輻射科学研究会資料

Sバンド広帯域パルスクライストロン

小野寺　俊　男
家　喜　洋　司
大　野　昭　郎
神　生　忠　興
岡　田　武　夫

（三菱電機　中央研究所）

昭和41年5月28日(土)
（於　三　菱　電　機）

§1 緒　　言

我々は 一般にクライストロンは 本質的に狭帯域増幅器であり，これに対して進行波管は 広帯域増幅器であると考えて来た。しかしMW級の大電力レベルでは この相違が薄れて来る。この大きな理由は 大電力進行波管において 広帯域特性を有するら線が使えなくなるからである。一方クライストロンは その出力の増加にともない，ビームコンダクタンスの増加，空胴の R_{sh}/Q_0 の増加およびクライストロンの高能率性により 帯域幅が増加する。

この論文は 適当に設計されたMW級の多空胴クライストロンは広帯域化のために特別な構造を用いなくても，それ自体でかなりの広帯域性を有することを示すと共に，Sバンド広帯域パルスクライストロンの開発の途上に生じた次の二つの問題点とその解決策について述べる。その1に出力空胴と負荷との結合度 Q_{ext} をいかに選定すれば 能率の低下を招かずに帯域幅を広げることができるかという点であり，その2に集群能率を余り低下せずに使用周波数帯でできるだけ高利得で かつ平坦な周波数特性を与えるスタガー同調法についてである。

§2. 出力空胴の Q_{ext}

筆者等は 出力空胴の Q_{ext} を可変にした特別のクライストロンにより一定のビーム入力に対して Q_{ext} と飽和出力，従って Q_{ext} と能率との関係を求め[1][2]，更に負荷時の出力空胴の R_{sh}/Q_0 を測定して[3][4] 負荷インピーダンス及び間隙電圧と能率との関係を求めて報告した。図1に その実験結果を示す。

線型加速器用のクライストロンには 図1から動作電圧に対して最大能率を与える負荷インピーダンスに対応した Q_{ext} を出力空胴の Q_{ext} に選べばよい。この結果 40%以上の能率の線型加速器用クライストロンを開発することができた。[5]

しかし広帯域クライストロンの場合には 出力空胴の帯域幅がその最終の帯域幅を決定する故に，能率と帯域幅の両方を考慮して出力空胴の Q_{ext} を選定しなければならず，単純には行かない。即ち大ざっぱには 出力空胴の帯域幅を広げるため Q_{ext} を低く取る方が良いと考えられるが，能率の点から余り低くすることもできない。また出力空胴の帯域幅を広げるために動作電圧を上げることは 有効か等の疑問が生ずる。これらの問題は 出力間隙

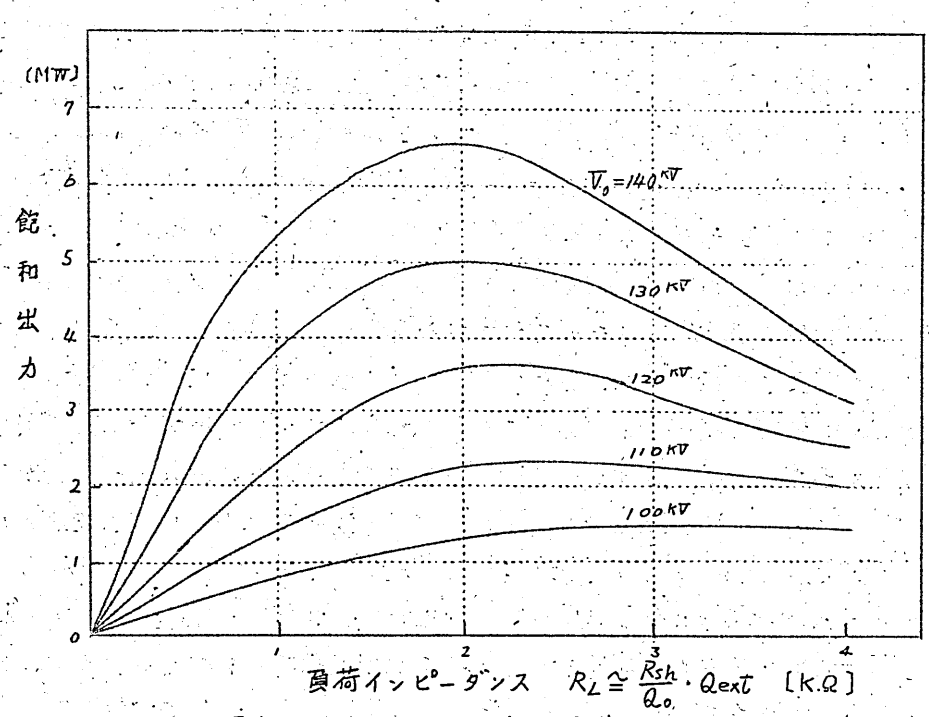


図1. 負荷インピーダンスと飽和出力

での大振幅効果を考慮せねばならず、理論的に解析することは難しい。

図2に筆者等が開発した線型加速器用クライストロンの出力空胴の動的帯域幅を示す。ここで動的帯域幅とは 出力空胴のインピーダンスの周波数特性

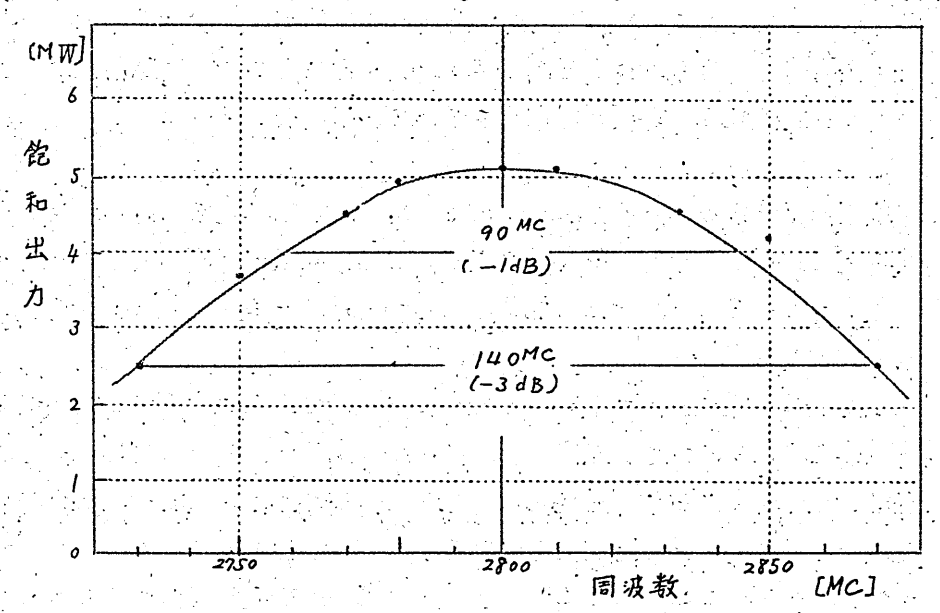


図2. 出力空胴の帯域幅（実験値）

すなわち，Qカーブから決まる帯域幅に対して使ったもので．出力空胴は中心周波数に固定したままで　他の4ケの空胴を機械的に同調して各測定周波数において　集群能率が最大になるように調整し，各周波数に対して飽和出力をプロットしたものである。この実験結果から　出力空胴の（動的）帯域幅はQ値から予想される値よりもかなり広帯域で　かつ平坦な周波数特性を持つことが判る。従って出力空胴は　複空胴を使用しなくても 90～100 MCの帯域幅を持つことが結論される．

上の二つの実験的事実は　次のように考えると統一的に説明できることに気づく。図1において負荷インピーダンスを変化することは　出力間隙に誘起される高周波電圧の振幅を変化していることであり，この時出力空胴は並列共振しているから集群電流と間隙電圧とは同相である。次に図2において周波数が出力空胴の共振周波数からずれた時の出力空胴のインピーダンスは　次式のように共振時の抵抗値より減少すると共にリアクタンス分を持つ。

$$Z(j\omega) = \frac{R_L}{1+j2Q_{ext}\cdot\delta} = \frac{R_L}{1+4(Q_{ext}\delta)^2}(1-j2Q_{ext}\delta) \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで δ は　離調率で，$\delta = (\omega-\omega_0)/\omega$ で与えられる。

このため集群電流と間隙電圧は　力率角 α だけ位相がずれ，集群が作用間隙で仕事する際の高周波電圧は　尖頭値の $\cos\alpha$ 倍であり，この高周波電圧値は負荷インピーダンスが出力空胴のインピーダンスの実数部に等しい抵抗値とした時の間隙に誘起される高周波電圧の尖頭値に等しい。従って図3に示すように負荷インピーダンスと能率の関係および周波数と出力空胴のインピーダンスの実数部との関係の二つから，周波数に対する飽和出力の関係が得られ，図4のように実験値と非常に良い一致を示す。

この考えが正しいものとして　出力空胴の Q_{ext} を変化した時の帯域幅およびビーム電圧を変化した時の帯域幅を各々図5および図6に示す。これ等の関係から広帯域クライストロンにおいては　出力空胴の Q_{ext} は　最大能率に対応する Q_{ext} よりやや高めの値に選ぶのが　帯域幅および能率の両方の点から望ましい。又ビーム電圧の上昇と共に帯域幅は　増加する故，ビーム電圧を上昇することは有効である。

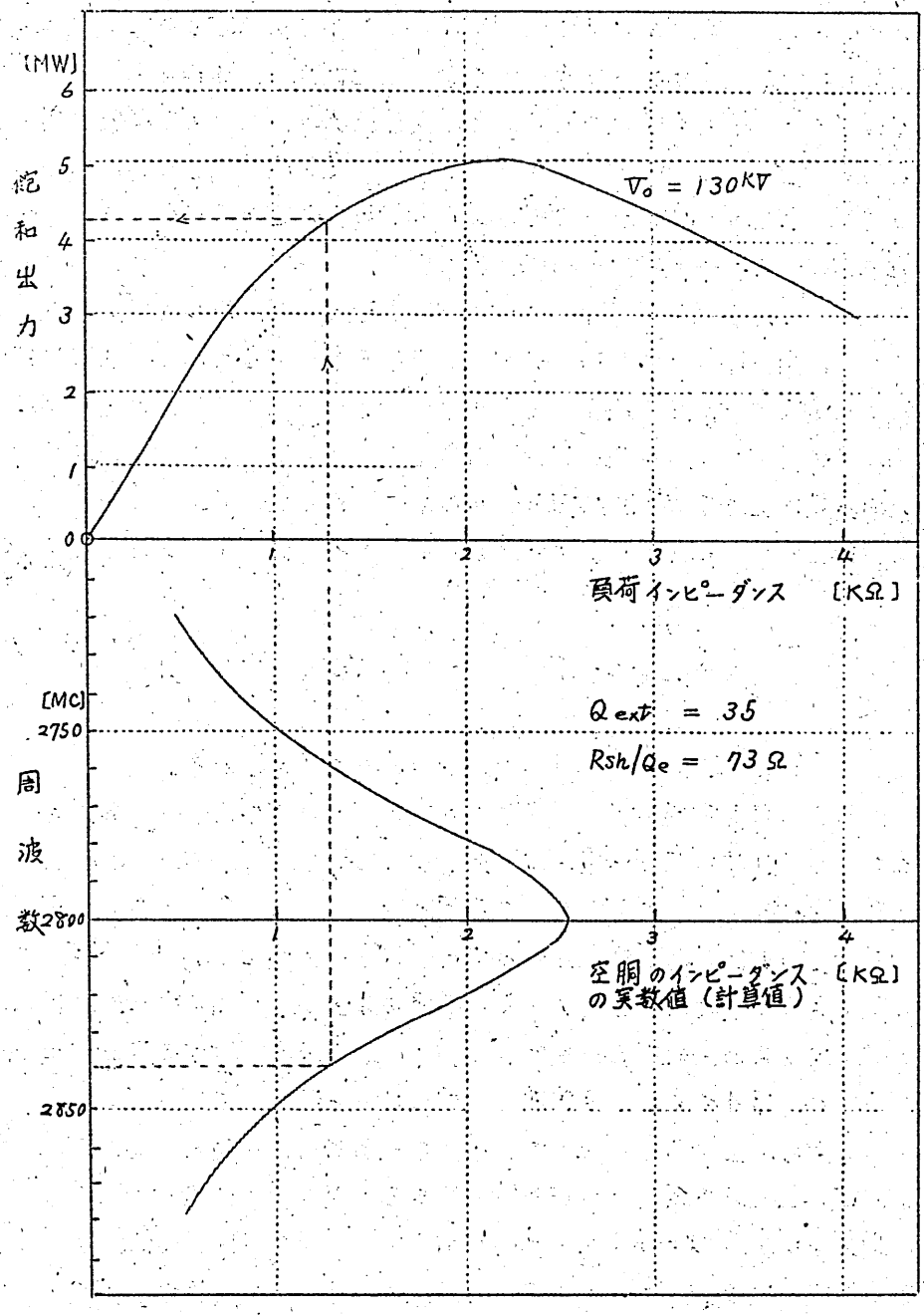


図3. 出力空胴の帯域幅の計算法

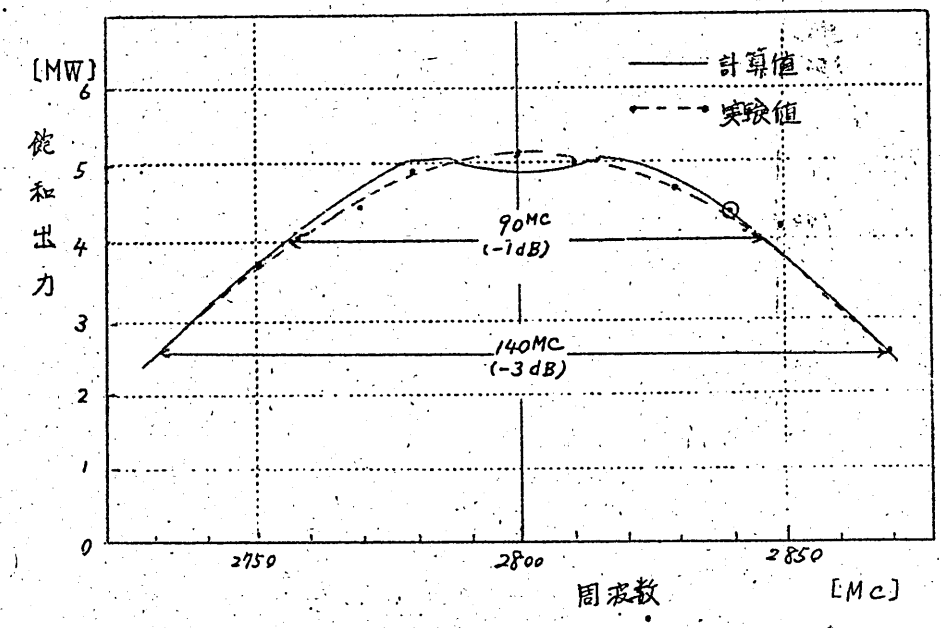


図4. 出力空胴の帯域幅(計算値)

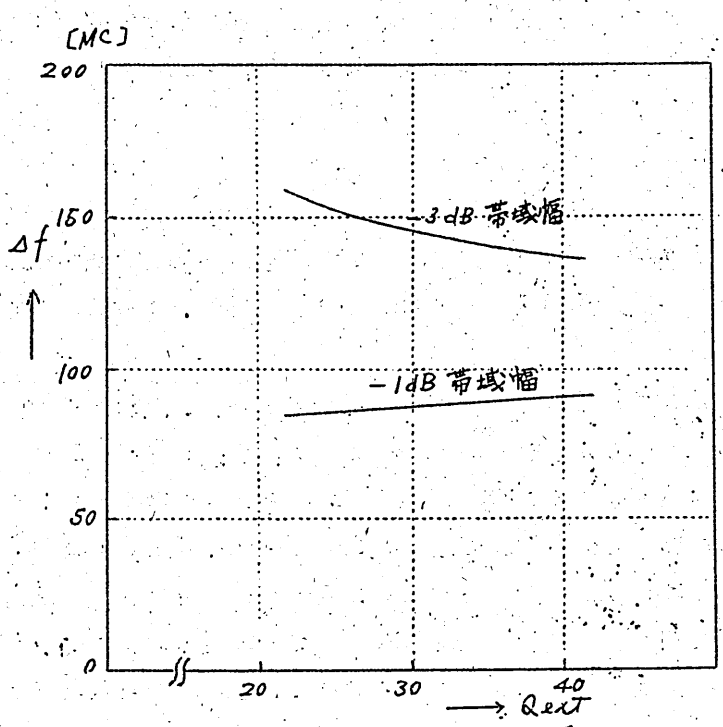


図5 Qext と出力空胴の帯域幅

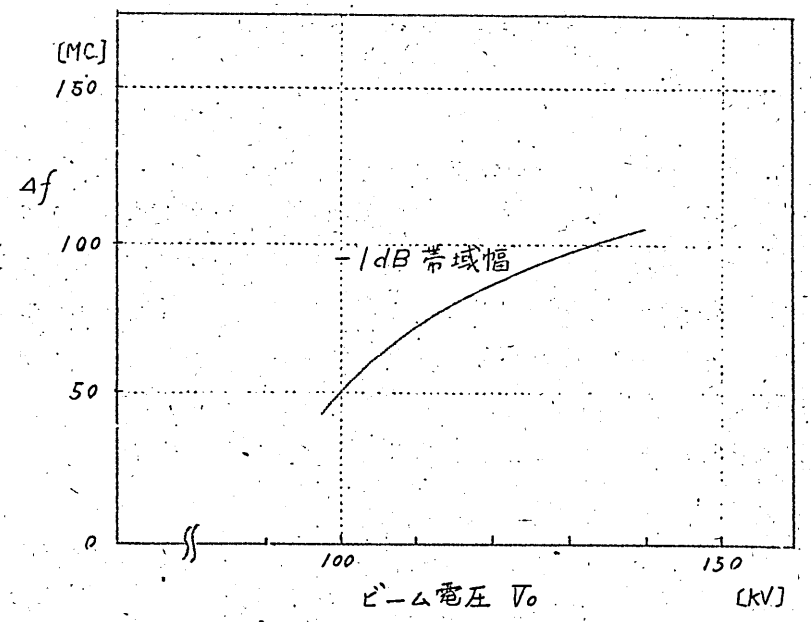


図6 ビーム電圧と出力空胴の帯域幅

§3 設　　計

広帯域クライストロンの設計に際して 下記の値を設計目標とした。

(1) 周波数 ; Sバンド(一応中心周波数を2800MCとする)

(2) 帯域幅 ; 100MC以上

(3) 尖頭出力 ; 5MW以上

(4) 飽和利得 ; 40dB以上

パルス電源の製作上の容易さからビーム電圧を150KV以内にし, 一定のビーム入力と一定の高周波入力に対して上記の特性の得られることを目標とした。

先に開発した線型加速器用クライストロンは その出力空胴の帯域幅が100MC程度あるにもかかわらず, 全体としての帯域幅(-1dB)は 飽和利得40dB付近では 40MC止まりであった。すなわちこのクライストロンでは 前段部の利得一帯域幅積が小さいことが全体としての帯域幅を狭くしていると考えられる。したがって広帯域クライストロンの設計方針として線型加速器用クライストロンを基本にして, 利得一帯域幅積をできるだけ大きく取れるようにビーム系とこれに結合する空胴群を再設計することにした。

一段当りの電圧利得一帯域積は次式で与えられる。

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{R_{sh}}{Q_0}\right) g_1 \qquad \cdots\cdots (23)$$

ここで g_1 は一段当りのトランスコンダクタンスで ビームコンダクタンス I_0/V_0 に比例し，かつパービァンス・空胴間隔等の関数である。また R_{sh}/Q_0 は，中間空胴の特性インピーダンスで空胴の幾何学的形状のみで決まる量である。これらの関係から A_1 を最大にするような条件を一義的に決めることは難しいが，実際的に可能な範囲でできるだけ細いビームを作り，これと結合する空胴のドリフト管径を小さくすることによって空胴の R_{sh}/Q_0 を大にして A_1 を改善することを試みた。表1に設計値の主なものを示す。

表1. 主な設計値

ビーム電圧	;	140 KV
ビーム電流	;	105 A
パービァンス	;	2.0×10^{-6} $A/V^{3/2}$
ビーム速度	;	0.634 C
低減プラズマ波長	;	68 cm
空胴間隔	;	$\lambda_g/8$
空胴間隙長	;	1.0 rad
ドリフト管半径	;	0.7 rad
特性インピーダンス（中間）	;	95 Ω
$[R_{sh}/Q_0]$ （出力）	;	80 Ω
外部Q値 （入力）	;	200
$[Q_{ext}]$ （出力）	;	35
カソード・ドリフト管面積比	;	18 : 1
カソード・ローディング	;	2.0 A/cm^2

帯域幅は ビームコンダクタンス I_0/V_0 に比例する故，パービァンスを増加する方法も有効であるが，MIGによる中空ビームでも使用しない限り $2\mu P$ をはるかに上回るようなパービァンスの電子銃を製作することは難しい。従って今回は パービァンスは $2\mu P$ のままでできるだけ集束度の高い電子銃を設計することをその主眼点とした。すなわち，長寿命化の点からカソードローディングを $2A/cm^2$ とかなり余裕度をみてカソード直径を 80φ

に選び，このカソードから面積比が 1/18 のかなり細いドリフト管を楽に通過するビーム径まで集束する。更に高周波変調された時にもビームがドリフト管内を安定に通過するように，Stiffness の大きなビームを形成する Confined focusing を採用している。従って集束磁界は ブリルアン磁界の約3倍を必要とし，ビーム透過率は 98% 以上である。

空胴関係での最も大きな改良は 前述のようにドリフト管径を小さくしたことで，βa で 0.7 rad に選んだことである。中間空胴の間隙幅に関しては空胴の Figure of merit と呼ばれる $M^2 \frac{R_{sh}}{Q_0}$ を極大にする間隙幅に選ぶ場合もあるが，これまでの間隙幅 1 rad. を取った。これらから中間空胴の R_{sh}/Q_0 は 95 Ω になった。また出力空胴の R_{sh}/Q_0 はできるだけ前の値に近づくように間隙寸法を決め，80 Ω にした。空胴間隔は 集束用電磁石の寸法から制約され，前の寸法と同じく 83 mm に選んだが，プラズマ波長の減少によって $3\lambda_g/8$ になった。空胴の数は 小信号利得の周波数特性の計算から5空胴とした。すなわち，これまでのデータから飽和利得と小信号利得との差は，大体 6～7 dB あり，飽和利得 40 dB を得るためには 小信号利得が少なくとも 47 dB 必要である。計算結果の1例を図10に示すように5空胴クライストロンのスタガー同調により，100 MC の帯域幅が得られることを確かめた。出力空胴を除く4ケの空胴は その空胴壁の一つが ダイヤフラムになっていて，外部から自由にその共振周波数を変化することができ，各空胴の共振周波数は 実験により 最適に調整された後に固定される。

出力セラミック窓の周波数特性を図7に示す。使用周波数帯で VSWR は 1.05 以内である。その構造は，水により冷却された円形導波管の内部にアルミナ製の円板がロウ付され，出力空胴と出力窓との間に E面曲り導波管を用いて，出力窓から出力空胴が直接見えないようになっている。加圧側の導波管は フレオンをゲージ 2～3 気圧加圧して使用する。

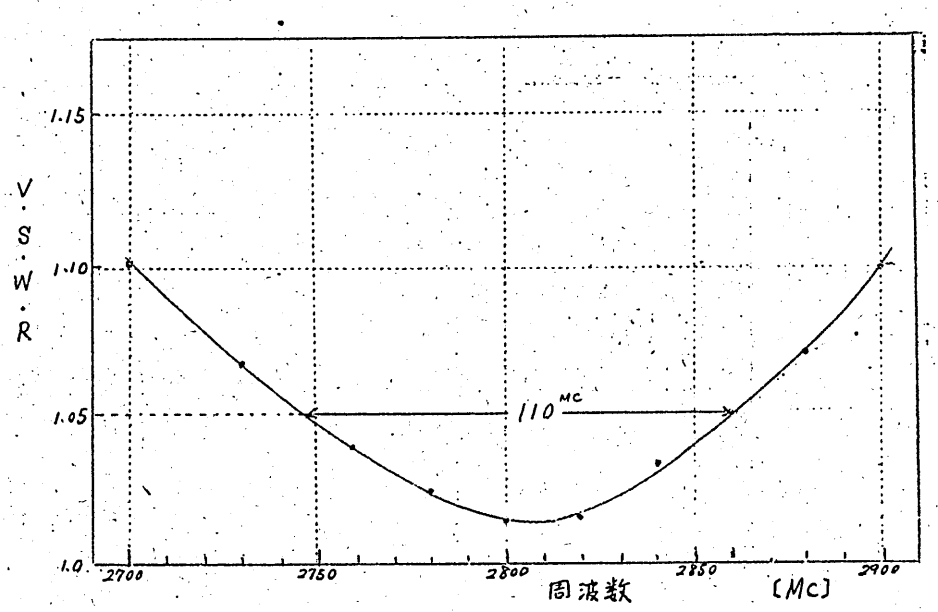


図7. 出力セラミック窓の周波数特性

§4 スタガー同調

出力空胴を除く残り4ケの空胴のスタガー同調は 何等の制約もなく任意のように思えるが，次の二つの点から余り自由度が無いことに気付く。これは言い換えれば 調整が容易になることを意味する。

図8 と 図9とに示すように#4空胴と#3空胴とを動作周波数より高い周波数に離調することにより能率が向上する傾向がある。[6] また、60MC以上離調しても能率の向上および利得の減少に飽和の様相を示す。#2空胴に関しては 利得が減少するのみで，能率はほとんど増加しない。これらの性質から各空胴の共振周波数は 次のように配置した方がよい。まず#4空胴は必ず周波数帯域の上限か、帯域の外に出てしまう程高い方に離調した方がよい。#3空胴もどちらかというと帯域内の高い方に配置して高域部の利得を持たせる方がよい。#2空胴は 低域部での利得を持たせるため低い方に持ってまる。入力空胴と出力空胴とは、中心周波数に合わせる。

5空胴クライストロンの小信号電力利得 G は 次式で与えられる。[7]

$$G = \frac{4}{(Q_{ext})_1 \cdot (Q_{ext})_5 \cdot \left(\frac{R_{sh}}{Q_0}\right)_1 \cdot \left(\frac{R_{sh}}{Q_0}\right)_5} \cdot |Z_1 g_{51}| \qquad \cdots\cdots (3)$$

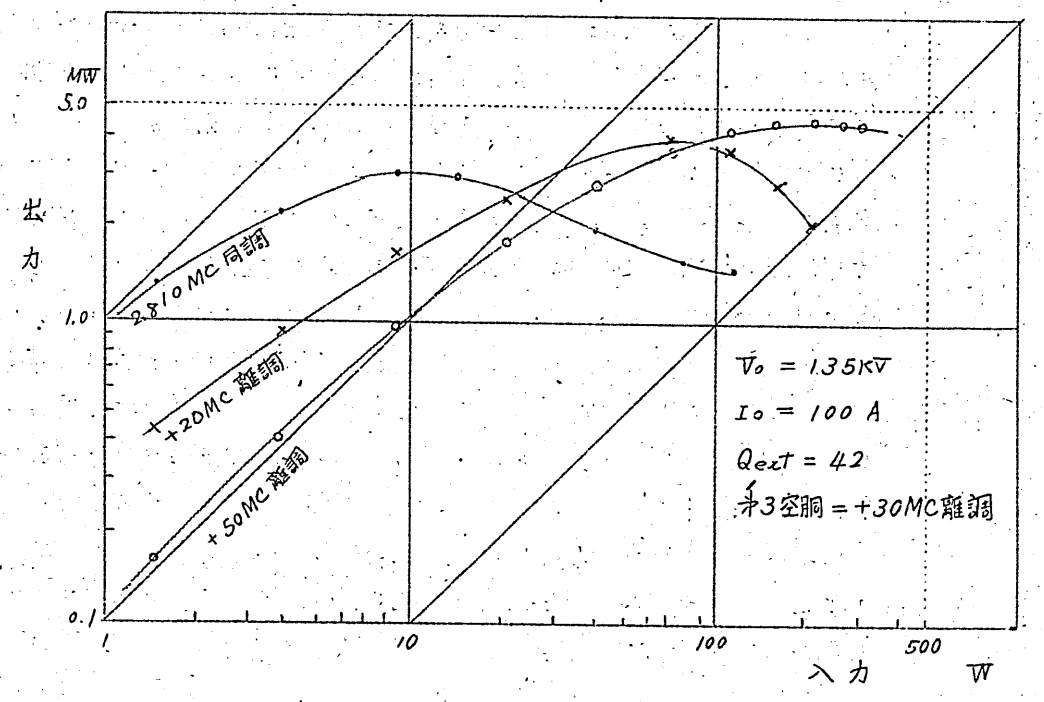


図8　#4 空胴の離調と入力出力特性

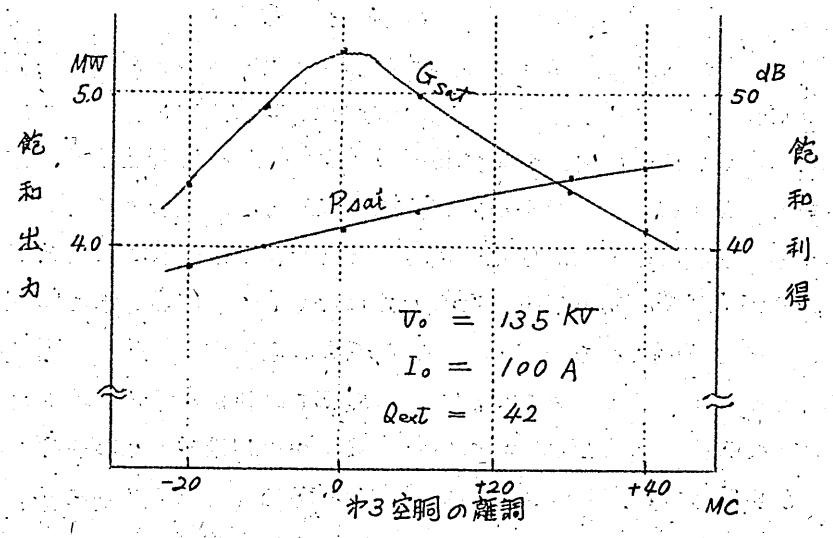


図9　#3 空胴の離調と飽和出力および飽和利得

ここで g_{51} は 全体の電圧利得を示す。又 g_{51} は 5空胴クライストロンの場合 5ケの極と3ケの零点を有し、5ケの極は それぞれ各空胴に対応する。特に空胴間隔が $\lambda_g/8$ の時は 入力空胴から出力空胴へのトランスコンダクタンス g_4 は零になり、零点を求める方程式は 3次方程式から2次方程式になり したがって 零点の数が2つになり、かつその計算が容易になる。他の問題と同様に利得函数は零点の近傍で低下するので、極の配置は零点が 帯域幅の外に出てしまうか または近くの極で打消すことが必要になる。一般に $\lambda_g/4$ 以下の空胴間隔に対して 最も近の零点は 帯域の上限付近に分布する。我々の場合 極の配置により、多少零点の位置は変動するが、大体において 2860MC付近に低い方の零点があり、この効果が高域部の利得に影響する。この零点の影響を補償するため 帯域の中心より高い方により多くの空胴を持って来る必要がある。

図10に小信号利得の計算結果と実験結果を示す。各空胴の共振周波数を下記のように 配置した。

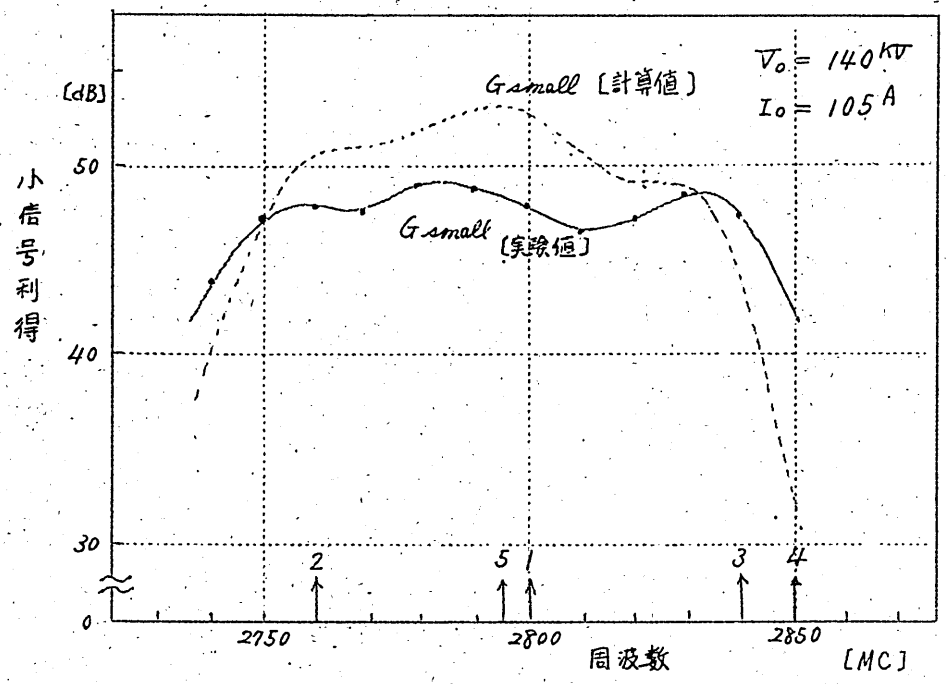


図10 小信号利得の周波数特性

$f_1 = 2800\,MC$　　$Q_1 = 80$
$f_2 = 2760\,MC$　　$Q_2 = 130$
$f_3 = 2840\,MC$　　$Q_3 = 130$
$f_4 = 2850\,MC$　　$Q_4 = 130$
$f_5 = 2795\,MC$　　$Q_5 = 35$

この時の零点は

$Z_1 = 2860.7\,MC$
$Z_2 = 2932.5\,MC$

となり，Qは 共に 130である。実験結果との食い違いは 計算において中間空胴のQ値の見積りが少し高過ぎたためと考えられる。

図11に高レベルの周波数特性を示す。最大出力は 6.6 MWで，能率は45%に達する。帯域幅は −1dB で 90MC，−15dB で 100 MCになる。高周波入力の不足のため 飽和出力の周波数特性は 測定していない。得られた結

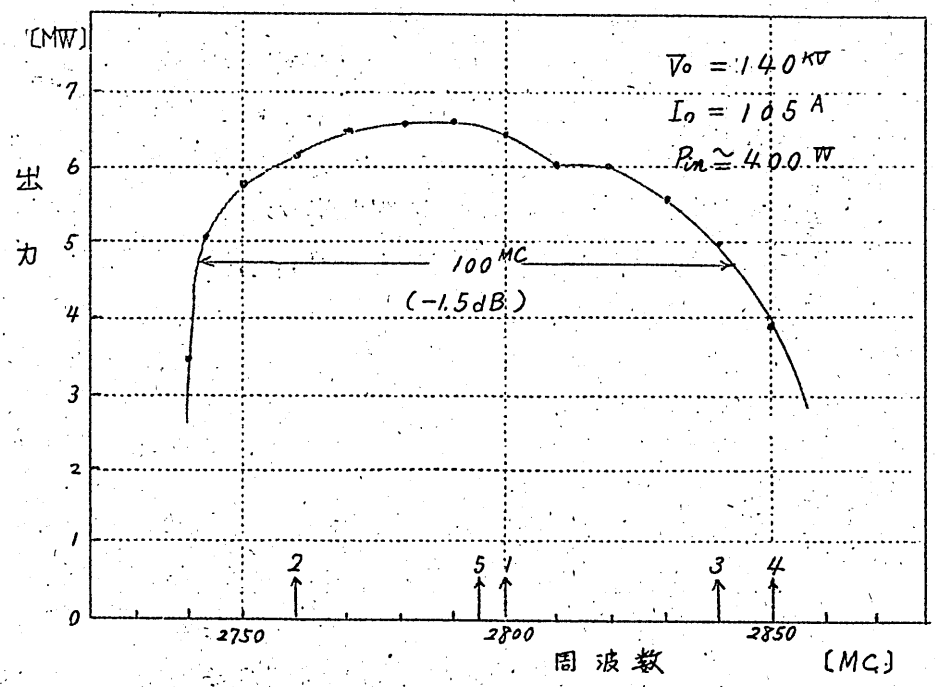


図11 周波数特性

果をまとめると.

(1)	中心周波数	; 2800 MC
(2)	帯域幅 (−1.5dB)	; 100 MC
(3)	尖頭出力 (最大)	; 6.6 MW
(4)	能率 (最大)	; 45 %
(5)	飽和利得 (最大)	; 42 dB
(6)	小信号利得 (最大)	; 49 dB
(7)	ビーム電圧	; 140 KV
(8)	ビーム電流	; 105 A
(9)	パルス幅	; 6μS
(10)	くり返し周波数	; 200PPS

これらの結果は 当初の目標をほぼ満足するものであるが、更にもう少し利得を減少することにより, −1dB での帯域幅で100MC 以上を得ることができると考える。

§5. 結　　言

以上Sバンド広帯域パルスクライストロンの開発について述べた。主な結論としては

(1) Sバンド5空胴パルスクライストロンにおいて 能率を低下することなく、100MCの帯域幅を得ることができた。

(2) 広帯域クライストロンにおいては 出力空胴の Q_{ext} は最大能率に対応する Q_{ext} より やや高めの値を選ぶ方がよい。

終りに, 御指導および御助力下さった当所の八十田部長, 建石主任研究員, 樋野係長に深謝致します。

参考文献

(1). 岡田, 建石, 小野寺, 家喜　"クライストロンの最適負荷インピーダンス" 輻射科学研究会資料, 昭和40年10月30日

(2) 岡田, 建石, 小野寺　"クライストロンの最適負荷インピーダンス" 昭和40年度電気通信学会全国大会　457

(3) 岡田, 小野寺, 神生, 家喜.　"空胴の特性インピーダンス R_{sh}/Q_0 の一測定法" 輻射科学研究会資料　昭和40年2月5日

(4) 岡田, 小野寺, 神生, 家喜 "空胴の特性インピーダンス Rsh/Q₀ の一測定法"
昭和41年電気四学会連合大会 1193

(5) 岡田, 建石, 小野寺, 外 "大電力パルスクライストロン"
三菱電機技報 Vol. 39. P.1062-1068 (Sept. 1965)

(6) 小野寺, 家喜, 神生, 岡田 "大電力パルスクライストロンの広帯域化"
昭和41年電気四学会連合大会 1189

(7) 根本, 設楽, 渡辺 外 "6GC 帯広帯域大電力クライストロンの試作"
マイクロ波真空管研究会資料 1963年7月15日

輻射科学研究会.第2.3.4 部会資料

マイクロ波フェライト測定の問題点

昭和41年5月28日

（於 三菱電機株式会社）

三菱電機株式会社

信岡　正祐

堀切　賢治

1. まえがき

電磁波と物質の間は3つの量：ε、μおよびσで結ばれる。これらの量は材料定数と呼ばれ周波数、温度、歪、および外部磁場などによつて変化する。これまではたいていの場合、ある特定の周波数に限つてこれらの定数を測定することが多かつたが、最近種々の新しいタイプのマイクロ波用合成樹脂やフエライトなどを利用した小型高能性のdeviceの研究開発が盛んになるとともにまたその周波数範囲も拡大され、これにつれて測定法もさらに重要になつてきた。

マイクロ波におけるεおよびμの測定法は古くから種々の方法が提案されているが①～③現在のところ定在波法と共振法を除いては余り使われない。これらの方法についても周波数、測定器、その他によつていろいろの変形があるが良く使われる代表的なものは前者では短絡開放法、後者では摂動法③である。短絡開放法はεとμを含んだ2つの複素量を測り計算によつてεとμを分離する方法で一般に計算が複雑である。これに反して摂動法は適当な共振器の特定の場所に一定条件を満足する微小試料を入れて、試料挿入前後の摂動現象つまり共振状態の微小変化を測つてεまたはμを独立に求める。

フエライトの測定の場合は前者の方法で薄板などの小試料を使つた方が都合が良く、後者の摂動法と同じであるが、測定周波法の点から考えると共振法はふつうつぎのような制限に遭遇する。

a　約5000MC以上に限られる

b　固定周波数でしか使えない

c　試料の保持が難かしい

ことである。一方この方法の長所は一定条件さえ満足すれば非常に迅速に結果が得られることである。

マイクロ波では従来VHF以下で使われていた巻線法のような集中回路は全く不適当でふつう数GC以下は同軸あるいはストリップ、それ以上は導波管系が用いられる。同軸は広帯域で用いることができるが寸法を縮小するためには新たな問題が生じる。

2. ε、μの測定法

2.1　共振法によるε、μの測定法

共振法では衆知のようにεの測定には電界の最大部、μの測定には磁界の最大部に試料を入れて、試料挿入前後の共振周波数とQの変化をしらべる。そうすると共振周波数の変化は（ε'－1）、（μ'－1）および試料が空間に占める割合に比例する。誘電率は

$$\frac{\triangle f}{f} = \alpha_\varepsilon \ (\ \varepsilon' - 1\ ) \ \frac{\triangle V}{V}$$

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = 2\alpha_\varepsilon \quad \varepsilon'' \frac{\triangle V}{V}$$

または透磁率は

$$\frac{-\triangle f}{f} = \alpha_\mu (\mu' - 1) \frac{\triangle V}{V}$$

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = 2\alpha_\mu \quad \mu'' \frac{\triangle V}{V}$$

から求まる。ここにfは共振周波数、$\triangle f$は試料挿入前後の共振周波数の差、Vは共振器容積、そして$\triangle V$は試料体積である。なおα_ε、α_μは空胴の共振モード、幾何学的形状および試料寸法できまる定数であつて同軸線路では1である。

これらの測定は磁場のfactorがないため、比較的簡単であるが、試料寸法、形状の影響ならびにQの測定が問題となる。εの測定の場合試料空胴は軸対称モードを使用するには試料形状は円板または棒状が好ましいが円板は出し入れが面倒である。溶融石英棒（0.785φ）での測定結果は10GCで$\varepsilon' = 3.7$であつた。2%の精度に入つている。

また別の試料での例では0.98□⇨0.90□⇨0.80□⇨0.70□と細くした時、ε'は10.6、10.6、10.4、10.4と2%以内で一致した。この場合の空胴容積と試料体積の比は6.7×10^{-4} ⇨ 3.3×10^{-4}である。最も測定に影響を与えるのは空胴内の試料の位置で同一寸法のもので10.23、10.39と異なる値を示す。摂動法の考えからはより大きな値が理論的に正しい。

$\tan\delta$の測定は空胴のQの逆数の差で表わされ、このQの測定精度がせいぜい3桁程度であるため、10^{-4}のものは$\varepsilon \simeq 10$として1桁しか精度がない。

2.2 定在波法によるε、μの測定法

共振法に対して定在波法でも薄板試料を用いた場合には共振法の周波数のずれに対して定在波最小点のずれ、また共振法のQの変化に対して電圧定在波比の差を測れば良い。同軸の

場合には $m < 0.1$, $\frac{2\pi}{\lambda} \triangle L < 0.2$ なら近似式

$$\varepsilon' \text{（または} \mu' \text{）} = \frac{\triangle L}{t}$$

$$\varepsilon'' \text{（または} \mu'' \text{）} = \frac{m\lambda}{2\pi t}$$

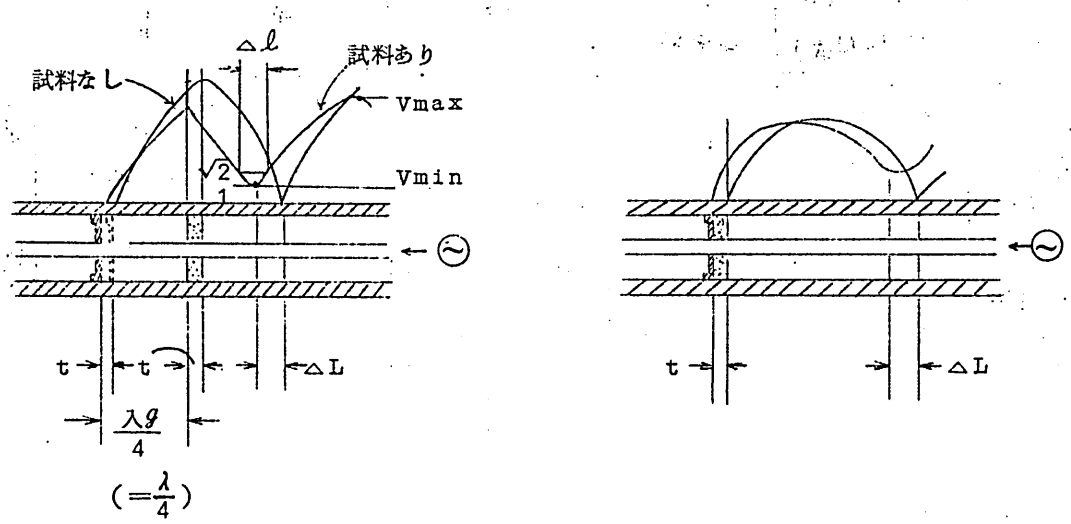
$$\simeq \frac{\triangle \ell}{2\pi t} \quad \left(m = \frac{V_{min}}{V_{max}} \simeq \frac{\pi \triangle \ell}{\lambda} < 0.1 \right)$$

から諸定数が求まる。ここに t は試料の厚さ、$\triangle L$ は電圧最小点のずれ、m は電圧，定在波比の逆数の差、λ は波長そして $\triangle \ell$ は半値巾である。（図１）。これらの式はさきの摂動法の

$$\frac{\triangle f}{f} \Rightarrow \frac{\triangle L - t}{\lambda} \quad , \quad \frac{\triangle V}{V} \Rightarrow \frac{t}{\lambda}$$

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} \Rightarrow m \quad , \quad 2\mu'' \frac{\triangle V}{V} \Rightarrow 2\mu'' \frac{t}{\lambda}$$

からでも直ちに得られる。



開　放　　短　絡

図　1

2.3　両者の比較

共振法は前に指摘したように広い周波数や低い周波数での誘電率の測定に向かない欠点があり、しかも前記仮定を満たさない試料たとえば高損失材料の測定にも役立たない。これに反して定在波法は適用範囲が広い。

測定法の比較と種々の材料の性質をしらべるために積極的に種々の試験を行つた。その結果を別表1に示した。測定器は定在波法ではRohde & Schwarz のSlotted Line とZg Diagraph（インピーダンス直視装置）、共振法ではBoontonのQメータ（空胴共振器は自社製）である。Zg Diagraphは結果が早く知れる点では優れているが、測定精度と測定範囲の2つの点でやゝ不満足である。この方法で測つた周波数特性の1例を別図1に示した。

なお参考のため周波数で分けた測定法の分類をつぎに示す。測定対象、目的、測定の難易、費用などの点で一がいに優劣はつけ難いがどちらかといえば空胴法は低損失材料や比較測定に、定在波法は絶対測定に適している。

表　　1

	周波数	精度	計算*	共振器または試料ホルダ	試料形状	文献，他
同軸共振法	500MC ～10GC	やゝ不良	複雑	複雑	薄板 円板	③ ストリップもある。
導波管共振法	3～30GC (10GC最適)	不良 ～やゝ不良	簡単～複雑	簡単	球 棒 板	③
同軸定在波法	100MC ～3GC	やゝ良～良	やゝ複雑	やゝ簡単	管 トロイダル	②
導波管定在波法	3～30GC (10GC最適)	良	複雑	簡単	板 棒	①

*摂動法は簡単

2.4　試　　料

測定に先立つて試料の厚さをどう選ぶかということは周波数、加工法、試料定数などから一度では決め難く、全く性質のわからない場合には予備測定がいる。

従つてまず加工の可能な範囲で強度の許すかぎり薄い試料を基準の寸法として決めた方が測定と計算の何れの面からも都合が良い。この厚さを2.5 mm とすると周波数と最適厚さの関係はつぎのようになる。摂動法にもとづく誤差を3%とすれば厚さの限界は $\frac{2\pi t}{\lambda}\sqrt{\varepsilon\mu} \leq 0.3$ に選べば良い。したがつて厚さの上限はこれから決まり、下限は測定可能量から決ま

る。

表　　2

μ'	厚さ (mm) ＼ 周波数 (MC)	100	200	400	1000
5	1.25	△	△	△	○
	2.5	△	△	○	○
10	2.5	△	△	○	▽
	5.0	△	○	▽	▽
15	2.5	△	○	▽	▽
	5.0	○	○	▽	▽
20	2.5	△	○	▽	▽
	5.0	○	○	▽	▽

注）　△印は測定量、▽印は誤差の点で不適当、$\varepsilon \simeq 10$と仮定、低損失材料。

一方測定用試料を実物の一部から採取するか、または別に作るかによつて加工法は全く異なる。どちらにしても良い結果を得るためには研磨仕上が必要である。

3　テンソルμ、$\triangle H$、およびg - factor の測定

共鳴現象や非可逆性を利用するフエライトの場合にはテンソルμ、$\triangle H$およびg - factor を測定する必要があり周波数を限つてもなお一種類の試料を測るのに種々の空胴が必要になる。摂動式は、

透磁率に対しては　$\dfrac{\triangle f}{f} + j\triangle\left(\dfrac{1}{2Q}\right) = -(\overset{\Rightarrow}{\mu} - 1)\eta\mu$

誘電率に対しては　$\dfrac{\triangle f}{f} + j\triangle\left(\dfrac{1}{2Q}\right) = -(\varepsilon' - 1 - j\varepsilon'')\eta\varepsilon$

である。ここに$\triangle f$、$\triangle\left(\dfrac{1}{2Q}\right)$は試料による空胴の共振周波数の変化分とQの変化量である。ηは空胴の幾何学的、共振モードおよび試料の寸法に依存する定数である。$\overset{\Rightarrow}{\mu}$はテンソル透磁率 ε'、ε''は誘電率とloss factorである。一般によく用いられる空胴は、円筒TE_{11n}、TM_{110}および矩形TE_{10n}モードである。TE_{11n} TM_{110}は軸対象で円偏波励振が可能である。TE_{11n} の filling factor は

$$\eta\mu(TE_{11n}) = \frac{1}{4\left(1 + \frac{1.374}{n^2}\,\frac{L^2}{D^2}\right)}\,\frac{V_s}{0.1191V_c}$$

$$= \frac{1}{0.6416}\,\frac{V_s}{V_c}\quad\left(\frac{\text{軸長}\cdot L}{\text{直径}\cdot D} = 1,\ n=2\right)$$

またTM_{110}に対しては

$$\eta\mu(TM_{110}) = 1.541\ \frac{V_s}{V_c}$$

である。透磁率の測定の場合、透磁率の大小によつて試料の寸法をうまく選ぶ必要がある。共鳴の近辺では磁場のわずかの違いで透磁率は大きく変化するからである。また磁気半値巾$\triangle H$が数10(O_e)のものでは透磁率、$\triangle H$の測定に磁場の測定精度と磁石電源の安定度が問題になる。たとえば共鳴磁場3300ガウス附近で磁場をメータで読むとしたら3桁がやつとで$\triangle H$の精度は1桁しかない。

なお電源の電流安定度も10^{-3}～10^{-4}は必要である。

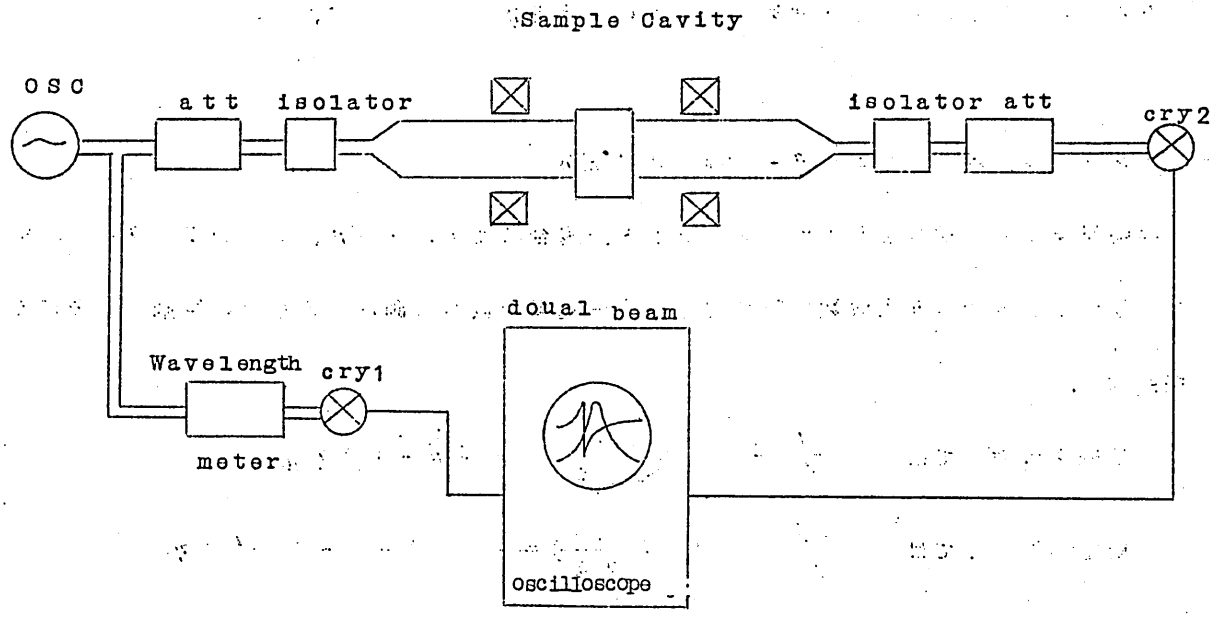


図 2 測定装置例

g-factor の測定はKittel の共鳴条件式

$$\omega_r = r\sqrt{\{H_0-(N_z-N_x)M_z\}\{H_0-(N_z-N_y)M_z\}}$$

$$r = g\frac{e}{2mc}$$

による。球状試料では$N_x = N_y = N_z = \frac{4}{3}\pi$で、

$$g = \frac{4\pi mc}{e}\frac{f_r}{H_0}$$

円板、棒状試料ではそれぞれ $g=\frac{4\pi mc}{e}\ \frac{fr}{H_0-4\pi M_z}$, $\frac{4\pi mc}{e}\ \frac{fr}{H_0+2\pi M_z}$ になる。飽和磁化の値はせいぜい2桁位の精度しかないので球状試料による測定が最も良い、共鳴磁場と共鳴周波数を精度良く測れば g - factor はかなり精度良く測定できる。周波数は10GC帯でMCオーダまでは容易に測れる。磁場はN.M.R.による方法が良いが磁場の均一度の良いことが必要であるからD.P.P.H.(Diphenyl Picryl Hydrazyl)の E.S.R.による方法が簡単である。

D.P.P.H の粉末0.1～0.5 gr を試料空胴に入れESRの信号をオッシロスコープで観測し $g=2.0023$ から磁場を逆算してガウスメータを較正する。フエライト試料を同じ場所において共鳴時の磁場を測定すればガウスメータの精度(±3%)の誤差で g - factor が測れる。飽和磁化の大きなフエライト($4\pi M_s=2000$～4000)では球状試料を使つて、g - factor を測定しても試料の回転に対して異なつた値を示す。これは試料表面の凸凹のために平均しても $N_x \neq N_y \neq N_z \neq \frac{4}{3}\pi$ となり $(N_z-N_x)M_z$、$(N_z-N_y)M_z$ が零にならないためである。はじめこの値は±0.1のオーダであつたが粒度の小さい研磨粉と球の公差を小さくしてこの点は解決できた。最終仕上に用いた研磨粉は200～600メッシュ、また球の公差は0.01㎜以内である。念のため顕微鏡で表面を観測してクラックや大きなくぼみのないことを確認しなければならない。

フエライト、YIG、セラミックなどの ε'、$\tan\delta$、$\triangle H$、g-factor などの測定結果を別表2に載せてある。マイクロ波(10GC)の測定に用いた装置は立体回路指示器の一部を除いてとくにこの測定のために開発し改良を加えた。⑤

4 あ と が き

測定精度は測定器自体の固有誤差、測定に入る誤差、近似などのため比較的測定の容易な ε' μ' では誤差は数%以下であるが、これ以外のLoss factor $\triangle H$ などは10%を越えることがしばしばある。外部磁場をかけた場合はなおさらである。精度向上の問題点として測定法そのものよりも実際的な面、たとえば試料の加工とか、測定器の性能と試料の適切さなどのバランスとかが大事である。また測定時間の短縮ということも測定器類の長時間安定性の面から重

要である。これらのほかdeviceとの関連、試料の均質性、試料の採取法などについてもいろいろ問題点があり、これらの解決にさらに大きな努力が必要である。

測定法について種々の助言を賜わつた東京都立大学、小笠原教授に厚く御礼申し上げます。

文　献

① A.V.Hippel " Dielectric Materials and Applications " Technology Press MIT。

② " A Material Characteristics Test Assembly etc " Rohde & Schwarz Mitt #11 (English reprint Aug. 1959)

③ 小笠原 " 開放同軸共振器によるε、μ分離測定法 " 電学誌 vol.75 . №807 . P.1487 (Dec. 1955).。" 小試料によるcm波帯のμ測定について " 電学誌 . Vol.76 . №809、P.128 (Feb 1956)。

小笠原、鈴木 " ミリ波 " 日刊工業新聞社、昭 . 36。

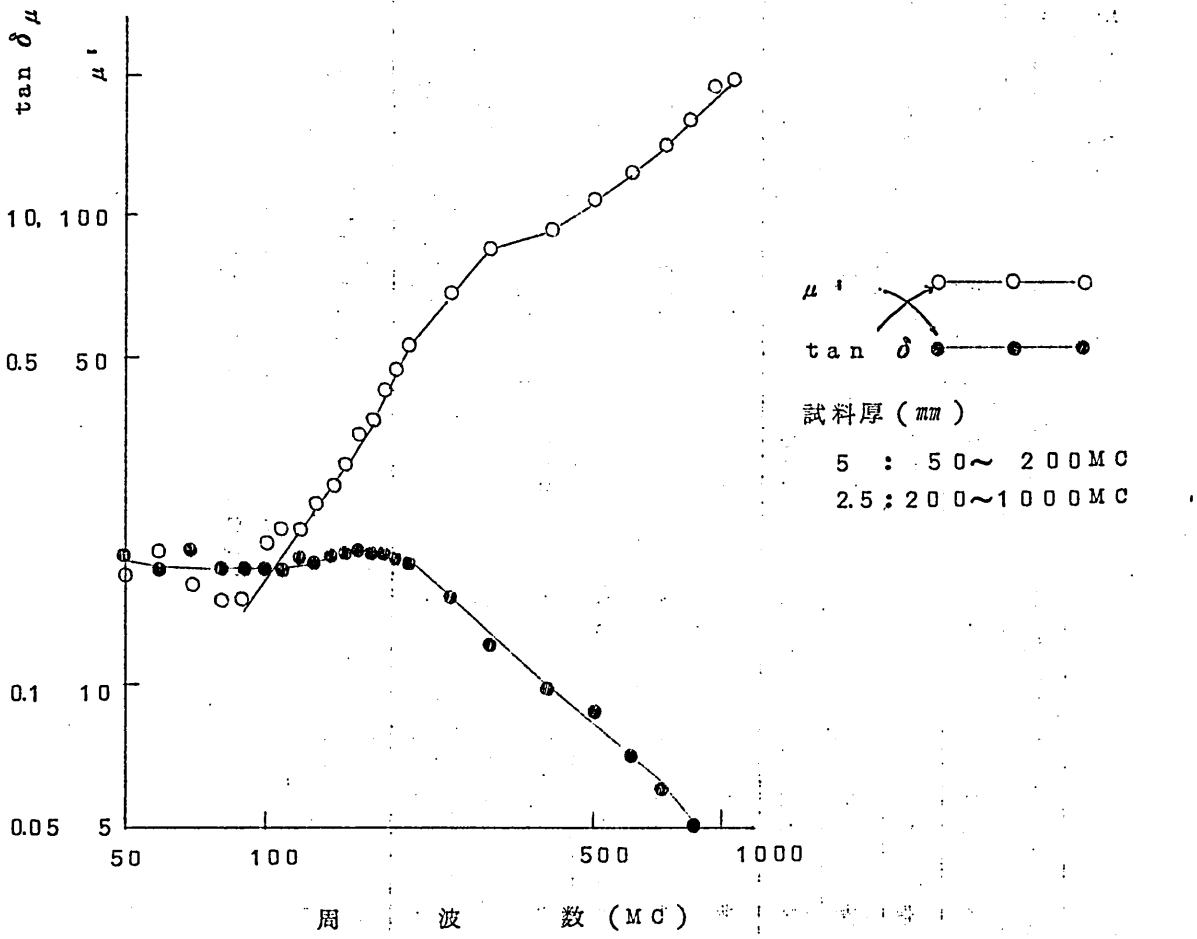
④ " Li-Mn系フエライトのマイクロ波測定 " 41年電気学会予稿 229。

⑤ " 強磁性体の半値巾の簡易自動測定法 " 40年通信学会予稿 291。

別　表　1　　比　較　測　定（上段８０ＭＣ、下段１００ＭＣ）

試料寸法 mm	試料 A		試料 B		測定場所	備考
	μ'	$\tan\delta_\mu$	μ'	$\tan\delta_\mu$		
21φ×9.1φ	32.6	0.24	7.1	＜0.20	a	定在波法（Zg）
	31.9	0.31	7.0	＜0.20		
3.2φ×9.5φ	34.5	0.22	7.5	0.16	b	共振法
	-	-	7.2	0.14		
	33.2	0.23	7.6	＜0.20	a	定在波法*（Zg）
	32.0	0.28	7.6	＜0.16		
32φ×14φ	33.6	0.20	7.3	0.11	b	共振法
	32.3	0.27	7.2	0.14		
	33.0	0.21	7.3	0.11	c	共振法
	34.1	0.26	7.1	0.13		

注）＊試料部　21φ⇨32φまでテーパ変換。



別図 1.　周波数特性

別表 2　フェライト、ＹＩＧなどの測定結果

試料名	$4\pi M_S$(gauss)	T_c(℃)	△H (oe)	g_{eff}-factor	ε'	Tan δ ($\times 10^{-4}$)	ρ_x (g/cc)	ρ_{exp} (g/cc)	a (A°)	備考
# 11	1900	270	540	2.04	9.8	80		4.0		
# 12	1100	140	420	2.02	9.7	20		3.8		
# 13	1700	290	620	2.06	9.7	90		3.9		
# 14	2900	490	560	2.32	9.7	60		4.8		
# 21	990	200	140	2.04	12.1	2	5.10	4.77	12.349	
# 22	870	180	130	2.05	12.4	3	5.08	4.77	12.341	
# 23	770	172	110	2.03	11.9	14	5.07$_9$	4.56	12.33	
# 24	770	179	120 (100)*	2.03	12.2	26	5.07$_9$	4.67	12.333	
# 25	570	166	115	2.02	13.2	6	5.08$_4$	4.88	12.329	
# 26	670		70 (80)*	2.02						
# 31	(750)	(250)	120 (100)*	2.02	15.4	7				(カタログ)
# 41 セミラック					8.7 (9.0)*	8 (7)*		3.7 (3.65)		(カタログ 10GC)

* 1.2 GC ストリップ共振器

輻射科学研究会資料

平行配置された2つの無限長フェリ磁性体円柱による平面電磁波の散乱

岡　本　允　夫
（近畿大学　理工学部）
吉　村　芳　和
中　西　義　郎
熊　谷　三　郎
（大阪大学　工学部）

昭和４１年５月２８日

標題：平行配置された2つの無限長フェリ磁性体円柱による平面電磁波の散乱。

1. はしがき

直流磁界によってバイアスされたフェリ磁性体が，電磁波媒質として共鳴特性をもつ異方性の媒質になるところから，そのような性質を利用した諸種の装置が開発されてきていることはよく知られているとおりであり，またそれに関連して諸種のフェリ磁性体を含む系についての電磁界問題が解かれてきている。

散乱の問題も電磁界問題としては一つの基本のものであるところから，フェリ磁性体を散乱体とする散乱問題も手がけられるようにはなってきているが，このような散乱については，ようやく1本の無限長フェリ磁性体円柱による場合が明らかにされているに過ぎない。[1][2][3] したがって，つぎに解明しておくべき問題として多体フェリ磁性体による散乱がでてくるのは当然のことといえよう。

加えて，フェリ磁性体の電磁波媒質としての特性からみて，これらを近接させて存在させる場合には，導体あるいは誘電体の場合[4][5]には見られないような相互作用の生じることが推察でき，このため特異な散乱界になることが予想できる。よって，このような系による特異な散乱特性を明らかにしておけば，それを何らかの形で利用することも考えられるわけで，その意味でもこのような系による散乱現象は明らかにしておくことは必要である。

この報告は，フェリ磁性体の多体散乱系としてはもっとも基本的な平行配置された2つの無限長フェリ磁性体円柱による平面電磁波の散乱を解析したものである。はじめに，このような散乱電磁界を一般的に求めているが，と

くに，2つの円柱が相互に関係しあう程度を明瞭にとらえることができるような表式で求めるため，散乱界を逐次近似の考えのもとで級数で表わし，級数各項の係数を与える形で散乱界を与える式を導出している。ここに導出した式は，任意の円柱半径，円柱間隔および入射波に対する幾何学的配置について成立つものであるし，また，ここでとった方法は容易にN個のフェリ磁性体円柱列の場合にも適用できるものである。

ついで，このような系による散乱界の模様について考察しているが，両円柱の磁気的特性が加える直流磁界によって変わることに注目し，散乱界を与える式を，一定の円柱半径および一定の円柱間隔の場合について，磁界をパラメータにして数値計算し，散乱界を両円柱に加える直流磁界に関係させてとらえている。

2. 散乱電磁界

2.1 基礎方程式と逐次近似法による散乱電磁界の表式

問題は，自由空間中に距離l（$=2h$）をへだてて平行配置された半径a_α，a_βの2つの無限長フェリ磁性体円柱からなる散乱系に円柱軸に平行な電界をもつ平面波が，円柱軸に垂直に入射する場合について，このような系による入射電磁波の散乱の模様を明らかにすることである。

はじめに，問題の記述と解を進めるに当って必要な準備的事項として，考察にあたってとる座標系，フェリ磁性体の電磁波媒質としての性質および入射波について述べておく。

座標系：図1に示すような2つのフェリ磁性体円柱軸に垂直な平面を考え，この平面がxy平面になり，かつx軸がこの平面上での2つの円柱軸点O_α，O_βを結ぶ線分と任意の角をなしている。$O_\alpha O_\beta$の中点を原点とした直角座標

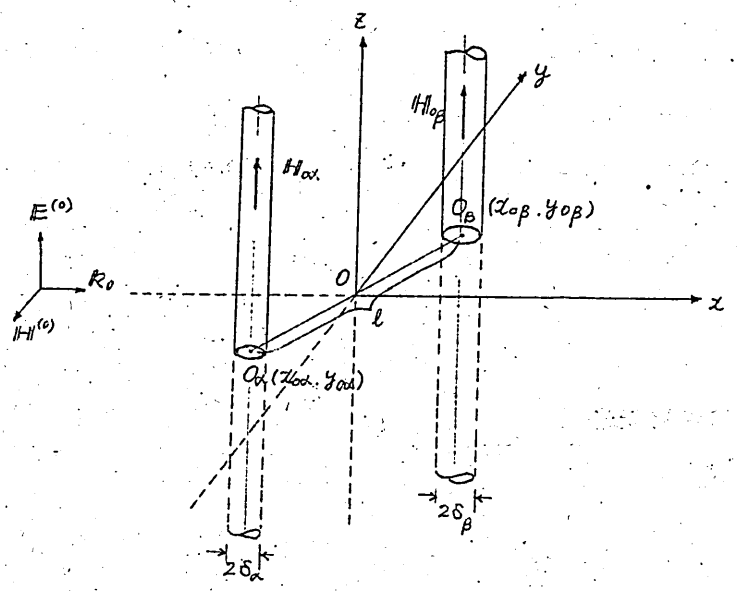


図1　三次元直角座標系で示した平行配置された二つのフェリ磁性体円柱

系を（O：x，y，z）とし，このxy平面上で，O_α（$x_{0\alpha}$，$y_{0\alpha}$，0），O_β（$x_{0\beta}$，$y_{0\beta}$，0）を原点とし，座標軸がx，y軸にそれぞれ平行となるようにした2次元直角座標系を，それぞれ，（O_α：x_α，y_α），（O_β：x_β，y_β）とする。また，同じくxy平面上でO，O_α，O_βを原点とする図2に示すような2次元極座標を考えることにし，これらを，それぞれ，（O：r，θ），（O_α：r_α，θ_α），（O_β：r_β，θ_β）とする。なお，（O_α：r_α，θ_α）および（O_β：r_β，θ_β）の座標系でのOの位置は，それぞれ，（h，ψ_α）および（h，ψ_β）で与えられる。

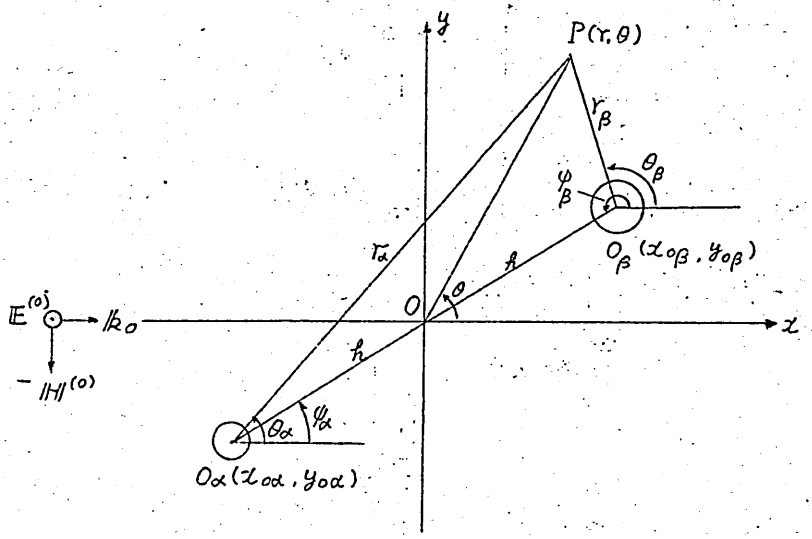


図 2　二次元直角座標系で示した平行配置された二つのフェリ磁性体円柱

以上のようにとった各座標系について，各座標間にはつぎのような関係がなりたつ。

$$x = x_{\alpha\beta} + x_{o\alpha\beta} \tag{1}$$

$$y = y_{\alpha\beta} + y_{o\alpha\beta}$$

$$x_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\beta} \tag{2}$$

$$y_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} \sin \theta_{\alpha\beta}$$

$$\left.\begin{aligned} r_{\substack{\alpha\\\beta}} e^{j\theta_{\substack{\alpha\\\beta}}} &= l\, e^{j\psi_{\substack{\alpha\\\beta}}} + r_{\substack{\beta\\\alpha}} e^{j\theta_{\substack{\beta\\\alpha}}} \\ r_{\substack{\alpha\\\beta}} e^{j\theta_{\substack{\alpha\\\beta}}} &= h\, e^{j\psi_{\substack{\alpha\\\beta}}} + r\, e^{j\theta} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} -x_{0\substack{\alpha\\\beta}} &= h\cos\psi_{\substack{\alpha\\\beta}} \\ -y_{0\substack{\alpha\\\beta}} &= h\sin\psi_{\substack{\alpha\\\beta}} \\ \psi_\beta - \psi_\alpha &= \pi \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

電磁波媒質としてのフェリ磁性体：ここで考える2つのフェリ磁性体円柱は軸方向に互いに平行または反平行に直流磁界でバイアスされているものである。したがって，これらは電磁波の媒質として，直流磁界の方向を z 軸にとった3次元直角座標系について

$$\left[\mu_{\substack{\alpha\\\beta}}\right] = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{\substack{\alpha\\\beta}} & j\kappa_{\substack{\alpha\\\beta}} & 0 \\ -j\kappa_{\substack{\alpha\\\beta}} & \mu_{\substack{\alpha\\\beta}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{\substack{\alpha\\\beta}} = \varepsilon_0\, \varepsilon_{r\substack{\alpha\\\beta}}$$

$$\mu_{\substack{\alpha\\\beta}} = 1 + \frac{\Omega_{H\substack{\alpha\\\beta}}}{\Omega^2_{H\substack{\alpha\\\beta}} - \Omega^2_{\substack{\alpha\\\beta}}}, \quad \kappa_{\substack{\alpha\\\beta}} = \frac{\Omega_{\substack{\alpha\\\beta}}}{\Omega^2_{H\substack{\alpha\\\beta}} - \Omega^2_{\substack{\alpha\\\beta}}}$$

$$\Omega_{\substack{\alpha\\\beta}} = \frac{\omega}{\omega_{M\substack{\alpha\\\beta}}}, \quad \Omega_{H\substack{\alpha\\\beta}} = \frac{\omega_{H\substack{\alpha\\\beta}}}{\omega_{M\substack{\alpha\\\beta}}}, \quad \omega_{M\substack{\alpha\\\beta}} = |\gamma| M_{H\substack{\alpha\\\beta}}, \quad \omega_{H\substack{\alpha\\\beta}} = |\gamma| H_{0\substack{\alpha\\\beta}}$$

で表わされるようなテンソル透磁率 $\left[\mu_{\substack{\alpha\\\beta}}\right]$ および比誘電率 $\varepsilon_{r\substack{\alpha\\\beta}}$ をもつ異方

性媒質となる。ただし，γは電子スピンの磁気回転比，ωは入射平面波の角周波数，$H_{0\alpha\beta}$はフェリ磁性体円柱$O_{\alpha\beta}$の印加直流磁界の大きさ，$M_{s\alpha\beta}$は飽和直流磁化の大きさである。

入射波：入射電磁波は図1の座標系のもとで伝ぱん方向がx方向で，電界がz軸方向に偏波された平面波とする。したがって，入射波の電界および磁界は

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}^{(0)} &= 1_z E_z^{(0)} \\ \mathbf{H}^{(0)} &= -1_y H_y^{(0)} \\ E_z^{(0)} &= E_0 e^{-j k_0 x} \\ H_y^{(0)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_z^{(0)} \\ k_0 &= \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \end{aligned}\right\} \qquad (5)\ a$$

で表わされる。なお，あとで境界条件を適用するさいに必要となる平面波の$O_{\alpha\beta}$を中心軸とする円筒波表現をつぎに与えておく。

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(0)} &= E_0 e^{-j k_0 x} = E_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k_0 r_{\alpha\beta}) \cdot p_{\alpha\beta\nu}^{(0)} \cdot \cos \nu \theta_{\alpha\beta} \\ H_{\alpha\beta\nu}^{(0)} &= \Delta_{1\nu} \cdot 2(-j)^\nu e^{-j k_0 x_{0\alpha\beta}} \\ \Delta_{1\nu} &= \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (\nu = 0) \\ 1 & (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (5)\ b$$

したがって

$$H_{\theta\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial r_{\alpha\beta}} E_z^{(0)} = -jH_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu'(k_0 r_{\alpha\beta}) \cdot H_{\alpha\beta}^{(0)\nu} \cdot \cos\nu\theta_{\alpha\beta} \qquad (5)\,c$$

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_0$$

さて，2つのフェリ磁性体円柱によって散乱をうけている電磁界であるが，問題の性質からこの系での電磁界はz方向には変せず，また電界に対する境界条件からフェリ磁性体円柱内外の電界は入射電界と同じ方向に偏波されるのは明らかである。したがって電磁界は，成分としてE_z，H_x，H_yだけをもち，マクスウェルの界方程式から，電界成分E（以下添字zを省く）は

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_t^2 E + k_0^2 E = 0 \qquad (\text{自由空間}) \\ &\nabla_t^2 E + k_{\alpha\beta}^2 E = 0 \qquad (\text{フェリ磁性体円柱 } O_{\alpha\beta} \text{ 内}) \end{aligned}\right\} (6)\,a$$

を満足し，磁界$\mathbf{H}$がEによって

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla_t E \times \mathbf{1}_z \qquad (\text{自由空間}) \\ &\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}[\mu_{\alpha\beta}]^{-1}\nabla_t E \times \mathbf{1}_z \qquad (\text{フェリ磁性体円柱 } O_{\alpha\beta} \text{ 内}) \end{aligned}\right\} (6)\,b$$

で与えられるものになる。ここに，∇_t^2は2次元ラプラシアンであり，また

$$k_{\alpha\beta}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_{r\alpha\beta} \mu_0 \bar{\mu}_{\alpha\beta}, \quad \bar{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{\mu_{\alpha\beta}^2 - k_{\alpha\beta}^2}{\mu_{\alpha\beta}}$$

$$\left[\mu_{\substack{\alpha\\\beta}}\right]^{-1}=\begin{bmatrix} M_{\substack{\alpha\\\beta}} & -jK_{\substack{\alpha\\\beta}} & 0 \\ -jK_{\substack{\alpha\\\beta}} & M_{\substack{\alpha\\\beta}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad M_{\substack{\alpha\\\beta}}=\frac{\mu_{\substack{\alpha\\\beta}}}{\mu^{2}_{\substack{\alpha\\\beta}}-\kappa^{2}_{\substack{\alpha\\\beta}}},$$

$$K_{\substack{\alpha\\\beta}}=\frac{-\kappa_{\substack{\alpha\\\beta}}}{\mu^{2}_{\substack{\alpha\\\beta}}-\kappa^{2}_{\substack{\alpha\\\beta}}},$$

である。

さらに，散乱電磁界は入射電磁界とともに2つのフェリ磁性体円柱の表面で電界および磁界の接線成分が連続になるという境界条件を満足するものでなければならないから，求める散乱電磁界は，この境界条件にしたがい式(1)，(2)を満足するものとなる。ここでは，このような電磁界をつぎのような逐次近似によってとらえることにする。

まず，入射界 $E^{(0)}$，$\mathrm{H}^{(0)}$ に対して1次散乱界 $E^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}$，$\mathrm{H}^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}$ が

$$\left.\begin{aligned}\left[E^{(0)}+E^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}\right]_{r_{\substack{\alpha\\\beta}}=a_{\substack{\alpha\\\beta}}+0} &= \left[E^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}\right]_{r_{\substack{\alpha\\\beta}}=a_{\substack{\alpha\\\beta}}-0}\\ \left[H^{(0)}_{\theta_{\substack{\alpha\\\beta}}}+H^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}\theta_{\substack{\alpha\\\beta}}}\right]_{r_{\substack{\alpha\\\beta}}=a_{\substack{\alpha\\\beta}}+0} &= \left[H^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}\theta_{\substack{\alpha\\\beta}}}\right]_{r_{\substack{\alpha\\\beta}}=a_{\substack{\alpha\\\beta}}-0}\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

なるようにできるとする。つぎに，$E^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}$，$H^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}$ が円柱 $O_{\substack{\beta\\\alpha}}$ に対して入射界として働き，2次散乱界 $E^{(2)}_{\substack{\beta\\\alpha}}$，$\mathrm{H}^{(2)}_{\substack{\alpha\\\beta}}$ が

$$\left.\begin{aligned}
&\left[E^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}+E^{(2)}_{\substack{\beta\\\alpha}}\right]_{r^{\beta}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}+0}=\left[E^{(2)}_{\substack{\beta\\\alpha}}\right]_{r^{\beta}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}-0}\\
&\left[H^{(1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}\theta^{\beta}_{\alpha}+H^{(2)}_{\substack{\beta\\\alpha}}\theta^{\beta}_{\alpha}\right]_{r^{\beta}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}+0}=\left[H^{(2)}_{\substack{\beta\\\alpha}}\theta^{\beta}_{\alpha}\right]_{r^{\beta}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}-0}
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

なるようにできるとする。さらに，$E^{(2)}_{\substack{\beta\\\alpha}}$，$\mathrm{H}^{(2)}_{\substack{\beta\\\alpha}}$が円柱$O_{\substack{\alpha\\\beta}}$に対して入射界として働き，3次散乱界$E^{(3)}_{\substack{\alpha\\\beta}}$，$\mathrm{H}^{(3)}_{\substack{\alpha\\\beta}}$が

$$\left.\begin{aligned}
&\left[E^{(2)}_{\substack{\beta\\\alpha}}+E^{(3)}_{\substack{\alpha\\\beta}}\right]_{r^{\alpha}_{\beta}=a^{\alpha}_{\beta}+0}=\left[E^{(3)}_{\substack{\alpha\\\beta}}\right]_{r^{\alpha}_{\beta}=a^{\alpha}_{\beta}-0}\\
&\left[H^{(2)}_{\substack{\beta\\\alpha}}\theta^{\alpha}_{\beta}+H^{(3)}_{\substack{\alpha\\\beta}}\theta^{\alpha}_{\beta}\right]_{r^{\alpha}_{\beta}=a^{\alpha}_{\beta}+0}\left[H^{(3)}_{\substack{\alpha\\\beta}}\theta^{\alpha}_{\beta}\right]_{r^{\alpha}_{\beta}=a^{\alpha}_{\beta}-0}
\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

なるようにできるとする。以下同じようにして，つぎつぎと高次の散乱界が発生するものとし，$(i-1)$次散乱界$E^{(i-1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}$，$\mathrm{H}^{(i-1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}$が円柱$O_{\substack{\beta\\\alpha}}$に対する入射界となって，$i$次散乱界$E^{(i)}_{\substack{\beta\\\alpha}}$，$\mathrm{H}^{(i)}_{\substack{\beta\\\alpha}}$が

$$\left.\begin{aligned}
&\left[E^{(i-1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}+E^{(i)}_{\substack{\beta\\\alpha}}\right]_{r^{\beta}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}+0}\left[E^{(i)}_{\substack{\beta\\\alpha}}\right]_{r^{\beta}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}-0}\\
&\left[H^{(i-1)}_{\substack{\alpha\\\beta}}\theta^{\beta}_{\alpha}+H^{(i)}_{\substack{\beta\\\alpha}}\theta^{\beta}_{\alpha}\right]_{r^{\beta}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}+0}=\left[H^{(i)}_{\substack{\beta\\\alpha}}\theta^{\beta}_{\alpha}\right]_{r^{\beta}_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}-0}
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

なるようにできるものとする。

以上に与えた1次散乱界，2次散乱界および高次散乱界によって，散乱電

磁界E，$\mathbf{H}$は

$$\left.\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[E_{\alpha}^{(i)} + E_{\beta}^{(i)} \right] \\ \mathbf{H} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\mathbf{H}_{\alpha}^{(i)} + \mathbf{H}_{\beta}^{(i)} \right] \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

で表わされることになり，$E_{\alpha\beta}^{(i)}$，$\mathbf{H}_{\alpha\beta}^{(i)}$を決めることが問題のすべてになる。

2．2　$E_{\alpha\beta}^{(i)}$，$\mathbf{H}_{\alpha\beta}^{(i)}$の決定

(1)　1次散乱電界$E_{\alpha\beta}^{(1)}$

1次散乱電界は，式(6)および入射界$E^{(0)}$，$\mathbf{H}^{(0)}$に対して式(7)を満足するものであるが，それは自由空間中に単独におかれているフェリ磁性体円柱が入射波を散乱させるときの散乱界と同じである。これについてはすでに論じられているので，その詳細は省くが，ここでとっている座標系について解きなおすと電界$E_{\alpha\beta}^{(1)}$，磁界の$\theta_{\alpha\beta}$方向成分$H_{\alpha\beta\theta_{\alpha\beta}}^{(1)}$は

$$E_{\alpha\beta}^{(1)} = E_0 \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu}^{(2)}(k_0 r_{\alpha\beta}) \cdot \{ a_{\alpha\beta\nu}^{(1)} \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta\nu}^{(1)} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \} \\ \qquad (r_{\alpha\beta} > a_{\alpha\beta}) \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} J_{\nu}(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}) \cdot \{ c_{\alpha\beta\nu}^{(1)} \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + d_{\alpha\beta\nu}^{(1)} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \} \\ \qquad (0 \leqq r_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta}) \end{cases} \qquad (12)$$

$$H^{(1)}_{\alpha\beta\theta\alpha\beta} = -jH_0 \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu^{(2)\prime}(k_0 r_{\alpha\beta}) \cdot \{ a^{(1)}_{\alpha\beta\nu} \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + b^{(1)}_{\alpha\beta\nu} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \} \\ \qquad (r_{\alpha\beta} > a_{\alpha\beta}) \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} J'_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}) \cdot [\{ M_{\alpha\beta} \cdot \frac{k_{\alpha\beta}}{k_0} \cdot c^{(1)}_{\alpha\beta\nu} + jK_{\alpha\beta} \cdot \frac{\nu}{k_0 r_{\alpha\beta}} \cdot \frac{J_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})}{J'_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})} \cdot d^{(1)}_{\alpha\beta\nu} \} \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + \{ -jK_{\alpha\beta} \cdot \frac{\nu}{k_0 r_{\alpha\beta}} \cdot \frac{J_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})}{J'_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})} \cdot c^{(1)}_{\alpha\beta\nu} + M_{\alpha\beta} \cdot \frac{k_{\alpha\beta}}{k_0} \cdot d^{(1)}_{\alpha\beta\nu} \} \sin\theta_{\alpha\beta}] \cdot \\ \qquad (0 \leqq r_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta}) \end{cases} \tag{13}$$

で表わされ，1次散乱電界を与える係数 $a^{(1)}_{\alpha\beta\nu}$ ，$b^{(1)}_{\alpha\beta\nu}$ は

$$a^{(1)}_{\alpha\beta\nu} = -p^{(0)}_{\alpha\beta\nu} P_{\alpha\beta\nu} , \quad b^{(1)}_{\alpha\beta\nu} = p^{(0)}_{\alpha\beta\nu} Q_{\alpha\beta\nu} \tag{14}$$

となる。

ここに，

$$P_{\alpha\beta\nu} = \frac{F_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}) \cdot G_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}) - \nu^2 K^2_{\alpha\beta}}{F_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta})^2 - \nu^2 K^2_{\alpha\beta}} \cdot \frac{J_\nu(k_0 a_{\alpha\beta})}{H^{(2)}_\nu(k_0 a_{\alpha\beta})}$$

$$Q_{\substack{\alpha\\\beta}\nu} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\nu K_{\substack{\alpha\\\beta}}}{F_\nu(k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}}, k_{\substack{\alpha\\\beta}} a_{\substack{\alpha\\\beta}})^2 - \nu^2 K_{\substack{\alpha\\\beta}}^2}\cdot\frac{1}{H_\nu^{(2)}(k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}})^2} \Bigg\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} F_\nu(k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}}, k_{\substack{\alpha\\\beta}} a_{\substack{\alpha\\\beta}}) &= k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}}\frac{H_\nu^{(2)\prime}(k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}})}{H_\nu^{(2)}(k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}})} - M_{\substack{\alpha\\\beta}} k_{\substack{\alpha\\\beta}} a_{\substack{\alpha\\\beta}}\frac{J_\nu'(k_{\substack{\alpha\\\beta}} a_{\substack{\alpha\\\beta}})}{J_\nu(k_{\substack{\alpha\\\beta}} a_{\substack{\alpha\\\beta}})} \\ G_\nu(k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}}, k_{\substack{\alpha\\\beta}} a_{\substack{\alpha\\\beta}}) &= k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}}\frac{J_\nu'(k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}})}{J_\nu(k_0 a_{\substack{\alpha\\\beta}})} - M_{\substack{\alpha\\\beta}} k_{\substack{\alpha\\\beta}} a_{\substack{\alpha\\\beta}}\frac{J_\nu'(k_{\substack{\alpha\\\beta}} a_{\substack{\alpha\\\beta}})}{J_\nu(k_{\substack{\alpha\\\beta}} a_{\substack{\alpha\\\beta}})} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(2)、 2 次散乱界 $E_{\substack{\alpha\\\beta}}^{(2)}$, $H_{\substack{\alpha\\\beta}}^{(2)}$

2 次散乱電界 $E_{\substack{\alpha\\\beta}}^{(2)}$ も式(6) を満足するから

$$E_{\substack{\alpha\\\beta}}^{(2)} = E_0 \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu^{(2)}(k_0 r_{\substack{\alpha\\\beta}})\cdot\{a_{\substack{\alpha\\\beta}\nu}^{(2)}\cos\nu\theta_{\substack{\alpha\\\beta}} + b_{\substack{\alpha\\\beta}\nu}^{(2)}\sin\nu\theta_{\substack{\alpha\\\beta}}\} \\ \qquad (r_{\substack{\alpha\\\beta}} > a_{\substack{\alpha\\\beta}}) \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k_{\substack{\alpha\\\beta}} r_{\substack{\alpha\\\beta}})\cdot\{c_{\substack{\alpha\\\beta}\nu}^{(2)}\cos\nu\theta_{\substack{\alpha\\\beta}} + d_{\substack{\alpha\\\beta}\nu}^{(2)}\sin\nu\theta_{\substack{\alpha\\\beta}}\} \\ \qquad (0 \leqq r_{\substack{\alpha\\\beta}} < a_{\substack{\alpha\\\beta}}) \end{cases} \tag{17}$$

の形でかけるし，またそれによって磁界 $H_{\substack{\alpha\\\beta}}^{(2)}$ の $\theta_{\substack{\alpha\\\beta}}$ 成分は

$$H^{(2)}_{\alpha\beta\theta\alpha\beta} = -jH_0 \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\infty} H^{(2)\prime}_{\nu}(k_0 r_{\alpha\beta}) \cdot \{ a^{(2)}_{\alpha\beta\nu} \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + b^{(2)}_{\alpha\beta\nu} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \} \\ \qquad (r_{\alpha\beta} > a_{\alpha\beta}) \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} J'_{\nu}(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}) \cdot [\{ M_{\alpha\beta} \frac{k_{\alpha\beta}}{k_0} c^{(2)}_{\alpha\beta\nu} + jK_{\alpha\beta} \cdot \frac{\nu}{k_0 r_{\alpha\beta}} \cdot \frac{J_{\nu}(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})}{J'_{\nu}(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})} d^{(2)}_{\alpha\beta\nu} \} \cdot \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + \{ -jK_{\alpha\beta} \cdot \frac{\nu}{k_0 r_{\alpha\beta}} \cdot \frac{J_{\nu}(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})}{J'_{\nu}(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})} \cdot c^{(2)}_{\alpha\beta\nu} + M_{\alpha\beta} \cdot \frac{k_{\alpha\beta}}{k_0} d^{(2)}_{\alpha\beta\nu} \} \cdot \sin\nu\theta_{\alpha\beta}] \\ \qquad (0 \leqq r_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta}) \end{cases}$$

とかける。未定係数 $a^{(2)}_{\alpha\beta\nu}$, $b^{(2)}_{\alpha\beta\nu}$ などは境界条件式(8)から定められるが，これはつぎのようにして求められる。

式(12)の第1式から

$$E^{(1)}_{\beta\alpha} = E_0 \sum_{\nu'=0}^{\infty} H^{(2)}_{\nu'}(k_0 r_{\beta\alpha}) \cdot \{ a^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \cos\nu'\theta_{\beta\alpha} + b^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \sin\nu'\theta_{\beta\alpha} \} \quad (r_{\beta\alpha} > a_{\beta\alpha})$$

であり，これをHankel 関数に関する加法定理によって[6]

$$E^{(1)}_{\beta\alpha} = E_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k_0 r_{\alpha\beta}) \cdot \{ p^{(1)}_{\beta\alpha\nu} \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + q^{(1)}_{\beta\alpha\nu} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \} \quad (0 \leqq r_{\alpha\beta} < \ell) \tag{19}$$

と表わす。ここに，

$$p^{(1)}_{\beta\alpha\nu} = \triangle_{1\nu} \sum_{\nu'=0}^{\infty} \left[H^{(2)}_{\nu+\nu'}(k_0\ell) \cdot \{ a^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \cos\psi_{\beta\alpha(\nu,\nu')} + b^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \sin\psi_{\beta\alpha(\nu,\nu')} \} + (-1)^\nu H^{(2)}_{-\nu+\nu'}(k_0\ell) \{ a^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \cos\psi_{\beta\alpha(-\nu,\nu')} + b^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \sin\psi_{\beta\alpha(-\nu,\nu')} \} \right]$$

$$q^{(1)}_{\beta\alpha\nu} = \sum_{\nu'=0}^{\infty} \left[H^{(2)}_{\nu+\nu'}(k_0\ell) \cdot \{ a^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \sin\psi_{\beta\alpha(\nu,\nu')} - b^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \cos\psi_{\beta\alpha(\nu,\nu')} \} + (-1)^\nu H^{(2)}_{-\nu+\nu'}(k_0\ell) \cdot \{ a^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \sin\psi_{\beta\alpha(-\nu,\nu')} - b^{(1)}_{\beta\alpha\nu'} \cos\psi_{\beta\alpha(-\nu,\nu')} \} \right]$$

$$\psi_{\beta\alpha(\nu,\nu')} = \nu'\psi_{\beta\alpha} + \nu\psi_{\alpha\beta}$$

である。

このような $E^{(1)}_{\beta\alpha}$ の表示に対応して，$H^{(1)}_{\beta\alpha\theta\alpha\beta}$ は

$$H^{(1)}_{\beta\alpha\theta\alpha\beta} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r_{\alpha\beta}} \cdot E^{(1)}_{\beta\alpha} = -jH_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} J'_\nu(k_0 r_{\alpha\beta}) \cdot \{ p^{(1)}_{\beta\alpha\nu} \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + q^{(1)}_{\beta\alpha\nu} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \} \tag{20}$$

となる。

ここで，式(17)，(18)，(19)，(20)を式(8)に代入すれば，$a^{(2)}_{\alpha\nu\beta}$，$b^{(2)}_{\alpha\nu\beta}$ などを決める式として

$$J_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}) p^{(1)}_{\beta\alpha\nu} + H^{(2)}_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}) \cdot a^{(2)}_{\alpha\nu\beta} = J_\nu(k_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}) \cdot c^{(2)}_{\alpha\nu\beta}$$

$$J_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}) q^{(1)}_{\beta\alpha\nu} + H^{(2)}_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}) \cdot b^{(2)}_{\alpha\nu\beta} = J_\nu(k_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}) \cdot d^{(2)}_{\alpha\nu\beta}$$

$$J'_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}) p^{(1)}_{\beta\alpha\nu} + H^{(2)\prime}_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}) \cdot a^{(2)}_{\alpha\nu\beta} = J'_\nu(k_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}) \cdot \left\{ M_{\alpha\beta} \frac{k_{\alpha\beta}}{k_0} c^{(2)}_{\alpha\nu\beta} + \right.$$

$$\left. + jK_{\alpha\beta} \frac{\nu}{k_0 a_{\alpha\beta}} \cdot \frac{J_\nu(k_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta})}{J'_\nu(k_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta})} \cdot d^{(2)}_{\alpha\nu\beta} \right\}$$

$$J'_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}) q^{(1)}_{\beta\alpha\nu} + H^{(2)\prime}_\nu(k_0 a_{\alpha\beta}) \cdot b^{(2)}_{\alpha\nu\beta} = J'_\nu(k_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}) \cdot \left\{ -jK_{\alpha\beta} \frac{\nu}{k_0 a_{\alpha\beta}} \cdot \frac{J_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})}{J'_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})} \cdot \right.$$

$$\left. c^{(2)}_{\alpha\nu\beta} + M_{\alpha\beta} \frac{k_{\alpha\beta}}{k_0} d^{(2)}_{\alpha\nu\beta} \right\}$$

が得られ，これを解いて2次散乱界を与える $a^{(2)}_{\alpha\nu\beta}$，$b^{(2)}_{\alpha\nu\beta}$ が

$$a^{(2)}_{\alpha\nu\beta} = -p^{(1)}_{\beta\alpha\nu} P_{\alpha\nu\beta} - q^{(1)}_{\beta\alpha\nu} Q_{\alpha\nu\beta}, \quad b^{(2)}_{\alpha\nu\beta} = p^{(1)}_{\beta\alpha\nu} Q_{\alpha\nu\beta} - q^{(1)}_{\beta\alpha\nu} P_{\alpha\nu\beta} \qquad (21)$$

と求まる。

(3) 高次散乱界，$E_{\alpha\beta}^{(i)}$，$H_{\alpha\beta}^{(i)}$

一般に，i 次散乱界の電界 $E_{\alpha\beta}^{(i)}$ および磁界の $\theta_{\alpha\beta}$ 方向成分 $H_{\alpha\beta\theta_{\alpha\beta}}^{(i)}$ は，$a_{\alpha\beta\nu}^{(i)}$，$b_{\alpha\beta\nu}^{(i)}$ を未定係数として

$$E_{\alpha\beta}^{(i)} = E_0 \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu^{(2)}(k_0 r_{\alpha\beta}) \cdot \{ a_{\alpha\beta\nu}^{(i)} \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta\nu}^{(i)} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \} & (r_{\alpha\beta} > a_{\alpha\beta}) \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}) \cdot \{ c_{\alpha\beta\nu}^{(i)} \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + d_{\alpha\beta\nu}^{(i)} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \} & (0 \leqq r_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta}) \end{cases}$$

$$H_{\alpha\beta\theta_{\alpha\beta}}^{(i)} = -jH_0 \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu^{(2)\prime}(k_0 r_{\alpha\beta}) \cdot \{ a_{\alpha\beta\nu}^{(i)} \cdot \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta\nu}^{(i)} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \} \\ \qquad (r_{\alpha\beta} > a_{\alpha\beta}) \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu'(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}) \cdot \Big[\{ M_{\alpha\beta} \frac{k_{\alpha\beta}}{k_0} c_{\alpha\beta\nu}^{(i)} + jK_{\alpha\beta} \cdot \frac{\nu}{k_0 r_{\alpha\beta}} \cdot \frac{J_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})}{J_\nu'(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})} d_{\alpha\beta\nu}^{(i)} \} \cdot \cos\nu\theta_{\alpha\beta} + \{ -jK_{\alpha\beta} \frac{\nu}{k_0 r_{\alpha\beta}} \cdot \frac{J_\nu(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})}{J_\nu'(k_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})} \cdot c_{\alpha\beta\nu}^{(i)} + M_{\alpha\beta} \frac{k_{\alpha\beta}}{k_0} d_{\alpha\beta\nu}^{(i)} \} \sin\nu\theta_{\alpha\beta} \Big] \\ \qquad (0 \leqq r_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta}) \end{cases}$$

とかけ，未定係数 $a^{(i)}_{\alpha\nu\,\beta}$，$b^{(i)}_{\alpha\nu\,\beta}$ は境界条件式(10)から定めることができて

$$a^{(i)}_{\alpha\nu\,\beta} = -p^{(i-1)}_{\beta\nu\,\alpha} P_{\alpha\nu\,\beta} - q^{(i-1)}_{\alpha\nu\,\beta} Q_{\alpha\nu\,\beta}\,,\quad b^{(i)}_{\alpha\nu\,\beta} = p^{(i-1)}_{\beta\nu\,\alpha} Q_{\alpha\nu\,\beta} - q^{(i-1)}_{\beta\nu\,\alpha} P_{\alpha\nu\,\beta} \qquad (22)$$

となる。

(4) 全散乱電磁界

全散乱電界 E は，前項までに求めた $E^{(1)}_{\alpha\nu\,\beta}$ を用いて，式(11)より

$$\begin{aligned} E = \sum_{i=1}^{\infty} \{ E^{(i)}_{\alpha} + E^{(i)}_{\beta} \} &= E_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ H^{(2)}_{\nu}(k_0 r_\alpha) \cdot (a^{(i)}_{\alpha\nu} \cos\nu\theta_\alpha + \\ &\quad + b^{(i)}_{\alpha\nu} \sin\nu\theta_\alpha) + H^{(2)}_{\nu}(k_0 r_\beta) (a^{(i)}_{\beta\nu} \cos\nu\theta_\beta + \\ &\quad + b^{(i)}_{\beta\nu} \sin\nu\theta_\beta) \} \\ &= E_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ H^{(2)}_{\nu}(k_0 r_\alpha) \cdot (a_{\alpha\nu} \cos\nu\theta_\alpha + \\ &\quad + b_{\alpha\nu} \sin\nu\theta_\alpha) + H^{(2)}_{\nu}(k_0 r_\beta) \cdot (a_{\beta\nu} \cos\nu\theta_\beta + \\ &\quad + b_{\beta\nu} \sin\nu\theta_\beta) \} \end{aligned} \qquad (23)\,a$$

となる。 ここに

$$a_{\alpha\nu\,\beta} = \sum_{i=1}^{\infty} a^{(i)}_{\alpha\nu\,\beta}\,,\quad b_{\alpha\nu\,\beta} = \sum_{i=1}^{\infty} b^{(i)}_{\alpha\nu\,\beta} \qquad (23)\,b$$

である。

この全散乱電界を（r，θ）座標であらわすには，式(23)をHankel関数に関する加法定理を用いて（r，θ）座標に変換すればよく，これを実行して

$$E = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r)\left(\widetilde{a}_n \cos n\theta + \widetilde{b}_n \sin n\theta\right), \quad (r > h) \tag{24}$$

が得られる。ここに

$$\widetilde{a}_n = \widetilde{a}_{\alpha n} + \widetilde{a}_{\beta n}, \quad \widetilde{b}_n = \widetilde{b}_{\alpha n} + \widetilde{b}_{\beta n} \tag{25}$$

$$\widetilde{a}_{\substack{\alpha \\ \beta} n} = \triangle_{1n} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big[J_{n+\nu}(k_0 h) \cdot \Big\{ a_{\substack{\alpha \\ \beta} \nu} \cos \psi_{\substack{\alpha \\ \beta}(n,\nu)} + b_{\substack{\alpha \\ \beta} \nu} \sin \psi_{\substack{\alpha \\ \beta}(n,\nu)} \Big\}$$

$$+ (-1)^n J_{-n+\nu}(k_0 h) \cdot \Big\{ a_{\substack{\alpha \\ \beta} \nu} \cos \psi_{\substack{\alpha \\ \beta}(-n,\nu)} +$$

$$+ b_{\substack{\alpha \\ \beta} \nu} \sin \psi_{\substack{\alpha \\ \beta}(-n,\nu)} \Big\} \Big]$$

$$\widetilde{b}_{\substack{\alpha \\ \beta} n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big[J_{n+\nu}(k_0 h) \cdot \Big\{ a_{\substack{\alpha \\ \beta} \nu} \sin \psi_{\substack{\alpha \\ \beta}(n,\nu)} - b_{\substack{\alpha \\ \beta} \nu} \cos \psi_{\substack{\alpha \\ \beta}(n,\nu)} \Big\} -$$

$$- (-1)^n J_{-n+\nu}(k_0 h) \cdot \Big\{ a_{\substack{\alpha \\ \beta} \nu} \sin \psi_{\substack{\alpha \\ \beta}(-n,\nu)} -$$

$$- b_{\substack{\alpha \\ \beta} \nu} \cos \psi_{\substack{\alpha \\ \beta}(-n,\nu)} \Big\} \Big]$$

である。

なお，全散乱磁界のθ成分は

$$H_\theta = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial r} E = -jH_0 \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r)\left(\widetilde{a}_n \cos n\theta + \widetilde{b}_n \sin n\theta\right) \tag{27}$$

で与えられる。

(5) 遠方散乱電磁界

$k_0 r \gg 1$ なるような散乱系から遠く離れた領域での散乱電磁界は，Hankel 関数の漸近展開

$$H_n^{(2)}(k_0 r) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\, e^{-j\left(k_0 r - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}$$

$$H_n^{(2)\prime}(k_0 r) \cong -j\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\, e^{-j\left(k_0 r - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}$$

を用いて，式(24)，(27)を

$$\left.\begin{aligned} E &= E_0 \sqrt{\frac{j2}{\pi k_0 r}}\, e^{-jk_0 r}\, e(\theta) \\ H_\theta &= -H_0 \sqrt{\frac{j2}{\pi k_0 r}}\, e^{-jk_0 r}\, e(\theta) \\ e(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} j^n \left(\tilde{a}_n \cos n\theta + \tilde{b}_n \sin n\theta\right) \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

としてよく，したがって，遠方散乱電磁界はこの式で与えられる。

3. 遠方散乱電磁界のパターン

遠方の散乱電磁界は前節の式(28)で与えられるから，いま，z 軸方向の単位長さを考えると，θ と $\theta + d\theta$ 間に散乱される電力は $|e(\theta)|^2 d\theta$ に比例することがわかる。したがって，$|e(\theta)|^2$ は散乱電力の角度分布を与え

る。

この節では，入射波に対して，図3のように，2つの無限長フェリ磁性体円柱を配置した場合を例にとり，この場合の散乱界のパターンを求めてみる。なお，2つのフェリ磁性体円柱はともに $k_0 a = 0.01$ であるような半径のものであり，かつ，誘電率 $\varepsilon_r = 10$ で飽和磁化 $4\pi M_s = 3000$〔$gauss$〕であるものとする。

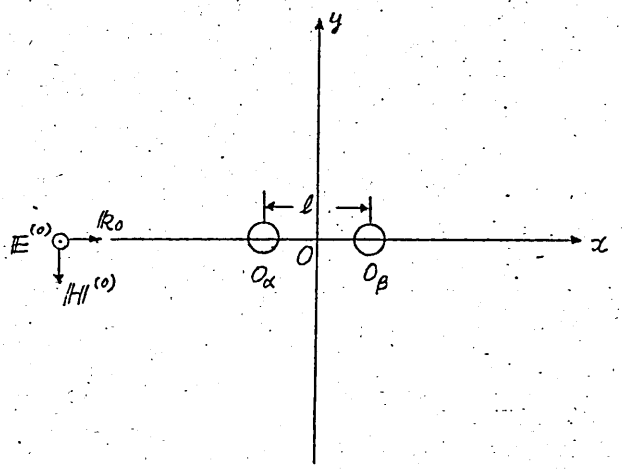
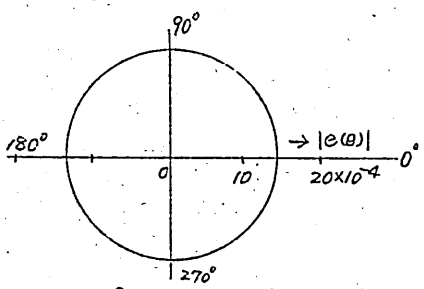


図3　数値計算に用いた平行配置された二つのフェリ磁性体円柱

図4は，フェリ磁性体に加える直流磁界をパラメータにとって，電子計算機によって求めた $|e(\theta)|$ を示したものである。

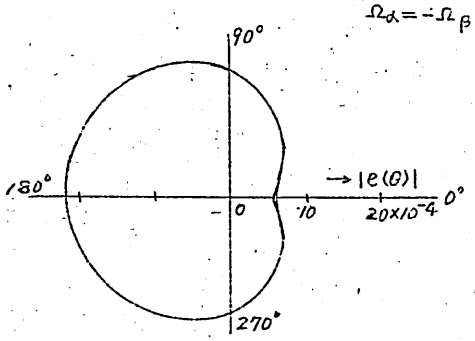
なお，参考までに，与えられた円柱間隔に対して，どの程度までの高次散乱界を考えねばならないかを示すと図5のようになる。図5は，フェリ磁性体円柱に加える直流磁界の大きさを一定にして，平行に加える場合と反平行に加える場合について，各次数の散乱界の前方（$\theta = 0°$）の強度で表わした

ものである。

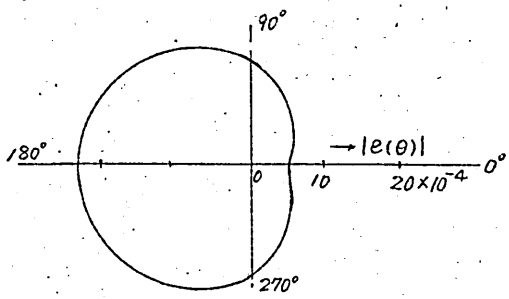


$\Omega_H = 0$, $\Omega_\alpha = \Omega_\beta = 10$ (↑↑) : (a)-(1)

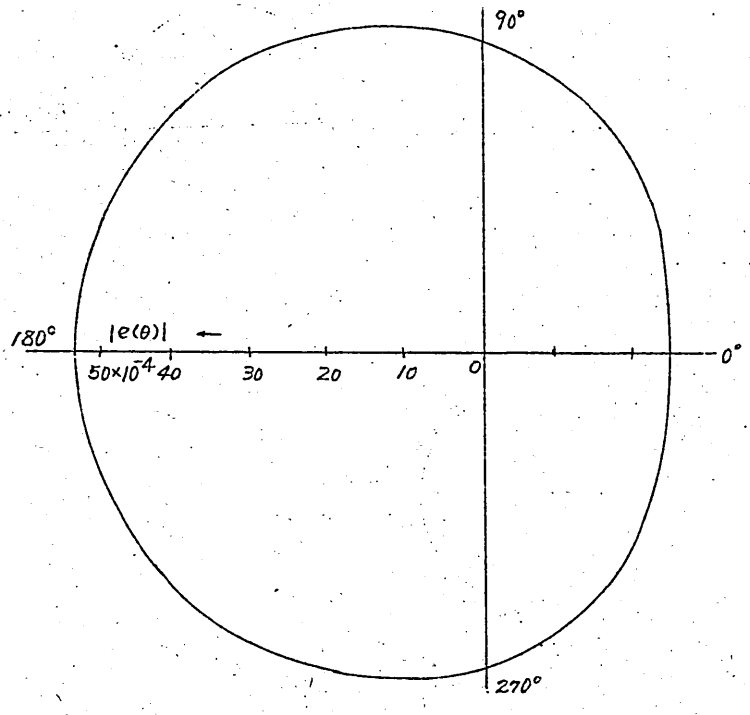
$\Omega_\alpha = -\Omega_\beta = 10$ (↑↓) : (a)-(2)



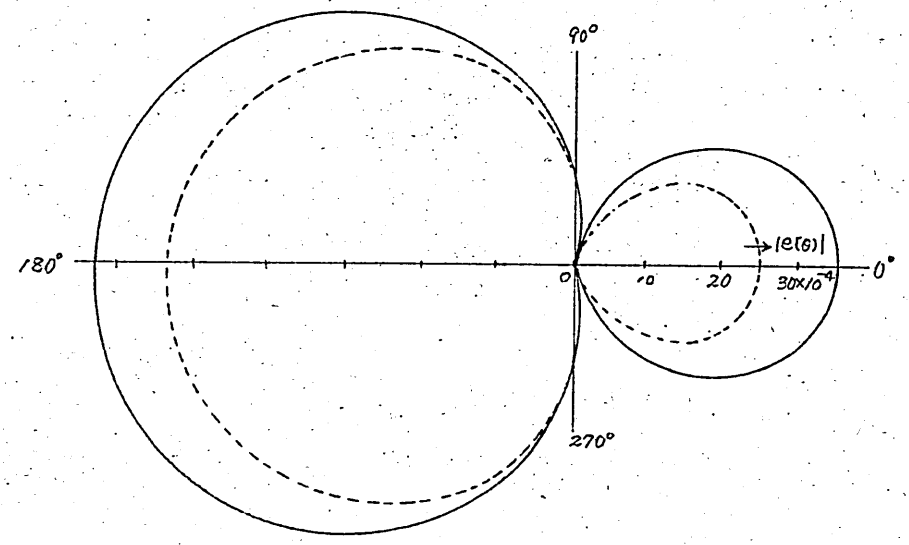
$\Omega_H = 9.4$, $\Omega_\alpha = \Omega_\beta = 10$ (↑↓) : (b)-(1)



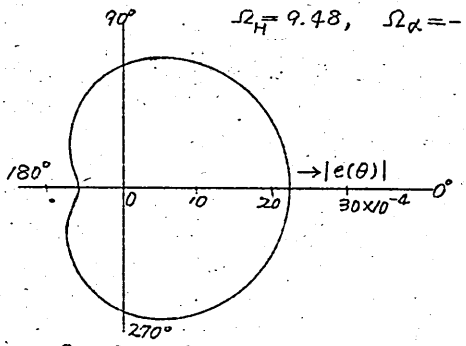
$\Omega_H = 9.4$, $\Omega_\alpha = -\Omega_\beta = 10$ (↑↓) : (b)-(2)



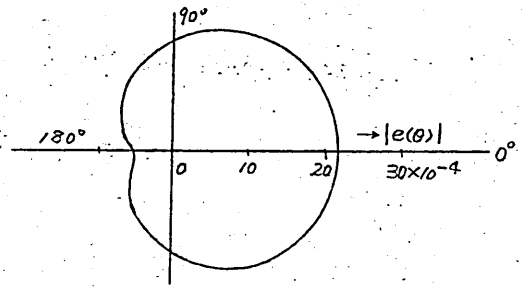
$\Omega_H = 9.48$, $\Omega_\alpha = \Omega_\beta = 10$. (↑↑) : (c)-(1)



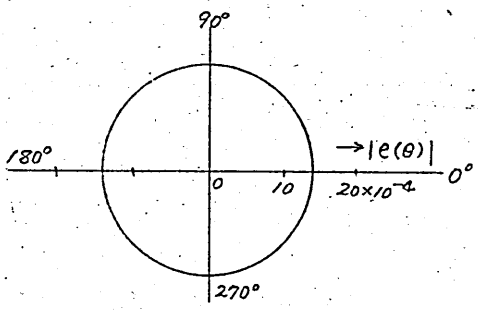
$\Omega_H = 9.48$, $\Omega_\alpha = -\Omega_\beta = 10$ (↑↓): (c)-(2)



$\Omega_H = 9.6$, $\Omega_\alpha = \Omega_\beta = 10$ (↑↑): (d)-(1)



$\Omega_H = 9.6$, $\Omega_\alpha = -\Omega_\beta = 10$ (↑↓): (d)-(2)



$\Omega_H = 20$, $\Omega_\alpha = \Omega_\beta = 10$ (↑↑): (e)-(1)

$\Omega_\alpha = -\Omega_\beta = 10$ (↑↓): (e)-(2)

図4　図3に示したフェリ磁性体円柱列による散乱界の角度分布
実線は相互作用を考慮した遠方散乱界を表わし，破線は相互作用を無視した遠方散乱界を表わす。ただし，(c)—(2)の場合を除けば，実線と破線はほとんど一致する。

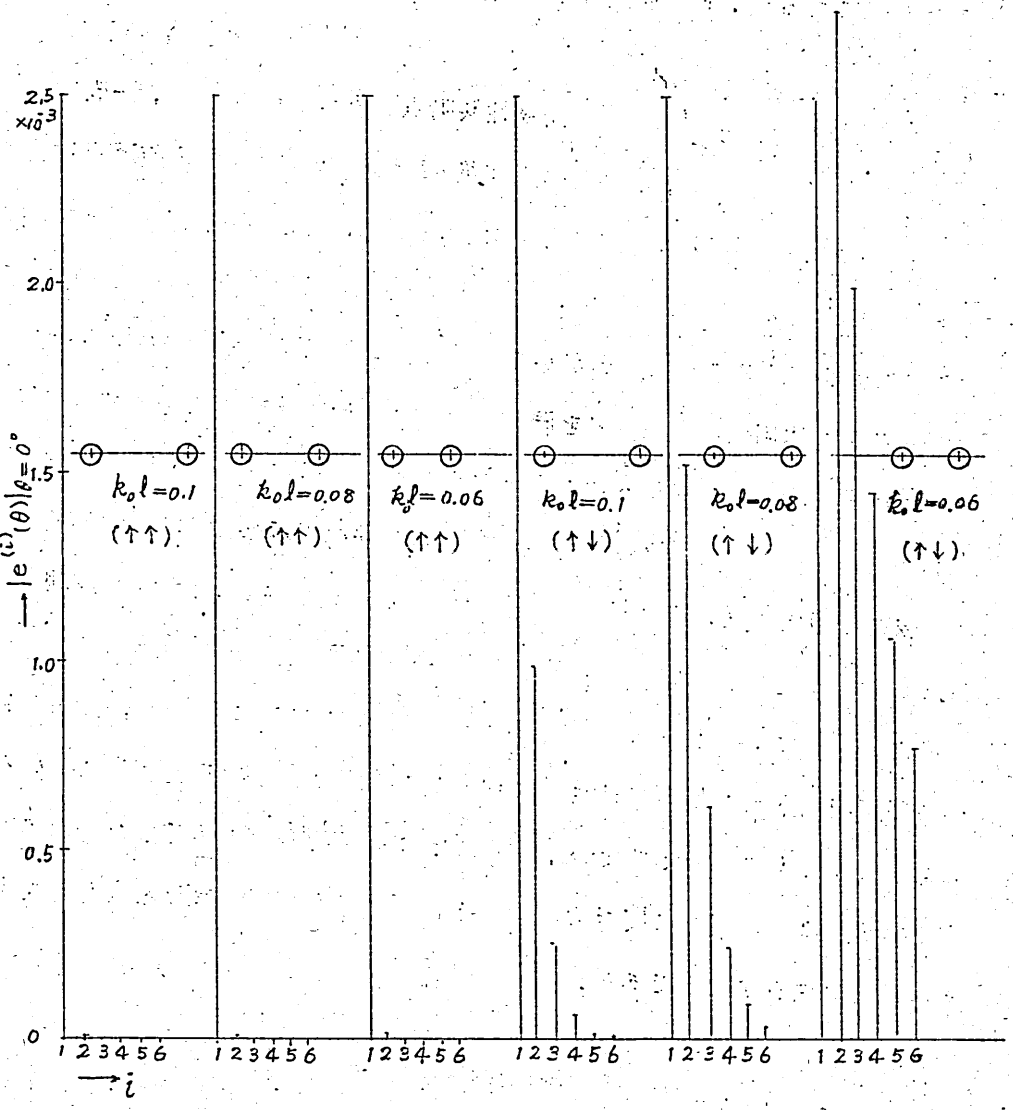


図 5　各次数の散乱波の前方強度

図4から，平行配置された2つの無限長フェリ磁性体円柱による散乱界は，つぎのような点に特徴をもつものとしてとらえることができる。

(1) 加えるバイアス直流磁界のある範囲で，散乱界は誘電体柱の場合とちがったものになるが，ある程度以上の直流磁界が加わる場合には誘電体柱の場合と同じになる。

(2) 加えるバイアス直流磁界が強磁性共鳴点に近づくにつれて，一般に散乱界は大きな値をもつし，また共鳴点前後の直流磁界のもとで後方あるいは前方散乱界がその反対側に比べて強くなる。なお，散乱界は同方向に対して完全に対称にはならない。

(3) 加えるバイアス直流磁界がかなり強磁性共鳴点に接近した場合，2つのフェリ磁性体円柱に直流磁界を同方向に加えるのと反対方向に加えるのとでは，散乱界は明瞭にちがったパターンを示すようになる。

(4) 加えるバイアス直流磁界がかなり強磁性共鳴点に接近しかつ2つのフェリ磁性体円柱に互いに反対方向に磁界が加えられる場合，相互作用の影響が大きくあらわれ，散乱界の強度が強くなってくる。

以上のことは，図4の例について明らかにされたことであるが，一般に2つの平行配置されたフェリ磁性体円柱による散乱界がどのようなものになるかを示さするものと考えてよい，とくに，強磁性共鳴点に接近したバイアス直流磁界を2つの円柱に反対方向に加える場合にきわめて特異な散乱界を与えることは注意すべきである。

4. むすび

平行配置された無限長フェリ磁性体円柱による平面電磁波の散乱を解析し，このような系による散乱界を求める一般式を導出するとともに数値例によっ

てこのような系の散乱系としてもつ特徴を明らかにした。

第2節において級数の形で与えた散乱電磁界は，任意の半径および幾何学的配置についても成立つものであるし，また第2項以下が2つのフェリ磁性体円柱の相互に関係しあう程度を示すという意味で望ましい形である。なお，本文には示してないが，同じような方法でフェリ磁性体円柱が2本である場合に限らず，一般にN本の平行配置されたフェリ磁性体円柱の場合の散乱電磁界を与える式が導き出せることを確めている。

2つの平行配置されたフェリ磁性体円柱の散乱系としてもつ特徴を一例について数値計算結果からとらえた。さらに詳しくは，円柱半径，円柱間隔，両円柱に加えるバイアス直流磁界をかえての計算結界をみることは望ましいにちがいないが，ここで明らかにした散乱のもようは，このような散乱系による散乱現象が一般にどのようなものになるかを推測するにあたってじゅうぶんな資料になると考えている。

参　考　文　献

(1) P.S.Epstein and A.D.Berk: "Ferrite Post in a Rectangular Wave Guide", J.Appl.Vol.27, No 11, pp1328－1335.

(2) V.V.Nikol'skii: "The Simplest Case of Diffraction of a Plane Wave on a Gyrotropic Cylinder", Radioteknika i electronika, Vol.3, No6, pp756－759,(1958).

(3) W.H.Eggimann: "Scattering of a Plane Wave on a Ferrite Cylinder at Normal Incidence", IRE Trans.on MTT,Vol.MTT－8, pp440－445,(July,1960).

(4) W.Trinks: "Zun Vielfachstreuung an kleinen Kugeln", Ann. Phys., 5Folge, Band 22, S.561,(1935).

(5) K.Germey: "Die Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an zwei parallelen unendlich langen idealleitenden Zylindern von elliptischen Querschnitt", Ann. Phys.7Folge, Band 13, s237,(1964).

(6) G.N.Watson: "Theory of Bessel Functions", pp361, Campridge University Press, (1922).

幅射科学研究会資料

反射形ビーム伝送系円形曲り部の最適設計

山崎友久　中西義郎
（大阪大学工学部）

1966年5月28日

1. はじめに

本報告は，電磁波ビーム伝送系の一つの方式として有望視されている反射形ビーム伝送系の円形曲り部分を解析し，設計にあたっての最適条件を求めたものであるが，つぎのような考えにもとずいてこれを行ったものである。

(1) 反射形ビーム伝送系の円形曲り部について，反射板として直線部の反射板と同じものを用いた場合についてはすでに考察されており，その結論として曲り部の曲率半径は a^2/λ 以上でなければならないことが示されている[1]。この結論は曲り部でも直線部と同じ反射板を使うということに起因するものであり，したがって，ここから〝曲り部の反射板としてその曲率半径に適当した（直線部とは異なる）ものを使うようにすれば，直線部と同等な性能で任意の曲率半径をもつ曲り部を設計することが可能になるのではないか〟という考えが出てくる。

(2) 曲り部で直線部と同等な性能をもたせるということであれば，曲り部での伝送電磁波ビームは本質的に直線部の伝送電磁波ビームと異なるものであってはならない。したがって，この解析にあたっては，さきに筆者らが直線部についての解析でその有効性を指摘した等価レンズ列ビーム伝送系による方法[2]が使え，かつ有効であると考えられる。

本文では，以上の考えにもとづいて，（直線部とは異なる）二種類の反射板で構成される任意の曲率半径をもつ曲り部と直線部との接続部を解析し，その最適設計条件を導出している。

2. 任意の曲率半径をもつ反射形ビーム伝送系曲り部の解析——曲り部の最適設計条件——

2．1　任意の曲率半径をもち，二種類の反射板で構成される反射形ビーム伝送系曲り部の等価レンズ列ビーム伝送系

中心軸の曲率半径 R，伝送空間間隔 d，反射板 M_1，M_2，で構成される反射形ビーム伝送系の構成を図1に示す。もちろん，このビーム伝送系は反射

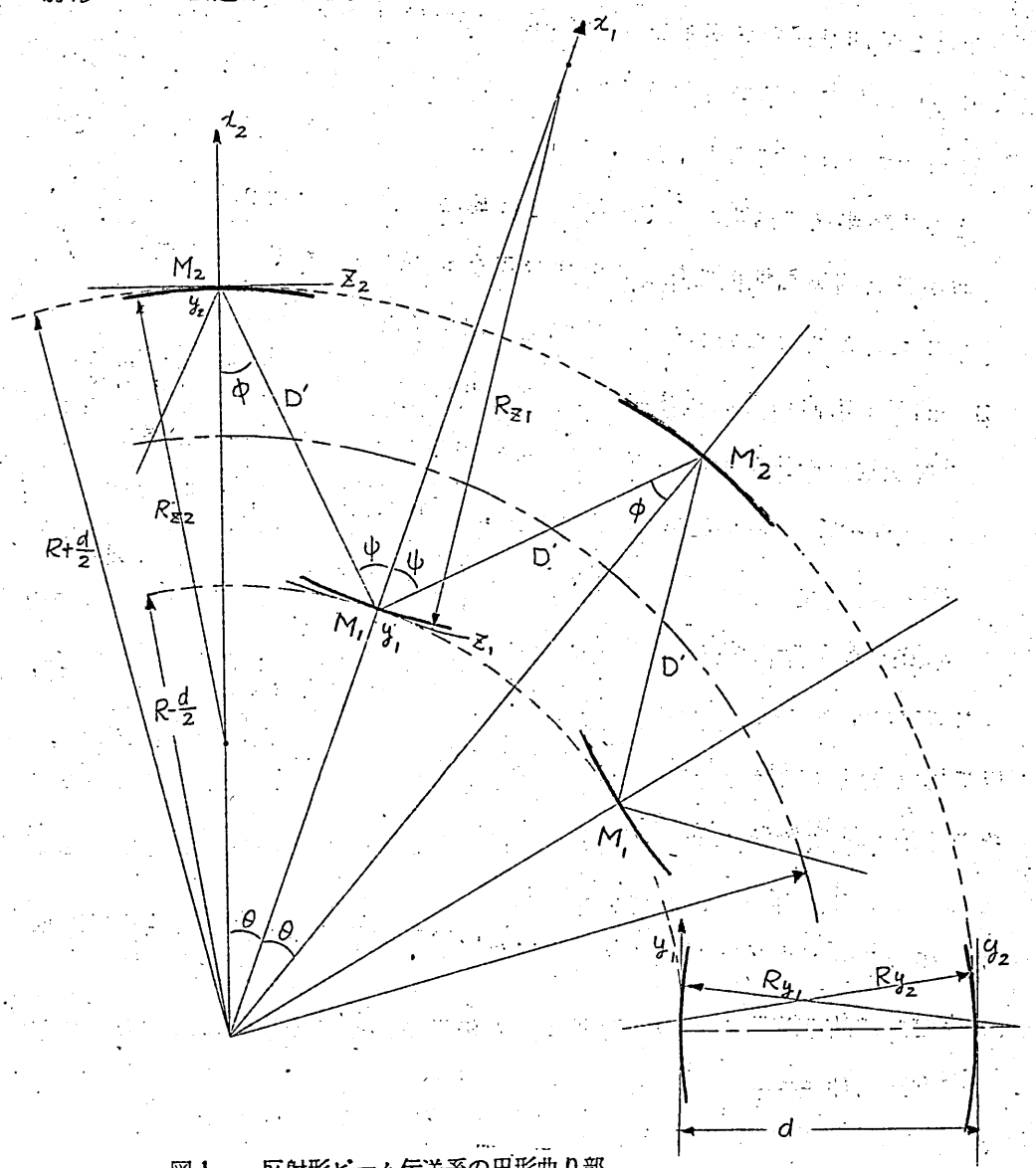


図1　　反射形ビーム伝送系の円形曲り部

- 板寸法及び，反射板間隔が波長に比し十分大きく，中心軸の曲率半径は

$$R > \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\,\frac{d}{2} \tag{1}$$

を満足するものである。

反射板M_1，M_2は，反射板中央に原点をもつ直角座標系によって，それぞれ

$$\left.\begin{aligned}\frac{z_1^2}{A_1^2}+\frac{(x_1-B_1)^2+y_1^2}{B_1^2}&=1\\ \frac{z_2^2}{A_2^2}+\frac{(x_2+B_2)^2+y_2^2}{B_2^2}&=1\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

であらわされる回転だ円体の一部を用いるものとするが，原点近傍だけを利用するとして反射板は$X-Z$面，$X-Y$面で異なる曲率半径R_z，R_yをもつ曲面で近似しうるものである。

さて，図1において，ビームが反射板M_1，M_2の法線方向に対して，それぞれ，ψ，ϕの角度で入射するものとすると，光学的に考えて，反射板M_1，M_2，について，その曲率半径の間に

$$\left.\begin{aligned}R_{y1}&=R_{z1}(\cos\psi)^2\\ R_{y2}&=R_{z2}(\cos\phi)^2\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

の関係があれば，反射板M_1，M_2は入射角ψ，ϕをもつ入射ビームに対して，焦点距離

$$f_1 = \frac{1}{2} R_{z1} \cos\psi$$
$$f_2 = \frac{1}{2} R_{z2} \cos\phi \qquad (4)$$

をもつレンズと等価になる[3]。以上のことから式(3)(4)を満足させるようにさえしておけば，図1に示す反射形ビーム伝送系は図2に示すような焦点距離の異なる2枚の薄肉レンズを交互に，等間隔に配置したレンズ列ビーム伝送系と等価であることがいえる。

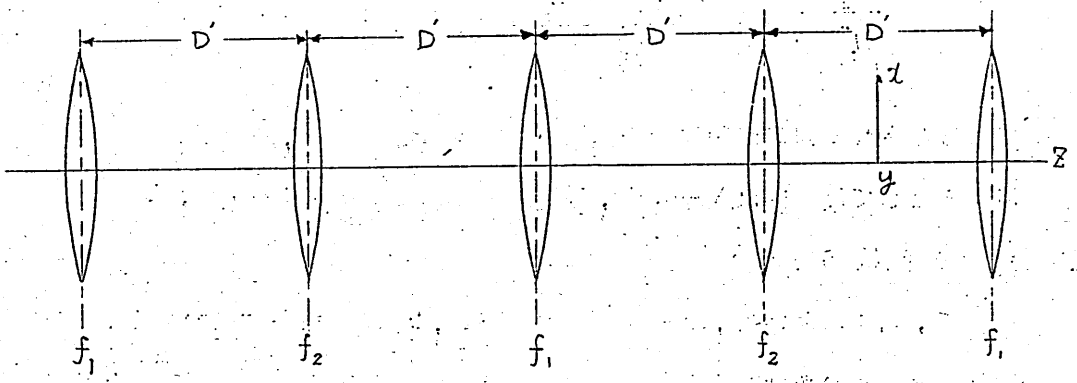


図2　円形曲り部の等価レンズ列ビーム伝送系

2．2　伝送ビームの最小集束条件

間隔 D' だけ離れておかれた焦点距離，f_1，f_2 をもつ2つの薄肉レンズ系は，焦点距離 f，主面 h，h_2 が

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D'}{f_1 f_2}$$

$$h_1 = \frac{D' f}{f_2} \qquad h_2 = \frac{D' f}{f_1} \qquad (5)$$

である厚肉レンズに等価であることはよく知られているとおりである。したがって，図2に示すレンズ列ビーム伝送系は，さらに図3に示す厚肉レンズ列ビーム伝送系におきかえられる。

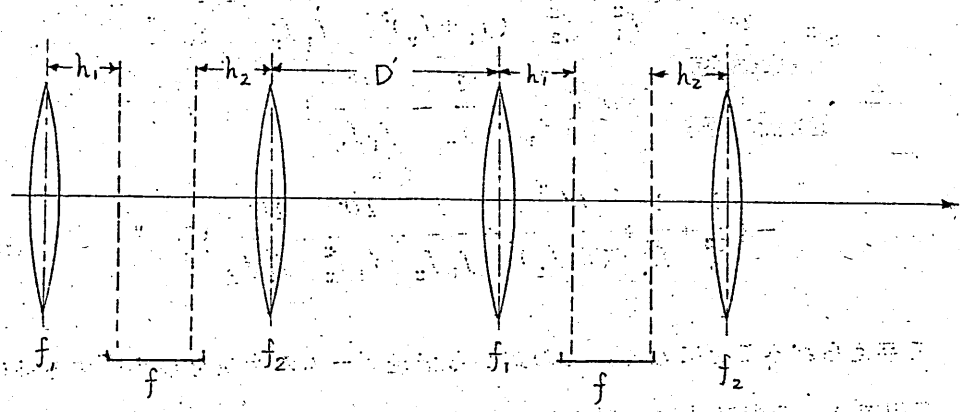


図3　図2の等価厚肉レンズ系

図3の等価レンズ列ビーム伝送系について，主面における伝送ビームの Complex－parameter q は

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R'} - j\frac{2\lambda}{W^2} = \frac{D-A}{2B} \pm j\frac{\sqrt{4-(A+D)^2}}{B} \qquad (6)$$

であることが導ける。[4]ここで，W，R' は主面におけるビーム半径，等価相面の曲率半径であり，A，B，C，Dは *Ray Matrix* の行列要素で

$$A = 1 \qquad B = D + h_1 + h_2$$

$$C = -\frac{1}{f} \qquad D = 1 - \frac{1}{f}(D + h_1 + h_2) \tag{7}$$

である。

式(8)(9)より，主面における伝送ビームの半径は

$$W^2 = \frac{2\lambda}{\pi}\left[\frac{4\left[\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2}+\frac{D'^2}{(f_1+f_2)^2}+\frac{2}{f_1 f_2}-\frac{2D'}{f_1 f_2^2}-\frac{2D'}{f_1^2 f_2}\right]}{D'\left[\frac{2}{f_1}+\frac{2}{f_2}-\frac{D'}{f_1 f_2}\right]}\right.$$

$$\left.-\left\{\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2}+\frac{D'^2}{(f_1 f_2)^2}+\frac{2}{f_1 f_2}+\frac{2D'}{f_1 f_2^2}-\frac{2D'}{f_1^2 f_2}\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

で与えられることになる。この式から伝送ビームの半径を最小にする条件が導出でき，その条件は，図2のレンズ列ビーム伝送系について

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{D}{f_1 f_2} \tag{9}$$

の関係を成立させることで満たされることになる。

式(9)で

$$\frac{D'}{f_1} = F_1 \qquad \frac{D'}{f_2} = F_2 \tag{10}$$

とおくと，

$$F_1 = 1 + \frac{1}{F_2 - 1} \qquad (11)$$

となるが，これはFabry－Perot 共振器の共焦点条件と一致するものである。[5]さきに，反射形ビーム伝送系直線部の解析において，反射形ビーム伝送系を等価レンズ列ビーム伝送系に変換し，Complex Parameter を用いて導出した伝送ビームの最適集束条件が満足される場合には，伝送ビーム姿態を定める積分方程式が共焦点Fabry－Perot 共振器の共振姿態を定める積分方程式に一致することを指摘した[2]が，式(9)の関係は，反射形ビーム伝送系円形曲り部における上述の関係を示している。

2．3　伝送ビームの安定条件

図3.で示されるレンズ列ビーム伝送系，したがって図1の円形曲り部が安定な伝送系であるための条件は，文献(6)から容易に導け

$$0 < \frac{D + h_1 + h_2}{f} < 4 \qquad (12)$$

で与えられる。式(12)にしたがって伝送ビームの安定領域を示したのが図4である。

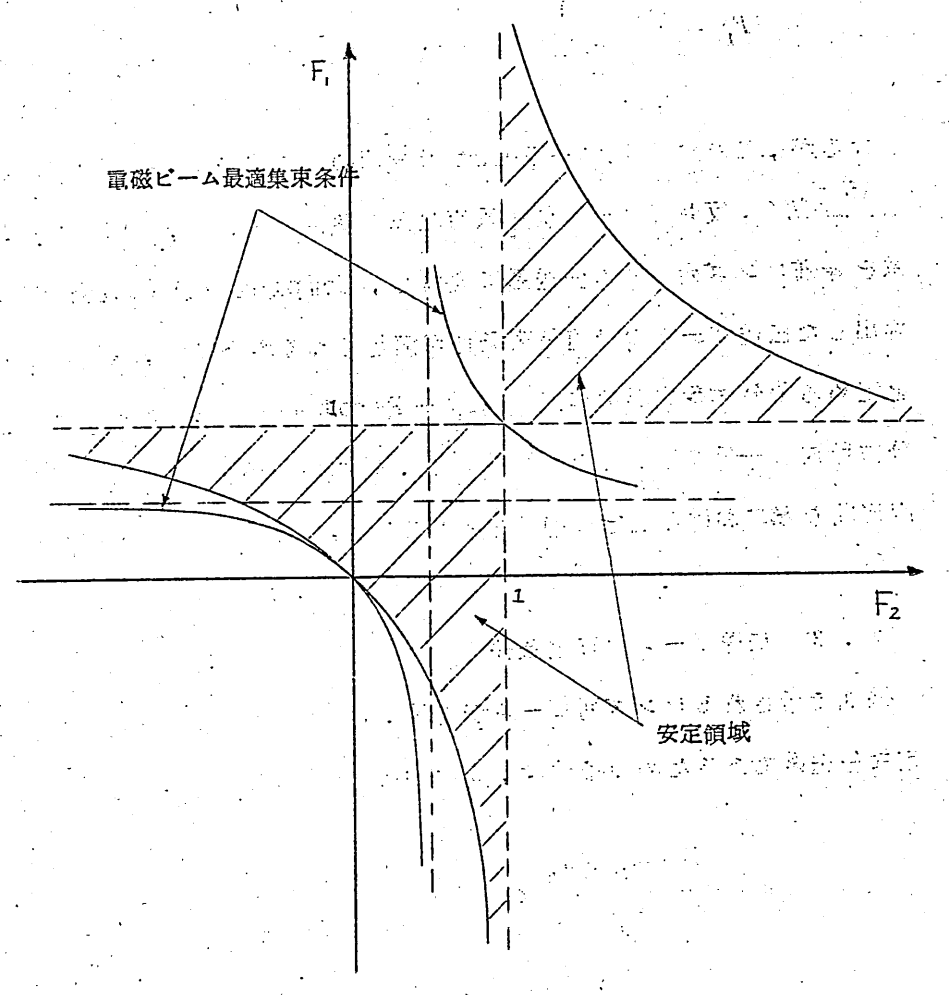


図4　　ビームの最適集束条件（最小集束条件と安定領域）

2．4　伝送ビームの最適集束条件一最適設計

2．3，2．4の結論にしたがって，図1の円形曲り部が伝送ビームを安定に伝送し，かつビーム半径を最小にする条件は，

$$f_1 = f_2 = \frac{D'}{2} \tag{13}$$

で与えられることになる。式(12)を満足しないが，最小集束条件式(9)を満たす場合のあることは注意しておく必要がある。

以上明らかにした最適集束条件を満たすように円形曲り部を設計するのが最適設計といえるが，このような円形曲り部を構成するためには，反射板M_1，M_2の曲率半径$R_{z:y1}$，$R_{z:yz}$，中心軸の曲り半径R，伝送空間間隔d，ビーム入射角ϕの間につぎのような関係が成り立つようにすればよい。

$$R_{z1} = \frac{D'\left(R-\frac{d}{2}\right)}{\left(R+\frac{d}{2}\right)\cos\phi - D'}$$

$$R_{y1} = \frac{D'\left[\left(R+\frac{d}{2}\right)\cos\phi - D'\right]}{R-\frac{d}{2}} \qquad (14)$$

$$R_{zz} = \frac{D}{\cos\phi}$$

$$R_{yz} = D\cos\phi$$

なお式(2)であらわされる回転だ円体の原点近傍の部分曲面が式(14)であらわされる曲率半径をもつ曲面で近似できるようにするには，A，Bは，それぞれ

$$A_1 = D' \qquad B_1 = \frac{D'\left[\left(R+\frac{d}{2}\right)\cos\phi - D'\right]}{\left(R-\frac{d}{2}\right)} \qquad (15)$$

$$A_2 = D' \qquad B_2 = D\cos\phi$$

であればよい。

2．5　反射板寸法

まづ，入射ビームに対し反射板の z 方向，y 方向の実効反射板寸法を同一にするため，反射板 M_1 ，M_2 の実寸法を図5のようにする。

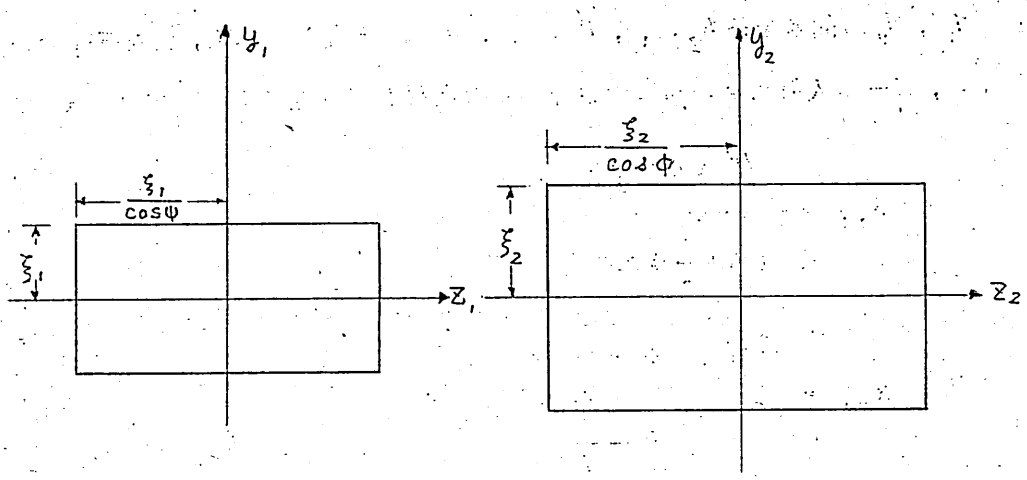


図5　反射板寸法

つぎに，反射板 $M_1-M_2-M_1$ ，$M_2-M_1-M_2$ 間をビームが伝送される場合の回折損を等しくするため，反射板寸法 ξ_1 ，ξ_2 の間に

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 = \frac{\cos\psi}{\cos\phi} \tag{16}$$

の関係を満足させる。

このようにしておくと，相隣れる反射板間をビームが伝送される場合の回折損は，等価フレネル数が

$$Neq = \frac{\xi_1^2}{\lambda D' \cos\psi} = \frac{\xi_2^2}{\lambda D' \cos\phi} \qquad (17)$$

である共焦点 Fabry－Perot 形共振器の回折損に等しくなる。したがって，共焦点共振器についてすでに知られている N と回折損との関係[7]を利用して，許容回折損にしたがって反射板寸法を決定するようにすればよい。

3. 直線部と円形曲り部との接続

円形曲り部が最適に設計されたとして，つぎにこの部分と直線部との接続が問題になるが，その問題は各部の基本姿態間の結合につきる。ここでは，これについて考察を進めるが，直線部については筆者らがさきに解析したもの[2]を使う。（図，6）

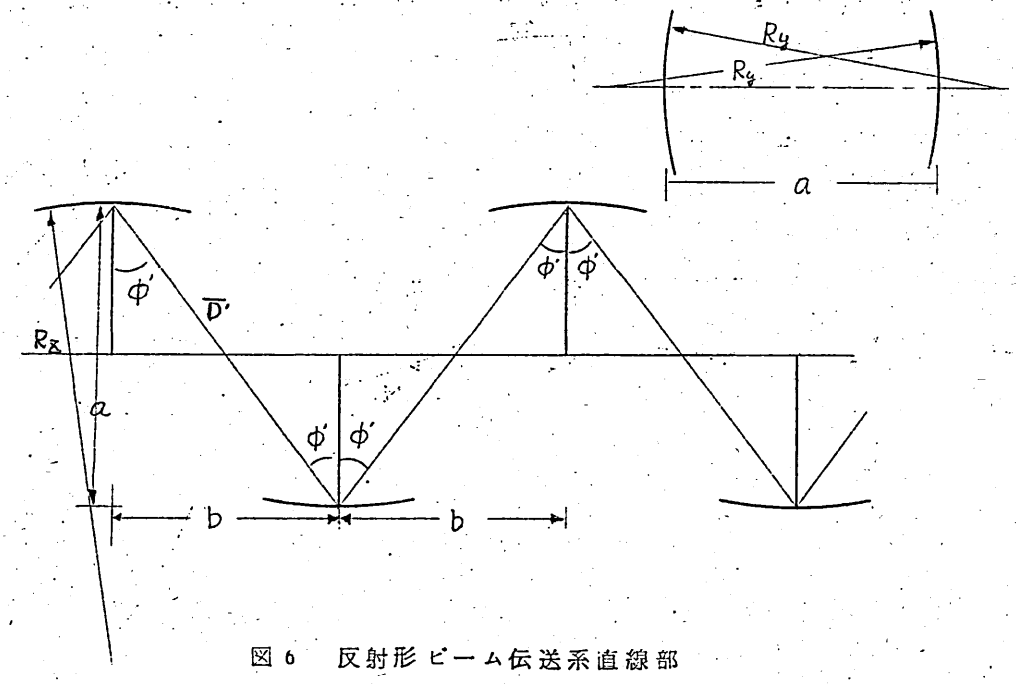


図 6　反射形ビーム伝送系直線部

直線部と円形曲り部の接続部は図 7(a) に示すようになるが，各部について等価レンズ列ビーム伝送系を考えれば，この接続部は一般に図 7(b) に示すようになる。

まづ，接続部で伝送ビームの伝ぱん軸に斜斜を生じないように $\phi = \phi'$ にとることにする。ところで，図 7(b) で与えられる直線部と円形曲り部の接続について，各部の基本姿態間の電力結合係数 Γ は

$$\Gamma = \frac{4}{\left(\frac{W_0}{W_0'} + \frac{W_0'}{W_0}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\pi W_0 W_0'}\right)^2 (\bar{z} + \bar{z}')^2} \qquad (18)$$

で与えられる。[8] W_0 , W_0' は円形曲り部および直線部のビームウェストでのビーム半径であり，$(\bar{z} + \bar{z}')$ は両部のビームウェスト間の距離である。

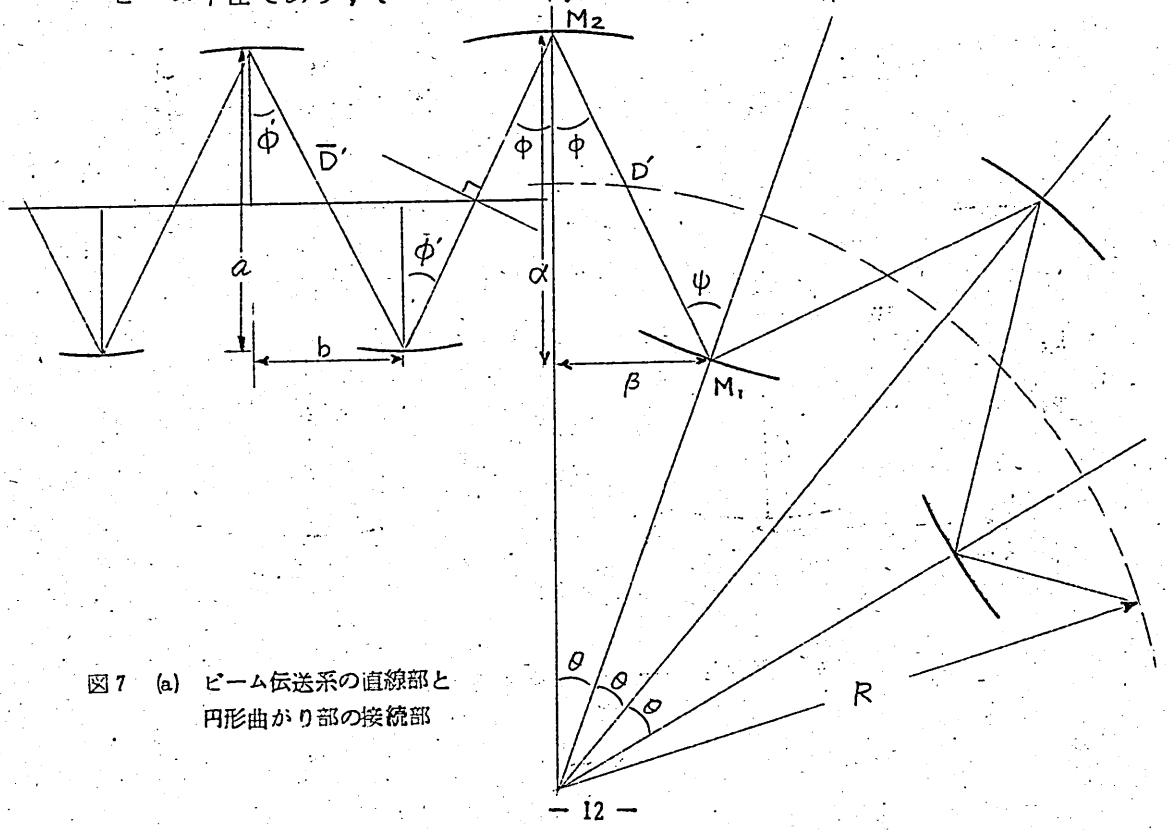


図7 (a) ビーム伝送系の直線部と円形曲がり部の接続部

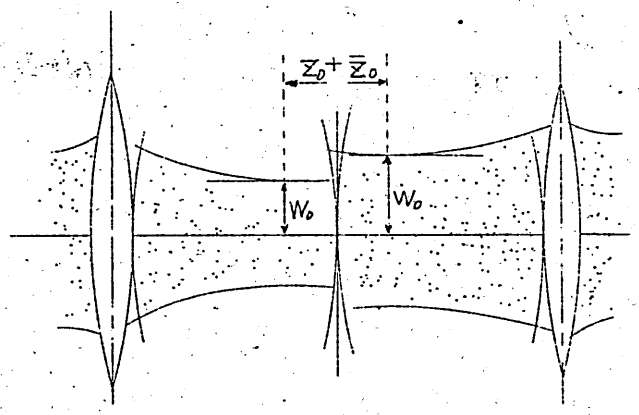


図7 (b)　接続部のレンズ列伝送系による等価表示

式(18)から，Γ を最適値1にするには，

$$\bar{z} + \bar{z}' = 0$$
$$W_0 = W_0' \tag{19}$$

にすればよく，したがって接続を含めて反射形ビーム伝送系の直線部，円形曲り部を最適設計するには(19)式の条件を満たすようにすればよい。

なお，式(19)が満たされなければ，電力結合係数は1以下になるが，その状況をつぎの数値例によって示したものが図8である。

数値例

直線部

$\phi' = 30°$　$D' = 30\,cm$　$a = 15\sqrt{3}\,cm$　$b = 15\,cm$

円形曲り部

$R = 150\,cm \quad \phi = 30° \quad d = 10\,cm \rightarrow 46\,cm$

$\lambda = 0.2\,cm$

この例では，$\Gamma = 1$ の条件は $d = 25.1592\,(cm)$ の場合に満たされていること

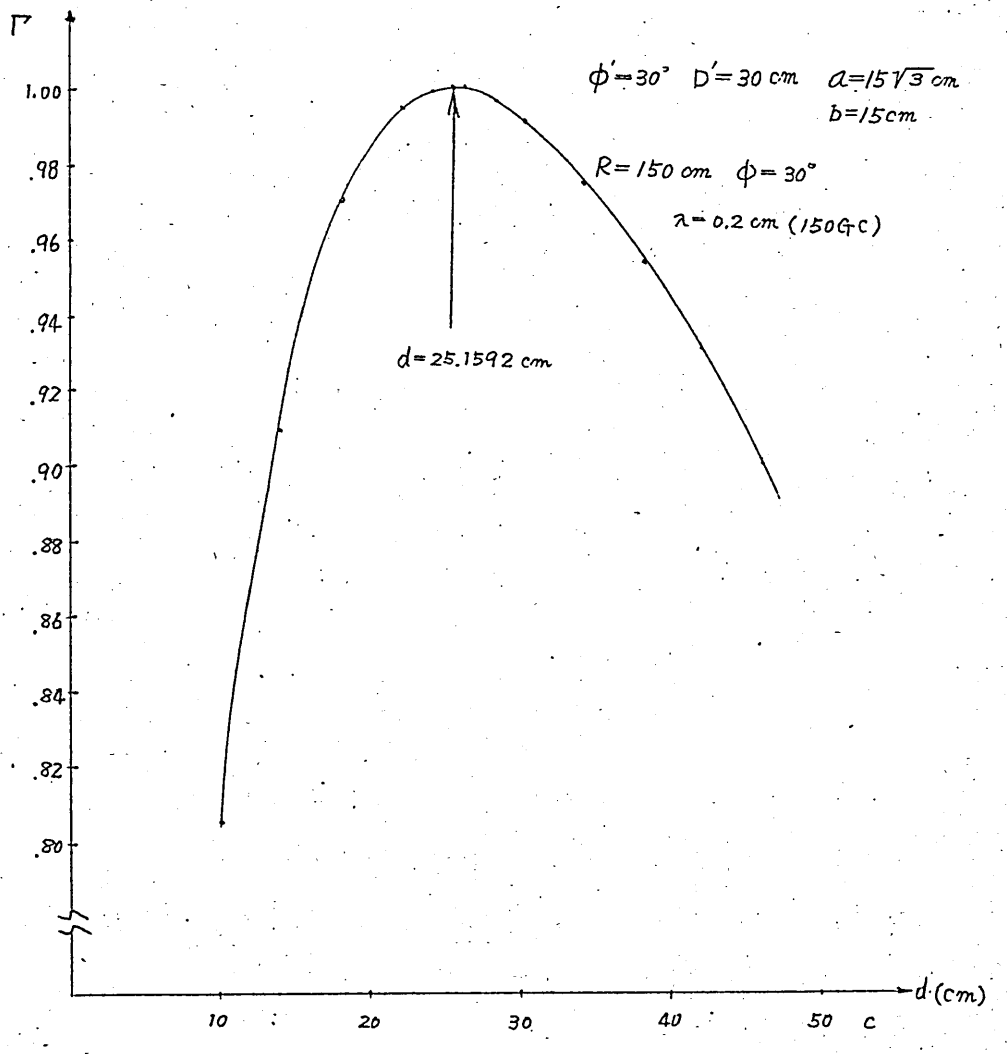


図 8　接続部における基本姿態間の電力結合係数.

とになる。それぞれの d に対して最適集束条件が満たされる反射板の曲率半径は図9に示すとおりである。

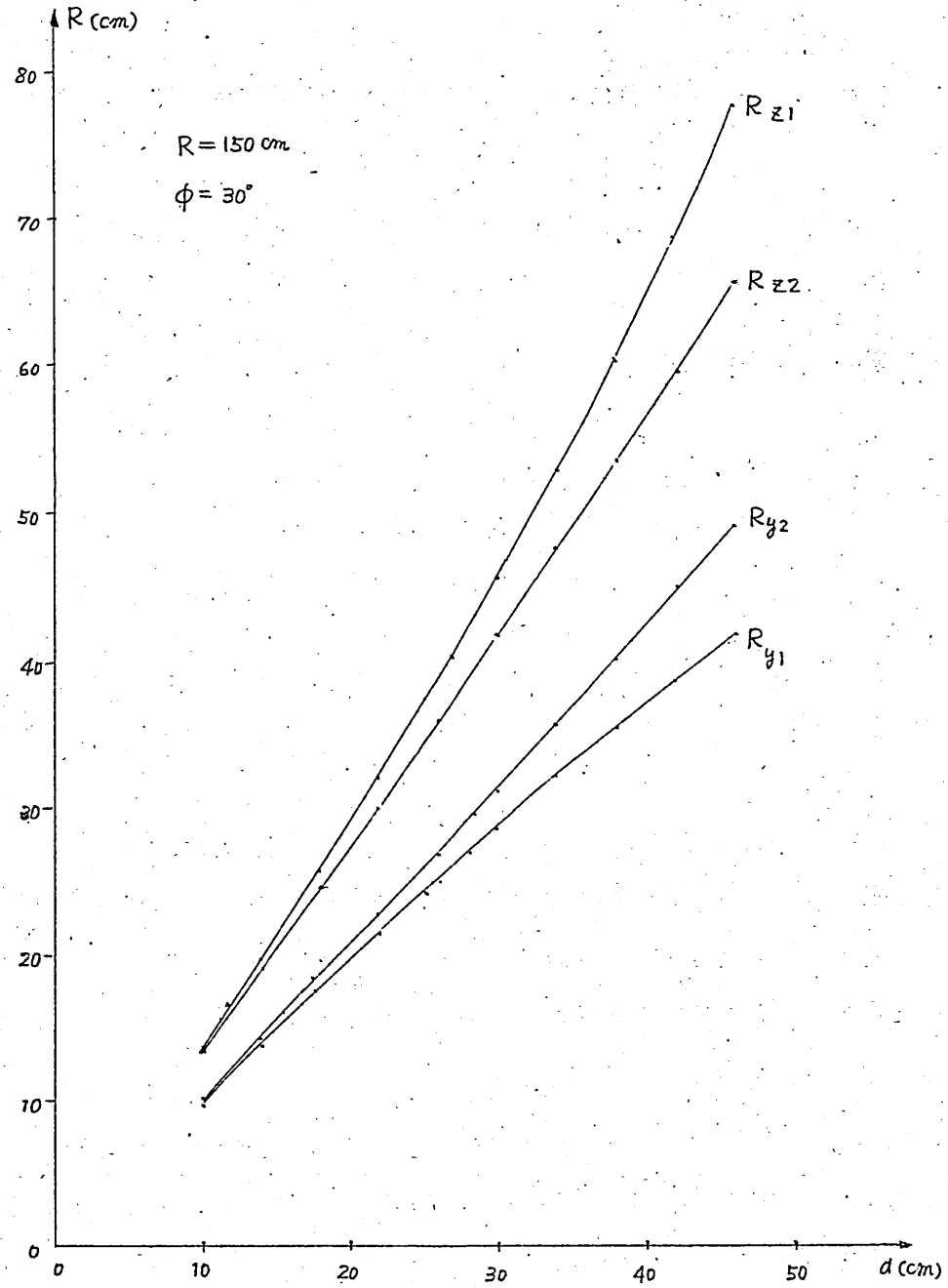


図9　最適集束条件を満たす反射板曲率半径の数値例

4. むすび

反射形ビーム伝送系の円形曲り部を曲り部の曲率半径に対して適当な（直線部とはちがった）二種類の反射板を用いて構成する問題について考察し，つぎのことを明らかにした。

(1) 反射形ビーム伝送系の円形曲り部に対して直線部と同じ反射板を用いることを前提としないで，円形曲り部にはそれに適当した直線部とは異となる二種類の反射板を使うようにするのが，より合理的であり，かつ曲りに対する制限もゆるくなる。

(2) 任意の曲率半径をもつ曲り部についての最適設計条件

(3) 直線部と曲り部の接続の最適設計条件，

おわりに，本研究にあたりご指導いただいた大阪大学工学部熊谷三郎教授に深く感謝しておく。

参　考　文　献

(1) 熊谷他，"反射形ビームウェーブガイドの円形曲り，折れ曲り，くい違い" 信学会マイクロ波伝送研資料（昭40－07）

(2) 中西，山崎，"反射形ビーム伝送系の等価レンズ列ビーム伝送系による考察" 信学誌49 P264 （昭41－02）

(3) F.A. Jenkins and H.E.White: "Fundamentals of Optics" 3rd.ed. McGraw-Hill Co., New york (1959)

(4) H.Kogelnik : "Imaging of Optical Mode-Resanators with Internal lenses", Bell.Syst.tech. J. 44, 3, P455 (March 1961)

(5) G.D.Boyd and H.Kogelnik : "Generalized Confocal Resonator Theory", Bell.Syst.Tech.J. 41 p1347 (July 1962)

(6) J.R,Pierce : "Theory and Design of Electron Beams" D.Van. Nostrand Co, New york (1954)

(7) G.D.Boyd and J.Gordon : "Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers", Bell Sys. tech.J., 40 p489 (March 1961).

(8) H.Kogelnik : "Coupling and Conversion Coefficients for Optical Mode" Proc. Smp. Quasi-Optics, Polytechnic Inst. Brooklyn(1964)

輻射科学研究会資料

直列給電形アンテナアレーにおける方向性結合器の誤差の影響

牧本 利夫　山県 淳
（大阪大学　基礎工学部）

1966年5月28日

1 序　言

互に独立に給電された素子数の十分大きい2次元アレーアンテナや1次元パトラーアレーにおいて，その励振電流にランダム誤差がある場合，それのアンテナ動作におよぼす影響については，おのおの L. A. Rondinelli[1] および M. J. Kiss[2] によって統計的に調べられているが，ここでは直列給電された1次元アンテナアレーで給電線と素子アンテナとの結合器として使用する方向性結合器の透過係数および結合係数にランダム誤差がある場合，それらのアンテナ放射特性に与える影響を素子数が十分大きいとして、統計的に検討する。

2. 理想状態における合成電界

図1に示すような等振巾，等間隔の直列給電形アンテナアレーの理想状態（あらゆる誤差を含まない状態）におけるアンテナから十分遠方の θ 方向に対

する合成電界Eは

$$E = E_a e^{j(N-1)w/2} \qquad (1)$$

$$E_a = \frac{\sin\frac{Nw}{2}}{\sqrt{N}\sin\frac{w}{2}} \qquad (2)$$

$w = ⓗ - \beta l$

$ⓗ = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$

β：給電線の位相定数

λ：自由空間波長

l：各素子アンテナ間の給電線路長

d：各素子アンテナ間の距離

θ：アレーに垂直な方向から時計方向に測った角度

N：素子アンテナの総数

Eは $w = 2k\pi$（k：整数）の方向で最大値$\sqrt{N}$をとる。

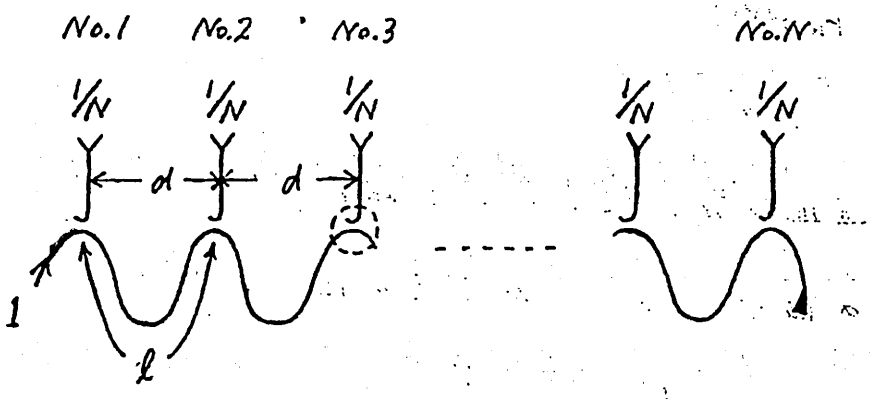


図 - 1

3. 結合器に誤差がある場合の放射特性

次に給電線と素子アンテナとの結合器として使用する方向性結合器の透過係数，結合係数の振巾と位相の両方に誤差が含まれている場合のアンテナの放射特性を求める。

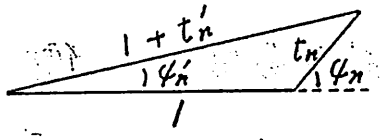
n番目の方向性結合器において位相の基準面を適当にとれば透過係数 S_n は

$$S_n = T_n(1 + t_n e^{j\psi_n}) = T_n(1 + t_n')e^{j\psi_n'} \tag{3.1}$$

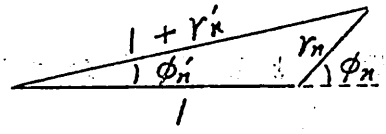
結合係数 P_n は

$$P_n = R_n(1 + r_n e^{j\phi_n})$$
$$= R_n(1 + r_n') e^{j\phi_n'} \qquad (3.2)$$

T_n, R_nは各々透過係数，結合係数の理想値で実数，t_n, r_nが誤差の振巾，φ_n, ϕ_nが誤差の位相，t_n', r_n'が振巾誤差，φ_n', ϕ_n'が位相誤差である。式(3)を図式化すれば図2のようになる。ただし図では理想値で規格化している。



透過係数



結合係数

図 - 2

さてこの場合n番目のアンテナの出力便界E_nは入力を1として

$$E_n = \left(\prod_{m=1}^{n-1} S_m\right) e^{-j(n-1)\beta l} \cdot P_n \qquad (4)$$

したがって合成便界E_eは

$$E_e = \sum_{n=1}^{N} E_n e^{j(n-1)\theta}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} e^{j(n-1)w} \left(\prod_{m=1}^{n-1} S_m \right) P_n \qquad (5)$$

より式(3)を使って

$$\left(\prod_{m=1}^{n-1} S_m \right) P_n = \left[\left(\prod_{m=1}^{n-1} T_m \right) R_n \right] \left[\prod_{m=1}^{n-1} (1 + t_m e^{j\psi_m}) \right] (1 + r_n e^{j\phi_n})$$

ここで $|t_n| \ll 1$, $|r_n| \ll 1$ とすると

$$\left(\prod_{m=1}^{n-1} S_m \right) P_n \simeq \left[\left(\prod_{m=1}^{n-1} T_m \right) R_n \right] \left[1 + \sum_{m=1}^{n-1} t_m e^{j\psi_m} + r_n e^{j\phi_n} \right] \qquad (6)$$

ここで

$$\left[\left(\prod_{m=1}^{n-1} T_m \right) R_n \right] = \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad (7)$$

よって式(6), (7)より式(5)は

$$E_a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{j(n-1)w} \left[1 + \sum_{m=1}^{n-1} t_m e^{j\psi_m} + r_n e^{j\phi_n} \right] \qquad (8)$$

式(8)の第1項が誤差のない状態の合成波形で式(1)に一致している。

いま,

$$E_a = E' e^{j\frac{1}{2}(N-1)w}$$

とおくと, $X_n = (N - 2n + 1)/2$ とすると

$$E' = E_a + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{n-1} t_m e^{j(\psi_m - X_n w)} \right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N} r_n e^{j(\phi_n - X_n w)}$$

$$= \Big[E_a + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n-1} t_m \cos(\phi_m - X_n w)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N} r_n \cos(\phi_n - X_n w) \Big]$$

$$+ j \Big[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n-1} t_m \sin(\phi_m - X_n w)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N} r_n \sin(\phi_n - X_n w) \Big]$$

$$= (E_a + x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n-1} t_m \cos(\phi_m - X_n w) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N-1} t_n \cos\left(\phi_n + \frac{n}{2} w\right) \sin\frac{(N-n)w}{2} \Big/ \sin\frac{w}{2} \qquad (n-1) \\
x_2 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} r_n \cos(\phi_n - X_n w) \\
y_1 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n-1} t_m \sin(\phi_m - X_n w) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N-1} t_n \sin\left(\phi_n + \frac{n}{2} w\right) \sin\frac{(N-n)w}{2} \Big/ \sin\frac{w}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} r_n \sin(\phi_n - X_n w) \qquad (10)$$

より

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \Bigg[\sum_{n=1}^{N-1} \Big\{ \cos\frac{n}{2}w \left(\sin\frac{(N-n)w}{2} \Big/ \sin\frac{w}{2} \right) a_n \\ &\qquad - \sin\frac{n}{2}w \left(\sin\frac{(N-n)w}{2} \Big/ \sin\frac{w}{2} \right) b_n \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{N} \left(\cos X_n w \cdot C_n + \sin X_n w \cdot d_n \right) \Bigg] \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \Bigg[\sum_{n=1}^{N-1} \Big\{ \cos\frac{n}{2}w \left(\sin\frac{(N-n)w}{2} \Big/ \sin\frac{w}{2} \right) b_n \\ &\qquad + \sin\frac{n}{2}w \left(\sin\frac{(N-n)w}{2} \Big/ \sin\frac{w}{2} \right) a_n \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{N} \left(\cos X_n w \cdot d_n - \sin X_n w \cdot C_n \right) \Bigg] \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= t_n \cos\phi_n \\ b_n &= t_n \sin\phi_n \\ C_n &= r_n \cos\phi_n \\ d_n &= r_n \sin\phi_n \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

結局，結合器に誤差のある場合の臨界指向特性$|E_c|$は

$$|E_c| = |E'| = \sqrt{(E_a + x)^2 + y^2} \tag{14}$$

電力指向特性Wは

$$W = |E_c|^2 = (E_a + x)^2 + y^2 \tag{15}$$

で与えられる。

4. 臨界指向特性の統計的性質

次に結合器の誤差がランダム誤差としたとき，式(14)で与えられる臨界指向特性$|E_c|$の統計的性質を調べる。そのために結合器の誤差について2つの場合を仮定する。

—第1の場合—

方向性結合器の透過係数，結合係数の誤差の振巾t_n，r_nおよび誤差の位相φ_n，θ_nが各々

$$\left.\begin{aligned} p(t_n) &= \begin{cases} \dfrac{2t_n}{\sigma_{t_n}^2} e^{-t_n^2/\sigma_{t_n}^2} & t_n \geq 0 \\ 0 & t_n < 0 \end{cases} \\ p(r_n) &= \begin{cases} \dfrac{2r_n}{\sigma_{r_n}^2} e^{-r_n^2/\sigma_{r_n}^2} & r_n \geq 0 \\ 0 & r_n < 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$p(\varphi_n)=\begin{cases} 1/2\pi & [-\pi,\ \pi] \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$p(\phi_n)=\begin{cases} 1/2\pi & [-\pi,\ \pi] \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \qquad (16)$$

のようなレイレー分布，一様分布に従うとすれば

式(13)の a_n, b_n, c_n, d_n は

$$p(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\,e^{-t^2/2\sigma_n^2} \qquad (17)$$

$$\sigma_n^2=\begin{cases} \sigma_{t_n}^2/2 & \text{for } a_n,\ b_n \\ \sigma_{r_n}^2/2 & \text{for } c_n,\ d_n \end{cases}$$

なるガウス分布に従う。だから

$$\left.\begin{aligned} &\overline{a_n}=\overline{b_n}=\overline{c_n}=\overline{d_n}=0 \\ &\overline{a_n^2}=\overline{b_n^2}=\sigma_{t_n}^2/2 \\ &\overline{c_n^2}=\overline{d_n^2}=\sigma_{r_n}^2/2 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

さらに各ランダム変数は互に相関がなく各結合器についても独立であるとすれば

$$\left.\begin{aligned} &\overline{p_m q_n}=0 \quad (p,\ q=a,\ b,\ c,\ d,\ m\neq n) \\ &\overline{p_n q_n}=0 \quad (p,\ q=a,\ b,\ c,\ d,\ p\neq q) \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

したがって

$$\left.\begin{aligned} &\overline{x} = \overline{y} = 0 \\ &\overline{xy} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (20.1)$$

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \frac{1}{2N}\left[\sum_{n=1}^{N-1}\left(\sin\frac{(N-n)w}{2} \Big/ \sin\frac{w}{2}\right)^2 \sigma_{tn}^2 + \sum_{n=1}^{N}\sigma_{rn}^2\right]$$

こゝでさらに $\sigma_{tn}^2 = \sigma_{rn}^2 = \sigma_0^2$ とすれば

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \sigma_1^2$$

$$\sigma_1^2 = \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_0^2\left[\frac{1}{2\sin^2\frac{w}{2}}\left(\frac{N-1}{N} - \frac{\cos\frac{N}{2}w\sin\frac{N-1}{2}w}{N\sin\frac{w}{2}}\right)+1\right] & (\text{for } w \neq 2k\pi) \\ \frac{1}{2}\sigma_0^2\left[\frac{(N-1)(2N-1)}{6}+1\right] & (\text{for } w = 2k\pi) \end{cases} \qquad (20.2)$$

— 第2の場合 —

方向性結合器の振巾誤差 t_n', r_n' および位相誤差 ψ_n', ϕ_n' が

$$\left.\begin{aligned} p(t_n') \\ p(r_n') \end{aligned}\right\} = \begin{cases} 1/2\delta_1 & [-\delta_1, \delta_1] \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \qquad (21)$$

$$\left.\begin{matrix} p(\varphi_n') \\ p(\phi_n') \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 1/2\delta_2 & [-\delta_2, \delta_2]. \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{21}$$

なる一様分布に従うとすると $\sqrt{t_n^2}$, $\sqrt{r_n^2}$ が充分小さければ, a_n, b_n, c_n, d_n は近似的に

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} p(a_n) \\ p(c_n) \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 1/2\delta_1 & [-\delta_1, \delta_1] \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \\ \left.\begin{matrix} p(b_n) \\ p(d_n) \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 1/2\delta_2 & [-\delta_2, \delta_2] \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{matrix}\right\} \tag{22}$$

なる一様分布に従う[付-2]。だから

$$\left.\begin{matrix} \overline{a_n} = \overline{b_n} = \overline{c_n} = \overline{d_n} = 0 \\ \overline{a_n^2} = \overline{c_n^2} = \delta_1^2/3 \\ \overline{b_n^2} = \overline{d_n^2} = \delta_2^2/3 \end{matrix}\right\} \tag{23}$$

さらに各ランダム誤差は互に相関がなく，各結合器についても独立であるとすれば前と同様に

$$\left.\begin{matrix} \overline{p_m q_n} = 0 \quad (p, q = a, b, c, d, \ m \neq n) \\ \overline{p_n q_n} = 0 \quad (p, q = a, b, c, d, \ p \neq q) \end{matrix}\right\} \tag{24}$$

したがって

$$\bar{x} = \bar{y} = 0 \qquad (25.1)$$

$$\overline{xy} = \frac{(\delta_1^2 - \delta_2^2)}{3N}\left[\sum_{n=1}^{N-1} \sin\frac{n}{2}w\cos\frac{n}{2}w\left(\sin\frac{N-n}{2}w/\sin\frac{w}{2}\right)^2 - \sum_{n=1}^{N}\sin X_n w\cdot\cos X_n w\right]$$

$$\begin{pmatrix}\overline{x^2}\\ \overline{y^2}\end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{3N}\left[\begin{pmatrix}\delta_1^2\\ \delta_2^2\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{4\sin^2\frac{w}{2}}\left(\frac{1}{2}(N-1)+(N-1)\sin^2\frac{Nw}{2}\right.\right.\right. \\ \qquad \left.\left. -\frac{1}{2}\frac{\sin(N-1)w}{\sin w}\right)+\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}\frac{\sin Nw}{\sin w}\right\} \\ \qquad +\begin{pmatrix}\delta_2^2\\ \delta_1^2\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{4\sin^2\frac{w}{2}}\left(\frac{1}{2}(N-1)+(N-1)\cos^2\frac{Nw}{2}\right.\right. \\ \qquad \left.\left. +\frac{1}{2}\frac{\sin(N-1)w}{\sin w}-2\cos\frac{Nw}{2}\sin\frac{(N-1)w}{2}/\sin\frac{w}{2}\right.\right. \\ \qquad \left.\left.\left. +\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}\frac{\sin Nw}{\sin w}\right\}\right] \quad (\text{for } w\neq 2k\pi) \\ \frac{1}{3}\delta_1^2\left[\frac{(N-1)(2N-1)}{6}+1\right] \quad (\text{for } w=2k\pi) \end{cases}$$

こゝで $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ とすれば

$$\left.\begin{aligned}&\overline{xy} = 0\\ &\overline{x^2} = \overline{y^2} = \sigma_2^2\end{aligned}\right\} \qquad (25.2)$$

$$\sigma_2^2 = \begin{cases} \dfrac{\delta^2}{3}\left[\dfrac{1}{2\sin^2\frac{w}{2}}\left(\dfrac{N-1}{N} - \dfrac{\cos\frac{Nw}{2}\sin\frac{(N-1)w}{2}}{N\sin\frac{w}{2}}\right)+1\right] & (\text{for } w \neq 2k\pi) \\ \dfrac{\delta^2}{3}\left[\dfrac{(N-1)(2N-1)}{6}+1\right] & (\text{for } w = 2k\pi) \end{cases} \tag{25.2}$$

式(25-2)のσ_2^2と式(20-2)のσ_1^2のちがいは単に$\sigma_0^2/2$と$\delta^2/3$のちがいである。

さて次に式(14)で与えられる電界指向特性$|E_\theta|$の従う分布について考える。

x, yについて

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= \overline{y} = 0 \\ \overline{x^2} &= \overline{y^2} = \sigma^2 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

でNが十分大きければ広義の中央極限定理によってxおよびyは平均値が0，分散がσ^2のガウス分布に従うことがいえる。またさらにxとyとの相関がなければ，すなわち

$$\overline{xy} = 0 \tag{27}$$

なら電界指向特性$|E_\theta|$は

$$p(|E_e|) = \frac{2|E_e|}{\sigma_E^2} \exp\left\{-\frac{E_a^2+|E_e|^2}{\sigma_E^2}\right\} \cdot I_0\left(\frac{2E_a|E_e|}{\sigma_E^2}\right) \qquad (28)$$

$I_0(x)$：第1種0次の変形ベッセル関数

$\sigma_E^2 = 2\sigma^2$

なる変形レーレー分布に従う。[4]

先に述べたようにランダム誤差に適当な仮定を設けることによって式(26), (27)の条件が満され素子アンテナの総数Nが大きければ式(28)は成立する。

この時，$|E_e|$がE_0を越える確率$p(|E_e|>E_0)$は

$$p(|E_e|>E_0) = \int_{E_0}^{\infty} p(|E_e|)\, d|E_e|$$

$$= \int_u^{\infty} v\, e^{-(A^2+v^2)/2} \cdot I_0[Av]\, dv$$

$$= Q(A, u) \qquad (29)$$

$u = \sqrt{2}\, E_0/\sigma_E = E_0/\sigma$

$A = \sqrt{2}\, E_a/\sigma_E = E_a/\sigma$

$Q(A, u)$；Q関数

式(29)を用いて$N=100$の場合について

イ) 第1サイドローブが E_0 を越す確率

ロ) 第1，第2サイドローブのうち少なくとも1つが E_0 を越す確率

ハ) 第1，第2，第3サイドローブのうち少なくとも1つが E_0 を越す確率

を E_0 に対し，σ_0 をパラメータとして求めたものを図3に示す。[5]

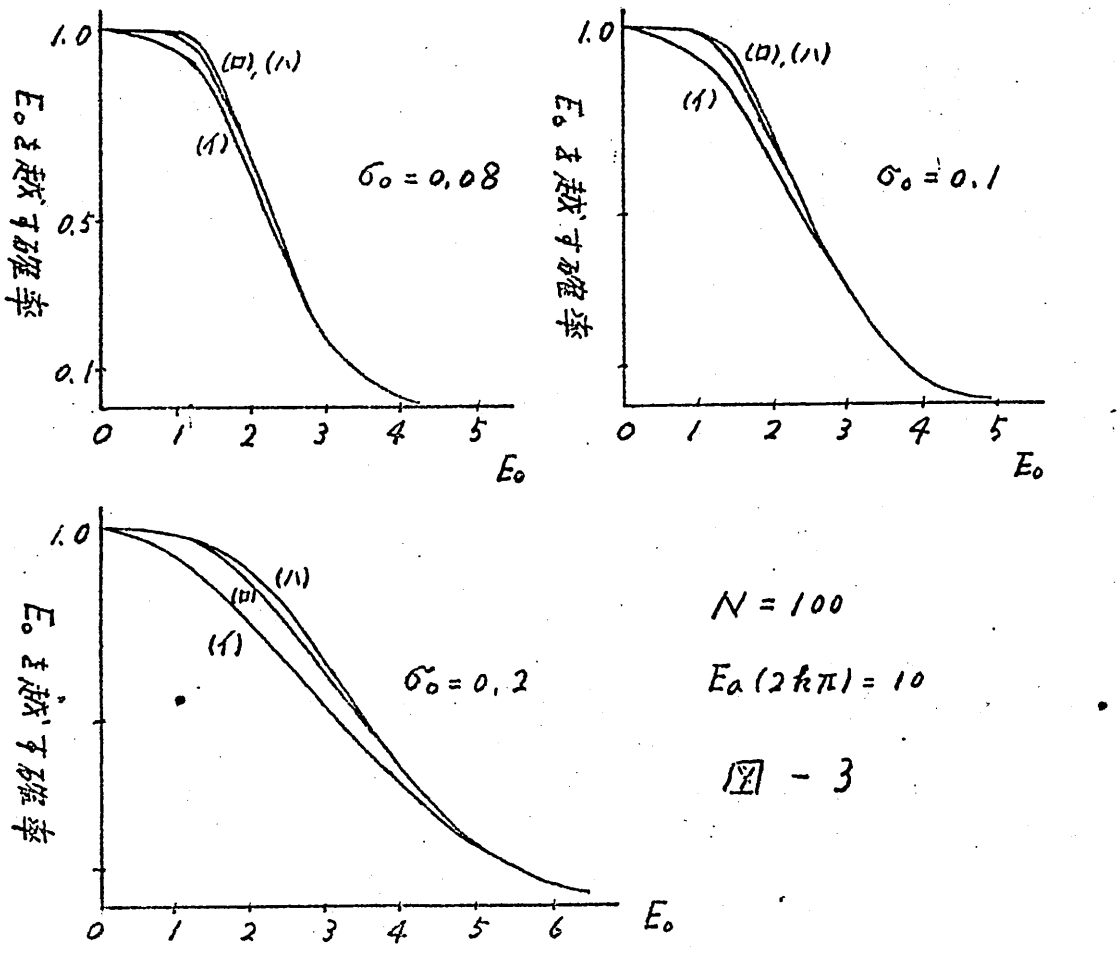


図 - 3

ところで結合器のランダム誤差に対する仮定の第1の場合

$$\left.\begin{matrix} 1+t_n' \\ 1+r_n' \end{matrix}\right\} \to R$$

$$\left.\begin{matrix} \psi_n' \\ \phi_n' \end{matrix}\right\} \to \beta$$

とすれば R と β の結合密度関数は

$$p(R,\beta) = \frac{R}{\pi\sigma_n^2} e^{-(R^2-2R\cos\beta+1)/\sigma_n^2} \qquad (30)$$

$$\sigma_n^2 = \begin{cases} \sigma_{t_n}^2 & : \text{透過係数} \\ \sigma_{r_n}^2 & : \text{結合係数} \end{cases}$$

よって

$$p(R) = \int_0^{2\pi} p(R,\beta)\,d\beta$$

$$= \frac{2R}{\sigma_n^2} e^{-(1+R^2)/\sigma_n^2} \cdot I_0\left(\frac{2R}{\sigma_n^2}\right) \qquad (31)$$

だから R が $1 \pm \Delta$ 外にある確率は

$$p(|R-1|>\Delta) = p(R>1+\Delta) + 1 - p(R>1-\Delta)$$

$$= 1 + Q(A', u_1) - Q(A', u_2) \qquad (32)$$

$$A' = \sqrt{2}/\sigma_n$$

$$u_1 = \sqrt{2}(1+\Delta)/\sigma_n$$

$$u_2 = \sqrt{2}(1-\Delta)/\sigma_n$$

また

$$p(\beta) = \int_0^\infty p(R,\beta)\,dR$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-1/\sigma_n^2}\left[1 + \sqrt{\pi}\,\gamma e^{\gamma^2}\{1 + 2\,Erf\,\gamma\}\right] \qquad (33)$$

$$\gamma = \cos\beta/\sigma_n$$

$$Erf\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2/2}\,dt$$

であるが σ_n が十分小さければ

$$\varphi_n' \simeq t_n \sin\varphi_n = b_n$$

$$\varphi_n' \simeq r_n \sin\phi_n = d_n$$

がいえるから，(1)-(2) 式 (17) によって

$$p(\beta) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma'} e^{-\beta^2/2\sigma'^2} \qquad (34)$$

$$\sigma'^2 = \sigma_n^2/2$$

よって β が $\pm\beta_0$ を越える確率は

$$p(|\beta| > \beta_0) = 1 - \int_{-\beta_0}^{\beta_0} p(\beta)\, d\beta$$

$$\simeq 1 - 2\,Erf(\beta_0/\sigma') \qquad (35)$$

$p(|R-1| > \Delta)$ および $p(|\beta| > \beta_0)$ を $\sigma_{tn}^2 = \sigma_{rn}^2 = \sigma_0^2$ と Δ および β_0 に対して σ_0 をパラメータとしてプロットしたものを図4に示す。

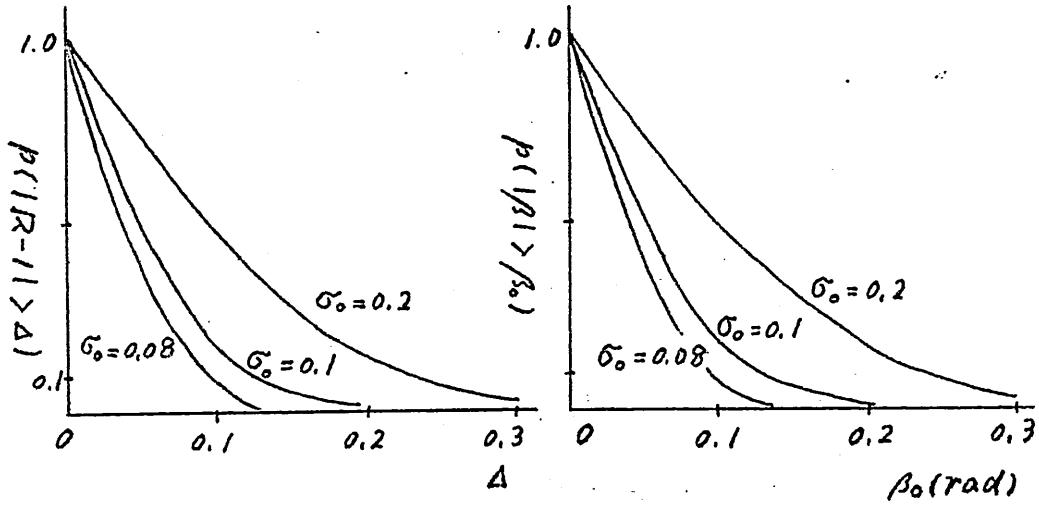


図 - 4

これらによって与えられた σ_0 および $p(|R-1| > \Delta)$, $p(|\beta| > \beta_0)$ から誤差として許容しうる限界 Δ および β_0 が決まる。

5. 主ビーム方向のずれ

次に方向性結合器の透過，結合係数における誤差によって生じるアンテナパターンの主ビーム方向のずれについて考える。

結合器に誤差がある場合のアンテナアレーの電力指向特性 W は

$$W = (E_a + x)^2 + y^2 \tag{15}$$

いま

$$E_a^2|_{w=w_0} \gg \overline{x^2}|_{w=w_0} = \overline{y^2}|_{w=w_0} = \sigma^2 \quad (w_0 = 2k\pi)$$

すなわち

$$N \gg \hat{\sigma}^2 \left[\frac{(N-1)(2N-1)}{6} + 1\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} \sigma_0^2/2 & : \text{第1の場合} \\ \delta^2/3 & : \text{第2の場合} \end{cases} \tag{36}$$

こゝで N が大きいと1

$$\hat{\sigma}^2 \ll 3/N \tag{37}$$

とする。この条件の下では

$$W \simeq E_a^2 + 2E_a \cdot \chi \tag{38}$$

とすることができる。

したがって結合器に誤差がある場合の主ビーム方向は

$$\frac{\partial W}{\partial w} \simeq \frac{\partial E_a^2}{\partial w} + 2\frac{\partial}{\partial w}(E_a \cdot \chi) = 0 \tag{39}$$

を満すwで与えられる。

式(37)の条件の下で式(39)の $\partial E_a^2/\partial w$ を $w = w_0$ ($= 2k\pi$, 結合器に誤差のないときの主ビーム方向) のまわりにテーラー展開して

$$\frac{\partial E_a^2}{\partial w} = \frac{\partial E_a^2}{\partial w}\Big|_{w=w_0} + \Delta w \frac{\partial^2 E_a^2}{\partial w^2}\Big|_{w=w_0} + \cdots\cdots$$

$$\Delta w = w - w_0$$

こゝで第3項以上を無視する。(第1項は実は0)

結局, w_0 付近の主ビーム方向のずれ Δw は近似的に

$$\Delta w = \frac{-2\left[\frac{\partial}{\partial w}(E_a \cdot \chi)\right]_{w=w_0}}{\left[\frac{\partial^2 E_a^2}{\partial w^2}\right]_{w=w_0}} \tag{40}$$

で与えられる。

ところで式(11)を用いて

$$\left[\frac{\partial}{\partial w}(E_a \cdot x)\right]_{w=w_0} = \left[E_a \cdot \frac{\partial x}{\partial w}\right]_{w=w_0}$$

$$= -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n(N-n)}{2} t_n \sin\varphi_n$$

$$+\sum_{n=1}^{N} X_n r_n \sin\phi_n$$

一方，

$$\left[\frac{\partial^2 E_a^2}{\partial w^2}\right]_{w=w_0} = 2\left[E_a \cdot \frac{\partial^2 E_a}{\partial w^2}\right]_{w=w_0}$$

$$= -\frac{1}{6} N(N^2-1) \simeq -\frac{N^3}{6}$$

結局

$$\Delta w = \frac{12}{N^3}\left\{\sum_{n=1}^{N} X_n r_n \sin\phi_n - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n(N-n)}{2} t_n \sin\varphi_n\right\} \quad (41)$$

となる。明らかに

$$\overline{\Delta w} = 0 \quad (42)$$

次に $(\Delta w)_{rms} = \sqrt{\overline{(\Delta w)^2}}$ を求める。

式(41)の { } について

$$\overline{\{\quad\}^2} = \hat{\sigma}^2\left[\sum_{n=1}^{N} X_n^2 + \sum_{n=1}^{N-1}\left\{\frac{n(N-n)}{2}\right\}^2\right]$$

ここで

$$\sum_{n=1}^{N} X_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{N-2n+1}{2} \right)^2 = \frac{(N^2-1)N}{12} \simeq \frac{N^3}{12}$$

また

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N-1} n^2 (N-n)^2 = \frac{N(N^4-1)}{120} \simeq \frac{N^5}{120}$$

よって

$$\overline{(\Delta w)^2} = \frac{144}{N^6} \overline{\{\quad\}^2}$$

$$= \frac{6}{5} \frac{\hat{\sigma}^2}{N}$$

よって

$$(\Delta w)_{rms} = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} = 1.094 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

したがって

$$\frac{(\Delta\theta)_{rms}}{(\Delta\theta)_{null\,tp}} = \frac{(\Delta w)_{rms}}{(\Delta w)_{null\,tp}}$$

$$= \frac{1.094\,\hat{\sigma}/\sqrt{N}}{4\pi/N}$$

$$= 0.087 \sqrt{N}\,\hat{\sigma} \qquad (43)$$

アレーに対する直列給電方式では、先の結合器のもつ誤差が後の素子アンテナからの輻射に影響を与えることから $(\Delta\theta)_{rms}/(\Delta\theta)_{null\,p}$ が $\sqrt{N}$ に比例していることがうなづける。

6. 結　言

以上で直列給電された1次元アンテナアレーにおいて給電線と素子アンテナとの結合器に使用する方向性結合器の透過係数と結合係数のランダム誤差に適当な仮定を設けて，アンテナ放射特性，とくに主ビーム，サイドローブに与える影響について述べてきた。

以上の議論は結合器の誤差いいかえればその工作精度がアンテナ動作にどのようなきき方をするか，またどの程度きくかというアンテナの性能評価の基準の1つを求めている点に意味があると考えられる

ところで結合器のランダム誤差に設けた仮定に対

いてまだ問題が残されている。

終りに有益な御助言をいただいた本学助手，西村貞彦氏，その他研究室の諸氏に感謝する。

文　献

(1) L.A.Rondinelli,"Effects of random errors on the performance of antenna arrays of many elements," IRE National Convention Rec., pt.1, pp 174-189 ; 1959.

(2) M.J.Kiss,"Effects of random errors on the performance of a linear Butler arrays," IRE Trans. on AP, Vol. AP.10, No.6, pp 708-714 : Nov. 1962.

(3) 牧本，山県，"直列給電形アンテナアレーにおける方向性結合器の誤差の影響，" 電気通信学会 40年度全国大会

(4) 例えば 宮脇一男，"雑音解析"，p. 69，朝倉書店

(5) J. I. Marcum，"Table of Q Functions，"
The RAND Corp., Santa Monica, Calif.,
Rept. No. RM 339, ASTIA Doc. No. AD-116551
Jan. 1, 1950.

付　録

(付-1)

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n-1} t_m \cos(\varphi_m - X_n w)$$

で $\sum_n \sum_m$ の部分は

$$t_1 \cos(\varphi_1 - X_2 w) + t_1 \cos(\varphi_1 - X_3 w) + \cdots\cdots + t_1 \cos(\varphi_1 - X_N w)$$
$$+ t_2 \cos(\varphi_2 - X_3 w) + \cdots\cdots + t_2 \cos(\varphi_2 - X_N w)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ t_{N-1} \cos(\varphi_{N-1} - X_N w)$$

上の第 n 横列目の総和 Π_n は

$$\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \cdots\cdots + \cos(x+(n-1)y)$$

$$= \cos\left\{ x + \frac{(n-1)y}{2} \right\} \sin\frac{ny}{2} \Big/ \sin\frac{y}{2}$$

なる公式で

$$x \to \varphi_n - X_{n+1} w$$

$$y \to w$$

$$n \to N - n$$

とすれば

$$\Pi_n = t_n \cos\left(\varphi_n + \frac{n}{2} w\right) \sin\frac{(N-n)w}{2} \Big/ \sin\frac{w}{2}$$

よって

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N-1} \Pi_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N-1} t_n \cos\left(\varphi_n + \frac{n}{2} w\right) \sin\frac{(N-n)w}{2} \Big/ \sin\frac{w}{2}$$

Y_1 も同様にして求まる。

(付-2)

$\sqrt{\overline{t_n^2}}$, $\sqrt{\overline{r_n^2}}$ が十分小さければ式(3)において例えば

$$|S_n/T_n|^2 = 1 + 2t_n \cos\varphi_n + t_n^2 \simeq 1 + 2t_n \cos\varphi_n$$

よって

$$|S_n/T_n| \simeq 1 + t_n \cos\varphi_n$$

一方

$$|S_n/T_n| = 1 + t'_n$$

したがって

$$t'_n \simeq t_n \cos\varphi_n = a_n$$

同様にして

$$r'_n \simeq r_n \cos\varphi_n = c_n$$

次に図2を参照して

$$\tan\varphi'_n = \frac{t_n \sin\varphi_n}{1 + t_n \cos\varphi_n} \simeq t_n \sin\varphi_n$$

一方

$$\tan\varphi'_n \simeq \varphi'_n$$

よって

$$\varphi'_n \simeq t_n \sin\varphi_n = b_n$$

同様にして

$$\phi'_n \simeq r_n \sin\phi_n = d_n$$

輻射科学研究会資料

Fabry Perot共振器の励振理論-I

池上淳一
小倉久直
吉田靖夫
巌本巌

（京都大学工学部）

1966.5

Fabry Perot共振器の励振理論-I

目　次

第1章　序　論 …… 3
§1　従来の理論の概観と考察 …… 3
§2　励振理論 …… 5

第2章　励振理論 …… 9
§1　基礎方程式 …… 9
§2　行列要素の計算 …… 17
§2·1　行列要素 …… 17
§2·2　Fresnel 積分－I …… 19
§2·3　Fresnel 積分－II …… 21
§2·4　Fresnel 積分で表わした行列要素 …… 23

第3章　共振器の励振（強制振動） …… 26
§1　序　論 …… 26
§2　基礎方程式の近似解法 …… 27
§3　励振電力 …… 29
§4　鏡面中心の一様な電流分布による励振 …… 30
§5　級数の収束に関する注意 …… 33

第4章　自由減衰振動モード …… 37
§1　自由減衰振動モード …… 37
§2　無励振方程式の近似解法 …… 38
§3　回折損失、共振周波数 …… 41
§4　場の分布 …… 46
§5　空胴理論の結果の批判 …… 47

第５章　自由減衰振動モードII（鏡面変形）……53
§１　鏡面変形……53
§２　基礎方程式……54
§３　表面積分……60
§４　特性行列式と特性根……63
§５　回析損失……68

附録１　Bessel 函数および変形 Bessel 函数の漸近形……77
附録２……78
附録３　根の近似解……80
附録４　$\theta_{ll'}(\varphi)$ の値……81
附録５　積分公式……82
附録６　(5.53) の特性根の計算……83
附録７　J_{lk} の積分値……85

参考文献……86

第1章 序 論

§1 従来の理論の概観と考察

Fabry Perot 共振器の解析は実用のレーザー共振器に関する知識を提供するという意味で重要であり、よくしられているような数多の研究がなされている。この研究の多様性は実用面の多様性によるだけではなく、この共振器の問題のアプローチが困難であることと、問題自身が興味ある内容を蔵していることにもよると思われる。波動現象の問題として、自由空間におけるいわゆる伝播問題、回折問題、立体回路における導波管、共振器の問題はほぼ解決され標準的な理論がテキストにも見出されるようになった。その後の研究者の対象は自由空間と立体回路との中間に位置するものあるいは組合わされた問題である。導波管と自由空間の回折問題との組合わせは、Wiener Hopf 法が成功して以来[1] 数多の研究が蓄積されてきたが、Fabry Perot 共振器はもう一つの問題即ち、自由空間の伝播回折の問題と共振器との組合せに属するという意味でも興味ある対象である。このような問題はレーザー共振器以外に既に音響[2] アンテナ[3] 等の問題でも扱われているが、研究が盛んになったのはレーザー共振器の解析の要請によってである。この問題では、開口共振器の不安定な共振をどのように取扱うかということが解析の主題であるが、Wiener Hopf 法のような厳密法が偶々成立しないかぎりは常に近似法によらねばならない点が困難なのである。近似法とは、物理的には描像に関連する。描像とは正確な像のことではなく問題の0次近似、つまり近似の出発点に採びうる物理像を意味する。これに反して Wiener Hopf 法のように厳密法が許される場合には問題は数学であって描像ではない。レーザー共振器の研究の定式化に多様性

があるのは、共振器の形状による variety を別にすれば、この共振像の捕え方の種類に対応する。レーザー共振器の理論の簡単な review は筆者らが以前に行なったが[4]、ここでは描像の問題に関連して概観し、特長欠点を考察して後章の動振問題を取扱う準備としよう。

Fabry Perot 共振器の今までの解析はすべて不安定な共振モード、つまり自由振動のみを対象にしているが、その理論は、干渉計像、導波管像、空胴像の3種に分類できるであろう。干渉計像はいうまでもなく、Fox, Li[5] によって最初に定式化された最もよく知られた理論であって、この種の研究の端緒を切り開いたものとして重要な位置を占める。これは Kirchhoff 近似を用いて種々の形状の Fabry Perot 共振器の問題を容易に定式化出来る利点をもつが、解析的に取扱える対象はかなり限られている。又定式化がかなり固定したものであるため、種々の変形した問題への適用は困難である。導波管像は Vainshtein[6] によるものであって、Fabry Perot 共振を、2枚の鏡面間の cut off 状態に近い導波管波が開口面で反射されて生ずる導波管共振とみなすものである。Vainshtein は Wiener Hopf 法で求められた開口面による導波管波の反射係数を利用して共振モードと回折損失を求め Fox, Li の数値計算とよく一致する式を得た。この取扱いも自由振動以外の問題には適さないが、Fox, Li の結果とよく一致することは、描像の正しさを物語っている。空胴共振像は我々が以前に報告したものであるが[7]、0次近似に閉空胴共振像を採り、開口よりの輻射を摂動によって取扱うものである。これは描像が簡単であって鏡面変形などを容易に扱いうる利点をもつが[8]、一方自由振動モードを仮定して損失を求めることは出来るが、自由振動そのものを定義することが出来ない欠点をもつ。導波管像と空胴像との中間とみられるものに Risken による開口面での連続条件を解く方法がある。[9] これは外部を輻射場（正確にはそうではないが）とみなし、内外部を開口面で区別した描像を出発点にしたという意味で空胴的であり、又内部の場を2

うの量子数で指定される波動函数で展開したという意味で導波管的である。つまり2つの量子数で指定される波動は本質的には導波管定在波であるからである。これに反して空胴像では内部の場は3つの量子数で指定される波動函数つまり完全な空胴の固有函数で展開されている。Vainshteinの取扱いにもみられるようにcut offに近いところで反射係数が非常に大きくなるということは、内外部の区別を暗示する。

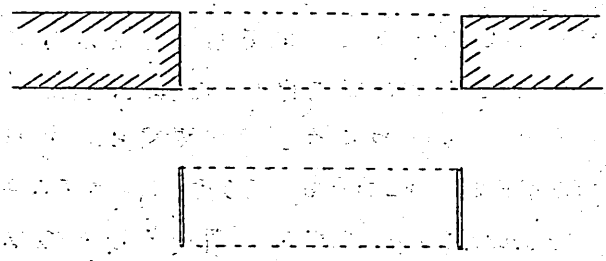
以上はすべてFabry Perot共振器の不安定な自由振場モードの取扱いに関するものである。我々は次にこの研究の主題であるより一般的な励振問題を平行平面共振器について取扱う理論を考察する。

§2 励振理論

励振の理論は実際上の問題即ち自励発振器として、あるいは増巾器 検出器としての共振器の線路との結合の問題として重要である。閉じた空胴と線路との結合理論はよく知られているが、元来自由振動モードの研究はより一般的な励振問題の取扱いの前段階として必要なのであった。しかしFabry Perot共振器のような開口共振器の結合または励振の取扱いでは閉じた空胴における取扱いの拡張として不安定自由振動モードを先に求めてそれはより展開するような定式化がどのように可能であるかを示すことは難かしい問題である。そのような一つの定式化はVainshteinによって示された。[10] それは散乱問題のいわゆるS行列理論といわれるものの一つの型であってこれは不安定共振というものをS行列によって数学的にとらえようとするものである。Vainshteinの論文は開口共振器の励振を問題にした唯一つのものであるがこれは応用数学としては興味はあるが、境界条件の単純でないFabry perot共振器に具体的に適用することは事実上実行不可能である。したがって我々は実際のFabry perot共振器に関して具体的な知識を提供しうるような現実的な理論を作る必要がある。ここでは一般の共振器ではなく、平行平面鏡共振器を考える。

そうして励振問題というより一般的な見地から今までの自由振動の理論を考察、批判しつつ正しい取扱いをさがすことにする。又、そのようにすれば、不完全なものの特長と欠点はより明瞭に識別出来る。

干渉計像は定式化が固定されているため、一般の指像：特に内部の場についての指像が欠けているため、励振に対する形式化が困難である。空胴像は、共振周波数近傍では良い指像を与えるが、励振問題では周波数を任意に変化させるから、一般に開口面上の境界条件は大きく変化し、その度毎に異なった境界条件の下における固有函数で展開しなければならない。それに反し導波管像では2つの量子数をもつ導波管定在波で展開するから周波数変化による開口上の境界条件の変化は問題にならない。したがって、導波管像は広い周波数にわたり適用性をもつ。導波管系では、Vainsteinのように導波管モードの開口反射係数によって励振問題を取扱いうる可能性がある。しかし、すべてのモードおよび周波数における各モードの反射係数を求めるということは難かしい仕事であり；又円筒波の反射係数は、平面波のそれを用いるという仮定も入っている。Riskenの方法では、開口面の境界値は一種類しか問題にしないように理論が作られている。そのために開口面上で法線微分が0になるGreen函数を用いて外部の場を限定した。したがって、概念的には鏡面間の共振というよりは、半円柱間の共振というべきものである。(オ1図上図参照)



オ1図

したがって、開口よりの輻射は、後方導体のない時に比べ、image sourceよりの輻射が付加わって我々のもとめた空胴理論[7]による結果の丁度2倍になる。しかしこの理論では開口におけ

るモード変換を考慮して内部の場を求め、Fox, Li のもとめた場の分布における ripple に対応するものがえられることを示した点重要である。空胴理論では損失を求めることは出来ても内部の場の分布は与えなかった。それは空胴内の場は3つの量子数で指定された函数の展開であって、完全系ではあるけれども場そのものを求めるには収束が悪いが導波管定在波は2つの量子数に関する和であって場の値に対しては収束が速いことによっている。以上の考察からすべての周波数領域を扱うには導波管像を基準にしなければならない。しかも、Vainshtein, Risken の理論における欠点を含まぬように励振問題を定式化しなければならない。

オ1に、外部は空胴理論の時に扱ったように自由空間の輻射場であって、Risken の理論のような外部導体のないものを取扱わねばならない。したがって開口面では、同時に2種類の境界値、場の値と、場の法線微分とを問題にしなければならない。

オ2に内部の場は2つの量子数で指定された導波管波であらわさねばならない。したがって、内部の励振の場は導波管波による Green 函数、つまり2つの量子数により展開された Green 函数を用いなければならない。

オ3に開口面において、2種類の境界値を等しいとおいて内外部を接続することが必要である。したがって連続条件として2種類の境界値函数を未知函数とする連立微分方程式を解かねばならない。

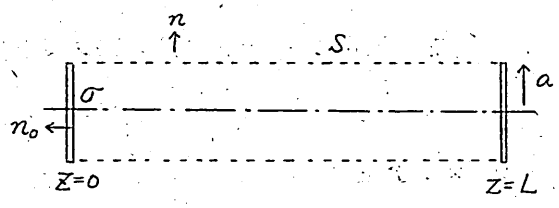
以上によって平行平面 Fabry Perot 共振器の完全な理論を定式化することが出来る。又必要とあれば鏡の裏面をも考慮した定式化も可能である。励振の方式としては種々のものが考えられよう。たとえば実際的なものは　鏡面の中央部の小孔を通して外部より励振するもの、アンテナによるもの、あるいは半透反射鏡を通して鏡面全体を外部から励振する場合あるいは又、内部に空間的に分布した荷電又は電流分布による励振等々が考えられよう。これらの重要なものについては引続いて解析を行なう予定である。ここでは最も簡単な場合としてまず鏡面上に電流分布を与えた場合の励振問題を定

式化する。その他の variation はこの理論を変形して議論することができる。まず第2章において一般的に定式化を行ない第3章で励振の問題を取扱う，この理論の特徴は、通常の共振器の励振の問題とは異なって、先に無励振の場合つまり自由振動の解を知る必要のないことである。第4章では、従来の理論で求められていた不安定共振モードを励振理論の特別な場合として求める。回折損失に関しては Vainshtein の結果と非常によく一致する式が与えられ、又場の分布，即ち振巾および位相の分布は共に Fox. Li の数値計算を完全に再現することがみられる。第5章では励振理論の一つの興味ある応用例として傾斜変形のある場合の自由振動モードの回折損失を求める。これにより前に空胴理論によって求めた式[8]を再確認することができる。

第2章　励振理論

§1　基礎方程式

第1章で述べたような、物理像に基づいて、平行円板型 Fabry-perot 共振器の励振の問題をスカラー波に対し、境界値問題として取扱う[12]。



第2図

共振器の構造は図のような平行円板型とし側面 S は向いており、σ は鏡面である。今考える励振問題としては、鏡は完全反射面とし、鏡面上に与えられた電流分布（即ち境界値）により励振するものと考える。その他の励振法はここに述べる方法を多少 modify すれば解析することが出来る。簡単のために S と σ とで囲まれる領域を共振器の内部、外側を外部と呼ぶことにする。内・外部は自由空間として取扱うが、内部が媒質で満たされている場合にも理論は適用できる。

Fabry Perot 共振器の励振問題の一つの型を境界値問題として次の形に設定しよう。種々考えられる励振問題の Variation はこれを基にして定式化することが出来る。

境界値問題：スカラー波 $\varphi(x)$ に対する Helmholtz 波動方程式（$c=1$ の単位系）

$$\nabla^2\varphi(x) + \omega^2\varphi(x) = 0 \qquad (2\cdot1)$$

において、完全反射面の境界条件は内外部共に

$$\varphi(x) = 0, \qquad x：鏡面上 \qquad (2\cdot2)$$

とする。その時内部側鏡面上の電流分布（source）による励振は鏡面の上の一部分において、(2·2)の代りに

$$\varphi(x)=\varphi_0(x) \quad , \quad x: \text{鏡面の一部} \qquad (2\cdot3)$$

なる境界値をとり、かつ外部無限遠方において輻射条件を満足する(2·1)の解を求めることである。

さて、S及びσ上の法線方向を図の様にとることにする。又S上の場の値 φ および $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ が知られているものとする。外部および内部に Green 函数の方法を適用しよう。

内部の場：内部においては、鏡面内側 $z=0$, $z=L$ で(2·2)と同じ境界条件

$$G(x|x')=0 \quad , \quad x, x': \sigma\text{上}$$

で満たす Green 函数 $G(x|x')$ を用いるならば、内部の場 $\varphi_i(x)$ は Green の定理によって

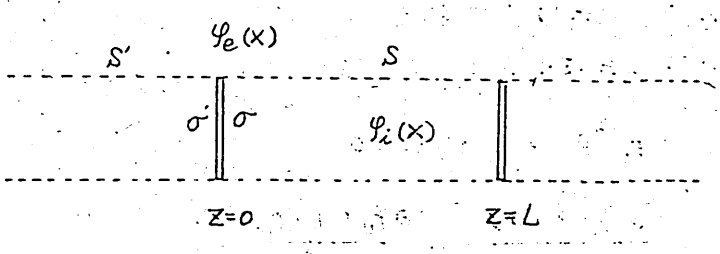
$$\varphi_i(x)=-\int_\sigma \frac{\partial G(x|x')}{\partial n'}\varphi_0(x')\,d\sigma + \int_S\left[G(x|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial n'}-\frac{\partial G(x|x')}{\partial n'}\varphi(x')\right]dS \qquad (2\cdot5)$$

と書かれる。

外部の場：上と同様に外部の場 $\varphi_e(x)$ も書くことが出来るが、励振は鏡面の内部側から行なっており、しかも実際適用する場合、波長入はLに比し十分短かく、内部の場も主としてz方向の定在波であるから、鏡面の外側つまり裏面には殆んど場はまわりこまないと考えられるから

$$\frac{\partial\varphi_e(x)}{\partial n}\sim 0 \qquad x: \text{鏡面の裏面} \qquad (2\cdot6)$$

と仮定できる。したがって、$\varphi_e(x)$ には鏡の裏面の効果はないので



オ 3 図

外場は S よりの輻射波のみをあらわしていると考えてよく、したがって、自由空間に対する Green 函数 $H(x|x')$ を用いるならば、図の S. S' の形成する円筒外部では S' よりの寄与は無視してよく、

$$\varphi_e(x) = -\int_S \left[H(x|x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'} - \frac{\partial H(x|x')}{\partial n'} \varphi(x') \right] dS \qquad (2\cdot7)$$

で与えられる。

勿論、裏面を考慮する定式化も可能である。それは $\lambda \geq L$ の場合には必要であって、領域を三つにわけ、S' とのとの作る半円筒内における外場も考察すればよい。又厳密なことをいえば、上に設定した境界値問題には縁端条件（edge condition）も必要であろうが、我々の場合、鏡の裏面は無視して（2·7）を採用したから、そのような条件なしに話が済むことになる。

（2·5）（2·7）の物理的意味をのべよう。（2·4）は、内部の場を平行平面導波管内の波として考えることを意味するので、内部の観察者にとっては、場は、電流源から発生した伝播波と、それによって両口面に発生した等価的な電荷電流分布による波であり、一方外部の観察者にとっては、S 上に分布した等価的な電荷電流分布による輻射波のみからなっているように見えることをあらわしている。

連続条件：　内、外部の場は S 上でなめらかにつながっていなけ

れはならない。即ち場の振巾とS面における法線微係数とはS上で連続であることが要求される。

$r=a$ におけるS上において

$$\varphi_i(a-0)=\varphi_e(a+0)$$

$$\frac{\partial\varphi_i(a-0)}{\partial r}=\frac{\partial\varphi_e(a+0)}{\partial r} \qquad (2\cdot8)$$

具体的に書けば (2·5)(2·7) により.

$$-\int_\sigma \frac{\partial G(a|x')}{\partial n'}\varphi_0(x')\,d\sigma+\int_S\left[G(a|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial G(a-0|x')}{\partial r'}\varphi(x')\right]dS$$
$$=-\int_S\left[H(a|x')\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial H(a+0|x')}{\partial r'}\varphi(x')\right]dS \qquad (2\cdot9)$$

$$-\int\frac{\partial^2 G(a-0|x')}{\partial r\partial n'}\varphi_0(x')\,d\sigma+\int_S\left[\frac{\partial G(a-0|x')}{\partial r}\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial^2 G(a-0|x')}{\partial r\partial r'}\varphi(x')\right]dS$$
$$=-\int_S\left[\frac{\partial H(a-0|x')}{\partial r}\frac{\partial\varphi(x')}{\partial r'}-\frac{\partial^2 H(a-0|x')}{\partial r\partial r'}\varphi(x')\right]dS \qquad (2\cdot10)$$

となる。ここでS面上の積分は x' について $r'=a$ とおいてとられる。$a\pm0$ は、Green 函数の $x=x'$ における特異性を考慮して $r\to a$ の極限のとり方を意味したものである。

(2·5)(2·7) では、S上の φ および $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ の値が知られているものとしたが、上の2つの連続条件 (2·9)(2·10) はS上の未知函数 φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ を決定するための連立積分方程式であると考えられる。即ち開口面上における2種の境界値 φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, あるいは等価的な電荷・電流分布に対する方程式である。この2種の境界値函数が知られれば (2·5)(2·7) によって任意の場所における内外部の場を求めることが出来る。

Green函数 : 境界条件 (2·4) を満足する内部の Green 函数は、円筒表示においては

$$G(x|x') = \frac{i}{2L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\varepsilon_\ell J_\ell(\Lambda_n r)H_\ell^{(1)}(\Lambda_n r')\cos\ell(\theta-\theta') \qquad (2\cdot11)^*$$

$$(r'>r,\quad 0\leqq z, z'\leqq L)$$

で与えられる。ここに

$$\Lambda_n^2 \equiv (\omega a)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \qquad (2\cdot12)$$

$$\varepsilon_\ell \equiv \begin{cases} 1, & \ell=0 \\ 2, & \ell\geqq 1 \end{cases} \qquad (2\cdot13)$$

とおいている。$r'<r$ の場合は (2·11) で、r と r' とを交換したものである。

このGreen函数は、無限平行平面導波管の円筒波伝播を記述するものである。

外部における自由空間におけるGreen函数の円筒表示は文献7) §4. B) に与えられている形を用いる。

$$H(x|x') = \frac{i}{4\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\varepsilon_\ell\cos\ell(\theta-\theta')\int_0^{\infty}dk\,J_\ell(\sqrt{\omega^2-k^2}\,r)H_\ell^{(1)}(\sqrt{\omega^2-k^2}\,r')\cos k(z-z') \qquad (2\cdot14)$$

$$(r'>r)$$

を用いる。$r'<r$ の場合は (2·14) で r と r' とを交換する。以下においては、第1種Hankel函数の記号 $H_\ell^{(1)}$ は H_ℓ と略記する。

基礎方程式：連立積分方程式 (2·9)(2·10) を次のように無限次元の連立ベクトル方程式に書き換えそれを基礎方程式と呼ぼう。

---

* これは文献7) §4. B) に与えられたと同様の方法で導かれる。

但し、$\delta(z-z')$ として

$$\delta(z-z') = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{L}\sin\frac{n\pi z'}{L}$$

を用いる。

S上における2つの未知境界値函数 φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ をS上におけるよくしられた完全直交系によって次のように展開する。

$$\left[\varphi(x)\right]_{r=a}=\sum_{n\ell\pm} b_{n\ell}^{\pm}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix} \qquad (2\cdot15)$$

$$\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\right]_{r=a}=\frac{1}{a}\sum_{n\ell\pm} a_{n\ell}^{\pm}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix} \qquad (2\cdot16)$$

ここで $a_{n\ell}^{\pm}$, $b_{n\ell}^{\pm}$ ($n=1.2,\cdots$, $m=0.1.2,\cdots$)はFourier係数であり、+, −, は { } の中の $\cos\ell\theta$, $\sin\ell\theta$, の項にそれぞれ対応する。

(2·15)(2·16)を(2·11)(2·14)と共に(2·9)(2·10)に代入して

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\ell'\theta\\ \sin\ell'\theta\end{Bmatrix}a\,d\theta\,dz=\delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\frac{\pi aL}{\varepsilon_\ell} \qquad (2\cdot17)$$

$$\int_0^{L}dz\int_0^{L}dz'\cos k(z-z')\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi z'}{L}\right)$$
$$=\left(\frac{n\pi}{L}\right)\left(\frac{n'\pi}{L}\right)\frac{\left[1+(-1)^{n-n'}\right]\left[1-(-1)^{n}\cos kL\right]}{\left[k^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]\left[k^2-\left(\frac{n'\pi}{L}\right)^2\right]} \qquad (2\cdot18)$$

等の関係を用いて整理すれば、(2·9)(2·10)の連立積分方程式は $\{a_{n\ell}^{\pm}\}$ $\{b_{n\ell}^{\pm}\}$ に対する次の無限次元の連立ベクトル方程式に帰着する。これを我々の動振問題の基礎方程式と呼ぶことにする。

$$\left.\begin{aligned}
&J_\ell(\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)a_{n\ell}^{\pm}-\Lambda_n J_\ell(\Lambda_n)H_\ell'(\Lambda_n)b_{n\ell}^{\pm}\\
&\quad+8N\left\{\sum_{n'\ell}K_{nn'}^{\ell}a_{n'\ell}^{\pm}-\sum_{n'}L_{nn'}^{\ell}b_{n'\ell}^{\pm}\right\}=-2\varepsilon_\ell N H_\ell(\Lambda_n)\varphi_{n\ell}^{\pm}\\
&\Lambda_n J_\ell'(\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)a_{n\ell}^{\pm}-\Lambda_n^2 J_\ell'(\Lambda_n)H_\ell'(\Lambda_n)b_{n\ell}^{\pm}\\
&\quad+8N\left\{\sum_{n'}M_{nn'}^{e}a_{n'\ell}^{\pm}-\sum_{n'}N_{nn'}^{e}b_{n'\ell}^{\pm}\right\}=-2\varepsilon_\ell N\Lambda_n H_\ell'(\Lambda_n)\varphi_{n\ell}^{\pm}\\
&\qquad(n=1.2.\cdots,\ \ell=0.1.2.\cdots)
\end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot19)$$

但し

$$N \equiv \frac{a^2 n}{2L^2} = \frac{a^2}{L\lambda} \qquad (2\cdot20)$$

は Fresnel 数であり；右辺の

$$\psi_{ne}^{\pm} \equiv \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_\ell(\Lambda_n \frac{r}{a})\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta \\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix}\varphi_0(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta \qquad (2\cdot21)$$

は 励振の強度をあらわす項である。左辺の行列要素 $K_{nn'}^{\ell}$ 等は，(2·18)を用いて，

$$\left.\begin{aligned} K_{nn'}^{\ell} &\equiv \int_0^{\infty} H_\ell(\Lambda) J_\ell(\Lambda)\, I_{nn'}(\kappa)\, d\kappa \\ L_{nn'}^{\ell} &\equiv \int_0^{\infty} \Lambda H_\ell(\Lambda) J_\ell'(\Lambda)\, I_{nn'}(\kappa)\, d\kappa \\ M_{nn'}^{\ell} &\equiv \int_0^{\infty} \Lambda H_\ell'(\Lambda) J_\ell(\Lambda)\, I_{nn'}(\kappa)\, d\kappa \\ N_{nn'}^{\ell} &\equiv \int_0^{\infty} \Lambda^2 H_\ell'(\Lambda) J_\ell'(\Lambda)\, I_{nn'}(\kappa)\, d\kappa \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot22)$$

但し

$$\Lambda^2(\kappa) \equiv (wa)^2 - \kappa^2 \qquad (2\cdot23)$$

$$I_{nn'}(\kappa) \equiv wa \cdot \frac{n'}{n} \frac{1-(-1)^{n}\cos(\kappa\frac{L}{a})}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 - \kappa^2\right]\left[\left(\frac{n'\pi a}{L}\right)^2 - \kappa^2\right]} \qquad (2\cdot24)$$

$(n-n' = \text{偶数})$

とあらわされる。我々の場合 $\lambda \ll L$ と考えており，nn' として非常に大きい数を考えるので $\frac{n-n'}{n} \ll 1$ であり，したがって(2·24)では $\frac{n'}{n}$ は 1 とおいて十分正確である。又 $n-n'$ が奇数の時は，(2·18)によって，(2·24)は 0 になる。

内部の場：以上によって、励振の問題は、電流分布 $\varphi_0(r,\theta)$ により（2·21）を計算すれば基礎方程式（2·19）の右辺の励振項が与えられることになるから、（2·19）を解くことに帰着する。
これを解いて $\{a_{n\ell}^{\pm}\}$, $\{b_{n\ell}\}$ が得られたならば、（2·15）,（2·16）によって、φ 及び $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ のS上の境界値が知られたことになる。これが知れたならば（2·5）（2·7）から内、外部の場が計算される。我々は特に内部の場 $\varphi_i(X)$ に興味があるから（2·5）を（2·15）（2·16）を用いて $\{a_{n\ell}^{+}\}\{b_{n\ell}^{\pm}\}$ であらわしておこう。

$$\varphi_i(r,\theta)=i\pi N\sum_{n\ell,\pm}\varepsilon_\ell \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix}\times$$

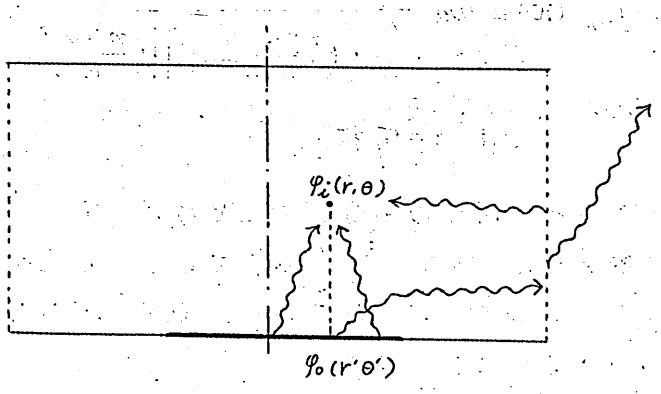
$$\times\left\{H_\ell(\Lambda_n\frac{r}{a})\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}d\theta'\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta'\\ \sin\ell\theta'\end{Bmatrix}\int_0^{r}J_\ell(\Lambda_n\frac{r'}{a})\varphi_0(r'\theta')r'dr'd\theta'\right.$$

$$\left.+J_\ell(\Lambda_n\frac{r}{a})\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}d\theta'\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta'\\ \sin\ell\theta'\end{Bmatrix}\int_r^{a}H_\ell(\Lambda_n\frac{r'}{a})\varphi_0(r\theta')r'dr'd\theta'\right\}$$

$$+\frac{i}{2}\pi\sum_{n\ell\pm}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix}J_\ell(\Lambda_n\frac{r}{a})\left\{H_\ell(\Lambda_n)a_{n\ell}^{\pm}-\Lambda_nH_\ell'(\Lambda_n)b_{n\ell}^{\pm}\right\}$$

（2·25）

オ1項は　電流分布により直接に作られた平行平面導波管内の場であり、これが二つの積分に対応する和にわかれているのは、観測



オ　4　図

点 (r,θ) の内側 $(r'<r)$ に分布する電流分布と外側 $(r'>r)$ に分布するそれとの2つの寄与からなるためである。第2項は開口面により反射されて作られた場である。

§2. 行列要素の計算

§2·1 行列要素

基礎方程式 (2·19) を解く前に (2·22) で定義される行列要素を計算しなければならない。これは (2·23) によって周波数の函数であるが、励振問題では周波数は任意に変化させる必要があるから、解の周波数依存性をもあらわに示す必要がある。

(2·22) の表面積分にあらわれた函数 (2·24) は次のように変形される。

$$\Lambda^2(\kappa)=(wa)^2-\kappa^2 \quad (\gtrless 0) \tag{2·26}$$

$$\Lambda_n^2=(wa)^2-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \quad (\gtrless 0)$$

であるから

$$I_{nn'}(\kappa)=(wa)\frac{1-\cos\left(\kappa\frac{L}{a}-n\pi\right)}{\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2-\kappa^2\right]\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2-\kappa^2\right]}\sim(wa)\frac{1-\cos\frac{\Lambda_n^2-\Lambda^2}{4\pi N}}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)} \tag{2·27}$$

但し、右辺では $\frac{\Lambda^2}{(wa)^2}\ll 1$ であることを用いた。これは実際レーザー共振器の場合は $wa\gg 1$ であって、(2·22) の積分はこの条件の範囲内で十分速く収束するからである。(2·26) で定義した $\Lambda^2(\kappa)$, Λ_n^2 は (wa) の値によっては正負の値をとることに注意する。

(2·22) の積分における積分変数を (2·26) によって κ から Λ に変えると、積分領域は Λ の偏角に応じて2部分にわかれて

$$d\kappa=-\frac{\Lambda d\Lambda}{\sqrt{(wa)^2-\Lambda^2}} \qquad \arg(\Lambda)=0 \quad (\kappa\leqslant wa)$$

$$=\frac{\Lambda d\Lambda}{\sqrt{(wa)^2+\Lambda^2}} \qquad \arg(\Lambda)=\frac{\pi}{2} \quad (\kappa>wa) \tag{2·28}$$

となるから、積分領域はそれぞれ $\int_0^{wa}$、$\int_{0'}^{\infty}$ となる。(2·27)で用いた近似を考慮すれば $\sqrt{(wa)^2 \pm \Lambda^2} \sim wa$ であり、又、はじめの積分領域の上限 wa は実質上 ∞ として差支えない。N が適当に大きい時 (2·27) の $I_{nn'}(\Lambda)$ は Λ について緩く変化する函数であり、一方 (2·22) の積分にあらわれる Bessel 函数は $arg.(1)=0$ の部分は、$I_{nn'}(\Lambda)$ に比して急激に振動する函数であるから、漸近展開を用いて積分するとき、振動部分は平均値におきかえて十分正確である。ただしこの近似は、$N \sim 1$ の近傍およびそれより小さい N に対しては値がずれる。この様にして附録に与えた Bessel 函数および変形 Bessel 函数の漸近形を用いて※、積分を近似すると行列要素の積分 (2·22) は次のように書き直される。但し $n-n'=$ 奇数の時は 0 である。

$$K_{nn'} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)}\left[1+0\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)\right]d\Lambda$$

$$-i\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2+\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2+\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2+\Lambda^2)}\left[1+0\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)\right]d\Lambda \qquad (2\cdot29)$$

$$L_{nn'} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)}\frac{1}{2\Lambda}\cdot\Lambda d\Lambda$$

$$-i\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)}\left[1+0\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)\right]\Lambda d\Lambda \qquad (2\cdot30)$$

$$-i\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2+\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2+\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2+\Lambda^2)}\left[1-\frac{1}{2\Lambda}\right]\Lambda d\Lambda$$

※ 函数の漸近級数は収束級数でないから、上の積分で展開の高次の項をとり入れても必らずしも積分を精密化したことにはならないことに注意しなければならない。

$$M_{nn'} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)}\cdot\frac{1}{2\Lambda}\,\Lambda\,d\Lambda$$

$$+i\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)}\left[1+O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)\right]\Lambda\,d\Lambda \qquad (2\cdot31)$$

$$+i\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2+\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2+\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2+\Lambda^2)}\left[1+\frac{1}{2\Lambda}\right]\Lambda\,d\Lambda$$

$$N_{nn'} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)}\left[1+O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)\right]\Lambda^2\,d\Lambda$$

$$+i\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2+\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2+\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2+\Lambda^2)}\left[1+O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)\right]\Lambda^2\,d\Lambda \qquad (2\cdot32)$$

但し、
$$\alpha^2 \equiv \frac{1}{4\pi N} \qquad (2\cdot33)$$

とおいた。$N>1$ であれば $\alpha^2 \ll 1$ と考えて差支えない。Λ_n^2 は (2·26) で与えられている。又上の近似においては、行列要素は l には関係しなくなっている。

§2·2 Fresnel 積分 - I

本節および次節では積分 (2·29) ～ (2·32) を求めるための数学公式を準備する。

定義

$$\mathcal{S}(t) \equiv \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\alpha \sin t x^2\,dx \qquad (2\cdot34)$$

$$\mathcal{C}(t) \equiv \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\alpha \cos t x^2\,dx \qquad (2\cdot35)$$

従がって又、

$$\mathcal{S}'(t) \equiv \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\alpha} x^2 \cos t\, x^2 dx \qquad (2\cdot36)$$

$$\mathcal{C}'(t) \equiv \frac{d\mathcal{C}}{dt} = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\alpha} x^2 \sin t\, x^2 dx \qquad (2\cdot37)$$

ここで $\mathcal{S}(t)$, $\mathcal{C}(t)$ 等は α の函数でもあるが、後の便宜のために、パラメタ t のみを変数として示し、パラメタ α はあらわに書かないでおく。

(1) $\mathcal{S}(t)$, $\mathcal{C}(t)$ は Fresnel 積分の一つの変形になっている。よく使われる記号[11]で書くならば

$$\mathcal{S}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} S\left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\alpha\right), \quad \mathcal{C}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} C\left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\alpha\right) \qquad (2\cdot38)$$

とあらわされる。

(2) 定義から明らかなように次の対称性がある。

$$\mathcal{S}(-t) = -\mathcal{S}(t) \qquad \mathcal{C}(-t) = \mathcal{C}(t)$$
$$\mathcal{S}'(-t) = -\mathcal{S}'(t) \qquad \mathcal{C}'(-t) = -\mathcal{C}'(t) \qquad (2\cdot39)$$

(3) $\mathcal{S}'(t)$, $\mathcal{C}'(t)$ は $\mathcal{S}(t)$ および $\mathcal{C}(t)$ であらわすことが出来る。附録2の (A.10), (A.11) を用いれば

$$\mathcal{S}'(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\alpha}{2t} \sin t\alpha^2 - \frac{1}{2t} \mathcal{S}(t) \qquad (2\cdot40)$$

$$\mathcal{C}'(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\alpha}{2t} \cos t\alpha^2 - \frac{1}{2t} \mathcal{C}(t) \qquad (2\cdot41)$$

(4) $t\alpha^2 \ll 1$ に対しては次の展開式が利用出来る。これは定義 (2·34) ～ (2·37) で被積分函数の展開を項別積分して容易に求められる。

$$\mathcal{S}(t) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \alpha \left\{ \frac{\alpha^2 t}{3} - \frac{\alpha^6 t^3}{7 \cdot 3!} + \frac{\alpha^{10} t^5}{11 \cdot 5!} - \cdots \right\} \qquad (2\cdot42)$$

$$C(t)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\alpha\left\{1-\frac{\alpha^4t^2}{10}+\frac{\alpha^8t^4}{9.4!}-\cdots\cdots\right\}\qquad(2.43)$$

$$S'(t)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\alpha^3\left\{\frac{1}{3}-\frac{\alpha^4t^2}{14}+\frac{\alpha^8t^4}{11.4!}-\cdots\cdots\right\}\qquad(2.44)$$

$$C'(t)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\alpha^3\left\{-\frac{\alpha^2t}{5}+\frac{\alpha^6t^3}{9.3!}-\cdots\cdots\right\}\qquad(2.45)$$

(5) $t\alpha^2\gg1$ に対しては、附録2 (A.8)(A.9) によって次の漸近展開が利用できる。

$$S(t)\sim\sqrt{\frac{1}{8\pi}}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2t}}-\frac{\cos t\alpha^2}{t\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\sin t\alpha^2}{t^2\alpha^3}+\frac{3}{4}\frac{\cos t\alpha^2}{t^3\alpha^5}+\cdots\right\}\qquad(2.46)$$

$$C(t)\sim\sqrt{\frac{1}{8\pi}}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2t}}+\frac{\sin t\alpha^2}{t\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\cos t\alpha^2}{t^2\alpha^3}-\frac{3}{4}\frac{\sin t\alpha^2}{t^3\alpha^5}+\cdots\right\}\qquad(2.47)$$

§2.3 Fresnel 積分 - II

(6) 次の公式が成立する。

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{\Lambda_n^2-\Lambda^2}d\Lambda=S(\Lambda_n^2)-C(\Lambda_n^2)\qquad(2.48)^*$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{\Lambda_n^2-\Lambda^2}d\Lambda=S(\Lambda_n^2)+C(\Lambda_n^2)\qquad(2.49)$$

証　$\sin\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)=\sin\alpha^2\Lambda_n^2\cdot\cos\alpha^2\Lambda^2-\cos\alpha^2\Lambda_n^2\cdot\sin\alpha^2\Lambda^2$

$\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)=\cos\alpha^2\Lambda_n^2\cdot\cos\alpha^2\Lambda^2+\sin\alpha^2\Lambda_n^2\cdot\sin\alpha^2\Lambda^2$

両辺を $\int_0^\infty d\Lambda$ で積分して、公式[11]

$$\int_0^\infty\left\{\begin{matrix}\sin x^2\Lambda^2\\ \cos x^2\Lambda^2\end{matrix}\right\}d\Lambda=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2x}$$

を用いれば $\int_0^\infty\sin x^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)d\Lambda=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x^2\Lambda_n^2}{2x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x^2\Lambda_n^2}{2x}$

---

* 以下では $S(\Lambda_n^2)$, $C(\Lambda_n^2)$ などを S_n, C_n のように略記する。

$$\int_0^\infty \cos x^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)\,d\Lambda=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x^2\Lambda_n^2}{2x}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x^2\Lambda_n^2}{2x}$$

両辺を $\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha^2} dx^2$ で積分すると，(2·48)(2·49)をうる．

(7) 次の公式が成立する．但し $\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda_{n'}^2)=2\pi l$ $(l=\pm1,\pm2,\cdots)$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)}\,d\Lambda=\frac{1}{\Lambda_{n'}^2-\Lambda_n^2}\left\{(S_n-C_n)-(S_{n'}-C_n)\right\}$$

証　$\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda_{n'}^2)=2\pi l$ であることを用いて，部分分数に分解し，(2·48)を用いれば直ちに(2·50)がえられる。

(8) (2·50)の左辺で $n=n'$ に対しては次の公式が成立する。

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)^2}\,d\Lambda=\alpha^2(S_n+C_n)-(S_{n'}-C_{n'})\quad(2\cdot51)$$

証　(2·48)の両辺を Λ_n^2 で微分すると

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)^2}\,d\Lambda+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha^2\sin\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{\Lambda_n^2-\Lambda^2}\,d\Lambda=S_{n'}-C_{n'}$$

従って(2·49)を用いれば(2·51)がえられる。

(9)
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)}\Lambda^2\,d\Lambda=\frac{1}{\Lambda_{n'}^2-\Lambda_n^2}\left\{\Lambda_n^2(S_n-C_n)-\Lambda_{n'}^2(S_{n'}-C_{n'})\right\}\quad(2\cdot52)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)^2}\Lambda^2\,d\Lambda=\alpha^2\Lambda_n^2(S_n+C_n)-(S_n-C_n)-\Lambda_n^2(S_{n'}-C_{n'})\quad(2\cdot53)$$

証　上はいずれも $\Lambda^2=\Lambda_n^2-(\Lambda_n^2-\Lambda^2)$ と書いて(2·48)(2·50)(2·51)を適用すればえられる。

(10) 次の公式が成立する（但し、これは Fresnel 積分とは関係がない）。

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2-\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2-\Lambda^2)}\Lambda d\Lambda+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2+\Lambda^2)}{(\Lambda_n^2+\Lambda^2)(\Lambda_{n'}^2+\Lambda^2)}\Lambda d\Lambda=\begin{cases}0 & l\neq 0\\ \frac{\alpha^2}{2} & l=0\end{cases}$$

但し $\alpha^2(\Lambda_n^2-\Lambda_{n'}^2)=2\pi l \quad (l=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ (2·54)

証 $\Lambda^2=x$ と積分変数を変えて、積分を一つにまとめれば左辺は

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha^2(\Lambda_n^2-x)}{(\Lambda_n^2-x)(\Lambda_{n'}^2-x)}dx=\frac{(-1)^l}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{\alpha^2}{2}(\Lambda_n^2-x)}{\Lambda_n^2-x}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha^2}{2}(\Lambda_{n'}^2-x)}{\Lambda_{n'}^2-x}dx$$

$$=(-1)^l\frac{1}{\Lambda_n^2-\Lambda_{n'}^2}\sin\left\{\frac{\alpha^2}{2}(\Lambda_n^2-\Lambda_{n'}^2)\right\}=(-1)^l\frac{\sin l\pi}{\Lambda_n^2-\Lambda_{n'}^2}$$

但しここで、文献 11) p.262 の積分公式を用いた。

§2·4 Fresnel積分で表わした行列要素

前2節で導いた公式を利用するならば、行列要素の積分 (2·29)～(2·32) はすべて Fresnel積分であらわされる。但し $n-n'$ = 奇数の時には行列要素は0である。

(1) 行列要素 $K_{nn'}$

(2·29) は、(2·50) (2·51) (2·39) によって次の様に書ける。

非対角要素 $(n\neq n')$

$$K_{nn'}=\frac{1}{\Lambda_n^2-\Lambda_{n'}^2}\left\{(S_n-C_n)-(S_{n'}-C_{n'})\right\}$$

$$+i\frac{1}{\Lambda_{n'}^2-\Lambda_n^2}\left\{-(S_n+C_n)+(S_{n'}+C_{n'})\right\} \quad (2\cdot55)$$

対角要素 $(n=n')$

$$K_{nn}=\alpha^2(S_n+C_n)-(S_{n'}-C_{n'})+i\left\{\alpha^2(S_n-C_n)+(S_{n'}+C_{n'})\right\} \quad (2\cdot56)$$

展開式：$(\alpha\Lambda_n)^2 \ll 1$ における (2·56)の展開式は (2·42)～(2·45) を用いれば

$$K_{nn} \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\alpha^3\left\{\frac{2}{3}(1-i)+\frac{2}{15}\alpha^2\Lambda_n^2(1+i)-\frac{2}{70}\alpha^4\Lambda_n^4(1-i)-\cdots\right\} \tag{2·57}$$

(2) 行列要素 $L_{nn'}$ $M_{nn'}$

(2·30)(2·31)で与えられた積分は (2·50)(2·51)(2·54)(2·39) によって

非対角要素 $(n \neq n')$

$$L_{nn'} = M_{nn'} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\Lambda_{n'}^2-\Lambda_n^2}\left\{(S_n-C_n)-(S_{n'}-C_{n'})\right\}$$
$$+\,i\frac{1}{2}\frac{1}{\Lambda_{n'}^2-\Lambda_n^2}\left\{(S_n+C_n)-(S_{n'}+C_{n'})\right\} \tag{2·58}$$

対角要素 $(n=n')$

$$\begin{Bmatrix} L_{nn} \\ M_{nn} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left\{-\alpha^2(S_n+C_n)+(S_{n'}-C_{n'})\right\}$$
$$\mp i\frac{\alpha^2}{2} - i\frac{1}{2}\left\{\alpha^2(S_n-C_n)+(S_{n'}+C_{n'})\right\} \tag{2·59}$$

但し右辺の∓は、左辺が $L_{nn'}$ か $M_{nn'}$ かに従ってとるものとする。

展開式：$(\alpha\Lambda_n)^2 \ll 1$ における (2·59) の展開式は (2·42)～(2·45) を用いて

$$\begin{Bmatrix} L_{nn} \\ M_{nn} \end{Bmatrix} \sim \mp i\frac{\alpha^2}{2} - \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\alpha^3\left\{\frac{1}{3}(1-i)+\frac{1}{15}\alpha^2\Lambda_n^2(1+i)-\frac{1}{70}\alpha^4\Lambda_n^4(1-i)-\cdots\right\} \tag{2·60}$$

(3) 行列要素 $N_{nn'}$

(2·32) で与えられる積分は (2·52)(2·53)によって

非対角要素 $(n \neq n')$

$$N_{nn'} = \frac{1}{\Lambda_{n'}^2 - \Lambda_n^2}\left\{\Lambda_n^2(S_n - C_n) - \Lambda_{n'}^2(S_{n'} - C_{n'})\right\}$$

$$- i\,\frac{1}{\Lambda_{n'}^2 - \Lambda_n^2}\left\{\Lambda_n^2(S_n + C_n) - \Lambda_{n'}^2(S_{n'} + C_{n'})\right\} \qquad (2\cdot61)$$

対角要素 ($n = n'$)

$$N_{nn} = \alpha^2\Lambda_n^2(S_n + C_n) - (S_n - C_n) - \Lambda_n^2(S_n - C_n)$$

$$+ i\left\{\alpha^2\Lambda_n^2(S_n - C_n) + (S_n + C_n) + \Lambda_n^2(S_n + C_n)\right\} \qquad (2\cdot62)$$

展開式 : (2·62) の $(\alpha\Lambda_n)^2 \ll 1$ における展開式は

$$N_{nn} \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\alpha\left\{(1+i) + \frac{1}{3}\alpha^2\Lambda_n^2(1-i) + \frac{1}{30}\alpha^4\Lambda_n^4(1+i) + \cdots\right\} \qquad (2\cdot63)$$

第3章　共振器の励振（強制振動）

§1　序　　論

励振の方法については、才1章にものべたように種々の様式が考えられる。才2章ではそのうちの一つのモデルとして、鏡の内面に電流分布が与えられた場合について議論を行なったが、電流分布の与え方によっても無限の variety があるから、理論的解析としてはそのうちの代表的なものを採ぶことが必要である。ここでは将来行なう予定の鏡面に孔を穿った場合の一つの予備的モデルとして、鏡面の中央部の小さい円形の部分に集中した電流分布による問題を考える。更にその分布は、完全に一様であるとして取扱う。これは小孔の外部より平面波を鏡面に平行に入射した場合の仮想モデルである。この場合には当然ながら、回転対称な場、$\ell=0$ に対応するものしか励振されない。もし電流分布に高次の対称性をもたせるかあるいは孔の位置をずらせるかすれば他の非対称な場が励振されることはいうまでもない。

才1章でもふれたが通常共振器の励振問題の取扱いと云えば、まず自由振動つまり無励振の場合の解を必要とした。すなわち、無励振の場合の固有値問題の解としての固有函数をまず求め、それによって励振による場を展開するのである。この考え方はあまりにも行きわたりすぎたのでしばしば展開の意味を省みることなく受けいれる傾向がある。今まで Fabry Perot 共振器の励振を論じた唯一つの Vainshtein の理論においても不安定な自由振動モードを先に知る必要があった。しかしながら、我々の励振理論においては、自由振動の解は必要としない。このことは、我々の理論が通常の強制振動の取扱いと非常に異なる特徴である。才2章にのべた定式化からわかるように我々は場を自由振動モードの解によって展開しないのであって、より数の小ない項による展開になっている。にもかか

わらず自由振動のモードに対応する解は自動的に含まれている。それは励振の周波数を変えてゆくと、自由振動のモードに対応するところで一つの展開係数が非常に大きくなるからである。同じ展開係数は又、異なる周波数においても大きくなりうるのであって、いわば一つの項が、いくつもの自由振動のモードをあらわしうるのである。このことから逆に不安定な自由振動モードは、複素周波数平面でみた展開係数の極（pole）として定義することが出来るわけである。これは電気回路論で、回路の共振が入力インピーダンスあるいはアドミッタンスの極又は零点と関係していたことに対応するであろう。この問題は次章で取扱われる。

以下では、励振の基礎方程式の解法をまず論じ、ついで、励振問題で必要とする知識つまりいわゆる共振曲線、場の分布等を求める。

§2 基礎方程式の近似解法

基礎方程式（2·19）は無限次元の連立ベクトル方程式であるから $\psi_{n\ell}^{\pm}$ が与えられたときこれを解くのに次のように逐次的解法を考える。非対角行列要素は対角行列要素に比して、1次の微小量とみなすことが出来るとする。これは（2·11）であらわされる導波管モードが開口面で反射される時の異なるnへのモード変換が小さいと仮定することである。これは解いてみることによって確められる。

基礎方程式（2·19）で明らかなことは、まず（2·29）～（2·32）の行列要素からわかるように、これは、量子数*ℓについて対角である。つまりℓを含んでいないから、異なるℓのモードの間では結合はない。同様に±に関しても対角であるから、この間の結合もない。したがって方程式（2·19）はℓ±に関しては独立に解くことができる。この意味で、以下では $\{a_{n\ell}^{\pm}\}$ $\{b_{n\ell}^{\pm}\}$ $\{\psi_{n\ell}^{\pm}\}$ は単に $\{a_n\}$

---

* 量子数、転移などの量子力学の術語は便利であるので、しばしば使用することにする。

$\{b_n\}\{\psi_n\}$と書き、又 Bessel 函数 $J_\ell(\Lambda n)$, $H_\ell^{(1)}(\Lambda n)$ なども単に $J(\Lambda n)$ $H(\Lambda n)$ などとかくことがある。これらは誤解の生じない範囲で用いる。次にわかることは、行列要素の非対角成分は (2.24) によって、$n-n'=$奇数の時は0になる。したがって相隣る n モードの間では結合がないから方程式は偶数の n と奇数の n とは別々に解くことになる。

上にのべたことに従い、基礎方程式 (2.19) を次のように書く。

$$\left.\begin{aligned}
&(J(\Lambda n)H(\Lambda n)+8NK_{nn})\,a_n-(\Lambda n J_n(\Lambda n)H'(\Lambda n)+8NL_{nn})b_n\\
&\qquad=-\varepsilon_\ell NH(\Lambda n)\psi_n-8N\sum_{n'-n'\neq n}K_{nn'}a_{n'}+8N\sum_{n'\neq n}L_{nn'}b_{n'}\\
&(\Lambda n J'(\Lambda n)H(\Lambda n)+8NM_{nn})\,a_n-(\Lambda n^2 J'(\Lambda n)H'(\Lambda n)+8NN_{nn})b_n\\
&\qquad=-\varepsilon_\ell N\Lambda n H'(\Lambda n)\psi_n-8N\sum_{n'\neq n}M_{nn'}a_{n'}+8N\sum_{n'\neq n}N_{nn'}b_{n'}
\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot1)$$

非対角要素は対角要素に対し1次の微小量とみなすとき

$$\left.\begin{aligned}
a_n&=a_n^{(0)}+a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\cdots\cdots\\
b_n&=b_n^{(0)}+b_n^{(1)}+b_n^{(2)}+\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot2)$$

の様に、0次、1次、2次……、の微小量による展開を行なうとき、上の方程式は同じ次数の微小量に対する一連の *hierarchy of equations* に帰着する。

$$\left.\begin{aligned}
&(J(\Lambda n)H(\Lambda n)+8NK_{nn})\,a_n^{(0)}-(\Lambda n J(\Lambda n)H'(\Lambda n)+8NL_{nn})\,b_n^{(0)}\\
&\qquad=-\varepsilon_\ell NH(\Lambda n)\psi_n\\
&(\Lambda n J'(\Lambda n)H(\Lambda n)+8NM_{nn})\,a_n^{(0)}-(\Lambda n^2 J'(\Lambda n)H'(\Lambda n)+8NN_{nn})\,b_n^{(0)}\\
&\qquad=-\varepsilon_\ell N\Lambda n H'(\Lambda n)\psi_n
\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&(J(\Lambda_n)H(\Lambda_n)+8NK_{nn})\,a_n^{(s)}-(\Lambda_n J(\Lambda_n)H'(\Lambda_n)+8NL_{nn})\,b_n^{(s)}\\
&\qquad=-8N\sum_{n'\neq n}K_{nn'}\,a_{n'}^{(s-1)}+8N\sum_{n'\neq n}L_{nn'}\,b_{n'}^{(s-1)}\\
&(\Lambda_n J'(\Lambda_n)H(\Lambda_n)+8NM_{nn})\,a_n^{(s)}-(\Lambda_n^2 J(\Lambda_n)H'(\Lambda_n)+8NN_{nn})\,b_n^{(s)}\\
&\qquad=-8N\sum_{n'\neq n}M_{nn'}\,a_{n'}^{(s-1)}+8N\sum_{n'\neq n}N_{nn'}\,b_{n'}^{(s-1)}
\end{aligned}\right\}$$

$$(s=1,2,3\cdots\cdots) \qquad (3\cdot4)$$

以上によって φ_n が与えられれば (3·3) を先ず解いて (3·4) に代入して $s=1$ の場合を解き、次に $s=2$ の場合、…… のように逐次近似をあげてゆくことが出来る。

§3 動振電力

<u>エネルギー流</u> : 単位面積当りの平均エネルギー束 (average energy flux) つまり電力の流れ (power flow) は複素電力流

$$\mathcal{S}=\frac{\varphi^*\nabla\varphi}{i\omega} \qquad (3\cdot5)$$

の実部 $\mathcal{S}_r$ で与えられる。[13] 波動方程式 (2·1) を用いれば容易に示されるように

$$div\,\mathcal{S}=\frac{1}{i\omega}(\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi-\omega^2\varphi^*\varphi) \qquad (3\cdot6)$$

の関係が成立ち 従がって直ぐわかるように

$$div\,\mathcal{S}_r=0 \qquad (3\cdot7)$$

$$div\,\mathcal{S}_i=\frac{1}{\omega}(\omega^2\varphi^*\varphi-\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi) \qquad (3\cdot8)$$

であって、一般に電力の流れ $\mathcal{S}_r$ は保存されるが、その虚部 $\mathcal{S}_i$ は保存されない。

励振入力 ： 特に(3·7)を共振器の内部の領域Vにわたって積分すれば

$$P \equiv \frac{1}{\omega} \ell_m \int_a \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\sigma = \frac{1}{\omega} \ell_m \int_S \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS, \qquad (3\cdot 9)$$

は励振入力であって、鏡面σを通って流入する電力と開口面Sより流出する電力の等しいことを意味している。右辺のS上の積分は(2·15)(2·16)を用いて表わせば

$$= \frac{\pi L}{\omega} \ell_m \left(\sum_{n\ell\pm} \frac{b_{n\ell}^{\pm *} \; a_{n\ell}^{\pm}}{\varepsilon_\ell} \right) \qquad (3\cdot 10)$$

(3·8)を同様に積分すれば

$$X = \frac{1}{\omega} Re \int_\sigma \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\sigma = \frac{1}{\omega} Re \int_S \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS + \frac{1}{\omega} \int_V (\omega^2 \varphi^* \varphi - \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi) dV \qquad (3\cdot 11)$$

Xは、面σにおける平均した反作用つまりリアクタンス電力であるが、これは常に意味をもっているわけではない。

§4. 鏡面中心の一様な電流分布による励振

はじめにのべたように、ここではまず最も簡単な場合を考察する。電流分布を

$$\varphi_0(r,\theta) = \varphi_0 \text{（一定）} \qquad r \leqslant \varepsilon a \qquad (3\cdot 12)$$

として、中央部の小さい半径 εa の円内に一様に source が分布している場合を考える。当然この時は $\ell = 0$ のモードしか励振されない。この時(2·25)のσ面についての表面積分は直ぐ実行出来るので内部の場の分布は次のように書ける。

$$\varphi_i(r,\theta,z) = \varphi_1(r,z) + \varphi_2(r,z) + \varphi_3(r,z) \qquad r \leqslant \varepsilon a \qquad (3\cdot 13)$$

$$= \varphi_1(r,z) + \varphi_4(r,z) \qquad \varepsilon a < r \leqslant a \qquad (3\cdot 13')$$

但し、

$$\varphi_1(r,z) = \frac{i\pi}{2}\sum_n \left[H_0(\Lambda_n)a_n - \Lambda_n H_0'(\Lambda_n)b_n\right] J_0\left(\Lambda_n\frac{r}{a}\right)\sin\frac{n\pi z}{L} \tag{3.14}$$

$$\varphi_2(r,z) = i2\pi^2 N\varphi_0 \sum_n \frac{r}{a}\Lambda_n^{-1}\left[H_0(\Lambda_n\frac{r}{a})J_1(\Lambda_n\frac{r}{a}) - H_1(\Lambda_n\frac{r}{a})J_0(\Lambda_n\frac{r}{a})\right]\sin\frac{n\pi z}{L}$$

$$= -4\pi N\varphi_0 \sum_n \frac{1}{\Lambda_n^2}\sin\frac{n\pi z}{L} \tag{3.15}$$

$$\varphi_3(r,z) = i2\pi^2 N\varepsilon\varphi_0 \sum_n \frac{1}{\Lambda_n} H_1(\varepsilon\Lambda_n) J_0\left(\Lambda_n\frac{r}{a}\right)\sin\frac{n\pi z}{L} \tag{3.16}$$

$$\varphi_4(r,z) = i2\pi^2 N\varepsilon\varphi_0 \sum_n \frac{1}{\Lambda_n} J_1(\varepsilon\Lambda_n) H_0\left(\Lambda_n\frac{r}{a}\right)\sin\frac{n\pi z}{L} \tag{3.17}$$

であり、ここで

$$\Lambda_n^2 = (\omega a)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \sim \Lambda_{n_0}^2 + 4\pi^2 N(n_0 - n) \tag{3.18}$$

$$\Lambda_{n_0}^2 = (\omega a)^2 - \left(\frac{n_0\pi a}{L}\right)^2 \sim (\omega a)^2 - 2\pi^2 N n_0 \tag{3.19}$$

とおいて、nについての和をn_0の前後にわたってとることができる。ここにn_0は考えている周波数ωに対し、$|\Lambda_n^2|$が最も小さくなるようなnをn_0と考えている。又逆にいえば、n_0を決めた時、$\frac{n_0\pi}{L}$の値に近いような周波数ωのみに注目しようとするのである。又ここでは、レーザー共振器の場合を想定し、$\frac{|n-n_0|}{n_0} \ll 1$として近似を用いている。上の$n$についての和も$n_0$の近傍の$n$についての和のみで十分速く収束するものとしている。実さいレーザー共振器ではn_0は非常に大きい数($10^5 \sim 10^6$)であるから$|n-n_0|$がたとえ$10^2 \sim 10^3$であっても近似は悪くないわけである。これは実際の計算で保証されている。

φ_1は、開口面よりの反射波をあらわすものであり、φ_2, φ_3およびφ_4は開口が存在しない無限平行平面導波管としてのsourceによる励振波をあらわしている。$z \to 0$の時$r \leq \varepsilon a$上では$\varphi_i \to \varphi_0$でなければならないことは(2·5)の右1項の積分におけるGreen函数の特異性によって保証されていなければならないが、それは(3·15)

においてnに対する近似を行なわずに（2·20）によってNをnについての和の中に入れてnについて（0.∞）の和をとれば級数の公式によって

$$\varphi_2(r,z)=2\varphi_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi\left(\frac{a}{L}\right)^2}{\left(n\pi\frac{a}{L}\right)^2-(\omega a)^2}\sin\frac{n\pi z}{L}=\varphi_0\frac{\sin\omega(L-z)}{\sin\omega L}\qquad(3\cdot20)$$

となって$\varphi_2\longrightarrow\varphi_0$（$z\to0$）となることがわかる。その他の$\varphi_1$, φ_3, φ_4 は$z=0$ 上で0を与えるから、実さい我々の知りたい場の分布は$z=0$ 又は$z=L$における$\partial\varphi/\partial z$の値のことである。これは級数の和の中に$\frac{n\pi}{L}$が出ることになるが、上の仮定のもとでは実質上$n\sim n_0$ とおいて和の外に出してよいから、場の分布としては（3·14）～（3·17）において$\sin\frac{n\pi z}{L}$の項をおとしたものが、rの函数として動径上の場の変化を与える。注意する必要のあることは場の分布は、$z=0$ と$z=L$ 上とでは異なることである。これは奇数のnと偶数のnとでは両面における位相の寄与が逆になるからであるが、これは励振が、z軸に関しては非対称に行なわれているためである。

励振入力 ：これは（3·9）によって、σ上の積分つまり$r\leqq\varepsilon a$上の積分を（3·13）～（3·16）を用いて

$$S=\frac{1}{\omega}\int_{\sigma}\varphi_0\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\,d\sigma\qquad(3\cdot21)$$

の虚部として求めればよい。しかしこれはかなり面倒であるから（3·10）を用いて流出電力として求める方が簡単である。

リアクタンス電力は、常に有意味であるわけではないが、励振がかなり一様であるか、あるいはεが適当に狭ければ、平均の反作用として意味をもつであろう。これは実さいに穴を穿って励振した場合、反射波の位相に関係する量である。これを知る必要がある時には、（3·21）の実部を実さいに計算しなければならない。これは（3·11）に示されるように、S上の積分で置換えることは出来ない

が、そこにあらわれる体積積分を評価すれば、それとの和としてあらわすことも出来る。特にレーザー共振の場合は、内部の波動は殆んど、z方向の平面波に近く、かつ波数も非常に大きいので、被積分函数は、近似的に0に等しい。したがって、この体積積分が第1項に比して無視できるならば、リアクタンス電力も（3·10）のようにS上の積分として近似することがゆるされる。

§5. 級数の収束に関する注意

（3·9）におけるようにσ上の積分としての励振入力、あるいはz=0上の場としてその法線微分をとる場合等では$\frac{\partial\varphi}{\partial z}$の値を知らねばならないが、これは（3·14）～（3·17）のように級数を項別に微分した形で与えられる。この時に$\frac{n\pi}{L}$が各項別にあらわれるが、実さい、（3·15）～（3·17）で与えられるφ_2, φ_3, φ_4では（2·20）によって$N=a^2n/2L^2$として、$n\sim n_0$の仮定のもとに和の外に出してあるから実さいには各項別に$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$がかかっているわけである。上では、級数は$n\sim n_0$の近傍の和のみで収束すると仮定しているが、実さいにこの和をnについて（0, ∞）まで加えると級数の形からわかる様にz=0では$\frac{\partial\varphi}{\partial z}$の級数は発散する。これは実は数学的な見掛上の発散であるが、この原因は元にさかのぼって（3·13）あるいは、（2·25）を与えた（2·5）の表式において、第1項のσ上の積分におけるGreen函数の特異性に存する。即ち（2·5）から$\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}$を計算する時

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial^2 G(x|x')}{\partial z\,\partial z'}\right]_{\substack{z'=-0\\ z=+0}} \varphi_0(x')\,d\sigma \qquad (3\cdot22)$$

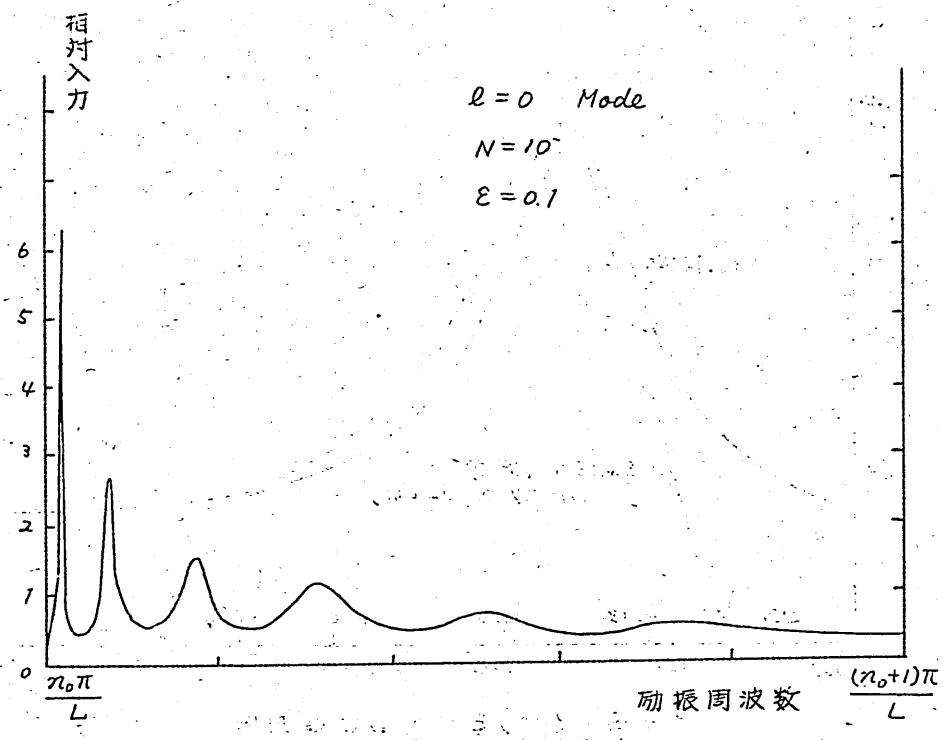
の積分があらわれる。これは同一点z=z'=0におけるGreen函数の2階微分を含んでいるためにG(x|x')として（2·11）を用いる時$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$が各項にあらわれるのである。よくしられているように、

Green 函数の導函数は点 $X=X'$ で不連続であるから 2階の導函数は $X=X'$ で発散する。実さいの場としては、上に記した様に $z \to +0$ の極限をとるべきである。$z>0$ における場を求めるためには $z>0$ では0であるが $z=0$ では発散する様な不要な項を引算しておけばよい。このような処方に従って (3.22) は、

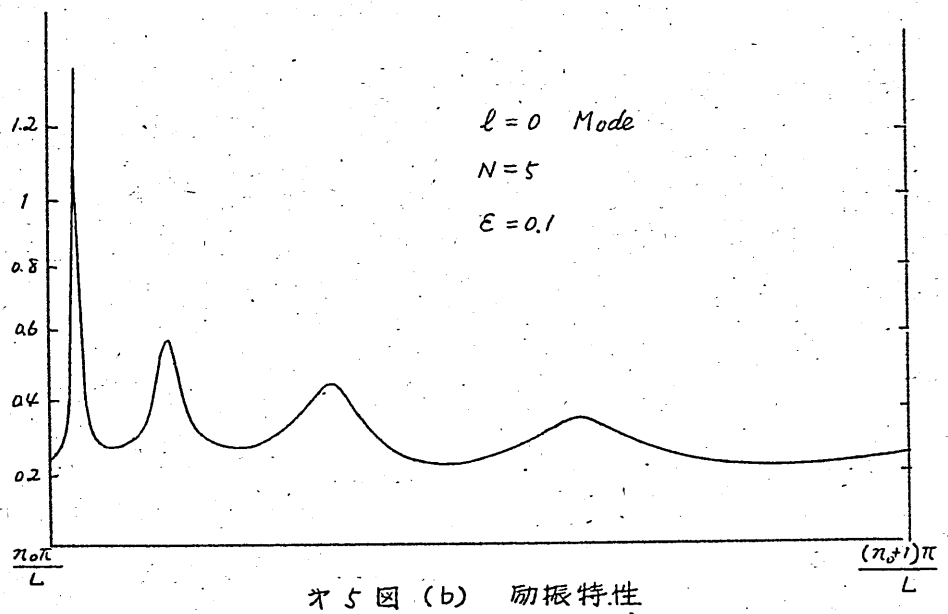
$$\int_\sigma \left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \left\{ G(X|X') - G_0(X|X') \right\} \right]_{\substack{z=0 \\ z=0}} \varphi_0(X')\, d\sigma \qquad (3.23)$$

とすることが出来る。[2] ここに $G_0(X|X')$ は $[G(X|X']_{\omega=0}$ を意味する。即ち、周波数0に対応する Green 函数である。このようにとるならば、実際 (3.14)～(3.17) を項別微分して、n について、$(0, \infty)$ の和をとっても収束するのである。

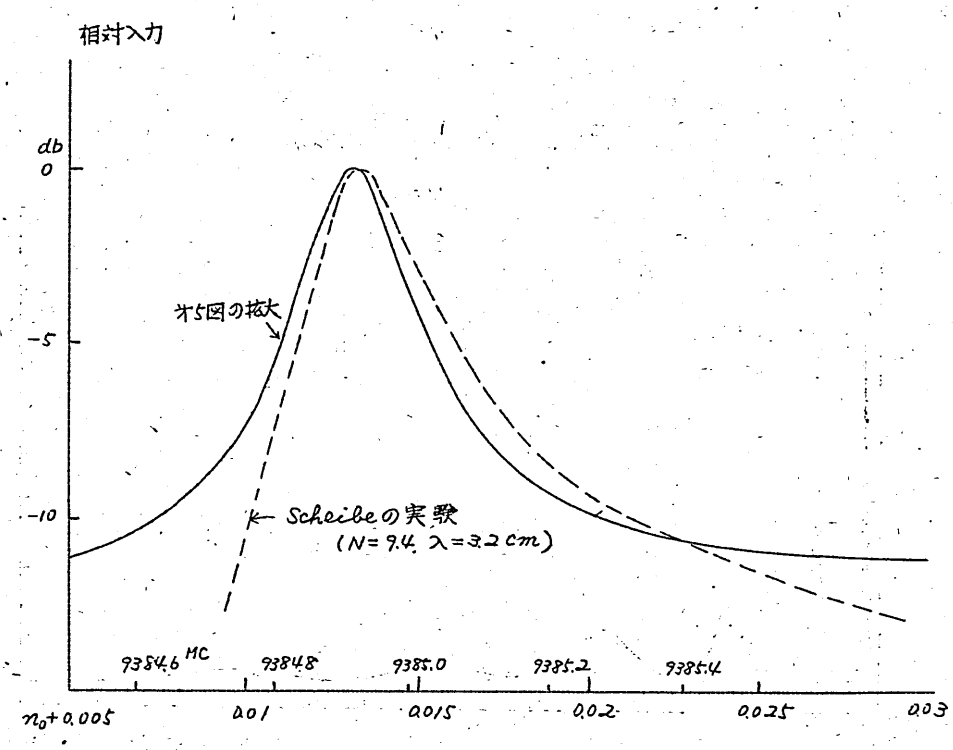
しかしながら、我々はレーザー共振器として、非常に大きい n の値の近傍を問題にしているので、実際 (3.23) を利用して、引算項を作ってみればわかるように非常に大きい n の値 n_0 の近傍では、引算項は、非常に小さく、事実上級数は $n=n_0$ とおいて $(n-n_0)$ に関して和をとるだけで収束してしまう。したがって $n \to \infty$ までの和では確かに発散するために導入した引算項もここでは役割をはたさないことになる。しかし、一般的によくあらわれる場合、たとえばマイクロ波空胴などの取扱いにおける様に注目すべき n_0 が小さい場合には引算を行なわないと級数は発散するから (3.23) のような処方箋は必要である。



第5図 (a) 励振特性



第5図 (b) 励振特性



第6図　(00)モードの励振曲線

第4章 自由減衰振動モード－I

§1 自由減衰振動モード

オ3章においてみたように励振曲線は周波数を変化させてゆくと非常に鋭い山があらわれる。これは、展開係数がある周波数のところで非常に大きくなり、いわゆるモードの存在を示している。このことから、オ3章の序論にものべたように複素周波数平面でみた展開係数あるいは励振入力の極（pole）によって不安定な振動モードを定義することが出来る。又別のいい方をすれば、励振しない場合即ち $\varphi_0(r,\theta)=0$ の場合の自由振動の周波数および減衰定数を複素周波数平面における極の位置で定義しようとするのである。先に我々が励振問題を取扱ったごとく、自由振動モードをもとめることは励振問題を解くための不可欠の部分を占めてはいない。しかし従来のFabry Perot 共振器の理論はすべて不安定な自由振動のみを種々の方法で取扱ってさまざまな結果を出しているから、我々も励振問題の特別な場合としての無励振問題を取扱って、得られる結果をそれらの結果と比べてみることは大変興味のあることである。ここでのべる方法は従来のいくつかの理論とくらべると簡明であるだけでなく、回折損失モードのパターン、位相分布がFox Li の数値計算[5]とよく一致し、彼等の結果にみられるこまかなripple までも完全に再現することが知られるであろう。又我々が前論文の空胴共振像で使った仮定、即ち Fresnel 数が十分大きい時 Fabry Perot 共振器の自由振動モードは閉じた空胴共振器のモードで近似され、開口面で $\varphi=0$ の境界条件に近いということも数学的に立証され、更に空胴共振像によってもとめた損失は、正しい値の約半分であったが、そのような近似では何が欠けていたのかも明らかにされるであろう。

ここではまず無励振方程式の近似解法をのべるが、実際には回折損失および場の分布は1次近似のみで取扱われる。それはその近似で十分結果が一致するからである。§3では行列方程式の根として複素周波数を求めそれから回折損失と周波数変化を求める。これは、Vainshtein[6]の結果とよく一致し、数値的には小さいFresnel数（$N<3$）の領域を除いてはFox Liの結果と全く一致する。§4で場の分布、いわゆるfield patternと位相分布を求める。これもよくFox Liの結果を再現する。最後に空胴理論の結果との関係および批判を与える。

§2. 無励振方程式の近似解法

励振源のない場合：基礎方程式（2·19）又は（3·1）は

$$J_e(\Lambda_n)H_e(\Lambda_n)a_n-\Lambda_n J_e(\Lambda_n)H_e'(\Lambda_n)b_n+8N\left\{\sum_{n'}K_{nn'}a_{n'}-\sum_{n'}L_{nn'}b_{n'}\right\}=0$$

$$A_n J_e'(\Lambda_n)H_e(\Lambda_n)a_n-\Lambda_n^2 J_e'(\Lambda_n)H_e'(\Lambda_n)b_n+8N\left\{\sum_{n}M_{nn'}a_{n'}-\sum_{n'}N_{nn'}b_{n'}\right\}=0 \qquad (4\cdot1)$$

ここでl,±に関して方程式は分離しているから $a_{ne}^{\pm}$ $b_{ne}^{\pm}$ のl,±は前と同様に省略した。

（4·1）は$\{a_n\}\{b_n\}$に対する連立有次ベクトル方程式であるから、すべての$\{a_n\}\{b_n\}$は0でない解が存在するためにはΛ_nはこれらの係数のつくる無次限行列方程式の根になっていなければならない。この根が自由振動モードに対応する周波数ならびに不安定振動の寿命を与え、その根に対応する係数$\{a_n\}\{b_n\}$が（2·25）の才2項によってそのモードの場の分布を決定する。

（4·1）の係数の作る行列方程式を直接解くことは出来ないが、才3章§2でものべたように非対角要素は対角要素に比べて小さいの

で異なるnの間の結合は小さいものと考えられる。即ち、開口面における導波管モードの変換は小さいと考えられる。勿論これは得られる結果において確証される。従って1次近似としては特別のモードnに注目する。我々に興味のあるのは、レーザー共振器として、殆んど平面波共振に近いもの、つまり

$$\Lambda_n^2 = (wa)^2 - \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \sim 0 \qquad (4\cdot2)$$

の場合に最も近いようなモードnを考えており、(4·2)から大きくはずれるようなモードの損失は非常に大きいと考えられる。したがって(3·19)の時と同様、Λ_n^2 が最も0に近いようなnを考え、それを n_0 と記すことにする。

このことを用いて(4·1)を解くことを考えよう。考えているモード n_0 の振巾 a_{n_0}, b_{n_0} が0次の微小量とすれば、モード間の結合係数は1次の微小量であるから $\{a_n\}\{b_n\}$ $n \neq n_0$ もヌ1次であると考えられる。従って a_{n_0}, b_{n_0} のうける反作用は2次であろう。これらのことを利用して(4·1)を逐次近似により解くことが出来る。

$$\left.\begin{aligned} a_{n_0} &= a_{n_0}^{(0)} \\ b_{n_0} &= b_{n_0}^{(0)} + 0 + b_{n_0}^{(2)} + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (4\cdot3)$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 + a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \cdots\cdots \\ b_n &= 0 + b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad n \neq n_0 \qquad (4\cdot4)$$

とおく。0次の係数の方程式から定まる根 Λ_{n_0} を Λ_0 と記せば、非対角要素 $K_{nn'}(\Lambda_0)$ などは1次の小さささであるから、

$$K_{nn}(\Lambda_0) = K_{nn'}^{(0)}, \quad K_{nn'}(\Lambda_0) = K_{nn'}^{(1)}$$

などと記そう。その時、(4·3), (4·4)等を(4·1)に代入して<u>0次の項</u>を比較すれば、

$$\left.\begin{aligned}&\left[J_\ell(\Lambda_0)H_\ell(\Lambda_0)+8NK^{(0)}_{n_0n_0}\right]a^{(0)}_{n_0}-\left[\Lambda_0 J_\ell(\Lambda_0)H_\ell'(\Lambda_0)+8NL^{(0)}_{n_0n_0}\right]b^{(0)}_{n_0}=0\\&\left[\Lambda_0 J_\ell'(\Lambda_0)H_\ell(\Lambda_0)+8NM^{(0)}_{n_0n_0}\right]a^{(0)}_{n_0}-\left[\Lambda_0^2 J_\ell'(\Lambda_0)H_\ell'(\Lambda_0)+8NN^{(0)}_{n_0n_0}\right]b^{(0)}_{n_0}=0\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot5)$$

この係数の作る行列式の根がΛ_0であり，それに対応して$a^{(0)}_{n_0}$, $b^{(0)}_{n_0}$の比が決定される。

1次の項を比較すれば

$$\left.\begin{aligned}&\left[J_\ell(\Lambda_0)H_\ell(\Lambda_0)+8NK^{(0)}_{nn}\right]a^{(1)}_n-\left[\Lambda_0 J_\ell(\Lambda_0)H_\ell'(\Lambda_0)+8NL^{(0)}_{nn}\right]b^{(1)}_n\\&\qquad=-8NK^{(1)}_{nn_0}a^{(0)}_{n_0}+8NL^{(1)}_{nn_0}b^{(0)}_{n_0}\\&\left[\Lambda_0 J_\ell'(\Lambda_0)H_\ell(\Lambda_0)+8NM^{(0)}_{nn}\right]a^{(1)}_n-\left[\Lambda_0^2 J_\ell'(\Lambda_0)H_\ell'(\Lambda_0)+8NN^{(0)}_{nn}\right]b^{(1)}_n\\&\qquad=-8NM^{(1)}_{nn_0}a^{(0)}_{n_0}+8NN^{(1)}_{nn_0}b^{(0)}_{n_0}\end{aligned}\right\}\quad(n\neq n_0)\qquad(4\cdot6)$$

(4·5)により(4·6)の右辺は既知であるからこれをといて$\{a^{(1)}_n\}$, $\{b^{(1)}_n\}$ $n\neq n_0$が定まる。

2次の項を比較すれば

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_K(\Lambda)a^{(0)}_{n_0}-\Delta_L(\Lambda)b^{(0)}_{n_0}-\left[\Lambda_0 J_\ell(\Lambda_0)H_\ell'(\Lambda_0)+8NL^{(0)}_{n_0n_0}\right]b^{(2)}_{n_0}\\&\qquad=-8N\sum_{n\neq n_0}K^{(1)}_{n_0n}a^{(1)}_n+8N\sum_{n\neq n_0}L^{(1)}_{n_0n}b^{(1)}_n\\&\Delta_M(\Lambda)a^{(0)}_{n_0}-\Delta_N(\Lambda)b^{(0)}_{n_0}-\left[\Lambda_0^2 J_\ell'(\Lambda_0)H_\ell'(\Lambda_0)+8NN^{(0)}_{n_0n_0}\right]b^{(2)}_{n_0}\\&\qquad=-8N\sum_{n\neq n_0}M^{(1)}_{n_0n}a^{(1)}_n+8N\sum_{n\neq n_0}N^{(1)}_{n_0n}b^{(1)}_n\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot7)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}\Delta_K(\Lambda)&=\left(J_\ell(\Lambda)H_\ell(\Lambda)+8NK_{n_0n_0}\right)-\left(J_\ell(\Lambda_0)H_\ell(\Lambda_0)+8NK^{(0)}_{n_0n_0}\right)\\&=\left(J_\ell(\Lambda)H_\ell(\Lambda)+8NK_{n_0n_0}\right)'(\Lambda-\Lambda_0)+\cdots\cdots\end{aligned}\right.$$

同様に

$$\left.\begin{aligned}\Delta_L(\Lambda) &= (\Lambda J_\ell(\Lambda) H_\ell'(\Lambda) + 8N L_{n_0 n_0})'(\Lambda-\Lambda_0)+\cdots\\ \Delta_M(\Lambda) &= (\Lambda J_\ell'(\Lambda) H_\ell(\Lambda) + 8N M_{n_0 n_0})'(\Lambda-\Lambda_0)+\cdots\\ \Delta_N(\Lambda) &= (\Lambda^2 J_\ell'(\Lambda) H_\ell'(\Lambda) + 8N N_{n_0 n_0})'(\Lambda-\Lambda_0)+\cdots\end{aligned}\right\} \quad (4\cdot8)$$

但し、ここで $(\quad)'$ は $\left[\frac{d}{d\Lambda}(\quad)\right]_{\Lambda=\Lambda_0}$ を意味する。

(4·7)の右辺は(4·6)によって既知であり、これから $b_{n_0}^{(2)}$ および Λ が決定される。これによって求められる補正がモード変換を考慮した近似解を与える。(4·8)で与えられる $\Delta(\Lambda)$ は Λ の函数として(4·7)を解き難い形にしているから、(4·8)は $(\Lambda-\Lambda_0)$ のベキに展開して(4·7)に用いることが出来る。ベキの1次までの展開を使うならば(4·7)は $b_{n_0}^{(2)}$, $(\Lambda-\Lambda_0)$ の線型連立方程式であって直ちに求まるが $(\Lambda-\Lambda_0)^2$ まで解こうとすれば多少面倒になる。

§3. 回折損失、共振周波数

まずモード変換を考慮しない近似解を求める。その為に(4·5)の特性行列方程式

$$\begin{vmatrix} J_\ell(\Lambda) H_\ell(\Lambda) + 8N K_{nn} & \Lambda J_\ell(\Lambda) H_\ell'(\Lambda) + 8N L_{nn} \\ \Lambda J_\ell'(\Lambda) H_\ell(\Lambda) + 8N M_{nn} & \Lambda^2 J_\ell'(\Lambda) H_\ell'(\Lambda) + 8N N_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4\cdot9)$$

の根 Λ を求めなければならない。これは行列方程式とはいっても、代数方程式ではなく函数方程式である。(4·9)および以下この節では便宜上 Λ_0, n_0 を単に Λ, n, と書く。(4·9)を書きかえれば

$$8N(K_{nn}N_{nn} - L_{nn}M_{nn}) + J_\ell(\Lambda) H_\ell(\Lambda) N_{nn} - \Lambda J_\ell'(\Lambda) H_\ell(\Lambda) L_{nn} - \Lambda J_\ell(\Lambda) H_\ell'(\Lambda) M_{nn} + \Lambda^2 J_\ell'(\Lambda) H_\ell'(\Lambda) K_{nn} = 0 \quad (4\cdot10)$$

となる。

今は（4·2）の成立つ場合で

$$\alpha^2\Lambda^2 \ll 1 \quad , \quad \alpha^2 \equiv \frac{1}{4\pi N} \tag{4·11}$$

の場合を考えるとすれば、行列要素 K_{nn} 等には（2·57）（2·60）（2·63）で用意した $\alpha^2\Lambda^2$ のベキ展開を用いることが出来るから、これらを（4·10）に代入し、Bessel 函数の Lommel の公式などを用いて α の昇ベキ順に整理すれば

$$J_\ell(\Lambda)H_\ell(\Lambda)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{3\pi^2}+\frac{1}{2\pi}\right)(1-i)\alpha$$
$$-i\frac{1}{3}\left\{\Lambda^2 J_\ell(\Lambda)H_\ell(\Lambda)+\Lambda J_\ell'(\Lambda)H_\ell(\Lambda)+\Lambda J_\ell(\Lambda)H_\ell'(\Lambda)+2\Lambda^2 J_\ell'(\Lambda)H_\ell'(\Lambda)\right\}\alpha^2$$
$$+O(\alpha^3)=0 \tag{4·12}$$

となる。$O(\alpha^3)$ は α^3 以上のベキを含む項を意味する。

この方程式から、次のことが明らかである。即ち $\alpha\to 0$ つまり（4·11）によって $N\longrightarrow\infty$ の極限では（4·12）の根は $J_\ell(\Lambda)H_\ell(\Lambda)=0$. 即ち

$$J_\ell(\Lambda_{\ell m})=0 \qquad (\ell, m=0,1,2\cdots\cdots) \tag{4·13}$$

を満足する Bessel 函数の根 $\Lambda_{\ell m}$ に等しくなる。これは、閉じた空胴共振における境界条件 $\varphi(S)=0$ を満たすことを示している。これは N が十分大きい時、Fabry Perot 共振は空胴共振像で近似出来ることの数学的証明である。したがって、今まで我々は2つの量子数 ℓ n で指定された導波管波をモードと呼んできたが、（4·13）の量子数 ℓ m に対応する不安定な固有振動も又（損）モードと呼んでよいであろう。

近似解：（4·12）の根は（4·13）（4·11）を考慮すれば

$$\Lambda=\Lambda_{\ell m}(1+\delta) \qquad (|\delta|\ll 1) \tag{4·14}$$

とおいて、Bessel 函数を $\Lambda = \Lambda_{\ell m}$ の近傍で展開して δ を近似的に求めることが出来る。我々は δ を α^2 の order までもとめることにしよう。そのためには（4.12）の $\{\ \}$ の中は $\Lambda = \Lambda_{\ell m}$ とおいて十分であり、又オ1項 $J_\ell(\Lambda) H_\ell(\Lambda)$ は、δ につき2次まで展開する必要がある。このようにして（附録3）

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3\pi}+\frac{1}{4}\right)(1+i)\alpha + i\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{3\pi}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\alpha^2 + O(\alpha^3)$$

$$= -0.5793\,(1+i)\alpha + 0.6689\,i\alpha^2 + O(\alpha^3) \qquad (4.15)$$

が与えられる。α^2 の項はわずかにモード (ℓ, m) に依存するが、それは無視しておく。α^3 の項はモードに依存し複雑となる。

振 Λ を複素平面上にプロットしたものをオ7図に示す。

<u>共振周波数、回折損失</u>：以上により、モード $(\ell\ m)$ に対応する複素共振周波数は

$$\omega = \frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{n_0\pi a}{L}\right)^2 + \Lambda_{\ell m}^2 (1+\delta)^2}$$

$$\simeq \frac{1}{L}\left[n_0\pi + \alpha^2 \Lambda_{\ell m}^2 (1+2\delta+\delta^2)\right] \qquad (4.16)$$

オ1項は平面波共振に対応する項であり、オ2項は<u>開口補正</u>である。

<u>共振周波数の変化</u>は

$$\Delta\omega = \frac{n_0\pi}{L} - \omega = -\frac{\alpha^2 \Lambda_{\ell m}^2}{L}\left[1 + Re(2\delta)\right] \qquad (4.17)$$

で与えられる。右辺オ1項は空胴共振モードの平面波共振よりの周波数のずれに対応する。[8]

<u>One transit loss</u> は

$$\delta\alpha = -2L \cdot \mathrm{Im}(\omega) = -2\alpha^2 \Lambda_{\ell m}^2\, \mathrm{Im}(2\delta+\delta^2) \qquad (4.18)$$

(4.11)(4.15) により Fresnel 数 N であらわせば、

$$\delta\alpha = 5.202\times10^{-2}\Lambda_{lm}^{2}N^{-\frac{3}{2}} - 2.544\times10^{-2}\Lambda_{lm}^{2}N^{-2}$$

$$= 5.202\times10^{-2}\Lambda_{lm}^{2}N^{-\frac{3}{2}}\left(1-0.4891\cdot N^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad (4\cdot19)$$

である。これを第8図に示す。

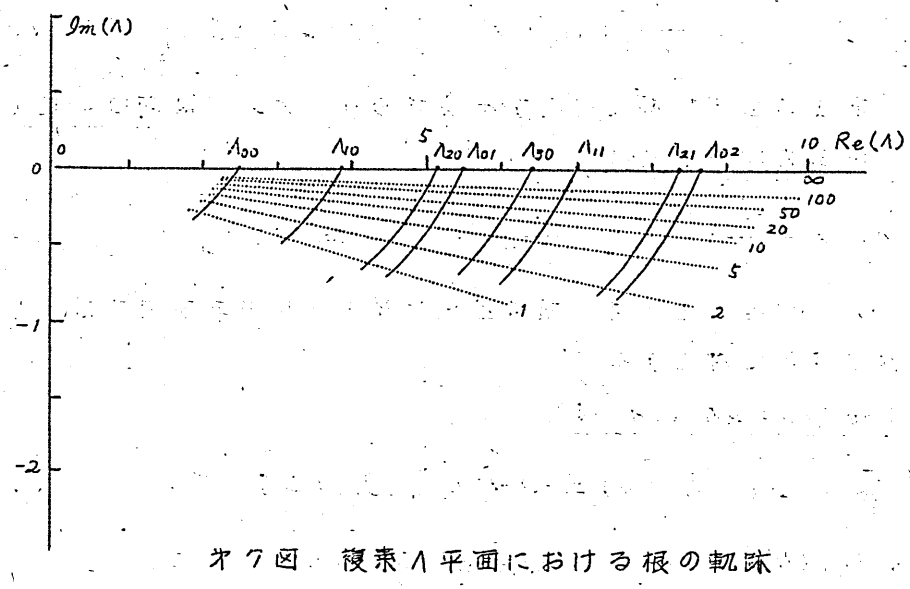
ついでに Vainshtein[6] の結果を（4·19）の形に書くと

$$\delta\alpha = 8\Lambda_{lm}\frac{\beta(M+\beta)}{\left[M^2+2\beta M+2\beta^2\right]^2} \simeq \frac{\beta}{M^3}\left(1-\frac{3\beta}{M}\right)8\Lambda_{lm}^{2}$$

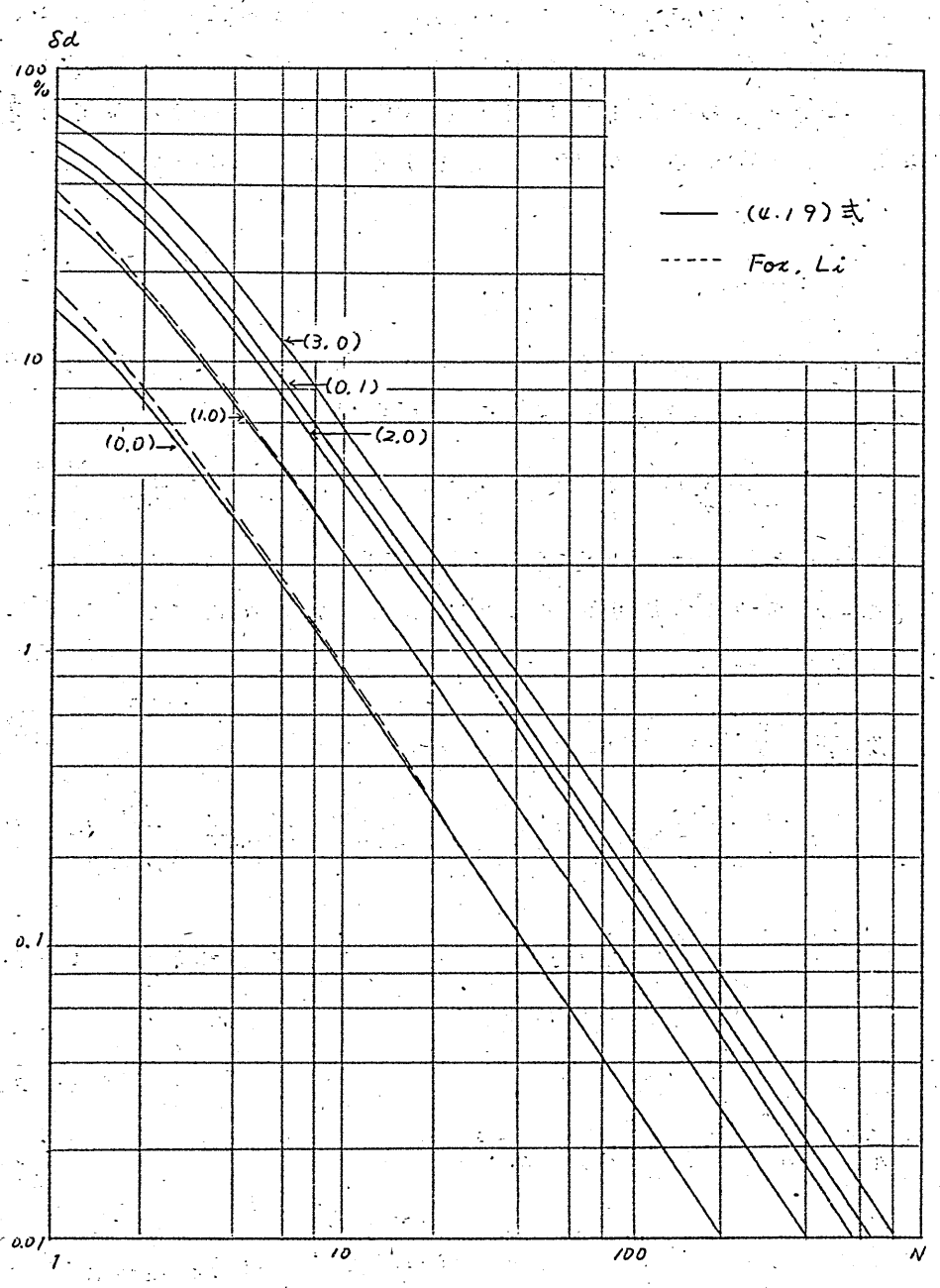
$$= 5.23\times10^{-2}\Lambda_{lm}^{2}N^{-\frac{3}{2}}\left(1-0.493\cdot N^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad (4\cdot20)$$

但し $\beta = 0.824$　$M^2 \equiv 8\pi N$

であって（4·19）と（4·20）は非常によく一致している。これらは実に、両口面でのモード変換、即ち π_0 と π との結合を無視して得た結果である。これらは Fox, Li の数値計算の結果[5]をもよく再現する。Nが小さくなり、たとえば N＜5 になれば、そのようなモード変換の効果も無視できないのでそのような補正を入れる必要があろう。そのようにすれば、更によく Fox, Li と一致するかもしれ



第7図　複素Λ平面における根の軌跡



第8図 回折損失 Sd

ないが、損失が大きいところでは $\delta\alpha$ の定義が双方で一致しなくなる可能性も考慮しなければならない。いずれにしても（4·19）はかなり良く合っており、回折損失を精密化したところで本質的な重要性はないから我々は（4·19）で満足することにしよう。

§4. 場の分布

自由振動モードの場の分布は（4·1）～（4·7）によって $\Lambda_n, \{a_n\}, \{b_n\}$ を知れば（2·25）によって内部の場は

$$\varphi_i(X) = \frac{i\pi}{2}\sum_n \left\{ H_\ell(\Lambda_n) a_{n\ell}^{\pm} - \Lambda_n H_\ell'(\Lambda_n) b_{n\ell}^{\pm} \right\} J_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \begin{Bmatrix} \cos\ell\theta \\ \sin\ell\theta \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \tag{4·21}$$

で与えられる。$\ell, \pm$ は一定であるから和は n についてのみとられる。$n = n_0$ の項を0次近似として取出し、$n \neq n_0$ については1次近似で止めるならば

$$\varphi_i(x) = \frac{i\pi}{2}\left\{ H_\ell(\Lambda_0) a_{n_0}^{(0)} - \Lambda_0 H_\ell'(\Lambda_0) b_{n_0}^{(0)} \right\} J_\ell\left(\Lambda_0 \frac{r}{a}\right) \begin{Bmatrix} \cos\ell\theta \\ \sin\ell\theta \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{n_0\pi z}{L}\right)$$

$$+ \frac{i\pi}{2}\sum_{n\neq n_0} \left\{ H_\ell(\Lambda_n) a_n^{(1)} - \Lambda_n H_\ell'(\Lambda_n) b_n^{(1)} \right\} J_\ell\left(\Lambda_n \frac{r}{a}\right) \begin{Bmatrix} \cos\ell\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \tag{4·22}$$

ここに $\{a_n^{(1)}\}\{b_n^{(1)}\}$ は（4·6）の解として与えられ又 Λ_0 は行列方程式の根（4·14）で与えられる。

$$\Lambda_0 = \Lambda_{\ell m}(1+\delta) \tag{4·23}$$

$$\Lambda_n^2 = (\Lambda_0)^2 + (n_0 - n)\pi\alpha^{-2} \tag{4·24}$$

第3章でものべたように、場の分布としては $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0,L}$ をとる必要があるが、前と同様級数は、非常に大きい数 n_0 の近傍のみの和として十分収束するから、微分によって出る $\frac{n\pi}{L}$ は和の中では常数としてよく、したがって、場の分布としては（4·22）で $\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$ の項をおとしたものを採用して差支えない。又、動径方

向の場の分布のみに注目するならば、角部分の項もおとして考えてよい。

(4·22) で第1項のみの近似つまり、モード変換を考慮しないならば、その動径方向の分布は (4·23) を用いて

$$[\varphi]_z \propto J_\ell(\Lambda_0 \frac{r}{a}) \sim J_\ell(\Lambda_{\ell m} \frac{r}{a}) + S \cdot \Lambda_{\ell m} \frac{r}{a} J_\ell'(\Lambda_{\ell m} \frac{r}{a}) \quad (4·25)$$

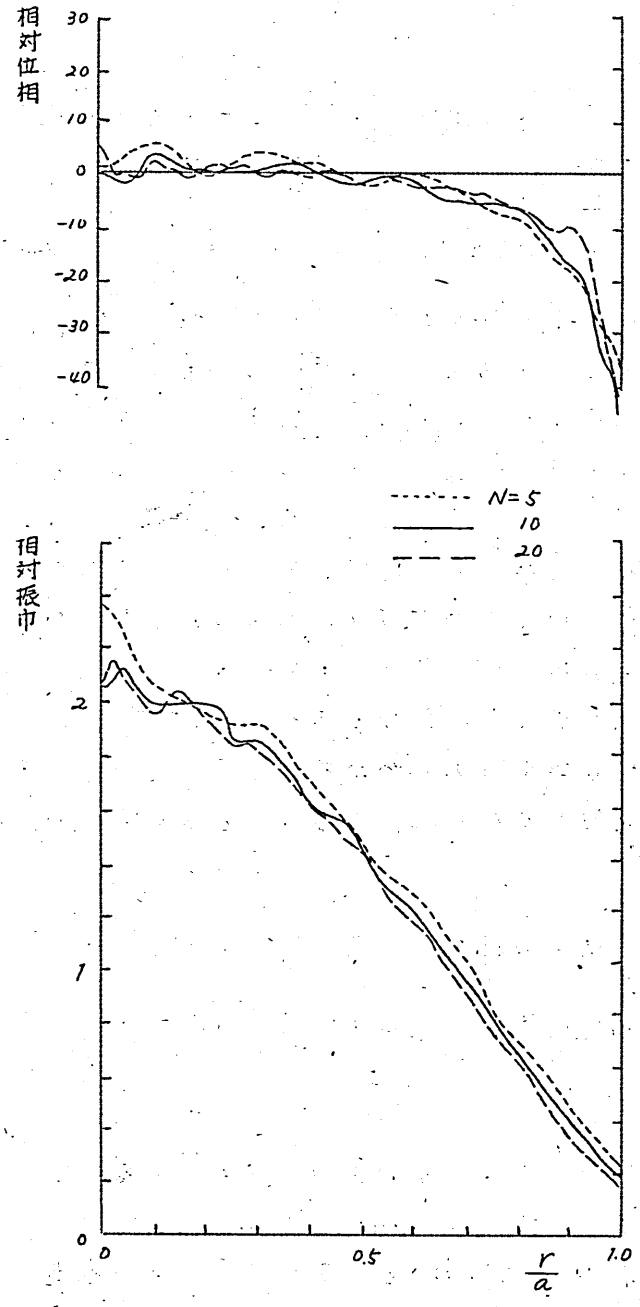
として、容易に描くことが出来る。これは Vainshtein[6] が描いている。又第2項もとり入れてモード変換も考慮すれば、Fox, Li の数値計算にみられるような ripple を生ずる。(4·22) を電子計算機で求めて、種々の Fresnel 数、モードに対し振巾分布、位相分布を描いたものが第9図～第11図である。結果は Fox Li の求め得たものと比較すればほぼ完全に再現していることがわかる。$N=2$ の場合には、分布はいくらか Fox Li のものとずれるが、これは我々の行列要素の計算が、第2章 §2·1 でのべたように小さい Fresnel 数に対しては近似が悪くなるためである。又 Fox Li は求めていないが、$N=20$ の結果等をみればわかるように Fresnel 数が大きくなると ripple が細かくなる傾向のあることが知られる。

§5 空胴理論の結果の批判

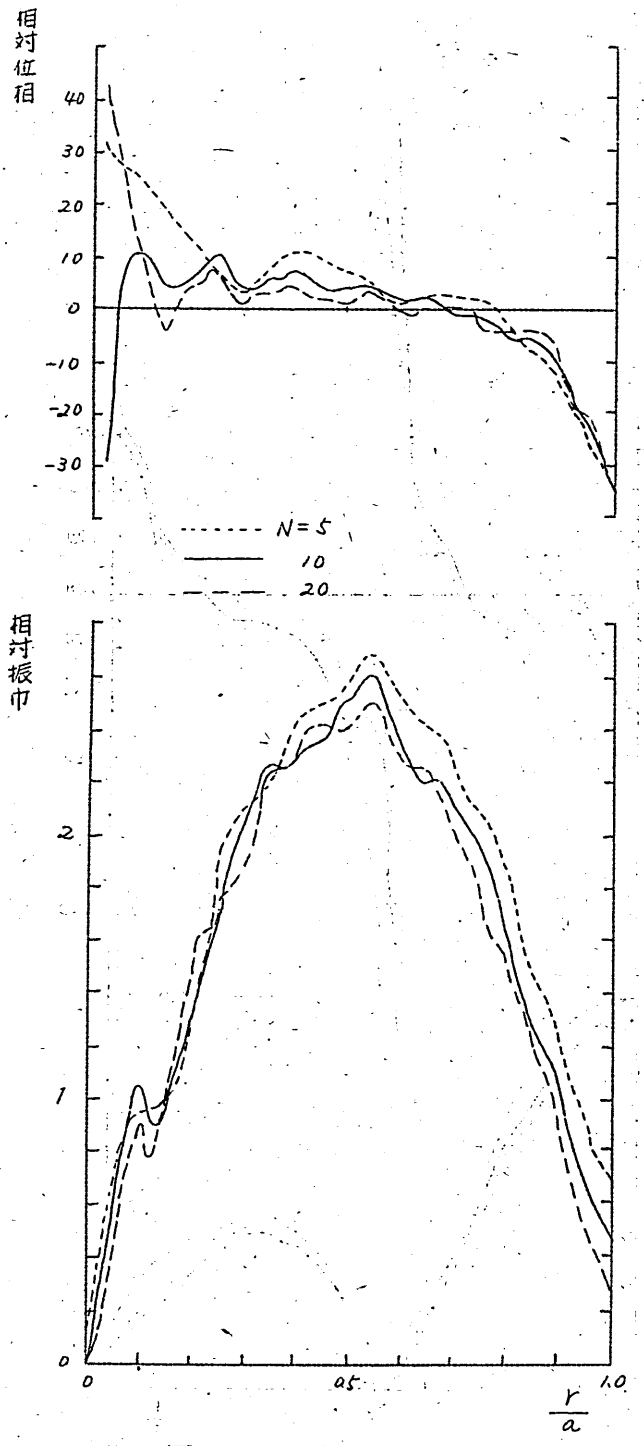
我々は前に空胴共振像[7]にもとずいて共振モードの損失を求め

$$\delta\alpha = 2.40 \times 10^{-2} \Lambda_{\ell m}^2 N^{-1.5} \quad (4·26)$$

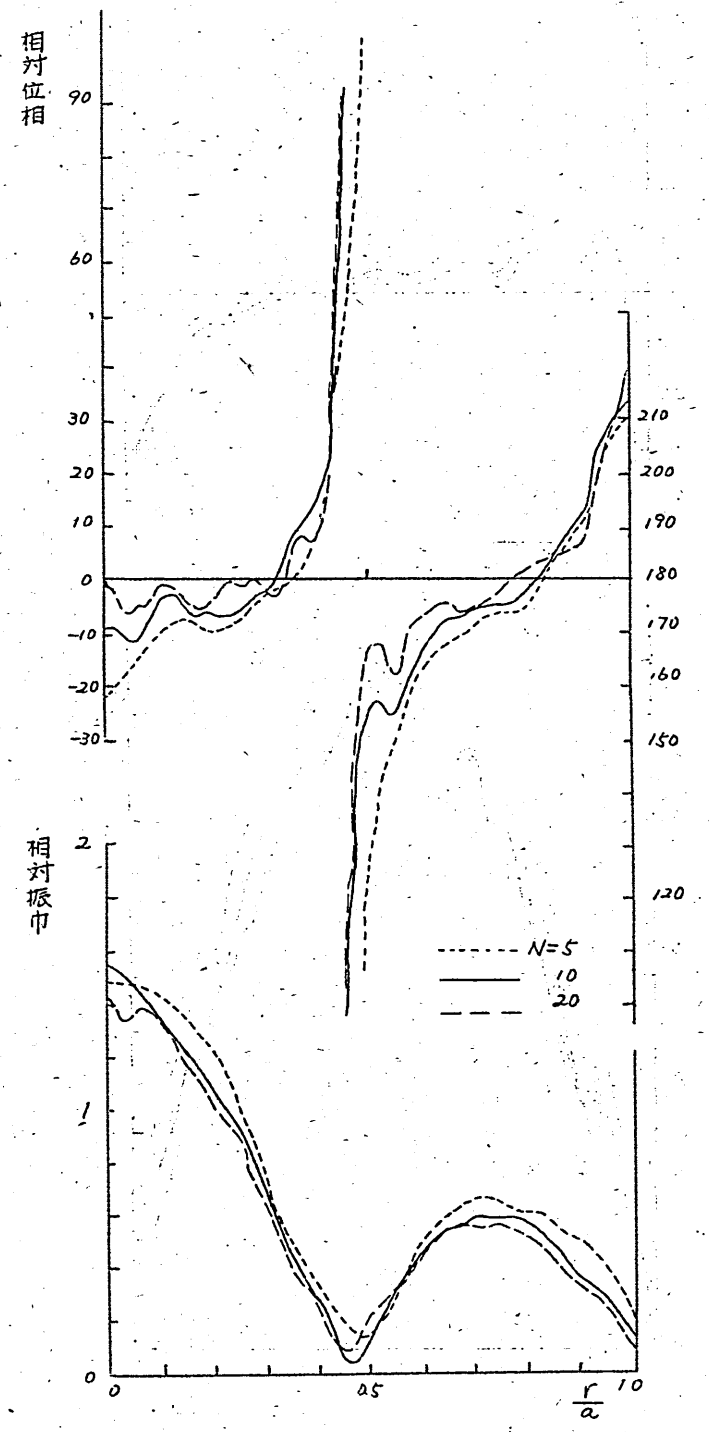
という結果を得た。これは (4·19) の約半分である。正確には $\frac{8}{3\pi+8}$ 倍になっていることが後に示されるであろう。これは $N \to \infty$ における閉空胴の境界条件 $\varphi(S)=0$ を仮定してその固有函数を無摂動函数とし、開口よりの輻射を摂動として扱かって輻射損失を求めたものである。(4·13) においてみたように $N \to \infty$ における境界条件 $\varphi(S)=0$ が数学的に正しいにもかかわらず、その損失の近似が良く



第9図　(0.0) モード



第10図　(0,1)モード


相対位相
90
60
30
20
10
0
-10
-20
-30
210
200
190
180
170
160
150
120
相対振巾
2
1
0
0
0.5
1.0
r/a
N=5
10
20

オ11図　(1.0)モード

ないのは如何なる理由によるものかをここで考察しよう。

空胴理論では、0次近似として境界面上で $\varphi(S)=0$ のモードを仮定した。これは（2·15）でいえば $\{b_{ne}^{\pm}\}=0$ に対応する。従がって（4·9）に対応するものは

$$J_\ell(\Lambda)H_\ell(\Lambda)+8.NK_{nn}=0 \qquad (4\cdot27)$$

である。ここで（2·57）を用いると（α^2の項は無視する）

$$J_\ell(\Lambda)H_\ell(\Lambda)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{3\pi^2}(1-i)\alpha=0 \qquad (4\cdot28)$$

の根 Λ を求めることになる。（4·14）のようにおいて前と同様に取扱えば

$$S=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3\pi}(1+i)\alpha \qquad (4\cdot29)$$

となって、対応する回折損失は

$$S\alpha=\frac{\sqrt{2}}{6\pi^2}\Lambda_{\ell m}^2N^{-1.5}=2.388\times10^{-2}\Lambda_{\ell m}^2N^{-1.5} \qquad (4\cdot30)$$

となり、（4·26）の結果がえられる。数字が少し異なるのは、（4·26）を出す時に行った行列要素の数値積分の error のためである。

さて（4·29）と（4·15）（α^2の項は無視する）とを比べて見れば後者は前者において $\frac{2}{3\pi}\longrightarrow\left(\frac{2}{3\pi}+\frac{1}{4}\right)$ の置きかえをしたものである。この $\frac{1}{4}$ の出所は、（4·10）から（4·12）を導びく時にわかるように L_{nn}, M_{nn} の項から生じている。実さい $\{b_n\}=0$ がいえて（4·9）が（4·27）になりうるのは、$L_{nn}\sim M_{nn}\sim0$ であって、かつ $K_{nn}/N_{nn}\sim0$ の時である。後者の仮定は（2·57）（2·63）によって正しいが、L_{nn}, M_{nn} を無視することは正しくない。それは、K_{nn} と $L_{nn}M_{nn}/N_{nn}$ とが α について同じ order であるからである。L_{nn}, M_{nn} を無視してはならないということは、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の結合、あるいは $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ と φ との結合はいかに φ が小さくても無視出来ない効果をもつということである。この結合を無視したことが空胴理論の欠陥であることが、これで明らかとなった。実際空胴理論は自由振動その

ものを定義出来ないところが欠点なのである。

Bergstein, Schachter[14] も干渉計像による積分方程式を、空間像に対応する周辺で0値をとるFourier-Bessel展開によって解き、まさに（4.30）の結果を導びいている。これも同じ欠陥によるものであることも今や明らかである。

第5章 自由減衰振動モード-II（鏡面変形）

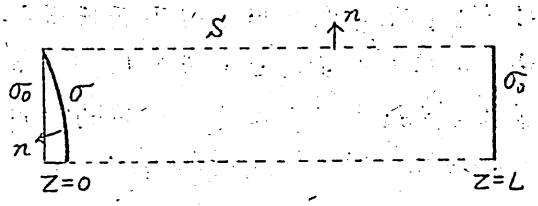
§1 鏡面変形

前章では完全に平行な円形平面鏡共振器の自由振動について考察した。ここでは鏡面にわずかな変形のある場合の自由振動の問題をやはり励振理論の立場から採上げよう。前に我々は平行平面共振器に空胴像を適用して変形がある場合の損失の変化をしらべた。[8] 平行平面共振器に対する変形の問題は、Fox Li[5] により数値的解析が無限長ストリップなどに対して行なわれたが、理論的な解析は空胴像によるもの以外は未だない。これに反し共焦点球面共振器については二三の解析[16][17]がされている。しかし前章にものべたように、空胴像は簡単であるけれども一つの仮定であつて変形の存在する場合にもなお且つよい0次近似であるかどうか不明であり、又そこで得られた定量的な変化も比べるべき他の理論が存在しない。又従来その問題を取扱いうる理論もなかった。我々は前章で励振理論による厳密な取扱いにより、平行平面共振器に対してFox-Liと完全に一致する結果を得たが、鏡面変形に対してもこの励振理論を適用して結果を前に得た空胴像の結果と比較することは大変興味がある。又これは仮定に基づかない理論であるから結果にも信頼性を有する。

取扱いは次のように行なわれる。変形のある場合、方程式にあらわれる変形項を等価励振源におきかえる。変形した鏡面上における場の consistency の条件を励振項に代入することにより、基礎方程式は角量子数 l の異なるモード間の連立方程式を作る。この特性行列方程式の根を求めればその虚部から変形のある場合の回折損失が求められることになる。変形は十分小さいとし、傾斜変形の場合に解を変形の2乗の項まで求める近似を行なう。このようにして求められた結果は（5.59）であつて以前に空胴理論によって見出した

結果[8]と定性的には全く一致することが示される。係数は第1表に与え、第2表には比較のために空胴理論の結果を掲げた。これによって空胴理論は、ここでのべる方法と比べればかなり簡単な取扱いであるが、大体においてそれほど誤った結果に導びかないことが示されたわけである。

§2 基礎方程式



第2章§1と同様に取扱うことが出来る。今の場合励振源はないものとするが、その代りに鏡面変形による項があらわれる。変形した σ 面上では（2·2）に対応し

$$\varphi(X)=0 \quad , \quad X:\ \sigma\text{上} \qquad (5\cdot1)$$

であるとする。

内部の場：Green 函数は（2·11）で与えた変形しない面 σ_0 上で境界値0をとるものを用いる。その時内部の場はGreen の定理によって

$$\varphi_i(X)=\int_{\sigma} G(X|X')\frac{\partial\varphi(X')}{\partial n}d\sigma+\int_{S}\left[G(X|X')\frac{\partial\varphi(X')}{\partial r'}-\frac{\partial G(X|X')}{\partial r'}\varphi(X')\right]dS \qquad (5\cdot2)$$

で与えられる。変形による S の変化は小さいから無視する。

等価励振源：（5·2）では（2·5）と比べるとわかるように励振項 $-\int_{\sigma_0}\frac{\partial G}{\partial n}\varphi d\sigma$ の代りに変形による摂動項 $\int_{\sigma}G\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma$ があらわれている。$r=a$ において

$$\left.\begin{aligned}\int_\sigma G(a\text{-}0|x')\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma &= \frac{i}{2L}\sum_{n\ell\pm}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\varepsilon_\ell\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix}H_\ell(\Lambda_n)\int_\sigma u^{\pm}_{n\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma\\ \int\frac{\partial G(a\text{-}0|x')}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma &= \frac{i}{2L}\frac{1}{a}\sum_{n\ell\pm}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\varepsilon_\ell\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix}\Lambda_n H'_\ell(\Lambda_n)\int_\sigma u^{\pm}_{n\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma\end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot3)$$

但し

$$u^{\pm}_{n\ell}(r.\theta.z)\equiv J_\ell\left(\Lambda_n\frac{r}{a}\right)\begin{Bmatrix}\cos\ell\theta\\ \sin\ell\theta\end{Bmatrix}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \qquad (5\cdot4)$$

である。結局オ2章でえた表式と比べるならば、これは(2·21)における $\psi^{\pm}_{n\ell}$ として

$$\psi^{\pm}_{n\ell}=\frac{1}{n\pi}\frac{L}{a^2}\int_\sigma u^{\pm}_{n\ell}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma d\sigma \qquad (5\cdot5)$$

のように置換えたことと等価であるから、S面上の連続条件は(5·5)を(2·19)に用いたものと同じになる。

連続条件：(2·19)に(5·5)を用いたものとして再掲すれば、

$$\left.\begin{aligned}&2\varepsilon_\ell N H_\ell(\Lambda_n)\psi^{\pm}_{n\ell}+J_\ell(\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)a^{\pm}_{e}-\Lambda_n J_\ell(\Lambda_n)H'_\ell(\Lambda_n)b^{\pm}_{n\ell}\\ &\quad=8N\left\{-\sum_{n'}K_{nn'}a^{\pm}_{n'\ell}+\sum_{n'}L_{nn'}b^{\pm}_{n'\ell}\right\}\\ &2\varepsilon_\ell N\Lambda_n H'_\ell(\Lambda_n)\psi^{\pm}_{n\ell}+\Lambda_n J'_\ell(\Lambda_n)H_\ell(\Lambda_n)a^{\pm}_{n\ell}-\Lambda_n^2 J'_\ell(\Lambda_n)H'_\ell(\Lambda_n)b^{\pm}_{n\ell}\\ &\quad=8N\left\{-\sum_{n'}M_{nn'}a^{\pm}_{n'\ell}+\sum_{n'}N_{nn'}b^{\pm}_{n'\ell}\right\}\\ &\qquad(n,\ell=0.1.2\cdots\cdots)\end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot6)$$

Consistency条件：σ上において

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma=\int_\sigma\frac{\partial G(\sigma|x')}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right]_\sigma d\sigma+\int_S\left[\frac{\partial G(\sigma|x')}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial r'}-\frac{\partial^2 G(\sigma|x')}{\partial n\partial r'}\varphi(x')\right]dS \qquad (5\cdot7)$$

が要求される。但しここで φ_i は単に φ と書いた。オ2項は (2·15) (2·16) (2·11) によって $\{a_{n\ell}^{\pm}\}\{b_{n\ell}^{+}\}$ で書けるから (5·7) は

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma = \int_\sigma \frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma d\sigma + \frac{i\pi}{2}\sum_{n,k,\pm}\left\{H_k(\lambda_{n'})a_{n'k}^{\pm} - \lambda_{n'}H_k'(\lambda_{n'})b_{n'k}^{\pm}\right\}\left[\frac{\partial u_{n'k}^{\pm}}{\partial n}\right]_\sigma \tag{5·8}$$

とも書かれる。

近似解法 ： 以上により、我々の解くべき問題は、(5·5)(5·6)(5·8)を連立方程式とみなして $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma$, $\{a_{n\ell}^{\pm}\}$ $\{b_{n\ell}^{\pm}\}$ を決定することである。

これらを解くことは、変形は波長に比して小さく変形の効果は小さいものとして逐次近似法によって行なうことが出来る。したがって損失に関するかぎり、無変形の時と同様異なるn間の結合は無視してよいから、以下ではnは固定して書かないことにする。(つまりオ4章の時と同様 $n=n_0$ のみに注目する)。今考えているモードの角変数に対する量子数を ℓ とし、一般のモードの角量子数は便宜上 k と記す。しかるとき: $a_\ell^{\pm}$ $b_\ell^{\pm}$ は変形の0次の order の微小量とすると $a_k^{\pm}$ $b_k^{\pm}$ 等は、1次の order であると考えられる。その時 (5·8) において1次の order までを問題にするならば、オ1項は1次、オ2項は0次+1次の形であるから、オ1項の $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma$ としてオ2項における0次の項 $k=\ell$ の項を代入して (5·8) の右辺全体を $\{a_k\}$ $\{b_k\}$ のみであらわし、2次以上の高次の項は無視することにすると (5·8) は

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_\sigma = \frac{i\pi}{2}\left\{H_\ell a_\ell - \lambda H_\ell' b_\ell\right\}\left[\frac{\partial u_\ell}{\partial n}\right]_\sigma$$

$$+\frac{i\pi}{2}\sum_{k\neq\ell}\left\{H_k a_k - \lambda H_k' b_k\right\}\left[\frac{\partial u_k}{\partial n}\right]_\sigma$$

$$+\frac{i\pi}{2}\left\{H_\ell a_\ell - \lambda H_\ell' b_\ell\right\}\int_\sigma \frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial n}\left[\frac{\partial u_\ell}{\partial n}\right]_\sigma d\sigma \tag{5·9}$$

と書ける。第1項は変形について0次、第2,第3項は1次の項である。ここで $a_k^{\pm}$, $b_k^{\pm}$ および和についてすべて±の記号をおとしたが、これは後述する理由によって±を固定して考えることが出来る。からである。したがって以下でも±をすべて書かないことにする。

(5·9) を (5·5) に代入すると次の2つの型の表面積分があらわれる。傾斜変形に対してそれらは次節§3で計算されるが結果を先に与えると、

$$\int u_k \frac{\partial u_{k'}}{\partial n} d\sigma \sim \int \frac{\partial u_k}{\partial n} u_{k'} d\sigma \sim -\frac{2\pi^2 K a^2}{L} D_{kk'} \qquad (5\cdot10)$$

$$\int_\sigma u_k(\sigma) \int_{\sigma'} \frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial n} \frac{\partial u_{k'}(\sigma')}{\partial n'} d\sigma' d\sigma \sim i \frac{2\pi^2 K^2 a^4}{L} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Delta_{kk'} \qquad (5\cdot11)$$

の型であって、Kは傾斜変形のパラメタ、$D_{kk'}$, $\Delta_{kk'}$ は§3 (5·20) (5·27) で与えられる積分である。$D_{kk'}$ は $k'=k\pm1$, 又 $\Delta_{kk'}$ は $k'=k$, $k\pm2$ の時以外は0になる。つまりそれぞれ転移則 $\Delta k=\pm1$, $\Delta k=0, \pm2$ をもっている。

(5·9) を (5·5) に代入して (5·10)(5·11) を用いれば、

$$\psi_k = \frac{L}{n\pi} \frac{1}{a^2} \int_\sigma u_\ell \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]_\sigma d\sigma$$

$$= -i\pi^2 K \sum_{k=\ell\pm1} D_{\ell k} \{ H_\ell a_k - \Lambda H_k' b_k \}$$

$$- 2\pi^4 K^2 N \Delta_{\ell\ell} \{ H_\ell a_\ell - \Lambda H_\ell' b_\ell \} \qquad (5\cdot12)$$

$$\psi_k = \frac{1}{n\pi} \frac{1}{a^2} \int_\sigma u_k \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]_\sigma d\sigma$$

$$= -i\pi^2 K D_{k\ell} \{ H_\ell a_\ell - \Lambda H_\ell' b_\ell \} \quad (k=\ell\pm1) \qquad (5\cdot13)$$

となる。ここで (5·13) において $\ell\pm2$ からの寄与を加えなかったのは (5·9) ではKについて、1次までを問題にし、したがって、(5·5) で与えられる ψ_k は2次までしか問題にしないから、(5·10)

(5·11) の転移則からわかるように $a_{l\pm2}$, $b_{l\pm2}$ は K^2 の order であり、それらの (5·13) への寄与は3次になるからである。
又同じ近似の範囲内で

$$\int_\sigma u_K \frac{\partial u_K}{\partial n} d\sigma$$

は0とおいている。更に (5·13) で ψ_K として $k=l\pm1$ に限ったのも上と同様な理由によるものである。したがってその他の ψ_k は我々の近似では0である。

以上を考慮するならば、この近似においては、l, $l\pm1$ モードのみで閉じた方程式系をうる。これが鏡面変形に対する自由振動の基礎方程式である。即ち (5·6) において異なる n の結合を無視したものに (5·12) (5·13) を代入して

$$\left.\begin{aligned}
&\left[J_l(\Lambda)H_l(\Lambda)+8NK_{nn}\right]a_l-\left[\Lambda J_l(\Lambda)H_l'(\Lambda)+8NL_{nn}\right]b_l\\
&\quad=4\pi^4K^2N^2\varepsilon_l\Delta_{ll}H_l(\Lambda)\left[H_l(\Lambda)a_l-\Lambda H_l'(\Lambda)b_l\right]\\
&\quad+i2\pi^2KN\varepsilon_l\sum_{k=l\pm1}D_{lk}H_l(\Lambda)\left[H_k(\Lambda)a_k-\Lambda H_k'(\Lambda)b_k\right]\\
&\left[\Lambda J_l'(\Lambda)H_l(\Lambda)+8NM_{nn}\right]a_l-\left[\Lambda^2J_l'(\Lambda)H_l'(\Lambda)+8NN_{nn}\right]b_l\\
&\quad=4\pi^4K^2N^2\varepsilon_l\Delta_{ll}\Lambda H_l'(\Lambda)\left[H_l(\Lambda)a_l-\Lambda H_l'(\Lambda)b_l\right]\\
&\quad+i2\pi^2KN\varepsilon_l\sum_{k=l\pm1}D_{lk}\Lambda H_l'(\Lambda)\left[H_k(\Lambda)a_k-\Lambda H_k'(\Lambda)b_k\right]
\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot14)$$

および $k=l\pm1$ に対し

$$\left.\begin{aligned}
&\left[J_k(\Lambda)H_k(\Lambda)+8NK_{nn}\right]a_k-\left[\Lambda J_k(\Lambda)H_k'(\Lambda)+8NL_{nn}\right]b_k\\
&\quad=i2\pi^2KN\varepsilon_kD_{kl}H_k(\Lambda)\left[H_l(\Lambda)a_l-\Lambda H_l'(\Lambda)b_l\right]\\
&\left[\Lambda J_k'(\Lambda)H_k(\Lambda)+8NM_{nn}\right]a_k-\left[\Lambda^2J_k'(\Lambda)H_l'(\Lambda)+8NN_{nn}\right]b_k\\
&\quad=i2\pi^2KN\varepsilon_kD_{kl}\Lambda H_k'(\Lambda)\left[H_l(\Lambda)a_l-\Lambda H_l'(\Lambda)b_l\right]
\end{aligned}\right\}(5\cdot15)$$

勿論、更に近似をあげるならば l, $l\pm1$, $l\pm2$ のモードに関した閉じた方程式を取扱うことになるであろう。又(2.19)のように電流による励振項をも付加えるならば、鏡の傾斜した場合の励振をも取扱うことが出来るが、その場合には一般にすべての l, n, $\pm$ に対する方程式を考えねばならない。

<u>±モードの分離</u>：ここで(5.9)以下(5.14)(5.15)で±を固定した理由をのべる。±モードが分離していなければ、基礎方程式では a_l, b_l, a_k, b_k ($k=l\pm1$) はすべて $a_l^{\pm}$, $b_l^{\pm}$, $a_k^{\pm}$, $b_k^{\pm}$ であって、D_{lk}, Δ_{ll}, は(5.20)(5.27)のように±間の結合を許すから、基礎方程式(5.14)(5.15)の右辺では k および l についての±の和をとらねばならず、又、方程式は+,− 両にも連立して存在するから連立方程式の数は倍増する。したがってこの斉次方程式の特性行列式は12次元になる。

しかしながら、次節でのべる計算から((5.21)および附録4参照)わかるように(5.18)で定義するモード軸と鏡面の最大傾斜線とのなす角 φ が $\varphi=0$ であれば、+,−モード、つまりcosモードとsinモードとの間の結合は0になるので上の連立方程式系は+,−で分離し、解くべき特性行列方程式も因数分解して次数が半減する。一般には我々は $\varphi\neq0$ の場合を取わねばならないわけであるが、(5.21)の $\theta_{kk'}$ の積分の形からもわかるように、モードの方を角 φ だけ回転させるならば、これは $\varphi=0$ とおいたことと同等であり、しかも各 k モードの角 φ の回転は u_k^+, u_k^- に対するユニタリ変換、したがって又これはベクトル a_k^+, a_k^-, b_k^+, b_k^- 間の同時ユニタリ変換と同等である。一般に特性行列式自身はユニタリ変換で変化しないから、勿論特性根も変化しない。したがって一般に $\varphi\neq0$ の場合にも、モードの方を φ だけ回転させることによって特性行列式は常に因数分解することがわかる。これは、はじめから $\varphi=0$ とおいたことと同等であるから、我々は常に $\varphi=0$ であって±モードは方程式で分離していると考えることができる。これが上に±を固定して考えた理由である。従って+モードに対する方程式と−モードに対する方程式とが異なる場合がありうる。この時は特性根が+と−とに対して一般に異なる

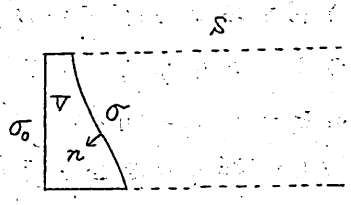
値をとる。これを±モードの縮退がとれたと称する。$\ell=1$ モードに対するこの例が後に見られるであろう。いうまでもなく、今説明したことは固有値問題における縮退した摂動論において、無摂動状態をまず摂動行列の対角化によって定めることに全く対応している。

§3 表面積分

(A) (5·10)で与えた積分は次のように計算出来る。(5·4)で定義した函数 $u^{\pm}_{n\ell}(r,\theta,z)$ は

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla^2+\omega^2)\,u^{\pm}_{n\ell}(r,\theta,z)=0\\&u^{\pm}_{n\ell}(\sigma_0)=0\end{aligned}\right\}\qquad(5\cdot16)$$

を満足する。ここでは n は固定して考えているから以下では略して書く。± は一応 k,k' に含めてあるものと考える。文献8) と同様に右図の変形によって出来た領域 V に Green の第1公式を適用すると



$$-\int u_k\frac{\partial u_{k'}}{\partial n}d\sigma=\int_V(\nabla u_k\cdot\nabla u_{k'}-\omega^2u_ku_{k'})dV$$

$$\sim\int_V\frac{\partial u_k}{\partial z}\frac{\partial u_{k'}}{\partial z}dV=\int_{\sigma_0}\frac{\partial u_k}{\partial z}\frac{\partial u_{k'}}{\partial z}z(r,\theta)r\,dr\,d\theta\qquad(5\cdot17)$$

傾斜変形に対しては

$$\sigma:\quad z(r,\theta)=K\frac{\lambda}{a}r\cos(\theta-\varphi)=K\frac{2L}{n}r\cos(\theta-\varphi)\qquad(5\cdot18)$$

ここに K は最大変形距離の波長 λ に対する比である。従って (5·17) は (5·4) を用いると

$$-\int u_k\frac{\partial u_{k'}}{\partial n}d\sigma=2K\frac{n\pi^2a^2}{L}D_{kk'}\qquad(5\cdot19)$$

但し、

$$D_{kk'} \equiv \theta_{kk'}(\varphi)\, I_{kk'}(\Lambda) \tag{5.20}$$

$$\theta_{kk'}(\varphi) = \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos k'\theta \\ \sin k'\theta \end{Bmatrix} \cos(\theta - \varphi)\, d\theta \tag{5.21}$$

$$I_{kk'}(\Lambda) = \int_0^1 J_k(\Lambda x)\, J_{k'}(\Lambda x)\, x^2 dx \tag{5.22}$$

で $\theta_{kk'}$ の積分は $u_k^{\pm}$, $u_{k'}^{\pm}$ の組合わせによる variety がある。積分の値は附録4に与えてあるように $k' = k \pm 1$ でないかぎり消える。又 $\varphi = 0$ の時には ± の向の積分、つまり $\cos k\theta \sin k'\theta$ の組合わせに対しても消える。従って、積分 I_{lk} は $k = l \pm 1$ に対して附録5に与えられているように、

$$\left.\begin{aligned} I_{l,l+1}(\Lambda) &= \frac{1}{2\Lambda}\left[l J_l^2(\Lambda) - (l+1) J_{l-1}(\Lambda) J_{l+1}(\Lambda)\right] \\ I_{l,l-1}(\Lambda) &= \frac{1}{2\Lambda}\left[(l-1) J_{l-1}^2(\Lambda) - l J_{l-2}(\Lambda) J_l(\Lambda)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

(B) (5.11) で与えた積分は次のように計算される。

$$\int_\sigma u_k(\sigma) \int_{\sigma'} \frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial n} \frac{\partial u_{k'}(\sigma')}{\partial n'} d\sigma d\sigma' \sim \int_\sigma u_k(\sigma) \int_{\sigma'} \frac{\partial G(0|\sigma')}{\partial z} \frac{\partial u_{k'}(0)}{\partial z'} d\sigma d\sigma' \tag{5.24}$$

であるが、± で展開する必要のあるのは* ($z = 0$ を単に 0 で記す)

$$u_k(\sigma) \sim \frac{\partial u_k(0)}{\partial z} z(r, \theta)$$

$$\frac{\partial G(0|\sigma')}{\partial z} \sim \frac{\partial^2 G(0|0)}{\partial z \partial z'} z(r', \theta')$$

従って上の2重積分は

---

* これは (5.17) のようなやり方で求めても同じである。

$$\sim \int_{\sigma_0} \frac{\partial u_k(0)}{\partial z} z(r,\theta) \int_{\sigma_0} \frac{\partial^2 G(0|0)}{\partial z \partial z'} \frac{\partial u_{k'}(0)}{\partial z'} z(r',\theta') d\sigma_0 d\sigma_0 \tag{5.25}$$

となる。$G(X|X')$に(2.11)を用い(5.4)(5.18)を代入して積分すれば結局

$$\int_\sigma u_k \int_\sigma \frac{\partial G(\sigma|\sigma')}{\partial n} \frac{\partial u_{k'}}{\partial n'} d\sigma d\sigma \sim i \frac{2\pi^2 K^2 a^4}{L} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Delta_{kk'} \tag{5.26}$$

但し

$$\Delta_{kk'} \equiv \sum_{k''} \varepsilon_{k''} \theta_{kk''}(\varphi) \theta_{k''k'}(\varphi) I_{kk''k'} \tag{5.27}$$

$$I_{kk''k'}(\Lambda) = \int_0^1 \int_0^1 J_k(\Lambda x) \begin{cases} J_{k''}(\Lambda x) H_{k''}(\Lambda x') \\ H_{k''}(\Lambda x) J_{k''}(\Lambda x') \end{cases}_{x>x'}^{x'>x} J_{k'}(\Lambda x') x^2 dx\, x'^2 dx' \tag{5.28}$$

で与えられる。ここで$\theta_{kk''}$は(5.21)で与えられる積分であって$k''=k\pm1$の時以外は0になる。従がって$\Delta_{kk'}$は$k'=k, k\pm2$の時以外は0になる。つまり転移則$\Delta k = 0, \pm 2$をもつわけである。又$\theta_{kk''}$は$u_k^{\pm}, u_{k''}^{\pm}$の組合わせによるvarietyがあるから(5.27)のk''の和の中には±に関する和もあらわれるものとする。特に$\varphi=0$の時は前と同様±の間の結合はなくなるから、$\theta_{kk''}\theta_{k''k'}$を通じて±は一定である。§2で述べた近似においては(5.12)におけるΔ_{ll}としてしかあらわれないから、この時の(5.27)(5.28)を(5.22)等を用いてもう少し具体的に書いておく。

$$\Delta_{ll} = \sum_{k=l\pm1} \varepsilon_k \theta_{lk}(\varphi) \theta_{kl}(\varphi) \left\{ \left[I_{lkl}(\Lambda) \right]^2 + i J_{lk}(\Lambda) \right\} \tag{5.29}$$

但し、

$$J_{lk}(\Lambda) \equiv 2 \int_0^1 x^2 dx\, J_l(\Lambda x) N_k(\Lambda x) \int_0^x J_k(\Lambda x') J_l(\Lambda x') x'^2 dx' \tag{5.30}$$

$(k=l\pm1)$

は(5.28)にあらわれる2重積分であるが附録5(A.19)を用いれば1重積分に直すことが出来る。

$$J_{l\,l+1}(\Lambda)=\frac{l}{\Lambda}\int_0^1 J_l^3(\Lambda x)N_{l+1}(\Lambda x)x^4dx-\frac{(l+1)}{\Lambda}\int_0^1 J_{l-1}(\Lambda x)J_l(\Lambda x)J_{l+1}(\Lambda x)N_{l+1}(\Lambda x)x^4dx \tag{5·31}$$

$$J_{l\,l-1}(\Lambda)=\frac{(l-1)}{\Lambda}\int_0^1 J_{l-1}^2(\Lambda x)J_l(\Lambda x)N_{l-1}(\Lambda x)x^4dx-\frac{l}{\Lambda}\int_0^1 J_{l-2}(\Lambda x)J_l^2(\Lambda x)N_{l-1}(\Lambda x)x^4dx \tag{5·32}$$

この積分は explicit に求めることは困難なので、後に必要なΛの値に対し数値積分を行なう。

(5·29)の $k=l\pm1$ についての和は θ_{lk} の± に関する和も含んでいるが、もし $\varphi=0$ であれば上の注意によって、±は一定であって和をとらないから $\theta_{lk}\theta_{kl}=[\theta_{lk}]^2$ となり、(5·29)は(5·20)を用いると

$$\Delta_{ll}=\sum_{k=l\pm1}\varepsilon_k D_{lk}^2+i\sum_{k=l\pm1}\varepsilon_k\theta_{lk}^2 J_{lk} \tag{5·33}$$

と書けることに注意しよう。

§4 特性行列式と特性根

特性行列方程式

星避方程式(5·14)(5·15)は当然ながら無変形 $K=0$ の時には(4·5)に帰着し、その特性行列方程式は(4·9)で与えられる。しかしながら変形のある $K\neq0$ の時には(4·9)の特性根はKの函数として変化をうけるであろう。(5·14)(5·15)の斉次連立方程式の特性行列式の根はそのような変化をあらわすものを含んでいるはずである。そのような根のうち $K\to0$ で考えているlモードの(4·9)の特性根に一致するものを求める必要がある。したがっていきなり(5·14)(5·15)の特性行列式を作ると、不要の根があらわれるおそれがあるから、次のように変形して求める。即ち(5·15)から a_k, b_k ($k=l\pm1$) を解いて a_l, b_l であらわし、それを(5·14)に代入して a_k, b_k, $k=l\pm1$ を消去すれば a_l b_l のみの2階の斉次方程式を得る。それが(4·9)に対応するものであるから、その特

性行列方程式の根が求めるものである。

さてそのような操作を（5·14）（5·15）のような複雑な式において実行することは一見煩わしく思われるが、次のように行列の形に書いて行なえば容易に何の近似を行なうことなく簡単な結果に到達出来る。

（5·14）（5·15）を次のように書くとわかりやすい。

$$\left.\begin{aligned} A_\ell a_\ell + B_\ell b_\ell &= \sum_{k=\ell,\ell\pm1} E_{\ell k} a_k + \sum_k F_{\ell k} b_k \\ C_\ell a_\ell + D_\ell b_\ell &= \sum_{k=\ell,\ell\pm1} G_{\ell k} a_k + \sum_k H_{\ell k} b_k \end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot34)$$

$$\left.\begin{aligned} A_k a_k + B_k b_k &= E_{k\ell} a_\ell + F_{k\ell} b_\ell \\ C_k a_k + D_k b_k &= G_{k\ell} a_\ell + H_{k\ell} b_\ell \end{aligned}\right\} \quad (k=\ell\pm1) \qquad (5\cdot35)$$

あるいは行列形に書いて

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_\ell \begin{pmatrix} a_\ell \\ b_\ell \end{pmatrix} = \sum_{k=\ell,\ell\pm1} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{\ell k} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \qquad (5\cdot36)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{k\ell} \begin{pmatrix} a_\ell \\ b_\ell \end{pmatrix} \quad k=\ell\pm1 \qquad (5\cdot37)$$

但し、ここで（　）の下の添字は行列要素に付くべき添字である。

又（5·34）（5·35）と（5·14）（5·15）とを比べれば

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} J_k H_k + a & \Lambda J_k H_k' + b \\ \Lambda J_k' H_k + c & \Lambda^2 J_k H_k' + d \end{pmatrix} \quad k=\ell,\ell\pm1 \qquad (5\cdot38)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv 8N \begin{pmatrix} K_{nn} & L_{nn} \\ M_{nn} & N_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5\cdot39)$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{\ell\ell} = 4\pi^2 K^2 N^2 \varepsilon_\ell \Delta_{\ell\ell} \begin{pmatrix} H_\ell H_\ell & \Lambda H_\ell H_\ell' \\ \Lambda H_\ell' H_\ell & \Lambda^2 H_\ell' H_\ell' \end{pmatrix} \qquad (5\cdot40)$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{\ell k} = i2\pi^2 K N \varepsilon_\ell D_{\ell k} \begin{pmatrix} H_\ell H_k' & \Lambda H_\ell H_k' \\ \Lambda H_\ell' H_k & \Lambda^2 H_\ell' H_k' \end{pmatrix}$$

$$= i2\pi^2 K N \varepsilon_\ell D_{\ell k} \begin{pmatrix} H_\ell & \\ & \Lambda H_\ell' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k & \\ & \Lambda H_k' \end{pmatrix} \quad (5\cdot41)$$

$k = \ell \pm 1$

さてここで上にのべた処方に従って (5·37) を (5·36) に代入して a_k, b_k を消去し、その特性行列式をつくれば、

$$\Delta = \left| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_\ell - \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{\ell\ell} - \sum_{k=\ell\pm1} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{\ell k} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_k^{-1} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}_{k\ell} \right| \quad (5\cdot42)$$

但し

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_k^{-1} = \frac{1}{\Delta_k} \begin{pmatrix} \Lambda^2 J_k' H_k' + a & -\Lambda J_k H_k' - b \\ -\Lambda J_k' H_k - c & J_k H_k + a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta_k} \left[\begin{pmatrix} \Lambda H_k' & \\ & H_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda J_k' & \\ & J_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] \quad (5\cdot43)$$

$$\Delta_k \equiv \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}_k \qquad k = \ell,\ \ell\pm1 \quad (5\cdot44)$$

(5·41)(5·43) で行列を素因子に分解したのは、次に行なう行列の計算をわかりやすくするためである。(5·42) の中の第3項にあらわれる行列の積を (5·41)(5·43) を用いて計算する時、次の形の行列の積

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k & \\ & \Lambda H_k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda H_k' & \\ & H_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k & \\ & \Lambda H_k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k & \\ & \Lambda H_k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[a H_k^2 - (b+c) \Lambda H_k H_k' + a \Lambda^2 (H_k')^2 \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

があらわれることを用いるならば、(5·42)の中の第3項は第2項の行列(5·40)と同じ形になることがわかり、結局(5·42)は次のようになる。

$$\Delta = \left| \begin{pmatrix} J_\ell H_\ell + a & \Lambda J_\ell H_{\ell'} + b \\ \Lambda J_{\ell'} H_\ell + c & \Lambda^2 J_{\ell'} H_{\ell'} + d \end{pmatrix} + (\mu-\mu') \begin{pmatrix} H_\ell^2 & \Lambda H_\ell H_{\ell'} \\ \Lambda H_\ell H_{\ell'} & (\Lambda H_{\ell'})^2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} J_\ell H_\ell + a & \Lambda J_\ell H_{\ell'} + b \\ \Lambda J_{\ell'} H_\ell + c & \Lambda^2 J_{\ell'} H_{\ell'} + d \end{vmatrix} + (\mu-\mu')^2 \begin{vmatrix} H_\ell^2 & \Lambda H_\ell H_{\ell'} \\ \Lambda H_\ell H_{\ell'} & (\Lambda H_{\ell'})^2 \end{vmatrix}$$

$$+ (\mu-\mu') \begin{vmatrix} J_\ell H_\ell & \Lambda H_\ell H_{\ell'} \\ \Lambda J_{\ell'} H_\ell & (\Lambda H_{\ell'})^2 \end{vmatrix} + (\mu-\mu') \begin{vmatrix} H_\ell^2 & \Lambda J_\ell H_{\ell'} \\ \Lambda H_\ell H_{\ell'} & \Lambda^2 J_{\ell'} H_{\ell'} \end{vmatrix}$$

$$+ (\mu-\mu') \begin{vmatrix} a & \Lambda H_\ell H_{\ell'} \\ c & (\Lambda H_{\ell'})^2 \end{vmatrix} + (\mu-\mu') \begin{vmatrix} H_\ell^2 & b \\ \Lambda H_\ell H_{\ell'} & d \end{vmatrix} \qquad (5.45)$$

第1項は(5·44)によるΔ_ℓであり、第2項は0、第3、第4項は打消しあうので結局<u>特性行列方程式</u>は、次のように簡単化された。

$$\Delta = \Delta_\ell + (\mu-\mu')\left[d H_\ell^2 - (b+c)\Lambda H_\ell H_{\ell'} + a\Lambda^2 (H_{\ell'})^2 \right] = 0 \qquad (5.46)$$

但し、

$$\mu \equiv 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_\ell \sum_{k=\ell\pm1} \frac{\varepsilon_k D_{\ell k}^2}{\Delta_k} \left[d H_k^2 - (b+c)\Lambda H_k H_{k'} + a\Lambda^2 (H_{k'})^2 \right] \qquad (5.47)$$

$$\mu' \equiv 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_\ell \Delta_{\ell\ell}$$

$$= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_\ell \left[\sum_{k=\ell\pm1} \varepsilon_k D_{\ell k}^2 + i \sum_{k=\ell\pm1} \varepsilon_k \theta_{\ell k}^2 J_{\ell k} \right] \qquad (5.48)$$

(5·48)では(5·33)を用いた。

いうまでもなく(5·46)は$K=0$の時$\Delta_\ell = 0$　即ち(4·9)に帰着する。

特性行列方程式の根

上に導いた方程式（5·46）の根を求めれば変形のある場合の損失が求められる。基礎方程式（5·14）(5·15)では K^2 の order までの近似であったから（5·46）の根も K^4 の order の効果は無視して求める。

まず必要な近似を行なう。（5·39）で定義した a b c d に対し、（2·57）(2·60)(2·63) で与えられる α についてのベキ展開を利用する。（5·44）で定義される Δ_k は（4·12）に対応した式であって

$$\frac{\Delta_k}{\alpha} = \left[J_k(\Lambda) H_k(\Lambda) + (1-i)\varepsilon\alpha + O(\alpha^2) \right] \quad k = l, l\pm 1 \tag{5·49}$$

$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{3\pi^2} + \frac{1}{2\pi}\right) \simeq 0.36878 \tag{5·50}$$

と書けるから（5·47）は（5·49）を用いると α のベキ展開として

$$\begin{aligned}\mu &= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \frac{\alpha}{\Delta_k}\left[H_k^2(\Lambda) + O(\alpha^2) \right] \\ &= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \left[\frac{H_k}{J_k} - \frac{\varepsilon(1-i)\alpha}{J_k^2} + O(\alpha^2) \right] \\ &\simeq 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \left[1 - \frac{\varepsilon\alpha}{J_k^2} + i\left(\frac{N_k}{J_k} + \frac{\varepsilon\alpha}{J_k^2}\right) + O(\alpha^2) \right]\end{aligned} \tag{5·51}$$

のようにあらわされる。故に（5·48）を用いれば

$$\begin{aligned}\mu - \mu' &= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \left[-\sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \frac{\varepsilon\alpha}{J_k^2} + i\left\{ \sum_k \varepsilon_k D_{lk}^2 \left(\frac{N_k}{J_k} + \frac{\varepsilon\alpha}{J_k^2} \right) - \sum \varepsilon_k \theta_{lk}^2 J_{lk} \right\} \right] \\ &= 4\pi^4 K^2 N^2 \varepsilon_l \sum_{k=l\pm1} \varepsilon_k \theta_{lk}^2 \left[-I_{lk}^2 \frac{\varepsilon\alpha}{J_k^2} + i\left\{ I_{lk}^2 \left(\frac{N_k}{J_k} + \frac{\varepsilon\alpha}{J_k^2} \right) - J_{lk} \right\} \right]\end{aligned} \tag{5·52}$$

となる。ここで $O(\alpha^2)$ は無視し、又（5·20）を用いた。

（5·49）(5·52) の近似を用いれば、特性行列方程式（5·46）は

$$J_l(\Lambda) H_l(\Lambda) + (1-i)\varepsilon\alpha + (\mu - \mu') H_l^2(\Lambda) = 0 \tag{5·53}$$

となる。この根を（4·14）のように $\Lambda = \Lambda_{\ell m}(1+\delta)$ とおいて求める。今は簡単のために根は $O(\alpha^2)$ を無視して求めることにするが変形に関しては $K^2N^2\alpha$ の order までとし $K^2N^2\alpha^2$ は無視する近似とする。このためにはやはり Bessel 函数は $\Lambda = \Lambda_{\ell m}$ の近傍で2次までの展開が必要である。計算の詳細は附録6に示す。このようにして（5·23）の特性根として、上の近似の範囲内で

$$\delta \simeq -\frac{\pi}{2}\left\{(1+i)\varepsilon\alpha - i(\mu-\mu')N_\ell^2(\Lambda_{\ell m}) - 2(\mu-\mu')(1-i)\varepsilon\alpha\frac{\pi}{4}N_\ell^2(\Lambda_{\ell m})\left[(1-2\ell)+\pi\Lambda_{\ell m}^2 J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m})N_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m})\right]\right\} \tag{5·54}$$

が与えられる。ここで $(\mu-\mu')$ の実部は（5·52）によって $K^2N^2\alpha$ の大きさ、虚部は K^2N^2 の大きさであることを考慮している。（5·54）の第1項はいうまでもなく（4·15）の第1項に等しい。第2項以下は変形による効果である。

§5 回折損失

回折損失は（4·18）によって我々の近似では（5·54）の虚部で与えられる。（5·54）に（5·52）を代入して虚部をとれば我々の近似の範囲において

$$\begin{aligned}-\vartheta_m(\delta) &= \frac{\pi}{2}\left\{\varepsilon\alpha - R_\ell(\mu-\mu')N_\ell^2(\Lambda_{\ell m}) - 2\vartheta_m(\mu-\mu')\varepsilon\alpha\frac{\pi}{4}N_\ell^2(\Lambda_{\ell m})\left[(1-2\ell)+\pi\Lambda_{\ell m}^2 J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m})N_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m})\right]\right\} \\ &= \frac{\pi}{2}\varepsilon\alpha\left\{1 + 4\pi^4K^2N^2\varepsilon_\ell\sum_{k=\ell+1}\varepsilon_k\theta_{\ell k}^2\left[I_{\ell k}^2\frac{N_\ell^2(\Lambda_{\ell m})}{J_k^2(\Lambda_{\ell m})} + 2\left[J_{\ell k} - I_{\ell k}^2\frac{N_k(\Lambda_{\ell m})}{J_k(\Lambda_{\ell m})}\right]\left[(1-2\ell)+\pi\Lambda_{\ell m}^2 J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m})N_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m})\right]\frac{\pi}{4}N_\ell^2(\Lambda_{\ell m})\right]\right\}\end{aligned} \tag{5·55}$$

となる。ここで $I_{\ell k}$ は（5·23）で与えられる積分であるが、今の場合

$$I_{l,l+1}(\Lambda_{lm}) = -\frac{(l+1)}{2\Lambda_{lm}} J_{l+1}(\Lambda_{lm}) J_{l+1}(\Lambda_{lm}) = \frac{(l+1)}{2\Lambda_{lm}} J_{l+1}^2(\Lambda_{lm})$$

$$I_{l,l-1}(\Lambda_{lm}) = \frac{(l-1)}{2\Lambda_{lm}} J_{l-1}^2(\Lambda_{lm}) \qquad (5.56)$$

となる。(5.56)を(5.55)に代入し、又 Lommel の公式を利用して、

$$J_{l\pm1}^2(\Lambda_{lm}) N_l^2(\Lambda_{lm}) = \left(\frac{2}{\pi\Lambda_{lm}}\right)^2 \qquad (5.57)$$

となることなどを用いると(5.55)はいくらか簡単になる。

以上によって 回折損失 $\delta\alpha$ は

$$\delta\alpha = 5.20 \times 10^{-2} \Lambda_{lm}^2 N^{-\frac{3}{2}} \times$$

$$\times \left\{ 1 + 4\pi^4 K^2 N^2 \frac{1}{\Lambda_{lm}^2} \varepsilon_l \sum_{k=l+1} \varepsilon_k \theta_{lk}^2 \left[\frac{k^2}{(\pi\Lambda_{lm})^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\{ 2\Lambda_{lm}^2 J_{lk} - \frac{k^2}{2} J_k^3(\Lambda_{lm}) N_k(\Lambda_{lm}) \right\} \left\{ (1-2l) + \pi\Lambda_{lm}^2 J_{l+1}(\Lambda_{lm}) N_{l+1}(\Lambda_{lm}) \right\} \frac{\pi}{4} N_l^2(\Lambda_{lm}) \right] \right\} \qquad (5.58)$$

で与えられる。ここで θ_{lk} は附録4において $\varphi=0$ として与えられる値であり、J_{lk} は(5.31)(5.32)で与えられる積分であり、$\Lambda=\Lambda_{lm}$ の場合の積分値は附録7に示してある。

結局、共振器の Transit 当りの回折損失 $\delta\alpha$ は傾斜変形のある場合には

$$\delta\alpha = A_{lm} N^{-\frac{3}{2}} + B_{lm} K^2 N^{\frac{1}{2}} \qquad (5.59)$$

$$N \equiv \frac{a^2}{\lambda L} \quad : \quad (\text{Fresnel 数})$$

$$K \equiv \frac{Da}{\lambda} \quad : \quad (\text{変形パラメタ})$$

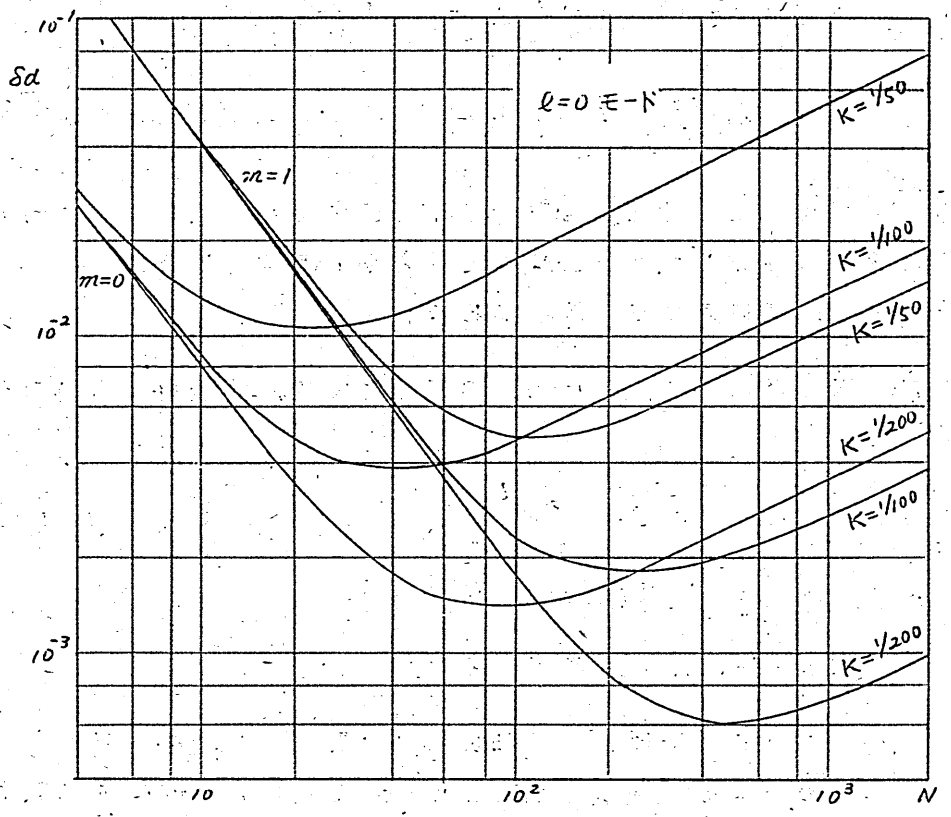
(a：半径、L：軸長、λ：波長、D：傾斜勾配)

の形にまとめられる。A_{lm}、B_{lm} はモード (l,m) に依存する数であって、第1表に示されている。(5.59)の第1項は変形のない時

第1表　$A_{\ell m}$, $B_{\ell m}$ の数値［(5.58)による］

（上段A　下段B
$\ell=1$ では縮退がとれてBが分裂する。
左下がsinモード、右下がcosモード）

m \ ℓ	0	1	2	3
0	0.301 4.16	0.764 3.17　5.99	1.37 7.39	2.12 9.88
1	1.59 0.830	2.56 0.956　1.79	3.69 2.70	4.96 4.15
2	3.90 0.351	5.29 0.478　0.861	7.02 1.41	8.86 2.31
3	7.23 0.192	9.23 0.494	11.4 0.867	13.7 1.49

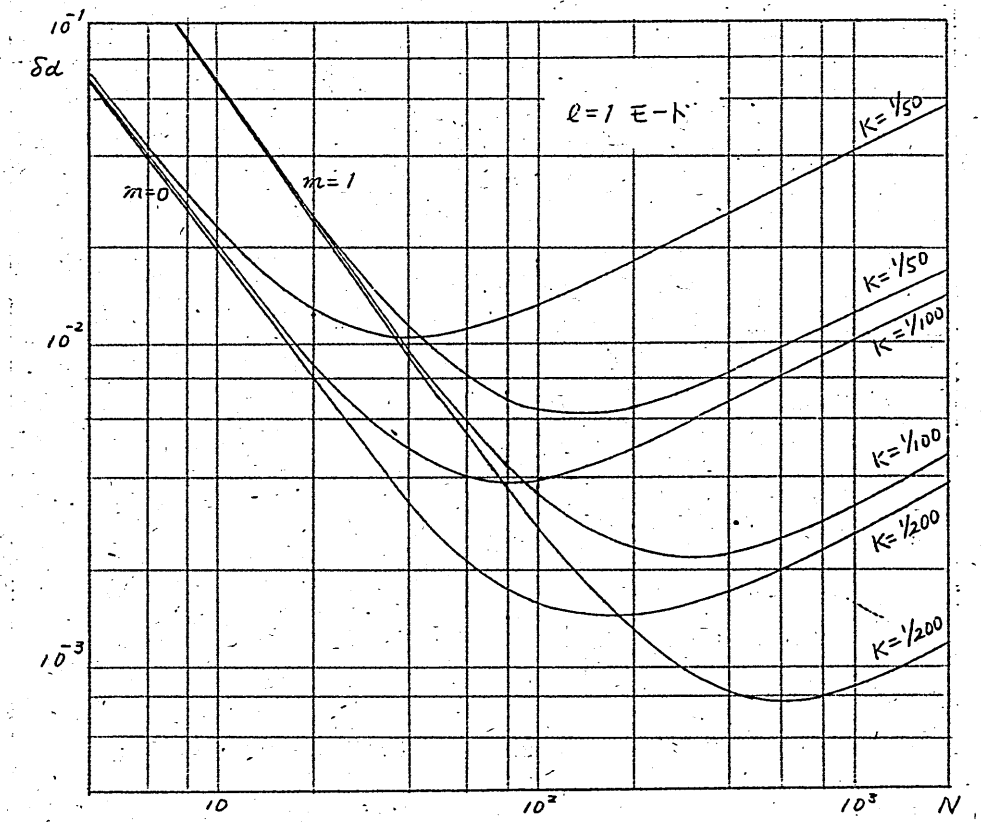


第12図　Nに対する損失の変化ー1　K：波長に対する変形の比

第2表　A_{lm} B_{lm} の数値〔空胴理論による[8]〕

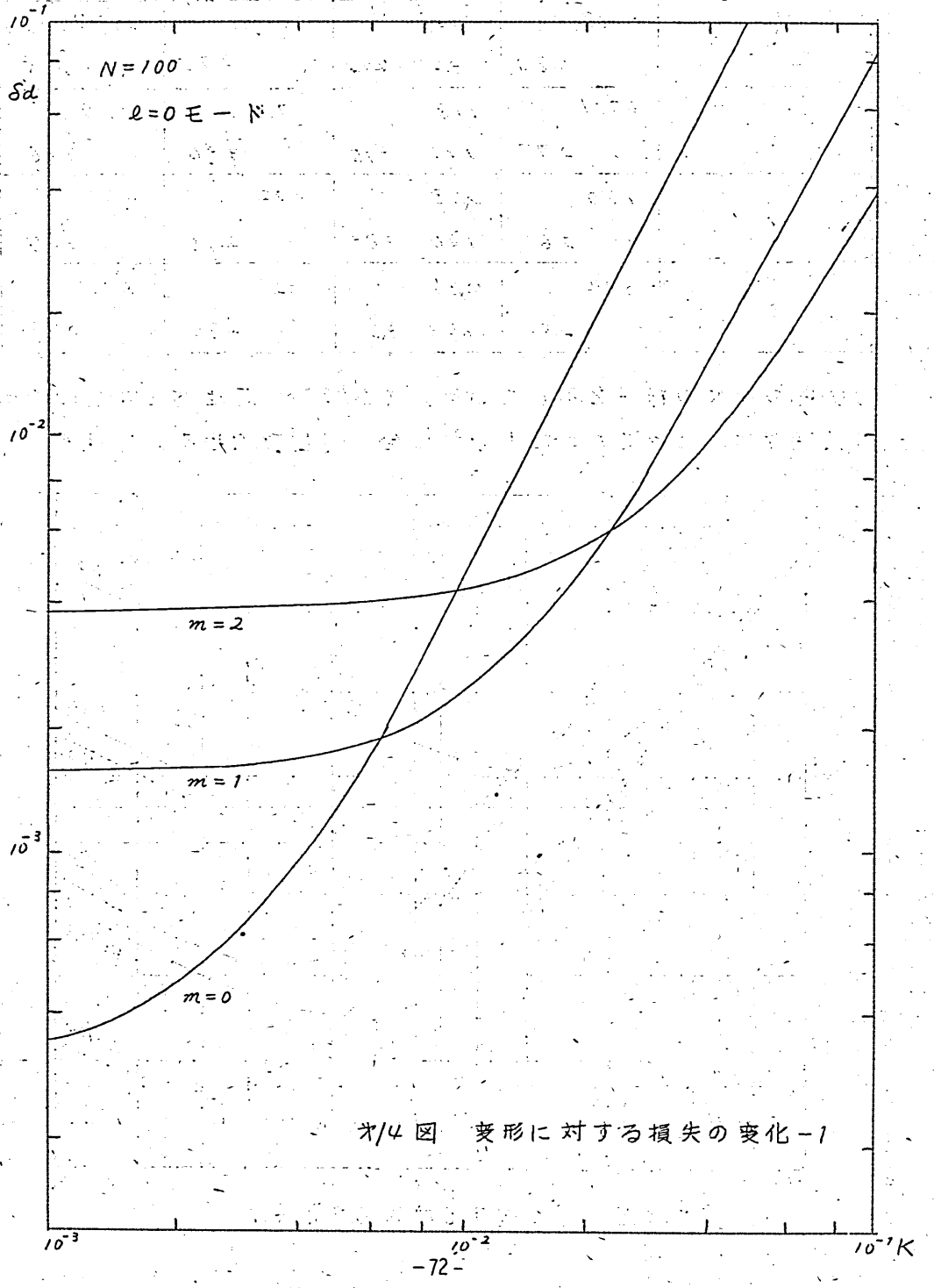
m \ l	0	1	2	3
0	0.138 4.83	0.352 3.45　4.42	0.633 4.75	0.977 5.65
1	0.731 2.77	1.18 1.91　3.95	1.70 3.36	2.29 3.86
2	1.80 2.60	2.48 1.56　3.83	3.24 2.95	4.07 3.27
3	3.34 2.54	4.26 1.43　3.80	5.26 2.78	6.31 2.99

の損失の増大の様子を示している。（5.59）は定性的には前に簡単な空胴理論によって求めたもの[8]と全く同じ形である。比較のため



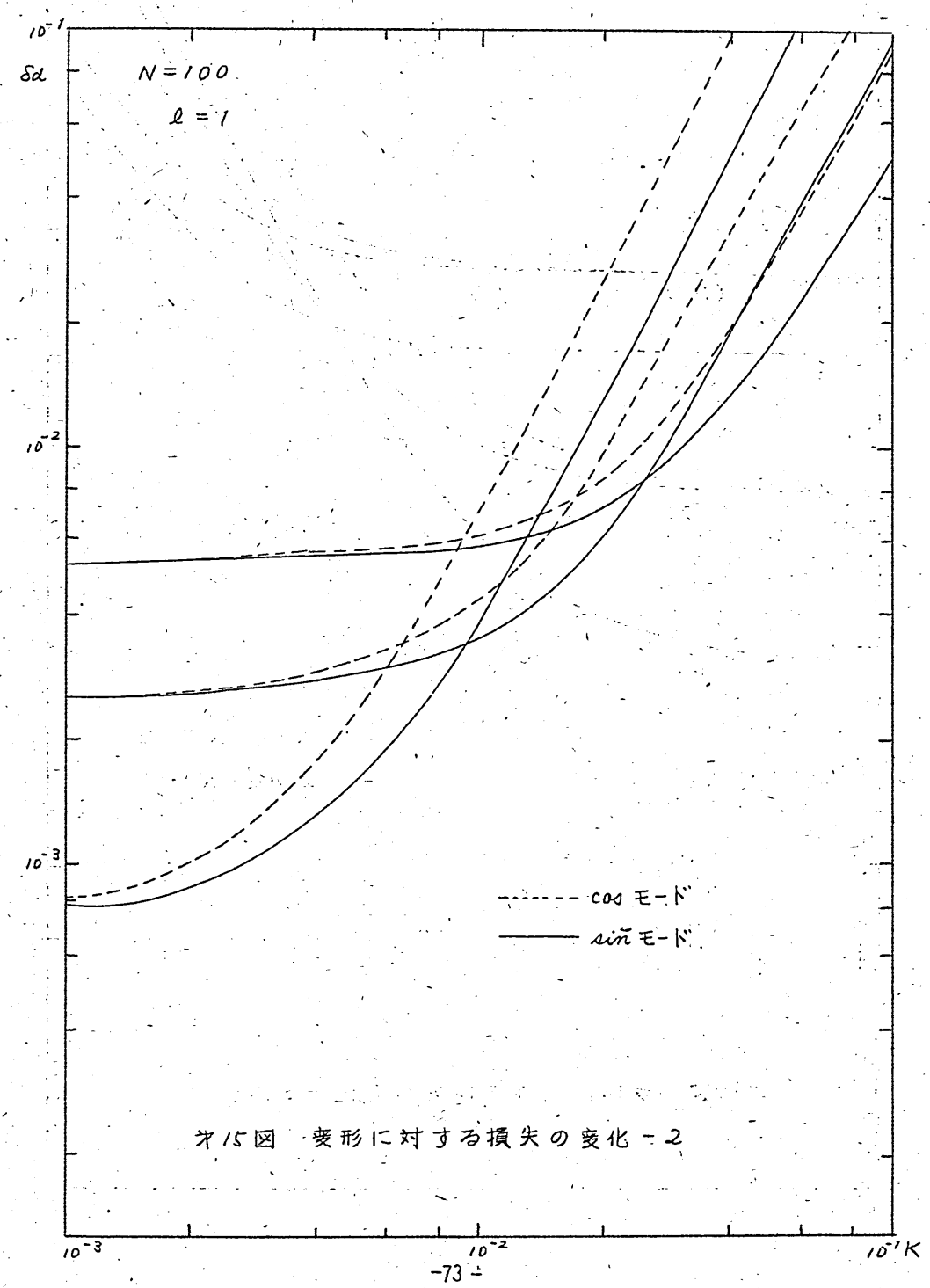
第13図　N に対する損失の変化－2

に空胴理論の結果を第2表に掲げた。これによって、空胴像による変形の取扱いも誤った結果には導かないことが確認され、結果が正

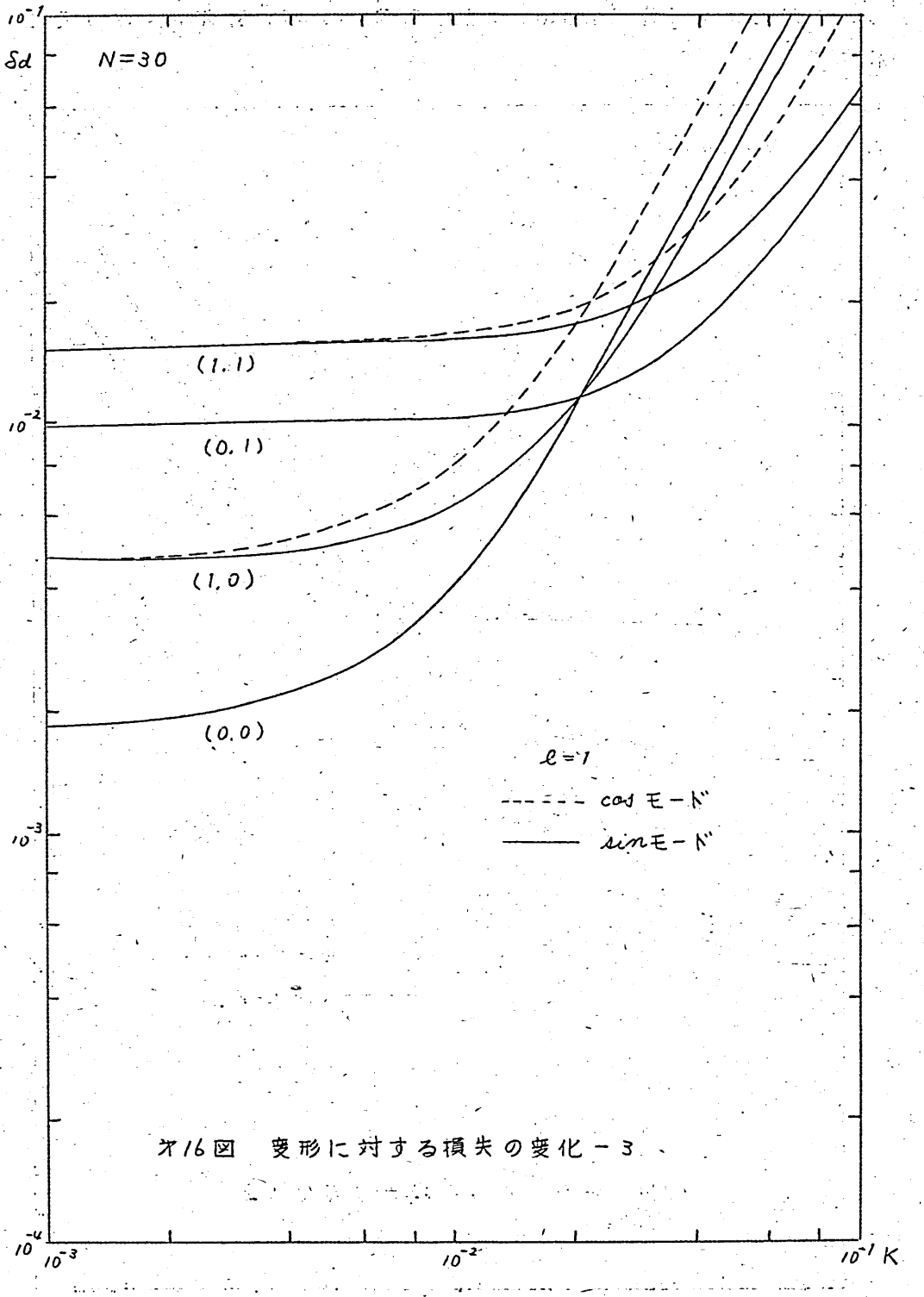


第14図　変形に対する損失の変化－1

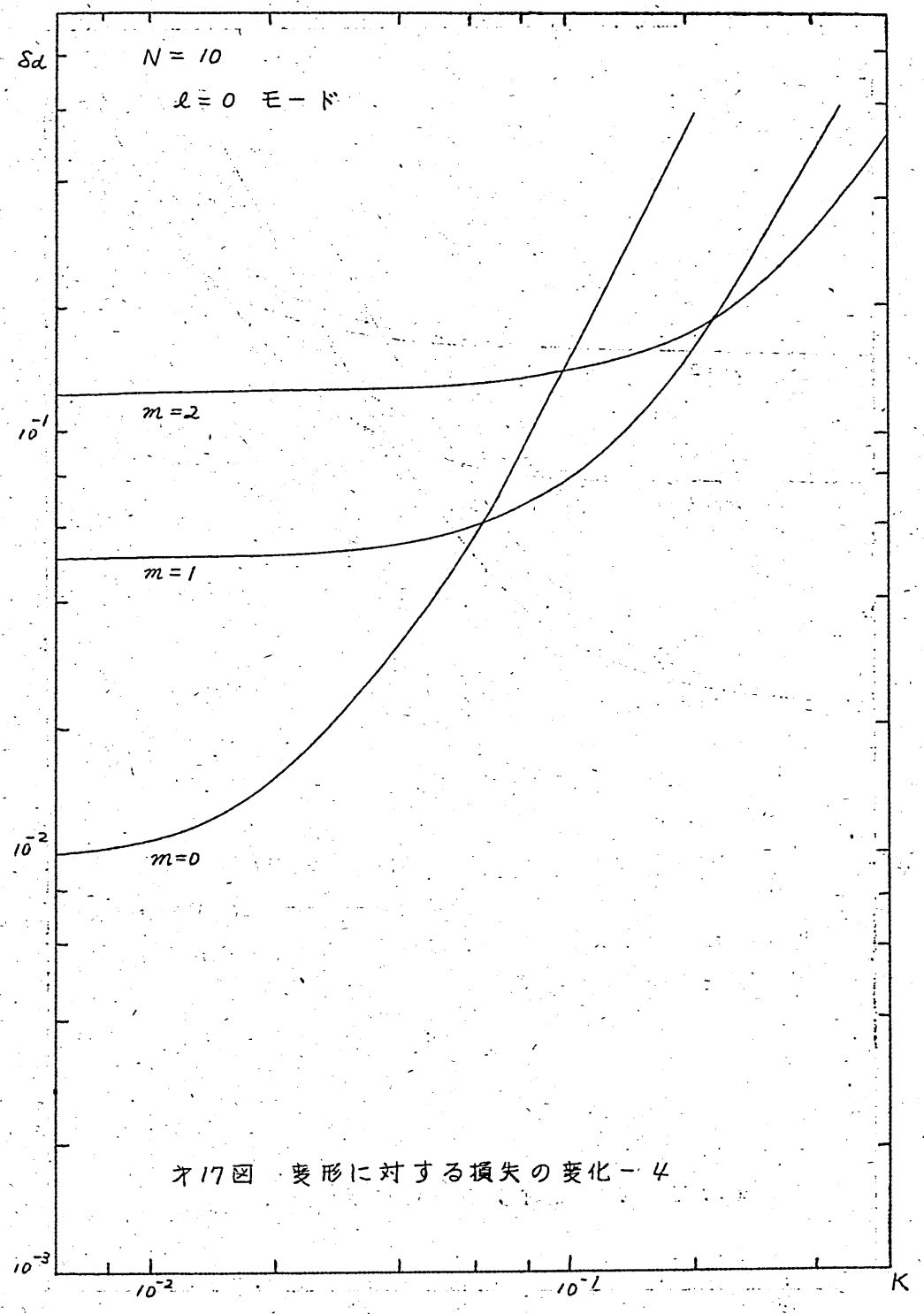
しい理論によって修正されたわけである。(5.59) を第12～第18図に示す。



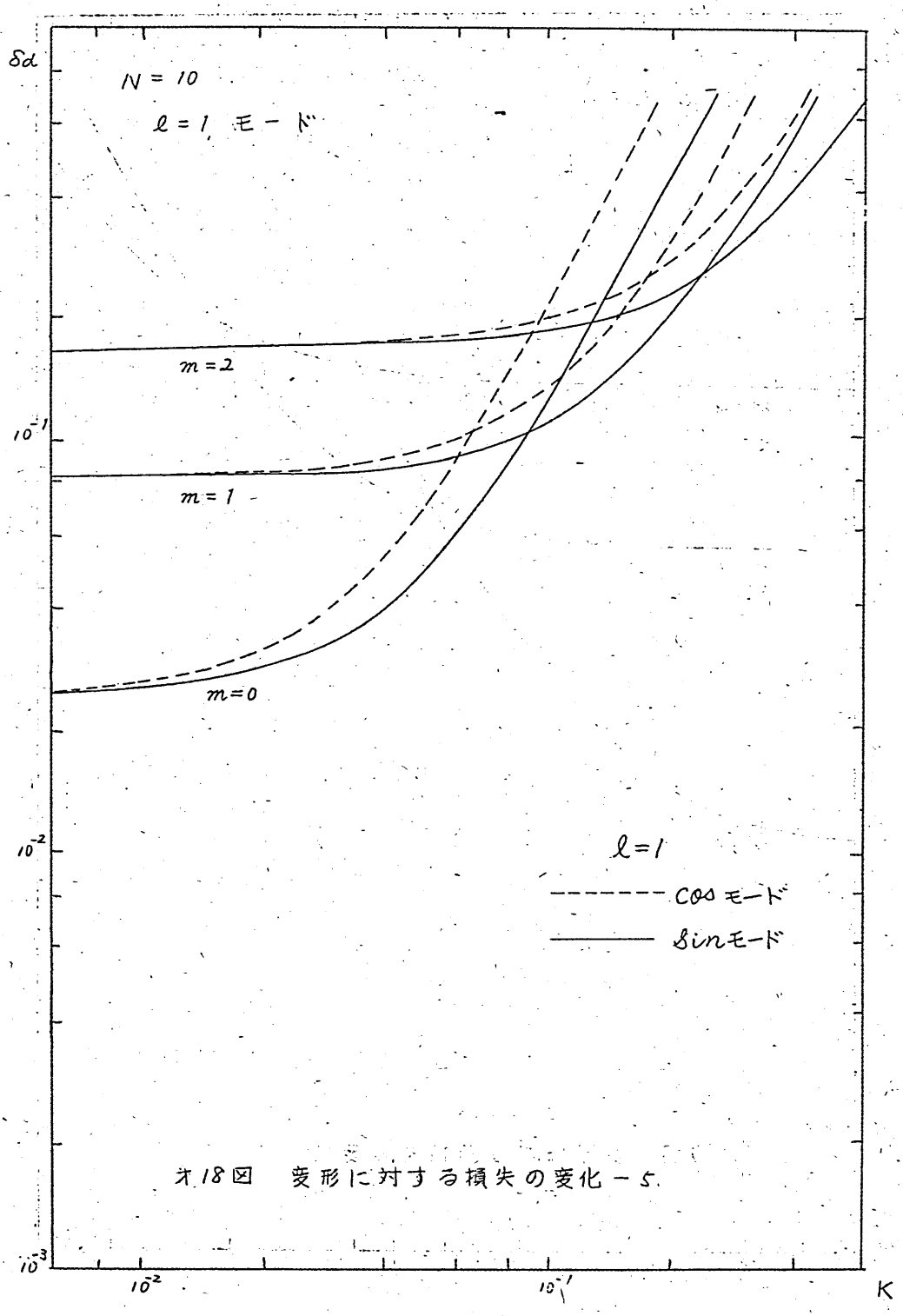
第15図　変形に対する損失の変化－2



第16図　変形に対する損失の変化－3



第17図　変形に対する損失の変化－4



オ18図　変形に対する損失の変化－5

附録1. Bessel函数および変形Bessel函数の漸近形

$$J_m(\Lambda) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\Lambda}} \left\{ \cos(\Lambda+\theta_m) - \frac{(4m^2-1)}{8\Lambda} \sin(\Lambda+\theta_m) - \frac{(4m^2-1)(4m^2-3^2)}{2!\,(8\Lambda)^2} \cos(\Lambda+\theta_m) + \cdots \right\}$$

$$H_m^{(1)}(\Lambda) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\Lambda}}\, e^{i(\Lambda+\theta_m)} \left\{ 1 + i\,\frac{(4m^2-1)}{8\Lambda} - \frac{(4m^2-1)(4m^2-3^2)}{2!\,(8\Lambda)^2} + \cdots \right\}$$

$$J_m'(\Lambda) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\Lambda}} \left\{ -\sin(\Lambda+\theta_m) - \frac{4m^2+3}{8\Lambda} \cos(\Lambda+\theta_m) + \frac{(4m^2-1)(4m^2+15)}{2^7\Lambda^2} \sin(\Lambda+\theta_m) + \cdots \right\}$$

$$H_m^{(1)\prime}(\Lambda) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\Lambda}}\, e^{i(\Lambda+\theta_m)} \left\{ i - \frac{4m^2+3}{8\Lambda} - \frac{(4m^2-1)(4m^2+15)}{2^7\Lambda^2}\, i + \cdots \right\}$$

但し

$$\theta_m \equiv -\frac{(2m+1)}{4}\pi \qquad (A\cdot 1)$$

$$I_m(\Lambda) \sim \frac{e^{\Lambda}}{\sqrt{2\pi\Lambda}} \left\{ 1 - \frac{(4m^2-1)}{2^3\,2\Lambda} + \frac{(4m^2-1)(4m^2-3^2)}{2!\,2^4\,(2\Lambda)^2} - \cdots \right\}$$

$$K_m(\Lambda) \sim e^{-\Lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2\Lambda}} \left\{ 1 + \frac{(4m^2-1)}{2^3\,2\Lambda} + \frac{(4m^2-1)(4m^2-3^2)}{2!\,2^4\,(2\Lambda)^2} + \cdots \right\}$$

$$I_m'(\Lambda) = \frac{e^{\Lambda}}{\sqrt{2\pi\Lambda}} \left\{ 1 - \frac{(4m^2-3)}{2^3\,2\Lambda} + \frac{(4m^2-1)(4m^2+15)}{2^7\Lambda^2} - \cdots \right\}$$

$$K_m'(\Lambda) = -e^{-\Lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2\Lambda}} \left\{ 1 + \frac{4m^2+3}{8\Lambda} + \frac{(4m^2-1)(4m^2+15)}{2^7\Lambda^2} + \cdots \right\} \qquad (A\cdot 2)$$

$$J_m(i\Lambda)\, H_m^{(1)}(i\Lambda) = -\frac{2i}{\pi}\, I_m(\Lambda)\, K_m(\Lambda) \qquad (A\cdot 3)$$

附録2.

不定積分

$$I^S(p) \equiv \int x^p \sin x\, dx, \quad I^C(p) \equiv \int x^p \cos x\, dx$$

とおくとき次の漸化公式が成立つ。[20)]

$$I^S(p) = -x^p \cos x + pI^C(p-1)$$

$$I^C(p) = x^p \sin x - pI^S(p-1)$$

これを用いると漸近展開

$$I^S(p) = -x^p \cos x + px^{p-1}\sin x + p(p-1)x^{p-2}\cos x - p(p-1)(p-2)x^{p-3}\sin x - \cdots$$

$$I^C(p) = x^p \sin x + px^{p-1}\cos x - p(p-1)x^{p-2}\sin x - p(p-1)(p-2)x^{p-3}\cos x + \cdots$$

が成立する。特に

$$I^S\left(\frac{1}{2}\right) = \int y^{\frac{1}{2}} \sin y\, dy = 2\int x^2 \sin x^2 dx = -y^{\frac{1}{2}}\cos y + \frac{1}{2} I^C\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (A\cdot 4)$$

$$I^C\left(\frac{1}{2}\right) = \int y^{\frac{1}{2}} \cos y\, dy = 2\int x^2 \cos x^2 dx = y^{\frac{1}{2}}\sin y - \frac{1}{2} I^S\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (A\cdot 5)$$

又

$$I^S\left(-\frac{1}{2}\right) = \int y^{-\frac{1}{2}} \sin y\, dy = 2\int \sin x^2 dx \qquad (y = x^2)$$

$$= -\frac{\cos y}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\sin y}{y^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2^2}\frac{\cos y}{y^{\frac{5}{2}}} + \frac{3.5}{2^3}\frac{\sin y}{y^{\frac{7}{2}}} - \cdots \quad (A\cdot 6)$$

$$I^C\left(-\frac{1}{2}\right) = \int y^{-\frac{1}{2}} \cos y\, dy = 2\int \cos x^2 dx \qquad (y = x^2)$$

$$= \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\cos y}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2^2}\frac{\sin y}{y^{\frac{5}{2}}} + \frac{3.5}{2^3}\frac{\cos y}{y^{\frac{7}{2}}} + \cdots \quad (A\cdot 7)$$

Fresnel 積分の漸近形

(A·6), (A·7) の定積分として

$$2\int_0^{x^2}\sin x^2dx = 2\int_0^{\infty} + 2\int_{\infty}^{x^2}\sin x^2dx$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos x^2}{|x|} - \frac{1}{2}\frac{\sin x^2}{|x|^3} + \frac{3}{2^2}\frac{\cos x^2}{|x|^5} + \cdots \qquad (A\cdot8)$$

$$2\int_0^{x^2}\cos x^2dx = 2\int_0^{\infty} + 2\int_{\infty}^{x^2}\cos x^2dx$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin x^2}{|x|} - \frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{|x|^3} - \frac{3}{2^2}\frac{\sin x^2}{|x|^5} + \cdots \qquad (A\cdot9)$$

又、(A·4)(A·5) の定積分は

$$2\int_0^{x^2} x^2\sin x^2dx = -|x|\cos x^2 + \int_0^{x^2}\cos x^2dx \qquad (A\cdot10)$$

$$2\int_0^{x^2} x^2\cos x^2dx = |x|\sin x^2 - \int_0^{x^2}\sin x^2dx \qquad (A\cdot11)$$

であって、(A·8)(A·9) を用いて漸近形が求められる。

附録3. 根の近似解

方程式（4·12）の根を α^2 の order まで求める。そのためには $J_\ell(\Lambda)$ $H_\ell(\Lambda)$ は $(\Lambda-\Lambda_{\ell m})$ の2次まで展開することが必要であり、又（4·12）の α^2 の係数では $\Lambda=\Lambda_{\ell m}$ の値で十分であることがわかる。

$$J_\ell(\Lambda)H_\ell(\Lambda)=(JH)'_{\Lambda_{\ell m}}x+\frac{(JH)''_{\Lambda_{\ell m}}}{2}x^2\equiv bx+ax^2$$

但し

$$x\equiv\Lambda-\Lambda_{\ell m}$$

$$a=\frac{1}{2}(JH)''_{\Lambda=\Lambda_{\ell m}}=\frac{i}{\pi\Lambda_{\ell m}}+(J'H')_{\Lambda_{\ell m}} \qquad (A\cdot12)$$

$$b=(JH)'_{\Lambda=\Lambda_{\ell m}}=-\frac{2i}{\pi\Lambda_{\ell m}}$$

と展開し、又（4·12）において

$$P=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{3\pi^2}+\frac{1}{2\pi}\right)(1-i)$$

$$Q=-i\frac{1}{3}\left[\Lambda J'H+2\Lambda^2J'H'\right]_{\Lambda=\Lambda_{\ell m}}=i\frac{2}{3}\left(\frac{i}{\pi}-\Lambda_{\ell m}^2J'H'\right) \qquad (A\cdot13)$$

とおけば、解くべき方程式（4·12）は、

$$ax^2+bx+c=0\quad,\quad c\equiv P\alpha+Q\alpha^2 \qquad (A\cdot14)$$

の形になる。この解のうち、$c\to0$ の時、$x\to0$ なるようなものを α^2 の order まで求めることが必要である。それは容易に求められて、

$$x\fallingdotseq-\frac{P}{b}\alpha-\left(\frac{Q}{b}+\frac{aP^2}{b^3}\right)\alpha^2 \qquad (A\cdot15)$$

で与えられる。（A·12）を用いてこの α^2 の係数を計算すると、

$$Q+a\frac{P^2}{b^2}=i\frac{2}{3}\left(\frac{i}{\pi}-\Lambda^2J'H'\right)+i\left(\frac{i}{\pi}+\Lambda^2J'H'\right)\frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{3\pi}+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\fallingdotseq-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{3\pi}+\frac{1}{2}\right)^2\right\}-i\left\{\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{3\pi}+\frac{1}{2}\right)^2\right\}\Lambda_{\ell m}^2(J'H')_{\Lambda_{\ell m}}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[1.33780\right]+i\left[0.00446\right]\Lambda_{\ell m}^2(J'H')_{\Lambda_{\ell m}} \qquad (A\cdot16)$$

従って

$$\Lambda_{\ell m}^2 (J'H')_{\Lambda_{\ell m}} = -i\frac{2\ell}{\pi} + \Lambda_{\ell m}^2 J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m}) H_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m})$$

となることを用いて、(A·12)(A·13)(A·16)を(A·15)に代入すれば

$$\chi = \Lambda - \Lambda_{\ell m} = -0.5793(1+i)\alpha\Lambda_{\ell m} + \left\{ i\,0.6689 + 0.00223\left[-2\ell i + \pi\Lambda_{\ell m}^2 J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m}) H_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m})\right]\right\}\alpha^2\Lambda_{\ell m} \qquad (A\cdot17)$$

このα^2の係数{ }の中の第2項はモード(ℓm)に依存するが、第1項に比して、わずかであるから無視することが出来る。(数値的には$\ell=0$では第1項の1%以下、$\ell=1$では10%程度である。)

附録4. $\Theta_{\ell\ell'}(\varphi)$の値

$$\int_0^{2\pi} \cos\ell\theta\cdot\cos\ell'\theta\cdot\cos(\theta-\varphi)\,d\theta = \pi\cos\varphi \begin{cases} 1 & (\ell,\ell') \\ 1 & (0,1) \\ \frac{1}{2} & (1,0) \\ \frac{1}{2} & (\ell,\ell+1)\ \ell\geq 1 \\ & (\ell,\ell-1)\ \ell\geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\ell\theta\cdot\sin\ell'\theta\cdot\cos(\theta-\varphi)\,d\theta = \pi\cos\varphi \begin{cases} 0 & (0,1) \\ 0 & (1,0) \\ \frac{1}{2} & (\ell,\ell+1)\ \ell\geq 1 \\ \frac{1}{2} & (\ell,\ell-1)\ \ell\geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\ell\theta\cdot\cos\ell'\theta\cdot\cos(\theta-\varphi)\,d\theta = \pi\sin\varphi \begin{cases} 0 & (0,1) \\ 1 & (1,0) \\ -\frac{1}{2} & (\ell,\ell+1)\ \ell\geq 1 \\ \frac{1}{2} & (\ell,\ell-1)\ \ell\geq 2 \end{cases}$$

附録5. 積分公式

$$\int_0^1 J_\ell(\Lambda x)J_{\ell+1}(\Lambda x)\,x^2dx=\frac{1}{2\Lambda}\left\{\ell J_\ell^2(\Lambda)-(\ell+1)J_{\ell-1}(\Lambda)J_{\ell+1}(\Lambda)\right\} \quad (A\cdot18)$$

特に不定上限に対し

$$\int_0^x J_\ell(\Lambda x)J_{\ell+1}(\Lambda x)\,x^2dx=\frac{x^2}{2\Lambda}\left\{\ell J_\ell^2(\Lambda x)-(\ell+1)J_{\ell-1}(\Lambda x)J_{\ell+1}(\Lambda x)\right\} \quad (A\cdot19)$$

但し、次数が負の時は $J_{-\ell}(\Lambda)=(-1)^\ell J_\ell(\Lambda)$ の意味である。

証：公式

$$I(\Lambda)\equiv\int_0^1 J_\ell^2(\Lambda x)\,x\,dx=\frac{1}{2}\left[J_\ell^2(\Lambda)-J_{\ell-1}(\Lambda)J_{\ell+1}(\Lambda)\right] \quad (A\cdot20)$$

を利用する。まず（A·20）を微分すると

$$\frac{dI}{d\Lambda}=2\int_0^1 J_\ell(\Lambda x)\frac{d}{d\Lambda}\left[J_\ell(\Lambda x)\right]x\,dx=\frac{2\ell}{\Lambda}\int_0^1 J_\ell^2(\Lambda x)\,x\,dx-2\int_0^1 J_\ell(\Lambda x)J_{\ell+1}(\Lambda x)\,x^2dx$$

$$=\frac{2\ell}{\Lambda}\int_0^1 J_\ell^2(\Lambda x)\,x\,dx-2\int_0^1 J_\ell(\Lambda x)J_{\ell+1}(\Lambda x)\,x^2dx$$

従って

$$\int_0^1 J_\ell(\Lambda x)J_{\ell+1}(\Lambda x)\,x^2dx=\frac{\ell}{\Lambda}I(\Lambda)-\frac{1}{2}\frac{dI(\Lambda)}{d\Lambda} \quad (A\cdot21)$$

一方（A·20）の微分を実行し、漸化式等を用いて整理すれば

$$\frac{dI}{d\Lambda}=\frac{d}{d\Lambda}\frac{1}{2}\left[J_\ell^2(\Lambda)-J_{\ell-1}(\Lambda)J_{\ell+1}(\Lambda)\right]=\frac{J_{\ell-1}(\Lambda)J_{\ell+1}(\Lambda)}{\Lambda} \quad (A\cdot22)$$

の関係が得られる。従がって（A·21）は（A·20）（A·22）を代入すれば

$$\frac{\ell}{\Lambda}\frac{1}{2}\left[J_\ell^2(\Lambda)-J_{\ell-1}(\Lambda)J_{\ell+1}(\Lambda)\right]-\frac{J_{\ell-1}(\Lambda)J_{\ell+1}(\Lambda)}{2\Lambda}$$

$$=\frac{1}{2\Lambda}\left[\ell J_\ell^2(\Lambda)-(\ell+1)J_{\ell-1}(\Lambda)J_{\ell+1}(\Lambda)\right]$$

となって（A·18）が証明された。又（A·19）は（A·18）において $\Lambda \to \Lambda x$ とおき、積分変数を変えることにより得られる。

附録6. (5.53)の特性根の計算

附録3と同様に計算する。

$$J_\ell(\Lambda) H_\ell(\Lambda) + (1-i)\varepsilon\alpha + (\mu-\mu')\left\{H_\ell^2(\Lambda) + O(\alpha^2)\right\} = 0 \qquad (A\cdot23)$$

において

$$J_\ell(\Lambda) H_\ell(\Lambda) \simeq bx + ax^2$$

$$a \equiv \frac{1}{2}(JH)''_{\Lambda_{\ell m}} = \frac{i}{\pi\Lambda_{\ell m}^2} + (J'H')_{\Lambda_{\ell m}} = \frac{i}{\pi\Lambda_{\ell m}^2}(1-2\ell) + J_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m}) N_{\ell+1}(\Lambda_{\ell m}) \qquad (A\cdot24)$$

$$b \equiv (JH)'_{\Lambda_{\ell m}} = -\frac{2i}{\pi\Lambda_{\ell m}} \qquad (A\cdot25)$$

$$x = \Lambda - \Lambda_{\ell m} \equiv \Lambda_{\ell m}\delta \qquad (A\cdot26)$$

$$H_\ell^2(\Lambda) \simeq -N_\ell^2(\Lambda_{\ell m}) + 2i N_\ell J_\ell'(\Lambda_{\ell m})\, x$$

$$= -N_\ell^2(\Lambda_{\ell m}) + 2bx \qquad (A\cdot27)$$

又 $(\mu-\mu')$ にあらわれる積分のうち $I_{\ell k}$ は *explicit* に求められているが、$J_{\ell k}$ は数値積分を行なうので、これらの x に関する1次の変化は小さいと仮定しておこう。

$$(\mu-\mu')_\Lambda \simeq (\mu-\mu')_{\Lambda_{\ell m}} \qquad (A\cdot28)$$

このようにおけば（A·23）は

$$ax^2 + b[1 + 2(\mu-\mu')]x + (1-i)\varepsilon\alpha - (\mu-\mu')N_\ell^2(\Lambda_{\ell m}) = 0$$

とかける。これ以上に展開の精度をあげることは我々の近似においては不要である。これを

$$ax^2 + Bx + C = 0$$

とみなして附録3と同様に、$C\to 0$ で $\chi\to 0$ なる解は

$$\chi\simeq -\frac{C}{B}-\frac{aC^2}{B^3}=-\frac{(1-i)\varepsilon\alpha-(\mu-\mu')N_\ell^2(\lambda_{\ell m})}{b[1+2(\mu-\mu')]}-\frac{a[(1-i)\varepsilon\alpha-(\mu-\mu')N_\ell^2(\lambda_{\ell m})]^2}{b^3[1+2(\mu-\mu')]^3}$$

と書ける。上に述べたように、我々は変形に関しては $K^2N^2\alpha$ までの近似で解を求めているのであり、$K^2N^2\alpha^2$ は無視しているから

$$\simeq -\frac{1}{b}[(1-i)\varepsilon\alpha-(\mu-\mu')N_\ell^2(\lambda_{\ell m})-2(\mu-\mu')(1-i)\varepsilon\alpha]$$
$$-\frac{a}{b^3}[-2(\mu-\mu')(1-i)\varepsilon\alpha\cdot N_\ell^2(\lambda_{\ell m})]$$

$$=-\frac{1}{b}\left\{(1-i)\varepsilon\alpha-(\mu-\mu')N_\ell^2(\lambda_{\ell m})-2(\mu-\mu')(1-i)\varepsilon\alpha\left[1+\frac{a}{b^2}N_\ell^2(\lambda_{\ell m})\right]\right\} \qquad (A\cdot 29)$$

ここで (A·24)(A·25) を用いると

$$1+\frac{a}{b^2}N_\ell^2(\lambda_{\ell m})=1-\left(\frac{\pi\lambda_{\ell m}}{2}\right)^2\left[\frac{i}{\pi\lambda_{\ell m}^2}(1-2\ell)+J_{\ell+1}(\lambda_{\ell m})H_{\ell+1}(\lambda_{\ell m})\right]N_\ell^2(\lambda_{\ell m})$$

$$=-i\left(\frac{\pi\lambda_{\ell m}}{2}\right)^2\left[\frac{1}{\pi\lambda_{\ell m}^2}(1-2\ell)+J_{\ell+1}(\lambda_{\ell m})N_{\ell+1}(\lambda_{\ell m})\right]N_\ell^2(\lambda_{\ell m}) \qquad (A\cdot 30)$$

である。ここに Lommel の関係式によって

$$J_{\ell+1}^2(\lambda_{\ell m})'N_\ell^2(\lambda_{\ell m})=\left(\frac{2}{\pi\lambda_{\ell m}}\right)^2 \qquad (A\cdot 31)$$

が成立することを利用した。従って (A·30) を (A·29) に代入し、(A·25)(A·26) を使えば

$$S=-\frac{\pi}{2}\left\{(1+i)\varepsilon\alpha-i(\mu-\mu')N_\ell^2(\lambda_{\ell m})\right.$$
$$\left.-2(\mu-\mu')(1-i)\varepsilon\alpha\left(\frac{\pi\lambda_{\ell m}}{2}\right)^2N_\ell^2(\lambda_{\ell m})\left[\frac{1}{\pi\lambda_{\ell m}^2}(1-2\ell)+J_{\ell+1}(\lambda_{\ell m})N_{\ell+1}(\lambda_{\ell m})\right]\right\} \qquad (A\cdot 32)$$

但し、ここで α のべき展開としての $(\mu-\mu')$ は (5.52) で与えられているものを用いて、$K^2N^2\alpha$ までの項をとるものとする。

附録7. J_{lk} の積分値

m \ l	0	1	2	3
0	$-0.17000\cdot10^{-1}$	$0.25817\cdot10^{-1}$ $-0.21610\cdot10^{-1}$	$0.46428\cdot10^{-1}$ $-0.22853\cdot10^{-1}$	$0.54576\cdot10^{-1}$ $-0.22902\cdot10^{-1}$
1	$-0.63485\cdot10^{-2}$	$0.14335\cdot10^{-1}$ $-0.20380\cdot10^{-1}$	$0.28186\cdot10^{-1}$ $-0.27640\cdot10^{-1}$	$0.37036\cdot10^{-1}$ $-0.31658\cdot10^{-1}$
2	$-0.39619\cdot10^{-3}$	$0.99237\cdot10^{-2}$ $-0.15386\cdot10^{-1}$	$0.20305\cdot10^{-1}$ $-022915\cdot10^{-1}$	$0.28113\cdot10^{-1}$ $-0.28047.10^{-1}$
3	-0.28875	$0.75887.10^{-2}$ $-0.12134.10^{-1}$	$0.15998\cdot10^{-1}$ $-0.18968\cdot10^{-1}$	$0.22677\cdot10^{-1}$ $-0.24111\cdot10^{-1}$

（上段：$k=l-1$，下段：$k=l+1$，表は $2\Lambda_{lm}^{2}J_{lk}(\Lambda_{lm})$ の値である）．

参考文献

1) H. Levine, J. Schwinger : Phys. Rev. 73 (1948) 383
2) P. M. Morse, H. Feshbach : Method of Theoretical Physics, I. II. McGraw Hill. 1953.
3) 林 : 電気通信学会誌 48 No.4 アンテナ特集 (1965) 749
4) 池上, 小倉 : 日本物理学会誌 20 No.11 (1965) 752
5) A. G. Fox, T. Li : Bell. Syst. tech. J. 40 (1961) 453
6) L. A. Vainshtein : Soviet Physics-JETP 17 (1963) 709
7) 池上, 小倉, 吉田 : 輻研資料 1964年5月,
H. Ogura, Y. Yoshida : Jap. J. appl. Phys., 3 (1964) 546
8) 池上, 小倉, 吉田 : 輻研資料 1964年11月
H. Ogura, Y. Yoshida, J. Ikenoue : J. Phys. Soc. Japan. 20 (1965) 598
9) H. Risken : Z. Phys. 180 (1964) 150
10) L. A. Vainshtein : Soviet Physics-Technical Physics 9 (1965) 1197
11) 数学公式 I 岩波, 1956.
12) 池上, 小倉, 吉田, 嶽本 : 電気通信学会マイクロ波伝送研究会 1966.6 (予定)
13) H. Levine, J. Schwinger : Phys. Rev. 74 (1948) 958
14) L. Bergstein, H. Schachter : J. Opt. Soc. Amer. 54 No.7 (1964) 887
15) A. G. Fox, T. Li : Proc. Inst. Elec. Elec. Engrs. 51 (1963) 80
16) 池上, 小倉, 吉田, 古浜 : 輻研資料 1965年7月
H. Ogura, Y. Yoshida, Y. Furuhama, J. Ikenoue, Jap. J. appl. Phys. 5 (1966) 225
17) V. D. Globe : Archiv der Elektrischen Übertragung 18 1964) 197, 20 (1965) 13
18) E. H. Scheibe : Proc. IRE. 49 1961 1079

輻射科学研究会資料

不均一分布結合線路

板倉清保　　山本錠彦　　阿座上　孝
（大阪大学工学部）　　（奈良高専）

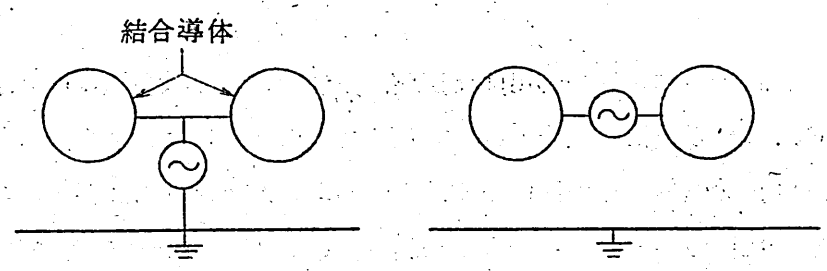
1966年5月28日

1．序　　言

平行導体間の分布結合効果を用いた回路素子については数多くの報告がなされている．これらの回路素子の特性を高級化するためには，結合度の異なる有限長の均一分布結合線路区間を多段接続しなければならないが，本文ではその多段接続の極限として，結合度が連続的に変化する分布結合線路すなわち不均一分布結合線路について報告する．伝送線を構成素子とする分布定数回路の特徴としてはその周期性に起因するスプリアス・レスポンスの問題があるが，一般に短い伝送線を規準素子として用いた方がスプリアス帯域は周波数の高い方に移行する．したがつて使用周波数帯域とスプリアス帯域とを分離し，さらに多段接続する場合におこる接続部の不連続の影響を排除するためにも不均一線路は有効であり，たとえば単線条不均一線路はろ波器，インピーダンス変成器などの各種の回路素子を構成する際によく用いられているが，同様に不均一分布結合線路も分布定数回路網の構成素子としてその用途は広いものと考えられる．ここでは一般の多線条不均一分布結合線路の解析の初段階として2線条の場合をとりあげて解析を行なつている．

2．不均一分布結合線路のマトリクス表示

一般に多端子対回路の特性を論ずるにはマトリクス表示が有効であるが，本節では2線条不均一分布結合線路の有限長区間を考え，これを4－portとみた時のインピーダンス・マトリクス（Z－マトリクス）およびF－マトリクスを求める．衆知のごとく，共通帰線を有する2線条結合線路の伝送は2種類の直交伝送の重畳としてあらわすことができる．直交伝送の組み合せとしては種々のものが考えられるが，ここでは図1に示すようなeven-mode



(a) even-mode 励振　　(b) odd-mode 励振

図1　2線条線路の直交modeの励振

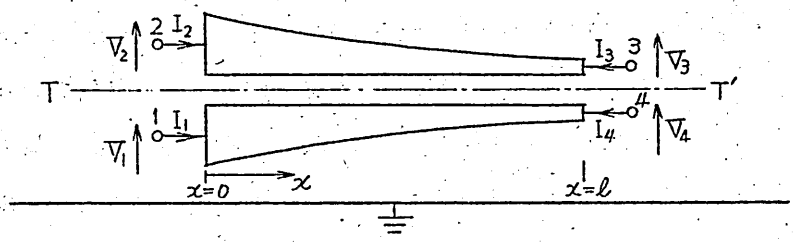


図2　2線条不均一分布結合線路4－port

およびodd-modeを用いて解析を進める.[1] ただし線路系全体は無損失とし，伝搬姿態はTEM姿態とする．図2に示すように全長ℓで，伝送方向に対称面を有し，かつevenおよびodd-modeにおける1線あたりの特性インピーダンスがそれぞれ$Z_{oe}(x)$，$Z_{oo}(x)$（$0 \leqq x \leqq \ell$）であたえられる2線条線路を考える．対称面TT′はeven-modeにおいてはmagnetic wallによつて，またodd-modeにおいてはelectrie-wall によつて置きかえることができる．まずevenおよびodd-modeにおける1線あたりのZ－マトリクスを

$$[Z^{\{e}_{o}] = \begin{bmatrix} Z_{11}^{\{e}_{o} & Z_{12}^{\{e}_{o} \\ Z_{21}^{\{e}_{o} & Z_{22}^{\{e}_{o} \end{bmatrix} \tag{1}$$

ただし

$$Z_{12}^{\{e}_{o} = Z_{21}^{\{e}_{o} \tag{2}$$

として図２の４－portのＺ－マトリクスを求める．なお上式のみならず本文を通じて添字ｅはeven-modeに，また添字ｏはodd-modeの場合に対応する．図１の直交伝送姿態に対応して，各portに定電流源をあたえて重畳することにより図２の４－port のＺ－マトリクスは次式のように求められる．

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Sigma_{12} \\ \Delta_{11} & \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Delta_{22} \\ \Sigma_{21} & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_{ij} &= (Z_{ij}^{e} + Z_{ij}^{o})/2 \\ \Delta_{ij} &= (Z_{ij}^{e} - Z_{ij}^{o})/2 \end{aligned}\right\} \quad (i,j=1,2) \tag{4}$$

また式(2)より　　$\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$,　$\Delta_{12} = \Sigma_{21}$ (5)

式(3)は均一，不均一にかかわらず一般の対称形２線条線路を４－port と考えた時のＺ－マトリクスをあらわしている．

つぎに，縦続接続に便利なＦ－マトリクスを求める．evenおよびodd－modeにおける１線あたりのＦ－マトリクスを

$$[F_{\{e}_{o}] = \begin{bmatrix} A_{\{e}_{o} & B_{\{e}_{o} \\ C_{\{e}_{o} & D_{\{e}_{o} \end{bmatrix} \tag{6}$$

ただし

$$A_{\{e}_{o} \cdot D_{\{e}_{o} - B_{\{e}_{o} \cdot C_{\{e}_{o} = 1 \tag{7}$$

とすれば，Ｚ－マトリクスの場合と同様にして図２の４－port のＦ－マト

リクスは次式のように求められる．

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \\ V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_A & \Sigma_B & \Delta_A & \Delta_B \\ \Sigma_C & \Sigma_D & \Delta_C & \Delta_D \\ \Delta_A & \Delta_B & \Sigma_A & \Sigma_B \\ \Delta_C & \Delta_D & \Sigma_C & \Sigma_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \\ V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_A &= (A_e + A_o)/2 \ , \ \Delta_A = (A_e - A_o)/2 \\ \Sigma_B &= (B_e + B_o)/2 \ , \ \Delta_B = (B_e - B_o)/2 \\ \Sigma_C &= (C_e + C_o)/2 \ , \ \Delta_C = (C_e - C_o)/2 \\ \Sigma_D &= (D_e + D_o)/2 \ , \ \Delta_D = (D_e - D_o)/2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

つぎに式(1)および式(6)であたえた1線あたりのZおよびF－マトリクスを求めなければならない．図3に示すような特性インピーダンスが$Z_{oe}(x)$あるいは$Z_{oo}(x)$であたえられる全長ℓなる単線条不均一線路において，線路上xなる点における電圧，電流の間には次の関係が成立する．

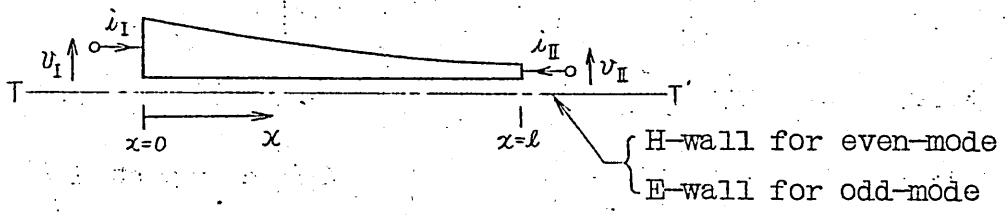


図3　単線条不均一線路2－port

$$\frac{d}{dx}\{ v_{\{^e_o}(x)\} + \gamma_{\{^e_o} \cdot Z_{b\{^e_o}(x) \cdot i_{\{^e_o}(x) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\{ v_{\{^e_o}(x)\} + \frac{\gamma_{\{^e_o}}{Z_{b\{^e_o}(x)} \cdot v_{\{^e_o}(x) = 0 \tag{11}$$

ただし$\gamma_{\{^e_o}$は伝搬定数である．ここでは無損失TEM 線路を考えているから伝搬定数はeven-mode，odd-modeいずれに対しても

$$\gamma_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}} = j\beta_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}} = j\beta = j\cdot 2\pi/\lambda \tag{12}$$

であたえられる．ただしβは位相定数，λは波長である．

式(10)−(12)より電圧について次の線形微分方程式がえられる．

$$\frac{d^2}{dx^2}\{v_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x)\} - \frac{d}{dx}\{\log Z_{o\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x)\}\cdot\frac{d}{dx}\{v_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x)\} + \beta^2\cdot v_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x) = 0 \tag{13}$$

上式の独立な2個の解を$p_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x)$，$q_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x)$とすれば，一般解は$C_{1\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}$，$C_{2\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}$を定数として

$$v_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x) = C_{1\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot p_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x) + C_{2\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot q_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot q_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x) \tag{14}$$

となる．また電流は次式より求められる．

$$i_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x) = \frac{-1}{j\beta\cdot Z_{b\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x)}\{C_{1\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot p'_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x) + C_{2\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot q'_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(x)\} \tag{15}$$

図3の記号を用いて，式(14)，(15)に境界条件

$$\left.\begin{aligned} v_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(0) &= v_{I\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\quad,\quad i_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(0) = i_{I\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}} \\ v_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(\ell) &= v_{II\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\quad,\quad i_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(\ell) = -i_{II\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

を代入すれば式(1)，(6)のZおよびF−マトリクスは次式のように求められる．[2]

$$[Z^{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}] = \frac{j\beta}{m_{2\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}}\begin{bmatrix} m_{1\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot Z_{o\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(0) & , & m_{3\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot Z_{o\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(\ell) \\ m_{4\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot Z_{o\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(0) & , & m_{5\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot Z_{o\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(\ell) \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$[F_{\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}] = \frac{1}{m_{4\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}}\begin{bmatrix} m_{1\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}} & , & -j\beta\cdot m_{6\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot Z_{b\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(\ell) \\ m_{2\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}/j\beta\cdot Z_{o\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(0) & , & m_{5\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}\cdot Z_{b\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(\ell)/Z_{o\begin{Bmatrix}e\\o\end{Bmatrix}}(0) \end{bmatrix} \tag{18}$$

ただし

$$
\left.
\begin{aligned}
m_{1\{_{o}^{e}} &= p'_{\{_{o}^{e}}(\ell)\cdot q_{\{_{o}^{e}}(o) - q'_{\{_{o}^{e}}(\ell)\cdot p_{\{_{o}^{e}}(o) \\
m_{2\{_{o}^{e}} &= p'_{\{_{o}^{e}}(o)\cdot q'_{\{_{o}^{e}}(\ell) - q'_{\{_{o}^{e}}(o)\cdot p_{\{_{o}^{e}}(\ell) \\
m_{3\{_{o}^{e}} &= p'_{\{_{o}^{e}}(o)\cdot q_{\{_{o}^{e}}(o) - q'_{\{_{o}^{e}}(o)\cdot p_{\{_{o}^{e}}(o) \\
m_{4\{_{o}^{e}} &= p'_{\{_{o}^{e}}(\ell)\cdot q_{\{_{o}^{e}}(\ell) - q'_{\{_{o}^{e}}(\ell)\cdot p_{\{_{o}^{e}}(\ell) \\
m_{5\{_{o}^{e}} &= p'_{\{_{o}^{e}}(o)\cdot q_{\{_{o}^{e}}(\ell) - q'_{\{_{o}^{e}}(o)\cdot p_{\{_{o}^{e}}(\ell) \\
m_{6\{_{o}^{e}} &= p_{\{_{o}^{e}}(o)\cdot q_{\{_{o}^{e}}(\ell) - q_{\{_{o}^{e}}(o)\cdot p_{\{_{o}^{e}}(\ell)
\end{aligned}
\right\} \qquad (19)
$$

なお式(13)において

$$
\frac{p'_{\{_{o}^{e}}(x)\cdot q_{\{_{o}^{e}}(x) - q'_{\{_{o}^{e}}(x)\cdot p_{\{_{o}^{e}}(x)}{Z_{o\{_{o}^{e}}(x)} = \text{定数} \qquad (20)
$$

なることは容易に証明できるから式(17), (18)において式(2), (7)は常に成立する．以上のことより，式(13)の解が求まれば有限長の2線条不均一分布結合線路のマトリクス表示が得られることがわかる．すなわち2線条不均一線路は2種類の単線条不均一線路を組み合せたものと考えることができる．ただし単線条線路の場合とちがつて，多線条線路の場合はあたえられた特性インピーダンスを有する線路を実現できるための条件，いわゆるnon-singular hyperdominant condition[3]に注意しなければならない．

本文のように共通帰線を有する2線条線路の場合には$Z_{oe}(x) \geqq Z_{oo}(x)$でなければ実現できない．

3．不均一分布結合線路を用いた対称回路

不均一2線条線路の4つのportのうちの任意の2つのportに適当な終端条件をあたえて2-portとすれば，これらは分布定数ろ波器として用いることができ，その特性は前節で求めたマトリクス表示を用いて解析することができる．本節では不均一2線条線路を用いた2種類の対称回路すなわち，

折り返し形分布結合線路および分布結合形方向性結合器について考える．これらもやはり先に求めたマトリクスを用いて解析できるが，ここではその対称性に着目して2等分定理を用いて解析を行なう．

3．1．折り返し形分布結合線路

折り返し形分布結合線路とは図4に示すように，有限長2線条線路の4つのportのうちの一方の側の2つのportを入出力端子とし，他方の側の2つのportを直結して得られる2−portであつて，この回路はある条件のもとでは全域通過回路となり，移相器，遅延等化器，位相差分波器，ハイブリッド回路などを構成する際に用いられる．図4において，evenおよびodd−modeにおける1線あたりの正規化特性インピーダンスをそれぞれ$z_{oe}(x)$，$z_{oo}(x)$とし，さらに

$$z_{oe}(x)\cdot z_{oo}(x)=1 \tag{21}$$

なる関係があるものとする．対称2−port に関する2等分定理により図4の2−portの影像パラメータは

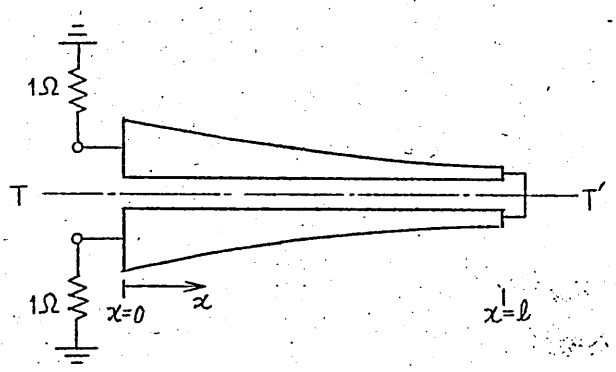


図4　1段折り返し形分布結合線路

影像インピーダンス　$z_i = \sqrt{z_{op} \cdot z_{sh}}$

影像伝搬定数　$\tanh \frac{\theta_i}{2} = \tanh\left(\frac{\alpha_i + j\beta_i}{2}\right) = \sqrt{z_{sh}/z_{op}}$ (22)

であたえられる．ただし，z_{op}，z_{sh} はそれぞれ半区間の開放および短絡インピーダンスであり，図4の 2−port に対しては式(6)を用いて次式であたえられる．

$$z_{op} = \frac{A_e}{C_e} \quad , \quad z_{sh} = \frac{B_o}{D_o} \tag{23}$$

さらに式(21)の条件より，式(6)において

$$A_e = D_o \ , \quad B_e = C_o \ , \quad C_e = B_o \ , \quad D_e = A_o \tag{24}$$

となるから，式(23)，(24)より図4の 2−portに対しては

$$z_i = 1 \tag{25}$$

となる．すなわちこの回路は式(21)の条件のもとに全域通過回路となり，したがつて影像伝搬定数は次式であたえられる．

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= 0 \\ \beta_i &= 2\tan^{-1}\left\{\frac{1}{j\beta\cdot\sqrt{\rho(0)}}\,\frac{m_2^{\,e}}{m_1^{\,e}}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

ただし

$$\rho(0) = z_{oe}(0)/z_{oo}(0) \tag{27}$$

折り返し形分布結合線路の等価回路は図5のように対称格子形回路であらわされ，式(21)の条件はこの対称格子形回路が全域通過形回路となる条件に対応している．

式(21)の条件をあたえない時は，折り返し形分布結合線路は分布定数ろ波器として用いることができる．

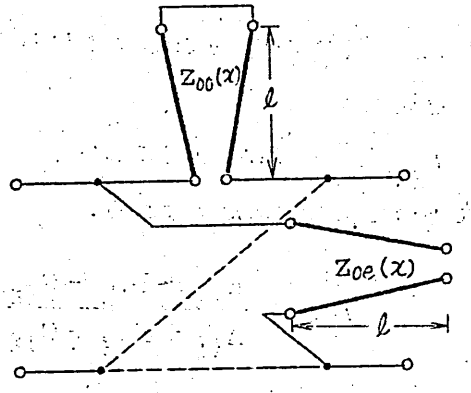


図5　1段折り返し形分布結合線路の等価回路

3．2．　分布結合形方向性結合器

図6のように，不均一2線条線路のすべての port に，等しい特性インピーダンスを有する線路を接続し port 1 に unit signal を加えた場合を考えよう．ただし正規化特性インピーダンスは式(21)の条件を満足しているものとする．各 port より出て行く波を A_i（i=1～4）とすれば対称4－port に関する2等分定理[4]により

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= (\Gamma_e + \Gamma_o)/2 \\ A_2 &= (\Gamma_e - \Gamma_o)/2 \\ A_3 &= (T_e - T_o)/2 \\ A_4 &= (T_e + T_o)/2 \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

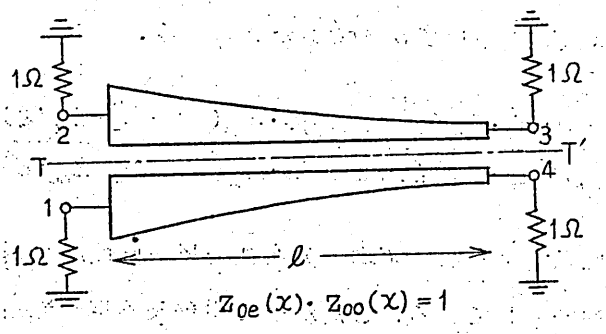


図6　1段分布結合形方向性結合器

ただし Γ_e, T_e は even-mode における１線あたりの電圧反射係数および透過係数

Γ_o, T_o は odd-mode における１線あたりの電圧反射係数および透過係数であつて次式であたえなれる．

$$\Gamma_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} = \frac{A_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} + B_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} - C_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} - D_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}}}{A_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} + B_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} + C_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} + D_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}}} \tag{29}$$

$$T_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} = \frac{2}{A_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} + B_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} + C_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}} + D_{\begin{matrix}e\\o\end{matrix}}} \tag{30}$$

さらに，式(21)の条件があるから式(24)より

$$\Gamma_e + \Gamma_o = 0 \quad , \quad T_e - T_o = 0 \tag{31}$$

となる．したがつて

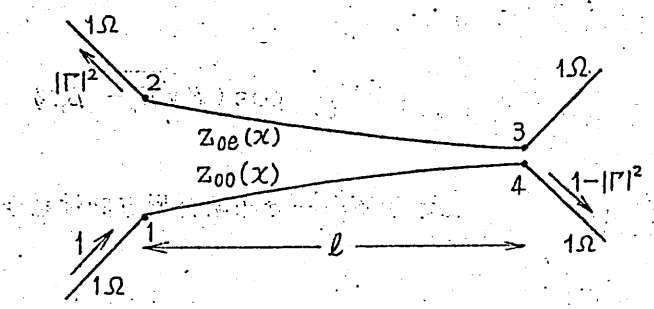
$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= \Gamma_e \\ A_3 &= 0 \\ A_4 &= T_e \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

となる．すなわち式(21)の条件のもとでは図６の回路は方向性結合器となり，全周波数にわたつて入力端の整合がとれ，かつ方向性が完全であることがわかる．

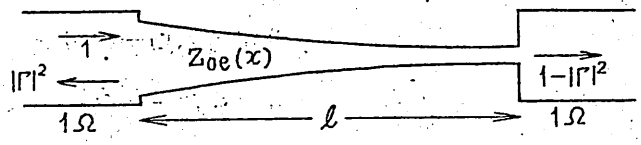
また，結合度は式(18)を用いて次式であたえられる．

$$A_2 = \frac{m_1^e - j\beta \cdot m_6^e \cdot Z_{oe}(\ell) - m_2^e / j\beta \cdot Z_{oe}(0) - m_5^e \cdot Z_{oe}(\ell)/Z_{oe}(0)}{m_1^e - j\beta \cdot m_6^e \cdot Z_{oe}(\ell) + m_2^e / j\beta \cdot Z_{oe}(0) + m_5^e \cdot Z_{oe}(\ell)/Z_{oe}(0)} \tag{33}$$

式(32)は図７に示すように，不均一分布結合形方向性結合器と単線条不均一線路との等価性を示している．したがつて単線条不均一線路によるインピーダンス変成器の理論を用いて方向性結合器の設計を行なうことができる．



(a)



(b)

図７　分布結合形方向性結合器と単線条不均一線路との等価性

n 段接続の分布結合形方向性結合器の結合度は[5]

$$|\Gamma_n|^2 = \frac{c^2 - h^2 \cdot T_n^2\left(\cos\frac{\beta\ell}{n} / \cos\frac{\beta_0\ell}{n}\right)}{1 + c^2 - h^2 \cdot T_n^2\left(\cos\frac{\beta\ell}{n} / \cos\frac{\beta_0\ell}{n}\right)} \tag{34}$$

であたえられる．ただし T_n は n 次の第１種 Chebyshev 多項式，c，h は定数であつて c が平均の結合度を，h がそれからの偏差をあらわしている．また β_0 は帯域の下限周波数における位相定数である．

ここで方向性結合器の全長 ℓ を一定にしたままで，$n \to \infty$ とすれば不均一分

布結合形方向性結合器がえられる．

$$\lim_{n\to\infty} T_n\left(\cos\frac{\beta\ell}{n}\Big/\cos\frac{\beta_0\ell}{n}\right)=\cos\left(\ell\sqrt{\beta^2-\beta_0^2}\right) \tag{34}$$

なることを用いれば，[6] Chebyshev 形不均一分布結合形方向性結合器の結合度は次式であたえられる．

$$|\Gamma_\infty|^2=\frac{c^2-h^2\cdot\cos^2\left(\ell\sqrt{\beta^2-\beta_0^2}\right)}{1+c^2-h^2\cdot\cos^2\left(\ell\sqrt{\beta^2-\beta_0^2}\right)} \tag{35}$$

したがつて，式(35)のような反射特性を有する単線条不均一線路をインピーダンス変成器の理論と同様の方法で構成すればよいことになる．

4．分布結合形指数線路

これまでは一般の不均一分布結合線路について述べてきたが，本節以後は特定の不均一線路を考える．まず分布結合形指数線路すなわち正規化特性インピーダンスが次式であたえられるような不均一分布結合線路をとりあげる．

$$\left.\begin{aligned} z_{oe}(x)&=z_{oeo}\cdot\exp(\mu x)\\ z_{oo}(x)&=z_{ooo}\cdot\exp(-\mu x)\end{aligned}\right\}\quad 0\leqq x\leqq\ell \tag{36}$$

ただし，μはテーパー係数である．
さらに式(21)の関係を満足するように

$$z_{oeo}\cdot z_{ooo}=z_{oe}(0)\cdot z_{oo}(0)=1 \tag{37}$$

とする．式(13)を解くことによつてevenおよびodd-modeにおける1線あたりのF－マトリクス要素は次式のようになる．

$$
\left.
\begin{aligned}
A_e = D_o &= \frac{1}{Pq}\sin\theta\{p+q\cot\theta\} \\
B_e = C_o &= j\frac{z_{oeo}P}{q}\sin\theta \\
C_e = B_o &= j\frac{1}{z_{oeo}P\cdot q}\sin\theta \\
D_e = A_o &= \frac{P}{q}\sin\theta\{-p+q\cot\theta\}
\end{aligned}
\right\} \quad (38)
$$

ただし

$$P=\exp\left(\frac{\mu}{2}\ell\right),\quad p=\frac{\mu}{2\beta},\quad q=\sqrt{1-p^2},\quad \theta=\beta q\ell \quad (39)$$

4. 1. 折り返し形分布結合線路

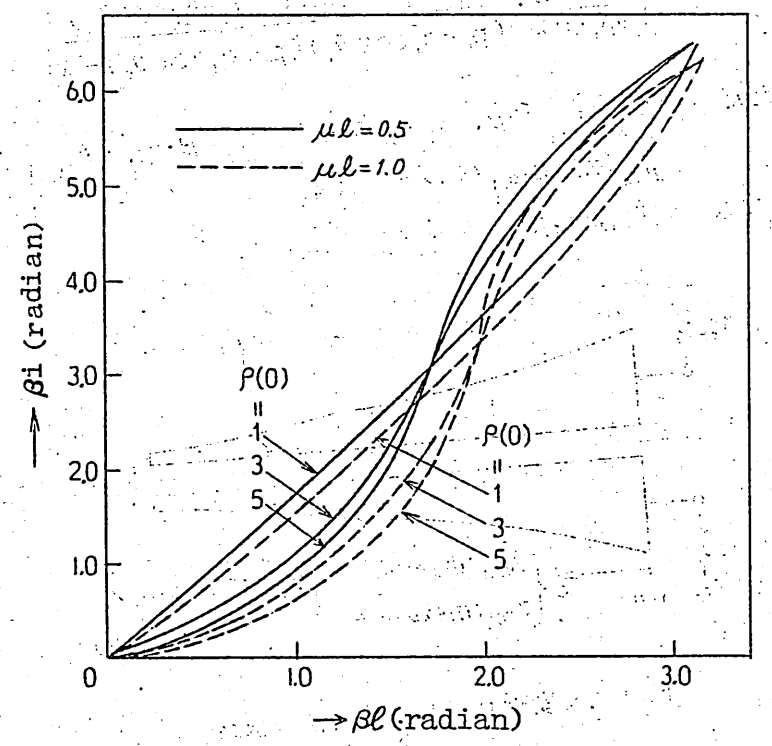


図 8　1 段折り返し形分布結合線路の位相特性

分布結合形指数線路を用いて図４のような折り返し形分布結合線路を構成すれば，その影像位相定数は

$$\beta_1 = 2\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho(0)}}\cdot\frac{1}{p+q\cot\theta}\right] \tag{40}$$

となる．特性の例を図８に示す．

さらに図９のように２段形に構成すれば

$$\beta_1 = 2\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho_1(0)}}\cdot\frac{\sqrt{\rho_2(0)}\,(p_2+q_2\cot\theta_2)+\sqrt{\rho_1(\ell_1)}\,(-p_1+q_1\cot\theta_1)}{\sqrt{\rho_2(0)}\,(p_1+q_1\cot\theta_1)(p_2+q_2\cot\theta_2)-\sqrt{\rho_1(\ell_1)}}\right] \tag{41}$$

となる．さらに　$\rho_1(\ell_1)=\rho_2(0)$ の場合は簡単になつて

$$\beta_1 = 2\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho_1(0)}}\cdot\frac{(p_2-p_1)+(q_2\cot\theta_2+q_1\cot\theta_1)}{(p_1+q_1\cot\theta_1)(p_2+q_2\cot\theta_2)-1}\right]$$

となる．ただし　$p_{\{1\atop 2\}}=\mu_{\{1\atop 2\}}/2\beta$，$q_{\{1\atop 2\}}=\sqrt{1-p_{\{1\atop 2\}}^2}$，$\theta_{\{1\atop 2\}}=\beta\cdot q_{\{1\atop 2\}}\cdot\ell_{\{1\atop 2\}}$

$$\rho_{\{1\atop 2\}}(x)=z_{oe_{\{1\atop 2\}}}(x)/z_{oo_{\{1\atop 2\}}}(x) \tag{42}$$

$\ell_1=\ell_2$ に選んだ場合の特性の例を図１０に示す．

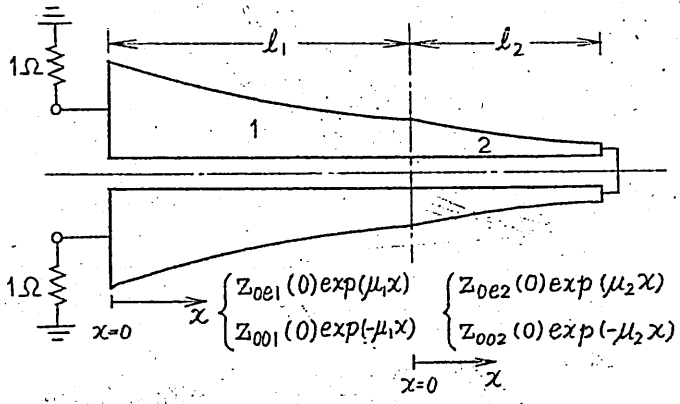


図９　２段折り返し形分布結合線路

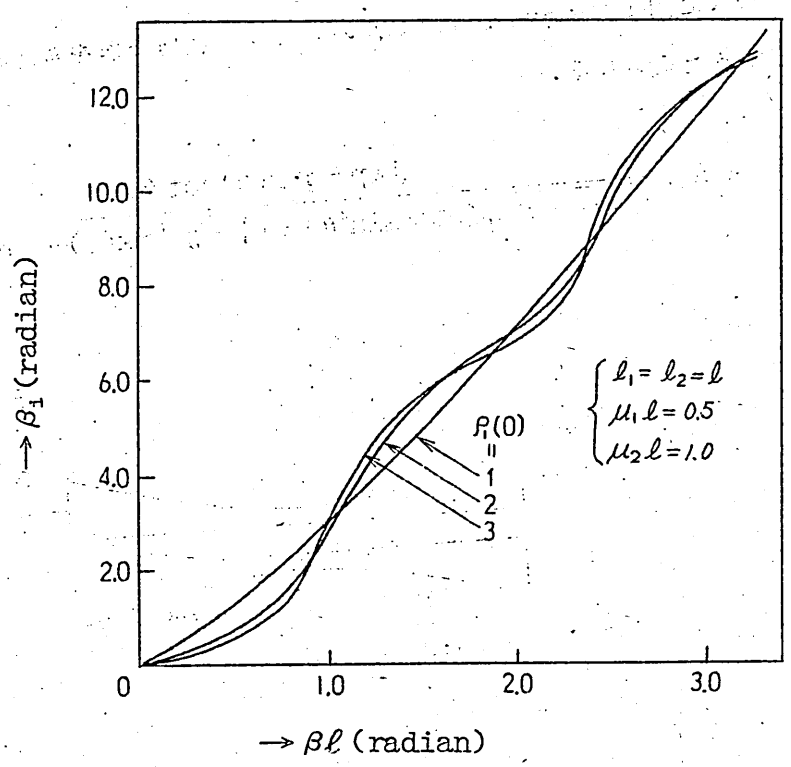


図１０　２段折り返し形分布結合線路の位相特性

4．2．　方向性結合器

分布結合形指数線路を用いて図６のような１段の非対称方向性結合器を構成すればその結合度は

$$A_2=\frac{\{-\sinh\frac{\mu}{2}\ell\cdot\cos\theta+\cosh\frac{\mu}{2}\ell\cdot p\sin\theta/q\}+j(\sin\theta/q)\cdot(k(\frac{\ell}{2})/\sqrt{1-k(\frac{\ell}{2})^2})}{\{\cosh\frac{\mu}{2}\ell\cdot\cos\theta-\sinh\frac{\mu}{2}\ell\cdot p\sin\theta/q\}+j(\sin\theta/q)\cdot(1/\sqrt{1-k(\frac{\ell}{2})^2})} \tag{43}$$

であたえられる．ただし

$$k(x) = \frac{Z_{oe}(x) - Z_{oo}(x)}{Z_{oe}(x) + Z_{oo}(x)} \tag{44}$$

つぎに図１１に示すような２段の対称方向性結合器を考える．結合度は次式であたえられる．

$$A_2 = \frac{j(p+q\cdot k(o)\cot\theta)}{\sqrt{1-k(o)^2}\{(q^2/2\sin^2\theta)-1\}+j\{pk(o)+q\cot\theta\}} \tag{45}$$

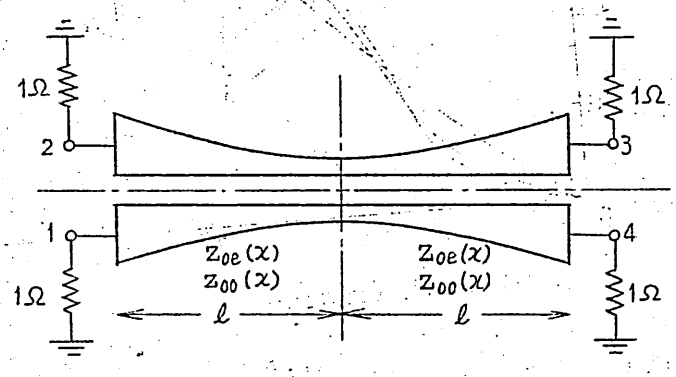


図１１　２段対称分布結合形方向性結合器

対称方向性結合器の特徴はport１を入力端とした時，port２に出る波とport４に出る波との間に，周波数にかかわらずつねに９０°の位相差が生じることであり，この性質は非常に有用である．結合特性の例を図１２に示す．

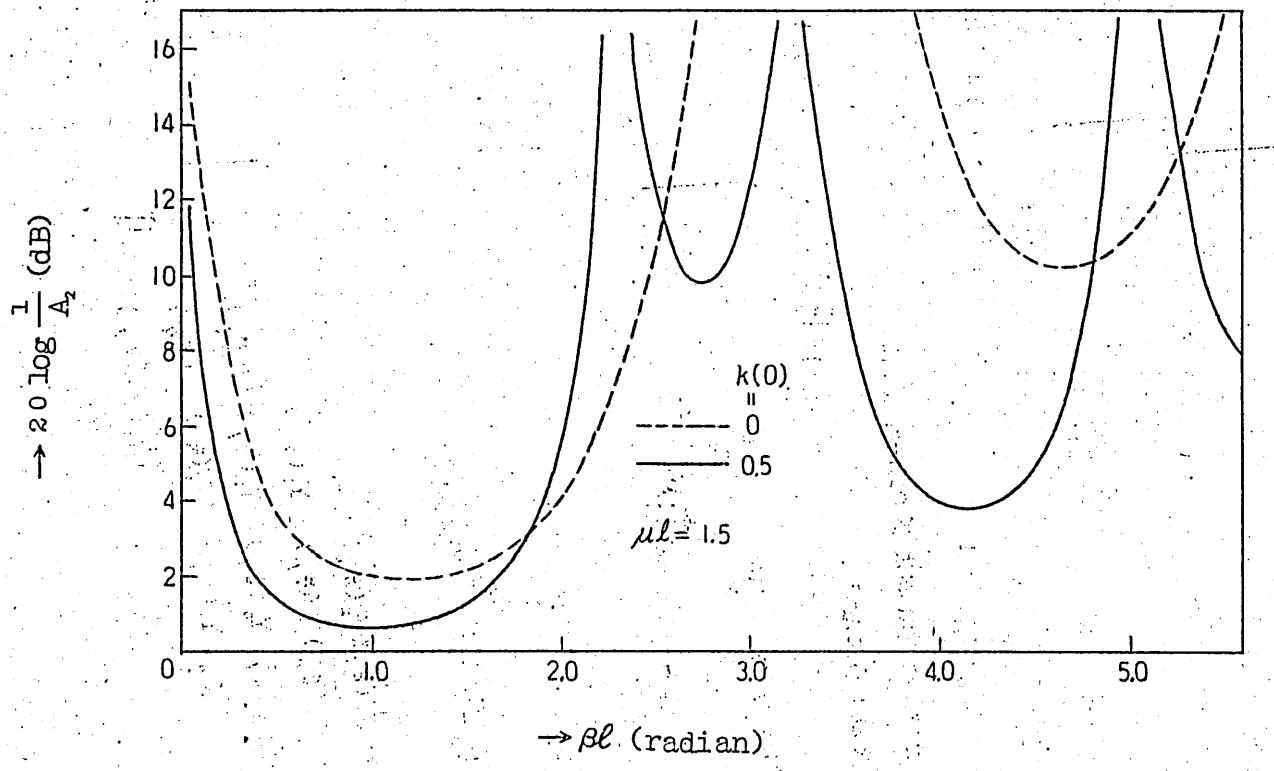


図１２　２段対称分布結合形方向性結合器の結合度

5．分布結合形 Bessel 線路

本節では正規化特性インピーダンスが次式であたえられる分布結合形 Bessel 線路をとりあげる．

$$\left.\begin{aligned} z_{oe}(x) &= z_{oeo}\cdot\left(1+\frac{x}{\nu}\right) \\ z_{oo}(x) &= z_{ooo}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{\nu}\right)} \end{aligned}\right\} \quad 0\leqq x\leqq \ell \tag{46}$$

ただし ν はテーパー係数であり，さらに式(21)の関係を満足するように，式(37)と同様に

$$z_{oeo}\cdot z_{ooo}=1 \tag{47}$$

とする．この場合の even および odd-mode における 1 線あたりの F－マトリクス要素は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} A_e &= D_o = \frac{z_{oe}(0)}{z_{oe}(\ell)}\frac{n_5}{n_4} \\ B_e &= C_o = jz_{oe}(0)\frac{n_2}{n_4} \\ C_e &= B_o = j\frac{1}{z_{oe}(\ell)}\frac{n_6}{n_4} \\ D_e &= A_o = \frac{n_1}{n_4} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= J_1(\xi_\ell)Y_0(\xi_o)-Y_1(\xi_\ell)J_0(\xi_o) \\ n_2 &= J_1(\xi_o)Y_1(\xi_\ell)-Y_1(\xi_o)J_1(\xi_\ell) \\ n_4 &= J_1(\xi_\ell)Y_0(\xi_\ell)-Y_1(\xi_\ell)J_0(\xi_\ell) \\ n_5 &= J_1(\xi_o)Y_0(\xi_\ell)-Y_1(\xi_o)J_0(\xi_\ell) \\ n_6 &= J_0(\xi_o)Y_0(\xi_\ell)-Y_0(\xi_o)J_0(\xi_\ell) \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

$$\xi_0 = \beta \cdot \nu \qquad \xi_1 = \beta(\nu + \ell) \tag{50}$$

式(49)において J_0，J_1はそれぞれ0次，1次の第1種Bessel関数であり，Y_0，Y_1はそれぞれ0次，1次の第2種Bessel関数である．

分布結合形Bessel線路を用いた1段の折り返し形分布結合線路の影像位相定数は

$$\beta_1 = 2\tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho(0)}} \cdot \frac{n_6}{n_5}\right] \tag{51}$$

であたえられる．

また1段の非対称方向性結合器の結合度は次式であたえられる．

$$A_2 = \frac{(z_{oo}(0)\cdot n_5 - n_1) + j(z_{oo}(0)\cdot z_{oe}(\ell)\cdot n_2 - n_6)}{(z_{oe}(0)\cdot n_5 + n_1) + j(z_{oe}(0)\cdot z_{oe}(\ell)\cdot n_2 + n_6)} \tag{52}$$

6．結　　言

2線条不均一分布結合線路の伝送を直交伝送に分解することにより，2種類の単線条不均一線路の伝送の重畳としてとりあつかえることを示し，その有限長区間を4－portと考えた時のマトリクス表示を得た．またその応用として折り返し形分布結合線路と分布結合形方向性結合器とをとりあげて解析を行なつた．さらに分布結合形指数線路およびBessel線路を例としてとりあげその特性を示した．

一般の多線条不均一線路の場合も本文と同様にとりあつかうことができる．

文　　献

(1) 黒田一之："分布結合回路の取り扱いについて,"信学誌, 36, 1, p. 10 (昭和28－01).

(2) S.C. Dutta Roy: "Matrix parameters of nonuniform transmission lines," IEEE Trans., vol. CT-12, p.142, March, 1965. (Correspondence).

(3) 永井，松本："多線条線路による無損失多端子網合成"，信学誌，47, 5, p. 21, (昭39－05).

(4) J. Reed and G.J. Wheeler : "A method of analysis of symmetrical four port networks", IRE Trans., vol. MTT-4, p. 246, October, 1956.

(5) R.Levy : "General synthesis of asymmetric multi-element coupled-transmission-line directional couplers", IEEE Trans., vol. MTT-11, p.226, July, 1963.

(6) R.E. Collin, "The optimum tapered transmission line matching section", Proc. IRE, vol. 44, p. 539, April, 1956.

輻射科学研究会資料

ベクトル乱場の表現

小倉久直

（京都大学工学部）

1966年5月

目次

第1章　序　　論 …… 1

第2章　多次元乱場 …… 4

§1　多次元空間における多次元 Wiener 積分 …… 4

§2　R_K における多次元乱場、多次元移動平均 …… 8

第3章　一様な多次元乱場の Fourier スペクトル分解 …… 10

§1　序　　論 …… 10

§2　多次元直交行程測度 …… 11

§3　多次元移動平均乱場の Fourier スペクトル分解 …… 15

第4章　一様等方なベクトル乱場 —— I
（相関テンソルのスペクトル分解） …… 17

§1　一様等方なベクトル乱場 …… 17

§2　回転群の既約表現とテンソルの既約分解 …… 19

§2·1　カノニカル基底 …… 20

§2·2　一般のカノニカル基底と既約表現 …… 21

§2·3　共変成分 …… 23

§2·4　テンソルの既約分解 …… 25

§3　等方 ℓ- ベクトル場、等方テンソル場 …… 27

§4　ベクトル場、テンソル場、ℓ- ベクトル場の Fourier 変換 …… 31

§4·1　ベクトル場、テンソル場、ℓ- ベクトル場の Fourier 変換 …… 31

§4·2　等方 ℓ- ベクトル場の Fourier 変換 …… 33

§4·3　等方2階テンソル場の Fourier 変換 …… 35

§5 一様等方なベクトル乱場の相関テンソルのスペクトル分解 …… 38

第5章 球Bessel関数の加法定理 …… 41
§1 序論 …… 41
§2 3次元Euclid運動群と$L^2(G)$上のユニタリ表現 …… 44
§3 球Bessel関数の加法定理－I（等方ℓ-ベクトル場の加法定理） …… 48
§4 球Bessel関数の加法定理－II（等方テンソル場の加法定理） …… 52
§4.1 対称な加法定理 …… 52
§4.2 T_{mn}^{ℓ}の漸化式 …… 58
§4.3 球Bessel テンソル関数とその性質 …… 61

第6章 一様等方なベクトル乱場－II（乱場のスペクトル分解） …… 65
§1 序論 …… 65
§2 表現空間としてのベクトル空間V_Ω …… 66
§3 テンソル場$f_n^\alpha(\rho)$の極表示 …… 69
§4 彷徨スペクトル測度の構成 …… 73
§5 一様等方なベクトル乱場のスペクトル分解定理 …… 74
§6 定理の変形（ランダム位相の導入） …… 77
§7 種々のベクトル乱場 …… 79
§7.1 ポテンシャル乱場 …… 79
§7.2 ソレノイド乱場 …… 83
§7.3 ベクトル乱場の回転 …… 86

第7章 一般的問題と考察 …… 89

附録 公式集 …… 91
参考文献 …… 95

ベクトル乱場の表現

第1章　序　論

通常、1次元空間あるいは時間軸上の確率変数は雑音過程（random process）と呼ばれる。雑音電流、気温の変化等はこの例である。これに対して、多次元空間上の確率変数は雑音場あるいは乱場（random field）と呼ぶ[1]。以下では簡単のため後者の呼名を採ることにする。大気中の密度のゆらぎ、粗い表面、画像上の雑音といったものがこれである。雑音過程の概念は二つの方向に拡張される。一つは今述べた定義されている空間の次元が高くなることであり、もう一つは成分が増加すること、すなわち互いに相関のある複数ケの雑音過程を同時に考えることである。それらの成分、つまり各時点における複数ケの確率変数は、多次元確率分布に従うという意味で多次元雑音過程（multidimentional random process）と呼ばれる。この'多次元'は確率論の慣用語であるから、確率変数の乗っている'空間の次元'と混同しないよう注意しなければならない。更に又、これら二つの拡張の方向が交叉した概念として多次元乱場（multi dimentional random field）というものが考えられる。たとえば、大気の温度分布と密度分布、流速度の分布、あるいは黒体輻射の場における電磁場、誘電体中の分極の分布、といったものである。この例からもわかるように、多次元乱場には、最初の例のような複数ケのスカラー場からなるものもあれば、あとの例のようにそれ自身多成分量であるベクトル場の場合もある。後者の場合には特にベクトル乱場（vector random field）と呼ぶ。多次元乱場としては、もちろんベクトル乱場とスカラー乱場の組み合わせのようなものも考えられる。たとえば、大気中の速度場と温度場とは、互いに無相関では論じえないが、それらと同時に考えることがそれである。

しばしば多次元雑音過程はベクトル雑音過程と呼ばれることがあるが

これは多次元の確率空間におけるベクトルをいみするのに用いられているのであり、上でのべているベクトルとは座標変換に対応してその成分の間でも変換が対応するような量としての〝ベクトル〟を意味している。この点まぎらわしいので、以下では'ベクトル'とは主として後者の意味に用いるが、混同のおそれのない場合には使いわけることにする。我々の主題であるベクトル乱場とは後者の意味である。

物理工学の諸問題において、乱場の概念は、たとえばランダム媒質における波動伝播、ランダム面による波動散乱の取扱い等にあらわれる。これは古くからある電波伝播の問題と並んで、レーダー、光レーダー、ソナーにおける伝播と散乱の問題に関係している。ベクトル乱場は流体の統計理論においては流れの速度場として乱流[2]（turbulent flow, random current）と呼ばれている。最近では光のコヒーレンス理論においてもしばしば取り扱われる。

乱場を取り扱う数学としては、1次元空間上の乱場、つまり雑音過程に対してはかなり研究は進んでいるが、一般の乱場に対してはそれほど研究されていないように見受けられる。筆者は以前にスカラー乱場を取り扱い[3),4)]、雑音過程の解析で用いられている移動平均過程、Riceの雑音の表現に対応するものを乱場に対しても作ることを行なった。そこではWiener過程の自然な拡張としての正規行度測度[5)]を用いて多次元空間上にWiener積分を定義し、それを用いて多次元空間の上に移動平均によって乱場を表現した。更にそれから一様な（homogeneous）乱場のFourierスペクトル分解、一様等方な（homogeneous and isotropic）乱場の極座標形式のスペクトル分解を導くことができた。これらはいずれも定常（stationary）雑音過程のKolmogoroffのスペクトル分解、およびその相関関数のKhinchineのスペクトル分解の乱場への拡張になっている。

ここでは、先に述べられたスカラー（1次元）乱場の数学に対応するものを多次元乱場、特に一様等方なベクトル乱場に対して作ることを試みる[6),7)]。

まず、第2章では、多次元正規行程測度を導入し、多次元Wiener積分を定義する。それを用いて多次元乱場、多次元移動平均を作る。第3章では移動平均を指定する関数のFourier積分表示が、一様な多次元乱場としてのFourierスペクトル分解を誘導することを示す。ここまではスカラー乱場の理論と平行して行なわれる。第4章以下ではこの研究の主眼である一様等方なベクトル乱場いわゆる一様等方乱流のスペクトル分解を試みる。等方な場合には3次元スカラー乱場と一つのベクトル乱場とではスペクトル分解の形に本質的な差があらわれる。それはベクトル量に対しては等方性と、回転に対する各成分の間の変換性とが関係するからである。Yaglomが予想したように[1]、一様等方なベクトル乱場のスペクトル分解は回転群の表現論に密接に関連する。以下で明らかにされるように、一様等方なベクトル乱場のスペクトル分解は、平行移動群と回転群とを合わせた非斉次回転群の表現論と関連しているのである。

第4章においてはまず、等方テンソル場としての相関テンソルのスペクトル分解を取り扱う。等方テンソル場の形を決めることは、乱流の問題に関連して以前になされており[2),8)]、等方相関テンソルのスペクトル分解は、特別な場合に対し、Yaglomが既に与えている[9)]が、それらの結果および方法はあまり有意味ではない。ここでは回転群の知識を利用して、一般に等方テンソル場およびそのFourier変換を考察していくつかの補助定理を導き、それらを利用して簡潔な相関テンソルのスペクトル分解、およびスペクトル密度テンソルとの間になり立つ反転公式を導く。次にこのスペクトル分解を手掛かりにして乱場自身のスペクトル分解を求めるのであるが、そのとき球Bessel関数の加法公式を必要とする。これを第5章において取り扱う。そこではまず、Vilenkinの2次元空間における非斉次回転群の表現論[10)]を3次元空間に拡張し、無限次元表現の行列要素の間の関係として加法定理を導く。一つはl次の球Bessel関数の加法定理であり、一つは2点が同等な資格であらわれる新しい型の加法定理である。ここで球Besselテンソル関数とそれによるベクトルHankel変換を導入し、その性質を調べる。第6章においては、こ

の第2の型の加法定理を用いて等方ベクトル乱場自身の極形式のスペクトル分解を導く。一般に、ベクトル場は一般球関数（回転群の既約表現の行列要素）で展開できることが知られているが[11]、一様等方ベクトル乱場もまたこの一般球関数と上で導入した球 Bessel テンソル関数とによって展開されることがここで示される。更にこのスペクトル分解の形から種々の著しい事実、特別な場合に対する結果が引き出される。第7章では一般的問題について言及する。尚、本文中で度々引用される数式および公式は附録にまとめた。

第2章　多次元乱場

§1　多次元空間における多次元 Wiener 積分

主要な記号は前論文[3),4)]に従うものとする。前には、k次元 Euclid 空間 R_K 上の正規付随測度（normal or Gaussian random measure）$B(A,\omega)$ を用いて R_K 上に Wiener 積分を拡張定義した。ここで R_K 上の Borel 集合系 $\mathfrak{B}$ の任意の測度有限の要素を $A\in\mathfrak{B}$ とし、ふつうの意味の Lebesque 測度を $m(A)$ と記す。Ω を見本空間、$\omega\in\Omega$ は見本点、あるいは確率パラメタである。

本論文では R_K 上の多次元（すなわち多成分）Wiener 積分を定義するために、次のような R_K 上の多次元正規付随測度（multi-dimensional normal random measure）なる概念を導入する。

定義　多次元正規付随測度

R_K 上の ℓ 次元正規付随測度とは $A\in\mathfrak{B}$ に依存する ℓ 次元実確率変数

$$\mathbb{B}(A)\equiv\{B^{\alpha}(A,\omega),\ \alpha=1,2,\cdots\cdots,\ell\}\qquad(2.1)$$

であって、$\{B^{\alpha}(A)\}$ は Ω 上の'ベクトル'成分として次の性質をもつものである。

i)　ℓ 次元正規分布：

$$\cdot N(0, \mu^{\alpha\beta} m(A)), \quad \det|\mu^{\alpha\beta}| = 1 \qquad (2.2)$$

に従う。

ii) 独立加法性 : $A_1 \cdots\cdots A_m$ が排反すれば $\mathbb{B}(A_1), \cdots\cdots, \mathbb{B}(A_m)$ は互いに独立な l 次元正規分布をもち、

$$\mathbb{B}(A_1 + \cdots\cdots + A_m) \sim \mathbb{B}(A_1) + \cdots\cdots + \mathbb{B}(A_m) \qquad (2.3)$$

すなわち

$$\sum_{\alpha=1}^{l} B^{\alpha}(A_1 + \cdots\cdots + A_m) \sim \sum_{\alpha=1}^{l} B^{\alpha}(A_1) + \cdots\cdots + \sum_{\alpha=1}^{l} B^{\alpha}(A_m) \qquad (a.a.\omega) \qquad (2.3)'$$

が成り立つ。

(1) (2.2) は言いかえるとその特性関数が、

$$E\langle e^{i\sum_{\alpha} z^{\alpha} B^{\alpha}(A)} \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} m(A) \sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l} \mu^{\alpha\beta} z^{\alpha} z^{\beta}\right] \qquad (2.4)$$

で与えられること、あるいは、

$$E\langle B^{\alpha}(A)\rangle = 0, \quad E\langle B^{\alpha}(A), B^{\beta}(A)\rangle = \mu^{\alpha\beta} m(A) \qquad (2.5)^{*}$$

を意味する。

(2) 特に測度の可算加法性に対応して、$\{A_n\}$ が排反して $\sum_{n}^{\infty} m(A_n) < \infty$ ならば、(2.3)' では $\mathbb{B}(A) = \sum_{n}^{\infty} \mathbb{B}(A_n)$ が言える。この等式の意味は1次元の時[5]と同様に概収束であろうが、我々の目的、すなわち R_K 上の Wiener 積分をつくるためには、確率ベクトルの和の収束は平均収束で十分であると思われる。

(3) 特に $\mu^{\alpha\beta}$ が対角化されて $\delta^{\alpha\beta}$ であるとき (2.1) は、'標準化' してあると呼ぶことにする。このとき各 $B^{\alpha}(A)$ は独立であって、$\mathbb{B}(A)$ は l ヶの1次元正規行程測度の直積と考えることができる。したがって Ω も l ヶの '部分見本空間' の直積からなると考えてよい。

---

* $E\langle\ \rangle$ は ω についての平均を意味する。又、後に複素確率変数の積の平均をとるときも含めて便宜上 $E\langle \bar{x}y\rangle$ を $E\langle x,y\rangle$ の様に記す。ここに $\bar{x}$ は x の複素共役である。

定義　階段関数：互に排反する集合 A_p（$p=1,2,\cdots\cdots m$）上で常数値 h_p をとり、それ以外では0なる値をとる関数を階段関数と呼ぶことにすると、それは、

$$f(x)=\sum_{p=1}^{m} h_p \omega_{A_p}(x) \qquad (2.6)$$

と書ける。ただし $\omega_A(x)$ は集合A上で1，他では0なる値をとる関数である。このような階段関数の全体は一つの線型空間をつくる。

定義　R_K 上の l 次元 Wiener 積分

(2.6) のような形の l ケの階段関数の組 $\mathfrak{f}=\{f^\alpha(x),\alpha=1,2,\cdots\cdots l\}$ に対する l 次元 Wiener 積分を次のように定義する。

$$I(\mathfrak{f})=\sum_{\alpha=1}^{l} f^\alpha(x)\, B^\alpha(dx,\omega)=\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{p=1}^{m} h_p^\alpha B^\alpha(A_p,\omega)$$

$$x:(x_1,\cdots\cdots x_K),\ dx\equiv m(dx)=dx_1\cdots\cdots dx_K \qquad (2.7)$$

右辺の A_p, m, は α によって異なるが、(2.6) の定義において A_p に適当に細分を行なうならば、各 α について同じとしてよい。

(2.5) を用いて直ちに示されるように、$I(\mathfrak{f})$ は1次元 Wiener 積分の時と類似の関係を満足する。

$$I(a\mathfrak{f}+b\mathfrak{g})=aI(\mathfrak{f})+bI(\mathfrak{g}) \qquad (2.8)$$

$$E\langle I(\mathfrak{f})\rangle=0 \qquad (2.9)$$

$$E\langle I(\mathfrak{f}),I(\mathfrak{g})\rangle=\sum_{\alpha,\beta}\mu^{\alpha\beta}\langle f^\alpha,g^\beta\rangle_{R_K}\equiv\langle\mathfrak{f},\mathfrak{g}\rangle \qquad (2.10)$$

$$E\langle|I(\mathfrak{f})|^2\rangle=\sum_{\alpha,\beta}\mu^{\alpha\beta}\langle f^\alpha,f^\beta\rangle_{R_K}=\langle\mathfrak{f},\mathfrak{f}\rangle\equiv\|\mathfrak{f}\|^2 \qquad (2.11)$$

ただし

$$\langle f,g\rangle_{R_K}\equiv\int_{R_K}\overline{f(x)}\,g(x)\,dx \qquad (2.12)$$

(2.11) の右辺の $\|\mathfrak{f}\|$ はベクトル関数 $\mathfrak{f}=\{f^\alpha\in L^2(R_K),\ \alpha=1,$

……, $l\}$ のつくる一つの線型空間のノルムの性質をもち、$\langle f, g\rangle$ を内積とし、このノルムによる完備化を行なうならば、ノルム有限なベクトル関数系のつくる線型空間は一つのヒルベルト空間とみなすことができる。これを $\mathbb{L}^2(R_K)$ であらわすことにする（l はあらわに書かなかった）。$\mathbb{L}^2(R_K)$ は正定値行列 $\|\mu^{\alpha\beta}\|$ ($\det|\mu^{\alpha\beta}|=1$) のとり方に依存するように見えるが、多次元確率変数の適当なユニタリ変換に関して内積は不変であり、又 $\mathbb{L}^2(R_K)$ はもちろん線型であるから、$\mu^{\alpha\beta}$ のとりかたに依存せず、$\mu^{\alpha\beta}$ を対角化するようにとれば、$\mathbb{L}^2(R_K)$ は $L^2(R_K)$ の l ヶの直和と同等である。

さて、(2.7)～(2.11) は階段関数 (2.6) に対して定義されたものであるが、1次元の場合の議論[3.4.5]と同様にして、階段関数系の $L^2(R_K)$ における稠密性を用いて、l 次元 Wiener 積分 (2.7) の定義は $f\in\mathbb{L}^2(R_K)$ なるベクトル関数に対して極限移行ができる。すなわち $\mathbb{L}^2(R_K)$ における収束、従って (2.11) の関係によって $L^2(\Omega)$ における平均収束によって、確率積分として、

$$I(f)=\int_{R_K} f(x)\,\mathbb{B}(dx,\omega)=\sum_{\alpha}\int_{R_K} f^{\alpha}(x)\,B^{\alpha}(dx,\omega) \tag{2.13}$$

の定義ができる。(2.13) を $f\in\mathbb{L}^2(R_K)$ に対する <u>l 次元 Wiener 積分</u>（l-dimensional Wiener Integral）の定義とする。以下では $I(f)$ を I_f と書く場合もある。

(4) $I(f)$ は $\mu^{\alpha\beta}$ のとり方によらないから、(3) のいみで $\mathbb{B}(A)$ が標準化してあれば (2.13) は各項別に積分の定義ができ、(2.13) は l ヶの1次元 Wiener 積分の和に書かれ、各項は互いに独立な確率変数である。

(5) l 次元 Wiener 積分 (2.13) は (2.8)～(2.11) の性質を有する。$\mathbb{B}(A)$ が標準化されたときには、これらの関係は α について項別に成立し、1次元の場合に帰着する。

(6) $I(\mathbb{f})$は分布 $N(0, \|\mathbb{f}\|^2)$ をもつ。したがって $\|f\|^2=\|\mathbb{f}\|^2$ なる $f \in L^2(R_K)$ の1次元 Wiener 積分 $I(f)$ は、ℓ 次元 Wiener 積分 $I(\mathbb{f})$ と同じ分布をもつ。同様にして、同じ分布をもつ任意次元の Wiener積分をつくることができる。

(7) (2.8)によって、2つ以上の ℓ 次元 Wiener積分の線型結合は又一つの ℓ 次元 Wiener積分である。

(8) $\mathbb{f}_i \in \mathbb{L}^2(R_K)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots m)$ に対する m ケの ℓ 次元 Wiener積分 $I(\mathbb{f}_i)$ を<u>m次元確率変数</u>とみるとき、その<u>相関行列</u>は (2.10)によって、$\langle \mathbb{f}_i, \mathbb{f}_j \rangle$ で与えられる。

m 次元正規分布に従う m ケの確率変数を ℓ 次元 Wiener 積分によって記述するには、$\ell \geqq m$ であればよく、したがって(6)によって $\ell=m$ なる ℓ をとれば十分である。

(9) $\mathbb{f}_i$ の添数が R_K 上の m 成分ベクトルの座標成分をあらわすとき、ベクトル成分の1次変換

$$\mathbb{f}_i' = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}\, \mathbb{f}_j \qquad (2.14)$$

によって $I(\mathbb{f}_i)$、$\langle \mathbb{f}_i, \mathbb{f}_j \rangle$ は (2.8)(2.10) によって、

$$I(\mathbb{f}_i') = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}\, I(\mathbb{f}_j) \qquad (2.15)$$

$$\langle \mathbb{f}_i', \mathbb{f}_j' \rangle = \sum_{k,\ell} \bar{g}_{ik}\, g_{j\ell} \langle \mathbb{f}_k, \mathbb{f}_\ell \rangle \qquad (2.16)$$

なる変換をうけるから、$I(\mathbb{f}_i)$はベクトル量、$\langle \mathbb{f}_i, \mathbb{f}_j \rangle$ はテンソル量である。

§2 R_K における多次元乱場，多次元移動平均

<u>定義</u> ： R_K 上の、ℓ 次元乱場、ℓ- ベクトル乱場

$R_K \otimes R_K$ 上の l ケのベクトル関数 $\mathfrak{f}_i(x', x)$, $(i = 1, 2, \cdots\cdots l)$ が x' の関数として $\mathfrak{L}^2(R_K)$ に属するとする。その時 (2.13) によって l ケの l 次元 Wiener 積分

$$I_{\mathfrak{f}_i}(x) = \int_{R_K} \mathfrak{f}_i(x', x)\, \mathbb{B}(dx', \omega) \equiv \sum_{\alpha=1}^{l} \int_{R_K} f_i^{\alpha}(x', x) B^{\alpha}(dx', \omega)$$
$$(i = 1, 2, \cdots\cdots l) \qquad (2.17)$$

を作ると、各々は R_K 上の一つのスカラー乱場であるが、これら l ケのスカラー乱場を同時に見るとき、(2.17) を R_K 上の l 次元乱場 (l-dimensional random field in R_K) と呼ぶことにする。

特に (2.17) の添字が R_K における直線座標に関する l 成分ベクトル (これを l- ベクトルと呼ぶことにする) をあらわしているとき、(2.17) を R_K 上の l-ベクトル乱場 (l-vector random field) と呼ぶ。

(1) l 次元乱場 (2.17) の相関行列の行列要素は §1 (8) によって、

$$R_{ij}(x_a, x_b) = \langle \mathfrak{f}_i(x', x_a), \mathfrak{f}_j(x', x_b) \rangle_{x'} \qquad (2.18)$$

で与えられる。特に l-ベクトル乱場に対しては §1(9) によってこれを相関テンソルと呼ぶ。これは 2 点 x_a, x_b に依存する 2-point tensor である。

(2.17) は一般には非均質 (inhomogeneous) な乱場をあらわしている。特に、

$$R_{ij}(x_a, x_b) = R_{ij}(x_a - x_b) \qquad (2.19)$$

が成立つとき、多次元乱場は一様あるいは均質 (homogeneous) であるという。

(2) (2.17) において、$\mathfrak{f}_i(x', x) = \mathfrak{f}_i(x' - x)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots l)$ と採ぶならば、その相関行列は (2.18) によって、

$$R_{ij}(x_a, x_b) = R_{ij}(x_a - x_b) = \langle \mathfrak{f}_i(x' - x_a), \mathfrak{f}_j(x' - x_b) \rangle_{x'} \qquad (2.20)$$

となって（2.19）を満たすから、この時（2.17）は一つの均質なℓ次元乱場をあらわしている。

$$I_{f_i}(x)=\int f_i(x'-x)\,\mathbb{B}(dx',\omega),\quad (i=1,2,\cdots\ell) \tag{2.21}$$

を<u>ℓ次元移動平均</u>（ℓ-dimensional moving average）乱場と呼ぶことにする。

第3章　一様な多次元乱場のFourierスペクトル分解

§1　序　　論

第1章でのべたように、1次元空間上の一様な乱場すなわち<u>定常</u>雑音過程（stationary random process）の一つの拡張としての多次元定常雑音過程（stationary multi-dimensional random process）に対しては、スペクトル分解は既にKolmogoroffによって得られている。[1] もう一つの方向として<u>一様な</u>乱場（homogeneous random field）のスペクトル分解も又証明はなされているが、[1] 移動平均（（2.21）で $\alpha=1,\ \ell=1$）による一様乱場に対してはスペクトル分解は簡単に導びかれることが前に示された。[2] ここで取扱うものは、それらの2つの拡張方向の交叉した場合、すなわち一様な多次元乱場（homogeneous multi-dimensional random field）のスペクトル分解である。特に多次元乱場がベクトル場であるとき、それは一様なベクトル乱場（homogeneous vector random field）あるいは一様な乱流のスペクトル分解になっている。個々の成分のみに注目する時はそれは一つのスカラー乱場のスペクトル分解にすぎないが、同時に各成分に注目するときには、それらの間の相関行列あるいは相関テンソルを考慮しなければならない。この章で取り扱う<u>一様な</u>多次元乱場の場合には、ℓヶのスカラー乱場に対するものとℓ-ベクトル乱場あるいは、それらの組み合わせに

対するものとではスペクトル分解の形は変わらない。ただ座標変換を行なうときに差異があるだけである。つまり一方は不変であるが、他方は成分の間で変換をうけるというようなことがおこる。これに反し、第4章以下で取扱う一様且つ等方な多次元乱場においては、複数ケのスカラー乱場と唯一つのベクトル乱場とでは次元数は同じであってもスペクトル分解の形は本質的に異なってくる。すなわち、そこでは場の量の変換性がスペクトル分解の形を支配するのである。

この論文では、一様なℓ次元乱場を一般的に取扱かうのではなく、前論文の処方に従って、ℓ次元移動平均乱場（2.21）のFourier スペクトル分解を導く。これを行なうことは、前にものべたように1次元の場合、スペクトル測度が絶対連続であるといういみでは幾分特殊性があるが、スカラー乱場の時と同様多次元の場合もスペクトル分解が容易に見出されることが期待できるからであり、又、この手続きが、後章で一様等方ベクトル乱場のスペクトル分解を求めるときの原型にもなるからである。議論は前の行なったスカラー乱場のスペクトル分解のそれと殆ど平行する。

§.2. 多次元直交仿徨測度

1次元の場合、スペクトル分解とは、乱場をある直交仿徨測度のFourier-Stieltjes 変換の形に書くことであった。今取り扱おうとする多次元の場合には、次のような $L^2(\Omega)$ 値一多次元直交測度、あるいは多次元直交仿徨測度（multi-dimensional orthogonal random measure）なる概念を導入する。

定義 多次元直交仿徨速度

R_K 上の加法的集合関数を行列要素とするHermiteでnon-negative definiteなℓ×ℓ行列 $\|\mu_{ij}(S)\|$, $S\in\mathcal{S}$ が与えられているとする。このとき、行列 $\|\mu_{ij}(S)\|$ に属するℓ次元直交仿徨測度

$$\mathbb{M}(S,\omega)=\{M_i(S,\omega),\ i=1\cdots\cdots l,\},\ \omega\in\Omega,\ S\in\mathcal{B} \qquad (3.1)$$

とは、l 次元正規分布

$$N(0,\mu_{ij}(S)) \qquad (3.2)$$

に従う l 次元正規確率変数であって、しかも $S_1,\cdots\cdots S_m$ が排反すれば $\mathbb{M}(S_1)\cdots\cdots\mathbb{M}(S_m)$ は互いに独立な分布をもつ。したがって $L^2(\Omega)$ の関数として一般に、

$$E\langle M_i(S_1),M_j(S_2)\rangle=\mu_{ij}(S_1\cap S_2) \qquad (3.3)$$

を満足するものである。

(1) 多次元正規行程測度 $\mathbb{B}(A)$ は一つの多次元直交行程測度である。

(2) R_K 上の関数に対し、加法的集合関数 $\mu_{ij}(S)$ による Random Stieltjes 積分が定義できるから、ベクトル関数 $\mathbb{U}(y)=\{U_i(y),\ i=1\cdots\cdots l\}$ および $\mathbb{V}(y)$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{l}\int_{R_K}\overline{U_i(y)}\,V_j(y)\,\mu_{ij}(dy) \qquad (3.4)$$

が作れる。これによってベクトル関数のつくる一つの線型空間に Hermite 内積とノルムが入ることはすぐわかるから、第2章§1 の様に、そのようなノルム有限なベクトル関数全体からなる一つのヒルベルト空間 $\mathbb{L}^2(R_K,\mu_{ij})$ を考えることができる。

(3) <u>l 次元直交行程測度による積分</u>

多次元 Wiener 積分の定義 (2.13) と全く同じようにして、$\mathbb{U}\in\mathbb{L}^2(R_K,\mu_{ij})$ に対して、$\|\mu_{ij}\|$ に属する l 次元直交行程測度 $\mathbb{M}(s)$ による積分、

$$J(\mathbb{U})=\sum_i\int_{R_K}U_i(y)M_i(dy,\omega)\equiv\int_{R_K}\mathbb{U}(y)\mathbb{M}(dy,\omega) \qquad (3.5)$$

が定義できる。

(4) μ_{ij} が対角ならば、この積分は (3.5) において各項別に1次元

直交測度による積分として定義ができる。又、特別な成分、たとえば第 i 成分に注目するときは、$\mu_{ii}(s) \geq 0$ は測度になることを用いて、第 i 項の積分を定義することは可能である。これは $\mathbb{U}$ において $U_j = 0$, $j \neq i$ ととったことに相当する。しかしながら、一般に、l ケの成分に同時に注目するときには、積分の収束の意味は（3.5）の形においてとられる。

（5）多次元直交測度による積分に対し、

$$E < J(\mathbb{U}), J(\mathbb{V}) > = \sum_{ij} \int \overline{U_i(y)}\, V_j(y)\, \mu_{ij}(dy) \qquad (3.6)$$

がなりたつ。$\| \mu_{ij} \|$ が対角であれば、この関係は項別に等式が成立し、1次元の場合に帰着する。

（6）L^2-Fourier 変換[12]

必要な定義と関係のみ列挙する。[3]

$f(x) \in L^2(R_K)$ に対し、L^2-Fourier変換のみで、Fourier変換 $F(y) \in L^2(R_K)$ が存在して、

$$f(x) = \int_{R_K} F(y) e^{2\pi i (x,y)} dy \qquad (3.7)$$

$$(x \cdot y) \equiv x_1 y_1 + \cdots + x_K y_K, \quad dy \equiv dy_1 \cdots dy_K \qquad (3.8)$$

$f(x)$ が実関数であるときは、

$$F(-y) = \overline{F(y)} \qquad (3.9)$$

$f(x), g(x) \in L^2(R_K)$ に対し、

$$\int_{R_K} g(x') f(x'-x) dx' = \int_{R_K} \overline{G(y)}\, F(y)\, e^{-2\pi i (x \cdot y)} dy \qquad (3.10)$$

$$< g, f >_{R_K} = < G, F >_{R_K} \qquad (3.11)$$

（7）射影：（3.7）の右辺の不定積分を

$$E(S)f(x) \equiv \int_S F(y) e^{2\pi i(x,y)} dy, \quad S \in \mathfrak{B} \qquad (3.12)$$

とおけば、$E(S)$ は $L^2(R_K)$ 上で定義された射影演算子であるとみなすことができる。(3.11) によって次の関係が成立する。

$$\langle E(S_1) g , E(S_2) f \rangle_{R_K} = \int_{S_1 \cap S_2} \overline{G(y)}\, F(y) dy \qquad (3.13)$$

(8) 多次元直交行程測度の構成

ℓ 次元移動平均 (2.21) に対応する ℓ 次元直交行程測度を次のようにつくる。まず $S \in \mathfrak{B}$ に対して (2.10) により、ℓ ケのベクトル関数 $\mathbb{f}_i(x)$, $(i = 1, 2, \cdots \ell)$ に対し、

$$\mu_{ij}(S) = \langle E(S)\, \mathbb{f}_i , E(S)\, \mathbb{f}_j \rangle \qquad (3.14)$$

とおく。ここに $E(S)\, \mathbb{f}_i = \{ E(S) f_i^{\alpha}, \alpha = 1, 2, \cdots \ell \}$ の意味である。これは射影の性質を用いれば $\langle E(S)\, \mathbb{f}_i , \mathbb{f}_j \rangle$ に等しい。(3.13) によって、

$$= \int_S F_{ij}(y) dy \qquad (3.15)$$

ただし、

$$F_{ij}(y) = (\mathbb{F}_i , \mathbb{F}_j) \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{\ell} \mu^{\alpha\beta}\, \overline{F_i^{\alpha}(y)}\, F_j^{\beta}(y) \qquad (3.16)$$

ここで $\mathbb{F}_i(y)$ は $\mathbb{f}_i(x)$ の Fourier 変換である。(3.15) の意味するところは、今の場合、加法的集合関数 (3.14) は絶対連続であることである。(3.16) はその導関数である。又容易に示されるように、行列 $\| \mu_{ij}(S) \|$ は Hermite で non-negative definite になっている。

次に、$E(S)\, \mathbb{f}_i \in \mathbb{L}^2(R_K)$ は明らかであるから、(2.13) によってその ℓ 次元 Wiener 積分をつくる。これを

$$M_i(S) \equiv I(E(S)\, \mathbb{f}_i) = \sum_{\alpha=1}^{\ell} \int E(S) f_i^{\alpha}(x)\, B^{\alpha}(dx)$$
$$(i = 1, 2, \cdots \ell) \qquad (3.17)$$

とおけば、これは $\|\mu_{ij}(S)\|$ に属する l 次元直交行程測度になっている。何となれば、(2.10)(3.13)(3.14) によって、

$$E\langle M_i(S_1), M_j(S_2)\rangle = \langle E(S_1)\mathbf{f}_i, E(S_2)\mathbf{f}_j\rangle_{R_K} = \mu_{ij}(S_1\cap S_2) \tag{3.18}$$

が成立し、(3.3)が言えるからである。

(9) (3.17)(2.10)(3.13)(3.16)(3.10) によって次の関係が成立つ。

$$E\langle I_{\mathbf{f}_i}(x), M_j(S)\rangle = \int_S F_{ij}(y)\, e^{-2\pi i(x,y)}\, dy \tag{3.19}$$

§3. 多次元移動平均乱場の Fourier スペクトル分解

以上の準備のもとに l ケのベクトル関数 $\mathbf{f}_i \in \mathbb{L}^2(R_K)$, $(i=1,2\cdots l)$, (したがって l^2 ケの $f_i^\alpha \in L^2(R_K)$) によって指定される。l 次元移動平均乱場 (2.21)は、1次元のときに行なったと同様に[3]、乱場を指定する関数 $f_i^\alpha(x)$ の Fourier 積分表示 (3.7) が、乱場としての Fourierスペクトル分解を誘導することがわかる。このとき(3.17)のように構成された多次元直交測度 $M_i(S)$ とこの多次元乱場に対応する多次元行程スペクトル測度 (multi-dimensional random spectral measure)、又、(3.16) で与えられる $F_{ij}(y)$ をスペクトル密度行列 (spectral density matrix) と呼ぶことにする。このスペクトル分解を定理の形に述べよう。

定理1 l ケのベクトル関数 $\mathbf{f}_i \in \mathbb{L}^2(R_K)$ $(i=1,2,\cdots\cdots l)$ で指定される k 次元空間 R_K 上の l 次元移動平均乱場 (2.21)は $L^2(\Omega)$ における収束のいみで、次のようにスペクトル分解をうける。各成分ごとに書くならば、

$$I_i(x)=\int_{R_K} e^{-2\pi i(x.y)} M_i(dy,\omega), \quad i=1,2,\cdots\cdots \ell \tag{3.20}$$

ここに ℓ 次元彷徨スペクトル測度 $M_i(S)$, $S\in\mathcal{S}$ ($i=1,2\cdots\cdots\ell$) は (3.17) で定義され.

$$E<M_i(S_1), M_j(S_2)>=\mu_{ij}(S_1\cap S_2) \tag{3.21}$$

$$\mu_{ij}(S)=\int_S F_{ij}(y)\,dy \tag{3.22}$$

なる性質をもつ $L^2(\Omega)$ の関数である。ここにスペクトル密度行列 $F_{ij}(y)$ は (3.16) で与えられる。

相関行列は (2.20) (3.10) によって、次のスペクトル分解をうける。

$$R_{ij}(x)=\int_{R_K} e^{-2\pi i(x.y)}\mu_{ij}(dy)=\int_{R_K} F_{ij}(y)e^{-2\pi i(x.y)}dy \tag{3.23}$$

又、Fourier 変換の反転公式を用いるとスペクトル密度行列は、

$$F_{ij}(y)=\int_{R_K} R_{ij}(x)\,e^{2\pi i(x.y)}dx \tag{3.24}$$

とかかれる。

上式のスペクトル分解の形 (3.20) は各成分について書かれているが、意味は (3) で述べた意味にとるべきである。証明は (3.19) 等を用いて行なわれる。(3.23)(3.24) の相関行列とスペクトル密度行列との関係は Wiener-Khinchine の公式の一般化に対応する。この関係は、ベクトル乱場の場合には、乱流理論においてよく用いられている。一様な乱場に対するこのスペクトル分解定理の形は、前にものべたように、ℓ ケのスカラー乱場か、あるいは1ケの ℓ-ベクトル乱場であるかには無関係である。又上は、ℓ ケの $f_i(x)$ によって指定される乱場と考えたが、(3.21)~(3.24) によって、相関行列 $R_{ij}(x)$ あるいはスペクトル密度行列 $F_{ij}(y)$ で指定されると考えることもできる。1次元の場合、すな

わち前に行ったスカラー乱場の時にそうであったように、移動平均乱場においては、スペクトル測度 $\mu(S)$ が絶対連続であるといういみで、多少の特殊性があった。今扱っている多次元乱場の場合には、それはその多次元直交行程測度 $M_i(S)$ の属しているスペクトル測度行列の要素としての各加法的集合関数 $\mu_{ij}(S)$ が絶対連続であるというところにあらわれているのである。

第4章　一様等方なベクトル乱場（相関テンソルのスペクトル分解）

§1　一様等方なベクトル乱場

一様な l 次元乱場 $I_i(x)$ の添字が直線座標に関するベクトル成分を意味するときには、第2章§1(9)で述べたように、l- ベクトル乱場をあらわし、座標変換、あるいは乱場自身の回転に対し、各成分はベクトルとしての1次変換をうける。以下では最もふつうの場合として、3次元空間 R_3 上のふつうの3成分ベクトル乱場を考えよう。空間の次元数 k と成分の数 l（$l \neq 1$）が一致しない一般の場合は第7章でふれることにする。

（1）ベクトル乱場 $I_i(x)$ に<u>回転</u>（又は成分間の1次変換）g を行なえば、新しいベクトル乱場 $I_i'(x)$ がえられるが、それはもとのベクトル乱場と

$$I_i'(x) = \sum_{j=1}^{3} g_{ij} I_j(g^{-1}x) \qquad (4.1)$$

の関係がある。ここで $\|g_{ij}\|$ は回転 g の与えられた座標系に関する行列であり、g^{-1} はその逆行列である。そのとき相関行列 (2.20) の各要素は

$$R_{ij}'(x) = E\langle I_i'(x), I_j'(0)\rangle = \sum_{k,l=1}^{3} \overline{g}_{ik} g_{jl} R_{kl}(g^{-1}x) \qquad (4.2)^*$$

のように変換をうけるから、これは $x = x_a - x_b$ の関数として、一つのテンソル場、すなわち2階混合テンソル場の成分であることを意味する。$\| R_{ij}(x) \|$ をベクトル乱場の相関テンソル（correlation tensor）と呼ぶ。

定義　相関テンソルが回転不変なとき、すなわち等方テンソル場であるときには、

$$R_{ij}(x) = R'_{ij}(x) = \sum_{k,l=1}^{3} \overline{g_{ik}}\, g_{jl}\, R_{kl}(g^{-1}x) \qquad (4.3)$$

なる関係がある。相関テンソルが等方であるような一様なベクトル乱場を、一様等方なベクトル乱場（homogeneous and isotropic vector random field）と呼ぶ。**

(2) Cartesian 座標に関する成分で書くとき、$\| g_{ij} \|$ は実行列になるが、そのとき(4.3)を満足する等方テンソル場の一般的な形は、

$$R_{ij}(x) = a(r)\, k_i k_j + b(r)\, \delta_{ij} + c(r) \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} k_k \qquad (4.4)$$

ただし

$$r = |x|, \quad k_i \equiv \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (4.5)$$

で与えられることがわかっている。[2), 8)]

ここで δ_{ij} は $i=j$ のとき 1, $i \neq j$ のとき 0 なる成分をもつテンソル、ϵ_{ijk} は (i,j,k) が $(1,2,3)$ の偶置換のとき 1, 奇置換のとき −1, そうでな

---

*（前頁）通常の Cartesian 座標に関する成分でベクトル乱場を記述する場合には、もちろん回転 g の行列要素は実であり、g_{ik} の複素共役 $\overline{g_{ik}}$ をとる必要はないが、以下において複素座標の場合も取り扱うので、実の場合も含めて(4.2)の形に書いておく。

**　本によってはしばしば、等方の定義の内に、回転不変性の他に、座標反転に関する不変性も入れている。我々の場合には、反転不変性の制限は特につけ加えないことにする。その方がより一般的だからである。

いときには0なる成分をとる Levi-Civita のテンソルである。

(3) この形は内積を作ると回転不変なスカラー量を与えるようなテンソルの一般形としてどちらかといえば primitive な方法で導かれたものである。[8] これは又、次の考察からもわかる。すなわち、2階のテンソル空間は一般に、1成分の $a'\delta_{ij}$、5成分の trace が0なる部分、$b'(k_i k_j - \frac{1}{3}\delta_{ij})$、3成分の反対称部分からなる3つの不変な部分空間にわかれることがすぐわかるので、[11] (4.4)はそれに対応して9成分を分解したものと考えてもよい。

しかしながら、以下の各節で示すように、テンソルの既約成分を極座標に関するカノニカル成分で考えるならば、等方性の条件(4.3)は、最も簡明直截に書くことができ、更にテンソル以外の一般の場の量、次元の拡張に対する等方性の条件をも同時に与えることがわかる。
(4.4)はそこでの結果を Cartesian 座標成分に書直すことによって得られる。又、このような考察は、後にのべる相関テンソルのスペクトル分解、乱場自身のスペクトル分解を求める際の議論の一部をなしているのである。以下の各節では、その準備を行ない、§5においてこの章の目的である相関テンソルのスペクトル分解を与える。

§2. 回転群の既約表現とテンソルの既約分解

§2-1 カノニカル基底

(1) よく知られているように、任意の回転 g は、3つの Euler 角 $(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ を用いて Cartesian 座標の基底ベクトル e_x, e_y, e_z に関して、e_z まわりの角 φ_1 の回転 g_φ、e_x まわりの回転 g_θ、e_z まわりの回転 g_{φ_2} を順に行なうことに分解でき、対応する行列は、これらの行列の逆順の積で与えられる。

$$\|g_{ij}\| = \|g_{\varphi_1}\| \cdot \|g_\theta\| \cdot \|g_{\varphi_2}\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\theta\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \sin\varphi_1\sin\theta \\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\theta\cos\varphi_1\sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\theta\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\theta \\ \sin\varphi_2\sin\theta & \cos\varphi_2\sin\theta & \cos\theta \end{matrix} \right\| \quad (4.6)$$

(2) e_z まわりの回転 g_φ に関する<u>カノニカル基底ベクトル</u>は次の形をもつ。

$$e_- = \frac{e_x - ie_y}{\sqrt{2}}, \quad e_0 = e_z, \quad e_+ = \frac{-e_x - ie_y}{\sqrt{2}} \quad (4.7)$$

これらは g_φ の固有ベクトルで、それぞれ固有値 $e^{i\varphi}, e^{0}, e^{-i\varphi}$ をもつ。カノニカル基底の一般的な定義は次の小節で与える。(4.7)の2種の基底間の変換は

$$e_m = \sum_i \gamma_{im} e_i \quad (i = x, y, z, \ m = -, 0, +) \quad (4.8)$$

$$\| \gamma_{im} \| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{matrix} \right\| \quad (4.9)$$

の形に書ける。対応するベクトル成分の間には、

$$a_m = \sum_i \bar{\gamma}_{im} a_i \quad (4.10)$$

の関係がある。あらわに書けば、

$$a_- = \frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}}, \quad a_0 = a_z, \quad a_+ = \frac{-a_x + ia_y}{\sqrt{2}} \quad (4.11)$$

(3) カノニカル基底 e_m に関する回転 g の行列表示 $\| T_g \|$ は次のように書ける。

$$\| T_g \| = \| \gamma^{-1} \| \cdot \| g \| \cdot \| \gamma \| = \| T_{\varphi_1} \| \cdot \| T_\theta \| \cdot \| T_{\varphi_2} \|$$

$$= \begin{Vmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-i\varphi_1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & -i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\cos\theta-1}{2} \\ -i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & -i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos\theta-1}{\sqrt{2}} & -i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{i\varphi_2} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-i\varphi_2} \end{Vmatrix} \tag{4.12}$$

(4.6) の $\|g_{ij}\|$ は実行列であったが、カノニカル基底 (4.7) に関する g の行列 $\|T_g\|$ は複素行列である。以下においては断わらない限り、成分はカノニカル基底に関する成分 (4.11) をいみするものとし、(4.12) の $\|T_{mn}\|$ は改めて $\|g_{mn}\|$ と書くことにする。行列の番号 $m, n = 1, 2, 3$ は順に基底の添字 $-, 0, +$ をあらわすものとする。

§2-2 一般のカノニカル基底と既約表現[11]*

(4) e_x, e_y, e_z まわりの微小回転 (infinitesimal rotation) を A_1, A_2, A_3 とし、$H_K = iA_K$ ($K = 1, 2, 3$) で定義される Hermite 演算子を用いて、

$$H_- = H_1 - iH_2, \quad H_0 = H_3, \quad H_+ = H_1 + iH_2 \tag{4.13}$$

を定義する。任意の回転 g は A_K ($K = 1, 2, 3$) で生成される。回転 g の既約な表現空間は ($2l+1$) 次元 ($l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots\cdots$) であって、$H_0$ の ($2l+1$) ケの固有ベクトル ff_m ($m = -l, -l+1, \cdots\cdots, l$) をその基底にとることができる。これをその既約な表現空間の、e_z まわりの回転に関するカノニカル基底 (canonical base)：又 l を表現の weight と呼ぶ。次の関係が示される。

$$\begin{aligned} H_0 ff_m &= m ff_m \\ H_+ ff_m &= \alpha_{m+1} ff_{m+1} \\ H_- ff_m &= \alpha_m ff_{m-1} \end{aligned} \tag{4.14}$$

---

* 文献 (11) には、原論文にある多少の誤りが、ロシア語のテキスト、あるいは英訳においても部分的にしか訂正されていないので注意する必要がある。

ただし

$$\alpha_m = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}\ ,\quad m=-\ell,-\ell+1,\cdots\cdots,\ell \qquad (4.15)$$

(5) 回転 g の weight 1 の既約表現の、このカノニカル基底に関する行列は (4.12) に一致する。ここでは $\ell=\frac{1}{2}$, $\ell=2$ の場合の表現行列の、(4.12) の $\|T_\theta\|$ に相当する部分のみをあらわに示しておく。$\|T_\varphi\|$ は $e^{im\varphi}$ ($m=-\ell,-\ell+1,\cdots\cdots\ell$) を対角要素とする対角行列であるから、$\|T_g\|$ の (m,n) 成分は $\|T_\theta\|$ の $(m\,n)$ 成分に $e^{-im\varphi_1-in\varphi_2}$ を乗じたものである。weight ℓ を $\|T_\theta^{\ell}\|$ のように示す。

$$\ell=\frac{1}{2},\quad \|T_\theta^{\frac{1}{2}}\| = \begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix} \qquad (4.16)$$

$\ell=2$

$$\|T_\theta^{2}\| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{4}(\cos\theta+1)^2 & -\frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta+1) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\cos^2\theta) \\ \frac{-i}{2}\sin\theta(\cos\theta+1) & \frac{1}{2}(2\cos^2\theta+\cos\theta-1) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\,i\sin\theta\cos\theta \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\cos^2\theta) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\,i\sin\theta\cos\theta & \frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) \\ -\frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta-1) & \frac{1}{2}(2\cos^2\theta-\cos\theta-1) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\,i\sin\theta\cos\theta \\ \frac{1}{4}(\cos\theta-1)^2 & -\frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta-1) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\cos^2\theta) \end{Vmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{Vmatrix} -\frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta-1) & \frac{1}{4}(\cos\theta-1)^2 \\ \frac{1}{2}(2\cos^2\theta-\cos\theta-1) & -\frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta-1) \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\,i\sin\theta\cos\theta & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\cos^2\theta) \\ \frac{1}{2}(2\cos^2\theta+\cos\theta-1) & -\frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta+1) \\ -\frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta+1) & \frac{1}{4}(\cos\theta+1)^2 \end{Vmatrix} \qquad (4.17)$$

(6) 一般の weight ℓ の既約表現の(4.14)のカノニカル基底に関する行列成分は,

$$\left\| T_g^{\ell} \right\| = \left\| T_{mn}^{\ell}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \right\| \qquad (m, n = -\ell, -\ell+1, \cdots\cdots, \ell)$$

$$T_{mn}^{\ell}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_1} P_{mn}^{\ell}(\cos\theta) e^{-in\varphi_2} \qquad (4.18)$$

$$P_{mn}^{\ell}(\mu) \equiv A(1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}}(1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}} \frac{d^{\ell-n}}{d\mu^{\ell-n}}\left[(1-\mu)^{\ell-m}(1+\mu)^{\ell+m}\right]. \qquad (4.19)$$

$$A \equiv \frac{(-1)^{\ell-m} i^{n-m}}{2^{\ell}(\ell-m)!}\sqrt{\frac{(\ell-m)!(\ell+n)!}{(\ell+m)!(\ell-n)!}} \qquad (4.20)$$

で与えられる。

(7) $T_{mn}^{\ell}(\varphi, \theta \varphi_2)$ は次数 ℓ の一般球関数(Generalized spherical function)と呼ばれる。これは後章において、等方ベクトル乱場のスペクトル分解(一般に、ベクトル場の展開)において重要な役割を果たす。[11]

特に ℓ が整数のとき、行列の中央の行または列は、ℓ 次の球関数で書くことができ、

$$T_{mo}^{\ell}(\varphi_1, \theta) = e^{-im\varphi_1} P_{mo}^{\ell}(\cos\theta) = e^{-im(\varphi_1+\frac{\pi}{2})}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^{m}(\cos\theta) \qquad (4.21)$$

となる。ここで、

$$P_{mo}^{\ell}(\cos\theta) = (-i)^m \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^{m}(\cos\theta) \qquad (4.22)$$

の関係を用いた。

§2-3 共変成分

定義 : ベクトル成分 a_i $(i = 1, 2, 3)$ に対し、

$$a^i = \sum_j \varepsilon^{ij} a_j \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (4.23)$$

ただし、

$$\|\varepsilon\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \|\varepsilon^{-1}\| \qquad (4.24)$$

なる数は、一つのベクトルを定義する。これをはじめのベクトルの反変成分 a_i に対応し、共変成分と呼ぶことにする。

(8) 反変成分は回転 g によって、

$$a'_i = \sum g_{ij} a_j \qquad (4.25)$$

のように変換されるが、共変成分は(4.12)(4.24)から容易にわかるように、複素共役な行列 $\|\bar{g}_{ij}\|$ による変換をうける。

$$a'^i = \sum \bar{g}_{ij} a^j \qquad (4.26)$$

(9) 同様な共変成分は2階以上のテンソルに対しても定義でき、又、εによる添数の上下をすることができるから、一般に混合テンソル成分を考えることができる。回転 g によって混合テンソルは、

$$a'^{\alpha'\beta'\cdots}_{i'j'\cdots} = \sum_{ij\cdots} \sum_{\alpha\beta\cdots} g_{i'i} g_{j'j} \cdots \bar{g}_{\alpha'\alpha} \bar{g}_{\beta'\beta} \cdots a^{\alpha\beta\cdots}_{ij\cdots} \qquad (4.27)$$

のように変換される。

(10) 混合テンソル $a^{i\cdots}_{j\cdots}$ において上下の添数の対につき和をとったものは、その添数に関してはスカラーのように変換されることが容易にわかる。これはふつうのテンソル算におけるように、テンソルの縮約とよぶことにする。たとえば(4.11)によって、

$$\sum_{i=1}^{3} a^i a_i = -a_+ a_- + a_0 a_0 - a_- a_+ = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \qquad (4.28)$$

である。これはベクトルの長さの2乗を与えている。

(11) (4.2)における相関行列 $R_{ij}(x)$ は、2階の混合テンソル場である。はじめの添数 i については複素共役な行列で変換されることを示すために、R^i_j と書く代わりに $R^{\cdot i}_{j}$ のように添数の上に・をつけることにする。

§2-4　テンソルの既約分解

(12) 2階の9成分のテンソル表現空間は $l=2$, $l=1$, $l=0$ の3つの既約な表現空間に分解する。カノニカルベクトル基底(4.7)の直積はテンソル基底をつくるから、e_z まわりの回転に関して、それら既約空間の一般のカノニカル基底をテンソル基底で書くことができる。逆も又可能である。それは Clebsch-Gordan 係数で求めることができるわけであるが、今の場合簡単であるから、(4.14)を利用して求めることもできる。カノニカル基底に表現の weight l を $ff_m^{(l)}$ $(m=-l, -l+1, \cdots\cdots, l)$ のように付けて記す。

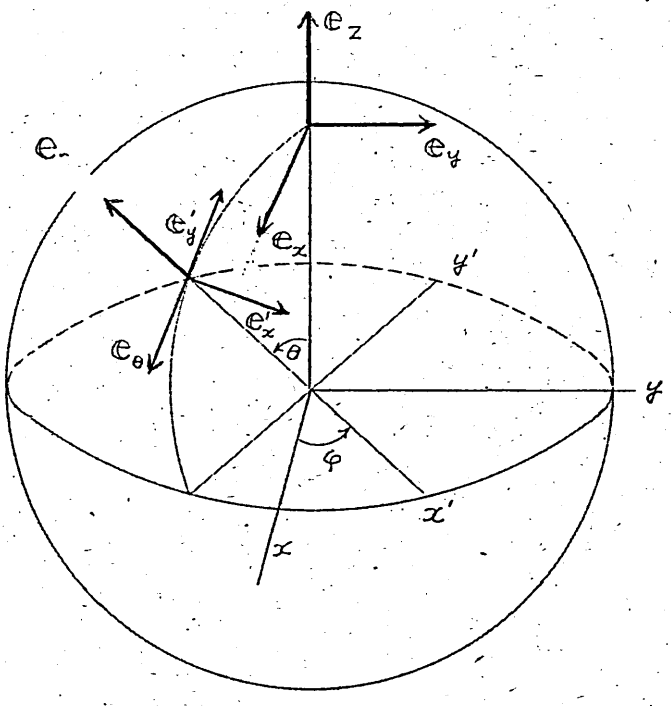
$$
\begin{aligned}
l=2,\quad & ff_{-2}^{(2)} = e_- e_- \\
& ff_{-1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[e_0 e_- + e_- e_0] \\
& ff_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}[e_+ e_- + 2e_0 e_0 + e_- e_+] \qquad (4.29) \\
& ff_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[e_+ e_0 + e_0 e_+] \\
& ff_2^{(2)} = e_+ e_+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l=1,\quad & ff_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 e_- - e_- e_0) \\
& ff_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ e_0 - e_0 e_+) \qquad (4.30) \\
& ff_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ e_0 - e_0 e_+)
\end{aligned}
$$

$$
l=0 \qquad ff_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+ e_- - e_0 e_0 + e_- e_+) \qquad (4.31)
$$

定義：(4.2)および(4.14)のような e_z まわりの回転に関するカノニカル基底を規準カノニカル基底(normal canonical base)とよび、それに関する成分は規準カノニカル成分とよぶことにきめる。規準カノニカル基底は、いわば球面上の北極に固定した基底である。これに対して、任意方向の基底ベクトル e_r のまわりの回転に関するカノニカル基底とそれに関する成分を考えることができる。これを以下では単にカノニカル基底・カノニカル成分と呼んで前者と区別することにする。

(13) 球面 S_3 上の点 e_r の極座標を $e_r = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta,$



$\cos\Theta$) とする。そのとき規準カノニカル基底(4.2)から、カノニカル基底へは回転 $g(\varphi+\frac{\pi}{2}, \theta, \varphi_2)$ によって移ることができる。なぜならば(4·6)によって $e_r = g e_z$ がいえるからである。特に $\varphi_2 = 0$ のとき、

$$g e_x = e_\varphi, \quad g e_y = -e_\theta, \quad g e_z = e_r \qquad (4.32)$$

であるから、(4.7)によって e_r まわりの回転に関する新しいカノニカル基底は、

$$e'_- = \frac{e_\varphi + i e_\theta}{\sqrt{2}}, \quad e'_0 = e_r, \quad e'_+ = \frac{-e_\varphi + i e_\theta}{\sqrt{2}} \qquad (4.33)$$

で与えられる。($\varphi_2 \neq 0$ のときにはこれらに $e^{i\varphi_2}$, 1, $e^{-i\varphi_2}$ がそれぞれ乗じられるだけである。) ベクトル a のこれに対応するカノニカル成分は(4.11)によって

$$a'_- = \frac{a_\varphi - i a_\theta}{\sqrt{2}}, \quad a'_0 = a_r, \quad a'_+ = \frac{-a_\varphi - i a_\theta}{\sqrt{2}} \qquad (4.34)$$

にかわる。

(14) 規準カノニカル基底に関して与えられた(4.14)およびテンソル基底の既約分解を与える式(4.29)～(4.31)は、e_r まわりの回転に関するカノニカル基底に対してそのまま成立する。

§3. 等方 l-ベクトル場，等方テンソル場

等方テンソル場の条件（4.3）は規準カノニカル成分で書かれていると思ってよいが，この形は簡単ではなく，更に高階のテンソル場に対しては，テンソルの形を決定するのが一層困難である。しかしながら，固定しないカノニカル基底，たとえば（4.33）に関する成分で考えるならば，基底もベクトル場あるいはテンソル場も共に回転をうけるので，各成分はスカラー関数のように独立に変換され，(4.3)のように混合することがないから，カノニカル成分は回転に対する場の性質の理解を容易にする。特に等方な場の形は非常に簡単になる。一般に高階のテンソルは，たとえば2階のテンソルは，§2.4に示したように既約な成分に分解して考えることができる。各既約成分が等方であれば，テンソルも等方である。今，weight l の表現行列 $\|T^l_{mn}\|$ によって変換をうける量を考えると，これは $(2l+1)^2$ の成分をもつが，これを簡単のために l-ベクトルと呼んでおく。そのような量をもつ場を l-ベクトル場と呼ぶことにすれば，テンソル場は一般にいくつかの l-ベクトル場の直和に分解する。l-ベクトル場が等方であれば，テンソル場は等方であり，又逆もいえる。

補助定理1　等方な l-ベクトル場は，それをカノニカル成分で書いたとき，カノニカル基底（4.14）の $m=0$ に対応する成分のみをもち，しかもその成分は r のみの関数である。

等方テンソル場に対しては上に述べたことから，

補助定理2　任意の高階の等方テンソル場はそれを既約な l-ベクトル場に分解したとき，それらのカノニカル成分は基底（4.14）の $m=0$ に対応する成分のみをもち，それらの成分は r のみの関数である。

補助定理2'　任意の高階の等方テンソル場は，それをカノニカル基底ベクトル（4.7）の直積基底 $e_m e_n \cdots\cdots e_p$ に関する成分で書くと

き、$m+n+\cdots\cdots+p=0$ に対応する成分のみをもち、その成分は r のみの関数である。

証明は簡単であって、第1の表現では、既約なカノニカル成分が $m+n+\cdots\cdots+p=0$ に対して0でなければ、それは回転のさい(4.18)によって、第3のEular角 φ_2 に依存するから不変でありえず、又回転不変な成分であるためには、それは球面上で常数でなければならぬからである。又、第2の表現では、テンソルの既約分解のやり方、たとえば(4.29)等から明らかであり、しかもそのような直積基底の数と既約表現の数とは等しくなるから、補助定理2と2′とは二つとも同等な言い方である。

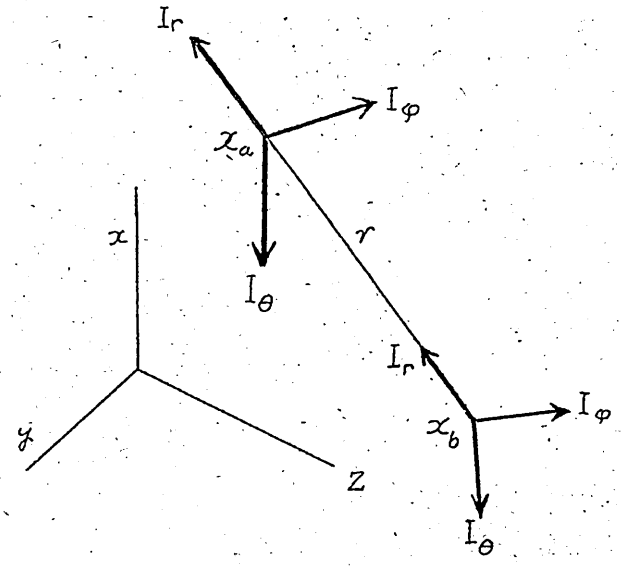
(1) 補助定理1によれば、weight l が半整数である表現に対応する場、たとえばスピノル場は等方ではありえないことがわかる。それは $m=0$ の成分をもちえないからである。又、特別の場合として weight が1のばあい、すなわち等方ベクトル場は(4.34)によって成分 α_r のみをもち、それは r のみの関数であることがでる。これは直観によっても明らかなことであるが、同時に補助定理1の幾何学的意味を示すよい例になっている。

(2) 等方な2階混合テンソルでは、(4.23)および補助定理2′によれば、$\bar{R}^{\cdot}_{ij}(x)$ は2つの添字に関して対角であって、

$$R^{\cdot}_{++}(r)=-R^{\cdot}_{-+}(r),\quad R^{\cdot}_{00}=R^{\cdot}_{00}(r)\ ,\ R^{\cdot}_{--}(r)=-R^{\cdot}_{+-}(r) \qquad (4.35)$$

以外の成分は常に0である。したがって特にこれを等方ベクトル乱場の相関テンソルに対して適用するならば、次のことがいえる。

<u>等方ベクトル乱場 $I(x)$ の2点 x_a, x_b における値としてベクトル $\vec{r}=x_a-x_b$ のまわりの回転に関して(4.34)で与えられる3つのカノニカル成分 I_r, $I_-=(I_\varphi-iI_\theta)/\sqrt{2}$, $I_+=(-I_\varphi-iI_\theta)/\sqrt{2}$ を考えるとき、それらは常に統計的に独立であり、同じ成分同志の相関関数は(4.35)によって $r=|x_a-x_b|$ のみの関数である。</u>



(3) (4.33)によってカノニカルテンソル基底を e_r, e_φ, e_θ であらわすと、

$$e_+ e_- = \frac{1}{2}\{-(e_\varphi e_\varphi + e_\theta e_\theta) - i(e_\varphi e_\theta - e_\theta e_\varphi)\}$$

$$e_0 e_0 = e_r e_r \qquad (4.36)$$

$$e_- e_+ = \frac{1}{2}\{-(e_\varphi e_\varphi + e_\theta e_\theta) + i(e_\varphi e_\theta - e_\theta e_\varphi)\}$$

で与えられるから、等方な混合テンソルの成分(4.35)を実の成分、$R_{\varphi\varphi}, R_{\theta\theta}, R_{\theta\varphi}, R_{\varphi\theta}, R_{rr}$ で書くことができる。

$$\begin{aligned} R_{--}(r) &= R_t(r) - iR_s(r) \\ R_{00}(r) &= R_\ell(r) \\ R_{++}(r) &= R_t(r) + iR_s(r) \end{aligned} \qquad (4.37)$$

ただし、

$$\begin{aligned} R_t(r) &\equiv \frac{1}{2}[R_{\varphi\varphi}(r) + R_{\theta\theta}(r)] = R_{\varphi\varphi}(r) \\ R_\ell(r) &\equiv R_{rr}(r) \\ R_s(r) &\equiv \frac{1}{2}[R_{\varphi\theta}(r) - R_{\theta\varphi}(r)] = R_{\varphi\theta}(r) \end{aligned} \qquad (4.38)$$

の関係がある。t, l, s の添字は、相関テンソルの場合には Transvers, longitudinal, scew correlation に対応する意味である。又(4.38)の右辺では $m=0$ 以外の成分が 0, たとえば $R_{+0}=0$ 等からえられる関係 $R_{\theta\theta}=R_{\varphi\varphi}$, $R_{\varphi\theta}=-R_{\theta\varphi}$ を用いている。

(4) カノニカル成分でかいた等方な相関テンソル (4.35) は Cartesian 座標に関する成分になおせば容易に (4.4) の形に帰着する。すなわち、

$$\begin{aligned} e_r &= (k_1, k_2, k_3) \\ e_\varphi &= (-k_2, k_1, 0)/\sqrt{1-k_3^2} \\ e_\theta &= (-k_1k_3, -k_2k_3, 1-k_3^2)/\sqrt{1-k_3^2} \end{aligned} \qquad (4.39)$$

であることに注目すれば、(4.36) から、

$$\begin{aligned} (e_- e_+)_{ij} &= \frac{1}{2}\left\{(k_ik_j-\delta_{ij})+ i\sum_k \epsilon_{ijk}k_k\right\} \\ (e_0 e_0)_{ij} &= k_ik_j \\ (e_+ e_-)_{ij} &= \frac{1}{2}\left\{(k_ik_j-\delta_{ij})- i\sum_k \epsilon_{ijk}k_k\right\} \end{aligned} \qquad (4.40)$$

であることを示すことができる。したがって (4.35), (4.37) から、(4.40) を用いることによって、

$$\begin{aligned} R_{ij}(x) &= R_{+-}(r)(e_-e_+)_{ij} + R_{00}(r)(e_0e_0)_{ij} + R_{-+}(r)(e_-e_+)_{ij} \\ &= \{R_l(r)-R_t(r)\}k_ik_j + R_t(r)\delta_{ij} + R_s(r)\sum_{K=1}^{3}\varepsilon_{ijK}k_K \end{aligned} \qquad (4.41)$$

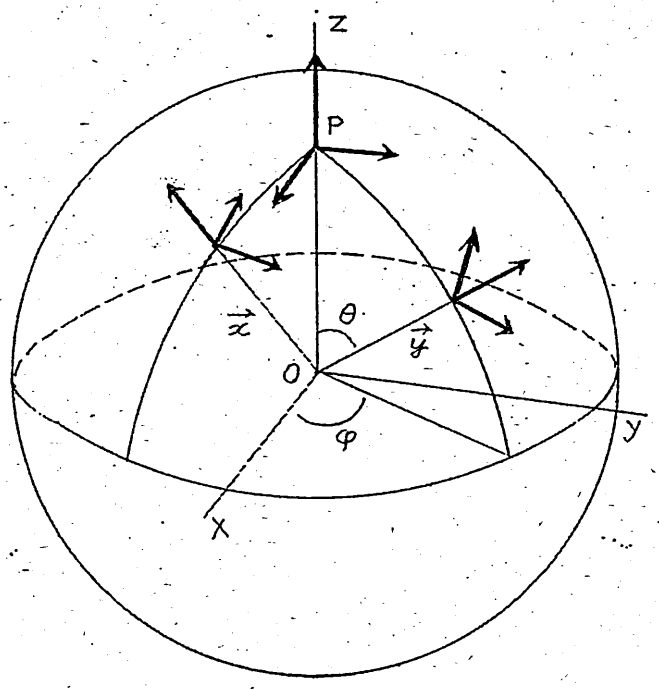
ふたたび(4.4)が得られる。又これによって(4.4)における3つの関数 $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ は、3つの相関関数であらわすことができた。

しかしながら解析を進めるにあたっては、(4.41)の形ではなく、(3.45)のようにカノニカル成分で記述する方が、はるかに簡単で見通しがよいことはいうまでもない。

§4 ベクトル場，テンソル場，l-ベクトル場の Fourier 変換

§4-1 ベクトル場，テンソル場，l-ベクトル場の Fourier 変換

今は Euclid 空間を考えているから、ベクトル又はテンソルの平行移動はふつうの意味でできるものとする。固定した直線座標に関するベクトル場の成分は、第3章でも取り扱ったように、スカラー場と同様に成分別に Fourier 変換ができる。しかしながら、前節までに考えたように必要上ベクトルあるいはテンソル場が、カノニカル成分で記述されている場合、場の Fourier 積分を求めること、つまり加算を実行するためには、成分を固定した座標系に関するものとしなければならない。回転に関する場の振舞を調べるには、変換前と同様に変換後もカノニカル成分で記述することが望まれる。したがって変換前の点 y におけるカノニカル成分は変換後の点 x におけるカノニカル成分になおして後、Fourier 積分を実行するのが自然である。



かかる座標系の変換にさいして注意すべきことは、ベクトル場を固定して座標系に回転 g を行なうことは、もとのベクトル成分に行列 $\|g^{-1}\|$ を乗ずること、およびベクトルの回転を連続して行なったとき、乗ずべき行列の積の順序は、回転の順序と逆になることである。

さて、図において球面座標 (θ, φ) なる $\vec{y}$ の方向を示す点におけるカノニカル基底は北極Pにある規準カノニカル基底に回転 $g_y(\varphi+\frac{\pi}{2}, \theta, \varphi_2)$ を、また (θ', φ') なる $\vec{x}$ の方向を示す点にあるカノニカル基底は規準カノニカル基底に回転 $g_x(\varphi'+\frac{\pi}{2}, \theta', \varphi_2')$ を施してえられる。したがって $\vec{x}$ にあるカノニカル基底は、$\vec{y}$ にあるカノニカル基底に回転 $g_x g_y^{-1}$ を施して得られる。上にのべたことに注意すれば、点 $\vec{y}$ におけるベクトル場のカノニカル成分を、点 $\vec{x}$ におけるカノニカル基底に関する成分で書くには、行列 $\|g_x^{-1}\|\,\|g_y\|$ を乗ずればよい。第3のEular角 φ_2 は上の操作の途中でカノニカル成分に入っている $e^{\pm i\varphi_2}$ 等を消してしまい、何の役割も果たさないから、必要が生じない限り、$\varphi_2=\varphi_2'=0$ として差支ない。

以上のことを考慮すれば以下のようにFoulier変換が表わされる。

(1) カノニカル成分で記述されたベクトル場 $F_m(y)$ のFourier変換は、

$$f_m(x) = \sum_n \int g_{mn}(x^{-1}y)\, F_n(y)\, e^{2\pi i(x.y)}\, dy \qquad (4.42)$$

で与えられる。ここで $g_{mn}(x^{-1}y)$ は

$$\|g(x^{-1}y)\| \equiv \|g_x^{-1}\| \cdot \|g_y\|$$

の意味である。g_x 等は上にのべたように $\vec{x}$ におけるカノニカル基底を規準カノニカル基底の回転によって定義するためのものである。

(2) 同様にして、カノニカル成分で記述された混合テンソル場 $F^{\alpha\beta\cdots}_{mn\cdots}(y)$ のFourier変換は、

$$f^{\alpha'\beta'\cdots}_{m'n'\cdots}(x) = \sum_{mn\cdots}\cdots\sum_{\alpha\beta\cdots}\cdots\int_{R_3} g_{m'm}\, g_{n'n} \cdots \overline{g_{\alpha'\alpha}}\, \overline{g_{\beta'\beta}(x^{-1}y)} \cdots$$

$$\times F^{\alpha\beta\cdots\cdots}_{mn\cdots\cdots}(y)e^{2\pi i(x,y)}dy \qquad (4.44)$$

で与えられる。

上ではカノニカル成分で記述された一般のテンソル場のFourier変換を示したが、(4.44)のようなFourier変換を直接計算することは複雑なことが多い。ここでも§2でのべたように、テンソルを各既約成分に分解してFourier変換を行なうならば、一般的に見透しよく計算することができる。

(3) Weight l の既約表現に従って変換する場合すなわち l-ベクトル場のカノニカル成分を $F^{(l)}_m(y)$ と記すとき、その場のFourier変換は(4.42)に対応して、

$$f^{(l)}_m(x) = \sum_n \int_{R_3} T^{(l)}_{mn}(x^{-1}y)F^{(l)}_n(y)\,e^{2\pi i(x\cdot y)}dy \qquad (4.45)$$

で与えられる。ここで $T^{(l)}_{mn}(x^{-1}y)$ は、

$$\|T^{(l)}(x^{-1}y)\| \equiv \|T^{(l)}(g_x^{-1})\|\cdot\|T^{(l)}(g_y)\| \qquad (4.46)$$

の意味であって、$\|T^{(l)}(g)\|$ は(4.18)で与えたweight l の既約表現行列である。

(4) 特に、(4.44)の一般のテンソル場のFourier変換は、テンソルを既約分解することによって(4.45)の直和に書くことができる。

§4-2 等方 l-ベクトル場のFourier変換

§3の補助定理1により、等方な l-ベクトル場は、カノニカル成分で書けば $m=0$ 以外の成分は常に0であって、$m=0$ 成分は $t=|y|$ のみの関数であった。$T^{(l)}_{m0}(g)$ は(4.21)で与えられたように球関数であり、又 $F^{(l)}_0(y)$ はtのみの関数であるから、Fourier積分(4.45)は球面について先に積分が実行できる。

$$dy = t^2\,dt\,d\varpi \qquad (4.47)$$

$$(x\cdot y) = rt\cos\textcircled{H} = rt(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')) \qquad (4.48)$$

である。ここに $d\varpi$ は単位球面 S_3 上の測度であるが、これは回転不変な測度であるから、

$$g_{y'} = g_x^{-1} g_y,\ g_x^{-1} d\varpi = d\varpi',\ g_x^{-1} y = y' \qquad (4.49)$$

とおいて、(4.45) は

$$\int_0^\infty t^2 dt\, F_0^{(l)}(t) \int_{S_3} T_{m0}^{(l)}(g_{y'}) e^{2\pi i r t \cos\Theta} \sin\Theta d\Theta d\phi'$$

ただし

$$T_{m0}^{(l)}(\phi', \Theta, \phi'') \equiv e^{-im(\phi'+\frac{\pi}{2})} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\Theta),$$

形となるので、この積分は $m=0$ の項しが残らず、

$$= 2\pi \int_0^\infty t^2 dt\, F_0^{(l)}(t)\, P_l(\cos\theta)\, e^{2\pi i r t \cos\theta} \sin\theta d\theta \qquad (4.50)$$

となる。この θ についての積分は球 Bessel 関数を与えるから、以上をまとめると次の定理がえられる。

補助定理 3　補助定理 1 によって、等方な l-ベクトル場のカノニカル基底 (4.14) の $m=0$ に対応する成分を $F_0^{(l)}(t)$ とする。そのとき与えられた等方 l-ベクトル場の Fourier 変換 (4.45) は再び等方 l-ベクトル場であって、その $m=0$ のカノニカル成分 $f_0^{(l)}(r)$ は、

$$f_0^{(l)}(r) = 4\pi i^l \int_0^\infty F_0^{(l)}(t)\, j_l(2\pi t r)\, t^2 dt \qquad (4.51)$$

なる $F_0^{(l)}(t)$ の $(l+\frac{1}{2})$ 次 Hankel 変換によって与えられる。

又 $t \to \infty$ で $F_0^{(l)}(t)$ が十分速く 0 になるならば、Fourier-Bessel の積分定理によって次の反転公式

$$F_0^{(l)}(t) = 4\pi (-i)^l \int_0^\infty f_0^{(l)}(r) j_l(2\pi t r)\, r^2 dr \qquad (4.52)$$

が成立する。

系　補助定理 2 によって、等方なテンソル場を既約な等方 l-ベクト

ル場に分解するとき、補助定理3によって等方テンソル場のFourier変換は再び等方テンソル場であって、対応する既約な l-ベクトル場の $m=0$ のカノニカル成分の間には(4.51),(4.52)の関係がなりたつ。

(5) 等方テンソル場のFourier変換が再び等方テンソル場であることのみならば、Yaglom[9]のしたように(3.23)のCartesian座標における普通のFourier変換の形のままで容易に(4.3)の関係が保存されることが示される。

§4.-3 等方な2階テンソル場のFourier変換

補助定理3の系は任意に高階の等方テンソル場に対して成立するのであるが、ここではテンソル場のFourier変換(4.44)において、等方な2階テンソル場を考えよう。反変成分と共変成分とは(4.23)の変換で常に一方から他に移ることができるから、一般性を失うことなく、2階混合テンソル $F_n^m(y)$ あるいは $F_{mn}(y)$ を考えることにする。等方であるから、補助定理2'によって(4.35)と同様に、

$$F_{mn}(y) = \delta_{mm} F_{nn}(t), \quad t=|y| \quad m,n=-1,0,1 \tag{4.53}$$

従ってカノニカル成分で書かれたFourier変換(4.44)は(4.53)によって

$$f_{mn'}(x) = \sum_n \int_{R_3} \overline{g_{mn}(x^{-1}y)}\, g_{m'n}(x^{-1}y)\, F_{nn}(t) e^{2\pi i(x\cdot y)} dy$$

(4.47),(4.48)とおいて、

$$= \sum_n \int_0^\infty t^2 dt\, F_{nn}(t) \int_{S_3} \overline{g_{mn}(x^{-1}y)}\, g_{mn}(x^{-1}y) e^{2\pi i(x\cdot y)} d\varpi \tag{4.54}$$

ここで(4.49)の置き換えを行ない、$g_{mn}(y')$ の形(4.12)からわかるように、φ についての積分は $m'=m$ の項以外は0になることがわかる。これは補助定理3の系と矛盾しない。

したがって、

$$= 4\pi \delta_{mm'} \sum_n \int_0^\infty j'_{mn}(2\pi tr) F_{nn}(t) t^2 dt \qquad (4.55)$$

と書ける。ただし、

$$4\pi j'_{mn}(2\pi tr) \equiv \int_{S_3} \overline{g_{mn}(y)}\, g_{mn}(y) e^{i2\pi tr\cos\theta} \sin\theta d\theta d\varphi \qquad (4.56)$$

とおいた。(4.56) の右辺の積分を行なって j'_{mn} の形を求めることが残ることである。φ の積分は 2π を与える。θ についての積分は、g_{mn} の行列要素 (4.12) は 3×3 行列であるから、直接 (4.56) に代入して $P_\ell(\cos\theta)$ の定義 (A.8), (A.19), (A.10) を用いて直接積分を求めることもできる。直接代入は後に考える一般の場合には必ずしも見通しはよいわけではない。あるいは又、テンソルの既約分解 (4.29)~(4.31) と上の補助定理3の系を利用して間接的に求めることもできる。すなわち f_{mm}, F_{nn} を (4.23) を考慮して既約成分に分解すると、既約成分は $m=0$ の成分しかないから、

$$\begin{aligned} F_0^{(0)}(t) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(F_{--}(t) + F_{00}(t) + F_{++}(t)\right) \\ F_0^{(1)}(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(F_{--}(t) - F_{++}(t)\right) \\ F_0^{(2)}(t) &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(F_{--}(t) - 2F_{00}(t) + F_{++}(t)\right) \end{aligned} \qquad (4.57)$$

あるいは逆に解いて、

$$\begin{aligned} F_{--}(t) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} F_0^{(0)}(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} F_0^{(1)}(t) - \frac{1}{\sqrt{6}} F_0^{(2)}(t) \\ F_{00}(t) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} F_0^{(0)}(t) + \frac{2}{\sqrt{6}} F_0^{(2)}(t) \\ F_{++}(t) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} F_0^{(0)}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} F_0^{(1)}(t) - \frac{1}{\sqrt{6}} F_0^{(2)}(t) \end{aligned} \qquad (4.58)$$

の関係がなりたつ。同様な関係が $f_{mm}(r)$, $f_0^{(\ell)}(r)$ に対しても成立する。Fourier 変換 (4.54) で (4.58) を代入し、(4.51) を用いて後、$f_0^{(\ell)}$ に対し (4.57) を用いて f_{mm} に戻せば、Fourier 変換が求められたこ

となり、(4.55) と比較すれば、(4.56) の形が定められる。いずれの方法においても次の結果がえられる。

$$j'_{11}(R) = j'_{-1-1}(R) = \overline{j'_{1-1}(R)} = \overline{j'_{-11}(R)}$$
$$= \frac{1}{3} j_0(R) + \frac{i}{2} j_1(R) - \frac{1}{6} j_2(R)$$
$$j'_{10}(R) = j'_{01}(R) = j'_{-10}(R) = j'_{0-1}(R) \qquad (4.59)$$
$$= \frac{1}{3}(j_0(R) + j_2(R)) = \frac{j_1(R)}{R}$$
$$j'_{00}(R) = \frac{1}{3} j_0(R) - \frac{2}{3} j_2(R) = j'_1(R)$$

ただし $2\pi tr = R$ とおいた。

(6), (4.56) で定義した関数 $j'_{mn}(R)$ は、後に第5章において、1次の球 Bessel テンソル関数と呼ぶものである。ℓ 次の球 Bessel テンソル関数は (5.61) で定義される。又 (4.55) の右辺は、第5章 (5.67) で定義する、ベクトル関数 $\{F_{in}(t), n=-1,0,1\}$ の1次のベクトル Hankel 変換になっている。又 (4.59) を用いた直接の計算からもわかるが、(4.55) に対して、逆変換公式が成立する。一般に ℓ 次のベクトル Hankel 変換に対して第5章補助定理8の逆変換公式 (5.68) が成立することが示される。以上をまとめると次の補助定理がえられる。ただし積分の存在は仮定する。

補助定理4. 等方な2階混合テンソル場のカノニカル成分を $F_{in}(t)$, $n=-1,0,1$ とする。そのとき与えられた等方な2階混合テンソル場の Fourier 変換 (4.44) は再び等方な2階混合テンソル場であって、そのカノニカル成分 $f_{in}(r)$, $n=-1,0,1$ は、3成分関数としてのカノニカル成分 $\{F_{in}(t)\ n=-1,0,1\}$ の1次のベクトル Hankel 変換によって与えられる。

$$f_{im}(r) = 4\pi \sum_{n=-1}^{1} \int_0^\infty j'_{mn}(2\pi tr) F_{in}(t) t^2 dt \qquad (4.60)$$

又、次の反転公式が成立する。

$$F_{mn}(t) = 4\pi \sum_{m=-1}^{1} \int_0^\infty \overline{j^1_{mn}(2\pi tr)}\, f_{mm}(r) r^2 dr \qquad (4.61)$$

ただし、ここに $j^1_{mm}(2\pi tr)$ は (4.59) で与えられる。

(7) (4.60), (4.61) は、補助定理3の (4.51), (4.52)、更にはまた (3.23), (3.24) にみられるふつうの Fourier変換、その逆変換に対応している。

§ 5. 一様等方なベクトル乱場の相関テンソルのスペクトル分解

一様等方なベクトル乱場の相関テンソルのスペクトル分解は、本質的には、補助定理4を書き直すだけで得られる。Cartesian 座標でのスペクトル分解は、等方な場合も含めて (3.23) で既に与えられている。ここで与えるのは等方性を考慮したより具体的な極座標形式のものである。又、ここにのべる相関テンソルのスペクトル分解の形式化が、第6章で取り扱うベクトル乱場自身のスペクトル分解を導く方法を与える。

(1) (3.16) で与えられる一様な乱場のスペクトル密度テンソル $F_{ij}(y)$ は、今考えている一様等方な乱場にあっては、等方テンソル場であるから、カノニカル成分で記述すれば、対角成分は $t=|y|$ のみの関数であって、

$$\begin{aligned} F_{--}(t) &= (\mathbb{F}_-, \mathbb{F}_-) \equiv |F_-(t)|^2 \geq 0 \\ F_{00}(t) &= (\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_0) \equiv |F_0(t)|^2 \geq 0 \\ F_{++}(t) &= (\mathbb{F}_+, \mathbb{F}_+) \equiv |F_+(t)|^2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (4.62)$$

である。ただし、

$$(\mathbb{F}_m, \mathbb{F}_m) = \sum \mu^{\alpha\beta}\, \overline{F_m^\alpha(y)}\, F_m^\beta(y) \geq 0 \qquad (4.63)$$

は $\|\mu^{\alpha\beta}\|$ の正定値性により常に非負であるから、$|F_m(t)|^2$ とおいた。其他の非対角成分は、等方性によって常に0である。すなわち、

$$F_{+-}(y) = \overline{F_{-+}(y)} = (\mathbb{F}_+, \mathbb{F}_-) = 0$$

$$F_{+0}(y)=\overline{F_{0+}(y)}=(\mathbb{F}_+,\mathbb{F}_0)=0$$
$$F_{-0}(y)=\overline{F_{0-}(y)}=(\mathbb{F}_-,\mathbb{F}_0)=0 \qquad (4.64)$$

カノニカル成分で記述した $F_{mn}(y)$ と、極座標に関する成分で記述した成分との間の関係は相関テンソルの場合（4.37),(4.38) と同様である。

$$F_{--}(t)=F_{\varphi\varphi}(t)-iF_{\varphi\theta}(t)$$
$$F_{00}(t)=F_{rr}(t) \qquad (4.65)$$
$$F_{++}(t)=F_{\varphi\varphi}(t)+iF_{\varphi\theta}(t)$$

但し
$$F_{\theta\theta}(t)=F_{\varphi\varphi}(t)\geq 0$$
$$F_{\varphi\theta}(t)=-F_{\theta\varphi}(t) \qquad (4.66)$$

である。$F_{\varphi\theta}(t)$ の定義，$(\mathbb{F}_\varphi\cdot\mathbb{F}_\theta)$ と (4.66) から、$F_{\varphi\theta}(t)$ は pure imaginary であることがわかる。又、Cartesian 座標成分との関係は（4.41）と同様である。

以上のことを、補助定理4に用いれば、次の<u>相関テンソルのスペクトル分解定理</u>がえられる。

定理2　3次元空間における一様等方なベクトル乱場の相関テンソルは、次のように極座標形式のスペクトル分解をうける。すなわち相関テンソル(3.23) を、§2-4の定義のいみにおけるカノニカル成分で記述するとき、その0でない3つの対角成分 $R_{mm}(r)$ は、3つの正値関数 $\{|F_m(t)|^2,\ m=-1,0,1\}$ の1次のベクトルHankel変換であらわされる。

$$R_{mm}(r)=4\pi\sum_{n=-1}^{1}\int_0^\infty \overline{j_{mn}'(2\pi tr)}\,|F_n(t)|^2 t^2\,dt \qquad (4.67)$$

ここで3つの正値関数 $|F_m(t)|^2$ $(m=-1,0,1)$ はカノニカル成分で書いたスペクトル密度テンソル $F_{mn}(y)$ の3つの対角成分 $F_{mm}(t)$ $(m=-1,0,1)$ にそれぞれひとしい。$j_{mn}'(2\pi tr)$ は(4.59)で定義される関数である。又、反転公式

$$|F_n(t)|^2=4\pi\sum_{m=-1}^{1}\int_0^\infty j_{mn}''(2\pi tr)\,R_{mm}(r)r^2\,dr \qquad (4.68)$$

$$n=-1,0,1$$

が成立する。

カノニカル成分で書かれた相関テンソル R_{mn} と、極座標成分との関係は、(4.37)で与えられる。スペクトル密度テンソルについては(4.65)で与えられる。

上の定理は(4.37), (4.59), (4.65)を用いて、いくらか具体的に書くことはできる。そのかわり、(4.67)と(4.68)の間に成立するような、きれいな反転関係はあいまいになる。(4.37)により

$$R_{++}+R_{--}=2R_t\ ,\quad R_{00}=R_\ell$$
$$R_{++}-R_{--}=2iR_s$$

なることを用いると、

系 一様等方なベクトル乱場の相関テンソルの3つの成分として、(4.38)で与えられる3つの相関関数すなわち longitudinal, transverse, skew correlation function $R_\ell(r)$, $R_t(r)$, $R_s(r)$ を考えるとき、それらは次のようにスペクトル分解をうける。即ち3つの正値関数 $|F_n(t)|^2$, $n=-1,0,1$ が存在して、

$$R_\ell(r)=4\pi\int_0^\infty j_1'(2\pi tr)|F_0(t)|^2t^2dt+2\int_0^\infty\frac{j_1(2\pi tr)}{r}\{|F_+(t)|^2+|F_-(t)|^2\}tdt \tag{4.69}$$

$$R_t(r)=2\int_0^\infty\frac{j_1(2\pi tr)}{r}|F_0(t)|^2tdt+\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty\{2j_0(2\pi tr)-j_2(2\pi tr)\}$$
$$\times\{|F_+(t)|^2+|F_-(t)|^2\}t^2dt \tag{4.70}$$

$$R_s(r)=2\pi\int_0^\infty j_1(2\pi tr)\{|F_-(t)|^2-|F_+(t)^2\}t^2dt \tag{4.71}$$

のようにあらわすことができる。

ただしここで用いた3つの正値関数は(4.67)におけるものと一致させてある。

(2) このスペクトル分解の形から直ちにわかるように、

$$|F_+(t)|^2 = |F_-(t)|^2 \qquad (4.72)$$

のときには、$R_S(r)$は消え、従って相関テンソルは空間反転に関し不変となる。相関関数 $R_\ell(r)$, $R_t(r)$ は、2つの正値関数で指定されたスペクトル分解をうける。このときの(4.69), (4.70)はYaglom[9]が別の方法で求めたものと一致する。しかしながら、このようなスペクトル分解の形では、(4.67), (4.68)の間に存在する美しい反転関係は全くわからないし、又、第6章で取り扱うベクトル乱場自身のスペクトル分解を見出すための何の手掛りもえられない。

(3) 相関テンソルのスペクトル分解 (Yaglom)[9]

$$R_\ell(r) = \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[\int_0^\infty \left(\frac{J_{\frac{3}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{3}{2}}} - \frac{J_{\frac{5}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}}\right) d\Phi_1(\lambda) + 2\int_0^\infty \frac{J_{\frac{3}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{3}{2}}} d\Phi_2(\lambda)\right] \qquad (4.73)$$

$$R_t(r) = \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[\int_0^\infty \frac{J_{\frac{3}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{3}{2}}} d\Phi_1(\lambda) + \int_0^\infty \left(\frac{J_{\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} - \frac{J_{\frac{3}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{3}{2}}}\right) d\Phi_2(\lambda)\right] \qquad (4.74)$$

ここで $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ は $[0,\infty]$ 上で定義された実の左から連続な非減少関数で

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = 0, \quad \Phi_1(+0) = \Phi_2(+0) \qquad (4.75)$$

なる条件を満たすものとする。

第5章 球Bessel関数の加法定理

§1. 序　論

まず我々の議論において球Bessel関数の加法定理を必要とすることを述べ、次にそのような加法定理を求める方法を意義を考察する。

我々の考えている一様等方な乱場にあっては、相関テンソルは等方テンソル場であって、第4章でみたように、そのカノニカル成分は球Bessel関数による極座標表示をすることができた。したがって一様な乱場

(2.21)を指定する関数 $ff_i(x)$ も又カノニカル成分で書くときは同様な極表示をうけるであろう。一様な乱場としての移動平均(2.21)は変数移動した関数 $ff_i(x'-x)$ を x についてWiener積分したものであるから、その積分を具体的に実行するには、表記の加法定理を必要とするのである。前にスカラー乱場を取扱い[3]、そのさい0次の球Bessel関数 $j_\ell(r)$ の加法定理(A.23)を必要としたが、これはテキスト等でよく知られたものである。一方今考えているベクトル乱場では、高次の球Bessel関数 $j_1(r)$, $j_2(r)$ 等あるいはそれらを結合したものに対する加法定理が必要である。しかしながら、ふつうのBessel関数 $J_\ell(r)$ に対しては(A.22)のように高次のものまで加法定理は求められているに拘わらず球Bessel関数に対しては知られていないのである。この章ではこれらの加法公式を一般的に取り扱い、それのもつ種々の意味を考察する。

一般のBessel関数 $J_\ell(r)$ の加法公式は種々のテキスト[13]などで述べられているように、解析的に級数の計算を実行することにより求められている。しかしこのような方法で球Bessel関数に対する解答を見出すことは困難であることが予想される。それは $J_\ell(r)$ の場合は、J_ℓ とよくしられた三角関数しかあらわれなかったが、今の場合には $j_\ell(r)$ と球関数の結合と考えねばならず、又あとでわかるように、(4.18)で定義した一般球関数も実は関連しているからである。したがって、そのような複雑な場合には、指導原理もなしに、試行錯誤的な計算のみで加法定理を見出すことは大変な難事である。

いくつかの特殊関数、たとえば上にあげたBessel関数、三角関数、球Bessel関数、Legendre関数等が、今まで知られているそれらの加法公式(A.16),(A.21)~(A.23)において示す美しい関係は、それらの関係が単なる偶然な事情の結果ではなく、背後に幾何学的な関連をもつことを暗示する。それらは回転に関する対称性と平行移動のさいにおけるそれらの関数の結びつきを規定しているものである。だから我々の論ずべき方向は次のように言えるであろう。回転ならびに平行移動という2つの幾何学的操作を行なうとき、ある閉じた関数系があって、それらの

間で、その幾何学的操作を関数間のある結合関係として反映させることのできる、そういう関数系はどんなものか？　又その幾何学的操作を反映しているところの関数間の結合関係とはどんなものであろうか？　そうしてそれらの関係の間に我々の球 Bessel 関数の加法定理も含まれていることを期待するわけである。

容易に気付くように、回転および平行移動の操作は連続な群の性質をもっている。これを回転群・平行移動群とよび、両者を合わせたものを非斉次回転群又は Eudid 運動群とよぶことにしよう。我々の主題は回転と平行移動の諸性質を反映するような関数系とその反映としての関数間の結合関係を見出すことである。このことを数学的に言うならば、我々は非斉次回転群を、ある関数空間を見出してその上に表現しようとしているのである。我々は回転と移動とのつくる群の性質は熟知しているのであるから、それによってその反映としてあらわれるその関数系のいろいろな性質を調べることができるわけである。ここまでさかのぼってくるならば、我々のはじめからの主題である一様等方なベクトル乱場のスペクトル分解ということは、この非斉次回転群つまり回転群と移動群の表現論と密接な関連があることが察しられる。このことは第７章でふれることにする。

元に戻って、このような表現論の立場から特殊関数を導き、その性質を論ずること[14]は、事実、回転群に対しては Gel'fand, Shapiro[11] によって、２次元平面上での Euclid 運動群に対しては Vilenkin[10] によって行なわれ、球関数、あるいは一般球関数の加法定理、Bessel 関数の加法定理はそれらの理論の中の一部分として簡単に導かれることがわかっている。我々の場合には、その議論、特に Vilenkin の理論を３次元空間での Euclid 運動群に対して拡張すればよいであろうことは容易に察しられる。しかしながら、筆者の知るかぎりでは未だなされていないようである。それは一般的な議論を進めることが困難なために未完成であるのか、あるいはあまり興味ある結果を導かないためかどうか理由は不明である。しかし我々の必要とするのは加法定理であって、一般論にわたるもので

はないから、議論はその方向に向けられる。従って議論もできるだけ幾何学的に把握するように進める。ここで求めた球Bessel関数の加法定理は(5.29)と(5.47)の2種の型のものである。前者は普通のBessel関数の加法定理(A.22)と対応関係をもっていて、共に同じような幾何学的解釈ができる。後者は新しい型の加法定理であって、対称な、あるいは2点型の加法定理ともいうべきものであり、別の幾何学的解釈をもつ。この後者の型の加法定理を普通のBessel関数に対して作ることは未だ試みていないが興味のあることである。又、後者の型の加法定理にあらわれる球Bessel関数のある線型結合に対し、球Besselテンソル関数を導入すると、これは非常に美しい直交性を有し、Fourier Besselの積分定理に対応する積分定理(5.65)が成立する。又、これを用いてベクトル関数に対しベクトルHankel変換を定義することができ、ふつうのHankel変換と同様、反転公式も成立することが示される。

§2. 3次元Euclid運動群(非斉次回転群)と $L^2(G)$上のユニタリ表現

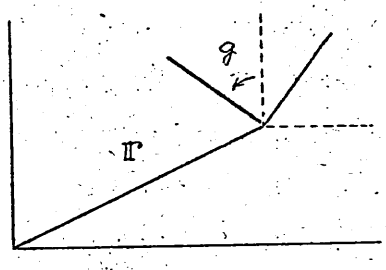
(1) 3次元Euclid空間 R_3 における運動 $\mathcal{G}$ は平行移動 $\mathbb{r}$ と回転 g とにわけられる。それを、

$$\mathcal{G} \equiv (\mathbb{r}; g) \qquad (5.1)$$
$$\mathbb{r} = (r, \Theta), \quad g = (\alpha, \beta, \gamma)$$

と記すことにする。Θ はベクトル $\mathbb{r}$ の極座標表示における球面角 $\Theta \equiv (\theta, \varphi)$、つまり単位球面 S_3 上の1点であり、α, β, γ は3つのEular角である。g の全体を G と記す。又以下では $\mathcal{G}$ の全体をも簡単に $\mathcal{G}$ とよぶことにする。

容易にわかるように、$\mathcal{G}$ の乗法則は、

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_2 \cdot \mathcal{G}_1 = (\mathbb{r}_2 g_2)(\mathbb{r}_1, g_1)$$
$$= (\mathbb{r}_2 + g_2 \mathbb{r}_1, g_2 g_1) \qquad (5.2)$$



すなわち.

$$\mathbb{r} = \mathbb{r}_2 + g_2 \mathbb{r}_1 \qquad (5.2')$$
$$g = g_2 g_1$$

で与えられる。

(2) 回転群Gの球面上の関数空間における表現では、

$$(T_g f)(\mathbb{R}) = f(g^{-1}\mathbb{R}) \qquad (5.3)$$
$$\mathbb{R} \equiv (x\ y\ z) \text{ または } (R\ \ 亜)$$

($|\mathbb{R}| = R = 1$ として単位球面 S_3 上の関数に制限してよい。)によって対応 $g \to T_g$ をつくると、これはGの表現になっていた。[11]

非斉次回転群 $\mathcal{G} = (\mathbb{r}, g)$ の球面上の関数空間における表現としては(5.4)に位相部分を付加えて.

$$(T_{\mathcal{G}} f)(\mathbb{R}) = e^{i(\mathbb{R}\cdot\mathbb{r})} f(g^{-1}\mathbb{R}) = e^{iRr\cos(\mathbb{R}-\Theta)} f(g^{-1}\mathbb{R})$$
(ただし $(a\cdot b)$ はベクトル内積) $\qquad (5.4)$

をとると $\mathcal{G} \to T_{\mathcal{G}}$ は $\mathcal{G}$ の表現になる。何となれば.

$$(T_{\mathcal{G}_2} T_{\mathcal{G}_1} f)(\mathbb{R}) = (T_{g_2} e^{i(\mathbb{R}\cdot\mathbb{r}_1)} f)(g_1^{-1}\mathbb{R}) = e^{i(\mathbb{R}\cdot\mathbb{r}_2)} e^{i(g_2^{-1}\mathbb{R}\cdot\mathbb{r}_1)} f(g_1^{-1} g_2^{-1}\mathbb{R})$$
$$= e^{i(\mathbb{R}\cdot[\mathbb{r}_2 + g_2\mathbb{r}_1])} f[(g_2 g_1)^{-1}\mathbb{R}] = e^{i(\mathbb{R}\cdot\mathbb{r})} f(g^{-1}\mathbb{R}) \qquad (5.5)$$

となって(5.2)により、

$$T_{\mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1} = T_{\mathcal{G}_2} T_{\mathcal{G}_1} \qquad (5.6)$$

が言えるからである。ここで $|\mathbb{R}| = R$ は単なるパラメタの役割しかない。

(3) G上の関数 $f(g) \equiv f(\varphi, \theta\ \varphi_2)$ を考える。G上の不変積分を

$$\int_G f(g)\, dg \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\pi} f(\varphi_1 \theta \varphi_2) \sin\theta\, d\theta \qquad (5.7)$$

によって定義する。不変積分は次の性質をもつ。[11]

$$\int f(g)\, dg = \int f(g g_0)\, dg = \int f(g_0 g)\, dg = \int f(g^{-1})\, dg \qquad (5.8)$$

この積分によって $|f(g)|^2$ が可積分な関数の全体を $L^2(G)$ と記す。そのとき $L^2(G)$ は、

$$\langle f_1, f_2 \rangle_G \equiv \int_G \overline{f_1(g)}\, f_2(g)\, dg \qquad (5.9)$$

を内積として一つの Hilbert 空間になる。

(4) 上に考えた S_3 上の関数空間での表現よりも更に一般的に G 上の関数空間 $L^2(G)$ での表現を考える。そのために (5.4) における $\mathbb{R}$ を $g \in G$ とおき、位相部分の $\mathbb{R}$ は

$$\mathbb{R} = g\mathbb{R}_0 \equiv Rge \qquad (5.10)$$

によって g と対応づける。ここで e は S_3 上の北極、つまり z 方向の単位ベクトル e_z である。したがって g の行列 (4.6) の第3列に R を乗じたものを $\mathbb{R}$ とおいて、g の関数とみなすから、これは第3の Eular 角 φ_2 に無関係である。このとき (5.4) に対応して、

$$(T_g f)(g_0) = e^{i(\mathbb{R}\cdot r)} f(g^{-1}g_0) = e^{iR(g_0 e \cdot r)} f(g^{-1}g_0) \qquad (5.11)$$

を考えるとき、対応 $\sigma_g \to T_g$ は (5.5) と同様に σ_g の表現になっていることがわかる。

$$(T_{g_2} T_{g_1} f)(g) = e^{iR(g_2 e \cdot [r_2 + g_2 r_1])} f((g_2 g_1)^{-1} g) \qquad (5.12)$$

(5.11) で定義される。$L^2(G)$ 上の作用素 T_g は (5.9) に関しユニタリであることはすぐにわかるから、$\sigma_g \to T_g$ は $L^2(G)$ 上の σ_g のユニ表現である。

(5) 既約表現の行列要素 (4.18) すなわち generalized spherical function $T_{mn}^{\ell}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ (ℓ, m, n 整数 $-\ell \le m, n \le \ell$) のすべての集合は $L^2(G)$ において完全直交系をつくる。[11]

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{T_{m'n'}^{\ell'}(\varphi_1 \theta \varphi_2)}\, T_{mn}^{\ell}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \sin\theta\, d\varphi_1\, d\theta\, d\varphi_2 = \frac{8\pi^2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta_{nn'} \qquad (5.13)$$

ここに

$$T^{l}_{mn}(\varphi_1\,\theta\,\varphi_2)=e^{-im\varphi_1}P^{l}_{mn}(\cos\theta)e^{-in\varphi_2}$$

で与えられる。$P^{l}_{mn}(\cos\theta)$ の定義は既に(4.19)に与えた。$P^{l}_{mn}(\mu)$ の其他の性質を2,3示すと、

$$P^{l}_{mn}(\mu)=P^{l}_{nm}(\mu),\quad P^{l}_{-m-n}(\mu)=P^{l}_{mn}(\mu),\quad \overline{P^{l}_{mn}(\mu)}=(-1)^{m+n}P^{l}_{mn}(\mu) \tag{5.14}$$

$$\sum_{n=-l}^{l}\left|P^{l}_{mn}(\cos\theta)\right|^2=1 \tag{5.15}$$

$$\int_0^{\pi}\left|P^{l}_{mn}(\cos\theta)\right|^2\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{2l+1} \tag{5.16}$$

(5.15)は、行列 $\|T^{l}_{mn}\|$ のユニタリ性から出る。又 P^{l}_{m0} と、Legendre関数との関係は既に(4.22)に与えた。

(6) 非斉次回転群 $\mathcal{G}=(\mathbb{R},G)$ の $L^2(G)$ におけるユニタリ表現(5.11)の、完全直交系 $\{T^{l}_{mn}\}$ による表現行列を求めることができる。*

$$|l\,m\,n\rangle\equiv\sqrt{\frac{2l+1}{8\pi^2}}\,T^{l}_{mn}(\varphi_1\,\theta\,\varphi_2) \tag{5.17}$$

とおいて規格化すれば、(5.9), (5.11)によって行列要素は、

$$\langle l\,m\,n\,|\,T_{\mathcal{G}}\,|\,l'\,m'\,n'\rangle=\frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{8\pi^2}\int_G\overline{T^{l}_{mn}(g_0)}\,e^{i(g_0\mathbb{R}_0\cdot\mathbb{C})}T^{l'}_{m'n'}(g^{-1}g_0)\,dg_0 \tag{5.19}$$

で与えられる。

(7) 上の表現行列によって $\mathcal{G}$ の乗法則 $T_{g_2g_1}=T_{g_2}T_{g_1}$ は各行列要素の関係としてあらわされる。

---

* もともと $T^{l}_{mn}(g)$ はGの正則表現として求められたが、これは(5.11)または(5.19)の特別の場合、$\mathbb{C}=0$ の時と一致しない。それは(5.11)では $(T_gf)(g_0)=f(g^{-1}g_0)$ ととったのに反し、$T^{l}_{mn}(g)$ は $(T'_gf)(g_0)=f(g_0g)$ のように表現を定義して求められたからである。[1] しかし、今は $T^{l}_{mn}(g)$ を知ってしまっているのだから、$\mathcal{G}$ の表現として(5.11)をとって(5.19)のように計算することは差支えない。

$$\langle l_2 m_2 n_2 | T_{g_2 g_1} | l_1 m_1 n_1 \rangle = \sum_{lmn} \langle l_2 m_2 n_2 | T_{g_2} | lmn \rangle \times \langle lmn | T_{g_1} | l_1 m_1 n_1 \rangle \qquad (5.20)$$

ここで左辺は(5.12)に対応して(5.2)(5.19)を用い、

$$\frac{\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}}{8\pi^2} \int_G T^{l_2}_{m_2 n_2}(g) e^{i(gR\cdot[r_2+g_2 r_1])} T^{l_1}_{m_1 n_2}((g_2 g_1)^{-1} g)\, dg \qquad (5.21)$$

で与えられる。右辺は(5.19)の形の行列要素の積の和である。

§3 球Bessel関数の加法定理－I

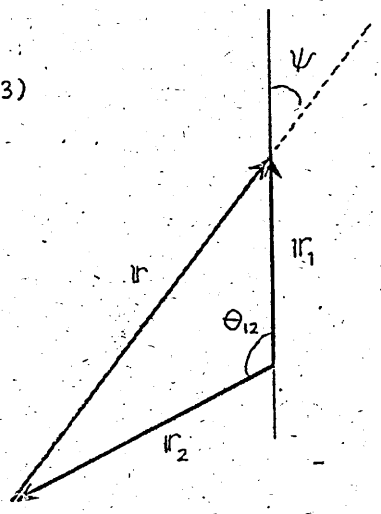
（等方 l-ベクトル場の加法定理）

(1) (5.2)において、特に $g_2 = g_1 = I$ であって、図のように、

$$r = r_1 - r_2 \qquad (5.22)$$

$$r = (r, \Psi, \varphi) \quad (\text{極座標})$$
$$r_1 = (r_1\ 0\ 0) \qquad (5.23)$$
$$r_2 = (r_2\ \theta_{12}\ \varphi)$$

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta_{12}} \qquad (5.24)$$



の場合に(5.20)を計算してみよう。行列要素のうちで特に、$l_2 = 0$ したがってまた $m_2 = n_2 = 0$ なるものに注目すれば、

$$\langle 000 | e^{i(R\cdot r)} | l_1 m_1 n_1 \rangle = \sum_{lmn} \langle 000 | e^{-i(R\cdot r_2)} | lmn \rangle \langle lmn | e^{i(R\cdot r_1)} | l_1 m_1 n_1 \rangle \qquad (5.25)$$

である。$(R\cdot r)$ 等は(5.10)によって第3の Eular 角に依存しないか

ら、(5.25)にあらわれる行列要素で0でないものは、(5.19)によって、$n_1=n=0$の項である。以下上で0でない行列要素を計算する。まず、(4.6)から $Rg\ominus=(R,\theta,\varphi_1-\frac{\pi}{2})$ であることに注意しよう。しかるとき、附録(A.20)を用いて

$$e^{iRr\cos(g\ominus\hat{\cdot}\hat{r})}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}i^l j_l(Rr)Y_l^m(\theta,\varphi_1-\tfrac{\pi}{2})\overline{Y_l^m(\psi,\varphi)} \tag{5.26}$$

したがって(5.25)の左辺で(5.17),(A.15)および $|000\rangle=\sqrt{\frac{1}{8\pi^2}}$ を用い、(5.26)を代入すると、

$$\langle 000|e^{i(R\cdot r)}|l_1m_1 0\rangle=\sqrt{\frac{1}{16\pi^3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e^{iRr\cos(g\ominus\hat{\cdot}\hat{r})}$$

$$\times i^{m_1}\overline{Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi_1)}d\varphi_1\sin\theta d\theta d\varphi_2=\sqrt{4\pi}\,i^{l_1}j_{l_1}(Rr)\overline{Y_{l_1}^{m_1}(\psi,\varphi)} \tag{5.27}$$

(5.25)の右辺第1因子も同様に書けるが、指数の符号が(5.26)と異なるため、(5.27)で i^{l_1} が $(-i)^l$ にかわる。(5.25)右辺第2因子は、

$$\langle lm0|e^{i(R\cdot r_1)}|l_1m_1 0\rangle$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iiint i^m Y_l^m(\theta,\varphi)(-i)^{m_1}\overline{Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi_1)}\,e^{iRr_1\cos\theta}d\varphi_1\sin\theta d\theta d\varphi_2$$

$$=(-1)^{m_1}\delta_{mm_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_l^{m_1}(\theta,\varphi_1)Y_{l_1}^{-m_1}(\theta,\varphi_1)e^{iRr_1\cos\theta}d\varphi_1\sin\theta d\theta$$

(A.24)によって、

$$=(-1)^{m_1}\delta_{mm_1}\sqrt{(2l+1)(2l_1+1)}\sum_L i^L(l_1 0\,l0|l_1\,l\,L0)(l_1-m_1\,l\,m_1|l_1\,l\,L0)j_L(Rr_1) \tag{5.28}$$

したがって(5.27),(5.28)を(5.25)に代入すれば、次の加法定理がえられた。

補助定理5 球Bessel関数の加法定理

l次の球Bessel関数に対して、

$$i^m \overline{Y_\ell^m(\psi,\varphi)}\, j_\ell(Rr) = \sum_{\ell'=0}^{\infty} (-i)^{\ell+\ell'} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}\, (-i)^m \overline{Y_{\ell'}^m(\theta_{12},\varphi)}\, j_{\ell'}(Rr_2)$$

$$\times \sum_L i^L (\ell 0 \ell' | \ell \ell' L 0)(\ell -m\ \ell' m | \ell \ell' L 0)\, j_L(Rr_1)$$

$$(m = -\ell,\ -\ell+1,\ \cdots\cdots,\ \ell) \qquad (5.29)$$

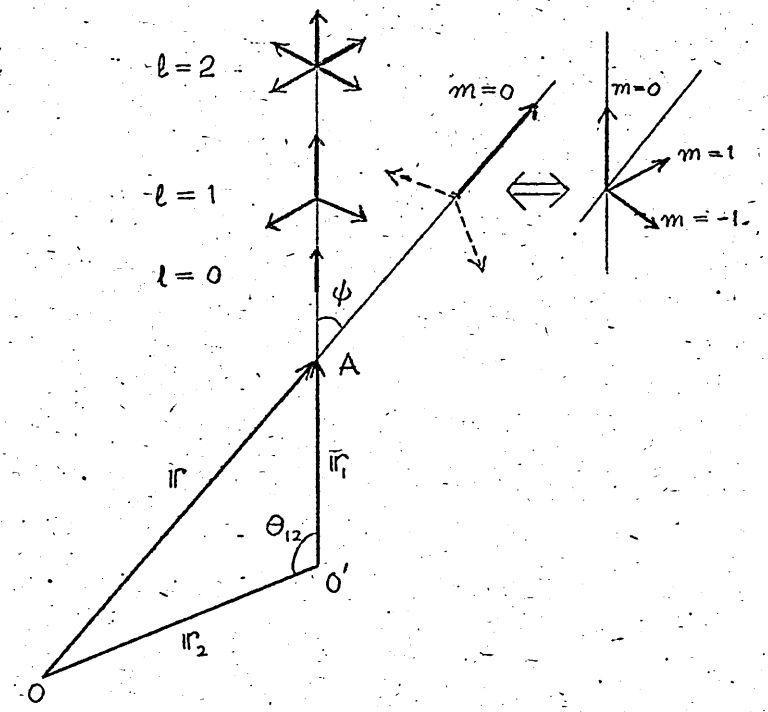
$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_{12}} \qquad (5.30)$$

が成立する。ψ は $r_1 r_2 r$ の作る三角形の r と r_1 とのなす角、θ_{12} は r_1 と r_2 のなす角である。右辺の L についての和は (A.24) によって $\ell+\ell'+L$ が偶数でかつ (ℓ, ℓ', L) が三角条件をみたすものについてとる。$(\ell -m\ \ell' m | \ell \ell' L 0)$ 等は Clebsch Gordan 係数 (A.25) である。

系 $\ell = 0$ の場合。したがって $m=0$ であるが、このとき (5.29) はよく知られた 0 次の球 Bessel 関数の加法定理を導く。すなわち (A.5) によって Y_ℓ^0 を Legendre 関数であらわせば、

$$j_0(Rr) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, j_\ell(Rr_1)\, j_\ell(Rr_2)\, P_\ell(\cos\theta_{12}) \qquad (5.31)$$

(2) 幾何学的意味　加法定理 (5.29) の幾何学的意味を考察しよう。これは定まった ℓ に対し、$(2\ell+1)$ ケの加法公式をあらわしている。第4章の補助定理3からわかるように、$j_\ell(Rr)$ は、weight ℓ の既約表現で変換される量 (これを ℓ- ベクトルと呼ぶことにする) の場の $m=0$ に対応するカノニカル成分であって、其他の $m \neq 0$ の成分は 0 であるとすれば、これは一つの等方 ℓ- ベクトル場をあらわしている。したがって図において原点 O に関する等方 ℓ- ベクトル場の点 A におけるカノニカル成分 j_ℓ は図のように $m=0$ の成分しかもたない。これを r_1 に関するカノニカル基底に関してながめると、図のように一般に各 m についての成分があらわれる。このカノニカル基底の変換による成分の変換は、§4.2 と同様に $\| T_{mn}^{\ell} \|$ によって与えられる。(A.15) を考慮すればわかるように、この各成分が (5.29) の左辺である。これらを原点 O'



における座標からみれば、それらは、種々の既約部分 $l=0,1,2,\cdots\cdots$ に分解し、対応する種々のカノニカル成分があらわれることになる。したがって(5.29)の$(2l+1)$ケの加法定理は、上の$(2l+1)$ケの各成分の分解の仕方をあらわしているのである。ここで重要なことは、mに関しては左辺も右辺も同じ成分しかあらわれていないことである。これは座標変換の際の各成分の変換の仕方を規定している(第6章参照)。又、右辺で $\overline{Y_l^m(\theta_{12},\varphi)}$ に加法定理を適用すれば、この公式は(5.23)でない一般の r, r_1, r_2 に対して書かれることになる。

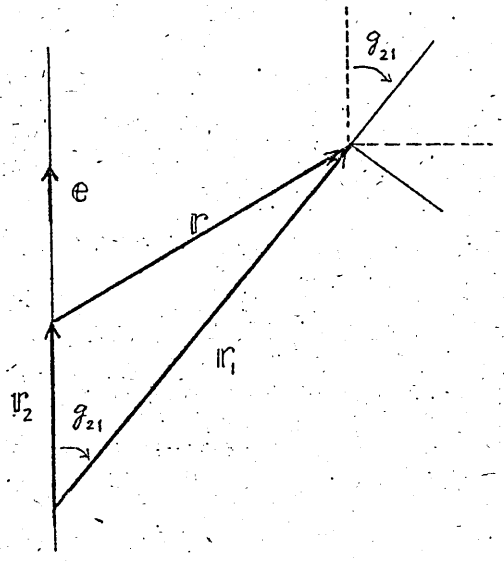
加法公式(5.29)をBessel関数の加法公式(A.22)または(A.22')と比べてみるのは大変興味のあることである。Bessel関数の加法公式は§1でのべたように2次元Euclid運動群の議論から導かれるものであるが[10]、これらの公式はたがいに相似点をもっている。特に今のべた幾何学的解釈はそのままBessel関数の加法公式に適用できる。

§4 球Bessel関数の加法定理 — II

(等方テンソル場の加法定理)

§4-1 対称な加法定理

前節で求めた加法定理は $\ell=0$ の場合、すなわち(5.31)に(A.16)を代入したものにおいては、定理は2つの変数 $\mathbf{r}_1=(r_1,\theta_1,\varphi_1)$, $\mathbf{r}_2=(r_2\theta_2\varphi_2)$ に関して対称になっている。この事情はBessel関数の場合(A.21)にもそうなっている。しかしながら $\ell\neq 0$ の場合の加法定理(5.29)あるいは(A.22)では、2つの変数は対称にあるいは対等にあらわれていない。これは何故であるか? $\ell=0$ の場合は偶然にそうなったのか?、又、対称なものを作ることはできるのか?という疑問が生ずる。この問題は以下で取扱われる。2点に関する対称性の問題はその幾何学的意味を考察することによって明らかにされる。特別の場合その加法定理は等方テンソル場に関するものを与える。次章においては、(5.29)ではなく、そのような対称な加法定理を必要とするであろう。



(1) (5.2)において、

$$\mathbf{g}_1=(\mathbf{r}_1,g_{21}),\quad \mathbf{r}_1=r_1 g_{21} e \tag{5.32}$$

$$\mathbf{g}_2=(-\mathbf{r}_2,\mathrm{I}),\quad \mathbf{r}_2=r_2 e \tag{5.33}$$

したがって

$$\mathbf{g}_2\mathbf{g}_1=(\mathbf{r},g_{21}) \tag{5.34}$$

$$\mathbf{r}=-r_2 e+r_1 g_{21} e \tag{5.35}$$

とした場合に(5.20)を計算する。

$$\langle l_2 m_2 n_2 | T_{\alpha_f} | l_1 m_1 n_1 \rangle = \sum_{lmn} \langle l_2 m_2 n_2 | T_{\alpha_{f_2}} | l m n \rangle \times \langle l m n | T_{\alpha_{f_1}} | l_1 m_1 n_1 \rangle \qquad (5.36)$$

右辺第2因子は(5.19)によって、

$$\langle l m n | T_{\alpha_{f_1}} | l_1 m_1 n_1 \rangle = \frac{\sqrt{(2l+1)(2l_1+1)}}{8\pi^2} \int_G \overline{T^l_{mn}(g)} e^{i(R\cdot \mathbb{R}_1)} T^{l_1}_{m_1 n_1}(g_{21}^{-1} g) dg \qquad (5.37)$$

(5.10)：$\mathbb{R} = Rg\mathbf{e}$．(5.32)，(5.8) およびベクトル内積のユニタリ不変性によって、

$$= \frac{\sqrt{(2l+1)(2l_1+1)}}{8\pi^2} \int_G \overline{T^l_{mn}(g_{21} g)} e^{iRr_1(g\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})} T^{l_1}_{m_1 n_1}(g) dg$$

ここで、Gの表現行列としての T^l_{mn} の乗法則

$$T^l_{mn}(g'g) = \sum_{s=-l}^{l} T^l_{ms}(g') T^l_{sn}(g) \qquad (5.38)$$

を代入し、$(g\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}) = \cos\theta$ が φ_1, φ_2 を含まぬこと、および(5.13)とから、積分は $n = n_1$, $s = m_1$ の項しか残らないので、

$$= \frac{\sqrt{(2l+1)(2l_1+1)}}{8\pi^2} \overline{T^l_{m m_1}(g_{21})} \delta_{n n_1} \int_G \overline{T^l_{m_1 n_1}(g)} T^{l_1}_{m_1 n_1}(g) e^{iRr_1\cos\theta} dg \qquad (5.39)$$

となる。(5.36)の第1因子の積分も(5.39)の積分と同様に、

$$\langle l_2 m_2 n_2 | T_{\alpha_{f_2}} | l m m \rangle = \frac{\sqrt{(2l+1)(2l_2+1)}}{8\pi^2} \delta_{m m_2} \delta_{n n_2} \int_G \overline{T^{l_2}_{m_2 n_2}(g)} T^l_{m_2 n_2}(g) e^{-iRr_2\cos\theta} dg \qquad (5.40)$$

(5.39)，(5.40)にあらわれる積分を次のようにおく。

$$8\pi^2 j^{ll'}_{mn}(Rr) \equiv \int_G \overline{T^l_{mn}(g)} T^{l'}_{nm}(g) e^{iR\cos\theta} dg \qquad (5.41)$$

(5.36)左辺も(5.37)のようにあらわされるが、(5.41)を用いて書けるように次のように回転 g_{02}, g_{01} を考える。

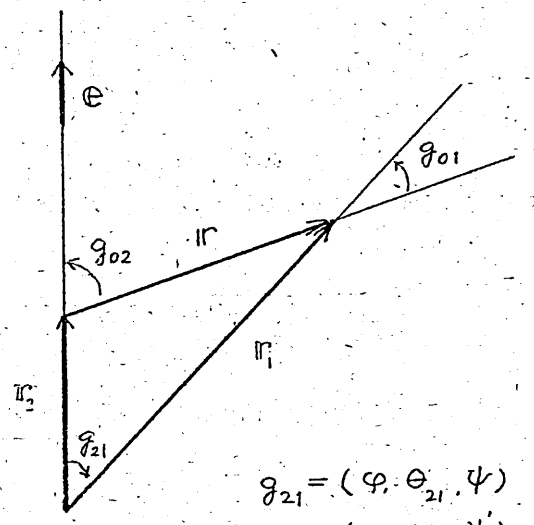
すなわち、(5.35)から、

$$\mathbb{r} = -r_2 \mathbb{e} + r_1 g_{21} \mathbb{e} \equiv r g_{02}^{-1} \mathbb{e} \qquad (5.42)$$

なる g_{02}^{-1} を考えると、これは第3のEuler角に任意性がある。g_{02} の逆を考えたのは後の便宜のためである。

$$g_{01} = g_{02} g_{21} \qquad (5.43)$$

とおく。しかるとき、(5.36)左辺は指数に(5.42)を用い、(5.8), (5.43)によって、



$g_{21} = (\varphi, \theta_{21}, \psi)$
$g_{02} = (\varphi, \theta_{02}, \psi)$

$$\int_G \overline{T^{l_2}_{m_2 n_2}(g)} e^{i(R\cdot\mathbb{r})} \times T^{l_1}_{m_1 n_1}(g_{21}^{-1} g)\, dg$$

$$= \int_G \overline{T^{l_2}_{m_2 n_2}(g_{02}^{-1} g)}\, e^{iRr\cos\theta}\, T^{l_1}_{m_1 n_1}(g_{01}^{-1} g)\, dg \qquad (5.44)$$

ここで(5.38)を用い、かつ(5.41)を利用すると、

$$= 8\pi^2 \delta_{n_1 n_2} \sum_{s=-L}^{L} \overline{T^{l_2}_{m_2 s}(g_{02}^{-1})}\, T^{l_1}_{m_1 s}(g_{01}^{-1})\, j^{l_2 l_1}_{s n_1}(Rr) \qquad (5.45)$$

ただし $L = \min(l_1, l_2)$. (5.46)

以上によって(5.39), (5.40), (5.41), (5.45)を(5.36)に代入すれば次の加性定理をうる。

補助定理6 対称な加性定理

$$\sum_{s=-L}^{L} \overline{T^{l_2}_{m_2 s}(g_{02}^{-1})}\, T^{l_1}_{m_1 s}(g_{01}^{-1})\, j^{l_2 l_1}_{s n}(Rr)$$
$$= \sum_{l=|n|}^{\infty} (2l+1)\, j^{l_2 l}_{m_2 n}(Rr_2)\, j^{l l_2}_{m_1 n}(Rr_1)\, \overline{T^{l}_{m_2 m_1}(g_{21})} \qquad (5.47)$$

ただし $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta_{12}}$

$L=\min(l_1,l_2)$.

g_{02}^{-1}, g_{01}^{-1}, g_{21} は(5.42), (5.43)あるいは図に示したようにベクトル $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ を e の回転によって指定する回転であり、それらの第2 Euler角は、それらのなす角度 θ_{02}, θ_{01}, θ_{21} にひとしい。ただし $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r}_0$ の意味とした。

系1 特に $l_1=l_2=1$ の場合は

$$\sum_{s=-1}^{1} T^{1}_{m_2 s}(g_{02}^{-1})\,T^{1}_{m_1 s}(g_{01}^{-1})\,j^{1}_{sn}(Rr) = \sum_{l=|n|}^{\infty}(2l+1)\,\overline{j^{l}_{m_2 n}(Rr_2)}\,j^{l}_{m_1 n}(Rr_1)\,\overline{T^{l}_{m_2 m_1}(g_{21})} \tag{5.48}$$

但し、ここで $j_{mn}(Rr)\equiv j^{l1}_{mn}(Rr)$ とおいた。以下においては $j^{l}_{mn}(Rr)$ を l 次の球 Bessel テンソル関数 とよぶことにする。この形は§4において決定する。

系2 特に $l_1=l_2=0$ の場合には、$j_0(Rr)$ の既知の加法定理(5.31)に帰着する。

(2) (5.47)あるいは(5.48)において、

$$g_{21}=g_2^{-1}g_1 \tag{5.49}$$

とおくならば、(5.38)と T^{l}_{mn} のユニタリ性を用いて、

$$\overline{T^{l}_{m_2 m_1}(g_2^{-1}g_1)}=\sum_{s=-l}^{l}T^{l}_{s m_2}(g_2)\,\overline{T^{l}_{s m_1}(g_1)}=\sum_{s=-l}^{l}\overline{T^{l}_{m_2 s}(g_2^{-1})}\,T^{l}_{m_1 s}(g_1^{-1}) \tag{5.50}$$

を代入すれば、加性公式で $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ の方向が任意にとられたことになる。これは上の図で $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}$ のつくる三角形全体を g_2 だけ回転したことに相当する。

又、(5.50)自身、Generalized spherical function の加法定理になっていることは言うまでもない。[11]

(3) (5.41)で定義した関数 $j_{mn}^{\ell\ell'}(Rr)$ は球Bessel関数の和であらわすことができる。したがって、補助定理6は、球Bessel関数に対する一つの加法定理である。次節においては特に $\ell'=1$ の場合、つまり関数 $j_{mn}^{\ell}(Rr)$ の形を計算し、更にいくつかの性質を導出する。

(4) 対称な加法定理(5.47)は、球Bessel関数に関して見出されたが、Bessel関数の加法定理(A.22)に対応する対称な加法定理も作ることができると予想される。

(5) 対称な加法定理の幾何学的意味　§3,(2)では、加法定理(5.29)の考察を行なったが、同様なことを対称な加法定理(5.47)についても試みることができる。又、幾何学的解釈を行なわないかぎり、実用上定理は十分活用されえないであろう。簡単のために $\ell_1=\ell_2=1$ の場合の(5.48)についてのべる。(5.47)の一般の場合の意味はそれの自明な拡張にすぎない。

まず、(5.48)において、$T'_{m'n}(g)$ は(4.12)で与えられるから、これは $g_{mn}(g)$ と書くことができる。(5.48)に(5.50)を入れて次の形に書いておこう。

$$\sum_{s=1}^{1} j_{sn}^{1}(Rr)\,\overline{g_{m_2 s}(g_{02}^{-1})}\,g_{m_1 s}(g_{01}^{-1})$$

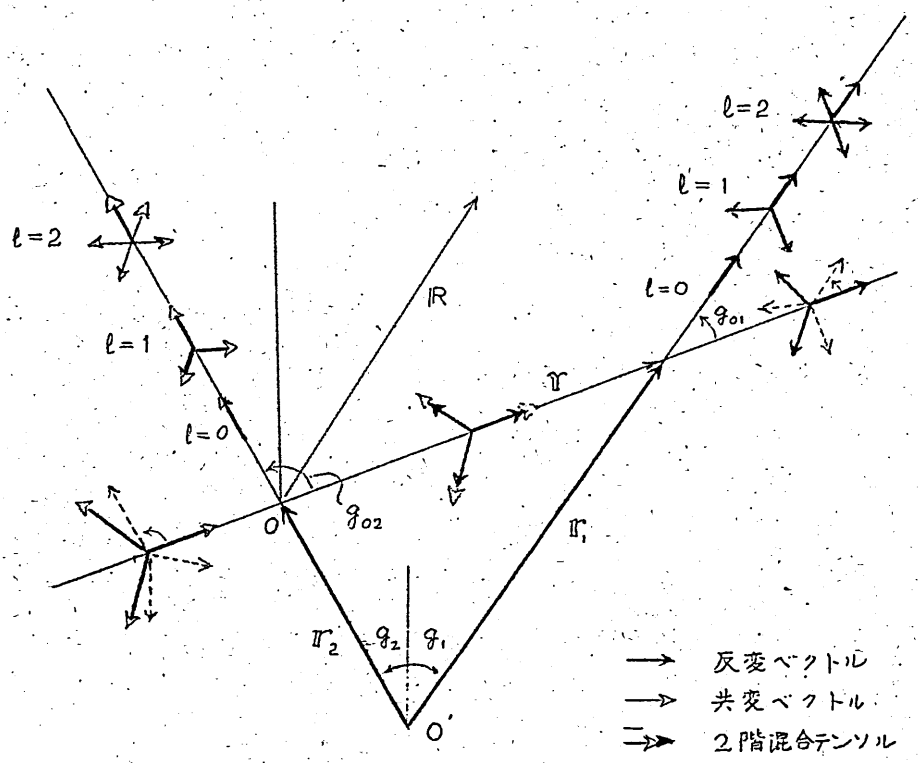
$$=\sum_{\ell=|n|}^{\infty}\sum_{t=-\ell}^{\ell}(2\ell+1)\,\overline{j_{m_2 n}^{\ell}(Rr_2)}\,j_{m_1 n}^{\ell}(Rr_1)\,\overline{T_{m_2 t}^{\ell}(g_2^{-1})}\,T_{m_1 t}^{\ell}(g_1^{-1}) \qquad (5.51)$$

j_{sn}^{11} の定義

$$8\pi^2 j_{sn}^{11}(Rr)=\int_G \overline{T_{sn}^{1}(g)}\;T_{sn}^{1}(g)\,e^{iRr\cos\theta}\,dg \qquad (5.52)$$

の意味を考えよう。ここでは2つの行列要素の積が出ているが、添数が共に同じであるから、第　第3のEular角は含まれていない。これはテンソル基底 $e_{-n}e_n$ に関する成分から、g によって $e_{-s}e_s$ ($s=-1,0,1$) に関する成分への変換行列であり、その他の非対角な成分はあらわ

れていない。したがって補助定理 2′, (4.44) および §4.2 の議論を考慮するならば, (5.52) の右辺は $e_{-n}e_n$ に関する成分が 1 である一つの等方な2階混合テンソルの成分の Fourier 変換であって, $e_{-s}e_s$ ($s=-1,0,1$) に関する3つの成分をあらわしている。もちろん結果は R_r のみの関数であって, 又一つの等方な2階混合テンソルである。



さて次に (5.51) の左辺の意味を考える。$j^{\dagger}_{sn}$ は原点 O に関して等方テンソルであるから, 直積基底に関する成分であらわしたものを図の2重矢印を付けたもので代表させよう。これはテンソルであるが, $\vec{r}$ の始端, 終端に関する2点テンソル (2 points tensor) であるとみることもできる。

今, 原点を O′ に移動し, この2階混合テンソルを2点テンソルと見て2点 r_1, r_2 にその反変, 共変成分を一つずつ属させ, これら成分をベクトル r_1, r_2 に関するカノニカル成分で記述しよう。そのためには,

図の点線矢印のようにカノニカル基底をそれぞれ g_{01}, g_{02} だけ別々に回転させればよい。これが (5.51) の左辺の意味である。0に関して等方な2階テンソルをそれぞれ Γ_1, Γ_2 に関するカノニカル成分によって2点テンソルとして、このように記述したのち、移動した原点 O' から見れば、もはや等方テンソルではなくなるが、それを Γ_1, Γ_2 まわりの回転に関して種々の既約空間に属する成分に分解することを示したのが右辺である。$j^{l}_{m_2 n}$, $j^{l}_{m_1 n}$ はそれぞれの成分である。このようにして、等方2階テンソルを2点テンソルとみることによって、2点が同資格であらわれる対称な加法定理がえられたのである。これが標題の等方テンソル場の加法定理と述べた理由である。これは $m_1, m_2\ n$ の組合わせの数 $3^3=27$ 通りの加法定理をあらわしていることになる。

今は、説明の都合上 $l_1=l_2=1$ の場合をのべたが、一般の場合は明らかである。2つの既約表現の直積 $\overline{T^{l_1}}\,T^{l_2}$ によって変換をうける量の等方な場に対する加法定理をあらわしているのである。

§4.2 T^{l}_{mn} の漸化式[11]

球 Bessel テンソル関数 j^{l}_{mn} の形を決定するために (5.41) の積分を行なわねばならない。そのために $\overline{T^{l}_{mm}}\,T^{l}_{mm}$ の形を explicit に書かねばならない。これは θ のみの関数である。これは一般に $T^{l}_{mn}\,T^{l'}_{m'n'}$ を既約分解することであり、それは又 T^{l}_{mm} の漸化式を求めることにもなっている。

(1) $l=1$ のカノニカル基底 e_{-1}, e_0, e_1, weight l のそれを $f_{-l}, \cdots\cdots, f_l$ と記す。weight 1 の表現と weight l の表現空間の直積基底は §4.2 と同様に、weight $l+1$, l, $l-1$ の既約表現空間のカノニカル基底 g^{l+1}_{m} g^{l}_{m}, g^{l-1}_{m} であらわすことができる。

$$
\begin{aligned}
e_{-1} f_{m+1} &= c^{m}_{11}\, g^{l+1}_{m} + c^{m}_{12}\, g^{l}_{m} + c^{m}_{13}\, g^{l-1}_{m} \\
e_{0} f_{m} &= c^{m}_{21}\, g^{l+1}_{m} + c^{m}_{22}\, g^{l}_{m} + c^{m}_{23}\, g^{l-1}_{m} \qquad (5.53) \\
e_{1} f_{m-1} &= c^{m}_{31}\, g^{l+1}_{m} + c^{m}_{32}\, g^{l}_{m} + c^{m}_{33}\, g^{l-1}_{m}
\end{aligned}
$$

c^{m}_{ij} は Clebsch Gordan 係数であって、

$$\| C^{m} \| = \begin{Vmatrix} \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+2)}} & -\sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)}} & \sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{2l(2l+1)}} \\ \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(l+1)}} & -\frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} & -\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{l(2l+1)}} \\ \sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+2)}} & \sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{2l(l+1)}} & \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{2l(2l+1)}} \end{Vmatrix} \tag{5.54}$$

変換 (5.53) はユニタリであるから直ちに逆に解ける。

$$\begin{aligned} g_j^{l+1} &= c^{j}_{11} e_{-1} f_{j+1} + c^{j}_{21} e_0 f_j + c^{j}_{31} e_1 f_{j-1} \\ g_j^{l} &= c^{j}_{12} e_{-1} f_{j+1} + c^{j}_{22} e_0 f_j + c^{j}_{32} e_1 f_{j-1} \\ g_j^{l-1} &= c^{j}_{13} e_{-1} f_{j+1} + c^{j}_{23} e_0 f_j + c^{j}_{33} e_1 f_{j-1} \end{aligned} \tag{5.55}$$

(2) 次の T^{l}_{mn} の漸化式 が成立する。 $k=-1, 0, 1$ に対し、

$$\begin{aligned} T^{1}_{-1,k}\, T^{l}_{j+1,m-k} &= c^{m}_{k+2,1}\, T^{l+1}_{jm}\, c^{j}_{11} + c^{m}_{k+2,2}\, T^{l}_{jm}\, c^{j}_{12} + c^{m}_{k+2,3}\, T^{l-1}_{jm}\, c^{j}_{13} \\ T^{1}_{ok}\, T^{l}_{j\,m-k} &= c^{m}_{k+2,1}\, T^{l+1}_{jm}\, c^{j}_{21} + c^{m}_{k+2,2}\, T^{l}_{jm}\, c^{j}_{22} + c^{m}_{k+2,3}\, T^{l-1}_{jm}\, c^{j}_{23} \\ T^{1}_{1k}\, T^{l}_{j-1,m-k} &= c^{m}_{k+2,1}\, T^{l+1}_{jm}\, c^{j}_{31} + c^{m}_{k+2,2}\, T^{l}_{jm}\, c^{j}_{32} + c^{m}_{k+2,3}\, T^{l-1}_{jm}\, c^{j}_{33} \end{aligned} \tag{5.56}$$

(証) (5.53) の両辺に回転 g を行なうと $k=-1, 0, 1$ に対し、

$$\begin{aligned} &(T^{1}_{-1,k} e_{-1} + T^{1}_{ok} e_0 + T^{1}_{1k} e_1) \sum_j T^{l}_{j,m} f_j \\ &= \sum_j (c^{m}_{k+2,1} T^{l+1}_{jm} g_j^{l+1} + c^{m}_{k+2,2} T^{l}_{jm} g_j^{l} + c^{m}_{k+2,3} T^{l-1}_{jm} g_j^{l-1}) \end{aligned}$$

---

* この定義は文献 [1] のものと g^{l}_{m} の符号をかえて定義したために、真中の縦列の符号がかえてある。これは第4章の既約分解と符号を合わせるためである。もちろん結果には影響しない。

ここで右辺の g_j に(5.55)を代入し、両辺で直積基底の係数を比較すれば、$k=-1,0,1$ に対し、$e_{-1}f_{j+1}$, $e_0 f_j$, $e_1 f_{j-1}$ の係数としてそれぞれ(5.56)がえられる。

(3) 特に $\underline{m=j=0 \text{ の場合}}$、漸化式(5.56)は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
(-1)^{K-1} T^{1}_{-1k}\, \overline{T^{\ell}_{-1k}} &= C_{K+2,1} P_{\ell+1} C_{11} + C_{K+2,2} P_{\ell} C_{12} + C_{K+2,3} P_{\ell-1} C_{13} \\
(-1)^{K} T^{1}_{0k}\, \overline{T^{\ell}_{0k}} &= C_{K+2,1} P_{\ell+1} C_{21} + C_{K+2,2} P_{\ell} C_{22} + C_{K+2,3} P_{\ell-1} C_{23} \\
(-1)^{K+1} T^{1}_{1k}\, \overline{T^{\ell}_{1k}} &= C_{K+2,1} P_{\ell+1} C_{31} + C_{K+2,2} P_{\ell} C_{32} + C_{K+2,3} P_{\ell-1} C_{33}
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

$$
\| C^{0} \| = \left\| \begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2(2\ell+1)}} \left\| \begin{matrix} \sqrt{\ell} & -\sqrt{2\ell+1} & \sqrt{\ell+1} \\ \sqrt{2\ell+2} & 0 & -\sqrt{2\ell} \\ \sqrt{\ell} & \sqrt{2\ell+1} & \sqrt{\ell+1} \end{matrix} \right\| \tag{5.58}
$$

ただしここで $\overline{T^{\ell}_{mn}} = (-1)^{m+n} T^{\ell}_{-m,-n}$ を用い、又(A.15)によって、

$$
T^{\ell}_{00}(g) = P_{\ell}(\cos\theta) \tag{5.59}
$$

とおいた。

(4) (5.57)を、各 $k=-1,0,1$ に対し(5.58)を用いて具体的に書けば次のようになる。

$$
\left\| \begin{matrix} T^{1}_{-1-1}\, \overline{T^{\ell}_{-1-1}} \\ T^{1}_{0-1}\, \overline{T^{\ell}_{0-1}} \\ T^{1}_{1-1}\, \overline{T^{\ell}_{1-1}} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2(2\ell+1)} \left\| \begin{matrix} \ell & 2\ell+1 & \ell+1 \\ -\sqrt{2\ell(\ell+1)} & 0 & \sqrt{2\ell(\ell+1)} \\ \ell & -(2\ell+1) & \ell+1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} P_{\ell+1} \\ P_{\ell} \\ P_{\ell-1} \end{matrix} \right\| \begin{matrix} (m,n) \\ (-1,-1) \\ (0,-1) \\ (1,-1) \end{matrix}
$$

$n=-1$

$$
\left\| \begin{matrix} T^{1}_{-10}\, \overline{T^{\ell}_{-10}} \\ T^{1}_{00}\, \overline{T^{\ell}_{00}} \\ T^{1}_{10}\, \overline{T^{\ell}_{10}} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2(2\ell+1)} \left\| \begin{matrix} -\sqrt{2\ell(\ell+1)} & 0 & \sqrt{2\ell(\ell+1)} \\ 2(\ell+1) & 0 & 2\ell \\ -\sqrt{2\ell(\ell+1)} & 0 & \sqrt{2\ell(\ell+1)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} P_{\ell+1} \\ P_{\ell} \\ P_{\ell-1} \end{matrix} \right\| \begin{matrix} (-1,0) \\ (0,0) \\ (1,0) \end{matrix}
$$

$n=0$

$$\begin{Vmatrix} T^{1}_{-11} & \overline{T^{\ell}_{11}} \\ T^{1}_{01} & \overline{T^{\ell}_{01}} \\ T^{1}_{11} & \overline{T^{\ell}_{11}} \end{Vmatrix} = \frac{1}{2(2\ell+1)} \begin{Vmatrix} \ell & -(2\ell+1) & \ell+1 \\ -\sqrt{2\ell(\ell+1)} & 0 & \sqrt{2\ell(\ell+1)} \\ \ell & 2\ell+1 & \ell+1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} P_{\ell+1} & (-1,1) \\ P_{\ell} & (0,1) \\ P_{\ell-1} & (1,1) \end{Vmatrix}_{n=1} \tag{5.60}$$

§4.3. 球 Bessel テンソル関数とその性質

(1) (5.41) で定義された球 Bessel テンソル関数 $j^{\ell}_{mn}(Rr)$:

$$8\pi^2 j^{\ell}_{mn}(Rr) = \int_G \overline{T^{\ell}_{mn}(q)}\, T^{1}_{mn}(q)\, e^{iRr\cos\theta}\, dq \tag{5.61}$$

の形は (5.60) を代入し、(A.19), (A.10) を用いれば容易に求められる。

ℓ 次の球 Bessel テンソル関数 $j^{\ell}_{mn}(Rr)$ は3つの球 Bessel 関数 $j_{\ell+1}, j_{\ell}, j_{\ell-1}$ の線型結合として次のようにあらわされる。変数 Rr を省略し、行列形にかけば、

$$\begin{Vmatrix} j^{\ell}_{-1-1} \\ j^{\ell}_{0-1} \\ j^{\ell}_{1-1} \end{Vmatrix} = \frac{i^{\ell+1}}{2(2\ell+1)} \begin{Vmatrix} \ell & 2\ell+1 & \ell+1 \\ -\sqrt{2\ell(\ell+1)} & 0 & \sqrt{2\ell(\ell+1)} \\ \ell & -(2\ell+1) & \ell+1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_{\ell+1} \\ -ij_{\ell} \\ -j_{\ell-1} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} j^{\ell}_{-10} \\ j^{\ell}_{00} \\ j^{\ell}_{10} \end{Vmatrix} = \frac{i^{\ell+1}}{2(2\ell+1)} \begin{Vmatrix} -\sqrt{2\ell(\ell+1)} & 0 & \sqrt{2\ell(\ell+1)} \\ 2(\ell+1) & 0 & 2\ell \\ -\sqrt{2\ell(\ell+1)} & 0 & \sqrt{2\ell(\ell+1)} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_{\ell+1} \\ -ij_{\ell} \\ -j_{\ell-1} \end{Vmatrix}.$$

$$\begin{Vmatrix} j^{\ell}_{-11} \\ j^{\ell}_{01} \\ j^{\ell}_{11} \end{Vmatrix} = \frac{i^{\ell+1}}{2(2\ell+1)} \begin{Vmatrix} \ell & -(2\ell+1) & \ell+1 \\ -\sqrt{2\ell(\ell+1)} & 0 & \sqrt{2\ell(\ell+1)} \\ \ell & 2\ell+1 & \ell+1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} j_{\ell+1} \\ -ij_{\ell} \\ -j_{\ell-1} \end{Vmatrix} \tag{5.62}$$

(2) $j^{\ell}_{mn}(r)$ の間に次の関係がなりたつ。(簡単のため $R=1$ とおく。)

$$j^{\ell}_{mn}(r) = j^{\ell}_{nm}(r), \quad j^{\ell}_{mn}(r) = j^{\ell}_{-m,-n}(r) \tag{5.63}$$

(3) (5.62) は (A.28)(A.29) を用いて個別的に次のようにもかける。

$$j^{\ell}_{00}(r) = i^{\ell-1}\frac{dj_\ell}{dr}, \quad j^{\ell}_{01}(r) = i^{\ell-1}\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\,\frac{j_\ell(r)}{r}$$

$$j^{\ell}_{1\pm1}(r) = \frac{i^{\ell-1}}{2}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rj_\ell) \pm i j_\ell(r)\right\} \tag{5.62'}$$

(4) (5.62) から j^{ℓ}_{mm} の間に次の関係が成立することが示される。

$$\sum_{m=-1}^{1}\overline{j^{\ell}_{m0}(r')}\,j^{\ell}_{m0}(r) = \frac{1}{2\ell+1}\left\{(\ell+1)j_{\ell+1}(r')j_{\ell+1}(r) + \ell j_\ell(r')j_\ell(r)\right\}$$

$$\sum_{m=-1}^{1} j^{\ell}_{m1}(r')\,j^{\ell}_{m1}(r) = \sum_{m=-1}^{1} j^{\ell}_{m,-1}(r')\,j^{\ell}_{m-1}(r)$$

$$= \frac{1}{2(2\ell+1)}\left\{\ell j_{\ell+1}(r')j_{\ell+1}(r) + (2\ell+1)j_\ell(r')j_\ell(r) + (\ell+1)j_{\ell-1}(r')j_{\ell-1}(r)\right\}$$

$$\sum_{m=-1}^{1}\overline{j^{\ell}_{m0}(r')}\,j^{\ell}_{m1}(r) = \sum_{m=-1}^{1}\overline{j^{\ell}_{m0}(r')}\,j^{\ell}_{m-1}(r) = \sum_{m=-1}^{1}\overline{j^{\ell}_{m1}(r')}\,j^{\ell}_{m0}(r) = \sum_{m=-1}^{1}\overline{j^{\ell}_{m-1}(r')}\,j^{\ell}_{m0}(r)$$

$$= \frac{\sqrt{2\ell(\ell+1)}}{2(2\ell+1)}\left\{j_{\ell-1}(r')j_{\ell-1}(r) - j_{\ell+1}(r')j_{\ell+1}(r)\right\}$$

$$\sum_{m=-1}^{1}\overline{j^{\ell}_{m1}(r')}\,j^{\ell}_{m-1}(r) = \sum_{m=-1}^{1}\overline{j^{\ell}_{m-1}(r')}\,j^{\ell}_{m1}(r)$$

$$= \frac{1}{2(2\ell+1)}\left\{\ell j_{\ell+1}(r')j_{\ell+1}(r) - (2\ell+1)j_\ell(r')j_\ell(r) + (\ell+1)j_{\ell-1}(r')j_{\ell-1}(r)\right\} \tag{5.64}$$

右辺は実であり、かつ r', r の入替に関し対称である。

(5) (5.64) の関係では n, n' の添字を一定にして m について和をとったが、この関係は (5.63) によって、m と n の役割を入れ替えても成立する。

(5.64) の関係と Fourier-Bessel の積分定理 (A.1') とを合わせ用い

ると j^{ℓ}_{mln} に対する次の積分定理がえられる。都合上多少 modify する。

補助定理 7　球 Bessel テンソル関数の積分定理

Hankel 変換 (A.3') が存在するような F(t) に対して次の積分公式が成立する。

$$(4\pi)^2 \sum_{m=-1}^{1} \int_0^\infty \int_0^\infty F(t') \overline{j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)}\, j^{\ell}_{mn'}(2\pi t'r) t'^2 dt\, r^2 dr = \delta_{nn'} F(t) \tag{5.65}$$

あるいは記号的に直交関係として

$$(4\pi)^2 \sum_{m=-1}^{1} \int_0^\infty \overline{j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)}\, j^{\ell}_{mn'}(2\pi t'r) r^2 dr = \delta_{nn'} \frac{\delta(t-t')}{t^2} \tag{5.66}$$

とも書ける。$\delta(t)$ は Dirac の δ- 関数である。

積分定理 (5.65) は Hankel 変換 (A.3), (A.3') に対応して次のようにも表現できる。ただし積分の存在は仮定しておく。

補助定理 8　ベクトル Hankel 変換

ベクトル関数 $\{F_n(t),\ n=-1,0,1\}$ に対する ℓ 次のベクトル Hankel 変換を次式で定義する。

$$f_m(r) = 4\pi \sum_{n=-1}^{1} \int_0^\infty j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)\, F_n(t)\, t^2 dt, \quad (m=-1,0,1) \tag{5.67}$$

しかるとき、次の反転公式が成立する。

$$F_n(t) = 4\pi \sum_{m=-1}^{1} \int_0^\infty \overline{j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)}\, f_m(r) r^2 dr \quad (n=-1,0,1) \tag{5.68}$$

(6) 以上では球 Bessel テンソル関数 j^{ℓ}_{mln} を、ℓ-ベクトルと 1-ベクトルの直積の等方な場の Fourier 変換から定義したが、これら球 Bessel テンソル関数の美しい性質は、一般に ℓ-ベクトルと ℓ'-ベクトルの直積量つまり拡張したいみでの混合テンソル量の等方な場の Fourier

変換から得られる関数 $j_{mm}^{ll'}$ においてもあらわれるであろうと期待される。ただ(5.62)のようにそれらの関数を具体的に $L_{min}(l,l')$ ケの球 Bessel 関数の項であらわすことが多少複雑になるだけである。

第6章　一様等方なベクトル乱場－II
（乱場のスペクトル分解）

§1. 序論

一様な乱場の場合，相関テンソルのFourierスペクトル分解(3.23)及びそれと同形の反転公式があり，これに対応してベクトル乱場自身のFourierスペクトル分解がえられた。同様なことは既にスカラー乱場に対しても云えたことである。一様かつ等方なスカラー乱場の場合，相関函数のスペクトル分解は，極表示，即ちHankel変換で与えられ又同型の反転公式が成立し，又，スカラー乱場自身もこれに対応して極表示のスペクトル分解がえられた[3]（(6.45)～(6.48)参照）。我々は一様等方なベクトル乱場に対して相関テンソルのスペクトル分解(4.67)および同型の反転公式(4.68)を極表示のベクトルHankel変換として得たが，上と同様に，この形式の表示に対応する乱場自身のスペクトル分解が得られることを期待する。これを求めることが本章の目的である。云うまでもなく，一様等方な場合は一様な場合に含まれている。しかし，等方性の条件があると相関テンソルあるいは，スペクトルテンソルは具体的に半直線上の3つの正値函数（又は測度）によって決定されるので，Fourier式スペクトル分解はこの場合具体的な形とはいえない。我々の求めるのは，一様な乱場のFourierスペクトル分解を等方性を利用して'積分した'ものといえる。

我々は一様等方なベクトル乱場のスペクトル分解を一般論によって進めているのではなく，多次元移動平均による表現という，いわば間道を通ってスペクトル分解の形を発見法的に探しているのである。スカラー乱場の場合はその様な方法でうまくスペクトル分解の形を見出すことが出来たが，その時の方法を対応論的に投影してベクトル場という高い次元の議論における方法を見出そうと試みるのは興味のあることである。

スカラー場は球面調和函数で展開されたが，ベクトル場は一般に極座

標形式では一般球函数によってよく展開されることが知られている。[11] 即ち前章まででのべた様にベクトル場をカノニカル成分で記述すれば，それらは回転によって独立にスカラーの様に変換されて，各々の成分が混りあうことがない。つまりこれは，3つの成分の各々が回転群の別々の表現空間に属しているからであり，したがってそれらは，それぞれの空間に属する函数で展開すると都合がよい。一般に才mカノニカル成分は $\overline{T^{\ell}_{nm}(g)}$ $(\ell=0,1,2,\cdots,\ n=-\ell,\cdots\ell.)$ によって展開することが出来る。我々のベクトル乱場のカノニカル成分も，スペクトル分解ではその様な函数で展開されていることを期待する。スカラー乱場の場合極表示のスペクトル分解がスムースに求められたということには，等方性ということと，もう一つ0次の球Bessel函数の加法定理（A·23）が2変数に関して対称であることが効果的な役割を果たしているのをみたがこれは偶然ではないと思われる。今の場合，相関テンソルのスペクトル分解（4.67）は高次の球Bessel函数を含んでいるが，これに直接加法定理を適用してもうまくゆかないが，前章§4で準備した2点に関し対称な加法定理を用いるとスカラーの時と同様スムースに議論が進められる。

以下ではまずスペクトル密度テンソルの形から，移動平均を指定する函数 $f(x)$ のFourier変換 $\mathbb{F}(y)$ を決めることを行う。次にそれによって $f(x)$ の形を求めて上の加法定理を適用してWiener積分を行うことによりスペクトル分解の形を求める。§6では，スカラー乱場の時と同様にランダム位相を導入してスペクトル分解の形を簡単化することを試みる。§7はそのスペクトル分解を用いて，いわゆる等方乱流としてしられている一様等方ベクトル乱場の種々の場合を議論したものである。

§2. 表現空間としてのベクトル空間 V_Ω

(1) 多次元正規分布に従う多次元確率変数を考えるには，仮想的なベクトル空間を考えるのが都合がよい。仮にベクトル空間 V_Ω とよぶものを考えよう。V_Ω の中のベクトルは ℓケの成分をもち，成分の番号を

ギリシヤ文字α, β 等で示すところにする。云うまでもなく V_Ω は線型であるとする。V_Ω のベクトル $h=\{h^\alpha,\ \alpha=1\cdots\cdots l\}$ に対し，ベクトル内積を

$$(h,g)\equiv\sum_{\alpha\beta=1}^{l}\mu^{\alpha\beta}\overline{h^\alpha}g^\beta \qquad (6.1)$$

によって定義し，ベクトル h の長さの2乗を (h,h) によって定義する。$\mu^{\alpha\beta}$ はある与えられた正定値行列とする。(6.1) の示すところによれば，これは V_Ω の中にある斜交座標を考えていることであり，$\mu^{\alpha\beta}$ がその座標の基本計量テンソルの役割をしていることをいみする。従つて，成分の間の適当な1次変換を考えることによつて，V_Ω の中の直交座標に移ることが出来，その時 $\mu^{\alpha\beta}=\delta^{\alpha\beta}$ ととることが出来る。従がつてベクトルの成分は直交座標に関するものとして一般性は失わない。

(2) (6.1) における $\mu^{\alpha\beta}$ を (2.2) の $\mu^{\alpha\beta}$ とみなすことにより，上の話を我々の場合に適用しよう。$\mathbb{B}(A)$ が標準化されているとは，V_Ω の中に直交座標を考えていることと同じである。又 (3.16) で定義した

$$(\mathbb{F}_i,\mathbb{F}_j)\equiv\sum_{\alpha,\beta}\mu^{\alpha\beta}\overline{F_i^\alpha(y)}F_j^\beta(y) \qquad (6.2)$$

は (6.1) によれば，V_Ω におけるベクトルとしての $\mathbb{F}_i(y)$, $\mathbb{F}_j(y)$ の内積である。ここに i,j および y はパラメタである。

以下，話を我々の考えている場合に制限することにし，$i,j=1,2,3$, $\alpha,\beta=1,2,3$, $\mu^{\alpha\beta}=\delta^{\alpha\beta}$ ととることにする。

(3) R_3 における3成分ベクトル量としての F_i^α ($i=1,2,3$; 但し α はパラメタ) はふつうの意味でのベクトル空間に属する。このベクトル空間を上と区別するために V_R と名付けることにする。したがつて，$F_i^\alpha(y)$ はベクトル直積空間 $V_\Omega\otimes V_R$ における成分をあらわしているものと考えられる。ただ V_Ω のベクトルと V_R のベクトルと本質的に異なることは，後者 V_R のベクトルは空間回転あるいは座標変換により成分も変換をうけること，つまり V_R は回転の weight 1 の既約な表

現空間であるということである。これに反し，V_{Ω}のベクトルは座標変換とは一応関係がない。

したがってその Fourier 変換も (4.42) によって

$$f_m^{\alpha}(x)=\sum_n \int g_{mn}(x'y)F_n^{\alpha}(y)e^{2\pi i(x,y)}dy \qquad (6.3)$$

で与えられる。ここに n は $\vec{y}$ に関するカノニカル成分，m は $\vec{x}$ に関するカノニカル成分であり，又 α は V_{Ω} における固定した直交座標に関する成分である。左辺 $f_m^{\alpha}(x)$ も又 V_{Ω} におけるベクトルの成分であることは云うまでもない。

(4) (4.62), (4.64) の条件は，ベクトル $\mathbb{F}_-(y)$, $\mathbb{F}_0(y)$, $\mathbb{F}_+(y)$ は V_{Ω} のベクトルとして常に（すべての y に対し）互いに直交することを意味している。添字 $-, 0, +$ は V_R における直交座標としてのカノニカル基底に関する成分を意味する。V_{Ω} のベクトルとしての長さの2乗はそれぞれ $|F_-(t)|^2$, $|F_0(t)|^2$, $|F_+(t)|^2$ である。

Fourier 変換によって $f_m^{\alpha}(x)$ の形を知るためには，$F_n^{\alpha}(y)$ の形をテンソルの等方性の条件 (4.62), (4.64) から定めなければならない。今

$$F_n^{\alpha}(y)=\overline{g_{\alpha n}(y)}\,F_n(t) \qquad (\alpha, n=-1, 0, 1.) \qquad (6.4)$$

ととってみよう。ここで $\alpha=1, 2, 3$ は仮に $-1, 0, 1$ に対応するものとする。このとり方は V_R のベクトルの l 成分として正しい変換性をもっている（一般に l 成分は $\overline{T^l_{mn}(y)}$ $(l=0, 1, 2\cdots, m=-l, -l+1, \cdots l)$ で展開される）。容易に確かめられるように，(6.4) は9つの条件 (4.62), (4.64) を満足していることがわかる。即ち，

$$(\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_m)=\sum_{\alpha}\overline{F_n^{\alpha}(y)}\,F_m^{\alpha}(y)=\sum_{\alpha}g_{\alpha n}(y)\overline{g_{\alpha m}(y)}\,\overline{F_n(t)}F_m(t)=\delta_{mn}|F_n(t)|^2 \qquad (6.5)$$

但しここで $\|g_{mn}\|$ のユニタリ性を用いた。(6.4) は次の様に解釈出来る。$\mathbb{F}_-$, $\mathbb{F}_0$, $\mathbb{F}_+$ は V_{Ω} のベクトルとして，すべての y において直交していればよいのであるから，異なる y の点では V_{Ω} のベクトルとしては

任意の向きをもつていてもよく，唯，V_R のベクトルとしてのカノニカル成分としての意味を保持して居ればよいわけである。(6.4) は異なる y の点における V_Ω のベクトルの間に，位相的な関連を指定したものであると。又次の様に考えることも出来る。ベクトル $\mathbb{F}_-, \mathbb{F}_0, \mathbb{F}_+$ は各点 y において V_Ω のベクトルとして直交しているのであるから，V_R におけるような，互に直交するカノニカル基底ベクトルの向きをもつ V_Ω の中のベクトルと考え，それを固定した V_Ω の規準カノニカル基底に関する α 成分をとつたものであり，その時 (6.4) は

$$F_n^\alpha(y)=\sum_\beta \overline{g_{\alpha\beta}(y)}\,\delta^{\beta n}F_n(t) \tag{6.6}$$

と書けるから，$\mathbb{F}_n(y)$ は V_Ω のベクトルとして V_Ω の'カノニカル成分'で書けば，n 成分のみをもつているのであると。したがつて，いずれにしても (4.62), (4.64) に対して (6.4) の様に決めることは，V_Ω も表現空間とみなすことである。(6.4) を (6.3) に代入した時，(6.6) を考慮すれば，左辺の m は V_R のベクトルとして x に関するカノニカル成分であり，α は V_Ω のベクトルとして固定した基準カノニカル基底に関する成分である。$\delta^{\beta n}F_n(t)$ は V_Ω のベクトルとして，$\vec{y}$ に関する カノニカル成分であつたから，左辺の α も $\vec{x}$ に関するカノニカル成分で記述した方が都合がよい。そうすれば (6.3) は (4.44) の様に

$$f_m^\alpha(x)=\sum_n \sum_\beta{}' \int \overline{g_{\alpha\beta}(\vec{x}'y)}\,g_{mn}(\vec{x}'y)F_n^\beta(t)\,e^{2\pi i(x,y)}\,dy \tag{6.7}$$

$$F_n^\beta(t)\equiv\delta^{\beta n}F_n(t) \tag{6.8}$$

と書くことが出来る。ここに $F_n^\beta(t)$ は対角成分しか持たず且，$t=|y|$ のみの函数であるから，これは直積表現空間 $V_\Omega\otimes V_R$ における等方な混合テンソル場の成分である。

(5) 上では (4.62), (4.64) の条件に対し，$\mathbb{F}_n(y)$ を (6.4) の様に指定したが，そこにはベクトル内積を不変にする変換，つまりユニタリ行列による変換だけの不定性がある。この不定性は f に対するユニタリ

変換の不定性を生ずることが示されるが，この様な不定性は，Ω の中の一つの保測変換（measure preserving Transformation）に吸収してしまうことが出来るから，得られる結果の形には影響しない。議論は文献 3）の附録に示したものを拡張して行うことが出来る。

(6) (6.7), (6.8) は一つの等方テンソル場の Fourier 変換であり，既に (4.60) の形で与えられている。即ち $f_m^{\alpha}(x)$ も又等方なテンソル場であり，その 0 でない対角成分は，

$$f_n^m(r)=4\pi\sum_{n=-1}^{1}\int_0^{\infty}j'_{mn}(2\pi tr)F_n^n(t)\,t^2dt \tag{6.9}$$

n は $\vec{y}$ に関するカノニカル成分，m は $\vec{x}$ に関するカノニカル成分である。

(7) 正規彷徨測度 $\mathbb{B}(A)$ および Wiener 積分は，第２章ではここに云う V_Ω の固定した基底ベクトルに関して定義されていた。ここでのべた様に V_Ω を表現空間として見るのと同等な立場においては，カノニカル基底ベクトルの様に場所によって異なる基底ベクトルに関して定義しなければならない時，$\mathbb{B}(A)$ および Wiener 積分はどの様に扱わなければならないかを考える。２種の基底ベクトルの変換が，ベクトル内積を不変にする様なユニタリ行列 $U^{\alpha\beta'}(x)$ で与えられるとする。β' は x におけるカノニカル基底に関する成分をあらわすものと思ってよい。その時，正規彷徨測度に対する関係は

$$B^{\alpha}(dx)=\sum_{\beta'}\overline{U}^{\alpha\beta'}(x)B^{\beta'}(dx) \tag{6.10}$$

あるいは Wiener 積分として

$$B^{\alpha}(A)=\sum_{\beta'}\int_A\overline{U}^{\alpha\beta'}(x)B^{\beta'}(dx) \tag{6.11}$$

で与えられる。この様にとれば Wiener 積分は

$$I(f)=\sum_{\alpha}\int f^{\alpha}(x)B^{\alpha}(dx)=\sum_{\alpha'}\int f^{\beta'}(x)B^{\alpha'}(dx) \tag{6.12}$$

但し

$$f^{\alpha}(x)=\sum_{\beta'} U^{\alpha\beta'}(x) f^{\beta'}(x) \tag{6.13}$$

の様に不変な形になる。

§3. テンソル場 $f_n^{\alpha}(\rho)$ の極表示

Wiener 積分 (2.21) を行うためには，函数 $ff_m(x)$ の変数の移動を行わなければならない。前節で論じた様に ff_m は $V_{\Omega}\otimes V_R$ の中の値をとる函数として (6.9) で与えられる一つの等方テンソル場である。従って第5章で準備した等方テンソル場の加法定理，つまり $j^{l}_{mn}(2\pi t\rho)$ に対する加法定理 (5.48) あるいは (5.51) が利用出来る。但し，

$$\rho=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\Theta} \tag{6.14}$$

であって，Θ は $\vec{r}\,\vec{r}'$ のなす角である。そこでのべた様に，2点テンソル場の加法定理とみなして，$\vec{r}$ に関しては V_R の反変ベクトルが属し，$\vec{r}'$ には V_{Ω} の共変ベクトルが属するものとし，2点 $\vec{r}$, $\vec{r}'$ に関し対等な立場で取扱うのが好都合である。

(1) $f_n^{\alpha}(\rho)$ の極表示。(6.9) に (5.51) を用いて

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=-1}^{1}\overline{g_{m's}(g_{02}^{-1})}\,g_{ms}(g_{01}^{-1})f_s^{s}(\rho)\\
&=4\pi\sum_{n=-1}^{1}\int_0^{\infty}F_n(t)t^2dt\sum_{s=-1}^{1}\overline{g_{m's}(g_{02}^{-1})}\,g_{ms}(g_{01}^{-1})j^{1}_{sn}(2\pi tr)\\
&=4\pi\sum_{l=|n|}^{\infty}\sum_{t=-l}^{l}(2l+1)\overline{T^{l}_{m't}(g'^{-1})}\,T^{l}_{mt}(g^{-1})\sum_{n=-1}^{1}\int_0^{\infty}F_n(t)\overline{j^{l}_{m'n}(2\pi tr')}\\
&\quad\times\ j^{l}_{mn}(2\pi tr')t^2dt\\
&=\sum_{l=|n|}^{\infty}\sum_{t=-l}^{l}\sqrt{2l+1}\,T^{l}_{mt}(g^{-1})\sum_{n=-1}^{1}\int_0^{\infty}j^{l}_{mn}(2\pi tr)E^{m'}_{ltn}(dt)\,ff(r)
\end{aligned}\tag{6.15}$$

但し

$$E^{\alpha}_{ltn}(\Delta)\,ff(r)\equiv 4\pi\sqrt{2l+1}\,\overline{T^{l}_{\alpha t}(g^{-1})}\int_{\Delta}F_n(t)j^{l}_{\alpha n}(2\pi tr)t^2dt \tag{6.16}$$

とおいている。右辺の積分は半直線 T ($0 \leq t \leq \infty$) 上の不定積分を意味する。Δ は任意の区間を意味するものとしてよい。(6.15) では (5.51) に対して $g = g_1$, $g' = g_2$, $r = r_1$, $r' = r_2$, とおいて用いた。左辺の g_{01} 等は (5.51) における意味である。

(6.15), (6.16) はいずれも g, g' の第3の Euler 角が含まれている。これはカノニカル基底の取り方の任意性に対応しているが, 以下の議論からもわかる様にその他には何の役割も果たさないし, 妨げにもならない。又第3の Euler 角は0とおいても何ら一般性を失わない。又回転 $g = g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ と極座標 (r, θ) との関係は, 第5章§4における r の定義 $r = rge$ を考慮すれば $\varphi = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ である。

(2) 第2章§1で定義したベクトル函数 f の作る函数空間 $\mathbb{L}^2(R_3)$ の内積およびノルムの定義式 (2.10), (2.11) は $f(x)$ を V_Ω のベクトルとみて, そのベクトル内積を各点にわたって積分したものである:

$$\langle f, g \rangle = \int_{R_3} (f(x), g(x))\, dx \qquad (6.17)$$

(2.10) 等は, 今云ったところの V_Ω の固定した直線座標に関するものであるが, 前節に論じた様に V_Ω のカノニカル座標で記述しても (6.17) は変化をうけないから; そのいみで函数空間 $\mathbb{L}^2(R_3)$ は, ベクトル函数 $f(x)$ がカノニカル成分で記述されていても内容は変更をうけない。

(3) $f \in \mathbb{L}^2(R_3)$ であれば (6.16) も $\mathbb{L}^2(R_3)$ に属することがすぐにわかる。但, $\alpha = -1, 0, 1$ はカノニカル成分を意味する。又, $f_n^\alpha(x)$ はテンソル函数であるが, 等方テンソル場であって, 対角なカノニカル成分 $f_n^n(x)$ $(n = -1, 0, 1)$ しか持たないといういみで, ベクトル函数 f とみなしている。

T_{mn}^{l} および j_{mn}^{l} の直交関係 (5.13), (5.65) を用いると, (6.16) に対し次の性質が成立する。内積 (6.17) のいみで

$$\langle E_{\ell tn}(\Delta)f,\ E_{\ell' t' n'}(\Delta')f\rangle=\sum_{\alpha=-1}^{1}\langle E^{\alpha}_{\ell tn}(\Delta)f,\ E^{\alpha}_{\ell' t' n'}(\Delta')f\rangle_{R_3}$$

$$=\delta_{\ell\ell'}\delta_{tt'}\delta_{nn'}4\pi\int_{\Delta\cap\Delta'}|F_n(t)|^2t^2dt \qquad (6.18)$$

従って(6.16)で定義される $\mathbb{E}_{\ell tn}(\Delta)=\{E^{\alpha}_{\ell tn}(\Delta)\ \alpha=-1,0,1\}$ はベクトル函数 $f\in\mathbb{L}_2^2(R_3)$ に作用するベクトル射影作用素の様な役割をもっている。

§4. 彷徨スペクトル測度の構成

(1) $\mathbb{E}_{\ell tn}(\Delta)f$ は $\mathbb{L}_2^2(R_3)$ に属するから，(6.12)によって3次元Wiener積分を作ることが出来る。それを

$$M^{\ell}_{sn}(\Delta)\equiv I\left(\mathbb{E}_{\ell sn}(\Delta)f\right)\sum_{\alpha=-1}^{1}\int E^{\alpha}_{\ell sn}(\Delta)f(x)B^{\alpha}(dx) \qquad (6.19)$$

$$\ell=0,1,2\cdots,\quad |s|=0,1,2,\cdots\ell,\quad n=-1,0,1.$$

とおけば，これらは正規分布に従う集合確率変数であって，(2.10), (2.9), (6.18)によって

$$E\langle M^{\ell}_{sn}(\Delta),\ M^{\ell}_{s'n'}(\Delta)\rangle=\delta_{\ell\ell'}\delta_{ss'}\delta_{nn'}\mu_n(\Delta) \qquad (6.20)$$

$$E\langle M^{\ell}_{sn}(\Delta)\rangle=0 \qquad (6.21)$$

が成立する。但し，ここで $\mu_n(\Delta)$ は T 上の一つの絶対連続な測度であって，不定積分

$$\mu_n(\Delta)=4\pi\int_{\Delta}|F_n(t)|^2t^2dt\quad(n=-1,0,1) \qquad (6.22)$$

で定義される。(4.62)によって $|F_n(t)|^2=F_{\dot{n}n}(t)$ は等方テンソル場としての<u>スペクトル密度テンソル</u>の0でないカノニカル成分である。従って $\mu_n(\Delta)$ は一つのスペクトル測度である。$M^{\ell}_{sn}(\Delta)$ を一様等方ベクトル乱場の<u>彷徨スペクトル測度</u>(random spectral measure)と呼ぶ。

(2) $M^{\ell}_{sn}(\Delta)$ は各 (ℓ,s,n) の組に対して一つの T 上の直交彷徨測度になっており，又，異なる (ℓ,s,n) の組に対してはそれらは互いに直

交することを示している。しかし又次の様に考えることも出来る。第3章§2の云い方に従えば，$M^{\ell}_{sn}(\Delta)$ $(n=-1,0,1)$ は対角な3×3正定値行列 $\|\mu_{mn}\|$ に属する3次元直交射程測度であり，且，パラメタの組 (ℓ,S) がことなればそれは互いに独立な3次元直交測度である。又更に次の様に考えることは一層興味がある。即ち $M^{\ell}_{sn}(\Delta)$ $(\ell=0,1,2\cdots,\ |S|=0,1,2\cdots\cdots\ell,\ n=-1,0,1)$ は無限次元対角（直積）行列 $\|\mu_{n\ell s,n'\ell's'}(\Delta)\|$ に属する無限次元直交射程測度であると。

ここでは $f\in\mathbb{L}^2(R_3)$ に対するもののみを考えているから，無限次元ということのために生ずる収束の問題はすべて保証されているが，ここではそれには触れないで，その仮定を認めておこう。

(3) 第3章§2の (2),(3),(4),(5) の議論を (6.19) の直交射程測度に対して適用すれば，直交射程測度 $M^{\ell}_{sn}(\Delta)$ による積分が定義出来る。今は $\{M^{\ell}_{sn}\}$ は互いに独立であるから各 $(\ell s n)$ 毎に1次元の積分

$$J(U^{\ell}_{sn})=\int_0^{\infty}U^{\ell}_{sn}(t)\,M^{\ell}_{sn}(dt) \tag{6.23}$$

が

$$\int_0^{\infty}|U^{\ell}_{sn}(t)|^2\mu_{n'n}(dt)=\int_0^{\infty}|U^{\ell}_{sn}(t)F_n(t)|^2t^2dt<\infty \tag{6.24}$$

なる様な函数 $U^{\ell}_{sn}(t)$ に対して定義出来る。もし (2) に従って $n=-1,0,1$ に対する3次元直交射程測度として，あるいは ℓ,S,n のとるすべての値に対する無限次元直交射程測度としてみるときは，(6.23), (6.24) は共に n についての3つの和，あるいは ℓ,S,n についての無限ケの和をとらねばならない。

§5 一様等方なベクトル乱場のスペクトル分解定理

Wiener 積分 (2.21) を (6.12), (6.15), (6.19) を用いて積分したものと見れば，我々の最終目標である一様等方なベクトル乱場の極表示スペクトル分解を発見法的に導くことが出来る。数学的な証明は§4.(2),(3) でふれた収束の問題を正確に扱うことによって行われる。

定理3　$f(r) \in \mathbb{L}^2(R_3)$ で指定された移動平均(2.21)による一様等方なベクトル乱場は，$L^2(\Omega)$ のいみで次の様に極座標表示のスペクトル分解の形に書ける。各カノニカル成分毎に

$$I_m(r,\theta,\varphi)=\sum_{\ell=|m|}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell}\sqrt{2\ell+1}\,\overline{T^{\ell}_{sm}(\varphi+\tfrac{\pi}{2},\theta,\varphi_2)}\sum_{n=-1}^{1}\int j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)M^{\ell}_{sn}(dt,\omega)$$

$$m=-1,0,1. \qquad (6.25)$$

ここに彷徨スペクトル測度 $M^{\ell}_{sn}(\Delta)$ ($\ell=0,1,2,\cdots$, $s=-\ell,\cdots,\ell$, $n=-1,0,1$) は正規分布をもつ半直線 $T(0\le t\le\infty)$ 上の集合確率変数であつて $L^2(\Omega)$ の函数として

$$E\langle M^{\ell}_{sn}(\Delta),\ M^{\ell'}_{s'n'}(\Delta')\rangle=\delta_{\ell\ell'}\delta_{ss'}\delta_{nn'}\mu_n(\Delta\cap\Delta') \qquad (6.26)$$

$$E\langle M^{\ell}_{sn}(\Delta)\rangle=0 \qquad (6.27)$$

なる性質をもつ。ここに $\mu_n(\Delta)$ ($n=-1,0,1$) は絶対連続な T 上測度で不定積分

$$\mu_n(\Delta)=4\pi\int_{\Delta}|F_n(t)|^2t^2dt \quad (n=-1,0,1) \qquad (6.28)$$

で定義される。$F_n(t)$ は $f_n(r)$ のベクトル Hankel 変換

$$F_n(t)=4\pi\sum_{m=-1}^{1}\int_0^{\infty}\overline{j'_{mn}(2\pi tr)}\,f_m(r)\,r^2dr \qquad (6.29)$$

で与えられる。$|F_n(t)|^2\equiv F_{nn}(t)$ ($n=-1,0,1$) は彷徨スペクトル測度 M^{ℓ}_{sn} に対応するスペトル密度テンソルの対角なカノニカル成分である。等方であつて非対角成分は常に0である。定理2によつて乱場の等方な相関テンソルの対角なカノニカル成分 $R_{nm}(r)$ は，そのベクトル Hankel 変換

$$R_{nm}(r)=4\pi\sum_{n=-1}^{1}\int_0^{\infty}\overline{j'_{mn}(2\pi tr)}\,|F_n(t)|^2t^2dt \quad (m=-1,0,1) \qquad (6.30)$$

で与えられ，又その逆変換

$$|F_n(t)|^2=4\pi\sum_{m=-1}^{1}\int_0^{\infty}j'_{mn}(2\pi tr)R_{nm}(r)\,r^2dr \qquad (6.31)$$

も又成立する。

[註] カノニカル成分と極座標に関する成分との関係は $\varphi_2=0$ の時には (4.34) で与えられる。第3の Euler 角はカノニカル基底のとり方によりあらわれるのであつて，$\varphi_2=0$ としても一般性を失わない。

$T^{\ell}_{sm}(\varphi_1\ \theta\ \varphi_2)$ は (4.18) で定義される一般球函数，又 $j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)$ は (5.62) で定義した球 Bessel テンソル函数である。

(1) スペクトル分解 (6.25) で著しいことは，まず<u>スペクトル密度テンソルの3つの対角成分 $F_{nn}(t)$ $(n=-1,0,1)$ に対応する彷徨測度は互いに独立である</u>ということである。したがつて，特別な場合として F_{nn} のうちのあるものが0であつてもスペクトル分解の形はそのまま保存される。ただ対応する M^{ℓ}_{sn} をおとせばよいだけである（後節§7.1. §7.2参照）。

次に著しいことは，彷徨スペクトル測度 M^{ℓ}_{sn} は乱場のカノニカル成分 m の如何に依らず共通に入っていることである。相関テンソルから明らかなように，<u>乱場の異なるカノニカル成分は互いに統計的に独立</u>であつた，つまり R_{mn} の非対角成分は0であつた。M^{ℓ}_{sn} には m は入つていないから，この独立性は彷徨測度の独立性によるものではないことが明らかである。この独立性は何によつて保証されているのかを調べてみるのは興味がある。一般の場合を考えずに特別の場合として，$\theta\varphi$ が同じ2点での相関を考えてみよう。(6.25), (6.26) を用いて

$$E\langle I_m(r,\theta,\varphi),\ I_{m'}(r'\theta\varphi)\rangle =$$
$$=\sum_{\ell=|m|}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell}(2\ell+1)T^{\ell}_{sm}(\varphi,\theta)\overline{T^{\ell}_{sm'}(\varphi,\theta)}\sum_{n=-1}^{1}\int_0^{\infty}\overline{j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)}\,j^{\ell}_{m'n}(2\pi tr')\mu_n(dt)$$

ここで S について和をとるならば，<u>T^{ℓ}_{mn} のユニタリ性</u>によつて $\delta_{mm'}$ が出る。ついでだから (5.48) を利用して終りまで計算すれば

$$=\delta_{mm'}\sum_{n=-1}^{1}\int_0^{\infty}\overline{j^{1}_{mn}(2\pi t|r-r'|)}\,\mu_n(dt)$$

となる。ここで左辺は相関函数の定義 (2.20) によつて，$R_{mm'}(\vec{r}-\vec{r}')$

であり，$r>r'$ とすれば第5章§4.1の図からわかるように $r_1>r_2$ の時に $g_{01}=g_{02}=I$ とおけるから，(5.48)を用いるとき両辺で複素共役をとらねばならない。このようにして(6.32)がえられ，(6.30)が再現された。任意の2点 $(r\theta\varphi)$，$(r'\theta'\varphi')$ の場合にも(5.51)を用いて同様に計算をすればやはり(6.30)に到達する。この場合勿論カノニカル成分はベクトル $\vec{r}-\vec{r}'$ に関するものをとることになる。いずれにしても上の手続きから示されるように，カノニカル成分の統計的独立性は T^{ℓ}_{mn} による展開の形式によって保証されていることがわかる。又云うまでもなくそれは各 ℓ に対して別々に成立している。

§6. 定理の変形（ランダム位相の導入）

スカラー乱場の場合に見たようにスペクトル分解の形式は一つのランダム位相の導入により著しく簡単化された。[3] 即ち異なるパラメタをもつ直交行列測度の相互独立性（次節§7 (6.46) 又は (6.26) 参照）がランダム位相により受持たれて，スペクトル分解は一つのランダム位相と唯一種の直交行列測度とによって記述された。これに対応したスペクトル分解形式はベクトル乱場に対しても作ることが出来る。

(1) 次の関係が成立する。(5.18)，(5.8) を用いると

$$\frac{(2\ell_1+1)}{8\pi^2}\int_G \overline{T^{\ell_2}_{n_2m_2}(g^{-1}g_2)}\,T^{\ell_1}_{n_1m_1}(g^{-1}g_1)\,dg=\delta_{\ell_1\ell_2}\delta_{n_1n_2}T^{\ell_1}_{m_2m_1}(g_2^{-1}g_1) \tag{6.33}$$

これは文献3)の附録 (A.12) 式を一般化したものである。

特に $n_1=n_2=0$ の時は，被積分函数は $g=g(\alpha,\beta,\gamma)$ の第3のEuler角 γ を含まないので，

$$\frac{2\ell_1+1}{4\pi}\int_{S_3}\overline{T^{\ell_2}_{0m_2}(g^{-1}g_2)}\,T^{\ell_1}_{0m_1}(g^{-1}g_1)\,d\omega_g=\delta_{\ell_1\ell_2}T^{\ell_1}_{m_2m_1}(g_2^{-1}g_1) \tag{6.34}$$

$$d\omega_g\equiv\sin\beta\,d\beta\,d\alpha' \tag{6.35}$$

ここで T^{ℓ}_{om} は (A.15) によって普通の球函数であらわせる：

$$Y^{m}_{\ell}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\overline{T^{\ell}_{mo}(\varphi',\theta)} \tag{6.36}$$

但し，$\varphi=\varphi'-\frac{\pi}{2}$ は極座標の経度である。従って (6.34) は

$$\int_{S_3} Y^{m_2}_{\ell_2}(\Theta_2-\Psi)\overline{Y^{m_1}_{\ell_1}(\Theta_1-\Psi)}\,d\omega_{\Psi}=\delta_{\ell_1\ell_2}T^{\ell_1}_{m_2m_1}(g_2^{-1}g_1) \tag{6.37}$$

但し $g_1\equiv(\varphi_1'\theta_1\psi_1)$ $g_2\equiv(\varphi_2'\theta_2\psi_2)$ (6.38)

$\Theta_1\equiv(\theta_1,\varphi_1)$ $\Theta_2\equiv(\theta_2\varphi_2)$ $\Psi\equiv(\beta,\alpha)$ (6.39)

$d\omega_{\Psi}\equiv\sin\beta\,d\beta\,d\alpha$ (6.40)

とおいた。(6.38) は Euler 角，(6.39) は極座標の球面座標（これを球面位相角とよぶことにする）である。

$(\Theta_1-\Psi)$ は球面位相差を代表するものであって，$g^{-1}g_1$ の行列の第3列であらわされる S_3 上の点とみなすことが出来る。(6.37) は $\psi_1=\psi_2=0$ の場合であるが，一般には左辺に $e^{-i(m_1\psi_1-m_2\psi_2)}$ がかかるが，これは右辺にもあらわれるので，おとしてしまうことが出来，本質的ではない。

特に $m_1=m_2=0$ の場合は (6.37) は文献3) の (A.12) に一致する。(6.34), (6.37) を考慮すればスペクトル分解 (6.25) は次の様に変形できる。

定理 3' 一様等方なベクトル乱場は次の形に表現することが出来る。各カノニカル成分毎に

$$I_m(r\theta\varphi)=\sum_{\ell=|m|}^{\infty}\sqrt{4\pi(2\ell+1)}\,Y^{m}_{\ell}(\Theta-\Psi)\sum_{n=-1}^{1}\int_0^{\infty}j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)\,M_n(dt,\omega') \tag{6.41}$$

$(m=-1,0,1)$

ここに，$\Theta=(\theta,\varphi)$，$\Psi=(\alpha\beta)$ は単位球面 S_3 上の余緯度，経度であって，$(\Theta-\Psi)$ は2点 Θ,Ψ の球面位相差あるいは相対的な余緯度，経度をあらわす略号である。Ψ は S_3 上に一様に確率密度 $\frac{1}{4\pi}$ で分布するランダム球面位相角であって，伝程スペクトル測度 $M_n(\Delta,\omega')$ とは

独立な確率変数である。具体的に云えば S_3 の面積要素を (6.40) であらわす時は，α は一様な確率密度 $\frac{1}{2}$ で $0 \leq \alpha \leq \pi$ に，β は一様な密度 $\frac{1}{2\pi}$ で $0 \leq \beta \leq 2\pi$ に分布する確率変数である。又，$M_n(\Delta, \omega')$ は半直線 $T(0 \leq t \leq \infty)$ 上の一つの集合確率変数であって

$$E'\langle M_n(\Delta),\ M_{n'}(\Delta')\rangle = \delta_{nn'}\mu_n(\Delta \cap \Delta') \tag{6.42}$$

なる性質をもつ。ここで E' は $\omega' \in \Omega'$ にわたる平均を意味する（Ψ の見本空間を Ω'' とすれば $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ である）。

(6.41) によって相関函数たとえば $E\langle I_m(r\theta\varphi),\ I_{m'}(r'\theta\varphi)\rangle$ を計算してみると，(6.37) を用いて (6.32) と同じ結果をうる。一般の2点に関しても同じ様に計算される。ランダム位相 Ψ が S_3 上に一様に分布しているということはベクトル乱場の等方性を反映しているのである。

§7 種々のベクトル乱場

§7.1 Potential Random Field

(1) あるスカラー場の gradient として導かれるベクトル場をポテンシャル場（potential field）と名付ける。これに対応してあるスカラー乱場 $I(x)$ の gradient field として導かれるベクトル乱場 $\mathrm{II}(x)$ を<u>ポテンシャル乱場</u>（potential random field）と呼ぶことにする。即ち

$$\mathrm{II}(x) = \mathrm{grad}\, I(x) \tag{6.43}$$

ポテンシャル乱場を与えるスカラー乱場 $I(x)$ が一様あるいは一様等方であるならば，その gradient として導びかれるポテンシャル乱場も一様，あるいは一様等方であると期待される。我々は等方な場合に注目しよう。前の論文[3]では一様等方なスカラー乱場の極形式を得たが，これの gradient field として導びかれるベクトル乱場は，特別な場合として (6.25) に含まれているであろう。どの様な場合として含まれるかを (6.43) によって直接の計算から調べてみよう。

(2) (4.34) によって (6.43) をカノニカル成分 ($\varphi_2 = 0$) であらわせば

$$I_- = \frac{I_\varphi - iI_\theta}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{\partial}{\partial\theta}\right] I$$

$$I_0 = I_r = \frac{\partial I}{\partial r} \qquad (6.44)$$

$$I_+ = \frac{-I_\varphi - iI_\theta}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{\partial}{\partial\theta}\right] I$$

(3) 一様等方スカラー乱場のスペクトル分解[3] (A.6)で定義される $Y_\ell^m(\theta\varphi)$ を用いて表現する。

$$I(r\theta\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sqrt{4\pi}\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)\int_0^\infty j_\ell(2\pi tr)\,M_\ell^m(dt) \qquad (6.45)$$

但し，統程スペクトル測度 $M_\ell^m(\Delta)$ は次の性質をもつ $L^2(\Omega)$ の函数である：

$$E\langle M_\ell^m(\Delta),\ M_{\ell'}^{m'}(\Delta')\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\,4\pi\int_{\Delta\cap\Delta'}|F(t)|^2 t^2\,dt \qquad (6.46)$$

$$E\langle M_\ell^m(\Delta)\rangle = 0$$

ここで $|F(t)|^2$ はスペクトル密度である。相関函数 $R(r)$ のスペクトル分解は

$$R(r) = 4\pi\int_0^\infty |F(t)|^2 j_0(2\pi tr)\,t^2\,dt \qquad (6.47)$$

で与えられ，反転公式

$$|F(t)|^2 = 4\pi\int_0^\infty R(r)\,j_0(2\pi tr)\,r^2\,dr \qquad (6.48)$$

が成立する。

(4) 第4章 でのべた微小回転に対する演算子は，次の微分演算子として表現される[11]。

$$H_- = e^{i\varphi_2}\left(-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$H_0 = i\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \qquad (6.49)$$

$$H_+ = e^{-i\varphi_2}\left(\cot\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

特に
$$H_+ T^{\ell}_{m0} = \alpha_1 T^{\ell}_{m1}\ ,\quad H_+ T^{\ell}_{m-1} = \alpha_0 T^{\ell}_{m0}$$
$$H_- T^{\ell}_{m0} = \alpha_0 T^{\ell}_{m-1}\ ,\quad H_- T^{\ell}_{m1} = \alpha_1 T^{\ell}_{m0} \qquad (6.50)$$
$$\alpha_0 = \alpha_1 = \sqrt{\ell(\ell+1)}$$

(5) $\varphi = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ であること，(A.15) によって

$$\sqrt{4\pi}\, Y^m_\ell(\theta,\varphi) = \sqrt{2\ell+1}\ \overline{T^{\ell}_{m0}(\varphi_1\theta)} \qquad (6.51)$$

を (6.46) に代入し，(6.49), (6.50) を用いて (6.44) を計算すれば ($\varphi_2 = 0$ とおいている)

$$I_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\overline{H_-}I = \sum_\ell\sum_m \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}\sqrt{\ell(\ell+1)}\ \overline{T^{\ell}_{m-1}(\varphi_1\theta)}\int_0^\infty \frac{j_\ell(2\pi tr)}{r} M^m_\ell(dt)$$

$$I_0 = \frac{\partial I}{\partial r} = \sum_\ell\sum_m \sqrt{2\ell+1}\ \overline{T^{\ell}_{m0}(\varphi_1\theta)}\int_0^\infty \frac{\partial j_\ell(2\pi tr)}{\partial r} M^m_\ell(dt)$$

$$I_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\overline{H_+}I = \sum_\ell\sum_m \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}}\sqrt{\ell(\ell+)}\ \overline{T^{\ell}_{m1}(\varphi_1\theta)}\int_0^\infty \frac{j_\ell(2\pi tr)}{r} M^m_\ell(dt)$$

ここで (A.28), (A.29) および (5.62) を用いれば結局次の形となる：

$$I_- = \sum_\ell\sum_m (-i)^{\ell-1}\sqrt{2\ell+1}\ \overline{T^{\ell}_{m-1}(\varphi_1\theta)}\int_0^\infty 2\pi t\, j^{\ell}_{-10}(2\pi tr) M^m_\ell(dt)$$

$$I_0 = \sum_\ell\sum_m (-i)^{\ell-1}\sqrt{2\ell+1}\ \overline{T^{\ell}_{m0}(\varphi_1\theta)}\int_0^\infty 2\pi t\, j^{\ell}_{00}(2\pi tr) M^m_\ell(dt) \qquad (6.52)$$

$$I_+ = \sum_\ell\sum_m (-i)^{\ell-1}\sqrt{2\ell+1}\ \overline{T^{\ell}_{m1}(\varphi_1\theta)}\int_0^\infty 2\pi t\, j^{\ell}_{10}(2\pi tr) M^m_\ell(dt)$$

従って (6.25) と比べれば次のことが云える。

Potential randon field は一般の vector randon field (6.25) で $n=0$ の項に対応する。従ってこの場合

$$|F_n(t)|^2 = 0 \qquad n=-1,\ 1 \qquad (6.53)$$

である。(6.52) における $(-i)^{\ell-1}2\pi t$ は彷徨スペクトル測度の中に

くり入れてしまうことが出来るから，結局スカラー乱場(6.45)の gradient から導かれたポテンシャル乱場は，(6.25)で $n=0$ に対応する項だけであって，その統程スペクトル測度は

$$E\langle M^{l}_{s0}(\Delta),\ M^{l'}_{s'0}(\Delta')\rangle=\delta_{ll'}\delta_{ss'}4\pi\int_{\Delta\cap\Delta'}|2\pi tF(t)|^2t^2dt \qquad (6.54)$$

の関係を有する。即ち(6.28)と比べればポテンシャル乱場のスペクトル密度テンソルの0でないカノニカル成分 $|F_0(t)|^2$ はスカラー乱場のスペクトル密度 $|F(t)|^2$ と

$$|F_0(t)|^2=|2\pi tF(t)|^2 \qquad (6.55)$$

の関係があることがわかる。

irrotational field

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{II}=0 \qquad (6.56)$$

は potential field であるから，定理3と定理2によって次の様に云える。

系1 irrotational なベクトル乱場のスペクトル分解は(6.25)において $n=0$ のみの項で与えられる。その相関テンソルは(4.67)により

$$R^{\mathrm{II}}_{mm}(r)=4\pi\int_0^\infty j'_{m0}(2\pi tr)\,|F_0(t)|^2t^2dt \qquad (6.57)$$

$$(m=-1,\ 0,\ 1)$$

あるいは(4.69),(4.70)により

$$R^{\mathrm{II}}_{e}(r)=4\pi\int_0^\infty j_1'(2\pi tr)\,|F_0(t)|^2t^2dt \qquad (6.58)$$

$$R^{\mathrm{II}}_{t}(r)=2\int_0^\infty\frac{j_1(2\pi tr)}{r}\,|F_0(t)|^2t\,dt \qquad (6.59)$$

で与えられ $R_s(r)=0$ である。これは次の関係を満たしている：

$$R^{\mathrm{II}}_{e}(r)=\frac{d}{dr}\left(rR^{\mathrm{II}}_{t}(r)\right) \qquad (6.60)$$

又，スカラーポテンシャル場のスペクトル密度 $|F(t)|^2$ とスペクトル密

内

度テンソルとの関係は(6.55)で与えられる。

(6) (6.60)の関係は相関函数の定義によって(6.43)から直接に導くこともも出来る。[15]

§7.2 Selenoidal random field

(1) あるベクトル場の発散が0である時，そのベクトル場はソレノイド場(solenoidal field)とよばれる。非圧縮性流体の速度場あるいは自由空間における電磁場がそうである。これに対応して，あるベクトル乱場の発散が0である時，それを<u>ソレノイド乱場</u>(solenoidal random field)と呼ぶことにする。

$$div\,\mathrm{II}(x)=0 \qquad (6.61)$$

ここでは一様等方なソレノイド乱場は(6.25)においてどの様な場合として含まれているかを，直接に(6.25)の発散を計算して調べよう。

(2) 極座標における発散の式を(4.34)によりカノニカル成分($\varphi_2=0$)に直す。

$$\begin{aligned} div\,\mathrm{II} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 I_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta I_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}I_\varphi \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 I_0)+\frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[i\left(\cot\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]I_- \\ &\qquad +\frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[i\left(\cot\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]I_+ \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 I_0)-\frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[\overline{H_+}I_-+\overline{H_-}I_+\right] \end{aligned} \qquad (6.62)$$

但しここで(6.49)を用いI_-, I_+ に対して$\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$は$-i$, iとおいた，

(3) ここで(6.25)の展開項 $\overline{T^{\ell}_{sm}}(\varphi,\theta\varphi_2)\,j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)$ $(m,n=-1,0,1)$ のみに注目して上式に代入する。(6.50)の関係を用いると，$\overline{T^{\ell}_{s0}}$ が各項

に共通にあらわれので，結局(6.61)の条件は項別に

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 j_{on}^{\ell}(2\pi tr)\right]-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\left[j_{-1n}^{\ell}(2\pi tr)+j_{1n}^{\ell}(2\pi tr)\right]=0 \quad (6.63)$$

が各 $n=-1,0,1$ に対して満足されるかどうかを見ればよい。

$n=1$ の場合は(5.62)，(A.28)，(A.29)を用いると(6.63)の左辺は

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 j_{01}^{\ell}(2\pi tr)\right]-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\left[j_{-11}^{\ell}(2\pi tr)+j_{11}^{\ell}(2\pi tr)\right]$$

$$=i^{\ell+1}2\pi t\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\left\{-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(rj_\ell)-\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial j_\ell}{\partial r}-\frac{j_\ell}{r}\right]\right\}\equiv 0 \quad (6.64)$$

となつて，常に(6.63)が満足される。$n=-1$ の場合も同じてある。

$n=0$ の場合は微分方程式(A.30)を考慮すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 j_{00}^{\ell}(2\pi tr)\right]-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\left[j_{-10}^{\ell}(2\pi tr)+j_{10}^{\ell}(2\pi tr)\right]$$

$$=i^{\ell+1}2\pi t\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\left\{-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial j_\ell}{\partial r}\right)+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}j_\ell\right\}=i^{\ell+1}2\pi t j_\ell(2\pi tr)\neq 0 \quad (6.65)$$

となって(6.63)は満足されない。

従ってソレノイド乱場は(6.25)で $n=0$ の項をおとしたものであり，$n=-1,1.$ の項であらわされる。

定理3と定理2から次の様に云える。

系2 ソレノイド乱場のスペクトル分解は(6.25)において $n=-1,1.$ の項で与えられる。その相関テンソルのスペクトル分解は(4.67)により，

$$R_{mm}(r)=4\pi\sum_{n=-1,1}\int_0^\infty \overline{j_{mn}'(2\pi tr)}\,|F_n(t)|^2 t^2\,dt \quad (6.66)$$

あるいは(4.69)(4.70)により

$$R_\ell^{\perp}(r)=2\int_0^\infty \frac{j_1(2\pi tr)}{r}\left\{|F_+(t)|^2+|F_-(t)|^2\right\}t\,dt \quad (6.67)$$

$$R_t^{\perp}(r)=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\infty}\left[2j_0(2\pi tr)-j_2(2\pi tr)\right]\left\{|F_+(t)|^2+|F_-(t)|^2\right\}t^2dt \qquad (6.68)$$

で，又，$R_t^{\perp}(r)$ は (4.71) で与えられる。(6.67), (6.68) の間に次の関係が成立つ。

$$\frac{d}{dr}R_{\ell}^{+}(r)+\frac{2}{r}\left\{R_{\ell}^{\perp}(r)-R_t^{\perp}(r)\right\}=0 \qquad (6.69)$$

(6.69) は等方なソレノイド乱場に対して成立するよくしられた Kármán の関係[2)16)] であつて，相関函数の定義と (6.61) の条件とから直接導かれるものである。今の場合は直接 (6.67), (6.68) から求められる。我々の場合には $R_S(r)\neq 0$ を仮定していないから，より一般の場合に確かめられたことになる。

又，定理3と系1，系2とから次の様に云える。

系3 (Obukhov)[15)] 一様等方なベクトル乱場は一般に irrotational な部分と solenoidal な部分からなり，それらの間の相関は常に0である。

(6.25) のスペクトル分解において $n=0$ は irrotational，$n=-1, 1.$ は solenoidal な部分である。

Obukhov の定理は相関テンソルをしらべることによつて導かれたものであるが，我々の場合には2つの部分の統計的独立性はスペクトル分解における彷徨スペクトル測度の直交性として明瞭にあらわれている。更にここでは $R_S(r)=0$ であるからより一般的な結果であり，しかもこれら2つの部分がスペクトル密度テンソルの3つのカノニカル対角成分に対応することも明らかにされた。irrotational な部分が $F_{00}(t)$ つまり波数空間におけるテンソルの radial 方向の成分，solenoidal 部分が radius に直角な方向の2つのテンソル成分 $F_{++}(t)$，$F_{--}(t)$ であることは興味深い。

§7.3 ベクトル乱場の回転

前2小節において一般にベクトル乱場は非回転部分とソレノイド部分とから成ることを知った。ここでは例題として，与えられたベクトル乱場の回転（rotation）はヌーつのベクトル乱場でかつソレノイド的であるが，もとの乱場とどの様な関係にあるかを知らべよう。この様な考察は熱輻射の場における電場と磁場との間のコヒーレンスをしらべるときに有効である。

(1) rot Ⅱ の極座標表示を (4.34) を用いてカノニカル成分 ($\varphi_2=0$) で記述すると

$$\mathrm{rot}_- \mathrm{II} = \frac{i}{\sqrt{2}r}\left(i\frac{1}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) I_0 + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rI_-)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}r}\overline{H}_- I_0 + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rI_-)$$

$$\mathrm{rot}_0 \mathrm{II} = \frac{i}{\sqrt{2}r}\left[-i\left(\cot\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] I_-$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}r}\left[i\left(\cot\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] I_+ \qquad (6.70)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}r}\left(\overline{H}_+ I_- - \overline{H}_- I_+\right)$$

$$\mathrm{rot}_+ \mathrm{II} = \frac{i}{\sqrt{2}r}\left(-i\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) I_0 - i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rI_+)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}r}\overline{H}_+ I_0 - i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rI_+)$$

但し，ここで (6.49) を用い I_+, I_- に対し $\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$ をそれぞれ $-i$, i とおいた。

(2) (6.70) をスペクトル分解 (6.25) に項別に適用しよう。成分 I_m ($m=$

$-1, 0, 1,$) に対応して $\mathcal{J}_n=\{J_{mn},\ m=-1,0,1\}$:

$$J_{mn}(r\varphi_1\theta\varphi_2)\equiv\overline{T^{\ell}_{sm}(\varphi_1\theta\varphi_2)}\,j^{\ell}_{mn}(2\pi tr) \tag{6.71}$$

とおき，(6.70) の右辺に代入する。その時 (5.62′), (6.50), (A.30) 等を用いて，計算すれば次の結果がえられる。

$$\mathrm{rot}_{-}\mathcal{J}_n=2\pi t\,\overline{T^{\ell}_{s-1}}\begin{Bmatrix}-j^{\ell}_{-1-1}(2\pi tr) & n=-1\\ 0 & 0\\ j^{\ell}_{-11}(2\pi tr) & 1\end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{rot}_{0}\mathcal{J}_n=2\pi t\,\overline{T^{\ell}_{s0}}\begin{Bmatrix}-j^{\ell}_{0-1}(2\pi tr) & n=-1\\ 0 & 0\\ j^{\ell}_{01}(2\pi tr) & 1\end{Bmatrix} \tag{6.72}$$

$$\mathrm{rot}_{+}\mathcal{J}_n=2\pi t\,\overline{T^{\ell}_{s1}}\begin{Bmatrix}-j^{\ell}_{1-1}(2\pi tr) & n=-1\\ 0 & 0\\ j^{\ell}_{11}(2\pi tr) & 1\end{Bmatrix}$$

(6.72) で $n=0$ の場合に回転が 0 になるのは，§7.2 の結果から云えば当然である。従って以上の結果を次の様に述べておこう。特に rot Ⅱ と Ⅱ との相互相関テンソルについて面白い関係が導かれる。

系4. 与えられたベクトル乱場 (6.25) の回転 rot Ⅱ はソレノイド乱場であって $n=0$ の項は存在しないが，もとの乱場に対して $n=-1$ の項は位相が反転し，又，スペクトル密度テンソルは一様に $(2\pi t)^2$ 倍される。即ちスペクトル分解は

$$\mathrm{rot}_m\mathrm{II}=\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell}\sqrt{2\ell+1}\;\overline{T^{\ell}_{sm}(g)}\sum_{n=-1,1}n\int_0^{\infty}2\pi t\,j^{\ell}_{mn}(2\pi tr)M^{\ell}_{sn}(dt) \tag{6.73}$$

で与えられる。

rot Ⅱ 自身の相関テンソルは (6.66) において $|F_n(t)|^2\to|2\pi tF_n(t)|^2$

におきかえたものである。又；rotⅡ とⅡとの相互相関テンソル(mutual correlation tensor) は又一つの等方テンソル場であつて，その対角なカノニカル成分は

$$M_{mm}(r)\equiv E\langle rot_m \Pi, I_m\rangle = 4\sum_{n=-1,1} n\int_0^\infty \overline{j_{mn}(2\pi tr)}\,2\pi t\,|F_n(t)|^2 t^2 dt \qquad (6.73)'$$

で与えられる。あるいは(4.43)に対応して longitndinal, transrerse, scew correlation functions $M_\ell(r)$, $M_t(r)$, $M_S(r)$ で記述するならば，(6.67), (6.68), (4.71)に対応したスペクトル分解は

$$M_\ell(r)=4\pi\int_0^\infty \frac{j_1(2\pi tr)}{r}\left[|F_+(t)|^2-|F_-(t)|^2\right]t^2dt \qquad (6.74)$$

$$M_t(r)=\frac{4\pi^2}{3}\int_0^\infty \left[2j_0(2\pi tr)-j_2(2\pi tr)\right]\left[|F_+(t)|^2-|F_-(t)|^2\right]t^3dt \qquad (6.75)$$

$$M_S(r)=-4\pi^2\int_0^\infty j_1(2\pi tr)\left[|F_+(t)|^2+|F_-(t)|^2\right]t^3dt \qquad (6.76)$$

となる。

(6.73)～(6.76)は(6.73), (6.25)'の積の平均を(6.26), (5.48)を用いて(6.32)を求めた時の様にして得られる。これらを(4.69)～(4.71)と比べると興味深い。おし，Ⅱの相関テンソルが空間反転に関して対称，つまり $R_S(r)=0$ であれば $|F_+(t)|^2=|F_-(t)|^2$ であるが，その時 rotⅡ とⅡとの相互相関は $M_S(r)$ のみつまり screw correlation のみしか存在しない。

第7章　一般的問題と考察

前章まででは正規彷徨測度を用いたWiener積分による移動平均による乱場を議論したのであつて，乱場が正規分布をもつこと，およびスペクトル測度が絶対連続であると云うことにおいて特殊性があつた。しかし $\mathcal{B}(A)$, $A \in \mathfrak{B}$ としては必ずしも正規変数とする必要はなく，平均0で一様な（つまり測度 $m(A)$ に比例した）2乗偏差をもつ直交彷徨測度を用いればよいので，連続な定常雑音過程の時と同様に'連続'なhomogeneous random field を考えることが出来る。一般の連続な一様乱場のスペクトル分解は，その相関函数が空間内の平行移動群に関して不変な正定値函数の形を決めることであり，又一様等方な乱場ではそれが平行移動と回転群の双方に関して不変な正定値函数のスペクトル分解を求めることである。今まで行なつた解析においては，移動平均から出発してその様な条件をみたす様な函数 $f(x)$ の形をさがしたのであるが，そこでは問題を一般的に取扱わずに，非斉次回転群の表現論の二三の結果のみを使つたに過ぎなかつた。しかしながら，そのさい感じられることは，第5章§1でもふれた様に，平行移動と回転に関して不変な相関函数をもつ一様等方な乱場のスペクトル分解の話は，その様な非斉次回転群の表現論と密着した議論を行うべきことである。たとえば，定常雑音過程の場合ならば，伊藤のテキストにある様に $L^2(\Omega)$ の中で時間の移動を示す1パラメタ半群としてのユニタリ作用素を考えてStoneの定理を利用してスペクトル分解を求める美しい証明がある。この様なことを非斉次回転群上に拡張して行われるべきであろう。今は移動および回転と云う操作をEuclid 空間の中で考えたが，一般に運動群の定義された均質空間の上で，運動のもとに不変な相関函数をもつ一般のrandom field のスペクトル分解の問題として広い見地から取扱うという考えが生ずる。[1] この様なことは面白そうであるが，我々の手には負えないから，我々としては物理工学上の問題に応用出来る形でスペクトル分解の形を見つけ

たことで満足することにしよう。

これは乱場の理論とは直接の関連はないが，第6章§7でみたように，スカラー→ベクトル，ベクトル→スカラー，ベクトル→ベクトルの変換を行う一階微分演算子としてのgrad, div, rot は一般球函数 $\overline{T^{\ell}_{sm}(\vartheta)}$ に対して矛盾なく、各表現空間の間で作用する演算であることは勿論であるが，それは $\overline{T^{\ell}_{sm}(\vartheta)}\,j^{\ell}_{mn}(r)$ と云う組合わせた函数に対して一連のきれいな変換作用をもつことが計算により示されるもくわしく調べる余裕はなかつたが，これは非斉次回転群の正則表現のようなものから出てくる函数なのであろうか．又そうだとすれば，この様な $m=-1, 0, 1$ に対する grad, rot, div などのベクトル解析を拡張した ℓ-ベクトル解析と云うものを考えると勿論それらは最高 ℓ 階の微分演算子ではあるが，どのような種類のものがそこにあらわれるであろうか。こんなことは数学解析者にとつては，もうわかりきつたことなのかもしれないが，敢えて疑問として提出する。

終りに日頃御指導御鞭撻戴いている池上教授ならびに研究室の諸兄に謝意を表する。

附録　公式集

(1) Fourier-Bessel の積分定理[13]

$$f(r)=\int_0^\infty\int_0^\infty r'\lambda f(r')J_\nu(\lambda r')J_\nu(\lambda r)\,d\lambda\,dr'$$

$$=(2\pi)^2\int_0^\infty\int_0^\infty r't f(r')J_\nu(2\pi t r')J_\nu(2\pi t r)\,dt\,dr' \qquad (A.1)$$

特にこの公式は球 Bessel 函数に対しては

$$f(r)=(4\pi)^2\int_0^\infty\int_0^\infty r'^2t^2f(r')j_n(2\pi t r)j_n(2\pi t r')\,dt\,dr' \qquad (A.1')$$

但し，球 Bessel 函数は次式で定義される。

$$j_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z) \qquad (A.2)$$

(2) 球 Bessel 函数による Hankel 変換

(A.1') は次の様に云い直すことも出来る。

球 Bessel 函数による $f(r)$ の Hankel 変換を

$$F(t)=4\pi\int_0^\infty f(r)j_n(2\pi t r)r^2dr \qquad (A.3)$$

で定義する。しかるとき Hankel 変換による反転公式

$$f(r)=4\pi\int_0^\infty F(t)j_n(2\pi t r)t^2dt \qquad (A.3')$$

が成立する。但しいずれも積分は存在するものとする。積分が存在するための $f(r)$, $F(t)$ の条件は参考書にゆずる。

(3) Spherical harmonics と Legendre 函数

本によつてしばしば Legender 函数の定義が異なるので，ここで用いるものを定義しておく（これは文献17), 18) 等と一致しているが11) とは異なつている。）。

球面調和函数（S_3 上で規格化されている）

$$Y_\ell^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,P_\ell(\cos\theta) \tag{A.5}$$

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi)=(-1)^m e^{im\varphi}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)}{(\ell+m)}}\,P_\ell^m(\cos\theta) \tag{A.6}$$

$$\overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi)}=(-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi) \tag{A.7}$$

Legendre 函数

$$P_\ell(x)=\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \tag{A.8}$$

$$P_\ell^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m} \tag{A.9}$$

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_{\ell'}(x)\,dx=\delta_{\ell\ell'}\frac{2}{2\ell+1} \tag{A.10}$$

(4) Generalized Spherical function[1]

$$T_{mn}^\ell(\varphi_1\,\theta\,\varphi_2)=e^{-im\varphi_1}P_{mn}^\ell(\cos\theta)e^{-in\varphi_2} \tag{A.11}$$

$$P_{mn}^\ell(x)\equiv A(1-x)^{-\frac{n-m}{2}}(1+x)^{-\frac{n+m}{2}}\frac{d^{\ell-n}}{dx^{\ell-n}}\left[(1-x)^{\ell-m}(1+x)^{\ell+m}\right] \tag{A.12}$$

$$A\equiv\frac{(-1)^{\ell-m}i^{n-m}}{2^\ell(\ell-m)!}\sqrt{\frac{(\ell-m)!(\ell+n)!}{(\ell+m)!(\ell-n)!}} \tag{A.13}$$

球函数との関係

$$P_{m0}^\ell(x)=(-i)^m\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(x) \tag{A.14}$$

$$T_{m0}^\ell(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y_\ell^m\left(\theta,\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right)=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,i^m\overline{Y_\ell^m(\theta,\varphi_1)} \tag{A.15}$$

(5) 球函数の加法定理

$$P_\ell(\cos\Theta)=\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_\ell^m(\theta,\varphi)\overline{Y_\ell^m(\theta'\varphi')}=\sum_{m=-\ell}^{\ell}\varepsilon_m(-1)^m P_\ell^m(\cos\theta)P_\ell^{-m}(\cos\theta')\cos m\varphi \tag{A.16}$$

但し $\cos\Theta\equiv\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$ (A.17)

$$\varepsilon \equiv \begin{cases} 1 & m=0 \\ 2 & m=1,2,\cdots\cdots \end{cases} \qquad (A.18)$$

平面波展開

$$e^{iRr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(Rr) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)}\, j_l(Rr) Y_l^0(\theta) \qquad (A.19)$$

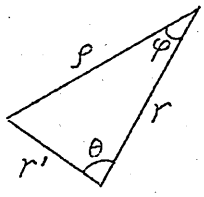
$$e^{iRr\cos\Theta} = 4\pi \sum_{l} \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(Rr) Y_l^m(\theta,\varphi) \overline{Y_l^m(\theta',\varphi')} \qquad (A.20)$$

(6) Bessel 函数と球 Bessel 函数の加法定理

$$J_0\left(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}\right) = \sum \varepsilon_m J_m(r) J_m(r') \cos m\theta \qquad (A.21)$$

$$J_l\left(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}\right) e^{il\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{l+n}(r) J_n(r') e^{in\theta} \qquad (A.22)$$

$$J_l\left(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}\right)_{\sin}^{\cos}(l\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{l+n}(r) J_n(r')_{\sin}^{\cos}(n\theta) \qquad (A.22')$$



$r > r'$

$$j_0\left(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l(r) j_l(r') P_l(\cos\theta) \qquad (A.23)$$

(7) Spherical harmonics の漸化式（直積基底の既約分解）[18]

$$Y_{l_1}^{m_1}(\theta\varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta\varphi) = \sum_{l} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}} (l_1 0 l_2 0 | l_1 l_2 l 0)(l_1 m_1 l_2 m_2 | l_1 l_2 l m) \times Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (A.24)$$

但しここで和は

$$l_1+l_2+l = 2g \quad (g : \text{整数})$$

でありかつ，(l_1, l_2, l) が三角条件（三角形を形作る為の不等式）を満たすものについてのみとるものとする。又右辺の $(l_1 m_1 l_2 m_2 | l_1 l_2 l m)$ 等は Clebsch Gordan 係数である。

(8) Clebsch Gordan 係数[18)19)]

$$(\ell, m, \ell_2 m_2 / \ell_1, \ell_2\, \ell m)$$

$$= \delta_{m_1+m_2,m} \sqrt{(2\ell+1)\frac{(\ell_1+\ell_2-\ell)!\,(\ell+\ell_1-\ell_2)!\,(\ell+\ell_2-\ell_1)!}{(\ell_1+\ell_2+\ell+1)!}} \times$$

$$\times \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \frac{\sqrt{(\ell_1+m_1)!\,(\ell_1-m_1)!\,(\ell_2+m_2)!\,(\ell_2-m_2)!\,(\ell+m)!\,(\ell-m)!}}{\nu!\,(\ell_1+\ell_2-\ell-\nu)!\,(\ell_1-m_1-\nu)!\,(\ell_2+m_2-\nu)!\,(\ell-\ell_2+m_1+\nu)!\,(\ell-\ell_1-m_2+\nu)!} \qquad (A.25)$$

但し ν についての加算は負数の階乗があらわれない範囲で行なう。

特に $m_1 = m_2 = m = 0$ の時は

$$(\ell, 0\, \ell_2\, 0 / \ell_1, \ell_2\, \ell 0) = (-1)^{j+g} \sqrt{(2\ell+1)\frac{(\ell_1+\ell_2-\ell)!\,(\ell_1+\ell-\ell_2)!\,(\ell_2+\ell-\ell_1)!}{(\ell_1+\ell_2+\ell+1)!}} \frac{g!}{(g-\ell_1)!\,(g-\ell_2)!\,(g-\ell)!} \qquad (A.26)$$

の形であり，又 $\ell_2 = m_2 = 0$ の時は当然ながら

$$(\ell, m, 0\, 0 / \ell, 0\, \ell m) = \delta_{\ell\ell}, \delta_{mm}, \qquad (A.27)$$

(9) 球 Bessel 函数の漸化式と導函数

$$\frac{1}{2\ell+1}\left[j_{\ell-1}(r) + j_{\ell+1}(r)\right] = \frac{j_\ell(r)}{r} \qquad (A.28)$$

$$\frac{1}{2\ell+1}\left[\ell\, j_{\ell-1}(r) - (\ell+1) j_{\ell+1}(r)\right] = j_\ell'(r) = \frac{dj_\ell(r)}{dr} \qquad (A.29)$$

(10) 球 Bessel 函数の満足する微分方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} j_\ell(r)\right) + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] j_\ell(r) = 0 \qquad (A.30)$$

参考文献

1) A.M. Yaglom : An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions, Prentice Hall. 1962

2) G.K. Batchelor : The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge Univ. Press 1953, 邦訳：乱流理論, 吉岡書店

3) H. Ogura : J. Phys. Soc. Japan Vol. 21, 154. (1966)

4) 池上, 小倉 : 電気通信学会インフォメーションセオリー研究会資料. 1965, 3.

5) 伊藤 清 : 確率論 岩波. 1953

6) 小倉 : 電気通信学会インフォメーションセオリー研究会資料 1965. 1.

7) 小倉 : 同上 資料 1966.6.

8) H.P. Robertson : Proc. Cam. Phil. Soc. Vol. 36. 209 (1940)

9) A.M. Yaglom : Theory of Prob. its Appl. Vol. 2 No. 3 English edition 273

10) N.Ya. Vilenkin : Uspehi 11-2 (1956) 69-112. Bessel functions and Representation of the Group of Euclidean Motions

11) I.M. Gel'fand, Z.Ya Šapiro : Uspehi Mat. Nauk. 7. No. 1. (47) 3 (1952)

又は, American Mathematical Sociely. Translation. Series 2. Vol. 2,

I.M. Gel'fand, R.A. Minlos, Z.YaShapiro : Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications. Pergamon Press. 1963.

12) S. Bochner : Harmonic Analysis and the Theory of Probability, University of California Press, 1955.

13) G.H. Watson : Theory of Bessel Functions. Cambridge Univ.

Press. 1945.

14) 吉沢尚明 : 数学, 才12巻才1号. 21~37, 群表現と球函数
: 数学の歩み, 1959. 6-5号. 361

15) A.M. Obukhov : Trudy Geofiz. Inst. Acad Nauk. SSSR
Vol. 24, 3 (1954). これは16)の独訳の中に収められている。

16) Sammelband zur Statistischen Theorie der Turbulenz,
Akademic Verlag Berlin (1958)

17) 数学公式 III. 岩波. 1960

18) 山内, 堀江 : 回転群および対称群の応用 現代応用数学 B.1-a

19) G. Racah : Phys. Rev. Vol. 62 (1942) 438

輻射科学研究会資料

Gunn 効果を持つ半導体内波動のモード解析

佐々木　昭　夫
高　木　俊　宜
（京都大学工学部）

1966年5月28日

Gunn効果を持つ半導体内波動のモード解析

1. 緒　言

数千V/cmの電界が加えられたn形GaAs半導体からマイクロ波発振を得る事が1963年Gunn（ガン）によって報告された（ガン効果）[1],[2]，その後この効果はRidley, Watkins[3]とHilsum[4]が予測した所の軽い等価質量領域から重い領域への導電々子の移行によって生ずる負の微分移動度に帰因する負コンダクタンスによるものと解釈されている。n形GaAsの場合はモーメンタム空間表示で（000）方向の導電帯における等価質量は $m^* = 0.08\, m_e$，m_e は自由空間電子質量，で(100)方向では $m^* = 1.2\, m_e$ である。電界強度が増加されるにつれて電子が(000)方向の導電帯から（100）方向に移行する為，電子の移動度が減少し負のコンダクタンスを生じ発振が可能となる。

本資料に於いては上述の様な物性論的現象を背景として，電界に対して非線形に変化する移動度を持つた半導体内に存在し得る波動モード（マイクロ波電子管内に存在する早い，遅い空間電荷波，サイクロトロン波，同期波と云う名称で呼ばれているもの，数学的表現では固有関数Eigenfunctionに相当するもの）を導き，そのモードの性質を検討する事によりガン効果による現象を説明しようとする。ガン効果による発振そのものは非線形現象であり[5]，モード解析は現象を線形化して取り扱うものであるが，小信号領域で取り扱い得る発振開始条件，ガン効果を利用する増巾器又特に雑音指数の解析にはモード解析は有効な方法と考えられる。

2. 基本方程式

本解析の物理量は統計的平均量で表わされたものを使用する。こうした取扱いは角周波数ω，伝播定数Γが衝突（Collision）現象から定められ

れる量 ω_{coll}, Γ_{coll} よりも充分小さい, $\omega \ll \omega_{coll}$, $\Gamma \ll \Gamma_{coll}$, 領域で許される。即ち解析は統計的平均値で表わされた量の変化が衝突による変化よりも遅い範囲に適用される。n形半導体内の電子に対して次の方程式が成立する。

$$\bar{i}_t = \rho_t \bar{v}_t - D_e \nabla \rho_t \tag{1}$$

$$\bar{v}_t = -\mu_e \bar{E}_t \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \bar{i}_t + \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

茲で第一式は半導体内の電流を，第二式は電子速度を，第三式は電流と電荷量との連続性を表わす。D_e は電子の拡散定数を，ρ_t は電荷量 $\rho_t = -n_t e$, n_t は電子密度を，μ_e は電子移動度 $\mu_e = e\tau/m^*$ を表わす。添字 t を持つ量は

$$\left.\begin{aligned} \bar{i}_t &= \bar{i}_0 + \bar{i}\, e^{j\omega t} \\ \rho_t &= \rho_0 + \rho e^{j\omega t} \\ \bar{v}_t &= \bar{v}_0 + \bar{v} e^{j\omega t} \\ \bar{E}_t &= \bar{E}_0 + \bar{E} e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

添字 0 で表わされた直流項と角周波数 ω で変わる交流項との和である。本解析で取扱っている半導体では移動度は電界によって変化する為

$$\mu_e(E_0 + E) = \mu_e(E_0) + E \frac{d\mu_e(E_0)}{dE_0} + \cdots\cdots \tag{5}$$

の如く表現され得る。小信号の仮定に基づき交流項の二次以上の項を無視できるものとして，我々は (1)～(3)式に対する交流項についての式を得る：

$$\bar{i} = \rho \bar{v}_0 - \rho_0 \mu \bar{E} - D_e \nabla \rho \tag{6}$$

$$\bar{v} = -\mu \bar{E}, \quad \mu = \frac{d(\mu_0 E_0)}{dE_0} \tag{7}$$

$$\nabla\cdot\bar{i}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{8}$$

茲で v_0 は直流速度 $\bar{v_0}=-\mu_0\bar{E_0}$, $\mu_0=\mu_e(E_0)$ を表わす。(6)式の第一項は電子密度の交流変化 (Bunching) による対流電流，第二項は伝導電流，第三項は拡散電流を表わしている。物理量が z 方向に対してのみ変化する一次元の取扱いに於いて，我々は $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}\to 0$ を得るからマックスウエルの磁界についての方程式より

$$i+j\omega\epsilon E=0 \tag{9}$$

なる関係式を得る。(9)式を用い (6)～(8) 式を書き直して

$$\frac{\partial i}{\partial z}=-j\beta_e(\rho v_0) \tag{10}$$

$$\frac{\partial(\rho v_0)}{\partial z}=-\beta_d\left(1-j\alpha\frac{\beta_c}{\beta_e}\right)i+\beta_d(\rho v_0) \tag{11}$$

茲で

$$\alpha=\frac{\mu}{\mu_0}\ ,\quad \mu_0(-\rho_0)=\sigma_0 \tag{12}$$

$$\beta_c=\frac{\omega_c}{v_0}\ ,\quad \omega_c=\frac{\mu_0(-\rho_0)}{\epsilon} \tag{13}$$

$$\beta_d=\frac{\omega_d}{v_0}\ ,\quad \omega_d=\frac{v_0^2}{D_e} \tag{14}$$

$$\beta_e=\frac{\omega}{v_0} \tag{15}$$

(13)式より $\beta_c/\beta_e=\omega_c/\omega=\sigma_0/\omega\epsilon$ は伝導電流と変位電流との比を，(6)式の最後の項，(14)式，$\mathrm{div}\,\bar{D}=\rho$ の関係を用い $\beta_e/\beta_d=\omega/\omega_d$ は拡散電流と変位電流との比を表わしている事を知る。(9)，(10)式が (ρv_0) と i の変化量に関する方程式である。

3. モード方程式

(10)，(11) 式では変数 (ρv_0)，i が結合している。これらを変数が結

合しておらない，従って現象解析に有効な方程式（モード方程式）に変換する。(10)式に

$$\left\{-j\frac{\omega_d}{2\omega}\left(1\pm\sqrt{1+4\alpha\frac{\omega_c}{\omega_d}+4j\frac{\omega}{\omega_d}}\right)\right\}$$

をかけ，(11)式に加える事により次の二式を得る：

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\beta_d}{2}(1-\xi)\right\}A_f'=0 \tag{16}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\beta_d}{2}(1+\xi)\right\}A_b'=0 \tag{17}$$

茲で

$$A_f'=(\rho v_0)-j\frac{\omega_d}{2\omega}(1+\xi)i \tag{18}$$

$$A_b'=(\rho v_0)-j\frac{\omega_d}{2\omega}(1-\xi)i \tag{19}$$

$$\xi=\sqrt{1+4\alpha\frac{\omega_c}{\omega_d}+4j\frac{\omega}{\omega_d}} \tag{20}$$

(16), (17)式に於いて新しい変数（波動モード）は互に直交化（Orthogonalization）されその結合が無くなって居り，その波動モードの伝播定数は方程式中に与えられている。今，考慮している[redacted]半導体内に存在する波動モードは A_f' と A_b' でありそれらの伝播定数は $\frac{\beta_d}{2}(1\mp\xi)$ で与えられる。今，n形 $GaAs$ の数値例：$\epsilon=13.5\epsilon_0$, $v_0=10^5 m/sec$, $D_e=0.013\ m^2/sec$, $f\sim3000MC$, 抵抗率 100 ohm m（低抵抗），5000 ohm m（高抵抗）の場合について

低抵抗の場合　$\omega/\omega_d\ll1$,　$\omega/\omega_c\ll1$,　$\omega_c/\omega_d\sim1$ (21)

高抵抗の場合　$\omega/\omega_d\ll1$,　$\omega/\omega_c\sim1$,　$\omega_c/\omega_d\ll1$ (22)

が成り立つ。ガンが最初，発振現象を観測したのは半導体試料の上記低抵抗の場合に属し，Thim, Barber[6]がマイクロ波増巾を行なった試料は高抵抗に属する。発振開始，増巾に寄与するのは微分移動度を含む(20)式中の $4\alpha\omega_c/\omega_d$ であると考えられるから低抵抗の場合は高抵抗に比べて発振開始が容易に得られるものと想像される。本資料では取り敢え

ず高抵抗の場合を取り扱う。$|\alpha|\frac{\omega_c}{\omega_d} \ll 1$ が仮定し得るとし（αの値が充分小さければ低抵抗の場合でも以下の解析が成立する。）(22)式を用い(16),(17)式を簡単化すると

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}+j\beta_e+\beta_e\left(\frac{\alpha\omega_c}{\omega}+\frac{\omega}{\omega_d}\right)\right\}A_f'=0 \tag{23}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}-j\beta_e-\beta_d\right\}A_b'=0 \tag{24}$$

$$A_f'=\rho v_0+\left(1-j\frac{\omega_d}{\omega}\right)i \tag{25}$$

$$A_b'=\rho v_0-\left\{1-j\left(\frac{\alpha\omega_c}{\omega}+\frac{\omega}{\omega_d}\right)\right\}i \tag{26}$$

(25),(26)式で与えられている波動モードは未だ正規化されて（$|A_f'|^2$, $|A_b'|^2$ が波動モードが運ぶ電力になる様正規化定数をかけて）おらない。(23),(24)式から

$$A_f'=A_{f0}'e^{-j\beta_e z}\cdot e^{-\beta_e\left(\frac{\alpha\omega_c}{\omega}+\frac{\omega}{\omega_d}\right)z} \tag{27}$$

$$A_b'=A_{bL}'e^{(j\beta_e+\beta_d)(z-L)} \tag{28}$$

なる解を直ちに得る。茲でLは半導体試料の長さを表わす。(28)式でA_b'は伝播定数

$$\Gamma_2=j\beta_e+\beta_d \tag{29}$$

を持ち$e^{\beta_d z}$で大きく減衰する後進波（波動が$z=L$より$z=0$に進む波）である事を知る。A_{bL}'は$z=L$におけるA_b'の境界値で決まるモード振巾である。(27)式からA_f'は伝播定数

$$\Gamma_1=-j\beta_e-\beta_e\left(\frac{\alpha\omega_c}{\omega}+\frac{\omega}{\omega_d}\right) \tag{30}$$

を持ち，負の微分移動度により$\frac{\alpha\omega_c}{\omega}+\frac{\omega}{\omega_d}<0$が満足される時$e^{\beta_e\left(\frac{-\alpha\omega_c}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_d}\right)z}$で増大する前進波である事を知る。$A_{f0}'$は$z=0$における$A_f'$の境界値で決まるモード振巾である。

4. 発振開始条件

Engelmann, Quate[7]は集中定数等価回路を求めて発振開始条件を導いているが，モード解析において自乗値$|A_f'|^2$がその波動の運ぶ電力に比例する事を利用して発振開始条件が簡単に求められる事を示す。後進波は急激に減衰するとし，増大する前進波のみが存在していると考えられる半導体のQ－値Q_eは次の式から求められる：

$$Q_e = 2\pi \frac{\text{試料に貯えられている電力}}{\text{1サイクル間に消費（増大）される電力}} \tag{31}$$

即ち

$$Q_e = \frac{\omega e^{2(Re\,\Gamma_1)z}}{v_g \frac{\partial}{\partial z}\left\{e^{2(Re\,\Gamma_1)z}\right\}} = -\frac{Im\,\Gamma_1}{2Re\,\Gamma_1} \tag{32}$$

茲でv_gは群速度を，$Im\,\Gamma_1$, $Re\,\Gamma_1$はそれぞれ伝播定数Γ_1の虚数部，実数部を表わす。若し負荷が純コンダクタンスの負荷であると，負荷に電力が供給される（試料が発振する）為には半導体のQ－値Q_eが負荷のQ－値Q_Lよりも小さくなければならない条件から

$$-\alpha = \frac{-\left(\frac{dv_0}{dE_0}\right)}{\mu_0} > \frac{\omega}{\omega_0}\left(\frac{1}{2Q_L}+\frac{\omega}{\omega_d}\right) = \frac{\epsilon\omega}{n_0 e\mu_0}\left(\frac{1}{2Q_L}+\frac{\omega}{\omega_d}\right) \tag{33}$$

なる発振開始条件を得る。角周波数ωの高い程，電子密度n_0の小さい程，負荷の重い程，大きな微分移動度を要する事を知る。本条件に於いてω/ω_dが非常に小さい時，文献[7]の$-S_0 > \omega/2\omega_c Q_L$に相当する。

5. 結　言

本資料に於いて，ガン効果を持つ半導体内に存在する波動モードを導き，一つは減衰する後進波であり，一つはガン効果により増大し得る前進波である事を示し，それらの未正規化モード振巾(19)，(18)式に与えた。未正規化モード振巾の自乗が波動の運ぶ電力に比例する事を

利用してガン効果を持つ半導体のQ-値を得，発振開始条件を簡単に求めた。今後このモード振巾を用いてガン効果を持つ半導体の分布定数等価回路の導入，又ガン効果を利用した半導体増巾器の解析，雑音指数の算出がなされ得るものと思う。

参考文献

[1] J. B. Gunn, " Microwave oscillations of current in III-V semiconductors," Solid State Comm., vol 1, pp 88-91, Sept 1963.

[2] ———— , " Instabilities of current in III-V semiconductors," IBM J. Res. Dev., vol 8, pp 141-159, April 1964.

[3] B.K. Ridley and T.B. Watkins, " The possibility of negative resistance effects in semiconductors," Proc. Phys. Soc. (London), vol. 78, pp 293-304, Aug 1961.

[4] C. Hilsum, " Transferred electron amplifiers and oscilltors," Proc. IRE., vol 50, pp 185-189, Feb 1962.

[5] H. Kroemer," Nonlinear space-charge domain dynamics in a semiconductor with negative differential mobility," IEEE Trans. Electron Devices, vol 13, p34, Jan 1966.

[6] H.W. Thim and M. Barber, " Microwave amplification in a GaAs bulk semiconductor." IEEE Trans. Electron Devices, vol 13, pp 110-114, Jan 1966.

[7] R.W.H. Engelmann and C.F. Quate, " Linear, or

'small signal' theory for the Gunn effect," IEEE Trans. Electron Devices, vol 13, pp44-52, Jan 1966.

輻射科学研究会資料

マジックティーを用いた前置分波器の周波数特性平坦化

牧本利夫　　西村貞彦
（大阪大学　基礎工学部）

1966年7月29日

マジックティーを用いた前置分波器の周波数特性平坦化

§1. 序言

周波数間隔が狭まく等間隔である信号周波数群を分波器で分波する場合に，半値幅の狭まい空胴（Q値が高い）で分波すると損失が多くなる．このために1周波数帯おきの周波数群に2分する前置分波器の簡単で損失の少ないものが文献(1)に報告されている．

この前置分波器では希望周波数（設計周波数）からずれると，挿入損失が増加し，漏洩（leakage, cross talk）が増加する．特に信号周波数に帯域を考える場合には，これを問題としなければならない．ここでは若干特性を改良し得る回路系について考察し，実験を行なっている．

§2. マジックティーを用いた前置分波器の平坦特性

(1) マジックティーを用いた前置分波器

整合マジックティー

の特性を対称回路の

基準面を適当に選ぶ

ことにより

$$(S)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&1&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix} \quad (1)$$

と表わすことができる。マジックティー

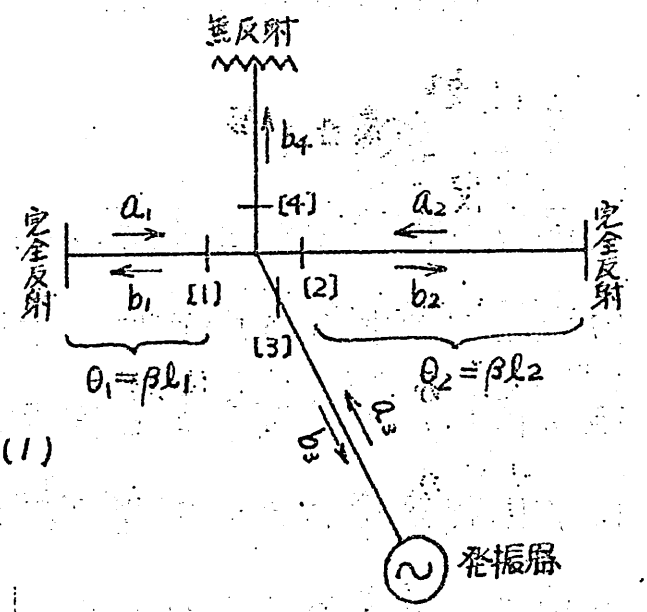


図1. マジックティーの構成

への内向，外向きの波の振幅を a_i，b_i とすると，式(1)にしたがって，

$$\left.\begin{aligned} b_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_3+a_4)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}a_3 \\ b_2&=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_3-a_4)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}a_3 \\ b_3&=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1+a_2),\quad b_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1-a_2)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ただし $a_4=0$ を考えている。

いま，腕[1]，[2]より外側を見た反射係数を $\exp[-j2\theta_1]$，$\exp[-j2\theta_2]$ とおくと，入射波の振幅 a_1 および a_2 は次式のようになる。

$$a_1=b_1e^{-j2\theta_1},\quad a_2=b_2e^{-j2\theta_2} \quad (3)$$

式(3)を式(2)に代入すると.

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a_3}{\sqrt{2}}e^{-j2\theta_1} + \frac{a_3}{\sqrt{2}}e^{-j2\theta_2}\right) = \frac{a_3}{2}\left(e^{-j2\theta_1} + e^{-j2\theta_2}\right)$$

ゆえに. $\frac{b_3}{a_3} = \frac{1}{2}(e^{-j2\theta_1} + e^{-j2\theta_2}) = \cos(\theta_2-\theta_1)e^{-j(\theta_1+\theta_2)}$

同様に, $\frac{b_4}{a_3} = \frac{1}{2}(e^{-j2\theta_1} - e^{-j2\theta_2}) = j\sin(\theta_2-\theta_1)e^{-j(\theta_1+\theta_2)}$ (4)

したがって, 反射波 ; $|b_3/a_3|^2 = \cos^2\theta$

透過波 ; $|b_4/a_3|^2 = \sin^2\theta$ (5)

ただし, $\theta = \theta_2 - \theta_1$

図1に示すように, 腕[1], [2]に直線導波管を接続した場合には,

$$\theta_1 = \beta l_1 \ , \quad \theta_2 = \beta l_2 \qquad (6)$$

で与えられる。ただし, $\beta = 2\pi/\lambda_g$ で, λ_g は導波管の管内波長である。最も簡単な場合として, $l_1 \fallingdotseq 0$ とおくと. 式(5)は

$$|b_3/a_3|^2 = \cos^2(\beta l_2) \ , \quad |b_4/a_3|^2 = \sin^2(\beta l_2) \qquad (7)$$

となり, 図2に示すように. いずれも $\Delta\beta l_2 = \pi$ ごとに繰返される。

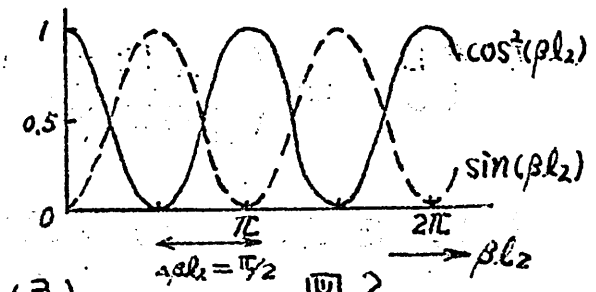


図 2.

この曲線（分波特性）は $\beta l_2 = m\pi/2$（mは整数）の近くでそれ程平坦でない．できれば，さらに平坦な特性となれば，信号に周波数帯域がある場合にも利用することができる．つぎに平坦化について考える．

(2) 平坦特性の回路

式(5)から一般に $\theta = \theta_2 - \theta_1$ を β に対して $\theta = m\pi/2$ の付近で平坦にすることができればよい．$\theta_1 = \beta l_1$ のまゝ θ_2 を周期的に平坦に近ずけることを考える．一般に直線々路ないで反射部を含む線路の反射位相はS曲線となる．

側路(1)または(2)に反射部のある回路を考える．

(i) S曲線について

図3のように，側路(2)に反射物をおく．反射物の特性を，対称回路として，

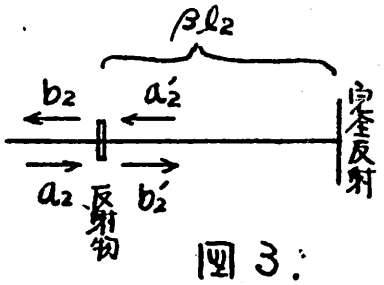


図3.

$$(S) = \begin{pmatrix} \alpha & j\sqrt{1-\alpha^2} \\ j\sqrt{1-\alpha^2} & \alpha \end{pmatrix} \qquad (8)$$

とおく．ただし，(S)は無損失，対称回路を表わす．

αがいわゆる反射係数で位相は0になるように基準面を決めている。いま、振幅を図3のように選ぶと、

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= a_2\alpha + a_2' j\sqrt{1-\alpha^2} \\ b_2' &= a_2'\alpha + a_2 j\sqrt{1-\alpha^2} \\ a_2' &= b_2' e^{-j2\beta l_2} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

となり、これらから

$$a_2' = a_2 j\sqrt{1-\alpha^2}/(e^{j2\beta l_2} - \alpha)$$

ゆえに、$$\frac{b_2}{a_2} = \alpha - \frac{1-\alpha^2}{e^{j2\beta l_2} - \alpha} = \frac{\alpha e^{j2\beta l_2} - 1}{e^{j2\beta l_2} - \alpha}$$

$|b_2/a_2| = 1$であるから、$b_2/a_2 = e^{-j2\theta_2}$とおくと、

$$e^{-j2\theta_2} = \frac{\alpha e^{j2\beta l_2} - 1}{e^{j2\beta l_2} - \alpha} \quad (10)$$

上式を変形していくと次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta_2 &= -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cot\beta l_2 = \gamma\tan\left(\beta l_2 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\text{ただし、} \quad \gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \equiv \frac{1}{VSWR} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

式(11)の関係において、傾斜の特殊な値を求める。

式(11)を微分して、

$$\frac{d\theta_2}{d(\beta l_2)} = \frac{\gamma}{\sin^2\beta l_2 + \gamma^2\cos^2\beta l_2} \quad (12)$$

したがって，極値は，

$\sin^2\beta l_2 = 0$，$\beta l_2 = 0, \pi$ のとき

$$\frac{d\theta_2}{d(\beta l_2)} = \frac{1}{\gamma} > 1$$

$\cos^2\beta l_2 = 0$，$\beta l_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のとき

$$\frac{d\theta_2}{d(\beta l_2)} = \gamma < 1 \qquad (13)$$

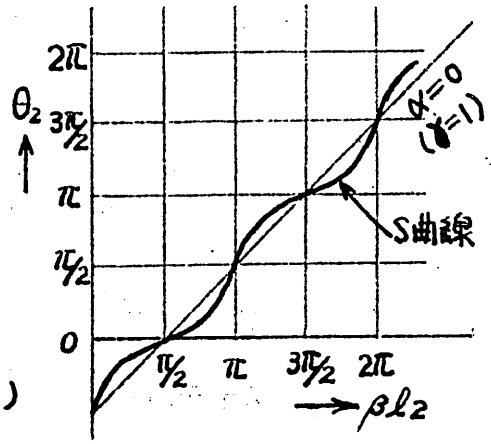


図4．S曲線

ゆえに，式(11)の関係を示すと，図4のようにS曲線となる．

(ii) 前置分波器特性曲線の平坦化

図5(a)において，(1)で説明した $\beta l_1 = 0$，βl_2 の状態が同図の直線Aと一定位相（水平軸）で，その差が式(5)の $\theta = \theta_2 - \theta_1$ となる．このときの透過波；$\sin^2\theta$，反射波；$\cos^2\theta$ を同図(b)に示す．

S曲線Bと一定位相との差を θ とすると同図(c)のように $\sin^2\theta$ と $\cos^2\theta$ とが似た形（曲線）とならない．

曲線Bの周期は π であるから，$\pi/2$ ごとに $\sin^2\theta$ と $\cos^2\theta$ とが相似の曲線となるには，$\theta_1 = \beta l_1 = \beta l_2/2$ である直線Cと曲線Bとの差を θ とすればよい．こ

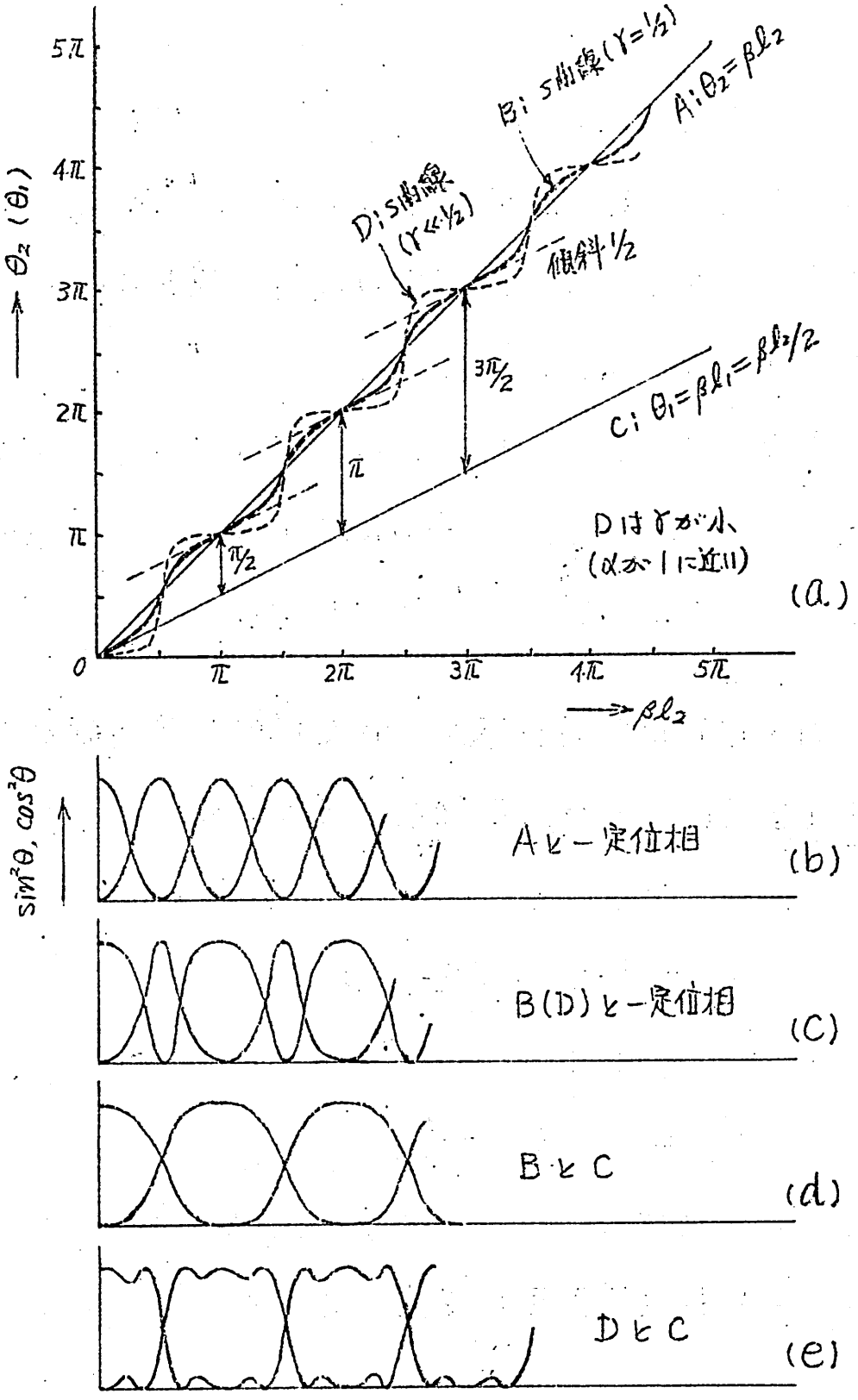

5π
4π
3π
2π
π
0
θ2 (θ1)
B; S曲線(γ=1/2)
A; θ2=βl2
D; S曲線
(γ<1/2)
傾斜1/2
3π/2
π
π/2
C; θ1=βl1=βl2/2
Dはγが小
(αが1に近い)
(a.)
π
2π
3π
4π
5π
βl2
sin²θ, cos²θ
Aと一定位相
(b)
B(D)と一定位相
(C)
BとC
(d)
DとC
(e)

図 5.

のとき $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ を示せば同図(d)のようになる。ここで曲線Bと直線Cとが $\Delta\beta l_2 = \pi$ ごとに平行であれば $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ は平坦である。直線Cの傾斜は $1/2$ であるから，曲線Bの傾斜が最小の値で $1/2$ すなわち $\gamma = 1/2$ に選べばよい。

γ が小さく0に近い曲線がDである。このときの $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ は，同図(e)に示すように，帯域は広くなるが良好な特性とは言われない。

側路[2]に反射物体を置いた場合，S曲線で表わされる θ_2 を用い，側路[1]の長さを $l_1 = l_2/2$ とする。式(11)から θ_2 は

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left[\gamma \tan\left(\beta l_2 - \frac{\pi}{2}\right)\right] \qquad (14)$$

であり，θ_1 として

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\beta l_2 - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (15)$$

とおく。ただし，βl_2 の代りに $(\beta l_2 - \frac{\pi}{2})$ として $\pi/2$ の移相（補正用）を考えておく。このとき，θ は

$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$= \tan^{-1}\left[\gamma \tan\left(\beta l_2 - \frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\beta l_2 - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\gamma \tan\Phi\right] - \frac{\Phi}{2} \qquad (16)$$

ただし, $\Phi = \beta l_2 - \frac{\pi}{2}$ (17)

となる。したがって, 式(5)で表わされる反射波; $|b_3/a_3|^2 = \cos^2\theta$, 透過波; $|b_4/a_3|^2 = \sin^2\theta$ は式(16)のθを用いて求めることができる。いま,

$$\gamma = \frac{1}{2} \text{ or } VSWR = 2, \quad \alpha = \frac{VSWR-1}{VSWR+1} = \frac{1}{3}$$

のときが, 図5(a)のように, S曲線Bと直線C ($\theta_1 = \beta l_1 = \beta l_2/2$) とが平行していて, $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ は平坦特性を示す。

式(5)および(16)を用いて反射波のみについて計算した結果を図6に示す。図7は図6において縦軸を対数目盛に書直したものである。同図の結果から, 挿入損失および漏洩量を知ることができる。

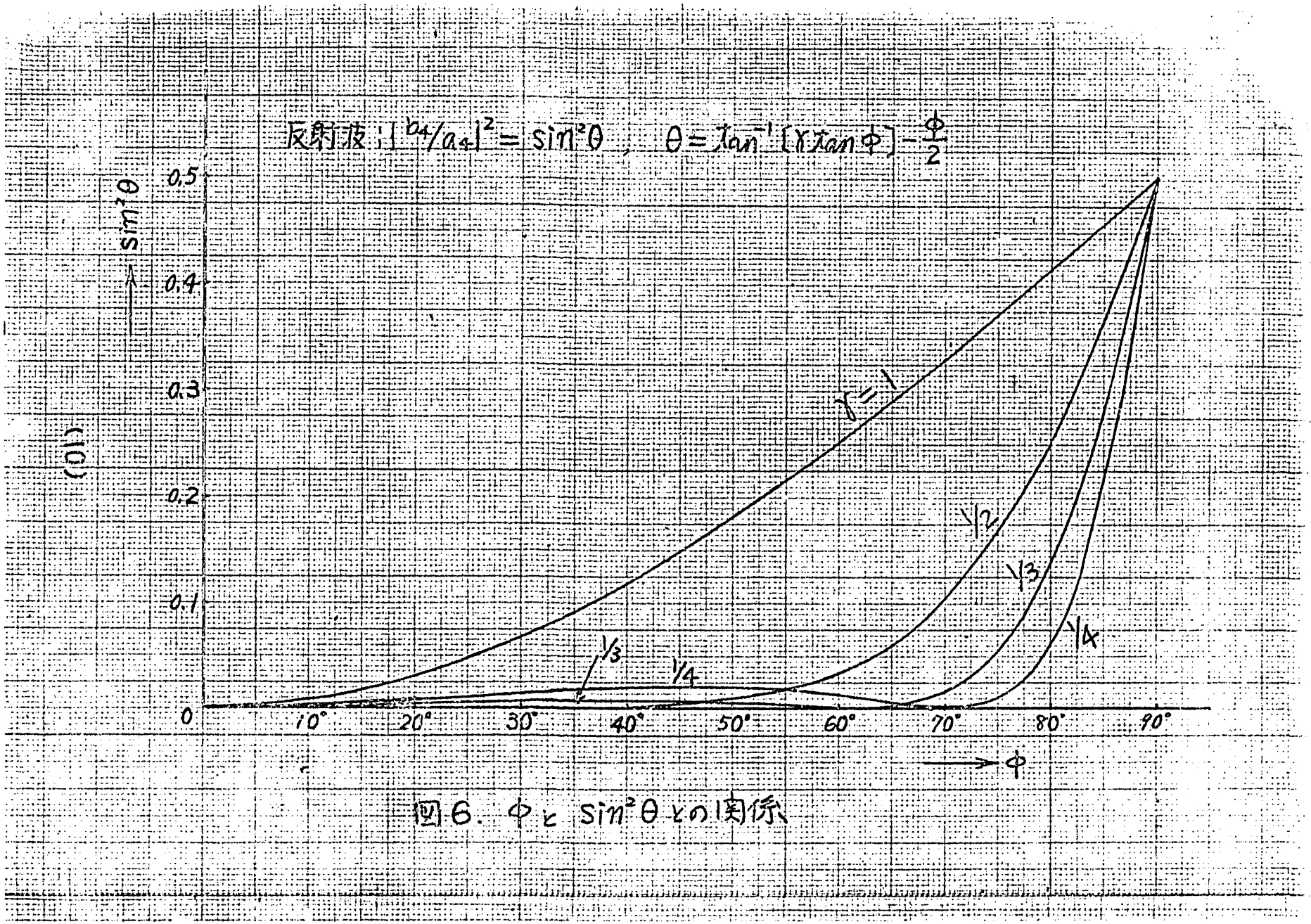


図6. Φ と $\sin^2\theta$ との関係

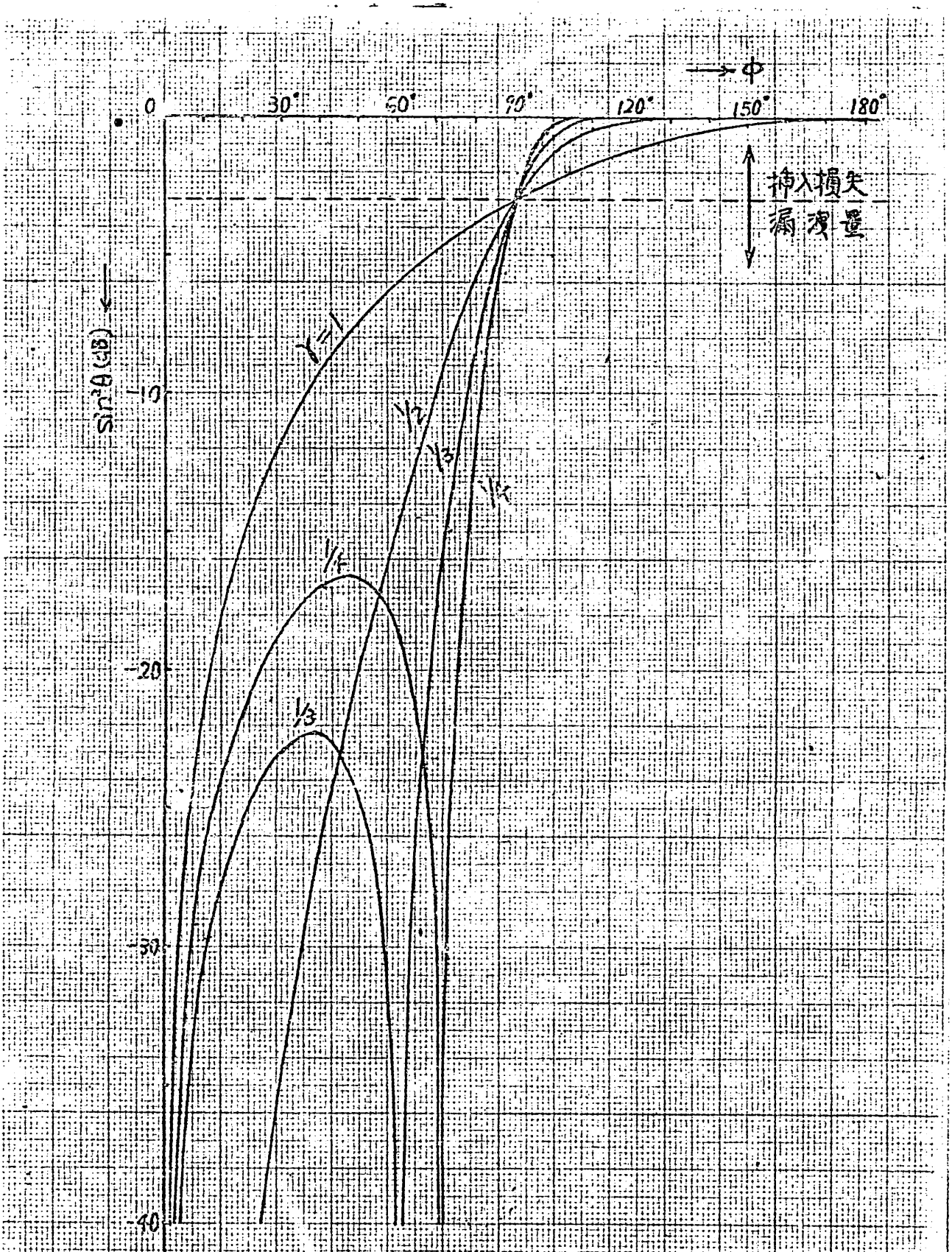


図7. Φ - 挿入損失および漏洩量との関係

§3. 設計法

最初に規格方形導波管を用いて，周波数間隔 ΔF のみが与えられた場合について述べ，つぎに，周波数間隔 ΔF と中心周波数 f_0 とが与えられた場合についてふれることにする。ただし，$l_1 = l_2/2$ とする。

(1) 周波数間隔 ΔF と側路長 l_1 および l_2 との関係

図8より

$$f_1 = f_0 + 2\Delta F \qquad (18)$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\Delta\beta l_2 = \pi \qquad (19)$$

とおくと，付録1から ΔF と l_1 および l_2 との関係は，近似的に次式のようになる。

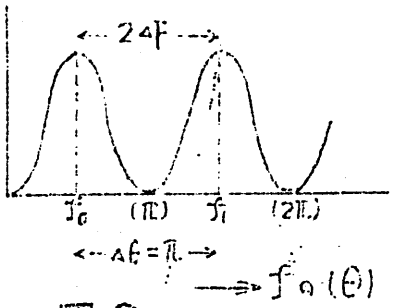


図8

$$l_2 = 2l_1 \mp \frac{\lambda_0}{\lambda_{g0}} \cdot \frac{C}{2\Delta F} \qquad C: 光速 \qquad (20)$$

式(20)を用いて計算した結果を図9に示す。

(2) 反射波，透過波の最大振幅周波数

式(16)，(17)を用いて，$\gamma = 1$ の場合について考えると，

$$\theta = \tan^{-1}[\gamma \tan\phi] - \frac{\phi}{2} = \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}(\beta l_2 - \frac{\pi}{2}) \qquad (21)$$

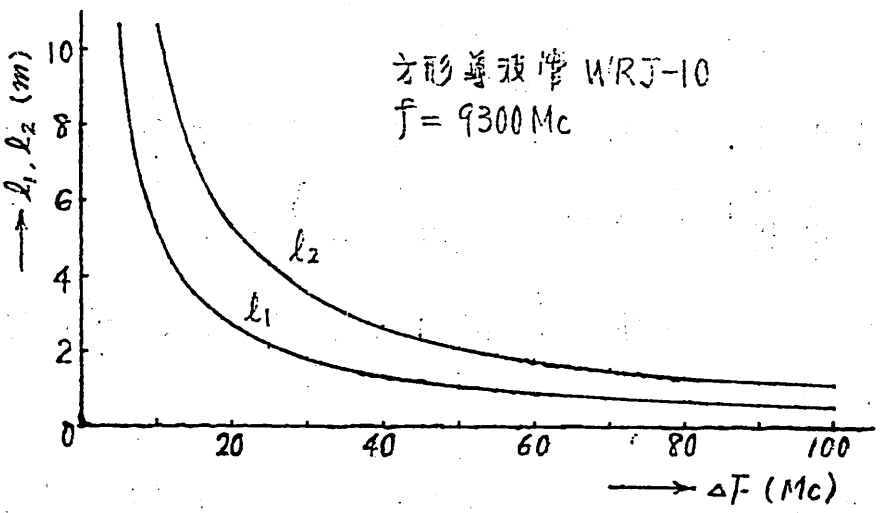


図9. 周波数間隔Δfと側路長 l_1, l_2 との関係

いま，反射波 $|b_3/a_3|^2 = \cos^2\theta$ が最大値1になるには

$$\theta = n\pi$$

透過波 $|b_4/a_3|^2 = \sin^2\theta$ が最大値1になるには

$$\theta = (n+\tfrac{1}{2})\pi$$

} (22)

ただし，nは整数である。反射波の場合，式(21),(22)より，$\frac{1}{2}(\beta_r l_2 - \frac{\pi}{2}) = n\pi$，ゆえに $\beta_r l_2 = (2n+\frac{1}{2})\pi$

一方，$\beta_r l_2 = \frac{2\pi}{\lambda_{gr}} l_2$ であるから，$l_2 = (n+\frac{1}{4})\lambda_{gr}$ となり，l_2が与えられたとき，整数nの値に対して最大振幅周波数 f_r を求めることができる。

$$\therefore\quad f_r = \frac{c}{2l_2}\sqrt{(2n+\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{l_2}{a})^2}$$

同様にして，透過波の場合は，

$$f_t = \frac{c}{2l_2}\sqrt{(2n+\tfrac{3}{2})^2 + (\tfrac{l_2}{a})^2}$$

} (23)

a: 方形導波管長辺の長さ

(3) 半値点の周波数

半値点すなわち反射波と通過波の交叉点の周波数を，反射波について求めると，$\cos^2\theta = 0.5$ になるのは，$\theta = (n \mp \frac{1}{4})\pi$ のときである。式(21)を用いると，

$$\theta = (n \mp \frac{1}{4})\pi = \frac{1}{2}(\beta_{gn} l_2 - \frac{\pi}{2}) = (\frac{l_2}{\lambda_{gn}} - \frac{1}{4})\pi$$

$$\therefore \lambda_{gn} = \frac{l_2}{n + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4}}$$

求める半値点の周波数 f_{cn} は

$$f_{cn} = \frac{c}{2a}\sqrt{1 + (\frac{2a}{\lambda_{gn}})^2}$$

$$= \frac{c}{2a}\sqrt{1 + \left\{\frac{2a}{l_2}(n + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4})\right\}^2} \qquad (24)$$

(4) 基準周波数（にじし反射波）f_0 と周波数間隔 ΔF とが与えられた場合，側路長 $l_2 (= 2l_1)$ と方形導波管寸法 a との求め方

規格方形導波管を用いた場合は，f_0 と ΔF のうち，どちらか一方のみを与えると他方が定まるという不自由さがある。したがって，f_0 および ΔF の両者が

与えられた場合は，方形導波管寸法 a を変えなければならない。

式(20)および(23)の両式から，側路長 $l_2 = 2l_1$ と方形導波管寸法 a とが，次式のように求められる。

$$l_2 = 2l_1 = \frac{C}{2}\sqrt{\frac{2n+\frac{1}{2}}{\Delta F f_0}} \qquad (25)$$

$$a = \frac{C}{2f_0\sqrt{1-\frac{\Delta F}{f_0}(2n+\frac{1}{2})}} \qquad (26)$$

(5) 設計例

側路長を $l_1 = 75\,cm$，$l_2 = 150\,cm$ に選んだ場合について，計算した結果を以下に示す。

(i) 周波数間隔 ΔF

式(20)または図9より　$\Delta F \fallingdotseq 71\,Mc$

(ii) 透過波，反射の最大振幅周波数 f_t, f_r

式(23)において，$l_2 = 150\,cm$，$a = 2.29\,cm$，$C = 2.9978 \times 10^{10}\,cm/sec$ を用いると，整数 n の値に対して f_t, f_r は次表のようになる。

n	反射波 f_r (Mc)	透過波 f_t (Mc)	周波数間隔 ΔF (Mc)
31	9047.0	9116.2	69.2
32	9186.1	9256.5	69.9
33	9327.4	9398.8	70.4
34	9470.9	9543.3	70.9
			71.4
			72.1
			72.4
		平均	70.9

表 1.

(iii) 半値巾（交火巾）の周波数 f_n

式(24)を用いて，整数 n の値に対して f_n は次表のようになる．

n	半値巾周波数 f_n (Mc)
31	9012.4 9081.1
32	9151.1 9221.2
33	9291.8 9363.2
34	9434.5 9506.5

表 2.

(iv) 周波数と反射波および透過波との関係

$\gamma = 1, 1/2$ の場合について，計算した結果を図10に示す．

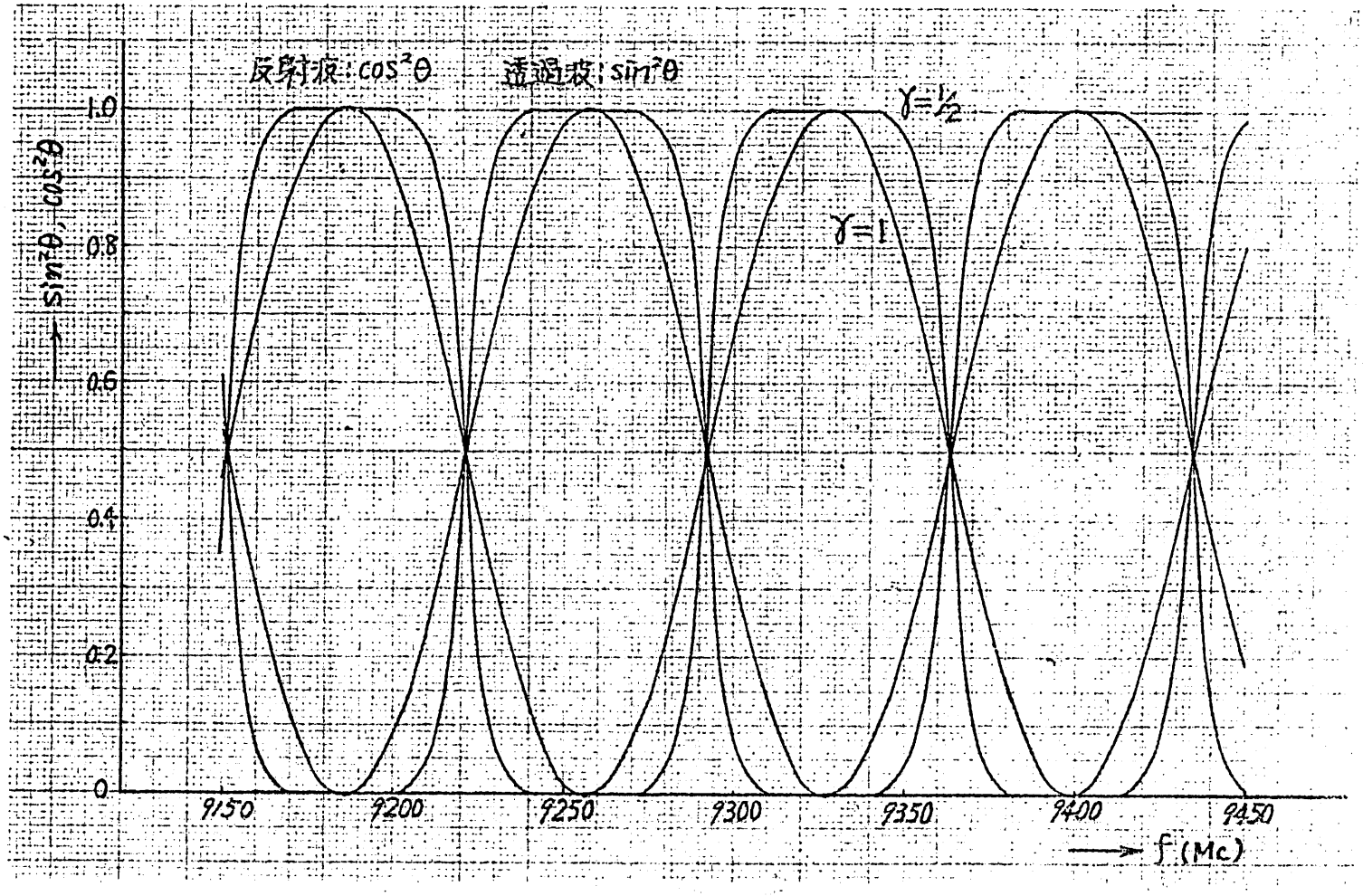


図 10. 周波数と反射波および透過波との関係
($l_1 = 75$ cm, $l_2 = 150$ cm)

§4. 実験

(1) マジックティーの特性

実験に用いたマジックティーの諸特性の測定結果をまとめると，次の通りである。

バランス ; 0.1 dB 以下
漏洩量 ; ①⇄② 30 dB以上
③⇄④ 40 〃
VSWR ; 1.14 以下

上記の結果から，用いたマジックティーは，周波数特性，バランス等普通の特性のものであると思われる。測定結果の1例を図11に示す。

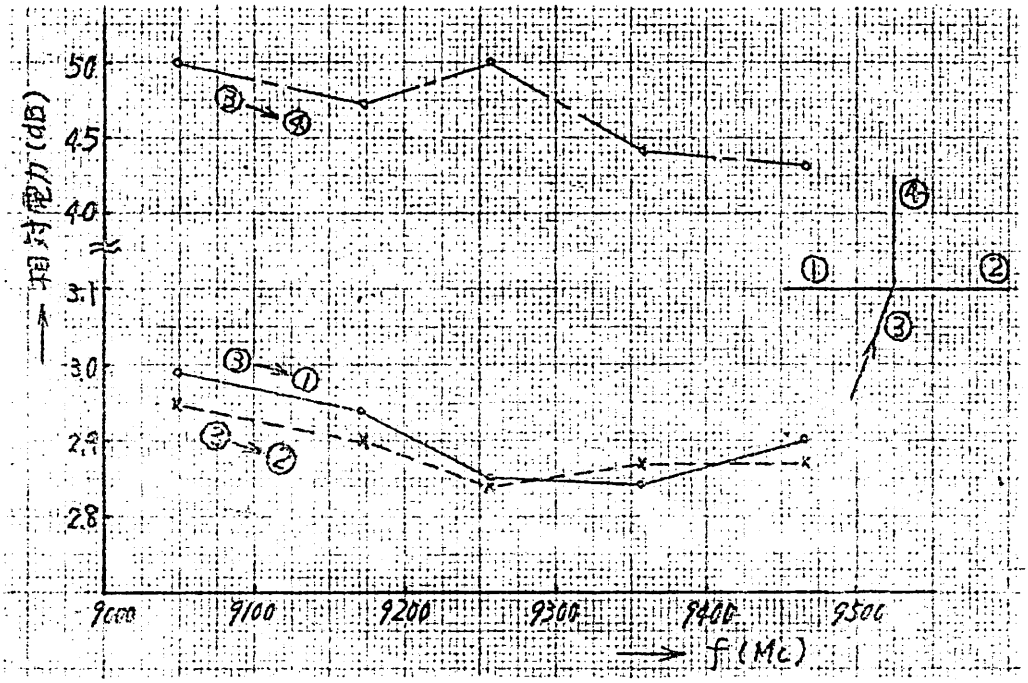


図11. マジックティーの周波数特性

(2) 反射物の特性

反射物として、インピーダンス変換器（stub）を用いている。インピーダンス変換器のstub挿入長とVSWRとの関係を測定した結果を図12に示す。

VSWRがあまり大きくない範囲では、周波数特性はほとんどなく、また、stub挿入長によるVSWRに対する影響も小さい。

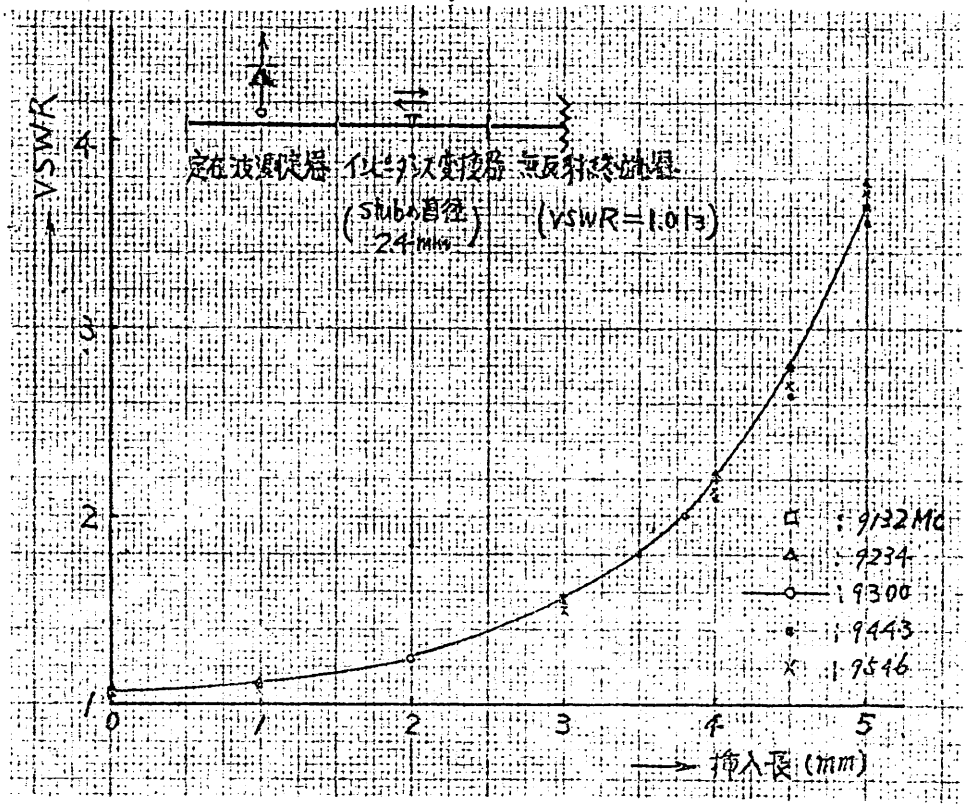


図12. インピーダンス変換器の挿入長とVSWRとの関係

(3) 反射波および透過波の波形観測

マジックティーを用いた前置分波器は，マジックティーとサーキュレーターとで構成されるが，我々は方向性結合器を用いて反射波の一部を観測している。図13に反射波，透過波の波形観測回路を示す。

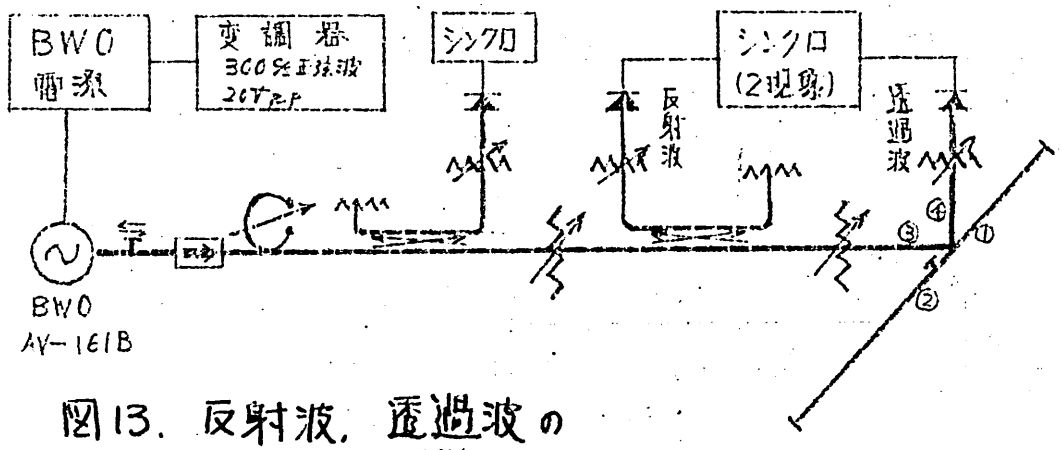


図13. 反射波，透過波の波形観測回路

反射波および透過波の波形観測手順としては，最大振幅周波数が計算値（表1参照）に一致するように，側路長 l_1 および l_2 を可変短絡板を用いて調整している。このとき stub の位置（図14参照）は一定にしている。なお，最大振幅周波数は，図13の観測回路において，反動形空胴波長計による

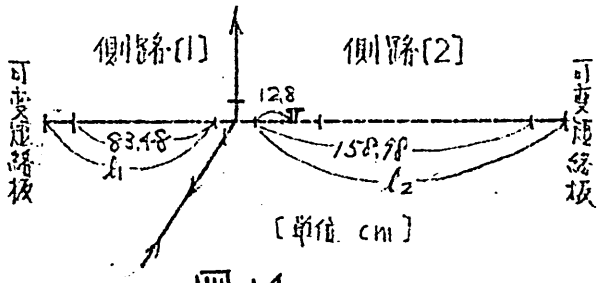


図14.

周波数マーカーによって測定している。

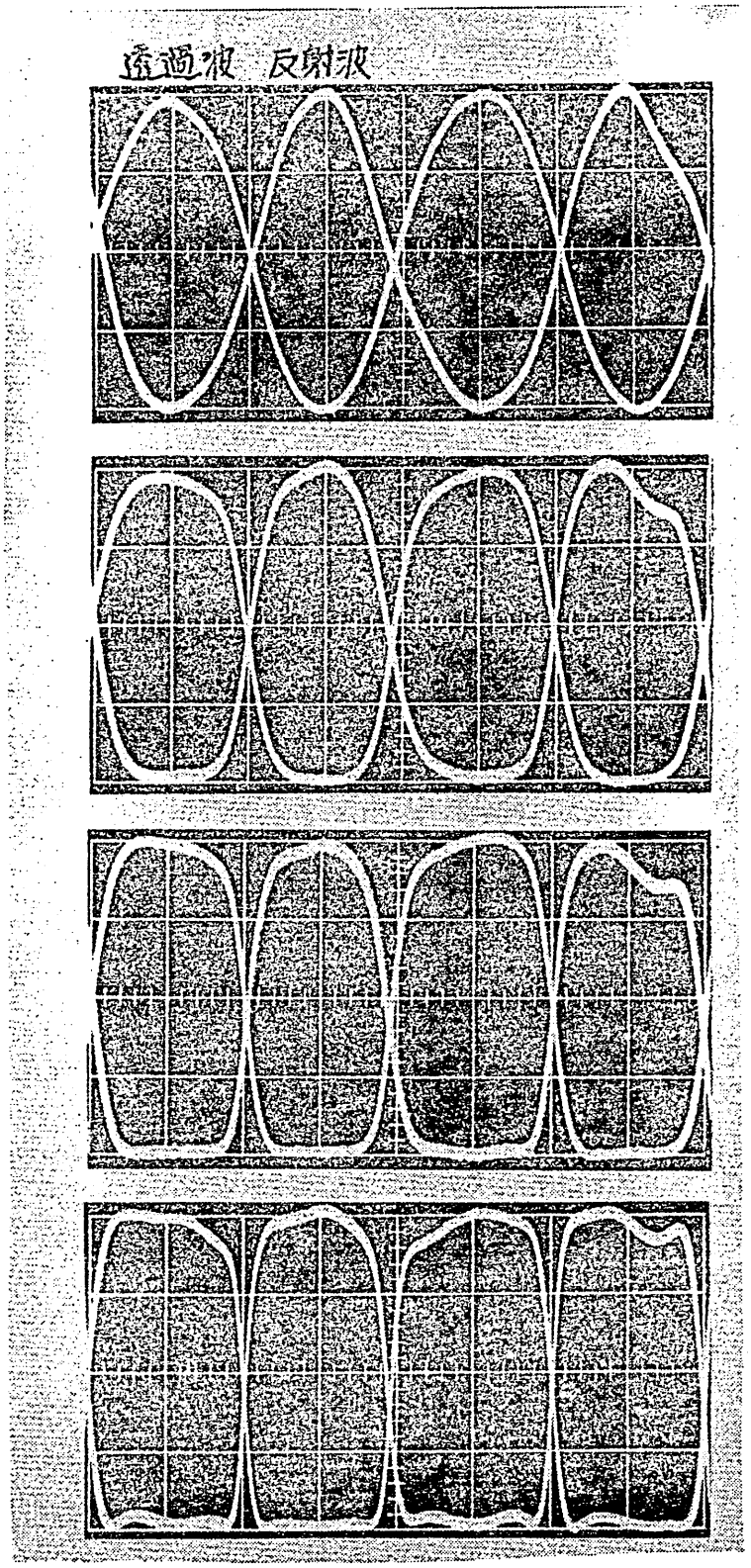
側路長 l_1, l_2 を可変短絡板によって調整後，各VSWRに対する側路[1]，[2]の全長を表3に示す。

VSWR	側路[1]の全長 l_1 (cm)	側路[2]の全長 l_2 (cm)	$l_2 - l_1$ (cm)
1	84.680	159.457	74.777
1.08	84.686	159.442	74.756
1.2	84.694	159.421	74.727
1.5	84.699	159.332	74.633
2	84.718	159.269	74.551
3	84.773	159.215	74.442
4	84.827	159.184	74.357
5	84.857	159.166	74.309
24	84.992	159.024	74.032
144	85.102	(12.80)	—

表 3.

各VSWRの値に対して l_1, l_2 が異なっているのは，Stubを挿入することにより，Stubのリアクタンス分が変化しているためである。

図15に波形観測結果を示す。VSWR=1のとき，波形は多少歪んでいるが，ほぼ正弦状に近い形になっている。VSWRの値を大きくしていくと，正弦状から平坦化してゆき，更に大きくすると，除々に漏洩量が増加して，VSWRが無限大で元の正弦状に戻る。



$VSWR = \frac{1}{\rho} = 1$

最大振幅周波数

透過波(Mc)	反射波(Mc)
9255	9326
9399	9469

VSWR = 1.5

透	反
9255	9327.5
9399.5	9472

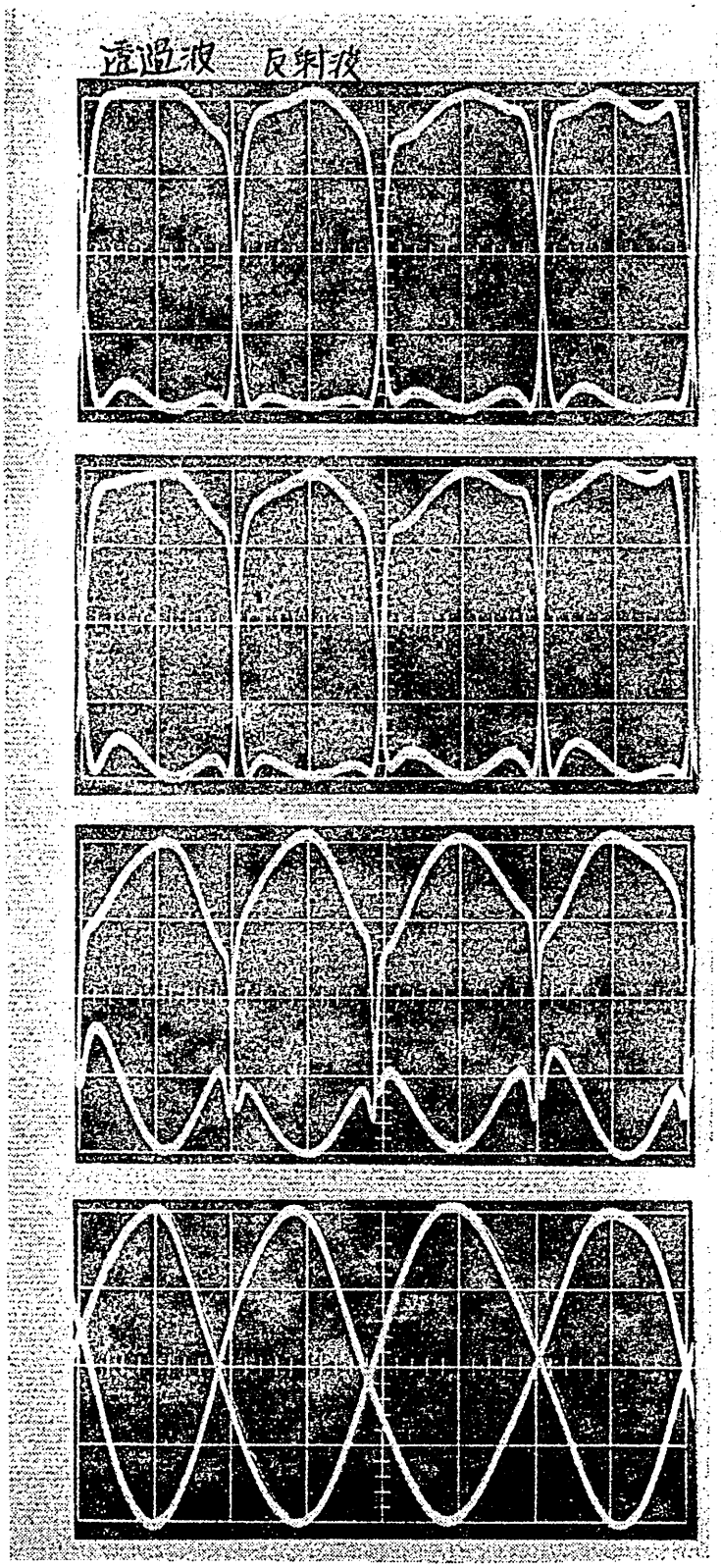
VSWR = 2

透	反
9253.5	9327
9399	9471.5

VSWR = 3

透	反
9253.5	9327.5
9399	9470

図 15-1　透過波、反射波の掃引特性



VSWR = 4

透	反
9253	9327.5
9398	9471.5

VSWR = 5

透	反
9253.5	9327.5
9398	9467.5

VSWR = 24

透	反
9253.5	9327
9399	9470

VSWR = 144

透	反
9253.5	9327.5
9399	9474

図 15－2　透過波，反射波の探引特性

各波形は共に多少歪んでおり，上下で相似の形になっていないが，この一連の波形から，反射物の効果が良く分かるものと思われる。

(4) 挿入損失の測定

図16に反射波，透過波の挿入損失測定回路を示す。

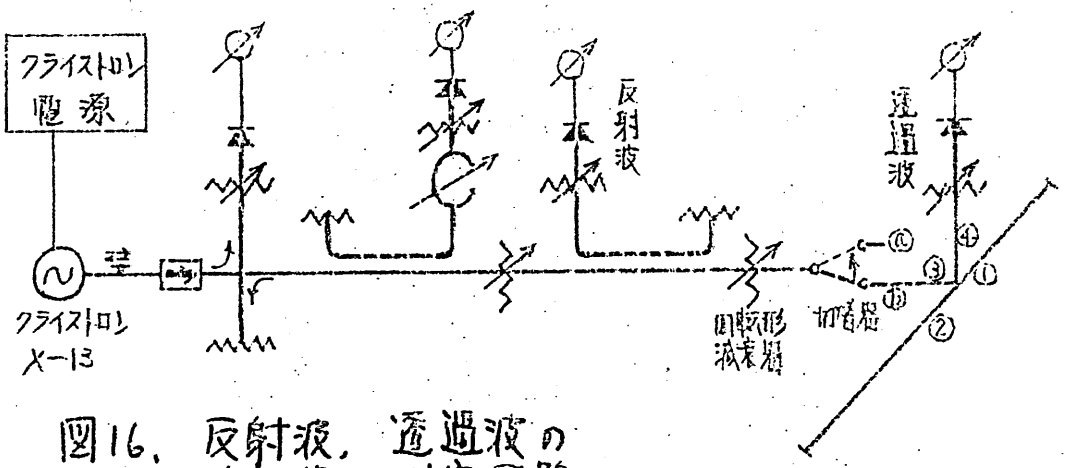


図16. 反射波，透過波の
挿入損失測定回路

測定方法は下記に示す通りである。

(i) 透過波
- 切替器ⓑ，腕④の検波出力 150μW，回転形減衰器 1.0 dB
- 切替器ⓐ，ⓐの　〃　〃　〃　A dB

挿入損失 $=(A-1.0)$ dB

(ii) 反射波（切替器ⓐ短絡，腕④無反射終端器接続）
- 切替器ⓑ，反射波の検波出力 150μW，回転形減衰器 1.0 dB
- 切替器ⓐ，　〃　〃　〃　B dB

挿入損失 $=(B-1.0)\times 2$ dB

[注] 2倍にするのは，電波は往復にするため

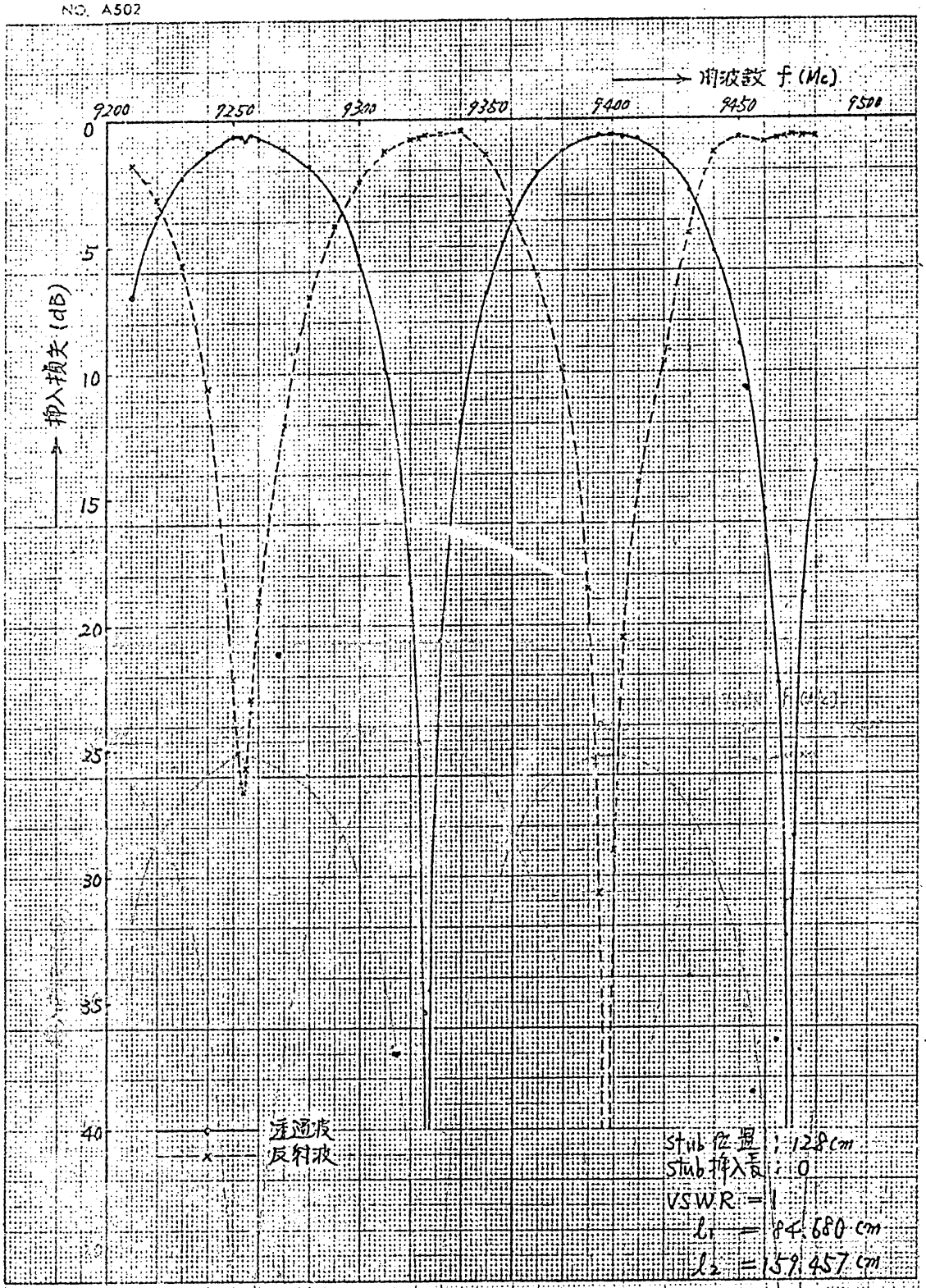


図 17-1 挿入損失と周波数との関係 ($\gamma = 1$)

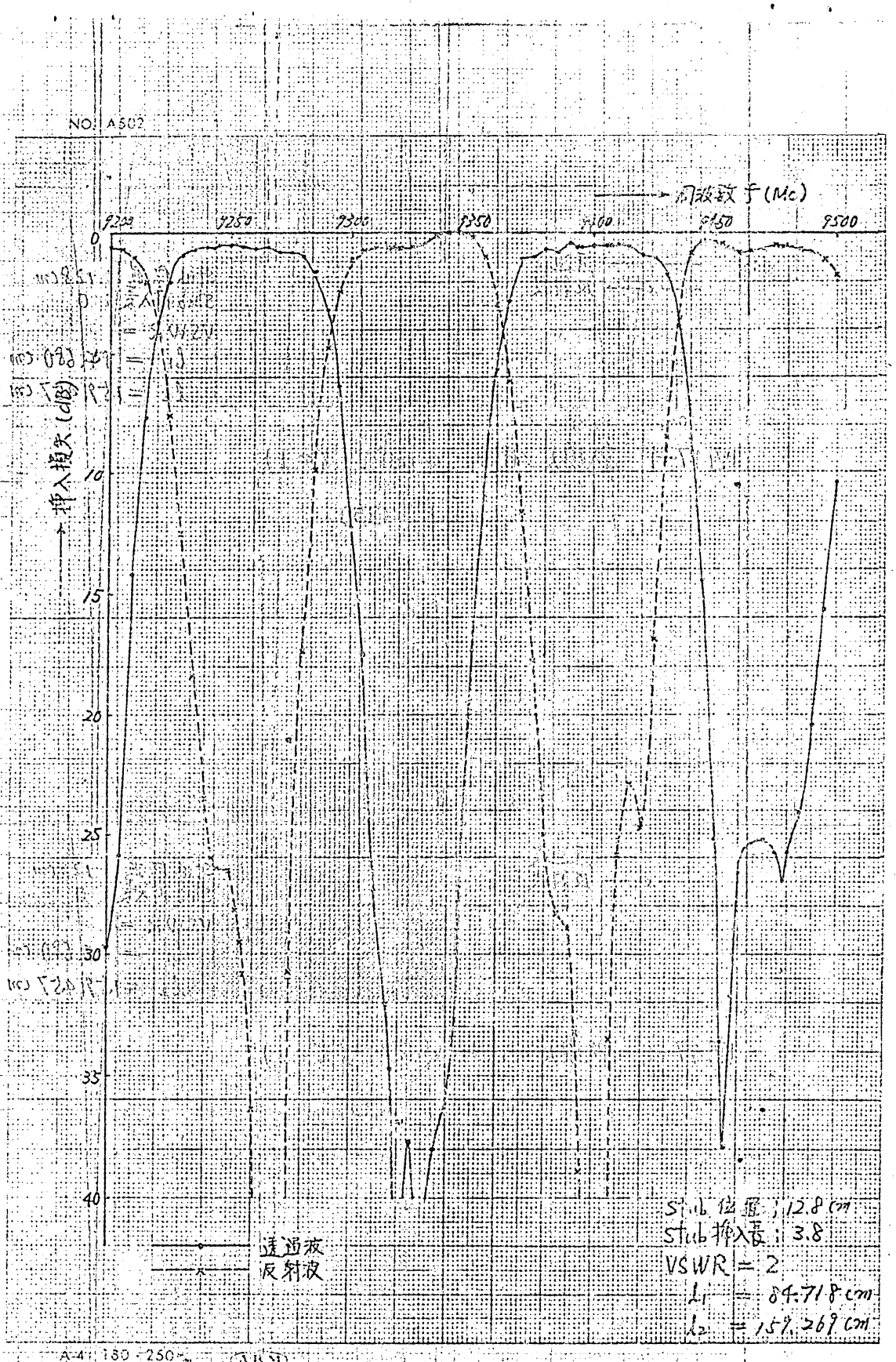


図 17-2　挿入損失と周波数との関係 ($\delta = \frac{1}{2}$)

図 17-3　挿入損失と周波数との関係 ($\gamma = \frac{1}{3}$)

なお，側路長 l_1，l_2 は，掃引波形観測で得られた値を用いている．

図17に VSWR＝1，2，3 の場合について測定した挿入損失と周波数との関係を示す．この測定結果から，諸特性をまとめたものを表4に示す．

VSWR＝1

最大振幅周波数 (Mc)					交叉点周波数 (Mc)		
透過波	差	反射波	差	挿入損(dB)		差	挿入損(dB)
9257	+0.5			0.6	9221.5	+0.3	3.6
		9327	−0.4	0.6	9292.5	+0.7	3.7
9398	−0.8			0.6	9360.5	−2.7	3.9
		9470	−0.9	0.6	9432.5	−2.0	3.3

VSWR＝2

9256	−0.5			0.5	9220	−1.2	3.8
		9327	−0.4	0.5	9291.5	−0.3	3.9
9399	+0.2			0.5	9362	−1.0	4.1
		9470	−0.9	0.5	9435	+0.5	3.5

VSWR＝3

9255	−1.5			0.5	9219	−2.2	3.9
		9326	−1.4	0.4	9291	−0.8	4.7
9398.5	−0.3			0.5	9362	−1.2	4.8
		9470	−0.9	0.6	9434.5	0	3.7

表4.　(注) 差とは，計算値と測定値との差である．

最大振幅周波数は計算値との差が +0.5 ～ −1.5 Mc の範囲内に入っており，挿入損失は 0.5～0.6 dB 程度である．

§5. 検討および考察

(1) 最大振幅周波数と側路長との関係

最大振幅周波数は，計算値と測定値が一致するように，側路長 l_1，l_2 を調整している。このとき，l_1，l_2 の値は表3に示すように，計算値と実験値とでかなりの差がある。

例えば，VSWR＝1 の場合，表5に示すように，計算値に対し実長は l_1，l_2 共に約3cm 短かい。これは，主として導波管の断面寸法誤差に起因するものと思われる。

	計算値 (cm)	測定値 (cm)	差 (cm)
l_1	75+12.8＝87.8	84.680	3.120
l_2	150+12.8＝162.8	159.457	3.343

表5.

(2) Stub の影響

反射物に用いたインピーダンス変換器の Stub 直径は 2.4 mm であった。この stub を挿入することにより，stub のリアクタンス分が増加していく。このリアクタンス分の変化を等価的に線路長 δ で表わす

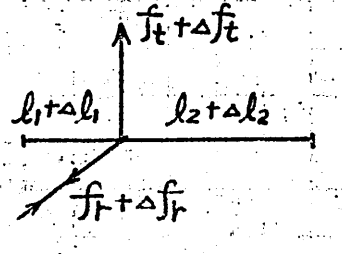
と，表6のようになる。したがって，VSWRが2～3程度でも用いる反射物のリアクタンス分の等価長が約3mm程度になり，この影響を無視することはできない（図18参照）。

VSWR	Stub挿入長 (mm)	l_2-l_1, (cm)	Stubの等価長 δ (mm)
1	0	74.777	0
1.08	1	74.756	0.021
1.2	2	74.727	0.050
1.5	3	74.633	0.144
2	3.8	74.551	0.226
3	4.67	74.442	0.335
4	5.15	74.357	0.420
5	5.48	74.309	0.468
24	7	74.032	0.745

表6.

(3) 最大振幅周波数に対する側路長誤差の影響.

(i) 側路長 l_1 および l_2 に誤差がある場合。ただし，$l_1+\Delta l_1 = \frac{1}{2}(l_2+\Delta l_2)$ とする。



付録2より，側路長誤差の影響は次式で示される。

$$\text{反射波}: \Delta f_r \fallingdotseq -\frac{c^2(2n+\frac{1}{2})^2}{4 f_r l_2^3}\Delta l_2 \quad (27)$$

$$\text{通過波};\ \Delta f_t \fallingdotseq -\frac{C^2(2n+\frac{3}{2})^2}{4 f_t l_2^3}\Delta l_2 \qquad \Big\} (27)$$

(ii) 側路長 l_1 のみに誤差がある場合は，式(27)において，Δl_2 を $-2\Delta l_1$ に置き代えれば良い。

(iii) 側路長 l_2 のみに誤差がある場合は，式(27)において，Δl_2 を $+2\Delta l_2$ に置き代えれば良い。

ゆえに，(ii)および(iii)の場合，Δl_1 と Δl_2 の影響は，絶対値は同じで符号が逆の関係になる。

$l_2 = 2l_1 = 150$ cm のとき，側路長誤差の影響，すなわち，Δl と Δf との関係を計算した結果を図18に示す。同図から，側路長は，かなりの厳密さが要求されるように思われる。

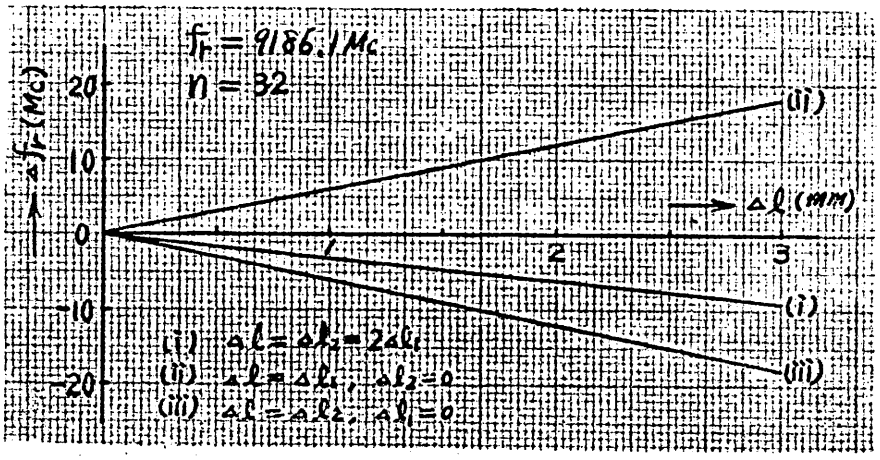


図18. Δl と Δf との関係

(4) 挿入損失および漏洩量

(i) 挿入損失

測定結果では，挿入損失は 0.5～0.6 dB で少し大きいようである。われわれは，市販の方形導波管 WRJ-10（銀メッキなし）を用いているが，導波管減衰量は 0.15 dB/m 程度のものと思われる。いま導波管全長を約 2.5 m とすると，導波管減衰量は約 0.37 dB になり，他の回路素子（マジックティー，インピーダンス変換器，可変短絡板（チョーク付））による減衰量が約 0.18 dB 程度になるのではないかと思われる。

(ii) 漏洩量

VSWR＝3 ($\gamma=1/3$) のとき，漏洩量の測定値は，−18 dB 程度である。一方，計算値は −22.3 dB（図7参照）である。したがって，両者の間に約 4 dB 程度の差がある。これは，側路長 l_1, l_2 が 1：2 になっているために，側路〔1〕と〔2〕の導波管減衰量が異なり，振幅差が生じていることと，マジックティーに 0.1 dB 程度の振幅のアンバランスがあるためと

によるものと思われる。

(5) 許容漏洩量とVSWRとの関係

この前置分波器の周波数特性平坦化は，VSWR=2 ($\gamma=1/2$) のときが最適ではなく，許容される漏洩量が与えられると，図7において，中が最大になる最適のVSWRが存在する。

例えば，図7において，許容漏洩量が−22dBとすると，VSWRは2 ($\phi_{max}=46°$) よりも3 ($\phi_{max}=67°$) の方が最適となる。

§6. 結言

マジックティーを用いた前置分波器において，周波数特性を平坦化する回路系について考察し，基礎的な諸特性の実験結果を報告した。

ここで得られた結果から

(1) $\gamma=1$ に比べて $\gamma=1/2$ のときに $\phi=0, \pi$ 付近が平坦である。したがって，中心周波数，側路長が若干変化しても特性に大きな変化がない。また，

信号に周波数帯域を考えても良い。

(2) 許容漏洩量によって，$\gamma = 1/2$ 以下に最適値がある。

(3) $\gamma = 1/2 \sim 1/3$ (VSWR = 2~3) 程度を考えれば，反射物の構成はむつかしくなり。また，反射物の反射係数の周波数特性も小さい。

(4) 図5(b)と(d)を比べて．(d)では側路長が3倍必要である。したがって，挿入損失が多くなり，回路系も大きくなる。

等が結言される。

最後に，実験に協力して頂いた本学大学院学生山県淳，松村正典両君に感謝します。

文献

(1) 山本．宮内 "共通搬送波発生装置用プリセレクタ" 昭40信学全大 No. 376

付録 1

式(19)より

$$l_2 = \frac{2\pi}{\Delta\beta} = \frac{2\pi}{\beta_1 - \beta_0} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda g_1} - \frac{1}{\lambda g_0}} \qquad (A.1)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\lambda g_1} &= \frac{\sqrt{f_1^2 - f_c^2}}{C} = \frac{\sqrt{(f_0 + 2\Delta F)^2 - f_c^2}}{C} \fallingdotseq \frac{\sqrt{f_0^2 + 4\Delta F f_0 - f_c^2}}{C} \\ \frac{1}{\lambda g_0} &= \frac{\sqrt{f_0^2 - f_c^2}}{C} \end{aligned}\right\} \qquad (A.2)$$

式(A.2)を(A.1)に代入すると，l_2は

$$l_2 \fallingdotseq \frac{C}{\sqrt{f_0^2 + 4\Delta F f_0 - f_c^2} - \sqrt{f_0^2 - f_c^2}}$$

$$\fallingdotseq \frac{C\sqrt{f_0^2 - f_c^2}}{2\Delta F f_0}$$

$$= \frac{\lambda_0}{\lambda g_0} \frac{C}{2\Delta F}$$

となり，本文式(20)になる。

付録 2

$l_1 + \Delta l_1 = \frac{1}{2}(l_2 + \Delta l_2)$ とすると，式(23)を l に関して微分すると，$\frac{df_r}{dl_2} = -\frac{C^2(2n+\frac{1}{2})^2}{4 f_r l_2^2}$

輻射科学研究会資料
7-29/66 於 住友電工

鉱石検波器のサブミリ波帯感度

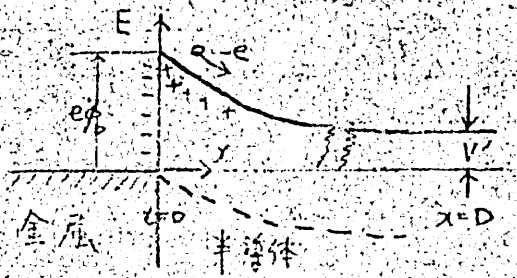
大阪市大 工 村井 [illegible]

概要 鉱石検波器は針の直下に生ずる空乏層の容量Cでの短絡効果の為、通常短ミリ乃至サブミリ波帯でその感度は急激に低下する。此の感度低下域での非線型抵抗Rおよび容量Cは一定パラメーターでなく、吸収部での衝突散乱の過程等から、更に周波数依存性をもっている。その結果、単純なC－R並列回路の $\omega CR>1$ 範囲での感度低下 −20 db/Dec. に対し、Rの周波数依存性を考慮すると、計算上 −60 db/Dec.、実験上略 −50 db/Dec. の感度低下を得た。[1] 又数値計算の結果、ドナー密度を増大する事によりサブミリ波帯での低下を防げる可能性も示した。[2]
鉱石検波器を冷却すれば電圧－電流変換因子 $\alpha = q/kT$ の増大により感度低下を減少出来る可能性がある。液体窒素冷却した鉱石検波器で実験した。その結果、a) 小入力下ではキャリヤー密度減小による抵抗値の増大、b) 大入力下での冷却は針直下の温度はあまり冷却されていない、c) 接触の不安定さによる雑音らしきものが急増する、を得た。[3]
尚、現在CN型SMASERとミリ波VM管の鉱石逓倍高調波間のヘテロダインビート検出実験を行っている。[4]

I. 緒言 赤外域の輻射の検出器には通常 Golay cell, 熱電対, ボロメーター等の熱作用によるものと、光伝導効果による InSb, InAs 等及び Ge 基板に Au ドープ, Sb ドープ等及び InSb の磁気光伝導効果を利用した Putley detector 等がある。[5] 前者は可成りの高感度（Golay det. で NEP $10^{-10} \sim 10^{-11}$ Watt）をもち殆ど波長依存性をもたない事で、時定数の長い欠点（~10 msec.）はあるが、分光装置、フィルターと並用してよく用いられる。これはそのままサブミリ波帯にも用いる事が出来る。
後者は材料によって夫々使用帯域をもち、極低温冷却によって低雑音、高感度（NEP $2\cdot10^{-10} \sim 5\cdot10^{-12}$ Watt）且短い時定数（$10^{-3} \sim 10^{-7}$ sec）をもっている。サブミリ波帯では Putley detector が有力である。
従来の微小出力且インコヒーレントな遠赤外光に対して、鉱石検波器を前二者と比較するのはあまり意味が無い。鉱石検波器の優れた点は 10^{-12} sec. 程度の時間分解能を有する点及び取扱いの容易な点であるが、低下した感度により一般に使えなかった。
レーザー技術の発展により、例えばCN型SMASでは 337 μ の発振出力は略 10 Watt と云われている。此の様な高入力に対しても鉱石検波器の感度は幾らであろうか。此の点に最も興味を持って以下の解析及び実験を試みた。

II. 導電率及び誘電率の周波数依存性

半導体材料はn型とし、導電率σはキャリヤーの平均衝突時間τ及びドナー密度、キャリヤー密度に依存するとする。金属、半導体接觸の一次元模型をとり、接觸点を$x=0$とする。更に、接觸電位差を$-\phi_0$とし、外部よりの印加電圧（D.C.＋A.C）をV'とすると（オ1圖）



オ1圖　空欠層の構成

ポアソン方程式

$$\partial^2 V/\partial x^2 = -\frac{e}{\varepsilon}(n_+ - n_-) \qquad (1)$$

が成立する。n_+, n_-は正負電荷密度である。

空欠層の近傍式を考えるなら、室温下では

$$\left.\begin{aligned} n_+ &= N \ (\text{ドナー密度}) \\ n_- &= 0 \ \left(\begin{array}{l}\text{熱励起されたキャリヤーは} \\ \text{位置エネルギーの低い方へ} \\ \text{移動した}\end{array}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

が近似的に成立する。(1)式を(2)式及び境界條件

$$\begin{cases} x=0 \text{ で } V=-\phi_0 \\ x=D \text{ で } \partial V/\partial x = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

で解くと

$$V = -\frac{eN}{2\varepsilon}x^2 + \frac{eND}{\varepsilon}x - \phi_0 \qquad (4)$$

$$D = \left[\frac{2\varepsilon}{eN}(V_0+\phi_0)\left(1+\frac{V_1}{V_0+\phi_0}\cos\omega_1 t\right)\right]^{1/2} \qquad (5)$$

$$E = \frac{eN}{\varepsilon}x - \frac{eN}{\varepsilon}D \qquad (6)$$

を得る。茲に $x=D$ で

$$V' = V_0 + V_1\cos\omega_1 t \qquad (7)$$

を用いた。

Dの大いさはミクロンの程度となり、例えば外部から1 Voltを加えたとすれば、その殆どが此の空欠層に加はるから、此の中の電界強度は10^6 Volt/meter の強電界に相当する。此の一種の電界増強材料のお陰で全マイクロ波帯から短ミリ波附近迄、満足すべき整流、高調波発生等が出来たと考えられる。

空欠層内での自由電子の運動を考える。有効質量m^*、平均衝突時間τにより運動方程式は

$$m^*\ddot{x} + \frac{m^*}{\tau}\dot{x} = -eE \qquad (8)$$

(5)(6)式及び関係 $x = x_n e^{jn\omega_1 t}$ を用いて、(8)の解は

$$x_n = -\frac{e}{m^*}(-E_n)\left\{\omega_p^2 - (n\omega_1)^2 - j\frac{n\omega_1}{\tau}\right\} \Big/ \left[\left\{\omega_p^2-(n\omega_1)^2\right\}^2 + \left(\frac{n\omega_1}{\tau}\right)^2\right] \qquad (9)$$

茲に

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{jn\omega_1 t} = \left[\frac{2eN}{\varepsilon}(\phi_0+V_0)\left(1+\frac{V_1}{V_0+\phi_0}\cos\omega_1 t\right)\right]^{1/2}$$

$$\omega_p^2 = \frac{e^2N}{m^*\varepsilon} \quad \text{(ドナー密度のプラズマ角周波数)}$$

キャリヤー密度をMとすれば、全電流密度は導電率、誘電率と

$$J = -eM\dot{x}_{real} - eM\dot{x}_{imag} - \partial D/\partial t = \sigma(-E_n) - (\Delta\varepsilon+\varepsilon)(-jn\omega_1 E_n) \quad (10)$$

で結ばれるから

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\tau}\left\{(\omega_p^2/\omega\omega_g - \omega/\omega_g)^2 + (1/\tau\omega_g)^2\right\}^{-1} \quad (11)$$

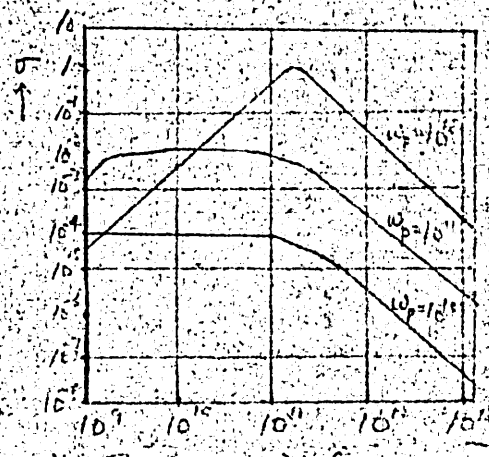
$$\Delta\varepsilon = -\varepsilon\omega_g^2(\omega_p^2-\omega^2)\Big/\left\{(\omega_p^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2\right\} = \tau\sigma\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad (12)$$

を得る。茲に

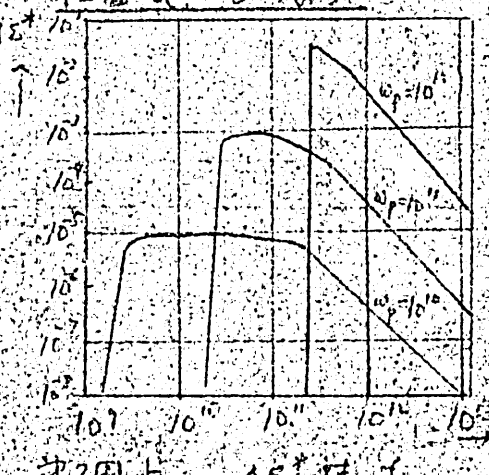
$$\omega_g^2 = \frac{e^2M}{m^*\varepsilon} \quad \text{(キャリヤー密度のプラズマ角周波数)}$$

$n\omega_1$ (ω_1のn倍高周波) $= \omega$ と略記した。

第2図 a), b) に $N = 3\cdot10^{15}/c.c.$, $3\cdot10^{13}/c.c.$, $3\cdot10^{15}/c.c.$ 下で $\tau = 10^{-12}$ sec., $\omega_g = \omega_p/10$, $m^* = m$ として求めた f 対 σ 及び $\Delta\varepsilon^*$ の結果を画いた。茲に考察下の周波数範囲について、束縛電子の変位によって生ずる比誘電率を $\varepsilon^* = 10$ に固定した。すると伝導電子の位相オクレより生じた $\Delta\varepsilon^*$ は ε^* に対して最大 1/100 しか寄与しない事になった。これはパラメトリックな作用を呈するので小とは云え問題は残るであろう。

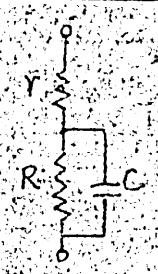


第2図 a　σ対f



第2図 b　$\Delta\varepsilon^*$対f

III. 等価回路



第3図 等価回路

第3図に通常の点接觸検波器の等価回路を示す。rは拡がり抵抗、Rは非線型抵抗、Cは非線型成分も含むバリヤー容量とする。他の回路要素は同調をとる事によって除かれたとする。

此の等価回路の、RC並列のインピーダンスZに加はる分圧対全電圧の比は

$$\left|Z/_{r+Z}\right| \doteqdot \left|R/_r + (R/_r)^2 - j(\omega C R^2/_r)\right| \Big/ \left\{(1+R/_r)^2 + (\omega C R)^2\right\} \qquad (13)$$

高周波領域では $\omega CR > 1$ 且一般に $R/_r > 1$ 故、近似的に

$$\left|Z/_{r+Z}\right| \doteqdot \left\{1 + (\omega C r)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

これは非線型抵抗Rに無関係になって了ふ。$r = 3\Omega$, $R = 100\Omega$, $C = 1$ pF の数値下で、$f = 5\cdot 10^{10}$ Hz で $\omega C r = 1$ となり、これより高い周波数範囲での検波利得は -20 db/Dec となる。小振巾下での低周波に対する検波出力比は(14)式を2乗して得られ、第4図中で点線で示す。

式(14)に於いて、rとσの間には接觸半径 a_0 の下で $r = \frac{1}{4\sigma a_0}$ の関係がある。Cの変化を無視して、(11)式を(14)式に代入して

$$\left|Z/_{r+Z}\right| \doteqdot \left[1 + \omega^2 C^2 r_L^2 K^2 \left\{(\omega_p^2/\omega\omega_q - \omega/\omega_q)^2 + (1/\tau\omega_q)^2\right\}^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (15)$$

茲に $r_\omega = r_L \sigma_L/\sigma_\omega$、添字Lは低周波での値、ωは高周波での値とした。$i = i_0(e^{\alpha v} - 1)$ に代入して

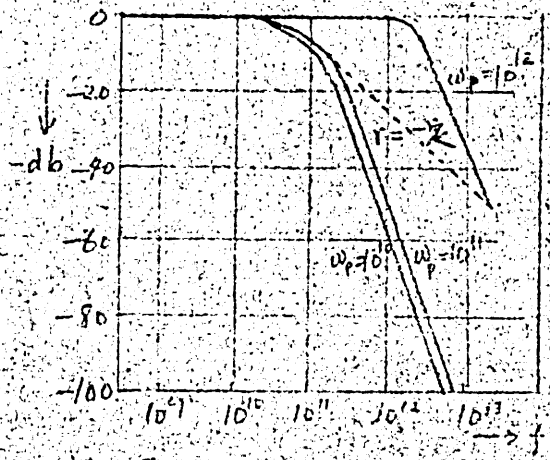
$$i_\omega/i_L = \left[1 + \omega^2 C^2 r_L^2 K^2 A^2(\omega)\right]^{-1} \qquad (16)$$

茲に

$$A(\omega) = (\omega_p^2/\omega\omega_q - \omega/\omega_q)^2 - (1/\tau\omega_q)^2$$

(16)式は -60 db/Dec を示す。

$\omega_L = 10^{10}$ に於いて $r_L = 3\Omega$ として f に対する感度低下を画いたのが第4図である。



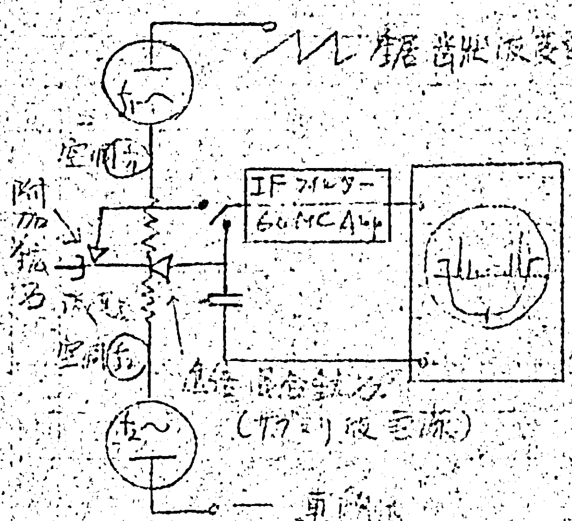
第4図 f対感度低下

- - - 式(14)²

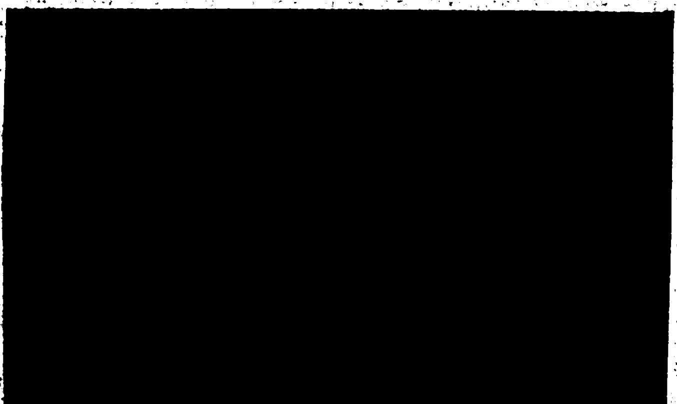
—— 式(16)

IV. 常温での低下感度の実験 ①

適当なサブミリ波電源が無いので、(16)式の検証は容易でない。二本のミリ波反射型クライストロンの出力を一ケ鉱石に加え、両者の周波数がサブミリ波で最小公倍数6がその整数倍になるようにすると、鉱石内で最高1155GC迄の高調波同志のビートが得られた事を報告した。⑥⑰ 此の時、可動短絡板の移動や鉱石の回転、高さ変化等により、各高調波同志のビート出力は大巾に変化し、鉱石近傍で各高調波の定在波が存在してゐる事がわかる。それで此の遁倍混合鉱石の附近に別の鉱石マウントを接続し、数cmの伝送路を経て各高調波の減衰は同じと仮定して、附加鉱石で検出した高調波ビートの減衰から、遁倍、混合鉱石内のビート検出の高調波次数による減衰を差引いて、サブミリ波域の低下感度を得ようとした。



オ5図a) 装置略図



オ5図b) 遁倍混合鉱石より得た60MHzビート。35GHz+52.5GHzの遁倍混合で、左端より105GHz 210, 315, 420, 525, 630GHz同志の60MHzビートである。

オ5図a)の配置により、今、$\omega_2 = 2\omega_1$の関係とすれば、遁倍混合鉱石出力の60MHzの出力振巾は

$$V = V_0 + V_1 \cos\omega_1 t + V_2 \cos\omega_2 t$$

を

$$i = i_0 (e^{\alpha V} - 1)$$

に代入して

$$i\binom{\omega_2 = 2\omega_1}{IF = 60MHz} = 2 i_0 e^{\alpha V_0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(\alpha V_1) I_n(\alpha V_2) \right] \qquad (17)$$

を得る。高次ビートを得るにはV_1, V_2出力を夫々50mW近傍にするが、此の時は解析の結果αが非常に低下してをり(約13位)、それ丈接触点の温度が上昇してゐるのであらう。

遁倍混合鉱石より得た60MHzビートの一例をオ5図b)に示す。更に入力を増大し、掃巾度を増加して調べると此の場合最高1165GHz同志のビートが得られてゐる。鉱石は1N53である。此の検出系で60MHz増巾器を附加鉱石の方に切換えると、低い方から最高3本迄のビート出力が同位置に得られ、315GHz迄の成分は検出する事が出来た。此の鉱石は分解再生した1N53である。

此の両者の周波数に対するビート振巾の勾配から低下感度を求めた。

V. 超伝導体冷却の応用

磁束増殖の公式は次式のごとく同一

$$I = I_0\left(e^{eV/kT}-1\right) = e n_0 e^{-e\phi/kT} u(T)\left\{e^{eV/kT} + \frac{1}{2!}\left(e^{eV/kT}\right)^2 + \frac{1}{n!}\left(e^{eV/kT}\right)^n + \right\} \quad (18)$$

となり、右辺の中括弧は温度低下と共に n 倍波が $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n$ 倍有利になる因子をもつものである。もう一つの利点は handling power の増大が期待出来ると共に、簡単な熱伝導方程式 $\alpha \nabla T + G/wc = \partial T/\partial t = 0$ から

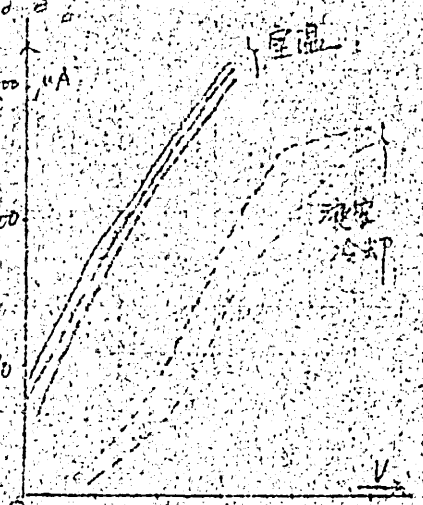
$$G_2/G_1 = (T_h - T_{w_2})/(T_h - T_{w_1}) \quad (19)$$

茲に

G_2 ; 冷却時の handling power
G_1 ; 無冷却時の handling power
T_h ; 接点での温度
T_{w_1} ; 無冷却時の壁温度
T_{w_2} ; 冷却時の壁温度

α ; 温度伝導率
G ; 供給 cal/cm²h
w ; 比重量
c ; 比熱

が得られる。$T_{w_2} = 77°K$、$T_{w_1} = 201°K$、$T_h = 305°K$ とすれば (19) 式は略々5となり約5倍の入力に耐えることになる。



第6図 a) V対I

第6図 b) V対I

予備実験の結果を第6図 a), b) に示す。冷却により仕事関数を越える電荷の数が減少し、抵抗値が増大し、拡がり抵抗と電荷とによる無効な交流がなくなる可能性が出てくる。第6図 b) から分かる通り、室温に比べて大きな V が得られる点 (約40)、そこから、より電圧、電流を増すことは急激に低下し、室温と殆ど差異無くなるまでは、接触点の発振上昇を意味するものである。

上の実験は結晶性の劣化した3本の1/N26鉱石を用い、リードをつけて超伝導中に浸した。そのうち二本は冷却により崩壊となってしまった。

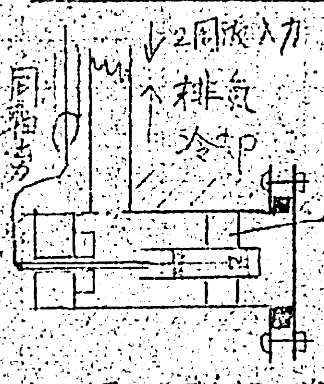
超伝導冷却鉱石ウィスカーとして

1) 逆位高調波ビート発生用に円筒性の二周波同調空洞を作成したい時と排気した液体室内に設置が出来る。

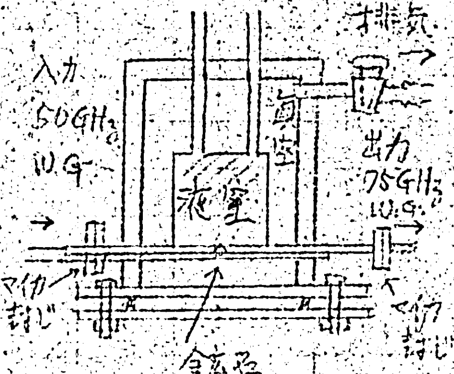
2) サブミリ波検出用として金属製応鏡の底に鉱石ウィスカーを取付け、中に液体窒素を入れる事により冷却出来る。

上記2ケを試作した。(第7,8図)

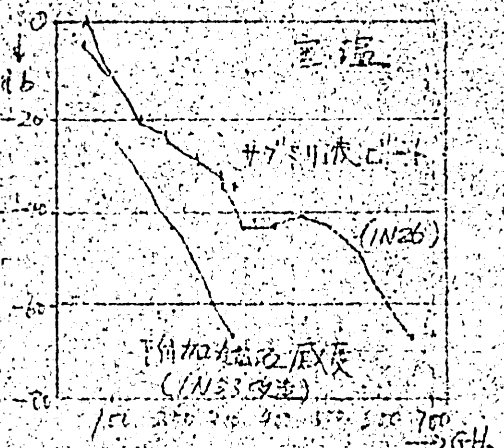
VI. 実験結果



オ7図 逓倍高調波発生用マウント（1N26用）



オ8図 冷却逓倍検波用マウント



オ9図 ビート出力と検波感度（常温）

常温でのサブミリ波発生には25GHz→50GHz二逓倍鉱石マウント及び35GHz→70GHz二逓倍マウントを用いた。オ5図の構成で実験した結果、オ9図を得た。此の両者の周波数に対する勾配の大きさと略−50dbで得た。附加鉱石の調整が容易でなく実際のサブミリ波域での低下感度でないが、これ迄の所略直線的に低下しているのでそのまま外挿した値である。

次にサブミリ波電源として最も高い周波数を得たのがオ7図の二周波同調マウントで最高1155GHz周波のビートが得られた。これを液体空気で冷却すると全般にビートは減小するが、特に低次高調波ビート上の減少が著しい。最高は同じ1155GHzを記録し、キャリヤー減小とXの増加と、高次高調波で有理な條件が成立つことが分かった。而し常温に比べ、より大きくなる成分は観測されなかった。

以上の結果をオ1表に示す。

速度変調管子		出力		鉱石マウント形状	鉱石	観測した最高ビート
25GHz	50GHz	80mW	60mW	25GHz→50GHz	1N26	650GHz
50GHz	75GHz	70mW	60mW	35GHz→70GHz	1N53	750GHz
35GHz	52.5GHz	80mW	60mW	オ7図（常温）	1N26	1155GHz
35GHz	52.5GHz	80mW	60mW	オ7図（液空）	1N26	1155GHz
附加鉱石				短絡板付150GHz	改造1N53	315GHz

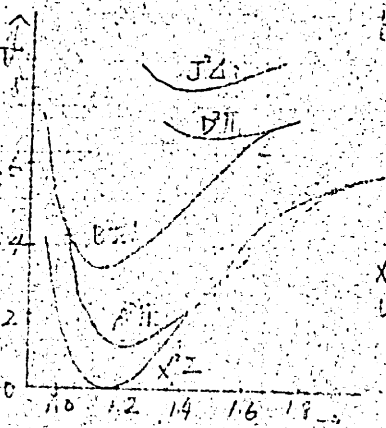
オ8図のマウントは1N26鉱石に直接かって使用するが、消耗が激しく、未だ好結果を得ていない。50GHz入力に対し微小な150GHz出力を得たに止まっている。

VIII SMASE出力の検波⑨

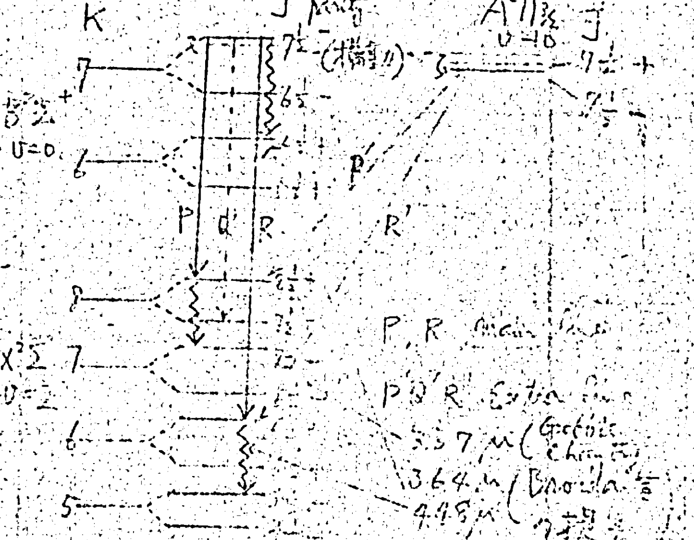
現在サブミリ波を発生する気体レーザーとしてはNe, H_2O, D_2O, A, CN基が知られている。CN基の発振は長波長 310, 337, 538 ダブリミクロンが知られ、⑩より長波長の可能性もあり、又他物質での発振可能性もある。

鉱石検波器のサブミリ波帯低下感度が -6.0 db/DEC とすれば 0.3 mmで出力 1.0 Watt は波長3 mmで出力 1.0 mWの感度と同じと思え試みた。現在の所、装置が不充分で発振波長が不明であるが、出来ればクライストロンの高調波とのヘテロダインビートを測定して波長精度を一挙に引上げたいと考えている。

CN基 SMASER の発振機構を Chantry モデル⑪に従って説明する。放電で解離したCとNは結合して二原子分子CN基に成るが、その際 population は勝手に $A^2\Pi$ と $B^2\Sigma$ になる。1 mm Hg以下の低圧においてA, B間の摂動により 10〜20 がBに移り、B→X遷移によりX内で回転準位の反転分布が得られ、サブミリ波発振する。



第10図 a) CN基のポテンシャル



第10図 b) K=7でのChantry modelとBroida等の提案(K=11,15での準位)

のがChantry modelで、Broida等はその他の準位からの発振を試み、他に11本の発振があり、その推定波長を計算したものである。⑫ 而して774 μはこれで説明されず、又A, X間にも摂動が存在して、こちらでの発振可能性もある。

二原子分子の回転スペクトルは

$$\nu = 2B(J+1) - 4D(J+1)^3 \quad (\mathrm{cm}^{-1}) \tag{20}$$

$$B = \frac{h}{8\pi^2 cI} \quad \text{rotational constant}, \quad I = \text{慣性能率}$$

$$D = \frac{4B^3}{\omega^2} \ll B \quad \text{stretching constant}, \quad B_v = B_e - \alpha(v+\tfrac{1}{2}) + \cdots,\ D_v = D_e + \beta_e(v+\tfrac{1}{2}) + \cdots$$

J = 全回転量子数

で表わされる。⑬ CN基の B_e 値を第2表に示す。

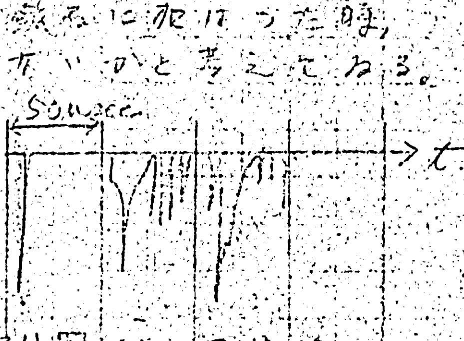
$C^{12}N^{14}$	B_e
$B^2\Sigma^+$	1.9701 cm^{-1}
$A^2\Pi$	1.7165
$X^2\Sigma^+$	1.8996

第2表 B_e 値

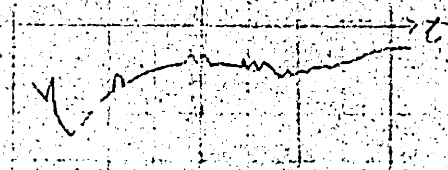
$D \ll B$ が成立するので、クライストロンの周波数と略 $2Bc/m$ (m 整数) に状べば、その $m(J+1)$ 逓倍(整数)の近傍で両者のヘテロダインビートが期待される。

長さ2m、内径7cmのレーザー管を作り、CH_3CNを封入し、コンデンサー充放電で励起した。ミラー調整、圧力調整により、直接検波出力、ヘテロダインビートともに得られたが、波長決定が遅れている。又鉱石の消耗も激しく、1N53が損傷したまま、不完全ながら報告する。尖頭出力が10Watt以上にするとこれが鉱石に加わった時、或は点接触部の過剰温度上昇で破壊されるのではないかと考えている。

第11図a)は直接検波により多くのスパイクが観測された例で、発振ではないかと考えているが、此の時の放電電流波形は左端から始ったのでなく、一寸遅れているし、時間関係が不明確である。



第11図a) 直接検波



第11図b) ヘテロダイン検波

第11図b)は鉱石検波器に55GC帯クライストロン出力を局部発振器として用い、遠赤スペクトルとのビートを目的にしたものである。ゆるやかな曲線は励起パルスの誘導波を拾ったもので、この上にビートらしきものが沢山観測されるが、クライストロン周波数を変化させても、そうクリティカルな変化を示さないのでよく分からない。

これらを明確にする為、長い励起パルスによる連続発振を目的にして現在準備中である。

IV 結論

鉱石検波器の優れた時間分解能をサブミリ波帯で利用出来ないかと考え、鉱石の高調波合成により沢山のサブミリ波高調波ビートスペクトルを得た。これを実際にて検波感度の低下を実験に−50db、理論に−60dbを得た。この低下を増巾器で補う事が出来れば大出力のサブミリMASERの直接検波、ヘテロダイン検波の可能性があると考え、これを実験した結果、感度のある事は分かったが波長が未決定の為、である。鉱石の改善実験は我々の手が及ばないが、ドナー密度の増大で感度低下を減少させる可能性のある事は、最も実験したい因子である。

謝辞

熱心に実験に協力戴いた本学大学院学生 関本、片山、斎藤君、討論及び御援助戴いた沖電気中島部長、新井、川島両氏に深く感謝する。尚文献を御教示戴いた阪大工吉永教授並に日立中研 島田氏に感謝する。

文献

① CN型レーザー
村井 片山 斉藤 物理応物合同講演会予稿集 P.268 1966.4
② Heterodyne Beats Between Sub-mm Wave Components Generated in a Crystal Detector
A. Murai 1964 ICMCI 11波国際会議予稿集 P.123-124
③ 鉱石逓倍による400μスペクトルの発生
村井 物理学会第19回分科会予稿集 1964.10
④ CN型SMASERの発振特性
村井 物性研短期研究会資料 1966-7-19
⑤ The Detection of Sub-mm Radiation
E. H. Putley Proc. I.E.E.E. Nov. 1963 PP 1412-1423
⑥ サブミリ波のヘテロダインビートの発生
村井 輻射科学研究会資料 昭和39年5月23日
⑦ Heterodyne Beats between Sub-mm Wave Components Generated in a Crystal Detector
A. Murai Memoirs of the Faculty of Engineering Osaka City Univ. Vol.6, Dec. 1964
⑧ CN型SMASERと鉱石検波器
村井 メーザー・レーザー懇談会資料 1966-5-30
⑨ A Stimulated Emission Source at 0.34 millimeter Wave-length
H. A. Gebbie N. W. B. Stone F. D. Findlay Nature No.4933 May 16 1964 P.685
⑩ Comments on a New Laser Emission at 0.774 mm Wavelength from ICN
H. Steffen, J. Steffen, J. F. Moser, F.K. Kneubühl
⑪ A suggested Mechanism for the 337μ CN Maser
G.W. Chantry H.A. Gebbie & J.E. Chamberlain Nature 205 (1965) P.377
⑫ Comments on the Mechanism of the 337μ CN Laser
H.P. Broida K.M. Evenson & T.T. Kikuchi J.A.P Vol.36 No.10 (1965) P.3355
⑬ Spectra of Diatomic Molecules
G. Herzberg D. Van Nostrand Co., Inc. May 1950

研技弱－２９７

輻射科学研究会資料

円形漏洩導波管

中原　恒雄
倉内　憲孝
木谷　博

（住友電気工業株式会社）

１９６６年７月２９日
（於：住友電工）

目　次

1. 緒　　言

2. 円形漏洩導波管

2.1 構造と特徴

2.2 円形導波管の特性

2.3 円形導波管に漏洩孔を設けた場合の特性

2.3.1 輻射損失

2.3.2 伝送損失と輻射損失との関係

2.3.3 不要モード

(1) 漏洩孔によるモード変換

(2) 曲がりにおける TM_{11} モードと TE_{01} モードとの干渉

2.3.4 指向性

(1) 管軸を含む面内の指向性

(2) 管軸に直角な面内の指向性

3. 円形漏洩導波管の障害物探知への応用

3.1 障害物探知用漏洩導波管の構成と特徴

3.1.1 構　　成

3.1.2 特　　徴

3.2 平面反射板の特性

3.2.1 平面反射器の設計

3.2.2 指向性の測定

3.2.3 温度伸縮

3.2.4 近端結合量の測定

3.3 放物断面反射板の特性

3.3.1 漏洩導波管の位置と結合量との関係の測定

3.3.2 漏洩導波管の位置と界分布との関係の測定

3.4 総合特性

3.4.1 総合特性

3.4.2 障害物探知距離限界

4. 結　　言

1. 緒　　言

TE_{01} モードを伝送モードとする円形導波管に漏洩孔を設けた円形漏洩導波管は、伝送損失が小さい、周波数特性が広帯域である、などよい特性を持っている。筆者らはこのことに注目し、内径 $13.2\,mm\phi$ のアルミ管に直径約 $1.0\,mm$ の漏洩孔を2列にわたって、さん孔した円形漏洩導波管を製作した。

本論文の前半は、製作した円形漏洩導波管の諸特性を伝送損失、輻射量、不要モードの面から明らかにしている。円形漏洩導波管の特性は漏洩孔によってほとんど決定される。

本論文では、この漏洩孔の直径と伝送損失の関係、伝送損失と輻射損失との関係などを実験的に求めた結果を示し、同時に TE_{01} モードと不要モードの干渉などに対する考察を試みている。不要モードに関しては、1) 不要モードへのモード変換による TE_{01} モードの減衰量の増加、2) 漏洩孔によって TE_{01} モードと TM_{11} モードの結退が解かれるのでこれによる曲がり導波管での TE_{01} モードの減衰定数増加の軽減などの考察点があり、これらに対して計算による検討を試みた。

この論文の後半では円形漏洩導波管を具体的に利用した例として障害物探知用漏洩導波管の特性についてのべている。漏洩導波管を利用した障害物探知方式（鉄道技術研究所の雨宮氏の提案によるもので漏洩波・擬レーダー方式[3]と呼ばれている）では障害物の存在位置を知るために軌道をはさんだ2本の漏洩導波管の間で近端結合が生じる必要がある。ところで前述の円形漏洩導波管を2本平行に並べると、電波は管軸に直角でなく斜めに輻射するため、2本の漏洩導波管の間で遠端結合が生じる。この遠端結合を近端結合に変えるために扇状の形をした平面反射板を製作した。障害物探知用漏洩導波管に関しては、この平面反射板の特性を中心に、装値の総合特性、障害物の探知距離限界などについてのべる。なお、円形漏洩導波管の他の利用例として列車通信用の伝送線路が考えられるが、この問題に関しては一例をのべ、詳しくは別の機会に報告していきたいと考えている。

2. 円形漏洩導波管

2-1　構造と特徴

実験に用いた円形漏洩導波管の外観を写真1に示す。

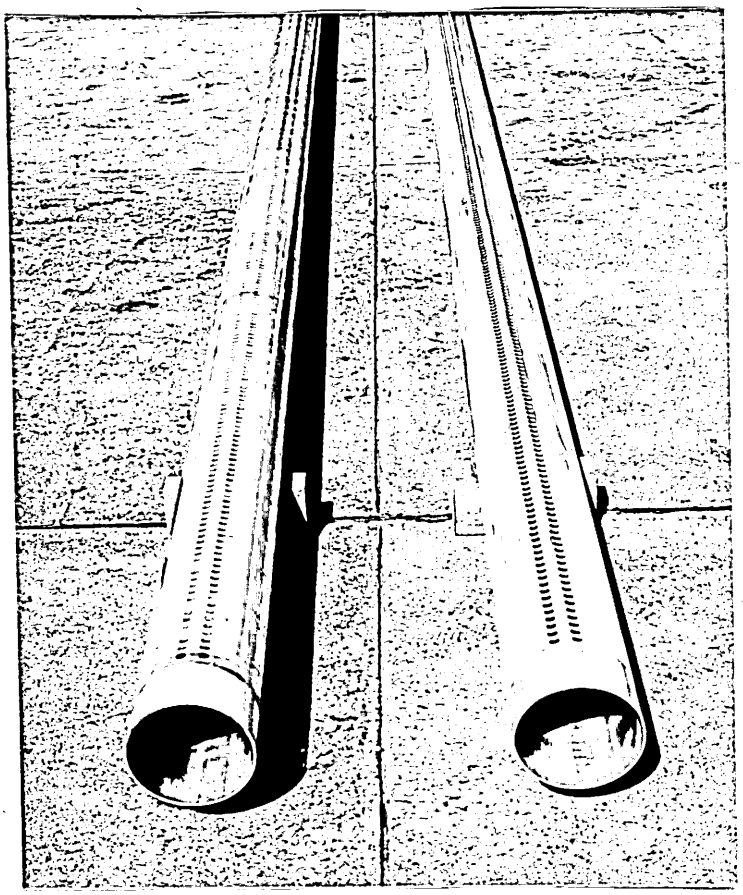


写真1. 円形漏洩導波管

(左側：強化プラスチックスで力バーがされている.)

(右側：力バーなし)

円形漏洩導波管は図2.1.1に示すように内径132mmφのアルミ管に直径約10mmφの漏洩孔が伝送方向に14mmの間隔で円周方向に20°の開き角で2列にわたってさん孔され. これに1mmの肉厚の強化プラスチックスが外装された構造となっている.

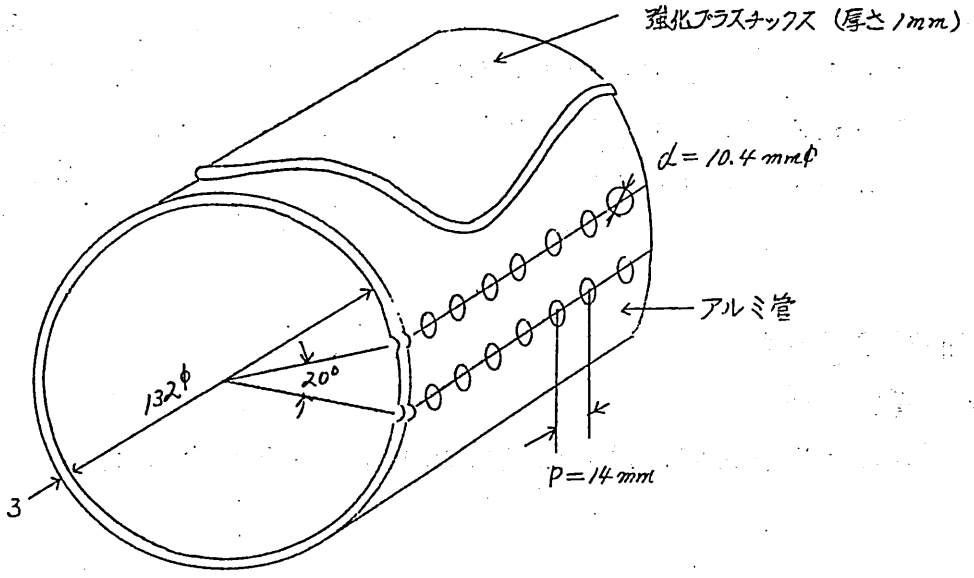


図2.1.1 円形漏洩導波管の構造

円形漏洩導波管の構造を上述のようにした理由を次にのべる。

漏洩孔の伝送方向の間隔：これは漏洩導波管の輻射方向を決定する。

ここでは漏洩導波管からその固有の輻射波のみが輻射されるように漏洩孔のピッチPは波長に比べて小さく

$$P < \frac{\lambda_0 \lambda_g}{\lambda_0 + \lambda_g}$$

ただし　λ_0　自由空間波長

λ_g　管内波長

と選んだ。

2つの漏洩孔の広き角：これは次の3つの特性に影響を与える。

1) 伝送方向に直角な面内での輻射界

2) 管内の不要モード発生の軽減

3) TE_{01} モードと TM_{11} モードの縮退をとく

製作した漏洩導波管では1)に重点をおいた。

強化プラスチック：気密用

次に円形漏洩導波管の主な特徴としては次に示すものが挙げられる。

1) 熱損失が小さく、したがって伝送損失が小さく、長距離伝送に適している。

2) 漏洩する電波は漏洩導波管固有の輻射波であって管軸に直角な面内の波長が大きいため、管軸に直角な面内での種々の製造、布設誤差が緩和され、漏洩導波管と平行におかれるアンテナ、漏洩導波管等の結合の安定度がよい。

3) TE_{01} モードと TM_{11} モードとの縮退がとかれるので、曲がり導波管においても低損失な伝送特性が得られる。

第2.1.1表にこの円形漏洩導波管を列車前方障害物探知方式、列車通信等に応用した場合の特性例を示す。

第2.1.1表　円形漏洩導波管を障害物探知．列車通信に応用した場合の特性例

		障害物探知	列車通信
1	動作周波数	9.375 Mc	7.200～7.800 Mc
2	アルミ素管の熱損失の理論値（ただし、導電率 55%）	1.087 db/km	1.671～1.465 db/km
3	漏洩電波の輻射角	17°11′	21°4′ (7.5GC)
4	漏洩導波管の特性例		
	伝送損失	5.3 db/km	4.8 db/km
	結合量	−75 db*	−37 db**
5	システム設計例		
	伝送損失	2.5 db/km	3.0～7.5 db/km
	結合量	−94 db	−73±3 db***
6	レーダーセット．中継器などの間隔	10 Km	10 km

* 2本の漏洩導波が軌道の両側に対向していて．その開口長が1mの場合の近端結合量．

** 長さ3mの楕円反射板付のアンテナで受信した場合の結合量

*** 整路の損失を含んでいる。

輻射量の異なる6種類の漏洩導波管を用いる。

2.2　円形導波管の特性（漏洩孔のない導波管の特性）

動作周波数 9.375MC 自由空間波長 31.979 mm のように．自由空間波長が円形導波管の内径 132 mmφ に比べて小さい場合には管内に多数のモードが存在する。次にこの円形導波管のモードの種類、遮断波長、遮断周波数導体損失 TE_{01} モードと不要モードとのビート波長等についてのべる。

a. 遮断波長．遮断周波数

半径 a の円形導波管の遮断波長 λ_c は次式で与えられる．

$$\lambda_0 = \frac{2\pi a}{\chi(mn)} \quad \text{または} \quad \lambda_c = \frac{2\pi a}{\chi(mn)} \qquad (2.2.1)$$

ここに $\chi(mn)$ $a = k_c(mn)$ および $\chi(mn)$ $a = k_c(mn)$ はおのおの TM_{mn} モードおよび TE_{mn} モードの半径方向の波数でベッセル関数 $J_m(x)$ および $J'_m(x)$ の零でない n 番目の受根である。

$(m = 0.\ 1.\ 2.\ 3\ \cdots\cdots,\quad n = 1.\ 2.\ 3\ \cdots\cdots)$

また. 遮断周波数 f_c は次式で与えられる.

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} \qquad (2.2.2)$$

ここで C は光速度 2.998×10^8 m/sec である.

b. TE_{01} モードと不要モードとのビート波長

2つのモードが干渉しながら伝送している状態では伝送とともに2つのモードの間でエネルギーの変換、再変換が行われ. いわゆるビート現象がみられる. 次式は2つのモード間のビート波長 ℓ を与える式である.

$$\ell = \frac{2\pi}{\beta_1 - \beta_2} \qquad (2.2.3)$$

ここに β_1. β_2 はおのおのモードの伝送方向の位相定数を示す.

C. 導体損失

導体管の導体損失 α_{tn} の計算式は次式で与えられる.

TM_{mn} モードの場合

$$\alpha_{th} = \frac{R}{\zeta a} \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2(mn)}}, \quad \nu_{(mn)} = \frac{\lambda}{\lambda c} \qquad (2.2.4)$$

TE_{mn} モードの場合

$$\alpha_{th} = \frac{R}{\zeta a}\left\{\frac{m^2}{\chi^2(mn) - m^2} + \nu^2(mn)\right\}, \quad \nu_{(mn)} = \frac{\lambda}{\lambda c} \qquad (2.2.5)$$

ここで.

$$R = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

である.

TE_{01} モードに関して改めて記すと.

$$\alpha_{th} = \frac{R}{\zeta a} \cdot \frac{\nu^2}{\sqrt{1-\nu^2}} \qquad (2.2.6)$$

であり. 特に動作波長が管内に比して小さい場合, すなわち. $\nu^2 \ll 1$ の場合には

$$\alpha_{th} = \frac{R}{\zeta a} \nu^2 \propto \frac{1}{a^3 f^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.2.7)$$

表 2.2.1　円形導波管の理論特性

	モード	遮断波長 λ_c (mm)	遮断周波数 f_c (MC)	$f = 9.375$ MC　$\lambda_0 = 31.979$ mm			備考
				管内波長 λ_g (mm)	ビート波長 ℓ (mm)	導体損失 α_{th} (db/km)	
1	TE_{1-1}	226.23	1.331	32.306	926	5.268	・内径 132mmφ ・導電率 55%
2	TM_{0-1}	172.44	1.739	32.643	1171	12.10	
3	TE_{2-1}	135.78	2.208	32.904	1936	9.863	
4	TM_{1-1}	108.23	2.770	33.473	−	12.450	
5	TE_{0-1}	108.23	2.770	33.473	−	1.087	
6	TE_{3-1}	98.71	3.037	33.801	3445	14.40	
7	TM_{2-1}	80.75	3.713	34.826	862	12.95	
8	TE_{4-1}	77.99	3.844	35.062	739	19.18	
9	TE_{1-2}	77.78	3.854	35.081	731	2.680	
10	TM_{0-2}	75.12	3.991	35.340	634	13.14	
11	TM_{3-1}	65.00	4.613	36.732	377	13.66	
12	TE_{5-1}	64.64	4.638	36.798	371	24.62	
13	TE_{2-2}	61.84	4.848	37.362	322	5.072	
14	TM_{1-2}	59.11	5.072	38.024	280	14.14	
15	TE_{0-2}	59.11	5.072	38.024	280	4.380	
16	TE_{6-1}	55.28	5.423	39.203	229	30.77	
17	TM_{4-1}	54.65	5.486	39.436	221	14.66	
18	TE_{3-2}	51.74	5.795	40.680	189	8.243	
19	TM_{2-2}	49.27	6.085	42.038	164	15.630	
20	TE_{1-3}	48.58	6.171	42.481	158	7.064	
21	TE_{7-1}	48.34	6.201	42.640	156	38.55	
22	TM_{0-3}	47.92	6.256	42.938	152	15.97	
23	TM_{6-1}	47.28	6.341	43.418	146	16.14	
24	TM_{4-2}	44.67	6.711	46.795	124	12.61	

25	TE 8-1	44.98	6.975	47.856	111	49.21	
26	TM 3-2	42.48	7.057	48.574	108	18.06	
27	TM 6-1	41.74	7.183	49.766	102	18.51	
28	TE 2-3	41.60	7.207	50.006	101	11.77	
29	TM 1-3	40.76	7.355	51.570	95	19.18	
30	TE 0-3	40.76	7.355	51.570	95	11.80	
31	TE 5-2	39.42	7.605	54.691	86	19.32	
32	TE 9-1	38.71	7.744	56.734	82	65.04	
33	TM 4-2	37.48	7.999	61.320	74	22.80	
34	TM 7-1	37.41	8.015	61.645	73	22.92	
35	TE 3-3	36.55	8.203	66.039	68	20.63	
36	TM 2-3	35.69	8.401	72.035	63	26.79	
37	TE 1-4	35.43	8.463	74.324	61	22.72	
38	TM 6-2	35.43	8.484	75.147	60	27.94	
39	TE 10-1	35.23	8.510	76.211	60	96.85	
40	TM 0-4	35.17	8.525	76.846	59	28.57	
41	TM 8-1	33.92	8.838	95.874	51	35.65	
42	TM 5-2	33.61	8.920	103.931	49	38.65	
43	TE 4-3	32.70	9.168	153.161	43	60.76	
44	TE 11-1	32.33	9.273	217.277	40	303.7	
45	TE 7-2	32.07	9.349	433.535	36	227.1	
46	TM 3-3	31.86	9.409				
47	TE 2-4	31.49	9.522				
48	TM 1-4	31.12	9.632				
49	TE 0-4	31.12	9.632				
50	TM 9-1	31.05	9.654				
51	TM 6-2	30.52	9.824				
52	TE 12-1	29.88	10.034				

であり、周波数の3/2乗、管径の3乗に逆比例して減少する。

表2.2.1は、内径132mmφのアルミ導波管の各モードの遮断波長、遮断周波数および周波数9.375MCにおける管内波長、TE_{01}モードと不要モードとのビート波長、および導電率が55%の場合の伝送損失を示す。表2.2.1によると、種々のモードの中でTE_{01}モードの導体損失は一番小さく1.087 db/kmであり、長距離伝送の導波管として適している。

図2.2.1に主な伝送モードの周波数6～11GCにおける導体損失を示す。

図2.2.2は、内径132mmφ 肉厚3mm 導電率52.2%のアルミ管の熱損失をシャトル・パルス法で測定した値を示す。測定した導波管の長さは40mで、測定周波数範囲は8.1GCより10.5GCまでで、測定値は理論値の約1.6倍である。しかしながら測定値は試料の伝送損失が小さいため相当にはつついており、したがって上の倍数はあまり信頼性がなく、今後さらに詳しく検討する必要がある。

2.3 円形導波管の漏洩孔を設けた場合の特性

本節では円形導波管に漏洩孔を設けた場合の特性について、漏洩孔による副射、漏洩孔による不要モードへのモード変換等の観点から種々の検討結果をのべる。

2.3.1 輻射損失

ここでは、円形漏洩導波管の漏洩孔の直径と輻射損失の関係を実験的に求めた結果をのべる。

図2.3.1に試作した単長5m、試料長10mの円形漏洩導波管の伝送損失をシャトルパルス法により実測した結果を示す。

試作した漏洩導波管の漏洩孔の直径は10.0mmφ、10.5mmφ 11.0mmφ 12.0mmφの4種類である。

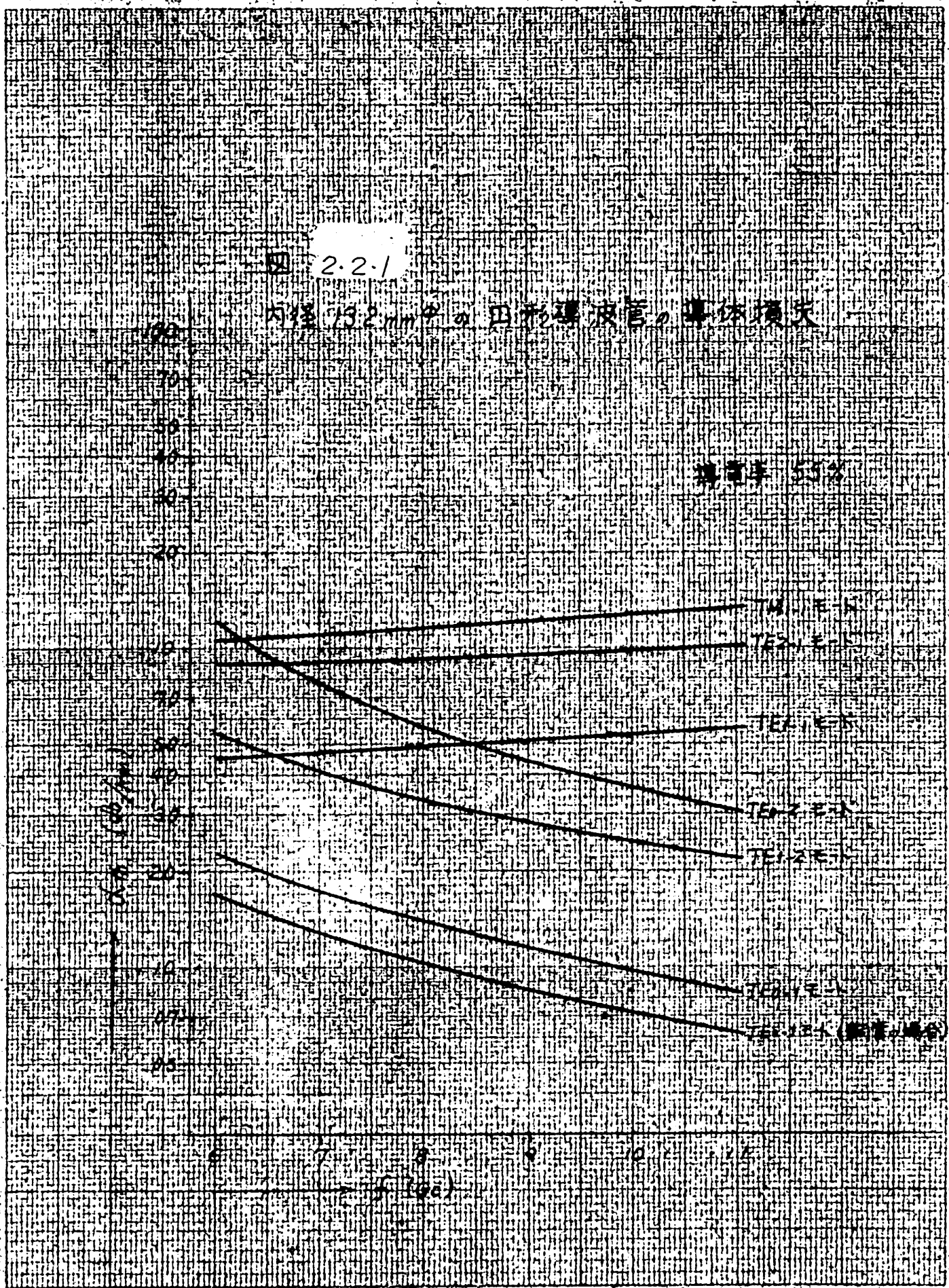
円形漏洩導波管は正式には気密のために強化プラスチックスを外装しているが、強化プラスチックスの伝送損失に与える影響を調べる意味から、

(a) アルミ管に漏洩孔を設けただけの漏洩導波管

(b) これに実験的に厚さ1mmの強化プラスチックスの平板を漏洩孔に沿って縦沿えした導波管（この場合、円形導波管の断面は円であり強化プラスチックスは平板であるので、強化プラスチックス板は漏洩孔に密着してない。）

図 2.2.1

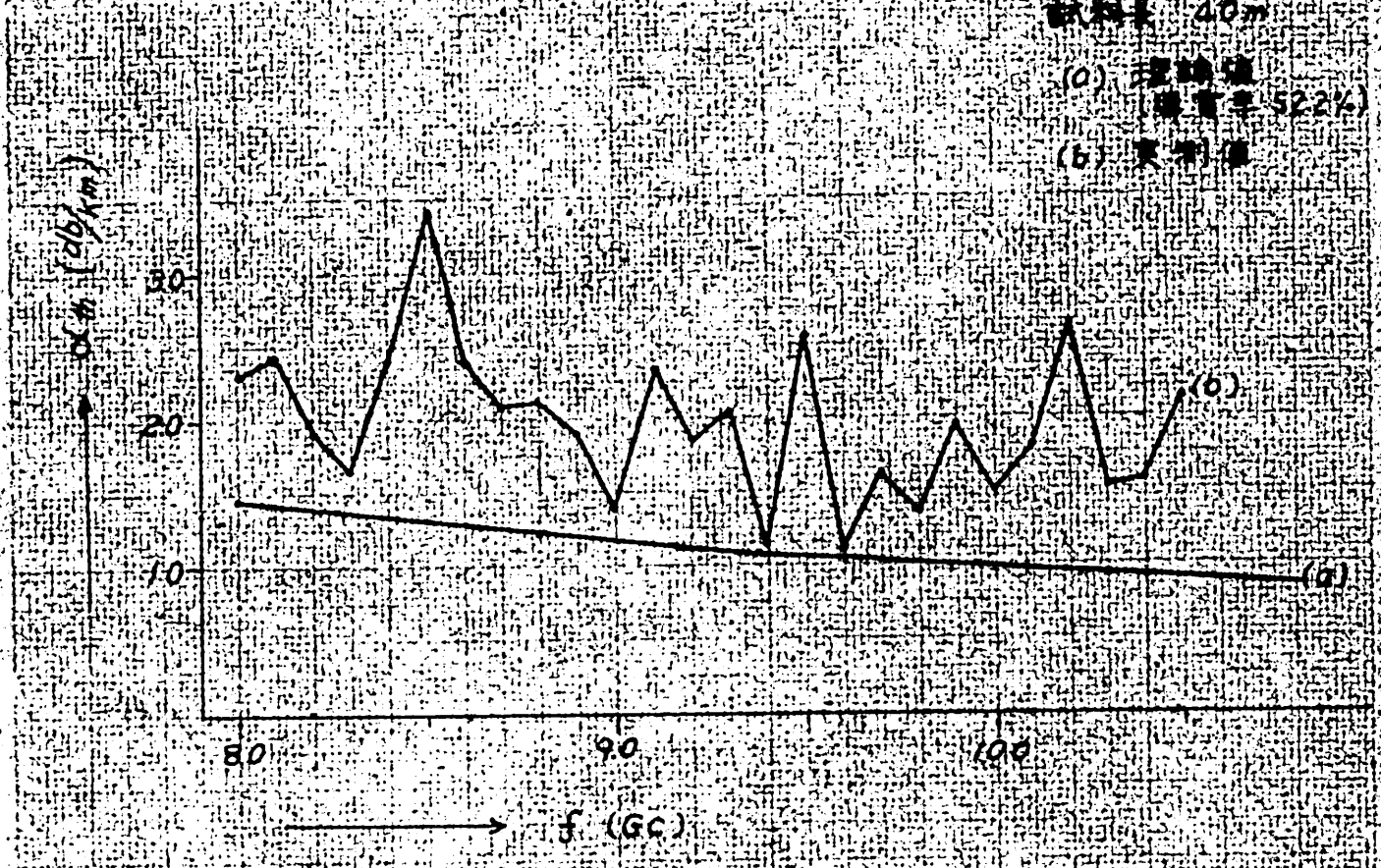
内径 13.2 mm ϕ の 円形導波管の導体損失



NO. A502

図 2.2.2

132φのアルミ管のTE0-1モードの導体損失



A4 180×250 AKM

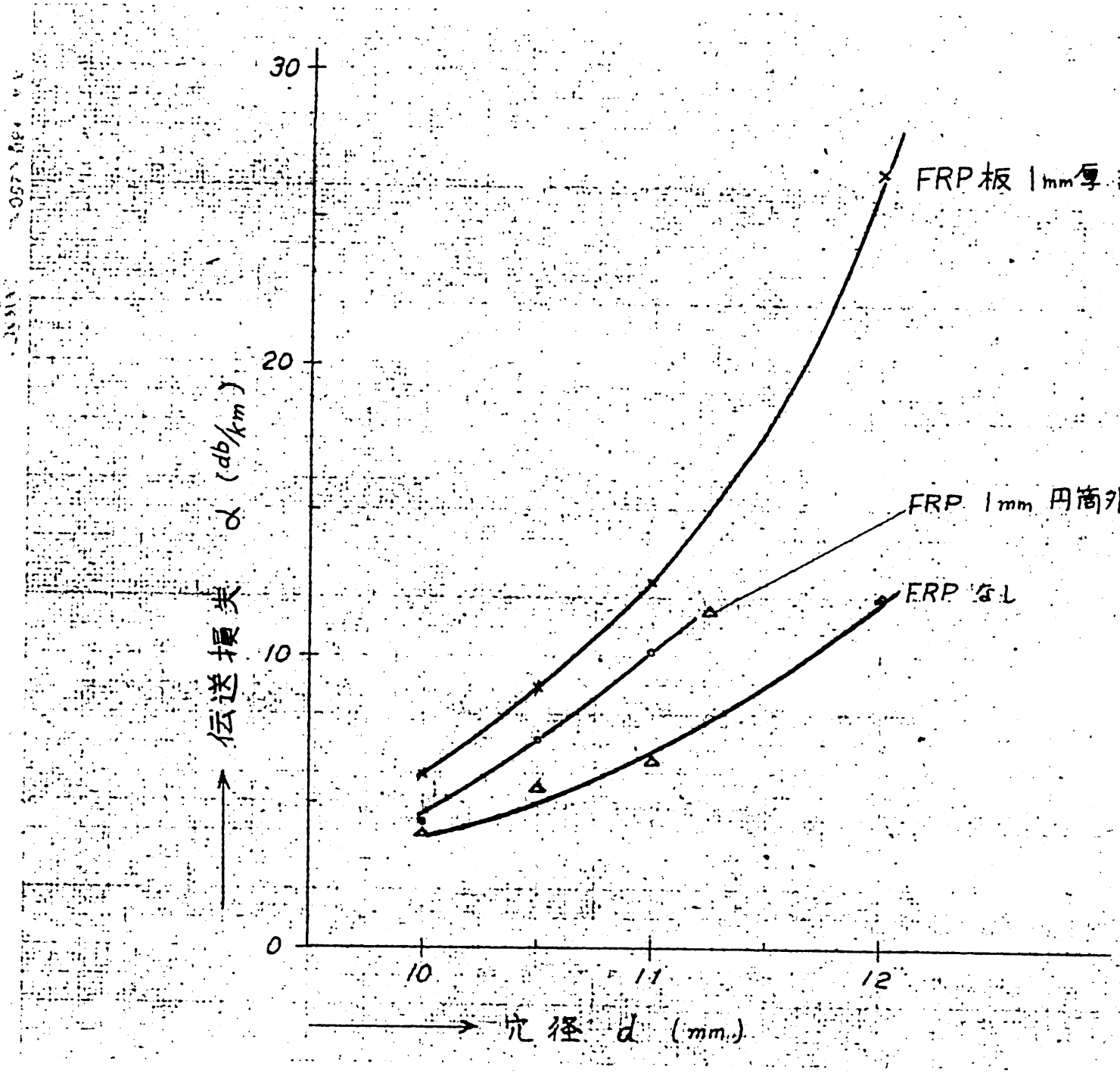


図 2·3·1

円形 漏洩導波管の
漏洩孔の穴径と
伝送損失の関係

試料長 10mm

(c) 厚さ1mmの強化プラスチックスを孔のあいた導波管に正式に円筒状に外装した場合の漏洩導波管.

の3つの異なったタイプの漏洩導波管の伝送損失を測定した。その結果には漏洩孔の直径が大きいほど、伝送損失は大きく、また誘電体である強化プラスチックスを漏洩孔のところにおくことによって伝送損失が増すことがわかった。

またこの実験にて所望の伝送損失をもった漏洩導波管の設計基準が確立された。

2.3.2 伝送損失と輻射損失との関係

漏洩導波管の輻射損失 α_r は単位長当りに漏洩導波管から輻射する輻射量 P_r との間に次の関係がある。

$$\frac{P_r}{P_t} = 2\alpha_r \qquad (2.3.1)$$

ここで P_t は導波管内を通過する電力を示している。P_t を単位量とし、便宜上、α_r を db/Km, P_r を導波管の長さ1m当りの輻射量として db で表示すると次式の関係式が計算される。

$$P_r = 10\log_{10}\left(\frac{2\alpha_r \times 10^{-3}}{8.686}\right) = 10\log\alpha_r - 36.38 \qquad (2.3.2)$$

円形漏洩導波管の設計を行う上においては、前節でのべたように漏洩導波管の伝送損失と輻射量の関係を知ることは重要なことであって上式の活用によって2本の漏洩導波管の結合における空間損失および漏洩導波管の導体損失等の評価を行うことができる。

図2.3.2は金属パイプ形漏洩導波管の伝送損失 α を横軸にとり、縦軸に以後にのべる結合に関係した漏洩導波管の輻射量をとっている。結合に関係した輻射量とは次のことをいう。漏洩導波管の輻射量そのものを測定することは漏洩導波管の周囲の輻射電力を総和することによって求めねばならずむつかしい。したがって、ここでは輻射量の測定としては、長さ2mの2本の漏洩導波管を1mの間隔でおき、この2本の漏洩導波管の間の遠端結合量を測定することによって代行した。

この場合に実測した遠端結合量 X_e と導波管1m当りの輻射量 P_r との間では $P_r = 0.5\times(X_e - 6)$ の換算を行った。この換算は次の理由による。すなわち6という数字は、長さ2mの漏洩導波管の結合を長さ1mの漏洩導波管の結合に換算し直すために用いたもので、これは結合量(電圧量)は開口部の長さに比例するという考え方をとっている。さら

に0.5という数字は漏洩導波管ノ本当りの輻射量，すなわち，漏洩導波管から自由空間へ電波が伝搬されるときの結合損失の2倍が2本の漏洩導波管の間の結合に等しいという考えをとっているためである。

伝送損失と結合の関係を調べるために用いた導波管は実験途上の導波管で次の2種類である。

(a) アルミ管に漏洩孔をさん孔しただけの導波管。

(b) この導波管に実験用の厚さノmmの強化プラスチックス板を縦沿えした導波管。

図2.3.2によるとこれら2つの導波管の特性を示す点はいずれも一定曲線の上にある。したがって，強化プラスチックスの誘電体で損失が生じれば輻射量は若干小さくなると思われたが，これに関しては誘電体損失はほとんど無視できる程度に小さいことがわかった。

同図に先に求めた 輻射損失と輻射量の関係を横軸に輻射損失をとって示している。

この実線はいい変えれば，導波管の導体損失 α_{th} が0である漏洩導波管の特性を示しているともいえる。また1点鎖線の曲線は，$\alpha_{th}=3$ db/km の漏洩導波管の伝送損失と輻射量との関係の理論曲線を示したものであって，$\alpha_{th}=3$ db/km とおくことによって，実測のデータと，一点鎖線のグラフとの縦軸の差はどのような伝送損失においてもほぼ一定である。

この差は約7 db であり，したがってこの7 db の2倍の14 db が2本の漏洩導波管をノm離して置いた場合の結合における空間損失と見なすことができる。さらに $\alpha_{th}=3$ db/km は，TE_{01} モードの導体損失，漏洩孔によって発生した不要モードへの変換損失，遮断以上の高次のモードが漏洩孔の近傍で電気，または磁気エネルギーとして貯えられ，誘電体，または導体で消費される損失等の合計値と見なすことができる。しかしながら，この $\alpha_{th}=3$ db/km という値は漏洩孔がない場合の導波管の導体損失の理論値が1.087 db/km であることから幾分大きすぎるように思われる。この原因としては伝送損失の測定をシャトル・パルス法で行った時，測定器の固定損失を若干小さく見積ったとか，または測定用からせん導波管と試料とでは伝送姿態がいく分異なっており，このためこれらの境界で姿態変換損失があり，これが試料が短いとき無視できない値であったとか，などの点が考えられる。すなわち，後にのべるように，製品として製作した漏洩導波管の漏洩孔の直径は10.4 mmφであって，この導波管の伝送損失は試料長40 m の場合で，ふ3 db/km である。

図 2.3.2
伝送損失と漏洩導波管
1本当り 1m当りの結合量
(遠端結合)
10φ FRP 円筒外装
10φ
10.5φ
10.5φ FRP 円筒外装
10φ FRP
11φ
10.5φ FRP
11φ FRP 円筒外装
11φ FRP
12φ
12φ FRP
αth = 0
αth = 3db/km
$P_r\phi = 10\log\alpha_r - 36.38$
漏洩導波管1本当り1m当りの輻射量 Pr (db)
-20
-30
-40
.05 .07 1 2 3 4 5 7 10 15 20 30 50
伝送損失 α (db/km)

一方この寸法の漏洩導波管の伝送損失を図2.3.2より求めるとその値は6.5 db/km と求められ、製品のものと1.2 db/km 異なっている。この差仮りに1 db/km を試作段階の各種の漏洩導波管に適用すると、導体損失は2 db/km と推定できる。

図2.3.3は漏洩孔の直径 d と輻射量 P_r との関係の実測値および理論値を示している。

漏洩孔に発生する磁流Jは漏洩孔の直径 d が波長に比して小さければ d の3乗に比例する。またその強さは管内の磁界 H_z に比例するが、漏洩孔の直径が波長に比して小さいため遮断現象によって減衰を受ける。したがって輻射波の磁界Hに対して次の理論式が成立する。

$$H \propto C\, d^3$$

ただし

$$C = \exp\left[-2\pi t \sqrt{\frac{1}{\lambda_c^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}}\right]$$

$$\lambda_c = \frac{\pi D}{1.841}$$

t：導波管の肉厚

図2.3.3によると、d が大きくなるに従い、実測値は理論値を上まわっている。これは、共振による影響と思われる。

2.3.3 不要モード

(1) 漏洩孔によるモード変換

図2.1.2に示すように壁面に円周方向に2ヵ所の漏洩孔が点在する場合には、伝送モード TE_{01} モードから不要モードへのモード変換が行われる。漏洩孔によって発生する不要モードは、TE_{01} モードの壁面における電界の法線成分はなく、磁界の接線成分は H_z があるだけなので、磁界のZ方向の成分がない TM_{mn} モードは発生せず、TE_{mn} モードのみ発生する。次にこの漏洩孔によるモード変換に関して、最初に漏洩孔1コ当りの結合係数 $S_{01\sim mn}$ を計算し、つづいて TE_{01} モードが不要モードへ変換し、また再変換されることによって生じる TE_{01} モードの伝送損失の増加量について計算する。

a. 漏洩孔による TE_{01} モードと TE_{mn} モードの結合係数 $S_{01\sim mn}$

図2.3.4に示すように導波管の壁面に1コの漏洩孔が存在し漏洩孔より左側の端子(1)より j モードを励振した場合に、漏洩孔によっ

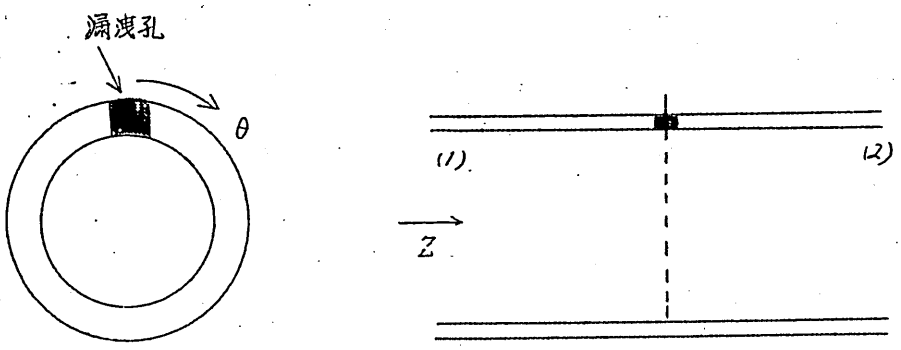


図 2.3.4　円形導波管の漏洩孔の位置

て(1)および漏洩孔より右側の(2)の端子に次の結合係数をもったiモードが励振される。

$$S_{ij}^{(1)(1)} = j\frac{1}{2}\omega\left\{\frac{\mu}{\sqrt{Z_i Z_j}}(\hat{M}h_j^{+})h_i^{*-} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{Y_i Y_j}}(\hat{P}e_j)e_i^{*}\right\} \qquad (2.3.3)$$

$$S_{ij}^{(1)(2)} = \delta_{ij} - j\frac{1}{2}\omega\left\{\frac{\mu}{\sqrt{Z_i Z_j}}(\hat{M}h_j^{+*+})h^{+} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{Y_i Y_j}}(\hat{P}e_j)e_i\right\} \qquad (2.3.4)$$

ここで

$$e_i(r) = \left\{e_{\rho i}(\rho) \pm e_{zi}(\rho)\right\} e^{\mp jK(mn)z}$$

$$h_i(r) = \left\{h_{\rho i}(\rho) \mp h_{zi}(\rho)\right\} e^{\mp jK(mn)z}$$

$e_{\rho i}(\rho)$, $e_{zi}(\rho)$, $h_{\rho i}(\rho)$, $h_{zi}(\rho)$ ：モード関数

$\hat{P}$, $\hat{M}$ ：電気および磁気テンソル

δ_{ij} ：Kronecker delta

である。具体的に、考慮中の導波管に上式を適用すると、次のような諸量が計算される。すなわち、jモードをTE_{01}モードとし漏洩孔によって発生されるTE_{mn}モードをiモードとおくと、上に挙げたモード関係のうち、結合に関与するのは、h_zだけであり、h_zは次式で与えられる。

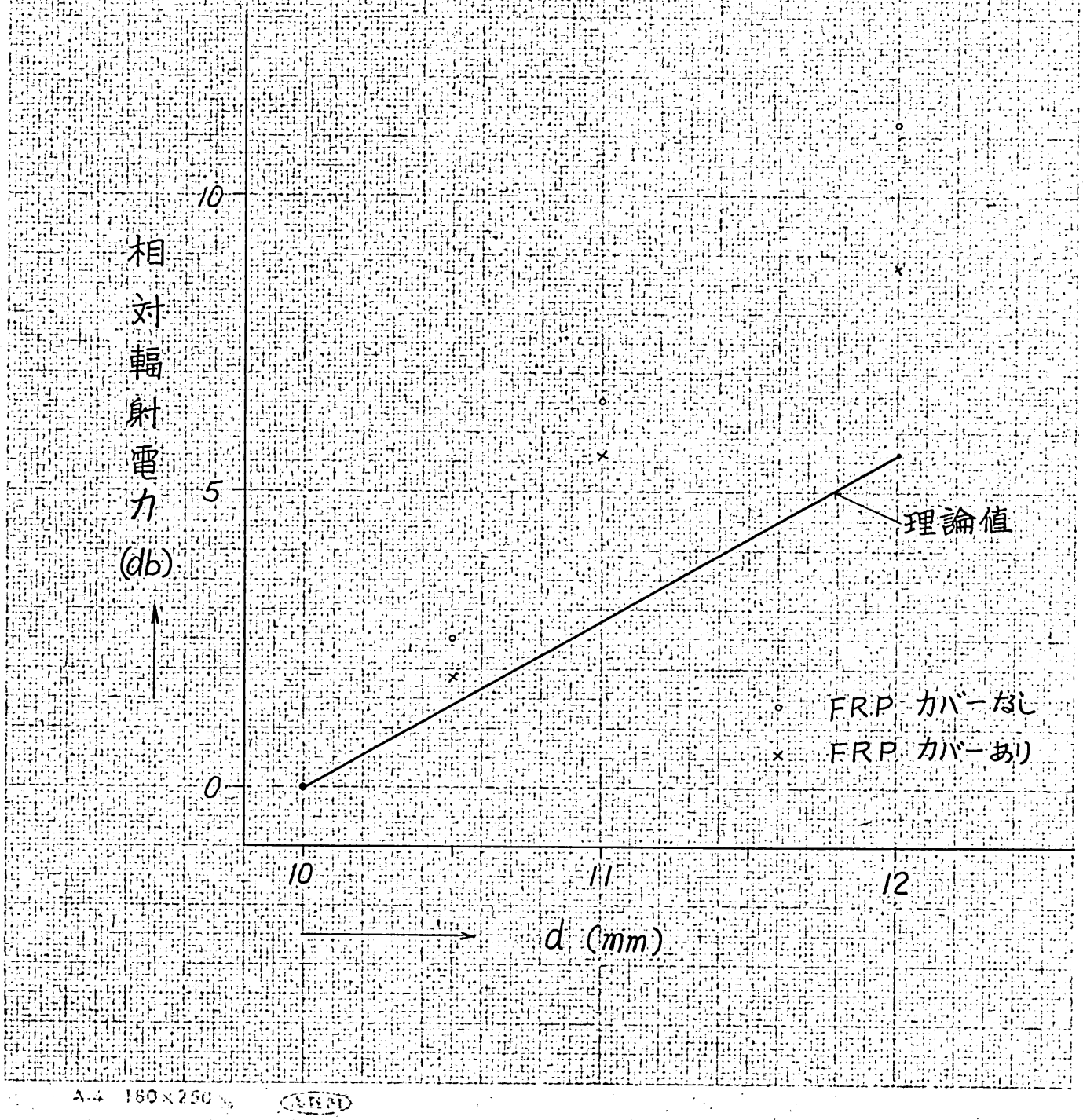
$$h_z = -j\frac{\lambda_{g(mn)}}{2\pi a^2}\cdot\frac{\chi_m^2}{\sqrt{\chi_{(mn)}^2 - m^2}}\sqrt{\frac{\Sigma_m}{\pi}} \qquad (2.3.5)$$

さらに、磁気テンソルは、管内の磁界がH_zのみである直径dの漏洩孔に関して、次式で与えられる。

図 2·3·3

漏洩孔の直径 d と輻射量 P_r との関係

($d=10mm$ のときの輻射量で基準化している)



$$\hat{M}_{zz} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{d^3}{6} \qquad (2.3.6)$$

$$Z_{(mn)} = \frac{\omega \mu}{k_{(mn)}} \qquad (2.3.7)$$

$$k_{(mn)} = \sqrt{k^2 - k_c^2{}_{(mn)}} \qquad (2.3.8)$$

したがって、TE_{01} モードから次式の結合係数をもった TE_{01} の進向方向と同方向の不要モードおよび後進方向の不要モードが励振される。

$$-S_{01} \sim {}^{(11)(2)}_{mn} = +S_{01} \sim {}^{(11)(1)}_{mn}$$

$$= j \frac{\sqrt{\varepsilon_m}}{24\pi^2} \cdot \frac{\chi_{01}\, \chi^2_{(mn)}}{\sqrt{\chi^2_{(mn)} - m^2}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_{g(01)} \cdot \lambda_{g(mn)}}}{a^4} d^3 \qquad (2.3.9)$$

表 2.3.1 に上式より求めた漏洩孔1コ当りの TE_{01} モードから TE_{mn} モードへの結合係数を示す。これによると結合係数は、TE_{11} モードが一番大きく -50.2 db である。

表 2.3.1　1コの漏洩孔による TE_{01} モードと不要モードの結合係数と不要モードによる TE_{01} モードの伝送損失の増加量（漏洩孔の直径 10.4 mmφ）

	漏洩孔で励振されるモード	漏洩孔1コ当りの結合係数 $\lvert S_{01-mn}\rvert$ (db)	TE_{01} モードの伝送損失の増加 $\Delta\alpha_{01}$ (db/km)		漏洩孔で励振されるモード	漏洩孔1コ当りの結合係数 $\lvert S_{01-mn}\rvert$ (db)	TE_{01} モードの伝送損失の増加 $\Delta\alpha_{01}$ (db/km)
1	TE 1-1	− 79.6	1.84×10^{-5}	14	TE 8-1	− 56.3	1.08×10^{-5}
2	2-1	− 74.3	52.88	15	2-3	− 64.4	1.70
3	3-1	− 70.6	483.3	16	0-3	− 68.0	1.88
4	4-1	− 66.9	43.55	17	5-2	− 62.5	1.40
5	1-2	− 61.4	2.91	18	9-1	− 68.1	0.075
6	5-1	− 65.6	16.40	19	3-3	− 61.9	2.07
7	2-2	− 67.9	2.27	20	1-4	− 61.4	2.72
8	0-2	− 72.7	0.76	21	6-2	− 67.0	1.23
9	6-1	− 63.8	7.25	22	10-1	− 66.3	2.14
10	3-2	− 66.7	1.95	23	4-3	− 57.0	5.79
11	1-3	− 66.5	1.55	24	11-1	− 60.2	34.42
12	7-1	− 61.7	2.74	25	7-2	− 60.9	9.79
13	4-2	− 64.7	1.67	TE_{01} モードに与える損失の合計 6.82×10^{-3} db/km			

b.　モード変換による TE_{01} モードの伝送損失の増加

漏洩孔1コ当りの TE_{01} モードと不要モードとの結合係数を先に計算したが、ここでは、このモード変換により TE_{01} モードの伝送損失がどれだけ増加するかについて計算する。

一般に一つの導波管の中を2つの伝播定数が異なったモードが伝送される場合には2つのモード間でエネルギーの変換が行われる。伝送すべきモード TE_{01} モードと不要モード TE_x モードの減衰定数の差 $\Delta\alpha$ が位相定数の差 $\Delta\beta$ に比して小さく、しかも2つのモード間の単位長さ当りの結合係数 C が、位相定数差 $\Delta\beta$ に比して小さい場合には、TE_{01} モード，および TE_x モードの振幅 $A_{01}(z)$，$A_x(z)$ は前進するモードのみ考慮すると次式で与えられる。

$$A_{01}(z)=\left(1-\frac{c^2}{\Delta\beta}\right)e^{-\alpha_\beta z}+\left(\frac{c^2}{\Delta\beta}\right)e^{-\alpha_x z}\cos\Delta\beta z \qquad (3.2.10)$$

$$A_x(z) = \frac{2d}{\Delta\beta}\left|\sin\frac{1}{2}\Delta\beta z\right| e^{-\frac{1}{2}(\alpha_x+\alpha_{01})L} \qquad (2.3.11)$$

$$\alpha_B = \alpha_{01} + \frac{C^2}{\Delta\beta}\Delta\alpha \qquad (2.3.12)$$

$$\Delta\alpha = |\alpha_{01} - \alpha_x|,\ \Delta\beta = |\beta_{01} - \beta_x| \qquad (2.3.13)$$

ただし　$\Delta\beta \gg \Delta\alpha$,　$C \ll \Delta\beta$

図2.3.5は上の関係式を表示したもので TE_{01} モードも TE_x モードも伝送方向にその振幅は振動する。

上の関係式を漏洩孔によるモード変換に適用する際，次の仮定を行う。

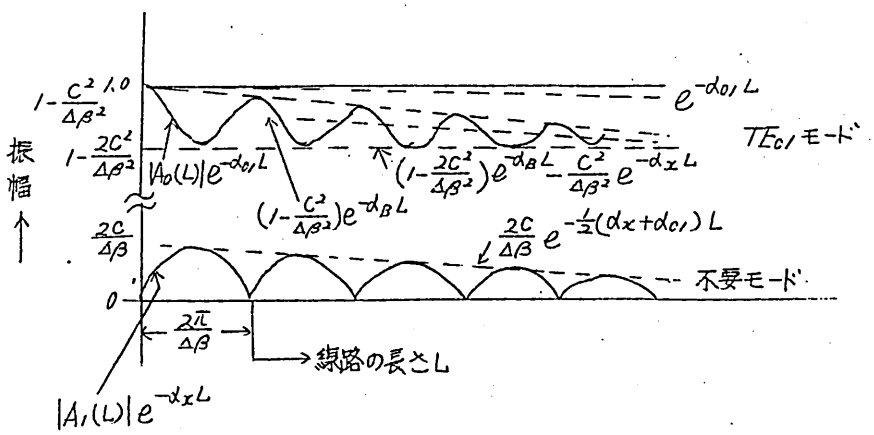


図2.3.5　TE_{01} モードと不要モードの線路の長さに対する振幅の変化

1. TE_{01} モードと不要モードである TE_x モードのみの結合を考え，不要モード間の結合は考えない。
2. 後進する不要モードによる損失は，漏洩孔の間隔が波長に比して小さく，したがって，相隣り合う漏洩孔において後進方向に対して不要モードの位相が合わないので，後進方向の伝播はほとんど無視でき，したがって不要モードの後進波による TE_{01} モードの損失は無視できる。

(2.3.12) を用いて損失の増加を計算する場合に，TE_{01} モードと各モードの減衰定数の差 $\Delta\alpha$ の値としては各モードの導体損失と輻射損失を合わせた伝送損失をとる必要があるが，輻射損失に関しては不明な点が多いので，減衰定数として導体損失の計算値をとり，あとで

輻射損失を考慮して修正を行う。位相定数βに関しては漏洩孔による位相変化を無視する。単位長当りの結合係数Cとしては、漏洩孔が$20°$の間隔で円周方向に2つ配列されていること、および伝送方向に14mmの間隔で設けられていることを考慮して次のように置くことができる。

$$C = \frac{2\cos(m\varphi)}{p}\left|S_{01\sim mn}\right| \qquad (2.3.14)$$

$$p = 14mm \ , \ \varphi = 10°$$

表2.3.1は上の仮定に基づいて計算した不要モードとの結合によるTE_{01}モードの損失の増加を示している。表によると、TE_{01}モードに一番大きく損失を与える不要モードはTE_{01}モードの位相定数に一番近い位相定数をもつたTE_{31}モードであることがわかる。

不要モード変換損失の合計値は、6.82×10^{-3} db/kmでごく小さい。上の計算においては伝送損失は導体損失だけと考えているが、実際には伝送損失は輻射によって増しており、たとえばTE_{01}モードは1.087 db/kmの導体損失理論値に対して伝送損失の実測値は5～6 db/kmとなっており、約6倍の違いがある。この輻射による伝送損失の増加率をすべての不要モードに対して等しく適用するとTE_{01}モードに与える損失の増加は、伝送損失に比例することから上の6.82×10^{-3} db/kmの6倍すなわち、約0.04 db/kmとなり、不要モードによるTE_{01}モードの損失の増加は充分小さい。

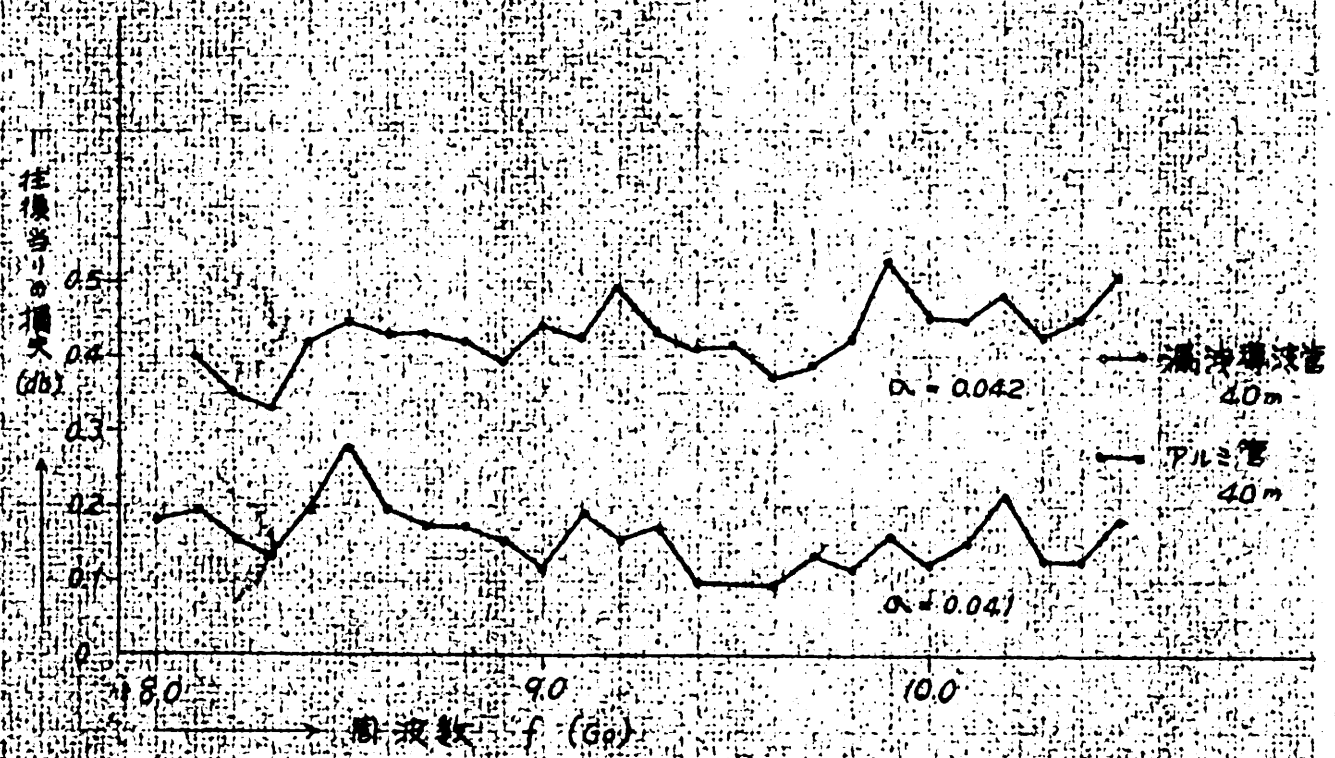
図2.3.6は、モード変換について考察する為に円形漏洩導波管およびアルミ管素管の伝送損失をシャトル・パルス法で測定した結果を示したもので、縦軸に、試料1往復当りの伝送損失を示す。図によると、周波数特性の測定における測定値の標準偏差は前者は0.042 dbで後者は0.041 dbでほぼ同じであり、したがって円形導波管に漏洩孔をあけることによるモード変換による伝送損失の周波数特性はほとんどないものと考えられ、TE_{01}モードから不要モードへのモード変換は極めて小さいと考えられる。

(2) 曲がりにおけるTM_{11}モードとTE_{01}モードとの干渉

TE_{01}モードは低損失な伝送モードであるが導波管の曲がりにおいてはモード変換が問題になる。これは完全導体の円形導波管の曲がりでは縮退したTE_{01}モードとTM_{11}モードの間に結合があるためで、曲がり部ではモード変換が大きくて使えない。この曲がり部でのモー

NO. 4507

図2.3.6 シャトル・パルス法における漏洩導波管、アルミ管の1往復当りの損失の周波数特性



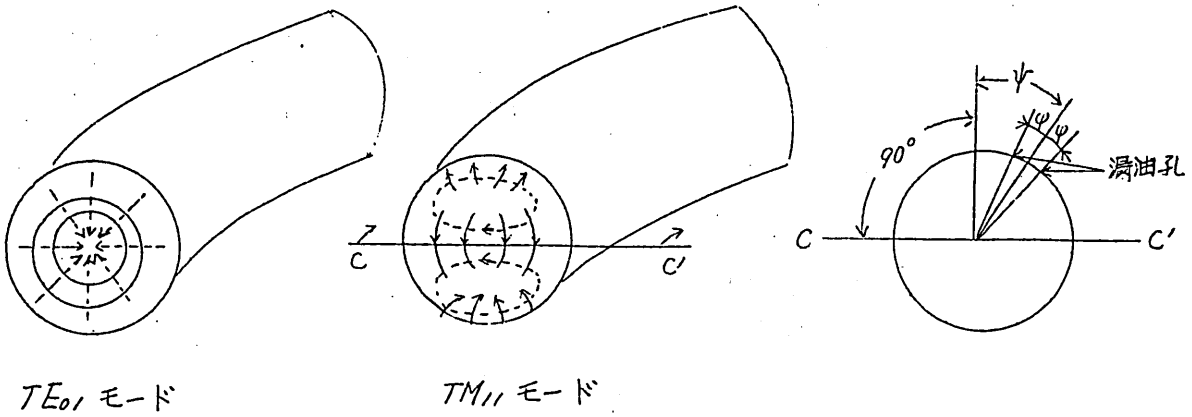
A-4 180×250 (3RM)

ド変換を少なくするためには TE_{01} モードと TM_{11} モードの縮退を解く必要がある。縮退を解く手段としては従来次の2つの方法がとられて来た。すなわち、1. 壁面が異方性の導電率をもったらせん導波管により、2つのモードに大きな減衰定数の差を与える。2. 導波管の内壁に誘電体を内装した誘電体内装導波管を用いて、TM_{11} モードにのみ大きな位相変化を与える。

円形漏洩導波管は上にのべた2種の手段を用いることなく TE_{01} モードと TM_{11} モードの縮退を解くことができる特徴を有する。この TE_{01} モードと TM_{11} モードの縮退をとく機能は漏洩孔の存在によって得られたもので、この縮退をとくことにより後にのべるように TE_{01} モードから TM_{11} モードへエネルギーが変換されて TE_{01} モードの伝送損失が増加する現象は避けられる。

次に導波管の曲がりによって TE_{01} モードの減衰定数の増加が漏洩孔でどれだけ軽減されるかを説明する。

完全導体の円形導波管においては TE_{01} モードと TM_{11} モードは縮退しており、曲がり部ではこれらのモードは互に強く結合し、TE_{01} モードの曲がりの入口における振幅 A_{01} を1とし TM_{11} モードの振幅 A_{11} を0とすると入口からzの距離では次式で示すような振幅となっており、モード変換量は極めて大きく伝送とともに TE_{01} モードのエネルギーが図2.3.7に示す偏波方向をもった TM_{11} モードにほとんど変換されることがある。



TE_{01} モード　　TM_{11} モード

図 2.3.7　曲がり部における TM_{11} モードの発生

ここにC_Rは曲がりによって発生するTE_{01}モードとTM_{11}モードとの結合係数を示し、Rは曲がりの曲率半径である。

$$A_{01} = e^{-j\beta_{g0}z} \cos C_R z \qquad (2.3.15)$$

$$A_{11} = -je^{-j\beta_{g0}z} \sin C_R z \qquad (2.3.16)$$

$$C_R = \frac{2\pi}{\lambda_{cx}} \frac{a}{R} \qquad (2.3.17)$$

円形漏洩導波管の漏洩孔はTE_{01}モードとTM_{11}モードに異なった位相定数の変化を与える。この位相変化は漏洩導波管内を伝送するモードに漏洩孔によって新しく元のモード90°位相の異なったモードが管内に励振されたために生じたものであって、漏洩孔によって励振される量CはTE_{01}モードとTM_{11}モードで異なり、図2.3.7に示す構造のような円形漏洩導波管の円周方向に2コ置かれている漏洩孔で次式に示す量の同じモードへの変換が行われる。

$$C_{(01)} = \left| S_{01\sim01} \right| = 2 \cdot \frac{\chi^2}{24\pi^2} \cdot \frac{\lambda_g}{a^4} \cdot d^3 \qquad (2.3.18)$$

$$C_{(11)} = \left| S_{11\sim11} \right| = \left\{ \cos^2(\psi-\varphi) + \cos^2(\psi+\varphi) \right\} \frac{1}{6a^2\lambda} \left(2\frac{\lambda_g}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda_g} \right) d^3$$

$$= \left(1 + \cos 2\psi \cos 2\varphi \right) \frac{1}{6a^2\lambda} \left(2\frac{\lambda_g}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda_g} \right) d^3 \qquad (2.3.19)$$

ここに2φは管軸に直角な面内に置かれている2コの漏洩孔の開き角であり、ψは図2.3.7に示すようにTM_{11}モードの半径方向の電界または円周方向の磁界の最大である方向と2つの漏洩孔の中心線のなす角度である。上式に示す通り、TM_{11}モードの同じモードへの結合係数C_{11}はφおよびθによって異なり、$2\varphi = 20°$の場合には$\psi = 0$で最大で$\psi = 90°$の場合には最小となる。

漏洩孔が伝送方向に間隔Pで配列されている場合の位相定数は漏洩孔のないときの位相定数$2\pi/\lambda_g$から次式のように変化する。

$$\beta_{g(01)} = \frac{2\pi}{\lambda_g} + \frac{C_{(01)}}{P}, \quad \beta_{g(11)} = \frac{2\pi}{\lambda_g} + \frac{C_{(11)}}{P} \qquad (2.3.20)$$

上の2つのモードの位相定数の差$\Delta\beta$が、曲がりによるTE_{01}モードからTM_{11}モードへの結合係数C_Rに比べて大きい場合には先にのべ

た（2.3.12）式と同様、次式で与えられる TM_{11} モードへの変換による TE_{01} モードの減衰定数の増加が生じる。

$$\Delta\alpha_{01} = \frac{C_R^2}{\Delta\beta^2}\ \Delta\alpha \qquad (2.3.21)$$

ここに $\Delta\alpha$ は TE_{01} モードと TM_{11} モードとの減衰定数の差であって、以下の計算では導体損失の理論値を採用している。なお上式は $\Delta\beta \gg \Delta\alpha$，$C_R \ll \Delta\beta$ のときにのみ成立する。

表2.3.2は上式に基づいて計算した曲率半径 R〔Km〕の湾曲導波管の TE_{01} モードの減衰定数の増加量を与える。上式によると，$\psi = 0°$ すなわち，2つの湾曲孔の中心線と曲げ面が直角な場合には TE_{01} モードと TM_{11} モードの位相定数の差を非常に大きくとることができ、

表2.3.2　曲がりにおける TM_{11} モードへの変換による TE_{01} モードの伝送損失の増加

2φ	ψ	$C_{(01)}$	$C_{(11)}$	$\Delta\beta=\beta_{(01)}-\beta_{(11)}$ (nep./m)	$\Delta\alpha_{01}$ (db/Km)	
					R=R(Km)のとき	R=2.5Kmのとき
20°	0°	2.46×10^{-4}	2.97×10^{-3}	-1.94×10^{-1}	$1.76\times10^{-3}\times R^{-2}$(Km)	2.75×10^{-4}
	28.5°	〃	2.46×10^{-4}	0	—	—
	90°	〃	9.34×10^{-5}	4.86×10^{-3}	$1.35\times R^{-2}$ (Km)	2.15×10^{-1}
90°	—	〃	1.29×10^{-3}	-9.19×10^{-2}	$7.73\times10^{-3}\times R^{-2}$(Km)	1.24×10^{-3}

ただし　$f = 9.375$ MC

$C_R = 2.39\times10^{-3}\cdot R^{-1}$(Km) nep./m

$\Delta\alpha = 11.37$ db/km

$$\Delta\alpha_{01} = \frac{C_R^2}{\Delta\beta^2}\Delta\alpha$$

このとき、東海道新幹線のように曲率半径が2.5Kmの場合には、TE_{01} モードの減衰定数の増加量 $\Delta\alpha_{01}$ は 2.75×10^{-4} db/Km であって、極めて小さい。また $\psi=90°$ の場合にも同じ条件での減衰定数の増加 $\Delta\alpha_{01}$ は 2.15×10^{-1} db/Km である。実験では $2\varphi=20°$ としたために $\psi=28.5°$ で、2つのモードの位相定数の差は一致し、曲がりに関する特性の改善は得られていないが、(2.3.19)に示す 2φ を $2\varphi=90°$ とした場合には漏洩孔と TM_{11} モードの偏波面に関係なく常に TE_{01} モードと TM_{11} モードの縮退はとかれ、減衰定数の増加は $\Delta24\times10^{-3}$ db/Km である。

又、漏洩孔による TE_{01} モードの位相定数の変化率は(2.3.20)式より次式で与えられる。

$$TE_{01}\text{モードの位相定数の変化率} = \frac{C(01)\lambda_g}{2\pi p} \qquad (2.3.22)$$

この計算式により位相定数の変化率は0.094%と計算される。実測では位相の変化率は0.01～0.02%であった。

2.3.4 指向性

(1) 管軸を含む面内での指向性

伝送方向に一定の間隔で漏洩孔を設けた漏洩導波管の輻射角は次式で与えられる。

$$\theta=\cos\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}-n\frac{\lambda_0}{p}\right) \qquad (2.4.23)$$

ただし、p は漏洩孔の伝送方向の間隔で、n は零および正整数である。円形漏洩導波管では、漏洩孔の間隔 p は14mmとしており、したがって TE_{01} モードでは周波数10,950Mc以下においては、上式の $n=0$ の解のみを有し、固有輻射のみ輻射する。またモード変換により TE_{01} モードが円形導波管の最低次のモード TE_{11} モードに変換されても、$f=10.761$ Mc 以下においては、$n=0$ 以外の解はなくやはり固有輻射のみ輻射する。上の周波数は動作周波9.375Mcより、1.000Mc以上離れており、したがって、9.375Mcにおいては、$\theta=\cos\lambda_0/\lambda_g$ を満足する $\theta=17°11'$ の固有輻射が安定に行われる。

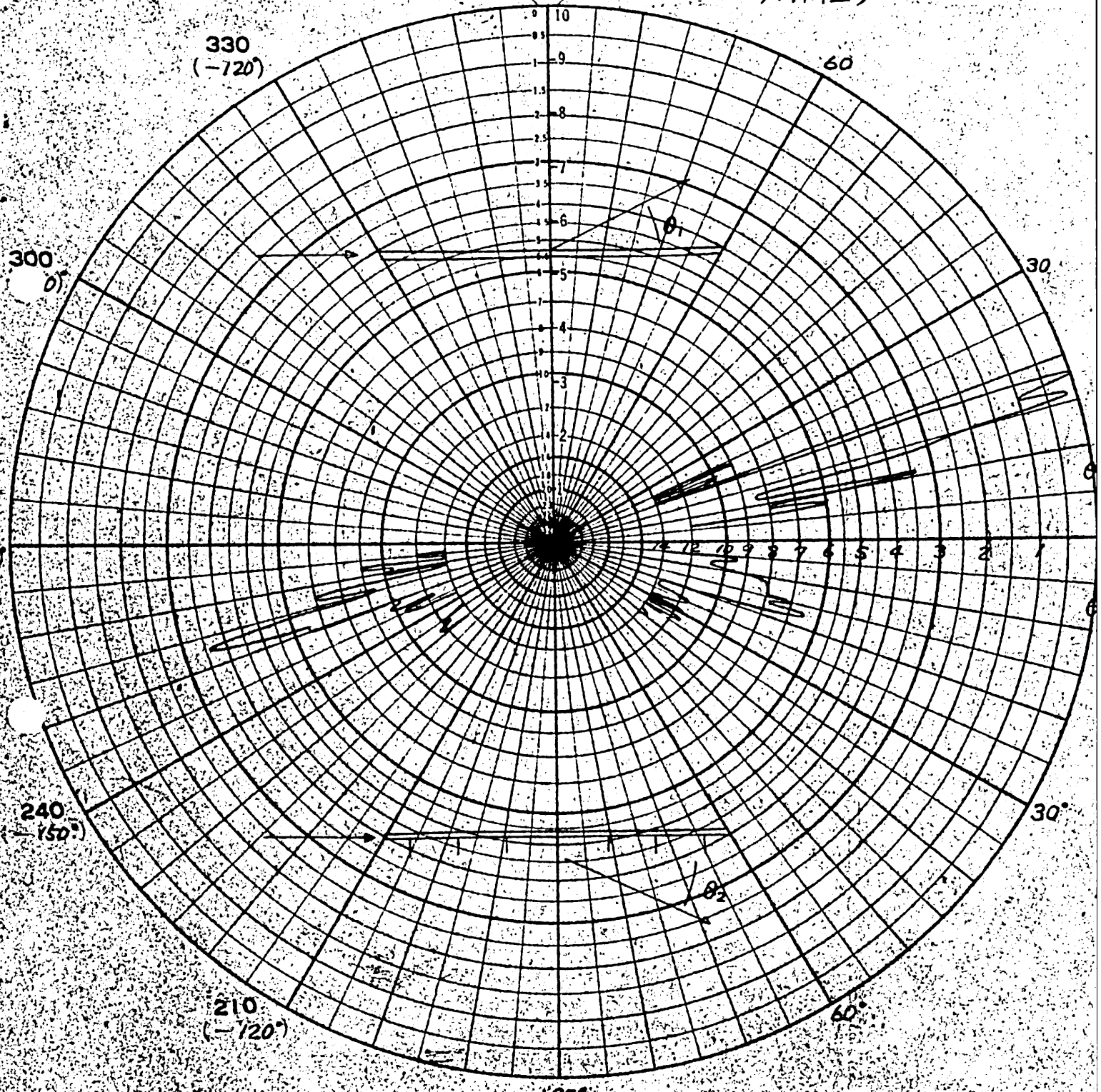
図2.3.8(a)は漏洩導波管の指向性を管軸を含む面内で指向性を測定した結果である。

測定法としては開口長が1mの漏洩導波管の中心から5m離れた円周上でホーンを移動しながら測定した。図によると漏洩導波管の輻射

11

	図 2・3・8	昭和
CHART TYPE H.	円形漏洩導波管の管軸を含む面内の指向性	住友電気工業株式会社

(a) 平面反射板がない場合の特性（開口長：1m、測定位置：開口中により半径5m の円周上）



(b) 平面反射板を漏洩導波管に取りつけた場合の特性

65.8 6,000 振高 29903（小林記録紙）

の強い方向は理論計算とよく一致している。

なお、先にのべたように円形漏洩導波管の管内波長は漏洩孔がさん孔されていないときの管内波長に比べて0.01%ほど短かくなる。この管内波長の短縮による輻射方向の変化は次式で与えられ、この輻射方向の変化は1'以下でわずかである。

$$\Delta\theta = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_g \lambda_c} \cdot \frac{d\lambda_g}{\lambda_g} = \frac{31.979^2}{33.473 \times 108.23} \times 1 \times 10^{-4} \text{ rad} < 1 \quad (2.3.23)''$$

(2) 管軸に直角な面内の指向性

円形漏洩導波管のように、漏洩孔が管軸に沿って無限に配列されているような場合の輻射エネルギーの界は Hankel 関数で表示される。次式は漏洩孔の間隔が動作周波数の波長に比べて小さい場合に、漏洩孔によって発生する磁流 J_{mz} によって与えられる磁気的ヘルツベクトルである。

$$\Pi_z = -\frac{J_{mz}}{4\omega\mu_0} H_0^{(2)}(\zeta r) e^{-j\beta z} \quad (2.3.23)$$

ここに $H_0^{(2)}$ は零次第2種 Hankel 関数であり、ζ および β は、半径方向、および管軸方向の波数を示す。零次第2種 Hankel 関数は変数の絶対値が1に比べて充分大きい場合には次のように近似される。

$$H_0^{(2)}(\zeta r) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi \zeta r}} e^{-j(\zeta r - \frac{\pi}{4})} \quad (2.3.24)$$

上式の中で $\exp(-j\zeta r)$ は、波長が $2\pi/\zeta$ である電波が r の大きい方向を進んでいる様子を示している。この $2\pi/\zeta$ は漏洩導波管の遮断波長 108.23 mm であり、したがって管軸に直角な面内の現象は波長が 108.23 mm である周波数 2.770 Mc の現象に同じであると考えられる。

この管軸に直角な面内の波長は動作周波数に関係なく常に導波管の遮断波長 $\lambda_c = 108.23$ mm に等しい。したがって管軸に直角な面内の指向性を検討する方法の1つとして波長が 108.23 mm に等しい周波数 2.770 Mc で模型実験するのが考えられる。図2.3.9は模型実験装置の一例でこれを用いて 132 mmφ の円形導波管に漏洩孔が伝送方向に一列だけさん孔されている場合の漏洩導波管の管軸に直角な面内の指向性と等価指向性を与える実験を行うことができる。

図2.3.9に示す実験用導波管の構造を次にのべる。漏洩導波管の内,

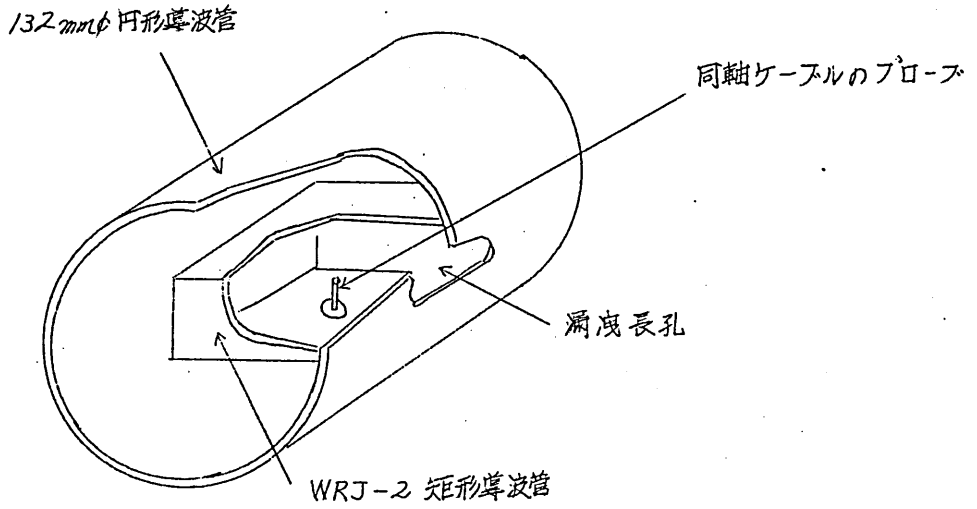
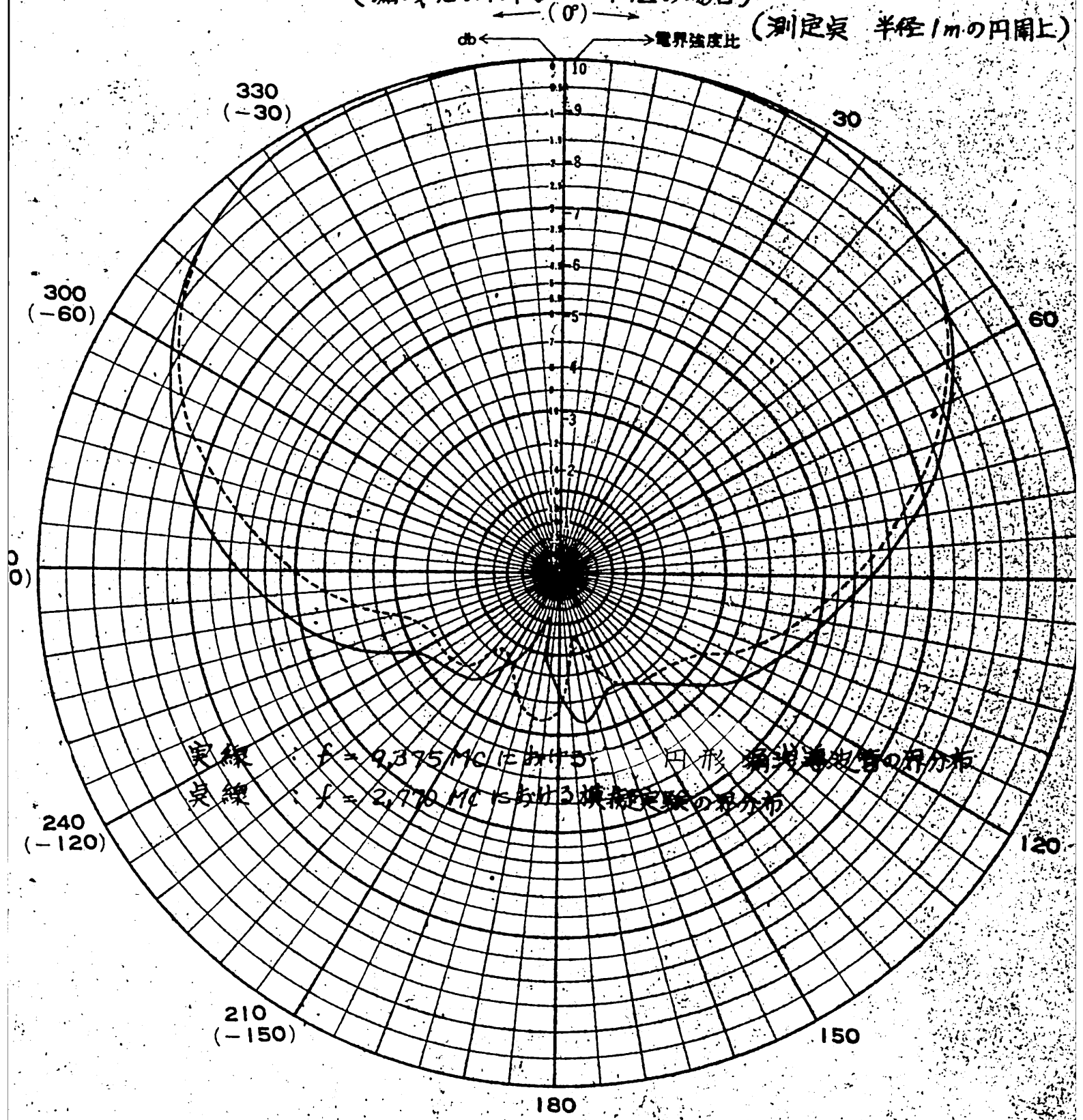


図 2.3.9　管軸に直角な面内の指向性を検討するために用いた遮断波長 10823mm に相当する波長で動作する実験用導波管

外径に等しい径をもつ円形導波管の壁に管軸方向に長い漏洩孔をあけ，内部には円形の TE_{01} モードの H_z 成分と同様が生じるように，同軸ケーブルのプローブのついたWRJ－2矩形導波管をとりつけている。図 2.3.10 の点線はこの実験用導波管を用いて周波数 2,770MC で測定した振幅の指向性を示している。同図に周波数 $f = 9.375MC$ で円形漏洩導波管の一方の漏洩孔からだけ漏洩させた場合の指向性の実測値を点線で示しているが，二者はほぼ一致している。また図 2.3.11 は同じ実験装置を用いて導波管の中心から約 250mm の付近で測定した位相指向性を示している。

図の実線は等位曲線であり，点線は漏洩孔を中心とした円を示している。実線に示す実測の位相曲線図と点線に示す円を比較すると漏洩孔の正面よりずれたところほど，実測の位相曲線は漏洩孔にしたがって近く位相が遅れている。しかしながら，その遅れはわずかであり電波は漏洩孔を中心として同心円上に輻射していると考えて差しつかえないと思われる。以上は漏洩導波管にノコの漏洩孔が存在する場合の検討結果であるが，次に漏洩孔がスコ置かれている場合の現象を検討する。図 2.3.12 は漏洩孔がスコ存在している状態で導波管の中心から 100～200mm 付近において等位相曲線を計算したもので点線で示している。この計算は次の手順で行っている。すなわち，漏洩孔がノコの場合の振幅の分布を導波管の中心から 250mm のところで測定し，

	図 2·3·10	昭和
CHART TYPE H.	円形漏洩導波管の管軸に直角な面内の指向性 (漏洩孔が1列または1個の場合)	住友電気工業株式会社



'65.8 5.000 機高 29903 (小林記録紙)

図 2·3·11 模擬実験装置で測定した等位相曲線

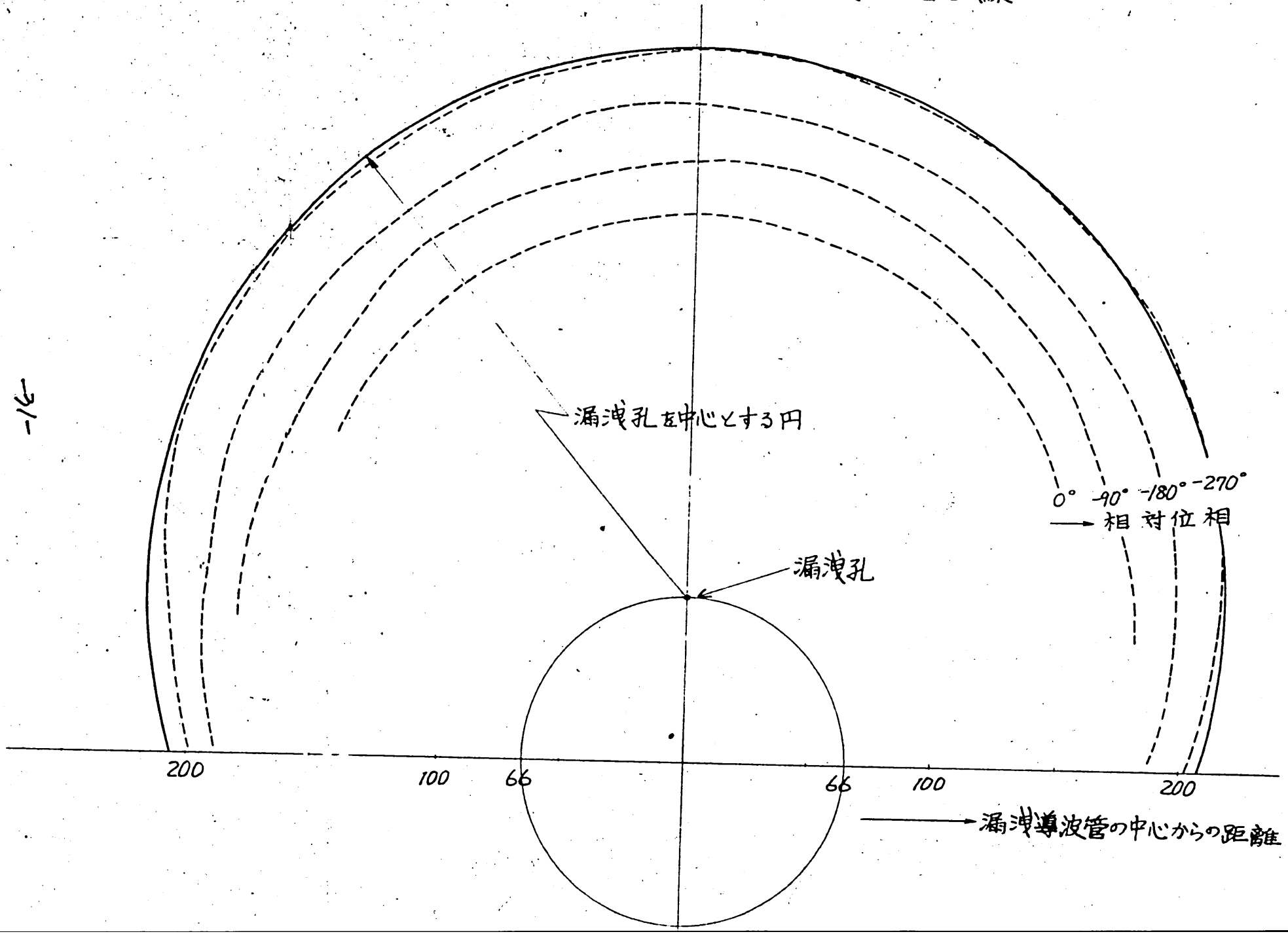
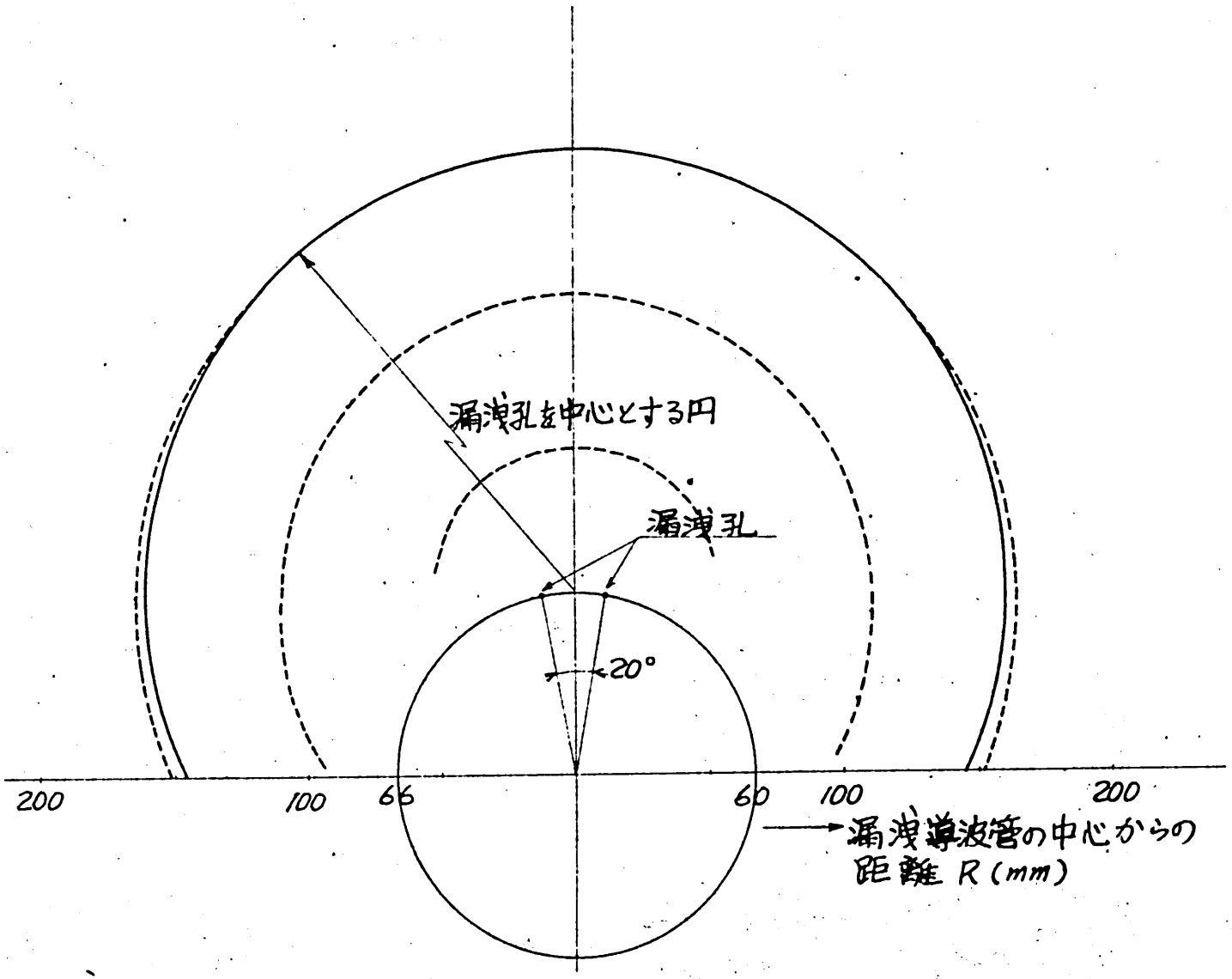


図 2·3·12

漏洩孔が2つある場合の等位相曲線



これを振幅の代表値として用い，2つの漏洩孔から輻射して来る波の位相差は図2.3.11の点線で示す実験値と，実線で示す計算値がほぼ一致していることから2つの漏洩孔の行路差を計算し，これを108.23mmの波長の位相角で表わし，上述の振幅値との両者より計算した。

これによると，等位相曲線は2つの漏洩孔の中点を中心とする円とほぼ同じ円となっている。

したがって，2つの漏洩孔を20°の開き角で配列した場合の波源の中心はほぼ2つの漏洩孔の中点にあると考えてよく，放物断面反射板を用いる場合には，この中点を焦点に置けばよいことになる。

図2.3.13の実線は漏洩孔が2列存在する漏洩導波管の9.375MCにおける断面内の指向性を示している。また一点鎖線は図2.3.9に示す。

漏洩孔が1個だけ存在する場合の2.770MCの界分布をもとに上の等位曲線を求めたと同様な計算手段を用いて導波管の中心から1mの距離での界分布を計算したものである。

9.375MCにおける実測値と2.770MCにおける理論値とを比較すると後者の方が若干広いが，この原因は計算において2つの漏洩孔の位相差として，2つの漏洩孔の行路差を108.23mmの波長の位相角で表わしたものを採用し，1つの漏洩孔による位相分布の実測値を採用しなかったためと考えられる。

3. 円形漏洩導波管の障害物探知への応用

3.1 障害物探知用漏洩導波管の構成と特徴

3.1.1 構　成

漏洩波・擬レーダー方式に用いる漏洩導波管として一般的に次の特性が要求される。

(1) 漏洩導波管の伝送損失が小さいこと。

(2) 軌道をはさんだ2本の漏洩導波管の間で障害物の探知距離分解能を出すために近端結合が行われること。

(3) 2本の漏洩導波管の間の結合が大きいこと。

(4) 湿度による影響が小さいこと。

(5) 布設後の調整が容易であること。

(6) 同波数帯域が広いこと。

(7) 列車通信との共用の可能性があるものとする。

上にのべた特性を満足するものとして具体的には 9.4GC のレーダーバンドで動作する障害物探知用漏洩導波管を設計した。

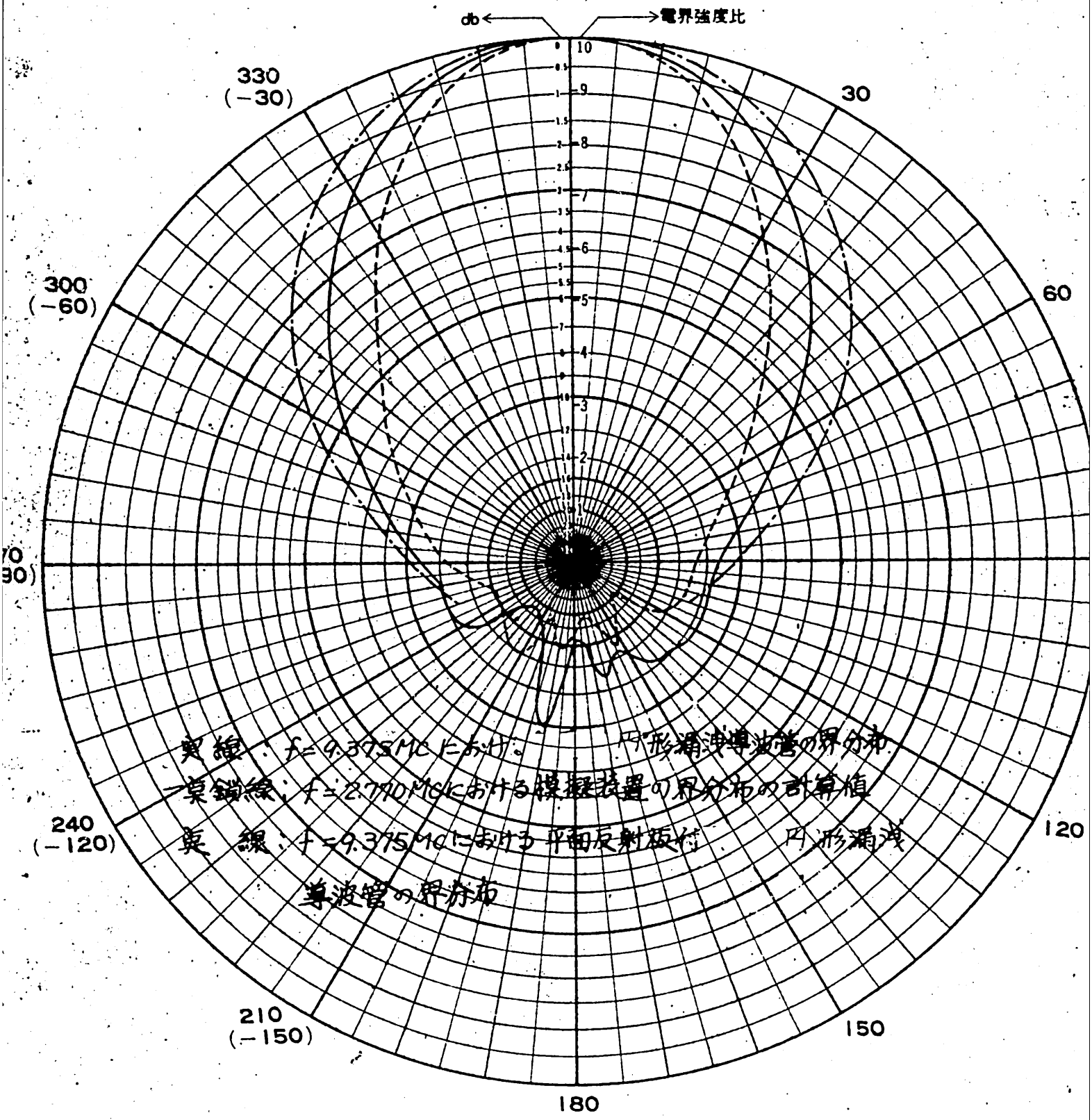
障害物探知用漏洩導波管は図3.1.1に示すように、円形漏洩導波管、平面反射器、および放物断面反射板の三つの部分から構成される。動作原理を次に説明する。レールの片側に送信用の漏洩導波管および放物断面反射板が配置され、その反対側には、受信用の漏洩導波管、放物断面反射板、および近端結合を生ぜしめる平面反射板が配置される。送信側の漏洩導波管のP点から送り込まれた電波は漏洩導波管の伝送方向とある一定の角度θで輻射され放物断面反射板上のQ点に達する。Q点から反射された電波はレールをはさんだ反対側の放物断面反射板上の点R点で反射され、漏洩導波管上にその面が管軸に直角に置かれている平面反射板上の点Sで反射され受信側の漏洩導波管に入射し、T点に達して2本の漏洩導波管の間で近端結合が行われる。

写真2、および3は、実際に製作した障害物探知用漏洩導波管を示している。

次に個々の部品、すなわち円形漏洩導波管、平角反射器、放物反射板の機能、構造について説明する。

	図 2.3 13	昭和
CHART TYPE H.	円形漏洩導波管の管軸に直角な面内の指向性	住友電気工業株式会社

（漏洩孔が2列または2個の場合）



'65.8 5.000 機高 29903 (小林記録紙)

写真2　障害物探知用漏洩導波管の実験風景
（左端の漏洩導波管が送信用，右側の漏洩導波管が受信用）

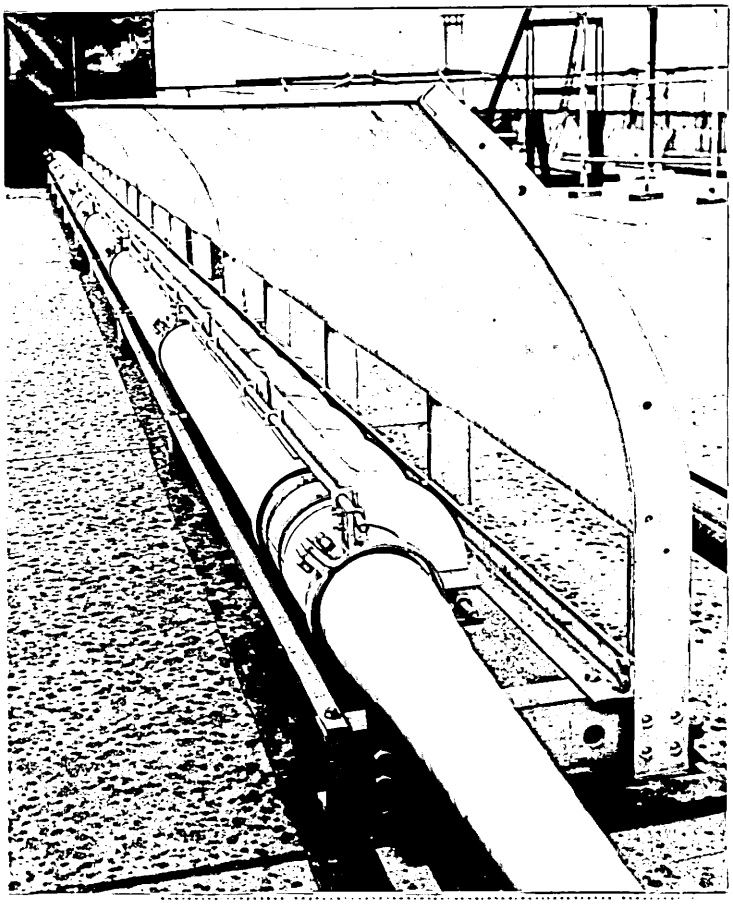
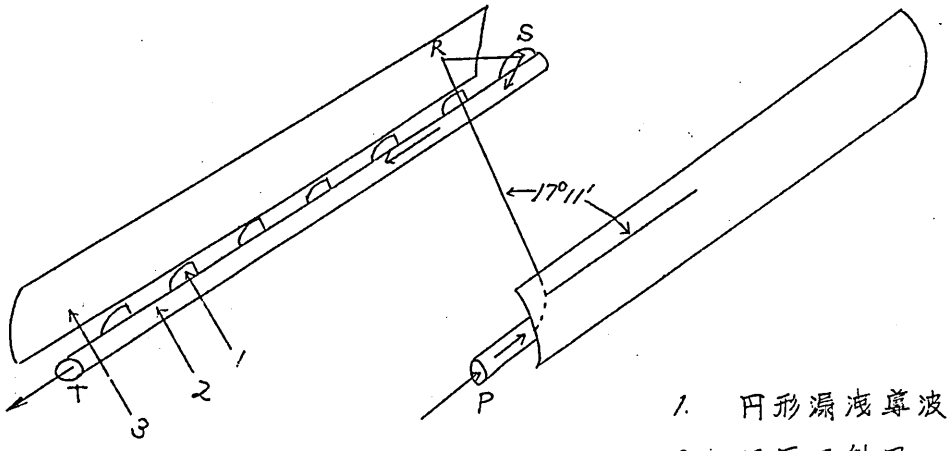


写真3
受信側の漏洩導波管
（厳状の形をした平面反射板が
多数、配列されている）



1. 円形湾曲導波管
2. 平面反射器
3. 放物断面反射板

図 3.1.1　障害物探知用湾曲導波管の構成図

円形湾曲導波管は前述ずみのものであって、その輻射角は $f = 9.375\,MC$ で、この導波管の輻射角は $\theta = 17°11'$ であって $90°$ と異なっている。したがってこのような湾曲導波管を平行に2本並べただけでは、障害物探知に必要な近端結合量を生じないで、遠端結合が生じる。平面反射板はこの遠端結合を近端結合に変えるもので図3.1.2に示す構造をなくレている。

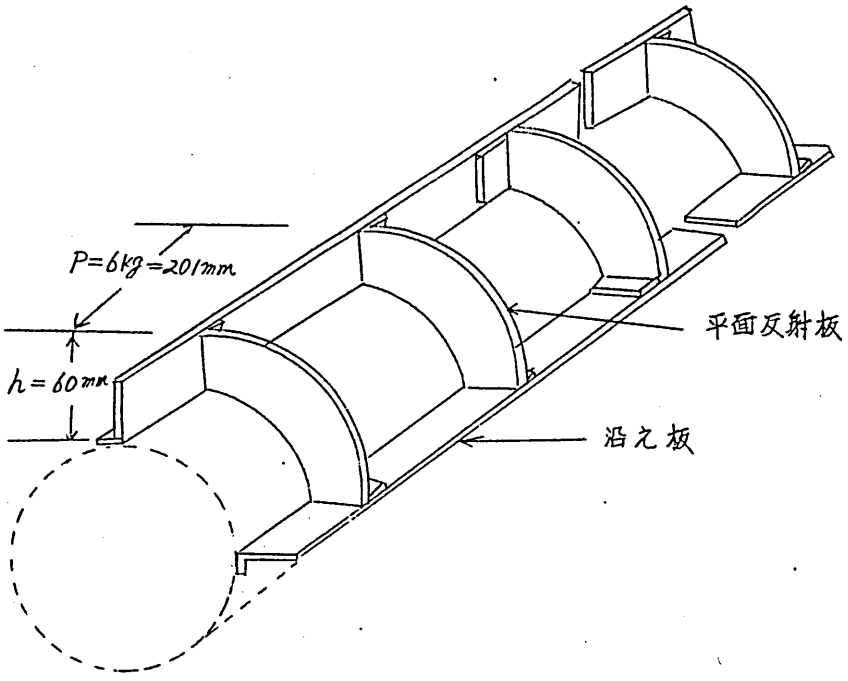


図 3.1.2　反面反射器の構造

平面反射器は受信用漏洩導波管に沿って取りつけられるもので導波管に直角な面内にその面をもつ3枚の扇形の平面反射板と管軸に直角な断面内での指向性を鋭くし、しかも3枚の平面反射板を支持する沿え板からなり立っている。相隣り合う平面反射板の間隔は図3.1.3に示すように電波を光に例えれば、その光学的な経路では互に勲が生じないように設定し、平面反射板の高さんと間隔Pの間にん＝P・tanθ（θ：輻射角）の関係を持たせている。放物断面反射板は図3.1.4に示すよう焦点距離が250mmで放物面の高さは500 mmとなつており、この放物断面反射板の焦点付近に漏洩導波管の漏洩孔を置くことにより軌道をはさんで3mの間隔で置かれている2本の漏洩導波管の間の結合を強めることができる。

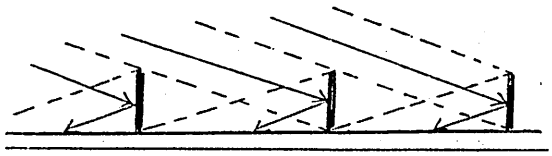


図3.1.3　平面反射板による電波の反射

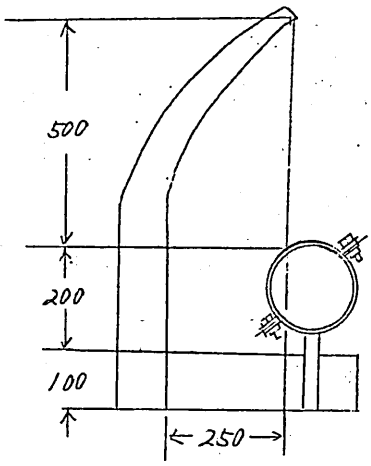


図3.1.4　放面断面反射板の構造

表3.1.1は障害物探知用漏洩導波管として必要な電気特性を示している。

表3.1.1　障害物探知用漏洩導波管として必要な特性

周波数	9.375 MC
伝送損失	8 db/km 以下
近端結合量	−90 db/m 以上（離間距離3m）
漏洩輻射角	17° 11′

3.1.2　特　徴

a) 円形漏洩導波管

低損失な伝送が可能な漏洩導波管としては、従来、らせん導波管のらせんを隙間を設けて巻くらせん漏洩導波管が検討されて来た。しかしながら、このらせん漏洩導波管は非常に高価であり、また壁面の導

体損失が大きい等の欠点があった。円形漏洩導波管は上にのべた欠点をなくするために考え出したもので、経済性に関しては将来の量産を考えると、従来のらせん漏洩導波管より相当有利になる可能性を含んでいる。また従来のらせん漏洩導波管ではらせん上に壁面電流が集中しこれによって導体損失が増したが円形漏洩導波管ではこのようなことはなく、実験的にもこれは証明されている。円形漏洩導波管は単にアルミ管に漏洩孔をさん孔しただけであるのでモードフィルター作用はなく45種類もある不要モードの干渉が懸念される。しかしながらこの不要モードによる干渉は後にのべるようにごくわずかで、ほとんど問題ないことはわかり、たとえ問題があったとしても、らせん導波管に漏洩孔をさん孔した漏洩導波管を混用する解決策がある。

b) 不要輻射

漏洩導波管から不要な輻射が出ることは、その分だけ無用な輻射を行っているので、伝送損失の増加を招き不利である。また不要な輻射によって結合の一様性が乱される等の欠点がある。これらの点を考え、不要輻射のない漏洩導波管を採用し、輻射角θが17°11′だけの固有輻射のみを輻射した。

c) 探知能力

障害物の例として最も普遍的なもの「球」を考え、障害物の探知能力を球の直径で表わすことにする。このような定義に従うとすると従来の方式よりすぐれている。電波は管軸に直角に輻射するよりも斜めに出した方がよい。すなわち図3.1.5に示すように障害物の影が受信側の漏洩導波管に拡大して投影される。

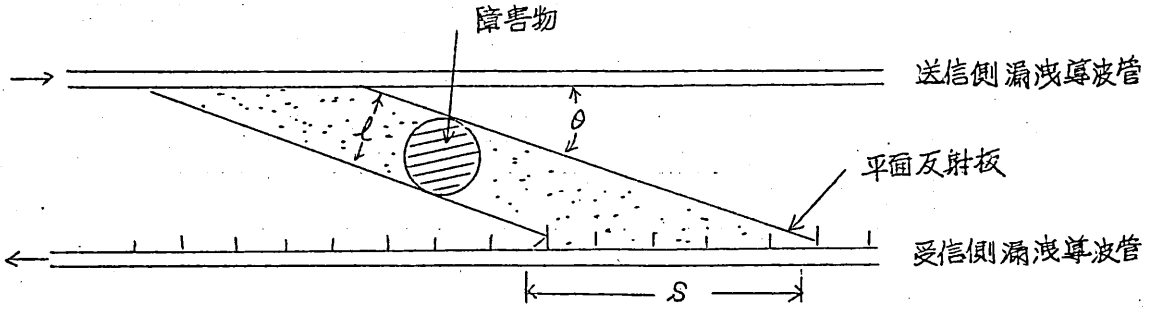


図3.1.5 固有輻射の場合の障害物の影

障害物の直径ℓと輻射角θと影の長さSの間には $\ell = S\sin\theta$ の関係があり θ=17°11′ の場合には探知能力は約3倍に拡大される。

d) 平面反射板による近端結合

近端結合を生ぜしめる方法として平面反射板を利用し，しかもこの平面反射板はその面を管軸に直角においている。このため図3.1.6に示すように周波数が変化しても送信側の漏洩導波管の輻射角と，平面反射板と受信側の漏洩導波管とで構成される受信側の輻射角とは常に補角をなし，したがって必ず近端結合が生じる特徴がある。

しかしながら，この周波数特性に関しては，後にのべるように平面反射板相互の間隙を考慮する必要がある。

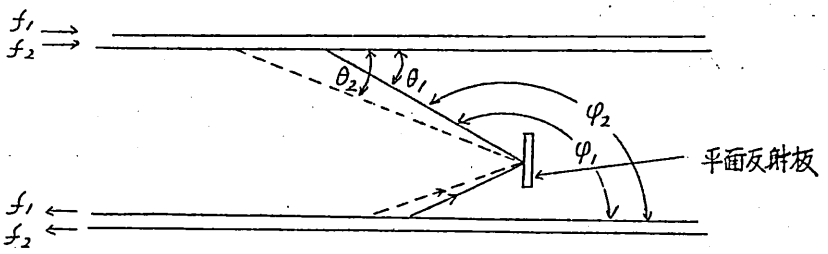


図 3.1.6　2本の漏洩導波管の間の電波の経路

e) 製作誤差，布設誤差

製作誤差，布設誤差は周波数を下げることによって軽減されるほかに固有輻射を利用しているので導波管に直角な面内での布設誤差は大きく軽減される。すなわち，2本の漏洩導波管の間の電波の結合を輻射角が90°で行わせている場合には管軸に直角な面内での波長が9.375MCの自由空間波長31.979mmであったものが，輻射角を17°11′とする固有輻射波を利用することにより，管軸に直角な面内での波長は漏洩導波管の遮断波長108.23mmに等しくなり，したがって管軸に直角な面内での誤差は大きく許され，伝送方向のみの誤差が問題となる。

f) 温度変化

温度変化に関しては次の2点に注目する必要がある。

1. 円形漏洩導波管の温度伸縮による漏洩導波管の接続部での輻射方向の変化。
2. 平面反射器の温度伸縮による輻射方向の変化。

1に関しては漏洩導波管の接続部に温度伸縮を吸収するスリーブを設ける構造を用いても固有輻射による輻射を行っているので，輻射方向の変化はない。2に関しては平面反射器に温度伸縮の小さい鉄を利

用しており、しかも3枚ノ組の平面反射器は図3.ノ.7に示すように導波管支持金具を通じて大地にとりつけられたチャンネルに結ばれており、従って平面反射器の相互間隔は温度伸縮で影響を受けない構造となる。

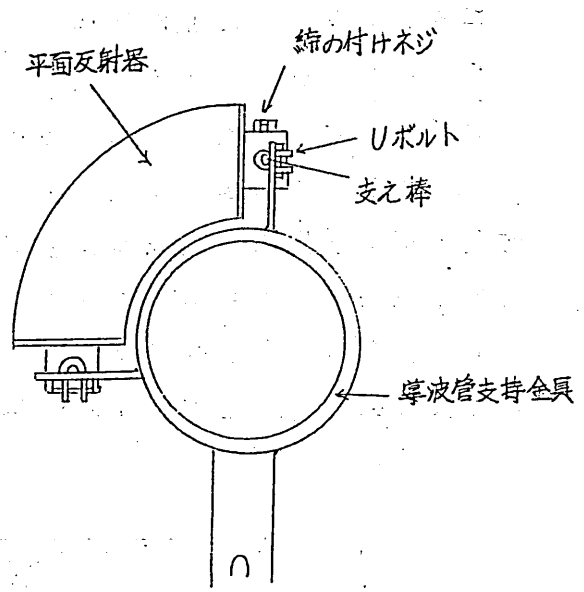


図3.ノ.7　平面反射器の支持方法

3.2　平面反射板の特性

本節では平行に置かれている2本の漏洩導波管の間で近端結合を生ぜしめる平面反射器の特性についてのべる。

3.2.1　平面反射器の設計

1枚の平面反射板を図3.ノ.8に示すように2本の漏洩導波管の間にその面が管軸に直角であるように置くと、送信側の漏洩導波管から平面反射板にやって来た電波は平面反射板で向きを変えられて受信側の漏洩導波管に入射し、容易に近端結合が生じる。この近端結合の方式は電波の反射を利用したもので従来の方式のように漏洩孔の間隔を大きく選んで列係数を形成して結合させたのに比べて無理がなく、したがって2本の漏洩導波管の間の遠端結合に変える際の電力損失が小さい。2本の漏洩導波管の間で長距離にわたって近端結合を行われる場合には図3.ノ.9に示すように、多数の平面反射板を配列し、その平面反射板相互の間隔Pは相隣り合う平面反射板から反射して来る電波が受信側の漏洩導波等内で位相が合うように、次式に示すように選ぶ必要がある。

$$P = \frac{m\lambda_g}{2} \qquad (3.2.1)$$

ここにmは正整数で、λ_g は TE_{01} モードの管内波長である。
漏洩導波管に間隔Pで平面反射板をおいた時の漏洩導波管内の電力の伝送方向と輻射方向のなす角度θは次式で与えられる。

$$\cos\theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} - n\frac{\lambda_0}{p} \qquad (3.2.2)$$

平面反射板の間隔 p が $m\lambda_g/2$ である場合に（3.2.2）式の解の数 l は上式の右辺が -1 より小さくないという条件より次式で与えられる。

$$l = n + 1 \leqq \left(1 + \frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right) + 1 \qquad (3.2.3)$$

表 3.2.1 は試作した4種類の平面反射器の平面反射板の間隔 p と平面反射板の高さ h および、$f = 9375MC$ における（3.2.3）式を満足する解の数 l を示している。また表では、~~製品として納入した~~ $p = 6\lambda_g$ の平面反射板の輻射角の計算値を示している。平面反射板の間隔 p と高さ h の間には前述のように $h = p\tan\theta_0$（θ_0：輻射角）の関係を持たせている。

表 3.2.1　平面反射板の種類

種　類	$\nu = \lambda_0 p/\lambda_g$	p (mm)	h (mm)	l
A	1	33.5	10.0	3
B	3	100.5	30.0	17
C	6	201.0	60.0	13
D	11	368.2	110.0	23
$p = 6\lambda_g$ の場合の輻射角 $\theta =$ （$f = 9375MC$） 17°11′, 37°14′, 50°26′, 61°28′, 70°13′, 80°51′, 90° およびこれらの補角				

表3.2.1 によると平面反射板の間隔 p が大きいほど多くの方向に輻射することがわかり、上の計算結果だけでは、間隔 p が大きい場合には電力が多くの方向に輻射して不利なことがわかる。しかしながら実際には後述のように間隔 p が大きく平面反射板が大きいほど一つの平面反射板の指向性が $\theta = 180° - 17°11'$ の方向に鋭くなり、このため電力の散乱は小さく近端結合は大きいことがわかっている。

製品の平面反射器は平面反射板三枚が一組となっており、動作周波数のずれに対しては三枚一組の平面反射器を管軸方向に動かして調整するようにしている。調整できる周波数範囲 $2\Delta f$ は次のように計算される。

すなわち、周波数が設計周波数 f_0 から Δf だけずれた場合、設計周波数で得られる結合量より 3 db 低下することが、許されると定義する。

この定義にしたがうと、一組の平面反射器を構成する平面反射板の数nと許容周波数範囲 $2\Delta f$ の間に次の関係式が計算される。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sin 2n\nu\pi \dfrac{\lambda_{g0}^2}{\lambda_0^2}\dfrac{\Delta f}{f_0}}{2\nu\pi \dfrac{\lambda_{g0}^2}{\lambda_0^2}\dfrac{\Delta f}{f}} \qquad (3.2.4)$$

上式より製品の平面反射板では ±110 MC の周波数範囲は調整が可能である。

ここに $p = \nu\lambda_{g0}$ である。

3.2.2 指向性の測定

円形漏洩導波管本体に関する指向性は前章でのべた。この節では漏洩導波管に平面反射器をとりつけた場合の指向性の測定結果についてのべる。

図2.3.7(b)は円形漏洩管に $p = 6\lambda_g$ の平面反射器をとりつけ、管軸を含む面内で指向性を測定したデータを、前述の平面反射器がとりつけられていない場合の受信レベルの最大値で正規化して示している。図によると $p = 6\lambda_g$ の場合には表3.2.1に示すようにローブが13ケあるが、実際には漏洩導波管の固有の輻射方向 $\theta = 17°11'$ の輻射と、近端結合に関係のある $180° - 17°11'$ の輻射のみが観測されその他は観測されず、レベルが充分小さいことが確認された。$\theta = 17°11'$ の輻射の振幅と、$\theta = 180° - 17°11'$ の輻射の振幅を比較したところ、後者の方が前者に比べて3db ほど大きく、平面反射板によって電波を反射させる効果は充分達せられている。また前述の平面反射板のとりつけられていない漏洩導波管だけの $17°11'$ の輻射方向の振幅と平面反射板をとりつけたときの $180° - 17°11'$ の輻射方向の振幅を比較したところ、後者の方の輻射電力は約3.5db 低い。

図2.3.12の点線は、平面反射板をとりつけた場合の管軸に直角な面内での指向性を示している。ビームの電力半値角は、約60度で平面反射器がない状態より若干ビームは鋭くなっている。

3.2.3 温度伸縮

温度伸縮は近端結合の周波数特性に影響を与え、このため温度変化によってパルスに対する応答波形が変わる場合もあると考えられる。したがって本節では、温度変化による近端結合の変化、パルス応答の変化などをとりあげて解析する。

2本の漏洩導波管の間の近端結合量の周波数関数 $f(\omega)$ は2本の漏洩

導波管がフレネル領域にあるのでこれを計算することは極めてむっかしい。したがってこの報告では、このような場における結合の解析は行わず、2本の漏洩導波管が図3.2.1に示すように密に接して結合孔を通じて分布結合しているモデルで考える。図3.2.1に示すモデルでは2本の漏洩導波管がピッチPの間隔で結合孔で結ばれており、結合孔の数はn+1ヶあり、漏洩導波管の長さlはl=nPとなっている。

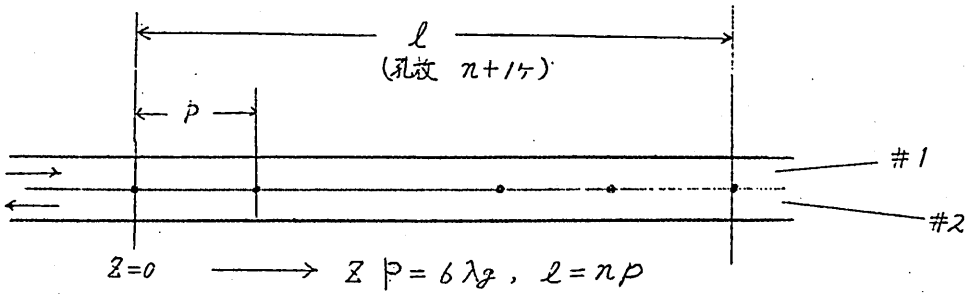


図3.2.1　結合孔で結ばれている2本の漏洩導波管

ここで、結合孔の存在は平面反射板の存在に匹敵するもので結合孔の間隔PはP=6λg0（サフイックスの0は設計周波数の中心を示す）とする。図3.2.1に示す測定点z=0における近端結合の周波数特性f(ω)は次式で与えられる。

$$f(\omega)\sum_{k=0}^{n}\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda g}\cdot 2Pk\right) \qquad (3.2.5)$$

$$=\frac{1-\exp\left(-j4\pi(n+1)\frac{P}{\lambda g}\right)}{1-\exp\left(-j4\pi\frac{P}{\lambda g}\right)}$$

$$=\frac{1-\exp\left(-j4\pi\frac{l+P}{\lambda g}\right)}{1-\exp\left(-j4\pi\frac{P}{\lambda g}\right)} \qquad (3.2.6)$$

$$=\frac{1-\exp\left\{-j24\pi(n+1)\frac{\lambda g_0}{\lambda g}\right\}}{1-\exp\left(-j24\pi\frac{\lambda g_0}{\lambda g}\right)} \qquad (3.2.7)$$

ここで、結合孔1ヶ当りの結合の電圧を1としている。

温度伸縮が上式に与える要素は1)、結合孔の間隔P.2)、管内波長であり、前者は導波管の管軸方向の伸びによって生じるものであり、後者は導波管が管軸に直角な方向に伸びたために導波管の遮断波長が変化し

たために生じるものであり、後者は前者に比べて小さく無視できる。これらの温度伸縮はこれと等価な動作周波数の変化で換算して考えることができる。すなわち $f(\omega)$ が一定であるように温度が変化すると同時に周波数が同時に変化すると考え、上式（3.2.5）の比例係数内の変数 p/λ_g を温度、および周波数で全微分を行う。

$$d\left(\frac{p}{\lambda_g}\right)=d\left[\frac{p_0(1+\alpha T)}{\lambda_g}\right]\fallingdotseq\frac{p_0}{\lambda_{g0}}\alpha dT+\frac{p_0}{\lambda_{g0}^2}\cdot\frac{\lambda_{g0}^2}{\lambda_g^2}\cdot\frac{df}{f_0} \qquad (3.2.8)$$

上式で、α は図3.2.1に示すモデルにおける漏洩導波管の線膨張係数 T は温度、f は周波数で、上式では $T=0$、$f=f_0$ における全微分を計算し、管軸に直角な方向の伸びによる影響は無視した。$d(p/\lambda_g)=0$ とおくと、dT と df の関係は計算できる。

$$df=\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{g0}^2}\alpha f\,dT \qquad (3.2.9)$$

ここで $f_0=9.375MC$ とし、線膨張係数として平面反射板の材質である鉄を考え、$\alpha=1\times10^{-5}/deg$ とおくと次式の関係が得られる。

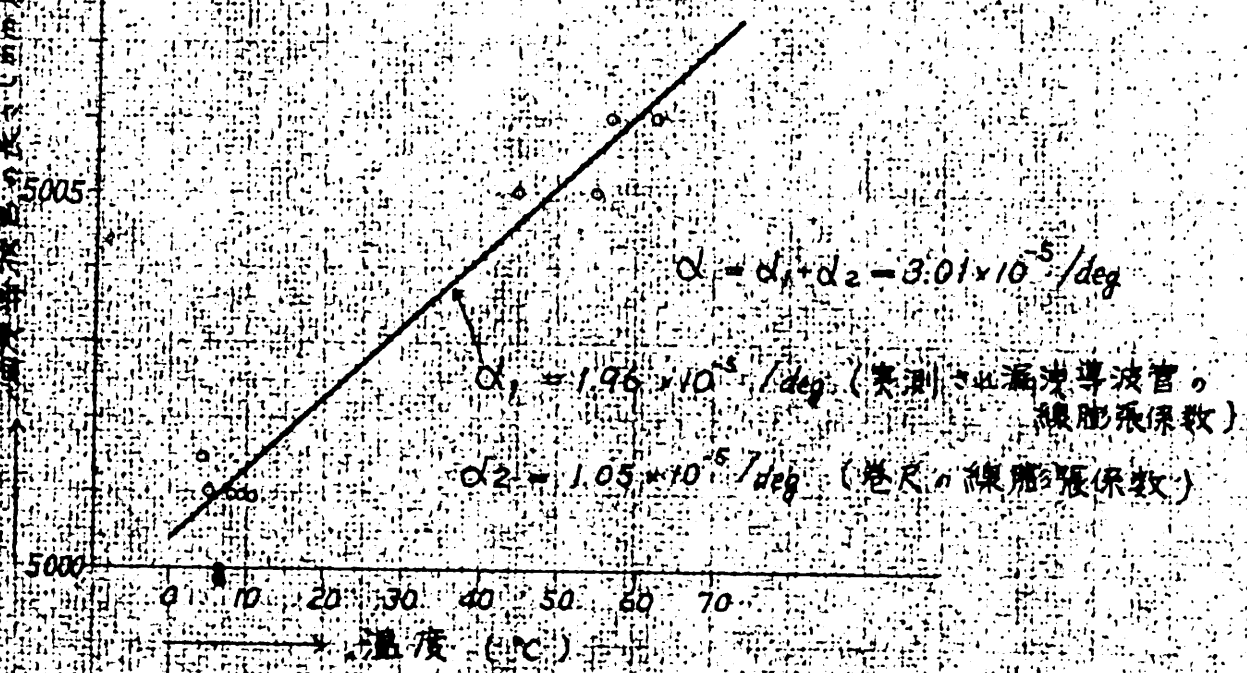
$$df(MC)=-\left(\frac{31.979}{33.473}\right)^2\times9375\times1\times10^{-5}dT$$

$$=8.56\times10^{-2}dT$$

したがって、たとえば、10度の温度変化は、動作周波数の0.856MC変化と等価である。したがって10度の温度変化があった場合に応答波形がどのように変るかをしらべるには、動作周波数を0.856MC変えて応答波形の変化を観測すればよいといえる。なお、今回の実験では近端結合を生ぜしめる機構を平面反射板に持たせたが、このような方式とせずに材質がアルミである漏洩導波管に波長位のピッチで漏洩孔をあけて列係数によって近端結合を生ぜしめた場合には、図3.2.2に示す実験結果によると漏洩導波管の線膨張係数は鉄の約3倍であり、温度変化の影響は大きい。

動作周波数を変えた場合に応答波形がどのような形を示すかは、前述の（3.2.7）式に示す近端結合の伝達関数 $f(\omega)$ に、図3.2.3および次式に示す送信パルスを Fourier 変換したもの $a(\omega)$ を乗じ、これを時間関数に再変換することによって計算される。

図 3.2.2　円形漏洩導波管の温度伸縮特性
（強化プラスチックスでカバーしなもの）



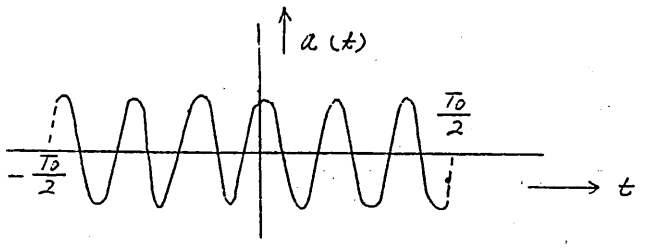


図 3.2.3　送信パルスの波形

送信パルスの時間関数

$$a(t)=\begin{cases}0 & |t|>\frac{T_0}{2}\\ 1 & |t|\leqq\frac{T_0}{2}\end{cases} \qquad (3.2.10)$$

送信パルスの周波数関数

$$a(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\cos\omega_c t\, e^{-j\omega t}\,dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{\sin(\omega-\omega_c)\frac{T_0}{2}}{\omega-\omega_c}+\frac{\sin(\omega+\omega_c)\frac{T_0}{2}}{\omega+\omega_c}\right\} \qquad (3.2.11)$$

受信波の時間関数

$$b(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}a(\omega)\cdot f(\omega)\,e^{j\omega t}\,dt \qquad (3.2.12)$$

次式は上に述べたような解法による漏洩波・擬レーダーの応答波形の計算結果の一例であって、結合孔の間隔Pは$\lambda_{g_0}/2$でλ_{g_0}はパルスの搬送周波数f_cの管内波長λ_{g_c}に一致している場合である。

$$b(t)=\begin{cases}\cos\omega_c t & -\frac{T_0}{2}<t<-\frac{T_0}{2}+\tau\\ 2\cos\omega_c t & -\frac{T_0}{2}+\tau<t<-\frac{T_0}{2}+2\tau\\ \frac{T_0}{\tau}\cos\omega_c t & \frac{T_0}{2}-\tau<t<\frac{2\ell}{Kv}-\frac{T_0}{2}+\tau\\ \left(\frac{T_0}{\tau}-1\right)\cos\omega_c t & \frac{2\ell}{Kv}-\frac{T_0}{2}+\tau<t<\frac{2\ell}{Kv}-\frac{T_0}{2}+2\tau\\ \cos\omega_c t & \frac{2\ell}{Kv}+\frac{T_0}{2}-\tau<t<\frac{2\ell}{Kv}+\frac{T_0}{2}\end{cases} \qquad (3.2.13)$$

ここで

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

K = (管内波長) / (自由空間波長)

v : 光速度

上式によると、もが $-\frac{t_0}{2}-\tau$ から $\frac{2\ell}{Kv}-\frac{T_0}{2}+\tau$ の間では受信波のエンベロープは平坦であり、パルス幅が元のパルス幅より広がっていることは距離情報が入ったことを意味している。

3.2.4 近端結合量の測定

開口長が2mの2本の漏洩導波管を1mの間隔で置いたり、放物断面反射板をとりつけて3mの間隔で置いたりして、表3.2.2に示す定義にもとづく、遠端結合量を測定した。

表3.2.2 遠端結合量、近端結合量の定義

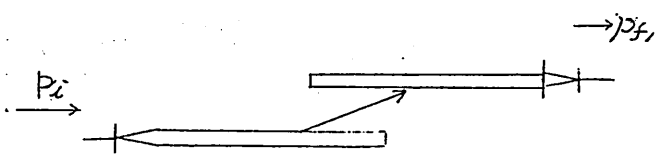
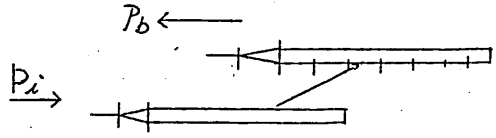
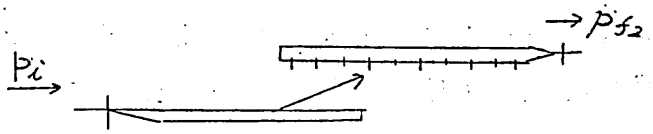
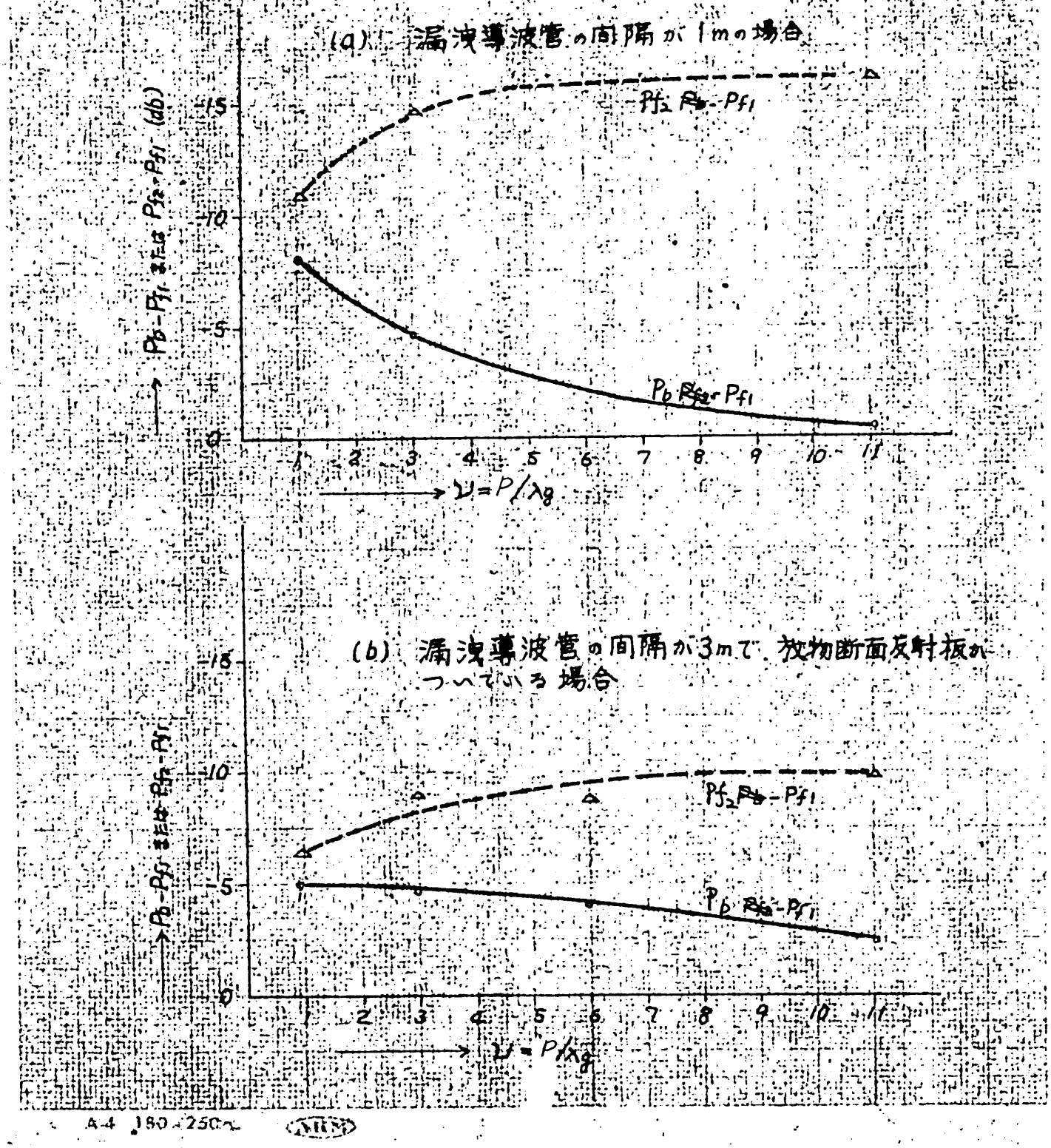
遠端結合 (平面反射板なし)	
近端結合 (平面反射板あり)	
遠端結合 (平面反射板あり)	

図3.2.4(a)(b)は $f = 9.375MC$ における、平面反射板がある場合の近端結合量 P_b および遠端結合量 P_{f_2} と、平面反射板がない場合の遠端結合量 P_{f_1} との差 $P_b - P_{f_1}$ および $P_{f_2} - P_{f_1}$ を縦軸に平面反射板の間隔をとって表わしたものである。図によると、導波管の間隔が1mの場合でも、3m(放物断面反射板の焦点距離が250mmあるので実際には4mに相当する)の場合でも平面反射板の間隔 P および高さんが大きいほど P_b と P_{f_1} の差は小さく P_{f_2} と P_{f_1} の差は大きいこと、そして2本の導波管の離間距離が小さいほど平面反射板の効果が大きいことがわ

図 3·2·4

平面反射板の有無による遠端結合の差 $P_{f2}-P_{f1}$ および平面反射板がある場合の近端結合と、ない場合の遠端結合の差 P_b-P_{f1} の測定



かった。

図によると、完成品の平面反射器（$P=6\lambda_g$）では$|P_b - P_{f_1}|$は4 dbで$|P_{f_2} - P_{f_1}|$は、約5 dbと測定されている。これを3.2.2でのべた指向性の測定データと比較すると前者に相当する値は3 dbで後者に相当するものは、3.5 dbで両者はほぼ一致する。

図3.2.5は漏洩導波管の間隔が3mで放物断面反射板がついている場合の結合量の周波数特性の実測値である。

図によると、平面反射板がない状態での遠端結合量にはあまり周波数特性はないが、平面反射板が漏洩導波管についている状態では遠端結合近端結合とも周波数特性が観測される。特に近端結合量に関しては、約140 MCの周波数幅で結合量は最低に落ち込んでいる。

この近端結合量の周波数特性は本質的なものであって、この周波数特性は前節の（3.2.6）式によって計算されている。

次式は（3.2.6）式より2本の漏洩導波管の結合している部分の長さℓが平面反射板の間隔Pに比べて充分大きい場合の結合の周波数特性の大きさを近似計算したものであって、この式は設計した動作周波数f_0の近傍でのみ成立する。

$$\left|\frac{f(\omega)}{f(\omega_c)}\right| = \frac{\sin\left(2\pi\ell \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda_0^2}\frac{df}{f}\right)}{2\pi\ell\frac{\lambda_g}{\lambda_0^2}\frac{df}{f}} \qquad (3.2.14)$$

図3.2.6は上式を図示したものであって、近端結合は設計周波数において、最大の結合が得られ上式より次式の周波数幅で結合は最低に落ち込む。

$$2df = \frac{v}{2\ell}\frac{\lambda_0}{\lambda_g} \qquad (3.2.15)$$

上式で、vは光速度を与える。したがって次式より、$\ell = 2m$の場合を計算すると、

$2\Delta f = 71.6$ MCとなり、実験値と大きく異なっている。この異なっている原因は理論計算では2本の漏洩導波管は結合孔によって密に結合しているモデルを考えているが、実際には2本の漏洩導波管は離れて置かれており空間を通じて結合する電波は平行ビームでなく、ビームが広がっている,ためと考えられる。

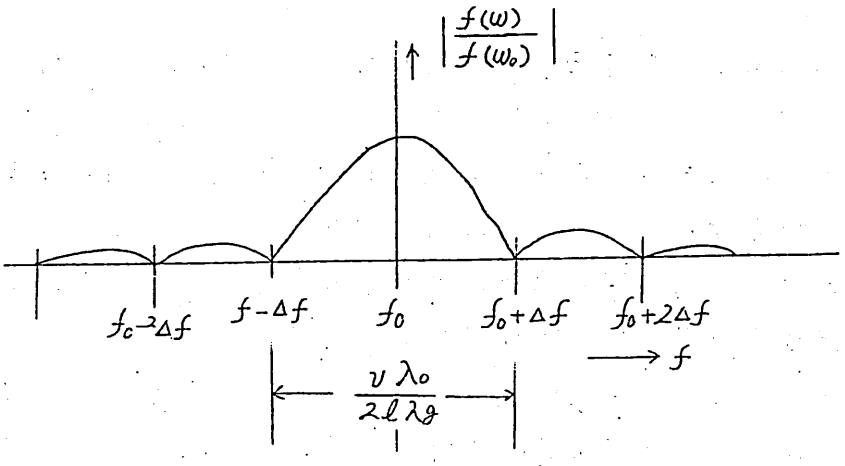


図 3.2.6　近端結合の周波特性

3.3　放物断面反射板の特性

2本の漏洩導波管の結合を強くするために焦点距離250mm高さ500mmの放物断面反射板を用いる。この節では、この放物断面反射板による結合の増加量の測定および漏洩導波管と放物断面反射板との相対関係によって結合、界分布がどのように変化するかをのべる。

3.3.1　漏洩導波管の位置と結合量との関係の測定

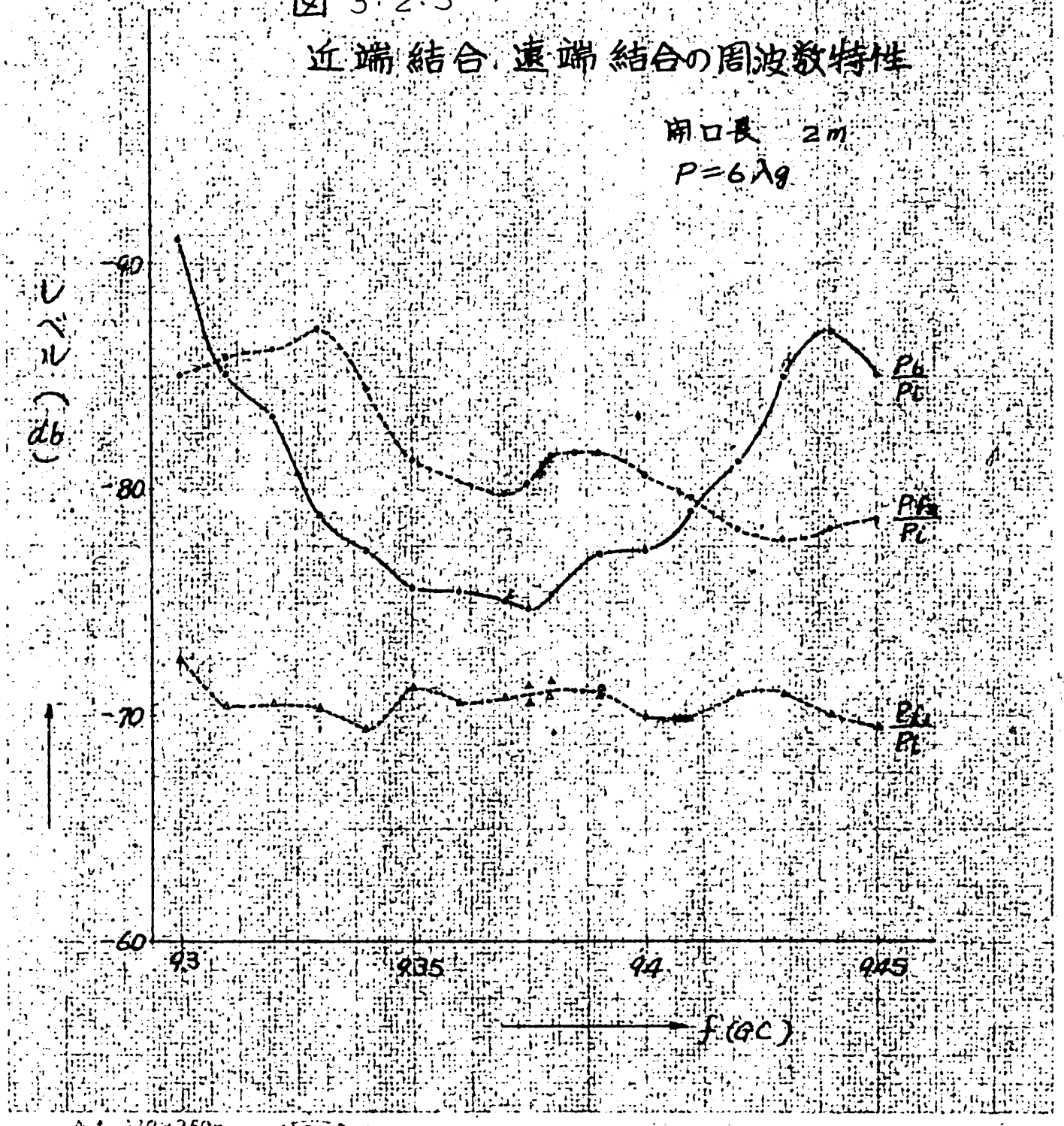
漏洩導波管を放物断面反射板のどこに置けば一番よく結合が生じるために図3.3.1(a)に示すように送受の漏洩導波管を放物断面反射板の焦点付近でいろいろ移動して結合量を測定した。図3.3.1(b)はその実測結果をまとめたもので(x, y)は漏洩導波管の2つの漏洩孔の中心位置を放物線の焦点を原点にして示している。図は実測した結合量を、実測した結合量の最大値で正規化し結合量の大きさ面積で示したもので点線で示す1つの正方形の中が黒く塗りつぶされているものほど2本の漏洩導波管の間の結合損失は大きく、空白は結合損失が小さい。したがって$(x, y)=(0, 0)$の点で一番よく結合している。図の点線で示す1つの正方形は5dbの結合量に相当し、最大の結合量を示すところに対して、5db以上の結合損失の違いがある場合は全部黒くなっている。

したがって上図より、ほぼ一番適した漏洩導波管の位置を知ることができる。

なお、2本の漏洩導波管を3m離しておき放物断面反射板をとりつけた場合とない場合との結合度がどれ位異なっているかをしらべたところ、その差は約10dbであり、1m離して放物断面反射板がない場合と3m離して放物断面反射板がある場合との結合の差は約2dbで、いずれも放物断面反射板がある場合の方が結合が大きかった。

図 3.2.5

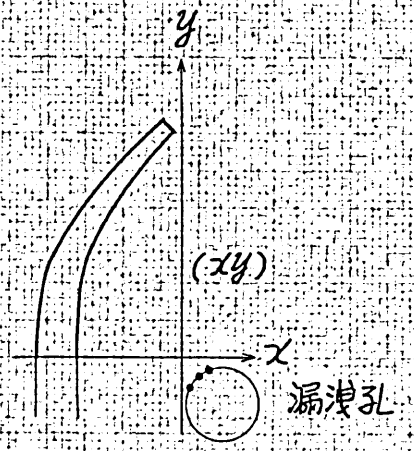
近端結合、遠端結合の周波数特性



NO A502

図 3·3·1

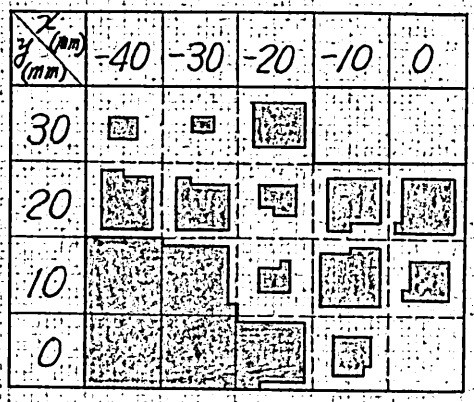
漏洩導波管の位置と結合量との関係



(a) 漏洩導波管の位置

(b) 結合度の分布

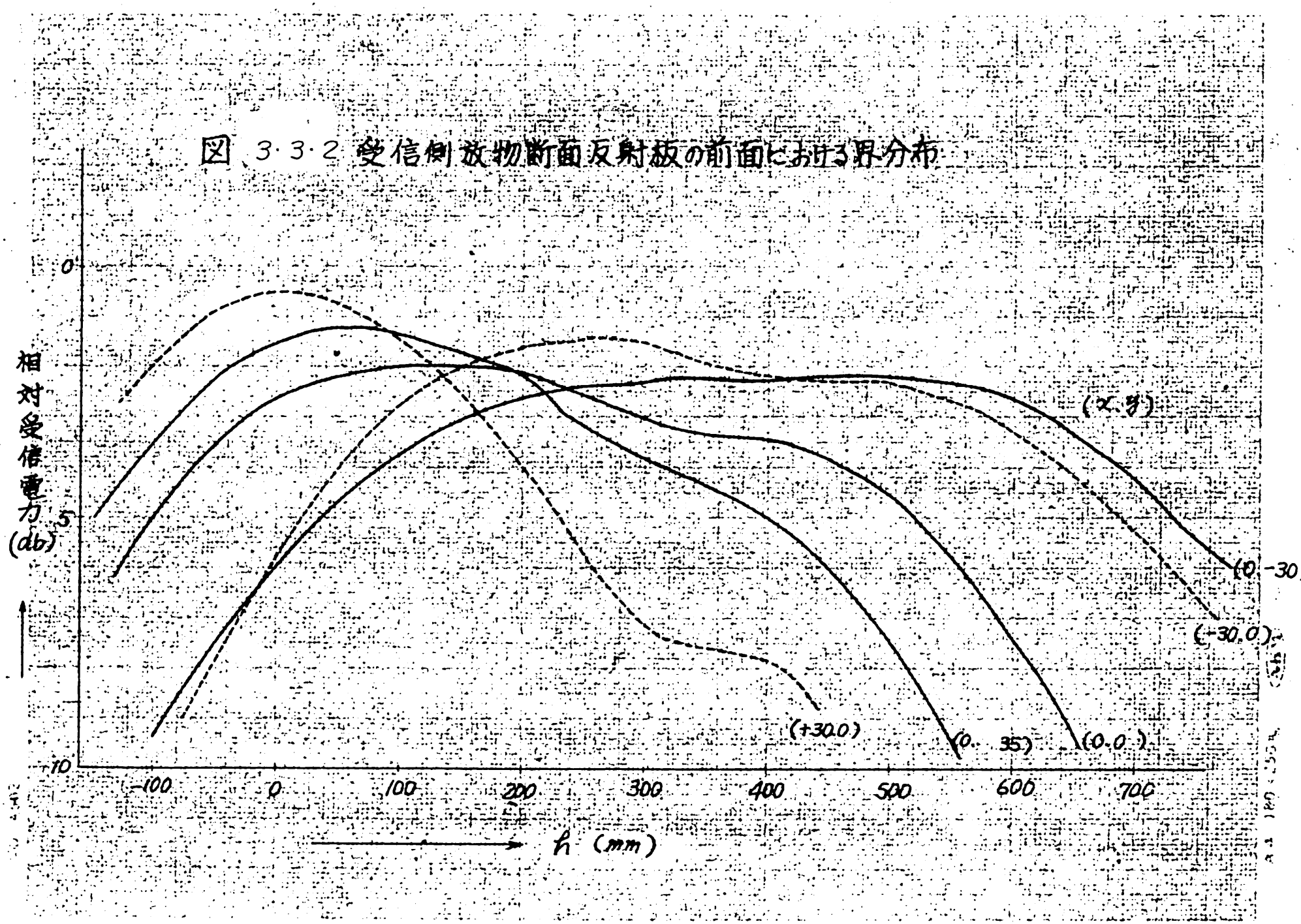
5db/unit area



点線で囲まれた正方形の内部の黒く塗りつぶした面積の大きさによって結合損失の大きさを示し正方形が黒く塗りつぶされている場合は 5db 結合が低いことを示している。結合量は一番はよく結合する $(x\,y)=(0.0)$ で正規化している。

A-4 180 (250mm)

図 3·3·2 受信側放物断面反射板の前面における界分布



3.3.2　漏洩導波管の位置と界分布との関係の測定

障害物の検知能力の1つとして電波が軌道上どれ位広がっているかを知る必要があると思われ、送信の漏洩導波管のみ設置して、受信側の放物断面反射板の前面において、界分布を測定した。図3.3.2はこれを図示したもので、横軸のhは放物断面反射板の焦点から受信ホーンまでの高さを示し、縦軸は受信電力の相対値を示している。パラメータ(x, y)は前節と同じく漏洩導波管のと放物断面反射板の相対位置を示している。図によると放物断面反射板に一番適当と思われる界分布を与える漏洩導波管の位置は(x, y)=(0, 0)でなくて、むしろ(x, y)=(−30, 0)と多少defocusにした方がよいようである。しかしながら、この測定値は振幅のみで、位相は与えていないから、このデータだけでは判断できず、結合が一番強く漏洩導波管の位置とずれている。したがって(x, y)=(0, 0)を漏洩導波管の最適な位置として定めると、h=100～200 mmのところが障害物をよく探知する場所といえる。

3.4　総合特性

3.4.1　総合特性

前節までで各部品の特性をのべて来たがここでは、これらを組み合わせた場合の総合特性をのべる。

漏洩孔の直径は、10.4 mmφと決定した。この場合の伝送損失の推定値は図2.3.1を参考とすると、6.5 db/kmである。また近端結合量は次のような換算によって1m当り、約−79 db程度と推定される。すなわち、伝送損失と輻射量との関係は図2.3.2で与えられ図の輻射量から逆算して伝送損失が6.5 db/kmである漏洩導波管を1mの間隔でおいた場合の遠端結合は−77 dbであることが計算される。これに放物断面反射板による結合の増加の効果2 db，平面反射板を用いて遠端結合を近端結合に変える損失4 db等を考慮に入れると、総合的に79 dbの近端結合量が生じることが計算される。

図3.4.1は長さ40 mの円形漏洩導波管の伝送損失の周波数特性シャトル・パルス法によって測定した結果を示す。

測定結果によると伝送損失の周波数特性はあまりなくて、周波数9.1～10.0 GCにおける減衰定数の標準偏差は0.4 db/kmであり、また減衰定数の平均値は6.3 db/kmで設計値を若干下まわっている。

図3.4.2は2本の漏洩導波管の間隔を3 mとし放物断面反射板がある状態での近端結合の伝送方向の分布特性をとったものである。近端結合

を生ぜしめた開口長は1mであって図の横軸は1mごとに区切られた開口部の番号を示している。測定結果によると1mの開口の場合の近端結合量の平均値は−75dbで設計値 −79db よりもよい特性を示している。

実測値は障害物探知に必要な限界値に対して 15db も余裕があり、前にのべたように2本の漏洩導波管を3m離しておいた場合に放物断面反射板の存在によって結合度は 10db 改善されているが、近端結合には相当の余裕があるので将来は放物断面反射 を用いないでもよいと思われる。

図 3.4.3 は導波管の開口長 l を 1m から 8m まで広げて行った場合の近端結合量の増加を示している。同図に開口長 l と結合量 X との間に $X = 20 \log l + \alpha$ なる直線を点線で示しているが、この直線と実測値はほぼ平行であることから、開口長を広げて行った場合に近端結合の電圧量と開口長が正比例することがわかる。

3.4.2 障害物探知距離限界

本節では前節でのべた特性の漏洩導波管を用いた場合にレーダー・セットからどれ位の距離の障害物を探知することができるかの計算を行う。

表 3.4.1 の α 欄は現在得られている物を用い、送受信のレーダー・セットを地上に設置した場合のレベル計算を与えたものである。

これによると尖頭出力 40 KW、パルス幅 13.3 sec のマグネトロンを用いれば、障害物の探知距離限界は、6 km と計算される。

図 3·4·1　　円形漏洩導波管の伝送損失

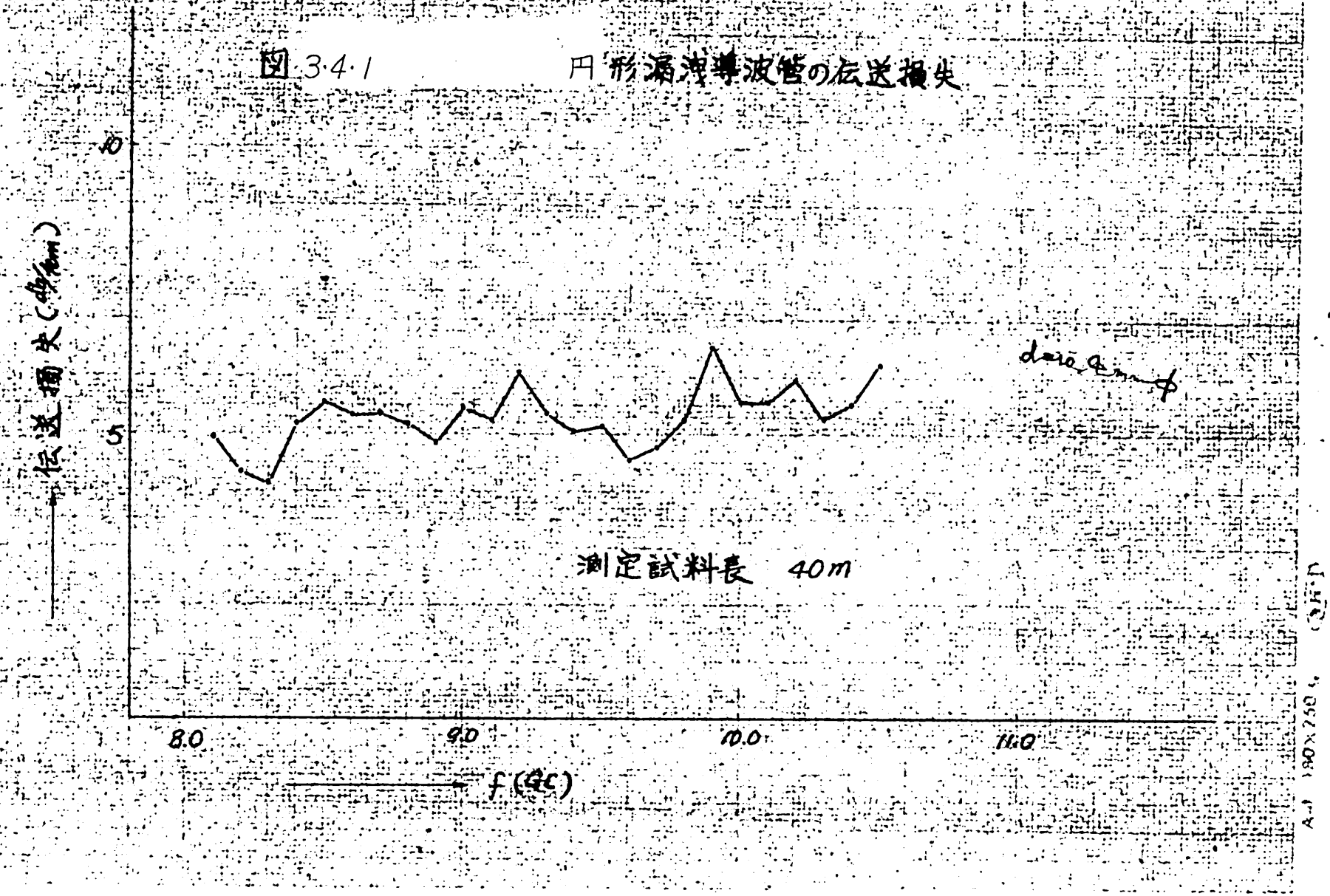


図 3·4·2

近端結合の伝送方向の分布特性

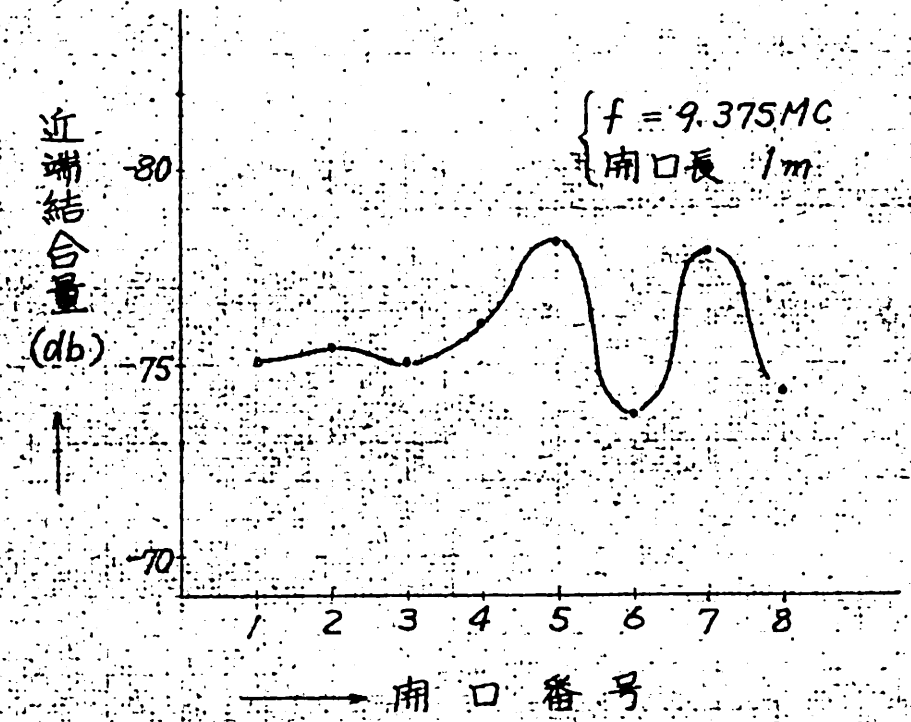


図 3·4·3

漏洩導波管の開口長と

近端結合との関係

表 3.4.1　障害物探知距離限界の計算例

		a. 現　状	b. 最適設計
(1)	送信機の出力	76 db m (40 KW)	76 db m
(2)	送信管保護用単向管	2 db	2 db
(3)	熱雑音レベル (100 MC 帯域)	−94 db m	−94 db m
(4)	総合雑音指数	25 db	25 db
(5)	Video Integration による S/N 改善	12 db	12 db
(6)	検知余裕	10 db	10 db
(7)	励振器の損失 (スケ)	2 db	2 db
(8)	結合損失 (開口長 1 m)	7.5 db	5.2 db
(9)	パルス幅 3.3 m sec. 空間長 4 m による結合の改善	6 db	6 db
(10)	許容伝送損失	64 (5.3 db/km)	50 db (2.5 db/km)
(11)	余　裕	10 db	7 db
(12)	探知距離限界	6 Km	10 Km

(注)　(1) − (2) − (3) − (4) + (5) − (6) − (7) − (8) + (9) − (10) − (11) = 0

障害物の探知距離限界 S_{max} と漏洩導波管に最適な伝送損失との間には一定の関係があり、これを求めておくことは上述の障害物探知距離限界を 6 km から、10 km 程度にまで大きくする上に役立つ。

次式は、レーダー・セットから S km 離れた地点において対向している 2 本の漏洩導波管が 1 m の開口で結合している場合のにおける送受信機間の損失 X を与える式である。

$$X = -2S(\alpha_{th} + \alpha_r) + 2 \cdot P_r \qquad (3.4.1)$$

ここで、α_{th}, α_r はおのおの漏洩導波管の熱損失および輻射損失であり P_r は (3.3.2) 式で与えられ、次式のように書き変えられる。なお、上式の計算においては 2 本の漏洩導波管の間の空間損失は無視している。

$$X = -2S(\alpha_{th} + \alpha_r) + 2(10 \log \alpha_r - 36.38) \qquad (3.4.2)$$

障害物の探知距離限界 S_{max} を決めると結合損失 X を最小にする漏洩導波管の輻射損失 α_r は上式を α_r で微分とし、その微係数を零にすることによって次式のように得られる。

$$\alpha_r = \frac{4.343}{S_{max}(km)} \quad (db/km) \qquad (3.4.3)$$

図3.4.4は上式の関係を図示したものであり、一例をとると障害物の探知距離限界を10 km とするためには輻射損失を約 0.5 db/km とする必要がある。

製品の漏洩導波管の伝送損失（5.3 db/km）を、導体損失 2 db/km, 輻射損失 3.3 db/km と分けて解釈すると、導波損失が上と同じく 2 db/km であって、輻射損失を 0.5 db/km、伝送損失 2.5 db/km である漏洩導波管の開口長 1m 当りの結合損失は、製品の −75 db と異なって、−94 db となることが（3.4.3）式によって計算される。表3.4.1の b 欄はこの場合のレベル計算を示したもので、これによると障害物の探知距離限界は 10 km にすることは可能である。

4. 結　　言

直径 132 mmφ のアルミ管に直径約 10 mmφ の漏洩孔を二列、伝送方向に 14 mm の間隔でさん孔した円形漏洩導波管を製作し、周波数 9.4 Gc 付近で種々の特性を検討した。その結果次に示す点が明らかになった。

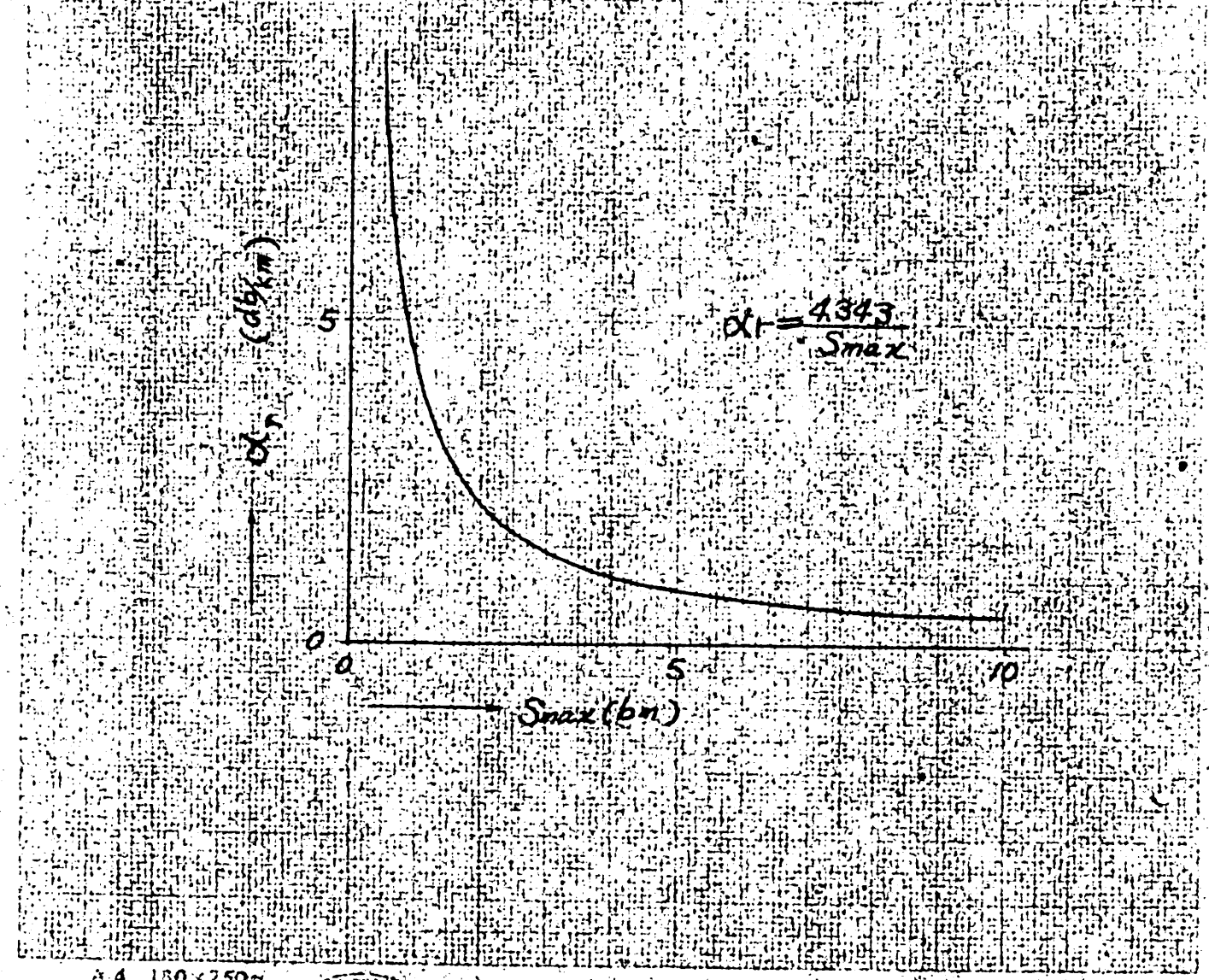
1. 漏洩孔による不要モードの発生をベーテの理論から計算した結果、その発生は非常に小さく、不要モードへの変換による TE_{01} モードの損失の増加は 0.04 db/km 程度であった。このことは実測した伝送損失の周波数特性が小さいことによって裏づけされた。
2. 漏洩孔による TE_{01} モードと TM_{11} モードの結合が解かれ、曲がり導波管の曲げ面に直角な面が2つの漏洩孔列を割るような位置にある場合には TM_{11} モードへのモード変換による TE_{01} モードの伝送損失の場合は曲率半径 2500 km 程度の曲がりに対して 2.75×10^{-4} db/km（計算値）でごく小さい。
3. 漏洩孔の直径と伝送損失および輻射量の関係が明らかになった。

円形漏洩導波管の一つの応用例として、平面反射板と放物断面反射板などとを組み合わせて障害物探知用漏洩導波管を製作した。

平面反射板は平行に置かれた2本の円形漏洩導波管の間で生じる遠端結合を

図 3·4·4

障害物の探知距離限界 S_{max} と
最適な輻射損失 α_r との関係



近端結合に変換するために設けられたもので、平面反射板はその形状が扇形をしており、平行に置かれている2本の円形漏洩導波管の先方に、その面が管軸に直角に多数配列されて使用される。

この平面反射板の設計に当って、その大きさをいくらにすべきかが、電波の散乱と、相隣る平面反射板の間隔を広くなって電波が多数の方向に輻射されることとの2点から問題になった。これについて平面反射板の大きさをいろいろ変えて検討した結果、その大きさが大きく、これに比例して平面反射板間隔を大きくした方が近端結合量が強くなることがわかった。そして取扱いの容易さから平面反射板の間隔は $6\lambda_g$ に選んだ。この平面反射板を用いることによって平面反射板がない場合の2本の漏洩導波管の間の遠端結合を約 4db の損失増加で近端結合に変換することができた。

漏洩孔の直径が 10.4 mmφ である円形漏洩導波管と、高さ 500 mm の放物断面反射板と、$6\lambda_g$ の間隔で配列された平面反射板を用いて総合特性を測定した。その結果、開口長1mの場合で近端結合量は −75db、伝送損失は 5.3 db/km であった。これらを用いた場合にどの位の障害物探知距離があるかを計算したところ、その値は 6 km となった。しかも最適設計を行えば 10km まで伸ばすことは可能であろうと計算された。

最後に本報告の漏洩導波管の設計に当って、数々の適切な指示を与えて下さった鉄道技術研究所の雨宮、上松、両技師、栗田氏に感謝の意を表したい。

また、卒業論文作成のため本研究に参加して、協力して下さった現在大阪大学基礎工学部、電気工学科大学院学生 大前圭雄君に感謝の意を表したい。

○○○○参考文献○○○○

1) 小口文一：導波管内の小さな物体または孔による電磁波の散乱の理論とその応用、研究実用化報告、第11号第3号 P505 (1962)

2) 清水幸夫：ミリ波の伝送，電子，通信工学講座、共立出版（昭和36年）

3) 雨宮、栗田、上松：漏洩波・擬レーダーの構想 − 列車進路上の障害物探知方式、昭39電気関西支部連大 336.

輻射科学研究会・講演会資料　　1966年7月29日

Optical Pumpingとその応用

三菱電機KK　中央研究所

安東　滋
久保高啓
大川清人
西川　啓

1. まえがき

Optical Pumping とは 光学的な方法で（Optical）energy state or sub-level に原子密度の差を生ぜしめることをいう。ここでは それによって生じた原子系の整列（alignment）を光学的に観測する方法（Radio-Optical Double Resonance）を含めることにする。

この方法による磁気共鳴の観測法は 約15年前 J. Brossel および A. Kastler によって提案されたのが最初である。[1] これは水銀、アルカリ金属蒸気と適用され，散乱光による励起状態における Zeeman sub level，基底状態の超微細構造などの磁気共鳴観測が行なわれた。更に 1957年には H. Dehmelt が透過光による磁気共鳴観測法を提案，アルカリ金属蒸気の基底状態における Zeeman-sublevel での観測結果を報告した。[2] これは すぐに He^4, He^3 の準安定状態にも応用された。[3]

これらは 学問的には 原子の energy level 構造，原子整列の緩和機構などの研究手段として用いられ，実用的には 小型，軽量の周波数標準（安定性 10^{-11}～10^{-11} など）[4] ロケットにも積めるような弱磁場測定用の磁力計[5]（数ガウス ～数mGの磁場測定に使用，感度 10^{-7} ガウス，応答 1KC以上）などの応用がある。

ここでは Dehmelt による方法での実験結果と，磁力計への応用について述べる。

2. 透過光による磁気共鳴観測法

図1.は 実験の構成図である。動作物質として，アルカリ金属が吸収セル内に密封入され，蒸気と固体の共存状態にある。蒸気のものは、自由原子の状態にあり，Rb^{87} の場合，弱い磁場中で 図2のような energy level 構造をもっている。図中の m_F で 特徴づけられ Zeeman sub level の

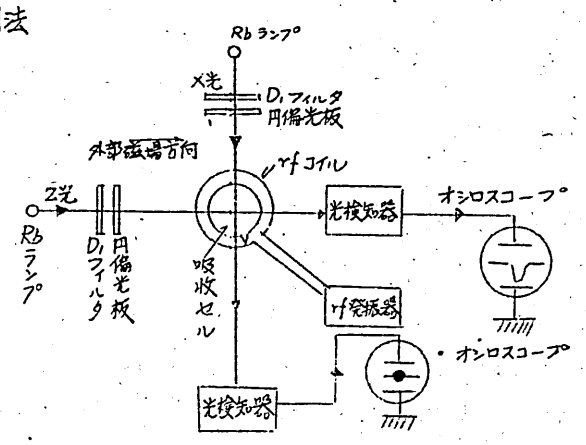


図1. 磁気共鳴観測のための実験配置

間隔 $E = hf$ (h; Plank 定数) は 磁場の強さに比例し、共鳴周波数 $f = \frac{\gamma}{2\pi} H$ (γ, gyromagnetic ratio) は 表1 のようである。Rb ランプから出た光は フィルターで D1線のみにされ、更に円偏光板を通し 円偏波にされて吸収セルに入る。磁場に平行な光を Z光、それに垂直なものを X光とよぶことにする。円偏光である Z光により、吸収セル内の Rb原子は $\Delta m = +1$ (Xは -1 という制限つきで $^2P_{\frac{1}{2}}$ に励起される。基底状態、$F=2$, $m=+2$ の原子は 励起状態に $m=+3$ がないので励起されず、このレベルは 非吸収レベルとなる。励起状態の原子は 自然放出 ($\Delta m = \pm 1, 0$) により基底状態にもどる。熱平衡状態においては ほぼ等しかった基底状態の各 Zeeman sub-level における原子密度分布は この操作により偏ってくる。これを Optical Pumping による原子系の整列とよぶ。円偏波 D1光に対する基底状態の遷移確率と、Pumping の結果到達できる平衡状態の原子密度の相対値は 図2に併記されている。整列ができあがるにつれて Z光吸収率の小さい sub-level に原子が集るから Z光の吸収セルによる受吸が減少する。吸収セルに共鳴周波数 f の弱い rf (ラジオ周波の略) 磁場をかけて磁気共鳴を起させると、整列がこわされ Z光の吸収が増加する。これを磁気共鳴吸収という。

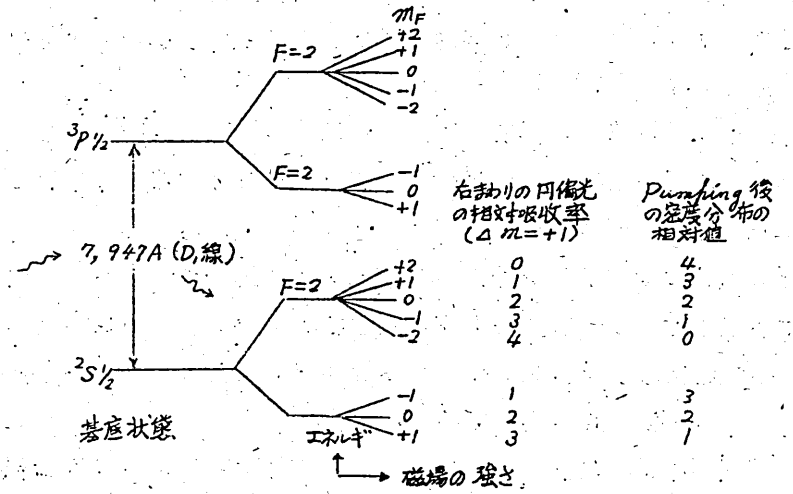


図2. Rb^{87} の基底状態および第1励起状態のエネルギレベル構造 (m_F: 磁気量子数)

一方、共鳴状態で X光は rf 磁場と同じ周波数で強度変調を受ける。この現象は、モデル的に、次のように説明される。原子の角運動量ベクトル M は磁場 H を軸として才差運動をしている。図3において 才差運動と同じ周期で回転する回転座標系 (x', y', Z) で考える M の $x'-y'$ 面への投影 $M_{y'}$

と rf 磁場 H_1 が静止し，外部磁場は実効的に 0 の状態にある。

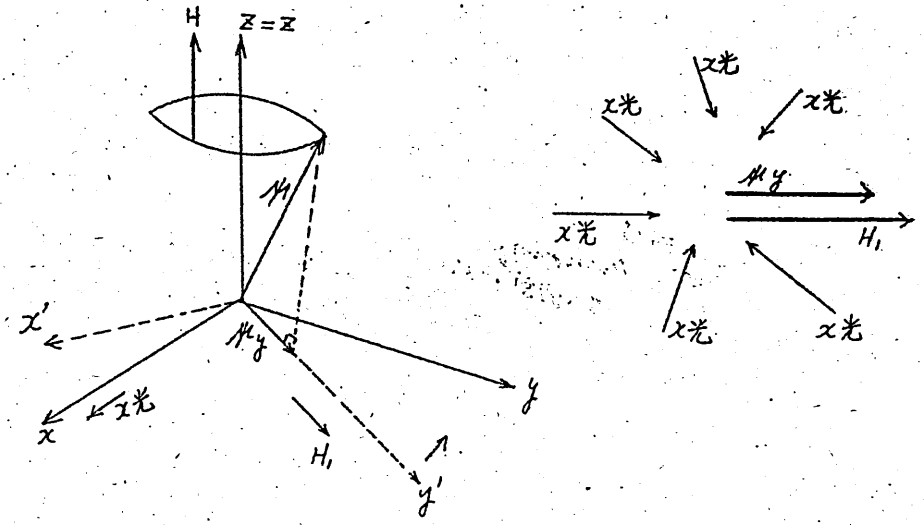


図3　透過光の rf 強度変調

これに入ってくる x 光の方向が f なる周波数で周期的に変わる。原子による光の吸収率（遷移確率による）は この方向により変るから x 光は rf 強度変調を受ける。

このように透過光の磁気共鳴吸収，及び rf 強度変調という二つの方法で磁気共鳴を観測することができる。

このような実験が行なわれている。また、アルカリ金属原子系の整列を原子同士の衝突により移すというやり方で H^1, H^2, H^3, N^{14}, N^{15} などについての実験も行なわれている。

3. Pumping 光（Z光）の磁気共鳴吸収

吸収セルに 一定周波数の rf 磁場をかけておき，外部磁場 H の強さを連続的に変えると磁気共鳴吸収を観測することができる。共鳴周波数を表1より正確に求めるには Breit-Rabi の式を使う。

$$\nu_{m,m-1} = -\frac{1}{h}\frac{\mu_I}{I}\mu_N H \pm \frac{\Delta\nu}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{4m}{2I+1}x+x^2} - \sqrt{1+\frac{4(m-1)}{2I+1}x+x^2}\right\}$$

$$x = \frac{2-\frac{1}{1836}\frac{\mu_I}{I}}{h\,\Delta\nu} H \times 0.92712 \times 10^{-20}$$

$$\mu_N = \frac{0.92712}{1836} \times 10^{-20}$$

μ_I ; 核磁子

$\Delta\nu$; $F'F''$ の間隔を周波数で表わしたもの。

図4には 計算結果と実測結果の例を示す。このスペクトルの相対的な強さは温度, Pumping 光の強さ, 磁場と Pumping 光との角度などにより変わる。これは磁力計に応用したとき、誤差の原因となる。(6)

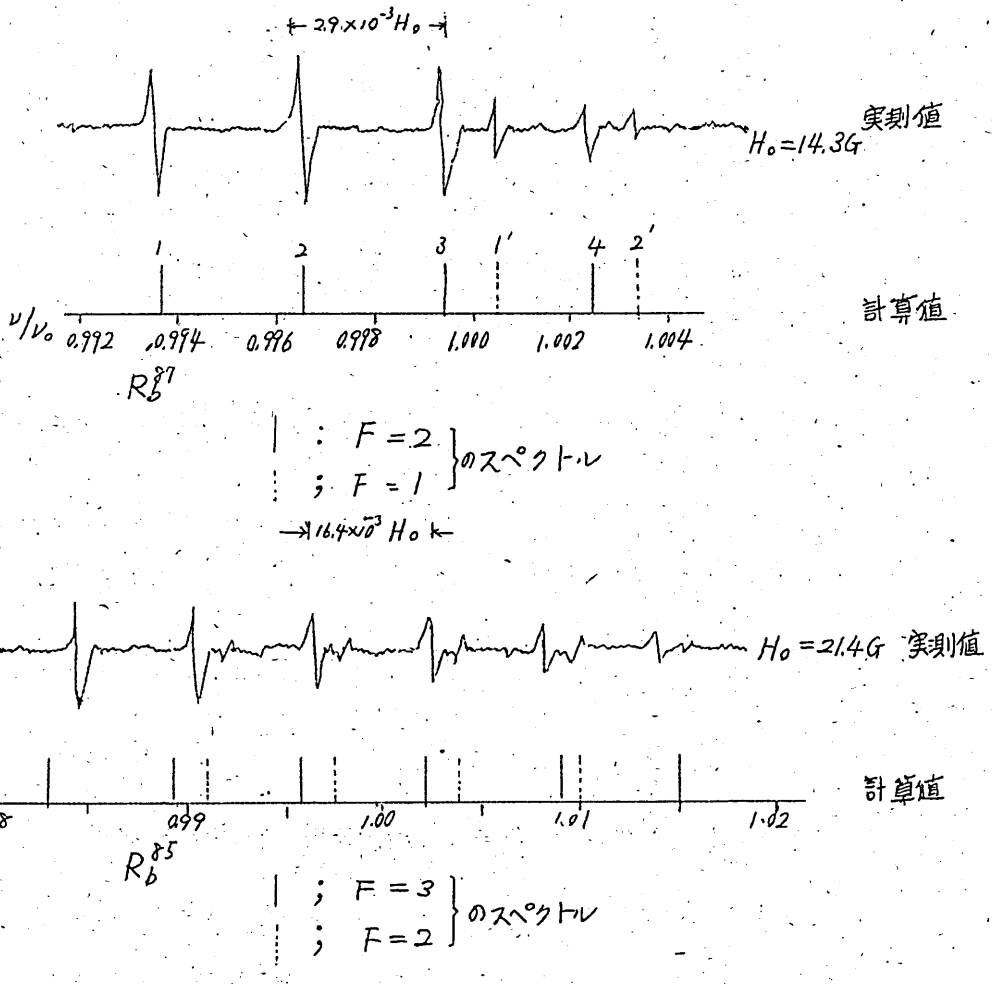


図4. 磁気共鳴吸収スペクトル

4. Cross beam (交光) の rf 強度変調

W. Bell および A. Bloom は 磁気共鳴に関する Bloch 方程式を用い, Optical pumping の効果を考慮に入れて Z光, x光の吸収セルによる吸収 S_z, S_x を計算した.[7]

$$S_z = A_0 P_z - \frac{\{1+(S_2\Delta\omega)^2\} M_0 P_z m_0 / A_0}{1+(S_2\Delta\omega)^2 + \gamma^2 H_1^2 S_1 S_2} \quad \cdots\cdots (4.1)$$

$$S_x = A_0 P_x - \frac{\gamma H_1 S_2 \{1+(S_2\Delta\omega)^2\}^{\frac{1}{2}} M_0 P_z m_0' / A_0}{1+(S_2\Delta\omega)^2 + \gamma^2 H_1^2 S_1 S_2} \cos(\omega t + \varphi) \quad \cdots\cdots (4.2)$$

ただし, $\tan\varphi = \frac{1}{S_2 \cdot \Delta\omega}$ $\cdots\cdots (4.3)$

$$\gamma = \frac{\omega_0}{H_0} = \frac{2\pi f_0}{H_0}, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0$$

A_0; Zeeman sub-level に分布する原子総数

P_z, P_x; Z光, x光による Pumping rate.

$M_0' = m_0' P_x S_2$, $M_0 = m_0 P_z S_1$,

$$m_0' = \frac{A_0}{2P_x}(P_{x\beta} - P_{x\alpha}), \quad m_0 = \frac{A_0}{2P_z}(P_{z\beta} - P_{z\alpha})$$

$P_{x\beta}$, $P_{x\alpha}$, $P_{z\beta}$, $P_{z\alpha}$; 磁気共鳴は2つのサブレベル α, β の間で起るものとし, Z光, x光によるサブレベルの Pumping rate.

$$P_z = \frac{P_{z\beta} + P_{z\alpha}}{2}, \quad P_x = \frac{P_{x\beta} + P_{x\alpha}}{2}$$

$$S_1 = \frac{1}{P_x + P_z + \frac{1}{T_1}}, \quad S_2 = \frac{1}{P_x + P_z + \frac{1}{T_2}}$$

T_1, T_2; 各々, 縦緩和, 横緩和の緩和時間, 磁場の各成分は

$$H_x = H_1 \cos\omega t, \quad H_y = -H_1 \sin\omega t, \quad H_z = H_0$$

われわれは この式を用いて透過光の rf 強度変調現象を解析した.[8] もちろん 現象の解析は 場および原子を量子論的に取扱う方法によらなければ完全とはいえないが[9], この現象論的な方法でも大体の説明ができる. また Dodd 等の

半量子論的な理論でも現象論的方向よりすぐれた説明のできるという報告もある。[10]

透過光の rf 強度変調には 次のような現象があらわれる。

(1) 変調信号の振幅は rf 磁場 H_1 が大きいときには double Peak を持つ。(図5) Bell-Bloom の式から 変調信号振幅は $H_1 > \frac{1}{\gamma\sqrt{S_1 S_2}}$ で起り、その間隔は $\Delta W = 2\frac{\sqrt{\gamma^2 H_1^2 S_1 S_2 - 1}}{S_2}$ と H_1 の大きさで変わる。(図6)

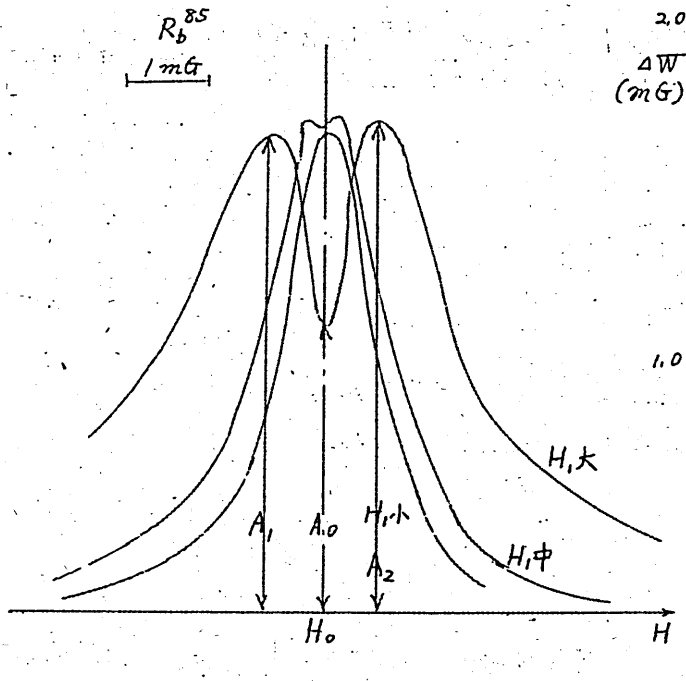


図5. 共鳴点付近の rf 強度変調信号の振幅変化 パラメータは H_1

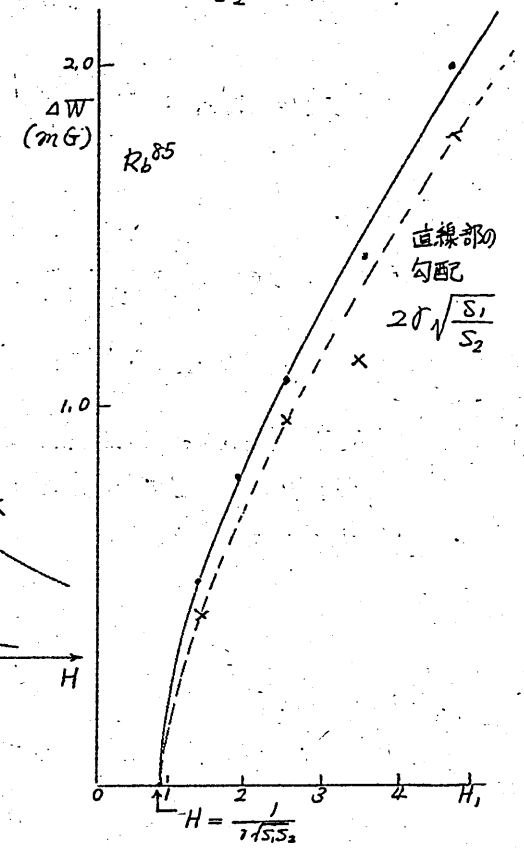


図6. double peak 間隔 ΔW パラメーターは温度

(2) 共鳴中心での変調信号振幅 $A_0 = \frac{\gamma H_1 S_2 M_0 P_x m_0' / A_0}{1+\gamma^2 H_1^2 S_1 S_2}$, は $H_1 = \frac{1}{\gamma\sqrt{S_1 S_2}}$ で極値を持つ。(図7)

(3) double Peak における変調信号振幅 A_1, A_2 の観測結果は図7のようである。Bell-Bloom の式からは $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_2}{S_1}} M_0 P_x m_0' / A_0$

(4) 変調信号の rf 磁場に対する位相差 φ は 共鳴点付点で急激に変り，その勾配は H_1 によって変る（図8）Bell-Bloom の式は 共鳴点で $\varphi = 90°$ であることを示している。

(5) double peak 間隔 ΔW は Pumping 光の強さ，温度によっても変る（図9） この結果緩和時間の T_1, T_2 または その両方が温度とともに増加することが予想される。Pum Ping 光が強くなると ΔW は $\frac{2}{T_2}\sqrt{T_1 T_2 \gamma^2 H_1^2 - 1}$ に近づく。

(6) 低周波で磁場を変調すると信号振幅の特性が変わる。それは磁場変調の周波数および変調の幅で異なる。

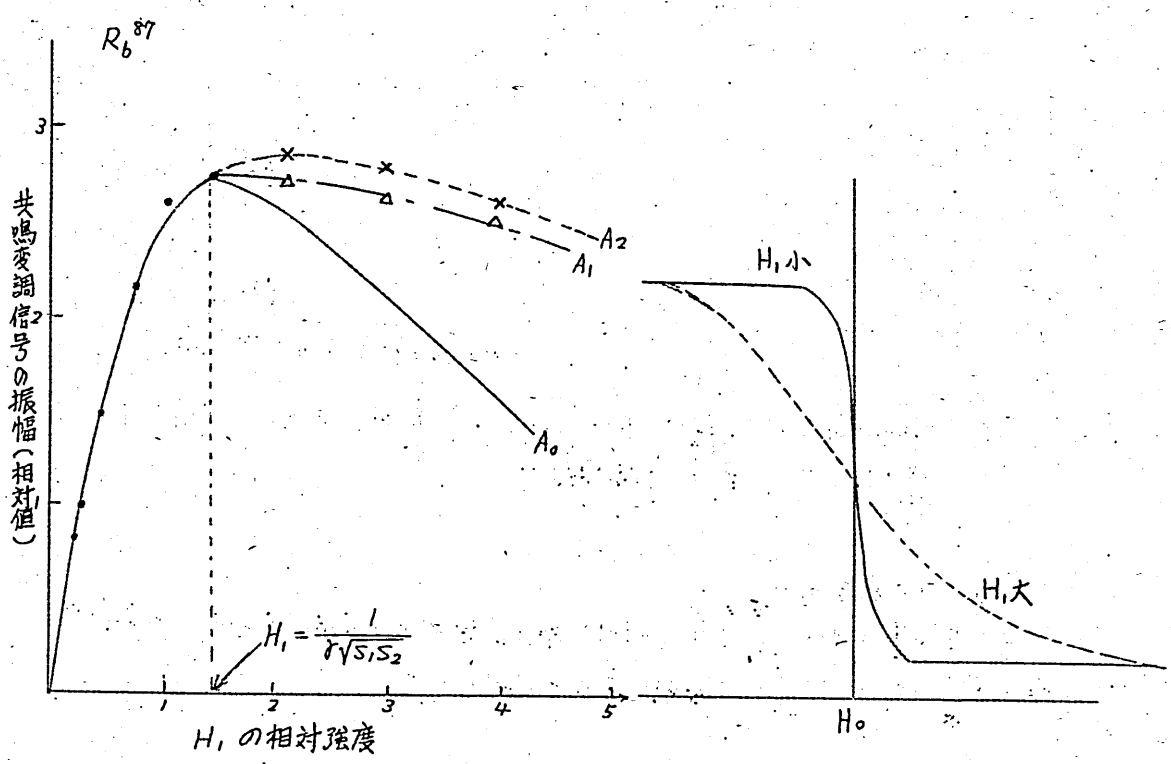


図7 共鳴変調信号の振幅の極値 A_0, A_1, A_2 の実測値

図8 共鳴点付近における信号の位相 φ の変化
パラメーターは H_1

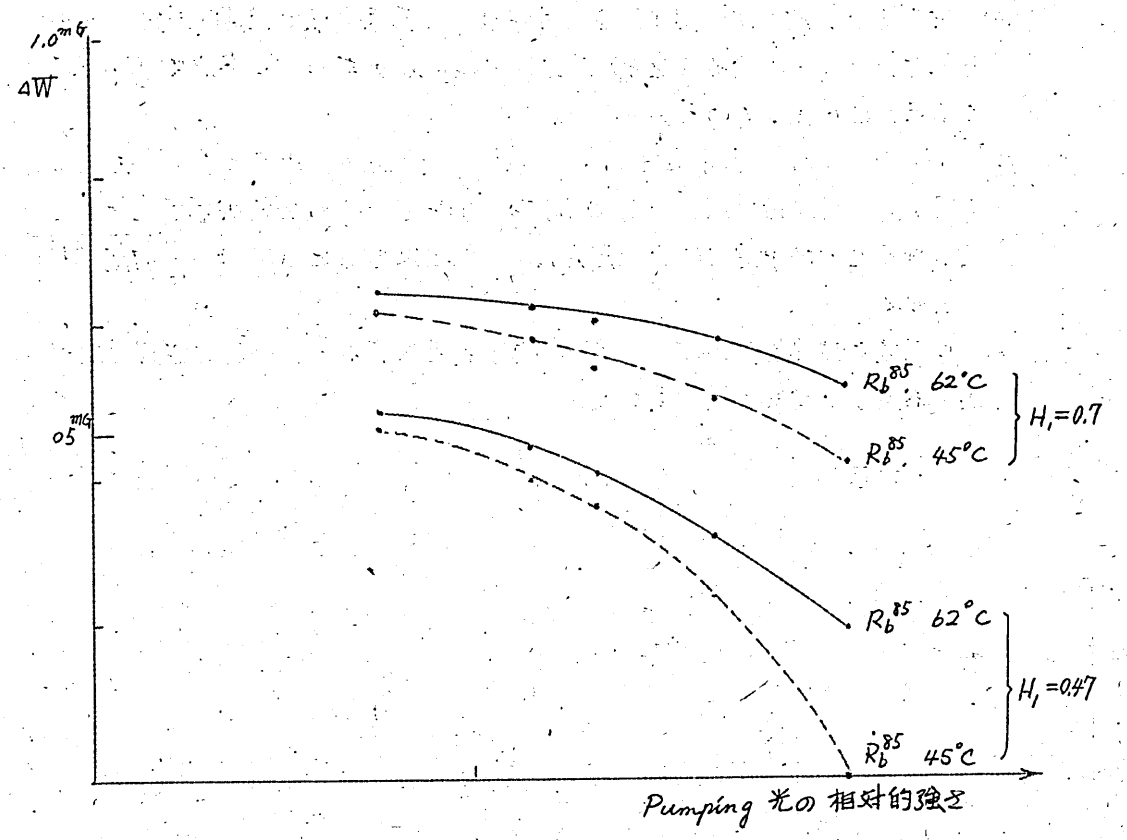


図9 Pumping光強さによる double peak 間隔 ΔW の変化の実測値
パラメータは 温度 および H_1

5. アルカリ金属磁力計

共鳴点をさがすことにより 磁場の強さが周波数で求まる。実際の磁力計の構成は 図10の 3種類に大別できると思われる。

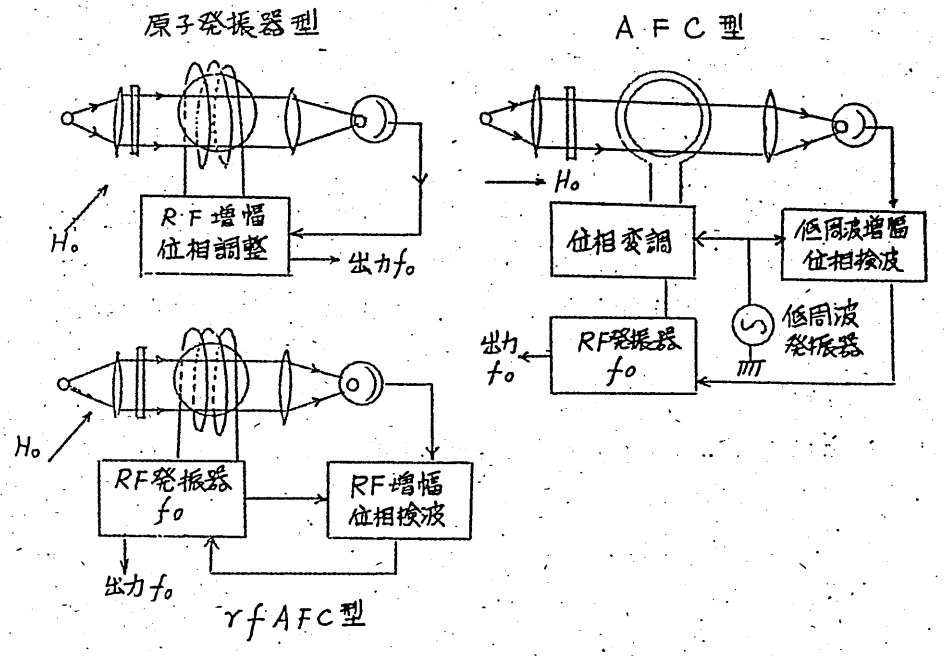


図10 各種磁力計の構成

原子発振器型は 最も注目すべきもので感度の高さ，応答の速さから 理想的な磁力計といえる。光学系は H_0 と45°にして Z, X 両光の動作を兼ね，X光出力を rf 増幅し 位相調整して rf コイルに帰してやると全系が周波数 f で発振する。Rb^{87}, Rb^{85}, Cs の場合には 極めて安定に発振し，He^3 の $^1S_0$ についても原子発振の報告があるが，他は成功していない。rfAFC型は X光出力信号が共鳴点の前後で位相が180°変化することを利用したもので，磁場の均一性の悪い場合にも使用できるとのことである。[12] Cs, Rb^{87}, Rb^{85} の磁力計は 安定で感度が高く，特に原子発振器は 0.01γ ($=10^{-7}$ ガウス) の地磁気変化に感じる程で定位置に設置して地磁気の変化を記録する磁力計としては 理想的である。[5] これらアルカリ金属の場合には 基底状態の Zeeman スペクトルは 極めて接近（大体 2～4 $\times 10^{-3} f_0$ の範囲内）しており，全体を一つの共鳴信号として扱う。このスペクトルの複雑さが磁力計の精度を悪くする。ロケット用磁力計，地下資源探査用磁気探知器のように移動しながら測定する場合，磁場方向と光軸のなす角が変化すると出力周波数が変化するいわゆる角度シフトが存在し，移動中の種々のゆれ (Pitching Rolling Yawing) がノイズとなる。また温度，光の強さが変化しても 出力周波数のシフトを生ずる。このような角度，温度，光の3種のシフトがアルカリ金属蒸気磁力計の

実用上の問題点である。[6] その欠点を補う対称スペクトル方式磁力計などが考案されている。[11] また He^4 の準安定状態、He^3 の基底状態のように磁力計に利用されるスペクトルが一本のもの用いる。

6 He磁力計

Heの場合には 2^3S_1 が準安定状態（life time が 10^{-4} 秒のオーダー）である。1.08μ 光に関係した $2^3S \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$ の間の遷移確率の差を利用して、2^3S_1 の Zeeman sublevel に整列を起させる。[13] 図11は He^4, および He^3 の energy level 構造のうち Optical Pumping に関係のあるもののみをとり出したものである。

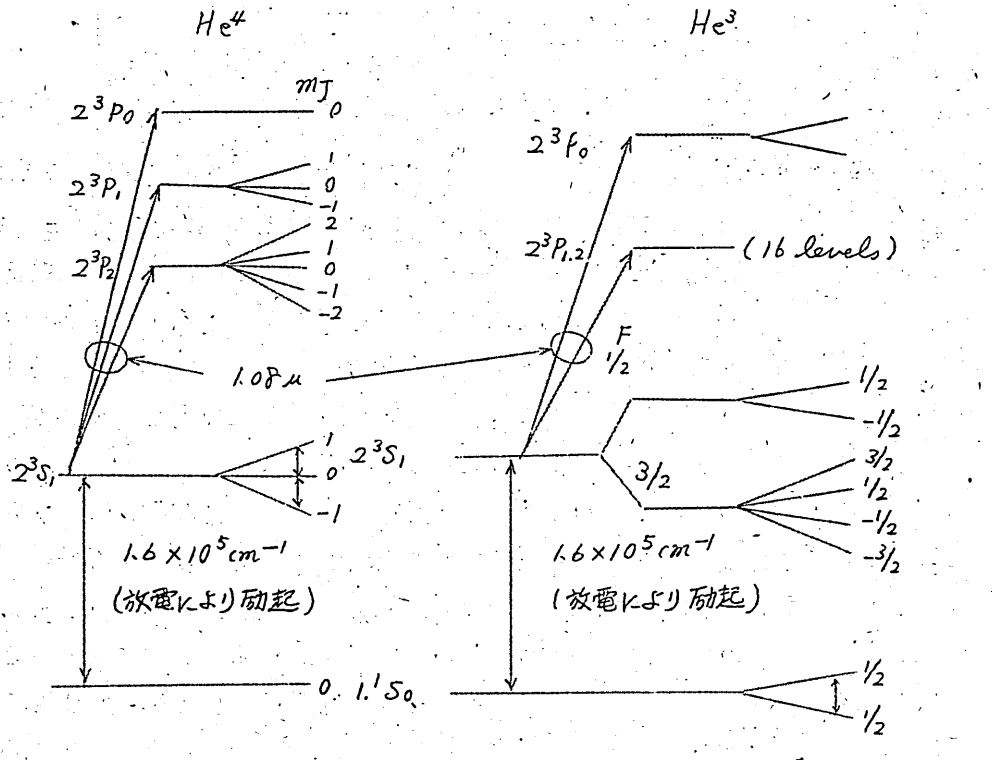


図11. Optical Pumping に関係のある He の energy level 構造

He^3 の場合，原子同士の衝突により基底状態にも準安定状態の整列が移される。準安定状態の整列の緩和時間は life time で制限されアルカリの数100 ～ 数10 m sec に対し，10^{-4} sec 位であり，信号は小さく原子発振器型磁力計を作るのは困難である。従ってAFC型磁力計に限られ，現在までのところ，0.1 γ 位の感度しか得られていない。(14)

表1. 動作物質の特性

	準位	動作状態	1ガウス当たりの共鳴周波数	Pumping 光の波長	備考
Na	基底状態 $^2S_{1/2}$	～10^{-6} mmHg の蒸気	700 KC	5,896 A	
K	〃	〃	〃	7699 〃	
Rb^{85}	〃	〃	467 KC	7947 〃	
Rb^{87}	〃	〃	700 KC	〃 〃	
	〃	〃	350 KC	8943 〃	
He^3	〃 1^1S_0	～10^{-1} mmHg の気体	3,2 KC	1.08 μ	NMR
He^3	準安定状態 2^3S_1	〃	3.8 MC (F=1/2) (F=3/2)	〃	ESR
He^4	〃	〃	2,8 MC	〃	ESR

参考文献

(1)

(2) H. Dehmelt : Phys. Rev. 105. 1487 (1957)
ibid 105. 1924 (1957)

(3) F. Colegrove, P. Franken
Phys. Rev. 119. 680 (1960)
F. Colegrove. L. Schearer G. Walters
Phys. Rev. 132. 2561 (1963)

(4) V Gerard Brit. J. Appl. Phys. 13. 409 (1962)
解説としては
古賀保喜 精密機械 30巻 1 (1964)

(5) 安東、久保、吉山、大川
計測自動制御学会 第4回講演会予稿 P53 (1965年7月)

(6) S. Ando
Memoirs of the College of Science, University of Kyoto
Series A vol. XXXI P69 (1966)
S. Ando
J. J. A. P. 4. 793 (1965)

(7) W. Bell L Bloom Phys. Rev. 107. 1559 (1957)

(8) 安東、久保、大川、
応物学会 講演予稿、 P235 (1964年 11月)

(9) G. Series 私信

(10) 小川、藪崎、中段
物理学会 講演予稿 P160 (1964年 10月)

(11) 藪崎、中段、小川
量子エレクトロニクス研究会資料"対称スペクトル方式磁力計" (1966年 2月)

(12) 大橋、藪崎、小川
量子エレクトロニクス研究会資料 19. (1964年 11月)

(13) 安東、久保、大川、稲荷、西川、岡島
物理学会 講演予稿 P210 (1966年 4月)

(14) 安東、大川、久保、西川、
物理学会 講演予稿 P212 (1966年 4月)

輻射科学研究会資料

進行波ブラウン管とその応用

神戸工業株式会社

山田　公

古田　宏

昭和41年9月30日

1. まえがき

ミリマイクロセコンドのパルス技術は最近の通信技術の進歩にともない今後ますますその重要性を増すものと思われる。このような非常に幅の狭いパルスの観測には必然的に広帯域のオッシロスコープが必要である。通常のブラウン管では偏向板下の電子走行時間の影響や極板の容量のために周波数特性が制限され大体125MC程度が限度である。

超高周波電圧の波形観測に進行波を利用した進行波ブラウン管は大脇、中村によって初めて発表された。[1][2] この進行波ブラウン管は折曲り線路を用い超高周波に於いて効果的に陰極線に偏向を与えることを示した。その後Pirce[3], Smith[4] Germeshansen[5] Lee[6] Moulton 等が種々の偏向系を考案した。これらの偏向系はそれぞれ線路の構造は異なるが、その動作上の根本原理はあくまで偏向系の電子走行時間効果を高周波の広い範囲に渡って無視できるようにしたものである。

最近になって計測技術が進歩しブラウン管が単に波形を見ると云うことでなく、測定素子としての役割が要求されるようになってきた。そのため偏向の忠実性と偏向系のマイクロ波素子としての伝送特性の向上が必要となった。与えられた高周波の信号を忠実に偏向するためには偏向系の位相速度の周波数特性が均一であること、挿入損失が少なく周波数による変化が少ないこと等であり、マイクロ波素子としての特性に於いては定在波比特性が良いこと、外部回路と結合しやすいインピーダンスであること等があげられる。特に偏向系の位相速度はこの中で最も重要なことで偏向系の構造によってその特性が決定されるものである。

本報告に於いては偏向系の位相速度が実用範囲内では充分一定である Trough type 進行波偏向系を提案し、そのω-β特性を解析し、幾何学的位相速度及び実験結果と比較し、良好な結果を得たので報告する。又試作管の特性についても言及し、最後にTrough

type 進行波ブラウン管を用いたエンベロープスコープについて述べその応用面を紹介する。

2. 進行波偏向系の ω－β 特性

偏向系の位相速度と偏向系中を通過する電子ビームの速度に差が生じ、電子走行時間効果が著しくなった場合、偏向に及ぼす影響を考察する。

一般に立上りの急激なパルス及び歪波は多くの高調波成分を含んでいる。今これらの信号を忠実に偏向するためには、信号の高調波成分による高周波電圧によっても、その電圧に比例した偏位が得られねばならない。蛍光面上の電子走行時間効果が無視できる場合の振幅を Y_0 とし、電子ビームと偏向系の位相速度の比を ν とすると走行角を θ として、電子走行時間効果を考えた相対偏位は次式であらわされる。[7]

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{\sin\left\{\frac{\theta}{2}(1-\nu)\right\}}{\frac{\theta}{2}(1-\nu)} \qquad (1)$$

ν をパラメータとしてこれを図示すると、図1の如くなる。

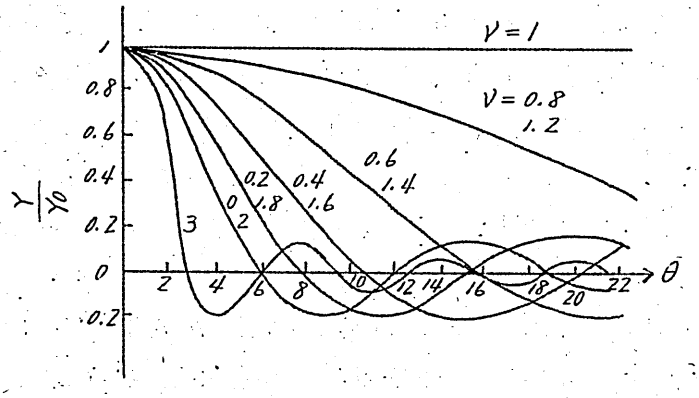


図1　電子走行時間効果を考慮した相対偏位

従来の進行波偏向系は一般に1000～2000MC附近の周波数範囲内で位相速度の均一性が失われている。進行波ブラウン管の使用帯域が広くなり、UHF帯の観測にまで及ぶと、これらの変化が画像に影響を及ぼし、忠実な結果が得られなくなる。

折曲り線路は一種の多重線路と考えられ、各線路間は周期性が存在するが同様に取扱うことができる。従って各線路間に存在する電磁界の分布相互作用のためにインピーダンスを一義的に決定することが出来ず、位相速度も周波数によって変化する。不平衡折曲り線路に於いて折曲り線路のピッチを一定にし線路と接地導体間の距離を変化させた場合の位相速度の変化を示すと、図2の如くである。

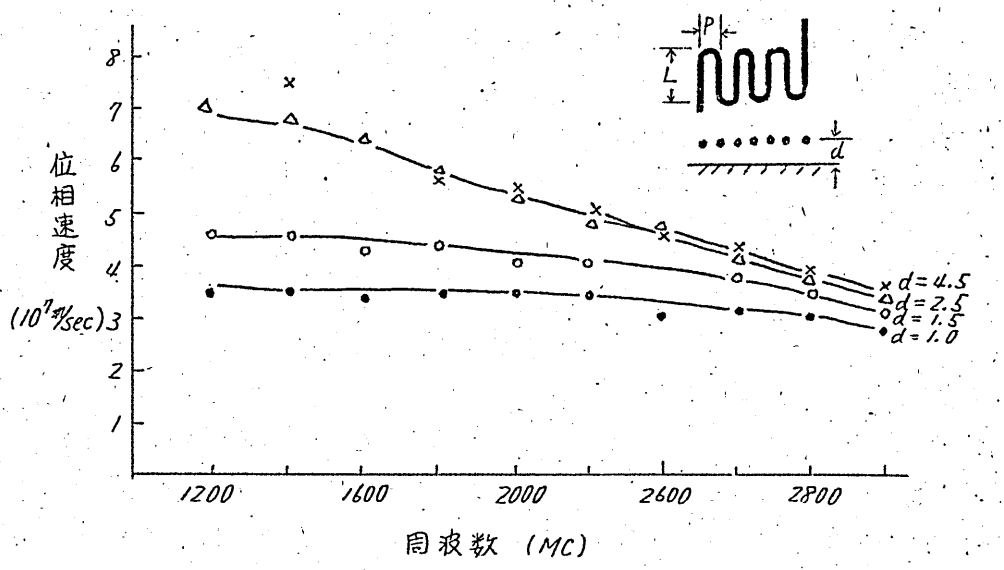


図2　折曲り線路の位相速度の周波数特性

これは折曲り長L＝23mm　ピッチP＝2mm　折曲り線の直径1mmの場合の結果である。折曲りの中心から接地導体間の距離dが小さい程位相速度の変化が少ないことを示しており、分布相互インピーダンスの影響が無視される場合と考えられる。このような構造の偏向系の場合、位相速度を一定にするためには、偏向板の間隙を非常に狭くする必要があり、その結果ビームの偏向領域を狭め、走

査有効径が小さくなる。又逆に偏向板間隙を充分取ると折曲り ピッチを大にする必要があるが，この場合は位相速度が大となり，偏向板間を通過するビーム速度を速くする必要があり，非常に高い加速電圧を必要とし，偏向感度を低下する。

折曲り進行波偏向系はＬＣよりなる低域沪波回路と同様な等価回路を持つ。

今，第１番目の折曲り線路の電圧，電流をV_1, I_1，第２番目の場合をV_2, I_2 …… n番目をV_n, I_n …… とする。線路Ｉの自己インピーダンスをZ_{11}，線路２のそれをZ_{22} …… 線路nのそれをZ_{nn} …… とする。又同様にアドミッタンスをY_{11}, Y_{22} …. Y_{nn} …… とする。又線路１と２の間の分布相互インピーダンス及びアドミッタンスをZ_{12}, Y_{12} とし線路mとkの間のそれをZ_{mk} Y_{mk} …… とする。

一般にm番目の線路に対して

$$-\frac{dV_m}{dy} = \sum_{k=1}^{n} Z_{mk} I_k \qquad (2\text{-}a)$$

$$-\frac{dI_m}{dy} = \sum_{k=1}^{n} Y_{mk} V_k \qquad (2\text{-}b)$$

が成立する。

折曲り線路の周波数特性は(2)式の右辺の$Z_{kk} I_k$, $Y_{kk} V_k$ 以外の項の影響により均一性が失われるから，この項の影響が除去できるか或は非常に小さくて無視できる偏向系を構成すれば周波数特性の均一な偏向系を得ることができる。

図３はかかる目的のために考案された偏向系で，従来の折曲り線の線間にシールド板を挿入し，単位区間内の断面を Trough type にして，電磁界の分布相互作用の影響を極めて小さくしたものである。

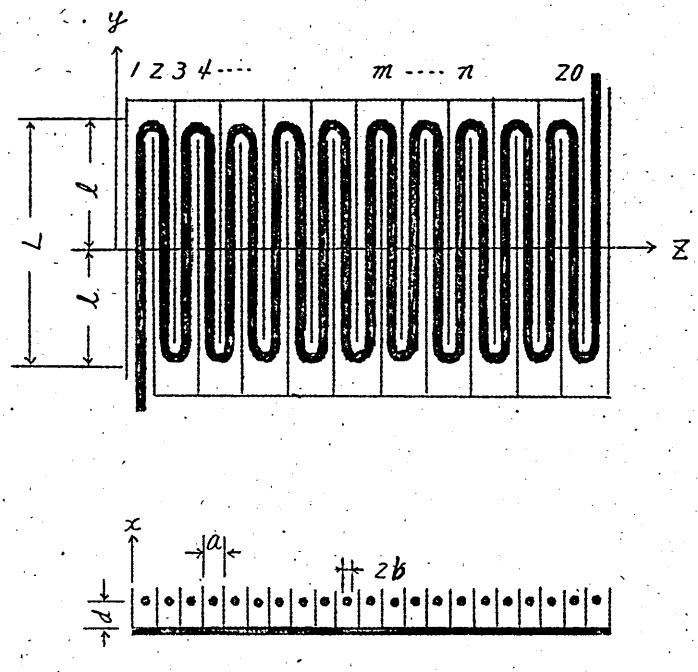


図3　*Trough type* 進行波偏向系

Trough type 進行波偏向系の伝送方程式は(2)式に於いて分布相互作用の影響を無視して n 番目の線路に対して次式で与えられる。

$$-\frac{dV_n}{dy} = Z_{nn}\, I_n \qquad (3\text{-}a)$$

$$-\frac{dI_n}{dy} = Y_{nn}\, V_n \qquad (3\text{-}b)$$

但し　$Z_{nn} = j\omega L_o$

$Y_{nn} = j\omega C_o$

ここで L_o は単位長当りの自己インダクタンスであり，C_o は自己容量である。この微分方程式の解は n 番目の線路及び $(n+1)$ 番目の線路に対してそれぞれ次の如くなる。

$$V_{n(y)} = C_1 e^{j\beta_0 y} + C_2 e^{-j\beta_0 y} \qquad (4\text{-}a)$$

$$I_{n(y)} = -Y_{nn}\{C_1 e^{j\beta_0 y} - C_2 e^{-j\beta_0 y}\} \qquad (4\text{-}b)$$

$$V_{n+1(y)} = C_3 e^{j\beta_0 y} + C_4 e^{-j\beta_0 y} \qquad (4\text{-}c)$$

$$I_{n+1(y)} = -Y_{n+1,n+1}\{C_3 e^{j\beta_0 y} - C_4 e^{-j\beta_0 y}\} \qquad (4\text{-}d)$$

ここで

$$j\beta_0 = \sqrt{Z_{nn} Y_{nn}} = \sqrt{Z_{n+1,n+1} Y_{n+1,n+1}} \qquad (5)$$

である。

周期構造に対する電磁波の伝播についての Floquet の定理を用いると、ピッチ a、周期 $2a$ の場合であるから、

$$V_{n+2} = V_n e^{-j2\beta a} \qquad (6)$$

$$V_n = V_{n-2} e^{-j2\beta a} \qquad (7)$$

の関係が成立する。ここで β は z 方向の伝播定数である。

$$K = e^{-j\beta 2a} \qquad (8)$$

とおくと、

$$V_{n+2} = V_n K \qquad (9)$$

$$V_n = V_{n-2} K \qquad (10)$$

の関係となる。

$y=0$ の点を折曲り線の中央に定め、$y = \pm l$ の点で折曲りが生じ、この部の影響を無視すると、境界条件は次の如くである。

$$V_{n+1(l)} = V_{n+2(l)} = K V_{n(l)} \qquad (11\text{-}a)$$

$$-I_{n+1(l)} = I_{n+2(l)} = K I_{n(l)} \qquad (11\text{-}b)$$

$$V_{n+1(-l)} = V_{n(-l)} \qquad (11\text{-}c)$$

$$-I_{n+1(-l)} = I_{n(-l)} \qquad (11\text{-}d)$$

~~(11)式は~~ (4) 式 ~~を代入して~~ に於て $y=\ell$ に於ける条件より積分定数を定め、m 番目及び $m+1$ 番目の線路の電圧、電流を求めると、次の如くである。

$$V_n(y) = V_n(\ell)\cos\beta_0(y-\ell) - jZ_0 I_n(\ell)\sin\beta_0(y-\ell) \quad (12\text{-}a)$$

$$I_n(y) = I_n(\ell)\cos\beta_0(y-\ell) - jY_0 V_n(\ell)\sin\beta_0(y-\ell) \quad (12\text{-}b)$$

$$V_{n+1}(y) = V_{n+1}(\ell)\cos\beta_0(y-\ell) - jZ_0 I_{n+1}(\ell)\sin\beta_0(y-\ell) \quad (12\text{-}c)$$

$$I_{n+1}(y) = I_{n+1}(\ell)\cos\beta_0(y-\ell) - jY_0 V_{n+1}(\ell)\sin\beta_0(y-\ell) \quad (12\text{-}d)$$

周期構造であるから、上式の Y_0 Z_0 は

$$Y_{nn} = Y_{n+1,\,n+1} = Y_0$$
$$Z_{nn} = Z_{n+1,\,n+1} = Z_0$$
$$Z_0 = \frac{1}{Y_0}$$

が成立する。

(12) 式に於いて $y=-\ell$ を代入して (11) 式の境界条件を代入すると、

$$V_n(-\ell) = V_n(\ell)\cos 2\beta_0\ell + jZ_0 I_n(\ell)\sin 2\beta_0\ell \quad (13\text{-}a)$$

$$I_n(-\ell) = I_n(\ell)\cos 2\beta_0\ell + jY_0 V_n(\ell)\sin 2\beta_0\ell \quad (13\text{-}b)$$

$$V_n(-\ell) = KV_n(\ell)\cos 2\beta_0\ell - jZ_0 KI_n(\ell)\sin 2\beta_0\ell \quad (13\text{-}c)$$

$$I_n(-\ell) = KI_n(\ell)\cos 2\beta_0\ell - jY_0 KV_n(\ell)\sin 2\beta_0\ell \quad (13\text{-}d)$$

となる。

この式が意味のある解を持つためには、$V_n(\ell)$ $V_n(-\ell)$ $I_n(\ell)$ $I_n(-\ell)$ の係数間に次の関係が成立せねばならない。

$$\begin{vmatrix} \cos 2\beta_0\ell & jZ_0\sin 2\beta_0\ell & -1 & 0 \\ jY_0\sin 2\beta_0\ell & \cos 2\beta_0\ell & 0 & -1 \\ K\cos 2\beta_0\ell & -jZ_0K\sin 2\beta_0\ell & -1 & 0 \\ -jY_0K\sin 2\beta_0\ell & K\cos 2\beta_0\ell & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

この式を簡単化すると

$$(K+1)^2 = 4K\cos^2 2\beta_0 \ell \qquad (15)$$

が得られる。

$$K = \cos 2\beta a - j \sin 2\beta a \qquad (16)$$

の関係を代入すると（16）式は

$$1 + \cos 2\beta a = 2\cos 2\beta_0 \ell \qquad (17)$$

となる。但し

$$\beta_0 = \omega\sqrt{L_0 C_0} \qquad (18)$$

（17）式及び（18）式より分布相互インピーダンスの影響のない場合の $\omega - \beta$ 特性を求めることができる。図4に $\omega - \beta$ 曲線を示す。図3に於いて偏向系の構造を

$$2\ell = 23 \times 10^{-3} \quad (m)$$

$$a = 2 \times 10^{-3} \quad (m)$$

$$b = 0.5 \times 10^{-3} \quad (m)$$

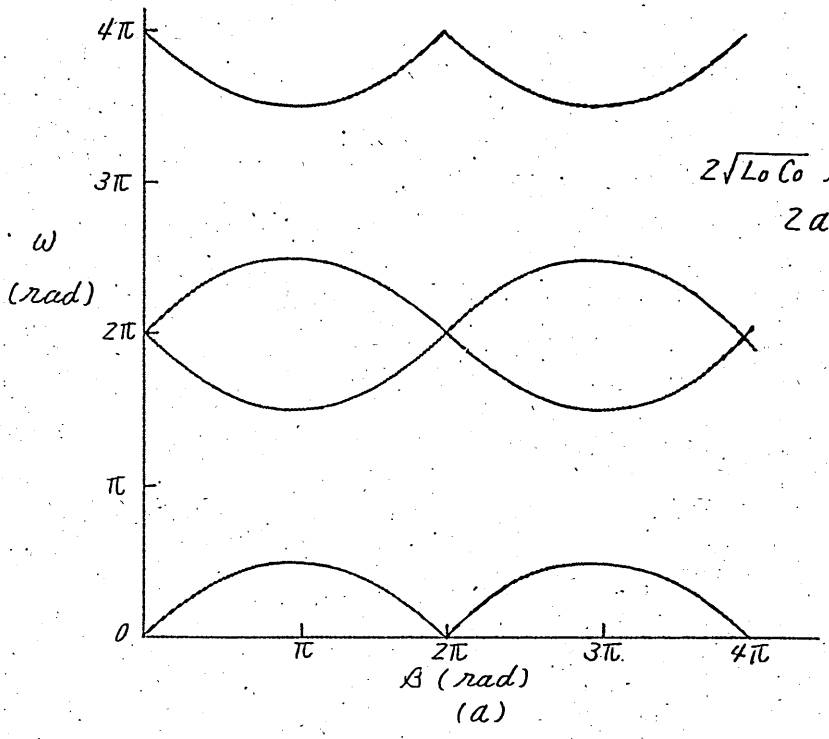
$$D = 2.5 \times 10^{-3} \quad (m)$$

と定めた場合の $\omega - \beta$ 曲線を求める。この場合、電気磁気学の基礎理論より

$$L_0 = 1.60 \times 10^{-8} \quad H/m$$

$$C_0 = 5.579 \times 10^{-13} \quad F/m$$

となり（17）式及び（18）式より数値計算をおこなうと、図5の如くあらわされる。


4π
3π
ω
(rad)
2π
π
0
π
2π
3π
4π
β (rad)
(a)
2√(Lo Co) ℓ=1
2a=1

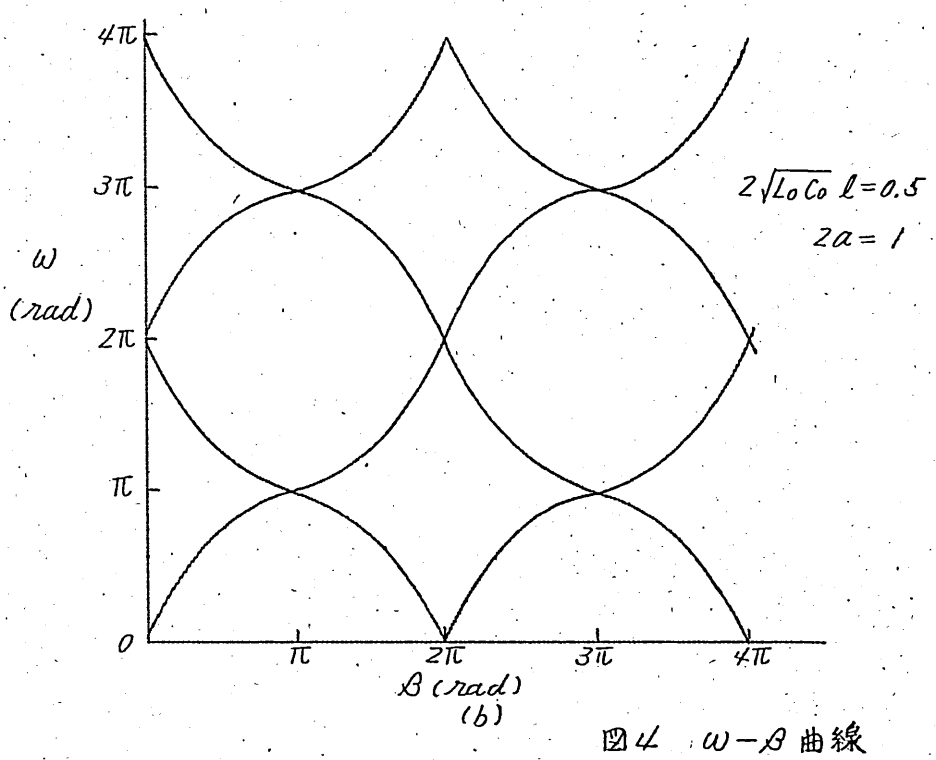

4π
3π
ω
(rad)
2π
π
0
π
2π
3π
4π
β (rad)
(b)
2√(Lo Co) ℓ=0.5
2a=1

図4　ω－β曲線

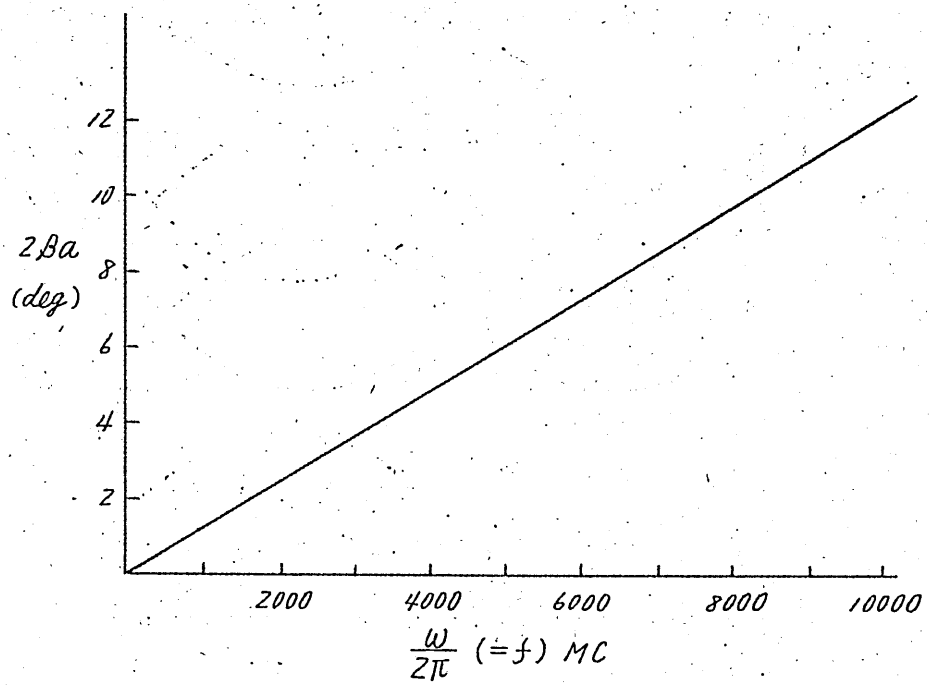


図5　理想的 Trough type 進行波偏向系の ω−β 特性

偏向系の位相速度は

$$Up = \frac{\omega}{\beta} \qquad (19)$$

で与えられるから，図5の結果から、0 ～10000 MC の周波数範囲に於いても Up は一定である。従って位相速度は一定の値を示すから偏向系として良好な伝送特性が期待できる。この図5より，(22) 式を用いて位相速度を求めると，3×10^7 m/sec となった。

3. 理想的な Trough type 進行波偏向系の構造と特性[8]

Trough type 進行波偏向系は、円形断面を有する折曲り線路を中心導体とし，3方を壁で囲んだ溝形導体を周期的に配して外部導体としたものである。理想的な偏向系の構造としては、図3に示す如き場合を考える。この偏向系の位相速度は分布相互インピーダ

ンスの影響が無視できるから、簡単のために幾何学的に次式で与えられる。

$$U_g = \frac{ac}{L + \frac{a}{2}\pi} \qquad (20)$$

U_g : 幾何学的位相速度〔m/sec〕
L : 折曲り線の長さ 〔m〕
a : ピッチ 〔m〕
c : 光 速 〔3×10^8 m/sec〕

厳密には一つのTrough line 中の波の進行方向の位相速度よりcに相当する値を決定すべきであるが、ここでは近似的に光速として充分設計が可能である。この場合lが大でaが小なる程遅波率が大となり偏向系を通過するビームの加速電圧を低くすることができる。

折曲り長の種々の値による位相速度を実験的に求めると図6の如くである。図7に種々の折曲り長り場合の周波数特性を示す。Trough line の位相速度は外部導体及び内部導体の形状によって変化するので偏向系としての位相速度の変化をもたらす。

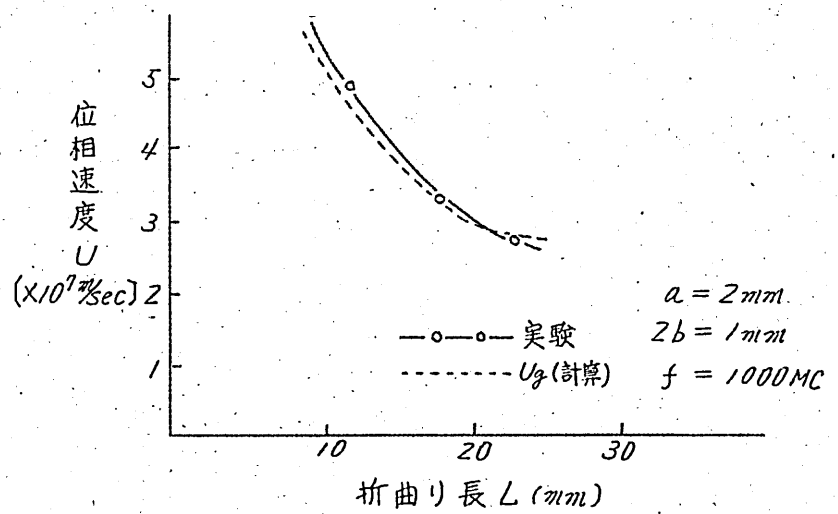


図6 種々の折曲り長の場合の位相速度

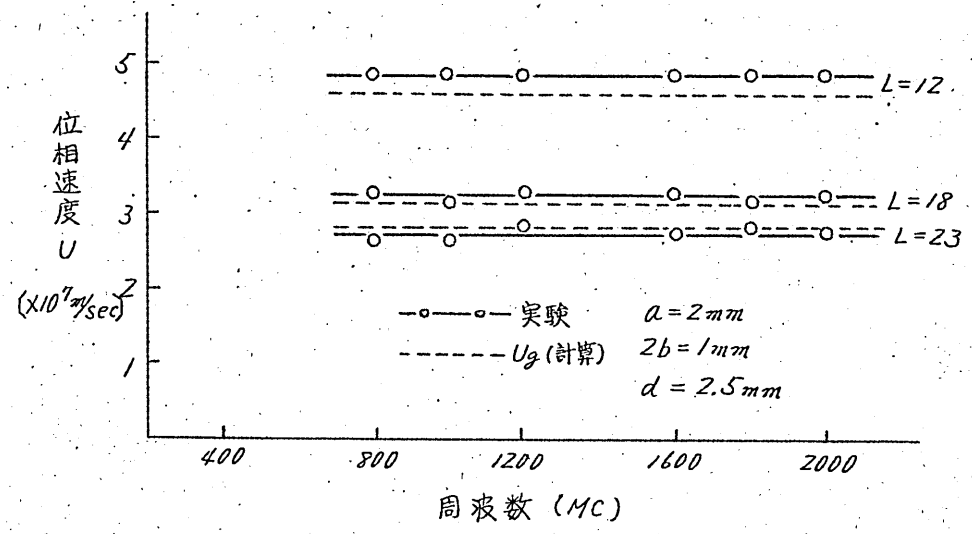


図7　種々の折曲り長の場合の周波数特性

外部導体の形状が一定で中心導体の直径の変化による位相速度の変化と幾何学的位相速度の関係を示すと、図8の如くである。

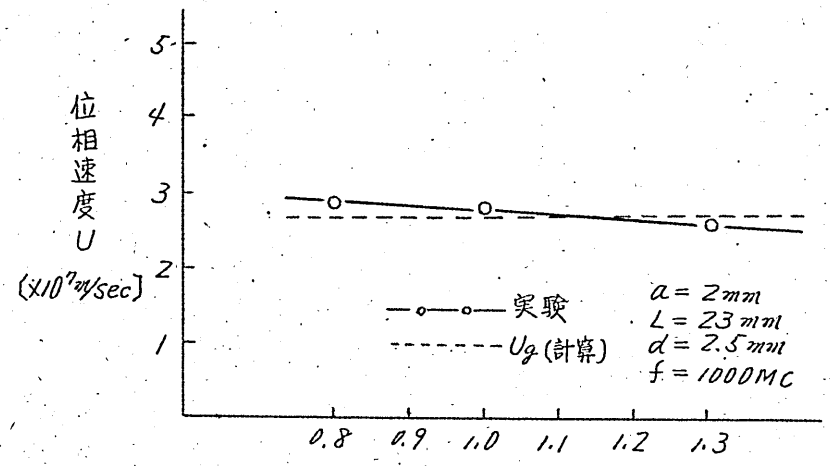


図8　種々の中心導体の場合の位相速度

位相速度の測定は信号発生器に定在波測定器及び被測定偏向系を接続し、偏向系の折曲り線の一定点を順次短絡して定在波測定器の固定されたプローブに接続された電流計の読みより管内波長を求め、

$$U = f\lambda \qquad (21)$$

U：位相速度 〔m/sec〕
f：周波数 〔c/sec〕
λ：管内波長 〔m〕

の式を用いて算出した。

以上の実験的結果から、偏向系の位相速度は幾何学的位相速度を採用して何ら差し支えないことが示された。又周波数特性は2000MC附近でも均一であり、ビームの加速電圧を一定に取ることができるので、高調波成分を含む信号波形を良好に偏向することができる。

偏向系のインピーダンスは図9の如きTrough lineを仮定し、これにより構造の概略の設計を行なう。Trough lincの特性インピーダンスは次式で与えられる。(11)

$$Z_0 = 59.959 \ln \left\{ \frac{2a}{\pi b} \tanh \frac{\pi d}{a} \right\} \qquad (22)$$

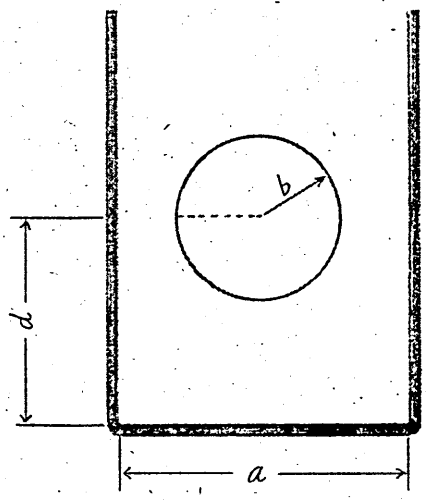


図9 Trough type偏向系の断面

(22)式を用いて偏向系設計用のグラフを作ると図10の如くあらわされる。この図を用いて任意のインピーダンスの偏向系の構造の概略を知ることができる。

(20)式を用いて偏向系の位相速度を定め、(22)式を用いて特性インピーダンスを決定することによりTrough type進行波偏向系の基本設

計をおこなうことができる。

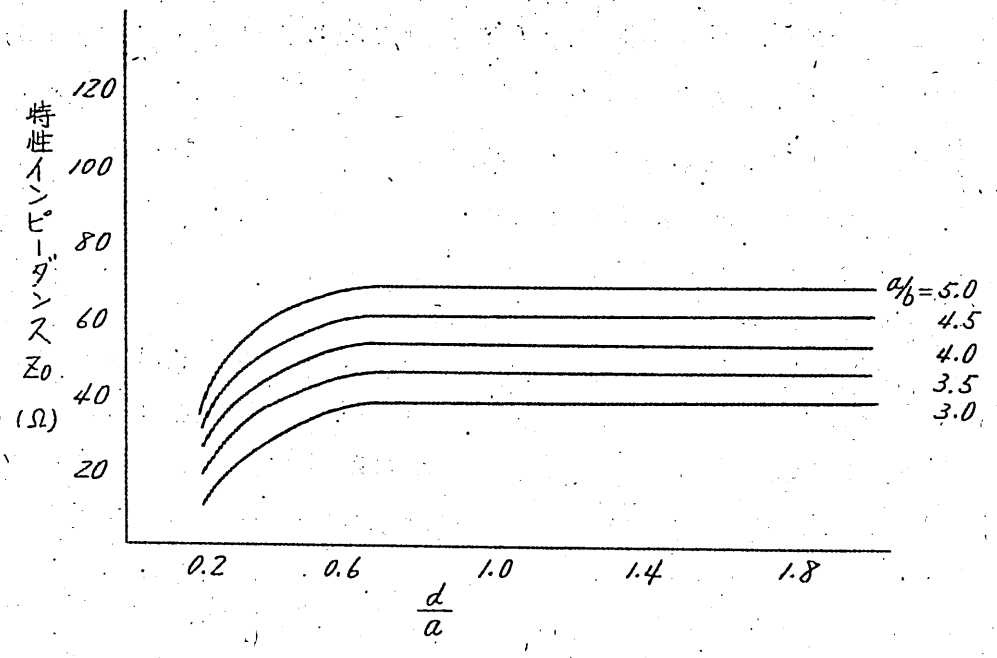


図10 Characteristic impedance 線図
Characteristic impedance curve

4 Trough type 進行波ブラウン管の構造と特性(8)

前述の如き基礎実験により Trough の断面構造及び折曲り部の長さを決定し、さらに損失、支持誘電体及び入出力端の結合に考慮を払って管を製作した。偏向系の損失については、表皮効果の影響を少なくするために、電気伝導度の良好な金属を必要とするが、工作上の精度を必要とするために、タングステン線に厚い銅メッキを施した中心導体を使用した。支持誘電体の影響については、ガラス、セラミック等の使用を廃し、$\varepsilon \fallingdotseq 2$ の接着剤を少量用いた。入出力端の結合方法については 2000MC までの目標であるため特に考慮を払わず、単に入出力端部の Trough の側面導体を調整して最良の状態に整合するにとどめた。偏向系の長さは 40 mm で、ピッチ

は2mm．中心導体の直径は1.3mmφ．折曲り長は23mm．偏向板間隙は2mmであり．折曲り回数は21回である。

写真1に偏向系の外観を示す。

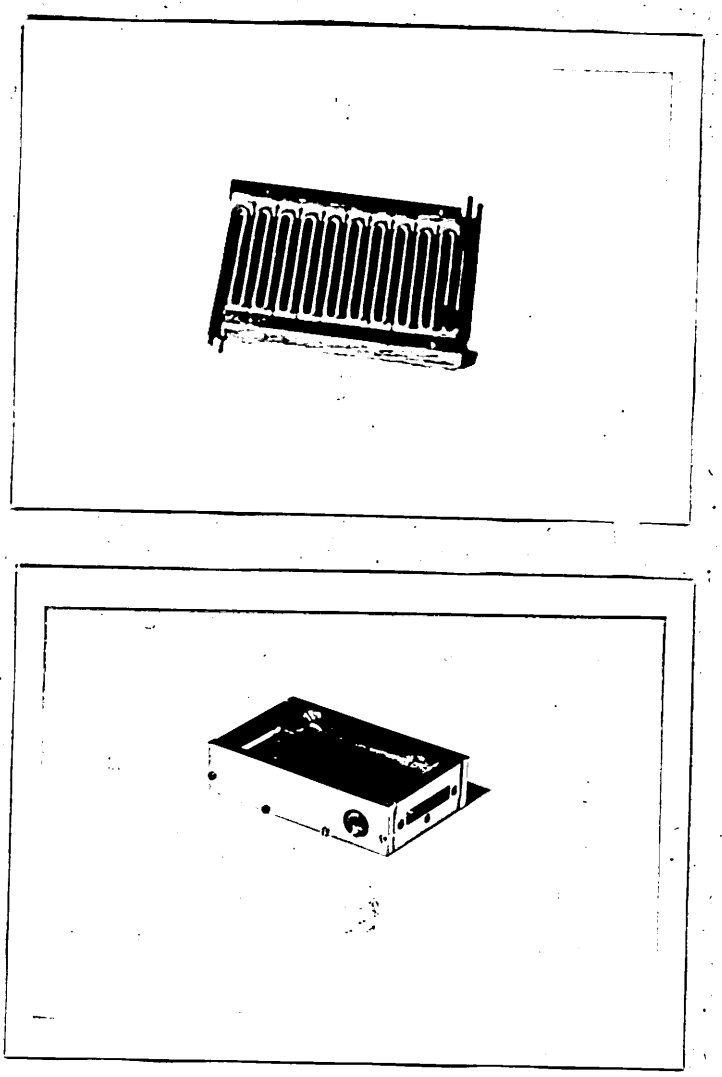


写真1　Trough type 進行波偏向系の外観

電子銃は最大部20mmのシリンダーの電極を用いユニポテンシャル形で静電集束方式とした。偏向系は前述の進行波偏向系の他にY軸方向の輝線移動用の偏向板及び通常の板状X軸偏向系からなっている。後段加速は2段のヘリカル形を採用し，偏向拡大方式による影像拡大電極を持ち，像の倍率を自由に変化できるようになっている。偏向拡大系はX軸偏向板の先端に細いタングステン線を格子状にはりめぐらせたものである。この電極とヘリカル電極とによって作られる電界により発散レンズ或は集束レンズを作るが，その大きさは，この電界の形状を変化することにより変えることができる。偏向拡大レンズ系の倍率はE_{b3}の電位を変化して用いる。[9]

写真2に試作管の外観を示す。ブラウン管の定格及び動作例を表1に示す。

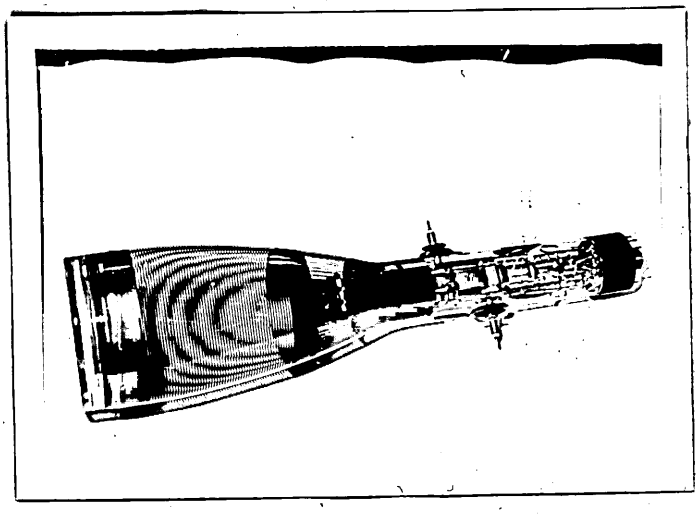


写真2　進行波ブラウン管の外観

試作ブラウン管の定在波特性は図11の如くであり，通常のZig-Zag lineの実用的偏向系では1000MC程度までの周波数であれば，特別なバルンを用いて定在波比を低くすることができるが，それ以上の周波数では困難である。[10] 損失を図12に示す。位相速

度特性を図1-3に、偏向率の周波数特性を図1-4に示す。有効径は100×60 mm² 以上得られ、通常の観測用ブラウン管と同等の特性が得られた。

用　途	観測	
方　式	進行波偏向電界、静電集束、静電偏向拡大、ヘリカル後段加速	
構　造	丸形フラットフェースバルブ　メタルバック	
外　形	全長500±10mm　バルブ最大部直径133±3mm	
	ネック外径55±2mm　けい光面有効径116mm以上	
口　金	中形シェルダイヘプタル12本脚(B-12-37)	
	小形キャビティキャップ(J1-21)	
	特殊ピン　同軸端子	
定　格	ヒータ電圧	6.3 V
	第2グリッド電圧	800～3000 V
	第1陽極電圧	1500 V max
	第2陽極電圧	800～3000 V
	内部シールド電圧	Eb2 ±5%
	後段偏向電圧	Eb2 ±5%
	第3陽極電圧	2000～15000 V
	第4陽極電圧	7000～15000 V
	ヘリカル抵抗	75 MΩ min
動作例	第3,第4陽極電圧	10000 V
	第2格子,第2陽極電圧	2000 V
	第1陽極電圧	260～660 V
	カットオフ電圧	−30～−70 V
	偏向率 X	12.5～16.5 V/cm
	進行波偏向系	4～10 V/cm
	有効径	60×100 mm²

第1表　定格及び動作例

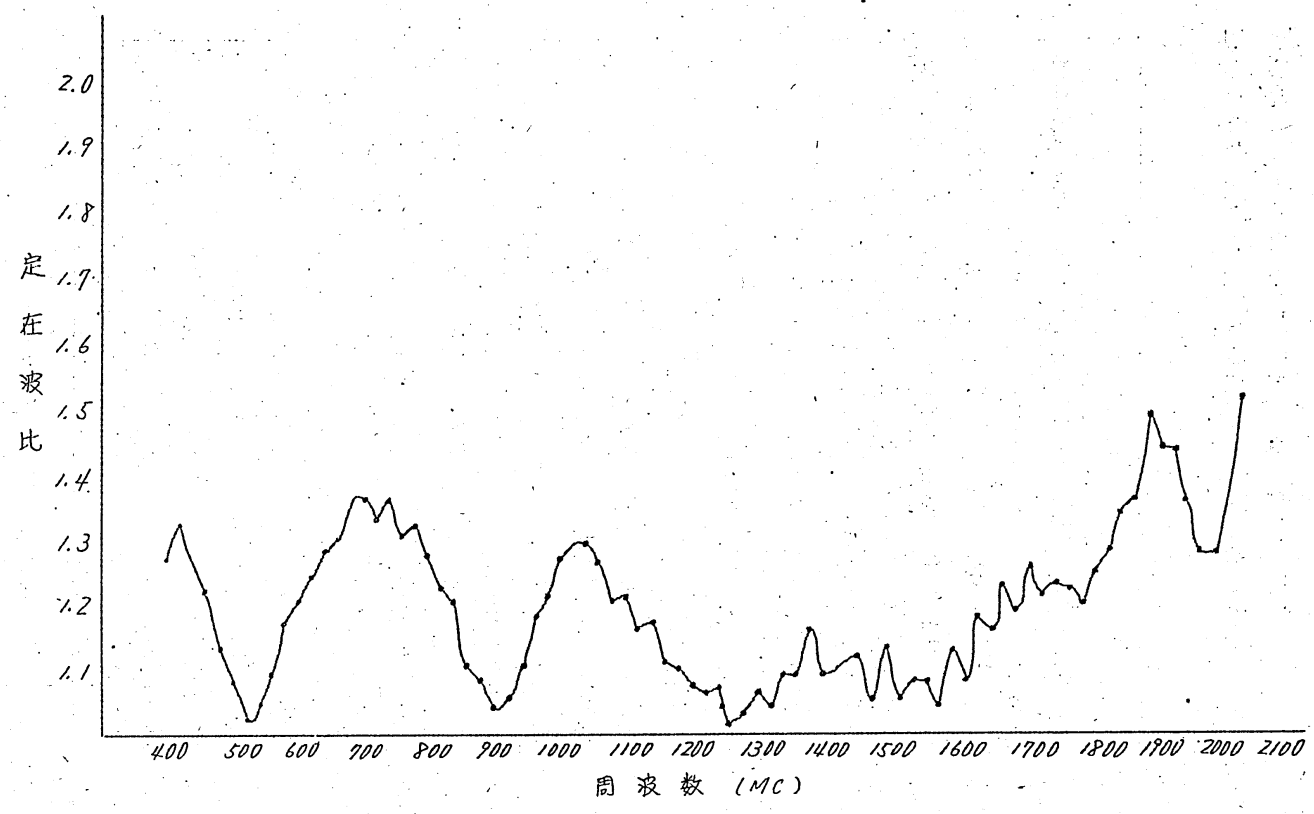


図11　偏向系のVSWR特性

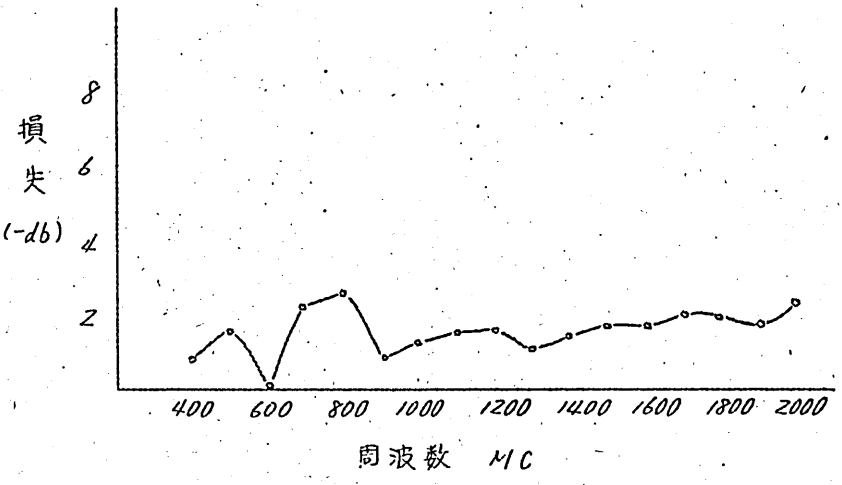


図 / 2　損失の周波数による変化

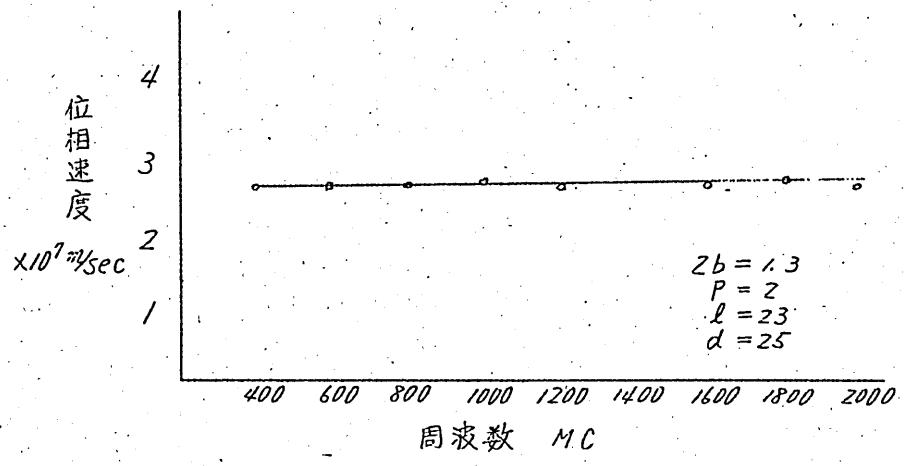


図 / 3　偏向系の位相速度特性

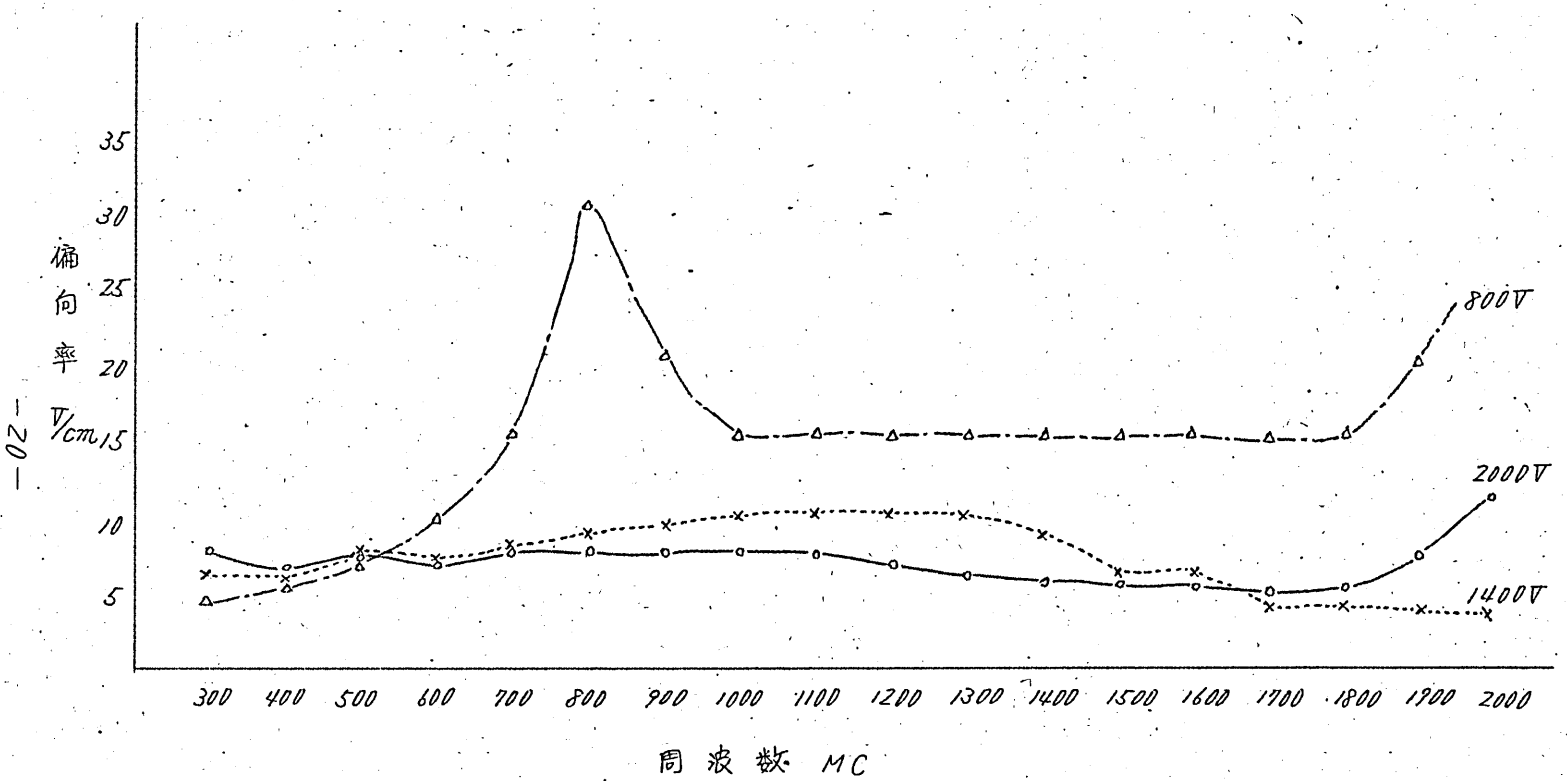
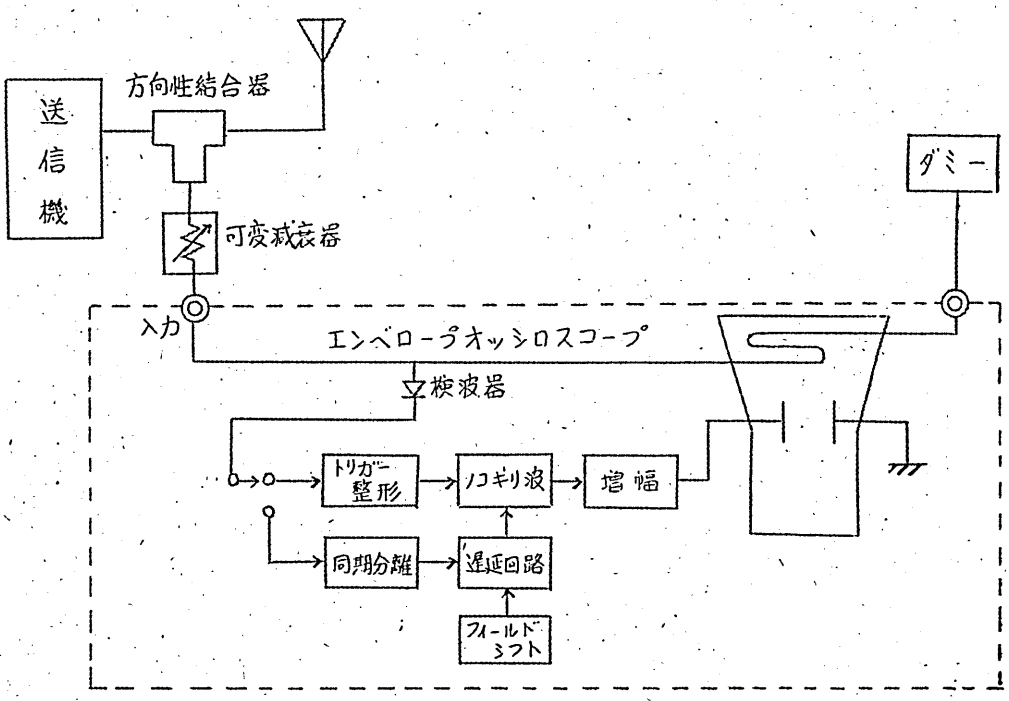


図14　偏向率の周波数特性

5. エンベロープオッシロスコープへの応用

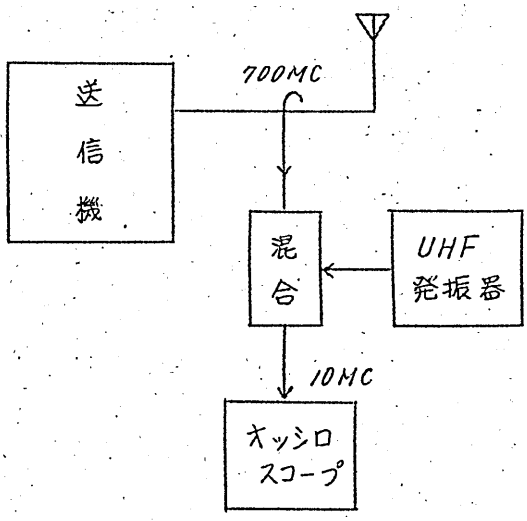
エンベロープオッシロスコープはTV電波の搬送波のエンベロープを観測して変調特性の測定に用いるもので、送信機又はサテライトの調整に不可欠の測定器である。第ノ5図に本器のブロック図を示す。試作機によって各種のTV電波を観測した結果、変調特性の測定に利用できる見通しを得た。感度は4cm振らすのに約2Wを要し、かなりの直線性を要求されるが、従来の間接法（ビートダウンして普通のオッシロで観測）に比し直接観測できる利点がある。この装置は単にエンベロープとしての性能であるばかりでなく、15～30MCの普通のシンクロスコープの性能も兼備している。



第ノ5図

UHFエンベロープスコープのブロックダイヤグラム

UHFのTV放送機に於いては，映像信号は送信機に於いて700MCの搬送波を変調してアンテナより送信される．映像信号で搬送波を正しく変調しているかどうかを見るために，送信機の出力をエンベロープ測定器で測定しなければならない．即ち本機は送信機の直線性，変調特性を測定するものである．従来はUHF信号を直接観測できなかったので，第16図の如く10MC程度にビートダウンして通常のオッシロスコープで観測していたが，非直線部分が入るので問題であったが，進行波ブラウン管は直線性が良いためこの問題がなく，容易にエンベロープを正しく測定することができる．



第16図

従来のUHFエンベロープの観測法

6. むすび

折曲り進行波偏向系の位相速度の周波数特性は各線間に生ずる電磁界の分布相互作用によるものであることを確め，この分布相互作用の無視できるTrough type進行波偏向系を提案した。この

Trough type 進行波偏向系の解析をおこないω－β特性を求め、非常な広帯域の周波数範囲で位相速度が一定であることを示した。実験的にも2000MCまでの測定で理論とよく一致することを示した。この偏向系は偏向板間隙を比較的広く取ることができるので、通常のブラウン管と同等の有効面が得られ、偏向率も良好である。さらに入出力端部に考慮を払い、偏向系の精度を出すと損失、定在波比特性が改善され、広帯域に渡って良好な特性が期待できる。

パルス技術、高速度現象、UHFTV分野に於ける応用が増すとブラウン管に対する要求も逐次生ずるものと思われ、これについても検討をおこないたいと思っている。

本進行波偏向系及び将来検討すべき問題について御意見をたまわれば幸いに存じます。

最後に本研究の実施に当たり種々御援助いただいた研究部長大脇健一博士及び中村正博士に感謝致します。

偏向系の試作並びに実験の一部は映像管部技術課大谷富一氏の協力によって為されたことを附記し、謝意を表します。

文　献

1. 大脇健一，中村正 ； 信学誌 32 (1949) 2. 37

2. K. Owaki, S. Terahata, T. Hada and T. Nakamura ; proc. IRE 39 (1950) 10

3. J.R. Pierce ; Electronics 22 (1949)

4. S.T. Smith, R.V. Talbot ; proc IRE 40 (1952) 297

5. K.J. Germeshausen, S. Goldberg, D.F. Mcdonard proc IRE ED-4 (1957) 2, 152

6. G.M. Lee ; Navy contract N 173 S - 15167

7. 大脇健一，中村正，前田晴雄 ； 超高周波オシログラフ 日刊工業

8. 中村正，山田公 ； TV電子管研究委員会資料 270号

9. 中村正，山田公 ； 昭38 電気関係学会関西支部連大

10. 中村正，山田公 ； 昭39 電気関係学会関西支部連大

11. R.E. Chisholm; The Characteristic Impedance of Trough and Slab Lines IRE trans MTT-4 July (1965)

輻射科学研究会資料

半球型GaAs発光ダイオードの諸特性

昭和41年9月30日

早川電機工業株式会社

重政淳一郎・鵜野高明・藤井信吾

ＧａＡｓ半球型発光ダイオードの諸特性

早川電機　重政淳一郎
鵜野高明
藤井信吾

1. はじめに

ＧａＡｓ、Ｐ－Ｎ接合からの発光は、近赤外線の光源として現在各種方面への用途が検討されている。

従来、ＧａＡｓは、半導体レーザー用として、いろいろ検討されてきたが、オプトエレクトロニクスにおいては必ずしもコピーレントなレーザー光でなくてもいい場合があり、むしろ低電流で動作できることが必要な場合もある。

我々は、そうした意味から低電流で動作でき、発光効率のいいダイオードの検討を行っているが、ＧａＡｓのｎｏｎ－ｌａｓｅｒな発光はＧａＡｓの屈折率が大きい（９１００Ａの光に対して室温で3.6）ことによる内部反射の損失が大きいので、発光強度が、かなり小さくなる。それを改善する為に、反射防止膜をつけること。ダイオードの形状を工夫すること。あるいは、結晶内の吸収を減らすことなどが試みられている。

我々は、最も有効な方法と考えられるダイオードの形状を半球型に成形することを試み、発光強度を従来の平面型に対し、５～１０倍高めることができたので、半球型ダイオードの諸特性について報告する。

2 実　験

2－1、試　料

n－GaAs（Te doped）　　$n = 2 \times 10^{17} / cm^3$

$\rho = 0.009\ \Omega\ cm^3$

$\mu = 3800\ cm^2$ ／volt．sec

2－2、拡　散

Zn、Asと共に真空封入し、800～900℃で拡散し、P層を約20μ作る。

2－3、半球状けんま

直径2 mm φの半球状にけんまする。

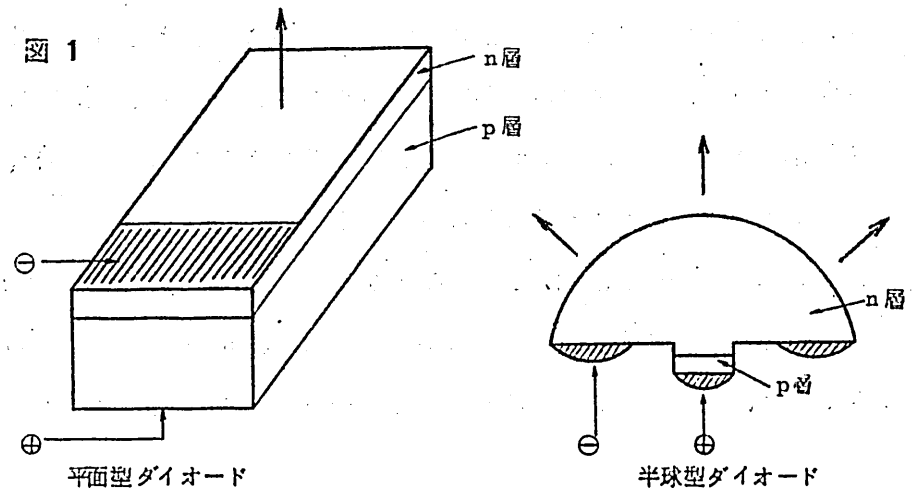
酸化クローム又は、ダイヤモンドペーストを用いて鏡面に仕上げる。

2－4、電　極

n、P共に、Au.－Sb＋Agを500℃で加熱しながら蒸着alloyを行う。

2－5、形　状　　〔図1〕参照

図 1



GaAs発光ダイオードの形状

2－6、受光器

当社製Ｓｉ－太陽電池　ＳＰＤ－１０２（８ *mm*φ）

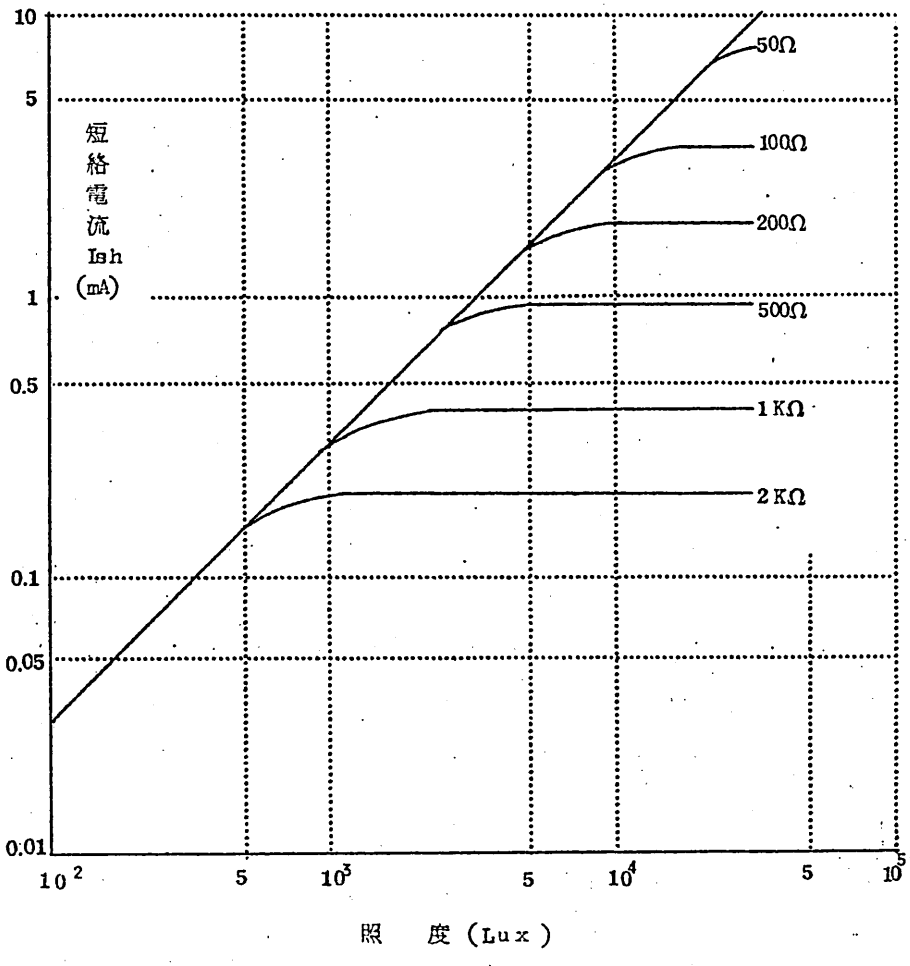
負荷抵抗　Ｒ＝１０Ω～１ＫΩ　〔参考図１〕参照

照度－短絡電流特性《ＳＰＤ－１０２》

光源；ダングステンランプ

色温度　２８５４°Ｋ

測定温度；２５℃



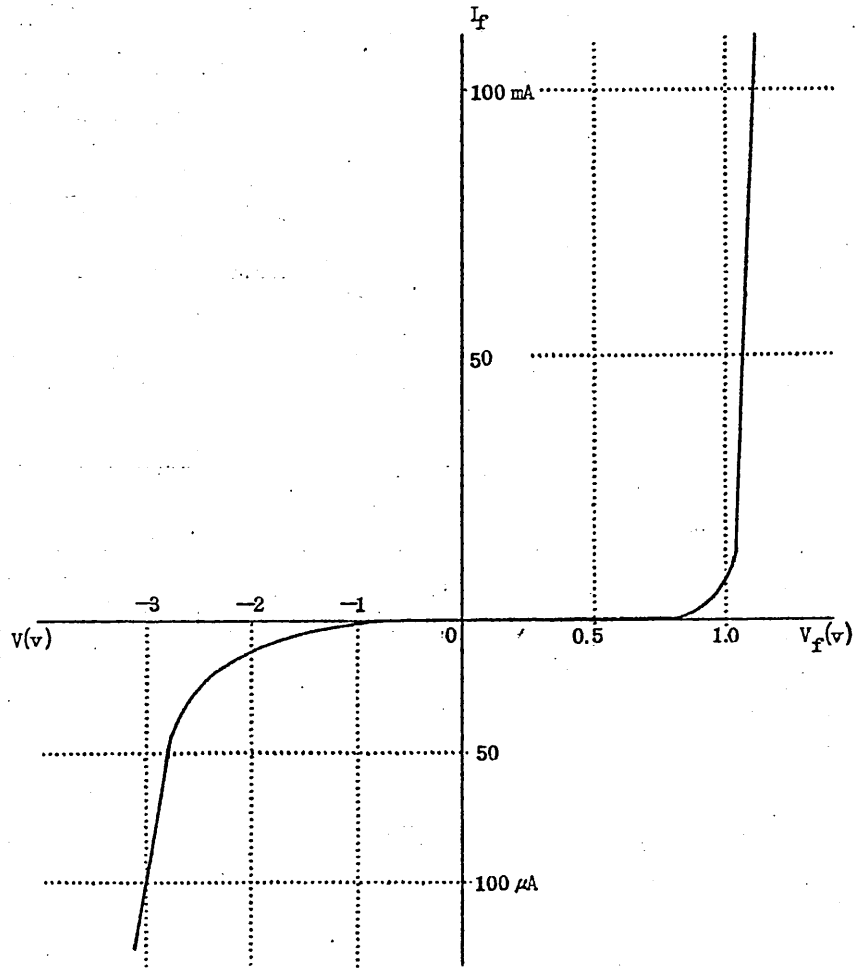
参考図１

3. 諸特性の測定結果

3－1、V－I特性　〔図２〕

図 2

電　圧－電　流　特　性　（T＝25°C）

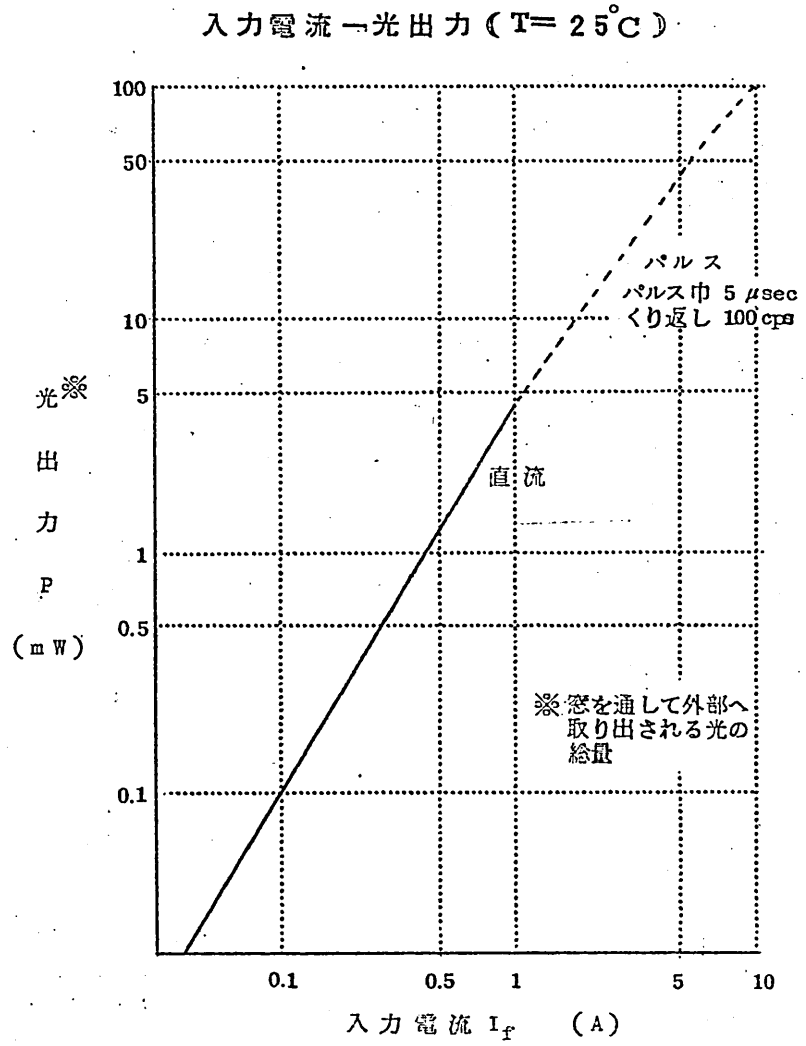


3－2、入力電流ー出力特性

〔図3〕に入力電流に対する出力特性を示す。

Ｉｆ＝1 Ａまでは、放熱板を付けて直流で動作できるが、１Ａ以上では発熱の問題があってパルスを用いた。なお電流の増加に対し、出力が正比例しないのは、用いた結晶の不完全性、ダイオードのろうえい電流などに関係しているようであるが、現在、検討中である。

図 3



3－3、距離一光出力特性

〔図４〕の如く、通常の点光源に比し、距離による光出力の減衰は小さい。これは、窓による効果であるが、遠距離になると、受光器の大きさも関係してくるので、複雑になる。

距 離 一 出 力 特 性

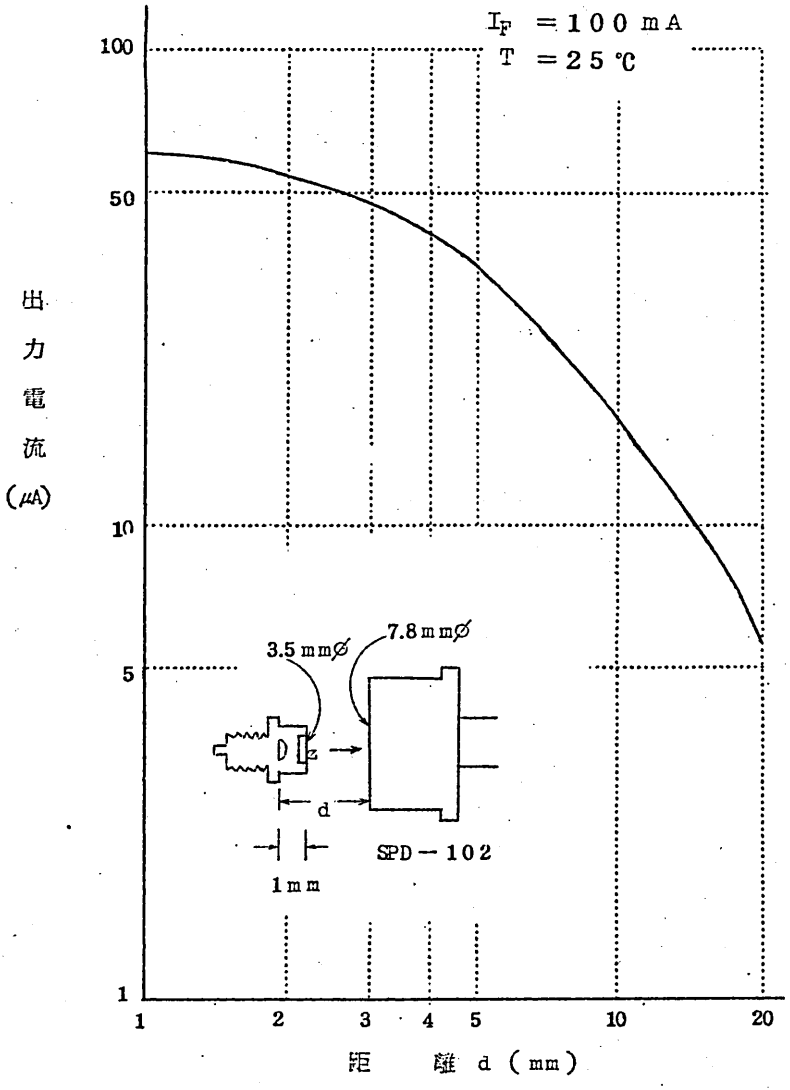


図 4

3－4、前方指向特性

半球の中心方向を0°とし、その時の光出力を100とした場合、左右への光の拡りを測定したのが〔図 5〕である。

前 方 指 向 特 性

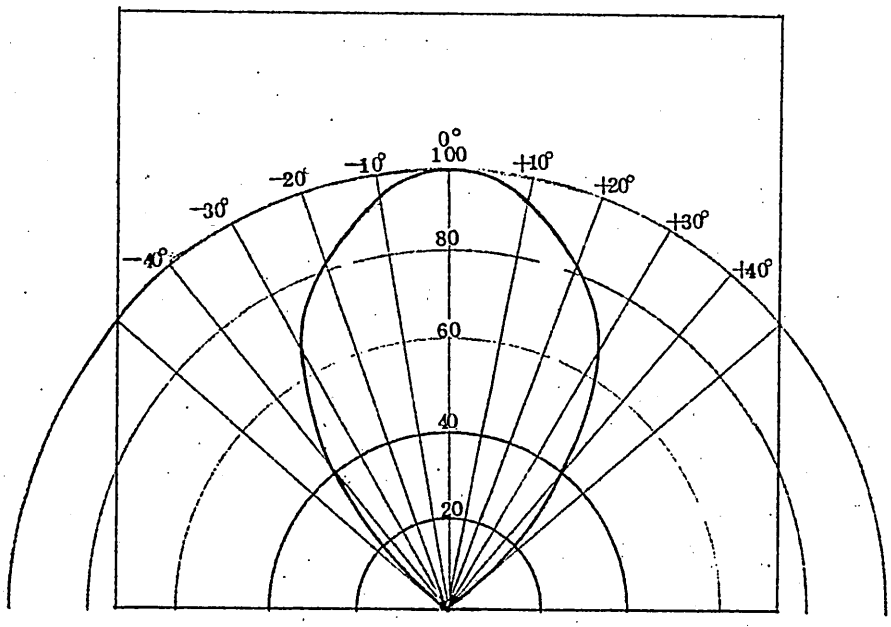


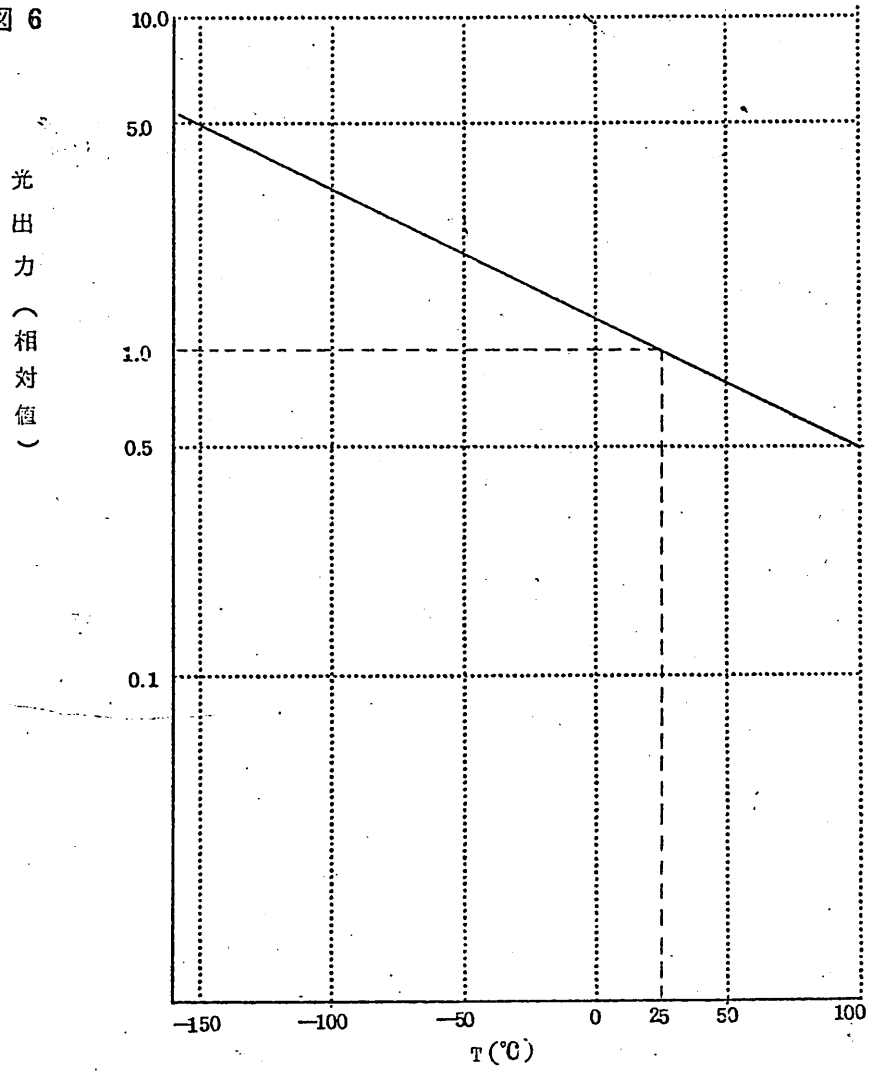
図 5

3－5、温度一光出力特性

T＝25℃の時の光出力を1.0とした場合の温度による出力の変化を〔図6〕に示す。（I_F ；一定）

温度が上ると、出力が小さくなるのは、non－radiativeな再結合が増加すること及び、いわゆる注入比rの変化と考えられるが、その機構についてはよくわからない。

図6　光出力一温度特性（I_f ；一定）



3－6、発光スペクトル

I_F ＝１００ｍＡの時の発光スペクトルを測定すると、〔図7〕の如くになる。Ｔ＝２５℃では、９１３０Å にpeakをもつ半値巾２２０Å の曲線である。

GaAs発光スペクトル

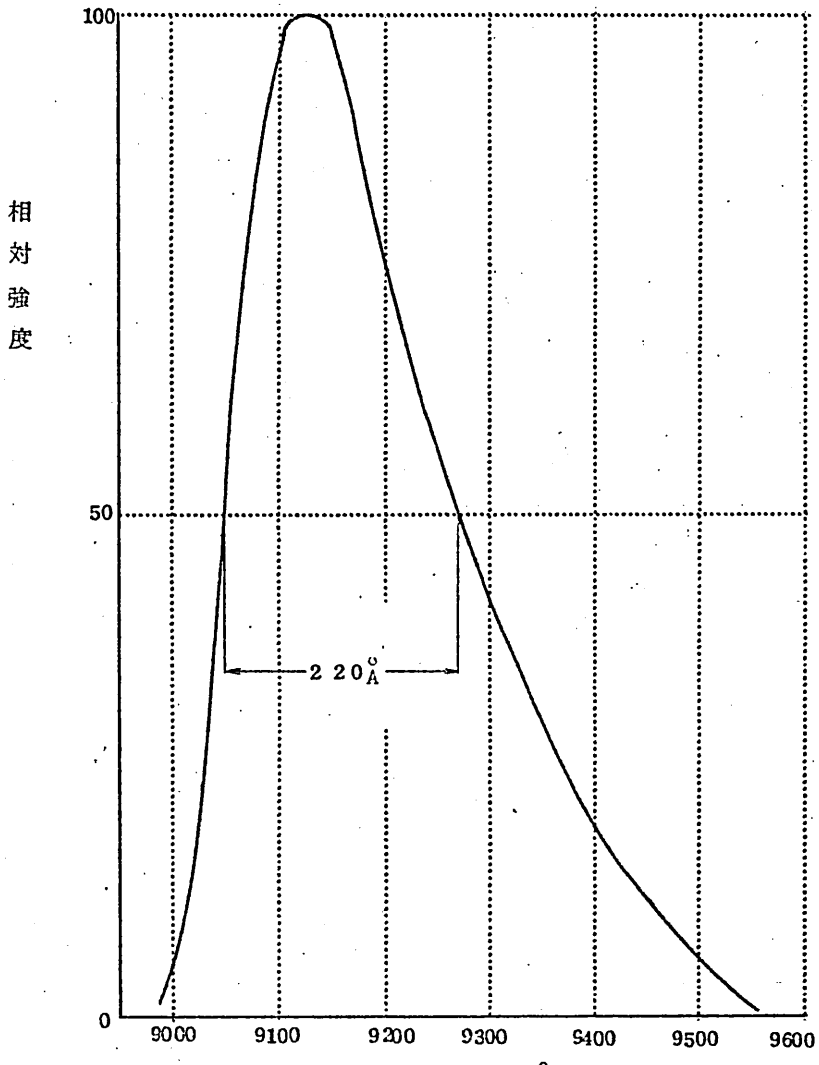


図 7

3－7、Si太陽電池の分光感度との比較曲線

GaAs発光スペクトルをSi太陽電池の分光感度と比較すると〔図8〕の如くになり、peakの位置が非常によく一致する。

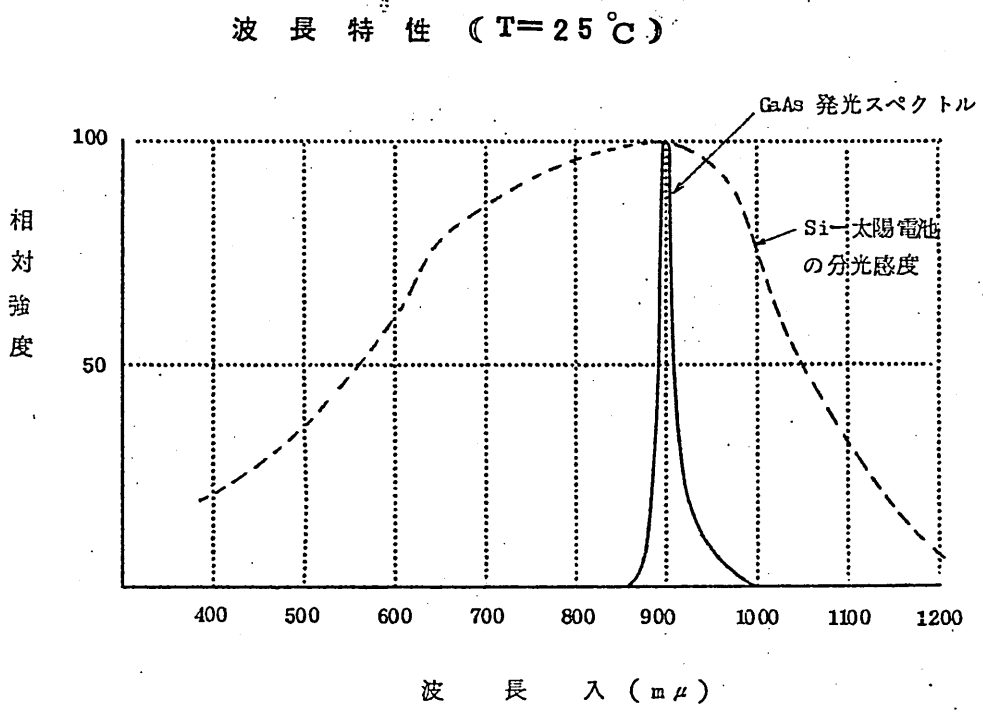


図 8

3－8、発光スペクトル及び発光強度の温度変化

GaAsダイオードは、温度が変化すると発光強度及び発光スペクトルが変化する。さらに半値巾も低温になるに従い狭くなる。このもようを〔図 9〕に示す。

発光強度及び分光スペクトルの温度変化（I_F:一定）

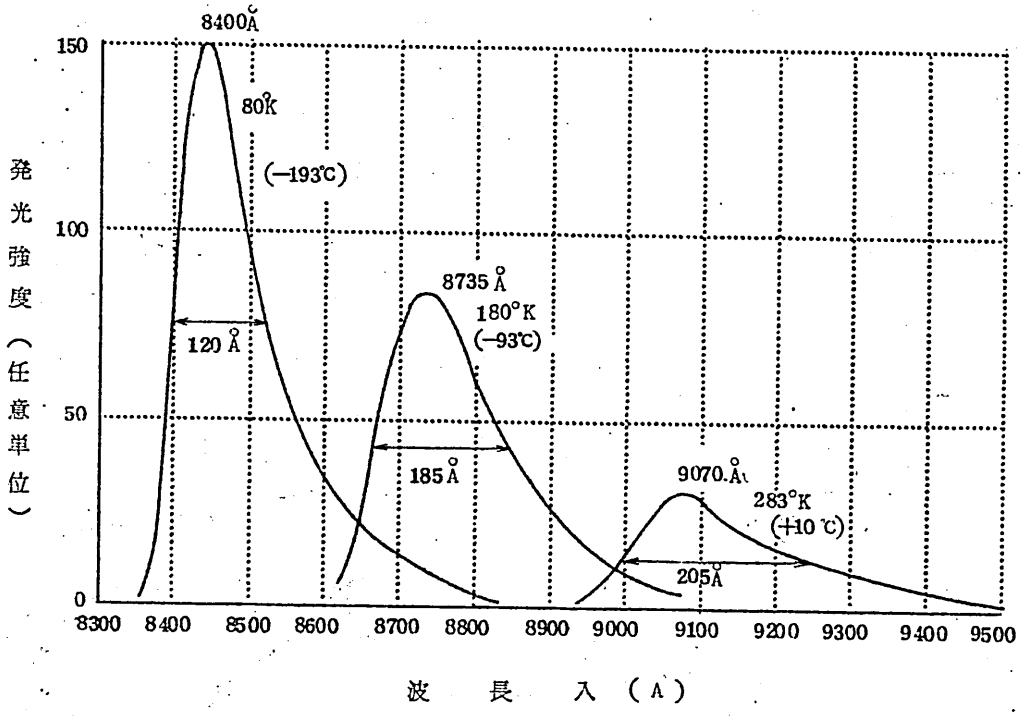


図 9

3－9、動抵抗—入力電流特性

回路設計上必要な動抵抗 $\triangle V_F$ ／$\triangle I_F$ と入力電流 I_F との関係を〔図 10〕に示す。

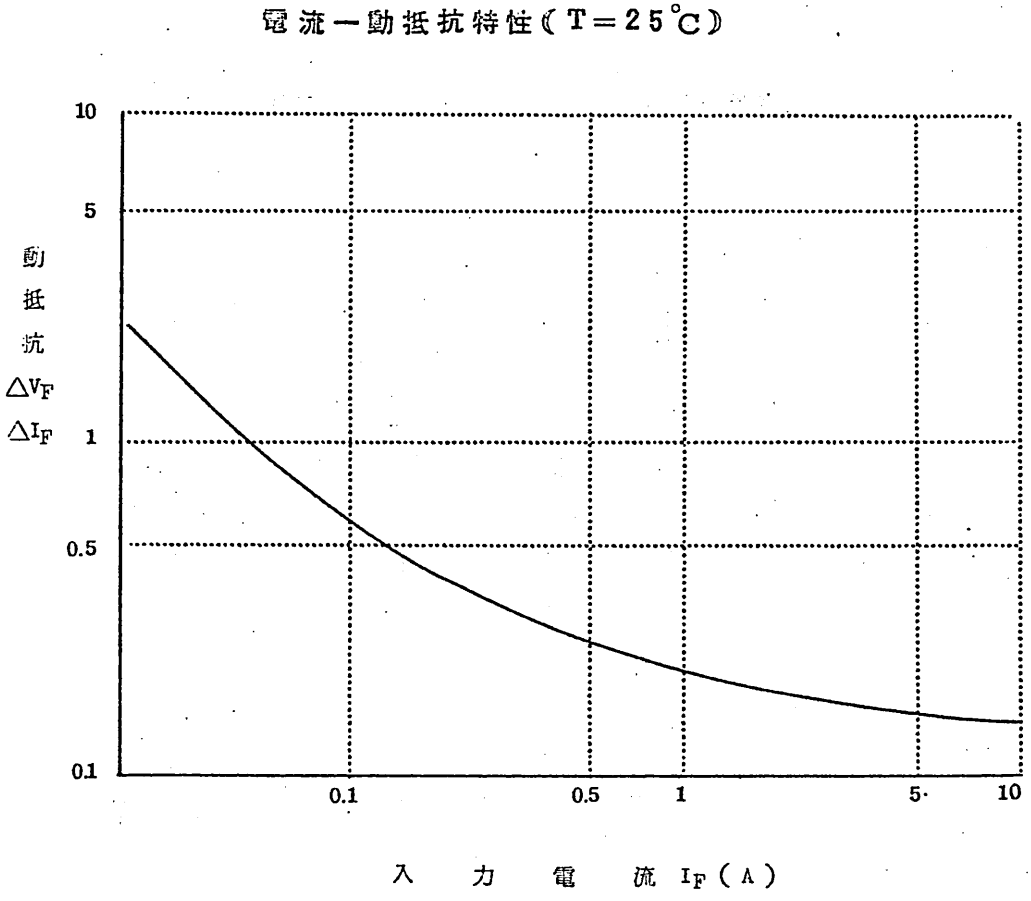


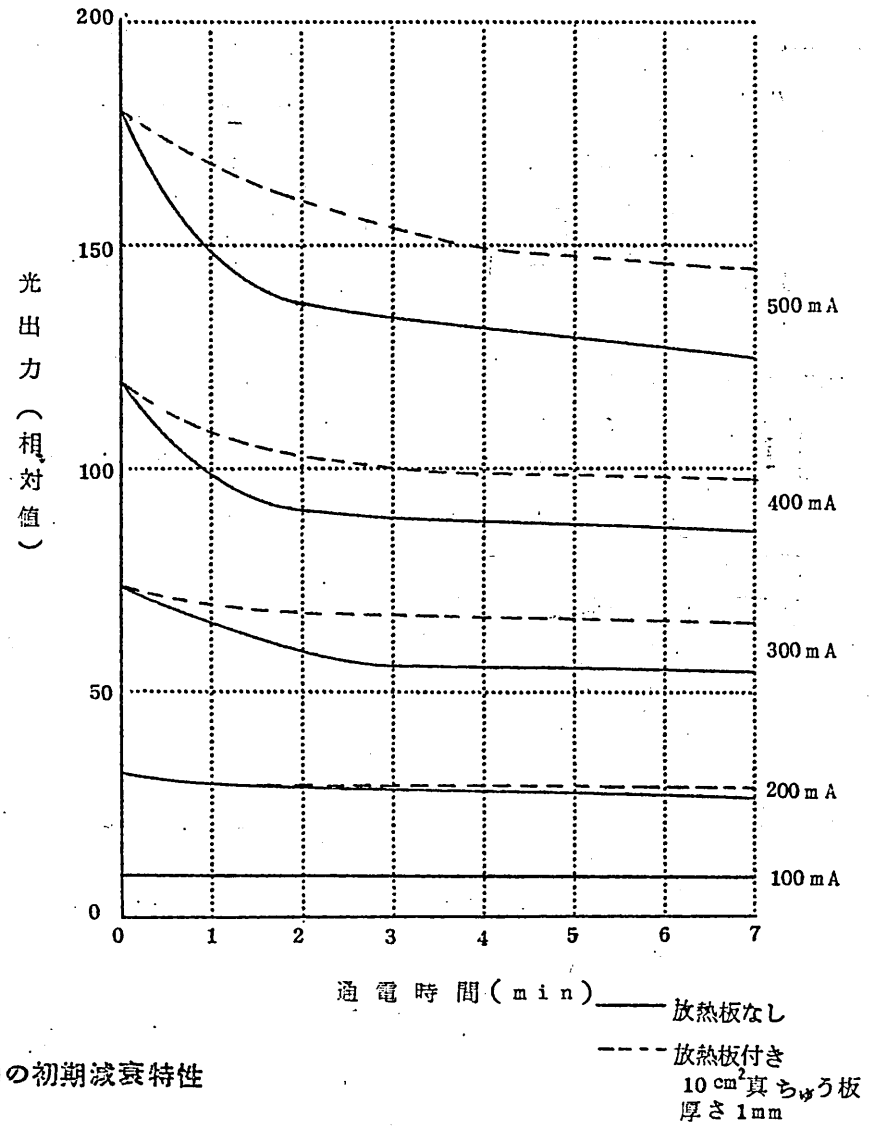
図 10

3－10、発熱による初期出力の減衰

直流動作の場合、発熱のため初期に出力が減少するが、適当な放熱板をつければ、かなりこれを防ぐことができる。

このもようを〔図11〕に示す。

図 11



光出力の初期減衰特性

3－11、寿命試験

I_F ＝１００ｍＡを室内で連続通電した場合の発光強度の変化を〔図12〕に示す。

通電後、発熱のため初期出力の減衰が起るが、数分で安定し、以後はあまり減衰は見られない。４０００時間で、２０％程減衰しているが、これは、空気中でキャップシールをしているため、ＧａＡｓ結晶の表面に変化が生じたため（酸化膜など）で、本質的なものではないと考えられる。

なお、通電を止めるともとの状態に回復する。

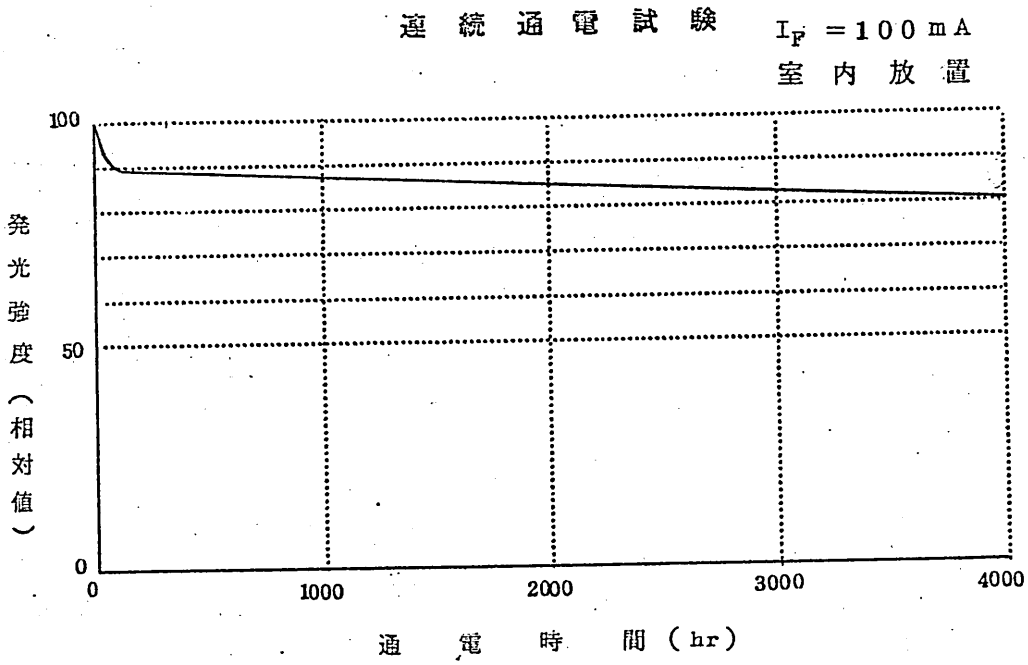


図 12.

4. 定格及び各種特性（T＝25℃）

4－1、入力電流定格

	直流電流	パルス電流 パルス巾 5 μsec くり返し100 cps
標準入力電流 I_F	100 mA	10 A
最大入力電流 Imax	300 mA 注1）	15 A

注1） 発熱のため初期出力の減衰が起るので、放熱板を使用すること。（図10参照）

4－2、標準使用温度範囲　　－150℃～＋70℃

4－3、電気的特性

	略号	標準	備考
順方向電流(直流)	I_F	100 mA	V_F ＝1.10 V
順方向電流(パルス)	I_{Fp}	10 A	V_{Fp}＝ 3.0 V
逆方向耐電圧	Vbr	－3.0 V	Ir＝－100 μA
接合容量	Co	50 PF	V＝0、f＝1 Mc
順方向抵抗	Rs	0.5 Ω	Rs＝△Vf／△If、If＞100 mA

4－4、発光特性

略号	I_F ＝100 mA			I_{Fp} ＝10 A（パルスピーク）		
	最小	標準	最大	最小	標準	最大
光出力注2） P	60 μW	100 μW	120 μW	60 mW	100 mW	120 mW
SPD－102 出力電流注3） Is	36 μA	60 μA	72 μA	36 mA	60 mA	72 mA

注2）窓を通して外部にとり出された光の総量

注3）直径 8 mm の当社製Si－太陽電池SPD－102で受光した時生ずる光電流で光出力との間には P≒1.67 Is（P：watt Is；A）の関係がある。

輻射科学研究会資料

相対的に運動している媒質の境界面における反射および屈折

塩沢俊之　　熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1966年12月9日

1. まえがき

相対的に運動している媒質の境界面における平面波の反射および屈折の問題は運動系の電磁界理論の最も基本的な問題の一つである．最近，真空中を一様な速度で運動している半無限の誘電体による平面波の反射と透過について，C.T.Tai[1] およびC.Yeh[2]によつて相次いで報告された．また著者等は彼等とは独立に，任意の二つの媒質が無限平面によつて接して相対的に運動している場合の境界面における反射および屈折について考察し，従来知られていなかつた種々の特異な現象が現われることを示した．[3]著者等が先に報告した理論は媒質の相対運動の速度が真空中および媒質中の光速度に比べて十分小さい場合の近似理論であるが，ここでは先の理論を拡張した厳密な理論について述べる．なお，細野氏は著者等の上記論文に対する討論の中で反射係数の厳密解を著者等とは異なる方法によつて求め，著者等と完全に同じ結果を得ている．[4]

2. 基礎理論

2・1 運動媒質中における平面波

媒質は均質，等方かつ無損失とし，x 方向に一様に運動しているものとする．また電磁界は時間的に $e^{j\omega t}$ なる変化をするものとする．運動媒質中における電磁界を記述する基本式はMaxwell の方程式

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \bar{E} &= -\, j\omega \bar{B} \\ \nabla \times \bar{H} &= j\omega \bar{D} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

およびMinkowski によつて求められた電磁界ベクトル $\bar{E}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{H}$ を関係づける構成関係式(constitutive relations)[5]

$$\left.\begin{aligned} \bar{D} + \frac{1}{c^2}\,\bar{v} \times \bar{H} &= \varepsilon_2 (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \\ \bar{B} - \frac{1}{c^2}\,\bar{v} \times \bar{E} &= \mu_2 (\bar{H} - \bar{v} \times \bar{D}) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

によつて与えられる. 式(2)において ε_2, μ_2 はそれぞれ静止時における媒質の誘電率および透磁率であり, c は真空中の光速度, $\bar{v}$ は媒質の速度である. 式(2)から $\bar{D}$ および $\bar{B}$ を $\bar{E}$ および $\bar{H}$ によつて表わすと次のようになる.[6]

$$\left.\begin{aligned} \bar{D} &= \varepsilon_2 \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{E} + \bar{\Omega} \times \bar{H} \\ \bar{B} &= \mu_2 \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{H} - \bar{\Omega} \times \bar{E} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \frac{(n_2^2 - 1) \beta}{(1 - n_2^2 \beta^2) c}\,\hat{x} \\ \beta &= \frac{v}{c} \quad , \quad n_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_0 \mu_0}} \\ \bar{\bar{\alpha}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad a = \frac{1 - \beta^2}{1 - n_2^2 \beta^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

式(1)および(3)から運動媒質中における電磁界基本方程式は次のようになる.

$$\left.\begin{aligned} (\nabla - j\omega \bar{\Omega}) \times \bar{E} &= - j\omega \mu_2 \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{H} \\ (\nabla - j\omega \bar{\Omega}) \times \bar{H} &= j\omega \varepsilon_2 \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{E} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

式(5)を満足する平面波の解を次のように仮定する.

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \, e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} \qquad \bar{H} = \bar{H}_0 e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} \tag{6}$$

ただし $\bar{k}$ は $x-y$ 平面内にあるものとする．

式(6)を式(5)に代入すると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} \bar{k}' \times \bar{E}_0 &= \omega \mu_2 \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{H}_0 \\ \bar{k}' \times \bar{H}_0 &= -\omega \varepsilon_2 \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{E}_0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ただし

$$\bar{k}' = \bar{k} + \omega\bar{\Omega} \tag{8}$$

式(7)の2式から $\bar{H}_0$ を消去すると

$$\bar{k}' \times \left\{ \bar{\bar{\alpha}}^{-1} \cdot (\bar{k}' \times \bar{E}_0) \right\} + k_2^2 \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{E}_0 = 0 \tag{9}$$

ただし

$$\bar{\bar{\alpha}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \tag{10}$$

式(9)から k に関する特性方程式として次式が得られる．

$$\frac{(k_x + \omega\Omega)^2}{a} + k_y^2 = k_2^2 a \tag{11}$$

次に E_0 と H_0 との関係およびPoyntingベクトルについてTE波，TM波にわけて考える．

i) TE波

この場合には $\bar{E}_0$ は z 方向成分 E_{0z} のみとなる．式(7)から H_{0x} および H_{0y} は E_{0z} によつて次のように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned} H_{0x} &= \frac{k'_y}{\omega \mu_2} E_{0z} \\ H_{0y} &= -\frac{k'_x}{\omega \mu_2 a} E_{0z} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Poyntingベクトルの時間平均を $\bar{S}$ とすると,

$$\bar{S} = Re\left[\frac{1}{2}\bar{E} \times \bar{H}^*\right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|E_{0z}|^2}{\omega \mu_2} \left(\hat{x}\frac{k'_x}{a} + \hat{y}\, k'_y\right) \tag{13}$$

ただし $\bar{H}^*$ は $\bar{H}$ の複素共やくを意味する. また $\hat{x}$, $\hat{y}$ はそれぞれ x 方向および y 方向を向く単位ベクトルである.

ii) T M 波

この場合には $\bar{H}_0$ は z 方向成分 H_{0z} のみとなる. 式(7)から E_{0x} および E_{0y} は H_{0z} によつて次のように表わすことができる.

$$\left.\begin{aligned} E_{0x} &= -\frac{k'_y}{\omega \varepsilon_2} H_{0z} \\ E_{0y} &= \frac{k'_x}{\omega \varepsilon_2 a} H_{0z} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Poyntingベクトルの時間平均 $\bar{S}$ は次のようになる.

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \frac{|H_{0z}|^2}{\omega \varepsilon_2} \left(\hat{x}\frac{k'_x}{a} + \hat{y}\, k'_y\right) \tag{15}$$

以上から遅勁媒質中では平面波の位相の進む方向とエネルギーの進む方向は一般には異なることがわかる. すなわち位相は $\bar{k}$ の方向に進むのに対し,

エネルギーは $\bar{k}''$ の方向に進む．

ただし

$$\bar{k}'' = \hat{x}\frac{k'_x}{a} + \hat{y}\,k'_y \tag{16}$$

2・2 境 界 条 件

境界が運動する場合には，境界条件は一般に境界が静止している場合とは異なるが，境界の運動が本文で取り扱う問題におけるようにそれ自身に平行である場合には境界が静止している場合と同じになる．[7] すなわち，境界面の両側で電界および磁界の接線成分が連続となることが要求される．

$$\left.\begin{aligned} \bar{n}\times(\bar{E}_2-\bar{E}_1)&=0\\ \bar{n}\times(\bar{H}_2-\bar{H}_1)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ただし，$(\bar{E}_1, \bar{H}_1)$ および $(\bar{E}_2, \bar{H}_2)$ は境界面の両側における電界および磁界であり，$\bar{n}$ は法線方向の単位ベクトルである．

3．平面波の反射と屈折

図1に示すように二つの媒質が無限平面によつて接しているものとし，媒質Ⅰは観測者に対して静止しており，媒質Ⅱは境界面および入射面に平行に運動しているものとする．簡単のために，媒質は共に誘電体とし，媒質Ⅰおよび媒質Ⅱの誘電率をそれぞれ ε_1，ε_2 とする．いま媒質Ⅰから媒質Ⅱへ一様な平面波が入射するものとし，入射面を $x-y$ 平面に選ぶ．

まず入射波がTE波の場合について考え，入射波および反射波を $(\bar{E}_i, \bar{H}_i)$ $(\bar{E}_r, \bar{H}_r)$ とすると，これらは次のように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned}\bar{E}_i &= \hat{z}\, E_{i0}\, e^{-j(k_{ix}x + k_{iy}y)} \\ \bar{H}_i &= \left(\hat{x}\frac{k_{iy}}{\omega\mu_0} - \hat{y}\frac{k_{ix}}{\omega\mu_0}\right) E_{i0}\, e^{-j(k_{ix}x + k_{iy}y)}\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

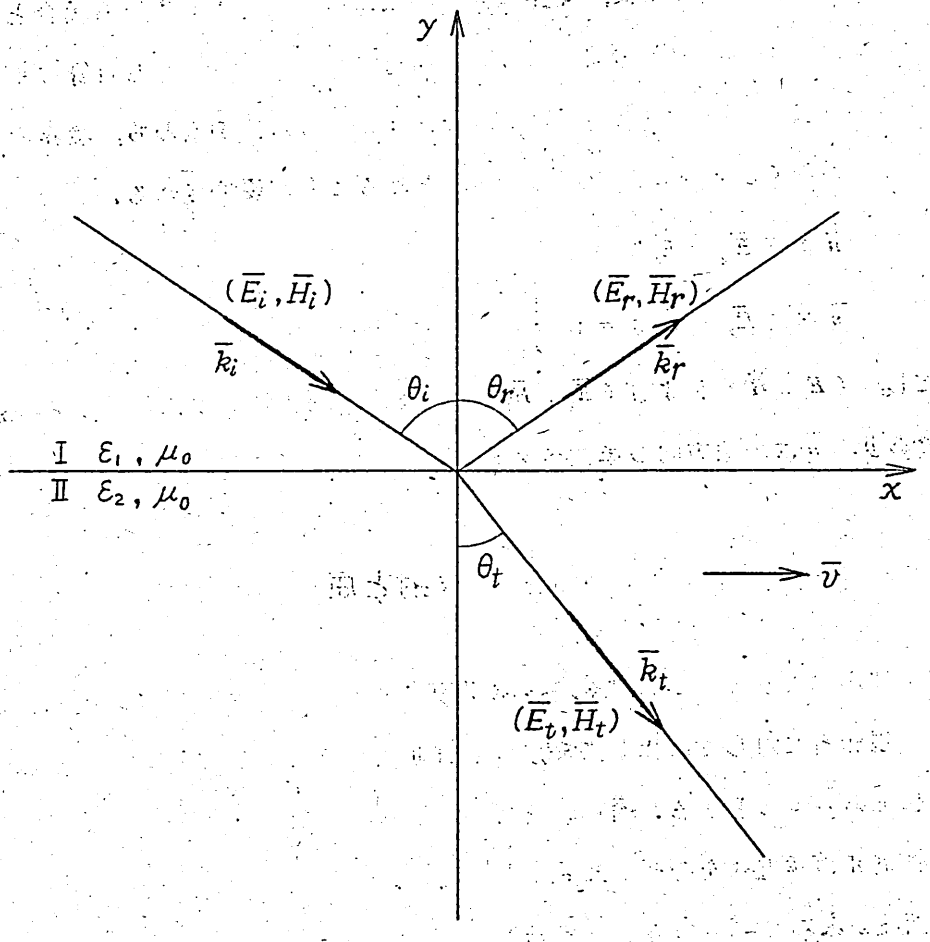


図 1　平面波の反射と屈折

$$\left.\begin{aligned}\overline{E}_r &= \hat{z}\,\overline{E}_{r0}\,e^{-j(k_{rx}x+k_{ry}y)}\\ \overline{H}_r &= \left(\hat{x}\frac{k_{ry}}{\omega\mu_0}-\hat{y}\frac{k_{rx}}{\omega\mu_0}\right)E_{r0}\,e^{-j(k_{rx}x+k_{ry}y)}\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

ただし

$$\sqrt{k_{ix}^2+k_{iy}^2}=\sqrt{k_{rx}^2+k_{ry}^2}=k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0} \quad (20)$$

また透過波は式(12)から次のように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned}\overline{E}_t &= \hat{z}\,E_{t0}\,e^{-j(k_{tx}x+k_{ty}y)}\\ \overline{H}_t &= \left(\hat{x}\frac{k'_{ty}}{\omega\mu_0}-\hat{y}\frac{k'_{tx}}{\omega\mu_0 a}\right)E_{t0}\,e^{-j(k_{tx}x+k_{ty}y)}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

ただし $\sqrt{k_{tx}^2+k_{ty}^2}=k_t$ (22)

ここで k_{tx}，k_{ty} は式(11)の関係によつて結ばれており，k'_{tx}，k'_{ty} は式(8)によつて定義される．

さて境界面 $y=0$ において式(17)で与えられる境界条件が満足されるためには，入射波，反射波および透過波の位相項が境界面において等しくなければならない．このことから次式が成立しなければならない．

$$k_{ix}=k_{rx}=k_{tx} \quad (23)$$

いま入射角，反射角および屈折角をそれぞれ θ_i，θ_r，θ_t とすると k_{ix}，k_{rx}，k_{tx} はそれぞれ次のように書くことができる．

$$\left.\begin{aligned} k_{ix} &= k_1 \sin\theta_i \\ k_{rx} &= k_1 \sin\theta_r \\ k_{tx} &= k_t \sin\theta_t \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

式 (23)，(24)から次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} \theta_i &= \theta_r \\ k_1 \sin\theta_i &= k_t \sin\theta_t \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

式 (25)は二つの媒質が相対的に静止している場合の Snell の法則を拡張したものである．上式より二つの媒質が相対的に運動している場合にも入射角と反射角が等しくなることがわかる．

式 (11)と式 (25)の第２式より運動媒質中における y 方向の伝搬定数 k_{ty} は次のようになる．

$$k_{ty} = -\gamma k_1 \sqrt{n_{12}^2 (1 - n_1 \beta \sin\theta_i)^2 - \left(\frac{\beta}{n_1} - \sin\theta_i\right)^2} \tag{26}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ n_1 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \\ n_2 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}} \\ n_{12} &= \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

また式(25)，(26)から k_t は次のようになる．

$$k_t = \sqrt{k_{tx}^2 + k_{ty}^2}$$

$$= \gamma k_1 \sqrt{n_{12}^2(1 - n_1\beta\sin\theta_i)^2 - (\frac{\beta}{n_1} - \sin\theta_i)^2 + (1-\beta^2)\sin^2\theta_i} \tag{28}$$

式(25)，(28)を用いて屈折角 θ_t を入射角 θ_i によつて表わすと次のようになる．

$$\sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{\gamma\sqrt{n_{12}^2(1 - n_1\beta\sin\theta_i)^2 - (\frac{\beta}{n_1} - \sin\theta_i)^2 + (1-\beta^2)\sin^2\theta_i}} \tag{29}$$

運動媒質中においては位相とエネルギーの伝搬方向は一般に異なる．いまエネルギーの伝搬する方向と y 軸の負方向とのなす角を θ_T とするとこれは式(16)から得られる．

$$\sin\theta_T = \frac{k'_{tx}/a}{\sqrt{(k'_{tx}/a)^2 + k_{ty}^2}} \tag{30}$$

次に反射波および透過波の振幅と入射波の振幅との関係を求める．式(17)によつて境界面において電界および磁界の接線成分が連続となることが要求されるので，式(18)，(19)および(21)から境界面において次式が成立しなければならない．

$$\left.\begin{aligned} E_{i0} + E_{r0} &= E_{t0} \\ k_{iy}E_{i0} + k_{ry}E_{r0} &= k_{ty}E_{t0} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

上式より E_{r0}，E_{t0} を E_{i0} によつて表わすと次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} E_{ro} &= \frac{-k_{iy}+k_{ty}}{k_{ry}-k_{ty}} E_{io} \\ E_{to} &= \frac{-k_{ry}-k_{iy}}{k_{ry}-k_{ty}} E_{io} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$k_{iy} = -k_1 \cos\theta_i$, $k_{ry} = k_1 \cos\theta_i$ なる関係および式(26)を用いることにより式(32)は次のようになる.

$$\left.\begin{aligned} E_{ro} &= \frac{\cos\theta_i - \gamma\sqrt{n_{12}^2(1-n_1\beta\sin\theta_i)^2-(\frac{\beta}{n_1}-\sin\theta_i)^2}}{\cos\theta_i + \gamma\sqrt{n_{12}^2(1-n_1\beta\sin\theta_i)^2-(\frac{\beta}{n_1}-\sin\theta_i)^2}} E_{io} \\ E_{to} &= \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \gamma\sqrt{n_{12}^2(1-n_1\beta\sin\theta_i)^2-(\frac{\beta}{n_1}-\sin\theta_i)^2}} E_{io} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

入射波がTM波の場合，すなわち磁界の入射波が z 方向成分のみをもつ場合にも以上と同様にして磁界の反射波および透過波の振幅 H_{ro}, H_{to} と入射波の振幅 H_{io} との関係を求めることができ次式を得る.

$$\left.\begin{aligned} H_{ro} &= \frac{n_{12}^2\cos\theta_i - \gamma\sqrt{n_{12}^2(1-n_1\beta\sin\theta_i)^2-(\frac{\beta}{n_1}-\sin\theta_i)^2}}{n_{12}^2\cos\theta_i + \gamma\sqrt{n_{12}^2(1-n_1\beta\sin\theta_i)^2-(\frac{\beta}{n_1}-\sin\theta_i)^2}} H_{io} \\ H_{to} &= \frac{2\,n_{12}^2\cos\theta_i}{n_{12}^2\cos\theta_i + \gamma\sqrt{n_{12}^2(1-n_1\beta\sin\theta_i)^2-(\frac{\beta}{n_1}-\sin\theta_i)^2}} H_{io} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

式(33)および(34)は二つの媒質が共に静止している場合のFresnelの公式を拡張したものである．C．T．TaiおよびC．Yehは媒質Ⅰが真空で，かつ入射波がTE波の場合についてのみ考察しているが，彼等が得た結果は式(33)の特別な場合に相当する．

4．全反射に関する考察

二つの媒質が相対的に運動している場合には全反射に関して特に興味ある結果が得られるので，ここでは全反射について詳しく調べることにする．

式(26)で与えられる運動媒質中におけるy方向の伝搬定数k_{ty}は次のように書き換えられる．

$$k_{ty}=-\gamma k_1\sqrt{(n_{12}^2\beta^2-1)(\sin\theta_i-p)(\sin\theta_i-q)} \tag{35}$$

ただし

$$P=\frac{n_2+\beta}{n_1(n_2\beta+1)},\qquad q=\frac{n_2-\beta}{n_1(n_2\beta-1)} \tag{36}$$

全反射はk_{ty}が純虚数となる入射角に対して起る．すなわち，次式を満足するθ_iに対して全反射が起る．

$$(n_2^2\beta^2-1)(\sin\theta_i-P)(\sin\theta_i-q)\leqq 0 \tag{37}$$

式(37)から，n_1，n_2，βの値によつて次のような種々の場合が起ることがわかる．

Ⅰ．$-n_2\leqq n_2\beta\leqq -1$の場合

この場合には全反射は起らない．

II. $-1 < n_2\beta \leqq 1$ の場合

i) $P < 1$ ならば，$P \leqq \sin\theta_i \leqq 1$ に対応する入射角 θ_i に対して全反射が起る．

ii) $P \leqq 1$ ならば全反射は起らない．

III. $1 < n_2\beta \leqq n_2$ の場合

i) $q < 1$ ならば $P \leqq \sin\theta_i \leqq q$ に対応する入射角 θ_i に対して全反射が起る．

ii) $P < 1$，$q \leqq 1$ ならば $P \leqq \sin\theta_i \leqq 1$ に対応する入射角 θ_i に対して全反射が起る．

iii) $P \geqq 1$ ならば全反射は起らない．

特別の場合として媒質Iが真空の場合には $P \geqq 1$ となり全反射は起らない．

5．むすび

本文ではまずMinkowski の理論から出発して運動媒質中における平面波について考察した．その結果，運動媒質中では伝搬定数は媒質の速度に依存すること，位相の伝搬方向とエネルギーの伝搬方向とは一般には異なること等が明らかになつた．つぎに静止媒質と運動媒質が無限平面によつて接しているものとし，静止媒質から運動媒質に一様な平面波が入射する場合の境界面における反射と屈折について考察し，次のような結果を得た．

すなわち，二つの媒質が相対的に運動している場合にも入射角と反射角は等しくなること，入射角と屈折角との関係を与えるSnell の法則および反射波および透過波の振幅と入射波の振幅を関係づけるFresnel の公式は媒質の相対的な運動によつて変化すること等の結論が得られた．また全反射に

関しては特に興味ある結果が得られた．以上本文で得られた結果の式においてβ^2および$n_2^2\beta^2$の項を無視すると，すべて著者等が先に得た近似理論の結果に一致する．

謝　　辞

終りに，日頃ご指導，ごべんたついただいている大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに常々ご討論いただく板倉研究室の方々に深謝する．

文　　献

(1) C.T.Tai,"Two scattering problems involving moving media" Techn.Report 1691－7, Antenna Laboratory,Ohio State Vniversity (May,1964)

(2) C.Yeh,"Reflection and transmission of electromognetic waves by a moving dielectric medium" J.appl.Phys.,36,11 (November,1965)

(3) 塩沢俊之，間　剛，熊谷信昭，"静止媒質と運動媒質の境界面における平面波の反射および屈折" 信学会アンテナ，伝播研究会資料（1966－08）

(4) 細野敏夫，上記論文に対する討論，信学会アンテナ・伝播研究会資料（1966－10）

(5) A.Sommerfeld,"Electrodynamics", p.281, Academic Press (1952)

(6) C.T.Tai "The dyadic Green's function for a moving isotropic medium", IEEE Trans.on Antennas and Propagation, AP-13, 2 (March,1965)

(7) A.Sommerfeld, op.cit., p.288

輻射科学研究会資料

損失のある運動媒質中における放射電磁界の性質

藤岡　弘
熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1966年12月9日

1. まえがき

運動系の電磁界解析は観測者，媒質および波源の相対的な関係によって一般に4つの場合に分けることができる．まず媒質と波源とが相対的に静止ししている場合にはつぎの2つの場合がある．

Ⅰ）観測者，媒質，波源の三者が共に静止している場合

Ⅱ）媒質および波源が相対的に静止しており，この両者に対して観測者が運動している場合

つぎに媒質と波源とが相対的に運動している場合には，電磁現象を波源の静止座標系において観測するか，または媒質の静止座標系において観測するかによってつぎの2つの場合に分けることができる．

Ⅲ）波源に対して相対的に運動している観測者があり，この両者に対して媒質が運動している場合

Ⅳ）媒質に対して相対的に静止している観測者があり，この両者に対して波源が運動している場合

Ⅰ）とⅡ）の解およびⅢ）とⅣ）の解はそれぞれ相補的（complementary）であり，互いにLorentz 変換によつて結ばれている．例えばⅠ）の場合，すなわち媒質中に静止した波源があり，観測者がこの波源に対して一様に運動している場合の電磁界は，すでに知られているⅠ）の解にLorentz 変換をほどこすことにより，ただちに求めることができる.[1]

筆者らは先に波源と媒質とが相対的に運動しているときの電磁界解析の一例として，損失のある非分散性の線形，等方なる媒質が波源に対して一様に運動している場合に波源の静止座標系において観測される電磁界をMaxwell—Minkowski 方程式を用いて解析した.[2]

ここでは先に得た解析に基づき損失のある運動媒質中における放射電磁界

（波源より十分遠方の点における電磁界）を求め，その一般的性質について論じ，静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中[3][4]では見られない種々の興味ある現象があらわれることを示す．つぎに，一例として損失のある運動媒質中におかれた微小電気双極子による放射電磁界を求める．

2. 放射電磁界とその性質

無限に拡がった損失のある線形，等方かつ一様なる媒質（誘電率ε，透磁率μ，導電率σ）を考える．この媒質が波源に対して一様に運動しているとき，波源の静止座標系における電磁界はつぎのMaxwell方程式によって決定される．

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\mathbb{E} &= -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} - \mathbb{J}_m \\ \nabla\times\mathbb{H} &= \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} + \mathbb{J}_f + \mathbb{J} \\ \nabla\cdot\mathbb{B} &= \rho_m \\ \nabla\cdot\mathbb{D} &= \rho_f + \rho \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ただし，

$\mathbb{E}$，$\mathbb{D}$＝波源の静止座標系における電界ベクトル

$\mathbb{H}$，$\mathbb{B}$＝波源の静止座標系における磁界ベクトル

$\mathbb{J}_f$，ρ_f＝自由電流および自由電荷

$\mathbb{J}$，ρ＝印加電流密度および印加電荷密度

$\mathbb{J}_m$，ρ_m＝印加磁流密度および印加磁荷密度

ここで媒質の運動速度vが光速に比べて十分小さいものとすれば構成関係式はつぎのように与えられる．

$$
\left.
\begin{aligned}
&D=\varepsilon E+A\times H\\
&B=\mu H-A\times E\\
&J_f=\sigma(E+\mu v\times H)\\
&\rho_f=\varepsilon_0\mu_0 v\cdot J_f
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2)
$$

ただし，

$$A=(c^{-2}-c_0^{-2})v,\quad c^{-2}=\varepsilon\mu,\quad c_0^{-2}=\varepsilon_0\mu_0$$

また，ε_0およびμ_0はそれぞれ真空の誘電率および透磁率を表わす．

電磁界の時間変化を$e^{+j\omega t}$と仮定し，式(1)および(2)から電束密度と磁束密度D，Bおよび自由電流と自由電荷J_f，ρ_fを消去してつぎのMaxwell-Minkowski 方程式を得る．

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\nabla-j\omega A)\times E=-j\omega\mu H-J_m\\
&(\nabla-j\omega A-\mu\sigma v)\times H=j\omega\bar{\varepsilon}E+J\\
&(\nabla-j\omega A)\cdot H=\frac{q_m}{\mu}\\
&(\nabla-j\omega A-\mu\sigma v)\cdot E=\frac{q}{\varepsilon}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3)
$$

ただし，

$$\bar{\varepsilon}=\varepsilon\left(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

また

$$
\left.
\begin{aligned}
&q=\rho+A\cdot J\\
&q_m=\rho_m+A\cdot J_m
\end{aligned}
\right\}
\qquad (4)
$$

は等価電荷および等価磁荷と呼ぶことができ，電流ベクトルおよび磁流ベクトルが媒質の運動速度ベクトルと直交している場合にはそれぞれ電荷密度および磁荷密度に一致する．

Maxwell-Minkowski 方程式(3)は，電磁界$\mathbb{E}$，$\mathbb{H}$を$\mathbb{J}$およびρがその発生源である電気形電磁界$\mathbb{E}^{(1)}$，$\mathbb{H}^{(1)}$と$\mathbb{J}_m$およびρ_mが発生源である磁気形電磁界$\mathbb{E}^{(2)}$，$\mathbb{H}^{(2)}$とに分け，さらにそれぞれ適当に定義された電気形および磁気形のベクトル・ポテンシャルを導入することによって解くことができ[2]，電流源および磁流源が空間の一部分に限定されて分布しているときには，波源より十分遠方の点における電磁界，すなわち放射電磁界はつぎのように表わされる[2]．

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}^{(1)}&=\frac{1}{j\omega\bar{\varepsilon}}\iiint_V\left[\bar{k}^2\mathbb{J}+(\mathbb{N}^+\cdot\mathbb{J})\mathbb{N}^-\right]\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}')\,dv'\\ \mathbb{H}^{(1)}&=-\iiint_V(\mathbb{N}^-\times\mathbb{J})\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}')\,dv'\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}^{(2)}&=\iiint_V(\mathbb{N}^+\times\mathbb{J}_m)\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}')\,dv'\\ \mathbb{H}^{(2)}&=\frac{1}{j\omega\mu}\iiint_V\left[\bar{k}^2\mathbb{J}_m+(\mathbb{N}^-\cdot\mathbb{J}_m)\mathbb{N}^+\right]\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}')\,dv'\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{N}^+&=j\bar{K}\mathbb{R}_0\pm\frac{\mu\sigma w}{2}\\ \bar{K}^2&=\bar{k}^2-\left|\frac{\mu\sigma w}{2}\right|^2\\ \bar{k}^2&=\omega^2\bar{\varepsilon}\,\mu=\omega^2\varepsilon\,\mu\left(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}')=\frac{e^{-j\bar{K}R}}{4\pi R}\exp\left[j\bar{K}\mathbb{R}'\cdot\mathbb{R}_0+\left(j\omega A+\frac{\mu\sigma w}{2}\right)\cdot(\mathbb{R}-\mathbb{R}')\right]\quad(8)$$

ここで$\mathbb{R}$および$\mathbb{R}'$はそれぞれ観測点および波源の存在する場所を表わし，また$\mathbb{R}_0$（$=\mathbb{R}/R$）は$\mathbb{R}$方向の単位ベクトルを表わす．また，電流源$\mathbb{J}$と磁束源$\mathbb{J}_m$とが同時に存在する場合の電磁界$\mathbb{E}$，$\mathbb{H}$は上式(5)，(6)より

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}&=\frac{1}{j\omega\bar{\varepsilon}}\iiint_V\left[\bar{k}^2\mathbb{J}+(\mathbb{N}^+\cdot\mathbb{J})\mathbb{N}^-+j\omega\bar{\varepsilon}(\mathbb{N}^+\times\mathbb{J}_m)\right]\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}')\mathrm{d}v'\\ \mathbb{H}&=\frac{1}{j\omega\mu}\iiint_V\left[\bar{k}^2\mathbb{J}_m+(\mathbb{N}^-\cdot\mathbb{J}_m)\mathbb{N}^+-j\omega\mu(\mathbb{N}^-\times\mathbb{J})\right]\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R}')\mathrm{d}v'\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

となる．

上式から損失のある運動媒質中における放射電磁界を計算することができるわけであるが，式(7)に与えられるベクトル$\mathbb{N}^{\pm}$はその実数部と虚数部の空間的方向が異なる複素ベクトルであり，したがって電磁界$\mathbb{E}$，$\mathbb{H}$も一般には実数部と虚数部の方向が異なる複素空間ベクトルとなる．ここで実際に観測される物理的に意味のある量，すなわち実物理場を複素空間ベクトル$\mathbb{E}$，$\mathbb{H}$と区別して$\overset{\circ}{\mathbb{E}}$，$\overset{\circ}{\mathbb{H}}$のように表わせば，これは複素空間ベクトルに時間関数$e^{+j\omega t}$を掛けたものの実数部で与えられ，

$$\left.\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbb{E}}(\mathbb{R},t)&=Re\left[\mathbb{E}(\mathbb{R})\,e^{+j\omega t}\right]\\ \overset{\circ}{\mathbb{H}}(\mathbb{R},t)&=Re\left[\mathbb{H}(\mathbb{R})\,e^{+j\omega t}\right]\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

とかける．ここでReは複素ベクトル量の実数部をとる操作を表わす．上式はまたつぎのようにかくこともできる．

$$\left.\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbb{E}}&=\frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\,e^{+j\omega t}+\mathbb{E}^*\,e^{-j\omega t}\right)\\ \overset{\circ}{\mathbb{H}}&=\frac{1}{2}\left(\mathbb{H}\,e^{+j\omega t}+\mathbb{H}^*\,e^{-j\omega t}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

ただし$\mathbb{E}^*$, H^*は複素共役ベクトルを表わす．

いま複素量の実数部および虚数部をそれぞれ添字rおよびiで表わせば電界$\mathbb{E}$および磁界Hはつぎのようにかける．

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}&=\mathbb{E}_r+j\mathbb{E}_i\\ H&=H_r+jH_i\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

したがって実物理場$\overset{\circ}{\mathbb{E}}$, $\overset{\circ}{H}$は式(10)を用いて

$$\left.\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbb{E}}&=\mathbb{E}_r\cos\omega t-\mathbb{E}_i\sin\omega t\\ \overset{\circ}{H}&=H_r\cos\omega t-H_i\sin\omega t\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

となる．上式から実物理場$\overset{\circ}{\mathbb{E}}$, $\overset{\circ}{H}$はそれぞれ$\mathbb{E}_r$と$\mathbb{E}_i$およびH_rとH_iとの決定する面内にあり，その空間的方向は一般には時間と共に変化し，また大きさはもはや正弦的には変化しないことがわかる．さらに式(13)から電界$\overset{\circ}{\mathbb{E}}$は楕円偏波であり，楕円の2つの軸の半分の長さ$a$, bは次式で与えられることがわかる．

$$\left.\begin{matrix}a^2\\ b^2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(|\mathbb{E}_r|^2+|\mathbb{E}_i|^2\right)\pm\sqrt{\left(|\mathbb{E}_r|^2-|\mathbb{E}_i|^2\right)^2/4+\left(\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_i\right)}\qquad(14)$$

または

$$\left.\begin{matrix}a^2\\ b^2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[\mathbb{E}\cdot\mathbb{E}^*\pm\sqrt{\left(\mathbb{E}\cdot\mathbb{E}\right)\left(\mathbb{E}^*\cdot\mathbb{E}^*\right)}\right]\qquad(15)$$

電磁界のこのような性質は損失のある媒質が運動することによる特徴的な性質である．しかし式(7)からわかるように特にR_0の方向と媒質の運動方向とが一致するような空間の点においては，複素ベクトル$N^{\pm}$の実数部と虚数部の方向は一致し，したがってこの点においては複素空間ベクトル$\mathbb{E}$, Hは

$$\mathbb{E}=\left(\mathbb{E}_r+j\mathbb{E}_i\right)e$$

$$\mathbb{H}=(\mathbb{H}_r+j\mathbb{H}_i)\,\mathbb{h} \tag{16}$$

とかくことができる。ここで$\mathbb{e}$および$\mathbb{h}$はそれぞれ電界および磁界の空間的方向を表わす単位実ベクトル量であり，$\mathbb{E}_r$，$\mathbb{E}_i$等は実スカラ量である。この場合には実物理場$\overset{\circ}{\mathbb{E}}$，$\overset{\circ}{\mathbb{H}}$は

$$\left.\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbb{E}}&=(\mathbb{E}_r\cos\omega t-\mathbb{E}_i\sin\omega t)\,\mathbb{e}\\ \overset{\circ}{\mathbb{H}}&=(\mathbb{H}_r\cos\omega t-\mathbb{H}_i\sin\omega t)\,\mathbb{h}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

となり，静止媒質中における場合と同様に空間的方向は時間的に変化せず一定であり，また大きさは正弦的に変化する。これは直線偏波である。

さて，式(7)より

$$\mathbb{N}^{\pm}\cdot\mathbb{N}^{\mp}=-\bar{k}^2 \tag{18}$$

となり，したがってつぎのベクトル関係式を導くことができる。

$$\mathbb{N}^{\pm}\times(\mathbb{N}^{\mp}\times\mathbb{J})=\bar{k}^2\mathbb{J}+(\mathbb{N}^{\pm}\cdot\mathbb{J})\,\mathbb{N}^{\mp} \tag{19}$$

上式を用いて式(5)，(6)および(9)をかきかえるとそれぞれつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}^{(1)}&=\frac{1}{j\omega\bar{\bar{\varepsilon}}}\iiint_V\{\mathbb{N}^+\times(\mathbb{N}^-\times\mathbb{J})\}\,\Gamma(R,R')\,dv'\\ \mathbb{H}^{(1)}&=-\iiint_V(\mathbb{N}^-\times\mathbb{J})\,\Gamma(R,R')\,dv'\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}^{(2)}&=\iiint_V(\mathbb{N}^+\times\mathbb{J}_m)\,\Gamma(R,R')\,dv'\\ \mathbb{H}^{(2)}&=\frac{1}{j\omega\mu}\iiint_V\{\mathbb{N}^-\times(\mathbb{N}^+\times\mathbb{J}_m)\}\,\Gamma(R,R')\,dv'\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{j\omega\bar{\varepsilon}} \iiint_V \left[\boldsymbol{N}^+ \times (\boldsymbol{N}^- \times \boldsymbol{J}) + j\omega\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{N}^+ \times \boldsymbol{J}_m)\right] \Gamma(R, R')\,\mathrm{d}v' \\ \boldsymbol{H} &= \frac{1}{j\omega\mu} \iiint_V \left[\boldsymbol{N}^- \times (\boldsymbol{N}^+ \times \boldsymbol{J}_m) - j\omega\mu(\boldsymbol{N}^- \times \boldsymbol{J})\right] \Gamma(R, R')\,\mathrm{d}v' \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

複素ベクトル$\boldsymbol{N}^+$が積分変数Rに無関係であることに注意して上式よりつぎの関係式を得る。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{N}^+ &= 0 \\ \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{N}^- &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

したがって電界$\boldsymbol{E}$と複素ベクトル$\boldsymbol{N}^+$および磁界$\boldsymbol{H}$と複素ベクトル$\boldsymbol{N}^-$の複素スカラ積はそれぞれ常に零となる。

つぎに式(20),(21)から$\boldsymbol{E}^{(1)}$と$\boldsymbol{H}^{(1)}$および$\boldsymbol{E}^{(2)}$と$\boldsymbol{H}^{(2)}$との間の複素ベクトル関係式として次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{(1)} &= -\frac{1}{j\omega\bar{\varepsilon}} \boldsymbol{N}^+ \times \boldsymbol{H}^{(1)} \\ \boldsymbol{H}^{(2)} &= \frac{1}{j\omega\mu} \boldsymbol{N}^- \times \boldsymbol{E}^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

上式(24)の第1式および第2式の両辺に，左から複素ベクトル$\boldsymbol{N}^-$および$\boldsymbol{N}^+$をそれぞれベクトル的に掛け，式(18)および(23)の関係を用いて次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{(1)} &= \frac{1}{j\omega\mu} \boldsymbol{N}^- \times \boldsymbol{E}^{(1)} \\ \boldsymbol{E}^{(2)} &= -\frac{1}{j\omega\bar{\varepsilon}} \boldsymbol{N}^+ \times \boldsymbol{H}^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

式(24),(25)をまとめてつぎの関係式を得る.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{j\omega\bar{\varepsilon}}\, N^{+}\times \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H} &= \frac{1}{j\omega\mu}\, N^{-}\times \boldsymbol{E} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

上式よりから

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0 \qquad (27)$$

または成分で表わせば

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_r\cdot\boldsymbol{H}_r-\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{H}_i&=0 \\ \boldsymbol{E}_r\cdot\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{H}_r&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

となる.

上式の結果より複素空間ベクトル$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$の複素スカラ積は常に零となることがわかるが, これは実物理場$\mathring{\boldsymbol{E}}$, $\mathring{\boldsymbol{H}}$が直交することを一般には意味しないことに注意しなければならない. $\mathring{\boldsymbol{E}}$と$\mathring{\boldsymbol{H}}$のスカラ積は式(13)から

$$\begin{aligned} \mathring{\boldsymbol{E}}\cdot\mathring{\boldsymbol{H}} &= (\boldsymbol{E}_r\cdot\boldsymbol{H}_r)\cos^2\omega t+(\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{H}_i)\sin^2\omega t \\ &\quad -(\boldsymbol{E}_r\cdot\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{H}_r)\sin\omega t\cos\omega t \end{aligned} \qquad (29)$$

とかけるが式(28)を用いるとつぎのように表わされる.

$$\mathring{\boldsymbol{E}}\cdot\mathring{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{E}_r\cdot\boldsymbol{H}_r=\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{H}_i \qquad (30)$$

上式から実物理場$\mathring{\boldsymbol{E}}$と$\mathring{\boldsymbol{H}}$のスカラ積はもはや時間に無関係であり, 複素空間ベクトル$\boldsymbol{E}$および$\boldsymbol{H}$の実数部どうしの積に等しく, これはまた虚数部どうしの積にも等しいことがわかる. 式(22)を用いて実際に計算を実行することによって一般には

$$\mathring{\boldsymbol{E}}\cdot\mathring{\boldsymbol{H}}\neq 0 \qquad (31)$$

となること，すなわち放射電磁界$\mathring{\boldsymbol{E}}$，$\mathring{\boldsymbol{H}}$は静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中における場合とは異なり一般には直交しないことを証明することができる（次節参照）．

つぎにポインティング・ベクトルの瞬時値$\mathring{S}$は$\mathring{\boldsymbol{E}}$と$\mathring{\boldsymbol{H}}$のベクトル積で与えられ，式(11)を用いて

$$\mathring{S}=\mathring{\boldsymbol{E}}\times\mathring{\boldsymbol{H}}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{E}e^{+j\omega t}+\boldsymbol{E}^{*}e^{-j\omega t})\times(\boldsymbol{H}e^{+j\omega t}+\boldsymbol{H}^{*}e^{-j\omega t})$$

$$=\frac{1}{2}Re(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*})+\frac{1}{2}Re(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}e^{+j2\omega t}) \qquad (32)$$

とかける．したがってポインティング・ベクトルの1周期間の平均値，すなわち電磁エネルギーの単位面積についての時間的平均の流れを$<\mathring{S}>$で表わせば，

$$<\mathring{S}>=\frac{1}{2}Re(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*}) \qquad (33)$$

となり，放射電磁界の$<\mathring{S}>$は式(26)の関係を用いてつぎのように表わされる．

$$<\mathring{S}>=\frac{1}{2}Re\left[\frac{1}{j\omega\bar{\varepsilon}}\{(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^{*})\boldsymbol{N}^{+}-(\boldsymbol{H}^{*}\cdot\boldsymbol{N}^{+})\boldsymbol{H}\}\right]-$$

$$=-\frac{1}{2}Re\left[\frac{1}{j\omega\mu}\{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^{*})(\boldsymbol{N}^{-})^{*}-\{\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{N}^{-})^{*}\}\boldsymbol{E}^{*}\}\right] \qquad (34)$$

上式に式(22)に与えられている放射電磁界$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$を代入して，$<\mathring{S}>$は一般には半径方向成分だけではなく周方向成分をももつことを証明することができる（次節参照）．

放射電磁界$\mathring{\boldsymbol{E}}$，$\mathring{\boldsymbol{H}}$が直交しないことおよびポインティング・ベクトル$<\mathring{S}>$

が周方向成分を持つことなどの特異な性質は，先に述べたように複素ベクトル$N^{\pm}$，したがって複素空間ベクトルE，Hの実数部と虚数部の空間的方向が異なることに起因するものであり，これは損失のある媒質が運動することによって起り，静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中では起り得ない性質のものである．

なお式（22）の結果は，筆者らが先に運動媒質を含む導波管内の電磁界を求める際に導出した1次元の非斉次伝送方程式の解[5]の3次元的拡張であると解釈することができる．

3. 電気形放射電磁界

aを変数Rに無関係な単位実ベクトルとして

$$J(R)=J(R)a \tag{35}$$

で表わされる電流源からの放射電磁界について考察する。このとき放射電磁界E，Hは式（20）からつぎのようにかける．

$$\left.\begin{aligned} E&=\frac{1}{j\omega\bar{\varepsilon}}N^{+}\times(N^{-}\times a)D(R)\\ H&=-(N^{-}\times a)D(R)\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

ただし

$$\iiint_{V} J(R')\Gamma(R,R')\,dv'=D(R)=D_r+D_i \tag{37}$$

なお電気形電磁界であることを示す上部の添字[1]は繁雑さを避けるため省略してある．

式（36）から電磁界E，Hの実数部および虚数部はそれぞれつぎのように

求まる．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_r &= (\alpha' D_r - \beta' D_i)\,[(N_r^+ \cdot a) N_r^- - (N_i \cdot a) N_i \\
&\quad + (N_i \cdot N_i - N_r^+ \cdot N_r^-)\, a] \\
&\quad - (\alpha' D_i + \beta' D_r)\,[(N_r^+ \cdot a) N_i + (N_i \cdot a) N_r^- \\
&\quad - (N_r^+ \cdot N_i^- + N_r^- \cdot N_i)\, a] \\
\mathbb{E}_i &= (\alpha' D_r - \beta' D_i)\,[(N_r^+ \cdot a) N_i + (N_i \cdot a) N_r^- \\
&\quad - (N_r^+ \cdot N_i + N_r^- \cdot N_i)\, a] \\
&\quad + (\alpha' D_i + \beta' D_r)\,[(N_r^+ \cdot a) N_r^- - (N_i \cdot a) N_i \\
&\quad + (N_i \cdot N_i - N_r^+ \cdot N_r^-)\, a]
\end{aligned}
\qquad (38)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{H}_r &= -D_r (N_r^- \times a) + D_i (N_i \times a) \\
\mathbb{H}_i &= -D_r (N_i \times a) - D_i (N_r^- \times a)
\end{aligned}
\qquad (39)
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
& N^{\pm} = N_r^{\pm} + jN_r \\
& N_r^{\pm} = \alpha R_0 \pm \frac{\mu\sigma v}{2} \quad , \quad N_i = \beta R_0 \\
& j\vec{K} = \alpha + j\beta \\
& \alpha = \omega \left[\frac{\varepsilon\mu}{2} \left[\sqrt{\left\{ 1 - \left(\frac{v}{2c}\right)^2 \tan^2\delta \right\}^2 + \tan^2\delta} - \left\{ 1 - \left(\frac{v}{2c}\right)^2 \tan^2\delta \right\} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \beta = \omega \left[\frac{\varepsilon\mu}{2} \left[\sqrt{\left\{ 1 - \left(\frac{v}{2c}\right)^2 \tan^2\delta \right\}^2 + \tan^2\delta} + \left\{ 1 - \left(\frac{v}{2c}\right)^2 \tan^2\delta \right\} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}
\end{aligned}
\qquad (40)
$$

また，

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= \frac{1}{\omega\varepsilon}\ \frac{\tan\delta}{1+\tan^2\delta}\\ \beta' &= -\frac{1}{\omega\varepsilon}\ \frac{1}{1+\tan^2\delta}\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

上式（38），（39）の結果を式（30）に代入して次式を得る．

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{E}\cdot\overset{\circ}{H} &= (\alpha' N_i + \beta' N_r^+)\cdot a\,(N_r^-\times a)\cdot N_i\ |D(R)|^2\\ &= \left\{(\alpha'\beta+\beta'\alpha)R_0+\frac{1}{2}\beta'\mu\sigma v\right\}\cdot a\left(\frac{1}{2}\beta\mu\sigma v\times R_0\right)\cdot a\,|D(R)|^2\end{aligned} \qquad (42)$$

上式から実物理場$\overset{\circ}{E}$と$\overset{\circ}{H}$とのスカラ積は一般には零でなく，したがって電界$\overset{\circ}{E}$と磁界$\overset{\circ}{H}$とは一般には互いに直交していないことがわかる．しかし特別な場合として電流ベクトルの方向が媒質の方向に平行な場合，すなわち$J/\!/v$のときには$\overset{\circ}{E}\cdot\overset{\circ}{H}=0$となり，したがってこの場合には電界$\overset{\circ}{E}$と磁界$\overset{\circ}{H}$とは互いに直交する．

つぎにポインテイング・ベクトルに関しても同様に式（38），（39）を先に得た放射電磁界の$\langle\overset{\circ}{S}\rangle$の式（34）に代入して次式を得る．

$$\begin{aligned}\langle\overset{\circ}{S}\rangle &= \frac{1}{2}(\alpha' N_r^+ - \beta' N_i)\,|H|^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\left\{(\alpha' D_r+\beta' D_i)H_r+(\alpha' D_i-\beta' D_r)H_i\right\}\\ &\quad(N_r^-\times a)\cdot N_r^+\\ &= \frac{1}{2}\left\{(\alpha\alpha'-\beta\beta')R_0+\frac{1}{2}\alpha'\mu\sigma v\right\}\ |H|^2\\ &\quad-\left\{\left\{(\alpha\alpha'-\beta\beta')R_0-\frac{1}{2}\alpha'\mu\sigma v\right\}\times a\right\}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2}\alpha\mu\sigma v\times R_0\right)\cdot a\,|\,D(R)\,|^2 \tag{43}$$

上式の結果からわかるようにポインテイング・ベクトル$\langle\overset{\circ}{S}\rangle$は半径方向成分だけではなく周方向成分をももち，またその方向はもはや電流ベクトルの方向に無関係ではなくなる．なお$J/\!/v$なる特別な場合には式(43)は

$$\langle\overset{\circ}{S}\rangle=\frac{1}{2}(\alpha' N_r^{+}-\beta' N_i)\,|\,H\,|^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha\alpha'-\beta\beta'\right)R_0+\frac{1}{2}\alpha'\mu\sigma v\right]|\,H\,|^2 \tag{44}$$

となる．上式からこの場合には$\langle\overset{\circ}{S}\rangle$の方向は静止媒質中における場合と同様に電流ベクトルの方向に無関係となり，またα'が式(41)に示されるように常に正であることに注意すれば$\langle\overset{\circ}{S}\rangle$は媒質の運動の方向に曲げられることがわかる．

4. 微小電気双極子による放射電磁界

ここでは損失のある運動媒質中におかれた微小電気双極子による放射電磁界を，媒質の運動の方向が双極子モーメントpの方向に I) 垂直な場合，II) 平行な場合についてそれぞれ考察する．

双極子は座標原点に位置し，双極子モーメントの方向はz軸に平行であるとすれば，電流密度Jはつぎのようにかける．

$$J(R)=j\omega p\delta(R)i_z \tag{45}$$

ここで，$\delta(R)$はDiracのデルタ関数であり，またi_zはz方向の単位ベ

クトルを表わす．

Case I.

まず媒質の運動方向が電流ベクトルに垂直な場合，すなわち，$J \perp v$，$v = v i_x$（i_x は x 方向の単位ベクトル）なる場合について考察する．放射電磁界 E，H は式（20）もしくは（38），（39）を用いて求められつぎのようになる．

電界

$$\left.\begin{aligned} E_{Rr} &= \omega p \left[(\alpha' \Gamma_r - \beta' \Gamma_i) \frac{\mu\sigma v}{2} \beta \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \right. \\ &\quad + (\alpha' \Gamma_i + \beta' \Gamma_r) \left\{ \frac{\mu\sigma v}{2} \alpha \sin\theta \cos\theta \cos\varphi - \left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2 \cos\theta \right\} \\ E_{Ri} &= -\omega p \left[(\alpha' \Gamma_r - \beta' \Gamma_i) \left\{ \frac{\mu\sigma v}{2} \alpha \sin\theta \cos\theta \cos\varphi - \left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2 \cos\theta \right\} \right. \\ &\quad \left. - (\alpha' \Gamma_i + \beta' \Gamma_r) \frac{\mu\sigma v}{2} \beta \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \right] \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{\theta r} &= -\omega p \left[(\alpha' \Gamma_r - \beta' \Gamma_i) \left(2\alpha\beta \sin\theta - \frac{\mu\sigma v}{2} \beta \cos^2\theta \cos\varphi \right) \right. \\ &\quad + (\alpha' \Gamma_i + \beta' \Gamma_r) \left\{ (\alpha^2 - \beta^2) \sin\theta - \frac{\mu\sigma v}{2} \alpha \cos^2\theta \cos\varphi \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2 \sin\theta \right\} \right] \\ E_{\theta i} &= \omega p \left[(\alpha' \Gamma_r - \beta' \Gamma_i) \left\{ (\alpha^2 - \beta^2) \sin\theta - \frac{\mu\sigma v}{2} \alpha \cos^2\theta \cos\varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2 \sin\theta \right\} - (\alpha' \Gamma_i + \beta' \Gamma_r) \left(2\alpha\beta \sin\theta - \frac{\mu\sigma v}{2} \beta \cos^2 \cos\varphi \right) \right] \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$E_{\varphi r}=-\omega p\left\{(\alpha' \Gamma_r-\beta' \Gamma_i)\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\cos\theta\sin\varphi\right.$$
$$\left.+(\alpha' \Gamma_i+\beta' \Gamma_r)\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\cos\theta\sin\varphi\right\}$$
$$E_{\varphi i}=\omega p\left\{(\alpha' \Gamma_r-\beta' \Gamma_i)\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\cos\theta\sin\varphi\right.$$
$$\left.-(\alpha' \Gamma_i+\beta' \Gamma_r)\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\cos\theta\sin\varphi\right\} \qquad (48)$$

磁界

$$H_{Rr}=\omega p \Gamma_i \frac{\mu\sigma v}{2}\sin\theta\sin\varphi$$
$$H_{Ri}=-\omega p \Gamma_r \frac{\mu\sigma v}{2}\sin\theta\sin\varphi \qquad (49)$$

$$H_{\theta r}=\omega p \Gamma_i \frac{\mu\sigma v}{2}\cos\theta\sin\varphi$$
$$H_{\theta i}=-\omega p \Gamma_r \frac{\mu\sigma v}{2}\cos\theta\sin\varphi \qquad (50)$$

$$H_{\varphi r}=-\omega p\left\{\Gamma_i\left(\alpha\sin\theta-\frac{\mu\sigma v}{2}\cos\varphi\right)+\Gamma_r\beta\sin\theta\right\}$$
$$H_{\varphi i}=-\omega p\left\{\Gamma_i\beta\sin\theta-\Gamma_r\left(\alpha\sin\theta-\frac{\mu\sigma v}{2}\cos\varphi\right)\right\} \qquad (51)$$

ただし

$$\Gamma=\Gamma_r+j\Gamma_i$$
$$\Gamma_r=\cos\left\{(\omega\Lambda\sin\theta\cos\varphi-\beta)R\right\}$$
$$\times\frac{1}{4\pi R}\exp\left\{-\left(\alpha-\frac{\mu\sigma v}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)R\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_i &= \sin\{(\omega\Lambda\sin\theta\cos\varphi-\beta)R\} \\ &\quad\times\frac{1}{4\pi R}\exp\{-(\alpha-\frac{\mu\sigma v}{2}\sin\theta\cos\varphi)R\} \\ \Lambda &= (\varepsilon\mu-\varepsilon_0\mu_0)v \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

なお上式においても前節と同様に，電気形電磁界を表わす上部の添字[1]は省略してある．

実物理場$\overset{\circ}{E}$および$\overset{\circ}{H}$は，上に求められた電磁界成分E_{Rr}，E_{Ri}，……およびH_{Rr}，H_{Ri}……等を式（13）に用いてそれぞれつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \overset{\circ}{E}_R &= E_{Rr}\cos\omega t - E_{Ri}\sin\omega t \\ \overset{\circ}{E}_\theta &= E_{\theta r}\cos\omega t - E_{\theta i}\sin\omega t \\ \overset{\circ}{E}_\varphi &= E_{\varphi r}\cos\omega t - E_{\varphi i}\sin\omega t \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{\circ}{H}_R &= H_{Rr}\cos\omega t - H_{Ri}\sin\omega t \\ \overset{\circ}{H}_\theta &= H_{\theta r}\cos\omega t - H_{\theta i}\sin\omega t \\ \overset{\circ}{H}_\varphi &= H_{\varphi r}\cos\omega t - H_{\varphi i}\sin\omega t \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

ポインティング・ベクトル$<\overset{\circ}{S}>$は式（43）を用いてつぎのように求められる．

$$\left.\begin{aligned} <\overset{\circ}{S}_R> &= \frac{1}{2}\{(\alpha\alpha'-\beta\beta')+\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha'\sin\theta\cos\varphi\}|H|^2 \\ &\quad-\frac{\mu\sigma v^2}{2}\alpha\alpha'\sin^2\theta\sin^2\varphi\cdot\omega^2p^2|\Gamma|^2 \\ <\overset{\circ}{S}_\theta> &= -\frac{\mu\sigma v}{4}\alpha'\cos\theta\cos\varphi|H|^2 \\ &\quad-\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2\alpha\alpha'\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\cdot\omega^2p^2|\Gamma|^2 \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

$$<\overset{\circ}{S}_{\varphi}>=-\frac{\mu\sigma v}{4}\alpha'\sin\varphi\,|H|^2+\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha(\alpha\alpha'-\beta\beta')\sin^2\theta\sin\varphi$$
$$-\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2\alpha\alpha'\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\}\,\omega^2p^2|\Gamma|^2 \quad \cdots\cdots$$

上式に含まれる$|H|^2$なる量は先に求めた諸式(49)～(51)を用いてつぎのように表わされる.

$$|H|^2=\omega^2p^2\{(\alpha^2+\beta^2)\sin^2\theta-(\mu\sigma v)\alpha\sin\theta\cos\varphi$$
$$-\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2\}|\Gamma|^2 \qquad (56)$$

Case Ⅱ.

つぎに媒質の運動方向が電流ベクトルに平行な場合, すなわち$J/\!/v$, $v=v\boldsymbol{i}_z$なる場合の電磁界は Ⅰ) と同様にしてつぎのように求められる.

電界

$$\left.\begin{aligned}E_{Rr}&=-\omega p\{(\alpha'\Gamma_r-\beta'\Gamma_i)\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\sin^2\theta\\&\quad+(\alpha'\Gamma_i+\beta'\Gamma_r)\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\sin^2\theta\}\\E_{Ri}&=\omega p\{(\alpha'\Gamma_r-\beta'\Gamma_i)\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\sin^2\theta\\&\quad-(\alpha'\Gamma_i+\beta'\Gamma_r)\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\sin^2\theta\}\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

$$\left.\begin{aligned}E_{\theta r}&=-\omega p\{(\alpha'\Gamma_r-\beta'\Gamma_i)(2\alpha\beta\sin\theta+\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\cos\theta\sin\theta)\\&\quad+(\alpha'\Gamma_i+\beta'\Gamma_r)\{(\alpha^2-\beta^2)\sin\theta+\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\cos\theta\sin\theta\}\}\\E_{\theta i}&=\omega p\{(\alpha'\Gamma_r-\beta'\Gamma_i)\{(\alpha^2-\beta^2)\sin\theta+\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\cos\theta\sin\theta\end{aligned}\right\}$$

$$\left. -(\alpha\Gamma_i+\beta'\Gamma_r)\left(2\alpha\beta\sin\theta+\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\cos\theta\sin\theta\right)\right\} \tag{58}$$

$$E_{\varphi r}=E_{\varphi i}=0 \tag{59}$$

磁界

$$H_{Rr}=H_{Ri}=0 \tag{60}$$

$$H_{\theta r}=H_{\theta i}=0 \tag{61}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{\varphi r}&=-\omega p(\alpha\Gamma_i+\beta\Gamma_r)\sin\theta \\ H_{\varphi i}&=\omega p(\alpha\Gamma_r-\beta\Gamma_i)\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

ただし,

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_r&=\cos\{(\omega\Lambda\cos\theta-\beta)R\} \\ &\quad\times\frac{1}{4\pi R}\exp\{-(\alpha-\frac{\mu\sigma v}{2}\cos\theta)R\} \\ \Gamma_i&=\sin\{(\omega\Lambda\cos\theta-\beta)R\} \\ &\quad\times\frac{1}{4\pi R}\exp\{-(\alpha-\frac{\mu\sigma v}{2}\cos\theta)R\} \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

またポインテイング・ベクトル$\langle\mathring{S}\rangle$は式(44)を用いてつぎのように求められる.

$$\left.\begin{aligned} \langle\mathring{S}_R\rangle&=\frac{1}{2}\left\{(\alpha\alpha'-\beta\beta')+\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha'\cos\theta\right\}|H|^2 \\ \langle\mathring{S}_\theta\rangle&=-\frac{\mu\sigma v}{4}\alpha'\sin\theta\cdot|H|^2 \\ \langle\mathring{S}_\varphi\rangle&=0 \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

ただし

$$|\mathbb{H}|^2=\omega^2\mu^2(\alpha^2+\beta^2)\sin^2\theta\cdot|\Gamma|^2 \qquad (65)$$

5. むすび

損失のある運動媒質中における放射電磁界の性質について考察し，つぎのような静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中では見られない現象があらわれることを示した．

1）電界$\mathring{\mathbb{E}}$は楕円偏波である．

2）電界$\mathring{\mathbb{E}}$と磁界$\mathring{\mathbb{H}}$とは一般には直交していない．

3）ポインテイング・ベクトル$\langle\mathring{\mathbb{S}}\rangle$は半径方向成分のみならず周方向成分をももち，媒質の運動の方向に曲げられる．

最後に一例として微小電気双極子による放射電磁界を求めた．

謝　辞

日頃ご指導ごべんたついただいている大阪大学工学部板倉清保教授をはじめ，常々ご討論いただく板倉研究室の方々，ならびに計算等にご協力いただいた卒業研究学生森　道直君に深謝の意を表す．

文　献

1）藤岡　弘，塩沢俊之，熊谷信昭：“運動電気双極子からの相対論的電磁放射”，信学誌49，6，pp.1147-1152，（昭41-06）．
信学会アンテナ研資（1965-12）．

2）藤岡　弘，熊谷信昭：“損失のある運動媒質中における電磁放射理論”

信学会アンテナ・伝播研資(1966-10). 昭41信学全大, No.301.

3) R.T.Compton and C.T.Tai: "Radiation from harmonic sources in a moving medium", IEEE Trans. on Antennas and Propagations, Vol.AP-13, pp.574-577, (July, 1965).

4) 藤岡 弘, 熊谷信昭:"運動媒質中におけるアンテナ・アレイの放射特性", 信学誌 49, 8, pp.1509-1515, (昭41-08).
藤岡 弘, 熊谷信昭:"運動媒質中における放射指向性合成の理", 信学会アンテナ研資 (1966-03). 輻射科学研究会資料(1966-02).

5) H.Fujioka, K.Yoshida and N.Kumagai: "Transmission-line treatment of waveguides filled with a moving medium", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques (Correspondence), to be published.
藤岡 弘, 吉田健一, 熊谷信昭:"運動媒質を含む導波管の回路理論的取り扱い", 信学会アンテナ・伝播研資(1966-06).

輻射科学研究会資料

運動媒質を含む導波管の理論

藤岡　弘
二瓶文博
熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1966年12月9日

1. まえがき

近年の宇宙工学，ロケット工学，プラズマ工学等の急速な進歩に伴い，運動系の電磁界解析は重要な工学的問題となりつつある．そのうち運動媒質を含む導波管の解析は，最近J. R. Collier および C. T. Tai[1] によつてなされた．彼等は，導波管中を媒質が一様に運動している場合の，波源の存在しない領域での電磁界分布を，方形および円形導波管の場合について，ベクトル・ポテンシヤルを用いて求めた．等者らは，同様の問題を回路理論における平行2線線路的に取り扱い，一般に，任意の断面をもつ真直で一様な導波管について，波源の存在する領域および，波源の存在しない領域での電磁界を求めた[2],[3]．ここでは，この種の導波管の特性を具体的に示すため方形導波管を例にとり，筆者等が先に示した解析[2],[3]の概要を述べ，伝搬特性および励振効率[4]について，それぞれ数値計算例を示して検討し，媒質が静止しているときにはみられない種々の興味ある現象があらわれることを示す．

2. 運動媒質を含む方形導波管内の電磁界

方形導波管内を，損失のある等方・線形媒質（誘電率ε，透磁率μ，導電率σ）が，管壁にそつて一様に運動しているものとする（図1参照）．ここで，媒質の速度v（$=v\,i_z$，i_zはz方向の単位ベクトル）は光速度に比べて十分小さいものとすれば，導波管中の電磁界はつぎのMaxwell-Minkowski方程式によつて決定される．

$$\left.\begin{aligned}(\nabla - j\omega A)\times E &= -j\omega\mu H - J^{*}\\ (\nabla - j\omega A - \mu\sigma v)\times H &= j\omega\varepsilon E + J\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

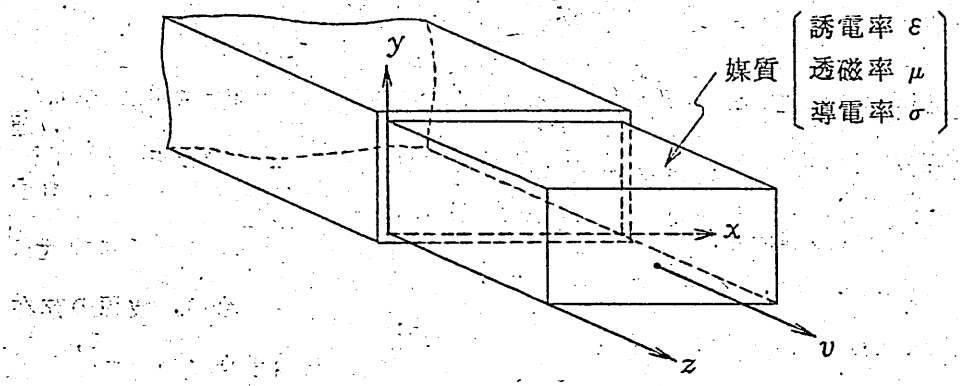


図 1　運動媒質を含む方形導波管

ただし，

$$\Lambda = (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)\, v = \Lambda\, i_z$$

$$\Lambda = (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)\, v$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

ε_0, μ_0 ＝真空の誘電率および透磁率

$\mathbb{J}, \mathbb{J}^*$ ＝印加電流密度および磁流密度

また，上式においては，時間変化 $e^{+j\omega t}$ を仮定している．

非斉次電磁界方程式(1)は，適当な変換を行なうことによつて解くことができ，その解はつぎのように表わされる[2],[3]．

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{E}_t &= \sum_i \left[V_i^e(z)\, \mathbb{M}_i^e + V_i^m(z)\, \mathbb{M}_i^m \right] e^{+j\omega\Lambda z} \\
\mathbb{H}_t &= \sum_i \left[-I_i^e(z)\, \mathbb{N}_i^e + I_i^m(z)\, \mathbb{N}_i^m \right] e^{+j\omega\Lambda z} \\
\mathbb{E}_z &= \sum_i \left[(k_i^e)^2\, V_{zi}(z)\, \mathbb{M}_{zi} \right] e^{+j\omega\Lambda z} \\
\mathbb{H}_z &= \sum_i \left[(k_i^m)^2\, I_{zi}(z)\, \mathbb{N}_{zi} \right] e^{+j\omega\Lambda z}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ここで，添字 “t” および “z” はそれぞれ断面成分および軸方向成分を表

わす．また，V_i^e, V_i^m, V_{zi} および I_i^e, I_i^m, I_{zi} は，それぞれモード電圧および電流を表わし，上部の添字“e”および“m”はそれぞれ電気形（TM波）および磁気形（TE波）の電磁界を表わす．なお，下部の添字“i”はモードの次数を表わし，以下では必要に応じて“mn”と書く．

さらに，ベクトル・モード関数 $\mathbb{M}_i^e$, $\mathbb{N}_i^e$, $\mathbb{M}_{zi}$ および $\mathbb{M}_i^m$, $\mathbb{N}_i^m$, $\mathbb{N}_{zi}$ は，方形導波管の断面固有スカラー関数

$$\left.\begin{aligned} \Phi_i^e = \Phi_{mn}^e &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{k_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \Phi_i^m = \Phi_{mn}^n &= \frac{\sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n}}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{k_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ただし，

$$k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 2 & (m \neq 0) \end{cases}$$

を用いて，つぎのように定義される[2],[3]．

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{M}_i^e &= \nabla_t \cdot \Phi_i^e & \mathbb{M}_i^m &= \nabla_t \cdot \Phi_i^m \times i_z \\ \mathbb{N}_i^e &= \nabla_t \cdot \Phi_i^e \times i_z & \mathbb{N}_i^m &= \nabla_t \cdot \Phi_i^m \\ \mathbb{M}_{zi} &= \Phi_i^e \cdot i_z & \mathbb{N}_{zi} &= \Phi_i^m \cdot i_z \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

さて，波源の存在する領域でのモード電圧，電流は，式(1)から境界条件およびベクトル・モード関数の直交性を用いて導かれる非斉次伝送方程式の特別解（particular solution）として求められ，波源が有限の領域，$z_1 < z < z_2$，に分布している場合には，例えば，TM波のモード電圧は次式によつて与えられる[2],[3]．

$$V_i^e(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\cdot\dfrac{1}{\gamma_+-\gamma_-}\displaystyle\int_{z_1}^{z_2}\left[(\gamma_+)\,g_i^e(z')+(\alpha_i)\,h_i^e(z')\right] \\ \qquad\qquad \times e^{\gamma_-(z-z')}\,dz' \quad (z>z_2) \\ \dfrac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\cdot\dfrac{1}{\gamma_+-\gamma_-}\displaystyle\int_{z_1}^{z_2}\left[(\gamma_-)\,g_i^e(z')+(\alpha_i)\,h_i^e(z')\right] \\ \qquad\qquad \times e^{\gamma_-(z-z')}\,dz' \quad (z<z_1)\end{cases} \tag{5}$$

ここで，

$$\gamma_\pm=\frac{\mu\sigma v}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2+\left[(k_i)^2-\hat{k}^2\right]}$$

$$\alpha_i=\hat{k}^2-(k_i)^2$$

$$\hat{k}^2=\omega^2\hat{\varepsilon}\mu$$

$$g_i^e(z)=j\omega\hat{\varepsilon}\iint \mathbb{J}_t^*\cdot\mathbb{N}_i^e e^{-j\omega\Lambda z}\,dS-(k_i)^2\iint J_z\Phi_i^e e^{-j\omega\Lambda z}\,dS$$

$$h_i^e(z)=\iint \mathbb{J}_t\cdot\mathbb{M}_i^e e^{-j\omega\Lambda z}\,dS$$

つぎに，波源の存在しない領域での電磁界は，非斉次伝送方程式の一般解（complementary solution）を用いて表わすことができ，つぎのように書かれる[2],[3]．

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}_t&=\sum_i\left[Z_i^e A_i^e\,\mathbb{M}_i^e e^{\Gamma_i z}+B_i^m\,\mathbb{M}_i^m e^{\Gamma_i z}\right]\\ \mathbb{H}_t&=\sum_i\left[-A_i^e\,\mathbb{N}_i^e e^{\Gamma_i z}+Y_i^m B_i^m\,\mathbb{N}_i^m e^{\Gamma_i z}\right]\\ \mathbb{E}_z&=-\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\sum_i\left[A_i^e(k_i)^2\,\mathbb{M}_{zi}\,e^{\Gamma_i z}\right]\\ \mathbb{H}_z&=-\frac{1}{j\omega\mu}\sum_i\left[B_i^m(k_i)^2\,\mathbb{N}_{zi}\,e^{\Gamma_i z}\right]\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_i &= \pm j\sqrt{[\hat{k}^2-(k_i)^2]-(\frac{\mu\sigma v}{2})^2}+(j\omega\Lambda+\frac{\mu\sigma v}{2}) \\
Z_i^e &= \frac{1}{Y_i^e}=\frac{1}{\omega\hat{\varepsilon}}\left[\mp\sqrt{[\hat{k}^2-(k_i)^2]-(\frac{\mu\sigma v}{2})^2}-j\frac{\mu\sigma v}{2}\right] \\
Y_i^m &= \frac{1}{Z_i^m}=\frac{1}{\omega\mu}\left[\mp\sqrt{[\hat{k}^2-(k_i)^2]-(\frac{\mu\sigma v}{2})^2}+j\frac{\mu\sigma v}{2}\right]
\end{aligned}\right\} (7)$$

また，A_i^e, B_i^m は定数である．

式(3)を用いて，ベクトル・モード 関数を実際に計算することにより，運動媒質を含む方形導波管中の電磁界は，それぞれつぎのように書ける．

1) TM波

$$\left.\begin{aligned}
H_x &= A\frac{n\pi}{b}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\,e^{\Gamma_{mn}z} \\
H_y &= -A\frac{m\pi}{a}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,e^{\Gamma_{mn}z} \\
E_t &= -Z_{mn}^e(\dot{\imath}_z\times H) \\
E_z &= A\frac{(k_{mn})^2}{j\omega\hat{\varepsilon}}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,e^{\Gamma_{mn}z}
\end{aligned}\right\} (8)$$

2) TE波

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= B\frac{n\pi}{b}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,e^{\Gamma_{mn}z} \\
E_y &= -B\frac{m\pi}{a}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\,e^{\Gamma_{mn}z} \\
H_t &= Y_{mn}^m(\dot{\imath}_z\times E) \\
H_z &= B\frac{(k_{mn})^2}{j\omega\mu}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\,e^{\Gamma_{mn}z}
\end{aligned}\right\} (9)$$

3. 運動媒質を含む導波管の伝搬特性

前節の結果より運動媒質を含む方形導波管中の固有伝送モードは，伝搬性 Γ_{mn}，特性インピーダンス Z_{mn}^{e}，特性アドミッタンス Y_{mn}^{m} を用いて表わされることがわかつた．ここでは，その数値計算例を示し，運動することによつて現われる効果を明らかにする．

まず，式(7)によつて与えられる伝搬定数 Γ_{mn} は，減衰定数 α_{mn} および位相定数 β_{mn} を用いて，

$$\Gamma_{mn} = -\alpha_{mn} - j\beta_{mn}$$

と表わされるが，根号の符号を，波が z の正方向に伝搬するとき，減衰定数 α_{mn} が正となるように選べば，α_{mn}，β_{mn} はそれぞれつぎのように書ける．

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{mn} &= \left(\frac{2\pi}{\lambda_{mn}}\right)\left[F_{mn} - \left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left(\frac{v}{2c}\right)\tan\delta\right] \\ \beta_{mn} &= \left(\frac{2\pi}{\lambda_{mn}}\right)\left[G_{mn} - \left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left(\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

ただし

$$F_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left\{1-\left(\frac{v}{2c}\right)^2\tan^2\delta\right\}-1 + \sqrt{\left[\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left\{1-\left(\frac{v}{2c}\right)^2\tan^2\delta\right\}-1\right]^2+\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)^4\tan^2\delta}\right]^{1/2}$$

$$G_{mn} = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left\{1-\left(\frac{v}{2c}\right)^2\tan^2\delta\right\}+1 + \sqrt{\left[\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left\{1-\left(\frac{v}{2c}\right)^2\tan^2\delta\right\}-1\right]^2+\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)^4\tan^2\delta}\right]^{1/2}$$

$$\lambda_{mn}=\frac{2\pi}{k_{mn}}\ ,\qquad \lambda=2\pi\cdot\frac{c}{\omega}\ ,\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\tan\delta=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ ,\qquad n=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}=\frac{c_0}{c}$$

伝搬定数Γ_{mn}の根号の符号を上のように選んだとき，特性インピーダンス$Z_{mn}^{\ e}$，特性アドミッタンス$Y_{mn}^{\ e}$は，それぞれつぎのように書ける．

$$\left.\begin{aligned}R_e\{Z_{mn}^{\ e}\}&=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{mn}}\right)\frac{1}{1+\tan^2\delta}\left\{F_{mn}+G_{mn}\tan\delta\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left(\frac{v}{2c}\right)\tan^2\delta\right\}\\I_m\{Z_{mn}^{\ e}\}&=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{mn}}\right)\frac{1}{1+\tan^2\delta}\left\{F_{mn}\tan\delta-G_{mn}\right.\\&\qquad\left.-\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left(\frac{v}{2c}\right)\tan\delta\right\}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}R_e\{Y_{mn}^{\ m}\}&=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{mn}}\right)F_{mn}\\I_m\{Y_{mn}\}&=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left\{-G_{mn}+\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)\left(\frac{v}{2c}\right)\tan\delta\right\}\\&=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\alpha_{mn}\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

ただし，R_eおよびI_mは，それぞれ実数部および虚数部をとる操作を表わす．

さて，減衰定数α_{mn}の数値計算例として示した図-2よりつぎのことがわかる．

① $v>0$，すなわち媒質の運動方向が電磁波のエネルギーの伝搬方向に一

致しているときには，α_{mn} は，$v=0$，すなわち媒質が静止しているときに比べて減少し，$v<0$，すなわち運動方向と伝搬方向が逆のときには増大する．

② $\tan\delta \neq 0$ の場合には，静止媒質の場合と同様に，α_{mn} は 0 になることがなく，したがつて遮断周波数は存在しない．

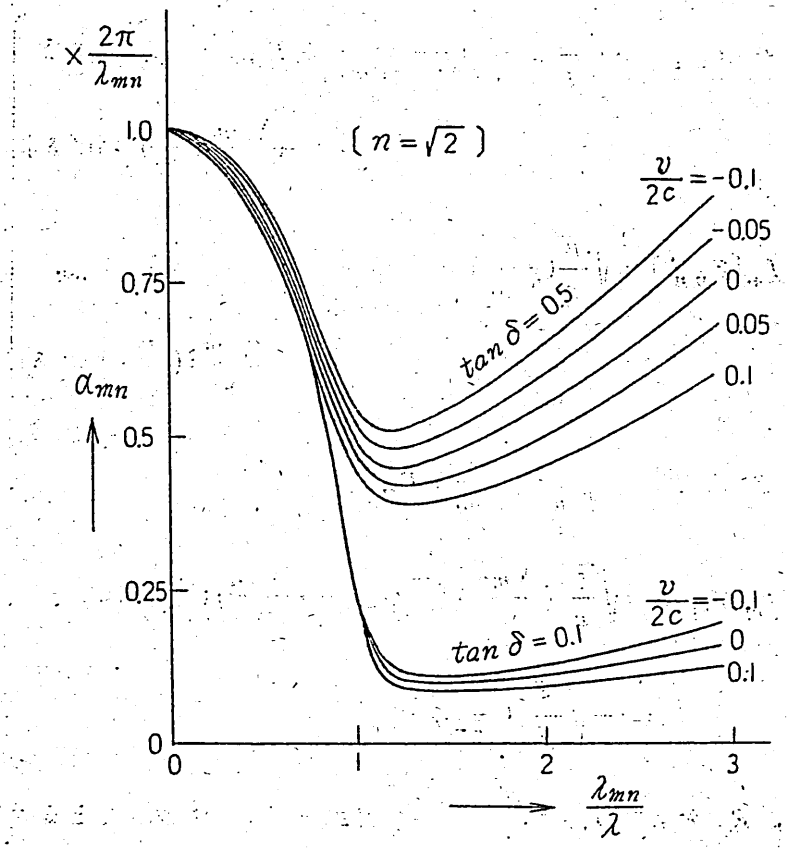


図 2　減　衰　特　性

図 3 は位相定数 β_{mn} の数値計算例であるが，同図よりつぎのことがわかる．

① β_{mn} も α_{mn} と同様に，$v>0$ の場合は $v=0$ の場合に比べて減少し，$v<0$ の場合には増大する．

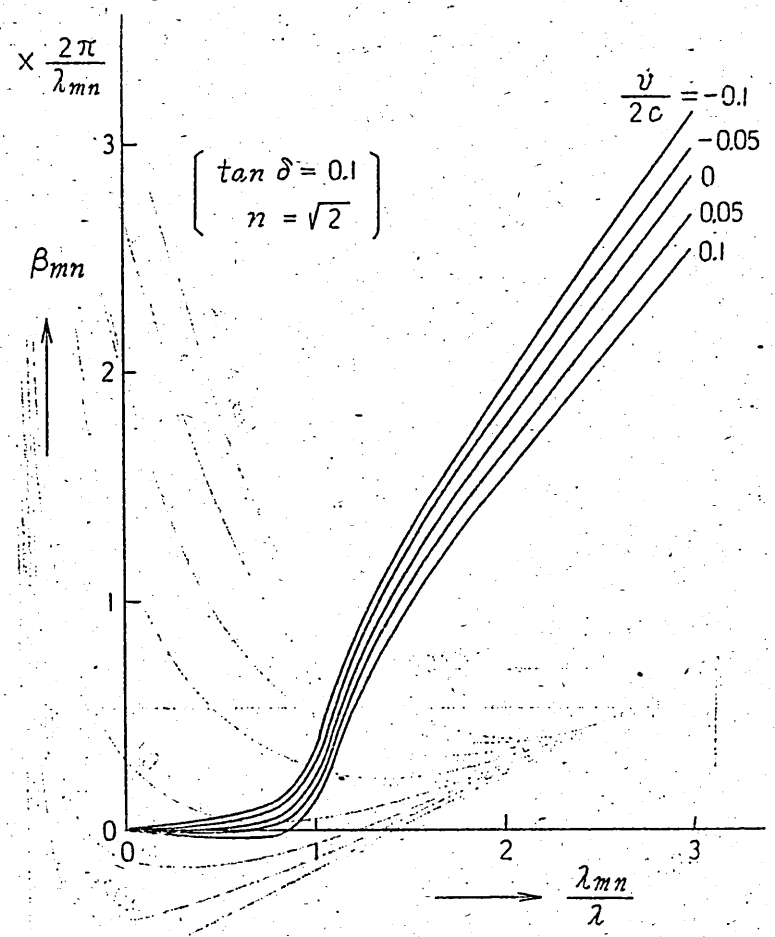


図3　位　相　特　性

② $v > 0$ の場合には，β_{mn} が負になる領域が存在する．

図4は，β_{mn} が負になる領域を拡大し，tan δ をパラメータとして描いたものである．同図より tan δ が大きくなるほど，$\beta_{mn} < 0$ の領域は小さくなることがわかる．なお，位相定数 β_{mn}，したがつて位相速度 v_p が負になる領域は，群速度 v_g が正であるか負であるかによつて，さらに2つに分けられるが，この様子は図5に示されている．同図の各領域にわたつて，エネルギーの伝搬方向は正であるが，領域Ⅰにおいては，位相速度および群速度

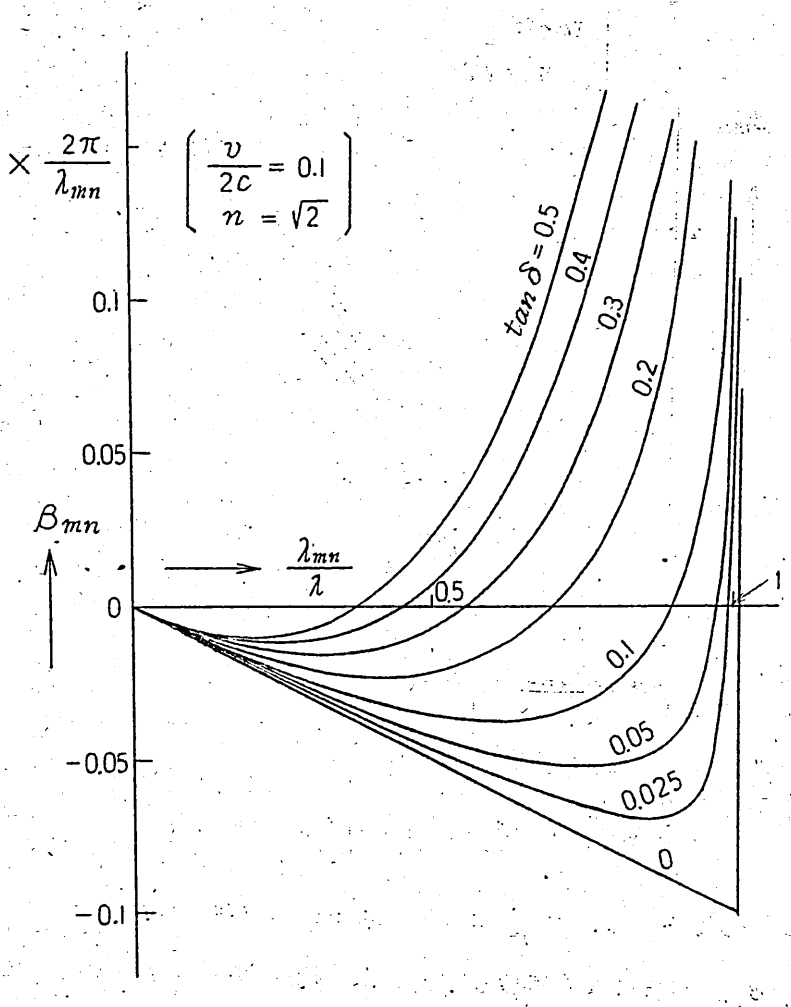


図 4　位相定数が負になる領域

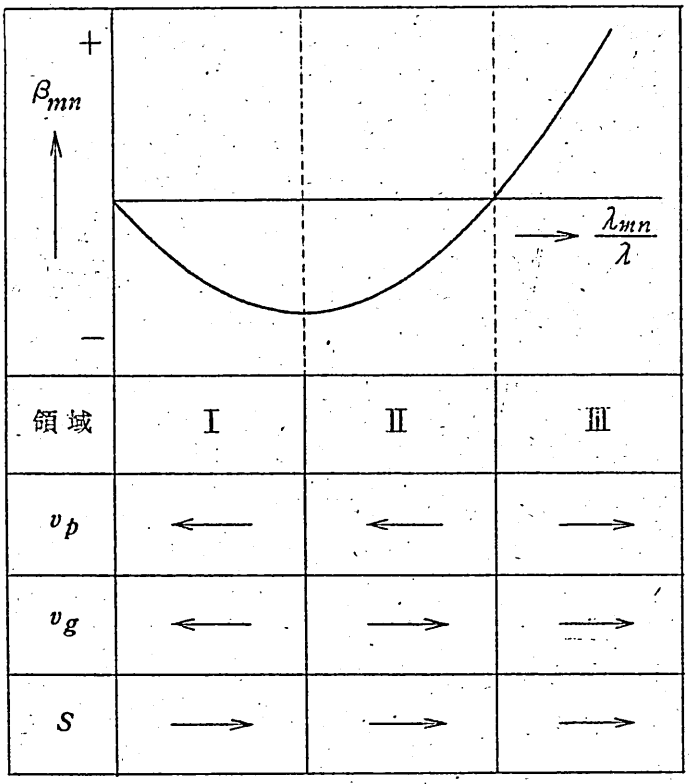


図5　位相定数の3つの領域

が共に負であり，領域Ⅱにおいては，位相速度は負であるが群速度は正となる．領域Ⅰと同じ性質をもつ波としては，例えば，遅い空間電荷波があり，また領域Ⅱと同じ性質をもつ波としては，後進波等がある．領域Ⅲは従来の静止媒質中における場合と同様の性質を持ち，位相速度，群速度ともに正となる．領域ⅡとⅢの境界，すなわち$\beta_{mn}=0$となる点のλ_{mn}/λの値はつぎのようになる．

$$\left(\frac{\lambda_{mn}}{\lambda}\right)^2=\frac{\left(\frac{v}{2c}\right)^2}{\left(\frac{v}{2c}\right)^2-\left(\frac{v}{2c}\right)^4\left\{4\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2+\tan^2\delta\right\}+\frac{\tan^2\delta}{16\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2}} \tag{13}$$

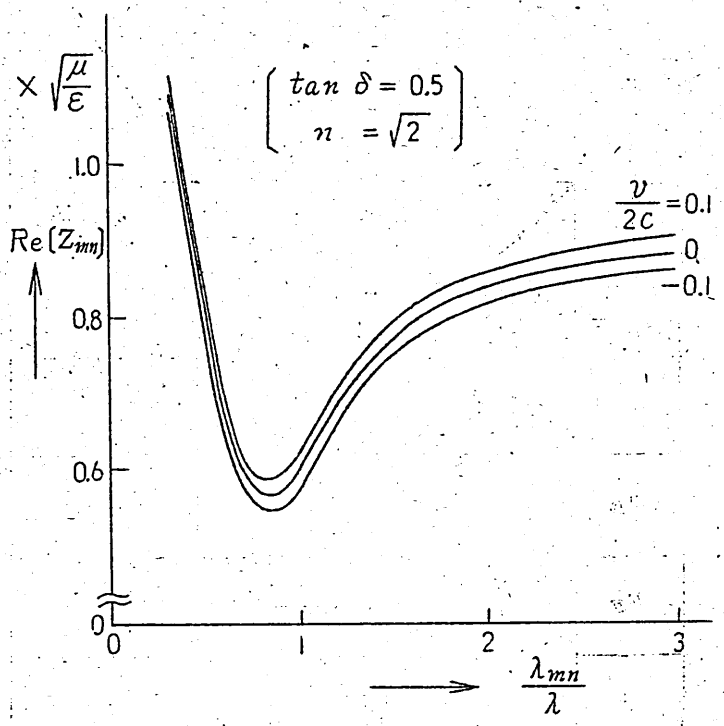


図 6　$R_e\left[Z_{mn}{}^{e}\right]$

つぎに，特性インピーダンス $Z_{mn}{}^{e}$ の実数部および虚数部の数値計算例として示した図 6，図 7 より，実数部 $R_e\left[Z_{mn}{}^{e}\right]$ は $v \geqq 0$ のときには，$v = 0$ のときに比べて増大し，虚数部 $I_m\left[Z_{mn}{}^{e}\right]$ は，逆に，$v > 0$ のときには，$v = 0$ のときに比べて減少することがわかる．

さらに，特性アドミッタンス $Y_{mn}{}^{m}$ の実数部および虚数部を数値計算することによつて，つぎのことがわかつた．

① $Y_{mn}{}^{m}$ の実数部は，v の正負にかかわらず，v とともに減少するが，その変化の割合は，近似の範囲内で，無視できるくらい小さい．

② $Y_{mn}{}^{m}$ の虚数部は，常に負の値をとり，$v > 0$ の場合には，$v = 0$ に比べて増加し，$v < 0$ の場合には減少する．しかし，媒質が運動することに

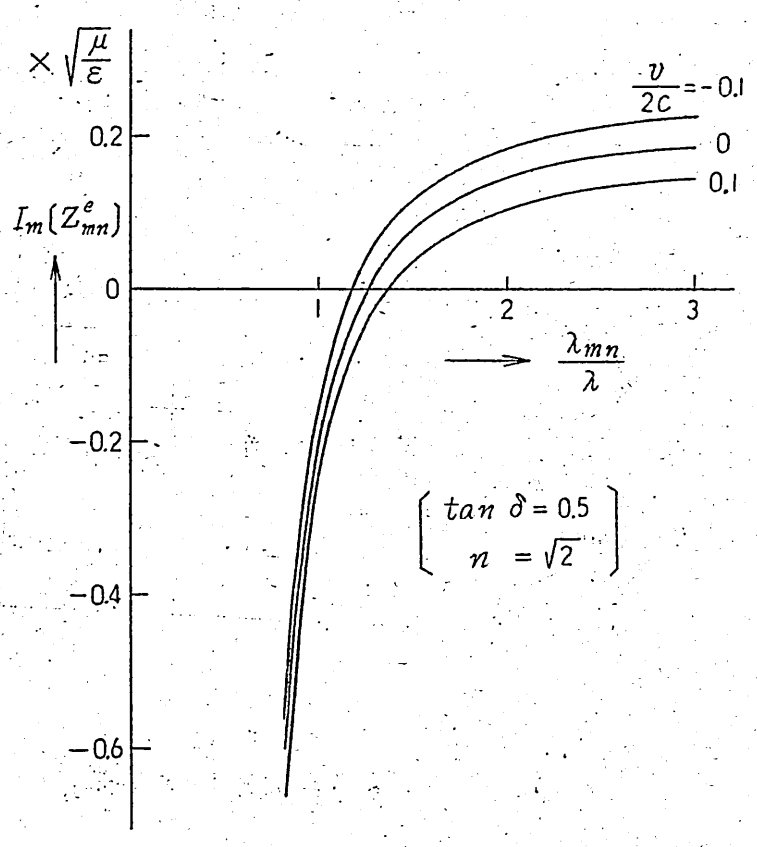


図 7　$I_m[Z_{mn}{}^e]$

よつて受ける影響は，他の定数，α_{mn}，β_{mn}，$Z_{mn}{}^e$ の場合に比べて小さい。

以上の結果をまとめると，表 1 のようになる。

表 1　各定数の v による効果

	$v>0$	$v<0$	備　考
α_{mn}	減	増	正
β_{mn}	減	増	正，負
$R_e\{Z_{mn}^{e}\}$	増	減	正
$I_m\{Z_{mn}^{e}\}$	減	増	正，負
$R_e\{Y_{mn}^{m}\}$	不 変	不 変	正
$I_m\{Y_{mn}^{m}\}$	増	減	負

4. 運動媒質を含む方形導波管の励振

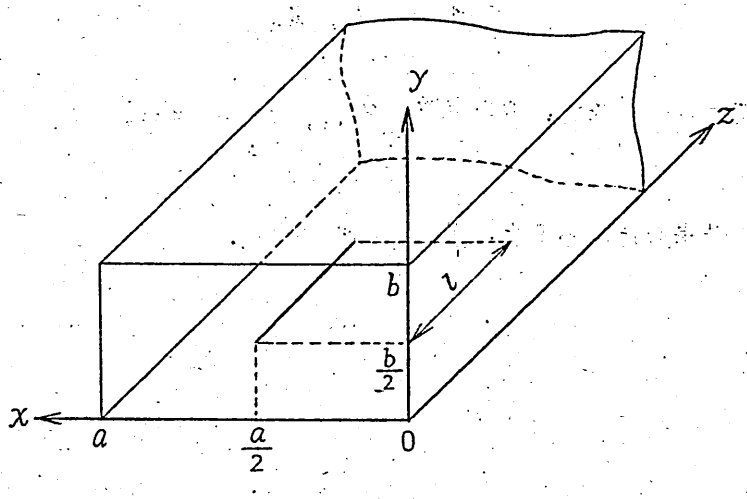


図 8　TM_{11} モードの励振

図8に示すように，運動媒質を含む方形導波管内に，z方向に一様な線電流源

$$J = I \cdot \delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\cdot\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\dot{u}_z \qquad (0 \leqq z \leqq l) \qquad (14)$$

によつて，TM_{11}モードを励振する場合を考える．このとき，TM_{11}モードと共に，高次のTMモードが発生するが，一般に励振されるTM_{mn}波のモード電圧$V_{mn}^{e}(z)$は，式(14)を式(5)に代入することによつて，つぎのように求められる．

$$V_{mn}^{e}(z) = \frac{1}{\omega\hat{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}\cdot k_{mn}\cdot\frac{\gamma_{+mn}}{\Gamma_{mn}}\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\times e^{\gamma_- z}\left(1-e^{-\Gamma_{mn} z}\right) \qquad (15)$$

ここで，励振効率η_{mn}を，TM_{mn}波のモード電圧$V_{mn}^{e}(l)$と，TM_{11}波のモード電圧$V_{11}^{e}(l)$との比の絶対値で定義すれば，η_{mn}はつぎのように書ける．

$$\eta_{mn} = \frac{|V_{mn}^{e}(l)|}{|V_{11}^{e}(l)|}$$

$$= \frac{\sqrt{F_{mn}^{2}+G_{mn}^{2}}}{\sqrt{F_{11}^{2}+G_{11}^{2}}}\cdot\frac{|\gamma_{+mn}|}{|\gamma_{+11}|}\cdot\frac{|\Gamma_{11}|}{|\Gamma_{mn}|}\cdot\frac{|1-e^{\Gamma_{mn} l}|}{|1-e^{\Gamma_{11} l}|}$$

$$\times\left|\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \qquad (16)$$

η_{mn}の値が小さいほど，励振効率がよいことになる．

図9は，励振効率η_{33}の数値計算例であるが，同図よりλ_{11}/λが1よりわずかに大きい領域においては，$v>0$のとき励振効率は良くなり，$v<0$のときには悪くなることがわかる．

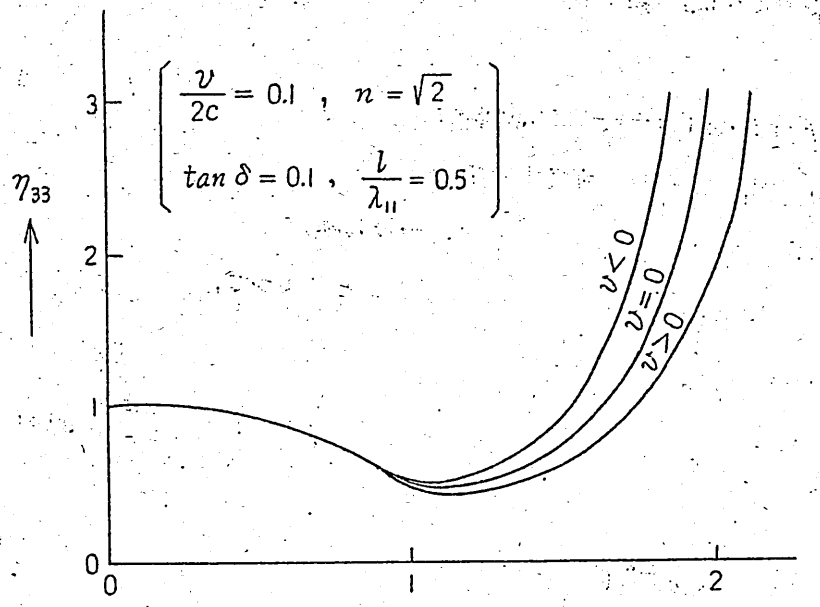


図9　励振効率 η_{mn} $(m=n=3)$

5.　むすび

運動媒質を含む方形導波管の伝搬特性，および励振効率について，それぞれ数値計算例を示して検討し，つぎの現象が現われることを明らかにした．

1）減衰定数，および位相定数は，媒質の運動方向が電磁波のエネルギーの伝搬方向と一致している場合には増加し，逆の場合には減少する．

2）媒質の運動方向と，電磁波のエネルギーの伝搬方向が同じときには，位相定数が負になる領域が存在し，その領域は，群速度の正負によつてさらに2つに分かれる．

3）励振効率は，媒質が電磁波のエネルギーの伝搬方向と同じ向きに運動しているときに良くなる．

謝辞　日頃ご指導，ごべんたついただいている大阪大学部板倉清保教授，ならびに常々有益なご討論をいただいている板倉研究室の方々に深謝する．

文　献

(1) J. R. Collier and C. T. Tai : "Guided waves in moving media", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-13, p. 441, (July, 1965)

(2) H. Fujioka, K. Yoshida and N. Kumagai : "Transmission-line treatment of waveguides filled with a moving medium", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques (Correspondence), to be published.

(3) 藤岡　弘，吉田健一，熊谷信昭："運動媒質を含む導波管の回路理論的取り扱い"，信学会アンテナ・伝播研資（1966－06）．

(4) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："運動媒質を含む導波管の諸特性"，昭41信学全大，№299．

輻射科学研究会資料

Close Grooved Guide の伝送特性について

繁沢宏
滝山敬
(同志社大学工学部)

昭和41年12月9日

緒言

最近提案された溝付平行板線路[1]は漏洩導波管として特に有用性があると考えられ，その方面での応用開発が行われているが，電磁波伝送を主目的にみると，遮へい型としたもの（Close Grooved Guide）の方が適当と思われる。本報告は新らたに Close Grooved Guide なる伝送線路を提案し，その伝送特性を明らかにするとともに，mm波（50Gc）帯に於ける実験結果について検討を行ったものである。

1. Close Grooved Guide に於ける電磁波伝送理論

1.1 伝送姿態

Fig. 1 に示す構造の導波管を Close Grooved Guide と称することにする。この様な Guide は境界面が全て完全導体から出来ているから，電磁波は TE mode，あるいは TM mode のみで伝搬可能である。従って以下では TE と TM 両 mode に大別して考察を進めていく。Fig. 1 に於いて，この Guide は x-z 平面を一つの対称面とする構造だから，x-z 面を Zero impedance の壁（Short Circuit）で置き換えた時に存在する mode と，Infinite impedance の壁（Open Circuit）で置き換えた時に存在する mode に分類出来るから，以下各々の mode を TE^s, TM^s mode（Short Circuit mode）及び TE^f, TM^f mode（Open Circuit mode）と略称することにする。

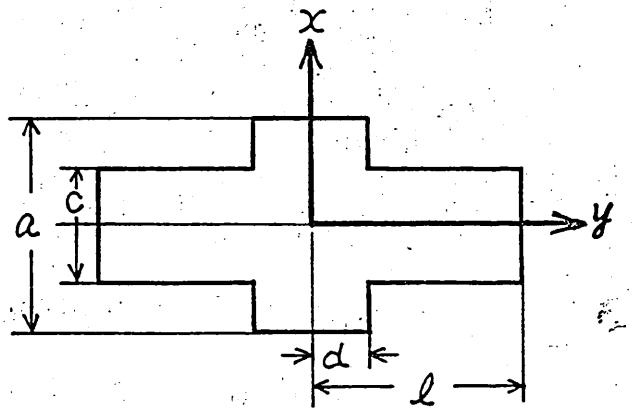


Fig.1

1.1.1 TE^s mode

この場合は x-z 面を Short Circuit にした時であるから，Fig.2 に示す構造の Guide の伝搬姿態を求めることになる。今 Fig.2 に於いて y=d の平面を境界に右側を領域 I，左側を領域 II と区別し，各領域内で伝搬姿態を矩型導波管の TE 姿態で展開することにする。そしてその後両領域に於ける電磁界を y=d 上で連続させることにより，伝送特性を決定する特性方程式を求めることにする。

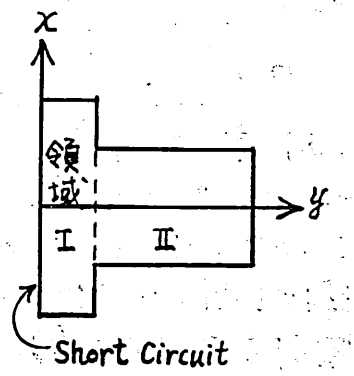


Fig.2

今直角座標に於いて，一般に E_z, H_z が与えられると，$e^{j(\omega t - hz)}$ なる変化を考慮すると他の成分は次式で求められる。

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{j}{h^2-k_0^2}\left(h\frac{\partial E_z}{\partial x}+\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ E_y &= \frac{j}{h^2-k_0^2}\left(h\frac{\partial E_z}{\partial y}-\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ H_x &= \frac{-j}{h^2-k_0^2}\left(\omega\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial y}-h\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ H_y &= \frac{j}{h^2-k_0^2}\left(\omega\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial x}+h\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1-1-1)$$

ここで

$k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ；自由空間の波数

$h=2\pi/\lambda_g$ ；z 方向の位相定数

今，考えるのは，TE mode figから $E_z=0$ であり，H_z に対しては，y 方向変化は領域 I では一般には調和関数，領域 II では指数関数的な変化と考えると，$e^{j(\omega t-hz)}$ なる項を省略して

$$\text{領域 I}\ ;\ H_z^{I}=\sum_{r=0}^{\infty}(A_r^1\sin\beta_r^{I}x+A_r^2\cos\beta_r^{I}x)\cdot\cos\delta_r y \quad (1-1-2)$$

$$\text{領域 II}\ ;\ H_z^{II}=\sum_{s=0}^{\infty}(B_s^1\sin\beta_s^{II}x+B_s^2\cos\beta_s^{II}x)(C_s^1e^{\alpha_s y}+C_s^2e^{-\alpha_s y})$$

とおくことが出来る。

ここで

A_r, B_s, C_s ；振巾係数
β_r^{I}, β_s^{II} ；領域ⅠまたはⅡにおけるx方向波数
γ_r ；領域Ⅰにおけるy方向波数
α_s ；領域Ⅱにおけるy方向減衰定数.

ここで、領域Ⅰに対しては $y=0$, $x=\pm\frac{a}{2}$ での、領域Ⅱに対しては $y=l$, $x=\pm\frac{c}{2}$ での境界条件だけを考慮すると Eqs (1-1-1), (1-1-2) より各界成分は次の様に求まる。尚 γ_r, α_s は共に純実数、純虚数になり得るものとする。

[領域Ⅰ]

$$\left.\begin{aligned}
E_x^{I} &= -j\sum_{r=0} A_r \omega\mu_0 \gamma_r \begin{pmatrix}\sin\beta_r^{I}x\\ \cos\beta_r^{II}x\end{pmatrix}\sin\gamma_r y\\
E_y^{I} &= -j\sum_{r=0} A_r \omega\mu_0 \beta_r^{I}\begin{pmatrix}\cos\beta_r^{I}x\\ -\sin\beta_r^{I}x\end{pmatrix}\cos\gamma_r y\\
H_x^{I} &= j\sum_{r=0} A_r h \beta_r^{I}\begin{pmatrix}\cos\beta_r^{I}x\\ -\sin\beta_r^{I}x\end{pmatrix}\cos\gamma_r y\\
H_y^{I} &= -j\sum_{r=0} A_r h \gamma_r\begin{pmatrix}\sin\beta_r^{I}x\\ \cos\beta_r^{I}x\end{pmatrix}\sin\gamma_r y\\
H_z^{I} &= \sum_{r=0} A_r (h^2-k_0^2)\begin{pmatrix}\sin\beta_r^{I}x\\ \cos\beta_r^{I}x\end{pmatrix}\cos\gamma_r y
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}3)$$

[領域Ⅱ]

$$\left.\begin{aligned}
E_x^{II} &= -j\sum_{s=0} B_s \omega\mu_0 \alpha_s \begin{pmatrix}\sin\beta_s^{II}x\\ \cos\beta_s^{II}x\end{pmatrix}\sinh\alpha_s(l-y)\\
E_y^{II} &= -j\sum_{s=0} B_s \omega\mu_0 \beta_s^{II}\begin{pmatrix}\cos\beta_s^{II}x\\ -\sin\beta_s^{II}x\end{pmatrix}\cosh\alpha_s(l-y)\\
H_x^{II} &= \sum_{s=0} j B_s h \beta_s^{II}\begin{pmatrix}\cos\beta_s^{II}x\\ -\sin\beta_s^{II}x\end{pmatrix}\cosh\alpha_s(l-y)\\
H_y^{II} &= -\sum_{s=0} B_s h \alpha_s\begin{pmatrix}\sin\beta_s^{II}x\\ \cos\beta_s^{II}x\end{pmatrix}\sinh\alpha_s(l-y)\\
H_z^{II} &= \sum_{s=0} B_s (h^2-k_0^2)\begin{pmatrix}\sin\beta_s^{II}x\\ \cos\beta_s^{II}x\end{pmatrix}\cosh\alpha_s(l-y)
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}4)$$

ここで

$$\beta_r^{I}=\frac{r\pi}{a}\quad\begin{cases}r=\text{奇数の時 複号上段}\\ r=\text{偶数(0を含む)の時 複号下段}\end{cases}$$

$$\beta_s^{II}=\frac{s\pi}{c}\quad\begin{cases}s=\text{奇数の時 複号上段}\\ s=\text{偶数(0を含む)の時 複号下段}\end{cases}\qquad\Big\}\quad(1\text{-}1\text{-}5)$$

又 β_r^{I}, γ_r, β_s^{II}, α_s の間には次の関係がある。

$$\left.\begin{aligned}k_0^2&=h^2+\beta_r^{I2}+\gamma_r^2\\ k_0^2&=h^2+\beta_s^{II2}-\alpha_s^2\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}1\text{-}6)$$

1.1.2 TE^f mode

この場合はx-z面をOpen Circuitにした時であるから、Fig.3に示す構造のGuideの伝搬姿態を求めることになる。この姿態に対してはHzはEq.(1-1-2)の代りに

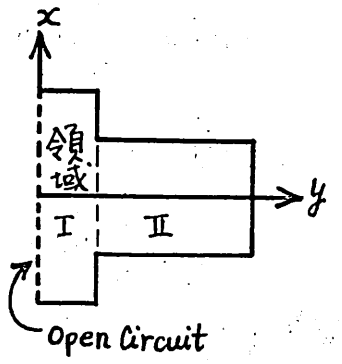


Fig. 3

$$\text{領域I};\ H_z^{I}=\sum_{r=0}^{\infty}(A_r^1\sin\beta_r^{I}x+A_r^2\cos\beta_r^{I}x)\cdot\sin\gamma_r y$$

$$\text{領域II};\ H_z^{II}=\sum_{s=0}^{\infty}(B_s^1\sin\beta_s^{II}x+B_s^2\cos\beta_s^{II}x)\cdot(C_s^1e^{\alpha_s y}+C_s^2e^{-\alpha_s y})\qquad\cdots\cdots(1\text{-}1\text{-}7)$$

とおくことが出来るからEq.(1-1-1)に代入して境界条件を考慮すると各界成分は次の様に求まる。

[領域I]

$$\left.\begin{aligned}E_x^{I}&=j\sum_{r=0}A_r\omega\mu_0\gamma_r\begin{pmatrix}\sin\beta_r^{I}x\\ \cos\beta_r^{I}x\end{pmatrix}\cos\gamma_r y\\ E_y^{I}&=-j\sum_{r=0}A_r\omega\mu_0\beta_r^{I}\begin{pmatrix}\cos\beta_r^{I}x\\ -\sin\beta_r^{I}x\end{pmatrix}\sin\gamma_r y\\ H_x^{I}&=j\sum_{r=0}A_r h\beta_r^{I}\begin{pmatrix}\cos\beta_r^{I}x\\ -\sin\beta_r^{I}x\end{pmatrix}\sin\gamma_r y\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}1\text{-}8)$$

$$\left.\begin{aligned} H_y^I &= -j\sum_{r=0} A_r h\gamma_r \begin{pmatrix}\sin\beta_r^I x\\ \cos\beta_r^I x\end{pmatrix}\cos\gamma_r y \\ H_z^I &= \sum_{r=0} A_r (h^2-k_0^2)\begin{pmatrix}\sin\beta_r^I x\\ \cos\beta_r^I x\end{pmatrix}\sin\gamma_r y \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}8)$$

[領域II]

$$\left.\begin{aligned} E_x^{II} &= -j\sum_{s=0} B_s \omega\mu_0\alpha_s \begin{pmatrix}\sin\beta_s^{II} x\\ \cos\beta_s^{II} x\end{pmatrix}\sinh\alpha_s(l-y) \\ E_y^{II} &= -j\sum_{s=0} B_s \omega\mu_0\beta_s^{II}\begin{pmatrix}\cos\beta_s^{II} x\\ -\sin\beta_s^{II} x\end{pmatrix}\cosh\alpha_s(l-y) \\ H_x^{II} &= j\sum_{s=0} B_s h\beta_s^{II}\begin{pmatrix}\cos\beta_s^{II} x\\ -\sin\beta_s^{II} x\end{pmatrix}\cosh\alpha_s(l-y) \\ H_y^{II} &= -j\sum_{s=0} B_s h\alpha_s\begin{pmatrix}\sin\beta_s^{II} x\\ \cos\beta_s^{II} x\end{pmatrix}\sinh\alpha_s(l-y) \\ H_z^{II} &= \sum_{s=0} B_s(h^2-k_0^2)\begin{pmatrix}\sin\beta_s^{II} x\\ \cos\beta_s^{II} x\end{pmatrix}\cosh\alpha_s(l-y) \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}9)$$

1.1.3 TM^s mode

この場合には $H_z=0$ であり，境界条件は Fig. 2 のそれと同じだから，前述と同様にして各界成分は次式で与えられる。

[領域I]

$$\left.\begin{aligned} E_x^I &= -j\sum_{r=1} A_r h\beta_r^I \begin{pmatrix}\sin\beta_r^I x\\ -\cos\beta_r^I x\end{pmatrix}\sin\gamma_r y \\ E_y^I &= j\sum_{r=1} A_r h\gamma_r \begin{pmatrix}\cos\beta_r^I x\\ \sin\beta_r^I x\end{pmatrix}\cos\gamma_r y \\ E_z^I &= \sum_{r=1} A_r (h^2-k_0^2)\begin{pmatrix}\cos\beta_r^I x\\ \sin\beta_r^I x\end{pmatrix}\sin\gamma_r y \\ H_x^I &= -j\sum_{r=1} A_r \omega\varepsilon_0\gamma_r \begin{pmatrix}\cos\beta_r^I x\\ \sin\beta_r^I x\end{pmatrix}\cos\gamma_r y \\ H_y^I &= -j\sum_{r=1} A_r \omega\varepsilon_0\beta_r^I \begin{pmatrix}\sin\beta_r^I x\\ -\cos\beta_r^I x\end{pmatrix}\sin\gamma_r y \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}10)$$

[領域 II]

$$
\left.\begin{aligned}
E_x^{II} &= -j\sum_{s=1} B_s h \beta_s^{II} \begin{pmatrix}\sin\beta_s^{II}x\\ -\cos\beta_s^{II}x\end{pmatrix} \sinh\alpha_s(l-y)\\
E_y^{II} &= -j\sum_{s=1} B_s h \alpha_s \begin{pmatrix}\cos\beta_s^{II}x\\ \sin\beta_s^{II}x\end{pmatrix} \cosh\alpha_s(l-y)\\
E_z^{II} &= \sum_{s=1} B_s (h^2-k_0^2) \begin{pmatrix}\cos\beta_s^{II}x\\ \sin\beta_s^{II}x\end{pmatrix} \sinh\alpha_s(l-y)\\
H_x^{II} &= j\sum_{s=1} B_s \omega\varepsilon_0 \alpha_s \begin{pmatrix}\cos\beta_s^{II}x\\ \sin\beta_s^{II}x\end{pmatrix} \cosh\alpha_s(l-y)\\
H_y^{II} &= -j\sum_{s=1} B_s \omega\varepsilon_0 \beta_s^{II} \begin{pmatrix}\sin\beta_s^{II}x\\ -\cos\beta_s^{II}x\end{pmatrix} \sinh\alpha_s(l-y)
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}11)
$$

ここで

$$
\left.\begin{aligned}
\beta_r^{I} &= \frac{r\pi}{a} \begin{cases} r=\text{奇数の時 複号上段}\\ r=\text{偶数(0を含まず)の時 複号下段}\end{cases}\\
\beta_s^{II} &= \frac{s\pi}{c} \begin{cases} s=\text{奇数の時 複号上段}\\ s=\text{偶数(0を含まず)の時 複号下段}\end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}12)
$$

1.1.4 TM^f mode

この場合，境界条件は Fig. 3 のそれと同じだから，同様にして各界成分は次の様になる。

[領域 I]

$$
\left.\begin{aligned}
E_x^{I} &= -j\sum_{r=1} A_r h \beta_r^{I} \begin{pmatrix}\sin\beta_r^{I}x\\ -\cos\beta_r^{I}x\end{pmatrix} \cos\gamma_r y\\
E_y^{I} &= -j\sum_{r=1} A_r h \gamma_r \begin{pmatrix}\cos\beta_r^{I}x\\ \sin\beta_r^{I}x\end{pmatrix} \sin\gamma_r y\\
E_z^{I} &= \sum_{r=1} A_r (h^2-k_0^2) \begin{pmatrix}\cos\beta_r^{I}x\\ \sin\beta_r^{I}x\end{pmatrix} \cos\gamma_r y\\
H_x^{I} &= j\sum_{r=1} A_r \omega\varepsilon_0 \gamma_r \begin{pmatrix}\cos\beta_r^{I}x\\ \sin\beta_r^{I}x\end{pmatrix} \sin\gamma_r y\\
H_y^{I} &= -j\sum_{r=1} A_r \omega\varepsilon_0 \beta_r^{I} \begin{pmatrix}\sin\beta_r^{I}x\\ -\cos\beta_r^{I}x\end{pmatrix} \cos\gamma_r y
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}13)
$$

[領域II]

$$
\left.
\begin{aligned}
E_x^{II} &= -j\sum_{s=1} B_s h\beta_s^{II} \begin{pmatrix} \sin\beta_s^{II}x \\ -\cos\beta_s^{II}x \end{pmatrix} \sinh\alpha_s(l-y) \\
E_y^{II} &= -j\sum_{s=1} B_s h\alpha_s \begin{pmatrix} \cos\beta_s^{II}x \\ \sin\beta_s^{II}x \end{pmatrix} \cosh\alpha_s(l-y) \\
E_z^{II} &= \sum_{s=1} B_s (h^2-k_0^2) \begin{pmatrix} \cos\beta_s^{II}x \\ \sin\beta_s^{II}x \end{pmatrix} \sinh\alpha_s(l-y) \\
H_x^{II} &= j\sum_{s=1} B_s \omega\varepsilon_0\alpha_s \begin{pmatrix} \cos\beta_s^{II}x \\ \sin\beta_s^{II}x \end{pmatrix} \cosh\alpha_s(l-y) \\
H_y^{II} &= -j\sum_{s=1} B_s \omega\varepsilon_0\beta_s^{II} \begin{pmatrix} \sin\beta_s^{II}x \\ -\cos\beta_s^{II}x \end{pmatrix} \sinh\alpha_s(l-y)
\end{aligned}
\right\} \quad (1\text{-}1\text{-}14)
$$

1.2 特性方程式

1.1で求めた各modeの界成分は領域IとIIの境界面($y=d$)において連続条件を満足しなければならない。今TE^s modeを例にとって考えるとHzとExの連続の連続条件を与えればよい。* ただしFig.4に示すごとく$y=d$上の境界面をSAとSBに区別すれば，上述のことはSA上で成立すべきものであるから式(1-1-3),(1-1-4)よりSA上で次式が成立する。

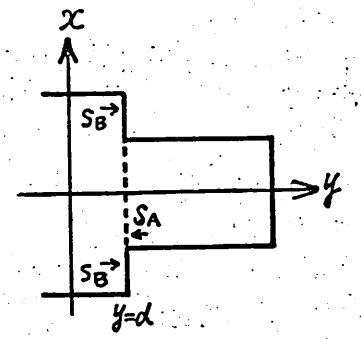


Fig.4

---

*

この場合，各界成分は式(1-1-1)で与えられる様に全てHzで表わされる。従ってSA上でHzが連続であれば SA上で$\frac{\partial H_z}{\partial x}$は当然連続であるから，他に要求されるのは$\frac{\partial H_z}{\partial y}$，いいかえるとExまたはHyの連続である。さらに別の言方をすると，SA上で領域I及びIIをみたすインピーダンスが大きさ等しく逆符号(支配条件)となる条件である。

$$\sum_{r=0}{}' A_r \cos\gamma_r d \cdot \cos\frac{r\pi}{a}x + \sum_{r=1} A_r \cos\gamma_r d \cdot \sin\frac{r\pi}{a}x =$$

$$= \sum_{s=0}{}' B_s \cosh\alpha_s(\ell-d)\cdot\cos\frac{s\pi}{c}x + \sum_{s=1} B_s \cosh\alpha_s(\ell-d)\cdot\sin\frac{s\pi}{c}x$$

---- (1-2-1)

$$\sum_{r=0}{}' A_r\gamma_r \sin\gamma_r d \cdot \cos\frac{r\pi}{a}x + \sum_{r=1} A_r\gamma_r \sin\gamma_r d \cdot \sin\frac{r\pi}{a}x$$

$$= \sum_{s=0}{}' B_s\alpha_s \sinh\alpha_s(\ell-d)\cdot\cos\frac{s\pi}{c}x + \sum_{s=1} B_s\alpha_s \sinh\alpha_s(\ell-d)\cdot\sin\frac{s\pi}{c}x$$

---- (1-2-2)

但し Σ' はrもsの0を含む偶数のものの和であり、Σ はrもsの奇数のものの和を示すものとする。上式を簡単にするため 先ず Eq (1-2-1) に於いて

$$\sin\frac{r\pi}{a}x = \sum_{s=1} U_{rs} \sin\frac{s\pi}{c}x \quad \text{on } S_A \quad (r,s\text{は奇数}) \tag{1-2-3}$$

$$\cos\frac{r\pi}{a}x = \sum_{s=0}{}' U'_{rs} \cos\frac{s\pi}{c}x \quad \text{on } S_A \quad (r,s\text{は0を含む偶数})$$

と展開すると Eq.(1-2-1)は

$$\sum_{s=0}{}' B_s \cosh\alpha_s(\ell-d)\cos\frac{s\pi}{c}x + \sum_{s=1} B_s \cosh\alpha_s(\ell-d)\sin\frac{s\pi}{c}x =$$

$$= \sum_{r=0}{}' A_r \cos\gamma_r d \sum_{s=0}{}' U'_{rs} \cos\frac{s\pi}{c}x + \sum_{r=1} A_r \cos\gamma_r d \sum_{s=1} U_{rs} \sin\frac{s\pi}{c}x \quad \text{on } S_A \tag{1-2-4}$$

となる。今 y-z面に関して H_z が奇関数分布をする姿態の特性を調べることにする。従って Eq. (1-2-4) の両辺に $\sin\frac{s\pi}{c}x$ (sは奇数) をかけて S_A 上で積分すると 直交性より

$$B_s \cosh\alpha_s(\ell-d) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r U_{rs} \cos\gamma_r d \tag{1-2-5}$$

(r, s は奇数)

となる。ここで U_{rs} は Eq. (1-2-3) より

$$U_{rs}=\frac{2}{c}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\sin\frac{s\pi}{c}x\cdot\sin\frac{r\pi}{a}x\,dx=\frac{4r\pi}{ac\left[\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2-\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right]}\cos\frac{rc\pi}{2a}\cdot\sin\frac{s\pi}{2}\qquad(1\text{-}2\text{-}6)$$

である。次に Eq.(1-2-2) の E_x に関する連続では、E_x は S_B 上では零になるはずだから、Eq.(1-2-2) は次の様に書き直してもよい。

$$\sum_{r=0}{}'A_r\gamma_r\sin\gamma_r d\cdot\cos\frac{r\pi}{a}x+\sum_{r=1}A_r\gamma_r\sin\gamma_r d\cdot\sin\frac{r\pi}{a}x=$$

$$=\begin{cases}\sum_{s=0}{}'B_s\alpha_s\sinh\alpha_s(l-d)\cos\frac{s\pi}{c}x+\sum_{s=1}B_s\alpha_s\sinh\alpha_s(l-d)\sin\frac{s\pi}{c}x & \text{on } S_A\\ 0 & \text{on } S_B\end{cases}\qquad(1\text{-}2\text{-}7)$$

ここで

$$\left.\begin{array}{ll}\sin\frac{s\pi}{c}x & \text{on } S_A\\ 0 & \text{on } S_B\end{array}\right\}=\sum_{r=1}W_{sr}\sin\frac{r\pi}{a}x\qquad(r:\text{sは奇数})$$

$$\left.\begin{array}{ll}\cos\frac{s\pi}{c}x & \text{on } S_A\\ 0 & \text{on } S_B\end{array}\right\}=\sum_{r=0}{}'W'_{sr}\cos\frac{r\pi}{a}x\qquad(r:\text{sは0を含む偶数})\qquad(1\text{-}2\text{-}8)$$

と展開すると Eq.(1-2-7) は

$$\sum_{r=0}{}'A_r\gamma_r\sin\gamma_r d\cdot\cos\frac{r\pi}{a}x+\sum_{r=1}A_r\gamma_r\sin\gamma_r d\cdot\sin\frac{r\pi}{a}x=$$

$$=\sum_{s=0}{}'B_s\alpha_s\sinh\alpha_s(l-d)\sum_{r=0}{}'W'_{sr}\cos\frac{r\pi}{a}x+\sum_{s=1}B_s\alpha_s\sinh\alpha_s(l-d)\sum_{r=1}W_{sr}\sin\frac{r\pi}{a}x$$

$$\text{on } (S_A+S_B)\qquad\cdots\cdots\qquad(1\text{-}2\text{-}9)$$

となる。従って上式の両辺に $\sin\frac{r\pi}{a}x$ (r は奇数) をかけて (S_A+S_B) 上で積分すると、直交性を利用して

$$A_r \gamma_r \sin\gamma_r d = \sum_{s=1} B_s \alpha_s W_{sr} \sinh\alpha_s(l-d) \qquad (1\text{-}2\text{-}10)$$

と得る。但し

$$W_{sr} = \frac{2}{a}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \sin\frac{s\pi}{c}x \cdot \sin\frac{r\pi}{a}x\, dx = \frac{4r\pi}{a^2\left[\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2+\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right]} \cos\frac{rc\pi}{2a} \sin\frac{s\pi}{2} \qquad (1\text{-}2\text{-}11)$$

である。従って Eqs. (1-2-5), (1-2-10) より

$$A_r \gamma_r \sin\gamma_r d = \sum_{s=1}\sum_{t=1} A_t U_{ts} W_{sr} \alpha_s \cos\gamma_t d \cdot \tanh\alpha_s(l-d) \qquad (1\text{-}2\text{-}12)$$

が導けるから、界が零とならない条件として

$$\begin{vmatrix} -\gamma_1 \sin\gamma_1 d + \cos\gamma_1 d \sum_{s=1} u_{1s} w_{s1} \alpha_s \tanh\alpha_s(l-d), & \cos\gamma_3 d \sum_{s=1} u_{3s} w_{s1} \alpha_s \tanh\alpha_s(l-d), \cdots \\ \cos\gamma_1 d \sum_{s=1} u_{1s} w_{s3} \alpha_s \tanh\alpha_s(l-d), & -\gamma_3 d \sin\gamma_3 d + \cos\gamma_3 d \sum_{s=1} u_{3s} w_{s3} \alpha_s \tanh\alpha_s(l-d), \cdots \\ \cos\gamma_1 d \sum_{s=1} u_{1s} w_{s5} \alpha_s \tanh\alpha_s(l-d), & \cos\gamma_3 d \sum_{s=1} u_{3s} w_{s5} \alpha_s \tanh\alpha_s(l-d), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots, \cdots\cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (1\text{-}2\text{-}13)$$

を得る。これがいわゆる伝送特性を決定する特性方程式であって、この式と Eq.(1-1-6) とから解を求めることが出来る。

以上の解析でもわかる様に r 及び s の偶数のものと、奇数のものの成分の和で表わせる界は互に直交しているから、以下では奇数のものの成分で表わされる姿態を odd mode の意で脚号として o を用い、各々 TE_o^s, TE_o^t, TM_o^s, TM_o^t mode と称し、偶数のものの成分で表わされる姿態と各々 TE_e^s, TE_e^t, TM_e^s, TM_e^t mode と分類する。従って Eq. (1-2-13) は TE_o^s mode の特性方程式を表わしている。

さて Fig. 1 で示した Close Grooved Guide では後程わかるが矩型導波管から容易に励振出来、しかも損失特性で興味あるふるまいをする TE_o^s mode

について、詳しく検討を加えてみる。
伝送特性を求めるため Eq.(1-2-13) を解かねばならないが、先ず第1近似として、領域 I, II に於いて $\gamma=s=1$ のみを取ってみると、Eq.(1-2-13) より次式を得る。

$$\delta_1 d \tan \delta_1 d = u_{11} w_{11} \alpha_1 d \tanh \alpha_1 (l-d) \qquad (1\text{-}2\text{-}14)$$

この式で $l \to \infty$ とすると明らかに、この様な Guide は先に提案された[1] 開放型の Grooved Guide の、対応する mode の特性方程式に一致していることが分かる。
ここでは固有値を求めるに際し、さらに高次の近似で求めておくために Eq.(1-2-13) で $\gamma=s=3$ までを考慮して第2近似解を求めることにした。この様にすると特性方程式は次の様になる。

$$\delta_1 d \tan \delta_1 d = K_{11} - \frac{K_{13} \cdot K_{31}}{K_{33} - \delta_3 d \tan \delta_3 d} \qquad (1\text{-}2\text{-}15)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} K_{11} &= \sum_{s=1}^{3} u_{1s} w_{s1} \alpha_s d \tanh \alpha_s (l-d) \\ K_{13} &= \sum_{s=1}^{3} u_{1s} w_{33} \alpha_s d \tanh \alpha_s (l-d) \\ K_{31} &= \sum_{s=1}^{3} u_{3s} w_{s1} \alpha_s d \tanh \alpha_s (l-d) \\ K_{33} &= \sum_{s=1}^{3} u_{3s} w_{33} \alpha_s d \tanh \alpha_s (l-d) \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}2\text{-}16)$$

上式は当然のことながら Eq.(1-2-14) に若干の補正項が附加された型になっている。尚 Eq.(1-1-6) では

$$\left.\begin{aligned} k_0^2 &= h^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 + \gamma_1^2 \\ k_0^2 &= h^2 + \left(\frac{3\pi}{d}\right)^2 + \gamma_3^2 \\ k_0^2 &= h^2 + \left(\frac{s\pi}{c}\right)^2 - \alpha_s^2 \qquad (s=1,3) \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}2\text{-}17)$$

が成立しているから、δ_3, α_s $(s=1,3)$ は γ_1 を用いて次式の様に書ける。

$$\left.\begin{aligned}\gamma_3 &= \sqrt{\gamma_1^2 - 8\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \\ \alpha_S &= \sqrt{\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \gamma_1^2}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}2\text{-}18)$$

従って Eqs. (1-2-15), (1-2-18) を連立させて，例えば γ_1 が求まれば Eq. (1-2-17) より 固有値 $k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ が求められることになる。
ここで以下の都合上，次の如き略記号を用いることにする。つまり

$$\left.\begin{aligned}\gamma_r d &= X_r \\ \alpha_s d &= Y_s \\ \frac{l}{d} &= R, \quad \frac{c}{a} = P, \quad \frac{d}{a} = Q\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}2\text{-}19)$$

とすると Eqs. (1-2-15), (1-2-16) 及び (1-2-18) は次の様に表し得る。

$$X_1 \tan X_1 = K_{11} - \frac{K_{13} \cdot K_{31}}{K_{33} - X_3 \tan X_3} \qquad (1\text{-}2\text{-}20)$$

$$\left.\begin{aligned}X_3 &= \sqrt{X_1^2 - 8(\pi Q)^2} \\ Y_S &= \sqrt{(\pi Q)^2\left(\frac{S^2}{P^2} - 1\right) - X_1^2}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}2\text{-}21.a)$$

$$\left.\begin{aligned}K_{11} &= \sum_{S=1}^{3} U_{1S} W_{S1} Y_S \tanh Y_S (R-1) \\ K_{13} &= \sum_{S=1}^{3} U_{1S} W_{S3} Y_S \tanh Y_S (R-1) \\ K_{31} &= \sum_{S=1}^{3} U_{3S} W_{S1} Y_S \tanh Y_S (R-1) \\ K_{33} &= \sum_{S=1}^{3} U_{3S} W_{S3} Y_S \tanh Y_S (R-1)\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}2\text{-}21.b)$$

今，Guide の型状を定めると，Parameter, P, Q, R は定まるから，各 P, Q, R に対して特性方程式 Eq. (1-2-20) を電子計算機で求めることが出来る。実際に解いた結果を Fig. 5 ~ Fig. 9 に示している。同様な方法で他 mode についても特性方程式が求められる。結果は Appendix I を参照されたい。

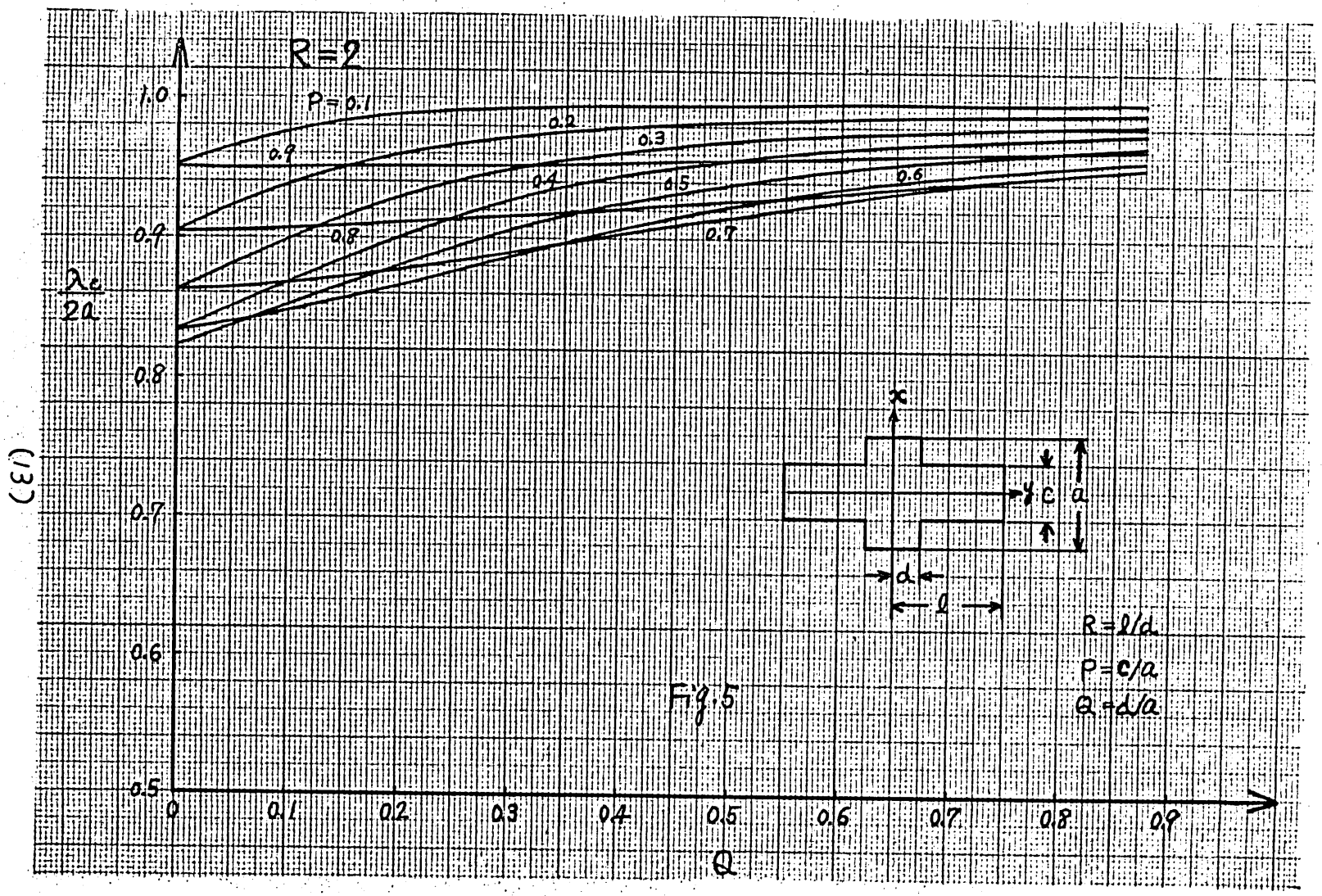

R=2
P=0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
λe/2a
(ε1)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Q
x
y
c
a
d
l
R = l/d
P = c/a
Q = d/a

Fig.5

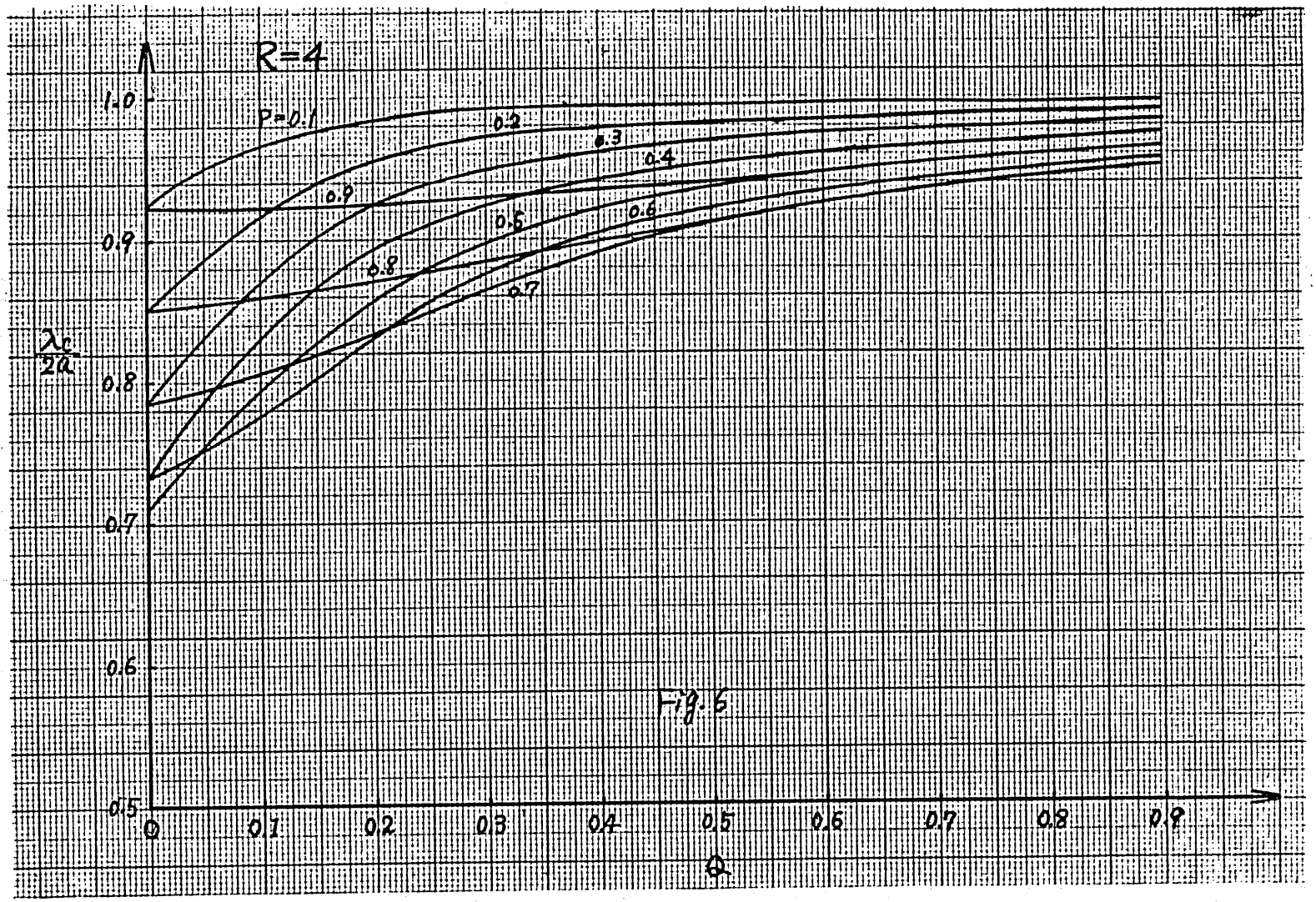

R=4
P=0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
$\frac{\lambda_c}{2a}$
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Q

Fig. 6

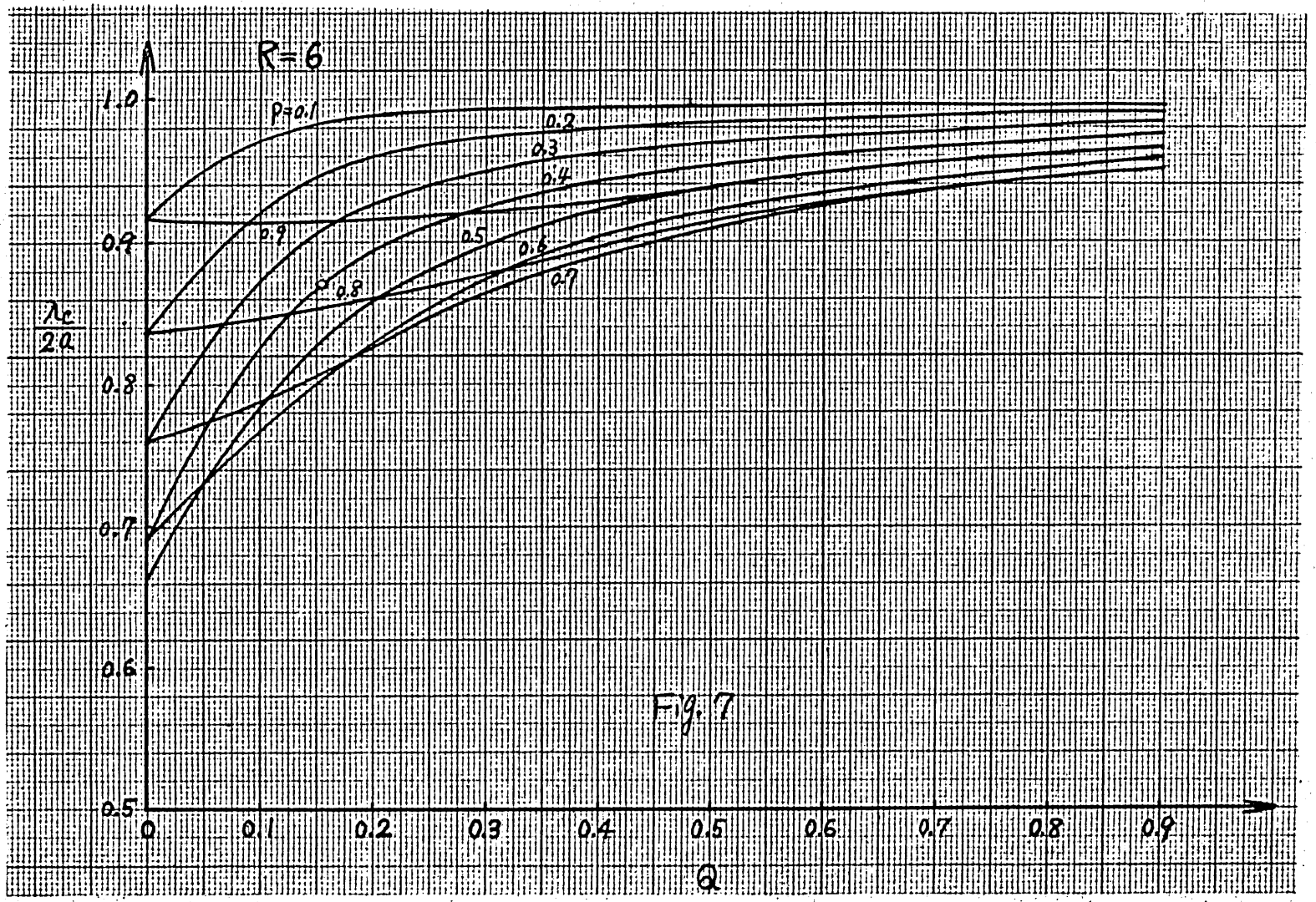

R=6
p=0.1
0.2
0.3
0.4
0.9
0.5
0.6
0.7
0.8
λc/2a
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
a

Fig. 7

(51)

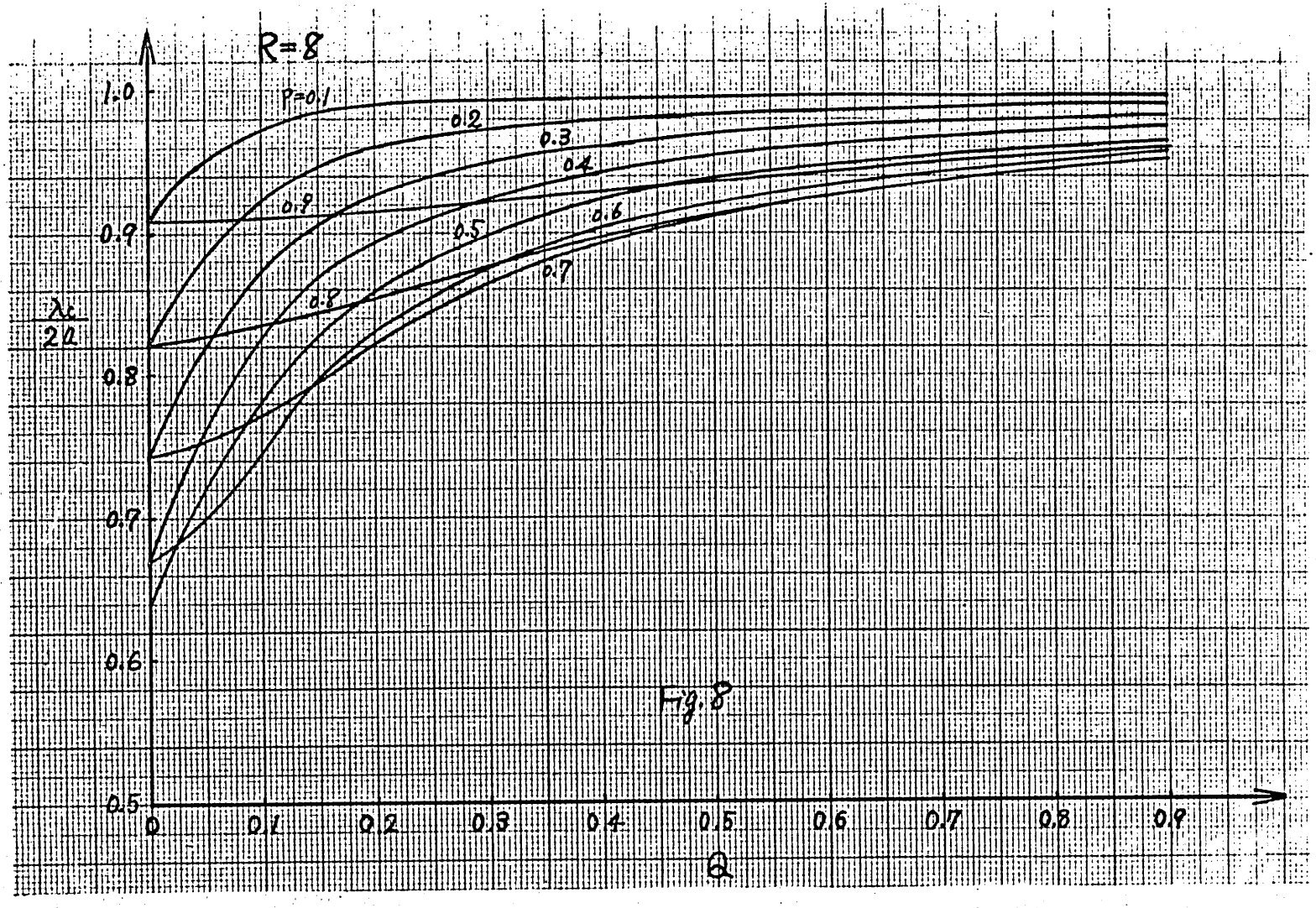

R=8
P=0.1
0.2
0.3
0.4
0.6
0.7
0.8
0.9
0.5
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
λc/2a
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Q

Fig. 8

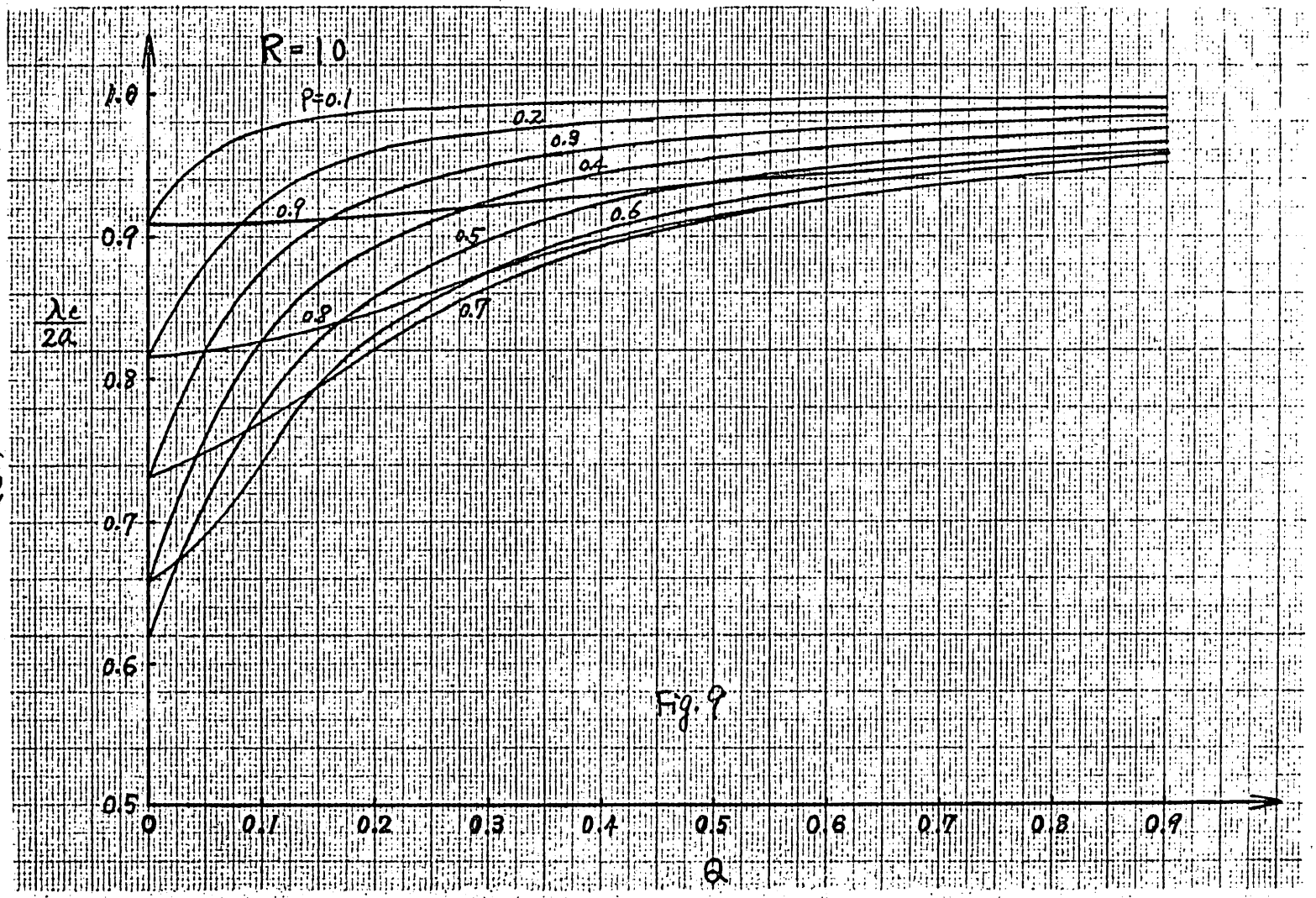

R=10
ρ=0.1
0.2
0.3
0.4
0.6
0.5
0.7
0.8
0.9
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
λe/2a
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
θ

Fig. 9

(L1)

ここで検討を要するのは Parameter である $R(=\frac{l}{d})$, $P(=\frac{c}{a})$ を一定に保って $Q=(\frac{d}{a})$ を零に近づけた時には、開放型の時と異なり、Grooved Guide の型状を保って Q が零に近づくから、$Q=0$ の極限に於ける λ_c の値は次の様に考えるべきである。つまり Q が零に近づけば $R=$一定を保って l, d が小さくなっていき、y 方向の壁の変化がなくなって一種の Ridge Guide（正しくは逆 Ridge Guide）に於ける TE_{10} mode の λ_c の値に近づいていく。この様な考察から求めた結果が Fig.5 ~ Fig.9 の $Q=0$ 軸上の各値になっている。詳しくは Appendix II を参照されたい。

1.3 伝送電力及び減衰定数

今、Fig.10のごとく領域 I 及び II で運ばれる伝送電力を各々 P_1, P_2 とし、図示のごとく壁面損失を各々 W_A, W_B, W_C, W_D と記すことにする。

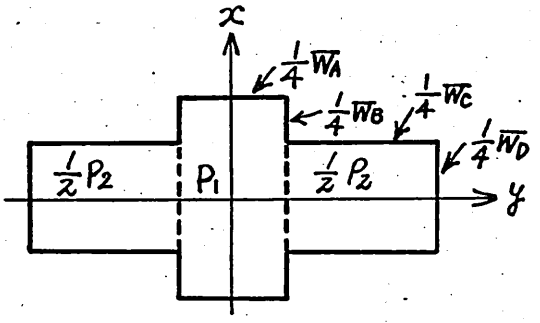


Fig.10

ここで問題になるのは、r, s のどこまでの値でもって伝送損失を評価するかである。ここではまず第1段階として $r=s=3$ までを考慮して以下の論議を進めていくことにする。しかる時には Eqs.(1-1-3), (1-1-4) より * 印は Complex Conjugate を表わすものとして（Re は実数部を示す記号とする）

$$P_1 = 2\mathrm{Re}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{d}(E_x^{I}\cdot H_y^{I*} - E_y^{I}\cdot H_x^{I*})\,dx\,dy =$$

$$= \frac{w\mu_0 h a d}{4}\sum_{r=1}^{3} A_r^2\left[\sigma_p^2\left(1-\frac{\sin 2\sigma_r d}{2\sigma_r d}\right)+\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\left(1+\frac{\sin 2\sigma_r d}{2\sigma_r d}\right)\right] \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

$$P_2 = 2\mathrm{Re}\int_0^{\frac{c}{2}}\int_d^{l}(E_x^{II}\cdot H_y^{II*} - E_y^{II}\cdot H_x^{II*})\,dx\,dy =$$

$$= \frac{w\mu_0 h c(l-d)}{4}\sum_{s=1}^{3} B_s^2\left\{\alpha_s^2\left[\frac{\sinh 2\alpha_s(l-d)}{2\alpha_s(l-d)}-1\right]+\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2\left[\frac{\sinh 2\alpha_s(l-d)}{2\alpha_s(l-d)}+1\right]\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

と求められる。又壁面損失に対しては

$$W_A = 2R_S \int_0^d \left[|H_z^I|^2 + |H_y^I|^2\right]_{x=\frac{a}{2}} dy =$$

$$= R_S d (h^2 - k_0^2)^2 \left[\sum_{r=1}^{3} A_r^2 \left(1 + \frac{\sin 2\sigma_r d}{2\sigma_r d}\right) + 2A_3 \frac{\sigma_1 d \sin\sigma_1 d \cdot \cos\sigma_3 d - \sigma_3 d \sin\sigma_3 d \cdot \cos\sigma_1 d}{(\sigma_1 d)^2 - (\sigma_3 d)^2}\right] +$$

$$+ R_S d h^2 \left[\sum_{r=1}^{3} A_r^2 \sigma_r^2 \left(1 - \frac{\sin 2\sigma_r d}{2\sigma_r d}\right) + 2A_3 \sigma_1 \sigma_3 \frac{\sigma_3 d \sin\sigma_1 d \cdot \cos\sigma_3 d - \sigma_1 d \sin\sigma_3 d \cdot \cos\sigma_1 d}{(\sigma_1 d)^2 - (\sigma_3 d)^2}\right].$$

(1-3-3)

$$W_B = 2R_S \int_{\frac{c}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[|H_z^I|^2 + |H_x^I|^2\right]_{y=d} dx =$$

$$= \frac{R_S a}{2\pi} (h^2 - k_0^2)^2 \left\{\sum_{r=1}^{3} A_r^2 \cos^2\sigma_r d \left[\left(1 - \frac{c}{a}\right)\pi + \frac{1}{r} \sin\frac{rc\pi}{a}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{A_3}{2} \cos\sigma_1 d \cos\sigma_3 d \left(3 \sin\frac{c\pi}{2a} \cdot \cos\frac{3c\pi}{2a} - \sin\frac{3c\pi}{2a} \cos\frac{c\pi}{2a}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{R_S a}{2\pi} h^2 \left\{\sum_{r=1}^{3} A_r^2 \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2 \cos^2\sigma_r d \left[\left(1 - \frac{c}{a}\right)\pi - \frac{1}{r} \sin\frac{rc\pi}{a}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3A_3}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\sigma_1 d \cos\sigma_3 d \left(\sin\frac{c\pi}{2a} \cdot \cos\frac{3c\pi}{2a} - 3 \sin\frac{3c\pi}{2a} \cdot \cos\frac{c\pi}{2a}\right)\right\}$$

(1-3-4)

$$W_C = 2R_S \int_d^l \left[|H_z^{II}|^2 + |H_y^{II}|^2\right]_{x=\frac{c}{2}} dy =$$

$$= R_S (l-d)(h^2 - k_0^2)^2 \left\{\sum_{s=1}^{3} B_s^2 \left[\frac{\sinh 2\alpha_s (l-d)}{2\alpha_s (l-d)} + 1\right] + \right.$$

$$\left. + 2B_1 B_3 \cdot \frac{[\alpha_3 (l-d) \cosh\alpha_1 (l-d) \cdot \sinh\alpha_3 (l-d) - \alpha_1 (l-d) \sinh\alpha_1 (l-d) \cdot \cosh\alpha_3 (l-d)]}{[\alpha_3 (l-d)]^2 - [\alpha_1 (l-d)]^2}\right\} +$$

$$+R_s(\ell-d)h^2\left\{\sum_{s=1}^{3}B_s^2\alpha_s^2\left[\frac{\sinh 2\alpha_s(\ell-d)}{2\alpha_s(\ell-d)}-1\right]+\right.$$

$$\left.+2B_1B_3\alpha_1\alpha_3\cdot\frac{[\alpha_3(\ell-d)\cosh\alpha_3(\ell-d)\cdot\sinh\alpha_1(\ell-d)-\alpha_1(\ell-d)\sinh\alpha_3(\ell-d)\cdot\cosh\alpha_1(\ell-d)]}{[\alpha_3(\ell-d)]^2-[\alpha_1(\ell-d)]^2}\right\} \quad (1-3-5)$$

$$\overline{W}_D=2R_s\int_0^{\frac{c}{2}}[|H_z^{II}|^2+|H_x^{II}|^2]_{y=\ell}=\frac{R_sc}{2}\sum_{s=1}^{3}B_s^2\left[(h^2-k_0^2)^2+h^2\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2\right] \quad (1-3-6)$$

ただし　R_s = 表面抵抗 $=\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}$

σ = 壁面の Conductivity.

A_r, B_s = 振巾係数

従って Guide の減衰定数 α_t は

$$\alpha_t=\frac{\overline{W}}{2P}=\frac{\overline{W}_A+\overline{W}_B+\overline{W}_C+\overline{W}_D}{2(P_1+P_2)}=\alpha_A+\alpha_B+\alpha_C+\alpha_D \quad (1-3-7)$$

から求められる。ここで　$P=P_1+P_2$

$$\alpha_n=\frac{\overline{W}_n}{2P}\quad(n=A,B,C,D)$$

1.4 振巾係数

以上の様にして各 mode の伝送特性が求め得る訳であるが、ここで必要とするのは、r, s の各々の値に対応する成分の振巾関係である。ここでも $r=s=3$ までの項を考慮して Eqs. (1-2-5), (1-2-10), つまり

$$B_s\cosh\alpha_s(\ell-d)=\sum_{r=1}^{3}A_r U_{rs}\cos\gamma_r d \quad (1-4-1)$$

$$A_r\gamma_r\sin\gamma_r d=\sum_{s=1}^{3}B_s\alpha_s W_{sr}\sinh\alpha_s(\ell-d) \quad (1-4-2)$$

から A_r. B_s 間の関係を求めることにする．Eq.(1-2-19) で導入した記号を用いれば Eq. (1-4-1) より)

$$B_S = \frac{\sum_{r=1}^{3} A_r U_{rs} \cos X_r}{\cosh \gamma_s (R-1)} \qquad (1-4-3)$$

であるから Eq. (1-4-2) に代入すると

$$A_1 X_1 \sin X_1 = \sum_{s=1}^{3} W_{s1} \gamma_s \tanh \gamma_s (R-1) \sum_{r=1}^{3} A_r U_{rs} \cos X_r \qquad (1-4-4)$$

$$A_3 X_3 \sin X_3 = \sum_{s=1}^{3} W_{s3} \gamma_s \tanh \gamma_s (R-1) \sum_{r=1}^{3} A_r U_{rs} \cos X_r \qquad (1-4-5)$$

今 $A_1 = 1$ と規準化しておけば Eq. (1-4-4) より)

$$A_3 = \frac{X_1 \sin X_1 - \cos X_1 \sum_{s=1}^{3} U_{1s} W_{s1} \gamma_s \tanh \gamma_s (R-1)}{\cos X_3 \sum_{s=1}^{3} U_{3s} W_{s1} \gamma_s \tanh \gamma_s (R-1)} \qquad (1-4-6)$$

又 Eq. (1-4-5) より)

$$A_3 = \frac{\cos X_1 \sum_{s=1}^{3} U_{1s} W_{s3} \gamma_s \tanh \gamma_s (R-1)}{X_3 \sin X_3 - \cos X_3 \sum_{s=1}^{3} U_{3s} W_{s3} \gamma_s \tanh \gamma_s (R-1)} \qquad (1-4-7)$$

と求まる。

ここで Eq. (1-2-20) で求めた特性方程式は Eq. (1-4-6) と Eq. (1-4-7) で与える A_3 が等しいための条件ともなっているから．X_r. γ_s が特性方程式の解から得られているものならば当然 Eq. (1-4-6) と Eq. (1-4-7) は等しいから．以下ではどちらか一方を考えておくだけで充分である．今 Eq. (1-4-6) で A_3 が求められたならば Eq. (1-4-3) より B_1, B_3 は

$$B_1 = \frac{1}{\cosh \gamma_1 (R-1)} \left[U_{11} \cos X_1 + A_3 U_{31} \cos X_3 \right] \qquad (1-4-8.a)$$

$$B_3 = \frac{1}{\cosh \gamma_3 (R-1)} \left[u_{13} \cos X_1 + A_3 u_{33} \cos X_3 \right] \qquad (1\text{-}4\text{-}8.b)$$

として 求められることになる。

ここで u_{rs}, w_{sr} は Eq.(1-2-19) の記号を用いれば, Eqs.(1-2-6), (1-2-11) より

$$\left.\begin{aligned} u_{rs} &= \frac{4rp}{\pi(S^2 - p^2 r^2)} \cos \frac{rp\pi}{2} \cdot \sin \frac{s\pi}{2} \\ w_{sr} &= p u_{rs} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}4\text{-}9)$$

である。

2. 伝送特性計算及び実験

2.1. 試作導波管

実験的に前述した特性を検討するために、mm波帯(50Gc帯)で実験することを前提に、Fig. 11に示す様なClose Grooved Guideを真鍮ブロックからけづり出して製作した。色々な構造変化に対して特性を検討出来るが、ここではFig. 11に於いて $a=1cm$, $c=0.7cm$ ($P=0.7$), $l=1cm$ と固定して、Groove中 d を変化した時の特性について検討することにした。

2.2 試作導波管に対する特性計算.

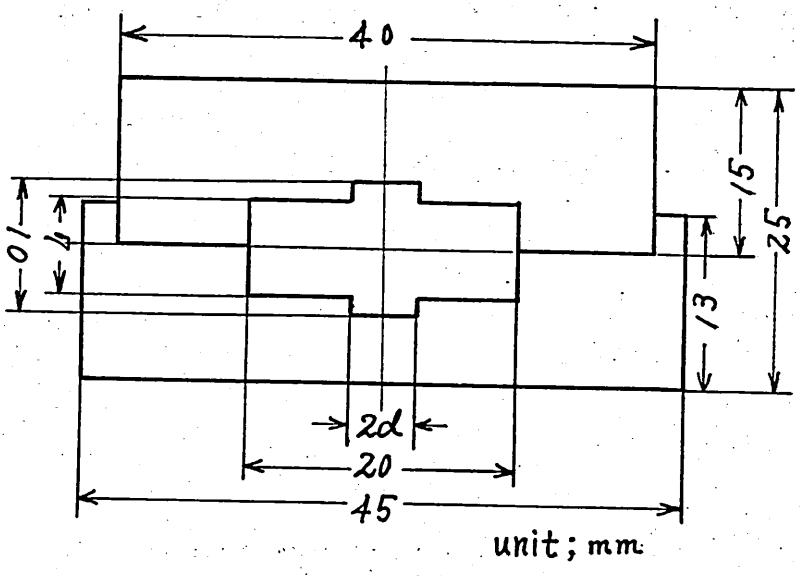


Fig. 11

Fig. 11の様に寸法、構造が決定し、このGuideに$TE_{10}^{\square}$ modeから容易に励振出来るTE_{0}^{S} modeを伝送させるとすれば、Eq. (1-2-20)より、つまりFig. 5～Fig. 9より遮断波長が各Groove中 d に対して求められ、Fig. 12(a)に示す様になっている。尚今の場合、dは0～1cmの間を変り得るが、$d=1cm$ 附近では変分法で求めた遮断波長の変化(Appendix III)を念のため同図に点線で記入しておいた。これより遮断周波数を求めるとFig. 12(b)の様に変化しており、管内波長はFig. (13)の変化を示している。

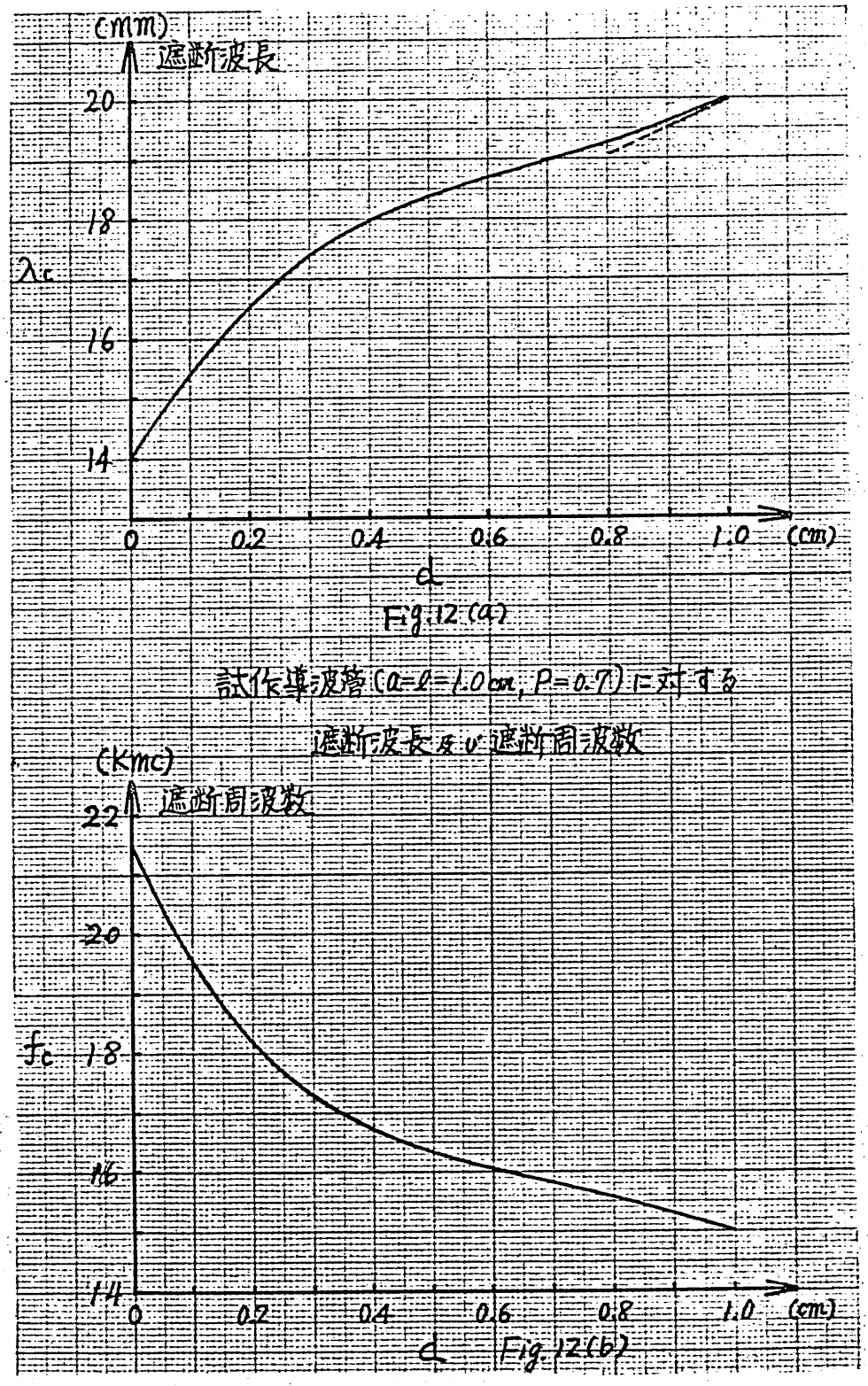


Fig.12 (a)

試作導波管 ($a=\ell=1.0$ cm, $P=0.7$) に対する

遮断波長及び遮断周波数

Fig.12(b)

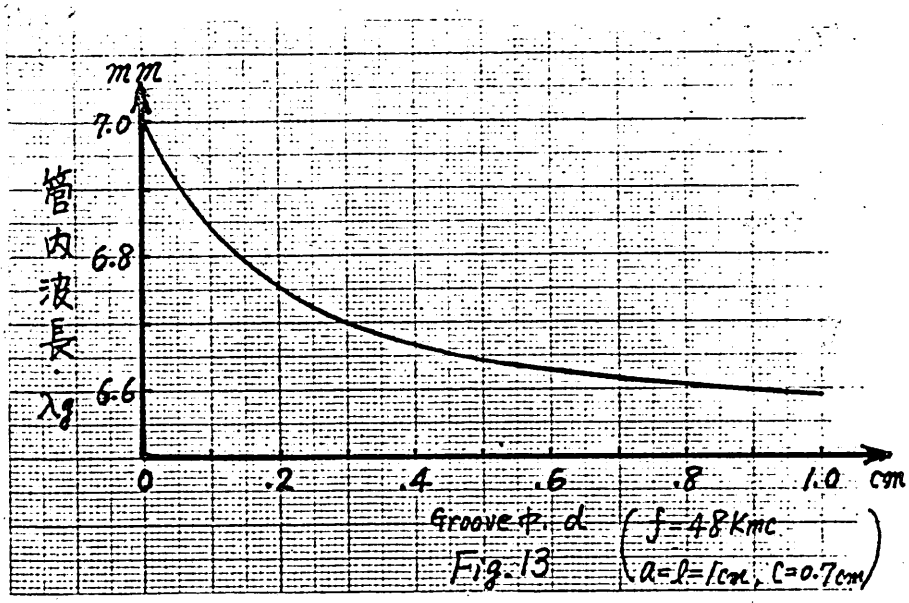


Fig. 13 ($f=48$ Kmc, $a=l=1$cm, $c=0.7$cm)

又領域 I, II に於ける任意の波数 X_r と減衰定数 Y_s の変化を Fig. (a), (b) に, 又各領域の振巾係数 A_r, B_s の変化を Fig. 15 (a). (b) に示した。

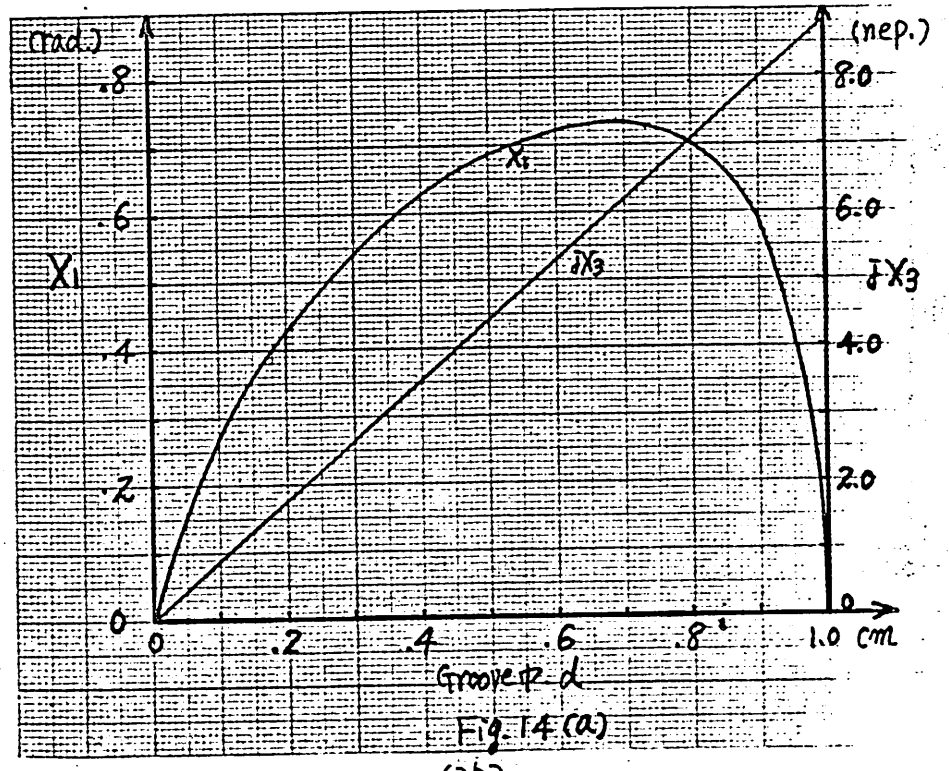


Fig. 14 (a)

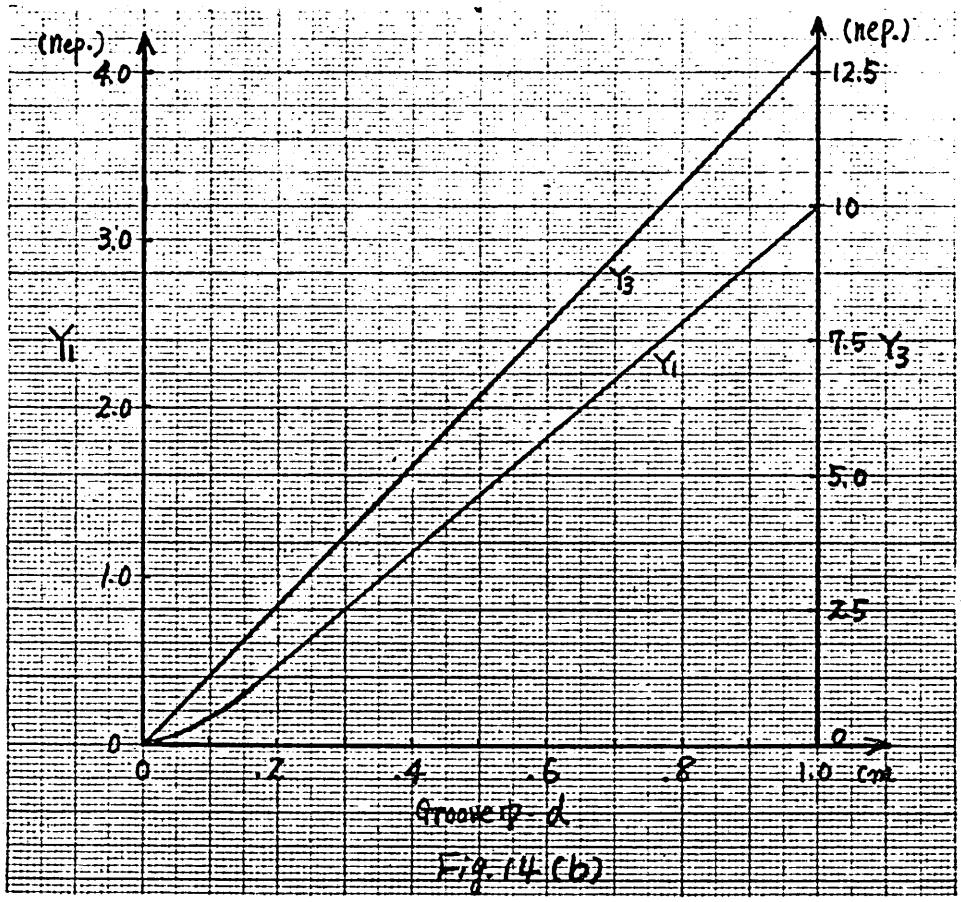


Fig. 14 (b)

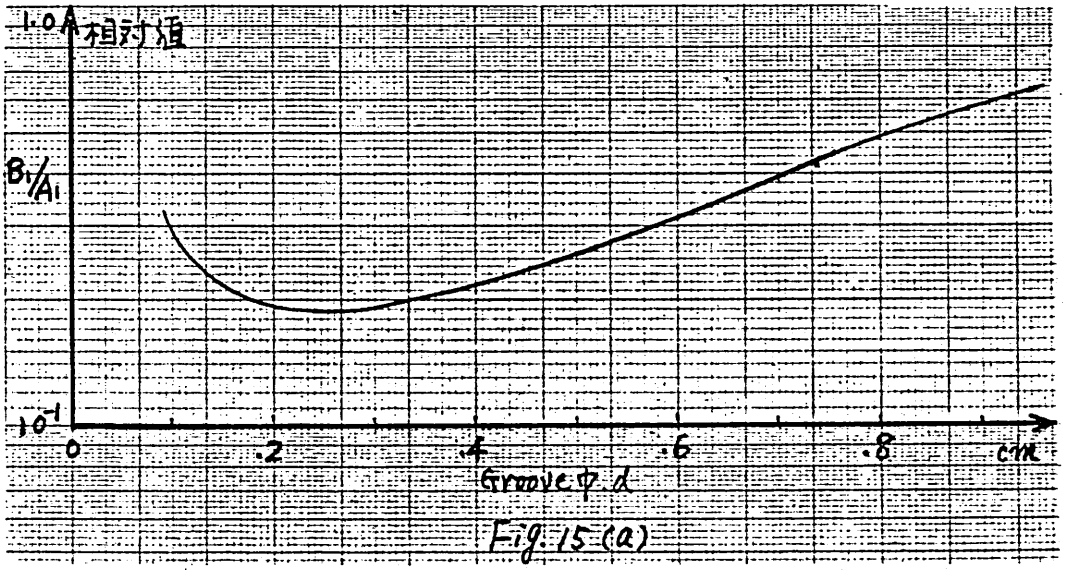


Fig. 15 (a)

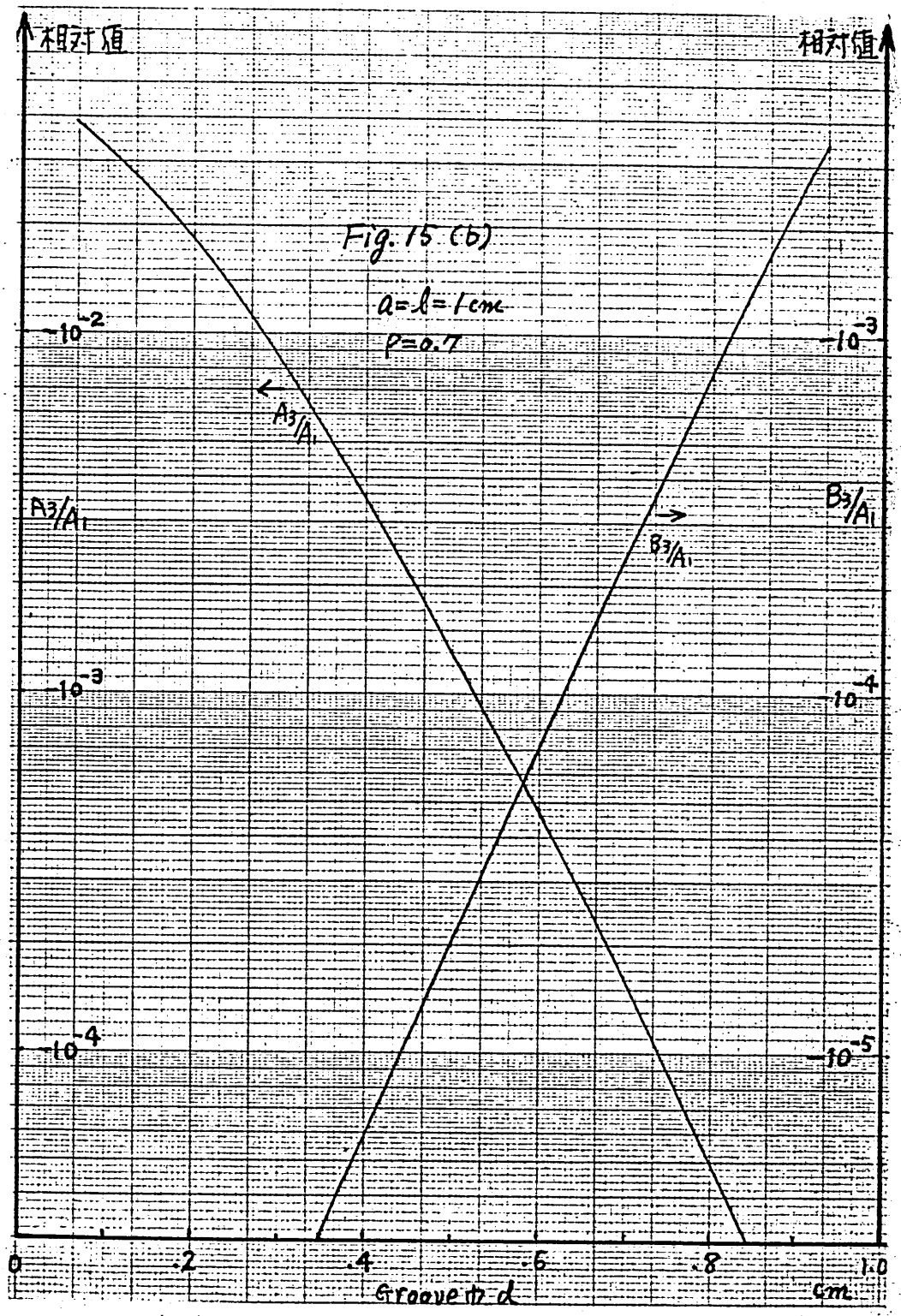

相対値
相対値
Fig. 15 (b)
a=l=1cm
ρ=0.7
10^{-2}
10^{-3}
A_3/A_1
A_3/A_1
B_3/A_1
B_3/A_1
10^{-3}
10^{-4}
10^{-4}
10^{-5}
0
.2
.4
.6
.8
1.0
Groove in d
cm.

Fig.16 は Eq.(1-3-7) から求めた減衰定数 α_t を示したものである。ここで $d=0$ と $d=1$cm では Fig.11 からわかるごとく各々断面型状が 0.7×2.0cm 及び 1×2cm の矩型導波管となり，事実，減衰定数は TE_{10} mode の値に収れんしている。
これから分かる様に $d>0.17$cm の範囲では，1×2cm の断面をもつ矩型導波管の TE_{10} mode の減衰定数より Grooved Guide のそれが低くなっている。このことは Guide 断面の外周長が等しい時には矩型導波管よりも Close Grooved Guide の伝送損失が低くなることを示している。これは特に注目すべき結果であると思われる。
尚 Fig.17 は減衰定数の周波数特性を示している。

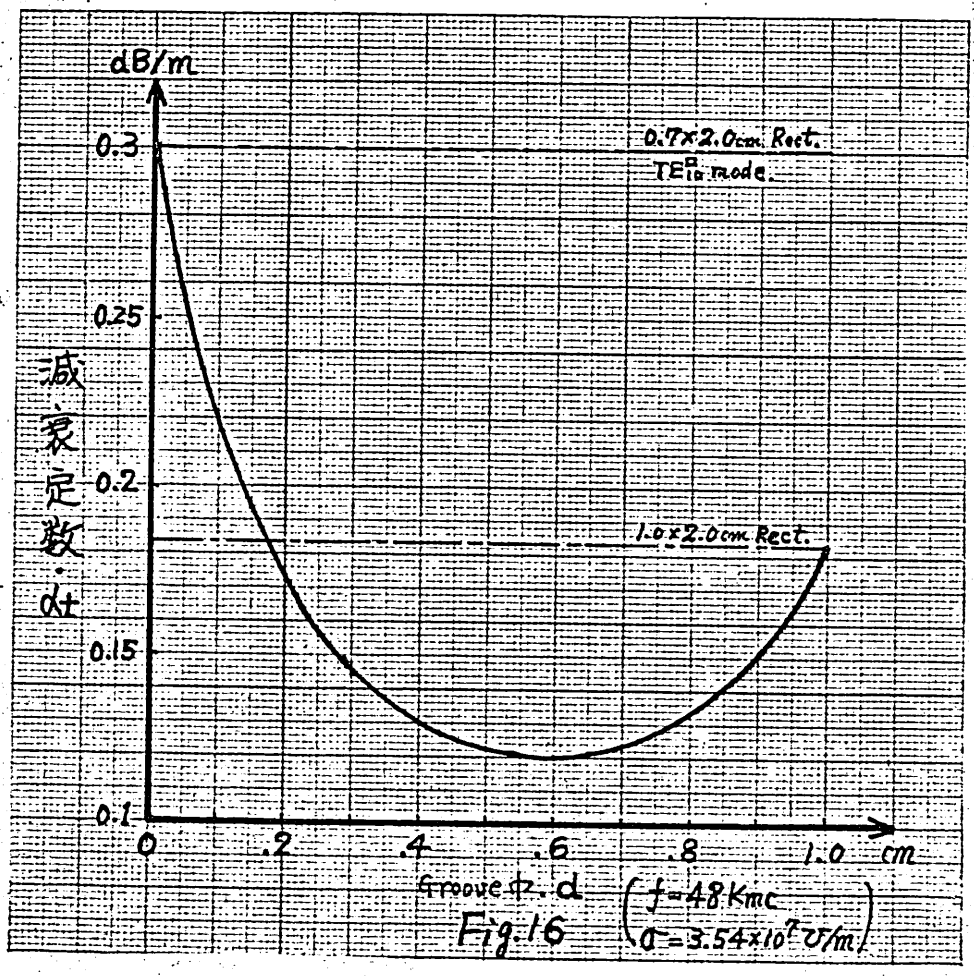


Fig.16

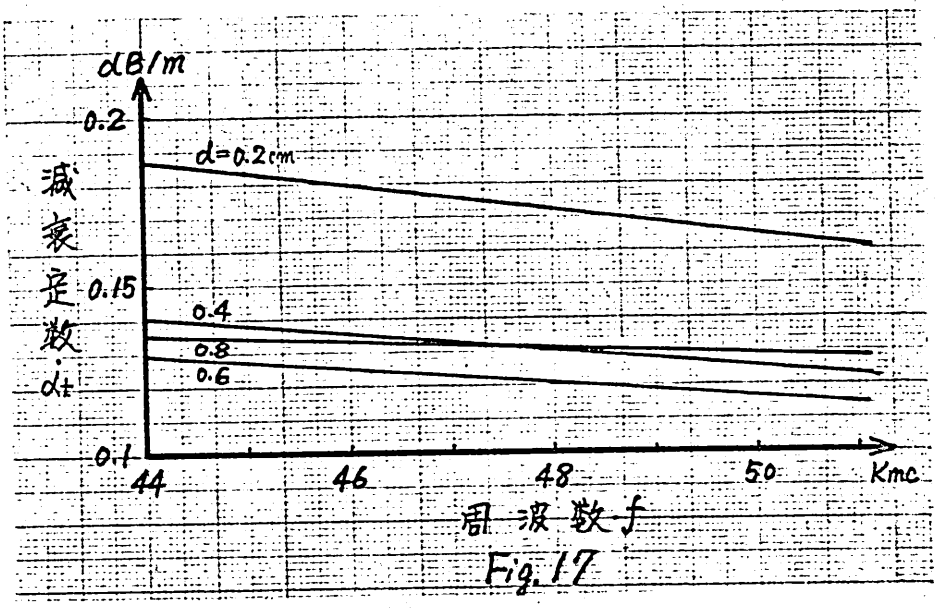


Fig. 17

2.3 実験及び実験結果

上述の計算で求められた興味ある結果を実験的に求めるため. Fig. 11 に示す Close Grooved Guide で Groove 中 d が d=0.15, 0.3, 0.45, 0.6, 0.75, 1.0 cm の 6 種類のものを各々5本づつ, 延べ 30本製作して実験を行った。

先ず所要の mode が伝搬していることを確かめるため, 試作 Guide を共振器とし. その管内波長を可動短絡板を移動することによって測定した。

この様な共振器の励振方法として WRJ-50 矩型導波管と Fig. 18(a) に示す様に直接短絡板につけ. 中央に直径約 0.5mm の円型孔を設けて行った。

又可動短絡器は Fig. 18(b) に示す様に結合孔(直径約 0.5mm 円孔)を通して矩型導波管を経てクリスタルマウントが取り付けられている。

波長測定に際しては可動短絡器を移動台(読み取り精度 1/20 mm)に取りつけ行った。

この方法で各 Guide について管内波長を求めた結果が Fig. 19 である。

λ_g の測定では若干計算値より短かい値を得ている。

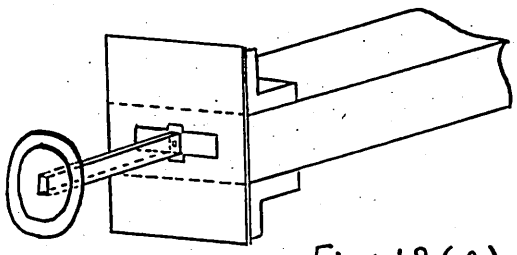


Fig. 18(a)

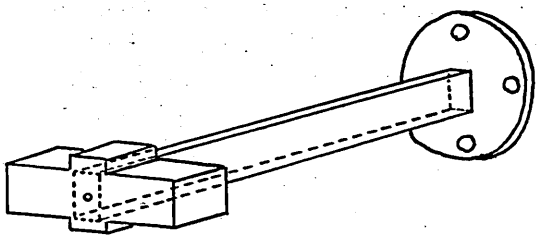


Fig. 18(b)

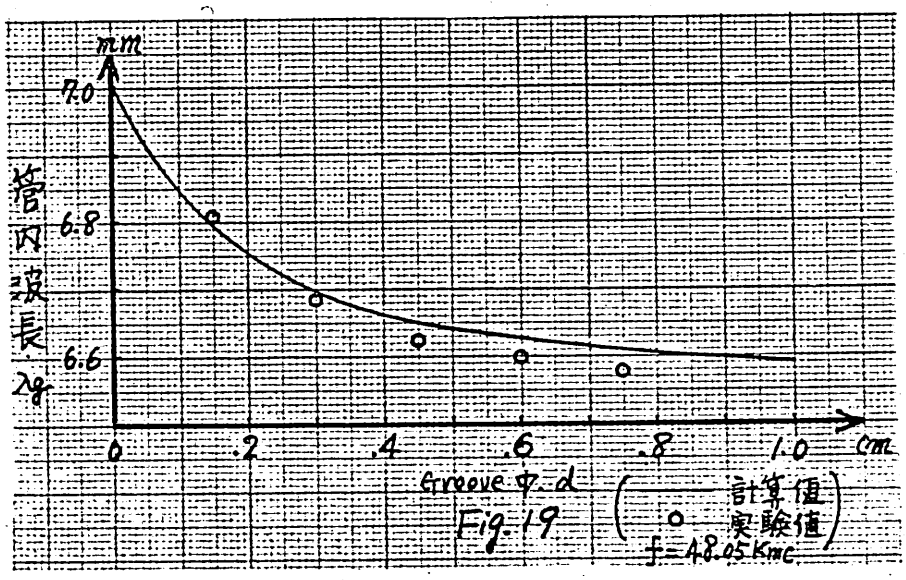


Fig. 19

この結果から λ_c を得るには Eq.(1-1-6) より

$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

を用いればよく，その結果が Fig. 20 である。

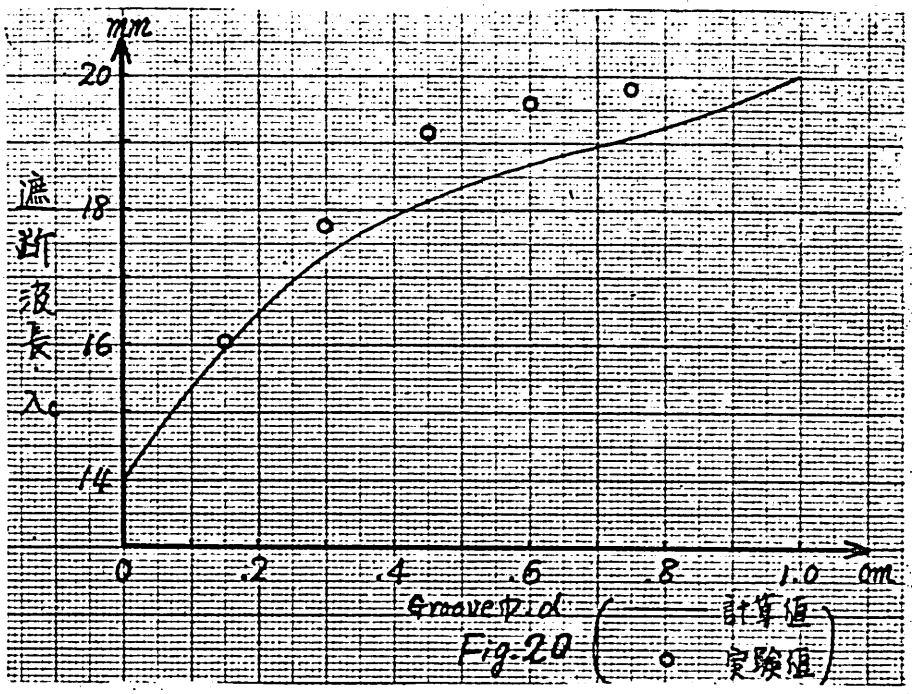


Fig. 20 (—— 計算値　○ 実験値)

今この式を用いることによって λ_g に於ける測定誤差が λ_c にはどの程度の影響として入るかを検討しておく必要がある。今 λ_0 は一定として λ_g, λ_c 各々の真の値を λ_{g0}, λ_{c0} とし，λ_{g0} の測定誤差として $\Delta\lambda_g$ があったとすれば，Eq.(2-3-1) を用いて求めた λ_c に入る誤差 $\Delta\lambda_c$ は

真の値に対しては　$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_{g0}^2} + \frac{1}{\lambda_{c0}^2} \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

測定値に対しては　$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{(\lambda_{g0}+\Delta\lambda_g)^2} + \frac{1}{(\lambda_{c0}+\Delta\lambda_c)^2} \qquad (2\text{-}3\text{-}3)$$

が成立するから $\frac{\Delta\lambda_g}{\lambda_g} \ll 1$, $\frac{\Delta\lambda_c}{\lambda_{c0}} \ll 1$ と考慮すれば

$$\Delta\lambda c = -\left(\frac{\lambda_{co}}{\lambda_{go}}\right)^3 \Delta\lambda g \qquad (2\text{-}3\text{-}4)$$

となり、λgの測定に於ける$\Delta\lambda g$の誤差はλcを求める時には、$\Delta\lambda g$の$\left(\frac{\lambda_{co}}{\lambda_{go}}\right)^3$倍だけ真値の$\lambda c$より短かく求められることになる。
Fig. 19ではλgが計算より短かく測定されているから、λcは若干長く評価されることになり、例えば$d=0.5\,cm$の時には$\lambda_{go}=0.664\,cm$, $\lambda_{co}=1.84\,cm$だから$(\lambda_{co}/\lambda_{go})^3=27.8$となるから$\lambda g$の測定に0.1 mmの誤差がある時には$\lambda c$には約2.8 mmの誤差として拡大されることになる。
次に減衰定数の測定はFig. 21に示す回路系で行い、供試導波管の長さを変化して、その時の負荷Q値の半値巾を測定した。

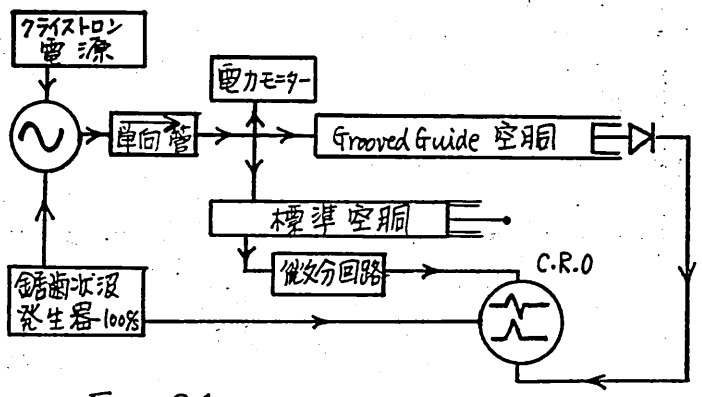


Fig. 21

今、負荷Q値をQ_L、無負荷Q値をQ_u、外部Q値をQ_{ext}とすれば

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_u} + \frac{1}{Q_{ext}} \qquad (2\text{-}3\text{-}5)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} Q_L &= \frac{\text{蓄積される電力}}{\text{Guide全体に於ける損失}} = \frac{f_r}{\Delta f_L} \\ Q_u &= \frac{\text{蓄積される電力}}{\text{Guide自身による損失}} = \frac{f_r}{\Delta f_u} \\ Q_{ext} &= \frac{\text{蓄積される電力}}{\text{端板・結合孔による損失}} = \frac{Pl}{W} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}3\text{-}6)$$

但し　P; Guideの断面形状が変らなければ単位長当りに蓄積される電力

Eから Eq.(2-3-5) は

$$\frac{\Delta f_L}{f_r} = \frac{\Delta f_u}{f_r} + \frac{W}{Pl}$$

従って

$$l\Delta f_L = l\cdot\Delta f_u + \frac{W}{P} f_r \qquad (2\text{-}3\text{-}7)$$

となる。ここで共振周波数 f_r が変らないとすれば、P. Wは定数であるから Eq.(2-3-7) は一次式

$$l\cdot\Delta f_L = l\cdot\Delta f_u + K \qquad (2\text{-}3\text{-}8)$$

但し $K = \frac{W}{P} f_r$

となるから、測定で Δf_L が求められれば Eq.(2-3-8) から、横軸にGuide長さ l, 縦軸に Δf_L. l の値をとって引いた直線の勾配から Δf_u が求められ、無負荷Q値, Q_u が求められる。

これから関係式

$$\alpha_t = 8.686 \frac{\pi}{Q_u \lambda_0} \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right) \quad \text{dB/unit length} \qquad (2\text{-}3\text{-}9)$$

より減衰定数 α_t が求められることになる。

以上の様な測定系、測定方法により求めた値を図示したのが Fig.22 である。ここで必要なのは各直線の勾配なので記入の都合上各直線は縦軸方向に適当に平行移動したものを記入しておいた。

これらより減衰定数 α_t を求めたのが Fig.23 の実線で示したもので、壁面の導電率 $\sigma = 3.54\times10^7$ ℧/m として求めた計算値を実線で示しておいた。

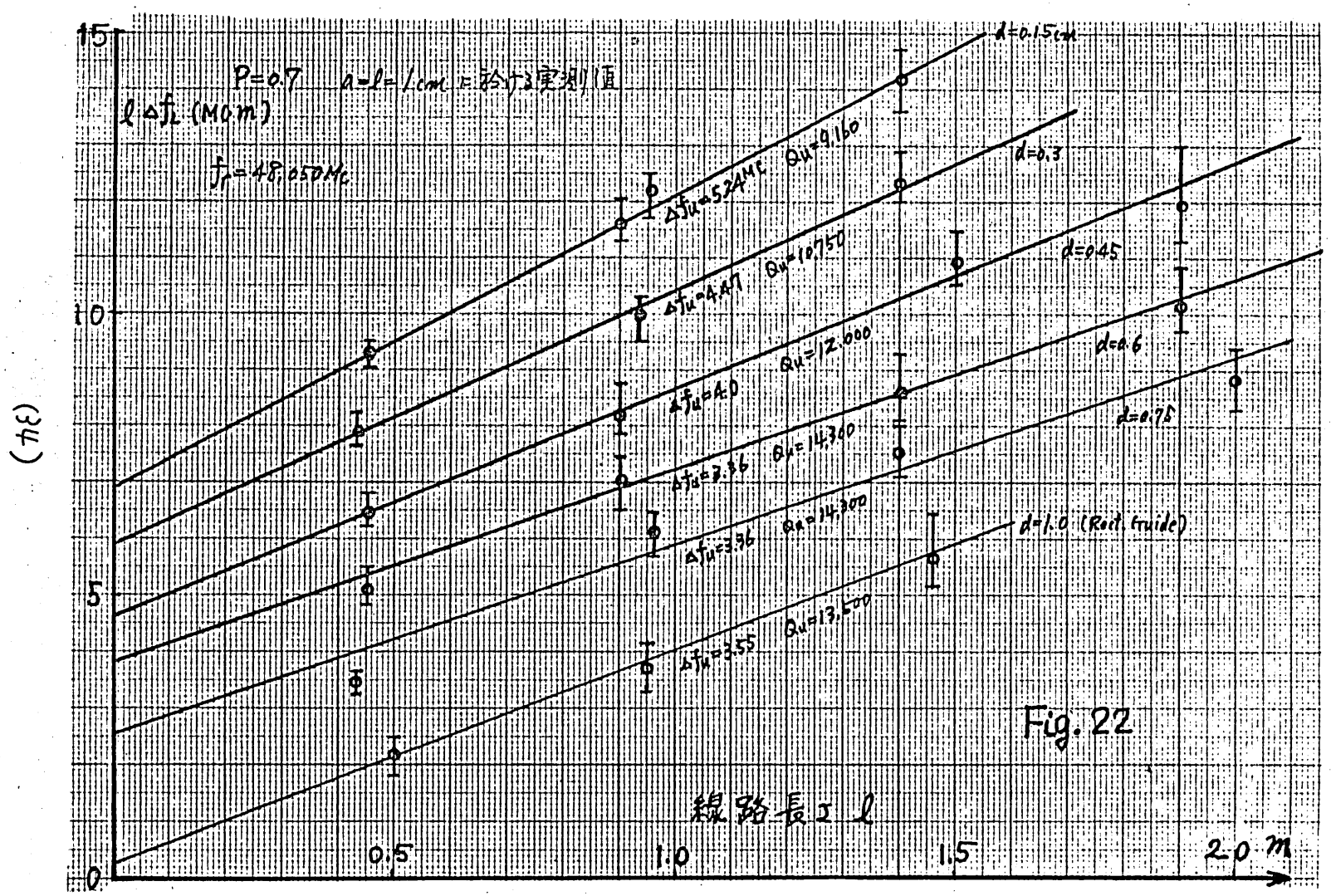

P=0.7 a=l=1cm に於ける実測値
l Δf_L (MCm)
f_r=48,050Mc
d=0.15cm
d=0.3
d=0.45
d=0.6
d=0.75
d=1.0 (Rect. Guide)
Δf_u=5.24MC Q_u=9,160
Δf_u=4.47 Q_u=10,750
Δf_u=4.0 Q_u=12,000
Δf_u=3.36 Q_u=14,300
Δf_u=3.36 Q_u=14,300
Δf_u=3.55 Q_u=13,500
線路長さ l
0
5
10
15
0.5
1.0
1.5
2.0 m

Fig. 22

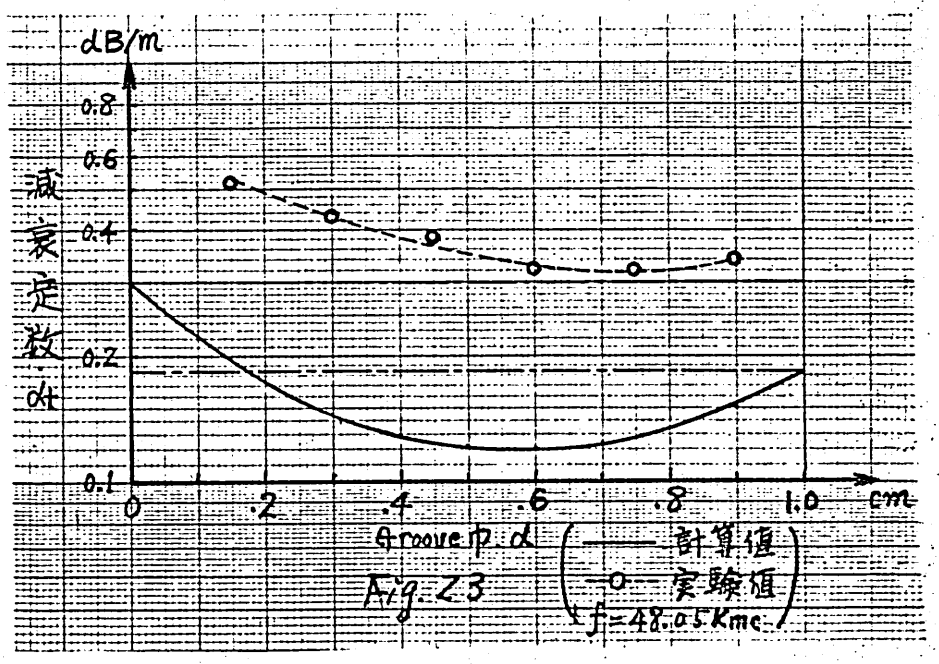


Fig. 23

3. 検討

先ず Fig. 23 の結果から実測値は計算値の約 2.5 倍程度になっているが Groove 中, d に対する特性は計算したものと非常によく一致している。実測値の大きく出ている理由としては壁面のあらさ, 表面処理の不完全等がある。
又その他に計算に用いた $\sigma = 3.54 \times 10^7$ ℧/m が実際の材料のそれと異なっていることも考えられる。これに対しては現在同一材料の σ の測定中なので結果が出次第, 計算値を若干修正する要があるものと思われる。

又さらに Guide 製作の都合上 Fig. 11 に示した様に y 軸と接合面とする重ね合わせ式にしたことも減衰増加の原因と考えられる。
尚現在別の構造及び周波数帯での実験を考慮中なので, それらの結果も加えればかなり正確に減衰特性が説明出来るものと思われる。

4. 結言

本論文では Close Grooved Guide について, その伝送特性について詳く

解析し低損失姿態である TE_{0}^{S} mode を対象に減衰定数遮断波長等について近似計算したものと実験的に求めたものとを比較し各々の傾向がよく一致することを示した。さらに興味ある結果として同一外周長を有する矩型導波管中の $TE_{10}^{\square}$ mode の減衰定数よりも、この様な型状のGuideのそれが低くなり得る型状があることを理論的に導き、実験的にもそのような傾向があることを明らかにした。

Over size で用いているため実際にどれ位の姿態が伝送し得るのか又その各姿態の遮断周波数の特性はどのようになっているかは重要な点と思われる。又さらにこの様なGuideはどの様な応用面でその特異性を発揮するか励振はどの様にすればよいか等々についても検討中なので次の機会に詳しく報告させて頂くつもりである。

最後に御援助御討論頂いている住友電工、中原、倉内、長尾の各氏はじめ弱電課の方々に、又ガイド製作に対し多大の御配慮を頂いた千曲製作所、中沢社長に感謝致します。又計算機のプログラミングに関して協力さつた本学助手小林洋君に謝意を表します。

尚本計算は本学計算機センターで行つたものである。

文献

1) 中原、倉内；例えば“満付ガイドの伝送姿態” 通信学会誌 47.7

2) N. Marcuvitz；“Waveguide Handbook” 5.26節 McGraw Hill Book Co.

3) 小口文一；“マイクロ波および光波回路” 1.3.7節 通研叢書1. 丸善

Appendix I 他 mode の特性方程式

1. TE_0^f mode

ε_{qs} (1-1-8), (1-1-9) より先ず H_z の連続として

$$\sum_{r=1} A_r \sin\gamma_r d \sin\frac{r\pi}{a}x = \sum_{s=1} B_s \cosh\alpha_s(\ell-d)\sin\frac{s\pi}{c}x \quad \text{on } S_A \qquad (A-1-1)$$

E_x については

$$\sum_{r=1} A_r\gamma_r\cos\gamma_r d \sin\frac{r\pi}{a}x = \begin{cases} -\sum_{s=1} B_s\alpha_s \sinh\alpha_s(\ell-d) \times \sin\frac{s\pi}{c}x & \text{on } S_A \\ 0 & \text{on } S_B \end{cases} \qquad (A-1-2)$$

ε_q (A-1-1) の両辺に $\sin\frac{s\pi}{c}x$ を, 又 ε_q (A-1-2) の両辺に $\sin\frac{r\pi}{a}x$ をかけて, 各々 S_A 上及び (S_1+S_B) 上で積分し, 直交性を利用すると, 次式を得る。

$$B_s\cosh\alpha_s(\ell-d) = \sum_{r=1} A_r U_{rs}\sin\gamma_r d \qquad (A-1-3)$$

$$A_r\gamma_r\cos\gamma_r d = -\sum_{s=1} B_s\alpha_s W_{sr}\sinh\alpha_s(\ell-d) \qquad (A-1-4)$$

但し U_{rs}, W_{sr} は各々 ε_{qs} (1-2-6), (1-2-11) で与えられる。 ε_{qs} (A-1-3), (A-1-4) より

$$A_r\gamma_r\cos\gamma_r d = -\sum_{s=1}\sum_{t=1} A_t U_{ts} W_{sr}\alpha_s \sin\gamma_t d \tanh\alpha_s(\ell-d) \qquad (A-1-5)$$

従って第1近似の特性方程式として

$$-X_1 \cot X_1 = U_{11} W_{11} Y_1 \tanh Y_1 (R-1) \qquad (A-1-6)$$

を得る。又第2近似としては

$$-X_1 \cot X_1 = K_{11} - \frac{K_{13} \cdot K_{31}}{K_{33} + X_3 \cot X_3} \qquad (A-1-7)$$

ただし K_{mn} は ε_8 (1-2-16) で与えられる。

2. TM_0^S mode

TM mode の場合は E_z によって他の全ての界成分が求められるから, E_z 成分と $\frac{\partial E_z}{\partial y}$ の連続, いいかえると H_x と E_z の連続を考えれば充分である。従って ε_{8s} (1-1-10), (1-1-11) より

$$\sum_{r=1} A_r \gamma_r \cos \gamma_r d \cos\left(\frac{r\pi}{a}\right) x = -\sum_{s=1} B_s d_s \cosh d_s (l-d) \cos\left(\frac{s\pi}{c} x\right) \quad \text{on } S_A \qquad (A-1-8)$$

$$\sum_{r=1} A_r \sin \gamma_r d \cos \frac{r\pi}{a} x = \begin{cases} \sum_{s=1} B_s \sinh d_s (l-d) \cos\left(\frac{s\pi}{c} x\right) & \text{on } S_A \\ 0 & \text{on } S_B \end{cases} \qquad (A-1-9)$$

この場合には x 方向に cos 分布しているが $r \neq 0$, $s \neq 0$ であるから, まず ε_8 (A-1-8) の両辺に $\cos\left(\frac{s\pi}{c} x\right)$ をかけて S_A 上で積分すると.

$$\sum_{r=1} A_r \gamma_r \cos\gamma_r d \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cos\frac{r\pi}{a}x \cos\frac{s\pi}{c}x\,dx = -\frac{c}{2} B_s d_s \cosh d_s(\ell-d) \qquad (A-1-10)$$

ここで

$$T_{rs} = \frac{2}{c}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cos\frac{r\pi}{a}x \cdot \cos\frac{s\pi}{c}x\,dx = \frac{4s\pi}{c^2\left[\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2-\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right]} \cos\frac{rc\pi}{2a}\cdot\sin\frac{s\pi}{2} \qquad (A-1-11)$$

とすれば

$$B_s d_s \cosh d_s(\ell-d) = -\sum_{r=1} A_r T_{rs} \gamma_r \cos\gamma_r d \qquad (A-1-12)$$

が得られる。　次に ε_q (A-1-9) の両辺に $\cos\left(\frac{r\pi}{a}x\right)$ をかけて (S_A+S_B) 上で積分すると

$$A_r \sin\gamma_r d = \sum_{s=1} B_s V_{sr} \sinh d_s(\ell-d) \qquad (A-1-13)$$

ただし

$$V_{sr} = \frac{4s\pi}{ac\left[\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2-\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right]} \cos\frac{rc\pi}{2a}\cdot\sin\frac{s\pi}{2} \qquad (A-1-14)$$

が得られる。従って ε_{qs} (A-1-12). (A-1-13) より

$$B_s d_s \cosh d_s(\ell-d) = -\sum_{r=1}\sum_{t=1} B_t T_{rs} V_{tr} \gamma_r \cot\gamma_r d \sinh d_t(\ell-d) \qquad (A-1-15)$$

従って第1近似の特性方程式は

$$Y_1 \coth Y_1 (R-1) = -T_{11} V_{11} X_1 \cot X_1 \qquad (A-1-16)$$

第2近似では

$$Y_1 \coth Y_1 (R-1) = -H_{11} + \frac{H_{13}\cdot H_{31}}{H_{33} + Y_3 \coth Y_3 (R-1)} \qquad (A-1-17)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} H_{11} &= \sum_{r=1} V_{1r} T_{r1} X_r \cot X_r \\ H_{31} &= \sum_{r=1} V_{3r} T_{r1} X_r \cot X_r \\ H_{13} &= \sum_{r=1} V_{1r} T_{r3} X_r \cot X_r \\ H_{33} &= \sum_{r=1} V_{3r} T_{r3} X_r \cot X_r \end{aligned}\right\} \quad (A-1-18)$$

3. TM_0^f mode

ε_{qs} (1-1-13), (1-1-14) より

$$\sum_{r=1} A_r \gamma_r \sin\gamma_r d \cos\frac{r\pi}{a}x = \sum_{s=1} B_s d_s \cosh d_s(\ell-d) \cos\frac{s\pi}{c}x \quad \text{on } S_A \qquad (A-1-19)$$

$$\sum_{r=1} A_r \cos\gamma_r d \cos\frac{r\pi}{a}x = \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1} B_s \sinh d_s(\ell-d) \cos\frac{s\pi}{c}x & \text{on } S_A \\ 0 & \text{on } S_B \end{cases} \qquad (A-1-20)$$

TM_0^s mode の時と同様に行うと ε_q (A-1-19) より

$$B_s d_s \cosh d_s(\ell-d) = \sum_{r=1} A_r T_{rs} \gamma_r \sin\gamma_r d \qquad (A-1-21)$$

又 ε_f (A-1-20) より

$$A_r \cos\gamma_r d = \sum_{s=1} B_s V_{sr} \sinh d_s(\ell-d) \qquad (A-1-22)$$

が得られる。両式より

$$B_s \alpha_s \cosh \alpha_s (l-d) = \sum_{r=1} \sum_{t=1} B_t T_{rs} V_{tr} \gamma_r \tan \gamma_r d \cdot \sinh \alpha_t (l-d) \qquad (A-1-23)$$

従って第1近似の特性方程式として

$$Y_1 \coth Y_1 (R-1) = T_{11} V_{11} X_1 \tan X_1 \qquad (A-1-24)$$

第2近似として

$$Y_1 \coth Y_1 (R-1) = H_{11} - \frac{H_{13} \cdot H_{31}}{H_{33} - Y_3 \coth Y_3 (R-1)} \qquad (A-1-25)$$

が得られる。

4. TE_e^s mode

ε_8 s (1-1-3), (1-1-4) の H_z, E_x の連続より

$$\sum_{r=0} A_r \cos \gamma_r d \cdot \cos \frac{r\pi}{a} x = \sum_{s=0} B_s \cosh \alpha_s (l-d) \cos \frac{s\pi}{c} x \quad \text{on } S_A \qquad (A-1-26)$$

$$\sum_{r=0} A_r \gamma_r \sin \gamma_r d \cos \frac{r\pi}{a} x = \begin{cases} \sum_{s=0} B_s \alpha_s \sinh \alpha_s (l-d) \cos \frac{s\pi}{c} x & \text{on } S_A \\ 0 & \text{on } S_B \end{cases} \qquad (A-1-27)$$

ここで注意を要するのは, even mode には $r=s=0$ も含まれていることである。そこで分り易くするために ε_8 (A-1-26) を展開すると

$$A_0 \cos \gamma_0 d + \sum_{r=2} A_r \cos \gamma_r d \cdot \cos \frac{r\pi}{a} x = B_0 \cosh \alpha_0 (l-d) + \sum_{s=2} B_s \cosh \alpha_s (l-d) \times \cos \frac{s\pi}{c} x \quad \text{on } S_A \qquad (A-1-28)$$

となるから，両辺に $\cos\frac{s\pi}{c}x$ $(s\neq 0)$ をかけて S_A 上で積分すると

$$\sum_{r=2} A_r \cos\gamma_r d \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cos\frac{r\pi}{a}x \cdot \cos\frac{s\pi}{c}x\,dx = \frac{c}{2} B_s \cosh d_s(\ell-d) \qquad (s\neq 0) \quad (A-1-29)$$

となる。ここで

$$C_{rs} = \frac{2}{c}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cos\frac{\pi r}{a}x \cdot \cos\frac{s\pi}{c}x\,dx = -\frac{4r\pi}{ac\left[\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2 - \left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right]} \sin\frac{rc\pi}{2a}\cos\frac{s\pi}{2}$$

$(r\neq 0,\ s\neq 0)$ $\quad (A-1-30)$

とおくと ε_8 $(A-1-29)$ は

$$B_s \cosh d_s(\ell-d) = \sum_{r=2} A_r C_{rs} \cos\gamma_r d \qquad (s\neq 0) \quad (A-1-31)$$

となる。又，ε_8 $(A-1-28)$ を直接 S_A 上で積分すると

$$C A_0 \cos\gamma_0 d + \sum_{r=2} A_r \cos\gamma_r d \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cos\frac{r\pi}{a}x\,dx = C B_0 \cosh d_0(\ell-d) \qquad (A-1-32)$$

となるから

$$C_{r0} = \frac{1}{c}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cos\frac{r\pi}{a}x\,dx = \frac{2a}{rc\pi}\sin\frac{rc\pi}{2a} \qquad (r\neq 0) \quad (A-1-33)$$

とおけば ε_8 $(A-1-32)$ は

$$B_0 \cosh d_0(\ell-d) = \sum_{r=0} A_r C_{r0} \cos\gamma_r d \qquad (A-1-34)$$

ただし $C_{00}=1$ である。

を得る。

次に ε_8 (A-1-27) を展開すると

$$A_0\gamma_0 \sin\gamma_0 d + \sum_{r=2} A_r\gamma_r \sin\gamma_r d \cos\frac{r\pi}{a}x$$

$$= \begin{cases} B_0 d_0 \sinh d_0(\ell-d) + \sum_{s=2} B_s d_s \sinh d_s(\ell-d)\cdot\cos\frac{s\pi}{c}x & \text{on } S_A \\ 0 & \text{on } S_B \end{cases}$$

(A-1-35)

となるから両辺に $\cos\frac{r\pi}{a}x$ をかけて (S_A+S_B) 上で積分すると

$$\frac{a}{2}A_r\gamma_r \sin\gamma_r d = \sum_{s=2} B_s d_s \sinh d_s(\ell-d) \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cos\frac{r\pi}{a}x \cdot \cos\frac{s\pi}{c}x\,dx \qquad (A-1-36)$$

となる。ここで

$$D_{sr} = \frac{2}{a}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \cos\frac{r\pi}{a}x\cdot\cos\frac{s\pi}{c}x\,dx = -\frac{4r\pi}{a^2\left[\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2-\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right]}\sin\frac{rc\pi}{2a}\cdot\cos\frac{s\pi}{2}$$

$(r\neq 0,\ s\neq 0)$ (A-1-37)

とおくと ε_8 (A-1-36) は

$$A_r\gamma_r \sin\gamma_r d = \sum_{s=2} B_s D_{sr} d_s \sinh d_s(\ell-d), \quad (r\neq 0)$$

(A-1-38)

を得る。又 ε_8 (A-1-35) を直接 (S_A+S_B) 上で積分すると

$$a A_0\gamma_0 \sin\gamma_0 d = c B_0 d_0 \sinh d_0(\ell-d) \qquad (A-1-39)$$

となるから,

$$D_{00} = \frac{c}{a}, \qquad D_{s0} = 0 \qquad (A-1-40)$$

とすると ε_8 (A-1-39) は

$$A_0 \gamma_0 \sin \gamma_0 d = \sum_{s=0} B_s D_{s0} \alpha_s \sinh \alpha_s (\ell - d) \qquad (A-1-41)$$

従って ε_{8s} (A-1-31), (A-1-34), (A-1-38). 及び (A-1-39) を整理すると

$$\begin{aligned} B_s \cosh \alpha_s (\ell - d) &= \sum_{r=0} A_r C_{rs} \cos \gamma_r d \\ A_r \gamma_r \sin \gamma_r d &= \sum_{s=0} B_s D_{sr} \alpha_s \sinh \alpha_s (\ell - d) \end{aligned} \qquad (A-1-42)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} C_{rs}\ (r \neq 0, s \neq 0) &= \varepsilon_8 \quad (A-1-30) \\ C_{r0}\ (r \neq 0) &= \varepsilon_8 \quad (A-1-33) \\ C_{00} &= 1 \\ D_{sr}\ (r \neq 0, s \neq 0) &= \varepsilon_8 \quad (A-1-37) \\ D_{s0}\ (s \neq 0) &= 0 \\ D_{00} &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (A-1-43)$$

となる。従って ε_8 (A-1-42) より

$$A_r \gamma_r \sin \gamma_r d = \sum_{s=0} \sum_{t=0} A_t C_{ts} D_{sr} \alpha_s \cos \gamma_t d \tanh \alpha_s (\ell - d) \qquad (A-1-44)$$

を得る。

この式は ε_8 (A-1-43) の約束を別にすれば TE_e^s mode の関係式と全く同じ型である。 従って 0 1 近似の特性方程式としては

$$X_0 \tan X_0 = D_{00} Y_0 \tanh Y_0 \quad (R-1) \qquad (A-1-45)$$

を得る。

これは、この様なGuideに伝ぱんするいわゆるStrip line modeについて横共振法で求めたものと一致する。
次に第2近似では

$$X_0 \tan X_0 = I_{00} - \frac{I_{02} \cdot I_{20}}{I_{22} - X_2 \tan X_2} \qquad (A-1-46)$$

を得る。ここで

$$\left.\begin{aligned} I_{00} &= D_{00} C_{00} \gamma_0 \tanh \gamma_0 (R-1) \\ I_{20} &= \sum_{s=0} D_{s2} C_{02} \gamma_2 \tanh \gamma_s (R-1) \\ I_{02} &= D_{00} C_{20} \gamma_0 \tanh \gamma_0 (R-1) \\ I_{22} &= \sum_{s=0} D_{s2} C_{2s} \gamma_s \tanh \gamma_s (R-1) \end{aligned}\right\} \qquad (A-1-47)$$

5. TE_e^f mode

Eqs (1-1-8), (1-1-9) より、同様にして

$$\sum_{r=0} A_r \sin \gamma_r d \cos \frac{r\pi}{a} x = \sum_{s=0} B_s \cosh d_s (\ell - d) \cos \frac{s\pi}{c} x \quad \text{on } S_A \qquad (A-1-48)$$

$$\sum_{r=0} A_r \gamma_r \cos \gamma_r d \cos \frac{r\pi}{a} x = \begin{cases} -\sum_{s=0} B_s d_s \sinh d_s (\ell - d) \cos \frac{s\pi}{c} x & \text{on } S_A \\ 0 & \text{on } S_B \end{cases} \qquad (A-1-49)$$

ここで TE_e^s mode と同様に扱って次式を得る。

$$A_r \gamma_r \cos \gamma_r d = -\sum_{s=0} \sum_{t=0} A_t C_{ts} D_{sr} d_s \sin \gamma_t d \tanh d_s (\ell - d) \qquad (A-1-50)$$

ただし C, D は ε_8 (A-1-43) と同じ
従って 0 次近似の特性方程式として

$$-X_0 \cot X_0 = D_{00} Y_0 \tanh Y_0 \quad (R-1) \qquad (A-1-51)$$

0 次近似では

$$-X_0 \cot X_0 = I_{00} - \frac{I_{02} I_{20}}{I_{22} + X_2 \cot X_2} \qquad (A-1-52)$$

ただし I_{mn} は ε_8 (A-1-47) で与えられる。

6. TM_e^s mode

TM_0 mode では $r=s=0$ とはならないから $\varepsilon_8 s$ (1-1-10), (1-1-11) より H_x, E_z の連続より

$$\sum_{r=2} A_r \gamma_r \cos \gamma_r d \sin \frac{r\pi}{a} x = -\sum_{s=2} B_s d_s \cosh d_s (l-d) \sin \frac{s\pi}{c} x \quad \text{on } S_A \qquad (A-1-53)$$

$$\sum_{r=2} A_r \sin \gamma_r d \sin \frac{r\pi}{a} x = \begin{cases} \sum_{s=2} B_s \sinh d_s (l-d) \sin \frac{s\pi}{c} x & \text{on } S_A \\ 0 & \text{on } S_B \end{cases} \qquad (A-1-54)$$

ε_8 (A-1-53) の両辺に $\sin \frac{s\pi x}{c}$ をかけて S_A 上で積分すると

$$\sum_{r=2} A_r \gamma_r \cos \gamma_r d \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \sin \frac{r\pi}{a} x \cdot \sin \frac{s\pi}{c} x \, dx = -\frac{c}{2} B_s d_s \cosh d_s (l-d) \qquad (A-1-55)$$

ここで

$$F_{rs}=\frac{2}{c}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\sin\frac{r\pi}{a}x\cdot\sin\frac{s\pi}{c}x\,dx$$

$$=-\frac{4s\pi}{c^2\left[\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2-\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right]}\cdot\sin\frac{rc\pi}{2a}\cdot\cos\frac{s\pi}{2}\qquad(A-1-56)$$

とおくと

$$B_s d_s\cosh d_s(\ell-d)=-\sum_{r=2}A_r F_{rs}\gamma_r\cos\gamma_r d\qquad(A-1-57)$$

又、ε_6 (A-1-54) の両辺に $\sin\frac{r\pi}{a}x$ をかけて (S_A+S_B) 上で積分すると

$$\frac{a}{2}A_r\sin\gamma_r d=\sum_{s=2}B_s\sinh d_s(\ell-d)\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\sin\frac{r\pi}{a}x\cdot\sin\frac{s\pi}{c}x\,dx\qquad(A-1-58)$$

となるから

$$G_{sr}=\frac{2}{a}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\sin\frac{r\pi}{a}x\,\sin\frac{s\pi}{c}x\,dx$$

$$=-\frac{4s\pi}{ac\left[\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2-\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2\right]}\sin\frac{rc\pi}{2a}\cos\frac{s\pi}{2}\qquad(A-1-59)$$

とおけば

$$A_r\sin\gamma_r d=\sum_{s=2}B_s G_{sr}\sinh d_s(\ell-d)\qquad(A-1-60)$$

を得るから ε_6s (A-1-57), (A-1-60) より

$$B_s d_s\cosh d_s(\ell-d)=-\sum_{r=2}\sum_{t=2}B_t F_{rs}G_{tr}\gamma_r\cot\gamma_r d\,\sinh d_t(\ell-d)\qquad(A-1-61)$$

を得る。従って第1近似の特性方程式として

$$Y_2\coth Y_2(R-1)=-F_{22}G_{22}X_2\cot X_2\qquad(A-1-62)$$

第2近似では

$$\gamma_2 \coth \gamma_2 (R-1) = -J_{22} + \frac{J_{24} \cdot J_{42}}{J_{44} + \gamma_4 \coth \gamma_4 (R-1)} \qquad (A-1-63)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} J_{22} &= \sum_{r=2} G_{2r} F_{r2} \chi_r \cot \chi_r \\ J_{42} &= \sum_{r=2} G_{4r} F_{r2} \chi_r \cot \chi_r \\ J_{24} &= \sum_{r=2} G_{2r} F_{r4} \chi_r \cot \chi_r \\ J_{44} &= \sum_{r=2} G_{4r} F_{r4} \chi_r \cot \chi_r \end{aligned}\right\} \qquad (A-1-64)$$

を得る。

7. TM_e^f mode

Eqs (1-1-13), (1-1-14) より

$$\sum_{r=2} A_r \gamma_r \sin \gamma_r d \sin \frac{r\pi}{a} x = \sum_{s=2} B_s d_s \cosh d_s (\ell - d) \sin \frac{s\pi}{c} x \quad \text{on } S_A \qquad (A-1-65)$$

$$\sum_{r=2} A_r \cos \gamma_r d \sin \frac{r\pi}{a} x = \begin{cases} \sum_{s=2} B_s \sinh d_s (\ell - d) \sin \frac{s\pi}{c} x & \text{on } S_A \\ 0 & \text{on } S_B \end{cases} \qquad (A-1-66)$$

TM_e^s mode と同様に行えば

$$B_s d_s \cosh d_s (\ell - d) = \sum_{r=2} B_t F_{rs} G_{tr} \gamma_r \tan \gamma_r d \sinh d_t (\ell - d) \qquad (A-1-67)$$

ただし、F, G は Eqs (A-1-56), (A-1-59) に同じ。
オ1近似の特性方程式として

$$\gamma_2 \coth \gamma_2 (R-1) = F_{22} G_{22} X_2 \tan X_2 \qquad (A-1-68)$$

を得る。オ2近似では

$$\gamma_2 \coth \gamma_2 (R-1) = J_{22} - \frac{J_{24} J_{42}}{J_{44} - \gamma_4 \coth \gamma_4 (R-1)} \qquad (A-1-69)$$

を得る。
ただし $J_{m,n}$ は Eq (A-1-64) で与えられる。

Appendix II Ridge Guide からの近似解

Parameter $R\ (=\frac{l}{d})$ と $P\ (=\frac{c}{a})$ を一定に保って Q を零に近づけた時には Fig. (A-1) の如く、close Grooved Guide の型状を保って l が小さくなっていくから極限では y 方向の界変化はなくなり、ちょうど Double Ridge Guide の如き Guide 中の TE_{10} mode の遮断波長に近づくことが予想出来る。今 TE_e^s mode についてみると遮断波長 λ_c は Fig. (A-2) の等価回路から横共振法を用いると

$$Y_{02} \cot \beta_x \frac{(a-c)}{2} = B + Y_{01} \tan \beta_x \frac{c}{2} \qquad (A-2-1)$$

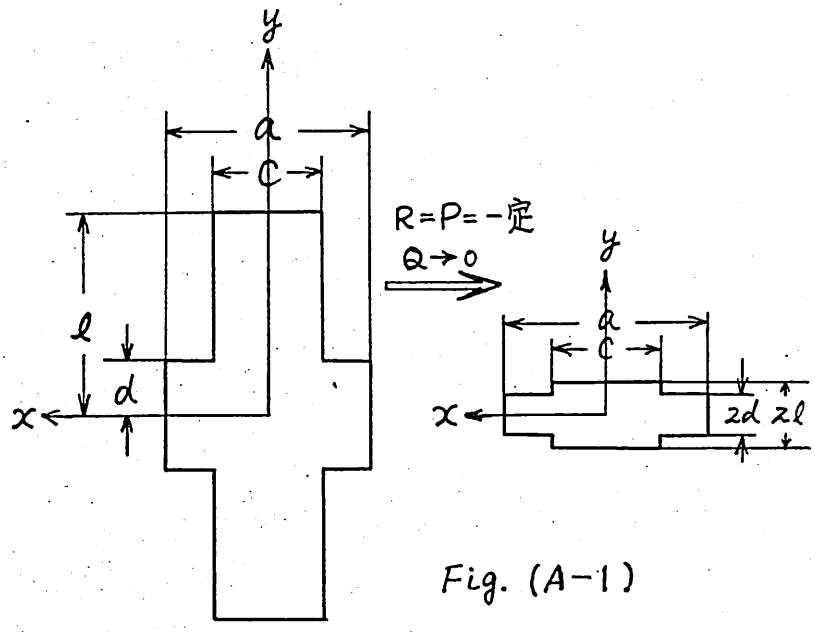


Fig. (A-1)

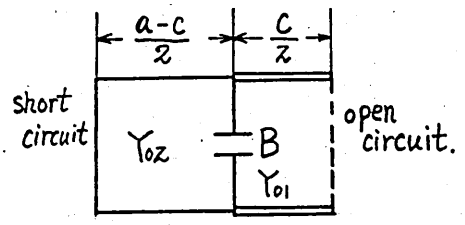


Fig. (A-2)

ここで前に導入した記号を用いてやれば.

$$\frac{2a}{\lambda_c} = X \qquad (A-2-2)$$

として.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{Y_{02}}{Y_{01}} = \frac{l}{d} = R \\ &\frac{\beta_x c}{2} = \frac{\pi c}{2a}\cdot\frac{2a}{\lambda_c} = \frac{P\pi}{2}X \\ &\frac{\beta_x (a-c)}{2} = \frac{\pi a\left(1-\frac{c}{a}\right)}{\lambda_c} = \frac{\pi(1-P)}{2}X \end{aligned}\right\} \qquad (A-2-3)$$

とおけるから ε_g (A-2-1) を書き直すと

$$R\cot\frac{\pi(1-P)}{2}X = \frac{B}{Y_{01}} + \tan\frac{P\pi}{2}X \qquad (A-2-4)$$

ただし $X = \frac{2a}{\lambda_c}$

を得る。又さらに B については 文献2より

$$\frac{B}{Y_{01}} \simeq \frac{4\ell}{\lambda_c}\left[\ell_n\left(\frac{1-d^2}{4d}\right)\left(\frac{1+d}{1-d}\right)^{\frac{1}{2}\left(d+\frac{1}{d}\right)} + \frac{2}{A}\right] \qquad (A-2-5)$$

ただし $A = \left(\frac{1+d}{1-d}\right)^{2d}\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{2\ell}{\lambda_c}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{2\ell}{\lambda_c}\right)^2}} - \frac{1+3d^2}{1-d^2}$

$$d = \frac{Y_{01}}{Y_{02}} = \frac{d}{\ell} = \frac{1}{R} \qquad (A-2-6)$$

$$\lambda_c = 2a$$

の様にえられるから，Parameter Q. R を用れば

$$\frac{B}{Y_{01}} \simeq 2RQ\left[\ell_n\left(\frac{R^2-1}{4R}\right)\left(\frac{R+1}{R-1}\right)^{\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)} + \frac{2}{A}\right]$$

$$A = \left(\frac{R+1}{R-1}\right)^{\frac{2}{R}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-(RQ)^2}}{1-\sqrt{1-(R\theta)^2}} - \frac{R^2-3}{R^2-1} \qquad (A-2-7)$$

ただし $\theta = \frac{d}{a}$ ， $R = \frac{\ell}{d}$

となる。従って ε_g s (A-2-4), (A-2-7) を用いて Q が零に近い時の X，いいかえると $\lambda_c/2a$ が求められる。

Appendix Ⅲ　変分近似による遮断波長の近似解

a と l を一定に保って d を l に限りなく近づけた時の遮断波長は当然断面が $a \times 2l$ の矩型導波管になるから，$\lambda_c = 2a$ になるが，d が l よりわずかに短かい場合には λ_c はどの様な傾向で変化するかを調べてみる。　この場合には矩型導波管からのわずかな断面変形による遮断波長の変化を求めるわけだから変分法によるのが適当と思われる。（文献3）

今変形のない矩型導波管の z 方向成分の mode 関数を Φ_0 とすると，これは

$$\nabla_t^2 \Phi_0 + k_{c0}^2 \Phi_0 = 0 \qquad (A-3-1)$$

ただし　$\nabla_t = a_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

をみたしている。　わずかに変形した場合の mode 関数を Φ とすれば，これは

$$\nabla_t^2 \Phi + k_c^2 \Phi = 0 \qquad (A-3-2)$$

をみたしている。　両式より

$$\Phi \nabla_t^2 \Phi_0 - \Phi_0 \nabla_t^2 \Phi = (k_c^2 - k_{c0}^2) \Phi \Phi_0 \qquad (A-3-3)$$

となるから　変形した断面にわたって積分し，Green の定理を用いてやると

$$\oint_C \left(\Phi \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} - \Phi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dA = (k_c^2 - k_{c0}^2) \iint_S \Phi \Phi_0 \, dS \qquad (A-3-4)$$

を得る。今 TE mode を考えると n は管壁の外向きの法線であるから、境界条件より $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n}=0$ であり、変形が小さければ $\bar{\psi} \simeq \bar{\psi}_0$ と考えられるから上式より、

$$k_c^2 - k_{c0}^2 \simeq \frac{\oint_c \bar{\psi}_0 \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial n} dA}{\iint_S \bar{\psi}_0^2 dS} \qquad (A-3-5)$$

が求められる。

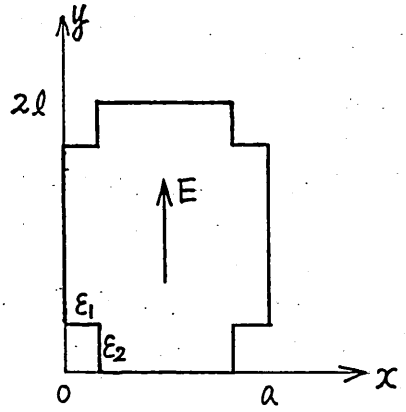


Fig. (A-3)

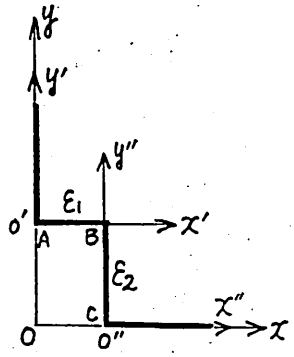


Fig. (A-4)

さて今の場合断面変形が Fig. (A-3) の様にあったとする。Fig. (A-4) の様に一つの隅についてみると、$\bar{\psi}_0 = A\cos\frac{\pi x}{a}$, だから

$$\left.\begin{aligned} &\overline{AB} \text{ 上}; \quad \bar{\psi}_0 = A\cos\frac{\pi x'}{a}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial n} = -\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial y'} = 0 \\ &\overline{BC} \text{ 上}; \quad \bar{\psi}_0 = A\cos\frac{\pi}{a}(x''+\varepsilon_1) \\ &\qquad \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial n} = -\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial x''} = A\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi}{a}(x''+\varepsilon_1) \end{aligned}\right\} \quad (A-3-6)$$

となるから、ε_1 (A-3-5) より

$$k_c^2 - k_{c0}^2 = 4 \cdot \frac{\frac{\pi}{a}\int_0^{\varepsilon_2} \cos\frac{\pi}{a}\varepsilon_1 \cdot \sin\frac{\pi}{a}\varepsilon_1 \, dy''}{\int_0^{2\ell}\int_0^{a} \cos^2\frac{\pi x}{a} \, dx\,dy} = \frac{2\pi}{a} \frac{\int_0^{\varepsilon_2} \sin\frac{2\pi}{a}\varepsilon_1 \, dy'}{\int_0^{2\ell}\int_0^{a} \cos^2\frac{\pi x}{a} \, dx\,dy}$$

$$= \frac{2\pi}{a} \frac{\varepsilon_2 \sin\frac{2\pi}{a}\varepsilon_1}{a\ell} \simeq \frac{4\pi^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{a^3 \ell} \qquad (A-3-7)$$

となる。$a = \ell = 1\,cm$ の時は、$\lambda_{c0} = 2\,cm$ となるから上式より

$$k_c^2 - k_{c0}^2 = 4\pi^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \qquad (A-3-8)$$

となるから $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を cm でふえると

$$\lambda_c \simeq 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \quad cm \qquad (A-3-9)$$

が得られる。これを用いて $\ell \simeq d$ の時にもとめた曲線が Fig. 12 (a) の実線である。これからわかるように $d = 1\,cm$ 附近では特性方程式からもとめた曲線とよく一致している。

講習科学研究会資料

Fabry-Perot 共振器による
複素誘電率の測定

牧本利夫
弓場芳治
太田勲
(大阪大学基礎工学部)

1966年12月9日

Fabry-Perot共振器による複素誘電率の測定

§1 まえがき

試料の誘電率を測定する方法として，空胴共振器に試料を入れ，共振波長の変化，あるいは共振軸長の変化から比誘電率を，またQ値の変化から損失を求める方法がある。しかし，ミリ波帯でこの方法をつかうと波長が短いので試料の寸法精度や，共振器の中での試料の位置の精度がきびしくなり測定は困難になる。また比誘電率の低い試料を測定するにはQ値の高い共振器をつかわなければならない。従来の密閉形の共振器でQ値の高いものは接合部の接触，喰い違いなどでQ値が変化するおそれがある，したがって試料の出し入れのときの共振器の状態の変化が誤差になる可能性が多い。

この点Fabry-Perot共振器のような開放形の共振器では高いQ値のものが容易に作れ，また共振器の状態を変えずに試料を出し入れすることができるので共振器の機械的な変化による誤差はなく，このような測定に適している。

ここではFabry-Perot共振器に誘電体板を入れたときの状態をしらべ，この結果より導いた共振周波数の変化とQ値の変化を測定して比誘電率と損失角を求める方法について説明した。

[illegible]に対し，またテフロン，パラフィンについて測定した結果を示してある。

§2. 比誘電率の測定

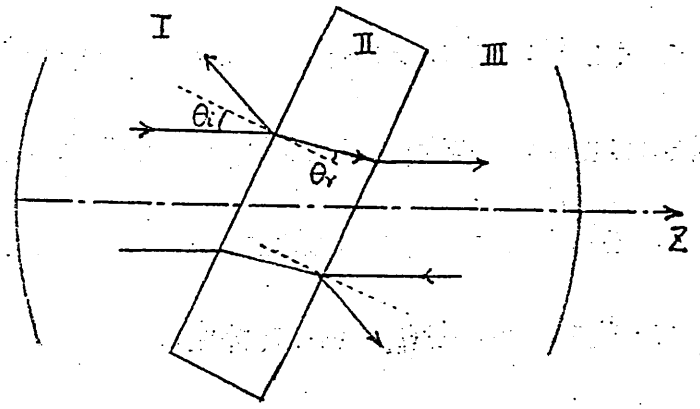


図1. 共振器内の電波の進行方向

図1のように軸長Dの球面Fabry-Perot共振器（以下FPRと略す）に厚さdの誘電体板を挿入する。FPR内の電界分布はTEM$_{00q}$モードであることを仮定し，かつ共振器の中央部では電界は紙面に並行でZ方向の成分がない平面波と仮定する。[注1] また誘電体板の法線は，紙面にあって，共振器の軸とはθ_iの角度をなしている。さらに誘電体板によって分けられ共振器内の領域をI, II, IIIに分け，誘電体板に対して左から入る入射波の電界成分をE_i，E_iによる反射波，透過波の電界成分をE_r, E_tとし，右からの入射波，反射波および透過波

の定界成分を E_i', E_r' および E_t' とする。　領域 I, III の媒質(空気)の伝播定数を k_0 とすると, E_i, E_t および E_i', E_t' は

$$\left.\begin{aligned} E_i &= A_1 e^{-jk_0 z}, \quad & E_t &= A_3 e^{-jk_a z} \\ E_i' &= B_3 e^{jk_0 z}, \quad & E_t' &= B_1 e^{jk_0 z} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

と表わされ, 対称性から

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{B_1}{B_3} \qquad (2)$$

となり E_r が非常に小さいと仮定すれば

$$|A_1| = |B_3|, \quad |A_3| = |B_1| \qquad (3)$$

であり, また θ_i を大きくとれば反射波を共振器の外へ逃がせるので, 誘電体板と共振器の反射板間での多重反射は起らない。

以上の仮定によって, 誘電体板の有無による共振器の状態の差は, 二枚の球面鏡の距離の変化によるものと等価と考えられる。[注2.] したがって, 誘電体板のないときの共振周波数(共振軸長)と誘電体板を入れたときの共振周波数(共振軸長)の差を測れば試料の誘電率を測ることができる。

入射角 θ_i で入射面に並行な電界を持つ平面波が並行平面の誘電体板に入射したとき, 入射波と透過波の振幅の比は誘電体の損失を無視すれば次式のようになる。

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{4\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i\cos\theta_r(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i+\cos\theta_r)^2}{(\varepsilon\cos^2\theta_i-\cos^2\theta_r)^2-8\varepsilon\cos^2\theta_i\cos^2\theta_r-2(\varepsilon\cos^2\theta_i-\cos^2\theta_r)^2\cos(2k_1d\cos\theta_r)}$$

$$\times\left\{1-\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i-\cos\theta_r}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i+\cos\theta_r}\right)^2 e^{j2k_1d\cos\theta_r}\right\} e^{-j(k_1d\cos\theta_r-k_0d\cos\theta_i)} \quad (4)$$

ε：比誘電率

k_0, k_1：空気，誘電体の伝播定数

θ_i：入射角

θ_r：屈折角

d：誘電体の厚さ

式(4)より誘電体板を挿入したときの共振条件をしらべるために位相の項をとり出すと式(5)で示される。

$$\frac{A_3}{A_1}=a\, e^{-j\{(k_1\cos\theta_r-k_0\cos\theta_i)d-\phi\}} \quad (5)$$

こいで

$$\phi=\mathrm{Tan}^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i-\cos\theta_r)^2\sin(2k_1d\cos\theta_r)}{(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i+\cos\theta_r)^2-(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i-\cos\theta_r)^2\cos(2k_1d\cos\theta_r)}\right\} \quad (6)$$

である。 FPRの共振モードはTEM_{00q}と仮定しているから鏡の距離D，曲率半径bの共振条件は

$$2k_0D-\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2\delta}{\sqrt{1-4\delta^2}}\right)=2\pi q \quad (7)$$

$$\delta=(4bD-2D^2-b^2)/2b^2$$

である。 同様に試料を挿入したときの共振条件は式(5)の位相の項を考慮して次式になる。

$$2k_1'D+2\{(k_1'\cos\theta_r-k_0'\cos\theta_i)d-\phi\}$$
$$-\left\{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2\delta'}{\sqrt{1-4\delta'^2}}\right\}=2\pi g \qquad (8)$$

誘電体板を入れたために等価的に伸びたと考えられる軸長はわづかであるから $\delta \fallingdotseq \delta'$ とし式(7), (8)より

$$2k_0D=2k_1'D+2\{(k_1'\cos\theta_r-k_0'\cos\theta_i)d-\phi\} \qquad (9)$$

となる。 誘電体板のないときの共振周波数を f, 誘電体板をいれたときの共振周波数を f' とし, その差 $f-f'=\Delta f$ とすると式(9)より

$$(k_1'\cos\theta_r-k_0'\cos\theta_i)d-\phi=k_0'D\frac{\Delta f}{f'} \qquad (10)$$

となる。式(10)を整理すると

$$\frac{k_1'}{k_0'}\cos\theta_r=\cos\theta_i+\frac{\phi}{k_0'd}+\frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f'} \qquad (11)$$

であるから

$$k_1'/k_0'=\sqrt{\varepsilon}$$

$$\cos\theta_r=\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_i}{\varepsilon}}$$

の関係を入れると

$$\varepsilon=\left(\cos\theta_i+\frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f'}+\frac{\phi}{k_0'd}\right)^2+\sin^2\theta_i \qquad (12)$$

となり，鏡間距離 D，試料の厚さ d を与えて，周波数 f, f' と入射角 θ_i を測定すれば比誘電率 ε が求まる。

ε が小さく試料の厚さ d が薄いときには $f \fallingdotseq f'$ となり2項目の $\frac{\Delta f}{f'} \fallingdotseq \frac{\Delta f}{f}$ で近似出来る。 また，式(6)で d を $\lambda/2$ の整数倍にとるか，入射角 θ_i を Brewster 角 θ_b にとれば $\phi = 0$ となり式(12)は一方簡単な式(13)になる。

$$\varepsilon = 1 + \frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f'}\left(\frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f'} + 2\cos\theta_i\right)$$

$$\fallingdotseq 1 + \frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f}\left(\frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f} + 2\cos\theta_i\right) \qquad (13)$$

実際の測定では Brewster 角に設置することが困難であるから θ_i は測定した角度で計算する方が誤差が小さい。(§5. 誤差の項参照)

§3. 損失角の測定

誘電率を $\varepsilon(1-j\delta)$ とし伝播定数を $\beta_1 = \beta_1 - j\alpha$ とすると式(4)は式(14)となる。

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{4\sqrt{\varepsilon}\left(1-j\frac{\delta}{2}\right)\cos\theta_i\cos\theta_r\, e^{j\beta_0 d\cos\theta_i}}{\left[\sqrt{\varepsilon}\left(1-j\frac{\delta}{2}\right)\cos\theta_i + \cos\theta_r\right]^2 e^{j(\beta_1 - j\alpha)d\cos\theta_r} - \left[\sqrt{\varepsilon}\left(1-j\frac{\delta}{2}\right)\cos\theta_i - \cos\theta_r\right] e^{-j(\beta_1 - j\alpha)d\cos\theta_r}} \qquad (14)$$

入射角を Brewster 角にとり δ の2乗以上の項を無視すると式(14)は，

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-\alpha d\cos\theta_r} \cdot e^{-j(\beta_1\cos\theta_r - \beta_0\cos\theta_i)d} \tag{15}$$

となる，ここで

$$\alpha d\cos\theta_r = \alpha' \tag{16}$$

とすれば P_0 の電力が誘電体板を一回通過することによって失われる電力は，

$$P_0(1-e^{-2\alpha'})$$

で誘電体板の損失により低下するQ値を Q_m とすると

$$Q_m = 2\pi f \frac{P_0 e^{-2\alpha'}}{P_0(1-e^{-2\alpha'})\,c/D} \fallingdotseq \frac{8\pi}{1-e^{-2\alpha'}} \tag{18}$$

c：光速

誘電体板を挿入しないときの共振器の負荷Q値を Q，誘電体板を挿入したときの負荷Q値を Q' とすると，

$$\frac{1}{Q'} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_m} \tag{19}$$

であるから式(18)，(19)より

$$\alpha = \frac{\alpha'}{d\cos\theta_r} = \frac{\ln\{1+\frac{8\pi}{Q_m}\}}{2d\cos\theta_r} = \frac{\ln\{1+8\pi(\frac{1}{Q'}-\frac{1}{Q})\}}{2d\cos\theta_r} \tag{20}$$

となる。　一方減衰係数の定義より

$$\alpha = \frac{2\pi f}{2}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu\varepsilon}\,\tan\delta \tag{21}$$

$$\tan\delta = \frac{\alpha' c}{\pi f \sqrt{\varepsilon}} \tag{22}$$

の関係があるから，式(20), (22)より損失角が求まる。

$$\tan\delta = \frac{c \ln\{1+8\pi(\frac{1}{Q'}-\frac{1}{Q})\}}{2\pi f \sqrt{\varepsilon}\, d \cos\theta_r} \tag{23}$$

あるいは入射角がBrewster角であることから $\left(\cos\theta_r = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)$

$$\tan\delta = \frac{c\sqrt{\varepsilon+1}\ \ln\{1+8\pi(\frac{1}{Q'}-\frac{1}{Q})\}}{2\pi f d \varepsilon} \tag{24}$$

$$\fallingdotseq \frac{c\sqrt{\varepsilon+1}\ \ln\{1+\frac{2\pi f D}{c}(\frac{1}{Q'}-\frac{1}{Q})\}}{2\pi f d \varepsilon} \tag{25}$$

として求まる。

§4. 実験

1) 測定装置

測定装置は

図2の構成である。

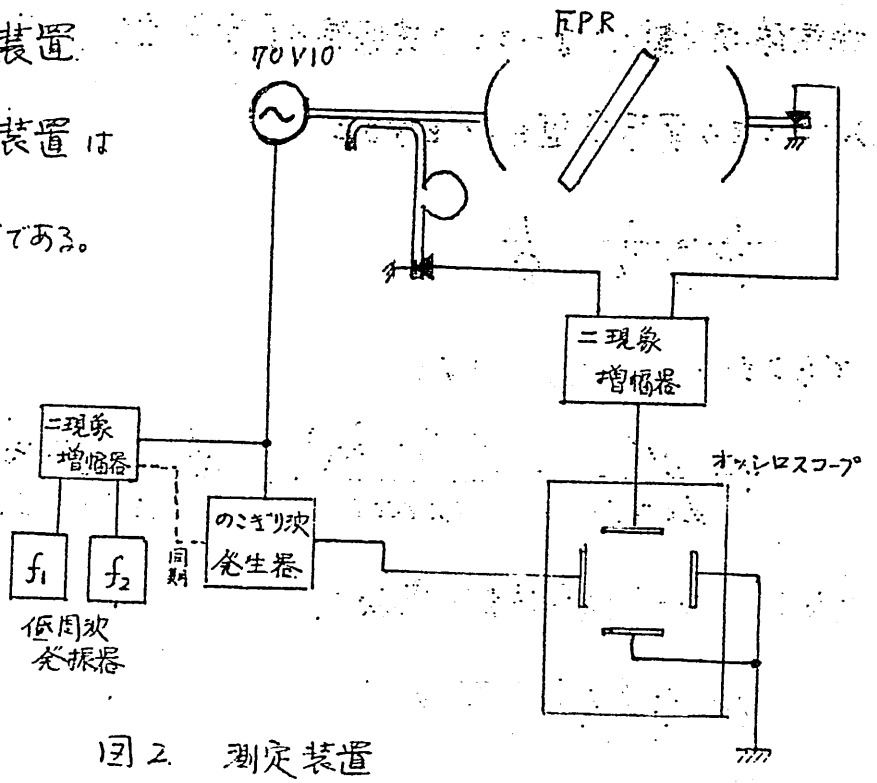


図2. 測定装置

クライストロンはのこぎり歯電圧をリペラーに掛けて周波数掃引する。
また2つの低周波発振器より f_1, f_2 の周波数を発振させ，振幅変調がかけられる，f_1, f_2 は同一現象増幅器により，のこぎり波に同期して交互に変調するようになっている。

クライストロンの出力は FPR に導かれるが，出力の一部は方向性結合器で分けて較正用共振器に導かれる。この共振器は FPR と同程度かそれ以上のQ値のものでなければならない。この実験では軸長約2.80 mm，直径 51 mm の TE_{01} 共振器を使った。

2つの共振器の検波出力を二現象増幅器を通してオッシロスコープに加え，同時に共振曲線が見えるようになっている。
FPR は鏡の直径 20 cm，曲率半径 100 cm のものを間隔 120 cm で対向させた，使用周波数は 70 GHz である。

ii) 測定法

先ず試料のない状態で FPR の共振周波数 f とQ値 Q を測定する。
Q値の測定は変調による側帯波を利用する方法を使った。f_1 と f_2 の周波数で交互にクライストロンを変調すると，側帯波による共振曲線がもとの共振曲線の両側に f_1, f_2 だけ離れて現れる。

オッシロスコープを見ながら側帯波による2本の共振曲線が図3のように半値点で重なるようにf_1とf_2の周波数を調節すれば，半値幅は$f_1 \sim f_2$として与えられるからQ値が求まる。

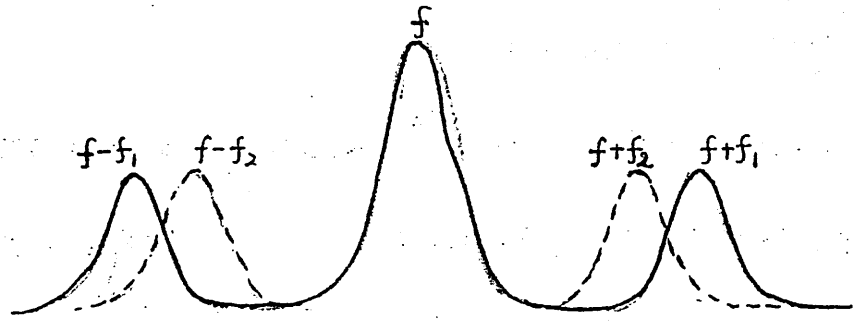


図3. 側帯波による共振曲線

較正用共振器の共振周波数がFPRの共振周波数fと一致するように調整し，試料を挿入する，このとき角度によっては共振曲線がほとんど現われないことが多い，試料を回転させて入射角を調整すると，Brewstar角附近で共振曲線が現われる。共振曲線が最大になる点を求めてこの位置で，角度θ_i，周波数f'，Q値Q'を測定する。

f'の測定は較正用共振器の共振周波数からの差で測ればよい，Δfが小さいときは，クライストロンをf_1で変調して側帯波の共振曲線を作りf_1を増加させてf'と一致するようにすれば$\Delta f = f_1$となる。しかしΔfが大きくなると側帯波が余り出なくなるので，較正用共振器をつかって周波数を読まなければならない。

以上の測定をθ_iの正負（試料を右回転，左回転）の2点で

測定しθ_iの誤差を小さくすることができる。

iii) 測定の注意

a) 試料の誘電率が低いか，厚さが薄いときには試料の挿入による周波数の変化が小さいので，周波数の変化はそのまゝ測定出来るが，厚い試料では，図4のようにfの附近に現れるf'は$q+p$モードのものになる。

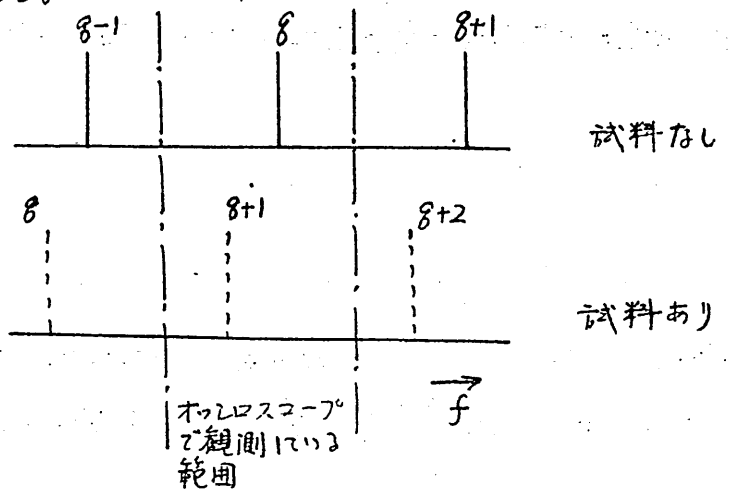


図4. 縦モードの校正.

このときΔfとして図の$\Delta f'$を読むおそれがある。qモードと$q+p$モードの周波数間隔は式(7)より

$$F_p = f_{q+p} - f_q = \frac{pC}{2D}$$

として求められるF_pを加えなければならない，したがって測定した$\Delta f'$より$\Delta f = F_p + \Delta f'$として誘電率を決定する。

未知の試料を測定するには先づ薄い試料で誘電率の近似値

を求め厚い試料を測定して精度をあげる。

b) TPRは共焦点配置よりも少し長い軸長で使う方が使いやすい。

- 共焦点配置では高次モードが縮退しているので鏡の直径が大きいと異常にQ値が低下する。
- 共焦点と共平面の間では回折損失の影響が現われるまでは軸長に比例してQ値は高くなる。しかし透過電力が減少するので測定は困難である。
- 共焦点より短い軸長では共振器の透過電力は大きいが高次モードの影響が大きい。

iv) 測定結果

テフロン 厚さ 0.8mm

$\varepsilon = 2.10$ $\tan\delta = 3.7 \times 10^{-4}$

角度による変化.

θ_i	ε
51°	2.07
52	2.07
53	2.08
54	2.09
55	2.10
56	2.10
57	2.10
58	2.10

$\theta_b = 55°20'$

パラフィン (MP-66~68°C)

$\varepsilon = 2.25$ $\tan\delta = 4.1 \times 10^{-4}$

	厚さ 14.9mm	5.16mm
θ_i	ε	ε
50°	2.24	2.21
51	2.25	2.21
52	2.25	2.22
53	2.26	2.22
54	2.25	2.22
55	2.25	2.22
56	2.25	2.22
57	2.25	2.22.

$\theta_b = 56.24'$

§ 5　測定誤差の検討

a)　測定値の読みとり誤差を角度($\Delta\theta_i$)，周波数の変化($\Delta(\Delta f)$)，厚さ(Δd)とするとそれぞれの誤差は$\Delta\varepsilon_\theta$，$\Delta\varepsilon_f$，$\Delta\varepsilon_d$と考えられるから

$$\frac{\Delta\varepsilon_\theta}{\varepsilon} = -2\frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f'}\sin\theta_i\frac{\Delta\theta_i}{\varepsilon}$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_f}{\varepsilon} = 2\frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f'}\left(\frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f'}+\cos\theta_i\right)\frac{\Delta(\Delta f)}{\varepsilon\,\Delta f}$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_d}{\varepsilon} = -2\frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f'}\left(\frac{D}{d}\frac{\Delta f}{f'}+\cos\theta_i\right)\frac{\Delta d}{\varepsilon\,d}$$

となる，試料を厚くすれば$\Delta\varepsilon_f$，$\Delta\varepsilon_d$は小さくなり精度はあがる。角度の測定誤差は最も注意しなければならない。

b)　θ_iがBrewstar角よりはずれると式(5)のϕが誤差の原因となる，しかし，ϕはBrewstar角の近傍で非常に小さく，εの測定には無視してもよい。　たゞし角度の読みとり誤差は大きく影響するので式(13)はθ_iのまゝで使わなければならない。　Brewstar角θ_bからのずれに対するϕの最大値は下表のような値である。

ϕの最大値

$\theta_b \pm \alpha$ ＼ ε	1.5	2.0	2.5	5.0
−10°	0.0021	0.0054	0.0086	0.0221
−5	0.00068	0.00170	0.00267	0.0069
−1	0.00033	0.00082	0.00013	0.00033
+1	0.00037	0.00090	0.00014	0.00037
+5	0.0012	0.0028	0.0043	0.0114
+10	0.0063	0.0145	0.0223	0.0607

∴ θ_i が正確にBrewstar角であれば反射による損失がある，この損失は；

$$\left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2 = \frac{4(\varepsilon\cos^2\theta_i - \cos^2\theta_r)\sin^2(k_1 d\cos\theta_r)}{(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i - \cos\theta_r)^4 + (\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i + \cos\theta_r)^4 - 2(\varepsilon\cos^2\theta_i - \cos^2\theta_r)\cos(2k_1 d\cos\theta_r)}$$

で現わされる，反射による電力損失を計算すると下の表のようになる。

角度による電力反射係数

$\theta_b \pm \alpha$ ＼ ε	1.5	2.0	2.5	5.0
$-10°$	0.00201	0.0052	0.0088	0.0235
-5	0.00062	0.00153	0.00286	0.00795
-1	0.00002	0.00004	0.00008	0.00010
$+1$	0.00004	0.00005	0.00005	0.00004
$+5$	0.0013	0.0031	0.0040	0.0108
$+10$	0.0067	0.0155	0.0213	0.0549

また，誘電体に損失がある場合にはBrewstar角であっても反射がある，この損失を計算すると次表のようになる。

$\tan\delta$ による電力反射係数

$\tan\delta$ ＼ ε	1.5	2.0	2.5	5.0
0.01	0.0000003	0.0000008	0.0000011	0.000002
0.1	0.000034	0.000078	0.000112	0.00020

これらの反射による損失を α_R とすれば，式(23)による $\tan\delta$ の計算は Q_m 以外に α_R によるQ値の低下 Q_R を考えなければならない。

式(19)は　$Q_\alpha = 8\pi/\alpha_R$　として，

$$\frac{1}{Q''} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_m'} + \frac{1}{Q_R}$$

となり Q' より求めた $\tan\delta_\varepsilon$ と Q'' より求めた真の $\tan\delta$ の誤差は

$$\frac{\tan\delta_\varepsilon}{\tan\delta} = \frac{\ln\left\{1+8\pi\left(\frac{1}{Q_m}+\frac{1}{Q_R}\right)\right\}}{\ln\left\{1+8\pi\frac{1}{Q_m}\right\}} \fallingdotseq 1+\frac{\alpha_R Q_m}{8\pi} = 1+\frac{c\alpha_R Q_m}{2\pi f D}$$

となり. $\tan\delta \cdot \frac{c\alpha_R Q_m}{2\pi f D}$ だけ大きく測定されている。

§ 6. あとがき.

以上のようにTPRなどの開放形共振器で誘電率を測定すると,

i) 測定用共振器のQ値を大きくとれるので低い誘電率迄測定出来る。

ii) 試料の出し入れが容易である。

iii) 試料の出し入れによる共振器の機械的な変化がないので, 機械的な状態の変化による誤差は皆無である。

iv) 試料の寸法精度は厚さだけでよいので製作が容易である.

などの長所があり 逆に,

i) 大きな試料がいる。

ii) 誘電率が未知の試料に対しては, 測定の注意(i)の理由で充分薄い試料で予め測定しなければならない。

iii) TPRは放射損失を伴うので励振効率が悪く, 損失の大きな試料は透過電力が小さくなるので測定出来ない。

などの欠点があるが充分実用になると考えられる。

誤差についても検討したように充分小さい値であり 本方法で測定した下記の値は従来発表されている値とよく一致している。

謝辞

本報告について，実験を手伝ってくださった学部生 山本勝一郎君，計算，討論を重ねていただいた大学院学生 根本永次郎君に感謝し，その他有益な助言をいただいた当研究室の諸氏に深謝する。

参考文献

i) Boyd, Gordon, "Confocal Multimode Resonator for Millimeter through Optical Wavelength Maser", BSTJ, 40, March 1961, P.489,

ii) Fox, Li, "Resonant Mode in a Maser Interferometer" BSTJ, 40, March, 1961, P. 453.

iii) Stratton, "Electromagnetic Theory", Book

iv) Collin, "Feeld Theory of Guided Waves", Book

v) Degenford, Coleman, "A Quasi-Optics Perturbation Technique for Measuring Dielectric Constants" Proc. IEEE, 54, No4, App. 1966, P.520,

vi) 牧本，弓場，"高いQ-Factorの測定法" 文部省ミリ波開発総合研究 昭和34年11月

附録.

I. Fabry Perot 共振器の内部で平面波と見なせる範囲をしらべると，鏡の曲率半径 b，間隔を D としたときの状態は曲率半径 b' の鏡を共焦点配置にしたときと等価と考えられる。

$$b' = D(D+2b)$$

この状態で中心より z_1 離れた位置の等位相面の曲率半径は b'' は

$$b'' = \frac{1+\left(\frac{2z_1}{b'}\right)^2}{\frac{2z_1}{b'}} \cdot \frac{b'}{2}$$

また，この位置のスポットサイズ w_s は

$$w_s = \sqrt{\frac{b'\lambda\left\{1+\left(\frac{2z_1}{b'}\right)^2\right\}}{2\pi}}$$

となる。軸上と軸より w_s 離れた点での位相差を ψ とすると

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{b''^2+w_s^2}-b''\right)$$

$b'' \gg w_s$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{w_s^2}{2b''} = \frac{2z_1}{b'} = \frac{2z_1}{D(D+2b)}$$

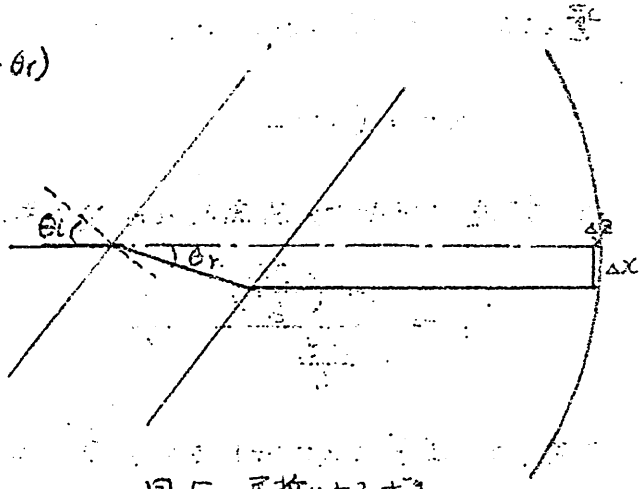
スポットの両端では位相差が 2ψ になるから

$$2\psi = \frac{4z_1}{D(D+2b)}$$

である。$\lambda = 0.4\,cm$，$D = 120\,cm$，$b = 100\,cm$ とすれば $z_1 = \frac{D}{2}$ の点，すなわち鏡の直前でも位相差は $1/160\,(rad)$ となり平面波となせる。

誘電体板を斜めに入れることにより電波が屈折するので図5のように
ビームの軸が共振器の軸からはずれる。このために共振周波数が変化す
る。今軸とのずれをΔxとすれば

$$\Delta x = \frac{d}{\cos\theta_r}\sin(\theta_i - \theta_r)$$



入射角をBrewster角とすれば

$$\Delta x = d\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$$

$$= d\frac{\varepsilon-1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon+1}}$$

図5. 屈折によるずれ

したがって曲率半径bの鏡の軸長の変化Δzは

$$\Delta z = b - \sqrt{b^2-(\Delta x)^2} = b - \sqrt{b^2 - d^2\frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon(1+\varepsilon)}}$$

となり共振周波数の変化f_rは

$$\frac{f_r}{f} = \frac{\Delta z}{D} = \frac{1}{b}\left(b - \sqrt{b^2 - d^2\frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon(\varepsilon+1)}}\right)$$

となる，誘電体板を入れたために変化した周波数Δfと比較すると

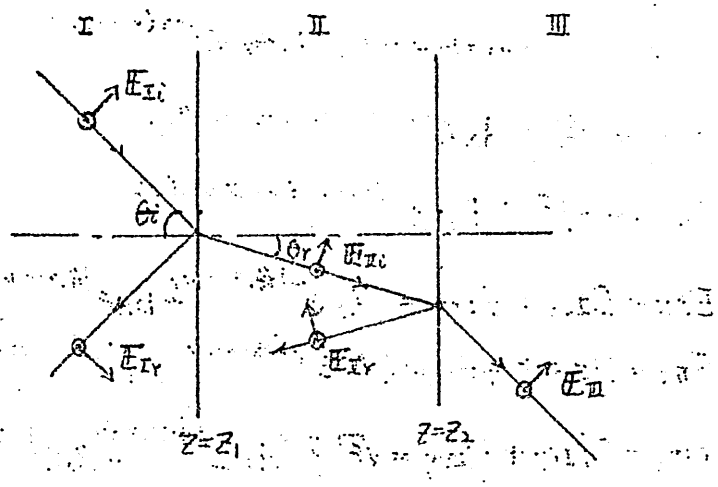
$$\frac{f_r}{\Delta f} = \frac{b - \sqrt{b^2 - d^2\frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon(\varepsilon+1)}}}{d\frac{\varepsilon-1}{\sqrt{\varepsilon+1}}}$$

$$\left(b^2 \gg d^2\frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon(\varepsilon+1)}\right)$$

$$\frac{f_r}{\Delta f} \fallingdotseq \frac{d}{2b^2}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon+1}}$$

となりほとんど無視出来る。

Ⅲ　並行誘電体板に平面波が角度θ_iで入射したときの反射波，透過波を計算する。領域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの波の電磁界を式(A-1)のように仮定する。



領域 Ⅰ

$$E_{Ix} = E_{Ii}\cos\theta_i = A_1\cos\theta_i\, e^{-jk_0(z\cos\theta_i - x\sin\theta_i)}$$
$$E_{Iiz} = E_{Ii}\sin\theta_i = A_1\sin\theta_i\, e^{-jk_0(z\cos\theta_i - x\sin\theta_i)}$$

$$E_{Irx} = -E_{Ir}\cos\theta_i = -B_1\cos\theta_i\, e^{jk_0(z\cos\theta_i + x\sin\theta_i)}$$
$$E_{Irz} = E_{Ir}\sin\theta_i = B_1\sin\theta_i\, e^{jk_0(z\cos\theta_i + x\sin\theta_i)}$$

$$H_{Iiy} = \eta A_1 e^{-jk_0(z\cos\theta_i - x\sin\theta_i)}$$
$$H_{Iry} = \eta B_1 e^{jk_0(z\cos\theta_i + x\sin\theta_i)}$$

$$E_{Ix} = E_{Iix} + E_{Irx} = (A_1 e^{-jk_0 z\cos\theta_i} - B_1 e^{jk_0\cos\theta_i})\cos\theta_i\, e^{jk_0 x\sin\theta_i}$$
$$E_{Iz} = E_{Iiz} + E_{Irz} = (A_1 e^{-jk_0 z\cos\theta_i} + B_1 e^{jk_0\cos\theta_i})\sin\theta_i\, e^{jk_0 x\sin\theta_i}$$
$$H_{Iy} = H_{Iiy} + H_{Iry} = \eta(A_1 e^{-jk_0 z\cos\theta_i} + B_1 e^{jk_0\cos\theta_i})\, e^{jk_0 x\sin\theta_i}$$

領域 Ⅱ

$$E_{IIix} = E_{IIi}\cos\theta_r = A_2\cos\theta_r\, e^{-jk_1(z\cos\theta_r - x\sin\theta_r)}$$

$$E_{IIiz} = E_{IIi}\sin\theta_r = A_2\sin\theta_r\, e^{-jk_1(z\cos\theta_r - x\sin\theta_r)}$$

$$E_{IIrx} = E_{IIr}\cos\theta_r = B_2\cos\theta_r\, e^{+jk_1(z\cos\theta_r + x\sin\theta_r)}$$

$$E_{IIrz} = E_{IIr}\sin\theta_r = -B_2\sin\theta_r\, e^{jk_1(z\cos\theta_r + x\sin\theta_r)}$$

$$H_{IIiy} = \sqrt{\varepsilon}\,\xi A_2 e^{-jk_1(z\cos\theta_r - x\sin\theta_r)}$$

$$H_{IIry} = -\sqrt{\varepsilon}\,\xi B_2 e^{jk_1(z\cos\theta_r + x\sin\theta_r)}$$

$$E_{IIx} = E_{IIix} + E_{IIrx} = (A_2 e^{-jk_1 z\cos\theta_r} + B_2 e^{jk_1 z\cos\theta_r})\cos\theta_r\, e^{+jk_1 x\sin\theta_r}$$

$$E_{IIz} = E_{IIiz} + E_{IIrz} = (A_2 e^{-jk_1 z\cos\theta_r} - B_2 e^{jk_1 z\cos\theta_r})\sin\theta_r\, e^{jk_1 x\sin\theta_r}$$

$$H_{IIy} = H_{IIiy} + H_{IIry} = \sqrt{\varepsilon}\,\xi(A_2 e^{-jk_1 z\cos\theta_r} - B_2 e^{jk_1 z\cos\theta_r})\, e^{jk_1 x\sin\theta_r}$$

領域 Ⅲ

$$\left.\begin{aligned} E_{IIIx} &= E_{III}\cos\theta_i = A_3\cos\theta_i\, e^{-jk_0(z\cos\theta_i - x\sin\theta_i)} \\ E_{IIIz} &= E_{III}\sin\theta_i = A_3\sin\theta_i\, e^{jk_0(z\cos\theta_i - x\sin\theta_i)} \\ H_{IIIy} &= \xi A_3 e^{-jk_0(z\cos\theta_i - x\sin\theta_i)} \end{aligned}\right\} \quad (A1)$$

上式に $z = z_1$, $z = z_2$ で連続の條件を適用すると

$$\left.\begin{aligned} &z = z_1 \\ &\quad E_{Ix} = E_{IIx} \\ &\quad H_{Iy} = H_{IIy} \\ &z = z_2 \\ &\quad E_{IIx} = E_{IIIx} \\ &\quad H_{Iy} = H_{IIy} \end{aligned}\right\} \quad (A2)$$

$$\cos\theta_i\left(A_1 e^{-jk_0 z_1\cos\theta_i} - B_1 e^{jk_0 z_1\cos\theta_i}\right)$$

$$= \cos\theta_r\left(A_2 e^{-jk_1 z_1\cos\theta_r} + B_2 e^{jk_1 z_1\cos\theta_r}\right)$$

$$A_1 e^{-jk_0 z_1\cos\theta_i} + B_1 e^{jk_0 z_1\cos\theta_i} = \sqrt{\varepsilon}\left(A_2 e^{-jk_1 z_1\cos\theta_r} - B_2 e^{jk_1 z_1\cos\theta_r}\right)$$

$$\cos\theta_r\left(A_2 e^{-jk_1 z_2\cos\theta_r} + B_2 e^{jk_1 z_2\cos\theta_r}\right)$$

$$= \cos\theta_i\left(A_3 e^{-jk_0 z_2\cos\theta_i}\right)$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left(A_2 e^{-jk_1 z_2\cos\theta_r} - B_2 e^{jk_1 z_2\cos\theta_r}\right) = A_3 e^{-jk_0 z_2\cos\theta_i} \qquad (A3)$$

式(A3)より $\frac{A_3}{A_1}$ を求めると

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{4\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i\cos\theta_r e^{jk_0 d\cos\theta_i}}{\left(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i + \cos\theta_r\right)^2 e^{jk_1 d\cos\theta_r} - \left(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i - \cos\theta_r\right)^2 e^{-jk_1 d\cos\theta_r}} \qquad (A4)$$

$$d = z_2 - z_1$$

となり 式(4)が求まる。

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{4\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i\cos\theta_r\left(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i + \cos\theta_r\right)^2}{\left(\varepsilon\cos^2\theta_i - \cos^2\theta_r\right)^2 - 8\varepsilon\cos^2\theta_i\cos^2\theta_r - 2\left(\varepsilon\cos^2\theta_i - \cos^2\theta_r\right)^2\cos\left(2k_1 d\cos\theta_r\right)}$$

$$\times\left\{1 - \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i - \cos\theta_r}{\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i + \cos\theta_r}\right)^2 e^{j2k_1 d\cos\theta_r}\right\} e^{-j\left(k_1 d\cos\theta_r - k_0 d\cos\theta_i\right)}$$

同様にして 式(A3)より $\left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2$ を求めると

$$\left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2 = \frac{4\left(\varepsilon\cos^2\theta_i - \cos^2\theta_r\right)^2\sin^2\left(k_1 d\cos\theta_r\right)}{\left(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i - \cos\theta_r\right)^4 + \left(\sqrt{\varepsilon}\cos\theta_i + \cos\theta_r\right)^4 - 2\left(\varepsilon\cos^2\theta_i - \cos^2\theta_r\right)\cos\left(2k_1 d\cos\theta_r\right)}$$

となり. $d = \frac{2n}{\lambda}$ のとき分子の sin が 0 となり, $\theta_i = \theta_b$ のときも 0 となり 反射波が 0 となっている。

式(A4)に $\varepsilon = \varepsilon(1-j\delta)$, $-\hat{e}_1 = \beta_1 - j\alpha$ を入れると.

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{4\sqrt{\varepsilon}\left(1-j\frac{\delta}{2}\right)\cos\theta_i\cos\theta_r\, e^{j\beta_0\delta\cos\theta_i}}{\left\{\sqrt{\varepsilon}\left(1-j\frac{\delta}{2}\right)\cos\theta_i+\cos\theta_r\right\}^2 e^{j(\beta_1-j\alpha)d\cos\theta_r} - \left\{\sqrt{\varepsilon}\left(1-j\frac{\delta}{2}\right)\cos\theta_i-\cos\theta_r\right\}^2 e^{-j(\beta_1-j\alpha)d\cos\theta_r}}$$

θ_i , θ_r に Brewstar 角の関係を代入し. δ^2 以上の項を無視すると.

$$\frac{A_3}{A_1} = e^{-\alpha d\cos\theta_r} e^{j(\beta_0\cos\theta_i - \beta_1\cos\theta_r)d}$$

となって. 式(15)が求まる.

超伝導体のマイクロ波表面インピーダンス

高山洋一郎・裏　克巳

（大阪大学工学部）

昭和41年12月9日

輻射科学研究会資料

超伝導体とくにPbのマイクロ波表面インピーダンスの計算方法についての調査を行ったので，ここに御報告したい。

§1. はじめに

超伝導現象の工学的応用は，強磁場発生用として，我が国でも活発に研究が行われ，小型ないし中型の超伝導コイルは実用期に入りかけている。一方マイクロ波領域で超伝導現象を応用することは，我が国では未だそれ程でもないが，米国，欧州では加速器に応用することを目標にして研究が進められている。[1),2),3)] *Stanford* 大学では 0.5 MeV のパイロット線形加速器の実験に成功したことが伝えられている。

マイクロ波空洞を超伝導化すると 10^{9} 程度の Q が得られるので，[2)] 現在の線形加速器の空洞の Q が 10^{4} 程度であるから，マイクロ波入力は 10^{5} 程度節約できることになる。従って連続運転の可能性がある。大電流線形加速器ではビーム負荷が大きいから，超伝導化してもマイクロ波入力は Q の向上程度には節約できない。しかし我々の計画しているのは高エネルギ電子顕微鏡の電子ビーム発生源としての小形の線形加速器であって，ビーム負荷はかなり小さく超伝導化することで連続動作の利点を活用できるのが非常な魅力である。というのは，この場合電子顕微鏡の高分解能を保つためには
ビームのエネルギ巾を 10^{-5} 程度に抑えねばならないが，これを実現することは従来のパルス巾数 μs の線形加速器では非常に困難であるからである。[4)]

またマイクロ波増巾管の Feed back loop に超伝導空洞を入れると非常に周波数安定度の高いマイクロ波発振器が得られる可能性がある。例えば $Q = 10^{6}$ の空洞と進行波管と組合せて，少くとも測定器の測定範囲の 10^{-8} 以上の安定度が報告されている。[3)] ちなみに簡単な計算によると，4 *Gc*，出力 10 W，N.F. 30 db の進行波管に $Q = 10^{6}$ の空洞を結合させたとき，1 *ms* の間の発

振周波数安定度は水晶発振器の 10^{-8} をはるかに上廻り，10^{-14} 程度が得られることになる。

マイクロ波空洞の Q は，その材料の表面インピーダンス Z_0 とは次式で結ばれている。[5]

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{\mu_0 \omega_0} \frac{\int_S H^2 \, da}{\int_V H^2 \, dv} \cdot R_e \, Z_0 \qquad (1)$$

従って，表面インピーダンスと，材料それ自体，その処理法，動作温度，周囲磁界，power level などとの関係を知っておく必要がある。これらの点のあるものに関しては，超伝導理論の実験的検証ということで Sn あるいは Al についてずい分多くの実験が集積されて来ている。

これは理論との対応を考えるには液化ヘリウム温度近くに転移温度を持つ不純物の少い試料の方が便利なためと，考えられる。しかし，応用という点では損失のなるべく少い点で，Pb や Nb のように転移温度の高いものが望ましく，純粋試料の入手の容易の点から Pb が通常用いられている。しかしこの Pb の表面インピーダンスの測定結果の詳しい報告は余りない。[2] 理論的に計算するには本文で述べるように種々の方法があるが，それらを用いた結果にはかなりの差異があり，またかなり大きな仮定を含んでいる現状である。

単位系はできるだけMKS系に書き直したが，途中の導出などが不明で結果だけ与えてある論文から引用したものなどは，止むを得ずCGS系のままになっている。これはその都度明示する。

§ 2. 異常表皮効果

超伝導体に限らず，一般に金属は低温になるに従って伝導度 σ が増して行く。高周波表面抵抗 R は $\sigma^{-\frac{1}{2}}$ に比例して小さくなる。しかしある程度 σ が増えると

この関係が成立しなくなり最終的にはある値R_∞におちつく。これは異常表皮効果といわれる現象であり，表皮深さδが伝導電子の平均自由行程lと同程度あるいはそれ以下になるときに現われる。その原因は，$\delta < l$になると，電磁界の存在している領域($\approx \delta$)の全部の電子が伝導に与らなくなる。表面に殆んど平行に走る電子以外は散乱されて，この領域外に出てしまう。このために実効的な伝導電子の数が減り，見掛け上のσが減る。

この効果は，電子に対するBoltzmann輸送方程式を解析したReuter, Sondheimer [6]により詳細に論じられ，実験値との一致が良いことが示されている。[7] 図1はその様子を示したものである。横軸は$\alpha^{\frac{1}{6}}$であるが

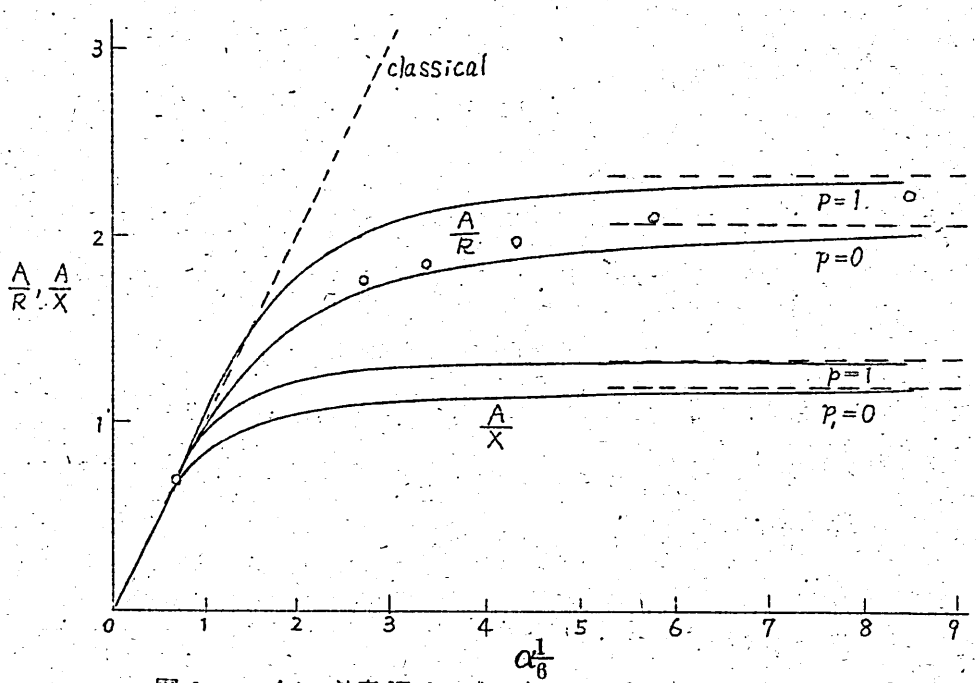


図1. マイクロ波表面インピーダンス. ○印は水銀に対する実測値

$$A = \frac{\sqrt{6}}{4}\mu_0\left(\frac{c^2\omega}{\pi e}\right)^{2/3}\left(\frac{m\upsilon}{3\pi}\right)^{1/3}$$

$$\alpha = 2\mu_0 \omega \varepsilon^2 m^2 \overline{v^2} l^3 / h^3$$

$$= \frac{3}{4} l^2 \sigma \omega \mu_0 = \frac{3}{2} \frac{l^2}{\delta^2} \qquad (2)$$

で与えられる。図中Classical とあるのは $\alpha \ll 1$ の classical limit を与える。$\alpha \to \infty$ の漸近値は

$$\left.\begin{aligned} Z_\infty &= \frac{4\sqrt{2}}{9\pi^{1/3}} A(1 + j\sqrt{3}) \quad , \quad p = 1 \\ Z_\infty &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi^{1/3}} A(1 + j\sqrt{3}) \quad , \quad p = 0 \\ A &= \frac{\sqrt{6}}{4} \left(\frac{c^2 \omega}{\pi e}\right)^{2/3} \left(\frac{m\overline{v}}{3n}\right)^{1/3} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

で表わされる。p の値は表面の電子の境界条件から決まり，$p = 1$ はそこで電子が完全反射され，$p = 0$ はそこで入射前の凡ての記憶を失って，拡散する条件である。

この2者に対して，(3) は $\frac{8}{9}$ の係数だけ異っているだけである。

$l = \delta$ となる温度は[3]

Al	Cu	Sn	Pb	Ag	Au
63°K	65	26	14	67	52

例えば Pb の転移温度は 7.2°K であるから，超伝導状態直前では異常表皮効果が現われていることになる。超伝導状態での表面抵抗は，7.2°K のときの値を基準にされるのが普通であるので，異常表皮効果の知識が必要となる。

§3. 2流体モデル

超伝導状態では常電子（添字 n ）と超伝導電子（添字 s ）とが共存する。前者に対する運動方程式から次式が得られる。

$$m\frac{dJ_n}{dt}+\frac{m}{\tau}J_n=N_n e^2 E \quad , \quad J_n=N_n e v_n \tag{4}$$

通常のマイクロ波に対しては $\omega\tau \ll 1$ であるから，(4)は

$$J_n=\frac{\tau}{m}N_n e^2 E = \sigma_n E \tag{5}$$

なる Ohm の法則を表わす。一方超伝導電子に対しては(4)において $\tau\to\infty$ とおいたものが成立する。すなわち

$$\frac{d}{dt}(\Lambda J_s)-E=0 \quad , \quad \Lambda=\frac{N_s e^2}{m} \tag{6}$$

これは永久電流を説明する方程式であるが，完全反磁性を説明するために London は Max well 方程式の特解として次式を設定した。

$$\mathrm{curl}\,\Lambda J_s + B = 0 \tag{7}$$

（(7)を t で微分し(6)を用いると，界方程式の1つが得られる。）

ここで $N_s/(N_n+N_s)$ は温度の関数であり，その関数形は熱力学的考察に基づいて半経験的に Gorter－Casmir によって

$$\frac{N_s}{N_n+N_s}=\frac{N_s}{N}=1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \tag{8}$$

と与えられた。すなわち $T=T_c$ で S－電子が出来始め $T=0$ では全部が S－

電子になる。抵抗に寄与するのは n 一電子であることは言うまでもない。直流に対しては S 一電子の Shunt 作用のために，僅かの S 一電子が存在すれば抵抗は零になる。すなわち T が T_c より僅かに下れば抵抗は零になる。しかしマイクロ波の場のときには，S 一電子はインダクタンスと等価な効果を示すだけであって n 電子が存在する限り，すなわち $T=0$ でない限り，抵抗は零にならない。すなわちマイクロ波の表面抵抗は超伝導状態でも零にならない。

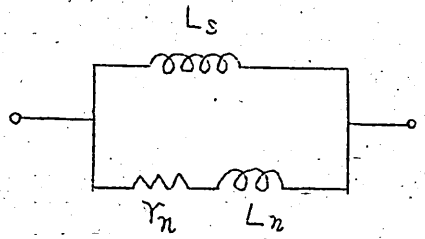


図 2.
超伝導体の等価回路

この状況は図 2 を見れば了解できる。定量的に扱うには

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_s + \mathbb{J}_n \tag{9}$$

と考え，以上の式と界方程式を組合せると，2 流体モデルとしては最も簡単な表面インピーダンスの式が求まる。

$$\left.\begin{aligned} Z &= \omega\lambda \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2}}\left(\sqrt{\alpha-1} + j\sqrt{\alpha+1}\right) \\ \alpha &= \left(1+4\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^4\right)^{1/2}, \quad \lambda = \lambda_0\left\{1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right\}^{-\frac{1}{2}} \\ \lambda^2 &= \frac{1}{\mu_0}\frac{m}{n_s e^2}, \quad \delta = \frac{2}{\sqrt{\sigma\mu_0\omega}} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

λ は超伝導体に静磁場が浸入する深さを表し $n_s \to 0$ で $\lambda \to \infty$ となる。$\lambda \to \infty$ とすれば (10) は通常の表面インピーダンスの式に一致する。

もしTがT_cよりかなり低ければ$4(\lambda/\delta)^4 \ll 1$が成立するので，表面抵抗$R$は

$$\frac{R}{R_n} = 2\left(\frac{\lambda_0}{\delta}\right)^3 \frac{(T/T_c)^4}{\{1-(T/T_c)^4\}^{3/2}} \qquad (11)$$

R_nは常伝導状態での表面抵抗である。これからも判るようにT/T_cが小さい程表面抵抗は小さい。つまり，同じ動作温度（例えば4.2°K）ならば，転移温度の高い金属の方がRは小さい。また$\delta \propto \omega^{-\frac{1}{2}}$，$R_n \propto \omega^{\frac{1}{2}}$であるから$R$は$\omega^2$に比例することになる。すなわち超伝導を用いた空洞のQはω^2に反比例することになる。

以上のことは，数GC以下のときには定性的にかなり良く実験結果を説明している。一方図3はAlに対する実験結果である。これについて(10)を適用して見ると，定量的にはかなりの差が見られる。

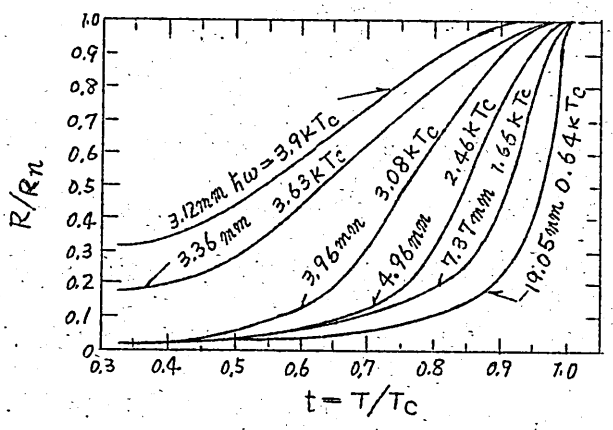


図3. Alに対するR/R_n対T/T_c (23)

まずその第1はR_n自体の値が違うこと，第2には(11)によると$T \to 0$とすると$R \to 0$となる筈であるが，ミリ波領域ではそうならないことである。最初のことは異常表皮効果を入れていないのでこれは当然である。異常表皮効果につ

いては § 2. で述べたが，(5) 式の代りに

$$\left.\begin{aligned} J_n &= \frac{2N_n e^2}{4\pi m v_0}\int \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot[\mathbf{E}])}{r^4} e^{-r/l}\, dV \\ [\mathbf{E}] &= \mathbf{E}\left(\mathbf{r}, t-\frac{r}{v_0}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

を用いなければならない。[7]

すなわち常伝導電流 J_n は，その点での電界だけで決まらず，その点を中心として半径が大略 n 一電子の平均自由行程の領域の E に依存する。これと同じように超伝導電流 J_s も，London 方程式 (7) が示すようにその点の磁界で決まるのではなく，あるコヒレンス長 ξ といわれる半径の領域の場に依存することが，Pippard により実験の上から帰納され，(12) と類似の形をした次の方程式が提案されている。[8]

$$J_s = -\frac{3}{4\pi\xi_0\Lambda}\int \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})}{r^4} e^{-\frac{r}{\xi}}\, dV \qquad (13)$$

ξ は S 電子の波束の及び範囲と考えられている。

しかしこのような修正をしても，2 流体モデルという現象論的な考え方では $T \to 0$ のときの振舞いも含めて実験結果を定量的には説明できない。[9]

ミリ波領域での $T \to 0$ に対する振舞は，超電導状態において，S 電子と n 電子がある有限のエネルギギャップを持つことを暗示する。またこれ以外の多くの面から，エネルギギャップが存在する筈であることが推論された。超伝導体におけるこのエネルギ・ギャップを固体量子論の立場から，具体的に，実験値とよく一致するものを初めて導いたのが，Bardeen-Cooper-Schrieffer である。[10]

BCS 理論によると，S 電子状態というのは，運動量，スピンが共に等量，反符

号の電子のフォノンを媒介とした相互作用がクーロン反撥作用に打ち勝って電子対を形成している状態で最低エネルギ状態に対応する。n電子状態に比べてこの状態はあるエネルギだけ低く，その大きは$T=0°K$のとき

$$2\varepsilon(0)=3.5\ k\ T_c \tag{14}$$

と計算され，$T\geq T_c$で消滅する。（図4参照）

熱的あるいは外部からの電磁波による励起があるとS電子はn電子になる。$T\geq T_c$ではエネルギ差は消滅するので凡ての電子がn電子になる。$T=0$では熱的励起がないので凡ての電子はS電子であるが，光子を吸収すれば，n電子になる。ミリ波領域で，$T\to 0$のとき$R\to 0$にならないのはこの理由による。

次節において，BCS理論に端を発した量子論的な方法で表面インピーダンスを計算する方法を紹介する。

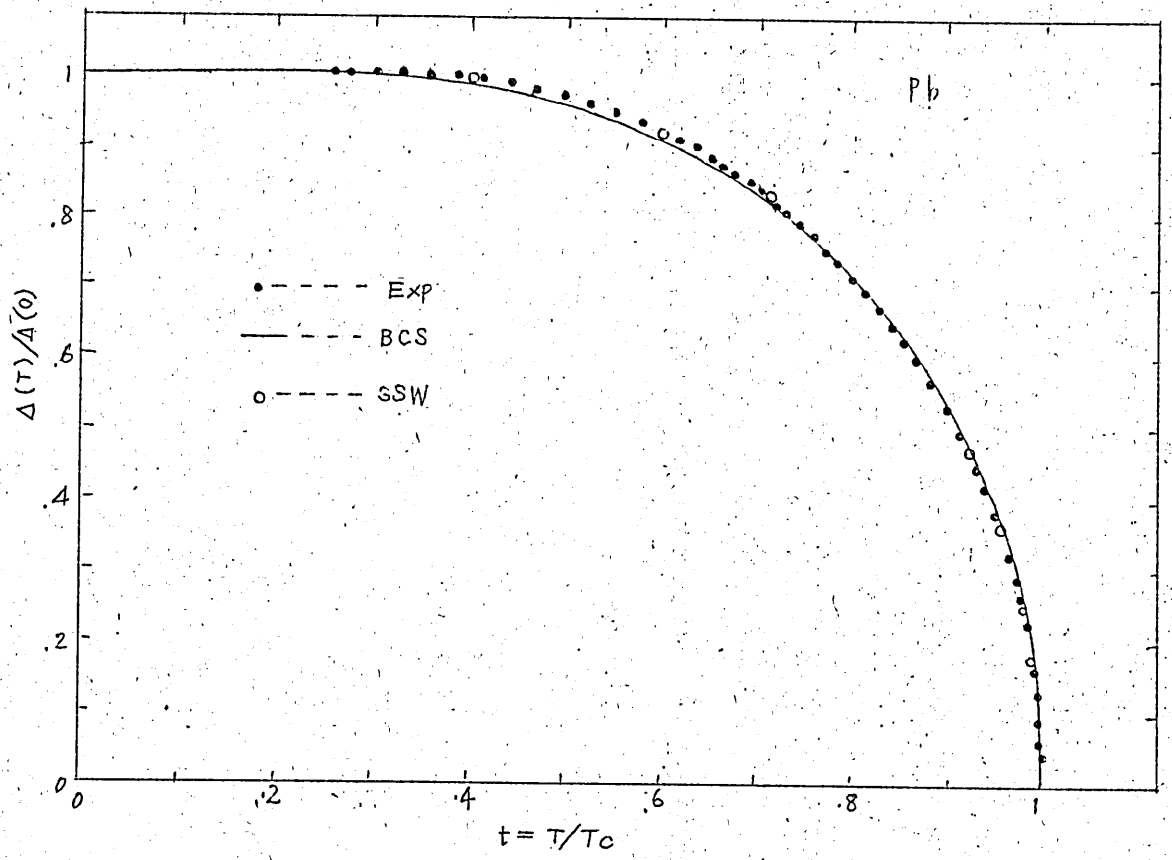


図 4. 超伝導鉛のエネルギー・ギャップ（20）

§4. 微視的理論による表面インピーダンス

Bardeen-Cooper-Schrieffer の微視的な超伝導理論[10]にもとづいて表面インピーダンスの計算を行なったのはMattis-Bardeen[29]およびAbrikosov-Gorkov-Khalatnikov[11]である。これらの理論はすくなくとも弱結合の超伝導に対しては比較的低い周波数（$\omega \ll \epsilon_0/\hbar$）でかなり成功している。[12] この節ではGauss 単位系を使う。

4・1 Mattis-Bardeen 理論による表面インピーダンスの計算

Mattis-Bardeen によればある周波数に対する超伝導体中の電流密度は

$$j(\mathbf{r},t) = \frac{e^2 N(0) v_0 e^{i\omega t}}{2\pi^2 \hbar c} \int \frac{\mathbf{R}[\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}_\omega(r')] I(\omega,R,T) e^{-\frac{R}{l}}}{R^4} dr' \quad (14)$$

で与えられる。ここで$\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, $N(0)$ はフェルミ面での単位エネルギーあたりの状態密度，v_0 はフェルミ面での電子の速度である。そして

$$I(\omega,R,T) = -\pi i \int_{\epsilon_0-\hbar\omega}^{\epsilon_0} [1-2f(E+\hbar\omega)][g(E)\cos(\alpha\epsilon_2) - i\sin(\alpha\epsilon_2)] e^{i\alpha\epsilon_1} dE - \pi i \int_{\epsilon_0}^{\infty} \{[1-2f(E+\hbar\omega)][g(E)\cos(\alpha\epsilon_2) - i\sin(\alpha\epsilon_2)] e^{i\alpha\epsilon_1} - [1-2f(E)][g(E)\cos(\alpha\epsilon_1)+i\sin(\alpha\epsilon_1)] e^{-i\alpha\epsilon_2}\} dE \quad (15)$$

である。ここでエネルギーはすべてフェルミ面から測られる。ϵ_1 および ϵ_2 はそれぞれエネルギー E および $E+\hbar\omega$ に対応するブロッホ・エネルギーであり次式で与えられる。

$$\epsilon_1 = (E^2-\epsilon_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \epsilon_2 = [(E+\hbar\omega)^2-\epsilon_0^2]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

ϵ_0 はエネルギー・ギャップ・パラメータである。また

$$g(E) = (E^2 + \epsilon_0^2 + \hbar\omega E) / \epsilon_1 \epsilon_2 \tag{17}$$

は $E = \epsilon_0$ で無限大になる。$f(E)$ はフェルミ分布函数であり，$\alpha = R/\hbar v_0$ である。

(14) 式の電流表示はある位置のまわりの空間についての積分として与えられており，$I(\omega, R, T)$ をべつにすれば常伝導金属での電流密度の表示 (12) 式と同じ形である。

表面インピーダンスを求めるために (14) 式を電流密度およびベクトル・ポテンシャルのフーリエ成分 $j(q)$ および $A(q)$ であらわす。

$$j(q) = -c(4\pi)^{-1} K(q) A(q) \tag{18}$$

ここで

$$K(q) = \frac{-3}{c^2 \hbar v_0 \Lambda(0)} \int_0^\infty \int_{-1}^{1} e^{iqRu} e^{-\frac{R}{\ell}} (1-u^2) I(\omega, R, T) du dR \tag{19}$$

である。

表面インピーダンスは

$$Z = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \delta \tag{20}$$

で表わせる。δ は電磁場の浸入度であり

$$\delta = \frac{1}{H(0)} \int_0^\infty H(z)\, dz \tag{21}$$

で定義される。無秩序散乱の境界条件によって求められた浸入度は[10]

$$\delta = \frac{\pi}{\int_0^\infty \ell n\left[1+q^{-2}K(q)\right]dq}$$

であるから，この場合の表面インピーダンスは

$$Z = -(4\pi^2 i\,\omega/c^2)\left\{\int_0^\infty \ell n\left[1+q^{-2}K(q)\right]dq\right\}^{-1} \tag{22}$$

となる。

したがって$I(\omega,R,T)$および$K(q)$を求めれば(22)式より表面インピーダンスは算出される。$I(\omega,R,T)$および$K(q)$を計算するには問題とする超伝導体のギャップ・パラメーターおよび平均自由行程ℓを知る必要がある。ϵ_0は温度の函数であり$T=T_c\,^\circ K$で零になる。一方純粋な金属ではℓは10^{-3} cmより大きく，常伝導金属の表面インピーダンスの詳細な理論では$\ell=\infty$とした場合の値と$\ell=10^{-3}$ cmの場合とでは3％程度のずれを生じるだけである。常伝導状態でも超伝導状態でもℓについては$\ell^{-\frac{R}{\ell}}$の因子として入ってくるから，超伝導体の表面インピーダンスについても同じ程度のずれを予想してよい。したがって，純粋な金属については$\ell=\infty$としてもさしつかえない。その場合(19)式の角度数uについての積分を行うことができる。

$$K(q) = \frac{12\pi i}{c^2\hbar v_0 q\Lambda(0)}\left(\int_0^\infty\int_{\epsilon_0-\hbar\omega}^{\epsilon_0}\left[1-2f(E+\hbar\omega)\right]\left[g(E)\cos(\alpha\epsilon_2)\right.\right.$$

$$\left.-i\sin(\alpha\epsilon_2)\right]e^{i\alpha\epsilon_1}\times R(x)\,dx\,dE$$

$$+\int_0^\infty\int_{\epsilon_0}^\infty\left\{\left[1-2f(E+\hbar\omega)\right]\left[g(E)\cos(\alpha\epsilon_2)-i\sin(\alpha\epsilon_2)\right]e^{i\alpha\epsilon_1}\right.$$

$$\left.\left.-\left[1-2f(E)\right]\left[g(E)\cos(\alpha\epsilon_1)+i\sin(\alpha\epsilon_1)\right]e^{-i\alpha\epsilon_2}\right\}R(x)\,dx\,dE\right) \tag{23}$$

ここで $x = qR$ であり

$$R(x) = (1/x^2)[(\sin x/x) - \cos x]$$

Pippard 型の超伝導体，すなわちコヒーレンスの長さ ξ_0 が場の浸入度より非常に大きいような金属では場 $A(r)$ は $I(\omega, R, T)$ よりも位置に関してずっと急激に変化する。したがって電流密度の表示において $I(\omega, R, T)$ を $R = 0$（したがって $\alpha = R/\hbar v_0 = 0$）での値 $I(\omega, 0, T)$ に置きかえて空間積分の外へ出せる。その結果積分は常伝導金属と同じような型になる。そして超伝導体は異常表皮効果の甚だしい状態にある常伝導金属と類似したふるまいをする。ここで Glover-Tinkham[13] に従って超伝導状態に対する複素伝導率 $\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$ を導入する。さらに(15)式は常伝導状態（$\xi_0 \to 0$ の極限）で $-\pi i \hbar\omega e^{-\frac{i R\omega}{v_0}}$ になることを考慮すると

$$\frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{\sigma_N} = \frac{I(\omega, 0, T)}{-\pi i \hbar\omega} \tag{24}$$

となる。そして σ_1 と σ_2 に対する表示は次のようになる。ただし，ここでは $\hbar\omega < 2\xi_0$ であるような周波数領域だけを考える。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_N} &= \frac{2}{\hbar\omega}\int_{\xi_0}^{\infty}[f(E) - f(E+\hbar\omega)]g(E)\,dE \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_N} &= \frac{1}{\hbar\omega}\int_{\xi_0-\hbar\omega}^{\xi_0}\frac{[1-2f(E+\hbar\omega)](E^2+\xi_0^2+\hbar\omega E)}{(\xi_0^2-E^2)^{\frac{1}{2}}[(E+\hbar\omega)^2-\xi_0^2]^{\frac{1}{2}}}\,dE \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$\hbar\omega > 2\xi_0$ になると超伝導電子による直接励起の吸収が生じて σ_1/σ_N に新しい項が加わる。ここで(22)式の積分に重要なすべての q に対して次の条件を仮定する。

$$q\pi\xi_0[\epsilon_0(0)/\epsilon_0] \gg 1\ ,\ q\xi_0[\epsilon_0(0)/\hbar\omega] \gg 1 \text{ および } q\ell \gg 1 \qquad (26)$$

こうしてPippard 型の極限で

$$K(q)\ \lambda_L^{zz}(0) = \frac{3\pi\hbar\omega}{4\epsilon_0(0)\ q\pi\xi_0}\ \left(i\frac{\sigma_1}{\sigma_N} + \frac{\sigma_2}{\sigma_N}\right) \qquad (27)$$

となり，表面インピーダンスは

$$\frac{Z_{\infty s}}{Z_{\infty n}} = \left(\frac{\sigma_1 - i\,\sigma_2}{\sigma_N}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (28)$$

となる。$Z_{\infty n}$ は異常表皮効果（常伝導状態での）の極限での表面インピーダンスをあらわす。この場合 $Z_{\infty n} = R_{\infty}(1 + i\sqrt{3})$ である[8]から

$$\frac{Z_{\infty s}}{Z_{n\infty}} = \frac{R}{R_{n\infty}} + i\frac{X}{R_{n\infty}} = 2\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_N^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left\{\sin\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)+\frac{\pi}{6}\right)\right.$$

$$\left. - i\ \cos\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)+\frac{\pi}{6}\right)\right\} \qquad (29)$$

(26) 式は一般にすべての q に対して成りたつわけではないからさらによい近似をえるには (23) 式にもどらねばならない。そのためには，，$K(q)$ を q のベキ級数に展開すればよく，q の大きい場合および小さい場合に対して $K(q)\ \lambda_L^{zz}(0)$ の近似式がえられる。[12]

表面抵抗比 r はこれまでの実験によれば S_n に対して

$$r = f(t)\ A(\nu)\ ,\quad f(t) = t^4(1-t^2)/(1-t^4)^2 \qquad (30)$$

と書けることが Pippard によって示されたが，$A(\nu)$ の実験値と理論値を比較したのが図 5. である。[12]

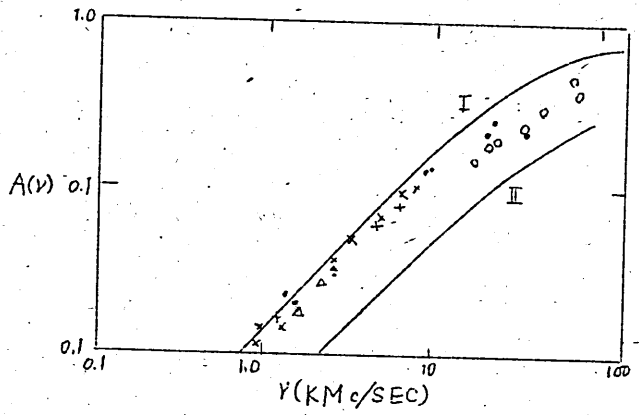


図 5.　$A(\nu)$ の周波数依存性[12]

I は Miller の詳しい計算による曲線，II は (28) 式による Pippard 型の極限での曲線。

なお，$A(\nu)$ の値はパラメーター $\xi_0/\lambda_L(0)$ に敏感に依存するが曲線の形はこのパラメーターにほぼ無関係である。超伝導におけるパラメーターについては本節の最後に掲げた表 I を参照されたい。

これまでは Mattis − Bardeen に従って表面インピーダンスの計算方法を記したが，場合によっては Abrikosov らの計算を利用する方が便利なこともあるので以下にその結果だけを概説する。なお，両者は等価であることに注意すべきである。

4・2　Abrikosov − Gorkov − Khalatnikov 理論による表面インピーダンス計算

Abrikosov らは Gorkov[14] が展開したグリーン函数を用いた方法によって

電流密度の表示を導いた。電流密度およびベクトル・ポテンシャルのフーリエ成分をそれぞれ $j(q)$, $A(q)$ とすると

$$j(q,\omega) = -\frac{c}{4\pi} K(q,\omega) A(q,\omega)$$

ただし $K(q,\omega)$ は次式で与えられる。

$$K(q,\omega) = \frac{4\pi e^2 N}{mc^2}\{1 - \frac{3}{32}\int_{-1}^{1} d\cos\theta \sin^2\theta \int_{-\xi_0}^{\xi_0} d\xi$$

$$\times[(1-\frac{\xi_1\xi_2+\Delta^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2})(\tanh\frac{\varepsilon_1}{2T}+\tanh\frac{\varepsilon_2}{2T})(\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\omega+i\delta}+\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\omega-i\delta})$$

$$+(1+\frac{\xi_1\xi_2+\Delta^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2})(\tanh\frac{\varepsilon_1}{2T}-\tanh\frac{\varepsilon_2}{2T})(\frac{1}{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\omega+i\delta}+\frac{1}{\varepsilon_1-\varepsilon_2-\omega-i\delta})]\} \tag{31}$$

なお，$\xi_{1,2} = \xi \pm \frac{1}{2} vq\cos\theta$ である。ここで新しく次のような $Q(\omega)$ を導入する。

$$\frac{C}{4\pi} K(q,\omega) = \frac{3e^2 N\Delta}{4mcvq} Q(q,\omega) \tag{32}$$

さらに計算を進めるためにPippard 型の超伝導体を考える。この場合，浸入度 $\lambda \sim \frac{1}{q}$ がコヒーレンスの長さ $\xi_0 \sim \frac{v}{\Delta}$ より小さいという条件が成り立っている（なお，ここでは $\hbar = 1$ として，Δはエネルギー単位のギャップ，つまり，ξ_0 に対応する量である）。この条件は転移温度 T_c の近くでは成立しない。$vq \ll \Delta$ の成立する領域をLondon 領域とよんでいる。

Pippard 型の極限（$vq \gg \Delta$）では $Q(\omega)$ は次のようになる。ただし，ここでも $\omega < 2\Delta$ とする。

$$Q(\omega)=\pi\int_1^{1+\tilde{\omega}}\tanh\frac{\Delta\epsilon}{2T}\,\frac{\epsilon(\epsilon-\tilde{\omega})+1}{\sqrt{(\epsilon^2-1)(1-(\epsilon-\tilde{\omega})^2)}}\,d\epsilon$$

$$-i\pi\int_1^{\infty}\left\{\tanh\frac{(\epsilon+\tilde{\omega})\Delta}{2T}-\tanh\frac{\epsilon\Delta}{2T}\right\}\frac{\epsilon(\epsilon+\tilde{\omega})+1}{\sqrt{(\epsilon^2-1)((\epsilon+\tilde{\omega})^2-1)}}\,d\epsilon \qquad (33)$$

ここで $\tilde{\omega}=\omega/\Delta$ である。

一方，Pippard 型の極限では表面インピーダンスは

$$Z(\omega)/R_n=-2i(\pi\omega/\Delta\,Q(\omega))^{\frac{1}{3}} \qquad (34)$$

で与えられる。ただし

$$R_n=\sqrt{3}(mvc^2\pi/3Ne^2)^{\frac{1}{3}}\omega^{\frac{2}{3}}/c^2$$

は常伝導状態での表面抵抗である。したがって

$$Z(\omega)/R_n=2\left(\frac{\pi\omega}{\Delta|Q(\omega)|}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\sin\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{I_m Q}{R_e Q}\right)-i\cos\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{I_m Q}{R_e Q}\right)\right\} \qquad (35)$$

となる。

とくに $\omega\ll T\ll\Delta$ の場合には

$$Q(\omega,T)=\pi^2\left[1-(\omega/4\Delta)^2-2\exp(-\Delta/T)\right]$$
$$-2i\pi(\omega/T)\ln(4T/e^{\gamma}\omega)e^{-\frac{\Delta}{T}} \qquad (36)$$

となる（$e^{\gamma}=1.78$）。したがって

$$Z(\omega)/R_n=2\left(\frac{\omega}{\pi\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{4}{3\pi}\sinh\frac{\omega}{2T}K_0\left(\frac{\omega}{2T}\right)e^{-\frac{\Delta}{T}}\right.$$
$$\left.-i\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{4\Delta}\right)^2+\frac{2}{3}e^{-\frac{\omega}{2T}}I_0\left(\frac{\omega}{2T}\right)e^{-\frac{\Delta}{T}}\right]\right\} \qquad (37)$$

となる。

微視的な理論による表面インピーダンスの説明はこれで終るが，ここではおもにマイクロ波領域でのふるまい（$\omega \ll \Delta(0)$）に問題をかぎった。さらに一般的な計算については原論文を参照されたい。[21] [12] [11]

また，超伝導体の二，三の金属について各種パラメーターを上げておく。

表・I[15]

	T_c °K	$10^8\lambda_L(0)$ cm	$10^4\xi_0$ cm	$\xi_0/\lambda_L(0)$	$10^8\lambda(0)$ cm	$10^8\lambda$ cm (observed)	$10^{-8}v_0$ cm/sec	$2\Delta(0)/kT_c$
Sn	3.73	3.55	0.23	6.5	5.6	5.1	0.65	3.6
Al	1.18	1.57	1.6	102	5.3	5.15：4.9	1.32	3.37
Pb	7.15	3.7	0.083	2.2	4.8	3.9	0.50	4.1

$\lambda_L(0)$ ： $0°K$ での $London$ 浸入度

$\lambda(0)$ ： $0°K$ での BCS 理論による計算値

$\xi_0 = \hbar v_0/\pi\Delta(0)$ ：コヒーレンスの長さ

$\lambda(T) = (4\pi/\Lambda(T)c^2)^{\frac{1}{2}}$ ： $London$ の関係式（$\xi_0 \ll \lambda$）

§ 5. 超伝導鉛の表面抵抗

高い Q を得るこめの超伝導空胴共振器には色々な面で鉛がもっとも適していると思われるがマイクロ波領域での鉛の測定はほとんどおこなわれていない。図 6. および図 7. は超伝導マイクロ波空胴共振器による Q の測定結果である。[2][16]

図 6 は Pippard の実験式

$$R_s = A(\omega)\, R_n \frac{t^4(1-t^2)}{(1-t^4)^2} + R_0$$

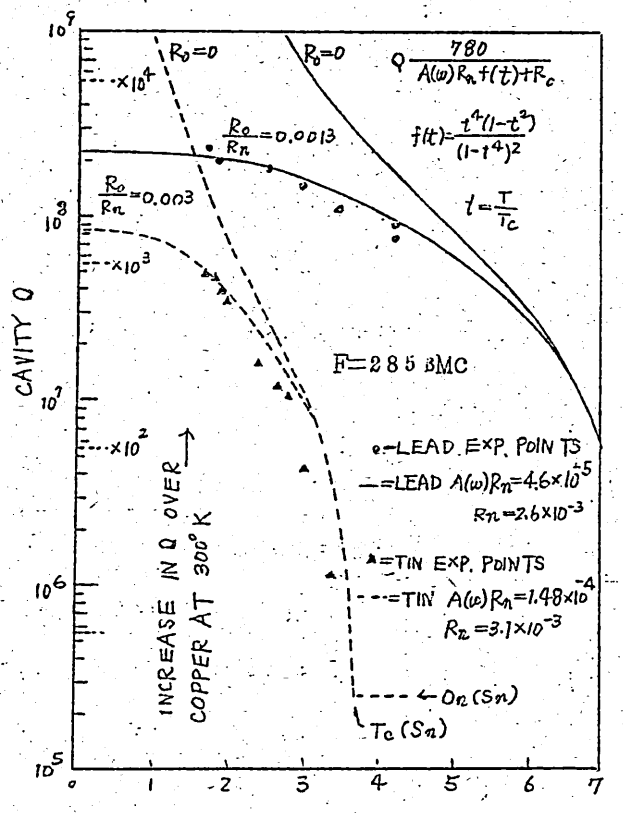


図 6.　空胴共振器の Q の温度依存性 (16)

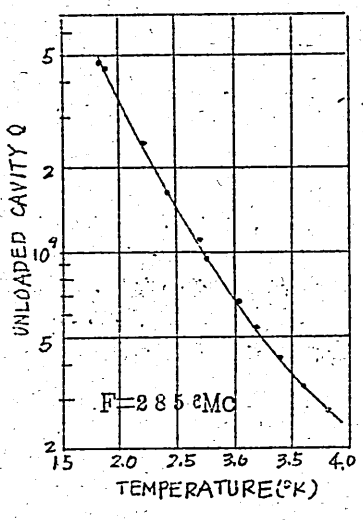


図 7.　Q の測定値 (2)

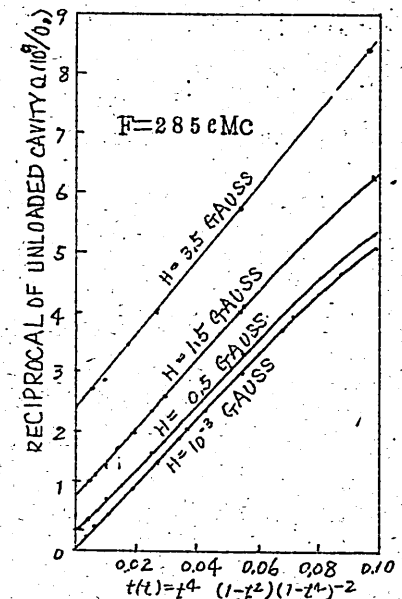


図 8.　Q の trapped flux 依存性 (2)

との比較が行なわれている。R_0 は残留抵抗であり表面の性質や処理方法によって影響を受けると考えられているが，最近Haden ら[17] はむしろ Flux trapping という考え方を用いるべきことを主張している。

また空胴共振器を転移温度以下に冷やすとき空胴壁に浸入している磁束がいくぶん捕えられる。地磁気程度の場で Q は弱くなるのが認められている。図 8. は Schwettman ら[2] の測定結果である。

これまでに与えられた測定データを参考にして $TM_{0/0}$ モード，4000 Mc で共振する鉛の円筒型空胴共振器の Q の計算を試みる。空胴の長さは $l = 3.00$ cm，半径は $a = 2.865$ cm である。したがって

$$G = \frac{2.405}{2\pi\left(1+\frac{a}{l}\right)} = 0.196$$

であり，表面抵抗を R とすると Q は

$$Q = 232/R \qquad (R : ohms)$$

で与えられる。

まず Pippard の実験式

$$R_s/R_n = A(\omega)\, f(t) \quad ; \quad f(t) = t^4\left(1-t^2\right)/\left(1-t^4\right)^2$$

によって表面抵抗 R_s を計算する。R_n は異常表皮効果の極限値

$$R_n = \left(\sqrt{3}\,\pi\,\omega^2/c^4\right)^{\frac{1}{3}}\left(l/\sigma\right)^{\frac{1}{3}}$$

で与えられたことはすでに記した。Chambers の測定[18] によれば 1200 Mc で $R_n = 1.49\times10^{-3}$ ohm であるからこれを利用すると $R_n \sim \omega^{\frac{2}{3}}$ から 40.00 Mc では

$$R_n = 3.32\times10^{-3}\ ohm$$

となる。Chambers[18], Pippard[7] および Grebenkemper-Hagen[19] の測定値にもとづいて $R_n(\omega)$ を求めたのが図9.である（$R_n \sim \omega^{\frac{2}{3}}$ を仮定している）。

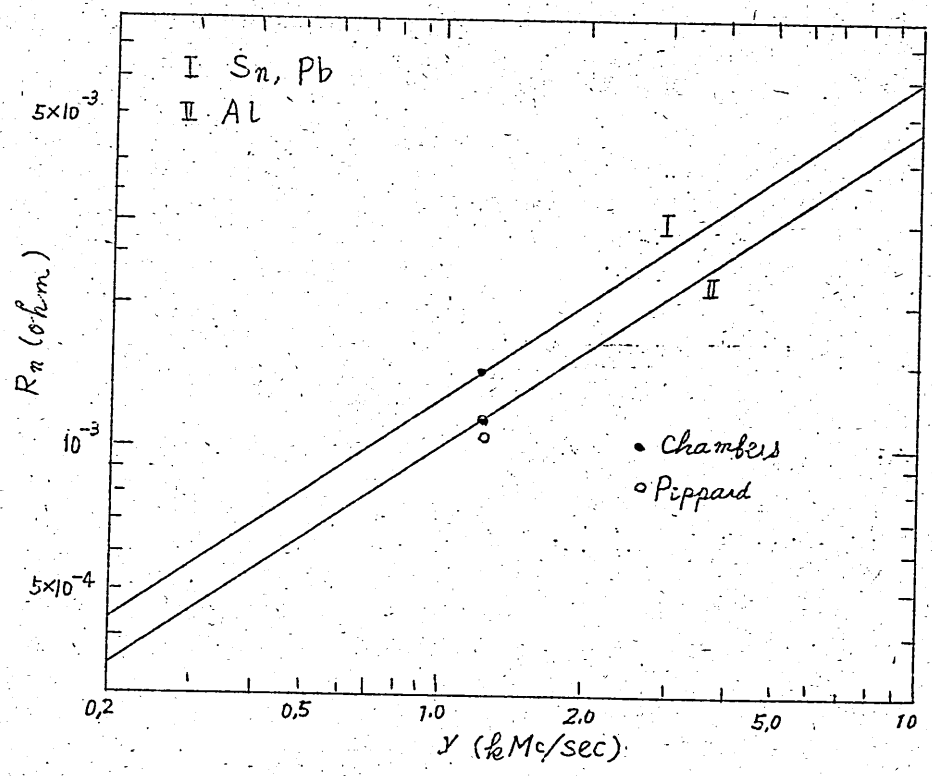


図9. 異常表皮効果の極限での常伝導表面抵抗

●○は Chambers と Pippard の測定値

また Schwettman らの測定から $R_n(\omega)\,A(\omega) \sim \omega^2$ を利用して4000Mcでの$A(\omega)$を求めると0.024となる。こうして4000Mcでの超伝導鉛の表面抵抗は図10.の曲線Ⅰのようになる。丸印は Schwettman らのQの測定値から $R_s \sim \omega^2$ を利用して求めた4000Mcでの表面抵抗を示す。これからわかるように Schwettman らの測定値は Pippard の実験式によく一致することがわかる。

次にAbrikosovらの結果からPippard型の極限での表面抵抗を求める。$\omega \ll T \ll \Delta$の場合，さらに(37)式を近似すると（$R_e\ Q(\omega) \gg I_m\ Q(\omega)$を考慮して）次のようになる。

$$\frac{R(\omega)}{R_n} = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{\omega}{\pi\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\omega}{T}\right) ln\frac{4T}{e^{\gamma}\omega}\ e^{-\frac{\Delta}{T}} \qquad (38)$$

ここで$e^{\gamma} \simeq 1.78$である。ギャップ・パラメーターΔは温度の函数であり，$R(\omega)$の計算においてはGasparovicら[20]のトンネル接合を使って決定された測定値を使用した。図4.にその測定値を示す。

(38)式により計算した表面抵抗は図10.の曲線Ⅱに示してある。

これらの計算結果からQを求めると図11.のようになる。

二つの計算結果にはかなりのずれが認められる。

すでに見たようにパラメーターξ_0/λによって計算結果はかなり影響をうけるが，鉛においては表Ⅰからわかるように$\xi_0/\lambda \sim 2$であり，Pippard型の極限からかなりずれている。

したがってPippard型の極限として求めた表面抵抗がかならずしも正しい値を与えているとはいえない。このことはすでに記したようにMillerによるS_nに対する計算で明らかである。（図5を参照）

§6. むすび

我々ははじめに述べた目的で，マイクロ波空胴を超伝導化する実験の準備を進めているが，今後実験あるいは理論上解明さるべき問題は非常に多い。基礎的な問題としては，Pbに対しては前節の計算は簡単化の程度が過度であるので，もっと前に溯る必要がある。また残留抵抗の原因の分析外部磁界の効果，

不純物効果もPbに対しては十分解折されねばならない。空胴を製作して加速管にする場合には，cold workingつまり転位の影響の定量的な検討および，電界強度が大きいときのQの抵下の原因の究明などが問題である。

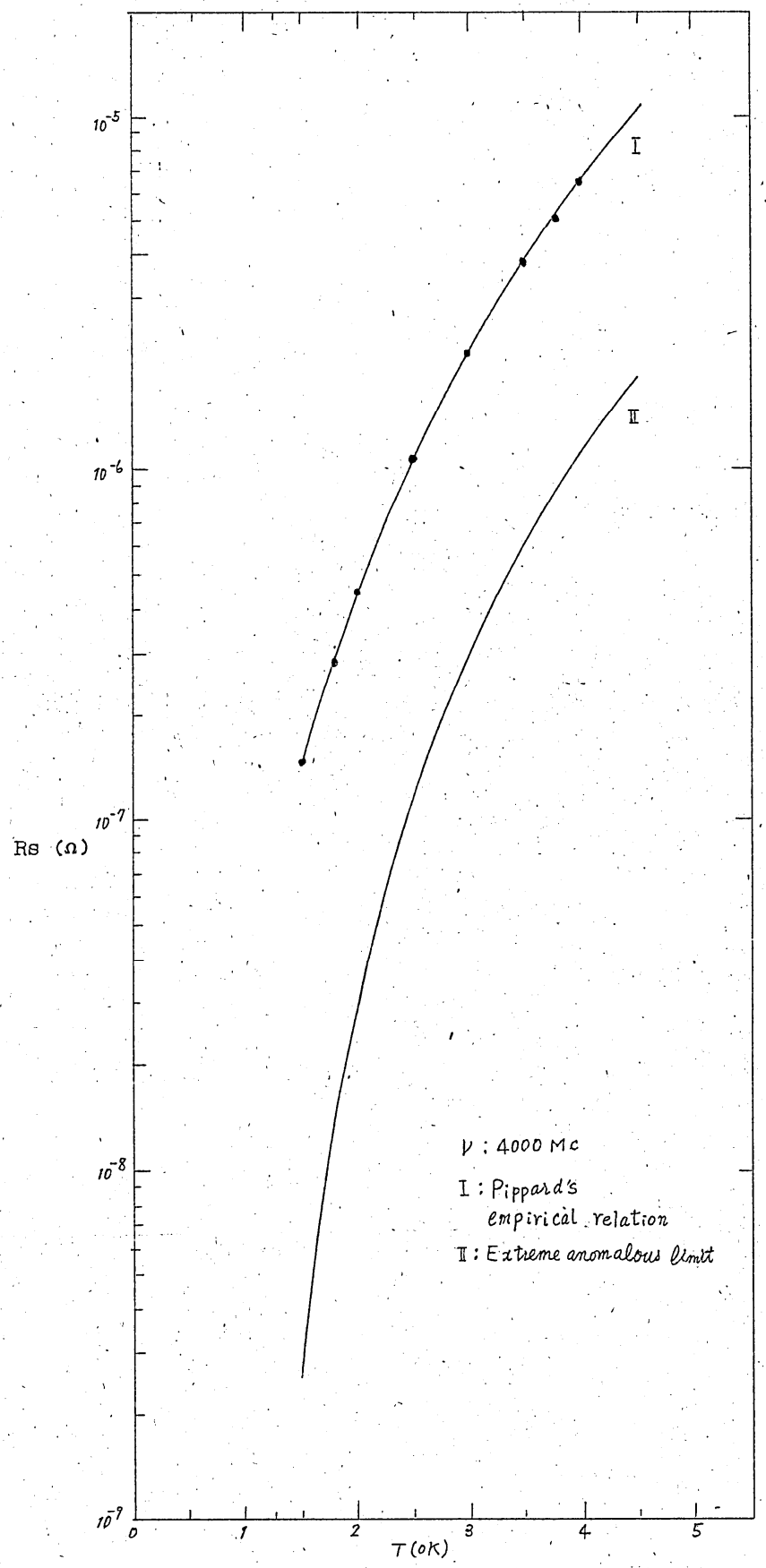


図 1 0　超伝導鉛の表面抵抗

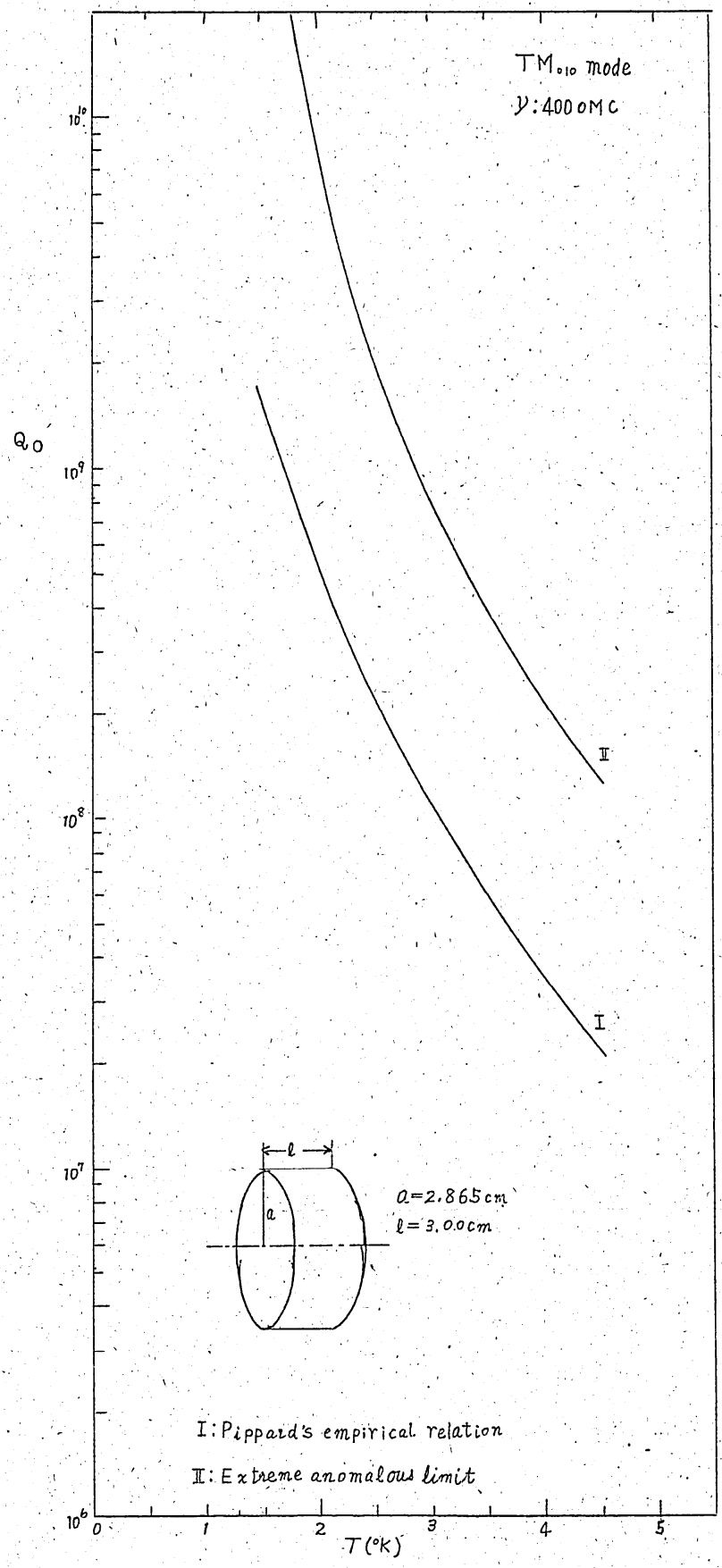


図 11.　超伝導鉛空胴共振器の Q

文　　献

1) P.B. Wilson. H.A. Schwettman: Supercundnding accelerators. Trans. IEEE, N_S-12, 1045 : (1965)

2) H.A. Schwettman, P.B.Wilson, J.M.Pierce, W.M.Fairbank: The applications of superconductivity to electronlinear acceleratars. Adv.in Cryogennic Eng.,10 88,(1965)
A.P.Bamford : The application of superconductivity to linear accelerators. Adv.in Cryogen-ic Eng.,10 80,(1965)

3) A.Septier: Les resonateurs supracendncteurs et leurs applicatios. L'oncle Elect., 460 932(1965)

4) 裏：超高周波電界加速を用いた高エネルギ電子顕微鏡の可能性について
学振132委員会資料 昭41年1月

5) J.C. Slater : Microwave electronics. P.69 (1950)
van Nortrund.

6) G.E.H.Reuter, E.H.Sondheimer: The theory of the anomalous skin effect in metals.
proc. Roy. Soc. 191A, 336 (1948)

7) A.B.Pippard : Metalic coduction at high frequencies and low temperatures.
Adv. in Eleetrnics. 6 , 1 (1954)

8) A.B.Pippard : An experimental and theoretical study of the relation between magnetic field and current in a superconductor. Proc. Roy. Soc, 216A 547 (1953)

9) 例えば J.R.Waldram: The surface impedance of supercondn-
--ctors. Adv. in phys. 13 1, (1964)

10) J.Bardeen, L.N.Cooper. and J.R. Schrieffer, pbys. Rev. 106,162(1957): 108,1175(1957).

11) A.A.Abrikosov, L.P. Gorkov, and I.M. Khalatnikov, Soviet phys. —JETP 8,182(1959) I.M.Khalatnikov, A.A.Abrikosov, Advances in phys. 8, 45 (1959).

12) P.B.Miller, phys.Rev. 118, 928(1960).

13) R.E.Glover, dnd M.Tinkham, 108, 243 (1957).

14) L.P.Gorkov, Soviet phys.-JETP, 7, 505(1958).

15) J.Bardeen and J.R. Schrieffer, Progress in Low Temperature phys. ed. by C.J. Gorter.

16) P.B.Wilson: Nuclear Istr. and. Method. 20, 336 (1963).

17) C.R.Haden and W.H.Hartwig, phys, pev. 148, 313 (1966).

18) R.G.Chamhers, proc. Roy. Soc. A215, 481 (1952).

19) C.J.Grebenkemper and J.P.Hagen, phys, Rev. 86, 673 (1952)

20) R.F.Gasparouic, B.N. Tayler and R.E.Eck, Solid-State Communication. 4, 59 (1966).

22) D.C.Mattis and J.Bardeen, Phys.Rev.111,412(1958)

23) M.A. Biondi.and M.P.Garfunkel, Phys.Rev., 116, 853 (1959).

輻射科学研究会資料

１９６６年１２月９日

低スレツシヨルドNdガラスレーザー

鴨　川　利　朗

小　寺　宏　曄

速　水　平二郎

（松下電器産業株式会社中央研究所）

低スレツシヨルド Nd ガラスレーザー

鴨　川　利　朗
小　寺　宏　曄
速　水　平二郎
（松下電器産業株式会社中央研究所）

§1. 緒　　言

現在までに希土類イオンを含む多くの結晶、ガラス、液体で誘導放出が行われているが、中でも3価の Nd イオンを含むものは室温でも容易に動作するので重要である。Nd^{3+} を結晶に入れたレーザーは多く発表されているが、最近の結果ではイツトリウム・アルミニウム・ガーネツト（ＹＡＧ）のものが高い効率で室温において連続発振[(1)]する。Nd^{3+} をガラスに入れたものでは螢光線幅が広くなるので発振スレツシヨルドが結晶のものに比べて高くなるが、優れた光学的均質性をもつこと、形や大きさを自由に選べること。製作及び加工が容易なこと、安価であること。などの実用的な利点がある。Nd^{3+} をオキシ塩化セレンに溶解した液体レーザーが最近発表された[(2)]が、特性はガラスレーザーに類似している。

Ndガラスレーザーは E.Snitzer により初めて発振に成功[(3)]して以来、固体レーザー素子としてルビーに次いで多く用いられている。我々は Ndガラスレーザーの実用的な利点に注目し、低スレツシヨルド高効率発振を達成するための基本的な諸問題の検討を行つてきたので以下に報告する。

まず Nd^{3+} イオンの緩和機構にもとづいて低スレツシヨルドであるための条件を検討し、Pumping 時間の長短に応じてレーザーガラス

材料を使い分ける必要性を指摘してその選択基準を明確にした。すなわちPumping 時間が螢光寿命に比べて短い場合には発振線の自然遷移確率の高い材料が有利であり、逆に長い場合には螢光量子効率の高い材料が低スレツシヨルドである。一般にNdレーザーガラスの場合には自然遷移確率の高い材料は螢光量子効率が低く、量子効率の高い材料は遷移確率が低くなる傾向にあるので動作方法により材料を選択する必要がある。この選択条件を実験的に確かめるために二種類のガラス材料を選んでその遷移確率および量子効率を測定し発振スレツシヨルドを相互に比較した結果上記結論を裏付けることができた。特にBorate系ガラスは従来螢光強度が弱く螢光寿命が短いので不利であるとされていたが、遷移確率が高いことからこれをパルス発振に使用することによりスレツシヨルドが逆に低下することを確かめた。

ガラス材料選択の問題とあわせてPumping 光源のスペクトル分布およびNdガラスの吸収スペクトルをもとにレーザーロツド内の励起光分布および反転密度分布を計算し、Nd^{3+} イオン濃度と最適ロツド寸法の関係を明らかにした。同時にPumping system の集光効率についても検討を加え最適条件を定めた。これらの結果スレツシヨルドの絶対値を大巾に低下させることができた。

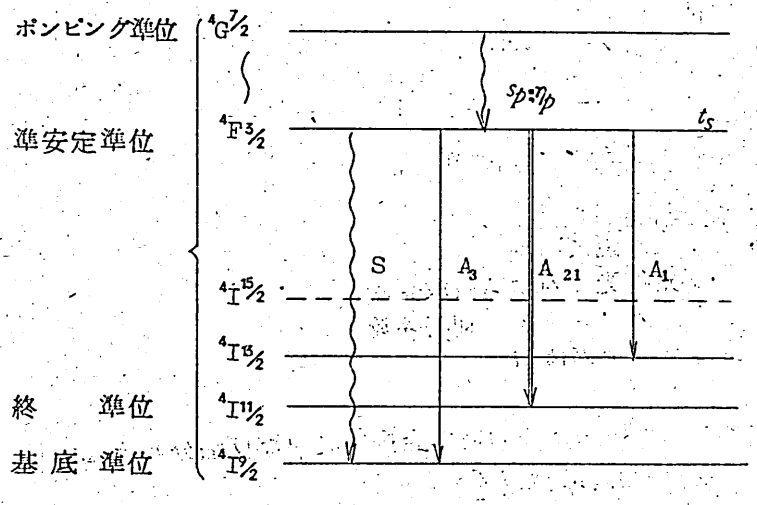
これらをもとに固体パルスレーザーの高速繰り返し発振を試み最高２００ PPSまで到達した。

§2. Nd^{3+} イオンの緩和機構(4)(5)

第１図にNd レーザーガラスの主要なエネルギー準位と対応する遷移を示す。Pumping に役立つ吸収準位は $^4F_{5/2}$ (0.88μm)より上に多数存在するが、最強のポンピング準位は $^4G_{7/2}\cdot{}_{5/2}$ である。基底状態よりこれらの準位に励起されたイオンは、フオノンを放出して、

速やかに且つほぼ１００％の量子効率で準安定準位 $^4F_{3/2}$ へ遷移[6]する。（$\eta_p \simeq 1$）

$^4F_{3/2}$ よりの遷移は螢光として観測できる輻射遷移（自然遷移：A）と、濃度消光等の無輻射遷移(S)に分れ、前者は0.92μm(→ $^4I_{9/2}$)，1.06μm(→ $^4I_{11/2}$)，1.35μm(→ $^4I_{13/2}$)，1.35μm(→ $^4I_{13/2}$)．の３つである。螢光を発して下位準位へ遷移したイオンは極めて速い



第１図　ガラスマトリクス中のNd^{3+}イオンのエネルギー準位図

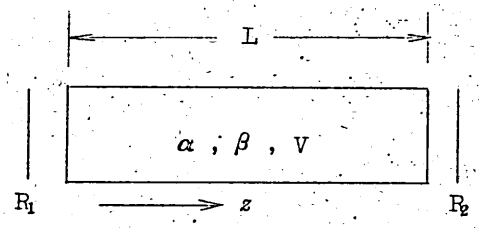
t_S ： $^4F_{3/2}$ 準位ライフタイム
A_1 ： 1.35μm 自然遷移確率
A_{21} ： 1.06μm 〃 〃
A_3 ： 0.92μm 〃 〃
S ： 無輻射遷移確率
S_p ： 無輻射遷移確率（ポンピング）
η_p ： ポンピング量子効率

$$t_S^{-1} = A_1 + A_2 + A_3 + S$$

無輻射遷移によつて基底準位に戻る。尚 $^4I_{15/2}$ への螢光は見出されてていない。普通レーザー発振に利用するのは1.06μm であるが、この遷移の終準位 $^4I_{11/2}$ は基底準位 $^4I_{9/2}$ より2000 cm^{-1} 離れているので、常温T_aにおける熱分布のボルツマン因子 $exp(-E/kT_a)$ は充分小さく、典型的な四準位レーザーを構成している。

§3 発振条件

Nd^{3+} イオンのエネルギー準位並に遷移構造にもとづき、Pumping時間を考慮して通常の発振条件式を補正し、レーザーガラス材料が満たすべき条件を明らかにしなければならない。



第2図　　レーザーロッドの図

L　：ロッド長さ
R_1 , R_2 ：反射鏡反射率
α　：発振光に対する吸収係数
β　：〃　〃　利得係数
V　：ロッドの体積

第2図のレーザーロッドにおいて発振に必要な反転分布数△Ncは

$$\triangle N_c \equiv \triangle n_c V = \left(\frac{p}{\tau}\right)\frac{1}{A_{21}} \qquad (1)$$

で与えられる。[7]　$\triangle n_c$ は反転分布密度で

$$\triangle n_c \equiv \left(n_2 - n_1\frac{q_2}{q_1}\right) \qquad (2)$$

n_2及びn_1はそれぞれ上位準位及び下位準位のPopulation（単位体積当り）、q_2 , q_1は各準位の縮退度である。pはEffective mode number[7]で

$$p = \frac{4\pi^2\triangle\lambda}{\lambda^4}V \quad \text{for Lorentzian line shape} \qquad (3)$$

λは蛍光線の中心波長、$\triangle\lambda$はその半値巾である。

τは発振モードの減衰時定数でQ値との関係は第2図の場合

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{w\tau} = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{1}{2L}\ell n\frac{1}{R_1R_2} + \alpha\right] \qquad (4)$$

で与えられる。

次に反転分布△Ncを達成するためのPumpingについて第1図の過程を考慮に入れて検討する。

Pumpingにより準安定準位 $^4F_{3/2}$ に励起されるイオン数 n_2 は次のRate equationにより定まる。

$$\frac{dn_2}{dt}=\int_{\lambda_p}^{\lambda'_p}\frac{\eta_p(\lambda)\cdot K(\lambda)\cdot I_p(\lambda,t)\lambda}{hc}d\lambda-\frac{n_2}{t_s} \qquad (5)$$

$I_p(\lambda,t)$：Pumping光束密度（単位波長巾当り）

$K(\lambda)$　：レーザー物質のPumping光吸収係数

$\lambda_p\sim\lambda'_p$：Pumping光吸収領域

右辺第一項はPumpingにより励起される割合、第二項は $^4F_{3/2}$ よりのすべての遷移によりPumpingの減少する割合である。ただしPumping準位からの無輻射遷移は他の遷移にくらべて非常に速いこと、および励起されるイオン数の割合は小さく基底準位 $^4I_{9/2}$ のPopulation変化は無視できることを考慮している。また発振スレッショルドに達するまでは誘導遷移は自然遷移に比べて小さいので無視する。下位準位 $^4I_{11/2}$ は基底準位 $^4I_{9/2}$ と極めて速い無輻射遷移で結ばれているので、そのPopulation n_1 は無視できる程度に小さいと思われる。従つて反転分布

$\triangle n$ は

$$\triangle n\equiv n_2-n_1\frac{g_2}{g_1}\simeq n_2 \qquad (6)$$

とみなすことができる。

(i) パルス発振の場合（Pumping時間の短い場合）

$^4F_{3/2}$ 準位のライフタイム t_s に比べて短い時間内（t_p）にPumpingを行い発振スレッショルドに達する場合を考える。(5)式を積分し、（$t_p\ll t_s$）として第二項が無視できるとすれば

$$n_2(t_p) \cong \int_0^{t_p} \int_{\lambda_p}^{\lambda'_p} \frac{\eta_p(\lambda) \cdot K(\lambda) \cdot I_p(\lambda, t) \cdot \lambda}{hc} \, d\lambda dt$$

$$\simeq \frac{\bar{\eta}_p}{h\upsilon} \int_0^{t_p} \int_{\lambda_p}^{\lambda'_p} K(\lambda) \cdot I_p(\lambda, t) \, d\lambda dt$$

$$= \frac{\bar{\eta}_p}{h\upsilon_p} \cdot Ein \qquad (7)$$

$\bar{\eta}_p$ ： η_p の平均値

$h\upsilon_p$: Pumping Photon Eneryg

Ein: Absorbed energy(per unit volume)

となる。発振スレツショルドにおいては $n_2(t_p) = \Delta n_c$ であるから必要エネルギー $Emin$ は

$$E\,min = \frac{h\upsilon_p}{\bar{\eta}_p} \cdot \Delta n_c \qquad (8)$$

従つてPumping 光源に必要な最小入力エネルギー E_{Lmin} は

$$E_{Lmin} = \frac{E_{min}}{\xi} \cdot V$$

$$= \frac{h\upsilon_p}{\xi \bar{\eta}_p} \left(\frac{p}{\tau} \right) \frac{1}{A_{21}} \qquad (9)$$

ξ ：総合ポンピング効率

となる　上式より発振線の自然遷移確率の高い材料ほど発振スレツシヨルドエネルギーが小さい。

(ii) 連続発振の場合（Pumping 時間の長い場合）

t_s に比べて長時間にわたつて時間的に一定の割合でPump する様な場合は連続発振につながるのであるが、このときにはPumping により励起される割合と遷移により失われる割合が等しくなり、Popu—

lationは定常値をとると考えられる。従つて$(dn_2/dt)=0$とおいて(5)式より

$$\frac{n_2}{t_s}=\int_{\lambda_p}^{\lambda'_p}\frac{\cdot\eta_p(\lambda)\cdot K(\lambda)I_p(\lambda,t)\lambda}{hc}\,d\lambda$$

$$\simeq\frac{\overline{\eta_p}}{h\upsilon_p}\int_{\lambda_p}^{\lambda'_p}k(\lambda)\cdot I_p(\lambda,t)d\lambda$$

$$=\frac{\overline{\eta_p}}{h\upsilon_p}\cdot P_{1n} \qquad (10)$$

P_{in} : Absorbed power(per unit volume)

発振スレツショルド($n_2\simeq\triangle n_c$)におけるPumping Power P_{min} は

$$P_{min}=\frac{h\upsilon_p}{\overline{\eta_p}}\cdot\frac{\triangle n_c}{t_s} \qquad (11)$$

Pumping光源に必要な最小入力パワーは

$$P_{Lmin}=\frac{P_{min}}{\xi}\cdot V$$

$$=\frac{h\upsilon_p}{\xi\overline{\eta_p}}\cdot\left(\frac{p}{\tau}\right)\cdot\frac{1}{\eta_{21}} \qquad (12)$$

$\eta_{21}=A_{21}t_s$: 発振線の螢光量子効率

となる。上式よりパルス発振の場合と異り、自然遷移確率には無関係に発振線の螢光量子効率の高い材料ほど発振スレツショルドパワーが小さい。

以上のことからPumpig時間の長短に応じてそれぞれ適したレーザーガラス材料を選ぶことが必要である。

§ 4　ガラスベース組成と螢光特性及び発振スレツシヨルドの比較

ガラスマトリクス中の Nd^{3+} イオンの螢光特性はガラスベース組成、Nd^{3+} イオン濃度によつて変化するが、それらに関しては多くの研究がある。　参考文献(3)(5)(8)(9)(10)

その詳細については省略するが、多くの文献で結論づけられていることは実用的で効率のよいガラスレーザー材料としては螢光強度が強く寿命が長く濃度消光の小さいSilicate系のバリウムクラウンガラスが最も優れていると云うことである。そしてBorate系のガラスはこの逆に螢光強度が弱く、螢光寿命が短く濃度消光が強いので避けるべきであるとされている。

しかし前節の結果から Nd ガラスレーザーの場合にはPumping時間の長短によつて低スレツシヨルド条件すなわち効率のよい動作条件が変る。

まずPumping 時間が長い場合には 1.0 6 μm の螢光量子効率の高いガラスが有利であるとの結論を得たが、これはとりもなおさず濃度消光が小さくて螢光強度がつよいことを意味し、したがつてこの場合にはSilicate系ガラスの選択は妥当である。一方Pumping時間が短い場合には 1.0 6 μm の螢光量子効率には無関係に自然遷移確率の高いガラスが有利であるとの結論を得ているが、自然遷移確率が高ければ螢光寿命が短くなることから、螢光寿命の短いBorate系ガラスが高い遷移確率をもちパルス発振スレツシヨルドが低い可能性が出てくる。このことは濃度消光等の無輻射遷移の大きさを見積らなければ直ちには結論を下せない。

以上の考察から実用的に安定で低スレツシヨルド発振に適すると思われる二種類のガラスベースを選び螢光特性を測定して必要なパラメターの値を求めた。一つは長寿命のSilicate系ガラス、もう

一つは短寿命の Borate 系ガラス（Borosilicate）である。その主な組成は

(1) Silicate 系ガラス

SiO_2 ：76-Xwt%，B_2O_3 ：1wt %

K_2O ：23wt% ，Nd_2O_3 ：Xwt%

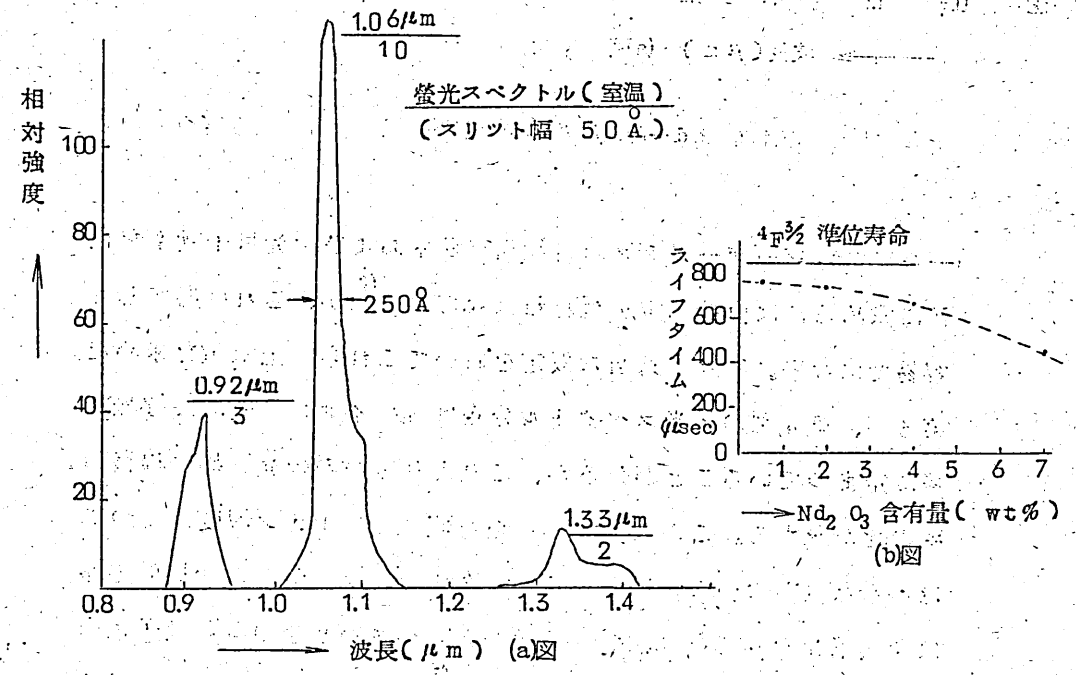
(2) Borate 系ガラス（Borosilicate）

SiO_2 ：30wt%，B_2O_3 ：10wt%

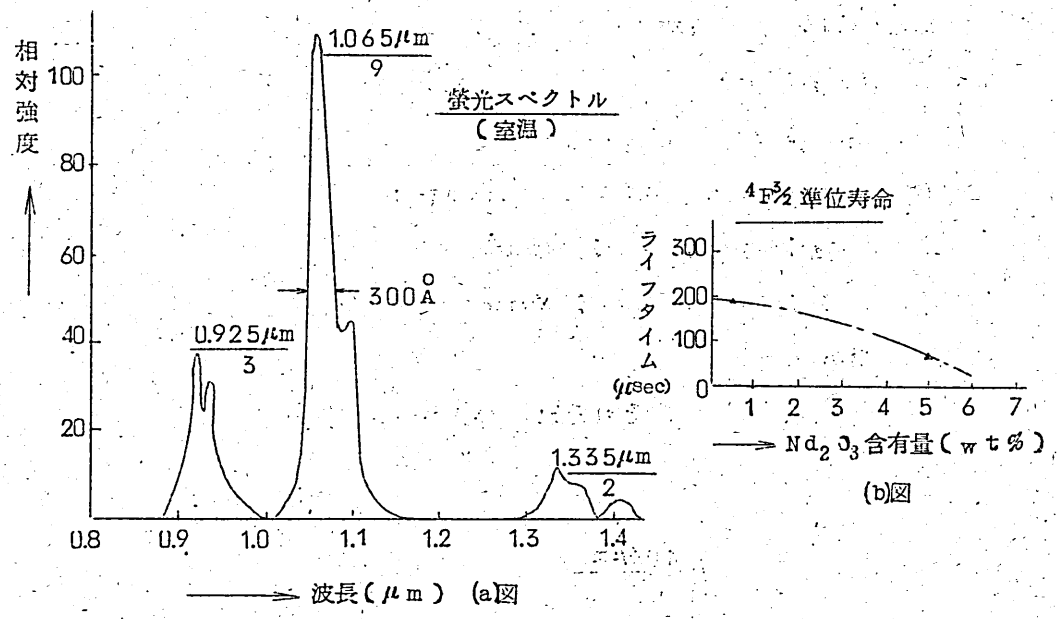
BaO ：50wt%，Nd_2O_3 ：Xwt%

である。

第３図、第４図にそれぞれの螢光特性を示す。



第３図　Nd－Si ガラス螢光特性



第4図 Nd—Ba,B ガラス螢光特性

一般に Nd レーザーガラスの自然遷移確率および螢光量子効率を正確に求めるには直接測定を行わねばならない[6]が、これは必ずしも容易ではない。我々は適当な仮定を置いてこれらの上限値を求めた。第3図、第4図の螢光スペクトル分布は Nd イオン濃度にほぼ無関係に定まつていることが分るが、これより三つの螢光の輻射遷移確率の比が求まる。この遷移確率の絶対値は Nd イオン濃度によつてほとんど変らないことを仮定する。[5] 次に $^4F_{3/2}$ からの無輻射遷移は濃度消光のみであり、Nd 濃度が充分小さいときの輻射量子効率はほぼ100%であることを仮定する。[5] これらの結果第1表に示す値が求められるが、仮定より明らかな如くこれらは上限値とみなせる。

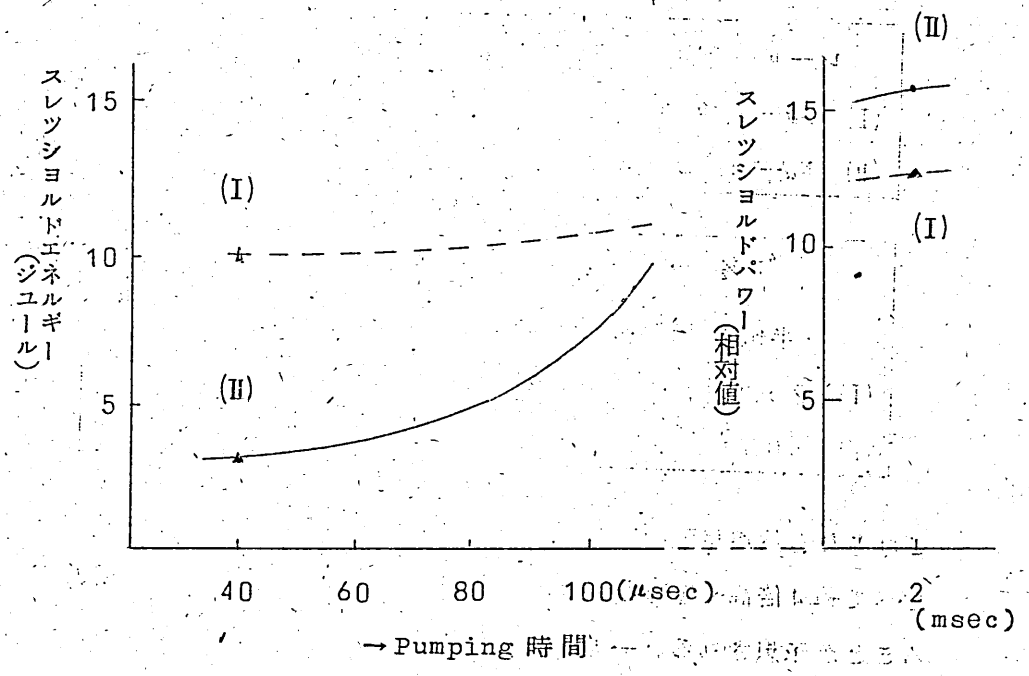
第１表　レーザーガラス特性比較表

レーザー材料	Nd濃度	$^4F_{3/2}$ 寿命
(I) Nd—Si ガラス	4 wt%	670 μsec
(II) Nd—BaB ガラス	5 wt%	70 μsec

	$^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ (1.06μm)			$^4I_{9/2} \rightarrow {}^4G_{7/2}$ 吸収係数
	半値巾	量子効率	遷移確率	
(I)	250 Å	0.6	0.9×10^3 sec^{-1}	88 cm^{-1}
(II)	300 Å	0.25	3.5×10^3 sec^{-1}	17.0 cm^{-1}

これより自然遷移確率はBorateガラスの方がSilicateガラスに比べて約4倍高く短時間Pumpingに対して低スレッショルドであることが予想される。一方量子効率に関してはSilicateガラスの方が濃度消光の割合が少なく高効率であり長時間Pumpingに対して低スレッショルドとなることが予想される。

これを確かめるために両種の光学的に均質なガラスロッドに同一の共振器加工を行つて発振スレッショルドを比較した。第5図にPumping時間に対するスレッショルドの変化を示す。



第５図　スレッショルド比較

(I)：Silicate　ガラス（Nd_2O_3 4 wt %）

(II)：Borate　ガラス（Nd_2O_3 5 wt %）

Pumping 集光装置：１００φ円筒鏡

Xe ランプ：QSB 1307

ロッド寸法及び共振器：２φ×４９ℓ，５０R Confocal

誘電体多層膜反射率９９%，１００%

Pumping 時間は１００μsec 以下は放電回路のインダクタンス値を変え、２msec の長時間 Pumping には遅延回路を構成して台形状に発光させた。スレッショルドエネルギーは蓄積コンデンサーエネルギーで、スレッショルドパワーは Pumping ランプの発光強度で比較した。この結果より短時間 Pumping では Borate ガラスの方が Silicate ガラスに比べ $1/3$ のスレッショルド値であるが、長時間 Pumping では逆に Silicate ガラスの方が低スレッショル

ドになつている。なお１００μsec 以上の中間領域においては両者のスレッショルドはほぼ等しくパルス発振領域から連続発振領域につながる。これらの結果はそれぞれのガラス材料特性を明確に示すと同時に我々が§３で指摘した発振条件の区別に対する裏付けともなつている。

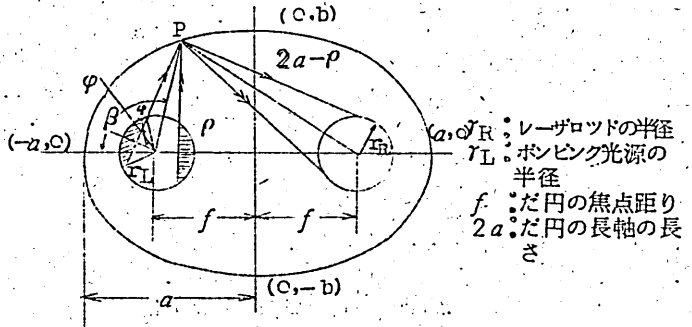
§５. ポビング光学系とその効率

固体レーザの励起は、すべて光ポンピングによつて行われるので、放電管で発生したポンプ光を能率よくレーザ素子に集束することが必要である。この問題を解決する有力な手段の一つは、だ円筒の共軛焦点を利用する方法である。[12] しかし実用上、だ円面の製作は容易でないため筆者らはこれを円筒鏡で代用した。次に示す解析から明らかにされるように、上手に使えば、だ円鏡に劣らない高い効率を得ることができる。

５－１ だ円筒鏡の集光効率

だ円筒鏡の効率に関する比較的詳しい取扱いは、高岡、溝淵の論文[13]にみられ、その後上領ら[14]によつて実用設計への拡張が行われたが、筆者らも[13]の手法を基に[14]とは別個に解析を行なつていた[15] のでその要約を述べる。

だ円筒鏡の効率は垂直断面内と軸方向に分けて考えることができ、全体の効率はその積で与えられる。



第６図 だ円鏡断面と光の径路

第６図に、だ円筒鏡の断面を示す。光源の斜線部から発した光は、レーザロッド上に到達しないので損失となる。この部分を除いた光源の有効利用断面積比は、

$$\alpha_\varphi = (1 - S_\psi / \pi r_L^2) = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) \qquad (13)$$

で与えられ、垂直断面内効率 η_β は α_φ の積分平均から求められる。この計算については光源自体による集束光のじょう乱を加味しなければならないが、適当な仮定を設けると、

$$\eta_\beta = \int_\psi \alpha_\psi \, d\psi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left\{\left(1 - \frac{1}{\pi}\varphi_1\right) + \frac{1}{\pi\varphi_1}\sin^2\varphi_1\right\}(\beta_2 - \beta_1) + (\pi - \beta_2)\right] \qquad (14)$$

ただし、

$$\varphi_1 = \cos^{-1}\{(r_R / r_L)\ \rho_1 / (2a - \rho_1)\}$$

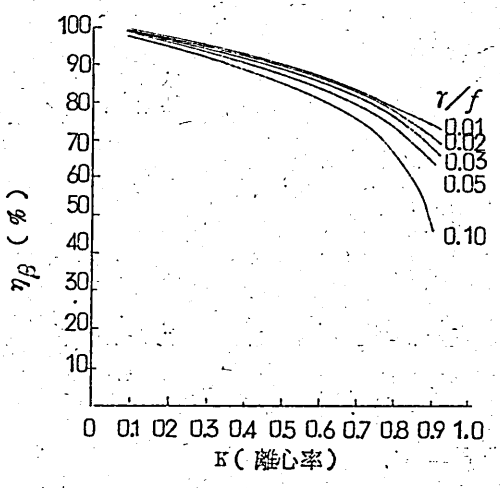
ρ_1, β_1, は連立方程式

$$\begin{cases} (f + \rho_1 \cos\beta_1)^2 / a^2 + (f + \rho_1 \sin\beta_1)^2 / b^2 = 1 \\ \sin\beta_1 = (r_L / r_R)(2a - \rho_1) / \rho_1 \end{cases}$$

の解、又 β_2 は方程式

$$\left(f + \frac{2a r_L}{r_L + r_R}\cos\beta_2\right)^2 / a^2 + \left(f + \frac{2a r_L}{r_L + r_R}\sin\beta_2\right)^2 / b^2 = 1 \quad \text{の}$$

一根である。光源の径はロッドの径に近いことが望ましいが、$r_L = r_R$ の場合について η_β の計算例を第７図に示す。



第７図

だ円鏡の垂直面内の効率 η_β
$r_R = r_L = r$ の場合、
f：だ円の焦点距離

次に垂直面と角θをなして横方向へ拡がる光は、鏡筒の側面に置かれた平面鏡で次々と反射されるが、ここで問題になるのは鏡面の反射率と光源の輻射特性である。直線型光源は円配光特性をもつので、単位長当りの垂直光度をI_0，光源長をℓとすると、放射される全光束F_0は

$$F_0 = 4\int_0^{\ell/2}\int_0^{\pi/2} 2\pi I_0 \cos^2\theta \cdot d\theta \quad dx = \pi^2 I_0 \ell \qquad (15)$$

一方鏡面の反射率をΓとし、鏡筒の巾をℓに等しくとると、鏡面からロッドに向つて反射される光束量の和Fは、

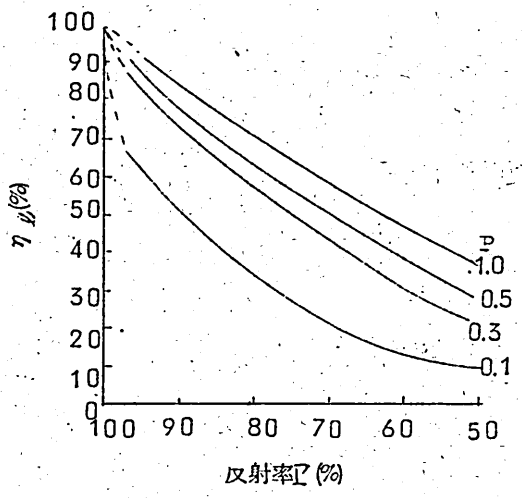
$$F = 2\sum_{n=1}\int_0^{\ell/2}\int_{\theta n} 2\pi I_0 \Gamma^n \cos^2\theta \cdot d\theta dx \qquad (16)$$

で与えられ、これから軸方向の効率として

$$\eta_\ell = F/F_0 = \frac{2}{\pi}\left[\sum_{n=1}\Gamma^n n\tan^{-1}\frac{1}{np}\right] - 2\sum_{n=2}(n-1)\tan^{-1}\frac{1}{(n-1)p} + \sum_{n=3}\Gamma^n(n-2)\tan^{-1}\frac{1}{(n-2)p}\right] \qquad (17)$$

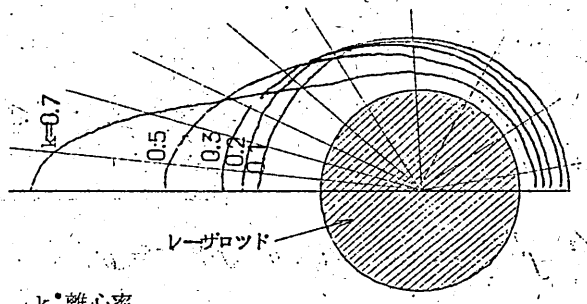
が得られる。ただし、$P = \ell/2a$，

η_ℓの計算結果を第8図に示す。



第8図　だ円筒鏡の軸方向の効率η_e
$P=\ell/2a$，ℓ：だ円筒の巾，
$2a$：だ円の長径

尚、集束光の強度はロッド面上で一様ではなく、偏りをもつがこの様子を第9図に示す。

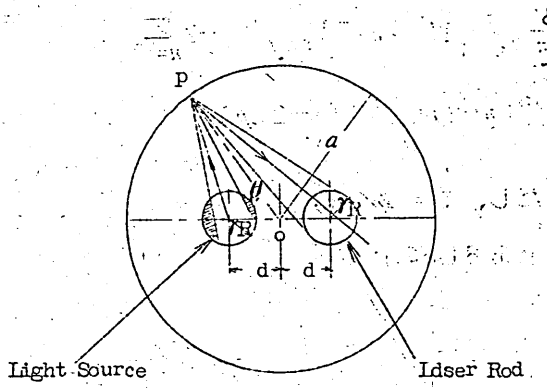


k：離心率

第9図　だ円筒鏡における集束光の偏り

5－2　円筒鏡の集光効率

上の結果から、だ円鏡の効率は離心率の小さい方がよいことがわかるが、この場合、だ円は円に近づくので円筒鏡で近似できる。第10図に円筒鏡の断面を示す。だ円の場合と同様の解析を行うと、垂直面内の効率として次式が得られる。



第10図　円筒鏡の断面図

$$\eta_c=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\alpha(\theta)\,d\theta \tag{18}$$

$$\alpha(\theta)=1-\frac{1}{\pi}\{(\varphi_1+\varphi_2)-\frac{1}{2}(\sin 2\varphi_1+\sin 2\varphi_2)\} \tag{19}$$

ただし、

$$\varphi_1, \varphi_2 = \cos^{-1}\{A\sin(\zeta \pm \xi)\}$$

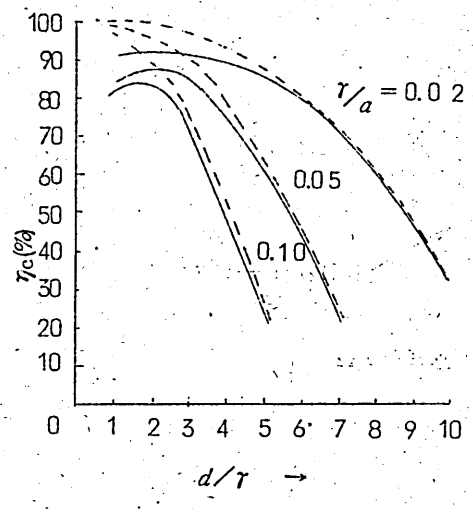
$$A = (a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{1/2} / r_L$$

$$\zeta = \sin^{-1}\{r_R(a^2+d^2+2ad\cos\theta)^{-1/2}\}$$

$$\xi = \sin^{-1}\{d(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{-1/2}\sin\theta\}$$

$$-\sin^{-1}\{d(a^2+d^2+2ad\cos\theta)^{-1/2}\sin\theta\}$$

第１１図に η_c の計算例を示す。だ円の場合の η_β と比較すると、適当な条件の下で円筒鏡が十分にだ円筒鏡の代用として使用できることが示される。この条件は、光源とロッドの間隔（$2d$）を狭くすることと、円筒の径を、円筒の長さに比べて余り大きくなり過ぎない範囲で、素子の寸法に対して十分大きく選ぶことである。



第１１図　円筒鏡の垂直面内集光効率 η_c

$r_L = r_R (= r)$ の場合、a：円筒半径

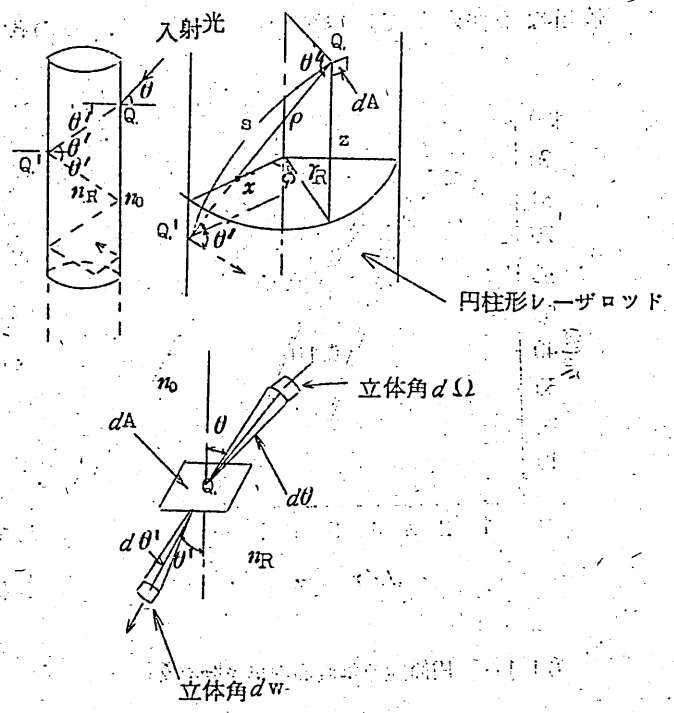
§６　レーザロッドの励起効率と最適設計

光ポンピングを能率良く行うためには二つの幾何光学的条件がある。一つは上述した集光々学系の能率を上げることであり、もう一つはレーザロッドの電力吸収率を高めることである。このために特に注目すべき量は、素子内部に形成される反転分布の密度である。この問題の詳しい解析は、Sooy and Sti—

tch[16]によるポンプ光の分布計算にはじまりBorrelli ら[17]はこれを拡張して反転分布の数値計算を試みた。しかし、これらの計算は二、三の点で不完全なため若干の補足を加えて厳密な解析を行い、その結果を Nd^{3+} ガラスレーザの設計に適用した。

6－1　ロッド内部におけるポンプ光の分布と形成される反転分布

ロッドは側面から一様なポンプ光の照射を受けるものとする。計算に必要な座標を第１２図に示す。



第１２図　計算に必要な座標

ロッド面上の面積素片 dA に角度 θ で入射する光線について波長が $\lambda + d\lambda$ の間にあり立体角 $d\Omega$ に含まれる光束は

$$dP_1 = B_0(\lambda)\, d\lambda\, dA \cos\theta \cdot d\Omega \qquad (20)$$

$B_0(\lambda)$：法線方向の光束の立体角密度

(Watt·cm^{-2}·steradian^{-1}·A$^{\circ -1}$)

ロッド表面の反射率を$R(\theta')$，レーザ物質の吸収係数を$\alpha(\lambda)$とすると，dAよりρだけ離れた内部の点Pにおける光束密度は

$$dI_0 = \{1 - R(\theta')\}\, dPi \cdot \exp\{-\alpha(\lambda)\rho\}/\rho^2\, d\omega$$

$$= (n_R/n_0) B_0(\lambda) d\lambda \{1 - R(\theta')\} [\exp\{-\alpha(\lambda)\rho\}/\rho^2]$$

$$\cos\theta'\, dA \quad (\text{watt}\cdot\text{cm}^{-2}) \qquad (21)$$

P点はこの他に外部空間との境界面で内部反射される光が加算されるが、n次反射光によるP点の光束密度dI_nは

$$dI_n = (n_R/n_0)^2 B_0(\lambda) d\lambda \{1 - R(\theta')\} R^n(\theta)$$

$$\times [\exp\{-\alpha(\lambda)(ns+\rho)\}/(ns+\rho)^2] \cos\theta'\, dA \qquad (22)$$

n_R, n_0：ロッド及び外部空間の屈折率

従つてP点を通過するエネルギー密度は

$$E(x) = \frac{1}{C_R} \sum_{n=0} dI_n = (1/C_0)(n_R/n_0) \int_\lambda \int_\varphi \int_z B_0(\lambda) \{1 - R(\theta')\} \cos\theta'$$

$$\times \sum_{n=0} [R^n(\theta') \exp\{-\alpha(\lambda)(ns+\rho)\}/(ns+\rho)^2]\, r_R \cdot dz \cdot$$

$$d\phi \cdot d\lambda \quad (\text{jonles}\cdot\text{cm}^{-3}) \qquad (23)$$

C_R, C_0：ロッド内外の光速、r_R：ロッド半径

一方、吸収係数$\alpha(\lambda)$なる物質中を光速密度$I(\lambda)$なる光が通過するとき吸収される光子の密度は、毎秒$\int (1/hc) \lambda \alpha(\lambda) I(\lambda) d\lambda$であるからP点において励起されるレーザイオンの密度は、

$$N(x)= \left(1/hc_0\right)\lambda\alpha(\lambda)\left[\int\sum_{n=0}^{\infty} dI_n\right]$$

$$=\left(1/hc_0\right)\left(n_R/n_0\right)^2\iiint_{\lambda\psi z}\lambda\alpha(\lambda)E_0(\lambda)\left\{1-R(\theta')\right\}\cos\theta'$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left[R^n(\theta')\exp\left\{-\alpha(\lambda)(n_S+\rho)\right\}/(n_S+\rho)^2\right]r_R dz\cdot d\phi\cdot d\lambda$$

$$\left(\text{atoms}\cdot cm^{-3}\cdot\sec^{-1}\right) \qquad (24)$$

h : プランクの定数

$$\rho=\left(z^2+x^2+r_R^2-2r_R x\cos\phi\right)^{1/2}$$

$$\cos\theta'=\left(r_R-x\cos\phi\right)/\left(z^2+x^2+r_R^2-2r_R x\cos\phi\right)^{1/2}$$

$$s=2r_R\left(r_R-x\cos\phi\right)/\left(z^2+x^2+r_R^2-2r_R x\cos\phi\right)^{1/2}/$$

$$\left(x^2+r_R^2-2r_R x\cos\phi\right)$$

$$R(\theta')=\frac{\cos^2\theta'\left\{1-\left(n_R/n_0\right)^2\sin^2\theta'\right\}+\left(n_R/n_0\right)^2\sin^4\theta'}{\left[\cos\theta'\left\{1-\left(n_R/n_0\right)^2\sin^2\theta'\right\}^{1/2}+\left(n_R/n_0\right)\sin^2\theta'\right]^2}$$

$$\times\left[\frac{\left\{1-\left(n_R/n_0\right)^2\sin^2\theta'\right\}^{1/2}-\left(n_R/n_0\right)\cos\theta'}{\left\{1-\left(n_R/n_0\right)^2\sin^2\theta'\right\}^{1/2}+\left(n_R/n_0\right)\cos\theta'}\right]^2$$

$R(\theta')$: ランダム偏光のエネルギー反射係数

(23) 及び (24) 式の積分範囲は

$0\leqq x/r_R\leqq n_0/n_R$ のとき $\quad|\varphi|\leqq\pi$

$n_0/n_R\leqq x/r_R\leqq 1$ のとき、$|\varphi|\leqq\varphi_1$ 及び $|\psi|\leqq\varphi_2$

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{matrix}\right\}=\sin^{-1}\left[\left\{\left(n_R/n_0\right)^2-1\right\}\left(n_0/n_R\right)\left(r_R/x\right)^2\pm\left(n_0/n_R\right)^2\left\{\left(n_R/r_0\right)^2-\left(r_R/x\right)^2\right\}^{1/2}\right.$$

$$|z|\leqq\left[\left\{\left(n_R/n_0\right)^2x^2\cos^2\phi+r_R^2-2r_R x\cos\phi\right\}/\left\{\left(n_R/n_0\right)^2-1\right\}-x^2\right]^{1/2}$$

6－2　レーザロッドの電力吸収効率

ロッドの単位表面積当りに入射する光束は

$$P_{in}=\int_{\lambda}\int_{\Omega} R_0(\lambda)\cos\theta\cdot d\Omega\cdot d\lambda=\pi\int_{\lambda}R_0(\lambda)\,d\lambda \qquad (25)$$

で与えられる。このうちロッドに吸収される量をP_{abs}とすれば、電力吸収率Σ_{abs}は$\Sigma_{abs}=P_{abs}/P_{in}$で表わされる。式の算出についての詳細は省略し結果だけを示すと，

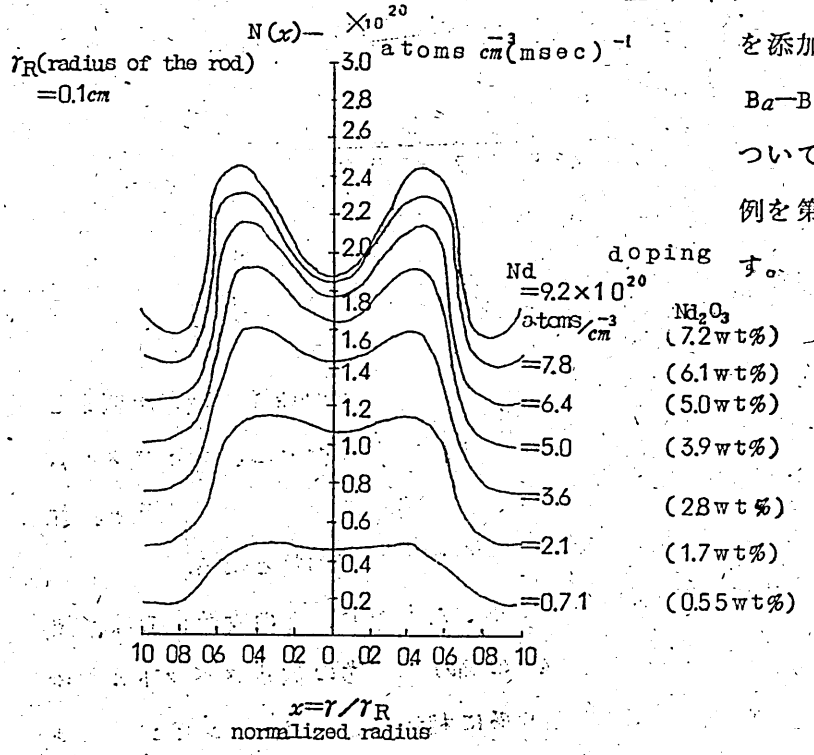
$$\Sigma_{abs}=\frac{4}{\pi}\int_{\lambda}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2}R_0(\lambda)\frac{\{1-R(\theta)\}\{1-\exp\{-\alpha(\lambda)s\}\}}{1-R(\theta)\exp\{-\alpha(\lambda)s\}} \qquad (26)$$

$$\times\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot d\alpha d\beta d\lambda/\int_{\lambda}R_0(\lambda)d\lambda$$

ただし、θは入射角を表わし、α，βはその半径及び軸方向への投影角で$\cos\theta=\cos\alpha\cdot\cos\beta$なる関係がある。

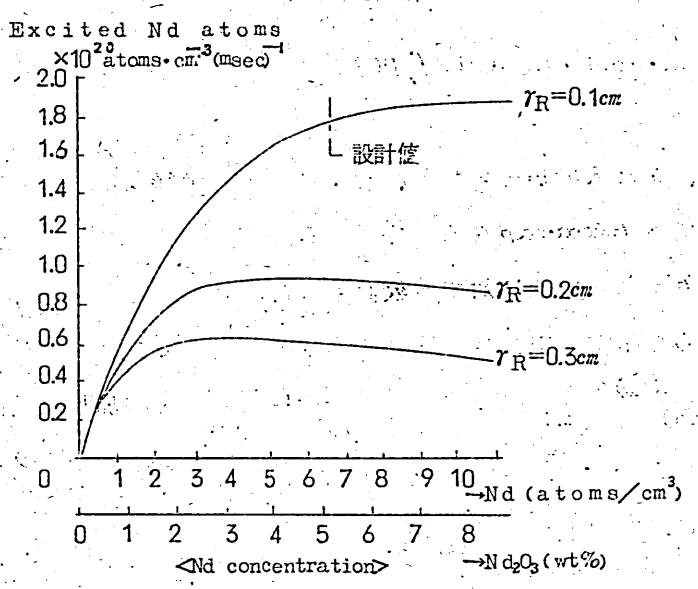
6.－3　Nd^{3+}ガラスレーザに対する数値計算と設計例

上で求めた諸量の中、特に注目すべき量はN(x)である。Nd^{3+}を添加した実際のBa－B系ガラスについてN(x)の計算例を第１３図に示す。



$P_0(\lambda)$としてはXe光を仮定し、計算機の演算を短縮するため適当な近似を用いた。

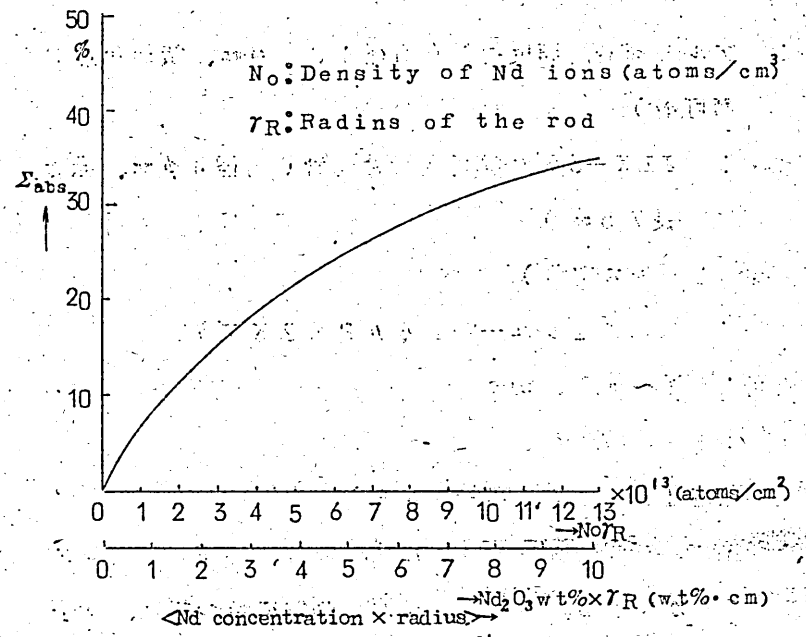
このガラスはすでに述べたようにパルス発振に適するが、典形的なパルス励起の場合、濃度消光の効果は余り考えなくてもよいので、主としてポンピングが効果的に行われるようにNdの添加量を選択すべきである。ロッドの中心部における$N(\omega)$の値を才14図に示す。



第14図　Ba-Bガラスロッドの中心部におけるNdの反転密度
強度1(watt·cm⁻²;steradian, Å⁻¹ at 5800Å)のXe光を照射した場合

ポンプ光の強さが同じである場合、ロッドの径は細い方が望ましいので実用上、機械加工の面からこれを2㎜とし、ライフタイムが短かくなり過ぎない範囲で、Ndの最適添加量を求めると、才14図から(6～8)×10^{20}(atoms/cm³)となる。

才15図はΣ_{abs}の計算例を示したもので、上の設計例では、波長5000Åから9000Åの間のXe光の放射スペクトルの中ロッドの吸収能力は、約25%に相当する。尚、ポンピングが長



第1.5図　Xe光(5000～9000Å)に対するNd^{3+} Ba-Bガラスの電力吸収率

い場合には、量子効率の低下とN(x)の増加との競合する妥協点を求めなくてはならないがこれについては省略する。

§7　発振装置と繰返しパルス動作

我々は実用上の立場からNd^{3+}ガラスレーザに着目し、特に共通の問題である発振スレショールドの低下に主眼をおいて、従来あまり注目されなかつたBorate　系ガラスを用いた簡便なパルス発振器の製作に取り組んだ。前述した検討結果に基づいて試作した装置の仕様は、大体次の通りである。

(1)　レーザロッド

材　料：　Nd^{3+} Barium Borate Glass

Nd^{3+}添加量：　6.4×10^{20} atoms/cm³ (5 wt. %)

共振器寸法　：　2φ×50㎜、共焦点球面共振器、

99%及び100%誘電体反射膜蒸着、

(2) ポンピング系

集光光学系： アルミ蒸着円筒反射鏡（直径１００φmm、微動焦点調節可能）

ポンピング光源： ＪＬＸ—５Ｓ直線型 Xe 発光管（内径４φmm、発光長７５mm）

(3) 電　源（繰返しパルス電源）

供給エネルギー： 最大１２ジユール（６μＦ×２ＫＶ）

放電繰返し速度： １～４００ pps

(4) 発振スレシヨールド

２ジユール（充電電圧８５０Ｖ、容量６μＦ）

この装置は、発振スレシヨールドが非常に低いので、高速度でパルス発振を繰り返すことができる。[18][19] 繰返し動作に当つては、素子の劣化を防ぐために、ガラスロツドの周辺に２％の K_2CrO_4 水溶液を循環させ、ポンプ光の紫外部をしやへいすると同時に冷却を行なわせた。Ｘｅ発光管を強制空冷した状態で、最高２００ ppsまでの繰返しが可能であつたが、５０ pps以上になると Xe 管の電極のスパツタリングが顕著となり発光の効率が著しく低下した。

繰返しの速度及び寿命は主に Xe 管の性能によつてきまるので、この方面で、より強力な小型大容量の光源の開発が待たれる。

§８　結　　言

パルス発振、連続発振にそれぞれ適したＮｄレーザーガラス材料を指摘し、励起効率を上げるための諸条件について検討した。Pumping 光源の改良によつて近い将来更に大出力高速の繰返しパルス発振乃至～Watts オーダーの連続発振が期待される。

参　考　文　献

(1) J. E. Geusic, et al
Appl. Phys. Lett., 4, 182 (1964)

(2) A. Heller
Appl. Phys. Lett., 9, 106 (1966)

(3) E. Snitzer
Phys. Rev. Lett., 7, 444 (1961)

(4) E. Snitzer
Paris 1963 Conf. ed. p999, Columbia Univ. Press, New York (1964)

(5) E. Snitzer
応用物理, 34, 164 (1965)

(6) L. G. Deshazer, et al
J. O. S. A., 55, 941 (1965)

(7) A. L. Schawlow and C. H. Townes
Phys. Rev. 112, 1940, (1958)

(8) 金井，塩谷，難波，神山
応用物理, 33, 264 (1964)

(9) R. D. Maurer
Symposium on Optial Masers, Polytechnic Institute of Brooklyn, April, P16, (1963)

(10) R. D. Maurer, et al.
Bull. of Corning Glass Works

(11) 鴨川，小寺，速水
1966応物秋期講演会予稿　16aB－9

(12) M. Ciftan, et al
Proc. IRE. 49, 960(1961)
(13) 高岡，溝淵
応用物理，32，513，(1963)
(14) 上領，鹿野，松沢，吉田
量子エレクトロニクス研究会資料，19，(1965)
(15) 鴨川，小寺
to be Published
(16) W. R. Sooy and M. L. Stitch
Jour. Appl. Phys. 34, 1719, (1963)
(17) N. F. Borrelli and M. L. Charters
Jour. Appl. Phys. 36, 2172, (1965)
(18) 鴨川，小寺，速水
Japan. Jour. Appl. Phys. 5, 449, (1966)
(19) W. R. Mallory and K. F. Tittel
Symposium on Optical Masers, Polytechnic
Institute of Brooklyn, April, (1963)

No. ..... 年 月 日

〔誤植訂正表〕

訂正箇所	訂正前	訂正後
P3. 5行目	1.35 μm ($\rightarrow {}^4I_{9/2}$),	抹消
P3. 下カラ3行目	基底準位 ${}^4I_{9/2}$ より	‐‐ ${}^4I_{9/2}$ より
P5. 10行目	遷移により Pumping の	‐‐により Population の
P6. 2行目	$\simeq \frac{\overline{\eta_p}}{h\nu} \int$ ‐‐	$\simeq \frac{\overline{\eta_p}}{h\nu_p} \int$ ‐‐
P6. 5行目	Eneryg	Energy
P7. 4行目	‐‐ $\int_{\lambda_p}^{\lambda_p'} k(\lambda)$ ‐‐	‐‐ $\int_{\lambda_p}^{\lambda_p'} K(\lambda)$ ‐‐
P14. 4行目	S_ψ	S_φ
P14. 8行目	$\eta_\beta = \int_\psi \alpha_\psi d\psi$	$\eta_\beta = \int_\varphi \alpha_\varphi d\varphi$
P15. (17)式	$[\sum_{n=1} \Gamma^n n \tan^{-1} cnp]$	$[\sum_{n=1} \Gamma^n n \tan^{-1}(np)$
	$-2\sum_{n=2} (n-1)\tan^{-1}$ ‐‐‐	$-2\sum_{n=2} \Gamma^n (n-1)\tan^{-1}$ ‐‐‐
	ただし, $P_* = l/2a$,	ただし, $P =$ ‐‐ $(P \rightarrow p)$
P15. 第8図	$P = l/2a$	$P \rightarrow p$
P18. 第12図	立体角 dw	立体角 dw
P19. (23)式	$E(x) = \frac{1}{C_R} \sum_{n=0} dI_n$	$E(x) = \frac{1}{C_R} \int \sum_{n=0} dI_n$
P20. 1行目	$N(x) = (1/hc_0)\lambda\alpha(\lambda)[\int \sum_{n=0} dI_n]$	$N(x) = \int (1/hc_0)\lambda\alpha(\lambda)[\sum_{n=0} dI_n]$
P20. 8行目	$S = 2r_R(\text{‐‐})/(\text{‐‐})^{1/2}/(\text{‐‐}$	$S = 2r_R(\text{‐‐})(\text{‐‐})^{1/2}/(\text{‐‐}$
P20. 下カラ2行目	$[\{\text{‐‐}\}(n_0/n_R)(r_R/x)^2 \pm$ ‐‐	$[\{\text{‐‐}\}(n_0/n_R)^2(r_R/x) \pm$ ‐‐
P21. (26)式	分子 $\exp\{-\alpha(\lambda)S\}$	$\exp\{-\alpha(\lambda)S\}]$
P22. 第14図	図の説明 (‐‐‐, Å-1 ‐‐)	(‐‐‐, $Å^{-1}$ ‐‐)
P23. 第15図	$\rightarrow$ ‐‐‐‐ (wt%·cm)	$\rightarrow$ ‐‐‐ (wt%·mm)

輻射研究会資料

方形導波管複スロットの指向特性の解析

橋本正弘　藤沢和男
（大阪大学　基礎工学部）

1967年2月24日

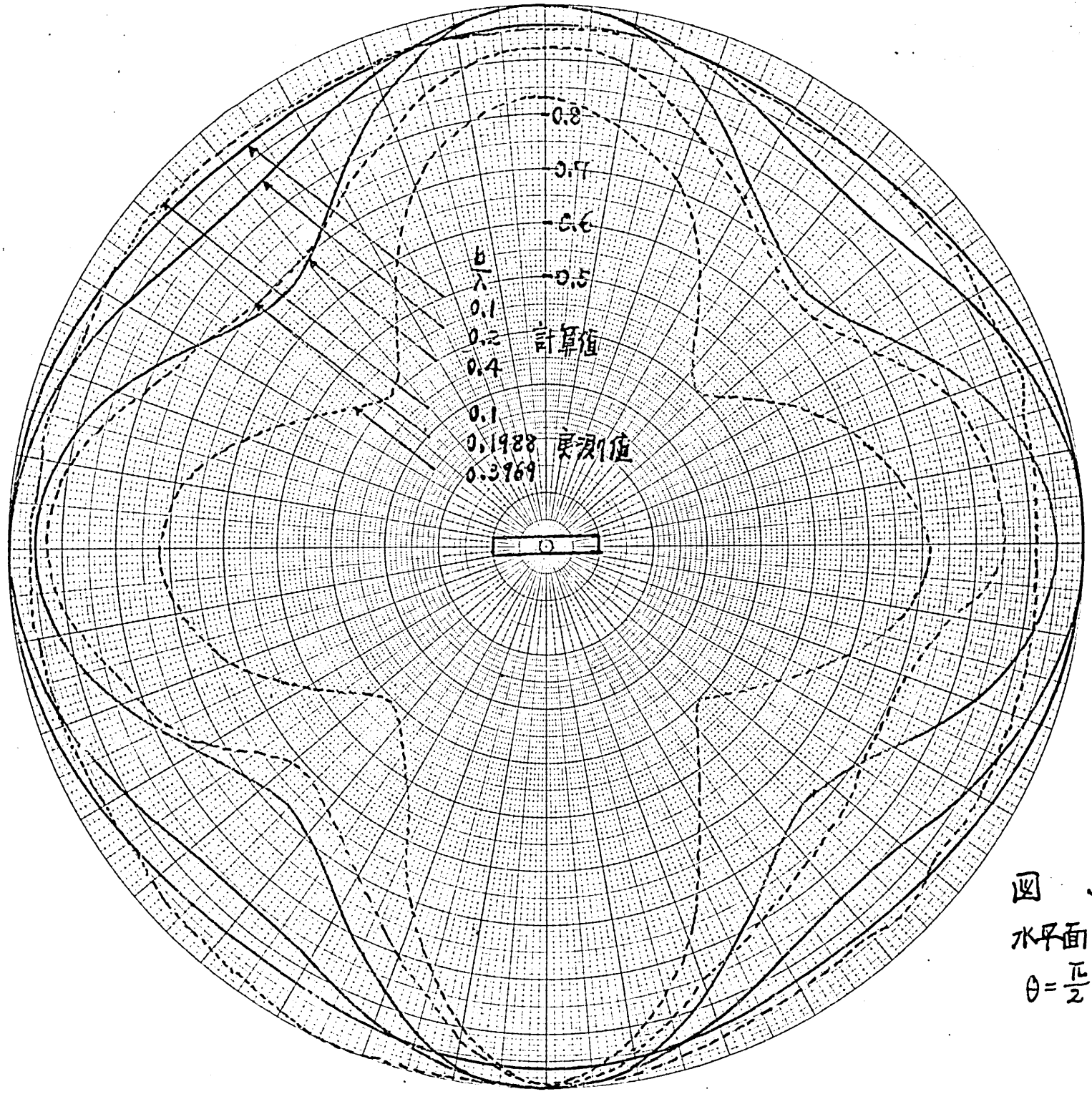


図 3

水平面内指向性

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\frac{a}{\lambda} = 0.8$

丸型一度目方眼紙
JIS A4

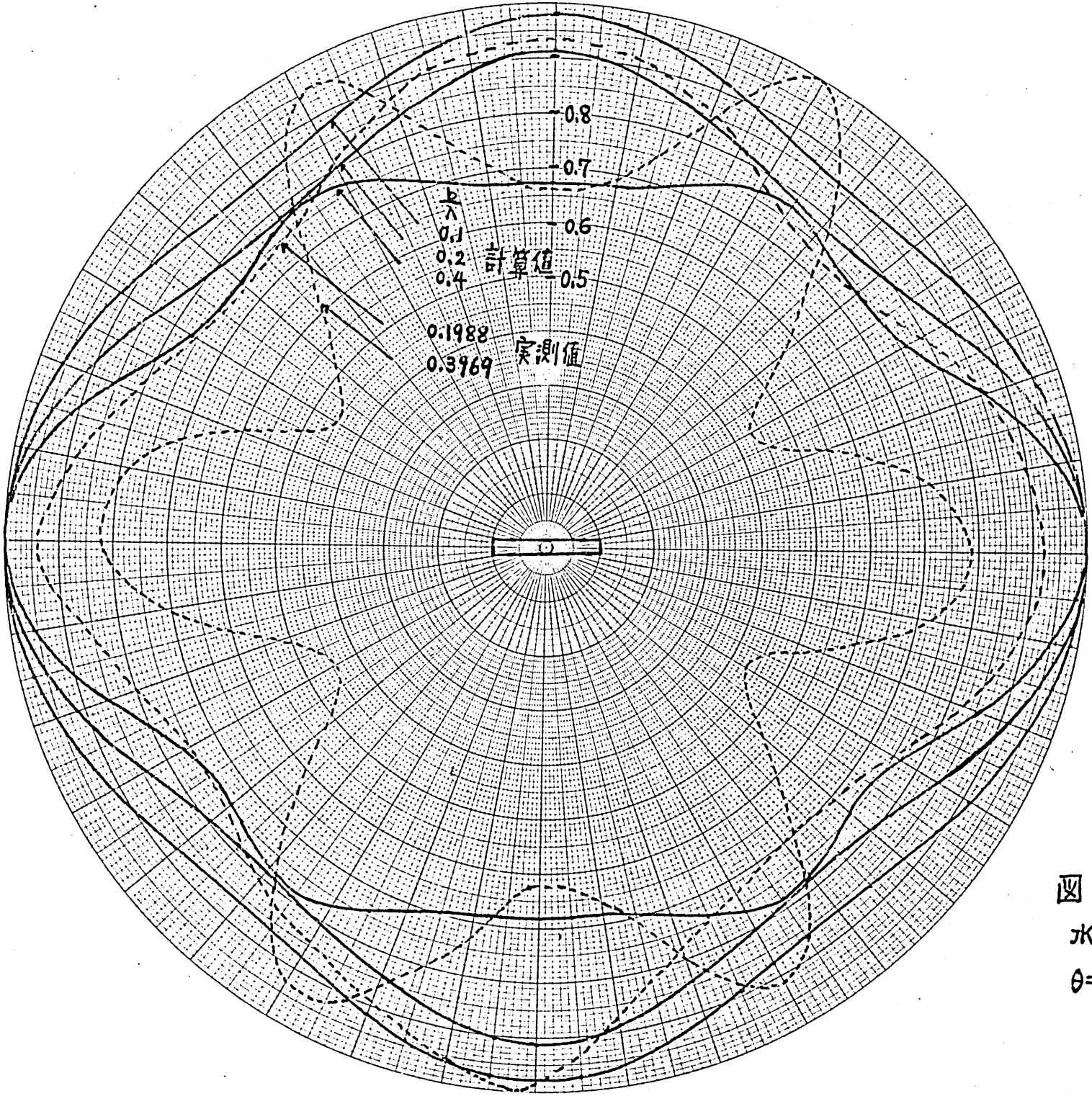


図 4

水平面内指向性

$\theta=\frac{\pi}{2}$ $\frac{a}{\lambda}=1.5$

丸型一度目方眼紙
JIS A4

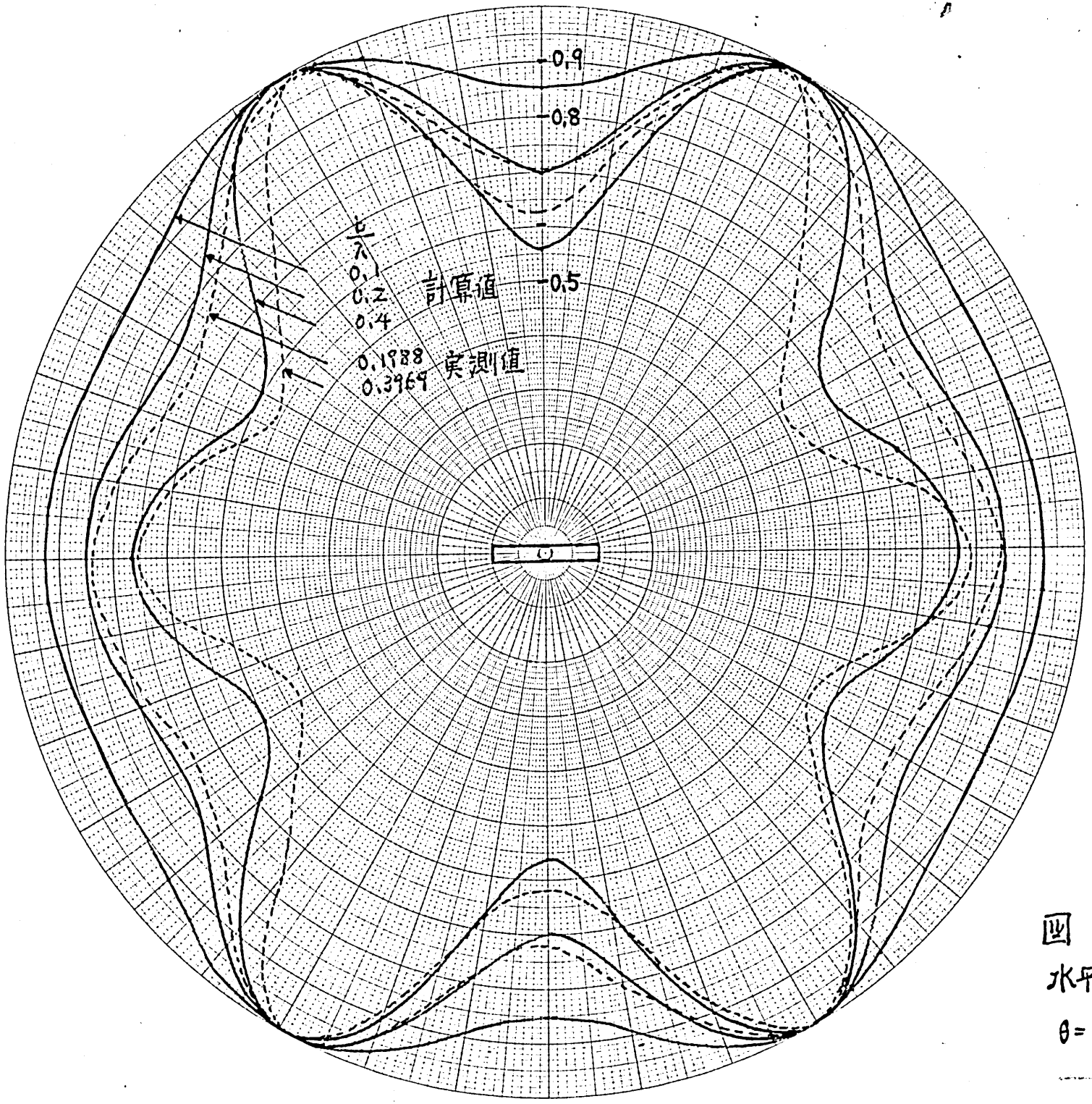


図 5

水平面内指向性

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\frac{a}{\lambda} = 2.0$

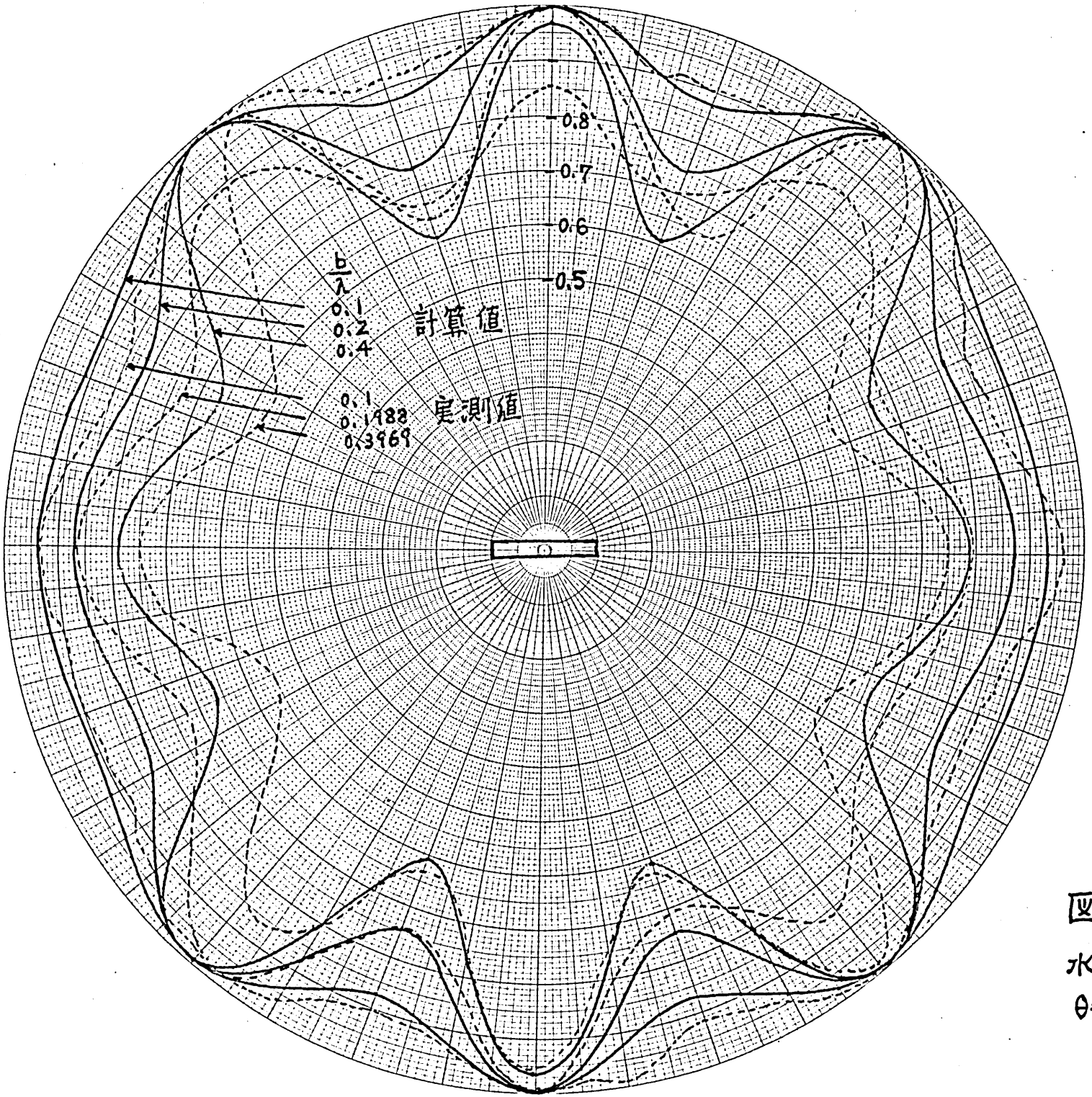


図 6

水平面内指向性

$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\frac{a}{\lambda} = 3.0$

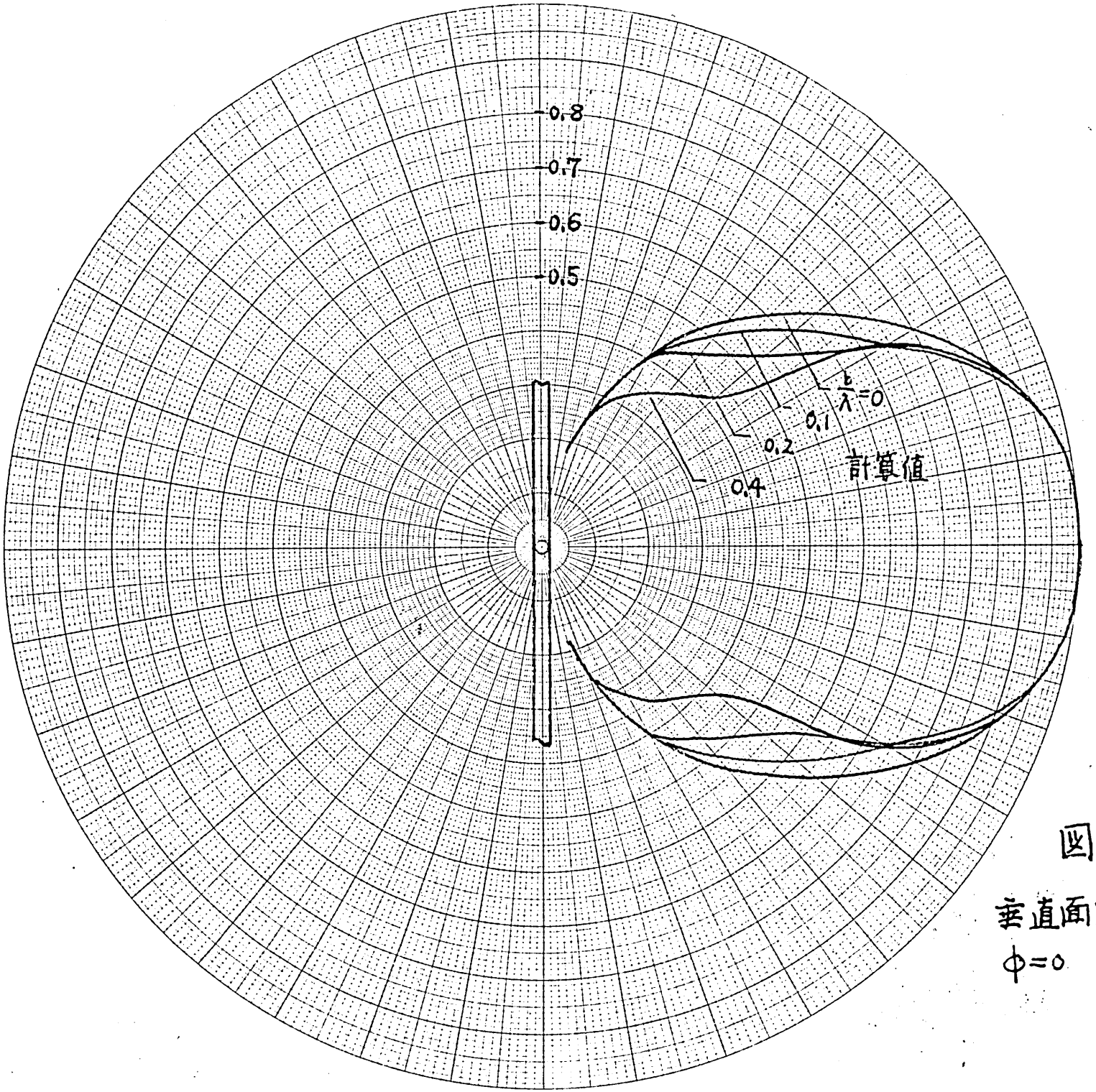


図 7

垂直面内指向性

$\phi=0$ $\frac{a}{\lambda}=3.0$

1. 緒言

現在、船舶用無指向性アンテナとして、扁平方形導波管の表裏にスロットがあけられている複スロットアンテナが用いられている。このアンテナに関して、いくつかの実測データが発表されているが、その理論的解析はなされていない。

このアンテナはTE_{10}モードで励起するためにスロットを導波管表面の中心軸より少しずらせてあけてあり、表と裏ではちょうど逆位相になるようにしてある。したがって、電界は対称になるから無指向性アンテナがえられる。一般に指向特性をよくするために導波管の厚みを十分小さく、巾を大きくとるのが普通である。ここでは次の仮定をしてその指向特性を求めた。

i) スロットは導波管表面の中心軸上にそってあけられている。
ii) スロットには半波長正弦波がのっている。
iii) 導波管は波長に比べて十分長いとする。
iv) 導波管の厚みは十分小さいから、その表面上の電磁界分布は無限大導体平板上の分布とほとんどかわらないとする。
v) 観測点は十分遠方である。

特にiv)の仮定をすることは逐次近似解法の第一近似解を求めたとみなせる。その結果、実測値と十分よい一致をみたのでここに報告する。

2. 放射電磁界の解析

ある表面上の電磁界分布がわかると、任意の点での電界がグリン関数を用いて(1)式のように表わされる。[1]

$$E(x)=\oint_S\left[n\cdot E\nabla'G+(n\times E)\times\nabla'G-j\omega\mu n\times H G\right]da' \quad (1)$$

$\hat{n}$; 表面から外部に向けての単位法線ベクトル
$\mathbf{x}$; 観測点位置ベクトル
G ; $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{e^{-jk|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ (2)
$\mathbf{x}'$; 表面上被積分点位置ベクトル
∇' ; $\mathbf{x}'$についての nabla operator

次に座標系を図1のようにとる。導波管の各々の面を図2のように $S_0 \sim S_3'$ と名付ける。また電磁界は $x>0$ で $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ と, $x<0$ で $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ とすると

$$\left.\begin{aligned} &E_x = E_x' \ , \ E_y = -E_y' , \quad E_z = -E_z' \\ &H_x = -H_x' , \ H_y = H_y' , \quad H_z = H_z' \\ &E_y(y) = E_y(-y) \ , \ H_z(y) = H_z(-y) \\ &H_x(z) = H_x(-z) . \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

となる。また, (1) 式において S_0 と S_1 及び S_0' と S_1' 上を積分してえられる電界を $\mathbf{E}_1(\mathbf{x})$ とし, 同様に S_2 と S_2', S_3 と S_3' 上を積分してえられる電界を $\mathbf{E}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{E}_3(\mathbf{x})$ とすると.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_3(\mathbf{x}) \quad (4)$$

である。

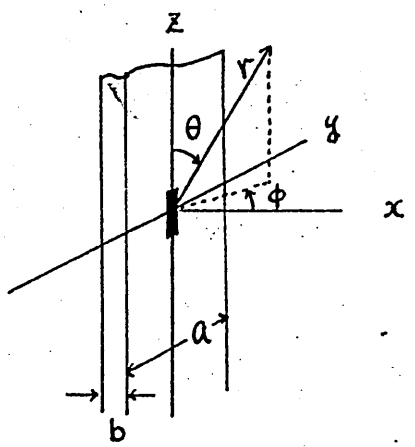


図1. 座標系

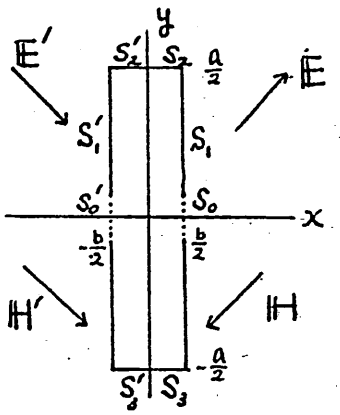


図2. 導波管断面

また $G(X|X')$ を $G(X|x',y',z')$ とかくと

$$E_1(X) = -\nabla \int_{S_0+S_1} \mathbf{e}_x \cdot \left\{ E\left(\frac{b}{2},y',z'\right) G\left(X\middle|\frac{b}{2},y',z'\right) - E'\left(-\frac{b}{2},y',z'\right) G\left(X\middle|-\frac{b}{2},y',z'\right) \right\} da'$$

$$+\nabla \times \int_{S_0+S_1} \mathbf{e}_x \times \left\{ E\left(\frac{b}{2},y',z'\right) G\left(X\middle|\frac{b}{2},y',z'\right) - E'\left(-\frac{b}{2},y',z'\right) G\left(X\middle|-\frac{b}{2},y',z'\right) \right\} da'$$

$$-j\omega\mu \int_{S_0+S_1} \mathbf{e}_x \times \left\{ H\left(\frac{b}{2},y',z'\right) G\left(X\middle|\frac{b}{2},y',z'\right) - H'\left(-\frac{b}{2},y',z'\right) G\left(X\middle|-\frac{b}{2},y',z'\right) \right\} da' \quad (5)$$

$$E_{\frac{2}{3}}(X) = \mp\nabla \int_{S_{\frac{2}{3}}} \mathbf{e}_y \cdot \left\{ E\left(x',\pm\frac{a}{2},z'\right) G\left(X\middle|x',\pm\frac{a}{2},z'\right) + E'\left(-x',\pm\frac{a}{2},z'\right) G\left(X\middle|-x',\pm\frac{a}{2},z'\right) \right\} da'$$

$$\pm\nabla \times \int_{S_{\frac{2}{3}}} \mathbf{e}_y \times \left\{ E\left(x',\pm\frac{a}{2},z'\right) G\left(X\middle|x',\pm\frac{a}{2},z'\right) + E'\left(-x',\pm\frac{a}{2},z'\right) G\left(X\middle|-x',\pm\frac{a}{2},z'\right) \right\} da'$$

$$\mp j\omega\mu \int_{S_{\frac{2}{3}}} \mathbf{e}_y \times \left\{ H\left(x',\pm\frac{a}{2},z'\right) G\left(X\middle|x',\pm\frac{a}{2},z'\right) + H'\left(-x',\pm\frac{a}{2},z'\right) G\left(X\middle|-x',\pm\frac{a}{2},z'\right) \right\} da' \quad (6)$$

である。

但し，±の複号は添字zのときは上の方を，3のときは下の方をとる。

一方，十分遠方，即ち，$|X| \gg |X'|$ のときは

$$G(X|X') \simeq \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jk\mathbf{e}_r \cdot X'} \tag{7}$$

$r = |X|$，$\mathbf{e}_r$ は r 方向単位ベクトル

である。

(7)式を(3)式を(5),(6)式に代入すると

$$\begin{aligned} E_1(X) \simeq & -j\frac{k e^{-jkr}}{2\pi r}\cos\left(\frac{kb}{2}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_x\right)\mathbf{e}_r \times \int_{S_0} \mathbf{e}_x \times \mathbf{E}\, e^{jk(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_y y' + \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_z z')} dy'dz' \\ & -\frac{k e^{-jkr}}{2\pi r}\sin\left(\frac{kb}{2}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_x\right)\left\{\mathbf{e}_r \int_{S_1} \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{E}\, e^{jk(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_y y' + \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_z z')} dy'dz'\right. \\ & \left. -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_{S_0+S_1} \mathbf{e}_x \times \mathbf{H}\, e^{jk(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_y y' + \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_z z')} dy'dz'\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} E_{z_3}(X) \simeq & \mp\frac{k e^{-jkr}}{2\pi r}\mathbf{e}_r \int_{S_{z_3}} E_y \sin(kx'\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_x) e^{j\frac{ka}{2}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_y} e^{jk\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_z z'} dx'dz' \\ & \mp j\frac{k e^{-jkr}}{2\pi r}\mathbf{e}_x \int_{S_{z_3}} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_z \cos(kx'\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_x) e^{j\frac{ka}{2}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_y} e^{jk\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_z z'} dx'dz' \end{aligned}$$

$$\pm\frac{k e^{-jkr}}{2\pi r}\mathbb{E}_z\int_{S_3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_x \sin(kx'\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_x)\,e^{j\frac{ka}{2}\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_y}e^{jk\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_z z'}dx'dz' \qquad (9)$$

となりさらに

$$\begin{aligned}&E_2+E_3\\ &\simeq -\frac{k}{\pi r}e^{-jkr}\sin\left(\frac{ka}{2}\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_y\right)\left\{ j\mathbb{E}_r\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^{\frac{b}{2}}dx' E_y\left(x',\frac{a}{2},z'\right)\sin\left(kx'\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_x\right)\right.\\ &\qquad e^{jk\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_z z'}-\mathbb{E}_x\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^{\frac{b}{2}}dx' H_z\left(x',\frac{a}{2},z'\right)\cos\left(kx'\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_x\right)\\ &\qquad \left. e^{jk\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_z z'}\right\}. \qquad (10)\end{aligned}$$

となる。ここでE_yは$x'=0$で$E_y=0$, かつ$\sin(kx'\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_x)=0$であるから巾bが波長に比べて小さい場合には(10)式の第一項目の積分内の値は小さいから第2項目のものに比べて無視することができる。したがって(10)式は

$$\begin{aligned}&E_2+E_3\\ &\simeq\frac{k e^{-jkr}}{\pi r}\sin\left(\frac{ka}{2}\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_y\right)\mathbb{E}_x\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^{\frac{b}{2}}dx' H_z\left(x',\frac{a}{2}z'\right)\\ &\qquad \cos\left(kx'\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_x\right)e^{jk\mathbb{E}_r\cdot\mathbb{E}_z z'} \qquad (11)\end{aligned}$$

となる。

ここで、(8), (11)式の積分内の電磁界を無限大導体平板上上にあけられたスロットによる導体平板上の電磁界と仮定する。この電磁界は、そのスロットの巾が非常に小さく、かつ長さが半波長で、その中心の尖頭電圧がV_mでy方向のみの正弦波電界によって励起されているとすると

$$
\left.
\begin{aligned}
E_x &= -j\frac{V_m}{2\pi}\frac{1}{y'}\left[e^{-jk\sqrt{y'^2+(z'-\lambda/4)^2}} + e^{-jk\sqrt{y'^2+(z'+\lambda/4)^2}} \right] \\
H_y &= -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jV_m}{2\pi}\frac{1}{y'}\left[\frac{(z'-\lambda/4)\,e^{-jk\sqrt{y'^2+(z'-\lambda/4)^2}}}{\sqrt{y'^2+(z'-\lambda/4)^2}} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{(z'+\lambda/4)\,e^{-jk\sqrt{y'^2+(z'+\lambda/4)^2}}}{\sqrt{y'^2+(z'+\lambda/4)^2}} \right] \\
H_z &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jV_m}{2\pi}\left[\frac{e^{-jk\sqrt{y'^2+(z'-\lambda/4)^2}}}{\sqrt{y'^2+(z'-\lambda/4)^2}} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{e^{-jk\sqrt{y'^2+(z'+\lambda/4)^2}}}{\sqrt{y'^2+(z'+\lambda/4)^2}} \right]
\end{aligned}
\right\} \quad (12)
$$

で与えられる。一方(11)式の積分内の側面S_2上での磁界H_zは導波管の表面S_1からS_1'へ流れる電流によって生じるからS_2上での電流は無限大導体平板のS_1を延長したところの電流とみなせるからS_2上でのH_zもやはり無限大導体平板上の$y=\frac{a}{2}\sim(\frac{a}{2}+\frac{b}{2})$での磁界$H_z$で表される。そこで(12)式と(8)及び(11)式に代入してr.θ.φ方向成分に分けると

$$
\begin{aligned}
&E_r \\
&\simeq \frac{jV_m}{\pi r}e^{-jkr\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{kb}{2}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_x\right)\left(\mathrm{L}-\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_y\,\mathrm{I}\right.\right. \\
&\left.\left. -\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_z\,\mathrm{J}\right) + \sin\left(\frac{ka}{2}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_y\right)\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_x\,\mathrm{K} \right] \qquad (13)
\end{aligned}
$$

$$E_\theta \simeq \frac{jV_m}{\pi r} e^{-jkr} \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \frac{z}{\pi} \left[-\sin\left(\frac{kb}{2}\hat{\epsilon}_r \cdot \hat{\epsilon}_x\right)\left(\hat{\epsilon}_\theta \cdot \hat{\epsilon}_y I + \hat{\epsilon}_\theta \cdot \hat{\epsilon}_z J + \sin\left(\frac{ka}{2}\hat{\epsilon}_r \cdot \hat{\epsilon}_y\right) \hat{\epsilon}_\theta \cdot \hat{\epsilon}_x K \right] \right. \quad (14)$$

$$E_\phi \simeq \frac{jV_m}{\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \left[\cos\left(\frac{kb}{2}\hat{\epsilon}_r \cdot \hat{\epsilon}_x\right) - \frac{z}{\pi}\sin\theta \sin\left(\frac{kb}{2}\hat{\epsilon}_r \cdot \hat{\epsilon}_x\right) \hat{\epsilon}_\phi \cdot \hat{\epsilon}_y I + \frac{z}{\pi}\sin\theta \sin\left(\frac{ka}{2}\hat{\epsilon}_r \cdot \hat{\epsilon}_y\right) \hat{\epsilon}_\phi \cdot \hat{\epsilon}_x K \right] \quad (15)$$

ただし ここで I, J, K, L は

$$I = \int_0^{\gamma_a} d\gamma \int_0^{\infty} dz \frac{e^{-j\sqrt{\gamma^2+z^2}}}{\sqrt{\gamma^2+z^2}} \cos\beta\gamma \cos\gamma z \quad (16)$$

$$J = \int_0^{\gamma_a} d\gamma \int_0^{\infty} dz \frac{z}{\gamma} \frac{e^{-j\sqrt{\gamma^2+z^2}}}{\sqrt{\gamma^2+z^2}} \sin\beta\gamma \sin\gamma z \quad (17)$$

$$K = \int_{\gamma_a}^{\gamma_a+\gamma_b} d\gamma \int_0^{\infty} dz \frac{e^{-j\sqrt{\gamma^2+z^2}}}{\sqrt{\gamma^2+z^2}} \cos\alpha(\gamma-\gamma_a) \cos\beta z \quad (18)$$

$$L = \int_0^{\gamma_a} d\gamma \int_0^{\infty} dz \frac{1}{\gamma} e^{-j\sqrt{\gamma^2+z^2}} \sin\beta\gamma \cos\gamma z \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \hat{\epsilon}_r \cdot \hat{\epsilon}_x = \sin\theta\cos\phi \\ \beta &= \hat{\epsilon}_r \cdot \hat{\epsilon}_y = \sin\theta\sin\phi \\ \gamma &= \hat{\epsilon}_r \cdot \hat{\epsilon}_z = \cos\theta \\ \gamma_a &= \frac{ka}{2}, \quad \gamma_b = \frac{kb}{2} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

である。ここで(15)式の E_ϕ を

$$E_\phi \simeq \frac{jV_m}{\pi r} e^{-jkr} D_0(\theta)\, D(\theta, \phi, a, b) \tag{21}$$

$$D_0(\theta) = \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]}{\sin\theta} \tag{22}$$

と表わす。そして(16)及び(18)式で示される I と K は a/λ が大きくて b/λ が小さい場合には

$$\begin{aligned} I = & -j\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{1}{\cos\phi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1-C^*\left[\gamma_a \sin\theta(1+\sin\phi)\right]-S^*\left[\gamma_a \sin\theta(1+\sin\phi)\right]}{\sqrt{1+\sin\phi}}\right.\right. \\ & \left. + \frac{1-C^*\left[\gamma_a \sin\theta(1-\sin\phi)\right]-S^*\left[\gamma_a \sin\theta(1-\sin\phi)\right]}{\sqrt{1-\sin\phi}}\right] \\ & -j\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{S^*\left[\gamma_a \sin\theta(1+\sin\phi)\right]-C^*\left[\gamma_a \sin\theta(1+\sin\phi)\right]}{\sqrt{1+\sin\phi}}\right. \\ & \left.\left. + \frac{S^*\left[\gamma_a \sin\theta(1-\sin\phi)\right]-C^*\left[\gamma_a \sin\theta(1-\sin\phi)\right]}{\sqrt{1-\sin\phi}}\right]\right\} \end{aligned} \tag{23}$$

$$K = -j\frac{\pi}{2}\left(\frac{kb}{2}\right)\left[J_0(\gamma_a \sin\theta) - jN_0(\gamma_a \sin\theta)\right] \tag{24}$$

J_0, N_0 ; zero 次ベッセル, ノイマン関数.

$$C^*(x)=C\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right),\quad S^*(x)=S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right)$$

$C(x)$, $S(x)$; フレネル積分

$$C^*(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\cos u^2\,du,\quad S^*(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\sin u^2\,du.$$

$$C^*(\infty)=S^*(\infty)=\frac{1}{2}$$

で表される。(付録参照)

(23)及び(24)式を(15)式に代入して，$D(\theta,\varphi,a,b)$ を実部と虚部にわけて示すと．

$$D_{real}(\theta,\phi,a,b)$$

$$\simeq \cos\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\cos\phi\right)+\cos\phi\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\cdot\cos\phi\right)$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{S^*\left[\frac{ka}{2}\sin\theta(1+\sin\phi)\right]-C^*\left[\frac{ka}{2}\sin\theta(1+\sin\phi)\right]}{\sqrt{1+\sin\phi}}\right.$$

$$\left.+\frac{S^*\left[\frac{ka}{2}\sin\theta(1-\sin\phi)\right]-C^*\left[\frac{ka}{2}\sin\theta(1-\sin\phi)\right]}{\sqrt{1-\sin\phi}}\right]$$

$$+\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\phi\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\sin\phi\right)N_0\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)\qquad(25)$$

$$D_{imag}(\theta,\phi,a,b)$$

$$\simeq \sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\cos\phi\right)\left\{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi\left[\right.\right.$$

$$\frac{1-C^*\left[\frac{ka}{2}\sin\theta(1+\sin\phi)\right]-S^*\left[\frac{ka}{2}\sin\theta(1+\sin\phi)\right]}{\sqrt{1+\sin\phi}}$$

$$\left.\left.\frac{1-C^*\left[\frac{ka}{2}\sin\theta(1-\sin\phi)\right]-S^*\left[\frac{ka}{2}\sin\theta(1-\sin\phi)\right]}{\sqrt{1-\sin\phi}}\right]\right\}$$

$$+\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\phi\,\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\sin\phi\right)J_0\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right). \quad (26)$$

特に $\theta=\frac{\pi}{2}$ では $D_0(\pi/2)=1$ であり.

$$D_{real}\left(\frac{\pi}{2},\phi,a,b\right)\simeq\cos\left(\frac{kb}{2}\cos\phi\right)+\sin\left(\frac{kb}{2}\cos\phi\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\right.$$

$$\sqrt{1-\sin\phi}\left(S^*\left[\frac{ka}{2}(1+\sin\phi)\right]-C^*\left[\frac{ka}{2}(1+\sin\phi)\right]\right)$$

$$\left.+\sqrt{1+\sin\phi}\left(S^*\left[\frac{ka}{2}(1-\sin\phi)\right]-C^*\left[\frac{ka}{2}(1-\sin\phi)\right]\right)\right\}$$

$$+\frac{kb}{2}\sin\phi\,\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\phi\right)N_0\left(\frac{ka}{2}\right). \quad (27)$$

$$D_{imag}\left(\frac{\pi}{2},\phi,a,b\right)\simeq \sin\left(\frac{kb}{2}\cos\phi\right)\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{1-\sin\phi}\left(1-C^*\left[\frac{ka}{2}(1+\sin\phi)\right]-S^*\left[\frac{ka}{2}(1+\sin\phi)\right]\right)+\sqrt{1+\sin\phi}\left(1-C^*\left[\frac{ka}{2}(1-\sin\phi)\right]-S^*\left[\frac{ka}{2}(1-\sin\phi)\right]\right)\right\}\right]+\frac{kb}{2}\sin\phi\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\phi\right)J_0\left(\frac{ka}{2}\right).$$

$\varphi=0$ では

$$D_0(\theta)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

$$D_{real}(\theta,0,a,b)\simeq\cos\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)+\sqrt{2}\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)\left[S^*\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)-C^*\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)\right]. \quad (29)$$

$$D_{imag}(\theta,0,a,b)\simeq\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)\left\{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}\left[S^*\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)+C^*\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)\right]\right\}. \quad (30)$$

となる。これらより $D_0(\theta)$ $|D(\theta,\varphi,a,b)|$ において a および b をパラメーターとって計算したものが図3～7である。なお、実測値は竹島氏[2]によるものである。

3. 結言

無限大導体平板上の電磁界分布を用いて、厚み b が波長に比べて小さいとして指向特性を求めたが、その結果と、実測結果と比べてみると、実測値は、スロットの位置がずれている

ため，指向特性が左右非対称になっているため，多少の誤差を含むが，a/λ が 2.0 より大きい場合には b/λ が 0.4 でも実測値とよい一致をみたが a/λ が 1.5 以下では b/λ が小さい場合しか実測値と一致しない。これは，導波管表面の電磁界分布が，もはや無限大導体平板上のそれとは異ったことによるものである。また a/λ を大きくしていくにしたがって電界強度最大最小比は改善されるが a/λ が 4.0, 5.0, 6.0 で b/λ が 0.4 のときは 4.0, 3.2, 3.0 dB, b/λ が 0.2 のとき 2.2, 2.0, 1.9 dB という計算結果をえた。これから a/λ を大きくするよりも b/λ を小さくする方が，より指向特性を改善できることがわかった。

なお，この計算のプログラミングに助力して下さった，本校プラズマ研究室の上村鉄雄氏に深く感謝する。

参考文献

(1) J.A. Stratton "Electromagnetic theory" pp 467
J.D. Jackson "Classical Electrodynamics" pp 285

(2) 竹島忠昭 "船舶用レーダのスロットアレイアンテナに関する研究" 学位論文(阪大) 昭和40年12月.

(3)(4). G.N. Watson "theory of Bessel functions"
pp 180 (2)(3), pp405 (6)(7)

付録

$$I = \frac{1}{4}\int_{-Y_a}^{Y_a} dY \int_{-\infty}^{\infty} dZ \frac{e^{-j\sqrt{Y^2+Z^2}}}{\sqrt{Y^2+Z^2}} e^{j\beta Y} e^{j\gamma Z} \qquad (a)$$

これを計算する前に次に示す f を求める。

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} dZ \frac{e^{-j\sqrt{Y^2+Z^2}}}{\sqrt{Y^2+Z^2}} e^{j\gamma Z} \qquad (b)$$

(b)式において z を

$$z = \gamma \sinh u \qquad (c)$$

と変数変換すると f は

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} du \cos\left\{\gamma\sqrt{1-\gamma^2}\cosh(u-\tau)\right\} - j\int_{-\infty}^{\infty} du \sin\left\{\gamma\sqrt{1-\gamma^2}\cosh(u-\tau)\right\}. \qquad (d)$$

に表される。これを公式(3)により

$$f = -j\pi H_0^{(2)}(\gamma\sqrt{1-\gamma^2}). \qquad (e)$$

と zero 次ハンケル関数に表される。したがって I は

$$I = -j\frac{\pi}{2}\int_0^{\gamma_a} d\gamma H_0^{(2)}(\gamma\sqrt{1-\gamma^2})\cos\beta\gamma$$

$$= -j\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\infty} d\gamma H_0^{(2)}(\gamma\sqrt{1-\gamma^2})\cos\beta\gamma - \int_{\gamma_a}^{\infty} d\gamma H_0^{(2)}(\gamma\sqrt{1-\gamma^2})\cos\beta\gamma\right]$$

$$= -j\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2-\gamma^2}} - \int_{\gamma_a}^{\infty} d\gamma H_0^{(2)}(\gamma\sqrt{1-\gamma^2})\cos\beta\gamma\right] \qquad (f)$$

である。ここで $\gamma_a = \infty$ の場合の I は

$$I_\infty = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-j\sqrt{\gamma^2+z^2}}}{\sqrt{\gamma^2+z^2}} e^{j\beta\gamma} e^{j\gamma z}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} d\eta \; e^{-j\xi + j\alpha\xi\cos\eta + j\beta\xi\sin\eta}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} d\xi \left[\cos\xi J_0(\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\xi) - j\sin\xi J_0(\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\xi)\right]$$

$$= -\frac{j\pi}{2}\int_0^{\infty} d\xi \sin\xi J_0(\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\xi)$$

$$= -j\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2-\gamma^2}}$$

と変形される。(4) 次に $\beta = \sin\theta\sin\phi$, $\gamma = \cos\theta$ を代入して、$\gamma_a \sin\theta \gg 1$ として ハンケル関数の漸近展開式を用いると、

$$\int_{\gamma_a}^{\infty} d\gamma H_0^{(2)}(\sin\theta\gamma)\cos\beta\gamma$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sin\theta}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\sin\phi}}\int_{\sqrt{\sin\theta(1+\sin\phi)}\gamma_a}^{\infty} \cos u^2 du\right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-\sin\phi}}\int_{\sqrt{\sin\theta(1-\sin\phi)}\gamma_a}^{\infty} \cos u^2 du$$

$$\left. - j\frac{1}{\sqrt{1+\sin\phi}}\int_{\sqrt{\sin\theta(1+\sin\phi)}\gamma_a}^{\infty} \sin u^2 du\right.$$

$$-j\frac{1}{\sqrt{1-\sin\phi}}\int_{\sqrt{\sin\theta(1-\sin\phi)}\gamma_a}^{\infty}\sin u^2\,du \Bigg\}. \qquad (g)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\cos u^2\,du &= \frac{1}{2}-C^*(x)\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\sin u^2\,du &= \frac{1}{2}-S^*(x)\end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

を用いて(f)式に代入することより(23)式が与えられる。一方，Kはγ_bが小さいとして

$$K=-j\frac{\pi}{2}\int_{\gamma_a}^{\gamma_a+\gamma_b}d\gamma\,H_0^{(2)}(\gamma\sqrt{1-\gamma^2})\cos\alpha(\gamma-\gamma_a)$$

$$\simeq -j\frac{\pi}{2}\left(\frac{kb}{2}\right)H_0^{(2)}\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right). \qquad (i)$$

となる。

輻射科学研究会資料

導波管型エサキダイオード発振器の特性

六島　克
森　啓真
福島康男
（大阪府立大学工学部）

昭和42年2月24日

1 緒　　言

エサキダイオードはその負性抵抗発生機構に走行時間の影響による制限がなく，マイクロ波発振器あるいは増巾器として利用されており，約１００Ｇｃまでの周波数での発振が報告されている。[1] 通常ダイオードはこのような周波数では同軸あるいは導波管型共振器にマウントされて用いられているが，この中導波管型発振器の発振現象に関して最近種々の論議や取扱いがなされており，[2]~[6] ダイオードの抵抗遮断周波数以上の周波数での発振も報告されている。[7]~[9] しかしこれ等の現象に関する考察はやや定性的で，周波数や発振出力の定量的な決定は必ずしも十分ではないように思われる。筆者等も先にこの問題について解析して発振器の等価回路を誘導し発振条件を検討して発振周波数及び発振出力を求めて見た。[10], [11] 本報告では筆者等が先に示した解析の概要を述べ，その計算結果よりこのような構造での発振器の特性を考察し，実験結果と比較検討を行つたものである。

2 等価回路の誘導

導波管型エサキダイオード発振器は一般に図１に示すように一端短絡のテーパー導波管にダイオードをマウントした形で構成される。

ダイオード自体の等価回路は図２で与えられる。このダイオードを導波管内にマウントした場合，負性コンダクタンス$-g$，接合容量Ｃ，直列抵抗R_S

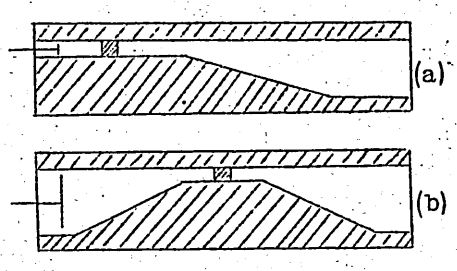


図　1

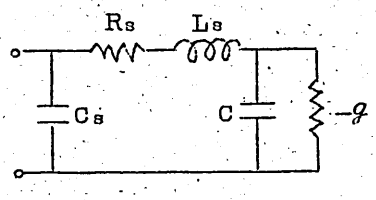


図　2

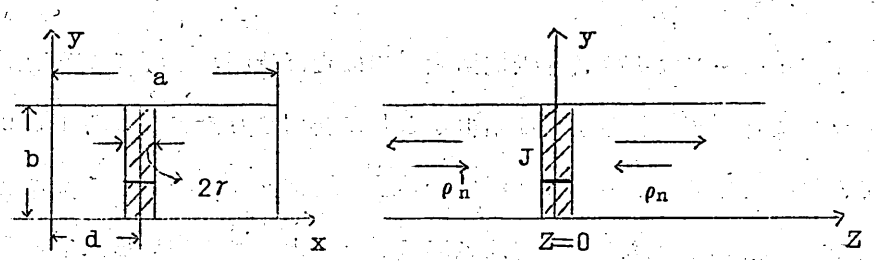


図 3

容器容量 Cs 等は略ダイオード及びその容器に固有のものと考えられるが，直列インダクタンス Ls はマイクロ波回路では外部回路と一体となつて回路全体のインダクタンスを構成する。そこでダイオードの中心導体は軸方向に異つた断面を持つているが，これを等価的に一様な半径 r をもつ円柱導体で置換して考えると図3の構造を得る。今ダイオードを流れる電流がこの円柱を流れる電流に等しいと考えて電磁界問題を解きその入力インピーダンスを計算すると，これがダイオードの挿入点より負荷側を見た入力インピーダンスに等しいと考えることが出来る。

一般にダイオードがマウントされている導波管の高さ b は管の横巾 a 及び動作波長 λ に較べて十分小さいので中心導体には y 方向に一様な電流が流れるものと仮定され，この電流 J によつて導波管内に電磁界が励振される。従つてこの場合に励振される電磁界は TEno モードとなり，計算に必要な電磁界成分 Ey，Hx は次のように書くことが出来る。

$$Z \geq 0 \quad E_{y1}(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left\{e^{-\gamma_n z} + \rho_n e^{\gamma_n z}\right\} \tag{1}$$

$$Z \leq 0 \quad E_{y2}(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left\{e^{\gamma_n z} + \rho_n' e^{-\gamma_n z}\right\} \tag{2}$$

$$j\omega\mu_0 H_{x1,2} = \frac{\partial E_{y1,2}}{\partial Z} \tag{3}$$

ただし

$$\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2} \tag{4}$$

また，An，Bn は各モードの振巾．ρ_n ，ρ_n' は Z＝0 の点における各モードの反射係数．λ は自由空間波長で時間因子として $e^{j\omega t}$ を仮定している。

Z＝0 における境界条件は

$$E_{y1}(x,0) = E_{y2}(x,0) \tag{5}$$

$$H_{x1}(x,0) - H_{x2}(x,0) = J \cdot \delta(x-d) \tag{6}$$

と与えられる。ここに $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数を表わす。

これ等の関係式を解いて An，Bn を求めこれを(1)，(2)式に代入すると両領域の電界が求まり Z＝0 におけるその値は

$$E_{y1}(x,0) = \frac{-2j\omega\mu_0 J}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n\left\{\frac{1-\rho_n}{1+\rho_n} + \frac{1-\rho_n'}{1+\rho_n'}\right\}} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{7}$$

となる。

従つて求める入力インピーダンス Z は円柱表面上の電界より次のように求められる。

$$Z = \frac{-\int_0^b E_y(d+r,0)\,dy}{J}$$

$$= \frac{j\omega\mu_0 b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_n\left\{\frac{1-\rho_n}{1+\rho_n} + \frac{1-\rho_n'}{1+\rho_n'}\right\}} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \cdot \sin\left\{\frac{n\pi}{a}(d+r)\right\} \tag{8}$$

$$= \frac{j\omega\mu_0 b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \delta_n'\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \cdot \sin\left\{\frac{n\pi}{a}(d+r)\right\}$$

ただし

$$\delta_n' = \left(\frac{\pi}{a}\right)\left\{\frac{2}{\gamma_n\left(\frac{1-\rho_n}{1+\rho_n}+\frac{1-\rho_n'}{1+\rho_n'}\right)}\right\} - \frac{1}{n} \qquad (9)$$

図1のような導波管の一端がダイオードよりℓなる距離において短絡されている場合には

$$\rho_n' = -e^{-2\gamma_n \ell} \qquad (10)$$

であり，ρ_nは出力導波管側の不整合による反射係数を示す。

今導波管の遮断周波数をfcとして　$0<f<2f_c$（$d=\frac{a}{2}$のときは$0<f<3f_c$）の周波数範囲を考えれば，遮断域にあるモードに対しては$\rho_n=0$とおき得るから(8)式の級数を整理して次式を得る。（付録参照）

$$Z = j120\pi\left(\frac{b}{\lambda}\right)\left[\ln\left\{\frac{2a}{\pi r}\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right\} + 2\delta_1'\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2+\frac{1}{36}\left(\frac{\pi d}{a}\right)^4-\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2\ln\left(\frac{2\pi d}{a}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right\} \qquad (11)$$
$$\left.-\sum_{n=2}^{\infty} 2\left(\frac{\pi}{a}\right)\left(\frac{e^{-2\gamma_n\ell}}{\gamma_n}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\right]$$

ここに

$$f< f_c \qquad \delta_1' = \left(\frac{\pi}{a\gamma_1}\right)\frac{2}{1+\coth\gamma_1\ell} - 1 \qquad (12)$$

$$f > f_c \qquad \delta_1' = -j\left(\frac{\pi}{a\beta_1}\right)\left(2\sin^2\beta_1\ell + j\sin\beta_1\ell\right)\left(\frac{1+\rho_1}{1+\rho_1 e^{-2j\beta_1\ell}}\right) - 1 \qquad (13)$$

$$\gamma_1 = j\beta_1, \qquad \beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_g} \qquad (14)$$

となる。

従つて(11)式で表わされるインピーダンスZは図4の回路の端子To から見た入力インピーダンスに等しく，図の等価伝送線路の特性インピーダンスZo

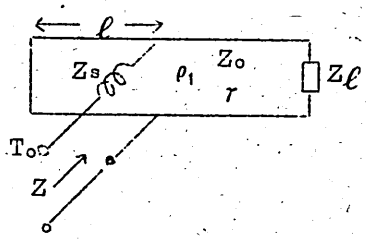


図 4

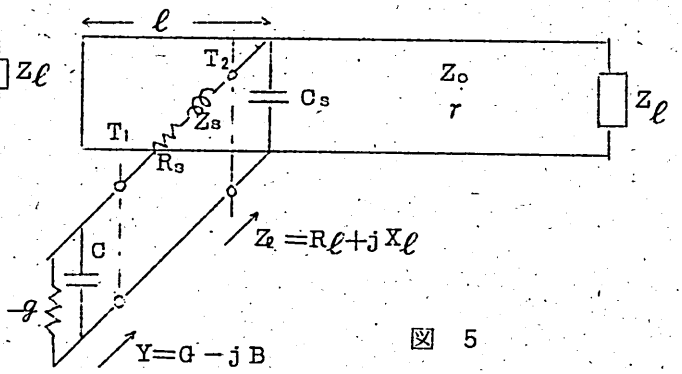


図 5

伝播定数 r，及び直列インピーダンス Z_s は次のようになる。

$$Z_o = j\ 120\pi\left(\frac{2b}{a}\right)\left(\frac{2\pi}{r_1\lambda}\right)\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)$$

$$r = r_1 = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$$

$$Z_s = j\ 120\pi\left(\frac{b}{\lambda}\right)\left[\ln\left\{\frac{2a}{\pi r}\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right\} - 2\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2\left\{\frac{3}{2}+\left(\frac{\pi d}{6a}\right)^2-\ln\left(\frac{2\pi d}{a}\right)\right\} \qquad (15)$$
$$-\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)$$
$$\left.-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{a}\right)\left(\frac{e^{-2r_n\ell}}{r_n}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\right]$$

従つてダイオードの L_s 以外の回路素子をこの回路に付加することにより導波管型発振器の等価回路は図5のように表わされ，等価半径 r はマウントされたダイオードの基準化インピーダンスを導波管側より測定することにより決定される。

3　発振周波数および発振出力

前節で導いた図5の等価回路を端子Tより見て図6のように表わすとG，Bは周波数の関数，$-g$，Cは一般に非直線素子である。従つてこの回路の完全な解析には非直線微分方程式に基づかねばならず甚だ複雑になるがここでは略正弦波振動を行つている場合に限定してCの非直線性も無視すると，非直線コンダクタンス$-g$は平均の負性コンダクタンス$\bar{G}_n$によつて置き換えることが出来，準線形な取扱いが可能となる。

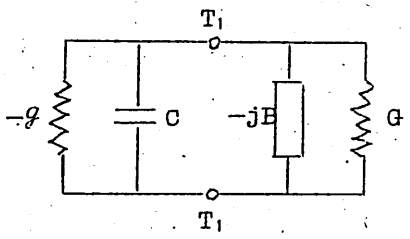


図　6

いまダイオードの電圧電流特性を5次式

$$I = f(V) = \sum_{n=0}^{5} h_n V^n \tag{16}$$

で近似し，(V_0, I_0)なる点にバイアスしたとしてこの点を原点とする新しい座標系をv，iとすれば

$$V = V_0 + v \ , \quad I = I_0 + i \tag{17}$$

$$i = \sum_{n=1}^{5} g_n v^n \ , \quad g_n = \frac{f^{(n)}(V_0)}{n!} \tag{18}$$

となる。

このバイアス点で略正弦波振動を行つているものと仮定すると

$$\begin{aligned} v &\simeq V_1 \cos \omega t \\ i &= \sum_{n=0}^{5} I_n \cos n\omega t \end{aligned} \tag{19}$$

と表わされこの点における平均の負性コンダクタンス$\bar{G}_n$は

$$\bar{G}_n = \frac{I_1}{V_1} = g_1 + \frac{3}{4} g_3 V_1^2 + \frac{5}{8} g_5 V_1^4 \tag{20}$$

と与えられる。[12],[13] 図7に使用したダイオードの電圧電流特性の(10)式による近似を示す。

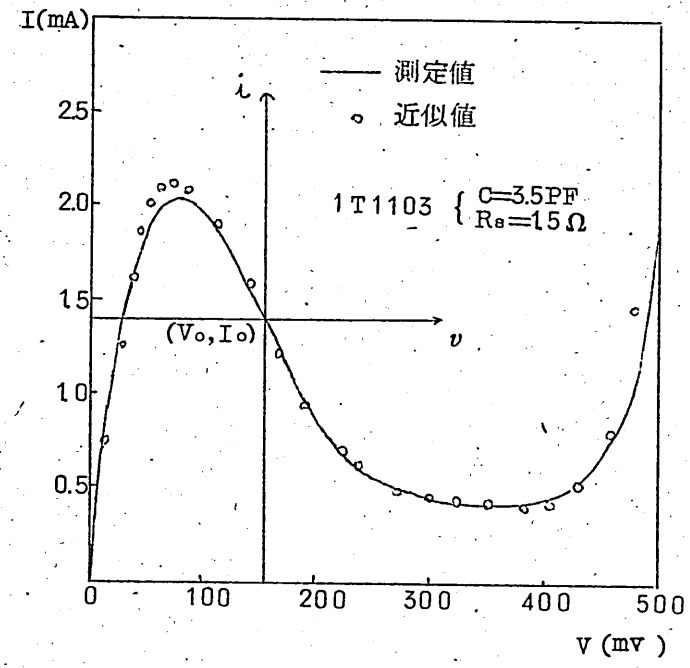


図　7

発振条件は発振周波数において $g_1 + G < 0$ によつて与えられ，この条件が満足されると発振振巾は外部コンダクタンスと平均の負性コンダクタンスとが等しくなる迄増大して定常状態となる。従つて発振周波数 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ は

$$\omega C - B(\omega) = 0 \tag{21}$$

により定まり，電圧振巾 V_1 は

$$\overline{G_n} + G(\omega) = 0 \tag{22}$$

従つて（20）式より

$$V_1^2 = \frac{-3g_3 + \sqrt{9g_3^2 - 40(G+g_1)g_5}}{5g_5} \tag{23}$$

と決定される。

基本波出力

導波管には遮断周波数 f_c が存在するので (21) 式が $f > f_c$ なる周波数で満足されるときには基本波出力が得られることになる。この場合の等価回路は図 8 で表わされ，(21)，(23) 式で定まる ω，V_1 を用いて負荷に与えられる出力 P_1 は

$$P_1 = \frac{1}{2} V_1^2 \frac{G R_\ell}{R_\ell + R_S} \qquad (24)$$

となる。

高調波出力

(21) 式が $f < f_c$ なる周波数で満足されて発振する場合には，ダイオードで発生した基本波成分は管内に伝播し得ないで電磁エネルギーとしてダイオードの近傍に蓄積される。従つて接合部に発生する基本波電圧 V_1 は可成り大きくなり，ダイオードの電圧電流特性の非直線性により高調波電流成分が流れ，これが電流源となつて高調波出力が負荷に与えられると考えられるので，等価回路は図 9 の如く表わされる。ここで第 n 次高調波の電流 I_n は，V_1 により生じる高調波電流成分と仮定すると(18),(19)式より

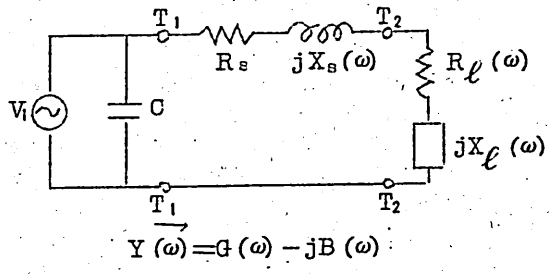


図 8

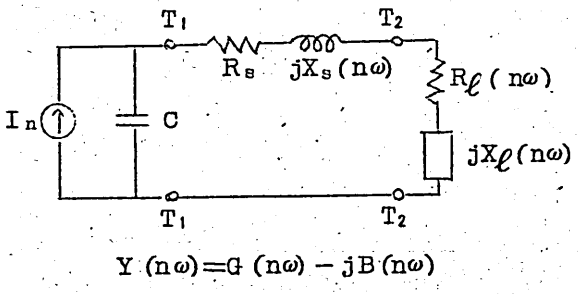


図 9

$$I_2 = \frac{1}{2} g_2 V_1^2 + \frac{1}{2} g_4 V_1^4$$

$$I_3 = \frac{1}{4} g_3 V_1^3 + \frac{5}{16} g_5 V_1^5 \qquad (25)$$

$$I_4 = \frac{1}{8} g_4 V_1^4 \qquad I_5 = \frac{1}{16} g_5 V_1^5$$

と与えられる。従つて負荷に与えられる高調波電力 P_n は

$$P_n = \frac{I_n^2 G(n\omega)}{2\{G^2(n\omega) + \{n\omega c - B(n\omega)\}^2\}} \cdot \frac{R\ell(n\omega)}{R_s + R\ell(n\omega)} \qquad (26)$$

となる。

4 計算結果および実験による検討

以上の結果を検討するために発振特性の計算並びに実験を，WRJ—4導波管の高さをしぼつた断面 58.1×10 mmのテーパー導波管にダイオードをマウントした場合につき主として行つた。使用したダイオードはSONY—1T1103 および SYLVANIA—D5361 である。

ダイオードの等価半径

等価半径 r を決定するために導波管にマウントしたダイオードに深い逆バイアスをかけて接合部を短絡状態にし，ダイオード後方の短絡板を移動して導波管側よりダイオードのインピーダンスを測定した。このときの等価回路は図10で示される。同様な測定を断線したダイオードについても行つて C_s を求め，この二つの測定より Z_s 従つ

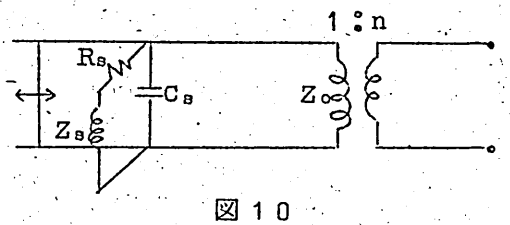


図10

てｒを決定した。ｒおよび C_s は同種類のダイオードに対しては略一定の値を示し，ＳＯＮＹ－１Ｔ１１０３に対してはその平均値としてｒ≈0.3ｍｍ $C_s \approx$ 0.7ＰＦ の値を得たので計算にはこれ等の値を使用した。

発振周波数

発振周波数は（21）式より決定されるが，端子 T_1 より負荷側を見たアドミタンス $Y=G-jB$ の計算結果の一例を図11に示す。周波数は B と ωC

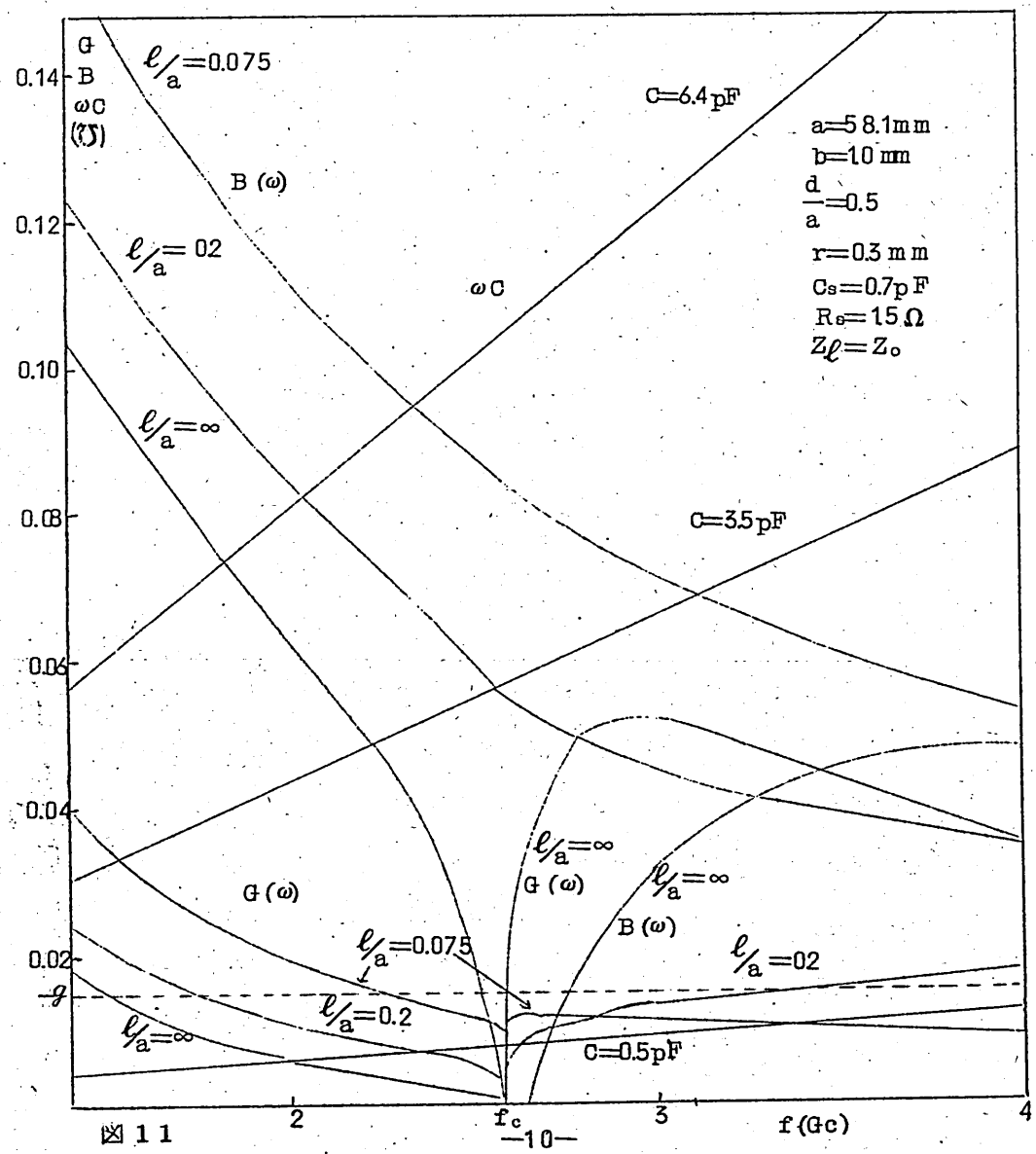


図１１

の交点で決るが，図より明かに導波管には遮断周波数が存在するため$f=f_c$において特性インピーダンス$Z_\bullet$は無限大となり，ダイオードと短絡板の距離ℓが或程度大きいと遮断周波数以下の周波数で常に発振し，遮断周波数以上の周波数で発振させるには短絡板を十分ダイオードに近付ける必要があることが分る。

図１２は短絡板の位置ℓの変化に対する発振周波数の変化を示す。周波数の測定値は，ℓが小さくなるとともに増大して$2f_c$に近付き，そこから急に$f\approx f_c$なる低い周波数に移つているが，これは大なるℓに対する測定周波数が第２高調波であることを示している。これは又ｆ＝4.44Gc（第２高調波）およびｆ＝6.66Gc（第３高調波）なる二つの周波数が同時に観測

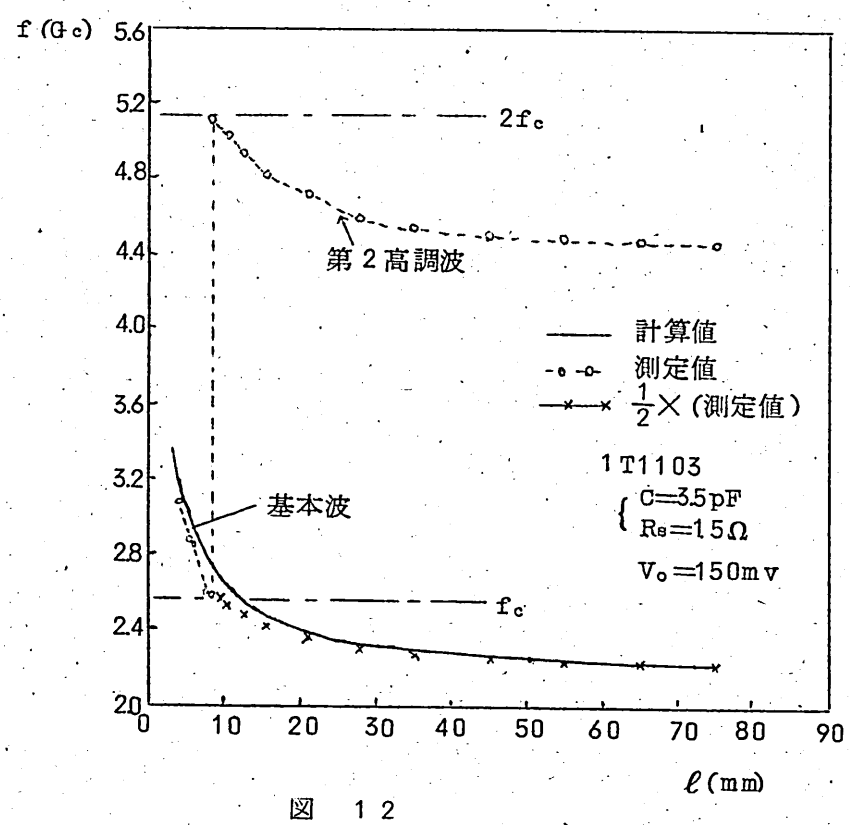


図　１２

表１　発振周波数 f

fm：測定値　　fcal：計算値

導波管寸法 a×b(mm)	1T1103　C=3.5PF			D5361　C=0.42PF		
	f_m(Gc)	$\frac{1}{2}f_m$(Gc)	fcal(Gc)	f_m(Gc)	$\frac{1}{2}f_m$(Gc)	fcal(Gc)
58.1×10	4.44	2.22	2.22	5.02	2.51	2.56
34.9×10	5.33	2.67	2.65	7.96	3.98	4.14
22.9×10	8.65	(2.88)	2.87	10.14	5.07	5.62

導波管寸法　a×b＝58.1×10 mm							
1T 1103				D 5361			
C(PF)	f_m(Gc)	$\frac{1}{2}f_m$(Gc)	fcal(Gc)	C(PF)	f_m(Gc)	$\frac{1}{2}f_m$(Gc)	fcal(Gc)
3.5	4.44	2.22	2.22	0.42	5.01	2.50	2.56
4.6	4.15	2.08	2.06	0.5	5.02	2.51	2.55
6.4	3.62	1.81	1.83	0.6	4.99	2.50	2.54

されたことによつても確められた。Cの異る種々のダイオードに対する発振周波数を表１に示す。

発振出力

図１３に短絡板をダイオードに十分接近させて基本波出力を得た場合の出力のバイアス電圧に対する変化を示す。出力の測定は０dBにおける電力を較正した信号発生器の出力と，発振出力を比較することにより行つた。図の曲線(1)は負荷が無反射のとき，曲線(2)は導波管のテーパー部の反射を考慮した値を示す。

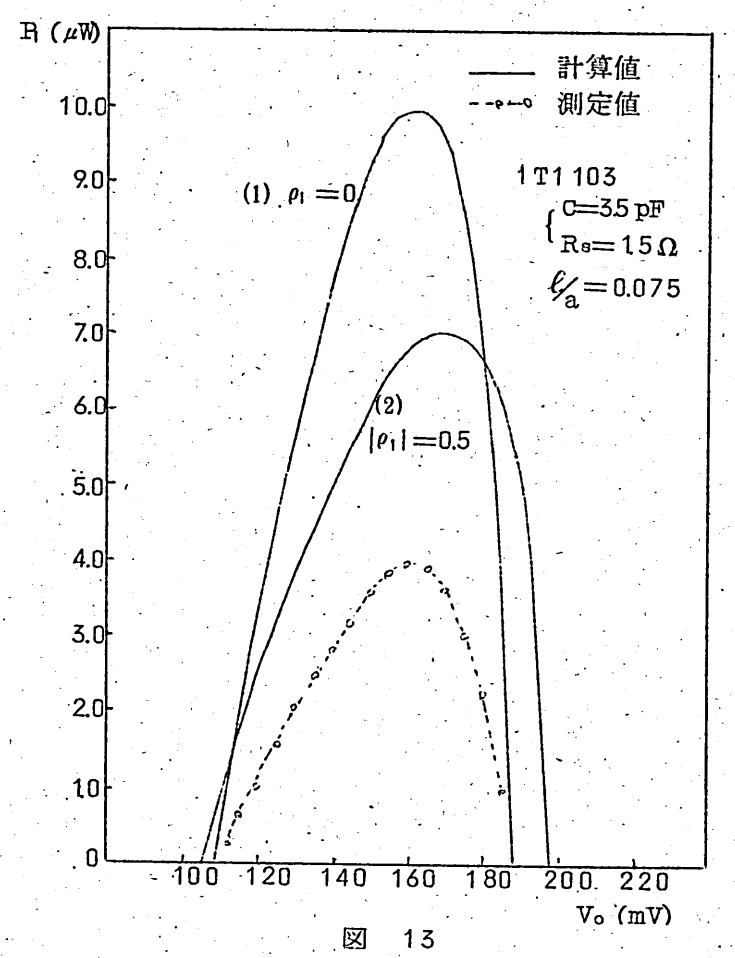


図　13

図14は$f < f_c$なる周波数で発振している場合の，高調波出力のバイアスに対する変化を示す。図15はダイオードと短絡板との距離ℓの変化に対する第2高調波出力の変化を示している。高調波出力の計算に対する仮定は可成り粗い近似であるが，実験結果を或程度よく説明しているものと思われる。

我々の実験ではダイオードの抵抗遮断周波数以上の周波数での基本波の発振と思われるものは観測することは出来なかつた。又計算結果も，短絡板とダイオードとの距離ℓが大きくなると導波管の遮断周波数以下の周波数にお

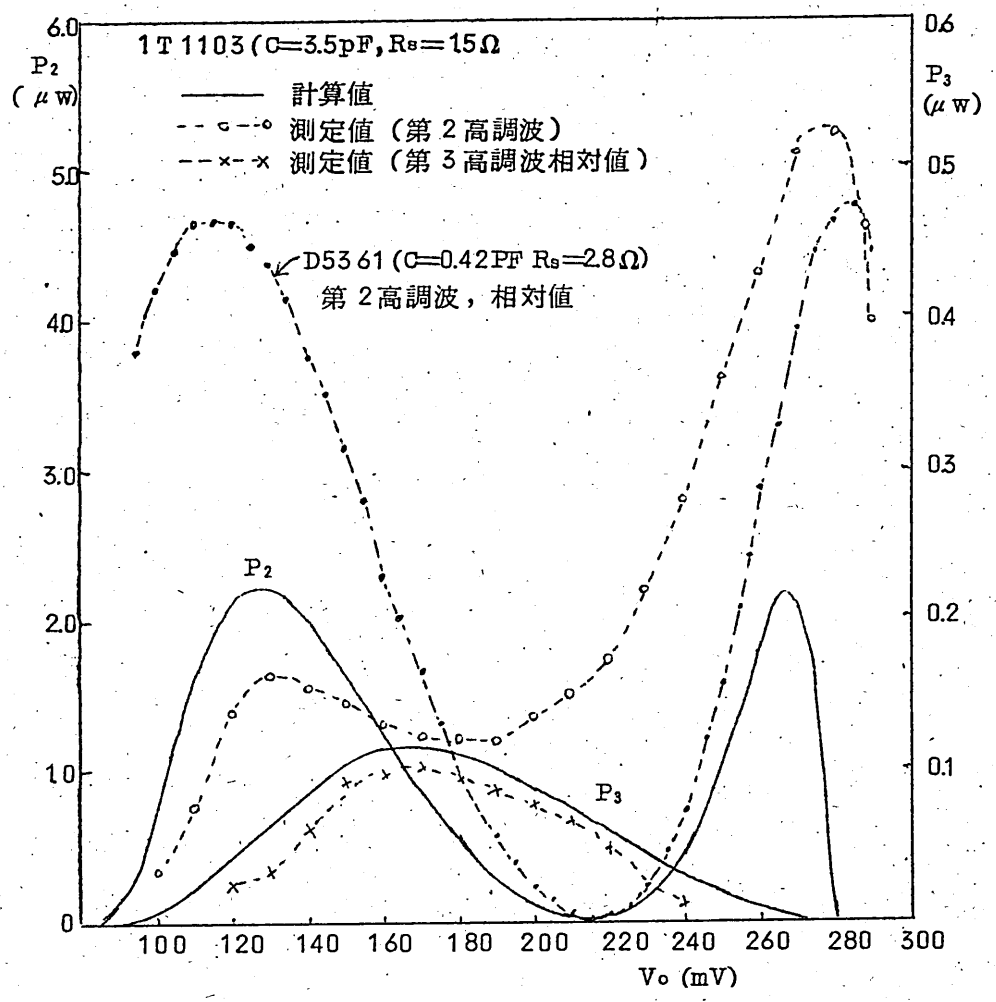
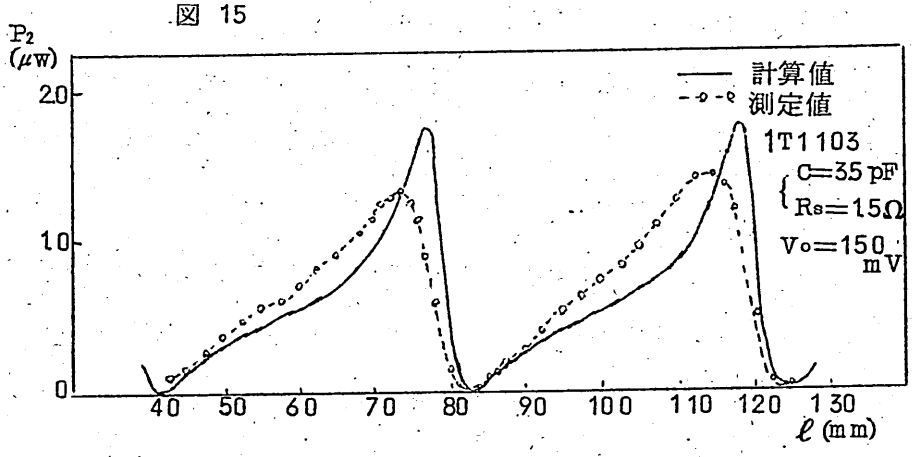

1T1103 (C=3.5pF, Rs=15Ω
P2 (μw)
P3 (μw)
計算値
測定値（第2高調波）
測定値（第3高調波相対値）
D5361 (C=0.42PF Rs=2.8Ω)
第2高調波，相対値
P2
P3
Vo (mV)

図 14

図 15


P2 (μw)
計算値
測定値
1T1103
C=35 pF
Rs=15Ω
Vo=150 mV
ℓ (mm)

いて常に発振を起し，導波管内にはその高調波出力が現れることを示し，このことは実験結果とも一致した。

猶以上の解析においては導波管の管壁の損失を無視したが，遮断周波数の近傍ではこの損失が可成り影響をもつことも考えられる。この損失を考慮した近似計算を行つて見ると負荷側を見たアドミタンスG－jBは$f \approx f_c$において小さい値にはなるが0にはならない。それ故尖頭電流の比較的小さい，従つて接合容量が十分小さく直列抵抗の大きいダイオードを用いると導波管の遮断周波数以上の周波数で発振が起り，又尖頭電流の比較的大きい，従つて接合容量が大きく直列抵抗の小さなダイオードを用いれば発振は常に遮断周波数以下の周波数で起ることが予想される。

5 結　　言

以上，導波管型エサキダイオード発振器を解析してその等価回路を誘導し発振周波数および発振出力を計算して実験結果と比較し，各々の傾向が可成りよく一致することを示した。この等価回路は導波管型増巾器として働かす場合の特性の計算にも同様に用い得るものと思われる。

一般にこのような構造では導波管の遮断周波数の近傍で常に発振の可能性があり，基本波での出力を得るにはこの点に留意する必要がある。逆に尖頭電流の比較的大きなダイオードを遮断周波数付近で発振させてその高調波を用いることにより，ダイオードの抵抗遮断周波数以上の周波数においても可成りの出力が得られることも考えられる。

終りに，いろいろと御教示頂いた大阪大学基礎工学部牧本利夫教授をはじめ，同研究室の方々に深謝致します。

文　　献

(1) C.A.Burrus, J.Appl.Phys., 32, 1031(1961)

(2) C.C.Hoffins and K.Ishi, IEEE Trans., MTT—12,176(1964)

(3) E.Rivier, Proc.IEEE(Correspondence), 53 639(1965)

(4) W.J.Gestinger, IEEE Trans., MTT—14 58(1966)

(5) E.Yamashita and J.R.Baird, Proc.IEEE, 54, 606(1966)

(6) G.R.S.Serophim and I.M.Stephenson, Proc. IEEE, 54, 1167(1966)

(7) K.Ishii, Electronics, 35, 43(June 1962)

(8) M.K.Mcphun, Proc.IEEE(Correspondence), 51, 1265(1963)

(9) S.V.Jaskolski and K.Ishii, Solid state Electronics, 8, 869(1965)

(10) 守口，六島，東村．信学会全国大会　3 5 2 (Nov 1965)

(11) 六島，東村，　信学会全国大会　407(Nov 1966)

(12) C.S.Kim and A.Brandli IRE Trans, CT—8 416(1961)

(13) C.Brunetti, Proc. IRE, 25 1595(1937)

付　　録

(8)式において　$r \ll a$ なるから

$$Z = \frac{j\omega\mu_0 b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \delta_n' \right) \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \sin\left\{\frac{n\pi (d+r)}{a}\right\} \qquad (8)$$

$$\approx \frac{j\omega\mu_0 b}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \sin\left\{\frac{n\pi (d+r)}{a}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n' \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \right]$$

(A—1)

〔　〕内の第一項はよく用いられる公式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \sin\left\{\frac{n\pi (d+r)}{a}\right\} = -\frac{1}{2} \left[\ln\left\{2\sin\left(\frac{\pi r}{2a}\right)\right\} - \ln\left\{2\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right\} \right]$$

$$\approx \frac{1}{2} \ln\left\{\frac{2a}{\pi r} \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right\} \qquad (A—2)$$

となる。

第２項の級数において δ_n' を

$$\delta_n' = \delta_n + \Delta_n \qquad (A—3)$$

$$\delta_n = \left(\frac{\pi}{a}\right) \frac{1}{\gamma_n} - \frac{1}{n} \qquad (A—4)$$

$$\Delta_n = \left(\frac{\pi}{a}\right) \left\{ \frac{2}{\gamma_n \left(\frac{1-\rho_n}{1+\rho_n} + \frac{1-\rho_n'}{1+\rho_n'} \right)} - \frac{1}{\gamma_n} \right\} \qquad (A—5)$$

とおく

今考えている周波数において（ｋ＋１）次以上の次数のモードは導波管の遮断域にあるとする。即ち　$k < \frac{2a}{\lambda} < k+1$　なる整数をｋとすると

$n \geq k+1$　なるｎに対しては

$$\delta_n \approx \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \qquad (A—6)$$

従つて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n' \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) = \sum_{n=1}^{k} \delta_n' \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \delta_n' \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \quad (A-7)$$

第2項は

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \delta_n' \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3} \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \right\}$$

$$+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \Delta_n \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \left[\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2 \left\{ -\ln\left(\frac{2\pi d}{a}\right) + \frac{3}{2} + \frac{1}{36}\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2 \right\} \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3} \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \right]$$

$$+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \Delta_n \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \quad (A-8)$$

又

$$\frac{\omega \mu_0}{\pi} = 120\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \quad (A-9)$$

従つてこれ等の関係式を（A—1）式に代入すれば

$$Z = j120\pi\left(\frac{b}{\lambda}\right)\left[\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{4\pi}{a r_1}\right) \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1-\rho_n}{1+\rho_n} + \frac{1-\rho_n'}{1+\rho_n'}\right)} \right\} \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \right.$$

$$+ \ln\left\{\frac{2a}{\pi r} \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right\} - 2\sum_{n=1}^{k} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right)}{n}$$

$$+ \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 \left\{ \frac{3}{2}\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2 + \frac{1}{36}\left(\frac{\pi d}{a}\right)^4 - \left(\frac{\pi d}{a}\right)^2 \ln\left(\frac{2\pi d}{a}\right) - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3} \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \right\}$$

$$\left. + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \Delta_n \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \right] \quad (A-10)$$

(A—10)式の入力インピーダンスZは図A－1の回路のToから見たインピー

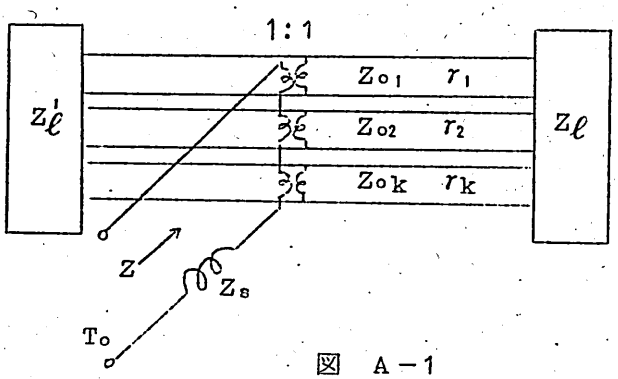


図 A－1

ダンスに等しく図の等価伝送線路の特性インピーダンスZ_{on},及び直列インピーダンス Z_sは次のようになる。

$$Z_{on}= j120\pi\left(\frac{b}{\lambda}\right)\left(\frac{4\pi}{ar_n}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right)$$

$$Z_s = j120\pi\left(\frac{b}{\lambda}\right)\left[\ln\left\{\frac{2a}{\pi r}\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right\}-2\sum_{n=1}^{k}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right)}{n}\right.$$

$$+\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2+\frac{1}{36}\left(\frac{\pi d}{a}\right)^4-\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2\ln\left(\frac{2\pi d}{a}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^3}\sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\right\}+2\sum_{n=k+1}^{\infty}\Delta_n\sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\right] \qquad (A—11)$$

(A－10)，(A－11) 式においてk＝1，$\rho'_n=-e^{-2r_n\ell}$ とおけば

(11)，(15)式が得られる。

輻射科学研究会資料

誘電体装荷導波管反射形エサキ・ダイオード増幅器の特性

牧本 利夫
豊田 幸弘
川崎 陽一
(大阪大学 基礎工学部)

昭和42年2月24日
(於 三菱電機)

まえがき

誘電体装荷導波管反射形エサキ・ダイオード増幅器の実験は前に報告した[1][2]。ここでは実験結果と計算との比較検討をおこなった。この結果を報告する。

1) エサキ・ダイオード増幅器の等価回路の解析

誘電体装荷導波管反射形エサキ・ダイオード増幅器は図1に示す。この反射形エサキ・ダイオード増幅器で誘電体を装荷した理由はエサキ・ダイオードをマウントしている遮断導波管の横幅が狭いため導波管とそのまま結合したのでは結合部で不連続が大きくなり，導波管と空胴（言葉の説明上，遮断導波管内にエサキ・ダイオードをマウントしている部分を空胴とする）との結合が低下し発振をおこす。この点を改善するために導波管の横幅を狭くして空胴の入口のところまで誘電体を挿入した。（誘電体がなければ，この導波管はカットオフとなる。）このようにすれば電界は誘電体に集中して，空胴と導波管との結合が増加して増幅器として用いることができる。この誘電体装荷導波管反射形エサキ・ダイオード増幅器の等価回路を次の方法で解析する。

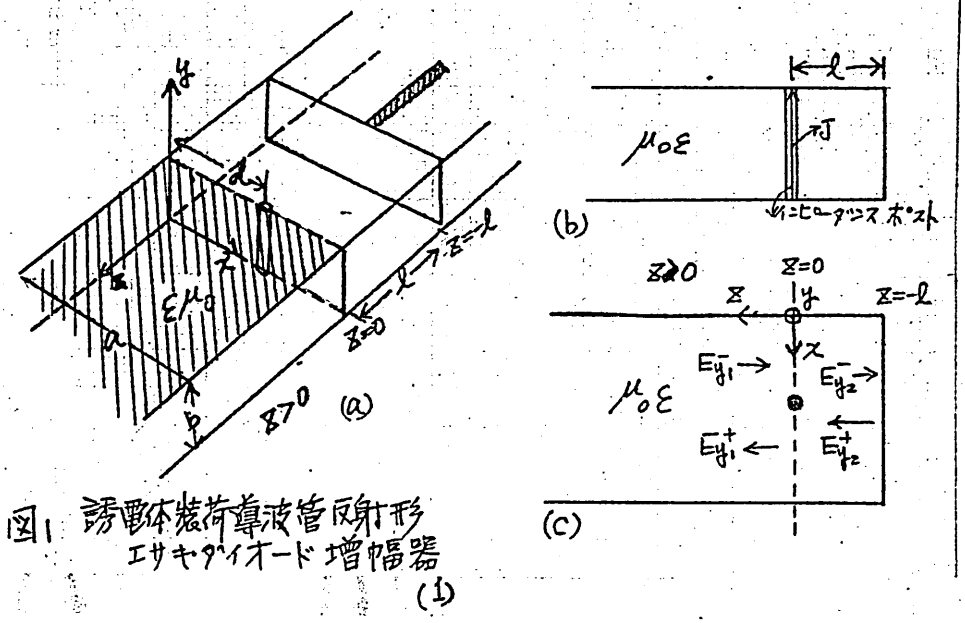


図1 誘電体装荷導波管反射形エサキダイオード増幅器

図1Cの領域①は$\varepsilon_s=12$の誘電体を装荷し領域②は空気で，右側に短絡板がある。領域①と②の境にダイオードを半径rのポストで並列に壁面からの距離dの位置にあるとする。

まず，$z>0$の領域から，ポストに向ってTE_{10}波が入射すると仮定する。領域①及び②において，右及び左に進む電界をそれぞれ，E_{y1}^-，E_{y1}^+，E_{y2}^-，E_{y2}^+とする。系はy方向に変化しないので電界はy方向成分のみである。電界は$x=0$，aにて零となるので，Fourier Seriesを使うと次のように表わすことができる。

領域①
$$\begin{cases} E_{y1}^- = A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\Gamma_1' z} & \cdots\cdots (1) \\ E_{y1}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\Gamma_n' z} & \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

領域②
$$\begin{cases} E_{y2}^- = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{\Gamma_n z} & \cdots\cdots (3) \\ E_{y2}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\Gamma_n z} & \cdots\cdots (4) \end{cases}$$

A_0, B_m, C_n, D_nは未定係数

$$\Gamma_n' = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_s} \qquad \Gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$$

$$\Gamma_1' = j\beta' = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_s}$$

電界は境界で連続

$z=0$において，

$$E_{y1}^- + E_{y1}^+ = E_{y2}^- + E_{y2}^+$$

$$A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \cdots\cdots (5)$$

$z=-l$において

$$E_{y2}^- + E_{y2}^+ = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\Gamma_n l} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{\Gamma_n l} = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$

Maxwell's Equations より

$$H_x = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$H_{x_1}^{-} = \frac{A_0 \Gamma_1'}{j\omega\mu_0} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\Gamma_1' z} \quad \cdots\cdots (7)$$

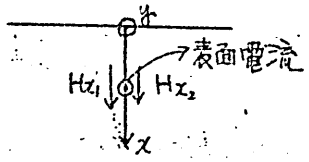
$$H_{x_1}^{+} = \frac{-1}{j\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n' B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\Gamma_n' z} \quad \cdots\cdots (8)$$

$$H_{x_2}^{-} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{\Gamma_n z} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$H_{x_2}^{+} = \frac{-1}{j\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\Gamma_n z} \quad \cdots\cdots (10)$$

ポスト⊥流れる電流を中心⊥流れるFilamentary Current $J\delta(x-d)$ で近似する。

磁界の連続条件



$$-H_{x_1} + H_{x_2} = -J_y$$

を用⊥て

$z = 0$ ⊥て

$$\frac{A_0\Gamma_1'}{j\omega\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{1}{j\omega\mu_0}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n' B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$-\frac{1}{j\omega\mu_0}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \frac{1}{j\omega\mu_0}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = J\delta(x-d)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n' B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n(-C_n + D_n)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$= j\omega\mu_0 J\delta(x-d) - A_0\Gamma_1' \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \cdots\cdots (11)$$

(5), (6), (11)式⊥ $\int_0^a \bigcirc \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$ を Operate する。

$n=1$ の場合

$$A_0 + B_1 = C_1 + D_1 \quad \cdots\cdots (12)$$

$$C_1 e^{-\Gamma_1 l} + D_1 e^{\Gamma_1 l} = 0 \quad \cdots\cdots (13)$$

$$D_1 = -C_1 e^{-2\Gamma_1 l} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\Gamma_1' B_1 - \Gamma_1(-C_1 + D_1) = -\frac{j2\omega\mu_0 J \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)}{a} + A_0\Gamma_1' \quad \cdots (15)$$

(14)式を(12)式(15)式に代入すると

$$B_1 - C_1(1 - e^{-2\Gamma_1 l}) = -A_0 \quad \cdots\cdots (16)$$

$$\Gamma_1' B_1 + \Gamma_1 C_1(1 + e^{-2\Gamma_1 l}) = -\frac{j2\omega\mu_0 J}{a}\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right) + A_0\Gamma_1' \quad \cdots (17)$$

$$C_1\left\{(\Gamma_1' + \Gamma_1) - (\Gamma_1' - \Gamma_1)e^{-2\Gamma_1 l}\right\} = -j\frac{2\omega\mu_0 J \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)}{a} + 2A_0\Gamma_1'$$

$$\therefore C_1 = \frac{-j2\omega\mu_0 J \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right) + 2A_0\Gamma_1' a}{a\left\{(\Gamma_1' + \Gamma_1) - (\Gamma_1' - \Gamma_1)e^{-2\Gamma_1 l}\right\}} \quad \cdots\cdots (18)$$

$$D_1 = -C_1 e^{-2\Gamma_1 l} = \frac{\left\{-j\omega 2\mu_0 J \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right) + 2A_0\Gamma_1' a\right\} e^{-2\Gamma_1 l}}{a\left\{(\Gamma_1' + \Gamma_1) - (\Gamma_1' - \Gamma_1)e^{-2\Gamma_1 l}\right\}} \quad (19)$$

$$B_1 = C_1 + D_1 - A_0 = C_1(1 - e^{-2\Gamma_1 l}) - A_0 \quad \cdots\cdots (20)$$

$$= \frac{\left\{-j2\omega\mu_0 J \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right) + 2A_0\Gamma_1' a\right\}}{a\left\{(\Gamma_1' + \Gamma_1) - (\Gamma_1' - \Gamma_1)e^{-2\Gamma_1 l}\right\}}(1 - e^{-2\Gamma_1 l}) - A_0 \quad \cdots\cdots (20)$$

$n \geq 2$ の場合

$$B_n = C_n + D_n \quad \cdots\cdots (21)$$

$$C_n e^{-\Gamma_n l} + D_n e^{\Gamma_n l} = 0 \quad \cdots\cdots (22)$$

$$-\Gamma_n' B_n + \Gamma_n(-C_n + D_n) = \frac{j2\omega\mu_0 J}{a}\sin\frac{n\pi d}{a} \quad \cdots\cdots (23)$$

(21)式, (22)式を(23)式に代入すると

$$-\Gamma_n' C_n(1 - e^{-2\Gamma_n l}) - C_n\Gamma_n(1 + e^{-2\Gamma_n l}) = \frac{j2\omega\mu_0 J}{a}\sin\frac{n\pi d}{a}$$

$$C_n=\frac{-j\frac{2\omega\mu_0 J}{a}\sin\frac{n\pi d}{a}}{\left\{\Gamma_n'(1-e^{-2\Gamma_n l})+\Gamma_n(1+e^{-2\Gamma_n l})\right\}} \quad \cdots\cdots (24)$$

$$D_n=-C_n e^{-2\Gamma_n l}=\frac{j\frac{2\omega\mu_0 J}{a}\sin\frac{n\pi d}{a}e^{-2\Gamma_n l}}{\left\{\Gamma_n'(1-e^{-2\Gamma_n l})+\Gamma_n(1+e^{-2\Gamma_n l})\right\}} \quad \cdots\cdots (25)$$

$$B_n=C_n(1-e^{-2\Gamma_n l})=\frac{-j\frac{2\omega\mu_0 J}{a}\sin\frac{n\pi d}{a}(1-e^{-2\Gamma_n l})}{\left\{\Gamma_n'(1-e^{-2\Gamma_n l})+\Gamma_n(1+e^{-2\Gamma_n l})\right\}} \quad \cdots (26)$$

よって電界は

$z\geq 0$ $\quad E_{y1}=E_{y1}^{-}+E_{y1}^{+}$

$$=A_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{\Gamma_1' z}$$

$$+\left[\frac{\left\{-j2\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)+2A_0\Gamma_1' a\right\}}{a\left\{(\Gamma_1'+\Gamma_1)-(\Gamma_1'-\Gamma_1)e^{-2\Gamma_1 l}\right\}}(1-e^{-2\Gamma_1 l})-A_0\right]\sin\frac{\pi x}{a}e^{-\Gamma_1' z}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-j\frac{2\omega\mu_0 J}{a}\sin\frac{n\pi d}{a}(1-e^{-2\Gamma_n l})}{\left\{\Gamma_n'(1-e^{-2\Gamma_n l})+\Gamma_n(1+e^{-2\Gamma_n l})\right\}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{-\Gamma_n' z} \quad \cdots (27)$$

$z\leq 0$ $\quad E_{y2}=E_{y2}^{-}+E_{y2}^{+}$

$$=\frac{-j2\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)+2A_0\Gamma_1' a}{a\left\{(\Gamma_1'+\Gamma_1)-(\Gamma_1'-\Gamma_1)e^{-2\Gamma_1 l}\right\}}\sin\frac{\pi x}{a}\left(e^{\Gamma_1 z}-e^{-2\Gamma_1 l}e^{-\Gamma_1 z}\right)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-j\frac{2\omega\mu_0 J}{a}\sin\frac{n\pi d}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}}{\left\{\Gamma_n'(1-e^{-2\Gamma_n l})+\Gamma_n(1+e^{-2\Gamma_n l})\right\}}\left(e^{\Gamma_n z}-e^{-2\Gamma_n l}e^{-\Gamma_n z}\right) \quad \cdots (28)$$

$z=0$, $x=d+r$ における電界は(27)式または(28)式を使って

$$E_y(d+r,0)=A_0\sin\frac{\pi(d+r)}{a}$$

$$+\left[\frac{\left\{-j2\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)+2A_0\Gamma_1' a\right\}}{a\left\{(\Gamma_1'+\Gamma_1)-(\Gamma_1'-\Gamma_1)e^{-2\Gamma_1 l}\right\}}(1-e^{-2\Gamma_1 l})-A_0\right]\sin\frac{\pi(d+r)}{a}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-\frac{j2\omega\mu_0 J}{a}\sin\frac{n\pi d}{a}\left(1-e^{-2\Gamma_n l}\right)}{\left\{\Gamma_n'\left(1-e^{-2\Gamma_n l}\right)+\Gamma_n\left(1+e^{-2\Gamma_n l}\right)\right\}}\sin\frac{n\pi(d+r)}{a}$$

$$=\frac{\left\{-j2\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)+2A_0\Gamma_1' a\right\}}{a\left\{\Gamma_1'+\Gamma_1\frac{\left(1+e^{-2\Gamma_1 l}\right)}{\left(1-e^{-2\Gamma_1 l}\right)}\right\}}\sin\frac{\pi(d+r)}{a}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-\frac{j2\omega\mu_0 J}{a}\sin\frac{n\pi d}{a}}{\left\{\Gamma_n'+\Gamma_n\frac{\left(1+e^{-2\Gamma_n l}\right)}{\left(1-e^{-2\Gamma_n l}\right)}\right\}}\sin\frac{n\pi(d+r)}{a}$$

$$=\frac{2A_0\Gamma_1'}{\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l}\sin\frac{\pi(d+r)}{a}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j2\omega\mu_0 J\sin\frac{n\pi d}{a}}{a\left\{\Gamma_n'+\Gamma_n\coth\Gamma_n l\right\}}\sin\frac{n\pi(d+r)}{a}\quad\cdots\cdots(29)$$

導波管の底を基準にした上面の電圧は

$$V=-\int_0^b E_y\,dy=-bE_y\quad\cdots\cdots(30)$$

上向きの電流を正とした場合，ダイオードのインピーダンスはV-I特性より

$$V=Z_1(-J)\quad\cdots\cdots(31)$$

$$\therefore\ bE_y=Z_1 J\quad\cdots\cdots(32)$$

上式に(29)式を代入すると

$$Z_1 J=\frac{2A_0\Gamma_1' b}{\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l}\sin\frac{\pi(d+r)}{a}-b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j2\omega\mu_0 J\sin\frac{n\pi d}{a}}{a\left\{\Gamma_n'+\Gamma_n\coth\Gamma_n l\right\}}\sin\frac{n\pi(d+r)}{a}$$

$$\therefore J\fallingdotseq\frac{1}{Z_1+bk}\cdot\frac{2A_0\Gamma_1' b}{\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l}\sin\frac{\pi d}{a}\quad\cdots\cdots(33)$$

ただし

$$K=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j2\omega\mu_0\sin\frac{n\pi d}{a}}{a\{\Gamma_n'+\Gamma_n\coth\Gamma_n l\}}\sin\frac{n\pi(d+r)}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots(34)$$

ここで，等価回路を図2のように仮定する。

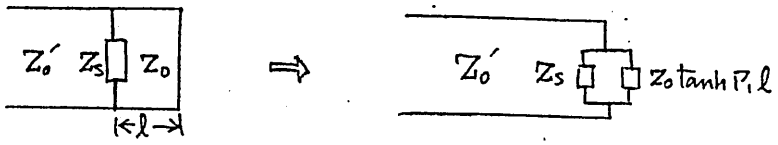


図2.

ただし，Z_0，Z_0'は導波管の特性インピーダンスで

$$\left.\begin{aligned} Z_0' &= \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma_1'}=\frac{\omega\mu_0}{\beta_1'} \\ Z_0 &= \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma_1}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(35)$$

Z_sはポストの等価インピーダンスである。$z=0$での基本姿態の反射係数をRとすると

$$R=\frac{\frac{Z_sZ_0\tanh\Gamma_1 l}{Z_s+Z_0\tanh\Gamma_1 l}-Z_0'}{\frac{Z_sZ_0\tanh\Gamma_1 l}{Z_s+Z_0\tanh\Gamma_1 l}+Z_0'}=\frac{Z_sZ_0\tanh\Gamma_1 l-Z_0'Z_s-Z_0'Z_0\tanh\Gamma_1 l}{Z_sZ_0\tanh\Gamma_1 l+Z_0'Z_s+Z_0'Z_0\tanh\Gamma_1 l}$$

$$=\frac{Z_s(Z_0-Z_0'\coth\Gamma_1 l)-Z_0'Z_0}{Z_s(Z_0+Z_0'\coth\Gamma_1 l)+Z_0'Z_0}$$

$$Z_sR(Z_0+Z_0'\coth\Gamma_1 l)+Z_0'Z_0R=Z_s(Z_0-Z_0'\coth\Gamma_1 l)-Z_0'Z_0$$

$$Z_s=-\frac{Z_0'Z_0(R+1)}{(R-1)Z_0+(R+1)Z_0'\coth\Gamma_1 l}$$

$$=\frac{-j\omega\mu_0(R+1)}{\Gamma_1'(R-1)+(R+1)\Gamma_1\coth\Gamma_1 l} \qquad \cdots\cdots\cdots(36)$$

ところで、基本姿態の反射係数は(27)式より

$$R=\frac{\dfrac{-j2\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)+2A_0\Gamma_1' a}{a\left\{\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l\right\}}-A_0}{A_0\sin\frac{\pi z}{a}}\sin\frac{\pi z}{a}$$

$$=\frac{-j2\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)+2A_0\Gamma_1' a}{a\left\{\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l\right\}A_0}-1 \qquad \cdots\cdots (37)$$

$$\therefore\ \frac{R-1}{R+1}=1-\frac{2}{R+1}=1-\frac{a\left\{\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l\right\}A_0}{-j\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)+A_0\Gamma_1' a}$$

$$Z_S=\frac{-j\omega\mu_0}{\Gamma_1'\left(\frac{R-1}{R+1}\right)+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l}$$

$$=\frac{-j\omega\mu_0}{\Gamma_1'-\dfrac{a\Gamma_1'\left\{\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l\right\}A_0}{-j\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)+A_0\Gamma_1' a}+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l}$$

$$=\frac{-j\omega\mu_0}{\left(\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l\right)}\cdot\left\{1-\frac{A_0\Gamma_1' a}{j\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)}\right\}$$

$$=\frac{-j\omega\mu_0}{\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l}+\frac{a}{2b}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)(Z_1+bK)$$

$$=\frac{-j\omega\mu_0}{\Gamma_1'+\Gamma_1\coth\Gamma_1 l}+\frac{a}{2b}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)Z_1$$

$$+\frac{a}{2}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j2\omega\mu_0\sin\frac{n\pi d}{a}}{a\left\{\Gamma_n'+\Gamma_n\coth\Gamma_n l\right\}}\sin\frac{n\pi(d+r)}{a}$$

$$= n^2 Z_1 + n^2 \cdot j\omega\mu_0 \frac{2b}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\}}{\left\{\Gamma_n' + \Gamma_n \coth \Gamma_n l\right\}} \quad \cdots (38)$$

ただし、 $n^2 = \frac{a}{2b} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)$

したがって、等価回路は

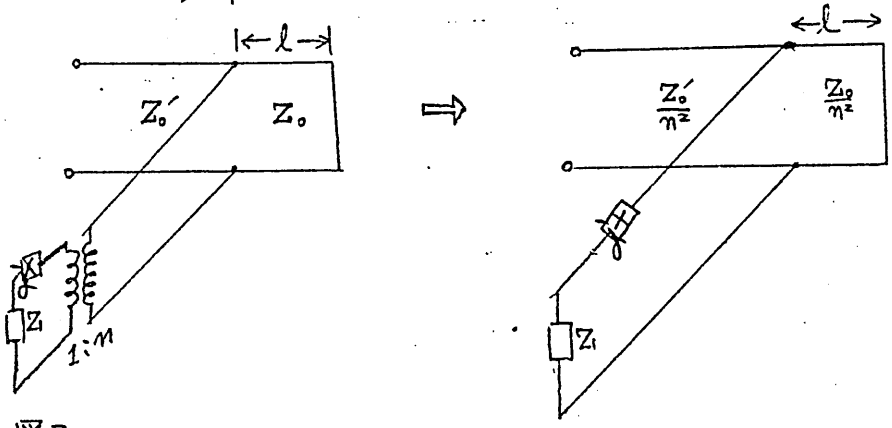


図3

$$X = j\omega\mu_0 \frac{2b}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\}}{\left\{\Gamma_n' + \Gamma_n \coth \Gamma_n l\right\}}$$

$$Z_{01} = \frac{Z_0'}{n^2} = 120\pi \left(\frac{2b}{a}\right)\left(\frac{\lambda_g'}{\lambda}\right) \sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right) \quad \cdots\cdots (39)$$

$$\lambda_g' = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_s - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

$$Z_{01} = \frac{Z_0}{n^2} = j120\pi \left(\frac{b}{\lambda}\right)\left(\frac{4\pi}{a\Gamma_1}\right) \sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right) = j2\omega r$$

(39)式のXを整理すれば次のようになる。

$$X = 120\pi \left(\frac{b}{\lambda}\right)\left[\left\{\ln\left(\frac{2a}{\pi r}\sin\frac{\pi d}{a}\right) - 2\sin^2\frac{\pi d}{a}\right\} - 2\left(\frac{\pi}{a}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\Gamma_n + \Gamma_n'} \left\{\frac{2\Gamma_n e^{-2\Gamma_n l}}{(\Gamma_n + \Gamma_n') + (\Gamma_n - \Gamma_n') e^{-2\Gamma_n l}}\right\} \sin^2\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\right]$$

となる。

2) 増幅器の電力利得

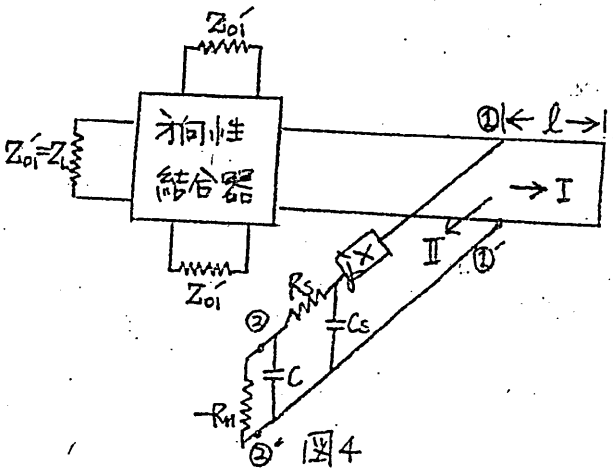


図4

1端子増幅器の回路構成は図4に示す。方向性結合器の1端子を反射形エサキ・ダイオード増幅器で終端しておき，反射増幅波を出力として取り出すものである。

したがって，電力利得 G_P は

$$G_P=|\Gamma|^2=\frac{(G_L-Y)^2}{(G_L+Y)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

となり，Yの値は①-①'端子から，I側とII側を見たアドミタンスは次のようになる。

$$Y=\frac{\alpha\gamma+\delta\beta}{\gamma^2+\delta^2}+j\left(\frac{\beta\gamma-\delta\alpha}{\gamma^2+\delta^2}-Y_0\coth\Gamma_1\ell\right) \qquad \cdots (41)$$

ただし

$$\alpha=1+(\omega CR_n)^2+\omega^2CC_SR_n^2$$

$$\beta=\omega C_SR_S\{1+(\omega CR_n)^2\}-\omega C_SR_n$$

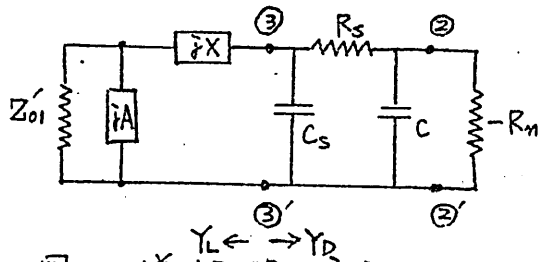
$$\gamma=(1-\omega C_SX)\left[R_S\{1+(\omega CR_n)^2\}-R_n\right]$$

$$\delta=X\{1+(\omega CR_n)^2\}-\omega CR_n^2(1-\omega C_SX)$$

となる。

(41)式を(40)式に代入すると電力利得 G_P が求まる。

3) 増幅器の安定条件



$A = Z_{01} \tanh \Gamma_1 l$

図5 増幅器の安定条件

エサキ・ダイオードは直流から高い周波数まで本質的に負性抵抗を示すので，0～fr 全周波数帯で回路の安定条件が満足されなければならない。

このような回路の安定条件を調べるには，ナイキストの判別法が有効である。すなわち，図5の等価回路で，②-②'端子，$-G_n$ を除く負荷側へのアドミタンス $Y(\omega)$ の周波数を求め，これをエサキ・ダイオードの負性コンダクタンスの絶対値 $|G_n|$ で正規化してスミス図表に描く。この結果，若しこの周波数特性の軌跡が中心(1.0)を包まなければ安定であり，中心(1.0)を包んだ場合は不安定となる。

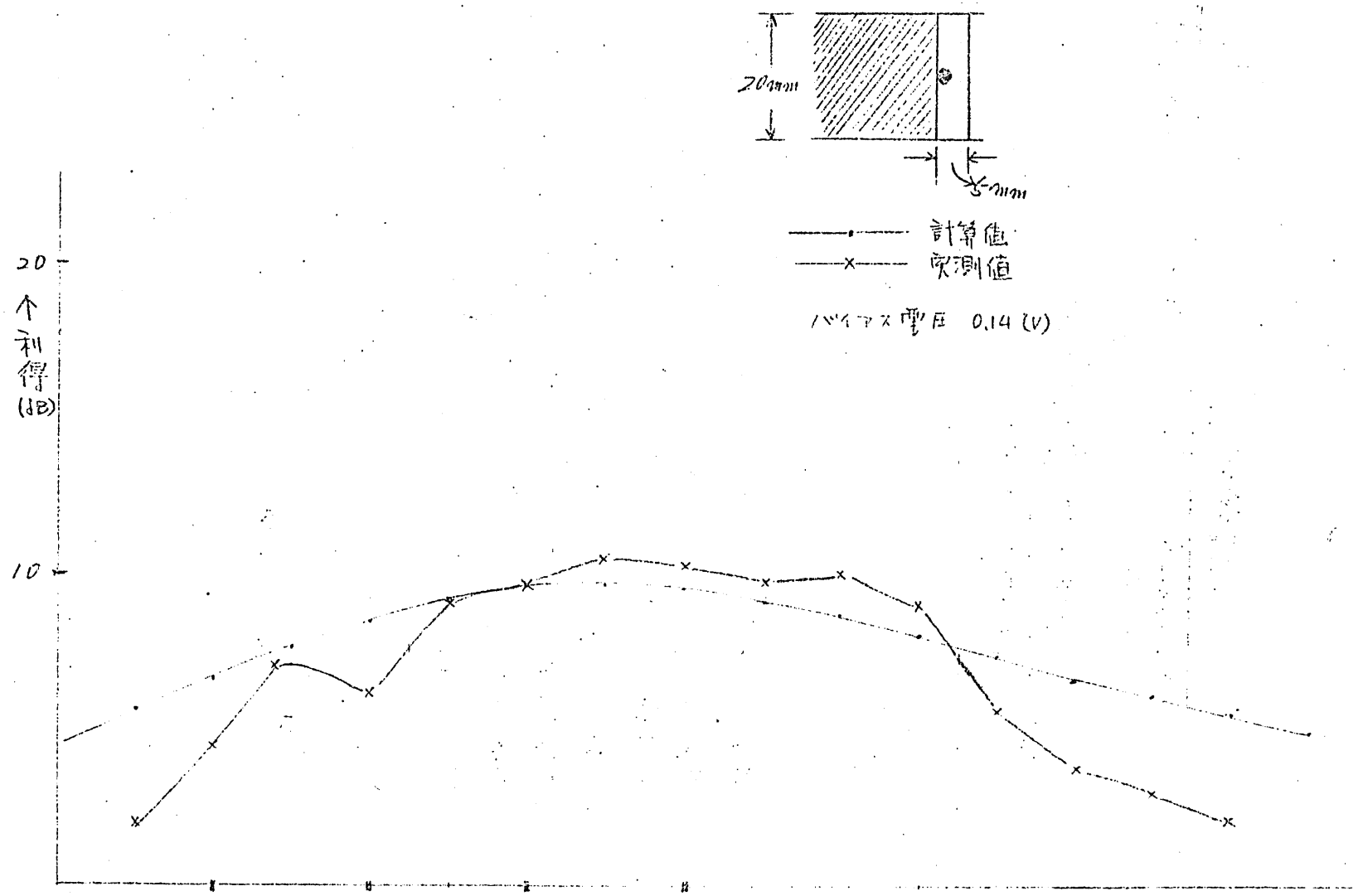
$Y(\omega)$ を求めると

$$Y(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + j\left(\omega C - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots (42)$$

$$\alpha = \frac{A^2 Z_{01}'\left\{(1-\omega C_s X)(Z_{01}'^2+A^2) - A Z_{01}'^2 \omega C_s\right\} + \omega C_s A^2 Z_{01}'\left\{A Z_{01}'^2 + X(Z_{01}'^2+A^2)\right\}}{\left\{(1-\omega C_s X)(Z_{01}'^2+A^2) - A^2 Z_{01}'^2 \omega C_s\right\}^2 + (\omega C_s A^2 Z_{01}')^2} + R_s$$

$$\beta = \frac{\left\{A Z_{01}'^2 + X(Z_{01}'^2+A^2)\right\}\left\{(1-\omega C_s X)(Z_{01}'^2+A^2) - A^2 Z_{01}'^2 \omega C_s\right\} - \omega C_s A^4 Z_{01}'^2}{\left\{(1-\omega C_s X)(Z_{01}'^2+A^2) - A Z_{01}'^2 \omega C_s\right\}^2 + (\omega C_s A^2 Z_{01}'^2)^2}$$

となる。


20mm
1mm
計算値
実測値
バイアス電圧 0.14 (V)
20
利得 (dB)
10

つぎに図5の③−③′の端子から，右側を見たY_Dと左を見たY_Lから回路の安定条件を判別することができる。これを図8で説明する。

4) 計算値と実験結果

誘電体装荷導波管反射形エサキ・ダイオード増幅器の増幅特性を求めるに(41)式に(40)式に代入すると求まる。エサキ・ダイオードはソニー製品 IT11.02，$C=2.55$(PF)，$C_s=0.85$(PF)，$R_s=1.2(\Omega)$，$L_s=0.4$(nH) $-R_n=70(\Omega)$，等価半径 $r=0.4$(mm)，$a=20$(mm)，$b=1$(mm) $\varepsilon_s=9$（実際は$\varepsilon_s=12$であるがすきまの影響を考慮に入れて），$l=5$mm で計算した値が図6に示す。

増幅特性で帯域が理論値で510(Mc)，実測値で350(Mc)であった。帯域幅が理論値と実測値とで異っているのは導波管の上蓋をネジで取りはずしが（この増幅器の構造は文献(1)(2)を参照）できるようにしてあるので，エサキ・ダイオードをマウントしてあるところの遮断導波管の部分でかなりの損失が増えたのと，誘電体テーパーのすり合わせなどの点から帯域幅が狭くなったものと思われる。

つぎに安定条件は(42)式を用いて上述の数値での結果が図7に示す。スミス図表を見ても分かるように増幅器の回路は安定であることが分かる。

図8は安定条件のところで説明したように③−③′端子から，Y_DとY_Lに分けて考えて見ると，いまエサキ・ダイオードの接合容量が異なった場合 $-G_n$の除いた位置から$Y(\omega)$を求めてスミス・チャート上で描かなければならない欠点がある。そこで図8に示すようにY_L側とY_D側を別々に計算した。いま，Y_Lを遮断周波数以下から伝播領域まで計算し，$-B$とGとの値を求め，Y_Dも同様にして求める。

Y_Dは接合容量4(PF)から1.6(PF)まで計算した。図8で，4(PF)の時Bと$-B$は導波管の遮断周波数で交っているから，この交点が共振周波

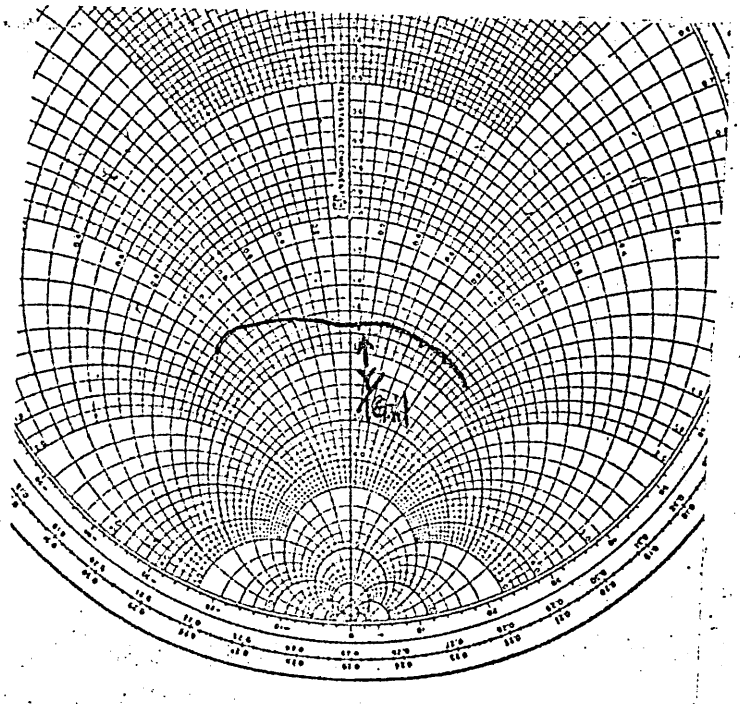


図7　図5の端子②－②'から負荷側をみたアドミタンス

数となり，発振を起こす。ところが結合容量が2.6(PF)になるとBは.3080Mcで交点となる。回路のコンダクタンスの方はGに比べてーG_Dが小さいから回路は安定であり，中心周波数は図6に示す増幅特性の中心周波数と一致している。故に図8から増幅器として使用する場合のエサキ・ダイオードの値をはいくらぬものを用いれば良いかすぐ分かる。

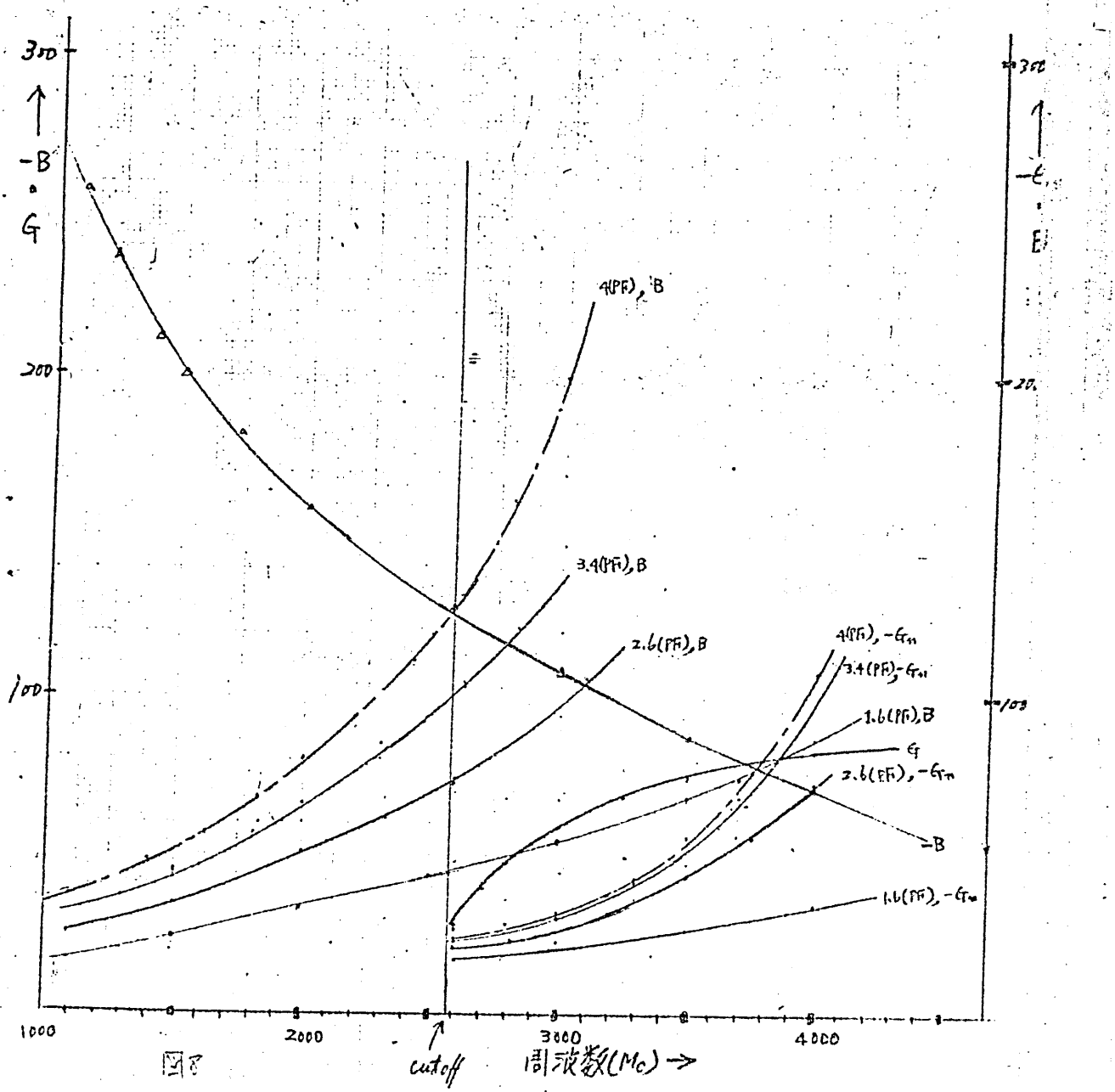


図8

図8 図5の③-③'跡からYLとYRを見たアドミタンス

結論

本論文では導波管にエサキ・ダイオードをマウントした場合の等価回路の解析をおこなお，このような近似計算したものと実験的にもとめたものと比較し，各々の傾向が良く一致することを示した。

最後に電子計算機のプログラミングに関して協力下った．大阪電気通信大学学生，甲斐 信，前川 博史君に謝意を表します。尚本計算は本学電子計算機でおこなったものである。

文献

1) 牧本・豊田・"導波管反射形エサキ・ダイオード増幅器"
S. 38. 9. 28 輻射科学研究資料

2) 牧本・豊田 〃
S 38. 11 全国大会 254

3) L. Lewin Advanced Theory of Waveguide

輻射科学研究会資料

トンネルダイオード増幅器の一安定化法

白幡潔
武富大児
(三菱電機株式会社)

1967年2月24日

1. まえがき

サーキユレータ形トンネルダイオード増幅器（以下ＴＤＡと略す）を構成する場合に帯域外発振抑制が設計調整の主眼点の一つになつている。

すなわち

(1) サーキユレータとダイオードとの距離を適当に選定する。

(2) 増幅共振器のQを高める。

(3) 増幅共振器に passivating network を挿入する[1][2]

等の対策が適宜単独で又は組み合わせて構じられている。しかし帯域外VSWR特性の良好なサーキユレータがあれば設計調整は甚だ容易になる。同軸形サーキユレータでは中心周波数のほぼ1.5倍以上の周波数に於て往々にしてVSWRが２０以上に達するものがあるが，このようなサーキユレータでもこのVSWRさえ小さくできればＴＤＡ用サーキユレータとして実用上十分満足すべきものとなる。本文はサーキユレータの帯域外VSWR特性を良好ならしめる一方法を提案し，このサーキユレータを用いて安定かつ広帯域なＴＤＡが容易に実現できることを示すものである。

2. ＴＤＡ用サーキユレータの所要特性

ＴＤＡの等価回路は図１で表わされる。遮断周波数 $f_c\left(=\frac{1}{2\pi C_j R_j}\sqrt{\frac{R_j}{R_s}-1}\right)$ が自己共振周波数 $f_r\left(=\frac{1}{2\pi C_j R_j}\sqrt{\frac{C_j R_j^2}{L_s}-1}\right)$ より低いダイオードを用いたＴＤＡがサーキユレータとダイオードとの距離に無関係に安定であるためには

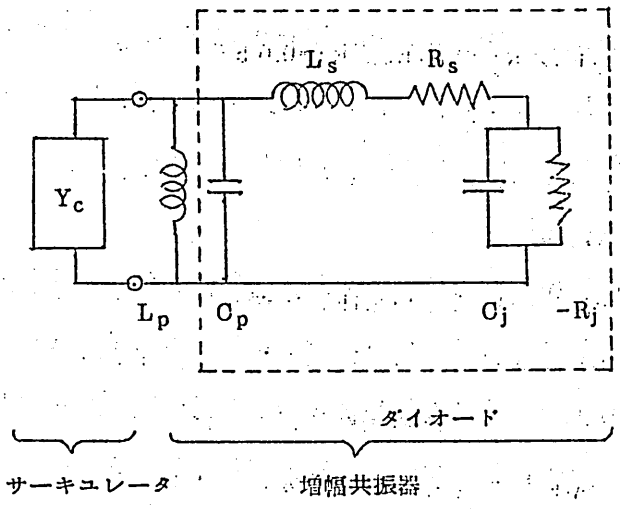


図１　ＴＤＡの等価回路

$$|\Gamma c(\omega)| \cdot |\Gamma a(\omega)| < 1 \qquad (1)$$

が要求される。[3] ここに

$\Gamma c(\omega)$；増幅共振器からみたサーキュレータの電圧反射係数

$\Gamma a(\omega)$；増幅共振器の電圧反射係数（ $|\Gamma a| > 1$ ）

である。$\Gamma a(\omega)$を増幅共振器のQで近似表示すれば式(1)は

$$|\Gamma c(\omega)| < \left\{\frac{(1+g_d)^2 + Q_e^2 \Omega^2}{(1-g_d)^2 + Q_e^2 \Omega^2}\right\}^{1/2} \qquad (2)$$

となる。ここに

$$g_d = \frac{R_0}{R_j} \cdot \frac{-1+a(1+\theta^2)}{(1-a-b^2\theta^2)^2 + (a-b^2)^2\theta^2} \qquad (3)$$

R_0；サーキュレータ線路の特性インピーダンス

$$a = \frac{R_s}{R_j}, \quad b = \frac{R_s}{C_j R_j^2}, \quad \theta = \frac{\omega}{\omega_b}, \quad \omega_b = \frac{1}{C_j R_j} = \omega_c \Big/ \sqrt{\frac{R_j}{R_s} - 1} \qquad (4)$$

$$Q_e \fallingdotseq \omega_0 (C_p + C_j) R_0 \quad （増幅共振器の外部Q） \qquad (5)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \qquad (6)$$

ω_0；増幅中心周波数

である。

$f_r = 1.2 f_c$, $f_c = 3 f_0$, $R_0 / R_j = 0.7$, $R_s / R_j = 0.056$ なるダイオードを用いたとき式(2)は Q_eをパラメータとして図2で表わされる。$0 \sim f_c$ にわたりサーキュレータの増幅共振器開口における反射係数が図の安定領域にあれば，サーキュレータとダイオードとの距離に無関係に安定なＴＤＡが構成できる。

図2はいわば系の発振について位相条件が最悪の場合の境界を示すものであるから，現実のサーキュレータが図2を満足していないからといってＴＤＡが必ず不安定になるのではない。式(1)が満たされていなくても位相条件によつては安定な場合がある。しかし図2によればサーキュレータのVSWR特性を知るだけで安定なＴＤＡが構成できるので量産化に適している。

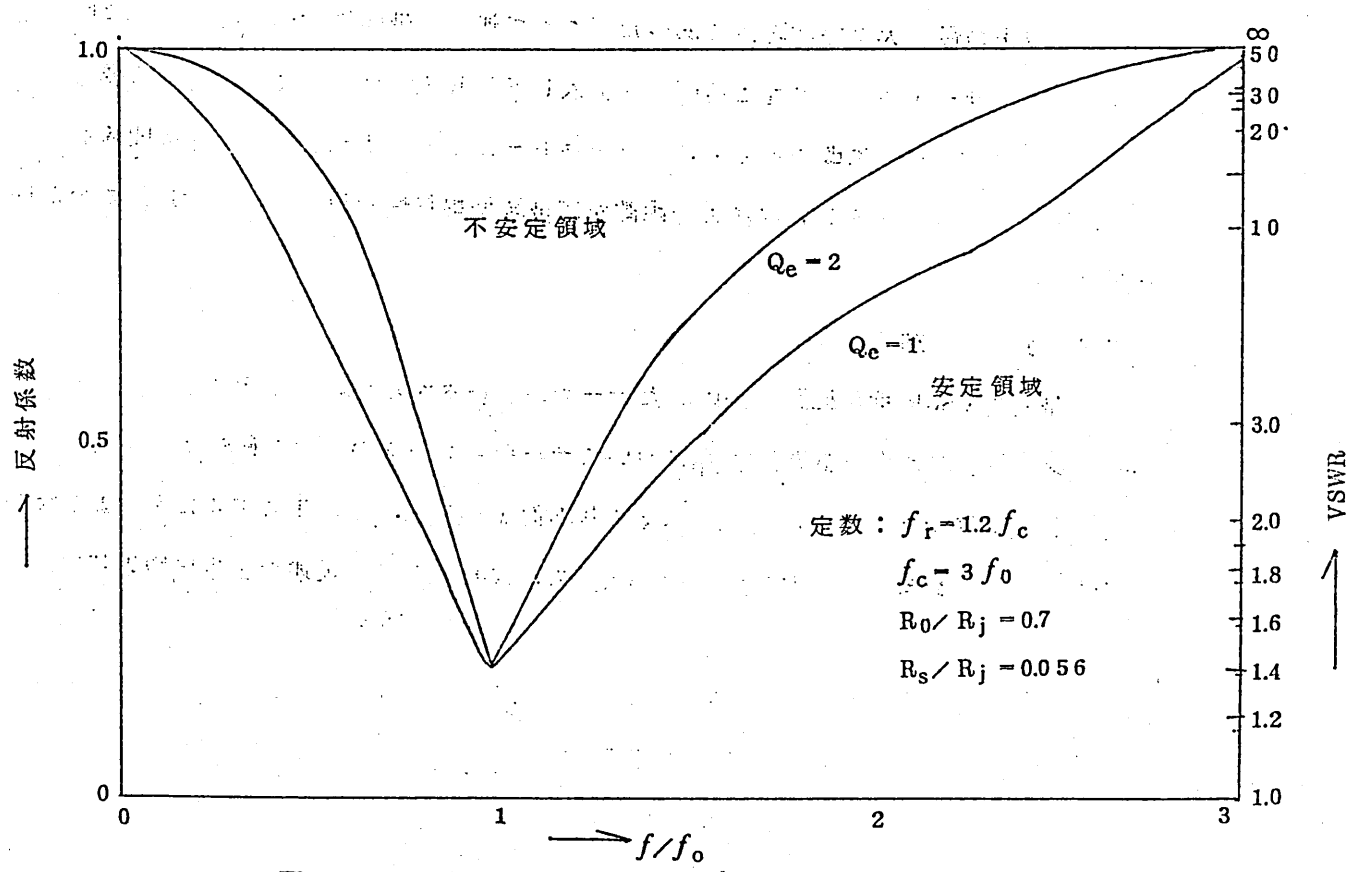


図２　ＴＤＡ用サーキュレータの所要特性

3.　帯域外ＶＳＷＲ抑圧回路

従来の同軸形サーキュレータでは中心周波数のほぼ1.５倍以上の周波数に於て往々にして図３に示すようにVSWR が２０～３０に達するものがある。従つてこのようなサーキュレータを用いたＴＤＡはVSWR の高くなる周波数で発振を起し易く，この発振を抑制することが

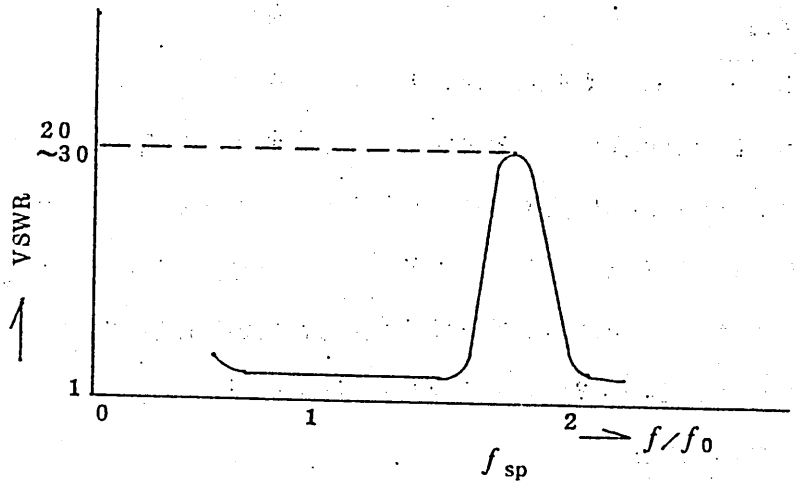


図３　サーキュレータの代表的入力VSWR特性

ＴＤＡ構成上の最も大きい問題点であつた。ここで述べる帯域外 VSWR 抑圧回路は図３の如き特性をもつサーキユレータをこの回路を挿入してＴＤＡ用サーキユレータの所要特性を満たしたサーキユレータに改善せしめ，サーキユレータとダイオードとの距離に関係なく安定に動作するＴＤＡを構成し，次にこの距離を広帯域増幅特性を得るように選定するのが目的である。

3.1　原　　理

図４に帯域外VSWR 抑圧回路を挿入したサーキユレータを示す。サーキユレータの入力反射係数が著しく大きくなる周波数f_{sp}においてサーキユレータのフエリ磁性体から開口までの線路上に入力インピーダンスが高くみえる基準面Ｔをとり，このＴに図４に示すような回路網を加する。回路網のリアクタンス定数は式(7)，式(8)ならびに後述の広帯域増幅特性をうる

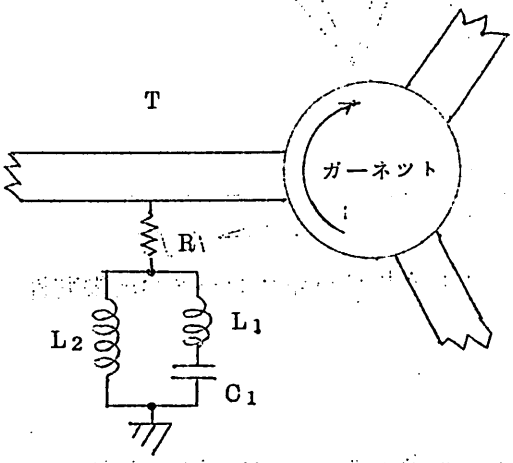


図４　帯域外VSWR 抑圧回路
を装着したサーキユレータ

ための条件から決める。抵抗Ｒはサーキユレータ線路の特性インピーダンスR_0 に選定する。

$$1/2\pi\sqrt{L_1C_1}=f_{sp} \qquad (7)$$

$$1/2\pi\sqrt{(L_1+L_2)C_1}=f_0 \quad (\text{中心周波数}) \qquad (8)$$

この様に選ばれていると回路網の呈するインピーダンスは中心周波数f_0 では∞となり，周波数f_{sp}ではサーキユレータ線路の特性インピーダンスに等しくなる。従つて回路網は中心周波数ではサーキユレータ線路の特性インピーダンスに影響を与えず，周波数f_{sp}では入力インピーダンスを特性インピーダンスにまで近づけるから，広い周波数範囲でサーキユレータの入力VSWR を小さくなしえ，図２のサーキユレータ所要特性を満足させうる。

3.2　マイクロ波帯での構成法

図４に示した帯域外VSWR 抑圧回路は分布定数線路の特徴を生かして図５のように簡潔に

構成できる。即ち L_1, C_1 は f_{sp} で1／4波長となる一端開放線路，L_2 は一端短絡線路で構成できる。この回路の Q_s で与えられる。ここにVは光速である。サーキュレータの帯域内におけるQが式(9)で与えられる Q_s よりも十分小さければ増幅共振器を帯域外VSWR 抑圧

$$Q_s = \frac{\omega_0 R_0}{2} \cdot \frac{1}{Z_1} \left\{ \frac{\frac{l_1}{V}}{\cos^2\left(\frac{l_1}{V}\omega_0\right)} + \tan\left(\frac{l_1}{V}\omega_0\right) \cdot \frac{2\frac{l_2}{V}}{\sin\left(2\frac{l_2}{V}\omega_0\right)} \right\} \qquad (9)$$

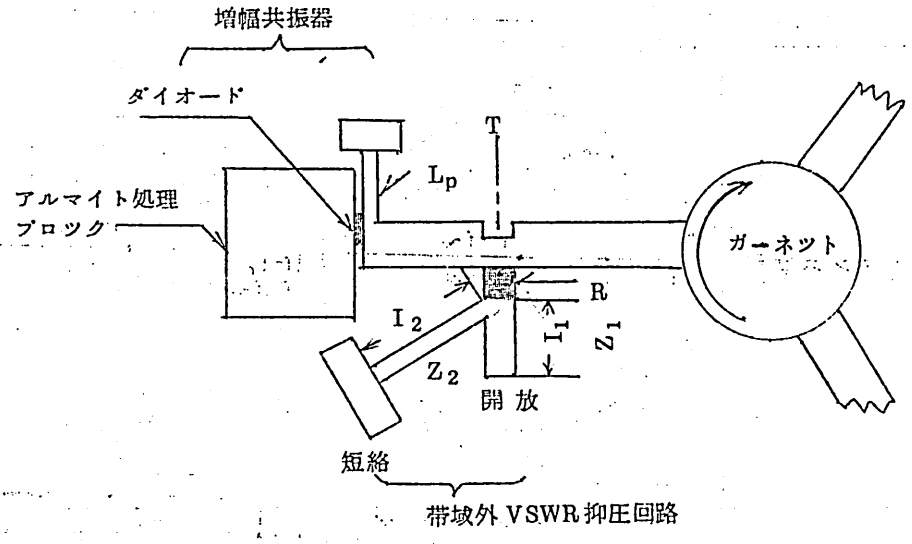


図5　分布定数線路で構成した帯域外VSWR
抑圧回路，増幅共振器

回路から λ_0／4 離れた点におき，増幅共振器の Q_a と帯域外VSWR 抑圧回路の Q_s との比を

$$\frac{Q_s}{Q_a} \fallingdotseq 0.4 \qquad (10)$$

に選定すれば増幅特性を最大平坦になしうる。

表1にpassivating回路法と帯域外VSWR 抑圧回路法とを比較した。

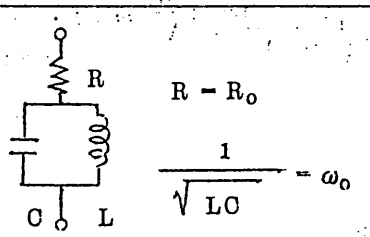
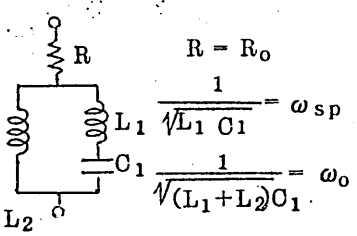
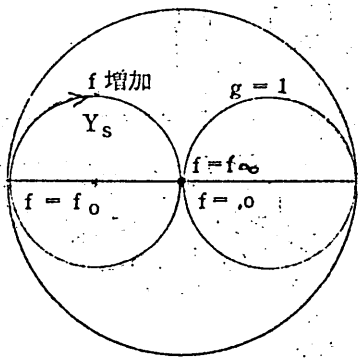
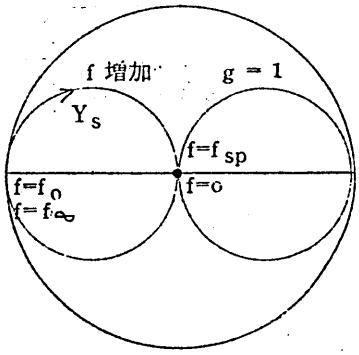
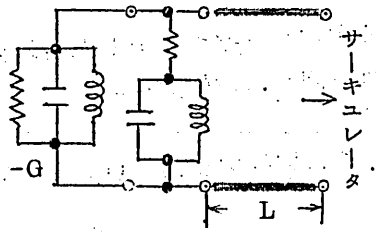
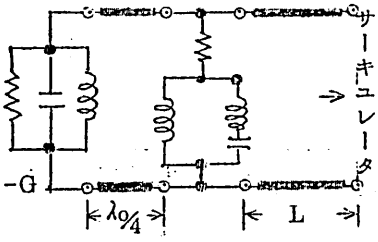
		passivating回路法	帯域外VSWR抑圧法
考え方		passivating 回路を含めたサーキュレータ側アドミッタンス（基準面は安定化回路の位置）のコンダクタンス$G_c(\omega)$を帯域外において$G_c(\omega) \gtrless \lvert -G_j \rvert$とならしめる。	帯域外VSWR 抑圧回路を含めたサーキュレータのVSWRを$\lvert P_c(\omega) \rvert \cdot \lvert P_c(\omega) \rvert <$を満たす様に小さくする。
安定化回路の比較	回路構成		
	アドミッタンス軌跡		
TDA回路構成の比較	回路構成		
	サーキュレータ	如何なる帯域外特性のサーキュレータでも安定化できる	増幅器の比帯域幅よりある程度広い比帯域幅のサーキュレータに適用できる
	安定化回路の位置（L）	一般には任意の位置（従つて小形化できる）	f_{sp} でサーキュレータのインピーダンスが高くみえる位置
	増幅共振器の位置	安定化回路と同位置	広帯域化を考えて決定する
	安定化回路のQ	安定化に必要なQ	広帯域化のために必要なQ
	広帯域化	副共振器の付加が必要	安定化回路と増幅共振器との距りをf_0で$\frac{1}{4}$波長に選定
TDAの増幅帯域幅		ダイオードのQ ＋安定化回路のQで決まる （比帯域幅；10%程度）	ダイオードのQで決まる （比帯域幅；20%程度）

表1　passivating回路法と帯域外VSWR抑圧回路法との比較

4. 実験結果

4.1 サーキュレータのVSWR特性

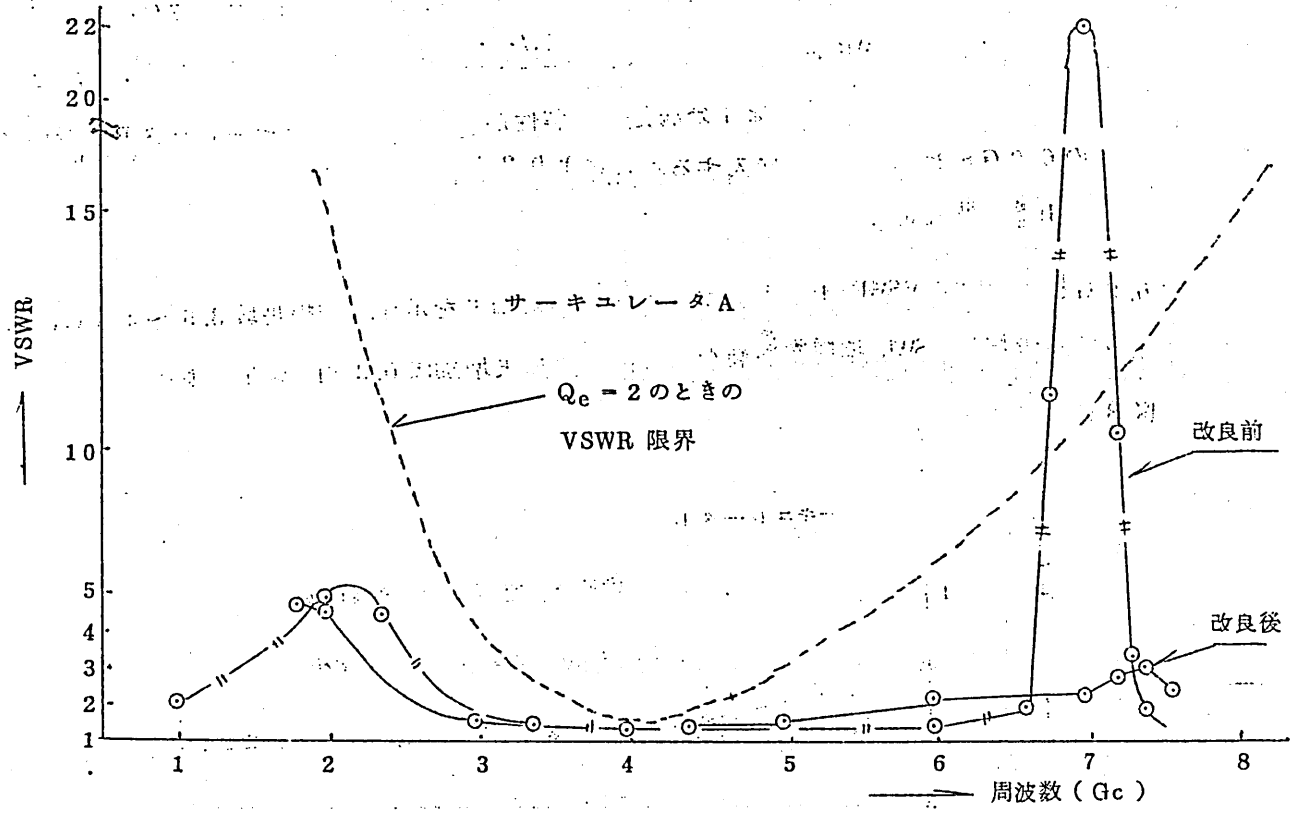


図6 サーキュレータ入力VSWRの改良前後の特性(1)

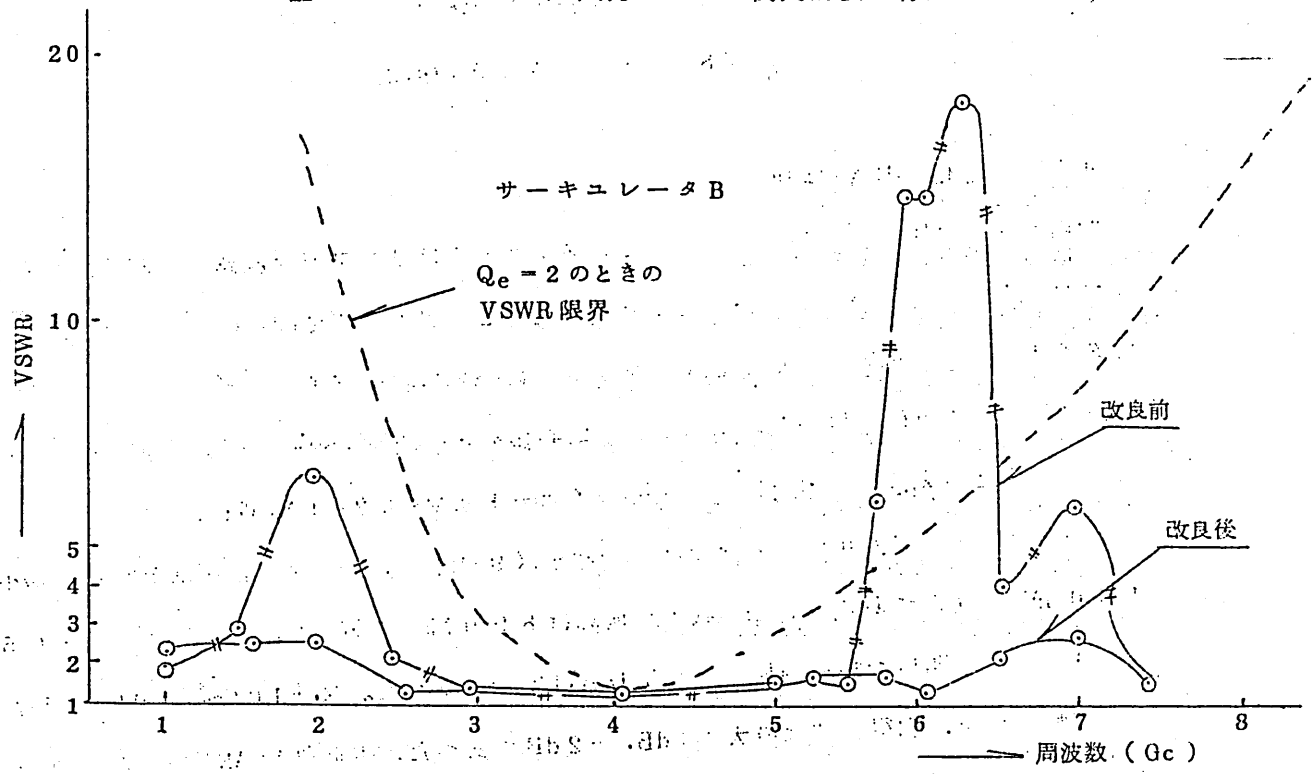


図7 サーキュレータ入力VSWRの改良前後の特性(2)

図６，図７に４Gcサーキユレータ A，Bの改良前後の特性を示す。サーキユレータ Aは Melabs 製，Bは三菱製である。サーキユレータ Aにおいては単体の７Gc における VSWR ２２が帯域外 VSWR 抑圧回路を挿入することにより 2.1 まで小さくなしえ，Q_e=2 のときのサーキユレータ所要特性を十分満足する特性が得られた。サーキユレータ Bにおいては単体の 6.2 Gc における VSWR １７を 1.3 まで小さくなしえた。

4.2　サーキユレータの挿入損失

図８にサーキユレータ Bの改良前後の挿入損失を示す。増幅帯域 3.5 ～4.5 Gc の端における帯域外 VSWR 抑圧回路装荷による挿入損失増加は 0.3 dB 以下であつた。

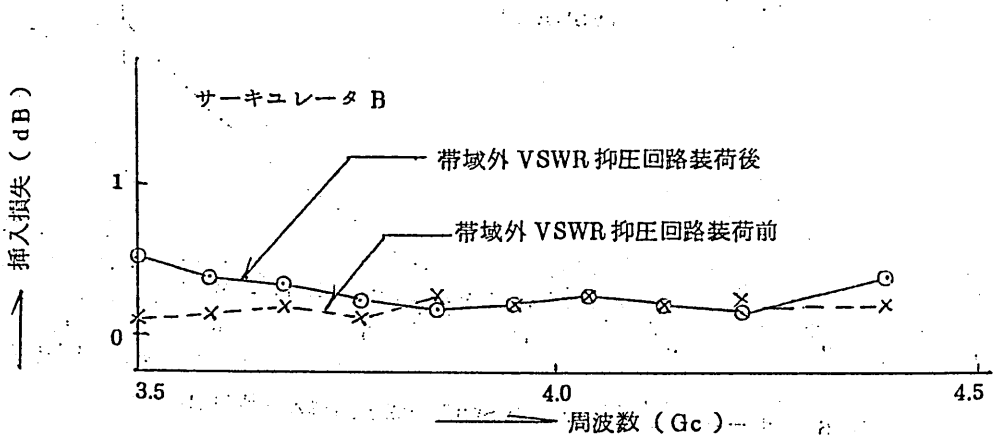


図８　サーキユレータの挿入損失

4.3　安定化ＴＤＡの特性

増幅共振器は図５に示した構造とした。ダイオードはストリップ線路の終端に心線軸方向にマウントし絶縁を要する部分をアルマイト処理したブロックで固定した。増幅中心周波数でダイオードの並列容量を打消し同調をとるため一端短絡の高インピーダンスストリップ線路がダイオード近傍に接続されている。増幅共振器と帯域外 VSWR 抑圧回路との距離は広帯域化を行うため $\lambda_0/4$ に選定した。使用ダイオードは MS 1204A（Ge）である。

サーキユレータ Bを用いたときの増幅特性を図９に示す。バイアス電圧は雑音指数最小の１６０mV に選んである。3 dB 低下帯域幅は８９０Mc であつた。サーキユレータ（５開口形）の入出力開口を短絡開放してもＴＤＡは安定であつた。又－１０℃～＋４０℃ にわたる温度試験の結果，利得増減は最大＋4 dB，－2 dB であつた。帯域外 VSWR 抑圧回路を取り去ると 6Gc で発振した。利得 1 dB 低下の入力は－３６dBm であつた。

図１０に雑音指数のバイアス電圧特性．図１１にサーキユレータの挿入損失0.4～0.5dBを含めた雑音指数の周波数特性を示す。最小5.6 dB ．最大6 dB になつている。

6. あとがき

帯域外インピーダンス特性の悪いサーキユレータに帯域外VSWR 抑圧回路を挿入することにより，ＴＤＡ用として実用上十分満足すべき特性をもつたサーキユレータが構成できた。従来のpassivating回路法によるＴＤＡの増幅帯域幅はたとえ副共振器を装荷して最大平坦特性としてもpassivating回路の挿入による分だけ狭くならざるをえない。しかし本構成法によるＴＤＡでは増幅共振器のQがダイオードのQのみで決まり，かつ帯域外VSWR 抑圧回路から増幅共振器までの距離を中心周波数で¼波長に選定することにより帯域外VSWR 抑圧回路を副共振器となしうるので広帯域特性が容易に実現できる特長を有する。

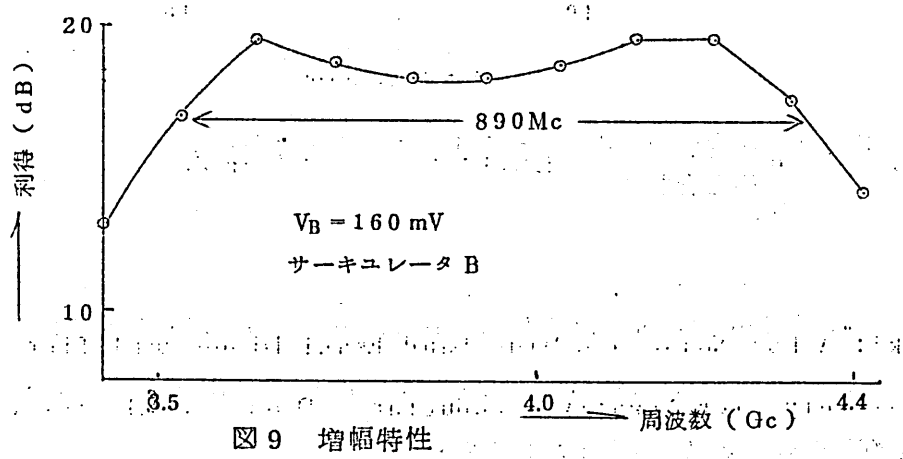


図９　増幅特性

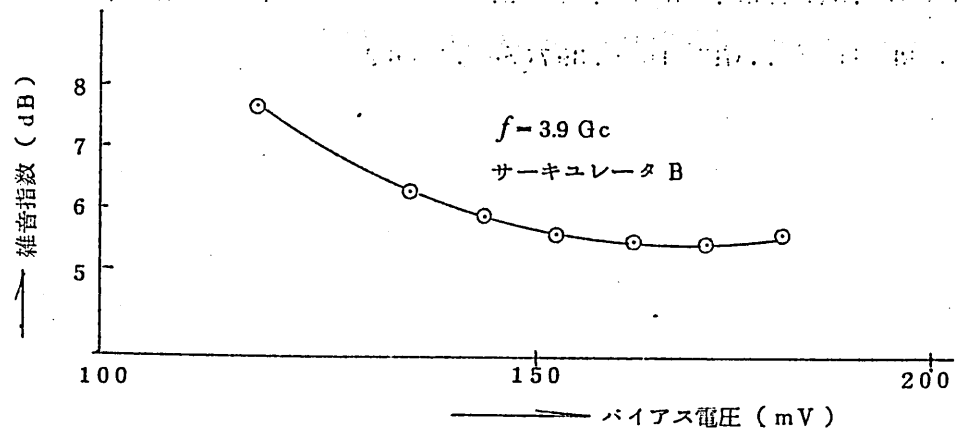


図１０　雑音指数のバイアス電圧特性（サーキユレータの挿入損0.4 dBを含む）

本増幅器は衛星通信用受信システムおよびミリ波中継器に使用できるものである。御指導頂く電々公社通研喜田博士ならびに当社喜連川博士に深謝致します。

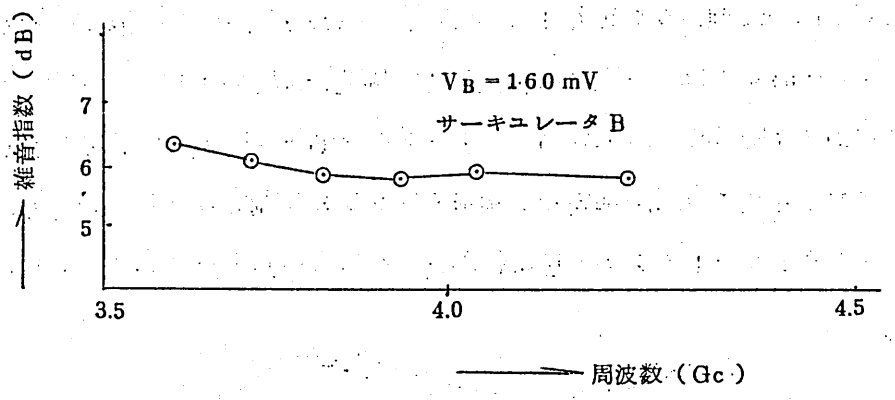


図１１　雑音指数の周波数特性（サーキュレータの挿入損を含む）

参　考　文　献

(1) J.Hamasaki:"A Low Noise and Wide Band Esaki Diode Amplifier with a Comparatively High Negative Conductance Diode at 13 Gc/s", IEEE Trans.,MTT-13, P. 213(March 1965)

(2) 工藤，柚木："エサキダイオード増幅器の安定条件について"，昭４０信学全大，３５３

(3) B.Henoch,Y.Kvaerna:"Stability Criteria for Tunnel Diode Amplifier", IRE Trans.,MTT-10,p.397(Sep.1962)

輻射科学研究会資料

Gunnダイオードの発振特性と共振回路について

1967年2月24日

三菱電機　北伊丹製作所
奥　泰二・三井　茂

Gunnダイオードの発振特性と共振回路について

奥　泰二
三井　茂
（三菱電機K.K）

1. 緒　言

1963年IBMのJ.B.Gunn[1),(2)]によって発表されたいわゆるGunn効果は、その後、物理的興味と、新しいマイクロ波源としての可能性から多くの人々によって研究が続けられてきた。その結果、現在ではその動作原理もほゞ解明[(3),(4),(5)]され、実用的マイクロ波発振源として開発が進められている。

我々のところでもGunnダイオードの開発を行ってきたが、既にS—bandで連続出力200mW以上、パルス出力10W以上のGunnダイオードを作ることに成功している。

こゝではこれらのGunnダイオードの発振特性、特に共振回路との関連について述べることにする。

2. 発振素子

使用された結晶はMonsanto社製のO_2—doped n型GaAs単結晶で、常温における移動度は5,800～6,100cm²／volt·secである。

発振素子は上記結晶を（111）面又は（100）面に平行に切り出し、厚さ25μ～50μの薄片とし、その両面に合金によるオーミック電極をつけた後、一辺を150μ～800μ角のペレットに切断したものである。

試作素子の代表的特性を表1にまとめて示した。

3. 測定回路系

図1は試作Gunnダイオードの諸特性を測定した回路系である。キャビテイは内径50φの円筒と14φの中心導体とからなる同軸型であり、中心導体に試料を取りつけるようになつている。従つて試料の位置は固定され、プランジャーの位置L_1を変えて空胴の大きさを変える。出力はループで取り出し50 ohm同軸整合回路を通して減衰器および方向性結合器につながり、さらに電力計およびスペクトラム・アナライザーにつながれている。二本の同軸スタブの間隔L_2は可変となつている。

連続発振の場合の場合には入力端に直流電源を、パルス発振の場合にはパルス電源をつなぐ。直流のリップル含有率は2mV以下であり、パルス電源インピーダンスは素子のインピーダンスに応じて、出来るだけ定電圧となるようにした。

4. 実験結果

4－1 連続発振Gunnダイオードの特性

連続発振Gunnダイオード、試料C－1をキャビテイに挿入し、入力バイアス・レベルを上げてゆく。このときの入力側で測定した電流と電圧の関係を図2に示してある。電圧が5V以下では電流は電圧にほゞ比例して増加するが5.Vを超えると試料の温度上昇による電流の増加が現れる。電圧が7V程度で電流は飽和の傾向を示し、threshold Vth=8.1Vに達すると電流値は図2のように階段状に減少する。この時、入力側で試料端電圧を観測すると図3のような低周波発振波形が観測される。この時マイクロ波出力も観測にかゝるが、その発振周波数スペクトルは図4にみるように低周波発振による電圧変動に対応して変調が掛っ

ている。プランジャーの位置およびスタブL_3, L_4 を調整すると、この低周波発振は止まり図５に示すような単色な発振スペクトルになり出力も大きくなる。

発振周波数はプランジャーの位置L_1 でほとんど決ってしまう。この関係は図６に示してある。試料Ｃ－１のペレットの厚みで決まる基本周波数は4.0 GHzであるが、その前後 3.0 ～ 4.5 GHzの領域にわたって引込み発振が可能であることが判る。こゝで興味あることは図７において、Bの領域ではthreshold 以上の電圧で図５のような単色な発振は常に可能であるが、AおよびCの領域ではBの領域の発振をプランジャーの位置を変えて引込んだ場合にのみ可能であり一度整合が失われると先に述べた低周波発振に変ってしまうことである。

次に結合ループの大きさについて言えば、図８に示したようにループが大きい方が出力がが得られている。ループ１の角度を変えて測つた場合について図９に示した。このように色々な角度にループを変えても出力に大きな差はない。

図１０はループ１を水平にした場合にプランジャーの位置を固定して測ったバイアスレベルに対する出力および周波数の関係である。これから判るように周波数の電圧依存性は df/dv=0.5Mc/vであり、最大出力は２００mWを超えている。図１１はこの場合の出力および効率と入力レベルの関係である。最大出力点における効率は３％である。

しかし、別の周波数f＝3.575 GHzではdf/dv=5Mc/Vである。又表１から判るように試料Ｃ－２ではdf/dv=−5Mc/V である。このように周波数の電圧依存性は結晶比抵抗、結晶の大きさの他に発振モードや回路インピーダンスとも関連がある。

4－2　パルス発振

パルス発振の場合も連続発振と同じ回路で測定した。試料からみた入力側のインピーダンスは試料のインピーダンスに比らべてできるだけ低くした。入力インピーダンスが高いと連続発振の時に述べたような低周波発振が起り試料に高圧が掛つて試料が破損し易くなる。

パルス発振ガン・ダイオードの諸特性は表１に示してある。厚みで決まる基本周波数 fo は 2.2 GHzであり、キャビテイでの引込み発振領域は 2～3 GHzである。

発振出力は threshold 以後の入力レベルの増加にほゞ比例して増加する。又発振出力は試料Ｐ－１では１０Ｗ、Ｐ－２では５００ｍＷであるが他のデータを含めて、出力はほゞ面積に比例している。

5. 結　　言

S—band 発振 Gunn ダイオードについて、連続およびパルス動作特性について述べた。Gunn ダイオードは連続の場合も、パルスの場合もその厚みで決まる基本周波数 fo の前後にほゞ１オクターブ程度キャビテイにによって引込み発振が可能である。出力、効率および周波数の電圧依存性は素子結晶の比抵抗の他に発振モードや回路との結合に関連しており、本実験に関する限りキャビテイ取り出しの結合ループは大きい程出力が得られる。

又 Gunn ダイオードの負性抵抗による低周波発振を止めることが、マイクロ波発振スペクトルを単色にし、出力従つて効率を上げるのに必要である。

従来 Gunn ダイオードの連続発振出力は数１０ｍＷの報告が多かったが、

我々の場合では１００～２００mWの安定な発振が得られているので、信頼性、寿命の問題が解決すれば多くの応用が考えられるのであろう。

試料番号	C－1	C－2	P－1	P－2
結晶比抵抗			1～2 Ω-cm	1～2 Ω-cm
結晶寸法			800μ×800μ×48μ	200μ×230μ×48μ
仕上り抵抗	30 Ω	60 Ω	0.4 Ω	1.2 Ω
Threshold電圧	8 V	9 V	～13 V	12 V
Threshold電流	350mA	300mA	～17 A	760 mA
発振周波数	3.2～4.6GHz	3.7～4.5GHz	2～3GHz	2～3.1GHz
半値巾	＜50KHz	＜50KHz		
df/dv	0.5～5Mc/V	～5Mc/v		
最大出力	206mW	1.10mW	10 W	500mW
効率	3 %	1.75 %	3 %	1.7 %
測定条件	CW発振	CW発振	パルス発振 巾：4μsec くり返し60cps	パルス発振 巾：2μsec くり返し：1Kcps

表 1　Gunnダイオードの特性

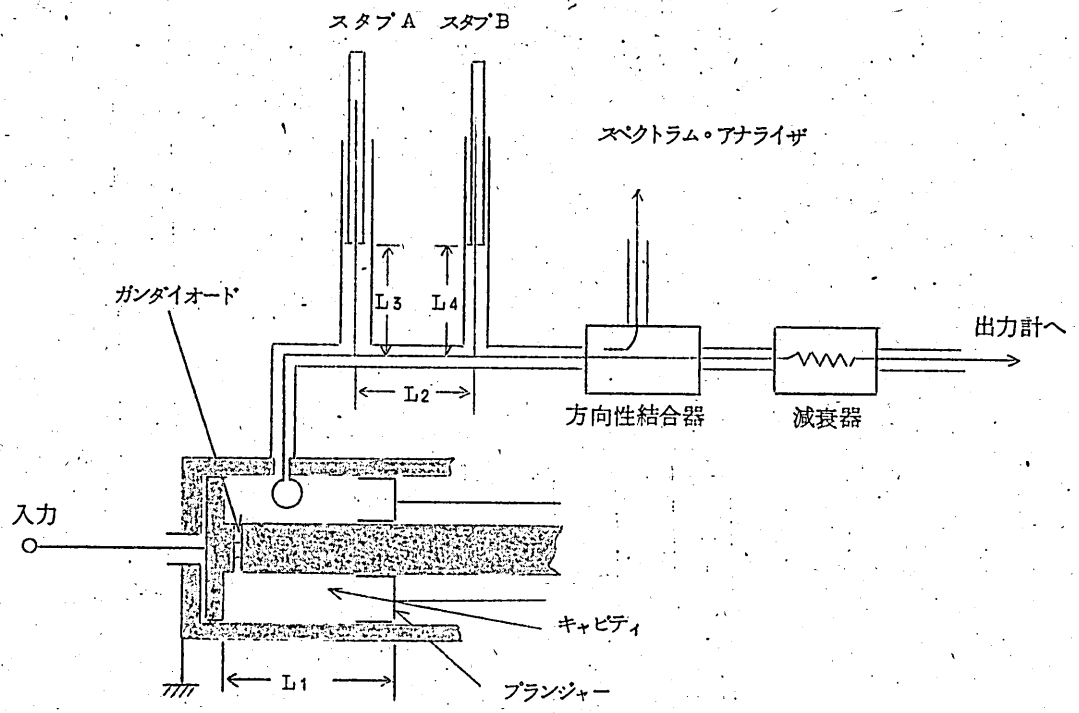


図1　Gunn ダイオード測定回路

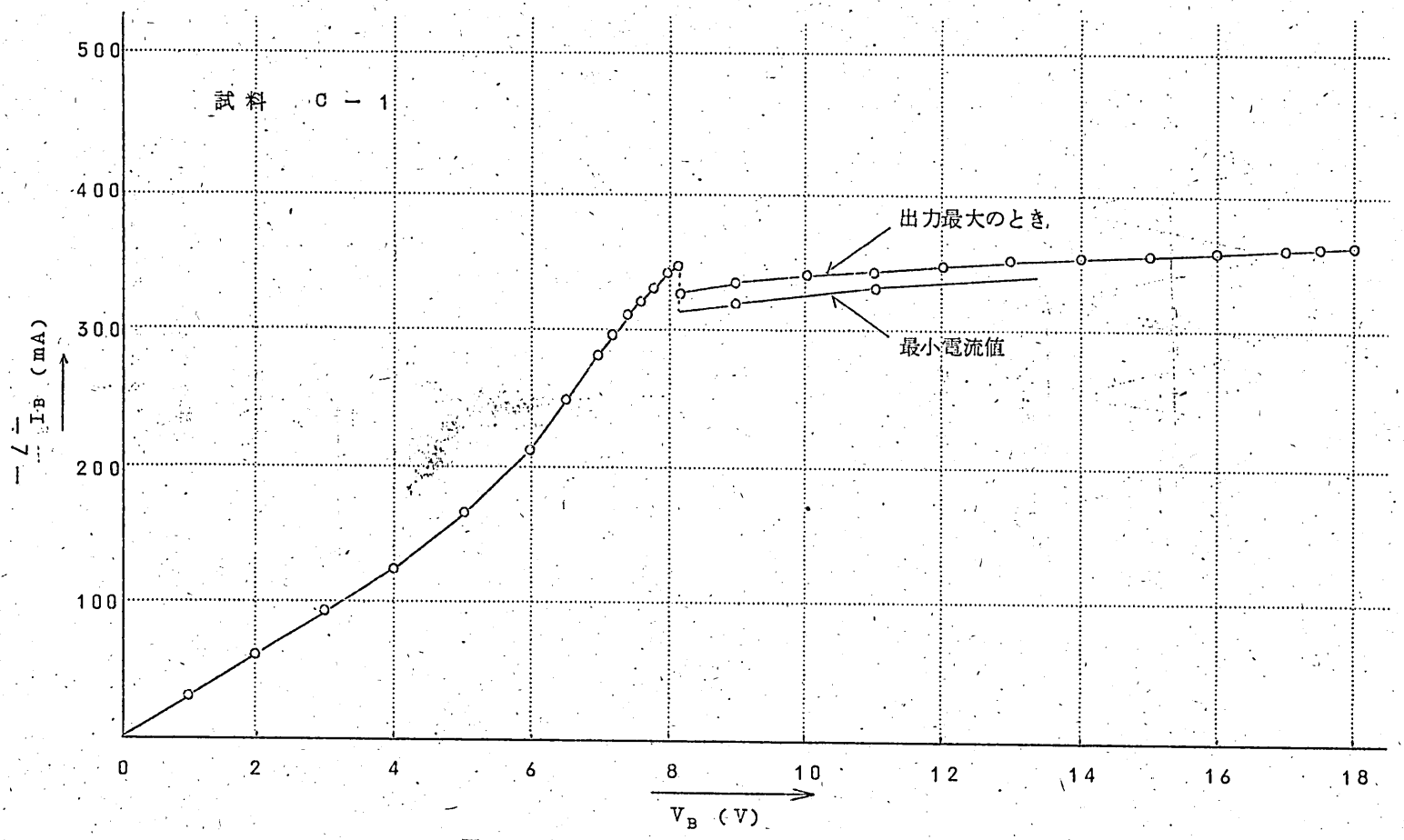


図 2　連続発振　Gunn　ダイオードの電流電圧特性

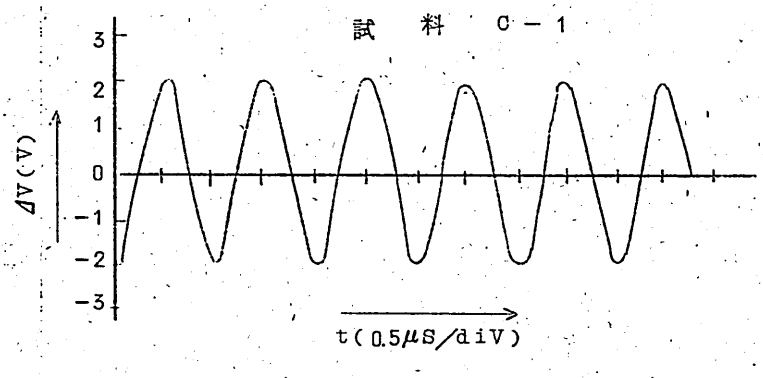


図 3　　低周波発振波形

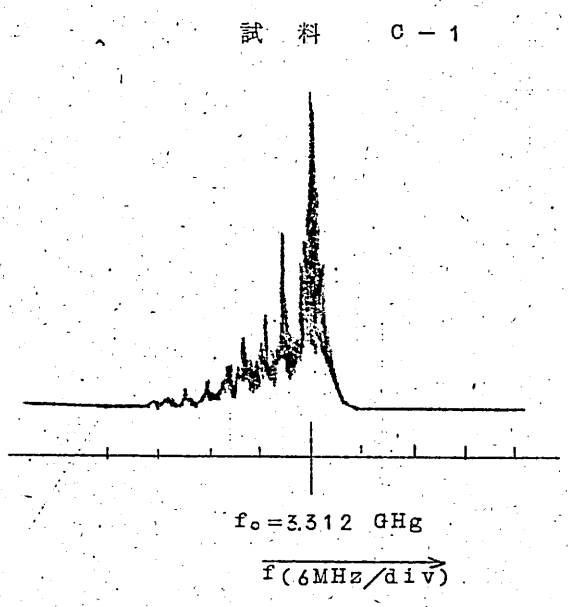


図 4　　低周波発振が起った時の
マイクロ波発振スペクトル

試　料　　C－1

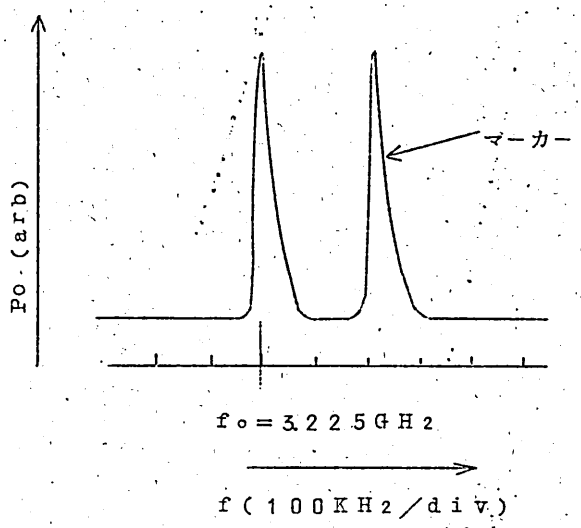


図 5　　マイクロ波発振スペクトル

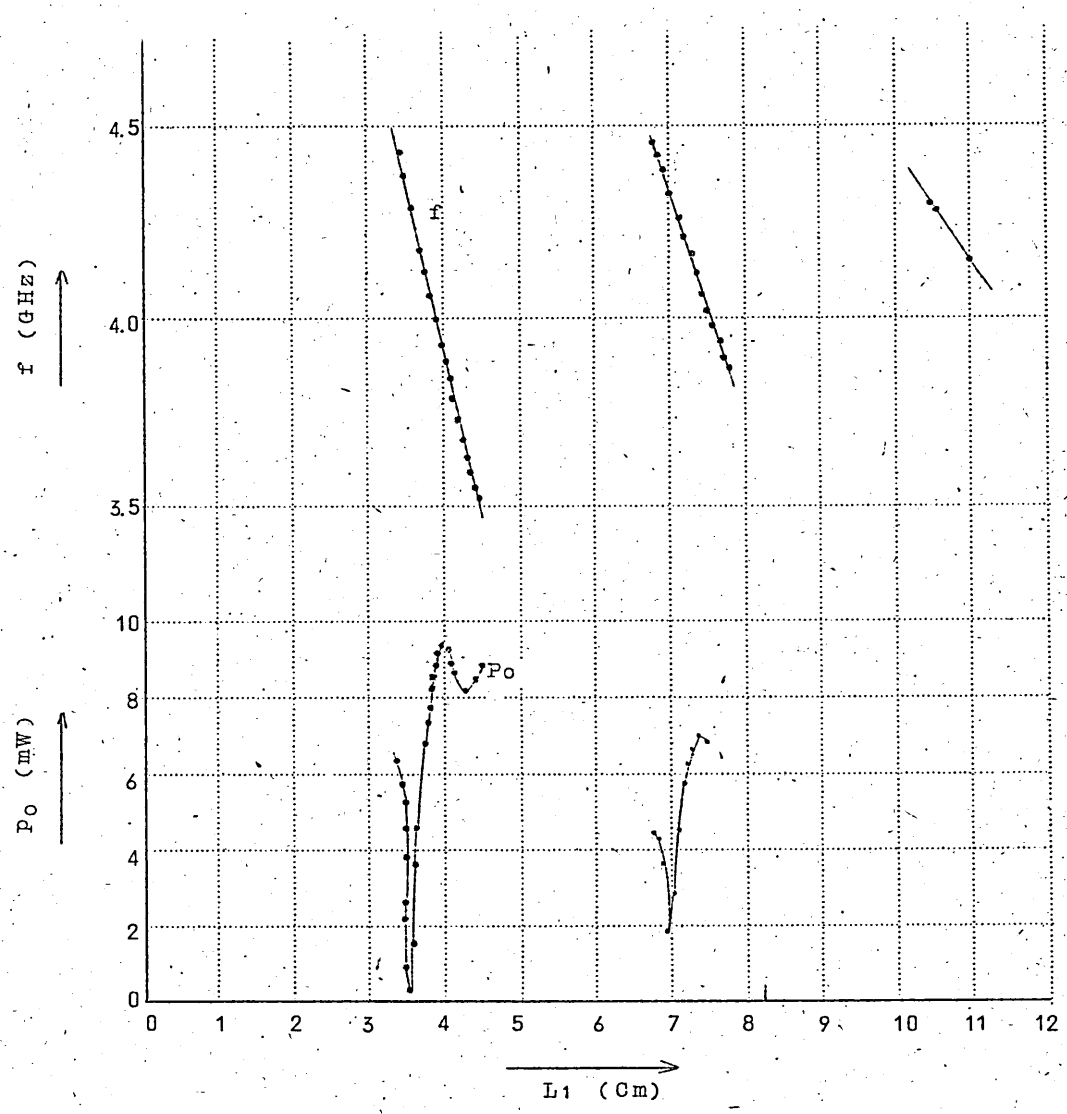


図 6. プランジャー位置と発振周波数
及び出力の関係

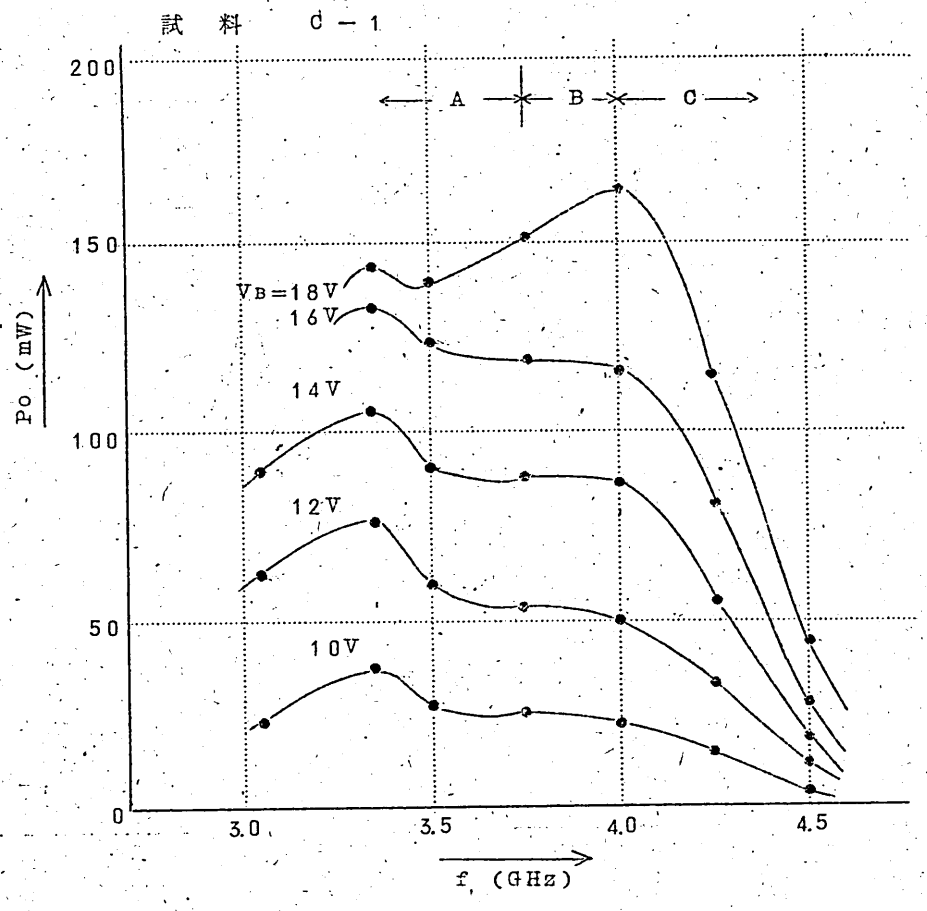


図 7　発振周波数と出力の関係

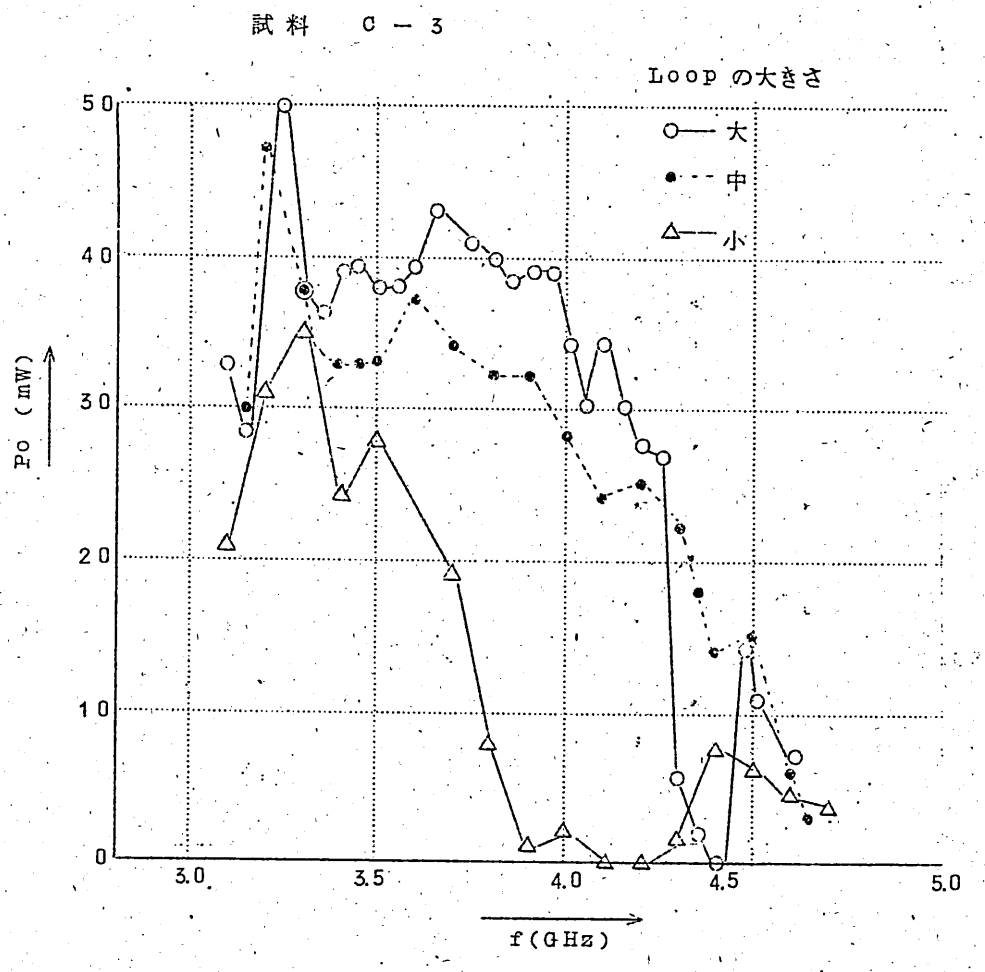


図 8　結合ループの大きさによる出力の影響

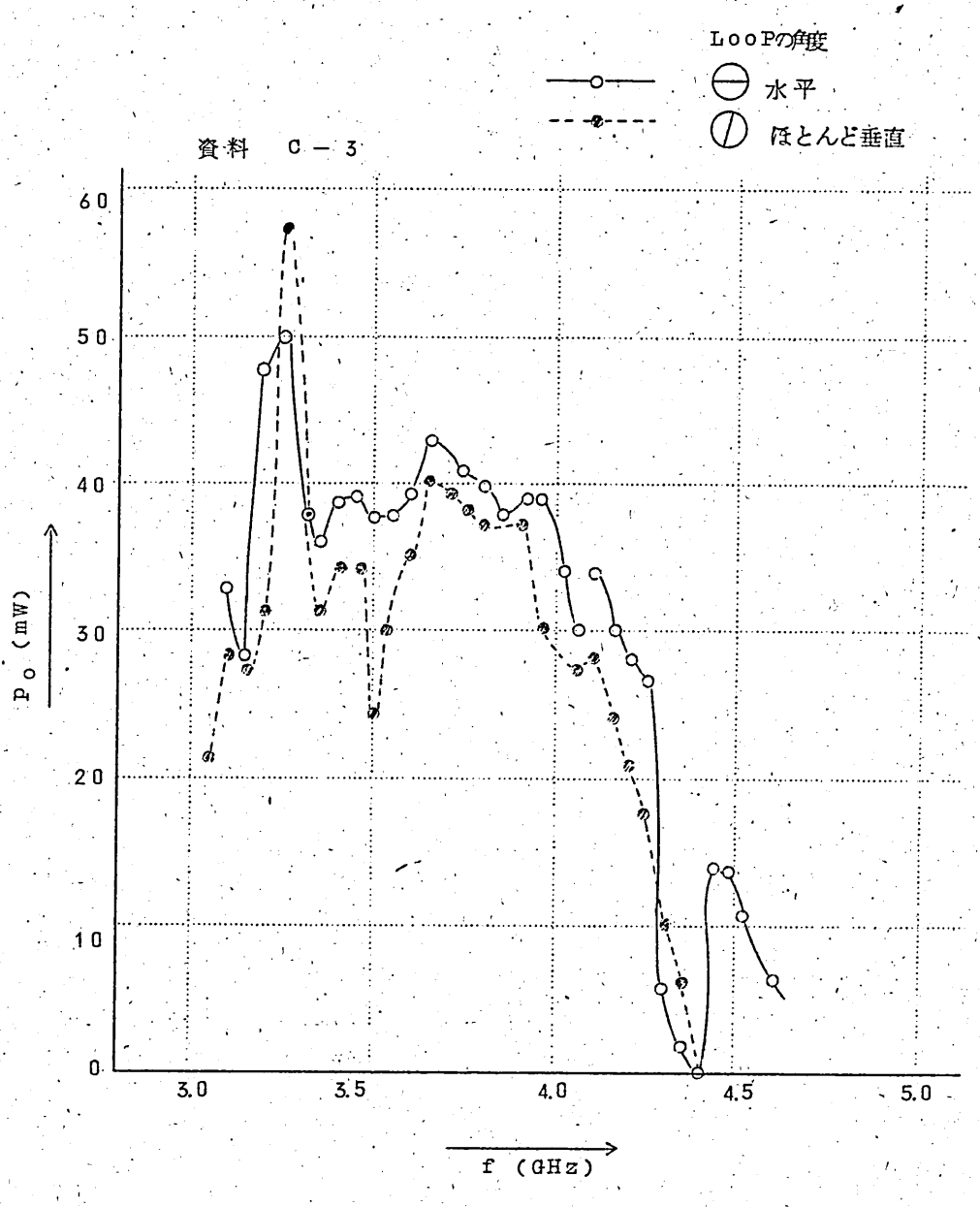


図 9　結合ループの角間の影響

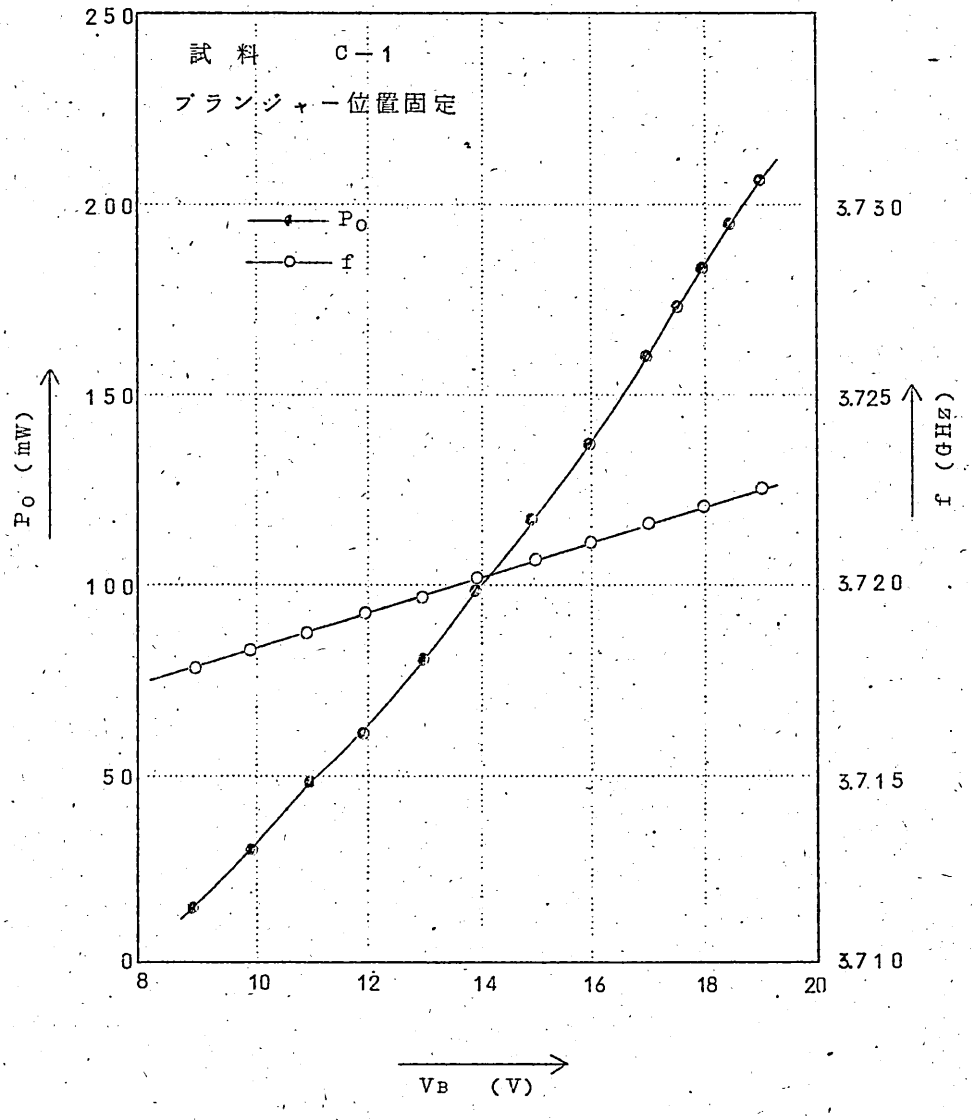


図　10　　バイアス・レベルに対する
出力と周波数の関係

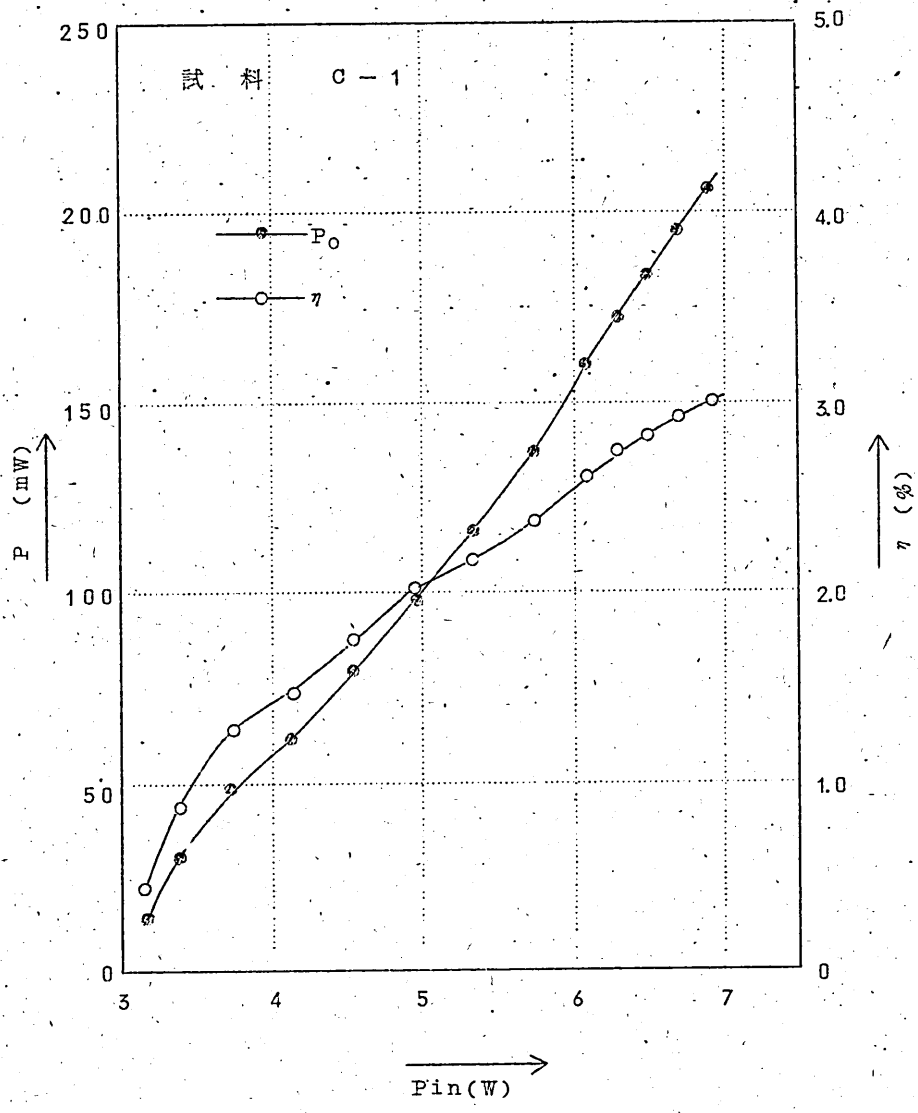


図 11 入力レベルに対する出力と
効率の関係

文　献

(1) J.B.Gunn : Solid State Comm.,Vol.1,PP.88–91(1963)

(2) J.B.Gunn : IBM journal,Vol.8,PP.141–159(1964)

(3) B.K.Ridley & T.B.Watkins : Proc.Phys.Soc,
Vol.78,P.293(1961).

(4) C.Hilsum : Proc.IRE,Vol.50,P.185 (1962)

(5) J.A.Copeland : J.Appl phys.,Vol.32,PP.3602–3609
(1966)

輻射科学研究会資料

球座標におけるベクトル波動函数

小倉久直
（京都大学工学部）

1967年 2月

目　次

§1　序　論 …… 3

§2　数学的準備 …… 4

§2·1　回転群と既約表現 …… 4

§2·2　ベクトル場、テンソル場、l- ベクトル場の Fourier 変換 …… 11

§2·3　球 Bessel 函数の加法定理 …… 14

§3　球 Bessel ベクトル函数と球 Hankel ベクトル函数 …… 17

§3·1　球 Bessel ベクトル函数 …… 17

§3·2　球 Hankel ベクトル函数 …… 18

§3·3　球 Bessel ベクトル函数の積分定理 …… 20

§4　ベクトル積分表示、テンソル積分表示 …… 21

§5　j'_{mn}、$h'^{(\nu)}_{mn}$ のテンソル型加法定理 …… 25

§6　球座標におけるベクトル波動方程式と波動函数 …… 28

§6·1　$\mathbb{J}_n^{ls}$、$\mathbb{H}_n^{(\nu)ls}$ のベクトル解析 …… 28

§6·2　Green's dyadic と delta dyadic …… 31

§6·3　$\mathbb{J}_n$ を J より構成すること …… 33

§7　2·3 の例題 …… 36

(1) 散乱又は輻射電磁波の電力 …… 36

(2) 球の自由振動 …… 37

(3) 偏極したベクトル平面波の球による散乱 …… 39

(4) 一様等方ベクトル乱場のスペクトル分解 …… 42

§8　他の文献の定義との関係 …… 43

附録　スカラー函数、ベクトル函数の定義公式対照表 …… 48
参考文献 …… 56

目　次

球座標におけるベクトル波動函数

§1 序　論

筆者は以前に一様等方スベクトル乱場（vector random field）のスペクトル分解を取扱い、又球 Bessel 函数の加法定理を導いたが[1)~4)]それらは一組の函数 $\{\overline{T^{l}_{sm}(g)}\, j^{l}_{mn}(kr)\}$ からなる系によって展開される。ここで $T^{l}_{sm}(g)$ は回転群の既約表現の行列要素であり又 $j^{l}_{mn}(kr)$ は、l 次の球 Bessel ベクトル函数と名付けるものである。これらの函数系はベクトル微分演算に対し一連の規則正しい変換性を示すが、実は本、球座標系におけるベクトル Helmholtz 方程式の解でもあり、その transverse, longitudinal 部分の分解をも与えることが示される。従来はベクトル波動方程式の解はスカラー波動函数からベクトル演算によってベクトル波動函数が構成されていたが、その為にベクトル波動函数が見易い形で表現されないきらいがあった。しかしながら球座標の場合には既に上の函数系によって解は知られてしまっており、又、回転群の表現行列について既に知られている多くの性質が自然に利用できる。したがってベクトル函数の諸性質、公式、応用が容易に導出、実行できる。この論文は上の函数系をもとに球 Hankel ベクトル函数 $h^{(\nu)l}_{mn}(kr)$ $(\nu=1.2)$ をも導入して、球座標におけるベクトル波動の解析を統一的に記述し将来の応用の便宜にも供しようとするものである。[5)6)]

§2 には、一部前報告[1)]と重複するが、以下で使用するための定義、諸公式を与える。§3 では、既に定義した球 Bessel ベクトル函数[1)5)6)]を与えると同時に新しく、球 Hankel ベクトル函数 $h^{(\nu)l}_{mn}(kr)$ の定義を行ない、又球 Bessel ベクトル函数の積分定理[1)]をも掲げる。§4 では球面ベクトル調和函数を導入し、ベクトル波動函数 $J_n\, H^{(\nu)}_n$ の積分表示、ベクトル平面波の展開式を与える。§5 では $j^{l}_{mn}(kr)$ の加法定理がテンソルの加法定理であるこ

とを示し、更に新しく、$h^{(\nu)1}_{mn}(kr)$ のテンソル型の加法定理を導く。§6では、ベクトル波動函数 Jn $Hn^{(\nu)}$ のベクトル解析の公式とそれらが波動方程式の解であることを示す。次いで自由空間の Green dyadic が実は $h^{(1)l}_{mn}(kr)$ の加法定理を3つ加えたものに他ならぬことを示し、更に delta dyadic の展開式をも与える。更にベクトル波動函数をスカラー波動函数より構成できることを示す。§7では既に知られている問題をここで導入した波動函数によってどの様に統一的に扱い得るかを2,3の例題によって示す。§8では他の文献またはテキストで使用されているベクトル函数と本論文で用いたものとの関係を明示した。附録においては、従来知られているスカラーの定義ならびに諸公式と本論文で導入した函数とそれらに関するベクトルの諸公式との対照表を与えた。これによって対応的にベクトル公式の理解の容易、応用の便宜を計ると同時に、本論文で導入した諸函数の定義の妥当性を一見出来る様にした。

§2 数学的準備

§2.1 回転群と既約表現

ここでは以下の議論に使用するために必要な定義ならびに性質を列挙する。* (1部文献1. より引用)

× 回転群の議論にあらわれる諸定義は、テキストによって異なるので注意が必要である。ここでは回転群に関しては文献7) の定義を主として用いたが、そこにあらわれる種々の特殊函数の定義たとえば $Y_l^m(\theta,\varphi)$, $P_l^m(\mu)$ 等の定義は、通常の定義と因子の差があるので、ここでは通常の定義[8]を用いている。尚文献7)には各所に trivial な誤まりがあるので訂正してある。

Euler角 ： 回転 $g=g(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ は3つの Euler角によって指定される。これは、Cartesian座標の基底ベクトル $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ に関し、$\mathbf{e}_z$ まわりの角 φ_1, $\mathbf{e}_x$まわりの角 θ, $\mathbf{e}_z$ まわりの角 φ_2の回転 g_{φ_1}, g_θ, g_{φ_2} をそれぞれ順に行なったものであって、対応する行列は、これらの行列の逆順の積であらわされる。

<u>固定カノニカル基底</u>： $\mathbf{e}_z$まわりの回転 g_φ に関するカノニカル基底を

$$\mathbf{e}_- = \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_+ = \frac{-\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \qquad (2\cdot1)$$

によって定義する。これらは g_φ の固有ベクトルでそれぞれ固有値 $e^{i\varphi}$ e^0 $e^{-i\varphi}$ をもつ。この論文では、(2.1) を<u>固定</u>カノニカル基底とよぶことにする。

固定カノニカル基底に関するベクトル成分は Cartesian 座標に関する成分と

$$a_- = \frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}} \qquad a_0 = a_z \qquad a_+ = \frac{-a_x + ia_y}{\sqrt{2}} \qquad (2\cdot2)$$

の関係にある。これをベクトルの固定カノニカル成分とよぶことにする。

<u>gの行列表示</u> ： 固定カノニカル基底 $\mathbf{e}_m$ $(m=-1,0,1)$ に関する回転 g の行列表示は次の様にあらわされる。

$$\|g\| = \|g_{\varphi_1}\| \cdot \|g_\theta\| \cdot \|g_{\varphi_2}\|$$

$$= \begin{Vmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-i\varphi_1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & -i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\cos\theta-1}{2} \\ -i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & -i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos\theta-1}{2} & -i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} e^{i\varphi_2} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-i\varphi_2} \end{Vmatrix} \qquad (2\cdot3)$$

行列要素 g_{mn} は行列 (2.3) において左から右に ($n=-1, 0, 1$) 上から下に ($m=-1, 0, 1$) の様に配列するものとする。

Weight l の固定カノニカル基底：$\mathbb{C}_x$, $\mathbb{C}_y$, $\mathbb{C}_z$ まわりの微小回転を A_1, A_2, A_3 とし、$H_K = iA_K$ ($K=1,2,3$) で定義される Hermite 演算子を用いて

$$H_- = H_1 - iH_2 \quad , \quad H_0 = H_3 \quad , \quad H_+ = H_1 + iH_2 \tag{2.4}$$

を定義する。任意の回転 g は A_K ($K=1,2,3$) で生成される。回転 g の既約な表現空間は $(2l+1)$ 次元 ($l=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$) であって H_0 の $(2l+1)$ 個の固有ベクトル f_m ($m=-l, -l+1, \cdots l$) をその基底にとることが出来る。これをその既約な表現空間の $\mathbb{C}_z$ まわりの回転に関する固定カノニカル基底とよび、l を表現の weight と呼ぶ。その時次の関係が成立つ。

$$\begin{aligned} H_- f_m &= \alpha_m f_{m-1} \\ H_0 f_m &= m f_m \\ H_+ f_m &= \alpha_{m+1} f_{m+1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

但し

$$\alpha_m = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \qquad m=-l, -l+1, \cdots, l \tag{2.6}$$

微分演算子 H_0, $H_\pm$：(2.4) で定義される H_0, $H_\pm$ は (2.5) によって表現空間の行列であるが、g 上の函数に対する微分演算子として次のようにも表現される。

$$\begin{aligned} H_- &= e^{i\varphi_2}\left(-\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\ H_0 &= i\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \\ H_+ &= e^{-i\varphi_2}\left(\cot\theta - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Weight ℓ の既約表現行列 ： (2·5) の固定カノニカル基底に関する既約なユニタリ表現行列な

$$\| T_g^{\ell} \| = \| T_{mn}^{\ell}(\varphi, \theta, \varphi_2) \| \quad (m, n = -\ell, \cdots, \ell) \tag{2·8}$$

但し

$$T_{mn}^{\ell}(\varphi, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_1} P_{mn}^{\ell}(\cos\theta)\, e^{in\varphi_2} \tag{2·9}$$

$$P_{mn}^{\ell}(\mu) = A(1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}}(1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}} \frac{d^{\ell-n}}{d\mu^{\ell-n}}\left[(1-\mu)^{\ell-n}(1+\mu)^{\ell+m}\right] \tag{2·10}$$

$$A \equiv \frac{(-1)^{\ell-m} i^{n-m}}{2^{\ell}(\ell-m)!}\sqrt{\frac{(\ell-m)!\,(\ell+n)!}{(\ell+m)!\,(\ell-n)!}} \tag{2·11}$$

で与えられる。T_{mn}^{ℓ} は次数 ℓ の一般球函数 (generalized spherical function) と呼ばれることがある。特に $\ell = 1$ の場合には (2·8) は (2·3) に一致する。

一般球函数 T_{mn}^{ℓ} の性質

(i) 特に ℓ が整数の時、n 又は m が 0 の場合には ℓ 次の球函数であらわされる。

$$T_{m0}^{\ell}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_{\ell}^{m}(\theta, \frac{\pi}{2} - \varphi_1) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, i^{m}\, \overline{Y_{\ell}^{m}(\theta, \varphi_1)} \tag{2·12}$$

$$P_{m0}^{\ell}(\mu) = (-i)^{m}\sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_{\ell}^{m}(\mu) \tag{2·13}$$

但し、Y_{ℓ}^{m}. P_{ℓ}^{m} の定義は (A.1) (A.2) で与えられる。

(ii) $P_{mn}^{\ell}(\mu) = P_{mn}^{\ell}(\mu)$, $P_{m-n}^{\ell}(\mu) = P_{mn}^{\ell}(\mu)$, $\overline{P_{mn}^{\ell}(\mu)} = (-1)^{m+n} P_{mn}^{\ell}(\mu)$

$$P_{mn}^{\ell}(-\mu) = (-1)^{\ell+m+n} P_{m-n}^{\ell}(\mu) \tag{2·14}$$

(iii) $$\sum_{n=-\ell}^{\ell} \left| P_{mn}^{\ell}(\cos\theta) \right|^2 = 1 \tag{2·15}$$

(iv) $$\int_0^{\pi} \left| P_{mn}^{\ell}(\cos\theta) \right|^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2\ell+1} \tag{2·16}$$

(iv) $$\int_0^{\pi} \left| P_{mn}^{\ell}(\cos\theta) \right|^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{2\ell+1} \qquad (2.16)$$

特にこれは次の様にあらわされる。

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{T_{m'n'}^{\ell'}(\varphi_1\theta\varphi_2)}\, T_{mn}^{\ell}(\varphi_1\theta\varphi_2) \sin\theta \, d\varphi_1 d\theta d\varphi_2 = \frac{8\pi^2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta_{nn'} \qquad (2.17)$$

(v) T_{mn}^{ℓ} は g の表現行列であるから、g の乗法則に対応し

$$T_{mn}^{\ell}(g_2^{-1}g_1) = \sum_{s=-\ell} \overline{T_{sm}^{\ell}(g_2)}\, T_{sn}^{\ell}(g_1) \qquad (2.18)$$

が成立する。但しここで T_{mn}^{ℓ} のユニタリ性を用いた。(2.18) は一般球函数の加法定理に他ならず、通常の球函数の加法定理 (A.12) は特別の場合として含まれている。

(vi) T_{mn}^{ℓ} $(n=-\ell\cdots\ell)$ は weiglit ℓ の $(2\ell+1)$ ケのカノニカル基底になっており、(2.7) の微分演算子を作用させる時 (2.5) に対応して

$$\begin{aligned} H_- T_{mn}^{\ell} &= \alpha_n T_{mn-1}^{\ell} \\ H_0 T_{mn}^{\ell} &= n T_{mn}^{\ell} \qquad (n=-\ell\cdots\ell) \\ H_+ T_{mn}^{\ell} &= \alpha_{n+1} T_{mn+1}^{\ell} \end{aligned} \qquad (2.19)$$

が成立する。

群上の函数 ： 回転群 g の全体を G と記す。G 上の函数 $f(g) = f(\varphi_1\theta\varphi_2)$ を考え、G 上の不変積分を

$$\int_G f(g)dg \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\pi} f(\varphi_1\theta\varphi_2)\sin\theta \, d\theta \qquad (2.20)$$

によって定義する。不変積分は次の性質を持つ

$$\int_G f(g)\,dg = \int f(gg_0)\,dg = \int f(g_0 g)\,dg = \int f(g^{-1})\,dg \qquad (2.21)$$

この積分によって $|f(g)|^2$ が可積分な函数全体を $L^2(G)$ と記す。その時 $L^2(G)$ は

$$\langle f_1, f_2\rangle_G \equiv \int_G \overline{f_1(g)}\, f_2(g)\,dg \qquad (2.22)$$

を内積として一つの Hilbert 空間になる。

一般球函数 $T^l_{mn}(g)$ ($l=0,1,2,\cdots$, $m,n=-l,\cdots,l$) の全体は $L_2(G)$ における完全直交系を作る。((2·17) 参照)

可動カノニカル基底 (movable canonical basis) : (2·1)~(2·5) で定義した固定カノニカル基底は e_z まわりの回転に関するカノニカル基底であっていわば球面上の北極に固定した基底である。これに対して、任意方向の基底ベクトル e_r のまわりの回転に関するカノニカル基底およびそれに関するベクトル成分を考えることが出来る。本論文ではこれらを可動カノニカル基底、可動カノニカル成分又は単にカノニカル基底、カノニカル成分とよんで前者と区別する。

球面 S_3 上の矢 e_r の極座標を $e_r = (\cos\varphi \sin\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta)$ とする。固定カノニカル基底からカノニカル基底へは回転 $g(\varphi+\frac{\pi}{2},\ \theta,\ \varphi_2)$ によって移ることが出来る。即ち新しいカノニカル基底は

$$e_- = \frac{e_\varphi + i e_\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_2},\quad e_0 = e_r,\quad e_+ = \frac{-e_\varphi + i e_\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi_2} \qquad (2.23)$$

ベクトルの対応するカノニカル成分は

$$a_- = \frac{a_\varphi - i a_\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi_2},\quad a_0 = a_r,\quad a_+ = \frac{-a_\varphi - i a_\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_2} \qquad (2.24)$$

で与えられる。

同様に weight ν の可動カノニカル基底 f_m を e_r のまわりの回

転に関して定義することが出来る。

反変成分、共変成分 ： 上に定義したベクトルaの(固定)カノニカル成分 a_m $(m=-1.0.1)$ に対し

$$a^m = \sum_n \varepsilon^{mn} a_n \qquad (m,n=-1,0,1) \qquad (2.25)$$

但し $$\varepsilon^{mn} = (-1)^m \delta_{m,-n} \qquad (2.26)$$

なる数は一つのベクトルを定義する。これをはじめの反変成分 a_m に対し共変成分と名付ける。反変成分は回転 g によって

$$a'_m = \sum g_{mn} a_n \qquad (2.27)$$

のように変換されるが共変成分は

$$a^m = \sum \overline{g_{mn}} a^n \qquad (2.28)$$

のように複素共役な行列 $\|\overline{g}\|$ による変換をうける。

上の定義はベクトルaが実ベクトル(実座標系で実数の成分をもつベクトル)に対して成立するがaが複素ベクトル(実座標系でも複素数成分をもつベクトル)に対しては、複素共役ベクトル$\bar{a}$の共変成分として

$$a^m = \bar{a}_m \qquad (m=-1.0.1) \qquad (2.29)$$

を定義するのが適当である。実ベクトルの場合には (2.29)は(2.25)の定義と一致する。

混合テンソル ： (2.25)又は (2.29) による添数の上下によって一般に混合テンソル成分を取扱うことができる。回転 g によってそれらは

$$a'^{\alpha'\beta'\cdots}_{m'n'\cdots} = \sum_{mn\cdots}\cdots\sum_{\alpha,\beta\cdots} g_{m'm} g_{n'n} \cdots \overline{g}_{\alpha'\alpha}\, \overline{g}_{\beta'\beta} \cdots a^{\alpha\beta\cdots}_{ij\cdots} \qquad (2.30)$$

のように変換される。

テンソルの縮約：混合テンソル $a_{m\cdots}^{\alpha\cdots}$ において上下の添数の対について和をとったものは、その添数に関してスカラーのように変換される。これを通常のテンソル算における同様縮約とよぶことにする。例えば

$$\sum_{m=-1}^{1} a^m b_m = \sum_{m=-1}^{1} \bar{a}_m b_m = \bar{a}_x b_x + \bar{a}_y b_y + \bar{a}_z b_z \qquad (2.31)$$

一般にカノニカル成分で記述されたベクトル a, b の内積は (2.31) によって計算出来る。

§2.2 ベクトル場、テンソル場、l-ベクトル場の Fourier 変換

必要な定義ならびに前回の報告[1]で得た主要な結果のみをのべる。

ベクトル場、テンソル場、l-ベクトル場：

ベクトル場 $f_n(x)$ に回転 g を行なった時、えられる新しいベクトル場 $f_n'(x)$ は

$$f_m'(x) = \sum_n g_{mn} f_n(gx^{-1}) \qquad (2.32)$$

によって与えられる。（逆に座標系に回転 g を行なう時にはベクトルの成分は g^{-1} による変換をうける）

テンソル場 $f_{mn\cdots}^{\alpha\beta\cdots}(x)$ に回転 g を行なう時は次の様に変換される。

$$f_{mn\cdots}'^{\alpha\beta\cdots}(x) = \sum_{mn\cdots}\sum_{\alpha\beta\cdots} g_{m'm} g_{n'n} \cdots \overline{g_{\alpha'\alpha}}\, \overline{g_{\beta'\beta}} \cdots f_{mn\cdots}^{\alpha\beta\cdots}(g^{-1}x) \qquad (2.33)$$

回転 g にさいし $(2l+1)$ ケの成分が行列 $T_{mn}^{l}(g)$ による変換をうける量を本論文では l-ベクトルと名付ける。（既約テンソル[9]、quantity[7] 等と呼ばれることがある）。l-ベクトル場 $f_m^{(l)}(x)$ $(m=-l\cdots l)$ は回転 g によって

$$f'^{(\ell)}_m(x) = \sum_{n=-\ell}^{\ell} T^{\ell}_{mn}(g)\, f^{(\ell)}_n(g^{-1}x) \qquad (2\cdot34)$$

のように変換される。(2·32) は $\ell=1$ の場合である。(2·33) はテンソルを既約分解することによりいくつかの ℓ-ベクトル場の和に分解することができる。

等方ベクトル場、等方テンソル場、等方 ℓ-ベクトル場：場の成分が任意の回転 g によって不変な時、即わち (2·32)(2·33)(2·34) が

$$f'_m(x) = f_m(x) \qquad (2\cdot35)$$

$$f'^{\alpha\beta\cdots}_{mn\cdots}(x) = f^{\alpha\beta\cdots}_{mn\cdots}(x) \qquad (2\cdot36)$$

$$f'^{(\ell)}_m(x) = f^{(\ell)}_m(x) \qquad (2\cdot37)$$

である時、本論文ではそれらを等方 (isotropic) な場であると呼ぶ。

等方な場に関しては次の事が云える。[1]

補題 1：等方な ℓ-ベクトル場は可動力ノニカル成分で書く時、それは (2·5) の $m=0$ の基底に対応する成分のみをもち、その成分は r のみの函数である。

補題 2：任意の高階の等方テンソル場は、それを既約な ℓ-ベクトル場に分解したとき、それらのカノニカル成分は $m=0$ に対応する成分のみをもち、それらは r のみの函数である。

補題 2′：任意の高階の等方テンソル場は、それを力ノニカル基底ベクトル (2·23) の直積基底 $\mathbb{C}_m \mathbb{C}_n \cdots \mathbb{C}_p$ に関する成分で書くとき $m+n+\cdots+p=0$ に対応する成分のみをもち、かつそれらは r のみの函数である。

特に 2 階の等方な混合テンソル場 $f^{\alpha}_{\beta}(x)$ は 2 つの添字に関し対角である。

ベクトル場、テンソル場、ℓ-ベクトル場の Fourier 変換：

カノニカル成分で記述された場合、これらの場の Fourier 変換は (2·32)～(2·34) によって次のように書きあらわされる。[1]

$$f_m(x) = \sum_n \int_{R_3} g_{mn}(x^{-1}y)\, F_m(y)\, e^{2\pi i (x.y)} dy \qquad (2\cdot38)$$

$$f^{\alpha'\beta'\cdots}_{m'n'\cdots}(x) = \sum_{mn\cdots}\sum_{\alpha\beta\cdots} \int_{R_3} g_{m'm} g_{n'n} \cdots \bar{g}_{\alpha'\alpha}\, \bar{g}_{\beta'\beta} \cdots (x^{-1}y)\, F^{\alpha\beta\cdots}_{mn\cdots}(y)\, e^{2\pi i(x.y)} dy \qquad (2\cdot39)$$

$$f^{(l)}_m(x) = \sum_n \int_{R_3} T^l_{mn}(x^{-1}y)\, F^{(l)}_n(y)\, e^{2\pi i(x\cdot y)} dy \qquad (2\cdot40)$$

但し、$\| g(x^{-1}y) \| \equiv \| g_x^{-1} \| \| g_y \|$ (2·41)

$$\| T^l(x^{-1}y) \| \equiv \| T^l(g_x^{-1}) \| \cdot \| T^l(g_y) \| \qquad (2\cdot42)$$

の意味であり、g_x は $\vec{x}$ におけるカノニカル基底を固定カノニカル基底の回転 g_x によって定義するものである。

<u>等方 l ベクトル場、等方テンソル場の Fourier 変換</u>　これらについて次の事が証明される。[1]

<u>補題 3</u>：等方な l-ベクトル場のカノニカル成分を補題 1 によって $F_0^{(l)}(t)$ とする。等方な l ベクトル場の Fourier 変換 (2·40) は再び等方な l-ベクトル場であって、その $m=0$ のカノニカル成分は Hankel 変換

$$f_0^{(l)}(r) = 4\pi i^l \int_0^\infty F_0^{(l)}(t)\, j_l(2\pi t r)\, t^2 dt \qquad (2\cdot43)$$

によって与えられ、又次の反転公式

$$F_0^{(l)}(t) = 4\pi(-i)^l \int_0^\infty f_0^{(l)}(r)\, j_l(2\pi t r)\, r^2 dr \qquad (2\cdot44)$$

が成立する。

一般の高階等方テンソル場を l-ベクトル場に分解すれば、補題

2によって各成分の間に (2.43)(2.44) が成立つ。

補題4 : 補題2により等方な2階混合テンソル場のカノニカル成分を $F^n_n(t)$ $n=-1.0.1$ とする。その時そのFourier変換 (2.39) は再び等方な2階混合テンソル場であって、そのカノニカル成分 $f^m_m(r)$ $m=-1.0.1$ は、次のベクトルHankel変換

$$f^m_m(r) = 4\pi \sum_{n=-1}^{1} \int_0^\infty j^1_{mn}(2\pi tr)\, F^n_n(t)\, t^2 dt \qquad (2.45)$$

で与えられ、又次の反転公式

$$F^n_n(t) = 4\pi \sum_{m=-1}^{1} \int_0^\infty \overline{j^1_{mn}(2\pi tr)}\, f^m_m(r)\, r^2 dr \qquad (2.46)$$

が成立する。$j^1_{mn}(2\pi tr)$ は後に (3.1) で定義される1次の球Bessel ベクトル函数である。(2.45)(2.46)は後に与える定理3 (3.17)(3.18)の特別な場合である。

§2.3 球Bessel函数の加法定理[1)5)]

3次元Enclid空間 R_3 における運動 o_f は平行移動 $\mathbf{r}$ と回転 g からなる。$o_f \equiv (\mathbf{r}, g)$ を3次元Enclid運動群又は非斉次回転群とよぶ。o_f の乗法則は

$$o_f = o_{f_2}\, o_{f_1} = (\mathbf{r}_2, g_2)(\mathbf{r}_1, g_1) = (\mathbf{r}_2 + g_2\mathbf{r}_1,\ g_2 g_1) \qquad (2.47)$$

で与えられる。$L^2(G)$ の函数 $f(g)$ に対し、ユニタリ作用素 T_{o_f} を

$$(T_{o_f} f)(g_0) = e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} f(g^{-1} g_0) \qquad (2.48)$$

により定義する。但し、$\mathbf{K} \equiv k g_0 \mathbf{e}_z$。この時対応 $o_f \to T_{o_f}$ は、3次元Euclid運動群 o_f の $L^2(G)$ における表現になっていることが示される。完全直交系 $\{T^l_{mn}\}$ を用いて T_{o_f} の表現行列を求めることが出来るが、特に o_f の乗法則 (2.47) をこの表現行列によっ

て書き下すことにより次の様な球 Bessel 函数の加法定理がえられる。これは Vilenkin の2次元 Euclid 運動群の表現論[10]の3次元への拡張である。

定理1 ℓ 次の球 Bessel 函数に対して次の加法定理が成立する。

$$(-1)^{\ell} j_{\ell}(kr)\, Y_{\ell}^{m}(\psi,\varphi)=\sum_{\ell'=0}^{\infty}\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}\;\overline{j_{m0}^{\ell'\ell}(kr_1)}\, j_{\ell'}(kr_2)\, Y_{\ell'}^{m}(\theta_{12},\varphi) \qquad (m=-\ell,-\ell+1,\cdots\ell) \qquad (2.48)$$

但し

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2,\qquad r=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta_{12}}$$

であって ψ は $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}_1$ とのなす角である。又 $j_{mn}^{\ell\ell'}$ は後に (2.51) で定義される函数であって、$j_{m0}^{\ell\ell'}$ は Clebsch-Gordan 係数を用いれば

$$j_{m0}^{\ell'\ell}(kr)=(-1)^{m} i^{\ell-\ell'}\sum_{L} i^{L}(\ell'0\,\ell0\,|\,\ell\ell'L0)(\ell-m\,\ell'm\,|\,\ell\ell'L0)\, j_{L}(kr) \qquad (2.49)$$

の様にあらわに与えられる。特に $\ell=0$, $m=0$ の場合には既知の $j_0(kr)$ の加法定理 (A.14) に帰着する。

(2.48) は $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ の2矢が対等に扱われていないが、次の加法定理では2矢が対等な立場であらわれる。

定理2 対称な加法定理

$$\sum_{S=-L}^{L} T_{m_1S}^{\ell_1}(g_{01}^{-1})\,\overline{T_{m_2S}^{\ell_2}(g_{02}^{-1})}\, j_{Sn}^{\ell_2\ell_1}(kr) = \sum_{\ell=|n|}^{\infty}(2\ell+1)\, j_{m_1n}^{\ell\ell_1}(kr_1)\,\overline{j_{m_2n}^{\ell\ell_2}(kr_2)}\,\overline{T_{m_2m_1}^{\ell}(g_{21})} \qquad (2.50)$$

但し、$g_{01}=g_{02}g_{21}$ であって、g_{01}, g_{02} は Γ_1, Γ_2 の向きを Γ からの回転により指定するものであって Γ_1, Γ_2, Γ_3 のなす三角形の角度はそれぞれの第2 Euler 角に等しい。又

$$j_{mn}^{ll'}(kr) \equiv \frac{1}{8\pi^2 i^{l-l'}} \int_G \overline{T_{mn}^{l}(g)}\, T_{mn}^{l'}(g)\, e^{ikr\cos\theta}\, dg \qquad (2.51)$$

とおく。積分は $\varphi_1\ \varphi_2$ はあらわれないので θ に関する積分である。

系1 特に $l_1 = l_2 = 1$ の時は

$$\sum_{s=-1}^{1} T_{m_1 s}^{1}(g_{01}^{-1})\, \overline{T_{m_2 s}^{1}(g_{02}^{-1})}\, j_{sn}^{1}(kr)$$

$$= \sum_{l=|n|}^{\infty} (2l+1)\, j_{m_1 n}^{l}(kr_1)\, \overline{j_{m_2 n}^{l}(kr_2)}\, \overline{T_{m_2 m_1}^{l}(g_{21})} \qquad (2.52)$$

$$m_1,\ m_2,\ n = -1.\ 0.\ 1$$

但し

$$j_{mn}^{l}(kr) \equiv j_{mn}^{l_1}(kr) \qquad (2.53)$$

は後に l 次の球 Bessel ベクトル函数の (m,n) 成分と呼ぶものである。この函数の形は (3.3) で与えられる。

系2 特に $l_1 = l_2 = 0$ の時に既知の $j_0(kr)$ の加法定理に帰着する。(2.51) において $g_{21} = g_2^{-1} g_1$ とおき、T_{mn}^{l} の加法定理 (2.18) を用いるならば、更に次のように書き直される。

$$\sum_{s=-1}^{1} \overline{T_{sm_1}^{1}(g_{01})}\, T_{sm_2}^{1}(g_{02})\, j_{sn}^{1}(kr)$$

$$= \sum_{l=|n|}^{\infty} \sum_{t=-l}^{l} (2l+1)\, j_{m_1 n}^{l}(kr_1)\, \overline{j_{m_2 n}^{l}(kr_2)}\, \overline{T_{tm_1}^{l}(g_1)}\, T_{tm_2}^{l}(g_2) \qquad (2.54)$$

但しここでユニタリ性を用いた。(2.5.4) の加法定理の別証を §5 で与える。

以上の加法定理の幾何学的意味は既に文献1で述べた。

(註) 上の公式において Euler 角 $g = (\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ と球座標 (θ, φ) との対応は (2.23) で述べたように

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\pi}{2} \quad , \quad \theta' = \theta \qquad (2.55)$$

によって与えられる。オ3の Euler 角 φ_2 は任意であって、$\mathbf{e}_r$ のまわりの回転に関するカノニカル基底の位相を指定するものである。従がって、$\varphi_2 = 0$ としても一般性は失われない。尚以下で g の函数を球面上の函数と見る場合には上の対応によって定めるものとする。

§3 球 Bessel ベクトル函数[1)5)]

(2·53)(2·51) により球 Bessel ベクトル函数を次式で定義する。

$$j^{\ell}_{mn}(kr) = \frac{1}{4\pi i^{\ell-1}} \int_{S_3} \overline{T^{\ell}_{mn}(g)}\, T'_{mn}(g)\, e^{ikr\cos u}\, d\omega \qquad (3\cdot1)$$

$$\ell = 0, 1, 2 \cdots, \quad m, n = -1, 0, 1$$

但し

$$d\omega = dv \sin u\, du \qquad (3\cdot2)$$

は単位球 S_3 上の面積要素である。(3·1) を ℓ 次の球 Bessel ベクトル函数のオ (m,n) 成分と呼ぶ。名称の妥当性は §4 以降で明らかにされる。(3·1) の積分は、被積分函数にあらわれる表現行列 $T^{\ell}_{mn}(g)$ の積を既約分解することにより容易に求められる。[1)] 結果は球 Bessel 函数 $j_\ell(kr)$ の線型結合として次の様にあらわされる。$k = 1$ とおく。

$$\left.\begin{aligned}
j^{\ell}_{00}(r) &= \frac{1}{(2\ell+1)}\left[\ell j_{\ell-1} - (\ell+1) j_{\ell+1}\right] = \frac{dj_\ell}{dr} \\
j^{\ell}_{01}(r) &= \frac{1}{(2\ell+1)}\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\left[j_{\ell-1} + j_{\ell+1}\right] = \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\,\frac{j_\ell}{r} \\
j^{\ell}_{1\pm1}(r) &= \frac{1}{2(2\ell+1)}\left[(\ell+1) j_{\ell-1} - \ell j_{\ell+1}\right] \pm \frac{i}{2} j_\ell \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r j_\ell) \pm i j_\ell\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot3)$$

但しこれらは次の性質をもつ。

$$j^{\ell}_{mn}(r) = j^{\ell}_{mn}(r), \quad j^{\ell}_{mn}(r) = j^{\ell}_{-m-n}(r) \tag{3·4}$$

$$\overline{j^{\ell}_{mn}(r)} = j^{\ell}_{-mn}(r) \tag{3·5}$$

特に $$\sum_{m=-1}^{1} j^{1}_{mn}(r) = j_0(r) \qquad (n=-1,0,1) \tag{3·6}$$

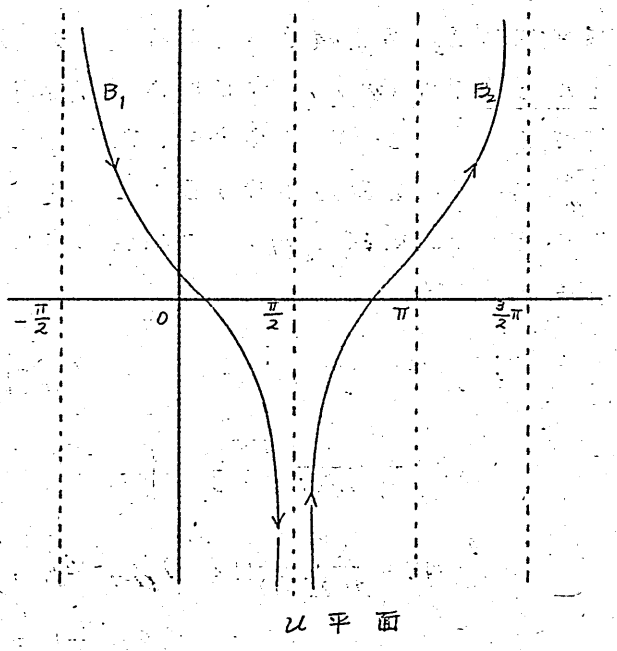
§3·2 球Hankelベクトル函数[5)6)]

第1種又は第2種の球Hankelベクトル函数を次式によって定義する。

$$h^{(\nu)\ell}_{mn}(kr) = \frac{1}{4\pi i^{\ell-1}} \int_0^{2\pi} d\nu \int_{B_\nu} \overline{T^{\ell}_{mn}(\vartheta)}\, T^{1}_{mn}(\vartheta)\, e^{ikr\cos u} \sin u\, du \tag{3·7}$$

$$\nu = 1,2; \quad \ell = 0,1,2\cdots, \quad m,n = -1,0,1$$

但し B_ν $(\nu=1,2)$ は複素 u 面上の積分路であって、$Re(kr) > 0$ に対し B_1 は $i\infty - \varepsilon \to -i\infty + \varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$、$B_2$ は $-i\infty + \pi - \varepsilon \longrightarrow i\infty + \pi + \varepsilon$ に至る積分路である。積分路を 2π の整数倍左右に移動したものは同等な積分路である。T^{ℓ}_{mn} の積の分解式を使うならば、各項は (3·1) の場合と同様であって、結果は (3·3) ～ (3·4) において $j_\ell(r)$ を $h^{(\nu)}_\ell(r)$ に置きかえたものとなる。即わち、



$$
\left.
\begin{aligned}
h_{00}^{(\nu)\ell}(r) &= \frac{1}{(2\ell+1)}\left[\ell\, h_{\ell-1}^{(\nu)} - (\ell+1)\, h_{\ell+1}^{(\nu)}\right] = \frac{dh_\ell^{(\nu)}}{dr} \\
h_{01}^{(\nu)\ell}(r) &= \frac{1}{(2\ell+1)}\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\left[h_{\ell-1}^{(\nu)} + h_{\ell+1}^{(\nu)}\right] = \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\,\frac{h_\ell^{(\nu)}}{r} \\
h_{1\pm1}^{(\nu)\ell}(r) &= \frac{1}{2(2\ell+1)}\left[(\ell+1)\, h_{\ell-1}^{(\nu)} - \ell\, h_{\ell+1}^{(\nu)}\right] \pm \frac{i}{2} h_\ell^{(\nu)} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r h_\ell^{(\nu)}) \pm i h_\ell^{(\nu)}\right]
\end{aligned}
\right\} \quad (3\cdot8)
$$

但し，これらは次の性質をもつ。

$$
h_{mn}^{(\nu)\ell}(r) = h_{-nm}^{(\nu)\ell}(r), \quad h_{mn}^{(\nu)\ell}(r) = h_{-m-n}^{(\nu)\ell}(r) \qquad (3\cdot9)
$$

$$
\overline{h_{mn}^{(1)\ell}(r)} = h_{-mn}^{(2)\ell}(r) \qquad (3\cdot10)
$$

(3·10) は (3·6) に対応するもので，(3·7) を用いるか，あるいは (3·8) より直接に示される。

特に，

$$
\sum_{m=-1}^{1} h_{mn}^{(\nu)1}(r) = h_0^{(\nu)}(r) \qquad \nu = 1.2 \ ; \ n = -1.\ 0.\ 1 \qquad (3\cdot11)
$$

但し

$$
h_0^{(1)}(r) = \frac{e^{ir}}{ir}, \qquad h_0^{(2)}(r) = -\frac{e^{-ir}}{ir} \qquad (3\cdot12)
$$

又明らかに

$$
\frac{1}{2}\left(h_{mn}^{(1)\ell}(r) + h_{mn}^{(2)\ell}(r)\right) = j_{mn}^{\ell}(r) \qquad (3\cdot13)
$$

同様にして第2種球 Bessel 函数 $n_\ell(r)$ に対応する第2種球 Bessel ベクトル函数 $n_{mn}^{\ell}(r)$ の定義

$$
\frac{1}{2i}\left(h_{mn}^{(1)\ell}(r) - h_{mn}^{(2)\ell}(r)\right) = n_{mn}^{\ell}(r) \qquad (3\cdot14)
$$

ならびに諸性質も得られる。

§3·3 球 Bessel ベクトル函数 $j^{\ell}_{mn}(r)$ の積分定理[1)5)]

球 Bessel 函数 $j_\ell(r)$ の積分定理 (A·4)に対応して、次の $j^{\ell}_{mn}(r)$ の積分定理が成立する。これは(3·3) を用いて直接証明される。

定理 3 Hankel 変換 (A·5) が存在するような $F(t)$ に対して次の積分定理

$$(4\pi)^2 \sum_{m=-1}^{1} \int_0^\infty \int_0^\infty F(t') \overline{j^{\ell}_{mn}(2\pi t r)}\, j^{\ell}_{mn'}(2\pi t' r)\, t'^2 dt' r^2 dr = \delta_{nn'} F(t) \tag{3·15}$$

が成立する。あるいは記号的に直交関係として

$$(4\pi)^2 \sum_{m=-1}^{1} \int_0^\infty \overline{j^{\ell}_{mn}(2\pi t r)}\, j^{\ell}_{mn'}(2\pi t r)\, r^2 dr = \delta_{nn'} \frac{\delta(t-t')}{t^2} \tag{3·16}$$

上の定理は次の様にも表現出来る。これは(A·5)に対応するものである。

定理 3' ベクトル Hankel 変換 : ベクトル函数 $\{F_n(t),\ n=-1,0,1\}$ に対する ℓ 次のベクトル Hankel 変換を

$$f_m(r) = 4\pi \sum_{n=-1}^{1} \int_0^\infty j^{\ell}_{mn}(2\pi t r)\, F_n(t)\, t^2 dt \quad (m=-1,0,1) \tag{3·17}$$

によって定義する。しかるとき、次の反転公式が成立する。

$$F_n(t) = 4\pi \sum_{m=-1}^{1} \int_0^\infty \overline{j^{\ell}_{mn}(2\pi t r)}\, f_m(r)\, r^2 dr \quad (n=-1,0,1) \tag{3·18}$$

§4 ベクトル積分表示．テンソル積分表示

（3·1）および（3·7）自身、$j^{l}_{mn}(r)$, $h^{(\nu)l}_{mn}(r)$ の積分表示を与えているが、この積分は、§2.2で述べたようなベクトル又はテンソル場の Fourier 変換という幾何学的意味を有する。したがって或座標系に関する成分で記述する代りに抽象的にベクトル又はテンソル記号で表現すると見透しがよくなる。

球面ベクトル調和函数（Spherical Vector Harmonics）：才n（反変）カノニカル成分のみを有するベクトル函数 $\mathbb{P}_n^{ls}(\theta,\varphi)$を次式で定義する。

$$\mathbb{P}_n^{ls}(\theta,\varphi)=\left\{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\delta_{nm}\,\overline{T^{l}_{sm}(g)},\quad m=-1,0,1\right\} \tag{4·1}$$

$$n=-1,0,1,\quad l=0,1,2\cdots,\quad s=-l,\cdots,l$$

名称の妥当性は以下で明らかにされる。

明らかにベクトル $\overline{\mathbb{P}_n^{ls}}$ は $\mathbb{P}_{n'}^{l's'}$ と $n\neq n'$ の場合に直交する。即わち（2·31）によるベクトル内積の意味で

$$(\mathbb{P}_n^{ls}\cdot\mathbb{P}_{n'}^{l's'})=0 \qquad n\neq n' \tag{4·2}$$

が成立する。更に（2·17）（2·9）によれば

$$\int_{S_3}(\mathbb{P}_n^{ls}\cdot\mathbb{P}_{n'}^{ls})\,d\omega=\delta_{nn'}\,\delta_{ll'}\,\delta_{ss'} \tag{4·3}$$

が成立する。但し、$d\omega$ は球面上の面積要素（3·2）である。(4·3)は球面ベクトル調和函数 $\mathbb{P}_n^{ls}$の規格直交性を意味する。更に T^{l}_{sm}が $m=-1,0,1$ に対応する部分空間における完全直交系であることから$\mathbb{P}_n^{ls}$はベクトル函数の空間における完全系をなす。

立体ベクトル調和函数系

$\mathbb{J}_n^{\ell s}$, $\mathbb{H}_n^{\ell s}$ ： 複素ベクトル函数 $\mathbb{J}_n^{\ell s}(kr\theta\varphi)$, $\mathbb{H}_n^{\ell s}(kr\theta\varphi)$ を次式で定義する。但し m は才 m（反変）カノニカル成分を意味する。

$$\mathbb{J}_n^{\ell s}(kr\theta\varphi)=\left\{\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\overline{T_{sm}^{\ell}(g)}\,j_{mn}^{\ell}(kr),\ m=-1,0,1\right\} \quad (4.4)$$

$$\mathbb{H}_n^{(\nu)\ell s}(kr\theta\varphi)=\left\{\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\overline{T_{sm}^{\ell}(g)}\,h_{mn}^{(\nu)\ell}(kr),\ m=-1,0,1\right\} \quad (4.5)$$

$$\nu=1,2,\ n=-1,0,1,\ \ell=0,1,2,\cdots,\ s=-\ell,\cdots,\ell$$

同様な函数 $\mathbb{N}_n^{\ell s}$ も考えられるが省略する。$\mathbb{J}_n(kr,\theta\varphi)$ 等を以下では $\mathbb{J}_n(kr,g)$ 等と書くことがある。

これらベクトル函数は $\mathbb{P}_n^{\ell s}$ によって次のようにもあらわされる。

$$\mathbb{J}_n^{\ell s}(kr\theta\varphi)=\sum_{t=-1}^{1} j_{nt}^{\ell}(kr)\,\mathbb{P}_t^{\ell s}(\theta,\varphi) \quad (4.6)$$

$$\mathbb{H}_n^{(\nu)\ell s}(kr\theta\varphi)=\sum_{t=-1}^{1} h_{nt}^{(\nu)\ell}(kr)\,\mathbb{P}_t^{\ell s}(\theta,\varphi) \quad (4.7)$$

$\mathbb{J}_n^{\ell s}$ の直交性 ： 定理3（3.16）と（4.3）とを結合すれば、ベクトル函数 $\mathbb{J}_n^{\ell s}$ の直交性として

$$(4\pi)^2\int_0^{\infty}\int_{S_3}(\mathbb{J}_n^{\ell s}\cdot\mathbb{J}_{n'}^{\ell' s'})\,d\omega\ r^2dr=\delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{ss'}\frac{\delta(t-t')}{t^2} \quad (4.8)$$

が得られる。

$\mathbb{J}_n^{\ell s}$, $\mathbb{H}_n^{\ell s}$ のベクトル積分表示 ： カノニカル成分で記述したベクトル函数の Fourier 変換（2.38）j_{mn}^{ℓ}, $h_{mn}^{(\nu)\ell}$ の定義（3.1）(3.7) から次のベクトル型の積分表示がえられる。

$$\mathbb{J}_n^{\ell s}(kr\theta\varphi)=\frac{1}{4\pi i^{\ell-1}}\int_{S_3}e^{i\mathbb{K}\mathbb{r}}\,\mathbb{P}_n^{\ell s}(u,v)\,d\omega \quad (4.9)$$

$$H_n^{(\nu)ls}(kr,\theta\varphi)=\frac{1}{4\pi i^{l-1}}\int_{B_\nu} e^{ikr}\,P_n^{ls}(u,v)\,d\omega \qquad (4\cdot10)$$

但し球座標で $k=(k,u,v)$, $r=(r,\theta,\varphi)$, $d\omega=\sin u\,du\,dv$ であり又 $\int_{B_\nu}$ は $\int dv\int_{B_\nu}du$ の意味である。両辺の第 m カノニカル成分をとり、Fourier 変換の定義（2·38）、$T_{sm}^{l}(g)$ の加法定理（2·18）、不変積分の関係（2·21）を用いれば、上の等式の成立つことが示される。（4·10）では、$Re(kr)>0$ に対しては、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ならば $0<\varepsilon\pm\theta<\frac{\pi}{2}$ なる様に $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ を調節することが可能。又 kr が正の実数ならば $0<\theta<\pi$ に対して成立する。

j_{nt}^{l}, $h_{nt}^{(\nu)l}$ のテンソル積分表示：（2·39）による2階混合テンソル場の Fourier 変換の定義によれば（3·1）の $j_{mn}^{l}(kr)$ の定義は、特に $l=1$ の場合には一つの等方テンソル場の Fourier 変換の一つの成分になっていることがわかる（補題4参照）。テンソル記号を用いれば、これは次のように積分表示が出来る。

$$\sum_{t=-1}^{1} j_{nt}^{l}(kr)\,\mathfrak{C}_t(\mathrm{I}r)\,\overline{\mathfrak{C}_t(\mathrm{I}r)}=\frac{1}{4\pi}\int_{S_3}\mathfrak{C}_n(\mathrm{I}k)\,\overline{\mathfrak{C}_n(\mathrm{I}k)}\,e^{ik\mathrm{I}r}\,d\omega \qquad (4\cdot11)$$

同様に

$$\sum_{t=-1}^{1} h_{nt}^{(\nu)l}(kr)\,\mathfrak{C}_t(\mathrm{I}r)\,\overline{\mathfrak{C}_t(\mathrm{I}r)}=\frac{1}{4\pi}\int_{B_\nu}\mathfrak{C}_n(\mathrm{I}k)\,\overline{\mathfrak{C}_n(\mathrm{I}k)}\,e^{ik\mathrm{I}r}\,d\omega \qquad (4\cdot12)$$

$$\nu=1,2,\quad n=-1,0,1$$

但し、上で $\mathfrak{C}_t(\mathrm{I}r)$ $t=-1,0,1$ 等は、ベクトル $\mathrm{I}r$ のまわりの回転に関するカノニカル基底ベクトル（2·23）であり、$\overline{\mathfrak{C}_t(\mathrm{I}r)}$ はその複素共役ベクトル（共変成分のカノニカル基底）である。

ベクトル平面波の展開：$\mathrm{I}k$ 方向に進行する3種の偏極したベクトル平面波は $\mathfrak{T}_n^{ls}$ によって次のように展開される。

$$\mathbb{C}_n(\mathbb{K})\,e^{i\mathbb{K}\cdot\mathbb{r}} = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell} i^{\ell-1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,T_{sn}^{\ell}(g')\,\mathbb{J}_n^{\ell s}(kr,g) \qquad (4\cdot13)$$

$$(n=-1,0,1)$$

又はテンソル形で書けば

$$\mathbb{C}_n(\mathbb{K})\,\overline{\mathbb{C}_n(\mathbb{K})}\,e^{i\mathbb{K}\cdot\mathbb{r}} = 4\pi\sum_{\ell}\sum_{s} i^{\ell-1}\,\mathbb{J}_n^{\ell s}(kr,g)\,\overline{\mathbb{P}_n^{\ell s}(g')} \qquad (4\cdot14)$$

但し

$$\mathbb{r}=(r,\theta,\varphi)=(r,g)$$

$$\mathbb{K}=(k,u,v)=(k,g') \qquad (4\cdot15)$$

特に $g'=1$ $(u=v=0)$ の時には

$$\mathbb{C}_n e^{ikz} = \mathbb{C}_n e^{ikr\cos\theta} = 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell-1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\mathbb{J}_n^{\ell n}(kr,g) \qquad (4\cdot16)$$

証明 ：(4·3) 又は (4.8) によりベクトル平面波を

$$\mathbb{C}_n(\mathbb{K})\,e^{i\mathbb{K}\cdot\mathbb{r}} = \sum_{\ell,s}\sum_{t} A_t^{\ell s}\,\mathbb{P}_t^{\ell s}(\theta\varphi) \qquad (4\cdot17)$$

の様に展開したとすれば (4·3)により

$$A_t^{\ell s} = \int_{S_3} \left(\mathbb{P}_t^{\ell s}(\theta\varphi)\cdot\mathbb{C}_n(\mathbb{K})\right) e^{i\mathbb{K}\cdot\mathbb{r}}\,d\omega_g$$

不変積分の性質 (2·21) (今の場合オ3の Euler 角には無関係) および加法定理 (2·18)を利用して

$$= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\int_{S_3} T_{st}^{\ell}(g'g)\,\overline{T_{nt}^{\ell}(g)}\,e^{ikr\cos\theta}\,d\omega_g$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,T_{sn}^{\ell}(g')\int_{S_3} T_{nt}^{\ell}(g)\,\overline{T_{nt}^{\ell}(g)}\,e^{ikr\cos\theta}\,d\omega_g$$

ここで $\overline{T_{nt}^{\ell}(g)} = (-1)^{n+t}T_{-n-t}^{\ell}(g)$, (3·1) (3·4) を用いて

$$A_t^{\ell s} = 4\pi i^{\ell-1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,T_{sn}^{\ell}(g')\,j_{nt}^{\ell}(kr)$$

が与えられる。これを（4.17）に代入し（4.6）を用いれば（4.13）が与えられる。（4.13）に更に（4.1）を用いたものが（4.14）である。（4.16）は（4.13）で $T^{l}_{Sn}(I)=S_{Sn}$ とおけば与えられる。

§5 j^{1}_{mn} , $h^{(\nu)1}_{mn}$ のテンソル型加法定理

定理4 $j^{1}_{mn}(kr)$のテンソル型加法定理 ： 2階混合テンソルの等式として

$$\sum_{t=-1}^{1} j^{1}_{nt}(kr)\,\mathfrak{C}_t(\mathbf{r})\,\overline{\mathfrak{C}_t(\mathbf{r})} = 4\pi \sum_{l=|n|}^{\infty}\sum_{s=-l}^{l} \mathfrak{J}^{ls}_{n}(kr_1,g_1)\,\overline{\mathfrak{J}^{ls}_{n}(kr_2,g_2)} \qquad n=-1.\,0,\,1 \qquad (5\cdot1)$$

が成立する。但し

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\ ,\quad \mathbf{r}_1=(r_1,g_1)\quad \mathbf{r}_2=(r_2,g_2) \qquad (5\cdot2)$$

（註）(5.1)は定理2の系1で与えた加法定理（2.54）と同じ内容である。両辺でベクトル $\mathbf{r}_1$ に関して才 m_1（反変）カノニカル成分，$\mathbf{r}_2$ に関して才 m_2（共変）カノニカル成分を取るならば（2.54）が見出される。これはスカラーの場合の加法公式（A.16）に対応する。

別証明 ： (5.1)の左辺はテンソル積分表示（4.11）で与えられる。（4.11）の右辺に（5.2）を代入し、テンソル平面波展開（4.14）を用いるならば

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_3} \mathfrak{C}_n(\mathbf{K})\,\overline{\mathfrak{C}_n(\mathbf{K})}\,e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}_1}e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}_2}\,d\omega_{\mathbf{K}} = \sum_{l,s} i^{\,l-1}\,\mathfrak{J}^{ls}_{n}(kr_1,g_1)\left(\overline{\mathfrak{P}^{ls}_{n}(g)}\,e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}_2}\,d\omega_{\mathbf{K}}\right)$$

ここで積分表示（4.9）を用いれば

$$= 4\pi\sum_{ls}\mathfrak{J}^{ls}_{n}(kr_1,g_1)\,\overline{\mathfrak{J}^{ls}_{n}(kr_2,g_2)}$$

となって（5.1）の右辺が簡単に求められた。

定理5 $h^{(\nu)1}_{mn}(kr)$のテンソル型加法定理：2階混合テンソルの等式として

$$\sum_{t=-1}^{1} h^{(\nu)1}_{nt}(kr)\,\mathbb{C}_t(\mathbb{r})\,\overline{\mathbb{C}_t(\mathbb{r})} = \begin{cases} 4\pi \sum_{\ell s} \mathbb{H}_n^{(1)\ell s}(kr_1,\vartheta_1)\,\overline{\mathbb{J}_n^{\ell s}(kr_2,\vartheta_2)}, & r_1 > r_2 \\ 4\pi \sum_{\ell s} \mathbb{J}_n^{\ell s}(kr_1,\vartheta_1)\,\overline{\mathbb{H}_n^{(2)\ell s}(kr_2\vartheta_2)}, & r_2 > r_1 \end{cases} \tag{5.3}$$

が成立する。同様にして、$h^{(2)1}_{nt}$の加法公式は(5.3)の右辺で第1種、第2種の記号を交換したもので与えられる。この公式はスカラーの場合の加法公式(A.17)に対応するものである。

証明 (5.3)の左辺はテンソル積分表示(4.12)で与えられる。複素角の積分路B_νはベクトル$\mathbb{r}$を極軸として定義される。従って

$$\mathbb{K} = (k, u, v), \quad \mathbb{K}\cdot\mathbb{r} = kr\cos u \tag{5.4}$$

において、$Re(kr) > 0$の場合、複素角uは、$u = i\eta - \varepsilon$, $u = -i\eta + \varepsilon$とおくとき$\eta \to \infty$において

$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ でなければならない

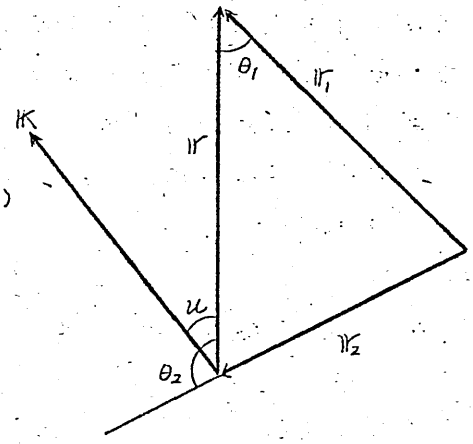
(krが実で正の時は$0 < \varepsilon < \pi$)。

今加法定理を求めるために

$$\mathbb{r} = \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2, \quad \mathbb{r}_1 = (r_1\ \theta_1\ \varphi_1), \quad \mathbb{r}_2 = (r_2\ \theta_2\ \varphi_2) \tag{5.5}$$

とおけば $r_1 > r_2$ の場合、$\mathbb{r}$, $\mathbb{r}_1$ のなす角θ_1は常に

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad r_1 > r_2$$



であるので、$\mathbb{K}$, $\mathbb{r}_1$ のなす角u_1は、$u = i\eta - \varepsilon$ の時

$$\begin{aligned} \cos u_1 &= \cos(i\eta-\varepsilon)\cos\theta_1 + \sin(i\eta-\varepsilon)\sin\theta_1\cos(v-\varphi_1) \\ &= \cosh\eta\left[\cos\varepsilon\cos\theta_1 - \sin\varepsilon\sin\theta_1\cos(v-\varphi_1)\right] \\ &\quad + i\sinh\eta\left[\sin\varepsilon\cos\theta_1 + \cos\varepsilon\sin\theta_1\cos(v-\varphi_1)\right] \end{aligned} \tag{5.6}$$

となる。$0<\varepsilon,\ \theta_1<\frac{\pi}{2}$ であるから $\eta\to\infty$ の時 $\sinh\eta$ の係数は $\sin(\varepsilon+\theta_1)$ と $\sin(\varepsilon-\theta_1)$ の両の値をとる。$u=-i\eta+\varepsilon$ の時も同様である。従がって $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$ の時には適当に ε をえらんで $0<\varepsilon\pm\theta<\frac{\pi}{2}$ とすることが可能である。この範囲の ε の変化、即ち積分路 B_ν の移動は複素積分（3·7）による $h_{mn}^{(\nu)l}$ の値を変えない。

従って（4·12）で $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ とおく時 $r_1>r_2$ ならば（4·14）を代入して

$$\frac{1}{4\pi}\int_{B_1} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}_1}\overline{\mathfrak{C}_n(\mathbf{K})}\,\mathfrak{C}_n(\mathbf{K})\,e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}_2}\,d\omega=\sum_{ls}(-i)^{l-1}\int_{B_1} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}\,\mathfrak{P}_n^{ls}(u,v)\,d\omega\;\overline{\mathfrak{J}_n^{ls}(kr_2,g_2)}$$

$$=4\pi\sum_{ls}\mathfrak{H}_n^{(1)ls}(kr_1,g_1)\,\overline{\mathfrak{J}_n^{ls}(kr_2,g_2)}\qquad(r_1>r_2)\qquad(5\cdot7)$$

がえられる。

$r_2>r_1$ の場合には $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}_2$ のなす角 θ_2 は常に $\frac{\pi}{2}<\theta_2<\pi$ である。その時、（4·12）は次の様になる。

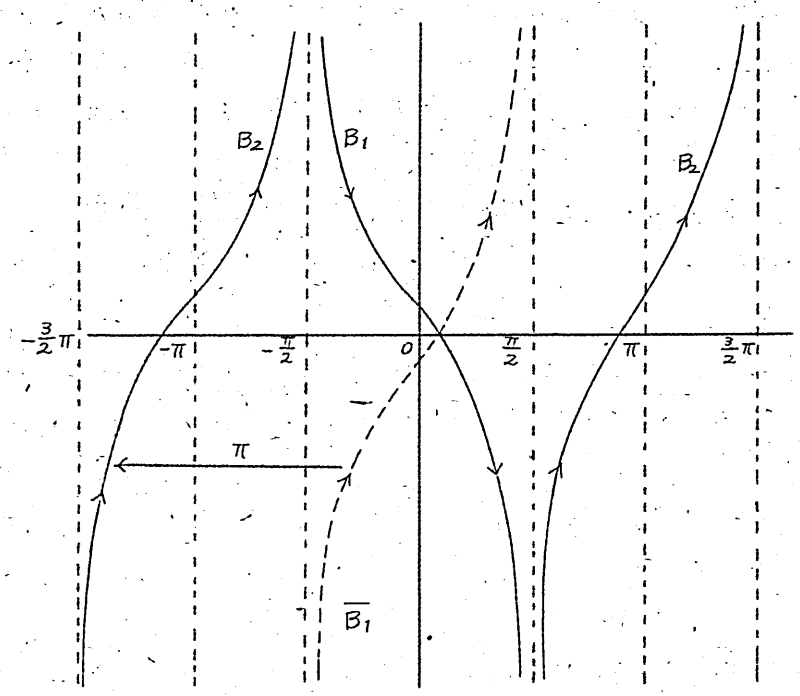
$$\frac{1}{4\pi}\int_{B_1} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}_1}\mathfrak{C}_n(\mathbf{K})\,\overline{\mathfrak{C}_n(\mathbf{K})}\,e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}_2}\,d\omega=\sum_{ls}i^{l-1}\mathfrak{J}_n^{ls}(kr_1,g_1)\overline{\int_{B_1} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}_2}\,\mathfrak{P}_n^{ls}(u,v)\,d\omega}$$

ここで $\overline{B_1}$ は B_1 に複素共役な積分路を意味する。今 $\mathbf{K}=(k,u,v)$ で $u\to u+\pi$ なる様に回転を行なえば、被積分函数は変わらず、積分路は $\overline{B_1}\longrightarrow B_2$ へと π だけ移動する。その時 $\mathbf{K}\mathbf{r}_2$ のなす角度 u_2 は前と同様の条件を満足することがわかるので、積分は（4·10）によって $\mathfrak{H}_n^{(2)ls}$ を与える。従って

$$=4\pi\sum_{ls}\mathfrak{J}_n^{ls}(kr_1,g_1)\,\overline{\mathfrak{H}_n^{(2)ls}(kr_2,g_2)}\qquad(5\cdot8)$$

$$r_2>r_1$$

となる。以上をあわせると（5·3）の結果がえられる。同様にして $h_{nt}^{(2)l}$ の加法定理がえられる。



μ－平面

§6　球座標におけるベクトル波動方程式と波動函数

§6·1　J_n^{ls}, $H_n^{(\nu)ls}$ のベクトル解析

スカラー函数 ： 球座標におけるスカラー函数を次式で定義する。

$$J^{ls}(kr,\theta\varphi) = Y_l^s(\theta,\varphi)\, j_l(kr) \qquad (6\cdot1)$$

$Y_l^s(\theta\varphi)$ は (A·1) で定義された球面調和函数であり、(2·12)(2·55) により

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\ \overline{T_{mo}^l(\varphi_1\,\theta\,\varphi_2)} \qquad (6\cdot2)$$

の関係がある。明らかに φ_2 に無関係である。以下ではパラメタ $l.s$ を簡単のためにおとすことがある。又 (6·1) で $j_l(kr)$ の代りに $h_l^{(\nu)}(kr)$ 又は $n_l(kr)$ を用いた場合も、以下の議論は同様に適用される。

J の gradient ： ∇J を (2.24) によりカノニカル成分であらわし (2.7) を用いると.

$$\nabla_- J = \frac{J_\varphi - iJ_\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi_2} = \frac{e^{-i\varphi_2}}{\sqrt{2}\,r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{\partial}{\partial\theta}\right] J = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\,\overline{H}_- J$$

$$\nabla_0 J = J_r = \frac{\partial J}{\partial r} \qquad (6.3)$$

$$\nabla_+ J = \frac{-J_\varphi - iJ_\theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_2} = \frac{e^{i\varphi_2}}{\sqrt{2}\,r}\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\frac{\partial}{\partial\theta}\right] J = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\,\overline{H}_+ J$$

(6.3) の右辺に (6.2) を代入し (2.19) の関係を用いれば、次の等式がえられる。

$$\nabla J = k\,\mathbb{J}_0 \qquad (6.4)$$

$\mathbb{J}_n$ の divergence ： $\nabla\cdot\mathbb{J}_n$ をカノニカル成分で書けば

$$\nabla\cdot\mathbb{J}_n = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mathbb{J}_{n0}) + \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[i(\cot\theta + \frac{\partial}{\partial\varphi}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\mathbb{J}_{n-}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[i(\cot\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\mathbb{J}_{n+}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mathbb{J}_{n0}) - \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[\overline{H}_+\mathbb{J}_{n-} + \overline{H}_-\mathbb{J}_{n+}\right] \qquad (6.5)$$

右辺に (4.4) を代入し、(2.19) の関係を用いるならば

$$\nabla\cdot\mathbb{J}_n = \overline{T^{\ell}_{S0}(g)}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 j^{\ell}_{0n}(kr) - \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\left[j^{\ell}_{-1n}(kr) + j^{\ell}_{1n}(kr)\right]\right]\right\} \qquad (6.6)$$

となる。ここで j^{ℓ}_{fmn} に (3.3) の表式を代入し j_ℓ の漸化式、微分方程式を用いるならば結局次の等式がえられる。

$$\nabla\cdot\mathbb{J}_n = -\delta_{on}\,k J \qquad (n = -1, 0, 1) \qquad (6.7)$$

特にこの関係は $\mathbb{J}_{-1}$ $\mathbb{J}_1$ がソレノイド的であることを意味している。

$\mathbb{J}_n$ の rotation ： 同様にカノニカル成分で記述すれば

$$(\nabla\times\mathbb{J}_n)_- = \frac{i}{\sqrt{2}r}\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\mathbb{J}_{n0}+i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbb{J}_{n-})$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{2}r}\overline{H}_-\,\mathbb{J}_{n0}+i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbb{J}_{n-})$$

$$(\nabla\times\mathbb{J}_n)_0=\frac{i}{\sqrt{2}r}\left[-i\left(\cot\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\mathbb{J}_{n-}$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2}r}\left[i\left(\cot\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\mathbb{J}_{n+} \qquad (6\cdot8)$$

$$=\frac{i}{\sqrt{2}r}\left(\overline{H}_+\,\mathbb{J}_{n-}-\overline{H}_-\,\mathbb{J}_{n+}\right)$$

$$(\nabla\times\mathbb{J}_n)_+=\frac{i}{\sqrt{2}r}\left(-i\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\mathbb{J}_{n0}-i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbb{J}_{n+})$$

$$=\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{H}_+\,\mathbb{J}_{n0}-i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbb{J}_{n+})$$

ここで (4.4) を代入して (2·19) の関係を用い、更に (3·3) を代入すれば、次の等式がえられる。

$$\nabla\times\mathbb{J}_n = nk\,\mathbb{J}_n \quad (n=-1,0,1) \qquad (6\cdot9)$$

この関係は $\mathbb{J}_0$ が非回転的であること、$\mathbb{J}_n$ は $\nabla\times$ の演算子に関する固有ベクトルであることを意味する。

J, $\mathbb{J}_n$ の微分方程式 ： (6·4) の発散をとって (6·7) を用いるとよくしられた J に対する波動方程式

$$\nabla^2 J + k^2 J = 0 \qquad (6\cdot10)$$

がえられる。更に (6·7)(6·9) を公式

$$\nabla\times\nabla\times\mathbb{J}_n=\nabla(\nabla\mathbb{J}_n)-\nabla^2\mathbb{J}_n \qquad (6\cdot11)$$

に代入して (6·4) を用いれば $\mathbb{J}_n$ は次のベクトル Helmholtz 方程

式

$$\nabla^2 \mathbb{J}_n + k^2 \mathbb{J}_n = 0 \qquad (n=-1.\ 0.\ 1) \qquad (6\cdot12)$$

を満足することがわかる。

以上の結果を函数の直交性をもあわせ含めて次の定理としてまとめておく。

定理6 (6·1)で定義したスカラー函数 J, (4.4)で定義したベクトル函数 $\mathbb{J}_n$ は次の関係を満足する。

$$\nabla J = k\,\mathbb{J}_0 \,,\quad \nabla \mathbb{J}_n = -\delta_{on}\, k J \,,\quad \nabla \times \mathbb{J}_n = n k \mathbb{J}_n \qquad (n=-1.0.1) \qquad (6\cdot13)$$

更に波動方程式

$$\nabla^2 J + k^2 J = 0 \,,\quad \nabla^2 \mathbb{J}_n + k^2 \mathbb{J}_n = 0 \qquad (6\cdot14)$$

を満足する。$j_\ell(kr)$ を $h_\ell^{(\nu)}$, n_ℓ 等で置換えてえられるスカラー函数、ベクトル函数 $\mathbb{H}_n^{(\nu)}$ 等も上の関係を満す。又次の直交関係を有する。

$$(4\pi)^2 \int_0^\infty \int_{S_3} \overline{J^{\ell s}} J^{\ell' s'}\, d\omega\, r^2 dr = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{ss'}\,\frac{\delta(t-t')}{t^2} \qquad (6\cdot15)$$

$$(4\pi)^2 \int_0^\infty \int_{S_3} (\mathbb{J}_n^{\ell s} \cdot \mathbb{J}_{n'}^{\ell' s'})\, d\omega\, r^2 dr = \delta_{nn'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{ss'}\,\frac{\delta(t-t')}{t^2} \qquad (6\cdot16)$$

§6·2 Green's dyadic と delta dyadic

非斉次ベクトル Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + k^2 \mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\mathcal{J}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (6\cdot17)$$

$$\mathcal{J} = \sum_{i=x.y.z} \mathbb{e}_i \mathbb{e}_i = \sum_{n=-1}^{1}{}' \mathbb{e}_n \overline{\mathbb{e}_n} \qquad (6\cdot18)$$

の解 $\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ を Green's dyadic と呼ぶ。(スカラー Helmholtz

方程式の Green 函数に対応する)。$\mathcal{J}$ を idem factor 又は単位 dyadic (unity dyadic) 又 $\mathcal{J}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ を delta dyadic と名付ける。(6·18)は§2.2の補題2によれば、3つの成分が1である一つの等方テンソル場でもある。従ってカノニカルベース $\mathfrak{C}_n$ の向きは任意である。

自由空間における Green's dyadic は

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)=\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\mathcal{J},\quad r=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| \qquad (6\cdot19)$$

で与えられることはよく知られている。[11]

加法定理(5.3)の左辺で n について和をとるならば、(3·11)(3·12)によって

$$\sum_{n=-1}^{1}\sum_{t=-1}^{1}h_{nt}^{(1)1}(kr)\mathfrak{C}_t(\mathbf{r})\overline{\mathfrak{C}_t(\mathbf{r})}=h_0^{(1)}(kr)\mathcal{J}=\frac{e^{ikr}}{ikr}\mathcal{J} \qquad (6\cdot20)$$

である。これはまさに Green's dyadic (6·19)に他ならない。従って、(5·3)の右辺を n について和をとったものは Green's dyadic のベクトル波動函数 $\mathfrak{M}_n^{ls}$, $\mathfrak{N}_n^{(1)ls}$ による展開式を与えているのである。これは Morse and Feschbach[11] に求められているものと一致する。

Delta dyadic $\mathcal{J}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ は任意のベクトル函数 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ に対し

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\int\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathcal{J}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' \qquad (6\cdot21)$$

を満足する。但し・はベクトル内積をあらわす。直交関係(6·16)は $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=4\pi\sum_{n=-1}^{1}\sum_{l,s}\int_0^\infty F_n^{ls}(t)\,\mathfrak{M}_n^{ls}(2\pi t\,r,\theta,\varphi)\,t^2dt \qquad (6\cdot22)$$

の様に展開される時、その Fourier 係数は

$$F_n^{ls}(t)=4\pi\int_{S_3}\int_0^\infty\mathfrak{M}_n^{ls}(2\pi t\,r,\theta,\varphi)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r})\,r^2dr\,d\omega \qquad (6\cdot23)$$

これらの関係は delta-dyadic が

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathcal{J}=(4\pi)^2\sum_{n=-1}^{1}\sum_{l,s}\int_0^\infty \mathcal{J}_n^{ls}(2\pi t r,\theta,\varphi)\overline{\mathcal{J}_n(2\pi t r',\theta',\varphi')}\,t^2dt \tag{6·24}$$

の様に展開されることを意味する。delta-dyadic をしばしば longitudinal part $\mathcal{D}_l$, transverse part $\mathcal{D}_t$ に分解することが行なわれるが、前定理 (6·13) によれば (6·24) の $n=0$ の部分が $\mathcal{D}_l$ に、$n=-1,1$ の部分が $\mathcal{D}_t$ である。以上を次の様にまとめておこう。

定理7 (6·17) を満たす自由空間における Green's dyadic は球座標において次の様に展開される。

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\mathcal{J}=\begin{cases} ik\sum_{n=-1}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=-l}^{l}\mathcal{H}_n^{(1)ls}(kr_1,\theta_1)\overline{\mathcal{J}_n^{ls}(kr_2,\theta_2)} & r_1>r_2 \\ ik\sum_{n=-1}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=-l}^{l}\mathcal{J}_n^{ls}(kr_1,\theta_1)\overline{\mathcal{H}_n^{(2)ls}(kr_2,\theta_2)} & r_2>r_1 \end{cases} \tag{6·25}$$

$r_1>r_2$ の時 $\mathcal{H}_n^{(1)}$ が、$r_2>r_1$ の時は $\overline{\mathcal{H}_n^{(2)}}$ が out going wave を与えている。$n=0$ が longitudinal, $n=-1,1$ が transverse な部分である。

Delta dyadic は球座標において次の様に展開される。:

$$\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathcal{J}=(4\pi)^2\sum_{n=-1}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=-l}^{l}\int_0^\infty \mathcal{J}_n^{ls}(2\pi t r_1,\theta_1)\overline{\mathcal{J}_n^{ls}(2\pi t r_2,\theta_2)}\,t^2dt \tag{6·26}$$

ここで $n=0$ が $\mathcal{D}_l$, $n=-1,1$ が $\mathcal{D}_t$ を与える。

§6·3 $\mathcal{J}_n$ を $\mathcal{J}$ より構成すること

上で見た様に (4·4) で定義した $\mathcal{J}_n$ 又は j_{mn}^{l} はベクトル波動方程式 (6·12) の解である。しかしながら、ベクトル波動方程式の独立な解として $\mathcal{J}_n^{ls}$, $\mathcal{H}_n^{(\nu)ls}$ 等を実さいに見出す系統的な方法は知られ

ていない。(我々の場合には別の方法で (4.4)(4.5) を先に知っていたからよかったが)。実さい (6.12) をカノニカル成分で記述すれば、方程式は3つの成分に対する連立微分方程式を解かねばならない。$\nabla \mathbb{J} = 0$ の条件のもとに我々の云う $\mathbb{J}_{-1}, \mathbb{J}_1$ を求めることが文献7で行なわれている。しかし (6.16) 等の性質は何も見出されていない。多くのテキストで行なわれている方法はスカラー波動函数から出発して幾種かのベクトル演算を行なって独立なベクトル波動函数を見出すことである。[11)12)13)] しかしながら、実さいに参照する座標系の成分が我々の様に回転群の表現論を利用した統一的方法でとられていないために、その方法はいくらかわずらわしい。ここでは、その方法で与えられたベクトル波動函数と我々の用いている $\mathbb{J}_n$ との関連を明らかにするために $\mathbb{J}_n$ を予よりベクトル演算によって導びくことを試みる。以下の議論は j_ℓ を $h_\ell^{(\nu)}, n_\ell$ に換えたものでも成立する。

<u>カノニカル成分によるベクトル積</u> : (左より右へ不変成分で $m = -1, 0, 1$) 実ベクトルの場合

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = i \left\{ \begin{vmatrix} a_0 & a_- \\ b_0 & b_- \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_+ & a_- \\ b_+ & b_- \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_+ & a_0 \\ b_+ & b_0 \end{vmatrix} \right\} \qquad (6.27)$$

複素ベクトルの場合、同様に反変成分で

$$\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{b}} = i \left\{ \begin{vmatrix} a_0 & a_- \\ \bar{b}_0 & \bar{b}_+ \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_+ & a_- \\ \bar{b}_- & \bar{b}_+ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_+ & a_0 \\ -\bar{b}_- & \bar{b}_0 \end{vmatrix} \right\} \qquad (6.28)$$

(1) まず (6.4)(4.6)(3.3) によって

$$\mathbb{L}^{\ell S} \equiv \frac{1}{k} \nabla \mathbb{J} = \mathbb{J}_0 = \left[\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \frac{j_\ell(kr)}{kr} \mathbb{P}_{-1}^{\ell S} + \frac{d j_\ell(kr)}{k\,dr} \mathbb{P}_0^{\ell S} + \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \frac{j_\ell(kr)}{kr} \mathbb{P}_1^{\ell S} \right] \qquad (6.29)$$

(2) (6.27)(6.4)(4.6) より

$$\mathbb{M}^{\ell s} \equiv \nabla \times (\mathbb{r} J^{\ell s}) = -\mathbb{r} \times \nabla J^{\ell s} = -k(\mathbb{r} \times \mathbb{J}_0^{\ell s})$$
$$= \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \left[-i j_\ell(kr) \mathbb{P}_{-1}^{\ell s} + i j_\ell(kr) \mathbb{P}_1^{\ell s} \right] \qquad (6\cdot30)$$

これから明らかなように $\mathbb{M}$ は $\mathbb{P}_0$ 方向の成分、即ち $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_r$ に関する成分をもたない。

(3) 同様に

$$\mathbb{N}^{\ell s} \equiv \frac{1}{k} \nabla \times (\nabla \times \mathbb{r} J^{\ell s}) = -\nabla \times (\mathbb{r} \times \mathbb{J}_0^{\ell s})$$
$$= \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \left[\frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] \mathbb{P}_{-1}^{\ell s} + 2\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \frac{j_\ell(kr)}{kr} \mathbb{P}_0^{\ell s} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] \mathbb{P}_1^{\ell s} \right] \qquad (6\cdot31)$$

従って (6·30)(6·31) と (4·6)(3·3) とを比べれば

$$\frac{1}{2}(\mathbb{N}^{\ell s} \pm \mathbb{M}^{\ell s}) = \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \mathbb{J}_\pm^{\ell s} \qquad (6\cdot32)$$

以上の結果を次のようにまとめておく

定理 8 ベクトル演算によりベクトル函数 $\mathbb{J}_n$ $n=-1.0.1$ はスカラー函数 J によって次のようにあらわすことが出来る。

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{J}_0 &= \mathbb{L} \\ \mathbb{J}_\pm &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\ell(\ell+1)}}\ (\mathbb{N} \pm \mathbb{M}) \end{aligned}\right\} \qquad (6\cdot33)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{L} &\equiv \frac{1}{k} \nabla J \\ \mathbb{M} &= \nabla \times (\mathbb{r} J) \\ \mathbb{N} &= \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\mathbb{r} J) \end{aligned}\right\} \qquad (6\cdot34)$$

上の等式は、$j_\ell(kr)$ を $h_\ell^{(\nu)}(kr)$, $n_\ell(kr)$ 等に置換えたスカラー函数、ベクトル函数に対しても成立つ。

§7　2.3の例題

(1)　散乱又は輻射電磁波の電力

(i)　次の等式が成立する。

$$\lim_{r\to\infty} k^2r^2\int_{S_3} \mathbb{e}_0(\mathbb{r})\cdot(\mathbb{H}_n^{(1)ls}\times\overline{\mathbb{H}_{n'}^{(1)l's'}})\,dS = -in\,\delta_{nn'}\,\delta_{ll'}\,\delta_{ss'} \tag{7.1}$$

証明：　まず(4.1)で定義されたベクト函数 $\mathbb{P}_n^{ls}(\theta\varphi)$ に対し

$$\int_{S_3} \mathbb{e}_0(\mathbb{r})\cdot(\mathbb{P}_t^{ls}\times\overline{\mathbb{P}_{t'}^{l's'}})\,dS = -it\,\delta_{tt'}\,\delta_{ll'}\,\delta_{ss'} \qquad (t=-1,0,1) \tag{7.2}$$

が成立つ。これは(6.28)および(4.3)を用いて容易に証明される。次に

$$S_{nn'}(r)\equiv\sum_{t=-1}^{1} t\,h_{nt}^{(1)l}(kr)\,\overline{h_{n't}^{(1)l}(kr)} \tag{7.3}$$

とおくとき、

$$\lim_{r\to\infty} k^2r^2 S_{nn'}(r) = n\,\delta_{nn'} \qquad (n,n'=-1,0,1) \tag{7.4}$$

が成立つ。これは(3.8)および球Hankel函数の漸近形

$$h_l^{(1)}(r)\sim(-i)^{l+1}\frac{e^{ir}}{r} \tag{7.5}$$

を用い $\overline{S_{nn'}}=S_{n'n}$, $S_{-n-n'}=-S_{nn'}$, $S_{00}=0$ 等に注意して(7.3)を直接計算すれば得られる。

以上により、$\mathbb{H}_n^{(1)ls}$ の定義(4.7)を(7.1)に代入し、(7.2)(7.4)の関係を用いれば(7.1)の等式が証明される。ついでながら(7.1)の左辺で $\mathbb{H}_n^{(1)}$ の代りに $\mathbb{J}_n$ を用いる場合には右辺は常に0である。

(ii)　散乱又は輻射電磁場のベクトルポテンシアルが(時間因子 e^{-iwt})

$$\mathbb{A}(r\theta\varphi)=\sum_{lsn} A_n^{ls}\,\mathbb{H}_n^{(1)ls}(kr,\theta,\varphi) \tag{7.6}$$

の様に展開されているとし、Coulomb gaugeで $\mathbb{E}$ が

$$E(r.\theta.\varphi) = ik \sum_{\ell s n} A_n^{\ell s} H_n^{\ell s}(kr\theta\varphi) \qquad (7\cdot7)$$

の様に展開されているとする。(6·13)を用いれば

$$H(r.\theta.\varphi) = \nabla \times A = k \sum_{\ell n s} A_n^{\ell s}\, n\, H_n^{(1)\ell s}(kr.\theta.\varphi) \qquad (7\cdot8)$$

で与えられる。$S = \frac{1}{2} E \times \overline{H}$ を無限大半径の球面上で積分すれば(7·1)を用いて

$$W_S = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{2} \int_{S_3} e_0 \cdot (E \times \overline{H})\, dS =$$

$$= i k^2 \sum \sum n A_n^{\ell s} \overline{A_{n'}^{\ell' s'}} \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{2} \int_{S_3} e_0 (H_n^{(1)\ell s} \times H_{n'}^{(1)\ell' s'})\, dS$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-1,1} \sum_{\ell s} |A_n^{\ell s}|^2 \qquad (7\cdot9)$$

(2) 球の自由振動：

壁面上の境界条件として、ベクトル場 A_n に対して次の2種のものを考えよう。

第1種：$[A_n]_{tan} = 0 \qquad n = -1, 0, 1 \qquad (7\cdot10)$

第2種：$[A_n]_{nor} = 0 \qquad n = -1, 0, 1 \qquad (7\cdot11)$

これらは、完全導体又は剛体壁に対応するものと考えられる。他の一般の境界条件又は2種の媒質の境界条件等も同様に取扱える。ここでは例題として球面 $r=a$ 上で上の境界条件を課し、球外および球内の自由振動を2種類の境界条件に対し同時にしらべることにしよう。

(i) 球外の振動：ベクトル函数 $H_n^{(1)\ell s}(kr.\theta.\varphi)$ に $r=a$ において上の境界条件を適用する。(4·7) を用いれば直ちに

第1種境界条件

$$h_{nt}^{(1)\ell}(ka) = 0, \quad t = -1, 1 \qquad (7\cdot12)$$

これは(3·8)を用いて $t=-1, 1$ の和及び差をとれば

$$\left[\frac{d}{dr}(rh_\ell^{(1)})\right]_{r=a}=0,\quad h_\ell^{(1)}(ka)=0,\quad n=\pm 1 \qquad (7\cdot13)$$

$$h_\ell^{(1)}(ka)=0,\quad n=0 \qquad (7\cdot14)$$

ヤ2種境界条件

$$h_{nt}^{(1)\ell}(ka)=0,\quad t=0 \qquad (7\cdot15)$$

(3·8) を用いて書けば

$$h_\ell^{(1)}(ka)=0 \qquad n=\pm 1 \qquad (7\cdot16)$$

$$\left[\frac{dh_\ell^{(1)}}{dr}\right]_{r=a}=0 \qquad n=0 \qquad (7\cdot18)$$

上の条件 (7·12)～(7·18)を満す様な k の値によって固有振動数が定まる. 注意する必要のあるのは、(7·13) の2つの条件を同時に満足する固有値は一般に存在しないが、(7·12) を $t=-1.\ 1$ でなく $n=-1.\ 1$ について和をとったものとすれば、(7·13) は $t=\pm 1$ に関する条件であり、それぞれ $H_{-1}^{(1)}+H_1^{(1)}$, $H_{-1}^{(1)}-H_1^{(1)}$ なる自然振動姿態の固有値を定める。よく知られているように $h_\ell^{(1)}$ は多項式と指数函数の積であるから、多項式の複素根として容易に求められる.[11)12)]

(ii) 球内の振動 : 上と同様なことを $J_n^{(1)\ell S}(kr,\theta,\varphi)$ について適用すると

ヤ1種境界条件

$$j_{nt}^{\ell}(ka)=0,\quad t=-1.\ 1 \qquad (7\cdot19)$$

即ち $n=-1.\ 1$ の和、差をとったものは

$$\left[\frac{d}{dr}(rj_\ell)\right]_{r=a}=0 \qquad (J_{-1}+J_1) \qquad (7\cdot20)$$

$$j_\ell(ka)=0 \qquad (J_{-1}-J_1),\ J_0 \qquad (7\cdot21)$$

オ2種境界条件

$$\dot{j}^{\ell}_{nt}(ka)=0 \quad , \quad t=0 \qquad (7.22)$$

即ち

$$j_{\ell}(ka)=0 \qquad n=\pm 1 \qquad (7.23)$$

$$\left[\frac{dj_{\ell}}{dr}\right]_{r=a}=0 \qquad n=0 \qquad (7.24)$$

(3) 偏極したベクトル平面波の球による散乱

偏波した平面波の展開式は、一般の進行方向に対しては(4.13)で、特にz方向に進行する場合は(4.16)で与えられる。ここでは簡単のために後者を取扱う。

$$e_n(z)\,e^{ikz}=4\pi\sum_{\ell} i^{\ell-1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\mathbb{J}_n^{\ell n}(kr,\theta,\varphi) \qquad (7.25)$$

ここで $n=-1,0,1$ は偏りを示す。電磁波はソレノイド的で $n=-1,1$ に対応し、それぞれ左、右の円偏波を示す。$n=0$ は非回転的で音波の速度場などに対応する。$n=0$ の場は(6.4)からも明らかなようにスカラー場(音波では速度ポテンシアル)の勾配として導かれる。我々はこのよく知られた問題を3種の区別なく取扱うことにする。他の偏波はこれらの合成によってあらわされる。

場を入射波と散乱波の和として

$$A_n=4\pi\sum_{\ell} i^{\ell-1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\mathbb{J}_n^{\ell n}(kr,\theta\varphi)$$

$$+4\pi\sum_{n'}\sum_{\ell s} i^{\ell-1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,B_{n'}^{\ell s}\,\mathbb{H}_{n'}^{(1)\ell s}(kr,\theta,\varphi) \qquad (7.26)$$

とあらわす。$r=a$ における境界条件を課するために(4.6)(4.7)を用いて

$$A_n=4\pi\sum_{\ell} i^{\ell-1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\sum_{t}\dot{j}^{\ell}_{nt}(kr)\,\mathbb{P}_t^{\ell n}(\theta\varphi)$$

$$+4\pi\sum_{n'}\sum_{\ell s} i^{\ell-1}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,B_{n'}^{\ell s}\sum_{t}\dot{h}^{(1)\ell}_{n't}(kr)\,\mathbb{P}_t^{\ell s}(\theta,\varphi) \qquad (7.27)$$

と書いておこう。$r=a$ とおいて第1種又は第2種の境界条件 (7.10) (7.11) を課する時 (4.3) を用いれば $S=n$ の項のみで

$$j_{nt}^{\ell}(ka)+\sum_{n'} B_{n'}^{\ell n} h_{n't}^{(1)\ell}(ka)=0 \qquad \begin{pmatrix} \text{第1種} & t=-1,1 \\ \text{第2種} & t=0 \end{pmatrix} \qquad (7.28)$$

(i) 場が非回転的 (longitudinal) の場合 は $n=n'=0$ の場合であるから

$$j_{ot}^{\ell}(ka)+B_0^{\ell 0} h_{ot}^{(1)\ell}(ka)=0 \begin{pmatrix} \text{第1種} & t=-1,1 \\ \text{第2種} & t=0 \end{pmatrix} \qquad (7.29)$$

であり、$B_0^{\ell 0}$ は直ちに求められる。(3.3) (3.8) を用いて j_ℓ $h_\ell^{(1)}$ であらわせば

$$j_\ell(ka)+B_0^{\ell 0} h_\ell^{(1)}(ka)=0 \qquad (\text{第1種}) \qquad (7.30)$$

$$\left[\frac{dj_\ell}{dr}\right]_{r=a}+B_0^{\ell 0}\left[\frac{dh_\ell^{(1)}}{dr}\right]_{r=a}=0 \qquad (\text{第2種}) \qquad (7.31)$$

(ii) 場がソレノイド的 (transverse) の場合 は $n, n'=-1, 1$ であり、(7.28) は

$$j_{nt}^{\ell}(ka)+\left[B_{-1}^{\ell n} h_{-1t}^{(1)\ell}(ka)+B_1^{\ell n} h_{1t}^{(1)\ell}(ka)\right]=0 \qquad \begin{pmatrix} \text{第1種} & t=-1,1 \\ \text{第2種} & t=0 \end{pmatrix} \qquad (7.32)$$

第1種の場合は、$t=-1,1$ を連立して解いて B_{-1}, B_1 を求める。$t=-1,1$ を辺々加えたものと引いたものをつくれば、(3.3) (3.8) を用いて

$$\left[\frac{d}{dr}(rj_\ell)\right]_{r=a}+\left[B_1^{\ell n}+B_{-1}^{\ell n}\right]\left[\frac{d}{dr}(rh_\ell^{(1)})\right]_{r=a}=0 \quad (n=\pm 1) \qquad (7.33)$$

$$\pm j_\ell(ka)+\left[B_1^{\ell n}-B_{-1}^{\ell n}\right] h_\ell^{(1)}(ka)=0 \qquad (n=\pm 1) \qquad (7.34)$$

第2種の場合は $t=0$ のみであるが (3·3)(3·8) を用いれば

$$j_\ell(ka)+\left[B_1^{\ell n}+B_{-1}^{\ell n}\right]h_\ell^{(1)}(ka)=0 \qquad (n=\pm 1) \tag{7·35}$$

である。この場合には (7·26) においては $[B_1+B_{-1}]$ が求まるのみで十分である。

以上によって、3種の偏波したベクトル平面波の球による散乱の問題が第1種及び第2種の境界条件に対して解かれたことになるが、ついでに (7·26) が電磁界のベクトルポテンシアルをあらわしている場合について論じておこう。Coulomb gauge とすれば上のソレノイダルの場合である。(7·33)～(7·35) は完全導体球による散乱に対応する。

$$B_1^{\ell n}+B_{-1}^{\ell n}=-i\sin\varepsilon_\ell e^{-i\varepsilon_\ell} \quad (n=\pm 1 \text{ 第1種. 第2種}) \tag{7·36}$$

$$B_1^{\ell n}-B_{-1}^{\ell n}=\pm i\sin\delta_\ell e^{-i\delta_\ell} \quad (n=\pm 1 \text{ 第1種}) \tag{7·37}$$

とおく。$B_1^{\ell n}\pm B_{-1}^{\ell n}$ は散乱波 $H_1^{(1)\ell n}\pm H_{-1}^{(1)\ell n}$ の振巾に対応する。これは (6·33) によれば、N, M に対応する。(6·30) からわかるように、M は $\mathbf{e}_r$ 成分をもたず球面の接線成分のみをもつ。したがって A_n がベクトルポテンシアルをあらわす場合には、M は電気的横波とよばれることがある。又、N は磁気的横波とよばれる。それは、rotation をとれば (6·13) からわかるように N は M に代るからである (M は N になる)。(7·36)(7·37) の意味するところは、N 波と M 波は散乱に際し異なる強度、phase shift をもつこと、および磁気的横波 N は左右の偏波の差はないが、電気的横波 M は、左、右の偏波によって位相が反転している。第2種の場合には N 波の散乱が生ずるのみである。(7·9) を用いて散乱波の全エネルギーを求めれば左右の偏波に関係なく

$$W_S = 2\pi \sum_{n'} \sum_{\ell} (2\ell+1) \left| B_{n'}^{\ell n} \right|^2$$

$$= \pi \sum_{\ell} (2\ell+1) (\sin^2 \varepsilon_\ell + \sin^2 \delta_\ell) \qquad (7\cdot38)$$

又、散乱全断面積は

$$Q = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) (\sin^2 \varepsilon_\ell + \sin^2 \delta_\ell) \qquad (7\cdot39)$$

となる。オ2種の場合には $\sin^2 \delta_\ell$ の項はあらわれない。これらの結果は既によくしられているものである。[11)12)]

(4) 一様等方ベクトル乱場のスペクトル分解[1~4)]

前に与えた結果を $\mathbb{I}_n$ によって書表わせば次のようになる。

$$\mathbb{I}(r\,\theta\,\varphi) = \sqrt{4\pi} \sum_{\ell=|n|}^{\infty} \sum_{S=-\ell}^{\ell} \sum_{n=-1}^{1} \int_0^{\infty} \mathbb{I}_n^{\ell S}(2\pi t r, \theta, \varphi) M_n^{\ell S}(dt, w) \qquad (7\cdot40)$$

但し、$M_n^{\ell S}(\Delta, w)$ は、random spectral measure であって、次の性質をもつ。

$$E\langle M_n^{\ell S}(\Delta),\ M_{n'}^{\ell' S'}(\Delta') \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{SS'} \delta_{nn'} \mu_n(\Delta \cap \Delta') \qquad (7\cdot41)$$

$$E\langle M_n^{\ell S}(\Delta) \rangle = 0 \qquad (7\cdot42)$$

但し、スペクトル測度は

$$\mu_n(\Delta) = 4\pi \int_{\Delta} |F_n(t)|^2 t^2 dt \qquad n = -1.\ 0.\ 1 \qquad (7\cdot43)$$

$|F_n(t)|^2$ はスペクトルテンソルの対角なカノニカル成分であり、相関テンソルの対角なカノニカル成分はそのベクトル Hankel 変換

$$R_{mm}(r) = 4\pi \sum_{n=-1}^{1} \int_0^{\infty} \overline{j_{mn}^{1}(2\pi t r)} |F_n(t)|^2 t^2 dt \quad (m = -1.\ 0.\ 1) \qquad (7\cdot44)$$

で与えられる。又 $|F_n(t)|^2$ は $R_{mm}(r)$ の逆 Hankel 変換 (3·17) で与えられる。これは、一様等方なスカラー乱場のスペクトル分解

(A.21)[14]と対比されるものである。

§8 他の文献の定義との関係

他の文献、教科書で統一されないまま用いられているベクトル函数、定義方法と上にのべたベクトル函数との関係を明らかにしておくのは有益であろうと思われる。数理物理学の分野と原子核物理学の分野とでは本質的には同一のベクトル函数が異なった定義方法ならびに記法で使用されているが、それらの関連は今まで明示されず個別的に用いられているようである。

Morse and Feschbach 他

Morse and Feschbach[11] Stratton[12], Hansen[13] 等の数理物理学のテキストヌは文献では§6.3でのべたスカラー函数よりベクトル演算によって求めるHansenの方法によっている。上の3者は大体共通しているので、Morse and Feshbach Chap 13 p.1865以下で用いられている記号について説明する。

そこではベクトル函数として $\mathbb{L}'_{o s l}$, $M'_{o s l}$ $N'_{o s l}$ が用いられ、$S(\geq 0) = 0, 1, 2 \cdots l$, $\sigma = e, 0$ として、$\cos s\varphi$, $\sin s\varphi$ の因子をもつ実の函数が使われている。上の添字1は、第1種の球Bessel函数 $j_l(kr)$ を示すもので、$\mathbb{L}^2$, $\mathbb{L}^3$ 等は第2種、第3種の球Bessel函数 $n_l(kr)$ $h_l^{(1)}(kr)$ 等に対応するものである。比較のために S を負数まで定義して複素因子 $e^{is\varphi}$ を用いる。

$$\mathbb{L}^1_{sl} = \mathbb{L}'_{e|s|l} + i\,\mathbb{L}'_{o|s|l} = N\,\mathbb{L}^{es} \qquad (8.1)$$

$$M'_{sl} = M'_{e|s|l} + i\,M'_{o|s|l} = N\,M^{es} \qquad (8.2)$$

$$N'_{sl} = N'_{e|s|l} + i\,M'_{o|s|l} = N\,N^{es} \qquad (8.3)$$

であってNは $Y_{osl}(\theta\varphi)$ が球面上で規格化されていないためにあらわれたもので、

$$N=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}\ \frac{(l+|s|)!}{(l-|s|)!}} \qquad (8.4)$$

である。 $\mathbb{L}^{ls}$ 等は $\mathbb{J}_n^{ls}$ と (6·33) の関係で結びつく。更にそこで、Spherical vector harmonics とよばれているものは

$$\mathbb{P}_{sl}=\mathbb{P}^{e}_{|s|l}+i\,\mathbb{P}^{o}_{|s|l}=N\,\mathbb{P}_0^{ls} \qquad (8.5)$$

$$\mathbb{B}_{sl}=\mathbb{B}^{e}_{|s|l}+i\,\mathbb{B}^{o}_{|s|l}=N\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{P}_1^{ls}+\mathbb{P}_{-1}^{ls}) \qquad (8.6)$$

$$\mathbb{C}_{sl}=\mathbb{C}^{e}_{|s|l}+i\,\mathbb{C}^{o}_{|s|l}=N\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbb{P}_1^{ls}-\mathbb{P}_{-1}^{ls}) \qquad (8.7)$$

Morse and Feschbach ではベクトル成分は $\mathbb{C}_r$, $\mathbb{C}_\theta$, $\mathbb{C}_\varphi$ に関して示されているが、我々の $\mathbb{P}_n^{ls}$ の定義 (4·1) から明らかなようにカノニカル成分をとるならば、それは回転群の weight l の既約表現行列の第 n ($n=-1,0,1$) 行要素 T^{l}_{mn} に他ならない。又そのために一般球函数 T^{l}_{mn} の既知の諸性質 (2·8)～(2·21) 等を用いて $\mathbb{P}_n^{ls}$ の直交性、§6·1 のベクトル解析が容易に出来るのである。又同時に球 Bessel ベクトル函数 j^{l}_{mn} $h^{(\omega)l}_{mn}$ 等も、統一的に定義し論ずることが可能となったのである。

ここで我々の導いたベクトル波動函数に対する諸公式と Morse and Feshbach のそれとの対応を与えておく。

公式、定義の名称	本論文	Morse and Feshbach
球面ベクトル調和函数	$\mathbb{P}_n^{ls}$ (4·1)	$\mathbb{P}_{sl}$, $\mathbb{B}_{sl}$ $\mathbb{C}_{sl}$ P. 1898
球面ベクトル調和函数の直交性	(4·2)	P. 1899
〃 球面上積分直交性	(4·3)	P. 1900
ベクトル波動函数系	$\mathbb{J}_n^{ls}$ (4·4) (4·6)	
	$\mathbb{H}_n^{(\omega)ls}$ (4·5) (4·7)	$\mathbb{L}^{\nu}_{osl}$, $\mathbb{M}^{\nu}_{osl}$ P. 1865
	$\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^{\nu}_{osl}$ $\nu=1,2,3,4$, P. 1866
ベクトル波動函数の積分直交性	(4·8)	———
〃 ベクトル積分表示	(4·9) (4·10)	P. 1865, P. 1866

テンソル積分表示	(4.11)(4.12)	———
テンソル加法定理	(5.1)(5.3)	———
ベクトル平面波の展開	(4.13)(4.14)(4.16)	P.1866
ベクトル演算公式	(6.13)(6.14)	特になし P.1900
Green's dyadicの展開	(6.25)	P.1875
Delta dyadic の展開	(6.26)	P.1781

Edmonds 他

Edmonds[15] Corben and Schwinger[16], Blatt and Weisskopf[17] 等の主として原子又は原子核物理学の教科書、論文では、電磁波（γ線）の散乱問題を取扱う際に Vector spherical harmonics の名称のベクトル函数が使用されている。ここでは Edmonds[15] の定義との関係をのべる。これは次のようにして定義される。あるベクトル函数 $\mathbb{V}$ に対する微小回転演算子 $\mathbb{J}$ のたとえば z 成分 J_z は、z 軸まわりの微小角 α の回転に対し

$$\mathbb{V}' = (1 + i\alpha J_z)\mathbb{V} + O(\alpha^2) \qquad (8.8)$$

但し

$$J_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + e_z \times \qquad (8.9)$$

で定義されるから

$$\mathbb{J} = \mathbb{L} + \mathbb{S} \qquad (8.10)$$

但し、$\mathbb{L} = -i(\mathbb{r} \times \nabla)$、$S_x = e_x \times$、$S_y = e_y \times$、$S_z = e_z \times$ である。$\mathbb{S}$ の各成分は $\mathbb{L}$ の各成分と可換であり、又 (2.1) で定義される固定カノニカル基底に対し、$\mathbb{S}^2 e_n = 2 e_n$、$S_z e_n = n e_n$ の性質をもつ。即ち $\mathbb{S}$ はスピン 1 の角運動量と同じである。それ故 (8.10) に対し、J^2 と J_z の同時固有ベクトルを、物理学者の手慣れた角運動量合成則を利用して $\mathbb{L}$ と $\mathbb{S}$ の固有ベクトルの積であらわす。つまり逆に云えば $\mathbb{L}$ と $\mathbb{S}$ の固有ベクトルの積を既約分解するのである。このようにして、Vector spherical harmonics

$$\mathcal{Y}_{J\ell M}(\theta,\varphi)=\sum_{mn} Y_\ell^m(\theta\varphi)\,\mathcal{C}_n(\ell m 1n\,|\,\ell\,1\,JM) \qquad (8\cdot11)$$

$$J^2\mathcal{Y}_{J\ell M}=J(J+1)\mathcal{Y}_{J\ell M} \qquad J=\ell+1,\ \ell,\ \ell-1 \qquad (8\cdot12)$$

$$J_z\mathcal{Y}_{J\ell M}=M\mathcal{Y}_{J\ell M} \qquad (8\cdot13)$$

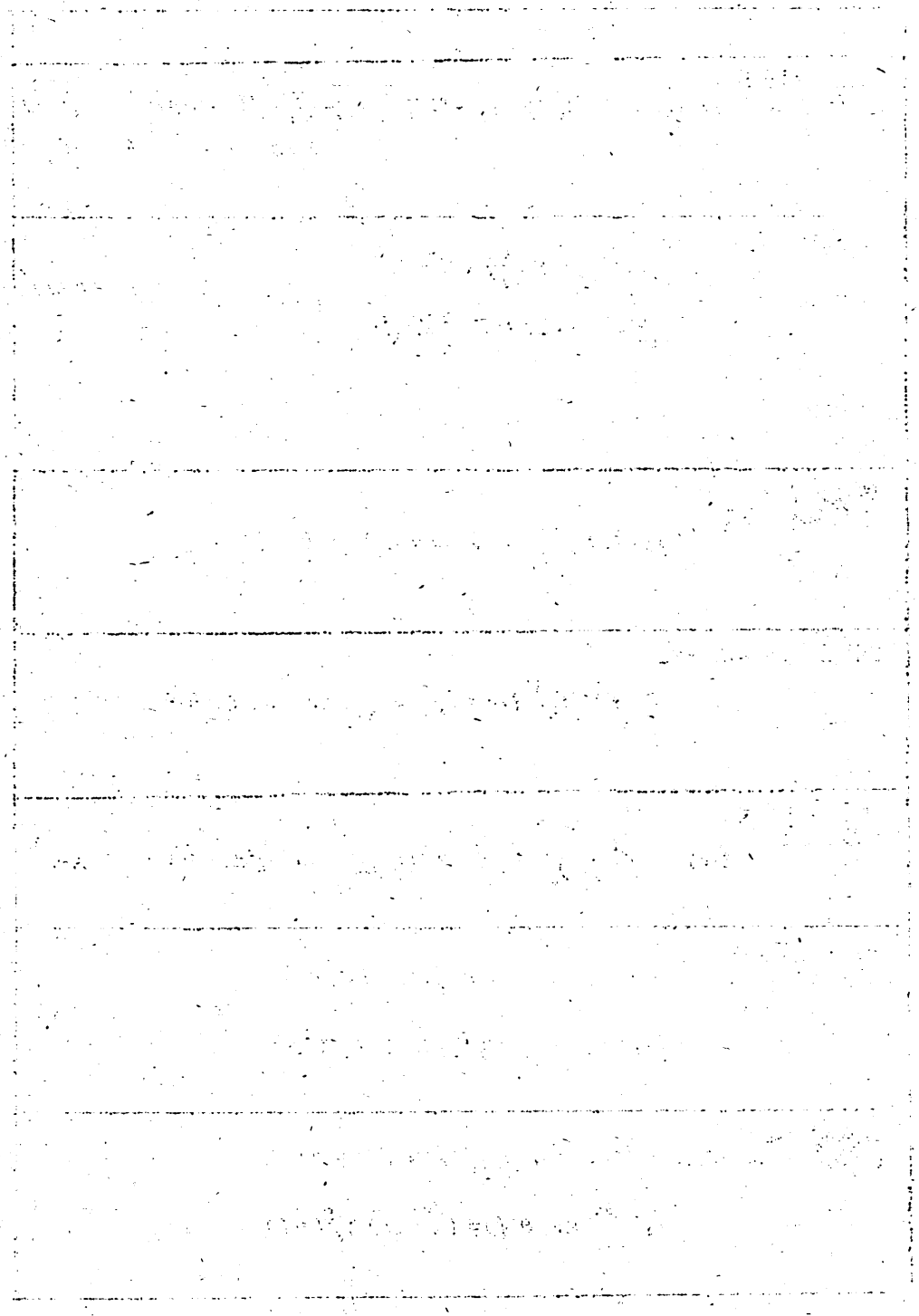
を定義する。当然 $\mathcal{Y}_{J\ell M}$ は球面上の積分に関し規格直交系を作る。

我々の用いた *spherical vector harmonics* $\mathbb{P}_n^{\ell S}$ と (8·11) で与えられる $\mathcal{Y}_{J\ell M}$ との関係は次の通りである。

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{Y}_{\ell\,\ell-1\,S}&=\sqrt{\frac{\ell}{(2\ell+1)}}\,\mathbb{P}_0^{\ell S}+\sqrt{\frac{\ell+1}{2(2\ell+1)}}\,(\mathbb{P}_{-1}^{\ell S}+\mathbb{P}_1^{\ell S})\\
\mathcal{Y}_{\ell\ell S}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbb{P}_{-1}^{\ell S}-\mathbb{P}_1^{\ell S})\\
\mathcal{Y}_{\ell\,\ell+1\,S}&=-\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\,\mathbb{P}_0+\sqrt{\frac{\ell}{2(2\ell+1)}}\,(\mathbb{P}_{-1}+\mathbb{P}_1)
\end{aligned}\right\} \qquad (8\cdot14)$$

或いは逆に

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\pm1}^{\ell S}&=\sqrt{\frac{(\ell+1)}{2(2\ell+1)}}\,\mathcal{Y}_{\ell\,\ell-1\,S}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathcal{Y}_{\ell\ell S}+\sqrt{\frac{\ell}{2(2\ell+1)}}\,\mathcal{Y}_{\ell\,\ell+1\,S}\\
\mathbb{P}_0^{\ell S}&=\sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\,\mathcal{Y}_{\ell\,\ell-1\,S}-\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\,\mathcal{Y}_{\ell\,\ell+1\,S}=\mathcal{C}_r Y_\ell^m
\end{aligned}\right\} \qquad (8\cdot15)$$



附録 ： スカラー函数，ベクトル函数の定義・公式対照表

スカラー

球面調和函数 (Spherical harmonics)

$$Y_\ell^s(\theta,\varphi)=(-1)^s\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\cdot\frac{(\ell-s)!}{(\ell+s)!}}\,P_\ell^s(\cos\theta)\,e^{is\varphi} \qquad (A\cdot1)$$

$$\ell=0,1,2\cdots,\ s=-\ell\cdots,\ell$$

球函数の定義

$$P_\ell(x)=\frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \qquad \ell=0,1,2\cdots\cdots$$

$$P_\ell^s(x)=(1-x^2)^{\frac{s}{2}}\frac{d^sP_\ell(x)}{dx^s} \qquad s=-\ell\cdots\cdots\ell \qquad (A\cdot2)^{8)}$$

球Bessel函数
球Hankel函数

$$j_\ell(kr),\ h_\ell^{(\nu)}(kr),\ \nu=1,2\ ,\ \ell=0,1,2\cdots\cdots$$

調和函数の積分直交性

$$\int_{S_3}\overline{Y_\ell^s}\,Y_{\ell'}^{s'}\,d\omega=\delta_{\ell\ell'}\cdot\delta_{ss'},\ d\omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \qquad (A\cdot3)$$

球Bessel函数の積分定理

$$f(r)=(4\pi)^2\int_0^\infty\int_0^\infty f(r')\,j_\ell(2\pi tr)\,j_\ell(2\pi tr')\,t^2dt\,r'^2dr' \qquad (A\cdot4)^{8)}$$

Hankel変換
逆Hankel変換

$$F(t)=4\pi\int_0^\infty f(r)\,j_\ell(2\pi tr)\,r^2dr$$

$$f(r)=4\pi\int_0^\infty F(t)\,j_\ell(2\pi tr)\,t^2dt \qquad (A\cdot5)$$

立体調和函数 (Solid harmonics)

$$J^{\ell s}(kr,\theta,\varphi)=j_\ell(kr)\,Y_\ell^s(\theta\varphi)$$

$$H^{(\nu)\ell s}(kr,\theta,\varphi)=h_\ell^{(\nu)}(kr)\,Y_\ell^s(\theta\varphi) \qquad \nu=1,2$$

ベクトル

球面ベクトル調和函数
(Spherical vector harmonics)

$$\mathbb{P}_n^{\ell s}(\theta,\varphi)=\left\{\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\delta_{nm}\overline{T_{sm}^{\ell}(\vartheta)},\ m=-1,0,1\right\}$$

$$(\mathbb{P}_n\cdot\mathbb{P}_{n'})=0$$

m：カノニカル成分，$n=-1,0,1$，
$\ell=0,1,2\cdots$　$s=-\ell,\cdots\ell$

一般球函数の定義

$$T_{mn}^{\ell}(\vartheta)=e^{-im\varphi_1}P_{mn}^{\ell}(\cos\theta)\,e^{-in\varphi_2},\qquad \varphi_1=\varphi+\frac{\pi}{2}$$

$$P_{mn}^{\ell}(x)=A(-1-x)^{-\frac{n-m}{2}}(1+x)^{-\frac{n+m}{2}}\frac{d^{\ell-n}}{dx^{\ell-n}}\left[(1-x)^{\ell-m}(1+x)^{\ell+m}\right]$$

$$A\equiv\frac{(-1)^{\ell-m}i^{n-m}}{2^{\ell}(\ell-m)!}\sqrt{\frac{(\ell-m)!\,(\ell+n)!}{(\ell+m)!\,(\ell-n)!}}$$

$\ell=0,1,2\cdots$
$m,n=-\ell,\cdots,\ell$

球Besselベクトル函数
球Hankelベクトル函数

$$j_{mn}^{\ell}(kr),\quad h_{mn}^{(\nu)\ell}(kr),\quad \nu=1,2$$

$m,n=-1,0,1$
$\ell=0,1,2$

ベクトル調和函数の積分直交性

$$\int_{S_3}(\mathbb{P}_n^{\ell s}\cdot\mathbb{P}_{n'}^{\ell' s'})\,d\omega=\delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{ss'}$$

（・はベクトル内積）

球Besselベクトル函数の積分定理

$$\delta_{nn'}f(r)=(4\pi)^2\sum_{m=-1}^{1}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(r')\,\overline{j_{mn}^{\ell}(2\pi tr)}\,j_{mn'}^{\ell}(2\pi tr')\,t^2dt\,r'^2dr'$$

ベクトルHankel変換
逆ベクトルHankel変換

$$F_m(t)=4\pi\sum_{n=-1}^{1}\int_0^{\infty}j_{mn}^{\ell}(2\pi tr)\,f_n(r)\,r^2dr$$

$$f_n(r)=4\pi\sum_{m=-1}^{1}\int_0^{\infty}\overline{j_{mn}^{\ell}(2\pi tr)}\,F_m(r)\,t^2dt$$

立体ベクトル調和函数
(Solid vector harmonics)

$$\mathbb{J}_n^{\ell s}(kr,\theta\varphi)=\sum_{t=-1}^{1}j_{nt}^{\ell}(kr)\,\mathbb{P}_t^{\ell s}(\theta\varphi)$$

$$\mathbb{H}_n^{(\nu)\ell s}(kr,\theta,\varphi)=\sum_{t=-1}^{1}h_{nt}^{(\nu)\ell}(kr)\,\mathbb{P}_t^{\ell s}(\theta\varphi)\qquad \nu=1,2$$

スカラー

$J^{\ell s}$の積分直交性

$$(4\pi)^2 \int_0^\infty \int_{S_3} \overline{J^{\ell s}}\, J^{\ell' s'}\, d\omega = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{ss'}\,\frac{\delta(t-t')}{t^2} \qquad (A\cdot 6)$$

スカラー波動方程式

$$\nabla^2 J + k^2 J = 0 \qquad (H^{(\nu)}\text{も満足する})$$

J, J_nの相互関係
($H^{(\nu)}$, $H_n^{(\nu)}$も同様)

$$J_0 = \frac{1}{k}\nabla J, \qquad J_\pm = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\ell(\ell+1)}}\left[\frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times(\mathbf{r}J) \pm \nabla\times(\mathbf{r}J)\right]$$

球Bessel函数の積分表示

$$j_\ell(kr) = \frac{1}{2i^\ell}\int_0^\pi e^{ikr\cos u} P_\ell(\cos u)\sin u\, du \qquad (A\cdot 7)^{11)}$$

$$h_\ell^{(\nu)}(kr) = \frac{1}{2i^\ell}\int_{B_\nu} e^{ikr\cos u} P_\ell(\cos u)\sin u\, du$$

立体調和函数の積分表示

$$J^{\ell s}(kr,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi i^\ell}\int_{S_3} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\, Y_\ell^s(u,v)\, d\omega \qquad \mathbf{K}=(k\,u\,v),\ \mathbf{r}=(r\,\theta\,\varphi) \qquad (A\cdot 8)^{11)}$$

$$H^{(\nu)\ell s}(kr,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi i^\ell}\int_{B_\nu} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\, Y_\ell^s(u,v)\, d\omega \qquad \nu = 1.2 \qquad (A\cdot 9)^{11)}$$

平面波の展開

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\, J^{\ell 0}(\theta\varphi) \qquad (A\cdot 10)^{8)}$$

$$e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell} i^\ell J^{\ell s}(\theta\varphi)\,\overline{Y_\ell^s(u\,v)} \qquad (A\cdot 11)$$

ベクトル

$\mathbb{J}_n^{ls}$の積分直交性

$$(4\pi)^2\int_0^\infty\int_{S_3}(\mathbb{J}_n^{ls}\cdot\mathbb{J}_{n'}^{l's'})\,d\omega\,r^2dr=\delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{ss'}\frac{\delta(t-t')}{t^2}$$

ベクトル波動方程式

$$\nabla^2\mathbb{J}_n+k^2\mathbb{J}_n=0\quad(\mathbb{H}_n^{(\nu)}\text{も満足する})\quad n=-1.0.1.$$

$$\nabla J=k\mathbb{J}_0,\quad \nabla\mathbb{J}_n=-\delta_{0n}kJ,\quad \nabla\times\mathbb{J}_n=nk\mathbb{J}_n\qquad n=-1.0.1$$

球Besselベクトル函数の積分表示

$$j_{mn}^{l}(kr)=\frac{1}{2i^{l-1}}\int_0^\pi e^{ikr\cos u}\overline{P_{mn}^{l}(\cos u)}P_{mn}'(\cos u)\sin u\,du$$

$$h_{mn}^{(\nu)l}(kr)=\frac{1}{2i^{l-1}}\int_{B_\nu}e^{ikr\cos u}\overline{P_{mn}^{l}(\cos u)}\,P_{mn}'(\cos u)\sin u\,du$$

立体ベクトル調和函数の積分表示

$$\mathbb{J}_n^{ls}(kr.\theta.\varphi)=\frac{1}{4\pi i^{l-1}}\int_{S_3}e^{i\mathbb{K}\cdot\mathbb{r}}\mathbb{P}_n^{ls}(u\,v)\,d\omega$$

$$\mathbb{H}_n^{(\nu)ls}(kr.\theta.\varphi)=\frac{1}{4\pi i^{l-1}}\int_{B_\nu}e^{i\mathbb{K}\cdot\mathbb{r}}\mathbb{P}_n^{ls}(u\,v)\,d\omega$$

テンソル積分表示

$$\sum_{t=-1}^{1}j_{nt}^{1}(kr)\,e_t(\mathbb{r})\,\overline{e_t(\mathbb{r})}=\frac{1}{4\pi}\int_{S_3}e_n(\mathbb{K})\,\overline{e_n(\mathbb{K})}\,e^{i\mathbb{K}\cdot\mathbb{r}}\,d\omega$$

$$\sum_{t=-1}^{1}h_{nt}^{(\nu)1}(kr)\,e_t(\mathbb{r})\,\overline{e_t(\mathbb{r})}=\frac{1}{4\pi}\int_{B_\nu}e_n(\mathbb{K})\,\overline{e_n(\mathbb{K})}\,e^{i\mathbb{K}\cdot\mathbb{r}}\,d\omega$$

ベクトル平面波の展開

$$e_n\,e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}i^{l-1}\sqrt{4\pi(2l+1)}\;\mathbb{J}_n^{l0}(kr.\theta.\varphi),\quad n=-1.0.1$$

テンソル平面波

$$e_n(\mathbb{K})\,\overline{e_n(\mathbb{K})}\,e^{i\mathbb{K}\cdot\mathbb{r}}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=-l}^{l}i^{l-1}\mathbb{J}_n^{ls}(kr.\theta.\varphi)\,\overline{\mathbb{P}_n^{ls}(u,v)}$$

$$\mathbb{K}=(k\,u\,v),\quad \mathbb{r}=(r,\theta,\varphi)$$

スカラー

球函数の加法定理

$$P_\ell(\cos\Theta)=\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_\ell^m(\theta_1,\varphi_1)\,\overline{Y_\ell^m(\theta_2,\varphi_2)} \qquad (A\cdot12)^{8)}$$

$$\cos\Theta=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \qquad (A\cdot13)$$

球Bessel函数の加法定理 ($\ell=0$)

$$j_0(r)=\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,j_\ell(r_1)\,j_\ell(r_2)\,P_\ell(\cos\Theta) \qquad (A\cdot14)^{8)}$$

$$h_0^{(\nu)}(r)=\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\begin{cases}h_\ell^{(\nu)}(r_1)\,j_\ell(r_2) & r_1>r_2\\ j_\ell(r_1)\,h_\ell^{(\nu)}(r_2) & r_2>r_1\end{cases}P_\ell(\cos\Theta) \qquad (A\cdot15)^{8)}$$

スカラー型加法定理

$$j_0(r)=4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{S=-\ell}^{\ell}J^{\ell S}(r_1,\theta_1,\varphi_1)\,\overline{J^{\ell S}(r_2,\theta_2,\varphi_2)} \qquad (A\cdot16)$$

$$h_0^{(1)}(r)=\begin{cases}4\pi\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{S=-\ell}^{\ell}H^{(1)\ell S}(r_1,\theta_1,\varphi_1)\,\overline{J^{\ell S}(r_2,\theta_2,\varphi_2)}, & r_1>r_2\\ 4\pi\displaystyle\sum_{\ell}\sum_{S}J^{\ell S}(r_1,\theta_1,\varphi_1)\,\overline{H^{(2)\ell S}(r_2,\theta_2,\varphi_2)}, & r_2>r_1\end{cases} \qquad (A\cdot17)$$

Green's function (自由空間)

$$\nabla^2G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)+k^2G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)=-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

$$G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)=\frac{e^{ikr}}{4\pi r}=\begin{cases}ik\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{S=-\ell}^{\ell}H^{(1)\ell S}(kr_1,\theta_1,\varphi_1)\,\overline{J^{\ell S}(kr_2,\theta_2,\varphi_2)}, & r_1>r_2\\ ik\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{S=-\ell}^{\ell}J^{\ell S}(kr_1,\theta_1,\varphi_1)\,\overline{H^{(2)\ell S}(kr_2,\theta_2,\varphi_2)}, & r_2>r_1\end{cases} \qquad (A\cdot18)^{11)}$$

ベクトル

一般球函数の加法定理

$$T^{\ell}_{mn}(g_2^{-1}g_1)=\sum_{s=-\ell}^{\ell}\overline{T^{\ell}_{sm}(g_2)}\,T^{\ell}_{sn}(g_1)$$

球面ベクトル調和函数のテンソル型加法定理

$$\mathbb{P}^{\ell n}_{m}(g_2^{-1}g_1)\,\overline{e_n(g_2)}=\sum_{s=-\ell}^{\ell}\mathbb{P}^{\ell s}_{m}(g_1)\,\overline{\mathbb{P}^{\ell s}_{n}(g_2)},\quad m,n=-1,0,1$$

球Besselベクトル函数の加法定理 ($\ell=1$)

$$\sum_{t=-1}^{1}T^{1}_{tm_2}(g_{02})\,\overline{T^{1}_{tm_1}(g_{01})}\,j^{1}_{tn}(r)=\sum_{\ell=|n|}^{\infty}(2\ell+1)\,j^{\ell}_{nm_1}(r_1)\,\overline{j^{\ell}_{nm_2}(r_2)}\,\overline{T^{\ell}_{m_2m_1}(g_{21})}$$

$(g_{01}=g_{02}g_{21})$

$$\sum_{t=-1}^{1}T^{1}_{tm_2}(g_{02})\,\overline{T^{1}_{tm_1}(g_{01})}\,h^{(1)1}_{tn}(r)=\sum_{\ell}(2\ell+1)\begin{cases}h^{(1)\ell}_{nm_1}(r_1)\,\overline{j^{\ell}_{nm_2}(r_2)} & r_1>r_2\\ j^{\ell}_{nm_1}(r_1)\,\overline{h^{(2)\ell}_{nm_2}(r_2)} & r_2>r_1\end{cases}\overline{T^{\ell}_{m_2m_1}(g_{21})},$$

テンソル型加法定理

$$\sum_{t=-1}^{1}e_t(\mathbf{r})\,\overline{e_t(\mathbf{r}')}\,j^{1}_{tn}(r)=4\pi\sum_{\ell=|n|}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell}\mathbb{J}^{\ell s}_{n}(r_1g_1)\,\overline{\mathbb{J}^{\ell s}_{n}(r_2g_2)}$$

$(\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$

$$\sum_{t=-1}^{1}e_t(\mathbf{r})\,\overline{e_t(\mathbf{r}')}\,h^{(1)1}_{tn}(r)=\begin{cases}4\pi\sum_{\ell}\sum_{s}\mathbb{H}^{(1)\ell s}_{n}(r_1g_1)\,\overline{\mathbb{J}^{\ell s}_{n}(r_2g_2)} & r_1=r_2\\ 4\pi\sum_{\ell}\sum_{s}\mathbb{J}^{\ell s}_{n}(r_1g_2)\,\overline{\mathbb{H}^{(2)\ell s}_{n}(r_2g_2)} & r_2>r_1\end{cases}$$

$(g_{21}=g_2^{-1}g_1)$

Green's dyadic

$$\nabla^2\mathcal{G}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)+k^2\mathcal{G}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)=-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathcal{I}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2)=\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\mathcal{I}=\begin{cases}ik\sum_{n=-1}^{1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell}\mathbb{H}^{(1)\ell s}_{n}(kr_1g_1)\,\overline{\mathbb{J}^{\ell s}_{n}(kr_2g_2)}, & r_1>r_2\\ ik\sum_{n=-1}^{1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell}\mathbb{J}^{\ell s}_{n}(kr_1g_1)\,\overline{\mathbb{H}^{(2)\ell s}_{n}(kr_2g_2)}, & r_2>r_1\end{cases}$$

$n=0$ は longitudinal, $n=-1,1$ は transverse,

$\mathcal{I}=\sum_{t=-1}^{1}e_t\,\overline{e_t}$: unity dyadic

スカラー

Delta function

$$F(\mathbf{r})=\int_{R_3}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')F(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'$$

$$\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=(4\pi)^2\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell}\int_0^{\infty}J^{\ell s}(2\pi t r_1\theta_1\varphi_1)\overline{J^{\ell s}(2\pi t r_2\theta_2\varphi_2)}\,t^2dt \qquad (A\cdot19)$$

スカラー函数の Fourier 展開

$$F(\mathbf{r})=4\pi\sum_{\ell}\sum_{s}\int_0^{\infty}F^{\ell s}(t)\,J^{\ell s}(2\pi t r.\theta.\varphi)\,t^2dt \qquad (A\cdot20)$$

$$F^{\ell s}(t)=4\pi\int_{S_3}\int_0^{\infty}f(\mathbf{r})\,\overline{J^{\ell s}(2\pi t r.\theta.\varphi)}\,r^2dr\,d\omega$$

一様等方スカラー乱場のスペクトル分解

$$I(r.\theta.\varphi)=\sqrt{4\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{s=-\ell}^{\ell}\int_0^{\infty}J^{\ell s}(2\pi t r.\theta.\varphi)M_\ell^s(dt,\omega) \qquad (A\cdot21)^{14)}$$

$$E\langle M_\ell^s(\Delta).M_{\ell'}^{s'}(\Delta')\rangle=\delta_{\ell\ell'}\delta_{ss'}4\pi\int_{\Delta\cap\Delta'}|F(t)|^2t^2dt$$

$$R(r)=4\pi\int_0^{\infty}|F(t)|^2j_0(2\pi t r)\,t^2dt$$

$$|F(t)|^2=4\pi\int_0^{\infty}R(r)\,j_0(2\pi t r)\,t^2dt$$

$M_\ell^s(\Delta,\omega)$ 彷徨スペクトル測度；$R(r)$ 相関函数，

$|F(t)|^2$ スペクトル密度，ω：確率パラメタ，$E\langle\rangle$ 確率平均

ベクトル

Delta dyadic

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}) = \int_{R_3} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathcal{J}\cdot\mathbb{F}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'$$

$$\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathcal{J} = (4\pi)^2 \sum_{n=-1}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{S=-l}^{l} \int_0^\infty \mathbb{J}_n^{lS}(2\pi t r_1 g_1)\,\overline{\mathbb{J}_n^{lS}(2\pi t r_2 g_2)}\,t^2 dt$$

$n=0$ は longitudinal part $\mathcal{D}_l$, $n=-1,1$ は transverse part $\mathcal{D}_t$

ベクトル函数の Fourier 展開

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{n=-1}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{S=-l}^{l} \int_0^\infty F_n^{lS}(t)\,\mathbb{J}_n^{lS}(2\pi t r,\theta,\varphi)\,t^2 dt$$

$$F_n^{lS}(t) = 4\pi \int_{S_3}\int_0^\infty \mathbb{J}_n^{lS}(2\pi t r,\theta,\varphi)\cdot\mathbb{F}(\mathbf{r})\,r^2 dr\,d\omega$$

一様等方ベクトル乱場のスペクトル分解

$$\mathbb{I}(r\theta\varphi) = \sqrt{4\pi}\sum_{n=-1}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{S=-l}^{l} \int_0^\infty \mathbb{J}_n^{lS}(2\pi t r,\theta,\varphi)\,M_n^{lS}(dt,\omega)$$

$$E\langle M_n^{lS}(\Delta), M_{n'}^{l'S'}(\Delta')\rangle = \delta_{nn'}\cdot\delta_{ll'}\cdot\delta_{SS'}\cdot 4\pi \int_{\Delta\cap\Delta'} |F_n(t)|^2 t^2 dt$$

$$R_{mm}(r) = 4\pi\sum_{n=-1}^{1}\int_0^\infty |F_n(t)|^2\,\overline{j_{mn}^{1}(2\pi t r)}\,t^2 dt \qquad m=-1,0,1$$

$$|F_n(t)|^2 = 4\pi\sum_{m=-1}^{1}\int_0^\infty R_{mm}(r)\,j_{mn}^{1}(2\pi t r)\,r^2 dr \qquad n=-1,0,1$$

$M_n^{lS}(\Delta,\omega)$ 位相スペクトル測度.

$R_{mm}(r)$ 相関テンソルの対角なカノニカル成分

$|F_n(t)|^2$ スペクトル密度テンソルの対角なカノニカル成分

参考文献

1) 小倉 ： ベクトル乱場の表現、輻研資料 1966 年 5 月

2) 小倉 ： 電気通信学会インフォメーション理論研究会資料 1966年1月

3) 小倉 ： 同 上 1966年6月

4) 小倉 ： 物理学会1966年秋の分科会講演予稿集 5 12a T-6 1966年10月

5) 小倉 ： 物理学会第22回年会講演予稿、1967年4月

6) 小倉 ： 電気通信学会アンテナ伝播研究会資料、1967年3月

7) I. M. Gel'fand, R. A. Minlos, Z. Ya. Shapiro : Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications. Pergamon Press 1963.

8) 数学公式 Ⅲ; 岩波書店 1960

9) U. Fano, G. Racah : Irreducible Tensorial Set. Academic Press 1959.

10) N. Ya. Vilenkin : Uspehi 11-2 (1956) 69~112, Bessel functions and representation of the group of Enclidean motions.

11) P. Morse and H. Feschbach : Method of theoretical Physics I, II. McGraw Hill. New York. 1953.

12) J. A. Stratton : Electromagnetic Theory, McGraw Hill. New York. 1941.

13) W. W. Hansen : Phys. Rev. 47 139 (1935).

14) H. Ogura : Spectral Representation of a homogeneous and isotropic random field. J. Phys. Soc. Japan. 21 154 (1966).

15) A. R. Edmonds : Angular Momentum in Quantum Mechanics. Princeton Univ. Press. 1957.

16) H. C. Corben, J. Schwinger : Phys. Rev. 58 953 (1940)
17) J. M. Blatt, V. F. Weisskopf : Theoretical Nuclear Physics, Appendix Wiley. 1952.

輻射科学研究会資料

反射を与えた気体レーザの発振特性

福井　廉
浜田　孝
池上淳一
（京都大学工学部）

1967年2月

反射を与えた気体レーザーの発振特性

目　次

§1. まえがき …… 1

§2 理　論

2.1 簡約方程式の導出 …… 1

2.2 負荷を考慮した単一モード発振出力 …… 3

2.3 負荷による発振周波数の変化 …… 5

§3 数値計算

3.1 反射鏡の位置による発振出力の変化 …… 5

3.2 反射鏡の位置による発振周波数の変化 …… 13

3.3 スミス図表による説明 …… 13

§4 実　験

4.1 実験装置および方法 …… 18

4.2 実験結果とその説明 …… 19

§5 考　察 …… 19

§6 むすび …… 22

§1. まえがき

マイクロ波帯の発振器では負荷特性はリーケ線図などにより表現されるが，レーザ発振器は通常多重モードで発振しているため負荷特性は単に反射波の大きさと位相だけでは決定されず反射の生じた位置や反射波のレーザ共振器モードとの結合係数などが影響してくると考えられる。従来反射波のレーザ発振動作への影響については発振モードの単一化の研究[1]やプラズマ診断[2]への応用などに関連して，間接的に論じられてはいるが，負荷特性という観点から論じた研究は，筆者らの知るかぎり，まだ見当らない。また，負荷特性の研究は，その積極的応用の基礎としてばかりでなく，レーザを無反射の状態で用いる通常の動作において反射の有無が発振特性にどのような影響を与えるか* についての知見を提供することになると考えられる。

以下，本報告では伝送線モデルで負荷特性が論じられるような場合について理論解析を行ない，これを照合すべき実験結果を報告するとともに，レーザ共振器と伝送系との不整合によるモード変換の影響についても簡単な考察を加える。

§2 理　論

§§2.1 簡約方程式の導出

レーザの発振動作は2階の非線形微分方程式

$$\frac{d^2A_n(t)}{dt^2}+\left(\frac{\nu}{Q_n}\right)\frac{dA_n(t)}{dt}+\Omega_n^2A_n(t)=\frac{\nu^2}{\varepsilon_0}P_n(t) \qquad (1)$$

で表わされることが W.E. Lamb[3] によって示された。ここに $A_n(t)$

---

* たとえば phase locked laser においては，僅かの反射が locking の成立に大きく影響することが報じられている。

はレーザ共振器内の電磁界を共振器の規準モードで展開したときの展開係数，Q_n は共振器のQ，Ω_n は共振器の共振周波数，$P_n(t)$ はレーザ媒質の分極 $P(z,t)$ のn次モード成分で $P_n(z)=\frac{2}{L}\int_0^L dz\,P(z,t)$，（$K_n=2\pi n/L$）で与えられる。

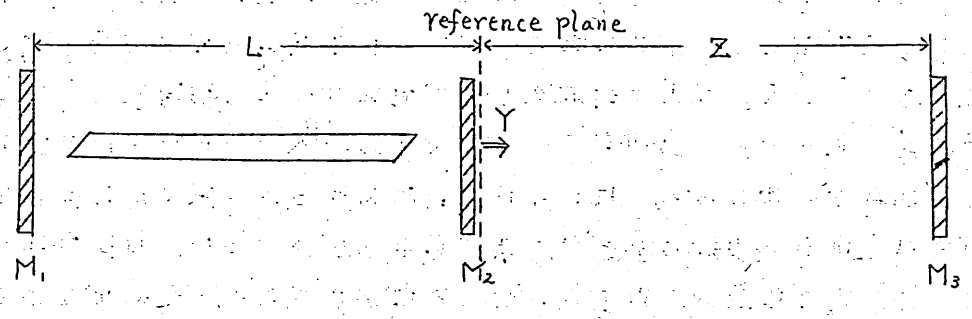


Fig. 1

いまFig. 1のようにレーザ共振器 M_1 M_2 から出た出力波が reference plane から Z の距離にある反射物体 M_3 に当り反射波がレーザ共振器 M_1 M_2 に入る様な場合を考える。解析の方法として反射物体 M_3 をレーザの負荷と考え，reference plane から M_3 を見た規格化アドミタンスを $Y_n=G_n+jB_n$ とすると (1) 式は次のようになる。

$$\frac{d^2A_n(t)}{dt^2}+\nu\left(\frac{1}{Q_{in}}+\frac{G_n}{Q_{extn}}\right)\frac{dA_n(t)}{dt}+\Omega_n^2\left(1-\frac{B_n}{Q_{extn}}\right)A_n(t)=\frac{\nu^2}{\varepsilon_0}P_n(t) \qquad (2)$$

ただし，$G_n/Q_{ext}\ll 1$，$B_n/Q_{ext}\ll 1$ および $1/Q_i\ll 1$ を仮定した。いま (2) 式の $A_n(t)$，$P_n(t)$ を時間的にゆっくり変化する振幅成分と位相成分とに分け次のように表わす。

$$A_n(t)=E_n(t)\cos(\nu_n t+\varphi_n(t)) \qquad (3)$$

$$P_n(t)=C_n(t)\cos(\nu_n t+\varphi_n(t))+S_n(t)\sin(\nu_n t+\varphi_n(t)) \qquad (4)$$

(3) (4) を (2) に代入して $\ddot{E}_n(t)$, $\ddot{\varphi}_n(t)$, $\dot{\varphi}_n(t)\dot{E}_n(t)$, $\dot{\varphi}_n^2$ などの2次微小項を省略すると次の簡約方程式が得られる。

$$\left\{ \nu_n + \dot{\varphi}_n - \Omega_n \left(1 - \frac{B_n}{2Q_{extn}} \right) \right\} E_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\varepsilon_0}\right) C_n \qquad (5)$$

$$\dot{E}_n + \frac{1}{2}\nu \left\{ \frac{1}{Q_{in}} + \frac{G_n}{Q_{extn}} \right\} E_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\varepsilon_0}\right) S_n \qquad (6)$$

(5) は周波数決定方程式，(6) は振幅決定方程式である。

§§ 2.2　負荷を考慮した単一モード発振出力

振幅決定方程式 (6) に Lamb[3] によって求められた S_n の値

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(3)} \qquad (7)$$

ただし

$$S_n^{(1)} = -\left(\frac{\rho^2}{\hbar K U}\right) \bar{N} Z_i(\nu_n - \omega) E_n \qquad (8)$$

$$S_n^{(3)} = \frac{1}{8}\pi^{\frac{1}{2}} \bar{N} \frac{\rho^4}{\hbar^3 \gamma_a \gamma_b K U} \left[1 + \gamma_{ab}^2 \mathcal{L}(\nu_n - \omega) \right] E_n^3 \qquad (9)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{L}\int_0^L dz\, N(z,t)$$

$$Z_i(\nu_n - \omega) = \pi^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(\frac{\nu_n - \omega}{KU} \right)^2 \right]$$

$$\mathcal{L}(\nu_n - \omega) = \frac{1}{\gamma_{ab}^2 + (\nu_n - \omega)^2}$$

を代入すると1次近似の理論から $\bar{N}$ の threshold value が次式のように求まる。

$$N_T^* = \left(\frac{1}{Q_{in}} + \frac{G_n}{Q_{extn}} \right) \frac{\varepsilon_0 \hbar K U}{\rho^2 Z_i(\nu_n - \omega)} \qquad (10)$$

上式は負荷の変化とともに threshold が変化することを示す。
N_T^* と無反射の場合の N_T^* の値 N_T との関係は，

$$N_T^* = \frac{\frac{1}{Q_{in}} + \frac{G_n}{Q_{extn}}}{\frac{1}{Q_{in}} + \frac{1}{Q_{extn}}} N_T \qquad (11)$$

そこで3次近似の理論の範囲で，且つ mode competition の効果を無視した場合には振幅決定方程式(6)は

$$\dot{E}_n = \alpha_n E_n - \beta_n E_n^3 \qquad (12)$$

ここに

$$\alpha_n = \frac{\nu}{2}\left\{\frac{1}{Q_{in}} + \frac{G_n}{Q_{extn}}\right\}\left\{\frac{Z_i(\nu_n-\omega)}{Z_i(0)}\mathcal{N}^* - 1\right\} \qquad (13)$$

$$\beta_n = \frac{\nu\pi^{\frac{1}{2}}}{16}\frac{\wp^2}{\hbar^2\gamma_a\gamma_b Z_i(0)}\mathcal{N}^*\left\{\frac{1}{Q_{in}} + \frac{G_n}{Q_{extn}}\right\}\left\{1+\gamma_{ab}^2 L(\nu_n-\omega)\right\} \qquad (14)$$

$$\mathcal{N}^* \equiv \frac{\bar{N}}{N_T^*} = \frac{\frac{1}{Q_{in}} + \frac{1}{Q_{extn}}}{\frac{1}{Q_{in}} + \frac{G_n}{Q_{extn}}}\mathcal{N} \qquad (15)$$

$$\mathcal{N} = \frac{\bar{N}}{N_T} \qquad (16)$$

従って定常状態の単一モード発振出力は(12)において $\dot{E}_n = 0$ とおくことによって

$$E_n^2 = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{8\hbar^2\gamma_a\gamma_b}{\sqrt{\pi}\wp^2 Z_i(0)} \frac{\frac{Z_i(\nu_n-\omega)}{Z_i(0)} - \frac{\frac{1}{Q_{in}} + \frac{G_n}{Q_{extn}}}{\left(\frac{1}{Q_{in}} + \frac{1}{Q_{extn}}\right)\mathcal{N}}}{1+\gamma_{ab}^2 L(\nu_n-\omega)} \qquad (17)$$

(17)式から，反射のない場合すなわち $G_n = 1$ のときは Lamb の求めた単一モード発振出力になり，反射がある場合で G_n が1より小さい場合には threshold が低くなって発振強度が増すことがわかる．一方 G_n が1より大きい場合には逆に threshold が高くなったことになり，(17)の分子が零および負になるような G_n では発振が停止することになる．

§§ 2.3　負荷による発振周波数の変化

周波数決定方程式(5)から発振周波数 ν_n は

$$\nu_n = \Omega_n\left(1+\frac{B_n}{2Q_{extn}}\right)+\sigma_n+\rho_n E_n^2 \qquad (18)$$

ただし

$$\sigma_n = \frac{\nu}{2}\left\{\frac{1}{Q_n}+\frac{G_n}{Q_{extn}}\right\}\pi^* \frac{Z_r(\Omega_n-\omega)}{Z_i(0)} \qquad (19)$$

$$\rho_n = \frac{\nu}{16}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\beta^2}{\hbar^2\gamma_a\gamma_b Z_i(0)}\pi^*\gamma_{ab}(\Omega_n-\omega)\mathcal{L}(\Omega_n-\omega) \qquad (20)$$

$$Z_r(\nu_n-\omega) = -2e^{-\xi^2}\int_0^{\xi} e^{t^2}dt$$

$$\xi = \frac{\nu-\omega}{Ku}$$

(18)を変形すると

$$\frac{Q_{in}}{\Omega_n}(\nu_n-\Omega_n) = -\frac{1}{2}\frac{Q_{in}}{Q_{extn}}B_n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{Q_{in}}{Q_{extn}}\right)\pi\left[\frac{Z_r(\Omega_n-\omega)}{Z_i(0)}\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{Z_i(\Omega_n-\omega)}{Z_i(0)}-\frac{1+\frac{Q_{in}}{Q_{extn}}G_n}{1+\frac{Q_{in}}{Q_{extn}}}\frac{1}{\pi}\right\}\frac{\gamma_{ab}(\Omega_n-\omega)}{2\gamma_{ab}^2+(\Omega_n-\omega)^2}\right] \qquad (21)$$

§3　数値計算

§§ 3.1　反射鏡の位置による発振出力の変化

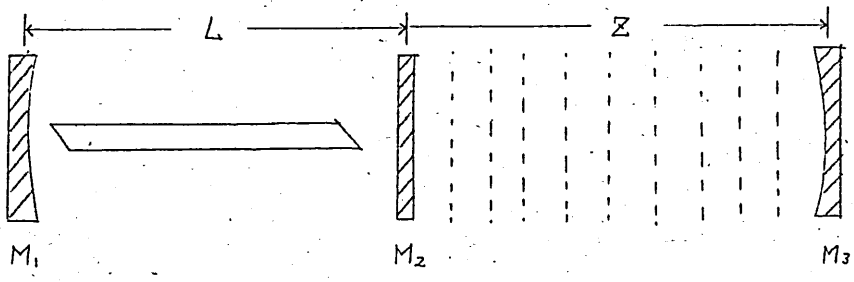


Fig 2

Fig 2 において M_3 の位置 z を変化させ，各 z の位置を中心に M_3 を $\frac{1}{4}$ 波長掃引させた場合の発振強度の変化を求める。n モードの発振強度は(17)に与えられている。いま数値計算の都合上次式のように $(8\hbar^2\gamma_a\gamma_b)/(\pi\beta^2 Z_i(0))$ で規格化し，かつパラメタ g を導入すると，

$$E_n^2 = \frac{\dfrac{Z_i(\nu_n-\omega)}{Z_i(0)} - \dfrac{1+gG_n}{(1+g)\tau}}{1+\gamma_{ab}{}^2 L(\nu_n-\omega)} \tag{22}$$

となる。ただし

$$g = \frac{Q_{in}}{Q_{ext\,n}}$$

反射物体 M_3 の反射係数を Γ とする reference plane から M_3 を見た負荷のコンダクタンス G_n は

$$G_n = \frac{1-|\Gamma|^2}{1+|\Gamma|^2+2|\Gamma|\cos\phi_n} \tag{23}$$

ここに ϕ_n はオi モードを中心として奇数個のモードが発振している場合，オi モードから数えてn番目のモードに関する反射係数の位相で，$\Sigma = m\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)$ とおくと ϕ_n は次式で表わされる．

$$\phi_n = \frac{4\pi}{\lambda_n} m \frac{\lambda_0}{2} \tag{24}$$

M_3 の掃引による m の微小変化分を δ とすると (24) 式は次のようになる．

$$\phi_n = 2\pi(m+\delta)\frac{\lambda_0}{\lambda_i} = 2\pi(m+\delta)\left(1+\frac{n}{i}\right)$$
$$\simeq 2\pi\left(\frac{m}{i}n+\delta\right) \tag{25}$$

そこで ( ) 式を g, π, Γ, Σ, δ をパラメタとして各モードに対して計算する各パラメタの値は次表のようにとった。

g	$\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$
π	0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6
Γ	0.995, 0.990, 0.950, 0.900, 0.750 0.500, 0.250, 0.100
Σ	$\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}L$, $\frac{3}{10}L$, $\frac{4}{10}L$, $\frac{5}{10}L$, $\frac{6}{10}L$ $\frac{7}{10}L$, $\frac{8}{10}L$, $\frac{9}{10}L$, L
δ	各Σの値を中心に$\frac{1}{4}$波長を50等分し各点の total power を求める。

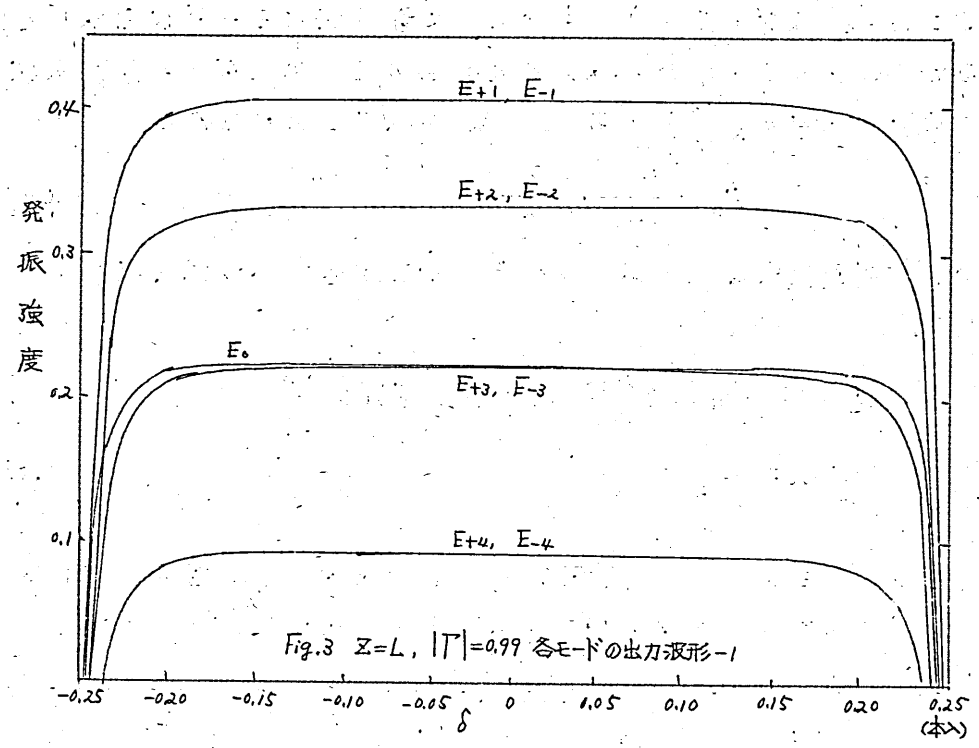


Fig.3 Z=L, |Γ|=0.99 各モードの出力波形-1

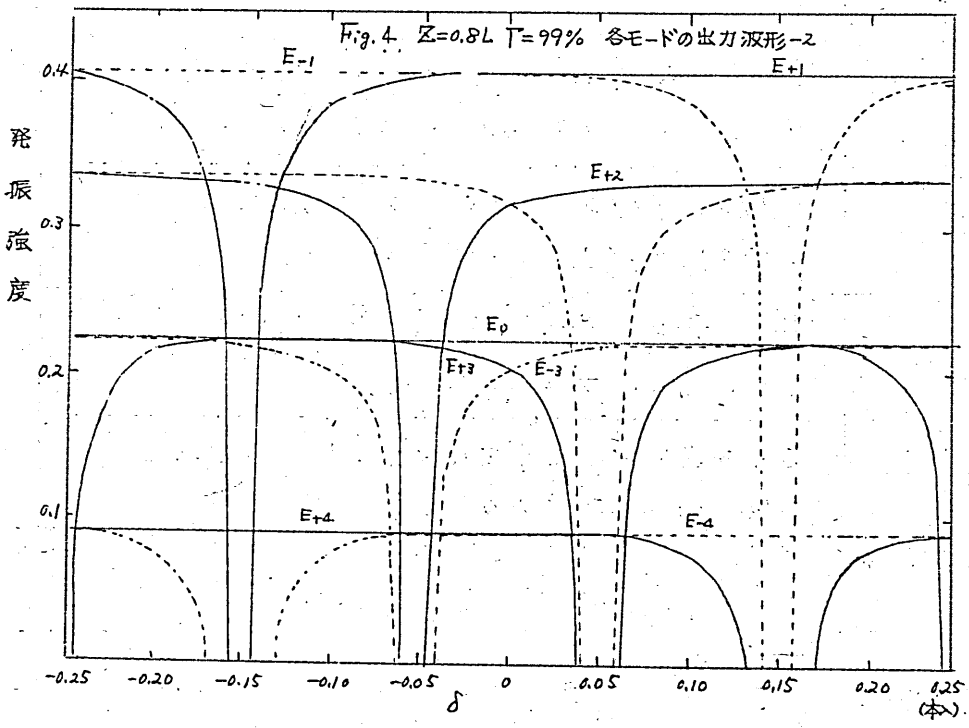
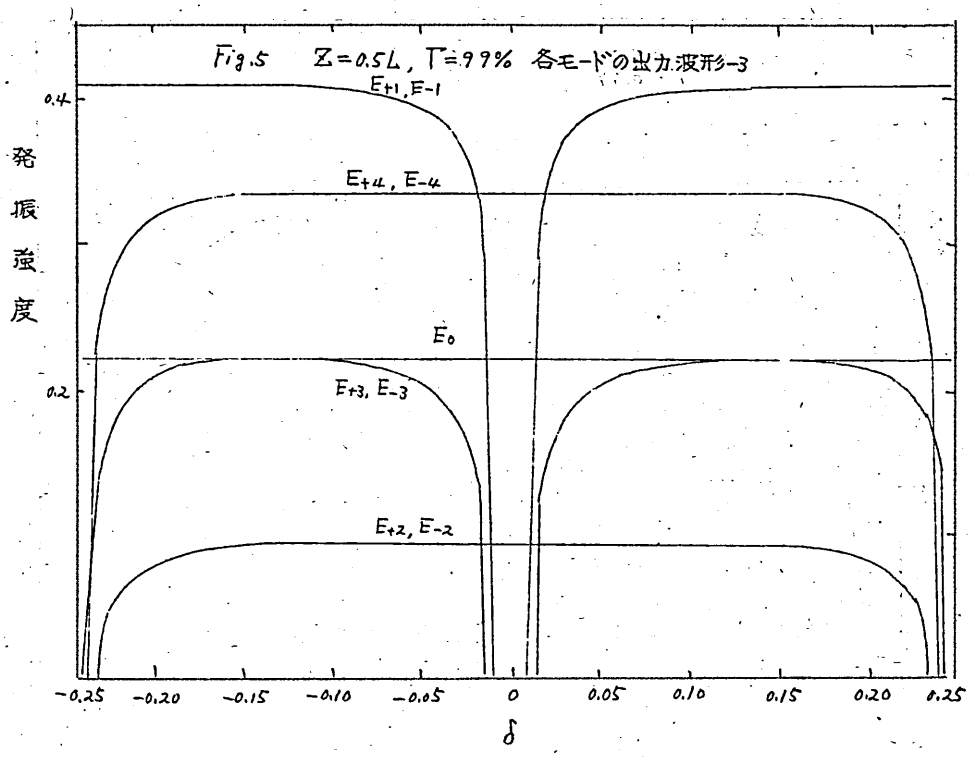
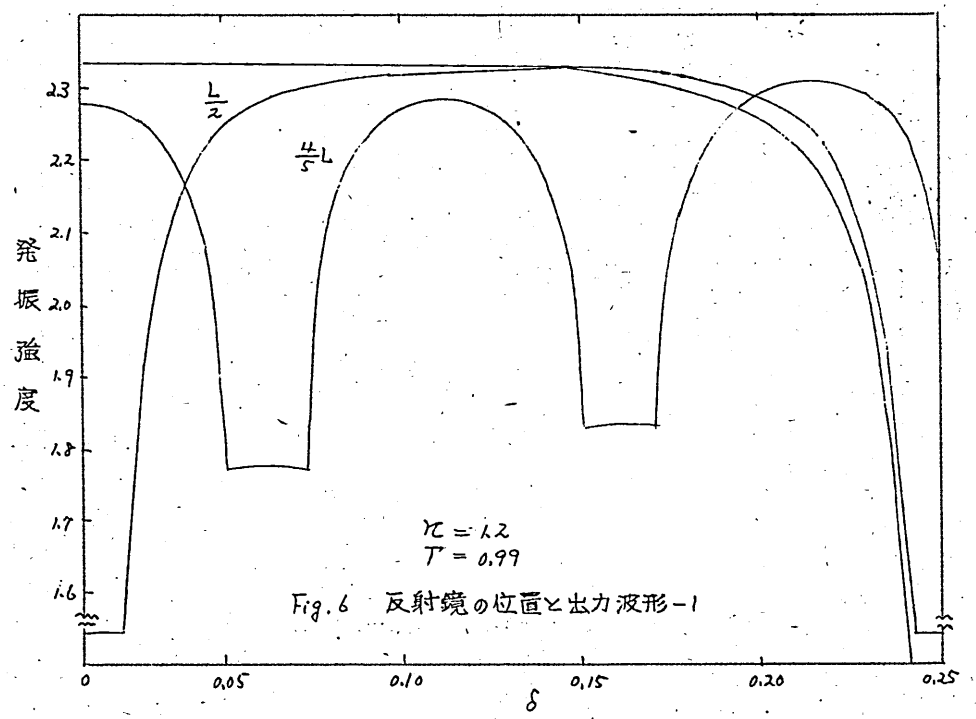


Fig.4 Z=0.8L |Γ|=99% 各モードの出力波形-2





r = 1.2
T = 0.99

Fig.6 反射鏡の位置と出力波形-1

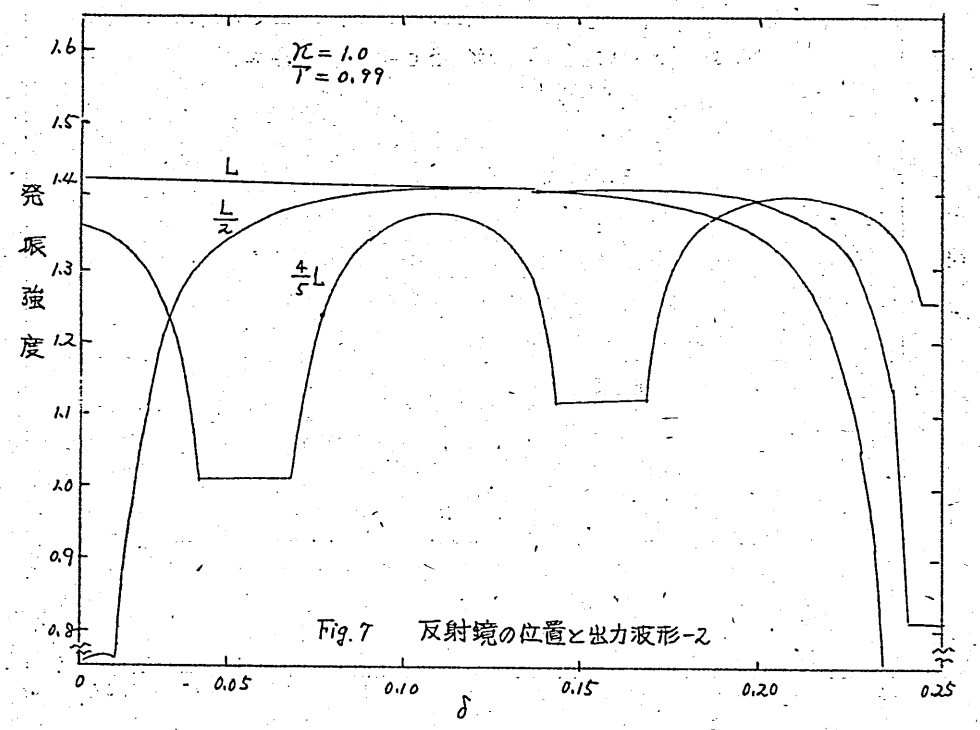


Fig. 7　反射鏡の位置と出力波形-2

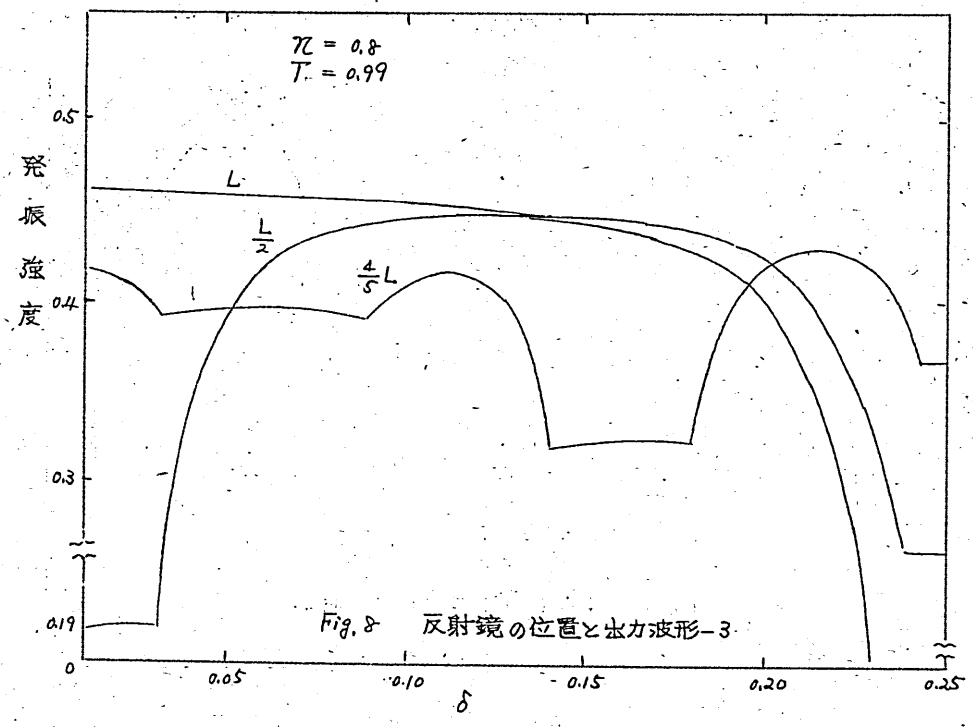


Fig. 8　反射鏡の位置と出力波形-3

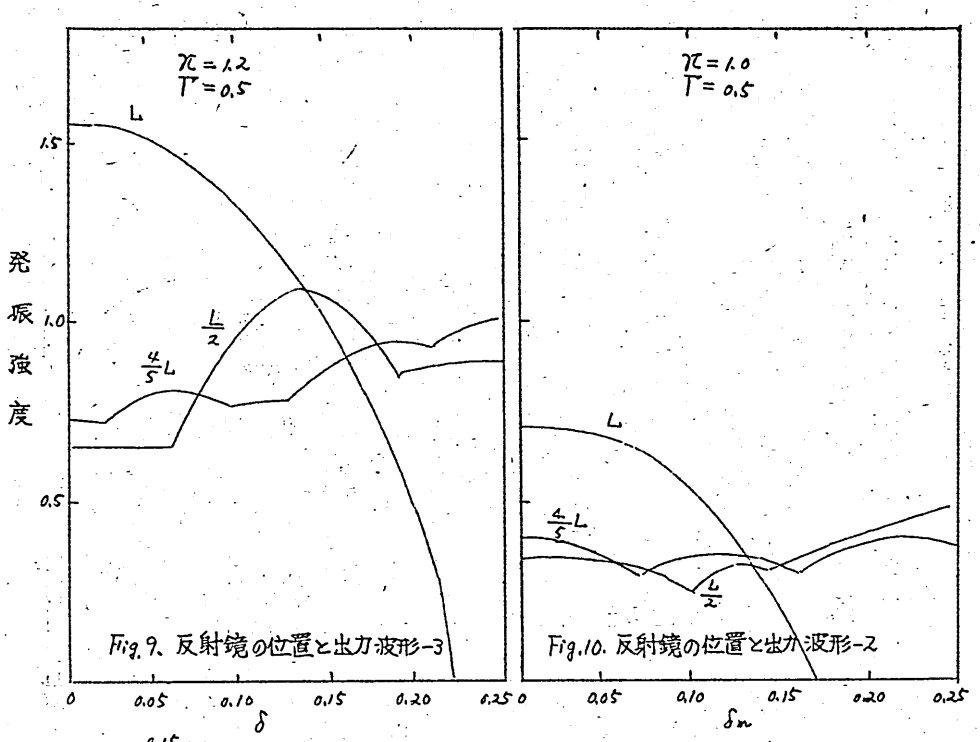


Fig. 9. 反射鏡の位置と出力波形-3

Fig. 10. 反射鏡の位置と出力波形-2

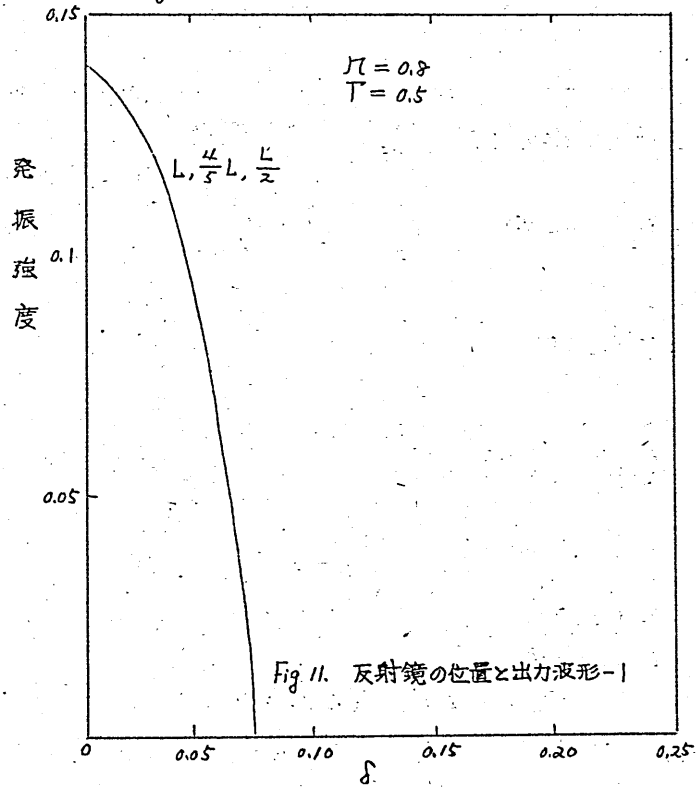


Fig 11. 反射鏡の位置と出力波形-1

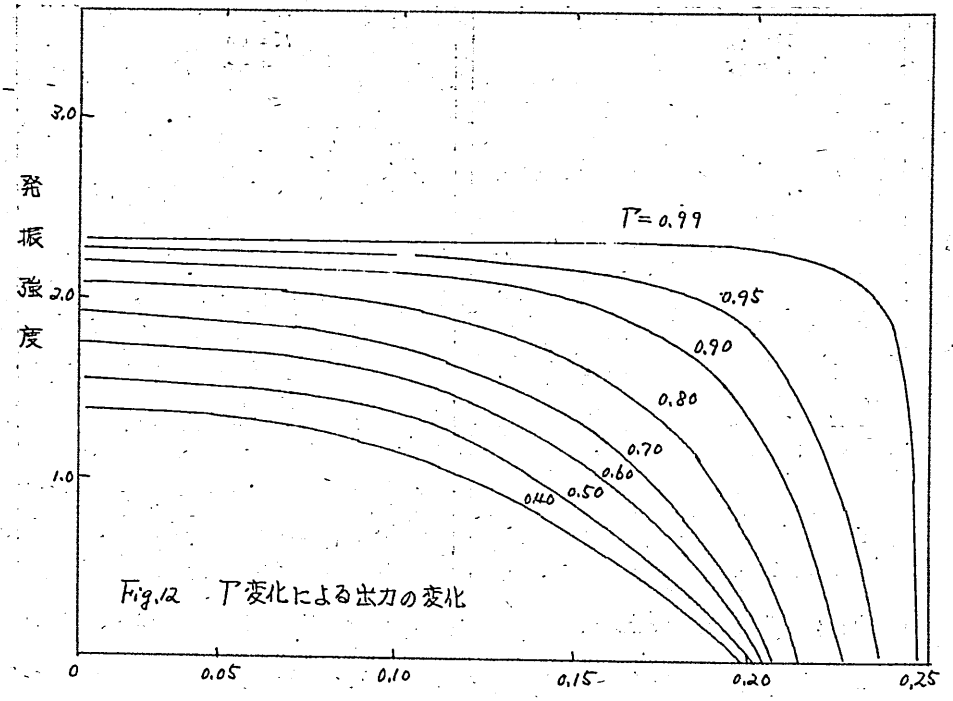


Fig.12 Γ変化による出力の変化

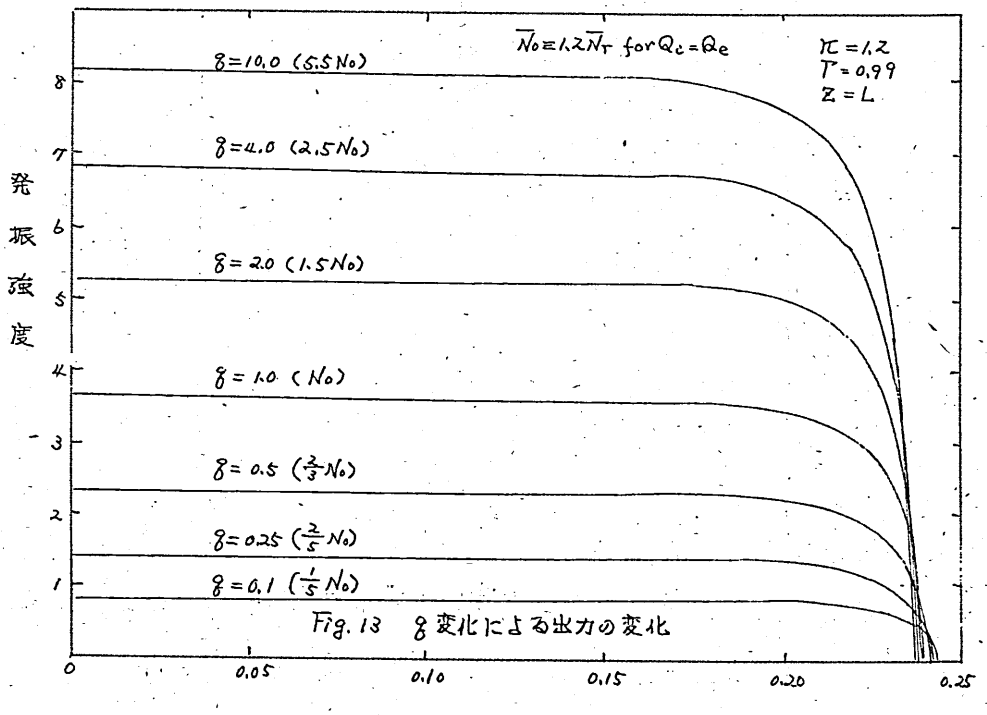


Fig. 13 g変化による出力の変化

§§ 3.2　反射鏡の位置による発振周波数の変化

§§ 3.1 と同様に M_3 の位置 Z を変化させ、各 Z の位置を中心に M_3 を $\frac{1}{4}$ 波長掃引させた場合の各モードの発振周波数の共振周波数からのずれの変化を求める。発振周波数 ν_n の共振周波数 Ω_n からのずれは(21)式から

$$\frac{Q_{in}}{\Omega_n}(\nu_n-\Omega_n)=-\frac{1}{2}\frac{Q_{in}}{Q_{extn}}B_n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{Q_{in}}{Q_{extn}}\right)\pi\left[\frac{Z_r(\Omega_n-\omega)}{Z_i(0)}+\left\{\frac{Z_i(\Omega_n-\omega)}{Z_i(0)}-\frac{1+\frac{Q_{in}}{Q_{extn}}G_n}{1+\frac{Q_{in}}{Q_{extn}}}\frac{1}{\pi}\right\}\frac{\gamma_{ab}(\Omega_n-\omega)}{2\gamma_{ab}^2+(\Omega_n-\omega)^2}\right] \tag{26}$$

ただし B_n は反射物体 M_3 の反射係数を Γ とする reference plane から M_3 を見た負荷のサセプタンスで次式で与えられる。

$$B_n=-\frac{2|\Gamma|\sin\phi_n}{1+|\Gamma|^2+2|\Gamma|\cos\phi_n} \tag{27}$$

(26)式を §§ 3.1 の場合と同様のパラメタで計算する。

§§ 3.3　スミス図表による説明

各モードの発振出力の変化は Fig.3, Fig.4, Fig.5 によって表わされる。この変化の様子をスミス図表を用いて説明する。§§ 3.1 において述べたように n 番目のモードに対する反射係数の位相は次式で表わされる。

$$\phi_n\simeq 2\pi\left(\frac{m}{L}n+\delta\right) \tag{28}$$

(28)の右1項は各モードの位相差を示し右2項は m の微小変化分で M_3 の掃引の大きさを示す。いまこの関係を $Z=L$, $Z=\frac{L}{2}$, $Z=\frac{4}{5}L$ の場合について スミス図表上に表わすと Fig.22 のようになる。

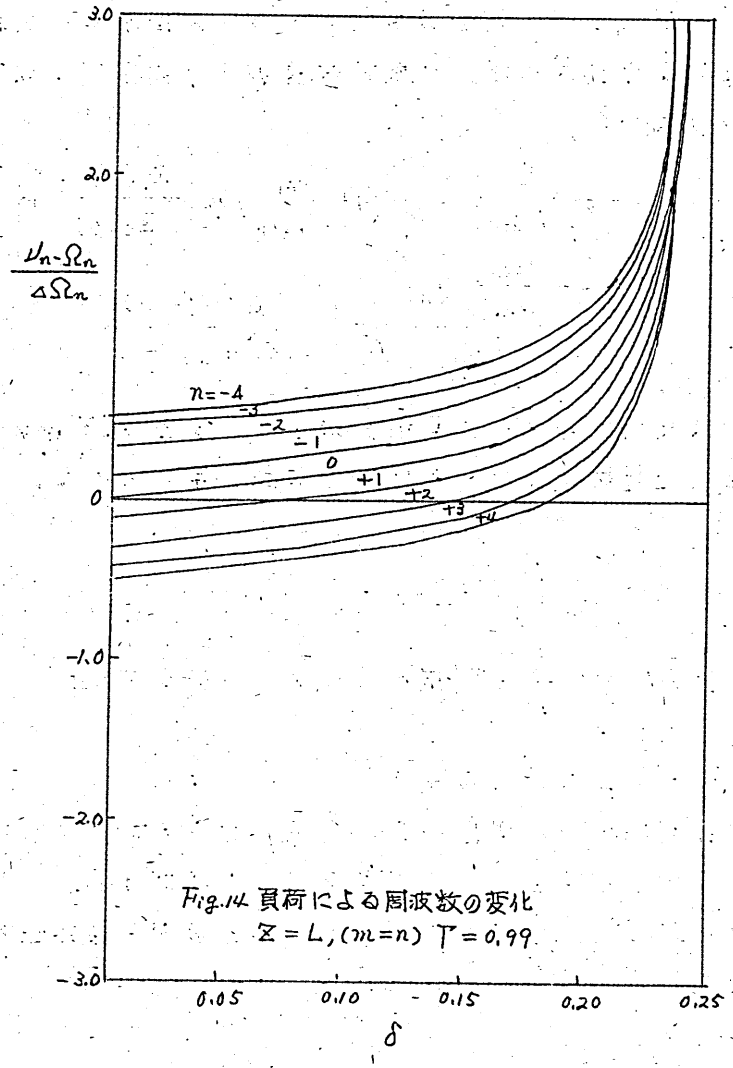


Fig.14 負荷による周波数の変化
$\alpha = L, (m=n)$ $\Gamma = 0.99$

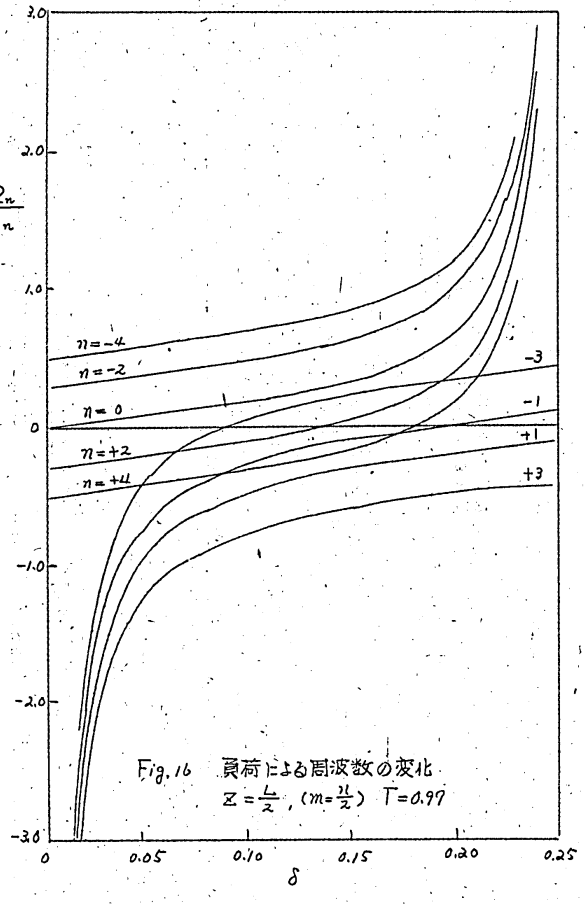


Fig. 16 負荷による周波数の変化
$Z = \frac{L}{2}$, $(m = \frac{n}{2})$ $\Gamma = 0.99$

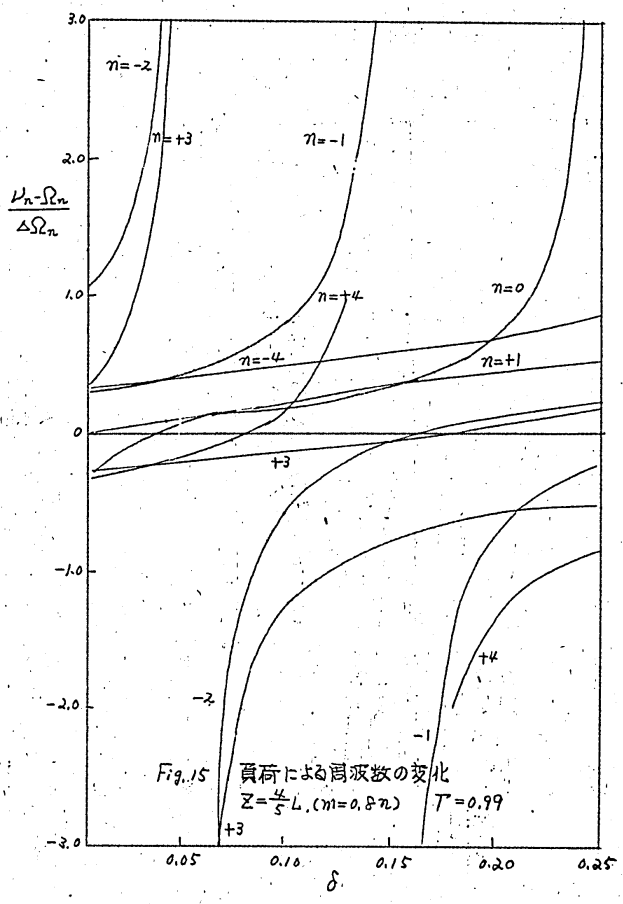


Fig. 15 負荷による周波数の変化
$Z = \frac{4}{5}L$, $(m = 0.8n)$ $\Gamma = 0.99$

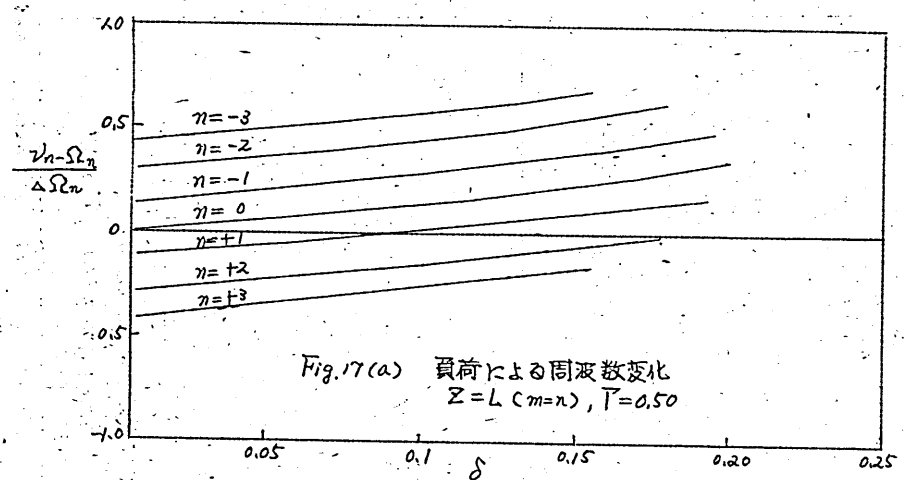


Fig.17(a) 負荷による周波数変化
$\bar{z}=L\ (m=n)$, $\bar{\Gamma}=0.50$

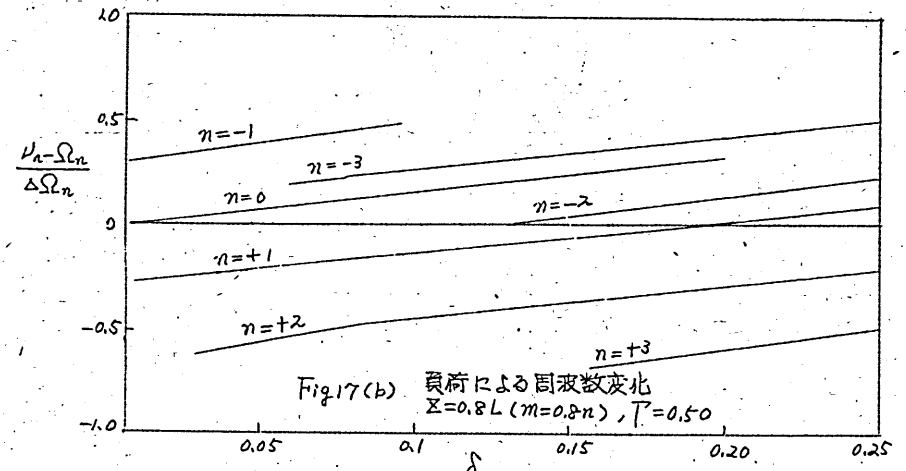


Fig17(b) 負荷による周波数変化
$\bar{z}=0.8L\ (m=0.8n)$, $\bar{\Gamma}=0.50$

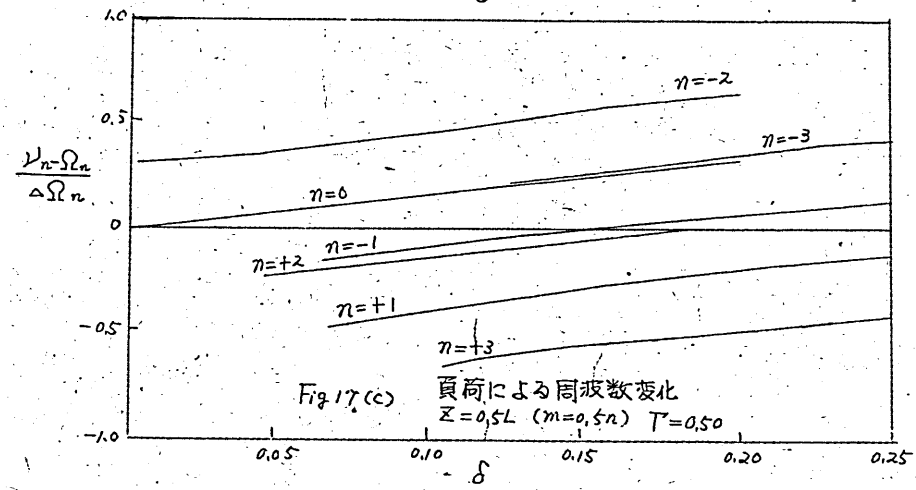
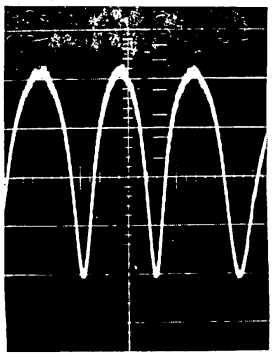
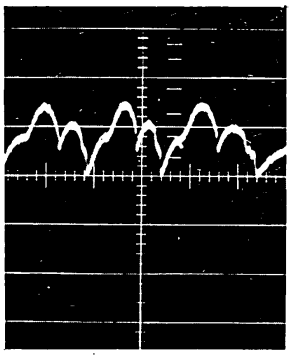


Fig17(c) 負荷による周波数変化
$\bar{z}=0.5L\ (m=0.5n)$ $\bar{\Gamma}=0.50$

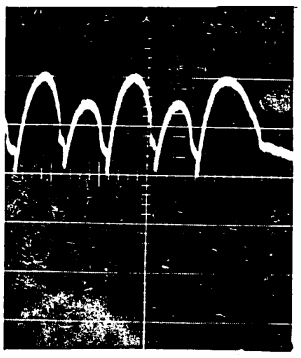
反射率５０％



(a) Z＝L

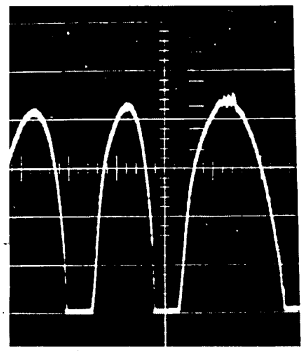


(b) Z＝0.8 L

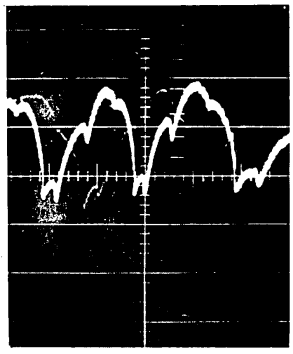


(c) Z＝0.5 L

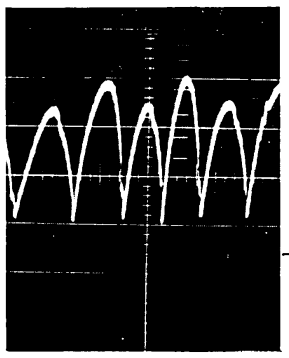
反射率９９％



(d) Z=L



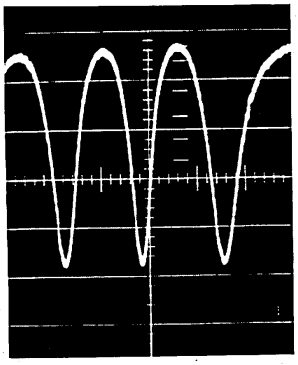
(e) Z＝0.8L



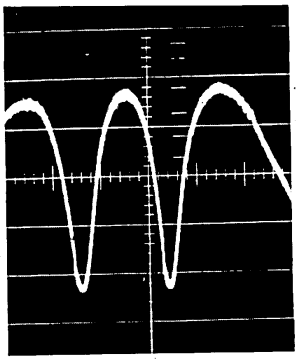
(f) Z＝0.5L

Fig.(19) 反射鏡の位置と出力波形

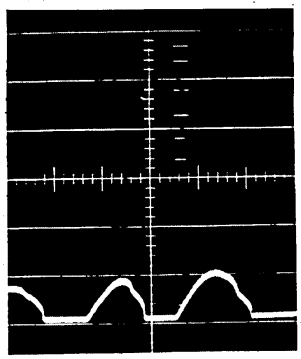
反射率５０％



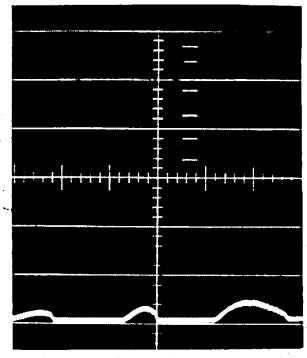
(a)　５５mA



(b)　３５mA

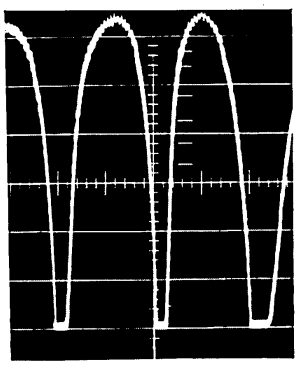


(c)　２５mA

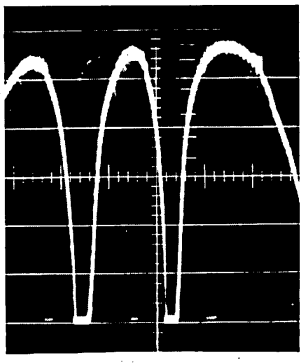


(d)　２２mA

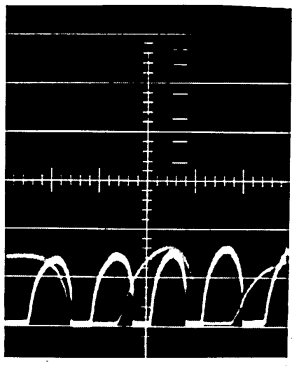
反射率９９％



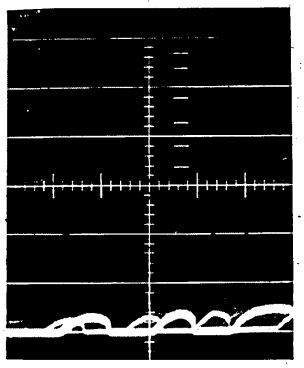
(e)　５５mA



(f)　３５mA



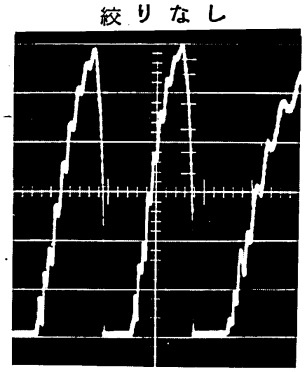
(g)　２５mA



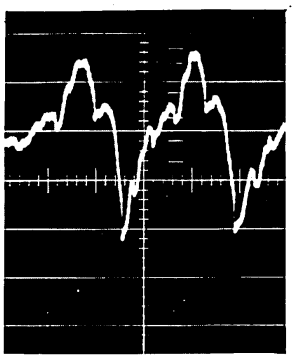
(h)　２２mA

Fig. (20)　Excitationを変えたときの出力波形

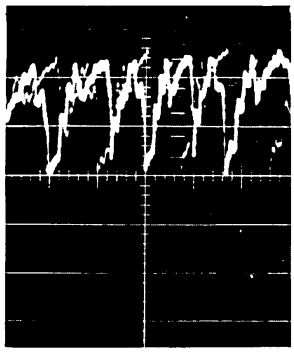
絞りなし



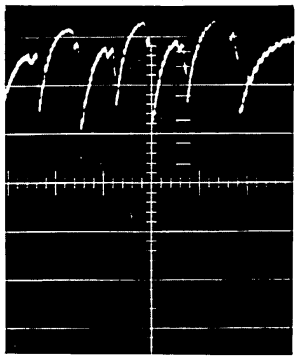
(a) Z＝L



(b) Z＝0.8 L

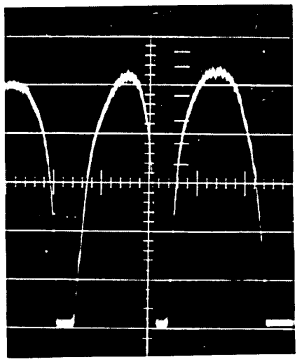


(c) Z＝0.7 L

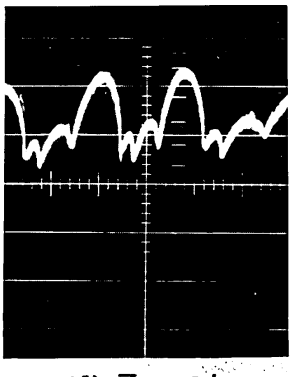


(d) Z＝0.5 L

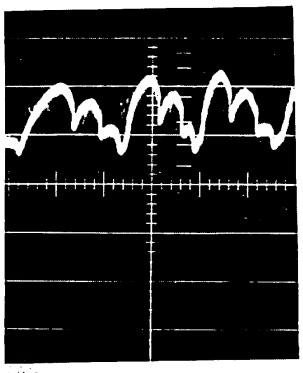
絞りあり



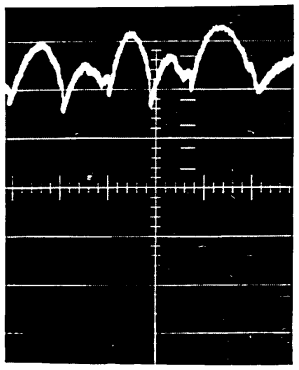
(e) Z＝L



(f) Z＝0.8 L



(g) Z＝0.7 L



(h) Z＝0.5 L

Fig. (21)　出力波形におよぼす絞りの効果

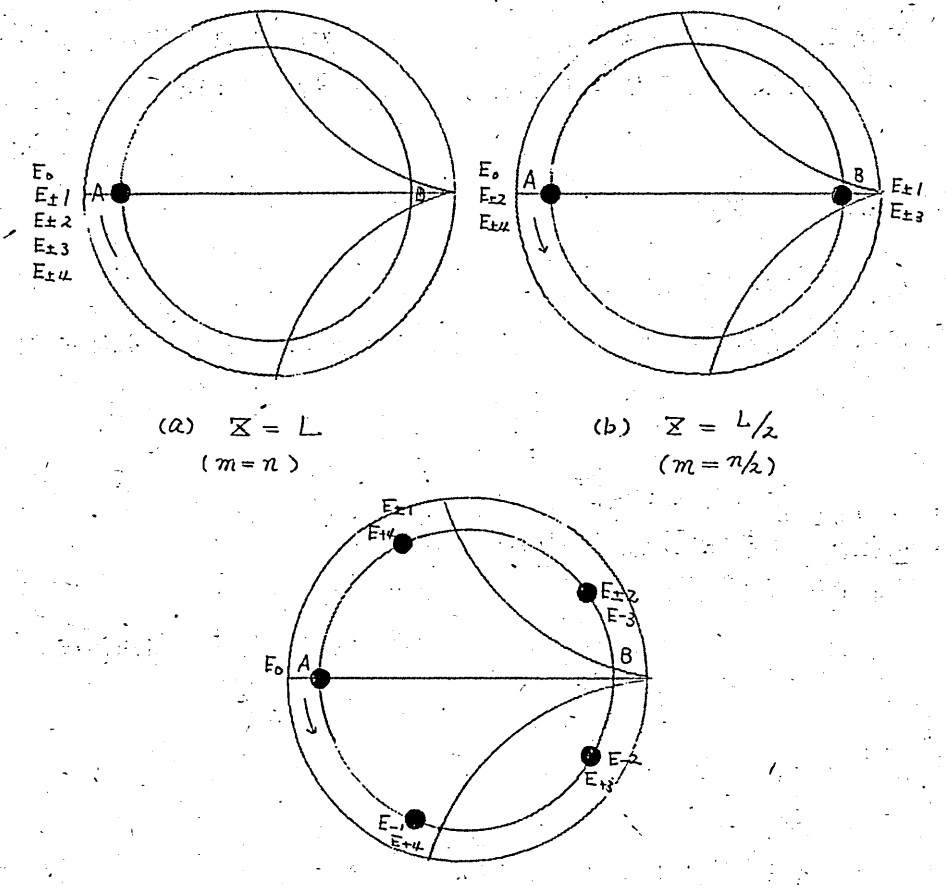


Fig. 22

Fig.22からわかるようにδを変化させたとき$m=n$の場合各モードは同位相で同一反射係数円上をA印の方向に廻りB点に近づくと各モードのコンダクタンスG_nが次々に大きくなり(17)からわかるようについて発振が停止する。さらにB点を過ぎると再び発振を開始する。同様に$m=\frac{n}{2}$の場合には，各モードは反射係数位相のπだけ異なる2つのモードグループに分れ，δの変化と共に2つのモードグループは同一反射係数円上を廻わる。したがって$|\Gamma|$が十分大きいときには，第1グループが最大発振で第2グループ非発振の場所と第1グループ非発振で第2グループ最大発振の場所とが(1/4)

λ₀ 毎に交替して現われることになる。全く同様に $m=(4/5)n$ の場合も説明され(C)図のように5つのグループに分れて変化する。以上のスミス図表による説明で Fig.3, Fig.4, Fig.5 は理解できる。

§4 実　　験

§§ 4.1 実験装置および方法

実験は6328Å He-Ne レーザを用いて Fig.23 のような構成で行った。

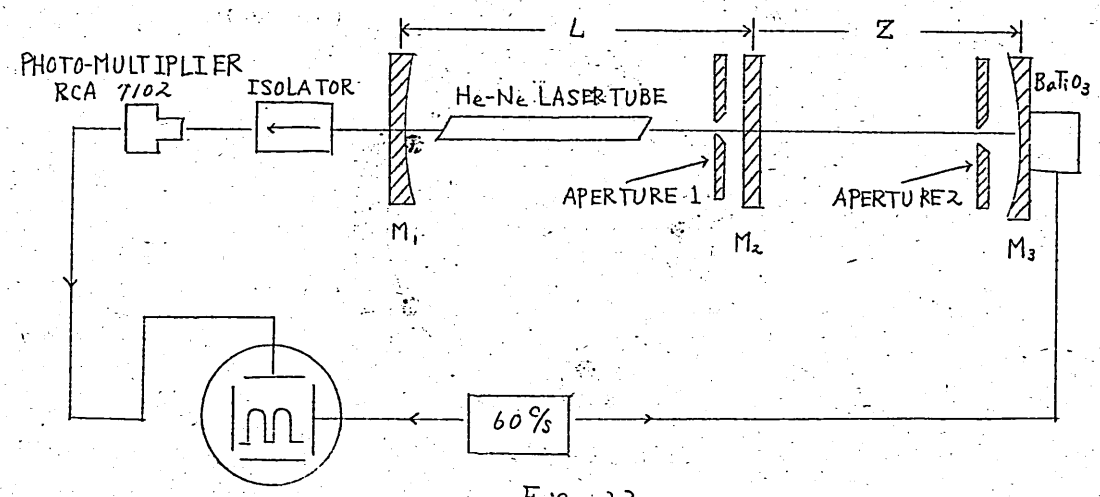


Fig. 23

Fig.23 のように M_1, M_3 には同じ曲率の Mirror を用い，$Z=L$ の場合 mode matching がとれている状態にあるが，M_3 を移動することによって生じる mode matching のずれは方意しなかった。実験方法はまず最初に M_1M_2 からなるレーザ共振器のミラー M_1, M_2 を最適に調整して絞り1を挿入し完全に縦モードのみで発振させる。反射物体として Mirror を用いてこれを音歪振動子で掃引出来るようにしておき M_2 から出たレーザ光が M_3 で反射し再びレーザ共振器に入るように M_3 を調整して M_2M_3 で構成される共振器の高次モードとの coupling を出来るだけ抑制するために絞り2を挿入する。

以上の調整を行なったのちに M_3 の位置Zを変化させ各々のZの位置を中心に電歪で1～2波長程度 M_3 を揺引させる。その時のレーザの出力変化の様子をローションプリズムとフレネルプリズムからなる偏光アイソレータを通して光電子増倍光電管で受光しオシロスコープで波形を観測する。以上の要領で M_3 の反射率，レーザの励起電圧等を変化させて出力波形の変化を見る。

§§ 4.2 実験結果とその説明

反射鏡の位置Zをパラメタとした出力波形の測定結果を Fig. 19 に示す。これを前述の理論結果と比較すると，Z = L および Z = 0.5L の場合はよく一致している。一方 Z = 0.8L の場合は正確には一致していないが概略の傾向としては一致していると考えられる。しかし反射率50％の場合，理論値ではZ=Lの場合出力は零レベルまで落ちているのに対して実験値では $\frac{1}{5}$ 位までしか下っていない，これは後述するが，理論値には $M_2 M_3$ からなる共振器内で失なわれる回折損失や M_3 面での mode の mismatching 等の考慮がなされていないためと考えられる。M_3 の反射率の変化による出力波形は，Fig 12 の理論値のように発振停止間隔の著しい変化は認められなかた。次に Excitation を変化させた場合の理論値 Fig(6)～Fig(11)と実験結果 Fig(20) と比較すると，Excitation の小さい場合程出力が小さくなり発振停止部分が長くなっている点は一致している。すなわち threshold に近い程，負荷変化に対してレーザは影響されやすいことがわかる。Fig. 21 は絞りを入れた場合と入れない場合での出力波形に及ぼす影響を示したものであるが，このデータは絞りを入れることにより横モードの発生を抑制出来ることを示していると考えられる。

§5 考察 —— モード変換を考慮した場合の補正

負荷を変化させた場合の出力波形の変化について理論値と実験値

との比較を行ったところ大体一致していると考えられるが，しかし細い点において差違が見られる。これは理論式が次の2つの大きな仮定のもとに立てられていることに起因するものと考えられる。その1は多重モード発振レーザの出力として，各モードがそれぞれ単独に発振しているものとしたときの出力を求めてそれらの単純和をとったことである。その仮定はレーザから出たBeamに対して M_2 M_3 で構成される共振器の整合がとれているということである。この仮定に適合させるためには，反射鏡 M_3 の位置を変える度に M_3 の曲率を整合がとれるように取替えなければならないわけであるが，前節で述べた実験ではこの条件を考慮しなかった。したがって mismatching のためレーザから出た TEM_{00} モードは M_2M_3 で構成される共振器の高次モードを励起する。以下，この影響を Kogelnik[4] によって導かれた mode coupling coefficient K を用いて理論式に導入する。

mode coupling coefficient K はレーザから出た TEM_{00} モードが他の光学系に入射した場合に光学系のモードを結合した場合の係数であり，次式で表わされる。

$$K = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{W}{\bar{W}}+\frac{\bar{W}}{W}\right)^2+\left(\frac{\bar{W}}{W}\right)^2\sigma^2\left(\frac{R}{\bar{R}}-1\right)^2}} \tag{29}$$

ただし

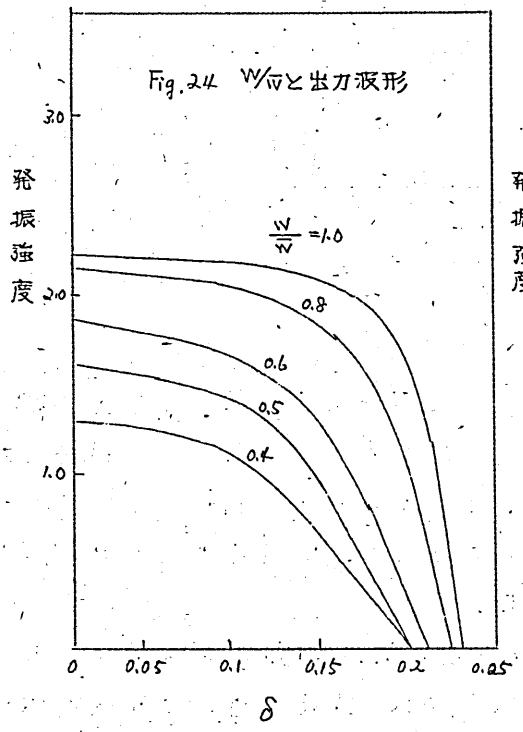
W : reference plane における system の Beam radius.
$\bar{W}$: reference plane におけるレーザ光の Beam radius
R : reference plane における system の curvature
$\bar{R}$: reference plane におけるレーザ光の curvature
$\sigma = \pi\frac{W^2}{\lambda R}$: system parameter

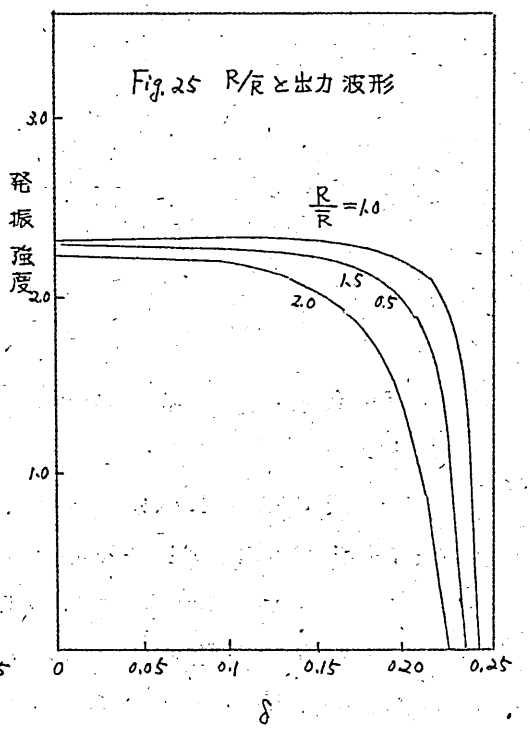
(29) を用いて G_n, B_n 次式のように修正する。

$$G_n = \frac{1-|K^2\Gamma|^2}{1+|K^2\Gamma|^2+2|K^2\Gamma|\cos\phi_n} \tag{30}$$

$$B_n = \frac{-2|K^2T|\sin\phi_n}{1+|K^2T|^2+2|K^2T|\cos\phi_n} \qquad (31)$$

(30), (31)を用いて出力変化を計算し mismatching parameter $W/\bar{W}$, $R/\bar{R}$, δ, に対してどのように変化するかをFig.24, Fig.25, Fig.26, に示す。





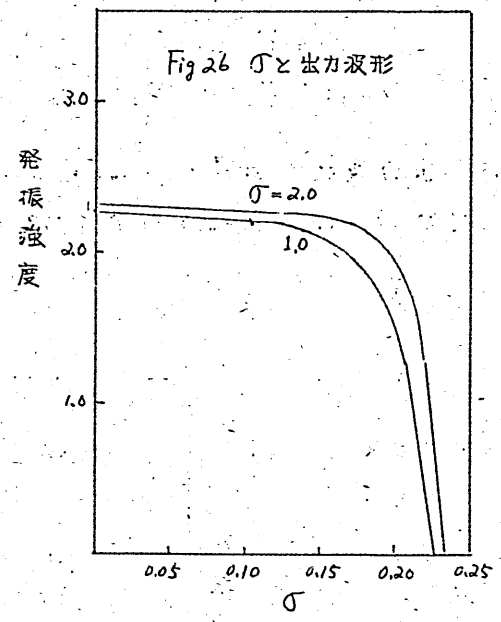


Fig 26 σと出力波形

§6. むすび

レーザ発振器は一般に多重モード発振であること，また光の周波数においては マイクロ波帯に比して比較にならない位に極端に大きい長線路効果が必然的であること，の2つの理由により，レーザの負荷特性が反射の生じる位置によって大きく変化することが，理論実験の両面から明らかになった。

なお，今後の課題として mode coupling term を考慮した場合の負荷による発振出力および発振周波数の変化，さらに反射物体によるモード変換等についてのさらに詳しい解析を行う必要があると思われる。

最後に，熱心に実験に協力された本学々生塚田一幸君，種々討論いただいた研究室の方々に深く感謝する。

文　献

(1) 熊谷，松原，森：〝複合ファブリ・ペロ－レーザ共振器〟，信学誌 47，7　P1003，（昭39－7）。

(2) E.B. Hooper, Jr. G. Bekefi : J. Appl. Phys. 37, 11 (1966).

(3) W.E. Lamb : Phys. Rev 134 (1964) A 1429.

(4) Kogelnik. : Proc. of PIB Quasi-Optics Symposium (1964).

輻射科学研究会資料

3,4モードレーザの安定解

福井廉
(京都大学工業教員養成所)
宮下豊勝
伊東洋一
池上淳一
(京都大学工学部)

1967年2月24日

目　次

1. はしがき …… 2

2. 多重モードレーザの微分方程式 …… 3
   2.1 結合調波を考慮しない場合 …… 3
   2.2 結合調波を考慮した場合 …… 4

3. 2モードレーザの安定解 …… 6

4. 3モードレーザの安定解 …… 8
   4.1 定常解とその安定条件 …… 8
   4.2 双安定解および3安定解 …… 9
   4.3 $\nu_2 = \omega$ の場合の定常解とその安定条件 …… 14

5. 4モードレーザの安定解 …… 16
   5.1 定常解とその安定条件 …… 16
   5.2 双安定解および3安定解 …… 17

6. 安定条件の近似的導出 …… 18
   6.1 3モードレーザ …… 18
   6.2 4モードレーザ …… 19

7. モード群競合 …… 21

8. むすび …… 25

文献

付録 α_n, β_n, θ_{nm}, ξ_{nm}, η_{nm} の表式

1. はしがき

レーザは，一般に多くの周波数で発振することで従来の発振器と異なった，振動論的にも興味のある発振器である。この発振は，いくつかの共振器モードが能動媒質から利得を受けて生じるので多重モード発振と呼ばれているが，各モードは互いに競合の関係にあり，利得を分ち合って共存していると考えられる。モード間の競合が，とくに顕著に現われると，たとえば，一つおきのモードの発振が抑制される，ということも起り得る。[2]

モード競合の現われ方を決定するものとしては，モード間隔，メーザ作用に関与するエネルギー準位の寿命，励起の強さ，ならびに，その空間的分布など，いくつかの要因があるが，これらの諸因子のどのような組合わせの場合に，どのような発振状態が実現するかを解析することは大いに興味ある問題である。ところで，この種の問題については，実は既に2モードレーザに対して W. E. Lamb[1] が端緒を与えており，競合の程度が大きければ，一方のモードの発振が抑制されることを述べているがもちろんこの種の解析を一般の多重モードレーザについて行なうことは容易でない。

本報告では，2モードレーザに次いで発振モード数の少ない，3および，4モードレーザについて，振動論的に種々の安定解を求め，その安定条件を数値的に検討することによって，どのような安定解が，どのような場合に実現可能なものであるかを論じた。さらに，一般の多重モードレーザの場合に，数行してモード群間競合についても論じた。

2. 多重モードレーザの微分方程式

§2.1 結合調波を考慮しない場合

一般に，nモードレーザの微分方程式は結合調波（Combination tone）を考慮しない場合，W. E. Lamb の理論[1]により

$$\dot{E}_i = E_i\left(\alpha_i - \beta_i E_i^2 - \sum_{j\neq i}^{n} \theta_{ij} E_j^2\right) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \qquad (2.1)$$

となる。但し，E_i，α_i は，それぞれ i 番目のモードの電界の振幅値，gain parameter であり，β_i は i 番目のモード自身による saturation parameter，さらに θ_{ij} $(i\neq j)$ は j 番目のモードによる i 番目のモードの saturation parameter である。α_i，β_i，θ_{ij} の表式は付録に示す。

(2.1)式から

$$\alpha_i' \equiv \alpha_i - \beta_i E_i^2 - \sum_{j\neq i}^{n} \theta_{ij} E_j^2 \qquad (2.2)$$

で定義される量は，i 番目のモードの実効利得（effective gain）と言える。

(2.1)式において，変数変換：

$$E_i^2 = X_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \qquad (2.3)$$

を行なうと，

$$\dot{X}_i = 2X_i\left(\alpha_i - \beta_i X_i - \sum_{j\neq i}^{n} \theta_{ij} X_j\right) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \qquad (2.4)$$

となる。

$$\mathbb{X} \equiv (X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n) \qquad (2.5)$$

の定常値は，(2.4)式から求まり，その一組を

$$\mathbb{X}_0 = (X_{10}, X_{20}, \cdots\cdots, X_{n0}) \qquad (2.6)$$

と表わすと，この定常解に対する特性方程式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} f_1-\lambda & -\theta_{12}X_{10} & -\theta_{13}X_{10} & \cdots\cdots & -\theta_{1n}X_{10} \\ -\theta_{21}X_{20} & f_2-\lambda & -\theta_{23}X_{20} & \cdots\cdots & -\theta_{2n}X_{20} \\ -\theta_{31}X_{30} & -\theta_{32}X_{30} & f_3-\lambda & \cdots\cdots & -\theta_{3n}X_{30} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\theta_{n1}X_{n0} & -\theta_{n2}X_{n0} & -\theta_{n3}X_{n0} & \cdots\cdots & f_n-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.7)$$

但し，

$$f_i = \alpha_i - 2\beta_i X_{i0} - \sum_{j\neq i}^{n} \theta_{ij} X_{j0} \qquad (2.8)$$

この特性方程式のすべての根の実部が負である条件と $X_{i0} \geq 0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ の条件とから，定常値に対する安定条件が求まる。$X_0=(0,0,\cdots\cdots,0)$ なる定常値は，いかなる場合にも不安定である事が(2.7)式からわかる。

§2.2 結合調波を考慮した場合の微分方程式

結合調波の数は，2モードレーザでは，0個であるが，3モードレーザでは1個，4モードレーザでは3個，とモード数が多くなるに従って急激に増加する。ここでは、3モードと4モードの場合だけ考える。

3モードレーザの微分方程式

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \alpha_1 E_1 - \beta_1 E_1^3 - \theta_{12} E_1 E_2^2 - \theta_{13} E_1 E_3^2 - (\eta_{23}\cos\psi + \xi_{23}\sin\psi) E_2^2 E_3 \\ \dot{E}_2 &= \alpha_2 E_2 - \theta_{21} E_2 E_1^2 - \beta_2 E_2^3 - \theta_{23} E_2 E_3^2 - (\eta_{13}\cos\psi + \xi_{13}\sin\psi) E_1 E_2 E_3 \\ \dot{E}_3 &= \alpha_3 E_3 - \theta_{31} E_3 E_1^2 - \theta_{32} E_3 E_2^2 - \beta_3 E_3^3 - (\eta_{21}\cos\psi + \xi_{21}\sin\psi) E_2^2 E_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

但し，

$$\psi=(2\nu_2-\nu_1-\nu_3)t+(2\varphi_2-\varphi_1-\varphi_3) \qquad (2.10)$$

であって，$\nu_i+\varphi_i$ は i 番目のモードの角周波数である。η,ξ の表式は付録に示す。

4モードレーザの微分方程式

$$\begin{aligned}
\dot{E}_1&=\alpha_1E_1-\beta_1E_1^3-\theta_{12}E_1E_2^2-\theta_{13}E_1E_3^2-\theta_{14}E_1E_4^2\\
&\quad-(\xi_{1C}\cos\psi_1+\xi_{1S}\sin\psi_1)E_2E_3E_4-(\eta_{1C}\cos\psi_2+\eta_{1S}\sin\psi_2)E_2^2E_3\\
\dot{E}_2&=\alpha_2E_2-\theta_{21}E_2E_1^2-\beta_2E_2^3-\theta_{23}E_2E_3^2-\theta_{24}E_2E_4^2-(\xi_{2C}\cos\psi_1+\xi_{2S}\sin\psi_1)E_1E_3E_4\\
&\quad-(\eta_{2C}\cos\psi_2+\eta_{2S}\sin\psi_2)E_1E_2E_3-(\zeta_{2C}\cos\psi_3+\zeta_{2S}\sin\psi_3)E_3^2E_4\\
\dot{E}_3&=\alpha_3E_3-\theta_{31}E_3E_1^2-\theta_{32}E_3E_2^2-\beta_3E_3^3-\theta_{34}E_3E_4^2-(\xi_{3C}\cos\psi_1+\xi_{3S}\sin\psi_1)E_1E_2E_4\\
&\quad-(\eta_{3C}\cos\psi_2+\eta_{3S}\sin\psi_2)E_2^2E_1-(\zeta_{3C}\cos\psi_3+\zeta_{3S}\sin\psi_3)E_2E_3E_4\\
\dot{E}_4&=\alpha_4E_4-\theta_{41}E_4E_1^2-\theta_{42}E_4E_2^2-\theta_{43}E_4E_3^2-\beta_4E_4^3-(\xi_{4C}\cos\psi_1+\xi_{4S}\sin\psi_1)E_1E_2E_3\\
&\quad-(\zeta_{4C}\cos\psi_3+\zeta_{4S}\sin\psi_3)E_3^2E_2
\end{aligned} \qquad (2.11)$$

但し，

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1&=(\nu_2+\nu_3-\nu_1-\nu_4)t+(\varphi_2+\varphi_3-\varphi_1-\varphi_4)\\
\psi_2&=(2\nu_2-\nu_1-\nu_3)t+(2\varphi_2-\varphi_1-\varphi_3)\\
\psi_3&=(2\nu_3-\nu_2-\nu_4)t+(2\varphi_3-\varphi_2-\varphi_4)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

3. 2モードレーザの安定解

2モードレーザでは，もともと考慮すべき *combination tone* はなく，電界の振幅を決める微分方程式は，(2.4)式より

$$\left.\begin{aligned}\dot{X}_1 &= 2X_1(\alpha_1-\beta_1X_1-\theta_{12}X_2)\\ \dot{X}_2 &= 2X_2(\alpha_2-\theta_{21}X_1-\beta_2X_2)\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

である。定常解 $\mathbb{X}_0=(X_{10},X_{20})$ と安定条件は，表3.1のようになる。

表3.1 2モードレーザの電界の定常値と安定条件

	安定条件	定常値 $\mathbb{X}_0$
単一モード発振	$A_2<0$	$(\alpha_1/\beta_1,\ 0)$
	$A_1<0$	$(0,\ \alpha_2/\beta_2)$
2モード発振	$A_1>0,\ A_2>0,\ C>0$	$(A_1/C,\ A_2/C)$
双安定	$A_1<0,\ A_2<0$	$(\alpha_1/\beta_1,0)$ と $(0,\alpha_2/\beta_2)$

$A_1=\alpha_1\beta_2-\theta_{12}\alpha_2$，$A_2=\alpha_2\beta_1-\theta_{21}\alpha_1$，$C=\beta_1\beta_2-\theta_{12}\theta_{21}$

<u>安定条件の意味</u>

定常値 $\mathbb{X}_0=(\alpha_1/\beta_1,0)$ の安定条件 $A_2<0$ は書き改めると，

$$\alpha_2-\theta_{21}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\alpha_2-\theta_{21}X_{10}-\beta_2X_{20}<0 \qquad (3.2)$$

となる。これは(2.2)式で定義した *effective gain* α_2' が負である事を意味する。即ち，$\mathbb{X}_0=(\alpha_1/\beta_1,0)$ なる定常点で，微少振動 X_2 が生じても，その *effective gain* α_2' が負であるので，減衰してしまう。

定常値 $\mathbb{X}_0^{(1)}=(\alpha_1/\beta_1,0)$ と $\mathbb{X}_0^{(2)}=(0,\alpha_2/\beta_2)$ とが共に安定である条件 $A_1<0$，$A_2<0$ から，

$$C = \beta_1 \beta_2 - \theta_{12}\theta_{21} < 0 \qquad (3.3)$$

となる。これは，2つのモードが強結合（*Strong coupling*）[1]である事を示している。即ち，双安定状態が実現されるためには，2つのモード間の結合が *Strong coupling* でなければならない。

定常値 $X_0 = (A_1/C, A_2/C)$ の安定条件 $A_1 > 0$，$A_2 > 0$ は書き改めると；

$$\alpha_1 - \theta_{12}\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \alpha_1 - \beta_1 \cdot 0 - \theta_{12}\frac{\alpha_2}{\beta_2} > 0 \qquad (3.4a)$$

$$\alpha_2 - \theta_{21}\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \alpha_2 - \theta_{21}\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \beta_2 \cdot 0 > 0 \qquad (3.4b)$$

となる。なんらかの原因で $X = (0, \alpha_2/\beta_2)$ なる発振が起ったとしても，ここで微少振動 X_1 が生じると，(3.4a) 式より *effective gain* α_1' は正であるから，この微少振動は成長し，2モード発振に移行する。(3.4b) 式も全く同様の事を示している。$C > 0$ の条件は，2つのモードが同時に発振するためには，その2つのモード間の結合が弱結合（*weak coupling*）でなければならない事を示している。

4. 3モードレーザの安定解

（結合調波を考慮しない場合）

§4.1 定常解とその安定条件

3モード以上の多重モードレーザにおいては，combination tone は frequency locking を起す原因となり，重要であるが，ここでは簡単のため combination tone を無視する。そうすると，3モードレーザの電界の振幅を決定する微分方程式は，(2.4)式より

$$\left.\begin{aligned}\dot{X}_1 &= 2X_1(\alpha_1-\beta_1X_1-\theta_{12}X_2-\theta_{13}X_3)\\ \dot{X}_2 &= 2X_2(\alpha_2-\theta_{21}X_1-\beta_2X_2-\theta_{23}X_3)\\ \dot{X}_3 &= 2X_3(\alpha_3-\theta_{31}X_1-\theta_{32}X_2-\beta_3X_3)\end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

となる。以下すべての定常解とその安定条件を列挙する。

但し

$$\left.\begin{aligned}A_{ij} &= \alpha_i\beta_j-\theta_{ij}\alpha_j \qquad (i,j=1,2,3)\\ C_{ij} &= \beta_i\beta_j-\theta_{ij}\theta_{ji} \qquad (i,j=1,2,3)\\ S_i &= \alpha_iC_{jk}-\theta_{ij}A_{jk}-\theta_{ik}A_{kj} \quad (i,j,k \text{ は相異なる})\end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

i) 単一モード発振

安定条件	定常値 X_0
$A_{21}<0,\ A_{31}<0$	$(\alpha_1/\beta_1,\ 0,\ 0)$
$A_{32}<0,\ A_{12}<0$	$(0,\ \alpha_2/\beta_2,\ 0)$
$A_{13}<0,\ A_{23}<0$	$(0,\ 0,\ \alpha_3/\beta_3)$

ii) 2モード発振

安定条件	定常値 X_0
$S_3<0,\ A_{12}>0,\ A_{21}>0,\ C_{12}>0$	$(A_{12}/C_{12},\ A_{21}/C_{21},\ 0)$
$S_2<0,\ A_{31}>0,\ A_{13}>0,\ C_{31}>0$	$(A_{13}/C_{13},\ 0,\ A_{31}/C_{31})$
$S_1<0,\ A_{23}>0,\ A_{32}>0,\ C_{23}>0$	$(0,\ A_{23}/C_{23},\ A_{32}/C_{32})$

iii) 3モード発振

定常値：$X_0=(\Delta_1/\Delta,\ \Delta_2/\Delta,\ \Delta_3/\Delta)$

安定条件：

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_1>0,\quad \Delta_2>0,\quad \Delta_3>0,\quad \Delta>0\\
&(\beta_1\beta_2-\theta_{12}\theta_{21})X_{10}X_{20}+(\beta_2\beta_3-\theta_{23}\theta_{32})X_{20}X_{30}+(\beta_3\beta_1-\theta_{31}\theta_{13})X_{30}X_{10}>0\\
&\beta_1\{(\beta_1\beta_2-\theta_{12}\theta_{21})X_{20}+(\beta_3\beta_1-\theta_{31}\theta_{13})X_{30}\}X_{10}^2\\
&+\beta_2\{(\beta_1\beta_2-\theta_{12}\theta_{21})X_{10}+(\beta_2\beta_3-\theta_{23}\theta_{32})X_{30}\}X_{20}^2\\
&+\beta_3\{(\beta_2\beta_3-\theta_{23}\theta_{32})X_{20}+(\beta_3\beta_1-\theta_{31}\theta_{13})X_{10}\}X_{30}^2\\
&+(2\beta_1\beta_2\beta_3-\theta_{12}\theta_{23}\theta_{31}-\theta_{32}\theta_{21}\theta_{13})X_{10}X_{20}X_{30}>0
\end{aligned}\right\}\quad(4.3)$$

但し

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \theta_{12} & \theta_{13}\\ \alpha_2 & \beta_2 & \theta_{23}\\ \alpha_3 & \theta_{32} & \beta_3\end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_1 & \theta_{13}\\ \theta_{21} & \alpha_2 & \theta_{23}\\ \theta_{31} & \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}\beta_1 & \theta_{12} & \alpha_1\\ \theta_{21} & \beta_2 & \alpha_2\\ \theta_{31} & \theta_{32} & \alpha_3\end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix}\beta_1 & \theta_{12} & \theta_{13}\\ \theta_{21} & \beta_2 & \theta_{23}\\ \theta_{31} & \theta_{32} & \beta_3\end{vmatrix}$$

(4.4)

§4.2 双安定解及び3安定解

2つの相異なる定常状態，$X_0^{(1)}$，$X_0^{(2)}$ が同時に安定である場合，双安定（bistable）であると言い，同様に3つの相異なる定常状態，$X_0^{(1)}$，$X_0^{(2)}$，$X_0^{(3)}$ が同時に安定である場合，3安定（tri-

stable) であると言うが，この双安定状態及び3安定状態は，多重モードレーザにおけるモード群（mode group）間の競合の現象と関連して興味がある．すなわち，多重モードレーザにおいて，1つおきのモードを組にすると，2つのモード群（モードの組[2]，mode group）ができる．（図4.1参照）§3で述べた2モードレーザにおける双安定状態，本節の3モードレーザにおける双安定状態は，このモード群間の競合の現象を端的に表わす単純な場合と考えられる。

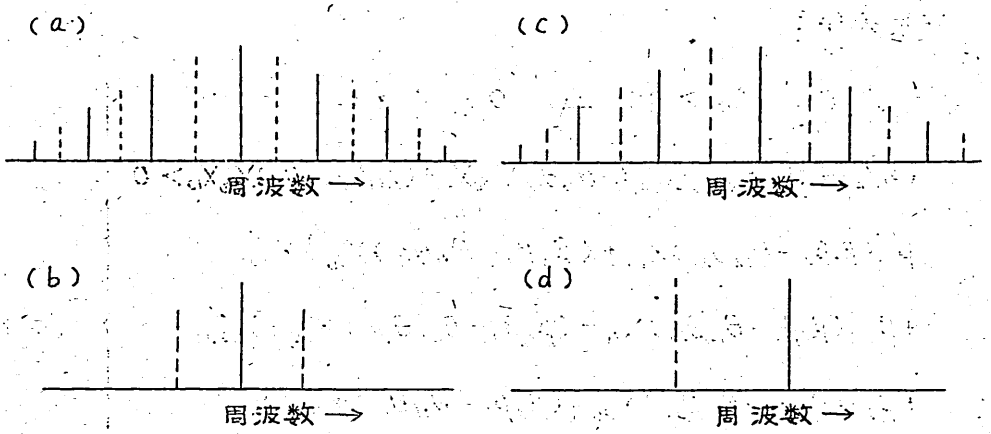


図4．1．mode group
（a），（c）多重モードレーザの場合
（b）3モードレーザの場合（（a）に対応する．）
（d）2モードレーザの場合（（c）に対応する。）

3モードレーザにおける双安定解および3安定解としては，形式的には表4.1に示す諸解が考えられるが，実際上意味があると考えられるのは，双安定解のうち次2解と，最後の3安定解である。これらの状態に対する物理的解釈はつぎのように与えられよう．

表4.1　双安定及び3安定状態

	安定条件	定常値 $X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$
双安定	$A_{23}, A_{21}, A_{31}, A_{32} < 0$ $C_{23} > 0$, $S_1 < 0$	$(\alpha_1/\beta_1, 0, 0)$ $(0, A_{23}/C_{23}, A_{32}/C_{32})$
	$A_{31}, A_{32}, A_{12}, A_{13} < 0$ $C_{31} > 0$, $S_2 < 0$	$(0, \alpha_2/\beta_2, 0)$ $(A_{13}/C_{13}, 0, A_{31}/C_{31})$
	$A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{21} < 0$ $C_{12} > 0$, $S_3 < 0$	$(0, 0, \alpha_3/\beta_3)$ $(A_{12}/C_{12}, A_{21}/C_{21}, 0)$
3安定	$A_{21} < 0$, $A_{31} < 0$ $A_{32} < 0$, $A_{12} < 0$ $A_{13} < 0$, $A_{23} < 0$	$(\alpha_1/\beta_1, 0, 0)$ $(0, \alpha_2/\beta_2, 0)$ $(0, 0, \alpha_3/\beta_3)$

(1) 双安定状態

代表的に，$X_0^{(1)} = (0, \alpha_2/\beta_2, 0)$, $X_0^{(2)} = (A_{13}/C_{13}, 0, A_{31}/C_{31})$ に対する条件について考える。

$A_{31} < 0$ を書き改めると，

$$\alpha_3 - \theta_{31}\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \theta_{32} \cdot 0 - \beta_3 \cdot 0 > 0 \qquad (4.5)$$

となる。即ち，なんらかの原因で $X_0 = (\alpha_1/\beta_1, 0, 0)$ なる状態が実現したとしても，このとき，effective gain α_3' が正であるため，$X_0^{(2)}$ の状態へ移行する。

$A_{13} < 0$ も同様の事を示している。

$A_{32} < 0$, $A_{12} < 0$ を書き改めると，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 - \theta_{31} \cdot 0 - \theta_{32}\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \beta_3 \cdot 0 < 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 \cdot 0 - \theta_{12}\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \theta_{13} \cdot 0 < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

となる。即ち，$X_0^{(1)} = (0, \alpha_2/\beta_2, 0)$ なる定常状態で，X_1 または X_3 が微小振動を起しても，各の effective gain α_1', α_3' が負である

から、その微小振動は減衰してしまう。

$S_2<0$ の条件も同様の事を示している。

$C_{31}>0$ の条件は，X_1とX_3とが同時に発振できるためには，それらのモード間の結合が weak coupling でなければならない事を示している。

2モードレーザの双安定状態では，その2つのモード間は strong coupling であつたが，ここで考えている3モードレーザの双安定状態に対しても同様の事が言える。即ち，2つの mode group (X_1, X_3)と(X_2) とは strong coupling である。以下これを説明する。

X_1とX_3とが1つの groupをなしている事に着目して，(4.1)式を書き改めると，

$$\left.\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= 2X_1\{\alpha_1-(\beta_1+\theta_{13}X_3/X_1)X_1-\theta_{12}X_2\}\\
\dot{X}_2 &= 2X_2\{\alpha_2-(\theta_{21}+\theta_{23}X_3/X_1)X_1-\beta_2X_2\}\\
&= 2X_2\{\alpha_2-\beta_2X_2-(\theta_{23}+\theta_{21}X_1/X_3)X_3\}\\
\dot{X}_3 &= 2X_3\{\alpha_3-\theta_{32}X_2-(\beta_3+\theta_{31}X_1/X_3)X_3\}
\end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

となる。ここで，

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_1'=\beta_1+\theta_{13}X_3/X_1\ ,\quad \beta_3'=\beta_3+\theta_{31}X_1/X_3\\
&\theta_{21}'=\theta_{21}+\theta_{23}X_3/X_1\ ,\quad \theta_{23}'=\theta_{23}+\theta_{21}X_1/X_3
\end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

とおくと，

$$\left.\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= 2X_1(\alpha_1-\beta_1'X_1-\theta_{12}X_2)\\
\dot{X}_2 &= 2X_2(\alpha_2-\theta_{21}'X_1-\beta_2X_2)
\end{aligned}\right\} \quad (4.9a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{X}_2 &= 2X_2(\alpha_2-\beta_2X_2-\theta_{23}'X_3)\\
\dot{X}_3 &= 2X_3(\alpha_3-\theta_{32}X_2-\beta_3'X_3)
\end{aligned}\right\} \quad (4.9b)$$

β_1', β_3', θ_{21}', θ_{23}' は，X_1とX_3とが一組になって，X_1/X_3の値を一定に保って変化する場合の *saturation parameter* であると考えられる。(4.9)式より、この2つの *mode group* 間が *strong coupling* である条件は，2モードレーザの場合から考えて，

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1'\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21}' < 0 \\ &\beta_2\beta_3' - \theta_{23}'\theta_{32} < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

である。事実この条件は表4.1の双安定条件から，容易に導かれる。(但し，定常値 $X_0^{(2)}$ を代入する。)

(ii) 3安定状態

表4.1の3安定条件は，ある1つのモードが定常発振をしているとき，残りの2つのモードの *effective gain* が負である事を示しているが，また，この条件から次の不等式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} &C_{12} = \beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21} < 0 \\ &C_{23} = \beta_2\beta_3 - \theta_{23}\theta_{32} < 0 \\ &C_{31} = \beta_3\beta_1 - \theta_{31}\theta_{13} < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

これは，3モードレーザにおいて3安定状態が起るためには，任意の2つのモード間の結合が強結合でなければならない事を示している。

この3モードにおける3安定状態は，多重モードレーザにおいて2つおきのモードを組にして得られる3つの *mode group* 間の競合の最もモード数の少ない場合と関連があると考えられる。(図4.2)

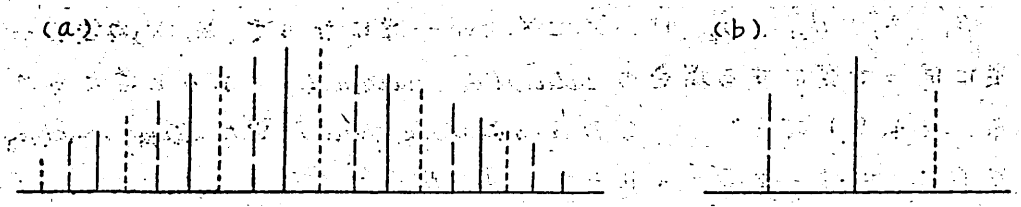


図4.2　mode groups　(a) 多重モードレーザの場合　(b) 3モードレーザの場合

§4.3　$\nu_2=\omega$ の場合の定常解とその安定条件

3つのモードの発振周波数が，原子の遷移周波数(ω)に関して対称に配置している場合(即ち$\nu_2=\omega$)には，定常解及びその安定条件の表式が簡単になり，その意味が一層わかりやすくなる。Collision effect による phase shift [3] を無視すれば $\nu_2=\omega$ のとき，パラメタの間には次の関係がある。

$$\alpha_1=\alpha_3\ ,\ \beta_1=\beta_3\ ,\ \theta_{12}=\theta_{32}\ ,\ \theta_{21}=\theta_{23}\ ,\ \theta_{13}=\theta_{31} \qquad (4.12)$$

この関係を§4.1，§4.2で求めた種々の定常解及びその安定条件に代入すれば，$\nu_2=\omega$ の場合のが求まり，その結果は次表のようになる。

	安定条件	定常値
1モード	$A_{21}=\alpha_2\beta_1-\theta_{21}\alpha_1<0$	$(\alpha_1/\beta_1\ ,\ 0\ ,\ 0)$
	$\beta_1-\theta_{13}<0$	$(0\ ,\ 0\ ,\ \alpha_1/\beta_1)$
	$A_{12}=\alpha_1\beta_2-\theta_{12}\alpha_2<0$	$(0\ ,\ \alpha_2/\beta_2\ ,\ 0)$
2モード	$A_{12}=\alpha_1\beta_2-\theta_{12}\alpha_2>0$ $A_{21}=\alpha_2\beta_1-\theta_{21}\alpha_1>0$ $C_{12}=\beta_1\beta_2-\theta_{12}\theta_{21}>0$ $\beta_1-\theta_{13}<0$	$\left(\frac{A_{12}}{C_{12}}\ ,\ \frac{A_{21}}{C_{21}}\ ,\ 0\right)$
		$\left(0\ ,\ \frac{A_{21}}{C_{21}}\ ,\ \frac{A_{12}}{C_{12}}\right)$
	$\alpha_2(\beta_1+\theta_{13})-2\theta_{21}\alpha_1<0$ $\beta_1-\theta_{13}>0$ $[\ \beta_1+\theta_{13}>0\ ]$	$\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1+\theta_{13}}\ ;\ 0\ ,\ \frac{\alpha_1}{\beta_1+\theta_{13}}\right)$

3モード	$A=\alpha_1\beta_2-\theta_{12}\alpha_2>0$ $B=\alpha_2(\beta_1+\theta_{13})-2\theta_{21}\alpha_1>0$ $C=(\beta_1+\theta_{13})\beta_2-2\theta_{12}\theta_{21}>0$ $\beta_1-\theta_{13}>0$ $[(\beta_1+\theta_{13})A+\beta_2 C>0]$	$\left(\frac{A}{C},\ \frac{B}{C},\ \frac{A}{C}\right)$
双安定	$\alpha_1\beta_2-\theta_{12}\alpha_2<0$ $\alpha_2(\beta_1+\theta_{13})-2\theta_{21}\alpha_1<0$ $\beta_1-\theta_{13}>0$ $[\beta_1+\theta_{13}>0]$	$\left(0,\ \frac{\alpha_2}{\beta_2},\ 0\right)$ $\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1+\theta_{13}},\ 0,\ \frac{\alpha_1}{\beta_1+\theta_{13}}\right)$
3安定	$\alpha_1\beta_2-\theta_{12}\alpha_2<0$ $\alpha_2\beta_1-\theta_{21}\alpha_1<0$ $\beta_1-\theta_{13}<0$	$(\alpha_1/\beta_1,\ 0,\ 0)$ $(0,\ \alpha_2/\beta_2,\ 0)$ $(0,\ 0,\ \alpha_1/\beta_1)$

5. 4モードレーザの安定解

（結合調波を考慮しない場合）

§5.1 定常解とその安定条件

4モードレーザの電界の振幅を決定する微分方程式は（2.4）式より

$$\left.\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= 2X_1(\alpha_1 - \beta_1 X_1 - \theta_{12}X_2 - \theta_{13}X_3 - \theta_{14}X_4) \\
\dot{X}_2 &= 2X_2(\alpha_2 - \theta_{21}X_1 - \beta_2 X_2 - \theta_{23}X_3 - \theta_{24}X_4) \\
\dot{X}_3 &= 2X_3(\alpha_3 - \theta_{31}X_1 - \theta_{32}X_2 - \beta_3 X_3 - \theta_{34}X_4) \\
\dot{X}_4 &= 2X_4(\alpha_4 - \theta_{41}X_1 - \theta_{42}X_2 - \theta_{43}X_3 - \beta_4 X_4)
\end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

である。単一モード発振及び2モード発振の場合について，定常解とその安定条件を，次に記す。（A_{ij}，C_{ij} の定義は§4.1参照）

i) 単一モード発振

安定条件	定常値 $\mathfrak{X}_0$
$A_{21}<0$，$A_{31}<0$，$A_{41}<0$	$(\alpha_1/\beta_1, 0, 0, 0)$
$A_{12}<0$，$A_{32}<0$，$A_{42}<0$	$(0, \alpha_2/\beta_2, 0, 0)$
$A_{13}<0$，$A_{23}<0$，$A_{43}<0$	$(0, 0, \alpha_3/\beta_3, 0)$
$A_{14}<0$，$A_{24}<0$，$A_{34}<0$	$(0, 0, 0, \alpha_4/\beta_4)$

ii) 2モード発振

安定条件	定常値 X_0
$S_{312}<0$, $S_{412}<0$, $A_{12}>0$, $A_{21}>0$, $C_{12}>0$	$(A_{12}/C_{12},\ A_{21}/C_{21},\ 0,\ 0)$
$S_{213}<0$, $S_{413}<0$, $A_{13}>0$, $A_{31}>0$, $C_{31}>0$	$(A_{13}/C_{13},\ 0,\ A_{31}/C_{31},\ 0)$
$S_{214}<0$, $S_{314}<0$, $A_{14}>0$, $A_{41}>0$, $C_{14}>0$	$(A_{14}/C_{14},\ 0,\ 0,\ A_{41}/C_{41})$
$S_{123}<0$, $S_{423}<0$, $A_{23}>0$, $A_{32}>0$, $C_{23}>0$	$(0,\ A_{23}/C_{23},\ A_{32}/C_{32},\ 0)$
$S_{124}<0$, $S_{324}<0$, $A_{24}>0$, $A_{42}>0$, $C_{24}>0$	$(0,\ A_{24}/C_{24},\ 0,\ A_{42}/C_{42})$
$S_{134}<0$, $S_{234}<0$, $A_{34}>0$, $A_{43}>0$, $C_{34}>0$	$(0,\ 0,\ A_{34}/C_{34},\ A_{43}/C_{43})$

$$S_{ijk}=\alpha_i C_{jk}-\theta_{ij}A_{jk}-\theta_{ik}A_{kj} \qquad (i,j,k=1,2,3,4)$$

§5.2 双安定解及び3安定解

4モードレーザにおいて，mode group 間の競合に対応する，双安定状態及び3安定状態の安定条件は次のようになる：

	安定条件	定常値
双安定	$S_{213}<0$, $S_{413}<0$, $S_{124}<0$, $S_{324}<0$ $A_{13}>0$, $A_{31}>0$, $A_{24}>0$, $A_{42}>0$, $C_{31}>0$, $C_{24}>0$	$(A_{13}/C_{13},\ 0,\ A_{31}/C_{31},\ 0)$ $(0,\ A_{24}/C_{24},\ 0,\ A_{42}/C_{42})$
3安定	$S_{214}<0$, $S_{314}<0$, $A_{12}<0$, $A_{32}<0$ $A_{42}<0$, $A_{13}<0$, $A_{23}<0$, $A_{43}<0$ $A_{14}>0$, $A_{41}>0$, $C_{14}>0$,	$(A_{14}/C_{14},\ 0,\ 0,\ A_{41}/C_{41})$ $(0,\ \alpha_2/\beta_2,\ 0,\ 0)$ $(0,\ 0,\ \alpha_3/\beta_3,\ 0)$

この双安定，3安定状態を図で示せば5.1図になる。

安定条件の意味は，3モードレーザの場合と全く同様であるので省略する。

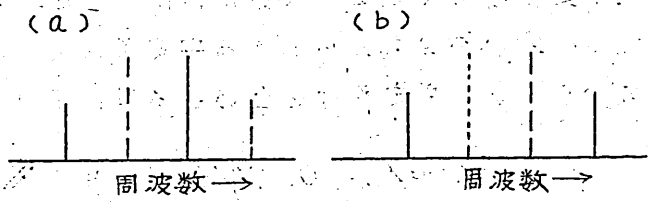


図 5.1 (a) 双安定 (b) 3安定

6. 安定条件の近似的導出

§4. §5で3,4モードレーザにおけるmode groupの双安定状態及び3安定状態の安定条件を求めたが，多重モードレーザにおいて，各mode groupの動作を各1個の変数で表現する事ができれば，解析は非常に簡単になる。この節では，このような方法で求まる安定条件を，§4, §5で求めた安定条件と比較し，この方法の是非を考察する。

§6.1 3モードレーザ

(4.1)式において

$$X_3 = kX_1 \quad (k: \text{const.}) \tag{6.1}$$

とおくと

$$\dot{X}_1 = 2X_1\{\alpha_1 - (\beta_1 + k\theta_{13})X_1 - \theta_{12}X_2\} \tag{6.2a}$$

$$\dot{X}_2 = 2X_2\{\alpha_2 - (\theta_{21} + k\theta_{23})X_1 - \beta_2 X_2\} \tag{6.2b}$$

$$\dot{X}_1 = 2X_1\{\alpha_3 - (\theta_{31} + k\beta_3)X_1 - \theta_{32}X_2\} \tag{6.2c}$$

となる。即ち，第1modeと第3modeとは二つのmode groupを作り，行動を共にすると仮定するのである。ここでkは，(4.1)式の定常解と(6.2)式の定常解が一致するように定める。(6.2a)と(6.2b)の2式から求まる安定条件と，(6.2b)と(6.2c)の2式から求まる安定条件を合わせる事により，定常解

$$X_0 = (A_{13}/C_{13},\ 0,\ A_{31}/C_{31}) \quad \text{と} \quad X_0 = (0,\ \alpha_2/\beta_2,\ 0)$$

に対する安定条件がそれぞれ求まる。(4.1)式で

$$X_2 = kX_1 \quad \text{または} \quad X_3 = kX_2 \tag{6.3}$$

とおくと，同様に他の定常解に対する安定条件が求まる。以下結果を列挙する。

i) 単一モード発振

§4.1で求めた安定条件と同じ安定条件が求まる。

ii) 2モード発振

安定条件	定常値 $\bar{X}_0$
$S_3 \cdot C_{12} < 0,\ A_{12} \cdot C_{12} > 0,\ A_{21} \cdot C_{21} > 0$	$(A_{12}/C_{12},\ A_{21}/C_{21},\ 0)$
$S_2 \cdot C_{31} < 0,\ A_{31} \cdot C_{31} > 0,\ A_{13} \cdot C_{13} > 0$	$(A_{13}/C_{13},\ 0,\ A_{31}/C_{31})$
$S_1 \cdot C_{23} < 0,\ A_{23} \cdot C_{23} > 0,\ A_{32} \cdot C_{32} > 0$	$(0,\ A_{23}/C_{23},\ A_{32}/C_{32})$

§4.1で求めた安定条件と比較すると，coupling の条件

$$C_{12} > 0,\quad C_{31} > 0,\quad C_{23} > 0 \qquad (6.4)$$

がそれぞれ欠けている。即ち，2つの mode を1つの変数で表わしたためにその mode 間の coupling という概念が失われてしまったのである。

§6.2 4モードレーザ

(5.1)式において，

$$X_1 = pX_3,\quad X_4 = qX_2 \quad (p, q: \text{const.}) \qquad (6.5)$$

とおくと，2組の微分方程式

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}_2 &= 2X_2\{\alpha_2 - (\beta_2 + q\theta_{24})X_2 - (p\theta_{21} + \theta_{23})X_3\} \\ \dot{X}_3 &= 2X_3\{\alpha_3 - (\theta_{32} + q\theta_{34})X_2 - (p\theta_{31} + \beta_3)X_3\} \end{aligned}\right\} (6.6a)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}_2 &= 2X_2\{\alpha_4 - (\theta_{42} + q\beta_4)X_2 - (p\theta_{41} + \theta_{43})X_3\} \\ \dot{X}_3 &= 2X_3\{\alpha_1 - (\theta_{12} + q\theta_{14})X_2 - (p\beta_1 + \theta_{13})X_3\} \end{aligned}\right\} (6.6b)$$

が求まる。ここで p, g は（6.6 a）の定常解と，（6.6 b）の定常解が一致するように定める。（（5.1）式の定常解が，（6.5）式を満足する事から p, g を定めてもよい。）

（6.6 a）から求まる安定条件と，（6.6 b）から求まる安定条件を合わせる事により，

$$X_0=\left(\frac{A_{13}}{C_{13}},\ 0,\ \frac{A_{31}}{C_{31}},\ 0\right) \quad と \quad X_0=\left(0,\ \frac{A_{24}}{C_{24}},\ 0,\ \frac{A_{42}}{C_{42}}\right)$$

の安定条件が，それぞれ求まる。同様にして，他の2モード発振の定常値に対する安定条件も求まり，次表のようになる。

安　定　条　件	定　常　値
$S_{312}\cdot C_{12}<0,\ S_{412}\cdot C_{12}<0,\ A_{12}\cdot C_{12}>0,\ A_{21}\cdot C_{21}>0$	$\left(\frac{A_{12}}{C_{12}},\ \frac{A_{21}}{C_{21}},\ 0,\ 0\right)$
$S_{213}\cdot C_{13}<0,\ S_{413}\cdot C_{13}<0,\ A_{13}\cdot C_{13}>0,\ A_{31}\cdot C_{31}>0$	$\left(\frac{A_{13}}{C_{13}},\ 0,\ \frac{A_{31}}{C_{31}},\ 0\right)$
$S_{214}\cdot C_{14}<0,\ S_{314}\cdot C_{14}<0,\ A_{14}\cdot C_{14}>0,\ A_{41}\cdot C_{41}>0$	$\left(\frac{A_{14}}{C_{14}},\ 0,\ 0,\ \frac{A_{41}}{C_{41}}\right)$
$S_{123}\cdot C_{23}<0,\ S_{423}\cdot C_{23}<0,\ A_{23}\cdot C_{23}>0,\ A_{32}\cdot C_{32}>0$	$\left(0,\ \frac{A_{23}}{C_{23}},\ \frac{A_{32}}{C_{32}},\ 0\right)$
$S_{124}\cdot C_{24}<0,\ S_{324}\cdot C_{24}<0,\ A_{24}\cdot C_{24}>0,\ A_{42}\cdot C_{42}>0$	$\left(0,\ \frac{A_{24}}{C_{24}},\ 0,\ \frac{A_{42}}{C_{42}}\right)$
$S_{134}\cdot C_{34}<0,\ S_{234}\cdot C_{34}<0,\ A_{34}\cdot C_{34}>0,\ A_{43}\cdot C_{43}>0$	$\left(0,\ 0,\ \frac{A_{34}}{C_{34}},\ \frac{A_{43}}{C_{43}}\right)$

§5.1で求まった安定条件と比較すると，3モードの場合と同様，一つの変数で表わした mode group 内の coupling の条件が欠けているだけである。

以上の結果から，一つの変数で表わした mode group 内の coupling の条件を補ってやりさえすれば，モード数の多い場合にもこの方法が適用できるのではないかと推測される。

7. モード群競合

まず§4で求めた3モードレーザにおける各種の定常状態の安定条件が成立する領域の$\nu_2=\omega$の場合の数値例を図7.2に示す。但し用いたレーザ発振器のモデルは図7.1の如くであり、変化させたパラメタはπ(*relative excitation*)とΔ(*mode spacing*)である。基本パラメタの値は、He-Neガスレーザに対するR.L. Forkと M.A. Pollackの実験値[3](He^3 : 1.0 Torr)

$$\gamma_a/2\pi = 12\,Mc/s$$
$$\gamma_b/2\pi = 25\,Mc/s$$
$$\gamma_{ab}/2\pi = 62.0\,Mc/s$$

を用い、簡単のため*soft collision*による*phase shift* cの方は0とした。またKu(*Doppler broadening*の半値幅の6割)の値は、1000 Mc/sと600 Mc/sの2通りについて計算したが、πの変化に対してKuは*const.*とした。即ち、πの変化はレーザ発振器のQ値の変化に対応する。

W.E. Lambが示した*saturation raramcter* β_n, θ_{nm}の表式[1]は、

$$\gamma_a,\ \gamma_b \ll \Delta \qquad (7.1)$$

が成立するΔの値に対する近似式であるが、*hole burning*効果[4]から容易に説明されるように、今、注目している双安定状態及び3安定状態は、Δがγ_a, γ_bと*comparable order*のときに起るのだから、付録に示すように、(7.1)式の近似を行なわない表式を用いた。

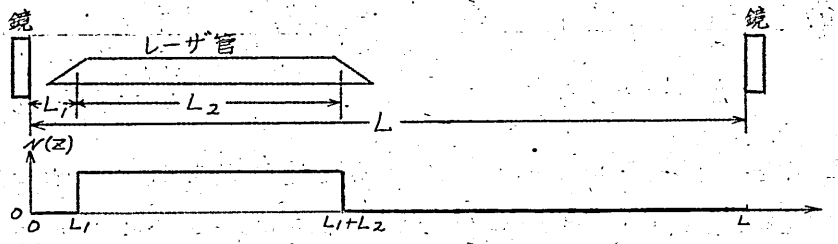


図7.1 レーザ発振器のモデルと*excitation density* $N(z)$の分布、
$L_1=0.15m$, $L_2=0.70m$, $L=150/\Delta$

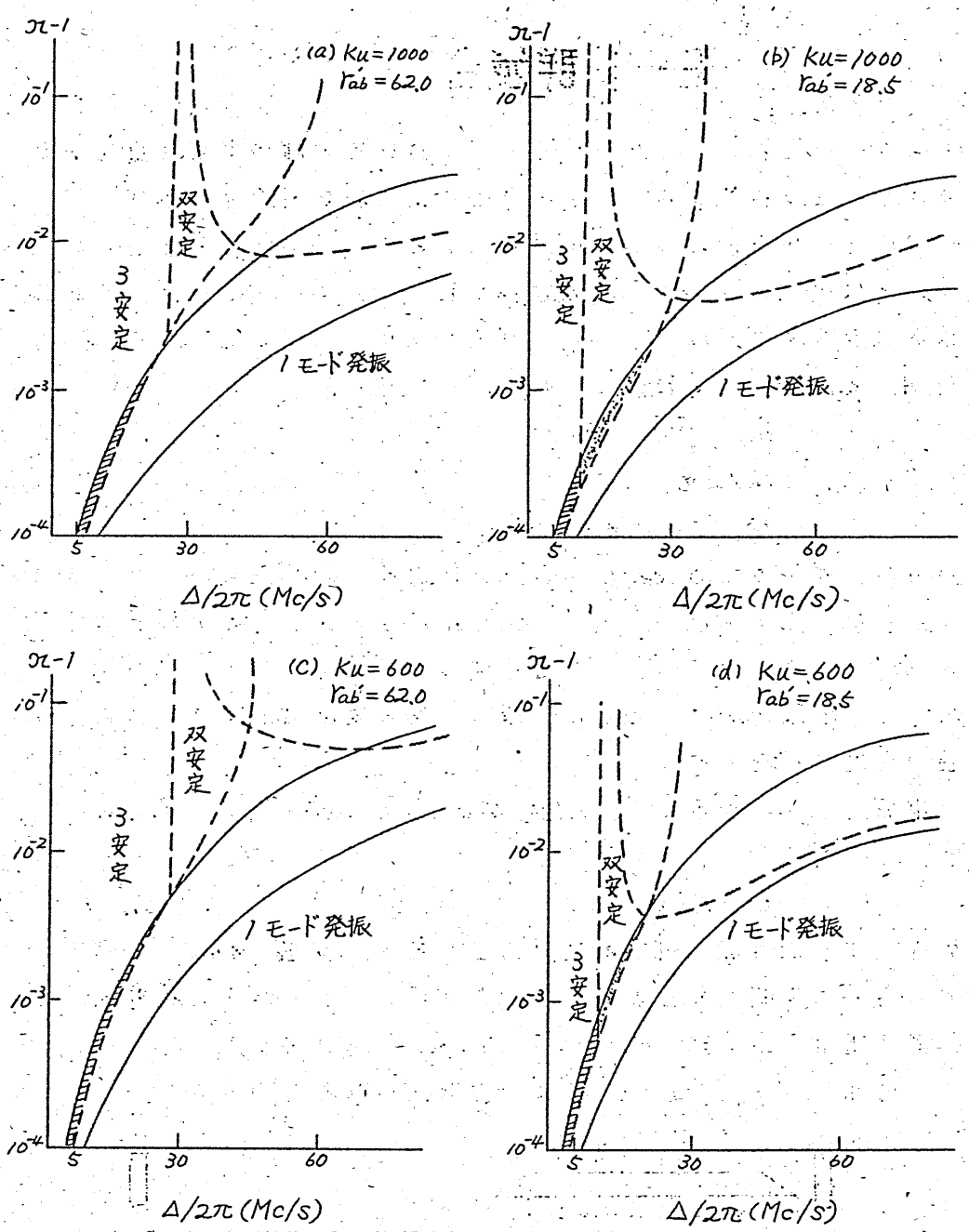


図7.2 3モードレーザにおける各種の定常状態の安定領域($\nu_2=\omega$の場合) 点線が各安定領域の境界を示し、2本の細実線で囲まれた領域が3モードレーザの範囲である。

(i) 3モードレーザにおける双安定及び3安定状態

図7.2によれば、3モードレーザにおいて、($\nu_2=\omega$ の場合)

(a) 3安定領域は、双安定領域よりも、Δ 及び Π が小さい値の所に存在する。

(b) γ_{ab} の値が小さくなれば、双安定領域と3安定領域の境界が Δ 値の小さい方へ移動し、かつ双安定領域が Π の小さい方へ伸びる。

事がわかる。この事は *hole burning* の概念を用いて次のように説明される。

(a) Δ と Π が適当に大きいと、図7.3の(c)図のような、*hole burning* になり、X_1 と X_3 は各々別の *power* を消費して同時に発振し得るが、Δ と Π が小さいと(a)図のようになり、X_1 か X_3 のいずれか一方が両方の *power* を消費してやっと発振し得る。

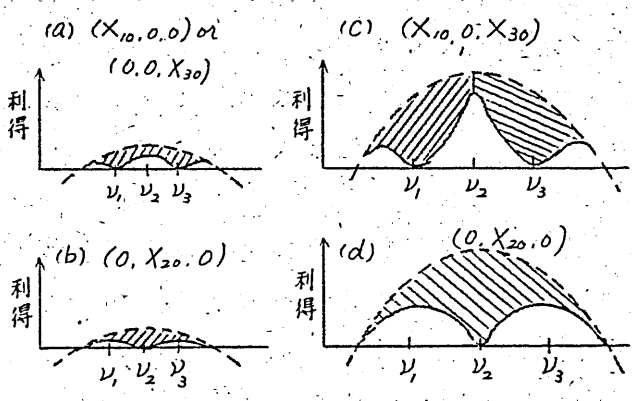


図7.3 双安定及び3安定状態における *hole burning*

(a), (b) : 3安定状態

(c), (d) : 双安定状態

(b) γ_{ab} の値が小さくなる事は、*hole* の幅が狭くなる事だから、図7.3は、相似的に縮小される事になる。(但し *scale* は固定しておく)

よって、各状態の Δ と Π の値は小さくなる。

(ii) 多重モードレーザにおける *mode group*

§6において、同じ *mode group* 内の *mode* 間の *coupling* の条件を付加すれば、1つの *mode group* の動作を1つの変数で表

現し得る事を述べた。この事から、1つおきのmodeからできる2つのmode group（M_2と名づける）の双安定状態は、2モードレーザや3モードレーザの双安定状態に対応し、2つおきのmodeからできる3つのmode group（M_3）の3安定状態は、3モードレーザにおける3安定状態に対応する。3モードレーザにおける各mode groupのgain curveに対する関係はmode groupによって著しく異なるが、モード数がずっと多くなれば、大差がないからmode groupは生じやすいであろう。但し、発振可能なモード数が多いのは、rの値が大きいときであり、このとき、hole burningで掘られるholeは深く、幅広い[4]。従って、mode group M_2, M_3がそれぞれ安定となるΔの値は大きくなる。

2つのmode group $M_2^{(1)}$と$M_2^{(2)}$が、ω（原子の遷移周波数）に対して対称に位置しているとき双安定領域だけしかなく、1つのmode groupだけが安定である領域は存在しない。しかし、ωに対する位置がずれると、1つのmode groupだけが安定である領域ができる。3つのmode group $M_3^{(1)}$, $M_3^{(2)}$, $M_3^{(3)}$についても同様の事が言えるであろう。よって、多重モードにおけるmode groupの安定領域は定性的に図7.3のようになると予想される。

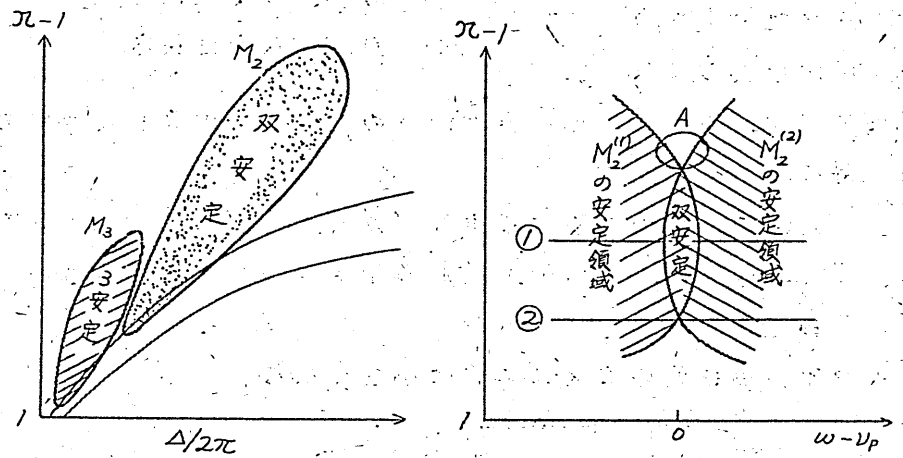


図7.3 (a) mode group M_2, M_3の安定領域　(b) あるΔの値に対するmode group M_2の安定領域のωに対する位置による変化

図7.3 (b) の直線①,② に沿って、π, Δ を一定にしておいて、mode の ω に対する位置を変化させると、ある位置で、発振する mode group の交替が起こる。特に直線 ① に沿った場合には、この mode group の交替に hysteresis が起る。

mode group M_2 の双安定領域の境界付近Aでは、mode の ω に対する位置によって1つの mode group のみが発振するか、共に発振するかが決まる。特に境界点では、1つの mode group のみの発振と、2つの mode group の同時発振が、外乱に支配されて入れ替るであろう。

8. むすび

W.E. Lamb の理論[1]を用いて、3モードレーザの場合について結合調波を無視した近似で、種々の安定解を求め、He-Neレーザに対する数値計算を行なった結果、モード間隔がホール幅程度に小さいと、モード間の競合が激しく、$(X_{10}, 0, 0)$, $(0, X_{20}, 0)$, $(0, 0, X_{30})$ $(X_{10}, 0, X_{30})$ の安定状態が存在し得ることが導かれた。

また§6で述べた、1つの mode group に対して1つの変数を割り当てる近似的解析法によって、多重モードレーザにおける mode group の振舞いが2モード及び3モードレーザにおけるモードの振舞いと結びつけられた。

結合調波を含めた場合の解析が今度の課題である。

文献

1) W.E. Lamb, Jr., Phys. Rev. 134 (1964) A 1429

2) 内田禎二、植木敦史、量子エレクトロニクス研究会資料 1966年9月

3) R.L. Fork & M.A. Pollack, Phys. Rev. 139 (1965) A 1408

4) W.R. Bennett, Jr., Phys. Rev. 126 (1962) 580

付録　$\alpha_n, \beta_n, \theta_{nm}, \xi_{nm}, \eta_{nm}$ の表式

Collision 効果を考慮した場合の多モードレーザのパラメタを求めるには、R.L. Fork & M.A. Pollack[3] に従って、W.E. Lamb[1] の導いた macroscopic な分極 P_n の式中の

$$\mathcal{D}(\omega), \quad \mathcal{Z}(\nu-\omega, \gamma_{ab}, ku)$$

の代りにそれぞれ

$$\mathcal{D}'(\omega) = \frac{e^{ic}}{\gamma_{ab}' + i\omega}, \quad e^{ic}\mathcal{Z}(\nu-\omega, \gamma_{ab}', ku)$$

を用いればよい。その結果のみを記す。但し、$\gamma_a, \gamma_b, \gamma_{ab}' \ll \Delta$ の近似は行なわない。

$$\alpha_n = \alpha_n' \cos C + \sigma_n' \sin C - \frac{1}{2}\cdot(\nu/Q_n)(1-\cos C)$$
$$\sigma_n = \sigma_n' \cos C - \left[\alpha_n' + \frac{1}{2}(\nu/Q_n)\right] \sin C$$
$$\beta_n = \beta_n' \cos C - \rho_n' \sin C$$
$$\rho_n = \rho_n' \cos C + \beta_n' \sin C$$
$$\theta_{nm} = \theta_{nm}' \cos C - \tau_{nm}' \sin C$$
$$\tau_{nm} = \tau_{nm}' \cos C + \theta_{nm}' \sin C.$$

但し、

$$\alpha_n' = \frac{1}{2}(\nu/Q_n)\left[\frac{\mathcal{Z}_i(\omega-\nu_n)}{\mathcal{Z}_{max}}\pi - 1\right]$$
$$\sigma_n' = -\frac{1}{2}(\nu/Q_n)\left[\frac{\mathcal{Z}_r(\omega-\nu_n)}{\mathcal{Z}_{max}}\pi\right]$$
$$\beta_n' = F\cdot\pi\left[1 + \frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_n}{\gamma_{ab}'}\right)^2}\right]$$
$$\rho_n' = -F\cdot\pi\left[\frac{\frac{\omega-\nu_n}{\gamma_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_n}{\gamma_{ab}'}\right)^2}\right]$$
$$\theta_{nm}' = F\cdot\pi\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{nm}}{\gamma_{ab}'}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\Delta}{\gamma_{ab}'}\right)^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{N_2(m-n)}{N}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_n}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\left\{\frac{r_b/r_{ab}}{1+(m-n)^2\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{r_a/r_{ab}}{1+(m-n)^2\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{N_2(m-n)}{N}\cdot\frac{\frac{\omega-\nu_n}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_n}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{\frac{(m-n)\Delta}{r_a}\cdot\frac{r_b}{r_{ab}}}{1+(m-n)^2\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2}+\frac{\frac{(m-n)\Delta}{r_b}\cdot\frac{r_a}{r_{ab}}}{1+(m-n)^2\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2}\right\}\Bigg]$$

$$\tau_{nm}'=-F\cdot\mathfrak{N}\left[\left\{\frac{\frac{\omega-\nu_{nm}}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{nm}}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{N_2(m-n)}{N}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_n}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\left\{\frac{\frac{(m-n)\Delta}{r_a}\cdot\frac{r_b}{r_{ab}}}{1+(m-n)^2\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{(m-n)\Delta}{r_b}\cdot\frac{r_a}{r_{ab}}}{1+(m-n)^2\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{N_2(m-n)}{N}\cdot\frac{\frac{\omega-\nu_n}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_n}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{r_b/r_{ab}}{1+(m-n)^2\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2}+\frac{r_a/r_{ab}}{1+(m-n)^2\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2}\right\}\Bigg]$$

$$\eta_{23}=F\cdot\mathfrak{N}\left[\left\{\frac{N_2}{N}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{1+\frac{\Delta^2}{r_a r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}}\left\{\frac{N_2}{N}\cdot\frac{\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{\frac{\Delta}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}+2\frac{\Delta^2}{r_a\cdot r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right]$$

$$\xi_{23}=-F\cdot\mathfrak{N}\left[\left\{\frac{N_2}{N}\cdot\frac{\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{\frac{\Delta}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{1+\frac{\Delta^2}{r_a r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{r_{ab}}\left\{\frac{N_2}{N}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}+2\frac{\Delta^2}{r_a\cdot r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right]$$

$$\eta_{13}=F\cdot\mathfrak{N}\left[\left\{\frac{N_2}{N}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}\right)^2}\right)+2\right\}\cdot\frac{1+\frac{\Delta^2}{r_a\cdot r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}}\cdot\frac{N_2}{N}\left\{\frac{\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}\right)^2}-\frac{\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}+2\frac{\Delta^2}{r_a\cdot r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\Bigg]$$

$$\xi_{13}=F\cdot\pi\left[\frac{N_2}{N}\left\{\frac{\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{1+\frac{\Delta^2}{r_a r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}}\cdot\frac{N_2}{N}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{12}}{r_{ab}'}\right)^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}+2\frac{\Delta^2}{r_a r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right]$$

$$\eta_{21}=F\cdot\pi\left[\left\{\frac{N_2}{N}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{1+\frac{\Delta^2}{r_a r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}}\left\{\frac{N_2}{N}\cdot\frac{\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}\right)^2}-\frac{\frac{\Delta}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}+2\frac{\Delta^2}{r_a r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right]$$

$$\xi_{21}=-F\cdot\pi\left[\left\{\frac{N_2}{N}\cdot\frac{\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}\right)^2}-\frac{\frac{\Delta}{r_{ab}'}}{1+\left(\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{1+\frac{\Delta^2}{r_a r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{r_{ab}}\left\{\frac{N_2}{N}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\nu_{23}}{r_{ab}'}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta}{r_{ab}'}\right)^2}\right\}\cdot\frac{\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}+2\frac{\Delta^2}{r_a r_b}}{\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_a}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\Delta}{r_b}\right)^2\right]}\right]$$

ここで、

$Z_{max}=$ max. of $[Z_i(\nu-\omega)\cos C+Z_r(\nu-\omega)\sin C]$

$(P^2/(\varepsilon_0\hbar K u))\,\bar{N}_T\,Z_{max}=1/Q_n$

$F=\frac{1}{2}(\nu/Q_n)\left[\frac{1}{8}\pi^{1/2}(P^2/\hbar^2)\right]\cdot\frac{1}{Z_{max}}\cdot\frac{1}{r_a r_b}\cdot\frac{r_{ab}}{r_{ab}'}$

$\nu_{nm}=\frac{1}{2}(\nu_n+\nu_m)$

（記号の意味は、W.E. Lamb の論文"参照）