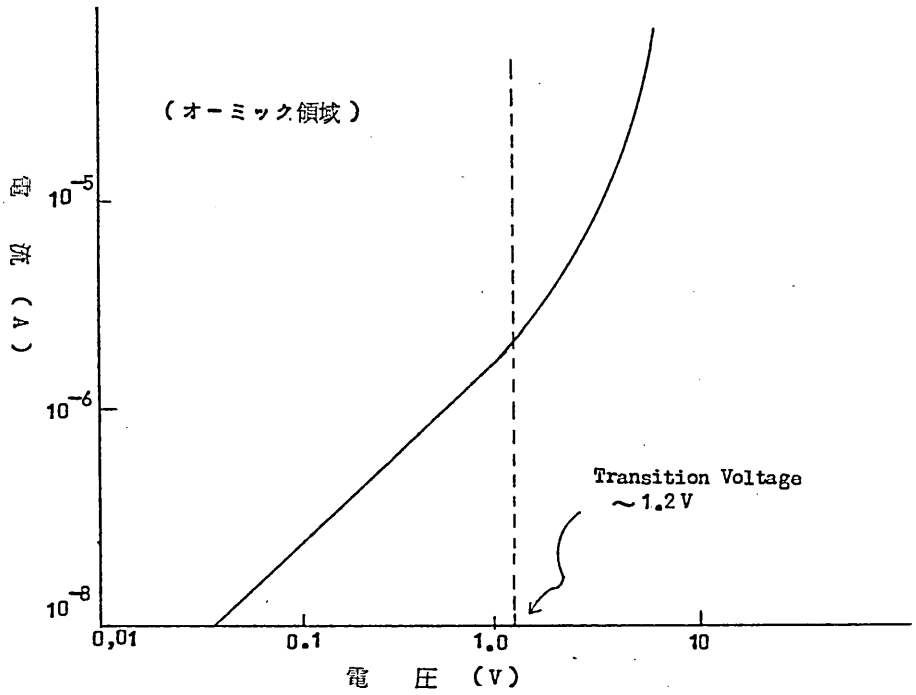
初め、Vが小で、injection が小さい時、即ち $n,p \ll n_0, p_0$ の時には、9式から

$$J = e(\mu_n n_0 + \mu_p p_0) V/L \quad \cdots\cdots (10)$$

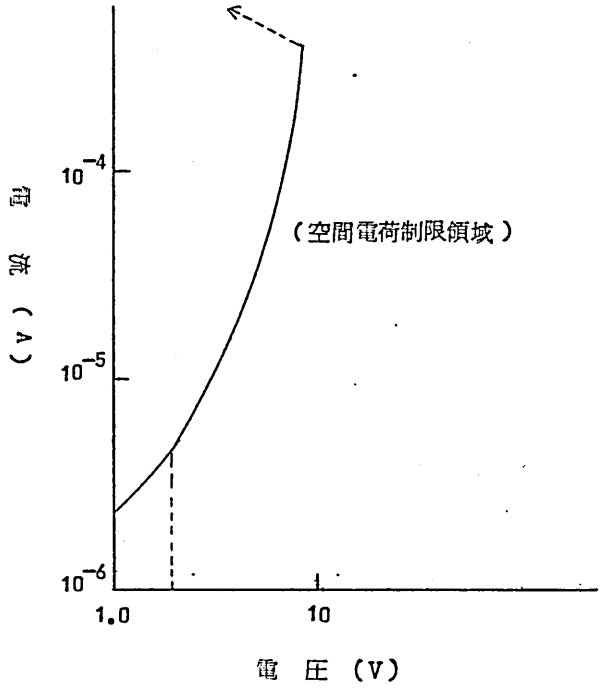
と近似出来る。



第10図　電圧ー電流特性（直流）の代表例



第11図　電圧－電流特性（オーミック領域）



第１２図

電圧電流特性

（空間電荷制限領域）

次にＶが上って、injection が大きくなる即ち $n, p \gg n_0\ p_0$ となる場合を考えてみる。

(j) Ｉ層の厚さが電子および正孔の拡散長に比べ十分厚い場合。

この場合には(9)式の拡散の項は省略できて、

$$J = (\mu_n n + \mu_p p)\mathcal{E} \quad \cdots\cdots (11)$$ となる。

Ｉ層に深いトラップ準位があるとすると、ある電圧（V_{th}）になるまでは正孔(p)はトラップされ、Ｌを渡り切ることができない。従って電流は $J \cong \mu_n n \mathcal{E}$ …… (12)

と表わされる。

この場合の空間電荷は、第９図に示した電位分布の測定結果から分るように、主としてトラップされた正孔により形成されると考えられるから、Poisson の方程式は

$$\frac{E}{e}\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\chi}\right) = \delta_p \quad \cdots\cdots (13)$$ と表わされる。

但し　δ_p ：トラップされた正孔の密度　　E：誘電率

　　x ：I層の厚さ方向に測ったP-I接合からの距離

一方、電荷保存の関係から

$$-\left(\frac{1}{e}\right)\left(\frac{dJ_p}{d\chi}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)\left(\frac{dJ_n}{d\chi}\right) = n/\tau_n \quad \cdots\cdots (14)$$

が成り立つ。ここで J_p は、injectされた正孔の流れを含まないから、$J_p = \mu_p P_o \mathcal{E}$ である。これを(14)式に入れると

$$-\left(\frac{1}{e}\right)\left(\frac{dJ_p}{d\chi}\right) = -\mu_p P_o \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\chi}\right) = n/\tau_n \quad \cdots\cdots (15)$$

となる。従って、$n = -\mu_p \tau_n P_o \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\chi}\right)$ ……(16) となり、これを(12)式に入れると

$$J \cong \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{\tau_n}{\tau_{rel}}\right)\mathcal{E}\mu_n\left(V^2/L^3\right) \quad \cdots\cdots (17)$$

但し、$\tau_{rel} = \mathcal{E}/e\mu_p P_o$ (dielectric relaxation time)、なる関係を得る。

これは良く知られた空間電荷制限電流を表わす式である。

(ii) I層の厚さが電子および正孔の拡散長に比して十分薄い場合

この場合には、(9)式の右辺第一項が示す空間電荷の影響する項より第二項の拡散の項が重要になってくる。Kleiman の詳しい計算結果によれば[11]、電流密度が 200A/cm² 位になるまでは、通常のPN 接合の場合の電圧－電流特性とほとんど同じであり、電流は

$$J \propto e^{eV/kT} \quad \cdots\cdots (18)$$ であらわされる。

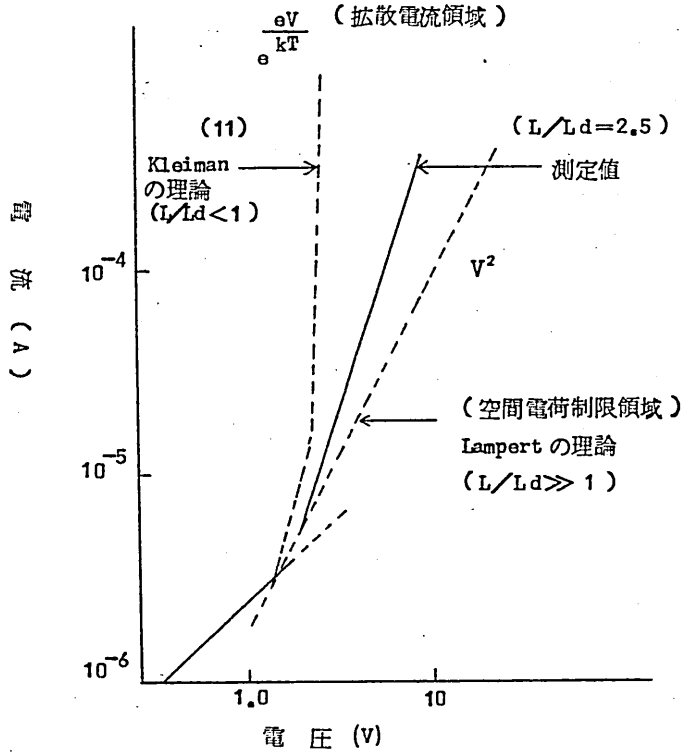
Ohmic領域から非Ohmic領域への transition 電圧 V_{tr} はI層中の thermal な free carrier と inject された電子の数が Comparable になる状態として大ざっぱに

$$e|n_0 - p_0|L = Q_{inj} = CV_{tr} = \frac{\varepsilon}{L}V_{tr}$$

$$\therefore V_{tr} \sim \frac{e|n_0 - p_0|}{\varepsilon}L^2$$ ……(19) で目安がつけられる。

さて以上の理論式と実験結果とを比較してみると、まづVが小なるときのOhmic 領域は(10)式で説明できる。つぎにOhmic 領域から非Ohmic領域へのtransition 電圧は、(19)式に $L = 310\mu$, $|n_0 \sim p_0| = 10^{12}\ cm^{-3}$ を入れて $V_{tr} = 1.5$ V を得るが、第9図に示した実測結果と大体一致する。しかし非Ohmic 領域については、第13図に示すように実測曲線は(17)式あるいは(18)式のいづれとも一致せず、曲線は両者の間にある。これまでの理論は(9)式の取扱いを簡単にするため、I層の厚さLが電子又は正孔の拡散長Ld に比し十分大又は小なる極端な場合を論じOhmic 領域以後の電流は

$L/L_d \gg 1$: $J \propto V^2$　　$L/L_d \ll 1$: $J \propto e^{eV/kT}$



第13図
理論曲線との比較

となることを説明した。しかしL/Ld ～1のときは当然Jは両者の間の値になるであろう。したがって、上述の理論曲線と実測曲線の不一致は試料ダイオードのI層の厚さに関係するものと考えられる。O.J. Marsh 等によれば、(12)(13)(14) このようなダイオードでは Ld ＝100μ 位といわれており、実際にL/Ld＞10のときは(14)式と一致するV^2 則が観測されると示われている。しかし本試料ではL＝310μであり、L/Ld≒3位であるから、拡散の項も十分きいているものと考えられ、第13 図のV^2 則からのはずれが説明できる。

L/Ld ≅ 1の場合の非Ohmic 領域の電圧－電流特性は(9)式をそのまま解かねばならない。しかしこれをそのまま解くことは一般にむずかしい。即ち、これを解くには、n, p, $\mathcal{E}$, μn, μpのxに対する分布を仮定しなければならない。ところが実際には、拡散電荷と空間電荷との間に相互効果があること、injectされる電子および正孔に対するlife time τn, τp が等しくないこと、およびτ_p がinjection level によって変化することなど複雑な問題がある。近似解を求めるために(9)式の第一項、第二項を次のように分離して考える。

まづ、第一項のdrift 電流の項はinjectのされ方、電界の分布および電荷の分布に無関係にVolume Controlled 空間電荷制限電流となる。このことはLampert は次のように説明している。(15) 任意の電界分布に対し、位置X_Mにおいて、最大電界$\mathcal{E}_M$をとるとすれば、X_Mの両側での全電荷は$Q^+=|Q^-|$である。従ってQ=CVで定義される全電荷Qは

$$Q = Q^+ = |Q^-| = e\int_0^{x_M} (n(x) - p(x))\,dx = E\mathcal{E}_M \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

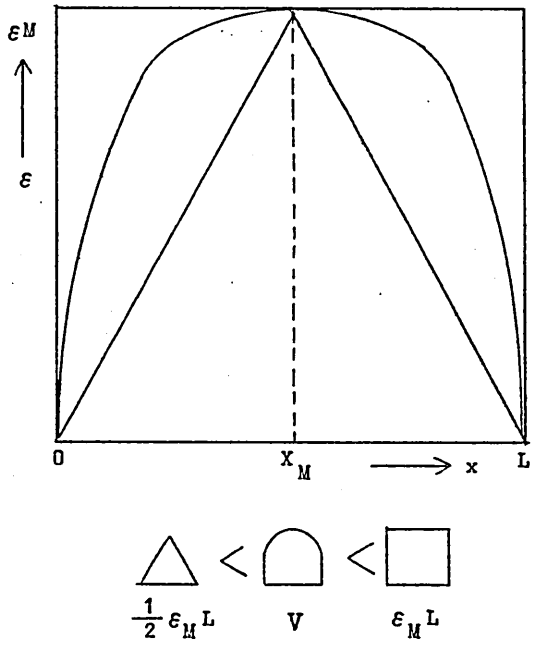
と表わされる。

一方電子はトラップされないでLの全域にわたってnは変らないと考えているから、injectのされ方如何に拘らず、厚さLのI層にinjectされた伝導にあづかる電荷はnLである。

従って(20)式から、$nL = E\mathcal{E}_M$ となり $n = \frac{E\,\mathcal{E}_M}{L}$ ……(21)
と表わされる。$\mathcal{E}_M$ とVとの関係に対しては第14図に示すように任意の電界分布に対し、$\frac{1}{2}\mathcal{E}_M L < \mathcal{E}_M L$ である。従って $V/L < \mathcal{E}_M < 2V/L$ となり、(12)式および(21)式から(9)式の第一項は

$$Lv = K\frac{\mu nE}{L^3}V^2 \ (1<K<2) \text{ となる。} \quad \cdots\cdots(22)$$

この電流はinjectのされ方、nの分布、$\mathcal{E}$の分布に無関係な(17)式と同型のVolume Controlled電流である。(以上はLampertの説明であるが、実際には第9図に示したように空間電荷の影響が大きく、$\mathcal{E}_M < 2V/L$ となる保証はない。むしろ $\mathcal{E}_M > 2V/L$ とみられる。しかしKの値はVにほとんど無関係である。)



第14図
I層における電界分布と印加電圧との関係

次に(9)式の第二項の拡散電流の項について考えてみる。この場合、正孔のlife timeは電子のそれに比べて十分小さいから、拡散長は電子の方が正孔より十分大きい。従って電子による拡散電流だけを考える。第14図のように座標をとり、$x = x_p\ x_{pi}, x_{ni}, x_n$ において、

電圧Vを印加したときの電子濃度をn_p, n_{pi}, n_{ni}, n_nとする。また平衡状態におけるP,I,N 各層における電子濃度をそれぞれn_p, n_o, n_Nとする。$x=x_{pi}$においては、J_dは次のように表わされる。(11)

$$J_d = J_{ns}\left\{\frac{n_p}{n_p} - 1\right\} \quad \cdots\cdots (23)$$

$$但し\ J_{ns} = \frac{n'_p D_n}{L_n}$$

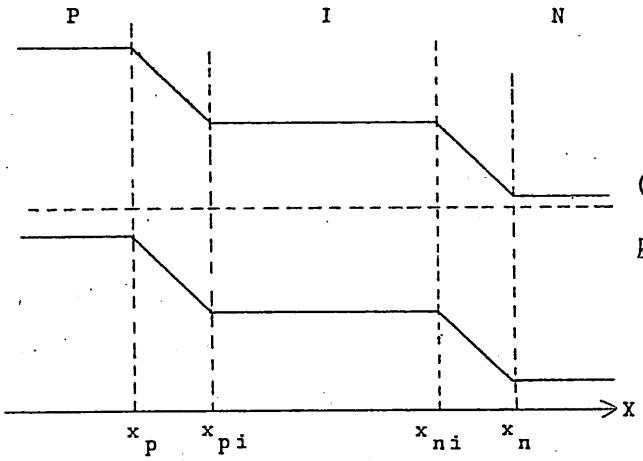
PI接合にかかる電圧をV_p, I層にかかる電圧をV_I, IN 接合にかかる電圧をV_Nとすれば

$$n_p = n_{pi}\left(\frac{n_p}{n_o}\right) e^{e/kT V_p}$$

$$n_{ni} = n_o \quad e^{e/kT\ V_N} \quad \cdots\cdots (24)$$ である。

n_{pi}は、N層側からinjectされた電子n_{ni}のうちI層を通って$x = x_{pi}$に到達した数を表すものであるが、途中、空間電荷の効果、再結合などあってその数を正確に求めることは困難である。しかし、$n_{pi} \propto n_{ni}$, 即ち、到達する電子の数は、injectされる電子の数に比例すると考えられるから、

$n_{pi} = cn_{ni}$として(24)式を変形すると、



第15図

(23)〜(29)式に必要な座標の設定

$$n_p = cn_p \; e^{\frac{e}{kT}(V_N + V_P)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$ を得る。

これを（23）式に代入すると、

$$J_d = J_{ns}\left\{ Ce^{\frac{e}{kT}(V_N + V_P)} - 1 \right\} \cdots\cdots\cdots (26)$$ なる関係を得る。

印加電圧に対し、

$$\begin{cases} V_N = \alpha(V)V \\ V_I = \beta(V)V \\ V_P = \gamma(V)V \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

と書くと、（26）式は $J_d = J_{ns}\left\{ Ce^{\frac{e}{kT}(\alpha+\gamma)V} - 1 \right\} \cdots (28)$

となる。結局(a)式は

$$J = J_v + J_d = K\frac{\mu_n E}{L^2}V^2 + J_{ns}\left\{ Ce^{\frac{e}{kT}(\alpha+\gamma)V} - 1 \right\} \cdots\cdots (29)$$

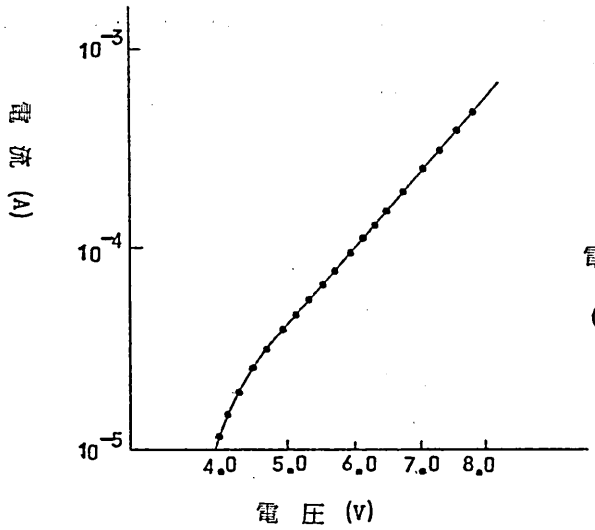
となる。この結果を用いて第１３図の実験曲線について考察してみる。

非Ohmic 領域の実測電流値から（17）式の V^2 則に従ってプロットした電流値（第１３図鎖線）を差し引いた値は第１６図に示すように電圧が比較的大きい所で、広範囲に亘って exponential な変化をする。

これは（28）式に求めた拡散電流の項に相当する。この直線の勾配から $\alpha + \gamma = 0.02$ と求められる。即ち印加した電圧のほとんど（９８％）はＩ層にかかり、接合部にはわずか（２％）しか印加されないことが分る。このことは電位分布の測定結果からも分る。（厳密には、α, β, γ はＶの函数である。）

次に、$V_{TH}, V_S, V_{TH}/V_S$ などの値について検討する。

これらの値は(1)～(8)式で求められるが、その基本となる(1)式において正孔の走行時間を電界強度と一定即ち V/L として求めているので、実際には適当でない。即ち、実際は第９図に示したように電界強度は空間電荷があるために、場所によって大きく変化している。このことを考慮すれば、(1)式は当然修正されなければならない。



第１６図

電圧－電流特性

（拡散電流の効果）

Injectされた正孔の走行時間は $t_p \cong \frac{L}{\mu \mathcal{E}(x)}$ であるから、第９図に示したように $\mathcal{E}(x)$ が小さい領域が十分長ければ、t_p はほとんどこの領域の走行時によって決められる。

Vthに近い "off-State" および V_s に近い "on-State" での、この領域の長さをそれぞれ、$m_1 L$, $m_2 L$, この領域中での平均の電界強度をそれぞれ $n_1 \frac{Vth}{L}$、$n_2 \frac{Vs}{L}$, とすれば、それぞれの状態における正孔の走行時間は

$$t_{p\cdot off} = \frac{m_1}{n_1} \frac{L^2}{\mu_p V_{th}} \qquad t_{p\cdot on} = \frac{m_2}{n_2} \frac{L^2}{\mu_p V_s}$$ となり

(3), (7), (8)式はそれぞれ

$$V_{TH} = \frac{m_1}{n_1} \frac{L^2}{\mu_p \tau_{p\cdot low}} \quad \cdots\cdots (3)'$$

$$V_s \cong \frac{m_2}{n_2} \frac{L^2}{\mu_p \tau_{p\cdot high}} \quad \cdots\cdots (7)'$$

$$\frac{V_{TH}}{V_s} \cong \frac{\left(\frac{m_1}{n_1}\right)}{\left(\frac{m_2}{n_2}\right)} \cdot \frac{\tau_{p\cdot high}}{\tau_{p\cdot low}} = \frac{\left(\frac{m_1}{n_1}\right)}{\left(\frac{m_2}{n_2}\right)} \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_n} \quad \cdots\cdots (8)'$$

となる。第８図から m_1, m_2, n_1, n_2 を求めると、$m_1 \doteqdot 0.5$, $m_2 \doteqdot 0.95$

$n_1 \fallingdotseq 0.05$, $n_2 \fallingdotseq 0.01$ 程度になる。$V_{TH} = 6V$, $V_s = 2V$, $L=310\mu$ $\mu_p \cong 500 cm^2/v.sec$ として、上式から $\tau_{p\cdot low} \sim 5\mu_{sec}$, $\tau_{p\cdot high} \sim 150\mu_{sec}$, $\frac{\sigma_p}{\sigma_n} \sim 30$ となり、大体予期した値が得られる。しかし、(8)式をそのまま用いると $V_{TH}/V_S = \sigma_p/\sigma_n \sim 3$ となり説明のつかない値となる。

(3-2-3) 電圧－電流特性の温度依存性

第17図に電圧一電流特性の温度による変化を示す。threshold電圧 V_{TH} の温度変化を −190 °C～ 100 °C の範囲で温度に対しプロットすると、第18図のようになる。Lampert の Double Injection Diode モデルに従い、(3), (7)式を用いてこの関係を解析してみる。

$$V_{TH} = \frac{L^2}{\tau_{p\cdot low}\,\mu_p} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$V_S = \frac{L^2}{\tau_{p\cdot high}\cdot\mu_p} \quad \cdots\cdots (7)$$

両式の右辺において、温度に依存する項は τ_p および μ_p である。温度Tにおいて再結合中心にトラップされている電子数（正孔トラップの数）は

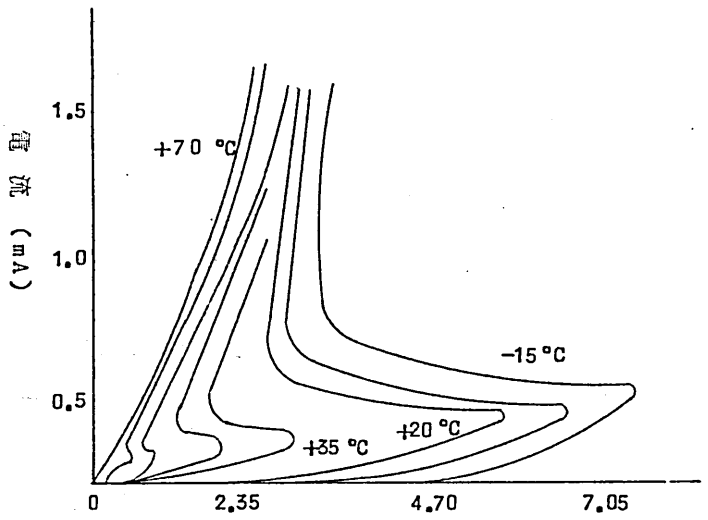
$$N_R' = \frac{N_R}{1+\frac{1}{g}\exp\frac{Et-Ef}{kT}} \quad \text{但し} \begin{cases} E_t \text{ はトラップの準位} \\ E_F \text{ はフェルミ準位} \\ g \text{ は degeneracy factor} \end{cases} \quad \cdots\cdots (30)$$

と表わされるから、(2), (4)式に示した τ_p は次のようになる。(2), (4)式の N_R の代りに (30) 式の N_R' を用いて

$$\tau_{p\cdot low} = \frac{1}{\sigma_p\cdot\sigma_p\cdot N_R}\left(1+\frac{1}{g}\exp\frac{E_t-E_f}{kT}\right) \cong \tau_{po}\left(1+\frac{1}{g}\exp\frac{E_t-E_f}{kT}\right)$$

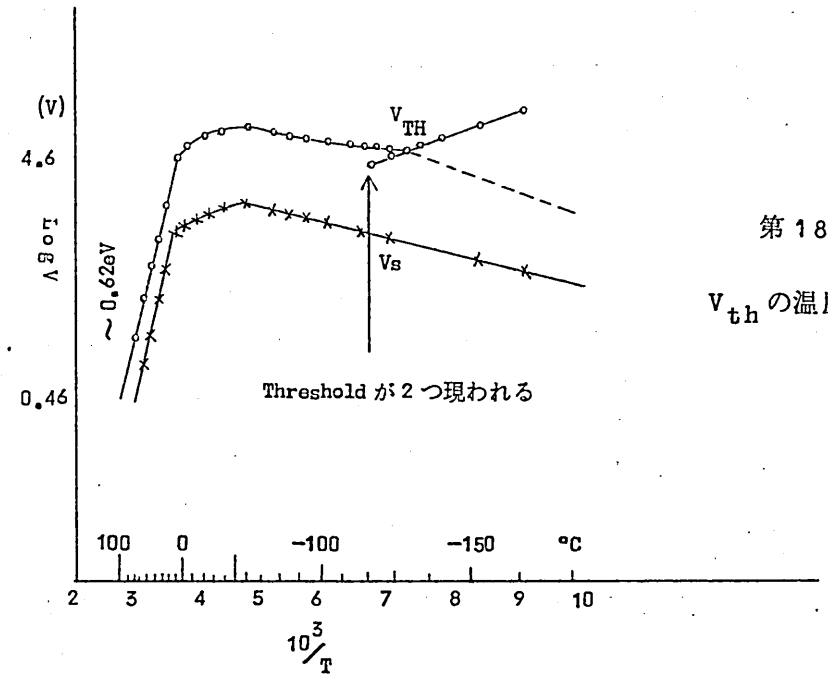
$$\tau_{p\cdot high} = \frac{1}{V_n\cdot\sigma_n\cdot N_R}\left(1+\frac{1}{g}\exp\frac{E_t-E_f}{kT}\right) \cong \tau_{no}\left(1+\frac{1}{g}\exp\frac{E_t-E_f}{kT}\right) \quad \cdots\cdots (31)$$

ここでフェルミ準位 E_f の温度変化に対し、$E_f = E_c + kT\log C$ と仮定すれば、(16) (31) 式は



第１７図

電圧－電流特性の温度による変化



第１８図

V_{th} の温度依存性

$$\tau_{p\cdot low}=\tau_{po}\left[1+\frac{k}{g}\exp\left(-\frac{Ec-Et}{kT}\right)\right]$$

$$\tau_{p\cdot high}=\tau_{no}\left[1+\frac{k}{g}\exp\left(-\frac{Ec-Et}{kT}\right)\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

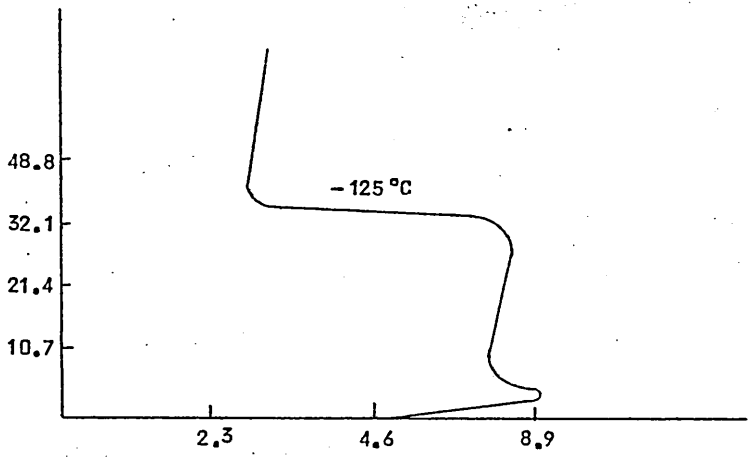
となる。

一方(3),(7)式中のμ_p の温度依存性は、一般に知られているように、液体窒素温度程度では、$\mu_p \propto T^{-\eta(\approx 1.5)}$……(33) なる形で表わされる。従って(3),(7)式は(32),(33)式より

$$V_{th} \text{ or } V_s \propto T^{n(\sim 1.5)}\tau_0 \left[1+\frac{c}{g}\exp-\left(\frac{Ec-Et}{kT}\right)\right] \cdots\cdots\cdots(34)$$

となる。従って、第18図に示した実測結果において、高温領域で現われる1/T に対する log Vth および log Vsの直線関係はこの式の exponentialの項の変化と考えられ、その勾配から Ec-Et=0.62eV が求められる。この値は、後に示す光応答の分光感度特性の測定結果とも良くあっている。第18図において、直線領域より低温測でV_{th}又はV_s の値が下がっていく傾向は、(34)式の〔 〕内が一定値即ちτ_{po}又はτ_{po}に近づき、μ_p の変化の項($T^{n(\sim 1.5)}$)がきいてくるためと考えられる。

さらに第18図および第19図に示すように2つの threshold (2つの負性抵抗)が現われることも認めた。このような現象もすでに観測はされているがその機構についてはまだ全く明らかにされていない。(17)



第19図　2つの threshold が現われる例

しかし、われわれは後に述べる光応答の測定結果とも合わせて、深い不純物準位が２つあることに基因するものと考える。

(3-2-4) 光感度特性

ダイオードのＩ層に光を照射すると、その電圧－電流特性は第２０図のような変化を示す。即ち照射光の強度とともに、V_{th}は次第に小さくなり、遂には負性抵抗特性は消失する。光照射の下で発生した電子－正孔対が再結合中心（空正孔トラップ）を埋めて行くことによって空のままの正孔トラップは、光強度と共に次第に少くなる。従って同じ injection level でも、inject されてくる正孔の life time が次第に大きくなって、負性抵抗の発生を早め、ついには負性抵抗が消失してしまうものと考えられる。

この光応答の分光感度特性を調べてみた。第２１図は液体窒素温度において、ダイオードの電流を一定に保ち、光の波長に対する端子電圧の変化を測定したものである。

この光応答の最大感度は Si のバンドギャプの所にある。これは上に述べたことから予想されるように、正孔トラップを埋める電子又は正孔のほとんどが、充満帯から伝導体への励起によって発生することを示す。

更にバンドギャップより長波長側で、0.64eV（伝導帯から）、0.76 eV（伝導帯から）の所に２つのピークが現われた。これは、それぞれのエネルギー準位をもつ再結合中心（正孔トラップ）にある電子の励起によるものと考えられる。この場合は、バンドギャップに相当する光の場合と異り、再結合中心から電子を励起し、もはや、再結合中心を正孔トラップとして働かせなくしてしまうものと考えられる。

主ピーク 0.64eV は先に V_{th}の温度変化から求めた値とほぼ一致している。

Fe^{++}が 0.7eV, Cu^{-} が 0.62eV, Au^{+}が 0.75eV として知られているから[18]、この場合、主ピークの 0.64eV は Cu^{-} に、第２のピークは Au^{+} 又

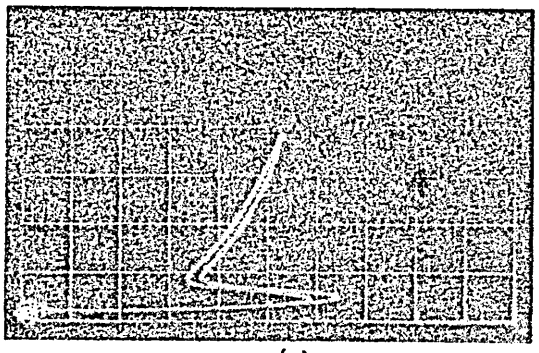
は Fe^{++} に相当するものと考えられる。

本実験の場合、特別に不純物を添加してないので、はっきりしないが、Si 単結晶の製作時にこれらの不純物が添加されたと考えられる。

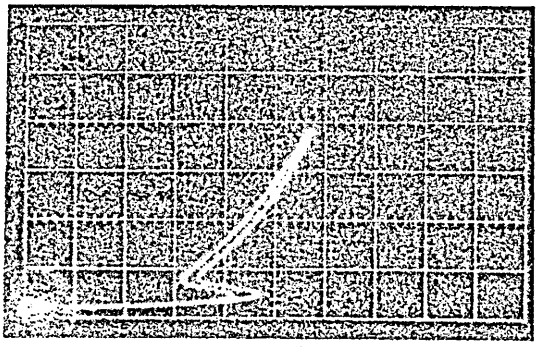
2つのピークが現われることは、先にも述べたように2つの threshold が現われる現象と関連がある。

温度が高い間は、主ピークの準位に比べ、第2のピークの準位は充満帯からのエネルギーが低いために、トラップされている正孔の数は多い。従って高温ではこの準位は、主ピークの準位に比べて、inject されてくる正孔に対して life time の変化にあまり寄与しない。そのため、高温

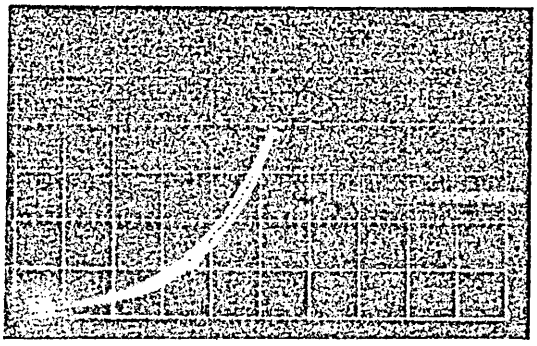
第20図　光照射によるV－I特性の変化
V：0.2mA/div
H：1.05V/div
(a)：Dark
(b)：Weak illumination
(c)：Strong illumination



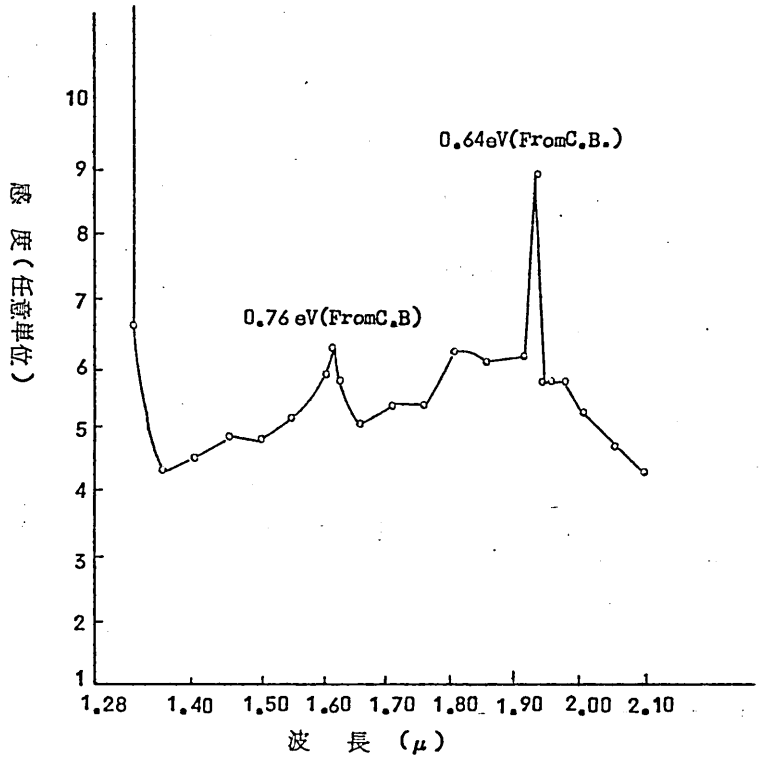
(a)



(b)



(c)



第21図　光応答の分光感度特性

領域では、主ピークに相当する準位だけで負性抵抗が発生する。

低温になって、第2の準位も十分空になり（正孔が抜けて電子が埋る）injectされてくる正孔に対してlife timeを変化させるようになると、一旦、この準位が充たされる電圧で負性抵抗が生じ、更に主ピークの所でもう一度負性抵抗が発生するものと考えられる。

なお常温附近では、バンドギャップより長波長側でのResponseは観測されなかった。

これは、常温ではthermalな電子が多いため、光により空にされた再結合中心に電子がつまっていく確率が多いためと考えられる。

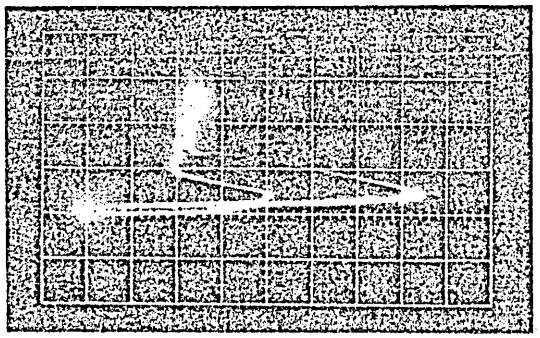
(3-2-5) パルス測定

電圧－電流特性を交流で描かせると、一般に第22図に示すようなヒステリシスがみられる。このヒステリシスは、正孔のトラップ時間に関

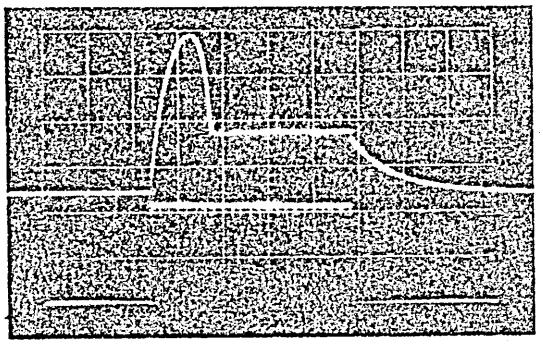
係する現象と考えて、パルス応答特性を測定することによってこれを解析した。

第２３図(a)は 20mμS の立上り、および下り時間を有する短形パルスを印加した時の端子電圧の応答特性を示す。パルスを印加（20mμS）してから、負性抵抗が生ずるまでに、ある時間を要することが分る。この時間は、 inject された正孔が正孔トラップを完全に埋めてしまうに要する時間（tin） と考えられる。しかし下り時間が、上り時間と同じ 20mμS のパルスでは同図に示すように、帰りの特性には負性抵抗が現われない。

これは、一旦トラップされた正孔が出ていくに要する時間、即ち再結合中心に電子が再びとらわれて、正孔をトラップできる状態になるまでの時間（t_{out}）が、正孔がトラップを充すに要する時間（t_{in}） よりも長いので、その時間（t_{out}）に達しないうちに電圧を下げると、低い injection level でもＩ層にプラズマ電流が流れ得る状態が保たれることになる。第２３図(b)の帰りの電圧－電流特性はこの状態を良く示している。パルスの下り時間を長くしていくと、第24 図に示すように帰りの特性にも負性抵抗が現われてくる。更に帰りの時間を長くして（5ms)やると、第２５図(a)，(b)に示す如く、往きと帰りの特性は全く同じものとなり、ヒステリシスは失くなることが分る。第２６図(a)～(d)に帰りの速度と、試料の端子電圧の変化の様子を示してある。



第２２図
ヒステリシス
V：0.2mA/div
H：1.05V/div



第２３図

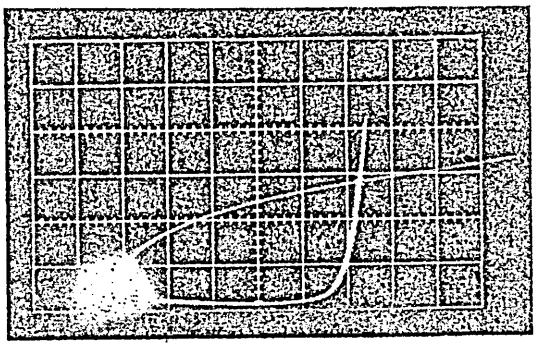
パルス応答(I)

(a)　上の波形：端子電圧

下の波形：印加パルス

（立上り及び下り 20mμs）

H：22.2μs/cm

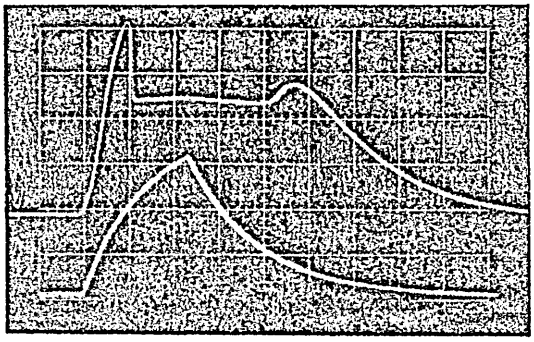


(b)　帰りのＶ－Ｉ特性

V：20μA/div

H：0.18V/div

（細い線は往きの特性によるものである）



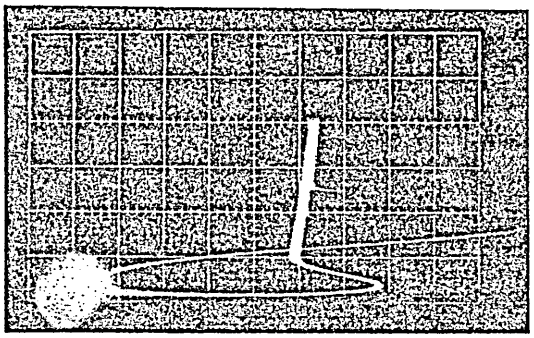
第２４図

パルス応答(II)

(a)　上の波形：端子電圧

下の波形：印加パルス

40 μs/div

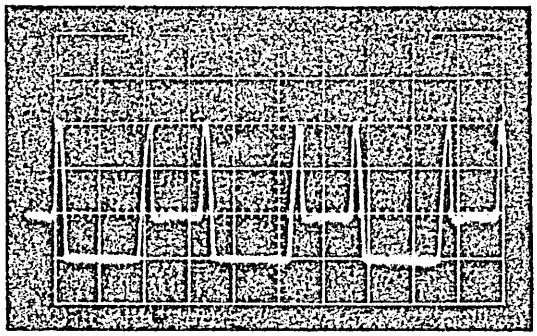


(b)　帰りのＶ－Ｉ特性

V：20μA/div

H：0.18V/div

（細い線は往きの特性によるものである）



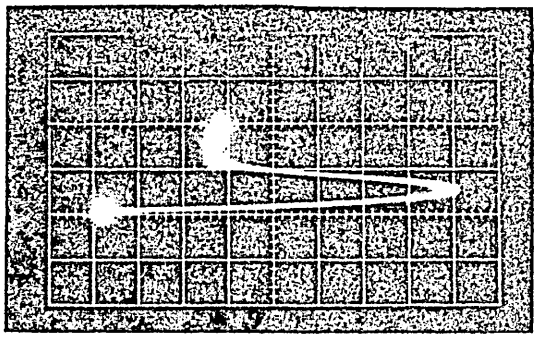
第２５図

パルス応答(Ⅲ)

(a)　端子電圧

（印加電圧は正弦波）

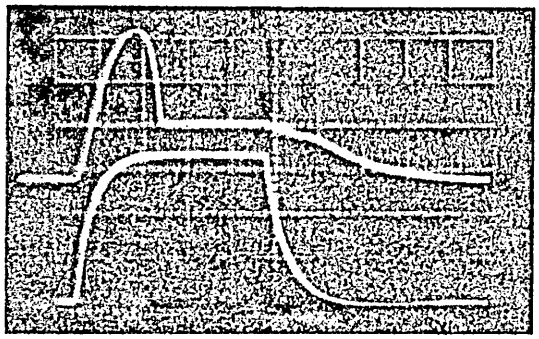
5.2 ms/div



(b)　往き及び帰りのＶ－Ｉ特性

Ｖ：0.2 mA/div

Ｈ：1.00V/div

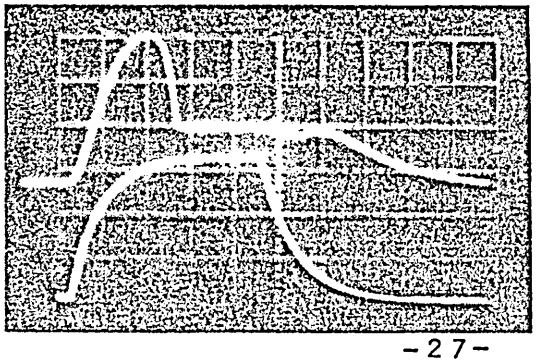


第２６図

パルス応答(Ⅳ)

印加パルスの立ち下り時間の変化による帰りの端子電圧の変化

(a)　22.2μs/div



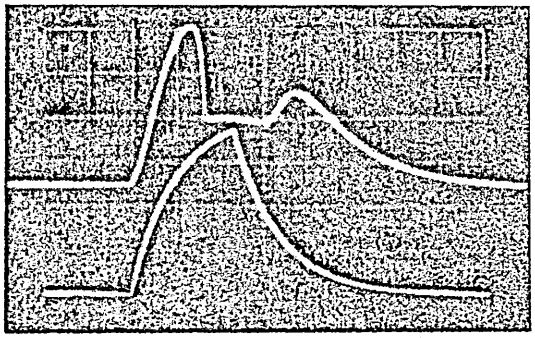
(b)　22.2μs/div

以上のようにして、パルスを印加してから負性抵抗が生ずるまでの時間および、下り時間を長くしていってヒステリシスが完全に消えるようになる時間から、正孔がトラップを完全に満すに要する時間 t_{in} および、トラップから正孔が完全にもどるに要する時間 t_{out} を求めることができる。

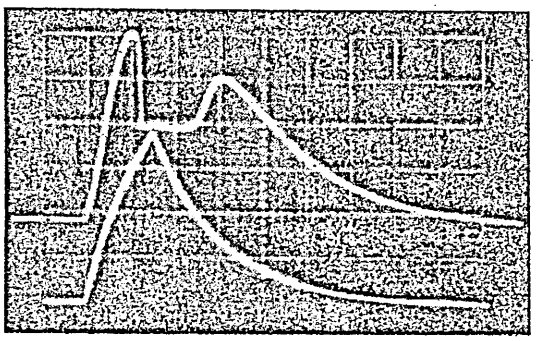
(i) t_{in}

これは inject される正孔の数に関係する。即ち印加パルスの大きさによって変化する。

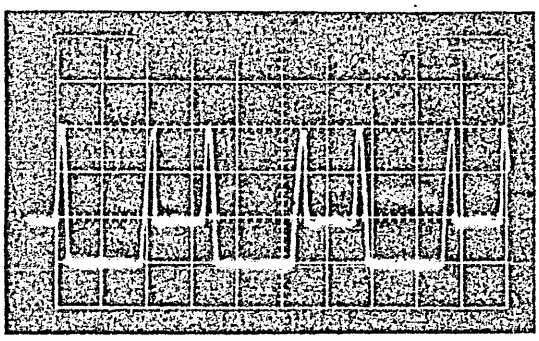
いま、t_{in} が inject される正孔の数の逆数に比例すると仮定すれば、(27) 式に示したように inject される正孔の数は $\exp(\gamma ev/kT)$ に比例するから、



(c) 41.6μs/div

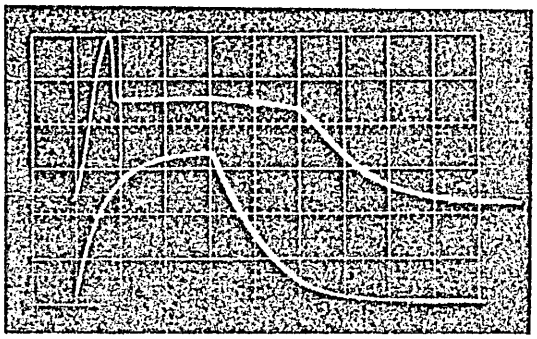


(d) 66.7μs/div

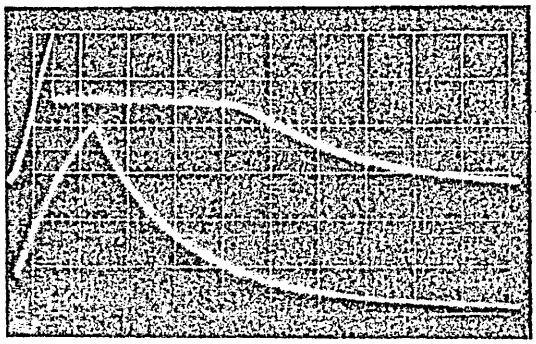


(印加波形は、同形の正弦波)

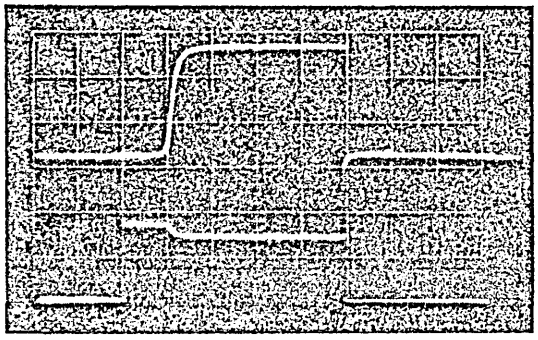
(e) 5.2ms/div



第27図
パルス応答(V)
（温度による変化）
3.12μs/div
(a) 20°C



(b) −170°C



第28図
負性抵抗が発生するに要する
時間（t_{in}）
20 μs/div
上の波形：電流波形
1V/div Rs=100Ω
下の波形：印加パルス 5V/div

$$t_{in} \propto 1/P_{inject} \propto \exp^{-\gamma ev/kT} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

となる。但しγは（27）式に示したように、印加電圧のうち、PI接合に分配される割合を表わす。

第29図はパルス電圧の大きさに対し、負性抵抗が発生するまでの

遅れ時間を第28図のようにして測定したもので、(35)の関係と良く一致している。

この直線の勾配からrを求めると0.0095となる。　電圧－電流特性の測定結果から$\alpha+\gamma=0.02$であったから、$\alpha=0.0105$が求められ、この結果から、印加電圧のうち、約1%づつがPI接合およびIN接合のそれぞれの部分に分配されて、injectionに寄与することが分る。(厳密には、先にも述べたように、分配のされ方も電圧の函数であるが、この値は大体の見当として考えることができる)

tinは又パルスが印加される以前のトラップの状態にも関係する。第30図はパルスのduty時間とtinとの関係を示すものである。正孔がトラップから完全に消え去るまでの時間は後に示すように5ms であるから、同図はその時間以内に次のパルスを送ってやると(1ms以下のduty)、t_{in} が大きくなっていくことを示している。これは、次のパルスによってinjectされた正孔が空のトラップを埋めていく間に、前のパルスで埋められていた正孔が消えて行くことにより、t_{in}を長びかせているものと考えられる。

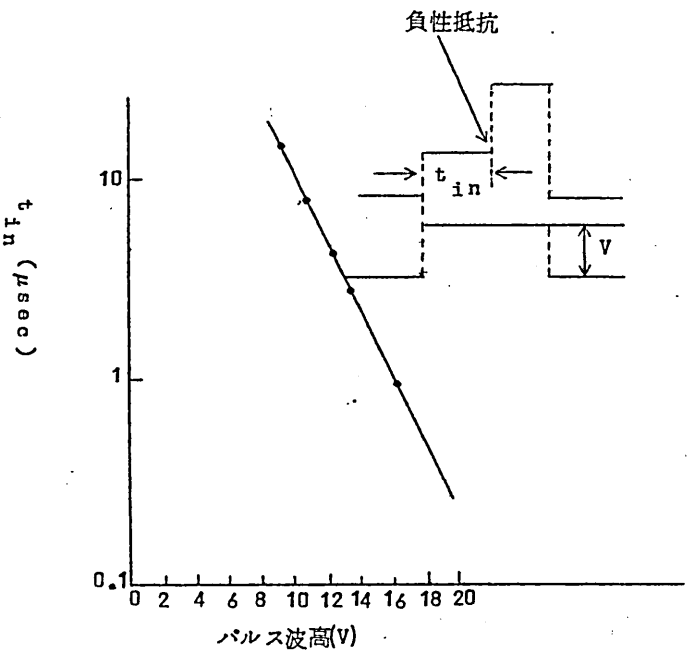
(ii) tout

本試料では～5msと求められた。

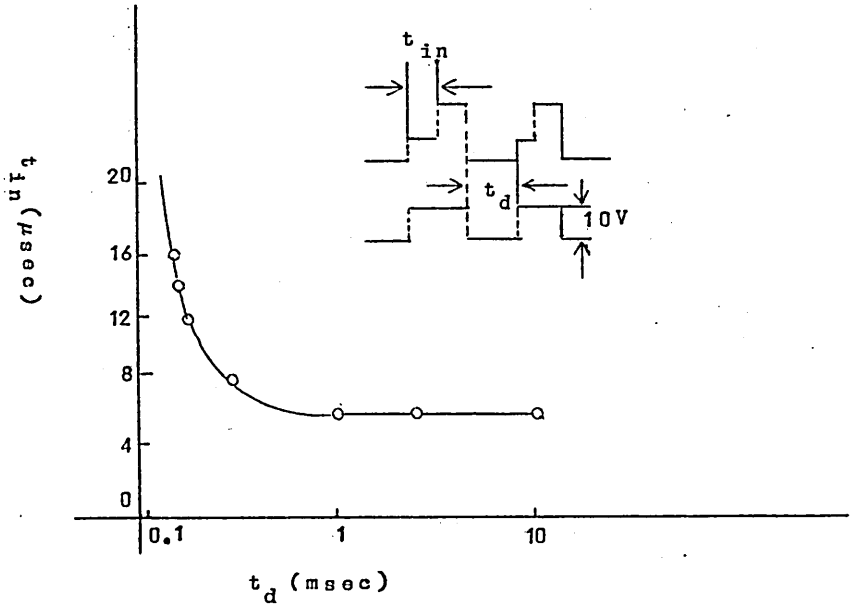
この値はPhotocon ductivityのdecay から求められた値と大体同じ程度である。(19)

tout は温度が低いほど、大きいことが期待される。即ち、温度が低いほど、伝導帯のthermal な電子が少なく、伝導体に電子が多い場合に比べて、再結合中心を電子が埋める時間(正孔が出ていく時間)が長くかかる。

事実、第27図に示すように、帰りの特性に負性抵抗が完全に消える限界状態を20 °Cと-170 °Cとで比較すると明らかに-170 °Cの方がt_{out}は長い。



第２９図　パルス波高に対する t_{in} の測定結果



第３０図　t_d に対する t_{in} の測定結果

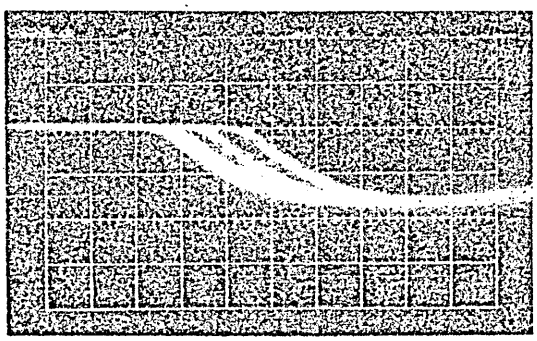
なお、第３１図はスイッチング速度の測定結果を示すものである。常温で大体５～１０μsec，-170℃で0.1～0.5μsecであった。

(3-3-7) 磁界による発振

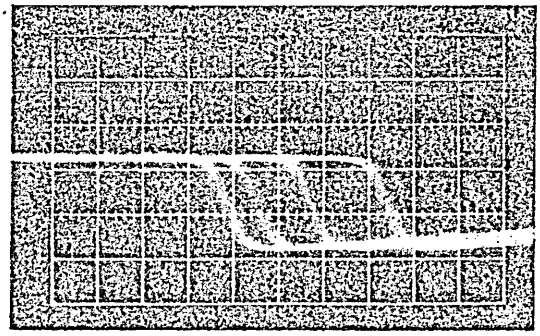
ダイオードを流れる電流に直角に磁界を加えると、負荷には無関係な発振が見られる。第３２図にその例を示す。

発振周波数は10KC程度である。電流が小さい場合は不安定な発振であるが、電流値を大きくするに従って安定となる。

発振周波数は磁界（２～４Kgauss）と大体直線的に変化する傾向を認めた。又磁界が一定の場合、周波数は電流が少いほど高くなる傾向がみられる。この発振現象の機構については、今の所明らかにされていない。(20)

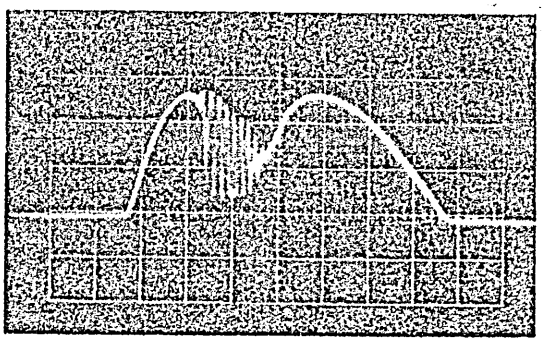


(a)　２０℃



(b)　－１７０℃

第３１図　スイッチング速度の測定 2μs/div



第３２図　磁界による発振例

発振周波数から考えて、プラズマ instability によるものとしては、低過ぎるようである。トラップからの出入りによる発振と考えると、比較的妥当のようである。

§4 結　　言

以上 PIN ダイオードの順方向に現われる負性抵抗現象に関する諸現象を調べ、定性的にまた一部定量的に説明することができる。しかし、まだモデルの本質的な意味や、その定量的取扱いに多くの問題が残されているようである。われわれはこの種負性抵抗現象を、Lampert の Double Injection モデルによって、一応説明したが、このモデルにも 2・3の弱点がある。たとえば、トラップが埋められてプラズマが形成される段階のいわゆる Positine な feed bcak を説明する要素に疑問があることである。この点に関しては、現在非常に興味がもたれている。たとえば、一種の aualanche 的な Process を考慮に入れることも提案されている。(17)(20)

現在、これらの現象に対する研究は増々盛んになっており、磁界による発振などの様な残された問題もいずれ解明されるであろう。

参　考　文　献

(1) M.A. Lampert: Proc. I.R.E. 50, No.8, '62

(2) 〃 Phys. Rev. 121, No.1 '61, 26

〃 Phys. Rev. 125, No.1, '62, 126

〃 J.Phys. Chem. Sol. 22, '61, 189

(5) N.Holonyak : Phys. Rov. Lett. 8, '62, 426

(6) 〃 Proc. I.R.E. 50, '62, 2421

(7) 〃 App. Phys. Lett. 2, '63, 71

(8) V.I. Stafeev: Sov. Phys. Sol. St. 1, No.6, '59, 763

(9) 〃 Sov. Phys. Sol. St. 3, No.8, '61, 135

(10) A.F. Gibson and J.R. Morgan:
Solide State Electronics 1, '60, 54

(11) D.A. Kleinman: B.S.T.J. 35, No.3, '56, 685

(12) O.J. Marsh, J.W. Mayer, and P. Baron:
App. Phys. Letters 5, '64, 74.

(13) J.W. Mayer, R. Baron, and O.J. Marsh:
Phys. Rev. 137, No.1A. '65, A286

(14) J.W. Mayer, et, al: Phys. Rev. 137, No.1A. '65, A295

(15) M.A. Lampert and A. Rose:
Pheys. Rev. 121, No. 1, '61, 26.

(16) 例えば，渡辺: 半導体とトランジスタ(1) P160

(17) 中野，深海，本間：物性 4, No.1, '63, 46

(18) 例えばHanny: Semiconductors, P342

(19) 例えばBube : Photo Conductivity of Solid, P283

(20) T. Fukami and K. Homma:
Jap. Jour. App. Phys. 2, No.9, '63, 535

輻射科学研究会資料

空胴の特性インピーダンス R_{sh}/Q_0 の一測定法

岡田武夫　　小野寺俊男
神生忠興　　家喜洋司

（三菱電機株式会社 中央研究所）

昭和41年2月5日　（土）
（於 大阪大学工学部 メモリアルホール）

輻射科学研究会資料

空胴の特性インピーダンス R_{sh}/Q_0 の一測定法

岡田武夫　小野寺俊男
神生忠興　家喜洋司
（三菱電機中央研究所）

§1. 諸言

空胴共振器の特性インピーダンス（R_{sh}/Q_0）は，共振角周波数（ω_0）無負荷時のQ値（Q_0），外部のQ値（Q_{ext}）と共に、空胴の特性を表わすものとして重要な値である。この R_{sh}/Q_0 の値を知る事によってその空胴の積分路の両端に現われるインピーダンスを知る事が出来る。特にクライストロンの出力空胴における R_{sh}/Q_0 は、最大能率を与える最適負荷インピーダンスを決定する際に重要な意義を持っており[1]従ってこの値の正確な測定法が要求される。

ところでその測定法は，W.W. Hansen[2]，E.L. Ginzton[3]等により摂動法として示されてはいるが，しかしこの方法は外部との結合が充分に弱い空胴についてのみ有効である．クライストロンの出力空胴のように外部との結合が強く $Q_L \approx Q_{ext}$ の時には，この方法をそのまま適用する事は出来ない．

筆者等は，外部との結合の強い空胴における R_{sh}/Q_0 の測定について従来の摂動法を改良し空胴の共振周波数のズレを，直接周波数の変化として測定せず入射側のインピーダンスの位相の変化として測定し，それから共振周波数のズレを知ることにより R_{sh}/Q_0 を求めることを試みた．ここではこの方法による R_{sh}/Q_0 の測定について述べ，かつ筆者等が開発した5MWパルスクライストロンの出力空胴の R_{sh}/Q_0 の測定例を示した．

§2. 測定方法

2.1 測定原理

空胴の特性インピーダンスは次のように定義される．

$$\frac{R_{sh}}{Q_0} = \frac{\left(\int E \cdot dS\right)^2}{2\,\omega_0\, U} \qquad (1)$$

ここでUはその空胴内に貯えられる全エネルギーである．R_{sh}/Q_0 は空胴の幾何学的形状のみに依存し，その空胴の損失及び外部回路との結合には関係しない量である．クライストロン空胴の相互作用空間は電界のみが存在する領域であり，電界が軸対称の時にはこの軸に一致する電気力線が存在する．従って電界の積分路には空胴の中心軸を選び、以下この軸上における R_{sh}/Q_0 について考察する．

まず W.W. Hansen，E.L. Ginzton により示されている摂動法による R_{sh}/Q_0 の測定を振り返ってみる．電界のみが存在する空胴の領域内に、その物体のまわりで電界が一定であるとみなせる程充分に小さい摂動体を挿入した際には、次式で与えられる共振周波数のズレを観察する．

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{K\,\epsilon\,E^2\,\Delta\tau}{4\,U} \qquad (2)$$

ここで　K：摂動体の形状及び方向によって定まる定数

ϵ ： 摂動体が移動する中央部の誘電率

$\Delta\tau$ ： 摂動体の体積

摂動体が金属球の場合には $K = 3$ である。先に定義した軸上に沿って小さな金属球を移動させると，無格子間隙では軸上の電界は一定ではないので，その位置によってそれに対応した共振周波数のズレを観測する。

今，周波数のズレの最も大きい点，即ち電界最大点を基準にし，その時測定された共振角周波数のズレを $\Delta\omega_m$ その点での電界を E_m とすると (2) 式より

$$\frac{\Delta\omega_m}{\omega_0} = \frac{K\epsilon E_m^2 \Delta\tau}{4U} \quad \text{------} \quad (3)$$

(3) 式を (1) 式に代入することにより

$$\frac{R_{sh}}{Q_0} = \frac{\left(\int E\cdot ds\right)^2}{E_m^2} \frac{2}{K\cdot\epsilon\cdot\Delta\tau\,\omega_0} \frac{\Delta\omega_m}{\omega_0} \quad \text{------} \quad (4)$$

MKS系では $1/\omega\epsilon\lambda = 60$ である．こゝで λ は自由空間波長である．

$$\frac{R_{sh}}{Q_0} = \left(\int \frac{E}{E_m}\cdot ds\right)^2 \frac{120\lambda_0}{K\cdot\Delta\tau} \frac{\Delta f_m}{f_0} \quad \text{------} \quad (5)$$

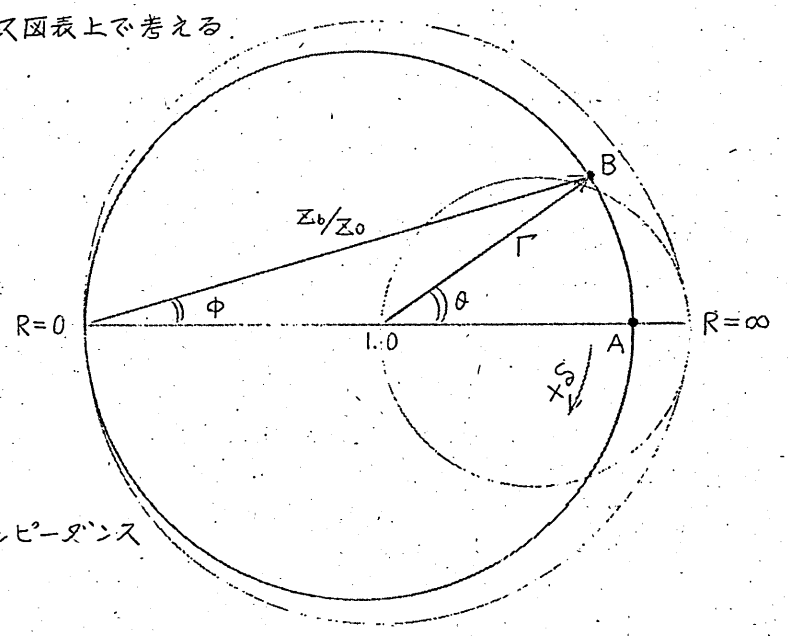
半径 a なる金属球に対しては $K\Delta\tau = 4\pi a^3$ である。一方 (2)，(3) 式から，共振周波数のズレとそれに対応する電界との関係を示す (6) 式が導かれる．

$$\frac{E}{E_m} = \sqrt{\frac{\Delta f}{\Delta f_m}} \quad \text{------} \quad (6)$$

それ故に $\int \frac{E}{E_m}\cdot ds$ を求めるには 金属球の変位を横軸に、その時観測された共振周波数のズレの平方根を縦軸にして画かれた曲線を面積分すれば良い。このようにして R_{sh}/Q_0 を求める事が出来る訳である．

この方法における測定精度は，共振周波数の変化を測定する際の精度に依存している。摂動球は出来るだけ小さくなければならないから，これに対応した周波数の微少な変化を良い精度で測定することが必要である．故にこの方法はその共振周波数が簡単かつ正確に測定出来る場合のみ有効である，これに対して外部との結合の強い空胴では、その共振周波数自身がボヤけてくるので，その測定が困難になり，このままでは R_{sh}/Q_0 を求める事は出来ない。

ここで外部との結合の強い空胴の共振周波数と入射側のインピーダンスの位相との関係を、次のスミス図表上で考える．



第1図
D.S.P における
インピーダンス

この場合．入射側の Detuned Short Position（D.S.P）におけるインピーダンスは才1図のように変化する．A点は共振時のインピーダンスを示している．今、入力周波数が一定で、空胴の共振周波数がずれてB点までくると，その時の反射係数Γの位相角θは次のようになる．

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\beta y}{1-\beta^2+y^2} \quad \text{----------} \quad (7)$$

ここで $\beta = \dfrac{Q_0}{Q_{ext}}$　　$y = 2Q_0\delta$　　$\delta = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$

今、$\beta \gg 1$ であるからB点は $\Gamma = 1$ の円周上にあるとみなせる．
それ故に $\phi = \theta/2$ となり，共振角周波数のずれ $\Delta\omega$ と位相のずれ ϕ との関係が求められる．

$$2Q_{ext}\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \tan\phi \quad \text{----------} \quad (8)$$

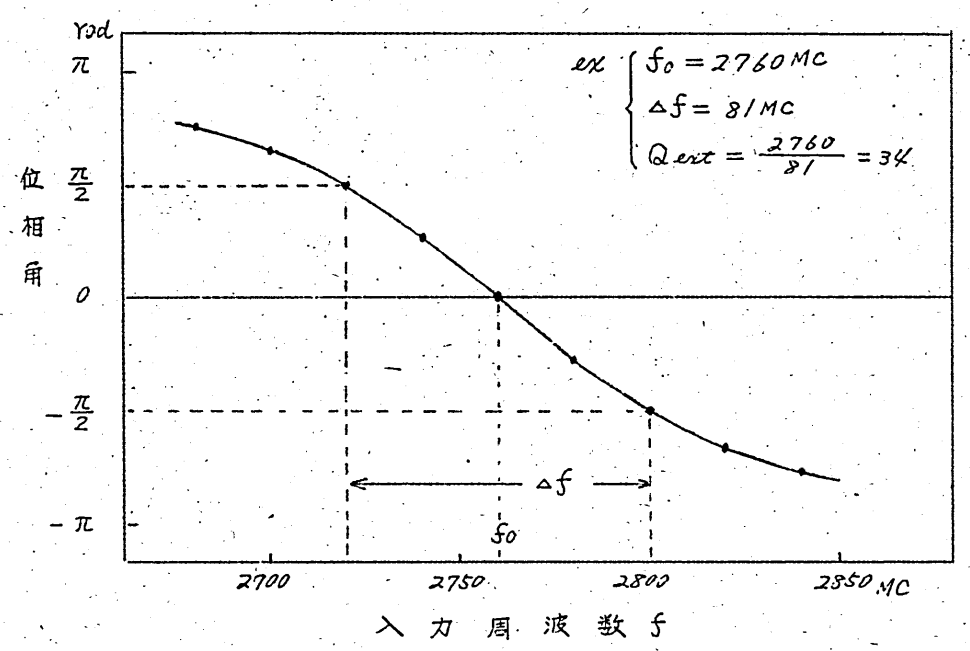
ここで $\phi = \dfrac{2\pi}{\lambda_g}\cdot\Delta\ell$

$\Delta\ell$：電圧最小点の変化距離

従って攝動球を挿入した時の位相の変化 ϕ を読み取り，(8)式の関係から共振周波数のずれ $\Delta\omega$ を求め，(5)，(6)式にこれを代入する事により，所期の目的である外部との結合の強い空胴の R_{sh}/Q_0 を測定する事が可能となる．

2.2 測定手順

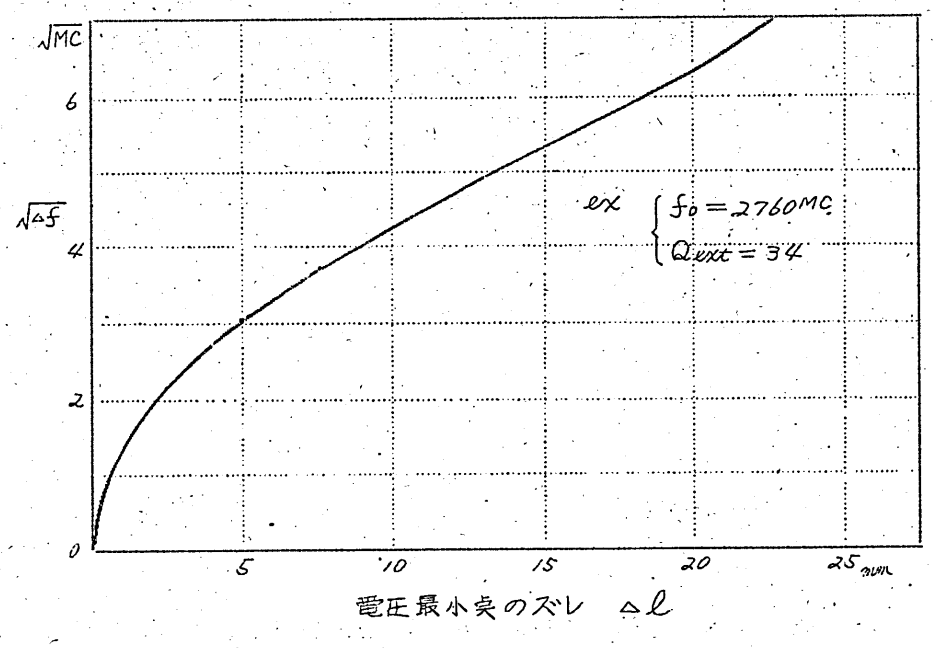
1) 先ず被測定空胴の共振周波数と外部Q（Q_{ext}）を位相法により測定する．即ち攝動球を挿入していない状態で，発振器の周波数を変化してその時の電圧最小点の位相を読み取る。これを才2図に示す，この場合，基準面として被測定空胴に最も近いD.S.Pを用いる。



才2図　位相法による f_0，Q_{ext} の測定

共振周波数 f_0 と半値巾 Δf を読みとる事により $Q_{ext} = f_0/\Delta f$ を求める．

ii) 測定した f_0 Q_{ext} から(8)式を用いて電圧最小点のズレ Δl と、その時の共振周波数のズレの平方根 $\sqrt{\Delta f}$ との変換グラフを求める。これを第3図に示す。

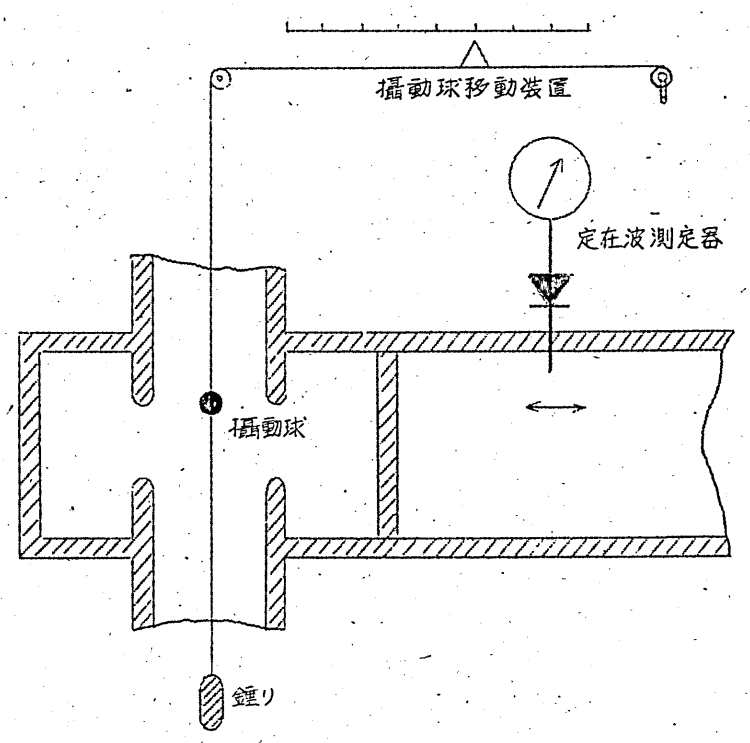


第3図 $\Delta l - \sqrt{\Delta f}$ 変換グラフ

又、摂動球として用いる金属球の直径を精密に測定し、$K\Delta\tau$ を求める。

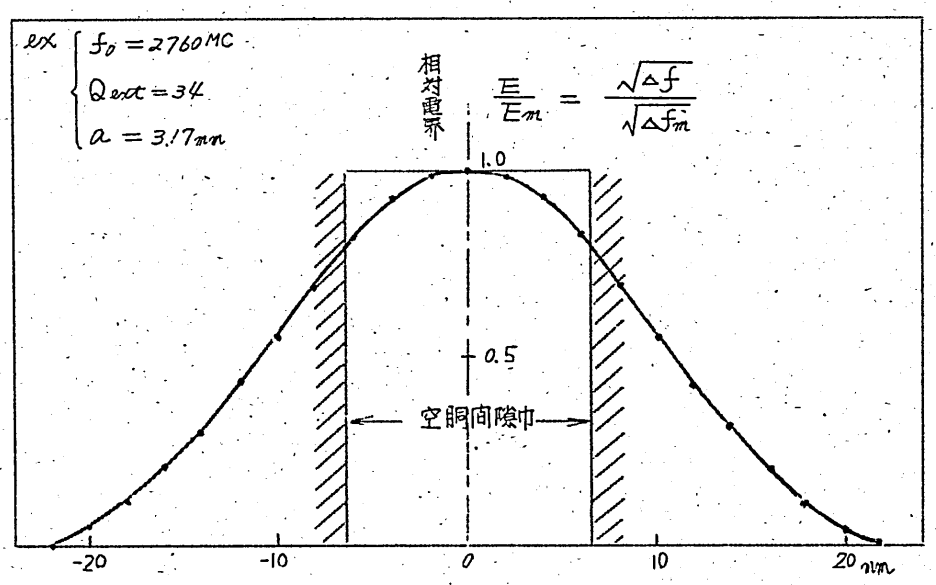
iii) 入力周波数を f_0 に固定し、ドリフト管中心軸に沿って摂動球を挿入してゆき、その都度入射側の電圧最小点のズレ Δl を測定する。

この際、ドリフト管中心軸と摂動球の移動軸とが一致するように出来るだけ注意を払う。第4図にこの操作の概略を示す。



第4図 摂動球の挿入と位相の読み取り

iv) 第3図の変換グラフにより Δl から相対電界 E/E_m を求め、面積分して $\int E_m\, dS$ を求める。例として第5図にこの曲線を示す。この値と最大周波数偏移 Δf_m とから(6)式により R_{sh}/Q_0 を求める。

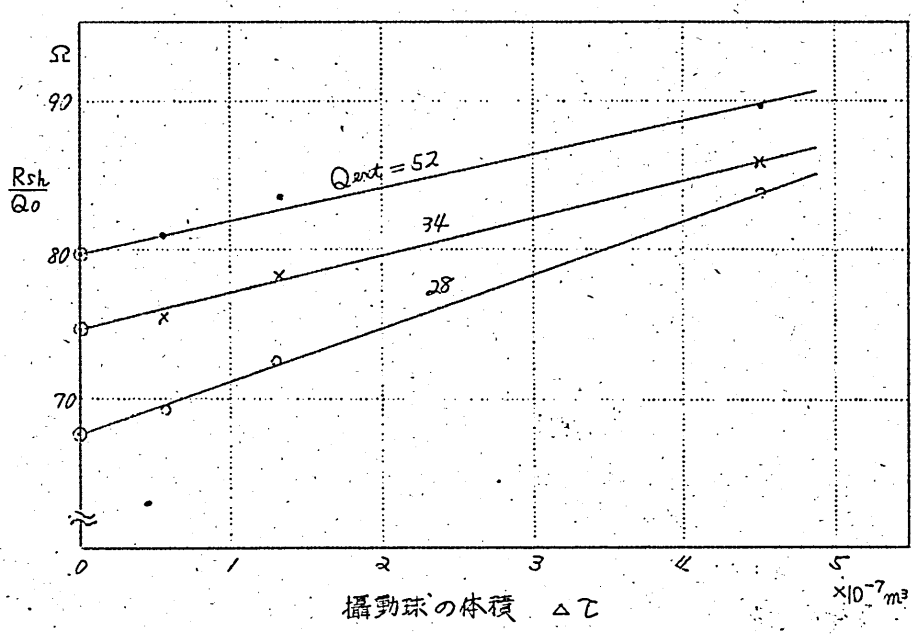


軸方向距離 S

第5図 軸方向相対電界分布

§3. 測定結果

中心の穴に太さ 0.1 mm のナイロンの糸（釣糸）を固定した直径 4.76 φ, 6.34 φ, 9.52 φ の3種類のボールベアリングを用いて、ドリフト管径 26 φ, 空胴間隙 13 mm, $f_0 = 2760$ MC の結合度の異なる3種類のクライストロン出力空胴について測定を行った。このボールベアリングの中心の穴は、放電加工によりあけられた 0.5 mm のものである。第6図に $\Delta\tau$ に対する R_{sh}/Q_0 の測定値を示す。3本の曲線は各々 $Q_{ext} = 52, 34, 28$ の空胴での測定値を示し



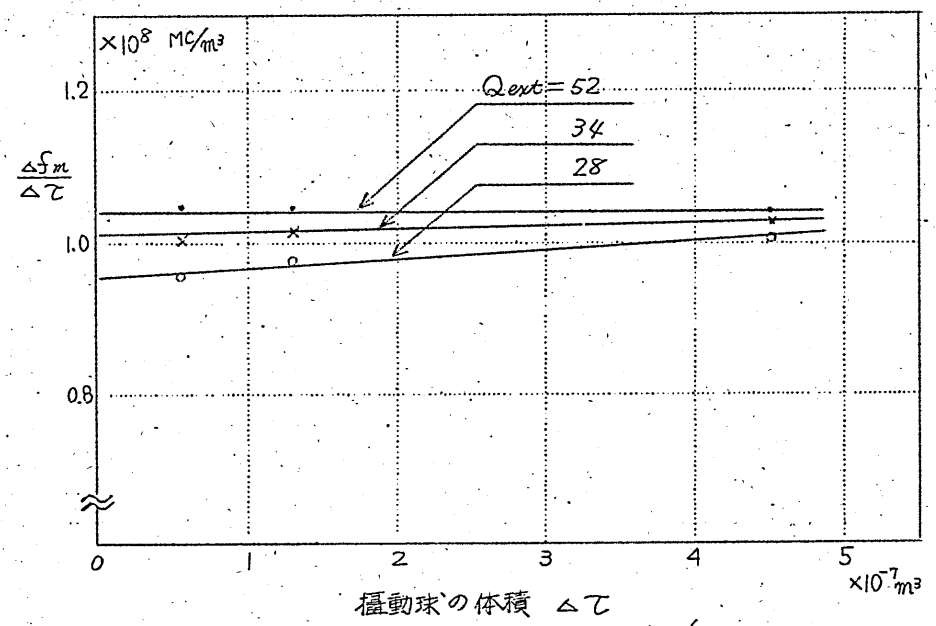
攝動球の体積 $\Delta\tau$

第6図 $\Delta\tau$ に対する R_{sh}/Q_0 値

ている。R_{sh}/Q_0 が $\Delta\tau$ と共に増加している理由としては、攝動球の直径が増加すると第5図に示したグラフの E/E_m の小さい部分、即ち間隙から離れたところでの測定値が、真の電界

分布より以上にスソを引いてくるからであると考えられる。

間隙内の最大電界に比例する $\Delta f_m/\Delta\tau$ と $\Delta\tau$ との関係を第7図に示す。$\Delta f_m/\Delta\tau_m$ が $\Delta\tau$ に対して一定であるという事により、この程度の直径までは K は定数であると考えられる。



第7図　間隙内最大電界に比例する $\frac{\Delta f_m}{\Delta\tau}$ の値

作用空間に比べて出来るだけ小さい寸法の摂動球を用いる事が望ましい。しかし $\Delta\tau$ の下限は測定可能な最小位相変位で決められる。それ故、先ず比較的大きな摂動球で測定し、少しずつその直径を減少してゆき、少くとも3種類の大きさの異なる摂動球に対して R_{sh}/Q_0 を測定することにより、極限の値に充分に漸近した R_{sh}/Q_0 の値を得ることが出来ると考えられる。

入力の周波数安定度を 1×10^{-4} 以下に保ち、摂動球の挿入、位相変位の読み取り等の測定上の手順を注意深く行うことにより、5%以内の誤差範囲で R_{sh}/Q_0 を求めることが出来る。

§4. 結　言

この測定法により、外部との結合が実際の状態でのクライストロン出力空胴の R_{sh}/Q_0 を測定することが出来た。この方法の利点としては次のようなことが考えられる。

1) 外部との結合が強い空胴の R_{sh}/Q_0 の測定が出来る。

2) 測定装置として位相変位を精度良く読み取れる定在波測定器があればよく、複雑な精密周波数測定装置を必要としないので、測定が容易でかつ安価である。

3) 測定の際の入力周波数が f_0 に固定されているので、それの読み取り誤差は直接測定誤差に入ってこない。

この R_{sh}/Q_0 は間隙内の電界分布が軸対称であるとの仮定のもとに、ドリフト管中心軸上で求められたものである。しかし実際には、間隙内のドリフト管軸に垂直な面上での、電界に比例する値 $\Delta f_m/\Delta\tau$ は、軸対称でないある分布を持っている。これは、$Q_L \approx Q_{ext}$ では結合窓の開口面積が大きくなり、その為に結合窓と反対側の空胴壁となっている端板が間隙に近づきすぎるためだと考えている。この電界分布の乱れが目立つ程大きな場合には、何らかの方法でこれを直すか、あるいは電界の積分路を定義し直す必要があるが、これらは今後の課題だと考えている。

最後に、御鞭撻と御助言を戴いた八十田部長、建石研究員に対し深甚なる謝意を表する次第である。

参考文献

(1) 岡田武夫外 "クライストロンの最適負荷インピーダンス"
輻射科学研究会（昭40年10月）

(2) W.W. Hansen & R.F. Post "On the Measurement of Cavity Impedance" J. Appl. Phys., Vol 19 P1059-1061 (Nove 1948)

(3) E.L. Ginzton "Microwave Measurements" P435
McGraw-Hill Book Com, Inc, 1957

輻射科学研究会資料

周波数掃引を使った定在波法による Q_0 の測定

弓場芳治　　牧本利夫

（大阪大学　基礎工学部）

昭和41年2月5日

周波数掃引を使つた定在波法によるQ_0の測定

緒　　言

共振器の無負荷$Q(Q_0)$を測定するのに負荷$Q(Q_L)$と共振周波数の定在波比を測定して，結合係数βを求めQ_0を計算する方法があるが，測定するQ値が高いときや，発振器の周波数安定度が余りよくないときには，共振曲線の特定の点の周波数を固定することが出来ないので正確な定在波比を測定することが困難である。

この欠点を除くために発振器に周波数掃引をかけ定在波測定器の出力をブラウン管オツシロスコープで観測して定在波比を測定する方法を検討した。

共振器の等価回路を図1のように仮定し，入力インピーダンスを求めて反射係数Γを計算し，さらに反射係数より定在波電圧の振巾V_ℓを求めて，V_ℓが周波数および定在波測定器のプルーブの位置でどのように変化するかを検討した。その結果，共振周波数f_0の定在波比をこの方法で求めることが出来ることがわかつた。

また，定在波測定器のプルーブの位置を適当に移動させることによつてQ_Lの半値周波数巾が共振曲線の半値点で求めるより容易な方法があるので示した。

1 等価回路と入力インピーダンス

一般に共振器の等価回路を図1のように仮定する。たゞしZ_1は共振器に並列に接ながれた抵抗である。

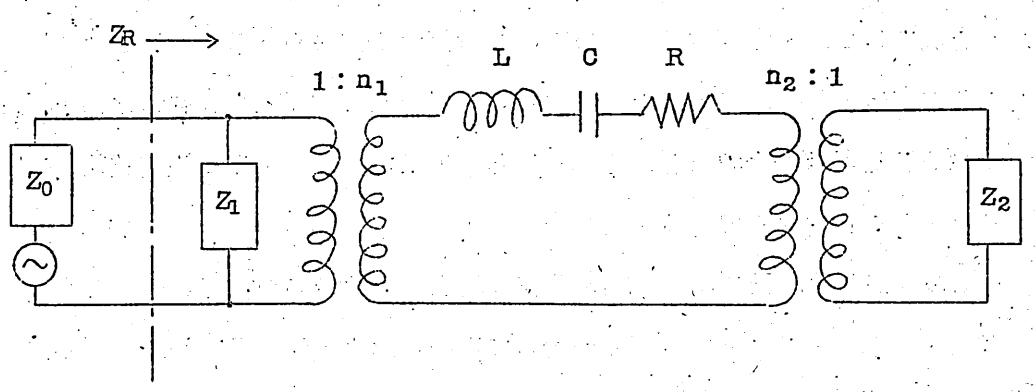


図1　共振器の等価回路

この回路のモデルは図2（a）のようにリアクション形の共振器と負荷を並列に接続した回路や，（b）のようにフアブリペロー共振器の結合口に並列に放射抵抗や，高次モードの減衰分が入つたものに対応している。

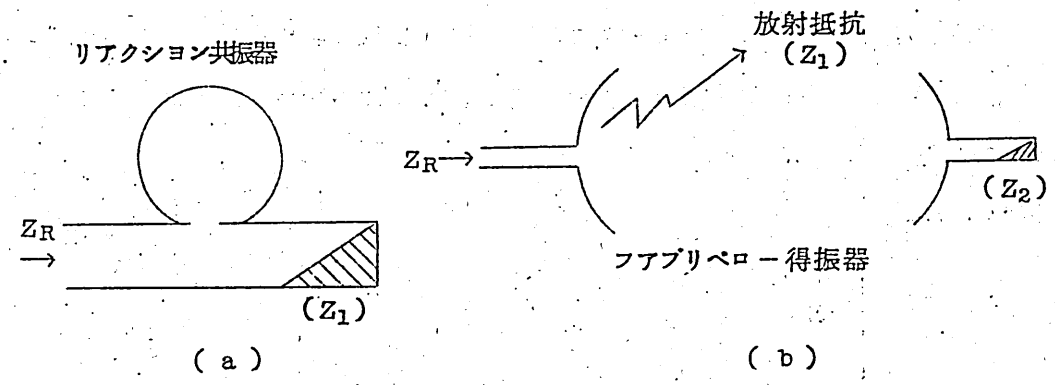


図2　共振器のモデル

図１の等価回路より入力インピーダンスZ_R を求めると，

$$\frac{Z_0}{Z_R}=\frac{Z_0}{Z_1}+\frac{Z_0}{\frac{1}{n_1^2}\{R+n_2^2 Z_2+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})\}} \tag{1}$$

となり，共振周波数f_0 の附近では，

$$\left.\begin{array}{ll}
\omega=\omega_0+\delta\omega\ , & \omega_0=2\pi f_0 \\
Z_1/Z_0=1/\alpha & \\
Q_0=\omega_0 L/R & \\
Q_{e1}=\omega_0 L(Z_0+Z_1)/n_1^2 Z_0 Z_1 & (\text{入力側の外部Q}) \\
Q_{e2}=\omega_0 L/n_2^2 Z_2 & (\text{出力側の外部Q}) \\
\beta_1=Q_0/Q_{e1}\ , & \beta_2=Q_0/Q_{e2}\ (\text{結合係数})
\end{array}\right\} \tag{2}$$

とおき，さらに

$$F=2Q_0\frac{\delta f}{f_0}\ , \tag{3}$$

とすれば，(1)は(4)のように書き換えられる。

$$\frac{Z_0}{Z_R}=\alpha+\frac{(1+\alpha)\beta_1}{1+\beta_2+jF} \tag{4}$$

実際の入力側からの測定では，β_1 と β_2 は分離出来なくて，出力側の外部Qを含んだ共振器として，結合係数β'，無負荷Q Q_0'が観測される。この場合(4)は次のように変形される。

$$\beta'=\beta_1/(1+\beta_2)\ ,\quad Q_0'=Q_0/(1+\beta_2)\quad F'=F/(1+\beta_2) \tag{5}$$

$$\frac{Z_0}{Z_R}=\alpha+\frac{(1+\alpha)\beta'}{1+jF'} \tag{6}$$

β'，F' は入力側と出力側を入れ換えて測定すると分離しβ_1，β_2 が求

められ，Q_0 を知ることが出来る。

次に入出力が対称な共振器は，$\beta_1 = \beta_2 = \beta$ であるから(4)は(7)のようになる。

$$\frac{Z_0}{Z_R} = \alpha + \frac{(1+\alpha)\beta}{1+\beta+jF} \tag{7}$$

以下(6)について検討すれば，一般の場合は(5)の変換をすれば求められる。(6)より反射係数Sを求めると，

$$S = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \frac{2\beta'}{(1+\alpha)(1+\beta'+jF')} \tag{8}$$

として表わされる。(8)で F' を大きくすれば，才2項は無視出来るので，才1項だけ残るが，これは共振曲線より十分離れた周波数の反射係数は，Z_1 によるものだけであることを示し，このような共振器の反射の影響のない周波数で測定した反射係数 S_1 より α が求められ，Z_1 がわかる。

2 定　在　波　比

(8)で表わされた反射係数を持つた回路の定在波電圧の振巾 V_ℓ を基準面から ℓ 離れた位置で測定すれば，入射波の振巾を1として，

$$\left.\begin{aligned} V_\ell &= 1 + Se^{j\phi} \\ \phi &= \frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot 2\ell \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

として求められる。実際に定在波測定器の出力を鉱石検波器で2乗検波してオッシロスコープに描かせた波形は，発振器に周波数掃引をかけて

おけば，図３（ａ）のように周波数に対する $|V_\ell|^2$ の変化が観測される。

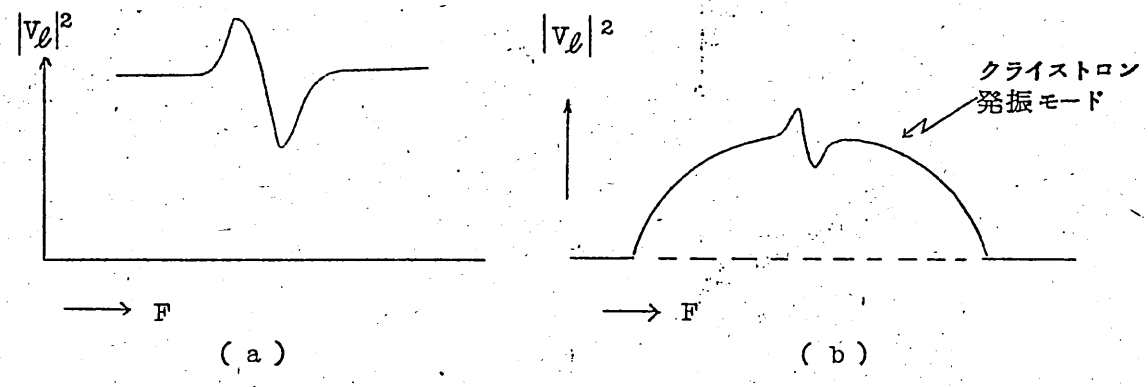


図３　ブラウン管オツシロスコープに現れる波形

Z_1 の値を知るためには，$|V_\ell|^2=0$ の基準線を知らなければならないので，交流増巾のオツシロスコープを使うときには，（ｂ）のようにクライストロンの発振モード全域をカバーするだけ掃引し，発振停止の領域をオツシロスコープに出して検波出力０の線を見つけなければならない。

$|V_\ell|^2$ の周波数の変化およびループの位置に対する変化をしるために V_ℓ の値をしらべると，(9)に(8)を代入して，

$$V_\ell = 1 + \left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \frac{2\beta'}{(1+\alpha)(1+\beta')} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{F'}{1+\beta'}\right)^2}\left\{1+j\frac{F'}{1+\beta'}\right\}\right] e^{j\phi}$$

$$= 1 + \left[S_1 - 2R\left(\frac{1+jx}{1+X^2}\right)\right] e^{j\phi} \qquad (10)$$

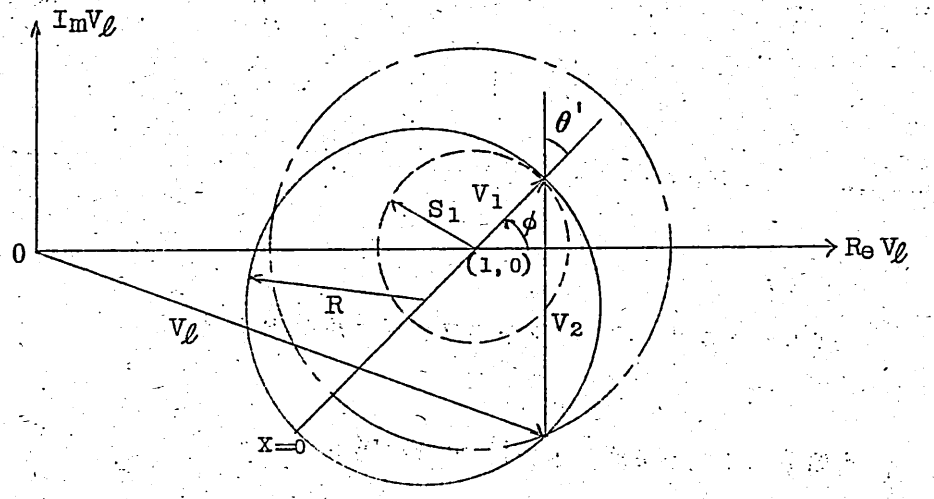
たゞし

$$S_1 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha},\quad 2R = \frac{2\beta'}{(1+\beta')(1+\alpha)},\quad X = \frac{F'}{1+\beta'} \qquad (11)$$

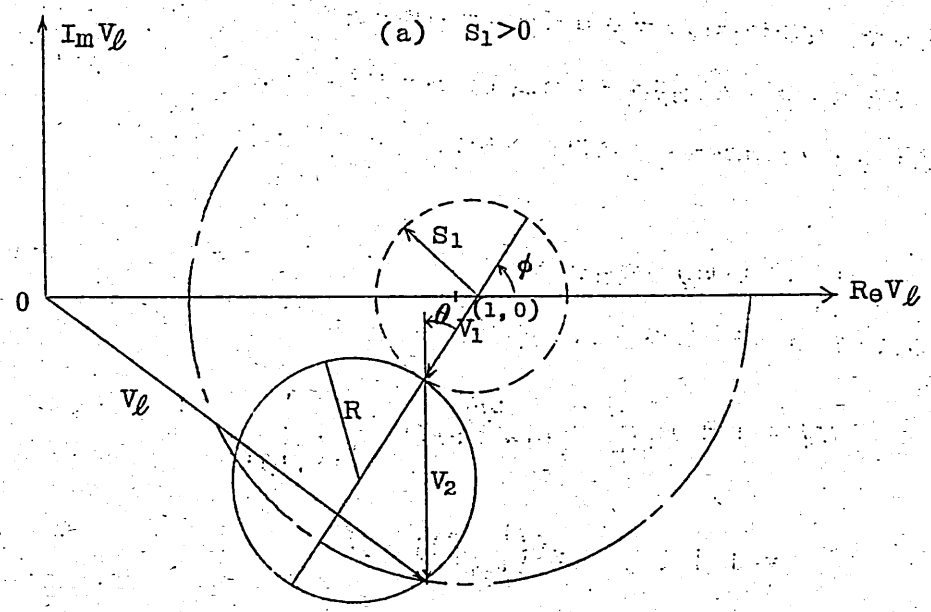
とし，又，$\theta' = \mathrm{Tan}^{-1}X$ とすれば，

$$V_\ell = 1 + [S_1 - R(1+e^{j2\theta'})]e^{j\phi} \qquad (12)$$

となる。これを図に示すと，図4(a)(b)のようになる。(a)は $S_1>0$　(b)は $S_1<0$ の場合を示したものである。



(a)　$S_1>0$



(b)　$S_1<0$

図4　定在波振巾の円線図

図は、(12)を分解して考えると、

$$\left.\begin{aligned} V_\ell &= 1 + V_1 + V_2 \\ V_1 &= S_1 e^{j\phi} \\ V_2 &= R(1+e^{j2\theta'})e^{j\phi} = 2R\cos\theta' e^{j(\theta'+\phi)} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

となり、$1+V_1$ は、Z_1 による定在波の振巾で、定在波測定器のプルーブを移動させると（ϕを変化させると）、その軌跡は（1，0）を中心とし、半径 S_1 の円になる。

つぎにϕを固定して周波数を変化さすと（θ' を変化さすと）、V_2 が変化し、その軌跡は半径Rの円になる。

したがつて、V_ℓ の θ' の変化に対する軌跡は、図4の実線の円であり、ϕに対する軌跡は鎖線の円になることがわかる。

図4(b)は $S_1<0$ であるから V_1 が、図4(a)と逆向となつている。

これらの図より、プルーブの位置ℓを任意の値に撰んだとき、V_ℓ が周波数の変化に対して極大と極小を持ち、そのときのV_ℓ の大きさは、V_ℓ が V_2 円の中心の方向を向いたときにV_2 円と交わる2点の長さで表わされている。

したがつて一般に $|V_\ell|^2$ の θ' に対する変化は、図3(a)のようにS曲線を書くことがわかる。特に、図5のように、$\phi = n\pi(n=0,1,2\cdots)$ の位置では、θ' に対する $|V_\ell|^2$ の変化が対称になつて極値は、$\theta' = 0$ すなわち共振周波数（$X=0$）で極大（$V_{\ell 0+}$）あるいは極小（$V_{\ell 0-}$）をとる。

$V_{\ell 0\pm}$ はプルーブの位置ϕで定まり、$n = 2m+1$ のとき極大 $n = 2m$ のとき極小となる。

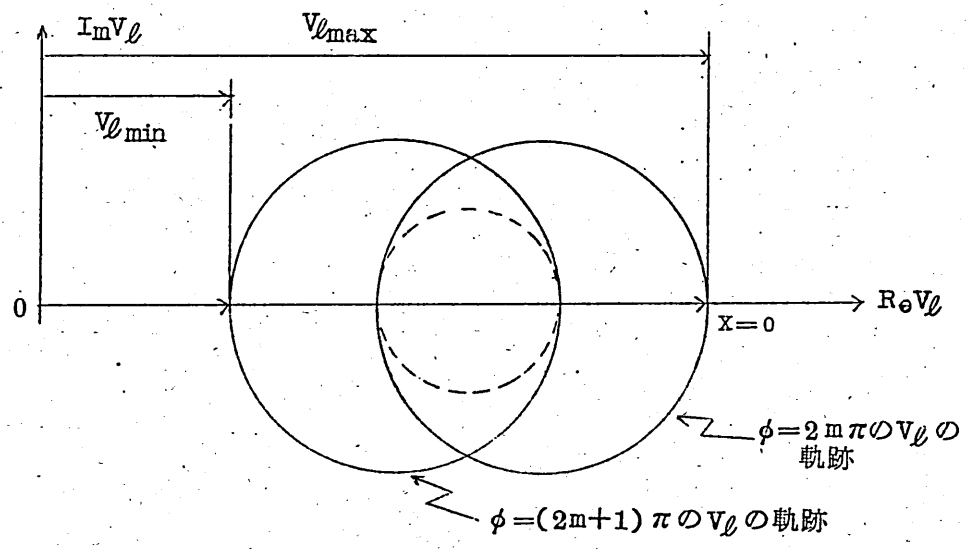


図5　$\phi = n\pi$ の円線図

したがつて $|V\ell|^2$ のXに関する波形は $\phi = n\pi$ 以外に偶対称になることがないから，オツシロスコープの $|V\ell|^2$ の波形を観測しながら，プルーブを動かして行くと，上に凸，上に凹の2つの偶対称の図形が得られる。このときの各々の頂点の振巾を測定すれば，X＝0での $|V\ell_{0+}|^2$ と $|V\ell_{0-}|^2$ が得られるから共振周波数での定在波比が求められる。

このとき同時に，$X=\pm\infty$ の定在波比を求めると，$|S_1|$ が求まる。たゞし，S_1 には図4(a)(b)のように符号があるので，上に凸のとき $V\ell\infty$ が最大になれば，$S_1 = -|S_1|$ 凹のときの $V\ell\infty$ が最小になれば，$S_1 = +|S_1|$ として定めると，この S_1 と，共振周波数で求めた反射係数 $|S_0|$ より(14)が得られる。

$$|S_0| = \left| \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \frac{2\beta'}{(1+\alpha)(1+\beta')} \right| = \left| S_1 - \frac{\beta'(1+S_1)}{1+\beta'} \right|$$

$$= \left| \frac{S_1-\beta'}{1+\beta'} \right| \qquad (14)$$

となる。

$S_1<\beta'$ のとき

$$|S_0| = \frac{\beta'-S_1}{1+\beta'} \qquad (15a)$$

$$1+\beta' = \frac{1+S_1}{1-|S_0|} \qquad (16a)$$

$$Q_0' = (1+\beta')Q_L = \frac{1+S_1}{1-|S_0|} Q_L \qquad (17a)$$

$S_1>\beta'$ のとき

$$|S_0| = \frac{S_1-\beta'}{1+\beta'} \qquad (15b)$$

$$1+\beta' = \frac{1+S_1}{1+|S_0|} \qquad (16b)$$

$$Q_0' = (1+\beta')Q_L = \frac{1+S_1}{1+|S_0|} Q_L \qquad (17b)$$

として Q_0' が得られる。Q_0' は出力側の $n_2^2 Z_2$ を含んでいるので、出力側から同様にして反射係数を測定し、Q_0'' を求めれば、

$$\frac{1}{Q_0'}+\frac{1}{Q_0''}-\frac{1}{Q_L}=\left(\frac{1}{Q_0}+\frac{1}{Q_{e2}}\right)+\left(\frac{1}{Q_0}+\frac{1}{Q_{e1}}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{Q_0}+\frac{1}{Q_{e1}}+\frac{1}{Q_{e2}}\right)=\frac{1}{Q_0} \qquad (18)$$

として Q_0 が得られる。

もしも(7)のような対称回路であれば，(17)は，β' に(5)の関係を入れて

$$S_1 < \beta'$$

$$1+2\beta=\frac{1+S_1}{1-S_1-2|S_0|} \qquad (19a)$$

$$Q_0=(1+2\beta)Q_L=\frac{1+S_1}{1-S_1-2|S_0|}Q_L \qquad (20a)$$

$$S_1 > \beta'$$

$$1+2\beta=\frac{1+S_1}{1-S_1+2|S_0|} \qquad (19b)$$

$$Q_0=\frac{1+S_1}{1-S_1+2|S_0|}Q_L \qquad (20b)$$

として求められる。

Q_0 が大きいときは $\beta'>1$ であるから，(15)～(20)は(a)の式を使えばよい。

3 定在波比の計算

以上は定在波の振巾を円線図よりしらべたが，$|V_\ell|^2$ の値を検討して見ると(9)より

$$|V_\ell|^2 = 1 + |S|^2 + 2|S|\cos(\theta+\phi) \tag{21}$$

として求められる。これをF' について偏微分すれば，

$$\frac{\partial}{\partial F'}|V_\ell|^2 = \frac{4\beta' F'}{(1+\alpha)\{(1+\beta')^2 + F'^2\}}$$

$$\times \left[\frac{2}{1+\alpha}\{(1-\alpha)(1+\beta')-\beta'\} + 2(1+\beta')\cos\phi\right.$$

$$\left. - \{(1+\beta')^2 + F'^2 - 2F'\}\sin\phi\right] \tag{22}$$

(22)より $|V_\ell|^2$ が極値をとるF' を求めると，

$$\left.\begin{aligned} \frac{F'}{1+\beta'} &= X = \frac{u \pm\sqrt{u^2+v^2}}{v} \\ u &= \beta' - (1-\alpha)(1+\beta') - (1+\alpha)(1+\beta')\cos\phi \\ v &= (1+\alpha)(1+\beta')\sin\phi \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

となつて，極値をとる周波数は2点あることがわかる。

特別な場合として，$\sin\phi = 0$ のときは(22)より，$F' = 0$ となり

$\phi = n\pi$ のとき，$F' = 0$ で極値となり，図5の結果と一致する。

また，$F' = 0$ のときの $|V_\ell|^2$ を ℓ で偏微分すれば，

$$\frac{\partial}{\partial \ell}|V_\ell|^2 = -\frac{4\pi}{\lambda_g}\sin(\theta+\phi)\Big|_{\theta=0} \tag{24}$$

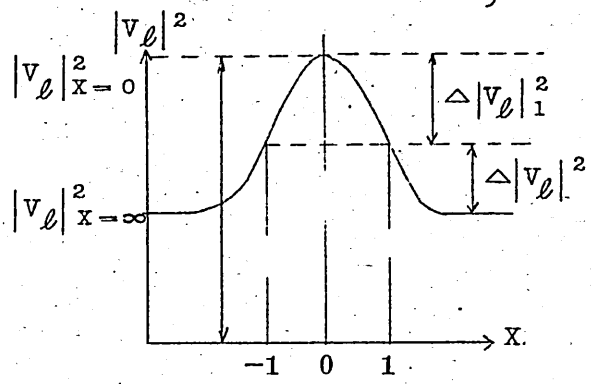
となり，$\phi = n\pi$ で極値をとり，やはり図5の結果と一致している。

4　Q_L の測定

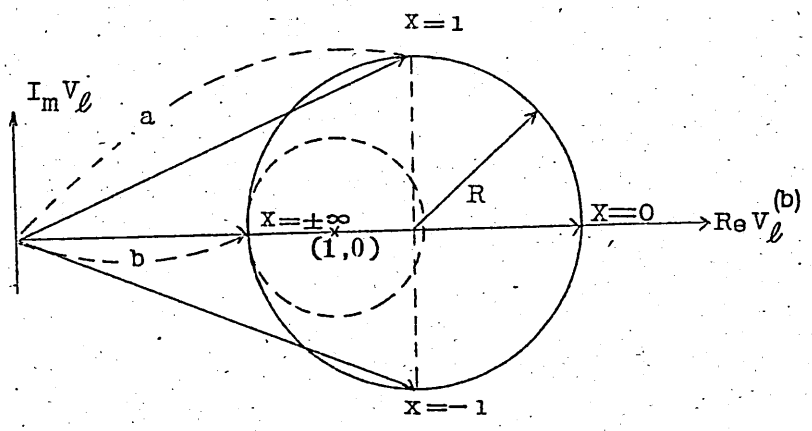
(i)　Q_L の測定は透過波で半値巾を測定してもよいが、図6のように $X=0$ で極値をとる偶対称の波形で半値周波数は　$X=\pm 1$　となり $X_1=-1$　に対応する　f_1 と、$X_2=+1$　に対応する　f_2　を を測定すれば

$$\left.\begin{aligned} X_2 - X_1 &= 2 = 2Q_L \frac{f_2 - f_1}{f_0} \\ Q_L &= f_0 / f_2 - f_1 \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

として Q_L が求められる。



(a)



(b)

図6　　$\phi = n\pi$ の定在波振巾

$X = \pm 1$ が半値点となることは、図6(b)より

$$\left|V_\ell\right|_{X=\pm 1} = a \ , \qquad \left|V_\ell\right|_{X=\pm\infty} = b \tag{26}$$

とすれば、

$$\begin{aligned}\left|V_\ell\right|^2_{X=1} = a^2 &= (1 - S_1 + R)^2 + R^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[(1 - S_1)^2 + (1 - S_1 + 2R)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[b^2 + (b + 2R)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left|V_\ell\right|^2_{X=0} - \left|V_\ell\right|^2_{X=\pm\infty}\right] \\ &\quad + \left|V_\ell\right|^2_{X=\pm\infty}\end{aligned} \tag{27}$$

となりこれは S_1 の正負、および $\left|V_\ell\right|^2$ の極大、極小に関せず成立する。

(ii) (23)より ϕ の任意の値に対して極値をとる X が2点あり、オッシロスコープ上ではS状の曲線を描いていることがわかるので、図7のように ϕ を廻転させて $\left|V_\ell\right|^2_{X=0} = \left|V_\ell\right|^2_{X=\pm\infty}$ となるような位置にプローブを置くと、極値をとる2つの周波数は、$X_1 = -1$, $X_2 = 1$ となる。このときの $X_{1,2}$ を測定すれば Q_L が求められることは(i)と同様である。

図7のように

$$\left|V_\ell\right|_{X=1} = a \ , \qquad \left|V_\ell\right|_{X=\pm\infty} = \left|V_\ell\right|_{X=0} = b \tag{28}$$

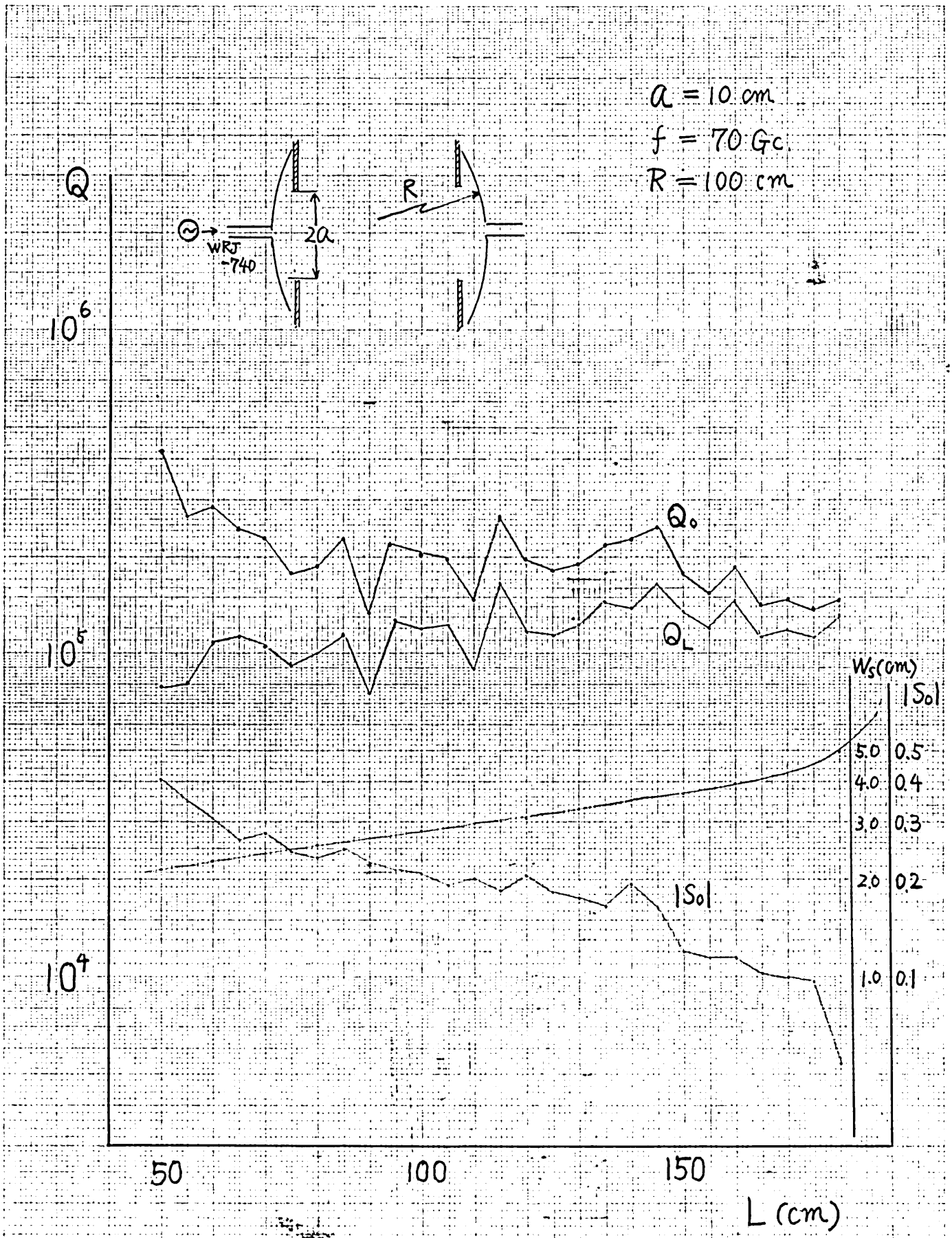


図 11 ファブリペロー共振器の軸長とQの関係

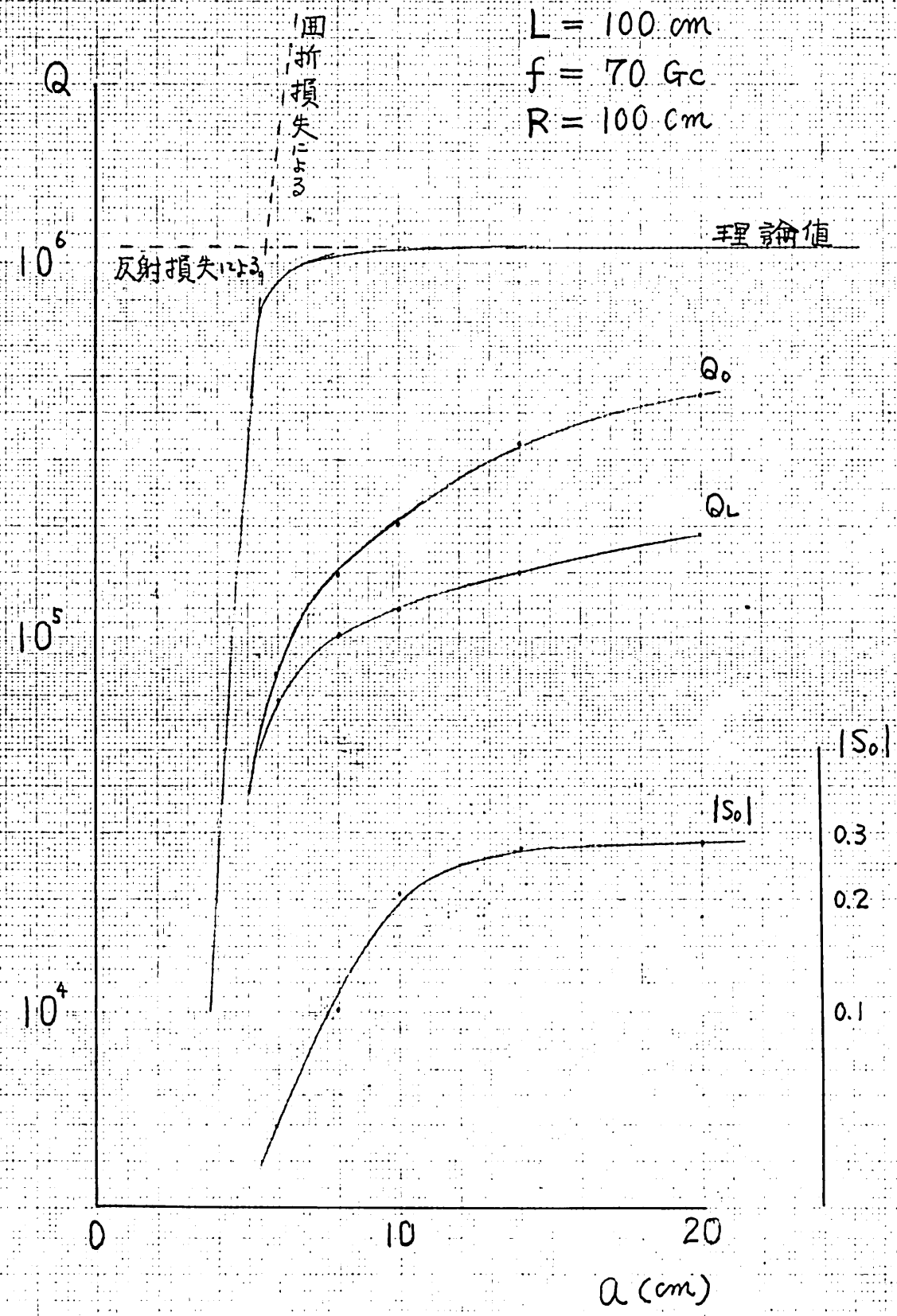


図12 ファブリペロー共振器の半径とQの関係

Uchida Yoko Co. Ltd.

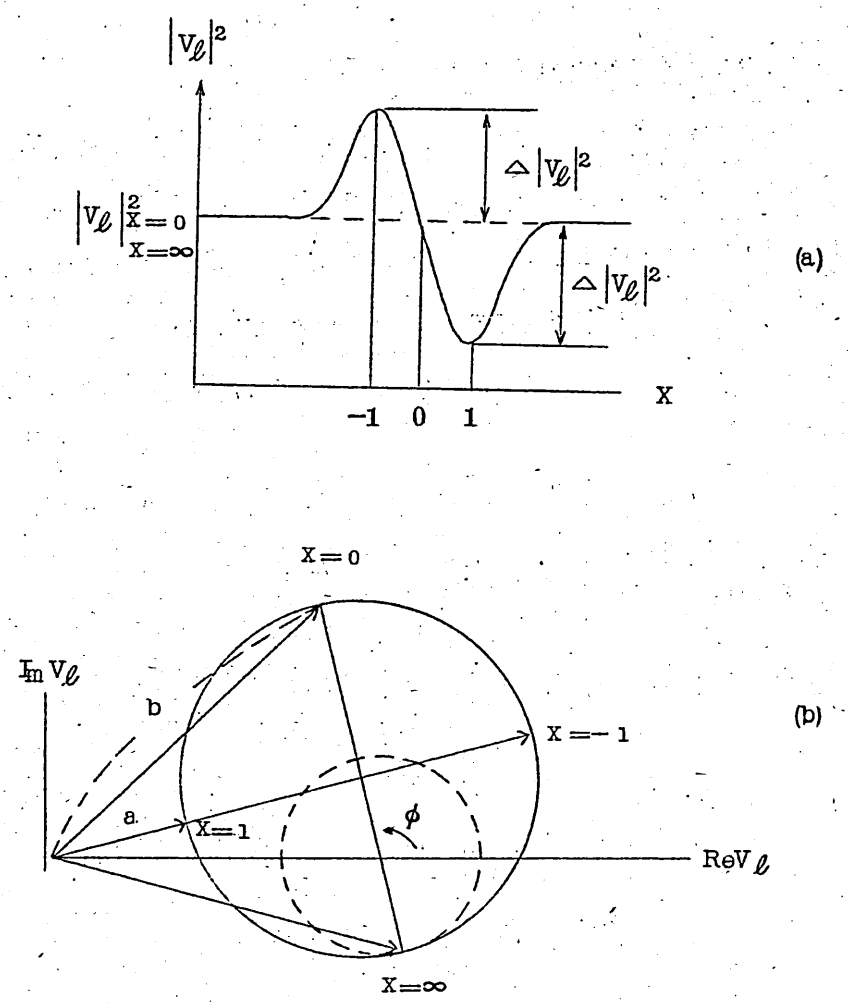


図 7　　S 曲線の定在波振巾

とすると

$$\left|V_\ell\right|^2_{X=0} = b^2 = (a+R)^2 + R^2 = a^2 + 2aR + 2R^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2 + (a+2R)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left|V_\ell\right|^2_{X=1} + \left|V_\ell\right|^2_{X=-1}\right] \qquad (29)$$

となつて、図7(a)の関係が満足される。

この方法による Q_L の測定の利点は、$X=0$ に対する奇対称図形の判定で、もしも、S曲線の上下の振巾に誤差があつて非対称なS曲線になつても半値巾として、極大と極小の差の周波数巾を読むので、X_1' , X_2' は同じ方向にずれ Q_L の誤差としては小さい。

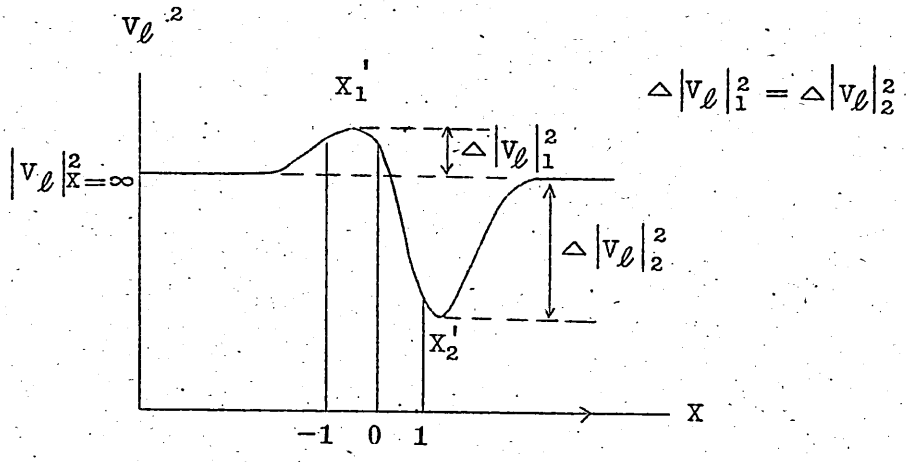


図8　非対称なS曲線

図8のように非対称なS曲線より求めた Q_L' と Q_L の誤差は、S曲線の非対称を $\triangle|V_\ell|_1^2 / \triangle|V_\ell|_2^2$ で表わし、誤差を△とすると、

$$\frac{\triangle|V_\ell|_1^2}{\triangle|V_\ell|_2^2} = \frac{1+(1+\triangle)\sqrt{(1+\triangle)^2+1}}{1+(1+\triangle)^2+(1+\triangle)\sqrt{(1+\triangle)^2+1}} \tag{30}$$

となり（附録参照）

$$\triangle = 0.1 \quad のとき \quad \frac{\triangle \left| V_{\ell} \right|_1^2}{\triangle \left| V_{\ell} \right|_2^2} = 0.683$$

$$0.05 \quad 〃 \qquad 0.695$$

$$0.01 \quad 〃 \qquad 0.705$$

で１％の誤差内でQ_Lを測定するためには　４：３の非対称があつてもよいことになり、検波器の２乗特性からのずれが余り問題にならないなどの利点がある。

5　半値周波数巾の測定

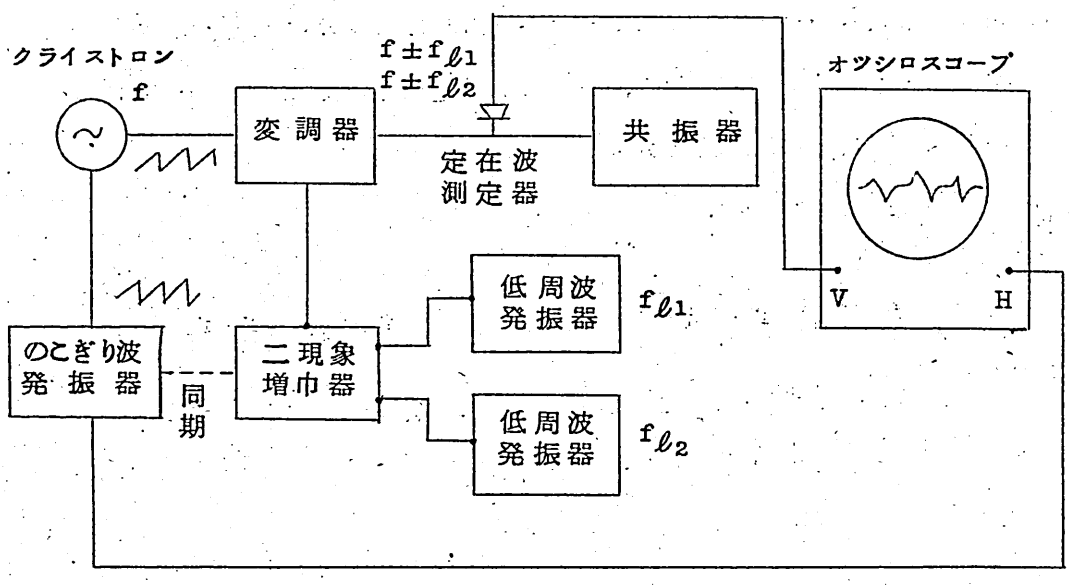


図９　半値周波数巾測定回路

Q_L の値が大きいときには、$X_{1,2}$ の測定が困難であるが、図9の回路を使えば測定し易い。

測定の方法は、周波数掃引したクライストロンの発振周波数 f に、低周波 f_{ℓ_1} と f_{ℓ_2} で振巾変調をかける。たゞし、f_{ℓ_1} と f_{ℓ_2} はクライストロンにかけたのこぎり波に同期して、二現象増巾器で切換えるので、f の一掃引に対しては f_{ℓ_1} の側帯波を持ち、次の掃引周期には f_{ℓ_2} の側帯波を持たせておく。

定在波測定器のプローブの位置をS曲線が出る位置にしておけば、オッシロスコープの上には、搬送波 f で出来るS曲線と、掃引周期で切換わる $f \pm f_{\ell_1}$ の成分によるS曲線と、$f \pm f_{\ell_2}$ によるS曲線が現われて図10のようになるから、搬送波によるS曲線が側帯波によるS曲線に影響しない程度に大きく f_{ℓ_1}, f_{ℓ_2} を撰び、また f_{ℓ_1} か f_{ℓ_2} の何れかの周波数を変えて、$f + f_{\ell_1}$ の極大と $f + f_{\ell_2}$ の極小の位置が一致するようにすれば、低周波の周波数差 $f_{\ell_2} \approx f_{\ell_1}$ が半値巾 $2\Delta f$ を与えるので、周波数の測定は低周波に置き換えられ僅かな周波数変化の測定精度がよくなる。

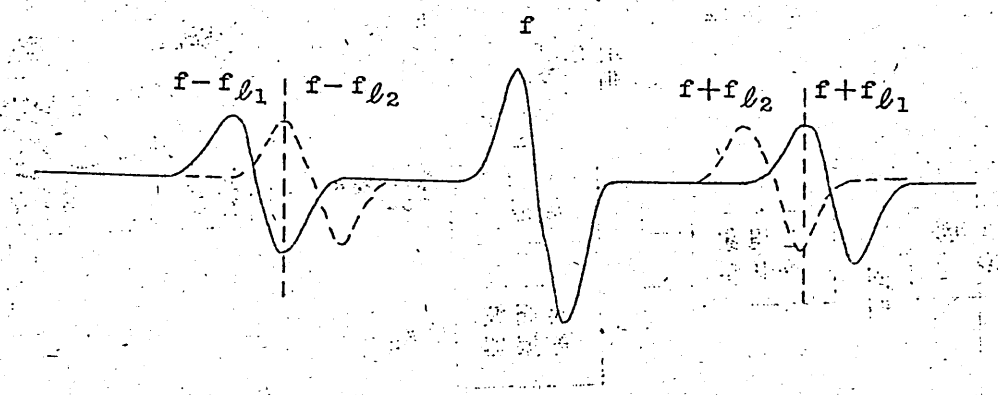


図10　変調された掃引のS曲線

6 測　定　例

この方法を応用して球面ファブリペロー共振器の Q_0 を測定した値が図１１，図１２で、周波数７０ G_c 使用した共振器は、焦点距離５０ cm、鏡の直径４０ cmの真鍮製である。

測定は、２枚の球面鏡の前面に円形の孔を開けた吸収物を置いて、等価的に鏡の直径を変化させている。

図１１は、共振器の長さを変えて、$|S_0|$，Q_L，を測定し、Q_0 を（２０ａ）より求めた図で、実験値では、S_1 は非常に小さく無視出来た。

図１２は、このような Q_L と Q_0 を、鏡の半径ａに対して取つた図でＬ＝１ｍの値である。

図の理論値は、Boyd の文献による回折損失に、真鍮（$\sigma=15\times10^7$ ℧/m）の反射損失を加えたものである。

7 結　　論

この測定法の条件は、

(i) 図１の等価回路を仮定していること

(ii) 共振器のＱは十分に高いこと

(iii) Z_1 は抵抗分で周波数特性がないこと

などを仮定していることであり、これらの条件が崩れない範囲で有用な方法であると思われる。

誤差になる原因は定在波比をブラウン管オツシロスコープの振れで測定するので電流計などで読むよりも読みとり精度は悪くなるおそれがある。

謝　　辞

本報告にあたつて、計算、実験を手伝つて下さつた大学院学生　太田勲君に感謝し、その他有益な討論、助言を下さつた当研究室の諸氏に感謝する。

参 考 文 献

(i) 牧本、弓場、太田　"ファブリペロー共振器のQ値測定法"
40年全国大会

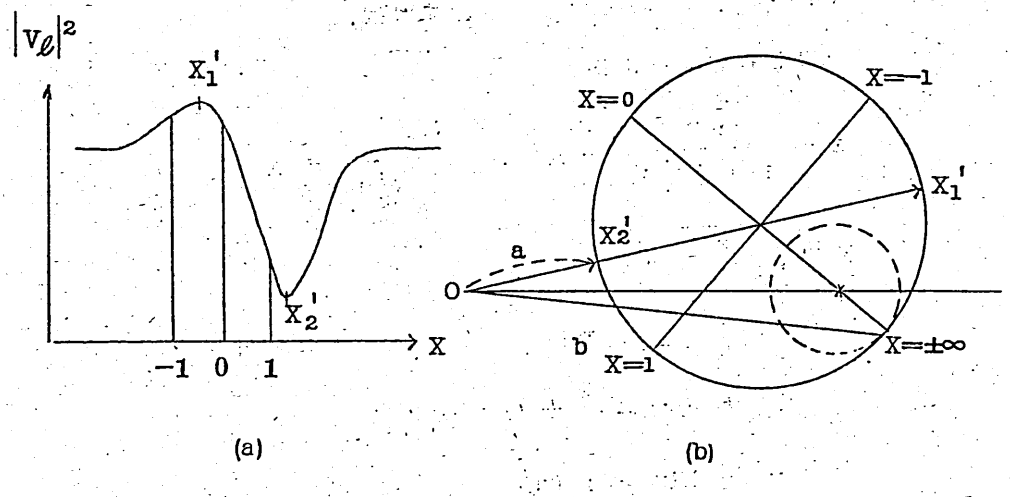
(ii) 熊谷、中西、山崎、岡本　"導波管姿態とF－P姿態の直接結合の等価回路"　マイクロ波伝送研究会　39年12月

(iii) Boyd, Gordon　" Confocal Multimode Resonator for Millimeter Through Optical Maser "
B.S.T.J., 1961, March

(iv) 牧本、弓場　"高いQ－Factor の測定法"　文部省ミリ波開発綜合研究　34年11月

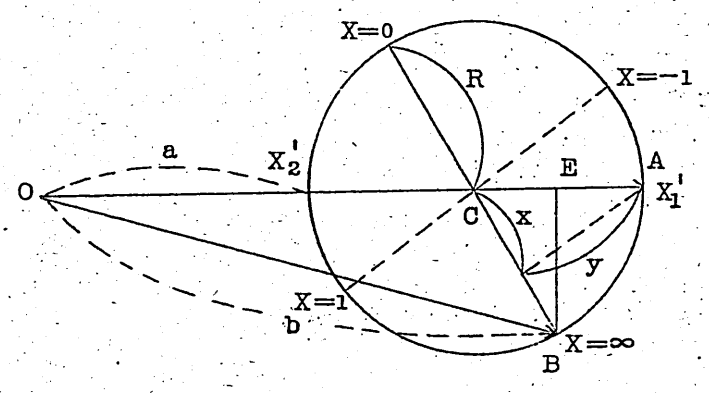
(v) Degenford, Sirkis, Steier　" The Reflecting Beam Waveguid "　Trans. IRE., MTT-12., 1964, July.

附　録　　非対称なＳ曲線より Q_L を求めたときの誤差



図Ａ・１　　非対称なＳ曲線の円線図

図７のような対称なＳ曲線より半値巾を求めれば Q_L は正確に求まるが、図Ａ・１のような非対称のＳ曲線から求めた Q_L' の誤差を検討する。



図Ａ・２

図A・1(b)を、図A・2のようにかきかえるとS曲線の極値X_1'，X_2'と、$|V_\ell|_{x=\pm\infty}$は、次のようにして求まる。

$CD = x$,　$DX_1' = y$　とすれば、

$\triangle CBE \equiv \triangle CDA$

$$x = \frac{2R}{1+(X_1')^2} - R = \frac{2R}{1+(X_2')^2} + R$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$= |V_\ell|^2_{x=\pm\infty} = b^2 = (a+R+x)^2 + y^2$$

$$= (a+R+x)^2 + (R^2 - x^2)$$

$$= a^2 + 2R^2 + 2(aR + Rx + ax)$$

S曲線の非対称を　$\triangle|V_\ell|_1^2 / \triangle|V_\ell|_2^2$　で表わすと

$$\frac{(a+2R)^2 - b^2}{b^2 - a^2} = \frac{2R^2 + 2(aR - Rx - ax)}{2R^2 + 2(aR + Rx + ax)} = \frac{R-x}{R+x}$$

$$R + x = \frac{2R}{1+(X_1')^2}, \qquad R - x = \frac{2R}{1+(X_2')^2}$$

$$\frac{\triangle|V_\ell|_1^2}{\triangle|V_\ell|_2^2} = \frac{R-x}{R+x} = \frac{1+(X_1')^2}{1+(X_2')^2}$$

半値巾の誤差を△とすると

$$\triangle = \frac{X_2' - X_1'}{X_2 - X_1} - 1 = \frac{X_2' - X_1'}{2} - 1$$

でX_1'とX_2'には$X_1' X_2' = 1$　の関係があるから

$$X_2' = (1+\triangle) + \sqrt{(1+\triangle)^2 + 1}$$

$$\frac{R-x}{R+x}=\frac{1+(1+\triangle)\sqrt{(1+\triangle)^2+1}}{1+(1+\triangle)^2+(1+\triangle)\sqrt{(1+\triangle)^2+1}}$$

として求められる。

$\triangle=0.1$	とすると	$\triangle\left\|V_\ell\right\|_1^2 / \triangle\left\|V_\ell\right\|_2^2=0.683$
0.05		0.695
0.01		0.705

となり、Q_L を1％程度の誤差で測定するためにはS曲線の上下の振巾の比が4：3以下であればよいことになる。

$$\frac{R-x}{R+x}=\frac{1+(1+\triangle)\sqrt{(1+\triangle)^2+1}}{1+(1+\triangle)^2+(1+\triangle)\sqrt{(1+\triangle)^2+1}}$$

として求められる。

$\triangle=0.1$	とすると	$\triangle\left\|V_\ell\right\|_1^2 / \triangle\left\|V_\ell\right\|_2^2=0.683$
0.05		0.695
0.01		0.705

となり、Q_L を1％程度の誤差で測定するためにはS曲線の上下の振巾の比が4：3以下であればよいことになる。

輻射科学研究会資料

反射形ビームウェーブガイドの幾何光学的取り扱い

吉田健一　　熊谷信昭
（大阪大学工学部）

1966年2月5日

1. 緒　　言

低損失ミリ波伝送の一方法として最初Goubau[1]によつて提案されたビームウエーブガイドはその後Schwering[2]，中原[3]等によつて色々な形式のものが検討された．それらはいずれも位相補正効果を有する素子を用いて電磁波を伝送するもので，構造が簡単なこと，伝送損失が比較的少ないこと，伝送可能の電磁波の周波数に対する制約がないこと等がその特徴である．したがつてサブミリ波や最近開発されつつあるコヒーレント光等に対しても有効な伝送方式となり得る可能性がある．位相補正器としては初期に提案された誘電体レンズと，最近その実用性が注目されている導体反射板[4][5]とがある．

ところで，上記のような伝送系は電磁波を準光学的に取り扱うものであるからその解析にあたつては波動論的な立場と幾何光学的な立場とがある．従来，伝送姿態や回折損等は波動論的に解析され，伝送ビームの光路等は幾何光学的に考察されている．ところで，筆者等の知る限りでは，現在までのところ導体反射板を用いたビームウエーブガイドの幾何光学的な取り扱いについては報告された例がないようである．* そこで本文では反射形ビームウエーブガイドを幾何光学的に取り扱い，伝送系における各種の不整に対するビームの変位量を求め，伝送ビームの安定性や不整量の最大許容量等を論じている．これらの結果は反射形ビームウエーブガイドを実用化する際にきわめて有用なものであると考えられる．

2. 反射法則のベクトル表示

入射ビームおよび反射ビームの方向を示す単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{k}_i$ お

---

* 誘電体レンズを用いたビームウエーブガイドについては文献[7]，[8]等で幾何光学的な取り扱いが行なわれている．

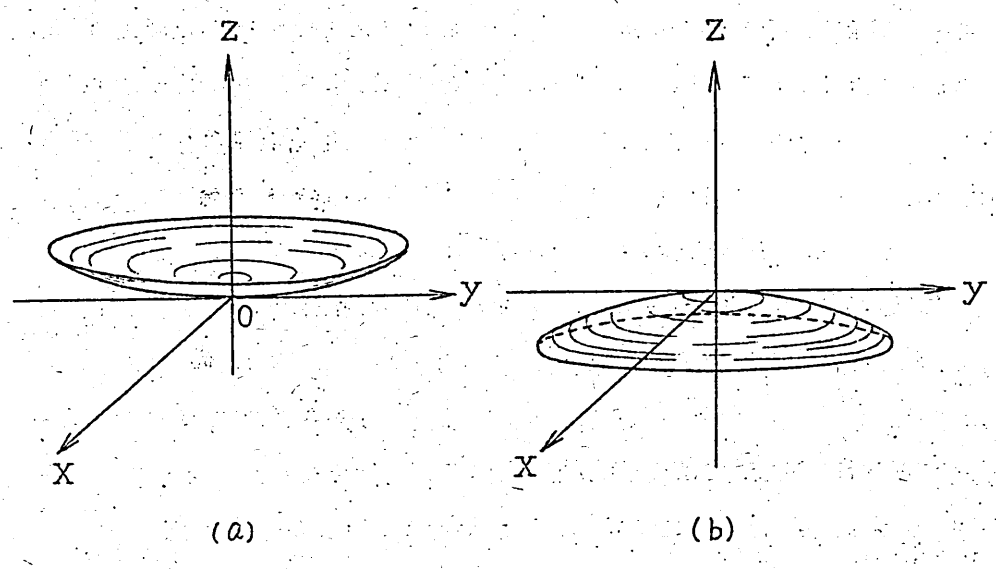


図１．反射板の形状と座標系

よびk_rとし，反射板面の入射点におけるビーム存在側に向かう単位法線ベクトルをnとすると反射法則は

$$k_r = k_i - 2(k_i \cdot n)n \tag{1}$$

と書ける．

反射板の曲面を次式で与える（図１）

$$\text{(a)}: Z = \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \tag{2-a}$$

$$\text{(b)}: Z = -\frac{x^2}{2R_x} - \frac{y^2}{2R_y} \tag{2-b}$$

ここで，R_x，R_yはそれぞれxおよびy方向の曲率半径を表わす．以下，$x \ll R_x$，$y \ll R_y$としてx/R_x，y/R_yの二次以上の項は省略する．

このような反射板に対する上記の単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$を求めると，

$$(a):\ \boldsymbol{n}=-\frac{x}{R_x}\boldsymbol{i}_x-\frac{y}{R_y}\boldsymbol{i}_y+\boldsymbol{i}_z \qquad (3\text{-a})$$

$$(b):\ \boldsymbol{n}=-\frac{x}{R_x}\boldsymbol{i}_x-\frac{y}{R_y}\boldsymbol{i}_y-\boldsymbol{i}_z \qquad (3\text{-b})$$

となる．ここで，$\boldsymbol{i}_x$，$\boldsymbol{i}_y$，$\boldsymbol{i}_z$ はそれぞれx，y，z，方向の単位ベクトルを表わす．

3．ビーム伝送方程式の一般形

第（n－1），n，（n+1）反射板の組に関する基準座標系（X_n，Y_n，Z_n）を図2のようにとる．すなわち第n反射板の中心における法線のY_n-Z_n平面への射影がZ_n軸と一致するようにY_n軸を定める．一般に，基準座標系と平行で第i反射板の中心に原点を持つ座標系を（x_{io}，y_{io}，z_{io}）で示し，これに対して第i反射板と図1のような関係にある座標系を（x_i，y_i，z_i）で示す．また第i反射板のy_{io}，z_i軸のまわりの回転変位角をη_i，ζ_iとし，これらは1に比べて十分小さいものとすると一次近似で次の関係がなりたつ．

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \zeta_n & -\eta_n \\ -\zeta_n & 1 & 0 \\ \eta_n & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{no} \\ y_{no} \\ z_{no} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-a})$$

ただし，

$$(x_{no},\ y_{no},\ z_{no})=(X_n,\ Y_n,\ Z_n)$$

また

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \zeta_{n+1} & -\eta_{n+1} \\ -\zeta_{n+1} & 1 & \gamma_n \\ \eta_{n+1} & -\gamma_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{(n+1)0} \\ y_{(n+1)0} \\ z_{(n+1)0} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-b})$$

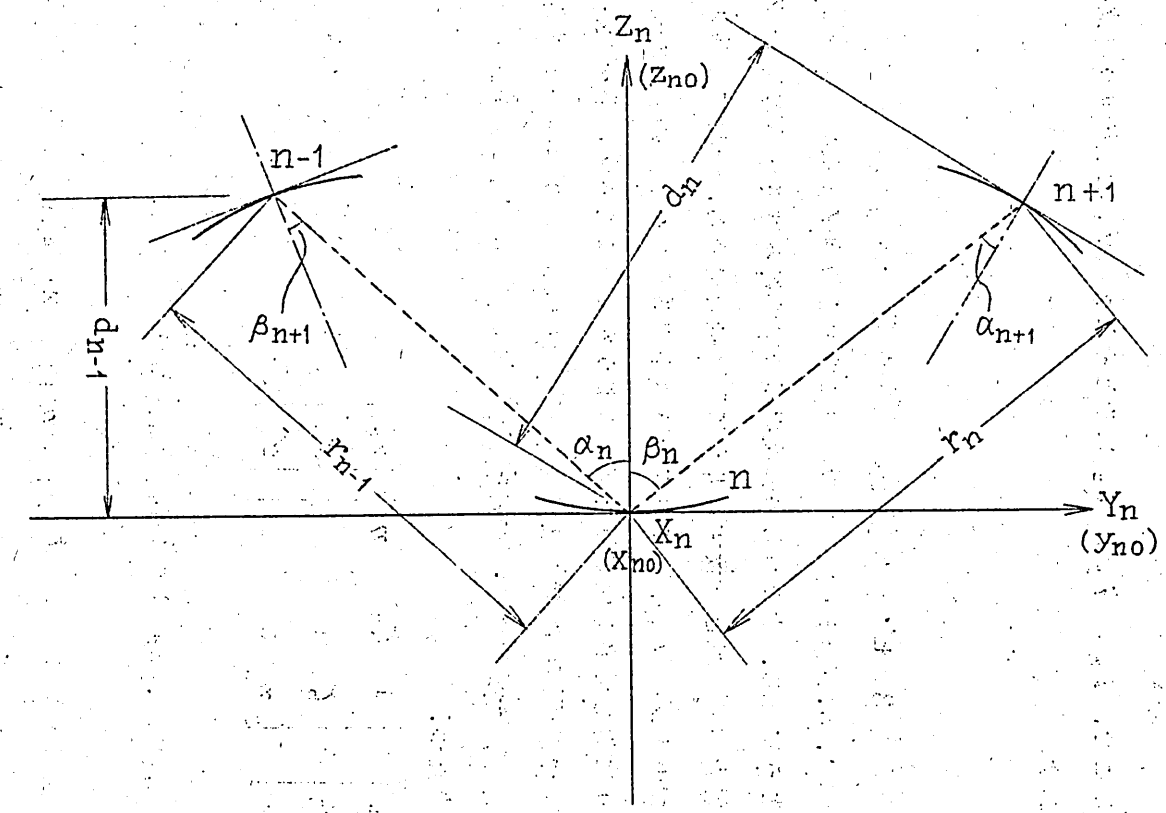


図２．系の一般的構造とパラメータの定義（ｎ：偶数）

$$\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_{n-1} & -\eta_{n-1} \\ -\zeta_{n-1} & 1 & \gamma_{n-1} \\ \eta_{n-1} & -\gamma_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(n-1)0} \\ y_{(n-1)0} \\ z_{(n-1)0} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}c)$$

ここで、

$$\gamma_n = \alpha_{n+1} - \beta_n \qquad (5)$$

ただし、α_{n+1}, β_n は図2に示した通りである。

つぎに第n反射板に関する k_r を

$$k_{rn} = k_{xn}\, i_x + k_{yn}\, i_y + k_{zn}\, i_z \qquad (6)$$

と表わす。ただし i_x, i_y, i_z はそれぞれ基準座標軸 X_n, Y_n, Z_n 方向の単位ベクトルを表わす。

$$k_{in} = k_{r(n-1)} \qquad (7)$$

なる関係と式(1)とを用い、法線ベクトル n を式(4)の座標回転を考慮して基準座標系に付随する i_x, i_y, i_z で表わすことにより k_{rn} を $k_{r(n-1)}$ で次のように表示することができる。

$$k_{rn} = k_{r(n-1)} + \left(\frac{2x_n}{R_{xn}} k_{z(n-1)} - 2\eta_n k_{z(n-1)}\right) i_x$$

$$+ \frac{2y_n}{R_{yn}} k_{z(n-1)} i_y + \left(\frac{2x_n}{R_{xn}} k_{x(n-1)} + \frac{2y_n}{R_{yn}} k_{y(n-1)}\right.$$

$$\left. - 2\eta_n k_{x(n-1)} - 2k_{z(n-1)}\right) i_z \qquad (8)$$

また、k_{rn} とビーム入射点の座標との間には

$$\frac{x_{n+1} - x_n + \delta_{n+1}}{k_{xn}} = \frac{y_{n+1} - y_n + r_n \sin\beta_n}{k_{yn}} = \frac{r_n \cos\beta_n}{k_{zn}} \qquad (9\text{-}a)$$

なる関係がなりたつ。

同様に

$$\frac{x_{n-1}-x_n-\delta_n}{k_{x(n-1)}}=\frac{y_{n-1}-y_n-r_{n-1}\sin\alpha_n}{k_{y(n-1)}}=\frac{r_{n-1}\cos\alpha_n}{k_{z(n-1)}} \tag{9-b}$$

なる関係もなりたつ.

ここで，δ_n は第n反射板の第（n－1）反射板に対するxの正方向の相対的なずれを示す.

式(8)，(9)より k_r の成分を消去するとビーム入射点の座標に関する次の二つの漸化式が得られる.

$$x_{n+1}-2\left(1-\frac{d}{R_{xn}}\right)x_n+x_{n-1}=\delta_n-\delta_{n+1}+2(-1)^n\eta_n d \tag{10-a}$$

$$y_{n+1}-2\left(1-\frac{d'}{R_{yn}}\right)y_n+y_{n-1}=d'(\Delta\alpha_n-\Delta\beta_n) \tag{10-b}$$

ここで，

$$d'=r/\cos\alpha \tag{11}$$

また，r，d，αはそれぞれ系が理想的な場合の r_n，d_n，α_n を表わす.

ただし，式(10)は $r_n=r+\Delta r_n$，$d_n=d+\Delta d_n$，$\alpha_n=\alpha+\Delta\alpha_n$，$\beta_n=\alpha+\Delta\beta_n$，とおき $\Delta r_n\ll r$，$\Delta d_n\ll d$，$\Delta\alpha_n$，$\Delta\beta_n\ll\alpha$ と仮定して得られた近似式である．式(10-a)の右辺第3項に $(-1)^n$ が付加されている理由は第(n-1)，n，(n+1)反射板間と，第n，(n+1)，(n+2)反射板間の関係式でこの項の符号が異なるためである．式(10)は図2のnを偶数とした場合である.

系が同じ曲面の反射板から構成されている場合には R_{xn}，R_{yn} はnに無関係となり，式(10)の一般解は次式のようになる.

$$
\begin{cases}
x_n = A\cos n\theta + B\sin n\theta + \dfrac{1}{\sin\theta}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\Big[\,\delta_k - \delta_{k+1} \\
\qquad + 2(-1)^k \eta_k d\,\Big]\cdot \sin\theta(n-k) \\
y_n = C\cos n\varphi + D\sin n\varphi + \dfrac{1}{\sin\varphi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\Big[\,d'(\Delta\alpha_k - \Delta\beta_k)\,\Big] \\
\qquad \cdot \sin\varphi(n-k)
\end{cases}
\tag{12}
$$

ここで，

$$
\cos\theta = 1 - \frac{d}{R_x}\,,\quad \cos\varphi = 1 - \frac{d'}{R_y} \tag{13}
$$

なお，式(12)においては，$n \geqq 0$ であり，$n=0$，1 に対しては第3項は零と考える．

また式(10)から ζ_n はビーム伝送には影響がないことがわかる．

4．三次元的曲面反射板から成る反射形ビームウエーブガイド

同じ形状の三次元的曲面反射板（$R_{xn} = R_x$，$R_{yn} = R_y$）から成る反射形ビームウエーブガイドを考える．

4・1　系の安定構造

式(12)で θ が複素数の場合には x_n，y_n は n と共に指数関数的に増大し，ビームを長距離にわたつて伝送することができない．それに対して，θ が実数であれば x_n，y_n は周期的に振動し，ビーム波伝送が可能となる．前者を不安定構造，後者を安定構造とよぶことにすると，式(13)より

安定構造 $= 0 < \dfrac{d}{R_x} < 2$，$0 < \dfrac{d'}{R_y} < 2$ が同時に成立する系

不安定構造＝上記以外の系

となる．

この分類がビーム姿態の回折損失に関して定義[5]された低損失領域と高損失領域の分類に一致することは興味深い．

以下，安定構造についてさらに詳しく検討する．

4・2　入射ビームの最大許容変位

系は理想的かつ安定構造であるとする．この時，$\delta_n = 0$，$\eta_n = \Delta\alpha_n = \Delta\beta_n = 0$　であるので一般解は式（12）の前二項により与えられる．（x_0，y_0），（x_1，y_1）を与えると未知係数A，B，C，Dが求まり，これからビーム変位のxおよびy方向の最大値が求まり，これらをそれぞれΔ_x，およびΔ_y以下におさえるという制限を与えると入射ビームの変位に関して次式が得られる．

$$M_0^2 + M_1^2 - 2M_0M_1\cos\theta < 1 - \cos^2\theta \qquad (14\text{-a})$$

$$N_0^2 + N_1^2 - 2N_0N_1\cos\varphi < 1 - \cos^2\varphi \qquad (14\text{-b})$$

ここで，

$$M_0 = x_0/\Delta_x,\quad M_1 = x_1/\Delta_x$$
$$N_0 = y_0/\Delta_y,\quad N_1 = y_1/\Delta_y \qquad (15)$$

これを図示すると図3のようになる．ただし，

$P = M_0$，またはN_0，　$Q = M_1$，またはN_1，$\gamma = 45°$

$E = 2\sqrt{1+\cos\theta}$，または　$2\sqrt{1+\cos\varphi}$，

$F = 2\sqrt{1-\cos\theta}$，または　$2\sqrt{1-\cos\varphi}$

である．

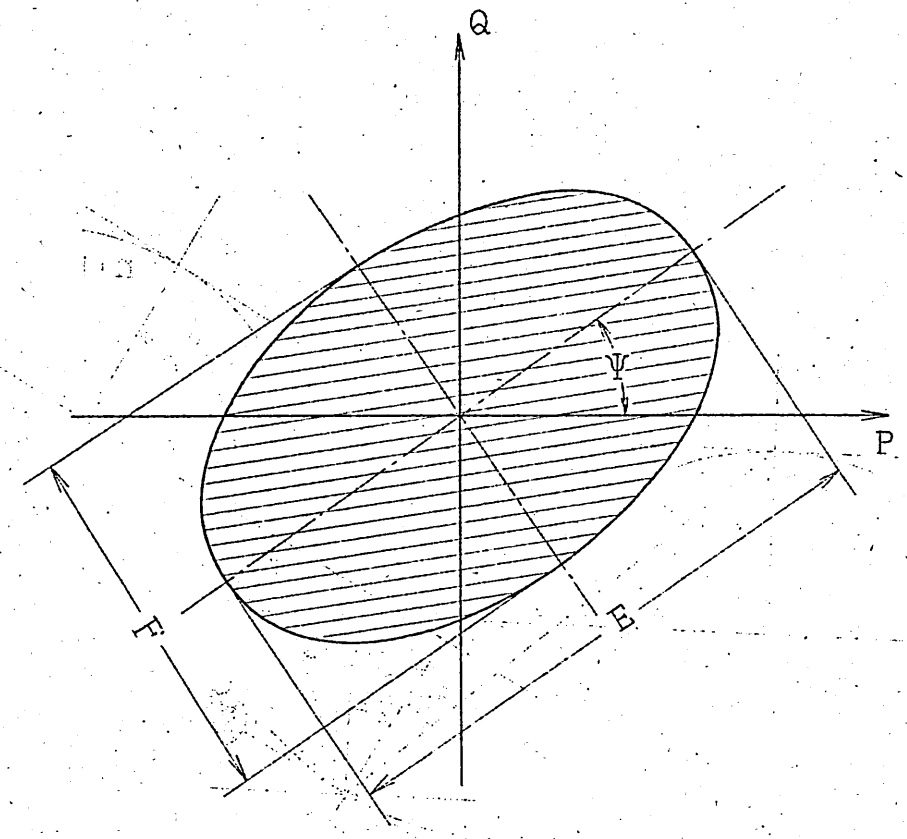


図 3.　変位の許容領域

4・3　伝送軸の折れ曲がり

第n反射板の位置で図4に示すような回転不整がある場合を考える．第n反射板まではビーム伝送は理想的に行なわれているものとする．この時，式(10)において，

$$\delta_n = 0,\ \delta_{n+1} = -\zeta_n l + \eta_n d,\ \Delta\alpha_n = -\xi_n,\ \Delta\beta_n = 0 \qquad (16)$$

ここで，

$$d = r\cos\alpha,\quad l = r\sin\alpha \qquad (17)$$

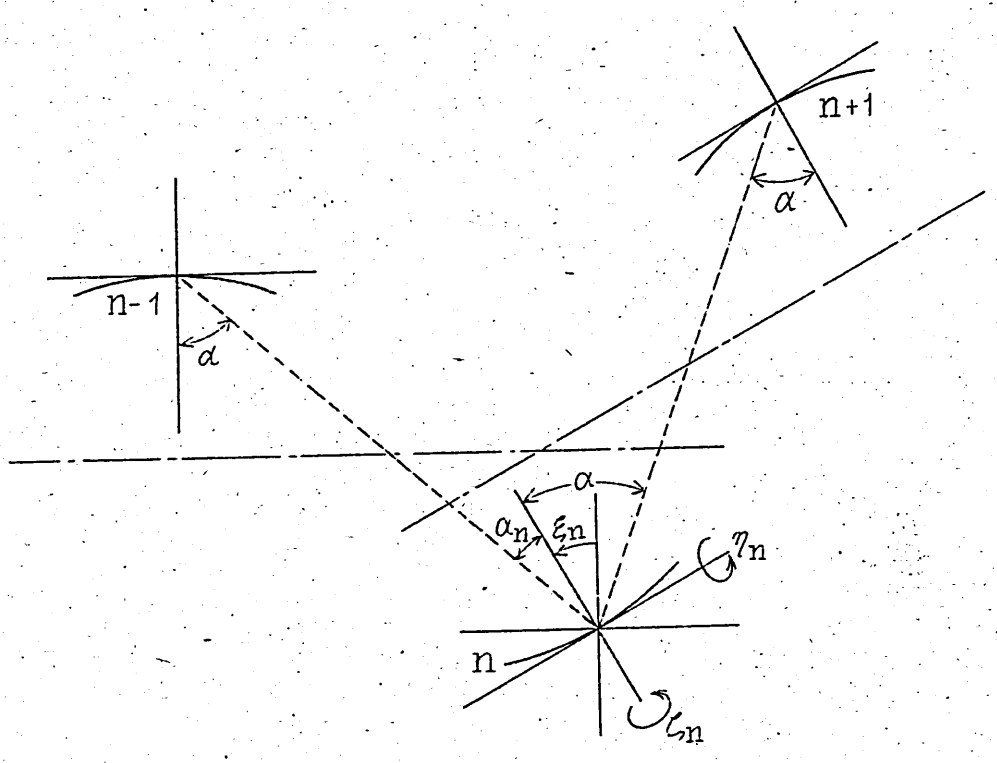


図４．反射板の位置における折れ曲がり

であるから，式(10)より

$$\left.\begin{aligned} &x_n = y_n = 0 \\ &x_1 = \zeta_n l + \eta_n d, \quad y_1 = -d' \xi_n \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

式(14)，(18)より不整量の許容範囲が次式のように求まる．

$$\left(\frac{\zeta_n l}{\Delta_x} + \frac{\eta_n d}{\Delta_x}\right)^2 < \frac{2d}{R_x} - \left(\frac{d}{R_x}\right)^2 \tag{19-a}$$

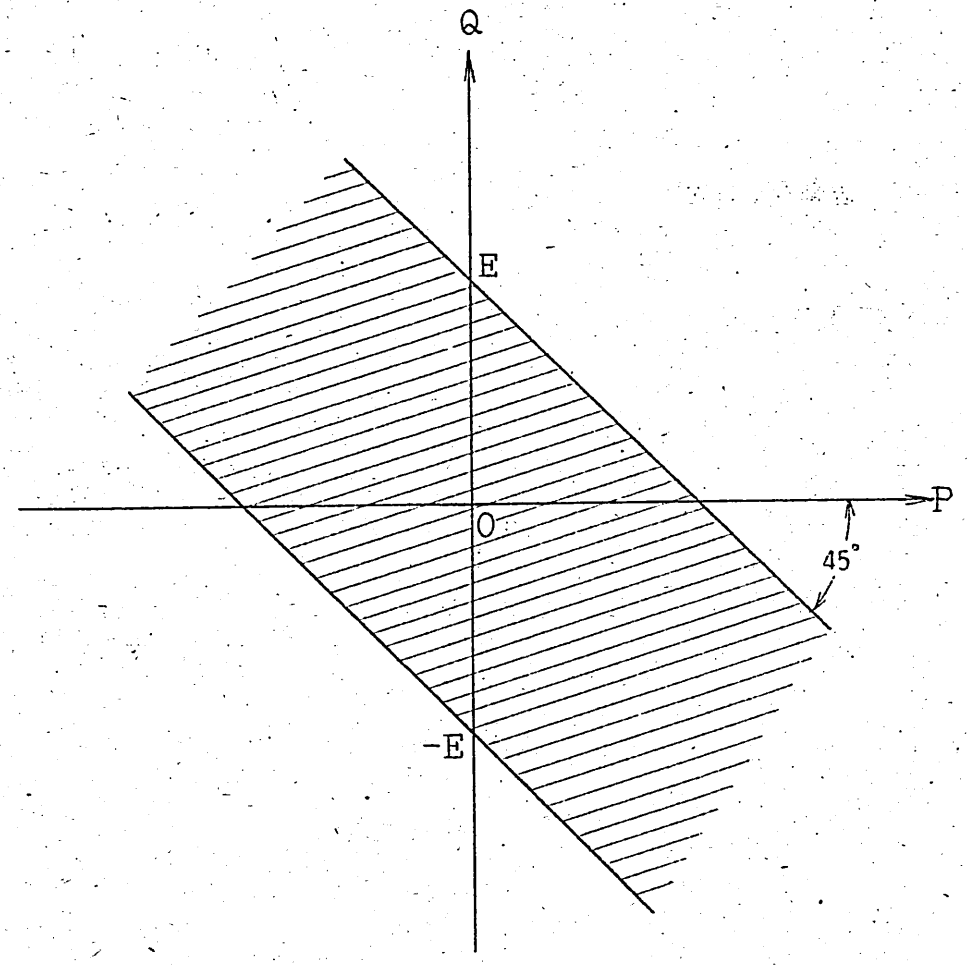


図 5. 変位の許容領域

$$\left(\frac{d'\xi_n}{\Delta_y}\right)^2 < \frac{2d'}{R_y} - \left(\frac{d'}{R_y}\right)^2 \qquad (19\text{-b})$$

(19-a) の領域を図示すると図 5 の斜線部のようになる．ただし，

$P = \eta_n d/\Delta_x$， $Q = \zeta_n l/\Delta_x$，

$$E=\sqrt{(2d/R_x)-(d/R_x)^2}$$

である.

4・4　伝送軸のくい違い

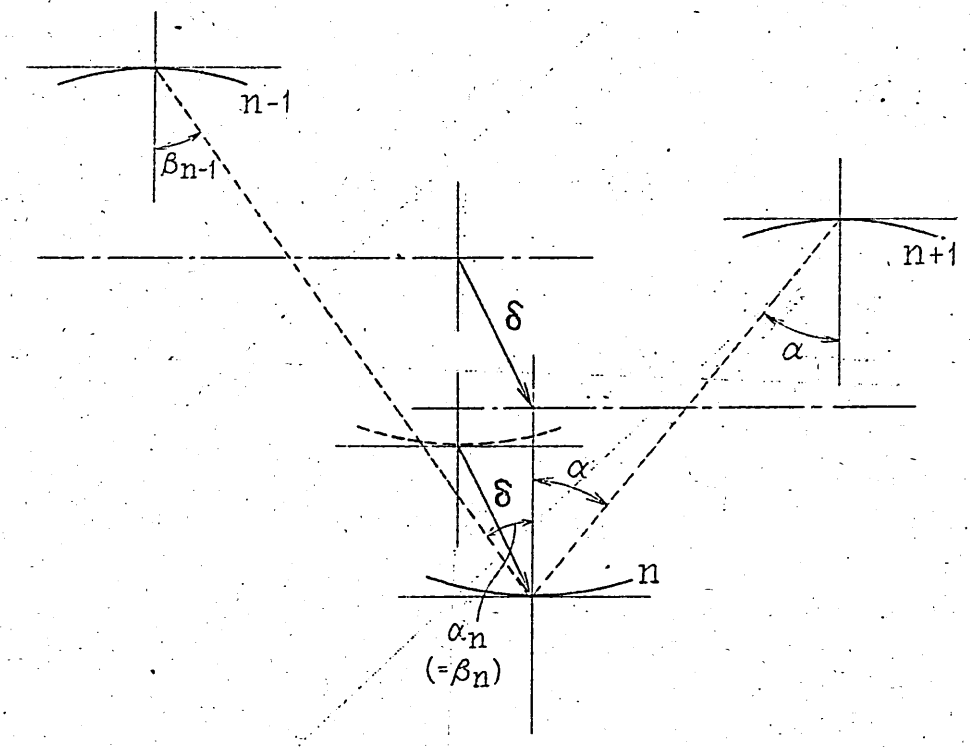


図 6．伝送軸のくい違い

図6のような第n反射板以後がそれ以前に対して平行変位した場合を考える.

変位ベクトルを $\delta(\delta_x,\ \delta_y,\ \delta_z)$ とすると

$$\alpha_n=\alpha+\frac{\delta_y}{r}\cos\alpha+\frac{\delta_z}{r}\sin\alpha \qquad (20)$$

である．したがつて，

$$\delta_n = \delta_x, \quad \delta_{n+1} = 0, \quad \eta_n = 0 \tag{21-a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\alpha_{n-1} = 0, \quad \Delta\alpha_n = \Delta\beta_{n-1} \\ &\Delta\alpha_n = \frac{\delta_y}{r}\cos\alpha + \frac{\delta_z}{r}\sin\alpha, \quad \Delta\beta_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{21-b}$$

式(10)，(21)より

$$\left.\begin{aligned} &x_n = -\delta_x, \quad y_n = -(\delta_y + \delta_z\tan\alpha) \\ &x_{n+1} = -\left(1 - \frac{2d}{R_x}\right)\delta_x, \quad y_{n+1} \fallingdotseq -\left(1 - \frac{2d'}{R_y}\right) \\ &\qquad\qquad (\delta_y + \delta_z\tan\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式(14)，(22)より変位量の許容範囲は，

$$\left(\frac{\delta_x}{\Delta_x}\right)^2 < 1 - \frac{d}{2R_x} \tag{23-a}$$

$$\left(\frac{\delta_y}{\Delta_y} + \frac{\delta_z}{\Delta_y}\tan\alpha\right)^2 < 1 - \frac{d'}{2R_y} \tag{23-b}$$

となり，式(23-b)は図5で，$P = \delta_y/\Delta_y$，$Q = (\delta_z/\Delta_y)\tan\alpha$，$E = \sqrt{1 - d'/2R_y}$ とした場合の斜線部領域となる．

4・5　伝送軸の円形曲がり

図7に示すように，パラメータ間には次のような関係がある．

$$\left.\begin{aligned} &r_n = r, \quad \delta_n = 0, \quad \eta_n = 0, \\ &\alpha_n = \beta_n, \quad \beta_{n-1} \neq \alpha_n \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

したがつて，式(10)の右辺は零となる．すなわち，円形曲がりによつてビームの伝送状態は乱されない．このことは，一次近似の範囲では伝送軸の円形曲がりによつて回折損失が直線の場合と異ならないという文献(6)の解析結果(6)と完全に一致している．

4・6　円形曲がりの曲率が伝送軸に沿つて変化する場合

この場合の各パラメータの値は次のようなものとする．

$$\left.\begin{aligned} &r_n = r, \quad \delta_n = 0, \quad \eta_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

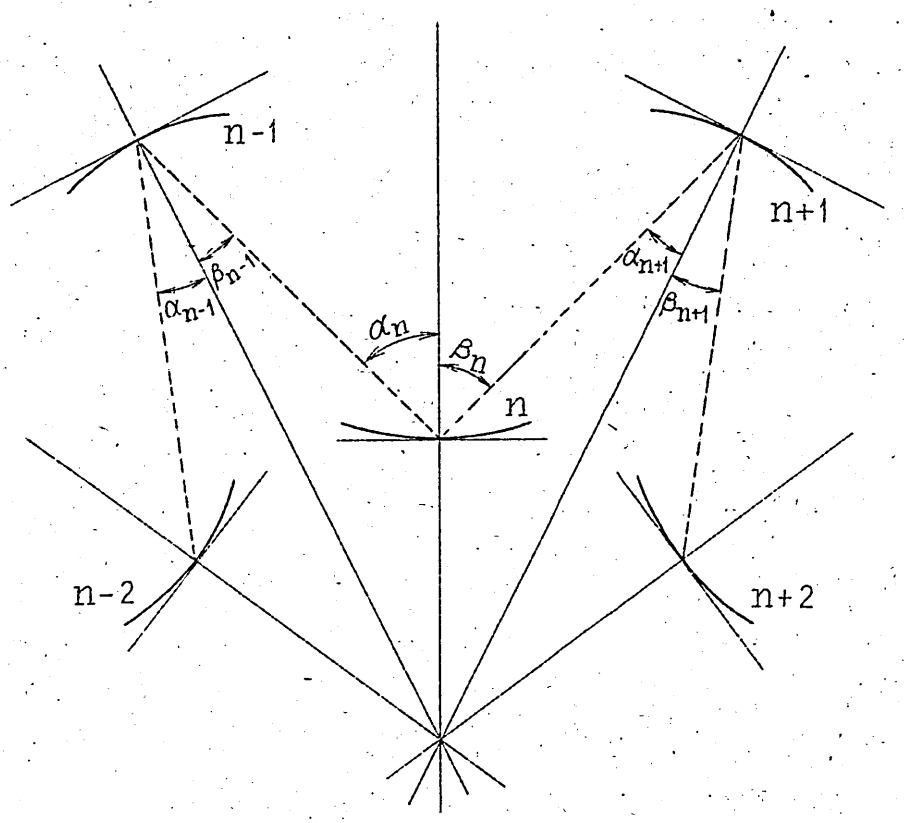


図 7. 伝送軸の円形曲がり

$$\Delta\alpha_n - \Delta\beta_n = \alpha_n - \beta_n = (-1)^{n+1}\,Tn,\quad n \geqq 0$$

ここで，Tは定数である．

この時，式(12)より第n（n≧2）反射板に入射するビームの位置は次式で与えられる．

$$x_n = A\cos n\theta + B\sin n\theta \tag{26-a}$$

$$y_n = C\cos n\varphi + D\sin n\varphi + \frac{d'T}{2}\frac{1}{\sin\varphi}\left\{(-1)^n n\tan\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right\} \tag{26-b}$$

式(26-b)よりy方向の変位は反射板の数と共に増大することがわかる．

4・7 反射板1個が回転変位を起している場合

図8で平行変位ベクトルδが零の場合に対応し，パラメータは次式で与えられる．

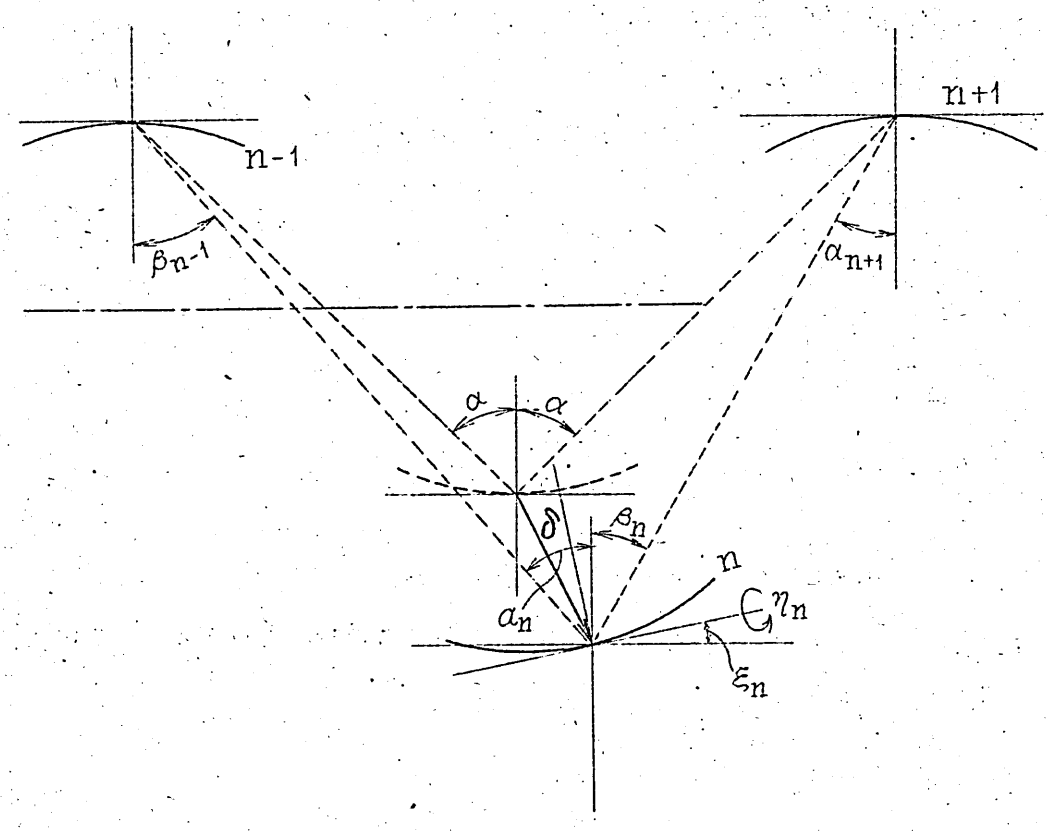


図8．1個の反射板の不整

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\alpha_n = -\xi_n, \quad \Delta\beta_n = \xi_n, \quad \eta_n = \bar{\eta}_n \\ \text{他はすべて零}\end{array}\right\} \qquad (27)$$

式(10)，(27)より，

$$x_n = 0, \quad y_n = 0 \qquad (28\text{-a})$$

$$x_{n+1} = 2\eta_n d \quad , \quad y_{n+1} = -2\xi_n d' \qquad (28\text{-b})$$

$$x_{n+2} = 4\left(1-\frac{d}{R_x}\right)\eta_n d \quad , \quad y_{n+2} = -4\left(1-\frac{d'}{R_y}\right)\xi_n d' \qquad (28\text{-c})$$

本節の場合第n反射板だけが変位し，第（n＋1）反射板以後の系は理想系と考えているから式（28－b），（28－c）を式（14）に適用しなければならない．このようにして回転変位量の許容範囲を求めると

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\eta_n d}{\Delta_x}\right)^2 &< \frac{1}{4}\left[\frac{2d}{R_x} - \left(\frac{d}{R_x}\right)^2\right] \\ \left(\frac{\xi_n d'}{\Delta_y}\right)^2 &< \frac{1}{4}\left[\frac{2d'}{R_y} - \left(\frac{d'}{R_y}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

となる．

4・8 反射板1個が平行変位を起している場合

図8でξ_n，η_n が零である場合に対応する．この時，各パラメータの値は次のようになる．

$$\delta_{n+1} = -\delta_n = -\delta_x$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\alpha_{n-1} = 0 \ , \quad \Delta\beta_{n-1} = \frac{\delta_y}{r}\cos\alpha + \frac{\delta_z}{r}\sin\alpha \\ &\Delta\alpha_n = \Delta\beta_{n-1} \ , \quad \Delta\beta_n = -\frac{\delta_y}{r}\cos\alpha + \frac{\delta_z}{r}\sin\alpha \\ &\Delta\alpha_{n+1} = \Delta\beta_n \ , \quad \Delta\beta_{n+1} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

他はすべて零

式（10），（30）より

$$x_n = -\delta_x \quad , \quad y_n = -\delta_y + \delta_z \tan\alpha \tag{31-a}$$

$$x_{n+1} = \frac{2d}{R_x}\,\delta_x \quad , \quad y_{n+1} = 2\left(1-\frac{d'}{R_y}\right)\delta_z \tan\alpha + \frac{2d'}{R_y}\,\delta_y \tag{31-b}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 4\left(1-\frac{d}{R_x}\right)\frac{d}{R_x}\,\delta_x \\ y_{n+2} &= 4\left(1-\frac{d'}{R_y}\right)\frac{d'}{R_y}\,\delta_y + 2\left[1-\frac{4d'}{R_y}+2\left(\frac{d'}{R_y}\right)^2\right] \\ &\qquad \delta_z \tan\alpha \end{aligned}\right\} \tag{31-c}$$

前節と同様にして式(14)，(31-b)および(31-c)より変位量の許容範囲を求めると，

$$\left(\frac{\delta_x}{\Delta_x}\right)^2 < \frac{1}{4}\left(\frac{2R_x}{d}-1\right) \tag{32-a}$$

$$\left(\frac{\delta_y}{\Delta_y}\right)^2 + \left[\frac{2R_y}{d'}-1\right]\left(\frac{\delta_z}{\Delta_y}\right)^2 \tan^2\alpha < \frac{1}{4}\left(\frac{2R_y}{d'}-1\right) \tag{32-b}$$

式(32-b)は図3において，

$$\left.\begin{aligned} &P = \delta_y / \Delta_y \quad , \quad Q = \left(\delta_z / \Delta_y\right) \tan\alpha \, , \quad \Psi = 0 \\ &E = \sqrt{\frac{2d'}{R_y}-1} \quad , \quad F = 1 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

とした場合の斜線部領域として示される．

4・9 反射板の変位がランダムに分布している場合

この場合のビーム変位量は2乗集合平均値によつて評価することができる．式(12)において$A=B=C=D=0$ ($x_0=x_1=y_0=y_1=0$)とおい

てx_n，y_nの2乗集合平均値$<x_n^2>$，$<y_n^2>$を計算すると次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} <x_n^2> &= \frac{<\delta^2> + 2d^2<\eta^2>}{\sin^2\theta}\left[n - \frac{\sin n\theta\cos(n-1)\theta}{\sin\theta}\right] \\ <y_n^2> &= \frac{(d')^2\left[<\Delta\alpha^2> + <\Delta\beta^2>\right]}{2\sin^2\varphi}\left[n - \frac{\sin n\varphi\cos(n-1)\varphi}{\sin\varphi}\right] \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

ただし，$<\delta^2>$，$<\eta^2>$，$<\Delta\alpha^2>$，$<\Delta\beta^2>$はそれぞれδ_n，η_n，$\Delta\alpha_n$，$\Delta\beta_n$の2乗集合平均値である．

式(34)でnが十分大きくなると，

$$\left.\begin{aligned} <x_n^2> &\simeq \left\{\frac{<\delta^2> + 2d^2<\eta^2>}{\sin^2\theta}\right\}n \\ <y_n^2> &\simeq \left\{\frac{(d')^2\left[<\Delta\alpha^2> + <\Delta\beta^2>\right]}{2\sin^2\varphi}\right\}n \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

式(35)の値を最小にする反射板の曲率半径R_x，R_yを(13)を参照して求めると

$$R_x = d, \quad R_y = \frac{r^2}{d} \quad (36)$$

となる．これは共焦点条件と一致する．

5．二種類の二次元的曲面反射板を交互に配置した反射形ビームウエーブガイド

図9に示したように，$R_{xn} = R_x$，$R_{yn} = \infty$，$R_{x(n\pm1)} = \infty$，$R_{y(n\pm1)} = R_y$なる系を考える．ただし，図9のn ($R_{yn} = \infty$)を偶数とする．

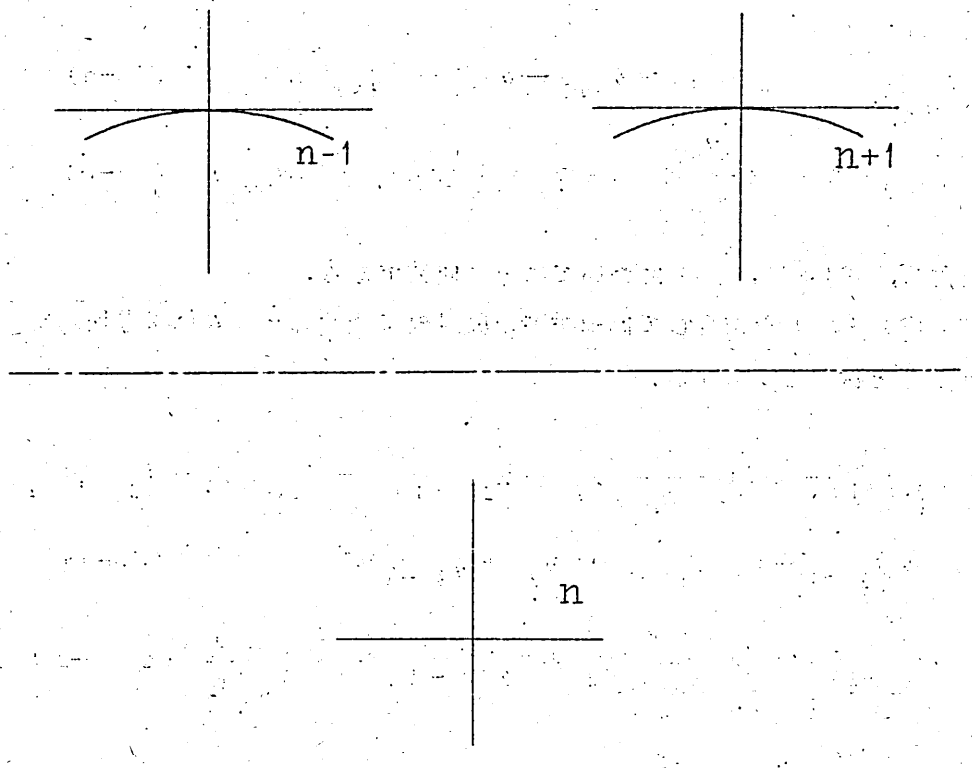


図９．二種類の二次元的曲面反射板を交互に配置した反射形ビームウエーブガイド

5・1 ビーム伝送方程式の導出

式(10)を図９の系に適用すると次の二組の漸化式が得られる．

$$x_{n+1} - 2\left(1-\frac{d}{R_x}\right)x_n + x_{n-1} = \delta_n - \delta_{n+1} + 2\eta_n d \quad (37\text{-a})$$

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = d'(\Delta\alpha_n - \Delta\beta_n) \quad (37\text{-b})$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = \delta_{n+1} - \delta_{n+2} - 2\eta_{n+1} d \qquad (38\text{-a})$$

$$y_{n+2} - 2\left(1 - \frac{d'}{R_y}\right) y_{n+1} + y_n = d'(\Delta\alpha_{n+1} - \Delta\beta_{n+1}) \qquad (38\text{-b})$$

ただし，式(37)，(38)においてはηは偶数である．

式(37)，(38)を結合して偶数番号の反射板に関するビーム伝送方程式を導出すると次のようになる．

$$x_{2(m+1)} - 2\left(1 - \frac{2d}{R_x}\right) x_{2m} + x_{2(m-1)} = -\delta_{2(m+1)} - \delta_{2m+1} + \delta_{2m}$$

$$+ \delta_{2m-1} - 2(\eta_{2m+1} - 2\eta_{2m} + \eta_{2m-1}) d \qquad (39\text{-a})$$

$$y_{2(m+1)} - 2\left(1 - \frac{2d'}{R_y}\right) y_{2m} + y_{2(m-1)} = 2d'\left(1 - \frac{d'}{R_y}\right)(\Delta\alpha_{2m} - \Delta\beta_{2m})$$

$$+ d'\left(\Delta\alpha_{2m-1} - \Delta\beta_{2m-1}\right) \qquad (39\text{-b})$$

上式の一般解は次式で与えられる．

$$x_{2m} = A\cos m\theta + B\sin m\theta + \frac{1}{\sin\theta}\sum_{k=1}^{m-1}\Big[-\delta_{2(k+1)} - \delta_{2k+1}$$

$$+ \delta_{2k} + \delta_{2k-1} - 2\left(\eta_{2k+1} - 2\eta_{2k} + \eta_{2k-1}\right) d\Big] \cdot$$

$$\cdot \sin(m-k)\theta \qquad (40\text{-a})$$

$$y_{2m} = C\cos m\varphi + D\sin m\varphi + \frac{d'}{\sin\varphi}\sum_{k=1}^{m-1}\Big[2\left(1 - \frac{d'}{R_y}\right)\Big($$

$$\Delta\alpha_{2k} - \Delta\beta_{2k}\Big) + \Delta\alpha_{2k-1} - \Delta\beta_{2k-1}\Big]\sin(m-k)\varphi \qquad (40\text{-b})$$

ここで，

$$\cos\theta = 1 - \frac{2d}{R_x}, \quad \cos\varphi = 1 - \frac{2d'}{R_y} \qquad (41)$$

なお，前章と同様，式(40)においては，$m \geqq 0$であり，$m=0$，1に対しては第3項は零と考える．

5・2 系の安定構造

4・1と同様にして安定構造，不安定構造を求めると次のようになる．

$$\text{安定構造} = 0 < \frac{d}{R_x} < 1 \ , \quad 0 < \frac{d'}{R_y} < 1$$

が同時に成立する系

不安定構造＝上記以外の系

この場合も，上記の分類はビーム姿態の回折損失に関して定義[5]された低損失領域，および高損失領域の分類と一致する．

5・3 入射ビームの最大許容変位

4・2と全く同じ考え方で取り扱えるが本節ではビーム伝送方程式が式(39)の形，すなわち，偶数番号の反射板間の関係を与える形であるので，式(14)の変数は次のように考えなおさなければならない．

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = x_0/\Delta_x \ , \quad M_1 = x_2/\Delta_x \\ N_0 = y_0/\Delta_y \ , \quad N_1 = y_2/\Delta_y \end{array}\right\} \qquad (42)$$

$\cos\theta$，$\cos\varphi$ は式(41)で与えられる．

5・4 伝送軸の折れ曲がり

第n（nは偶数）反射板で4・3と同一の不整が生じたものとする．この時の各パラメータは式(16)，(17)で与えられ，これらと式(37)，(38)より(x_n, y_n)，(x_{n+2}, y_{n+2})を求め，前節の結果に適用すると変位量の許

容範囲が次式の形で求まる．

$$\left(\frac{\zeta_n l}{\Delta_x}+\frac{\eta_n d}{\Delta_x}\right)^2<\frac{d}{R_x}-\left(\frac{d}{R_x}\right)^2 \qquad (43\text{-a})$$

$$\left(\frac{\xi_n d'}{\Delta_y}\right)^2<\frac{\dfrac{d'}{R_y}}{1-\dfrac{d'}{R_y}} \qquad (43\text{-b})$$

式(43-a)は図5において，

$$P=\frac{\eta_n d}{\Delta_x}\ ,\quad Q=\frac{\zeta_n l}{\Delta_x}\ ,\quad E=\sqrt{\frac{d'}{R_y}-\left(\frac{d'}{R_y}\right)^2} \qquad (44)$$

とした場合の斜線部領域となる．

5・5 伝送軸のくい違い

第n反射板で4・4と全く同一の不整が生じたものとする．この場合には式(20)，(21) をそのまま使用することができ，前節と同じ方法で不整量の許容範囲として次式が得られる．

$$\left(\frac{\delta_x}{\Delta_x}\right)^2<1-\frac{d}{R_x} \qquad (45\text{-a})$$

$$\left(\frac{\delta_y}{\Delta_y}+\frac{\delta_z}{\Delta_y}\tan\alpha\right)^2<1 \qquad (45\text{-b})$$

式(45-b)は図5において

$$P=\frac{\delta_y}{\Delta_y}\ ,\quad Q=\frac{\delta_z}{\Delta_y}\tan\alpha\ ,\quad A=1 \qquad (46)$$

とした場合の斜線部領域として示される．

5・6 伝送軸の円形曲がり

ビーム伝送方程式として式(39)を使うこと以外は4・5の内容と全く同一であるので省略する.

5・7 円形曲がりの曲率が伝送軸に沿つて変化する場合

式(25)を(40)に適用すると次の結果が得られる.

$$x_{2m} = A\cos m\theta + B\sin m\theta \tag{47-a}$$

$$y_{2m} = C\cos m\varphi + D\sin m\varphi + \frac{d'T}{\sin\varphi}\left[\left(\frac{2d'}{R_y} - 1\right)\cdot\left(m\cot\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin m\varphi}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right) - \frac{\sin\frac{m\varphi}{2}\sin\frac{(m-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right] \tag{47-b}$$

5・8 反射板1個が回転変位を起している場合

第n(nは偶数)反射板が4・7と全く同一の不整を生じているものとする.この場合には各パラメータとして式(27)をそのまま用いることができる.これを式(37),(38),(39)に適用して(x_{n+2}, y_{n+2}),(x_{n+4}, y_{n+4})を求め,それらを式(42)の(x_0, y_0),(x_2, y_2)の代りに用いると不整量の許容範囲として次式が求まる.

$$\left(\frac{\eta_n d}{\Delta_x}\right)^2 < \frac{1}{4}\left[\frac{d}{R_x} - \left(\frac{d}{R_x}\right)^2\right] \tag{48-a}$$

$$\left(\frac{\xi_n d'}{\Delta_y}\right)^2 < \frac{\frac{d'}{R_y}}{4\left(1 - \frac{d'}{R_y}\right)\left(1 - \frac{4d'}{R_y}\right)^2} \tag{48-b}$$

5・9 反射板1個が平行変位を起している場合

第n（nは偶数）反射板が4・8と全く同一の不整を生じているものとする．式(30)から前節と同様の方法で不整量の許容範囲を求めると次のようになる．

$$\left(\frac{\delta_x}{\Delta_x}\right)^2 < \frac{1}{4}\left(\frac{R_x}{d}-1\right) \tag{49-a}$$

$$\left(\frac{\delta_y}{\Delta_y}\right)^2 + \left[1+16\left(\frac{d'}{R_y}\right)-16\left(\frac{d'}{R_y}\right)^2\right]\left(\frac{\delta_z}{\Delta_y}\right)^2 \tan^2\alpha - 2\left(\frac{\delta_y}{\Delta_y}\right)\cdot\left(\frac{\delta_z}{\delta_y}\right)\cdot$$

$$\cdot\tan\alpha < \frac{4d'}{R_y} - 4\left(\frac{d'}{R_y}\right)^2 \tag{49-b}$$

式(49-b)を図示すると，たとえば，$d'/R_y = 1/2$（共焦点条件）の時，図3において，

$$P = \frac{\delta_y}{\Delta_y}, \quad Q = \left(\frac{\delta_z}{\Delta_y}\right)\tan\alpha, \quad \Psi = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2},$$

$$E = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad F = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

とした場合の斜線部領域となる．

5・10 反射板の変位がランダムに分布している場合

4・9と同様にして2乗集合平均値を式(40)より求めると

$$\langle x_{2m}^2\rangle = \frac{2\left[\langle\delta^2\rangle + 6d^2\langle\eta^2\rangle\right]}{\sin^2\theta}\left[m - \frac{\sin m\theta\cos(m-1)\theta}{\sin\theta}\right] \tag{50-a}$$

$$\langle y_{2m}^2\rangle = \frac{(d')^2\left[4\left(1-\frac{d'}{R_y}\right)^2+1\right]\left[\langle\Delta\alpha^2\rangle+\langle\Delta\beta^2\rangle\right]}{2\sin^2\varphi}\left[m -\right.$$

$$\frac{\sin m\varphi \cos(m-1)\varphi}{\sin\varphi}\Bigg] \qquad (50\text{-}b)$$

式(50)でmが十分大きくなると

$$\langle x_{2m}^2\rangle \simeq \frac{[\langle\delta^2\rangle + 6d^2\langle\eta^2\rangle](2m)}{\sin^2\theta} \qquad (51\text{-}a)$$

$$\langle y_{2m}^2\rangle \simeq \frac{(d')^2\left[4\left(1-\frac{d'}{R_y}\right)^2+1\right]\left[\langle\Delta\alpha^2\rangle+\langle\Delta\beta^2\rangle\right](2m)}{4\sin^2\varphi}$$

$\langle x_{2m}^2\rangle$および$\langle y_{2m+1}^2\rangle$が最小になる反射板の曲率半径を求めると

$$R_x = 2d \quad , \quad R_y = 2d' \qquad ((52)$$

となる．これは文献(5)で定義されてある最適集束条件と一致する．

6．検　討

本章では第4章および第5章で解析した二つの形式の反射形ビームウエーブガイドの安定度を比較検討する．ただし，二つの系は反射板の形状を除いては全く同一であるものとし，ビーム姿態の回折損失が最も小さい共焦点系の条件〔式(36)，(52)〕を満足しているものとする．なお，便宜上，第4章の形式をtype A，第5章の形式をtype Bと名づけ，たとえば，

$$A > B$$

と記せばtype Aの方がtype Bより望ましい(許容範囲が大きい)ことを意味するものとすると結果は表1のようになる．

表1．二つの反射形ビーム

ウエーブガイドの比較

	不整の種類	Aの許容範囲	評価	Bの許容範囲
①	入射ビームの変位	1	=	1
②	折れ曲がり			
	ξ_n	1	=	1
	η_n, ζ_n	1	>	$\frac{1}{4}$
③	くい違い			
	δ_x	$\frac{1}{2}$	=	$\frac{1}{2}$
	δ_y, δ_z	$\frac{1}{2}$	<	1
④	円形曲がり	∞	=	∞
⑤	曲率が伝送軸に沿つて変化する曲がり	$\frac{d'T(-1)^n}{2}$〔式(26-b)のnの係数〕	<	0〔式(47-b)のmの係数〕
⑥	1つの反射板の回転変位			
	η_n	$\frac{1}{4}$	>	$\frac{1}{16}$
	ξ_n	$\frac{1}{4}$	=	$\frac{1}{4}$
⑦	1つの反射板の平行変位			
	(i) δ_x	$\frac{1}{4}$	=	$\frac{1}{4}$
	(ii) δ_y, δ_z	長径 1	<	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
		短径 1	>	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

ランダム変位	$<\delta^2>+2d^2<\eta^2>$	$>$	$<\delta^2>+6d^2<\eta^2>$
nまたは	$\frac{(d')^2\left[<\Delta\alpha^2>+<\Delta\beta^2>\right]}{2}$	$=$	$\frac{(d')^2\left[<\Delta\alpha^2>+<\Delta\beta^2>\right]}{2}$
2mの係数			

表1で ①,②,③,⑥,⑦ (i)は本文中の不等式の右辺の値であり，⑦ (ii)は本文中に述べた座標に描かれた楕円について記してある．また，④ の∞は制限がないことを示している．

7. 結　言

反射形ビームウエーブガイドにおけるビーム伝送の状態を幾何光学の立場より論じ，反射板の中心における法線のまわりのわずかな回転変位はビーム伝送に影響しないこと，ビームの安定条件は回折損失に関して定義された低損失条件と一致すると，伝送軸のわずかな円形曲がりは伝送ビームの変位を生ぜず，回折損失について先に得られた結論[6]と対応すること，実用化に際して最も重要と考えられる反射板のランダムな変位に対しては，共焦点系が最も影響を受けにくいこと等を明らかにした．本文ではさらに種々の不整に対する伝送ビームの動作状態を解析し，不整量の許容範囲に関する一般公式を求めた．また，二種の反射形ビームウエーブガイドについて，その安定度を比較した．これらの結果は反射形ビームウエーブガイドの実用化に際してきわめて有用なものと考える．

終りに，日頃，御指導頂いている大阪大学工学部板倉清保教授に深謝する．

文　献

(1) G.Goubau and F. Schwering : 'On the guided propagation of electromagnetic wave beams', IRE Trans., Ap-9, 3, pp.248-256, (May 1961).

(2) F.Schwering : "Reiterative wave beams of rectangular symmetry', AEÜ, 15, 2, pp.555-564, (Dec.1961).

(3) 中原恒雄："平行平板間の電磁波ビームモードの導波伝送" 信学誌，47，2，pp.188-196（昭39-02）.

(4) J.E.Degenford : "The reflecting beam waveguide", IEEE Trans., MTT-12, 4, pp. 445-453, (July 1965).

(5) 熊谷他："反射形ビームウエーブガイドの伝送ビーム姿態"，マイクロ波伝送研資（昭40-07）

(6) 熊谷他："反射形ビームウエーブガイドの円形曲がり，折れ曲がり，くい違い"，マイクロ波伝送研資（昭40-07）

(7) D.Marcuse: "Propagation of light rays through a lens-waveguide with curved axis", Bell Syst. tech. J., 43, pp. 741-753, (March 1964).

(8) J.Hirano and Y.Fukutsu: "Stability of a light beam in a beam waveguide", Proc. IEEE, 52, pp. 1284-1292, (Nov. 1964).

輻射科学研究会資料

自然対流を利用したガスレンズの特性について

滝山　敬
繁沢　宏
渡辺　剛
(同志社大学工学部)

1966年2月

1. 序文

レーザーの研究の発展にともない、その応用の一つにレーザー光を用いた、いわゆるレーザー通信の研究も各方面で進められるに至った。
きわめて損失の少ない伝送系としてガスの内部に生じた誘電率の分布を利用する事については1964年、Berreman[1]等によって提案され、その後Marcuse[2]等によって反流型のガスレンズについて理論解析が行なわれ反流型ガスレンズを用いた実験結果の報告もBeck[3]によってなされている。
一方対流型ガスレンズがBerremanによって提案され、その実験の結果報告[4),5)]もBerreman自身が行っているが、その理論的解析は未だ充分に行なわれていない。又実験結果についても報告されているデータの量が少ないためその特性等を知るには不充分と思われる。我々はこうした点をおぎなうために色々な実験を行ない、理論的な解析を行なうさいの重要な資料を得た。理論解析は現在進行中であるので別の機会にゆずる事にし、本文では主に実験から得られた結果について御報告するものである。

2. 流体の温度勾配による集光作用

2-1 温度場と集光作用

光束がある媒質中で収差を生じることなく集光されるためには，例えば z 軸を光軸に選んだ場合，媒質の屈折率 n は (1) 式で示される。ただし同式中 n_0 は z 軸上の屈折率である。

$$n = n_0\left[1 - \frac{1}{2} C_s (x^2 + y^2)\right] \tag{1}$$

一方温度場における媒質が熱によってどの方向の速度成分も生じない，いわゆる静温度場において生じる温度分布の定常解は (2) 式の解から得られるが (2) 式の解

$$\nabla^2 \theta = 0 \tag{2}$$

で示される温度場で集光作用を行なうためにはレンズの構造上多くの難点を生じるものと思われる。
しかしもし何等かの方法で充分な温度勾配をもつ温度場が得られるならば光の集光は実際上可能となる。
こうした問題の解決の一方法として現在考えられているものに次の2つのものがあげられる。

(i) 強性対流を利用するもの
(ii) 自然対流を利用するもの

(i) の方法の一つとしては概に Marcuse 等の提案した層流型ガスレンズがあり，その理論解析も行なわれている。
本文で御報告する表題とした対流型ガスレンズとは (ii) に属するもので，内部の温度差によって生じた自然対流によってつくり出される温度勾配を利用したものである。

2-2 自然対流を用いた集光作用

一般に流体が自然対流によって速度 $\mathbb{V}$ で移動している温度場の温度分布及び速度分布は (3)〜(5) 式の解として得られる。
しかし強性対流などで速度分布があらかじめ明らかであれば (5) 式から温度分布は決定される。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 u\\ \frac{dv}{dt}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 v\\ \frac{dw}{dt}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 w\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$C_p\rho u\frac{\partial\theta}{\partial x}+C_p\rho v\frac{\partial\theta}{\partial y}+C_p\rho w\frac{\partial\theta}{\partial z}=k\nabla^2\theta \tag{5}$$

但し X, Y, Z は単位体積についての外力である。

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

図3に我々の試作したガスレンズを示しておいた。この型のガスレンズについては前述のBerremanが内部に生じた対流のプロフィルをタバコの煙によって確めている。その結果は図1に示しておいた。光軸に垂直なある断面上における屈

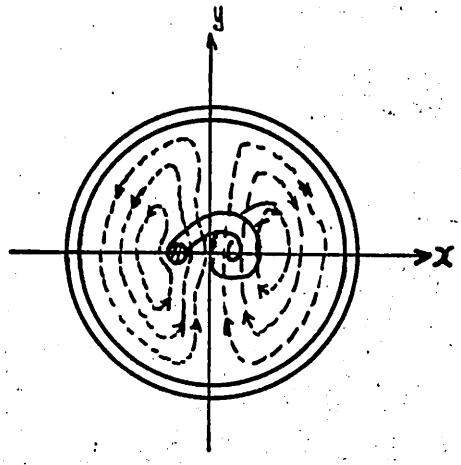


図-1

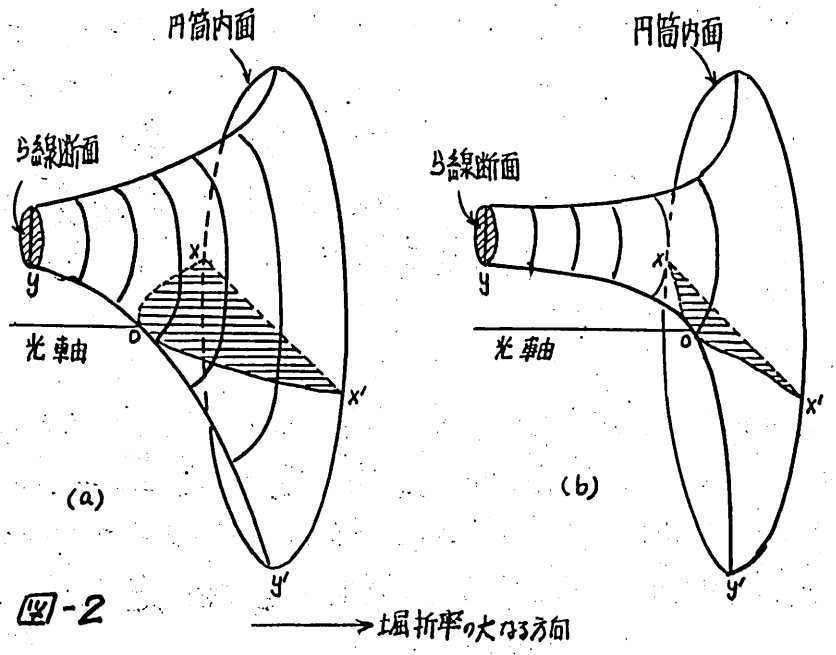


図-2

折率の分布として図2に示した3次元の分布曲線を定性的な考察から与えている。
図2の(a)は温度場が静的であると仮定して(1)式の解から屈折率の分布を求めたものでありこれから得られる集光作用は非常に少さく，光ビームのスポットの大きさは殆んど変化しない事になる。(a)の場合の温度勾配が自然対流によって歪を受け(b)に示した如く光軸付近で急峻な温度変化とし，光軸から離れた所では殆んど温度はいたるところ一定な値を保っている。同図(b)における曲線 y_0y' の変化率はレンズの構造，特にら線の太さ及び内径によって変化，使用するガスの種類，密度，供給電力等によっても変ってくる。
しかし我々の試作したレンズの測定結果から光軸に沿った平均の屈折の分布はほゞ(1)式に従っている事が明らかとなった。以下その実験結果について述べる。

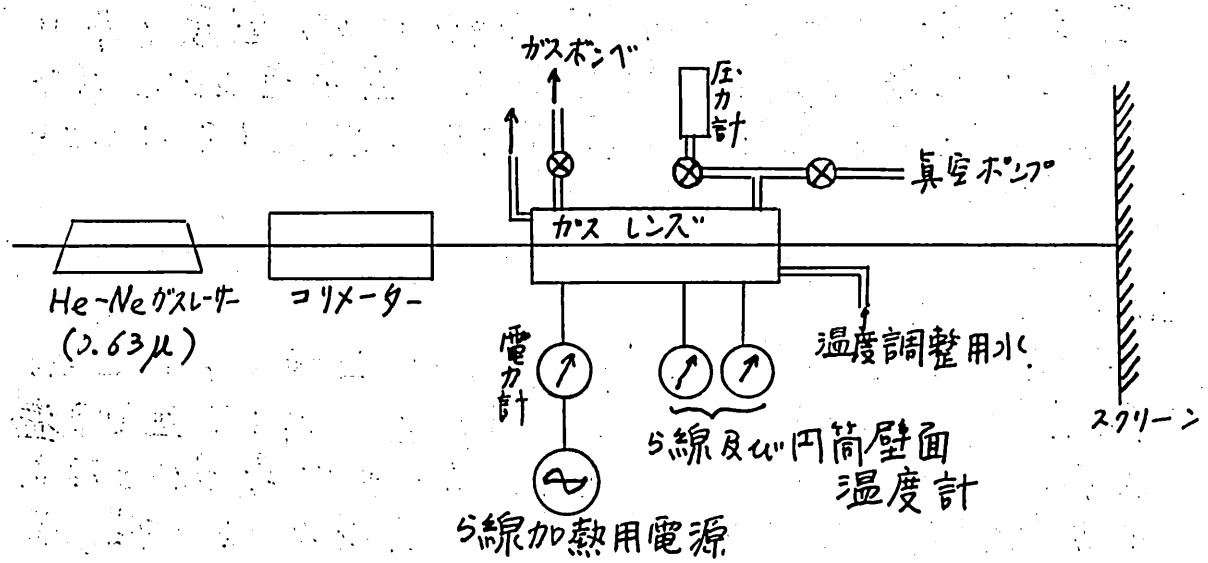
3. 実験

3-1 構造

試作したガスレンズの構造図は図3に示した。
円筒は二重構造とし水冷を行う事により外部温度変化の影響をさけ，円筒面を常時一定温度に保って内部に生じている自然対流の安定化を計った。発熱体としてのら線には 3.2φ のニクロム線(1号)を用い，ら線の内径及びピッチはそれぞれ(8±0.2)φ，13±0.5mm，ピッチ数60でその支持台として長さ15mm，内径14.8φの円筒を3ケ用い，ら線の中心軸のずれをほゞ完全に除いた。温度測定にはサーミスタ(日立製 MT2600)を用い温度差の測定を中央部及びら線の両端部について行った。

3-2 測定方法

光ビームとして He-Ne ガスレーザーからの光(波長 0.63μ，TEM_{00} モード)を用い焦点距離測定の便宜上コリメーターで完全な平行光線とし(拡り角 $\Delta\theta \leqq 10^{-5}$ ラジアン)スクリーン上に写した像の位置から焦点距離 f を測定した。封入



ガスの密度はガスレンズの内部温度を24.8°C(298.0°K)に保ったときのガス圧力が水銀柱760 mmとなる時の状態を基準としてガス密度の測定を行った。封入ガスの種類が変る場合は一度真空ポンプで10^{-4} mmHg以下の真空に引いてからつめ換えをした。

3-3 測定結果

(i) 焦点距離

図4は封入ガスの密度を変えながら測定した結果である。同図において縦軸は焦点距離の逆数1/F (diopter)を，横軸にはス線発熱体と外円筒との温度差ΔTをとってある。測定は封入ガスの密度を色々に変化させて行ったもので24.8°C, 1 atmの状態で占めるガス密度を基準にしてある。測定した温度範囲では収差は殆んど現われてこなかったが密度1.8の場合にはΔT≧50°Cになるとかなりの収差も見られる。測定の結果，密度のあまり大きくない状態では1/FとΔTはほゞ直線的に変化していくがある程度以上にガス密度が大きくなると1/Fは非直線的に増大していく。これは密度の増加により，自然対流の速度が変化していく事，及び密度変化によって内部の圧力が変化したためガスの熱伝導率，比熱，屈折率等の物理量の変化が起っている事等がその主な原因と思われる。尚焦点距離の測定誤差は最大5

%程度である。
図-5は図-4の曲線を用いて横軸にガス密度を取り1/Fとの関係を示したものである。温度差20°C以下では1/Fとガス密度とは直線的に変化していることがわかる。

(ii) 電力消費量

消費電力と温度差の関係を求めると図-6となり、これより当然の事ながら同一の電力消費量に対して生じる温度差はガス密度の小さい程大きい事が明らかとなる。電力消費量の点にのみ着目すると密度の小さい程、有効に温度差を発生しているのでレンズとしての集光作用もそれだけ有効に起る様に思われるが実際は密度の変化によって誘電率も変化しておりこの誘電率の変化が集光作用により多く影響しているのである。

(iii) 集光効率

一般にガスレンズの効率を示す量として単位消費電力に対する1/Fの値 $M = 1/F \cdot W$ が用いられMarcuseはこのMに比例する量をもってガスレンズのfigure of meritとして定義している。[2)]
図-7はMと温度差ΔTの関係を求めたものであり、次にMと焦点距離との関係を示すと図-8となる。しかし消費電力のかわりにその時の温度差ΔTに注目して、温度差1°Cに対する1/Fの値を考え(これを今Eとおくと $E = 1/F$ °C) EとΔTとの関係及びEと1/Fとの関係を示すとそれぞれ図-9, 図-10の様になる。図-10によりその時のガスの封入条件が定まるとEの値は焦点距離約0.3m以上ではほぼ一定な値となる。
以上の結果によりレンズの効率について考える場合には同一の焦点距離に対するEの値を用いるのが便利の様に思われる。ここで特にガス密度の変化に対する影響を知るためにガス密度とMの関係を求めたのが図-11であり、同様にEとの関係を示したものが図-12である。

これらの関係より明らかな通り密度の小さい場合は温度差の少ない方が又密度の大きい場合には温度差の大きい方が効率の良い事がわかる。しかもこれらの曲線が同じ様な所で交鎖している事は興味のある事である。

(iv) ガスの種類による比較

図-13から図-17はN_2以外のガスとしてCO_2, O_2, 空気等を用いて測定した結果について全く同様な関係を求めてみたものである。これらの関係から少なくともここで用いた4種類のガスについてみるとレンズとして用いる場合、効率の良いものはCO_2, O_2, 空気, N_2の順となる。

(v) 考察

自然対流を利用する場合最も重要な問題は対流が安定している事と光軸付近での誘電率の変化の平均値が式(1)を満足する事である。このとき重力の方向も考慮されねばならぬ。以上の事はレンズの構造が非常に大切であり特に発熱体である線の形状は誘電率の分布の様子を決定するものである。

図-3に示した構造は試作したものの中で最も集光作用の優れたものであったが更に検討の余地はあると思われる。図-18はレンズの中央部と両端における温度差の現れ方を示したものである。同図より軸方向の温度分布の様子がわかるがこれは層流型のガスレンズと比較した場合軸方向に向って進む光はレンズ内では、ほゞ一様に集光作用を受けている事であり層流型の場合、軸方向に進むに従って集光作用が減少してくるのと対称的である。即ち軸方向に対しては常に一様の集光作用を受けているのが自然対流型の大きな特徴と云える。

しかし今日では未だ線状発熱体によってつくり出される温度場の解析は不充分であり理論的考察も充分に行う事は出来ぬが今後こうした温度場の解析が進むにつれて設計法も理論的に扱う事が可能となるであろう。

4. 結言

ガスレンズにとって最も重要な屈折率の分布を式(1)に従ったものとする事は現在ではいかなる形式のガスレンズにおいても完全なものは得られていない。そのために起る姿態変換その他多くの問題があるが特に本文で扱った自然対流を利用した形式のものでは更に困難な問題も残されている。しかし実験の結果レンズとして充分その可能性がある事がわかった。今後はこの結果を更に検討し理論的解析を進めて行くとともに，ガスレンズによる光伝送の特性を検討する予定である。

末筆ながらレンズの試作，実験にあたり，多大の御配慮頂いた堀場製作所，堀場社長はじめ関係各位に深甚なる謝意を表します。

〈文献〉

1) D.W. Berreman, etc. "Gas Lens show promise for long distance laser communication" Bell Lab. Rec. Sep. 1964 pp. 294

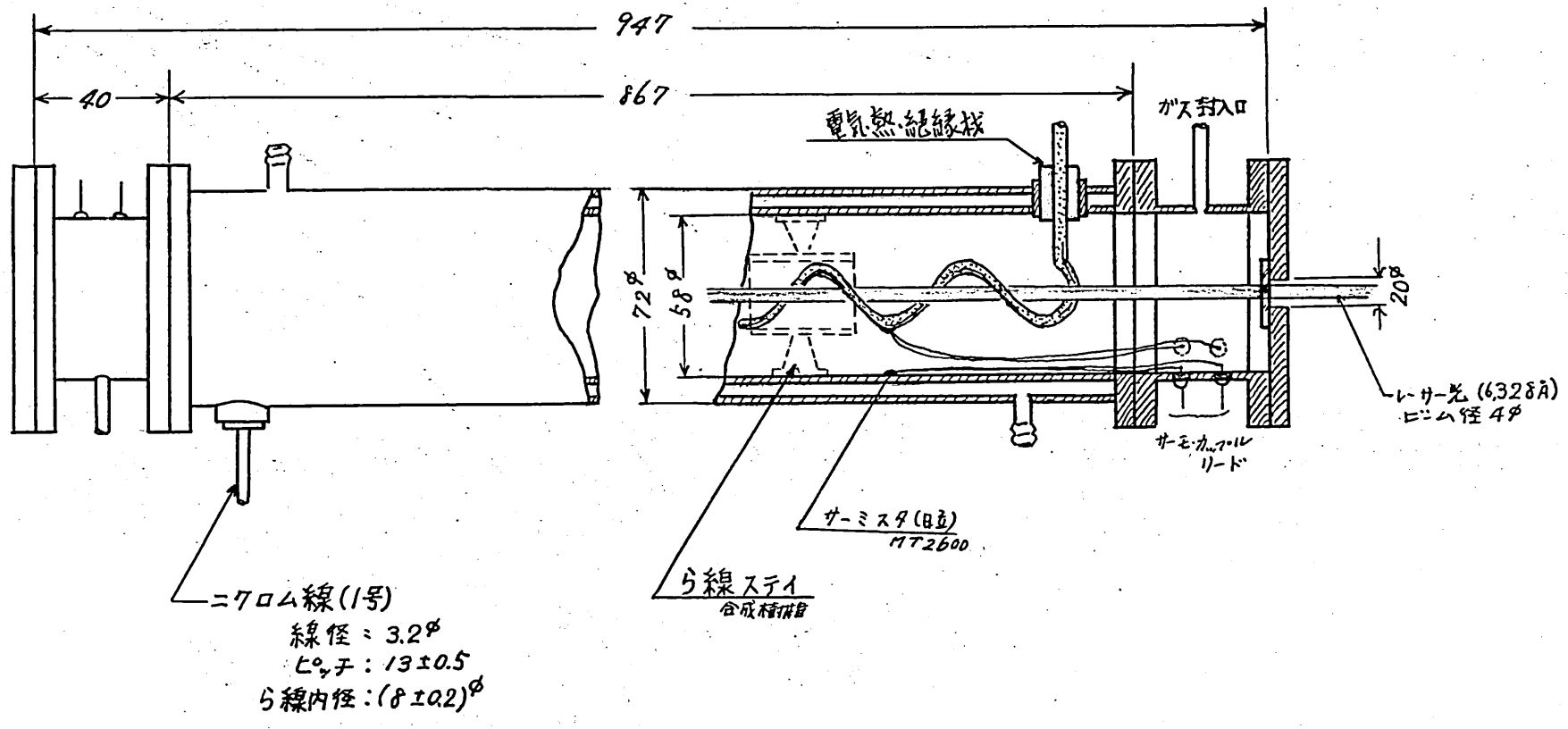
2) D. Marcuse, S.E. Miller "Analysis of tubular gas lens" B.S.T.J. 43 July 1964 pp. 1759

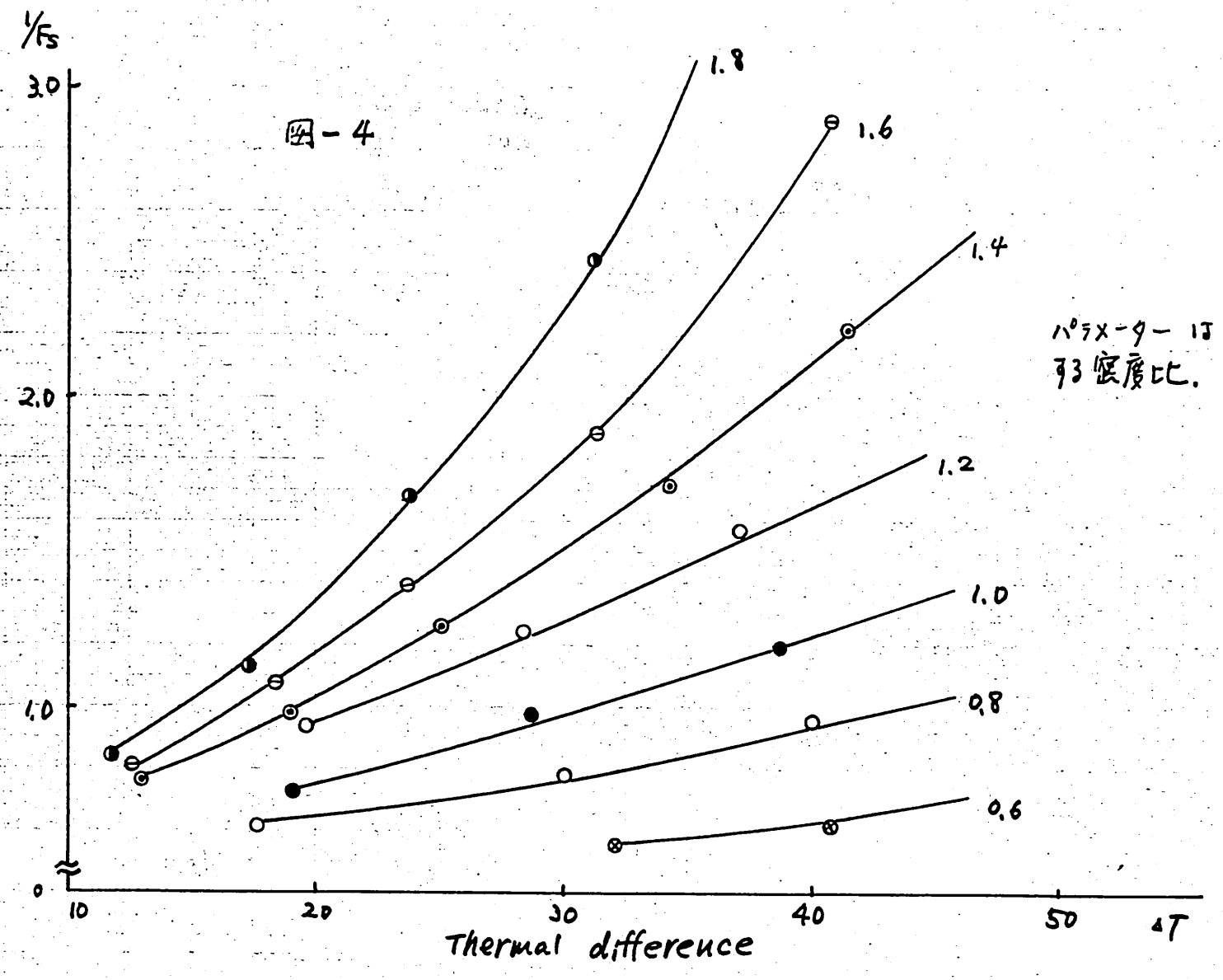
3) A.C. Beck "Thermal gas lens measurment" B.S.T.J. 43 July 1964 pp. 1818

4) D.W. Berreman "A lens or light guide using convectively distorted thermal gradients in gases" B.S.T.J. 43 July 1964 pp. 1469

5) D.W. Berreman "Convective gas light guides or lens trains for Optical beam transmission" J.O.S.A. 55 March 1965 pp. 239

図-3


947
40
867
電気・熱・絶縁材
ガス封入口
72φ
58φ
20φ
レーザー光 (6328Å)
ビーム径 4φ
サーモ・カップル
リード
サーミスタ(日立)
MT2600
ら線ステイ
合成樹脂
ニクロム線(1号)
線径：3.2φ
ピッチ：13±0.5
ら線内径：(8±0.2)φ



図－4

パラメーターは 298°K. 1気圧に対する密度比.

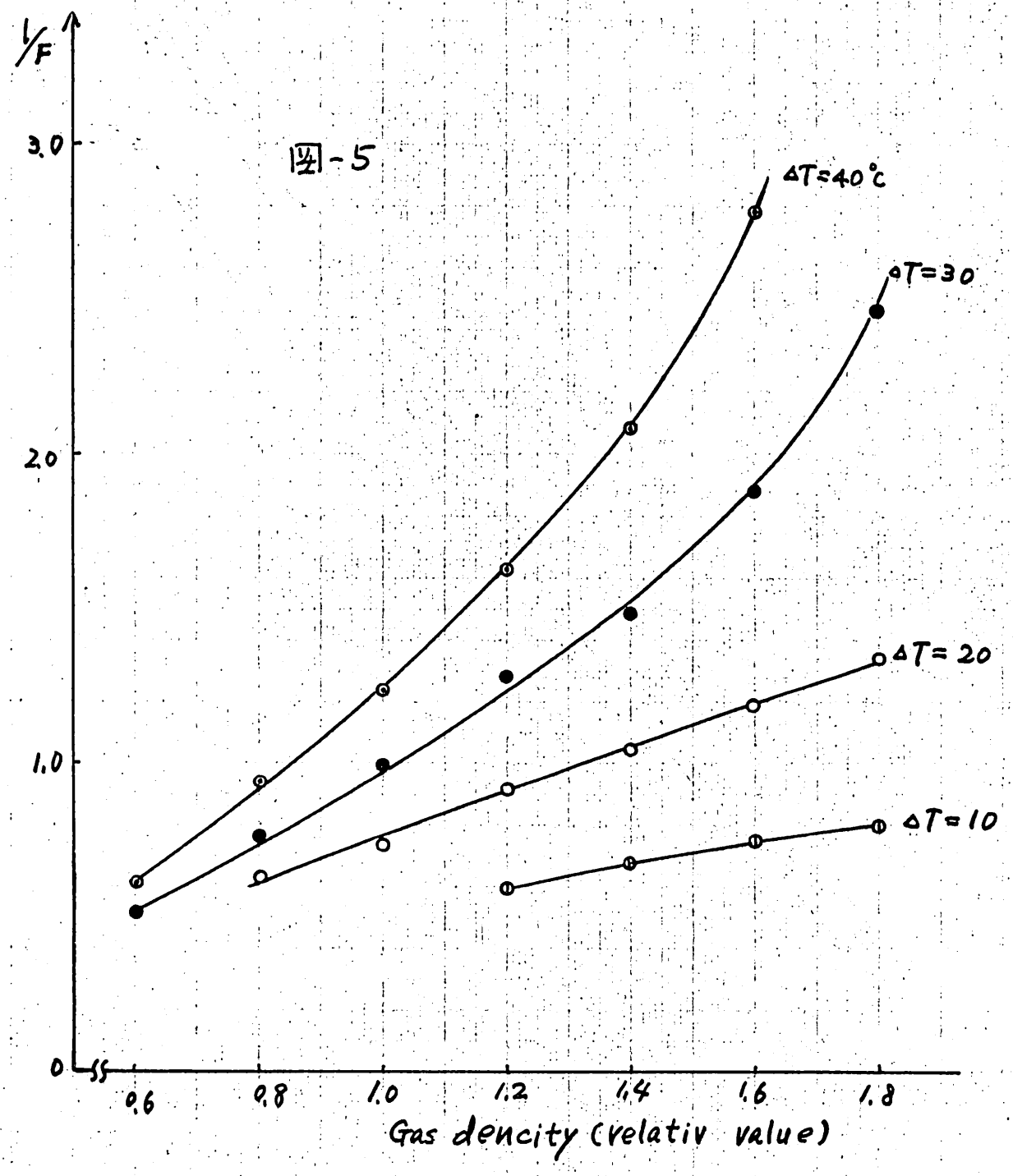

1/F
3.0
2.0
1.0
0
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
ΔT=40°c
ΔT=30
ΔT=20
ΔT=10
Gas dencity (relativ value)

図-5

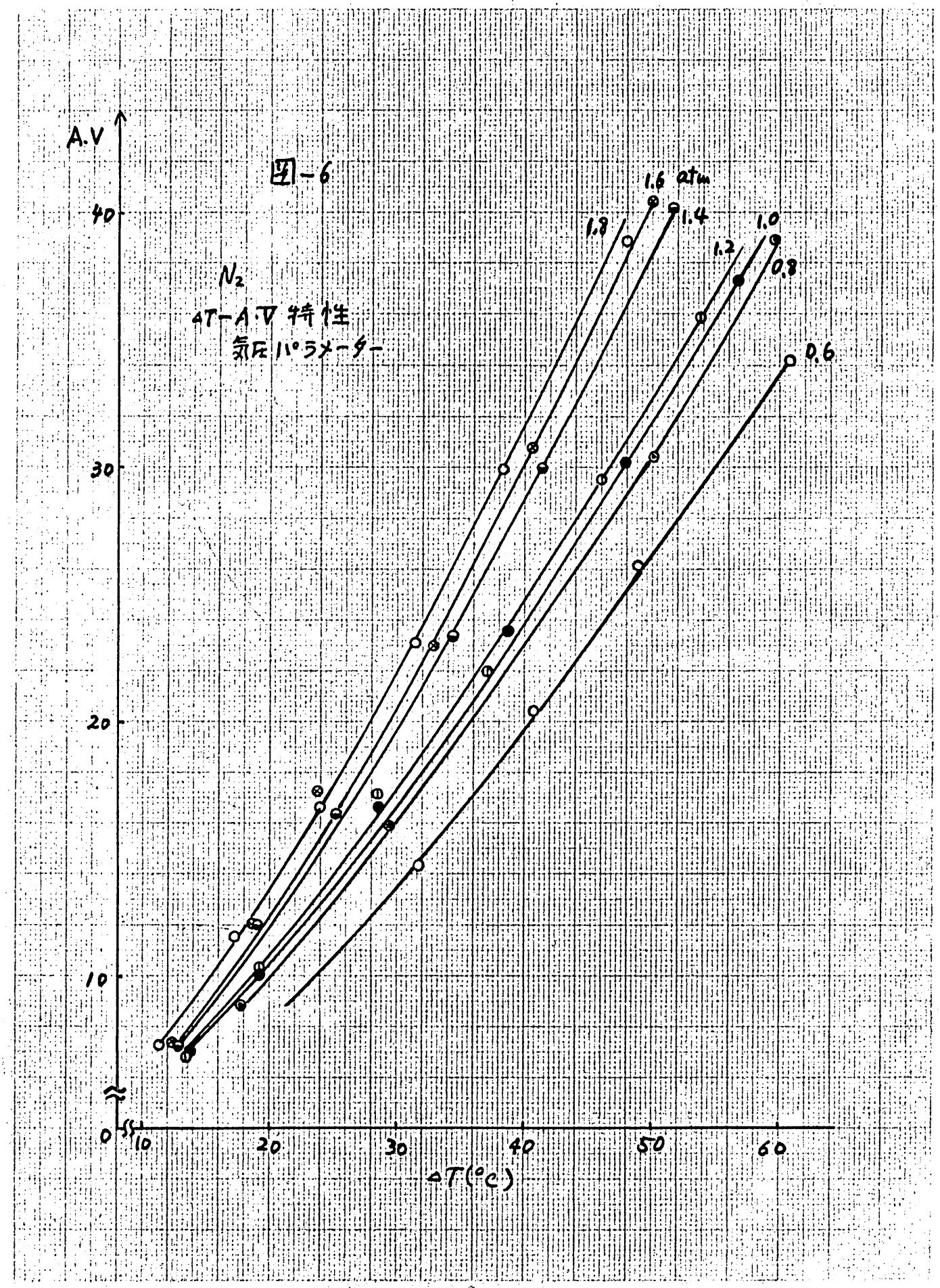


図-6
A.V
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
ΔT(°C)
N2
ΔT-A.V 特性
気圧パラメーター
1.6 atm
1.8
1.4
1.0
1.2
0.8
0.6

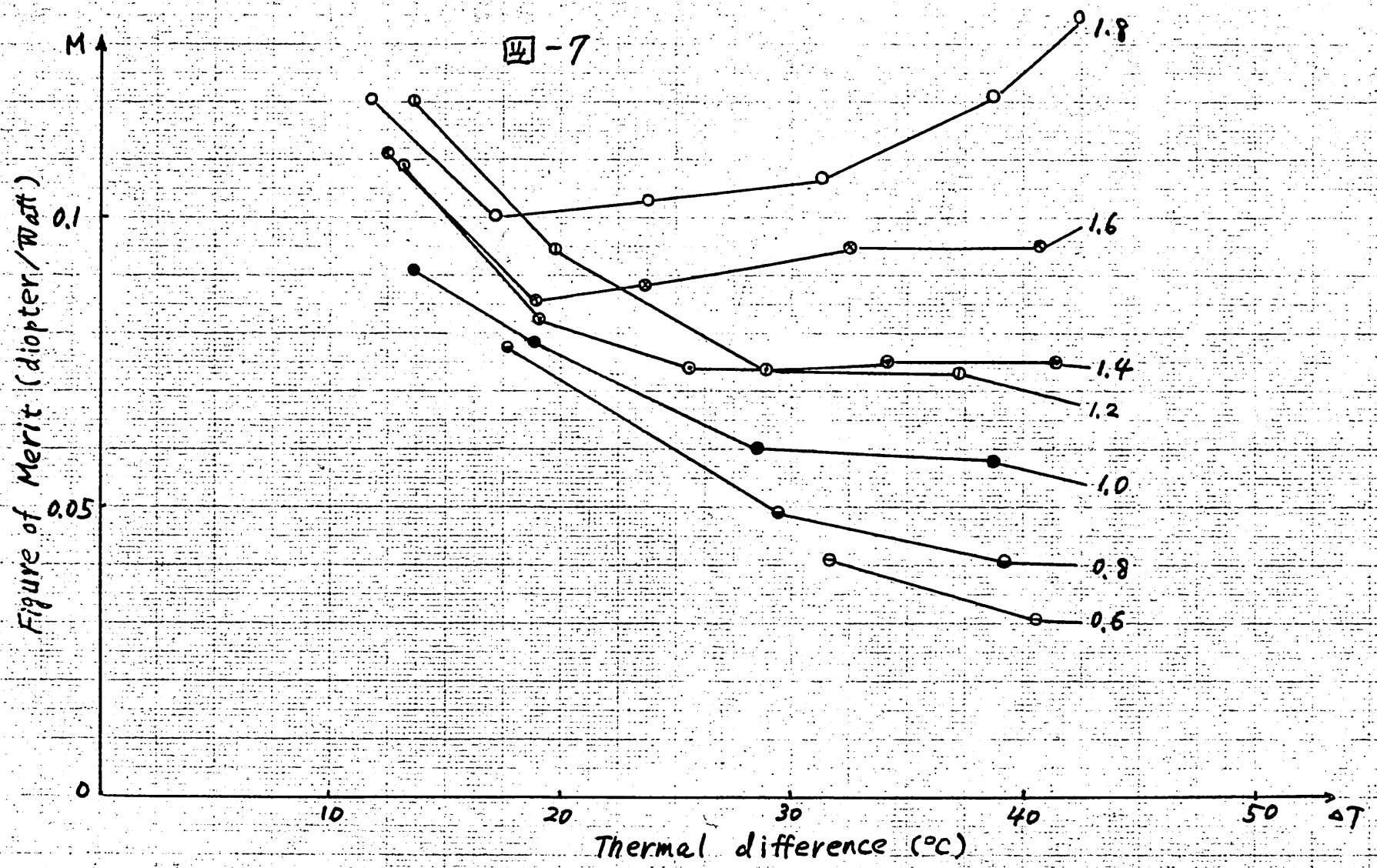

M
0.1
0.05
0
Figure of Merit (diopter/Watt)
10
20
30
40
50
ΔT
Thermal difference (°C)
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6

図-7

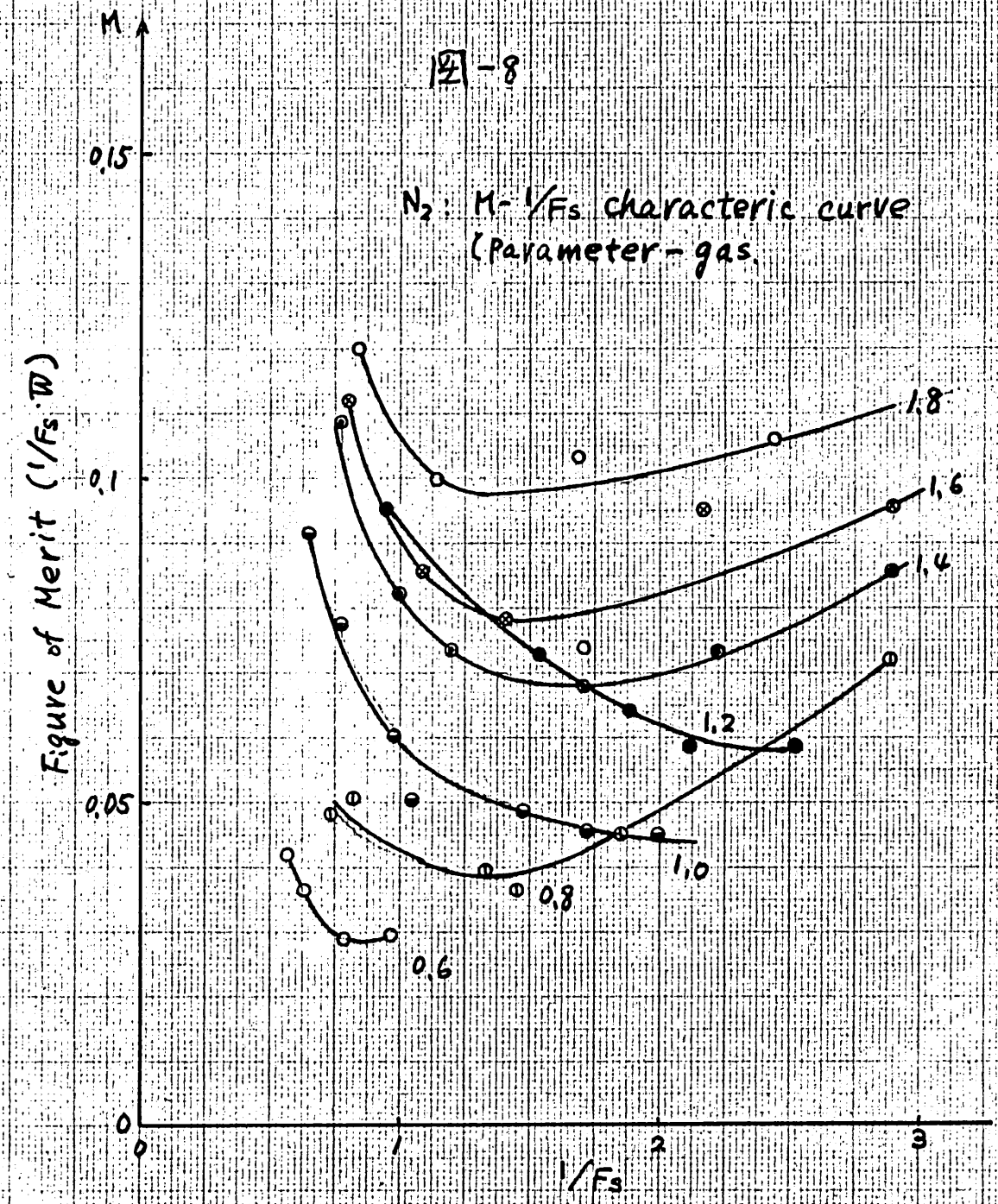
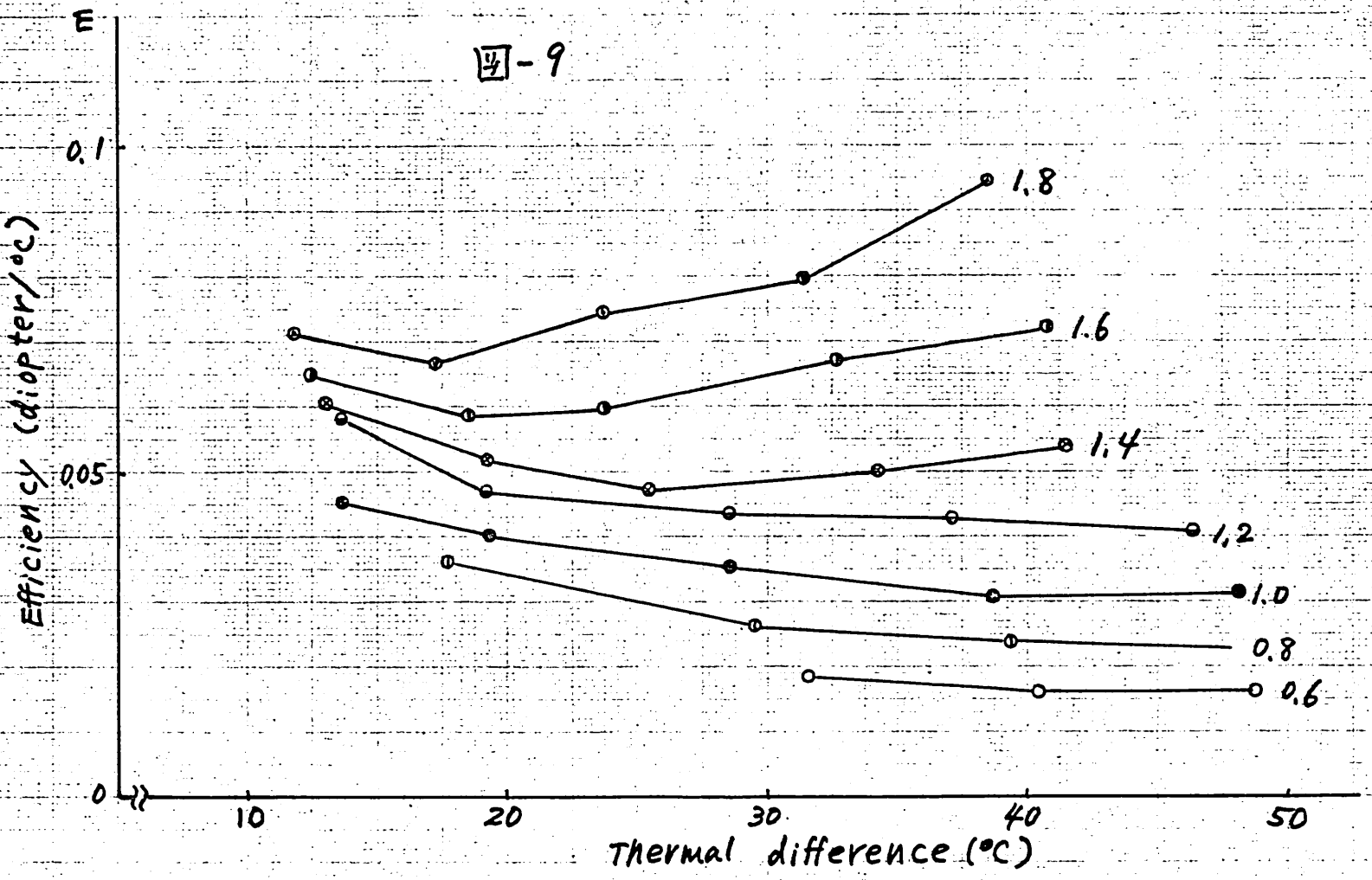


図-8

N_2 : M-1/Fs characteric curve
(Parameter-gas)

図-9


E
0.1
0.05
0
Efficiency (diopter/°C)
10
20
30
40
50
Thermal difference (°C)
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6

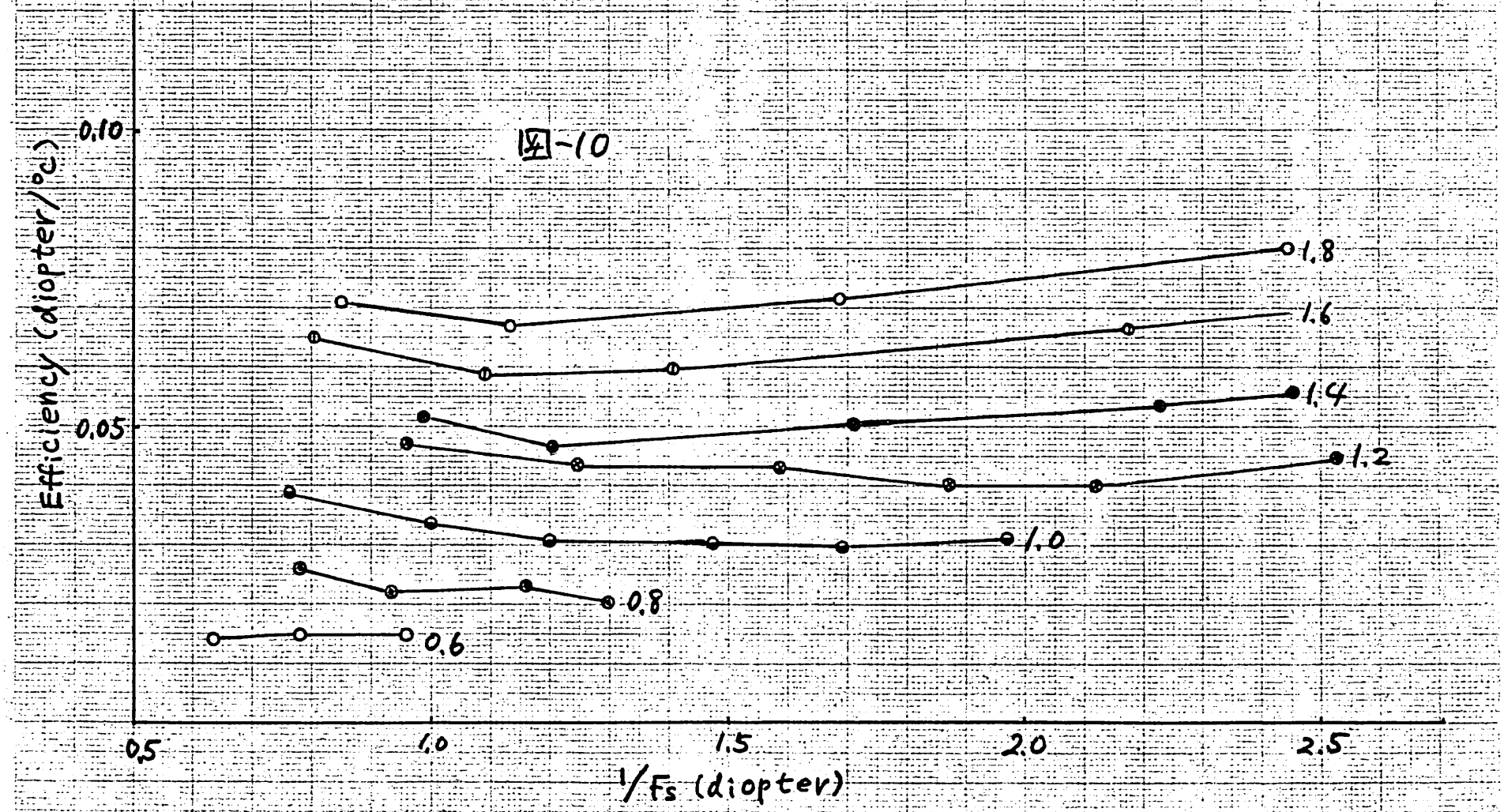
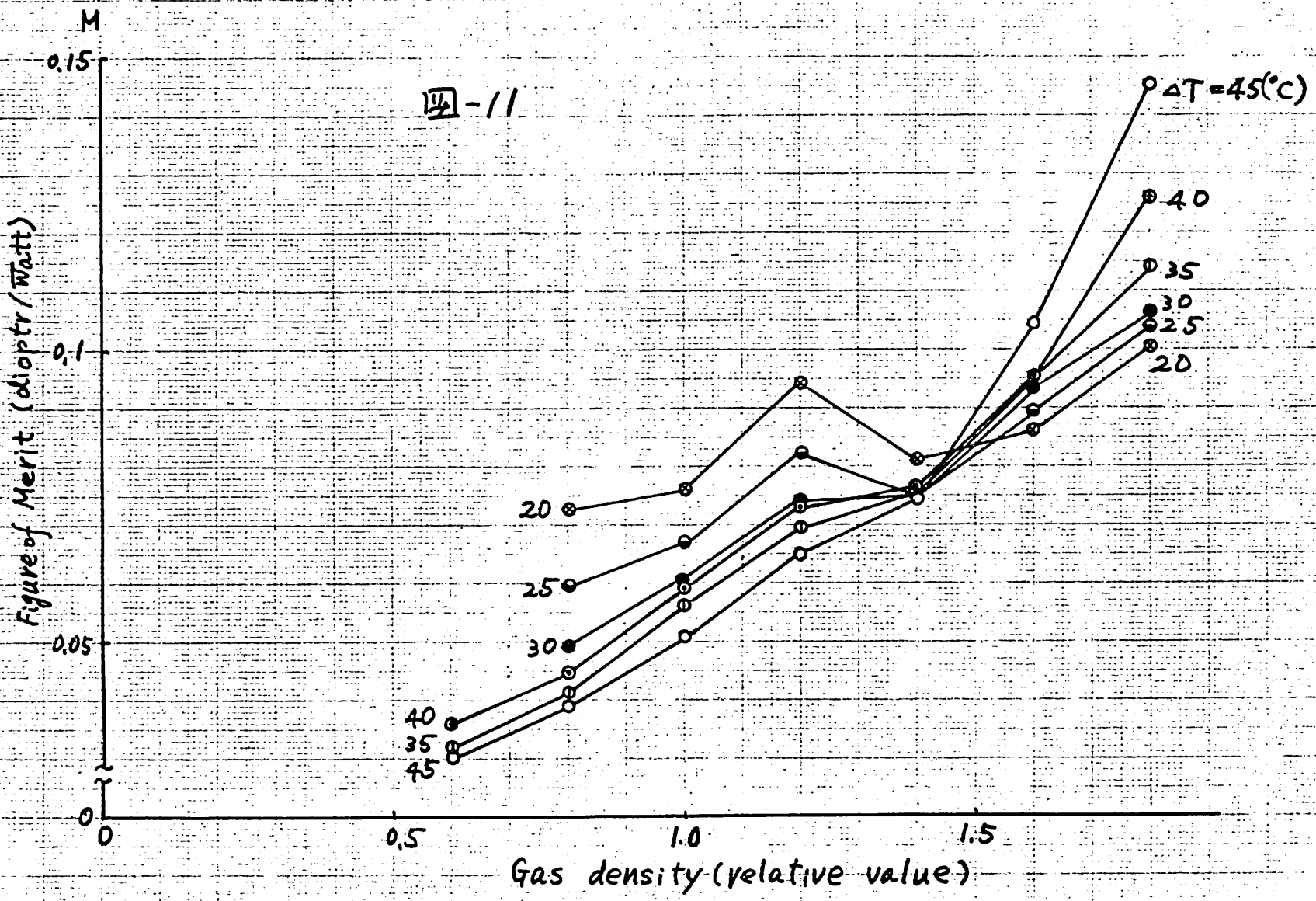


図-10
Efficiency (diopter/°C)
0.10
0.05
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
1/Fs (diopter)
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6

図-11


M
0.15
0.1
0.05
0
Figure of Merit (dioptr/Watt)
0
0.5
1.0
1.5
Gas density (relative value)
ΔT=45(°C)
40
35
30
25
20
20
25
30
40
35
45

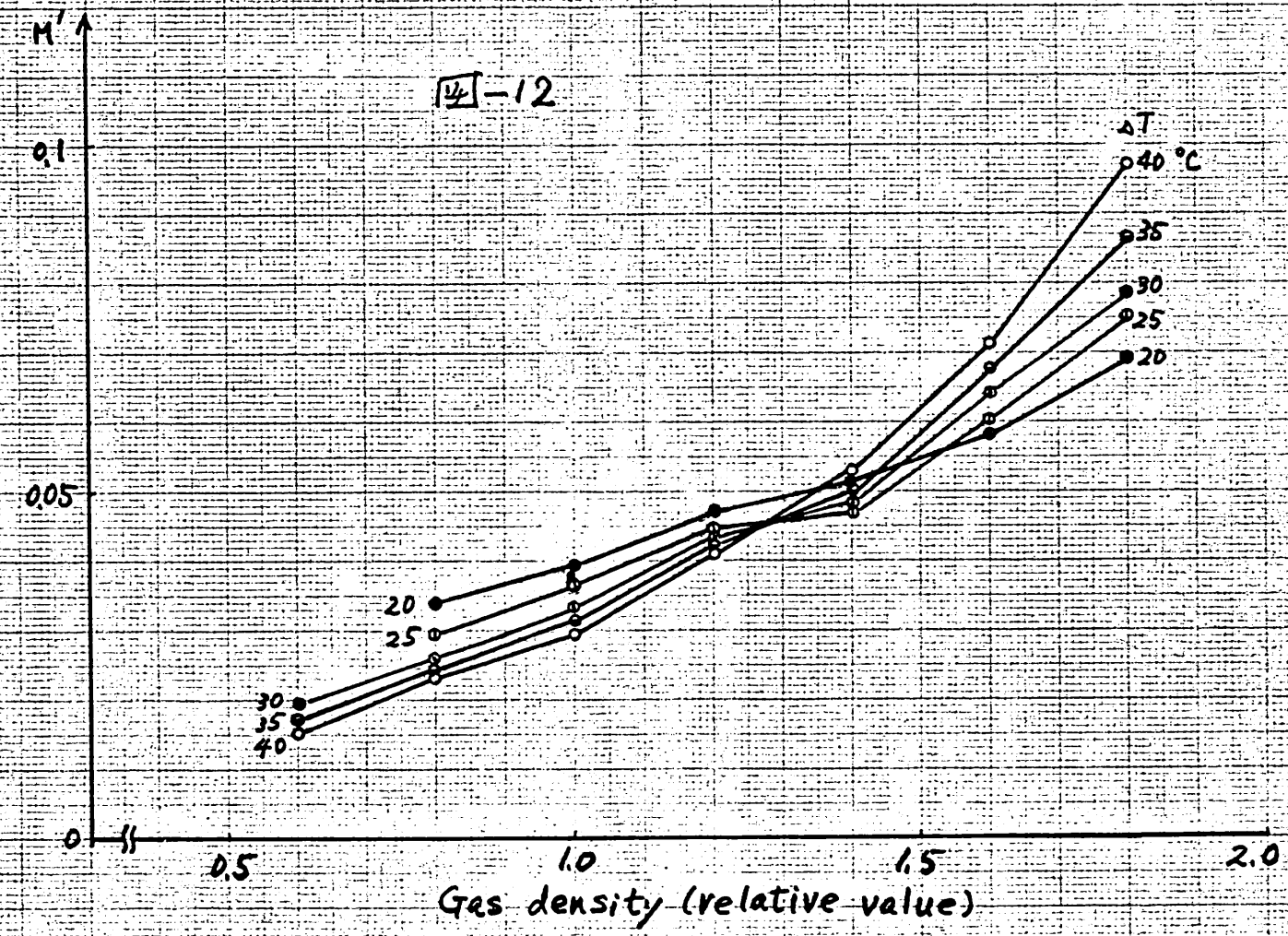
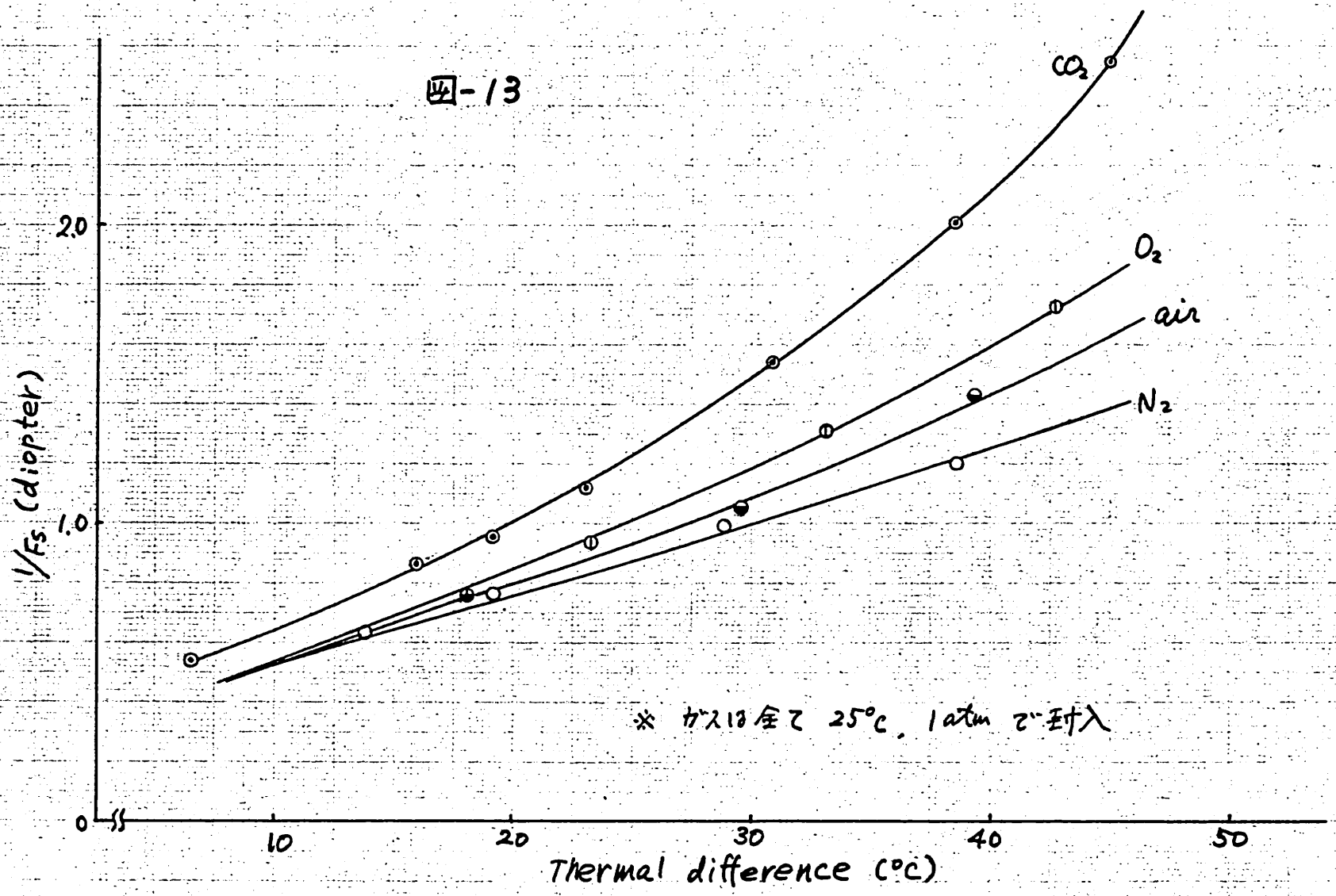

M'
0.1
0.05
0
0.5
1.0
1.5
2.0
Gas density (relative value)
ΔT
40 °C
35
30
25
20
20
25
30
35
40

図-12

図-13



※ ガスは全て 25°C, 1atm で封入

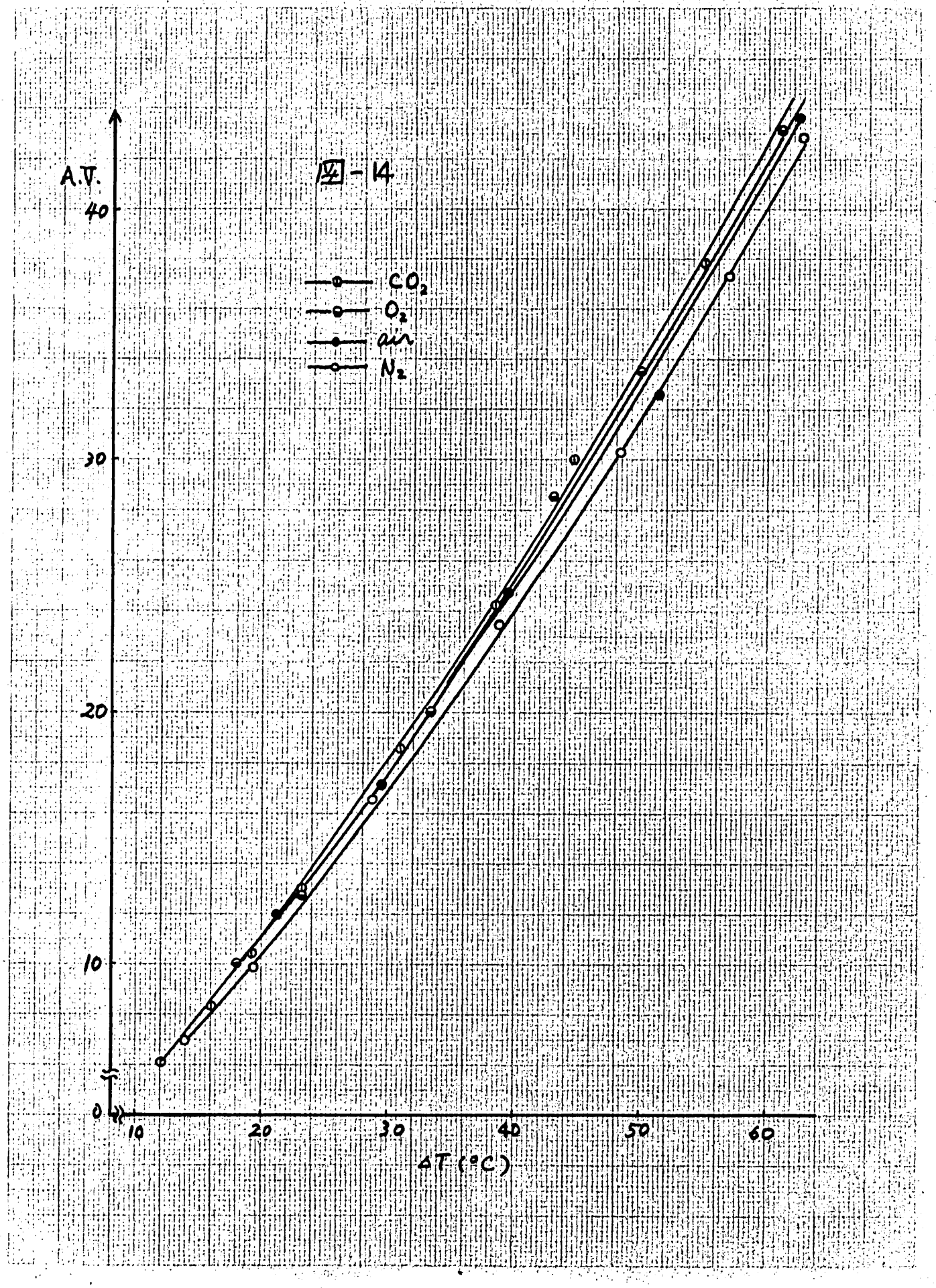
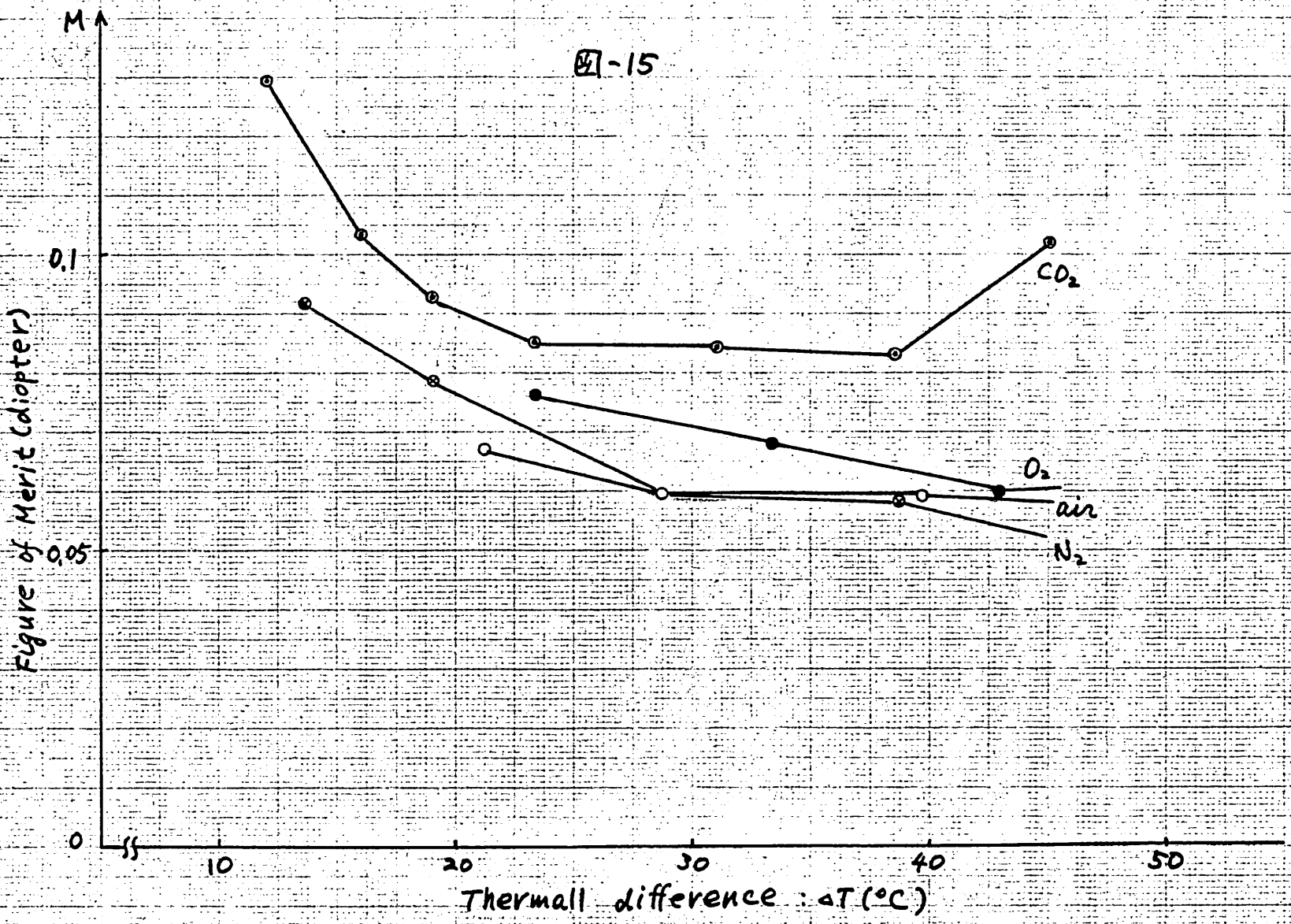


図-14
A.V.
40
30
20
10
0
CO2
O2
air
N2
10
20
30
40
50
60
ΔT (°C)

図-15


M
0.1
0.05
0
Figure of Merit (diopter)
10
20
30
40
50
Thermall difference : ΔT (°C)
CO_2
O_2
air
N_2

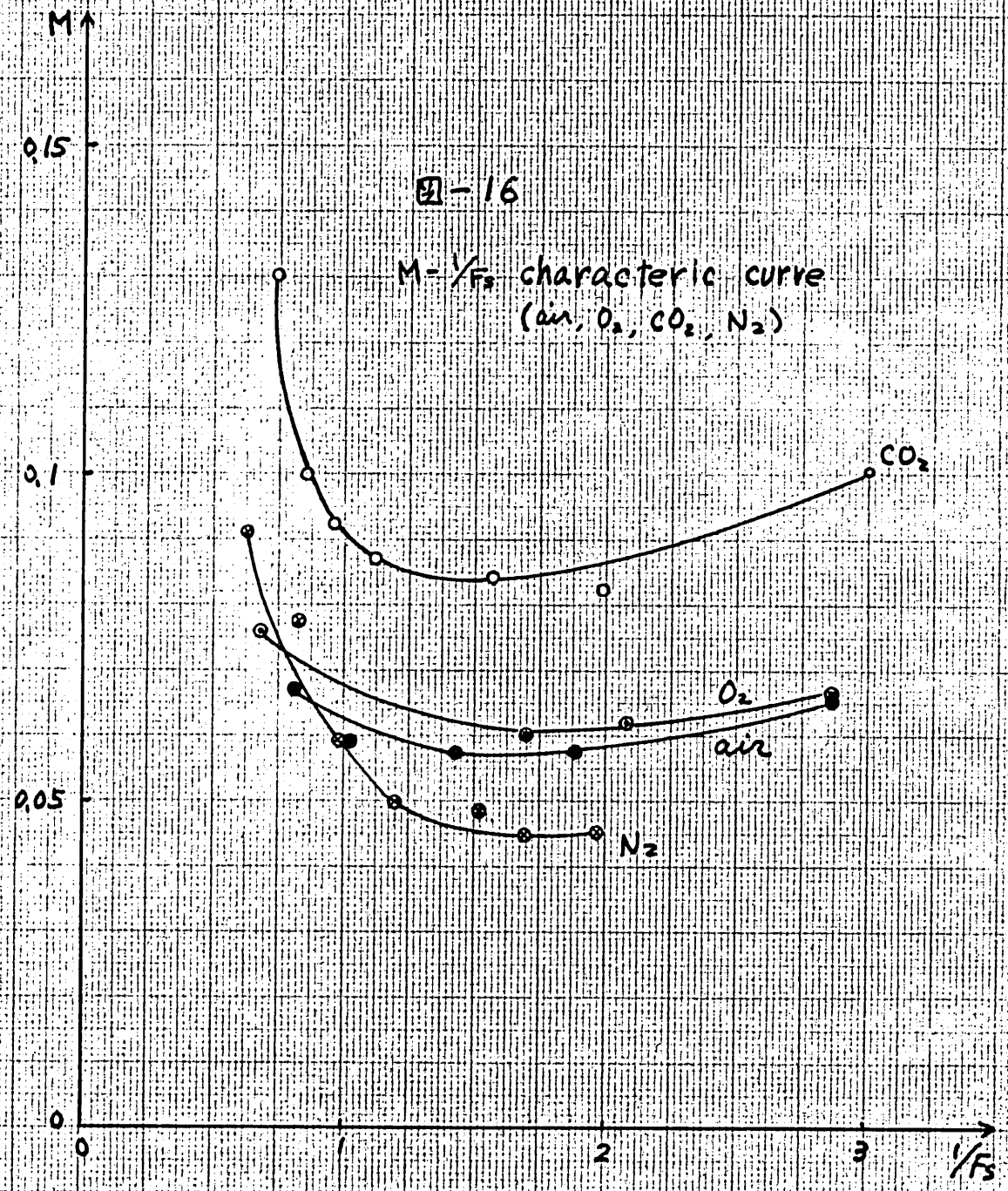


図-16

M-1/Fs characteric curve
(air, O2, CO2, N2)

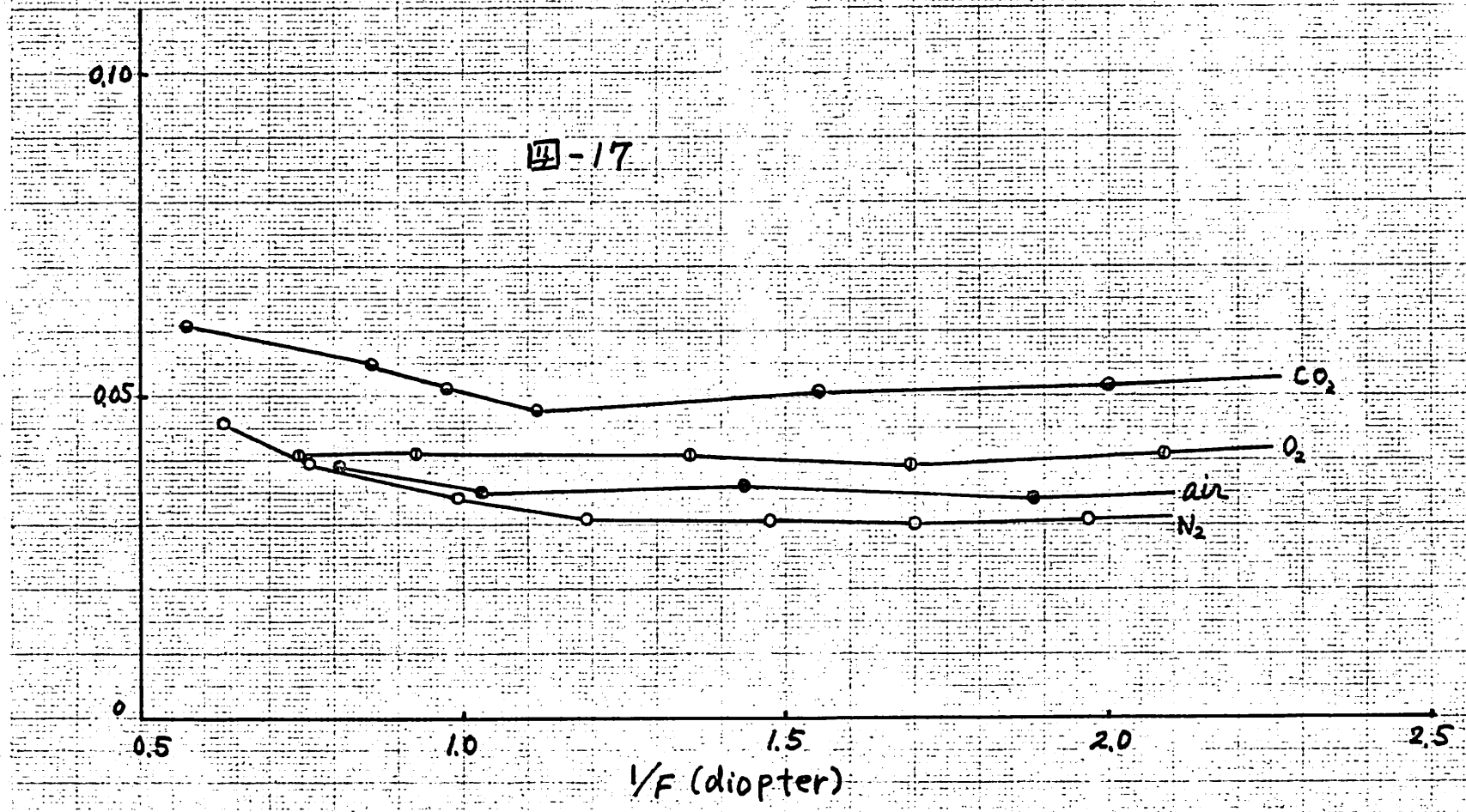


図-17

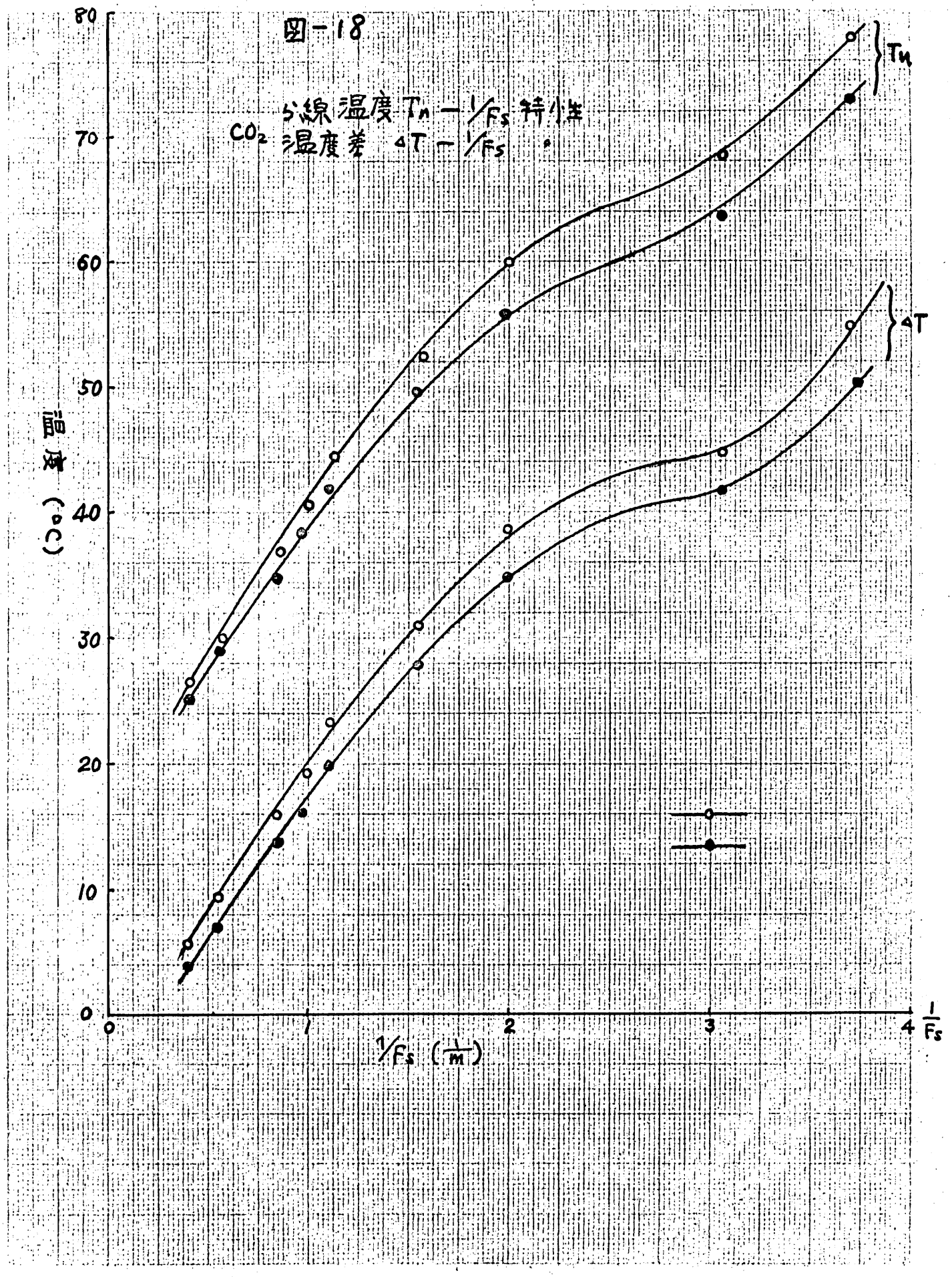


図-18
ら線温度 Tn — 1/Fs 特性
CO2 温度差 ΔT — 1/Fs 〃
Tn
ΔT
温度 (°C)
1/Fs (1/m)
1/Fs
0
10
20
30
40
50
60
70
80
1
2
3
4

輻射科学研究会資料

円形TE_{01}姿態導波管の円形曲がりに関する一考察

熊谷信昭　　吉田健一
（大阪大学工学部）

1966年2月5日

1. 緒　　言

円形TE_{01}姿態導波管によるミリ波伝送において最も困難な問題の一つは円形曲がりにおける姿態変換現象である．周知の通り信号TE_{01}姿態は円形曲がりにおいてTM_{11}ならびにTE_{1n}姿態と結合し，大きな姿態変換損失を受ける．

本文では管内誘電体の誘電率の分布，ならびに導波管断面の形状と，曲がりによる姿態変換との関係を論じ，それらを適当に選ぶことによつてTM_{11}姿態ならびにTE_{1n}姿態の発生を同時に抑制し得ることを理論的に示す．

2. 理論的解析の基礎

曲率半径Rなる円形曲り導波管の管軸方向をZ軸とし，これに垂直な断面内に極座標（r，φ）をとる．（図1）．

図1より次の関係がなりたつ．

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ y &= (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ z &= -r\sin\varphi \\ \theta &= \frac{Z}{R} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

導波管断面上の管内誘電体の誘電率分布を次式で与える．

$$\varepsilon(r, \varphi) = \varepsilon_0[1 + \delta_\varepsilon(r, \varphi)] \quad (2)$$

ただし，ε_0は任意の一定誘電率を表わす．

また，導波管断面の管壁の形状を

$$a(\varphi) = a_0[1 + \delta_a(\varphi)] \quad (3)$$

と表わす．ただし，a_0は断面が真円の場合の管の半径を表わす．（図2）．

なお，管壁は完全導体であるとする．

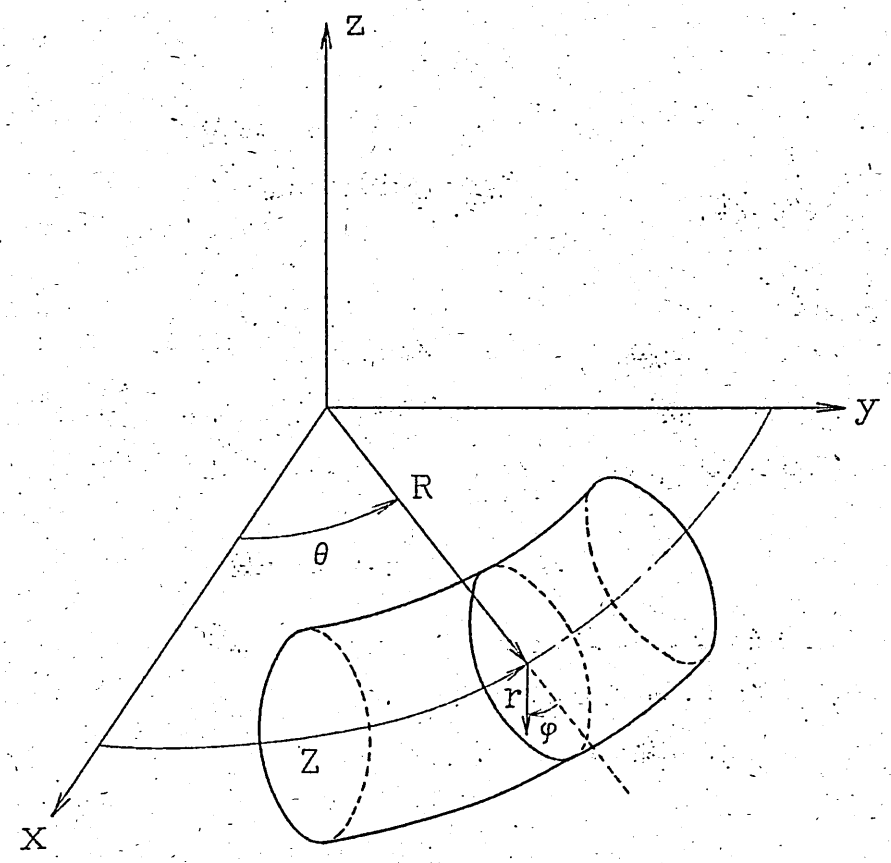


図1. 考察する系に付随する座標系

ここで，δ_ε および δ_a はいずれも a_0/R と同じ程度の微小量であるとする．

$$\delta_\varepsilon \sim \delta_a \sim a_0/R \ll 1 \tag{4}$$

式(3)で与えられる管壁 C 上の境界条件を真円 C_0 上に変換すると，

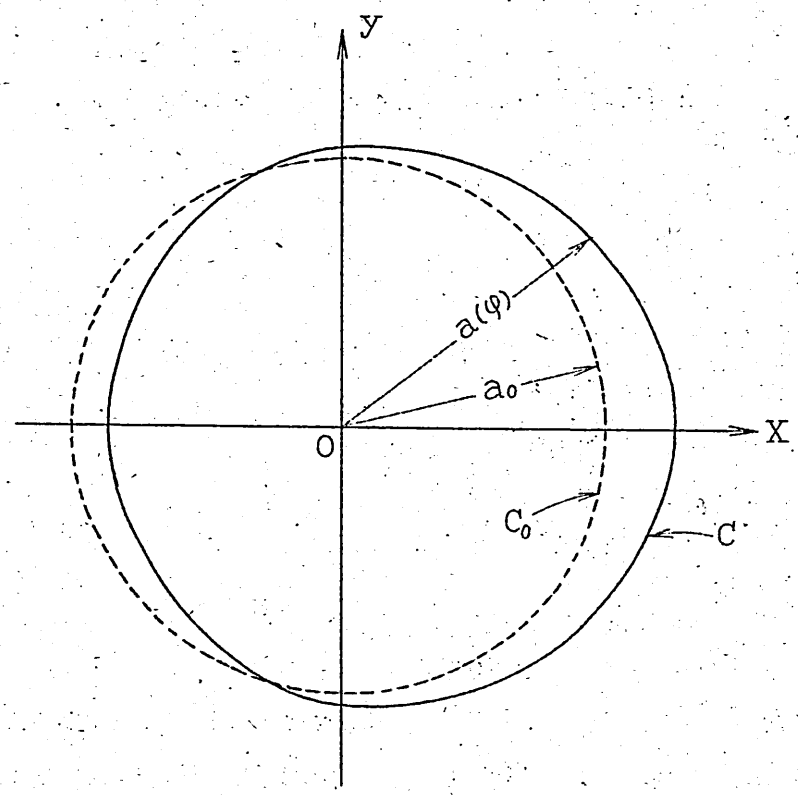


図2. 導波管の断面変形

$$\left.\begin{aligned} &E_\varphi(a_0) + a_0\delta_a \frac{\partial E_\varphi(a_0)}{\partial r} + \delta_a' E_r(a_0) = 0 \\ &E_z(a_0) + a_0\delta_a \frac{\partial E_z(a_0)}{\partial r} = 0 \\ &H_r(a_0) + a_0\delta_a \frac{\partial H_r(a_0)}{\partial r} - \delta_a' H_\varphi(a_0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

となる．ただし，

$$\delta_a' = \frac{d\delta_a}{d\varphi} \quad (6)$$

3. 姿態結合方程式

真直ぐな真円導波管中の姿態関数S_n，T_nを次式で与える．

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla_t^2 S_n + \sigma_n^2 S_n = 0 & S_n = 0 \quad \text{on } C_0 \\ \nabla_t^2 T_n + \tau_n^2 T_n = 0 & \dfrac{\partial T_n}{\partial r} = 0 \quad \text{on } C_0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

こだし，

$$\left.\begin{array}{l} S = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_n}{\pi}}\ \dfrac{J_n(\sigma_{nm} r)\sin n\varphi}{k_{nm}^S J_{n-1}(k_{nm}^S)}, \quad k_{nm}^S = \sigma_{nm} a_0,\ J_n(k_{nm}^S) = 0 \\ T = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_n}{\pi}}\ \dfrac{J_n(\tau_{nm} r)\cos n\varphi}{[(k_{nm}^T)^2 - n^2]^{1/2}\ J_n(k_{nm}^T)}, \quad k_{nm}^T = \tau_{nm} a_0,\ J_n'(k_{nm}^T) = 0 \\ \varepsilon_n = 1\ (n = 0), \quad \varepsilon_n = 2\ (n \neq 0) \end{array}\right\} (8)$$

∇_tはHamilton演算子の横断面成分を表わす．

式(7)から明らかな通り，S_nおよびT_nはそれぞれTMおよびTE姿態に附随する姿態関数である．円形曲り導波管内の電磁界ベクトルはこのような姿態関数S_n，T_nの一次結合として次のように表わすことができる．

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{E}_t = \sum_n [\ V_n^S\ \nabla_t S_n + V_n^T \nabla_t \times \boldsymbol{i}_z\ T_n] \\ \boldsymbol{H}_t = \sum_n [-I_n^S\ \nabla_t \times \boldsymbol{i}_z S_n + I_n^T \nabla_t\ T_n] \\ \varepsilon E_z = \sum_n \sigma_n^2\ V_{zn}^S\ S_n \\ \mu H_z = \sum_n \tau_n^2\ I_{zn}^T\ T_n \end{array}\right\} \quad (9)$$

ここで，ε．μはそれぞれ管内媒質の誘電率および透磁率を表わし，添字tはすべてベクトルの横断面成分を示す．また，$\boldsymbol{i}_z$はZ方向の単位ベクトルである．

S_n，T_n，$\nabla_t S_n$．$\nabla_t \times \boldsymbol{i}_z S_n$，$\nabla_t \times \boldsymbol{i}_z T_n$に関して次のような直交性が成

立する.

$$\int_{S_0} \nabla_t \times i_z S_n \cdot \nabla_t \times i_z S_m \, ds = \int_{S_0} \nabla_t S_n \cdot \nabla_t S_m \, ds = \sigma_m^2 \int_{S_0} S_m S_m \, ds =$$

$$= \sigma_n^2 \int_{S_0} S_n S_m \, ds = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad (10\text{-a})$$

$$\int_{S_0} \nabla_t \times i_z T_n \cdot \nabla_t \times i_z T_m \, ds = \int_{S_0} \nabla_t T_n \cdot \nabla_t T_m \, ds = \tau_m^2 \int_{S_0} T_n T_m \, ds =$$

$$= \tau_n^2 \int_{S_0} T_n T_m = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad (10\text{-b})$$

ただし，S_0はC_0を周辺とする導波管断面である.

また，すべてのn，mに対して

$$\int_{S_0} \nabla_t S_n \cdot \nabla_t \times i_z T_m \, ds = 0 \quad , \quad \int_{S_0} \nabla_t T_n \cdot \nabla_t \times i_z S_m \, ds = 0 \qquad (10\text{-C})$$

がなりたつ.

さて，マクスウエルの方程式を式(1)により（r・φ・Z）系で表示し，その横断面成分を完全直交系$\{\nabla_t S_n \cdot \nabla_t \times i_z T_n\}$，または$\{\nabla_t T_n \cdot \nabla_t \times i_z S_n\}$で，管軸方向成分を$S_n$，または$T_n$でそれぞれ展開し，直交条件(10)，境界条件(5)および電磁界ベクトルの級数表示(9)を用いると次のような諸式が得られる.[1]

$$V_{zm}^S = -\frac{I_m^S}{j\omega} \qquad (11\text{-a})$$

$$I_{zm}^T = -\frac{1}{j\omega} V_m^T + \frac{1}{j\omega} a_0 \sum_n \Big[a_0 \tau_n^2 \int_0^{2\pi} \delta_a T_n T_m \, d\varphi - \frac{1}{a_0} \int_0^{2\pi} \delta_a \frac{\partial T_n}{\partial \varphi} \frac{\partial T_m}{\partial \varphi}$$

$$d\varphi \Big] V_n^T - \frac{a_0}{j\omega} \sum_n V_n^S \int_0^{2\pi} \delta_a \frac{\partial S_n}{\partial r} \frac{\partial T_m}{\partial \varphi} \, d\varphi \qquad (11\text{-b})$$

$$\frac{dV_m^S}{dZ}+\frac{a_0^2}{\varepsilon}\sum_n \sigma_n^2 V_{zn}^S\int_0^{2\pi} h_z\,\delta_a\frac{\partial S_n}{\partial r}\frac{\partial S_m}{\partial r}d\varphi-\frac{1}{\varepsilon}\sum_n \sigma_n^2\sigma_m^2 V_{zn}^S\int_{S_0} h_z S_n S_m dS$$

$$=j\omega\mu\sum_n\Big[-I_n^S\int_{S_0} h_z\nabla_t\times i_z S_n\cdot\nabla_t\times i_z S_m\,ds+I_n^T\int_{S_0} h_z\nabla_t T_n\cdot\nabla_t$$

$$\times i_z S_m\,ds \qquad (11\text{-}c)$$

$$\frac{dV_m^T}{dZ}+\frac{a_0}{\varepsilon}\sum_n \sigma_n^2 V_{zn}^S\int_0^{2\pi} h_z\,\delta_a\frac{\partial S_n}{\partial r}\frac{\partial T_m}{\partial \varphi}d\varphi=-j\omega\mu\sum_n\Big[-I_n^S\int_{S_0} h_z\nabla_t$$

$$\times i_z S_n\cdot\nabla_t T_m\,ds+I_n^T\int_{S_0} h_z\nabla_t T_n\cdot\nabla_t T_m\,ds\Big] \qquad (11\text{-}d)$$

$$\frac{dI_m^S}{dZ}=-j\omega\sum_n\Big[V_n^S\int_{S_0}\varepsilon h_z\nabla_t S_n\cdot\nabla_t S_m\,ds+V_n^T\int_{S_0}\varepsilon h_z\nabla_t\times i_z T_n\cdot$$

$$\nabla_t S_m\,ds \qquad (11\text{-}e)$$

$$\frac{dI_m^T}{dZ}-\frac{1}{\mu}\sum_n \tau_n^2\tau_m^2 I_{zn}^T\int_{S_0} h_z T_n T_m\,ds=-j\omega\sum_n\Big[V_n^S\int_{S_0}\varepsilon h_z\nabla_t S_n\cdot\nabla_t$$

$$\times i_z T_m\,ds+V_n^T\int_{S_0}\varepsilon h_z\nabla_t\times i_z T_n\cdot\nabla_t\times i_z T_m\,ds\Big] \qquad (11\text{-}f)$$

ここで，　$h_z=1+\frac{r}{R}\cos\varphi$

式（11−a），（11−b）を（11−c）〜（11−f）に代入し，式(3)の仮定を考慮して1次近似を行なうと次式が得られる．

$$\frac{dV_m^S}{dZ}+\left(j\omega\mu+\frac{\sigma_m^2}{j\omega\varepsilon_0}\right)I_m^S=-\sum_n\Big[j\omega\mu C_{mn}^{SS}+\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\bar{C}_{mn}^{SS}-D_{mn}^{SS}\right)$$

$$-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}(\sigma_n^2 F_{mn}^{SS})\Big]I_n^S-\sum_n j\omega\mu\, C_{mn}^{ST}I_n^T \qquad (12\text{-}a)$$

$$\frac{dV_m^T}{dZ}+j\omega\mu I_m^T=-\sum_n\left[j\omega\mu C_{nm}^{ST}-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}(\sigma_n^2F_{nm}^{ST})\right]I_n^S-\sum_n j\omega\mu C_{mn}^{TT}I_n^T \tag{12-b}$$

$$\frac{dI_m^S}{dZ}+j\omega\varepsilon_0V_m^S=-\sum_n j\omega\varepsilon_0(C_{mn}^{SS}+D_{mn}^{SS})V_n^S-\sum_n j\omega\varepsilon_0(C_{mn}^{ST}+D_{mn}^{ST})V_n^T \tag{12-c}$$

$$\frac{dI_m^T}{dZ}+\left(j\omega\varepsilon_0+\frac{\tau_m^2}{j\omega\mu}\right)V_m^T=-\sum_n\left[\frac{\tau_m^2}{j\omega\mu}F_{nm}^{ST}+j\omega\varepsilon_0(C_{nm}^{ST}+D_{nm}^{ST})\right]V_n^S$$

$$-\sum_n\left[\frac{\tau_m^2}{j\omega\mu}(F_{mn}^{TT}-a_0^2\tau_n^2\bar{F}_{mn}^{TT})+\frac{1}{j\omega\mu}\bar{C}_{mn}^{TT}+j\omega\varepsilon(C_{mn}^{TT}+D_{mn}^{TT})\right]V_n^T \tag{12-d}$$

ここで,

$$\left.\begin{aligned}
&C_{mn}^{SS}=\int_{S_0}\frac{r}{R}\cos\varphi\,\nabla_tS_m\cdot\nabla_tS_n\,ds,\quad C_{mn}^{ST}=\int_{S_0}\frac{r}{R}\cos\varphi\,\nabla_tS_m\cdot\nabla_t\times i_z\,T_n\,ds\\
&C_{mn}^{TT}=\int_{S_0}\frac{r}{R}\cos\varphi\,\nabla_tT_m\cdot\nabla_tT_n\,ds,\quad \bar{C}_{mn}^{SS}=\sigma_n^2\sigma_m^2\int_{S_0}\frac{r}{R}\cos\varphi\,S_mS_n\,ds\\
&\bar{C}_{mn}^{TT}=\tau_n^2\tau_m^2\int_{S_0}\frac{r}{R}\cos\varphi\,T_mT_n\,ds
\end{aligned}\right\} \tag{13-a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&D_{mn}^{SS}=\int_{S_0}\delta_\varepsilon\,\nabla_tS_m\cdot\nabla_tS_n\,ds,\quad D_{mn}^{ST}=\int_{S_0}\delta_\varepsilon\,\nabla_tS_m\cdot\nabla_t\times i_z\,T_n\,ds\\
&D_{mn}^{TT}=\int_{S_0}\delta_\varepsilon\,\nabla_tT_m\cdot\nabla_tT_n\,ds,\quad \bar{D}_{mn}^{SS}=\sigma_n^2\sigma_m^2\int_{S_0}\delta_\varepsilon\,S_mS_n\,ds
\end{aligned}\right\} \tag{13-b}$$

$$\left.\begin{aligned}
&F_{mn}^{SS}=a_0^2\int_0^{2\pi}\delta_a\frac{\partial S_m(a_0)}{\partial r}\frac{\partial S_n(a_0)}{\partial r}d\varphi,\\
&F_{nm}^{ST}=a_0\int_0^{2\pi}\delta_a\frac{\partial S_n(a_0)}{\partial r}\frac{\partial T_m(a_0)}{\partial\varphi}d\varphi
\end{aligned}\right\}$$

$$F_{mn}^{TT}=\int_0^{2\pi}\delta_a\frac{\partial T_n(a_o)}{\partial\varphi}\frac{\partial T_m(a_o)}{\partial\varphi}d\varphi\,.\quad \bar{F}_{mn}^{TT}=\int_0^{2\pi}\delta_a T_n T_m d\varphi$$

次に，

$$V_m^S=\sqrt{K_m^S}(a_m^+ + a_m^-)\,,\quad I_m^S=\frac{1}{\sqrt{K_m^S}}(a_m^+ - a_m^-) \tag{14-a}$$

$$V_m^T=\sqrt{K_m^T}(b_m^+ + b_m^-)\,,\quad I_m^T=\frac{1}{\sqrt{K_m^T}}(b_m^+ - b_m^-) \tag{14-b}$$

ただし，

$$K_m^S=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_o}\left(1-\frac{\sigma_m^2}{\omega^2\varepsilon_o\mu}\right)}\quad,\quad K_m^T=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_o}\frac{1}{1-\frac{\tau_m^2}{\omega^2\varepsilon_o\mu}}} \tag{15}$$

とおいて式（12）を前進波成分（添字＋）と，後進波成分（添字－）に関する方程式に分離すると結局求める姿態結合方程式は次のようになる．

$$\frac{da_m^{\pm}}{dZ}\pm\gamma_m^s a_m^{\pm}=\sum_n\left(-j\kappa_{mn}^{SS\pm}a_n^+ + j\kappa_{mn}^{SS\mp}a_n^- - j\kappa_{mn}^{ST\pm}b_n^+ + j\kappa_{mn}^{ST\mp}b_n^-\right) \tag{16-a}$$

$$\frac{db_m^{\pm}}{dZ}\pm\gamma_m^T b_m^{\pm}=\sum_n\left(-j\kappa_{mm}^{TS\pm}a_n^+ + j\kappa_{mn}^{TS\mp}a_n^- - j\kappa_{mn}^{TT\pm}b_n^+ + j\kappa_{mn}^{TT\mp}b_n^-\right) \tag{16-b}$$

ここで，複号は同順とし，γ_m^S，γ_m^T，$\kappa_{mn}^{\alpha\beta\pm}$（$\alpha$，$\beta$＝S or T）はそれぞれ次式で与えられる．

$$\gamma_m^s=\sqrt{\sigma_m^2-\omega^2\varepsilon_o\mu}\quad,\quad \gamma_m^T=\sqrt{\tau_m^2-\omega^2\varepsilon_o\mu} \tag{17-a}$$

$$j\kappa_{mn}^{\alpha\beta\pm}=\frac{1}{2}\left\{\frac{Z_{mn}^{\alpha\beta}}{\sqrt{K_m^\alpha}\sqrt{K_n^\beta}}\pm Y_{mn}^{\alpha\beta}\sqrt{K_m^\alpha}\sqrt{K_n^\beta}\right\}\,,\ \alpha,\ \beta=\text{S or T} \tag{17-b}$$

ただし

$$
\left.
\begin{aligned}
&Z_{mn}^{SS}=j\omega\mu C_{mn}^{SS}+\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}(\overline{C}_{mn}^{SS}-\overline{D}_{mn}^{SS})-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\sigma_n^2 F_{mn}^{SS}\\
&Z_{mn}^{ST}=j\omega\mu C_{mn}^{ST}\\
&Z_{mn}^{TS}=j\omega\mu C_{nm}^{ST}-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\sigma_n^2 F_{nm}^{ST}\ ,\quad Z_{mn}^{TT}=j\omega\mu C_{mn}^{TT}\\
&Y_{mn}^{SS}=j\omega\varepsilon_0(C_{mn}^{SS}+D_{mn}^{SS})\ ,\quad Y_{mn}^{ST}=j\omega\varepsilon_0(C_{mn}^{ST}+D_{mn}^{ST})\\
&Y_{mn}^{TS}=\frac{\tau_m^2}{j\omega\mu}F_{nm}^{ST}+j\omega\varepsilon_0(C_{nm}^{ST}+D_{nm}^{ST})\\
&Y_{mn}^{TT}=\frac{\tau_m^2}{j\omega\mu}(F_{mn}^{TT}-a_0^2\tau_n^2\overline{F}_{mn}^{TT})+\frac{1}{j\omega\mu}\overline{C}_{mn}^{TT}+j\omega\varepsilon_0(C_{mn}^{TT}+D_{mn}^{TT})
\end{aligned}
\right\}\quad(17\text{-c})
$$

4. 姿態変換の抑制

TE_{01} 姿態導波管の円形曲りにおける不要 TE_{1n} および TM_{11} 姿態の発生量は前節で求めた姿態結合方程式における結合係数から評価することができる．そこで管内誘電体の誘電率分布の変化量 $\delta_\varepsilon(r,\varphi)$，および断面形状の変形量 $\delta_a(\varphi)$ の関数形をそれぞれ

$$\delta_\varepsilon(r,\varphi)=dr\cos\varphi \qquad (18\text{-a})$$

$$\delta_a(\varphi)=F\cos\varphi \qquad (18\text{-b})$$

とすると，誘電率の変化を

$$d=-\frac{2}{R} \qquad (19)$$

となるように選ぶとき，TE_{01} 姿態と TM_{11} 姿態との結合係数が周波数に無関係に零となる，すなわち，全周波数にわたつて不要 TM_{11} 姿態の発生を理論上完全に抑制することができる．この結果は S.P.Morgan[2] が文献(2)で述べていることと一致する．

次にこのような誘電率分布をもつ円形導波管の断面形状を式（18−b）で与えられる微小量だけ変形するとTE_{01}姿態とTE_{1n} 姿態群の任意の1つとの結合を任意の周波数に対して零とすることができる．たとえば，TE_{01} 姿態と，それに最も近い伝ぱん定数を有するTE_{12} 姿態との結合を中心周波数f_0で零とするためには，断面形状の変化量を

$$F=\frac{a_0}{R}\left\{\xi+\eta\left(\frac{2\pi a_0}{\lambda_0}\right)^2(1-g_{01}g_{12})\right\} \tag{20}$$

となるように選べばよい．

ここで，

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{(k_{01}^T)+(k_{12}^T)^2}{[(k_{01}^T)^2-(k_{12}^T)^2]^2},\quad \eta=\frac{2}{[(k_{01}^T)^2-(k_{12}^T)^2]^2}\\ g_{01}&=\sqrt{1-\left(k_{01}^T\Big/\frac{2\pi a_0}{\lambda_0}\right)^2},\quad g_{12}=\sqrt{1-\left(k_{12}^T\Big/\frac{2\pi a_0}{\lambda_0}\right)^2}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

λ_0：中心波長

なお，本文で行なつた第1近似の範囲内では断面の微小変形は$TE_{01}-TM_{11}$姿態間の結合係数には影響を与えない．また，式(18)のような誘電率分布ならびに断面変形によつてはTM_{11}，TE_{1n} 姿態群以外の姿態とTE_{01} 姿態との結合も生じない．

5. 数　値　例

$2a_0=51$mm，$\lambda_0=6$mm（$f_0=50$Gc），$R=2.5$m（$\frac{a_0}{R}=10^{-2}$）

$\mu=\mu_0$（真空の透磁率）

として，TM_{11}ならびにTE_{12} 姿態の発生を抑制する誘電率分布ならびに断面変形およびその特性を数値的に示そう．上記のような中空真円の円形導波管の円形曲りにおけるTM_{11}，TE_{11}，およびTE_{12} 各姿態の最大発生量（電力）は信号TE_{01}姿態に対してそれぞれ∞dB，約−7dB，約−4dBとなる．（図

3点線）

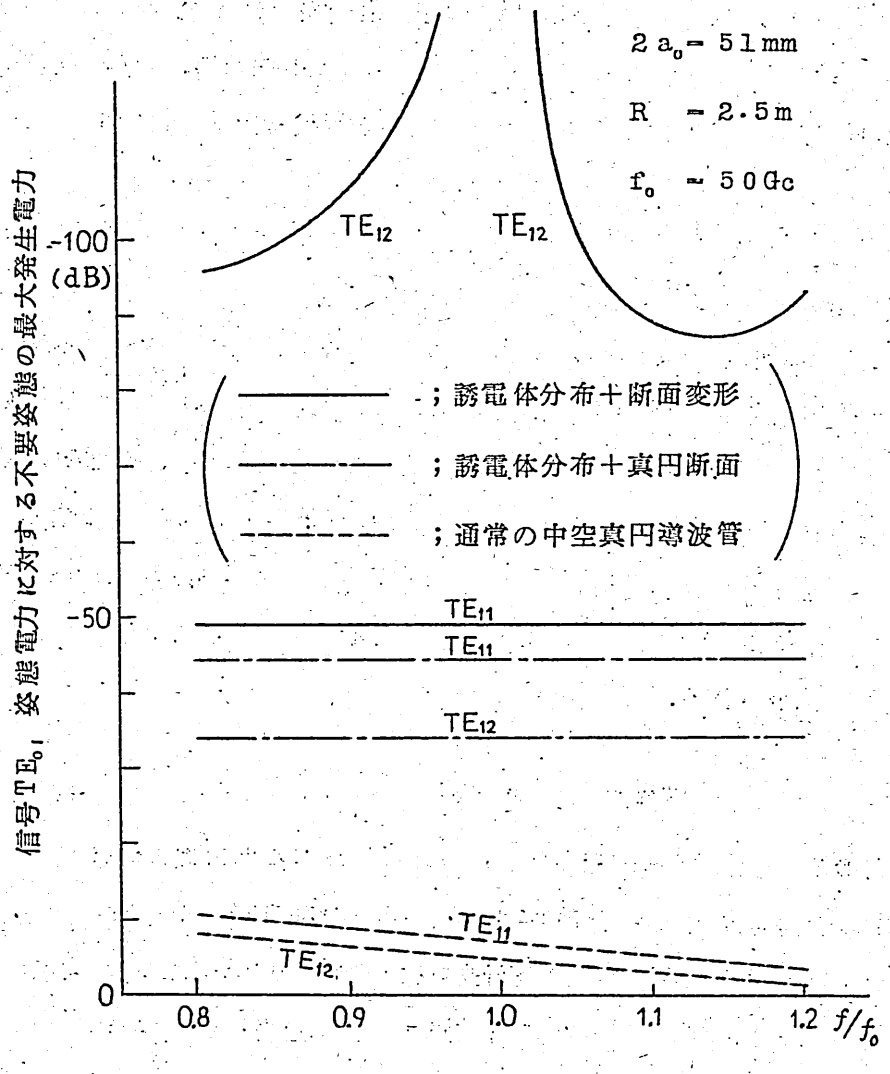


図3. 断面変形による特性改善

そこでまず式(19), (18-a) および(2)から管内誘電体の誘電率分布を

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1-\frac{2}{R}r\cos\varphi\right) = \varepsilon_0\left(1-0.8\,r\cos\varphi\right) \qquad (22)$$

とすれば全周波数にわたつてTM_{11}姿態の発生量を零とすることができる．またこのとき，不要TE_{11}およびTE_{12}姿態の最大発生量（電力）は信号TE_{01}姿態に対してそれぞれ約－45dBおよび－34dBとなる．（図3－点鎖線）

さらに，式(20)，(18-b)および(3)から導波管断面の形状を

$$a = a_0(1+F\cos\varphi) = a_0(1+0.46\times10^{-2}\cos\varphi) \tag{23}$$

とすれば，中心周波数f_0＝50GcにおいてTE_{12}姿態の発生量も零となる．またその周波数特性は図3（実線）のようになり，きわめて広い帯域にわたり不要TE_{12}姿態の発生量（電力）は信号TE_{01}姿態の電力に対して約－90dB以下となる．また図3に示した通り，このような断面変形によつて不要TE_{11}姿態の発生量も同時に約－49dBとなる．すなわちこのような誘電率の分布ならびに断面の変形によつて不要TM_{11}，TE_{12}およびTE_{11}姿態の発生量は中空真円導波管の場合にくらべてそれぞれ∞dB，約90dBおよび約40dB改善される．

6. 結　　言

円形TE_{01}姿態導波管の円形曲りについて理論的に考察し；

(1) 管内誘電体の誘電率分布を適当に選ぶことにより信号TE_{01}姿態と不要TM_{11}姿態との間の結合を全周波数にわたつて打消すことができること．

(2) さらに，このような導波管の断面形状を適当に微小変形することにより信号TE_{01}姿態と不要TE_{1n}姿態群の任意の1つとの間の結合を大幅に減少することができること．

等を明らかにし，数値例によつてその模様を示した．

日頃御べん励いただく大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに有益なる御討論をいただいた住友電工研究部弱電課長中原恒雄博士に深謝する．

文　献

(1) 熊谷信昭，吉田健一，“ミリ波伝送用円形導波管の円形曲りに関する一考察”，住友電工委託研究資料（未発表）（昭40－12）.

(2) S.P.Morgan : “Theory of curved circular waveguide containing an inhomogeneous dielectric”. Bell Syst. tech. J., vol.36, pp.1209–1251, (Sept. 1957).

輻射科学研究会資料

運動媒質中における線状アンテナの放射特性

塩沢俊之　　熊谷信昭
（大阪大学工学部）

1966年2月5日

1. 序　　言

人工衛星やロケットが空気中あるいは電離層中を高速度で通過する場合，これらの飛翔体から見れば周囲の媒質が高速度で運動することになる．また媒質自体も一般には複雑な運動をしているものと考えられる．このように高速度で運動する媒質中における電磁放射現象を調べることは工学的に興味のある問題である．ところで，いままでに行なわれた運動媒質中における電磁放射に関する研究[(1),(2),(3)]はすべて振動電気双極子からの放射のみを取り扱っている．R.T.ComptonとC.T.Tai[(1)]は非分散性の線形，等方，均質媒質中における振動電気双極子からの放射について考察し，放射指向性および放射抵抗は媒質が静止している場合と同じになり，ただ位相速度のみが方向によつて異なることを示した．

ところがアンテナの大きさが波長と同程度あるいはそれ以上になると，任意の観測点における電磁界はアンテナの各点からくる波を合成したものであるから，放射指向性および放射インピーダンスは一般に媒質が静止している場合に比べて変化することが予想される．

そこで本文では最も基本的なアンテナである線状アンテナを取り上げ，その運動媒質中における放射指向性および放射インピーダンスについて考察する．

2. 基　礎　理　論

アンテナと観測者は相対的に静止しており，周囲の媒質がこれらに対して一様な速度で運動しているものとする．また媒質は無限に広がつており，線形，等方かつ一様であるとする．

電磁界が時間的に $e^{j\omega t}$ なる変化をするものとすれば，アンテナおよび観測者の静止座標系においては，Maxwell の方程式は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \times E + j\omega B = 0 \\ &\nabla \times H - j\omega D = J \\ &\nabla \cdot B = 0 \\ &\nabla \cdot D = \rho \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ここで J および ρ は印加電流密度およびそれに付随する電荷密度を表わすものとする．

また J，ρ は次の連続の条件を満足する．

$$\nabla \cdot J + j\omega\rho = 0 \qquad (2)$$

媒質が静止している場合には B は H のみに，また D は E のみに関係するが媒質が運動している場合には一般に B および D は E，H の両方に関係する．媒質の速度を v，真空中の光速度を c とすると，$(v/c)^2 \ll 1$ の場合にはこれらの関係は次式で与えられる．[4],[5]

$$\left.\begin{aligned} B &= \mu H - \Lambda \times E \\ D &= \varepsilon E + \Lambda \times H \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ただし，

$$\Lambda = (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)\, v \qquad (4)$$

ここで ε，μ はそれぞれ媒質が静止している場合の誘電率および透磁率であり，ε_0，μ_0 はそれぞれ真空の誘電率および透磁率である．式(1)と式(3)とから次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} &(\nabla - j\omega\Lambda) \times E = -j\omega\mu H \\ &(\nabla - j\omega\Lambda) \times H = J + j\omega\varepsilon E \\ &(\nabla - j\omega\Lambda) \cdot H = 0 \\ &(\nabla - j\omega\Lambda) \cdot E = \frac{\rho^*}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ただし

$$\rho^* = \rho + \Lambda \cdot J \tag{6}$$

式(6)を用いて式(2)を書き直すと次のようになる．

$$(\nabla - j\omega\Lambda) \cdot J + j\omega\rho^* = 0 \tag{7}$$

式(5)および式(7)が，運動媒質中の電磁界基本方程式である．ここでEおよびHを次のように変換する[5]

$$\left.\begin{aligned} E &= e^{j\omega\Lambda\cdot R} E_1 \\ H &= e^{j\omega\Lambda\cdot R} H_1 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ただしRは原点から観測点に向かう位置ベクトルである．式(5)と式(8)とから次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times E_1 &= -j\omega\mu H_1 \\ \nabla \times H_1 &= e^{-j\omega\Lambda\cdot R} J + j\omega\varepsilon E_1 \\ \nabla \cdot H_1 &= 0 \\ \nabla \cdot E_1 &= e^{-j\omega\Lambda\cdot R} \frac{\rho^*}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ここで次のようなベクトルポテンシャルA_1およびスカラーポテンシャルϕ_1を導入する．

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\mu} \nabla \times A_1 \\ E_1 &= -j\omega A_1 - \nabla \phi_1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

A_1およびϕ_1は次のLorentz条件を満足するものとする．

$$\nabla \cdot A_1 + j\omega\varepsilon\mu\phi_1 = 0 \tag{11}$$

このようにA_1およびϕ_1を導入すると式(9)は次のようなA_1およびϕ_1のみに関する波動方程式に変形される．

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 A_1 + k^2 A_1 &= -\mu e^{-j\omega\Lambda\cdot R} J \\ \nabla^2 \phi_1 + k^2 \phi_1 &= -e^{-j\omega\Lambda\cdot R} \frac{\rho^*}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ここで

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{13}$$

式(12)の解は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\mu}{4\pi}\int\frac{e^{-j\omega A\cdot R'}J(R')e^{-jk|R-R'|}}{|R-R'|}dv' \\ \phi_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{e^{-j\omega A\cdot R'}\rho^*(R')e^{-jk|R-R'|}}{|R-R'|}dv' \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式(14)で与えられる A_1 ，ϕ_1 は式(7)によつてLorentz条件(11)を満足している．

3．線状電流源による放射

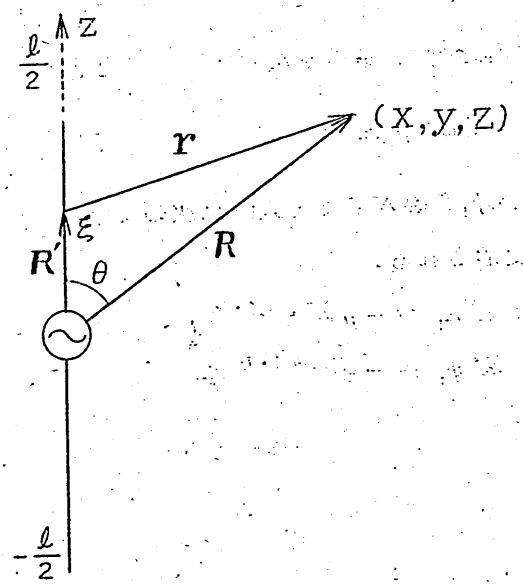


図１　線状アンテナ

図1に示すような長さℓなる線状アンテナからの放射について考える．アンテナの軸方向をz方向に選ぶとJはz方向成分のみとなり，したがつて式(14)からA_1はz方向成分A_{1Z}のみとなる．いま電流分布を$I(\xi)$とすると，A_{1Z}は式(14)から次のようになる．

$$A_{1Z} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{e^{-j(\omega \Lambda \cdot R' + kr)}}{r} I(\xi)d\xi \tag{15}$$

ただし　$r = |R - R'|$である．

$R \gg \ell$の場合には図1から次の関係が成り立つ．

$$r = R - \xi\cos\theta \tag{16}$$

またRおよびΛの球座標表示を

$$R = (R, \theta, \varphi), \quad \Lambda = (\Lambda, \alpha, \beta)$$

とするとRが十分大きい場合には式(15)は式(16)を用いて次のようになる．

$$A_{1Z} = \frac{\mu e^{-jkR}}{4\pi R}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{j(k\cos\theta - \omega\Lambda\cos\alpha)\xi} I(\xi)d\xi \tag{17}$$

E_1は式(10)，(11)からA_1のみによつて次のように表わすことができる．

$$E_1 = -j\omega A_1 + \frac{\nabla\nabla\cdot A_1}{j\omega\varepsilon\mu} \tag{18}$$

式(17)を式(18)および式(10)に代入して放射電磁界を求めると次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= e^{j\omega\Lambda\cdot R}E_{1\theta} = \frac{j\omega\mu}{4\pi}\frac{\sin\theta}{R}e^{-jkR}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{j(k\cos\theta - \omega\Lambda\cos\alpha)\xi} I(\xi)d\xi \\ H_\varphi &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_\theta \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
&K \equiv k - \omega\Lambda \cos\psi = k(1-\eta\cos\psi)\\
&\cos\psi = \sin\alpha\sin\theta\cos(\varphi-\beta) + \cos\alpha\cos\theta\\
&\eta \equiv \frac{\omega\Lambda}{k} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{v}{u}\\
&\psi : R\text{と}\Lambda\text{とのなす角}\\
&v : \text{媒質の速度}\\
&u : \text{静止媒質中の光速度}\\
&n : \text{静止媒質の屈折率}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

特別の場合として，電流定在波による放射電磁界について考察する．アンテナの長さ ℓ を半波長の整数倍とすれば電流分布 $I(\xi)$ は次のように書くことができる．

$$\left.\begin{aligned}
&I(\xi) = I_0 \sin\left(k\xi + \frac{m\pi}{2}\right)\\
&k = \frac{m\pi}{\ell}
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

式(21)を式(19)に代入して積分を行なうと，E_θ は次のようになる．

$$E_\theta = j\frac{I_0}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\sin\theta}{R}\,e^{-jKR}\,\frac{\left\{(-1)^{m-1}e^{j\frac{m\pi}{2}(\cos\theta-\eta\cos\alpha)} + e^{-j\frac{m\pi}{2}(\cos\theta-\eta\cos\alpha)}\right\}}{1-(\cos\theta-\eta\cos\alpha)^2} \quad (22)$$

E_θ はまた次のように書くこともできる．

$$\left.\begin{aligned}
&E_\theta = j\frac{I_0}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\sin\theta}{R}\,e^{-jKR}\,\frac{\cos\left[\frac{m\pi}{2}(\cos\theta-\eta\cos\alpha)\right]}{1-(\cos\theta-\eta\cos\alpha)^2}\\
&\qquad (m=1,\ 3,\ 5\cdots\cdots)
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

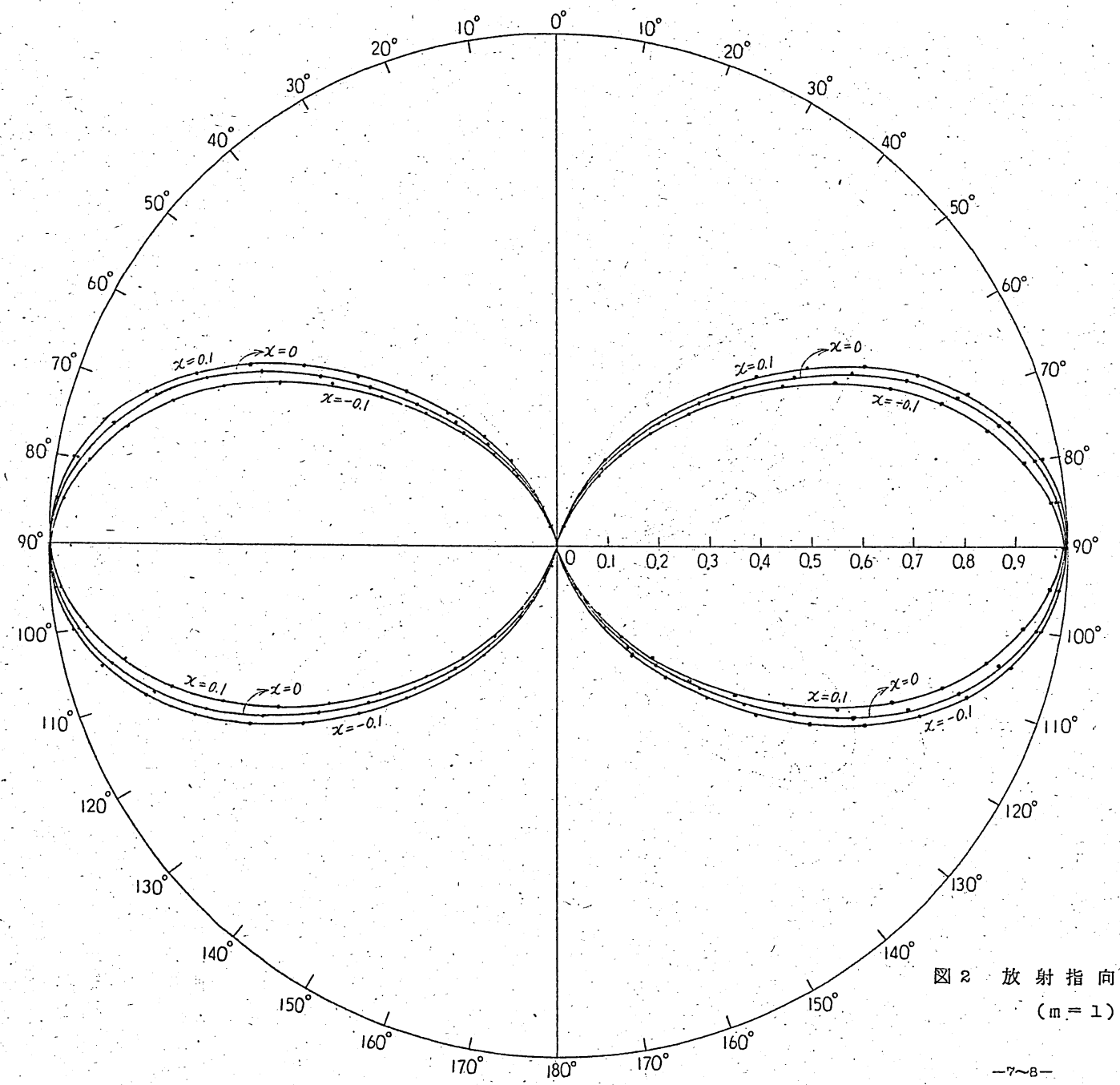

0°
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
100°
110°
120°
130°
140°
150°
160°
170°
180°
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
x=0.1
x=0
x=-0.1

図2　放射指向性
（m＝1）

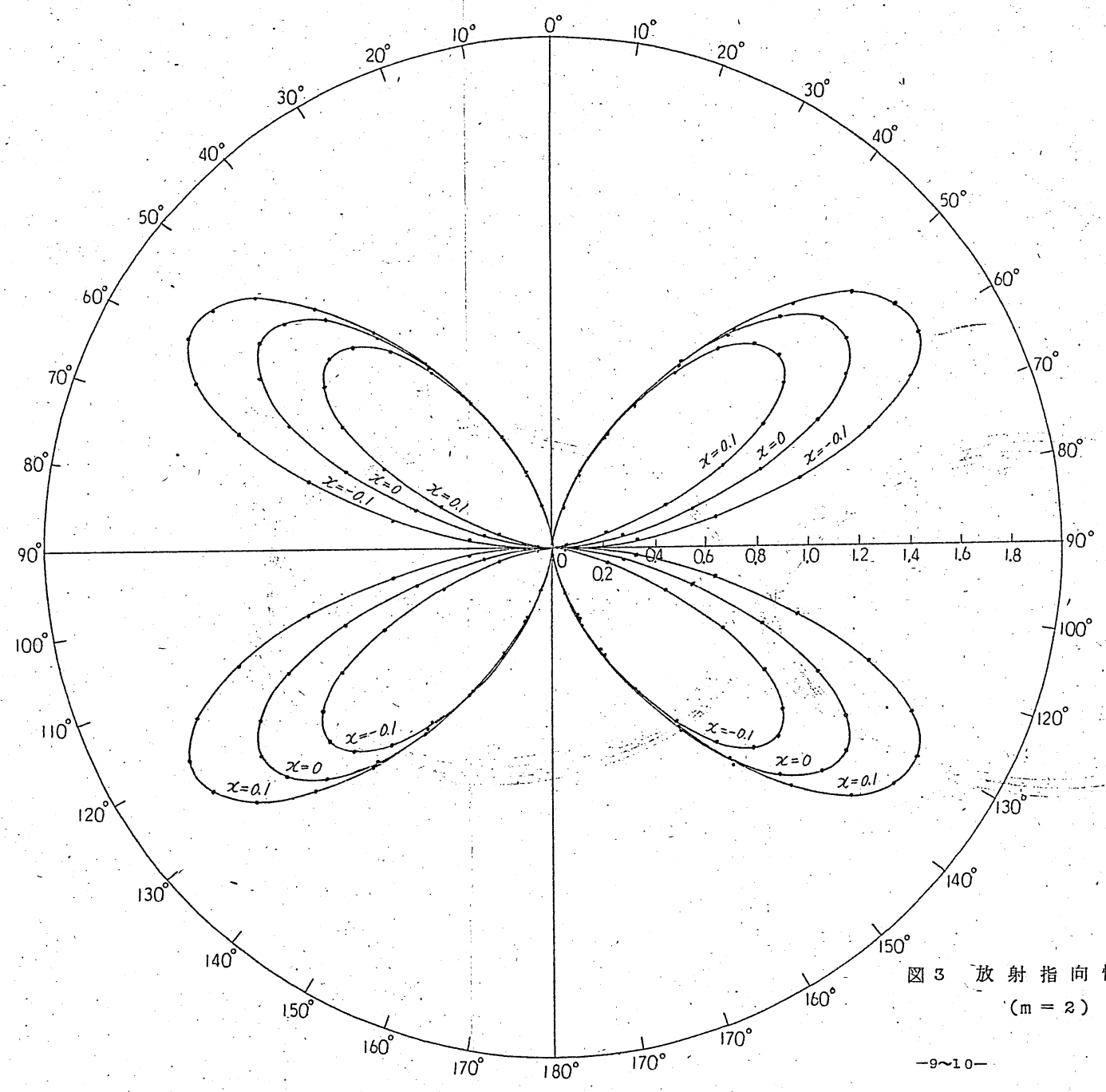

0°
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90°
100°
110°
120°
130°
140°
150°
160°
170°
180°
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
x=0.1
x=0
x=-0.1

図３　放射指向性
（m ＝ ２）

$$E_\theta = \frac{I_0}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\sin\theta}{R}\,e^{-jKR}\,\frac{\sin\left[\frac{m\pi}{2}(\cos\theta-\eta\cos\alpha)\right]}{1-(\cos\theta-\eta\cos\alpha)^2}$$

$$(m=2,\ 4,\ 6\ \cdots\cdots)$$

またポインティングベクトルの大きさをSとすると，Sは次式で与えられる．

$$S = \frac{1}{2}E_\theta H_\varphi^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ |E_\theta|^2 \tag{24}$$

ここでH_φ^*はH_φの複素共やくを表わす．

式(23)を代入すると

$$S = \frac{1}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ \frac{I_0^2}{R^2}\left\{\begin{matrix} F_0^m \\ F_e^m \end{matrix}\right\} \tag{25}$$

ここでF_0^m，F_e^mはそれぞれ次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} F_0^m &= \frac{\sin^2\theta\cos^2\left[\frac{m\pi}{2}(\cos\theta-x)\right]}{\left[1-(\cos\theta-x)^2\right]^2} \\ &\qquad (m=1,\ 3,\ 5\ \cdots\cdots) \\ F_e^m &= \frac{\sin^2\theta\sin^2\left[\frac{m\pi}{2}(\cos\theta-x)\right]}{\left[1-(\cos\theta-x)^2\right]^2} \\ &\qquad (m=2,\ 4,\ 6\ \cdots\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

ただし

$$x = \eta\cos\alpha \tag{27}$$

放射指向性F_0^mおよびF_e^mの数値計算例を$m=1$，$m=2$について図示すると，図2および図3のようになる．式(26)から分かるように放射指向性は媒質の速度のアンテナに平行な成分だけに依存し，垂直成分には関係しない．放

射指向性が極大になる位置は，図2および図3に示すように，媒質の速度のアンテナに平行な成分の方向にずれ，その成分が大きくなるほど，ずれも大きくなる．たとえばm＝1でx＝±0.1の場合には，それぞれθ＝90°から約±2°ずれている．またm＝2でx＝±0.1の場合には，それぞれ約±5°ずれている．このように媒質の運動は一般に放射指向性パターンをアンテナに平行な媒質の速度成分の方向にずらすという効果をもつ．

次に全放射電力Pは式(25)で与えられるSを半径Rの球面上で積分することにより次のようになる．

$$P = \frac{I_0^2}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\begin{Bmatrix}F_o^m\\F_e^m\end{Bmatrix}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{28}$$

上式のPより放射抵抗R_rは

$$R_r = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\begin{Bmatrix}F_o^m\\F_e^m\end{Bmatrix}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{29}$$

となる．

式(26)で与えられるF_o^m，F_e^mを式(29)に代入して積分を行なうと，R_rは$x \ll 1$の場合には次のようになる．

$$R_r = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\log\left(\frac{2}{x}+1\right)+\log\left(\frac{2}{x}-1\right)\right.$$
$$\left.+2\,Ci(m\pi x)-Ci(2m\pi+m\pi x)-Ci(2m\pi-m\pi x)\right\}$$
$$(m=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots) \tag{30}$$

特にx＝0の場合にはR_rは次のようになる．

$$R_{ro} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\log 2m\pi\gamma - Ci(2m\pi)\right\} \tag{31}$$

ここで$\gamma = 1.7811$であり，また$Ci(x)$は次式で定義される余弦積分である．

$$Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt \tag{32}$$

4．起電力法[6]による放射インピーダンスの計算

ここでは起電力法によつて線状アンテナの放射インピーダンスを計算する．
そのためにまずアンテナに誘起される電界を計算する．
E_1のz方向成分E_{1z}は式(18)から次のようになる．

$$E_{1z} = -j\omega A_{1z} + \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{j\omega\varepsilon\mu}\left(k^2 A_{1z} + \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial z^2}\right) \tag{33}$$

ここでA_{1z}は式(15)によつて与えられる．
いま，

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\xi)^2}$$

なることに注意すると，次の関係が成り立つ．

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\frac{e^{-jkr}}{r} \tag{34}$$

式(15)，(32)，(34)からE_{1z}は次のようになる．

$$E_{1z} = -j\frac{1}{4\pi\omega\varepsilon}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + k^2\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\right\} e^{-j\omega\Lambda\xi\cos\alpha} I(\xi)d\xi \tag{35}$$

式(21)で与えられる電流分布を上式に用い，$x \ll 1$とすると

$$E_{1Z} = -j\frac{I_0}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[(-1)^{m-1}e^{-j\frac{m\pi}{2}x}\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} + e^{j\frac{m\pi}{2}x}\frac{e^{-jkr_2}}{r_2}\right] \quad (36)$$

ただし

$$r_1 = \sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{\ell}{2}\right)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2+y^2+\left(z+\frac{\ell}{2}\right)^2} \quad (37)$$

ここでr_1，r_2はそれぞれ観測点とアンテナの上端および下端との距離である．アンテナ導体上の電界分布E_Zは式(8)，(36)から次のようになる．

$$E_Z = -j\frac{I_0}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[(-1)^{m-1}e^{-j\frac{m\pi}{2}(x+1)}\frac{e^{jk(1+x)z}}{\frac{\ell}{2}-z} + e^{j\frac{m\pi}{2}(x-1)}\frac{e^{-jk(1-x)z}}{\frac{\ell}{2}+z}\right] \quad (38)$$

一方線状アンテナの放射インピーダンスZ_rは次式で定義される．

$$Z_r = -\frac{1}{I_0^2}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} E_z I^* dz \quad (39)$$

ここでI^*はIの複素共やくを表わす．

式(21)および(38)を式(39)に代入して積分を行なうとZ_rの実数部は式(30)で与えられる放射抵抗R_rに等しくなり．また虚数部X_rは次のようになる．

$$X_r = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[Si(2m\pi+m\pi x)+Si(2m\pi-m\pi x)\right] \quad (40)$$

ここで$Si(x)$は正弦積分であり，次式で定義される．

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \quad (41)$$

特に $x=0$ の場合には式(40)は次のようになる．

$$X_{r0} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ \mathrm{Si}(2m\pi) \tag{42}$$

式(42)は式(31)と同様すでによく知られている関係である．

5．結　　言

本資料では運動媒質中における線状アンテナの放射特性について考察し，放射指向性および放射インピーダンスを求めた．その結果，周囲の媒質が運動する場合には，媒質が静止している場合に比べて放射特性が変化することが明らかになつた．

終りに日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授ならびにご協力いただいた大阪大学工学部 間 剛氏に深謝する．

文　　献

(1) R.T.Compton and C.T.Tai, "Radiation from Harmonic Sources in a Uniformly Moving Medium", IEEE Trans., AP-13 (July, 1965)

(2) P.Daly, K.S.H.Lee and C.H.Papas, "Radiation Resistance of an Oscillating Dipole in a Moving Medium", IEEE Trans., AP-13 (July, 1965)

(3) K.S.H.Lee and C.H.Papas, "Antenna Radiation in a

Moving Dispersive Medium", IEEE Trans., AP-13 (September, 1965)

(4) A.Sommerfeld, "Electrodynamics", P.282, Academic Press Inc., (1952)

(5) J.R.Collier and C.T.Tai, "Guided Waves in Moving Media", IEEE Trans., MTT-13 (July, 1965)

(6) 虫明康人, "アンテナ・電波伝播" P.46, コロナ社

付　録（積分計算）

(1) 式(29)の計算

$$R_r = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_0^m \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta \cos^2\left[\frac{m\pi}{2}(\cos\theta - x)\right]}{\left[1-(\cos\theta - x)^2\right]^2} d\theta \qquad (A-1)$$

ここで変数変換

$$u = \cos\theta - x$$

を行なうと，

$$R_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_{-1-x}^{1-x} \frac{\{1-(u+x)^2\}\cos^2\frac{m\pi}{2}u}{(1-u^2)^2} du$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_{-1-x}^{1-x} \frac{\{1-(u+x)^2\}(1+\cos m\pi u)}{(1-u^2)^2} du$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\int_{-1-x}^{1-x} \frac{1+\cos m\pi u}{1-u^2} du - 2x\int_{-1-x}^{1-x} \frac{u(1+\cos m\pi u)}{(1-u^2)^2} du \right.$$

$$\left. - x^2\int_{-1-x}^{1-x} \frac{1+\cos m\pi u}{(1-u^2)^2} du \right\}$$

$x \ll 1$ の場合には R_r は右辺第一項で近似することができる．

$$R_r = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_{-1-x}^{1-x} \frac{1+\cos m\pi u}{1-u^2} du \qquad (A-2)$$

さらに，

$$\int_{-1-x}^{1-x} \frac{1+\cos m\pi u}{1-u^2} du = \frac{1}{2}\int_{-1-x}^{1-x} \frac{1+\cos m\pi u}{1+u} du$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-1-x}^{1-x}\frac{1+\cos m\pi u}{1-u}du$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-1-x}^{1-x}\frac{1+\cos m\pi u}{1+u}du+\int_{-1+x}^{1+x}\frac{1+\cos m\pi u}{1+u}du\right\}$$

ここで変数変換

$$m\pi(1+u)=v$$

を行なうと，

$$\int_{-1-x}^{1-x}\frac{1+\cos m\pi u}{1-u^2}du=\frac{1}{2}\left\{\int_{-m\pi x}^{2m\pi-m\pi x}\frac{1-\cos v}{v}dv\right.$$

$$\left.+\int_{m\pi x}^{2m\pi+m\pi x}\frac{1-\cos v}{v}dv\right\}$$

ここで

$$\int_{0}^{t}\frac{1-\cos v}{v}dv=0.577+\log x-Ci(x) \qquad (A-3)$$

なる関係を用いると，

$$\int_{-1-x}^{1-x}\frac{1+\cos m\pi u}{1-u^2}du=\frac{1}{2}\left\{\log\left(\frac{2}{x}+1\right)+\log\left(\frac{2}{x}-1\right)\right.$$

$$\left.+2Ci(m\pi x)-Ci(2m\pi+m\pi x)-Ci(2m\pi-m\pi x)\right\} \qquad (A-4)$$

式（A−2），（A−4）から式(30)が得られる．以上ではF_o^mに関する積分のみを行なつたが，F_e^mに関する積分も上と全く同様に行なうことができ式(30)の結果が得られる．

(2) 式(39)の計算

式(21)で与えられる電流は次のように書くこともできる．

$$I(z) = \frac{I_0}{2}(j)^{m-1}\left[e^{jkz} + (-1)^{m+1}e^{-jkz}\right]$$

I(z)として上式を用い，変数変換

$$\frac{\ell}{2} \pm z = u$$

を行なうと，Z_rは次のようになる．

$$Z_r = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\int_0^{\ell}\frac{e^{-jkxu} - e^{-jk(2+x)}}{u}du + \int_0^{\ell}\frac{e^{jkxu} - e^{-jk(2-x)u}}{u}du\right\} \qquad (A-5)$$

さらにZ_rは次のように変形することができる．

$$Z_r = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\int_0^{\ell}\frac{1-e^{-jk(2+x)u}}{u}du - \int_0^{\ell}\frac{1-e^{jkxu}}{u}du + \int_0^{\ell}\frac{1-e^{-jk(2-x)u}}{u}du - \int_0^{\ell}\frac{1-e^{jkxu}}{u}du\right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left\{\int_0^{2m\pi+m\pi x}\frac{1-e^{-jw}}{w}dw - \int_0^{m\pi x}\frac{1-e^{-jw}}{w}dw + \int_0^{2m\pi-m\pi x}\frac{1-e^{-jw}}{w}dw - \int_0^{m\pi x}\frac{1-e^{jw}}{w}dw\right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\int_{m\pi x}^{2m\pi+m\pi x}\frac{1-\cos w}{w}dw + \int_{m\pi x}^{2m\pi-m\pi x}\frac{1-\cos w}{w}dw\right.$$

$$+ j\left\{\int_{0}^{2m\pi+m\pi x}\frac{\sin w}{w}dw + \int_{0}^{2m\pi-m\pi x}\frac{\sin w}{w}dw\right\}\Bigg] \qquad (A-6)$$

ここで式（A－3）および式(41)の関係を用いることにより，式（A－6）の実数部から式(30)が得られ，虚数部から式(40)が得られる．

輻射科学研究会資料

運動媒質中における放射指向性合成の理

藤岡　弘　　熊谷信昭
（大阪大学工学部）

1966年2月5日

1. 序　　言

宇宙工学，ロケット工学などの急速の進歩に伴い，運動系の電磁界解析は重要な工学的問題となりつつある．著者らは先に，観測者に対して相対的に運動している波源からの放射電磁界解析の一例として，真空中を相対論的速度で等速度運動をする微小電気双極子による電磁放射について通信工学の立場から考察し，相対論的効果によつて従来の静止アンテナ系からの電磁放射にはみられなかつた特異な現象が現われることを示した[1]．また観測者に対して静止している波源に対して媒質が光速に比べて十分小さい速度で等速度運動をしている場合については，Compton-Taiの解析[2]があり，波源が微小電気双極子のときには，その放射電磁界は，静止媒質中における場合と比べて，伝播定数は変化するが，放射指向性は変らないことが報告されている．

ここでは，運動媒質中におかれた点波源による放射電磁界を求め，さらに点放射源で構成されたアンテナ・アレイからの放射指向性を求めるための基本式となる運動媒質中の指向性合成の理を導き，この原理により運動媒質中における無指向性点放射源からなるアレイの放射指向性を考察する．代表的な例として線状アレイおよび円形アレイの放射指向性を求め，それぞれの場合について数値計算例を示し，静止媒質中における場合と比べて，伝播定数はもちろんのこと放射指向性にも変化が現われることを示す．

2. 基　礎　理　論

2・1　運動媒質中におかれた点波源による放射電磁界

波源に対して速度vで等速度運動をする無限に拡がつた等方，線形媒質（誘電率ε，透磁率μ）を考える．ここで媒質の速度vが光速度cに比べて十分小さいものと仮定して，$(v/c)^2$を含む項を省略すれば，観測者（波源）

の静止座標系における放射電磁界はつぎの式によつて表わされる[3]

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu H - (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)\, v \times E\right] \tag{1}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon E + (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)\, v \times H\right] + J \tag{2}$$

ただし，ε_0およびμ_0はそれぞれ自由空間における誘電率および透磁率を表わし，Jは波源の電流密度である．ここで，時間変化$e^{+j\omega t}$を仮定し，さらにCompton 等[2]によつて導入されたベクトル表示，

$$\Lambda = (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)\, v \tag{3}$$

を用いると，式(1)，(2)はつぎのようにかける．

$$(\nabla - j\omega\Lambda) \times E = -j\omega\mu H \tag{4}$$

$$(\nabla - j\omega\Lambda) \times H = j\omega\varepsilon E + J \tag{5}$$

上式(4)，(5)を連立させて電磁界E，Hを求めるわけであるが，このためにまず

$$E(R) = E'(R)\, e^{+j\omega\Lambda\cdot R} \tag{6}$$

$$H(R) = H'(R)\, e^{+j\omega\Lambda\cdot R} \tag{7}$$

とおく．ここでRは観測者の静止座標系における観測点を表わす．式(6)，(7)を式(4)，(5)に代入して次式を得る．

$$\nabla \times E' = -j\omega\mu H' \tag{8}$$

$$\nabla \times H' = j\omega\varepsilon E' + J\, e^{-j\omega\Lambda\cdot R} \tag{9}$$

これら2式より電界E'は$Je^{-j\omega\Lambda\cdot R}$を波源とするつぎのベクトル・ヘルムホルツ方程式を満足することがわかる．

$$\nabla\times\nabla\times E' - k^2 E' = j\omega\mu J e^{-j\omega\Lambda\cdot R} \tag{10}$$

ただし，

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi/\lambda$$

したがつて，媒質が無限に拡がつているものとすれば

$$\nabla \times\nabla\times \Gamma - k^2\Gamma = e^{-j\omega\Lambda\cdot R'}\, u\delta(R - R') \tag{11}$$

を満足するダイアディック・グリーン関数$\Gamma(R, R')$を用いて，E'はつぎのように表わされる．

$$E'(R) = -j\omega\mu \iiint_V \Gamma(R, R') \circ J(R')\, dv' \tag{12}$$

ここでR'は波源の存在する場所を表わし，uはユニット・ダイアディック(Unit dyadic または idemfactor)である．また$\delta(R-R')$はディラックのデルタ関数を表わす．

式(11)より$\Gamma(R, R')$は媒質が静止している場合のダイアディック・グリーン関数

$$G(R, R') = \left[u + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right] \frac{e^{-jk|R-R'|}}{4\pi|R-R'|}$$

を用いてつぎのようにかける．

$$\Gamma(R, R') = e^{-j\omega\Lambda\cdot R'} G(R, R') \tag{13}$$

したがつてEは式(12)，(13)を式(6)に打入して，

$$E(R) = -j\omega\mu \iiint_V e^{+j\omega\Lambda\cdot(R-R')} G(R, R') \cdot J(R')\, dV' \tag{14}$$

となり，またHは上に得られた式(14)および式(7)，(8)により．

$$H(R) = \iiint_V e^{+j\omega\Lambda\cdot(R-R')} [\nabla\times G(R, R')] \cdot J(R')\, dV' \tag{15}$$

となる．

ここで波源が点放射源，すなわちaを定数ベクトルとして，電流源Jが

$$J(R') = a\,\delta(R-R')$$

で表わされるときには式(14)，(15)はつぎのようにかける．

$$E(R) = e^{+j\omega\Lambda\cdot(R-R')} E_0(R) \tag{16}$$

$$H(R) = e^{+j\omega\Lambda\cdot(R-R')} H_0(R) \tag{17}$$

ただし，

$$E_0(R) = -j\omega\mu G(R, R') \cdot a$$

$$H_0(R) = [\nabla \times G(R, R')] \cdot a$$

はそれぞれ媒質が静止しているときの点波源からの放射電界および磁界を表わす．

式(16)，(17)は運動媒質中におかれた点波源による放射電磁界を計算するための基本式であると考えられる．

2．2　運動媒質中における指向性合成の理

運動媒質中におかれたn個の点放射源で構成されたアンテナ・アレイの電界放射指向性（放射パターン）を求める．

一般にi番目の点波源からの放射電界は，媒質が静止している場合には次式で与えられる[4]

$$E_{0i} = j\omega\mu \frac{e^{-jk|R-R_i'|}}{4\pi|R-R_i'|} A_i D_i(\theta_i, \phi_i) \tag{18}$$

ただし，記号は図1に示すとおりであり，RおよびR_i'はそれぞれ観測点の位置およびi番目の放射源の存在する場所を表わす．また，A_iおよび$D_i(\theta_i, \phi_i)$はそれぞれi番目の波源の振幅および放射指向係数である．

媒質が運動している場合の電界E_iは式(16)によりつぎのようになる．

$$E_i = j\omega\mu \frac{e^{-jk|R-R_i'|}}{4\pi|R-R_i'|} A_i D_i(\theta_i, \phi_i) e^{-j\omega\Lambda\cdot(R-R_i')} \tag{19}$$

ここで十分遠方の放射電界のみを考えると上式はつぎのようになる．

$$E_i = \frac{j\omega\mu}{4\pi R} \exp[-jkR(1-\eta\cos\langle\Lambda, R\rangle)] A_i \quad D_i(\theta, \phi)$$

$$\times \exp[+jkR_i'(\cos\langle R, R_i'\rangle - \eta\cos\langle\Lambda, R_i'\rangle)] \tag{20}$$

ただし，

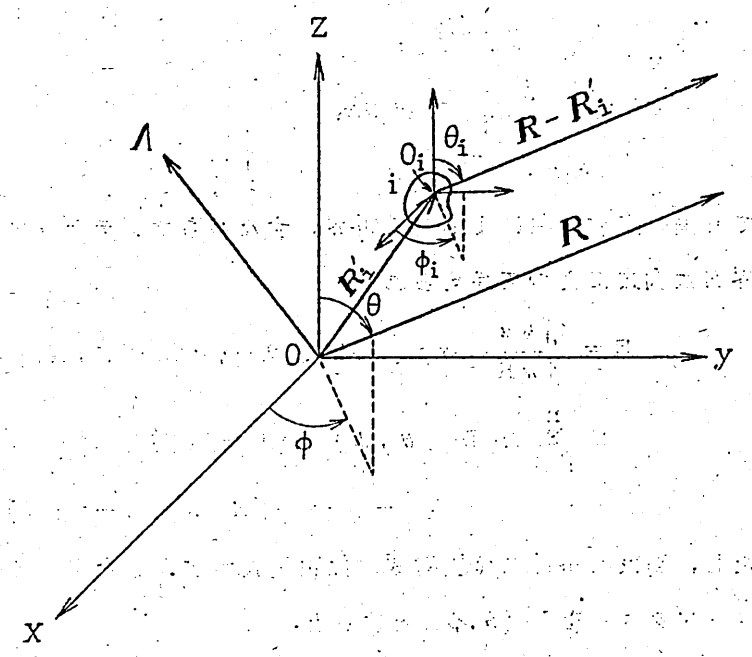


図1　運動媒質中における i 番目の点波源による放射電界

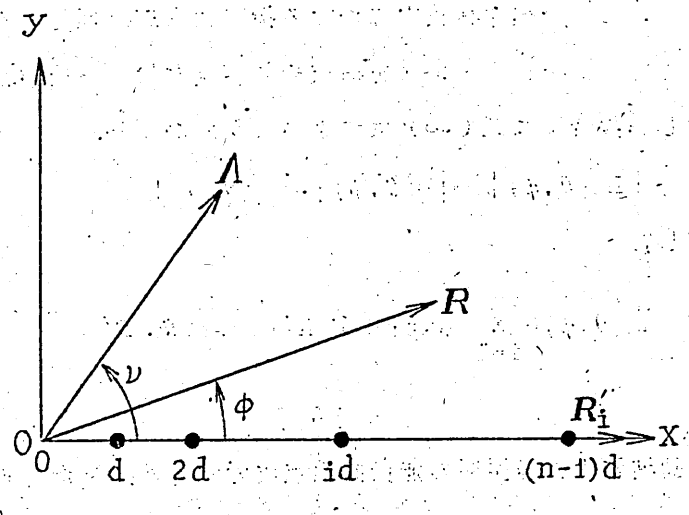


図2　運動媒質中における線状アレイ

$$\left.\begin{array}{l}\eta = c\Lambda = (1-1/n^2)\,v/c \\ n = c_0/c = \text{媒質の屈折率} \\ c_0^{-2} = \varepsilon_0\mu_0,\quad c^{-2} = \varepsilon\mu\end{array}\right\} \qquad (21)$$

よつてn個の点放射源による合成電界，すなわちアンテナ・アレイからの放射電界Eは次式によつて与えられる．

$$E = \frac{j\omega\mu}{4\pi R}\exp[-jkR(1-\eta\cos<\Lambda\,.\,R>)]$$
$$\times\sum_{i=1}^{n} A_i D_i(\theta\,.\,\phi)\exp[+jkR_i'(\cos<R\,.\,R_i'>$$
$$-\eta\cos<\Lambda\,.\,R_i'>)+j\delta_i] \qquad (22)$$

ただし，δ_iはi番目の点放射源の位相を表わす．したがつて合成されたアレイ・ファクターを$D_t(\theta.\phi)$とすると，

$$D_t(\theta.\phi)=\sum_{i=1}^{n} A_i D_i(\theta.\phi)\exp[+jkR_i'(\cos<R.R_i'>-$$
$$\eta\cos<\Lambda\,.\,R_i'>)+j\delta_i] \qquad (23)$$

となり，これを運動媒質中における指向性相加の理という．

ここでアンテナ・アレイを構成する各点放射源の振幅および放射指向係数が等しい場合には式(23)はつぎのようにかける．

$$|D_t(\theta.\phi)| = |D(\theta.\phi)|\cdot|D_0(\theta.\phi)| \qquad (24)$$

ただし，

$$D_0(\theta.\phi)=\sum_{i=1}^{n}\exp[+jkR_i'(\cos<R.R_i'>-\eta\cos<\Lambda.R_i'>)$$
$$+j\delta_i] \qquad (25)$$

は運動媒質中に等振幅の無指向性点放射源を配列したときのアレイ・ファクターである．式(23)，すなわち運動媒質中における指向性相乗の理を言葉でいいあらわせばつぎのようになる．

「等振幅の指向性点放射源で構成されたアンテナ・アレイの運動媒質中に

おける電界放射指向性は，各点波源が単独にあるときの（静止媒質中における）放射指向性と，このアレイと同じ配列位置に等振幅の無指向性点放射源を配列したアレイの運動媒質中における放射指向性との積で与えられる.」

この指向性相乗の理によつて，運動媒質中においても静止媒質中における場合と同様，無指向性点放射源からなるアレイの放射指向性を研究することは実用上重要な意義があると考えられ，式（24）はその重要な基本式であるといえる.

上に得られた式（23）.（24），すなわち指向性相加の理および指向性相乗の理を運動媒質中における放射指向性合成の理という.

3. 線状アレイの放射指向性

運動媒質中におかれた無指向性点放射源の均一線状分布，すなわち線状アレイの電界放射指向性を求める.

図2に示されるように，振幅が等しく，かつそれぞれの位相がδずつ順次進んでいるような無指向性点放射源が等間隔にn個線状に並べられたものを考えると，この場合の運動媒質中におけるxy面内のアレイ・ファクターは式（25）によりつぎのようになる.

$$D_0(\phi)=\sum_{i=0}^{n-1}\exp[+jkid(\cos\phi-\eta\cos\nu)+ji\delta] \qquad (26)$$

ただし，記号については図2に示すとおりであり，また速度ベクトルはxy平面内にあるものとする．したがつてその放射指向性は次式で表わされる.

$$|D_0(\phi)|=\frac{1}{n}\cdot\left|\frac{\sin[n\{kd(\cos\phi-\eta\cos\nu)+\delta\}/2]}{\sin[\{kd(\cos\phi-\eta\cos\nu)+\delta\}/2]}\right| \qquad (27)$$

ここで，$\eta=0$（静止媒質中）の場合の放射指向性の最大値が1となるよ

うにnで割つて正規化してある．

つぎに運動媒質中における指向性相乗の理の一例として，運動媒質中に微小電気双極子2個が，距離 $d=\lambda/2$ だけ離れて同位相で励振されている場合を考える．微小電気双極子の（静止媒質中における）単独の放射指向性は，

$$D(\phi)=\cos\phi$$

で与えられるので式(24)および(27)により，合成放射指向性は，

$$|D_t(\phi)|=|\cos\phi|\cdot\left|\cos\left[\frac{\pi}{2}(\cos\phi-\eta\cos\nu)\right]\right| \qquad (28)$$

で与えられ，図3のようになる．ただし，同図は

$$\eta=0.1$$

のときの放射指向性である．

4. 円形アレイの放射指向性

図4に示されるような半径 ρ の円周上に等間隔に並べられたn個の無指向性点放射源よりなる円形アレイの運動媒質中におけるアレイ・ファクターは式(25)によりつぎのように表わされる．

$$D_0(\theta,\phi)=\sum_{i=1}^{n}\exp[+jk\rho(\cos\langle R,\rho_i'\rangle-\eta\cos\langle \Lambda,\rho_i'\rangle)+j\delta_i] \qquad (29)$$

ただし，ρ_i' はi番目の点放射源の存在する場所を表わす．ここで，図4に示すようにベクトル Λ，R，ρ_i' をそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}\Lambda&=(\Lambda,\ \mu,\ \nu)\\ R&=(R,\ \theta,\ \phi)\\ \rho_i'&=(\rho,\ \Psi_i)\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

で表わし，i番目の波源の位相を

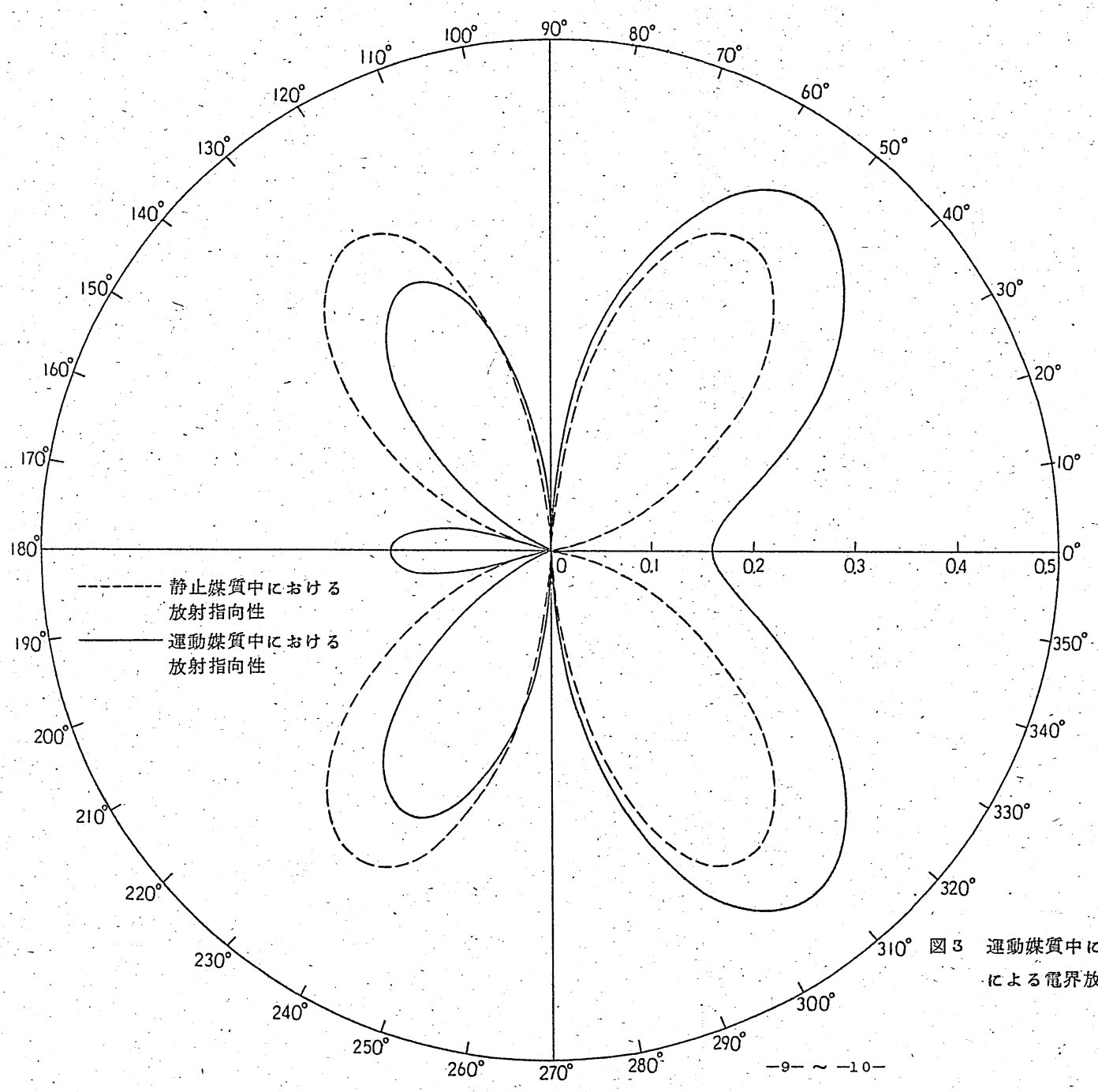


図3　運動媒質中における2つの微小電気双極子による電界放射指向性（$\eta=0.1, \nu=0°$）

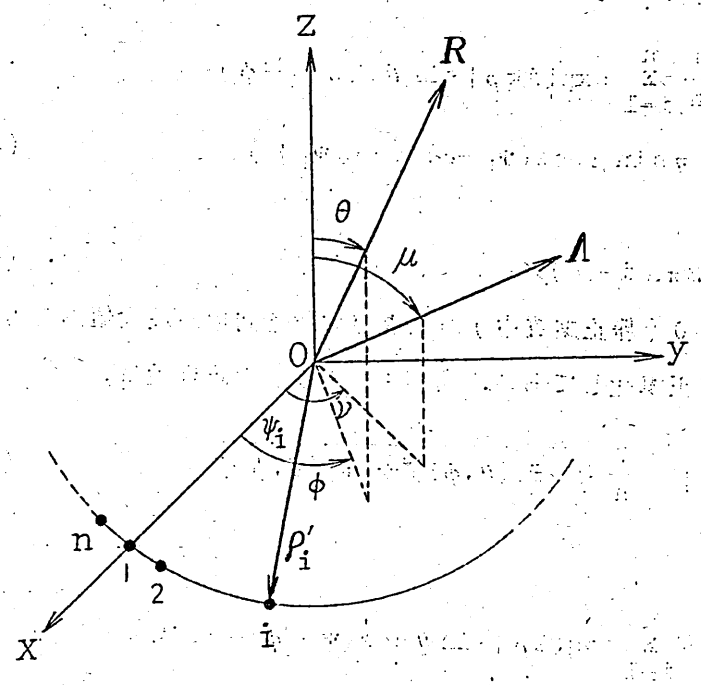


図 4　運動媒質中における円形アレイ

$$\delta_i = -k\rho\cos\Psi_i \tag{31}$$

とすれば，式(29)はつぎのようになる．

$$D_0(\theta,\phi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp[jk\rho\{\sin\theta\cos\Psi_i-\phi)-\eta\sin\mu\cos(\Psi_i-\upsilon)-\cos\Psi_i\}] \tag{32}$$

ここで，

$$\Psi_i = 2\pi(i-1)/n \tag{33}$$

であり，また$\eta=0$（静止媒質中）のときの放射指向性の最大値が1となるようにnで割つて正規化してある．式(32)より放射指向性は，

$$|D_0(\theta,\phi)| = \frac{1}{n}\sqrt{[F_c(\theta,\phi)]^2+[F_s(\theta,\phi)]^2} \tag{34}$$

となる．ただし，

$$\left.\begin{aligned} F_c(\theta,\phi) &= \sum_{i=1}^{n}\cos[k\rho\{\sin\theta\cos(\Psi_i-\phi)-\eta\sin\mu\cos(\Psi_i-\upsilon)-\cos\Psi_i\}] \\ F_s(\theta,\phi) &= \sum_{i=1}^{n}\sin[k\rho\{\sin\theta\cos(\Psi_i-\phi)-\eta\sin\mu\cos(\Psi_i-\upsilon)-\cos\Psi_i\}] \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

式(34)，(35)によりn素子円形アレイの放射指向性が計算できるわけであるが，つぎに素子の数nを無限に大きくした場合にアレイ・フアクターがどのように表わされるかを考えてみる．

まず式(32)をつぎのように変形する．

$$D_0(\theta,\phi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp[-jk\rho\Pi(\theta,\phi)\sin(\alpha-\Psi_i)] \tag{36}$$

ただし，

$$\Pi(\theta,\phi)=[(\sin\theta\cos\phi-\eta\sin\mu\cos\upsilon-1)^2 + (\sin\theta\sin\phi-\eta\sin\mu\sin\upsilon)^2]^{1/2} \tag{37}$$

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{\sin\theta\,\mathrm{con}\phi-\eta\sin\mu\cos\upsilon-1}{\eta\sin\mu\sin\upsilon-\sin\theta\sin\phi} \tag{38}$$

ここでn→∞の極限を考え，このときのアレイ。ファクターをD_∞で表わすと，

$$D_\infty=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[-jk\rho\Pi(\theta,\phi)\sin(\alpha-\Psi)d\Psi \tag{39}$$

となるが，変数変換

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\Psi&=\gamma\\ k\rho\Pi(\theta,\phi)&=\xi\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

によつて式(39)はつぎのようにかける．

$$D_\infty=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[-j\xi\sin\gamma]d\gamma=J_0(\xi) \tag{41}$$

したがつて，素子の数nを無限に大きくした場合の放射指向性は零次ベツセル関数で表わされることがわかる．

つぎに，n素子円形アレイの放射指向性を，素子の数nが無限大の場合の放射指向性D_∞で近似した場合の誤差を求めるため，式(36)をベツセル関数によつて級数表示すれば，

$$D_0(\theta,\phi)=J_0(\xi)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[2\sum_{m=1}^{\infty}\{J_{2m}(\xi)\cos 2m(\alpha-\Psi_i) -jJ_{2m-1}(\xi)\sin(2m-1)(\alpha-\Psi_i)\}] \tag{42}$$

となるが，ここで和の記号を入れ換え，さらに式(33)を用いると上式はつぎのようになる．

$$D_0(\theta,\phi)=J_0(\xi)+\Delta(n) \tag{43}$$

ただし，

$$\Delta(n)=\begin{cases} 2\sum_{s=1}^{\infty}[J_{2ps}(\xi)\cos(2ps\alpha)], & (n=2p) \\ 2\sum_{s=1}^{\infty}[J_{(2p+1)2s}(\xi)\cos\{(2p+1)2s\alpha\} \\ \quad -jJ_{(2p+1)(2s-1)}(\xi)\sin\{(2p+1)(2s-1)\alpha\}] & (n=2p+1) \end{cases} \tag{44}$$

したがつて素子の数nとρ/λが与えられれば$\Delta(n)$を計算できるわけであるが$\Delta(n)$が十分小さいときはn素子円形アレイの放射指向性は$J_0(\xi)$で近似することができる．すなわち，

$$|D_0(\theta,\phi)|=|J_0(\xi)| \tag{45}$$

となり，このとき放射指向性は式(40)のξ，したがつて式(37)によつて決まることがわかる．

数値計算例として媒質の運動速度ベクトルが円形アレイを含む平面内にある場合について，その面内の放射指向性を計算する．このとき式(34)，(35)はつぎのようになる．

$$|D_0(\phi)|=\frac{1}{n}\sqrt{[F_c(\phi)]^2+[F_s(\phi)]^2} \tag{46}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} F_c(\phi)&=\sum_{i=1}^{n}\cos[k\rho\{\cos(\Psi_i-\phi)-\eta\cos(\Psi_i-\upsilon)-\cos\Psi_i\}] \\ F_s(\phi)&=\sum_{i=1}^{n}\sin[k\rho\{\cos(\Psi_i-\phi)-\eta\cos(\Psi_i-\upsilon)-\cos\Psi_i\}] \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

式(46).(47)を用いて，n，ρ/λ，ηがそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} n &= 20 \\ \rho/\lambda &= 1 \\ \eta &= 0.1 \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

の場合について，媒質の運動速度ベクトルの方向υをパラメーターとして計算した結果が図5である．

nおよびρ/λを式(48)のようにとつた場合には式(44)は，

$$\Delta(n) = 10^{-4} \qquad (49)$$

となり，したがつてこの場合式(45)の関係が成りたち，このときの放射指向性は式(37)から，

$$\Pi(\phi) = \sqrt{(\cos\phi - \eta\cos\upsilon - 1)^2 + (\sin\phi - \eta\sin\upsilon)^2} \qquad (50)$$

によつて決まることがわかる．

さて，指向性最大の方向，すなわち放射パターンの振れの角度を式(50)から求めると，

$$\phi_m = \tan^{-1}\frac{\eta\sin\upsilon}{1+\eta\cos\upsilon} \qquad (51)$$

となり，したがつてこの最大値は

$$|D_0(\phi_m)| = \left|J_0\left[2\pi\sqrt{(\cos\phi_m - \eta\cos\upsilon - 1)^2 + (\sin\phi_m - \eta\sin)^2}\right]\right| \qquad (52)$$

で与えられる．

式(51)より，ηが正のとき，速度ベクトルが第1および第2象限にある場合には放射パターンは，静止媒質中における放射パターンに比べて正の方向に振れ，また第3および第4象限にある場合には負の方向に振れることがわかる．

また$|\phi_m|$の最大値を$|\Phi_m|$とすると，式(51)より，

$$\upsilon = \cos^{-1}(-\eta) \qquad (53)$$

のとき $|\phi_m|$ は最大となり

$$|\Phi_m| = \tan^{-1}\eta \tag{54}$$

となる．たとえば $\eta = 0.1$ とすれば

$$v = \pm 95^\circ\ 45'$$

のとき

$$\Phi_m = \pm 5^\circ\ 43'$$

となる．

5. 結　　論

光速に比べて十分小さい速度で等速度運動をする等方，線形媒質中におかれたアンテナ・アレイからの放射電界の模様を考察するために，まず基本式となる運動媒質中の指向性合成の理を導き，つぎにこの原理を用いて線状アレイおよび円形アレイの放射指向性を求め，それぞれの場合について数値計算例を示し，静止媒質中における場合と比べて伝播定数はもちろんのこと，放射指向性にも変化が現われることを示した．

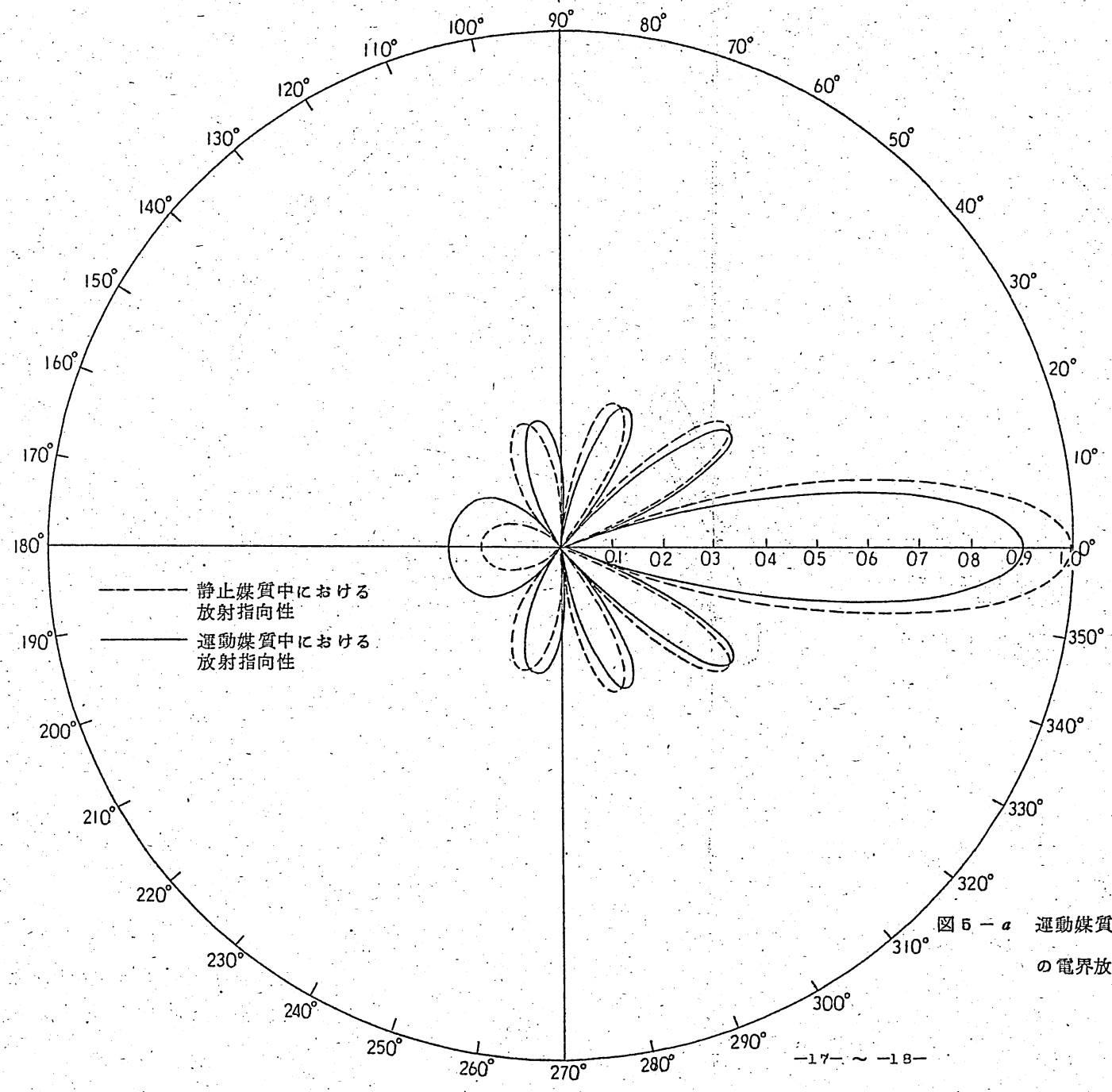


図5－a　運動媒質中における円形アレイの電界放射指向性（η =0.1, ν=0°）

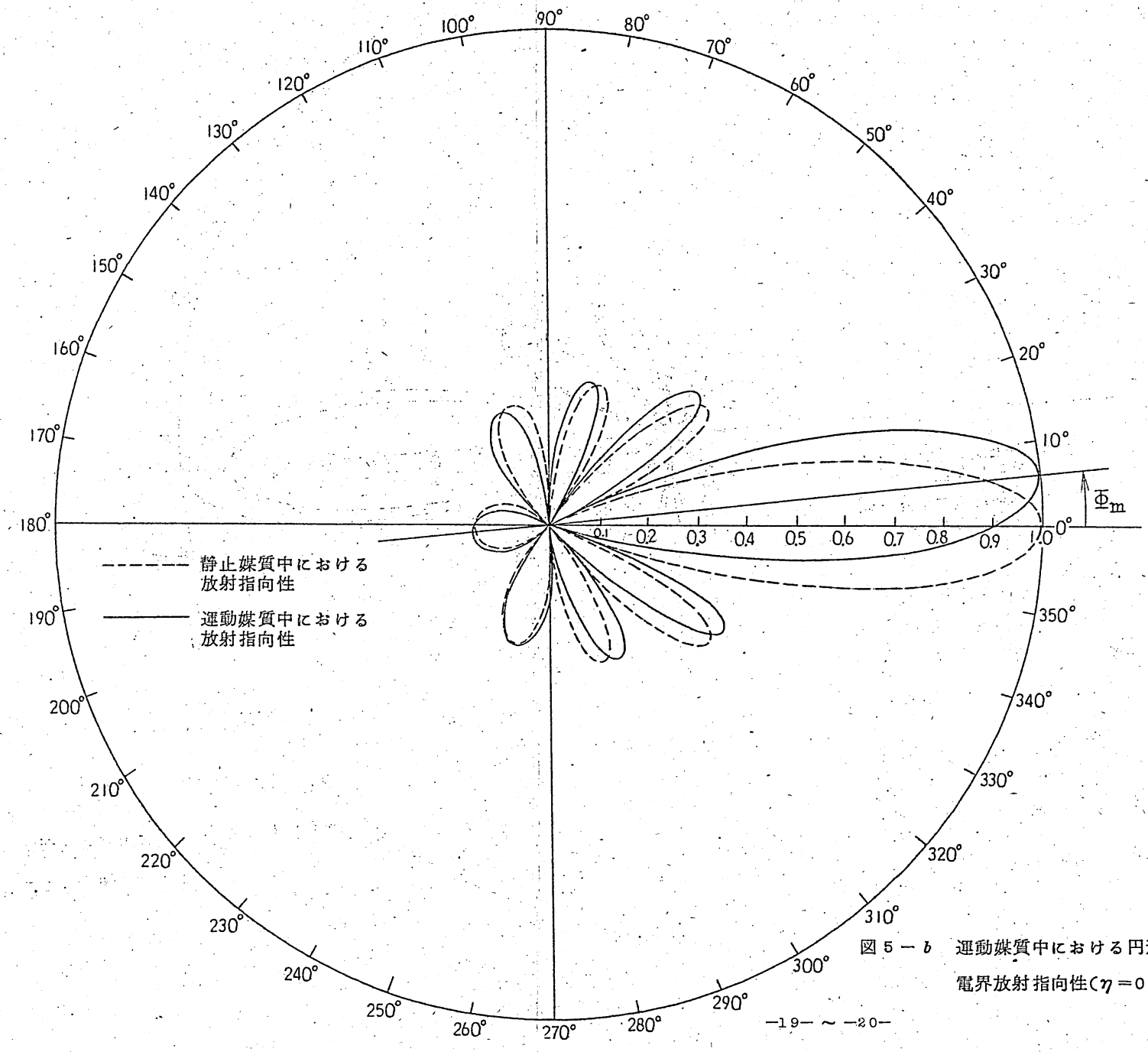


図５－b　運動媒質中における円形アレイの
電界放射指向性（$\eta=0.1$, $\nu=95°$）

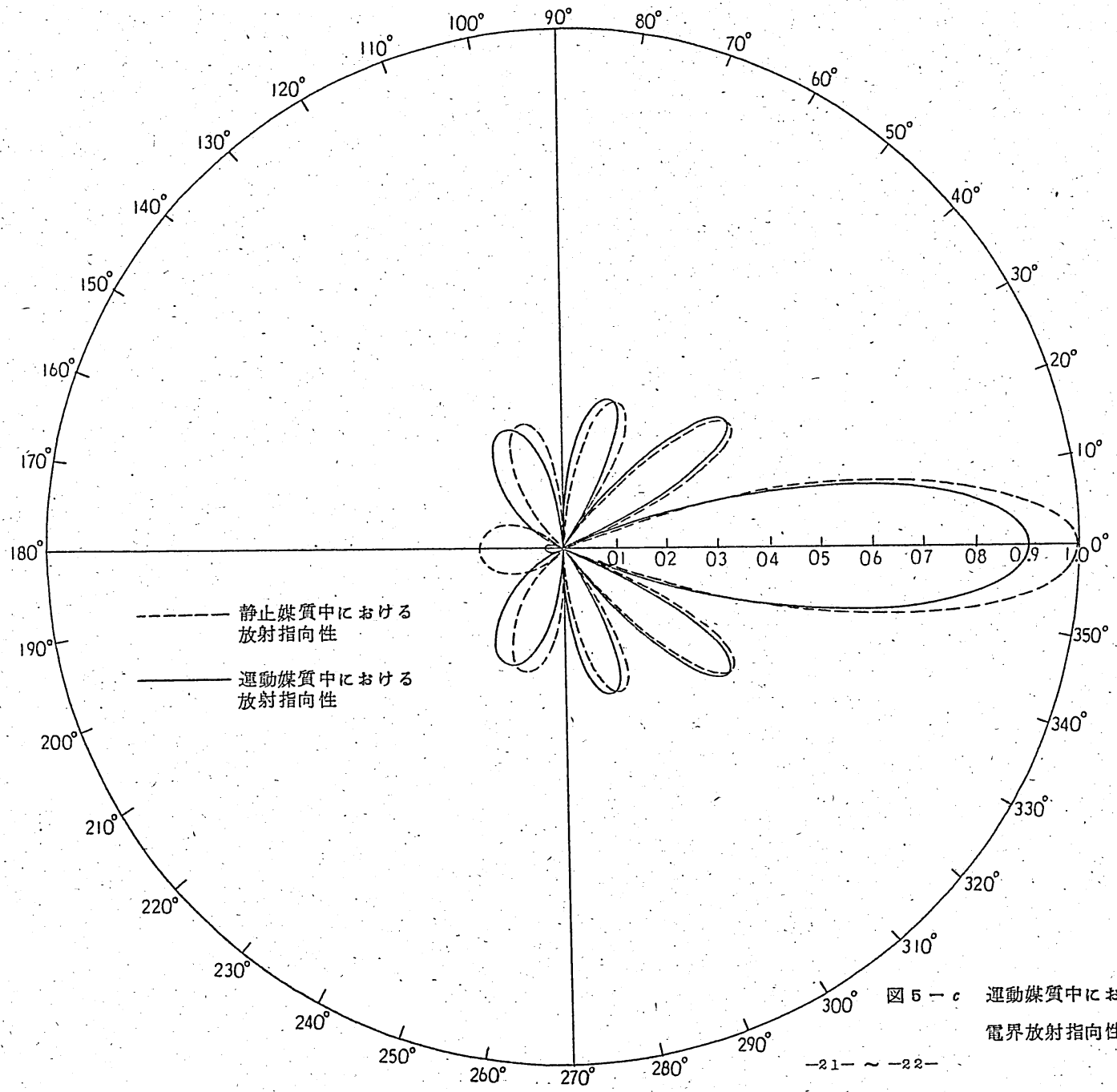


図5－c　運動媒質中における円形アレイの電界放射指向性（$\eta=0.1$, $\nu=180°$）

終りに，日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに有益なご討論をいただいた大阪大学大学院塩沢俊之，数値計算にご協力いただいた工学部学生二瓶文博，間剛の諸氏に深謝する．

文　　献

(1) 藤岡弘，塩沢俊之，熊谷信昭，“運動電気双極子からの相対論的電磁放射”，信学誌採録決定

(2) R.T.Compton—C.T.Tai,“Radiation from Harmonic Sources in a Uniformly Moving Medium”,IEEE Trans.vol.AP—13, pp.574—577.(July 1965)

(3) A.Sommerfeld.“Electrodynamics”.pp.280—283. Academic Press.(1964)

(4) S.Silver.“Microwave Antenna Theory and Design”.p.100. McGraw—Hill.(1949)

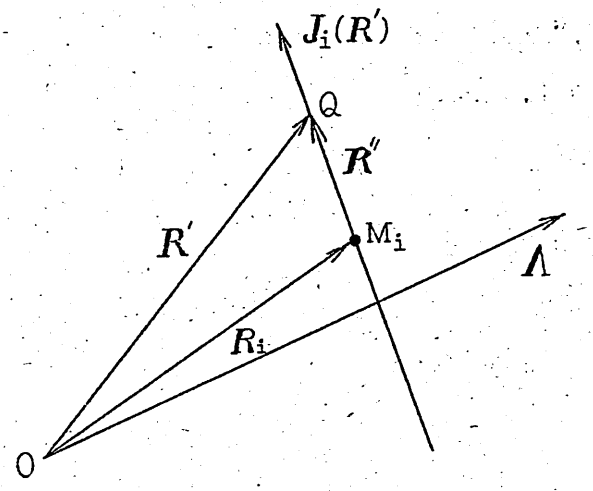
付録　運動媒質中における線状アンテナの放射指向性合成の理

運動媒質中におけるn個の線状アンテナによる合成された電界放射指向性を求める。

いまi番目の線状アンテナの中点をM_iとしこの距離ベクトルをR_iとする。また図A－1に示すようにアンテナ上の点Qにおける電流密度を$J_i(R')$とすれば，

$$R' = R_i + R''$$

であるから，運動媒質中におけるi番目の線状アンテナによる遠距離放射電界は式(14)を変形してつぎのようにかける。



図A－1　運動媒質中におけるi番目の線状アンテナによる放射電界

$$E_i(R) = \frac{j\omega\mu}{4\pi R}\exp\left[-ikR(1-\eta\cos\langle A, R\rangle)\right]$$

$$\times e_R \times \left[\!\left[e_R \times \exp\left[+jkR_i(\cos\langle R, R_i\rangle - \eta\cos\langle A, R_i\rangle)\right] \iiint_V \exp\left[+jkR''(\cos\langle R, R''\rangle - \eta\cos\langle A, R''\rangle)\right] J_i(R')\,dv' \right]\!\right] \qquad \text{(A-1)}$$

ここでe_RはR方向の単位ベクトルである。

さて，i番目のアンテナの直線の向きを示す方向ベクトルをa_iとし，このアンテナを流れる電流の最大値をI_iとすると，式（A－1）における積分は、

$$\iiint_V \exp\left[+jkR''(\cos\langle R, R''\rangle - \eta\cos\langle A, R''\rangle)\right] J_i(R')\,dv'$$

$$= I_i F_i(\theta, \phi) a_i \qquad \text{(A-2)}$$

なる形で表わされる。よつて，

$$e_R \times (e_R \times a_i) = f_i(\theta, \phi)$$

と表わせば，式（A－1）はつぎのようにかける．

$$E_i(R) = \frac{j\omega\mu}{4\pi R}\exp\left[-jkR(1-\eta\cos\langle A, R\rangle)\right]$$

$$\times I_i \exp\left[+jkR_i(\cos\langle R, R_i\rangle - \eta\cos\langle A, R_i\rangle)\right]$$

$$\times D_i(\theta, \phi) \qquad \text{(A-3)}$$

ただし，

$$D_i(\theta, \phi) = F_i(\theta, \phi) f_i(\theta, \phi) \qquad \text{(A-4)}$$

したがつて合成放射電界は，

$$E(R) = \frac{j\omega\mu}{4\pi R}\exp\left[-jkR(1-\eta\cos\langle A, R\rangle)\right]$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} I_i \exp\left[+jkR_i(\cos\langle R, R_i\rangle - \eta\cos\langle A, R_i\rangle)\right]$$

$$\times D_i(\theta, \phi) \qquad \text{(A-5)}$$

となる．いま系全体のアレイ・ファクターを $D_t(\theta,\phi)$とすると，上式により

$$D_t(\theta,\phi)=\sum_{i=1}^{n} I_i \exp[+jkiRi(\cos\langle R,R_i\rangle-\eta\cos\langle \Lambda,R_i\rangle)]$$

$$\times D_i(\theta,\phi) \qquad \text{(A-6)}$$

となる．ここで，もし各アンテナが同一方向を向いており，かつ同一指向性をもつものとすれば，$D_i(\theta,\phi)$ は各線状アンテナについてすべて等しくなる．いまこれを $D(\theta,\phi)$ で表わし，さらに I_i の大きさ，位相がすべてのアンテナについて同一であるとし，これを1とおくと式（A－6）はつぎのようにかける．

$$D_t(\theta,\phi)=D(\theta,\phi)D_0(\theta,\phi) \qquad \text{(A-7)}$$

ここで

$$D_0(\theta,\phi)=\sum_{i=1}^{n}\exp[+jkR_i(\cos\langle R,R_i\rangle-\eta\cos\langle \Lambda,R_i\rangle)] \qquad \text{(A-8)}$$

は，各線状アンテナの中点 M_i の位置に等振幅の無指向性点放射源を配列したときの運動媒質中におけるアレイ・ファクターに等しい．

式（A－7）を言葉でいいあらわせばつぎのようになる．

「線状アンテナによつて構成されるアンテナ・アレイの運動媒質中における電界放射指向性は，もし各線状アンテナの振幅および放射指向係数が等しい場合には，線状アンテナが単独にあるときの運動媒質中における放射指向性と，各線状アンテナの中点の位置に等振幅の無指向性点放射源を配列したアレイの運動媒質中における放射指向性との積で与えられる．」

上に求めた式（A－6），（A－7）はそれぞれ運動媒質中における線状アンテナの指向性相加の理，指向性相乗の理とよぶことができ，これらの原理によつて複数個の線状アンテナが運動媒質中に配列されている場合の合成された放射指向性を求めることができる．特に指向性相乗の理により，線状アンテナよりなるアンテナ・アレイの場合でも，点放射源よりなるアンテナ

・アレイの場合と同様に，遅動媒質中における等振幅の無指向性点放射源よりなるアレイの放射指向性を研究することが実用上重要であることがわかる．

つぎに，電流源として，線状アンテナの中点M_i の位置に存在する点電流源を考えれば，

$$R'' = 0$$

であるから，式（A－2）における$F_i(\theta, \phi)$は1となり，したがつてここでR_iをあらためてR'_iとかくと式（A－5）は本文中の式（22）をベクトル形で表示したものと一致することがわかる．

輻射科学研究会資料

プラズマ媒質中のリエナール・ヴイーヘルトのポテンシヤル

小山正樹　　板倉清保
（大阪大学工学部）

1966年2月5日

1. 緒　　言

真空中を任意に運動する荷電粒子からの電磁放射は，リエナール・ヴイーヘルトによつて導びかれた電磁ポテンシヤルを利用するのが最も一般的であると思われる．これらのポテンシヤルから得られる電磁界は電荷の存在する場所から遠くの界および近くの界を一挙に表わすことができ，さらに電荷の運動と電磁界の関係が物理的に理解しやすい形で示されている[1]．

最近，プラズマ媒質中の運動荷電粒子による電磁放射が広く研究されるようになつてきたが，上述のような観点からプラズマ媒質中のリエナール・ヴイーヘルトのポテンシヤルとそれから誘導される電磁界を求めることは興味ある問題である．

本報告は等方プラズマ媒質中のリエナール・ヴイーヘルトのポテンシヤルを求め，それより放射電磁界を誘導する．これらの得られた式から媒質を規定するパラメータ（プラズマ周波数）および電荷の運動とポテンシヤルの関係が明らかとなる．

真空中では，観測者と電荷の間の距離をR，光速をcとすると，リエナール・ヴイーヘルトのポテンシヤルは観測者の時刻よりもちようど R/c 時間前の荷電粒子の位置および運動に依存していた．しかしプラズマ中では，媒質が分散的であるために電磁波の伝播速度は光速の成分以外にそれよりも遅い色々な速度成分をも持つている．したがつて，プラズマ中のポテンシヤルは観測者の時刻よりもちようど R/c 時間前の電荷の運動からの寄与のほかにそれより以前のすべての時刻にわたる電荷の運動からの寄与がある．

また，前述のごとく，真空中の放射電磁界はリエナール・ヴイーヘルトのポテンシヤルから求められるが，これには電荷の加速度が関係していることが知られている[1]．プラズマ中でも同様に放射電磁界は加速度のみに関係しているが，この場合には電荷の過去の加速度が関係していることが示される．

したがつて，等方プラズマ媒質中では速度に依存する放射，すなわちチエレンコフ放射は存在しないことも明らかとなる．

2. プラズマ中の電磁ポテンシャルの誘導

均質，等方，非圧縮性プラズマを考え電子の衝突を無視すると，つぎのマツクスウエルの方程式，プラズマ中の電子の運動方程式および電荷と電流密度との間の連続の式が成立する[2]．

$$\nabla \times E(r,t) = -\mu_0 \frac{\partial H(r,t)}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times H(r,t) = \varepsilon_0 \frac{\partial E(r,t)}{\partial t} + N_0 e V(r,t) + J(r,t) \tag{2}$$

$$N_0 m \frac{\partial V(r,t)}{\partial t} = N_0 e E(r,t) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} + \nabla \cdot J(r,t) = 0 \tag{4}$$

こゝで，$V(r,t)$ はプラズマ中の電子の平均速度，m は電子質量，また e は電子の電荷である．そこで，電磁界を電磁ポテンシヤル $A(r,t)$，$\phi(r,t)$ を用いて次式のように表示する．

$$H(r,t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times A(r,t) \tag{5}$$

$$E(r,t) = -\frac{\partial A(r,t)}{\partial t} - \nabla \phi(r,t) \tag{6}$$

式(1)～(6)につぎのフーリエ変換を行なうと

$$f(r,\omega)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}f(r,t)\,e^{i\omega t}\,dt \qquad (7)$$

$$f(r,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}f(r,\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega \qquad (8)$$

ベクトルポテンシャル$A(r,\omega)$，スカラーポテンシャル$\phi(r,\omega)$はつぎの方程式で表わされる．

$$\nabla^2 A(r,\omega)+\frac{1}{c^2}(\omega^2-\omega_p^2)A(r,\omega)+\mu_0 J(r,\omega)=0 \qquad (9)$$

$$\nabla^2\phi(r,\omega)+\frac{1}{c^2}(\omega^2-\omega_p^2)\phi(r,\omega)+\frac{\rho(r,\omega)}{\varepsilon_0\left(1-\omega_p^2/\omega^2\right)}=0 \qquad (10)$$

こゝで$\omega_p=\left(N_0 e^2/m\varepsilon_0\right)^{1/2}$はプラズマ周波数である．さらに$A(r,\omega)$と$\phi(r,\omega)$はつぎのローレンツ条件を満足する．

$$\nabla\cdot A(r,\omega)-\frac{i\omega}{c^2}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\phi(r,\omega)=0 \qquad (11)$$

式(9)は量子論のクラインゴードン方程式と同じ形をしている．クラインゴードン方程式(9)はω_p/cのかわりに$mc/\hbar$（$\hbar$はプランクの定数）をおきかえたものである．しかし，この値は非常に大きく2.6×10^8/m程度のものであるがω_p/cは弱電離プラズマで1.9×10^2/m，強電離プラズマで1.9×10^3/m程度の値であつて$mc/\hbar$にくらべるとかなり小さい．ω_p/cは後に示されるように電荷の過去の運動が観測者のポテンシャルにおよぼす影響の程度を知る上で重要になつてくる．

式(10)はプラズマが等価的に比誘電率$\left(1-\omega_p^2/\omega^2\right)$の分散性誘電体と考えられうることを示している．したがつて，周波数0の極限では式(10)の第3項は0となるのでスカラーポテンシャルは0となる．これはプラズマ中には無限の正と負に電離した電荷が存在するので多少の電荷の影響はまつたく打

ち消されてしまうことゝして説明される．この場合には，ベクトルポテンシャルはソレノイダルとなる．したがつて，また電界は0となる．

さて，式(9)よりプラズマ中の位相速度は

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} \tag{12}$$

となり，これはつねに光速よりも大きい．しかし，これはよく知られるようにエネルギーの送られる速度ではない．実際，後で示されるようにプラズマ媒質中においても光速より速く伝播する電磁波は存在しない．

さて，式(10)の解はつぎのように得られる．

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_{V_\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\xi,\omega)\frac{e^{-i(\xi\cdot r+\omega t)}}{|\xi|^2-(\omega^2-\omega_p^2)/c^2}\,d\omega\,dV_\xi$$

$$+\frac{\omega_p^2}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_{V_\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\xi,\omega)}{\omega^2-\omega_p^2}\,\frac{e^{-i(\xi\cdot r+\omega t)}}{|\xi|^2-(\omega^2-\omega_p^2)/c^2}\,d\omega\,dV_\xi \tag{13}$$

こゝで，$\xi=(\xi,\eta,\zeta)$，$r=(x,y,z)$，$dV_\xi = d\xi\,d\eta\,d\zeta$，および

$$f(\xi,\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{V_r} f(r,\omega)\,e^{i\xi\cdot r}\,dV_r \tag{14}$$

$$f(r,\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{V_\xi} f(\xi,\omega)\,e^{-i\xi\cdot r}\,dV_\xi \tag{15}$$

と定義して取扱うことにする．ベクトルポテンシャルは式(13)の $\rho(\xi,\omega)/\varepsilon_0$ のかわりに $\mu_0 J(\xi,\omega)$ とおけば得られる．式(13)はさらにつぎの関係式[3]

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{V_\xi}\frac{e^{-i\xi\cdot r}}{|\xi|^2-(\omega^2-\omega_p^2)/c^2}\,dV_\xi = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{e^{i\frac{|r|}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}}{|r|} \tag{16}$$

および Faltung theorem

$$\int_{V_\xi} f(\xi,\omega)G(\xi,\omega)e^{-i\xi\cdot r}dV_\xi=\int_{V_{r'}} f(r',\omega)G(r-r',\omega)\,dV_{r'} \quad (17)$$

を用いることによつて変形される．結局，ベクトルとスカラーポテンシャルは

$$A(r,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_{r'}}\frac{dV_{r'}}{|r-r'|}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}J(r',\omega)e^{-i\omega t+\frac{i}{c}\sqrt{\omega^2-\omega p^2}|r-r'|}\,d\omega \quad (18)$$

$$\phi(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_{r'}}\frac{dV_{r'}}{|r-r'|}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(r,\omega)e^{-i\omega t+\frac{i}{c}\sqrt{\omega^2-\omega p^2}|r-r'|}\,d\omega$$

$$+\frac{\omega p^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_{r'}}\frac{dV_{r'}}{|r-r'|}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(r,\omega)}{\omega^2-\omega p^2}e^{-i\omega t+\frac{i}{c}\sqrt{\omega^2-\omega p^2}|r-r'|}\,d\omega \quad (19)$$

となる．

式(18)のωに関する積分を求めるためにつぎの関係式を利用する[4]．

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{R}{c}\sqrt{(i\omega)^2+\omega p^2}}e^{-i\omega t}\,d\omega$$

$$=\sqrt{2\pi}\left\{\delta\left(t-\frac{R}{c}\right)-\frac{\omega pR}{c}\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{t^2-R^2/c^2}\right)}{\sqrt{t^2-R^2/c^2}}\right\} \qquad t>\frac{R}{c} \quad (20)$$

こゝで

$$R=|\boldsymbol{R}|=|r-r'| \quad (21)$$

またδはデイラクのδ関数，J_1は第1次のベツセル関数である．ふたゝび Faltung Theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(r',\omega)\,g(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}f(r',\alpha)\,g(t-\alpha)\,d\alpha \quad (22)$$

を用いると式(18)は結局，次式で表わされることになる．

$$A(r,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_{r'}}\frac{J(r',t-R/c)}{R}\,dV_{r'}$$

$$-\frac{\mu_0\omega p}{4\pi c}\int_{V_{r'}}\int_{-\infty}^{t-R/c}J(r',\alpha)\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha)^2-R^2/c^2}\right)}{\sqrt{(t-\alpha)^2-R^2/c^2}}\,d\alpha\,dV_{r'} \qquad (23)$$

上式より時刻tにおける観測者のポテンシャルには時刻$(t-R/c)$における電流密度からの寄与のほかに，それ以前のすべての時刻における電流密度からの寄与が存在することがわかる．つぎに，スカラーポテンシャルの式(19)で右辺第1項はベクトルポテンシャルと同じ形をしているので式(23)で$\mu_0 J$のかわりにρ/ε_0とおけば得られる．また第2項は次の関係式[4]および式(22)を用いることによつて得られる．

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-\omega p^2}\,d\omega=-\frac{\sqrt{2\pi}}{\omega p}\left(\lambda\pm\frac{1}{2}\right)\sin\omega p\,t \qquad t\gtrless 0 \quad (24)$$

こゝで，任意定数λは因果律を満足するように選ばなければならない．これは後の結果からわかるようにλ＝½と選べばよい．結局，スカラーポテンシャルは

$$\phi(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_{r'}}\frac{\rho(r',t-R/c)}{R}\,dV_{r'}$$

$$-\frac{\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{V_{r'}}\int_{-\infty}^{t-R/c}\rho(r',\alpha)\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha)^2-R^2/c^2}\right)}{\sqrt{(t-\alpha)^2-R^2/c^2}}\,d\alpha\,dV_{r'}$$

$$-\frac{\omega p}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_{r'}}\int_{-\infty}^{t}\frac{\rho(r',\beta-R/c)}{R}\sin\omega p(t-\beta)\,d\beta\,dV_{r'}$$

$$+\frac{\omega p^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{V_{r'}}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\beta-R/c}\frac{\rho(r',\alpha)J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha)^2-R^2/c^2}\right)}{\sqrt{(\beta-\alpha)^2-R^2/c^2}}$$

$$\times\sin\omega p(t-\beta)\,d\alpha\,d\beta\,dV_{r'} \qquad (25)$$

式(23),(25) の右辺第1項は従来の真空中のベクトルおよびスカラーポテンシャルを表わしている[1]. したがつて，つねに観測者の時刻よりもちようど R/c 時間前の波源が問題となる．それに対して第2項以下は媒質が分散的であることに関係している．すなわち電荷から放射された電磁波がプラズマ媒質のために影響されて伝播速度が光速よりも遅くなることを示している．

もし J と ρ が時間に無関係，すなわち

$$J(r',\omega)=\sqrt{2\pi}\,J(r')\,\delta(\omega) \qquad (26)$$

$$\rho(r',\omega)=\sqrt{2\pi}\,\rho(r')\,\delta(\omega) \qquad (27)$$

の場合には式(23),(25)は時間的に無関係とならねばならない．しかし両式には時間に関する積分が含まれている．したがつて，これらの意味はつぎのように考えねばならない．まず式(26)を式(18)に代入すると

$$A(r,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_{r'}}\frac{J(r')\,e^{-\frac{1}{c}\omega p|r-r'|}}{|r-r'|}\,dV_{r'} \qquad (28)$$

式(23)が時間的に無関係な電流密度によつて作られるならば式(28)に一致しなければならない．ところが式(22)と式(26)よりベツセル関数を含む積分はつぎのようになる．

$$\frac{\omega p}{c}\int_{-\infty}^{t-R/c}\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha)^2-R^2/c^2}\right)}{\sqrt{(t-\alpha)^2-R^2/c^2}}\,d\alpha=\frac{1}{R}-\frac{e^{-\frac{\omega p}{c}R}}{R} \qquad (29)$$

上式を式(23)に代入すると式(28)に一致する．すなわち式(23)の第2項は波源が時間的に無関係な場合には上式の右辺になるものと理解しなければならない．スカラーポテンシャルを表わす式(25)の第1項と第2項についても

同じことがいえる．さて，この式の第3項と第4項は式(27)を式(19)に代入すると$\phi=0$となることから予想される通り，電荷が静止している場合には第1項と第2項を互いに打ち消すはずである．これは次式[5]

$$\int_{-\infty}^{t} \sin \omega p(t-\beta)\, d\beta = \frac{1}{\omega p} \tag{30}$$

を用いることによつて容易に確かめられる．

さて，最後に波源が時間的に無関係な場合の媒質がもたらすしやへい効果は式(28)よりわかるように

$$\frac{\omega p}{c} \approx \frac{1}{R} \tag{31}$$

の程度である．量子論における7ラインゴードン方程式の$mc/\hbar$とは異なりこの場合にはしやへい効果は相当に小さくなることがわかる．これはまた同時に，任意の波源の場合にも式(23)の第2項から理解されるように$(t-R/c)$以前の電荷の運動がかなり長い時間にわたつてポテンシヤルに影響していることを示している．したがつてプラズマ周波数が高くなればなるほどポテンシヤルに対する影響は大きくなるが，反面，過去における電荷の運動の影響は弱くなることを示している．

3. プラズマ中のリエナール・ヴイーヘルトのポテンシヤルの誘導

本節では前節で得たベクトルとスカラーポテンシヤルを利用してプラズマ中を任意に運動する単一の荷電粒子が作るリエナール・ヴイーヘルトのポテンシヤルを誘導する．こゝで，荷電粒子はプラズマを作つている微細な粒子よりもはるかに大きく巨視的なものとして扱えると考え，荷電粒子の電荷密

密度と電流密度をつぎのように表わす．

$$\rho(r',\alpha)=q_0\delta(r'-r_0) \tag{32}$$

$$J(r',\alpha)=q_0 v(\alpha)\delta(r'-r_0) \tag{33}$$

上式中において r_0 は α の関数であり，かつ $q_0 \gg e$ と仮定する．いま，便宜上式(23)の第1項と第2項を A_0 と A_1 で表わし，式(25)の第1～4項を ϕ_0 ～ ϕ_3 で表わすことにする．また以下の考察では ϕ に関するもののみについて，取扱うが A に関してもまつたく同様な方法で得られる．

さて，よく知られるようにリエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルを求めるとき式(32)をそのまゝ式(25)に代入することは許されない．これは，たとえば式(25)の ϕ_0 の被積分関数の電荷密度は電荷の位置によつて異なつた時刻 $(t-R/c)$ の値を取らねばならないことに関係している．したがつて積分を可能なものとするためには体積要素 $dV_{\gamma'}$ をつねに電荷と共に動く体積要素 dV_{γ_0} に変換しなければならない．こうすると変換した後に式(32)を直接代入することができる．いま，$\phi_0(r,t)$ で

$$t'=t-\frac{R(t')}{c} \tag{34}$$

とおくことゝする．さて，$dV_{\gamma'}$ と dV_{γ_0} の間の関係は dt' と dt の関係とまつたく同じであることが証明されるので dt' と dt の関係についてしらべる．式(30)を t' について微分すると，関係式

$$\frac{\partial R(t')}{\partial t'}=-\frac{v(t')\cdot R(t')}{R(t')},\quad \frac{\partial R(t')}{\partial t'}=-v(t') \tag{35}$$

を用いて

$$\frac{\partial t}{\partial t'}=1-\frac{v(t')\cdot R(t')}{cR(t')} \tag{36}$$

となる．したがつて $dV_{\gamma'}$ と dV_{γ_0} の関係は

$$\begin{cases} dV_{\gamma'} = \dfrac{R(t')}{S(t')}\, dV_{\gamma_0} \\ S(t') = R(t') - v(t') \cdot R(t')/c \end{cases} \tag{37}$$

上式を式(25)の第1項$\phi_0(r,t)$に代入し式(32)を用いると[6]

$$\phi_0(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_0}{S(t')} \tag{38}$$

これはよく知られた真空中のリエナール・ヴィーヘルトのスカラーポテンシャルである．上式よりポテンシャルは観測者の時刻tより前の時刻t′の電荷の運動に依存していることがわかる．時間差(t−t′)はちようど波が電荷と観測者の間の距離R(t′)を光速で進むのに要する時間である．つぎに式(25)の第2項について考える．まずはじめに注意すべきことは前節で求めた電磁ポテンシャルの表示の中で積分変数αとr'とは互いに独立と考えた．すなわちまずr'を固定し，そこの電荷のすべての時刻にわたる寄与を積分し，しかる後，r'に関する体積種分を行なつた．しかし式(32)よりわかるように単一の運動電荷の場合にはr'はαの関数となる．これらが互いに矛盾していないことはつぎのように考えることによつて解決される．まず，運動電荷の場合r'を固定したとき，この点をある瞬間に通過した荷電粒子は一般に時間変数αの積分形にはならないで，ある大きさの値のみを持つこととなる．これはαに関する積分の被積分関数$\rho(r',\alpha)$を時間的なδ関数で表わし，それを積分に代入することと等価である．したがつて，電荷が〝尾を引く〟ことは上述のある大きさの値の〝尾〟を空間的に積分することゝ解釈しなければならない．このように考えるとr'がαの関数であると考えることができるようになる．これはまた，物理的に積分変数αと(x′, y′, z′)の間の積分順序の変更が許されることを示している．しかし，$\phi_1(r,t)$で積分順序を変更する場合には変数αに関する積分の上限($t-R/c$)は電荷の位置によつて色々な値をとらねばならない．したがつて，すべての電荷について同一の時刻t

まで積分するために変数αを$(\alpha-R/c)$に変換し，時間変数と空間変数の積分順序を変更すると式(25)の第2項は

$$\phi_1(r,t)=-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{-\infty}^{t}\int_{V_{\gamma'}}\rho(r',\alpha-\frac{R}{c})\frac{J_1(\omega p\sqrt{(t-\alpha+\frac{R}{c})^2-\frac{R^2}{c^2}})}{\sqrt{(t-\alpha+\frac{R}{c})^2-\frac{R^2}{c^2}}}dV_{\gamma'}\,d\alpha \tag{40}$$

とかきかえられる．こゝで，$V_{\gamma'}$に関する積分がはじめに可能であるとし，その時のαは固定されたものと考える．したがつて，またr'はつねに時刻

$$\alpha'=\alpha-\frac{R(\alpha')}{c} \tag{41}$$

の値をとらねばならない．すると，式(40)の$V_{\gamma'}$に関する積分は式(38)を求めたとまつたく同じ操作で求めることができる．しかる後，変数αをα'に変換すると$\phi_1(r,t)$は結局つぎのようになる．

$$\phi_1(r,t)=-\frac{\omega p q_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{-\infty}^{t'}\frac{J_1(\omega p\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}})}{\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha' \tag{42}$$

上式はまた式(25)第2項からも直接求めることができる．式(25)第2項の被積分関数ρのr'はつねに同一の時刻αにおける値をとつている．したがつて，この式で積分変数の順序変更を行なうと式(42)が得られる．ϕ_2，ϕ_3およびAについても同様に考えることにより求まる．積分変数をβより

$$\beta'=\beta-\frac{R'(\beta')}{c} \tag{43}$$

に変換すると，結局プラズマ媒質中のリエナール・ヴイーヘルトのポテンシャルはつぎのように求まる．

$$A(r,t)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot\frac{v(t')}{S(t')}-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{-\infty}^{t'}\frac{v(\alpha')J_1(\omega p\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}})}{\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha' \tag{44}$$

$$\phi(r,t)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 S(t')}-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{-\infty}^{t'}\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha'$$

$$-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{t'}\frac{\sin\omega p(t-\beta)}{R(\beta')}d\beta'$$

$$+\frac{q_0\omega p^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{-\infty}^{t'}\left[\int_{-\infty}^{\beta'}\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(\beta-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{(\beta-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha'\right]\times$$

$$\times\left[1-\frac{v(\beta')\cdot R(\beta')}{cR(\beta')}\right]\sin\omega p(t-\beta)d\beta' \qquad (45)$$

こゝで，関係式 $\mu_0=1/\varepsilon_0 c^2$ を用いた．

4. 放射電磁界の誘導

こゝでは，一例として前節で求めたリエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルの式(43)ならびに(44)を用いてプラズマ中において電荷から遠い所の界（放射電磁界）を求める．

電界と磁界は式(6)と(5)より誘導されるが，式中の座標と時間に関する微分はすべて観測所の点において行なうものである．一方，式(44)，(45)の右辺は電荷の時刻t′における座標と時間で表わされていると考えられるのでtおよび∇で微分するときに注意を払う必要がある．

まず，式(44)，(45)の第1項 A_0，ϕ_0 から得られる放射電磁界は，従来の真空中の放射電磁界であり，次式によつて与えられる[1]．

$$E_0(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 S^2}\left[R\times\left(R-\frac{Rv}{c}\right)\times\dot{v}\right] \tag{46}$$

$$H_0(r,t)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\ \frac{R\times E_0}{R} \tag{47}$$

上式の右辺はすべて電荷の時刻 t′ における値である．つぎに，式(44)，(45)の他の項のうち A_1 と ϕ_1 は同じような形をしているので，これらから得られる放射電磁界を E_1，H_1 とし，式(45)のさらに残りの項から得られる界を E_2 とすると，つぎのように書ける．

$$E_1(r,t)=-\frac{\partial A_1(r,t)}{\partial t}-\nabla\phi_1(r,t) \tag{48}$$

$$H_1(r,t)=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times A_1(r,t) \tag{49}$$

$$E_2(r,t)=-\nabla(\phi_2(r,t)+\phi_3(r,t)) \tag{50}$$

式(48)の第1項は座標 r が固定されているので t と t′ の関係式(36)をそのまゝ用いることができる．そこで公式[7]

$$\frac{\partial}{\partial t'}\int_{-\infty}^{t'}f(\alpha',t')\,d\alpha'=\int_{-\infty}^{t'}\frac{\partial}{\partial t'}f(\alpha',t')d\alpha'+f(t',t') \tag{51}$$

を用いると次式が得られる．

$$\frac{\partial A_1(r,t)}{\partial t'}=-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{v(t')}{2}+\int_{-\infty}^{t'}v(\alpha')\frac{\partial}{\partial t'}\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha'\right] \tag{52}$$

上式の第1項は物理的に意味をなさないので，これを消去するために第2項を変形する必要がある．そのためにまず

$$\begin{cases} w(u)=\dfrac{J_1(\omega p\ \ u)}{u} \\ u=(t-\alpha')^2-\dfrac{R(\alpha')^2}{c^2}=(t-\alpha)(t-\alpha+\dfrac{2R(\alpha')}{c} \end{cases} \tag{53}$$

とおくとつぎの関係式が得られる．

$$\frac{\partial w(u)}{\partial t'}=-\frac{S(t')}{R(t')}\cdot\frac{R(\alpha')}{S(\alpha')}\frac{\partial w(u)}{\partial \alpha'}+\frac{2}{c}\frac{S(t')}{R(t')}(t-\alpha)\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial R(\alpha')}{\partial \alpha} \tag{54}$$

上式を式(52)に代入し，上式の第１項を部分積分することによつて式(52)の第１項を消去することができる．また式(54)の第2項は放射電磁界に関する限り必要でないことが付録で示される．結局，式(52)と式(36)より

$$\frac{\partial A_1(r,t)}{\partial t}=-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{-\infty}^{t'}\frac{\partial}{\partial \alpha'}\left\{\frac{v(\alpha')R(\alpha')}{S(\alpha')}\right\}\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha' \tag{55}$$

同様に，式(48)の第２項は式(51)を用いて

$$\nabla\phi_1(r,t)=-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\omega p}{2}\nabla t'+\int_{-\infty}^{t'}\nabla\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha'\right] \tag{56}$$

となる．上式では時刻 t は固定されているので ∇ は $R(\alpha')$ のみに作用すると考えられる．そこで

$$\nabla w(u)=\frac{\partial w}{\partial R}\nabla R(\alpha')=-\frac{\partial w}{\partial R}\cdot\frac{R(\alpha')}{R(\alpha')} \tag{57}$$

であるが式(54)と同じような次式が成立するので

$$\frac{\partial w}{\partial R}=-\frac{1}{c}\frac{R(\alpha')}{S(\alpha')}\frac{\partial w}{\partial \alpha'}-\frac{R(\alpha')}{c^2}\frac{\partial w}{\partial u} \tag{58}$$

上式右辺第１項を部分積分し，第２項は式(54)の 第２項と同じ理由で捨て去ると結局

$$\nabla\phi_1(r,t)=-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{-\infty}^{t'}\frac{\partial}{\partial\alpha'}\left\{\frac{R(\alpha')}{S(\alpha')}\right\}\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha' \qquad (59)$$

なる式が得られる．上式はまた式(42)で変数αをα'に変換する前の式からも容易に求めることができる．式(55)，(59)の被積分関数のうちα'で微分する項は分子の$R(\alpha')$を除けばA_0ならびにϕ_0の式においてt'のかわりにα'とおきかえたものにまつたく等しい．したがつて放射電磁界も容易につぎのように求まる．

$$E_1(r,t)=-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{-\infty}^{t'}\frac{1}{S(\alpha')^2}\left\{R(\alpha')\times\left(R(\alpha')-\frac{R(\alpha')v(\alpha')}{c}\right)\times\dot{v}(\alpha')\right\}$$
$$\cdot\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha' \qquad (60)$$

また，式(49)，(50)からまつたく同様にしてつぎの式が求まる．

$$H_1(r,t)=-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{-\infty}^{t'}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{1}{R(\alpha')}R(\alpha')\times e(\alpha')\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{(t-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha' \qquad (61)$$

ここで，

$$e=R(\alpha')\times\left(R(\alpha')-\frac{R(\alpha')\cdot v(\alpha')}{c}\right)\times\dot{v}(\alpha') \qquad (62)$$

$$E_2(r,t)=-\frac{q_0\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{-\infty}^{t'}\frac{R(\beta')}{R(\beta')}\frac{R(\beta')\cdot\dot{v}(\beta')}{S(\beta')^2}\sin\omega p(t-\beta)\,d\beta'$$
$$-\frac{q_0\omega p^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{-\infty}^{t}\left[\int_{-\infty}^{\beta'}\frac{R(\alpha')(R(\alpha')\cdot\dot{v}(\alpha'))}{S(\alpha')^2}\cdot\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{(\beta-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{(\beta-\alpha')^2-\frac{R(\alpha')^2}{c^2}}}d\alpha'\right]\cdot$$

$$\cdot \sin \omega p(t-\beta)\, d\beta \qquad (63)$$

式(60)および(61)は物理的に興味のある結果を示している．すなわちE_1とH_1は真空中の放射電磁界がプラズマの分散性のためにその伝播速度がおそくなりそれに伴つて振巾も小さくなつて行くいわゆる"成分波"の合成を表わしている．したがつて，いつも成分波の時刻α'に対してはE_1とH_1は互いに動径方向$R(\alpha')$に対して垂直になつている．それに対して式(63)で与えられる電界は成分波の時刻β'に対してはつねに動径方向を向いていることがわかる．

上に得られた放射電磁界の式より，エネルギーの流れを表わすポインティングベクトルの方向も容易に求めることができる．E_1とH_1から作られるポインティングベクトルの方向はつねに過去の動径方向$R(\alpha')$の方向である．それに対してE_2とHから作られるポインティングベクトルの方向はRに対して垂直である．

5．結　　言

等方プラズマ中を任意に運動する荷電粒子の放射を考えるために，プラズマ中のリエナール・ヴイーヘルトのポテンシヤルを求め，一例として電荷より遠く離れたところの界，すなわち放射電磁界を誘導した．これらの得られた電磁界は，電荷の運動とそれらの界の関係とが物理的に理解しやすい形になつている．さらにこれから得られるポインティングベクトルの成分は，動径方向のほかに動径方向と垂直な方向の値をも持つことが明らかとなつた．

終りに，いろいろと助言いたゞいた奈良高専 阿座上　孝　博士に深謝する．

文　　献

(1) ランダウ=リフシッツ：場の古典論　p. 188, 東京図書, 1964年

(2) たとえば, A.S.Tuan and S.R.Seshadri：
IEEE Trans, vol.AP-13 Jan.1965

(3) Ian.N.Snedden:Fourier Transfarm p.336 McGraw-Hill 1951

(4) Campell and Foster：Fourier Integal D.V.N.1954

(5) Papoulis：The Fourier Integral and Its application
p.278 McGraw-Hill 1962

(6) パノフスキー=フィリップス：電磁気学 下, 吉岡書店, 1962年

(7) J.A.Stratton:Electromagnetic Theory McGraw-Hill 1941

付　　録

式(54)の第2項と式(52)から得られる電磁界は放射に寄与しないことは次のように示される．まず簡単のためにRがα'に無関係の場合には式(29)が成立する．この式で積分変数を適当に変換すると

$$-\frac{\omega p}{c}\int_{-\infty}^{0}\frac{J_1\left(\omega p\sqrt{\alpha^2-\frac{2R}{c}\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha^2-\frac{2R}{c}\alpha}}d\alpha=\frac{1}{R}-\frac{e^{-\frac{\omega p}{c}R}}{R} \qquad (付-1)$$

これをRについて微分すると

$$-\frac{\omega p}{c}\int_{-\infty}^{0}\frac{2\alpha}{c}\frac{\partial_W(u)}{\partial u}d\alpha=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}-\frac{e^{-\frac{\omega p}{c}R}}{R}\right) \qquad (付-2)$$

これをもとの積分変数にもどすと

$$-\frac{\omega p}{c^2}\int_{-\infty}^{t-R/c}(t-\alpha)\frac{\partial\omega(u)}{\partial u}\,d\alpha'=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}-\frac{e^{-\frac{\omega p}{c}R}}{R}\right) \qquad (付-3)$$

上式の左辺は式(54)と同じであると考えられるが，右辺は $1/R$ をRで微分しているのでこれは電荷より近くの界を表わしていると考えることができる．