輻射科学研究会資料

不均一誘電体薄膜表面波線路

熊谷信昭・倉薗貞夫・沢　新之輔

（大阪大学　工学部）

1967年5月26日

1. まえがき

誘電体薄膜をミリ波または光波帯における低損失線路として用いることが考えられる。しかし，今までに考察されているもの[1]は誘電率の一様な誘電体薄膜からなるものであるために，膜面と平行な方向には表面波電磁界の分布を集束する効果がない。そのため，伝送電磁界に影響を与えることなく薄膜を支持することができず，また特別な工夫を加えないかぎり膜面と平行な面内での曲がりによつて非常に大きな伝送損失を生ずる。

これらの点を改良するために，本文では薄膜の誘電率が膜面と平行な方向に，中心軸からの距離の関数として減少するような誘電率分布をもつ不均一誘電体薄膜表面波線路を考え，その伝送特性を理論的，実験的に検討した。その結果，わずかな誘電率の変化によつて，膜面と平行な方向にも顕著な集束効果が得られることが明らかとなつた。

誘電体薄膜に与える誘電率分布としては，誘電率が中心軸上で最大値をとり，膜面と平行な方向に中心軸からの距離の2乗に比例して連続的に減少するもの，および不連続的に減少するものの二つを考え，それぞれの伝送特性を示した。解析は主として最低次の表面波姿態を対象とし，第一近似の範囲内で取り扱う。

50GC帯で行なつた試作，実験の結果，ここで提案した不均一誘電体薄膜表面波線路は短ミリ波以下の波長領域における低損失伝送系として十分実用の可能性を有するものであることが確かめられた。

2. 誘電率分布が2乗的に変化する薄膜線路の伝送特性

厚さ2dなる誘電体薄膜に対して座標軸を図1のようにとる。薄膜の誘電率はx方向およびz方向には一様で，y方向には

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_0\left[1 + \varepsilon_f\left\{1 - \left(\frac{y}{L}\right)^2\right\}\right] \qquad (1)$$

なる２乗的変化をするものとする．ここで，ε_0は自由空間の誘電率を表わしLは誘電率の変化率をきめる定数である．またε_fは中心軸（y＝0）における誘電率を与える定数である．

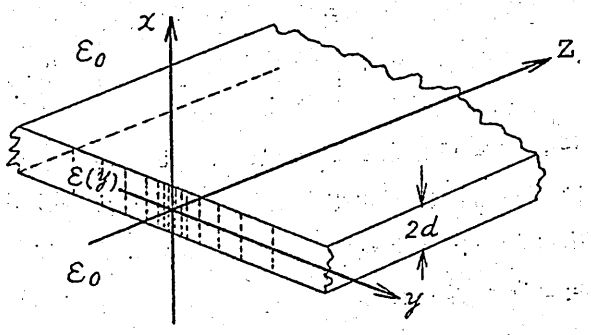


図１　不均一誘電体薄膜

$d/\lambda_0 \ll 1$とし，かつ誘電率の変化がきわめてゆるやかであるとして，自由空間波長λ_0に対し，$\lambda_0/L \ll 1$と仮定して，最低次表面波姿態の減衰定数α_aおよび位相定数β_aを求めるとそれぞれつぎのようになる[2],[3]

$$\alpha_a \fallingdotseq k_0^3 \frac{d^2}{(1+\varepsilon_f)}\left\{1-\frac{1}{(1+\varepsilon_f)}+\frac{\lambda_0}{4\pi L}\left(1-\frac{4}{1+\varepsilon_f}\right)\varepsilon_f^{\frac{1}{2}}\right\}\tan\delta \quad (2)$$

$$\beta_a \fallingdotseq k_0\left[1+(k_0 d)^2\left\{\frac{\varepsilon_f^2}{2(1+\varepsilon_f)^2}-\frac{\varepsilon_f^{3/2}}{k_0(1+\varepsilon_f)^2}\frac{1}{L}\right\}\right] \quad (3)$$

ここに，$k_0=2\pi/\lambda_0$，$\tan\delta$は誘電体の損失角を表わす．

図２および図３はそれぞれミリ波領域および光波領域における誘電体損失による減衰定数の理論値を示したものである．

x方向およびy方向の電力集中度を，膜面（$|x|=d$）および中心軸（$y=0$）

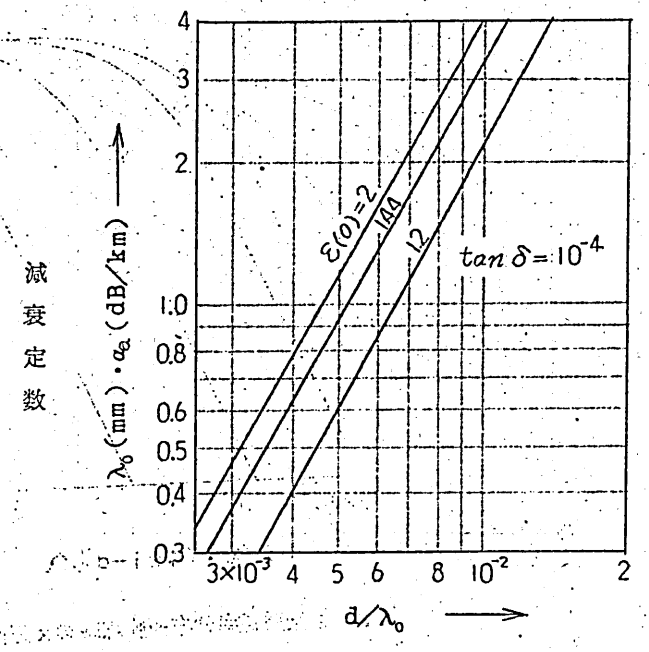


図2　2乗誘電率分布薄膜線路のミリ波領域における減衰定数（理論値）

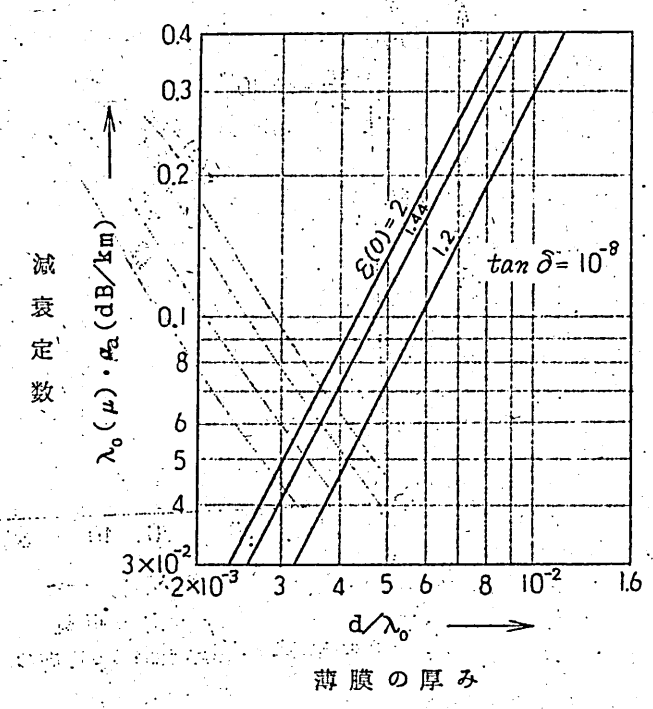


図3　2乗誘電率分布薄膜線路の光波領域における減衰定数（理論値）

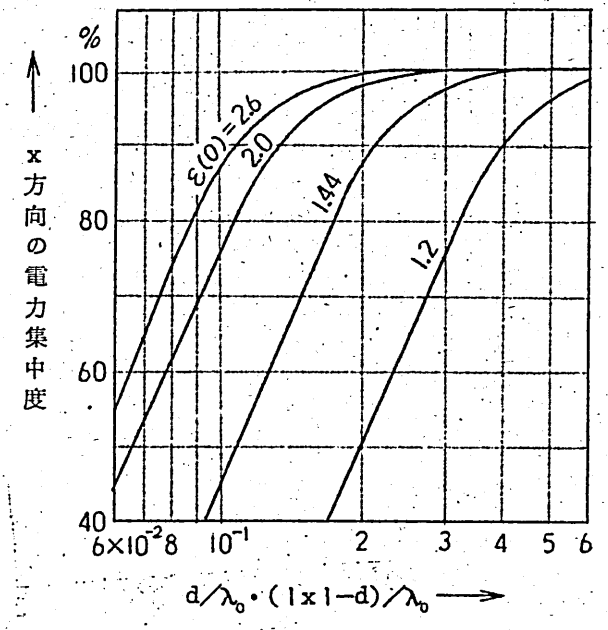


図4　2乗誘電率分布薄膜線路のx方向の電力集中度

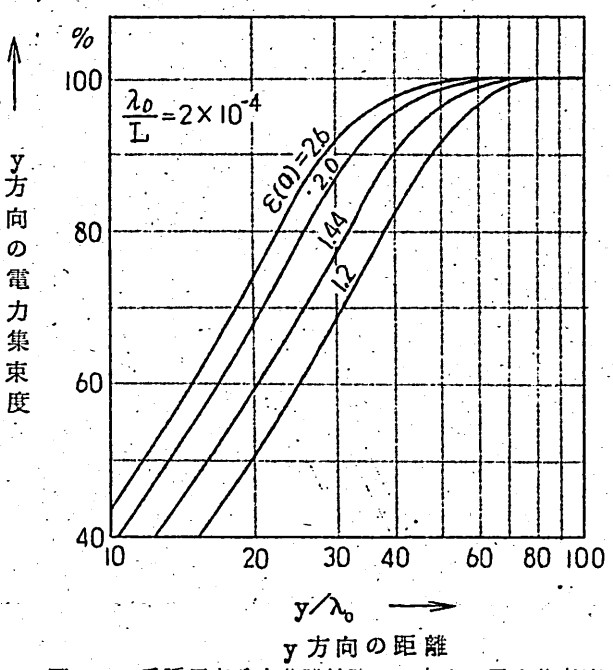


図5　2乗誘電率分布薄膜線路のy方向の電力集束度

からそれぞれの方向の，ある距離までに含まれる電力と，全伝送電力との比で表わして数値計算したものが図4および図5である．

これらの図からもわかるように，λ_0/Lが非常に小さい値，すなわち，誘電率のy方向の変化がごくわずかでも，電磁界は非常に大きな収束効果を受けほとんど線路の中心軸附近に集められる．

すなわち，このような誘電率分布を有する不均一誘電体薄膜は伝送電磁波に対してx方向には表面波線路としての集中性を与え，同時にy方向にはレンズ状媒質のごとき集束性を示す．したがつて，例えば図6のような構成によつて，伝送電磁波にはほとんど影響を与えることなく線路を支持することができる．表1はこの線路の数値設計例およびその伝送特性の理論値を示したものである．図7に最低次姿態の電磁界分布の模様を示す．

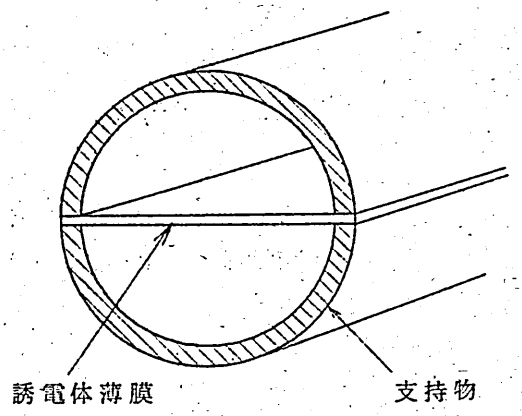


図6　不均一誘電体薄膜表面波線路の構造

表1　2乗誘電率分布薄膜線路の設計例

($\lambda_0/L = 2\times10^{-4}$)

波長 λ_0	中心の誘電率 $\varepsilon(0)$	膜厚 2d	tan δ	減衰定数 α_a	全伝送電力の99.9%を含む範囲
1(mm)	2.0	11.2(μ)	10^{-4}	1.65(dB/km)	10(cm) × 14(cm)
1(μ)	1.2	0.1(μ)	10^{-8}	7.4 (dB/km)	34(μ) × 160(μ)

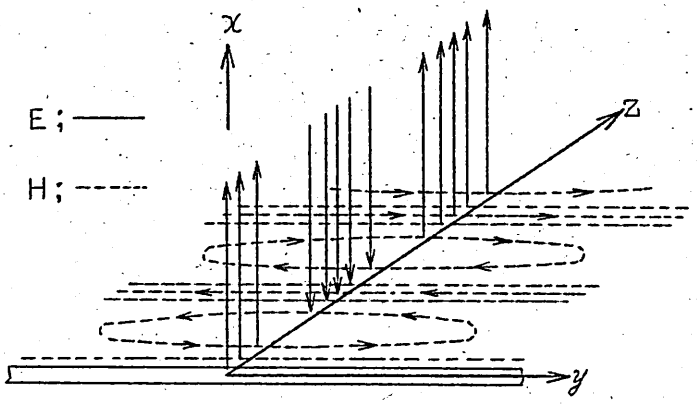


図７　２乗誘電率分布薄膜線路における最低次表面波姿態，（HE_{00} 姿態）の電磁界分布．

3. 誘電率分布が不連続的に変化する薄膜線路の伝送特性

図８のような厚さ２ｄなる誘電体薄膜において，その誘電率分布がｘ方向およびｚ方向には一様で，ｙ方向には

$$\begin{aligned} \varepsilon(y) &= \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1^* , && -b \leq y \leq b \\ \varepsilon(y) &= \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2^* , && b < |y| \end{aligned} \tag{4}$$

ただし

$$\varepsilon_1^* > \varepsilon_2^*$$

なる不連続的な変化をするものとする．ここで ε_1^* および ε_2^* はそれぞれ領域 $-b \leq y \leq b$ および $b < |y|$ における誘電体薄膜の比誘電率を表わす．

この場合にも $d/\lambda_0 \ll 1$ とし，かつ誘電率の不連続的な変化がきわめてわずかであるとして $(\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*)\, d/\lambda_0 \ll 1$ と仮定し，前節の２乗分布の場合と同様の解析を行なうと，減衰定数 α_b および位相定数 β_b はそれぞれ次のよう

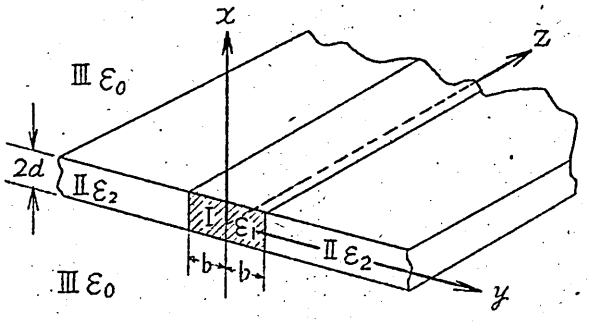


図 8　誘電率分布が不連続的に変化する薄膜線路

になる．（附録参照）

$$\alpha_b \fallingdotseq k_0^3 d^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_2^*}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2^*}\right) + k_0^2 b^2 \left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*}\right)^2 \frac{(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)^2}{\varepsilon_2^*} \right\} \tan\delta_2 \qquad (5)$$

$$\beta_b \fallingdotseq k_0 \left[1+\left(\frac{d}{\varepsilon_2^*}\right)^2 (\varepsilon_2^*-1) k_0^2 \left\{ \frac{(\varepsilon_2^*-1)}{2} + k_0^2 b^2 \left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*}\right)^2 (\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)^2 \right\} \right] \qquad (6)$$

式(2)～(6)において$\lambda_0/L \ll 1$および$(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)\,b/\lambda_0 \ll 1$を考慮して，それぞれ第3項を無視すると，いずれも一様な誘電率の均一誘電体薄膜表面波線路の減衰定数および位相定数を表わす表現式となり，$(1+\varepsilon_f)=\varepsilon_2^*$なる場合には$\alpha_a=\alpha_b$，$\beta_a=\beta_b$となる．

伝送電力が膜面（$|x|=d$）および中心軸（$y=0$）における値の$1/e$となるx方向およびy方向の距離，すなわちx方向およびy方向における伝送電磁波のスポットサイズS_xおよびS_yを求めると，近似的にそれぞれ

$$S_x \fallingdotseq \frac{\lambda_0^2}{8\pi^2} \cdot \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_2^*-1} \frac{1}{d} \qquad (7)$$

$$S_y \fallingdotseq \frac{\lambda_0^2}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*} \frac{1}{b} \qquad (8)$$

と表わされる．図９および図１０にスポットサイズの数値計算結果を示す．表２にこの線路の数値設計例および伝送特性の理論値を示す．すなわち，この場合にも比誘電率 ε_1^* および ε_2^*（ただし $\varepsilon_1^* > \varepsilon_2^*$）のごくわずかの差によつてｙ方向にきわめて顕著な収束効果の生ずることが理論的に示される．

したがつて，この場合にも図６のような構造によつて低損失の線路を作ることができる．

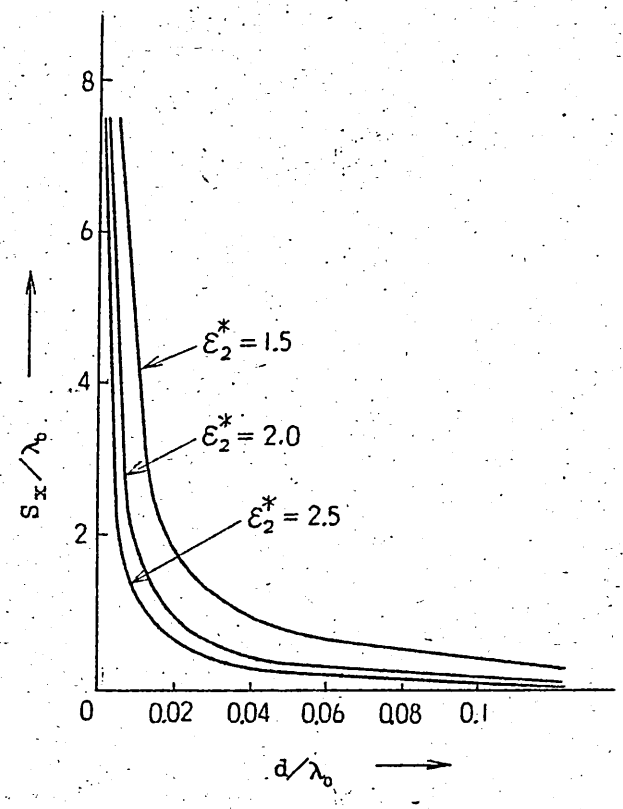


図９　誘電率分布が不連続的に変化する薄膜線路のｘ方向スポット・サイズ（理論値）

表２　誘電率分布が不連続的に変化する薄膜線路の設計例

波長 λ_0	比誘電率 ε_1^*	比誘電率 ε_2^*	膜厚 2d	2b	tan δ	減衰定数 α_b	スポットサイズ $S_x \times S_y$
1 (mm)	2.1	2.0	34 (μ)	20 (μ)	10^{-4}	3.0 (dB/km)	2.9 (mm) × 24 (mm)
1 (μ)	1.3	1.2	0.1 (μ)	0.07 (μ)	10^{-8}	7.5 (dB/km)	3 (μ) × 11.3 (μ)

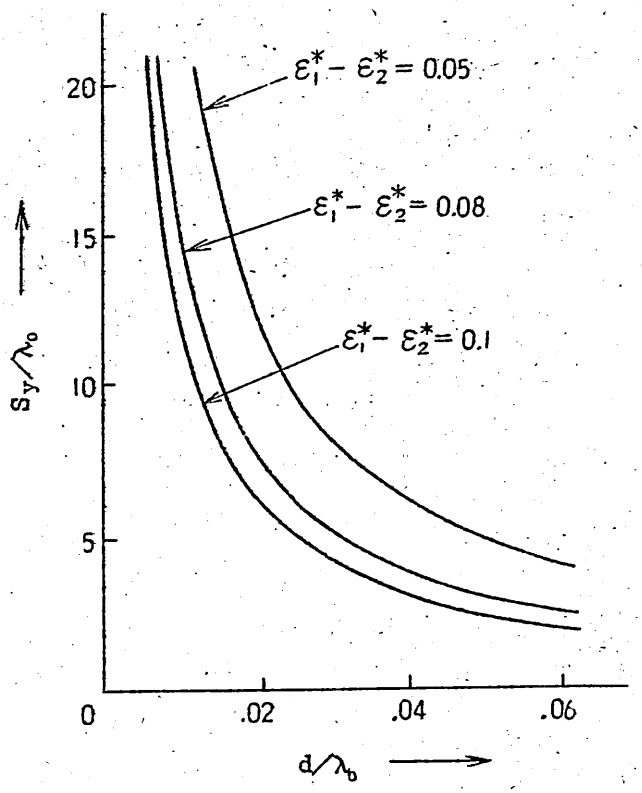


図１０　誘電率分布が不連続的に変化する薄膜線路のｙ方向スポット・サイズ（理論値）

4. 実験結果

前節までに示した不均一誘電体薄膜表面波線路の最も簡単なモデルとして図１１(1)および(2)に示すような構造のテフロンおよび塩化ビニール・フイルムからなる線路を試作し５０GC 帯でその伝送特性を測定した。

図１２(1)および(2)は厚さ２d = 0.2mm の塩化ビニール・フイルム面に，それぞれ図１１(1)および(2)のような寸法 a × b = 0.5 × 1.1mm^2 のテフロンフ

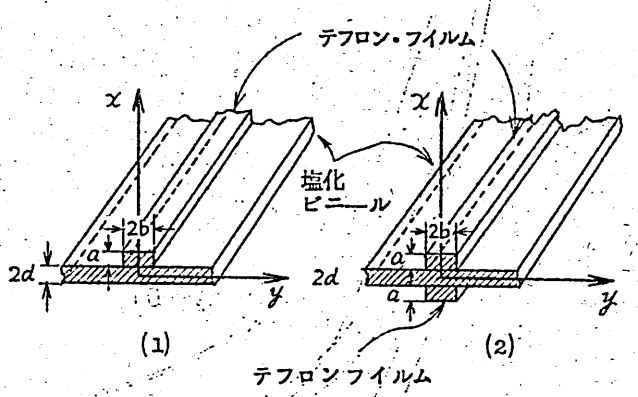


図１１　試作誘電体薄膜線路

イルムを片面および両面に装着させた場合の，電界のｙ方向分布の測定値を示したものである．図１３の曲線(1)および(2)は中心軸（ｙ＝０）上におけるｘ方向分布を示す．

この試作線路の励振は図１４(a)に示すように，開口１５×１５cm^2，長さ２０cmの電磁ホーンによつて行ない，その入力導波管側のV.S.W.Rは周波数４７～５２GCの範囲で1.15以下であつた．（同図(b)）．界分布測定のための検出用アンテナとしては，５０GC帯の標準導波管の切口に直径0.8ｍｍの円孔をあけたアルミ箔をかぶせたものを用いた．

共振法によつて４７GCにおいて測定した減衰定数は，厚さ0.2ｍｍのテフロン・フイルムの上面に，図１１(1)のように寸法ａ×ｂ＝0.5×1.1ｍm^2のテフロン・フイルムをおいた場合には0.14dB/mとなり，同様な構造でａ×ｂ＝0.2×0.3ｍm^2とした場合には，0.09dB/mとなつた．

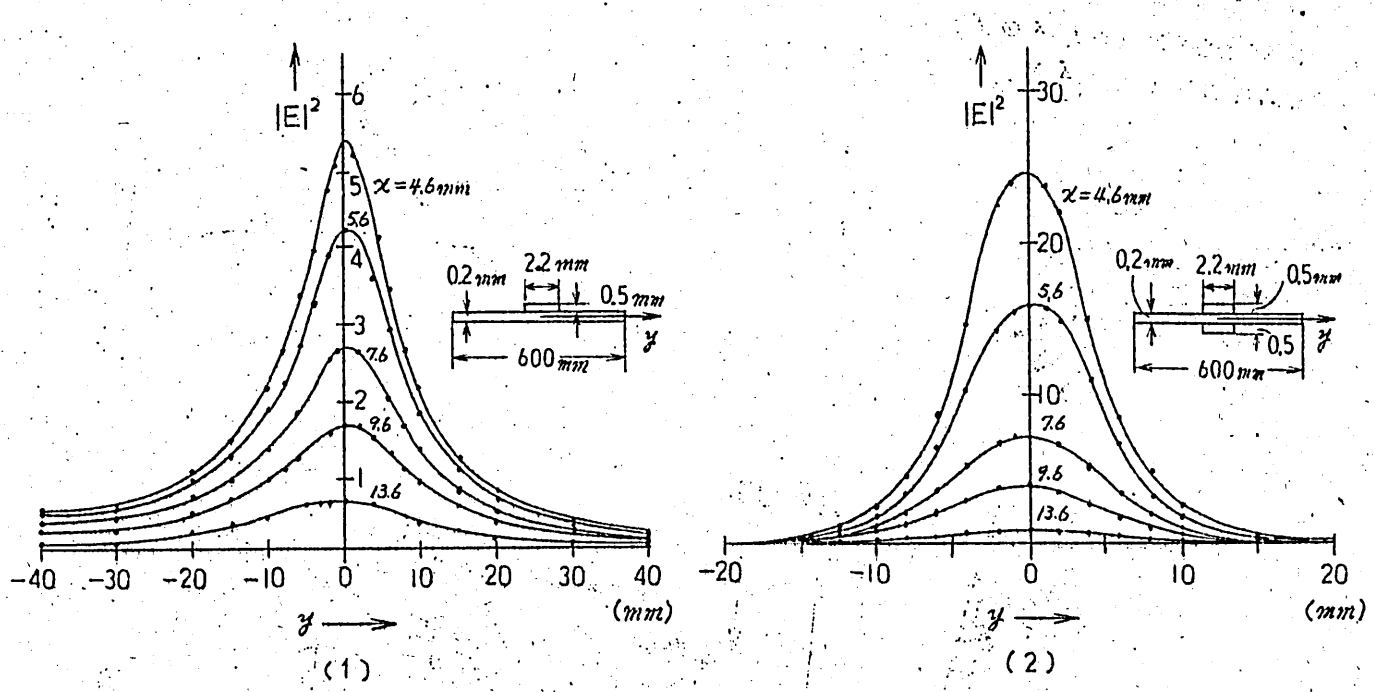


図 1 2　y 方向電界分布の模様（測定値）

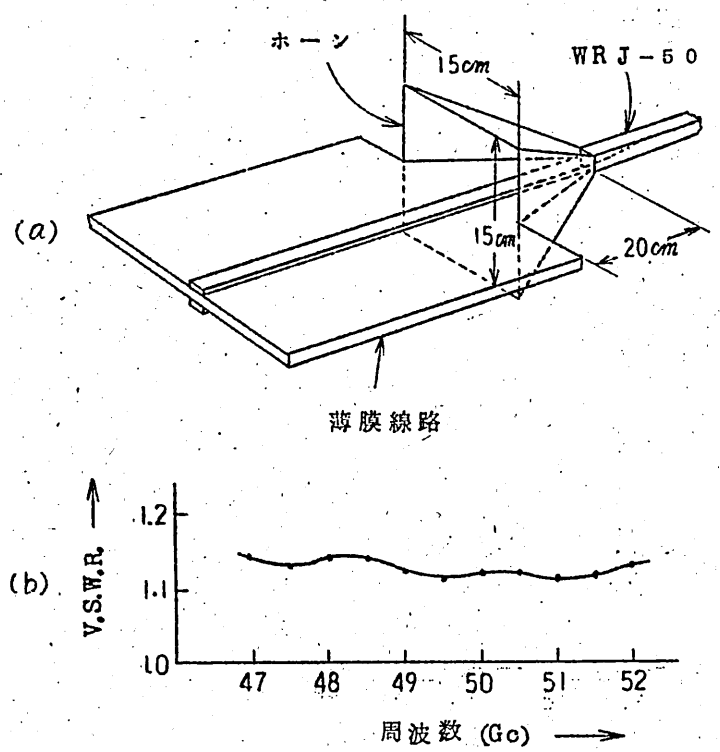


図１４　励振部および入力V.S.W.R.

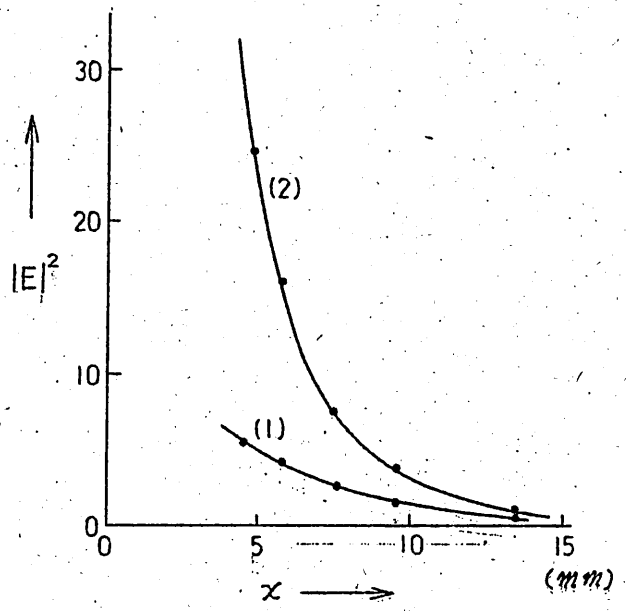


図１３　中心軸（ｙ＝０）上における電界のｘ方向変化（測定値）

5. 結　　言

短ミリ波以下の波長領域における低損失線路として，誘電率が膜面と平行な方向に中心軸からの距離の関数として2乗的または不連続的に減少するような誘電率分布をもつた不均一誘電体薄膜表面波線路を提案し，その基礎的伝送特性を理論的，実験的に検討した．その結果，短ミリ波以下の波長領域における伝送系として，十分実用の可能性があることが確かめられた．

日頃から御べん励いただく本学，坂倉清保教授，有益なる御討論をいただいた住友電工研究部弱電課の中原恒雄課長，同倉内憲孝氏，吉田健一氏，並びに本研究に御協力いただいた，汐見修三，吉川憲昭の諸氏に深謝する．

参 考 文 献

(1) A.E. Karbowiak; "A close look at optical waveguides" Microwaves, 5, 7, p.37 (july 1966)

(2) 熊谷信昭，倉薗貞夫，沢　新之輔；"レンズ収束効果を有する不均一誘電体薄膜表面波線路"
マイクロ波研資，FW67－4(1967－04)

(3) 熊谷信昭，倉薗貞夫，沢　新之輔；"短ミリ波，サブミリ波，光波用低損失薄膜誘電体線路"
昭42連大．1427

附　録　誘電率分布が不連続的に変化する薄膜線路の伝送電磁波

対象とする伝送系は図８に示すように誘電率ε_1およびε_2なる２種類の線形，等方な誘電体薄膜ⅠおよびⅡよりなる．薄膜外部の領域Ⅲは誘電率ε_0なる自由空間である．

一般に直角座標において軸方向電磁界E_z，H_zが与えられると，他の電磁界成分は次式から定まる．

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{j}{\beta^2-k^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial x}+\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ E_y &= \frac{j}{\beta^2-k^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial y}-\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ H_x &= \frac{-j}{\beta^2-k^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}-\beta\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ H_y &= \frac{j}{\beta^2-k^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}+\beta\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad A\cdot(1)$$

ただし，$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$，$\beta$はz方向に伝ぱんする波の位相定数を表わし，$e^{j(\omega t-\beta z)}$なる共通因子は省略してある．

領域ⅠおよびⅡのz方向電磁界成分は波動方程式を満足する解として次式のようにおくことができる．

$$\left.\begin{aligned} E_z^{I} &= A_1\sin k_x^{I}x\cos k_y y \\ H_z^{I} &= B_1\cos k_x^{I}x\sin k_y y \end{aligned}\right\} \quad \text{in I} \qquad A\cdot(2)$$

$$\left.\begin{aligned} E_z^{II} &= A_2\sin k_x^{II}x\,e^{-q(|y|-b)} \\ H_z^{II} &= B_2\cos k_x^{II}x\,e^{-q(|y|-b)} \end{aligned}\right\} \quad \text{in II} \qquad A\cdot(3)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} &k_1^2-\beta^2=k_x^{I2}+k_y^2\ , \\ &k_2^2-\beta^2=k_x^{II2}-q^2\ , \\ &k_i=\omega\sqrt{\varepsilon_i\mu_0}\quad (i=0,1,2) \end{aligned}\right\} \quad A\cdot(4)$$

なる関係があり，A，Bは定数である．

式A(1)～A(3)を用いて領域ⅠおよびⅡにおける他の電磁界成分を求め，境界面$y=\pm b$における電磁界の連続条件を与えると次の特性方程式が得られる．

$$\{(k_1^2-\beta^2)\varepsilon_2^* q-(k_2^2-\beta^2)\varepsilon_1^* k_y \tan k_y b\}\{(k_1^2-\beta^2)q \tan k_y b+(k_2^2-\beta^2)k_y\}$$
$$=\beta^2 k_x^2 \tan k_y b\, k_0^2(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)^2 \qquad A\cdot(5)$$

ただし，

$$\varepsilon^*=\varepsilon/\varepsilon_0 \ , \quad k_x^{\mathrm{I}}=k_x^{\mathrm{II}}=k_x$$

つぎに自由空間中における電磁界を定めるスカラー関数$\varphi(x,y)$は平面波の合成として

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k_y)\, e^{jk_x(|x|-d)+jk_y y}\, dk_y \qquad A\cdot(6)$$

ただし，

$$k_x^2+k_y^2=k_0^2-\beta^2 \qquad A\cdot(7)$$

と書き表わすことができる．ここで$g(k_y)$は各平面波成分に付した重み関数である．

いま，膜の表面$x=\pm d$において

$$\varphi(x,y)=\varphi(\pm d,y)=e^{-q|y|} \qquad A\cdot(8)$$

とすると，式A・(8)は

$$e^{-q|y|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k_y)\, e^{jk_y y}\, dk_y \qquad A\cdot(9)$$

となる．上式よりFourierの積分定理によつて$g(k_y)$を求め式A・(8)に代入し，$x\to\infty$において，$\varphi(x,y)\to 0$となる条件を考慮して積分を行なうと次式が得られる．

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\, e^{-\gamma(|x|-d)}\{e^{-qy}\mathrm{Erfc}(\theta_-)+e^{qy}\mathrm{Erfc}(\theta_+)\} \qquad A\cdot(10)$$

ただし，

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - k_0^2}\left\{1 - \frac{q^2}{2(\beta^2 - k_0^2)}\right\} \qquad \text{A・(11)}$$

$$\theta_- = \sqrt{\frac{|x|-d}{2p}}q - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{|x|-d}}y, \quad \theta_+ = \sqrt{\frac{|x|-d}{2p}}q + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{|x|-d}}y \qquad \text{A・(12)}$$

$$p = \sqrt{\beta^2 - k_0^2}, \qquad \text{A・(13)} \qquad \mathrm{Erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-x^2}dx \qquad \text{A・(14)}$$

さて，領域Ⅲにおける軸方向電磁界 E_z^{III}，H_z^{III} は $\varphi(x,y)$ を用いて次のように書くことができる．

$$\left.\begin{aligned} E_z^{\mathrm{III}} &= A_3\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) \\ H_z^{\mathrm{III}} &= B_3\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad \text{A・(15)}$$

式A・(1)，A・(10)およびA・(15)から領域Ⅲにおける他の電磁界成分を求め，bが自由空間波長 λ_0 に比較して十分小さいという仮定のもとに，境界面 $x = \pm d$ において連続条件を適用すると，この場合，次の特性方程式が得られる．

$$\left\{(\beta^2-k_0^2)\varepsilon_2^* k_x + (\beta^2-k_2^2)\gamma\tan k_x d\right\}\left\{(\beta^2-k_0^2)k_x\tan k_x d - (\beta^2-k_2^2)\gamma\right\}$$
$$= \beta^2 k_0^2 q^2 \tan k_x d(\varepsilon_2^*-1)^2 \qquad \text{A・(16)}$$

したがって $b/\lambda_0 \ll 1$ なる場合には式A・(5)およびA・(16)を解けば未知量はすべて定まり，伝送特性を明らかにすることができる．

以上に求めた特性方程式A・(5)，A・(18)および波数の関係式A・(4)，A・(11)を用い，$d/\lambda_0 \ll 1$，$(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)b/\lambda_0 \ll 1$ と仮定すると，q，pおよび β はそれぞれ次のようになる．

$$q \fallingdotseq k_0^2 b\,\frac{\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*}{\varepsilon_2^*(\varepsilon_1^*-1)}\left\{1+(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)\right\}\left\{\varepsilon_1^*(\varepsilon_2^*-1) - \frac{(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)^2}{\varepsilon_2^*-1}\right\} \qquad \text{A・(17)}$$

$$p \fallingdotseq k_0^2 d\frac{1}{\varepsilon_2^*}\left\{(\varepsilon_2^*-1) + \left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*}\right)^2 k_0^2 b^2(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)^2\right\} \qquad \text{A・(18)}$$

$$\beta_b \fallingdotseq k_0 \left[1 + \left(\frac{d}{\varepsilon_2^*}\right)^2 (\varepsilon_2^* - 1) \left\{ k_0^2 \frac{(\varepsilon_2^* - 1)}{2} + k_0^4 b^2 \left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*}\right)^2 (\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*)^2 \right\} \right] \quad A \cdot (19)$$

式 A・(19)の ε_1^* および ε_2^* のかわりに，それぞれ $\varepsilon_1^*(1-jK_1)$ および $\varepsilon_2^*(1-jK_2)$（ただし $K = \tan\delta \ll 1$），とおき，実数部と虚数部に分解して，誘電体損失を表わす減衰定数 α_b を求めると，

$$\alpha_b \fallingdotseq k_0^3 \left[\frac{1}{\varepsilon_2^*} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2^*}\right) d^2 K_2 + k_0^2 b^2 \left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*}\right)^2 \left\{ 2(\varepsilon_2^* - 1) \left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*} - 1\right) \left(\frac{2\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*} - 1\right) (K_1 - K_2) + \left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*} - 1\right)^2 \varepsilon_2^* K_2 \right\} d^2 \right] \quad A \cdot (20)$$

となる．特に $K_1 = K_2 = \tan\delta_2$ なる場合には

$$\alpha_b \fallingdotseq k_0^3 d^2 \left[\frac{1}{\varepsilon_2^*} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2^*}\right) + k_0^2 b^2 \left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_2^*} - 1\right)^2 \varepsilon_2^* \right] \tan\delta_2 \quad A \cdot (21)$$

となる．

輻射科学研究会資料

誘電体装荷導波管透過形エサキ・ダイオード増幅器の特性

牧本　利夫
豊田　幸弘
川崎　陽一
(大阪大学　基礎工学部)

昭和42年5月26日
(於住友電気工業株式会社)

まえがき

誘電体装荷導波管歪過形エサキ・ダイオード増幅器の実験は前に報告した[1]。ここでは，実験結果と計算との比較検討をおこなった。その結果を報告する。

1) 歪過形エサキ・ダイオード増幅器の等価回路の解析

誘電体装荷導波管歪過形エサキ・ダイオード増幅器は図1に示す。

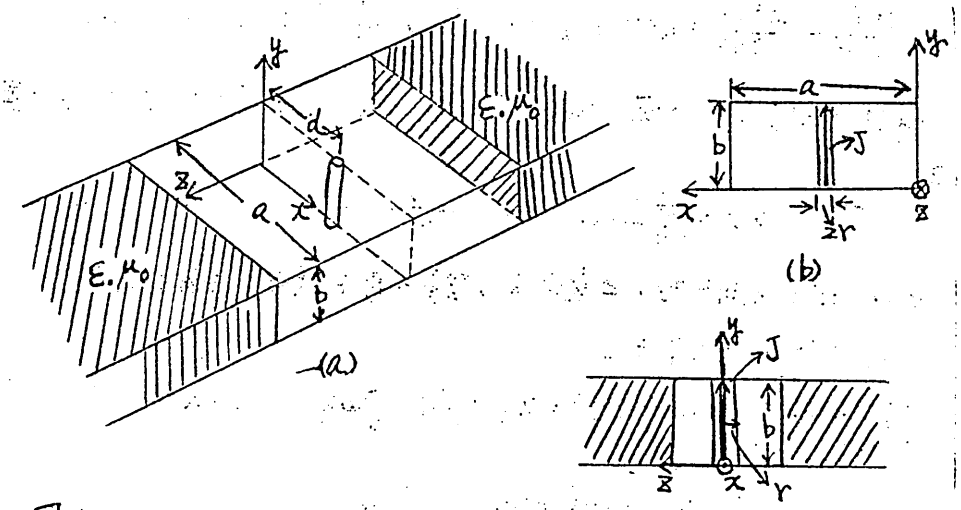


図1

エサキ・ダイオードは遮断導波管内にマウントし，両側は誘電体装荷導波管が接続してある。これらの構造については4)で詳細に説明する。

歪過形エサキ・ダイオード増幅器を次の方法で解析する。図1の導波管の横幅をa，高さをb，こんだけ残して他はすべて誘電率ε，透磁率μ₀なる誘電体を装荷する。エサキ・ダイオードを半径rのポストで近似し，2人の中心線上，側壁からの距離dの位置にあるとする。誘電体のつまっている部分ではε，μ₀，波が伝搬し，エサキ・ダイオードのマウントしてあるところは遮断導波管である。d≫rと考え座標軸は図1のように取る。

まず，ポストに一様な電流Jが流れているとする。この電流をポスト中

心を流れるFilamentary Current $J\delta(z)\delta(x-d)$ で近似する。この Filamentary Current によって誘起される電界を考える。電流および導波管は y 方向に変化しない。したがって，電界は x と z の関数であり y 方向成分しかないと考えられる。電界の y 方向成分を $E_y(x,z)$ と書くと，$E_y(x,z)$ と J の関係は次のようになる。[2]

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+k^2E_y=j\omega\mu_0 J\delta(x-d)\delta(z) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

E_y は $x=a$, 0 にて零だから，Fourier Series を使うと次のように書ける。

$$E_y(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{E}_n(z)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$\mathcal{E}_n(z)$ は z 方向に沿って変化する電界の形を決める関数である。

(2)式を(1)式に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}+k^2\right)\mathcal{E}_n(z)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=j\omega\mu_0 J\delta(x-d)\delta(z) \quad \cdots (3)$$

$\int_0^a \cdots \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$ を上式に Operate すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}+k^2\right)\mathcal{E}_n(z)\frac{a}{2}=j\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\delta(z) \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

$\Gamma_n=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2-k^2}$ とおくと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\Gamma_n^2\right)\mathcal{E}_n(z)\frac{a}{2}=j\omega\mu_0 J\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\delta(z) \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

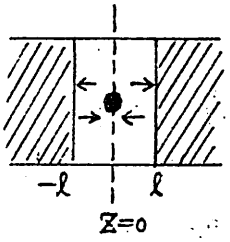


図2

図2で，電磁波は不連続部分で反射されるので，遮断導波管内では両方向に伝搬する波である。これから，$\mathcal{E}_n(z)$ は次のように置くことができる。

$$E_n(z)=\begin{cases} a_n e^{-\Gamma_n z}+b_n e^{\Gamma_n z} & z\geq 0 \\ c_n e^{-\Gamma_n z}+d_n e^{\Gamma_n z} & z\leq 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (6)$$

系は左右対称なので，

$$\left.\begin{aligned} a_n &= d_n \\ c_n &= b_n \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7)$$

となる。これは $z=0$ で電界の連続性を満たしている。

(5)式の両辺に $\int_{-0}^{+0} dz$ で Operate する。E_y は $z=0$ で連続，ゆえに $E_n(z)$ も $z=0$ で連続である。したがって，(5)式の左辺の Γ_n^2 の項は零となる。

$$\therefore \left.\frac{\partial E_n(z)}{\partial z}\right|_{-0}^{+0} \frac{a}{2} = j\omega\mu_0 J \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\left.\begin{aligned} z\geq 0 \quad & \lim_{z\to 0} \frac{\partial E_n(z)}{\partial z} = -a_n\Gamma_n + b_n\Gamma_n \\ z\leq 0 \quad & \lim_{z\to 0} \frac{\partial E_n(z)}{\partial z} = -b_n\Gamma_n + a_n\Gamma_n \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\therefore \left.\frac{\partial E_n(z)}{\partial z}\right|_{-0}^{+0} = -2(a_n-b_n)\Gamma_n \quad \cdots\cdots (10)$$

(10)式を(8)式に代入すると

$$-2(a_n-b_n)\Gamma_n = j\omega\mu_0 J \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\frac{2}{a}$$

$$(a_n-b_n) = -\frac{j\omega\mu_0 J}{a\Gamma_n}\sin\frac{n\pi d}{a} \quad \cdots\cdots (11)$$

これは磁界の連続条件と同値である。

また，$z=\pm l$ に2波は反射するが，不連続部分は電流Jに対して対称なので反射係数は等しく，不連続面の各部分に対し一様である。

n モードの不連続での反射係数を ρ_n とおく。(6)式より

$$E_n(\pm l) = a_n e^{-\Gamma_n l} + b_n e^{\Gamma_n l} = a_n e^{-\Gamma_n l}(1+\rho_n)$$

$$\rho_n = \frac{b_n e^{\Gamma_n l}}{a_n e^{-\Gamma_n l}} = \frac{b_n}{a_n} e^{2\Gamma_n l} \quad \cdots\cdots (12)$$

(11)式(12)式より a_n, b_n を ρ_n を使って表わすと

$$a_n = \frac{-j\omega\mu_0 J}{(1-\rho_n e^{-2\Gamma_n l})a\Gamma_n} \sin\frac{n\pi d}{a} \quad \cdots\cdots (13)$$

$$b_n = \frac{-j\omega\mu_0 J \rho_n e^{-2\Gamma_n l}}{(1-\rho_n e^{-2\Gamma_n l})a\Gamma_n} \sin\frac{n\pi d}{a} \quad \cdots\cdots (14)$$

(13)式，(14)式を(6)式の $z \geq 0$ の項式に代入すると

$$E_n(z) = \frac{-j\omega\mu_0 J}{(1-\rho_n e^{-2\Gamma_n l})a\Gamma_n} \sin\frac{n\pi d}{a} e^{-\Gamma_n z}$$

$$+ \frac{-j\omega\mu_0 J \rho_n e^{-2\Gamma_n l}}{(1-\rho_n e^{-2\Gamma_n l})a\Gamma_n} \sin\frac{n\pi d}{a} \cdot e^{-\Gamma_n z}$$

$$= \frac{-j\omega\mu_0 J}{(1-\rho_n e^{-2\Gamma_n l})a\Gamma_n} \sin\frac{n\pi d}{a} \left(e^{-\Gamma_n z} + \rho_n e^{-2\Gamma_n l} e^{\Gamma_n z}\right) \quad \cdots (15)$$

となる。これを(2)式へ代入すると，$z \geq 0$ に対して

$$E_y(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j\omega\mu_0 J}{(1-\rho_n e^{-2\Gamma_n l})a\Gamma_n} \sin\frac{n\pi d}{a}$$

$$\times \left(e^{-\Gamma_n z} + \rho_n e^{-2\Gamma_n l} e^{\Gamma_n z}\right) \sin\frac{n\pi d}{a} \quad \cdots\cdots (16)$$

となる。

ここで，$z=0$，$x=d+r$ において，導波管の底を基準にした上面の電位を V とし，これがポストにかかる電圧とする。($d \gg r$ を仮定している)

$$V = -\int_0^b E_y(d+r, 0)\,dy = -b\,E_y(d+r, 0)$$

$$= -b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu_0 J}{(1-\rho_n e^{-2\Gamma_n l})a\Gamma_n} \sin\frac{n\pi d}{a} (1+\rho_n e^{-2\Gamma_n l}) \sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\}$$

$$\cdots\cdots (17)$$

したがって，電流 J に対する導波管のインピーダンス，すなわちテラヘルツ・ダイオードから導波管側を見た場合のインピーダンスを Z とすると

$$Z_1 = \frac{V}{J} = b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\mu_0}{(1-\rho_n e^{-2\Gamma_n l})a\Gamma_n} \sin\frac{n\pi d}{a}\left(1+\rho_n e^{-2\Gamma_n l}\right) \times \sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\} \quad (18)$$

となる。

ところで、ρ_nは図3の様な不連続部分の反射係数である。

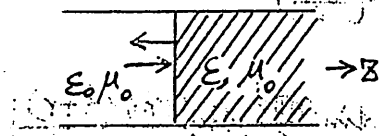


図3

この不連続部分に$A_n \sin\frac{n\pi z}{a} e^{-\Gamma_n z}$なるTE$_{n0}$波が入射した場合を考える。

境界の左右の第n次モードに対する特性インピーダンスとして次のものを取る。(EとHで定義したもの)

$$z < l \qquad Z_n = \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma_n} \quad (19)$$

$$z > l \qquad Z_n' = \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma_n'} \quad (20)$$

ただし

$$\Gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0} \quad (21)$$

$$\Gamma_n' = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon} \quad (22)$$

こうすると、伝送線路の理論よりZ=lにおける反射係数は

$$\rho_n = \frac{Z_n' - Z_n}{Z_n' + Z_n} = \frac{\Gamma_n - \Gamma_n'}{\Gamma_n + \Gamma_n'} \quad (23)$$

となる。

ε_0, μ_0の部分はすべてのモードがカットオフ、ε, μ_0の部分に対してはTE_{10}波だけ伝搬するものと考えている。したがって、Γ_n, Γ_n'に対してはΓだけが虚数となり、他はすべて実数である。また、Z_n, Z_n'ではZ_1

だけが実数で $n \geq 2$ に対しては虚数となる。

そこで

$$\Gamma_1' = j\beta' = j\sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \qquad \cdots\cdots(24)$$

とおく。

以上を使って(18)式を書き直すと次のようになる。

$$Z = \frac{j\omega\mu_0 b(1+\rho_1 e^{-2\Gamma_1 l})}{(1-\rho_1 e^{-2\Gamma_1 l})a\Gamma_1}\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)$$

$$+ j\omega\mu_0 \frac{b}{a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\rho_n e^{-2\Gamma_n l})}{(1-\rho_n e^{-2\Gamma_n l})\Gamma_n}\sin\frac{n\pi d}{a}\sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\}$$

$$= Z_1\frac{b}{a}\frac{\Gamma_1 + j\beta'\tanh(\Gamma_1 l)}{j\beta' + \Gamma_1\tanh(\Gamma_1 l)}\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)$$

$$+ j\omega\mu_0\frac{b}{a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Gamma_n}\frac{\Gamma_n + \Gamma_n'\tanh(\Gamma_n l)}{\Gamma_n' + \Gamma_n\tanh(\Gamma_n l)}\sin\frac{n\pi d}{a}\sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\}$$

$$\cdots\cdots(25)$$

となる。

これで，エサキ・ダイオードから，導波管を見た場合のインピーダンスが求まった。さて，次に基本モード TE_{10} 波に対する系の等価回路を図4のように仮定する。

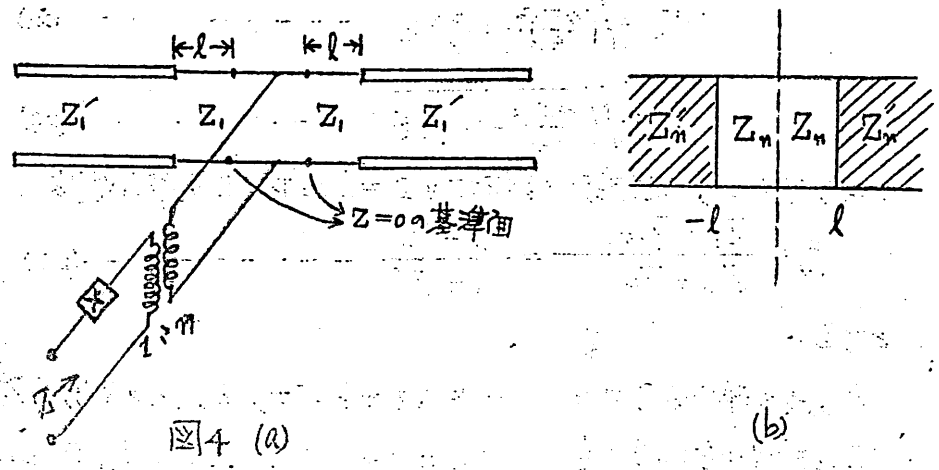


図4 (a) (b)

図4(b)のような導波管で，$z=0$ から左右どちらか一方を見た TE_{n0} に対する電磁界より定義したインピーダンス W_n は次のようになる。

$$W_n = Z_n \frac{Z_n' + Z_n \tanh(\Gamma_n l)}{Z_n + Z_n' \tanh(\Gamma_n l)} = Z_n \frac{\Gamma_n + \Gamma_n' \tanh(\Gamma_n l)}{\Gamma_n' + \Gamma_n \tanh(\Gamma_n l)} \quad \cdots\cdots (26)$$

TE_{10} 波に対しては

$$W_1 = Z_1 \frac{Z_1' + Z_1 \tanh(\Gamma_1 l)}{Z_1 + Z_1' \tanh(\Gamma_1 l)} = Z_1 \frac{\Gamma_1 + \Gamma_1' \tanh(\Gamma_1 l)}{\Gamma_1' + \Gamma_1 \tanh(\Gamma_1 l)} \quad \cdots\cdots (27)$$

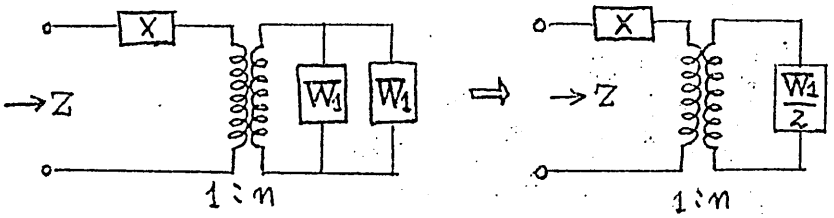


図5　(a)　(b)

図4(a)を W_1 を使って書き直すと，図5の等価回路を得る。

(25)式の第2項を jX とおくと

$$Z = Z_1 \frac{b}{a} \frac{\Gamma_1 + j\beta' \tanh(\Gamma_1 l)}{j\beta' + \Gamma_1 \tanh(\Gamma_1 l)} \sin^2 \frac{\pi d}{a} + jX$$

$$= \frac{b}{a} \sin^2 \frac{\pi d}{a} \cdot W_1 + jX \quad \cdots\cdots (28)$$

図5(b)より

$$Z = \frac{1}{n^2} \frac{W_1}{2} + jX \quad \cdots\cdots (29)$$

(29)式と(28)式と比較して

$$\therefore n^2 = \frac{a}{2b} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi d}{a} \quad \cdots\cdots (30)$$

を得る。

つぎに，W_1 は

$$W_1' = \frac{W_1}{2n^2} = Z_1 \frac{\Gamma_1 + \Gamma_1' \tanh(\Gamma_1 l)}{\Gamma_1' + \Gamma_1 \tanh(\Gamma_1 l)} \frac{b}{a} \sin^2 \frac{\pi d}{a} \quad \cdots\cdots (31)$$

となる。

$$X = j\omega\mu_0 \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \frac{\Gamma_n + \Gamma_n' \tanh(\Gamma_n \ell)}{\Gamma_n' + \Gamma_n \tanh(\Gamma_n \ell)} \sin\frac{n\pi d}{a} \sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\}$$

$$\fallingdotseq j\omega\mu_0 \frac{b}{a} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_n} \frac{(\Gamma_n - \Gamma_n')\{1 - \tanh(\Gamma_n \ell)\}}{\Gamma_n' + \Gamma_n \tanh(\Gamma_n \ell)} \sin\frac{n\pi d}{a} \right.$$

$$\left. \times \sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\} + \frac{a}{2\pi} \ln\left\{\frac{2a}{\pi r} \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right)\right\} - \frac{a}{\pi} \sin^2\frac{\pi d}{a} \right] \quad \cdots\cdots (32)$$

(32)式は高次モードによって生じるもので，エサキ・ダイオードに直列に はいり，図6に示す。

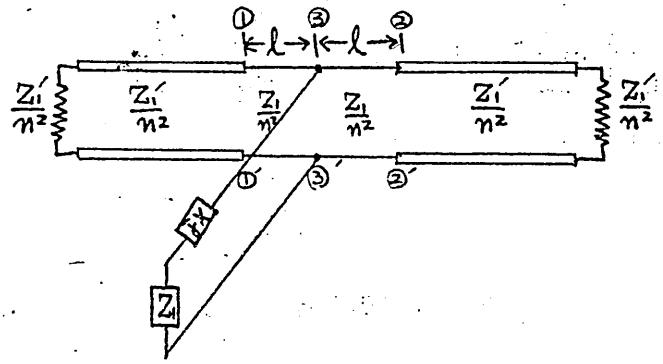


図 6

$$Z_{01}' = \frac{Z_1'}{n^2} = 120\pi \left(\frac{b}{\lambda}\right)\left(\frac{2\lambda_g'}{\lambda}\right) \sin^2\frac{\pi d}{a} \quad \cdots\cdots (33)$$

$$\lambda_g' = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_s - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

2) 増幅器の透過利得と反射利得

図6に示す誘電体装荷導波管型エサキ・ダイオード増幅器の等価回路を図7に示すように書き直す。

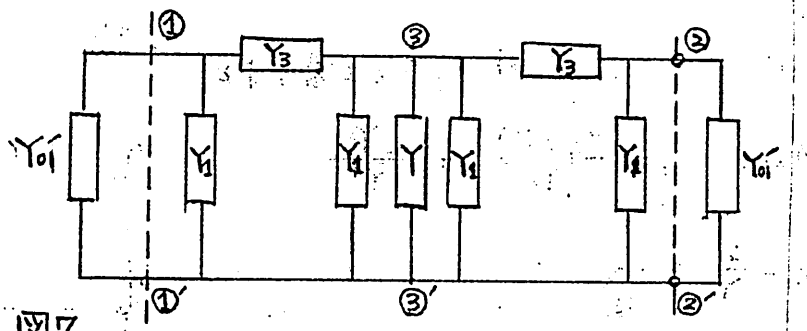


図7

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= n^2 Y_0 \frac{\cosh \Gamma_1 l - 1}{\sinh \Gamma_1 l} \\ Y_3 &= n^2 Y_0 \operatorname{cosech} \Gamma_1 l \\ Y_0 &= -j \frac{\Gamma_1}{\omega \mu_0} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (34)$$

図7の③−③′端子のYはエサキ・ダイオードのアドミタンスで図8に示す。

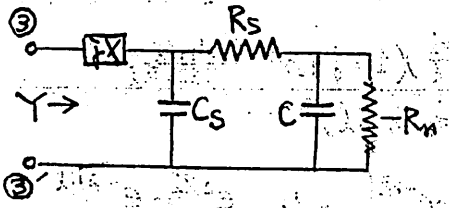


図8

$$Y = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + j \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} = U + jV \quad \cdots\cdots (35)$$

ただし

$$\alpha = 1 + (\omega C R_n)^2 + \omega^2 C C_S R_n^2$$

$$\beta = \omega C_s R_s \left\{1+(\omega C R_n)^2\right\} - \omega C_s R_n$$

$$\gamma = R_s\left\{1+(\omega C R_n)^2\right\} - R_n - X\left[\omega C_s R_s\left\{1+(\omega C R_n)^2\right\} - \omega C_s R_n\right]$$

$$\delta = X\left[\left\{1+(\omega C R_n)^2+\omega^2 C C_s R_n^2\right] - \omega C R_n^2\right.$$

となる。

図7のアドミタンスをFマトリックスで表わすと

$$\left.\begin{aligned} A = D &= 1+\frac{Y_A+2Y_1}{Y_3}+\frac{Y_1 Y_A}{Y_3^2} \\ B &= \frac{2}{Y_3}+\frac{Y_A}{Y_3^2} \\ C &= 2Y_1+Y_A+\frac{2(Y_1Y_A+Y_1^2)}{Y_3}+\frac{Y_1^2 Y_A}{Y_3^2} \\ Y_A &= Y+2Y_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (36)$$

となる。(36)式のA, B, C, Dを求めるに, (34)式, (35)式を(36)式に代入すると

$$A=D=1+\frac{U+jV-jZn^2Y_0\frac{\cosh\Gamma_1 l-1}{\sinh\Gamma_1 l}}{-jn^2Y_0\operatorname{cosech}\Gamma_1 l}+\frac{-jZn^2Y_0\frac{\operatorname{cosech}\Gamma_1 l-1}{\sinh\Gamma_1 l}}{-jn^2Y_0\operatorname{cosech}\Gamma_1 l}$$

$$+\frac{(U+jV-jZn^2Y_0\frac{\cosh\Gamma_1 l-1}{\sinh\Gamma_1 l})(1-jY_0n^2\frac{\cosh\Gamma_1 l-1}{\sinh\Gamma_1 l})}{(-jn^2Y_0\operatorname{cosech}\Gamma_1 l)^2}$$

$$=\frac{e^{2\Gamma_1 l}+e^{-2\Gamma_1 l}}{2}-\frac{V}{Y_0n^2}\frac{e^{2\Gamma_1 l}-e^{-2\Gamma_1 l}}{4}+j\frac{U}{Y_0n^2}\frac{e^{2\Gamma_1 l}-e^{-2\Gamma_1 l}}{4} \quad \cdots\cdots (37)$$

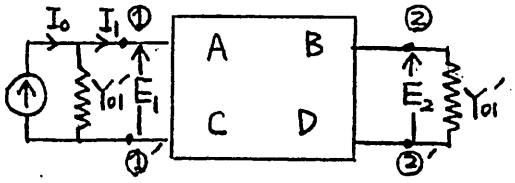
$$B=-\frac{U}{Y_0^2n^4}\left(\frac{e^{2\Gamma_1 l}+e^{-2\Gamma_1 l}-2}{4}\right)+j\left\{\frac{2}{Y_0n^2}\frac{e^{2\Gamma_1 l}-e^{-2\Gamma_1 l}}{4}-\frac{V}{Y_0^2n^4}\left(\frac{e^{\Gamma_1 l}-e^{-\Gamma_1 l}}{2}\right)^2\right\}$$

$$\cdots (38)$$

$$C=U\left(\frac{e^{\Gamma_1 l}+e^{-\Gamma_1 l}}{2}\right)^2+j\left[V\left(\frac{e^{\Gamma_1 l}+e^{-\Gamma_1 l}}{2}\right)^2-Y_0n^2\left(\frac{e^{2\Gamma_1 l}-e^{-2\Gamma_1 l}}{2}\right)\right] \quad \cdots (39)$$

以上で，A，B，C，Dが求まった。

図7から



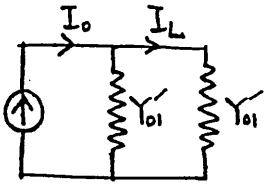


図8　(a)　　(b)

$$Y_{01}' = n^2 Y_1'$$

となる。

図8(a)において，E_1，I_1とE_2，I_2との関係を求めると

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

ここで，$I_2 = E_2 Y_{01}'$とすると

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_2 Y_{01}' \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

となる。

図8(a)の①-①'端子より右側を見た入力アドミタンスは

$$Y_{in} = \frac{I_1}{E_1} = \frac{C + D Y_1' n^2}{A + B Y_1' n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

となる。

~~途~~過電力利得G_{P1}は

$$G_{P1} = \left| \frac{I_2}{I_L} \right|^2 = \frac{4}{\left| A + B Y_1' n^2 + \frac{C}{Y_1' n^2} + D \right|^2} \quad \cdots\cdots\cdots (43)$$

となり，(43)式に(37)式～(39)式を代入するとG_{P1}が求まる。

反射電力利得G_{P_2}は図8aの①-①'端子から左へ反射する反射係数Γは

$$\Gamma = \frac{Y_1' n^2 - Y_{in}}{Y_1' n^2 + Y_{in}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (44)$$

となる。

(42)式に(37)式～(39)式を代入して、実数、虚数に分けると(45)式となる。

$$Y_{in} = \frac{c + jd}{a + jb} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

ここで、

$$a = \frac{e^{2\pi jl} + e^{-2\pi jl}}{2} - \frac{V}{Y_0 n^2}\frac{e^{2\pi jl} - e^{-2\pi jl}}{4} + Y_1' n^2 \left\{ -\frac{U}{Y_0^2 n^4}\left(\frac{e^{2\pi jl} + e^{-2\pi jl} - 2}{4}\right)\right\}$$

$$b = \frac{U}{Y_0 n^2}\frac{e^{2\pi jl} - e^{-2\pi jl}}{4} + Y_1' n^2 \left\{ \frac{2}{Y_0 n^2}\frac{e^{2\pi jl} - e^{-2\pi jl}}{4} - \frac{V}{Y_0^2 n^4}\left(\frac{e^{\pi jl} - e^{-\pi jl}}{2}\right)^2\right\} \qquad \cdots (46)$$

$$c = U\left(\frac{e^{\pi jl} + e^{-\pi jl}}{2}\right)^2 + Y_1' n^2 \left(\frac{e^{2\pi jl} + e^{-2\pi jl}}{2} - \frac{V}{Y_0 n^2}\frac{e^{2\pi jl} - e^{-2\pi jl}}{4}\right)$$

$$d = V\left(\frac{e^{\pi jl} + e^{-\pi jl}}{2}\right)^2 - Y_0 n^2 \left(\frac{e^{2\pi jl} - e^{-2\pi jl}}{2}\right) + Y_1' n^2 \left(\frac{U}{Y_0 n^2}\frac{e^{2\pi jl} - e^{-2\pi jl}}{4}\right)$$

となる。

(46)式を(45)式に代入してG_{P_2}を求めると

$$G_{P_2} = |\Gamma|^2 = \frac{(Y_1' n^2 a - c)^2 + (Y_1' n^2 b - d)^2}{(Y_1' n^2 a + c)^2 + (Y_1' n^2 b + d)^2} \qquad \cdots\cdots (47)$$

となる。

3) 増幅回路の安定条件

誘電体装荷導波管金属形エサキ・ダイオード増幅器の安定条件は図6の R_m を除いた点から，導波管側（金属形は左右を見る）を見た $Y(\omega)$ を求めれば良い。この時の等価回路は図9に示す。

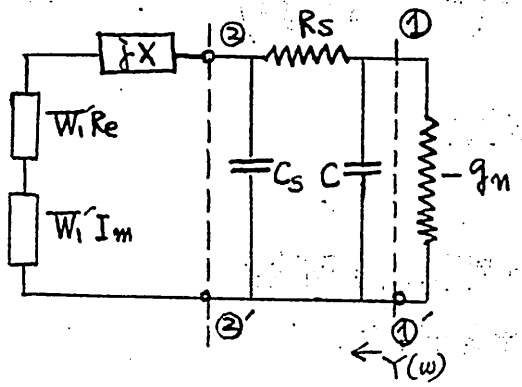


図9

図9の安定条件の W_1Re，W_1Im は(31)式から求められる。(31)式は図6の③-③'端子の Y を取り除いて，左右を見たものである。

$$W_1' = \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma_1}\left[\frac{\Gamma_1 + \Gamma_1' \tanh(\Gamma_1 l)}{\Gamma_1' + \Gamma_1 \tanh(\Gamma_1 l)} \cdot \frac{b}{a} \sin^2\frac{\pi d}{a}\right] \cdots\cdots\cdots (48)$$

$$\Gamma_1' = j\beta' = j\sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_s - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$\Gamma_1 = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$$

(48)式の括弧の中を実数，虚数に分けると

$$= \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma_1}\left[\frac{\{\Gamma_1^2+\beta'^2\}\tanh(\Gamma_1 l) + j\beta'\Gamma_1\{\tanh^2(\Gamma_1 l) - 1\}}{(\beta')^2 + \{\Gamma_1 \tanh(\Gamma_1 l)\}^2} \frac{b}{a} \sin^2\frac{\pi d}{a}\right]$$

$$= 120\pi\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\Gamma_1}\left[\frac{\beta'\Gamma_1\{1 - \tanh^2(\Gamma_1 l)\}}{(\beta')^2 + \{\Gamma_1 \tanh(\Gamma_1 l)\}^2} \frac{b}{a} \sin^2\frac{\pi d}{a}\right]$$

$$+j120\pi\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\frac{1}{\Gamma_1}\left[\frac{\{\Gamma_1^2+\beta'^2\}\tanh(\Gamma_1 l)}{(\beta')^2+\{\Gamma_1\tanh(\Gamma_1 l)\}^2}\cdot\frac{b}{a}\sin^2\frac{\pi d}{a}\right] \quad (48)$$

(48)式の実数部が $W_1'Re$，虚数部が $W_1'Im$ である。図9の $Y(\omega)$ を求めると

$$Y(\omega)=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+j\left(\omega C+\frac{\beta\gamma-\delta\alpha}{\gamma^2+\delta^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots (50)$$

ここで

$$\alpha = 1-\omega C_s(X+W_1'Im)$$

$$\beta = \omega C_s W_1'Re$$

$$\gamma = R_s\{1-\omega C_s(X+W_1'Im)\}+W_1'Re$$

$$\delta = R_s\omega C_s W_1'Re + X + W_1'Im$$

となる。

(50)式の $Y(\omega)$ の値を $|G_m|$ で規格化してスミス・チャートにプロットし軌跡が1を左に見ながら包まなければ増幅器は安定になる。このような判別法ではエサキ・ダイオードの障壁容量が変われば，いちいち，アドミタンス周波数特性を求めなければならない欠点がある。そこで，図9の②-②'端子から，左側および右側の実数，虚数を求めて，安定条件を判別した方が簡単であり，また，このような増幅器にはどのような値のエサキ・ダイオードを用いたら良いかすぐ分かる。図表を用いて判別する方法は図14に示してある。

4) 試作増幅器の構造と測定回路

誘電体装荷導波管変形エサキ・ダイオード増幅器の構造は図10に示す

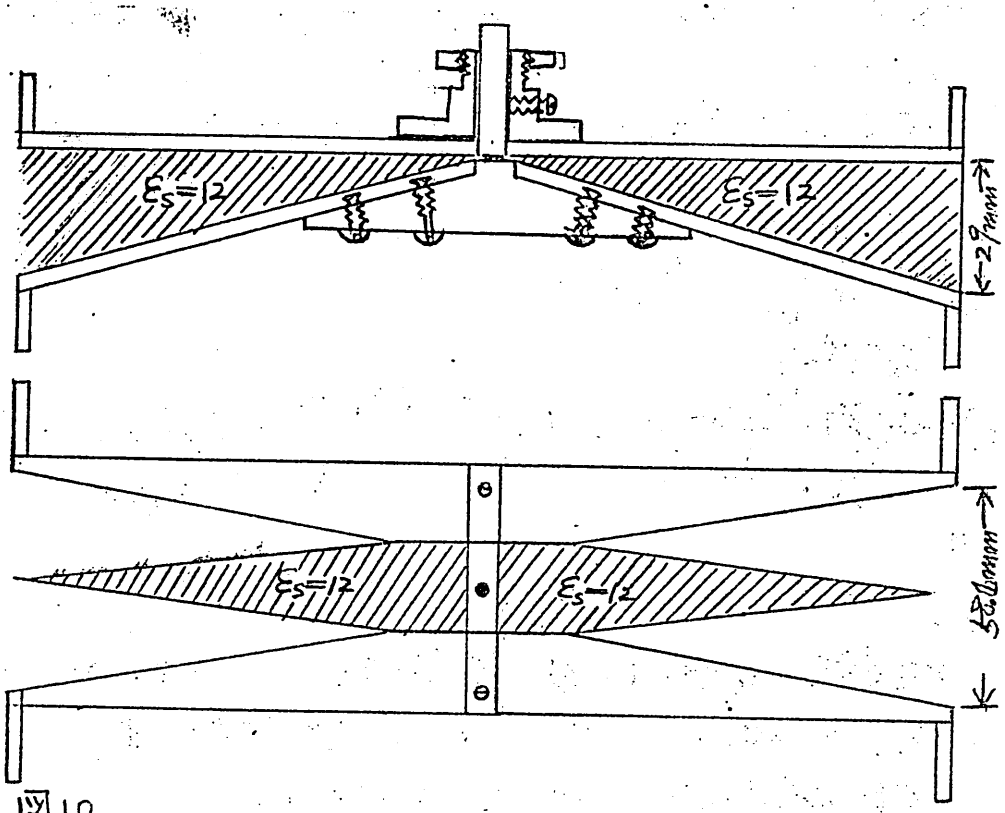


図10

エサキ・ダイオードをマウントしているところは遮断導波管で、遮断導波管の横幅は最大20mmまで広げることができ、Z軸方向は5mmから9mmまでで、5mm以下と9mm以上では発振を起こすために増幅器として使用することができない。

誘電体を装荷した理由は4GC導波管(横幅58.1mm)と遮断導波管(横幅20mm)と直接く合したのでは接合部分での不連続が大きくなり、結合が弱くなって発振を起こす。結合を強くするにはループを用いる方法があるが大きな結合が望めないので、誘電体を用いた。

図10に示すように導波管の横幅を58.1(mm)から20(mm)までせばめて誘電体$\varepsilon_s=12$を装荷した。幅20mmのところの遮断周波数はスキマの

影響を考慮に入れて2.4Gcである。このようにすれば，電界は誘電体に集中し遮断導波管との結合も増加することになる。導波管の高さは29mmから1mmまで徐々に変化してある。1mmにした理由は回路の安定条件を満足させるために選んだ。誘電体の横幅をテーパーにしたのは導波管と整合とるためである。

誘電体装荷導波管変換形エサキ・ダイオード増幅器の測定回路は図11に

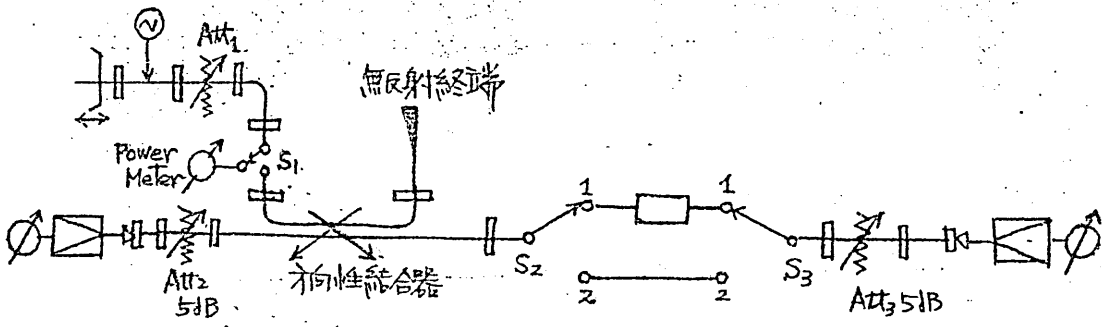


図11

示す。

抵抗減衰器 Att_2, Att_3, (5dB) は増幅器の発振を止めるために挿入した。この時，直視装置でエサキ・ダイオードのI－V特性を見て発振しないところで抵抗減衰器を合せ，この時の値が5dBであった。

切り換えスイッチ S_1 は増幅回路系とPower Meterとに切り換えるために用いたものである。Power Meterは増幅器の入力に－60dBm一定のPowerを与えるために，このPower Meterで観測した。

測定回路の左右にクリスタル・マウントを接続したのは反射利得と透過利得を測定するためであり，切り換えスイッチ S_2, S_3 の1と2に切り換えて，これらの比較から増幅特性を求めた。

5) 数値計算と実験結果

前節で述べた結果式を用いて、ソニー製品1T1102エサキ・ダイオード $C=1.7(PF)$, $C_s=0.85(PF)$, $R_s=1.2(\Omega)$, 等価半径 0.3(mm), $a=20(mm)$, $b=1(mm)$, $\varepsilon_s=10$ (実際は $\varepsilon_s=12$ であるがスキマの影響を考慮に入れて), $l=4(mm)$, $l=4.5(mm)$ で増幅特性(透過利得, 反射利得)の計算値と実測値を図12, 13に示す。

増幅器回路の安定条件は上述の値を(50)式に代入して計算すると図14に示すスミス・チャートに描いたアドミタンス周波数軌跡は(1,0)の点を左に見ながら巻んでいるから, 増幅器回路は安定である。このような判別法ではエサキ・ダイオードの障壁容量が変った場合と希望する周波数で増幅させるにはエサキ・ダイオードの定数をいくらのものを選べば良いかすぐには分からない。

そこで, 安定条件と共振周波数とが同時に判別する方法は図9の②-③'端子から左側を見たアドミタンスと右側を見たアドミタンス周波数軌跡を別々に図表にプロットして, これを重ね合せれば直ぐ分かる。これを図15, 14に示す。

$l=2mm$ の時の増幅器回路の安定条件は $-B$ と B が 2360Mc, 2480Mc 3600Mc で交わり, ここで共振を起す。3600Mcでは, $G>-G_m$ で安定条件は満足しているが, 2360Mc の方で, 増幅器は発振する。なぜならば, 2360Mcで共振すると導波管は遮断周波数であるから, 波は伝搬せず, また導波管の特性コンダクタンスは零であるから, 回路は不安定な状態となり発振を起こす。$l=3\sim4.5(mm)$ までは図15に示すように安定条件は満足してある。

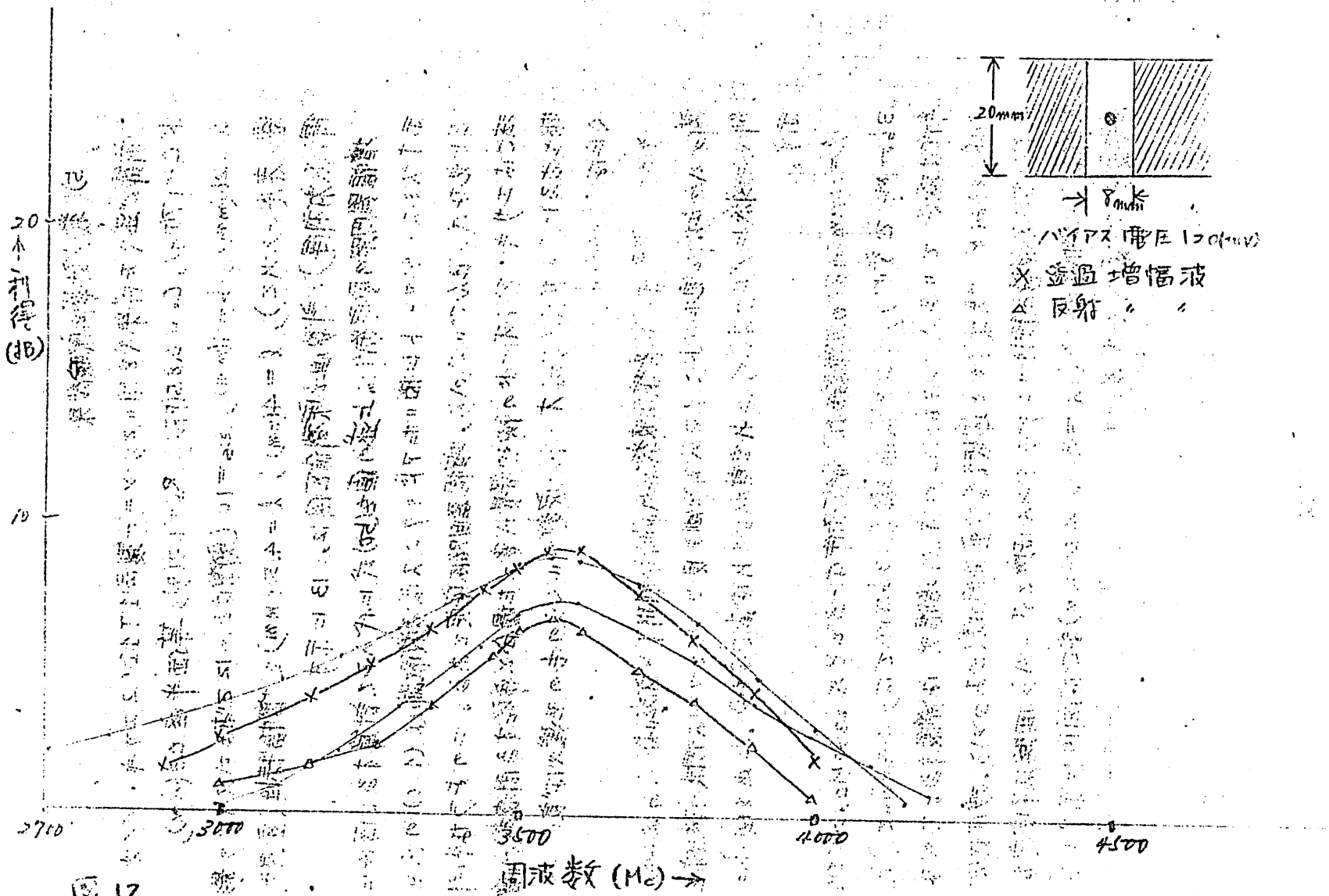

20
10
利得 (dB)
2700
3000
3500
4000
4500
周波数 (Mc) →
20mm
8mm
バイアス電圧 120(mV)
× 透過増幅波
△ 反射 〃 〃

図 12

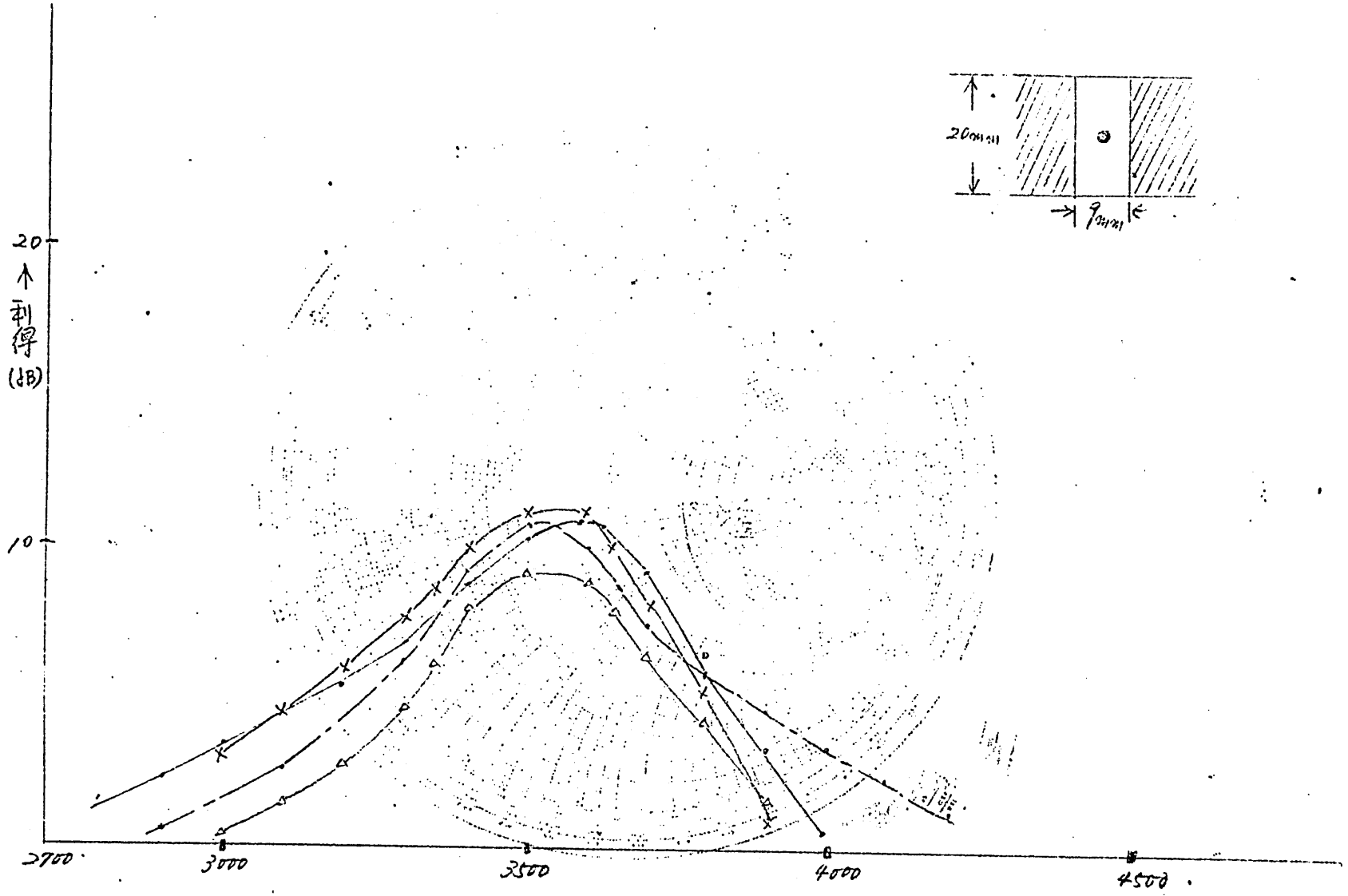


図13

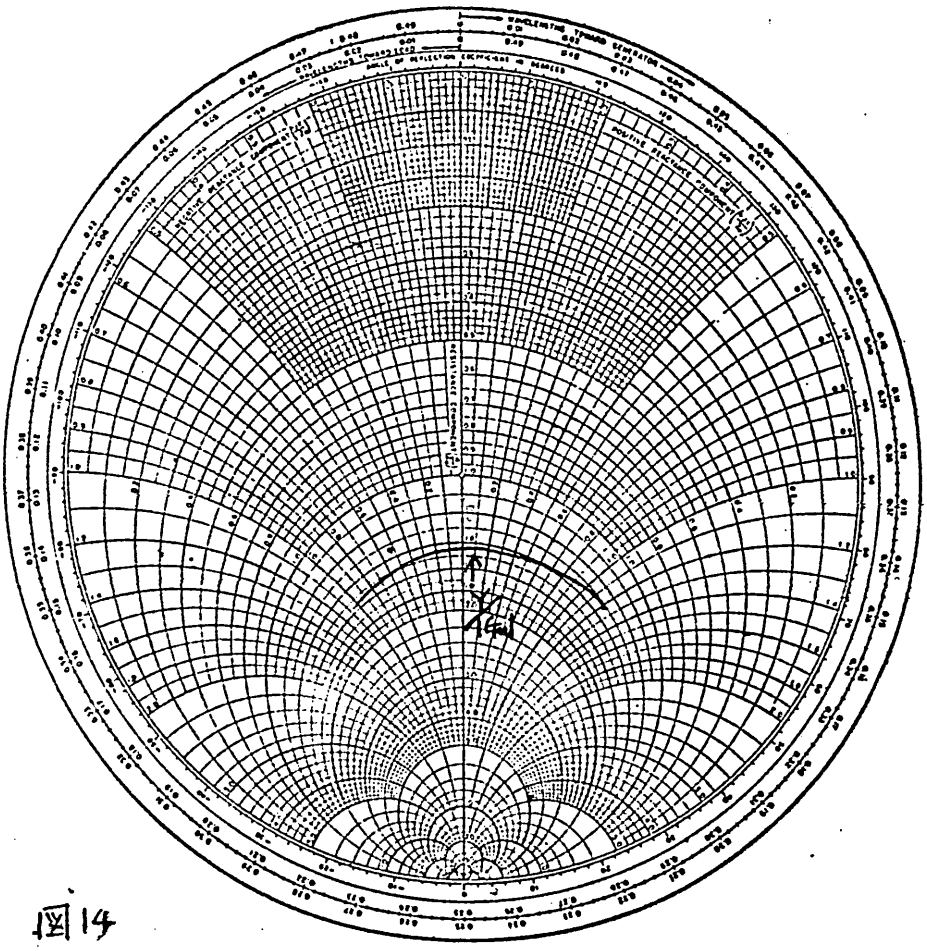
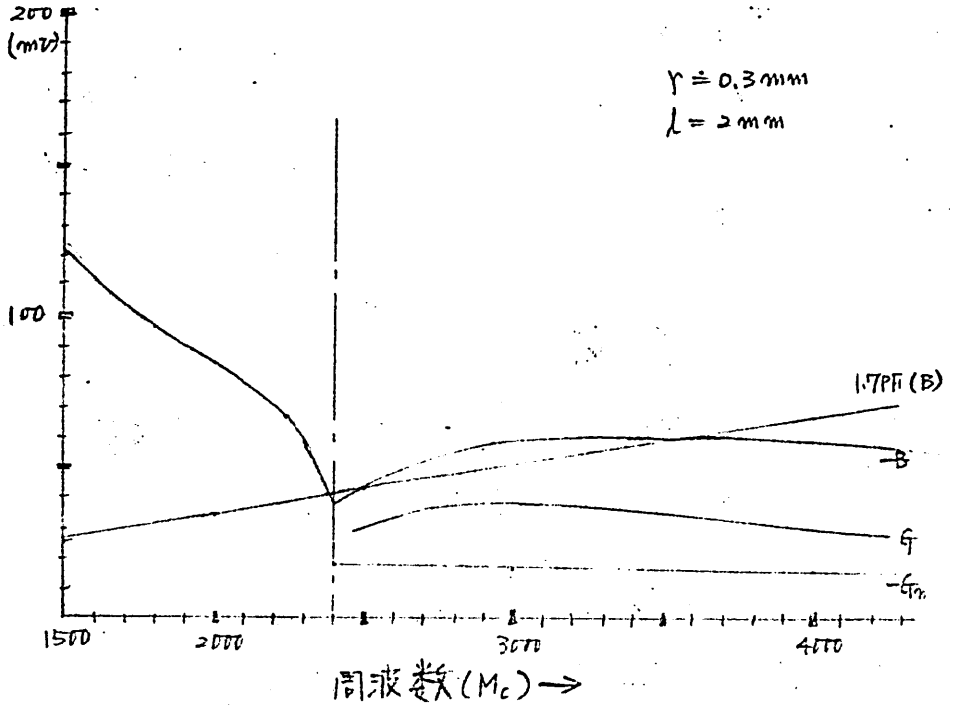


図14


200
(mV)
100
γ ≒ 0.3 mm
l = 2 mm
1.7PF (B)
B
Gr
-Gr
1500
2000
3000
4000
周波数 (Mc) →

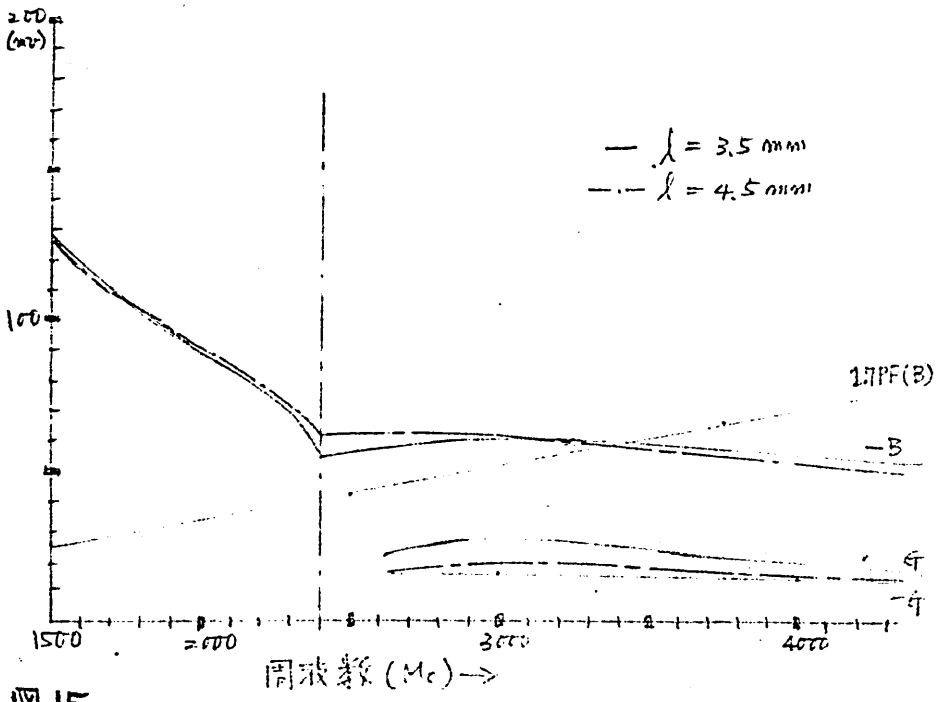

200
(mV)
100
— l = 3.5 mm
— · — l = 4.5 mm
1.7PF(B)
B
Gr
-Gr
1500
2000
3000
4000
周波数 (Mc) →

図 15

結論

本論文では誘電体装荷導波管垂直形エサキ・ダイオード増幅器の等価回路の解析をおこない，このような近似計算したものと実験的にもとめたものと比較し，傾向が良く一致することを示した。

最後に電子計算機のプログラミングに関して協力下った 大阪電気通信大学学生，甲斐 信，吉川 博史君に謝意を表します。尚本計算は本学電子計算機センターでおこなったものである。

文献

1) 牧本 豊田 "導波管垂直形エサキ・ダイオード増幅器" S 39. 11 全国大会 303

2) R.E. Collin "Field Theory of Guided Waves" McGRAW-HILL Book PP 199/120.

輻射科学研究会資料

誘電体多層膜反射板による ファブリ・ペロー共振器

牧本 利夫
（大阪大学基礎工学部）

弓場 芳治
（京都工芸繊維大学）

太田 勲
（姫路工業大学）

1967年 5月 26日

於 住友電工

誘電体多層膜反射板によるファブリ・ペロー共振器

I. まえがき

光学における干渉フィルターと同じ考えに基づいてミリ波帯におけるフィルターとして、誘電体多層膜を使用することが考えられる。そこで、その基礎的な研究として、誘電体多層膜反射板を対向させて構成するファブリペロー共振器のQ値の考察と実験を行った。

ここでは簡単のため、共振周波数における$\frac{1}{4}$波長の奇数倍の厚さをもつ、比誘電率ε、損失角$\tan\delta$、の誘電体板の層と、比誘電率1、無損失の空気の層による多層膜反射板を考え、この反射板で構成されるファブリ・ペロー共振器の共振状態の電磁界分布を、解くことにより、外部Q値・無負荷Q値を分離して求めた。このQ値は、誘電体板のε、$\tan\delta$、枚数、厚さ、空気の層の厚さ、および反射板の間隔によっ

て決定される。

このような理論式に基づいて、損失角が小さく[1]、工作、入手が比較的容易であるパラフィンで多層膜を作製して実験を行い、数十万の高いQ値を測定したので報告する。

II. 共振器の構造と電磁界

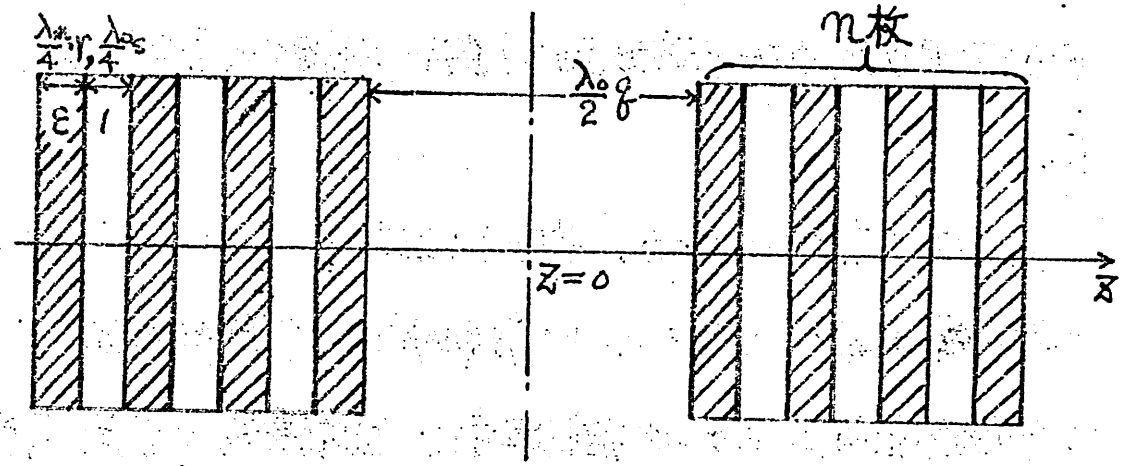


図1. 誘電体多層膜反射板による ファブリ・ペロー共振器の断面図. (比誘電率εの誘電体板n枚と空気の層で、多層膜反射板を構成している)

図1.に示すように、$\frac{\lambda_m}{4}r$ の厚さの誘電体板n枚と、$\frac{\lambda_0}{4}s$ の厚さの空気の層よりなる多層膜反射板を、$\frac{\lambda_0}{2}g$ の距離で対向させた構造をしている。

ここで. λ_m, λ_0 ; 誘電体中および空気中における共振波長.

n, ℓ ; 正の整数

r, s ; 正の奇数　　とする。

この共振器は $z=0$ に関して対称であるので. 電磁界分布を考える時. $z>0$ (x は $z<0$) の領域における解析だけで十分である。

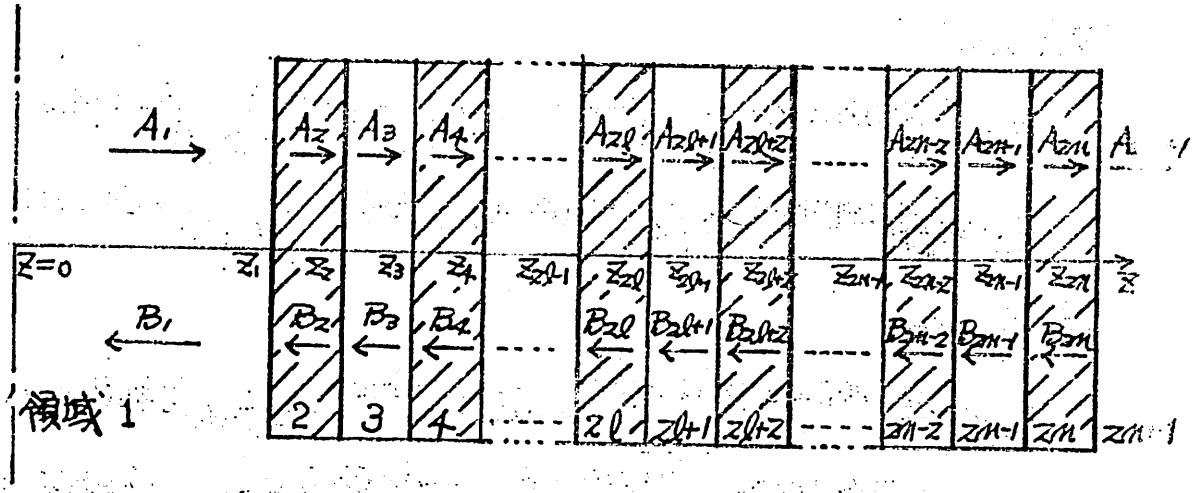


図2. 電波の進行方向.

電波は全て. 平面波であると仮定し. 各領域の電界の振幅を. 図2.に示しているように, A_1, A_2, ….., A_{2n+1}, B_1, B_2, ….., B_{2n} とすれば. 各領域の電磁界は次のように表示することができる。

領域 1.

$$E_1 = A_1 e^{-j\beta_0 z} + B_1 e^{j\beta_0 z}$$

$$H_1 = \frac{1}{\eta}\left\{A_1 e^{-j\beta_0 z} - B_1 e^{j\beta_0 z}\right\}$$

領域 2.

$$E_2 = (j)^{\delta}\left\{(-1)^{\delta} A_2 e^{-j\beta_1 (z-z_1)} + B_2 e^{j\beta_1 (z-z_1)}\right\}$$

$$H_2 = (j)^{\delta}\frac{1}{\eta}\left\{(-1)^{\delta} A_2 e^{-j\beta_1 (z-z_1)} - B_2 e^{j\beta_1 (z-z_1)}\right\}$$

⋮

領域 $2l$

$$E_{2l} = (j)^{\delta+(l-1)(\gamma+s)}\left\{(-1)^{\delta+(l-1)(\gamma+s)} A_{2l} e^{-j\beta_1 (z-z_{2l-1})} + B_{2l} e^{j\beta_1 (z-z_{2l-1})}\right\}$$

$$H_{2l} = (j)^{\delta+(l-1)(\gamma+s)}\frac{1}{\eta}\left\{(-1)^{\delta+(l-1)(\gamma+s)} A_{2l} e^{-j\beta_1 (z-z_{2l-1})} - B_{2l} e^{j\beta_1 (z-z_{2l-1})}\right\}$$

領域 $2l+1$

$$E_{2l+1} = (j)^{\delta+l\gamma+(l-1)s}\left\{(-1)^{\delta+l\gamma+(l-1)s} A_{2l+1} e^{-j\beta_0 (z-z_{2l})} + B_{2l+1} e^{j\beta_0 (z-z_{2l})}\right\}$$

$$H_{2l+1} = (j)^{\delta+l\gamma+(l-1)s}\frac{1}{\eta}\left\{(-1)^{\delta+l\gamma+(l-1)s} A_{2l+1} e^{-j\beta_0 (z-z_{2l})} - B_{2l+1} e^{j\beta_0 (z-z_{2l})}\right\}$$

⋮

領域 $2n$

$$E_{2n} = (j)^{\delta+(n-1)(\gamma+s)}\left\{(-1)^{\delta+(n-1)(\gamma+s)} A_{2n} e^{-j\beta_1 (z-z_{2n-1})} + B_{2n} e^{j\beta_1 (z-z_{2n-1})}\right\}$$

$$H_{2n} = (j)^{\delta+(n-1)(\gamma+s)}\frac{1}{\eta}\left\{(-1)^{\delta+(n-1)(\gamma+s)} A_{2n} e^{-j\beta_1 (z-z_{2n-1})} - B_{2n} e^{j\beta_1 (z-z_{2n-1})}\right\}$$

領域 z_{n+1}

$$E_{z_{n+1}} = (-j)^{\delta+n\gamma+(n-1)s} A_{z_{n+1}} e^{-j\beta_0(z-z_{2n})}$$

$$H_{z_{n+1}} = (-j)^{\delta+n\gamma+(n-1)s} \frac{1}{\zeta} A_{z_{n+1}} e^{-j\beta_0(z-z_{2n})} \qquad (1)$$

ただし，β_0，β_1は空気中および誘電体中での位相定数，ζは空気（真空）の特性アドミタンスとし，空気，誘電体板ともに無損失と仮定している。

また，共振器の中心，すなわち$z=0$に電源があると仮定している。

いま，$z=0$における境界をE（実数）とし，各境界における境界条件より次の連立方程式が成立する。

$z=0$

$$A_1 + B_1 = E$$

$z=z_1$

$$(-1)^{\delta} A_1 + B_1 - (-1)^{\delta} A_2 - B_2 = 0$$

$$(-1)^{\delta} A_1 - B_1 - (-1)^{\delta} \sqrt{\varepsilon} A_2 + \sqrt{\varepsilon} B_2 = 0$$

$z=z_2$

$$(-1)^{\delta+\gamma}A_2 + B_2 - (-1)^{\delta+\gamma}A_3 - B_3 = 0$$

$$(-1)^{\delta+\gamma}\sqrt{\varepsilon}A_2 - \sqrt{\varepsilon}B_2 - (-1)^{\delta+\gamma}A_3 + B_3 = 0$$

$$\vdots$$

$z = z_{2l-1}$

$$(-1)^{\delta+(l-1)(\gamma+s)}A_{2l-1} + B_{2l-1} - (-1)^{\delta+(l-1)(\gamma+s)}A_{2l} - B_{2l} = 0$$

$$(-1)^{\delta+(l-1)(\gamma+s)}A_{2l-1} - B_{2l-1} - (-1)^{\delta+(l-1)(\gamma+s)}\sqrt{\varepsilon}A_{2l} + \sqrt{\varepsilon}B_{2l} = 0$$

$z = z_{2l}$

$$(-1)^{\delta+l\gamma+(l-1)s}A_{2l} + B_{2l} - (-1)^{\delta+l\gamma+(l-1)s}A_{2l+1} - B_{2l+1} = 0$$

$$(-1)^{\delta+l\gamma+(l-1)s}\sqrt{\varepsilon}A_{2l} - \sqrt{\varepsilon}B_{2l} - (-1)^{\delta+l\gamma+(l-1)s}A_{2l+1} + B_{2l+1} = 0$$

$$\vdots$$

$z = z_{2n-1}$

$$(-1)^{\delta+(n-1)(\gamma+s)}A_{2n-1} + B_{2n-1} - (-1)^{\delta+(n-1)(\gamma+s)}A_{2n} - B_{2n} = 0$$

$$(-1)^{\delta+(n-1)(\gamma+s)}A_{2n-1} - B_{2n-1} - (-1)^{\delta+(n-1)(\gamma+s)}\sqrt{\varepsilon}A_{2n} + \sqrt{\varepsilon}B_{2n} = 0$$

$z = z_{2n}$

$$(-1)^{\delta+n\gamma+(n-1)s}A_{2n} + B_{2n} - (-1)^{\delta+n\gamma+(n-1)s}A_{2n+1} = 0$$

$$(-1)^{\delta+n\gamma+(n-1)s}\sqrt{\varepsilon}A_{2n} - \sqrt{\varepsilon}B_{2n} - (-1)^{\delta+n\gamma+(n-1)s}A_{2n+1} = 0 \quad (2)$$

(2)式より．$A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}, B_1, B_2, \cdots, B_{2n}$ は次のような結果になる。

空気よりなる領域（領域 1, 3, ···, 2l+1, ···, 2n+1）

$$A_{2l+1}=\frac{(\sqrt{\varepsilon})^{2n-l}+(\sqrt{\varepsilon})^{l}}{(\varepsilon^{n}+1)-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{n}-1)}E,$$

$$B_{2l+1}=\frac{(\sqrt{\varepsilon})^{2n-l}-(\sqrt{\varepsilon})^{l}}{(\varepsilon^{n}-1)-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{n}+1)}E, \quad (l=0,1,\cdots,n) \qquad (3)$$

誘電体板（比誘電率 ε）の領域（領域 2, 4, ···, 2l, ···2n）

$$A_{2l}=\frac{(\sqrt{\varepsilon})^{2n-l}+(\sqrt{\varepsilon})^{l-1}}{(\varepsilon^{n}+1)-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{n}-1)}E$$

$$B_{2l}=\frac{(\sqrt{\varepsilon})^{2n-l}-(\sqrt{\varepsilon})^{l-1}}{(\varepsilon^{n}-1)-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{n}+1)}E \quad (l=1,2,\cdots,n) \qquad (3)'$$

(3), (3)'を (1)式へ代入して次式を得る。

$$E_{2l+1}\cdot E^{*}_{2l+1}=\frac{E^{2}}{(\varepsilon^{2n}+1)-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{2n}-1)}\left\{(\varepsilon^{2n-l}+\varepsilon^{l})\right.$$

$$\left.-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{2n-l}+\varepsilon^{l})\cos 2\beta_{0}(z-z_{2l})\right\} \qquad (4)$$

$$(l=0,1,\cdots,n)$$

$$E_{2l}\cdot E^{*}_{2l}=\frac{E^{2}}{(\varepsilon^{2n}+1)-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{2n}-1)}\left\{(\varepsilon^{2n-l}+\varepsilon^{l-1})\right.$$

$$\left.-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{2n-l}+\varepsilon^{l-1})\cos 2\beta_{1}(z-z_{2l-1})\right\} \qquad (4)'$$

$$(l=1,2,\cdots,n)$$

Ⅲ. Q値

いま、共振器の軸に垂直な断面積を 1 とすると、共振器内に蓄積されるエネルギー W は、次式のよう

になる。

$$\frac{W}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\sum_{l=0}^{n-1}\int_{z_{2l}}^{z_{2l+1}}E_{z2l+1}\cdot E_{z2l+1}^{*}\,dz+\varepsilon\sum_{l=1}^{n}\int_{z_{2l-1}}^{z_{2l}}E_{zl}\cdot E_{zl}^{*}\,dz\right] \quad (5)$$

(5)式へ(4)，(4)'式を代入すると．

$$W=\frac{\varepsilon_0\lambda_0 E^2}{4\left[(\varepsilon^{2n}+1)-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{2n}-1)\right]}\left[(\varepsilon^{2n}+1)^{\delta}+\left(\frac{\varepsilon^{2n}-1}{\varepsilon-1}-\varepsilon^{n-1}\right)S+\frac{\varepsilon^{2n}-1}{\varepsilon-1}\cdot\sqrt{\varepsilon}\,\gamma\right] \quad (6)$$

となる。

つぎに．共振器外(領域z_{n+1})へ放射される電力P_eは次式で与えられる。

$$P_e=\frac{\varepsilon}{2}E_{zn+1}\cdot E_{zn+1}^{*} \quad (7)$$

(7)式へ．(4)式を$l=n$として代入すると．

$$P_e=\frac{\varepsilon^n E^2}{(\varepsilon^{2n}+1)-(-1)^{\delta}(\varepsilon^{2n}-1)} \quad (8)$$

となる。

いま．誘電体板の損失が十分小さい($\tan\delta\ll 1$)と仮定するならば．前に求めた電磁界をそのまゝ．適用して．誘電体中で消費される電力P_0は次式で計算することができる。

$$P_0=\frac{\omega_0\varepsilon\varepsilon_0\tan\delta}{2}\sum_{l=1}^{n}\int_{z_{2l-1}}^{z_{2l}}E_{zl}\cdot E_{zl}^{*}\,dz \quad (9)$$

ただし、ω_0は共振角周波数である。

(9)式へ(4)'式を代入して計算すると、

$$P_0 = \frac{\omega_0 \sqrt{\varepsilon}\,\varepsilon_0 \lambda_0 \tan\delta \cdot E^2}{8\{(\varepsilon^{2n}+1)-(-1)^{\beta}(\varepsilon^{2n}-1)\}} \frac{\varepsilon^{2n}-1}{\varepsilon-1}\gamma \qquad (10)$$

となる。

この共振器は、両端の多層膜で外部と結合しているが、両多層膜の構造が図1.に示すように、全く同じとするならば、外部Q値、Q_eは次式で定義される。

$$Q_e = \omega_0 \times \frac{W}{2P_e} \qquad (11)$$

つぎに、誘電体板の損失によるQ値を無負荷Q値、Q_0とすると、前と同様に、2組の多層膜の構造が同じであると仮定して、次のように定義される。

$$Q_0 = \omega_0 \times \frac{W}{2P_0} \qquad (12)$$

(11)、(12)式へ、(6)、(8)、(10)式を代入すると、外部Q値Q_eと、無負荷Q値Q_0は、次のように表示される。

$$Q_e = \frac{\pi}{4\varepsilon^n}\left[(\varepsilon^{2n}+1)\beta-(\varepsilon^n+1)+\frac{\varepsilon^{2n}-1}{\varepsilon-1}(\sqrt{\varepsilon}\gamma+s)\right] \qquad (13)$$

$$Q_0 = \frac{1}{\tan\delta}\left[1+\frac{s}{\sqrt{\varepsilon}\gamma}-\frac{\varepsilon-1}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon^n-1)\gamma}+\frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon^{2n}+1)\beta}{\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon^{2n}-1)\gamma}\right] \qquad (14)$$

(13)式より

$$\lim_{n\to\infty} Q_e = \infty \qquad (15)$$

となり，Q_eはn，すなわち誘電体板の枚数を増せばいくらでも大きくなる。また，γ，r，sともに大きいほど大きくなる。

(14)式より，

$$\lim_{n\to\infty} Q_0 = \frac{1}{\tan\delta}\left[1 + \frac{s}{\sqrt{\varepsilon}\,r} + \frac{(\varepsilon-1)\gamma}{\sqrt{\varepsilon}\,r}\right] \qquad (16)$$

となり，枚数nを増せば一定値に近づく。また，$\tan\delta$，r，nは小さく，s，γは大きいほど，Q_0は大きくなる。

Ⅲ. 実験.

i) 誘電体多層膜の設計と作製

$\tan\delta$が小さく，材料の入手，工作が比較的容易であるので，パラフィンを用いて，多層膜を製作した。

まず，パラフィンの複素誘電率を測定して，$\varepsilon = 2.37$ $\tan\delta = 4.1$ という結果を得た。

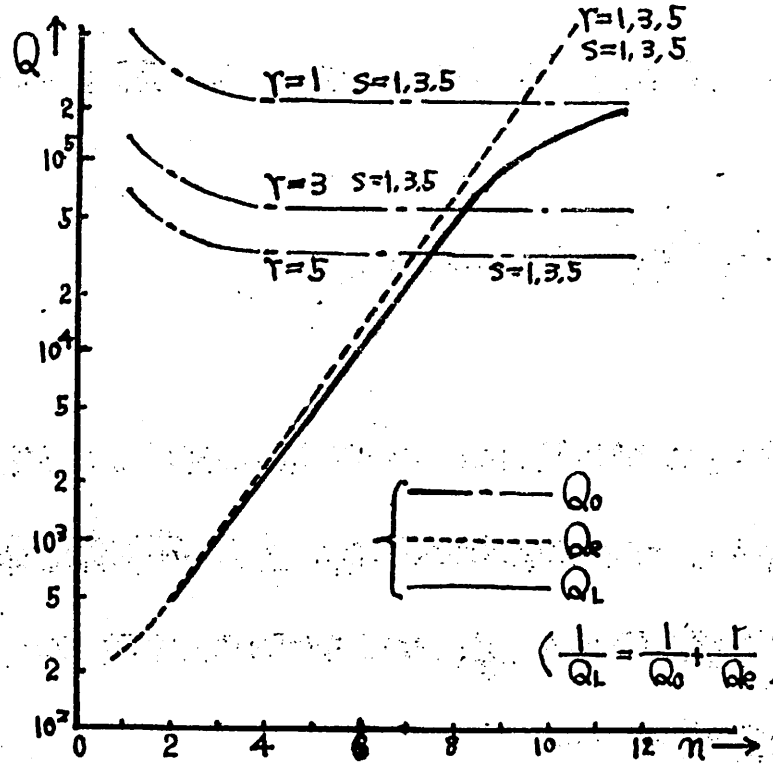


図3. Q_0, Q_e, Q_L の n に対する特性 ($\beta=100$)

($\varepsilon=2.37$, $\tan\delta=4.1\times10^{-4}$)

図3. は. (13), (14)式に. $\varepsilon=2.37$, $\tan\delta=4.1\times10^{-4}$ を代入して. Q_0. Q_e. Q_L の n に対する特性をグラフに示したものである。図3. から. Q値を高めるために. 最も重要なパラメータは r, すなわち誘電体板の厚さである。無負荷Q値 Q_0 を最も大きくするために-, $r=1$, すなわち誘電体板の厚さを $\frac{1}{4}\lambda_m$ にした。パラフィンの厚さを d_z とし, 共振周波数を 70.5GHz とすると.

$$d_z=\frac{1}{4}\lambda_m=\frac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon}}=\frac{4.26}{4\sqrt{2.37}}\fallingdotseq 0.69\,(mm)$$ となり.

一方，空気の層の厚さ d_1 も $s=1$，すなわち，$\frac{1}{4}\lambda_0$ とすると，

$$d_1 = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{4.26}{4} \fallingdotseq 1.06\ (mm)$$

となる。

図.3に示されるように，$n=9$ で，$Q_e \approx Q_0$ となり，負荷Q値 Q_L は，n が10以上では，無負荷Q値 Q_0 で押えられて，一定値に近づくので10枚のパラフィン板で多層膜を作製する。

パラフィンを，温水に溶解して，自然冷却で，厚さ1mm程度の板にし，セーパーで0.69mmの厚さのパラフィン板に仕上げる。

実際に，作ることのできたパラフィン板は，0.65～0.72mmの間で，ばらつきがあった。

ii) 測定装置

測定装置は，図4の構成である。クライストロンは，のこぎり波電圧をリペラーにかけて周波数掃引する。2つの補助発振器 f_1，f_2 は，二現象増幅器に

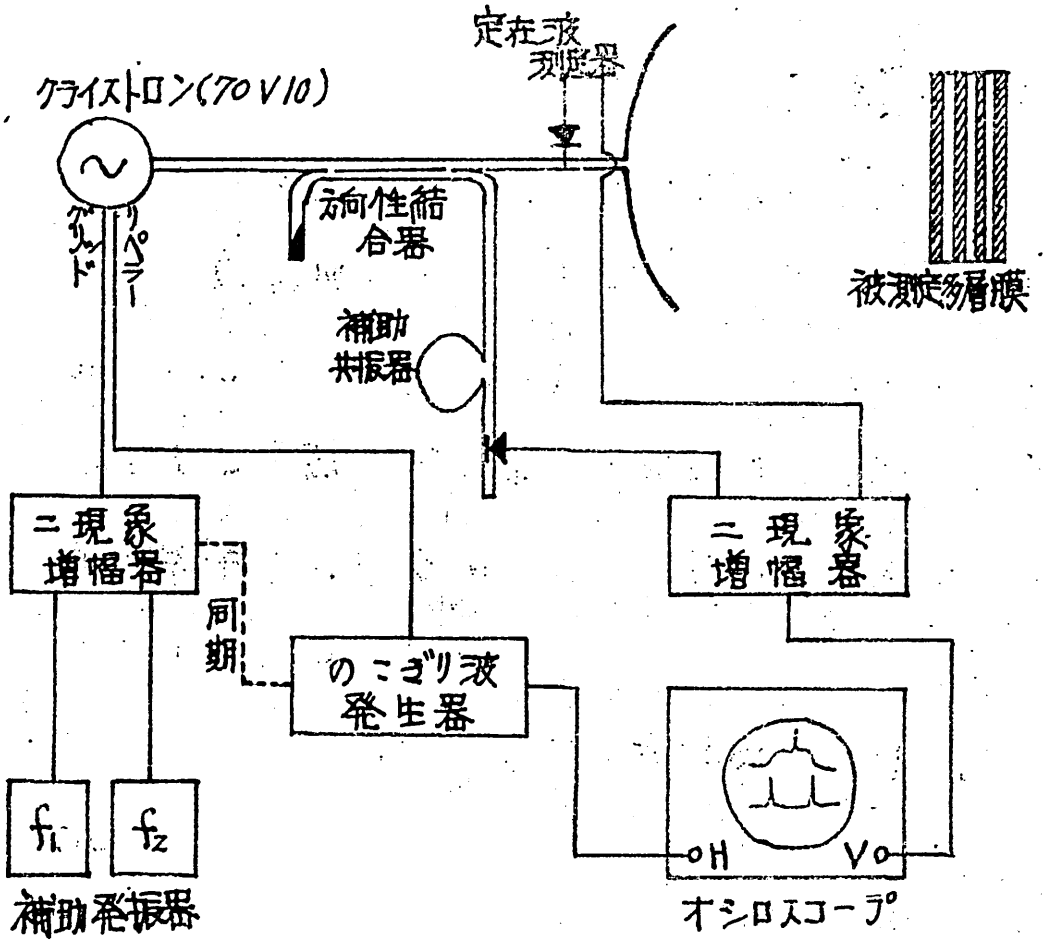


図.4　測定装置

より，のこぎり波に同期して，f_1，f_2の周波数の振幅変調が交互にかけられるようになっている。また，定在波測定器からの検波出力と，補助共振器の検波出力をオシロスコープ上で同時に観測できるようにしている。

iii) 測定原理および測定法

図.4に示すように、凹面鏡(しんちゅう製)と、多層膜で共振器を構成する。

この共振器で考えられる損失は、凹面鏡の反射損失、誘電体多層膜の誘電体損失および回折損失で、これらの損失に基づくQ値をQ_R, Q_0, Q_dとし、これらの損失を総合したQ値を、無負荷Q値Q_1とする。つぎに、電源側の外部Q値をQ_{e1}, 多層膜の外部Q値をQ_eとする。いま負荷Q値をQ_{L1}とすると、これらのQ値の間には次の関係式が成り立つ。

$$\frac{1}{Q_1}=\frac{1}{Q_R}+\frac{1}{Q_d}+\frac{1}{Q_0} \tag{17}$$

$$\frac{1}{Q_{L1}}=\frac{1}{Q_{e1}}+\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_e} \tag{18}$$

つぎに、全く同じ状態で、多層膜をしんちゅうの反射板で置き換えた共振器について考える。この共振器の無負荷Q値をQ_2とすると、Q_2は、凹面鏡の反射損失、回折損失およびしんちゅう平板の反射損失に基づくQ値、Q_R', Q_d'およびQ_R''に分解できる。また、

電源側の外部Q値をQ_{eZ}，この共振器の負荷Q値をQ_{LZ}とすると，これらのQ値の間には，次式が成り立つ。

$$\frac{1}{Q_Z}=\frac{1}{Q_R'}+\frac{1}{Q_d'}+\frac{1}{Q_R''} \tag{19}$$

$$\frac{1}{Q_{LZ}}=\frac{1}{Q_{eZ}}+\frac{1}{Q_Z} \tag{20}$$

凹面鏡－多層膜共振器の電源側から見た見かけの無負荷Q値Q_1'は，次式で与えられる。

$$\frac{1}{Q_1'}=\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_e} \tag{21}$$

周波数掃引をつかった定在波法による無負荷Q値の測定法[2]により，(19)，(21)式のQ_2，Q_1'を測定することができる。

いま，$Q_R=Q_R'=Q_R''$，$Q_d=Q_d'$と仮定すれば，(19)，(21)式は次のように書くことができる。

$$\frac{1}{Q_2}=\frac{1}{Q_R}+\frac{1}{Q_d}+\frac{1}{Q_R}=\frac{2}{Q_R}+\frac{1}{Q_d} \tag{22}$$

$$\frac{1}{Q_1'}=\frac{1}{Q_R}+\frac{1}{Q_d}+\frac{1}{Q_0}+\frac{1}{Q_e} \tag{23}$$

$Q_d \gg Q_R$と仮定すれば，(22)，(23)式より

$$\frac{1}{Q_L}=\frac{1}{Q_0}+\frac{1}{Q_e}=\frac{1}{Q_1'}-\frac{1}{2Q_2} \tag{24}$$

となり，誘電体多層膜の外部Q値Q_eと，無負荷Q値Q_0の合成の負荷Q値Q_Lを実験的に求めることができる。

測定は，弓場，牧本により発表されている，"周波数掃引をつかった定在波法による無負荷Q値の測定法[2]"に基づいた方法で行った。

iv) 測定結果

図.5は，パラフィン板10枚よりなる多層膜共振器の負荷Q値Q_Lの実験値，理論値と共振軸長Dとの関係を示している。図.6，図7は，D=60cm($\theta=60°$)，D=30cm($\theta=30°$)におけるQ_Lのnに対する実験値と理論値を示している。ただしDは凹面鏡と多層膜の距離である。図.8は，$n=5$の多層膜を，Dの距離で対向させた共振器の負荷Q値Q_Lの実験値と理論値を示している。

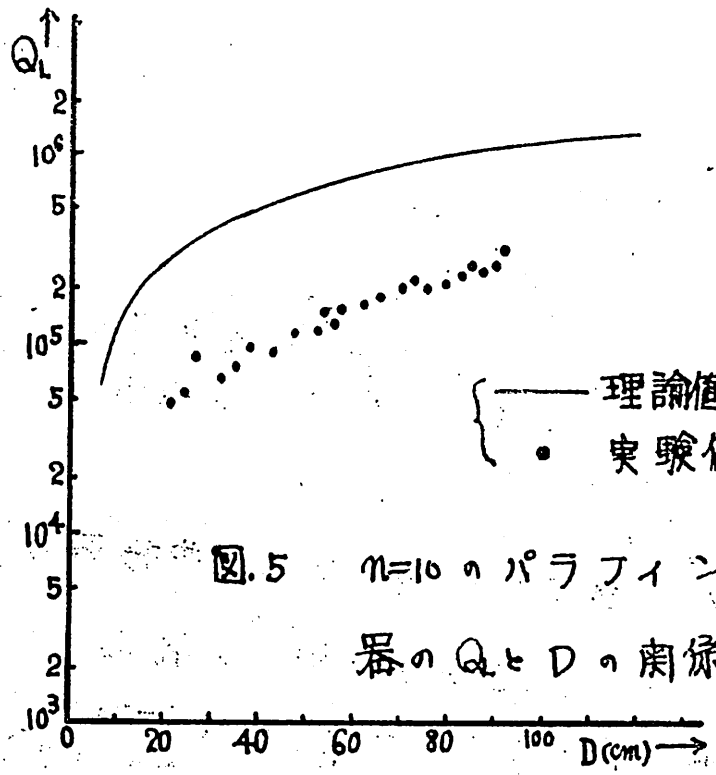


図.5　$n=10$ のパラフィン多層膜共振器の Q_L と D の関係（$\gamma=s=1$）

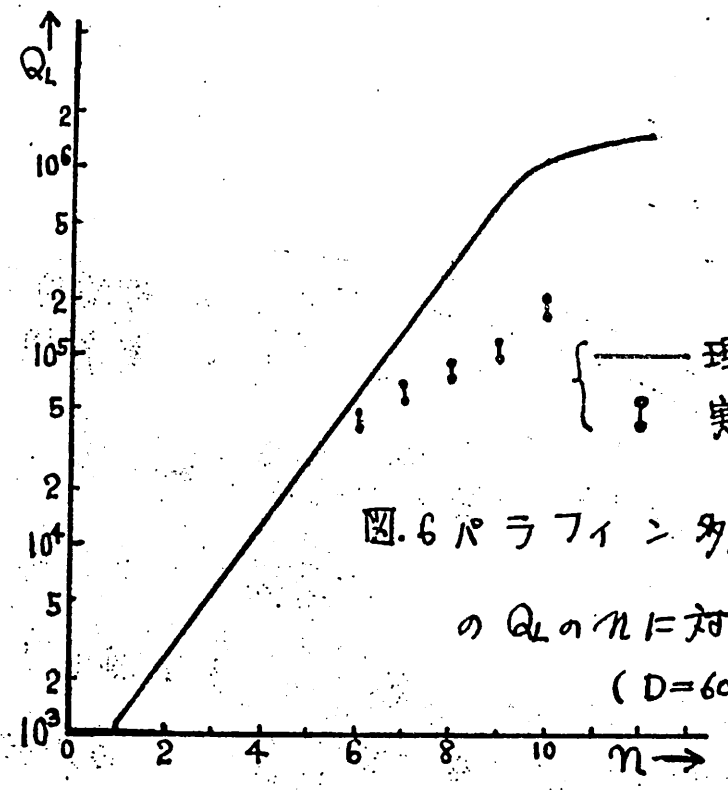


図.6 パラフィン多層膜共振器の Q_L の n に対する特性（D=60cm, $\gamma=s=1$）

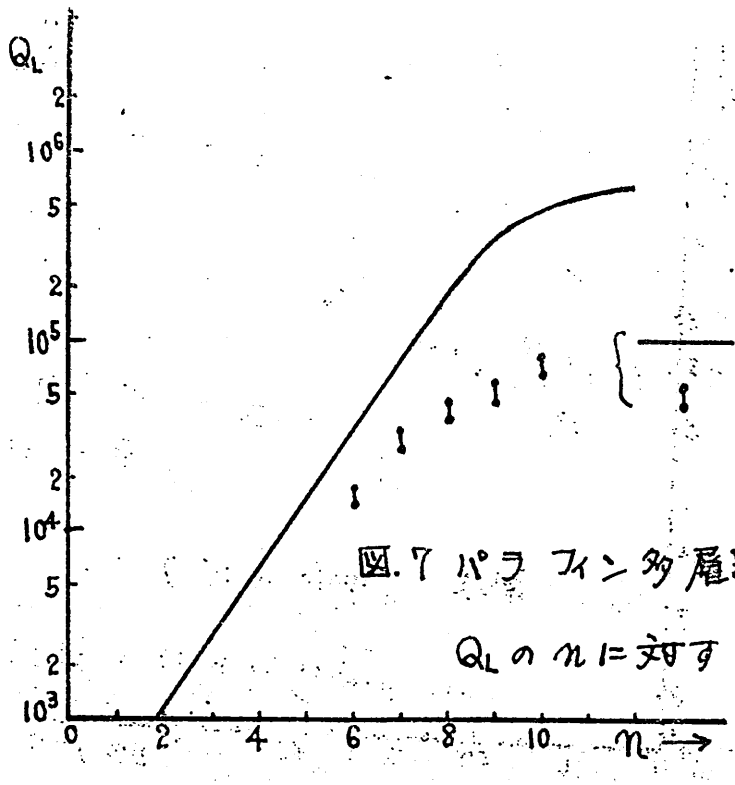


図.7 パラフィン多層膜共振器の Q_L の n に対する特性.
($D=30cm$ $r=s=1$)

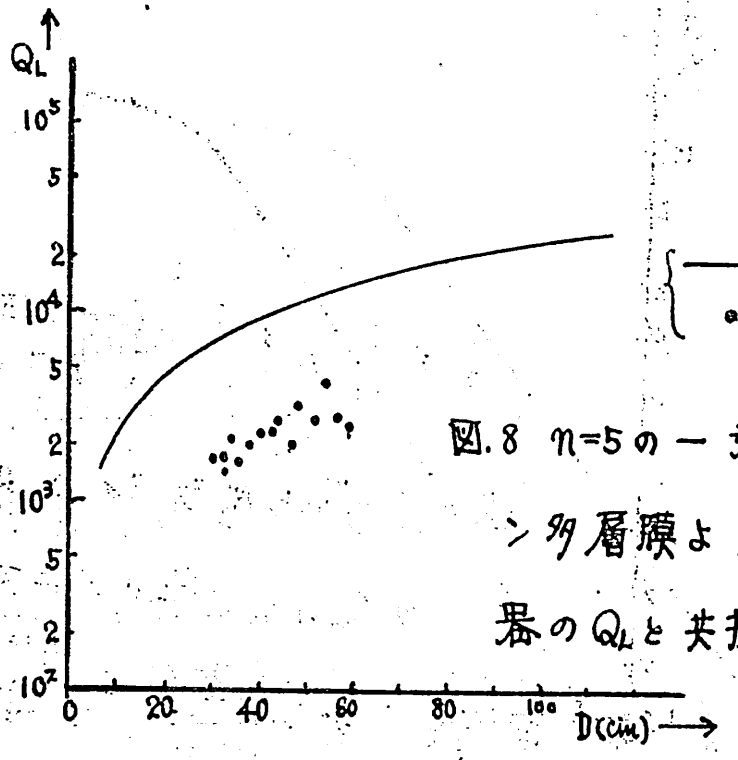


図.8 $n=5$ の一対のパラフィン多層膜よりなる共振器の Q_L と共振軸長 D との関係
($r=s=1$)

V. 結論

このような、多層膜共振器の共振状態における、電磁界分布を解くことにより、外部Q値Q_eと無負荷Q値Q_0を簡単に求めることができる式を導くことができた。

実験結果の負荷Q値Q_Lは理論値の約70%程度であるが10万～30万程度の高いQ値である。実験値と理論値の差異の大きな原因は、工作精度であると考えられるが、他に回折損失、表面の不均一さ、$\tan\delta$の測定誤差等が考えられる。しかし、理論値と同じオーダーの高いQ値が求まったことは、多層膜をミリ波帯で利用するのが有効であることを示していると思われる。

さらに、今後多層膜反射板による共振器として取り扱う時、負荷Q値を外部Q値と無負荷Q値に分離して求める実験方法の検討が大切だと思われる。また、多層膜の材質として、$\tan\delta$が低く、工作精度を

出し易く、しかも強じんな誘電体を見つけ出すことも、きわめて重要なことであろう。

謝辞

本研究を行うにあたり、計算、討論を重ねて頂いた、大阪大学大学院学生根本承次郎氏、また、実験に多大の協力をされた、同大学基ソ工学部学生、山本雄一郎氏（現東芝電機社員）その他なにかと助言を頂いた、牧本研究室の諸氏に感謝する。

参考文献

1) 牧本利夫，弓場芳治，太田勲．“ファブリ・ペロー共振器による複素誘電率の測定”輻射科学研究会試料，1966．12．9

2) 弓場芳治，牧本利夫，“周波数掃引をつかった定在波法による無負荷Q値の測定法” 信学誌 Vol.49. No.10 P1909 (1966)

研技舘－338　　輻射科学研究会資料

平行平板形電磁波ビームガイドの実験

1967.5.26

於　住友電工

中原恒雄
倉内憲孝
長尾多一郎
吉田健一

住友電気工業株式会社　研究部

1. まえがき

筆者らは、これまで反射形電磁波ビームガイドについて理論的、実験的に検討してきた。取り扱ってきた形式は間欠反射形電磁波ビームガイド[1]と平行反射板形電磁波ビームガイド[2][3]の2種である。

本文で取り扱うビームガイドは、その理論的検討についてはすでに発表した[2][3]平行反射板形電磁波ビームガイドで、ここでは、それに関する実験結果について述べる。

当社では、本年1月日本国有鉄道鉄道技術研究所に、本形式のビームガイドを高速鉄道における障害物探知システムの試作試験用として80m納入し、最近一通りの特性を測定し終えた。

測定した特性は伝送路の伝送損失，励振器の励振損失，励振器を構成するスリットアンテナの開口長と励振損失の関係，界分布，および探知性能の測定である。なお、実験結果に対する理論的検討については十分なされていない。

図1は本文で取り扱うから伝送路の寸法を示し，写真1は鉄道技術研究所構内に布設した本伝送路を示している。

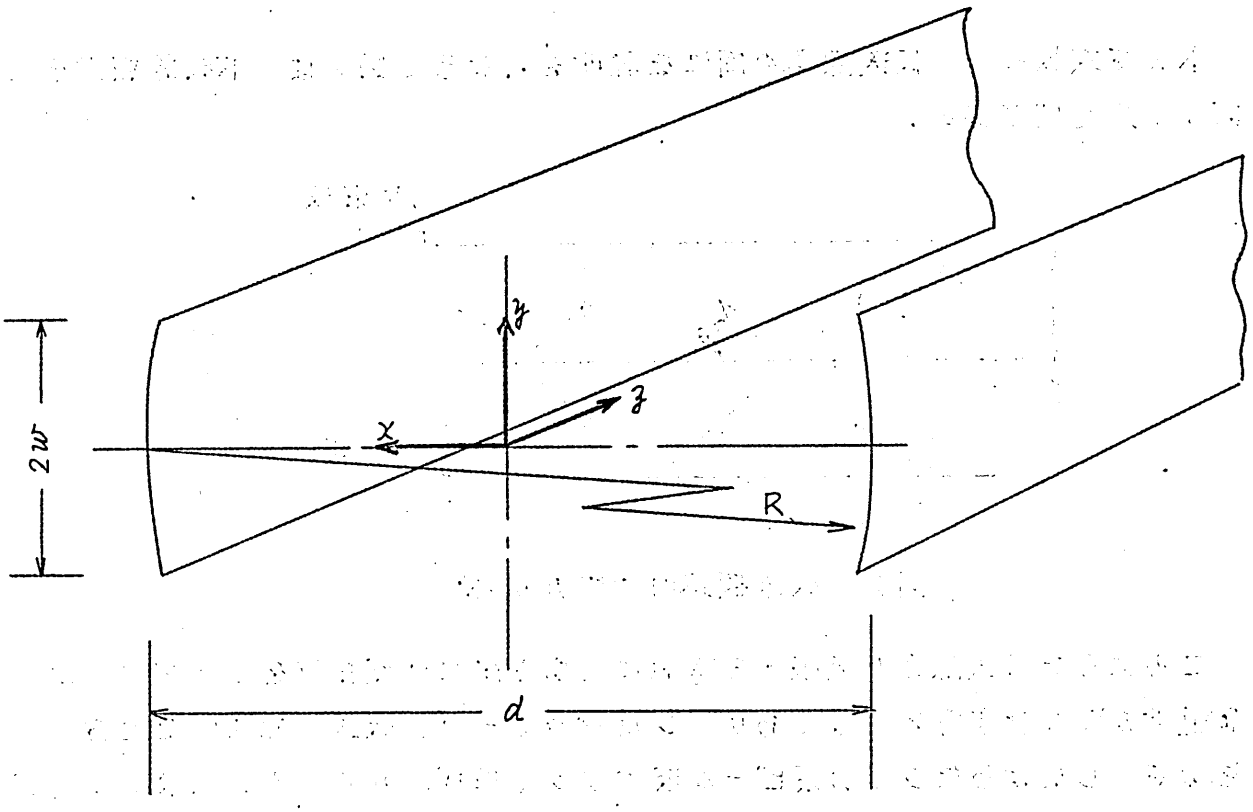


図1．平行反射板形電磁波ビームガイド

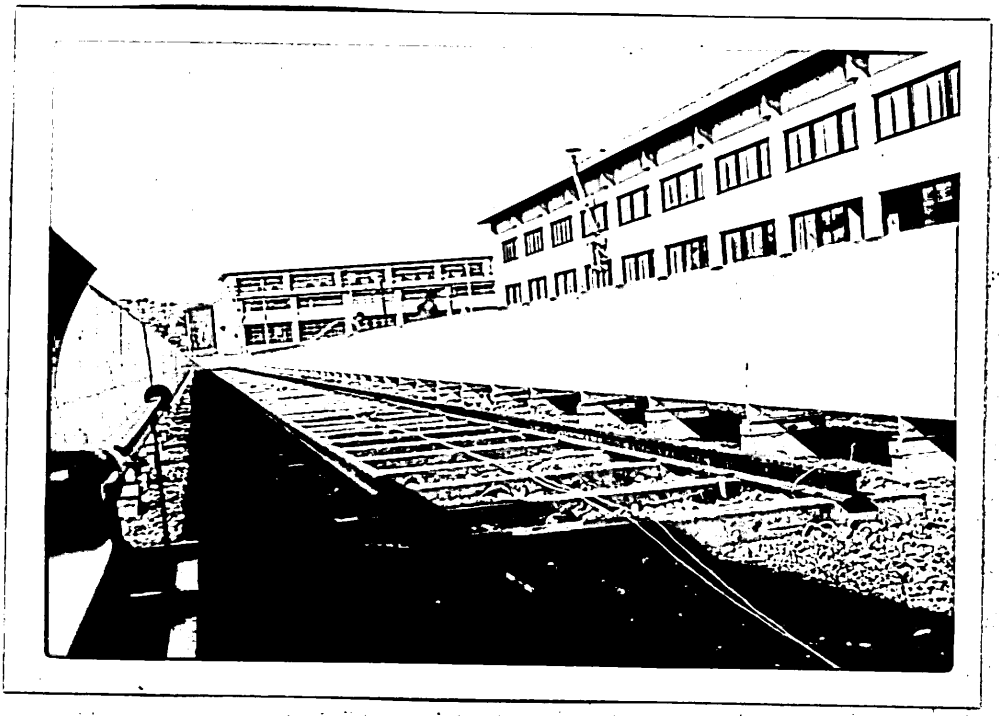


写真１．平行反射板形電磁波ビームガイド

２．伝送線路の簡単な説明

本文で取扱う　伝送線路の簡単な説明を行なう。図２は　本伝送線路を上部より見た図である。

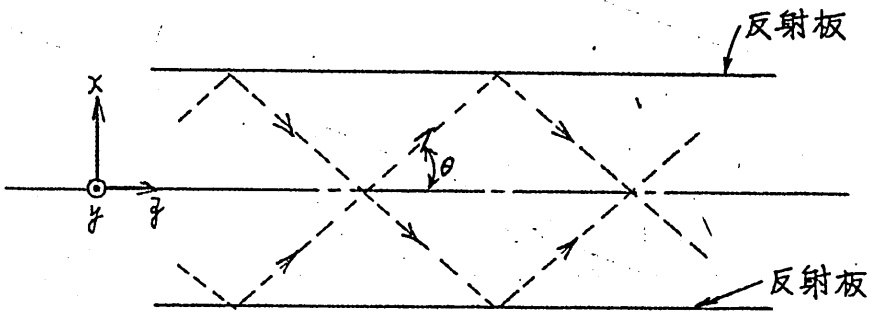


図２．伝送線路内の波の伝搬

このような伝送線路を伝搬する姿態は、横方向には定在波を生じているような通常の導波管姿態と同様であり、したがって一つの伝送姿態は図２における点線で示したような２つの素ビーム波によって構成されている。以後この素ビーム波を素波と称し，素波の方向を図２におけるθにより定義する．xおよび

z方向の伝搬定数 k_x および k_z，θ の間の関係は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} &\tan\theta = \frac{k_x}{k_z} \\ &k_x^2 + k_z^2 = k^2 \\ &k = 2\pi/\lambda \quad , \quad \lambda : \text{波長} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

各素波は反射板上で反射後それ自身の伝搬方向に収束しながら伝搬し、反射板間の中点で最も収束し、その後発散し、反射板に到達して凹面反射板上で反射後再び収束しながら伝搬し、同様の現象をくりかえす。

したがって伝送姿態の界分布はy方向には Hermit Gaussian 分布を有し、x方向には、ほぼ正弦波状の定在波の分布を示していることになる。また、x方向に観測したスポットサイズの変化は双曲線状となる。

本文で取り扱う系は，もちろん，最も能率がよいと考えられる共焦点系であり，反射板の曲率半径Rと反射板間隔dは等しい。すなわち

$$R = d \qquad (2)$$

この場合の姿態関数は次式で与えられる。

$$E_{zmn} \text{ or } H_{zmn} = \frac{\exp\left[-\dfrac{k_{mn}\,y^2}{\left(1+(2x/d)^2\right)d}\right]}{\sqrt[4]{1+\left(\dfrac{2x}{d}\right)^2}} \; Hen\left\{\frac{\sqrt{k_{mn}}\;y}{\sqrt{\left(1+\left(\dfrac{2x}{d}\right)^2\right]d}}\right\} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\left\{k_{mn}\,x + \frac{2k_{mn}\,xy^2}{d^2\left[1+\left(\dfrac{2x}{d}\right)^2\right]} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\frac{2x}{d}\right\} \qquad (3)$$

ただし，$$k_{mn} = \frac{\pi}{d}\left(m + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \qquad (4)$$

E_{zmn} および H_{zmn} はおのおのTM姿態のz方向電界およびTE姿態のz方向磁界の第 mn 番目の値を示す。

式(3)，(4)で与えられる姿態関数は反射板の幅が無限大である場合に適用されるべきものである。実際には反射板の幅が有限であるため回折損失が生じ，また，反射板を形成する導体が有限の導電率を有するため導体損失も加わり，式(3)の姿態関数および式(4)の固有値が変形される。回折損失は反射板の幅の決定に直接関係する。式(3)，(4)において，$y=0$ 付近に界分布が集中している方が反射板の幅が有限になった場合でも回折損失が小さいと考える。

したがって Hermit - Ganssian 関数の性質から $n=0$ が最も能率のよい伝送姿態と言える。

前述のスポットサイズ W_S の横断面内の変化は式(3)より次のようになる。

$$\frac{k_{mn} W_S^2}{d} - \frac{4x^2}{d^2} = 1 \qquad (5)$$

本文で取り扱うから伝送系は，鉄道における障害物探知を目的としたものであること，および既設の基礎を利用することを考慮して $d=2840\,mm$ ($R=d=2840\,mm$)，単体長 $3000\,mm$ とし，また，反射板の幅については伝送損失に関してその実測値が理論値の10倍と考えて $10\,dB/Rm$（周波数 9.4 GHz 帯）以下となるように $2w=660\,mm$ を選んだ。

反射板を所定の位置に設定することは伝送損失とも関連しているため極めて重要な問題である。筆者らはトランシットとレベルメータを用いて直線度、および左右の反射板の高さの調整を行なった。

図3は布設された反射板の傾斜量および直線度を与えるグラフである。図から反射板の幅660mmを考慮すると傾斜の角度は最大3×10^{-3}(rad)程度である。また、2列の反射板間の間隔は2840～2847mmで設計値より最大7mmずれている。

また、図4は布設された反射板の高さの偏位を示すものであり、1枚の反射板の軸方向の高さの差の最大値は約6mmであり、角度に換算して2×10^{-3}(rad)である。また、左右列の反射板の高さの差も約6mmである。

4. 伝送損失

伝送路の伝送損失をシャトルパルス法で測定した。
測定回路を図5に示す。

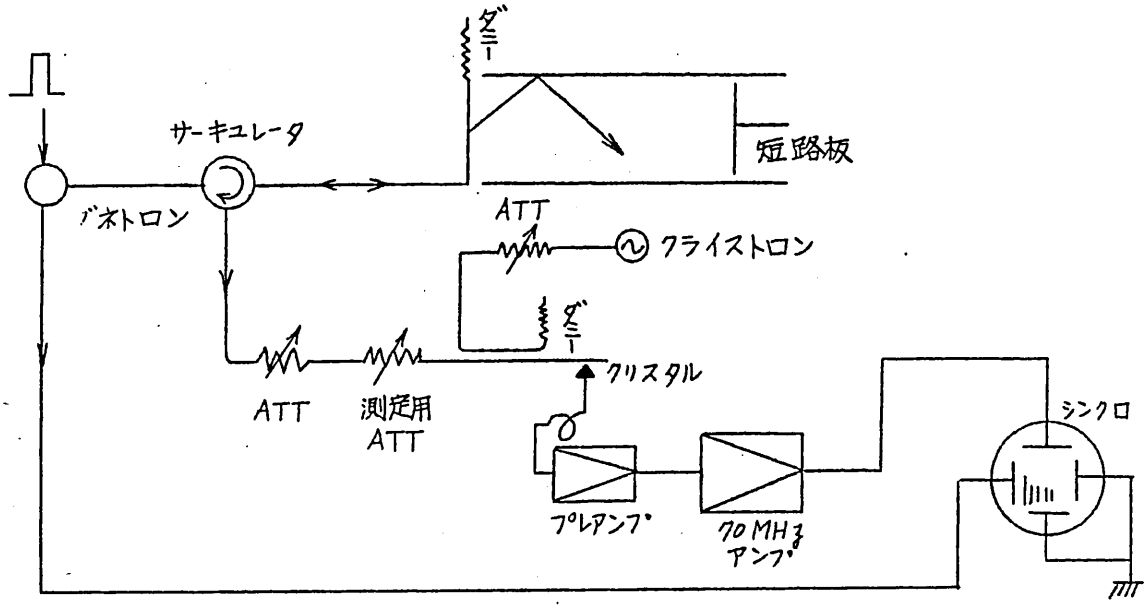


図5. 伝送損失測定回路

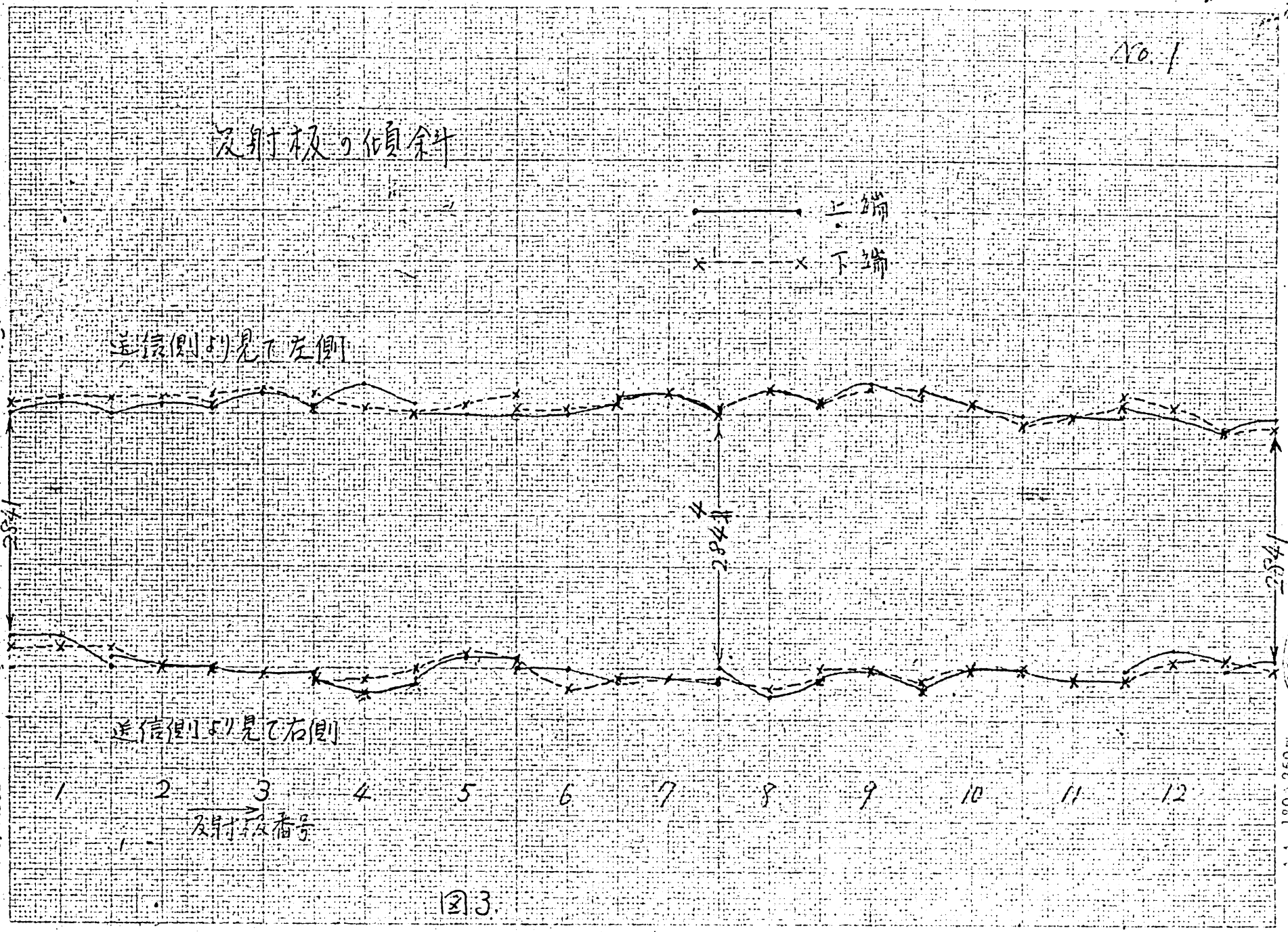

No. 1
反射板の傾斜
上端
下端
10
(mm)
5
0
送信側より見て左側
2841
2841
2841
5
(mm)
0
-5
送信側より見て右側
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
反射板番号
NO. A502
A-4 180×250mm

図3.

NO. 2

13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

NO. A502

180 · 250 mm

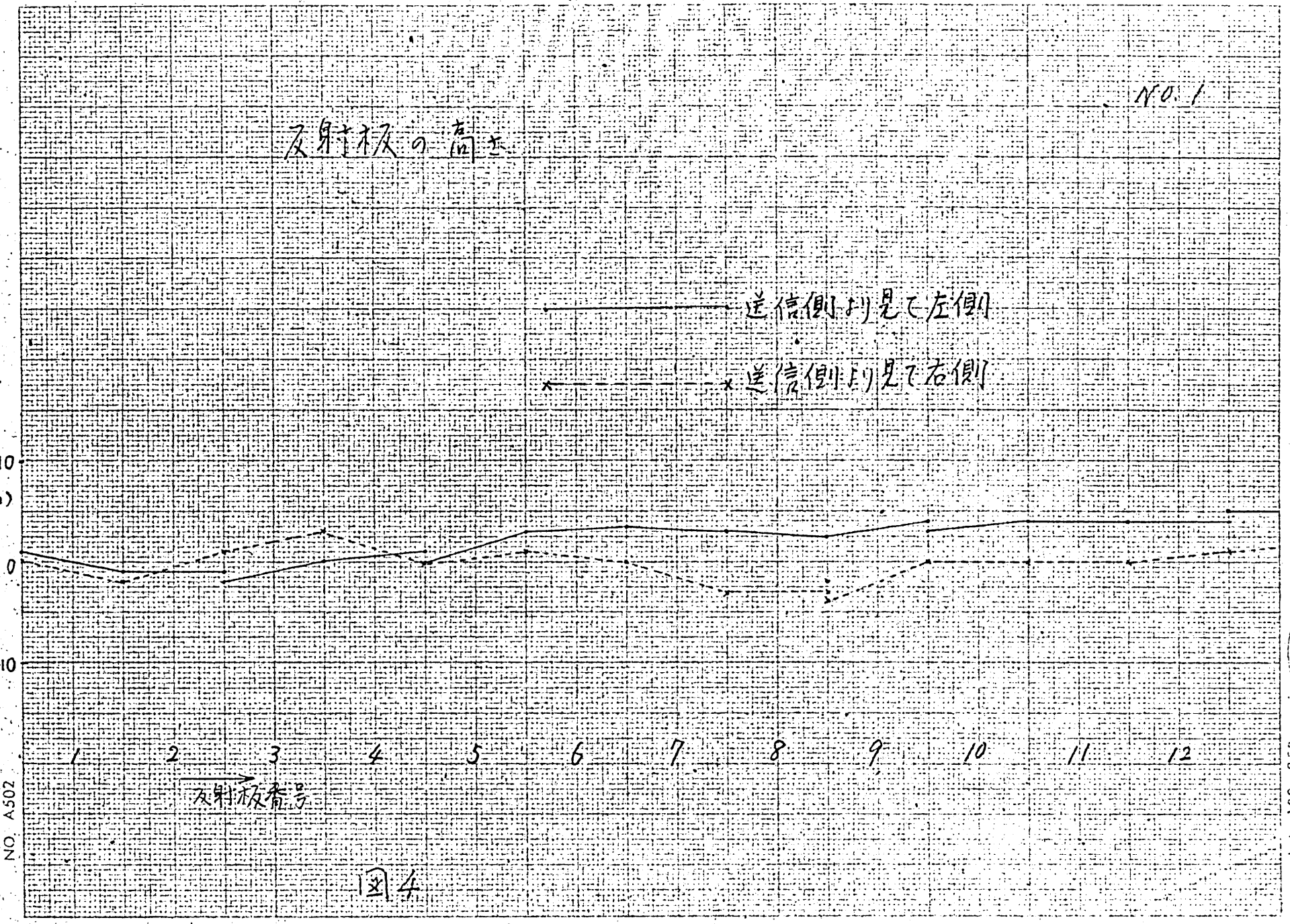
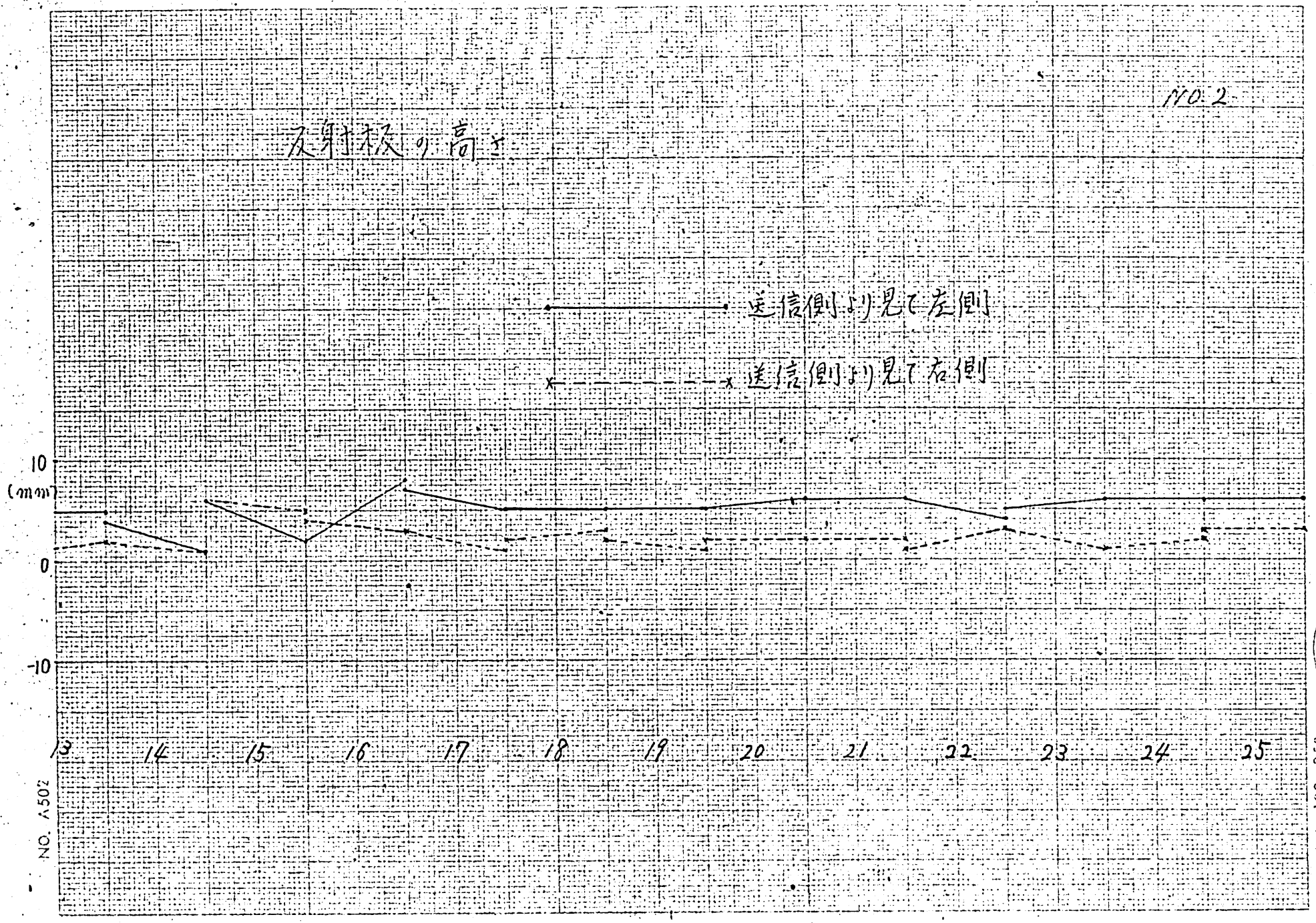

No. 1
反射板の高さ
送信側より見て左側
送信側より見て右側
10
(mm)
0
-10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
反射板番号
NO. A502
A4 180・250mm (AKN)

図4


NO 2
反射板の高さ
送信側より見て左側
送信側より見て右側
10
(mm)
0
-10
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
NO. A502
A-4 180・250㎜
AKM

短絡板および測定用励振器を写真2および3に示す。素波方向を変えるためには，励振器を構成するスリットアンテナのサイズを変えるとよい。本実験においては次表のように4点について測定した。測定周波数は9.4GHzである。

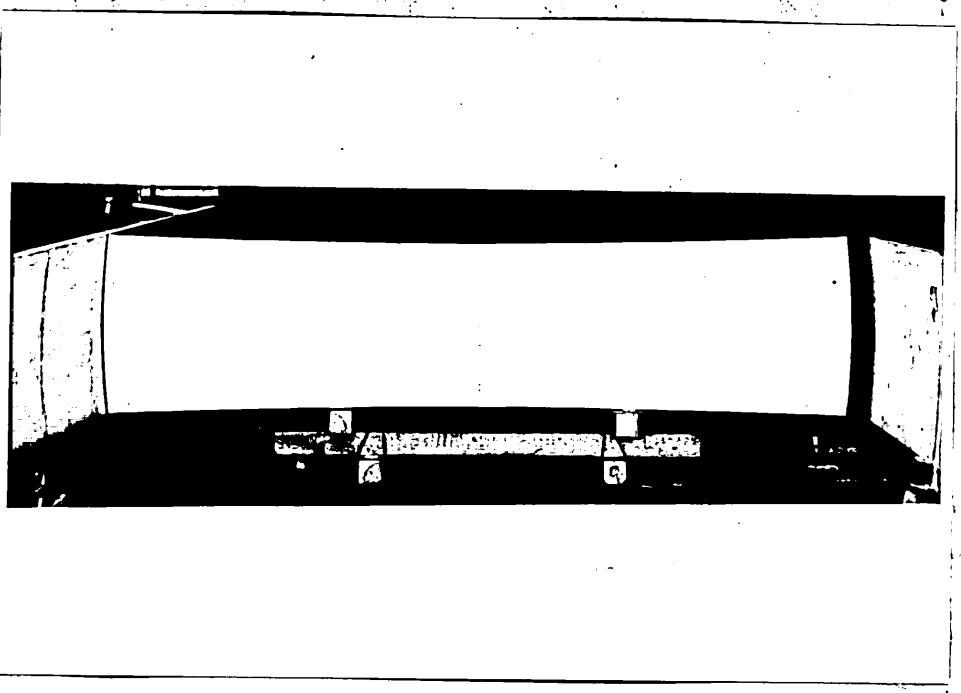


写真2. 短 絡 板

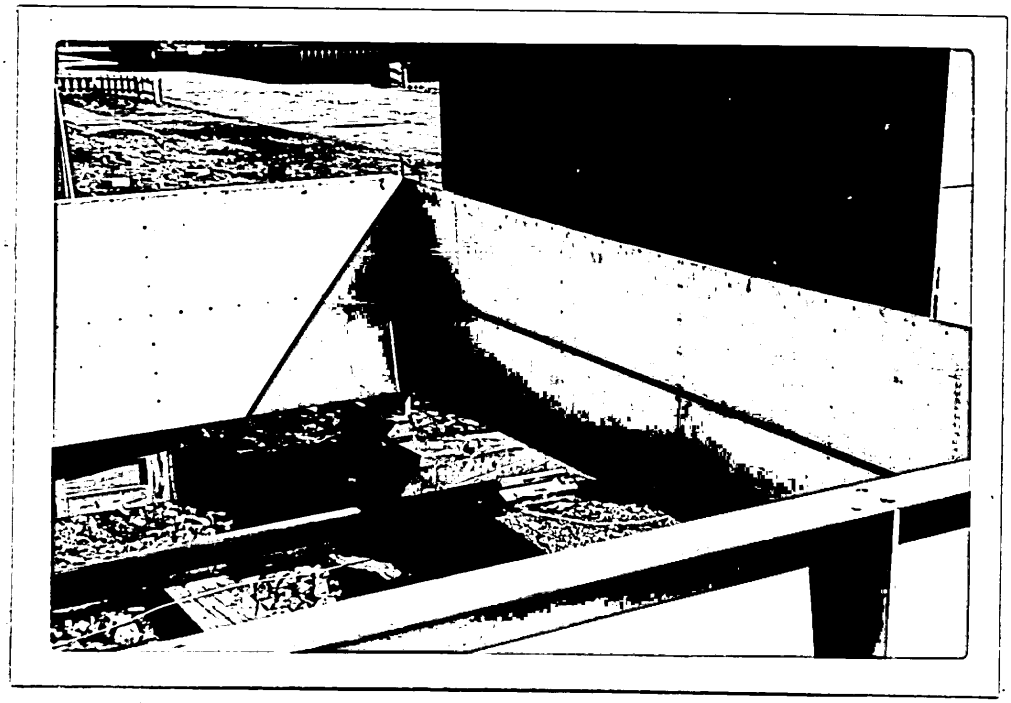


写真3 測定用励振器

表1.　測定素波方向および使用導波管

	素波方向	使用導波管	アンテナの開口面の形状
1	34°	WRJ－12	E面に $\lambda_g/4$ 間隔で 4.1 mm φ
2	47°	WRJ－10	〃　〃　5.0 mm φ
3	56°	WRJ－9	〃　〃　6.0 mm φ
4	63°	WRJ－7	〃　〃　6.0 mm φ

図6は．θ＝34°に対して，短絡板の位置を変えた場合の1往復当りの伝送損失を与えている．写真4は受信パルスの状態を示す．

図7は　素波方向に対する伝送損失（dB/Rm）を示す．

図中．点線は理論値を示す．

理論値と実験値のずれは反射板の設定の不整，および曲率半径の不整によるものであると考えられる．

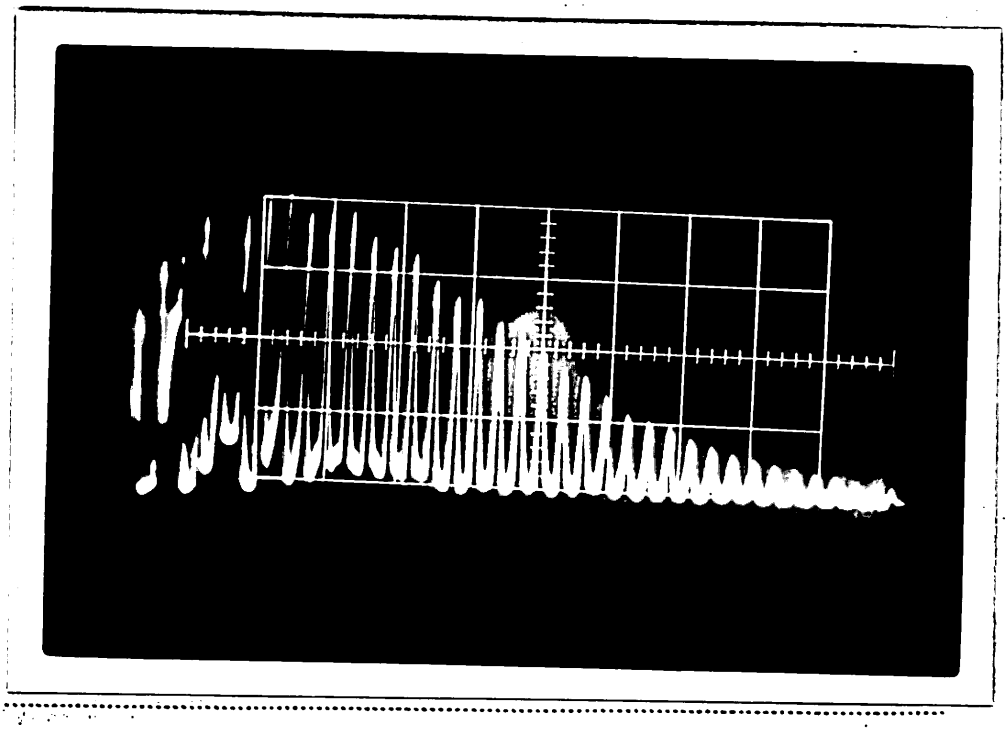


写真4.　パルスの配列状態の一例

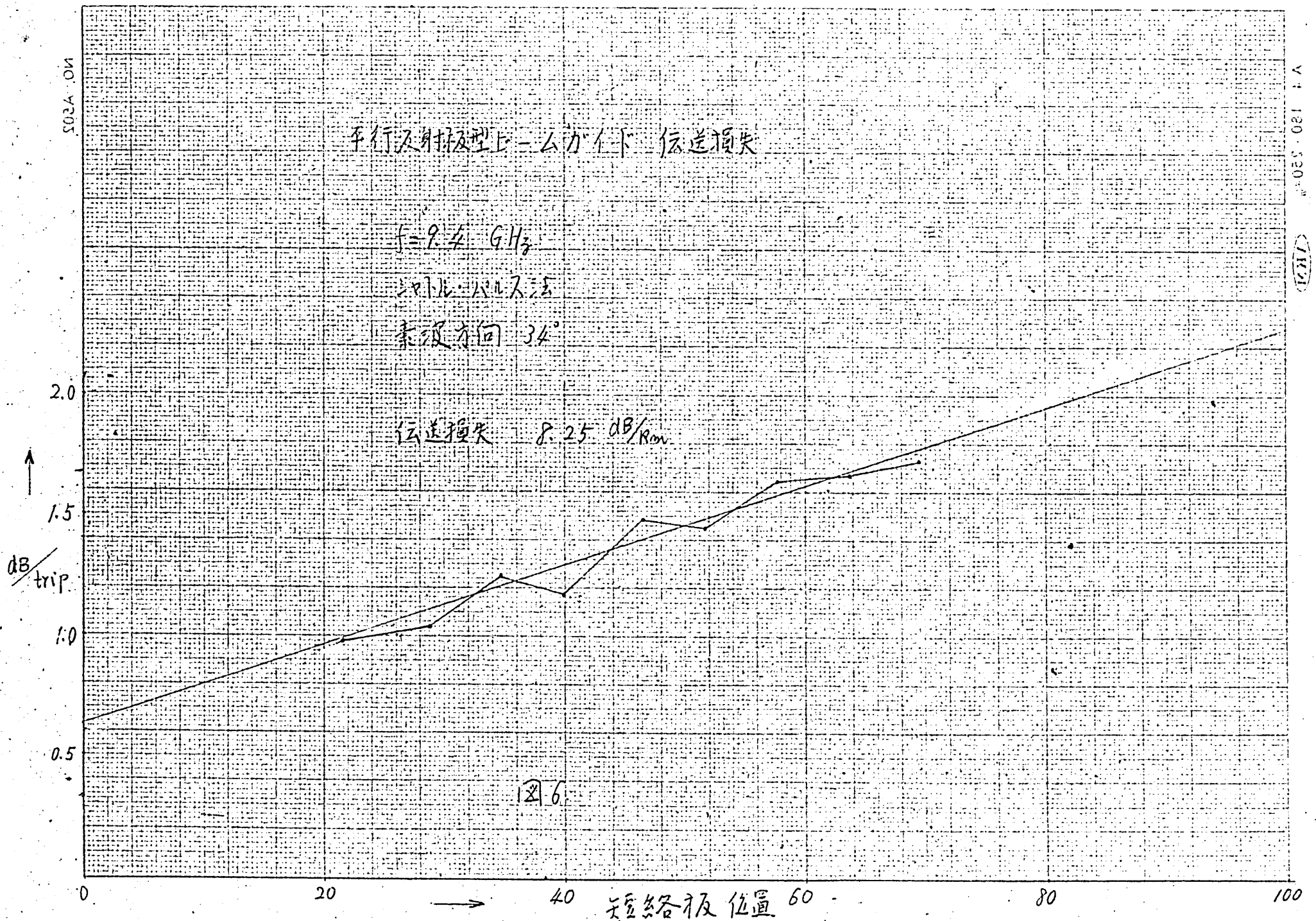

平行入射波型ビームガイド 伝送損失
f=9.4 GHz
シャトル・パルス法
素波方向 34°
伝送損失 8.25 dB/Rm
2.0
1.5
1.0
0.5
dB/trip
0
20
40
60
80
100
短絡板位置

図6

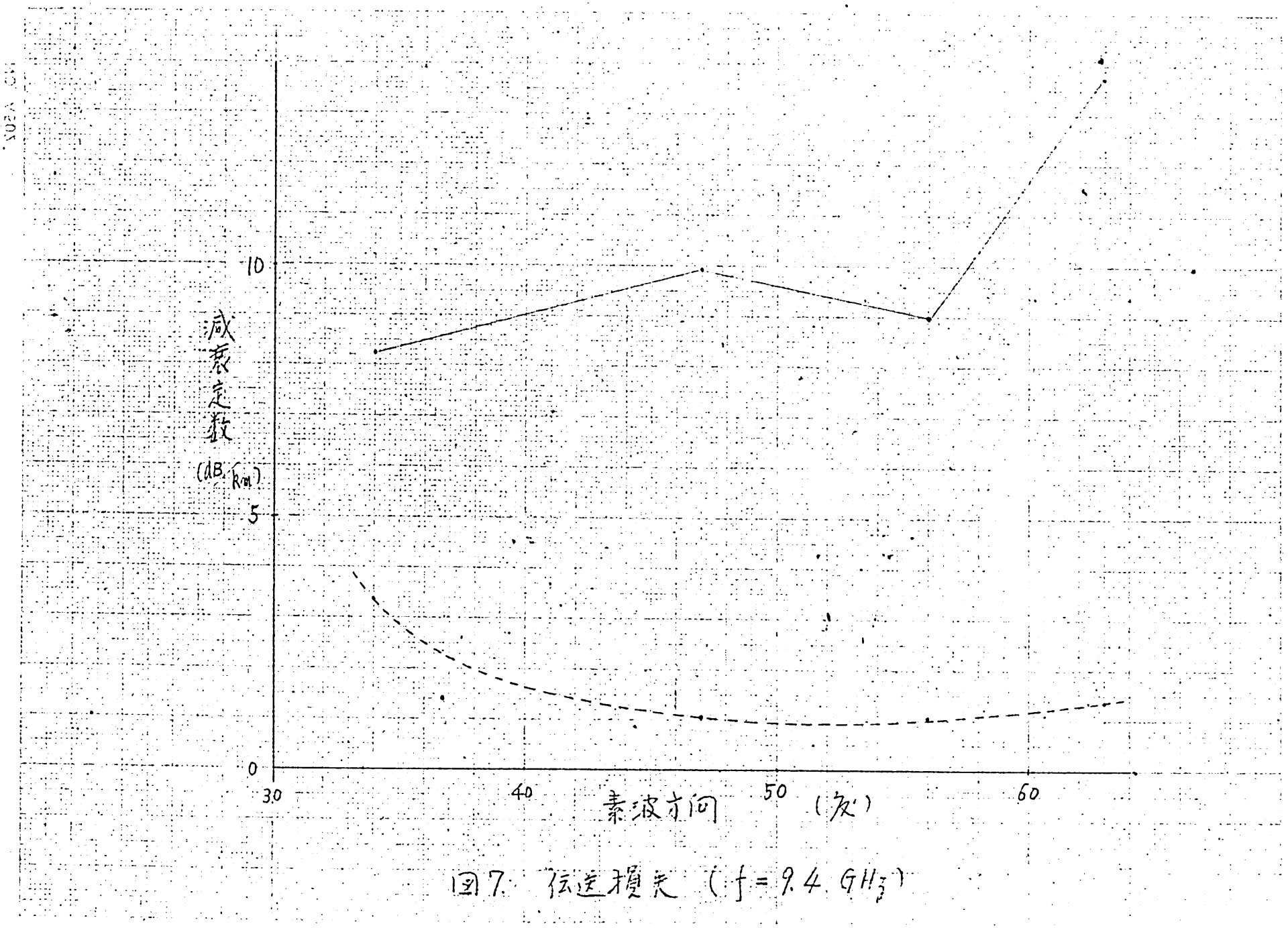


図7. 伝送損失 ($f = 9.4\ GHz$)

5. 励振損失

5－1　地上用励振器

地上用励振器は伝送系に対して図8に示されているように配置されるように設計した。一次放射器はスリットアンテナとし，これより放射された放射電磁界を反射板により波面の修正を行なって基本伝送姿態に変換せしめようとするものである。

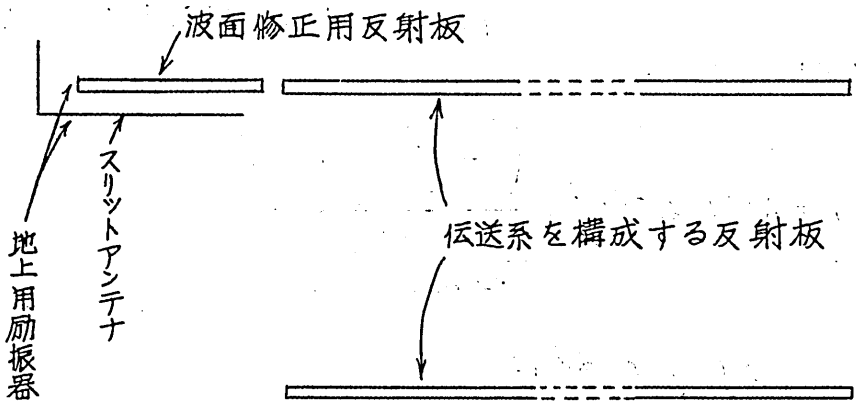


図8　地上用励振器の配置

5－1－1　地上用励振器の設計

図7の理論曲線から，素波方向が50°付近になるように励振器を設計するのが最も能率がない。このためには9.4GHz帯においてはWRJ－12導波管を用いるのが最も妥当であると考えられる。

(i) 一次放射器の設計

一次放射器の全長にわたる減衰量は，伝送姿態に最大の変換が行われるように決定されねばならない。

図8において　一次放射器の軸方向の放射界分布を

$$f(z) = e^{-\alpha z - j\beta z} \quad for \quad 0 \leq z \leq \ell \qquad (6)$$

ℓ：アンテナ長

と表示する。式(6)をフーリエ級数に展開すると，

$$f(z) = e^{-j\beta z} \sum_{-\infty}^{\infty} An\, e^{-j\frac{2n\pi}{\ell} z} \qquad (7)$$

$$An = \frac{1}{\ell} \frac{1 - e^{-\alpha\ell}}{\alpha - j\frac{2n\pi}{\ell}} \qquad (8)$$

となり，$|An|$ の最大値は $n=0$ の場合である。

$$|A_0| = \frac{1-e^{-\alpha\ell}}{\alpha\ell} \tag{9}$$

したがって，これを取り出すのが最も能率がよいことになり一次放射器の軸方向励振効率 η_1 を

$$\eta_1 = P_{rad}/P_i \qquad P_i = \text{入力電力}$$
$$P_{rad} = \text{基本伝送姿態全放射電力} \tag{10}$$

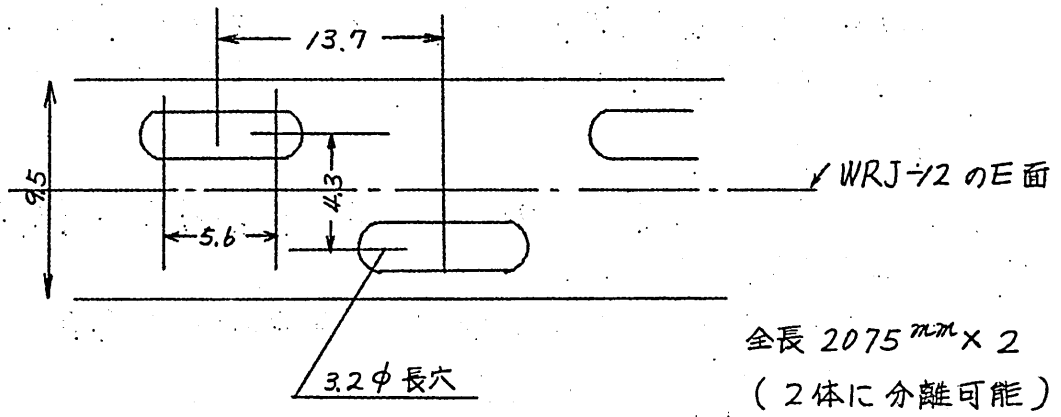
なる式で定義すると，

$$\eta_1 = A^2(1-e^{-2\alpha\ell}) \frac{\left(\frac{1-e^{-\alpha\ell}}{\alpha\ell}\right)^2}{\frac{1-e^{-2\alpha\ell}}{2\alpha\ell}} \Big/ A^2$$

$$= \frac{2(1-e^{-\alpha\ell})^2}{\alpha\ell} \tag{11}$$

となる。式（11）の最大値を計算すると次のようになる。

$$Max(\eta_1) = 0.81 \quad for \quad \alpha\ell = 1.26 \ Neper = 10.9 \ dB \tag{12}$$



この場合の素波方向 θ は次式で与えられる。

$$\theta = 54.3° \tag{13}$$

ただし，式(13)においてはスリットによる管内波長の変化（$S\theta = -2.67°$）を考慮してある。

(ii) 反射板の設計

図9に励振器の横断面を示す。図において，F_1，F_2は反射板の断面形状である楕円の焦点を示す。

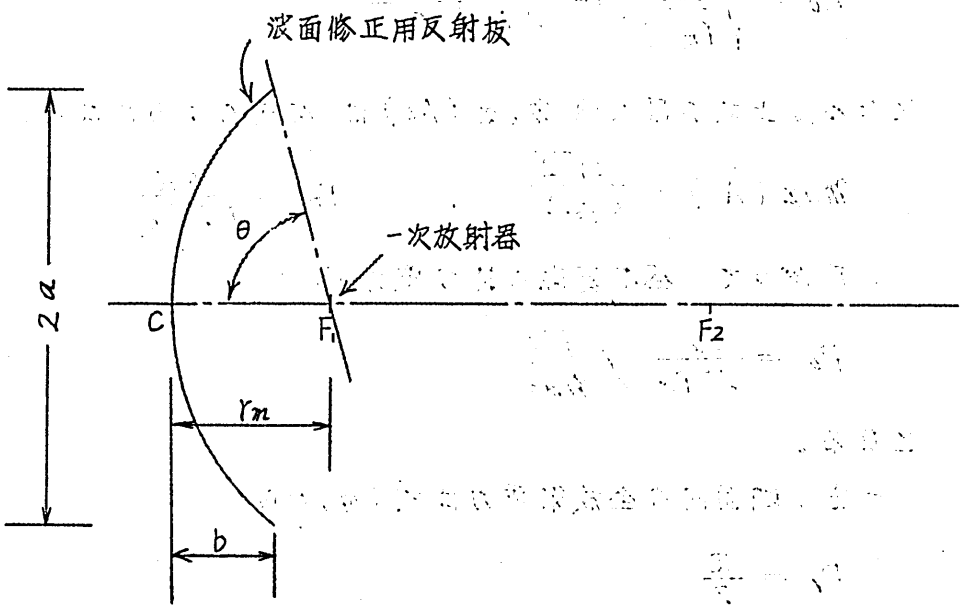


図9．地上用励振器の断面図

一次放射器による放射界は反射板上で次のような分布を持つ。

$$E_y=\cos\theta\, H_0(S_0 r_m)\, e^{-j\beta z}=\frac{1}{\sqrt{r_m}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{r_m}\right)^2\right]e^{-jS_0 r_m}e^{-j\beta z} \qquad (14)$$

ただし，r_m は図9において $\overline{CF_1}$ なる距離である．S_0は断面内の伝搬定数である。

一方，伝送線路内の基本姿態は

$$E_{oy}=\exp\left[-\frac{k_{mo}}{2d}y^2\right]\exp\left[+j\frac{k_{mo}}{2d}y^2\right]e^{-j\beta z} \qquad (15)$$

で表わされる。

ただし

$$\left.\begin{aligned} k_{mo}&=\frac{\pi}{d}\left(m+\frac{1}{2}\right)\\ m&=k_0 d\sin\theta/\pi \doteqdot 144 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

なお，式(14)，(15)におけるE_y およびE_{oy}はそれぞれ一次放射器による放射器のy方向電界，および基本姿態のy方向電界である。

式(14)で表わされる放射界の中から式(15)で表わされる基本伝送姿態に変換される電力を求めるため E_y を伝送姿態系 $\{E_{mny}\}$ で展開すると基本伝送姿態の展開係数 A_0 は.

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_m}} \left[1 - \frac{d}{2k_{m0} r_m^2} \right] \tag{17}$$

となる。上式の最大値 $max(A_0)$ は.次式のようになる。

$$max(A_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5 r_m^{\frac{1}{2}}} \quad , \qquad r_m = \sqrt{\frac{5d}{2k_{m0}}} \tag{18}$$

したがって.基本姿態の持つ電力 P_0 は

$$P_0 = \frac{32}{25 r_m} \sqrt{\frac{\pi d}{k_{m0}}} \tag{19}$$

となる。

一方，断面内の全放射電力は式(14)から

$$P_r = \frac{\pi}{2} \tag{20}$$

したがって　断面内の励振損失 η_2 は

$$\eta_2 = \frac{64 d}{25\pi r_m \sqrt{m_0}} \tag{21}$$

式(12)および(21)より全励振損失 η_t は

$$\eta_t = \eta_1 \cdot \eta_2 \tag{22}$$

となる。

式(14)で表わされる放射界の波面は半径 r_m の円であり．式(15)の基本伝送姿態のそれは d であるから．図9において

$$\overline{CF_1} = r_m \quad , \quad CF_2 = d$$

である。これから反射面の形状は

$$\frac{y^2}{d r_m} + \frac{x^2}{\left(\frac{d + r_m}{4}\right)^2} = 1$$

となる。

以上のような資料にもとづいて　図9の各寸法を計算すると

$r_m = 21.73\,(cm)$,　$a = 30\,cm$,　$b = 11.40\,cm$

$\theta = 71°$,　全長 2065mm × 2　（2体に分離可能）

となる。

このとき，全励振損失 η_t は

$$\eta_t = 1.7\ dB$$

となる。

5－1－2　実験結果

単一パルス法により励振損失を測定した。測定回路は図10に示す。

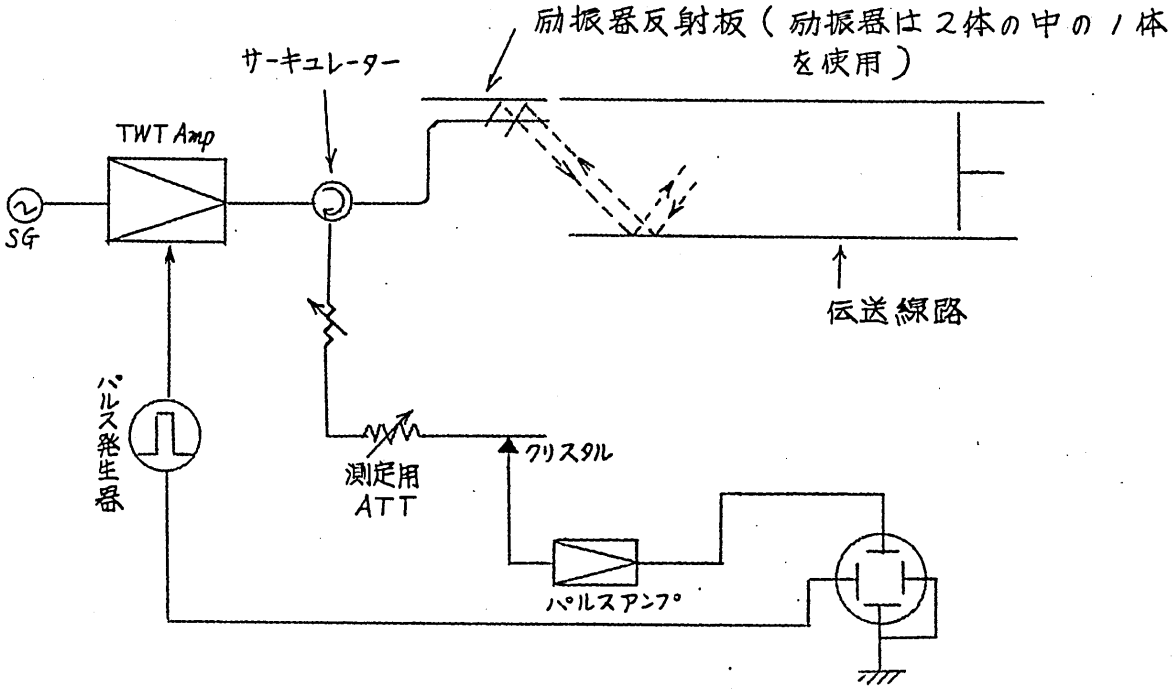


図10．励振損失測定回路

励振器の長さは 2075mm として測定した。また，測定周波数は 9.4 GHzで　5回測定した。図11 はその中の1回のデータを示すものである。

5回の測定値はそれぞれ，5.7dB，5.85dB，5.85dB，5.9dB，6.1dB，であり，平均 5.88 dB である。

5－2　車上用励振器

5－2－1　設　　計

車上用励振器の形式は　図12(a)に示すように、伝送線路を構成する反射板間にこれと直におくことにより励振するものである。反射板の形状は放物面とし，その焦点Fに一次放射器を設置し，点Aの方向に放射させる

42. 3. 1

地上用励振器 励振効率

No. 2

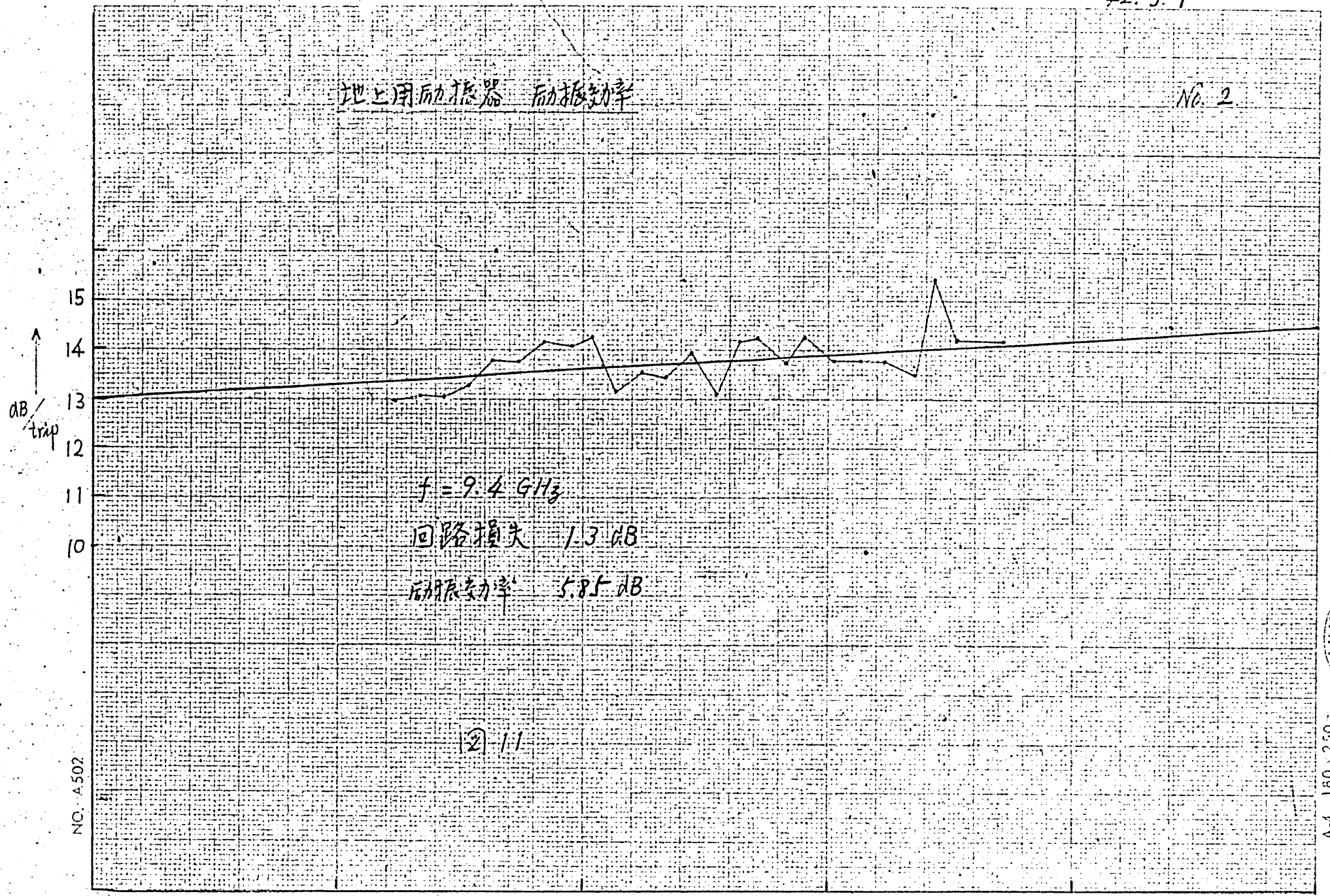


図 1-1

ものとする。図12（b）はこの励振器の断面形状を示すものである。ただし，点Aは伝送線路の上下方向の中心線と一致させるものとする。

設計法は前項に述べた地上用励振器の場合と同様であるので省略し，その設計値を記すと次のようになる。

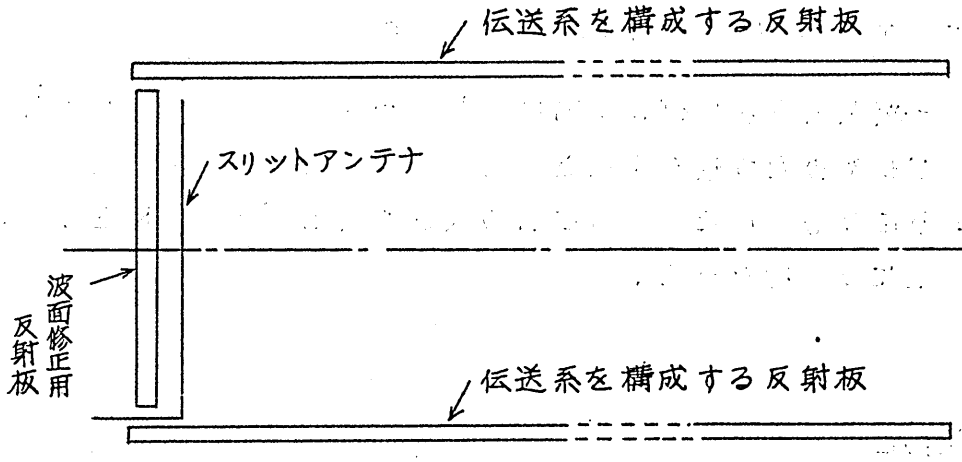
反　射　板　　$a = 314.9\,mm$，　$b = 329.6\,mm$，　$C = 202.4\,mm$

$C_1 = 48.8\,mm$，　$C_2 = 153.6\,mm$，　$f = 185.4\,mm$

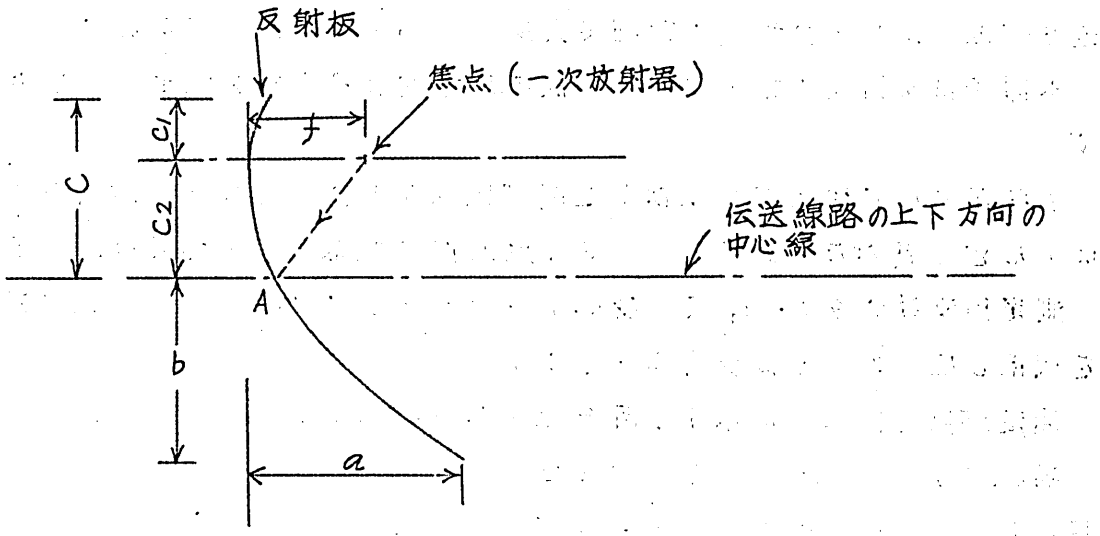
全長 $= 2740\,mm$

一次放射器　　WRJ-10　導波管，　素波方向　$\theta = 49.0°$

前長の減衰量　10.9 dB，　全長　2670 mm

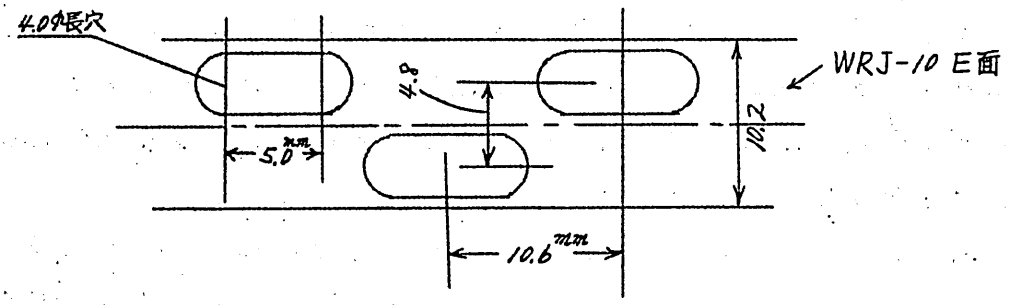


（a）車上用励振器の配置



（b）車上用励振器の断面

図12．車上用励振器



励振損失　6.5 dB

5－2－2　実験結果

測定周波数を9.4GHzとし，2回測定した。図13はその中の1回のデータを示すものである。

2回のデータは6.35 dB，6.1 dBである。

以上は，一次放射器を片側より励振した場合であったが，これを両側より励振し，しかもその開口長を変化させた場合の励振損失の変化を測定すると図14のようになる。ただし，開口部の長さの変化はスリットをアルミ箔により被うことにより行なった。

6 界分布測定

励振器による伝送姿態を励振する場合に問題となることは基本姿態の単一伝送が励振点よりどの程度の距離で実現し得るということである。

本節では反射板の幅方向および伝送軸方向の界分布を測定し，その結果を示す。

励振器として地上用および車上用励振器を用いて行なったが両者の結果にはほとんど差異がないので，ここでは地上用励振器による結果のみを示す。

測定周波数は9.4GHzで，受信アンテナとしてWRJ－10用同軸導波管変換器を使用した。写真5は受信部を示す。

測定結果を図15に示す。図中点線は理論値である。

励振点より30m付近においてはまだ不要姿態を含み，界分布の変形が少々見られる。60m付近になると基本姿態の伝送が実現していると言える。

図16は伝送軸方向に測定した界分布を示すものである。界分布の変動は励振器付近ほどはげしい。これは励振器が一方向に伝搬する素波のみを励振していることから生じる当然の現象である。伝送線路の後半部で，すでに反射板の幅

42.3.7

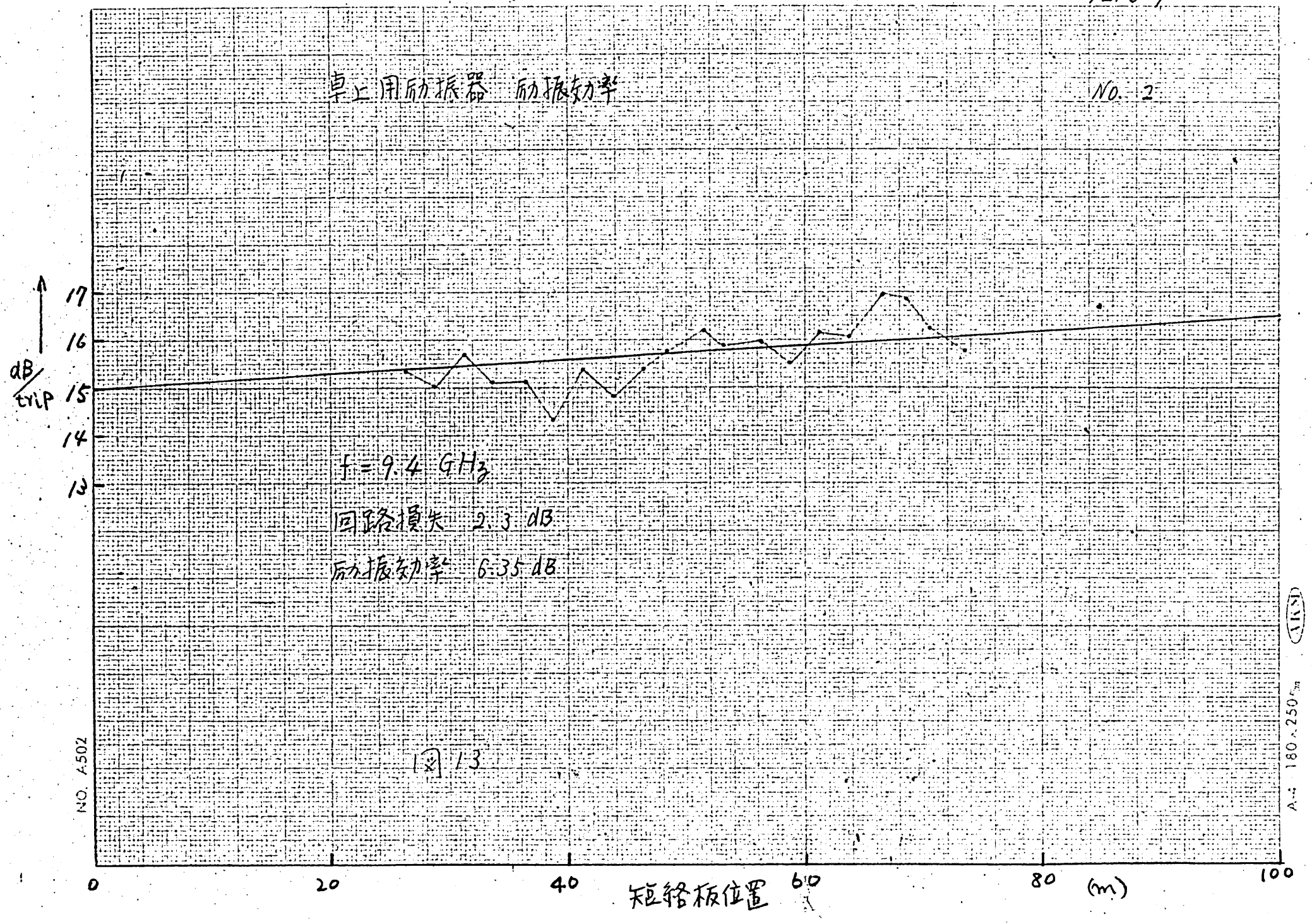


図13

NO. A502

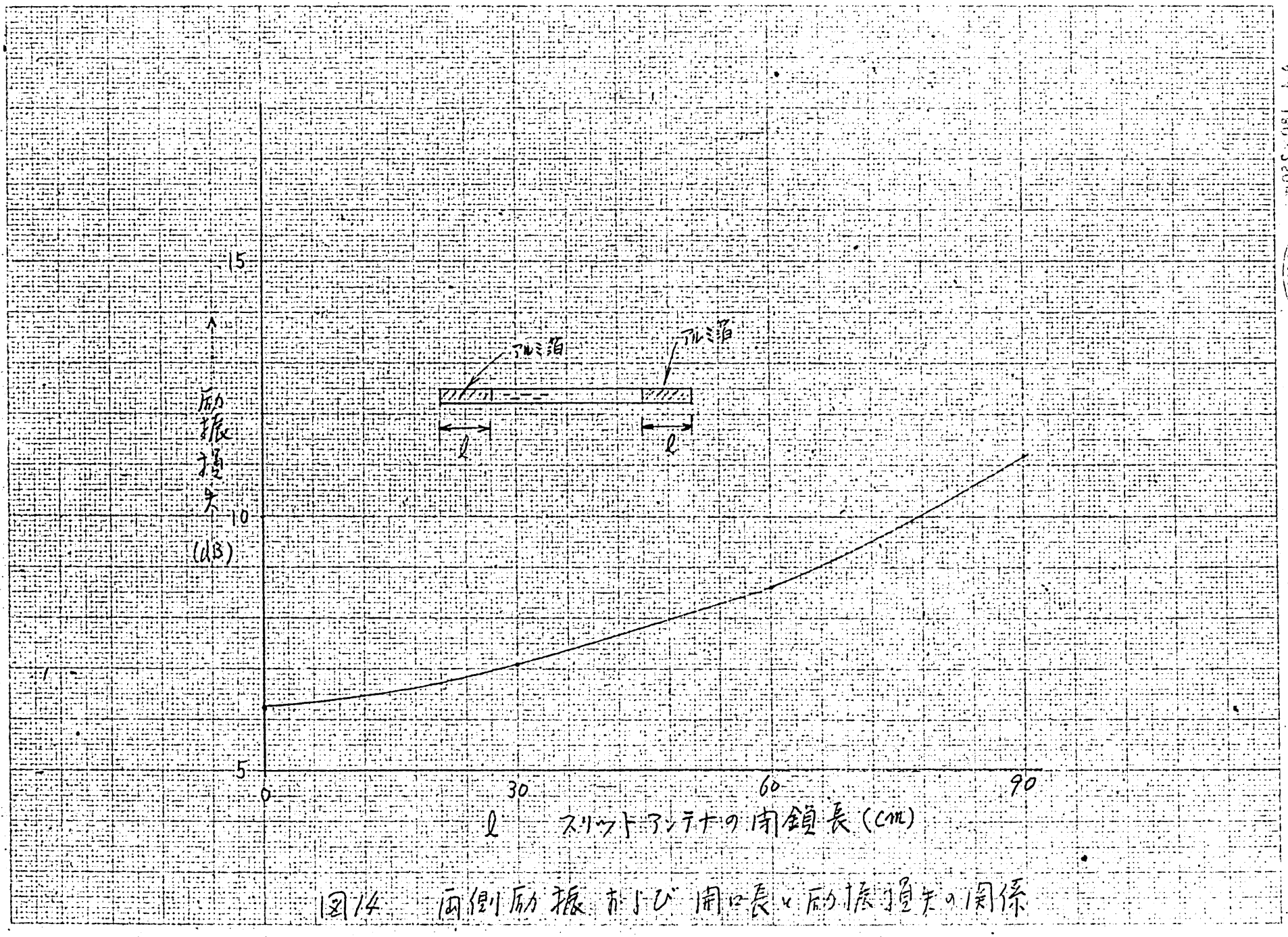


図14 両側励振および開口長と励振損失の関係

42. 3. 2.

NO. 3

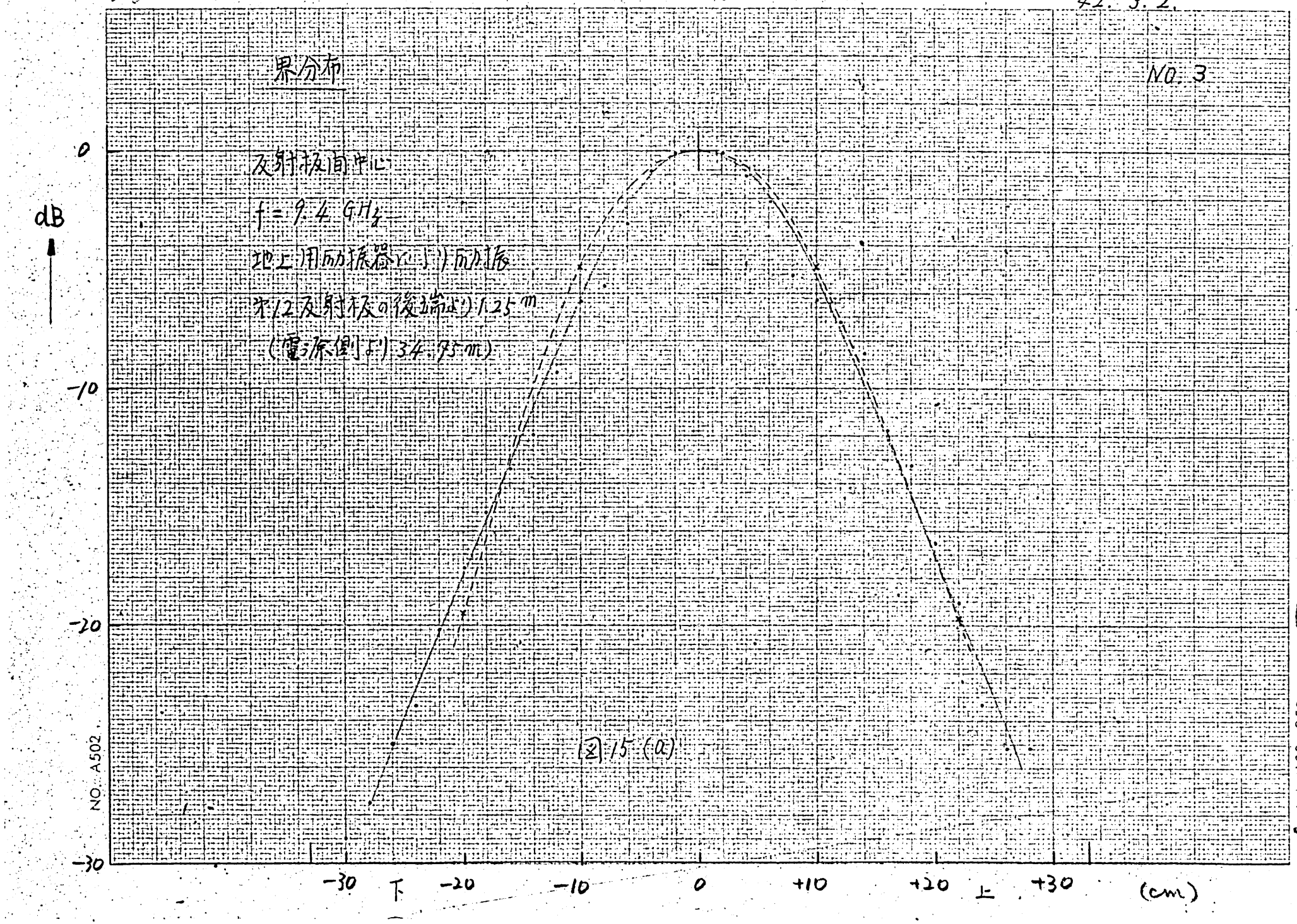


図15 (a)

NO. A502
A-4 180×250 mm
AKM

42. 3. 2

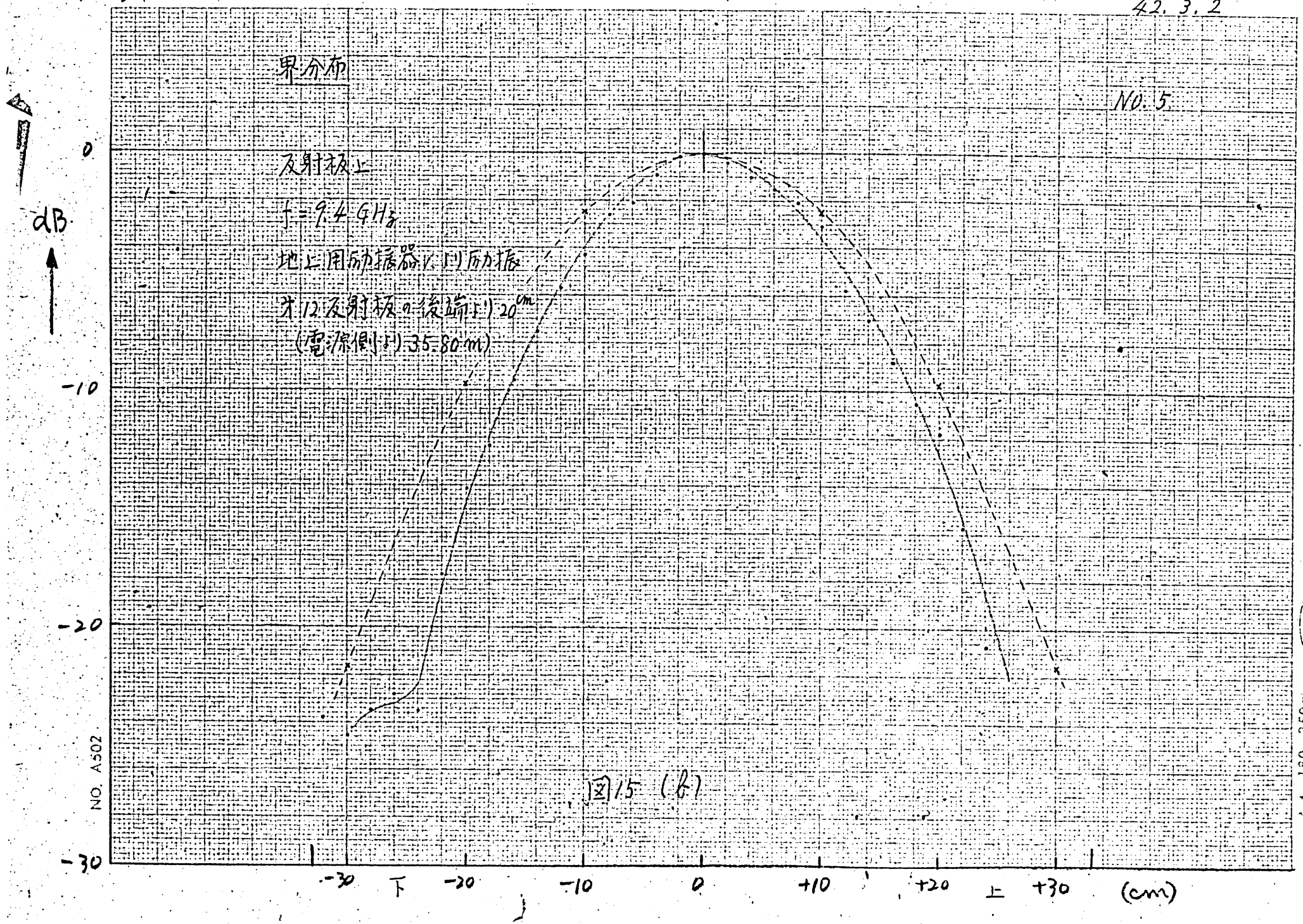
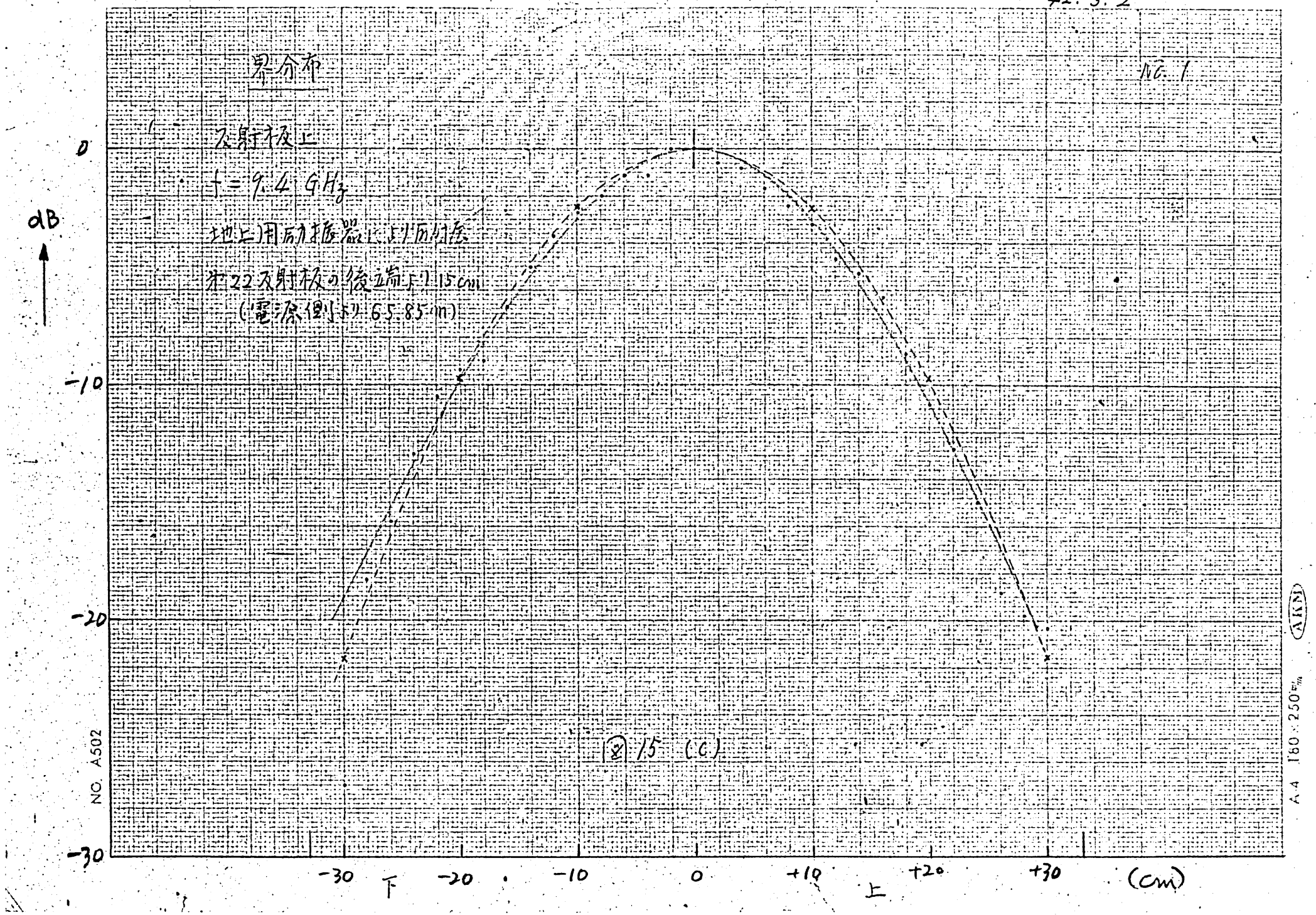

界分布
NO. 5
反射板上
f = 9.4 GHz
地上用励振器により励振
第12反射板の後端より20cm
(電源側より35.80m)
dB
0
-10
-20
-30
-30
下
-20
-10
0
+10
+20
上
+30
(cm)
NO. A502
A4 180 · 250 mm
AKM

図15 (b)

42. 3. 2


界分布

反射板上
f = 9.4 GHz
地上用励振器により励振
第22反射板の後端より15cm
(電源側より65.85m)

図15 (c)

下

上

42. 3. 2

NO. 2

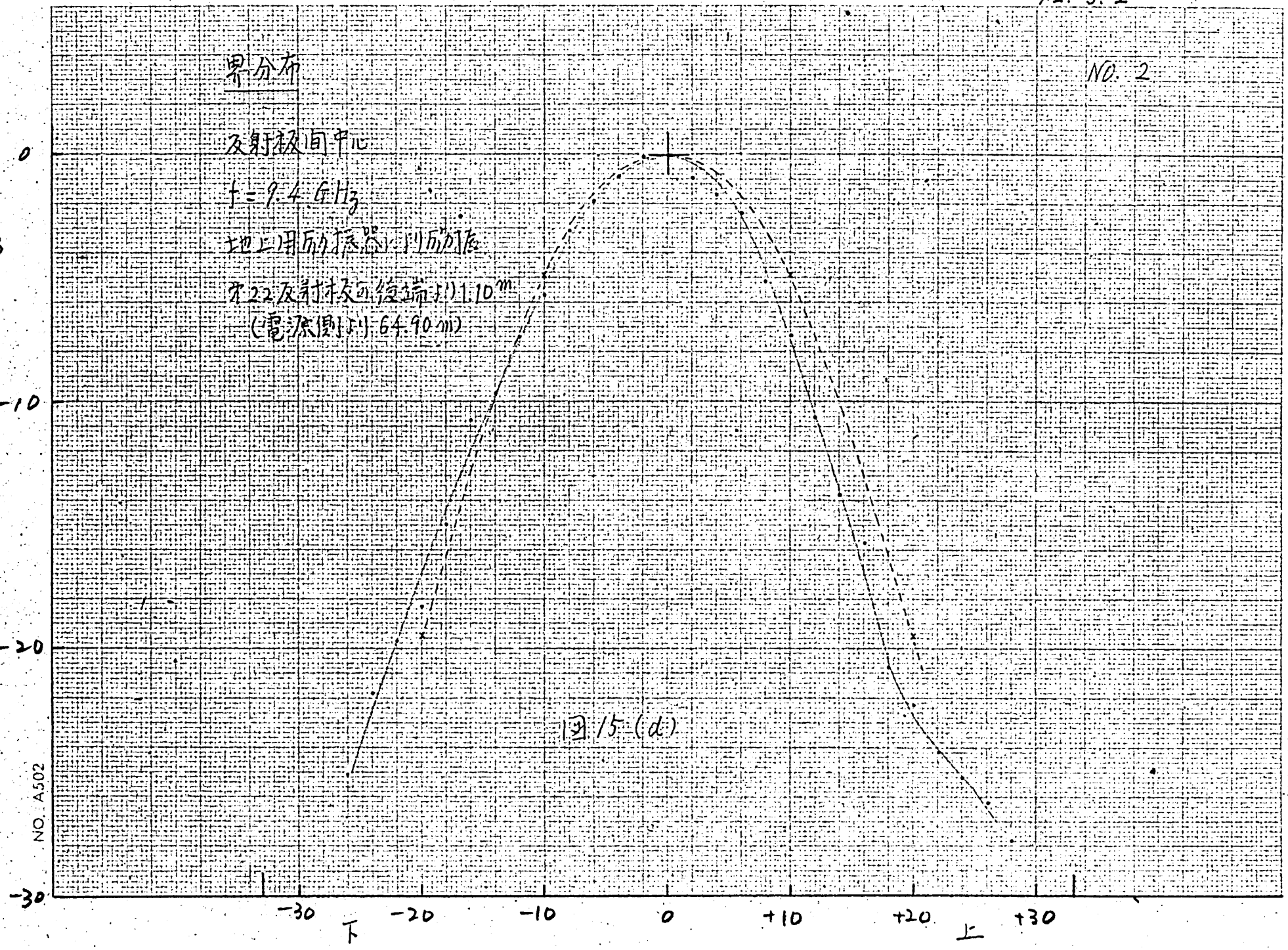


図15 (d)

NO. A502
A-4 180×250mm

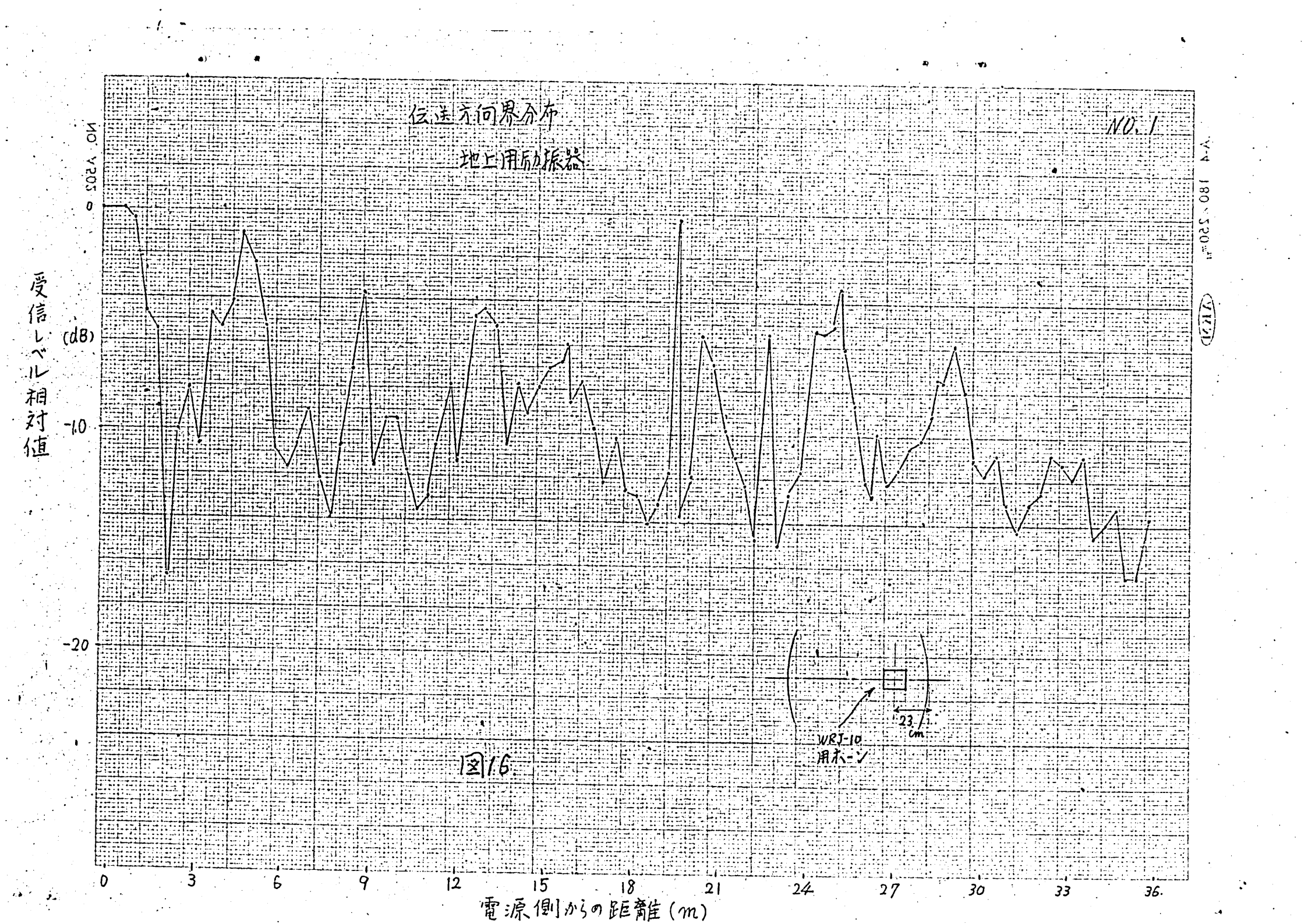
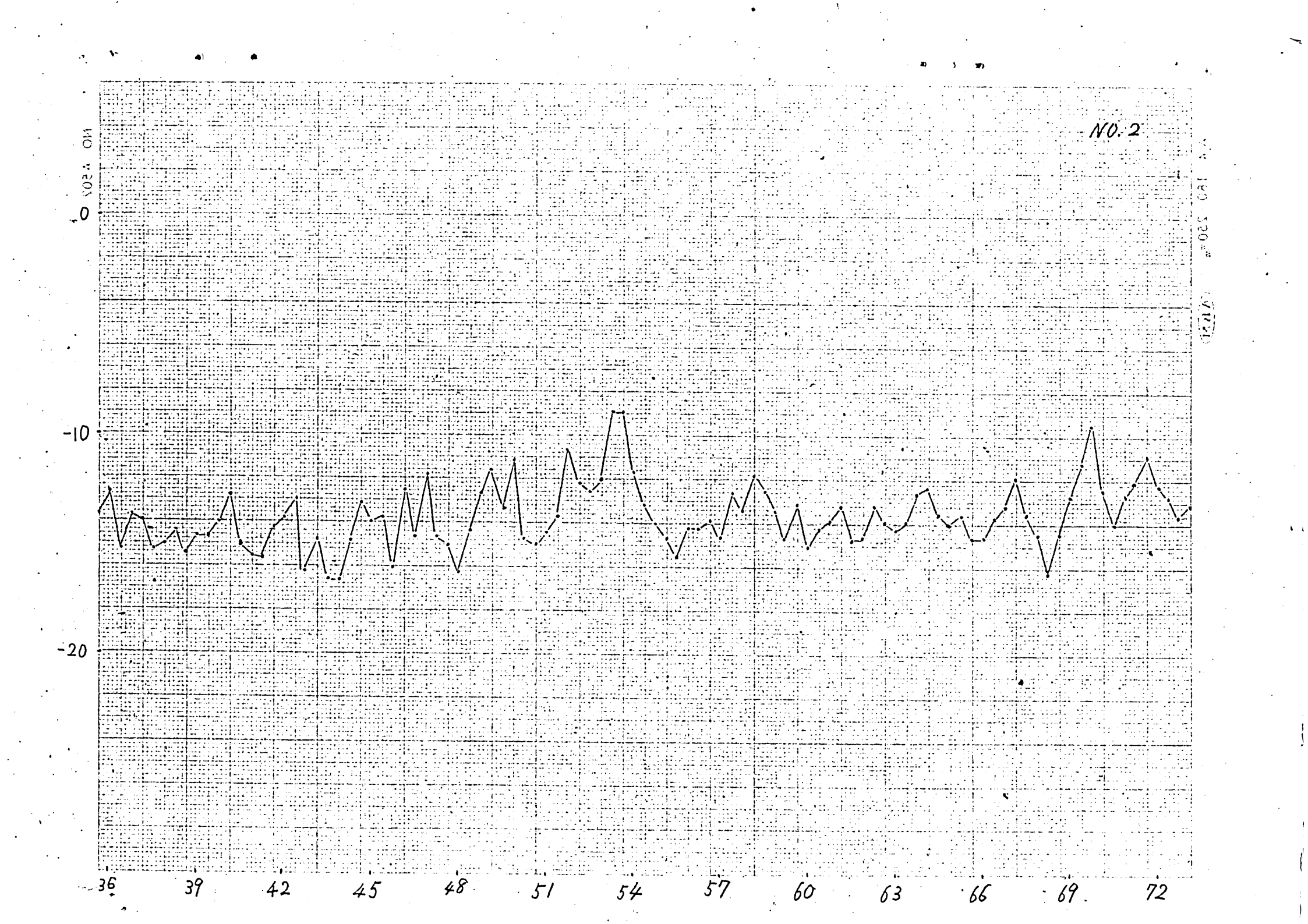

伝送方向界分布
地上用励振器
NO. 1
受信レベル相対値
(dB)
0
-10
-20
0
3
6
9
12
15
18
21
24
27
30
33
36.
電源側からの距離(m)
WRJ-10
用ホーン
23 cm

図16.


NO. 2
0
-10
-20
36
39
42
45
48
51
54
57
60
63
66
69
72

方向には基本姿態が形成されている領域でなお軸方向に脈動しているのは反射板単体間の接続部，および設定の不整，反射板単体そのものの不整等々により発生する高次姿態（主として素波方向のわずかに異なるガウス分布姿態）との結合によるものであると考えられる。

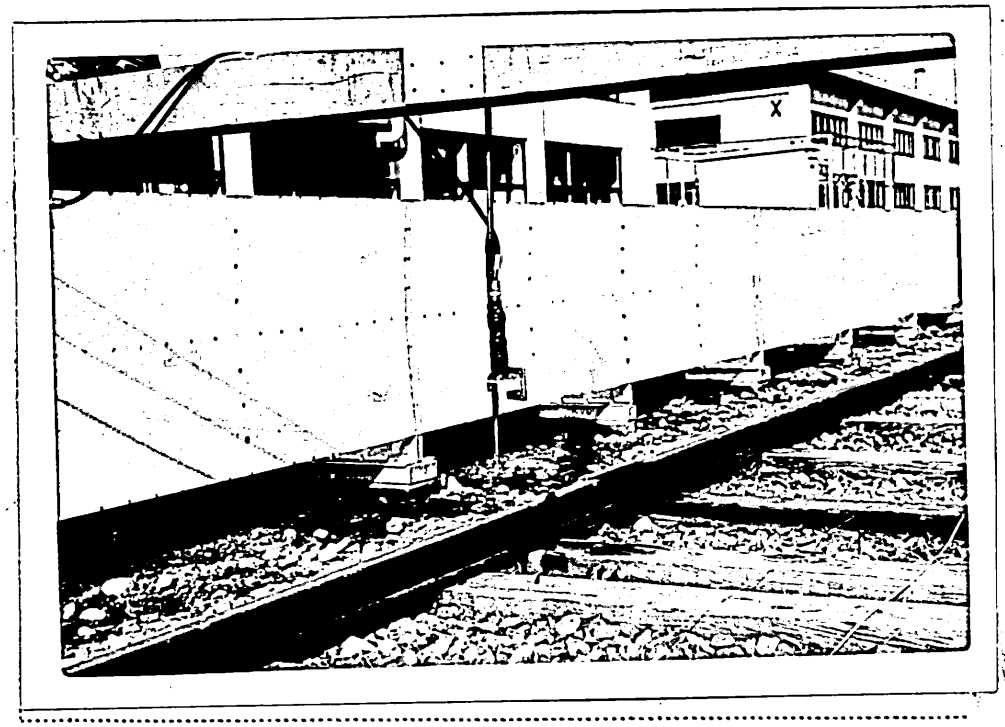


写真５　界分布測定用アンテナ

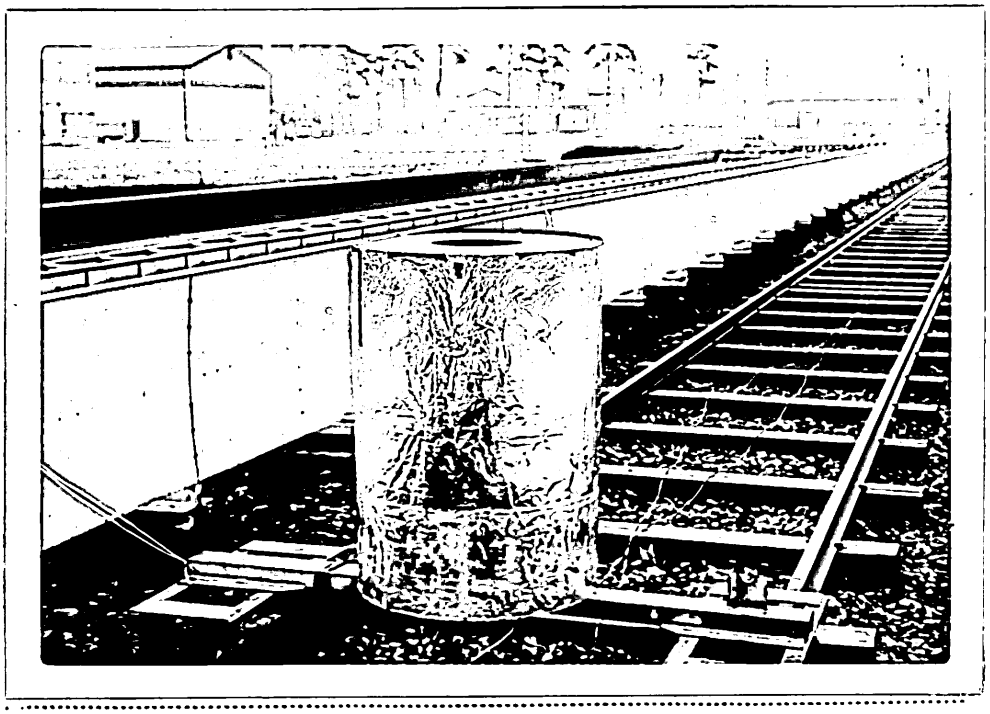


写真６　探　知　実　験

7. 探知実験

本システムの目的は鉄道における障害物探知であり，本節では，種々の模擬障害物による反射波のレベルを測定し，その結果を記す。写真6は探知実験の様子を示している。

図17は，探知実験の結果を示している。図において横軸は障害物の位置を，縦軸は入力パルスに対する反射パルスのレベル差を示す。ただし，このレベル差には往復の励振損失12 dB が含まれている。ただし，測定結果は地上用励振器を用いて行なったものである。車上用励振器を用いて行なう場合は励振損失の差を除いて大きな差異はない。

表2は，各種の障害物による反射波の入射波に対するレベル差を示している。

表2． 障害物探知実験

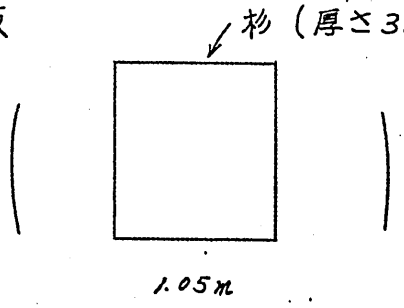
(注) 1. 反射損失は往復の励振損失（地上用励振器：往復の損失12 dB）を含んでいる

2、励振器は地上用励振器

3. 測定位置は電源側より 63～75 m。

1. トロッコ　　最大 -52.5 dB

2. 板

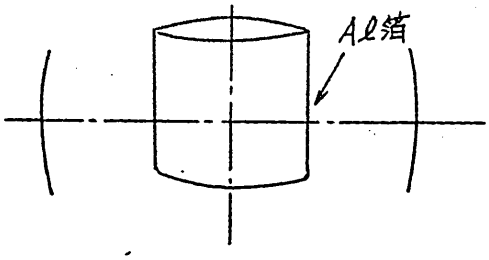


最大 -31.5dB

3. 板　2. と同じ板（反射板に平行に設置）

最大 -56.5 dB

4. 円筒（1m φ）　（天候 小雨）



最大 -31.7 dB

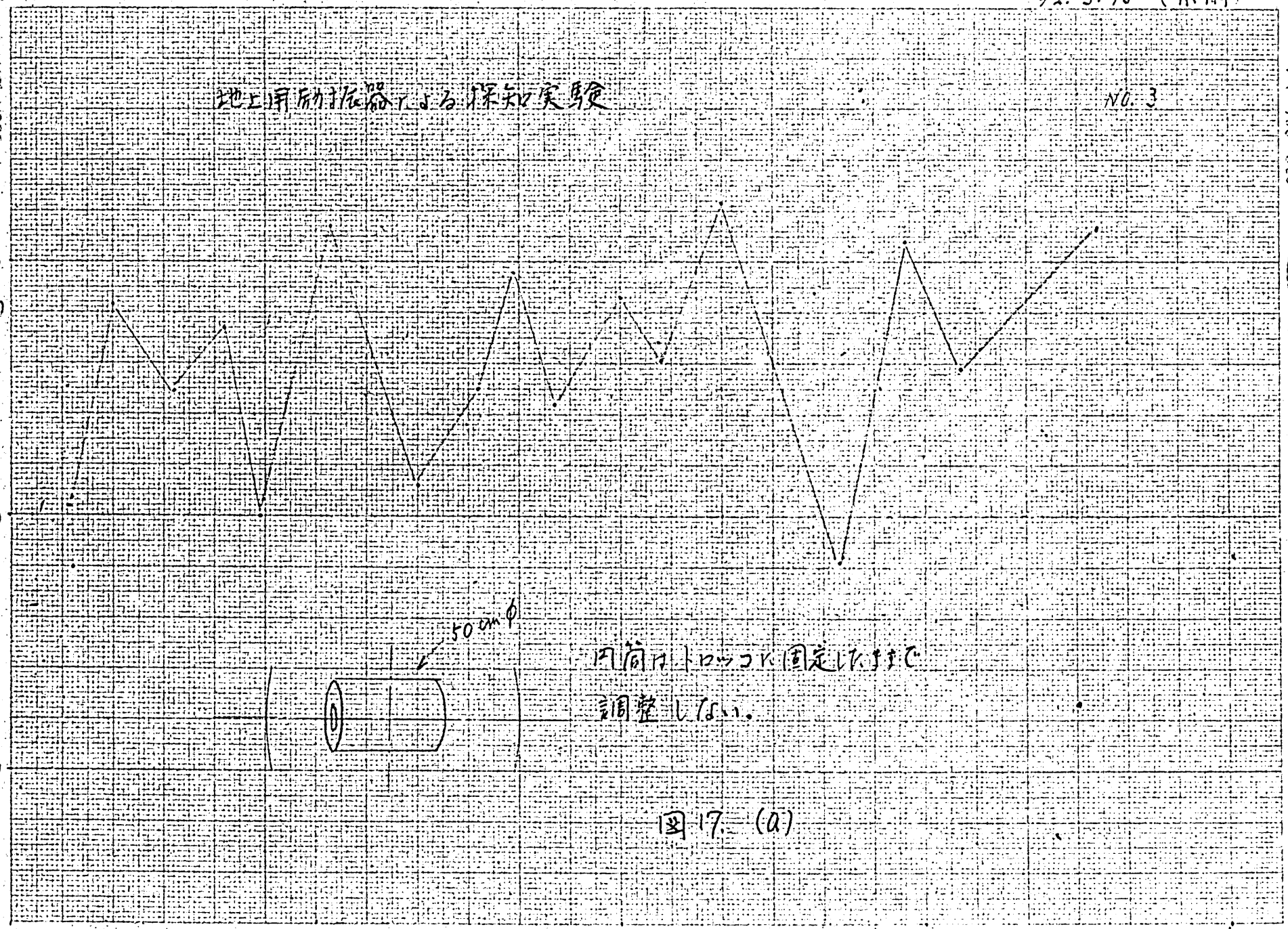

'42. 3. 18 (小雨)
地上用励振器による探知実験
NO. 3
-30
(dB)
-40
-50
50cm φ
円筒はトロッコに固定したままで
調整しない。
63
66
69
72
75
電源側よりの距離(m)
及射損(往復の励振損失を含む)

図17. (a)

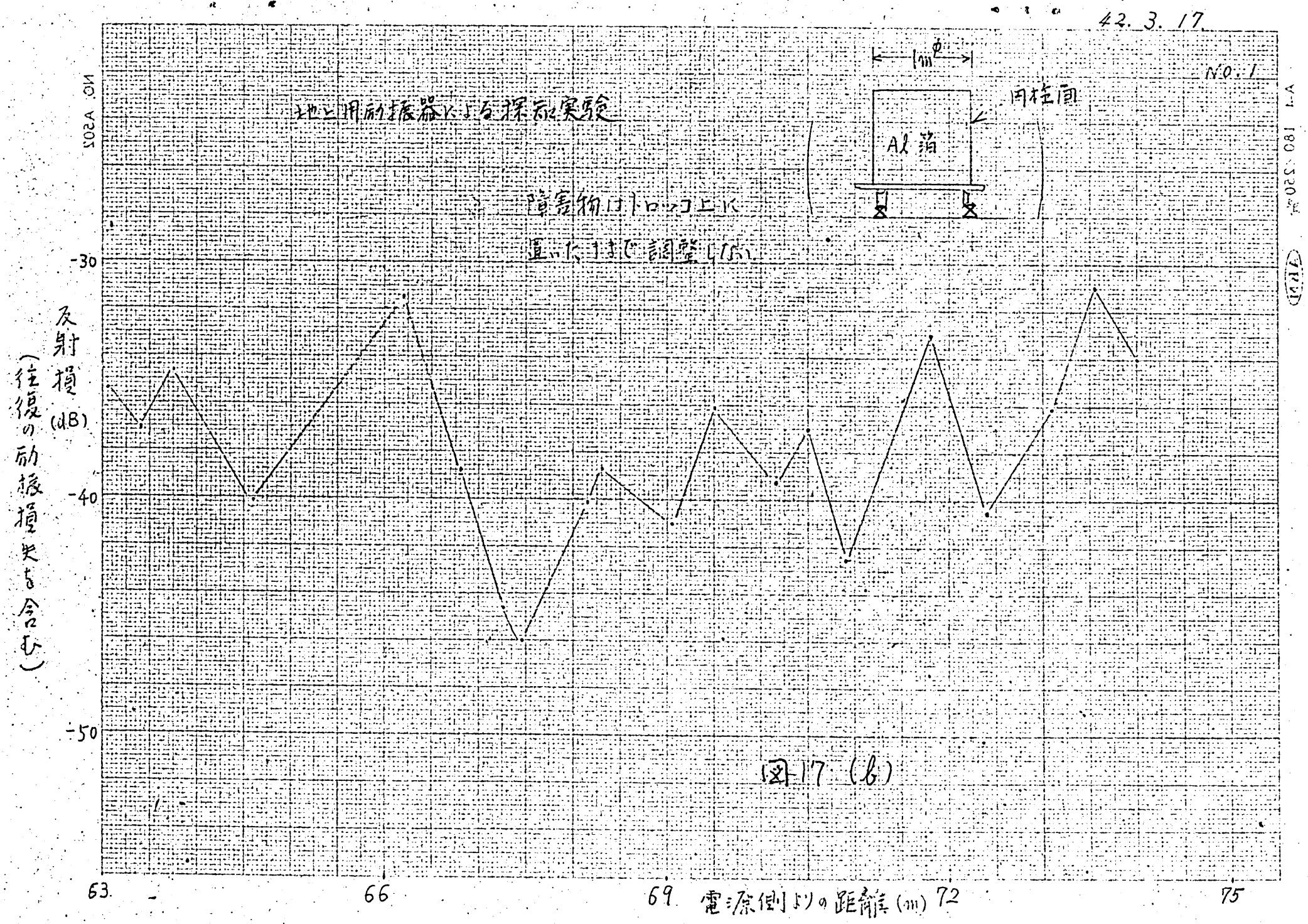
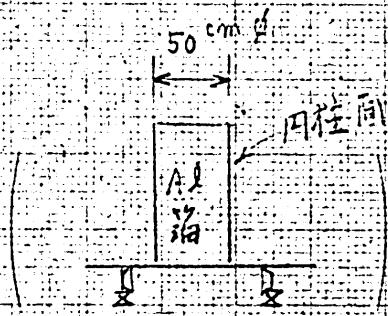

42. 3. 17
NO. 1
地上用励振器による探知実験
障害物はトロッコ上に
置いたままで調整しない
1m φ
円柱面
Al 箔
反射損 (dB)
(往復の励振損失を含む)
-30
-40
-50
63
66
69
72
75
電源側よりの距離 (m)

図17 (b)

42. 3. 27

NO. 2

地上用励振器による探知実験



障害物はトロッコ上においたままで調整しない。

-30

(dB)

-40

-50

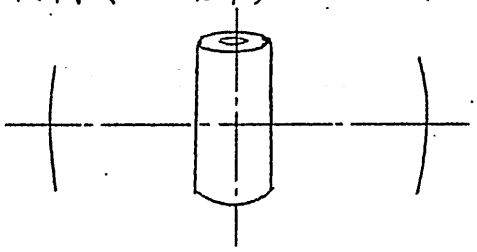
反射損（往復の励振損失を含む）

63 66 69 72 75

電源側よりの距離 (m)

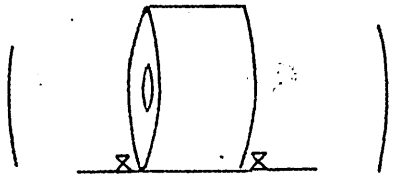
図17. (C)

5．円筒（50cmφ）　　（天候　小雨）



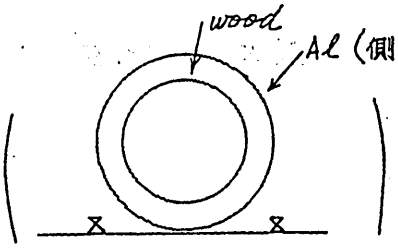
最大 −32.9 dB

6．円筒（1mφ）　　（天候　小雨）



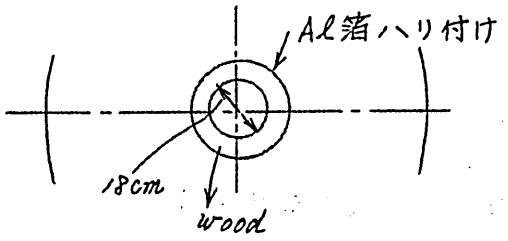
最大 −27.3 dB

7．円筒（1mφ）　　（天候　小雨）



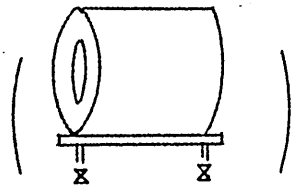
最大 −39.4 dB

8．円筒（50cm φ）　　（天候　小雨）



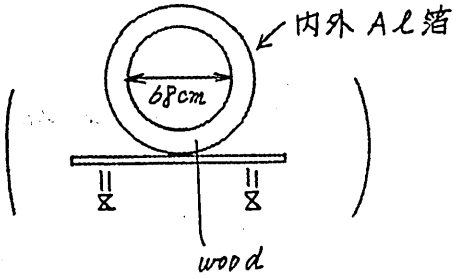
最大 −40 dB

9．円筒（1mφ）　　（天候　小雨）



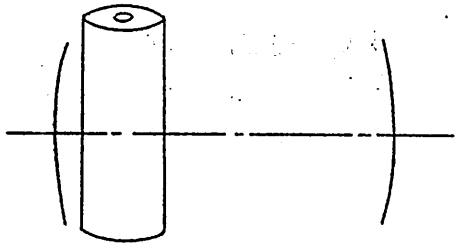
最大 −43.7 dB

10．円筒（1mφ）



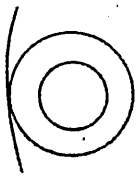
最大 −32.3 dB

11. 円筒（50cmφ）



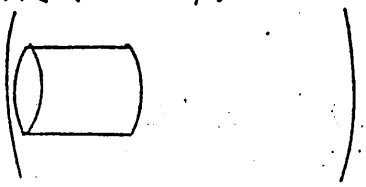
最大　32.8 dB

12. 円筒（50cmφ）



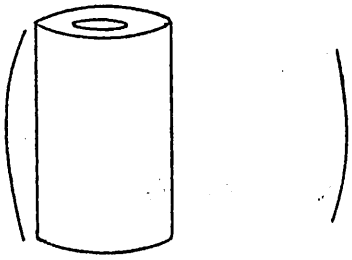
最大　33.0 dB

13. 円筒（50cmφ）　（雨）



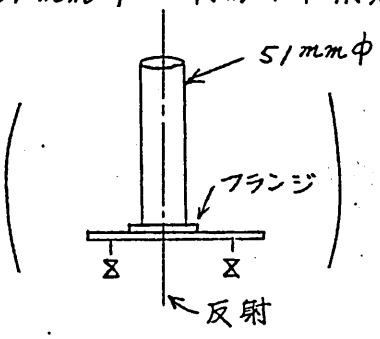
最大　29.5 dB

14. 円筒（1m φ）　（大粒雨）



最大　30.9 dB

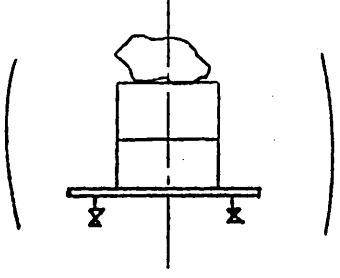
15. 51mm φ　円形WG用無反射終端　（くもり空）



調整なし

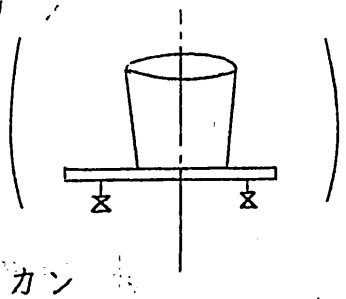
最大　43.7 dB

16. 石（コンクリート．ブロック）



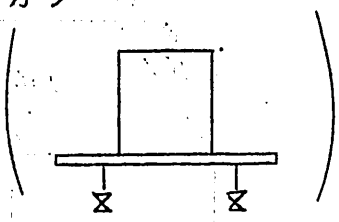
最大　35.2 dB

17. バケツ



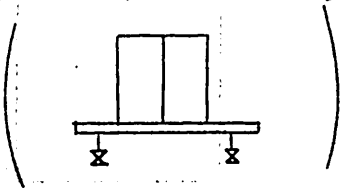
トロツコの反射のみ

18. 石油カン



最大　32.2 dB

19. 石油カン（後部が前面）



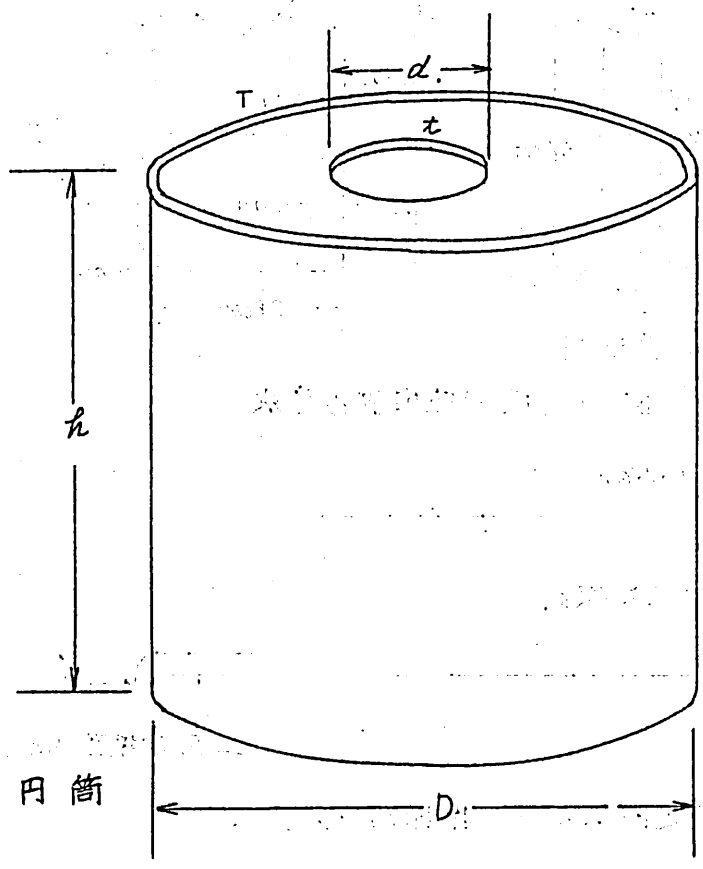
最大　44.5 dB

20. 人（直立）

最大　44.5 dB

21. 人（座）

最大　43.1 dB



(a) 円筒

D = 50 cm
h = 70 cm
d = 18 cm
T = 1 cm
t = 2 cm
木材　杉
Al箔　外側面のみ

D = 100 cm　h = 70 cm
d = 68 cm　T = 1 cm
t = 2 cm
杉
Al箔　内外側面

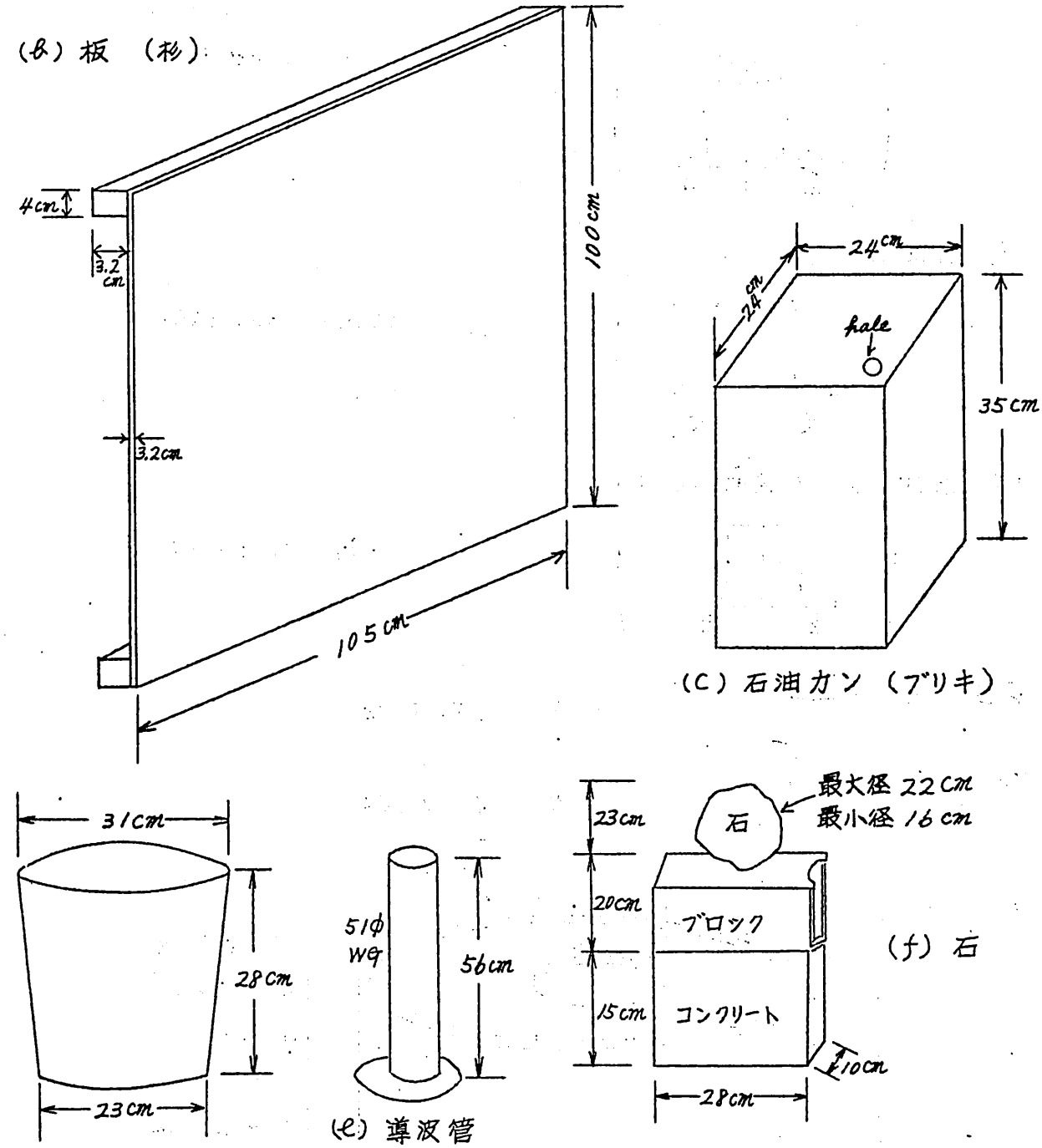


図18．模擬障害物の寸法

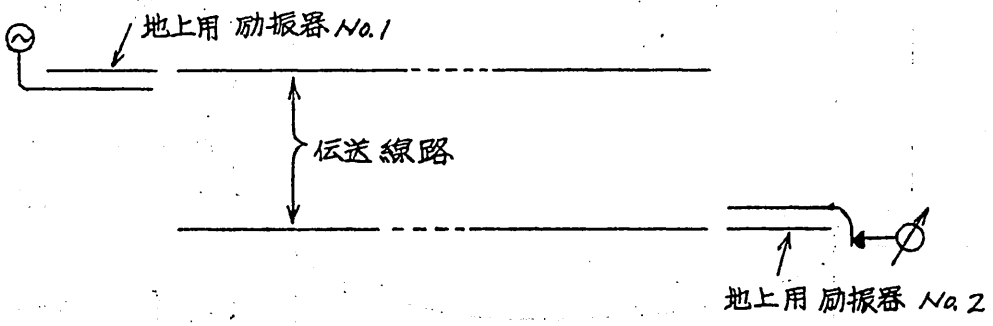
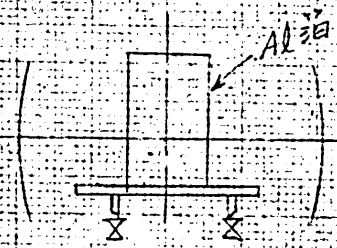


図19．固定閉塞式障害物探知システム

地上用励振器による探知実験

No. 1



受信レベルの相対値 (dB)

0
-5
-10

0 6 12 18 24 30 36 42 48

電源側からの距離 (m)

図 120

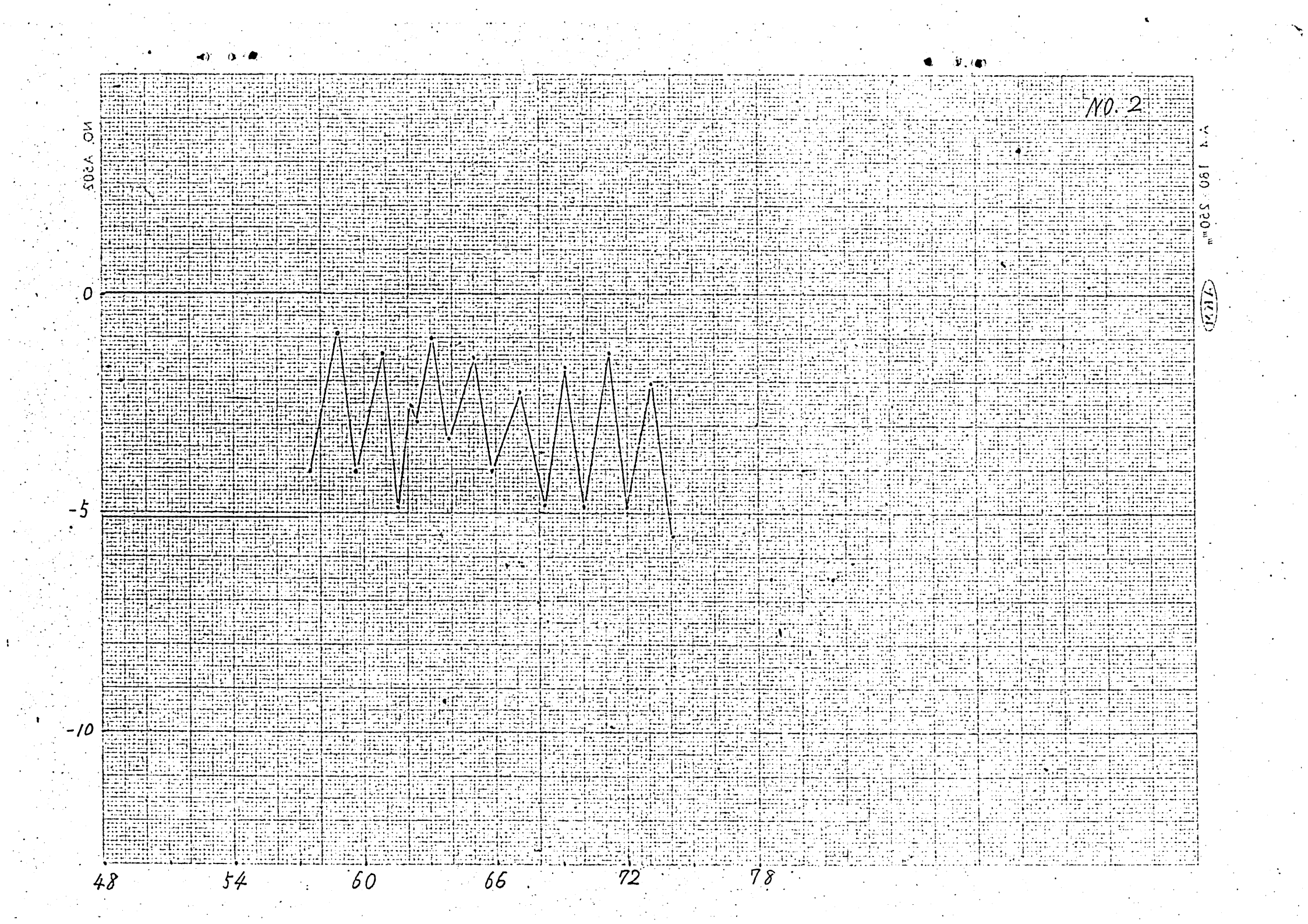

NO. 2
0
-5
-10
48
54
60
66
72
78

図18は　障害物の寸法，材料等を示している。

以上は，送信波に対して反射波を受けるという通常のレーダーシステムによる探知実験であるが，これを図19のような固定閉塞システムで行なうと，受信端における受信パルスのレベル変動は障害物の位置に対して図20のようになる。

図において，0 dB は障害物のない場合のレベルである。

8. むすび

以上の各節において，各種の特性の測定結果を述べた。

以上の資料にもとづいて作成した障害物探知システムのレベル設計例を表3に記す。

表3．障害物探知システムのレベル設計例

(1) 送信機の出力レベル	76 dBm (40KW)
(2) 熱雑音レベル	−107 dBm (5Mc band)
(3) 全 S/N 比	10 dB
(4) 励振損失	6 dB × 2
(5) 受信画像積分効果による雑音抑制	10 dB
(6) 許容損失 (1)−(2)−(3)−(4)+(5)	151 dB
(7) 反射損失	60 dB
(8) 伝送損失 8 dB/Rm	
探知可能距離 {(6)−(7)}/2 × (8)	5.7 km

参　考　文　献

(1) 熊谷信昭，吉田健一，中原恒雄："反射形ビーム・ウエーブガイド"
信学誌，49，6，PP51-58（昭41-06）.

(2) 中原恒雄，倉内憲孝："平行反射板形電磁波ビーム伝送方式"，
本研究会資料（昭40-07）.

(3) T. Nakahara & N. Kurauchi : "Guided Beam Waves Between Parallel Concave Reflectors", IEEE Tarans. MTT, Vol. MTT-15, No.2 PP66-71 (Feb. 1967).

研技弱 —337　　輻射科学研究会資料

円形漏洩導波管（第2報）

1967年5月26日

於　住友電工

中原桓雄
倉内憲孝
木谷博

住友電気工業株式会社

═目　次═

1．緒　　言 …… 1

2．円形漏洩導波管の特性 …… 1
2.1　構　　造 …… 1
2.2　使用周波数帯と輻射角 …… 1
2.3　減　衰　定　数 …… 2
2.4　そ　の　他 …… 3
(1)　曲がりにおけるTE$_{01}$モードのモード変換の減少 …… 3
(2)　円形漏洩導波管の材質 …… 3

3．列車前方障害物探知（漏洩波擬レーダー方式）への応用 …… 3
3.1　方　式　の　概　念 …… 3
(1)　原　　理 …… 3
(2)　障害物による波形の変化 …… 4
3.2　漏洩導波管系 …… 5
(1)　構　　成 …… 5
(2)　平面反射板の構造 …… 5
(3)　近端結合の軸方向分布特性 …… 5
3.3　探　知　実　験 …… 6
3.4　最大探知距離 …… 7

4．導波管列車通信への応用 …… 8
4.1　これまでの経過 …… 8
4.2　おもな電気特性 …… 9
(1)　指　向　性 …… 9
(2)　結合度の変動 …… 9
4.3　レベル設計例 …… 9
(1)　単一導波管方式 …… 9
(2)　副導波管方式 …… 9
4.4　従来の方式との比較 …… 10

5．結　　言 …… 10

1. 緒　　言

TE_{01}モードを伝送モードとする円形導波管に[redacted]漏洩孔を設けた円形漏洩導波管は、伝送損失が小さい、周波数特性が広帯域であるなどの良い特性を持っている。筆者らはこのことに注目し、内径132 mmφのアルミ管に直径約10mmの漏洩孔をさん孔した円形漏洩導波管を製作し、その特性、およびこの円形漏洩導波管を、列車前方障害物探知（漏洩波、擬レーダー方式[1]）に応用した実験装置の特性については、1966年7月の本会[2]において報告した。

本論文は前回に引きつづいて上述の実験装置を鉄道技術研究所へ布設し、障害物探知実験を行ったので、その結果と、円形漏洩導波管の別の応用として導波管列車通信を考えて若干の実験を行ったので、その結果について述べる。

2. 円形漏洩導波管の特性

円形漏洩導波管の特性については、1966年の本会で詳述しているのでここでは概略について述べる。

2.1 構　　造

円形漏洩導波管は、内径132 mmφのアルミ管に漏洩孔を数列さん孔し、その上に気密のために強化プラスチックスを外装した構造となっている。

第1図は、漏洩波擬レーダー用円形漏洩導波管である。

第2図は、列車通信用の円形漏洩導波管である。

2.2 使用周波数帯と輻射角

用途別使用周波数帯は次の通りである。

漏洩波擬レーダー	9,375 MHz
列　車　通　信	7,200～7,800 MHz

漏洩孔の軸方向の間隔は14 mmとなっている。この間隔は、自由空間波長に比べて充分小さく、高次の輻射はない。したがって電磁波は次式を満足する方向に輻射する。

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

ここで、

θ ： 輻 射 角

λ_0 ： 自由空間波長

λ_g ： 管内波長

用途別の輻射角を次に示す.

漏洩波擬レーダー	17.2°（9.375 MHz）
列車通信	21.1°（7,500 MHz）

2.3 減衰定数

第3図に漏洩波擬レーダー用漏洩導波管の減衰定数（単一パルス法による実測値）、およびアルミ系管の減衰定数（理論値）の周波数特性を示す. 周波数特性はあまりなく平坦である。

9.4 GHz 附近での減衰定数は次の通りである。

漏洩波擬レーダー用漏洩導波管（漏洩孔径 10.4 mmφ） 5.8 db/km

アルミ素管（55%導電率） 1.087 db/km

漏洩導波管の減衰定数中の熱減衰定数を第4図に示すような関係のグラフより求めた。その結果、熱減衰定数は約2 db/km と推定される。この値とアルミ素管の理論値との差約1 db/km は、寸法誤差、漏洩孔によって発生するモード変換や、表面あらさによる熱損失などの損失増と考えられる。一方、5.8−2.0 = 3.8 db/km が輻射減衰定数であると考えられる.

第4図で、横軸は減衰定数であり、縦軸は電力量で、A,B,Cはおのおの次の条件における電力である。

A：導波管が完全導体（$\alpha th = 0$）の場合において、管内を通過する電力を 0 db とし、導波管長を1 mとした場合における輻射電力の理論値

B：導波管の熱減衰定数 αth を2 db/km とした場合の輻射電力の理論値

C：1 mの間隔で平行に置かれている開口長1 mの2本漏洩導波管の間の結合損失（db 値）の半分.

第5図に列車通信用漏洩導波管の減衰定数（Q測定法による実測値）の1例を示す。

7.5 GHz 付近での減衰定数は次の通りである。

列車通信用漏洩導波管（漏洩孔径 6 mmφ） 2.5 db/km

アルミ素管（55%導電率） 1.567

第4図に示すような実験による熱減衰定数の評価は行なってないが、別に行った理論計算によると、上の漏洩導波管の輻射減衰定数は 0.04 db/km である.

したがって上述の漏洩導波管とアルミ素管の減衰定数の差約1 db/km は

前述と同様の損失増と考えられる．

2.4　その他

(1) 曲がりにおけるTE01モードのモード変換の減少　曲がりにおいてTE01モードからTM11モードへモード変換するのを防ぐために、従来の円形導波管では誘電体を内装し、縮退を解く方法がとられて来ているが．円形漏洩導波管においては、漏洩孔が誘電体と同様の機能を有する。したがって、これによって従来の誘電体内装をなくすることができるという経済効果がある．

(2) 円形漏洩導波管の材質　円形漏洩導波管は、従来のTE01モードを伝送する強化プラスチックスを主材料とするらせん漏洩導波管に比べて材質がアルミであるため経済的である．しかし、将来さらに堅牢な漏洩導波管が必要であり、この場合にはアルミに代って銅メッキ鋼管を用いることが必要であろう。この銅メッキ鋼管の製造技術[7]は、すでにミリ波多重伝送用導波管として確立されている。しかしながらこの場合においては若干経済性の面では不利となろう．

円形漏洩導波管は、モード・フィルター作用を持っていない。このため100m以上の間隔で、らせん導波管に漏洩孔を設けたらせん漏洩導波管を必要とする。

3．列車前方障害探知（漏洩波擬レーダー方式）への応用

3.1　方式の概念

(1) 原　理　漏洩波擬レーダー方式の原理図を第6図に示す．漏洩波擬レーダー方式は、パルス変調波を送信する送信機とそれを受信する受信機、軌道の両側に布設される2本の漏洩導波管 G_t，G_r とから構成される。導波管 G_t の一端に接続されている送信機Tより送信されたパルス変調波は、導波管 G_t 内を伝送され同時に輻射され．軌道を越えて他の導波管 G_r に達する。2本の導波管 G_t と G_r との輻射角 θ_t と θ_r が補角をなしているとき2本の導波管の間には近端結合が生じ．その結果．受信機Rに信号が到達する．

軌道上に何ら障害物が存在していないときは、受信機のオシロスコープには、鋭い立ち上がりと、導波管の伝送損失に比例してなだらかに減衰していくパルスが観測される。軌道上のある点Bに障害物があると、輻射波は障害物で遮断され受信機に達しない。その結果．点Bに相当す

る時刻 t_B において波形は落ち込み、これにより障害物を探知することができる。

(2) 障害物による波形の変化　パルス変調波のパルス幅が狭ければせまいほど、また、輻射角 θ（導波管軸と輻射方向のなす角）が小さいほど小さい障害物を探知することが可能になる。また、θ が直角であるよりも鋭角である方が導波管 G_r に映る障害物の影の長さ l は長くなり、探知能力は向上する。この節では、パルス幅、輻射角、障害物の大きさと波形の落ち込みの関係などについて述べる。

第7図に輻射角が直角である場合の様子を示す。今パルス幅が τ であるパルスが導波管 G_t の左から右へ進行していく場合を考える。パルスの波頭Cが障害物の左の端の点Aに到達するまでは導波管 G_t と G_r の間には一定の結合が生じる。波頭Cが時刻 t_1 に相当する点Aを通り過ぎた後は、輻射波は障害物によって一部遮断される。そして波尾DがAを通り過ぎる時刻 t_2 後は障害物より左の領域では結合は生じない。時刻 t_1 から時刻 t_2 においては結合は直線的に減少していく。波頭Cが点Bを通り過ぎる時刻 t_3 を過ぎた後は、障害物より右の領域での結合が生じ始める。波尾Dが点Bを通り過ぎる時刻 t_4 の後は、もはや輻射波は障害物で遮断されることがない。時刻 t_3 から時刻 t_4 においては結合は直線的に増加していく。第7図(b)、(C)は上述の説明から予想される応答波形を示したもので、太い実線が総合的な応答波形である。

探知能力を示す一つの量としてここでは残留電圧という量を定義した。残留電圧は障害物があったとき、落ち込んだ点での電圧を、障害がないときの電圧で割ったもので、次式で示される。

$$V_r = \begin{cases} \dfrac{2l}{\tau v_g} \cdots\cdots\cdots \left(l < \dfrac{\tau v_g}{2}\right) \cdots\cdots\cdots ② \\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots \left(l > \dfrac{\tau v_g}{2}\right) \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

ここで

τ ： パルス幅
v_g ： 導波管内の波の群速度
l ： 導波管上に映る影の長さ

影の長さ l は輻射角 θ，障害物の大きさ、存在状態などによって異なってくる，第8図は模擬障害物として円筒や板を軌道上に置き、そのとき

幾何学的に生じる障害物の影を示したものである。第9図は、第8図の関係を用いて計算したパルス幅τと探知可能な障害物の大きさとの関係を示したものである。同図では輻射角が90°および17.2°、探知可能な残留電圧が0および$1/\sqrt{2}$の場合を例に挙げている。

3.2 漏洩導波管系

(1) 構　　成　　漏洩導波管系は、第10図～第12図に示すように円形漏洩導波管、放物柱反射板、平面反射板の3種の部品から成り立っている。円形導波管は軌道の両側に3mの間隔で配置される。放物柱反射板は、2本の漏洩導波管の間の結合を強くするために用いられるもので、反射板の焦点に漏洩導波管の漏洩孔がくるように設置される。平面反射板は第10図に示すように、2本の漏洩導波管の間に近端結合が生じるようにするために用いられる。パルス変調波は導波管G_tに送り込まれた後伝播し、一部は輻射角θで管外へ輻射される。輻射波は放物柱反射板上の点Qで反射された後、軌道を越えた反対側の放物柱反射板上の点Rに達して再び反射される。その後、この輻射波は平面反射板に向い、板上の点Sでさらに反射されて導波管G_rに入射し、2本の導波管の間に近端結合が生じる。

(2) 平面反射板の構造　　送信機に接続される導波管G_tの輻射角θ_tは17.2°であるので、受信機に接続される導波管G_rの輻射角G_rは162.8°にする必要がある。漏洩導波管自身の輻射角は、式から計算されるように、90°以下に限られる。したがって導波管G_rには不要の輻射を生ぜしめることがなく、また結合の調整が容易な何らかの結合素子を設ける必要があり、この結合素子として平面反射板（第13図）を設計した。平面反射板は幾何光学的な考えと、波動的な考えとの両方の考えに基づいて設計し、平面反射板の間隔をp、高さをhとすると

$$h = p \tan 17.2°$$

とした。　装置に実際に採用した平面反射板の間隔pは$6\lambda_g$、すなわち周波数9,375 MHzで201mmである。

(3) 近端結合の軸方向分布特性　　近端結合の軸方向の分布は、導波管に沿って一定の開口長を移動しその際2本の漏洩導波管の間に生じる連続波による結合を測定することにより行なった。開口部は導波管を一部を除いて遮蔽することにより形成した。第14図は開口長が2m、および4mの場合の近端結合の分布特性を示している。結合量は開口長が2mの

場合に約－70 db である。開口長が4 mの場合は2 mの場合に比べて約6 db 増加している。これは結合電圧が開口長に比例していることを意味する。平面反射板の位置を回転し、放物柱反射板が結合に関与しないようにした場合の結合量も実測した。その結果、結合量は2 m開口で－80 dbであった。したがって、放物柱反射板による結合の増加は10 db であると考えられる。

3.3 探知実験

第15図は実験装置の配置の様子を示す。2本の円形漏波導波管は3 mの間隔で軌道の両側に設置され、これらの導波管と励振器の間には不要モードを吸収するためのらせん導波管が挿入されている。マグネトロンからは繰り返し周波数1 KC、パルス幅14 n sec である周波数9.375 MHzのパルス変調波が送信される。近端結合した波は直接検波されシンクロスコープで観察することができる。

第16図は平面反射板を設計どおりの間隔で設定し、軌道上に障害物が存在しないときの応答波形である。写真の水平軸の1 division は軌道上の軸方向5 mに対応する。波形の上部附近のレベル変動は、±0.8 db 以内であることがわかる。波形をへいたんにするために、平面反射板の位置を動かして調整を行なった。その結果、第17図に示すようにレベル変動を±0.4 db 以下に押えることができた。

障害物の探知実験は、人を軌道上に立たせたり、第19図に示すような金属箔を張りつけた円筒や板を軌道上に置くことにより行なった。第18図は軌道上に直径1 mの円筒を置いた場合の応答波形であり、第20図は直径0.5 mの円筒を軸方向に一定の間隔で置いて行なった場合の波形である。同図に示してある障害物の位置を示す座標Xは、第15図に定義されている。第21図は軌道上に人が立っている場合の波形である。第22図は障害物を軸方向に移動して行なった場合の感度の変動を示している。感度のバラツキがないときの波形の振幅を1とした場合±0.1 以下である。第23図は障害物の大きさと残留電圧との関係を示している。残留電圧は障害物があるときの振幅を障害物がないときの電圧で正規化したものである。図中のA, B, Cは第9図のA, B, Cに相当し、3本の直線はその理論値を示している。図中の×印、△印、○印は障害物の探知能力が軸方向によって異なっているのを平均して求めたものである。実測した残留電圧は理論値より大きい。これは障害物のところで電波がいくらか回析することや、送信パ

ルスの立ち上がりが完全でないことなどに起因するものと考えられる。以上の実験の結果から、人間程の大きさの障害物は容易に探知できると結論づけることができる。

レーダーセットから遠く離れた遠方の障害物を探知する場合には、導波管の分散性による波形歪を考慮する必要がある。たとえば3mの空間長を持つパルス変調波は10kmも伝送すると10mという長いものになる。このままではレーダーセットに近い障害物は良く探知できるが、遠い障害物は障害物の大きさが大きくないと探知しにくい。これを改める方法としては、探知しようとする遠方の地点でパルスの空間長が最小となるように送信波の波形をレーダーセットのごく近くの障害物を見るときの波形に比べて多少変えることが考えられる。これはいいかえれば障害物のある遠方の地点に焦点を合わせるようなものである。送信波形を変える具体的な方法としては、送信機と漏洩導波管の間に位相等価器を入れることが考えられる。また、受信機に接続される導波管にも分散性があるので、受信機側にも同様の位相等価器を挿入する必要がある。このように導波管の分散性を補償する方法を施すことにより遠方も近傍と同様の探知能力を得ることが期待できる。

3.4 最大探知距離

漏洩導波管の減衰定数は小さければ遠くへ電波は届くけれども2本の導波管の結合は小さくなり、逆の場合には結合は大きいけれども電波は遠く届かない。したがつて一番適した減衰定数というものがある。漏洩導波管の中を伝送される電力をP(watt)とし最位長当りの損失をW(watt)とすると、この損失Wは熱損失W_t(watt/m)と、輻射損失W_r(watt/m)に分けて考えることができる。上に述べた諸量は減衰定数をαとすると次の関係式が成立する。

$$\alpha = \alpha_t + \alpha_r \quad \cdots\cdots ④$$

$$\alpha_t = \frac{W_t}{2P} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\alpha_r = \frac{W_r}{2P} \quad \cdots\cdots ⑥$$

2本の漏洩導波管の間の結合損失C(db)は減衰定数α_rに比例し次式で与えられる。

$$C = A - 20 \log \alpha_r \quad \cdots\cdots ⑦$$

A：定数

電波が送信機から発せられて距離Sの所で結合し、う(迂)回して受信機に到達するまでの送受信機間の損失Xは次式で与えられる。

$$X = 2(\alpha_t + \alpha_r)S + A - 20\log \alpha_r \quad \cdots\cdots ⑧$$

最大探知距離 max を決定すると、その点での損失Xを最小にする輻射減衰定数 α_r は次式で与えられる。

$$\alpha_r = \frac{10\log_{10} e}{S_{max}(km)} \quad (db/m) \quad \cdots\cdots ⑨$$

第24図に(11)式の関係式を図示する。

ここでは熱減衰定数 α_r は漏洩孔の直径に関係なく常に一定と考えている。⑨式の α_r を⑧式に代入することにより、最大探知距離での損失 X_{max} を計算することができる。

$$X_{max} = 2\alpha_t S_{max} + 20\log_{10} e - 20\log_{10}(10\log_{10} e) + A + 20\log_{10} S_{max} \quad ⑩$$

前章で述べた実験結果から、熱減衰定数 α_t、定数Aは次のように決定される。

$\alpha_t = 2.0\ db/km$

$A = 81.6\ db$ (放物柱反射板あり)

$91.6\ db$ (放物柱反射板なし)

ここではパルス幅は13.3n secとしている。第1表は送受信機間に許容し得る損失を150 dbと仮定した場合における設計例である。この設計においては上述の計算式を導入している。

4. 導波管列車通信方式への応用

4.1 これまでの経過

導波管列車通信方式は、軌道に沿って連続して漏洩導波管を布設し、軌道上に一様に電磁波を輻射することによって、列車と地上との間で広帯域で安定な通信方式を行なおとするものである。

この通信方式は昭和35年に提案されたもので、提案されて以来第25図に示すような2種類の方式(単一導波管方式、副導波管方式[4])について検討され、従来までにこれらの方式に適用すべく、亜鈴型に近いスリットが設けられた円形導波管、Hガイド、らせんHガイド、スリット付方形導波管、溝付ガイド[5]などが研究されている。

これまでの段階としては、①単一導波管方式は輻射の乱れが激しくむつかしい。②副導波管方式では主導波管から副導波管へ電波を導く結合器

の間隔（給電区間）が80m程伸ばす方式が可能であると結論づけられている。

円形漏波導波管の特性は前述のように低損失であり、輻射界も一様であるので、これを本方式に適用すれば前述の結論より一歩技術的に前進した方式が得られると期待される。以後、実験データによって方式の説明を行なっていく。

4.2 おもな電気特性

(1) 指向性

第26図に円形漏波導波管の管軸に直角な面内の指向性のいくつかの例（漏波列の数と配置をいろいろ変えてみたもの）を示す。円形漏波導波管を上下線の軌道の間において上下線の列車と通信をするためには、その指向性の最大とするところは、管軸を含む水平面と30°の仰角をなしているのが望ましい。第26図(b)に示す漏波孔列を2列配した導波管では、これが達成されるが垂直方法に不要な輻射がある。これを避けるために第26図(a)に示すように4列にすると、上下線を走る列車と通信するに適した指向性が得られる。

なお、漏波孔列を4列にすることは不要輻射をなくする他に、指向性を鋭くし、さらに管内に高次の不要モードが発生するのを防ぐなどの利点が生じる。また、この円形漏波導波管は漏波導波管固有の輻射を利用しているので管軸に直角な面内の波長は、TE_{01}モードの遮断波長に動作周波数に関係なく常に等しい。したがって管軸に直角な面内の指向性は周波数に関係なく常に一定である。

第26図(d)は参考のために漏波波探レーダーに用いた円形漏波導波管の指向性である。ビーム半値角は放物柱反射板の開口角90°より若干小さく75°位になっている。

(2) 結合度の変動　前述の漏波波探レーダー用漏波導波管30mに沿って長さ2mの進行波アンテナを移動させ、アンテナに受かる信号のレベル変動、すなわち結合度の変動を実測した。その結果は第27図に示すように変動幅は4db以下で極めて小さい。

4.3 レベル設計例

(1) 単一導波管方式　第28図にレベル設計例を示す。このレベル設計においては、中継器間隔は11kmで、この間では電力の減衰が40db以内で、レベル変動は±3db以下であることを条件としている。その結果、

楕円柱反射板のついた長さ3mの列車アンテナを用いれば－78dbの結合度が得られる。なお、この場合、導波管は漏洩孔径の異なったものを6種類用い、各導波管は約2kmずつ使用する。このレベル設計では円形漏洩導波管の熱減衰定数は漏洩孔径に関係なく常に3.0db/kmとしている。

(2) 副導波管方式　第9図にレベル設計例を示す。このレベル設計例における条件としてはレベル変動の範囲を±2db以下とする以外、単一導波管方式と同条件とし、伝送用の導波管としては円形漏洩導波管の熱損失に比べて若干小さく2.3db/kmとしている。その結果－71dbの結合度が得られる。この場合、給電区間は1kmとし、漏洩導波管としては漏洩孔径の異なるものを2種使用する。

4.4 従来の方式との比較

第2表に昭和40年、鉄道技術研究所構内のループ線で行なわれた列車自動運転の際使用されたスリット付方形漏洩導波管および溝付ガイドなどの従来の漏洩導波管と、円形漏洩導波管を用いた場合のシステム比較を示す。この表から、円形漏洩導波管を用いた副導波管方式は、従来の方式に比べて受信レベルが10db以上高いことがわかる。この方式には給電区間の延長によって瞬断する個所が少ない。レベル変動が小さいなどの利点がある。また、前述のレベル設計で示したように瞬断がない単一導波管方式が可能である。

5、結　言

TE_{01}モードを伝送モードとする低損失円形漏洩導波管を開発し、その応用として、まず、円形漏洩導波管、平面反射板、放物柱反射板などで構成された実験装置を用いて漏洩波・擬レーダー方式による列車前方障害物探知実験を行った。その結果、人間程度の大きさの障害物は、充分探知することができる特性が得られることがわかった。漏洩波擬レーダーを実用に供せるように探知距離に対するレベル評価を行った。その結果、放物反射板を用いないでも、探知距離10km以上にすることが可能であることがわかった。

円形漏洩導波管の別の応用例として、導波管列車通信方式への導入に対して検討した。その結果、従来むつかしいとされている方式、つまり結合度が安定で瞬断がなく、かつ経済的な単一導波管方式が可能であることがわかった。また、副導波管方式も従来の方式に比べて副導波管の減衰定数が小さいために、

レベル的にも余裕のある方式設計が可能であることがわかった。

今後、これらの方式を実用化するためには、銅メッキ鋼管を用いた堅牢な漏洩導波管、らせん導波管を用いたモードフィルター作用をもつ漏洩導波管、気密性がある導波管の接続部、温度伸縮などについて検討する必要である。またこれまで述べて来たことは短かい試料を用いての概略的な実験結果に過ぎない。今後はもっと長い線路を用いて、周波数特性、経年変化などについてもっと詳細な特性を調べることが必要であろう。

参考文献

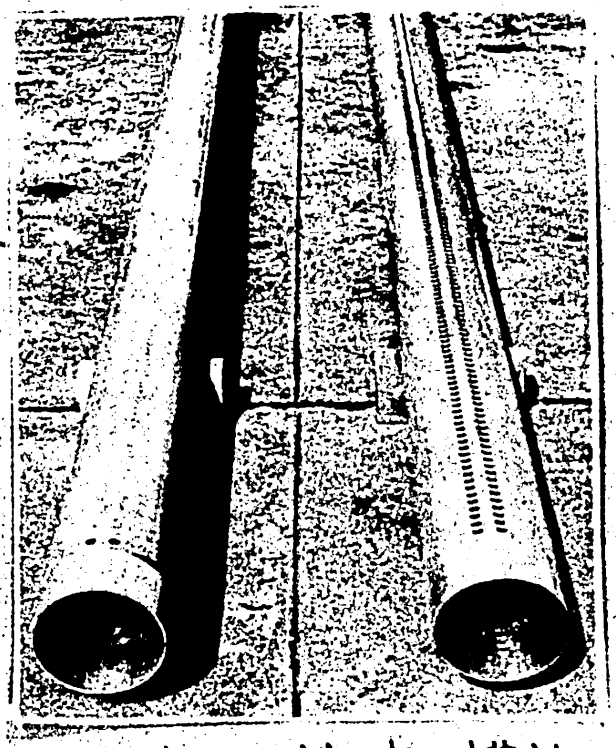
(1) 雨宮、栗田、上松：“漏洩波擬レーダーの構想－列車進路上の障害物探知方式” 昭39電気関西支部連大 336

(2) 中原、倉内、木谷；“円形漏洩導波管” 輻研 昭41.7

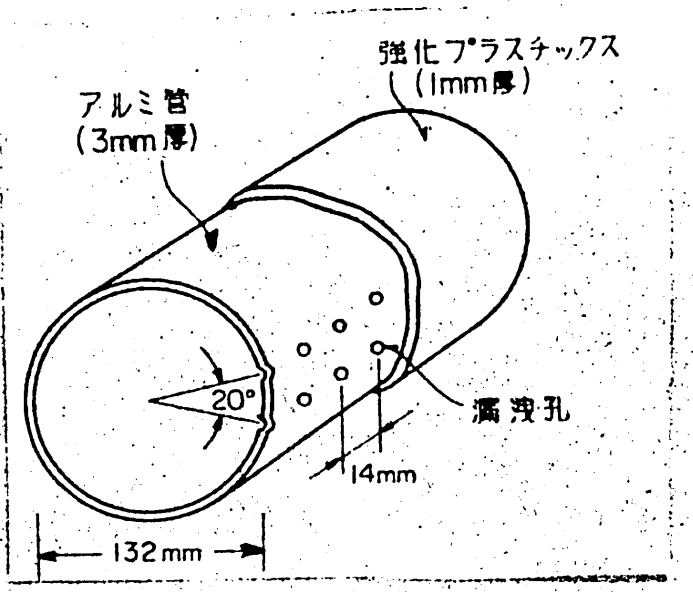
(3) 山口、ほか：導波管用高精度鋼管の試作とその特性 昭40年連大 1466.

(4) 鉄道通信協会；“導波方式による列車制御通信方式” 昭37.3

(5) 富田、中原、倉内、長尾；住友電気 第90号 昭40.10.

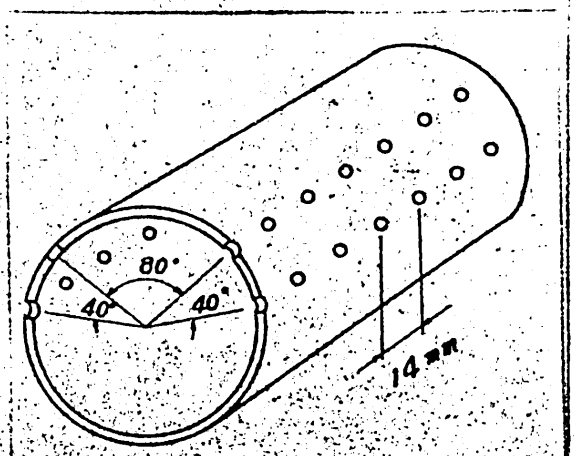


(a) 左：FRP外装，右：外装なし

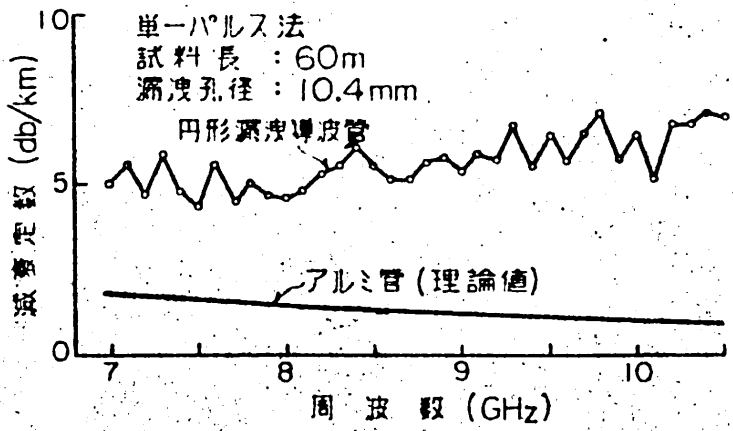


(b) 構造

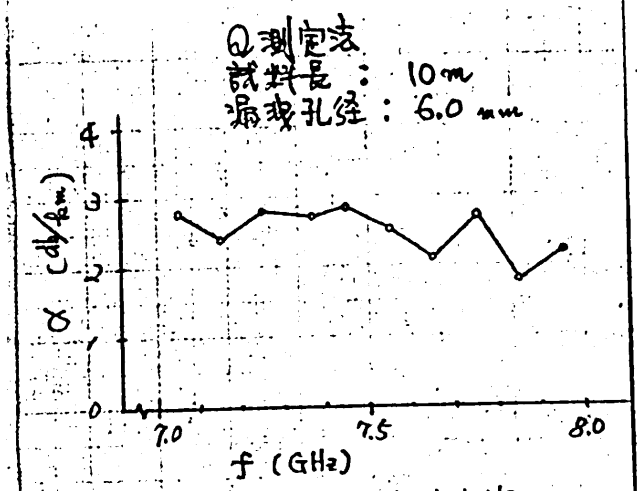
第1図 漏洩波擬レーダー用円形漏洩導波管



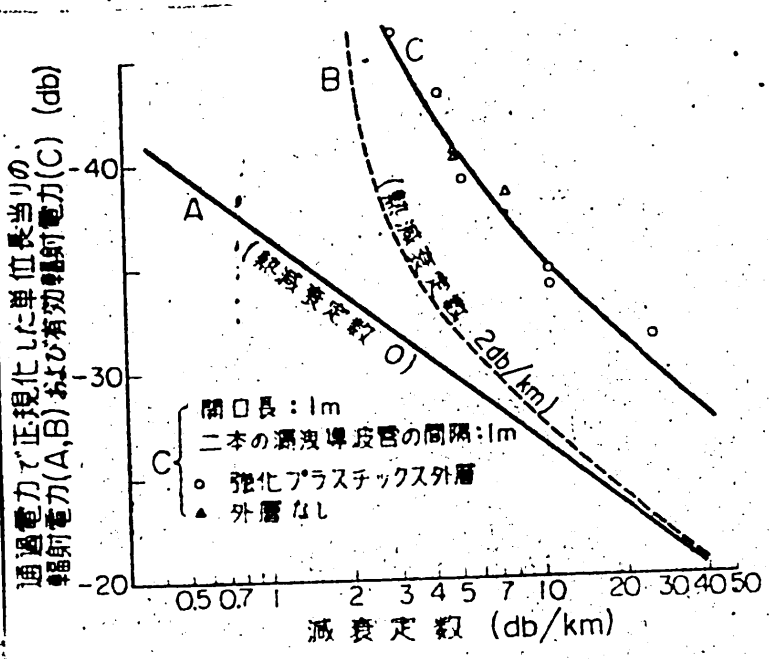
第2図 列車通信用円形漏洩導波管



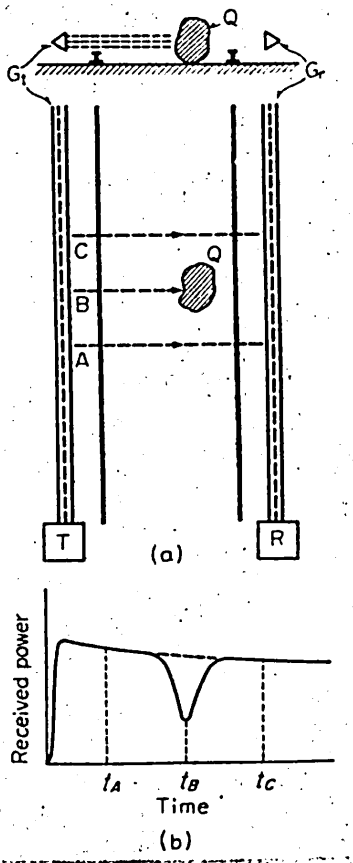
第3図 漏洩波擬レーダ用円形漏洩導波管の減衰定数の周波数特性



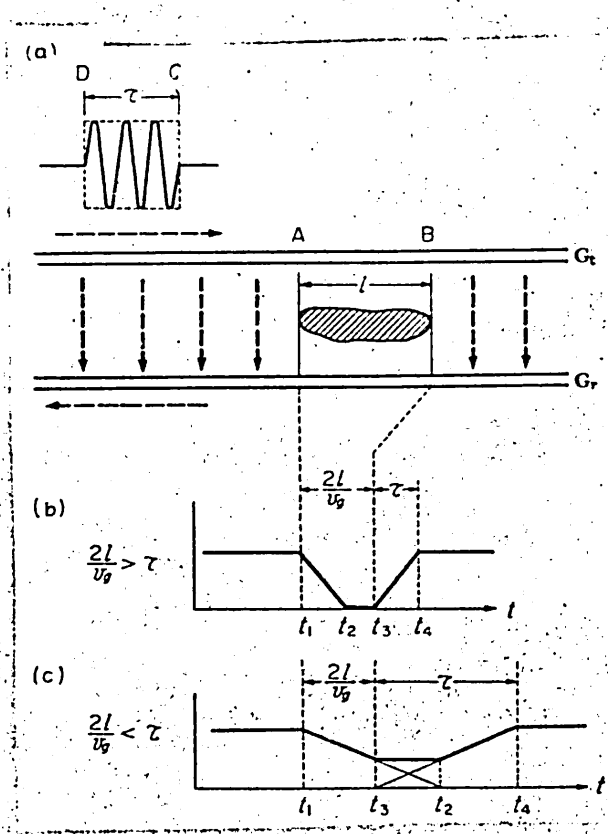
第5図 列車通信用漏洩導波管の減衰定数の周波数特性



第4図 減衰定数と輻射電力の関係



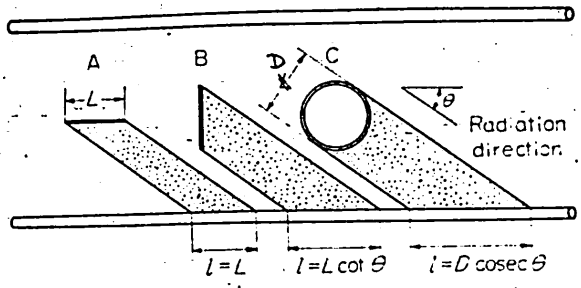
第6図 漏洩波擬レーダー方式の原理図



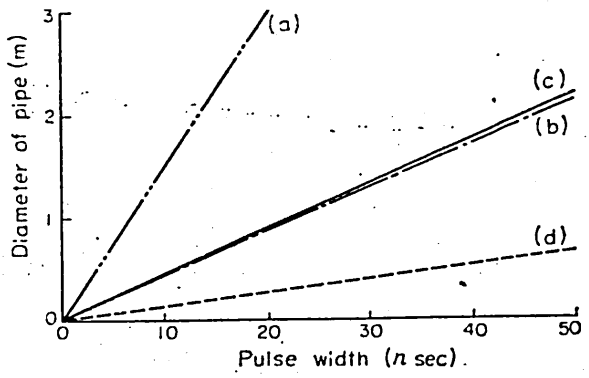
第7図 応答波形

01

住友電気工業株式会社

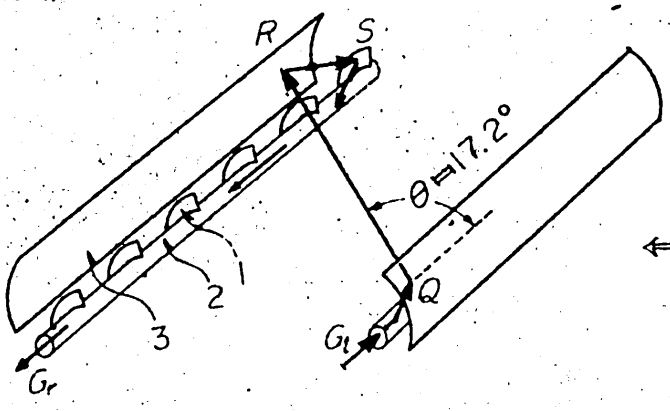


第8図 障害物の大きさと導波管に映る障害物の影の長さとの関係



Curves: (a) $\theta=90°$ $V_r=0$, (b) $\theta=90°$ $V_r=\frac{1}{\sqrt{2}}$, (c) $\theta=17.2°$ $V_r=0$, (d) $\theta=17.2°$ $V_r=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

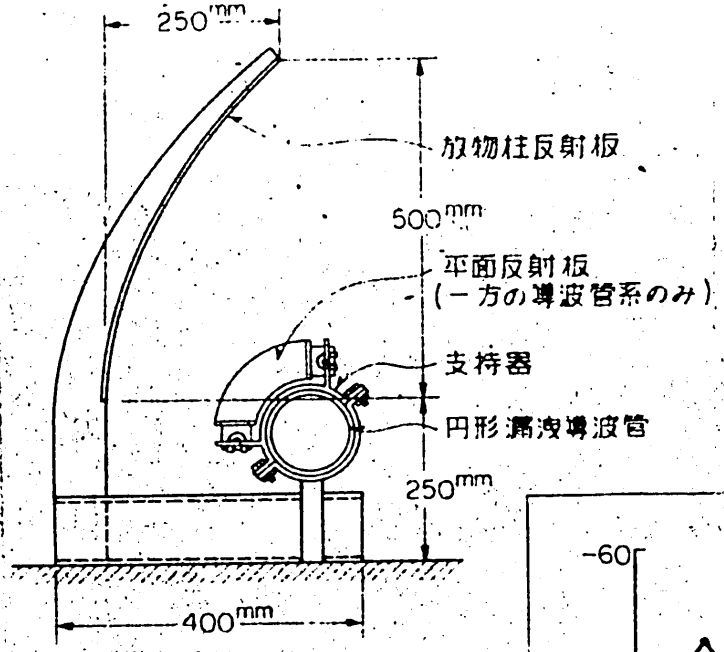
第9図 パルス幅と探知できる円筒の直径との関係



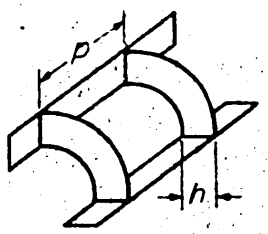
⟸ 第10図 漏洩導波管系の構造
(1) 平面反射板
(2) 円形漏洩導波管
(3) 放物柱反射板

第11図 実験場

住友電気工業株式会社

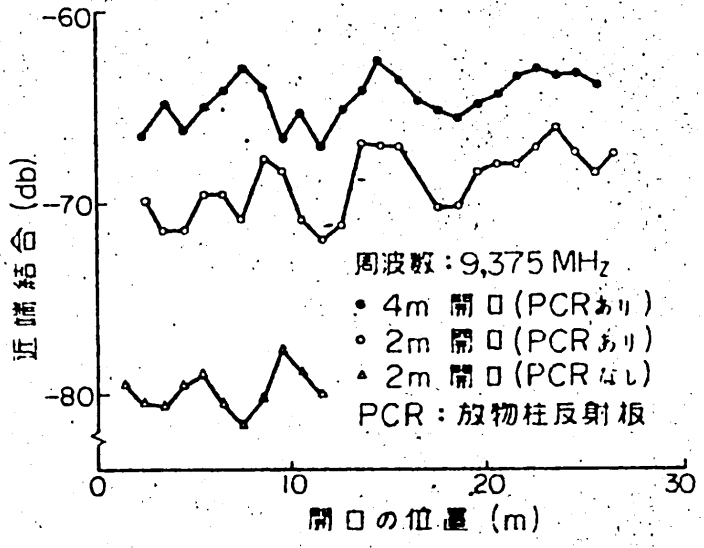


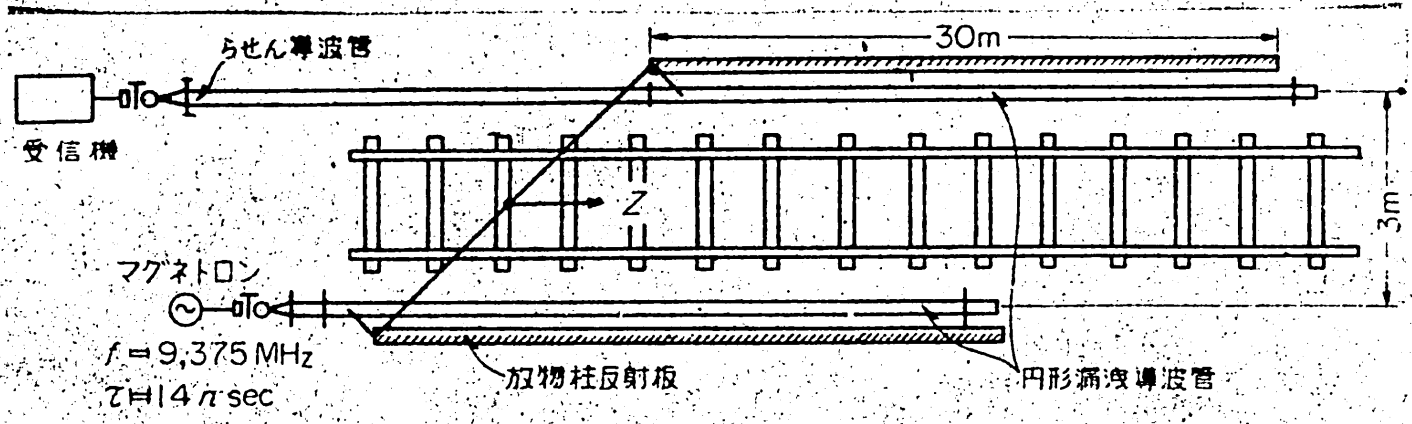
第12図 漏洩導波管系の断面



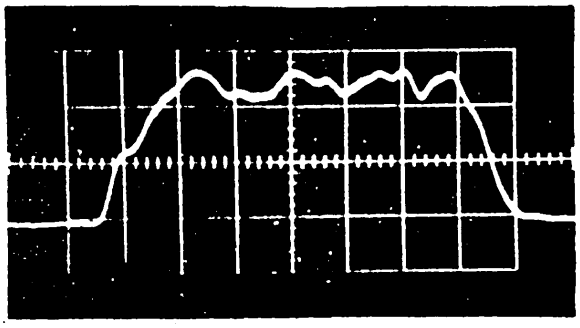
第13図 平面反射板

第14図 近端結合量の軸方向分布特性

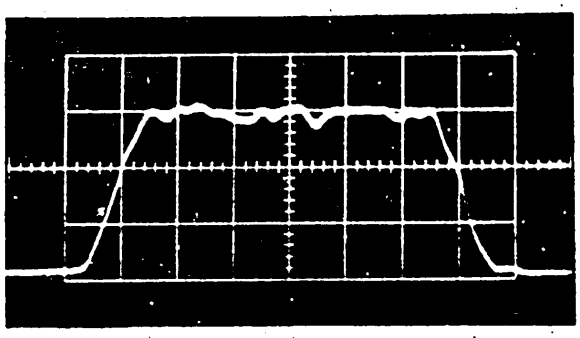




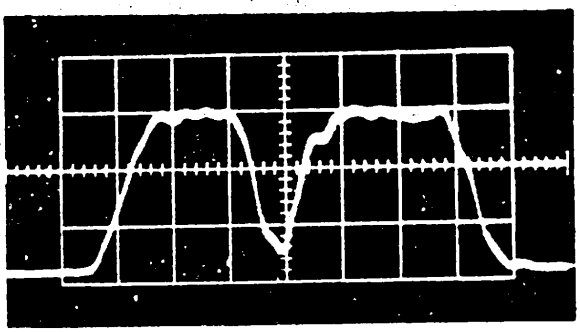
第15図 実験装置の配置



第16図 調整前の応答波形
(障害物なし)



第17図 調整後の応答波形
(障害物なし)



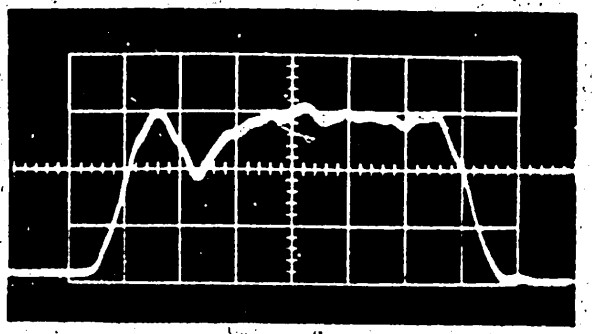
第18図 直径 1mm の円筒がある場合

(a) 直径 0.5m の円筒

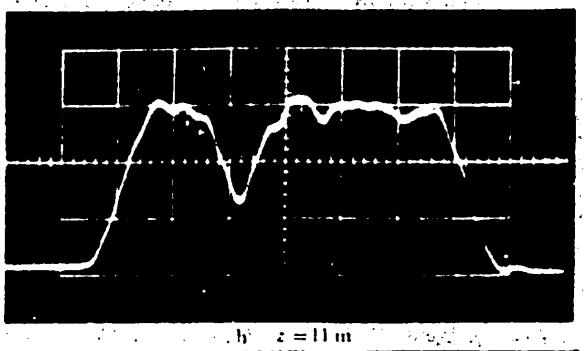
(b) 幅 0.25m の板

第19図 模擬障害物

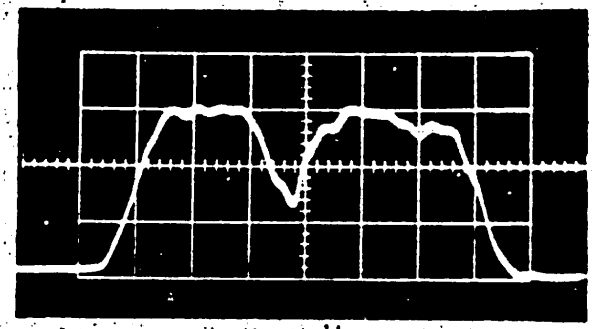
e.1



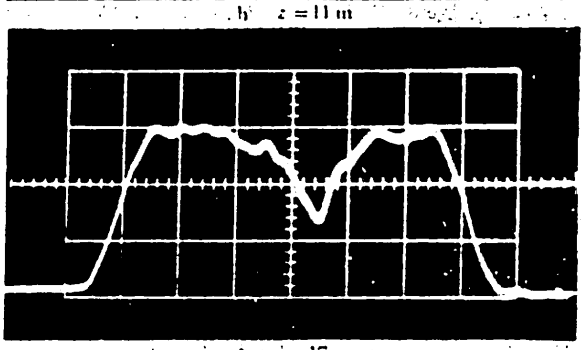
(a) $z = 8$ m



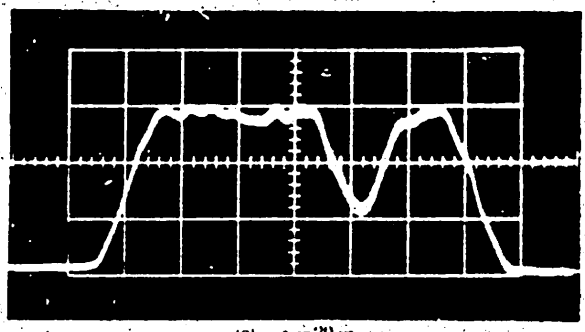
(b) $z = 11$ m



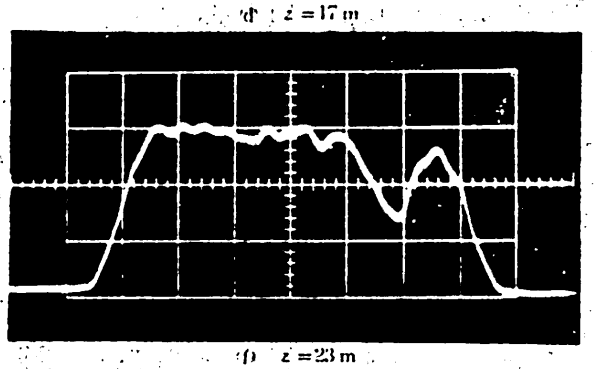
(c) $z = 14$ m



(d) $z = 17$ m

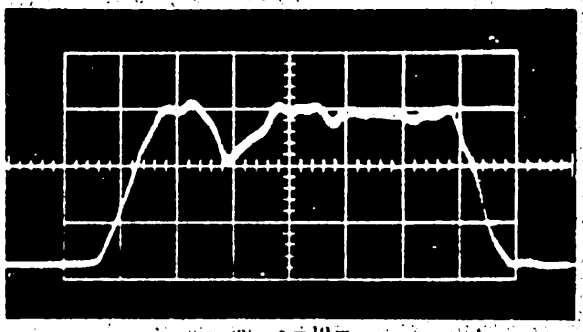


(e) $z = 20$ m

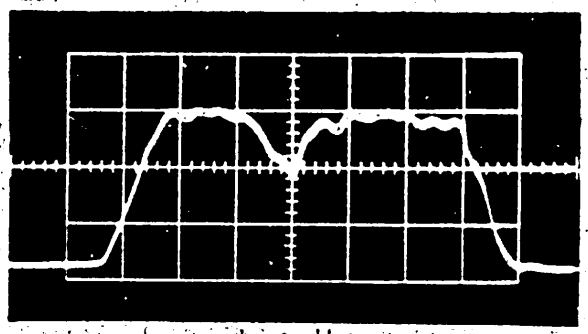


(f) $z = 23$ m

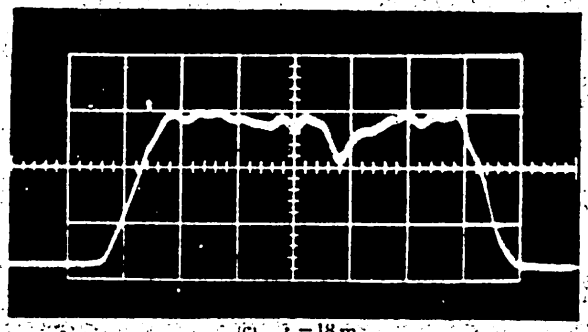
第20図　軌道上に0.5mの高さを置いた場合



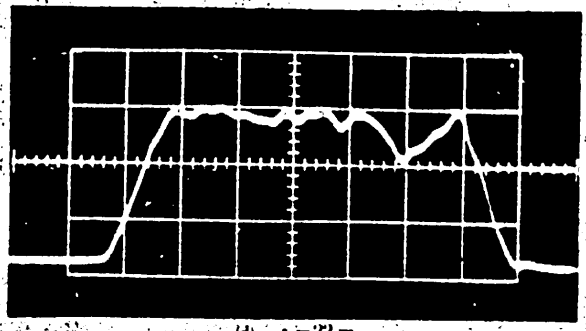
(a) $z = 10$ m



(b) $z = 14$ m



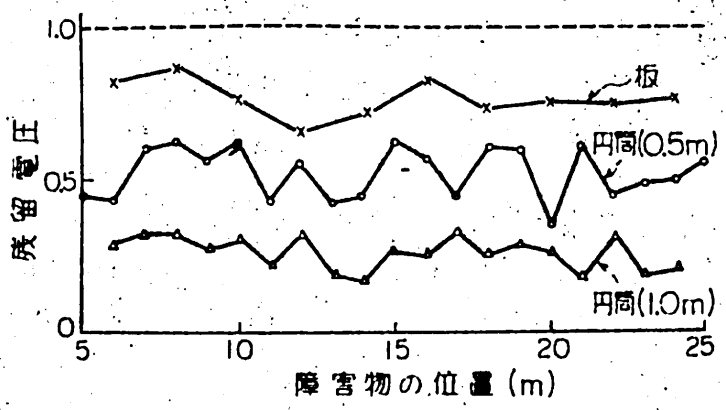
(c) $z = 18$ m



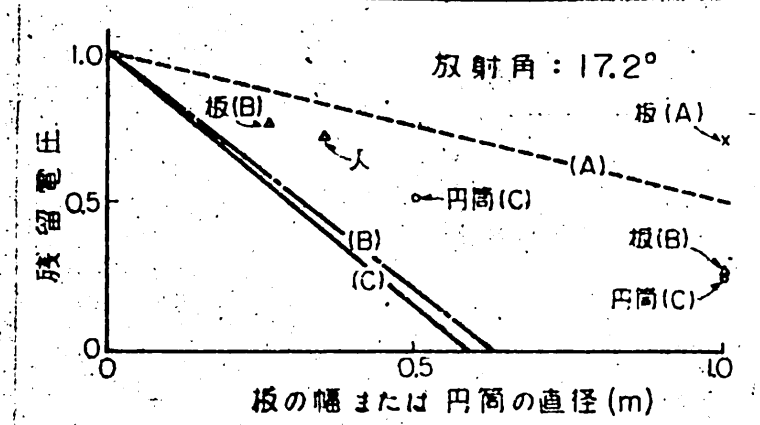
(d) $z = 22$ m

第21図　軌道上に人を立たせた場合

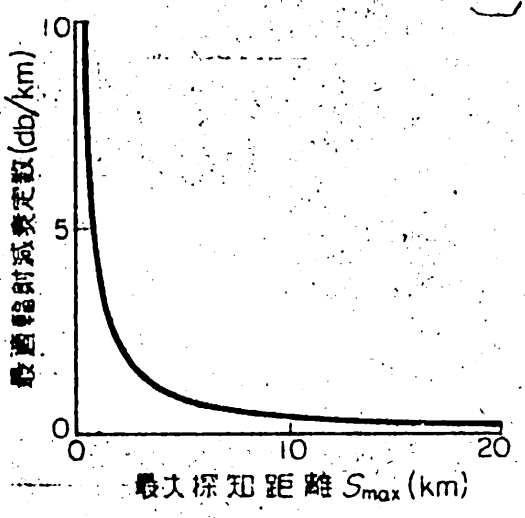
住友電気工業株式会社



第22図 障害物の探知能力のバラツキ



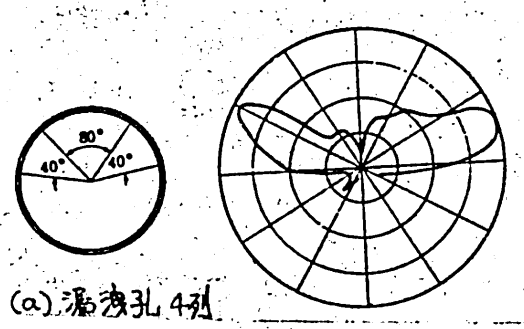
第23図 障害物の大きさと残留電圧との関係



第24図 最大探知距離と輻射減衰定数との関係

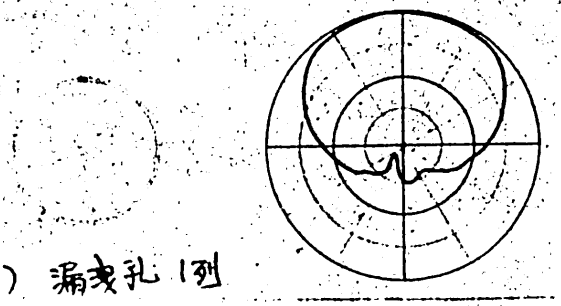
第1表 最大探知距離に対するレベル評価

(1)	送信機の出力		76 dbm (40 kW)	
(2)	熱雑音レベル		−94 db m (帯域幅 100 MHz)	
(3)	総合雑音指数		10 db	
(4)	励振器の損失		2 db	
(5)	ビデオ・インテグレーションによる雑音の改善		12 db	
(6)	検知余裕		20 db	
(7)	送受信機間に許し得る損失 (1)−(2)−(3)−(4)+(5)−(6)		150 db	
		今回の実験装置での設計	放物柱反射板がある場合の最適設計	放物柱反射板がない場合の最適設計
(8)	伝播路での結合損失 (これは 13.3 m acc のパルス幅での結合に相当する)	70 db	89 db	99 db
(9)	導波管の減衰定数	5.8 db/km	2.32 db/km	2.42 db/km
	最大探知距離	6.9 km	12.6 km	10.5 km



(a) 漏洩孔 4列

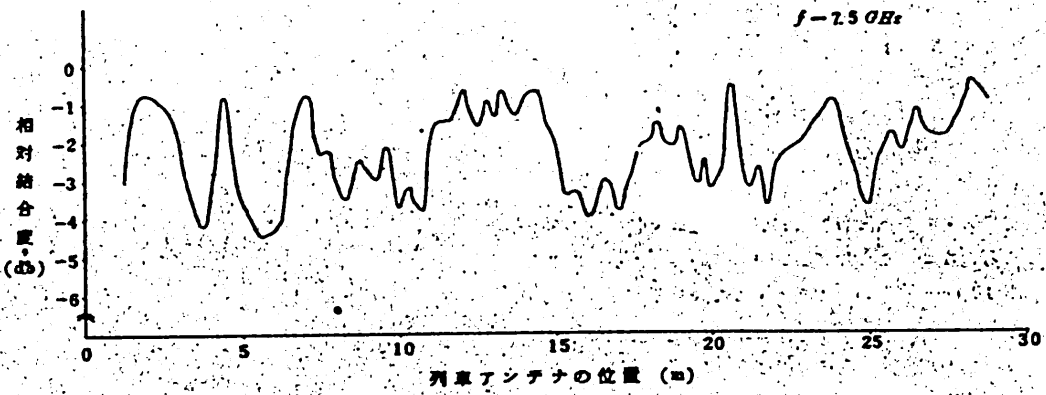
(b) 漏洩孔 2列



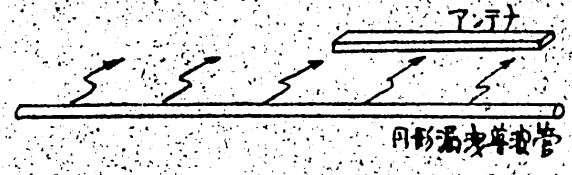
(c) 漏洩孔 1列

(d) 漏洩孔 2列

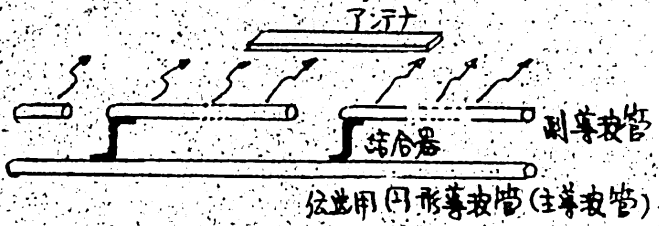
第26図　管軸に直角な面内の指向性



第27図　列車アンテナの位置と結合度の変動



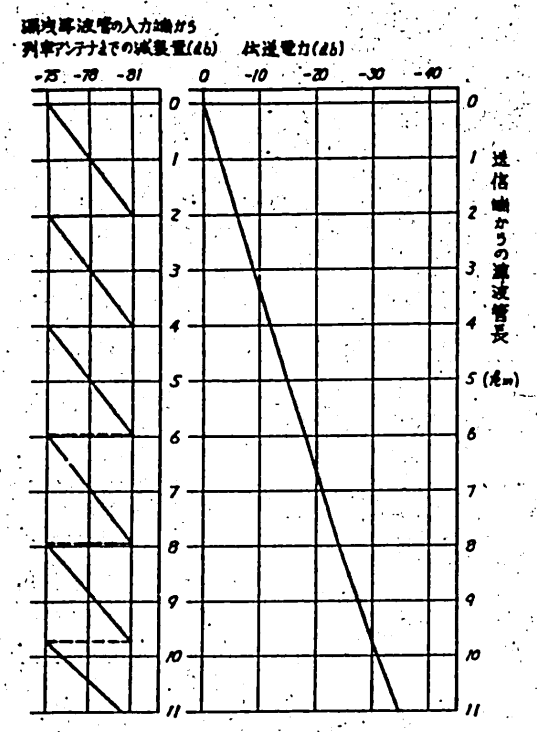
(a) 単一導波管方式



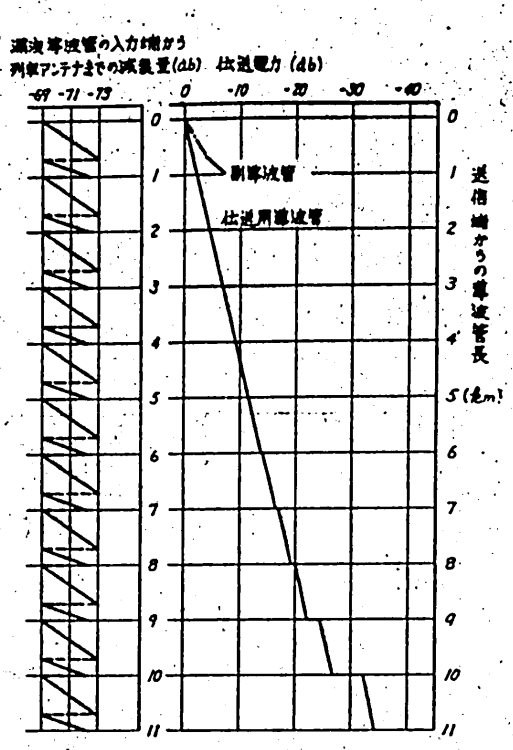
(b) 副導波管方式

第25図　2種の導波管通信方式

住友電気工業株式会社



第28図 単一導波管方式のレベル設計例



第29図 副導波管方式のレベル設計例

第2表 従来の偏波導波管を用いた方式と円形偏波導波管を用いた方式の比較

	従来の方式			改良された方式			
	副導波管方式			副導波管方式		単一導波管方式	
主導波管	内径132φ円形導波管(アルミ)			内径132φ円形導波管(アルミ)		内径132φ円形導波管(銅メッキ鋼管)	
副導波管	スリット付方形偏波導波管(アルミ)	溝付ガイド(アルミ)		132φ円形偏波導波管(アルミ)			
(結損失電論値)	50db/km	15db/km		1.6db/km		1.6db/km	1.25db/km
給電区間	30m	80m		1000m			
中断区間	11km	15km	11km	15km	11km	11km	15km
中継器出力端と列車アンテナ入出端とのレベル差	90db	90db	85db	90db	71db	78db	90db
結合度	30db	30db		44db			

注) ① 列車アンテナとしては楕円柱反射板をもった3m長の進行波アンテナを用いる。
② 結合度は副導波管方式の場合、副導波管への入力と列車アンテナ受信電力比で規定する。
③ 中継器出力と次段中継器入力の差は40db以内とする。

4mm $BaTiO_3$ 單結晶光変調器について

牧本利夫　小原晋

(大阪大学基礎工学部)

I [まえがき]

$BaTiO_3$ 単結晶は変態点を約 −150°C, 0°C, 120°C, 1460°C に持つが、電気光学効果については 0°C～120°C での一次電気光学効果, 120°Cよりわずかに高い温度に於ける大きな二次電気光学効果が主として興味の対象とされてきた。0°C～120°C では 4mm の対称を持ち、この状態で存在する独立な一次電気光学定数 γ_{13}, γ_{33}, γ_{42} の大きな値は Johnston 等によって確認されている。(1)

光変調に用いる場合, γ が大きいことは, 屈折率 n が大きいことも合せて有利な条件であるが, 他方 $\tan\delta$ が大きい欠点があり, 又大きすぎる n も Optical-matching の時の困難の原因となる。

よく用いられる, 良質の結晶としては Remeika 法によって作られた平板状のものがある。

この結晶は比較的単一分域に近く, 厚さは約 0.1～0.2 mm 程度である。より厚く, 良質な利用に便利な結晶は今後の研究に待たねばならない。

ここでは γ_{13}, γ_{33}, γ_{42} を用いた光変調について述べる。

II [$BaTiO_3$ の一次電気光学効果]

x, y, z, を結晶軸として電界 $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ を印加した時，屈折率楕円体は

$$a_{xx}x^2+a_{yy}y^2+a_{zz}z^2+2a_{xy}xy+2a_{xz}xz+2a_{yz}yz=1 \quad (1)$$

と表わされ，4mm の対称では一次電気光学定数は $\gamma_{13}=\gamma_{23}$, γ_{33}, $\gamma_{42}=\gamma_{51}$, が存在し，

a_{ij} と $\vec{E}$ とは次の如く関係ずけられる。

$$\begin{vmatrix} a_{xx}-a^{\circ}_{xx} \\ a_{yy}-a^{\circ}_{yy} \\ a_{zz}-a^{\circ}_{zz} \\ a_{yz}-a^{\circ}_{yz} \\ a_{zx}-a^{\circ}_{zx} \\ a_{xy}-a^{\circ}_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma_{13} \\ 0 & 0 & \gamma_{13} \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \\ 0 & \gamma_{42} & 0 \\ \gamma_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} \quad (2)$$

ただし電界を印加する以前には z 方向に光学軸をもつ一軸結晶だから屈折率楕円体は

$$a^{\circ}_{xx}x^2+a^{\circ}_{yy}y^2+a^{\circ}_{zz}z^2=1 \quad (3)$$

で表わされ，

$$\begin{aligned} a^{\circ}_{xx}&=a^{\circ}_{yy}=a_{\circ} \\ a^{\circ}_{zz}&=a_{\varepsilon} \\ a^{\circ}_{yz}&=a^{\circ}_{zx}=a^{\circ}_{xy}=0 \end{aligned} \quad (4)$$

従って

$$a_{xx}=a_{yy}=a_0+\gamma_{13}E_z \qquad a_{zz}=a_e+\gamma_{33}E_z \tag{5}$$

$$a_{yz}=\gamma_{42}E_y,\quad a_{zx}=\gamma_{42}E_x,\quad a_{xy}=0$$

となり，(1)の屈折率楕円体は

$$(a_0+\gamma_{13}E_z)(x^2+y^2)+(a_e+\gamma_{33}E_z)z^2 +2\gamma_{42}E_y yz+2\gamma_{42}E_x zx=1 \tag{6}$$

と表わせる。又屈折率楕円体の主軸方向の屈折率，及び主軸の方向は，固有方程式

$$\begin{vmatrix} a_{xx}-\eta & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy}-\eta & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz}-\eta \end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

の固有値 $\eta_i=n_i^{-2}$ と η_i に対応する固有ベクトル v_i とから得られる。

次に電界の方向による屈折率楕円体の様子を調べる。

(A) 電(0, 0, E) を与える時

$$\begin{vmatrix} a_0+\gamma_{13}E-\eta & 0 & 0 \\ 0 & a_0+\gamma_{13}E-\eta & 0 \\ 0 & 0 & a_e+\gamma_{33}E-\eta \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

$$\therefore \quad (\gamma_{13}E+a_0-\eta)^2(\gamma_{33}E+a_e-\eta)=0$$

$$\therefore \quad \eta_{1,2} = a_0+\gamma_{13}E \qquad (9)$$

$$\eta_3 = a_e+\gamma_{33}E$$

又 主軸方向は (6) から 明らかに

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad (10)$$

となる。 従って この時 屈折率楕円体は

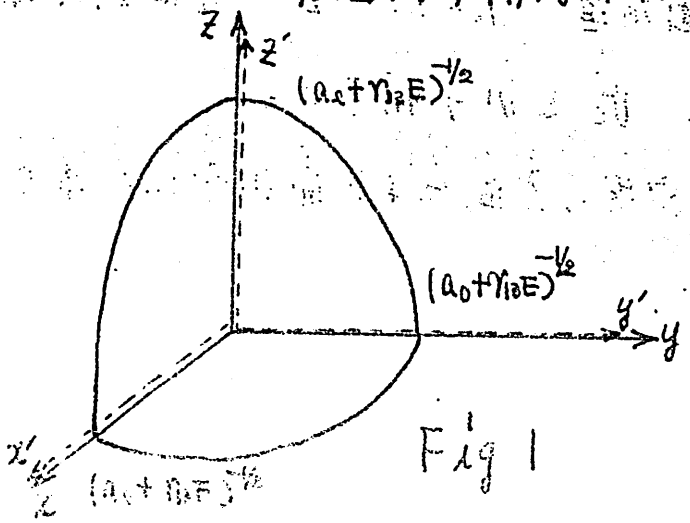


Fig 1

(B) $\vec{E}(E,0,0,)$ を与える時

$$\begin{vmatrix} a_0-\eta & 0 & \gamma_{42}E \\ 0 & a_0-\eta & 0 \\ \gamma_{42}E & 0 & a_e-\eta \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

$$\therefore \quad (a_0-\eta)\left\{\eta^2-(a_0+a_e)\eta+a_0a_e-\gamma_{42}^2E^2\right\}=0$$

$$\eta_1 = a_0$$

$$\eta_{2,3} = \frac{1}{2}\left[(a_0+a_e)\pm\left\{(a_0+a_e)^2-4a_0a_e+4\gamma_{42}^2E^2\right\}^{1/2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a_0+a_e)\pm\left\{(a_0-a_e)^2+4\gamma_{42}^2E^2\right\}^{1/2}\right]$$

$(a_0-a_e)^2 \gg \gamma_{42}^2E^2$

$$\cong \frac{1}{2}\left[(a_0+a_e)\pm(a_0-a_e)\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4\gamma_{42}^2E^2}{(a_0-a_e)^2}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a_0+a_e)\pm(a_0-a_e)\pm\frac{2\gamma_{42}^2E^2}{(a_0-a_e)}\right]$$

$$\therefore \quad \eta_1 = a_0, \quad \eta_2 \cong a_0+\frac{\gamma_{42}^2E^2}{a_0-a_e}, \quad \eta_3 \cong a_e-\frac{\gamma_{42}^2E^2}{a_0-a_e} \qquad (12)$$

又 主軸方向は

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & \gamma_{42}E \\ 0 & a_0 & 0 \\ \gamma_{42}E & 0 & a_e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \eta_i \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} \quad (13) \text{ より}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

又 $(a_0-a_e) \gg \dfrac{\gamma_{42}^2E^2}{(a_0-a_e)}$ と考えて

U_2, U_3 は

$$v_2 \cong \begin{bmatrix} \dfrac{(a_0-a_e)}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \\ 0 \\ \dfrac{\gamma_{42}E}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \end{bmatrix} \qquad v_3 \cong \begin{bmatrix} \dfrac{\gamma_{42}E}{\sqrt{(a_e-a_0)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \\ 0 \\ \dfrac{(a_e-a_0)}{\sqrt{(a_e-a_0)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \end{bmatrix} \tag{14}$$

となる。

従って この時屈折率楕円体は

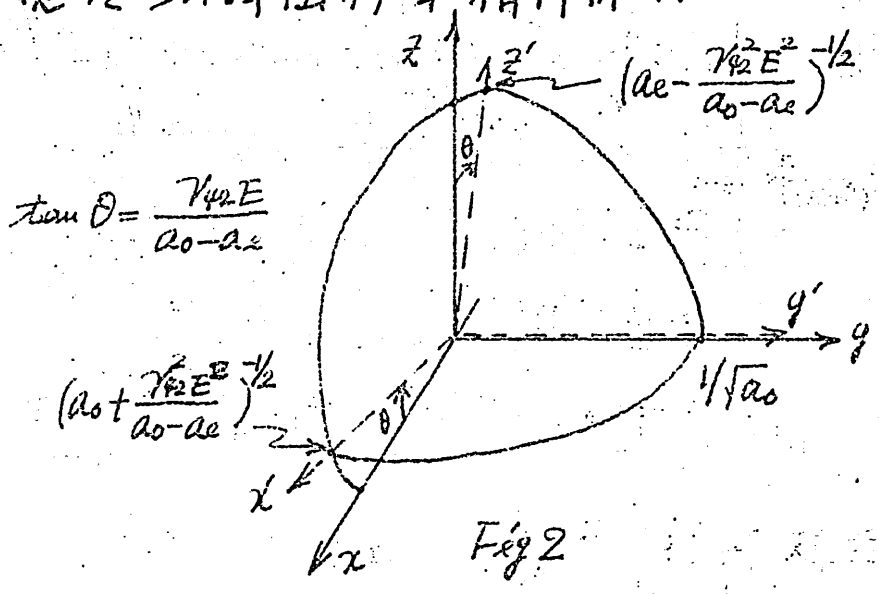


Fig 2

(C) $E(0, E, 0)$ と与える時

この時は (B) の場合と 同様に

$$\eta_1 = a_0$$

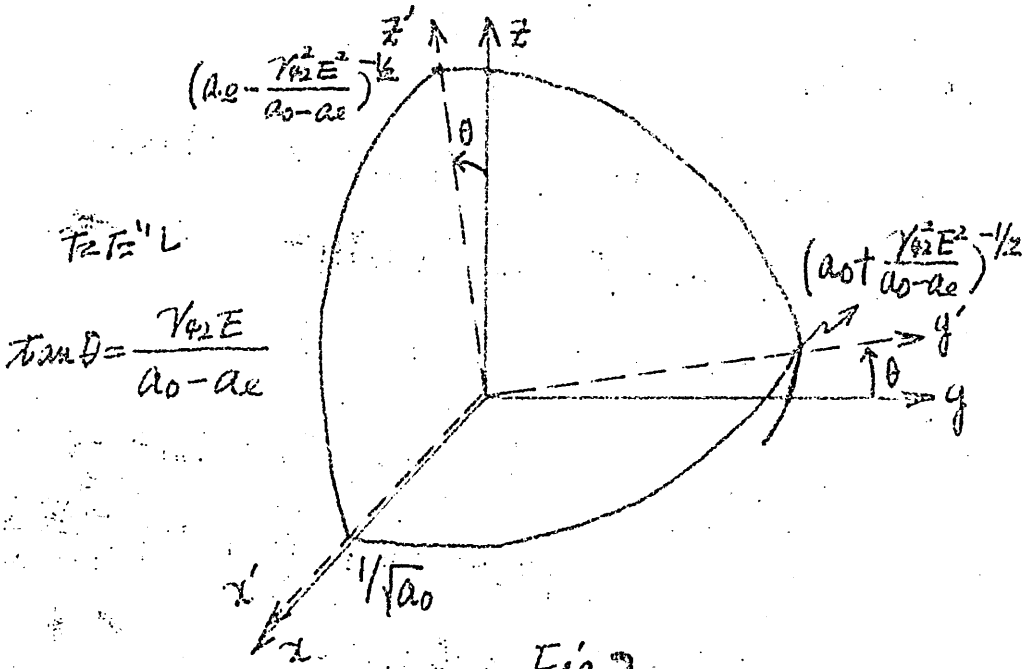
$$\eta_2 \cong a_0 + \frac{\gamma_{42}^2E^2}{a_0-a_e} \tag{15}$$

$$\eta_3 \cong a_e - \frac{\gamma_{42}^2E^2}{a_0-a_e}$$

又各主軸方向は

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad v_2\cong\begin{bmatrix}0\\\dfrac{(a_0-a_e)}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}}\\\dfrac{\gamma_{42}E}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}}\end{bmatrix},\quad v_3\cong\begin{bmatrix}0\\\dfrac{\gamma_{42}E}{\sqrt{(a_e-a_0)^2+\gamma_{42}^2E^2}}\\\dfrac{(a_e-a_0)}{\sqrt{(a_e-a_0)^2+\gamma_{42}^2E^2}}\end{bmatrix}\qquad(16)$$

従って屈折率楕円体は



ただし

$$\tan\theta=\frac{\gamma_{42}E}{a_0-a_e}$$

Fig 3

(D) $\vec{E}(E_x, E_y, 0)$ を与える時

$E_y/E_x = \tan\Phi$ とする。

$E_x = E\cos\Phi$, $E_y = E\sin\Phi$ (17)

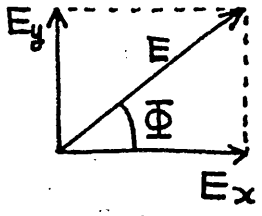


Fig 4

$$\begin{vmatrix} a_0-\eta & 0 & \gamma_{42}E_x \\ 0 & a_0-\eta & \gamma_{42}E_y \\ \gamma_{42}E_x & \gamma_{42}E_y & a_e-\eta \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

$$\therefore (a_0-\eta)^2(a_e-\eta) - (a_0-\eta)\gamma_{42}^2E_x^2 - (a_0-\eta)\gamma_{42}^2E_y^2 = 0$$

$$\therefore (a_0-\eta)\left\{(a_0-\eta)(a_e-\eta) - \gamma_{42}^2E^2(\cos^2\Phi+\sin^2\Phi)\right\} = 0$$

$$\therefore (a_0-\eta)\left\{\eta^2 - (a_0+a_e)\eta + a_0a_e - \gamma_{42}^2E^2\right\} = 0$$

$$\therefore \eta_1 = a_0, \quad \eta_{2,3} = \frac{1}{2}\left\{(a_0+a_e) \pm \sqrt{(a_0-a_e)^2 + 4\gamma_{42}^2E^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(a_0+a_e) \pm (a_0-a_e)\sqrt{1 + \frac{4\gamma_{42}^2E^2}{(a_0-a_e)^2}}\right\}$$

$1 \gg \frac{4\gamma_{42}^2E}{(a_0-a_e)^2}$ と近似して

$$\eta_{2,3} \cong \frac{1}{2}\left\{(a_0+a_e) \pm (a_0-a_e) \pm \frac{1}{2}\frac{4\gamma_{42}^2E^2}{(a_0-a_e)}\right\}$$

$$\eta_1 = a_0, \quad \eta_2 \cong a_0 + \frac{\gamma_{42}^2E^2}{a_0-a_e}, \quad \eta_3 \cong a_e - \frac{\gamma_{42}^2E^2}{a_0-a_e} \qquad (19)$$

又 主軸方向は

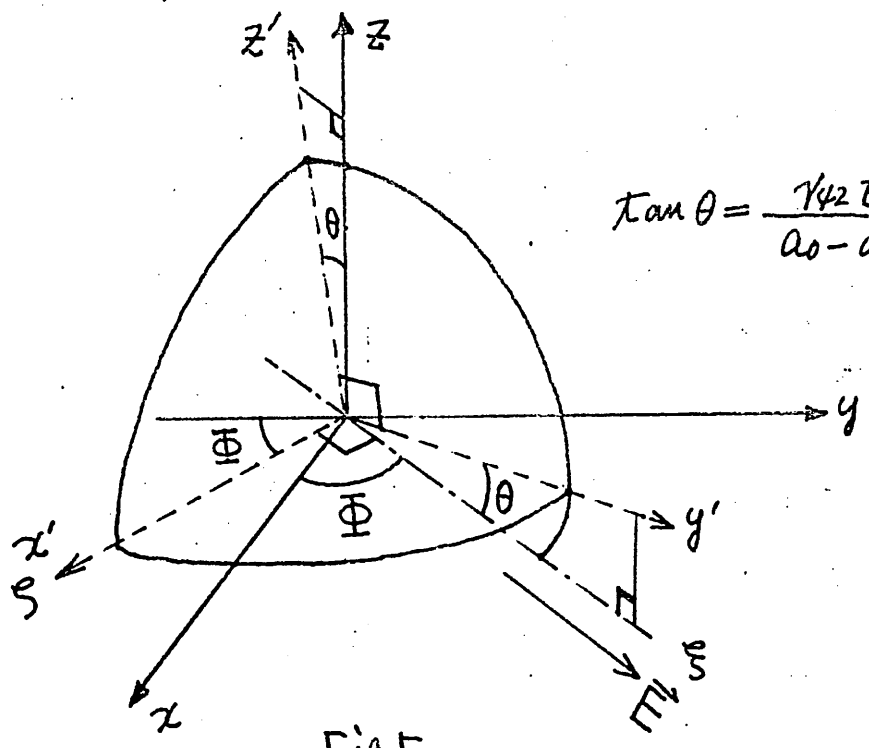
$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & \gamma_{42}E\cos\Phi \\ 0 & a_0 & \gamma_{42}E\sin\Phi \\ \gamma_{42}E\cos\Phi & \gamma_{42}E\sin\Phi & a_e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \eta_i \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} \qquad (20)$$

より

$(a_1 - a_e)^2 \gg \gamma_{42}^2 E^2$ と近似して

$$v_1 = \begin{bmatrix} \sin\Phi \\ -\cos\Phi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 \cong \begin{bmatrix} \frac{(a_0-a_e)\cos\Phi}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \\ \frac{(a_0-a_e)\sin\Phi}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \\ \frac{\gamma_{42}E}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \end{bmatrix}, \quad v_3 \cong \begin{bmatrix} \frac{-\gamma_{42}E\cos\Phi}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \\ \frac{-\gamma_{42}E\sin\Phi}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \\ \frac{(a_0-a_e)}{\sqrt{(a_0-a_e)^2+\gamma_{42}^2E^2}} \end{bmatrix}, \quad (\geq 1)$$

が得られ，屈折率楕円体は



$$\tan\theta = \frac{\gamma_{42}E}{a_0 - a_e}$$

Fig 5

Ⅲ［変調器］

Ⅱで述べた各場合について順に述べる。

(A)の場合

電界は $\vec{E}(0,0,E)$ になっている。この時 Fig 1 に示す如く，屈折率楕円体はz軸のまわりの回転体となっており，z軸に垂直ないかなる方向も光学的に同じである。今 Fig 6 に示す如く，z軸に垂直に，z軸に45°の直線偏波が入射すると2つの成分 Ψ_1, Ψ_2 に分かれ，Ψ_1, Ψ_2 はそれぞれ Fig 6 の Ψ_1, Ψ_2 方向に偏波しており n_1, n_2 の屈折率に対応した速度をもつため Ψ_1, Ψ_2 は位相差 Γ を生じる。

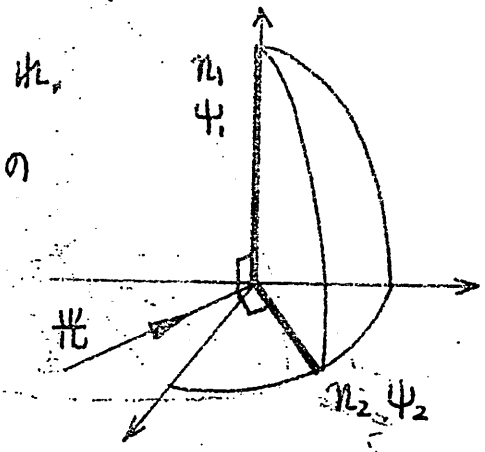


Fig 6

Γ はⅡの結果 (9) を用いて

$$\Gamma = \frac{2\pi l}{\lambda}\left\{(a_0 + r_{13}E)^{-1/2} - (a_e + r_{33}E)^{-1/2}\right\}$$

$$\cong \frac{2\pi l}{\lambda}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_e}}\right) + E\left(r_{33}a_e^{-3/2} - r_{13}a_0^{-3/2}\right)\right]$$

$1/\sqrt{a_0} = n_a$, $1/\sqrt{a_e} = n_e$ として

$$\Gamma \cong \frac{2\pi l}{\lambda}\left[(n_a - n_e) + \frac{E}{2}(r_{33}n_e^3 - r_{13}n_a^3)\right]$$

ここで $r_c = r_{33} - \left(\frac{n_a}{n_e}\right)^3 r_{13}$

を用いると

$$\Gamma \cong \frac{2\pi l}{\lambda}(n_a - n_e) + \frac{\pi l}{\lambda} E n_e^3 r_c \qquad (22)$$

ただし n_a, n_e はそれぞれ x又はy, 及び z方向の偏波光に対する E が印加されてない時の屈折率で、それらの値は

$n_a = 2.44$, $n_e = 2.37$ [1),(2),] である。

(B), (C), (D) の場合

この3つの場合には

電界を与える方向を ξ 方向、

z-η 面に垂直な方向を η 方向とすると すると

屈折率楕円体は全て Fig 7 の如く表わせる。

そして各主軸方向に

$$\eta_\eta = a_0$$

$$\eta_{\xi'} \cong a_0 + \frac{r_{42}^2 E^2}{a_0 - a_e} \qquad (23)$$

$$\eta_{z'} \cong a_e - \frac{r_{42}^2 E^2}{a_0 - a_e}$$

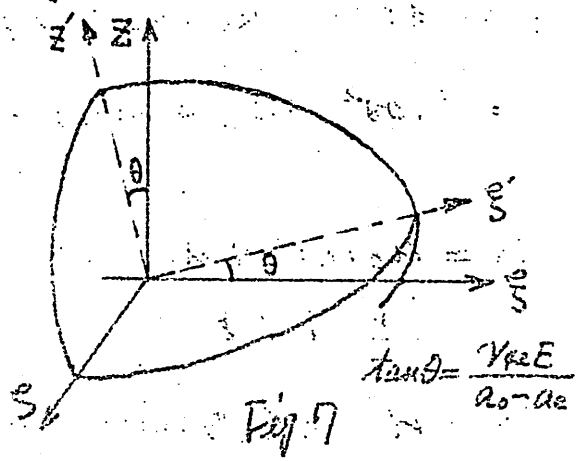


Fig 7

この誘電率楕円体の $\zeta=0$ の断面の楕円は

$$a_0\xi^2 + a_e\zeta^2 + 2\gamma_{42}E\xi\zeta = 1 \qquad (24)$$

で ある。これを Fig 8 に示す。

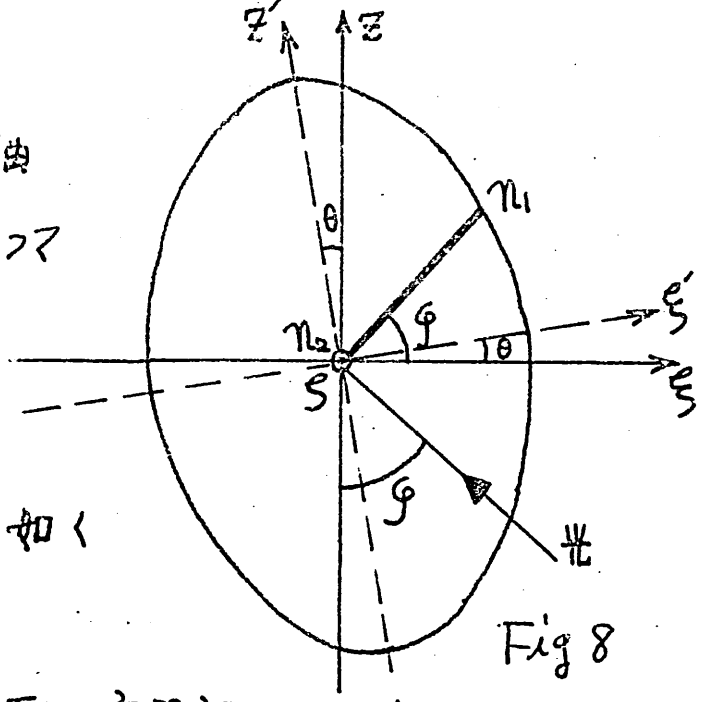


Fig 8

Fig8に示す如く

Z-ξ面内に Z軸

に φ の角度をもつて

入射する と

(12), (15),

(23), に示した如く

$n_2 = 1/\sqrt{a_0}$,

又 n_1 は 断面の方程式 (24) と

$$Z = \xi \cdot \tan\varphi \qquad (25)$$

と から

$$n_1 = \sec\varphi\,(a_0 + a_e\tan^2\varphi + 2\gamma_{42}E\tan\varphi)^{-1/2}$$

$$= (\cos^2\varphi \cdot a_0 + \sin^2\varphi \cdot a_e + 2\gamma_{42}E\sin\varphi\cos\varphi)^{-1/2} \qquad (26)$$

$$K = a_0\cos^2\varphi + a_e\sin^2\varphi \qquad (27)$$

と すると

$$n_1 = (K + 2\gamma_{42}E\sin\varphi\cos\varphi)^{-1/2}$$

$$= K^{-1/2}\left(1+\frac{2\gamma_{42}E}{K}\sin\varphi\cos\varphi\right)^{-1/2}$$

$$= K^{-1/2}\left(1+\frac{\gamma_{42}E}{K}\sin 2\varphi\right)^{-1/2}$$

$K \sim a_0$ or a_e

$$\therefore \quad 1 \gg \frac{\gamma_{42}E\sin 2\varphi}{K}$$

$$\therefore\ n_1 \cong K^{-1/2}\left(1-\frac{1}{2}K^{-1}\gamma_{42}E\sin 2\varphi\right)$$

$$= K^{-1/2} - \frac{1}{2}K^{-\frac{3}{2}}\gamma_{42}E\sin 2\varphi \qquad (28)$$

$$\therefore\ \Gamma_\varphi \cong \frac{2\pi l}{\lambda}\left\{1/\sqrt{a_0} - K^{-1/2} + \frac{1}{2}K^{-3/2}\gamma_{42}E\sin 2\varphi\right\}$$

$$= \frac{2\pi l}{\lambda}\left\{1/\sqrt{a_0} - K^{-1/2}\right\} + \frac{\pi l}{\lambda}K^{-3/2}\gamma_{42}E\sin 2\varphi \qquad (29)$$

$\varphi = 45^\circ$ の時，最も良い。この時

$$\Gamma_{45^\circ} \cong \frac{2\pi l}{\lambda}\left\{1/\sqrt{a_0} - \sqrt{\frac{2}{a_0+a_e}}\right\} + \frac{\pi l}{\lambda}K^{-3/2}\gamma_{42}E \qquad (30)$$

ここに

l：変調器の長さ．
λ：真空中での光の波長

又 20°C に於て

$$\gamma_c = 108\times10^{-10}\ \text{cm/V} \qquad (1)$$

$$\gamma_{42} = 1640\times10^{-10}\ \text{cm/V}$$

以上 (A).(B).(C).(D) の場合について考えたが
平板上の単結晶を用いる場合に於てさらに検討
を加える。

結晶は多くの分域に分かれているから、先ず
単一分域にしなければならない。その方法として

1. 外部から強力な電界を加える等の方法で
   一時的もしくは永久的に単一分域結晶にする。(1),(3),
2. 結晶の一部を形成する分域を切り出す。

2.の方法で切り出した結晶は Fig 9 の如く z軸を
平板の面に垂直方向に持っている。

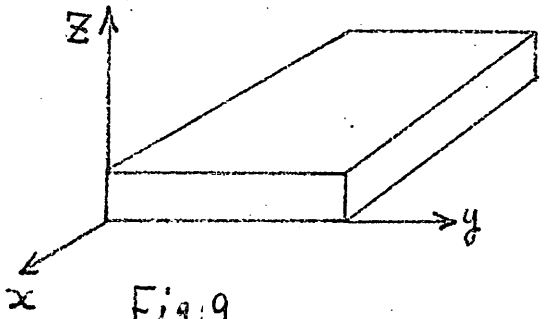


Fig 9

厚さは 0.1～0.2mm 位で
ある。
この形の結晶を用いる
ことにより 以下の話をすすめる。

(A) の場合

Fig 10 に示す如く，厚み方向に信号電界を印加し，狭い端面に光を入射させなければならない。その反面，信号電圧は小さくても，電界は大きくなり，能率の良い変調が行なわれる。

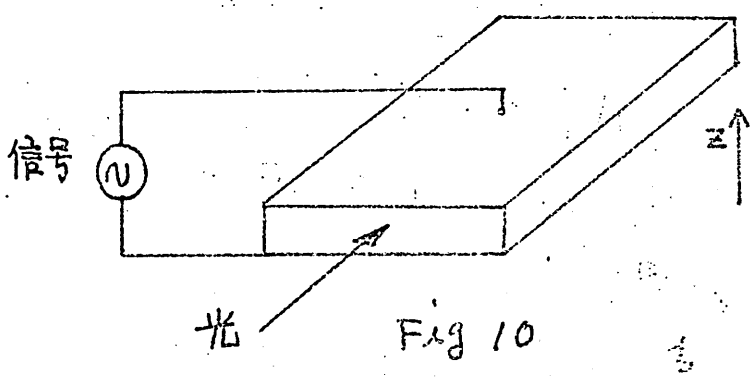


Fig 10

(B). (C), (D) の場合

Fig 11 にその様子を示す。

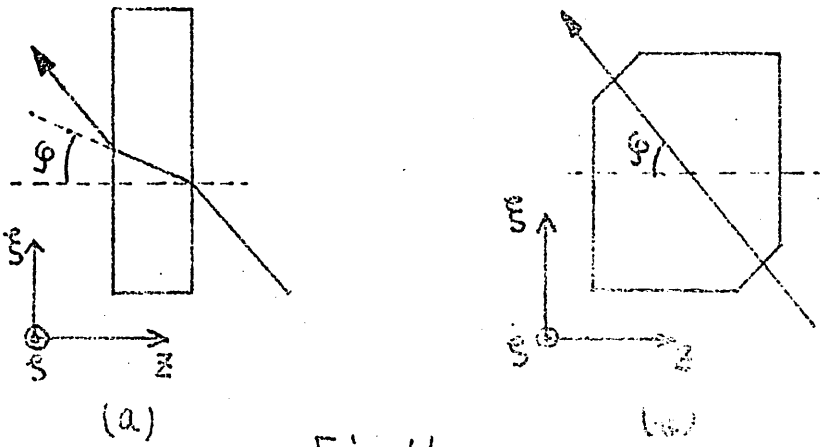


Fig 11

この場合 極めて大きい値を持つ γ_{42} を利用できるが、
γ_{42} は温度に大きく依存するため、精密な
温度制御が必要である。Fig 11 に於て $\varphi = 45°$
が最も能率が良いが、(a) の場合は 結晶の
屈折率が大きいことを考えれば、φ を 45° に近ずける
ことは困難を伴なう。又 (b) のような方法を用いる
時は、結晶が極めて薄いことを考えれば、
結晶の cut、及び、端面からの光の入射には
高度の技術が必要となる。

このため 1の方法で単一分域結晶を得ること、
もしくは、より厚く、良質な結晶を作成することの
必要がある。

Ⅳ [実験]

(I) 単一分域でない $BaTiO_3$ 単結晶の

平面に沿う一方向に 1KV/mm の D.C. 電界を加え,

Fig 12 の如き軸方向を持つ単一分域単結晶と

し Z. その上で D.C. 電界に信号電界を重畳し,

Ⅲ の (A) の場合に対応する光変調を行なった。[4]

ただし信号は 60c/s 交流電圧. である。

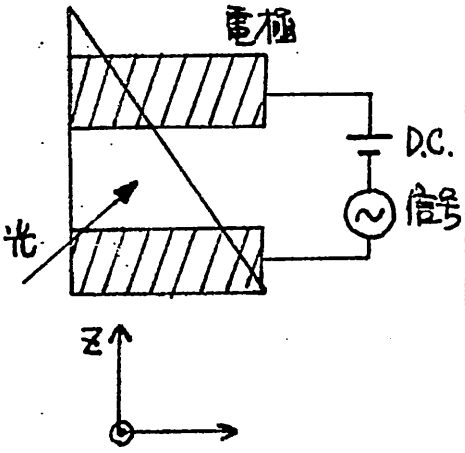


Fig 12

結果は Fig 13 に示す。

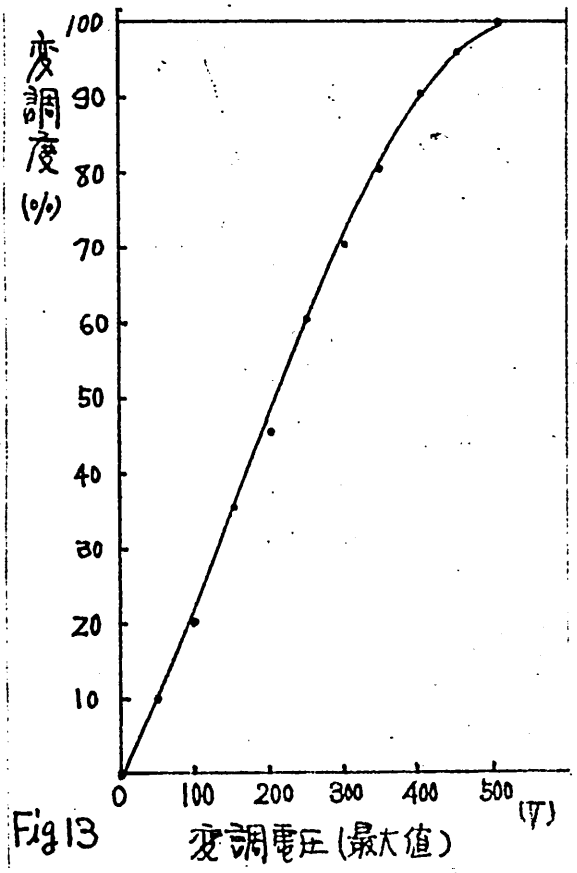


Fig 13

(II)[5] 複数分域の単結晶から Fig 9 の如き単一分域[18]を切り出し，Fig 10 の如く変調を行なった。
信号は 60c/s 正弦波である。又 λ/4 バイアスには
数 Volt の D.C. 電界を用いた。結果は Fig 14 に示す。

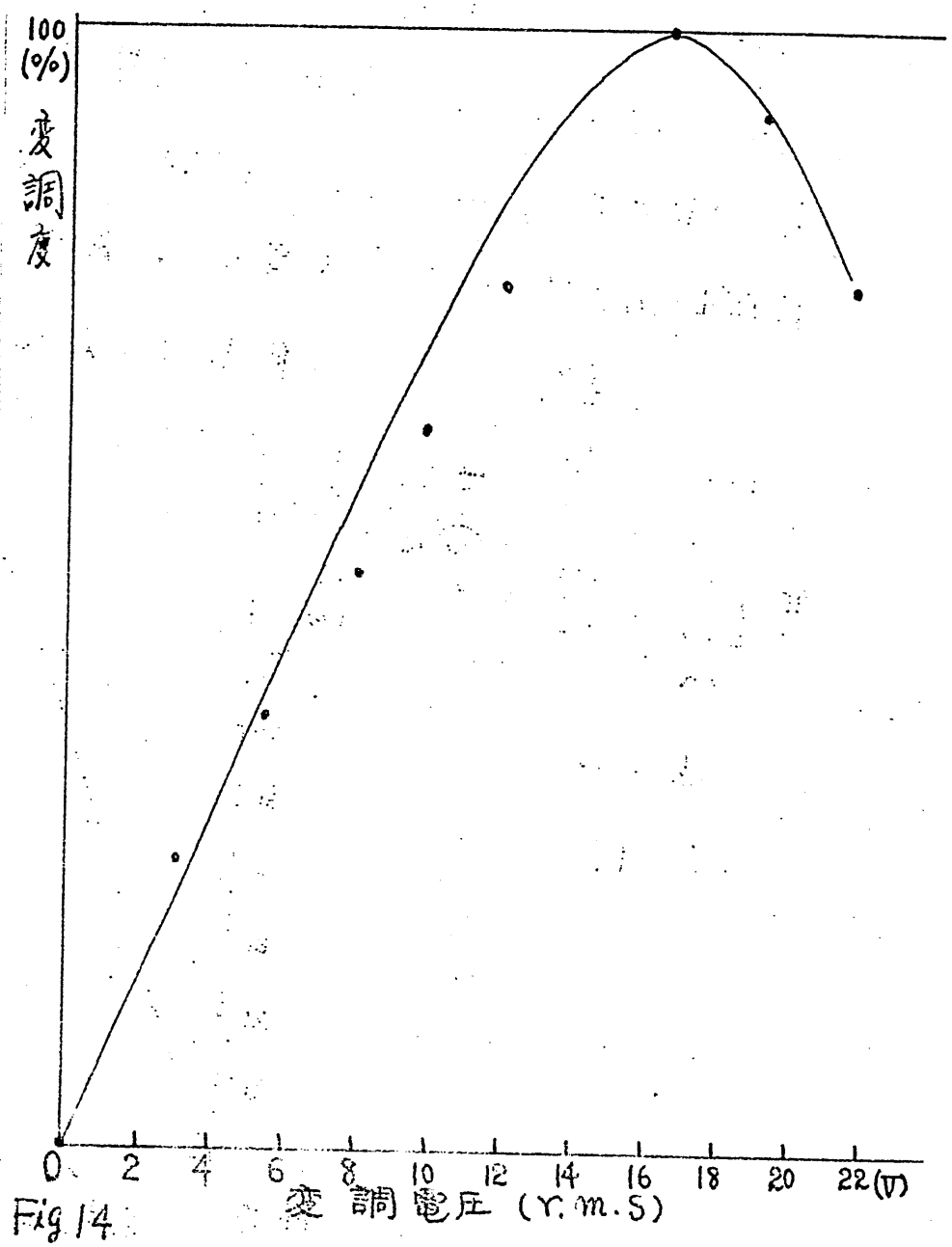


Fig 14

Ⅱ. [結論]

大きな値の一次電気光学定数を持つ，4mm $BaTiO_3$ 単結晶は低電圧光変調器の材料として興味がある。

しかし現在よく知られている薄い平板状の結晶では，使用の時不便である。

より厚く，単一分域に近い結晶が得られると，温度制御を行なった上で，γ_{42} を利用して大きな効果を得られるであろう。

Ⅲ [謝辞]

$BaTiO_3$ 単結晶を頂いた日本特殊陶業(KK)上野研究部長，角岡勉氏，松下無線池上研究室長に感謝します。

又池上氏には結晶について有益な御教示を賜った。

最後に多くの御意見を頂いた本学末田助教授に感謝します。

文献

(1) A. R. Johnston and J. M. Weingart,
"Determination of the low frequency linear electro optic effect in tetragonal $BaTiO_3$"
J. Opt. Soc. Am., Vol 55, PP. 828–834. July 1965

(2) I. P. Kaminow and E. H. Turner,
"Electro optic Light Modulator"
Proc. IEEE, Vol 54, PP. 1375–1390,
October 1966.

(3) R. C. Casella and S. P. Keller
"Polarized Light Transmission of $BaTiO_3$ single crystals"
Physical Review., Vol 116, PP. 1469–1473,
December 1959

(4) 牧本・小原
"チタン酸バリウム単結晶による
レーザ光変調"
電気通信学会量子エレクトロニクス研究会資料
(1967.-1)

(5) 詳細は 42年度 電子通信学会全国大会 発表予定

輻射科学研究会資料

磁性体中の波動と半導体電子流との結合

松　尾　幸　人

張　　年　　錫

（大阪大学産研）

1967年7月28日

磁性体中の波動と半導体電子流との結合

松尾幸人・張年錫

（大阪大学産研）

1. 序　　言

進行波管や後進波管などではヘリックスやその他の構造による遅波回路中を伝播する回路波と電子ビームとの結合を利用している。

1960年頃Trivelpiece[1]はフエライト中の後進波モードと電子ビームとの結合問題を取り上げた。しかしその後も実験的に増大する波をみつけてない[2,3]最近マイクロ波半導体の進歩と共に機械的な遅波回路中の回路波と半導体中の電子流との結合について通研の小山氏を中心としたグループによってその可能性が理論的に研究された。[4,5,6,11]この場合遅波回路は周波数の上昇と共に困難となり，回路波とビームとの結合をあまり大きく出来ない点がある。我々は先きにGunn diode とフエリ磁性共振器との結合について報告した。[7] その後半導体中の電子流とフエライト中の後進波モードとの結合の可能性に関して若干考察した。[8] もしフエライトの損失が充分小さく，更に飽和磁化の値が自由に変えられるとすると両者の結合がかなり良好におこなえるように思える。特にフエライトと半導体の誘電率がほゞ同じ値であるために回路波と半導体中のビームとの結合が容易であり，電子管のビームにくらべてパービアンスの大きい電子流が利用出来る点などがある。勿論電子管の場合はカソード電流を大きくする方法がある。半導体ではdopingを変化さすことによってこの値を自由に変化出来る。しかし電子管のビームに比べて半導体中の電子流の速度が小さく飽和するのが欠点でこの値を大きくするためには結晶の純度を上げればよくな

るだろう。

このようにフエライト中の後進波モードと半導体中のビームとを組合せることによって，外部磁界の変化で結合周波数領域を変化さすことが出来る一方向性の増幅器および発振器が実現可能であるように思える。

2. フエライト中の波動

フエライトのような異方性媒質が無限或いは半無限平面の場合の解析は多くの人によってなされている。方形導波管の中に充たされたフエライトに対しても同様に研究された。円筒導波管中に挿入されたフエライトが軸方向に磁化されたときの解析はKales[9]によって一般論的に詳しく取扱っている。

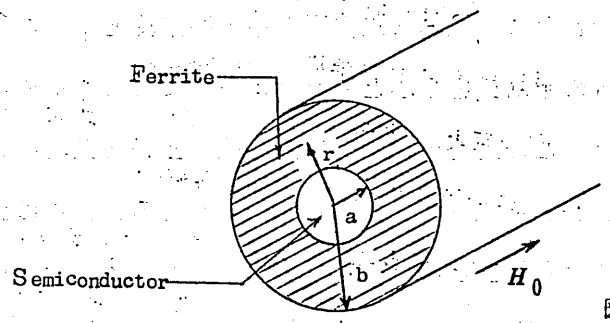


図 1

こゝで解析されるべき問題は図1のように円筒導波管で半径 r が $o \leqq r \leqq a$, $a \leqq r \leqq b$ の領域に半導体およびフエライトが挿入されている場合，境界条件を満足し Z 方向に伝播する波動の性質を調べることである。この場合，電磁界はMaxwellの方程式を満足する。

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} + \mathbb{J} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \tag{3}$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{\mu} \cdot \mathbb{H} \tag{4}$$

$$\mathbb{J} = \rho v - D\frac{\partial \rho}{\partial z} \tag{5}$$

μ_tは軸方向に磁化したときのテンソル成分，Dは拡散定数，$\mathbb{J}$ は半導体中の電流である。問題は(1)～(5)の式を境界条件に従って解き，電磁界成分，特性方程式や伝播定数を求めることに帰着されるが，この問題はかなり複雑である。もし(5)で電子の漂流速度が電界に対して負になるような領域を含めないならば，問題はかなり容易になるだろう。しかし興味はむしろそのような物質との結合にあるかも知れない。

こゝでは半導体中の電子流とフエライトに於ける後進波モードとの結合の可能性についての定性的な考察に限るために上の問題をとくのは次の機会にゆずることにする。そこで問題を簡単化する。図1で完全に導波管がフエライトで充満されたときと半導体だけがあるような場合に分離してみる。勿論このような近似は実際の場合にくらべてかなり大きな差異を生ずるだろうが，定性的な説明としては猶有効であるとみよう。まずフエライトの場合について検討する。今対象にしている試料が波長に比べて充分小さいならば伝播効果が無視出来る。そのときは問題を準静的に取扱うことが出来る。このような問題については，Walker[10]が詳しく論じた。この場合磁界はスカラポテンシャルの勾配として書きあらわせる。

$$\vec{H} = -\nabla \phi \qquad (6)$$

(2)からϕに関するLaplace の方程式をうる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \qquad (7)$$

(7)を円筒座標で表現すれば

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\mu_1 \partial Z^2} = 0 \qquad (8)$$

μ_1は(4)のμの対角成分である。μ は(9)のようになる。

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & -j\kappa_1 & 0 \\ j\kappa_1 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mu_0 \qquad (9)$$

(9)で，μ_1，κ_1は試料が無損失で円柱の場合について計算すると次のようになる。

$$\mu_1 = 1 + \frac{(\omega_0 + \omega_s/2)\,\omega_s}{\mu_0\{(\omega_0 + \omega_s/2)^2 - \omega^2\}} \qquad (10)$$

$$\kappa_1 = \frac{\omega\,\omega_s}{(\omega_0 + \omega_s/2)^2 - \omega^2} \qquad (11)$$

$$\omega_s = \gamma M_0 , \quad \omega_0 = \gamma H_0 \qquad (12)$$

こゝでM_0は飽和磁化でH_0は外部静磁界，γは磁気回転比，μ_0は空気の透磁率である。

(8)は通常の変数分離の方法で解け，$\phi = R(\gamma)\Phi(\theta)Z(z)$とすると，$\theta$，$Z$については指数関係の解となり，半径方向に対しては(13)のようになる。

$$R(Tr) = AJ_n(Tr) + BY_n(Tr) \qquad (13)$$

$$T^2 = \frac{-\beta^2}{\mu_1} \qquad (14)$$

βは位相定数である。簡単のためにθ方向の変化がないとする（$n = 0$）。中心に於いて(13)の$Y_n(T_r)$が満足されない条件を入れると，解は次のようになる。

$$\phi = AJ_0(Tr)e^{j(\omega t-\beta z)} \qquad (15)$$

境界条件は$B_r\Big|_{r=b} = 0$であるから、

$$B_r = -\mu_1 H_r = -A\mu_1 TJ_0'(Tr)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

となり

$$J_1(Tb) = 0 , \quad Tb = g_{1\nu} \qquad (16)$$

$g_{1\nu}$は第1種 Bessel 関数の ν 番目の根である。(16)を(14)に代入して(17)をうる。(17)より $\omega-\beta$のグラフが書ける。このときH_0, M_0 と bがパラメータである。図1で b/a の比が大きいとき空気

$$\frac{\beta b}{g_{11}} = \left\{ \frac{\omega_2 \ \omega_0}{\mu_0 \left[\omega^2 - \left(\omega_0 + \omega_s/2\right)^2 \right]} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (17)$$

とフエライトの組合せならば，分散特性に大きな変化はない。[3] (17)は $d\omega/d\beta$ が負になっている。

電界成分を求めるためには(1), (3)を利用すればよい。$\partial/\partial\theta = 0$, $H_\theta = 0$ とすると E_θ は

$$E_\theta = -\frac{\omega}{\beta}\mu_0 \mu_1 H_r \qquad (18)$$

E_z に関しては次の式を解くことによって求まる。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial Z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} - \beta^2 E_z = -\omega\mu_0 \kappa_1 A T^2 \left(\frac{J_1(Tr)}{Tr} + J_0(Tr) \right) \qquad (19)$$

(19) の E_z を用いると $E_r = \frac{1}{j\beta}\left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \omega\mu_0 i \kappa_1 H_r \right)$ から E_r が求まる。これらの電磁界成分によってZ軸方向を伝播する電力も計算される。

3. 半導体中の波動

電子管に於ける電子流について波動論的に取扱うといわゆるslow fastの空間電荷波が存在することがわかる。半導体に電界を加えるとμEなる漂流速度で電子が漂流する。この場合も同様に波動論的に取扱えるが拡散効果のために3つの可能な波が存在する。こゝでは小信号理論，単一速度の流れなどの近似で計算する。(1)，(2)に加えて電荷保存とlorentzの式を用いる。

$$\nabla \cdot \mathbb{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (20)$$

$$\frac{d_v}{dt} = \frac{e}{m^*}(\mathbb{E} + \mathcal{V} \times \mathbb{B}), \quad e < 0 \qquad (21)$$

簡単のために$\mathcal{V} \times \mathbb{B}$の項を無視し，一次元のビームを考える。磁界の回転とベクトルの公式から全電流J_{tot}を与える式をうる。

$$J_{tot} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + J = J_0 + J_z + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (22)$$

Jは(5)で与えられていて，次のように書ける。

$$J = J_0 + J_z = (\rho_0 + \rho_z)(U_0 + v_z) - D\frac{\partial}{\partial_z}(\rho_0 + \rho_z) \qquad (23)$$

こゝに$\rho = ne$，$v = \mu E$でDはEに無関係であるとする。すべての成分は直流成分と交流成分を含む。$_0$の添字は直流を示し，交流成分はすべて次のように$e^{j\omega t}$で変化するとする。

$$J_z = J_1 e^{j\omega t}$$

$$\rho_z = \rho_1 e^{j\omega t}$$

$$E_z = E_1 e^{j\omega t} \quad , \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial z} = \rho_1 \qquad (24)$$

$$v_z = v_1 e^{j\omega t}$$

$$J_{t\,1z} = J_{t1} e^{j\omega t} = (J_1 + j\omega\varepsilon E_1) e^{j\omega t}$$

(24)を(23)に代入し交流成分に着目すれば v_1 は次のようになる。

$$v_1 = \frac{1}{\rho_0}\left(J_1 - U_0\rho_1 + D\frac{\delta\rho_1}{\delta z} \right) \qquad (25)$$

(20) から ρ_1が得られ，これを(25) に代入すれば(26) の如く書きなおせる。

$$v_1 = \frac{1}{\rho_0}\left(J_1 + \frac{U_0}{j\omega}\frac{\delta J_1}{\delta z} - \frac{D}{j\omega}\frac{\delta^2 J_1}{\delta z^2} \right) \qquad (26)$$

更に U_0 は Z に無関係であるとすれば(21)から(27)をうる。

$$\left(j_\omega + \frac{1}{\tau}\right) v_1 + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{e}{m^*} E_1 \qquad (27)$$

τ は衝突時間である。(26)を(27)に代入すれば

$$D\frac{\partial^3 J_1}{\partial z^3} + \left\{ \frac{j\omega D}{u_0}\left(1 - \frac{j}{\omega z}\right) - u_0 \right\} \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} - j\omega\left(2 - \frac{j}{\omega\tau}\right)\frac{\partial J_1}{\partial z} + \frac{\omega^2}{u_0}\left(1 - \frac{j}{\omega\tau}\right) J_1 = \frac{-j\omega e E_1 J_0}{m^* u_0}$$

(28)

(24) を考慮し，$J_{t1} = 0$，プラズマ周波数 ω_p を $\omega_p = \left(\frac{e^2 n_0}{m^*\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ とすれば (28) は (29)と変形される。

$$\frac{\partial^3 J_1}{\partial z^3} + \left\{ \frac{j\omega}{u_0}\left(1 - \frac{j}{\omega\tau}\right) - \frac{u_0}{D} \right\} \frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2} - \frac{j\omega}{D}\left(2 - \frac{j}{\omega\tau}\right)\frac{\partial J_1}{\partial z} + \frac{\omega^2}{u_0 D}\left(1 - \frac{j}{\omega\tau} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) J_1 = 0 \qquad (29)$$

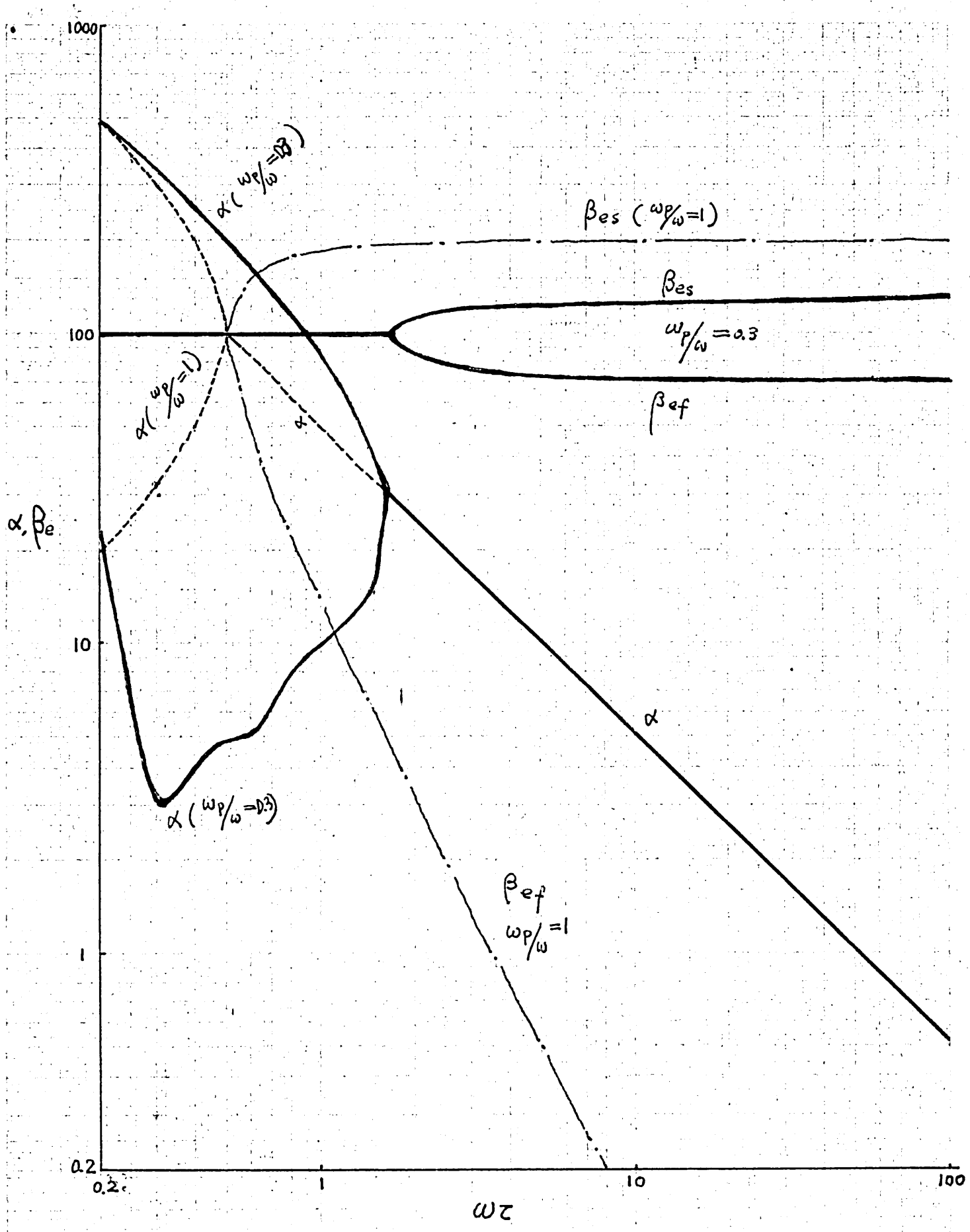


図5. ωτに対するα, βeの変化 (31)
パラメータ ωp/ω

(29) の解は $J_1 = e^{\lambda z}$ とおけるから特性方程式として(30)をうる。

$$\lambda^3+\left\{\frac{j\omega}{u}\left(1-\frac{j}{\omega_z}\right)-\frac{u_0}{D}\right\}\lambda^2-\frac{j\omega}{D}\left(2-\frac{j}{\omega\tau}\right)\lambda+\frac{\omega^2}{u_0 D}\left(1-\frac{j}{\omega\tau}-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)=0 \qquad (30)$$

(30) は解け，3つの解が存在することがわかる。然し係数のために非常に複雑で見通しが悪い。そこで一次近似として(26)の第3項が第2項にくらべて小さいと仮定すると，形式的には拡散効果を無視したことになる。こゝでも，$J_{t1} = 0$ とすれば(28)から次の式が得られる。

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial z^2}+\frac{j\omega}{u_0}\left(2-\frac{j}{\omega\tau}\right)\frac{\partial J_1}{\partial z}-\frac{\omega^2}{u_0^2}\left(1-\frac{j}{\omega\tau}-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)J_1=0$$

この解も $e^{\lambda z}$ とおけばλについて二次式で2つの根が得られる。即ちλ＝

$-\frac{\omega}{2u_0\omega\tau}-\frac{j\omega}{u_0}\left[1\pm\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-\frac{1}{4\omega^2\tau^2}}\right]$ である。故に J_1 の解は

$$J_1=A_1 e^{-(\alpha+j\beta es)z}+A_2 e^{-(\alpha+j\beta ef)z} \qquad (31)$$

(31)は減衰する fast, slow の波動を示す。さて slow の波に着目する。(26)の2，3項に対してその大きさを比較する，

$$\frac{A_2 u_0}{\omega}\left[\frac{\omega}{2u_0\omega\tau}+\frac{j\omega}{u_0}\left(1+\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-\frac{1}{4\omega^2\tau^2}}\right)\right] \qquad (a)$$

$$\frac{A_2 D}{\omega}\left[\frac{\omega}{2u_0\omega\tau}+\frac{j\omega}{u_0}\left(1+\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-\frac{1}{4\omega^2\tau^2}}\right)\right] \qquad (b) \qquad (32)$$

両方の比は(33)となる。

$$u_0^2 \gg D\left|\frac{\omega}{2u_0\tau}+j\omega\left(1+\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-\frac{1}{4\omega^2\tau^2}}\right)\right| \qquad (33)$$

(33) の関係は通常の周波数と $\omega\tau \gg 1$ に対しては成立するが，$\omega\tau$ が極端に小さくなると成立しない。(33)の関係を満足するような条件の下で $D \neq 0$

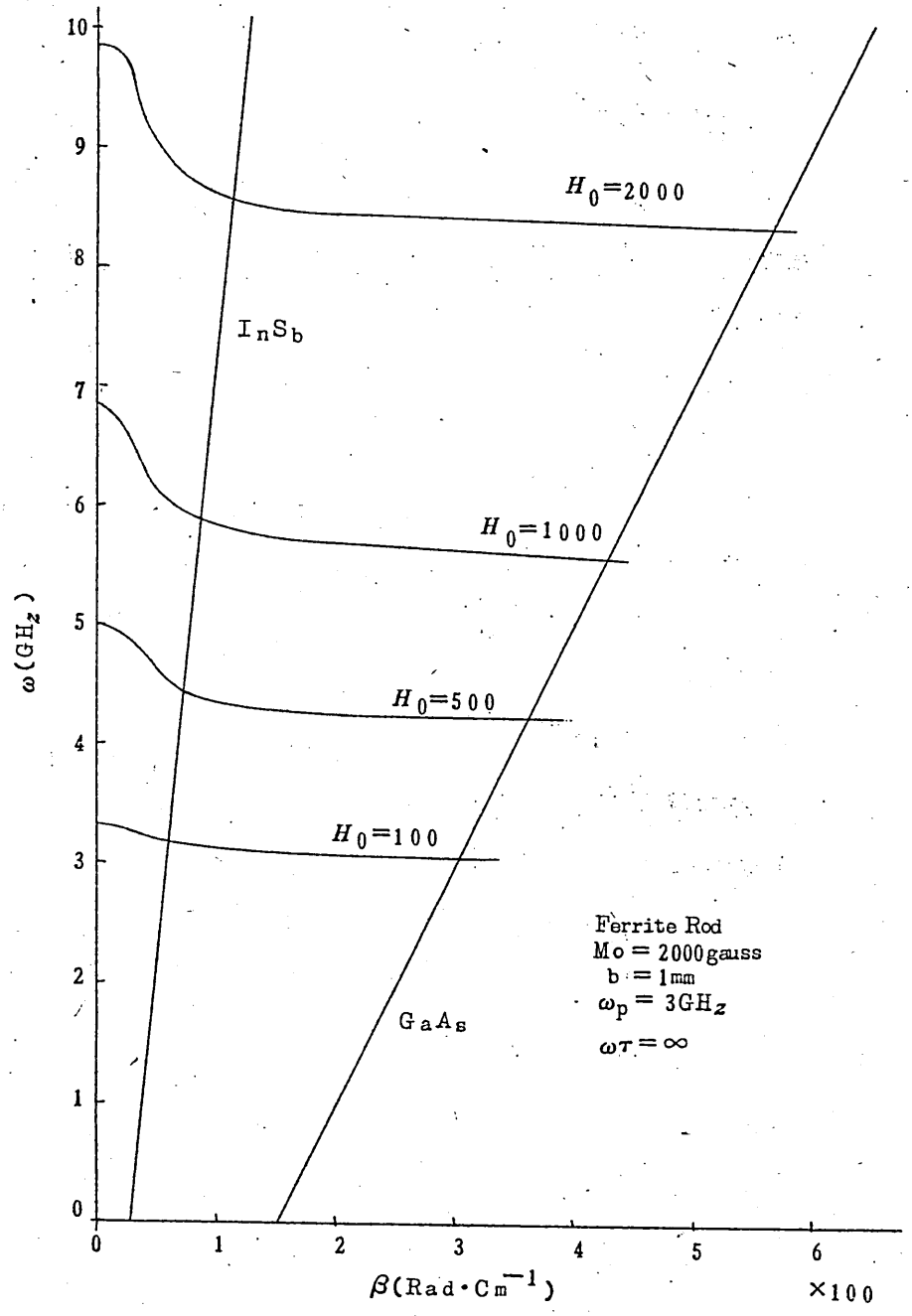

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
ω(GHz)
H_0=2000
InSb
H_0=1000
H_0=500
H_0=100
GaAs
Ferrite Rod
Mo = 2000gauss
b = 1mm
ω_p = 3GHz
$\omega\tau = \infty$
0
1
2
3
4
5
6
β(Rad・Cm^{-1})
×100

図 2 (a)

でない場合にもslowの波が存在する。更に$\omega\tau=\infty$のとき$\omega=\omega_p$に於ける解のふるまいについて付録で簡単にのべる。

4. 結　　合

フエライトの中の後進波モードと半導体中の電子流との結合の定性的なもようは(17)と(31)のslow波に対する項とを図示することによって理解される。図2(a)は円柱型のフエライト$b=1mm$，$M_0=2000$ガウスのとき$\omega-\beta$の特性をH_0をパラメータとして書いている。半導体は$GaAs$，$InSb$に対して$\omega_p=3GHz$としたときのslow波の$\omega-\beta$関係が直線で表わされH_0の値に対して両方の交点が存在する。$GaAs$に対して$U_0=2\times10^7 cm/s$，$InSb$では$U_0=10^8 cm/s$を採用している。$GaAs$の場合は殆んど共振点の近くで結合がおこるのでやゝ困難のように思われるが$InSb$のときはH_0の広い範囲にわたって結合点が共振点からずれているために結合は容易におこるだろう。一方図2(b)は飽和磁化$M_0=1000$ガウスにしている以外は(a)と同じである。結合の有様も前の場合と同じであるが，M_0の値が小さいために低い周波数に於ける動作が可能である。いずれの場合もH_0に従って結合点の周波数が変化している。結合点での$d\omega/d\beta$の値が小さく，この点は共振点からほゞ$150MH_z$離れている。図3は外部磁界に対する結合周波数の変化を示したものである。形状が円柱であるから球や無限媒質と異なって反磁場の効果が利用出来るためにH_0の小さい値で高い結合周波数をうることが出来る。磁界に対する周波数特性は直線的である。これはBWOの電圧同調法にくらべてやゝ有利であるように思える。これらの特性はM_0，ω_p，$n_0\tau$などを変化さすことによって色々変ってくる。$InSb$($\mu=80000\frac{cm^2}{V\cdot S}$，$E=1250 V/cm$)を用いる限り損失のあるフエライトでも充分結合が可能であろう。

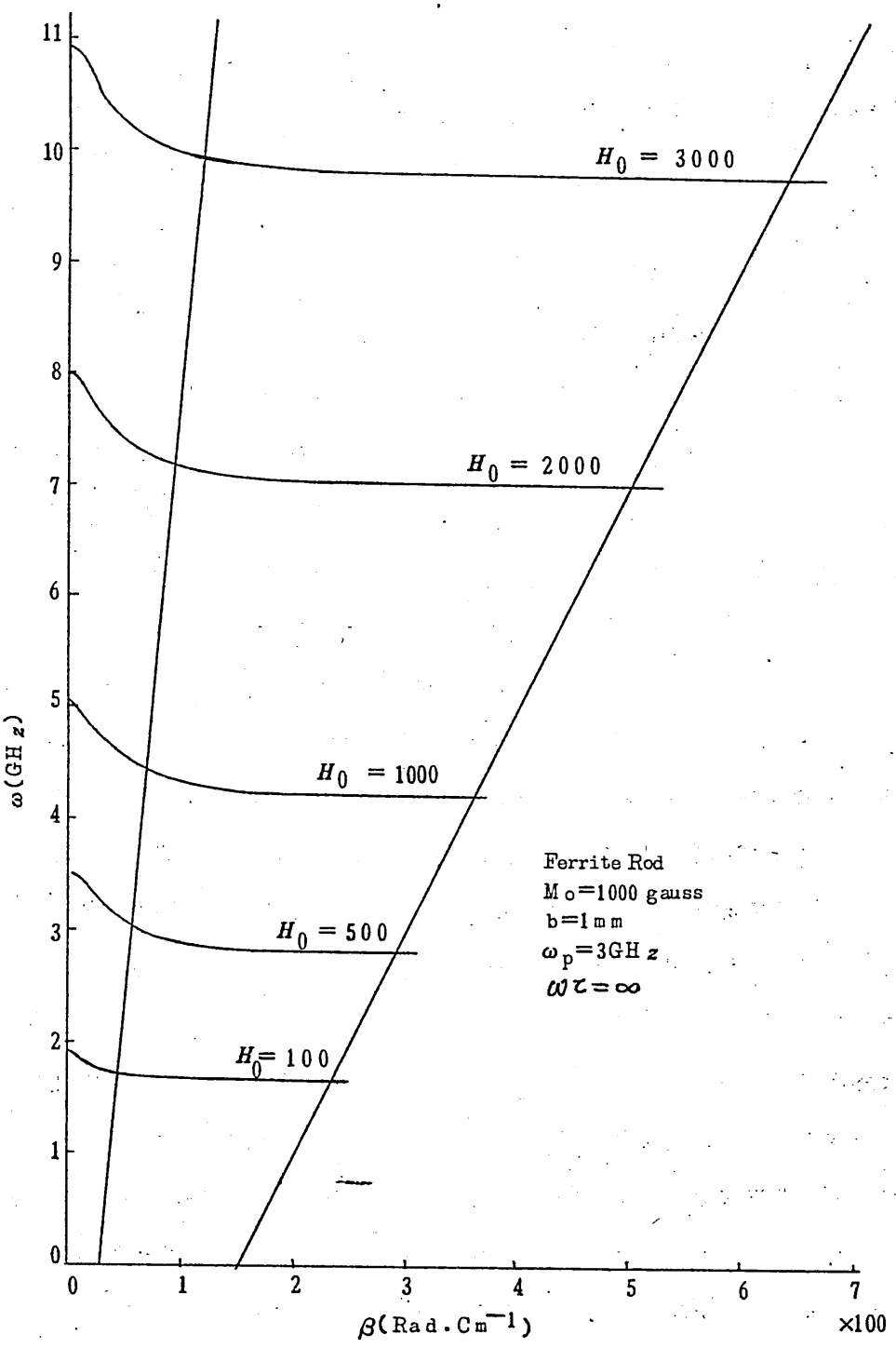

11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
ω(GHz)
H_0 = 3000
H_0 = 2000
H_0 = 1000
H_0 = 500
H_0 = 100
Ferrite Rod
Mo=1000 gauss
b=1mm
ω_p=3GHz
$\omega\tau=\infty$
0
1
2
3
4
5
6
7
β(Rad.Cm^{-1})
×100

図 2 (b)

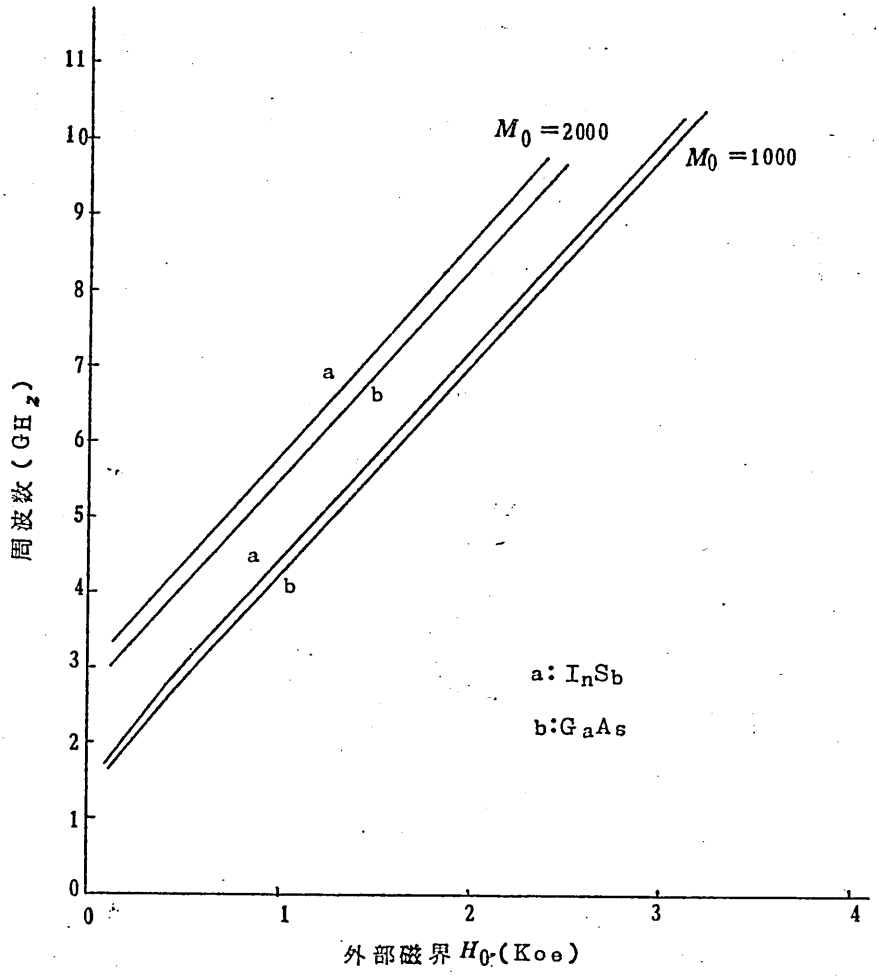


図 3

今までの説明では結合についての詳しい事情がわからない。即ち結合係数は求まらない。然し半導体中の電子流と回路波との結合の度合は通常の進行波管の計算と同様に行える筈である。だから（19）より E_z を求めそれから $K = [E_z^2(0)/2\beta^2 P_z]$ によって結合インピーダンス[2]が求まる。P_z は Z 方向を流れる電力で H_r, E_θ で計算される。小信号結合パラメータ C は電子ビームの場合 $C = K^{I_0}/4V_0$ で，無損失回路のときの発振の条件式[2]は $(CN) = 0.314$ でこれから波長で規格化した結合長 N がわかる。

一般にこのような結合については詳しく調べられているが，我々の場合は今迄と若干異なった内容も含んでいる。例えば半導体の ε は大きくフエライトのそれと近い値を持っているので回路波は半導体の中まで充分入りこむことが出来る。また境界での電界の変化は小さいと考えられる。このため結合は大きくなる。更にパービアンスの大きい電子流が使える利点がある。このことは U_0 が大きくならない問題とも関連がある。

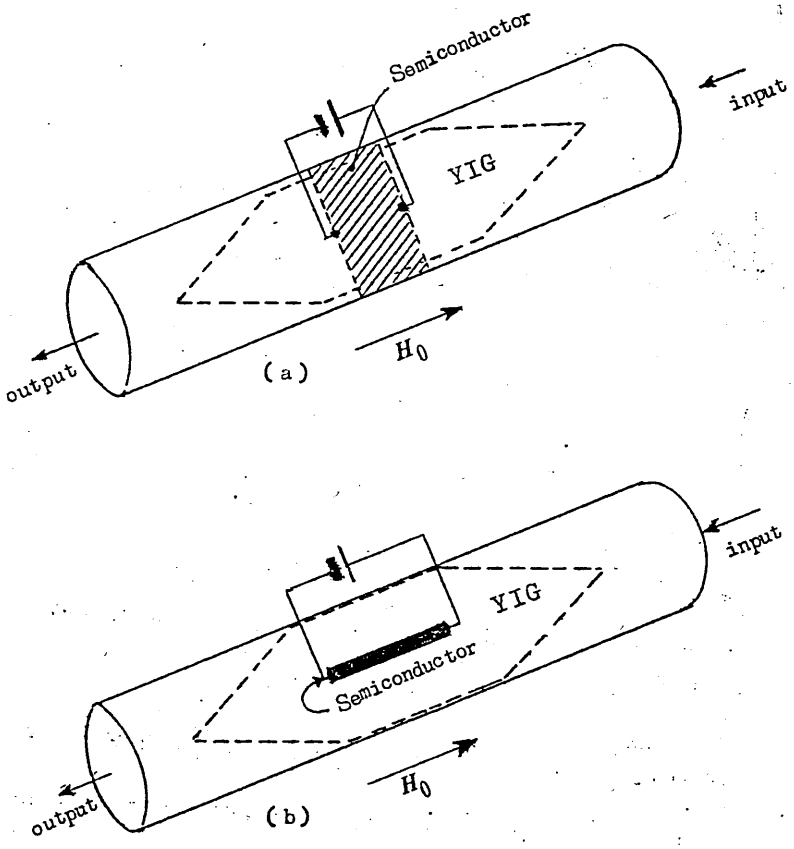


図　4

構造として入出力回路の結合問題がやっかいである。例えば図 4 (a), (b) のようなものを考えることが出来る。(a)ではフエライト円柱の外側に半導体の中空パイプをおいた場合で半導体の温度上昇をかなり容易に防げるが半導体の適当な中空パイプを作ることと端面をコンタクトすることが難点であるが結合面積が広いために長さを短かく出来る利点がある。しかし E_z 成分が小さくなるのでこの点を考慮する必要がある。一方(b)ではフエライトの中に半導体をうめこんだ場合で，バイアス用のリード線やフエライトを中空にする工作などが問題である。いずれにしてもかなり困難な工作を伴う。

応用としては次のようなことが考えられる。広帯域受信器の前置増幅器或いは発振器として利用出来るだろう。即ち図 3 からわかるように H_0 に対する周波数特性が直線的である。しかしそのような広帯域の入出力回路が問題である。増幅，発振範囲を 3 ～ 10 GH_z にするのに根本的な困難はない。特に受信信号が微弱で周波数が未知のとき，H_0 を掃引することによって周波数を識別することが出来る。

付　　録

(30)で $\omega\tau \to \infty$ $\omega = \omega_p$ のときの波動の性質を調べる。このとき（30）は(1)' となる。

$$\lambda^2 + \left(\frac{j\omega}{U_0} - \frac{U_0}{D}\right)\lambda - \frac{2j\omega}{D} = 0 \qquad (1)'$$

(1)' で $\frac{U_0^2}{D^2} >> \frac{\omega^2}{U_0^2}$，　$1 >> \frac{\omega D}{U_0^2}$　とすれば(1)' の根は

$$\lambda_1 = \frac{U_0}{D} + \frac{j\omega}{U_0}$$

$$\lambda_2 = -\frac{j2\omega}{U_0}$$

となり，このときの解は(2)' となる。

$$J_1 = B_1 e^{\left(\frac{U_0}{D} + \frac{-j\omega}{U_0}\right)Z} + B_2 e^{\frac{-j2\omega}{U_0} Z} \qquad (2)'$$

(2)' の第1項は後進波で $\beta = \omega/U_0$，振巾が $e^{U_0 Z/D}$ で増大する。第2項は β の小さい前進波をあらわす。このように $\omega = \omega_p$ のときは特異な現象がおこる。

文　　献

(1) A. W. Trivelpiece Conference of Microwave tubes Munchen, P. 251 (1960)

(2) A. W. Trivelpiece, A. Ignatius, and p. c. Holscher, JAP. 32, 2, P. 259(1961)

(3) J. Spector and A. W. Trivelpiece, JAP. 35, 7, P. 2030 (1964)

(4) 鈴木，角，通全大　S9-2 (1966)

(5) 小山，大原，通全大　S9-3 (1966)

(6) 大原，隅部，小山，連大　1769 (1967)

(7) N. S. Chang, T. Hayamizu, and Y. Matuo, IEEE Letters (to be published)

(8) N. S. Chang, ISIR, Osaka Uni, MLTR-67-703 (1967. 07. 01)

(9) M. L. Kales, JAP. 24, 5, P. 604 (1953)

(10) L. R. Walker, phys. Rev. 105, P. 390 (1957)

(11) L. Solymer and E.A.Ash, Int.J.Electronics, 20, 2, P. 127(1966)

輻射科学研究会資料 72-8/67
(於松下電器中研)

H_2+O_2, D_2+O_2 SMASER (I)

大阪市大工　村井昭

抄録：内径7cm，ミラー間隔2.2mの放電管に全圧力0.2より1.0 TorrのH_2+O_2，D_2+O_2を封入し，0.6μF，6KVのコンデンサー充放電励起で，遠赤外レーザー発振を得た。これはH_2O，D_2Oレーザーの拡張として予期通りであるが，圧力$P_{H_2}=P_{O_2}=0.3\sim0.4$ Torrでは放電開始直後の約1/秒間に，推定10 Wattに達する大出力が得られた。これは所謂"爆鳴気"に近い条件から得られたのではないかと考えている。又定常的な発振の時は"H_2O^+"が多量に生じているようで，此の4原子分子による発振域はこれとH_2Oとのやりとりによる発振，の可能性が強い。用いたミラーは手で磨いた銅板製で，長波長発振の目的で出力窓は直径20mmの円孔である。波長測定装置が未完全で正確な波長を得ていないが，数本で発振しており，その出力の一部を黒ビニールで遮蔽したGolay cellで検出した。

§1. 緒言

H_2O, D_2Oによる遠赤外域レーザーは1964年のCrocker & Gebbieの報告[2]に始まり，同年Mathias & CrockerによりH_2Oについて16～120μの32本，D_2Oについて33～107μに16本の，5桁の発振波長が報告されている。[3] 其後更にH_2Oで220μ，D_2Oで174μの発振が加えられている。[4][5] 而しその発振機構については筆者は未だ報告を見ていない。H_2O, D_2Oの低圧放電では容易に多量のOH，ODを生ずるので，これが発振に関係している事は間違いないと思われる。而し最終生成物としてH_2Oを生ずる，Bonhoffer & Haber[6]の酸水素燃焼反応式を見ると，OH以外にHO_2，H_2O_2の様な不安定分子が介在しており，又当然H，M(H^+)，O原子，H_2，O_2，O_3分子も豊富に存在しており，これが数eVの電子群と相互作用しながら互に衝突を繰返している状態は，二種原子の組合せとは思えない複雑さを持っている。

一方，酸・水素混合気体は或條件の下に連鎖反応を起し，所謂爆鳴気として莫大のエネルギーを放出する事が知られてゐる。此のエネルギーを稀薄気体中では完全な連鎖にはなり難いが，化学反応によって特定準位励起を急激に行うであろうから，これが反転分布を形成すればレーザー高出力を得る可能性がある。

以上の意味から，$\alpha H_2(D_2) + \beta O_2$ 系でのレーザー実験を試みた。此の際の反応生成物を調べる手段として，1）分光分析，2）マイクロ波吸収，3）質量分析，4）クロマトグラフィ，が考えられるが，何れも不具合な面があり，結局支配 α，β による全圧の時間変化から推定した。

§2. 反応生成物

i) 水素の燃焼反応[6]

(H_2, O_2 の解離エネルギー)

$$H_2 + 102\,kcal\,(4476\,cm^{-1}) = 2H \cdots (1)$$
$$O_2 + 117\,kcal\,(5080\,cm^{-1}) = 2O$$

解離エネルギーの低い H_2 が多量に解離する。これが O_2 と衝突して

$$H + O_2 = HO_2 \cdots (2)$$

HO_2 は不安定で，すぐに未反応 H_2 と反応して分解する。

$$HO_2 + H_2 = H_2O_2 + H \cdots (3)$$
$$HO_2 + H_2 = H_2O + OH \cdots (4)$$

H_2O_2 の分解　$2H_2O_2 = 2H_2O + O_2 \cdots (5)$

OH の反応　$OH + H_2 = H_2O + H \cdots (6)$

(3) (6) 式の H は (2) にもどり，終る事はない。

ii) 酸・水素爆鳴気の低圧爆発

$$H + O_2 = OH + O$$
$$O + H_2 = OH + H$$
$$OH + H_2 = H_2O + H$$

上記の反応が考えられ，i) では1本であった連鎖が3本になり，幾算的に増加して反応速度が激増する。此の低圧爆発の起る圧力範囲は4～40 Torr であるので，1 Torr 以下で実験を行うことにした。

iii) レーザー候補者

以上から，低圧放電気体中のレーザー候補者として，時間的に

$H_2O \rightarrow H_2O,\ OH,\ H_2O_2,\ HO_2,\ (H_3O)^+$

$\alpha H_2 + \beta O_2 \rightarrow HO_2,\ H_2O_2,\ OH,\ H_2O,\ (H_3O)^+$

と考えた。尚これらの励起に関しては，電子以外に

$H,\ \alpha,\ O,\ O^+,\ O_2^+,\ O^-,\ O_3$

が反応及び輸送によって関係してゐるであらう。

§3. OH基

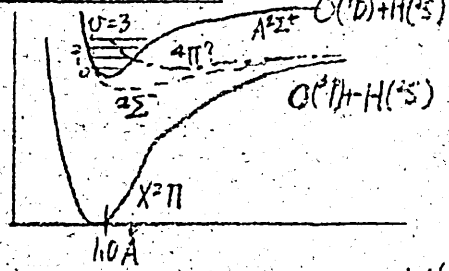


Fig. 1. OH基のポテンシャル曲線

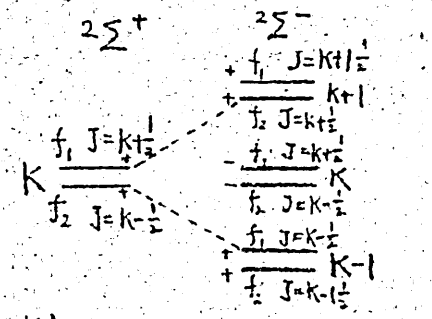


Fig. 2 OH $^2\Sigma^+$ と $^2\Sigma^-$ の摂動

OH基のポテンシャルエネルギー曲線を Fig. 1. に示す。Gaydon-Wolfhard[7] は第1励起準位 $A^2\Sigma^+$ は振動量子数 $v=0$ では回転量子数 $K \geq 25$，$v=1$ では $K \geq 18$，$v=2$ では全Kについて，異常強度減小を観測し，此の解釈として，解離 $O(^3P)+H(^2S)$ の再結合分子のとりうる $^2\Pi, ^2\Sigma^-, ^4\Pi, ^4\Sigma^-$ のうち，$^2\Sigma^+$ と摂動しうるものはポテンシャル曲線が交はり且 same J same symmetry から，$^2\Sigma^-$ が矢線の位置にあり，これによって前期解離して消失した，と考えた。(Fig. 2)

上の過程，及びその逆過程から生じた $A^2\Sigma^+$ の回転分布異常から遷移した $X^2\Pi$ 中には異常分布が生じる筈で，これによるレーザー発振を考えるのは合理的に思はれる。尚，最近 Nagali & Palmer[8] により，Fig. 1 中の鎖線で示した $^4\Pi?$ による前期解離が論じられてゐる。

Dieke & Crosswhite は H_2O からの OH の UV band の実験値を整理して，$A^2\Sigma \rightarrow X^2\Pi$ の遷移確率等を詳細に計算してゐる。惜しい事にこれは摂動が入つてゐない為か，これから求めた $X^2\Pi$ 中の ΔK より生じた波長と，Mathias & Crochet の得たレーザー波長とを接近したものと並べてみると H_2O 32本中，約10本が可成り一致してゐる。(第1表)

Mathias Crocker		Dicke Crosswhite より
H_2O λ(μ)	cm^{-1}	OH $(X^2\Pi)$ cm^{-1}
23.365	427.99	427.70 (V=2, K=12, 4f)
32.929	303.68	304.37 (V=2, K=8, 4f)
35.841	279.01	278.88 (V=1, K=7.4f)
36.619	273.08	272.76 (V=2, K=7.4f)
㊙38.094	262.51	261.80 (V=3, K=7.4f)
47.693	209.67	209.59 (V=2, K=5, 4f)
55.077	181.56	181.40 (V=1, K=5, 4f)
73.402	136.24	134.90 (V=3, K=3, 4f)
118.65	84.28	83.87 (V=0 K=1 0f)
120.08	83.28	83.70 (V=0 K=1 0f)

第1表 H_2O レーザーと OH 回転遷移との対応

又これから同位元素効果を計算し、16本の OD レーザー波長と比較すると、㊙印のものが OD 138.96 cm^{-1} に対応してゐる様に見えるが、他は全く対応しない。これは OD の回転準位のズレで振動K値が違ってくる事から当然であり、一致は若しこれが本当だとしてもむしろ他の原因が考え易い。

§4. 実験

用いた放電管は CN 発振用に試作した内径 9 cm, ミラー間隔 2.2 m のもので、内部鏡方式である。ミラー部は硝能径を大きくしてあり、直径 13 cm の金属製である。その全景を Fig. 3 に、系統図を Fig. 4 に示す。出力窓側ミラーは平面で、目下は長波長発振を目的にして、中央部に 20 mmφ の穴をもつ銅板を使ってゐる。角度を調整出来る様にしてある。対向ミラーも銅製で、曲率半径約 20 m 位、硝ヒズミをもつてゐる。これは両調整及び軸方向の無回転送りが可能になつてゐる。

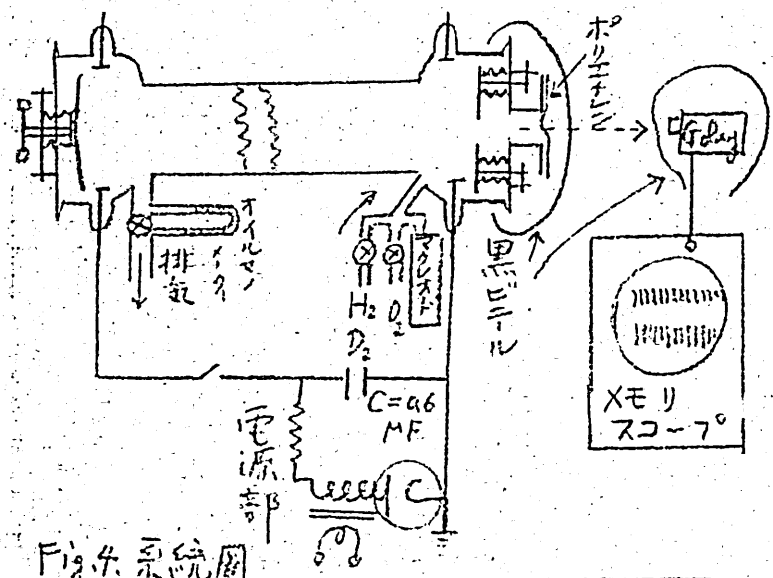


Fig. 4. 系統図

出力は 30 mmφ のポリエチレン窓を介して取出してゐる。検出は quartz window の Golay cell を用いてゐる。此の前面にゆるやかな開口の電磁ホーンを窓に接して置けば

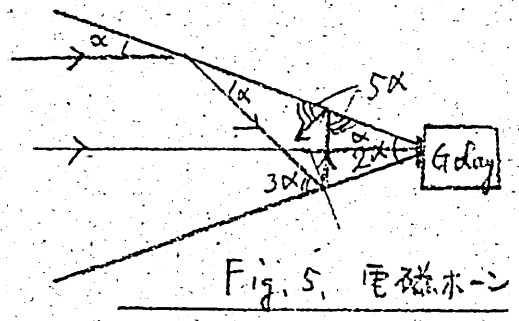


Fig. 5. 電磁ホーン

検波出力は容易に大きくなる。幾何光学的に考えて、凹面反射板の面との角度は開口半角 α の $(2n-1)\alpha$ となるので、これが90°以下になる様にすればよい。実際、$\alpha=2°$ の6ミリ帯用ホーンでは出力が零となり、$\alpha=4°$ の試作ホーンではホーンの無い場合に比べて約10倍の出力を得た。位相を考慮すれば"抛物面反射鏡方式になる。

電源は0.6μFのコンデンサーに最高7KV迄充電し、air gapで放電してレーザー管内を通電する。電流実頭値は約500～1000Aで、約20μsec. 持続する。

ミラー調整は管内に空気を入れ、ポリエチレン窓を外してのぞいて第2反射像を第1反射像と合はせて排気すれば大低小振中発振する。それから出力を見ながらミラー調整する。

此の管の欠点はミラー間隔が管膨脹と共に増大する事で、これにより熱同調したとみられる、長時間の出力変化がある。而し発振が停止に至つた事はない。ガス圧及び放電電流によつては例えば管内下面の内壁に接した部分丈で発光するプラズマになる場合があり、其の場合硝子管の下面丈が熱くなるので、熱膨脹により弓なりになると想像される場合もある。

管軸の延長線上に黒いビニール袋をかぶせたGday cellを置き、電源のair gapを調節して7～10cmにし、又メモリスコープの横軸を1μsec/cmとし、ビームを走らせておいて電源スイッチを入れれば、その後の全出力パルスが記録される。そのまゝ働作させておき、ビーム位置を1cm下げて再び10分後その10秒間をメモらせ、……といふ様にして得たのがFig. 6A～Fig. 11.Cである。写真の下に用いたガスの種類及び封入時の初期圧を記し、その時の縦軸の感度、経過時間及びその時の全圧の変化を写真右横に記入した。尚レーザー管は現在僅真空漏れがあり、排気して10時間放置すれば約1 Torr.の空気が侵入する。それで1時間以上連続動作のデータは約0.1 Torr.のN_2の侵入を考慮せねばならない。

Fig.3 装置全景

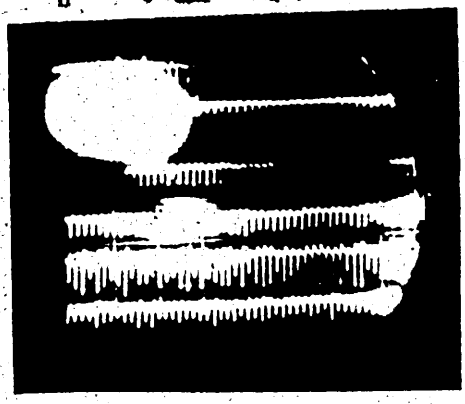


Fig.6.a. H_2O 0.35 Torrより

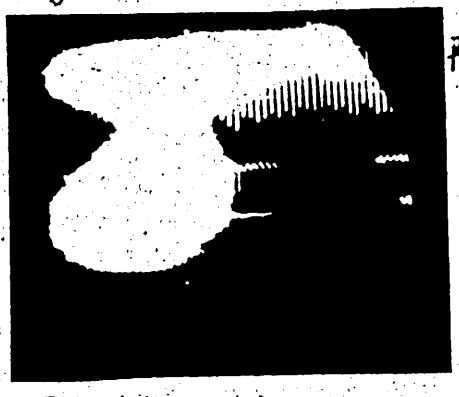


Fig.6.b 上のガスで10分休・再開

Fig.6.C 上のガスの排気効果

Fig.7.a. H_2 0.15, O_2 0.25 Torr

Fig.7.b 上のガスの休止効果

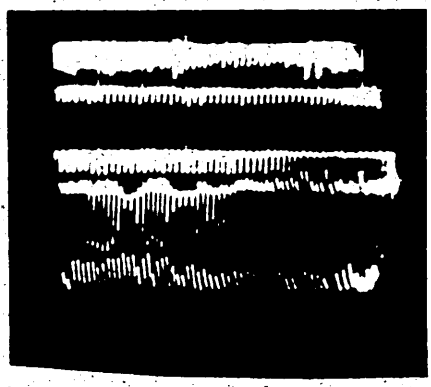


Fig.7.c (上のガス継続)

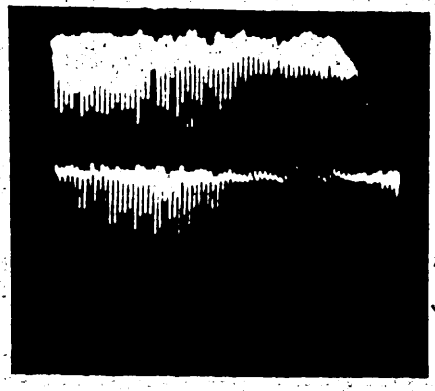
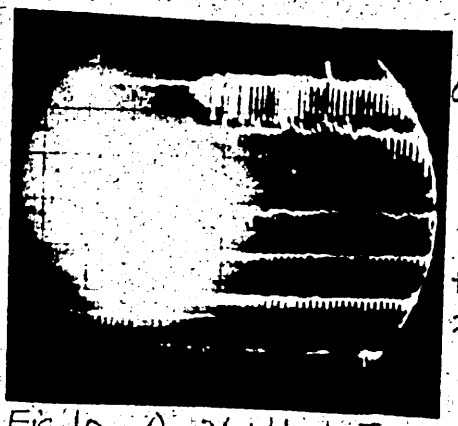


Fig.7.d (上のガス継続)

.2V/cm
1sec/cm

時間	圧力
0分	.6
2分	.36
4分	.38
6分	.38

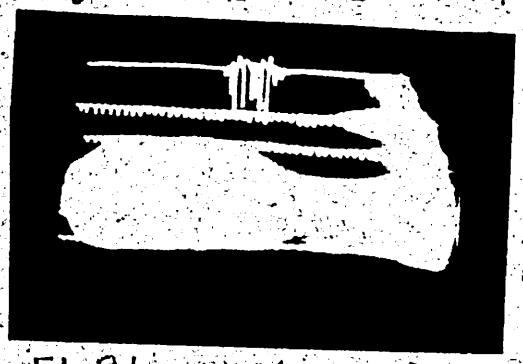
Fig.8.a. H_2 .3 O_2 .3 Torr.



0.2V/cm
1sec/cm

O_2 .26 + H_2 .12
+ H_2 .12
= 0.31
+ H_2 .12
= .40
+ H_2 .12 = .50
排気
〃

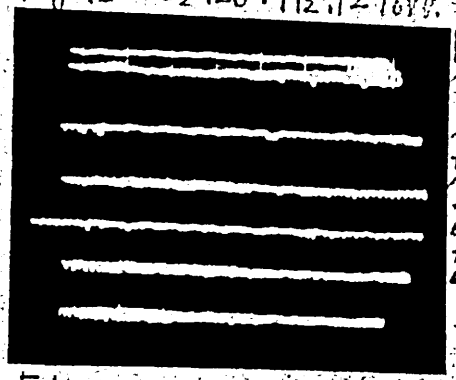
Fig.10 O_2 .26 + H_2 .12 Torr.



1V/cm
1sec/cm

0分	.8
1分	.6
2分	.55
3分	.60
4分	.62
5分	.62
6分	.60

Fig.8.b H_2 .4 O_2 .4 Torr.



0.2V/cm
1sec/cm

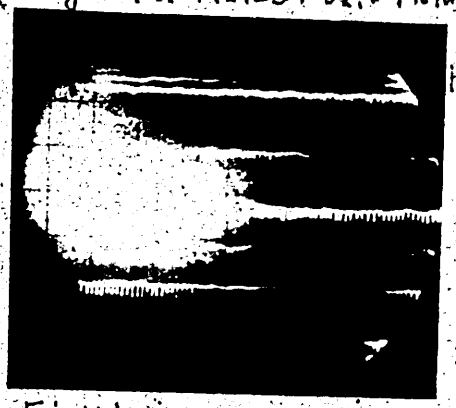
H_2 0.25 + O_2 .09
= 0.21
+ O_2 .09 = .21
+ O_2 .09 = .32
+ O_2 .09 = .40
+ O_2 .09 = .58
+ H_2 .12 = .62

Fig.11.a. H_2 .25 + O_2 .09 n Torr.

.4V/cm
1sec/cm

0分	.75
1分	.50
2分	.52
3分	.52
4分	.52
7分	.52

Fig.8.c. H_2 .3 O_2 .45 Torr.



0.2
1

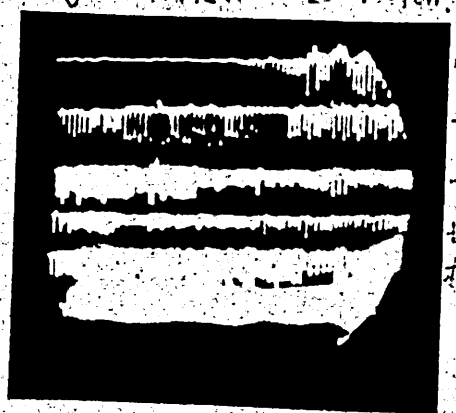
H_2 .12 + O_2 .09
= .12
+ O_2 〃 = .19
+ O_2 〃 = .25
+ O_2 〃 = .32
+ O_2 〃 = .40
+ O_2 〃 = .44
排気

Fig.11.b. H_2 .12 + O_2 .09 n Torr.

0.2
1

0分	.9
1分	.67
2分	.65
3分	.68
4分	.65
5分	.65
排気して	.35
7分	.40
8分	.40

Fig.9. D_2 .4 O_2 .5 Torr.



0.2
1

H_2 .38 + O_2 .09
= .38
+ O_2 .09 = .32
+ O_2 〃 = .32
+ O_2 〃 = .40
排気して .28
.20
.15

Fig.11.c. H_2 .38 + O_2 .09 Torr.

§5. 結果

比較の為，先ず H_2O からの発振及び其後の変化を Fig. 6 a, b, c. に示す。H_2O は放電開始 10 秒後に約 30 % 増圧し，其後ゆるやかに増大する。此の増圧を

$$3H_2O = H_2O + 2OH + H_2 \quad (=4) \cdots (7)$$

と仮定する。OH は (6) 式

$$OH + H_2 = H_2O + H \cdots\cdots (6)$$

分光により H は強い Balmer 系列線を放出してゐる。H^+ は

$$H + (-e) \underset{n=2 \text{ より } 3.5eV}{\overset{\text{基底より } 13.5986eV}{=}} (H)^+ \cdots (8)$$

これより

$$H_2O + (H)^+ = (H_3O)^+ \cdots\cdots (9)$$

此のまゝ最終的に $(H_3O)^+$ が増加するとすると

$$6H_2O = 4(H_3O)^+ + O_2 \quad (=5) \quad (10)$$

で減圧となり，実験結果 Fig. 12 と矛盾する。その均合点は初期圧，励起電流，過度等の函数であらうが，もっと軽い原子，分子があつて均合つてゐると想像される。

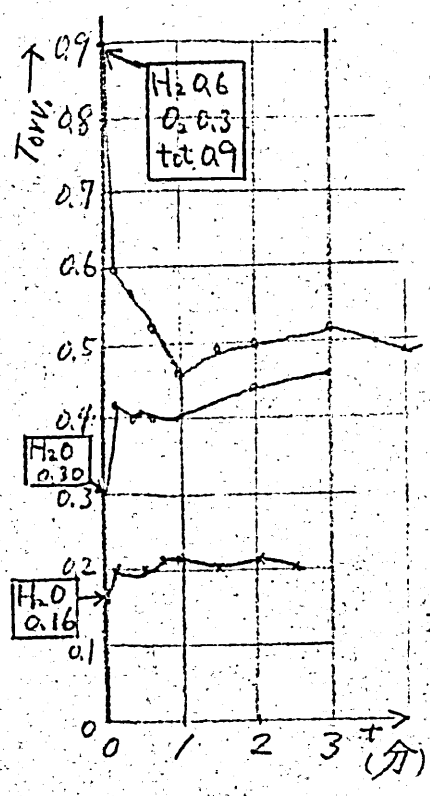


Fig. 12. 全圧の時間変化

Fig. 6 b. は 6 a. の 50 分から 10 分間放電を停止し，60 分に再開したもので，その瞬間から大出力が得られる。これは $H_2 + O_2$ でも見られる。(Fig. 7b) つまり休止中に物質の変化があつて，これが主要な一つの鍵と思はれる。休止中の圧力変化は殆ど無い。

Fig. 7 は H_2 0.15, O_2 0.25 Torr. より出発したもので，放電開始時の出力 (Fig. 7a) と休止再開 (7. b) とは同程度であるが，波長の異なる可能性がある。

Fig. 8 a は $\alpha = \beta = 0.3$, 8 b は $\alpha = \beta = 0.4$ の場合で，放電開始と共に約 1 秒間持続する大出力が得られる。これが爆鳴気に近いものから発振したかどうかは今後検討する予定である。

Fig. 9 は $D_2 + O_2$ であるが，管内圧が高過ぎた為か出力は小さかつた。

文献 1. Nature 201 (1964) 250
2. 〃 202 (〃) 169
3. Phys. Lett. 13-1 (1964) 35
4. Appl. Phys. Lett. 8 (1966) 217 ; Fleck & Müller IEEE 54 (1966) 543 〃 〃
5. Hiuch, Shimizu, Kobayashi & Shimoda to be published

Fig.10 は O_2 0.26 Torr. で放電しておき，(無発振) H_2 0.12 Torr を繰返し加えたもの，Fig.11 は H_2 0.38 Torr. で放電しておき，(無発振) O_2 0.09 Torr を繰返し加えたものである。

此の様な混合ガスは放電開始と共に急激に減圧し，(Fig.12) 或場合には入れた H_2 を下廻る圧力となる。(Fig.13 C と D)

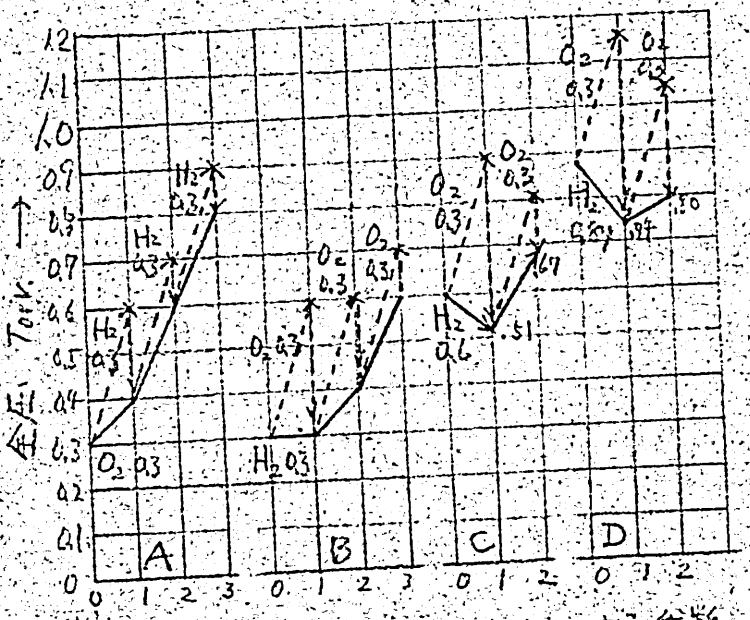


Fig.13. 放電中の追加ガス(上)による代数和圧力(点線)と実際の全圧(実線)

C については

$$6H_2 + 3O_2 = 4(H_3O)^+ + O_2 \quad (=5) \cdots (11)$$

実験上 5.1 となり良く一致する様に見える。これから $(H_3O)^+$ を推定した。

これから

$$H_2O + H^+ = (H_3O)^+ + E \quad (12)$$

$$(H_3O)^+ + (-e) = H_2O + H \quad (13)$$

此の (12) 式の E 或は其の一部がレーザーとして働き，一方 $(H_3O)^+$ 自身は電子と結合して $H_2O + H$ となり，レーザー作用の下の準位がいつもこわされてカラッポに近い…(13) といふ模型は何處か不具合であらうか。

§6. 検討

介在分子は他にも多種存在し，発振波長も多いので，全発振が $(H_3O)^+$ とは到底考えられない。今后更に波長出力各波長の発振相関等，別の面から実験を試みたく思つてゐる。尚爆鳴気エネルギーのレーザー応用については新しい管を試作中で，今后更に検討を行いたい。

§謝辞

懇切に種々御教示戴いた阪大理・堀江教授に深く感謝する。尚実験に協力戴いた本学 M2 斉藤君・学生堀内君に感謝する。

6. Chem. Phys.
7. Proc. Roy. Soc. A-208 (1951) 63
8. J. Mol. Spectr. 23 (1967) 44.
9. Bumblebee Report No. 87.

輻射科学研究会資料

ＲＡＤＡ通信方式の一方式

龍　沢　善　信
真　弓　和　昭
原　　洋　人

昭和４２年７月２８日

松下電器産業株式会社
中央研究所

1. 緒　　言

最近移動無線における周波数不足に対処し、周波数有効利用を計る手段として、ＲＡＤＡ通信方式が注目されてきた。これはかなり広い一定の周波数帯域を多数の無線局で共用して使用し、系全体のトラフイック率を上げることによつて、等価的に一局当りの等価帯域巾を小さくしようとするものである。

今迄に提案された方式は、いずれも同時通信可能局当りの等価帯域幅は、従来の周波数分割方式に比しはるかに大きく、周波数有効利用の面からは問題が大きい。我々は通話の明瞭度を重視し、音声の若干の自然性は犠牲になるが、周波数効率を向上し得る方式について検討を行なつた。

2. ＲＡＤＡ通信方式の概要[1)]

① 音声をパルス変調などによりパルス系列に変換する（１次変調）

② 上で発生した各々のパルスを周波数スロット、時間スロットの符号化によりアドレス信号に変換する（２次変調）

特徴は

１） 制御局なしに随時他の加入者と通話できる。

２） 周波数有効利用の可能性がある。

３） 妨害に強く、盗聴され難い。

４） 若干の S/N 低下を許せば、少々の過負荷に耐えうる。

５） 漏話が非了解性である。

６） 周波数安定度、選択度の要求がＦＤＭに比しゆるやかである。

欠点は

１） アクテイブ局が増せば偽アドレスにより S/N が低下する。

２） 統制がやり難い。

３） 周波数割当の問題。

４） 話中表示が困難

一次変調方式には、ＰＰＭ、同期２値デルタ、同期３値デルタ非同期３値デルタ等の変調方式が考えられているが、現在最も有望視されているもの及び我々の考案したＡＤＯ×方式を比較すれば次のようになる。

第１表　各種一次変調方式比較

方　式　名	信号パルス数	許容付加パルス数	1MHz同時通話可能局数	備　考
予測変換デルタ(2)(10100010)	kp/sec 21.9	kp/sec 20.0	局 6.0	サンプリング周波数 =80KHz
Companded △−M	28.0	28.0	4.6	〃 =56KHz
〃　〃　+VOS	15.9	28.0	8.0	〃 =56KHz
非同期３値△−M	16.0	17.0	6.4	MaxFreq=172KHz
ＡＤＯＸ	2.1	1.0	25.0	
HardClip 3値△−M	5.6	2.0	11.0	−25dBでクリップ

第１表は全部同一の条件により測定されたデータをもとに我々が解析した計算式[2]により同時通話可能局数を計算したものである。

同期式の場合には実際には同期性雑音が多く発生する可能性があり、予測変換又はＶＯＳにより発射パルスを逓減したものは同期引込み迄の語頭において明瞭度が低下する可能性があるが、第１表にはこれらは無視されている。

3.　ＡＤＯＸ変調方式

3.1.　概　　要

音声の零交差波はサンプル点が極めて少ないにもかかわらず、明瞭度はかなり大きいことが古くより知られている。零交差波から得られた音声は自然性に乏ぼしく、音響的雑音の影響を受けやすい。

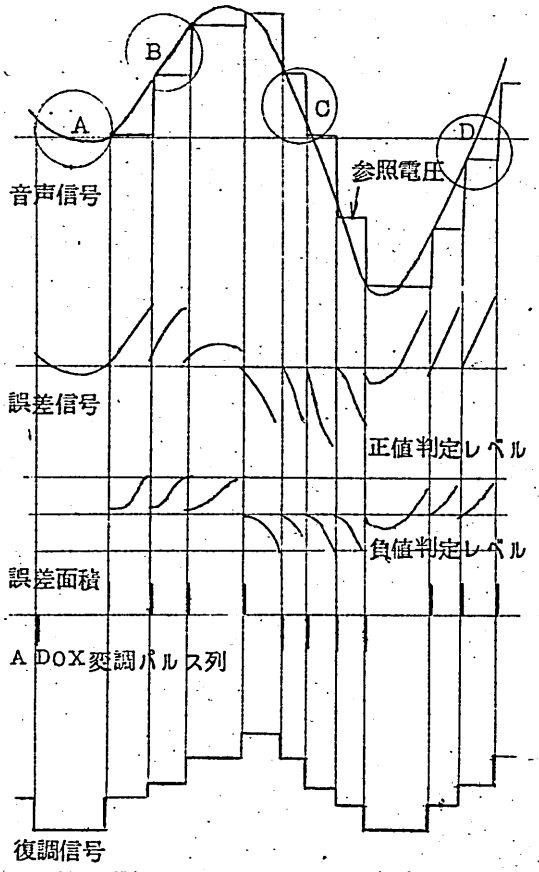
このような零交差信号に、主として母音部分の大振幅時にある程度の振幅情報を加えることによつて、自然性、明瞭度を向上し、音響的

雑音の影響を少なくできることが解つた。

この点に着目して、ＡＤＯＸ変調は零交差パルスに面積デルタ変調パルスを加えたものを出力パルスとする。

面積デルタ変調とは音声信号の参照電圧からの増分を積分することによつて、誤差信号と時間軸とが作る誤差面積を求め、これが一定値に達するとき、誤差面積の極性に応じた極性のパルスを発生し、同時に誤差面積を零レベルに、参照電圧をパルス発生時点における音声入力レベルにクランプするものである。

ＡＤＯＸ変調の変調機構を第１図に示す。音声信号が小振幅である主として子音の部分では零交差パルスが、大振幅である主として母音部分では面積デルタパルスが大勢を占める。つまり、第１図においてＡの部分では誤差面積が一定値に満たないため面積デルタパルスは発生せず、Ｂの部分では誤差が一定値に達する毎にパルスが発生し振幅情報が得られる。Ｃの部分では誤差面積が一定値に達する以前に零交差パルスが得られるため、この時点から改めて誤差面積が求められる。Ｄの部分では誤差面積が一定値に達する以前に零交差点が存在するが、パルス間隔が一定値に満たないため零交差パルスは発生しない。この操作は変調出力パルス列において、アドレス・フレームを保証するためのものである。変調出力パルス列から得られる階段波を低域沪波器に通すことにより音声波形が近似的に再現される。面積デルタ変調は変調信号の振幅増加のほぼ平方根に比例してパルスが増加するに過ぎず、また急峻な入力に対しても間隔の狭いパルスは発生し難い特徴を有する。



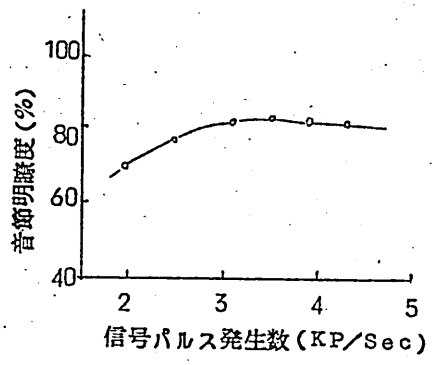
第１図　ＡＤＯＸ変復調機構

3.2　発生パルス特性

零交差パルスの発生数をほぼ一定値に限定し、面積デルタ変調の誤差面積の判定レベルを変化すれば発生パルス数は変化する。第２図は音声の実通話時間（ポーズの時間をのぞいた時間）当りの平均パルス発生数と音節明瞭度との関係を示すものである。音節明瞭度は、ほぼ3.5ＫＰ／Sec.で緩かなピークを示すが大体飽和特性となる。明瞭度は主として零交差パルスによつて定まり飽和領域でのパルス数の増加は自然性の向上に寄与する。更にはるかにパルス発生数を増加すれば当然明瞭度は更に向上するものと思われる。

明瞭度試験は５名の素人の男子試験員で行ない、異なる３枚の音節明

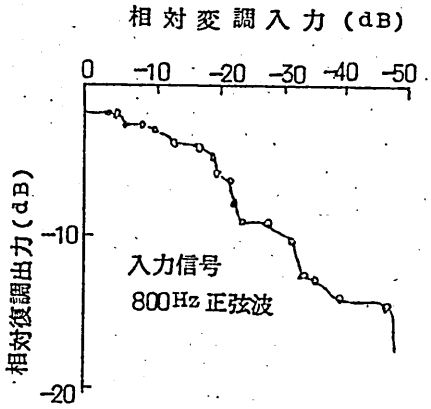
瞭度試験表に対する結果の平均値をとつた。動作点はパルス発生数約3.5ＫＰ／Secの点を使用することにした。実際の通話時の平均パルス発生数はこれにポーズ率を乗じて平均約１ＫＰ／Sec となる。



第２図　発生パルス特性

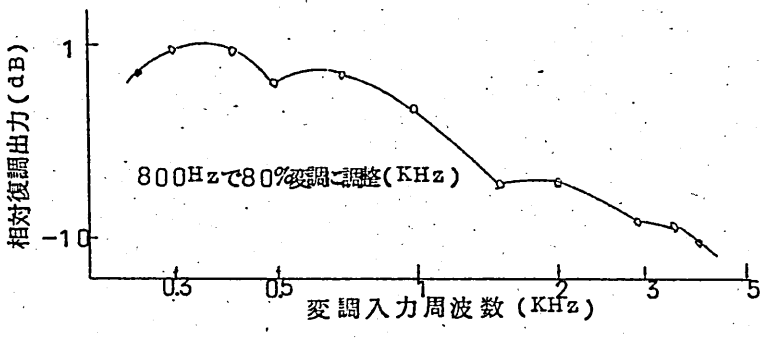
3.3　動作特性

ＡＤＯＸ変調系は入力の誤差面積で量子化し、誤差振幅として復調しているために入出力の直線性は悪い。８００Hz の正弦波で変調したときの入出力特性を第３図に示す。



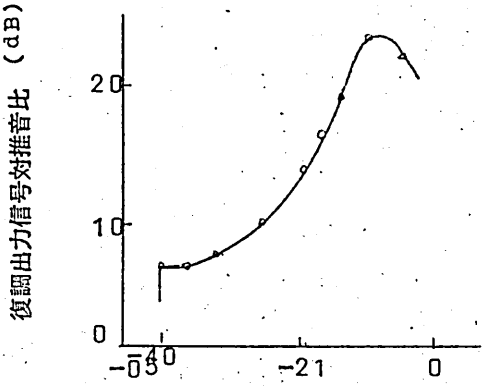
第３図　変調入出力特性

また面積は周波数の関数でもあるので周波数特性も平担とならず低域は強調される。零交差パルスを多くして明瞭度を上げるために入力信号は微分して高域を強調し、出力信号は聞き易くするために適当な周波数特性を持つた増幅器で補正している。変調の周波数特性を第4図に示す。



第4図　周波数特性

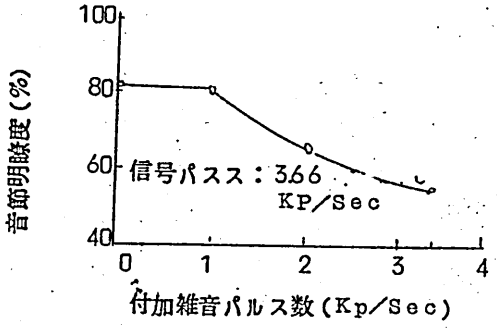
第5図は入力信号が８００Hzの正弦波である場合の入力レベルを歪率との関係を示したものである。相対入力レベルが－４０ｄＢ以下は白色雑音のため正常な零交差点を求めることができない、また大入力では過負荷特性のための歪率は大きくなつている。



第5図　S/N－入力レベル特性

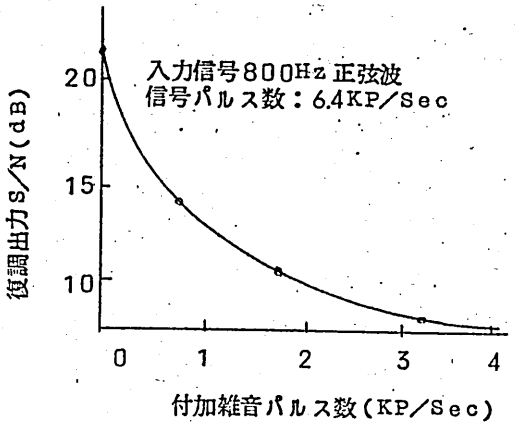
3.4　パルス付加雑音特性

ＡＤＯＸ変調出力パルス列に正負同数のランダムパルスを混合すれば、明瞭度は低下する。第６図からわかるように付加パルスの発生頻度が約１ＫＰ／Sec までは明瞭度の低下は緩やかである。なおこの測定では実通話時間当りの変調出力パルス発生頻度は3.66 KP／Sec であつた。



第６図　付加雑音特性

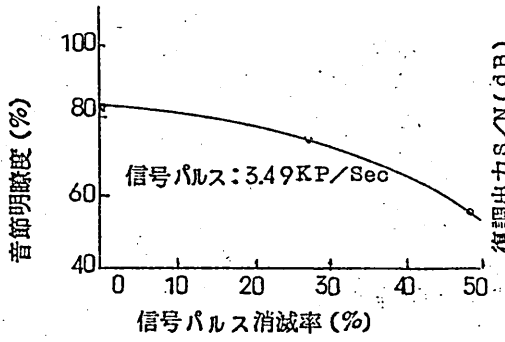
また入力信号が８００Hz の正弦波である場合、変調出力パルス発生頻度を6.4 Kp／Sec とするとき、付加パルス発生頻度と復調信号対雑音比との関係は第７図のようである。



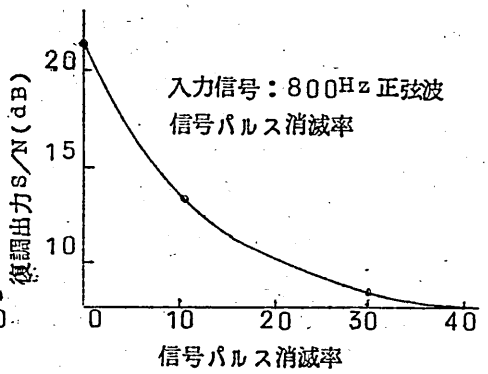
第７図　付加雑音とS／Nとの関係

3.5　パルス消滅雑音特性

変調出力パルス列からランダムにいくつかのパルスを取り去つた場合の明瞭度の変化を第8図に示す。この場合の実通話時間当りの変調出力パルスの発生頻度は3.49KP/Secであつた。また入力信号が800Hzの正弦波である場合、変調出力パルス発生頻度を6.4KP/Secとするとき、パルス消滅率と復調信号の信号対雑音比との関係を第9図に示す。



第8図　消滅雑音特性



第9図　消滅パルスとS/Nとの関係

4.　単周波形RADA

2次変調方式としては復数の周波数スロットを使用する代りに単一周波数でタイムスロットのみの符号化によりRADAを構成することもできる。ADOX変調方式は帯域効率が大きいので、単周波形RADAとして比較的狭帯域で高能率な通信系を構成するのに適している。

一例としてパルス巾　$\tau = 5\mu$Sec　タイムスロット数N＝20、アドレスパルス数n＝4,としたとき周波数帯域400KHz、同時通話可能局数約18局となり70％以上の音節明瞭度を確保し得る。

このときの符号数Cは

$$C = \frac{1}{2}\binom{N-1}{n-1}$$

なるゆえ、C≒４８４（局分）となり、実用上充分である。

この場合の同時通話可能局数より見た等価帯域幅は２２KHzとなる。各局のトラフイック率を0.1と仮定すると、約１８０局収容できて、等価帯域幅は約２２KHzとなる。

5. 結　言

実際にはパルス波の伝播時にはバックスキャッタや多重反射等の影響もあり、上述した程の高能率は得られないかもしれないが、トラフイック率を考慮すれば現状よりもはるかに高能率になると考えられる。

この方式は基地局方式にも利用できる。その際は同一グループの局は同一符号を使用すればよい。

ＲＡＤＡ方式は常にある程度の雑音はまぬがれないものであり、そのような状態では明瞭度のみが重要な要素となり、ＡＤＯＸ方式は他の高密度パルス変調方式に比し遜色ない音質となつて、実用上支障なく高能率通信が可能となる。

文　献

(1) 南条；ＲＡＤＡ通信方式，エレクトロニクス　昭４２年７月

(2) 宮川；松岡；デルタ変調によつて得られた二元系列の予測による変換、電通誌４９，１１，　9：2110（昭４１年１１月）

(3) 竜沢，真弓，原；非同期多重通信の一方式，信学会通信方式研資（昭４２年７月２６日）

輻射科学研究会資料

圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用

藤岡　弘
二瓶文博
熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1967年10月6日

1．序　　言

最近，運動系の電磁界理論の重要な問題の一つとして，運動媒質による平面電磁波の反射・屈折の問題がとりあげられ，すでに数多くの報告がある．しかし従来の理論は，運動媒質が通常の誘電体[(1)〜(3)]もしくは衝突のないプラズマ[(4)]に限られており，導電性誘電体もしくは衝突度数が十分多いプラズマ等に関する報告はまだないようである．

ここでは，衝突度数が十分多いプラズマを電気伝導性をもつ一つの連続媒質と考えて流体力学的に取り扱い，このようなプラズマ流体が真空中を一様に運動している場合の平面電磁波との相互作用について考察する．

2．静止プラズマ流体の基本方程式

運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用の問題を論じるまえに，まず静止プラズマ流体の基本方程式について考察する．

圧縮性静止プラズマ流体全体を電気伝導性をもつ一つの連続媒質と考え，電磁流体的に取り扱うとき，その基本方程式はつぎのように書ける．[(5)]

Maxwellの方程式，

$$\nabla' \times \boldsymbol{E}' = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t'} \tag{1a}$$

$$\nabla' \times \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{J}' + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}'}{\partial t'} \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{J}' = \sigma(\boldsymbol{E}' + \mu_0 \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{H}') \tag{1c}$$

連続の方程式

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\rho' v') = 0 \qquad (1d)$$

運動方程式,

$$\rho' \frac{Dv'}{Dt'} = -\nabla' P' + \mu_0 (J' \times H') \qquad (1e)$$

エネルギー方程式,

$$\rho' C_P \frac{DT'}{Dt'} = \frac{DP'}{Dt'} + \frac{J'^2}{\sigma} \qquad (1f)$$

状態方程式,

$$P' = \rho' R_0 T' \qquad (1g)$$

ただし,

$$\frac{D'}{Dt'} = \frac{\partial}{\partial t'} + (v' \cdot \nabla')$$

ここで, ε_0, μ_0 は真空の誘電率および透磁率を表わし, σ は導電率を表わす. また, v',, ρ', T' および P' はそれぞれ, 流速, 流体密度, 圧力および温度を表わし, また R_0 および C_P は気体定数および定圧比熱を表わす. なお運動方程式(1e)およびエネルギー方程式(1f)において, 粘性および熱伝導を無視した.

いま, 一定の外部磁界 H_0 の中で平衡している密度 ρ_0, 圧力 P_0 のプラズマ流体に波動的な変動がおこり, 磁界, 密度, 圧力がそれぞれ $H_0 + H'$, $\rho_0 + \rho'$ $P_0 + P'$ になつたとする. ここで H', ρ', P' はそれぞれ微少変動の部分である. 電界, 電流, 流速は平衡の状態では0であるとし, 波動のあるときは変動の部分 E', J', v' だけで, それは微少量であるとする. この場合に微少量の2次以上の項を消略すると, 基本方程式系(1)からつぎの線形方程式が導かれる.

$$\nabla' \times E' = -\mu_0 \frac{\partial H'}{\partial t'} \qquad (2a)$$

$$\nabla' \times H' = J' + \varepsilon_0 \frac{\partial E'}{\partial t'} \qquad (2b)$$

$$J' = \sigma (E' + \mu_0 v' \times H_0) \qquad (2c)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \rho_0 (\nabla' \cdot v') = 0 \qquad (2d)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t'} = -\nabla' P' + \mu_0 (J' \times H_0) \qquad (2e)$$

$$P' = a_0^2 \rho' \qquad (2f)$$

ただし，a_0は音速を表わし，流体圧力と密度の間には断熱過程が成立するものとする．上に得られた線形方程式(2)から，圧縮性静止プラズマ流体中を伝搬する平面波として，電磁 Alfvén 波と電磁音波の二つの電磁流体波が存在することを示すことができる．このような静止プラズマ流体の水平な境界面に平面電磁波が入射するとき，入射H波（磁界が入射面に垂直，TM波）に対しては電磁 Alfvén 波が，入射E波（電界が入射面に垂直，TE波）に対しては電磁音波が励振される．本文では，入射平面電磁波がH波の場合の電磁波と電磁流体波との相互作用について詳しく考察する．入射E波による相互作用については，いずれ稿を改めて報告する予定である．

さて，ここで外部静磁界の方向を図1に示すように x' 軸に平行であるとし，移相項 $e^{j(\omega' t' - k_x'^{(t)} x' - k_z'^{(t)} z')}$ を仮定すれば，$x'z'$ 平面内を伝搬する電磁 Alfvén 波の分散関係式は，線形方程式(2)から得られるつぎの四つの式から決定できる．

$$k_z'^{(t)} E_x' - k_x'^{(t)} E_z' - \mu_0 \omega' H_y' = 0 \qquad (3a)$$

$$(\sigma + j \omega' \varepsilon_0) E_x' - j k_z'^{(t)} H_y' = 0 \qquad (3b)$$

$$(\sigma + j\,\omega'\,\varepsilon_0)\,E_z' + j\,k_x'^{(t)}\,H_y' - \sigma\,\mu_0\,H_0\,v_y' = 0 \qquad (3c)$$

$$\mu_0\,\sigma\,H_0\,E_z' - (j\,\rho_0\omega' + \mu_0^2\,\sigma\,H_0^2)\,v_y' = 0 \qquad (3d)$$

上式より分散関係式

$$\left[\left\{k_x'^{(t)}\right\}^2 + \left\{k_z'^{(t)}\right\}^2 + j\,\mu_0\,\omega'\,(\sigma + j\,\omega'\,\varepsilon_0)\right]$$
$$\times\left\{\varepsilon_0\,\omega'\,\mu_0^2\,\sigma H_0^2 + (\sigma + j\,\omega'\,\varepsilon_0)\,\omega'\,\rho_0\right\}$$
$$- j\,\sigma^2\,\mu_0^2\,H_0^2\left\{k_x'^{(t)}\right\}^2 = 0 \qquad (4)$$

を得る．なお線形方程式(2)から得られる上の四つの式以外の式は電磁音波の分散関係式を求めるために用いられ，入射電磁波がE波の場合の相互作用を論じるとき必要となるが，ここでは省略する．

3．反射波と透過波

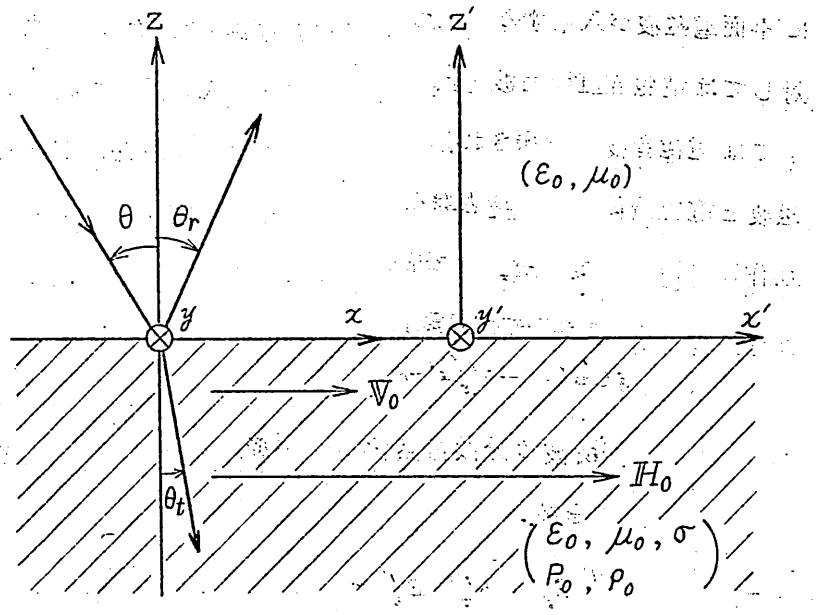


図1　座標系

図１に示すように，$z>0$の空間は真空であり，$z<0$の空間は前節で述べたような圧縮性プラズマ流体によつて満されているものとし，プラズマ流体は観測者に対して一定速度V_0でx軸方向に運動しているものとする．いま真空側から一様な平面波が入射するものとし，本文では磁界が入射面（x z平面）に垂直な場合のみを取扱うことにする．このとき，観測者の静止座標系K（x，y，z，t）においては，入射波はつぎのように表わされる．

$$H_y^{(i)} = H_i \; e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \tag{5a}$$

$$E_y^{(i)} = 0 \tag{5b}$$

ただし

$$k_x = k_0 \sin\theta, \quad k_z = -k_0 \cos\theta, \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \tag{6}$$

ここで，H_iは場所および時間に無関係な定数であり，ωは入射波の角周波数θは入射角を表わす．なお，電磁界の他の成分は式(1)とMaxwellの方程式から求められる．

プラズマ流体の静止座標系K'（x'，y'，z'，t'）においては，入射波はつぎの形に書ける．

$$H_y'^{(i)} = H_i' \; e^{j(\omega' t' - k_x' x' - k_z' z')} \tag{7a}$$

$$E_y'^{(i)} = 0 \tag{7b}$$

入射波(7)に対して，反射波および透過波はそれぞれつぎのように書ける．

反射波

$$H_y'^{(r)} = A_r' \; e^{j(\omega' t' - k_x' x' + k_z' z')} \tag{8a}$$

$$E_y'^{(r)} = 0 \tag{8b}$$

透過波

$$H_y'^{(t)} = G_t' \; e^{j(\omega' t' - k_x' x' - k_z'^{(t)} z')} \tag{9a}$$

$$E_y'^{(t)} = 0 \tag{9b}$$

ここで $k_z'^{(t)}$ は分散関係式(4)から決定される．また，定数 A_r' および G_t' は，境界面（$z'=0$）上においては電磁界の接線成分は連続でなければならないという条件を用いてつぎのように決定される．

$$A_r' = \frac{(\varepsilon_0\omega' - j\sigma)k_z' - \varepsilon_0\omega' k_z'^{(t)}}{(\varepsilon_0\omega' - j\sigma)k_z' + \varepsilon_0\omega' k_z'^{(t)}} H_i' \tag{10a}$$

$$G_t' = \frac{2(\varepsilon_0\omega' - j\sigma)k_z'}{(\varepsilon_0\omega' - j\sigma)k_z' + \varepsilon_0\omega' k_z'^{(t)}} H_i' \tag{10b}$$

つぎに，観測者の静止座標系における反射波および透過波はそれぞれつぎのように表わされる．

反射波

$$H_y^{(r)} = A_r \, e^{j(\omega t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z)} \tag{11a}$$

$$E_y^{(r)} = 0 \tag{11b}$$

透過波

$$H_y^{(t)} = G_t \, e^{j(\omega t - k_x^{(t)} x - k_z^{(t)} z)} \tag{12a}$$

$$E_y^{(t)} = 0 \tag{12b}$$

上式において，H_i, k_x, k_z, ω と H_i', k_x', k_z', ω' ; A_r, $k_x^{(r)}$, $k_z^{(r)}$, $\omega^{(r)}$ と A_r', k_x', k_z', ω' ; G_t, $k_x^{(t)}$, $k_z^{(t)}$, $\omega^{(t)}$ と G_t', k_x', $k_z'^{(t)}$, ω' とはそれぞれLorentz変換によつて関係づけられているが，それらの関係式[2]を用いて観測者の静止座標系における反射波および透過波の周波数，伝搬定数を求めることができる．まず周波数および伝搬定数はつぎのようになる．

$$\omega^{(r)} = \omega^{(t)} = \omega \tag{13a}$$

$$k_x^{(r)} = k_x^{(t)} = k_x = k_0 \sin\theta \tag{13b}$$

$$k_z^{(r)} = k_z = -k_0 \cos\theta \tag{13c}$$

$$k_z^{(t)} = -k_0 (p - jq) \tag{13d}$$

ただし

$$p = \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2}} \tag{14a}$$

$$q = \sqrt{\frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2}} \tag{14b}$$

$$P = \cos^2\theta + \frac{V_a^2}{c^2}\frac{\gamma^2(\sin\theta - \beta)^2}{\left(1+\frac{V_a^2}{c^2}\right)^2 + \gamma^2 m^2(1-\beta\sin\theta)^2} \tag{14c}$$

$$Q = -\gamma\frac{(1-\beta\sin\theta)}{m}\left\{1 - \frac{V_a^2}{c^2}\frac{(\sin\theta-\beta)^2\left(1+\frac{V_a^2}{c^2}\right)}{(1-\beta\sin\theta)^2\left\{\left(1+\frac{V_a^2}{c^2}\right)^2 + \gamma^2 m^2(1-\beta\sin\theta)^2\right\}}\right\} \tag{14d}$$

$$V_a = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}H_0 = \text{Alfvén速度} \tag{14e}$$

$$m = \frac{\omega\,\varepsilon_0}{\sigma} \tag{14f}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14g}$$

$$\beta = \frac{V_0}{c} \tag{14h}$$

ここで c は真空中の光速度を表わす．

つぎに，振幅 A_r，G_t はつぎのように求められる．

$$A_r = H_i\frac{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta-p)-j\{\cos\theta-q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}}{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta+p)-j\{\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}} \tag{15a}$$

$$G_t = H_i\frac{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(r-js)}{(\sin\theta-\beta)\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)+j\}} \times\frac{2\gamma m\cos\theta}{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta+p)-j\{\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}} \tag{15b}$$

ただし

$$r = (1-\beta\sin\theta)^2\sin\theta + \frac{\sin\theta}{\gamma^2 m^2} - \beta(p^2-q^2)(1-\beta\sin\beta)$$

$$-2\frac{\beta pq}{\gamma m} \qquad (16a)$$

$$s = \beta\left\{\frac{p^2-q^2}{\gamma m} - 2pq(1-\beta\sin\theta)\right\} \qquad (16b)$$

上に求めた式(14)から反射角 θ_r は入射角 θ に等しく，また屈折角 θ_t はつぎのように表わされることがわかる．

$$\theta_t = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{p}\right) \qquad (17)$$

4．運動プラズマ流体の境界面における相互作用

反射係数 R および透過係数 T を，それぞれ境界面上における反射波と入射波，および透過波と入射波とのPoyntingベクトルの時間平均値の境界面に垂直な成分の比で定義すれば，R および T はそれぞれつぎのように書ける．

$$R = -\left[\frac{S^{(r)}\cdot i_z}{S^{(i)}\cdot i_z}\right] = -\left\{\frac{Re\,(\mathbb{E}^{(r)}\times\mathbb{H}^{(r)*})\cdot i_z}{Re\,(\mathbb{E}^{(i)}\times\mathbb{H}^{(i)*})\cdot i_z}\right\} \qquad (18a)$$

$$T = \left[\frac{S^{(t)}\cdot i_z}{S^{(i)}\cdot i_z}\right] = \left\{\frac{Re\,(\mathbb{E}^{(t)}\times\mathbb{H}^{(t)*})\cdot i_z}{Re\,(\mathbb{E}^{(i)}\times\mathbb{H}^{(i)*})\cdot i_z}\right\} \qquad (18b)$$

ただし，$S^{(i)}$，$S^{(r)}$ および $S^{(t)}$ はそれぞれ入射波，反射波および透過波のPoyntingベクトルの時間平均値を表わし，i_z は z 方向の単位ベクトルを表わす．なお，Re は複素量の実数部を取る操作を表わし，記号 * は複素共役ベクトルを表わす．反射係数および透過係数を上式のように定義すれば，前節に得た結果を用いて次式を得る．

$$R=\frac{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta-p)\}^2+\{\cos\theta-q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2}{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta+p)\}^2+\{\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2} \tag{19a}$$

$$T=\frac{4\gamma m(1-\beta\sin\theta)^2\cos\theta[\{p\gamma m(1-\beta\sin\theta)+q\}\sin\theta-\beta p\gamma m(p^2+q^2)\}]}{(\sin\theta-\beta)[\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta+p)\}^2+\{\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2]} \tag{19b}$$

プラズマ流体が静止しているとき，すなわち$\beta=0$のときには，

$$R=\frac{m^2(\cos\theta-p)^2+(\cos\theta-qm)^2}{m^2(\cos\theta+p)^2+(\cos\theta+qm)^2} \tag{20a}$$

$$T=\frac{4m(pm+q)\cos\theta}{m^2(\cos\theta+p)^2+(\cos\theta+qm)^2} \tag{20b}$$

となる．この場合には，RとTの和は入射角θの如何にかかわらず常に1となり反射電力と透過電力の和は入射電力に等しくなる．しかし，プラズマ流体が運動している場合，すなわち$\beta\neq0$のときには，誘電体もしくは衝突のないプラズマの場合とは違つて，RとTの和は一般には1にはならず，次式で与えられる．

$$R+T=1+\frac{4\gamma m(1-\beta\sin\theta)\cos\theta[p\gamma m(1-\beta\sin\theta)\{\cos^2\theta-(p^2+q^2)\}+q\cos^2\theta]}{(\sin\theta-\beta)[\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta+p)\}^2+\{\cos+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2]} \tag{21}$$

上式(21)の数値計算例として示した図4からもわかるように，$0<\beta<1$のとき，$R+T$は

$$R+T\begin{cases}=1 & \left(\theta=-\frac{\pi}{2}\right)\\ \geqq 1 & \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\sin^{-1}\beta\right)\\ =1 & \left(\theta=\sin^{-1}\beta\right)\\ <1 & \left(\sin^{-1}\beta<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\\ =1 & \left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}\qquad(22a)$$

となり，プラズマ流体の運動速度が光速に等しくなる極限，すなわち$\beta\to 1$の極限においては

$$R+T\begin{cases}=1 & \left(\theta=-\frac{\pi}{2}\right)\\ \to\infty & \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\\ =1 & \left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}\qquad(22b)$$

となる．ただし，式(19a)および数値計算例として示した図5からわかるように，反射係数Rはβの如何にかかわらず決して1を越えることはない．上式(24)から，$0<\beta<1$のとき，入射角θが$-\frac{\pi}{2}<\theta<\sin^{-1}\beta$の場合には，反射電力と透過電力の和は入射電力より大きくなり，$\sin^{-1}\beta<\theta<\frac{\pi}{2}$の場合には入射電力より小さくなることがわかる．なお，$\theta=\sin^{-1}\beta$なる入射角に対しては，反射電力と透過電力の和が丁度入射電力に等しくなる．また，$\beta\to 1$の極限においては，式(22b)からわかるように，$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$の場合を除いて反射電力と透過電力の和は無限に大きくなる．このことから，プラズマ流体が運動している場合には，一般に透過波とプラズマ流体との間にエネルギーの授受があるものと考えられる．なお，このような現象は，通常の導電性運動誘電体の場合にも起る（付録参照）ことから考え，一般に導電性媒質が運動する場合に起つてくる現象であると推測される．

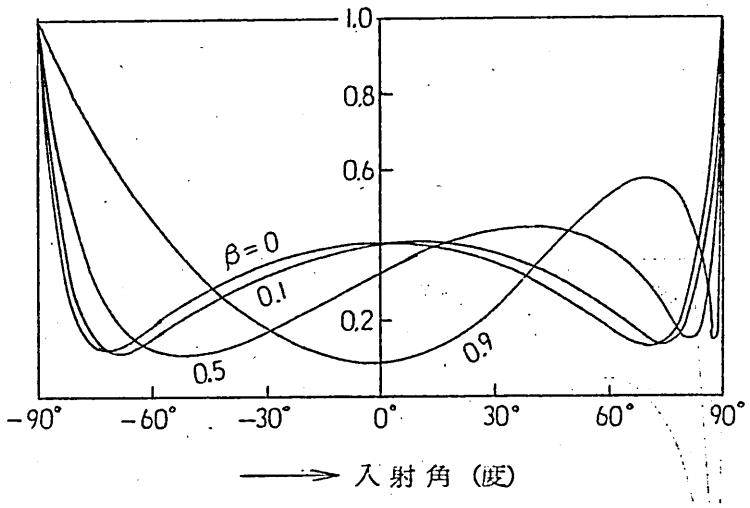


図２　反射係数 R　（$m=0.1$，$Va/c=10^{-2}$）

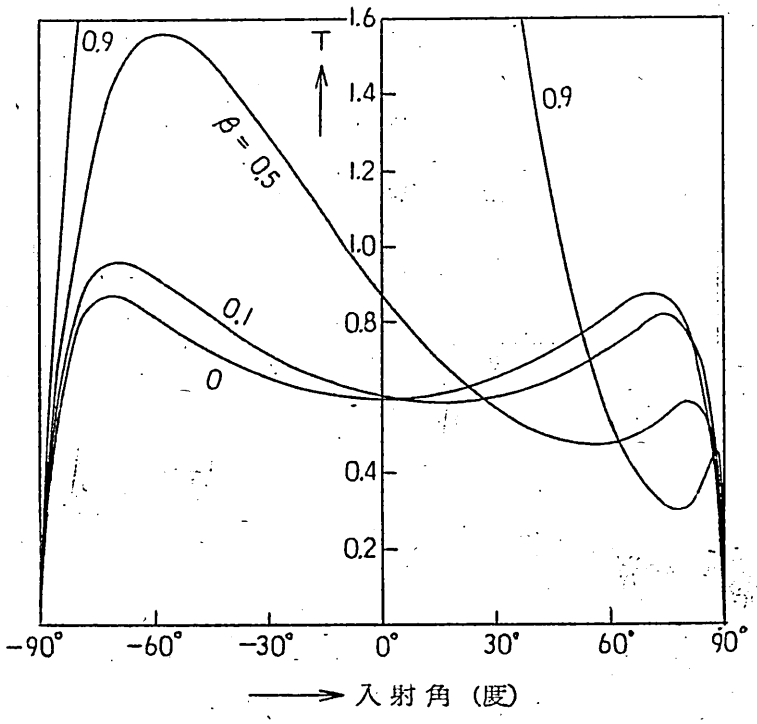


図３　透過係数 T　（$m=0.1$，$Va/c=10^{-1}$）

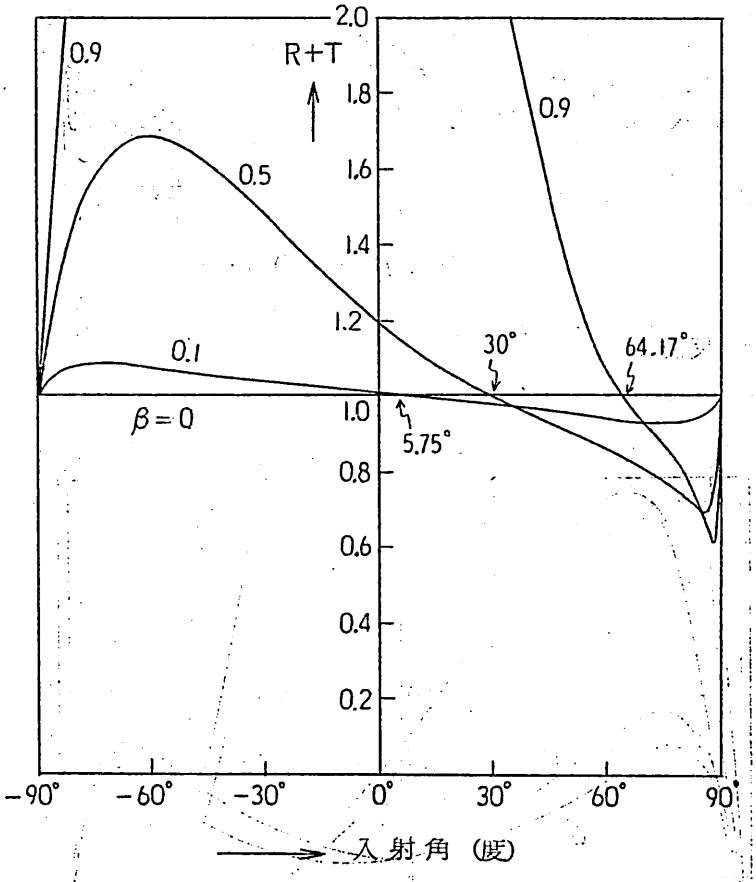


図 4　反射係数と透過係数の和　$T+R$

($m=0.1$　$Va/c=10^{-2}$)

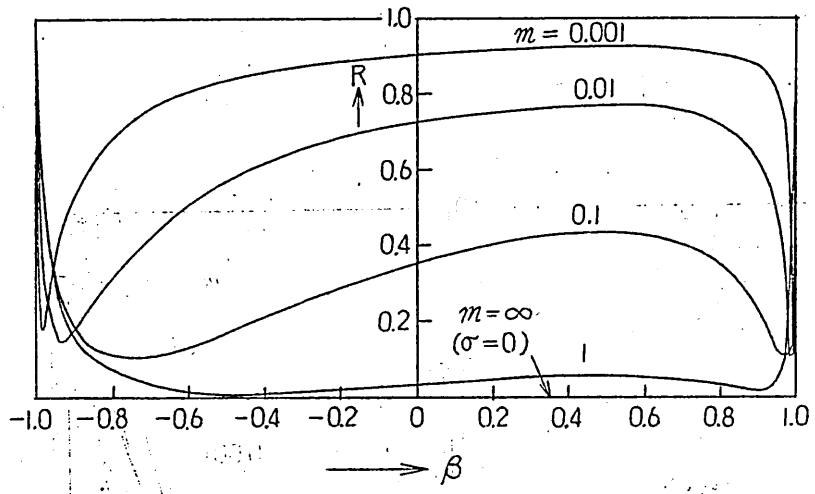


図5　反射係数R　（$\theta = 30°$, $Va/c = 10^{-2}$）

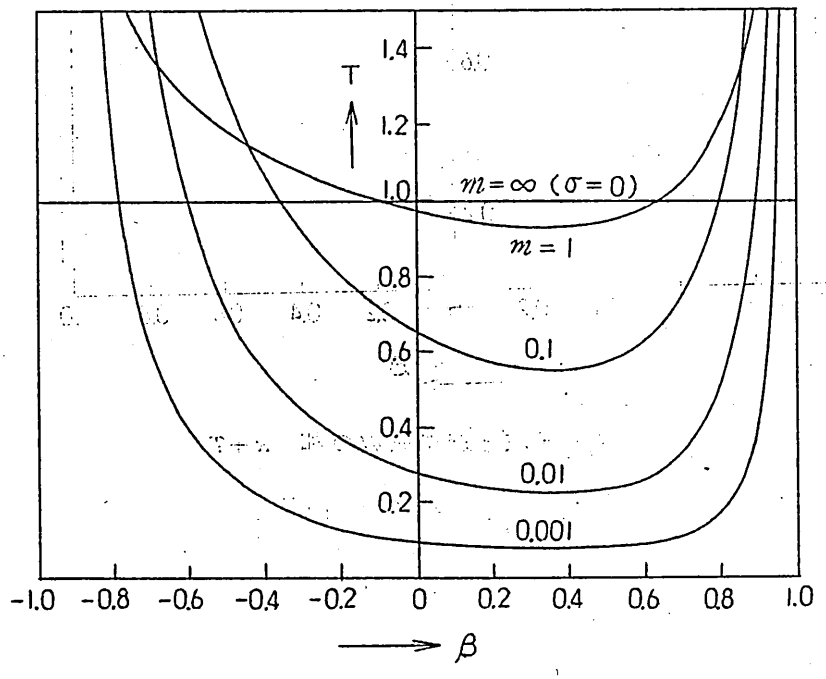


図6　透過係数T　（$\theta = 30°$, $Va/c = 10^{-2}$）

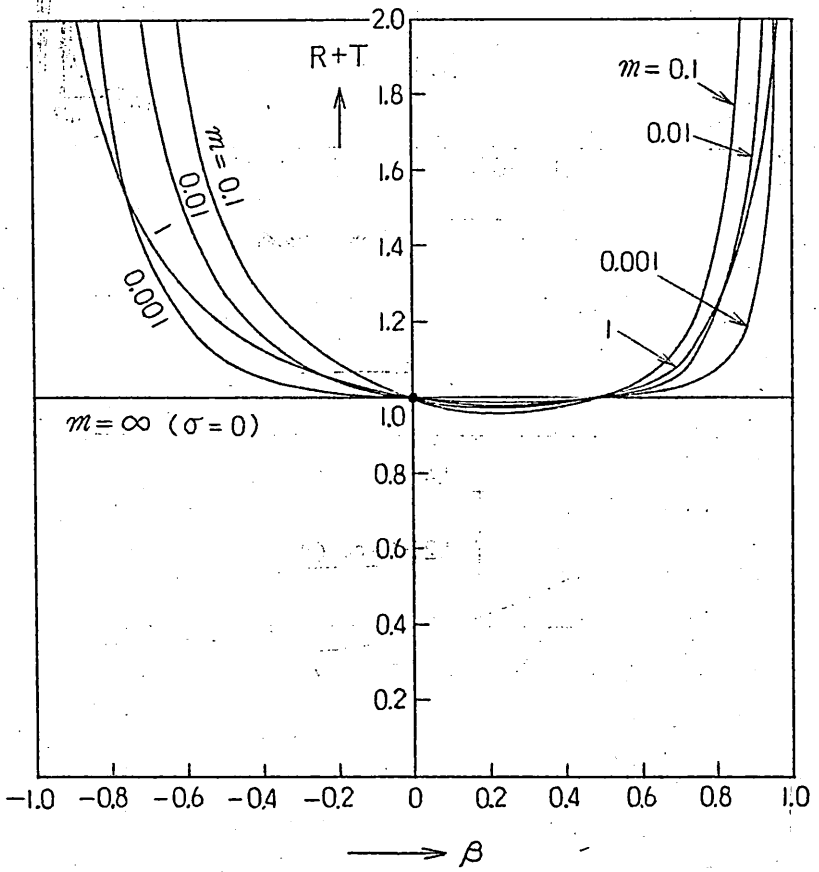


図7　反射係数と透過係数の和　$R+T$

（$\theta = 30°$, $Va/c = 10^{-2}$）

反射係数R，透過係数T，および反射係数と透過係数の和$R+T$の数値計算例を図2～7に示す．なお，式(19a)，(19b)および(21)において，$\beta>0$，$\theta<0$であることは$\beta<0$，$\theta>0$と等しいから，図では$\beta>0$，$\theta<0$のかわりに$\beta<0$，$\theta>0$として描いた部分がある．

5．結　　言

真空側から運動プラズマ流体に一様な平面波が入射する場合の境界面における運動プラズマ流体との相互作用について考察し，つぎのようなことがわかつた．すなわち，通常の誘電体もしくは衝突のないプラズマの場合とは違つて，透過波と運動プラズマ流体との間にエネルギーの授受があり，入射角θが$-\frac{\pi}{2}<\theta<\sin^{-1}\beta$（ただし，$\beta$はプラズマ流体の運動速度と真空中の光速度との比）のときには，反射電力と透過電力の和は入射電力よりも大きくなり，また$\sin^{-1}\beta<\theta<\frac{\pi}{2}$のときには入射電力よりも小さくなること等がわかつた．

謝　　辞

日頃ご指導いただいている大阪大学工学部坂倉清保教授，ならびに常々ご討論いただく坂倉研究室の方々に深謝する．

文　　献

(1) C.T. Tai: "Two scattering problems involving moving media," Techn. Report, 1691-7, Antenna Laboratory, Ohio State University (May 1964).

(2) C. Yeh: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medium," J. Appl. Phys., 36, 11, pp.3513-3517 (November 1965).

(3) 塩沢俊之, 間　剛, 熊谷信昭: "静止媒質と運動媒質の境界面における平面波の反射および屈折," 信学誌, 50, 8, pp.1381-1388 (昭42-08).

(4) C. Yeh: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium," J. Appl. Phys., 37, 8, pp. 3079-3082 (July 1966).

(5) B.T. Chu: "Thermodynamics of electrically conducting fluids," Phys. Fluids, 2, 5, pp. 473-484 (September-October 1959).

付録　導電性運動誘電体との相互作用

ここでは，プラズマ流体のかわりに，誘電率ε_1，透磁率μ_0，導電率σの導電性誘電体を考える．3.，4.と同様にして反射係数R，透過係数Tが導かれつぎのようになる．

$$R=\frac{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta-p)\}^2+\{\varepsilon\cos\theta-q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2}{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta+p)\}^2+\{\varepsilon\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2} \tag{A-1a}$$

$$T=\frac{4\varepsilon\cos\theta(1-\beta\sin\theta)^2\gamma^2 m(mp+q\gamma)}{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta+p)\}^2+\{\varepsilon\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2} \tag{A-1b}$$

ただし

$$p=\sqrt{\frac{P+\sqrt{P^2+Q^2}}{2}} \tag{A-2a}$$

$$q=\sqrt{\frac{-P+\sqrt{P^2+Q^2}}{2}} \tag{A-2b}$$

$$P=\gamma^2\{\varepsilon(1-\beta\sin\theta)^2-(\sin\theta-\beta)^2\} \tag{A-2c}$$

$$Q=\frac{\gamma}{m}\varepsilon(1-\beta\sin\theta) \tag{A-2d}$$

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \tag{A-2e}$$

$$m=\frac{\omega\varepsilon_1}{\sigma} \tag{A-2f}$$

導電性誘電体が静止している場合には，

$$R=\frac{m^2(\varepsilon\cos\theta-p)^2+(\varepsilon\cos\theta-qm)^2}{m^2(\varepsilon\cos\theta+p)^2+(\varepsilon\cos\theta+qm)^2} \tag{A-3a}$$

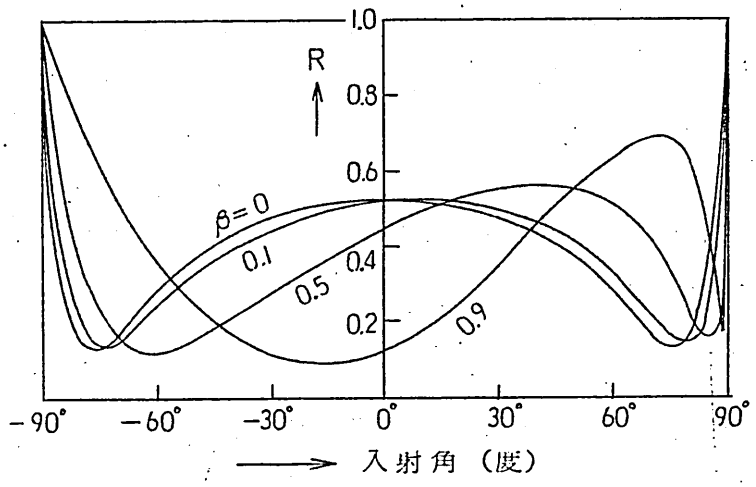
$$T = \frac{4\varepsilon m(mp+q)\cos\theta}{m^2(\varepsilon\cos\theta+p)^2+(\varepsilon\cos\theta+qm)^2} \qquad \text{(A-3b)}$$

となり，RとTの和は入射角θの如何にかかわらず常に1になる．しかし，導電性誘電体が運動している場合には，プラズマ流体の場合と同様に，RとTの和は一般には1とはならず

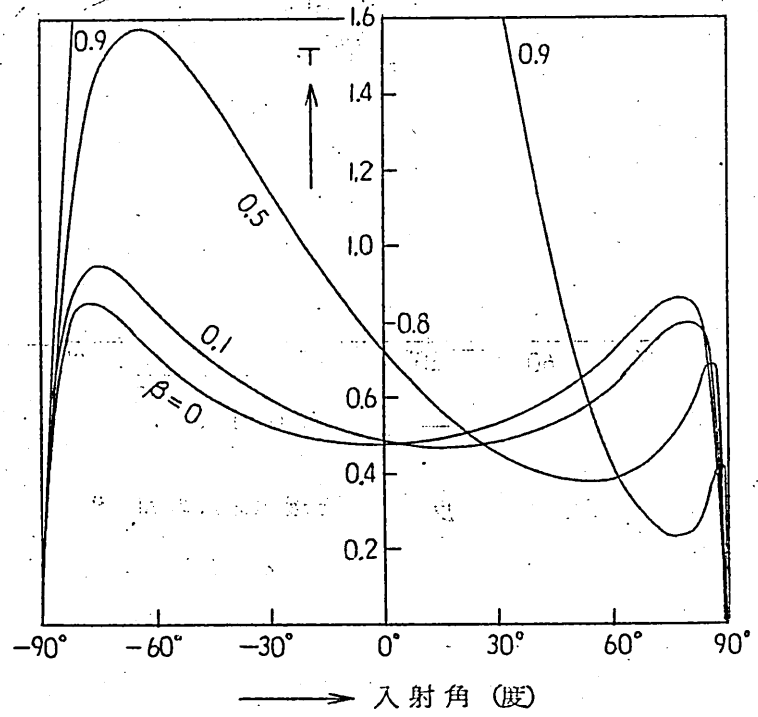
$$R+T=1-\frac{4\varepsilon\cos\theta(1-\beta\sin\theta)\gamma^3 m\beta(\sin\theta-\beta)q}{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta+p)\}^2+\{\varepsilon\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2} \qquad \text{(A-4)}$$

となる．上式(A-4)の数値計算例として示した図A-3からもわかるように$0<\beta<1$のとき(22a)の関係式がそのまま成り立つ．しかし，$\beta\to1$の極限においては，プラズマ流体の場合とは違つて，RとTの和は常に1となり導電性誘電体の場合には反射電力と透過電力の和が無限に大きくなることはない．なお，上式(A-4)の右辺第2項の分子はβqなる項を含んでいるので$\beta=0$（導電性誘電体が静止している）か，または$q=0$（導電率が0）の場合には，入射角θの如何にかかわらず常に$R+T=1$となることがわかる．

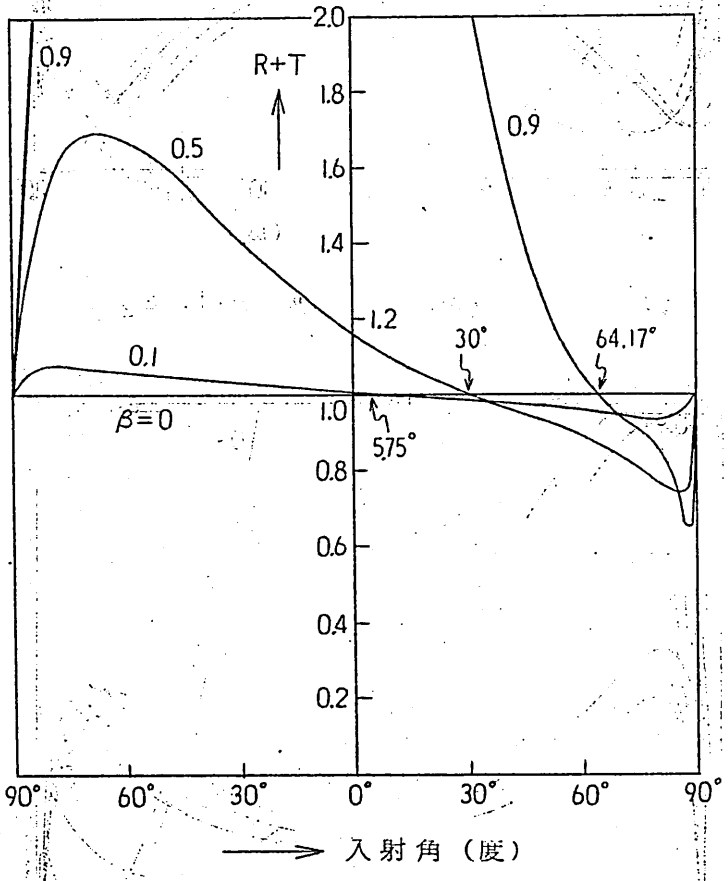
反射係数R，透過係数T，および反射係数と透過係数の和$R+T$の数値計算例を図A-1～A-6に示す．



図A－1　反射係数R　（$m=0.1$，$\varepsilon=2$）

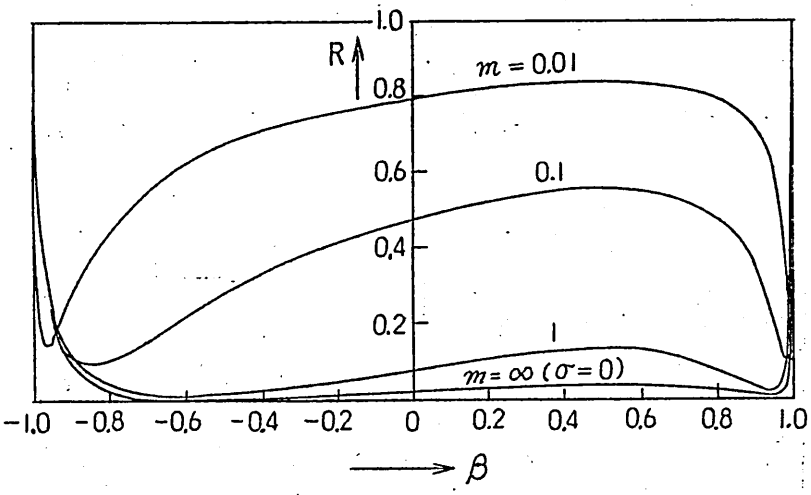


図A－2　透過係数T　（$m=0.1$，$\varepsilon=2$）

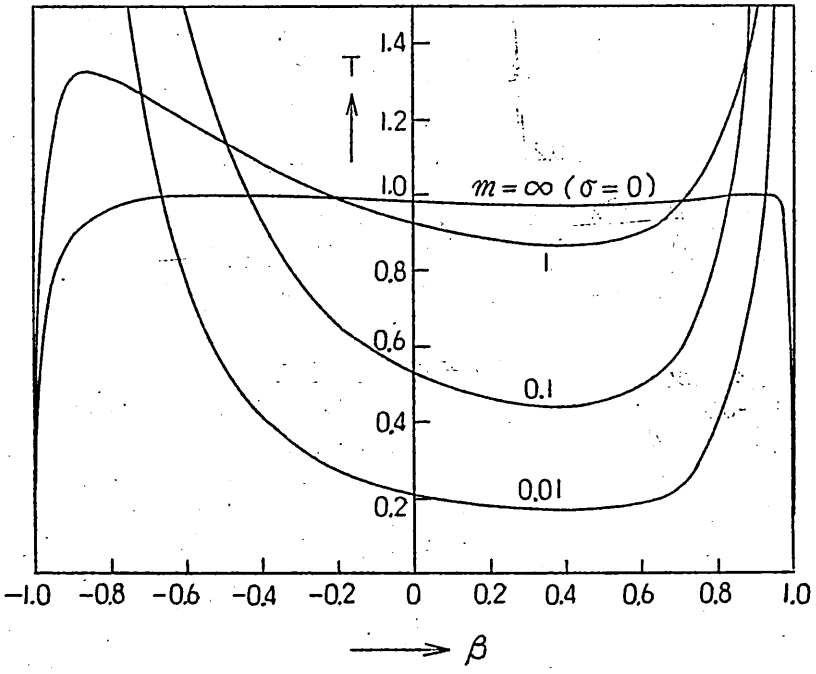


図A－3　反射係数と透過係数の和　$R+T$

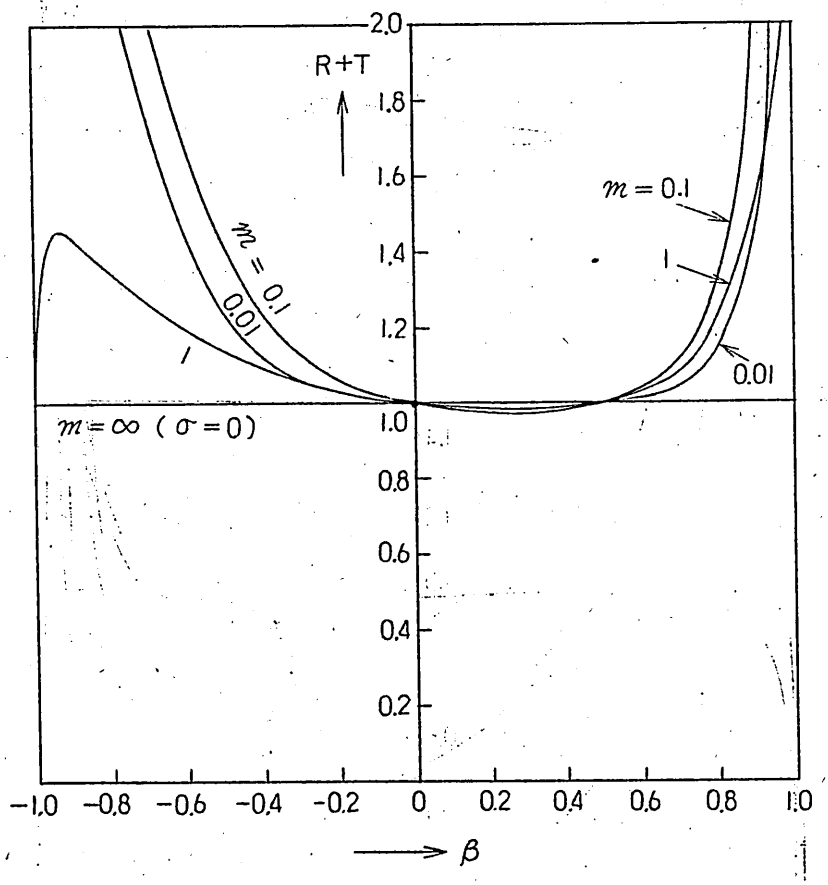
（$m=0.1$，$\varepsilon=2$）



図A－4　反射係数R　（$\theta = 30°$，$\varepsilon = 2$）



図A－5　透過係数T　（$\theta = 30°$，$\varepsilon = 2$）



図A－6　反射係数と透過係数の和　$R+T$

($\theta = 30°$, $\varepsilon = 2$)

輻射科学研究会資料

Self Trapping 現象を利用した光波用誘電体薄膜表面波線路

熊谷信昭　　沢新之輔
(大阪大学・工学部)

1967年10月6日

1　まえがき

レーザ光のような強度の強い電磁波に対して，媒質の誘電率が$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2E^2+\cdots\cdots$なる電界依存性を示す場合がある．この場合，電磁波は，自己捕捉（Self Trapping）現象を生じ，媒質内に自から形成した高誘電率の部分に捕捉（Trap）されつつ伝播することが知られている[1]．この現象は，波長の短かい電磁波に対して特にいちじるしく，レーザの発達と共に，光ビームの伝播の問題として注目されつつある[1),2)]

本論文は，レーザ用低損失伝送系の1つとして，上記のような誘電率の電界依存性を有する媒質によって構成された誘電体薄膜表面波線路を提案し，その伝送特性を理論的に明らかにしたものである．

ここで考察する新しい形式の誘電体薄膜表面波線路は，膜面と平行な方向には，Self Trapping 現象による収束効果を呈し，同時に，膜面と垂直な方向には，通常の表面波線路と同様の集中効果を兼ね備えている．したがって，伝送電磁波は，線路の中心軸近くに沿ってのみ送られることになる．その結果，先に熊谷，倉茵，沢，吉川等によって提案された，不均一誘電率分布にもとずくレンズ収束効果を利用した誘電体薄膜表面波線路の場合[3),4),5),6)]と同様に，伝送電磁界に影響を与えることなく，誘電体薄膜を支持することができ，かつ，外界との遮へいを行うことも容易である．また，従来検討されてきた不均一誘電体薄膜線路では，薄膜を製造する際にあらかじめ与えられた誘電率分布を実現しておくことが必要であったのに対して，ここで提案する線路では，所要の誘電率分布は，Self Trapping 現象によって自動的に得られるため，誘電体薄膜自体は均質のものでよく，したがって，線路の製作は，はるかに容易になる．

さらに，解析の結果，唯一つの表面波姿態のみを伝送する単一姿態伝送系

として動作させ得ることが明らかとなった．このことも，従来の誘電体薄膜線路とくらべて，ここで提案する線路が有する実用上の利点である．

数値計算の結果，実用上適当と考えられる程度のビーム幅（界分布の集中度）を得るために必要な全伝送電力の値は，遠赤外領域で，通常の非線形媒質（たとえば，二硫化炭素，ベンゼン，ガラス(Heavy silicate flint)，トルエン等）を用いた場合，数ミリワットから数百ミリワットというきわめて少ない電力で十分であることがわかった．また，誘電体損失にもとずく伝送損失も，従来の誘電体薄膜表面波線路[7),8),9)]と同程度（1 dB／km）となり，きわめて低損失の伝送が可能であることが明らかとなった．

2　理　　論

解析の方法は，まず，薄膜内の電磁界成分を求めておき，一方，自由空間における電磁界を重み関数を付した平面波の合成で表わし，膜面上で，両電磁界の切線成分が等しくなるように，自由空間における各平面波の重み関数を決定する．すべての電磁界は，第1次近似の範囲で求めている．

2・1　薄膜内における電磁界

自由空間波長λ_0に比べて，十分に薄い厚さ$2d$なる誘電体薄膜を考え，座標系を図1のようにえらぶ．薄膜の誘電率は，

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |E|^2 \qquad (1)$$

なる電界依存性を有するものとする．ここでε_1およびε_2は，いずれも，位置座標，周波数，および電界強度に無関係な媒質固有の定数であり，Eは電界強度を表わす．

ところで，このような非線形媒質の誘電率のNon-Linear Dielectric

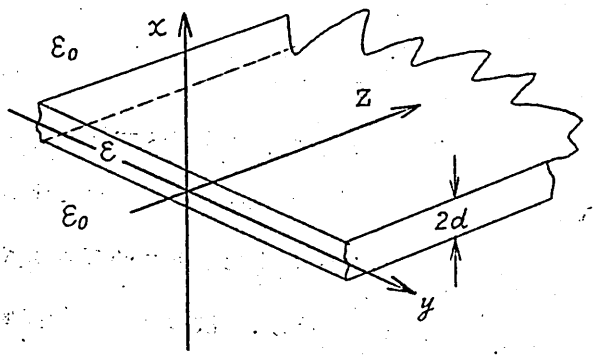


図 1　非線形媒質からなる誘電体薄膜

Responseは，一般に光周波数にくらべ十分に遅いので，$e^{j\omega t}$ なる電磁界の時間依存を仮定し，式(1)の $|E|^2$ として，その時間平均値 $\overline{|E|^2}/2$ を用いることができる．[1),2)]

さて，薄膜内の電磁界成分を，E_x, E_z, H_y, H_z, $E_y = H_x = 0$ とし，$e^{j\omega t}$ なる時間依存を仮定すると，Maxwell の方程式から，

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \qquad (2a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = j\omega\mu_0 H_z \qquad (2b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_x \qquad (2c)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_z \qquad (2d)$$

となる．ここで，ε は前述のとおり時間に無関係であって，

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cdot \frac{\overline{|E|^2}}{2} \qquad (3)$$

である．

さて，膜厚が波長にくらべて十分小さいものとすれば，薄膜内の基本姿態の電界分布（したがって誘電率）はx方向にほぼ一様であるとみなすことができ，さらにy方向の界分布の拡がりが波長にくらべて十分大きいものとすれば，（すなわち，誘電率のy方向の変化がきわめてゆるやかなものとすれば）式(2a)～(2d)より，H_yに対し，次のスカラー波動方程式が得られる．

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}+\omega^2 \mu_0 \varepsilon H_y = 0 \qquad (4)$$

H_yとして，

$$H_y = A \cos k_x x \cdot \phi(y) \cdot e^{-jk_z z} \qquad (5)$$

と仮定する．ここで，Aは振幅を表わし，k_xはx方向の波数である．また$\phi(y)$は，yのみの関数を表わし，k_zは伝播定数を表わす．

$$(k_x \cdot x)^2 \ll 1 \qquad (6)$$

なる範囲では，$|E_x|^2 \gg |E_z|^2$となるから，式(3)より

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 A^2}{2 k_z^2}\left(\omega \mu_0 - \frac{k_x^2}{\omega \varepsilon_1}\right)\phi^2(y) \qquad (7)$$

とおける．式(5)および(7)を，式(4)に代入すると，式(6)の範囲では，

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} - \Gamma^2 \phi + A^2 \gamma_0^2 \phi^3 = 0 \qquad (8)$$

なるDuffingの方程式が成立する．ただし，

$$\begin{cases} \Gamma = \sqrt{k_z^2 + k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1} & (9) \\ \gamma_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \left(\omega \mu_0 - \frac{k_x^2}{\omega \varepsilon_1}\right)^2 \Big/ k_z^2} & (10) \end{cases}$$

である．

式(8)は，非線形振動論などで知られているように，$\Gamma^2 > 0$ なる場合，$\Gamma = A\gamma_0/2$ が成立するとき，

$$\phi(y) = \mathrm{sech}\ \Gamma y$$

なる非振動的な解を持つ[1]．したがって，式(6)で示される x の範囲では，薄膜内の電磁界成分は，それぞれ，つぎのように求められる．

$$H_y = A \cos k_x x \cdot \mathrm{sech}\ \Gamma y \cdot e^{-jk_z z} \tag{11}$$

$$H_z = \frac{1}{\omega\mu_0 k_z}\left(\frac{k_x^2}{j\omega\varepsilon} + j\omega\mu_0\right) \cos k_x x \cdot \mathrm{sech}\ \Gamma y \cdot \tanh \Gamma y \cdot e^{-jk_z z} \tag{12}$$

$$E_x = \frac{A}{j k_z}\left(\frac{k_x^2}{j\omega\varepsilon} + j\omega\mu_0\right) \cos k_x x \cdot \mathrm{sech}\ \Gamma y \cdot e^{-jk_z z} \tag{13}$$

$$E_z = -\frac{A k_x}{j\omega\varepsilon} \sin k_x x \cdot \mathrm{sech}\ \Gamma y \cdot e^{-jk_z z} \tag{14}$$

ただし

$$1/\Gamma = 2/A\gamma_0 \tag{15}$$

は，y 方向の界分布のビーム幅（あるいは集束度）を定める定数である．

2・2　薄膜外における電磁界および伝播定数

薄膜外（自由空間）における電磁界の各成分を，E_{x0}，E_{y0}，E_{z0}，H_{x0}，H_{y0}，および H_{z0} とし，これらのスカラ量を ψ_0 で代表すると，Maxwell の方程式から，つぎのスカラー波動方程式が成立する．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_0 + k_0^2 \psi_0 = 0 \tag{16}$$

ただし，

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \left(2\pi/\lambda_0\right)^2$$

である．

式（16）の解として，$e^{-jk_z z} \cdot e^{jk_{x0}(|x|-d)} \cdot e^{jk_{y_0} y}$ なる平面波を重ね合せて得られる

$$\psi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(k_{y0}) e^{j\sqrt{k_0^2 - k_z^2 - k_{y_0}^2}(|x|-d)} e^{jk_{y_0} y} e^{-jk_z z} dk_{y0} \quad (17)$$

を考える．ただし

$$k_{x0}^2 + k_{y0}^2 + k_z^2 = k_0^2 \quad (18)$$

であり，$g(k_{y0})$ は各平面波の重み関数を表わす．

ところで，薄膜と自由空間との境界面，$|x| = d$ で，電磁界はつぎの境界条件を満足しなければならない．

$$\left.\begin{aligned} H_{y0} &= H_y \quad , \quad H_{z0} = H_z \\ E_{y0} &= E_y = 0 \ , \quad E_{z0} = E_z \end{aligned}\right\} \text{at } |x| = d \quad (19)$$

まず，

$$E_z\Big|_{|x|=d} = E_{z0}\Big|_{|x|=d}$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k_{y0}) e^{jk_{y_0} y} dk_{y0} = \frac{-Ak_x}{j\omega\varepsilon} \sin k_x d \operatorname{sech} \Gamma y \quad (20)$$

なる関係が得られる．式（20）にFourierの積分定理を適用して，$g(k_{y0})$ を求めると，

$$g(k_{y0}) = \frac{-Ak_x}{j\omega\varepsilon_1} \sin k_x d \cdot \frac{1}{2\Gamma} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2\Gamma} k_{y0}\right)$$

となる．

ただし，上式を導出する過程で，つぎの近似を行った．すなわち，薄膜の誘電率εは，式(7)で与えられるようにyに依存するが，ここでは，式(7)の第2項が第1項にくらべて十分に小さい場合を対象としているので，被積分関数の中に現われるεは，すべて定数とし，これをε_1でおきかえた．

上に求めた$g(k_{y0})$を式(17)に代入し，

$$\operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2\Gamma}k_{y0}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^r\left\{\dfrac{(2r+1)\pi}{2}\right\}}{\left(\dfrac{\pi}{2\Gamma}k_{y0}\right)^2+\left\{\dfrac{(2r+1)\pi}{2}\right\}^2}$$

なる部分分数展開を用いて積分を行うと，E_{z0}はつぎのように求められる．

$$E_{z0}=\frac{-Ak_x}{j\omega\varepsilon_1}\sin k_x d\ e^{-jk_z z}\cdot 2e^{-\Gamma y}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{(-e^{-2\Gamma y})^r\cdot e^{-\sqrt{k_z^2-k_0^2-(2r+1)^2\Gamma^2}\,(|x|-d)}\right\}$$

ここで，$\Gamma^2/(k_z^2-k_0^2)\ll 1$を仮定すれば，$E_{z0}$は，つぎのようにさらに簡単に表わされる．

$$E_{z0}=-\frac{Ak_x}{j\omega\varepsilon_1}\sin k_x d\cdot e^{-jk_z z}\ e^{-k(|x|-d)}\ \operatorname{sech}\Gamma y \qquad (21)$$

ただし，

$$k=\sqrt{k_z^2-k_0^2} \qquad (22)$$

である．

同様にして，$H_z\Big|_{|x|=d}=H_{z0}\Big|_{|x|=d}$なる境界条件から$H_{z0}$を求めると，

$$H_{z0}=\frac{A\Gamma}{\omega\mu_0 k_z}\left(\frac{k_x^2}{j\omega\varepsilon_1}+j\omega\mu_0\right)\cos k_x d\ e^{-jk_z z}\ e^{-k(|x|-d)}\cdot\operatorname{sech}\Gamma y\cdot\tanh\Gamma y \qquad (23)$$

となる．

以上のようにして求めた E_{z0} と H_{z0} を用いれば，他の電磁界成分は，すべて求められる．さて，H_{y0} を求め，$|x|=d$ において，$H_y=H_{y0}$ なる境界条件を適用すると，

$$\frac{\Gamma^2}{k^2} \ll 1 \tag{24}$$

なる仮定の下で，次の特性方程式が得られる．

$$k_x \tan k_x d \doteqdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} k \tag{25}$$

一方，式(9)，(10)，および(15)から，

$$k_x^2 = \frac{A^2}{4} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \left(\omega \mu_0 - \frac{k_x^2}{\omega \varepsilon_1} \right) \Big/ k_z^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - k_z^2 \tag{26}$$

なる関係が成立する．したがって，式(25)，(26)および(22)によって，k_z，k_x および k の未知量を次のように決定することができる．

$$k_z \doteqdot k_0 \left\{ 1 + \frac{k_0^2 d^2}{2 \varepsilon_1^{*2}} \left(\varepsilon_1^* - 1 + \frac{\mu_0 A^2}{4 \varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^{*2}} \right)^2 \right\} \tag{27}$$

$$k_x \doteqdot k_0 \left[\varepsilon_1^* - \left(1 - \frac{\mu_0 A^2}{4 \varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^{*2}} \right) \left\{ 1 + \frac{k_0^2 d^2}{\varepsilon_1^{*2}} \left(\varepsilon_1^* - 1 + \frac{\mu_0 A^2}{4 \varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^{*2}} \right)^2 \right\} \right]^{1/2} \tag{28}$$

$$k \doteqdot \frac{k_0^2 d}{\varepsilon_1^*} \left(\varepsilon_1^* - 1 + \frac{\mu_0 A^2}{4 \varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^{*2}} \right) \tag{29}$$

ただし

$$\left| \frac{\mu_0 \varepsilon_2^*}{4 \varepsilon_0 \varepsilon_1^{*2}} A^2 \right| \ll 1 \tag{30}$$

$$\begin{cases} \dfrac{16\pi^2}{\varepsilon_1^*}\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_1^*}+\dfrac{\mu_0\varepsilon_2^*A^2}{4\varepsilon_0\varepsilon_1^{*3}}\right)\left(\dfrac{d}{\lambda_0}\right)^2 \ll 1 & (31) \\ (\lambda_0\Gamma)^2 \ll 16\pi^4\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_1^*}+\dfrac{\mu_0\varepsilon_2^*A^2}{4\varepsilon_0\varepsilon_1^{*3}}\right)^2\left(\dfrac{d}{\lambda_0}\right)^2 & (32) \end{cases}$$

とする．なお，式(32)は，式(24)の仮定が成立するための条件である．また，$\varepsilon_1^*=\varepsilon_1/\varepsilon_0$，$\varepsilon_2^*=\varepsilon_2/\varepsilon_0$ である．

k_x が，式(28)のように求められたので，ここで，前節で用いた式(6)の仮定が成立しているか否かを検討しておく．式(28)より

$$k_x^2\cdot x^2=4\pi^2\left[\varepsilon_1^*-\left(1-\frac{\mu_0A^2}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^{*2}}\right)\left\{1+\frac{k_0^2d^2}{\varepsilon_1^{*2}}\left(\varepsilon_1^*-1+\frac{\mu_0A^2}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^{*2}}\right)\right\}\right]\cdot\left(\frac{x}{\lambda_0}\right)^2$$

となるから，

$$4\pi^2\left[\varepsilon_1^*-\left(1-\frac{\mu_0A^2}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^{*2}}\right)\left\{1+\frac{k_0^2d^2}{\varepsilon_1^{*2}}\left(\varepsilon_1^*-1+\frac{\mu_0A^2}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^{*2}}\right)\right\}\right]\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)^2\ll 1 \qquad (33)$$

が成立すれば，$|x|\leqq d$ なる x，すなわち薄膜の内部においては，式(6)は，たしかに成立している．

2・3　所要伝送電力，電力集中度および誘電体損失

E_{z0}，および H_{z0} を用いて，Maxwellの方程式より，他の電磁界成分を求め，数値的に検討すると，膜厚が波長にくらべて十分に小さいという条件（$d/\lambda_0\ll 1$）および y 方向の界の変化が波長にくらべて十分に小さいという条件（$\lambda_0\Gamma\ll 1$）のもとでは，E_{y0} なる電界成分および H_{x0} なる磁界成分は，

いずれも，他の電磁界成分にくらべて十分無視できる程小さいことがわかる．

そこで，薄膜外部における $d \leqq |x| \leqq x_2$，$|y| \leqq y_2$ なる範囲に含まれる伝送電力を $P_0(x_2, y_2)$ と表わし，また，薄膜の内部における $|x| \leqq d$，$|y| \leqq y_1$ なる範囲に含まれる伝送電力を $P(d, y_1)$ で表わし，それぞれ，

$$P_0(x_2, y_2) = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int_d^{x_2}\int_{-y_2}^{y_2} E_{x0}\cdot H_{y0}^{*}\, dx\, dy\right\} \tag{34}$$

および

$$P(d, y_1) = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{d}\int_{-y_1}^{y_1} E_x\cdot H_y^{*}\, dx\, dy\right\} \tag{35}$$

によって，全伝送電力

$$P_T = P(d,\infty) + P(\infty,\infty) \tag{36}$$

を求めると，式(30)，(31)，(32)および(33)の条件のもとに，

$$P_T = \frac{\lambda_0^3\cdot\Gamma\cdot\varepsilon_1^*/\varepsilon_2^*}{377\pi^2}\left\{\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\varepsilon_1^{*2}}{\varepsilon_1^*-1}\right)\left(\frac{\lambda_0}{d}\right)+\frac{2d}{\lambda_0}\right\} \tag{37}$$

となる．

ただし，式(37)では，式(15)から得られる

$$A = \frac{\lambda_0\Gamma}{\pi}\sqrt{\varepsilon_1^*}\sqrt{\varepsilon_1^*/\varepsilon_2^*}\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \tag{38}$$

なる関係によって振幅 A を消去してある．

つぎに，線路の中心軸を中心として，$|x| \leqq x_2$，$|y| \leqq y_2$ なる範囲に含まれる伝送電力と，全伝送電力との比を電力集中度 C_p とし，

$$C_p = \frac{P(d, y_2) + P_0(x_2, y_2)}{P_T} \tag{39}$$

によって定義すると，式(30)，(31)，(32)，および(33)の条件のもとで

$$C_p = \left\{ 1 - e^{-8\pi^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1^*}\right) \left(\frac{d}{\lambda_0}\right) \left(\frac{|x_2| - d}{\lambda_0}\right)} \right\} \tanh \Gamma y_2 \qquad (40)$$

となる．

最後に誘電体損失にもとづく減衰定数を求める．式(28)において，ε_1^*およびε_2^*をそれぞれ$\varepsilon_1^*(1-j\kappa_1)$および$\varepsilon_2^*(1-j\kappa_2)$とおきかえて，$k_z$を実数部と虚数部に分解し，虚数部より誘電体損失による減衰定数αを求めると，

$$\alpha = \frac{k_0^3 d^2}{\varepsilon_1^*} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1^*}\right) \kappa_1 + \frac{A^2}{4} \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^{*2}}\right) \left(\kappa_2 - 2\kappa_1 + \frac{3\kappa_1 - \kappa_2}{\varepsilon_1^*}\right) \right\} \qquad (41)$$

となる．ただし，κ_1およびκ_2は，誘電体の損失角を表わす．

$\kappa_1 = \kappa_2 = \tan\delta$とおき，式(30)の条件を考慮すると

$$\alpha = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^3 \cdot d^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1^*} \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1^*}\right) \cdot \tan\delta \qquad (42)$$

となり，一様な誘電率分布を有する線形媒質からなる誘電体薄膜表面波線路の減衰定数と一致する．

3　検　　討

前節で述べたように，$d/\lambda_0 \ll 1$および$\lambda_0\Gamma \ll 1$なる場合には，E_{y0}およびH_{x0}なる電磁界成分は，いずれも他の電磁界成分にくらべて，無視できる程小さいので，界分布の模様は，図2のようになる．これは，レンズ収束効果を有する不均一誘電体薄膜表面波線路[3),4),5),6)]における最低次表面波姿態の電磁界分布とほぼ同じである．

図3および図4は，x方向およびy方向の電力の集中範囲を示したものである．図3は，非線形効果のない状態における誘電体薄膜の比誘電率の値を$\varepsilon_1^* = 2$とし，式(39)で定義した電力集中度C_pをパラメータにとった場合

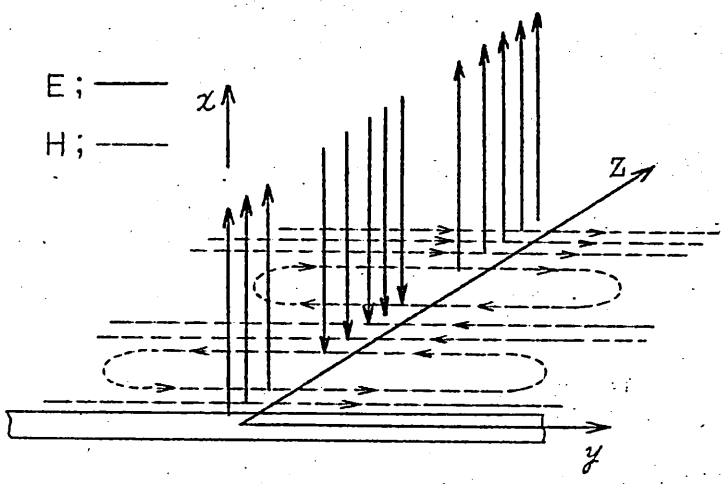


図 2　最低次表面波姿態の電磁界分布の模様

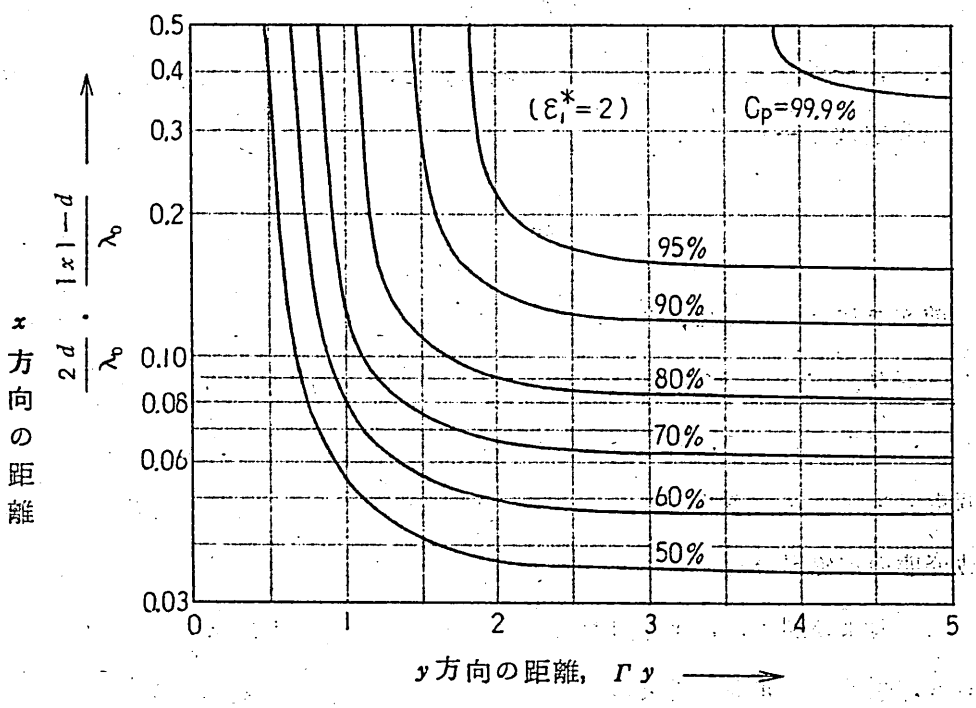


図 3　Self Trapping 現象を利用した誘電体薄膜表面波線路の電力集中範囲

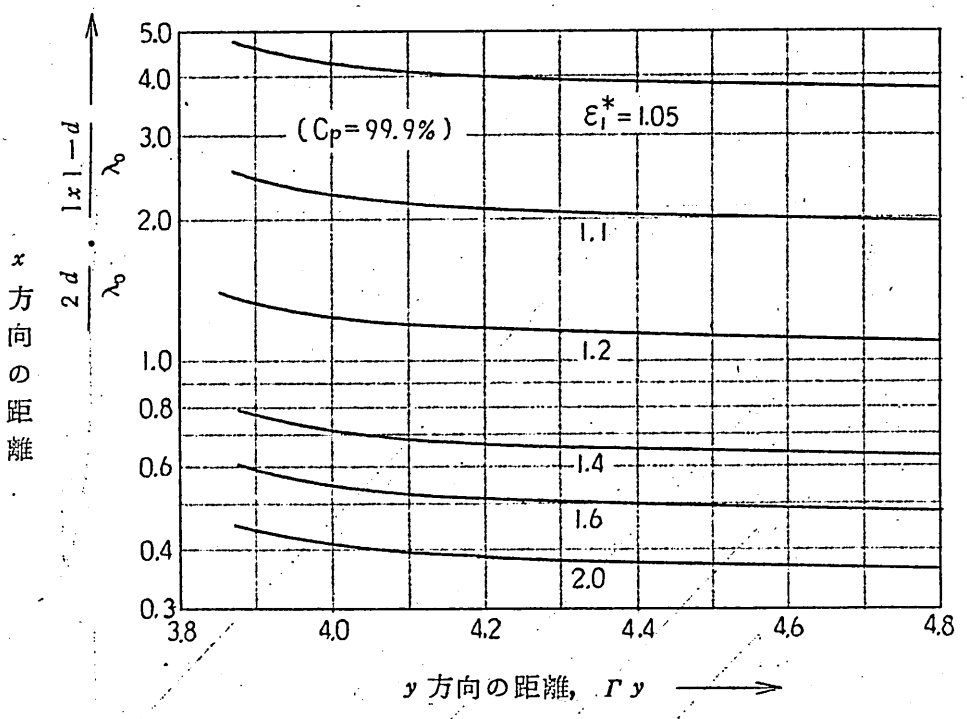


図 4　Self Trapping現象を利用した誘電体薄膜表面波線路における全伝送電力の９９.９％を含む範囲

の計算結果の一例である．図４は，全伝送電力の９９.９％を含む範囲を，ε_1^* をパラメータにとって示したものである．これらの図からわかるように，膜厚が厚い程，また，膜の比誘電率 ε_1^* の値が大きい程，電力集中度はよくなる．

つぎに，全伝送電力 P_T と膜面と平行な方向（y方向）のビーム幅 $1/\Gamma$ との積と，膜厚 $2d$ との間の関係は，図５のようになる．波長 λ_0，および媒質の $\varepsilon^*/\varepsilon_2^*$ の値を一定とすると，一定のビーム幅 $1/\Gamma$ を得るための所要全伝送電力 P_T は，膜厚が厚い程，また，比誘電率 ε_1^* が大きい程小さくなる．逆に ε_1^* が小さくなり，その値が１に近づくにつれ，所要全伝送電力の値は急速に増大し，式（36）に示すように $\varepsilon_1^* \fallingdotseq 1$ になると，P_T はきわめて大きい値

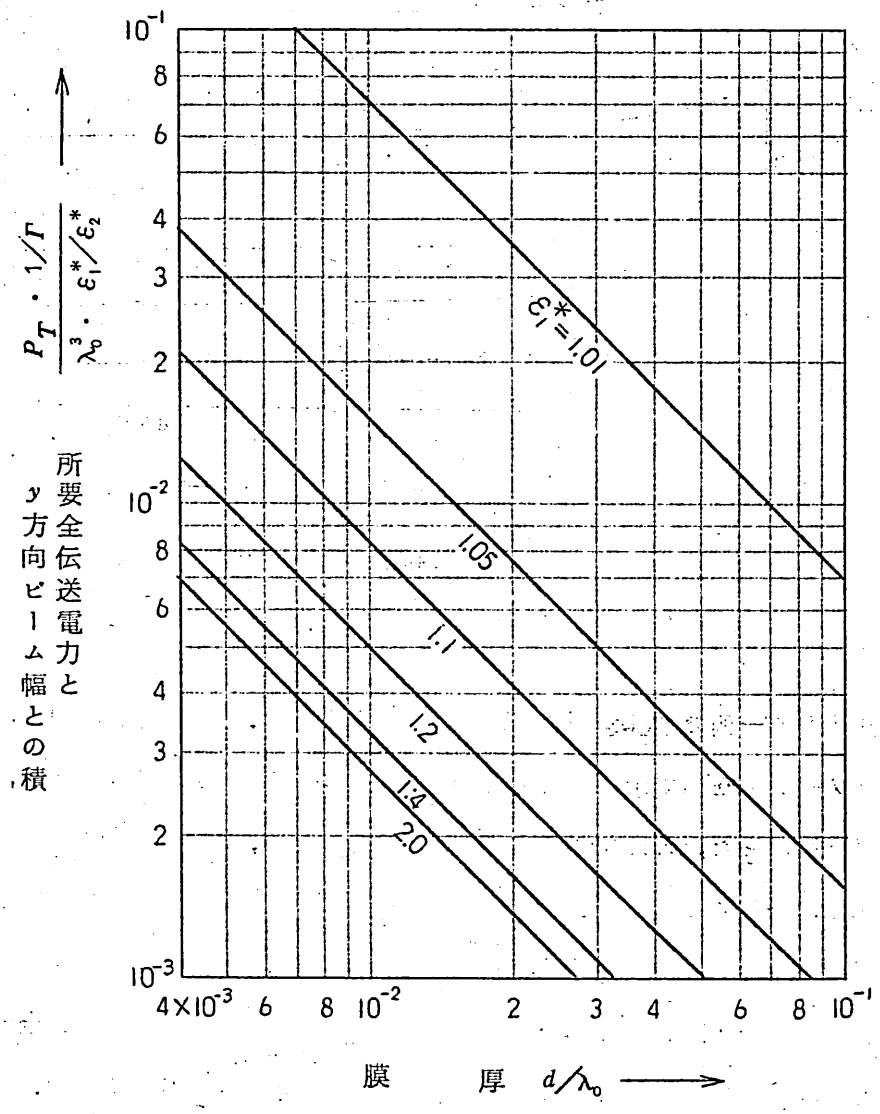


図5　y方向ビーム幅と所要全伝送電力と膜厚との関係

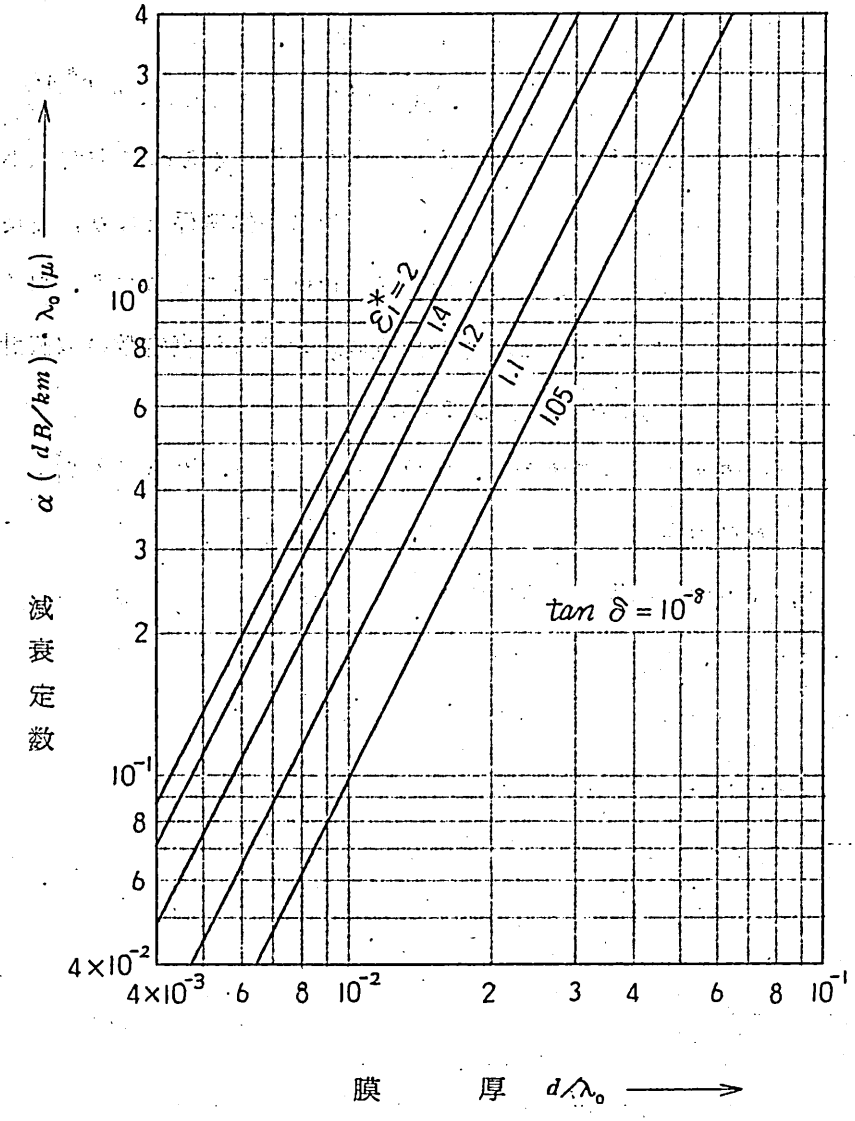


図 6　光波領域における誘電体損失による減衰定数

になる．以上の性質の物理的な意味はつぎのとおりである．すなわち，誘電体薄膜が厚い程，また比誘電率 ε_1^* が大きい程，電磁界は薄膜にひきよせられ，薄膜内の電界強度が強められる．その結果，Self Trapping現象が促進されて，膜面と平行な方向の収束効果がよくなり，一定のビーム幅を得るための所要全伝送電力は少くてすむようになるのである．

誘電体損失にもとづく減衰定数 α は，式(41)に示すように，$\mu_0\varepsilon_2^* A^2 / 4\varepsilon_0\varepsilon_1^{*2}$ なる量に関係するが，実際には一般に $\varepsilon_2^*/\varepsilon_1^*$ の値は1にくらべて非常に小さいので（10^{-10}以下程度），近似的には，この項には無関係となり，波長 λ_0 の3乗に逆比例し，膜厚の2乗および tan δに比例することになる．図6には，$\kappa_1 = \kappa_2 = \tan\delta = 10^{-8}$ とした場合の光領域における減衰定数の数値計算例を，ε_1^* をパラメータにとって示してある．

つぎに，伝送姿態について考える．薄膜の厚さ $2d$ を，比誘電率 ε_1^*，および，与えられた自由空間波長 λ_0 に対して，$2d < \lambda_0 / 2\sqrt{\varepsilon_1^* - 1}$ となるようにすれば，x 方向に高次の変化を有する高次姿態はすべて発散領域に入る．また，y 方向には，式(8)の定常解で，$y \to \pm\infty$ において零に収束する有界な関数は，$\phi(y) = \operatorname{sech} \Gamma y$ 唯一つしかないことから，高次の変化を有する姿態はない．したがって，結局，最低次の表面波姿態のみが伝送されるような単一姿態伝送系として使用することができる．

この線路の光波領域における数値設計例を示すと，表1のようになる．こ

表1　数値設計例

波長 λ_0	$1/\Gamma$	比誘電率 ε_1^*	比誘電率 $\varepsilon_2^*/\varepsilon_1^*$	膜厚 $2d$	tan δ	減衰定数 α	所要全伝送電力 P_T	全伝送電力の99.9%を含む範囲 $2x \times 2y$
10(μ)	1(mm)	1.4	10^{-13}	1(μ)	10^{-8}	1.1(bB/km)	6.6(mW)	0.125(mm)× 7.6(mm)

の例からもわかるように，波長１０(μ)の場合には，6.6（mW)程度の伝送電力を与えれば，y方向のビーム幅 $\frac{1}{T}$ は１(㎜)程度となり，全伝送電力の９９.９％は，線路の周囲 0.125 (㎜) × 7.6(㎜) の範囲内に含まれることになる．したがって，図７に示すような適当な支持構造物によって，伝送電磁界に影響を与えることなく，誘電体薄膜を支持することができ，同時に，外界との遮へいを行うことも容易である．

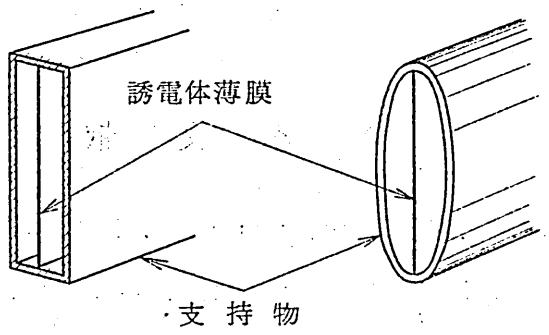


図７　Self Trapping現象を利用した
誘電体薄膜表面波線路の構造

4　あ と が き

短ミリ波以下の波長領域における低損失伝送系の1つとして，誘電率が $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 E^2 + \cdots\cdots$ なる電界依存性を有するような非線形媒質（たとえば，ガラス（Heavy silicate flint），二硫化炭素，ベンゼン，トルエン等）によって構成された誘電体薄膜表面波線路を提案し，その基礎的な特性を理論的，数値的に検討した．その結果，きわめてわずかの伝送電力によって自己捕捉（Self Trapping）現象が生じ，そのためレンズ状媒質と類似の収

束効果を兼ね備えた表面波線路として，きわめてすぐれた特性を有する実用性の高い伝送系となり得る可能性のあることが明らかとなった．今後の問題点としては，励振の方法，曲がりによる損失，線路の接続法に関する問題，等が残されているが，これらについては，現在引続き検討を進めている．

謝　辞

日頃から御べん励いただく本学，板倉清保教授ならびに御検討いただいた倉薗貞夫氏に深謝する．

参　考　文　献

(1) Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Towns ; "Self Trapping in Optical Beams", Phys. Rev. Letters, Vol. 53, p.p. 479～482.

(2) 熊谷信昭，沢　新之輔；"Self Trapping現象を利用した Optical Beam Wave Guide"，昭41信学全大．420．

(3) 熊谷信昭，倉薗貞夫，沢　新之輔；"レンズ収束効果を有する不均一誘電体薄膜表面波線路"，マイクロ波研資，FW67－4（1967－04）．

(4) 熊谷信昭，倉薗貞夫，沢　新之輔；"短ミリ波，サブミリ波，光波用低損失薄膜誘電体線路"，昭42連大，1427．

(5) 熊谷信昭，倉薗貞夫，沢　新之輔；"不均一誘電体薄膜表面波線路"，輻射科学研究会資料（昭42－05）．

(6) 熊谷信昭，倉薗貞夫，吉川憲昭，沢　新之輔；"不均一誘電体薄膜表面波線路"，マイクロ波研資，MW67－7（1967－06）．

(7) A. E. Karbowiak ; "A close look at optical waveguides", Microwaves, 5, 7, p. 37, (July 1966).

(8) H. Larsen ; "Dielektrische Wellenleiter bei optischen Frequenzen", Arch. elekt. Übertragung, 19, 10, p. 535, (Oct. 1965).

(9) 杉　正男，中原恒雄；"薄膜誘電体表面波伝送線路"，信学誌．42，8，p. 731，(昭34－08)．

正　誤　表

ページ	行	誤	正
2	上から 4	遠赤外領域で	光波領域で
	6	数ミリワットから数百ミリワット	[redacted]数十ミリワットから数ワット
17	1	波長10 (μ) の場合	波長0.5 (μ) の場合
	1	5.6 (mW) 程度の	830 (mW) 程度の
	2	ビーム幅 1/r は、1 (mm) 程度	ビーム幅 1/r は、1.4 (cm) 程度
	3	0.125 (mm) × 7.6 (mm) の	0.5 (mm) × 106 (mm) の

表1　数値設計例（16p，下）

	波長 λ_0	1/r	比誘電率 ε_1^*	比誘電率 $\varepsilon_2^*/\varepsilon_1^*$	膜厚 2d	$\tan\delta$	減衰数 α	所要全伝送電力 P_T	全伝送電力の99.9%を含む範囲 (2x × 2y)
誤	10 (μ)	1 (mm)	1.4	10^{-13}	1 (μ)	10^{-8}	1.1 (dB/km)	6.6 (mW)	0.125 (mm) × 7.6 (mm)
正	0.5 (μ)	1.4 (cm)	1.4	1.35×10^{-11} (esu)	0.0125 (μ)	10^{-8}	1.36 (dB/km)	830 (mW)	0.5 (cm) × 106 (mm)

輻射科学研究会資料

半導体内の波動の等価線路表示，カイネティック電力定理および波動増巾条件

藤沢和男
（大阪大学基礎工学部）

1967年10月6日

半導体内の波動の等価線路表示，カイネティック電力定理および波動増幅の条件

藤沢和男

1. まえがき

半導体内のドリフトキャリヤに沿って空間電荷波が伝搬することはよく知られていることである。Blötekjaer 等はこのような空間電荷波と音波との結合を，キャリヤの慣性効果を無視した基本式から論じ，ピエゾ半導体中の超音波増幅現象を説明した[1]。Vural 等は半導体内の空間電荷波と回路波との結合において，キャリヤの衝突現象がいろいろな場合に不安定性を生ずることを論じている。[2] Solymer 等は半導体中の空間電荷波と低速波回路との結合をキャリヤの慣性効果，衝突効果および拡散効果を考慮して1次元問題として解析し，増幅条件を求めている。[3] 小山，大原は同じ問題を2次元問題としてキャリヤの慣性効果を無視して解析し，波動増幅を論じている。[3] 角は同じ問題を3次元問題として解析し，分散関係式より波動増幅を論じている。[4] このように今までの研究においては，与えられた境界条件に対して分散関係式を求め，それから波動増幅が検討されて来たわけであるが，その波動増幅の物理機構や波動電力の収支関係および波動増幅の一般的条件等は電子ビームの場合程明瞭でない。

半導体内では多くの場合 $\omega\tau \ll 1$ である。このことは個々のキャリヤが波動の周期よりも短い時間で格子との衝突によって無秩序な状態に戻り，波動による励振の記憶（速度変調）を失ってしまうことを意味する。それにもかかわらず波動が増幅されることは，考えてみれば不思議なことである。

本論文はキャリヤの慣性効果，衝突効果および拡散効果のすべてを考慮に入れて，準1次元問題として問題を取り扱い，

空間電荷波に対してカイネティック電圧を定義して波動に対する等価線路表示を求め、カイネティック電力と波動増幅条件を一般的に明かにしている。

2. 基本関係式

まず本論文で使用する主な記号を表1に示す。同表中の添字の0は直流量、添字の1は交流量を示す。(例外は α_0, β_0, γ_0)。

本論文では次のような場合を取り扱う。

(a) ドリフトキャリヤは1種類である。

(b) 準1次元モデルを考える。すなわち半導体試料の断面が非常に薄い(細い)とする。そして直流電界 E_0 がその軸方向(z軸)に加えられているとする。従ってキャリヤの速度とドリフト電流はz軸方向に限定され、断面内で一様な値を取るものとする。これに対して交流電界は必ずしもz軸方向のみに限定されないものとする。なお無限大断面の半導体試料に対しては、完全に1次元問題の波動伝搬が可能である。

(c) 半導体内でキャリヤの温度Tは一定である。

(d) 小信号振幅の場合を考える。従って電力やエネルギーを論ずる場合を除いて交流量の積を省略する。

以上の仮定のもとに $\exp(j\omega t)$ なる時間変化を考えると、次の基本方程式を得る。

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{\rho_1}{\varepsilon} - \left(\frac{\partial E_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{1y}}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial z} = -j\omega \rho_1 \tag{2}$$

$$\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right) v_1 + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{v_T^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = \frac{\delta}{m^*} E_1 \tag{3}$$

$$J_1 = v_0 \rho_1 + v_1 \rho_0 \tag{4}$$

$$J_1 + j\omega \varepsilon E_1 = K_1, \quad E_1 = \frac{K_1 - J_1}{j\omega\varepsilon} \tag{5}$$

表1 主な記号とその意味

E_0, E_1	電界	k	ボルツマン定数
D_1	電気力束密度	$T = m^* v_T^2 / k$	キャリヤの温度
H_1	磁界	τ	キャリヤの衝突時間
J_1	ドリフト電流密度	$\gamma = 1/\tau$	キャリヤの衝突周波数
$K_1 = J_1 + j\omega\varepsilon E_1$	全電流密度	ω	角周波数
J_c	回路波の等価電流	$\omega_p = (\rho\rho_0/m^*\varepsilon)^{1/2}$	プラズマ角周波数
V_c	回路波の等価電圧		
v_0, v_1	キャリヤの速度	$\omega_c = \sigma/\varepsilon$	誘電緩和角周波数
v_T	キャリヤの熱速度(r.m.s.値)	S_1	結晶の歪
v_c	回路波の位相速度	F_1	結晶の歪応力
v_{ph}	結合波の位相速度	$\gamma_0 = \alpha_0 + j\beta_0$	回路波の伝搬定数
u_1	結晶格子の速度	$\gamma = \alpha + j\beta$	結合板の伝搬定数
m^*	キャリヤの有効質量	α_0	回路波の減衰定数
ρ	キャリヤの電荷	α	結合板の減衰定数
n_0, n_1	キャリヤの密度	$\beta_0 = \omega/v_c$	回路波の位相定数
ρ_0, ρ_1	空間電荷密度	$\beta = \omega/v_{ph}$	結合板の位相定数
ρ_m	物質密度	$\beta_e = \omega/v_0$	
C	弾性常数	μ_a	等価線路上の3極管の複素増幅定数
e	圧電常数		
ε	誘電率	R_i	等価線路上の3極管の内部抵抗
ε_0	真空の誘電率		
μ_0	非磁性体の透磁率		
$\mu = \rho\tau/m^*$	移動度		
$\sigma = \varepsilon\omega_p^2\tau$	電気伝導度		

上式において z 方向成分を示す添字は省略している。K_1 は電磁波に対する電流である。伝送線との結合がない場合には、K_1 は0または一定となり、半導体試料に沿って伝搬する電磁波は存在しない。なお(3)式はボルツマン方程式から得られる関係式である。

さて空間電荷波はキャリヤの速度変調と密度変調とで表わされる。そこで次式に示すように，速度変調に比例する速度変調カイネティック電圧（Kinetic Voltage of Velocity Modulation）V_{kv}と，密度変調に比例する密度変調カイネティック電圧（Kinetic Voltage of Density Modulation）V_{ks}とを導入して議論を進める。

$$V_{kv} \equiv \frac{m^* v_0 v_1}{\beta} \tag{6}$$

$$V_{ks} \equiv \frac{s_1}{s_0} \frac{m^* v_T^2}{\beta} = \frac{n_1 kT}{n_0 \beta} \tag{7}$$

V_{kv}は電子ビーム上の空間電荷波に対してChuが定義したものと同一で，キャリヤの運動エネルギーの変化分

$$\frac{1}{2} m^* (v_0 + v_1)^2 - \frac{1}{2} m^* v_0^2 \simeq m^* v_0 v_1$$

に対応させた等価電圧である。またV_{ks}はキャリヤのガス圧の変化分

$$n_1 kT = n_1 m^* v_T^2$$

に対応させた等価電圧である。したがってこれは圧力波のエネルギーに対応させた等価電圧と考えることが出来る。

このような2つのカイネティック電圧を導入して基本式を書き直すと次が得られる。

$$\frac{dJ_1}{dz} = -j\omega \frac{\varepsilon \omega_p^2}{v_T^2} V_{ks} \tag{2'}$$

$$\frac{dV_{kv}}{dz} + \frac{dV_{ks}}{dz} = E_1 - \left(\frac{1}{\tau v_0} + j \frac{\omega}{v_0} \right) V_{kv} \tag{3'}$$

$$V_{kv} + \frac{v_0^2}{v_T^2} V_{ks} = \frac{v_0}{\varepsilon \omega_p^2} J_1 \tag{4'}$$

ゆえに半導体内の空間電荷波伝搬は，J_1とV_{kv}とV_{ks}とで表わされ，(4')式によってV_{kv}またはV_{ks}を消去すれば，(V_{kv}, J_1)の合せ，または(V_{ks}, J_1)の組み合せで表わすことができる。以下その各々について考察してみる。

3. V_{kv} と J_1 の組み合せによる波動伝搬の記述

(4')式より V_{kp} を J_1 と V_{kv} で表わし，これを(2')，(3')両式に代入すると次式が得られる。

$$\frac{dJ_1}{dz} = -j\frac{\omega}{v_0}J_1 + j\omega\frac{\varepsilon\omega_p^2}{v_r^2}V_{kv} \tag{8}$$

$$\left(1-\frac{v_T^2}{v_0^2}\right)\frac{dV_{kv}}{dz} = -\frac{1}{\tau v_0}V_{kv} - j\frac{\omega}{v_0}\left(1+\frac{v_T^2}{v_0^2}\right)V_{kv} + j\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p^2}\cdot\frac{v_T^2}{v_0^2}J_1 + E_1 \tag{9}$$

ここで波動の等価線路表示を簡単な形にするために，次式で与えられるような有効速度変調カイネティック電圧（Effective Kinetic Voltage of Velocity Modulation）U_{kv} を導入して議論を進める。

$$U_{kv} \equiv \left(1-\frac{v_T^2}{v_0^2}\right)V_{kv} \tag{10}$$

これを用いて(8)，(9)両式を書き直すと，次式を得る。

$$\frac{dJ_1}{dz} = -j\frac{\omega}{v_0}J_1 - j\omega\frac{\varepsilon\omega_p^2}{v_T^2-v_0^2}U_{kv} \tag{11}$$

$$\frac{dU_{kv}}{dz} = -j\frac{\omega}{v_0}U_{kv} + \frac{1}{\tau v_0}\frac{v_0^2+j2\omega\tau v_T^2}{v_T^2-v_0^2}U_{kv} + j\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p^2}\frac{v_T^2}{v_0^2}J_1 + E_1 \tag{12}$$

ここで次のように変数変換を行なう

$$U_{kv} = U'_{kv}e^{-j\beta_e z}\ ,\quad J_1 = J_1'e^{-j\beta_e z},\ etc \tag{13}$$

すると，(11)，(12)両式より次式を得る。

$$\frac{dJ_1'}{dz} = -j\omega\frac{\varepsilon\omega_p^2}{v_T^2-v_0^2}U_{kv}' \tag{14}$$

$$\frac{dU_{kv}'}{dz} = \frac{1}{\tau v_0}\frac{v_0^2+j2\omega\tau v_T^2}{v_T^2-v_0^2}U_{kv}' + j\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p^2}\frac{v_T^2}{v_0^2}J_1' + E_1' \tag{15}$$

いま

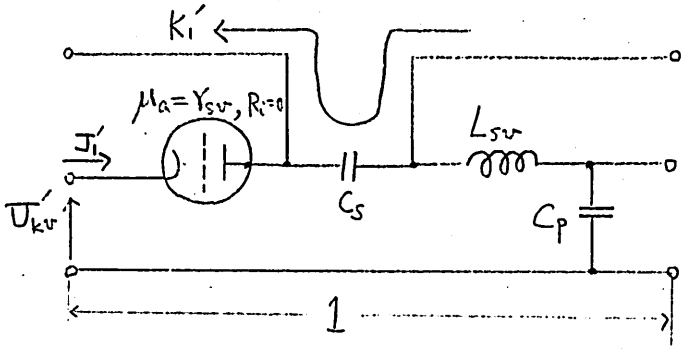
$$\gamma_{sv} \equiv \alpha_{sv} + j\beta_{sv} \equiv \frac{1}{\tau v_i} \frac{v_0^2 + j2\omega\tau v_T^2}{v_T^2 - v_0^2} \qquad (16)$$

とおくと

$$\alpha_{sv} = \frac{1}{\tau v_0} \cdot \frac{v_0^2}{v_T^2 - v_0^2} \equiv \alpha_s \qquad (17)$$

$$\beta_{sv} = \frac{2\omega}{v_0} \frac{v_T^2}{v_T^2 - v_0^2} \qquad (18)$$

である。α_s は衝突効果によって $\tau U_{kv}'$ が単位長当りに増幅される割合を示す。(14), (15) 両式より図1に示すような波動の等価線路表示を得る。この等価線路上には複素増幅定数が



$$C_s = \varepsilon, \quad C_p = \frac{\varepsilon\omega_p^2}{v_T^2 - v_0^2}, \quad L_{sv} = -\frac{1}{\varepsilon\omega_p^2} \frac{v_T^2}{v_0^2}$$

$$\gamma_{sv} = \frac{1}{\tau v_0} \frac{v_i^2}{v_T^2 - v_0^2} + j2\beta_e \frac{v_T^2}{v_T^2 - v_0^2}$$

図1．(U_{kv}', J_1') の組み合せによる波動の等価線路表示

γ_{sv} で，内部抵抗が0である格子接地の3極管が挿入されていることは注目すべきことである。この3極管の陽極，陰極の電圧降下は次のような値をとる。

$$\gamma_{sv} U_{kv}' = -\frac{1}{\tau v_0} V_{kv}' - j2\beta_e \frac{v_T^2}{v_0^2} V_{kv}' \qquad (19)$$

上式の中で波動の増幅に本質的な役割を演ずるのは，右辺の第1項である。τv_0 は衝突から衝突までの平均ドリフト距

離である。キャリヤはこの距離を走行した後，衝突によって今まで持っていた速度変調を失う。そこで(19)式の右辺の第1項の$-V_{kv}'/\ell v_0$は衝突現象によるV_{kv}'の単位長当りの減衰量になる。そこで(19)式から分るように，図1の等価線路上にU_{kv}'を増幅する3極管が挿入されていることは，上述のように衝突効果によってV_{kv}'が減衰する現象に基くものである。$v_0 > v_T$の場合にはU_{kv}'とV_{kv}'とは同符号であるからV_{kv}'の減衰はU_{kv}'の減衰をもたらし，3極管は実は減衰器として働く($\alpha_s < 0$)。これに対し$v_T > v_0$の場合には，U_{kv}'とV_{kv}'とは反対符号であって，V_{kv}'の減衰はU_{kv}'の増大をもたらし，3極管は増幅器として働く($\alpha_s > 0$)。

なお$v_0 > v_T$でかつ$w\ell \ll 1$の場合(15)式は次のように簡単になる。

$$\frac{dU_{kv}'}{dz} \simeq \alpha_s U_{kv}' + j\frac{w}{\varepsilon w_p^2}\frac{v_T^2}{v_0^2}J_1' + E_1' \qquad (20)$$

さて図1の等価線路上の伝送電力は次式で与えられる。

$$Q_{kv} = Re\left(\frac{1}{2}U_{kv}'J_1'^*\right) = Re\left(\frac{1}{2}U_{kv}J_1^*\right)$$

$$\equiv \left(1 - \frac{v_T^2}{v_0^2}\right)P_{kv} \qquad (21)$$

ここで

$$P_{kv} \equiv Re\left(\frac{1}{2}V_{kv}J_1^*\right) \qquad (22)$$

Q_{kv}を有効速度調カイネティック電力(Effective Kinetic Power of Velocity Modulation)，P_{kv}を速度変調カイネティック電力(Kinetic Power of Velocity Modulation)と呼ぶことにする。P_{kv}は電子ビーム上の空間電荷波に対してChuが定義したカイネティック電力と同じである。このQ_{kv}が実際の波動の電力とどのような関係にあるかを見るために，図2のSなる閉曲面内の領域にポインティングの定理を適用してみる。

$$\iint_S \frac{1}{2}(\mathbb{E}_1 \times \mathbb{H}_1)\cdot dS$$

$$= -\iiint \frac{1}{2}\mathbb{E}_1 \cdot \mathbb{J}_1^* dxdydz$$

$$+j\omega \iiint \left(\frac{\varepsilon}{2}|\mathbb{E}_1|^2 - \frac{\mu_0}{2}|\mathbb{H}_1|^2\right) \cdot dxdydz \qquad (23)$$

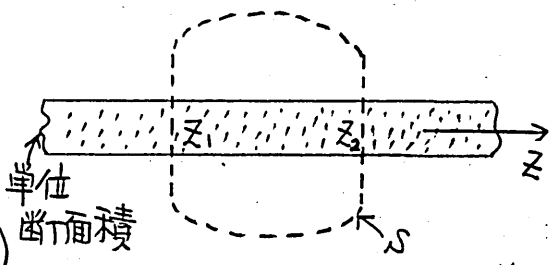


図2　z_1からz_2までの半導体試料を含む閉曲面S

上式の右辺の第1項の被積分関数は，(11)，(12)両式より次のように変形される。

$$\mathbb{E}_1 \cdot \mathbb{J}_1^* = \frac{d}{dz}\left(U_{kv}\mathbb{J}_1^*\right) - \gamma_{sv}\left(U_{kv}\mathbb{J}_1^*\right) - j\omega\frac{\varepsilon\omega_p^2}{v_T^2 - v_0^2}|U_{kv}|^2$$

$$- j\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p^2}\frac{v_T^2}{v_0^2}|\mathbb{J}_1|^2 \qquad (24)$$

これを用いて(23)式は次のように書ける。

$$\iint_S \frac{1}{2}(\mathbb{E}_1 \times \mathbb{H}_1^*)\cdot dS + \iint_{z_2}\frac{1}{2}U_{kv}\mathbb{J}_1^* dxdy - \iint_{z_1}\frac{1}{2}U_{kv}\mathbb{J}_1^* dxdy$$

$$= (\alpha_s + j\beta_{sv})\iiint \frac{1}{2}U_{kv}\mathbb{J}_1^* dxdydz$$

$$+ j\omega\iiint\left[\frac{1}{2}C_p|U_{kv}|^2 - \frac{1}{2}L_{sv}|\mathbb{J}_1|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|\mathbb{E}_1|^2 - \frac{\mu_0}{2}|\mathbb{H}_1|^2\right]dxdydz$$

(25)

ただし C_p, L_{sv} は図1の等価線路の線間容量および直列インダクタンスで，次式で与えられる。

$$C_p = \frac{\varepsilon\omega_p^2}{v_T^2 - v_0^2}\ ,\ L_{sv} = -\frac{1}{\varepsilon\omega_p^2}\frac{v_T^2}{v_0^2} \qquad (26)$$

(25)式の実数部を取り，試料の断面積が単位面積であることを考慮すると次式を得る。

$$\iint_S Re\left(\frac{1}{2}\mathbb{E}_1 \times \mathbb{J}_1^*\right)\cdot dS + Q_{kv}(z_2) - Q_{kv}(z_1)$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \alpha_s Q_{kv}\, dz - I_m \int_{z_1}^{z_2} \beta_{sv} \frac{1}{2} U_{kv} J_1^* dz \qquad (27)$$

いま $z=-$定なる無限大平面を通過する電磁波電力を P_{kv} とすると，上式から次式が得られる。

$$\frac{d}{dz}(P_c + Q_{kv}) = \alpha_s Q_{kv} - \beta_{sv} I_m\left(\frac{1}{2} U_{kv} J_1^*\right) \qquad (28)$$

さて(11)式より次式が得られる。

$$\frac{1}{2} U_{kv} J_1^* = -\frac{\beta_e}{B_p} \frac{1}{2} |J_1|^2 - \frac{1}{jB_p} \frac{1}{2} J_1^* \frac{dJ_1}{dz}$$

ただし，$B_p = \omega c_p$ である。これより次式を得る。

$$R_e\left(\frac{1}{2} U_{kv} J_1^*\right) = Q_{kv} = \frac{\beta - \beta_e}{B_p} \frac{1}{2} |J_1|^2 \qquad (29)$$

$$I_m\left(\frac{1}{2} U_{kv} J_1^*\right) = -\frac{\alpha}{\beta_e} \frac{1}{2} |J_1|^2 = -\frac{\alpha}{\beta - \beta_e} Q_{kv} \qquad (30)$$

ここで $e^{-\gamma z} = e^{-(\alpha + j\beta)z}$ なる形の波動伝搬を考えている。
そこで (28)式は次のように書ける。

$$\frac{d}{dz}(P_c + Q_{kv}) = \left(\alpha_s + 2\alpha \frac{\beta_e}{\beta - \beta_e} \frac{v_T^2}{v_T^2 - v_0^2}\right) Q_{kv}$$

$$= -\left(\frac{1}{\tau v_0} + 2\alpha \frac{\beta_e}{\beta - \beta_e} \frac{v_T^2}{v_0}\right) P_{kv} \qquad (31)$$

あるいはまた P_{kv} のみを用いて次式を得る。

$$\frac{dP_c}{dz} = -\left[\frac{1}{\tau v_0} - 2\alpha\left(1 - \frac{\beta}{\beta - \beta_e} \frac{v_T^2}{v_0^2}\right)\right] P_{kv} \qquad (32)$$

(28), (31), (32)の諸式が波動のカイネティック電力定理を示す。
さて

$$P_{kv} = R_e\left(\frac{1}{2} V_{kv} J_1^*\right) = -\frac{\beta - \beta_e}{\beta} \frac{v_0}{2\varepsilon \omega_p^2} |J_1|^2 \qquad (33)$$

ゆえに次の関係を得る。

$\beta < \beta_e$ の時 (fast wave), $P_{kv} > 0$ }

$$\left.\begin{array}{l}\beta > \beta_e \text{ の時 (slow wave)},\ P_{kv} < 0\end{array}\right\} \qquad (34)$$

すなわち速度変調カイネティック電力 (Chu のカイネティック電力) は, 空間電荷波の fast wave に対しては正であり, slow wave に対しては負である。そこでこれらの関係を用いて波動増幅の条件を吟味することが出来る。波動が増幅されている状態は

$$\alpha < 0,\ \beta > 0,\ P_c > 0,\ \frac{dP_c}{dz} > 0 \qquad (35)$$

で表わされる。この状態を実現するための必要かつ十分な条件として, (32), (34) 両式より次式を得る。

$$\beta > \beta_e \qquad (\text{slow wave}) \qquad (36)$$

かつ

$$\frac{1}{\tau v_0} > -2\alpha\left(\frac{\beta}{\beta-\beta_e}\frac{v_T^2}{v_0^2} - 1\right) \qquad (37)$$

波動の増幅定数 $-\alpha$ の値が $1/\tau v_0$ に比べて十分小さい時には, (37) 式は容易に満足されるから, 波動の増幅条件は実際上 (36) 式のみとなる。すなわち波動が増幅されるためには, 負の P_{kv} を運ぶ slow wave が励振されることが必要かつ十分であると言える。

なお $v_0 > v_T$ でかつ $\omega\tau \ll 1$ の場合にはカイネティック電力定理は次のように書ける。

$$\frac{d}{dz}(P_c + Q_{kv}) \simeq \alpha_s Q_{kv} = -\frac{1}{\tau v_0} P_{kv} \qquad (38)$$

ここに得られた結論を電子ビームの場合と比べてみると面白い。電子ビームに対しては次の関係が成立する。

$$\left.\begin{array}{l}\omega\tau \to \infty\ ,\ v_T \to 0\ ,\ \alpha_s \to 0\ ,\ U_{kv} \to V_{kv} \\ Q_{kv} \to P_{kv}\ ,\ \varepsilon = \varepsilon_0\end{array}\right\} \qquad (39)$$

そこで (28) 式のカイネティック電力定理は次のようになる。

$$\frac{d}{dz}(P_c + P_{kv}) = 0, \text{ あるいは } P_c + P_{kv} = const. \quad (40)$$

これがChuの導いたカイネティック電力定理で，電子ビームに沿って伝送される電磁波電力と速度変調カイネティック電力の和が保存されることを述べている。そして波動増幅は $P_c > 0$, $P_{kv} < 0$ の場合に起り，カイネティック電力が回路波電力に変換されることにより，正の P_c と $-P_{kv}$ とが z方向に共に増大する現象が起っている訳である。

これに対して半導体内の波動に対しては，(28), (31), (32), (38) の諸式が示すように，半導体に沿って回路波電力 P_c と有効速度変調カイネティック電力 Q_{kv} の和が保存されず，図1の等価線路上の3極管部で供給される電力だけ増減する。この3極管部で供給される電力の主要項は $-P_{kv}/\tau v_0$ であり，前にも説明したように衝突現象に基くものである。ゆえに半導体の場合の波動増幅機構は，負の P_{kv} を運ぶ slow wave が励振され，カイネティック電力が回路波電力に変換される結果と，衝突現象によって負の P_{kv} より単位長当り $-P_{kv}/\tau v_0$ だけの正の電力が供給される効果の総合作用に基くものであることが分る。

4. V_{ks} と J_1 との組み合せによる波動伝搬の記述

(4')式より V_{kv} を J_1 と V_{ks} とで表わし，これを(3')式に代入すると次式を得る。

$$\left(1 - \frac{v_0^2}{v_T^2}\right)\frac{dV_{ks}}{dz} = \left(\frac{1}{\tau v_0} + 2j\frac{\omega}{v_0}\right)\frac{v_0^2}{v_T^2}V_{ks} - \frac{1+j\omega\tau}{\sigma}J_1 + E_1 \quad (41)$$

ここで等価線路表示を簡単な形にするために，次式で与えられるような有効密度変調カイネティック電圧 (Effective Kinetic Voltage of Density Modulation) を定義する。

$$U_{ks} \equiv \left(1 - \frac{v_0^2}{v_T^2}\right) V_{ks} \tag{42}$$

これを用いると，(21)，(42) 両式は次のようになる。

$$\frac{dJ_1}{dz} = -j\omega \frac{\varepsilon \omega_p^2}{v_T^2 - v_i^2} U_{ks} \tag{43}$$

$$\frac{dU_{ks}}{dz} = \left(\frac{1}{\tau v_0} + j\frac{2\omega}{v_0}\right)\frac{v_0^2}{v_T^2 - v_i^2} U_{ks} - \left(\frac{1}{\sigma} + j\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p^2}\right) J_1 + E_1 \tag{44}$$

いま

$$\gamma_{sp} \equiv \alpha_{sp} + j\beta_{sp} \equiv \left(\frac{1}{\tau v_0} + j\frac{2\omega}{v_0}\right)\frac{v_i^2}{v_T^2 - v_i^2} \tag{45}$$

とおくと

$$\alpha_{sp} = \frac{1}{\tau v_0}\frac{v_i^2}{v_T^2 - v_i^2} = \alpha_s \tag{46}$$

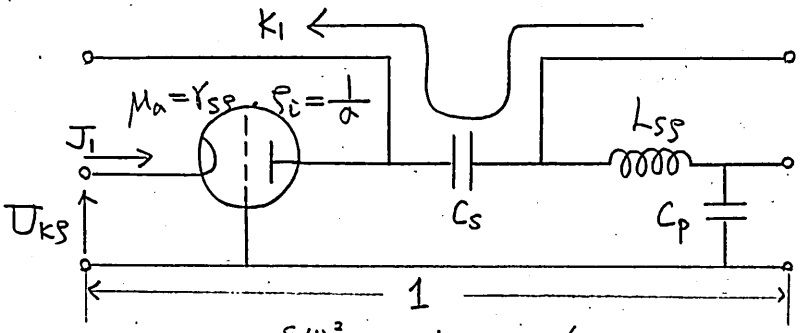
$$\beta_{sp} = \frac{2\omega}{v_0}\frac{v_0^2}{v_T^2 - v_0^2} \tag{47}$$

前節同様に α_s は衝突効果によって U_{ks} が単位長当りに増幅される割合を示す。(43)(44) 両式から図3に示すような波動の等価線路表示を得る。等価線路上には複素増幅定数が γ_{sp} で，内部抵抗が $1/\sigma$ である格子接地の3極管が挿入されている。この3極管の陽極，陰極間の電圧降下は次式のようになる。

$$\gamma_{sp} U_{ks} - J_1/\sigma = -\frac{1}{\tau v_0} V_{kv} - j2\beta_e V_{kv} + j\frac{2\omega}{\varepsilon\omega_p^2} J_1 \tag{48}$$

上式の中で波動の増幅に本質的な役割を演ずるのは，右辺の第1項の $-V_{kv}/\tau v_0$ である。このことは図1の等価線路上の3極管の電圧降下について求められた結果と全く一致する。従ってこの場合にも，衝突効果によって V_{kv} が単位長当りに $-V_{kv}/\tau v_0$ だけ減衰する現象が，U_{ks} に対して増幅 ($v_T > v_0$ で $\alpha_s > 0$ の時)，または減衰．

($v_0 > v_T$ で $\alpha_s < 0$ の時) の効果をもたらすことが分る。



$$C_s = \varepsilon,\quad C_p = \frac{\varepsilon\omega_p^2}{v_T^2 - v_0^2},\quad L_{ss} = 1/\varepsilon\omega_p^2$$

$$\gamma_{ss} = \frac{1}{\tau v_0}\frac{v_0^2}{v_T^2 - v_0^2} + j2\beta_e \frac{v_0^2}{v_T^2 - v_0^2}$$

図3 (U_{ks}, J_1) の組み合わせによる波動の等価線路表示

なお $\omega\tau \ll 1$ の場合には, (44)式は次のように簡単になる。

$$\frac{dU_{ks}}{dz} \simeq \alpha_s U_{ks} - \left(\frac{1}{\sigma} + j\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p^2}\right) J_1 + E_1 \qquad (49)$$

さて図3.の等価線路上の伝送電力は次式で与えられる。

$$Q_{ks} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} U_{ks} J_1^*\right) \equiv \left(1 - \frac{v_0^2}{v_T^2}\right) P_{ks} \qquad (50)$$

ここで

$$P_{ks} \equiv \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} V_{ks} J_1^*\right) \qquad (51)$$

Q_{ks}を有効密度変調カイネティック電力 (Effective Kinetic Power of Density Modulation), P_{ks}を密度変調カイネティック電力 (Kinetic Power of Density Modulation) と呼ぶことにする。P_{ks}は圧力波のカイネティック電力と考えられる。このQ_{ks}が実際の波動の電力とどのような関係にあるかを見るために, 前節と同じく図2のような閉曲面内の領域でポインティングの定理を適用してみる,

$$\iint_S \frac{1}{2}(E_1 \times H_1^*)\cdot dS + \iint_{z_2} \frac{1}{2} U_{ks} J_1^* dxdy - \iint_{z_1} \frac{1}{2} U_{ks} J_1^* dxdy$$

$$= Y_{ss}\iiint \frac{1}{2} U_{ks} J_1^* dx dy dz - \iiint \frac{1}{2\sigma} |J_1|^2 dx dy dz$$
$$+ j\omega \iiint \left[\frac{1}{2} C_p |U_{ks}|^2 - \frac{1}{2} L_{ss} |J_1|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |E_1|^2 - \frac{\mu_0}{2} |H_1|^2 \right] dx dy dz \quad (52)$$

ただし上式で L_{ss} は図3の等価線路上の直列インダクタンスで，次式の値を取る。

$$L_{ss} = \frac{1}{\varepsilon \omega_p^2} \quad (53)$$

(52)式の実数部をとり，z について微分することにより次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dz}(P_c + Q_{ks}) &= \alpha_s Q_{ks} - \frac{1}{2\sigma} |J_1|^2 - \beta_{ss} \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2} U_{ks} J_1^*\right) \\ &= -\frac{1}{\tau v_0} P_{kv} - \beta_{ss} \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2} U_{ks} J_1^*\right) \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

さて(43)式から次式を得る。

$$Q_{ks} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} U_{ks} J_1^*\right) = \frac{\beta}{B_p} \frac{1}{2} |J_1|^2 \quad (55)$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2} U_{ks} J_1^*\right) = -\frac{\alpha}{B_p} \frac{1}{2} |J_1|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} Q_{ks} \quad (56)$$

そこで(54)式は次のように書ける。

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dz}(P_c + Q_{ks}) &= \left(\alpha_s \frac{\beta - \beta_e}{\beta} + 2\alpha \frac{\beta_e}{\beta} \frac{v_0^2}{v_f^2 - v_0^2}\right) Q_{ks} \\ &= -\left(\frac{1}{\tau v_0} + 2\alpha \frac{\beta - \beta_e}{\beta_e}\right) P_{kv} \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

あるいは

$$\frac{dP_c}{dz} = \left[\frac{1}{\tau v_0} - 2\alpha\left(1 - \frac{\beta}{\beta - \beta_e} \frac{v_f^2}{v_0^2}\right)\right] \frac{v_0^2}{v_f^2} \frac{\beta - \beta_e}{\beta} P_{ks} \quad (58)$$

(54), (57), (58)の諸式がこの場合のカイネティック電力定理を表わす。

さて(55)式より

$$P_{ks} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} V_{ks} J_1^*\right) = \frac{v_T^2}{v_{ph}} \frac{1}{2\varepsilon\omega_p^2} |J_1|^2 > 0 \quad (59)$$

すなわち前進波に対して密度変調カイネティック電力は常に正である。(58), (59) 両式から波動増幅の条件を検討することができ，その結果は当然のことながら前節の (36), (37) 両式と一致し，slow wave が励振されねばならぬことが結論される。

なお $\omega\tau \ll 1$ の場合には，カイネティック電力定理は次のようになる。

$$\frac{d}{d\tau}(P_c + Q_{ks}) \simeq \alpha_s Q_{ks} - \frac{1}{2\sigma}|J_1|^2 \quad (60)$$

5. P_{kv} と P_{ks} を用いたカイネティック電力定理

2つの有効カイネティック電圧 U_{kv} と U_{ks} は波動に対する等価線路を得るために導入されたもので，おのおのの等価線路上の伝送電力 Q_{kv} と Q_{ks} はその物理的意味があまり明瞭でない。そこでここでは実在する2つのカイネティック電力定理求めてみる。

2つの有効カイネティック電圧と電圧と電力の間には次の関係が成立する。

$$U_{kv} = V_{kv} + V_{ks} - \frac{v_0}{\varepsilon\omega_p^2} \frac{v_T^2}{v_0^2} J_1 \quad (61)$$

$$U_{ks} = V_{kv} + V_{ks} - \frac{v_0}{\varepsilon\omega_p^2} J_1$$

$$U_{kv} = U_{ks} - \frac{\beta_v}{B_p} J_1 = U_{ks} - \frac{1}{\alpha_s} \frac{1}{\sigma} J_1 \quad (63)$$

$$Q_{kv} = P_{kv} + P_{ks} - \frac{v_0}{2\varepsilon\omega_p^2} \frac{v_T^2}{v_0^2} |J_1|^2 = P_{kv} + \frac{\beta - \beta_e}{\beta} P_{ks} \quad (64)$$

$$Q_{ks} = P_{kv} + P_{ks} - \frac{v_0}{2\varepsilon\omega_p^2} |J_1|^2 = P_{ks} + \frac{\beta}{\beta - \beta_e} P_{kv} \quad (65)$$

$$Q_{kv}=\frac{\beta-\beta_e}{\beta}Q_{ks}=Q_{ks}-\frac{\beta_e}{2B_p}|J_1|^2=Q_{ks}-\frac{1}{\alpha_s}\frac{|J_1|^2}{2\sigma} \quad (66)$$

$$I_m\left(\frac{1}{2}U_{kv}J_1^*\right)=I_m\left(\frac{1}{2}U_{ks}J_1^*\right) \quad (67)$$

以上の諸関係式があるから，Q_{kv} を用いる電力定理の(31)式と，Q_{ks} を用いる電力定理の(57)式とは，同じ内容の物理的事実を述べているもので，共に次のように書き直される。

$$\frac{d}{dz}(P_c+P_{kv}+P_{ks})=-\frac{1}{\tau v_0}P_{kv} \quad (68)$$

あるいは

$$\frac{d}{dz}(P_c+P_{ks})=-\frac{1}{\tau v_0}P_{kv}-\frac{d}{dz}P_{kv} \quad (68')$$

(68)式は，半導体に沿って回路波電力 P_c と2つのカイネティック電力 P_{kv} と P_{ks} との和が保存されず，衝突効果による P_{kv} の減衰量だけ増減することを示している。前進波に対しては $P_c>0$，$P_{ks}>0$ であるから(68')式より波動増幅が起こるためには $P_{kv}<0$ でなければならぬことが分る。波動増幅機構は，負の P_{kv} が正の (P_c+P_{ks}) に変換される効果と，衝突効果によって負の P_{kv} より単位長当り $-P_{kv}/\tau v_0$ だけの正の電力が発生する効果に基いている。したがってこの場合キャリヤの衝突効果は波動増幅を助長するように働く。これに対してキャリヤの熱速度があるために圧力波が励振されることは，それだけ波動増幅に対する負荷を増大することになり，回路波電力 P_c の増幅を防げるように働く。すなわちキャリヤの熱速度があって拡散現象が起こる場合に，キャリヤの集団が起こるためには，拡散効果に打ち勝つための余分な仕事が必要であり，この余分になされた仕事が圧力波のカイネティックなエネルギーとして蓄えられる訳である。この意味で圧力波の運ぶカイネティックなエネルギーは正であり，従って P_{ks} が必ず正であることは当然のこととして理解される。そこで拡散現象は波動増幅に対して負荷を増大

させる効果を生じ，波動増幅に対して制動的に働く。

6. 半導体内の空間電荷波と回路波との結合による波動増幅.

前節において，半導体内の波動増幅を行うためには空間電荷波のslow waveが励振されねばならぬことが結論されたが，次の問題としてこのような空間電荷波のslow waveを励振するには，どのような回路波との結合が必要であるかを解明しなければならない。そこで本節では空間電荷波と回路波との結合を一般的に論じてみる。

一般の回路波に対して，適当に等価電圧V_cと等価電流J_cとを定義して等価線路表示を作ることが出来る。その等価線路の単位長当りの直列インピーダンスをZ_{cs}，並列アドミッタンスをY_{cp}とする。このような回路波と空間電荷波との結合が電流J_cとJ_1とによって行なわれる場合を考えると，波動伝搬の方程式は次のようになる。

$$\frac{dJ_1}{dz} = -j\omega \frac{\varepsilon\omega_p^2}{v_1^2 - v_0^2} U_{ks} \tag{69}$$

$$\frac{dU_{ks}}{dz} = \gamma_{ss} U_{ks} - \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} + j\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p^2}\right) J_1 + Z_{12} J_c \tag{70}$$

$$\frac{dJ_c}{dz} = -Y_{cp} V_c \tag{71}$$

$$\frac{dV_c}{dz} = -Z_{cs} J_c + Z_{21} J_1 \tag{72}$$

そしてこの場合の等価線路表示として図4.のような結合線路を得る。

結合波が$e^{-\gamma z}$なる形の波動であると考えると，(71)(72)両式から次式を得る。

$$J_c = \frac{Z_{21} Y_{cp}}{\gamma_0^2 - \gamma^2} J_1 \tag{73}$$

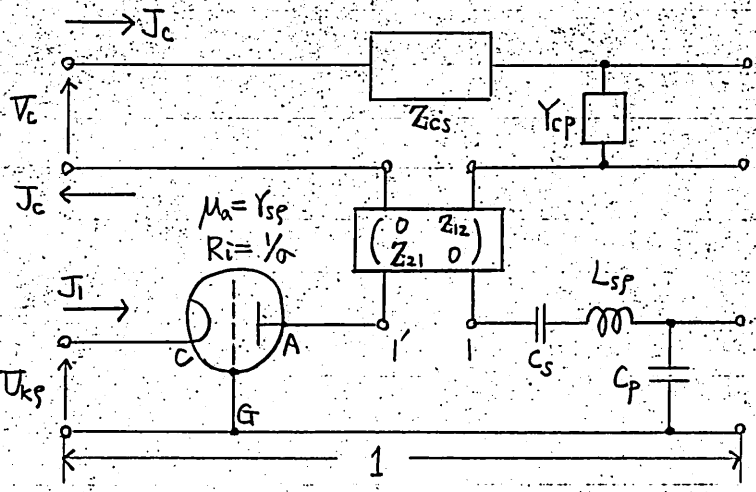


図1. 空間電荷波と回路波との結合の等価線路表示

ただし

$$\gamma_0 \equiv \alpha_0 + j\beta_0 = \sqrt{Z_{cs} Y_{cp}} \qquad (74)$$

は，結合前の回路波の伝搬定数である．ここで回路損失はZ_{cs}の中に含め，Y_{cp}は純サセプタンス分よりなるとする．すなわち

$$Z_{cs} = R_{cs} + jX_{cs} \ , \ Y_{cp} = jB_{cp} \qquad (75)$$

そして回路損失は小さいとして

$$\beta_0 >> \alpha_0 \qquad (76)$$

と仮定する．

さて(73)式を(70)式に代入すると次式を得る。

$$\frac{dV_{ks}}{dz} = \left(\gamma_{sp} V_{ks} - \frac{1}{\sigma} J_1\right) - Z_s J_1 \qquad (77)$$

ただし

$$Z_s \equiv \frac{1}{j\omega\varepsilon} + j\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p^2} - \frac{Z_{21} Z_{12} Y_{cp}}{\gamma_0^2 - \gamma^2} \qquad (78)$$

ゆえに空間電荷波と結合する回路波の影響は，空間電荷波の等価線路上に $-Z_{12}Z_{21}Y_{cp}/(\gamma_0^2-\gamma^2)$ なる等価インピーダンスを直列に加えることによって表わすことができる．そこでこの場合の

空間電荷波伝搬の等価線路表示として図5が得られる。そしてその上の波動伝搬は(69)式と(77)式を連立させて次式で与えられる。

$$\frac{d^2U_{ks}}{dz^2} - \gamma_{sp}\frac{dU_{ks}}{dz} - \left(\frac{1}{\sigma} + Z_s\right)Y_p U_{ks} = 0 \tag{79}$$

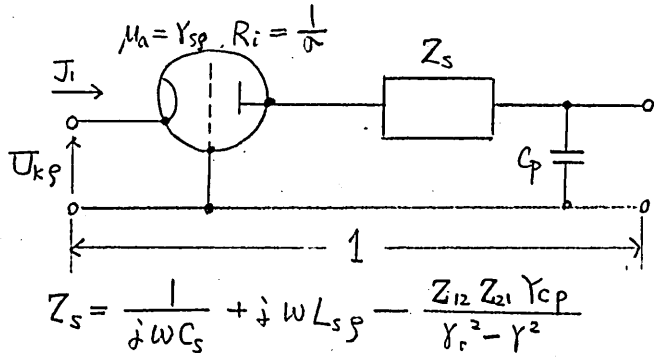


図5. 結合した回路波の影響を組み入れた空間電荷波の等価回路表示.

そこで結合板の伝搬定数γは次式から求まる。

$$\frac{\gamma^2 + \gamma\gamma_{sp}}{Y_p} - \frac{1}{\sigma} = Z_s = -j\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega\varepsilon\omega_p^2} - \frac{Z_{12}Z_{21}Y_{cp}}{\gamma_0^2 - \gamma^2} \tag{80}$$

この式はγについて4次式であるから4つの根がある。その中で回路波の前進波が結合によって変化したと見做されるモードについて考える。結合による変化が小さいと仮定し,(76)式を考慮して次式のようにおく。

$$\gamma \equiv j\beta_0 + \delta, \quad (|\delta/\beta_0| \ll 1) \tag{81}$$

$$\delta \equiv \delta_r + j\delta_j \tag{82}$$

上式を(80)式に代入し,δとα_0の1次項までを残すと次式を得る。

$$Z_s \simeq -j\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega\varepsilon\omega_p^2} + \frac{Z_{12}Z_{21}B_{cp}}{2\beta_0(\delta - \alpha_0)} \tag{83}$$

$$\delta \simeq \alpha_0 + \frac{Z_{12}Z_{21}B_{cp}\sigma}{2\beta_0}\,\frac{-j\omega\nu}{\omega_p^2 + \omega^2\frac{v_r^2}{v_0^2} - \omega^2\left(\frac{v_0}{v_c} - 1\right)^2 - j\omega\nu\left(\frac{v_0}{v_c} - 1\right)} \tag{84}$$

ただし上式の誘導に当っては，$B_p/\Lambda = \beta_e \alpha_s = \omega\nu/(v_r^2 - v_0^2)$ なる関係を用いている。以下

$$\omega_p >> \omega, \qquad \nu >> \omega \tag{85}$$

なる場合を考える。この関係は半導体の場合に普通に成立する関係である。このような場合には(84)式は次のように簡単になる。

$$\delta \simeq \alpha_0 + \frac{Z_{12}Z_{21}B_{cp}\Gamma}{2\beta_0} \frac{1}{\left(\frac{v_0}{v_c} - 1\right) + j\frac{\omega_c}{\omega}} \tag{86}$$

ここで $\omega_c = \Gamma/\varepsilon$, $\omega_p^2 = \omega_c \nu$ なる関係を用いている。
(86)式より次式を得る。

$$\delta_r \simeq \alpha_0 + \frac{Z_{12}Z_{21}B_{cp}\Gamma}{2\beta_0} \frac{\frac{v_0}{v_c} - 1}{\left(\frac{v_0}{v_c} - 1\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \tag{87}$$

$$\delta_i \simeq -\frac{Z_{12}Z_{21}B_{cp}\Gamma}{2\beta_0} \frac{\frac{\omega_c}{\omega}}{\left(\frac{v_0^2}{v_c} - 1\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \tag{88}$$

ただし ここで

$$Z_{12}\,Z_{21} = \text{実数} \tag{89}$$

と仮定している。

さて波動増幅の条件は，次の2つの式によって与えられる。

$$\delta_r < 0 \tag{90}$$

かつ

$$Re(Z_s) > 0 \tag{91}$$

(90)式は波動の増幅が z 軸の正方向に増大する条件であり，(91)式は半導体内の空間電荷波から回路波の方に正の電力が供給される条件である。もし回路波の位相速度が z 軸の方向を向き，伝送電力が z 軸の負方向に送られている場合を考えると，$\delta_r < 0$ の時に見掛け上増大波が得られているように思われるが，実際には回路波はその電力伝送方

向に減衰していて増大波は得られない。このような場合にも誤りなく波動増幅を判定するために(91)式が必要である。

さて(83)式において，$\delta_r<0$ の時に(91)式が成立するためには，次の関係が成立しなければならない。

$$Z_{12}Z_{21}B_{cp}<0 \qquad (92)$$

これが波動増幅を実現するための前提条件となる。この場合には(88)式によって次のような関係が成立する。

$$\delta_i>0\ ,\ \text{したがって}\quad \beta>\beta_0 \qquad (v_{ph}<v_c) \qquad (93)$$

すなわち波動を増幅させるための前提条件として，回路波と空間電荷波との結合は，結合によって生ずる結合波の位相速度が回路波の位相速度よりも遅くなるものでなければならないことが分る。

さてこのような前提条件が満足されている場合に，波動増幅を実現するためには(90)式によって $\delta_r<0$ とすればよい。すなわち(87)式より次式を得る。

$$\frac{v_0}{v_c}>1+\frac{2\alpha_0\beta_0}{|Z_{12}Z_{21}B_{cp}|\sigma}\left[\left(\frac{v_0}{v_c}-1\right)^2+\left(\frac{w_c}{w}\right)^2\right] \qquad (94)$$

この式は波動増幅を実現するためには，キャリヤの直流ドリフト速度 v_0 を，結合前の回路波の位相速度 v_c よりも回路波の減衰定数に比例するある量だけ大きくしなければならないことを述べている。なお波動増幅条件の(92)，(94)両式が満足されている場合には

$$\beta>\beta_0>\beta_e\ ,\ (v_0>v_c>v_{ph}) \qquad (95)$$

となり，空間電荷波の slow wave が励振されていることが分る。したがってここに得られた波動増幅条件は，前節において結論された波動増幅のために slow wave を励振するということを具体化するものである。

7. 半導体内の空間電荷波と電磁波との結合による波動増幅

回路波が電磁波の場合には4節の(43),(44)両式によって波動伝搬が表わされる。そこで回路波の等価電流として $J_c = K_1$ と選ぶことができる。そして図1.のような等価結合線路が得られ，結合インピーダンスの要素は次の値を取る。

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \qquad (96)$$

ゆえに

$$Z_{12}Z_{21} = -\frac{1}{\omega^2\varepsilon^2} \qquad (97)$$

そこで波動増幅の前提条件を満足さすために，次の条件が必要になる。

$$B_{cp} > 0 \quad (\text{したがってまた } X_{cs} > 0) \qquad (98)$$

すなわち回路波の等価線路が誘導性の直列リアクタンスと直列抵抗と容量性の並列サセプタンスで構成されることが必要である。この前提条件が満されている時には，(94)式を変形して得られる次式が波動増幅の条件となる。

$$\frac{v_0}{v_c} > 1 + 2\alpha_0 Z_0 \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \left(\frac{v_0}{v_c} - 1\right)^2\right] \qquad (99)$$

ただし

$$Z_0 \simeq \frac{\beta_0}{B_{cp}} \simeq \sqrt{\frac{X_{cs}}{B_{cp}}} \qquad (100)$$

は回路波の等価線路の特性インピーダンスである。この等価線路は電流密度の K_1 を線路電流に取っているので，Z_0 は単位面積当りのインピーダンスの次元をもつ，回路波の伝搬特性が与えられれば，(99)式によって波動増幅に

必要なキャリヤのドリフト速度 v_0 の値を決定出来る。なお結合前の回路波は，半導体中よりキャリヤを取り去って半導体を単なる誘電体とした媒質を含めた電磁波回路の伝送波を意味している。従って α_0 の中には半導体中のオーム損失は含まれない。

8. 圧電性半導体内の空間電波と音波との結合による波動増幅

圧電性半導体内において，空間電荷波と音波との結合によって増大波が得られることはよく知られていることである。ここではこの問題に前節の一般理論を適用してみる。1次元問題として考えると，結晶格子の速度 u_1，歪 S_1 歪応力 F_1 の間には次の関係が成立する。

$$\frac{dF_1}{dz} = j\omega \rho_m u_1 \tag{101}$$

$$\frac{du_1}{dz} = j\omega S_1 \tag{102}$$

また

$$F_1 = cS_1 - eE_1 \tag{103}$$

$$D_1 = eS_1 + \varepsilon E_1 \tag{104}$$

ここで音波の減衰を無視している。これよりガウスの法則は次のようになる。

$$\frac{dD_1}{dz} = e\frac{dS_1}{dz} + \varepsilon \frac{dE_1}{dz} = \rho_1 \tag{105}$$

次に連続の方程式より次式を得る。

$$J_1 + j\omega D_1 = J_1 + j\omega \varepsilon E_1 + j\omega e S_1 = 0 \tag{106}$$

ここで

$$\frac{e^2}{c\varepsilon} \ll 1 \qquad (107)$$

と仮定すれば，(106)式より次式を得る。

$$J_1 + j\omega\varepsilon E_1 = -j\omega e S_1 \simeq -j\omega \frac{e}{c} F_1 \qquad (108)$$

あるいは

$$E_1 \simeq -\frac{J_1}{j\omega\varepsilon} - \frac{e}{c\varepsilon} F_1 \qquad (108')$$

以上の諸式を用いると，波動伝搬の方程式として次式を得る。

$$\frac{dJ_1}{dz} = -j\omega \frac{\varepsilon\omega_p^2}{v_T^2 - v_0^2} U_{ks} \qquad (109)$$

$$\frac{dU_{ks}}{dz} \simeq \gamma_{ss} U_{ks} - \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} + j\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p^2}\right) J_1 - \frac{e}{c\varepsilon} F_1 \qquad (110)$$

$$\frac{dF_1}{dz} = j\omega \rho_m u_1 \qquad (111)$$

$$\frac{du_1}{dz} \simeq j\frac{\omega}{C} F_1 - \frac{e}{c\varepsilon} J_1 \qquad (112)$$

ここで

$$J_c \equiv -j\omega \frac{e}{c} F_1 \qquad (113)$$

$$V_c \equiv -\frac{u_1}{j\omega e/c} \qquad (114)$$

のように音波に対する等価電流 J_c と等価電圧 V_c とを選べば，(109)～(112)式は(69)～(72)式の形になる。そして回路定数は次のようになる。

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \qquad (115)$$

$$B_{cp} = \omega^3 \left(\frac{e}{c}\right)^2 \rho_m \ , \quad X_{cs} = \frac{c}{\omega e^2} \qquad \} (115)$$

そこでこの場合には

$$Z_{12} Z_{21} B_{cp} < 0$$

となっており，波動増幅の前提条件 (92)式が満足されている。そこで波動増幅を実現するためには，(94)式によって（この場合には $\alpha_0 = 0$ としている）

$$v_0 > v_c = \sqrt{\frac{c}{\rho_m}} \qquad (116)$$

のようにドリフト速度 v_0 を選べばよい。

なお CdS の超音波増幅の場合には，$v_T >> v_0$, $\omega\tau << 1$, と考えられ，結合前の空間電荷波は fast wave の前進波で減衰波であるが[1)(6)]，音波との結合によって(116)式の条件下で slow wave になり，波動増幅を生ずることは面白い。

9. むすび

いままで述べて来たことに対する検討事項と結論とを次にまとめてみる。

(a) キャリヤの運動エネルギーの変化に対応させた速度変調カイネティック電圧 V_{kv} と，キャリヤのガス圧の変化に対応させた密度変調カイネティック電圧 V_{kp} とが定義され更にこれより2つの有効カイネティック電圧 U_{kv} と U_{kp} とが定義され，波動伝搬は (U_{kv}, J_1) または (U_{kp}, J_1) の2つの組み合わせに対して記述されることが示された。そしておのおのの組み合わせに対して波動の等価線路表示が求められた。この等価線路表示は格子接地の3極管を含む能動線路になり，その3極管より主要項として $-P_{kv}/v_0$ なる電力が供給され波動増幅に対して本質的な寄与がなされる。

(b) 波動増幅の物理的機構は，負の速度変調カイネティック電力 P_{kv} を運ぶ slow wave の空間電荷波が励振され，その負の P_{kv} が正の回路波電力 P_c と正の圧力波電力 P_{ks} に変換される効果と，衝突現象によって単位長さ当り $-P_{kv}/\tau v_0$ なる正の電力が発生する効果に基くものである。このようにキャリヤの衝突効果は波動増幅に対して助長的に働くが，拡散効果は正の圧力波電力 P_{ks} を生ずることにより波動に対して余分な負荷を与え，波動増幅に対して制動的に働く。

(c) 回路波との結合による波動増幅条件は，slow wave の空間電荷波を励振する条件でもあるが，回路波の等価線路表示を適当に選んで $Z_{12}Z_{21}B_{cp}<0$ となし，キャリヤのドリフト速度 v_0 を回路波の位相速度 v_c よりも回路波の損失に比例するある量だけ大きくすることである。このような一般論から，半導体内の空間電荷波と電磁波および音波との結合による波動増幅が非常に明快に説明された。

(d) 本論文の取り扱いは，キャリヤの速度の平均値 v_0, v_1, v_T を用いて議論を進めているので，速度分布を考えた取り扱いにおいて $v_0 \simeq v_{ph} \simeq v_T$ の場合に起こると予想される Landau Damping の現象を考えていない。そこで本論文の結論は $v_0 \simeq v_T$ の場合には適用できない。

終りに有益な御討論を頂いた本学小林助手，金田助教授，長谷川助教授の諸氏に感謝する。

文献

(1) K. Blötekjaer and C.F. Quate: "The Coupled Modes of Acoustic Waves and Drifting Carriers in Piezoelectric Crystals", Proc. IEEE, 52, 4, P. 360 (April 1964)

(2) B. Vural and S. Bloom: "Streaming Instabilities in Solids and the Role of Collisions," IEEE Trans. ED-13, 1, P. 57 (Jan. 1966)
(3) L. Solymer and E.A. Ash: "Some Travelling-wave Interactions in Semiconductors, Theory and Design Considerations", Int. J. Electronics, 20, 2, P. 127 (Feb. 1966)
(4) 小山，大原："半導体内波動の性質について"，電通学会，電子装置研究会資料（昭42－01）
(5) M. Sumi: "Travelling-Wave Amplification by Drifting Carriers in Semiconductors", Jap. J. appl. Phys., 6, 6, P. 688 (June 1967)
(6) 藤沢，市川："半導体内の空間電荷波の伝搬特性"，電通学会全国大会（昭42－10）

附録　ボルツマン方程式からの(3)式の誘導

いま速度分布関数を f，速度を w，キャリヤに働く力を F とすれば，ボルツマン方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_i w_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_i\frac{F_i}{m}\frac{\partial f}{\partial w_i}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll.}\qquad i=1,2,3 \tag{A·1}$$

磁界のない場合には $F=qE$ である．キャリヤの平均密度を $n(r,t)$，平均速度を $V(r,t)$ とすれば

$$n(r,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} f(r,w,t)\,dw_x\,dw_y\,dw_z \tag{A·2}$$

$$V(r,t)=\frac{1}{n(r,t)}\iiint_{-\infty}^{\infty} w\,f(r,w,t)\,dw_x\,dw_y\,dw_z \tag{A·3}$$

任意の量 $Q(w)$ の平均値は次のようになる。

$$\overline{Q}(r,t)=\frac{1}{n(r,t)}\iiint_{-\infty}^{\infty} Q(w)\,f(r,w,t)\,dw_x\,dw_y\,dw_z \tag{A·4}$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} Q(W)\frac{\partial f}{\partial t}dw_x dw_y dw_z = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{-\infty}^{\infty} Q(W) f\, dw_x dw_y dw_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(n\bar{Q}) \qquad (A.5)$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} Q(W) w_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dw_x dw_y dw_z = \frac{\partial}{\partial x_i}\iiint_{-\infty}^{\infty} Q(W) w_i f\, dw_x dw_y dw_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}(n\overline{w_i Q}) \qquad (A\cdot 6)$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} Q(W) F_i(r,W)\frac{\partial f}{\partial w_i} dw_x dw_y dw_z$$

$$= -\iiint_{-\infty}^{\infty} f\frac{\partial}{\partial w_i}\left[F_i(r,W)Q(W)\right] dw_x dw_y dw_z$$

$$= -n\overline{\frac{\partial}{\partial w_i}(F_i Q)} \qquad (A\cdot 7)$$

今 $Q(W)=1$ とすれば，(A·1)式を速度空間で積分することにより次式を得る。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(nV) = 0 \qquad (A\cdot 8)$$

次に $Q(W)=mW$ とおいて，(A·1)式の両辺に Q を掛けて速度空間で積分すれば次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}(nmV) + \nabla\cdot\left(nm\overline{WW}\right) - n\overline{F} = \iiint_{-\infty}^{\infty} mW\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} dw_x dw_y dw_z$$

(A·9)

さて

$$\frac{\partial}{\partial t}(nmV) = nm\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial(nm)}{\partial t} \qquad (A\cdot 10)$$

また

$$W = V + U \qquad (A\cdot 11)$$

とおく。V は平均速度，U はランダムな速度である。ゆえに $\overline{U}=0$。そこで

$$\nabla\cdot\left(nm\overline{WW}\right) = \nabla\cdot(nmVV) + \nabla\cdot\left(nm\overline{UU}\right) \qquad (A.12)$$

$$= nmV\cdot\nabla V + V\nabla\cdot(nmV) + \nabla(nmv_T^2) \qquad (A\cdot12')$$

ただしここで等方性の速度分布を考えている。そしてまた次のようにおく。

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} mw\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} dw_x\, dw_y\, dw_z = -\frac{nmV}{\tau} \qquad (A\cdot13)$$

(A·9)式に(A·8), (A·10), (A·12'), (A·13)の諸式を用いると次式を得る.

$$\left(j\omega+\frac{1}{\tau}\right)V + V\cdot\nabla V + \frac{1}{nm}\nabla(nmv_T^2) = \frac{q}{m}E \qquad (A\cdot14)$$

いま $V=V_0+V_1$, $n=n_0+n_1$, $E=E_0+E_1$ とおき, 1次の交流項のみをとると次式を得る。

$$\left(j\omega+\frac{1}{\tau}\right)V_1 + V_0\cdot\nabla V_1 + \frac{v_T^2}{\rho_0}\nabla\rho_1 = \frac{q}{m}E \qquad (A\cdot15)$$

ただし上式では $V_0=$一定としている。これより準1次元問題の場合には本文の(3)式が出てくる。

輻射科学研究会資料

半導体内波動の解析について

佐々木昭夫

(京都大学 工学部)

1967年10月6日

目　　次

§ 1　緒　言 ---------- 1

§ 2　基本方程式 ---------- 2

§ 3　各種仮定のもとにおける方程式 ---------- 7

§ 4　電子管内ビームと半導体内キャリアの流れについて ----- 12

§ 5　結　言 ---------- 17

附　録 ---------- 18

§1 緒言

半導体超音波増巾素子，ガリウム砒素(GaAs)バルク素子，アバランシュを利用したインパット(IMPATT, Impact Avalanche and Transit Time)素子が最近盛んに研究されている。それらの多くはもっぱら動作周波数のきわめて高い10^9サイクル以上の領域における半導体素子として取扱われている。半導体素子の大きさの多くは数ミクロン以上数ミリ以下である。動作周波数が例えば4Gcの時，半導体内のキャリアの最高速度はほゞ10^5 m/secを取ってみても波長が25ミクロンとなる。したがって動作周波数のきわめて高い半導体素子の解析は波動現象として取り扱わねばならない。電子装置の分野で波動現象の多くは真空内の電子ビームに対してなされて来た。真空内の電子ビームではその漂動(Drift)速度が熱運動による速度より大きく，また衝突(Collision)の影響をすべて無視して取り扱い得た。一方半導体内では漂動速度が熱運動による速度より小さいか，等しい程度であり，また結晶格子(Crystal lattice)との衝突が大きな役割りを持っている。同じ半導体内の解析においても種々の形の方程式が用いられている。例えば拡散(Diffusion)項が速度に関する方程式に表われたり，電流に関する方程式に表われたりしている本資料では，速度分布関数fに対するボルツマンの輸送方程式(Transport equation)から導かれる平均された物理量に関する方程式(Macroscopic equation)に基づいて考察を行う。半導体内の解析に対する各種方程式の持つ物理的背景を明らかにする。次に真空内電子ビームと半導体内キャリアの流れの解析において，その相違点から来る解析上の注意すべき点を述べる。

§2 基本方程式

統計分布をしているプラズマ内の粒子，半導体内のキャリアは時刻t，位置x_iで，速度v_iを持つものが何個存在しているかを表わす速度分布関数$f(v_i, x_i, t)$で規定される。この分布関数を求めるには附録で説明す

ボルツマンの方程式（Boltzmann equation）を解かなければならない。

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+a_i\frac{\partial f}{\partial v_i}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \qquad (2.1)$$

添字iはベクトル要素を表し$v_i\cdot(\partial f/\partial x_i)$はベクトル表示で$\boldsymbol{v}\cdot\nabla f$と書かれるものである。加速度$a_i$は電界，磁界に依る時，附録(A.3)式で与えるものである。(2.1)を解いて分布関数fが求まれば粒子の物理量$\Phi(v_i,x_i,t)$の平均値$\langle\Phi\rangle$

$$\Phi(x_i,t)=\langle\Phi\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi f\,dc}{N} \qquad (2.2)$$

を求める事が出来る。(2.2)式でdcは$dv_1\,dv_2\,dv_3$の速度の体積素を表わし，Nは粒子の全個数を表わす。前が(2.1)式から分布関数fを求める事は特別な場合を除いて非常に困難である。その困難を避ける一つの方法として(2.1)式から平均量に対する方程式（Macroscopic equation）を作り，その方程式を解く事により平均量を求めようとする方法がとられる。物理量Φに対する平均量の方程式は（附録参照）

$$\frac{\partial}{\partial t}(N\langle\Phi\rangle)+\frac{\partial}{\partial x_i}(N\langle v_i\Phi\rangle)-N\left\{\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\rangle+\left\langle v_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\rangle+\left\langle a_i\frac{\partial\Phi}{\partial v_i}\right\rangle\right\}$$

$$=\int\Phi\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}dc \qquad (2.3)$$

で与えられる。

本資料では次の仮定を設ける。

(i) 半導体内キャリアは正孔又は電子いづれか一種類とする。

(ii) 不純物ドナーはアクセプターはすべてイオン化し電子は伝導帯に，正孔は価電帯にあるものとする。

(iii) キャリアの数Nはボルツマン分布に従う程度の密度 ($10^{18}\sim10^{19}$ cm^{3}以下) とする。

以上の仮定のもとに本資料では平均個数に関する方程式をもとづいて議論を進める。(2.3)式に<u>モーメント</u>を代入する事により<u>連続の式</u> (Continuity equation) を得る。

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(N\langle v_i\rangle)=\int\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}dC \qquad (2.4)$$

キャリアの数Nに対する時間変化を与えるものである。右側の衝突項にはイオン化，再結合，トラップ等によるキャリア数の変化を表す項が出てくる事が予測される。それらはすべて非弾性衝突による結果の為，(A.11)式は適用できない。本資料ではイオン化によるキャリア数の変化のみを与える。イオン化による単位時間内の変化の割合が$\nu_I N$で与えられる事効(分布関数で平均化されたという意味の)イオン化率ν_Iを導入して(2.4)式を書き換えると，

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(N\langle v_i\rangle)=\nu_I N \qquad (2.5)$$

を得る。(2.5)式はキャリア数Nの時間変化に対する式であるが，変数$\langle v_i\rangle$が含まれている為に解く事が出来ない。次に変数$\langle v_i\rangle$に対する式を導く。

一般に速度v_iは平均速度$\langle v_i\rangle$と平均値からのずれである撹乱速度 (Random or Peculiar Velocity) の和で表わされる。

$$v_i=\langle v_i\rangle+V_i \quad , \quad \langle V_i\rangle=0 \qquad (2.6)$$

v_iとv_jの積の平均値$\langle v_iv_j\rangle$は$\langle V_i\rangle=0$, $\langle V_j\rangle=0$を考慮して

$$\langle v_iv_j\rangle=\langle v_i\rangle\langle v_j\rangle+\langle V_iV_j\rangle \qquad (2.7)$$

を得る。右辺第2項で同一方向速度の成分だけを取る時、$\frac{1}{2}m\langle V_i V_i\rangle$は擾乱運動によるカイネティックエネルギーであり、このエネルギーに比例した量としてキャリアの温度Tを次のように与える。

$$\frac{3}{2}kT=\frac{1}{2}m\langle V_i V_i\rangle \tag{2.8}$$

(2.3)式に$\underline{\psi=mv_j}$を用いる。この時$\partial\psi/\partial t$, $\partial\psi/\partial x_i=0$となり、更に第5項が

$$\left\langle a_i\frac{\partial}{\partial v_i}(mv_j)\right\rangle=m\langle a_i\rangle$$

となる事を考慮すると(2.3)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(Nm\langle v_i\rangle)+\frac{\partial}{\partial x_j}(Nm\langle v_i\rangle\langle v_j\rangle)+\frac{\partial}{\partial x_j}(Nm\langle V_i V_j\rangle)$$

$$-Nq(E_i+\epsilon_{ijk}\langle v_j\rangle B_k)=\int mv_j\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}dc \tag{2.9}$$

衝突項は$\langle\tilde{v}_i\rangle$, $\langle V_i\rangle=0$を考慮し(A.11)式より

$$\int mv_i\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}dc=m(\langle\tilde{v}_i\rangle-\langle v_i\rangle)\int ff^2gp\,dp\,d\psi\,dc^2dc \tag{2.10}$$

結晶格子との衝突を考える時、$\langle\tilde{v}_i\rangle$は殆ど零と考えられる従って衝突項(2.10)式は

$$\int mv_i\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}dc=-\frac{m\langle v_i\rangle}{\tau_m}N \tag{2.11}$$

茲で

$$\frac{1}{\tau_m}=\frac{1}{N}\int ff^2gp\,dp\,d\psi\,dc^2dc \tag{2.12}$$

ν_m はモーメンタム緩和時間と称せられるものである。(2.9)式でキャリア数 N と平均速度 v と分けた (2.5) 式の連続の式を用いて書き直すと。

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v_i\rangle + \langle v_j\rangle \frac{\partial}{\partial x_j}\langle v_i\rangle + \frac{1}{Nm}\frac{\partial}{\partial x_j}(Nm\langle v_i v_j\rangle)$$

$$-\frac{e}{m}(E_i + \epsilon_{ijk}\langle v_j\rangle B_k) = -\frac{\langle v_i\rangle}{\nu_m} - \nu_I\langle v_i\rangle \qquad (2.13)$$

なるモーメンタムに関する式 (Momentum transport equation) を得る。平均速度 $\langle v_i\rangle$ の時間変化を与える式でもあるが、この式には変数 $\langle v_i v_j\rangle$ が含まれて解く事が出来ない。分布関数が等方性 (Isotropic) と仮定できる時 $\langle v_i v_j\rangle$ は $\langle v_i v_i\rangle$ だけの項となる。
次に $\langle v_i v_i\rangle$ に関する方程式を導く。

(2.3) 式に $\Phi = \frac{1}{2}m v_j v_j$ を用いる。
(2.8) 式を考慮してエネルギー ε は次式で与えられる。

$$\therefore \varepsilon = \frac{1}{2}m\langle v_i v_i\rangle = \frac{1}{2}m\langle v_i\rangle\langle v_i\rangle + \frac{3}{2}kT \qquad (2.14)$$

右辺第一項は平均速度によるエネルギーであり、第二項は熱乱速度によるエネルギーである。(2.3) 式中に表われて来る項

$$\langle v_i v_j v_j\rangle = \langle v_i\rangle\langle v_j v_j\rangle + 2\langle v_j\rangle\langle v_i v_j\rangle + \langle v_i v_j v_j\rangle$$

$$\left\langle a_i\frac{\partial\Phi}{\partial v_i}\right\rangle = \langle a_i m v_i\rangle = m\langle v_i\rangle\langle a_i\rangle = g(\langle v_i\rangle E_i + \epsilon_{imn}\langle v_i\rangle\langle v_m\rangle B_n)$$

$$= g\langle v_i\rangle E_i$$

を考慮しモーメンタムの式と同様にしてエネルギーについての式を求めてみると。

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon + \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle v_j \rangle N m \langle V_i V_j \rangle\right) + \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2} N m \langle V_i V_j V_j \rangle\right)$$

$$-q \langle v_i \rangle E_i = \frac{1}{N}\int \frac{1}{2} m v_j v_j \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} - V_I \varepsilon \qquad (2.15)$$

衝突項もモーメンタムの時と同じ様にして

$$\frac{1}{N}\int \frac{1}{2} m v_j v_j \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} dc = -\frac{3k(T-T_L)}{2\tau_e} - \frac{m\langle v_i \rangle \langle v_i \rangle}{2\tau_m} \qquad (2.16)$$

茲で

$$\frac{1}{\tau_e} = \int \frac{\tilde{V}_i \tilde{V}_j - V_i V_j}{V_j' V_j' - V_j V_j} N' g P d\rho d\psi d c' dc \qquad (2.17)$$

[註1]

V_j'は格子の擾乱速度，N'は格子数を表わし，τ_eは熱緩和時間(Thermal relaxation time)と称せられるものである。エネルギーに関する式(Energy transport equation)は

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \langle v_i \rangle \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} + \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle v_j \rangle N m \langle V_i V_j \rangle\right) + \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2} N m \langle V_i V_j V_j \rangle\right)$$

$$-q \langle v_i \rangle E_i = -\frac{3k(T-T_L)}{2\tau_e} - \frac{m v^2}{2\tau_m} - V_I \varepsilon \qquad (2.18)$$

[註2]

となる。この式は$\langle V_i V_i \rangle$の時間変化に対する式としても考えられるが，変数$\langle V_i V_j V_j \rangle$が含まれていて解く事が出来ない。

[註1] 衝突項の厳密な取り扱いは本資料の主目的から脱するので避けた。

[註2] この式はPrecumber, Chynoweth (IEEE, ED-13, January 1966)の与えた式と異なる。Jonscher (Proc. phy. Soc, October 1964)の与えた式から導き得る。

分布関数 f を直接求めずして，平均量に関する方程式を解く過程を取る時，各方程式に必ず次数の高い変数が含まれていて解く事が出来なくなる。(2.18)式中の第4項

$$Q_i \equiv \frac{1}{2} N m \langle V_i V_j V_j \rangle \qquad (2.19)$$

は熱流を表わす。解析を可能にする為に第4項を零に近似させて解く事が行われる。これが断熱(Adiabatic)変化を仮定した解析となる。

§3 各種仮定のもとにおける方程式

前節で基本方程式として連続の式(2.5)，モーメンタムの式(2.13)，エネルギーの式(2.18)を与えたが，本節ではどういう仮定のもとにどの様なる形の方程式が用いられるかを検討する。簡単化の為に基本式を1次元の形で与える。境界による力だけを考える。分布関数が擾乱速度 V について等方的(Isotropic)であると仮定すると，$\langle V_1 V_2 \rangle$, $\langle V_1 V_3 \rangle$, $\langle V_2 V_3 \rangle = 0$, $\langle V_1 V_1 \rangle = \langle V_2 V_2 \rangle = \langle V_3 V_3 \rangle = \frac{1}{3}\{\langle V_1 V_1 \rangle + \langle V_2 V_2 \rangle + \langle V_3 V_3 \rangle\} = RT/m$ を得る。
1次元における圧力テンソルは

$$N m \langle V_i V_j \rangle = N R T \qquad (3.1)$$

となる。以上の事を考慮して断熱変化の時の式は，

〔3.1〕断熱変化

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N\langle U \rangle) = V_I N \qquad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} + \langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \frac{1}{mN}\frac{\partial}{\partial x}(NRT) - \frac{e}{m}E = -\frac{\langle U \rangle}{\tau_m} - V_I \langle U \rangle \qquad (3.2b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \langle v \rangle \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x}(\langle v \rangle N k T) - q \langle v \rangle E$$

$$= -\frac{3k}{2\tau_e}(T - T_L) - \frac{m}{2\tau_m}\langle v \rangle^2 - \nu_I \mathcal{E} \qquad (3.2c)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \langle v \rangle^2 + \frac{3}{2} k T \qquad (3.2d)$$

〔3.2〕 時間変化，$\omega\tau_m, \omega\tau_e \ll 1$，$\Gamma \ll 1/\langle v \rangle \tau_m$，$1/\langle v \rangle \tau_e$

時間変化が $\exp(j\omega t)$，空間変化が $\exp(\Gamma x)$ で与えられる場合を考える。(3.2b)，(3.2c) で $\partial/\partial t \to j\omega$，$\partial/\partial x \to \Gamma$ と置き換えて $\omega\tau_m, \omega\tau_e \ll 1$ なる条件と，$\Gamma \ll \Gamma_{m\,coll}\,(= 2\pi/\langle v \rangle \tau_m)$，$\Gamma_{e\,coll}\,(= 2\pi/\langle v \rangle \tau_e)$ を適用する。前者は現象変化が衝突周波数 $1/\tau_m$，$1/\tau_e$ よりも遅いという条件，後者は位相速度で決まる波長 λ_p が衝突周期よりも長いという条件である。一般に $\tau_m \nu_I$，$\tau_e \nu_I \ll 1$ が成立する。方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(N\langle v \rangle) = \nu_I N & (3.3a) \\[2ex] \langle v \rangle = \mu E - \dfrac{\mu}{qN}\dfrac{\partial}{\partial x}(NkT) & (3.3b) \\[2ex] \dfrac{3}{2}kT = \dfrac{3}{2}kT_L + q\tau_e\langle v \rangle E - \dfrac{\tau_e}{\tau_m}\dfrac{1}{2}m\langle v \rangle^2 - \dfrac{\nu_e}{N}\dfrac{\partial}{\partial x}(\langle v \rangle N k T) & (3.3c) \end{cases}$$

ここで $\mu = q\tau_m/m$ 移動度 (Mobility) である。
(3.3b) の平均速度 $\langle v \rangle$ は漂動速度 μE と拡散速度 $(\mu/qN)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(NkT)$ で与えられている。(3.3c) の電離速度 ν によるエネルギー $\frac{3}{2}kT$ は格子温度 T_L と，電界，漂動速度 $\langle v \rangle$ に起因する第2，第3項と，拡散効果に相当する第4項とで与えられている。全エネルギー $\mathcal{E}$ は (3.2d) 式を用い

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}kT_L + q\tau_e\langle v \rangle E + \left(1 - \frac{\tau_e}{\tau_m}\right)\frac{1}{2}m\langle v \rangle^2 - \frac{\nu_e}{N}\frac{\partial}{\partial x}(\langle v \rangle N k T) \qquad (3.4)$$

となる。

〔3.3〕 等温 (Isothermal) 変化

もし温度 T が時間，空間に対して一定と仮定できて T を定数として取り扱い得る時，方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(N\langle v\rangle) = \nu_I N & (3.5a) \\ \langle v\rangle = \mu E - \dfrac{\mu k T}{e N}\dfrac{\partial N}{\partial x} - z_m\left(\dfrac{\partial \langle v\rangle}{\partial t} + \langle v\rangle \dfrac{\partial \langle v\rangle}{\partial x}\right) & (3.5b) \end{cases}$$

茲で $\nu_I z_m \ll 1$ の条件を用いた。

〔3.4〕 等温変化，$T \cong T_L$

キャリアの温度が余り高くなく格子温度 T_L とほゞ等しい時，拡散に関するアインシュタインの関係式 $D = \mu k T_L/e$ を用いると方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(N\langle v\rangle) = \nu_I N & (3.6a) \\ \langle v\rangle = \mu E - \dfrac{D}{N}\dfrac{\partial N}{\partial x} - z_m\left(\dfrac{\partial \langle v\rangle}{\partial t} + \langle v\rangle \dfrac{\partial \langle v\rangle}{\partial x}\right) & (3.6b) \end{cases}$$

を得る。

次に (3.6) 式と同一仮定であるが流束を用いた方程式を与える。(3.6b) 式の連続の式を用いると (3.6b) 式を書き直すと

$$\rho\langle v\rangle = \mu\rho E - D\frac{\partial \rho}{\partial x} - z_m\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\langle v\rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\langle v\rangle^2) - \nu_I \rho\langle v\rangle\right\}$$

茲で $\rho\langle v\rangle = j$，$\mu\rho = \sigma$ の導電率，$z_m \nu_I \ll 1$ を用いて書き直すと，この時の方程式として

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = \nu_I \rho & (3.7a) \\ j = \sigma E - D\dfrac{\partial \rho}{\partial x} - \dfrac{m\mu}{e}\left(\dfrac{\partial j}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\langle v \rangle j)\right) & (3.7b) \\ \rho v = j & (3.7c) \end{cases}$$

を得る。一般に各諸量が熱平衡状態の時からの摂動量として考える時 (3.7b)式の最後の項は $\langle v \rangle f$ で高次として無視される時 (3.7b) 式は

$$j = \sigma E - D\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{m\mu}{e}\frac{\partial j}{\partial t} \qquad (3.8)$$

となる。これが磁界のない時の一般化されたオームの法則 (Generalized Ohm's law) を表わす式である。

〔3.5〕等温変化，$T \cong T_i$，$\omega^2 \tau_m^2 \ll 1$，$P \ll \rho \langle v \rangle^2 \tau_m$

ギャリアの温度がほぼ一定で格子温度に近く，現象変化が衝突繰り返しより遅く，空間変化の繰り返しが衝突間隔よりも長い時，方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho \langle v \rangle) = \nu_I \rho & (3.9a) \\ \langle v \rangle = \mu E - \dfrac{D}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} & (3.9b) \end{cases}$$

となる。一方電流の形で表わす時，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = \nu_I \rho & (3.10a) \\ j = \sigma E - D\dfrac{\partial \rho}{\partial x} & (3.10b) \\ \rho v = j & (3.10c) \end{cases}$$

を得る。

多くの論文で見られる電流 j と速度 v との組み合せの式の違いについては (3.6) 式と (3.7) 式，(3.9) 式と (3.10) 式で明らかになった事と思う。すなわち

$$j = \rho v \quad , \quad v = \mu E - \frac{D}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{3.11}$$

と

$$j = \rho v - D\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad , \quad v = \mu E \tag{3.12}$$

を取りあげて考えて見る。(3.11) 式の速度の式に ρ を掛けて $j = \rho v$ を用いると

$$j = \rho \mu E - D\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

を得る。漂動速度 $\mu E = u$ を用いると

$$j = \rho u - D\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad , \quad u = \mu E \tag{3.13}$$

を得る。従って (3.11) 式と (3.12) 式はいづれも正しく成立し得る式であるが，(3.11) 式の v はキャリアの平均速度であり，(3.12) 式の v はキャリアの漂動速度である事に留意しなければならない。こうした観点からする時，(3.6) (3.7) 式に対する方程式として

$$\begin{cases} j = \rho v & (3.14a) \\ v = \mu E - \dfrac{D}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} - \dfrac{m\mu}{q}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & (3.14b) \end{cases}$$

と

$$\begin{cases} j = \rho u - D\dfrac{\partial \rho}{\partial x} - \dfrac{m\mu}{q}\left(\dfrac{\partial j}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(vj)\right) & (3.15a) \\ u = \mu E & (3.15b) \\ \rho v = j & (3.15c) \end{cases}$$

を得る。 簡略化の為に平均値を表わす $\langle\ \rangle$ を取り除いた。(3.14)式は電流 $j=\rho v$ とモーメンタムの式を用いたものであり、(3.15)式は一般化したオームの法則と、漂動速度の式と、電流の式を用いたものであり、(3.14)式から(3.15)式を又、(3.15)式から(3.14)を導き出す事が出来る。

§4 電子管内ビームと半導体内キャリアの流れについて

本節では電子管内ビームと半導体内キャリアの流れに伴う波動の解析に際して、特に留意する必要のある点二、三を述べる。

[4.1] 平均速度 $\langle v\rangle$ と熱乱速度 V

電子管の真空内電子も半導体内キャリアもその速度分布はボルツマン分布に従っている。註
$\frac{1}{2}m^*\langle VV\rangle=\frac{3}{2}kT=eV$ で、常温での値 $V=0.025\,eV$ から計算された $\sqrt{\langle VV\rangle_a}$ なる平均熱乱速度は、$m^*\cong m_e$ として

$$\sqrt{\langle VV\rangle_a}\cong 10^5\ cm/sec$$

を得る。 電子管内の電子は熱陰極から放射される。概算として陰極の温度約1000°Kを取ると

$$\sqrt{\langle VV\rangle_e}\cong 1.7\times 10^5\ cm/sec$$

を得る。 外部電圧 V によって加速された電子ビームの平均速度 $\langle v\rangle_e$ は

$$\langle v\rangle_e=\sqrt{2\frac{e}{m}V}\cong 6\times 10^5\sqrt{V}\ cm/sec$$

であらわされるから、雑音を解析に取り入れない限り熱乱速度は無視されて $\langle v\rangle_e$ の第一近似として取り扱い得た。

註. 緒言で述べたように非縮退の半導体を考慮の対象としている。

一方半導体では現在迄の所，キャリアの最高平均速度$\langle v \rangle_{max}$，はほぼ10^5 m/secを少し超える程度である。半導体内では平均速度$\langle v \rangle$は擾乱平均速度$\sqrt{\langle VV \rangle}$より小さいが同程度が普通である。

〔4.2〕 カイネティックエネルギー

ボルツマン分布をしている粒子のカイネティックエネルギーは(2.14)式で示めされる様に平均速度$\langle v \rangle$によるエネルギーと擾乱速度によるエネルギーの和として与えられた。(2.8)と(2.14)式から

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \langle v \rangle^2 + \frac{1}{2} m \langle V_i V_i \rangle \qquad (4.1)$$

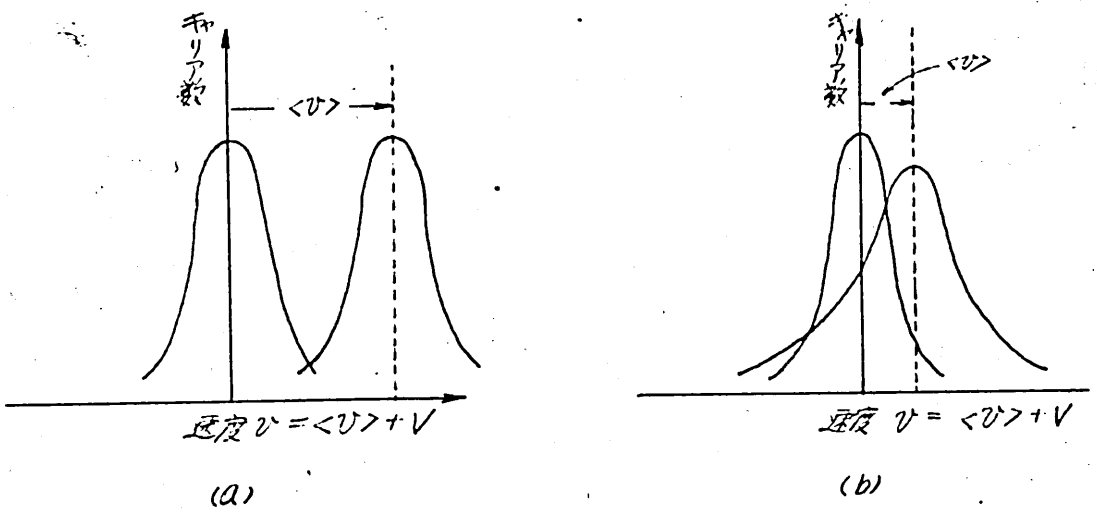
電子管内電子ビームでは第一項が第二項に比べて充分大きく第一項のみで討論されて来た。断熱変化，$V_i = 0$と仮定し，定常状態($\partial/\partial t$, $\partial/\partial z \to 0$)にある半導体では(3.2)式より

$$\frac{1}{2} m \langle V_i V_i \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} kT_e + \frac{1}{2} \beta_e \langle v \rangle \mathcal{E} \qquad (4.2)$$

を得る。〔4.1〕で数値例を与えた様に(4.1)式の第2項が大きくて，(4.2)式で見られるように印加電界と共に増加する事を知る。真空内電子ビームでは外部印加電界により平均速度$\langle v \rangle$を増すが擾乱速度$\sqrt{\langle V_i V_i \rangle}$が変らない。(註1) 一方半導体内では外部印加電界により平均速度$\langle v \rangle$は真空内電子ビーム程増加しなくて，擾乱$\sqrt{\langle V_i V_i \rangle}$が増加する。この事は半導体内キャリアは外部電界が印加されて結晶格子との衝突により擾乱速度が増す事になるものと考えられる。真空内ではこうした衝突が無く平均速度のみが増加する。この模様を図4.1に示す。(註2)

(註1) 厳密には断定され得ないが，一般に擾乱速度$\sqrt{\langle V_i V_i \rangle}$とのものが平均速度$\langle v \rangle$の値より充分小さく勘定に取り入れられておらない。

(註2) 本資料で取り扱っている方程式から定常時の分布関数は求まらず図には書けないが，真空内ビームと半導体内キャリアの違いの概念を図4.1にまとめた。



v：瞬間速度　　<v>：平均速度　　V：擾乱速度.

図4.1　真空内電子ビーム(a)と半導体内キャリア(b)の速度分布(b)では外部電界により平均速度<v>の増加と共に擾乱速度の増加も見られる.

負微分移動度を持ったGaAs等の半導体素子が，最近研究の対象として非常に多く取り扱われている。その取り扱いにおいて移動度μが電界Eのみの関数として$(\partial\mu/\partial E)$の形で微分移動度が表わされている。移動度μが変化する物理的な背景を考えると，二つの谷を導電帯に持つ半導体(Two-Valley semiconductor)でエネルギーの上昇に伴なって一つの谷から他の谷に電子が移り等価質量が変化する事に起因すると解釈される。エネルギーεが電界Eのみの関数として近似できる時のみ微分移動度を$(\partial\mu/\partial E)$の形で表わし得る。拡散効果を考慮する時，エネルギーεは単に電界Eだけの関数でない為，これらに対してMcCumber, Chynoweth それにBlφtekjær は異なった取り扱いをしている。[註]
この件に関しては，本資料で導いた方程式(3.2)又は(3.3)式を用いて後日発表する予定である。

註：McCumber and Chynoweth, IEEE. ED-13, January 1966.
Blφtekjær, 私信。

[4.3] 電子管内波動と半導体内波動の取り扱いについて

簡単な場合を例に取り説明をする。前節[3.5]の仮定のもとにおける方程式(3.10)式とポアッソンの方程式とから次の方程式を得る。

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{4.3a}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -j\omega\rho \tag{4.3b}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\sigma}{D}E - \frac{1}{D}i \tag{4.3c}$$

時間変化は $\exp(j\omega t)$ に変化する事，イオン化が起らない($\nu_I = 0$)事が仮定されている。平均値を示す $\langle\ \rangle$ は簡略化の為省略された。E, i, ρ を基底(base)とする座標系での $\partial/\partial x$ に対するマトックス表示 A は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & 0 & -j\omega \\ \frac{\sigma}{D} & -\frac{1}{D} & 0 \end{pmatrix} \equiv A$$

で表わされ，このマトリックスの固有値 P は

$$P\left\{P^2 - \frac{1}{D\epsilon}(\sigma + j\omega\epsilon)\right\} = 0 \tag{4.4}$$

で得られ

$$P_1 = 0 \qquad P_{\substack{2\\3}} = \pm\sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{D\epsilon}} \tag{4.5}$$

となる。従って

$$e^{j\omega t}, \quad e^{j\omega t+\Gamma_2 x}, \quad e^{j\omega t+\Gamma_3 x} \tag{4.6}$$

の3つを得る事になる。

(4.3b)式を(4.3a)式に代入して ρ を消去すると

$$\frac{\partial}{\partial x}(i+j\omega\epsilon E)=0 \tag{4.7}$$

となり，この式から

$$i+j\omega\epsilon E=(\text{定数}) \tag{4.8}$$

を得る。この関係式から i 又は E を消去して方程式を解くと

$$\Gamma=\pm\sqrt{\frac{\sigma+j\omega\epsilon}{D\epsilon}} \tag{4.9}$$

となる。Γ の数として2つ得る事になる。この解法が主に帯子管で用いられ，存在する波として前進波，後進波の2つと解釈されて来た。(4.5)式で与えられる結果と比較する時，$\Gamma_1=0$ の解が失われている。これは(4.7)式を一度積分して(4.8)式を導いた時に失われたものである。空間的に変化しないもので全帯流に相当する。これまで解析の対象となった帯子管では帯子ビームと異なる端子から入り出て行く帯磁波との結合に主眼が置かれていた為に，位相速度が無限大に相当するこの波を解析の対象にしなくても支障を来たさなかった。しかし半導体素子では二端子網回路として取り扱われる場合が多く，時間にのみ変化する $\Gamma=0$ の存在を無視できなくなる。半導体素子では存在する Γ の数は3つであると数える方が妥当ではなかろうかと思う。

§5 結言

速度分布関数 f に対するボルツマンの一方程式から出発し，半導体内キャリアの波動の解析に適する一連の方程式を紹介した。ボルツマン方程式から，平均値量で表わされた方程式（Macroscopic equation）である連続の式，モーメンタムの式，エネルギーの式にもとづいて，従来用いられて来た方程式がどう云う仮定のもとにおいてのみ用いられるかを述べた。真空内電子ビームとの対比において，半導体内で結晶格子との衝突がキャリアの速度，カイネティックエネルギーにどう云う違いをもたらしているかを述べ，最後に存在し得る波動について留意すべき点を記した。以上本資料の内容は筆者の考えをまじえつゝ解説的に，半導体内波動の解析に際して注意すべき一端を述べたものである。

本資料作成に際して種々御討論願った本学田中哲郎教授始め，高木俊宜教授，研究室の方々に謝意を表します。

附録　ボルツマン方程式から導かれる平均物理量の時間変化に対する式（註）

プラズマ内の粒子，半導体内キャリアは統計分布をしている。すなわち粒子又はキャリアは時刻 t，位置 x_i で，速度 v_i を持つものが何個存在しているかを表わす速度分布関数 $f(v_i, x_i, t)$ で規定される。時刻 t，位置 x_i，速度 v_i を独立変数とする空間（Phase space）で規定される粒子の物理量 $\phi(v_i, x_i, t)$ の時刻 t における x_i 座標からなる実空間への変換は速度 v_i についての全積分で与えられる。

$$\langle \phi \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi f dc}{\int_{-\infty}^{\infty} f dc} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi f dc}{N} \qquad (A.1)$$

茲で dc は $dv_1 dv_2 dv_3$ の速度の体積素を示す。
$\langle \phi \rangle$ なる量は時刻 t における実空間での全個数の物理量 $\int \phi dc$ を全個数 N で割ったものであり，統計分布をしているものの平均値を表わす事になる。粒子の平均物理量を知るには先づ速度分布関数 f を得なければならない。このfに関する一つの方程式がボルツマンの方程式（Boltzmann equation）で次式で与えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{call} \qquad (A.2)$$

茲で a_i は加速度又は単位質量当りの力で磁界，磁界だけによる時は

$$a_i = \frac{q}{m}\left(E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k\right) \qquad (A.3)$$

註：本附録は下記のものが参考にされた。

(i) E.H. Halt and R.E. Haskell. Foundations of plasma dynamics, The macmillan Co. New York, 1965

(ii) M.A. Uman, Introduction to plasma physics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964

で与えられる。eは電荷，mは質量(半導体の時は等価質量m^*)，E_iは電界，B_kは磁界である。$v \times B$なる磁界による力は単位テンソル表示δを用いて$\epsilon_{ijk} v_j B_k$で表わしている。(註1) (A.2)式における右辺の項$\partial f/\partial t$は分布関数fの一定位置の時間変化を表わし，右2項は粒子がv_iの速度で流れこむ事による分布関数fの変化を表わし，この項は本文で示めされる様に磁気効果を示す事になる。(註2) 最後の項$(\partial f/\partial t)_{coll}$は粒子の衝突(Collision)から来る分布関数の変化を表わす。Aという種類の粒子とBという種類の粒子とが弾性衝突を起す場合を考えると衝突項は，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \int (\tilde{f}^A \tilde{f}^B - f^A f^B) g P \, dp \, d\psi \, dc^B \qquad (A.4)$$

で与えられる。$\tilde{f}^A, \tilde{f}^B$は衝突後のA粒子とB粒子との分布関数であり，f^A, f^Bは衝突前のものである。gは両粒子間の速さ(Speed)の差，ψはA粒子の進行方向に固定な座標系でB粒子とA粒子との相対角度を表わす。

粒子の成る物理量$\phi(v_i, x_i, t)$の平均値に関する方程式を求める。$\phi(v_i, x_i, t)$を(A.2)式に掛けて速度v_iについて全積分を行う。

$$\int \phi \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) dc = \int \phi \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} dc \qquad (A.5)$$

右一項は

$$\int \phi \frac{\partial f}{\partial t} dc = \frac{\partial}{\partial t} \int f \phi \, dc - \int f \frac{\partial \phi}{\partial t} dc \qquad (A.6)$$

速度v_i，位置x_i，時刻tの空間(Phase space)ではv_iとt

(註1)

$$\epsilon_{ijk} v_j B_k = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

$\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$は各々の方向の単位ベクトルである。

(註2) 右3項は粒子に働く外力による分布関数fの変化を表わす。

が独立変数として $\partial/\partial t$ が積分外に出し得る。(A.6)式は(A.1)式の平均値の記号 $\langle\ \rangle$ を用いて

$$\int \varphi \frac{\partial f}{\partial t} dC = \frac{\partial}{\partial t}(N\langle\varphi\rangle) - N\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle \qquad (A.7)$$

で表わされる。$\langle\varphi\rangle$ は平均量で時刻 t と位置 x_i の関数である。同様にして第2項は

$$\int \varphi v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dC = \frac{\partial}{\partial x_i}(N\langle v_i \varphi\rangle) - N\left\langle v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \qquad (A.8)$$

第3項は

$$\int \varphi a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} dC = \int \frac{\partial}{\partial v_i}(a_i \varphi f) dC - \int \frac{\partial a_i}{\partial v_i} \varphi f dC - \int a_i \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} dC$$

で $v_i \to \infty$ にて $f \to 0$ と右辺第一項に，$\frac{\partial a_i}{\partial v_i} = 0$ と第二項に適用して

$$\int \varphi a_i \frac{\partial f}{\partial v_i} dC = -N\left\langle a_i \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \right\rangle . \qquad (A.9)$$

を得る。以上の式を用いて(A.5)式を書き換えると

$$\frac{\partial}{\partial t}(N\langle\varphi\rangle) + \frac{\partial}{\partial x_i}(N\langle v_i \varphi\rangle) - N\left\{\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle a_i \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \right\rangle\right\}$$
$$= \int \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} dC \qquad (A.10)$$

を得る。(A.10)式が粒子の物理量 φ の平均値 $\langle\varphi\rangle$ に対する方程式(Macroscopic equations)である。

最後に衝突項は

$$\int \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} dC = \int \varphi (\tilde{f}\tilde{f}' - ff') g p dp d\psi dC' dC$$

で与えられるが衝突の可逆性を考える時

$$\int \phi \tilde{f} \tilde{f}^{2} g p\, dp\, d\psi\, dc^{2} dc = \int \tilde{\phi} f f^{2} g p\, dp\, d\psi\, dc^{2} dc$$

なる関係があるから

$$\int \phi \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} dc = \int (\tilde{\phi} - \phi) f f^{2} g p\, dp\, d\psi\, dc^{2} dc \qquad (A.11)$$

を得る．

輻射科学研究会資料

ガウス絞りを含む共焦点共振器

植垣俊幸　　熊谷信昭
(大阪大学・工学部)

1967年12月1日

1. まえがき

よく知られているように，ファブリ・ペロー形共振器の共振姿態は，横姿態（反射板上の界分布）および縦姿態（反射板間の定在波の数）によって完全に規定される．したがってこの種の形式の共振器によって不要共振姿態に対する姿態分離を実現するための設計理論も，横姿態に対する姿態分離を目的としたもの[1)2)3)]と，縦姿態に対する姿態分離を目的としたもの[4)5)6)]に区別することができる．

ところで，ファブリ・ペロー形共振系を用いたレーザ発振器において，有効な不要姿態分離を行うためには，以下に示す条件を満足させることが実際上必要である．すなわち，

i) レーザ発振を希望する共振姿態以外の共振姿態の損失をレーザ媒質からの利得よりも大きくする．

ii) モード容積を減少させることなく姿態分離を可能ならしめること．

iii) ビーム・ウェーブガイドによる伝送を有効に行うために，出力が完全なガウス波であること．

等である．

ところが，横姿態分離を目的とした従来の方法ではいずれも上記の条件をすべて同時に満足させることはできない．

本論文は，共焦点ファブリ・ペロー形共振器の中央部に振幅透過率の分布関数がガウス関数で与えられるような絞りを設置することによって，前述した条件をすべて満足するような，横姿態分離が期待できることを理論的に明らかにしたものである．以下，このような絞りをガウス絞りとよぶことにする．

解析は，共振系に等価なビーム・ウェーブ・ガイドに対して行なうが，このことによって共振器に対する議論の一般性が失なわれることはない．

2. 理　　論

対象とする共振系は図1(a)に示すとおりその中央部に，その振幅透過率が $\exp\left[-\frac{1}{w_g^2}(x^2+y^2)\right]$ で与えられるようなガウス絞りを設置した共焦点共振器である．これは同図(b)に示したビーム・ウェーブ・ガイドと等価である．解析はこの等価ビーム・ウェーブ・ガイドに対して行なう．伝送方向をZ軸にとり座標を同図(b)のように定める．

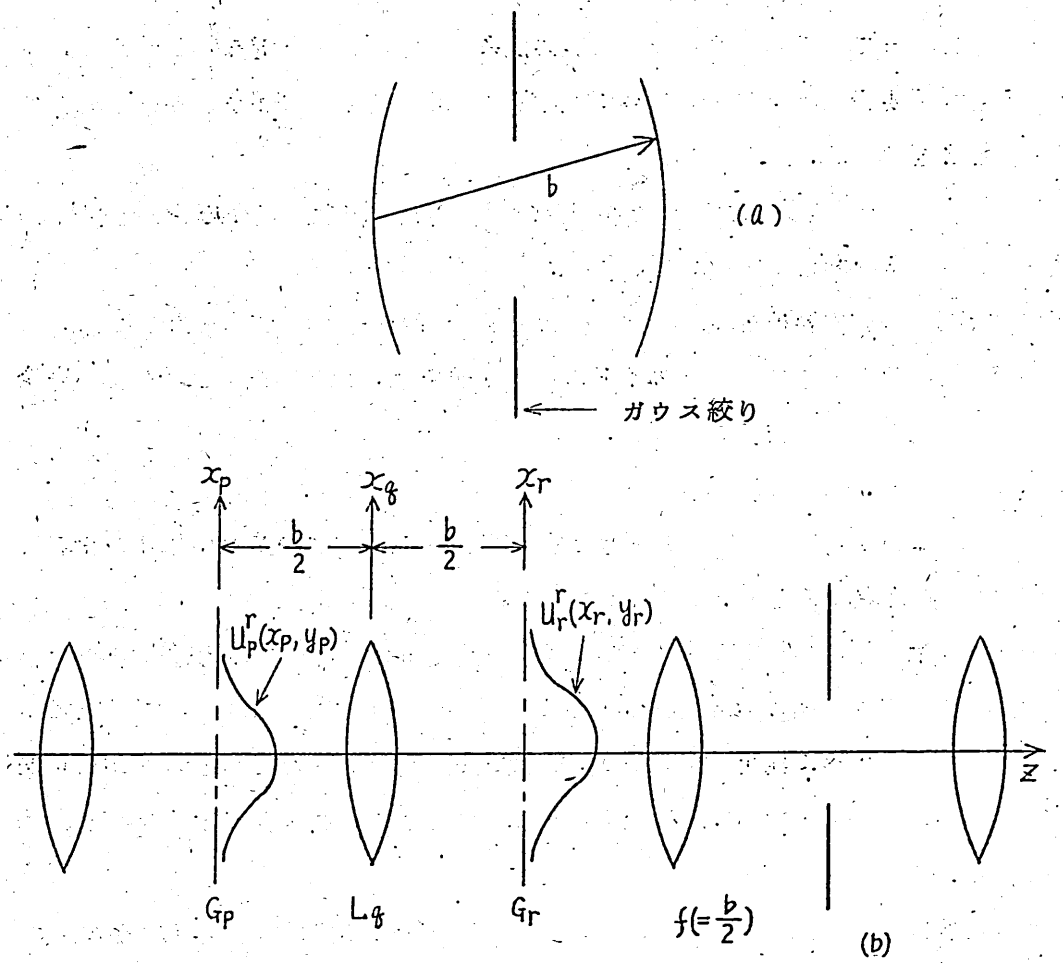


図1　ガウス絞りを含む共振器(a)
とその等価ビーム・ウェーブ・ガイド(b)

したがって，たとえばガウス絞り G_p を出発した波 u_p^r がレンズ L_q により位相補正をうけ，さらにガウス絞り G_r による波形整形作用を受け，u_p^r と相対的に同一の分布でガウス絞り G_r から出発したとき，それをこの系の伝送ビーム姿態と定義できる．これが共振系の共振姿態と一致することはもちろんである．

理想的薄肉レンズを仮定してその厚みを無視する．ガウス絞り G_p 上の一点と相隣るレンズ L_q 上の一点との距離 r_{pq} が波長 λ に比べて充分大きいものと仮定すれば，ガウス絞り G_p を出る波の接線界成分 u_p^r とレンズ L_q に入射する波の接線界成分 u_q^i との関係は次式によって与えられる．[7]

$$u_q^i(x_q,y_q)=\frac{jke^{-jkf}}{2\pi f}\iint u_p^r(x_p,y_p)\exp\left[-j\frac{k}{2f}\{(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2\}\right]dx_p\,dy_p \qquad (1)$$

ただし，$k=2\pi/\lambda$

全く同様にして，レンズ L_q を出る波の接線界成分 u_q^r とガウス絞り G_r に入射する波の接線界成分 u_r^i との関係が次式で与えられる．

$$u_r^i(x_r,y_r)=\frac{jke^{-jkf}}{2\pi f}\iint u_q^r(x_q,y_q)\exp\left[-j\frac{k}{2f}\{(x_q-x_r)^2+(y_q-y_r)^2\}\right]dx_q\,dy_q \qquad (2)$$

また，レンズの位相調整作用によりレンズ L_q の両側の界分布に対して次の関係式が成り立つ．

$$u_q^r(x_q,y_q)=u_q^i(x_q,y_q)\exp\left[+\frac{jk}{2f}(x_q^2+y_q^2)\right] \qquad (3)$$

つぎに，ガウス絞り G_r に入射する波 u_r^i とガウス絞り G_r を出る波の間には次の関係式が成り立つ．

$$u_r^r(x_r,y_r)=u_r^i(x_r,y_r)\exp\left[-\frac{1}{w_g^2}(x_r^2+y_r^2)\right] \qquad (4)$$

式(4)に式(1)～(3)を代入すれば次式が得られる。[8)]

$$u_r^r(x_r,y_r)=\frac{jk}{2\pi f}\exp\{-j2kf\}\exp\left[-\frac{1}{w_g^2}(x_r^2+y_r^2)\right]$$

$$\iint u_p^r(x_p,y_p)\exp\left[j\frac{k}{f}(x_rx_p+y_ry_p)\right]dx_p\,dy_p \quad (5)$$

伝送ビーム姿態が形成されるためには，u_r^rとu_p^rが複素定数倍の相違を除いて相対的に同一の分布関数として再現されなければならない．すなわち，

$$u_r^r(x,y)=\gamma\,u_p^r(x,y) \quad (6)$$

なる関係式が満足されなければならない．ただし，γは複素定数である．

標本区間として，ガウス絞りG_p，レンズL_q，ガウス絞りG_rをとり，ガウス絞りG_p上の界分布関数$u_p^r(x_p,y_p)$を

$$u_p^r(x_p,y_p)=\exp\left[-\frac{1}{w_b^2}(x_p^2+y_p^2)\right]He_m\left(\frac{2x_p}{w_a}\right)He_n\left(\frac{2y_p}{w_a}\right) \quad (7)$$

なる変数分離形で与えられるものと仮定する．ただし，He_m, He_n は Hermite の多項式である．式(7)を式(5)に代入して積分を実行すると次のようになる．

$$u_r^r(x_r,y_r)=\frac{jk}{2f}\exp\{-j2kf\}(-1)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}}w_b^2\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}}$$

$$\exp\left[-\left\{\left(\frac{k}{2f}\right)^2w_b^2+\frac{1}{w_g^2}\right\}(x_r^2+y_r^2)\right]$$

$$He_m\left[\frac{\frac{w_b^2}{w_a}\frac{k}{f}x_r}{\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{1/2}}\right]\quad He_n\left[\frac{\frac{w_b^2}{w_a}\frac{k}{f}y_r}{\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{1/2}}\right] \quad (8)$$

式(6)の関係を適用して，式(7)および式(8)から伝送ビーム形成条件を求めると，

$$\frac{1}{w_b^2} = \frac{1}{w_g^2} + \left(\frac{k}{2f}\right)^2 w_b^2 \tag{9}$$

$$\frac{2}{w_a} = \frac{\dfrac{w_b^2}{w_a} \cdot \dfrac{k}{f}}{\left(\dfrac{2w_b^2}{w_a^2} - 1\right)^{1/2}} \tag{10}$$

なる関係が得られる．また，複素定数 γ_{mn} として次式が得られる．

$$\gamma_{mn} = \frac{jk}{2f} \exp\left[-j\frac{2k}{f}\right](-1)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}} \left(\frac{2w_b^2}{w_a^2} - 1\right)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}} \tag{11}$$

ここで，

$$w_b = \alpha w_o \tag{12}$$

とおく．w_o はガウス絞りが存在しない通常の共焦点共振器のビーム・ウエスト部分でのスポットサイズであり，次式で与えられる．

$$w_o = \sqrt{\frac{b}{k}} = \sqrt{\frac{2f}{k}} \tag{13}$$

式(12),(13)を式(9),(10)に適用すると，

$$w_g^2 = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha^2} - \alpha^2} w_o^2 \tag{14}$$

$$w_a^2 = \frac{2}{\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}} w_o^2 \tag{15}$$

なる関係式を得る．w_g は正であるから，式(14)より

$$0 < \alpha < 1 \tag{16}$$

なる関係式を得る．式(12)～(16)が満足されるとき，ビーム姿態が存在する．これらの関係式を式(11)に代入すると，

$$\gamma_{mn} = (\alpha)^{2(m+n+1)} \exp\left[j\frac{\pi}{2}(m+n+1) - j2kf \right] \qquad (17)$$

となる．上式から１区間当りのビーム姿態の移相量は，$\frac{\pi}{2}(m+n+1)-2kf$ であるから，共振系における共振条件として，

$$2\pi q = 2\left| \frac{\pi}{2}(m+n+1) - 2kf \right| \qquad (18)$$

が得られる．ただし，qは正整数である．$f = \frac{b}{2}$ なることを考慮すれば上式から

$$\frac{4b}{\lambda} = 2q + (m+n+1) \qquad (19)$$

を得る．上式は明らかに通常の共焦点共振器における共振条件式と一致する．

つぎに，式(17)より各共振姿態の１区間当りの損失L_{mn}を求めると，

$$L_{mn} = 1 - |\gamma_{mn}|^2$$
$$= 1 - (\alpha)^{4(m+n+1)} \qquad (20)$$

となる．これを図２に示した．また，TEM_{oo}姿態と高次姿態との損失比を図３に示した．さらに，共振器内部におけるスポットサイズの模様を示したのが図４である．これらの図から，本共振系を用いて横姿態分離を行なう場合，基本姿態と高次姿態との損失比は，共焦点共振器のそれをうわまわることはないが，不要高次姿態に対する損失の絶対値をはるかに大きくすることができる．また，姿態分離を行なうことによってモード容積が減少することはない．さらに式(8)からわかるように，本共振系からの出力は完全なガウス波である．したがって，単一姿態のレーザ発振器を実現するためにより有効な横姿態分離効果が期待できることがわかる．

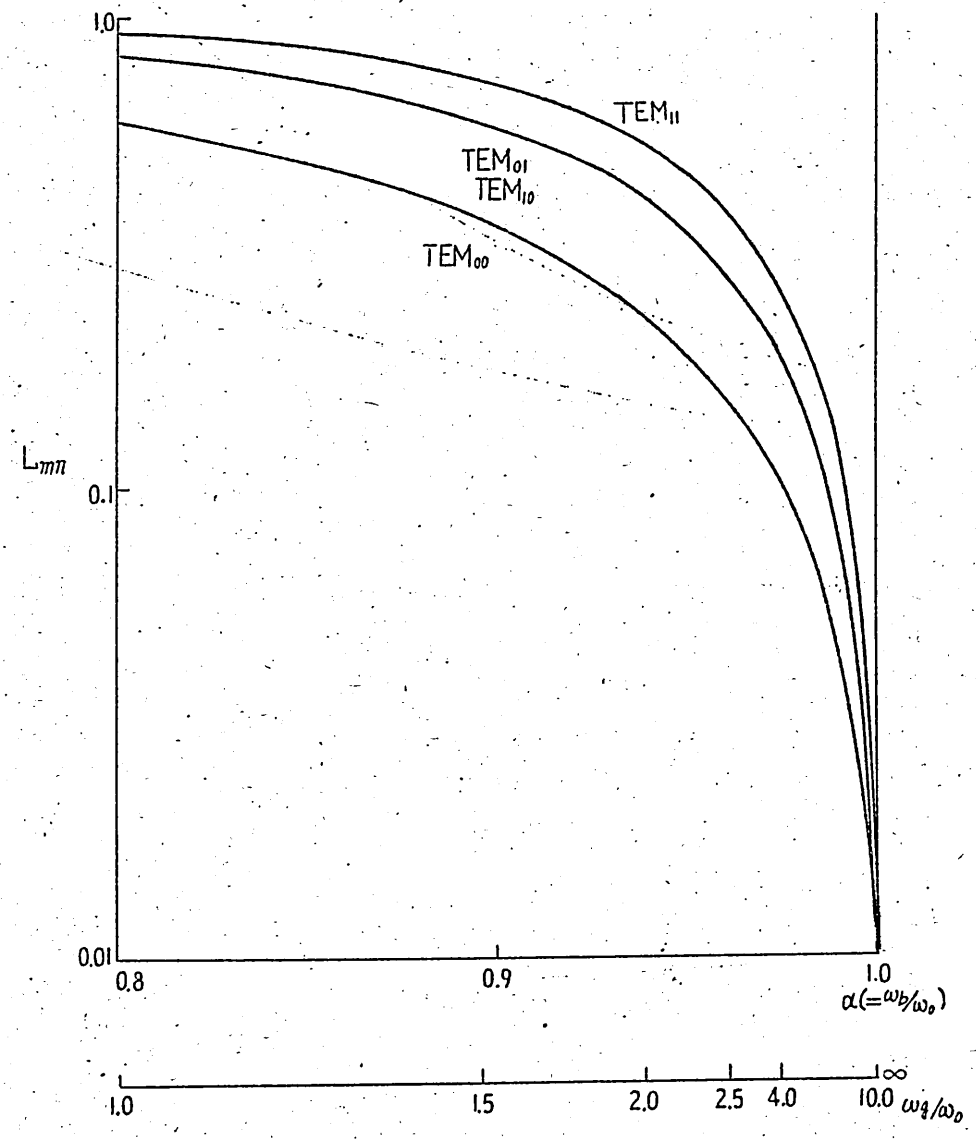

1.0
0.1
0.01
L_{mn}
TEM_{11}
TEM_{01}
TEM_{10}
TEM_{00}
0.8
0.9
1.0
$\alpha(=\omega_b/\omega_0)$
1.0
1.5
2.0
2.5
4.0
10.0
∞
ω_q/ω_0

図2　1 行 程 当 り の 損 失

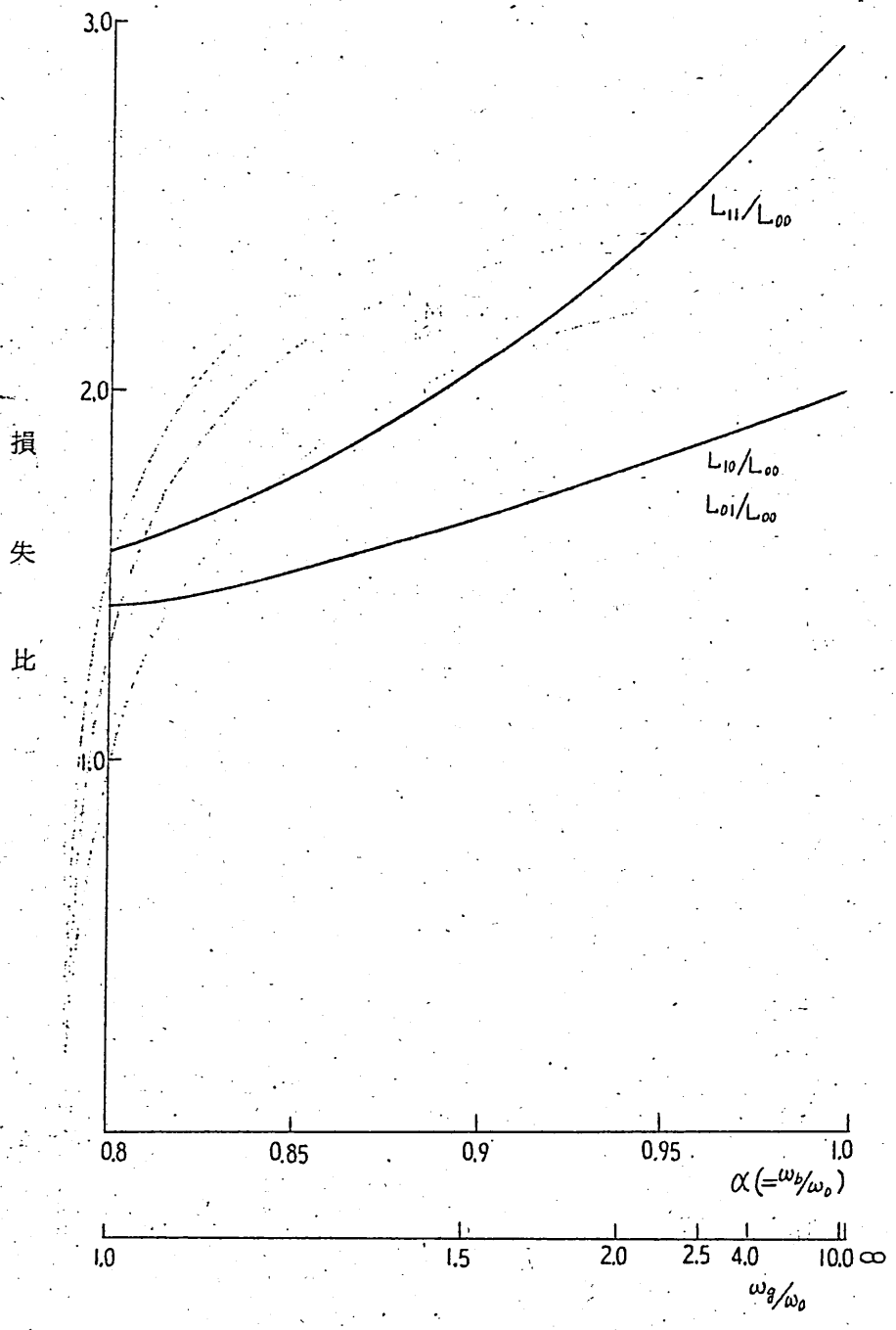
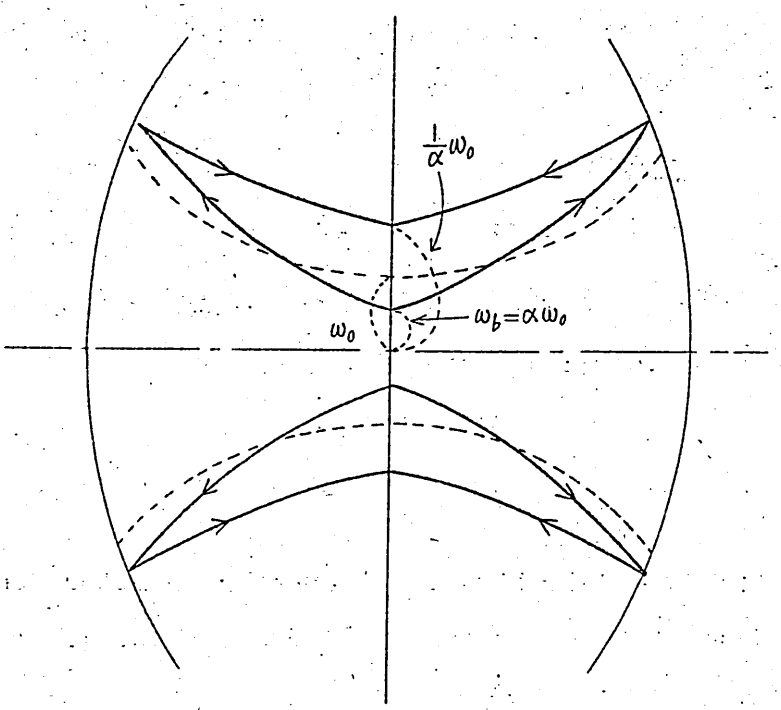


図３　基本姿態に対する高次姿態の損失比



——— ガウス絞りを含む共焦点共振器

- - - - - - - 通常の共焦点共振器

図4　共振器内部におけるスポット・サイズの変化

3. 結　　言

中央部にガウス絞りを設置した共焦点共振器の共振姿態について解析した．その結果，本共振系は，不要横共振姿態に対する損失を容易に大きくできること，姿態分離によってモード容積が減少しないこと，ならびに基本共振姿態が完全なガウス波となること，等，レーザ用共振器として極めてすぐれた横姿態分離効果をもっていることが明らかとなった．

謝　　辞

日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに有益なご助言をいただいた松原正則氏に深謝する．

文　　献

1) T. Li : "Mode Selection in an Aperture-Limited Concentric Maser Interferometer" Bell Syst. tech. J., 42 p. 2609 (November 1963)

2) T. Li and P. W. Smith : "Mode Selection and Mode Volume Enhancement in a Gas Laser with Internal Lens", Proc. IEEE, 53 p. 399 (April 1965)

3) 熊谷信昭，森　弘喜，塩沢俊之："不均一ファブリ・ペロー共振器の共振姿態"，信学誌，49，p. 1249（昭41－07）

4) 熊谷信昭，松原正則，森　弘喜："複合ファブリ・ペロー・レーザ共振器"，信学誌，47，p. 1003（昭39－07）

5) 熊谷信昭，松原正則："ファブリ・ペロー干渉計の透過特性を利用した

レーザ共振器の姿態分離”，信学誌，49，p. 244（昭42－02）
6) 熊谷信昭，植垣俊幸：“分割レーザの理論”，信学誌，49，p. 717（昭42－04）
7) A. G. Fox and T. Li：“Resonant Modes in a Maser Interferometer”, Bell Syst. tech. J., 40, p. 453 (March 1961).
8) A. Vander Lugt：“Optical Notation for the Analysis and Synthesis of Optical Data-Processing System”, Proc. IEEE, 54, p. 1058 (August 1966)
9) H. Bateman：“Tables of Integral Transforms”, Volume II, p. 290, McGraw-Hill Book Comp.

付　　録

式（8）の導出

式（7）を式（5）に代入すると，

$$u_r^r(x_r,y_r)=\frac{jk}{2\pi f}\exp(-j2kf)\exp\left[-\frac{1}{w_g^2}(x_r^2+y_r^2)\right]$$
$$\iint_{S_p}\exp\left[-\frac{1}{w_b^2}(x_p^2+y_p^2)\right]He_m\left(\frac{2x_p}{w_a}\right)He_n\left(\frac{2}{w_a}y_p\right)$$
$$\exp\left[\frac{jk}{f}(x_px_r+y_py_r)\right]dx_r\,dy_r \qquad (A-1)$$

となる．上式の積分は，x，y 両成分に分離できる．

x成分に対して

$$I_m=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x_p^2}{w_b^2}\right]He_m\left(\frac{2x_p}{w_a}\right)\exp\left(\frac{jk}{f}x_px_r\right)dx_p$$

なる積分を実行すればよい．

m が偶数の場合

$$I_m=2\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{x_p^2}{w_b^2}\right]He_m\left(\frac{2x_p}{w_a}\right)\cos\left(\frac{k}{f}x_px_r\right)dx_p$$

となる．ここで

$$x_p'=\frac{\sqrt{2}}{w_b}x_p$$

とおいて変数変換を行ない，積分を実行すると[9]，

$$I_m=\sqrt{2}\,w_b\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}x_p'^2\right]He_m\left(\frac{\sqrt{2}w_b}{w_a}x_p'\right)\cos\left(\frac{kw_b}{\sqrt{2}f}x_rx_p'\right)dx_p'$$
$$=(-1)^{\frac{m}{2}}w_b\sqrt{\pi}\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{\frac{m}{2}}\exp\left[-\left(\frac{k}{2f}\right)^2w_b^2x_r^2\right]$$

$$He_m\left[\frac{\frac{w_b^2}{w_a}\frac{k}{f}x_r}{\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{1/2}}\right] \qquad (A-2)$$

m が奇数の場合

$$I_m = j2w_b\int_0^\infty \exp\left[-\frac{x_p^2}{w_b^2}\right] He_m\left(\frac{2x_p}{w_a}\right)\sin\left(\frac{k}{f}x_r x_p\right) dx_p$$

となる．m が偶数の場合と同一の変数変換を行なえば積分が可能となり[9]，

$$I_m = (-1)^{\frac{m}{2}} w_b\sqrt{\pi}\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{\frac{m}{2}} \exp\left[-\left(\frac{k}{2f}\right)^2 w_b^2 x_r^2\right]$$

$$He_m\left[\frac{\frac{w_b^2}{w_a}\frac{k}{f}x_r}{\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{1/2}}\right] \qquad (A-3)$$

となる．y 成分に対しても同一の結果が得られるから，結局，

$$u_r^r(x_r,y_r) = j\frac{k}{2f}(-1)^{\frac{m}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}} w_b^2\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}}$$

$$\exp\left[-\left\{\left(\frac{k}{2f}\right)^2 w_b^2+\frac{1}{w_g^2}\right\}(x_r^2+y_r^2)\right]$$

$$He_m\left[\frac{\frac{2w_b^2}{w_a}\frac{k}{f}x_r}{\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{1/2}}\right] He_n\left[\frac{\frac{2w_b^2}{w_a}\frac{k}{f}x_r}{\left(\frac{2w_b^2}{w_a^2}-1\right)^{1/2}}\right] \qquad (A-4)$$

となる．

輻射科学研究会資料

複合ファブリ・ペロー形レーザの発振出力特性

植垣俊幸　　熊谷信昭
(大阪大学・工学部)

1967年12月1日

1 まえがき

3枚以上の反射板を用いた複合ファブリ・ペロー形共振器を適当に設計することによつて各縦共振姿態の発振のthresholdに差が生じ，姿態分離が可能となることが理論的[1]，実験的[2]に知られている．しかし，その姿態分離効果によつて改善されたレーザ発振の出力特性を知るには，共振器内部に存在する共振姿態の電磁界とレーザ媒質との相互作用系を遷移方程式を用いて記述し，これを解かねばならない．Tang 等[3]は誘導放射スペクトルの拡がりがhomogeneousである場合の多重姿態発振現象を記述する遷移方程式を求めて，通常のファブリ・ペロー形レーザの多重姿態発振出力特性を解析している．彼等は[4]また固体レーザ媒質の誘導放射スペクトルの拡がりがhomogeneous であることを実験的に明らかにし，前述の解析理論が固体レーザの多重姿態発振現象の解析に適用できることを示している．

本論文は，文献〔1〕に示された理論的解析の手法を導入することによつてTang 等の理論[3]を拡張し，それを用いて誘導放射スペクトルの拡がりがhomogeneous な場合の複合ファブリ・ペロー形レーザの発振出力特性を求めている．

その結果，複合ファブリ・ペロー形レーザの発振姿態数や出力の大きさ等に関する諸特性が明らかとなり，この種の形式のレーザに対する有効なる設計方針が得られた．

2 理　　論

2．1 遷 移 方 程 式

レーザ作用を起こす逆転粒子と共振器内に存在する電磁界との相互作用系は遷移方程式を用いて記述することができる．しかし，固体レーザ媒質のよ

うに誘導放射スペクトルの拡がりがhomogeneousな場合には通常の遷移方程式を用いて多重姿態発振現象を説明することはできない．この点に関してTang等は，逆転粒子の空間的不均一分布を考慮した遷移方程式を用いて多重姿態発振現象を説明できることを指摘している．そこで，以下Tang等[3]の考え方を適用して誘導放射スペクトルの拡がりがhomogeneousな場所のファブリ・ペロー形レーザの定常発振状態における出力特性を解析する．

解析の対象とするレーザ系は図1に示す3準位レーザである．準位3，2

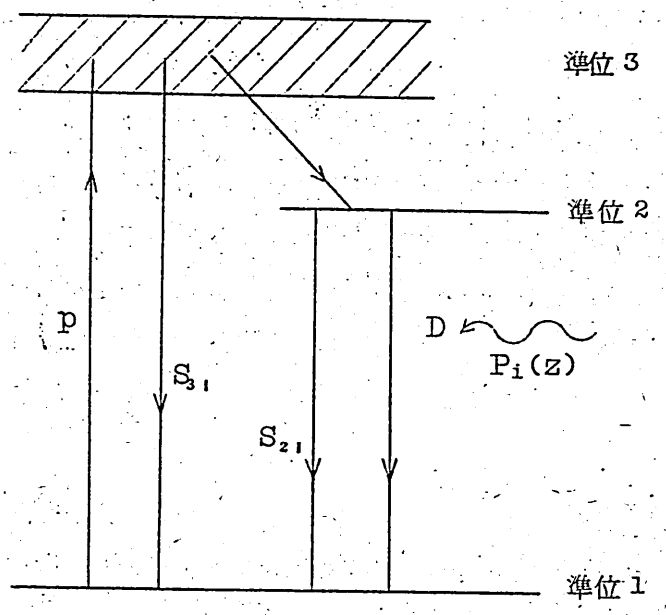


図1　3準位レーザのエネルギー準位

間の非輻射遷移速度は非常に速いものと仮定できるから，準位2，1間でレーザ作用を起こす逆転粒子分布に対する遷移方程式を場所zの関数としてつぎのように与えることができる．[3)5)]

$$\frac{n(z)-n_s}{\tau}+\sum_{i=1}^{j}2Dg_i n(z)P_i(z)=0 \qquad (1)$$

ここで，$n(z)$は逆転粒子の空間分布，n_sは電磁界が存在しないときの$n(z)$の定常値，τは緩和の時定数，Dgiはi番目の縦共振姿態（以下mode-iと記す）への誘導放射の係数，$P_i(z)$は共振器内におけるmode-iの電力密度分布，jは発振状態にある共振姿態の総数，を表わす．準位1→3への励起確率をp（p：ポンピング電力に比例）とすると，n_sおよびτはそれぞれ次式で与えられる．[6)]

$$n_s = n_t\frac{p-s_{21}}{p+s_{21}} \qquad (2)$$

$$\tau=\frac{1}{p+s_{21}} \qquad (3)$$

ここで，s_{21}は準位2，1間の自然放射の割合，n_tは全粒子密度である．誘導放射スペクトルをローレンツ形とすればq_iは次式で与えられる．

$$g_i = g(\nu_i)=\frac{1}{1+\left(\frac{\nu_i-\nu_c}{\Delta\nu}\right)^2} \qquad (4)$$

ここで，ν_iはmode-iの共振周波数，ν_cは誘導放射スペクトルの中心周波数，$2\Delta\nu$は誘導放射スペクトルの半値幅を表わす．

また，mode-iの電力損失とレーザ媒質からの電力利得との平衡条件は次式で与えられる．

$$-\gamma_i\int P_i(z)\,dz+\int Dg_i n(z)P_i(z)\,dz=0 \qquad (5)$$

ただし，

$$\gamma_i=\gamma_{i,r}+\gamma_{i,m} \qquad (6)$$

ここで，γ_iはmode-iの全電力損失の割合，$\gamma_{i,r}$は反射板より出力を取り出すことによる電力損失の割合，$\gamma_{i,m}$は$\gamma_{i,r}$以外のすべての電力損失の

割合，を表わす．積分範囲はレーザ媒質部分である．mode-i の界分布と電力損失 γ_i を与えれば，以上の諸式から発振出力特性が求まる．

2．2　複合ファブリ・ペロー共振器の共振姿態

対象とする複合ファブリ・ペロー共振器の構造を図2に示す．レーザ媒質

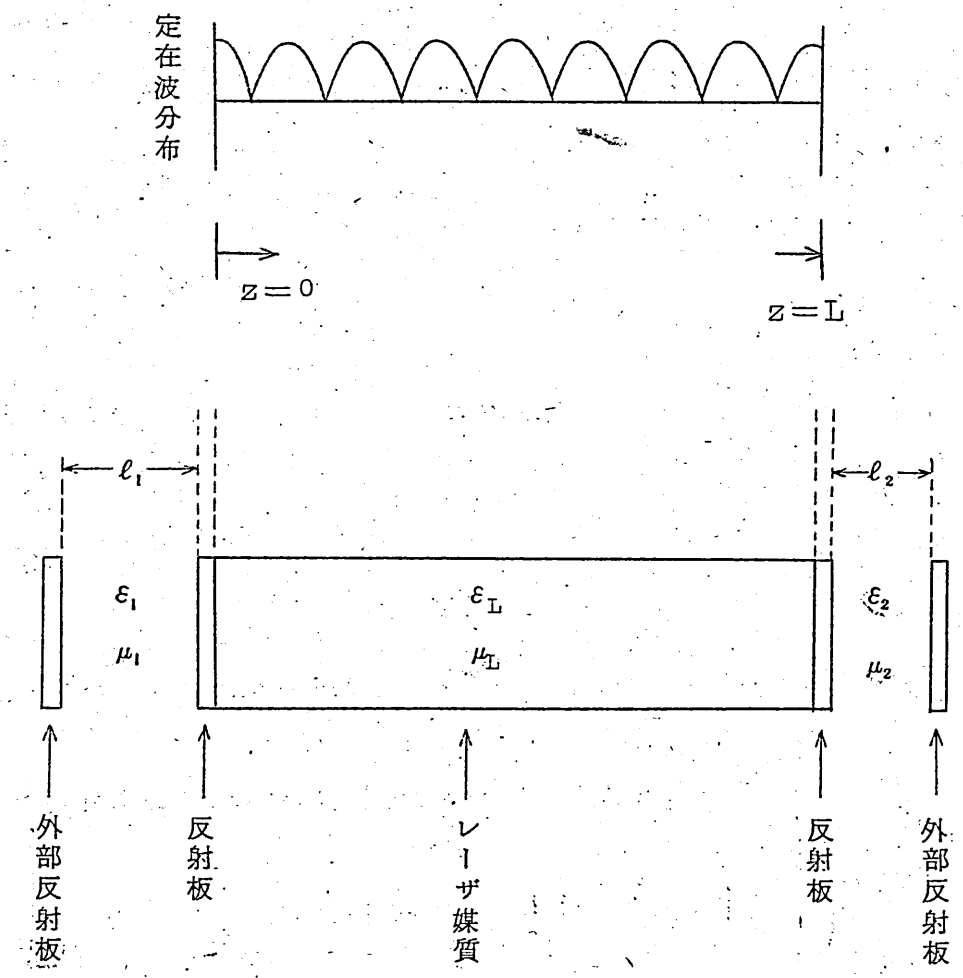


図2　複合ファブリ・ペロー形レーザとその共振姿態の定在波分布

の両側に設置された2組の複合反射板の総合振幅反射係数はそれぞれ正であるものと仮定する．この仮定によつて以下の議論の一般性が失われることはない．このとき，共振器内の各共振姿態の界分布は定在波の形で示される．定在波比が無限大に近いとして各共振姿態の界分布をそれぞれ $\cos\left(\frac{m_i\pi}{L}z\right)$ で近似する．m_i は正整数で，レーザ媒質内に含まれるmode-iの定在波数を表わす．

$\gamma_{i,r}$ 以外の損失を無視したときの共振器のQを $Q_{i,c}$ とすれば

$$\gamma_{i,r} = \frac{2\pi\nu_i}{Q_{i,c}} \tag{7}$$

となる．共振器に有効な姿態分離効果を持たせるには，不要共振姿態の $Q_{i,c}$ 値をレーザ発振を希望する共振姿態のQ値に比べてできるだけ低下せしめればよい．文献〔1〕の式(32)，(33)および式(35)の関係を用いて最も有効な不要共振姿態抑制効果が行なわれるように各反射板の振幅反射係数を選ぶ．このとき式(7)の関係を考慮すると

$$\gamma_{i,r} = \varepsilon_i \cdot \gamma_{i,r,min} \tag{8}$$

となる．$\gamma_{i,r,min}$ は $\gamma_{i,r}$ の最小値である．ただし，

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta_1} + \frac{1}{\cos^2\theta_2}\right) \tag{9}$$

$$\theta_1 = \frac{l_1}{L}\sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_L\mu_L}}\, m_i\pi \tag{10}$$

$$\theta_2 = \frac{l_2}{L}\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_L\mu_L}}\, m_i\pi \tag{11}$$

希望するレーザ発振はもちろん反射損失が $\gamma_{i,r,min}$ となる共振姿態によつて行なわれる．ある周波数でこのような共振を得るための条件は

$$\begin{aligned}\theta_1 &= n\pi \\ \theta_2 &= n'\pi\end{aligned} \tag{12}$$

n, n'：任意の整数

ところで

$$\gamma_{i,m} = \gamma_m \quad ;一定 \tag{13}$$

と考え，

$$\gamma_{i,r,min} = \beta\gamma_m \tag{14}$$

とおいて，式(6)および式(8)を用いて γ_i を規格化すると，

$$\gamma_i = \frac{\varepsilon_i\beta + 1}{\beta + 1}\ \gamma_{i,min} = \xi_i \cdot \gamma_{i,min} \tag{15}$$

となる．ただし

$$\xi_i \equiv \frac{\varepsilon_i\beta + 1}{\beta + 1} \tag{16}$$

$$\gamma_{i,min} = \gamma_{i,r,min} + \gamma_m \tag{17}$$

次節では本節で求めた諸式を第1節に記した遷移方程式に代入して発振出力特性を求める．

2・3　発振出力特性の導出

前節で述べたようにレーザ媒質内における mode-i の界分布分布を $\cos\left(\frac{m_i\pi}{L}z\right)$ と仮定する．各共振姿態の電力密度 $P_i(z)$ は界分布の2乗に比例するから

$$P_i(z) = 2N_i \cdot \cos^2\left(\frac{m_i\pi}{L}z\right) \tag{18}$$

とおける．上式から

$$N_i = \frac{1}{L}\int_0^L P_i(z)\,dz \tag{19}$$

なる関係式が得られることから．N_i は mode-i の電力密度の空間的な平均値，LN_i は mode-i の全電力，を表わすことになる．

式(18)を式(1)に代入して逆転粒子の空間分布n(z)を求めると,

$$n(z)=\frac{n_s}{1+\sum_{i=1}^{j}2\tau Dg_i N_i\left\{1-\cos\left(\frac{2m_i\pi}{L}z\right)\right\}} \tag{20}$$

$$\simeq n_s\left[1-\sum_{i=1}^{j}2\tau Dg_i N_i\left\{1-\cos\left(\frac{2m_i\pi}{L}z\right)\right\}\right] \tag{21}$$

となる．ただし，上式は

$$\sum_{i=1}^{j}2\tau Dg_i N_i\left\{1-\cos\left(\frac{2m_i\pi z}{L}\right)\right\}\ll 1 \tag{22}$$

なる条件が満足される場合に成立する近似式である．式(18)および式(21)を式(5)に代入すると次の関係式が得られる．

$$LN_i\left[-\gamma_i+Dg_i n_s\left\{1-\sum_{l=1}^{j}2\tau Dg_l N_l-\tau Dg_i N_i\right\}\right]=0 \tag{23}$$

上式において，$i\leq j$のとき$N_i>0$とおいて得られるj個の式を解けばmode-iの平均電力密度N_iが求まる．

$$N_i=\frac{1}{\tau Dg_i}\left\{1-\frac{\gamma_i}{Dg_i n_s}-\frac{2}{2j+1}\sum_{l=1}^{j}\left(1-\frac{\gamma_l}{Dg_l n_l}\right)\right\} \tag{24}$$

つぎに発振姿態の総数を求める．mode-(j+1)が発振のthveshold に達したとき，式(23)および式(24)から

$$Dn_s=(2j+1)\left[\frac{\gamma_{i+1}}{g_{i+1}}-\frac{2}{2j+1}\sum_{i=1}^{j}\frac{\gamma_i}{g_i}\right] \tag{25}$$

なる関係式が得られる．式(15)を用いて上式を書き直すと

$$\frac{Dn_s}{\gamma_{i,min}}=(2j+1)\left[\frac{\xi_{i+1}}{g_{i+1}}-\frac{2}{2j+1}\sum_{i=1}^{j}\frac{\xi_i}{g_i}\right] \tag{26}$$

となる．式(2)から明らかなように n_s はポンピングの強さに直接依存する量であるから，pumping の強さと発振姿態数の関係を式(25)または(26)から定めることができる．式(25)または式(26)から明らかなように ξ_i/g_i が小さい共振姿態ほど発振の threshold 直が小さい．したがつて mode 番号 i は ξ_i/g_i が小さい共振姿態から順に付与すればよい．

式(24)を式(19)に代入して mode-i の出力 W_i を求めると

$$W_i = \gamma_{i,r} \cdot LN_i$$

$$= \frac{L\beta\gamma_m\varepsilon_i}{\tau D g_i}\left[1 - \frac{\gamma_{i,min}}{Dn_s}\frac{\xi_i}{g_i} - \frac{2}{2j+1}\sum_{i=1}^{1}\left(1 - \frac{\gamma_{i,min}}{Dn_s}\cdot\frac{\xi_i}{g_i}\right)\right] \tag{27}$$

となる．

いままでの議論ではすべての共振姿態は異つた ξ/g 値をもつとしているが，同一の ξ/g 値をもつ複数個の共振姿態が存在するとき，それらは式(24)～(27)においては1個の共振姿態，すなわち mode-i として記述される．したがつて，このような場合 mode-i に属する各共振姿態が有する電力は，mode-i の電力を等分したもので与えられる．

最後に近似式，式(21)の適用範囲について調べておく．式(24)を用いると

$$\sum_{i=1}^{j} 2\tau D g_i N_i = 2\left[\frac{j}{2j+1} - \frac{1}{2j+1}\cdot\frac{\gamma_{i,min}}{Dn_s}\sum_{1=1}^{j}\frac{\xi_1}{g_1}\right] \tag{28}$$

なる関係式が得られる．

$$\sum_{i=1}^{j} 2\tau D g_i N_i\left\{1 - \cos\left(\frac{2m_i\pi}{L}z\right)\right\} \leqq \sum_{i=1}^{j} 2\tau D g_i N_i \tag{29}$$

なる関係式を考慮すると，

$$\sum_{i=1}^{j} 2\tau D g_i N_i \ll 1 \qquad (30)$$

なる関係が満足されれば，近似式，式（21）が適用可能となる．

3. 出 力 特 性

前章の理論式を用いて複合ファブリ・ペロー形レーザの発振出力特性を数値的に考察する．

$$L = 10\,\mathrm{cm}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$$

$$\sqrt{\varepsilon_L} = 1.76\sqrt{\varepsilon_0}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_L = \mu_0$$

なる場合を考える．このとき，誘導放射スペクトルの半値幅内に含まれる共振姿態の数は，たとえばルビーの場合には約４００個になる．上記のレーザに対して有効な姿態分離効果が期待できる場合の一例として，$l_2/l_1 \simeq 6$ に選ぶ．誘導方射スペクトルの中心周波数 ν_c に一致する共振周波数をもつ縦共振姿態以外の共振姿態の発振を抑制せしゆるために，中心周波数 ν_c において式(12) の関係が満足されるように，L，l_1，l_2 が調整された場合を考える．このとき，すべての共振姿態の共振周波数は ν_c に関して対称に位置するから，対称な関係にある２つの共振姿態は同一の ξ/g 値をもつ．*

前節で述べた理由から，mode-i（$i \geqq 2$）は２個の共振姿態の和を表している．したがつて，それぞれの出力は $W_i/2$ となる．また，数式上 j 番目の

＊もちろん，４個以上の共振姿態の ξ/g 値が同一になる不能性があるが，以下本文の数値解析の範囲ではそのようなことは起らない．

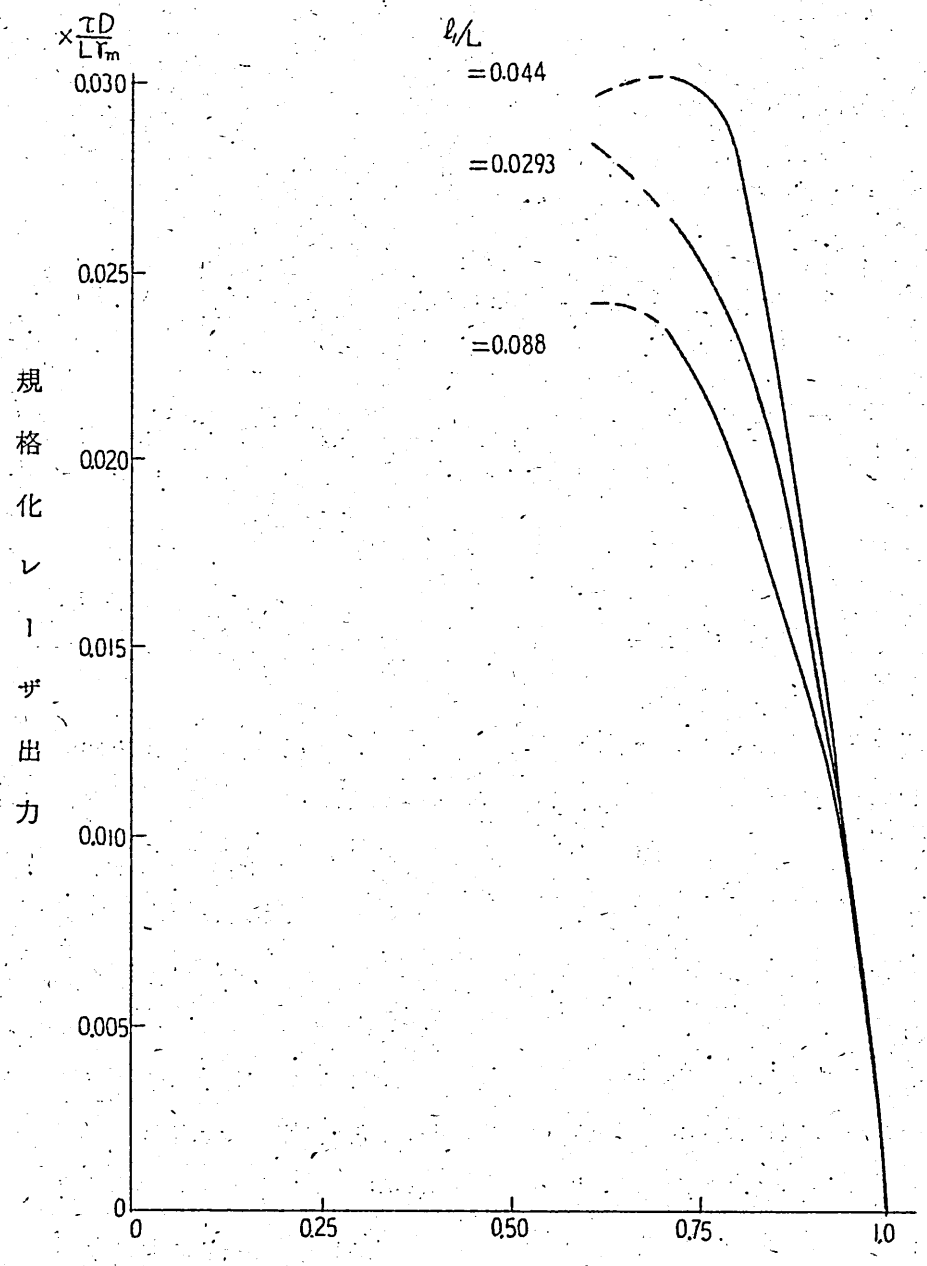


図3（a）　l_1/L をパラメータとしたときの β と出力の関係

mode までが発振しているとき，実際の発振姿態数は２ｊ－１個となる．以上述べたことを考慮して対象とする複合フアブリ・ペロー形レーザの姿態分離効果の模様を計算して見よう．

$n_s = \frac{2\gamma_m}{D}$ とし，l_1/L をパラメータとして，β とmode-1，β と発振姿態数の関係を式(25)～(27)を用いて計算したのが図３である．同図からわかるように，l_1/L の選び方によつて姿態分離効果ならびにレーザ出力の大きさが変化する．この場合，$l_1/L = 0.044$ に選べば，単一縦姿態での発振

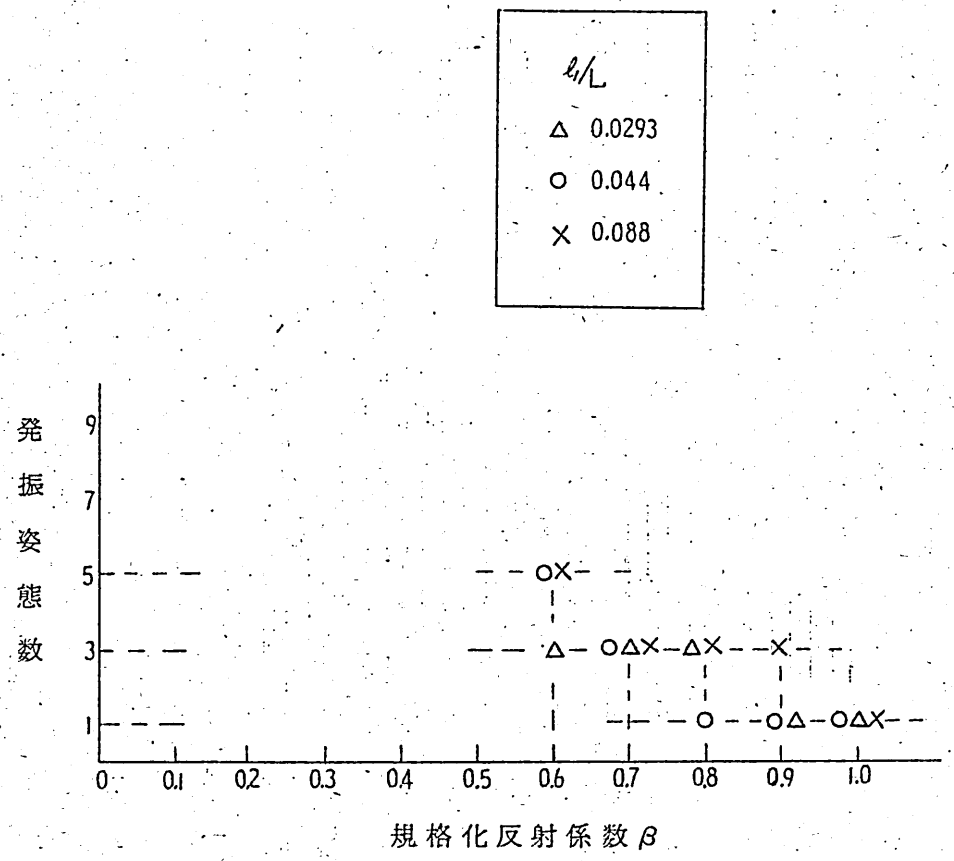


図３(b)　l_1/L をパラメータとしたときのβと発振姿態数の関係

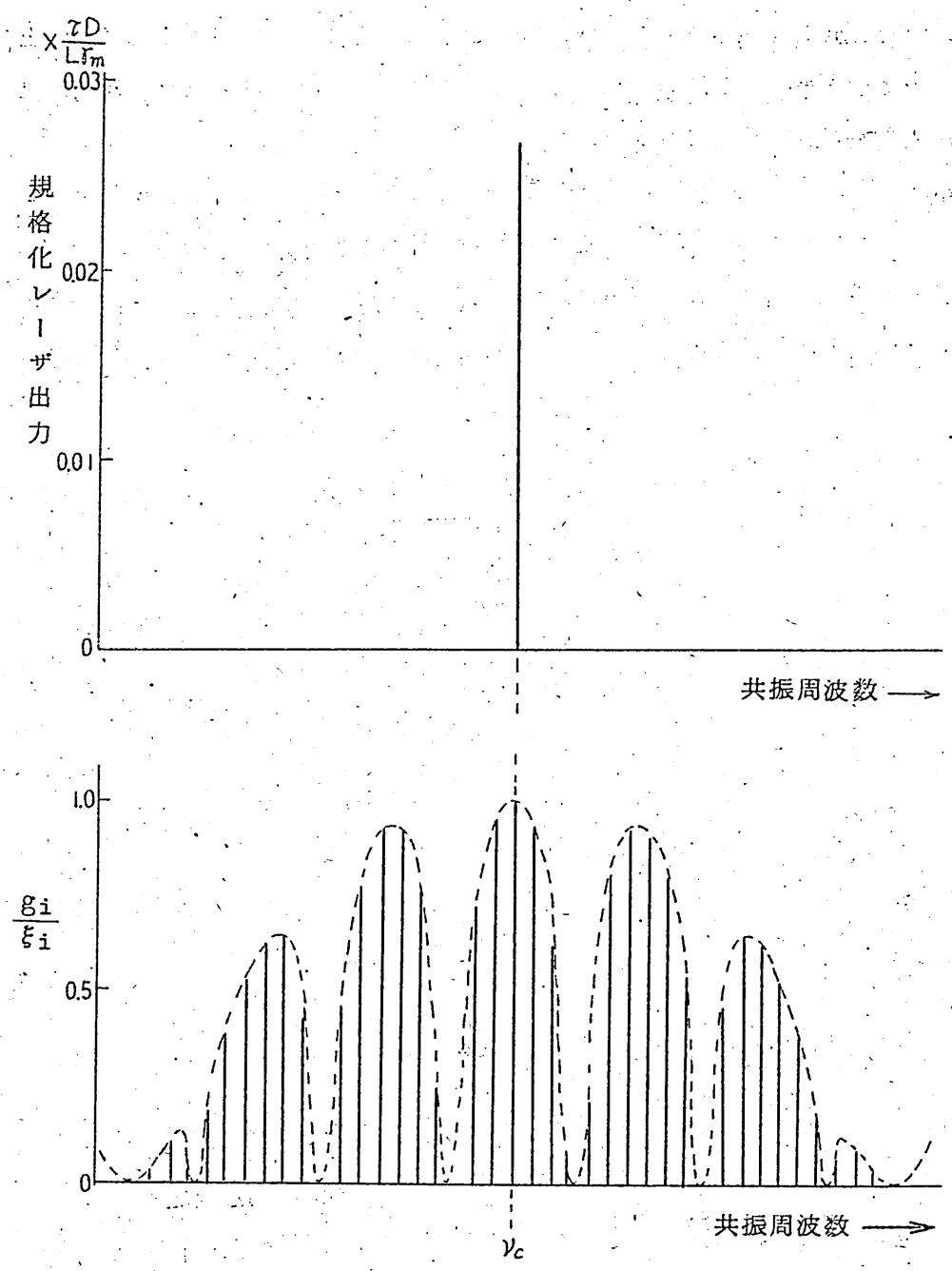


図4　$l_1/L = 0.044$なる複合ファブリ・ペロー形レーザの発振出力特性

と同時に，mode-1 のレーザ出力の増加が期待できる．$l_1/L = 0.044$ および $l_1/L = 0.0293$ とした場合の発振出力特性をそれぞれ図4および図5に示した．この場合の複合ファブリ・ペロー形共振器によるレーザ出力特性向上の模様を知るために，同一条件下（同一ポンピング強度，反射板から出力をとりだすことによる損失の割合同一）で動作させた通常のファブリ・ペロー形レーザの出力特性を図6に示した．

以上の解析における近似式の精度を知るために(27)を用いて $\sum_{i=1}^{j} 2\tau D g_i N_i$ を計算すると，いずれの場合にも，mode-1 が発振の threshold に達したとき $\sum_{i=1}^{j} 2\tau D g_i N_i = 0$ となり，近似による誤差は生じない．n_s を一定値に保つたとき，β を小さくするとともに $\sum_{i=1}^{j} 2\tau D g_i N_i$ の値は大きくなり近似の精度は劣化する．図2～図6においては $0 \leq \sum_{i=1}^{j} 2\tau D g_i N_i \leq 0.2$ なる範囲に含まれる部分を実線で示し，同範囲外の部分を点線で示した．このことからpumping の強さが，mode-1 の発振の threshold に近くなるほど近似の精度は良好となる．

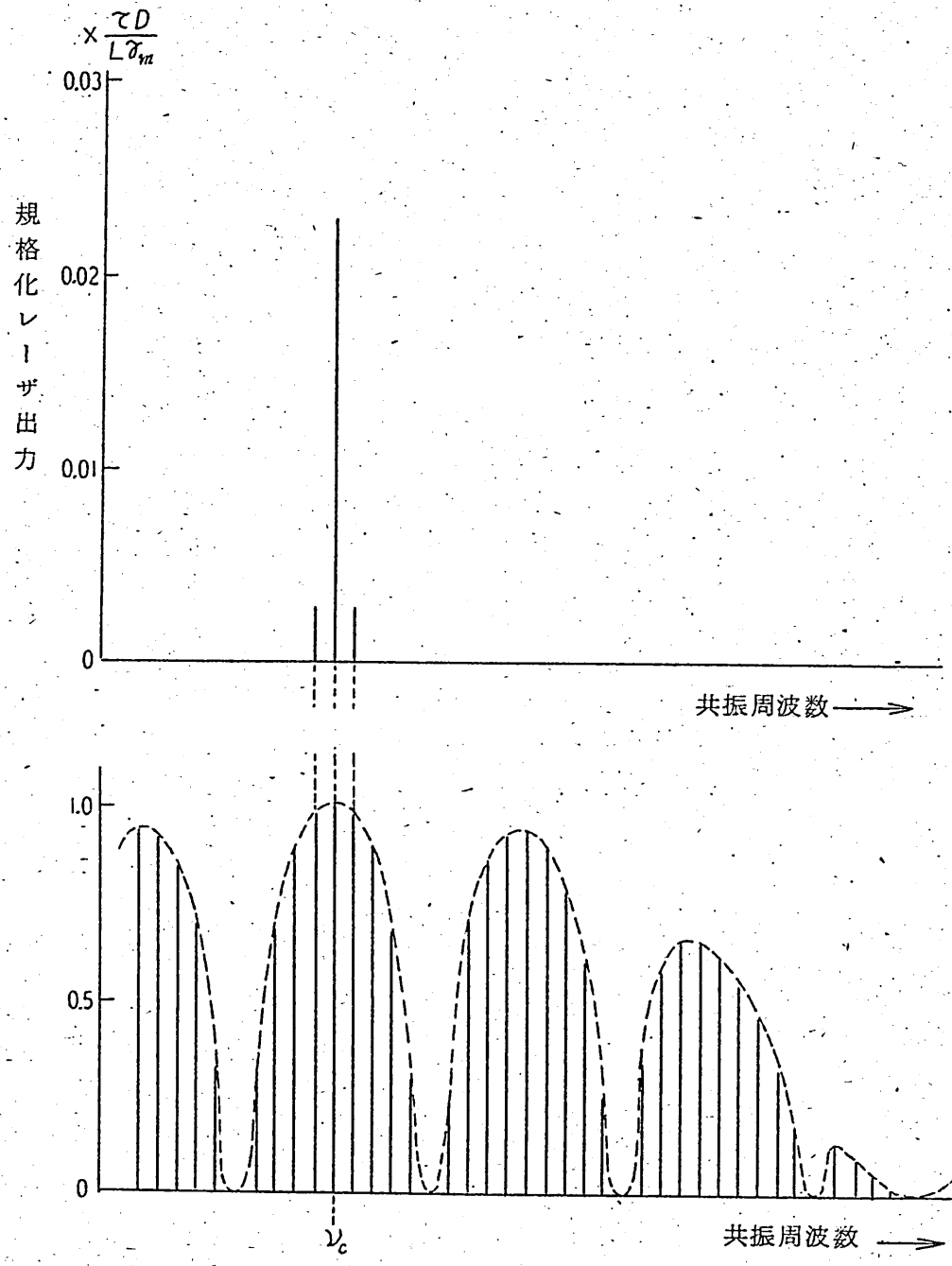


図5　$l_1/L = 0.0293$なる複合ファブリ・ペロー形レーザの発振出力特性

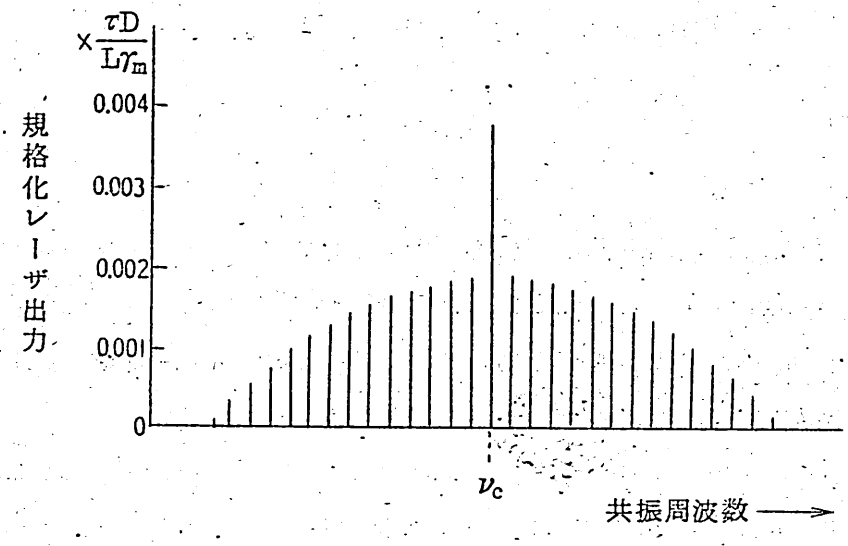


図6 通常のファブリ・ペロー形レーザの発振出力特性

4 結 言

誘導放射スペクトルの拡がりがhomogeneousな場合の複合ファブリ・ペロー形レーザの発振出力特性を理論的に明らかにした．この結果．発振のthveshold近傍で動作させたこの形式のレーザによつて有効な不要共振姿態分離効果を実現するとともに，レーザ出力の増大化を可能ならしめるための，一つの設計方針を見出すことができた．

謝　　辞

日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに有益なご討論をいただいた松原正則，松田正幹両氏に深謝する．

文　　献

(1) 熊谷信昭，松原正則，森弘喜：“複合フアブリ・ペロー・レーザ共振器”信学誌，47，7，p1003（昭39－07）

(2) 宮副泰，宮本徳夫，皆越尚紀：“外部鏡ルビー・レーザの発振モード”，昭41連大論文集

(3) C.L.Tang, H.Statz and G.Demars : “Spectral Output and Spiking Behavior of Solid-State Lasers”, J.appl. Phys. 34, 8, p2289 (August 1963)

(4) C.L.Tang, H.Statz, G.A.Demars and D.T.Wilson : “Spectral Properties of a Single-Mode Ruby Laser : Evidence of Homogeneous Broadenings of the Zero-Phonon Lines in Solids”, Phys. Rev. 136, No.1A, 5, p A3 (Octover 1964)

(5) 静岡竜夫：“量子エレクトロニクス”，日本物理学会編，p118.

輻射科学研究会資料

周期的に収束効果を持つ誘電体薄膜表面波線路

沢 新之輔　　熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1967年12月1日

1. まえがき

誘電体薄膜を用いた表面波線路としては，短ミリ波以下の波長領域における低損失伝送系としていままでに２，３の提案がある.[1],[2],[3]

最近では，不均一誘電率分布によるレンズ収束効果をもつた伝送方向に一様な誘電体薄膜表面波線路が，熊谷，倉薗，沢，吉川等[4],[5],[6],[7],[8]によつて提案され，線路の支持，外界からの遮へいの問題が，すべて有効に解決されることが示されている.

本論文では，このような不均一誘電体薄膜表面波線路[4],[5],[6],[7],[8]を，より実用的なかたちに発展させるため，比較的製造のむづかしいと思われるレンズ収束効果を有する不均一誘電体薄膜は，線路の途中に部分的，周期的にのみ挿入し，線路の他の大部分は比較的製作の容易な均一誘電体薄膜からなるものを考える.

解析の結果，周波数とは無関係に線路定数のみによつて，伝播条件（あるいは，遮断条件）が定まること，および不均一薄膜部の長さ以外の線路定数を一定としたとき，膜面と平行な方向に最も効果的に電磁界の収束を行い得る条件（最適収束条件）があることが明らかとなつた．そして，数値的に検討した結果，この最適収束条件のもとでは，不均一薄膜部と均一薄膜部との長さの比を1/10 以下程度にえらんでも，不均一誘電体薄膜のきわめてわずかな誘電率分布の変化によつて，膜面と平行な方向に，顕著な収束効果が得られることがわかつた.

さらに，数値計算の結果，光波領域における誘電体損失にもとづく減衰定数は，$\tan\delta = 10^{-3}$[1] と仮定すれば，１～２（dB/km）となり，きわめて低損失の伝送が少くとも理論的には可能であることが明らかとなつた.

2. 伝送特性の理論的解析

本文では，均一薄膜部の誘電率の値は，不均一薄膜部の中心における誘電率に等しく，かつ，不均一薄膜部の誘電率分布の変化はきわめてゆるやかであると仮定する．したがつて，界分布の存在する部分（後でわかるように，これは線路の中心軸附近に限られる）では，均一および不均一薄膜部の誘電率の差はきわめてわずかである．したがつて，両誘電体薄膜部の接合面における反射波は，ほとんど無視することができる．[9]

そこで，以下の解析では，反射波を無視し，また，すべての計算は，1次近似の範囲で行う．

2．1　レンズ収束効果を有する不均一誘電体薄膜部内の電磁界

図1に示すように，（x，y，z）なる直交座標系の原点を，不均一薄膜部の中心にとる．膜厚を2d，膜長をT_aとし，誘電率分布は，xおよびz方向には一様で，y方向に，

$$\varepsilon_a(y) = \varepsilon(0)\left\{1-\left(\frac{\pi y}{L}\right)^2\right\} \qquad (1)$$

なる変化をするものとする．ここで，Lはy方向の誘電率の変化率をきめる定数を表わす．

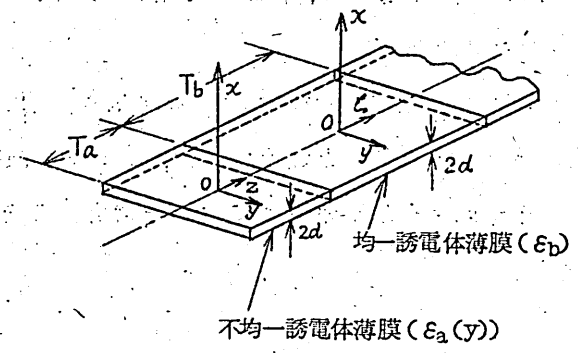


図1　周期的に収束効果を有する誘電体薄膜表面波線路

以下の解析では，膜厚は，自由空間波長λ_0にくらべて十分に薄く，また，誘電率の変化はきわめてゆるやかであるとし，

$$\begin{cases} d/\lambda_0 \ll 1 & (2A) \\ \lambda_0/L \ll 1 & (2B) \end{cases}$$

と仮定する．

電磁界成分を，E_{ax}，E_{az}，H_{ay}，H_{az}，および$E_{ay} = H_{ax} = 0$とし，$e^{-j\omega t}$なる時間依存を仮定すると，Maxwellの方程式から(2B)が成立するとき，H_{ay}に対し，次のスカラー波動方程式が得られる．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) H_{ay} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon(0)\left\{1-\left(\frac{\pi y}{L}\right)^2\right\} H_{ay} = 0 \quad (3)$$

式(3)を解くと，

$$H_{ay} = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} u_a x \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{j\pi\left\{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{L}-\frac{2N_a}{\lambda_0}\right\}z} \cdot e^{-\frac{y^2}{w_a^2}} H_{e\nu}\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{W_a}\right) \quad (4)$$

が得られる．式(4)は，モード次数νに対し，

$$\nu\lambda_0/L \ll 1 \quad (5)$$

を仮定して得られる近似解である．[9]

ここで

$$N_a = \sqrt{\varepsilon^*(0) - u_a^2/k_0^2} \quad (6)$$

$$L = N_a L/\sqrt{\varepsilon^*(0)} \quad (7)$$

$$W_a = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda_0 L}{\sqrt{\varepsilon^*(0)}}} \quad (8)$$

$$k_0^2 = (2\pi/\lambda_0)^2 \quad (9)$$

である．W_a は，$T_a = \infty$ なる場合のスポットサイズを表わし，$H_{e\nu}(Y)$ は，ν 次のHermite 多項式である．また u_a は，x方向の位相定数を表わす．$Z = 0$ において

$$H_{ay} = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} u_a x \; e^{-\frac{y^2}{s_a^2}} \; He_p\left(\frac{\sqrt{2}y}{s_a}\right) \tag{10}$$

とおくと，式（4）の展開係数 A_ν は，Gauss-Hermite 多項式の直交性によつて，

$$A_\nu = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\, 2^\nu \nu!\, W_a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2\left(\frac{1}{s_a^2}+\frac{1}{w_a^2}\right)} He_p\left(\frac{\sqrt{2}\xi}{S_a}\right) He_\nu\left(\frac{\sqrt{2}\xi}{W_a}\right) d\xi \tag{11}$$

と表わされる．

式（11）を（4）に代入し，ν に関する級数和と，ξ に関する積分の順序を入れかえる．そして，ν に関する級数和を求め，ついで，ξ に関する積分 を実行すると，[9],[10] 結局，H_{ay} は，つぎのように求められる．

$$H_{ay} = \frac{s_a}{\sqrt{\rho_a}} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} u_a x \cdot e^{-\frac{y^2}{\rho_a^2}} \cdot He_p\left(\frac{\sqrt{2}y}{\rho_a}\right) \cdot e^{-j\left[k_0 N_a\left(Z-\frac{y^2}{2R_a}\right)-\left(p+\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{W_a^2}{S_a^2}\tan\frac{\pi Z}{L}\right)\right]} \tag{12}$$

ただし，

$$\rho_a = S_a\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\frac{W_a^4}{S_a^4}+\left(1-\frac{W_a^4}{S_a^4}\right)\cos\frac{2\pi Z}{L}\right\}} \tag{13}$$

$$R_a = \frac{L}{\pi}\cdot\frac{2(\rho_a/S_a)^2}{\left(1-W_a^4/S_a^4\right)\sin\frac{2\pi Z}{L}} \tag{14}$$

であり，S_a は，$Z=0$ なる面におけるスポットサイズを表わす．

他の電磁界成分は，式(12)をMaxwell の方程式に代入することによつて求められる．

2．2 均一誘電体薄膜部内の電磁界

図1に示すように，均一薄膜部の中心を原点とする(x, y, ζ) なる直交座標系を新らたに考える．

膜厚を$2d$（ただし，$d/\lambda_0 \ll 1$）とし，膜長をT_b とする．誘電率は，すべての方向に一様で

$$\varepsilon_b = \varepsilon(0) \tag{15}$$

で与えられるとする．また，電磁界成分をE_{bx}, E_{bz}, H_{by}, H_{bz} および $E_{by}=H_{bx}=0$ とすれば，これは，前節で得られた結果から，つぎのようにして直ちに求められる．すなわち，$L\to\infty$（$L\to\infty$）なる極限計算を行い，$\varepsilon_a(y)$ および Z を，それぞれ，$\varepsilon(0)$ および ζ におきかえる．さらに，u_a, R_a, ρ_a, S_a および N_a の代りに，それぞれ，u_b, R_b, ρ_b, S_b および N_b と書きかえればよい．

磁界のy方向成分 H_{by} のみを書くと，

$$H_{by} = \frac{B_p S_b}{\sqrt{\rho_b}} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} u_b x \; e^{-y^2/\rho_b^2} \; He_p\left(\frac{\sqrt{2}y}{\rho_b}\right) \cdot e^{-j\left(k_0 N_b(\zeta - y^2/2R_b) - (p+1/2)\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{k_0 N_b S_b^2}\right)\right)} \tag{16}$$

となる．

ただし，

$$\rho_b = S_b\sqrt{1+\left(\frac{2\zeta}{k_0 N_b S_b^2}\right)^2} \tag{17}$$

$$\begin{cases} R_b = -\dfrac{k_o^2 N_b^2 S_b^4}{4\zeta}\left\{1+\left(\dfrac{2\zeta}{k_o N_b S_b^2}\right)^2\right\} & (18) \\ N_b = \sqrt{\varepsilon^*(0)-u_b^2/k_o^2} & (19) \\ \zeta = Z-\dfrac{T_a+T_b}{2} & (20) \end{cases}$$

である．ここで，u_b はx方向の位相定数を表わし，S_b は，$\zeta=0$ なる面における スポットサイズを表わす．また，B_p は任意定数を表わす．

2．3　誘電体薄膜外（自由空間）における電磁界

(a)　$|Z| \leqq T_a/2$ なる区間における電磁界

電磁界成分を，$E_{ax}^{(0)}$，$E_{ay}^{(0)}$，$E_{az}^{(0)}$，$H_{ax}^{(0)}$，$H_{ay}^{(0)}$ および $H_{az}^{(0)}$ と表わし，磁界のy方向成分 $H_{ay}^{(0)}$ について考える．付録で導いた，表面波のビームモード表示，（A・6）を用い，$|x|=d$ における境界条件 $H_{ay}=H_{ay}^{(0)}$ を考慮すると，$H_{ay}^{(0)}$ は，つぎのように表わされる．

$$H_{ay}^{(0)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{A_\nu^{(0)} e^{-j\pi\left(\frac{2N_a}{\lambda_o}-\frac{1}{2L}\right)Z} e^{j\frac{\pi\nu Z}{L}} e^{-\beta_{t\nu}(|x|-d)} \cdot \frac{1}{W_{a\nu}^+} e^{-\frac{y^2}{W_{a\nu}^{+2}}} \cdot \left[\frac{W_{a\nu}^-}{W_{a\nu}^+}\right]^\nu He_\nu\left(\frac{\sqrt{2}\,W_a y}{W_{a\nu}^+ W_{a\nu}^-}\right)\right\} \quad (21)$$

ただし，

$$W_{a\nu}^{\pm} = \sqrt{W_a^2 \pm 2(|x|-d)/\beta_{t\nu}} \quad (22)$$

$$\beta_{t\nu} = \sqrt{\left\{\pi\left(\frac{2N_a}{\lambda_0} - \frac{1}{2L}\right) - \frac{\pi\nu}{L}\right\}^2 - k_0^2} \qquad (23)$$

である.

式(5)の仮定によつて, $\beta_{t\nu}$ は,

$$\beta_{t\nu} \fallingdotseq \sqrt{\pi^2\left(\frac{2N_a}{\lambda_0} - \frac{1}{2L}\right)^2 - k_0^2} \equiv k_{at} \qquad (24)$$

と近似でき, ν に無関係になる.

したがつて, 式(21)において, 位相項以外の項に含まれる $\beta_{t\nu}$ に対し, 式(24)の近似を適用すると, $H_{ay}^{(0)}$ は

$$H_{ay}^{(0)} = e^{-k_{at}(|x|-d)}\, e^{-j\pi\left(\frac{2N_a}{\lambda_0} - \frac{1}{2L}\right)Z}\, e^{-y^2/W_a^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(0)}\, e^{j\frac{\pi\nu Z}{L}} \left[\frac{W_a^-}{W_a^+}\right]^\nu He_\nu\left(\frac{\sqrt{2}W_a}{W_a^+ W_a^-}y\right) \qquad (25)$$

となる. ただし,

$$W_a^{\pm} = \sqrt{W_a^2 \pm 2(|x|-d)/k_{at}} \qquad (26)$$

である.

さて, $Z=0$ において

$$H_{ay}^{(0)} = C_p^{(0)}\, e^{-k_{at}(|x|-d)}\, \frac{e^{-y^2/S_a^{+2}}}{S_a^+} \left[\frac{S_a^-}{S_a^+}\right]^p He_p\left(\frac{\sqrt{2}S_a y}{S_a^+ S_a^-}\right) \qquad (27)$$

とおく. ただし,

$$S_a^{\pm} = \sqrt{S_a^2 \pm 2(|x|-d)/k_{at}} \qquad (28)$$

であり, $C_p^{(0)}$ は任意定数とする.

式(27)と(21)とから，展開係数$A_a^{(0)}$を求め，2．1節で式(12)を得たのと全く同じ方法により$H_{ay}^{(0)}$を求めると

$$2(|x|-d)/k_{at} \ll W_a^2,\ S_a^2 \tag{29}$$

なる仮定のもとに

$$H_{ay}^{(0)} \fallingdotseq \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} u_a d \frac{S_a}{\sqrt{\rho_a}} e^{-k_{at}(|x|-d)} e^{-y^2/\rho_a^2} He_p\left(\frac{\sqrt{2}y}{\rho_a}\right)$$

$$\cdot e^{-j\left[k_o N_a\left(Z-\frac{y^2}{2R_a}\right)-\left(p+\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{W_a^2}{S_a^2}\tan\frac{\pi Z}{L}\right)\right]} \tag{30}$$

となる．ここで，任意定数$C_p^{(0)}$は，$|x|=d$における境界条件，$H_{ay}=H_{ay}^{(0)}$によつて消去してある．

他の電磁界成分は，式(30)とMaxwellの方程式とを用いて計算できる．

(b)　$|\zeta| \leqq T_b/2$なる区間における電磁界

電磁界成分を，それぞれ$E_{bx}^{(0)}$，$E_{by}^{(0)}$，$E_{bz}^{(0)}$，$H_{bx}^{(0)}$，$H_{by}^{(0)}$および$H_{bz}^{(0)}$と表わす．これらは，前節2．3(a)で述べたのと同様の方法によつて求めることができる．磁界のy方向成分$H_{by}^{(0)}$は，つぎのように求められる．

$$H_{by}^{(0)} = \frac{B_p S_b}{\sqrt{\rho_b}} \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} u_b d\ e^{-k_{bt}(|x|-d)} e^{-y^2/\rho_b^2} He_p\left(\frac{\sqrt{2}y}{\rho_b}\right)$$

$$\cdot e^{-j\left[k_o N_b\left(\zeta-\frac{y^2}{2R_b}\right)-\left(p+\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{k_o N_b S_b^2}\right)\right]} \tag{31}$$

ただし，

$$2(|x|-d)/k_{bt} \ll W_a^2,\ S_b^2 \tag{32}$$

と仮定した．ここで

$$k_{bt} = \sqrt{\pi^2\left(\frac{2N_b}{\lambda_b} - \frac{1}{2L}\right)^2 - k_o^2} \qquad (33)$$

を表わす.

他の電磁界成分は, 式(31)とMaxwell の方程式とから決定できる.

2．4　境界条件の適用と未知量の決定

誘電体薄膜と自由空間との境界面, $|x| = d$, および不均一薄膜部と, 均一薄膜部との境界面, $Z = T_a/2$, ($\zeta = -T_b/2$) において, 電磁界の接線成分が等しくなければならないということから, N_a, N_b, u_a, u_b, k_{at}, k_{bt}, L, S_a, S_b, および B_p 等の未知量を決定することができる.

まず, $|x| = d$ における境界条件から, つぎの特性方程式が得られる.

$$k_{at} \fallingdotseq \frac{u_a}{\varepsilon^*(0)} \tan u_a d \qquad (34)$$

および

$$k_{bt} \fallingdotseq \frac{u_b}{\varepsilon^*(0)} \tan u_b d \qquad (35)$$

ただし, 式(34)および(35)は, 界分布の集中範囲を

$$(\pi y/L)^2 \ll 1 \qquad (36)$$

と仮定して導かれた式である. また $\varepsilon^*(0) = \varepsilon(0)/\varepsilon_o$ である.

つぎに, $Z = T_a/2$ ($\zeta = -T_b/2$) における境界条件から次の関係式を得る.

$$\begin{cases} k_{at} = k_{bt} & (37) \\ R_a\big|_{z=T_a/2} = R_b\big|_{\zeta=-T_b/2} & (38) \end{cases}$$

$$\rho_a\Big|_{z=\overline{T_a/2}} \qquad \rho_b\Big|_{\zeta=-T_b/2} \tag{39}$$

$$B_p = S_a/S_b \tag{40}$$

式(34),(35)および(37)に，式(6),(19),(24)および(33)を代入し，式(2A)および(2B)の仮定を考慮すると，N_a, N_b, u_a, u_b, k_{at}, k_{bt}, およびLは，それぞれ，つぎのように求められる．

$$N_a = N_b \fallingdotseq 1 + \frac{k_o^2 d^2}{2}\left(1-1/\varepsilon^*(0)\right)^2 \tag{41}$$

$$u_a = u_b \fallingdotseq k_o\sqrt{\varepsilon^*(0)-1} \tag{42}$$

$$k_{at} = k_{bt} \fallingdotseq k_o^2 d\left(1-1/\varepsilon^*(0)\right) \tag{43}$$

$$L \fallingdotseq \frac{L}{\sqrt{\varepsilon^*(0)}}\left\{1+\frac{k_o^2 d^2}{2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^*(0)}\right)^2\right\} \tag{44}$$

さらに，式(38)および(39)にそれぞれ，式(14),(18)および式(13),(17)を代入すると，S_aおよびS_bが求められ，式(40)からB_pが定まる．すなわち

$$S_a = W_a\sqrt[4]{\frac{\eta + T_b\cot(T_a/\eta)}{\eta - T_b\tan(T_a/\eta)}} \tag{45}$$

$$S_b = W_a\sqrt[4]{\left\{1+(T_b/\eta)\cot(T_a/\eta)\right\}\left\{1-(T_b/\eta)\tan(T_a/\eta)\right\}} \tag{46}$$

$$B_p = 1/\sqrt{1-(T_b/\eta)\tan(T_a/\eta)} \tag{47}$$

となる．

ただし

$$\eta = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{L}{\sqrt{\varepsilon^*(0)}}\left\{1+\frac{k_o^2 d^2}{2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^*(0)}\right)^2\right\} \tag{48}$$

である.

以上で未知量が全部求められたので，ここで，式(29)および(32)の仮定，および特性方程式(34)および(35)を導くときに用いた式(36)の仮定について検討しておく．式(29)および(32)に，式(44)，(45)および(46)を代入すると，

$$\frac{d}{\lambda_0}\cdot\frac{(|x|-d)}{\lambda_0} \ll 2\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)^2\frac{L}{\lambda_0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^*(0)}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^*(0)}\right) \qquad (49)$$

$$\frac{d}{\lambda_0}\cdot\frac{(|x|-d)}{\lambda_0} \ll 2\sqrt{\frac{\eta+T_b\cot(T_a/\eta)}{\eta-T_b\tan(T_a/\eta)}}\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)^2 \cdot\frac{L}{\lambda_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^*(0)}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^*(0)}\right) \qquad (50)$$

および

$$\frac{d}{\lambda_0}\cdot\frac{(|x|-d)}{\lambda_0} \ll 2\sqrt{\left\{1+\frac{T_b}{\eta}\cot\left(\frac{T_a}{\eta}\right)\right\}\left\{1-\frac{T_b}{\eta}\tan\left(\frac{T_a}{\eta}\right)\right\}} \cdot\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)^2\cdot\frac{L}{\lambda_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^*(0)}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^*(0)}\right) \qquad (51)$$

となる．また，式(36)に(44)を代入すると

$$(y/W_a)^2 \ll \frac{L}{\lambda_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^*(0)}}\left\{1+\frac{k_0^2d^2}{2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^*(0)}\right)^2\right\}^2 \qquad (52)$$

となる．式(49)，(50)，(51)および(52)の仮定は，後の節で述べる数値計算の結果によれば，全伝送電力の99.9％を含む範囲内では，十分よい近似で成立していることが確かめられる．

2．5　伝播条件と遮断条件

前節で求めたように，$Z=0$ および $\zeta=0$ におけるスポットサイズ，S_a および S_b は，それぞれ，式（45）および（46）で与えられる．

伝播条件および遮断条件は，S_a および S_b が，それぞれ，実数値および虚数値をとる条件から知ることができる．S_a および S_b が実数であるためには，次の不等式が満足されなければならない．

$$\left\{T_b+\eta\tan\left(T_a/\eta\right)\right\}\left\{\eta-T_b\tan\left(T_a/\eta\right)\right\}/\tan\left(T_a/\eta\right)\geqq 0$$

したがつて，

$$T_b/\eta \leqq -\tan\left(T_a/\eta\right) \text{ かつ } \tan\left(T_a/\eta\right)<0 \qquad (53)$$

または，

$$T_b/\eta \leqq \cot\left(T_a/\eta\right) \text{ かつ } \tan\left(T_a/\eta\right)>0 \qquad (54)$$

でなければならない．

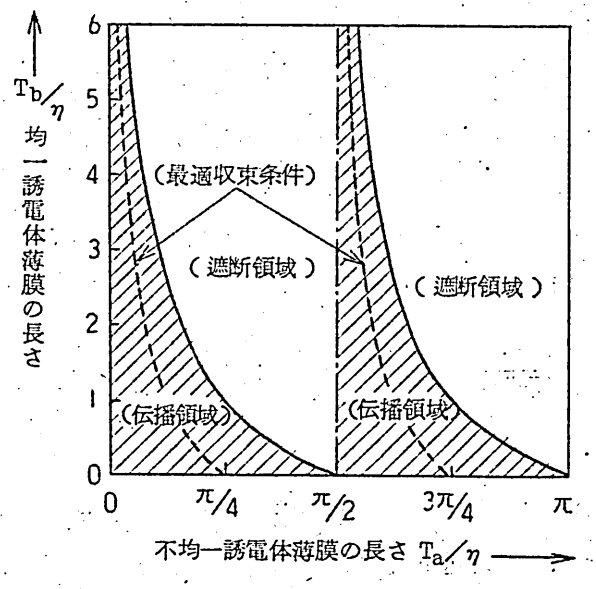


図２　伝播領域および最適収束条件と膜長との関係

式(53)および(54)を $0 \leqq T_a/\eta \leqq \pi$ なる範囲で図示すると，図2のようになる．斜線を施した部分が伝播可能な領域である．

2．6　電力集中度と最適収束条件

$|z| \leqq T_a/2$ なる区間において，薄膜内部における $|x| \leqq d$，$|y| \leqq y_A$ なる範囲に含まれる伝送電力を，$P_a(d, y_A)$ とし，薄膜外部における $d \leqq |x| \leqq X_{AO}$，$|y| \leqq Y_{AO}$ なる範囲に含まれる伝送電力を $P_{ao}(x_{AO}, y_{AO})$ とする．また，線路の中心軸を中心とし，$|x| \leqq x_a$，$|y| \leqq y_a$ なる範囲に含まれる伝送電力と，全伝送電力との比を電力集中度 $\gamma_a(x_a, y_a, z)$ と定義する．

このように定義すると，$\gamma_a(x_a, y_a, z)$ は

$$\gamma_a(x_a, y_a, z) = \frac{P_a(d, y_a) + P_{ao}(x_a, y_a)}{P_a(d, \infty) + P_{ao}(\infty, \infty)} \tag{55}$$

と表わされる．

式(2A)，(2B)，(49)，(50)，(51)および(52)の仮定を考慮し，最低次の表面波姿態について式(55)を計算すると

$$\gamma_a(x_a, y_a, z) = \left\{ 1 - e^{-8\pi^2\left(1 - 1/\varepsilon^*(0)\right)\left(d/\lambda_0\right)\left(\frac{|x_a| - d}{\lambda_0}\right)} \right\} \cdot F\left(\frac{\sqrt{2}\, y_a}{\rho_a}\right) \tag{56}$$

となる．ただし，

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2}\, ds \tag{57}$$

である．

$|\zeta| \leqq T_b/2$ なる区間においても，上記と同様の考えで，電力集中度

$\gamma_b(x_b, y_b, \zeta)$ を定義し，最低次表面波姿態について，これを求めると，

$$\gamma_b(x_b, y_b, \zeta) = \left\{ 1 - e^{-8\pi^2\left(1-\frac{1}{\varepsilon^*(0)}\right)\left(\frac{d}{\lambda_0}\right)\left(\frac{|x_b|-d}{\lambda_0}\right)} \right\} F\left(\frac{\sqrt{2}\,y_b}{\rho_b}\right) \tag{58}$$

となる．

ところで，$\gamma_a(\infty, y_a, z) = 0.999$ および $\gamma_b(\infty, y_b, \zeta) = 0.999$ となるy方向の距離をそれぞれ，Y_a および Y_b とすると，

$$Y_a = 2.327\ \rho_a \tag{59}$$

$$Y_b = 2.327\ \rho_b \tag{60}$$

となる．

式(59)より，Y_a の最大値 $Y_{a\,max}$ は，式(13)および(45)からわかるように，T_b/η を一定としたとき，T_a/η を

$$\cot(T_a/\eta) = T_b/\eta + \sqrt{T_b^2/\eta^2 + 1} \tag{61}$$

と選らんだとき，最も小さくなり，その値は

$$(Y_{a\,max})_{min} = 2.327 W_a \sqrt{\cot(T_a/\eta)} \tag{62}$$

となる．

また，このときの Y_b の値は，

$$(Y_b)_{min} = 2.327\, W_a \left(1 + T_b^2/\eta^2\right)^{1/4} \sqrt{1 + \frac{4\zeta^2}{T_b^2 + \eta^2}} \tag{63}$$

となる．

したがつて，均一薄膜部の長さ，T_b および定数，η が与えられたとき，不均一薄膜部の長さ，T_a を式(61)を満足するようにえらぶと，y方向の

収束が最も有効に行われることになる．その意味で式（61）を，最適収束条件と呼ぶことにする．

2．7　誘電体損失にもとづく減衰定数

界分布を表わす式の位相項における$\varepsilon^*(0)$を，$\varepsilon^*(0)(1-j\tan\delta)$とおきかえることによつて，誘電体損失にもとづく減衰定数αを求めることができる．

式（2A），（2B）および（52）の仮定を考慮し，さらに，

$$\left.\begin{aligned} T_a &\ll \frac{2L}{\pi\sqrt{\varepsilon^*(0)}\ \tan\delta_a} \\ T_b &\ll \frac{4L}{\pi\sqrt{\varepsilon^*(0)}\ \tan\delta_b} \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

を仮定すれば，αは近似的に

$$\alpha = \frac{8\pi^3}{\lambda_0^3}\cdot\frac{d^2}{\varepsilon^*(0)}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^*(0)}\right)\left(\frac{T_a\tan\delta_a + T_b\tan\delta_b}{T_a+T_b}\right) \qquad (65)$$

となる．ただし，$\tan\delta_a$および$\tan\delta_b$は，それぞれ，不均一薄膜部および均一薄膜部の誘電体損失角を表わす．

特に，$\tan\delta_a = \tan\delta_b = \tan\delta$なる場合には，

$$\alpha \doteqdot \frac{8\pi^3}{\lambda_0^3}\ \frac{d^2}{\varepsilon^*(0)}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^*(0)}\right)\tan\delta \qquad (66)$$

となり，伝送方向に一様な誘電率分布を有する誘電体薄膜表面波線路の減衰定数を表わす式[1],[4],[5],[6],[7],[8]と一致する．

3. 検　　討

数値的に検討すれば明らかなように，膜面と垂直な方向（x方向）に関して最低次の変化を有する表面波姿態では，yおよびz方向の電界成分，および，xおよびz方向の磁界成分は，式（2A）および（2B）の仮定のもとでは，他の電磁界成分にくらべ十分に小さい．したがつて，電気力線および磁力線は，それぞれ，膜面とほぼ垂直な方向（x方向）およびほぼ平行な方向（y方向）に向いている．すなわち，電磁界の模様は，先に提案された，連続的なレンズ収束効果を有する不均一誘電体薄膜表面波線路[4],[5],[6],[7],[8]におけるものとほぼ同じになる．

図2は，伝播領域と遮断領域を，$0 \sim \pi$なる範囲のT_a/ηに対して示したものである：ηなる定数は，式（48）からわかるように，波長λ_0および膜厚$2d$にも依存するが，$d/\lambda_0 \ll 1$なる仮定（式（2A））を考慮すれば，これらの値には無関係となる．したがつて，不均一および均一薄膜部のそれぞれの長さ，T_aおよびT_bと，線路の中心における比誘電率$\varepsilon^*(0)$，および不均一薄膜部の誘電率の変化率をきめるパラメータ，L等の線路定数を選定することによつて，周波数に無関係に，伝播可能な条件を十分に満足させることができる．

伝送姿態について考察すると，膜面と平行な方向（y方向）に関しては，常に多重姿態となるが，膜厚$2d$を，$2d < \lambda_0/2\sqrt{\varepsilon^*(0)-1}$となるようにすれば，膜面と垂直な方向（x方向）に高次の変化を有する姿態は，すべて発散領域に入る．したがつて，x方向に関しては最低次の姿態のみを，表面波として伝播させることが可能である．

電力集中範囲の計算例を示すと，図3，図4，図5，図6および図7のようになる．図3および図4は，それぞれ，均一薄膜部の存在する$|\zeta| \leqq T_b/2$なる区間，および不均一薄膜部の存在する$|z| \leqq T_a/2$なる区間における

図３　均一誘電体薄膜の存在する区間における電力集中薄囲

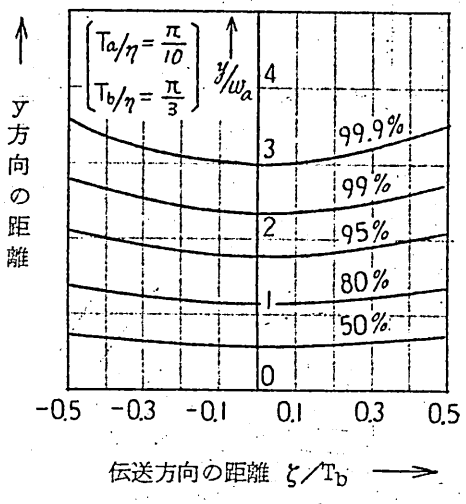
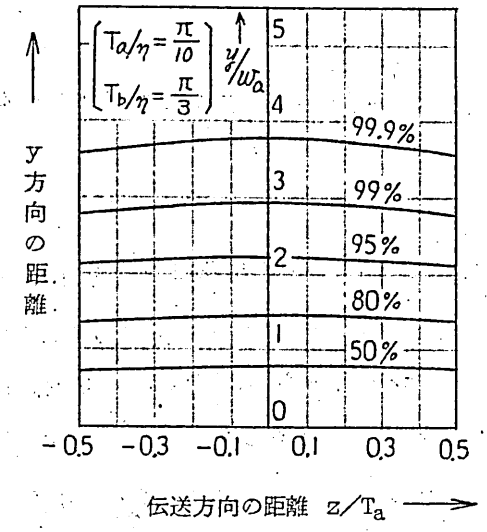


図４　不均一誘電体薄膜の存在する区間における電力集中範囲
（$0 < T_a/\eta \leqq \pi/2$ なる場合の例）



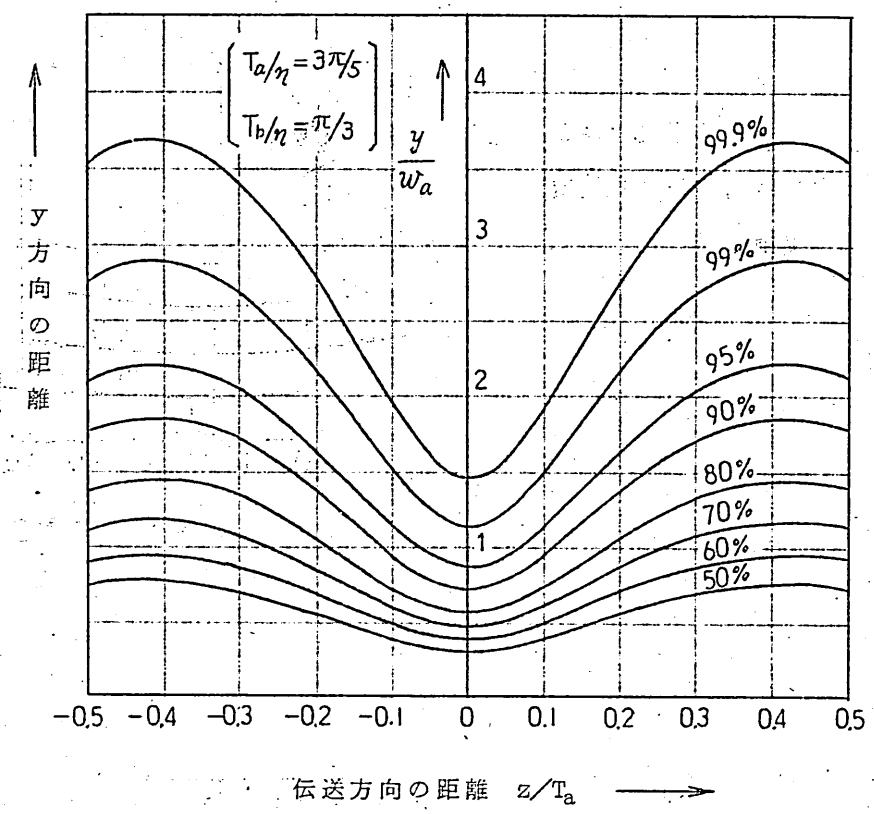


図 5. 不均一誘電体薄膜の存在する区間における電力集中範囲（$\pi/2 < T_a/\eta \leqq \pi$ なる場合の例）

y方向の電力集中範囲の計算例を示したものである．ただし，電力集中度 $\gamma_b(\infty, y_b, \zeta)$ あるいは，$\gamma_a(\infty, y_a, z)$ をパラメータにとり，$T_a/\eta = \pi/10$ $T_b/\eta = \pi/3$ と選らんである．図5は，図4において T_a/η の値を $3\pi/5$ とした場合の電力集中範囲を示す．図6は，$z = 0$ または $\zeta = 0$ なる面における x，y 両方向の電力集中範囲を示したものである．この図で，$\gamma(0)$ は，$\gamma_a(x_a, y_a, 0)$ あるいは $\gamma_b(x_b, y_b, 0)$ を表わし，また，S は，S_a ま

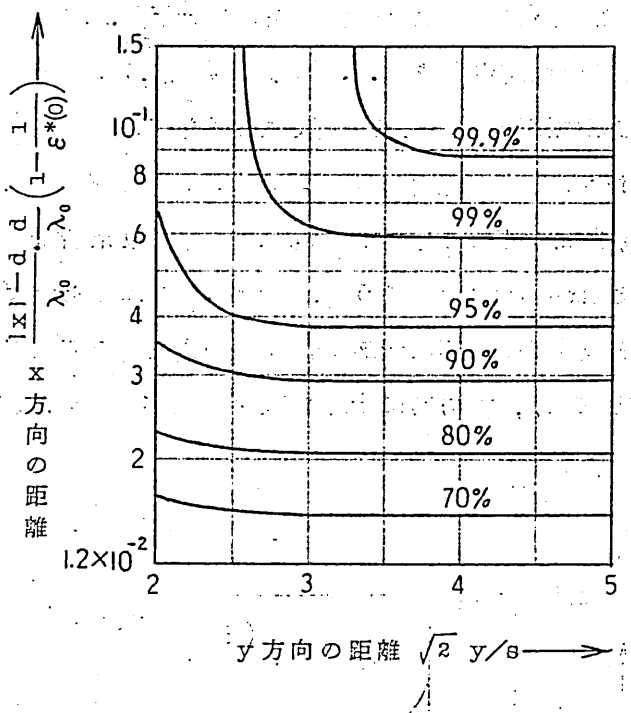


図6．不均一誘電体薄膜あるいは均一誘電体薄膜の中心面（$z=0$ or $\zeta=0$）における電力集中範囲

たはS_bを表わす．図7は，$z=0$または$\zeta=0$なる面において，全伝送電力の99.9％を含むxy両方向の範囲を，比誘電率$\varepsilon^*(0)$をパラメータにとつて示したものである．

2．6節で述べたように，全伝送電力の99.9％を含むy方向の最大距離$Y_{a\,max}$は，T_b/ηの値を一定にしたとき，T_a/ηの値に関して最小値をとる．この関係を示すと図8のようになる．均一薄膜部の長さ，T_bが大きい程，電磁界のy方向の収束を最も効果的に行うための条件（最適収束条件）が厳しくなり，また，収束効果が低下することがわかる．なお，$(Y_{a\,max})_{min}$を与えるT_a/ηとT_b/ηの関係（式(61)）は，図2に点線で示されている．

誘電体損失にもとづく減衰定数αの，光波領域における計算例を図9に示

す．この例では，$\tan\delta_a = \tan\delta_b = 10^{-8}$ と仮定し，中心の比誘電率 $\varepsilon^*(0)$ をパラメータにとつて示してある．膜厚が厚い程，薄膜の比誘電率が大きい程，また，波長が短かい程，減衰定数は大きくなる．

光波領域における数値設計例を表1に示す．表1の例では，T_a/η の値を，$0 \leqq T_a/\eta \leqq \pi/2$ なる範囲において，最適収束条件を満足するようにえらんである．これからわかるように，不均一薄膜部と均一薄膜部の長さの比を1/10 以下に選らび，不均一誘電体薄膜の誘電率の変化がきわめてわずかであると仮定しても，y方向に十分な収束効果が得られる．波長10μ の例

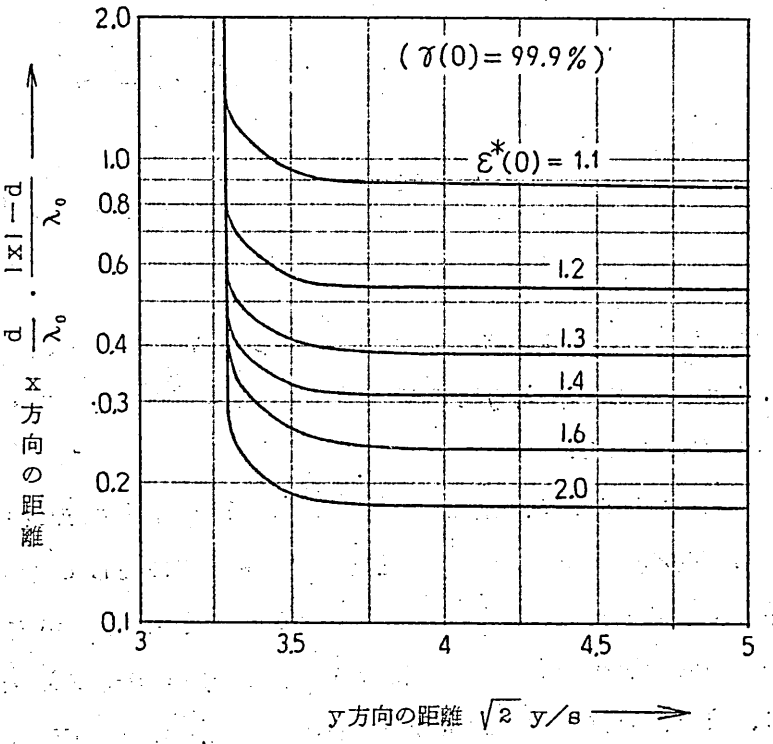


図7　全伝送電力の99.9％が含まれる電力集中範囲（$z=0$ or $\zeta=0$ なる面における例）．

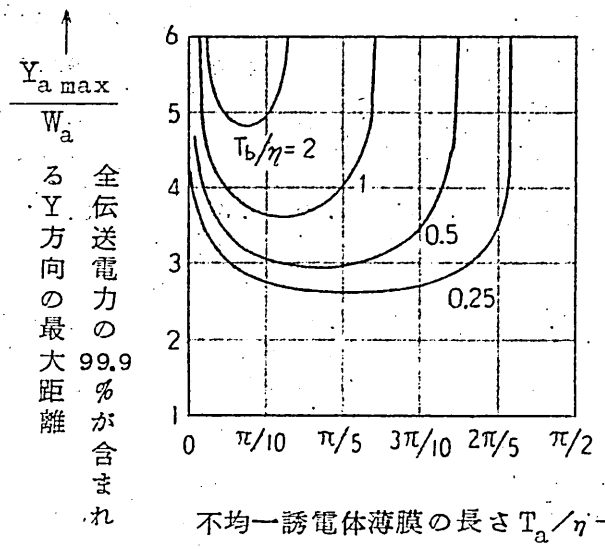


図8　全伝送電力の99.9％が含まれるy方向の最大距離と誘電体薄膜の長さとの関係

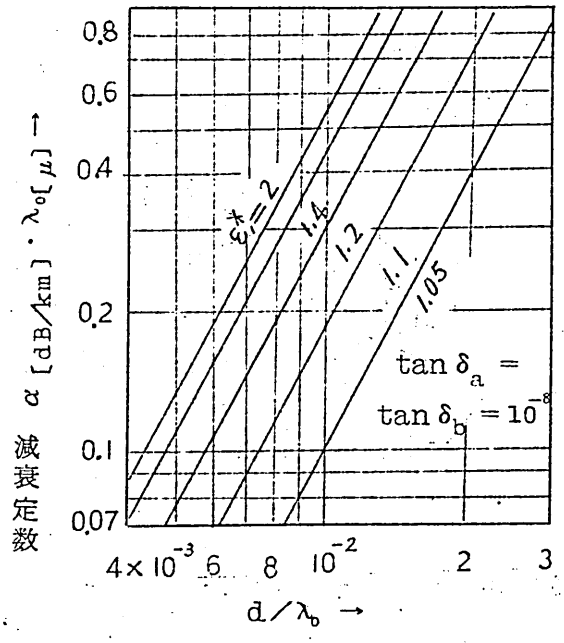


図9　光波領域における誘電体損失による減衰定数

表１．数値設計例（$\tan\delta = 10^{-8}$）

波長 λ_0	λ_0/L	中心の比誘電率 $\varepsilon^*(0)$	膜厚 2d	膜長 T_a	膜長 T_b	減衰定数 α	全伝送電力の99.9％を含む範囲（2x×2y）
10 (μ)	10^{-6}	2.0	1 (μ)	0.856 (m)	11.25 (m)	1.35 (dB/km)	0.071×33.8 (mm) (mm)
1 (μ)	2×10^{-7}	1.2	0.05 (μ)	0.557 (m)	7.33 (m)	1.83 (dB/km)	0.042×7.22 (mm) (mm)

では，線路の周囲，0.071mm×33.8mmの範囲内に，また，波長１μの例では，0.042mm×7.22mmの範囲内に，全伝送電力の99.9％を含むようにすることができる．したがつて，図１０に示すような支持構造物によつて，

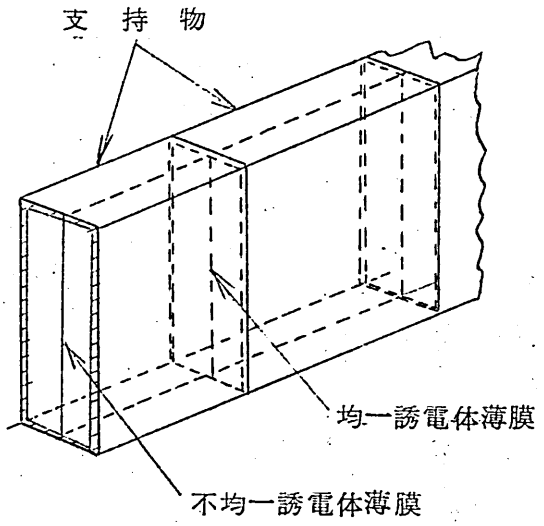


図１０．周期的に収束効果を有する誘電体薄膜表面波線路の構造

伝送電磁界に影響を与えることなく，誘電体薄膜を支持することができ，同時に外界との遮へいを行うことも容易にできる．

4．あ と が き

短ミリ波以下の波長領域における低損失伝送系の1つとして，レンズ収束効果を有する不均一誘電体薄膜部と，誘電率の一様な均一誘電体薄膜部とを，伝送方向に交互に配列することによつて構成される周期的なレンズ収束効果を有する誘電体薄膜表面波線路を提案し，その基礎的伝送特性を理論的，数値的に検討した．その結果，不均一誘電体薄膜部に対して，製作の比較的容易な均一誘電体薄膜部の長さをかなり長く選んでも，膜面と平行な方向に対し，表面波電磁界の収束を十分に行い得ることが明らかとなつた．

今後に残された問題としては，曲がりによる損失，励振の方法，均一および不均一誘電体薄膜間の接続の問題等がある．これらについては，現在，引続き検討している．

謝　　辞

日頃から御指導いただく本学，板倉清保教授，ならびに，有益な御討論をいただいた板倉研究室の方々に深謝する．

参 考 文 献

(1) A.E.Karbowiak : "A close look at optical waveguides", Microwaves, 5, 7, p.37,(July,1966).

(2) H.Larsen : "Dielektrische Wellenleiter bei optischen Frequenzen", A.E.Ü., 19,10, p.535,(Oct., 1965).

(3) 杉正男, 中原恒雄 : "薄膜誘電体表面波伝送線路", 信学誌, 42, 8, p.731,(昭34－08).

(4) 熊谷信昭, 倉薗貞夫, 沢 新之輔 : "レンズ収束効果を有する不均一誘電体薄膜表面波線路", マイクロ波研資, FW67－4 (1967－04).

(5) 熊谷信昭, 倉薗貞夫, 沢 新之輔 : "短ミリ波, サブミリ波, 光波用低損失薄膜誘電体線路", 昭42連大, 1427.

(6) 熊谷信昭, 倉薗貞夫, 沢 新之輔 : "不均一誘電体薄膜表面波線路", 輻射科学研究会資料, (昭42－05).

(7) 熊谷信昭, 倉薗貞夫, 沢 新之輔, 吉川憲昭 : "不均一誘電体薄膜表面波線路", 信学誌掲載予定.

(8) 熊谷信昭, 倉薗貞夫, 吉川憲昭, 沢 新之輔 : "不均一誘電体薄膜表面波線路", マイクロ波研資, MW67－7 (1967－06).

(9) E.A.J. Marcatili : "Modes in a sequence of astigmatic lens-like focusers", B.S.T.J., 43, p.2887,(Nov.1964).

(10) Bateman and Harry : "Higher transcendental Functions", N.Y.McGraw-Hill, 2, p.194(1953).

(11) G.Goudau and Schwering : "On the guided propagation of electromagnetic wave beams",I.R.E., Trans., AP－9, 3, p.248 (May, 1961).

(12) F.Schwering : "Reiterative wave beams of rectangular

symmetry", A.E.Ü. 15, 12, p.555, (Dec. 1961).
(13) 中原恒雄：“平行平板間の電磁波ビームモードの導波伝送”, 信学誌, 47, 2, p.188,(1964-02).
(14) 中原恒雄, 倉内憲孝：“平行平板形電磁波ビーム伝送”. 信学誌, 50, 5, p.99,(1967-05).

付　録．　誘電体薄膜に沿う表面波ビーム の直交座標系における表示

自由空間における電磁界の座標成分を ϕ_0 とすると，直交座標系では，ϕ_0 は，つぎのスカラー波動方程式を満足する．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_0+k_0^2\phi_0=0 \qquad (A.1)$$

ただし

$$k_0^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0=(2\pi/\lambda_0)^2 \qquad (A.2)$$

である．

式(A.1)の解として，平面波，

$$e^{-j(\beta_0-a\pi\nu)z}\ e^{ju_0x}\ e^{jv_0y}$$

を重ね合わせて構成される

$$\phi_0=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_\nu(v_0)\,e^{-j(\beta_0-a\pi\nu)z}\,e^{ju_0x}\,e^{jv_0y}\,dv_0 \qquad (A.3)$$

を考える．ここで，u_0，v_0，および ν の間に，

$$u_0^2+v_0^2+(\beta_0-a\pi\nu)^2=k_0^2 \qquad (A.4)$$

なる関係があり，$g_\nu(v_0)$ は，任意のかたちにえらび得る重み関数を表わし，また，β_0 および a は，任意定数であるとする．

式(A.3)で与えられる ϕ_0 が，完全直交多項式で表わされるようにするためには，直交座標系では，$g_\nu(v_0)$ なる重み関数を，

$$g_\nu(v_0)=\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{2\pi}}A_\nu^{(0)}\,e^{-\frac{W_{a0}^2}{4}v_0^2}\,He_\nu\left(\frac{W_{a0}}{\sqrt{2}}v_0\right) \qquad (A.5)$$

なるGauss-Hermite関数にえらぶとよい.[11],[12],[13]

ただし，$A_\nu^{(0)}$およびW_{ao}は任意定数とする.

式(A.5)を(A.3)に代入し，式(A.4)によつてu_0を消去する.そして$v_0^2 \ll (\beta_0 - a\pi\nu)^2 - k_0^2$と仮定して，$v_0$に関する積分を行うと，

$$\phi_0 = e^{-j\beta_0 z} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ A_\nu^{(0)} e^{ja\pi\nu z} e^{-\beta_{t\nu} x} \frac{e^{-\frac{y^2}{W_{a\nu}^+}}}{W_{a\nu}^+} \left(\frac{W_{a\nu}^-}{W_{a\nu}^+} \right)^\nu \right.$$

$$\left. \cdot He_\nu \left(\frac{\sqrt{2}\, W_{ao}}{W_{a\nu}^+ W_{a\nu}^-} y \right) \right\} \qquad (A.6)$$

となる. ただし

$$\begin{cases} W_{a\nu}^{\pm} = \sqrt{W_{ao}^2 \pm 2x/\beta_{t\nu}} & (A.7) \\ \beta_{t\nu} = \sqrt{(\beta_0 - a\pi\nu)^2 - k_0^2} & (A.8) \end{cases}$$

である.

結局，式(A.6)は，x方向にほぼ指数関数的に減少する分布を持つた，互に独立な表面波のビームモードの和を示していることになる.

なお，式(A.6)は，y方向の位相定数が，横断面(x－y平面)内での位相定数にくらべ，十分に小さいという仮定のもとに導かれた近似的な表示式であり，その近似の限界は，$v_0^2 \ll \beta_{t\nu}^2$で与えられる.[14]

輻射科学研究会資料

超音波による屈折を利用した光ビームの走査.

中村　琢磨

末田　正

牧本　利夫

（大阪大学　基礎工学部）

1967年　12月1日.

1. 序言.

光ビームを走査するのに機械的な方法があるがこの場合、走査速度は機械系の周波数応答によって制限されてしまう。これを避ける方法の1つとして超音波を用いる方法がある。これには超音波の波長に比べて光ビームの幅が広い場合の超音波回折格子を利用するものと、超音波の波長に比べて光ビームの幅が狭い場合におこる屈折を利用するものとがある。これらの現象は1932年 Debye and Sears[1] および Lucas and Biguard 等によって最初に研究されて音の強さや音速の測定などに利用されてきたが最近、電気音響変換素子の発達やレーザ光の出現によって光ビームの制御に用いられるようになった。ここでは超音波による屈折を利用する方法について、まず従来から行なわれている進行波超

音波、定在波超音波を用いた方法[3]をのべ次に斜交する2つの超音波の作る擬似定在波を用いる方法を検討したのでその結果をのべる。擬似定在波の波長はもとの超音波の波長より長いので分解能を一定とすればもとの波長に等しくなるまで走査周波数を上げることができ、走査周波数を一定とすれば光ビーム幅を広げることができるので分解能をあげることができる。また2つの超音波の振幅および位相を加減することによって2次元的に走査できる可能性がある。

2. 進行波超音波による光ビームの走査

超音波が媒質中を伝搬すると圧力の変化をまず。進行波平面超音波の場合にはその圧力の変化は次式で表わすことができる。

$$P = P_{m1}\cos(\omega_s t - k_s x) \qquad (1-1)$$

ただし超音波は一方向へ伝搬するものとする。

P ：超音波による圧力の変化

P_{m1}：圧力変化の最大値

ω_s：超音波の角周波数

k_s：超音波の波数

この圧力の変化によって媒質の屈折率が変化するがその間の関係はLorentz-Lorenzの式として知られている。[4]

$$\Delta n = k\frac{(n^2-1)(n^2+2)}{6n}P \qquad (1-2)$$

ここで

Δn：媒質の屈折率の変化

n ：媒質の屈折率

k ：媒質の圧縮率

従って超音波の存在する媒質の屈折率は次のように表わすことができる。

$$n = n_0 + \Delta n = n_0 + n_{m1}\cos(\omega_s t - k_s x) \qquad (1-3)$$

ただし

n_0 ： 超音波が存在しないときの媒質の屈折率

$$n_{m1} = k\frac{(n^2-1)(n^2+2)}{6n}P_{m1} \qquad (1\text{-}4)$$

P_{m1} は次式によって求めることができる。

$$P_{m1} = (2\rho U W_a)^{1/2}$$

$$= (2\rho U \eta_{ea} W_e)^{1/2} \qquad (1\text{-}5)$$

ただし

ρ ： 媒質の密度

U ： 媒質中の音速

W_a ： 音の強さ

η_{ea} ： 電気音響変換効率

W_e ： 電気入力

媒質が水の場合についてこれらの値を計算すると音の強さが 2 watts/cm² のときには

$P_{m1} = 2.4$ atm , $n_{m1} = 4.4 \times 10^{-5}$ となる。

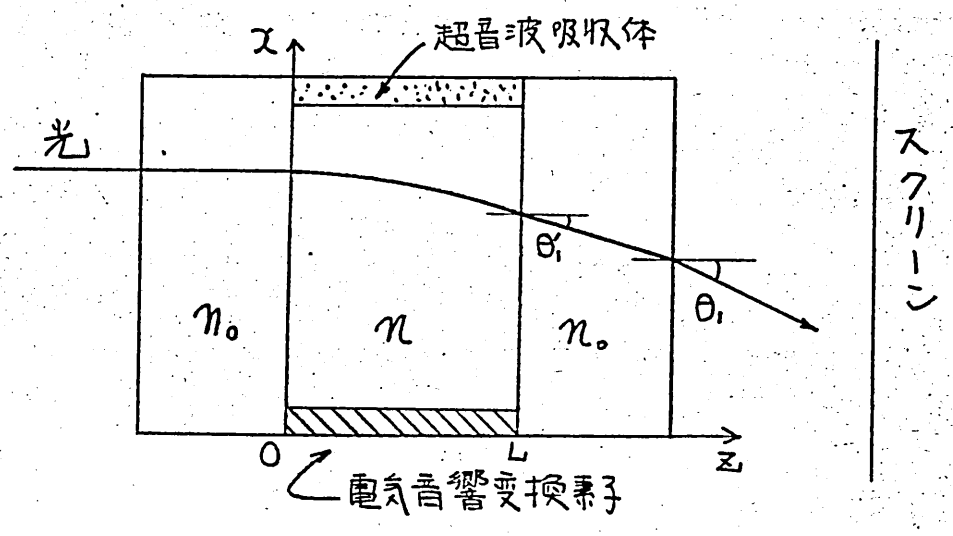


Fig. 1

Fig.1 のように z方向に長さ L を持った電気音響変換素子より出た超音波が x方向に伝搬して超音波吸収体に完全に吸収されているものとする。超音波の波長より充分細いビーム幅を持った光ビームが超音波の波面と平行な方向からこの超音波層に入射すると mirage 効果によって密度の大きい方へ曲げられる。Wiener によればその曲率半径 r は次式で与えられる。

$$r = \frac{n}{\frac{dn}{dx}} \qquad (1\text{-}6)$$

超音波層の中を L 進んだときの偏向角 θ_1' は

$$\theta_1' \approx \frac{L}{r} = \frac{L}{n}\frac{dn}{dx}$$

媒質と空気との間に Snell の法則を適用すると光ビームが媒質を出てからの偏向角 θ_1 は

$$\theta_1 \approx n_0\theta_1' \approx L\frac{dn}{dx}$$

(1-3)式を用いて

$$\theta_1 = k_s L n_{m1} \sin(\omega_s t - k_s x) \qquad (1-7)$$

一方この式は超音波層を通過した後での光の等位相面を求め、その法線方向を考えることによっても導くことができる。

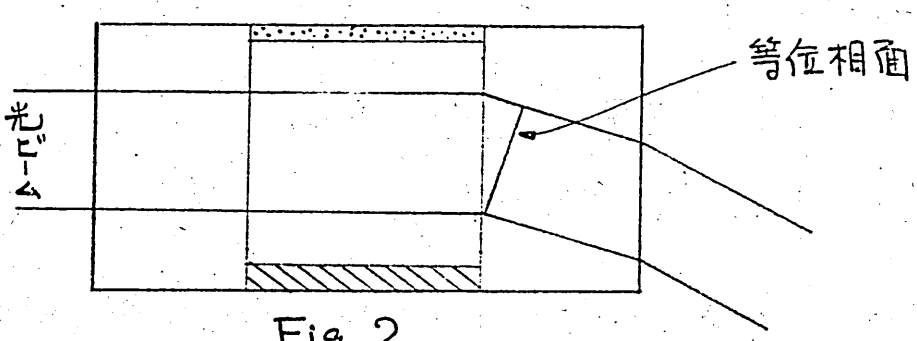


Fig.2.

Fig.2 を参照して超音波層を出た後の光の位相角は次式で表わされる。

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\{n_0 + \Delta n(x)\}L + \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 (z-L)$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 z + \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta n(x) L$$

ただし λ：真空中の光の波長

等位相面はこの値を一定とおいて得られる。

$$n_0 z + \Delta n(x) L + K = F(x,z) = 0 \qquad (1-8)$$

ただし K：定数

点 (x_1, y_1, z_1) を通るこの等位相面の法線は次式で与えられる。

$$\frac{x-x_1}{\left[\frac{\partial F(x,z)}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}}} = \frac{z-z_1}{\left[\frac{\partial F(x,z)}{\partial z}\right]_{\substack{x=x_1 \\ z=z_1}}}$$

(1-3), (1-4) を用いて上式を計算すると

$$x - x_1 = k \frac{n_{m1}}{n_0} L \sin(\omega_s t - k_s x_1)(z - z_1) \qquad (1-9)$$

この式は超音波層 L を過ぎた後の媒質中での偏向角が

$$\theta_2' \approx k_s \frac{n_{m1}}{n_0} L \sin(\omega_s t - k_s x_1)$$

で与えられることを示しており、媒質と空気との

境界面にSnellの法則を適用すると媒質の外での偏向角θ_2は

$$\theta_2 \approx k_s n_{m1} L \sin(\omega_s t - k_s x_1)$$

となって(1-7)式と一致する。

3. 定在波超音波による光ビームの走査

定在波超音波による圧力の変化は次式のように表わすことができる。

$$P = P_{m2} \cos\omega_s t \cos k_s x_1 \qquad (2-1)$$

従って媒質の屈折率は次式で表わされる。

$$n = n_0 + n_{m2} \cos\omega_s t \cos k_s x_1 \qquad (2-2)$$

(1-7)と同様に光ビームの偏向角θ_3は

$$\theta_3 = k_s n_{m2} L \cos\omega_s t \cos k_s x_1 \qquad (2-3)$$

進行波の場合と異なってこの場合は(2-3)式より明らかなように定在波に対する光ビームの入射位置によって偏向角が変化する。

$k_s x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$，($n$は整数)を満足する位置へ光が入射したとき、偏向角が最大で次式で与えられる。

$$\theta_{2m} = k_s n_{m2} L \cos\omega_s t \qquad (2\text{-}4)$$

このとき $\cos k_s x = 0$ で (2-1) より これは $P=0$ の位置である。即ち超音波定在波の節点へ光を入射させたとき、偏向角が最大になる。これは節点で圧屈折率の勾配が最大であることからきている。

今までに報告されているものでは例えば定在波を用い媒質にテトラクロールエチレンを用いて超音波周波数147KC，$L=10$ cm で $\theta = 3.3°$ を得ている。媒質の選択には (1-2) より k の大きなもの および屈折率の大きなものが有利でその他有毒でないもの、不燃性のもの等が望まれる。

4. 実験

Fig. 3のような方法で実験を行なった。光ビームにはレーザ光を用い、電気音響変換素子はチタン酸・ジルコン酸鉛振動子を用いた。片面放射にするため裏面には独立気泡性ゴムを張り媒質には蒸留水を用いている。超音波周波数は 200 KC で水中での波長は 7.5 mm である。

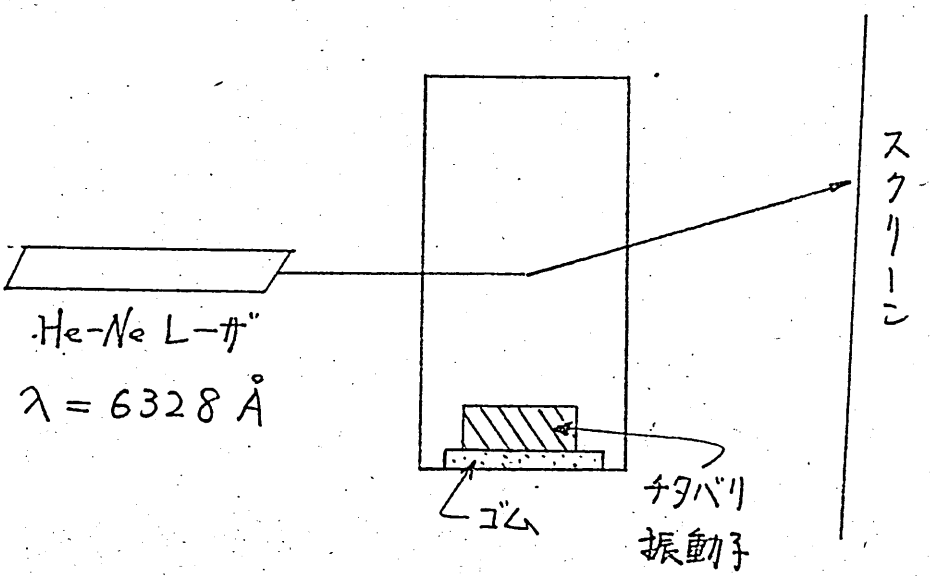


Fig. 3

光ビームの幅は約 1mm である。

Fig. 4 に測定値の一例を示す。

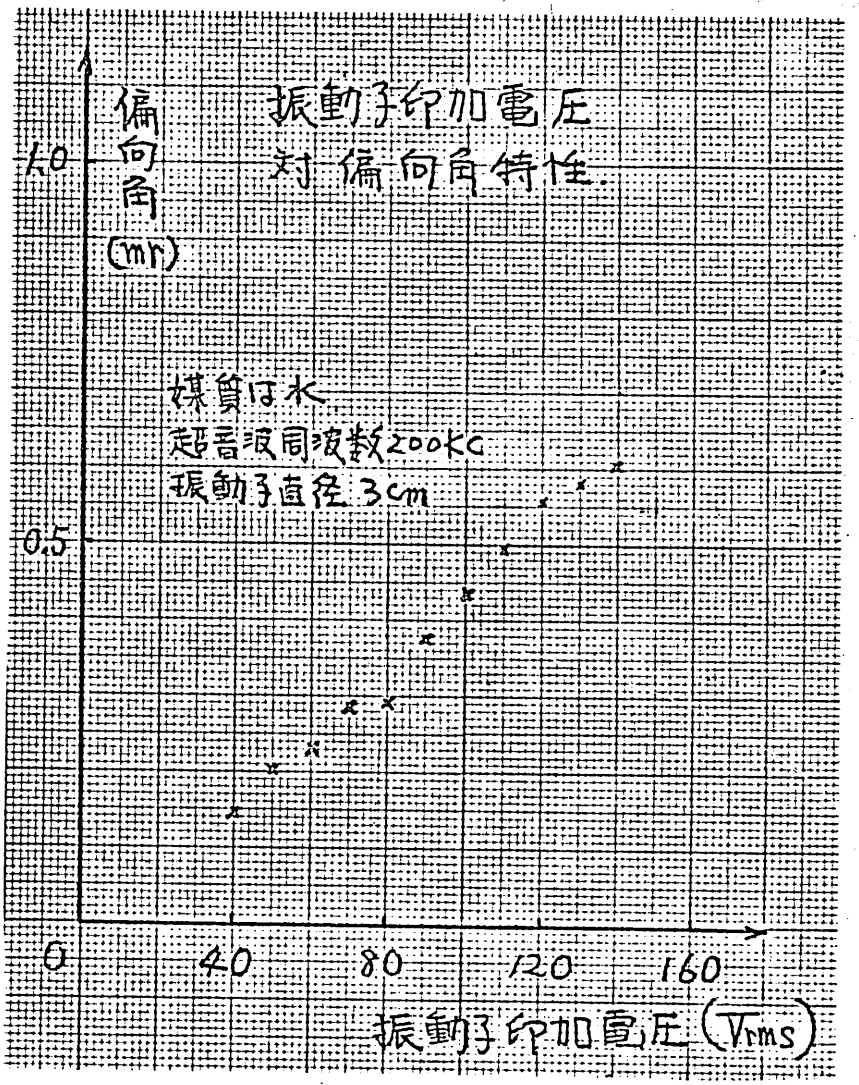


Fig. 4.

超音波の波長に比べて光ビームの幅を十分狭くしなければならない。光学系を使えばこれはできるが回折による広がりが大きくなって分解能が悪くなる。超音波の波長を長くすれば走査速度が速くなる。そこで次のような斜交超音波による方法を検討した。

5. 斜交超音波による光ビームの走査

5.1 斜交超音波の作る音場

Fig.5のように離れておかれた2つの超音波振動子から出た音波が交わって作る音場を求める。

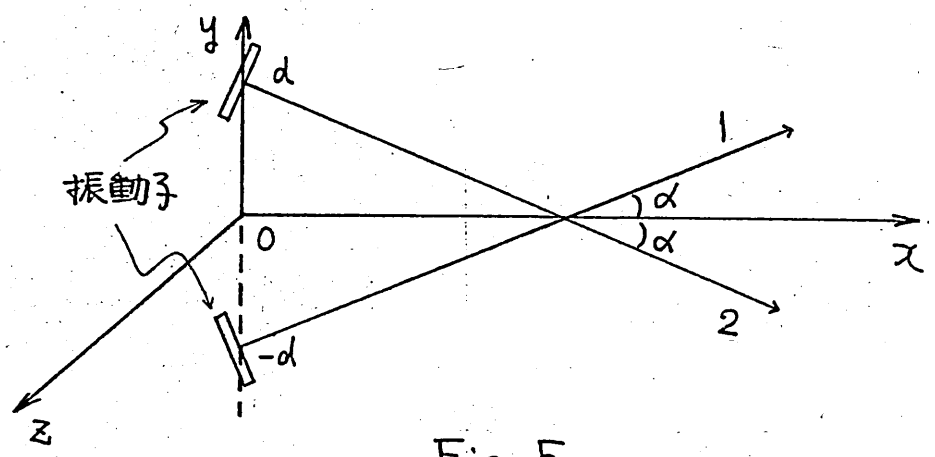


Fig. 5

それぞれの速度ポテンシャルを Φ_1, Φ_2 とすると

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \phi_1 e^{j(\omega_s t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1)} + \phi_2 e^{j(\omega_s t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2)} \qquad (5-1)$$

ただし

φ_1, φ_2 : 初期位相

ω_s : 超音波の周波数 (2つは等しいとする)

ϕ_1, ϕ_2 : 振幅

$\vec{k}_1, \vec{k}_2$: 波数ベクトル

ここで振幅も等しいとすると

$$\Phi = \phi e^{j\omega_s t}\left\{e^{-j(k_s x\cos\alpha + k_s y\sin\alpha - \varphi_1)} + e^{-j(k_s x\cos\alpha - k_s y\sin\alpha - \varphi_2)}\right\}$$

Φ_1は$(0,-d,0)$の位置で$t=0$のとき位相零．Φ_2は$(0,d,0)$の位置で$t=0$のとき位相φとすると

$\varphi_1 = -k_s d\sin\alpha$，　$\varphi_2 = -k_s d\sin\alpha + \varphi$．従って

$$\Phi = 2\phi e^{j(\omega_s t - k_s x\cos\alpha - k_s d\sin\alpha + \frac{\varphi}{2})}\cos(k_s y\sin\alpha + \frac{\varphi}{2})$$

$$= 2\phi e^{j(\omega_s t + \delta)}\cos(k_s y\sin\alpha + \frac{\varphi}{2}) \qquad (5-2)$$

ここで$\delta = -k_s x\cos\alpha - k_s d\sin\alpha + \frac{\varphi}{2}$　とおいた。

この式より．x方向は進行波．y方向は定在波になっていることがわかる。また、もとの波長をλ_sとすればx方向の波長は$\lambda_s/\cos\alpha$，y方向の波長は$\lambda_s/\sin\alpha$に拡大されている。

音圧をPとすると媒質の密度をρとして

$$P = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} = j2\omega_s\rho\phi e^{j(\omega_s t+\delta)}\cos(k_s y\sin\alpha + \frac{\varphi}{2})$$

$$= 2\omega_s\rho\phi e^{j(\omega_s t+\delta+\frac{\pi}{2})}\cos(k_s y\sin\alpha + \frac{\varphi}{2}) \qquad (5-3)$$

媒質の屈折率は(1-2)を用いて

$$n = n_0 + n_{m3}\cos(\omega_s t + \delta + \frac{\pi}{2})\cos(k_s y \sin\alpha + \frac{\varphi}{2})$$

ただし (5-4)

$$n_{m3} = k\frac{(n^2-1)(n^2+2)}{3n}\omega_s p \phi$$

5.2. 光の等位相面.

光の界成分を代表して A とおけば

$$A = A_0 \exp(\omega t - \beta z) \qquad (5\text{-}5)$$

ここで ω : 光の角周波数

β : 光の波数

A_0 : 振 幅

z 方向の長さ L なる超音波層を通過した後の A は

$$A = A_0 \exp\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_0 + \Delta n)L - \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 (z - L)\}$$

$$= A_0 \exp\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 z - \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta n L\} \qquad (5\text{-}6)$$

従って光の等位相面は次のように表わせる。

$$n_0 z + \Delta n \cdot L + K = 0 \qquad (5\text{-}7)$$

5-4) を (5-7) へ代入して

$$n_0 z + n_{m3} L \cos(\omega_s t + \delta + \frac{\pi}{2}) \cos(k_s y \sin\alpha + \frac{\varphi}{2}) + K = 0 \quad (5-8)$$

この式が超音波層を出た後の光の等位相面を表わしている。

5.3 光の等位相面に対する法線の方程式

(3-8)式を $F(x,y,z)=0$ とおけば点 (x_1, y_1, z_1) を通るこの等位相面の法線は次式で表わされる。

$$\frac{x-x_1}{\left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1\\z=z_1}}} = \frac{y-y_1}{\left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1\\z=z_1}}} = \frac{z-z_1}{\left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1\\z=z_1}}} \quad (5-9)$$

(5-4)を用いてそれぞれの分母を計算すると

$$\left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1\\z=z_1}} = n_{m3} k_s L \cos\alpha \sin(\omega_s t + \delta + \frac{\pi}{2}) \cos(k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2})$$

$$\left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1\\z=z_1}} = -n_{m3} k_s L \sin\alpha \cos(\omega_s t + \delta + \frac{\pi}{2}) \sin(k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2})$$

$$\left[\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1\\z=z_1}} = n_0$$

よって法線の方程式は

$$\frac{x-x_1}{n_{m3} k_s L \cos\alpha \sin(\omega_s t + \delta + \frac{\pi}{2}) \cos(k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2})} = \frac{z-z_1}{n_0}$$

$$= \frac{y-y_1}{-n_{m3} k_s L \sin\alpha \cos(\omega_s t + \delta + \frac{\pi}{2}) \sin(k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2})} \quad (5-10)$$

媒質と空気との境界でSnellの法則を適用してから $Z=Z_2$ 平面（観測スクリーン）との交点の軌跡を求めると

$$x-x_1 = \eta_{m3} k_s L \cos\alpha \sin\left(k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)(z_2-z_1) \sin\left(\omega_s t+\delta+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= A \sin\left(\omega_s t+\delta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y-y_1 = -\eta_{m3} k_s L \sin\alpha \cos\left(k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)(z_2-z_1) \cos\left(\omega_s t+\delta+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= B \cos\left(\omega_s t+\delta+\frac{\pi}{2}\right)$$

ただし

$$A = -\eta_{m3} k_s L \cos\alpha \sin\left(k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)(z_2-z_1)$$
$$B = -\eta_{m3} k_s L \sin\alpha \cos\left(k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)(z_2-z_1) \qquad (5-11)$$

上式より t を消去すると

$$\frac{(x-x_1)^2}{A^2} + \frac{(y-y_1)^2}{B^2} = 1 \qquad (5-12)$$

(5-11)により A, B は2つの超音波の位相差 φ によって変化するので φ を変えると(5-12)の軌跡が変化する。

(イ). $k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2} = n\pi$ （n は整数）のとき

$$x = x_1$$
$$y-y_1 = -\eta_{m3} k_s L \sin\alpha \cdot (z_2-z_1) \cdot \cos\left(\omega_s t+\delta+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (5-13)$$

この場合には軌跡は y 軸に平行で点 (x_1, y_1) を中心とする線分である。

(ロ) $\alpha + k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2} = m\pi$ (m は整数) のとき

$A = B$ となり軌跡は点 (x_1, y_1) を中心として半径が $r = \frac{\eta_{m3}}{2} k_s L (z_2 - z_1) \sin 2\alpha$ なる円である。

(ハ) $k_s y_1 \sin\alpha + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}(2l+1)$ (l は整数) のとき

$$y - y_1 = 0$$

$$x - x_1 = \eta_{m3} k_s L (z_2 - z_1) \cos\alpha \sin\left(\omega_s t + \delta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5\text{-}14)$$

となって軌跡は x 軸に平行で点 (x_1, y_1) を中心とする線分である。

(ニ) その他の任意の値の φ のとき

(5-11), (5-12) で表わされる楕円となる。

一般に光ビーム走査の分解能は次の式で表わすことができる。

$$g = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta}{\frac{\lambda}{D}} \quad (5\text{-}15)$$

ここで

δ ：分解能

θ ：偏向角度

θ_0：回折による光の広がり角度

D：光ビームの直径

λ：光の波長

進行波超音波を用いた場合の(4-7)式と斜交超音波を用いた場合の(5-13)式とで分解能を比較する。(5-13)式より偏向角を求めると

$$\theta_3 = k_s n_{m3} L \sin\alpha \cos(\omega_s t + \delta + \frac{\pi}{2})$$

となり偏向角度は $\sin\alpha$ 倍だけ減少している。しかし後者では超音波の波長が $1/\sin\alpha$ 倍だけ長くなるので D を $D/\sin\alpha$ に広げることができる。従って超音波の強さを一定とすれば(5-15)より δ は不変である。しかし超音波の周波数が 1MC を越えるとキャビテイションが急におこりにくくなるので超音波の強さを増加させることができ、分解能を上げることができる。

5. 結論.

超音波による屈折を利用して光ビームを走査する方法を検討した。斜交超音波を用いれば、従来行なわれている進行波超音波または定在波超音波を用いた方法に比べて、分解能を一定とすれば、走査速度を速めることができ、走査速度を一定とすれば分解能を上げることができることが明らかになった。また2つの超音波の位相および振幅を加減することによって2次元的に走査することができることも明らかになった。

6. 文献

1. On The Scattering of Light by Supersonic Waves
   by P. Debye and F. W. Sears
   Proc. Natl. Acad. Sci. 18 p409 (1932)

2. The Study of Sound Field by Means of Optical Refraction Effects.
   by J. Kolb and A. P. Loeber
   J. Acoust. Soc. Amer. 26 p249 (1954)

3. Application of Ultrasonic Standing Waves to the Generation of Optical-Beam Scanning.
   by H. G. Aas and R. K. Erf
   J. Acoust. Soc. Amer. 36 p1906 (1964)

4. Nonmechanical Scanning of Light in One and Two Dimensions.
   by R. Lipnick, A. Reich and G. A. Schoen
   Proc. IEEE 53 p321 (1965)

輻射科学研究会資料

大出力増巾段付レーザーの開発とレーザーレーダへの応用

大阪大学工学部
山中龍彦 佐々木孝友 山中千代衛

1 まえがき

大出力レーザー発生技術の進歩により，その応用研究としてレーザーレーダー，レーザーによるプラズマ発生等の研究が盛んに行なわれるようになった．

レーザーレーダーの空間分解能はビームの発散角とパルス巾により決定され，当達距離は送出パワーにより決定される．このためパルス巾の狭い大出力レーザーが要求される．

筆者らはレーザーレーダーやプラズマ発生に用いる大出力増巾段付レーザーの開発を行なうとともにレーザーレーダーを用いて大気観測を行なっている．

ここでは増巾段付レーザーならびに新しく開発したレーザーレーダーの受信光の解析法について述べる．

2. 大出力増巾段付レーザー

2.1 進行波パルス増巾

増巾段の長さ l cm 中での単一モードのQスイッチ Nd^{3+} ガラスレーザーパルス増巾を考える．レーザー素子の端面反射率を R，増巾率を M とすると，$(MR)^2 < 1$ とすることが出来るため $R=0$ と仮定する．増巾媒質中での cross relaxation の原子間伝播時間は 10^{-12} S 程度であるから cross relaxation を無視すると光子束 I cm^{-2}，逆転分布密度 $n=(n_2-n_1)$ cm^{-3} の変化は次式で表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \partial I/\partial t + c\,\partial I/\partial x &= c(\sigma n - \gamma) I \\ \partial n/\partial t + c\,\partial n/\partial x &= -2\sigma I n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで c は光速，σ は誘導放出断面積，γ は単位長あたりの損失係数である．n_1，n_2 はそれぞれ下位準位，上位準位の活性イオン数である．

(1)式はレーザー媒質の屈折率を1.5とし，入力レーザー I_i，初期逆転分布密度 n_0，σ，γ を種々変化させ電子計算機により数値計算された．

Fig. 1 に各入力波形を示す．

Fig. 2 は初期逆転分布密度 $n_0 = 10^{20}$ cm^{-3}，誘導放出断面積 $\sigma = 1.5\times10^{-20}$ cm^2，損失係数 $\gamma = 10^{-3}$ cm^{-1}，増巾媒質長 $l = 60$ cm

の時の各入力波形に対する出力波形である。非線形増中によりパルス中の自己縮少が起り立上りが速くなっている。Fig.3 は $\ell = 30\,cm$, $60\,cm$ での入力パルスの各時間での増中率である。パルスの立上り部分での増中率が大であることがわかる。この結果 Fig.2 のように入力パルスピークでの増中率がパルス波頭部の10～20%にまで減少し、出力パルスのピークがパルス前方に移動する。

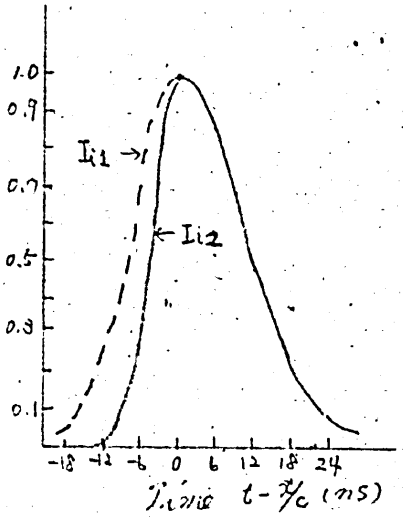


Fig. 1 Input pulse shape.

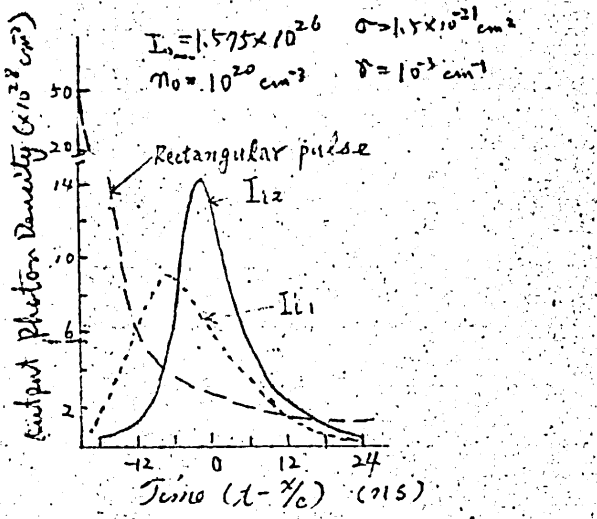


Fig. 2 Output pulse shapes of various input pulses.

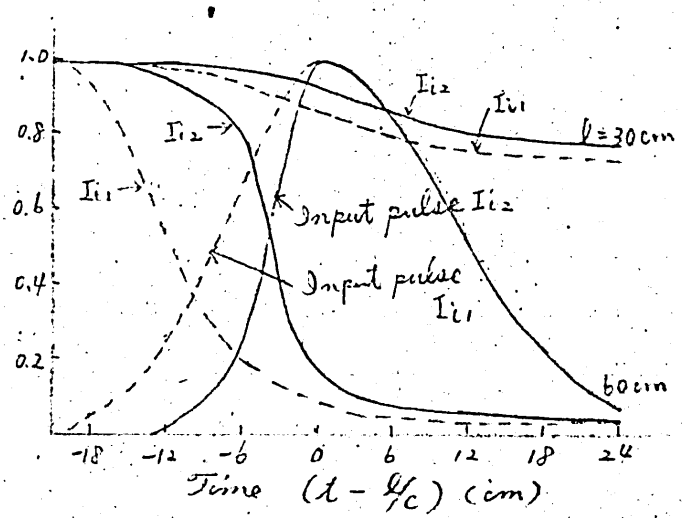


Fig. 3
Normalized amplification factor at $\ell = 30\,cm$ and $\ell = 60\,cm$ of the rod.
"Normalization" is made by the amplification factor of leading edge of input pulse.

この非線形増中の結果ピークパワーの増大は立上りのするどいパルスほど大となる。出力パルスのピークの移動は立上りのゆるやかな入力パルスの方が大となり、パルス中の変化は立上りの速いパルスの方が大となる。

Table 1 は n_0, σ を変化させた時のパルス中、立上りの変化の例である。

$n_0\alpha$ が非線形増巾に非常に寄与していることがわかる。特に矩形波入力の場合は出力パルス巾は極度に減少し、1.5 ns 程度になる

Table 1. Comparison of input pulse and output pulse.
Amplification length $l = 60$ cm.
Loss coefficient $= 10^{-3}$ cm^{-1}

Input pulse	I_{i1}, $I_0 = 1.575\times10^{26}$ cm^{-3}				I_{i2}, $I_0 = 1.575\times10^{26}$ cm^{-3}			
Rise time (ns)	12.8				6.8			
Half width (ns)	21.3				16.5			
α (cm^2)	1.5×10^{-21}		9×10^{-22}		1.5×10^{-21}		9×10^{-22}	
n_0 (cm^{-3})	8×10^{19}	10^{20}	8×10^{19}	10^{20}	8×10^{19}	10^{20}	8×10^{19}	10^{20}
Output pulse								
Rise time (ns)	10.8	9.45	12.6	12.45	5.85	6.0	6.3	6.3
Half width (ns)	18.6	18.3	20.7	20.1	10.5	9.3	15.6	15.0
Time shift of pulse peak (ns)	5.25	9.3	0.6	1.25	1.65	3.3	0.3	0.3
Amplification factor	314	578	56	133	441	882	588	146

レーザー増巾器の設計上重要な要素である逆転分布密度、増巾長による変化を Fig. 4 に示す。n_0 が小の時は増巾係数は増巾長に関係なく一定であるが、n_0 が大となり増巾率が大となり増巾媒質中での光子密度が増大する結果パルスピークの移動が大となり増巾係数が減少し増巾率は飽和する。この飽和の起り方は立上りのゆるやかな入力パルスの方が早い。
$I_0 = 1.05\times10^{26} \sim 2.526\times10^{26}$ cm^{-2}, $n_0 = 5\times10^{19} \sim 10^{20}$ cm^{-3}, $\alpha = 1.5\times10^{-21}$ cm^2 の範囲では一定増巾係数は $n_0\alpha$ の 2.5~2.6 でほぼ一定である。損失項 γ の増巾率に対する寄与は $e^{-\gamma l}$ 程度で、パルスピークの移動、パルス巾の減少に関係する非線形効果には顕著な影響は与えない。

入力パルスのピークパワーと増巾率の関係を Fig. 5 に示す。有限の立上りをもつ入力パルスでは、ピークパワーが大なるほど増巾率は減少する。

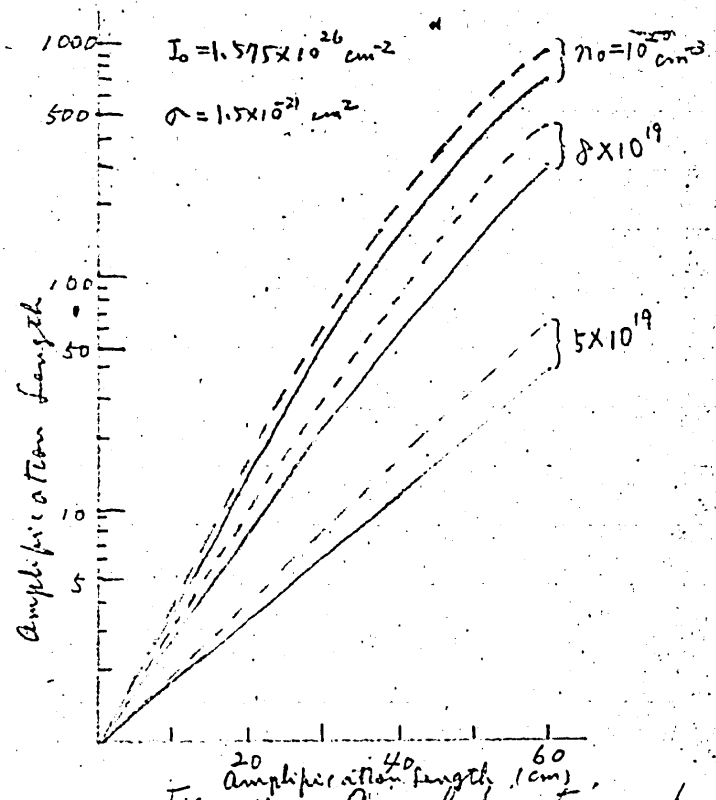


Fig. 4 Amplification factor vs amplification length l.
Input pulse is I_{iz}.
Solid line is $\gamma = 10^{-2}\ cm^{-1}$.
Dashed line is $\gamma = 10^{-3}\ cm^{-1}$.

これは入力パルスが大なるほど早くパルスピークの移動が始まり増巾率が飽和するためである。入力パルスが I_{iz} の場合 $n_0 = 10^{-20}\ cm^{-3}$, $\sigma = 10^{-2}\ cm^2$, $\gamma = 10^{-3}$ $l = 60\ cm$ では $I_0 = 2.526 \times 10^{-26}\ cm^{-2}$ での増巾率は $I_0 = 1.05 \times 10^{-27}\ cm^{-2}$ の増巾率の84%である。このため特に大出力を得るには入力パワーを上昇するよりも立上りの速いパルスを増巾する方が有利である。

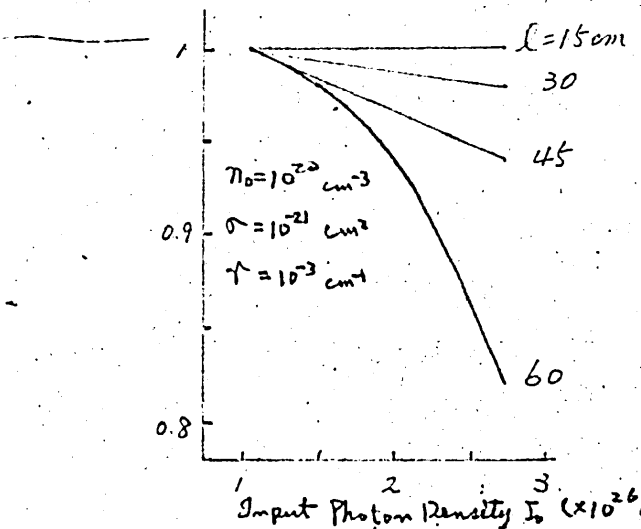


Fig. 5 Normalized amplification vs input peak photon density I_0.
Normalization is made by the amplification factor whose input peak photon density I_0 is $1.05 \times 10^{26}\ cm^{-2}$.
Input pulse shape is I_{iz}.

増巾後の増巾段ロッド中での逆転分布密度を Fig. 6 に示す。$l = 60\ cm$ では初期逆転分布密度 n_0 の数パーセントになり，ロッド中に大きな勾配が出来る。損失係数 γ が大きいほどロッド中に残る逆転分布密度は大て

ある。

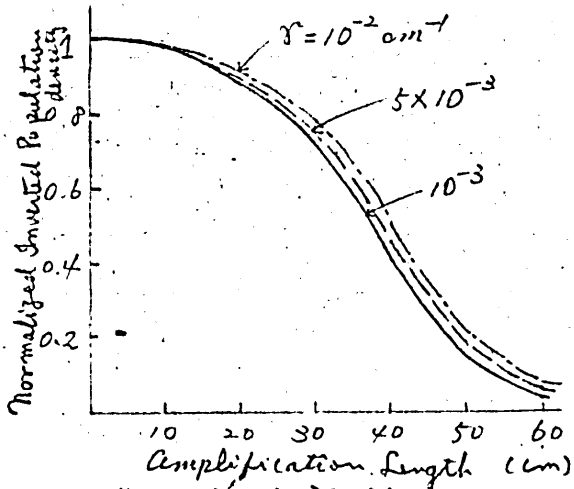


Fig. 6
Normalized final inverted population density in the rod.
Normalization is made by the final inverted population density at the input end.

2.2 増巾実験

実験は sodaline silicate glass に Nd^{3+} をドープしたガラスレーザーで行なった。発振段は Nd_2O_3 3 (wt %)，増巾段は 1.5 (wt %) で Nd^{3+} 濃度にてそれぞれ $1.46\times10^{20}\,cm^{-3}$，$7.3\times10^{19}\,cm^{-3}$ である。1.06 μ の吸收 ($^4I_{11/2} \rightarrow {}^4F_{3/2}$) より測定した誘導放出断面積 σ は 10^{-21} cm^2 以下で，この値は P. Mauer の測定による silicate glass の値[10]よりも 1 桁小さい。これはガラス中に含まれている不純物が原因であると考えられる。増巾段ロッドは色むらがほとんどなく，密度勾配もなかったが，損失係数 γ は $8\times10^{-3}\,cm^{-1}$ であった。

発振段は直径 6.5mm，長さ 100mm で励起はスパイラル型 Xe ランプで行なった。共振器は 30,000 rpm の直角回転プリズムと反射率 80% の誘電体多層膜蒸着外部鏡で構成されている。発振出力は $30\,MW\,cm^{-2}$ (1.575×10^{26} 光子 cm^{-2}) で，パルスの立上り，半値巾はそれぞれ 20ns，30ns であった。

増巾段は直径 20mm，長さ 300mm で励起は最大入力 4KJ の直線型 Xe ランプ 4 本で行なった。ロッドとランプの間隔は 10mm で，集光鏡は内径 85mm のクロムメッキの円筒である。Xe ランプの発光時間は半値巾で 700μs であった。発振段と増巾段のレーザーレベルを同一に保つため，レーザーハウスを水冷にした。

Fig. 7 に入力 $30\,MW\,cm^{-2}$ の時の励起入力に対する増巾率の変化を示す。増巾率は励起入力 6 KJ 程度までは指数函数的に増加

し、6KJから10KJの間では直線的に増加した。励起入力が10KJを越すと増巾率は飽和しはじめた。solarizationが起ると増巾率は1/2程度に減少し、損失係数も増大した。このsolarizationは焼鈍により容易に取除くことが出来、焼鈍後増巾率は略もとの値に回復した。

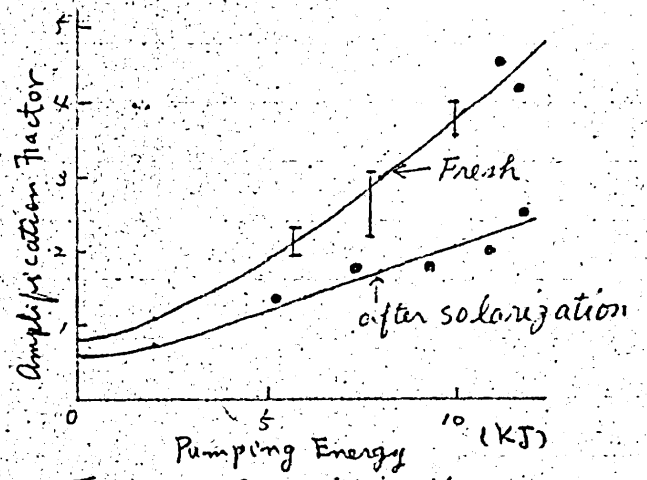


Fig. 7 Amplification factor vs pumping energy.

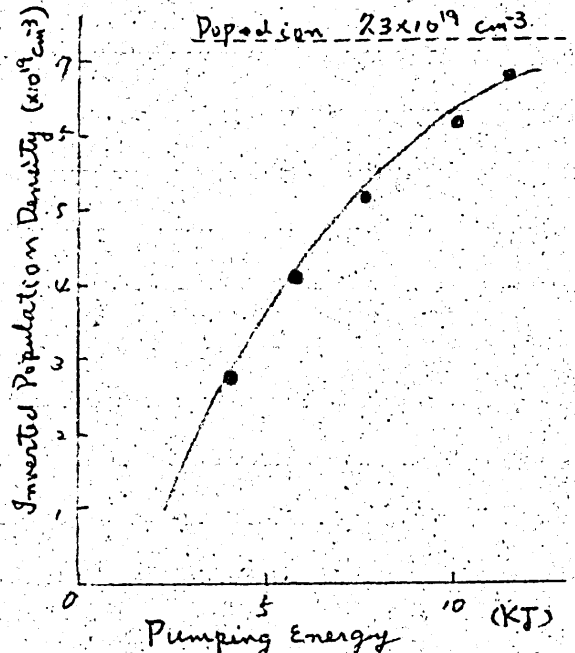


Fig. 8 Initial inverted population density estimated by the experimental amplification factor vs pumping power.

Fig. 8はFig. 7に示す増巾率より、$I_0 = 1.575 \times 10^{27}\ cm^{-2}$, $a = 9 \times 10^{-22}\ cm^2$, $\gamma = 10^{-2}\ cm^{-1}$ として計算結果より算出した逆転分布密度である。励起入力11.5KJで逆転分布密度は $6.8 \times 10^{19}\ cm^{-3}$ に達している。これは全体の93%にあたる。この結果実験に用いたロッドは Nd^{3+} 濃度が低いため増巾率を上げることが出来ない。

Fig. 9は直径3mmのレーザービームを用い調べたsolarization後のロッドの半径方向の増巾率の変化である。増巾率は中心部から遠ざかるにつれ減少している。これは、紫外域の吸収係数が大であるためロッドの外周部で紫外線が吸収され、中心部はあまりsolarizationが起っていないためと考えられる。

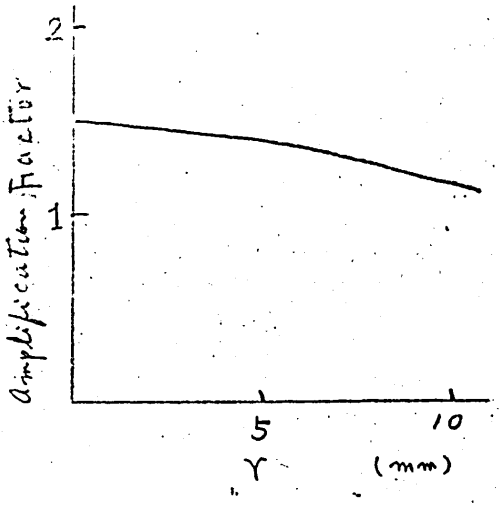


Fig. 9
Radial amplification factor of solarized rod.
Pumping power : 8KJ
Diameter of probe light : 3mm

3 レーザーレーダーの解析法

レーザーレーダー方程式を次式で与える。

$$P(r)=\frac{P_0 A K R_0 (N(r)\overline{\sigma_\pi}(r))}{r^2 \exp\left(2\int_0^r N\sigma_\pi \alpha\, dr\right)} \qquad (2)$$

P_0：送出パワー，$P(r)$：r 点からの受信パワー，A：受信器面積，K：受信器効率
R_0：(送出パルス巾)/2 ＝空間分解能，$N(r)$：r 点の散乱体密度，$\overline{\sigma_\pi}$：平均後方散乱断面積，$\alpha=(\overline{\sigma_t}+k)/\sigma_\pi$，$\overline{\sigma_t}$：全散乱断面積，$k$：吸収係数
従来のレーザーレーダーの解析では α を仮定し，$N\sigma_\pi$ を受信信号より算出していた。このため誤差が大となり，散乱体の性質をよりよく把握出来なかった。

筆者らは空間分解能を $R_0 \to 2R_0$ におとし $N\sigma_\pi$，α を同時に算出した。この際 R_0 が十分小となるようにパルス巾の狭いレーザー光を用いれば問題はない。

連続的に変化する散乱体を Fig.10 のように R_0 で分割する，
$[R, R+2R_0]$ では $N\sigma_\pi$，α が一定であるとすると (2) 式より

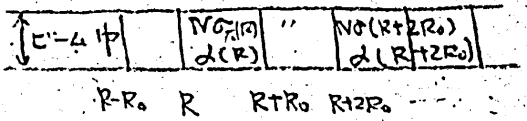


Fig 10

$$P(R)=\frac{P_0 A K R_0 (N(R)\overline{\sigma_\pi}(R))}{R^2 \exp\left\{2\sum_{r=R_0}^{R-R_0} N\sigma_\pi \alpha R_0\right\}} \qquad (3)$$

$$P(R+R_0)=\frac{P_0 A K R_0 (N(R)\overline{\sigma_\pi}(R))}{(R+R_0)^2 \exp\left\{2\sum_{r=R_0}^{r=R-R_0} N\sigma_\pi R_0 + 2N(R)\sigma_\pi(R) R_0\right\}} \qquad (4)$$

受信用望遠鏡の視野にレーザービームが入る距離をR_1とする。
R_1が小さいと $\exp\{2\int_0^{R_1} N\bar{\sigma}\alpha\, dr \approx 1$ となる。 $[R_1, R_1+R_0]$よりの散乱信号は

$$P(R_1) = \frac{P_0 A K R_0}{R_1^2} N(R_1)\bar{\sigma}_\pi(R_1) \qquad (5)$$

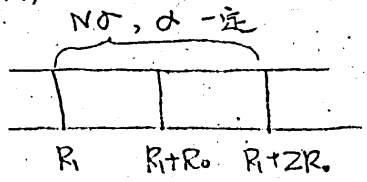


Fig. 11

$[R_1+R_0, R_1+2R_0]$よりの散乱信号は

$$P(R_1+R_0) = \frac{P_0 A K R_0 \; N(R_1)\bar{\sigma}_\pi(R_1)}{(R_1+R_0)^2 \exp\{2N(R_1)\bar{\sigma}_\pi(R_1)R_0\}} \qquad (6)$$

(5)式より$N\sigma$が求まり、この$N\bar{\sigma}_\pi$を用いて(6)式よりαが算出される。以下これを繰返すことにより$2R_0$の分解能で$N\bar{\sigma}_\pi$, αが連続的に算出される。

この方法により算出した$N\bar{\sigma}_\pi$, αをFig 12に受信光波形とともに示す。測定時の天候は雨上りで視は3Kmであった。
測定日時は11月9日午後0時であった。
αにかなりのばらつきがあるがこれは読取り誤差によるものと考えられる。

4 むすび

パルス巾の狭い大出力レーザー光を発生させるには誘導放出断面積の大きいレーザー素子を用い逆転分布密度、増巾長を大にとることはもちろんであるが、立上りの速いパルスを増巾する必要がある。

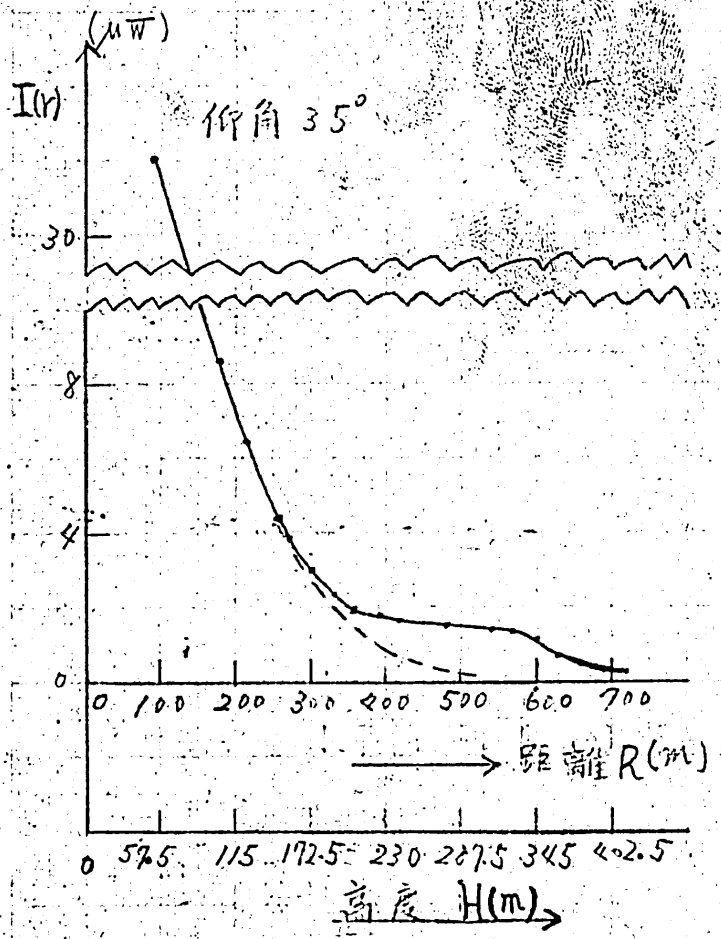
モードロック法又は通常のQスイッチレーザー光の立上り部分を電気光学シャッターを用いて切り取ることにより発生したパルスを用いるとよい。

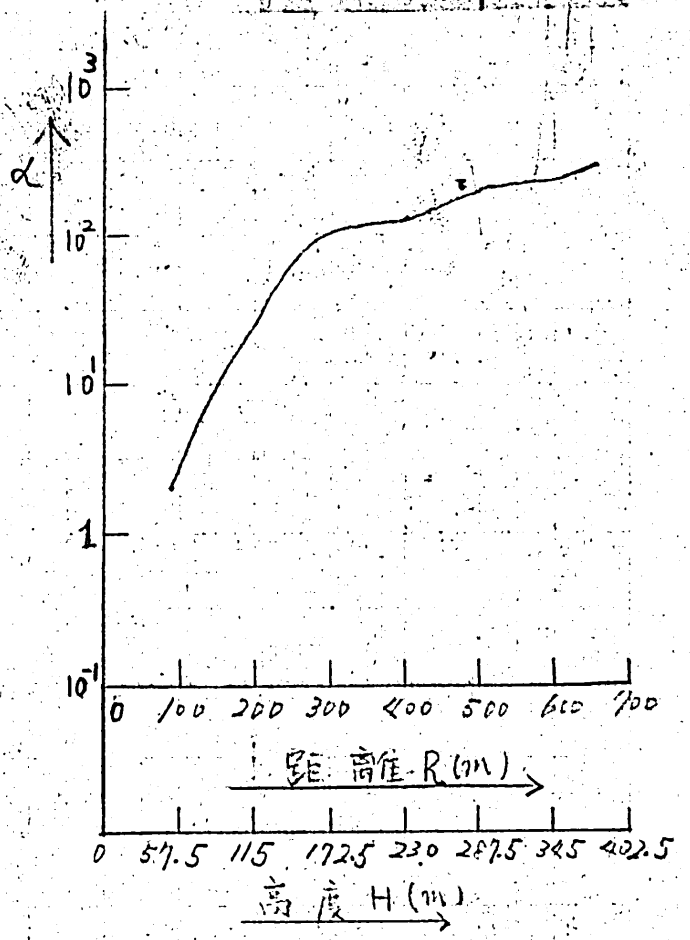
増巾実験では使用ロッドの誘導放出断面積が小さく、Nd^{3+}濃度が小で大なる増巾率が得られなかった。

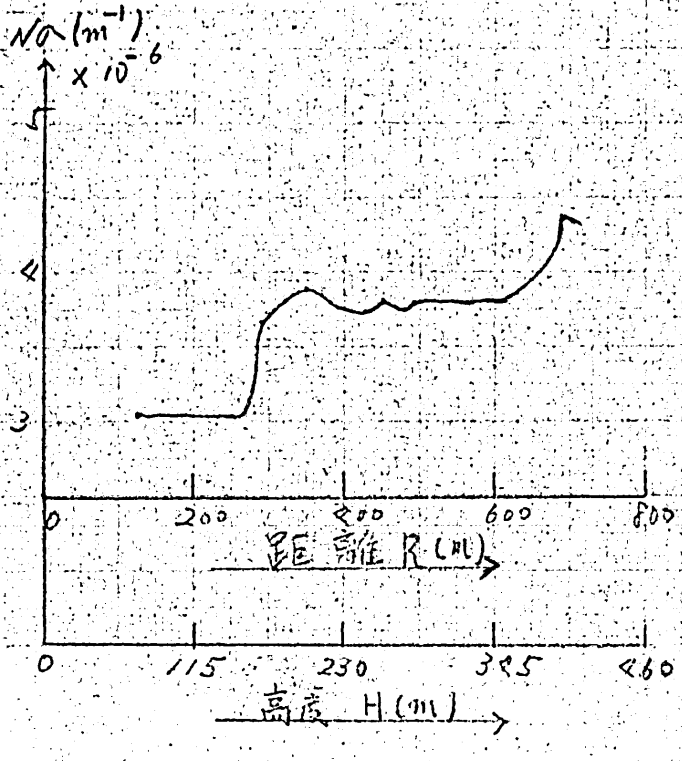
レーザーレーダー解析法は$N\sigma_\pi$, αの絶対値を正確に算出来た。この結果散乱体の性質をよりよく理解出来るようになった。

現在2波長のビームを用い散乱測定を行なう準備を進めるとともに、N, σ_π, k, α_0を求めるプラグラムを作成中である。

おわりにレーザーロッドの製作に努力された旭硝子株式会社中央研究所の金井英三氏、石山正彦氏に感謝する。


(μW)
I(r)
仰角 35°
30
8
4
0
0 100 200 300 400 500 600 700
距離 R(m)
0 57.5 115 172.5 230 287.5 345 402.5
高度 H(m)


α
10^3
10^2
10^1
1
10^{-1}
0 100 200 300 400 500 600 700
距離 R(m)
0 57.5 115 172.5 230 287.5 345 402.5
高度 H(m)


Nα (m⁻¹)
× 10⁻⁶
5
4
3
0 200 400 600 800
距離 R(m)
0 115 230 345 460
高度 H(m)

輻射科学研究会資料

無指向性ホーンリフレクタアンテナ

武　市　吉　博
片　木　孝　至
（三菱電機株式会社 鎌倉製作所）

1968年2月9日

無指向性ホーンリフレクタアンテナ

武　市　吉　博

片　木　孝　至

（三菱電機株式会社　鎌倉製作所）

1. はしがき

アンテナの軸に垂直な面内における放射パターンが円形であるようなアンテナ，すなわち無指向性アンテナで，マイクロ波帯において用い得る形式としては従来よりアレイ形式や双円錐ホーン形式が知られている。しかしこれらの形式で高利得のものは，前者では周波数特性の点で，後者では機械的大きさの点で実現することはむつかしい。

比較的簡単に高利得が得られる無指向性アンテナとして，ホーンリフレクタ形式のものが考えられるので，それについて検討した結果を述べる。これは図1に示すように，Oを頂点とし，Z軸を中心軸とする円錐ホーンと，Oを焦点としてX軸を軸とする放物線をZ軸の周囲に回転した形の反射鏡より成る。Oに接続された円形導波管より，TE_{01} モードあるいは TM_{01} モードで励振することによつて，水平偏波および垂直偏波の無指向性パターンが得られる。

この論文では，円錐ホーンの開き角によつて，利得や放射パターンが変化する様子を明らかにしてある。

2. 無指向性アンテナの一般論

無指向性アンテナを開口面アンテナとして取扱う。図2のように直交座標系（X，Y，Z），円筒座標系（ρ，φ，Z），極座標系（$\widetilde{R}$，$\widetilde{\theta}$，$\widetilde{\varphi}$）を定義

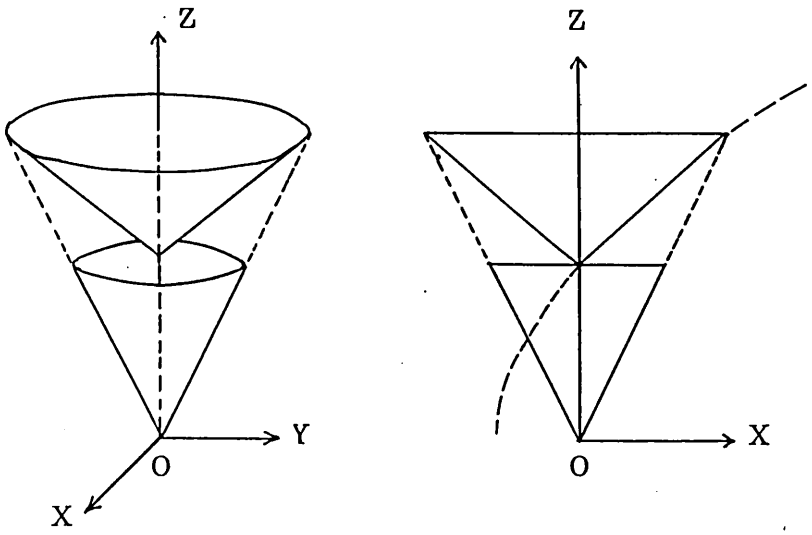


図1　無指向性ホーンリフレクタアンテナ

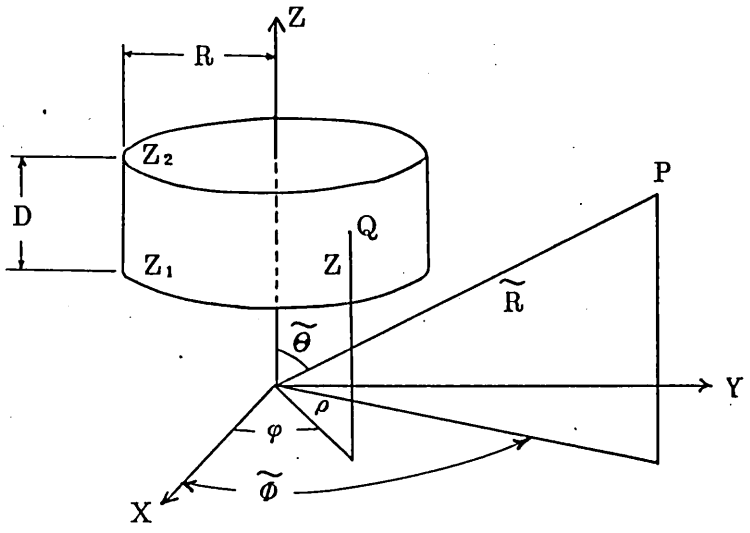


図2　開口面と座標系

し，開口面として，Z軸を中心軸とする半径Rの円筒上に巾Dの帯状の部分をとる。

開口面上の電磁界をEr，Hrとすると，遠方の点Pにおけるこの波源からの放射電界Es(P)は(1)で計算できる。[1]

$$\mathbf{Es}(P)=\frac{-jk}{4\pi\tilde{R}}e^{-jk\tilde{R}}\cdot\mathbf{R}_1\times\int_A\left[(\mathbf{e}_\rho\times\mathbf{Er})-\sqrt{\frac{\mu}{e}}(\mathbf{R}_1\times(\mathbf{e}_\rho\times\mathbf{Hr}))\right]e^{jk\rho\cdot R_1}\,dS \qquad (1)$$

Aは開口面を意味し，i，j，kをX，Y，Zに沿つた単位ベクトルとして，(1)中の各ベクトルは(2)で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
\rho &= R\cdot\mathbf{e}_\rho+Z\cdot\mathbf{e}_z\\
\mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\cdot\mathbf{i}+\sin\varphi\cdot\mathbf{j}\\
\mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\cdot\mathbf{i}+\cos\varphi\cdot\mathbf{j}\\
\mathbf{e}_Z &= \mathbf{k}\\
\mathbf{R}_1 &= \sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}\,\mathbf{i}+\sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi}\,\mathbf{j}+\cos\tilde{\theta}\,\mathbf{k}\\
\theta_1 &= \cos\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}\,\mathbf{i}+\cos\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi}\,\mathbf{j}-\sin\tilde{\theta}\,\mathbf{k}\\
\varphi_1 &= -\sin\tilde{\varphi}\,\mathbf{i}+\cos\tilde{\varphi}\,\mathbf{j}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

また　　$dS=R\,d\varphi\,dZ$ (3)

である。

Rが波長に比べて充分に大きく，Erが開口面内にある軸対称な円筒波であると仮定すると，α，βはZのみの関数として，開口面上の電磁界は(4)で表わされる。

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}r &= \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot (\alpha \mathbf{e}_z + \beta \mathbf{e}_\varphi) \\ \mathbf{H}r &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ (\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{E}r) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(2), (3), (4)を(1)に代入して, ベッセル関数の公式を用いればφについての積分ができて, (5)を得る。

$$\mathbf{E}s(P) = \frac{-jk}{4\pi\widetilde{R}}\, e^{-jk\widetilde{R}} \cdot 2\pi\sqrt{R}\,[J_0(kR\sin\widetilde{\theta})\sin\widetilde{\theta} \cdot + jJ_1(kR\sin\widetilde{\theta})] \cdot \int_{Z_1}^{Z_2} (\alpha\theta_1 - \beta\Phi_1)\, e^{jkZ\cos\widetilde{\theta}}\, dZ \qquad (5)$$

全放射電力Wは開口面上で$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ |\mathbf{E}r|^2$ を積分して得られる。

$$W = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_A |\mathbf{E}r|^2\, dS = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ 2\pi \int_{Z_1}^{Z_2} (\alpha^2 + \beta^2)\, dZ \qquad (6)$$

$\widetilde{\theta} = 90°$なる面内での利得を求めれば, (5)と(6)より(7)を得る。

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ 4\pi\widetilde{R}^2 |\mathbf{E}s(P)|^2}{W} = \frac{2D}{\lambda}\eta \\ D &= Z_2 - Z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ηは無指向性アンテナの能率で, (8)で定義する。

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \eta_0 \cdot \eta_1 \\ \eta_0 &= \frac{\pi kR}{2}\,[J_0^2(kR) + J_1^2(kR)] \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$\eta_1 = \frac{\left|\int_{Z_1}^{Z_2} \alpha \, dZ\right|^2 + \left|\int_{Z_1}^{Z_2} \beta \, dZ\right|^2}{D \cdot \int_{Z_1}^{Z_2} (\alpha^2+\beta^2)\, dZ} \Bigg\}$$

η_0 は開口面をとる位置Rにのみ関係する項であつて，ベッセル関数の漸近式

$$J_r(Z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \cos\left(Z - \frac{2r+1}{4}\pi\right) \qquad (9)$$

を用いれば，kRが充分大きいところでは

$$\left.\begin{aligned} J_0(kR) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \cos\left(kR - \frac{\pi}{4}\right) \\ J_1(kR) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \cos\left(kR - \frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \sin\left(kR - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

となり，これより

$$\eta_0 = \frac{\pi kR}{2}\left[J_0^2(kR) + J_1^2(kR)\right] \sim 1 \qquad (11)$$

が成立つ。最初にRは波長に比べて充分大きいとしてあるので，このことは開口面をどこにおいても，利得は変らないことを意味している。

η_1 は開口面の照度分布に関係した項であつて，開口面上に等位相，等振巾の波源がある場合，α，βが定数であるので，明らかに $\eta_1 = 1$ すなわち能率は100%である。

$\theta = 90° - \tilde{\theta}$ とおいて，$\theta = 0°$ のときの利得で正規化した電力放射パターンP(θ)は

$$
\left.
\begin{aligned}
&P(\theta) = P_0(\theta) \cdot P_1(\theta) \\
&P_0(\theta) = \frac{\left[J_0^{\,2}(kR\cos\theta)\cos^2\theta + J_1^{\,2}(kR\cos\theta)\right]}{\left[J_0^{\,2}(kR) + J_1^{\,2}(kR)\right]} \\
&P_1(\theta) = \left| \frac{\int_{Z_1}^{Z_2} \alpha(Z) \text{ or } \beta(Z) \cdot e^{jkZ\sin\theta}\, dZ}{\int_{Z_1}^{Z_2} \alpha(Z) \text{ or } \beta(Z)\, dZ} \right|^2
\end{aligned}
\right\} \quad (12)
$$

となる。α，βはそれぞれ垂直偏波成分，水平偏波成分に対応する。$P_0(\theta)$はθが小さい場合ほとんど1に等しい。

3. 無指向性ホーンリフレクタアンテナの幾何学的な関係

円錐ホーンの開き角をΨ，放物線の焦点距離をfとし，図3のような極座標系（r，θ，ϕ）を用いて鏡面上の点を表わすと，（13）となる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&r = \frac{2f}{1-\sin\theta} = 2fs(s+ht) \\
&h = \tan\frac{\Psi}{2},\quad ht = \tan\theta,\quad s = \sec\theta
\end{aligned}
\right\} \quad (13)
$$

これから

$$
\left.
\begin{aligned}
&Z = r\cos\theta = 2f(s+ht) \\
&dZ = 2fh\,\frac{s+ht}{s}\,dt
\end{aligned}
\right\} \quad (14)
$$

を得る。

上式を用いて図3の各部の寸法は（15）で表わされる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&H = 2f(s_0+h),\quad D = 2f(s_0+h-1) \\
&L = 2f,\quad R = 2fh(s_0+h)
\end{aligned}
\right\} \quad (15)
$$

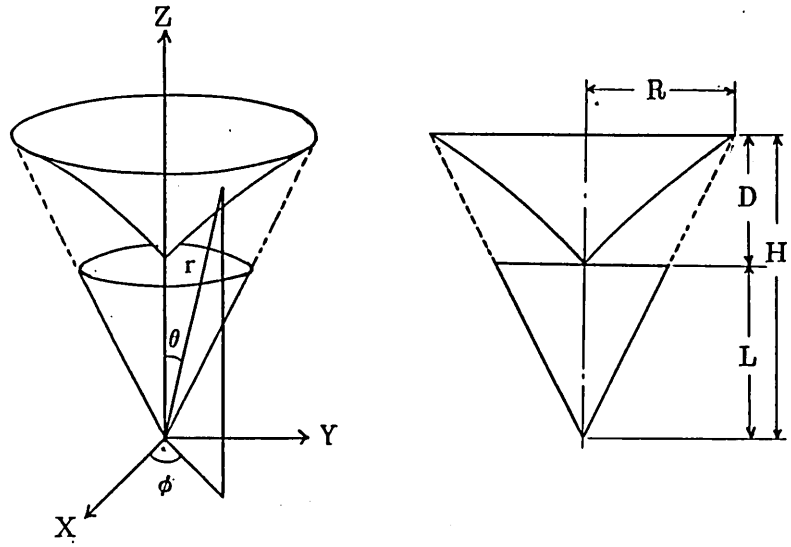


図３　極座標系（ｒ，θ，φ）と各部の寸法

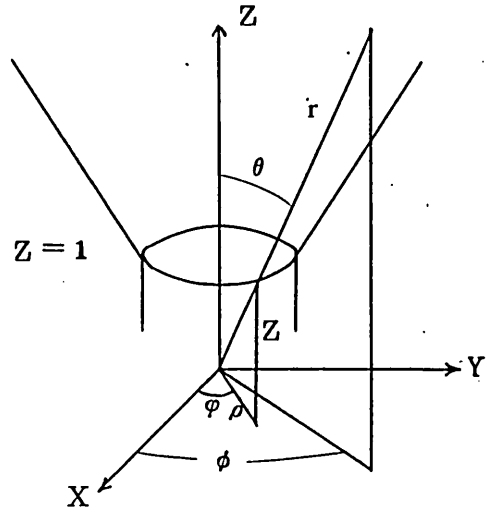


図４　給　　電　　部

ここで　　$s_0 = \sec\left(\frac{\Psi}{2}\right)$ である。

4. 無指向性ホーンリフレクタアンテナの開口面電界分布

開口面上の電界分布を導くために，図4のような円筒座標（ρ，φ，Z）と極座標（r，θ，ϕ）を考える。給電導波管と円錐ホーンの接合部をZ＝1なる面にとつても一般性を失わない。

給電導波管の断面にとつた正規化した半径方向の距離をtとし，電界を$\mathbf{E}_\omega$とすると，それは（16）で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{E}_\omega = E_\rho \mathbf{e}_\rho + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi \\
&TE_{01}\text{モードの場合}\quad E_\rho = 0 \quad E_\varphi = J_1(\alpha_e t) \\
&\qquad\qquad \alpha_e = 3.831706 \\
&TM_{01}\text{モードの場合}\quad E_\varphi = 0 \quad E_\rho = J_1(\alpha_m t) \\
&\qquad\qquad \alpha_m = 2.404826
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

円錐ホーン中の電界を $\mathbf{E}_i\, e^{-jkr}$ とすれば

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{r}(E_\theta \mathbf{e}_\theta + E_\phi \mathbf{e}_\phi) \qquad (17)$$

である。これが接合面で$\mathbf{E}_\omega$と次のように対応するものと仮定する。

$$\left.\begin{aligned}
E_\theta &= r(Z=1)E_\rho = \sec\theta\, E_\rho \\
E_\phi &= r(Z=1)E_\varphi = \sec\theta\, E_\varphi
\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

これより

$$\mathbf{E}_i = \frac{\sec\theta}{r}(E_\rho \mathbf{e}_\theta + E_\varphi \mathbf{e}_\phi) \qquad (19)$$

で，（16）のtは（13）で定義したtと一致する。

鏡面による反射波 E_r は，Z軸を軸とする円筒波であるから

$$E_r = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (E_z e_z + E_{\varphi'} e_\varphi) \qquad (20)$$

の形となり，これが鏡面上で E_i と一致するから，鏡面上では $\rho = r \sin\theta$ であることを用いて

$$\left.\begin{aligned} E_z &= \sqrt{r \sin\theta}\ \frac{\sec\theta}{r}\ E_\rho \\ E_{\varphi'} &= \sqrt{r \sin\theta}\ \frac{\sec\theta}{r}\ E_\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

となり，（13）で定義した t，s を用いて（22）を得る。

$$E_r = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sqrt{\frac{h}{2f}} \sqrt{\frac{t}{s+ht}} (E_\rho e_z + E_\varphi e_\varphi) \qquad (22)$$

（4）のように α，β を定義すれば，それは（23）になる。

TE_{01} モードの場合

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = 0 \\ &\beta = \sqrt{\frac{h}{2f}} \sqrt{\frac{t}{s+ht}}\ J_1(\alpha_e t) \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

TM_{01} モードの場合

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \sqrt{\frac{h}{2f}} \sqrt{\frac{t}{s+ht}}\ J_1(\alpha_m t) \\ &\beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

5. 能率，放射パターンの計算結果

開口面の位置Rに関係する項 η_0 を計算した結果が図5である。kRが20，すなわちRが3.2波長以上であれば，η_0 の凹凸は0.1 dB以下である。

（14），（15），（23）を（8）に代入して整理すれば，

$$\left.\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{1+s_0-h}{2}\cdot\frac{\left(\int_0^1 J_1(\bar{\alpha}t)\sqrt{\frac{t(s+ht)}{s}}\,dt\right)^2}{\int_0^1 J_1^2(\bar{\alpha}t)\cdot\frac{t}{s}\,dt}\\ \bar{\alpha} &= \begin{cases}\alpha_e: & 3.831706 \quad TE_{01}\ \text{モード}\\ \alpha_m: & 2.404826 \quad TM_{01}\ \text{モード}\end{cases}\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

を得る。これを円錐ホーンの開き角Ψの関数として示したのが図6である。

TM_{01} モードで励振する場合の方が，TE_{01} モードで励振する場合より能率が高く，またホーンの開き角が増加すれば能率は高くなる。その傾向はTM_{01} モードの場合の方が著しい。機械的にみても開き角が大きい方が有利であるので，他の条件が許す範囲で開き角は大きくとるべきである。

放射パターンの計算結果を図7，8に示す。

TE_{01} モードで励振した場合，サイドローブは低く，θが大きくなると急速に低下するが，TM_{01} モードで励振した場合，サイドローブはなかなか低くならない。これは開口面の電界分布の形が異なるためである。

3 dB down点と1stサイドローブレベルを表1に示す。

これらの結果より明らかなように，開き角を変えても，放射パターンは比較的変化がゆるやかである。

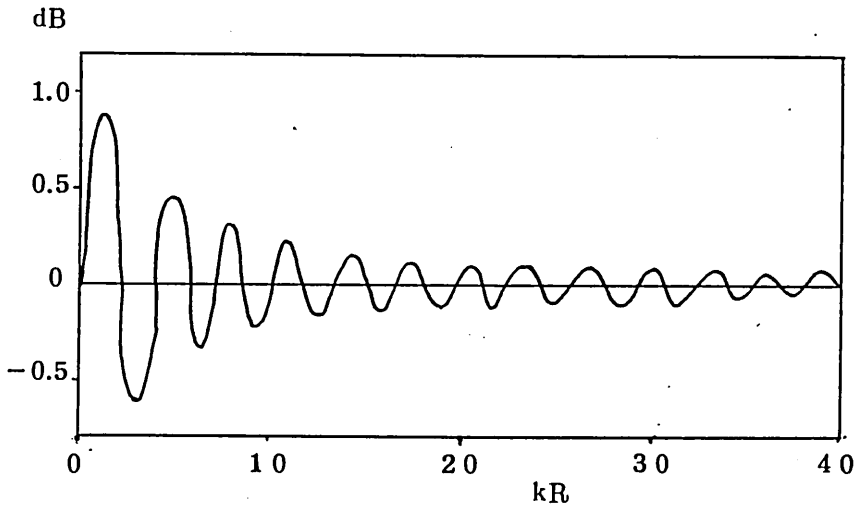


図5　能　率　η_0

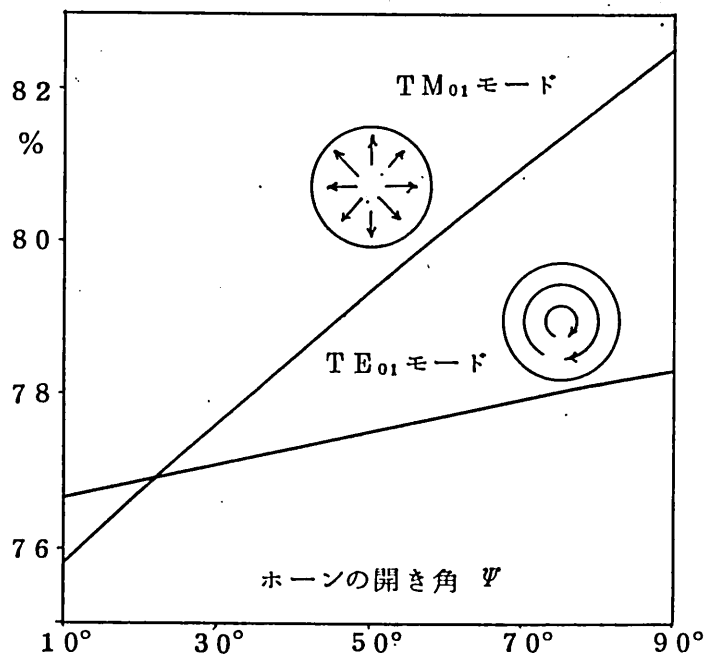


図6　能　率　η_1

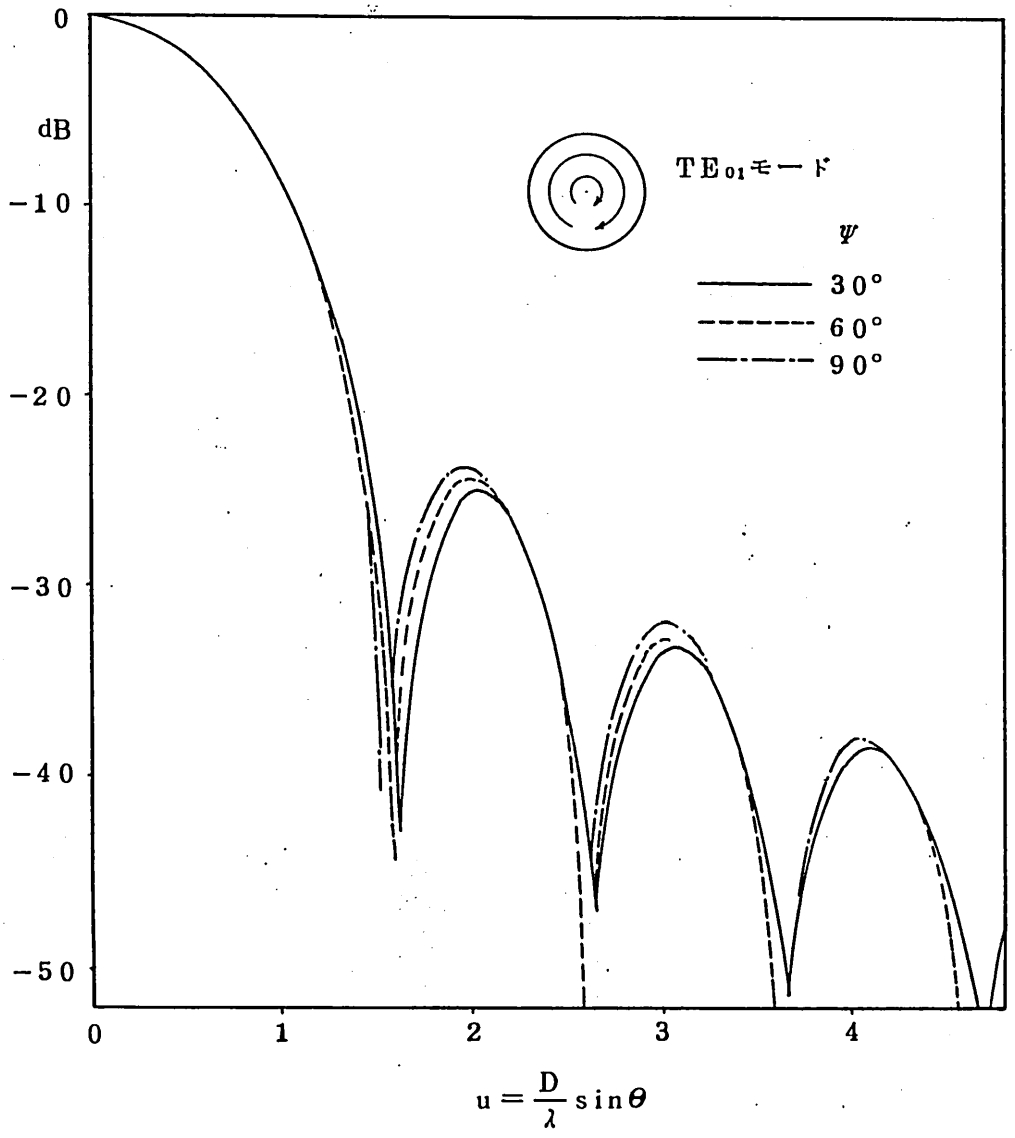


図7　TE_{01} モードで励振した場合の放射パターン

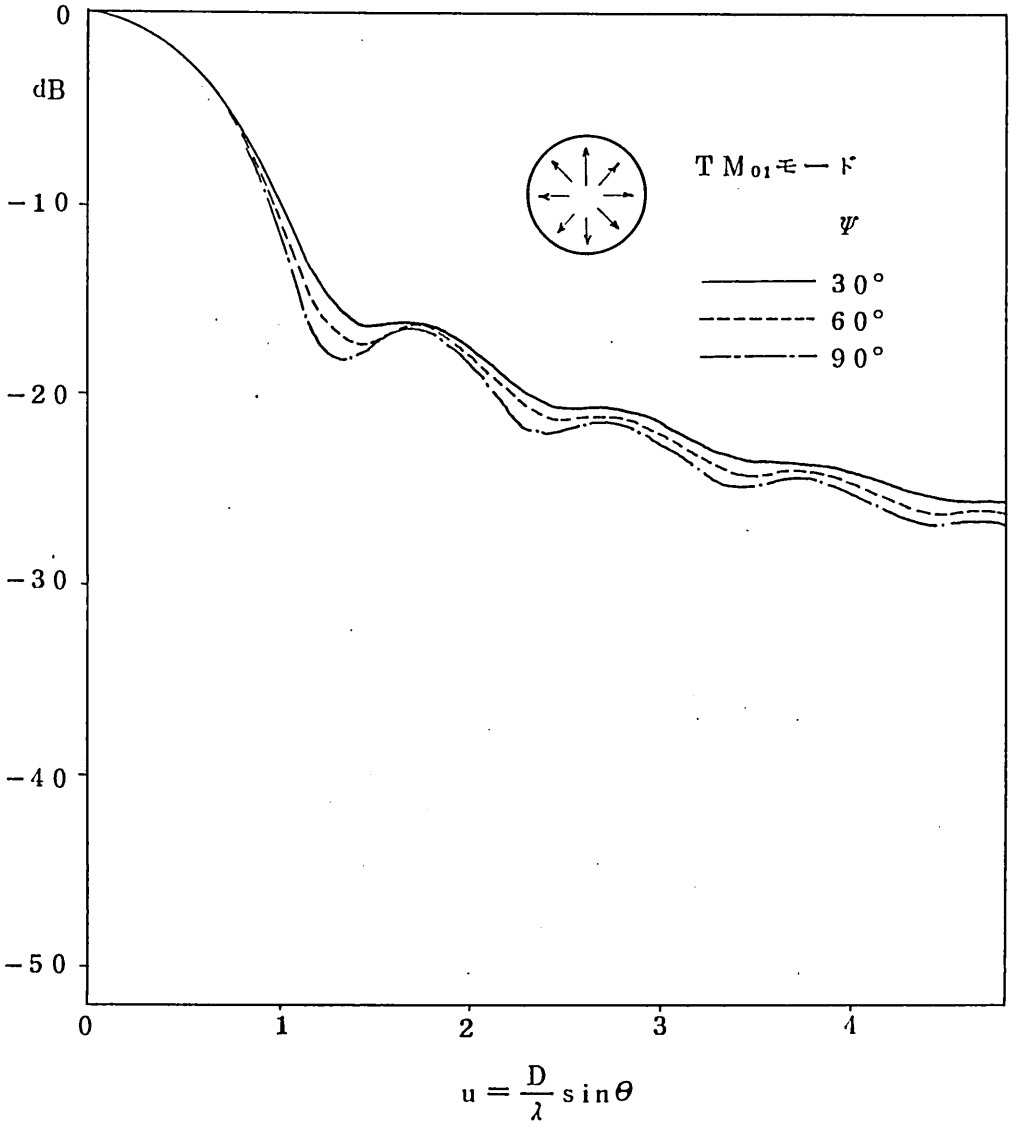


図8　TM_{01} モードで励振した場合の放射パターン

開き角	3 dB down点 ($u=\frac{D}{\lambda}\sin\theta$)		1 st サイドローブ (dB)	
	TE_{01} モード	TM_{01} モード	TE_{01} モード	TM_{01} モード
30°	0.620	0.569	−24.7	−16.2
45°	0.617	0.560	−24.6	−16.4
60°	0.615	0.551	−24.3	−16.6
75°	0.613	0.547	−23.9	−16.7
90°	0.610	0.540	−23.6	−16.8

表1　3 dB down 点と1 st サイドローブレベル

6. むすび

マイクロ波帯で用いられる無指向性高利得アンテナとして，無指向性ホーンリフレクタアンテナについて論じた。

これは円形導波管のTE_{01} モードおよびTM_{01} モードで励振して，それぞれ水平偏波，垂直偏波の無指向性パターンが得られる。このアンテナの能率は高く，理論値としては開き角45°でTE_{01} モードの場合77%，TM_{01} モードの場合79%が得られる。放射パターンはTE_{01} モードの場合の方が優れており，1 st サイドローブレベルは−25 dB程度で，正面方向から離れるに従い急速に低下する。これに対しTM_{01} モードの場合，1 st サイドローブレベルは−16 dB で広角度までなかなか低下しない。

アンテナ自体としては，円錐ホーンの開き角が大きければ大きい程，機械的にも電気的にも有利であり，他の条件が許す限り開き角は大きくとるべきである。

このアンテナの用途としては，マイクロ波帯で多方向と同時に通信する場合

とか，一般向けの放送サービスを行う場合，あるいは人工衛星のアンテナなどが考えられる。

参考文献

〔1〕 S. Silver, "Micro wave Antenna Theory and Design", Mc Graw-Hill, New York, 1949, P161

近似解法による
各種漏洩導波管指向特性の検討

繁沢　宏
森本克英
滝山　敬
（同志社大学工学部）

1968年2月9日

輻射科学研究会

近似解法による石槨漏洩導波管指向特性の検討

繁沢 宏・森本克英・滝山 敬・
同志社大学 工学部

緒言

漏洩導波管からの放射の問題を取り扱う時，如何にして正しく管壁上の電流分布の寄与を考慮するかが，特に指向性を考える上に重要な問題である。一般的には漏洩導波管断面の型状が適当な座標系で表わせる場合をのぞいては正確に管壁上の電流を考慮するのは非常に困難であり，何等かの近似的手段を講じなければ解くことが出来ない。この近似的手段としては多くの方法が考えられるが，本報告では簡単な構造ではあるが広く適用できる矩形断面をもった任意の漏洩導波管について，それを適当な楕円筒漏洩導波管に置き換えて解析する場合の近似法について述べたもので，漏洩Hガイド[1]と矩形導波管を例にとり上述の方法で解析した結果と実験結果とを比較検討し，非常によい一致をみたので報告するものである。

1. 楕円筒座標近似による解析法

A. 近似法

今図1に示す如き矩形断面をもった任意の漏洩導波管があり，一般性を失うことなくその開口が（$z=\ell$, $|y|\leqq\frac{a}{2}$, $|z|\leqq\infty$）に存在し，開口上の源分布が与えられた場合を考える。今この断面を

2.

$$\left.\begin{aligned} x &= C_0 \cosh\xi \cos\eta \\ y &= C_0 \sinh\xi \sin\eta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

で示せる楕円筒座標[(ξ, η, z), 焦点間距離$2C_0$]の$\xi = \xi_0$で表わせる楕円断面で近似することを試みる。この時本来の開口($x=l$, $|y| \leqq \frac{a}{2}$)及びその上の源分布を$\xi = \xi_0$上のどの部分に，どの様な分布で近似的に考えるかが問題である。本文では先ず開口については図2に示すように($x=l$, $|y| \leqq \frac{a}{2}$)に存在する開口を$\xi = \xi_0$上で($x=l$, $y = \pm\frac{a}{2}$)を通る$\eta = \pm\eta_a$によって定まる($\xi = \xi_0$, $|\eta| \leqq \eta_a$)に移す方法を取った。この方法に依った必然的な理由はないが以後の関数的な取り扱いに便利な近似法であると言える。

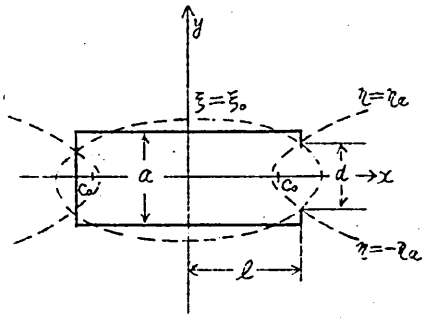


図 1

次に開口上の源分布をどのように表わすかについては次のように考えた。本来の開口上($x=l$, $|y| \leqq \frac{a}{2}$, $|z| \leqq \infty$)で放射界の源となり得る境界分布は一般的には(x, y, z)系ではE_y, E_z両成分が考えられ，今$e^{j(\omega t - hz)}$を省略して各々が開口上で既知関数$e_y(x=l, y)$, $e_z(x=l, y)$で与えられているとする。今その成分を(ξ, η, z)系でみると座標間の関係より

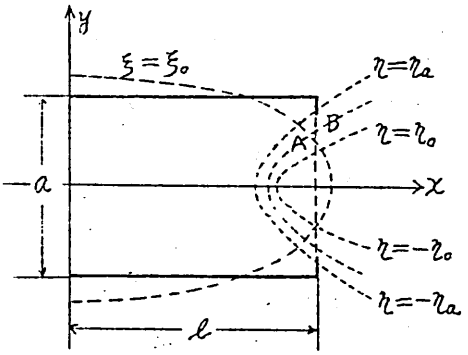


図 2

$$\left.\begin{aligned} E_z &= e_z(l, y) \\ E_\eta &= \frac{\sinh\xi \cos\eta}{\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}} \cdot e_y(l, y) \qquad |y| \leqq \frac{a}{2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$E_\xi = \frac{\cosh\xi \sin\eta}{\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}} \cdot e_y(l, y) \Bigg\}$$

となる。ここで y と η の関係は式(1)より

$$y = C_0\sqrt{\left(\frac{l}{C_0}\right)^2 - \cos^2\eta} \cdot \tan\eta \equiv F(\eta) \tag{3}$$

を得るから $x=l$ 上の分布を (ξ, η, z) 系でみると

$$\left.\begin{aligned} E_z &= e_z[l, F(\eta)] \\ E_\eta &= G(\eta) \cdot e_y[l, F(\eta)] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

但し

$$G(\eta) = \sqrt{\frac{l^2}{C_0^2\cos^2\eta} - 1} \Big/ \sqrt{\frac{l^2}{C_0^2\cos^4\eta} - 1} \tag{5}$$

尚，(ξ, η, z) 系では E_ξ 成分は放射に寄与しないから省略する。

この分布をもとに $\xi = \xi_0$ 上の開口分布を近似的に求めるため，図2に於て（$x=l$, $|y| \leqq \frac{d}{2}$）の各点（例えばA点）からその点を通る η = 一定の座標に沿って $\xi = \xi_0$ 上のB点まで振巾は変えず位相のみ変えて移してみると $\widehat{AB} = d(\eta)$ として

$$d(\eta) \simeq \frac{C_0}{\cos\eta_0}\left[\left(\frac{l}{C_0}\right)^2(\cos\eta - \cos\eta_0)^2 + \tan^2\eta \right.$$

$$\left.\left(\sqrt{\left(\frac{l}{C_0}\right)^2 - \cos^2\eta_0} \cdot \cos\eta - \sqrt{\left(\frac{l}{C_0}\right)^2 - \cos^2\eta} \cdot \cos\eta_0\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

が導ける。従って今断面内の波数を γ とすると式(4)で与えられる分布の位相を $\gamma d(\eta)$ だけ変えたものが $\xi = \xi_0$ 上 $|\eta| \leqq |\eta_a|$ にあると考える。この時 図2からわかるように $\xi = \xi_0$ と $x = l$ とが交わる点（$\xi = \xi_0$,

$\eta=\eta_0$)を境にして式(4)の分布を $|\eta|\leqq\eta_0$ で $D(\eta)=\gamma d(\eta)$ だけ遅相し，$\eta_0\leqq|\eta|\leqq\eta_a$ で $D(\eta)$ だけ進相したものが求める($\xi=\xi_0, |\eta|\leqq\eta_a$)上の分布であるとする。つまり

$$\left.\begin{aligned} E_z &= e_z(l, F(\eta))\, e^{\mp jD(\eta)} \\ E_\eta &= G(\eta)\cdot e_y[l, F(\eta)]\, e^{\mp jD(\eta)} \end{aligned}\right\} \quad |\eta|\leqq\eta_a \qquad (7)$$

但し $|\eta|\leqq\eta_0$ で複号上方，$\eta_0\leqq|\eta|\leqq\eta_a$ で複号下方をとるものとする。さてここで決定しなければならないのは焦点位置 C_0 と楕円面 $\xi=\xi_0$ 及びそれに伴って開口の大きさを指定する η_a，η_0 の決定である。

ξ_0 は便法として矩形断面の長辺と短辺の比によって定まる楕円率，つまり図1において $\tanh\xi_0=a/2l$ から決定するのが妥当と思われる。又 C_0 に対しては一つの方法として矩形断面の導波管中の伝送姿態のしゃ断波長と上述の楕円率をもった楕円導波管中の類似姿態のそれとが一致するように C_0 を定める方法が考えられる。これも一つの便法であって他に種々の方法が考えられる。次に η_a，η_0 の決定は図2に於ける座標関係より η_a 決定式として

$$\sqrt{\left(\frac{l}{C_0}\right)^2-\cos^2\eta_a}\cdot\tan\eta_a=\frac{d}{2C_0} \qquad (8)$$

が，又 η_0 決定式として

$$\cos\eta_0=l/C_0\cosh\xi_0 \qquad (9)$$

が導けるから l, C_0, ξ_0, d を与えれば η_a, η_0 が求められる。

B. 放射界の解析

以上のような近似で開口及び開口分布が与えられたとすると，以後の解析は一般に用いられる方法なので簡単に述べることにする。楕円筒

座標系に於ける界の一般表示式は $e^{j(\omega t - hz)}$ を省略して次式で与えられる。[2]

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty} (k^2 - h^2)\left[A_m^{e,o}(r)\, Se,om(\eta)\, He^{(2)}_{,om}(\xi)\right] \qquad (10-1)$$

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} (k^2 - h^2)\left[B_m^{e,o}(r)\, Se,om(\eta)\, He^{(2)}_{,om}(\xi)\right] \qquad (10-2)$$

$$E_\eta = \sum_{m=0}^{\infty}\left[-\frac{jh}{h_1} Am^{e,o}\, \partial Se,om/\partial\eta\, He^{(2)}_{,om} + \frac{j\omega\mu}{h_1} B_m^{e,o}\, Se,om\, \partial He^{(2)}_{,om}/\partial\xi\right] \qquad (10-3)$$

（但し他の成分は紙面都合上省略，詳細は文献(2)参照のこと）

ここで $\gamma^2 = k^2 - h^2$ （$k = 2\pi/\lambda$，$h = 2\pi/\lambda_g$）で $h_1 = \sqrt{C_0 \cos h^2\xi - \cos^2\eta}$ は測度係数である。又 $Am^{e,o}$，$B_m^{e,o}$ は任意係数であり，$Se,om(\eta)$ 及び $He^{(2)}_{,om}(\xi)$ は各々 Mathiew の角関数及び第4種半径関数である。

さて今 $\xi = \xi_0$ 上の開口に式(7)で与えられる源分布がある場合，これを角関数 $Se,om(\eta)$ で展開して

$$\left.\begin{aligned} & e_z[l, F(\eta)]\, e^{\mp jD(\eta)}, \\ & \quad (|\eta| \le \eta_a) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{e,o}\, Se,om(\eta) \\ & h_1 G(\eta)\cdot e_y[l, F(\eta)]\, e^{\mp jD(\eta)}, \\ & \quad (|\eta| \le \eta_a) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{e,o}\, Se,om(\eta) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

とすると，これらの式の右辺が各々式(10-1)，(10-3)の $\xi = \xi_0$ 上の値と一致すべきことより結局未知係数 $Am^{e,o}$，$B_m^{e,o}$ が求められ

$$(k^2-h^2)\cdot N_m^{e,o}\cdot He_{,om}^{(2)}(\xi_0)\cdot A_m^{e,o}(\gamma)$$
$$=\int_{-\eta_a}^{\eta_a} e_z[l,F(\eta)]\,e^{\mp jD(\eta)}\,S_{e,om}(\eta)\,d\eta \qquad (12)$$

$$j\omega\mu\cdot N_m^{e,o}\left[\partial He_{,om}^{(2)}(\xi)/\partial\xi\right]_{\xi=\xi_0}\cdot B_m^{e,o}(\gamma)$$
$$=\frac{jh}{k^2-h^2}\int_{-\eta_a}^{\eta_a} e_z[l,F(\eta)]e^{\mp jD(\eta)}\,\partial S_{e,om}(\eta)/\partial\eta\cdot d\eta$$
$$+\int_{-\eta_a}^{\eta_a} h_1G(\eta)e_y[l,F(\eta)]e^{\mp jD(\eta)}\,S_{e,om}(\eta)\,d\eta \qquad (13)$$

但し $N_m^{e,o}$ は $S_{e,om}(\eta)$ の正規化因数である。

2. 応用例

A. 有限開口の場合の例（漏洩H-ガイドの近似解法）

一般性を失うことなくこの場合の例として漏洩H-ガイド[1]を考える。このガイドの断面構造は図3に示すもので TM_s-sym 姿態と呼ばれる混成姿態が存在する。この場合開口は $x=\pm l$ の2個所に存在し、各々の開口は逆相励振されており、次式で示せる開口分布が近似的に仮定しうるものである。（振巾は適当に正規化している。）つまり

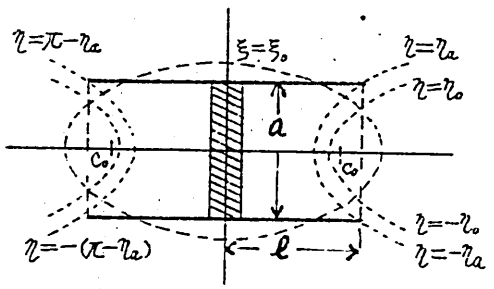


図 3

$$e_z=\pm\cos\beta y=\pm\cos[\beta F(\eta)],$$
$$e_y=\pm j\frac{\beta}{h}\sin\beta y=\pm j\frac{\beta}{h}\sin[\beta F(\eta)] \qquad (14)$$

但し $\beta=\frac{\pi}{a}$ で、$|y|\leqq\frac{a}{2}$ で定義されている。又 $x=\pm l$ と上式の正負

は同順。従ってこれらを式(12),(13)に代入すると結果として

$$(k^2-h^2)N_m^e \cdot H_{em}^{(2)}(\xi_0)\cdot A_m^e = 4\sum_{n=1}^{\infty}{}' D_n^m [K_1+j(K_2-K_3)] \qquad (15-1)$$

$$\omega\mu N_m^o \partial H_{om}^{(2)}/\partial\xi \; B_m^o = \frac{4h}{(k^2-h^2)} \sum_{n=1}^{\infty}{}' n F_n^m [K_1+j(K_2-K_3)]$$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}{}' F_n^m [K_4+j(K_5-K_6)] \qquad (15-2)$$

$$A_m^o = B_m^e = 0$$

但し m は奇数のみをとり，$\sum_n'$ は n について奇数のみの和を示すものである。又 D_n^m，F_n^m は後述の式(41)を参照のこと。又 K_m は

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{\eta_a} \cos\beta F(\eta)\cos D(\eta)\cos n\eta\, d\eta \\ K_{2,(3)} &= \int_{\eta_{0,(0)}}^{\eta_{a,(\eta_0)}} \cos\beta F(\eta)\sin D(\eta)\cos n\eta\, d\eta \\ K_4 &= \int_0^{\eta_a} h_1\cdot\frac{\beta}{h} G(\eta)\sin\beta F(\eta)\cos D(\eta)\sin n\eta\, d\eta \\ K_{5,(6)} &= \int_{\eta_{0,(c)}}^{\eta_{a,(\eta_0)}} h_1\frac{\beta}{h} G(\eta)\sin\beta F(\eta)\sin D(\eta)\sin n\eta\, d\eta \end{aligned}\right\} (16)$$

今開口から C_0 に比べて充分遠い所 ($\xi \gg C_0$) では楕円座標系は円筒座標系に近づくから放射界として E_z 及び $E_\eta \simeq E_\phi$ 成分が存在し，各々の指向性を $F_z(\phi)$，$F_\phi(\phi)$ とすると式(10)の $\xi \gg C_0$ に於ける漸近展開を用いて

$$\left. F_z(\phi) = \left| \sum_{m=1}^{\infty}{}' A_m^e \sin\frac{m\pi}{2} S_{em}(\phi) \right| \right\} (17)$$

$$F_\phi(\phi) = \left| \sum_{m=1}^{\infty}{}' B_m^0 \sin\frac{m\pi}{2} S_{0m}(\phi) \right| \qquad \text{J}$$

が得られる。

これらの結果を確かめるため，図3に於て

i) $a = 2.3\,cm$，$\ell = 8\,cm$，導体板厚さ $= 0.15\,cm$

ii) $a = 2.3\,cm$，$\ell = 5\,cm$，導体板厚さ $= 0.15\,cm$

なる寸法の2種類のものについて，$f = 9.5\,GHz$ にて実験を行なった。先ず C_0 の決定はどちらの場合にも楕円率が小さいことを考え開口上に焦点をとり近似し，i)に対して $C_0 = 8\,cm$，ii)に対して $C_0 = 5\,cm$ とした。これより

i)に対して　$\xi_0 = 0.1639$，$\eta_a = 0.375$，$\eta_0 = 0.172$

ii)に対して　$\xi_0 = 0.2661$，$\eta_a = 0.5$，$\eta_0 = 0.263$

が得られるからこれらを用いて式(17)を計算したのが図4，図5の実数で示すもので，又点線が電波暗室内で測定した結果であり非常によく一致している。尚測定値はガイド中心より半径 $100\,cm$ 離れた点で観測したものであるが，計算値は遠方界の指向性とほとんど変りなかった。

B. 無限小開口の場合の例（スリットを設けた矩形導波管の近似解法）

TE_{10} 姿態のみを伝送している矩形導波管の任意の壁面に設けられた軸方向無限長スリットからの放射指向性について考えてみる。一般にこの様な漏洩導波管ではスリットの巾は波長に比べて非常に狭いものが用いられているので，ここでもその様な場合について検討してみた。この時図1に示すような導波管のどの面の，どの様な場所

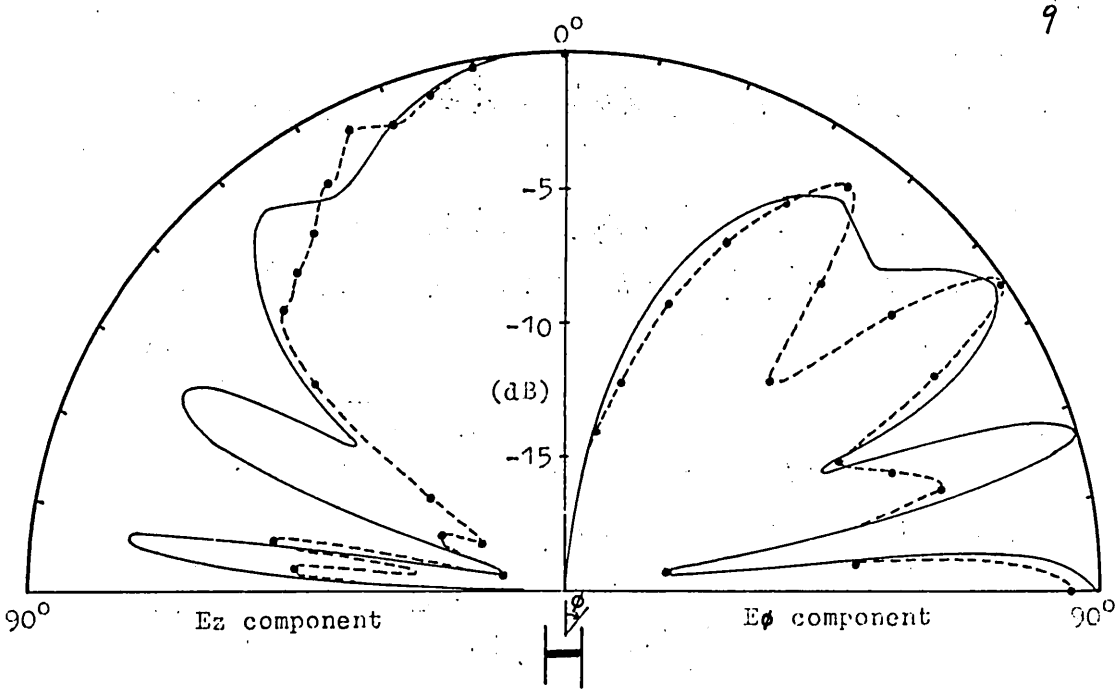


図4 漏洩H-ガイドからの放射指向性

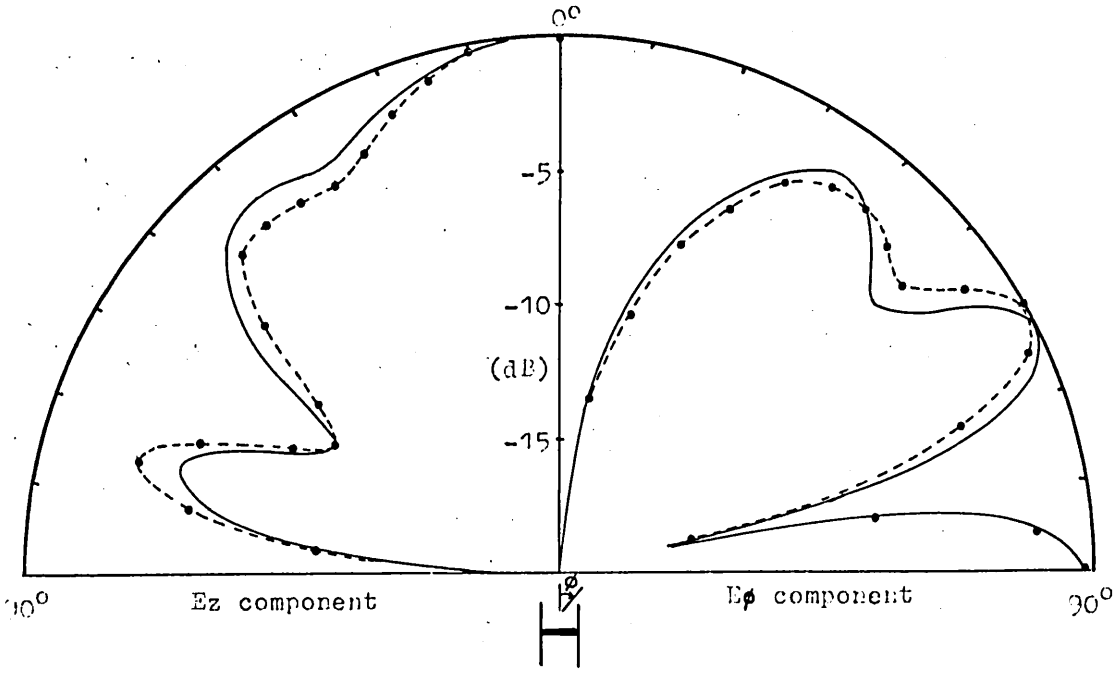


図5 漏洩H-ガイドからの放射指向性

にスリットを設けるかによって次の七つの場合に分けて考えてみた。

1) $x=\ell,\ y=0$ にある場合 (図6)

スリットが TE_{10} 波態で励振されている場合には線分布として

$$\left.\begin{aligned} e_z &= 0 \\ e_y &= \delta(y) = \delta(\eta) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

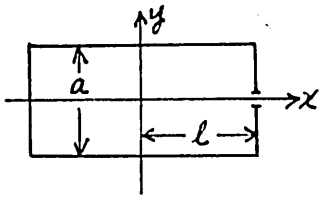


図 6

式(18)を式(12), (13)に代入すると

$$j\omega\mu B_m^e = \frac{C_0 \sin h\,\xi_0}{N_m^e \cdot \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}\, e^{-jD(0)} \qquad (19\text{-}1)$$

$$A_m^e = A_m^o = B_m^o = 0 \qquad (19\text{-}2)$$

を得る。従って式(10)より唯一に存在する境界成分は E_η で，その指向性を $F_\eta(\eta)$ とすると

$$F_\eta(\eta) = \left| \frac{1}{h_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Sem(\eta)\,\partial He_m^{(2)}(\xi)/\partial\xi}{N_m^e \cdot \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right| \qquad (20)$$

を得る。又前述と同様 $\xi \gg C_0$ では $E_\eta \simeq E_\phi$ となり，指向性 $F_\phi(\phi)$ は

$$F_\phi(\phi) = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{j\frac{m\pi}{2}}\, Sem(\phi)}{N_m^e \cdot \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right| \qquad (21)$$

となる。

2) $x=\pm\ell,\ y=0$ にある場合 (図7)

この時の線分布は楕円筒系でみると互いに逆相励振されるから次

の様に示せる。

$$\left.\begin{aligned} e_z &= 0 \\ e_y &= \delta(\eta) - \delta(\pi-\eta) \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

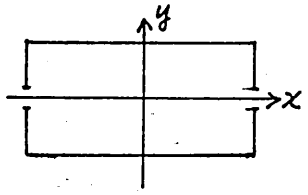


図 7

従ってこの場合には

$$jw\mu B_m^e = \frac{e^{-jD(0)}}{N_m^e \, \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \cdot \left[Se_m(0) - Se_m(\pi) \right] \quad (23-1)$$

$$A_m^e = A_m^o = B_m^o = 0 \quad (23-2)$$

を得るから $Se_m(0)=1$, $Se_m(\pi)=(-1)^m$ を考慮すると 結局 E_η の指向性として

$$F_\eta(\eta) = \left| \frac{1}{h_1} \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{Se_m(\eta) \cdot \partial He_m^{(2)}(\xi)/\partial\xi}{N_m^e \, \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right| \quad (24-1)$$

$$F_\phi(\phi) = \left| \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{e^{j\frac{m\pi}{2}} Se_m(\phi)}{N_m^e \, \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right| , \quad \text{for } \xi \gg C_0 \quad (24-2)$$

が導ける。

3) $x=x_0$, $y=\frac{a}{2}$ にある場合 (図 8)

この時の源分布は次の様に示せる。

$$\left.\begin{aligned} e_z &= 0 \\ e_y &= \delta(\eta-\eta_s) \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

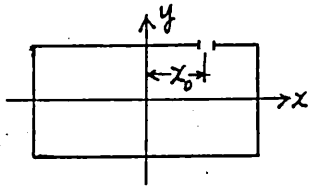


図 8

ここで η_s は本来のスリット上を通る η 座標であって、座標関係より

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = x_0^2 \tan^2\eta_s - C_0^2 \sin^2\eta_s \qquad (26)$$

によって決められるものである。

この場合には

$$j\omega\mu B_m^{e,o} = \frac{S_{e,om}(\eta_s)}{N_m^{e,o}\ \partial H_{e,om}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}\ e^{-jD(\eta_s)} \qquad (27-1)$$

$$A_m^e = A_m^o = 0 \qquad (27-2)$$

を得るから結局 $E\eta$ の指向性として

$$F_\eta(\eta) = \left| \frac{1}{h_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_{e,om}(\eta_s)\cdot S_{e,om}(\eta)\ \partial H_{e,om}^{(2)}(\xi)/\partial\xi}{N_m^{e,o}\ \partial H_{e,om}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right| \qquad (28-1)$$

$$F_\phi(\phi) = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{j\frac{m\pi}{2}} S_{e,om}(\eta_s)\cdot S_{e,om}(\phi)}{N_m^{e,o}\ \partial H_{e,om}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right|, \quad \text{for } \xi \gg C_0 \qquad (28-2)$$

が導ける。

4) $x=x_0$, $y=\pm\frac{a}{2}$ にある場合 (図9)

この時の源分布は楕円筒系でみると互いに同相励振されるから次の様に示せる。

$$\left.\begin{aligned} e_z &= 0 \\ e_y &= \delta(\eta-\eta_s)+\delta(\eta+\eta_s) \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

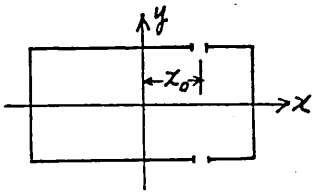


図9

従ってこの場合には

$$j\omega\mu B_m^e = \frac{e^{-jD(\eta_s)}}{N_m^e\ \partial H_{em}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}\left[S_{em}(\eta_s)+S_{em}(-\eta_s)\right] \qquad (30-1)$$

$$A_m^e = A_m^o = B_m^o = 0 \qquad (30-2)$$

を得るから $Sem(\eta_s) = Sem(-\eta_s)$ を考慮すると結局指向性として

$$F_\eta(\eta) = \left| \frac{1}{h_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Sem(\eta_s) \cdot Sem(\eta)\, \partial He_m^{(2)}(\xi)/\partial\xi}{N_m^e\, \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right| \qquad (31-1)$$

$$F_\phi(\phi) = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{j\frac{m\pi}{2}}\, Sem(\eta_s) \cdot Sem(\eta)}{N_m^e\, \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right| \quad \text{for } \xi \gg c_0 \qquad (31-2)$$

が導ける。

5) $(x = x_0, y = \frac{a}{2})$, $(x = -x_0, y = -\frac{a}{2})$ にある場合　(図10)

この時の源分布は楕円筒系でみると互いに逆相励振されるから次の様に示せる。

$$\left.\begin{aligned} e_z &= 0 \\ e_y &= \delta(\eta - \eta_s) - \delta(\eta + \pi - \eta_s) \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

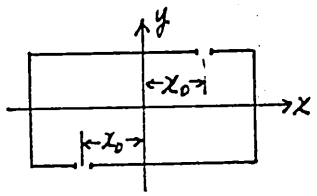


図10

従ってこの場合には

$$j\omega\mu B_m^{e,o} = \frac{e^{-jD(\eta_s)}}{N_m^{e,o}\, \partial He_{e,om}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \left[Se_{,om}(\eta_s) - Se_{,om}(-\pi + \eta_s) \right] \qquad (33-1)$$

$$A_m^e = A_m^o = 0 \qquad (33-2)$$

を得るから $Se_{,om}(-\pi + \eta_s) = (-1)^m Se_{,om}(\eta_s)$ を考慮すると結局 E_η の指向性として

$$F_\eta(\eta) = \left| \frac{1}{h_1} \sum_{m=1}^{\infty'} \frac{Se_{,om}(\eta_s) \cdot Se_{,om}(\eta)\, \partial He_{e,om}^{(2)}(\xi)/\partial\xi}{N_m^{e,o}\, \partial He_{e,om}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right| \qquad (34-1)$$

$$F_\phi(\phi) = \left| \sum_{m=1}^{\infty'} \frac{e^{j\frac{m\pi}{2}}\, Se_{,om}(\eta_s) \cdot Se_{,om}(\phi)}{N_m^{e,o}\, \partial He_{,om}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi} \right| \qquad (34-2)$$

が導ける。

6) $x=\pm x_0$, $y=\frac{a}{2}$ にある場合（図11）

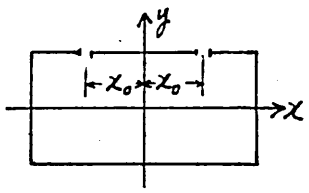


図 11

この時の源分布は楕円筒系でみると逆相励振されるから次の様に示せる。

$$\left.\begin{aligned} e_z &= 0 \\ e_y &= \delta(\eta-\eta_s)-\delta(\eta-\pi+\eta_s) \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

従ってこの場合には

$$j\omega\mu B_m^{e,o}=\frac{e^{-jD(\eta_s)}}{N_m^{e,o}\,\partial He_{,om}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}\left[S_{e,om}(\eta_s)-S_{e,om}(\pi-\eta_s)\right] \quad (36-1)$$

$$A_m^e=A^o{}_m=0 \quad (36-2)$$

を得るから $S_{em}(\pi-\eta_s)=(-1)^m S_{em}(\eta_s)$, $S_{om}(\pi-\eta_s)=(-1)^{m+1}S_{om}(\eta_s)$ を考慮すると結局 $E\eta$ の指向性として

$$F_\eta(\eta)=\left|\frac{1}{h_1}\left(\sum_{m=1}^{\infty}{}'\frac{S_{em}(\eta_s)\cdot S_{em}(\eta)\,\partial H_{em}^{(2)}(\xi)/\partial\xi}{N_m^e\,\partial H_{em}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}+\sum_{m=0}^{\infty}{}'\frac{S_{om}(\eta_s)\cdot S_{om}(\eta)\,\partial H_{om}^{(2)}(\xi)/\partial\xi}{N_m^o\,\partial H_{om}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}\right)\right| \quad (37-1)$$

$$F_\phi(\phi)=\left|\sum_{m=1}^{\infty}{}'\frac{e^{j\frac{m\pi}{2}}S_{em}(\eta_s)\cdot S_{em}(\eta)}{N_m^e\,\partial H_{em}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}+\sum_{m=0}^{\infty}{}'\frac{e^{j\frac{m\pi}{2}}S_{om}(\eta_s)\cdot S_{om}(\eta)}{N_m^o\,\partial H_{om}^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}\right| \quad (37-2)$$

が導ける。

7) $x=\pm x_0$, $y=\pm\frac{a}{2}$ にある場合（図12）

この時の源分布は次の様に示せる。

$$\left.\begin{aligned} e_z &= 0 \\ e_y &= \delta(\eta-\eta_s)-\delta(\eta-\pi+\eta_s)+\delta(\eta+\eta_s) \\ &\quad -\delta(\eta+\pi-\eta_s) \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

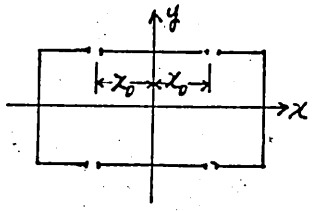


図12

従ってこの場合には

$$j\omega\mu B_m^e = \frac{e^{-jD(\eta_s)}}{N_m^e \cdot \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}\left[Sem(\eta_s)-Sem(\pi-\eta_s)+Sem(-\eta_s)\right.$$

$$\left.-Sem(-\pi+\eta_s)\right] \qquad (39-1)$$

$$A_m^e = A_m^o = B_m^o = 0 \qquad (39-2)$$

を得るから結局 $E\eta$ の指向性として

$$F_\eta(\eta) = \left|\frac{1}{h_1}\sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{Sem(\eta_s)\cdot Sem(\eta)\,\partial He_m^{(2)}(\xi)/\partial\xi}{N_m^e\ \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}\right| \qquad (40-1)$$

$$F_\phi(\phi) = \left|\sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{e^{j\frac{m\pi}{2}}\ Sem(\eta_s)\cdot Sem(\eta)}{N_m^e\ \partial He_m^{(2)}(\xi_0)/\partial\xi}\right| \qquad (40-2)$$

が導ける。

以上述べてきた結果を確かめるため，図6等に於いて

$$a = 1.2\,cm,\quad l = 1.1\,cm,\ 管壁厚さ = 0.15\,cm$$

のアルミ製導波管を用いて $f = 9.38\,GHz$ にて実験を行った。実験では伝送方向に連続な巾の広いスリットを設けるのは製作上の困難もあり，又さらに管内の伝送姿態が急速に減衰する場合もあることなどから，前述した各々の源分布と等価な分布を得るために，各壁面上に直径 0.3 cm の円形孔を間隔 0.6 cm の周期で設けた。この周期配列によって生ずる空間高調波はこの場合には全て slow wave となる

ので，これによる導波管外部の界成分は導波管から離れるに従って急速に減衰し，比較的離れた場所の界は基本波の源分布のみ考慮すればよいことになる。

実験は前述の1)～5)の場合のスリットについて行った。先ず近似した楕円面は矩形断面の長短辺で定まる楕円率を有し，指向性に断面内波数kが影響することを考え TE_{10} 姿態のしゃ断波長と上述の楕円率をもった楕円導波管中の類似姿態 eH_{11} のそれとが一致する様に C_0 を定めた。これより $C_0=1.077\,cm$，$\tan\xi_0=0.6$，及び $\eta_s=0$ or 1.097 (rad) と定まる。これらをもとにして式(21)，(24-2)，(28-2)，(31-2)，(34-2)を各々計算したのが図13，14，15，16，17の実線で示すもので，又点線が電波暗室内で測定した結果であり，どの場合も非常によい一致をみることが出来た。尚測定値はガイド中心より半径100 cmはなれた点で観測したものであるが，計算値は遠方界の指向性とほとんど変りなかった。

検討及び結言

以上述べた近似法によって非常によい結果を得ることが出来たが，数値計算において

$$Sem(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' D_n^m \cos n\eta\,, \qquad Som(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}{}' F_n^m \sin n\eta \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{em}^{(2)}(\xi) &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}{}' j^{m-n} D_n^m H_n^{(2)}(C_0\gamma\cosh\xi) \\ H_{om}^{(2)}(\xi) &= \frac{\pi}{2}\tan\xi\sum_{n=0}^{\infty}{}' j^{n-m} n F_n^m H_n^{(2)}(C_0\gamma\cosh\xi) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

但し $H_n^{(2)}$ は n 次第2種ハンケル関数である。

で示せる角及び径関数[3]において，n について何項までを，又何項

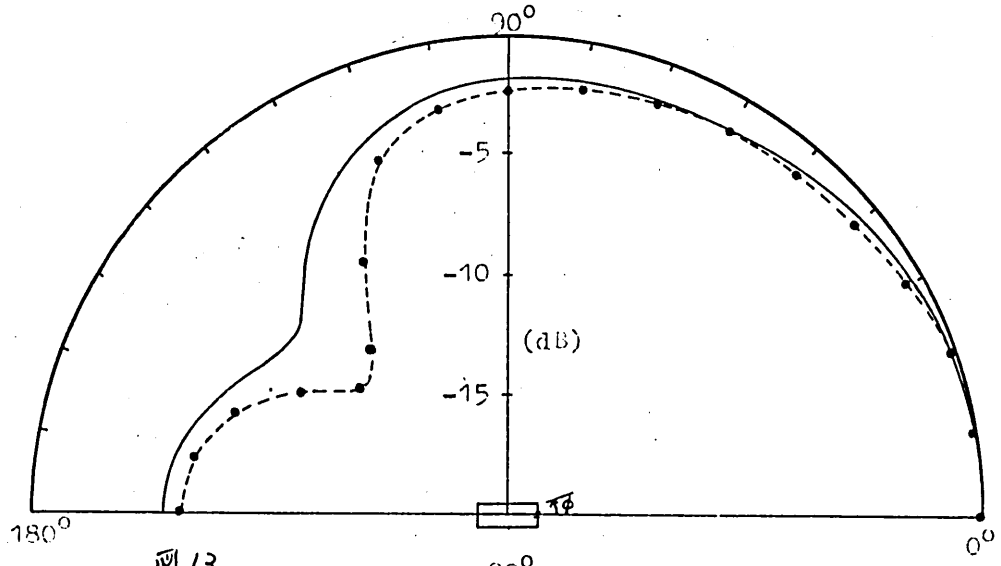


図13

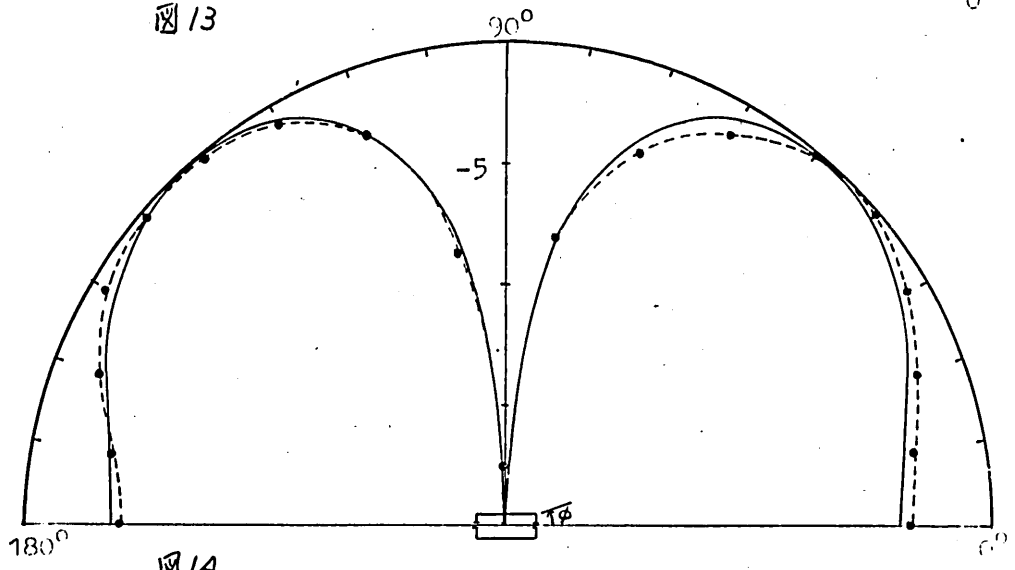


図14

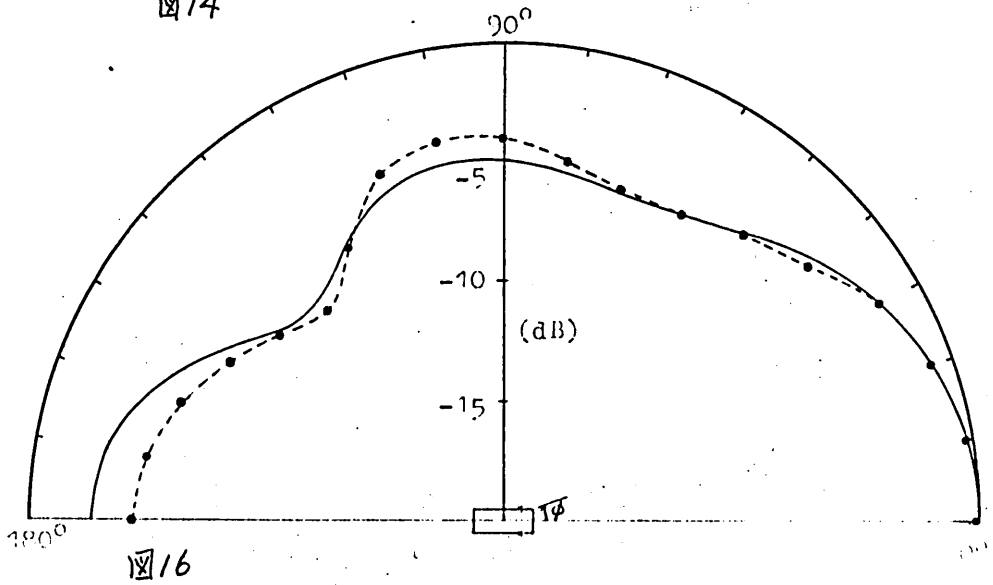


図16

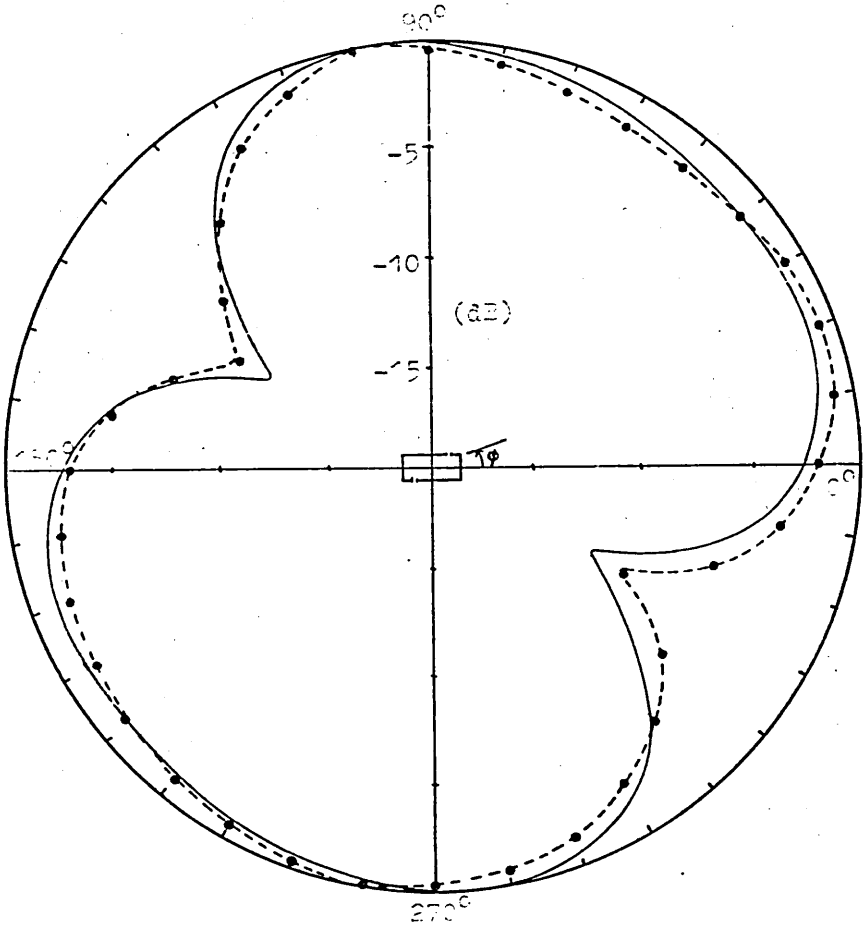


図17

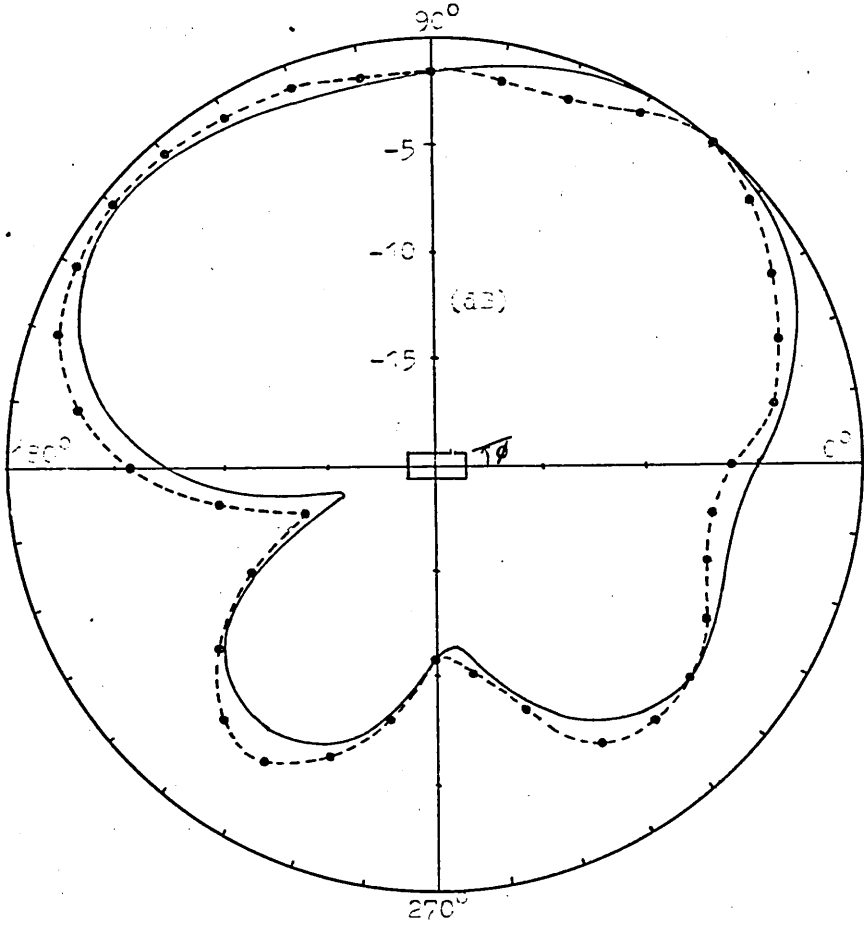


図15

までのmを考慮するかで結果が異なってくる。本文の全ての計算は $n=21$ 項，$m=15$ 項までを考慮したので非常によい精度で演算が行なわれたと言える。ここで述べた多数の例の結果からみて，楕円面近似に若干のあいまいさが残るがここで述べた近似法で任意の場所に任意の大きさの開口があり，進行波に限らず定在波励振されている場合にまで容易に拡張応用できることを考えると一つの有効な漏洩導波管の近似解法であると言える。

尚任意形状の孔を矩形導波管々壁に同期的に設けた場合，及び唯一つ設けた場合についての解析も本文で述べた方法を若干拡張すれば応用でき，これについては稿を改めて報告するつもりである。

文献

1) 滝山，繁沢；信学誌 Vol. 50, No. 2, Feb. 1967.

2) J. A. Stratton ; "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill Book Co., 1941.

3) "Tables Relating to Mathieu Functions", Columbia Univ. Press, 1951.

輻射科学研究会資料

気体の直線的な屈折率分布を利用した光ビーム曲り素子

滝山　敬
繁沢　宏
木下喜一郎
（同志社大学工学部）

昭和43年2月9日

気体の直線的な屈折率分布を利用した光ビーム曲り素子

滝山 敬
繁沢 宏
木下喜一郎

序

レーザ光を用いた通信の伝送路を構成するにあたって重要なことは低損失な伝送線路を開発すべきことは言うまでもないが，同様に低損失な回路素子の開発も重要な課題である。その一つに光ビームを如何に低損失に曲げるかという問題がある．低損失化の手段としてはガスレンズ等と同様に気体の屈折率変化を利用する方法がある．最近レンズ状媒質を用いて曲り素子を構成する試みが成されているが，実際の場合には液面の歪みなくして動作させるのは非常にむつかしいように思われる．

本報告で提案する曲り素子はレンズ状媒質を用いるのでなく屈折率分布が直線的に変化する気体を用いて光ビームを曲げる方法のもので，その特性を幾何光学近似で解析し，マッハツェンダー型干渉計を用いて実験

した結果とがよく一致したので報告するものである。
この曲りの為に要する屈折率分布を実現する為，筆者等は(i) 加熱された垂直平板の周りに自然対流によって生ずる温度場と(ii) 垂直に対向して設けられた加熱板と冷却板間に熱伝導によって生ずる温度場を利用すればよいことを示し，前者を自然対流形，後者を熱伝導形曲り素子と称し検討した。

1. 幾何光学近似による光ビーム曲り素子の解析

有限のビーム径を持った伝送軸と平行な光束（例えばレーザ光）を円弧に沿って曲げるためには曲りの外側の光の速度を内側のそれの速度に比べて一定の割合で大きくしなければならない。つまり幾何光学的に考えれば各光線の光路長を一定にする必要がある。この問題を波動的に取り扱うと媒質が不均一である為非常に困難となるので本文では以下述べるごとく幾何光学近似でどの様な屈折率分布をした媒質を用いれば曲げることが実現出来るかを検討した。

一般に屈折率が場所の関数で与えられている無損失媒質中を光が進行する場合，その光線の通路（光路）は幾何光学近似では

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)=\mathrm{grad}\,n \qquad (1)$$

で表せる微分方程式(光線方程式)を満足することがアイコナールの式から導ける。ここで図1に示す様にSは光路に沿った座標で，dsはその線素であり，$\mathbf{r}$は原点Oからとった光路上の点の位置ベクトルである。ここで光ビームをある平面内で曲げる場合について考える時には式(1)を極座標表示するのが便利である。今一般的には屈折率分布nが(r, θ)の関数で表せる媒質を用いて曲げる場合を考えればよいが，非常に取り扱いが複雑になるのと同時に熱力学的にその変化に対応する温度場を実現するのが困難なので，ここではnが原点Oからの距離rのみによって変化する屈折率場を用いて光ビームを曲げることを前提とする。この様な場合には式(1)は$r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$として

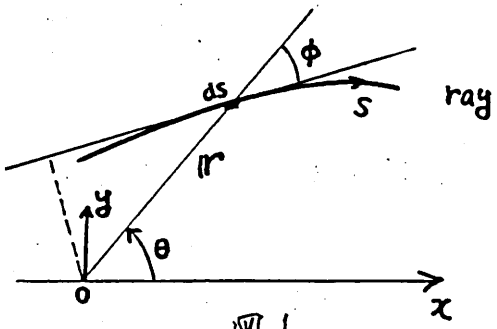


図1

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right)&=\frac{\partial n}{\partial x}\equiv\frac{\partial n}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial n}{\partial r}\\ \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right)&=\frac{\partial n}{\partial y}\equiv\frac{\partial n}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial n}{\partial r}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

と書き直せるから これより

$$y\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right)-x\frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right)\equiv\frac{d}{ds}\left[y\left(n\frac{dx}{ds}\right)-x\left(n\frac{dy}{ds}\right)\right]=0 \tag{3}$$

が得られ，従って式(1)に対応して

$$y\left(n\frac{dx}{ds}\right)-x\left(n\frac{dy}{ds}\right)=K \tag{4}$$

但し K=定数

が導ける。さらに図1に示す様に角度ϕをとり，光路はゆるやかに曲っているものとすれば式(4)の$\frac{dx}{ds}$，$\frac{dy}{ds}$は光線の方向余弦となるから若干の変形によって式(4)は

$$nr\sin\phi=K \tag{5}$$

と書き直せる．ここで解析幾何の公式

$$\sin\phi=\frac{r}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} \tag{6}$$

を用いることにより式(5)から

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r}{K}\sqrt{n^2r^2-K^2} \tag{7}$$

が導け これが結局式(1)に於いて nがrのみの関数とした時の極座標表示式である。

さてここで仮定した屈折率がrのみの関数で変化す

る様な媒質を用て光を円弧に沿って曲げる為には(この場合には屈折率一定の場所に沿って光が曲がることになる), 式(7)にて $dr/d\theta = 0$ なる条件をみたせばよく, 今中心Oから半径Rの円周上の屈折率を n_0 (定数) と与えれば

$$nr = n_0 R \qquad (8)$$

であればよいことになる。ここで図2に示すように屈折率 n_0 の場所から中心Oに向って測った距離を y とすれば式(8)より次式を得る.

$$n-1 = \frac{R(n_0-1)+y}{R-y} \qquad (9)$$

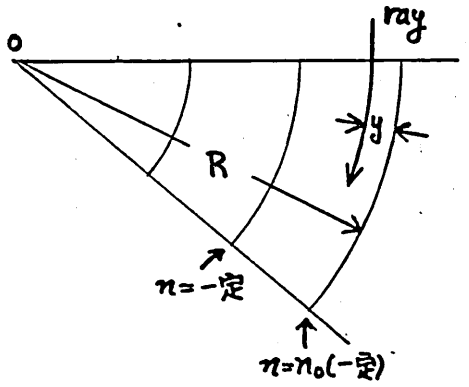


図2

この式(9)で与えられる屈折率分布が実現出来れば光を円弧に沿って曲げうることになる。又有限なビーム径を持った光束に対しては各光線が円弧に沿って曲げられると同時に式(8)が光路長一定の条件でもあることから幾何光学的近似の範囲では式(9)に示した屈折率分布によって光ビームの位相面を変形することなく曲げうることがわかる。

今有限なビーム径を持った光を半径R，屈折率n_0の近傍の層を用いてゆるやかに曲げる場合にはR≫yが成り立つから式(9)は次の様に近似出来る。

$$n-1 \simeq (n_0-1)+\frac{y}{R} \qquad (10)$$

式(10)によれば半径Rで光ビームを曲げたい場合の屈折率分布がビーム径をカバーするyの範囲で径方向に直線的であればよいことを示している。

さて実際にこの様な曲り素子を実現する場合，どの様な装置を用いれば式(10)で与えた屈折率分布が得られるかが問題である。序でも述べた様に損失を小さくする立場から気体を用いて実現することが望ましいと思われたので筆者等は以下に述べる2つの方法を考案した。これらいずれの原理によっても式(10)にほぼ等しいものが得られることを次節以下に示した。

2. 自然対流形曲り素子

必要とする屈折率分布を気体で得ようとする場合，気体の屈折率の温度依存性が問題となる。一般に屈折率の温度依存性は次式で示せることが知られている。(1)

$$n-1=(n_0-1)\frac{T_0}{T} \tag{11}$$

但し T, T_0 は絶対温度であり，温度 T_0 の場所の屈折率を n_0 とする。

従って式(10)で与えられる屈折率分布を得る為には系の温度分布が式(11)より

$$T=\frac{(n_0-1)T_0}{(n_0-1)+\frac{y}{R}} \tag{12}$$

となる様な装置が必要となる。この様な温度分布をもつものとしては加熱された垂直平板の周りに生ずる自然対流温度場が考えられる。

一般に自然対流においては速度場と温度場とが互いに干渉し合い非線型の複雑な系をなしている為完全な理論的な解は殆んどの場合得られず実験的な解決にたよっている。一方 E.Schmidt 等によって無限に広い気体中にある加熱された垂直平板の周りの温度分布が測定され，実験的にこの系の温度分布は

$$\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2 \tag{13}$$

で非常によく近似出来ることが一般によく知られており，[2] 図に示すようになっている。

ここで　T_∞ = 無限遠点における温度（実際には室温）

δ = 温度境界層の厚さ（温度 T_0 に加熱されている平板から垂直にみて温度変化のなくなるまでの距離，この点で $T=T_\infty$）

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta}{x} = 3.93\, P_r^{-\frac{1}{2}} (0.952 + P_r)^{\frac{1}{4}} \cdot G_{rx}^{-\frac{1}{4}} \\ &G_{rx} = \frac{g\beta(T_0 - T_\infty)x^3}{\nu^2} \quad ; \text{Grashof 数} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

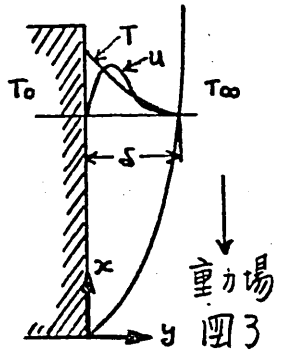


図3

$P_r = \frac{\nu}{\alpha}$; Prandtl 数

g = 重力加速度，ν = 動粘性係数

α = 温度伝導率，β = 体膨張係数

従って用いる気体を定めれば物性値が定まり，δ が求められるので式(13)より温度分布が求められることになる。この δ を求める場合，$(T_0 - T_\infty)$ が大きい場合には境界層内の気体の物性値は一定とみなせないが，E.M. Sparrow[3] 等によって気体の場合には

$$T_r = T_0 - 0.38(T_0 - T_\infty) \quad (15)$$

で与えられる温度 T_r での物性値を用いれば充分であること

が示されている。

以上述べてきたことは自然対流の境界層が層流をなしている場合に成立するもので，実験に於いてはこのことを確かめておく必要がある．層流である為にはPrandtl数とGrashof数の積で示されるRayleigh数，Raが

$$Ra = \frac{g\beta(T_0 - T_\infty)x^3}{\nu\alpha} < 5\times 10^8 \qquad (16)$$

をみたしておればよいこともわかっており，Raがこれをみたさない時には層流は乱流に移っていく。

以上の結果を気体が空気である場合について，式(13)を計算し式(11)を用いて垂直平板周りの屈折率分布を求めたのが図4であり，パラメータは加熱板と室温との温度差をとっている。尚T_∞(室温)は30°Cで，平板の下端より上方$x=6$cmの場所でみたものである。

これからわかるように$y<4$mmでは屈折率分布はほぼ直線になっているので式(10)に示した分布が得られることになり，熱板の各温度に対して光ビームを曲げうることになる。そしてその時の半径Rは式(10),(11),(13)より$y<\delta$の部分を用いれば

$$R \simeq \frac{\delta T_0}{2(n_0-1)(T_0-T_\infty)} \qquad (17)$$

となる。

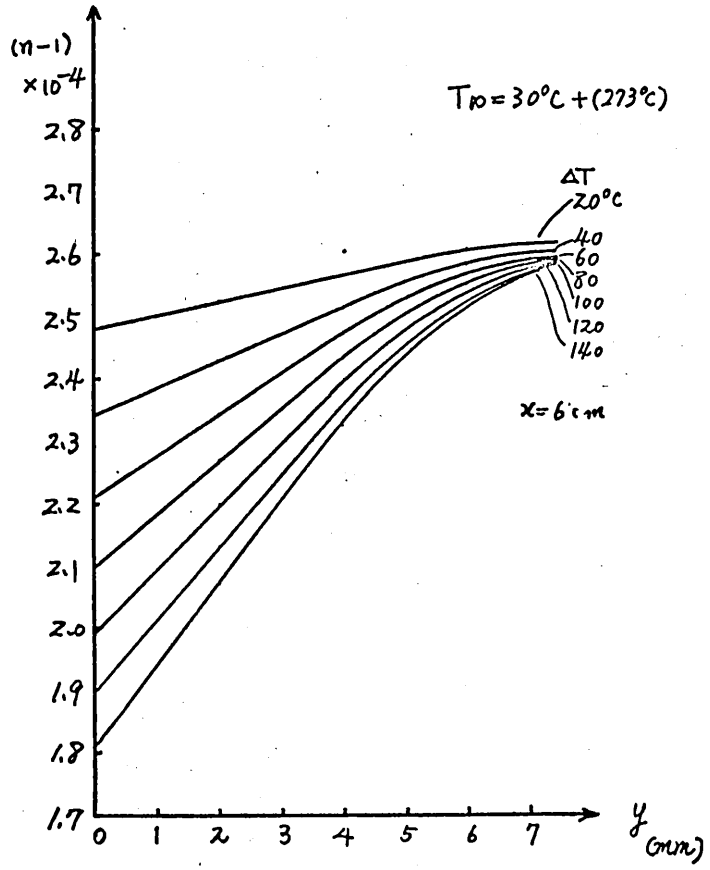

(n-1)
×10⁻⁴
2.8
2.7
2.6
2.5
2.4
2.3
2.2
2.1
2.0
1.9
1.8
1.7
0
1
2
3
4
5
6
7
y (mm)
T₀ = 30°C + (273°C)
ΔT
20°C
40
60
80
100
120
140
x = 6 cm

図4

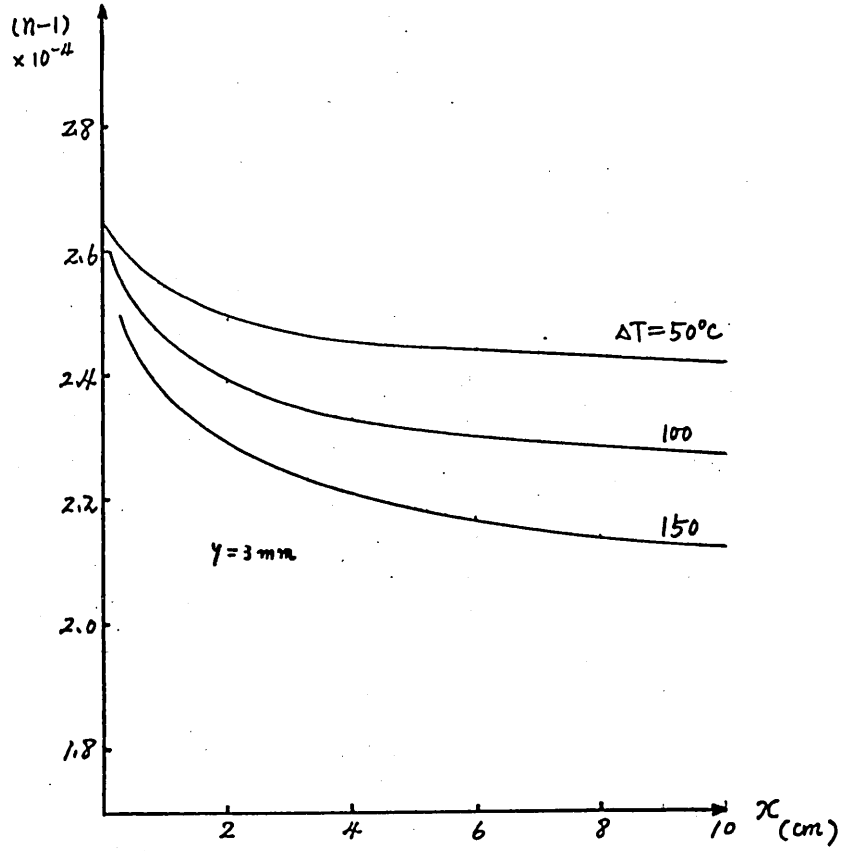

(n-1)
×10⁻⁴
2.8
2.6
2.4
2.2
2.0
1.8
2
4
6
8
10
x (cm)
ΔT = 50°C
100
150
y = 3 mm

図5

この様にビームを曲げうるが，この時 x 方向（熱板に沿う方向）には屈折率がほぼ一様でなければビームが x 方向に集束もしくは発散することになる。その為，今 $T_\infty = 30°C$，$y = 3mm$ の点で x 方向の屈折率変化をみたのが図5であり，ビーム径 2～3mm のレーザ光を通すことを考えればその間の変化は全く無視出来ることがわかるから，x 方向にビームは変化しないことが期待出来る。

3. 熱伝導形曲り素子

前節では光ビームを曲げる為に式(13)で示せる温度分布をもった加熱された垂直平板を用い，$y < \delta$ の部分にビームを通せばよいことを示したが，この条件をみたす部分では式(13)からわかるように近似的には温度分布はほぼ y に対して直線的に変化しているとみることも出来る。従ってこの節ではこの様に温度分布が直線的に変化する構造のもので光を曲げることを検討してみる。この様な直線的な温度分布は熱板と冷却板を垂直に対向しておいた場合に板間に生ずることが知られている。

今熱板と冷却板を充分はなして対向させている場合には互いの板の周りに生ずる温度境界層は干渉するこ

となく，熱伝達は主に前節で述べた対流によっている。一対板の間隔を接近させて互いの境界層以にもってくるとせまい空間に流動が限られ，上昇流と下降流とが互いに干渉しあうようになる。さらに近ずけると熱伝達は主に伝導によって行なわれ，板間の温度分布は熱伝導によって決定される。そしてW.O. Carlson等によってこの様な場合の温度分布は直線的になることが示されている。本節で述べる方法はこの結果を用いたものである。

上述の様に一般に熱板と冷却板を対向させれば，各種の条件によって温度分布が対流によって生ずるか，伝導によって生ずるか，あるいは又その混合によって生ずるかが定まる。この様な限界については先ず対流(Convection)によって温度分布が定まるのはE.R.G. Eckert[4]等によって

$$\frac{H}{D} < 1.32 \times 10^{-4} \cdot G_{rD} \qquad (18)$$

が成立する範囲であることが示されており，又伝導(Conduction)によって定まるのはG.K. Batheloreによって

$$\frac{H}{D} > 1.4 \times 10^{-3} \cdot G_{rD} \qquad (19)$$

が成立する範囲であることが示されている。

これらの様子を図示したのが次頁の図6である。
ここでH，Dは図7に示すように平板の高さ及び間隔であり，Gr_Dは式(14)に示されたGrashof数で$x=D$とした時の値である。

尚上式は気体として空気を用い，温度差が150°C位までの時（$Pr \simeq 0.7$）に成立するものである。

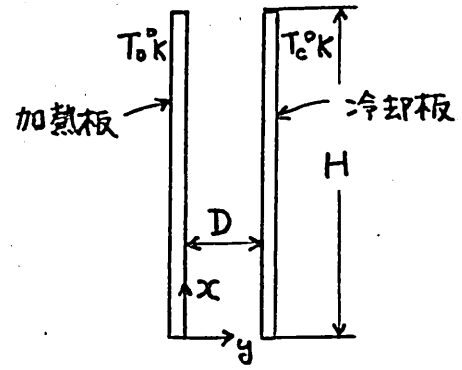


図 7

従って上述のことから実験に於いては式(19)をみたす様な構造たすれば温度分布は直線的であると考えてよいことになる。

さて今図7の様に熱板の温度をT_0°K，冷却板のそれをT_c°Kとすれば上述のことより温度分布は

$$T = T_0 - \frac{T_0 - T_c}{D} y \qquad (20)$$

となる。従って式(11)に代入して屈折率分布についてみると

$$n - 1 = (n_0 - 1) \frac{1}{1 - \frac{T_0 - T_c}{T_0 D} y} \qquad (21)$$

となる。これを示したのが図8である。ここで横軸

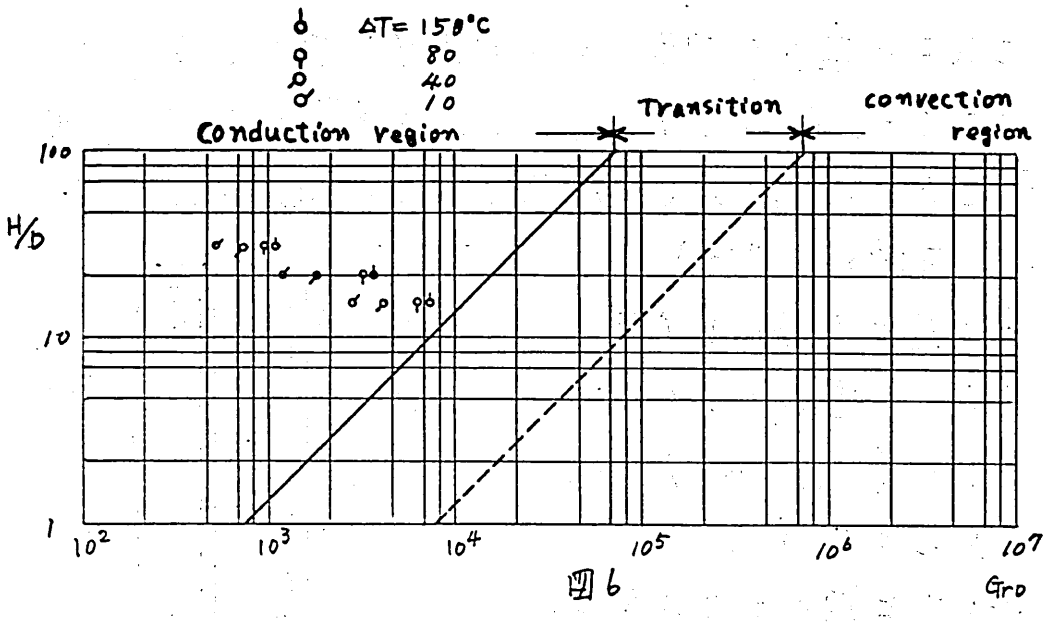

ΔT= 150°C
80
40
10
Conduction region
Transition
convection region
H/D
100
10
1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
Gr₀

図 6

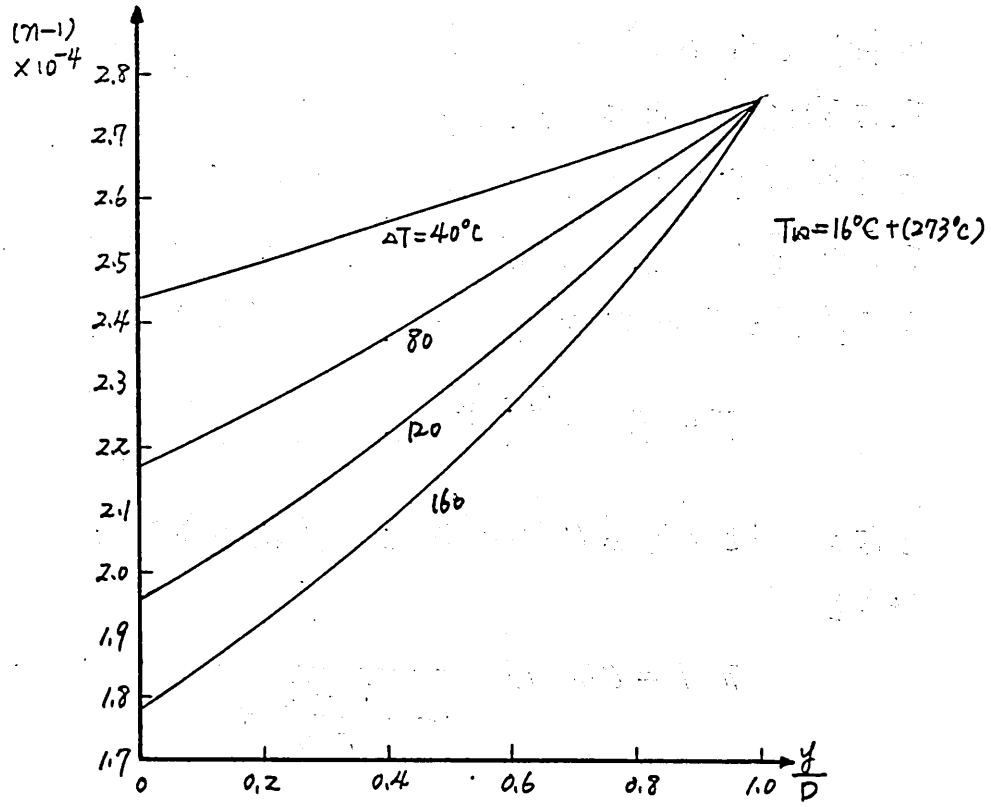

(n−1)
×10⁻⁴
2.8
2.7
2.6
2.5
2.4
2.3
2.2
2.1
2.0
1.9
1.8
1.7
ΔT=40°C
80
120
160
T∞=16°C+(273°C)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
y/D

図 8

は y/D であり，パラメータは温度差である。
これからわかるように温度分布が直線的であるため屈折率分布は若干直線からずれることになる。唯温度差が小さい場合にはほぼ直線的な分布が得られるので，この場合を用いれば前節と同様に光ビームを曲げることが出来るわけである．そしてその時の曲げ半径Rとして式(21)より $(T_0-T_c)/T_0 \ll 1$ が成立するから

$$n-1 \simeq (n_0-1)+\frac{(n_0-1)(T_0-T_c)}{T_0 D}y \qquad (22)$$

が導け，従って式(10)より

$$R=\frac{T_0 D}{(n_0-1)(T_0-T_c)} \qquad (23)$$

が得られる。

4. 試作及び実験

以上述べてきた結果を確かめる為，図9(a)，(b)に示す様な対流形及び伝導形の曲り素子を試作し実験した。

A). 実験方法

先ず実験では気体として空気を用い，曲り素子によって

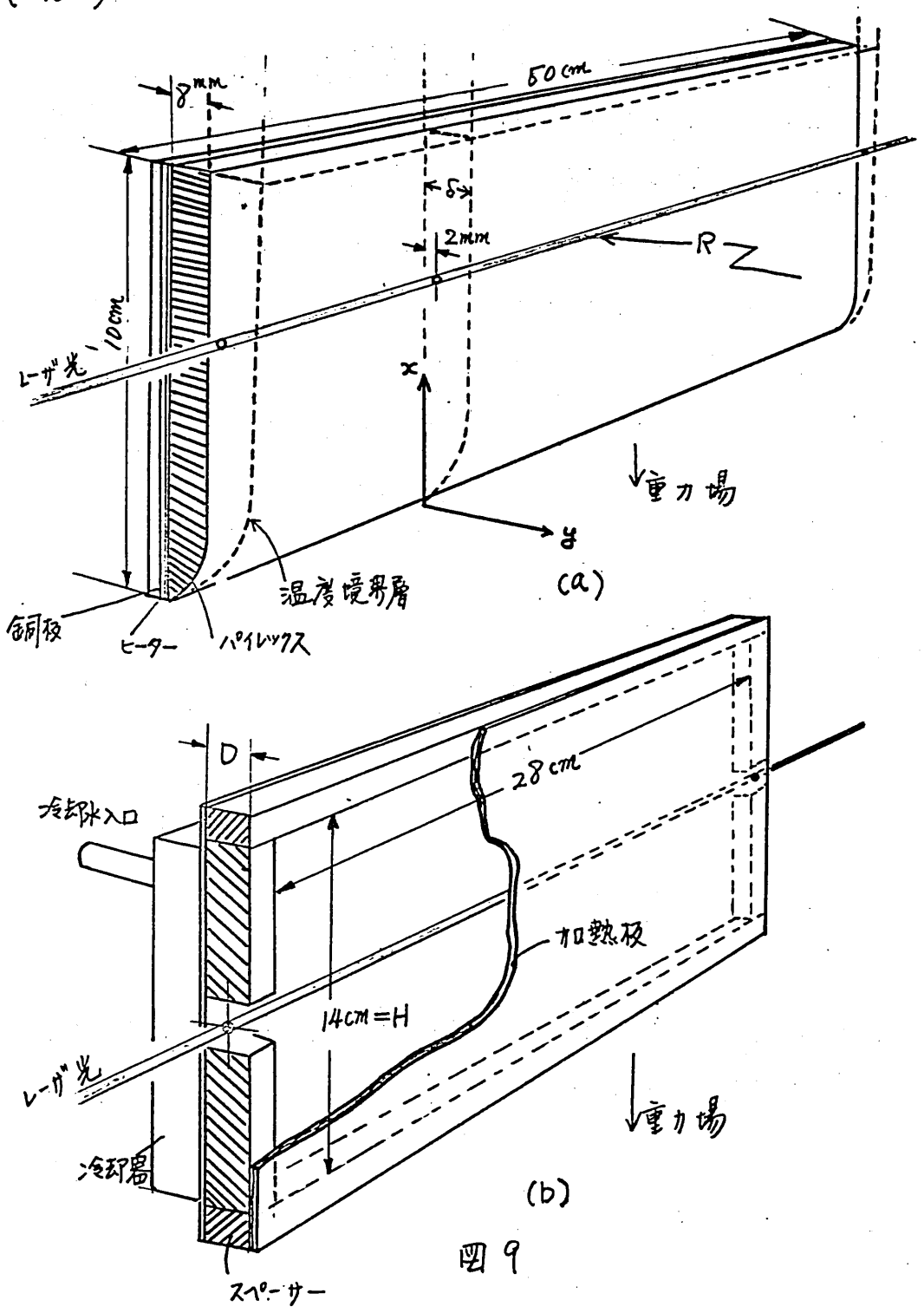

8mm
50cm
δ
2mm
R
10cm
レーザ光
x
重力場
y
(a)
温度境界層
銅板
ヒーター
パイレックス
D
冷却水入口
28cm
加熱板
14cm=H
レーザ光
冷却器
重力場
(b)
スペーサー

図 9

曲げられた光ビームの曲率半径及び波面の変形を調べた。使用した光ビームはレーザ光（6328Å）で，TEM_{00} 姿態を用い眼でみえるビーム径は約 2mm である。曲り素子をマッハツェンダー干渉計に図 10(a) の様に組み込み曲げられた光と参照波との干渉縞からその特性を次の様な方法で調べた。

今図 10(b) の様に座標を定め2つの平面波が角度 θ でもって交叉している場合を考えてみる。そして各々の光（参照波，E_r，被測定波，E_s）が次の様に表せるとする。

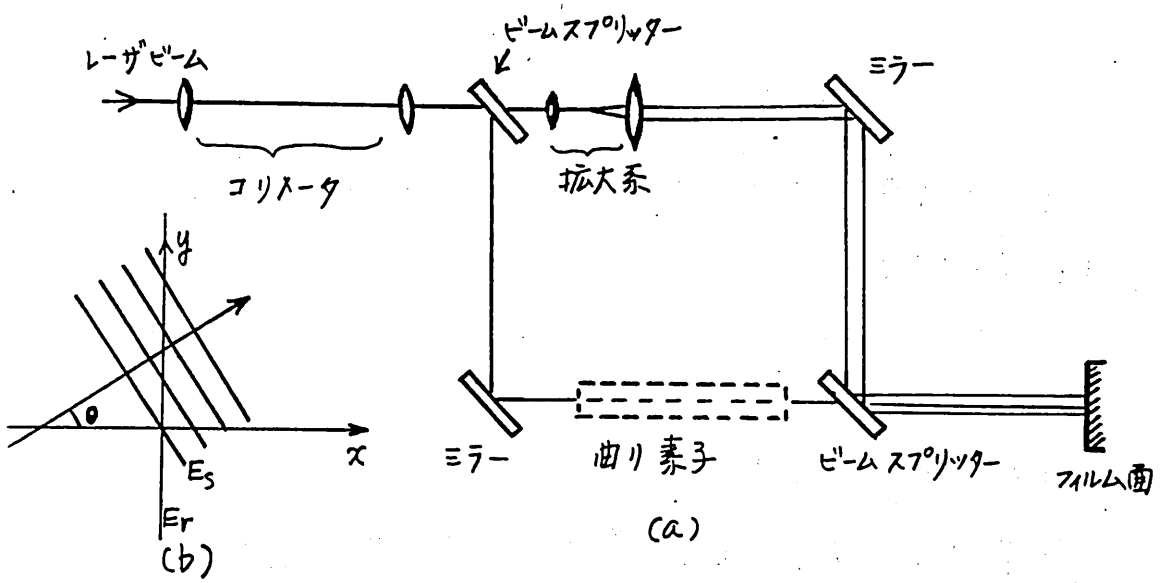


図 10

$$\left.\begin{aligned} E_r &= A_r e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} \\ E_s &= A_s e^{-j\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\theta + y\sin\theta)+\alpha\right]} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

この2つの波が干渉して $x=0$ の面におかれたフィルム面に記録される強度 I は

$$I = A_r^2 + A_s^2 + 2A_rA_s\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\sin\theta + \alpha\right) \quad (25)$$

となる。干渉縞は上式の第3項目によって生ずるものだから今 y 軸に沿って明るくなる点をみると
(α は任意位相差だから今 $y=0$ で明るくなっているものとすれば $\alpha=0$ としてよい.)

$$y_n = \frac{n\lambda}{\sin\theta} \quad (26)$$

で示せる場所である。従って干渉縞の間隔を d とすると式(26)より

$$d = \frac{\lambda}{\sin\theta} \quad (27)$$

となることがわかる。

一方図11に示すように参照波と被測定波の交叉角 θ は図10の様な構成では被測定波が曲り素子を出ていく

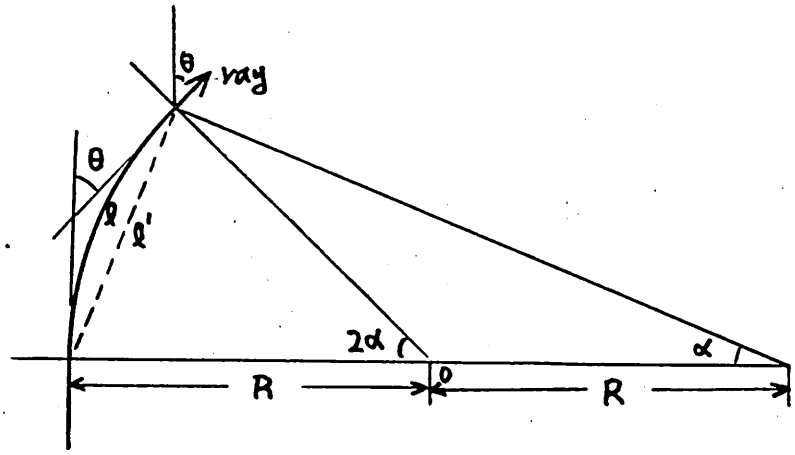


図11

時の角度であるから平面波が曲り素子によって曲げられた場合にはフィルム面上には式(27)で表される間隔で干渉縞が記録される。この場合に曲げの曲率半径Rと交叉角θの関係は，θが小さいことを考えると図11より

$$\sin\theta \cong \theta = 2\alpha \cong \frac{l'}{R} \simeq \frac{l}{R} \qquad (28)$$

但し l' は曲り素子の両端を結ぶ弦の長さであるが

$R \gg l'$ の時には曲り素子に沿う長さ l に等しくおける。

が導けるから式(27),(28)より

$$R = \frac{ld}{\lambda} \qquad (29)$$

となるから干渉縞の間隔 d を測定すれば曲げ半径Rが求まることになる。

しかし上述の事柄は平面波同志の干渉の場合について言えることで，実際には被測定波は任意の波面をもっている

から，参照波を拡大レンズ系で拡大しほぼ被測定波のビーム径内で平面波とみなせる様にしても図12に示すように干渉縞の間隔は等間隔とはならず，曲りの多少にわずかながら漸次拡がったものとなる．

しかしこの場合にも記録されたものの中央附近の干渉縞は角度θで交叉する平面波同志による干渉によって生じたものと考えられるから，実験では中央附近の間隔dを測定して式(29)よりRを求めた。

実際被測定波も比較的より平面度を有した波面の波であるので，どの場所の間隔をとっても大きな誤差は生じなかった。

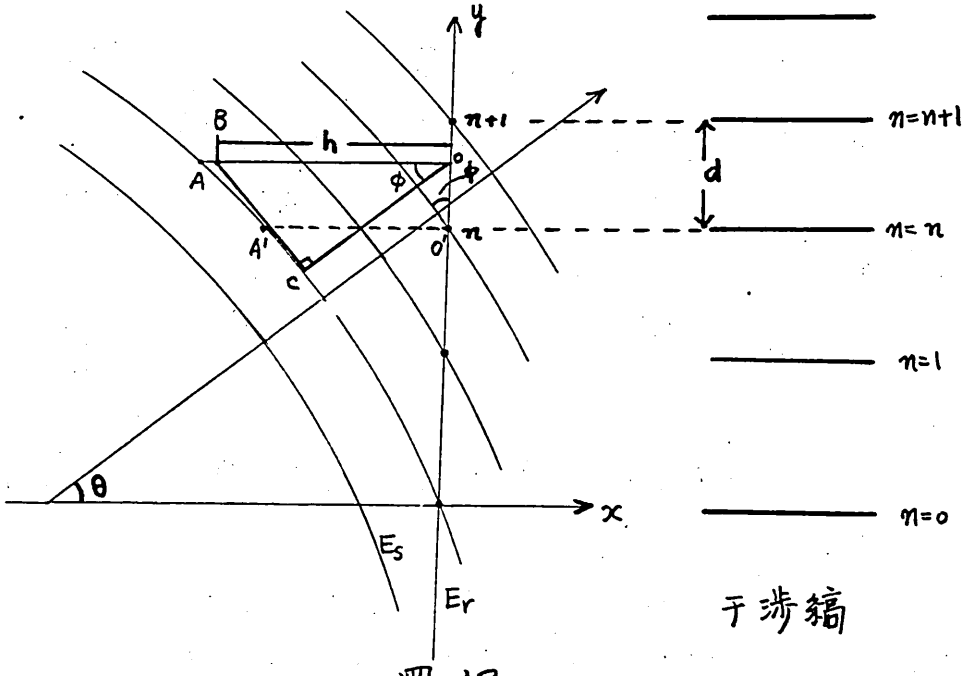


図 12

次に図12に示すように平面波と任意の波面とが交叉している時観測された干渉縞から等位相面(波面)を求めるのに次の方法によった。

今求めたいのは一般に $y=0$ から測って n 番目の明るい縞の所での $\overline{O'A'}$ である。これを各 n に対して求めることが出来ればその A' の軌跡が求める波面である。

そこで今 n 番目と $(n+1)$ 番の明るい縞の中央 O から z 軸に平行にとった ある波面までの長さ $\overline{OA}$ を求めることにする。O から波面に垂直にとった $\overline{OC}$ の長さは $(n+\frac{1}{2})\lambda$ であり、波面がゆるやかに曲っている場合には O' に於ける接線と y 軸との成す角 ϕ と $\angle AOC$ とはほぼ等しい。従って $\overline{OB}=h$ とすると

$$\cos\phi = \frac{\overline{OC}}{h} = \frac{(n+\frac{1}{2})\lambda}{h}$$

で表わせる。又波面がゆるやかに曲っている場合には $\overline{OA} \cong h$ とおいてもよいから結局

$$\overline{OA} \cong h = \frac{(n+\frac{1}{2})\lambda}{\cos\phi}$$

しかるにレーザ光のようにビームの拡がりが小さい光では

$$\phi \simeq \theta \cong \frac{\lambda}{d}$$

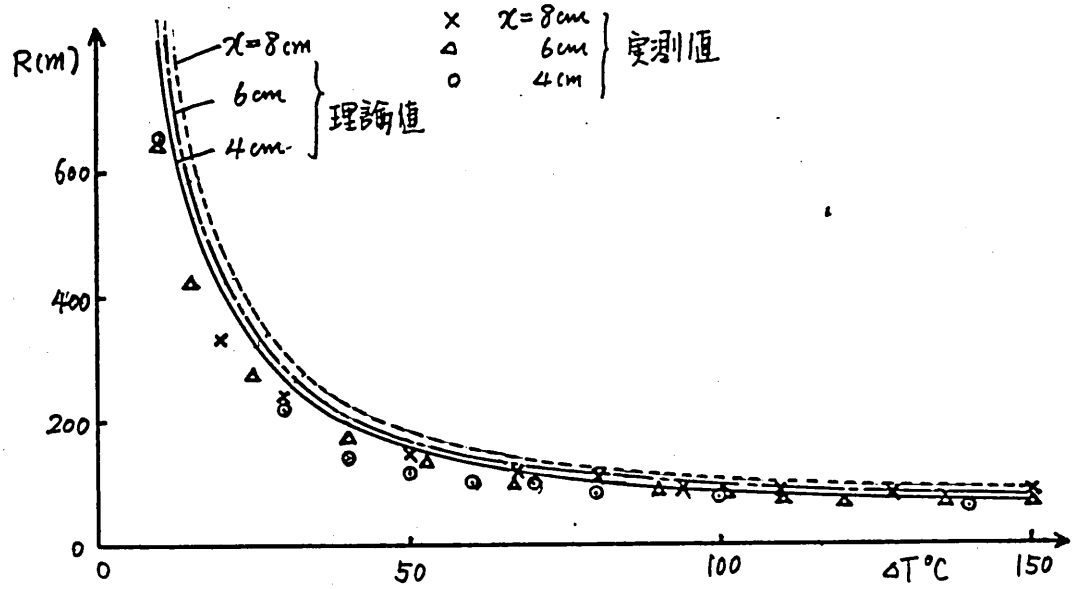
が式(27)より導けるから結局

$$h = (n+\tfrac{1}{2})\cdot d$$

と示せるから、d を各 n と $(n+1)$ の間で求めれば波面が描けることになる。

B) 自然対流形曲り素子の実験

図9(a)に示す構造のもので，加熱板として厚さ8mmのパイレックスを用い，その背面にリボン状のニクロム線を均一に張りめぐらせたものを用いた。ニクロム線とパイレックスの間には厚さ2mmの石綿板が熱板上の温度を出来るだけ均一にする為，又赤熱されたニクロム線からの熱放射を防ぐために挿入してある。又この加熱板が両端に設けられたマイクロメータによって適当な曲率を持つようにしてある。
今加熱板によって室温30°Cとの温度差を10°～150°Cまで変化した時の曲りの半径を前記の方法で実験的に求めたのが図13(a)で，各線は加熱板下端からビームを通した場所までの距離xを変化した時の式(17)より求めた理論値である。又図13(b)はこの時の各温度差に於ける液面の変化を示したものである。これらから温度差が小さい場合，大きい場合を除けば液面の変化も少なくほぼ理論的な結果とよく一致する結果が得られた。
尚この場合式(16)で示したRayleigh数を$\Delta T = 150°C$, $x = 10$ cmで求めてみると


R(m)
x=8cm
6cm
4cm
理論値
x=8cm
6cm
4cm
実測値
600
400
200
0
0
50
100
ΔT°C
150

(a)

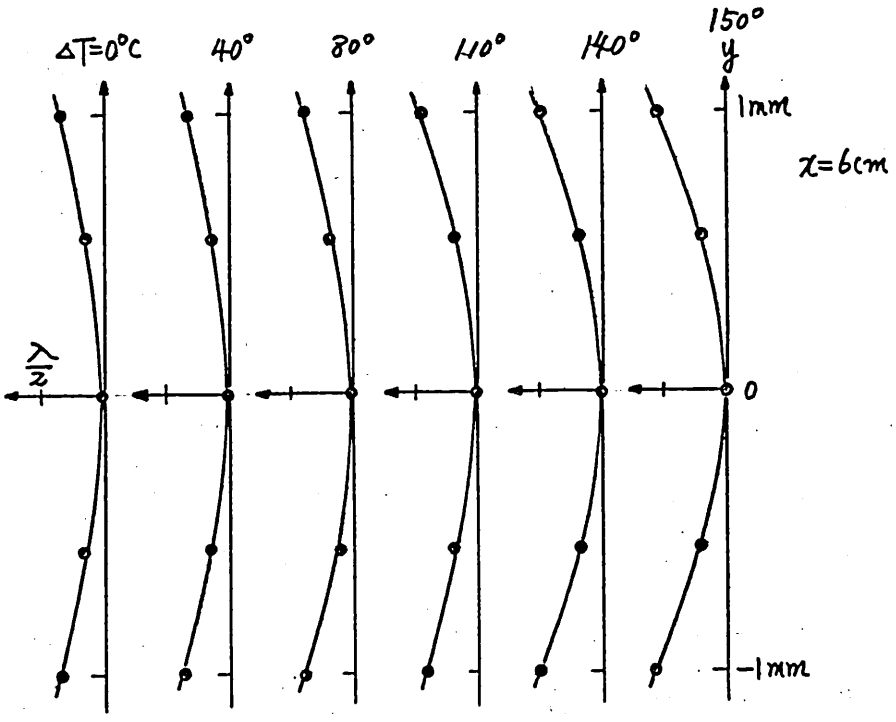

ΔT=0°C
40°
80°
110°
140°
150°
y
1mm
x=6cm
λ/2
0
-1mm

図13 (b)

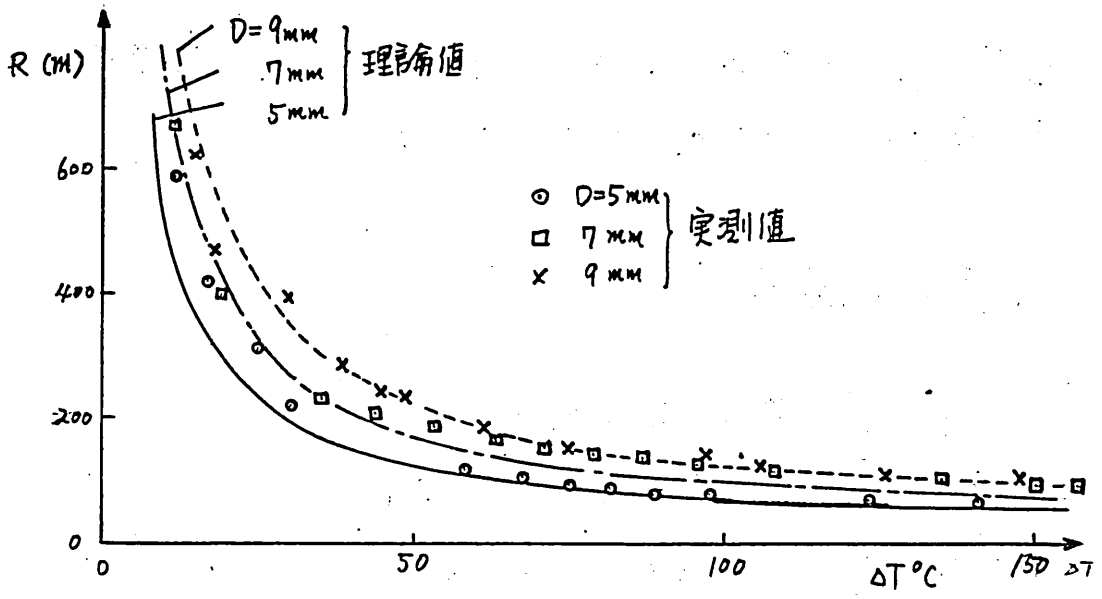
$$Ra = 5.8\times10^{6} \ll 5\times10^{8}$$

となるので境界層では層流をなしているから2節の解析結果が使えることがわかる。

C) 伝導形曲り素子の実験

図9(b)に示す構造のもので加熱板及び冷却板は厚さ2mmの銅板を用い，冷却は水を循環させて行った。この場合光ビームはほぼ装置の中央($x=\frac{H}{2}$, $y=\frac{D}{2}$)を通して実験した。尚垂直板の高さHは14cm一定としている。この時板間隔を5mm, 7mm, 9mmと変化させ，その各々について温度差と曲り半径及び液面の変形を測定した。

まず各間隔に対して式(19)で示される条件がみたされていなければ式(23)の結果が使えないので各Dに対してG_{rL}を求めてみたのが図6の各印である。これからD≦9mmならば上述の条件はみたされていると言える。この場合も温度差が10°~150°Cに対する実験を行いその結果が図14(a), (b)である。この時も温度差が小さい時を除けば式(23)から求めた結果とよく一致していることがわかる。尚D=9mmに対して若干差異があるのは


R (m)
D=9mm
7mm
5mm
理論値
D=5mm
7mm
9mm
実測値
600
400
200
0
0
50
100
150
ΔT°C
ΔT

(a)

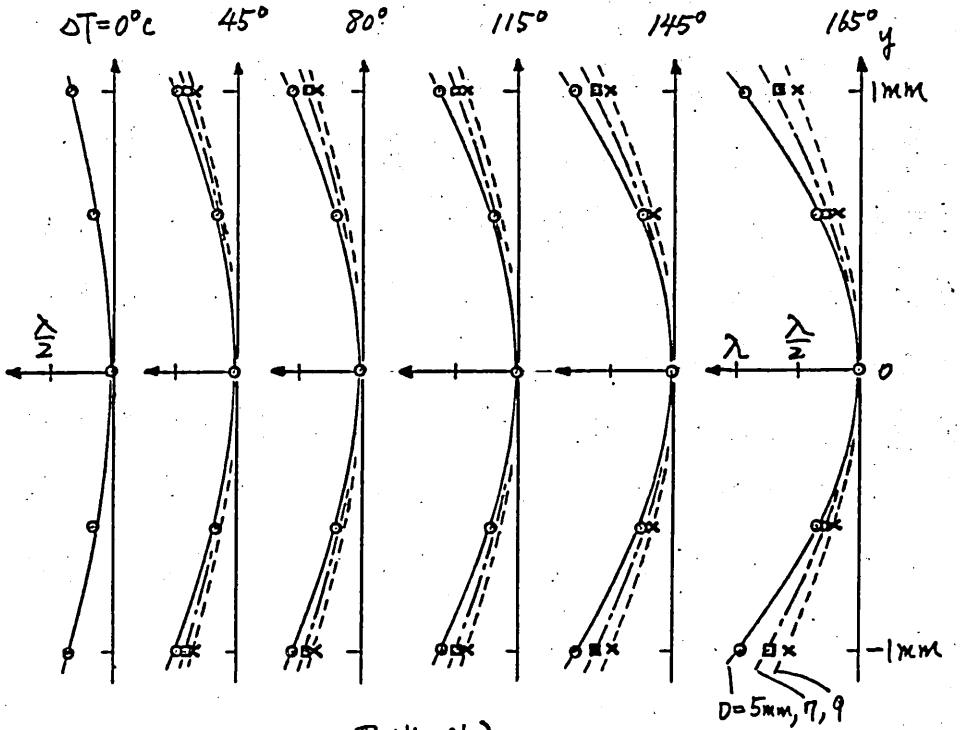

ΔT=0°C
45°
80°
115°
145°
165°
y
1mm
-1mm
λ/2
λ
λ/2
0
D=5mm, 7, 9

図 14 (b)

伝導に於ける条件ぎりぎりで使っている為，若干予想の分布からずれた為だと考えている。

考察及び結言

上述の様に解析は幾何光学近似によるものであるが実測したものと非常によく一致することがわかった。まず両方の曲げ型式について言えることは温度差が小さい時の計算値と実測値の差異はサーミスタによる温度測定の誤差が大きくなりその為に生じたものと思われるし，温度差が大きい時の液面の歪みは予想した直線的な屈折率分布からずれた為に生じたものと考えられる。これは熱的な取り扱いが理論的に完全なものでなく，実験的な要素によって決められた部分が主であるので，この様な点からみてやむおえないことと思われる。

又垂直方向には干渉縞は予想通り全く現われなかったことから温度差の大きい範囲を除けば曲り素子を通さない時の光の液面と殆んど変化なくして光ビームを曲げうることがわかった。

温度分布としては自然対流によって生ずるものの方が熱伝導によるものより望ましいので実際には前者の方法で

，しかも外部からのじょう乱を受けない構造としたものがよいように思われる。

尚実験では加熱板に曲率半径をもたせて正確に曲げるのが困難であったので曲率をつけないで実験した。これによって生ずる誤差は曲率半径が大きく，しかも熱板の長さが短かい為、理論的に検討しても無視出来るものである。

直線的な屈折率分布を実現する方法として，ここで述べた以外に種々あると思われるが，その一つに強制対流による層流域を利用する方法が考えられる。これは熱的な取り扱いが理論的には容易であることと温度場が自然対流のものに比べて比較的安定していることなどから一つの有効な手段になるものと考えられる。

参照文献

1). D. Marcuse, "Properties of periodic gass lenses", B. S. T. J., NO.5, March 1965.

2) 例えば
E.R.G. Eckert, "Heat and mass transfer", McGraw-Hill Book Co.

あるいは
内田秀雄"熱伝達特論" 裳華房
3) E.M. Sparrow, "The variable fluid property problem in free convection", Trans. A.S.M.E., vol. 80, 1958.
4) E.R.G. Eckert, W.O. Carlson, "Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures", I.J.H.M.T., Vol. 2, No. 1/2, March 1961.

輻 射 科 学 研 究 会 資 料

共焦点FABRY-PEROT共振器の球面変形

古 浜 洋 治
小 倉 久 直
池 上 淳 一
（京 都 大 学 工 学 部）

１９６８年２月

目　次

§1　序　　論 …… 1

§2　基礎方程式 …… 3

§2.1　干渉計理論による形式化 …… 3

§2.2　行列表示 …… 6

§3　摂動論 …… 8

§3.1　摂動論 …… 8

§3.2　行列要素の計算 …… 10

§4　数値計算 …… 12

§4.1　回折損失，共振条件 …… 12

§4.2　振巾および位相分布 …… 16

附　録 …… 17

参考文献 …… 22

§1. 序論

これまでFabry-Perot 共振器（F·P共振器）に関するさまざまな研究がなされており，その理論は干渉計理論，導波管理論，空胴理論に大別される。[1] 共焦点共振器も含めて球面鏡から成る共振器の理論はその他の解析の困難さ故に，ほとんど干渉計理論に限られてきた。干渉計理論は，言うまでもなく，Fox & Li[2] によって最初に定式化されたものであり，使用している波の波長λが共振器の大きさに比べて非常に小さく，かつ鏡面の大きさ（半径a）が長さdに比べて非常に小さいような共振器において，Kirchhoff 近似が可能であり，それが非常によくあてはまる。

干渉計理論は，一方向に伝播する波を空間的に重畳して共振を記述しようとするものであり，時間的に，（空間的には一様に）減衰していくような波の像を考えることができない。また，こうして求めた解が波動方程式を満すかどうか不明であるという欠陥があった。しかしながら幸な事に，波動方程式から出発して，近似的に干渉計理論の基礎方程式を導ける事がわかった[3]。

我々は以前，共焦点共振器の傾斜変形による影響を考察し，微小変形に対して，損失は大きく増加しない事を確めた[4]。Fox & Liは細長い二枚のわん曲した鏡から成る一次元のF·P共振器の傾斜変形や球面変形による効果を電子計算機による逐次代入法で計算した[5]。同じくLiは断面が円形の二次元のF·P共振器の解析も同様な方法で行なった[6]。Glogeは，一次元のF·P共振器が球面変形を被った場合を，干渉計理論で形式化し，散乱行列を使って，取扱った[7]。彼は長軸回転楕円体座標による波動関数を零次近似に取って摂動法を使った。

ここでは，二次元の共焦点F·P共振器において微小な球面変形が生じた場合を解析した。二次元の共焦点F·P共振器の共振方程式の動径関数は，Fredholmの第二種斉次積分方程式を満たしている。Slepian[8] によればこの積分方程式の固有関数は，一般化された長軸回転楕円体座標による微分方程式の固有関数と，同時固有関数として求めることができる。この微分方程式の固有関数は，Slepian と同じようにBouwkampの方法[9]で電子計算機を使って，数値的に求め，それを零次近似にとって，Glogeの方法に従って解析した。勿論，我々の場合も，円柱座標系で共振方程式を記述したが，短軸回転楕円体座標系で記述することも可能である。しかしながら今の段階では固有関数を数値的に求めることが非常に煩雑である[10]。

まず，§2.1で基礎方程式の形式化を行い，§2.2でそれを散乱行列の形

に書きかえた。§3.1で摂動展開を行い、§3.2で3次近似まで考慮して行列要素を計算した。§4.1では回折損失δ_d, 等、損失曲線を求め、$|\frac{1}{2}gCQnn'| \ll 1$ の場合の共振条件を求めた。これは、Boyd & Kogelnik の求めた共振条件とは若干異なっている。§4.2では鏡面上の振巾分布と位相分布について述べた。

§2. 基礎方程式

§2.1. 干渉計理論による形式化

スカラー波の場合をよく知られた Fox & Li の干渉計理論によって取扱う[2]。球面の開口半径 a，曲率半径 R, R' の二枚の球面鏡を第1図のように距離 d 隔てて配置し，球面 S, S' 上における界分布をそれぞれ $U(r,\theta)$, $V(r',\theta')$ とすると，$V(r',\theta')$ は Huygens の原理を使って次のようにかける。（附録1）

$$g^{(1)}V(x',\theta')=\int_0^1\int_0^{2\pi}K(x',\theta'\mid x,\theta)U(x,\theta)x\,dx\,d\theta \qquad (2-1)$$

$$g^{(2)}U(x,\theta)=\int_0^1\int_0^{2\pi}K(x,\theta\mid x',\theta')V(x',\theta')x'\,dx'\,d\theta' \qquad (2-2)$$

ここに $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ は固有関数 $U(x,\theta)$, $V(x',\theta')$ に対応する固有値であり，r, r' の代りに無次元変数 $x\ (=r/a)$，$x'\ (=r'/a)$ を用いて $U(x,\theta)\equiv U(r,\theta)$, $V(x',\theta')\equiv V(x',\theta')$ である。積分核 $K(x',\theta'\mid x,\theta)$ は対称であり

$$K(x',\theta'\mid x,\theta)=K(x,\theta\mid x',\theta')$$

$$\equiv\frac{jce^{-jkd}}{2\pi}\exp\left\{jc\left[xx'\cos(\theta-\theta')-\frac{1}{2}gx^2-\frac{1}{2}g'x'^2\right]\right\} \qquad (2-3)$$

と書かれる。このとき

$$C=2\pi N=\frac{ka^2}{L}\quad\left[k=\frac{2\pi}{\lambda}:\text{伝播定数},\ N:\text{フレネル数}\right]$$

$$g=1-\frac{d}{R},\qquad g'=1-\frac{d}{R'} \qquad (2-4)$$

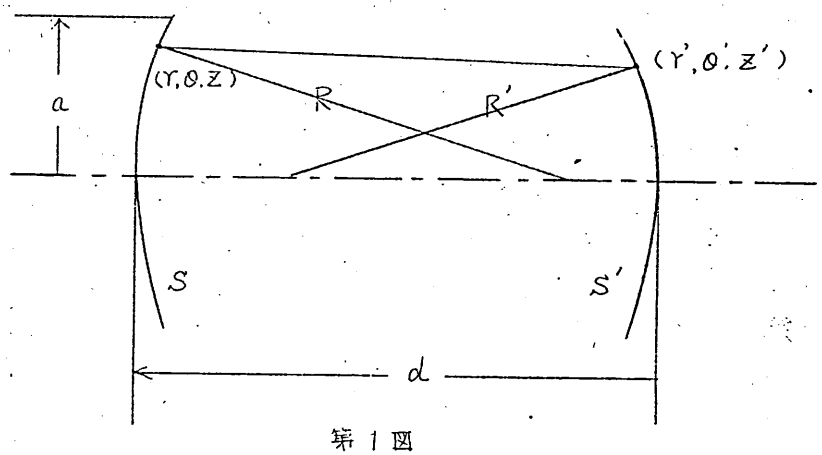
である。また（2−1），(2−2)で

$$\frac{\lambda}{a}\ll 1,\quad \frac{a}{d}\ll 1,\quad \frac{a^2}{\lambda d}\ll\left(\frac{d}{a}\right)^2 \qquad (2-5)$$

が仮定されている。

$U(x,\theta)$, $V(x',\theta')$, (2−3)をフーリエ展開すると

$$U(x,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u_m(x)}{\sqrt{x}}\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{Bmatrix} \qquad (2-6)$$



第１図

$$U(x',\theta')=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{U_m(x')}{\sqrt{x}}\left\{\begin{matrix}\cos m\theta'\\ \sin m\theta'\end{matrix}\right\} \qquad (2-7)$$

$$K(x,\theta|x',\theta')=\frac{jce^{-jkd}}{2\pi}\cdot e^{-j\frac{1}{2}c[gx^2+g'x'^2]}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varepsilon_\alpha j^\alpha J_\alpha(cxx')\cos\alpha(\theta-\theta') \qquad (2-8)$$

となる*。これらを（２－１），（２－２）に代入してそれぞれ θ,θ' に関して積分を実行すると，それぞれ θ',θ に関する直交性から角度方向の依存性を分離することができる。** そこで添字 m を落すと結局次のようにかける。（附録２）

基礎方程式は

$$T^{(1)}U(x')=\int_0^1 K(x',x)e^{-j\frac{1}{2}c[gx^2+g'x'^2]}U(x)dx \qquad (2-9)$$

$$T^{(2)}U(x)=\int_0^1 K(x,x')e^{-j\frac{1}{2}c[gx^2+g'x'^2]}U(x')dx' \qquad (2-10)$$

---

* 勿論，$\frac{U_m(x)}{\sqrt{x}}$，$\frac{U_m(x')}{\sqrt{x'}}$ はそれぞれ S，S' 上の波動関数の動径部分を表わしている。$U_m(x)$，$U_m(x')$ は後でわかるように積分方程式の固有関数に対応するものである。

** 考えている変形が軸対称であるから共焦点共振器と同じように $\Delta m=0$ なる転移しか生じない。従って m に関して分離できる。しかし傾斜変形の場合には，$\Delta m=0$ 以外の転移が生じ[4] m に関して分離できない。

ここに

$$\Gamma^{(1)}=\frac{g^{(1)}}{\sqrt{c}}e^{j(kd-\frac{m+1}{2}\pi)},\quad \Gamma^{(2)}=\frac{g^{(2)}}{\sqrt{c}}e^{j(kd-\frac{m+1}{2}\pi)} \qquad (2-11)$$

$$K(x,x')=J_m(cxx')\sqrt{cxx'} \qquad (2-12)$$

である。(2－9),(2－10)は(連立)Fredholm第二種斉次積分方程式である。

$g=g'=0$ (共焦点配置)のとき(2－9)は

$$\Gamma_n\varphi_n(x')=\int_0^1 K(x',x)\varphi_n(x)dx \qquad (2-13)$$

と書ける。ここにΓ_nは第n番目に大きい固有値であり$\varphi_n(x)$はΓ_nに属する固有関数であり，縮退していない。直交関係は次の通りである.

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_{n'}(x)\,dx=\delta_{nn'} \qquad (2-14)$$

$n=0,1,2,3$ ($c=1,2,5,10$)のときの$\lambda_n(=c\Gamma_n^2)$, $\{\varphi_n(x)\}$の値はSlepian[8]によって数値的に求められており $\varphi_n(x)$はまた一般化された長軸回転楕円体座標による微分方程式*

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\varphi}{dx}+\left(\chi-c^2x^2+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{x^2}\right)\varphi=0 \qquad (2-15)$$

の固有関数になっている。即ち$\{\varphi_n(x)\}$は演算子M, L_xの同時固有関数である。

$$[M\varphi](x')=\int_0^1 K'(x',x)\varphi(x)\,dx \qquad (2-16)$$

$$L_x=\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}+\left(c^2x^2-\frac{\frac{1}{4}-m^2}{x^2}\right) \qquad (2-17)$$

我々は$\varphi_n(x)$を$u(x)$, $v(x)$の零次近似として用いg, g'を含む項を摂動として取扱う。(2－9),(2－10)が基礎方程式であるが，複素数

---

* 長軸回転楕円体座標による波動方程式のm次の角度関数は

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dS}{dx}+\left(\chi-c^2x^2-\frac{m^2}{1-x^2}\right)S=0 \qquad (2-14a)$$

を満たしている[11]。$m=0$のときの関数$S_{0,n}(x)$は矩形断面を持つ或いは一次元の共焦点共振器のモードに対応している。[11],[12]

の演算の煩雑さを避けるために Goggle[7]にならって，行列形式に書くことにする。

§2.2 行列表示[7]

非共焦点共振器の固有値を $\Gamma_n^{(1)}$，$\Gamma_n^{(2)}$ とし，それに属する固有関数をそれぞれ $u_n(x)$，$v_n(x')$ とする。これらを共焦点共振器の固有関数 $\{\varphi_\ell(x)\}$ で展開し

$$u_n(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty} U_{n\ell}\varphi_\ell(x)\ ,\quad v_n(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty} V_{n\ell}\varphi_\ell(x) \qquad (2\text{-}18)$$

を（2－9）に代入すると

$$\Gamma_n^{(1)}\sum_{\ell=0}^{\infty} V_{n\ell}\varphi_\ell(x')=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma_k\varphi_k(x)\varphi_k(x')e^{-j\frac{1}{2}c[gx^2+g'x'^2]} \times\sum_{\ell=0}^{\infty} U_{n\ell}\varphi_\ell(x)\,dx \qquad (2\text{-}19)$$

となる。ここに

$$K(x,x')=\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma_k\varphi_k(x)\varphi_k(x') \qquad (2\text{-}20)$$

が使われている。（2－19）の両辺に $\varphi_{n'}(x')$ を乗じて〔0，1〕区間で積分すると

$$\Gamma_n^{(1)}V_{nn'}=\sum_{k,\ell}U_{n\ell}\Gamma_k\int_0^1\varphi_k(x)e^{-j\frac{1}{2}cgx^2}\varphi_\ell(x)\,dx \times\int_0^1\varphi_k(x')e^{-j\frac{1}{2}cg'x'^2}\varphi_{n'}(x')\,dx' \qquad (2\text{-}21)$$

となる。ここで（2－14）が使われている。そこで

$$A_{k\ell}=-j\frac{1}{2}cgQ_{k\ell}\ ,\qquad B_{k\ell}=-j\frac{1}{2}cg'Q_{k\ell} \qquad (2\text{-}22)$$

$$Q_{k\ell}=\int_0^1\varphi_k(x)\,x^2\varphi_\ell(x)\,dx \qquad (2\text{-}23)$$

とおくと（2－21）は

$$\Gamma_n^{(1)}V_{nn'}=\sum_{k,\ell}U_{n\ell}\,(e^A)_{\ell k}\ \Gamma_k\,(e^B)_{kn'} \qquad (2\text{-}24)$$

または

$$\Gamma^{(1)}V=U e^A\Gamma e^B \qquad (2\text{-}25)$$

と書ける（附録３）。ここに A, B, U, V はそれぞれ A_{kl}, B_{kl}, U_{kl}, V_{kl} を要素とする行列であり，$\Gamma^{(1)}$, Γ はそれぞれ $\Gamma_k^{(1)}$, Γ_k を対角要素とする対角行列である。A, B は対称行列であり U, V は $U^{-1}=U^T$, $V^{-1}=V^T$ となっている。（附録５）。（２－25）の両辺に右側から逆行列 V^{-1} を乗じて

$$\Gamma^{(1)}=Ue^{A}\Gamma e^{B}V^{-1} \qquad (2-26)$$

を得る。これは第１図においてS面からS'面への伝播を記述しており，同じようにしてS'面からS面への伝播は（２－10）から出発して

$$\Gamma^{(2)}=Ve^{B}\Gamma e^{A}U^{-1} \qquad (2-27)$$

と書くことができる。一往復後の固有値行列をGとすると

$$G=\Gamma^{(1)}\Gamma^{(2)}=Ue^{A}\Gamma e^{2B}\Gamma e^{A}U^{-1} \qquad (2-28)$$

または

$$G=UHU^{-1} \qquad (2-29)$$

となる。ここにGは G_n を対角要素とする対角行列であり

$$H=e^{A}\Gamma e^{2B}\Gamma e^{A} \qquad (2-30)$$

である。（２－29）の両辺に右側から行列Uを乗じると

$$UH=GU \qquad (2-31)$$

を得る。これが行列形式による共振を記述する基礎方程式である。(2-30)において，AとBとを交換し(2-31)のUをVと置き換えると，Vに関する基礎方程式が求まる事は言うまでもない。(2-30)のHは $g=g'=0$ のとき実数で対称行列であるから，固有値問題は完全に解ける。$g=g'=0$ でないとき，Hは複素対称行列でありエルミチアンではないが，解の存在を仮定すれば同じように対角化できる。（附録４）。そのような解が少なくとも一つある事はわかっている。[17]

§3. 摂動論 (13, 14)

§3.1 摂動論

前述したように共焦点のモードを零次近似にとって，g, g' を含む項を摂動と考えて摂動論を適用する。(2−27) のHの中に含まれている摂動項 A,B が小さいとき，即ち

$$|A_{nn'}|, |B_{nn'}| \ll 1 \qquad (3-1)$$

のとき，e^A, e^B を展開して最初の数項で近似することができる。ここで簡単のために，無摂動 ($g=g'=0$) の場合の行列を基底にとると (2−28) は単に

$$H_0 = \Gamma^2. \qquad (3-2)$$

と書くことができる。摂動のあるときの基礎方程式 (2−28)

$$UH = GU \qquad (3-3)$$

を展開すると

$$U = E + \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \cdots\cdots \qquad (3-4)$$

$$H = H_0 + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} + \cdots\cdots \qquad (3-5)^{*}$$

$$G = \Gamma^2 + \varepsilon G^{(1)} + \varepsilon^2 G^{(2)} + \cdots \qquad (3-6)$$

となる。(3−4)〜(3−6) を (3−3) に代入して ε の巾乗の係数を比較すると

$$\varepsilon: \; H^{(1)} + U^{(1)} H_0 = \Gamma^2 U^{(1)} + G^{(1)} \qquad (3-7)$$

$$\varepsilon^2: \; H^{(2)} + U^{(1)} H^{(1)} + U^{(2)} H_0 = \Gamma^2 U^{(2)} + G^{(1)} U^{(1)} + G^{(2)} \qquad (3-8)$$

を得る。

一方，(3−3) の U は固有ベクトル行列であるから規格化されているとすれば (附録5)

＊ この表式は通常量子力学で使われている $H = H_0 + \varepsilon H'$ なる表現とは異なっている。後程わかるように (§3.2)，これは H を行列展開したとき，g, g' に関して展開した事になっており，これと ε の巾数が対応している事情による。

$$U^{T}U = E \qquad (3-9)$$

となっている。(3−9)に(3−4)を代入してεの巾乗の係数を比較すると

$$\varepsilon: \quad U^{(1)T} + U^{(1)} = 0 \qquad (3-10)$$

$$\varepsilon^{2}: \quad U^{(2)T} + U^{(1)T}U^{(1)} + U^{(2)} = 0 \qquad (3-11)$$

を得る。

(3−7)において対角要素を比較すると

$$G_n^{(1)} = H_{nn}^{(1)} \qquad (3-12)$$

非対角要素を比較すると

$$H_{nn'}^{(1)} + U_{nn'}^{(1)}\,\Gamma_{n'}^{2} = \Gamma_n^{2}\,U_{nn'}^{(1)}$$

$n \neq n'$のとき $\Gamma_n \neq \Gamma_{n'}$ であるから.

$$U_{nn'}^{(1)} = \frac{H_{nn'}^{(1)}}{\Gamma_n^{2} - \Gamma_{n'}^{2}} \qquad (3-13)$$

$n = n'$のとき(3−10)より

$$U_{nn}^{(1)} = 0 \qquad (3-14)$$

となる. (3−8)より同様にして

$$G_n^{(2)} = H_{nn}^{(2)} + (U^{(1)}H^{(1)})_{nn} \qquad (3-15)$$

又は(3−13)を使って

$$G_n^{(2)} = H_{nn}^{(2)} + \sum_{l \neq n} \frac{(H_{nl}^{(1)})^{2}}{\Gamma_n^{2} - \Gamma_l^{2}} \qquad (3-15a)$$

(3−8)より

$$U_{nn'}^{(2)} = \frac{1}{\Gamma_n^{2} - \Gamma_{n'}^{2}}\left[H_{nn'}^{(2)} + (U^{(1)}H^{(1)})_{nn'} - G_n^{(1)}U_{nn'}^{(1)}\right] \qquad (3-16)$$

又は(3−12), (3−13)を使って.

$$U_{nn'}^{(2)} = \frac{1}{\Gamma_n^{2} - \Gamma_{n'}^{2}}\left[H_{nn'}^{(2)} + \sum_{l \neq n} \frac{H_{nl}^{(1)}H_{ln'}^{(1)}}{\Gamma_n^{2} - \Gamma_l^{2}} - \frac{H_{nn}^{(1)}H_{nn'}^{(1)}}{\Gamma_n^{2} - \Gamma_{n'}^{2}}\right] \qquad (3-16a)$$

(3−11)より.

$$U_{nn}^{(2)} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq n}\left(\frac{H_{ni}^{(1)}}{\Gamma_n^2-\Gamma_i^2}\right)^2 \qquad (3-17)$$

となる。

§3.2 行列要素の計算

(3−1)の条件のもとに(2-12)即ち

$$H = e^{A}\Gamma e^{2B}\Gamma e^{A} \qquad (3-18)$$

を展開して

$$H = \left(E+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots\right)\Gamma\left(E+2B+\frac{(2B)^2}{2!}+\cdots\right)\Gamma\left(E+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots\right) \qquad (3-19)$$

(3−5)と比較して行列要素を求める。即ち

$$H^{(1)} = A\Gamma^2 + 2\Gamma B\Gamma + \Gamma^2 A \qquad (3-20)$$

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}(A^2\Gamma^2+\Gamma^2A^2+2A\Gamma^2A)+2\Gamma B^2\Gamma+2(A\Gamma B\Gamma+\Gamma B\Gamma A) \qquad (3-21)$$

となる。行列要素に分解すると

$$H_{nn'}^{(1)} = -j\frac{1}{2}C\,Q_{nn'}\left[(\Gamma_n^2+\Gamma_{n'}^2)\,g+2\Gamma_n\Gamma_{n'}\,g'\right] \qquad (3-22)$$

$$H_{nn'}^{(2)} = \left(-j\frac{1}{2}C\right)^2\sum_{\ell}Q_{n\ell}\,Q_{\ell n'}\left[\left(\Gamma_n^2+\Gamma_{n'}^2+2\Gamma_\ell^2\right)\frac{g^2}{2}\right.$$
$$\left.+2\Gamma_\ell(\Gamma_n+\Gamma_{n'})\,gg'+2\Gamma_n\Gamma_{n'}g'^2\right] \qquad (3-23)$$

を得る。ここで(2−21)が使われている。従って(3-22),(3-23),(3-12)(3−15a)を使って、(3−6)の第n番目の固有値G_nを2次の項まで求めると

$$G_n = \Gamma_n^2\left[1-jC(g+g')Q_{nn}+\frac{\{jC(g+g')\}^2}{2}Q_{nn}^2\right.$$
$$+\left\{\frac{jC(g+g')}{2}\right\}^2\sum_{\ell\neq n}\frac{\Gamma_n+\Gamma_\ell}{\Gamma_n-\Gamma_\ell}Q_{n\ell}^2+\left\{\frac{jC(g-g')}{2}\right\}^2\left.\sum_{\ell\neq n}\frac{\Gamma_n-\Gamma_\ell}{\Gamma_n+\Gamma_\ell}Q_{n\ell}^2\right]$$
$$\cong \Gamma_n^2(1-\Delta)e^{-j\Delta} \qquad (3-24)$$

を得る。ここに

$$\Delta = C^2\left(\frac{g+g'}{2}\right)^2\sum_{\ell\neq n}\frac{\Gamma_n+\Gamma_\ell}{\Gamma_n-\Gamma_\ell}Q_{n\ell}^2+C^2\left(\frac{g-g'}{2}\right)^2\sum_{\ell\neq n}\frac{\Gamma_n-\Gamma_\ell}{\Gamma_n+\Gamma_\ell}Q_{n\ell}^2 \qquad (3-25)$$

及び

$$\Phi = (g+g')\,C\,Q_{nn} \tag{3-26}$$

である。一方（3－22），（3－23），（3－13），（3－14），（3－16），（3－16a）を使って，（3－5）の固有ベクトルの行列要素を2次の項まで求めると

$$U_{nn} = 1 + \frac{C^2}{8}\sum_{i\neq n}\frac{Q_{ni}^2}{(\Gamma_n^2-\Gamma_i^2)^2}\left[(\Gamma_n+\Gamma_i)^2\frac{g+g'}{2} + (\Gamma_n-\Gamma_i)^2\frac{g-g'}{2}\right]^2 \tag{3-27}$$

$$\begin{aligned}
U_{nn'} = &-j\frac{C}{2}\frac{Q_{nn'}}{\Gamma_n^2-\Gamma_{n'}^2}\left[(\Gamma_n^2+\Gamma_{n'}^2)\,g + 2\Gamma_n\Gamma_{n'}\,g'\right] \\
&+\frac{C^2}{4}\frac{Q_{nn}Q_{nn'}}{(\Gamma_n^2-\Gamma_{n'}^2)^2}\left[\frac{\Gamma_n^4+6\Gamma_n^2\Gamma_{n'}^2+\Gamma_{n'}^4}{2}\,g^2 + 2\Gamma_n\Gamma_{n'}(\Gamma_n+\Gamma_{n'})^2\,g\,g'\right. \\
&\left.+2\Gamma_n\Gamma_{n'}(\Gamma_n^2+\Gamma_{n'}^2)\,g'^2\right] - \frac{C^2}{4}\frac{1}{\Gamma_n^2-\Gamma_{n'}^2}\sum_{i\neq n}\frac{Q_{ni}Q_{in'}}{\Gamma_n^2-\Gamma_i^2}\left[\frac{1}{2}(3\Gamma_n^4-2\Gamma_i^4\right. \\
&+3\Gamma_n^2\Gamma_i^2+3\Gamma_n^2\Gamma_{n'}^2+\Gamma_{n'}^2\Gamma_i^2)\,g^2 + 2\{\Gamma_n^3(\Gamma_{n'}+2\Gamma_i) \\
&-\Gamma_i^3(\Gamma_n+\Gamma_{n'}) + \Gamma_n\Gamma_{n'}\Gamma_i(\Gamma_n+\Gamma_{n'}+\Gamma_i)\}\,g\,g' \\
&\left.+2\Gamma_n\Gamma_{n'}(\Gamma_n^2-\Gamma_i^2+2\Gamma_n\Gamma_i)\,g'^2\right]
\end{aligned} \tag{3-28}$$

となる。

（3－24）～（3－28）を計算する際，一般化された長軸回転楕円体座標による微分方程式の固有関数 $\{\varphi_n(x)\}$ を基底にとったが，長軸回転楕円体座標による波動方程式の固有関数 $\{S_{on}(c,x)\}$ を用いると，1次元の共振器の場合になり Gloge[7] が求めたものになる。

§4. 数値計算

§4.1 回折損失，共振条件

（3－24）で求めた G_n は，（2-11）を使うと，一往復当りの固有値 $g^{(1)}g^{(2)}$ と次の関係にあることがわかる。

$$g^{(1)}g^{(2)}=\Gamma^{(1)}\Gamma^{(2)}c\,e^{-2j\left(kd-\frac{m+1}{2}\pi\right)} \qquad (4-1)$$

第 n 番目のモードを選び

$$\Gamma_n=(-1)^n|\Gamma_n| \qquad (4-2)$$

なる事に注意して[8]，（2-28），（3－24）～（3－26）を使って（4－1）を変形すると

$$(g^{(1)}g^{(2)})_n=G_n c\,e^{-2j\left(kd-\frac{m+2n+1}{2}\pi\right)}$$

$$=\lambda_n(1-\Delta)e^{-j\Phi'} \qquad (4-3)$$

を得る。ここに

$$\lambda_n=c\Gamma_n^2 \qquad (4-4)$$

$$\Phi'=(g+g')cQ_{nn}+2kd-(m+2n+1)\pi \qquad (4-5)$$

である。

従って，<u>一往復当りの回折損失 S_d</u>[12]は

$$S_d=1-|(g^{(1)}g^{(2)})_n|^2 \qquad (4-6)$$

$$=1-\lambda_n^2(1-\Delta)^2 \qquad (4-7)$$

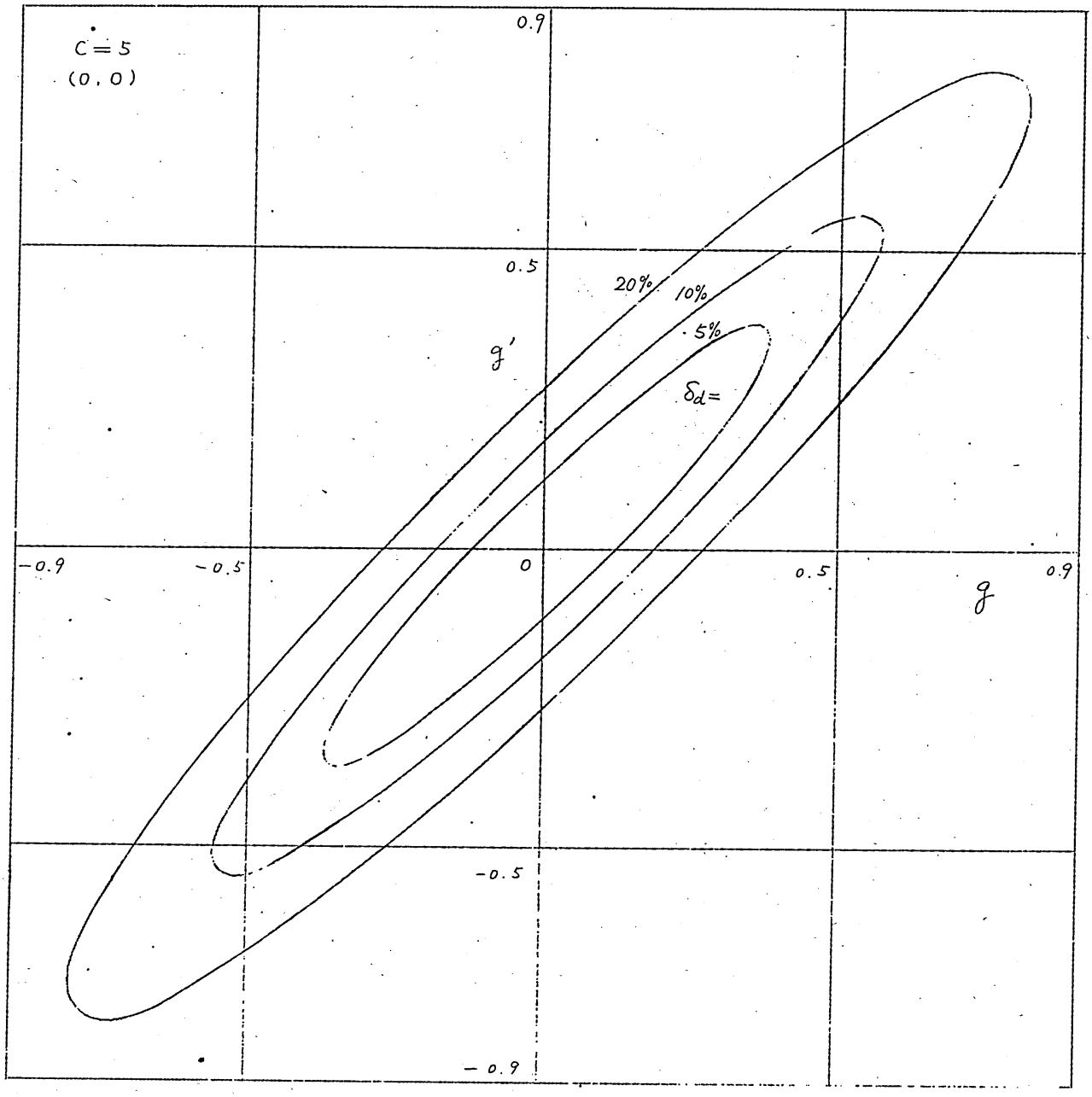
と書くことができる。

共焦点（$g=g'=0$）の場合には　$\Delta=0$ となるので

$$S_d=1-\lambda_n^2 \qquad (4-8)$$

となる。Li は，反復計算法で求めた回折損失が，Slepian[8] の求めた値と完全に一致したと報告している。[6]

S_d が一定であれば，（3－25）から，(g,g') を座標にとると（4－7）は，$(g-g')$，$(g+g')$ をそれぞれ長軸及び短軸とする楕円を描く事がわかる。



第 2 図

第２図は $C=5$ で；基本モードの場合の，$\delta_d = 5\%$，10%，20% に対する等損失曲線を示している。原点での値は失焦点に対応し，δ_d は約１％になっている。第１表に λ_n と $cQ_{nn'}$ の数値例を示す。

n	0	1	2	3
λ_n	0.9953423	0.5787706	0.01601799	0.3542233×10^{-4}
cQ_{0n}	1.026825	−0.8792033	−0.2355117	−0.02375738
cQ_{1n}	−0.8792033	2.887015	−1.281619	−0.1829347
cQ_{2n}	−0.2355117	−1.281619	2.911870	−1.257535
cQ_{3n}	−0.02375738	−0.1829347	−1.257535	2.678341

第１表：$C=5$，$m=0$ のときの λ_n と $cQ_{nn'}$ との値

等損失曲線が，２本の対称軸を持つのは，次のような事情と考えられる。積分方程式(2-9)，(2-10)の積分核は対称であるから，g と g' とを互に交換しても（$(g,g')\to(g',g)$），式の形は変わらない。ただ左右の鏡が入れ変わるだけで，損失は不変である。従って等損失曲線は，$(g-g')$ に関して対称であり，かつ偶数巾しか持たない。また $(g,g')\to(-g,-g')$ なる変換を行っても，固有関数や固有値の絶対値は変化なく，位相部分の符号が変化するだけである。以上の事柄より

$|G_n|$ は $(g\pm g')^2$；$(g\pm g')^4$，$(g^2-g'^2)^2$；……

$\arg G_n$ は $(g+g')$，$(g+g')^3$，……

なる項しか含まない。

それ故（3-25），(3-26)の更に高次の補正項としては $|G_n|$ には，$(g\pm g')^4$，$(g^2-g'^2)^4$ なる４次の項が，$\arg G_n$ には $(g+g')^3$ なる３次の項が考えられる。

（4-5）からわかるように，π が 2π の整数倍（q：整数）になったとき，共振が起こるので，<u>共振条件は</u>

$$\frac{2d}{\lambda} = q + \frac{m+2n+1}{2} - \frac{g+g'}{2\pi}\,cQ_{nn} \qquad (4-9)$$

となる。これは Boyd & Kogelnik が与えた共振条件[15]

$$\frac{2d}{\lambda} = g + \frac{1}{\pi}(m+2n+1)\cos^{-1}\sqrt{gg'} \qquad (4-10)$$

とは若干異なっている。勿論、共焦点（$g=g'=0$）の場合には両者は完全に一致している。

1 transit 後の（固有値の）位相のずれは Θd は（4-9），(4-10)より

$$\Theta d = \frac{\pi}{2}(m+2n+1) - \frac{1}{2}(g+g')\,c\,Q_{nn} \qquad (4-11)$$

$$\Theta d = (m+2n+1)\cos^{-1}\sqrt{gg'} \quad (\text{Boyd \& kogelnik の場合}) \qquad (4-12)$$

となり，(4-11)は $\left|\frac{1}{2}g\,c\,Q_{nn}\right| \ll 1$ のとき Li の計算結果[6]とよく一致しており，（4－12）は C（またはN）が大きいとき成立つ式である。

§4.2 振巾および位相分布

S上における第 n モードの振巾分布 $|U_n(x)|$，位相分布 $\phi(x)$ は（2－18），（3－4）を使って；第 n 次近似まで考慮すると次のようにかける。

$$|U_n(x)|^2 = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} U_{n\ell}^{(r)}\varphi_\ell(x)\right)^2 + \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} U_{n\ell}^{(i)}\varphi_\ell(x)\right)^2$$

$$\cong\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}(\delta_{n\ell}+U_{n\ell}^{(2)})\varphi_\ell(x)\right]^2 + \left[\sum_{\ell=0}^{\infty}U_{n\ell}^{(1)}\varphi_\ell(x)\right]^2 \qquad (4-15)$$

$$\phi(x) = \tan^{-1}\frac{\sum_{\ell=0}^{\infty}U_{n\ell}^{(i)}\varphi_\ell(x)}{\sum_{\ell=0}^{\infty}U_{n\ell}^{(r)}\varphi_\ell(x)} \cong \tan^{-1}\frac{\sum_{\ell=0}^{\infty}U_{n\ell}^{(1)}\varphi_\ell(x)}{\sum_{\ell=0}^{\infty}(\delta_{n\ell}+U_{n\ell}^{(2)})\varphi_\ell(x)} \qquad (4-16)$$

ここに $U_{n\ell}^{(r)}$，$U_{n\ell}^{(i)}$ はそれぞれ $U_{n\ell}$ の実数，虚数部分である。

謝　辞

有益な討論をして下さった吉田靖夫氏に感謝致します。

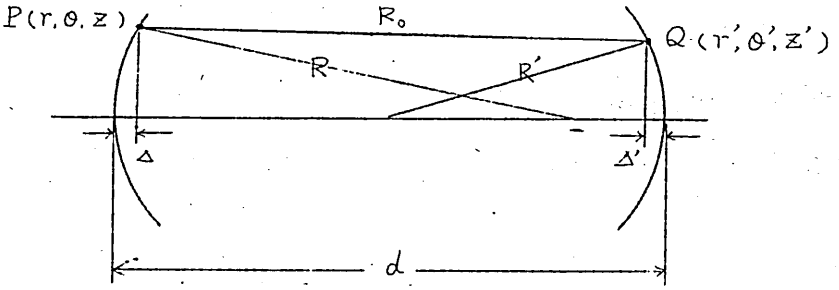
附　録

（附録１）

S上の点 P(r,θ,z)，S'上の点 Q(r',θ',z') における field の値 U_P(r,θ)，U_Q(r',θ') の間には

$$U_Q(r',\theta')=\frac{j}{2\lambda}\int_0^a\int_0^{2\pi}U_P(r,\theta)\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\left(1+\frac{|z-z'|}{R_0}\right)r\,dr\,d\theta \qquad (A1-1)$$

なる関係がある。(2)



$$R_0=\sqrt{(z-z')^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}$$

$$\Delta=R-\sqrt{R^2-r^2}\cong\frac{r^2}{2R},\qquad \Delta'\cong\frac{r'^2}{2R'}$$

$$|z-z'|=d-\Delta-\Delta'=d-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{R}+\frac{r'^2}{R'}\right)$$

従って

$$R_0^2=\left[d-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{R}+\frac{r'^2}{R'}\right)\right]^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')$$

$$\cong d^2-d\left(\frac{r^2}{R}+\frac{r'^2}{R'}\right)+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')$$

$$R_0\cong d\left[1-\frac{2rr'}{d^2}\cos(\theta-\theta')+\left(1-\frac{d}{R}\right)\frac{r^2}{d^2}+\left(1-\frac{d}{R'}\right)\frac{r'^2}{d^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cong d-\frac{rr'}{d}\cos(\theta-\theta')+\frac{g}{2d}r^2+\frac{g'}{2d}r'^2 \qquad (A1-2)$$

ここに　$g=1-\frac{d}{R}$，　$g'=1-\frac{d}{R'}$ である。

（A1−2）を（A1−1）の指数部の R_0 に代入し，分母は $R_0=d$ とおき，$\frac{|z-z'|}{R_0}=1$ とおくと

$$U_Q(r',\theta')\cong\frac{je^{-jkd}}{\lambda d}\int_0^a\int_0^{2\pi}U_P(r,\theta)e^{j\frac{k}{d}\left[rr'\cos(\theta-\theta')-\frac{1}{2}gr^2-\frac{1}{2}g'r'^2\right]}r\,dr\,d\theta \qquad (A1-3)$$

となる，無次元変数に書き変えると

$$v_Q(x',\theta') \cong \frac{jce^{-jkd}}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} U_p(x,\theta)e^{jc\left[xx'\cos(\theta-\theta')-\frac{1}{2}gx^2-\frac{1}{2}g'x'^2\right]}x\,dx\,d\theta$$

となる。または

$$v_Q(x',\theta') \cong \int_0^1\int_0^{2\pi} K(x',\theta'|x,\theta)\,U_p(x,\theta)\,x\,dx\,d\theta \qquad (A1-4)$$

ここに

$$K(x',\theta'|x,\theta) = \frac{jce^{-jkd}}{2\pi}e^{jc\left[xx'\cos(\theta-\theta')-\frac{1}{2}gx^2-\frac{1}{2}g'x'^2\right]}$$

である。

尚（A1－3）の近似式は

$$kd\left(\frac{a^2}{d^2}\right)^2 \ll 2\pi \quad \text{または} \quad \frac{a^2}{\lambda d} \ll \left(\frac{d}{a}\right)^2 \qquad (A1-5)$$

即ち位相の誤差が2πよりずっと小さいとき成立する。

（附録２）

（2－6），（2－7），（2－8）を（2－1）に代入して計算する

$$g^{(1)}\sum_m \frac{v_m(x')}{\sqrt{x'}}\begin{Bmatrix}\cos m\theta'\\ \sin m\theta'\end{Bmatrix} = \int_0^1 \frac{jce^{-jkd}}{2\pi}e^{-j\frac{1}{2}c(gx^2+g'x'^2)}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha j^\alpha J_\alpha(cxx')$$
$$\times\sum_m \frac{U_m(x)}{\sqrt{x}}x\,dx\int_0^{2\pi}\cos\alpha(\theta-\theta')\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{Bmatrix}d\theta \qquad (A2-1)$$

ここに

$$\int_0^{2\pi}\cos\alpha(\theta-\theta')\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{Bmatrix}d\theta = \frac{2\pi}{\varepsilon_\alpha}\begin{Bmatrix}\cos m\theta'\\ \sin m\theta'\end{Bmatrix}\delta_{\alpha,m}$$

であり

$$\varepsilon_\alpha \equiv \begin{cases}1 & \alpha=0\\ 2 & \alpha\neq 0\end{cases}, \qquad \delta_{\alpha,m} \equiv \begin{cases}1 & \alpha=m\\ 0 & \alpha\neq m\end{cases}$$

であるから（A2－1）は

$$g^{(1)}\sum_m \frac{v_m(x')}{\sqrt{x'}}\begin{Bmatrix}\cos m\theta'\\ \sin m\theta'\end{Bmatrix} = jce^{-jkd}\sum_m j^m\cdot\begin{Bmatrix}\cos m\theta'\\ \sin m\theta'\end{Bmatrix}$$
$$\times\int_0^1 e^{-j\frac{1}{2}c(gx^2+g'x'^2)}J_m(cxx')U_m(x)\sqrt{x}\,dx$$

となる。$\begin{Bmatrix}\cos m\theta' \\ \sin m\theta'\end{Bmatrix}$の直交性を使うとmに関して分離でき，両辺からθに関する項を落とすと

$$g^{(1)}v(x')=\sqrt{c}\,j^{m+1}e^{-jkd}\int_0^1 e^{-j\frac{1}{2}c(gx^2+g'x'^2)}J_m(cxx')\sqrt{cxx'}\,u(x)dx$$

または

$$\Gamma^{(1)}v(x')=\int_0^1 K(x',x)e^{-j\frac{1}{2}c(gx^2+g'x'^2)}u(x)dx \qquad (A2-2)$$

ここに

$$\Gamma^{(1)}=\frac{g^{(1)}}{\sqrt{c}}e^{j\left(kd-\frac{m+1}{2}\pi\right)} \qquad (A2-3)$$

$$K(x',x)=J_m(cxx')\sqrt{cxx'} \qquad (A2-4)$$

である。（2－2）の場合も全く同様である。

（附録3）

いま　Aを正方行列とすると

$$e^A=E+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots \qquad (A3-1)$$

が成立する。[16]

一方

$$\int_0^1\varphi_k(x)e^{-j\frac{1}{2}cgx^2}\varphi_\ell(x)dx=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\int_0^1\varphi_k(x)\left(-j\frac{1}{2}cgx^2\right)^\alpha\varphi_\ell(x)dx \qquad (A3-2)$$

$\alpha=0$　$\int_0^1\varphi_k(x)\varphi_\ell(x)dx=\delta_{k\ell}$

$\alpha=1$　$\int_0^1\varphi_k(x)\left(-j\frac{1}{2}cgx^2\right)\varphi_\ell(x)dx=-j\frac{1}{2}cgQ_{k\ell}=A_{k\ell}$

$\alpha=2$　$\int_0^1\varphi_k(x)\left(-j\frac{1}{2}cgx^2\right)^2\varphi_\ell(x)dx$

$$=\left(-j\frac{1}{2}cg\right)^2\int_0^1dx'\delta(x-x')\int_0^1\varphi_k(x)x^2\varphi_\ell(x')x'^2dx$$

$$=\left(-j\frac{1}{2}cg\right)^2\int_0^1dx'\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(x)\varphi_m(x')\int_0^1\varphi_k(x)x^2\varphi_\ell(x')x'^2dx$$

$$=(-j\frac{1}{2}cg)^2\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\varphi_k(x)x^2\varphi_m(x)dx\int_0^1\varphi_m(x')x'^2\varphi_\ell(x')dx'$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}A_{km}A_{m\ell}=(A^2)_{k\ell}$$

同様にして

$$\int_0^1\varphi_k(x)(-j\frac{1}{2}cgx^2)^\alpha\varphi_\ell(x)dx=(A^\alpha)_{k\ell}\qquad(A3-3)$$

が成立するので（A3−3）を（A3−2）に代入すると

$$\int_0^1\varphi_k(x)e^{-j\frac{1}{2}cgx^2}\varphi_\ell(x)dx=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{(A^2)_{k\ell}}{\alpha!}=\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{A^\alpha}{\alpha!}\right)_{k\ell}$$

（A3−1）を使うと　　$=(e^A)_{k\ell}\qquad(A3-4)$

（附録4）

$\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ の直交性の証明

（2−10）を（2−9）に代入すると

$$\Gamma^{(1)}\Gamma^{(2)}v(x')=\int_0^1\int_0^1 k_1(x',x)\,k_1(x,x'')\,v(x'')\,dx\cdot dx''.$$

ここに

$$k_1(x',x)=k(x',x)e^{-j\frac{1}{2}q\{gx^2+g'x'^2\}}$$

である。或いは

$$\gamma v(x')=\int_0^1 L(x',x'')v(x'')dx''\qquad(A4-1)$$

ここに

$$\gamma=\Gamma^{(1)}\Gamma^{(2)}$$

$$L(x',x'')=L(x'',x')=\int_0^1 k_1(x',x)\,k_1(x,x'')dx\qquad(A4-2)$$

であり，$L(x',x'')$ は複素対称であるがエルミチアンではない。このとき，(A4−1)を満たす固有値があるとし，それを n, n' で示す。

そのとき

$$\gamma_n v_n(x')=\int_0^1 L(x',x'')\,v_n(x'')dx''\qquad(A4-3)$$

或いは

$$\gamma_{n'} v_{n'}(x') = \int_0^1 L(x', x'') v_{n'}(x'')\, dx'' \qquad (A4-4)$$

が成立つ．(A4−3)，(A4−4) にそれぞれ，$v_n(x')$，$v_n(x')$ を乗じて積分し，辺々相減じると，(A4−2) の対称性より

$$(\gamma_n - \gamma_{n'}) \int_0^1 v_n(x') v_{n'}(x')\, dx'$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 L(x', x'') v_n(x'') v_{n'}(x')\, dx'\, dx''$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 L(x', x'') v_{n'}(x'') v_n(x')\, dx'\, dx'' = 0$$

従って 縮退がないとすると

$$\int_0^1 v_n(x') v_{n'}(x')\, dx' = 0 \qquad (A4-5)$$

を得る。これは，複素対称な積分核を持つ積分方程式の解の直交関係である．

(附録5)

(2-18)，(2-19) の $u_n(x)$，$v_n(x)$ は (A4−5) のようにそれぞれ完全直交系を張っているので

$$\int_0^1 u_n(x) u_{n'}(x)\, dx = \delta_{nn'}$$

となる。これに (2-18) を代入して (2-14) を使うと

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} U_{n\ell} U_{n'\ell} = \delta_{nn'} \quad \text{または} \quad U U^{\mathrm{T}} = E \qquad (A5-1)$$

を得る。従って，$U^{-1} = U^{\mathrm{T}}$ (A5-2)

同様にして $V^{-1} = V^{\mathrm{T}}$

を得る。

参考文献

(1) 池上、小倉、吉田、嶽本：電研資料 1966年5月

H. Ogura, Y. Yoshida & I. Iwamoto : J. Phys. Soc. Japan 22 (1967), 1421

(2) A.G. Fox & T. Li : Bell Syst. Tech. Journal 40 (1961), 453

(3) 山田、杉尾、嘉納、河野：昭和42年電気四学会東海支部連合大会資料, 205

(4) 池上、小倉、吉田、古浜：電研資料 1965年7月

H. Ogura, Y. Yoshida, Y. Furuhama & J. Ikenoue : Jap. J. appl. Phys. 5 (1966), 225

(5) A.G. Fox & T. Li : Proc. IEEE 51 (1963), 80

(6) T. Li : Bell Syst. Tech. Journal 44 (1965), 917

(7) D. Gloge : Arch. Elekt. Übertragung 18 (1964), 197

(8) D. Slepian : Bell Syst. Tech. Journal 43 (1964), 3009

(9) C.J. Bouwkamp : J. Math. Phys. 26 (1957), 72

(10) D. Slepian : J. Math. and Phys. 44 (1965), 99

(11) C. Flammer : Spheroidal Wave Functions, Stanford Univ. Press (1957)

(12) G.D. Boyd & J.P. Gordon : Bell Syst. Tech. Journal 40 (1961), 489

(13) D. Gloge : Arch. Elekt. Übertragung 19 (1965), 13

(14) P.M. Morse & H. Feshbach : Methods of Theoretical Physics, II
McGraw-Hill (1953)

(15) G.D. Boyd & H. Kogelnik : Bell Syst. Tech. Journal 41 (1962), 1347

(16) 遠山：行列論，共立全書 (1952), 230

(17) D.J. Newman & S.P. Morgan : Bell Syst. Tech. Journal 43 (1964), 113

輻射科学研究会資料

導電性運動媒質の境界面における境界条件とエネルギー関係式

藤岡　弘
二瓶文博
熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1968年2月9日

1. 序　　言

筆者らは先に導電性運動媒質と平面電磁波との相互作用について論じ，入射面と境界面の両者に対して平行に運動している導電性誘電体[1]もしくは圧縮性電磁流体[2]～[4]の境界面に，真空側からH波が入射するとき，反射係数と透過係数との和は一般には1とはならず入射角と速度の関数となることを示した．

これに対して，藤沢，細野両先生から研究会[2],[4]あるいは全国大会[3]において，つぎのような主旨の御質問をいただいた．「媒質が境界面に平行に運動している場合には，境界条件は静止媒質中におけるものと全く同じになり，したがって境界条件よりただちに両係数の和が1となる結果が導かれる．これは貴方々の結果と明らかに矛盾するのではないか．」以下，本文によって両先生の御質問に対して解答申し上げる次第である．

本文は，半無限導電性運動誘電体に平面電磁波が入射する場合[1]の，境界面上におけるエネルギー関係式を運動境界面上の境界条件を基にして考察するものである．導電性運動誘電体の問題を解析する場合には，Pauli[5]，Sommerfeld[6]，あるいはMφller[7]等の書物に紹介されているMinkowskiによって定式化された伝導電流モデル（Conduction current model）を用いるのが常であり，実際このモデルを用いた研究は数多く報告されている．[8]～[11] 前述の我々の結論もこのモデルを用いて導かれている．一方，導電性運動誘電体の問題をMinkowski理論の分極電流モデル（polarization current model）を用いて解析することも可能である．ただし，ここでChu理論の分極電流モデルと区別するために"Minkowski理論の"といったわけであるが，Minkowskiによって定式化されたというわけではなく，

Maxwell方程式の共変性を出発点とするMinkowski 理論の範疇で定式化が可能であるという意味である．静止媒質中においては，伝導電流モデルおよび分極電流モデルの両モデルによって導かれた解は完全に等価であることはよく知られているが，運動媒質中においては後に明らかになるように両モデルによる結果は一般には一致しない．

そこで，まず最初伝導電流モデルを用いてつぎのことを明らかにする．(i)入射H波に対しては，反射係数と透過係数の和は一般には１とならないが(ii)入射E波に対しては，常にその和は１となる．つぎに，分極電流モデルを用いた場合には，入射H波およびE波の両者に対して，反射係数と透過係数の和が常に１となることを示す．最後に，両モデルを用いて導かれた反射および透過係数の関係について考察する．

2. 伝導電流モデル

誘電率ε_1，透磁率μ_0，導電率σをもつ線形，等方かつ一様なる媒質を考えこの媒質が観測者に対して一様な速度vで運動しているものとする．本文では，定常状態のみを取扱うので，媒質および観測者の静止座標系における電磁界の時間変化をそれぞれ$e^{j\omega' t'}$および$e^{j\omega t}$と仮定する．なお，以下においてプライムの付いた量は媒質の静止座標系における量を表わし，観測者の静止座標系における量にはプライムはつけないものとする．このとき，媒質の静止座標系におけるMaxwell方程式は，伝導電流モデルに対してつぎのように表わされる．

$$\nabla' \times \mathbb{E}'_c = -j\omega' \mathbb{B}'_c$$
$$\nabla' \times \mathbb{H}'_c = j\omega' \mathbb{D}'_c + \mathbb{J}'_c \qquad (1)$$

$$\nabla' \cdot \mathbb{D}_c' = \rho_c'$$

$$\nabla' \cdot \mathbb{B}_c' = 0$$

また，構成関係式はつぎのようになる．

$$\mathbb{D}_c' = \varepsilon_1 \mathbb{E}_c' , \qquad \mathbb{B}_c' = \mu_0 \mathbb{H}_c' , \qquad \mathbb{J}_c' = \sigma \mathbb{E}_c' \tag{2}$$

上式において，下部の添字 " c " は伝導電流モデルによる量を表わす．さて静止境界面における境界条件は次式によって与えられる．[12]

$$n \times [\mathbb{E}_c'] = 0$$

$$n \times [\mathbb{H}_c'] = 0$$

$$n \cdot [\mathbb{D}_c'] = \eta'$$

$$n \cdot [\mathbb{B}_c'] = 0 \tag{3}$$

ただし，媒質の導電率は有界であるとする．なお，n は境界面上における単位法線ベクトルを表わし，[ ] は境界面上での界の不連続分を表わす．また η' は表面電荷密度を表わす．つぎに，運動境界面においては，式 (3) に対応する境界条件はつぎのようにかける．[13]

$$n \times [\mathbb{E}_c] - (n \cdot v)[\mathbb{B}_c] = 0$$

$$n \times [\mathbb{H}_c] + (n \cdot v)[\mathbb{D}_c] = \eta v$$

$$n \cdot [\mathbb{D}_c] = \eta$$

$$n \cdot [\mathbb{B}_c] = 0 \tag{4}$$

ただし，η は運動境界面上での表面電荷密度を表わす．

2．1．入　射　H　波

図1に示すように，$z>0$の空間は真空（ε_0，μ_0）であり，$z<0$の空間は前に述べたような導電性誘電体（ε_1，μ_0，σ）によって満されているものとし，媒質は観測者に対して一定速度vでx軸方向に運動しているものとする．いま，真空側から一様な平面電磁波が入射するものとし，まず最初入射波がH波の場合，すなわち磁界が入射面（x z平面）に垂直な場合を取扱う．このとき，観測者の静止座標系においては，入射波はつぎのように表わされる．

$$H_y^{(i)} = H_0 \, e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)}$$

$$E_y^{(i)} = 0 \qquad (5)$$

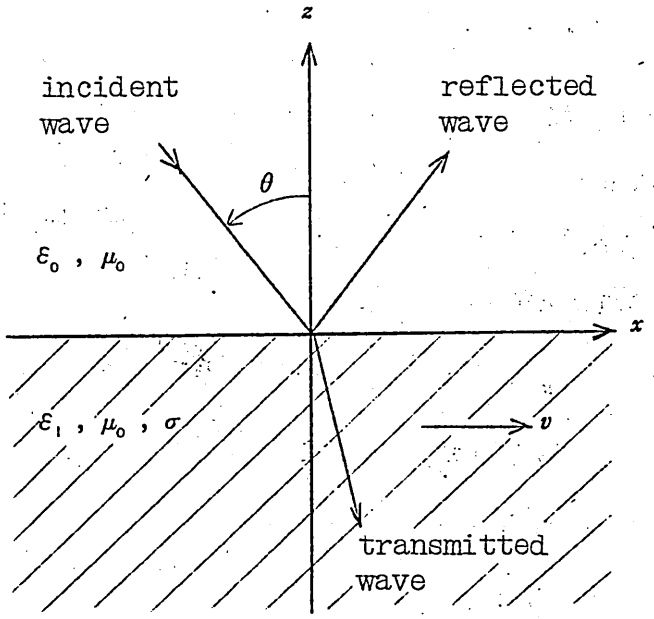


図1　座　標　系

ただし

$$k_x = k_0 \sin\theta\,, \quad k_z = -k_0 \cos\theta\,, \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

ここで，H_0は場所および時間に無関係な定数であり，ωは入射波の角周波数 θは入射角を表わす．なお，電磁界の他の成分は上式(5)とMaxwell方程式とから求められる．文献(1)においては，問題を媒質の静止座標系で解き得られた解を変換によって観測者の静止座標系に移すという方法がとられた．したがって，媒質の静止座標系における境界条件，すなわち静止境界面での条件(3)のみが用いられ，その結果，反射係数と透過係数の和が一般には1とはならないという結論を得た．ここでは，運動境界面におけるエネルギー関係式を直接導くために，境界条件(4)が用いられる．

入射H波(5)に対して，境界条件(4)はつぎのようになる．

$$E_x^{(i)} + E_{cx}^{(r)} = E_{cx}^{(t)}$$

$$H_y^{(i)} + H_{cy}^{(r)} = H_{cy}^{(t)} + \delta \qquad (6)$$

ただし

$$\delta = v\,\eta = v\,(D_{cz}^{(t)} - D_{cz}^{(r)} - D_z^{(i)}) \qquad (7)$$

なお，上部の添字(r)および(t)は，それぞれ反射波および透過波の電磁界量を表わす．さて，式(6)の第1式と，第2式の複素共役をとった式との辺辺をそれぞれ掛け合せ，各項の実数部をとることによってつぎのエネルギー関係式を得る．

$$R_{cH} + T_{cH} = 1 - \alpha \qquad (8)$$

ここで，R_{cH}およびT_{cH}は，それぞれ入射H波に対する反射係数および透過係数を表わし，次式で定義される．

$$R_{cH}=-\frac{Re\,(E_{cx}^{(r)}\;H_{cy}^{(r)*})}{Re\,(E_x^{(i)}\;H_y^{(i)*})}=-\frac{(S_c^{(r)}\cdot n)}{(S^{(i)}\cdot n)} \tag{9}$$

$$T_{cH}=\frac{Re\,(E_{cx}^{(t)}\;H_{cy}^{(t)*})}{Re\,(E_x^{(i)}\;H_y^{(i)*})}=\frac{(S_c^{(t)}\cdot n)}{(S^{(i)}\cdot n)} \tag{10}$$

ただし，$S^{(i)}$，$S_c^{(r)}$および$S_c^{(t)}$は，それぞれ入射波，反射波および透過波の時間平均ポインティング・ベクトルを表わす．また，記号*は複素共役を表わし，Reは実数部をとる操作を表わす．エネルギー関係式(8)の右辺の第2項は

$$\alpha=\frac{Re\,(E_{cx}^{(t)}\;\delta^*)}{Re\,(E_x^{(i)}\;H_y^{(i)*})} \tag{11}$$

で定義され，運動境界面上における透過波の電界と表面電荷密度との相互作用を表わし，後に明らかにするように入射角と媒質の運動速度との関数になる．なお，エネルギー関係式(8)を導くにあたってつぎの関係式を用いた．

$$Re\,(E_x^{(i)}\,H_{cy}^{(r)*}+E_{cx}^{(r)}\,H_y^{(i)*})=0 \tag{12}$$

上式は，真空中のMaxwell方程式からただちに導かれる結果である．以上のようにして，入射波がH波の場合には，透過波と表面電荷密度との相互作用により，伝導電流モデルを用いて導かれた反射係数と透過係数の和は，一般には1とはならないことがわかった．

つぎに，αを直接求めてみよう．まず，$D_z^{(i)}$，$D_{cz}^{(r)}$および$D_{cz}^{(t)}$を，

それぞれ入射磁界$H_y^{(i)}$で表わせばつぎのようになる．

$$D_z^{(i)} = -\frac{1}{c}\sin\theta\, H_y^{(i)}$$

$$D_{cz}^{(r)} = -\frac{1}{c} F_c^{(r)} \sin\theta\, H_y^{(i)}$$

$$D_{cz}^{(t)} = -\frac{1}{c} F_c^{(t)} \sin\theta\, H_y^{(i)} \qquad (13)$$

ただし，

$$F_c^{(r)} = \frac{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta - p) - j\{\varepsilon\cos\theta - q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}}{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta + p) - j\{\varepsilon\cos\theta + q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}}$$

$$F_c^{(t)} = \frac{2\gamma(m - j\gamma\beta\,\mathrm{cosec}\,\theta)(1-\beta\sin\theta)\varepsilon\cos\theta}{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta + p) - j\{\varepsilon\cos\theta + q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}} \qquad (14)$$

上式において，つぎの諸記号を導入した．

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p = \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{2}}, \qquad q = \sqrt{\frac{-P + \sqrt{P^2+Q^2}}{2}}$$

$$P = \gamma^2\{\varepsilon(1-\beta\sin\theta)^2 - (\sin\theta - \beta)^2\}$$

$$Q = \frac{\gamma}{m}\varepsilon(1-\beta\sin\theta)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}, \qquad m = \frac{\omega\varepsilon_1}{\sigma} \qquad (15)$$

ただし，p，qは透過波の観測者の静止座標系における伝搬定数のz方向成分$k_z^{(t)}$と，$k_z^{(t)}=-\frac{\omega}{c}(p-jq)$なる関係で結ばれている．式(13)を式(7)に代入し，式(11)を用いてαはつぎのように求められる．

$$\alpha=\frac{4\varepsilon\cos\theta(1-\beta\sin\theta)\gamma^3 m\beta q(\sin\theta-\beta)}{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta+p)\}^2+\{\varepsilon\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2} \tag{16}$$

上式は，当然のことながら，先に導かれた文献(1)の結果と完全に一致する．式(8)および(16)から，αが負$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\sin^{-1}\beta\right)$のとき，$R_{cH}+T_{cH}>1$となり，$\alpha$が正$\left(\sin^{-1}\beta<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$のとき，$R_{dH}+T_{cH}<1$となることがわかる．

なお，反射係数(9)および透過係数(10)は，それぞれつぎのように求められる．

$$R_{cH}=\frac{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta-p)\}^2+\{\varepsilon\cos\theta-q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2}{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta+p)\}^2+\{\varepsilon\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2} \tag{17}$$

$$T_{cH}=\frac{4\varepsilon\cos\theta(1-\beta\sin\theta)^2\gamma^2 m(mp+q\gamma)}{\{\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta+p)\}^2+\{\varepsilon\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)\}^2} \tag{18}$$

2．2．入　射　E　波

本節においては，入射波がE波の場合，すなわち電界が入射面に垂直な場合を取り扱う．このとき，入射波はつぎのように表わされる．

$$E_y^{(i)}=E_0 e^{j(\omega t-k_x x-k_z z)}$$
$$H_y^{(i)}=0 \tag{19}$$

入射波(19)に対して，境界条件(4)はつぎのようになる．

$$E_y^{(i)} + E_{cy}^{(r)} = E_{cy}^{(t)}$$
$$H_x^{(i)} + H_{cx}^{(r)} = H_{cx}^{(t)} \qquad (20)$$

上式より，入射E波に対するエネルギー関係式

$$R_{cE} + T_{cE} = 1 \qquad (21)$$

を得る．ただし，

$$R_{cE} = -\frac{Re\,(E_{cy}^{(r)} H_{cx}^{(r)*})}{Re\,(E_y^{(i)} H_x^{(i)*})} \qquad (22)$$

$$T_{cE} = \frac{Re\,(E_{cy}^{(t)} H_{cx}^{(t)*})}{Re\,(E_y^{(i)} H_x^{(i)*})} \qquad (23)$$

なお，エネルギー関係式(21)を導くに当って，つぎの関係式を用いた．

$$Re\,(E_y^{(i)} H_{cx}^{(r)*} + E_{cy}^{(r)} H_x^{(i)*}) = 0 \qquad (24)$$

以上のようにして，入射波がE波の場合には，H波の場合とは違って，反射係数と透過係数の和は常に1となることがわかった．

さて，反射係数(22)と透過係数(23)を実際に求めるとつぎのようになる．

$$R_{cE} = \frac{(\cos\theta - p)^2 + q^2}{(\cos\theta + p)^2 + q^2} \qquad (25)$$

$$T_{cE} = \frac{4p\cos\theta}{(\cos\theta + p)^2 + q^2} \qquad (26)$$

3. 分極電流モデル

分極電流モデルに対するMaxwell方程式は，媒質の静止座標系においてはつぎのように表わされる．

$$\begin{aligned} \nabla' \times \mathbb{E}_p' &= -j\omega' \mathbb{B}_p' \\ \nabla' \times \mathbb{H}_p' &= j\omega' \mathbb{D}_p' \\ \nabla' \cdot \mathbb{D}_p' &= 0 \\ \nabla' \cdot \mathbb{B}_p' &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

また，構成関係式はつぎのようになる．

$$\mathbb{D}_p' = \varepsilon_1 \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega' \varepsilon_1}\right) \mathbb{E}_p' , \quad \mathbb{B}_p' = \mu_0 \mathbb{H}_p' \tag{28}$$

上式において，下部の添字 "p" は分極電流モデルによる量を表わす．このモデルに対して，静止境界面における境界条件は，

$$\begin{aligned} n \times [\mathbb{E}_p'] &= 0 \\ n \times [\mathbb{H}_p'] &= 0 \\ n \cdot [\mathbb{D}_p'] &= 0 \\ n \cdot [\mathbb{B}_p'] &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

となり，運動境界面においては

$$\begin{aligned} n \times [\mathbb{E}_p] - (n \cdot w)[\mathbb{B}_p] &= 0 \\ n \times [\mathbb{H}_p] + (n \cdot w)[\mathbb{D}_p] &= 0 \\ n \cdot [\mathbb{D}_p] &= 0 \\ n \cdot [\mathbb{B}_p] &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

となる．上式から明らかなように，この場合には伝導電流モデルの場合とは違って，境界面上に表面電荷密度が存在せず，したがって電束密度D_pの垂直成分は連続となる．

3．1．入　射　H　波

入射H波(5)に対して，境界条件(30)はつぎのようになる．

$$E_x^{(i)} + E_{px}^{(r)} = E_{px}^{(t)}$$

$$H_y^{(i)} + H_{py}^{(r)} = H_{py}^{(t)} \tag{31}$$

上の2式から，式(12)と同様の関係式を用いて，エネルギー関係式

$$R_{pH} + T_{pH} = 1 \tag{32}$$

を得る．ただし，

$$R_{pH} = -\frac{Re\,(E_{px}^{(r)} H_{py}^{(r)*})}{Re\,(E_x^{(i)} H_y^{(i)*})} = -\frac{(S_p^{(r)} \cdot n)}{(S^{(i)} \cdot n)} \tag{33}$$

$$T_{pH} = \frac{Re\,(E_{px}^{(t)} H_{py}^{(t)*})}{Re\,(E_x^{(i)} H_y^{(i)*})} = \frac{(S_p^{(t)} \cdot n)}{(S^{(i)} \cdot n)} \tag{34}$$

このようにして，入射H波に対して，分極電流モデルによって導かれた反射係数および透過係数の和は，伝導電流モデルの場合とは違って，常に1となることがわかった．

3．2．入　射　E　波

入射E波(19)に対して，境界条件(30)は

$$E_y^{(i)} + E_{py}^{(r)} = E_{py}^{(t)}$$
$$H_x^{(i)} + H_{px}^{(r)} = H_{px}^{(t)} \tag{35}$$

となり，この式よりつぎのエネルギー関係式を得る．

$$R_{pE} + T_{pE} = 1 \tag{36}$$

ただし，

$$R_{pE} = -\frac{Re(E_{py}^{(r)} H_{px}^{(r)*})}{Re(E_y^{(i)} H_x^{(i)*})} \tag{37}$$

$$T_{pE} = \frac{Re(E_{py}^{(t)} H_{px}^{(t)*})}{Re(E_y^{(i)} H_x^{(i)*})} \tag{38}$$

このようにして，入射E波に対して分極電流モデルを用いて求められた反射係数と透過係数との和は，伝導電流モデルの場合と同様に，常に1となることがわかる．

4．検　　討

前節まで，伝導電流モデルによる反射波と分極電流モデルによる反射波とを，それぞれ添字cとpとを付けることによって区別してきたが，実際に計算を実行することによって直ちにわかるように，両モデルによる反射波は完全に等価である．したがって，両モデルによって導かれた反射係数は等しくなる．すなわち，

$$R_{cH} = R_{pH}, \qquad R_{cE} = R_{pE} \tag{39}$$

上式の関係を，式(8)と(32)，および式(21)と(36)とに用いて，透過係数に関するつぎの関係式を得る．

$$T_{cH} = T_{pH} - \alpha, \qquad T_{cE} = T_{pE} \tag{40}$$

式(39)，(40)からわかるように，入射波がE波の場合には両モデルによる反射係数と透過係数は共に相等しくなる．ただし，入射E波に対して両モデルによる全ての電磁界量が等しくなるわけではないことに注意しなければならない．例えば，透過波の磁界の速度に垂直な成分は一般には等しくはならない，すなわち$H_{cz}(t) \neq H_{pz}(t)$となる．

このようにして，導電性運動誘電体中では伝導電流モデルを用いて導かれたエネルギー関係式は，分極電流モデルを用いて導かれたエネルギー関係式とは一般には異なることがわかった．本文では，導電性運動誘電体のみを取扱ったが，上に得られた結果は他の導電性媒質，例えば圧縮性電磁流体[4],[14]等の場合にもそのままあてはまる．

なお，両モデルによって求められたポインティング・ベクトルが一般には一致しないことは，運動している無限等方性プラズマ中を伝搬する平面波について，すでにKoyama[15]によって指摘されており，ChawlaとUnz[16]はこれに答えて，分極電流モデルによるポインティング・ベクトルを伝導電流モデルによるポインティング・ベクトルに一致するように修正すべきであると主張している．しかし，我々の見解によれば，彼らの主張はどちらのモデルを用いるかを決定するには十分ではないように思われる．また，我々の反射と透過の問題の場合でも，両モデルによる解析は各々のモデルについてはそれぞれ自己矛盾のない理論であり，この結果だけからどちらが正しいと直ちに断定することはできないように思われる．どちらのモデルがより適当

であるかを決定するためには，一般的に論ずるよりも簡単な例題について検討していく方が早道であると考えられ，筆者らが以前に取扱つたことがある問題，すなわち導電性運動媒質を含む導波管[17]，あるいは導電性運動媒質中での電磁放射[11]等の場合について現在種々比較検討中である．

謝　　辞

日頃，種々ご指導ご鞭撻いただく大阪大学工学部板倉清保教授に深謝する．また，研究会等において有益なご討論をいただいた大阪大学基礎工学部藤沢和男教授，および日本大学理工学部細野敏夫教授，ならびに常々ご討論いただく塩沢俊之氏をはじめ板倉研究室の方々に深謝する．

文　　献

(1) H. Fujioka, F. Nihei and N. Kumagai, J. Appl. Phys. (Communications), 39, No. 3 (1968), to be published.

(2) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭，幅射科学研究会資料（１９６７－１０）．

(3) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭，昭４２信学全大（No. ３６３）．

(4) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭，信学会アンテナ・伝播研資（１９６７－１２）．

(5) W. Pauli, Theory of Relativity (Pergamon Press, Inc., New York, 1958).

(6) A. Sommerfeld, Electrodynamics (Academic Press Inc., New York, 1964).

(7) C. Møller, The Theory of Relativity (Oxford University Press, London, 1952).

(8) W.F. Hughes and F.J. Young, J. Fluid Mech. **19**, Part 1, 11 (1964).

(9) J.R. Collier and C.T. Tai, IEEE Trans. MTT-13, 441 (1965).

(10) R.C. Costen and D. Adamson, Proc. IEEE **53**, 1187 (1965).

(11) H. Fujioka and N. Kumagai, Radio Sci. **2** (New Series), 1449 (1967).

(12) J.A. Stratton, Electromagnetic Theory (McGraw-Hill, New York, 1941), p. 483.

(13) Pauli, op. cit., p. 103.

(14) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭，信学会アンテナ・伝播研資(1968-03)，発表予定.

(15) M. Koyama, B.R. Chawla, and H. Unz, Proc. IEEE(Letters) **55**, 579 (1967).

(16) B.R. Chawla and H. Unz, Proc. IEEE(Letters) **55**, 1741 (1967).

(17) 藤岡　弘，吉田健一，熊谷信昭，信学誌，**50**，1227 (1967).

輻射科学研究会資料

レーザ応用無接触ならい計測装置

1968年2月9日

（於　三菱電機㈱中央研究所）

安東　滋
谷口一郎
岡田和夫
宮沢生行

三菱電機(株)中央研究所

輻射科学研究会資料

レーザ応用無接触ならい計測装置

三菱電機㈱中央研究所　安東　滋
谷口一郎
岡田和夫
宮沢生行

1. まえがき

近年　自動車，船舶，航空機　その他の製造工業において任意3次元曲面の測定，データ処理および工作加工工程の自動化，高速化を目的とした「自動設計加工システム」の開発が盛んになってきた．このため　複雑な任意形状をもつ物体の3次元的な精密自動計測の技術が　きわめて強く要求されるようになった．

従来の物体外形の計測方法は，変位を検出するためのプローブを表面に押しあて，プローブの基準面からの変位量をスケールで読むか　もしくは電気的に検出し，この操作を何千点，何万点かの座標点につき繰返し，3次元的な曲面を得るというものであった．プローブの動きは上記ピックフィード方式以外に試料表面の硬度が十分大きい場合は　連続的な　ならい計測を行なう方式も可能であるが，いずれも機械的接触により変位を検出するため，測定精度を上げようと思えば　プローブの先端を鋭くせねばならず，物体表面に加わる圧力が大きくなり表面を傷付けるおそれがあった．プローブが物体に加える力を　いま　0.1 g　としても，分解能をあげるためプローブ先端の径を10 μとすれば　その圧力は100 kg/mm²にもなり，相当固いものでなければ測定できない．また，このように鋭いプローブの場合　一般に連続ならい計測は困難であり，ピックフィード方式では　計測の高速化は期待できない．無接触かつ連続的な　ならい動作により　曲面を計測できることが最も望ましいわけである．

ここで述べるのは　全く機械的接触に頼ることなく，光学的に連続ならい動作をし，任意曲面の計測を行なう装置である．この装置は機械的プローブのかわりに　レーザからの平行光を　レンズで集束したときの焦点がつねに物体表面にあるように　連続的ならい動作を行なうものであり，検出光学系，ならい移動台，サーボ制御装置，位置検出器からなる．位置検出器からのアナログ信号により　XYレコーダ等に　任意曲面の断面の連続軌跡を描かせることができ，ディジタル信号によりテープを作製することも可能であり，自動設計加工システムにおける計測装置として　従来の接触式がもっていた困難を一挙に解決できる見通しである．

ここでは主として　ならい計測装置の動作原理，検出光学系の解析，誤差の要因について述べる．

2. 装置の構成および動作原理

図1は ならい装置の構成図である．He－Ne ガスレーザの光は 対物レンズに より集束され焦点を結ぶ．焦点付近に被測定試料があれば その光は反射される．対物レンズの開口内に反射した光は 再び平行光線となり，半透鏡により入射 平行光から分離され，集光レンズにより振動ピンホール付近で焦点を結ぶ．ピンホールにより変調を受けた光は 光検知器に入射し電気信号に変換される．対物レンズの焦点に恰度試料表面があるとき，集光レンズにより その像がピンホール上にできるように光学系を調整しておく．

いま，試料を x の正方向に $\triangle x$ だけ変位させると ピンホール上のレーザ光のスポット径は 焦点ぼけのため 多少 大きくなるとともに 集光レンズの結像位置も y 軸の負方向に $\triangle y = (\frac{f_2}{f_1})^2 \triangle x$ だけずれる．このため 振動ピンホールは 集束する光束の中で振動することになる．試料の変位の方向が 反対の方向，x 軸の負の方向なら すべて逆になり，ピンホールは発散する光束の中で振動することになる．したがって ピンホールを通過する光による検知器出力は，対物レンズの焦点位置を $x=0$ とすると，図2(a)のような曲線になる．したがって ピンホールを周波数 f で振動させると，検知器の出力は $x=0$ すなわち試料表面が対物レンズの焦点にあるときは $2f$ の成分のみがあらわれ，$x \neq 0$ のときは周波数 f の成分があらわれ，f 成分の位相は $x>0$ か $x<0$ かによって π だけ位相が異なる．この信号を増巾し，ピンホールの振動の位相と比較して周波数 f で位相検波すれば $x<0$，$x=0$，$x>0$ にしたがって 正，零，負（あるいは逆）の直流出力電圧を得る．これは図2(b)のごとく，図2(a)の信号を微分したものになる．位相検波器出力の符号は変位の向きにより逆転し，また その大きさは 反射光強度が一定である限り 変位 $\triangle x$ にほぼ比例する．この比例関係が成立する x の領域は図2bで $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ であり この範囲を リニアーゾーン とよぶことにする．位相検波器の出力を増巾してサーボモータを駆動させ，モータの極性を適当に選べば，移動台を x 方向にサーボ制御し，対物レンズの焦点がつねに被測定試料上にあるように自動制御できる．そこで試料台を y 方向に一定速度で移動させて 移動台の x 方向の変位をポテンショメータを利用して読みとり，紙面に垂直なZ座標の各点でこの操作を繰返せば，任意の形をした物体の外形をその物体に接触させることなく測定できるわけである．

現在 研究を行なっている装置に使用している種々の機構要素の中 主なものをあげておく．

レ ー ザ：He－Ne ガスレーザ，発振波長 6,328 Å，出力約 1 mW
対物レンズ：低球面収差レンズ $f=35 \sim 70$ mm
顕微鏡対物またはレンズ 10X．20X
集光レンズ：低球面収差レンズ $f=50 \sim 100$ mm
ピンホール板：ピンホール径 0.2 mmϕ ～ 0.4 mmϕ
音 叉：振 動 数 590 %，振巾 0.5 mm
光検知器：Si 光検知器

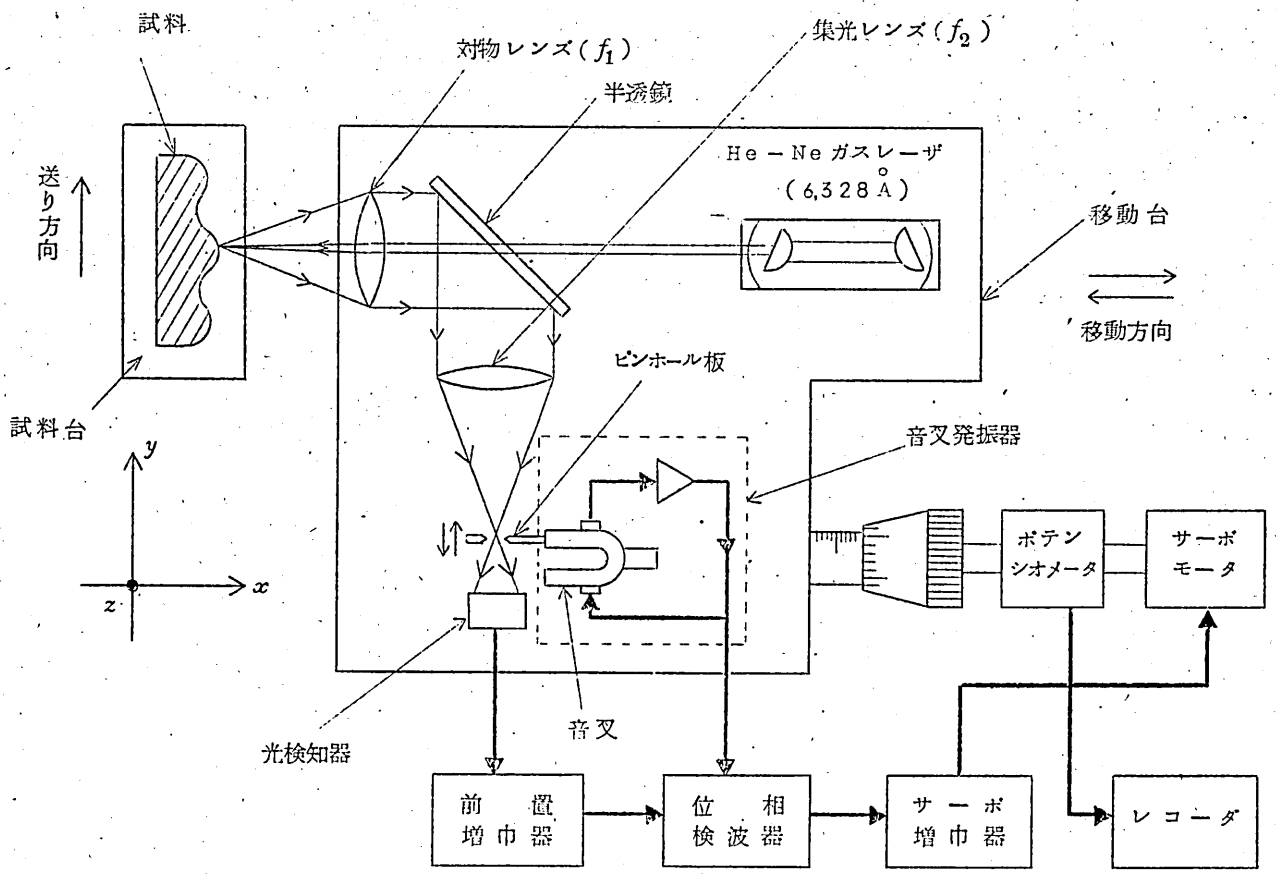


図1　ならい装置構成図

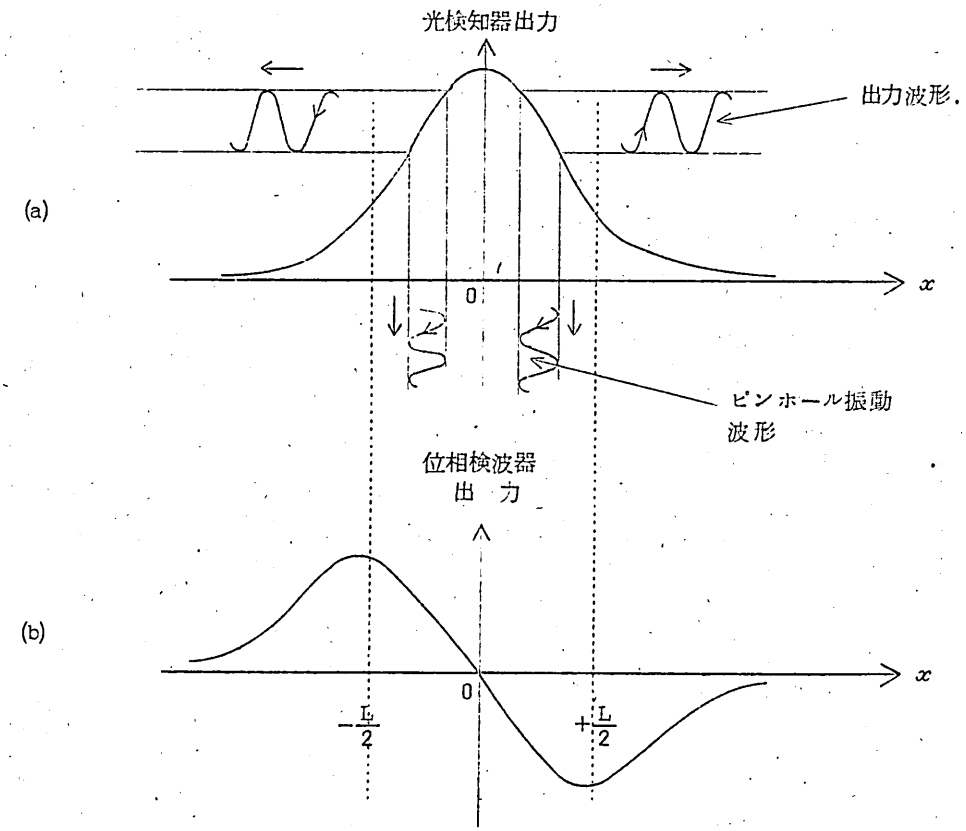


図2　ピンホール透過光強度および位相検波器出力

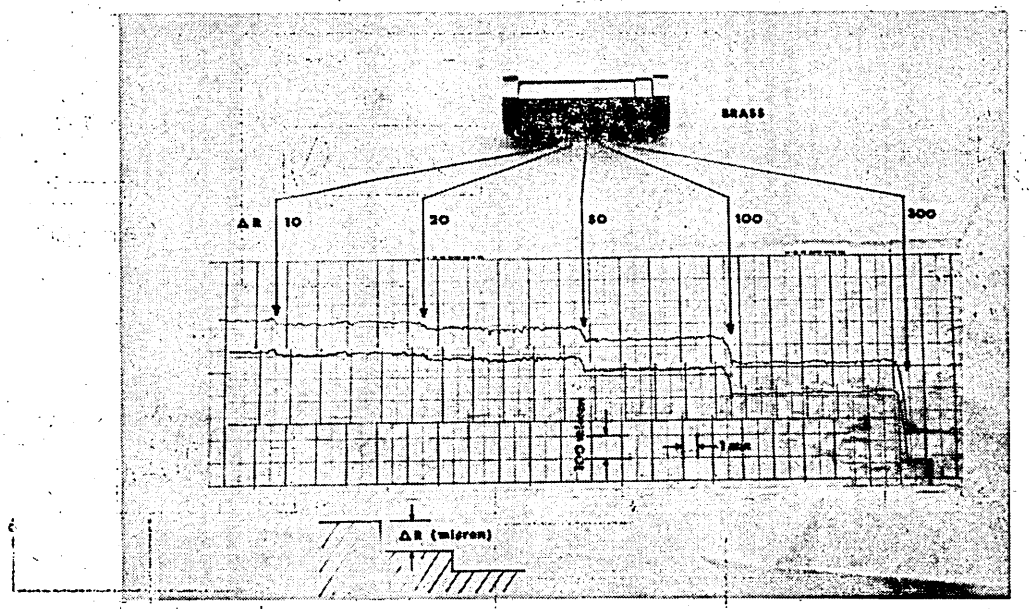


図 3　　黄銅標準試料のならい計測

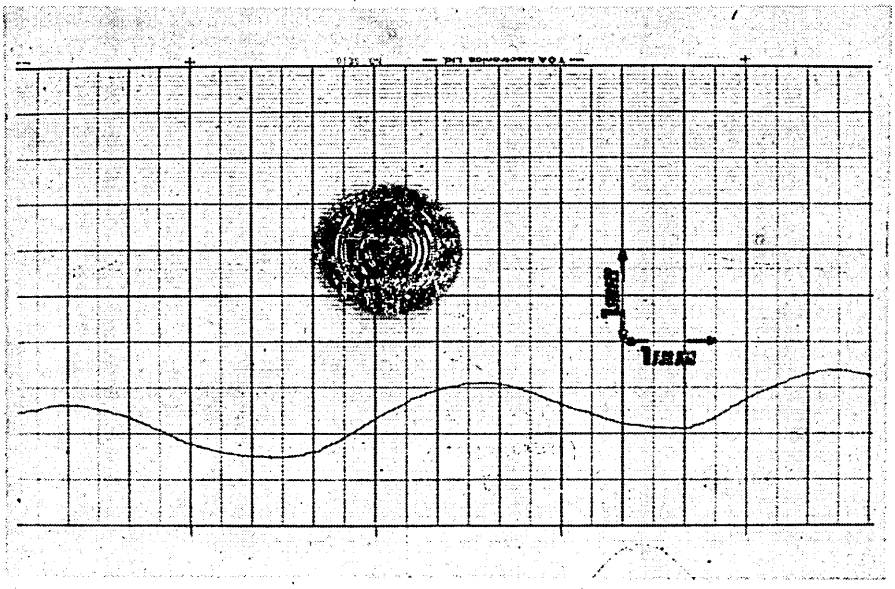


図 4　　アネロイド空ごうのならい計測

3. 計測感度および精度

x方向の測定感度は　被測定試料が粘土でも金属でも　1μに達している．すなわち1μの変位に対してヘッドは応答する．y方向の分解能はスポット径できまり　レーザ光の広り角をαとすると　αf_1　であると考えてよく，f_1＝50mmのときは　ほぼ150μ程度であるが，αおよびf_1を小さくすることにより　さらに小さな値にすることができる．

図3に　旋盤加工で黄銅棒の直径方向につけた段差の　ならい計測例を，図4にはアネロイド空ごうの　ならい計測例を示す．

4. ピンホール透過光の解析

この　ならい計測装置は　ピンホールにより変調された誤差信号により　ならい動作をするのであるから，それらの解析は光学系の設計には重要である．とくにレンズの焦点距離およびピンホール径に対するリニアゾーンの長さの依存性を知る必要がある．リニアゾーンは図2(a)の光検知器出力の偏曲点間の距離であるから　曲線の2次微分をとればよい．ピンホール付近における集光された光束の断面強度分布をガウス形曲線とし，被測定表面が対物レンズの焦点からずれたときのスポット径の拡大も考慮に入れると　リニアゾーンℓは　次式で与えられる．

$$\ell=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\alpha f_1^2}{\sqrt{D_1^2+D_2^2}}\left\{(4\gamma^2-1)-\frac{2D_1^2}{D_1^2+D_2^2}+\sqrt{\left\{(4\gamma^2-1)-\frac{2D_1^2}{D_1^2+D_2^2}\right\}^2+3}\right\}$$

αはレーザ光の広がり角，D_1　はレーザ光のビーム径，D_2　は集光レンズの開口径，γはピンホール径とピンホール上のスポット径との比である．この式からリニアゾーンは対物レンズの焦点距離の2乗，ピンホール径の2乗に比例して大きくなることがわかる．

ピンホール径に対するリニアゾーン長ℓの依存性を上式により計算した曲線および実験値を図5に示す．

ならい装置の最小分解能は　リニアゾーンを系のS／N　比で割った値$\ell/(S/N)$と考えられるが，通常　リニアゾーンは1～3mmであり　S／N　比は10^3　に達するので　1～3μの最小分解能が可能である．

5. 光学系の誤差

この無接触ならい方式のもつ誤差の要因のうち最も大きいものは，レンズ系の球面収差による誤差である．被測定面が粘土のような拡散面の場合はこの誤差は小さいが，金属面のように選択反射をする物体に対しては顕著にあらわれる．この誤差は　使用するレンズ系の球面収差を小さくすることにより減少させることができる．対物レンズおよび集光レンズの球面収差を　それぞれ$\triangle S_1$，$\triangle S_2$　とすると，これらの収差によって生ずる移動台の誤差は$\delta x=\triangle S_1+\triangle S_2(f_1/f_2)^2$　となる．したがって　対物レンズの収差は$\triangle S_1$は極力小さく

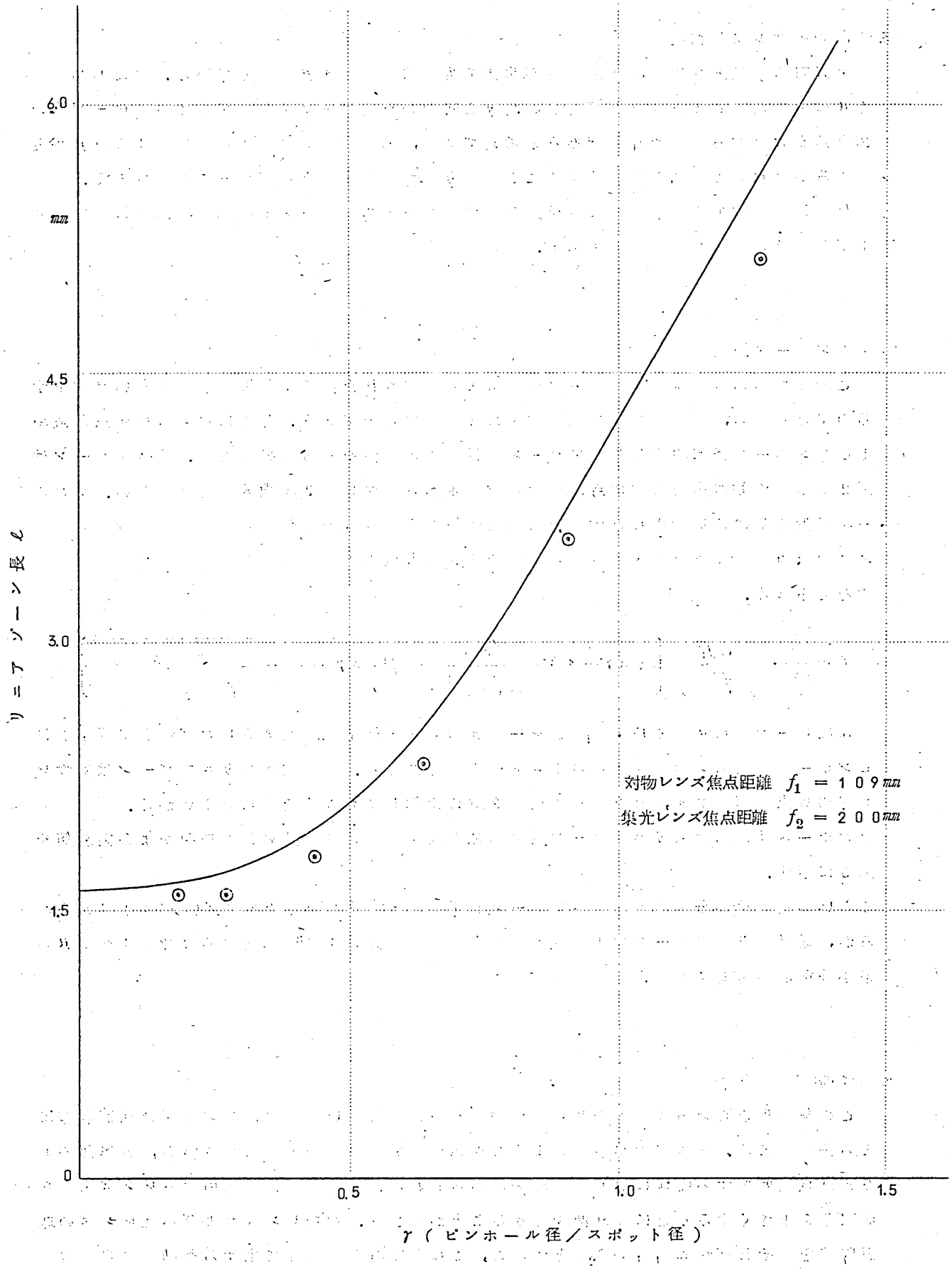


図 5　リニアゾーンのピンホール径依存性

し，また $f_1 < f_2$ とすることにより集光レンズの収差の影響を軽減できる．
現在 軸上最大収差２０μ程度のレンズを用いることにより 旋盤加工した金属面に対しても ３０～４０μ程度の誤差で測定が可能になっている．

6. むすび

わが国においても 大形電子計算機を中心にクレイモデル等の３次元座標計測データをプログラム処理し，自動製図機と数値制御系の指令テープを自動的に作成する いわゆる自動設計加工システムの開発が重要視されるにいたった．

無接触，高精度，迅速性等にすぐれた特性をもつことが確認されたこの装置の応用分野は，今後 急速に展開されるものと期待されている．

以 上

輻射科学研究会資料

振幅変調波と復調波の位相比較によるレーザー測距

清末通泰

末田　正

牧本利夫

(大阪大学 基礎工学部)

1968年　2月9日

振幅変調波と復調波の位相比較による
レーザー測距

§1. はしがき.

レーザー技術の発展に伴って、従来の電波技術を光の領域にまで拡張して、レーザーを多くの分野にわたって実用化する努力がなされている。なかでもレーザーを距離測定の道具として使用することは、その実用可能性の点でも最も期待される分野の一つとされ、すでにいくつかの報告がなされている。レーザー光を用いた測距方法には、パルス光を用いるものと連続光を用いるものに分類される。夫々は更に細い種類に分類されるが、特に後者の方法では、レーザー光自体の波長を基本とする干渉法、縦ビートを利用する方法、それにレーザー光を電波周波で変調し、すなわち搬送波としてレーザー光を用いる方法等になる。

本文ではこの第三番目の方法に属するもので、レーザー光を適当な電波周波で振幅変調して使用する方法について報告する。搬送波として光を電波周波で変調し、変調信号と被測定距離を往復した光の復調信号の位相差から距離を判定することは報告されている。[1][2] しかしこれ等は水銀

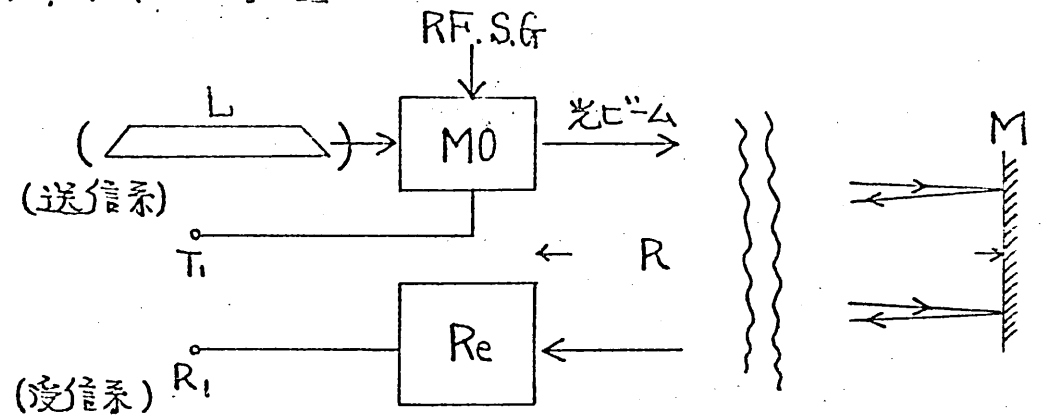
燈の様な通常光を用いるもので、レーザー光を用いた報告はない。

レーザー光を搬送波として使用する利点は、そのコヒーレンスの良さと、波長が極めて短いことで、送信ビームの直径を比較的小さくしてもビームの拡がりは（頂角$\theta \approx \lambda/D$）小さくすることが可能であり、マイクロ波レーダーよりも鋭い送信ビームを形成することが容易である。細くて鋭いビームならば、或る適当な距離範囲での伝播では、ビーム・スポットはそれ程大きくならないので、スポット断面上の何れの点においても変調用波の位相を変える要素は、伝播路長のみと考えられる。すなわち送信点における変調信号の位相を基準として被測定点までの距離を往復した光信号を復調した信号の位相増大分を測定すれば、これはその距離に比例しているので、被測定点までの距離を知ることが出来る。

鋭いビームの使用は、マイクロ波レーダーで起る地表からの反射、いわゆるグランド・クラッターの障害は起り得ない。

この方法によって簡単な実験を行っている。

§2. 測距の原理



L ; レーザー　　M0 ; 変調器
RF.S.G ; 変調信号　　M ; 反射鏡
Re ; 復調器　　R ; 距離

図 1.

測定の概略は図.1で示す. まずレーザー光は変調器で振幅変調され, 適当な光学系でコリメイトされて反射鏡に向けて送信される。このとき光は電波周波数に等しい正弦波状の強度になって送り出される。したがって送信光強度は(1)式で示される。

$$I_t = I_0 \cos(\omega_m t + \theta) \qquad \text{-----(1)}$$

I_0 ; 最大強度 , ω_m ; 変調角周波数

反射鏡までの距離Rを, レーザー光は往復して受信系に導かれる. 復調器Reでの受信強度は, 往復距離2Rによる位相遅れを生ずるので, 伝播路の損失を考えなければ, (2)式となる。

$$I_r = I_0 \cos(\omega_m t - 2k_m R + \theta) \quad \cdots\cdots (2)$$

$$k_m = 2\pi/\lambda_m$$

位相差は $T_1 R_1$ の点で測定される，しかし，検波器には光電子増倍管のような光検出器を用いるので光電子増倍管の陰極面に光が入射し，R_1 に信号が達するまでには時間遅れがあり，したがって実際には位相遅れは(3)式となる。

$$2k_m R + \omega_m t_{Re} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

t_{Re} は一定であるから，変調周波数を決めると $\omega_m t_{Re}$ は一定となる。

$$\varphi_m = \frac{2\pi f_m n}{C} \cdot 2R + \varphi_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$\varphi_0 = \omega_m t_{Re}$，　C；真空中の光速．　n；大気の屈折率

したがって $\varphi_m - \varphi_0$ を測定すれば，これは距離 R に比例しているので，距離に換算することが出来る。

§3. 測定精度と測定距離

位相増大分 φ_m（便宜上 $\varphi_0 = 0$ に調整されているとする）は変調信号周波数の選び方により，いくらでも大きな値となり得るのに対して，通常，位相を測定出来る範囲は，0～2π であり，2π の整数倍の位相については測定が困難である。そこで，図.2の一例で示すように，幾つかの変調周波数につ

いて測定する必要が生ずる。

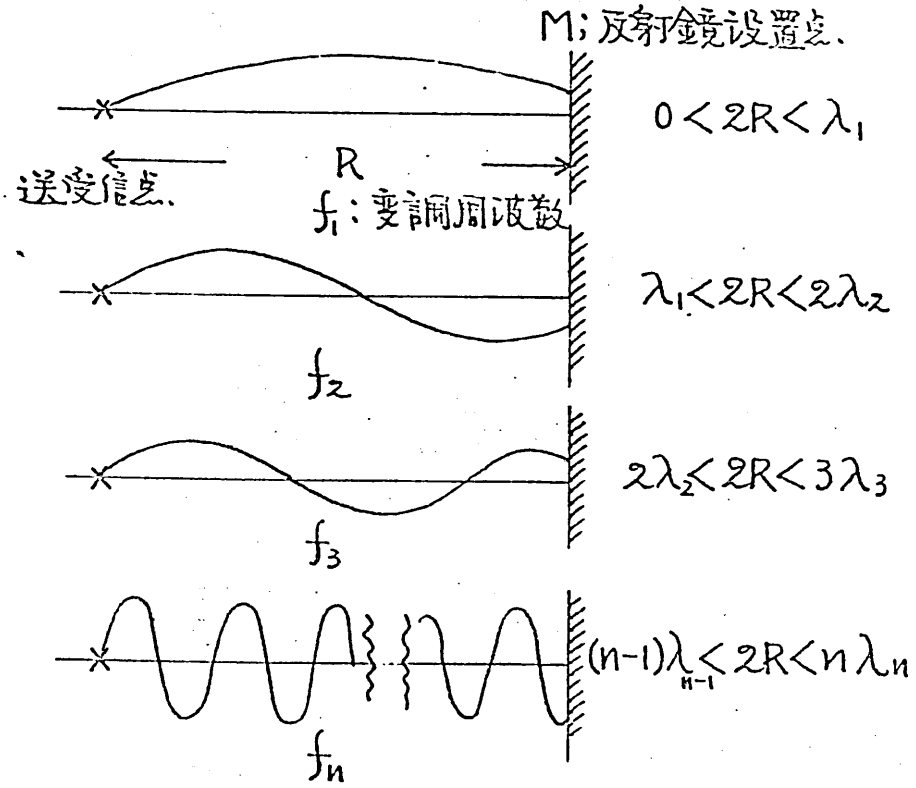


図.2

まず基本の周波数f_1は往復距離が一波長以下となる周波数で、これは最大測定距離により決定される。以下順次周波数は高く、$f_1<f_2<\cdots\cdots<f_{n-1}<f_n$となっている。今位相測定の誤差を$\Delta\varphi$とすると、夫々の変調周波数における位相増大分は次のように書き表わされる。

$$\varphi_{m_1}\pm\Delta\varphi_{m_1}=\frac{2\pi f_{m_1}\cdot n}{c}\cdot 2(R\pm\Delta R_1)$$

$$\varphi_{m_2}\pm\Delta\varphi_{m_2}=\frac{2\pi f_{m_2}\cdot n}{c}\cdot 2(\Delta R_1\pm\Delta R_2)$$

$$\Delta R_1 \gg \Delta R_2$$

$$\varphi_{m_n} \pm \Delta\varphi_{m_n} = \frac{2\pi f_{m_n} \cdot n}{c} \cdot 2(\Delta R_{n-1} \pm \Delta R_n)$$

一つの例として、最大測定距離 10 km, 位相器の測定精度が $\Delta\varphi = 5°$ とすれば、$f_1 < 15$ kHz であるから、14 kHz を選ぶと、f_2 は 1 MHz 附近に選べばよい、更に f_3 として 100 MHz を使用すれば、大気の屈折率 $n=1$ として距離測定精度は約 2 cm となり精度の高い測定が可能である。変調周波数を更に高いところに求めれば、相当に長い距離を mm の精度で測定出来ることになるが、実際には、長い距離では、その伝播路全部が一様な地形状態でないのが普通であり、したがって、その伝播路上では、風速、風向、温度等が異り、特別な場合としては霧や水蒸気が部分的に発生することもあり、伝播路上の大気の屈折率は一様でなくなり、先に仮定した大気の屈折率 $n=1$ は正確には成り立たなくなる、すなわち大気中の光速が変ってくる。通常大気中では、光速は 1 ～ 3 km/sec の変動をしていることが判っている。(3) したがって長い距離に亘って mm の精度まで測定することは、此の方法を用いる意味を持たなくなる。このことから、変調周波数の種類は大よそ 3 ～ 4 種類を用意すれば十分実用になる測定が出来ることになる。

測定距離の最大限界は、レーザー出力、変調の深さ、受

信器系の受感能力、大気の状態等々諸々の要素により左右されるので即座に決定することは出来ないが、一番大きな問題となるのは大気の状態であろう。一般に視界と光の減衰の関係は実験的に

$V = 3.92/\sigma$ (5)　(V；視界，σ；減衰定数) とされ、光の強度は $e^{-2\sigma R}$ に従って減衰するとされている。これを考慮すれば、測定最大距離の大よその見当はつけられると思う。次に光が大気中を伝播する際には、大気じゆう乱によるシンチレーションの現象が生じ、振幅変調光にとっては障害となる。これを避けるには、変調度を、出来る限り100%に近くし、送信光学系の開口を大きくすることが得策とされている。

§4. 実験

そこで此の方法による実験を行った。実験装置の概略は図.3に示す。レーザーとしては He-Ne ガスレーザー ($\lambda = 6328$ Å) を用い、先づレーザー光は、KDP結晶を用いた横形光変調器 図.4. により、周波数 455 kHz の正弦波で変調し、検光子を通して、送信点で光強度を正弦波状にする。これを反射鏡に対して送り出す。(送信レーザー出力; 約 0.5 mW, 変調度; 約 30%) 反射して来た光は光学系で集め、背景雑音を除くために適当な絞りと、干渉フィルター ($\Delta\lambda = 14$ Å) を通して、光電子増倍管 (浜松テレビ製; R-132) で復調し、増幅して位相測定器で、変調電源の信号と比較した。

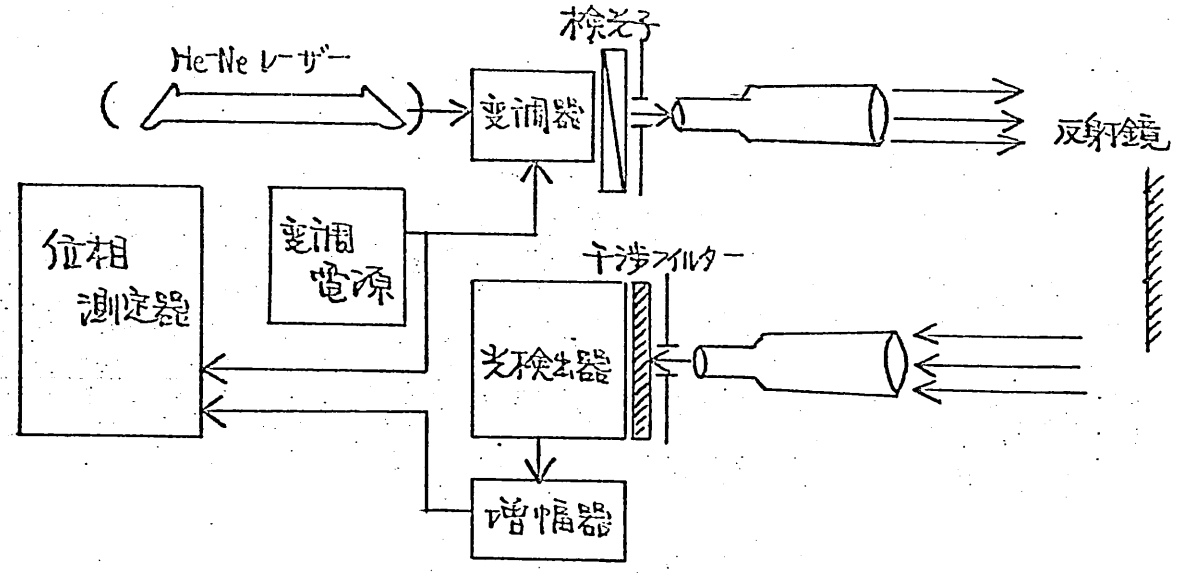
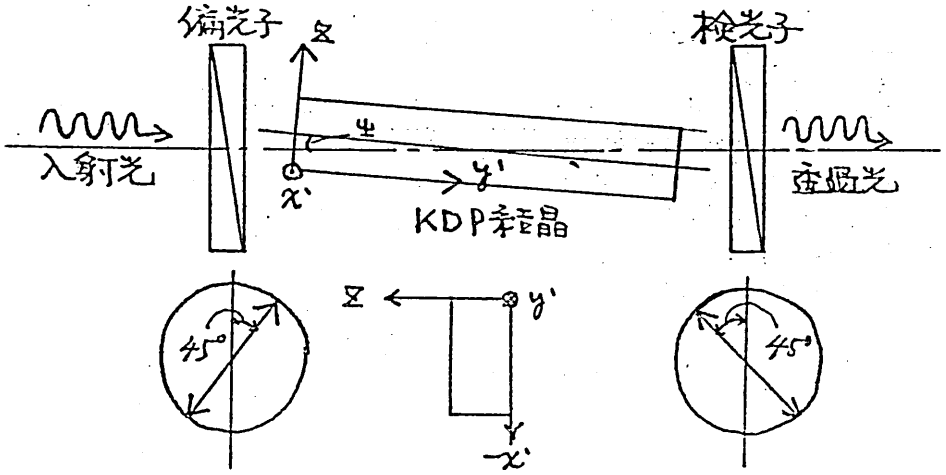


図. 3.

実験を行った距離は49.15m. 位相測定器は、2ビーム・オッシロスコープを代用した。

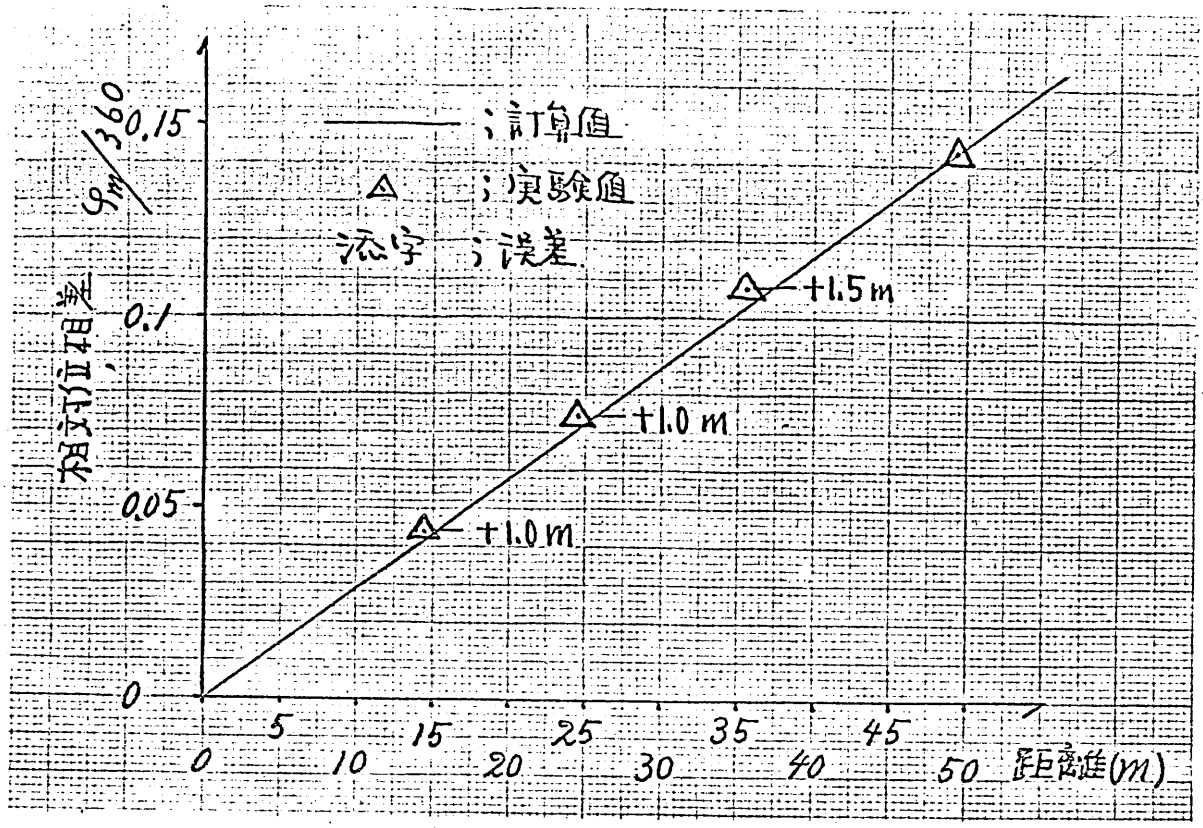


z; C軸 (3mm)
x'; (8mm) } 結晶軸を45°回転した軸
y'; (33mm)

変調電界はz軸に沿って印加する。

図、4

位相差は波形写真より算定し、図,5のような結果を得ている。波形写真は、同一距離について数枚もとり、それ等の平均値を出に記録してある。実験の結果は計算値に対して±1.5m程度の誤差を示しているが、オッシロスコープを使用する以上この程度の誤差は当然であり、±1.5mの誤差はむしろ最良と思われる。測定時の背景雑音はその主となる太陽光の直接入射を避ければ、適当な絞りと干渉フィルターにより、大部分を除くことが出来、昼間でS/N比は約25dB、夜間はこれより数dB良い。



図, 5

§5, 結 言

実験結果より, 此の方法によれば相当精度の高い測定が, 数km〜数mに亘って可能であり, 実用に供し得る絶体距離判定に使用出来ると思われる。変調の周波数は数種類で, 何れもポイント周波数での変調であるから, 変調器の作成は比較的容易である。又連続光であるため, 照準をすることは, それ程困難でなくなる。この方法によれば伝播路上の大気変動についても測定することが可能であると思われる。実験は現在50MHzで実施しており、

測定距離を更に長くして、色々の条件の下で実施したいと考えている。

文献

(1) " A determination of the velocity of Light"
By FRIK BERGSTRND
Ark. för Fysi. Band 2, nr 15. PP 119~150

(2) " Measurment of Distances by High Freq. Light Signalling"
By FRIK BERGSTRND
Ark för M.A.F Band 29A Nio 30

(3) "Physical Principles of the Electro-Optical Determination of Distances"
By A. KAROLUS
J. of. Ge. Re. Vol. 65, No. 2 Feb 1960, PP 394~403

(4) "斜入射による有効複屈折バイアスを利用した単軸結晶形光変調器"
牧本, 末田, 滝北. 輻研資料. 昭和40年3月20日

(5) "Correlation Between Atmospheric Backscattering and Meteorological Visual Range"
By Robert W. Fenn
Appl. Opt. Vol.5 No.2 Feb 1966

(6) "振幅変調波と複調波の位相比較によるレーザー測距"
故本. 末田. 清末. 電通信学会全国大会(昭和42年度). 651

(7) "Distance Measurment by Means of a Light Beam Polarisation Modulated at a Microwave Freq."
By R.H.BRADSELL
J. Sci. Instr. Vol.38. pp 458~462. Dec.1961

輻射科学研究会資料

ガンダイオードのアドミッタンスとパラメトリック効果

佐々木昭夫

京都大学工学部

1968年 2月9日

目　次

頁

1. はしがき …… 1

2. ダイオードの等価回路 …… 1

3. 低雪崩域，過剰雪崩域のアドミッタンス …… 3

3.1 基本式 …… 3

3.2 低雪崩域のアドミッタンス …… 6

3.3 過剰雪崩域のアドミッタンス …… 6

4. ダイオードアドミッタンスと …… 10
パラメトリック効果

5. 過剰雪崩域の時間的成長 …… 11

6. あとがき …… 13

参考文献

1. はしがき

ガン効果による不安定現象に対して，これまで数多くの理論解析，数値解析が報告されている。小信号理論では理論解析により電流不安定条件，負抵抗条件，等価アドミッタンス等が求められている。[1],[2],[3] 大信号理論では同じく理論解析により，高電界域（または高電界層）の定常状態における電界分布，電位等が求められている。[4] しかし高電界域の時間変化に対する解析は数値解析によるものがおもである。[1],[5],[7] 他方，不安定現象を利用した各種の動作モード（走行時間モード，共振モード，LSAモード）等に対してもこれまで多くの解析，実験が報告されている。理論解析より求めた小信号アドミッタンス，高電界域の定常解から類推により得られた大信号アドミッタンスを用いて，これら各種モードの動作機構を説明しようとする試みがなされている。[6]

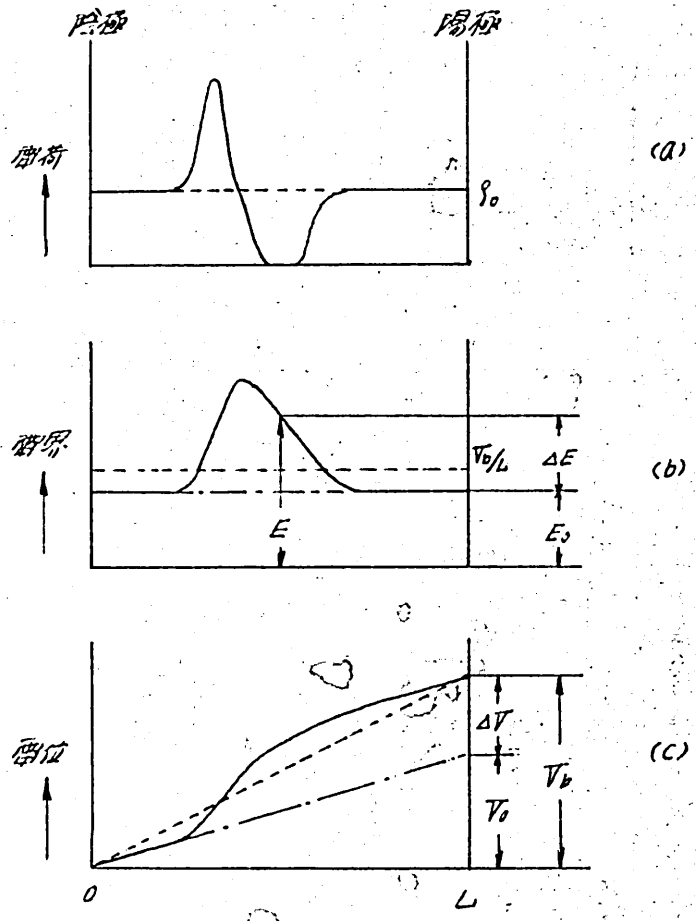
本報告ではこれまで十分なされておらない高電界域の時間変化に対する理論解析を試みる。註まず解析から大信号アドミッタンスが時間変化を持つかどうかを調べる。つぎに求められたアドミッタンスから，これまで実験により示されているガンダイオードのミクサ，[7] アップコンバータ，[8] 自励振パラメトリック発振器（Self-pumped parametric oscillator）[9] の可能性に対してその理論的根拠を与える。最後に通り電界域の電界分布，電荷分布，電位の過渡変化に触れる。

2. ダイオードの等価回路

薄手の長さがLであるダイオードを考える。ダイオードの両端に電圧V_0を印加して出来る電界V_0/Lが臨

註：高電界層の形状をモデル化して理論解析を行った例もある。たとえば柳井，生駒"ダイポールモデルによるガン効果発振器の発振特性の解析，"昭和41年電通学会全国大会SP-13.

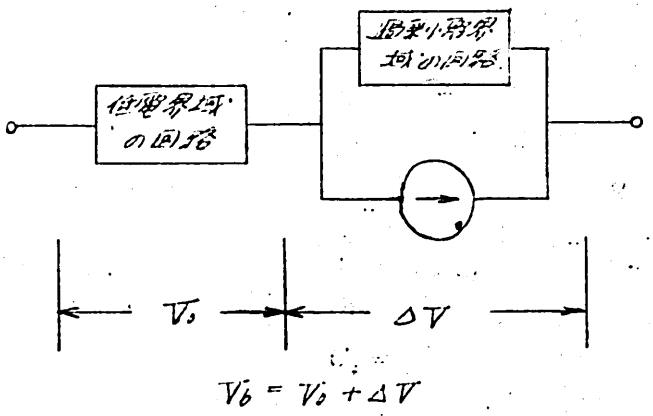
界値 E_T を越えると，高電界域が発生する． 高電界域ができた時の電荷，電界，電位分布を次図に示す。



点線はバイアス電圧 V_0 を印加した時の状態を表わす。実線は高電界域ができた時の状態を表わす。一点鎖線は低電界域と過剰電界域との区別を表わす。ΔV は過剰電界による電圧，V_0 は低電界による電圧を示す。L は素子の長さであり，ρ_0 は平衡時のキャリヤの電荷密度を表わす。

次1図　高電界域が発生した時の電荷，電界，電位分布を示す。

(b)図から分るように禁帯分布は禁帯E_0の低禁帯域と，それより高い部分$(E-E_0)$の過剰禁帯域に分けられる。これら2領域の禁帯による電圧をそれぞれV_0，ΔVとして(c)図に示す。したがってダイオードに印加した電圧V_bは低禁帯域の電圧V_0と，過剰禁帯域の電圧ΔVとの和で与えられることになる。ダイオードの等価回路は電圧V_0のかかる低禁帯域の回路と，電圧ΔVがかかる過剰禁帯の回路との直列回路で与えることができる。他方，素子の流れる全電流は素子のどの部分においても等しい。禁帯の巾がE_0であるところの全電流と，禁帯がEであるところの全電流とは等しい筈である。したがって$(E-E_0)$の禁帯による過剰電圧ΔVのかかっている回路部分の全電流は零でなければならない。ダイオード等価回路のこの部分には，ダイオードを流れる全電流と打消す電流源が並列に附くものと考えられる。以上の考察から，ダイオードの等価回路は第2図に示す回路構成で与えられるものと想像される。



第2図　ダイオードの等価回路

3. 低禁帯域，過剰禁帯域のアドミッタンス

3.1 基本式

素子の長さがL，断面積がA，イオン化したドナーによる電荷密度がρ_0であるダイオードを考える。しかし解析においてキャリヤの電荷を正として取扱うため

ダイオードはアクセプタを持つことになる。 素子を流れる全電流密度は素子のどの部分においても等しいから，時間tだけの関数 $J_0(t)$ で表わせる。 まず低電界域では第1図から分るように電界 E_0，したがってキャリヤの速度 U_0 等は時間だけの関数である。 低電界域の全電流密度は

$$J_0(t) = \rho_0 U_0(t) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_0(t) \qquad (1)$$

で与えられる。 ここで低電界域のキャリヤ密度はポアッソンの式から，アクセプタ密度に等しくなるから ρ_0 が用いられた。 ϵ は誘電定数である。 つぎに高電界域の全電流密度は

$$J_0(t) = \rho(x,t) U(x,t) - D \frac{\partial}{\partial x} \rho(x,t) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E(x,t) \qquad (2)$$

で与えられる。 ここで ρ，U，E はそれぞれ高電界域のキャリヤ電荷密度，速度，電界で時間tのみならず位置xの関数でもある。 Dは拡散係数で電界の強さによって変化するが，[13] 本解析では定数として取扱う。 素子を流れる全電流 $I_0(t)$ は

$$I_0(t) = A J_0(t) \qquad (3)$$

で与えられる。

高電界域におけるポアッソンの式は

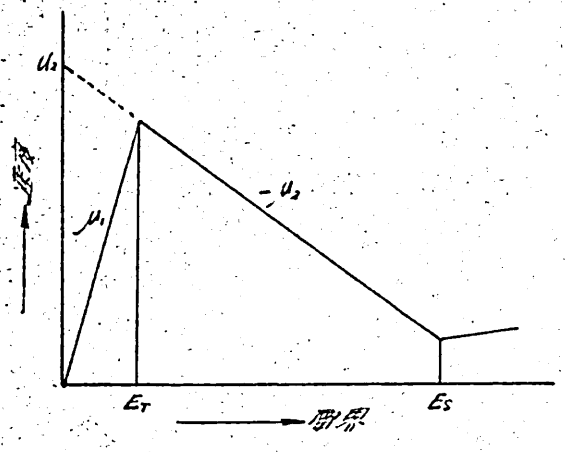
$$\frac{\partial}{\partial x} E(x,t) = \frac{1}{\epsilon} \left\{ \rho(x,t) - \rho_0 \right\} \qquad (4)$$

である。 ダイオードはアクセプタを持つからその電荷は式中 $-\rho_0$ として取扱われ，ρ_0 そのものは正の値を持つ。 第1図(c)に示す電圧の関係から

$$V_0(t) = V_0(t) + \Delta V(t) = E_0(t) L + \int_0^L \left\{ E(x,t) - E_0(t) \right\} dx \qquad (5)$$

を得る。これはダイオード端子に印加されたバイアス電圧$V_0(t)$は低電界$E_0(t)$による電圧$V_0(t)$と，過剰電界$\{E(x,t)-E_0(t)\}$による電圧$\Delta V(t)$との和であることを示す。電界に対するキャリヤの速度（正確には漂動速度）は第3図に示す折線で近似する。

バイアス電圧$V_b(t)$による電界V_b/Lが臨界値E_Tを少し越える場合を考える。したがって低電界域キャリヤの速度は移動度μ_1の範囲を変化し，他方高電界域のキャリヤの速度は移動度$-\mu_2$の範囲を変化するものと仮定する。註 それゆえキャリヤの速度は低電界域において



$u_2=(\mu_1+\mu_2)E_T$

第3図 折線により近似された電界に対する速度変化

$$u_0(t)=\mu_1 E_0(t) \tag{6}$$

他方高電界域において

$$u(x,t)=-\mu_2 E(x,t)+(\mu_1+\mu_2)E_T \tag{7}$$

で与えられる。(6)式は$0\leq E_0(t)\leq E_T$の範囲で，(7)式は$E_T\leq E(x,t)\leq E_S$の範囲で成立する。以上これらの諸式を用いてダイオードのアドミタンス，過剰電界域の過渡変化を解析して行く。

註：移動度$-\mu_2$はガン効果によって決められる電界－速度の曲線に近似させるか，Butcher等[4]の定常解から出て来る等面積則（Equal area rule）の曲線に近似させるかは他の機会に論ずる。

3.2 低電界域のアドミッタンス

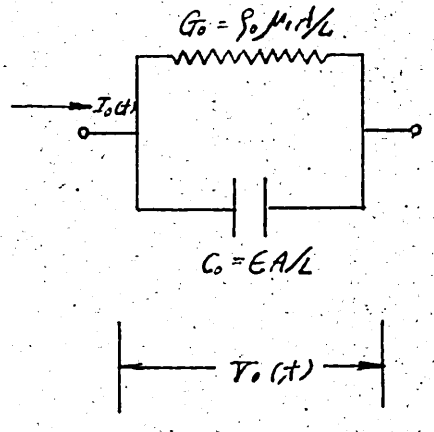
(1)式の全電流密度 $J_0(t)$、(6)式のキャリア速度 $U_0(t)$、低電界による電圧 $V_0(t)=E_0(t)L$ を用いて(3)式の全電流 $I_0(t)$ を書き表わすと

$$I_0(t)=G_0V_0(t)+C_0\frac{\partial}{\partial t}V_0(t) \tag{8}$$

を得る。ここで G_0, C_0 は

$$G_0=\rho_0\mu_1\frac{A}{L}\quad,\quad C_0=\frac{\varepsilon A}{L} \tag{9}$$

で与えられる。低電界域のアドミッタンスは長さ L、断面積 A を持つダイオードのオーム則に従うコンダクタンス G_0 とダイオードの寸法によって決められる容量 C_0 との並列回路で表わされることを知る。これを第4図に示す。



第4図 低電界域のアドミッタンス

3.3 過剰電界域のアドミッタンス

第1図(b)に示すように過剰電界域の電界 $\Delta E(x,t)$ は高電界 $E(x,t)$ と低電界 $E_0(t)$ との差で与えられるから

$$\Delta E(x,t)=E(x,t)-E_0(t) \tag{10}$$

を得る。(4)式の $\rho(x,t)$、(10)式の $E(x,t)$、(7)式のキャリア速度 $U(x,t)$ を(2)式の全電流密度 $J_0(x)$ に代入して

$$D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta E(x,t)-U(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Delta E(x,t)+\frac{\rho_0\mu_2}{\varepsilon}\Delta E(x,t)-\frac{\rho_0}{\varepsilon}(\mu_1+\mu_2)\{E_T-E_0(t)\}=\frac{\partial}{\partial t}\Delta E(x,t) \tag{11}$$

を得る。この式を導くときに(1)式の全電流密度の関係式を用いられた。ここに得た(11)式は過剰電界 $\Delta E(x,t)$ に

関する方程式である。ここで左辺の各項を眺めると，第1項は拡散効果を，第2項は電界域（または電界層）が速度 $u(x,t)$ で伝播することを，第3項は過剰電界が $\rho_0\mu_2/\epsilon$ の割合で時間的に成長することを，第4項は電界の時間成長を抑制することを表わしているものと考えられる。したがって第2項の速度 $u(x,t)$ をあまり変らないものとして取扱っても，過剰電界の時間変化を調べるには大きな影響を与えないものと考えられる。(11)式を次に示す変数変換

$$x' = x - ut \quad , \quad t' = t \tag{12}$$

により，電界域と共に動く座標系に変換する。

$$D\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\Delta E(x',t) + \frac{\rho_0\mu_2}{\epsilon}\Delta E(x',x) - \frac{\rho_0}{\epsilon}(\mu_1+\mu_2)\{E_T - E_0(t)\} = \frac{\partial}{\partial t}\Delta E(x',t) \tag{13}$$

こゝで便宜上 t' を t で書き記した。時刻 $t=0$ で陰極 $(x=0)$ の近傍 $x=x_0$ で次式により与えられる擾乱が生じたものとする。

$$\Delta E(x,0) = \Delta E(0)\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{k}} \tag{14}$$

こゝで $\Delta E(0)$ は $x=x_0$ における電界の値，k は極く小さい値で陰極において電界の擾乱はほとんど零であると考えられるものとする。第3図に見られるように $E_0(t)$ の大きさは μ_1 に沿って変化する。したがって $E_T - E_0(t)$ の大きさは過剰電界 ΔE の成長と共に大きくなるが，その ΔE に対する割合は小さい。近似的に $E_T - E_0(t)$ の項を無視して取扱う。註 (14)式の初期条件を満す解の形は

$$\Delta E(x',t) = \Delta E(t)\, e^{-\frac{(x'-x_0)^2}{k+4Dt}} \tag{15}$$

註：この項の影響に関しては他の機会に発表する。

が与えられる。 (13)式に代入して

$$-\left(\frac{\rho_0 \mu_2}{\varepsilon} - \frac{2D}{R+4Dt}\right)\Delta E(t) + \frac{\partial}{\partial \tau}\Delta E(t) = 0 \qquad (16)$$

を得る。 過剰帯界面の電圧 $\Delta V(t)$ は(5), (15)両式を使って

$$\Delta V(t) = \Delta E(t) \int_{-\mu t - x_0}^{L-\mu t - x_0} e^{-\frac{y^2}{R+4D\tau}} dy \qquad (17)$$

こゝで過剰帯界の大きさはその初期値ゐから考えて，ダイオードの陰極，陽極の極く近くでは十分小さいものとして取り扱い得る。 したがって(17)式の積分範囲を負の無限大から正の無限大まで押し広げても大きな誤差を生じない。 したがって過剰帯電圧 $\Delta V(t)$ は

$$\Delta V(t) = \sqrt{4\pi + 4\pi D t} \cdot \Delta E(t) \qquad (18)$$

を得る。 この式の $\Delta E(t)$ を(16)式に用いて

$$-\left(\rho_0 \mu_2 - \frac{2\varepsilon D}{R+4Dt}\right)\frac{\Delta V(t)}{\sqrt{R\pi + 4\pi D\varepsilon}} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{R\pi + 4\pi D t}}\Delta V(t)\right\} = 0 \qquad (19)$$

を得る。 次ノ図に示したように，過剰帯界域のアドミッタンスは全帯流 $I_0(t)$ が流れるダイオードの等価回路の一部である。 このことを考慮して(19)式を更に考える。 (8)式に(5)式を代入して

$$I_0(t) = \left(G_0 + C_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) V_b(t) - \left(G_0 + C_0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta V(t) \qquad (20)$$

を得る。 これを(19)式の両辺に加えて

註: 過剰帯界域が陽極に到達し，消滅して行く時は別途考える必要がある。

$$I_0(t)=I_b(t)-I_\Delta(t)+G_d(t)\Delta V(t)+\frac{\partial}{\partial t}\{C_d(t)\Delta V(t)\} \qquad (21)$$

を得る。　こゝで

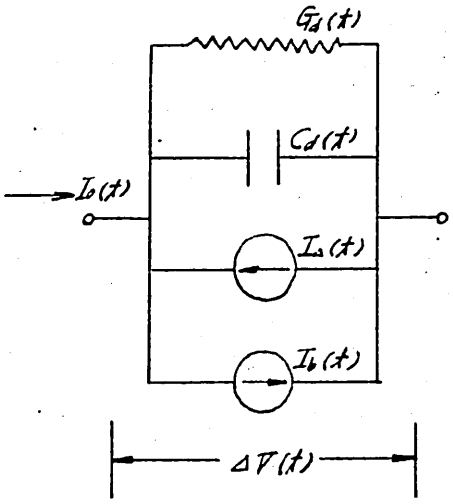
$$I_b(t)=\left(G_0+C_0\frac{\partial}{\partial t}\right)V_b(t) \qquad (22a)$$

$$I_\Delta(t)=\left(G_0+C_0\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta V(t) \qquad (22b)$$

$$G_d(t)=-\left(\rho_0\mu_2-\frac{2\epsilon D}{R+4Dt}\right)\frac{A}{\sqrt{R\pi+4\pi Dt}} \qquad (22c)$$

$$C_d(t)=\frac{\epsilon A}{\sqrt{R\pi+4\pi Dt}} \qquad (22d)$$

である。　過剰帯界域の等価回路はコンダクタンス $G_d(t)$, 容量 $C_d(t)$ に電流源 $I_b(t)$, $-I_\Delta(t)$ を持つものとして第5図のように書き表わされる。　電流源 $I_b(t)$ はバイアス電圧 $V_b(t)$ と，オーム則に従うコンダクタンス G_0，ダイオード寸法から決まる容量 C_0 とで決まるものである。若し直流バイアスが印加されている時，一定電流 $G_0\cdot V_b$ となる。電流源 $I_\Delta(t)$ は過剰帯界域の成長と共に増え，電流源 $I_b(t)$ と反対方向に流れる。　過剰帯界域のコンダクタンス $G_d(t)$, $C_d(t)$ はダイオードの断面積 A，帯界域の有効長 $\sqrt{R\pi+4\pi Dt}$ によって決まる量である。　コンダクタンス $G_d(t)$ は ρ_0, μ_2 に比例する。　時刻 t が零に近い時，すなわち帯界域が成長しようとする瞬間において，コンダクタンス $G_d(t)$ が正の値を取る可能性がある。　(19)式から



第5図　過剰帯界域のアドミッタンス

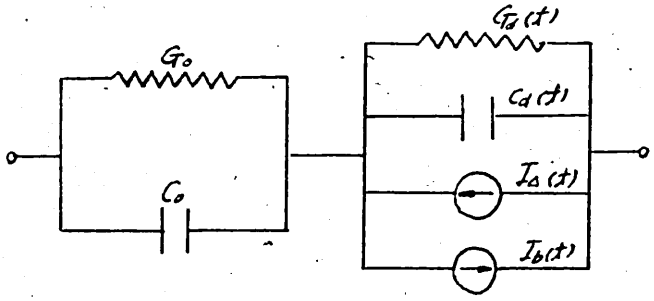
$$-\frac{\rho_0\mu_2}{\sqrt{R\pi+4\pi Dt}}\Delta V(t)+\frac{\epsilon}{\sqrt{R\pi+4\pi Dt}}\frac{\partial}{\partial t}\Delta V(t)=0 \qquad (23)$$

を得ることにより，コンダクタンス $G_d(t)$ の正の部分が容

量の時間変化 $\partial C_d(t)/\partial t$ により打消されることを知る。初期擾乱の負の値が零に近い場合（初期擾乱がほとんど δ-関数の形で起る場合）時刻 $t=0$ の瞬間，コンダクタンス，容量共に非常に大きな値を取る。これはガン効果による高電界域発生が電流不安定（零インピーダンス）[1]に起因する事柄と相通じるものである。

4. ダイオードのアドミッタンスとパラメトリック効果

前節で得られた結果を用いて，ガン効果を持つダイオードの二，三の高周波動作の考察を進める。まず前節の結果からダイオードのアドミッタンスとして第6図に示すものが得られる。これは小信号アドミッタンス，



第6図 ガン効果を持つダイオードのアドミッタンス

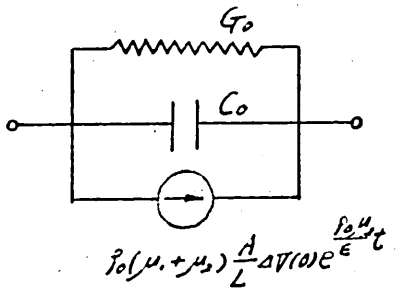
高電界域の定常解から類推された[6]アドミタンスを理論解析で証明すると共に，過渡解の結果として過剰電界域のアドミッタンスに時間変化があることを示すものである。特に過剰電界域の有効長 $\sqrt{RL+4\pi Dt}$ が時間と共に長くなるため，その容量が減少して行くことを知る。この時間変化は電界域の陰極端から陽極端への走行時間の前で繰り返されていること，ダイオードは負コンダクタンスを持っていること等を考慮して各種のパラメトリック効果を利用した動作が可能であることを示す。これまでに単一ダイオードで周波・ミクサの動作を行わせた実験，[8]自励形パラメトリック発振器の実験[9]等が報告され

ている。今後共ガンダイオードのパラメトリック効果を利用した動作が期待される。その他ガンダイオードの低周波発振も含め、各種の高周波動作機構がこのアドミッタンスを用いて説明されている。[6] 本報告で得られた結果により過渡変化も含めより定量的な説明が可能となる。

つぎに、これまでと異なった観点からダイオードの等価回路を表わす。(20)式の$\Delta V(t)$に次の節で求める$\Delta V(t)=\Delta V(0)\exp(f_0\mu_2 t/\epsilon)$を代入し

$$I_0(t)=\left(G_0+C_0\frac{\partial}{\partial t}\right)V_0(t)-f_0(\mu_1+\mu_2)\frac{A}{L}\Delta V(t)$$

を得る。ダイオードのオーム則、ヨ法等から決まる低電界域のアドミッタンスに並列に電流源$f_0(\mu_1+\mu_2)A\Delta V(t)/L$を持つものと考えられる。この回路を第7図に示す。この電流源は過剰電界域の成長、消滅等により、また断面積A、不純物濃度等によってその値が変わる。電界域の発生、消滅を制御したものが論理素子への応用であり、[10] 断面積、不純物濃度[11],[12]を変えて制御したものがパルス波形発生器等への応用である。



第7図 パルス波形発生源を持つ等価回路

5. 過剰電界域の時間的成長

ガンダイオードの過剰電界域がどのように成長して行くかを調べる。(23)式から過剰電界域の電圧$\Delta V(t)$は

$$\Delta V(t)=\Delta V(0)e^{\frac{f_0\mu_2}{\epsilon}t} \qquad (24)$$

で与えられ、不純物濃度、移動度μ_2が大きいほど早く成長することを知る。ここで$\Delta V(0)$は電界の初期値(14)式か

より求まり，$\Delta V(0)=\sqrt{\varepsilon\kappa}\,\Delta E(0)$ で与えられる。(15)，(18)式を用いてこの空乏域の電界分布は

$$\Delta E(x',t)=\frac{\Delta V(0)}{\sqrt{\kappa\pi+4\pi Dt}}\,e^{\frac{\rho_0\mu_n}{\varepsilon}t-\frac{(x'-x_0)^2}{\kappa+4Dt}} \qquad (25)$$

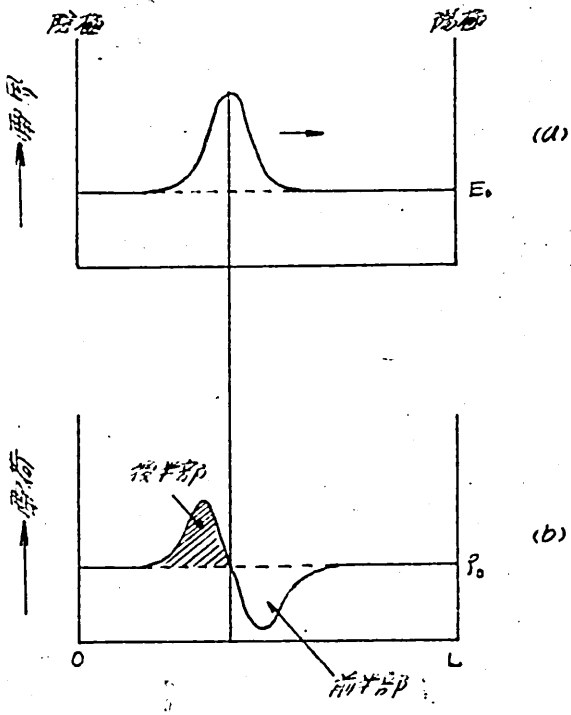
となる。ガン効果による負微分移動度により時間的に成長する一方その空乏分布が拡散効果により拡がって行くことを知る。(4)式のポアッソン式を用いて空荷密度の分布を求めると

$$\Delta\rho(x',t)=-\frac{2(x'-x_0)}{\kappa+4Dt}\cdot\frac{\varepsilon\Delta V(0)}{\sqrt{\kappa\pi+4\pi Dt}}\,e^{\frac{\rho_0\mu_n}{\varepsilon}t-\frac{(x'-x_0)^2}{\kappa+4Dt}} \qquad (26)$$

を得る。これら空乏，空荷密度分布を第8図に示す。(26)式から空荷量 $Q(t)$ (第8図bにおける斜線を施した部分の面積) を求めると $\Delta Q(t)=A\varepsilon\Delta V(t)/\sqrt{\kappa\pi+4\pi Dt}$ を得る。これより容量が求められ

$$\frac{d\{\Delta Q(t)\}}{d\{\Delta V(t)\}}=\frac{\varepsilon A}{\sqrt{\kappa\pi+4\pi Dt}}$$

となり，第3節(22d)で得た $C_d(t)$ が正しいことを知る。過剰空乏域の容量 $C_d(t)$ はその初期容量から時刻 t の $1/\sqrt{\ }$ 乗で小さくなって行く。拡散係数 D は空乏域の成長と共に小さくなる。[12] したがって時刻 t の経過に対して空乏成長が早く，結果的に空乏域の有効長 $\sqrt{\kappa\pi+4\pi Dt}$ が小さくなり容量が増加し，その後空乏成長が止まり拡散係数 D が一定となりつぎに容量が減少して行く変化を起



第8図 過剰空乏域の前半部で空乏が出来上る前の空乏，空荷分布

り得る。

本報告におけるこれまでの解析では，過剰領界域の前半部にキャリヤが幾分なりとも存在している場合を取扱った。この前半部にキャリヤが全く存在しない層(空乏層)が出来ると，これまでの解析と異なった取扱いをしなければならない。しかしこの場合においてもダイオードの等価回路は第2図に示す形で表わされる。ただ過剰領界域のアドミタンスの時間変化の様子は異なって来る。$t=0$で初期擾乱が与えられた後，どれだけの時間で空乏層が出来始めるかを求める。電荷密度の最大，最小になる位置x_p'は$x_p'-x_0=\pm\sqrt{(k+4Dt)/2}$で与えられる。これを(26)式に代入し，$\Delta\rho(x_p',t)$が$\pm\rho_0$の値を取る時$t_a$が求める時刻である。

$$\ln(k+4Dt_a)-\frac{\rho_0\mu_2}{\epsilon}t_a=\ln\left(\frac{\sqrt{2k}\epsilon\Delta E(0)}{\rho_0 e^{\pm}}\right) \tag{27}$$

からt_aが計算できる。空乏層が出来るための最大の時間t_{am}を求めると

$$t_{am}=\frac{\epsilon}{\rho_0\mu_2}-\frac{k}{4D} \tag{28}$$

で与えられ，$t_{am}\cong\epsilon/\rho_0\mu_2$で近似すると空乏層は少くとも，$\mu_2$，不純物濃度で決まる誘電緩和時間以内に出来始めることを知る。

6. あとがき

まずガンダイオードの等価回路が一般に第2図に示す形で与えられることを示した。つぎに過剰領界域の時間的成長に関する過渡解を求め，容量$C_d(t)$がその領界域の有効長$\sqrt{4k+4\pi Dt}$の変化と共に変わることを導いた。このことからガンダイオードでパラメトリック効果を利用した動作が可能であることを理論的に知った。

ダイオードに空乏層が出来た後においては，アドミッタンスの時間変化の様子が異なるが，第2図に示す等価回路の形は変らない。　本報告の解析は空乏層が出来ない場合を取扱ったが，等価回路の形が変らないと言う観点から，ダイオードの各種動作機構の説明に便利な回路を第6，7図に求めた。　最後に，過剰領域の境界，励荷分布の時間変化に対する式を求め，ダイオードに空乏層が出来るに要する時刻にも触れた。

本報告で用いられた仮定の評価，空乏層が生じた後の理論解析，蓄積モード（Accumulation mode）の理論解析等は追って報告する。

本研究に関し，本学田中哲郎，高木俊宜両教授並びに研究室の方々に感謝の意を表わす。

参考文献

[1] D.E.McCumber and A.G. Chynoweth, "Theory of negative-conductance amplification and of Gunn instabilities in 'two-valley' semiconductor," IEEE Trans. Electron Devices, Vol.ED-13, PP.1-21, January 1966.

[2] A. Sasaki and T. Takagi, "Conditions for space-charge-wave growth and differential negative resistance in 'two-valley' semiconductor," proc. IEEE (Letters), Vol.55, PP.732, May 1967

[3] R.W.H. Engelmann and C.F. Quate, "Linear, or 'small-signal,' theory for the Gunn effect," IEEE Trans. Electron Devices, Vol. ED-13, PP.44-52, January 1966, 及び
末松，西村，中西，Gunn効果による負性抵抗素子の波動論的考察，電子装置研究会資料(1966-04)，及び
G.S. Hobson, "Small-signal admittance of a Gunn-effect device," Electronics Letters, Vol.2, PP.207-208, June 1966.

[4] P.N. Butcher, W. Fawcett, and C. Hilsum, "A simple analysis of stable domain propagation in the Gunn effect," Brit. J. Appl. Phys., Vol 17, PP. 841-850, 1966.

[5] H. Kroemer, "Nonlinear space-charge domain dynamics in a semiconductor with negative differential mobility," IEEE Trans.

Electron Devices, Vol. ED-13. PP 27-40. January 1966

[6] J.E. Carroll, "Mechanisms in Gunn effect microwave oscillators," Radio and Electronic Engineer. PP. 17-13. July 1967

[7] B.W. Hakki, "GaAs post threshold microwave amplifier. mixer. and oscillator." Proc. IEEE (Letters). Vol 54. PP. 299-300. February 1966

[8] S. Sugimoto, "Up-Conversion with Gunn-effect diode," Proc. IEEE (Letters), Vol 55, PP. 1520 August 1967.

[9] J.E. Carrall. "Resonant-Circuit operation of Gunn diodes: a self-pumped parametric oscillator." Electronics Letters, Vol 2. PP. 215-216. June 1966.

[10] J.A. Copeland. T. Hayashi, and M. Uenohara. "Logic and memory elements using two-valley semiconductors," Proc. IEEE (Letters) Vol. 55. PP. 582-585, April 1967.

[11] M. Shoji. "Controlled bulk semiconductor current pulse generator." Proc. IEEE (Letters). Vol. 55. PP 710-711. May 1967

M. Shoji. "Bulk semiconductor high-speed current waveform generator." Proc. IEEE (Letters). Vol 55. PP. 720-721. May 1967.

[12] C.P. Sandbank, "Synthesis of complex electronic functions by solid state bulk effects." Solid-State Electronics, Vol 10, PP. 369-380., 1967

[13] P.N. Butcher, W. Fawcett. and N.R. Ogg. "Effect of field-dependent diffusion on stable domain propation in the Gunn effect," Brit. J. Appl. phys. Vol 18. pp. 755-759. 1967.

輻射科学研究会資料

東北大学300MeV電子リニアックのマイクロ波装置

昭和43年2月9日

(三菱電機株式会社)
戸田哲雄
立川清兵衛
入江浩一
根本幸昭

1. まえがき

大形リニアックは多方面にわたる関連技術の結集によって生み出されるものであることは云うまでもないが，このうちでマイクロ波技術は大きな役割を占めるものの一つである。元来，マイクロ波技術は情報伝送を目的とした電気通信の分野で進歩したものであり，この技術を大形リニアックに応用するに当っては多くの特異性が見出される。取扱うマイクロ波電力が尖頭値，平均値とも異常に大きいこと，[東北大学リニアックの場合は尖頭電力の総計は 100MW]，伝送導波管の一部を常に高真空に保持する必要があること，全機器が遠隔操作，指示，監視の機能をもっていること，等がその主なものである。

東北大学リニアックでは，5台の尖頭電力 20MW の大電力パルス・クライストロンのパルス変調マイクロ波（2,856 Mc）が20台の加速管に給電される。この給電導波管（延長約 280 m）の一部は SF_6 ガスで加圧され，残部は高真空となっている。このために，加圧あるいは真空用の多くの大電力導波管部品の実用化が必要であった。完成した大電力導波管回路は約500時間の運転を通じて放電事故は皆無である。クライストロンの RF 励振電力伝送系，監視測定系および保護系等の比較的小電力を伝送する部分には同軸部品を使用したが，その大部分はトリプレート形ストリップ線路の技術を応用してある。そして，導波管部品および同軸部品のうちで可動機構のあるものはすべて，遠隔操作および遠隔指示機能をもたせて全装置の運転を容易にしているのも特長の一つである。

2. 東北大学 300 MeV リニアックの全貌

マイクロ波装置について記述するに先立って，東北大学 300 MeV リニアックの全貌を簡単に紹介する。まず，現在知られている大形リニアックを建設中のものも含めて表 2.1 に掲げる。表2.1で明らかなように東北大学リニアックは，国際的に最高級に属するものであり，とくに，ビーム出力の大きい点では世界

でも有数のものである。

リニアック全系の構成を図2.1に示す。加速管系はA部(1m×8本)とB部(2m×12本)とから成り、前者には1系統、後者には3系統のビーム・トランスポート系がつながっている。A部のみを動作した場合は大電流加速を、(A+B)部で動作した場合は高エネルギー加速が行われる。

表2.2はマイクロ波系以外の各構成系について大略の機能、性能を示したものである。また、表2.3は本リニアックで得られたビームの性能

表2.1 世界の主な大形リニアック

	米国 Stanford	仏国 Orsay	仏国 Saclay	伊国 Frascaty	日本 東北大学
製造	Stanford	CSF	CSF	Varian	三菱*
周波数	S-band	S-band	S-band	S-band	S-band
マイクロ波源	24MW ×240本	20MW ×22本	4MW ×15本	22MW ×6本	20MW ×5本
加速管長	3m×960本	6m×22本	6m×30本	3m×4本 +5m×8本	1m×8本 +2m×12本
最大エネルギー	20,000 MeV	1300 MeV	600 MeV	473 MeV	300 MeV
最大電流	50mA (30μA)	100mA (10μA)	60mA (600μA)	100mA (15μA)	100mA (90μA)
ビーム・パルス	360 PPS 2.1μsec	50 PPS 2μsec	1000 PPS 10μsec	50 PPS 3μsec	300 PPS 3μsec
備考	仕様値		建設中		

* 三菱電機KK, 三菱重工業KK } で協同製作、施工した。

表2.2 マイクロ波系以外の主要構成系

系	説明
クライストロン	Thomson-Varian 社製 TV-2014, 出力=25MW Max
クライストロン・パルサ	直流電源出力=112kW, 26kV。パルス・トランスにて昇圧して 250kV, 270Aのパルスを発生。
クライストロンRF励振系	Xtal発振器をMasterとして逓倍、増巾。出力=7kW, 2,856±1Mcを可変。周波数安定度=5×10^{-7}/day.
入射系	電子銃：最大エミッション=8A, グリッド付 電子銃パルサ：100kV。グリッド・パルサ：0.01~3.8μsec.
加速管系	工作精度=±2μ以下, 位相精度=±2°, 2/3πモード。 アラインメント精度=±0.1mm. 〔三菱重工製作担当〕
ビーム・トランス・ポート系	アナクロマティック・トランスポート系。偏向マグネット, Q-マグネット, ステアリング・コイル, スリット, 各種ターゲット, モニターにて構成
排気系	バルブ, ガスケット類はすべて全金属製。 主排気ポンプ=イオン・ポンプ
冷却系	加速管, 導波管等は 40±0.2°Cに温度制御。 純水を使用。
研究装置	主要構成品 { Electron Spectrometer Broad Range Spectrometer. 反応粒子の検出には, SSDを使用

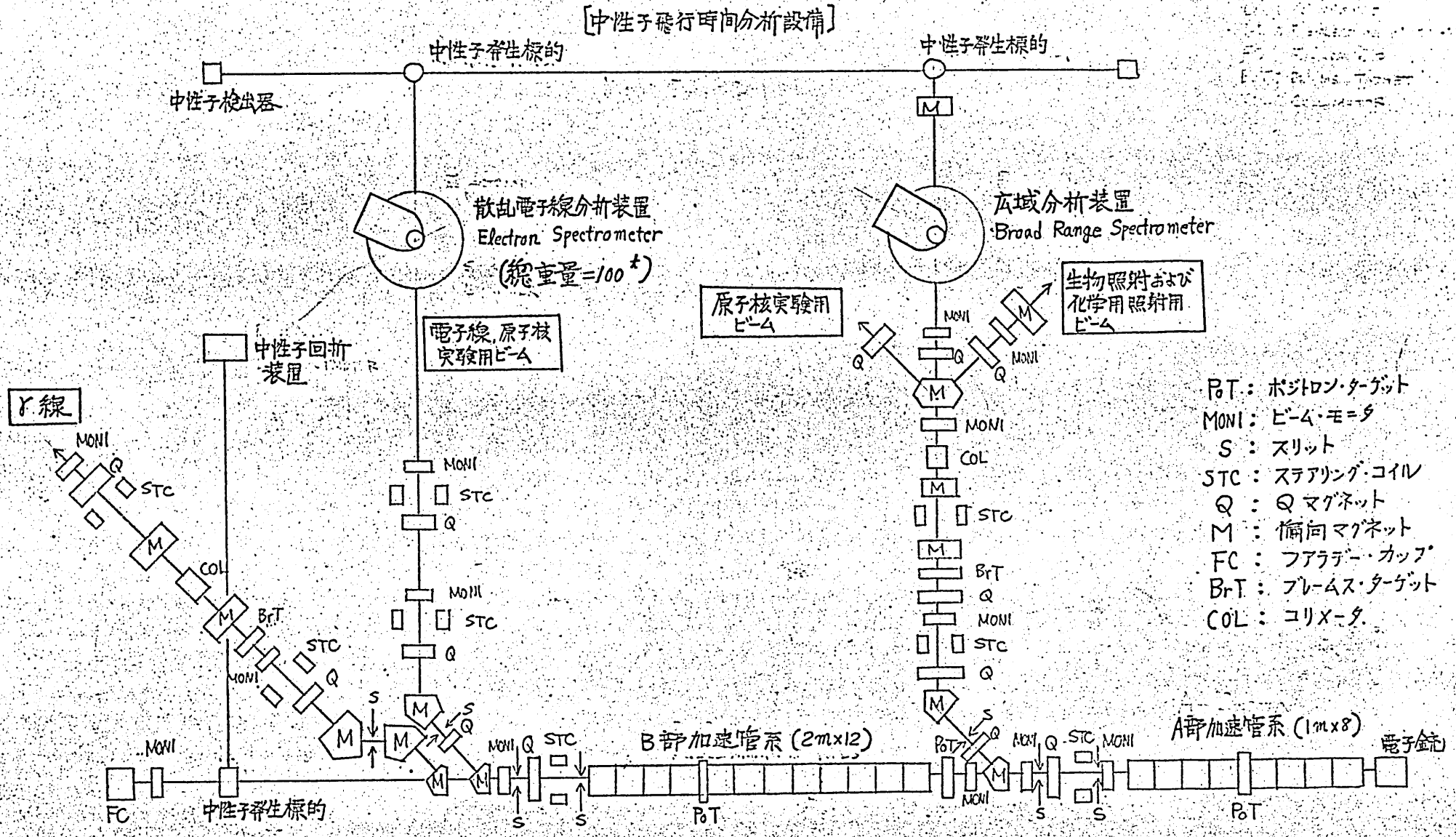


図 2.1 東北大学300MeVリニアックの構成

を示したものであり，表2.4は本リニアックによる東北大学での主な研究目標を示したものである。

表2.3　東北大学300MeVリニアックのビームの性能

項目		性能
最大エネルギー	A部のみ	75 MeV
	(A+B)部	286 MeV
最大ビーム電流と，そのときのエネルギー	A部のみ	350 mA（平均電流＝300μA），55 MeV
	(A+B)部	100 mA（平均電流＝90μA），240 MeV
任エネルギーにおけるビーム電流	A部のみ	10 MeVにて 100 mA 20 MeVにて 200 mA
ビームのエネルギー巾	A部のみ	エネルギー巾8％以内に全電流の60％以上.
	(A+B)部	エネルギー巾4％以内に全電流の60％以上.
ビームのパルス巾		3，2，1，0.1，0.01 μsec
ビーム・パルスの繰返し		単一パルス，外部同期. 電源同期（50，100，150，250，300，450，600，750，1200 PPS）
ビームの安定度		パルス相互間のエネルギーの変動は設定値から2％以内

表2.4　東北大学300MeVリニアックの主要研究目標

分類	研究目標	説明
原子核の研究・原子力の研究	原子核による電子線の弾性および非弾性散乱	いわば巨大な電子けんび鏡による核構造の解明，核の動特性の解析
	単色または連続ガンマ線による核反応粒子の分析	サイクロトロン等では解明できない分野がある.
	核散乱に対する電子線と陽電子線の比較測定	原子核のさらに精密な構造研究に寄与.
	中性子の飛行時間分析	原子核エネルギー単位の精密な分析. 中性子と物質との相互作用の研究.
	陽電子放射アイソトープの核分光学的研究	これらは電子リニアックでのみ作ることができるので研究領域を大きく拡げうる.
	原子炉集合体の特性研究	電子リニアックは強力なパルス中性子源なので，それを巧妙に利用できる.
化学の研究・物性物理の研究	迅速分析法，微量分析法の開発	γ線による核反応の分析化学への寄与.
	ホットアトム化学の開発	放射化学の飛躍的発展が期待できる.
	陽電子放射アイソトープを利用した固体物性の研究	陽電子消滅反応により固体内電子の運動量分析
	中性子回折による固体物性の研究	パルス中性子と飛行時間分析による結晶解析，磁気的ミクロ構造の解析
	超軟X線による固体物性の研究	ストレージ・リングを付加すると有力な研究が可能
生物学の研究・アイソトープの利用	生物，微生物に対する大線量照射，瞬間照射	放射線基礎医学，生理学の進展が期待.
	広範な分野にわたるアイソトープの利用	たとえば Ca^{47} による骨の基礎代謝の研究
	その他	

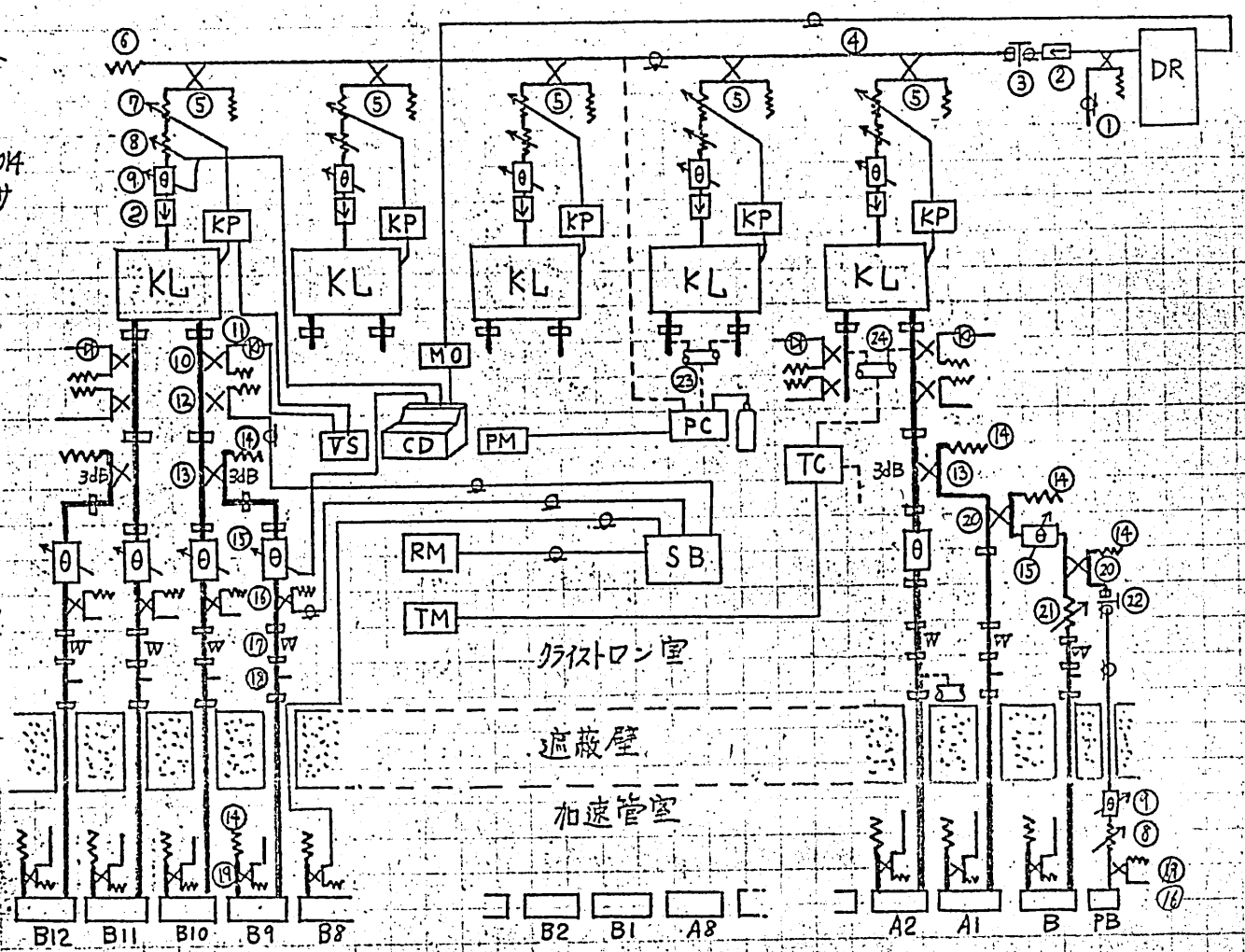
3. マイクロ波装置の機能と構成

マイクロ波装置の系統図を図3.1に示す。クライストロンRF励振装置のパルス変調マイクロ波出力（2.856 Mc）は，乾燥空気充填の同軸管WX-20Dを伝送し，同軸電力分配器により5等分された後，高速度同軸減衰器，遠隔操作同軸減衰器，遠隔操作同軸移相器および同軸単向管を経て5本の大電力パルス・クライストロンTV-2014に給電される。高速度同軸減衰器は，クライストロンへのパルス電圧印加時点とマイクロ波励振時点との間に時間遅れを作ることによって，クライストロン窓を保護するためのものである。遠隔操作の減衰器および移相器は，クライストロンへの給電マイクロ波の電力および位相を所要値に調整するためのものである。

各クライストロンと加速管とをつなぐ大電力導波管系の構成を図3.2に示す。図は電子銃にもっとも近い1号機クライストロンに接続される系を示したもので，右半分にはバンチャおよびプリバンチャの給電部を含んでいる。2,3,4および5号機クライストロンに接続される系は，図3.2の左半分のくり返しである。大電力パルス・クライストロンTV-2014は2本の出力導波管をもっており，その各導波管よりのマイクロ波電力は，導波管電力分割器にて2等分された後，遠隔操作導波管移相器および導波管気密窓を経て加速管入力変換回路に達し，加速管を通った後，加速管出力変換回路を経て大電力無反射終端器で吸収される。バンチャ給電マイクロ波電力は，初段加速管給電導波管の途中より方向性結合器にて取出し，遠隔操作の導波管移相器および減衰器を経てバンチャに達する。また，プリバンチャ給電マイクロ波電力は，バンチャ給電導波管の途中より方向性結合器にて取出し，同軸ケーブル系に変換した後，遠隔操作の同軸減衰器および移相器を経てプリバンチャに達する。

クライストロン出力導波管から導波管気密窓までの部分は地上階にあって，その内部は 3.8 ± 0.004 kg/cm² の乾燥 SF_6 が充填されている。導波管気密

MO：X-tal 発振器
DR：クライストロンRF
　　励振装置
KL：クライストロン TV-2014
KP：クライストロン・パルサ
PB：プリ・バンチャ
B：バンチャ
A_1～A_8：A部加速管
B_1～B_{12}：B〃　〃
SB：同軸切換器
　　ボックス
RM：RFモニタ盤
VS：VSWR安全
　　回路
CD：主制御卓
TC：導波管冷却水
　　温度調節装置
TM：温度表示盤
PC：導波管圧力
　　調節装置
PM：圧力表示盤



1. クライストロン励振電力測定用DC
2. 同軸単向管
3. 同軸変換器
4. 同軸管 WX-20D
5. 同軸電力分配器
6. 同軸管単向管 無反射終端器
7. 高速度同軸減衰器
8. 遠隔操作同軸減衰器
9. 〃　〃 移相器
10. 反射電力検出用DC
12. 電力モニタ用DC
13. 電力分割器
14. 導波管無反射終端器
15. 遠隔操作導波管移相器
16. 入射位相モニタ用DC
17. 導波管気密窓
18. 真空引口
19. 通過位相モニタ用DC
20. 導波管DC
21. 遠隔操作導波管減衰器
22. 導波管同軸変換器
23. SF_6 ガス・ヘッダ
24. 冷却水 ヘッダ
11. 反射電力検知器

図3.1　マイクロ波装置を主体とした系統図

1. クライストロン TV-2014
2. 加速管
3. バンチャ
4. プリバンチャ
5. 導波管電力分割器
6. 遠隔操作導波管移相器
7. 〃 〃 減衰器
8. 導波管気密窓
9. 導波管無反射終端器
10. 反射電力検波器および反射電力検出用DC
11. 電力モニタ用DC
12. 入射位相モニタ用DC
13. 透過 〃 〃
14. 遠隔操作同軸移相器
15. 〃 〃 減衰器
16. 導波管 DC

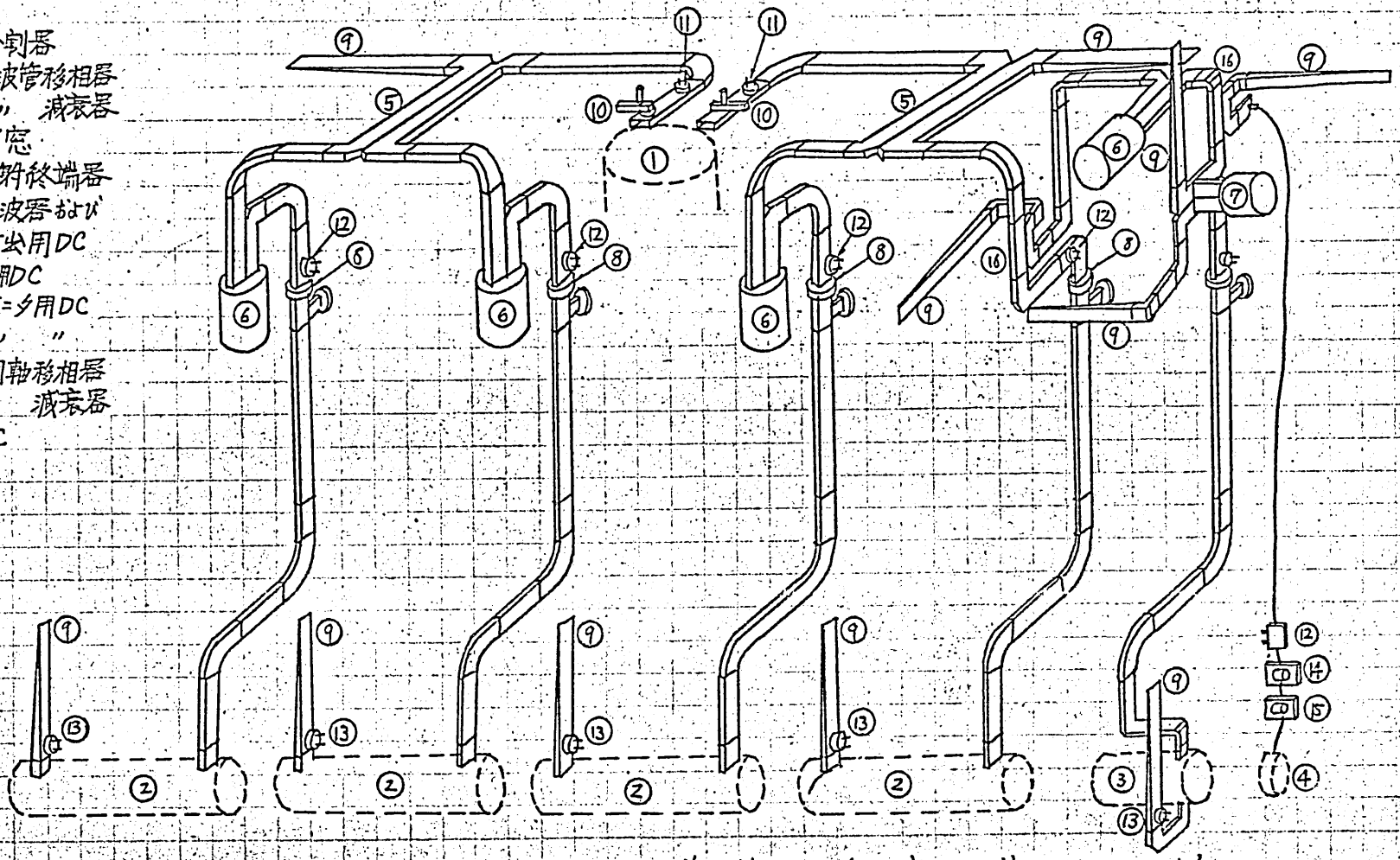


図 3.2　1号機クライストロンの導波管系　(2号機～5号機は上図の左半分のくり返しである。)

窓以降の導波管は，厚さ約3mのコンクリートを貫通して地下の加速管本体室に導かれるが，この部分は加速管および大電力無反射終端器と合せて真空になっていて，その到達真空度はマイクロ波投入時で 5×10^{-7} mm Hg程度であり，非投入時には約1桁良好である。

大電力パルスクライストロンTV-2014のマイクロ波出力尖頭値（両導波管分合計）が20MWのときの各加速管，バンチャおよびプリバンチャの投入尖頭電力は，それぞれ，4.6MW，380KWおよび18KWである。

図3.1に示すように，導波管系の各部にモニタ用方向性結合器が取付けられている。このうちで，反射電力検出用方向性結合器は，マイクロ波反射電力を取出し反射電力検波器で検波した後，TSWR安全回路を介してクライストロンパルサに導き，放電発生時には最初の反射波パルスでパルサの高圧をシャット・ダウンさせてクライストロン窓の損壊を未然に防いでいる。電力モニタ用，入射位相モニタ用および透過位相モニタ用の各方向性結合器で取出されたモニタ信号は発泡ポリエチレン同軸ケーブル（通常の同軸ケーブルに比して，伝送損失が小さく，かつ，温度特性がよい。）を伝送し，遠隔操作同軸切換器にて切換選択を行った後，マイクロ波電力測定器あるいはマイクロ波位相測定器に導かれる。

クライストロンRF励振装置のスイッチの接断，マイクロ波周波数の調整は制御室内の主制御卓で行なわれる。また，遠隔操作の移相器，減衰器の操作および指示読取はすべて主制御卓で唯1人の運転者で行えるようになっている。この他，SF_6ガス，乾燥空気の圧力調整装置の動作状態，および，高速度同軸減衰器の状態は制御室で監視可能である。また，電力測定器および位相測定器も制御室内にあって，遠隔操作で希望のモニタ信号を切換えて測定できる。

4. 導波管系部品

使用した導波管部品は表4.1に示すように，21種類，418点でその延長は

約 280m に達する。

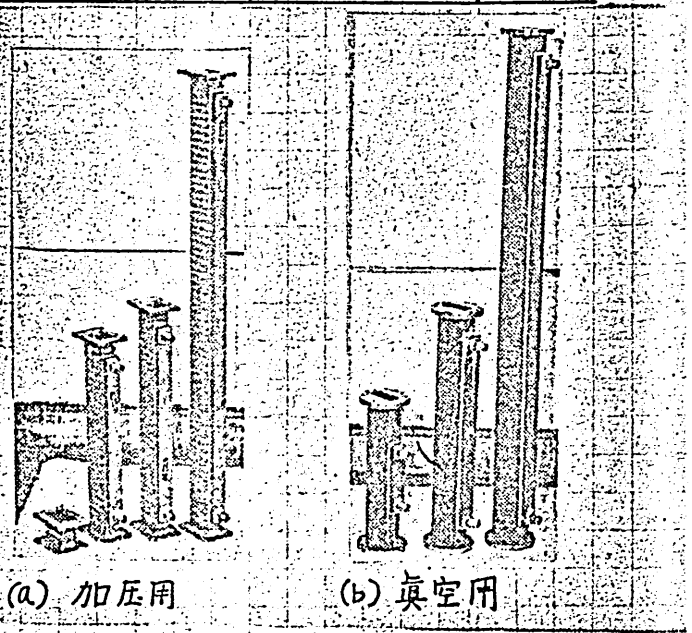
4.1 導波管部品の構造，製法，接続法

導波管には，無酸素銅製のJIS規格 3,000 Mc帯用方形導波管 WRJ-3 (72.1×34 mm² ID) の厚み 2mm および 4mm のものを用い，2mm のもの

表4.1 導波管部品の数量，特性

系別	名称	数量	入力電圧定在波比	最大尖頭電力容量(MW)	その他の性能	延長(m)
加圧部	H面曲り導波管	29	1.05	15<		
	E 〃 〃	20	1.05	15<		
	H面角曲り導波管	3	1.05	15<		
	E 〃 〃	4	1.05	15<		
	導波管電力分割器	10	1.07	15<	電力分割比<±0.3 dB	
	遠隔操作導波管移相器	20	1.12	15<	移相変化範囲>360°	110.8
	〃 〃 減衰器	1	1.15	5	最大減衰量>13dB,	
	モニタ用同軸導波管方向性結合器	41	1.03	15<	結合度=37~70dB	
	導波管無反射終端器	12	1.08	3.5		
	導波管方向性結合器	2	1.12	15<		
	同軸導波管変換器	1	1.06	0.5		
	直線導波管	61	—			
	導波管気密窓	22	1.08	15<	挿入損失<0.07dB	1.7
真空部	H面曲り導波管	42	1.05	15<		
	E 〃 〃	1	1.05	15<		
	H面角曲り導波管	1	1.05	15<		
	E 〃 〃	1	1.05	15<		
	導波管真空引口	21	1.02	15<		168.2
	導波管無反射終端器	21	1.08	5		
	モニタ用同軸導波管方向性結合器	21	1.03	15<		
	直線導波管	84	—			
合計		418	—	—		280.7

のものは，内外圧力差による変形防止の目的で，外面に波板を接着補強している。また，大部分の導波管には温調用水管がそのE面壁に付けてある。加圧用フランジは黄銅製で，金属遮蔽ゴムガスケット方式を用い，真空用フランジはステンレス製で金属ガスケット方



(a) 加圧用　(b) 真空用

図4.1 直線導波管

式を用いている。真空導波管部品の製作に際しては，構成材料および蝋材の選定，水素炉内蝋付の採用，ならびに，真空状態での加熱ガス出しの実施によって内部の清浄化および放出ガス抑制には5全の処置がほどこしてある。

4.2 耐電力試験法

導波管部品の内には最大10MW(尖頭値)のマイクロ波電力を伝送する部分があるので耐電力試験装置としては少くとも15MWの電力を必要とする。この試験を5MW級クライストロンを使用して行う手段として図4.2に示すリング回路法を採用した。図の構成で可変移相器を調整して共振状態にした場合，クライストロン出力 P_0 と回路のリング波電力 P_R との間には，

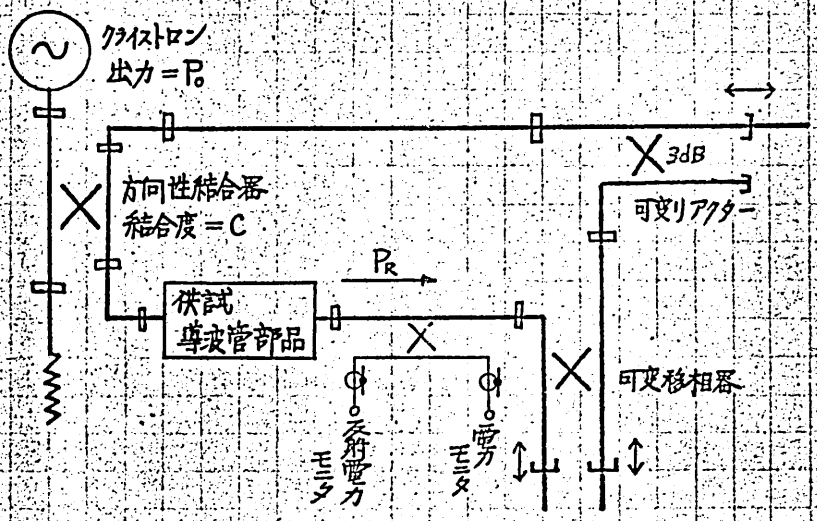


図4.2 耐電力試験用リング回路のブロック図

$$G = \frac{P_R}{P_0} = \left[\frac{C}{1 - 10^{-\alpha/20}\sqrt{1-C^2}}\right]^2$$

C＝方向性結合器の電圧結合度
α＝回路の1周りの減衰量

の関係がある。使用した装置では $C = 0.355 = -9\,dB$，$\alpha = -0.2\,dB$ であって，$G \fallingdotseq 16.8 = 12.2\,dB$ であるから，$P_0 = 5MW$ のとき，$P_R = 84MW$ のレベルまで計算上は発生可能である。実際には回路構成導波管部品の耐電力で制限され，実用可能最大レベルは約20MWである。

4.3 主要導波管部品の構造と特性

4.3.1 導波管電力分割器

クライストロンTV-2014の各出力導波管からのマイクロ波電力を2等分す

るもので，図4.3に示すようにサイド・ウオール形ショート・スロット・ハイブリッド回路[2]となっている．

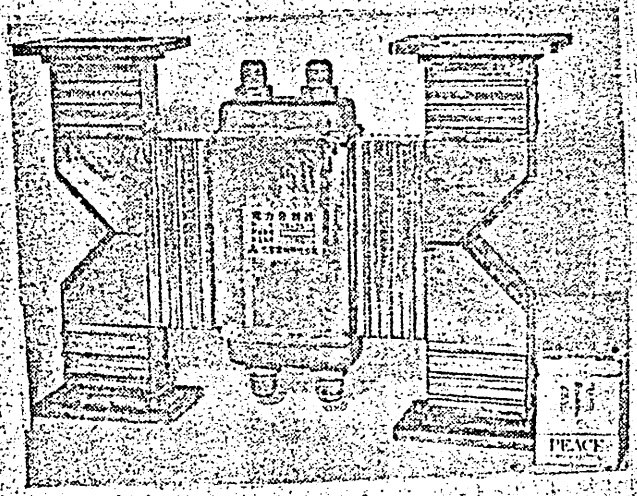


図4.3 導波管電力分割器

4.3.2 遠隔操作導波管移相器

各加速管およびバンチャに給電するマイクロ波の位相を調整するためのものである．図4.4に示すように，サイド・ウオール形ショート・スロット・ハイブリッド回路と2個のショート・プランジャとを組合せたもので，プランジャ変位対移相量の関係は直線的である．駆動は可逆単相誘導電動機で行われ，遠隔指示用信号はギヤ結合された多回転可変抵抗器でポテンショ・メータ式に取出される．

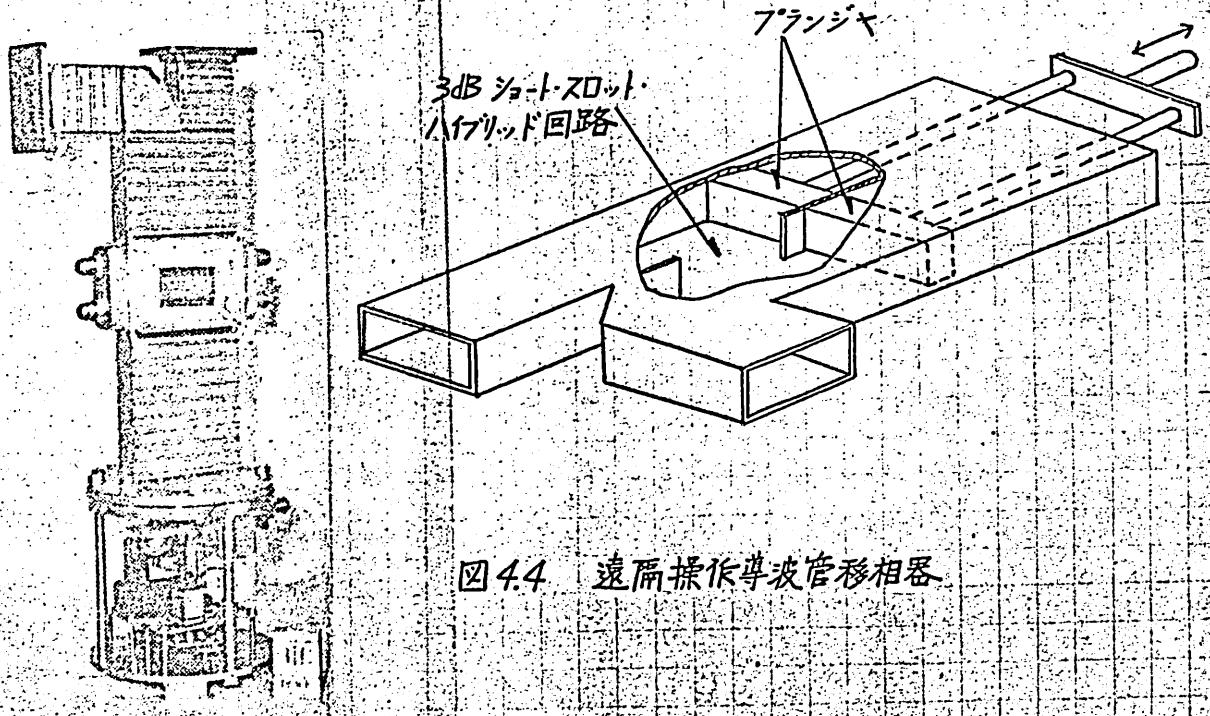
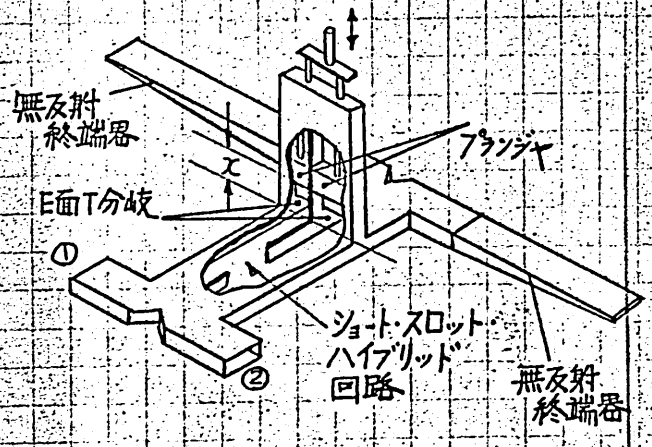


図4.4 遠隔操作導波管移相器

4.3.3 遠隔操作導波管減衰器

バンチャに給電するマイクロ波電力を調整するためのものであって，図4.5に示すように，サイド・ウオール形ショート・スロット・ハイブリッド回路，2個のE面T分岐，2個のショート・プランジャおよび2個の無反射終端器で構成されて

いる。図で $x=0$ および $x=\lambda_g/4$ のときに，それぞれ，最大および最小減衰量を与える。この構造のものは，普通の抵抗板変位形に比して，電力容量が大きいこと，冷却が容易なこと，および，温度上昇が直接減衰特性に影響を与えず動作が安定なことが特長である。



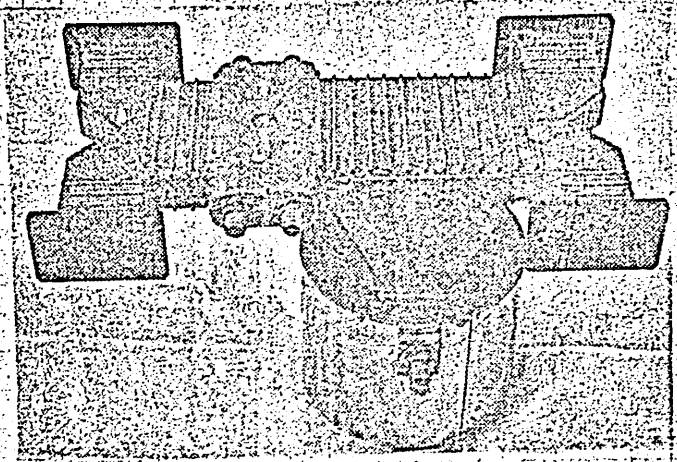

(無反射終端器は取外してある。)

図 4.5　遠隔操作導波管減衰器

4.3.4　導波管気密窓

導波管気密窓は，非常に技術的困難さをもっている部品で，この種の大電力導波管システムの許容伝送電力は，気密窓のそれで決定されると云っても過言ではない。熱損失，定在波比特性，機械的応力，熱的応力の諸点に立って，構成材料，構造寸法，蠟付加工法について徹底的に究明し，試作を重ねた上で設計，製作したものを図 4.6 に示す。

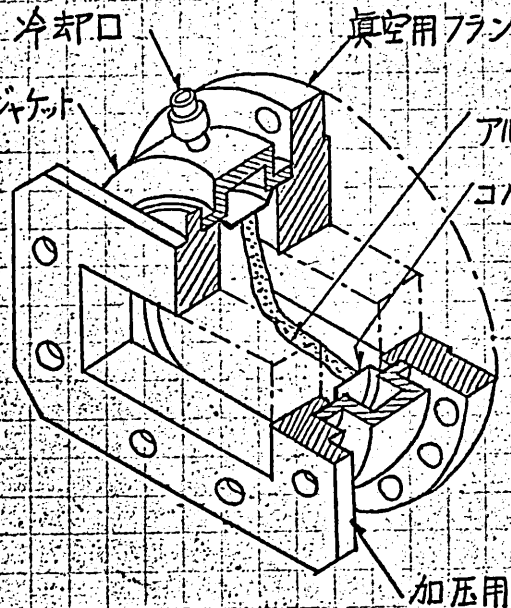


図 4.6　導波管気密窓

4.3.5　導波管無反射終端器

大電力用の導波管無反射終端器として水負荷がよく使われるが機械的強度および取扱上に難点がある。抵抗体装荷形式のものでは，耐電力，定在波比特性，放出ガスおよ

び発熱量の諸元に関して，構成材料，内部構造，冷却方式，組立加工法を吟味検討することが必要である．今回採用した形式は，ステンレス製テーパ導波管の内壁に高抵抗の合金層を形成させ，その外部に冷却ジャケットを付けたもので，真空用で5MWの耐電力が得られた．

4.4 導波管系の総合定在波特性

クライストロンの各出力導波管には2本の加速管が接続され，各系には導波管移相器が挿入されている．したがって，この出力導波管より加速管側をみた総合定在波比特性は，2個の移相器の移相量の関数である．この総合定在波比特性の測定結果の1例を等定在波比曲線の形で示したのが図4.7である．なお，この測定は連続波による導波管ブリッジ法で行ったものであるので，実際のパルス変調の場合の特性とは若干の差異がある．

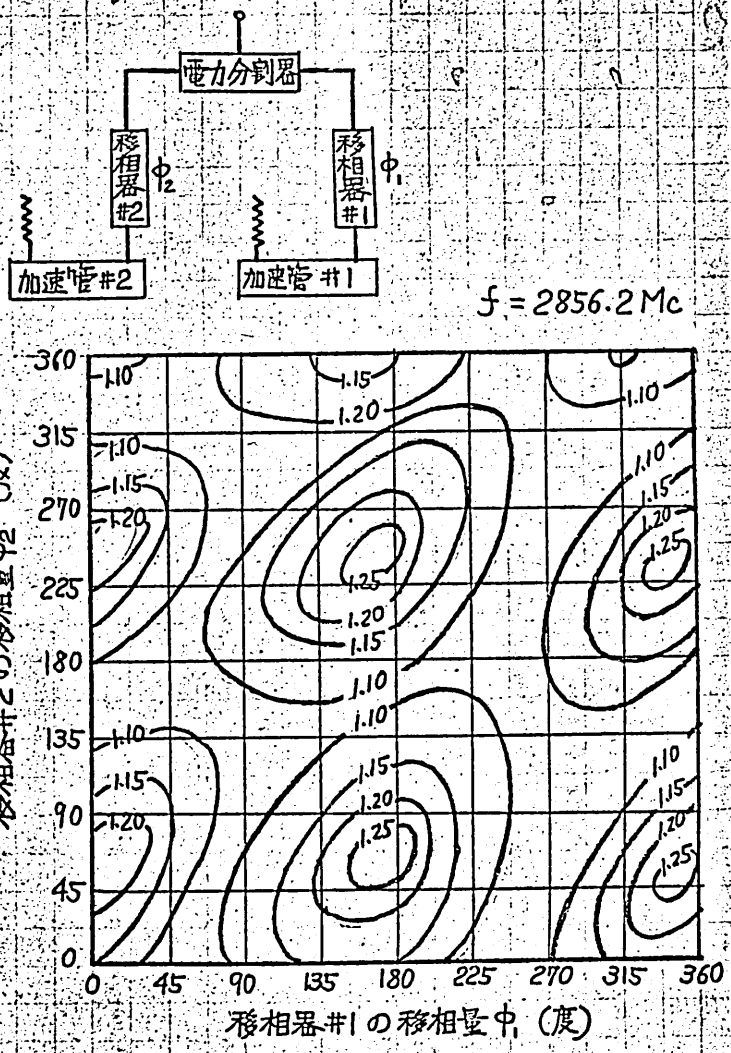


図4.7 クライストロンの出口ポートより測定した等定在波比曲線

5. 同軸系部品

クライストロンRF励振装置と大電力パルスクライストロンTV-2014とを結ぶ励振電力伝送部，プリバンチャ給電部およびモニタ信号伝送部はすべて同軸系で構成されている．使用した同軸系部品は表5.1に示すように，14種類，

146 点である。また，使用した同軸ケーブルおよび同軸管の延長は，それぞれ，約1,600m および 40m である。これら同軸部品のうちでとくに興味深いものについて以下に示すことにする。

5.1 遠隔操作同軸減衰器

図5.1 に示すように，トリプレート線路のストリップ導体の上下の空間でシリコン・カーバイト製の抵抗板を動かす形式である。駆動は可逆単相誘導電動機で行われ，減衰量遠隔指示信号はギヤ結合された多回転可変抵抗器でポテンショメータ式に取出される。

5.2 高速度同軸減衰器

高速度同軸減衰器は，クライストロンにパルス高電圧が印加された状態で，瞬間的に励振用マイクロ波電力が投入されることによってクライストロン窓あるいは導波管気密窓が損傷するのを防止する目的で用いられる。マイクロ波伝送部の構造は図5.1 と同様である。可逆単相電動機，カム機構，リミットスイッチおよび電磁リレーの組合せ

表5.1 同軸系部品の数量，特性

名称	数量	入力電圧定在波比
モード用同軸方向性結合器	4	1.2
同軸単向管	11	1.1
同軸変換器	1	1.05
同軸直管	16	
同軸電力分配器	5	1.15
同軸無反射終端器	72	1.05
高速度同軸減衰器	5	1.2
遠隔操作同軸減衰器	7	1.2
遠隔操作同軸移相器	6	1.2
反射電力検知器	10	1.5
遠隔操作同軸切換器	5	1.2
手動同軸切換器	1	1.2
手動同軸減衰器	2	1.2
同軸管無反射終端器	1	1.05
合計	[redacted]	—
	146	

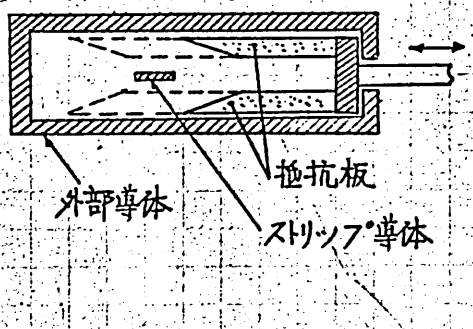
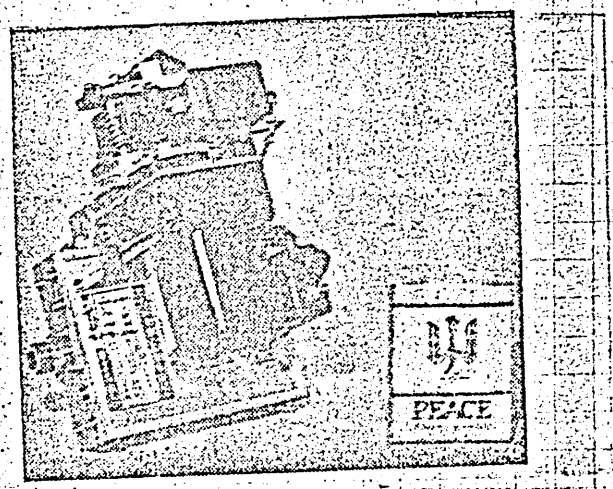


図5.1 遠隔操作同軸減衰器



によつて，パルサの高圧印加と同時に自動的に減衰量が減少する方向に作動して5秒後に最小減衰状態に達し，高圧遮断と同時に最大減衰状態に復帰する。図5.2は高速度同軸減衰器を示す。

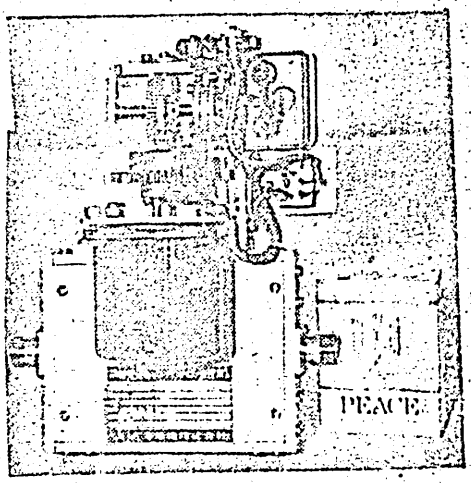
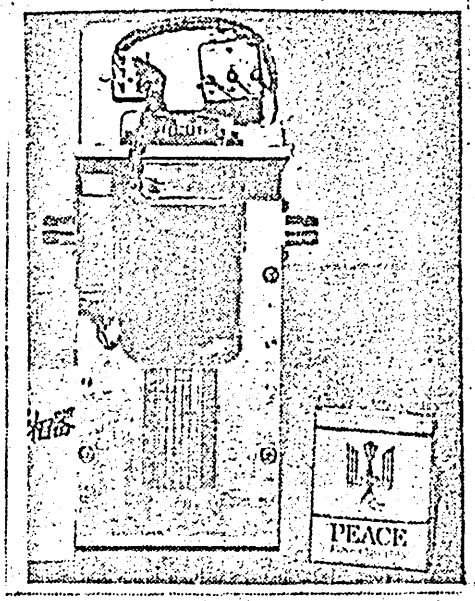


図5.2　高速度同軸減衰器

5.3　遠隔操作同軸移相器

遠隔操作同時移相器は，図5.3に示すように，トリ・プレート線路のストリップ導体の長さをトロン・ボーン式に変化して位相変化を得るものである。駆動および移相量遠隔指示は遠隔操作同軸減衰器と同様の手段



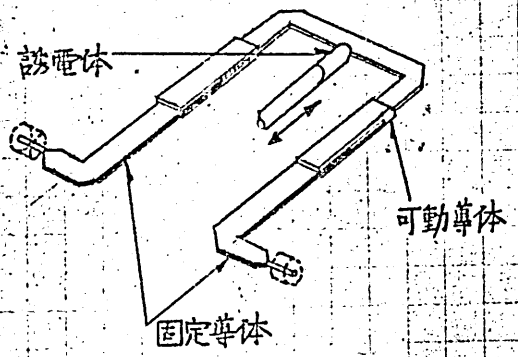


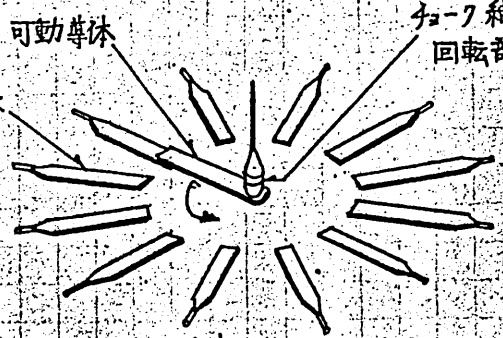
図5.3　遠隔操作同軸移相器

で行われる。

5.4　遠隔操作同軸切換器

このリニアックのマイクロ波回路系の各部より，計54個のモニタ信号が方向性結合器を介して取出される。このうちから所要の信号を選択して，各1台の電力測定器あるいは位相測定器へ導くための切換器として5台の遠隔操作同軸切換器を使用している。図5.4に示すように，放射状に配列した12本の固定導体と1本の可動導体とがあり，駆動は単相誘導電動機で行われ，ギヤ機構，ゼ

ネバ機構およびリミットスイッチの組合せによって駆動制御される。非結合端子間減結合量 26 dB 以上，挿入損失 0.4 dB 以下である。



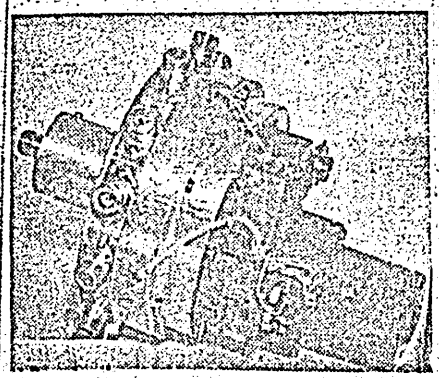


図 5.4 遠隔操作同軸切換器

6. むすび

以上，東北大学 300 MeV リニアックのマイクロ波装置について，機能，構造および特性について紹介した。本装置の開発，設計，製作，調整および据付の段階で直面した幾多の難問題を解決し完成に導き得たのは，レーダ，通信機の分野で多年蓄積されたマイクロ波技術を基盤とし，これに多くの関連技術を結集した所産と考えている。また，東北大学の御指導のもとに永年検討を重ねた上で採用したシステムそのものも非常に合理的で，リニアックの運転，保守を極めて容易にしている。本装置の完成で得た多くの技術は，今後の加速器製作のみでなく，大電力レーダ等の多くの方面にも活用し得るものと信じている。

最後に御指導，御鞭撻を賜った東北大学原子核理学研究施設の木村教授，鳥塚教授，小島助教授 その他関係諸先生に厚く御礼申し上げる。

(参考文献)

(1). L.J. Milosevic, R.Vautey : Traveling-Wave Resonators, I.R.E. Trans., MTT-6, 136, (1958)

(2). H.J. Riblet : The Short-Slot Hybrid Junction, Proc. I.R.E., 40, 180, (1952).

輻射科学研究会資料

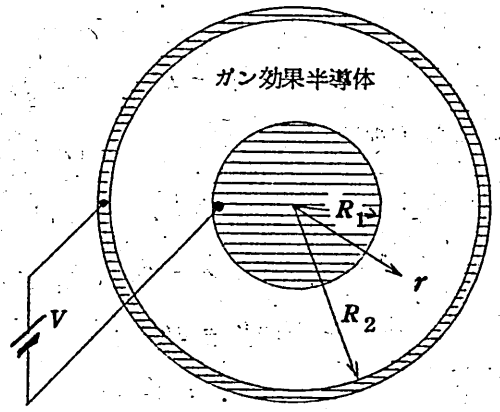
電圧同調形のガン・ダイオード

松　尾　幸　人
張　　年　　錫
（大阪大学産研）

１９６８年２月９日

通常のガン・ダイオードでは，一様なる断面を持つ半導体試料の両端に直流電圧を与えているので，しきい電界以内では試料内の直流電界は一様である．最近，試料の形状を変えることによって，直流電界が試料内の場所で異なるような構造を与え，試料内で生じた高電界層の運動を両端間の直流電圧で制御し，それによって発振周波数を変化させる実験が報告されている。[1] 従来のものでは直流電界の試料内での勾配が小さいので高い陽極電圧を必要とし，かつ陰極より任意の点の断面の電界が不揃のために種々の不都合を生ずる．こゝでは試料の形状を円筒形や球形にすることによって，大きい発振出力が期待出来，さらに同調特性が改善されることについて述べる．

こゝで提案するマイクロ波半導体[2]の断面の1つを第1図に示す．



第 1 図　円筒形ガン発振器

すなわちガン効果を示す半導体材料の断面を中空円形とし，その中空の部分を陰極に，半導体の周囲を陽極にしたものである．

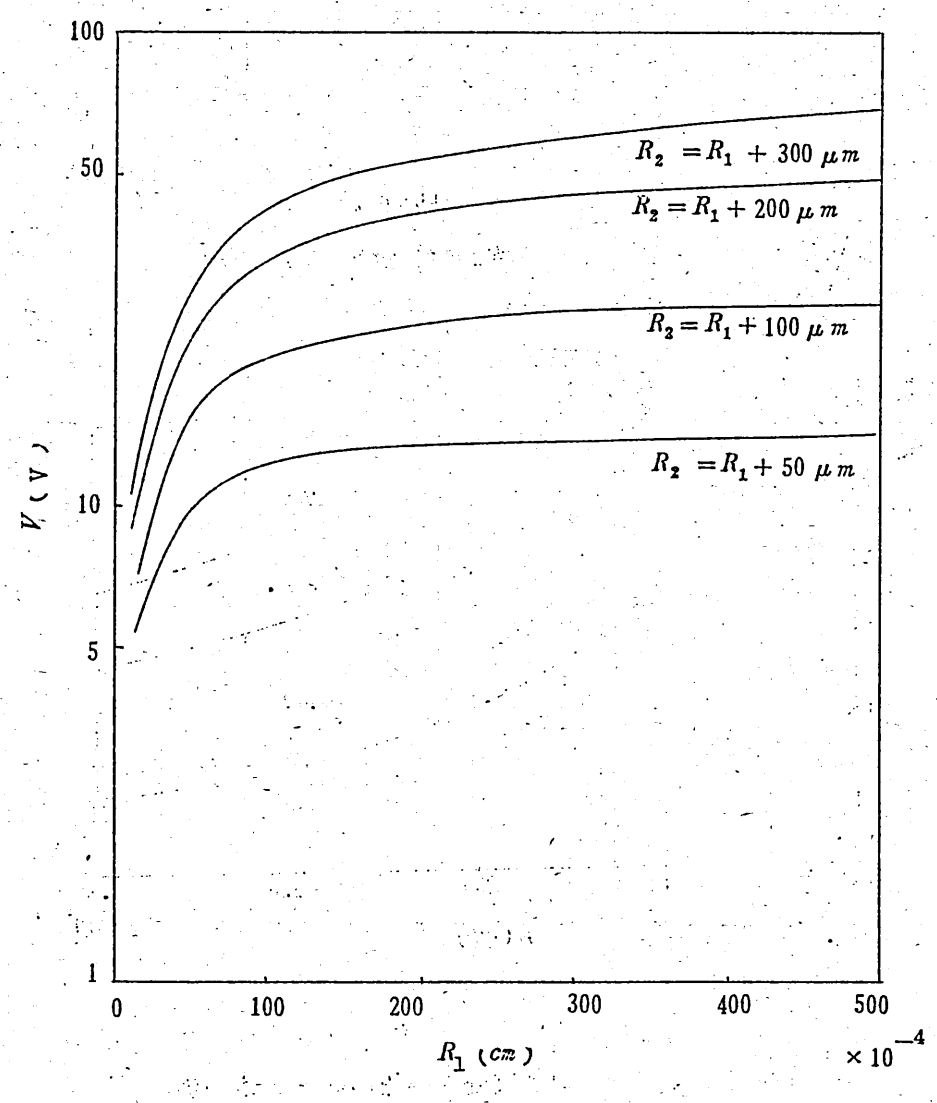
図1のような構造で内導体の面電荷がρであるとき，r点の電界は容易に求まる．両導体間の電位は次のようになる．

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{2\pi\varepsilon r}\, dr = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon} \log_e \frac{R_2}{R_1}$$

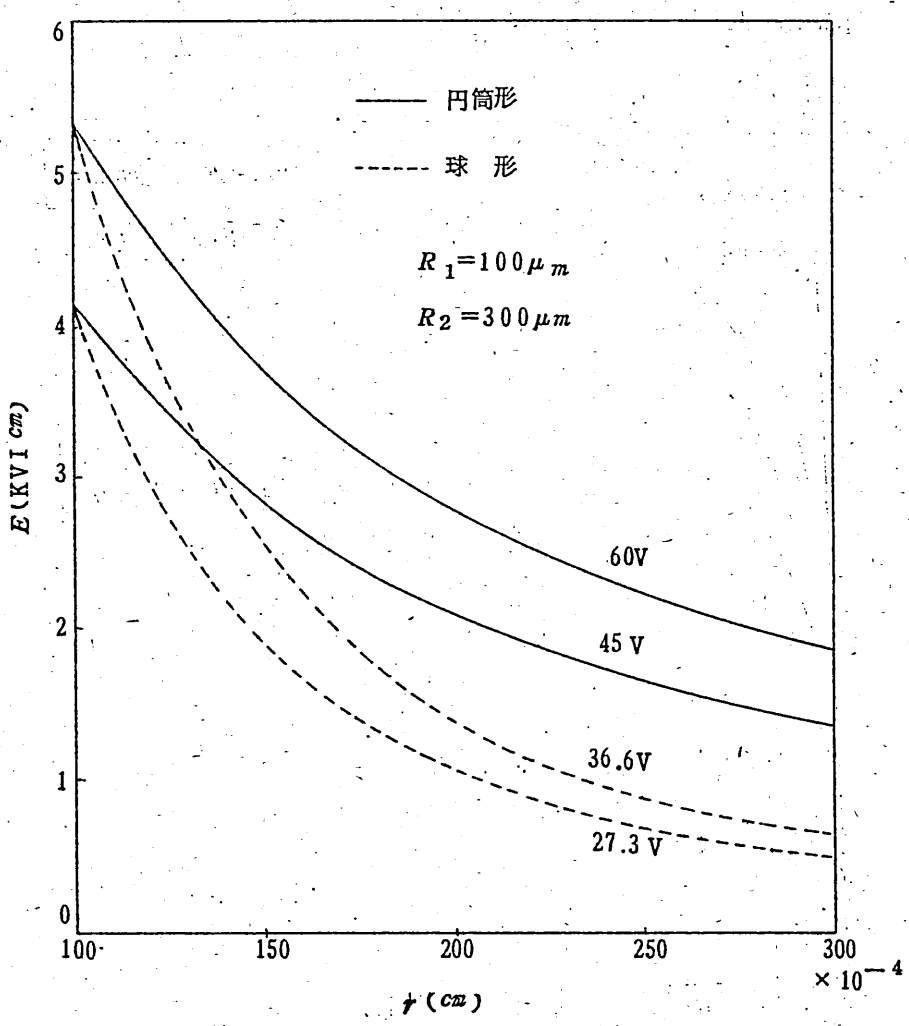
R_1, R_2 は内円筒と外円筒の半径で，εは誘電率である．
ゆえに電極間に直流電圧Vを与えると中心より任意の距離rに於ける電界E_rは

$$E_r = \frac{V}{\log_e \frac{R_2}{R_1}} \quad \frac{1}{r} \qquad (1)$$

ガン発振を生ずるには電界がある値，すなわちしきい電界E_{th}以上であることが必要であるが，このE_{th}を3KV/cmとして，陰極表面の電界が，E_{th}のとき，$R_2 - R_1$ の値をパラメータにしてR_1 に対する電圧Vを示したものが第2図である．この曲線よりR_1とR_2との値ならびに与える直流電圧Vとの関係を大体知ることが出来る．第3図は1例として$R_1 = 100\mu m$，$R_2 = 300\mu m$のとき，Vをパラメータにして(1)式を表わしたものである．たとえば実線（円筒）の場合$V = 60$ volts とすると，陰極表面より$80\mu m$まではE_{th}以上の値になり，$V = 45$ volts ではその範囲は狭く$40\mu m$までとなる．したがってVを変化することにより，E_{th}を越す陰極表面からの距離を大幅に変化さすことが出来る．ガン効果発振

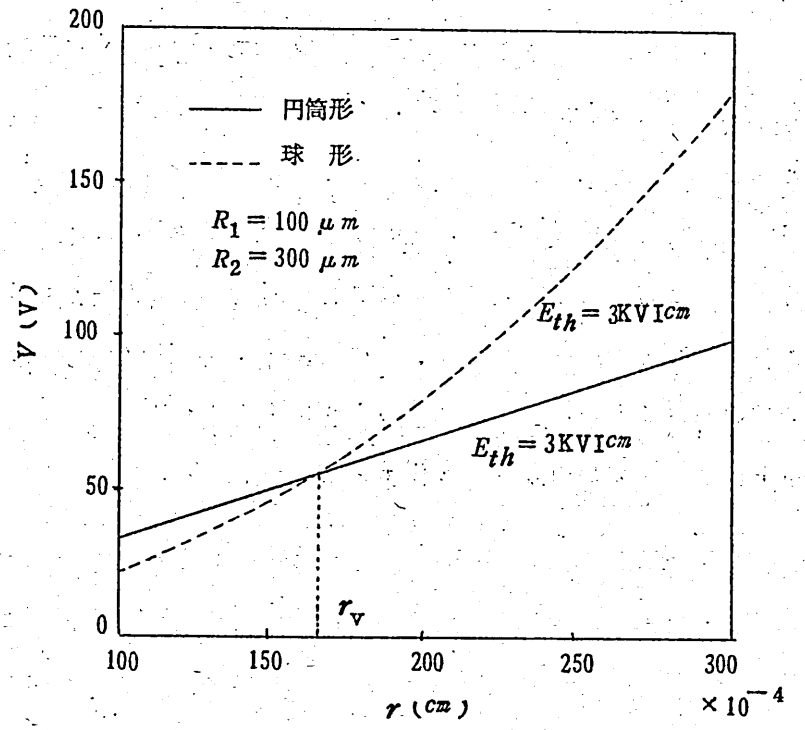


第 2 図　陰極表面（R_1 上）の直流電界が 3 KV/cm のときの印加直流電圧 V と R_1 との関係



第 3 図　　印加直流電界と距離 r との関係

ではE_{th}以上になると陰極表面に高電界層が発生し，これが陽極に向って走行するが，E_{th}以下となると高電界層が消滅する．この走行時間が大体発振周波数の周期となるから，陽極電圧によって発振周波数を広範囲に変化出来るわけである．第4図（実線）は電界をE_{th}にしたときのVとrとの関係で直流電圧の変化により高電界層（こゝでは高電界層の厚みは無視する）が走行する距離が求まる．実際には高電界層が消滅する電界は$E<E_{th}$であるから上述の議論は多少補正する必要があるが，試料の厚みが薄いときは高電界層の維持電界E_{th}に近くなる．

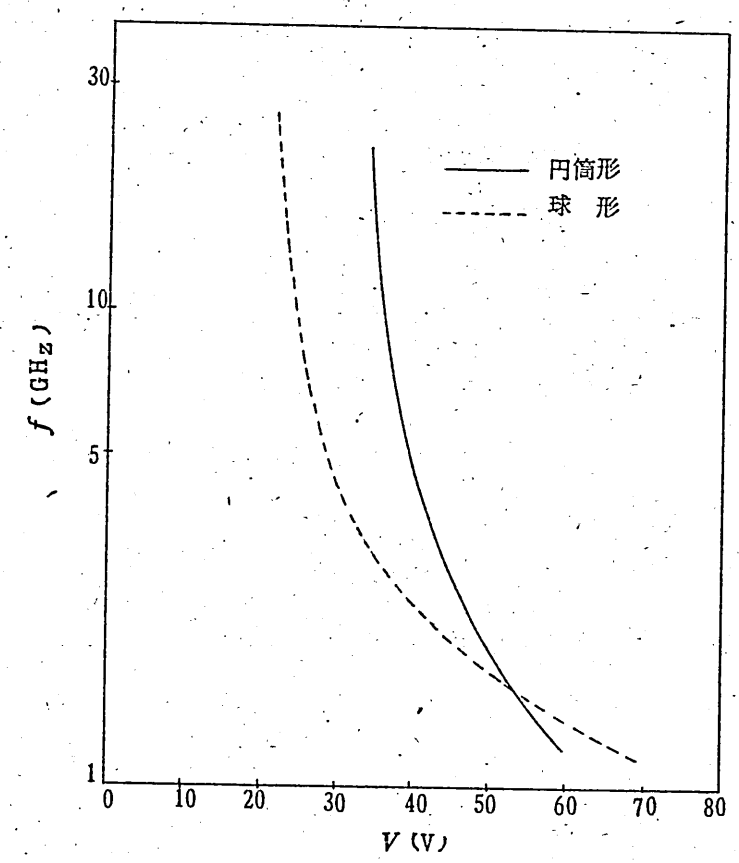


第 4 図　　印加直流電圧と距離 r との関係

さらに，高電界層のクエンチ動作を鋭どくするには，系の構造が円筒状では充分でない．それはこの形状では電界が $1/r$ に比例するからである．電極の形状を同心球形にすれば，電界は $1/r^2$ に比例することになり，陰極からの距離に対する電界の変化率が大きくなる．同心球の構造を持つ試料で，内球と外球の半径を R_1 ，R_2 とし，$R_2 > r > R_1$ での電界は

$$E_r = \frac{V}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \frac{1}{r^2} \qquad (2)$$

こゝで円筒の場合と比較してみる．$R_1 = 100\mu m$ ，$R_2 = 300\mu m$ で(2)式の関係を第3図に点線で示す．同一陰極電界に対する円筒，球の電圧を V_1 ，V_2 とすると $V_1/V_2 = R_2 \log(R_2 - R_1)/(R_2 - R_1)$ で与えられ，上の数値に対してこの比の値は 1.66 となりかなり球の場合が低くなる．また E_{th} を示す位置も円筒より幾分陰極に接近する．しかし球の場合 E_{th} をパラメータとすると，V ，r の関係（第4図点線）は V が r^2 に比例するために，円筒のそれとは異なる．両方の場合 V の等しくなる距離 r_V は $R_1 R_2 \log \frac{R_2}{R_1} / (R_2 - R_1)$ となる．これより r に対して E_{th} になる電圧は r_V 以下では球形の方が低い直流電圧で得られ，r_V 以上では円筒形の方が低い直流電圧で得られる．簡単のために E_{th} が 3 KV/cm で高電界層が消滅すると仮定して，発振周波数 f を v/L として計算したのが第5図である．こゝで $v \simeq 10^7$ cm/s ，L は陰極面から電界が E_{th} に低下する点までの距離である．図からわかるように両方共極めて広い範囲にわたって電圧によって発振周波数が変化することがわかる．



第 5 図　印加直流電圧に対する発振周波数の特性

上で述べた構造で試料に加える電界の方向と試料の結晶軸の方向とが一致しない問題があり，結晶の異方性を考慮する必要があるが，円板状の構造に対して行った実験[3]では，この効果は系にそれほど大きな影響を与えてない．球形電極の場合，試料などの工作的に若干困難な点があるが，円筒，球形状の試料でその一部を利用することによって，この困難を緩和さすことは容易である．

文　　献

(1) M. Shoji : "A Voltage Tunable Gunn-Effect Oscillator", Proc. IEEE , 55 , 1, P. 130 (January 1967)

(2) 松尾幸人，張年錫 ："電極形状効果を利用したGunn 発振器" Osaka University , MLTR－67－706 (1967. 12. 20)

(3) 最近入手した Electronics Letters に，こゝで提案した構造のうち，円筒形のものについて実験がなされていることを知った。
B. Jeppsson , I. Marklund and K. Olsson :
" Voltage Tuning of Concentric Planar Gunn Diodes ", Electronics Letters, 3 , 11 , P. 498
(November 1967)