

輻射科学研究会資料

レンズ状媒質からなる導波系  
に 関 す る 一 考 察

沢 新 之 輔 熊 谷 信 昭

(大阪大学・工学部)

1969年4月25日

## 1. まえがき

誘電率が中心軸からの距離の2乗に比例して減少するようなレンズ状媒質からなる導波系<sup>(1)</sup>は、短ミリ波から光波領域における低損失伝送系として重要な地位を占めており、今までに種々の形式の線路が考案されている。たとえば、光波伝用として従来から検討されているガスレンズ導波系<sup>(2)</sup>や、最近開発された集束性伝送体(SELFOC)<sup>(3)</sup>、あるいは、短ミリ波～光波用の低損失線路として提案された不均一誘電体薄膜表面波線路<sup>(4),(5)</sup>等は、その代表的な例である。

筆者らは、先に、このようなレンズ状媒質からなる導波系における軸ずれ、斜入射ガウスビームの応答電磁界を求めるための新しい方法を提案した。<sup>(6),(7)</sup>

本文では、先に提案した方法<sup>(6),(7)</sup>を発展させて高次姿態まで含めた取り扱いができるように拡張し、直線状導波系、円形曲り導波系および正弦状うねり曲り導波系等に適用する。本文の方法は、従来の方法<sup>(7),(8),(9),(10),(11)</sup>に比較して、一層、直接的で、簡単であり、かつ、統一的な取り扱いができるという利点がある。すなわち、従来のように、入射電磁界を導波系の固有姿態によって展開し、伝送軸上の任意の点で再合成することによって応答電磁界を求める方法<sup>(7),(8),(9),(10),(11)</sup>では、あらかじめ、導波系の固有姿態を求めておく必要があり、また、再合成のための計算が相当繁雑になる。これに対して、本文の方法では、固有姿態を求めておく必要がなく、本文で導込する未知関数に関する簡単な連立一次の微分方程式を解くだけで、この種の任意の導波系における応答電磁界を、比較的簡単に、かつ、統一的に求めることができる。

本文では、まず、レンズ状媒質中における波動方程式から、軸ずれおよび

斜入射ビームの応答電磁界を求めるための基本方程式を導出する。つぎに、直線状導波系および円形曲り導波系における一般的応答電磁界を求め、本文とは異なる方法によって得られていた従来の結果<sup>(8),(9),(10),(11),(13)</sup>と比較検討する。また、円形曲り導波系に関しては、ビーム行路の脈動を除去するための円形曲り部の新しい設計方法として、文献(6)で提案した方法をさらに一般化した、一層有効な方法についてのべる。

さらに、従来から簡単な幾何光学的考察じかんされていなかった正弦状うねり導波系に対して、本文の解析方法を適用し、今まで知られていなかった応答電磁界の表示式を求め、従来の幾何光学的解析結果との関連を明確にする。また、正弦状うねり曲り部における固有姿態についてものべる。

なお、解析は、簡単にするため、すべて、断面方向に一次元的なレンズ状媒質を対象とし、近軸理論の範囲内で取扱う。

## 2. 応答電磁界を定める基本方程式

### 2.1 波動方程式

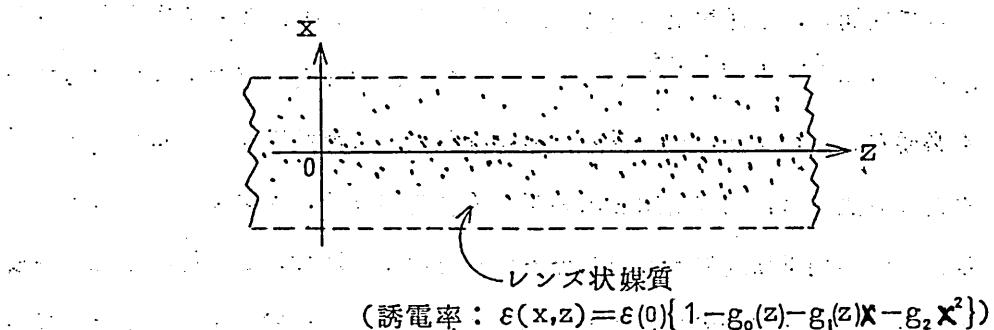


図1 レンズ状媒質からなる導波系

直交座標系 $(x, z)$ を図1のようにとり、レンズ状媒質の誘電率分布を

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon(0) \{ 1 - g_0(z) - g_1(z)x - g_2 x^2 \} \quad (1)$$

と仮定する。ただし、 $\varepsilon(0)$ は、導波系の中心  $x = 0$  における誘電率であり、また、 $g_2$  および  $g_i(z)$  ( $i = 0, 1$ ) は、それぞれ、誘電率の変化率を定める  $z$  に無関係な媒質定数および  $z$  方向にきわめてゆるやかに変化する媒質定数を表わす。ここで、 $g_2 \lambda_0 \ll 1$ ,  $|g_i(z)| \cdot \lambda_0 \ll 1$ , および  $|g_0(z)| \ll 1$  とする。 $(\lambda_0: \text{自由空間波長})$

このようなレンズ状媒質内の電磁界は、近似的に、つぎのような波動方程式を満足する。<sup>(6), (7), (12)</sup>

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2(0) \{ 1 - g_0(z) - g_1(z)x - g_2 x^2 \} E = 0 \quad (2)$$

$$\text{ここで, } k^2(0) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon(0) \quad (3)$$

であり、また、 $e^{j\omega t}$  なる時間依存を仮定してある。

さて、

$$E = U(x, z) e^{-jk(0)z} \quad (4)$$

ただし

$$\left| \frac{\partial^2 U(x, z)}{\partial z^2} \right| \ll 2 k(0), \left| \frac{\partial U(x, z)}{\partial z} \right| \quad (5)$$

とおいて、式(4)を(2)に代入し、式(5)の条件を考慮すると、界分布関数  $U(x, z)$  に対し、つぎのような波動方程式が得られる。<sup>(6), (7), (12)</sup>

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - j 2 k(0) \frac{\partial U}{\partial z} - k^2(0) \{ g_0(z) + g_1(z)x + g_2 x^2 \} U = 0 \quad (6)$$

## 2.2 応答電磁界を定める基本式の導出

Gauss-Hermite 波に対する応答電磁界を一般的に求めるために

$$U(x, z) = e^{\{P(z) + jQ(z)\}x^2 + B(z)x + C(z)} \cdot H e_n [D(z)x + F(z)] \quad (7)$$

とおく。ただし、 $B(z)$ ,  $C(z)$ ,  $D(z)$ ,  $F(z)$ ,  $P(z)$  および  $Q(z)$  は、 $z$  のみの連続関数とし、そのうち、 $B(z)$  および  $C(z)$  以外のものは、すべて実数とする。

式(7)を波動方程式(6)に代入して、 $x^2$ ,  $x^1$ , および  $x^0$  のそれぞれの係数を零とおくと、つきのような連立微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} j2k(0) \left\{ \frac{dP}{dz} + j \frac{dQ}{dz} \right\} &= 4 \{ P^2(z) - Q^2(z) \} - g_2 k^2(0) \\ &\quad - j8P(z)Q(z) \end{aligned} \quad (8a)$$

$$j2k(0) \frac{dB}{dz} = 4B(z) \{ P(z) + jQ(z) \} - g_1(z) k^2(0) \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} j2k(0) \frac{dC}{dz} &= B^2(z) + 2 \{ P(z) + jQ(z) \} - 2nD^2(z) \\ &\quad - g_0(z) k^2(0) \end{aligned} \quad (8c)$$

$$j2k(0) \frac{dD}{dz} = D(z) \{ 2(P(z) + jQ(z)) + D^2(z) \} \quad (8d)$$

$$j2k(0) \frac{dF}{dz} = D(z) \{ B(z) + F(z)D(z) \} \quad (8e)$$

まず、式(8a)および(8d)を、それぞれ、実数部と虚数部で分解すると、式(8a)より、

$$\left\{ \begin{array}{l} k(0) \frac{dP}{dz} = 4P(z)Q(z) \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2k(0) \frac{dQ}{dz} + 4(P^2(z) - Q^2(z)) - g_2 k^2(0) = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

が得られ、また、式(8d)より

$$\left\{ \begin{array}{l} D^2(z) = -2 P(z) \\ k(0) \frac{dD}{dz} = 2 D(z) Q(z) \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D^2(z) = -2 P(z) \\ k(0) \frac{dD}{dz} = 2 D(z) Q(z) \end{array} \right. \quad (12)$$

が得られる。

さらに、 $z$ のみの未知関数  $\delta(z)$  (ただし、実数)を導入して、

$$B(z) = -2 \{ P(z) + j Q(z) \} \delta(z) - j k(0) \frac{d}{dz} \{ \delta(z) \} \quad (13)$$

なるおきかえをし、式(8c)を実数部と虚数部に分解すると、

$$D(z) F(z) = 2 P(z) \delta(z) \quad (14)$$

$$k(0) \frac{dF}{dz} = -D(z) \left[ 2 Q(z) \delta(z) + k(0) \frac{d}{dz} \{ \delta(z) \} \right] \quad (15)$$

を得る。

また、式(13)を(8b)に代入し、式(8d)の関係を用いると、

$$\frac{d^2 \delta(z)}{dz^2} + g_2 \cdot \delta(z) = -\frac{1}{2} g_1(z) \quad (16)$$

が得られる。式(16)は、光線の方程式そのものを表わしている。

式(9)～(16)の8ヶの関係式のうち、独立なものは、6個だけである。

したがって、式(9)～(16)を用いて、 $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $B(z)$ ,  $D(z)$ ,  $F(z)$ および $\delta(z)$ の6ヶの未知関数を決定することができる。最後に、式(8c)によって、 $C(z)$ を求めることができる。

以上のようにして、すべての未知関数が決定されると、応答電磁界は、式(7)から求められる。

### 3. レンズ状媒質からなる導波系における 応答電磁界

#### 3.1 直線状導波系

誘電率分布が、

$$\epsilon(x) = \epsilon(0) \{ 1 - (g_x)^2 \} \quad (17)$$

で与えられるような、直線状導波系における応答電磁界を求める。

式(17)は、式(1)の  $g_0(z) = g_1(z) = 0$  および  $g_2 = g^2$  なる特別の場合である。したがって、式(8a)～(8e)は、それぞれ、つぎのように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} j2k(0) \frac{dA(z)}{dz} = 4A^2(z) - g^2 k^2(0) \\ j2k(0) \frac{dB(z)}{dz} = 4A(z)B(z) \end{array} \right. \quad (18a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j2k(0) \frac{dC(z)}{dz} = B^2(z) + 2A(z) - 2nD^2(z) \\ j2k(0) \frac{dD(z)}{dz} = D(z) \{ 2A(z) + D^2(z) \} \end{array} \right. \quad (18b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j2k(0) \frac{dF(z)}{dz} = D(z) \{ B(z) + F(z)D(z) \} \end{array} \right. \quad (18c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j2k(0) \frac{dP(z)}{dz} = D(z) \{ B(z) + F(z)D(z) \} \end{array} \right. \quad (18d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j2k(0) \frac{dQ(z)}{dz} = D(z) \{ B(z) + F(z)D(z) \} \end{array} \right. \quad (18e)$$

ただし、

$$A(z) \equiv P(z) + jQ(z) \quad (19)$$

とおいてある。

前節でのべたのと同様の手順にしたがって、  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$ ,  $D(z)$  および  $F(z)$  をそれぞれ求めると、

$$A(z) = P(z) + jQ(z) = \frac{k(0)g}{2} \cdot \frac{e^{jgz} + a e^{-jgz}}{e^{jgz} - a e^{-jgz}} \quad (20a)$$

$$B(z) = -2 A(z) \delta(z) - j k(0) \delta'(z) \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} C(z) &= \gamma - \frac{1}{2} \ln(e^{jgz} - a e^{-jgz}) + \frac{b^2}{2g^2 k^2(0)} A(z) \\ &\quad + \frac{n}{2} \ln \left( \frac{e^{-jgz} - a^* e^{jgz}}{e^{jgz} - a e^{-jgz}} \right) \end{aligned} \quad (20c)$$

$$D(z) = \sqrt{-2 P(z)} \quad (20d)$$

$$F(z) = -\sqrt{-2 P(z)} \delta(z) \quad (20e)$$

となる。ここで

$$\delta(z) = K_1 \cos g z + K_2 \sin g z \quad (21)$$

であり、 $a, a^*$  ( $a$  の複素共役)、 $b, \gamma, K_1$  および  $K_2$  は、入射条件によって定まる未定々数である。また、 $\delta'(z) = \frac{d}{dz} \{\delta(z)\}$  である。

入射点  $z = 0$  において、 $\frac{1}{s^2}$  なる波面係数をもち、 $x$  方向に  $\delta(0)$  なる軸ずれと  $\delta'(0)$  なる傾きとをもつ Gauss-Hermite 波<sup>(8), (13)</sup>

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= e^{-\frac{1}{2s^2}(x - \delta(0))^2 - j k(0) \delta'(0) x} \\ &\quad \cdot H_{n_0} \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s'^2} \right)} \{x - \delta(0)\} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

(ただし、 $s'$  は  $s$  の複素共役数とする)を仮定して、未定々数  $a, b, \gamma, K_1$  および  $K_2$  を決定し、式 (20a) ~ (20e) をそれぞれ変形していくと、  
 $A(z), B(z), C(z), D(z)$  および  $F(z)$  は、それぞれ、つきのようになる。

$$A(z) = P(z) + jQ(z) = \frac{-1}{2s^2} \left( \frac{\cos g z - j \frac{s^2}{w_0^2} \sin g z}{\cos g z + j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z} \right) \quad (23)$$

$$B(z) = -2 A(z) \delta(z) - j \frac{\delta'(z)}{g w_0^2} \quad (24)$$

$$C(z) = A(z) \delta^2(z) + \frac{j}{2 g w_0^2} (\delta(z) \delta'(z) - \delta(0) \delta'(0))$$

$$+ \ln \sqrt{\cos g z - j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z} \\ + \ln \left[ \frac{(1 - \frac{w_0^2}{s^2})(\cos g z + j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z)}{(1 - \frac{w_0^2}{s^2})(\cos g z - j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z)} \right]^{\frac{n}{2}} \quad (25)$$

$$D(z) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^{*2}} \right)}}{\left| \cos g z - j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z \right|} \quad (26)$$

$$F(z) = -D(z) \delta(z) \quad (27)$$

ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(z) = \delta(0) \cos g z + \frac{\delta'(0)}{g} \sin g z \\ w_0 = \sqrt{\frac{1}{g k(0)}} \end{array} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(z) = \delta(0) \cos g z + \frac{\delta'(0)}{g} \sin g z \\ w_0 = \sqrt{\frac{1}{g k(0)}} \end{array} \right. \quad (29)$$

である。

式(23)～(27)を式(7)に代入すると、Gauss-Hermite波の一般的応答電磁界の表示式は、つきのようになる。

$$E(x, z) = \frac{E_0 \cdot e^{-j k(0) z}}{\sqrt{\left| \cos g z - j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z \right|}} e^{-j(n+\frac{1}{2}) \tan^{-1} \frac{v}{u}}$$

$$\exp \left[ A(z) \{ x - \delta(z) \}^2 - j \frac{\delta'(z)}{2 g w_0^2} \{ 2x - \delta(z) \} - j \frac{\delta'(0) \delta(0)}{2 g w_0^2} \right] \cdot H_{n_0} [ D(z) \{ x - \delta(z) \}] \quad (30)$$

ただし、 $u$ および $v$ は

$$u + j v = \cos g z - j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z \quad (31)$$

を満す実数であり、また、 $E_0$ は $x$ および $z$ に無関係な振幅係数を表わす。

式(30)は、本文とは異なる方法によって求められた従来の結果<sup>(8), (13), (14)</sup>と完全に一致している。すなわち、モード次数 $n=0$ とおくと、文献(8)で得られているガウス波の一般的応答電磁界を表わす式が得られる。また、ビーム中心部の軌跡を与える式(28)は、幾何光学的に求められた光線の軌跡<sup>(14)</sup>に一致している。さらに、入射軸ずれ量 $\delta(0)=0$ 、入射傾き量 $\delta'(0)=0$ および入射波面係数 $1/s^2 = 1/w_0^2$ とおくと、式(30)は、レンズ状媒質の直線部におけるNormal Mode<sup>(15), (16)</sup>を表わす式<sup>(14)</sup>になる。

### 3.2 円形曲り導波系

#### (a) 応答電磁界

図2に示すように、曲率半径 $R$ で一様な円形曲りを生じている導波系を考える。導波系の誘電率分布を

$$\epsilon(r) = \epsilon(R) \cdot \{ 1 - g^2 (r - R)^2 \} \quad (32)$$

とし、 $|x/R| \ll 1$ （ただし、 $x = r - R$ ）が成立すると仮定する。すると、界分布関数 $U_c(x, z)$ （式(4)の $U(x, z)$ に相当する）は、式(5)の条件のもとに、

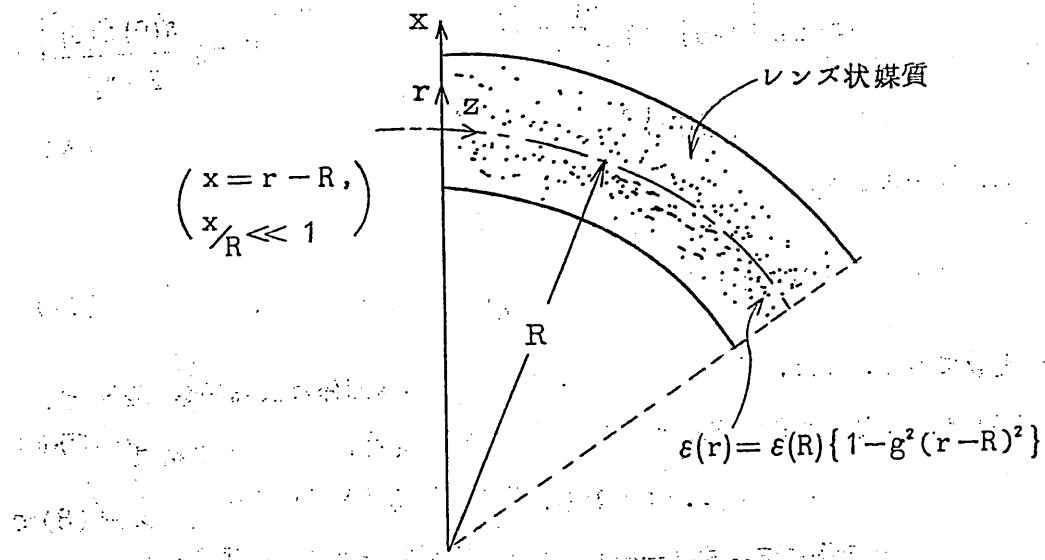


図2 レンズ状媒質からなる導波系の円形曲り

$$\frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} - j 2 k(0) \frac{\partial U_c}{\partial z} - k^2(0) \left( -\frac{2}{R} x + g_c^2 x^2 \right) U_c = 0 \quad (33)$$

ただし

$$g_c = g \sqrt{1 - 2/g^2 R^2} \quad (34)$$

なる波動方程式を満足する。

式(33)は、式(6)の特別の場合である。すなわち、式(6)において、  
 $g_0(z) = 0$ ,  $g_1(z) = -2/R$  および  $g_2 = g_c^2$  とおきかえると、式(33)が得  
 られる。そこで、前節でのべたのと同様の方法によって、式(22)で表わさ  
 れるような軸ずれ、斜入射ビーム波に対する応答電磁界を求めるとき、

$$E_c(x, z) = \frac{E_{co} e^{-j k(0)z}}{\sqrt{\left| \cos g_c z - j \frac{w^2}{s^2} \sin g_c z \right|}} e^{-j(n+\frac{1}{2}) \tan^{-1} \frac{v_c}{u_c}}$$

$$\begin{aligned}
 & \exp \left[ \frac{-\left( \cos g_c z - j \frac{s^2}{w_{co}^2} \sin g_c z \right)}{2 s^2 \left( \cos g_c z - j \frac{w_{co}^2}{s^2} \sin g_c z \right)} \{x - \delta_c(z)\}^2 \right] \\
 & \cdot \left[ -j \frac{\delta'_c(z)}{2 g_c w_{co}^2} \{2x - \delta_c(z)\} - j \frac{\delta'_c(0) \delta_c(0)}{2 g_c w_{co}^2} \right] \\
 & \cdot H_{en} \left[ \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^{*2}} \right)} \{x - \delta_c(z)\}}{\left| \cos g_c z - j \frac{w_{co}^2}{s^2} \sin g_c z \right|} \right] \quad (35)
 \end{aligned}$$

となる。ただし

$$\delta_c(z) = \frac{1 - \cos g_c z}{g_c^2 R} + \delta(0) \cos g_c z + \frac{\delta'(0)}{g_c} \sin g_c z \quad (36)$$

$$\delta'_c(z) = \frac{d}{dz} \{ \delta_c(z) \}, \quad \delta'_c(0) = \left. \frac{d}{dz} \{ \delta_c(z) \} \right|_{z=0} = \delta'(0) \quad (37)$$

および

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{co} \equiv 1 / \sqrt{g_c k(0)} \\ u_c + j v_c = \cos g_c z - j \frac{w_{co}^2}{s^2} \sin g_c z \end{array} \right. \quad (38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c + j v_c = \cos g_c z - j \frac{w_{co}^2}{s^2} \sin g_c z \\ (u_c, v_c; \text{実数}) \end{array} \right. \quad (39)$$

である。

式(35)において、モード次数  $n = 0$  とおくと、先に報告したガウス波の一般的応答電磁界を表わす式が得られる。また、式(35)は、本文とは異なる方法によって得られた文献(13)の結果と完全に一致している。さらに、 $\delta(0) = 1 / g_c^2 R$ ,  $\delta'(0) = 0$  および  $1 / s^2 = 1 / w_{co}^2$  とおくと、式(35)は、円形曲

り部における Normal Mode の電磁界を表わす式<sup>(16), (17)</sup> に一致する。

(b) ピーム行路の脈動を打ち消すための新しい設計方法

ピーム中心部の軌跡（光線の軌跡）を与える式(36)は、つきのように書きあらためることができる。

$$\delta_c(z) = \frac{1}{g_c^2 R} - \sqrt{\left(\delta(0) - \frac{1}{g_c^2 R}\right)^2 + \frac{\delta'(0)^2}{g_c^2}} \cos(g_c z + \varphi) \quad (40)$$

ただし、

$$\varphi = \tan^{-1} \left[ \frac{\delta'(0) / g_c}{1 / g_c^2 R - \delta(0)} \right] \quad (41)$$

式(40)より、ピーム中心部の軌跡が線路の軸と平行になる点  $z_N$  は

$$\delta'_c(z_N) = \frac{d}{dz} \{ \delta_c(z) \} \Big|_{z=z_N} = 0$$

より、

$$z_N = (N\pi - \varphi) / g_c \quad (42)$$

ただし、 $N = 0, 1, 2, \dots$

となる。また、 $z_N$  における軸ずれ量  $\delta_c(z_N)$  の値は

$$\delta_c(z_N) = \begin{cases} -\frac{1}{g_c^2 R} - \sqrt{\left(\delta(0) - \frac{1}{g_c^2 R}\right)^2 + \frac{\delta'(0)^2}{g_c^2}} & : (N=2m) \\ \frac{1}{g_c^2 R} + \sqrt{\left(\delta(0) - \frac{1}{g_c^2 R}\right)^2 + \frac{\delta'(0)^2}{g_c^2}} & : (N=2m+1) \end{cases} \quad (43)$$

（ただし、 $m = 0, 1, 2, \dots$ ）となる。

したがって、入射条件、すなわち、 $\delta(0)$  および  $\delta'(0)$  の値に応じて、表 1 に示すような  $z$  の値  $z_c$  および曲率半径  $R_c$  を用いて、図 3 のように円形曲り

表1 ピーム行路の脈動を除去するための円形曲り部の設計条件

入射条件 $\left( \varphi = \tan^{-1} \left[ \frac{\delta'(0)/g_c}{1/g_c^2 R - \delta(0)} \right] \right)$		$z_c$	$R_c$
$\frac{\pi}{2} > \varphi > 0$	$\frac{1}{g_c^2 R} > \sqrt{\left(\delta(0) - \frac{1}{g_c^2 R}\right)^2 + \frac{\delta'(0)^2}{g_c^2}}$	$\frac{\pi - \varphi}{g_c}$	$\frac{1}{\frac{1}{R} + g_c \sqrt{\left(\frac{1}{g_c^2 R} - g_c \delta(0)\right)^2 + \delta'(0)^2}}$
$\varphi = 0$ ( $\delta'(0) = 0$ )	$\frac{2}{g_c^2 R} > \delta(0)$	$\frac{\pi}{g_c}$	$\frac{1}{\frac{2}{R} - g_c^2 \delta(0)}$
	$\frac{2}{g_c^2 R} \leq \delta(0)$	$\frac{2\pi}{g_c}$	$\frac{1}{g_c^2 \delta(0)}$
$0 > \varphi > -\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{g_c^2 R} > \sqrt{\left(\delta(0) - \frac{1}{g_c^2 R}\right)^2 + \frac{\delta'(0)^2}{g_c^2}}$	$\frac{-\varphi}{g_c}$	$\frac{1}{\frac{1}{R} - g_c \sqrt{\left(\frac{1}{g_c^2 R} - g_c \delta(0)\right)^2 + \delta'(0)^2}}$
	$\frac{1}{g_c^2 R} \leq \sqrt{\left(\delta(0) - \frac{1}{g_c^2 R}\right)^2 + \frac{\delta'(0)^2}{g_c^2}}$	$\frac{\pi - \varphi}{g_c}$	$\frac{1}{\frac{1}{R} + g_c \sqrt{\left(\frac{1}{g_c^2 R} - g_c \delta(0)\right)^2 + \delta'(0)^2}}$

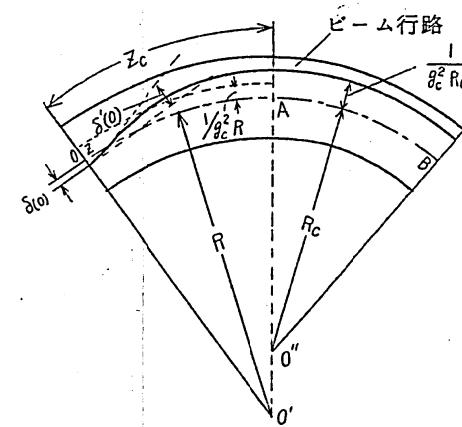
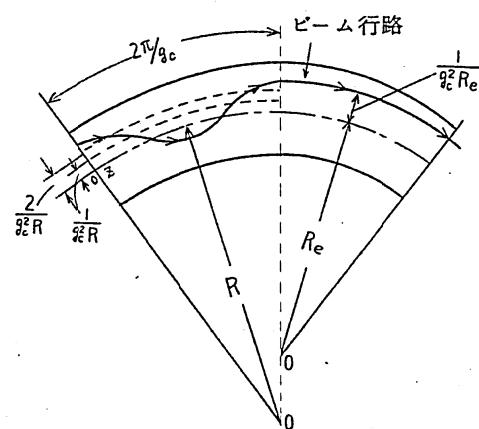
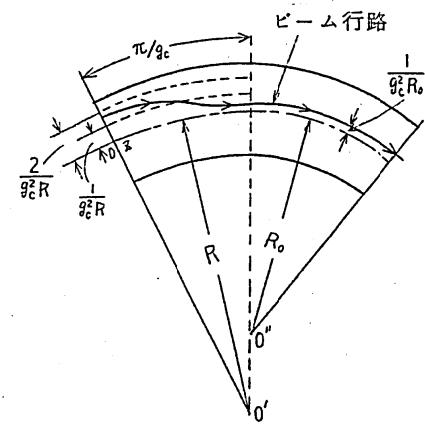
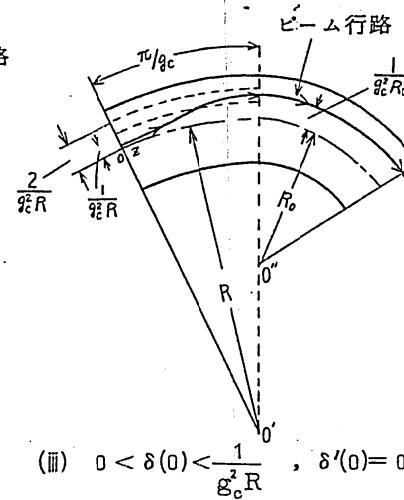
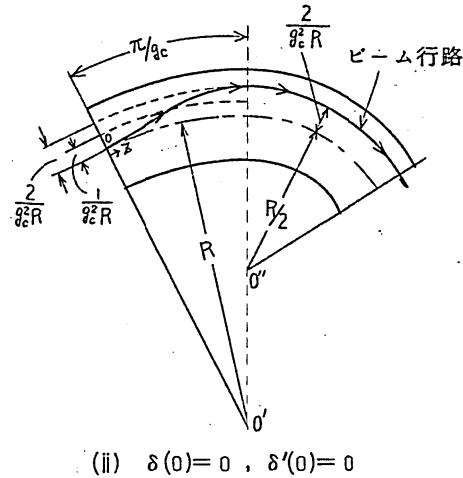
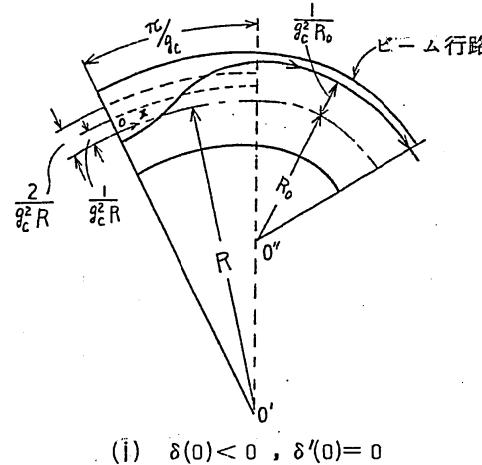


図3 ピーム行路の脈動を除去するための円形曲り部の設計方法



$$R_o = \frac{1}{\frac{2}{g_c^2 R} - g_c^2 \delta(0)}$$

$$R_e = \frac{1}{g_c^2 \delta(0)}$$

図4 ビーム行路の脈動を軽減するための円形曲り部の設計例  
( $\delta'(0) = 0$  なる場合)

部を設計しておくと、 $z \geq z_c$  なる曲り部分（図3の円弧  $\widehat{AB}$  の部分）では、  
 $\delta_c(z) = \frac{1}{g_c^2} R_c$  となって、ビーム行路の脈動を完全に除去することができる。  
 $\delta(0)=0$  とした場合の設計例を図4に示してある。先に提案した文献(6)  
の設計方法は、図4の(ii)の場合、( $\delta(0)=\delta'(0)=0$  なる場合)に相当する。  
図4の設計例では、 $0 \leq z \leq z_c$  なる部分の脈動を最小限におさえるために  
は、入射軸ずれ量を、 $\delta(0) < \frac{2}{g_c^2} R_c$  となるようにえらんでおく必要がある  
ことがわかる。

表1、図3および図4から明らかなように、曲り部への入射点  $z=0$  において、適当な軸ずれ量  $\delta(0)$  と傾き量  $\delta'(0)$  を与えておくことによって、 $\delta(0)=\delta'(0)=0$  なる場合<sup>(6)</sup>よりも、脈動区間  $0 \leq z \leq z_c$  を一層短縮し得ることが知られる。

### 3.3 正弦状のうねり曲り導波系

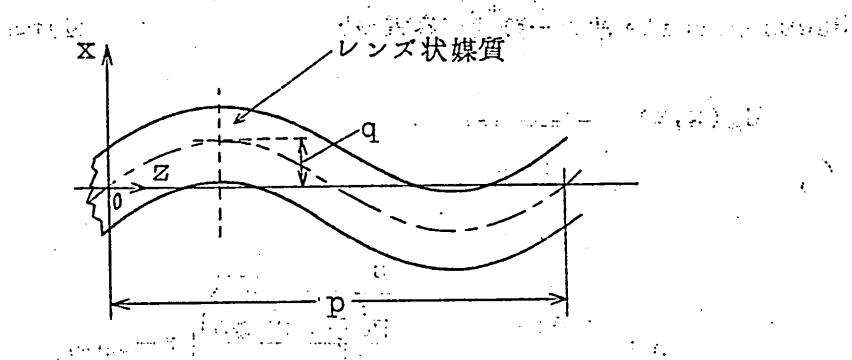


図5 レンズ状媒質からなる導波系の正弦状うねり曲り

導波系の中心軸が、図5に示すように

$$x_0(z) = q \sin \frac{2\pi}{p} z \quad (45)$$

なる正弦状のうねり曲りを生じてゐる場合を考える。

ただし、 $p$  および  $q$  は、それぞれ、うねり曲りの周期および振幅を表わす定数である。

導波系の誘電率分布として、線路の中心軸からの距離の二乗に比例して減少するような分布（式（17））を仮定すると、応答電磁界を定める界分布関数  $U_s(x, z)$  の満足すべき波動方程式は、近似的につぎのようになる。<sup>(7), (12)</sup>

$$\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} - j 2 k(0) \frac{\partial U_s}{\partial z} - g^2 k^2(0) \left( x - q \sin \frac{2\pi}{p} z \right)^2 U_s = 0 \quad (46)$$

式（46）は、式（6）の特別の場合、すなわち、

$$g_0(z) = q^2 \sin^2 \frac{2\pi}{p} z, \quad g_1(z) = -2q \sin \frac{2\pi}{p} z, \quad g_2 = g^2$$

なる場合である。そこで、前節と同様にして、式（22）で表わされる入射 Gauss-Hermite 波の一般的応答電磁界を求めるとき、

$$E_s(x, z) = \frac{E_{s0} e^{-j k(0)z}}{\sqrt{\left| \cos g z - j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z \right|}} e^{-j(n + \frac{1}{2}) \tan^{-1} \frac{v}{u}}$$

$$\exp \left[ \frac{-\left( \cos g z - j \frac{s^2}{w_0^2} \sin g z \right)}{2 s^2 \left( \cos g z - j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z \right)} \left\{ x - \delta_s(z) \right\}^2 \right.$$

$$- j \frac{\delta'_s(z)}{2 g w_0^2} \left\{ 2x - \delta_s(z) \right\} - j \frac{\delta'_s(0) \delta_s(0)}{2 g w_0^2} \left. \right]$$

$$\cdot H e_n \left[ \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^{*2}} \right)} \left\{ x - \delta_s(z) \right\}}{\left| \cos g z - j \frac{w_0^2}{s^2} \sin g z \right|} \right] \quad (47)$$

ただし、

$$\delta_s(z) = \delta(0) \cos g z + \frac{\delta'(0)}{g} \sin g z + \tilde{\delta}_s(z) \quad (48)$$

であり、 $\tilde{\delta}_s(z)$  は、

$$\tilde{\delta}_s(z) = \begin{cases} \frac{q \cdot g^2}{\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 - g^2} \left( \sin \frac{2\pi}{p} z - \frac{2\pi}{gp} \sin g z \right) & : \left( p \neq \frac{2\pi}{g} \right) \\ \frac{q}{2} (g z \cos g z - \sin g z) & : \left( p = \frac{2\pi}{g} \right) \end{cases} \quad (49)$$

$$= \begin{cases} \frac{q \cdot g^2}{\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 - g^2} \left( \sin \frac{2\pi}{p} z - \frac{2\pi}{gp} \sin g z \right) & : \left( p \neq \frac{2\pi}{g} \right) \\ \frac{q}{2} (g z \cos g z - \sin g z) & : \left( p = \frac{2\pi}{g} \right) \end{cases} \quad (50)$$

で与えられる。

ビーム中心部の軌跡を与える式 (48) は、 $\delta(0) = \delta'(0) = 0$  なる入射条件のもとでは、 $\delta_s(z) = \tilde{\delta}_s(z)$  となる。これは、同一の入射条件のもとで、H. G. Unger<sup>(11)</sup> が幾何光学的に求めた光線の軌跡と完全に一致している。

すなわち、うねり曲りの周期  $p$  が  $2\pi/g$  なる量に等しくないとき、ビーム行路は式 (49) にしたがった周期的な応答を示す。これに対し、 $p = 2\pi/g$  なる場合には、ビーム行路は、式 (50) に示すように、伝送距離  $z$  の増加と共に、振動しながら、導波系の中心軸から次第に遠ざかっていくような応答を示す。<sup>(7), (11)</sup>

入射条件として

$$\delta(0) = 0 \quad (51)$$

$$\delta'(0) = \begin{cases} \frac{q g^2 \cdot (2\pi/p)}{\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 - g^2} & : \left( p \neq \frac{2\pi}{g} \right) \\ \frac{q g}{2} & : \left( p = \frac{2\pi}{g} \right) \end{cases} \quad (52)$$

$$= \begin{cases} \frac{q g^2 \cdot (2\pi/p)}{\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 - g^2} & : \left( p \neq \frac{2\pi}{g} \right) \\ \frac{q g}{2} & : \left( p = \frac{2\pi}{g} \right) \end{cases} \quad (53)$$

とえらぶと、式(48)～(50)より、

$$\delta_s(z) = \begin{cases} \frac{qg^2}{\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 - g^2} \sin \frac{2\pi}{p} z & : \left(p \neq \frac{2\pi}{g}\right) \\ \frac{qg}{2} z \cos \frac{2\pi}{p} z & : \left(p = \frac{2\pi}{g}\right) \end{cases} \quad (54)$$

$$(55)$$

となる。式(51)および(52)が満足されるとき、ビーム中心部の脈動の周期は、式(54)に示すように、導波系のうねりの周期  $p$  のみによって定まり、媒質定数  $g$  には無関係となる。したがって、このとき  $s = w_0$  とおくと、式(47)は、正弦状うねり曲り部における Normal Mode<sup>(7)</sup> を表わすと考えられる。また、式(48)～(55)から明らかのように、 $p = \frac{2\pi}{g}$  なる場合に生じるビーム行路発散の現象は、入射条件  $\delta(0)$  および  $\delta'(0)$  の値をどのようにえらんでも、さけることはできない。この現象の物理的意味は、本文と類似のうねり曲り、すなわち、たわみ曲線に沿ったうねり曲りの場合について既に明らかにされている<sup>(7)</sup> ように、モード結合理論の立場からみると、固有姿態間にモード変換が起る結果であると解釈される。

#### 4. あとがき

<sup>②</sup> ガスレンズ導波系や集束性伝送体(SELFOC)<sup>③</sup> のように、誘電率が線路の中心軸からの距離の 2 乗に比例して減少するような分布をもつレンズ状媒質からなる導波系における軸ずれ、斜入射ビーム波の応答電磁界を求めるための新しい方法を提案し、直線状導波系、円形曲り導波系および正弦状うねり曲り導波系等に適用した。その結果、本文の方法によれば、従来の方法に

比較して、一層、直接的に、簡単に、かつ、統一的に応答電磁界を求めることができる事を示した。また、円形曲り導波系に関しては、ビーム行路の脈動を除去するための円形曲り部の設計方法として、従来よりも一層有効な新しい方法を提案した。さらに、正弦状うねり曲り導波系に関しては、今まで知られていなかった応答電磁界の表示式およびうねり曲り部における固有姿態を導き、H. G. Unger<sup>(1)</sup>による従来の幾何光学的解析結果との関連を明確にした。

本文で提案した解析方法は、伝送方向に誘電率分布が周期的に変化しているような、さらに複雑な導波系に対しても、容易に拡張、適用することができる。

### 謝辞

日頃から御指導いただき本学板倉清保教授ならびに常々御討論いただき板倉研究室の方々に深謝する。

## 文 献

- (1) P.K. Tien, J.P. Gordon, and J.R. Whinnery; "Focusing of a light beam of Gaussian field distribution in continuous and periodic lens-like media", Proc. of IEEE, 53, p. 129 (Feb. 1965).
- (2) D.W. Berreman; "A lens or light guide using convectively distorted thermal gradient in gases", Bell Syst. tech. J., 43, p. 1469 (July 1964).
- (3) 日本電気株式会社中央研究所; 集束性伝送体(SELFOC)見学資料 (Feb. 1969).
- (4) 熊谷信昭, 倉菌貞夫, 沢 新之輔, 吉川憲昭; "不均一誘電体薄膜表面波線路", 信学論(B), 51-B, 3, p. 82 (March, 1968).
- (5) 熊谷信昭, 沢 新之輔; "周期的なレンズ収束効果をもつ誘電体薄膜表面波線路", 信学論(B), 51-B, 12, p. 600 (Dec. 1968).
- (6) 沢 新之輔, 熊谷信昭; "曲りガスレンズに関する一考察", 信学論(B), 52-B, 3, p. 181 (March 1969).
- (7) 沢 新之輔, 熊谷信昭; "レンズ状媒質からなる導波系のうねり曲りに関する波動光学的考察", 辐射科学研究会資料(1968-11), 信学誌掲載予定.
- (8) 今井正明, 伊藤精彦, 松本 正; "理想的ガスレンズの波動光学的考察", 信学論(B), 51-B, 5, p. 185 (May 1968).
- (9) 今井正明, 伊藤精彦, 松本 正; "理想的媒質をもつ曲りガスレンズについて", 信学論(B), 51-B, 6, p. 217 (June 1968),

- (10) 沢 新之輔, 熊谷信昭; “今井正明, 伊藤精彦, 松本 正氏「理想的  
媒質をもつ曲りガスレンズについてに対する質疑, 討論”, 信学誌掲載予定.
- (11) H. G. Unger; “Light beam propagation in curved sch-  
lieren guides”, Arch. elekt. Übertragung, 19, 4,  
p. 189 (April 1965).
- (12) H. Kogelnik; “On the propagation of Gaussian beams  
of light through lens-like media including those  
with a loss or gain variation”, Applied Optics, 4,  
2, p. 1562 (Dec. 1965).
- (13) 末松安晴; “ビーム導波系用収束素子の異軸, 斜入射ガウス波に対する  
性質”, マイクロ波研資(昭42-01).
- (14) S. E. Miller; “Light propagation in generalized Lens-  
Like media”, Bell Syst. tech. J., 44, p. 2017  
(Nov. 1965).
- (15) E. A. J. Marcatili; “Modes in a sequence of thick  
astigmatic lens-like focusers”, Bell Syst. tech. J.,  
43, p. 2887 (Nov. 1964).
- (16) 末松安晴, 吹抜洋司; “理想化されたガスレンズ導波系の解析”,  
信学誌, 48, p. 1684 (昭40-10).
- (17) 沢 新之輔, 熊谷信昭; “不均一誘電体薄膜表面波線路の円形曲り(H  
面ペンド)”, 信学論(B), 52-B, 3, p. 115 (March 1969).

輻射科學研究會資料

レンズ状媒質の  
等価性について

山本錠彦 牧本利夫  
(大阪大学基礎工学部)

昭和44年4月25日

## 1 まえがき

分布定数系の等価性という問題に関して、さきに一次元の系の一様である不均等分布定数線路を対象とし、その等価変換という問題について解析を行なった。<sup>(1)</sup> ここでは別の例として、二次元の系の一様であるレンズ状媒質を取りあげ、その等価性について考察することにする。このような、光学系の等価性という問題は、複合レンズ系などといった discrete な系については、例えば等価レンズといったような観点から、これまでにも解析されているが、レンズ状媒質のような continuous な光学系についてはまだ報告されていないようである。

レンズ状媒質は光ビームの伝送路として最近注目を集めている。なかでも多くの人々によって解析されていふものは、断面内で屈折率分布が放物線状をなしていふものであり、本文でもこの場合を取り扱う。解析の対象とするレンズ状媒質は、 $z$  軸を進行方向とする直角座標 ( $x, y, z$ ) において

$$n(x, z) = n_0(z) - (1/2) n_2(z) \cdot x^2 \quad (1)$$

ただし

$$n_0(z) \gg n_2(z) > 0 \quad (2)$$

なる形の屈折率分布を有する収束性レンズ状媒質である。解析を簡単にするために二次元媒質を考えている。レンズ状媒質を規定する2種のパラメータは  $n_0(z)$  と  $n_2(z)$  であり、 $n_0(z)$  はZ軸上 ( $X=0$ ) における屈折率分布をあらわし、 $n_2(z)$  は断面内の屈折率の変化の度合を決定する。ここではこれらの中数形は特に指定せず、任意の不均等分布を考える。式(1)のような屈折率分布を有する媒質を用いた装置の例としては、flow-type gas lens や acoustic lens などが挙げられる。

## 2 光学系の Ray Transfer Matrix

種々の光学系はいわゆる Ray Transfer Matrix (以後 RT M と略記する。) によって記述される。これは、その光学系を真空中に置いたとき、それを通過する paraxial ray の両端面における ray position と ray slope の関係をあたえるものであって、次式で定義される<sup>(2)</sup> (図1参照)。ただし系は二次元とする。

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ S_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

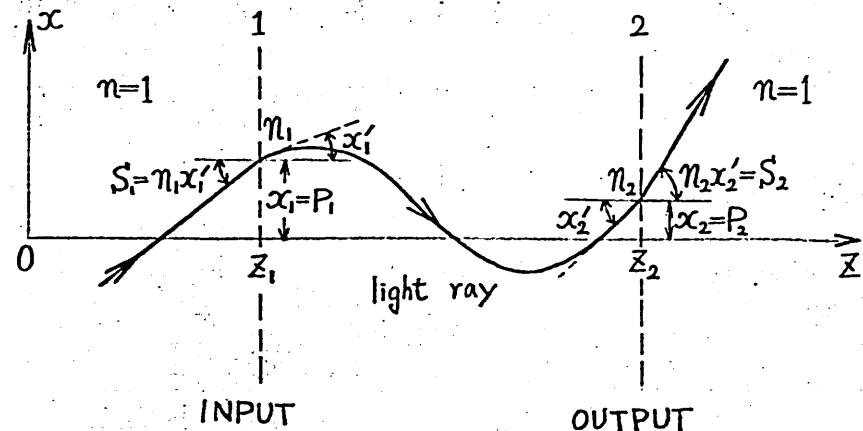


図1 光学系中の ray trajectory

図1において、 $n_1, n_2$ はそれぞれ入射角および出射角におけるその系の屈折率であり、またダッシュは $z$ に関する微分をあらわす。ここで注意すべきことは、端面のすぐ外側におけるrayの $z$ 軸に対する傾きをRTM中のray slopeと考えていることである。なお相反性により、RTMのパラメータ間には次式が成立する。

$$A \cdot D - B \cdot C = 1 \quad (4)^*$$

このRTMは光学系を解析する際に便利な表示であり、これが介ればその系の安定性など種々の特性が判明する。またRTMの重要な性質として、これがその系における Gaussian beam の伝搬の模様をあらわしていること

\* 本文と異なり、 $S_1 = x'_1, S_2 = x'_2$  と定義した場合には、一般に式(4)の関係は成立しない。

ことが挙げられる<sup>(3)</sup>。すなはち、Gaussian beam を規定する量は複素ビーム・パラメータであるが、ある光学系の input および output における複素ビーム・パラメータはいわゆる ABCD 則によって関係づけられる。

このように、両端面における量を結びつける RTM によって光学系の特性は記述できる。したがって、たとえ内部構造が異なっていても、RTM が一致するような光学系は‘等価である’といふことができる。

### 3 レンズ状媒質中の Paraxial Ray 方程式とその RTM

本節では式(1)の屈折率分布を有するレンズ状媒質の RTM を導く。そのためにはまず、屈折率分布が位置の関数としてあらわされる媒質中の paraxial ray 方程式を求めなければならぬ。出発点はアイコナール方程式より導かれるつきの式である<sup>(4)</sup>。

$$\frac{d}{ds} \left( n d\beta/ds \right) = \text{grad } n \quad (5)$$

ただし  $\beta$  は ray 上の代表点に向う位置ベクトル、  $ds$  は ray に沿っての線素である。いま考えているのはほぼ z 軸に沿う paraxial ray であるから、  $ds \equiv dz$  と考えてよ。

i). したがって式(5)は

$$\frac{d}{dz} \left[ n \frac{d\beta/dz}{d\beta} \right] = \nabla n \quad (6)$$

となる。さらに、ベクトル  $\beta^0$  を z 軸の原点より測るものとし、これを z 方向のベクトル  $\beta_z$  と、それに垂直なベクトル  $\beta_t$  に分解する。すなはち  $\beta^0 = \beta_z + \beta_t$  ( $\beta_z \perp \beta_t$ ) とし、これを式(6)に代入して整理すれば次式が得られる。

$$\frac{d}{dz} \left[ n \frac{d\beta_z/dz}{d\beta} \right] = \nabla_t n \quad (7)$$

ただし  $\nabla_t n$  は  $\text{grad } n$  の z 軸に垂直な成分である。(1) まの場合二次元媒質を考えているので、 $\beta_z = \hat{i}_x x$ ,  $\nabla_t n = \hat{i}_x \partial n / \partial x$  となり、したがって式(7)は

$$\frac{d}{dz} \left[ n \frac{dx/dz}{d\beta} \right] = \partial n / \partial x \quad (8)$$

となる。これが求める paraxial ray 方程式であり、式(1)を代入すれば、収束性レンズ状媒質中の paraxial ray 方程式が得られる。

$$\frac{d}{dz} \left[ n_0(z) \frac{dx(z)/dz}{d\beta} \right] = -n_2(z) \cdot x(z) \quad (9)$$

ただし式(2)の関係を用いている。この微分方程式が以後の解析の基礎となる式である。レンズ状媒質の RTM を求めるにはこの式を解かねばならぬが、それにさきたてて、次式によって独立変数に関する変数変換を行なう。

$$\lambda = \mathcal{L}(z) \quad (10)$$

変換関数  $\mathcal{L}(z)$  の関数形はこの段階においては特に指定はせず、任意であってよりか、のちに逆関数を求めることが必要になるため、 $z$  の一価関数であるという条件だけをつけておくことにする。式(10)の変換により式(9)は

$$d/d\lambda [\tilde{N}_0(\lambda) \cdot d\tilde{x}(\lambda)/d\lambda] + \tilde{N}_2(\lambda) \cdot \tilde{x}(\lambda) = 0 \quad (11)$$

となる。ただし

$$\tilde{N}_0(\lambda) = N_0(z) = n_0(z) \cdot d\lambda/dz \quad (12-a)$$

$$\tilde{N}_2(\lambda) = N_2(z) = n_2(z) / d\lambda/dz \quad (12-b)$$

なお式(11), (12)において、記号‘~’は変数変換によって関数形が変ることを示している\*。式(11)の2階線形微分方程の2種の独立解を  $(\phi(\lambda), \psi(\lambda))$  とすれば、ray position

$$P(z) \equiv x(z) \quad (13)$$

をあたえる式(11)の一般解は

$$x(z) = \tilde{x}(\lambda) = C_1 \phi(\lambda) + C_2 \psi(\lambda) \quad (14)$$

となる。そして ray slope

$$S(z) \equiv n_0(z) \cdot dx(z)/dz \quad (15)$$

\* ある  $z$  の関数 ( $f(z)$  としよう) があるて、これを入の関数としてあらわすとき、 $\tilde{f}(\lambda)$  と書く。

は次式であたえられる。

$$\begin{aligned} n_0(z) \cdot d\chi(z)/dz &= \tilde{N}_0(\lambda) \cdot d\tilde{\chi}(\lambda)/d\lambda \\ &= \tilde{N}_0(\lambda) [C_1 \dot{\phi}(\lambda) + C_2 \dot{\psi}(\lambda)] \end{aligned} \quad (16)$$

ただしドットは入に関する微分をあらわす。式(1)のレンズ状媒質の有限長区间 ( $0 \leq z \leq L$ ) のRTMを求めるには、式(14), (16)に両端における入の値

$$\lambda_0 = \mathcal{L}(0), \quad \lambda_L = \mathcal{L}(L) \quad (17)$$

を代入し、定数  $C_1, C_2$  を消去して、式(3)の形式に整理すればより。こうやって得られるRTMのパラメータが相反条件を満足することは、Wronskianの性質を用いれば容易に証明することができる。

以上の結果をもとにして、次節以降にありて、本文の目的であるレンズ状媒質の等価性という問題について考えていくことしよう。

#### 4 レンズ状媒質の等価性

相異なる屈折率分布を有する幾つかのレンズ状媒質に対する paraxial ray 方程式（式(9)）はまちろん同じではないが、それぞれに対し適当な変数変換を行なったとき、

変換された方程式（式(14)）が同形になるということは必ずしも有り得ないことではなし。このことを考慮しつつ前節の結果を検討することにより、レンズ状媒質の等価性に関するつきの定理が導びかれる。

「幾種類かの有限長レンズ状媒質があるて、これらに對しつづの形式の変数変換

$$\lambda = F(\ell) \quad (18-a)$$

$$\ell = \int_0^z [n_2(z)^\beta / n_0(z)^\alpha] dz, \quad (\alpha + \beta = 1) \quad (18-b)$$

を行なったとき、変換された  $n_0 \cdot n_2$  積の関数形が（入領域で）一致し、しかもこれらの媒質の output において各変換関数が等しい値をとるならば、これらのレンズ状媒質は‘同一の RTM を有する’という意味で等価になる。ただし媒介関数  $F(\ell)$  は  $\ell$  を変数とする任意の一価関数であり、また一般性を失なうことなく各媒質の input はすべて  $z=0$  なる平面上に位置するものとしている。」

これがレンズ状媒質の等価性という問題について論ずる際の基礎となる定理であり、定理中の条件が満たされるとき、ある ray position, ray slope をもつてこれらの媒

複に入射した ray はすべて同一の ray position, ray slope をもって出でいくということになる。あるいは Gaussian beam の場合でいえば、あるスポット・サイズおよび波面曲率半径をもつてこれらが媒質に入った beam はすべて同一のスポット・サイズおよび波面曲率半径をもつ beam に変換されるということになる。ここで考えている「等価」という意味は、discrete 在光学系において用いられてる定義と同じである。なお本文では、上述の定理が導かれる過程、とくにレンズ状媒質の等価変換という問題において最も重要な役割をはたす変換関数(式(18))の誘導については記述を省略した。ただし定理の証明としてはつぎのこととを示すだけで充分であろう。

すなわち、式(18)より

$$d\lambda/dz = [\eta_2(z)^p/\eta_0(z)^p] d\lambda/d\ell, \quad (p+q=1) \quad (19)$$

となるから、この形の変換関数を用いたとき、変換された paraxial ray 方程式(式(11))の係数  $\tilde{N}_0(\lambda)$ ,  $\tilde{N}_2(\lambda)$  はつきのように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{N}_0(\lambda) &= \eta_0(z)^{1-p} \cdot \eta_2(z)^p \cdot d\lambda/d\ell \\ &= [\tilde{\eta}_0(\lambda) \cdot \tilde{\eta}_2(\lambda)]^p / dF^*(\lambda)/d\lambda \end{aligned} \quad (20-a)$$

同様に、

$$\tilde{N}_2(\lambda) = [\tilde{n}_0(\lambda) \cdot \tilde{n}_2(\lambda)]^p \cdot dF^*(\lambda)/d\lambda \quad (20-b)$$

ここに  $F^*$  は  $F$  の逆関数である。（仮定により、これ  
は一義的に決定される。）

この定理はレンズ状媒質の等価変換、すなわちあるパラメータ  $(n_0(z), n_2(z))$  をもつ媒質があたえられたとき、これに等価な別の媒質のパラメータを求めるための一  
般的な手段を示している。実際にはまず、変換されるべき original の媒質の屈折率分布の関数形に応じて、変換  
関数が最も簡単になるように媒介関数  $F(\lambda)$  および指数  $(p, q)$  を選び、 $n_0 \cdot n_2$  積が入領域で同じ関数形をとるよ  
うに、等価媒質の屈折率分布を決定してやればよい。こ  
のように、変換関数の決定に際して多くの自由度がある  
といふことが、この定理にもとづく等価変換法の利点で  
ある。

では等価変換の具体例に移るまえに、等価レンズ状媒  
質の性質について述べておこう。

(i) Original の媒質と等価媒質の実際の長さ（入領域  
における長さ）は一般に相異なる。しかし（変換された）

入領域における長さは相等しい。

(ii) Original の媒質と等価媒質とにおいては、ray の入射条件が同じであれば、反射条件はもちろん同じである。しかし両媒質中の ray trajectory は一般に相異なる。これについては次節で考察する。

(iii) 等価変換の吉とて  $\int_0^L [1/n_0(z)] dz$  および  $\int_0^L n_1(z) dz$  なる量はともに保存される。ただし  $L$  は媒質の全長である。証明は簡単であるから省略する。したがって、軸上の屈折率が大きければ等価媒質長は長くなり、また断面内の屈折率変化が大きければ等価媒質長は短くなることをがえる。

(iv) Original の媒質を通過する ray の遅延時間と、これと同一の条件のもとに等価媒質を通過する ray の遅延時間とは一般に相異なる。このことに関しては、例えば軸に沿って入射する ray の遅延時間に比例する  $\int_0^L n_0(z) dz$  なる量について考えてみれば明らかであろう。

(v) あるレンズ"状媒質があたえられたとき、これに等価なレンズ"状媒質は一般に無数に存在する。

## 5 等価レンズ状媒質

本節では等価媒質の具体例を挙げることにする。まず始めに最も簡単な例で、通常の温度勾配を利用したガスレンズなどにみられるつぎのような媒質である。

$$n(x, z) = n_{00} - (1/2)n_{20} \cdot x^2, \quad (0 \leq z \leq L) \quad (21)$$

ただし  $n_{00}, n_{20}$  は定数であり、この媒質は  $z$  方向に一株の屈折率分布を有している。この場合は簡単で、交換関数を導ぶまでもなく

$$n_0(z) \cdot n_2(z) = n_{00} \cdot n_{20} = \text{const.} \quad (22)$$

であるから、これに等価な媒質の屈折率分布を

$$n^*(x, z) = n_0^*(z) - (1/2)n_2^*(z) \cdot x^2, \quad (0 \leq z \leq L^*) \quad (23)$$

とすれば、次式が成立しなければならぬ。

$$n_0^*(z) \cdot n_2^*(z) = n_{00} \cdot n_{20} \quad (24)$$

したがって

$$n^*(x, z) = n_{00} \cdot f(z) - (1/2)n_{20} / f(z) \cdot x^2 \quad (25)$$

ただし  $f(z)$  は  $(0 \leq z \leq L^*)$  なる区间で正値をとる任意の実数である。このように、式(21)の媒質に等価な媒質は  $n_0(z)$  と  $n_2(z)$  が反比例するよう分布をもつものである。言い換えれば、式(25)は  $z$  方向に一株を収束性レンズ状媒質

を一般化した媒質の屈折率分布をあらわすと考えることができる。なおこの場合、等価長  $L^*$  の決定式は次式であたえられる。

$$\int_0^{L^*} [1/f(z)] dz = L \quad (28)$$

前節の終りに、等価媒質中の ray trajectory は一般に相異なるということを述べたが、つきに上述の媒質の場合を例にとってこのことを考えてみよう。表 1 には、式 (21) の original の媒質と式 (25) の等価媒質（ただし  $f(z) = \operatorname{sech}\mu z$  と選んだ場合）とにおいて、それぞれ対応する式を示している。なお変換関数の形としては、式 (6)において  $F(\ell) = \ell$  かつ  $p = q = 1/2$  とありたものの用いていきる。

表 1

	Original の媒質	等価媒質 ( $f(z) = \operatorname{sech}\mu z$ )
paraxial ray 方程式 ( $z$ 領域)	$d^2x/dz^2 + (\eta_{20}/\eta_{00})x = 0$	$d/dz [\eta_{00} \operatorname{sech}\mu z \cdot dx/dz] + \eta_{20} \operatorname{cosh}\mu z \cdot x = 0$
変換関数	$\lambda = \sqrt{\eta_{20}/\eta_{00}} \cdot z$	$\lambda^* = \sqrt{\eta_{20}/\eta_{00}} \cdot \sinh\mu z/\mu$
paraxial ray 方程式 ( $\lambda$ 領域)	$d^2\tilde{x}/d\lambda^2 + \tilde{x} = 0$	$d^2\tilde{x}/d\lambda^{*2} + \tilde{x} = 0$
ray trajectory ( $\lambda$ 領域)	$\tilde{x}(\lambda) = C_1 \cdot \sin\lambda + C_2 \cdot \cos\lambda$	$\tilde{x}(\lambda^*) = C_3 \cdot \sin\lambda^* + C_4 \cdot \cos\lambda^*$
ray trajectory ( $z$ 領域)	$x(z) = C_1 \cdot \sin(\sqrt{\eta_{20}/\eta_{00}} \cdot z) + C_2 \cdot \cos(\sqrt{\eta_{20}/\eta_{00}} \cdot z)$	$x(z) = C_3 \cdot \sin(\sqrt{\eta_{20}/\eta_{00}} \cdot \sinh\mu z/\mu) + C_4 \cdot \cos(\sqrt{\eta_{20}/\eta_{00}} \cdot \sinh\mu z/\mu)$

表 1 をみれば両媒質中の trajectory が相異なるところと  
は明らかである。

以上の結果は、original の媒質中の trajectory さえ分  
かっていれば、等価媒質中の trajectory を簡単に図式的に求  
め得る方法が存在することを示している。この方法につ  
いてつぎに述べよう。図 2 にこれを説明していこう。まず

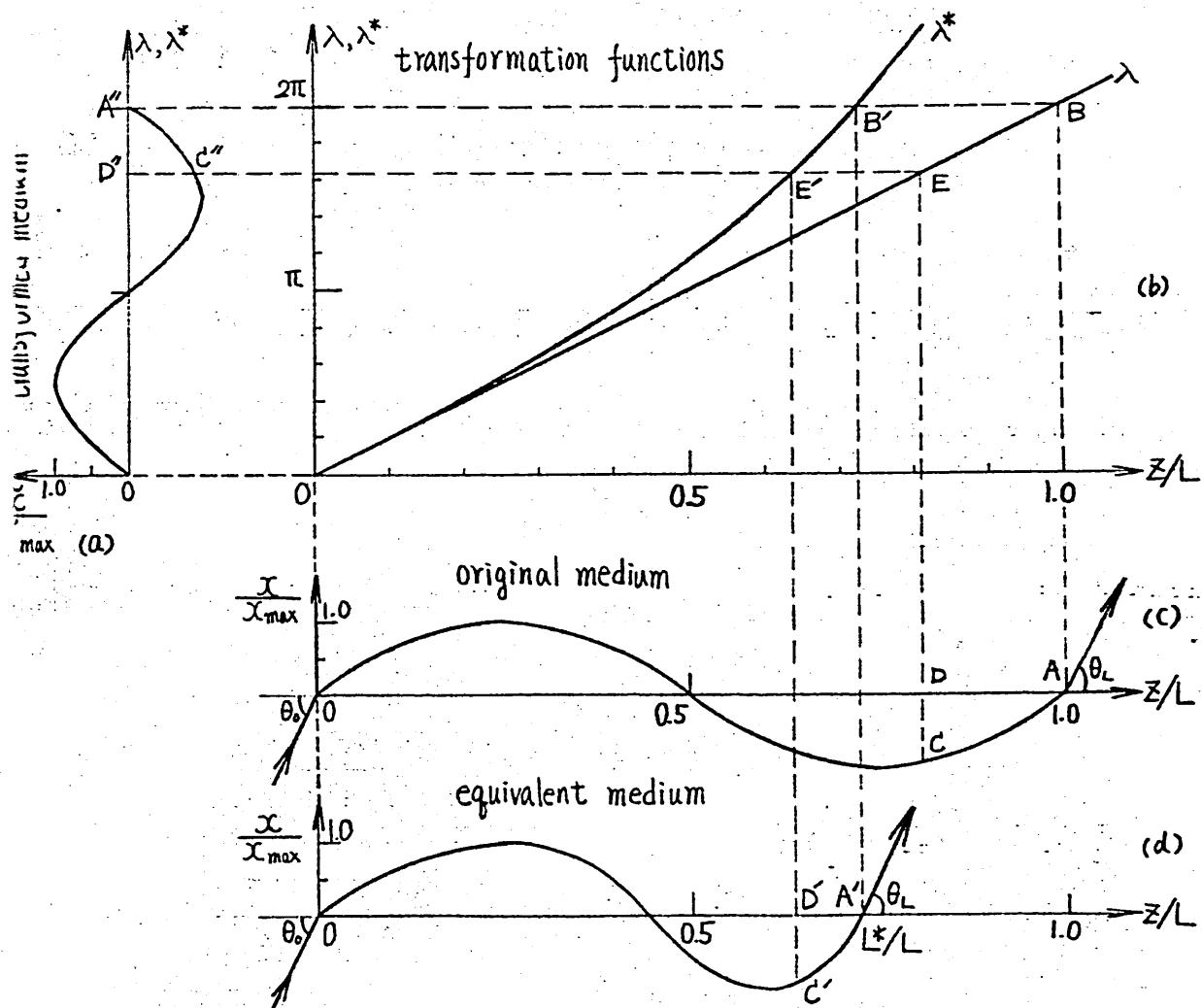


図 2 等価媒質中の ray trajectory を図式的に  
求めた方法の説明 ( $\overline{CD} = \overline{C'D'} = \overline{C''D''}$ )

図2(c)は式(21)の original の媒質の input ( $z=0$ ) に  $z$  軸とある角度( $\theta_0$ )をもって入射した ray の trajectory を示して

(1) 3. ただし全長  $L$  を ray の蛇行の一周期すなわち

$$L = 2\pi\sqrt{n_{00}/n_{20}} \quad \text{と} \text{ 送んで} \text{ いる。} \quad \text{図2(b)はこの original}$$

の媒質に対する変換関数と表1でとりあげた等価媒質すなわち

$$n^*(x, z) = n_{00} \cdot \operatorname{sech} \mu z - (1/2) n_{20} \cdot \cosh \mu z \cdot x^2 \quad (27)$$

なる屈折率分布を有する媒質に対する変換関数とをプロ

ットしたものである。ただしテーオ係数  $\mu$  を  $\mu L = 2$

となるように送んでいる。(1), (2) は図2(d)にはこの等価

媒質中の ray trajectory を示しているが、これを求める

にはつきのようにすればよい。まず等価長  $L^*$  を決める

には、output で両媒質に対する入の値が等しくなるとい

うことを利用し、図で A-B-B'-A' のようにたどれば

、A に対応する A' における z の値が  $L^*$  をあたえる。(1)

まの場合、original の媒質中の ray が A を通っているか

ら、等価媒質中の ray もやはり A' を通る。媒質中の tra-

jectory を求めていく場合も方法は全く同様で、例えは C

に対応する C' を求めるには、まず C-D-E-E'-D' と

たとして  $D$  に対応する  $Z$  軸上の点  $D'$  を求め、 $D'$  から  $\overline{CD}$  と同じ距離だけ離れた点  $C'$  をみつければよい。このように original の媒質中の ray position に対応する等価媒質中の ray position を順次求めて、それらを結んでいけば、等価媒質中の ray trajectory が簡単に求められる。図 2(d)はこのようにして描いたものである。また図 2(a)は変換された入座標における trajectory を示したものであり、表 1 からも明らかのようにこれらは一致している。この図式的な方法は非常に簡単であり、またこれによって変換関数というものの意味するところも明確になると思われる。

つぎにいまひとつ等価媒質の例を示そう。Original の媒質として、 $n_2(z)$  が指数関数的に変化する収束性レンズ状媒質

$$n_1(x, z) = n_{01} - (1/2)n_{21} \cdot \exp(\mu z) \cdot x^2, \quad (0 \leq z \leq L_1) \quad (28)$$

をとりあげる。この“ $n_0(z) = \text{定数}$ ”形のレンズ状媒質についてには末松、北野によ(5)て解析がなされている。ここでは前述の定理を用いて、式(28)と対称的な屈折率分布を有する等価レンズ状媒質、すなわち“ $n_2(z) = \text{定数}$ ”形と

‘ $\eta_0(z) \propto \eta_2(z)$ ’ 形の等価媒質を求め、結果を比較してみよう。等価変換の詳細は省略し、結果のみを示せばつきのようになる。

$$\eta_2(x, z) = \eta_{02} \left\{ 1 + \mu (\eta_{01}/\eta_{02}) z \right\} - (1/2) \eta_{22} \cdot x^2, \quad (0 \leq z \leq L_2) \quad (29)$$

$$L_2 = (\eta_{02}/\eta_{01})(1/\mu) \{ \exp(\mu L_1) - 1 \} \quad (30)$$

$$\eta_3(x, z) = \{ \eta_{03} - (1/2) \eta_{23} \cdot x^2 \} \{ 1 + (\mu/2)(\eta_{01}/\eta_{03}) z \}, \quad (0 \leq z \leq L_3) \quad (31)$$

$$L_3 = (\eta_{03}/\eta_{01})(2/\mu) \{ \exp(\mu L_1/2) - 1 \} \quad (32)$$

$$\text{ただし } \eta_{01} \cdot \eta_{21} = \eta_{02} \cdot \eta_{22} = \eta_{03} \cdot \eta_{23} \quad (33)$$

屈折率変化の模様を明瞭に示すために、図3にはこれら

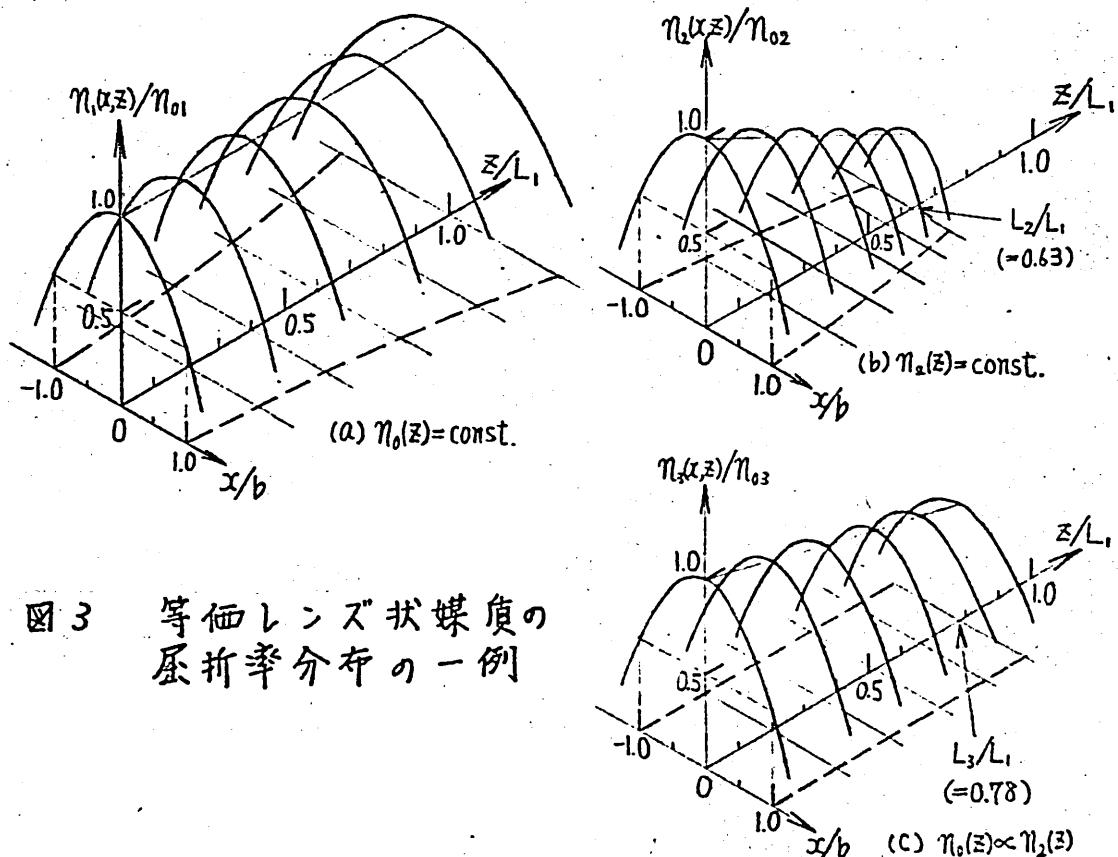


図3 等価レンズ状媒質の屈折率分布の一例

3種のレンズ状媒質の屈折率分布をプロットしている。

ただし同図は  $n_{01} = n_{02} = n_{03}$ かつ  $\mu L_1 = -1$ と選んだ場合である。また  $x$  方向の正規化係数  $b$  は input ( $x=0$ )において屈折率が軸上で  $1/2$  になる  $x$  の値であり、図中の破線は媒質内のこのような点を示するものである。さらに図4には、 $\mu L_1$  を横軸にとって等

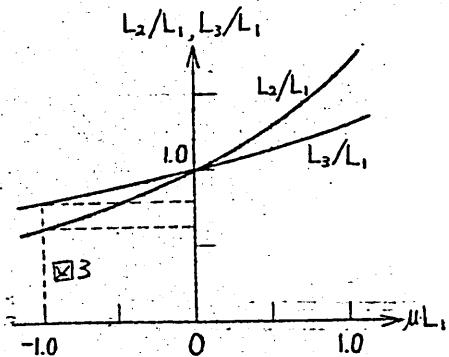


図4 等価媒質長の全長の比較

価媒質長の比  $L_2/L_1$ ,  $L_3/L_1$  をプロットしている。これより、図3の場合のように  $\mu < 0$ なる場合には、これら3種の媒質を paraxial ray の position および

slope の変換器として、あるいは Gaussian beam のスポット・サイズおよび波面曲率半径の変換器としてみたときには、「 $n_2(z)=\text{定数}$ 」形の媒質が最も短かい長さで他の二つの媒質と同一の変換機能を有することが分かる。このようにあるひとつ特性に対し種々の等価屈折率分布が存在する。このことは実際に製作するにあたって、その場合の要求に最もかなったものを選びることがでできるからうまい、実用的にも有利なことであると考えられる。

## 6 検討

これまでには二次元収束性媒質についてのみ考えてきたが、本節ではその結果が他の場合に適用できるかどうかということについて考えてみる。

### 6.1 発散性レンズ状媒質

式(1)において  $n_2(z) < 0$  の場合は発散性レンズ状媒質に対応するが、この場合への拡張はしごく簡単であって、式(1)のかわりに

$$n(x, z) = n_0(z) + (1/2)n_2(z) \cdot x^2 \quad (34)$$

なる屈折率分布を考えればよい。式(9)の paraxial ray 方程式でいえば、右辺の符号がかわるだけである。したがつて4.で述べた等価定理は(二次元)発散性媒質に対してもそのまま用いることができる。

### 6.2 周期性レンズ状媒質

上述の場合とちがって、収束性媒質と発散性媒質の両者を含んでいけるようなレンズ状媒質に対してこれまでの結果を適用するときには注意を払う必要がある。例えは

$$n(x, z) = n_0 - (1/2)n_2 \cos \mu z \cdot x^2 \quad (35)$$

といった、収束性ガスレンズと発散性ガスレンズとを周

期的に配置した形式の光伝送路においてみられるような屈折率分布を有する媒質に対する等価媒質を求める場合には、収束部と発散部とを別々に取り扱って結果を合成するというふうにしなければならぬ。それは本文の解析が、変換関数入力が区の一価関数であるということに基礎を置いているからである。

### 6.3 三次元回転対称レンズ状媒質

本文では二次元媒質を考えてきたが、三次元媒質の場合でも、もしその屈折率分布が

$$n(r, z) = n_0(z) - (1/2)n_2(z) \cdot r^2 \quad (36)$$

のように回転対称形であらわされるならば<sup>\*</sup>、これまでの結果をそのまま適用することができる。それは式(2)において  $r = \hat{e}_x x + \hat{e}_y y$  とおけば、 $y$  方向についても式(9)と全く同形の式が得られるからである。

## 7 伝送線路アナロジー

さきに解析を行なった不均等分布定数線路は一次元の不均等性をもつ系である<sup>(2)</sup>。これに対し本文で考察の対

\* 実用的にはこのような分布のほうか興味深い。

象としたレンズ状媒質は、断面内の屈折率分布を放物線分布に限定しているとはいえ、二次元の系である。しかしこれまでの解析からも予想されるように、両者の間に密接な関係が存在する<sup>(3)</sup>。本節では両系のパラメータ間の関係を明らかにし、それによってレンズ状媒質の等価性といふことの意味をより明確に示すこととする。

レンズ状媒質中の paraxial ray 方程式（式(9)）は、式(13), (15)の定義を用いたことにより、

$$dP/dz = S/n_0(z) \quad (37-a)$$

$$dS/dz = -n_2(z) \cdot P \quad (37-b)$$

と書き換えられる。いっぽう、 $z$  方向を進行方向とする不均等分布定数線路の伝送方程式は

$$dV/dz = -Z(z) \cdot I \quad (38-a)$$

$$dI/dz = -Y(z) \cdot V \quad (38-b)$$

である。これら2組の式は全く同形であるから、両系のパラメータの対応関係は表2のようになる。したがって4.の終りに述べた、レンズ状媒質の等価変換において  $\int_0^L [1/n_0(z)] dz$  および  $\int_0^L n_2(z) dz$  がともに保存されるとることは、伝送線路の等価変換に際し total impedance

表 2

レンズ状媒質	伝送線路
ray position $P$	電圧 $V$
ray slope $S$	電流 $I$
$1/n_0(z)$	単位長当たりの 直列インピーダンス $Z(z)$
$n_2(z)$	単位長当たりの 並列アドミタンス $Y(z)$
$\sqrt{n_0(z) \cdot n_2(z)}$	特性アドミタンス $\sqrt{Y(z)/Z(z)}$

$\int_0^L Z(z) dz$  および total admittance  $\int_0^L Y(z) dz$  がともに不变

であるということに対応しているのである。また等価レンズ状媒質において、変換された  $n_0 \cdot n_2$  積が同形になるということは、等価伝送線路において、変換された特性インピーダンスが同形になるということに対応しているのであって、このことからも分布定数系における特性インピーダンスという概念の重要性が認識される。

### 8 おまけ

二次元分布定数系の一例としてレンズ状媒質をとりあげ、その等価性という問題について考察し、たとえ屈折

率分布が異なってりても、同一のRTMを有する媒質が存在するということを示した。まず幾何光学的な解析によつてレンズ状媒質中の paraxial ray 方程式を導き、これに変数変換を施すことにより、等価媒質を求める際の基礎となる定理を得た。また等価レンズ状媒質の例を挙げ、さらに、original の媒質中の ray trajectory が分つていれば、これより等価媒質中の trajectory を図式的に簡単に求め方を示した。最後に不均等分布定数線路との関係について考察した。なお本文では等価定理を専く過程については記述を省略し、等価レンズ状媒質というものの性質、とくに等価変換において保存される量とどうなり量に対する考察に重点をおいて述べた。

これまで複合レンズ系などの離散的光学系については等価光学系という考え方たはあつたか、本文の解析によつて分布光学系への拡張がなされたといえよう。ただし本文では断面内の屈折率分布を放物線分布に限定した。これをより一般的な場合に拡張することは、今後に残された問題である。

## 謝 辞

御討論をいただきいた末田正助教授はじめ牧本研究室の方々に深く感謝いたします。

## 文 献

- (1) 山本, 牧本：“不均等分布定数線路のマトリクス・パラメータについて”, 信学会マイクロ波研資, (昭43-06).
- (2) H.Kogelnik: “Imaging of optical modes—Resonators with internal lenses”, B.S.T.J., 44, p.455, (March 1965).
- (3) H.Kogelnik: “On the propagation of Gaussian beams of light through lenslike media including those with a loss or gain variation”, Appl. Opt., 4, p.1562, (Dec. 1965).
- (4) M.Born, E.Wolf: “Principles of optics”, p.121, Pergamon Press, (1964).
- (5) 末松, 北野: “テーハ・レンズ”状ビームガイドの解析”, 昭42信学全大, 535.

輻射科学研究会資料

相対的に運動している完全誘電体  
と導電性誘電体との境界面に  
おける平面電磁波の反射と透過

藤岡 弘  
小川 英一

(大阪大学・工学部)

1969年4月25日

## 1. 序 言

筆者らは先に、真空中を一様に運動している導電性媒質（導電性誘電体もしくは電磁流体）に、真空側から平面電磁波が入射する問題を取り扱い、媒質が導電性をもたない場合には見られない種々の興味ある現象があらわされたことを示した。<sup>(1)～(4)</sup>

ここでは、相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界面に完全誘電体側からH波もしくはE波が入射する場合を取り扱い、反射係数、透過係数等を求め、従来の場合<sup>(1)～(4)</sup>には見られなかった種々の興味ある現象<sup>(5)</sup>が現われることを示す。

## 2. 入射波がH波の場合

### 2. 1 反射波と透過波

図1に示すように、 $z > 0$  の空間は完全誘電体（誘電率  $\epsilon_1$ 、透磁率  $\mu_0$ ）、 $z < 0$  の空間は導電性誘電体（ $\epsilon_2$ 、 $\mu_0$ 、 $\sigma$ ）によって満されていて、完全誘電体は観測者に対して静止しており、導電性誘電体は一定速度  $V_0$  で x 軸方向に運動しているものとする。いま、完全誘電体側からH波（磁界が入射面に垂直な平面電磁波）が入射するものとすれば、観測者の静止座標K（x, y, z, t）において入射波はつぎのように表わされる：

$$H_y^{(i)} = H_{0i} e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \quad (1a)$$

$$E_y^{(i)} = 0 \quad (1b)$$

ただし、

$$k_x = n_1 k_0 \sin \theta, \quad k_z = -n_1 k_0 \cos \theta \quad (2a)$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}} \quad (2b)$$

ここで、 $H_{0i}$  は場所および時間に無関係な定数であり、 $\omega$  は入射波の角周波数、

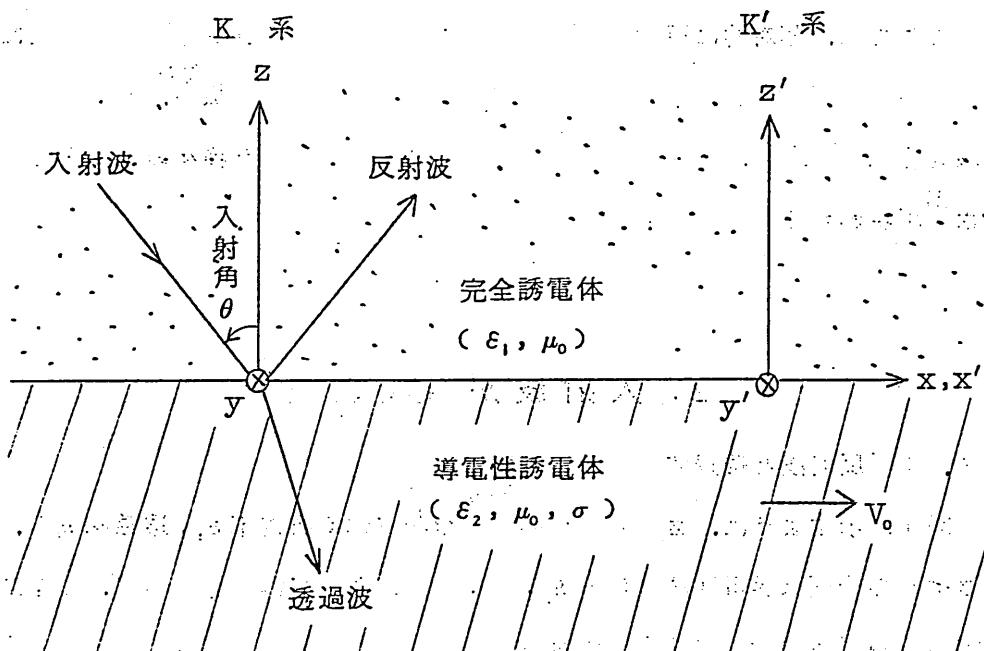


図1 座標系

$\theta$  は入射角を表わす。なお、電磁界の他の成分は式(1a), (1b)と Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3b)$$

および構成関係式

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (4b)$$

から求められる。また、K系における反射波は入射波(1a), (1b)に  
対してつぎのように表わされる。

$$H_y^{(r)} = H_{oi} e^{-j(\omega t - k_x x + k_z z)} \quad (5a)$$

$$E_y^{(r)} = 0 \quad (5b)$$

さて、導電性誘電体の静止座標系K'(x', y', z', θ')における入射波  
および反射波は、K系における入射波(1a), (1b)および反射波(5a),  
(5b)をLorentz変換することによって求められ、それぞれつぎのよう  
に表わせる。

$$H_y'^{(i)} = H_{oi}' e^{-j(\omega' t' - k'_x x' - k'_z z')} \quad (6a)$$

$$E_y'^{(i)} = 0 \quad (6b)$$

反射波

$$H_y'^{(r)} = H_{or}' e^{-j(\omega' t' - k'_x x' + k'_z z')} \quad (7a)$$

$$E_y'^{(r)} = 0 \quad (7b)$$

上式における $H_{oi}'$ および $H_{or}'$ は、K系における振幅 $H_{oi}$ および $H_{or}$ を用いて  
それぞれつぎのように表わせる。

$$H_{oi}' = \gamma \left( 1 - \frac{k_x}{\omega} V_o \right) H_{oi} = \gamma (1 - n_i \beta \sin \theta) H_{oi} \quad (8)$$

$$H_{or}' = \gamma \left[ 1 - \frac{k_x}{\omega} V_o \right] H_{or} = \gamma (1 - n_i \beta \sin \theta) H_{or} \quad (9)$$

ただし、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{V_0}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (10)$$

つぎに、透過波について考える。K'系における入射波(6a), (6b)に対して透過波はつきのように表わされる。

$$H_y'(t) = H_{0t} e^{j(\omega' t' - k_x' x' - k_z' z')} \quad (11a)$$

$$E_y'(t) = 0 \quad (11b)$$

ただし、

$$k_x'^2 + (k_z' z')^2 = \omega'^2 \epsilon_0 \mu_0 - j \omega' \mu_0 \sigma \quad (12)$$

上式(11a)において、境界条件から  $k_x' z' = k_x$  となることを用いた。なお、電磁界の他の成分は式(11a), (11b)とK'系における導電性誘電体中のMaxwellの方程式

$$\nabla' \times E' = - \frac{\partial B'}{\partial t'} \quad (13a)$$

$$\nabla' \times H' = \frac{\partial D'}{\partial t'} + J' \quad (13b)$$

および構成関係式

$$D' = \epsilon_0 E' \quad (14a)$$

$$B' = \mu_0 H' \quad (14b)$$

$$J' = \sigma E' \quad (14c)$$

から求められる。また、K系における透過波は式(11a), (11b)をLorentz変換することによりつきのように求められる。

$$H_y^{(t)} = H_{ot} e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \quad (15a)$$

$$E_y^{(t)} = 0 \quad (15b)$$

ただし、 $H_{ot}$  は  $K'$  系における振幅  $H'_{ot}$  とつぎの関係で結ばれている。

$$\begin{aligned} H_{ot} &= \gamma \left[ 1 + \varepsilon_2 V_o \left( \frac{k'_x}{\omega' \varepsilon_2 - j\sigma} \right) \right] H'_{ot} \\ &= \gamma \left[ 1 + \frac{\gamma m \beta (n_i \sin \theta - \beta)}{\gamma m (1 - n_i \beta \sin \theta) - j} \right] H'_{ot} \end{aligned} \quad (16)$$

上式において関係式

$$\omega' = \gamma (\omega - V_o k_x) = \gamma \omega (1 - n_i \beta \sin \theta) \quad (17a)$$

$$k'_x = \gamma \left[ k_x - \left( \frac{\omega V_o}{c} \right) \right] = \gamma k_o (n_i \sin \theta - \beta) \quad (17b)$$

を用いた。また、 $m = \frac{\omega \varepsilon_2}{\sigma}$  である。

ここで、 $K'$  系における電磁界 (6a), (6b); (7a), (7b); および (11a), (11b) に、境界面 ( $z' = 0$ ) 上において電磁界の接線成分は連続でなければならないという境界条件を適用し、さらに関係式 (8), (9) および (16) を用いて、 $H_{or}$  および  $H_{ot}$  はそれぞれつぎのように表わされる。

$$H_{or} = H_{oi} \frac{m\gamma(1-n_i\beta\sin\theta)(n_i^2\cos\theta-n_ip)+j(q\gamma m n_i(1-n_i\beta\sin\theta)-n_i^2\cos\theta)}{m\gamma(1-n_i\beta\sin\theta)(n_i^2\cos\theta+n_ip)-j(q\gamma m n_i(1-n_i\beta\sin\theta)+n_i^2\cos\theta)} \quad (18)$$

$$H_{ot} = H_{oi} \frac{n_i^2 [(pm+q\gamma)+j(qm-p\gamma)]}{p^2+q^2}$$

$$\times \frac{2\gamma(p - jq)(1 - n_1\beta \sin\theta) \cos\theta}{m\gamma(1 - n_1\beta \sin\theta)(n_2^2 \cos\theta + n_1 p) - j[q\gamma m n_1(1 - n_1\beta \sin\theta) + n_2^2 \cos\theta]} \quad (19)$$

ただし、上式における  $p$ ， $q$  は  $K$  系における透過波の伝搬定数の  $z$  方向成分  $k_z^{(t)}$  と

$$k_z^{(t)} = -k_0(p - jq) = k_z'^{(t)} \quad (20)$$

なる関係で結ばれている。したがって  $p$ ， $q$  は、 $K'$  系における分散関係式 (12) と関係式 (17a)，(17b) を用いてつぎのように求められる。

$$p = [(P + \sqrt{P^2 + Q^2})/2]^{1/2} \quad (21)$$

$$q = \begin{cases} + [(-P + \sqrt{P^2 + Q^2})/2]^{1/2}, & (n_1\beta \sin\theta \leq 1) \\ - [(-P + \sqrt{P^2 + Q^2})/2]^{1/2}, & (n_1\beta \sin\theta > 1) \end{cases} \quad (22a)$$

$$- [(-P + \sqrt{P^2 + Q^2})/2]^{1/2}, \quad (n_1\beta \sin\theta > 1) \quad (22b)$$

ただし、 $P = \gamma^2[n_2^2(1 - n_1\beta \sin\theta)^2 - (n_1 \sin\theta - \beta)^2]$ ，  
 $Q = (\gamma n_2^2/m)(1 - n_1\beta \sin\theta)$

以上の操作によって、入射 H 波 (1a)，(1b) に対する反射波および透過波が完全に求められた。

## 2. 2 反射係数と透過係数

反射係数  $R$  および透過係数  $T$  を、それぞれ境界面上における反射波と入射波、および透過波と入射波との Poynting ベクトルの時間平均値の境界面に垂直な成分の比で定義すれば、 $R$  および  $T$  はそれつぎのように書ける。

$$R = - \left[ \frac{\mathbf{s}^{(r)} \cdot \mathbf{i}_z}{\mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{i}_z} \right] = - \left[ \frac{\operatorname{Re}(\mathbf{E}^{(r)} \times \mathbf{H}^{(r)*}) \cdot \mathbf{i}_z}{\operatorname{Re}(\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*}) \cdot \mathbf{i}_z} \right] \quad (24)$$

$$T = \left[ \frac{\mathbf{s}^{(t)} \cdot \mathbf{i}_z}{\mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{i}_z} \right] = \left[ \frac{\operatorname{Re}(\mathbf{E}^{(t)} \times \mathbf{H}^{(t)*}) \cdot \mathbf{i}_z}{\operatorname{Re}(\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*}) \cdot \mathbf{i}_z} \right] \quad (25)$$

ただし、 $\mathbf{s}^{(i)}$ 、 $\mathbf{s}^{(r)}$ および $\mathbf{s}^{(t)}$ はそれぞれ入射波、反射波および透過波の境界面上における Poynting ベクトルの時間平均値を表わし、 $\mathbf{i}_z$ は $z$ 方向の単位ベクトルを表わす。なお、 $\operatorname{Re}$ は複素量の実数部を取る操作を表わし、記号 $*$ は複素共役ベクトルを表わす。反射係数および透過係数を上式のように定義すれば、前節に得た結果を用いて、入射 H 波に対する反射係数および透過係数として次式を得る。

$$R_H = \frac{(m\gamma(1-n_1\beta\sin\theta)(n_2^2\cos\theta-n_1p))^2 + (q\gamma m n_1(1-n_1\beta\sin\theta)-n_2^2\cos\theta)^2}{(m\gamma(1-n_1\beta\sin\theta)(n_2^2\cos\theta+n_1p))^2 + (q\gamma m n_1(1-n_1\beta\sin\theta)+n_2^2\cos\theta)^2} \quad (26)$$

$$T_H = \frac{4mn_1n_2^2\gamma^2(1-n_1\beta\sin\theta)^2(m\beta+q\gamma)\cos\theta}{(m\gamma(1-n_1\beta\sin\theta)(n_2^2\cos\theta+n_1p))^2 + (q\gamma m n_1(1-n_1\beta\sin\theta)+n_2^2\cos\theta)^2} \quad (27)$$

上式から $R_H$ と $T_H$ の和は一般には 1 にはならず、次式で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} & R_H + T_H \\ &= 1 + \frac{4qmn_1n_2^2\gamma^3\beta(1-n_1\beta\sin\theta)(\beta-n_1\sin\theta)\cos\theta}{(m\gamma(1-n_1\beta\sin\theta)(n_2^2\cos\theta+n_1p))^2 + (q\gamma m n_1(1-n_1\beta\sin\theta)+n_2^2\cos\theta)^2} \end{aligned} \quad (28)$$

このように、入射波が H 波の場合、反射係数と透過係数の和が 1 に等しくな

らないのは、導電性媒質が運動しているときには、その境界面上において磁界の接線成分が連続にならないことによる。このことについては筆者らの他の文献<sup>(3)～(4)</sup>を参照されたい。

### 3. 入射波が E 波の場合

#### 3. 1 反射係数と透過係数

入射波が E 波の場合、すなわち電界が入射面に垂直な場合には、反射係数および透過係数は § 2 と同様にして次のように求められる。

$$R_E = \frac{(p - n_1 \cos\theta)^2 + q^2}{(p + n_1 \cos\theta)^2 + q^2} \quad (29)$$

$$T_E = \frac{4 p n_1 \cos\theta}{(p + n_1 \cos\theta)^2 + q^2} \quad (30)$$

上式における  $p$  および  $q$  は入射 H 波の場合と同様に式 (21) および (22) で与えられる。式 (29), (30) から、入射波が E 波の場合には反射係数と透過係数の和は常に 1 に等しくなる。すなわち

$$R_E + T_E = 1 \quad (31)$$

なることがわかる。

#### 3. 2 数値計算例と検討

式 (21) ～ (23) から、 $1 - n_1 \beta \sin\theta = 0$  のとき、すなわち波が

$$\theta_T = \sin^{-1} \left( \frac{1}{n_1 \beta} \right) \quad (32)$$

なる入射角で入射するときには、 $p, q$  は

$$p = 0, \quad q = \frac{1}{\gamma \beta} \quad (33)$$

となり、したがって境界面に垂直な方向の伝搬定数は純虚数となる。したがって、式(29), (30)から

$$R_E = 1, \quad T_E = 0 \quad (34)$$

となる。すなわち全反射の現象が起ることになる。導電性媒質が静止しているときには、いかなる入射角  $\theta$  に対してもこのような全反射現象は起り得ないが、運動している場合には、式(32)を満足する入射角  $\theta_T$  に対して全反射の現象が起るわけである。このような入射角  $\theta_T$  は、静止導電性誘電体中を伝わる波の、媒質の運動速度に平行な方向の位相速度が、丁度媒質の運動速度  $V_0$  に一致する場合の入射角に相当する。

また、媒質の運動速度  $V_0$  が、このような速度を越える場合、すなわち  $n_1 \beta \sin \theta > 1$  の場合には式(22b)からわかるように  $q$  が負となり、したがって波動增幅の現象が起ることになる。境界のない無限に拡がっている導電性誘電体中を伝搬する平面電磁波が、媒質の運動速度がその媒質中の波の位相速度よりも大きくなる場合には増幅され得ることは、すでに筆者らによって報告されている<sup>(6)～(7)</sup>が、本文のように境界面がある場合にも同様の現象が起るわけである。

種々のパラメーターに対する反射係数  $R_E$  の数値計算例を図 2～4 に示す。なお、透過係数  $T_E$  は式(31)の関係式から直ちに求めることができる。図 2(a)～(d)は  $\beta$  をパラメータとしたときの、 $m = 0.1, n_1 = 1 \sim \sqrt{2} \sim 2 \sim 4, n_2 = \sqrt{2}$ ；図 3(a)～(c)は  $m$  をパラメータとしたときの、 $\beta = 0 \sim 0.5 \sim 0.9, n_1 = 4, n_2 = \sqrt{2}$ ；図 4(a)～(c)は  $n_1$  をパラメータとしたときの、 $\beta = 0 \sim 0.5 \sim 0.9, m = 0.1, n_2 = \sqrt{2}$ ；の場合の  $R_E$  の変化の様子を示す。

なお、本節においては入射波が正波の場合について、数値計算例を挙げて

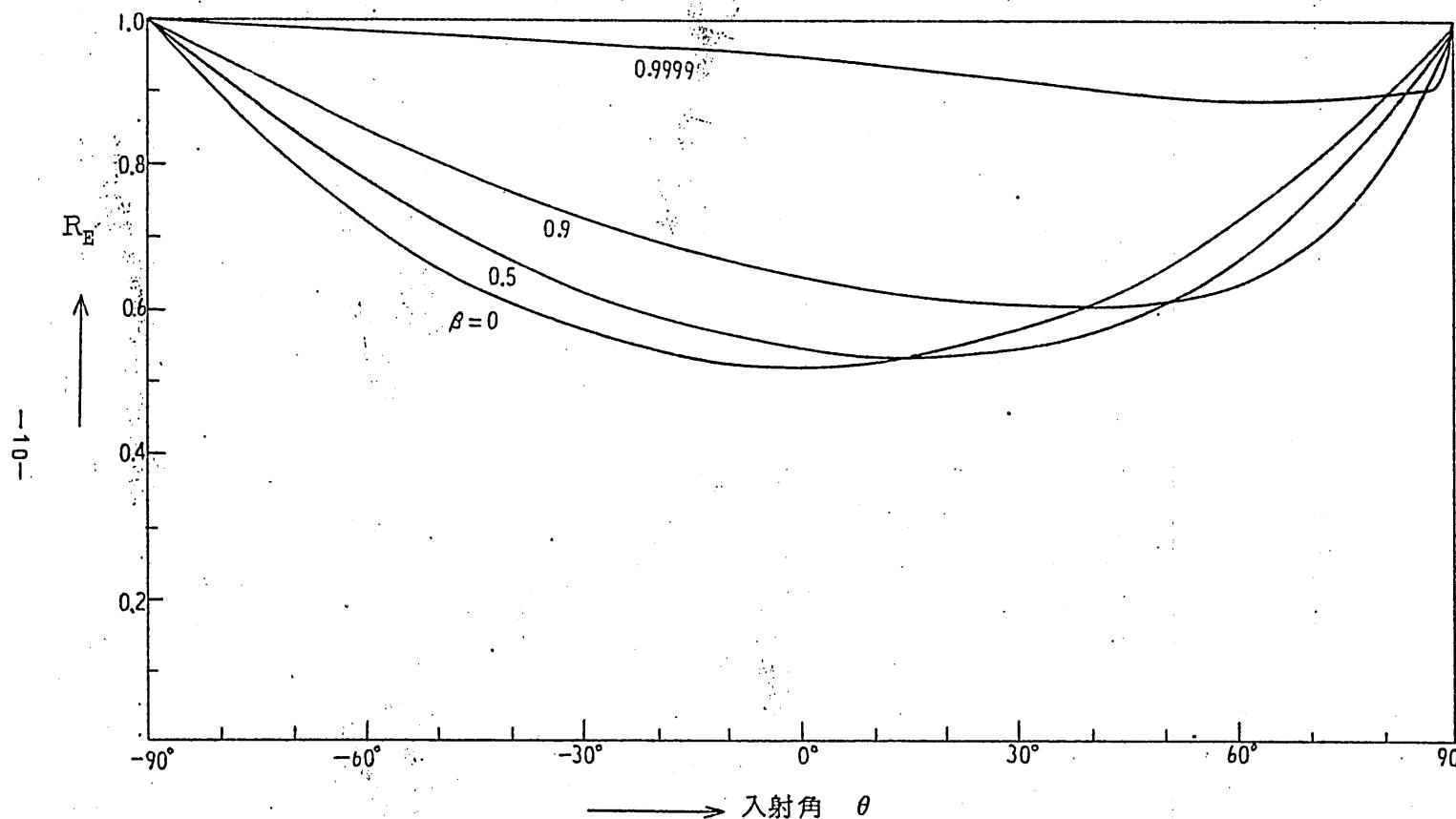


図 2(a) 反射係数  $R_E$

$$(m = 0.1, n_1 = 1, n_2 = \sqrt{2})$$

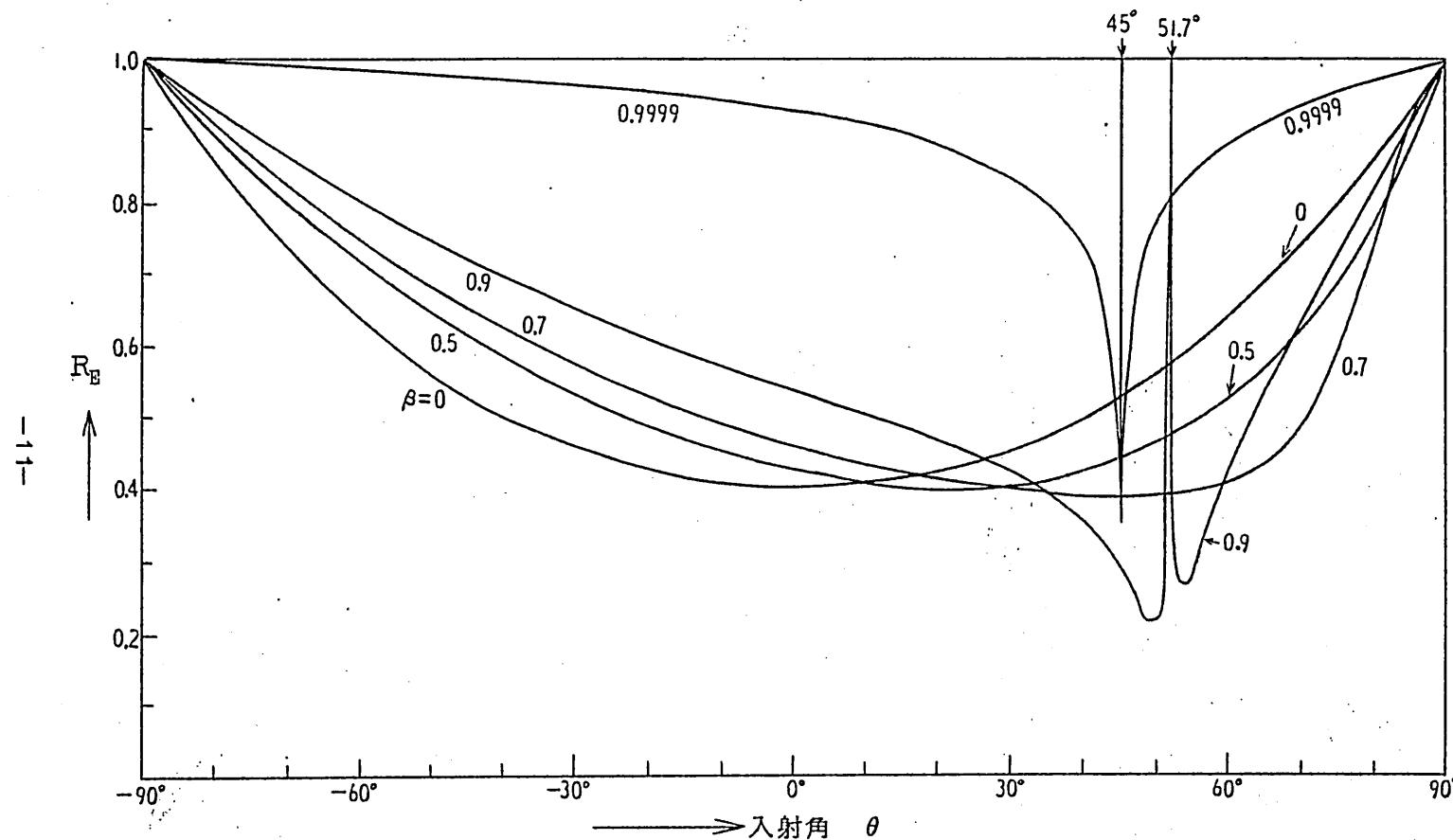


図 2(b) 反射係数  $R_E$   
 $(m = 0.1, n_1 = \sqrt{2}, n_2 = \sqrt{2})$

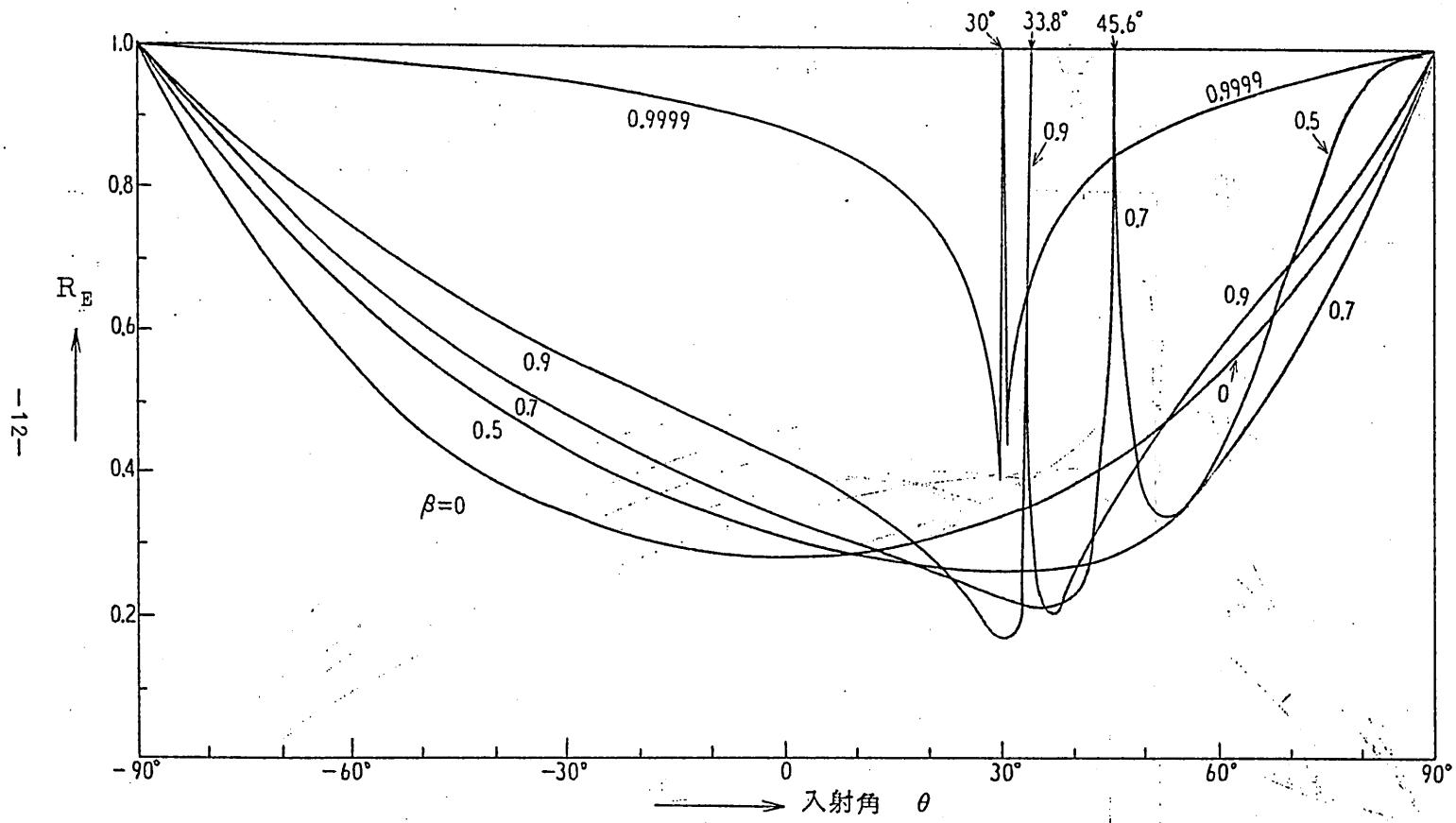


図 2(c) 反射係数  $R_E$

$$(m = 0.1, n_1 = 2, n_2 = \sqrt{2})$$

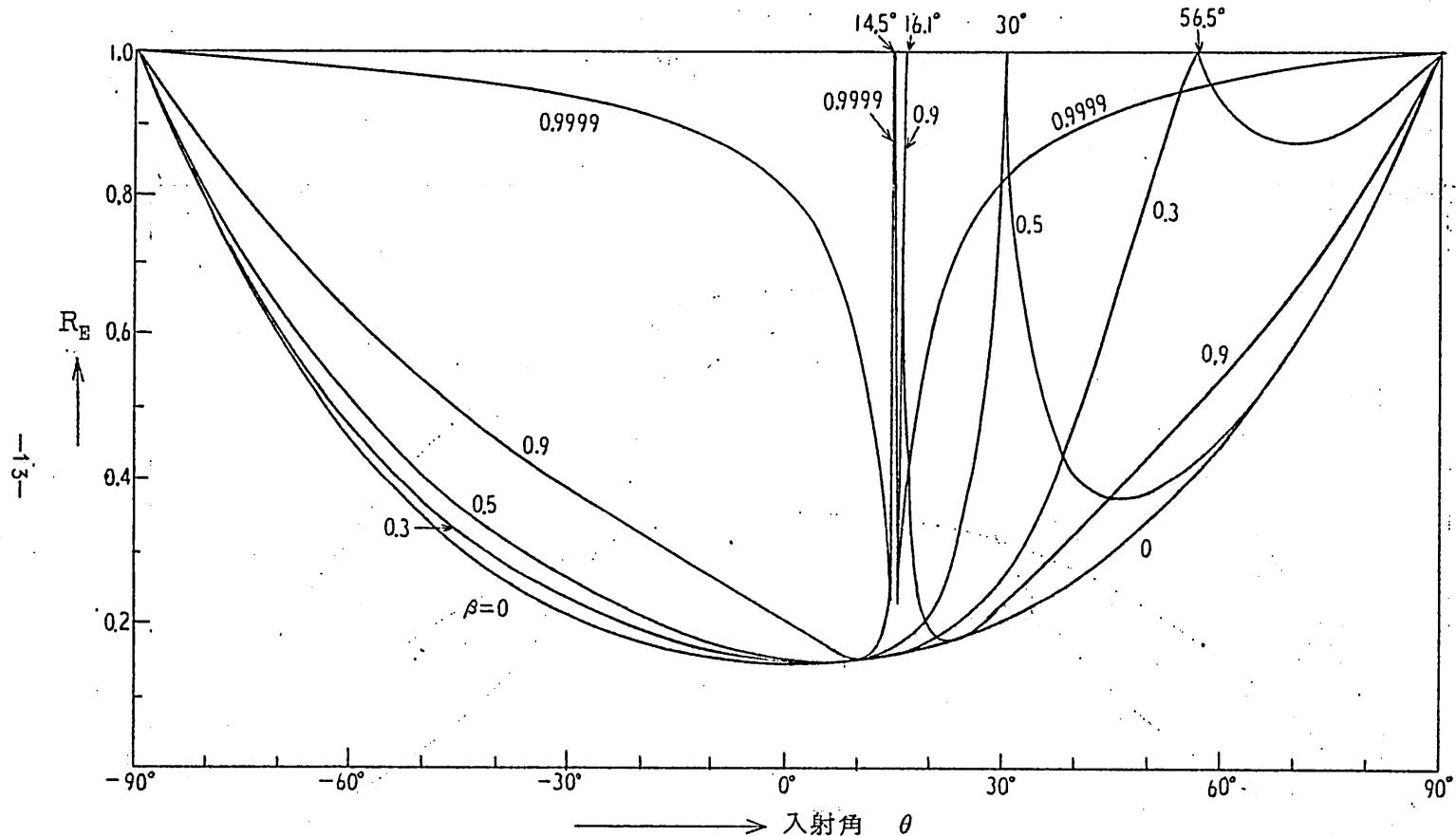


図 2(d) 反射係数  $R_E$

( $m = 0.1$ ,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = \sqrt{2}$ )

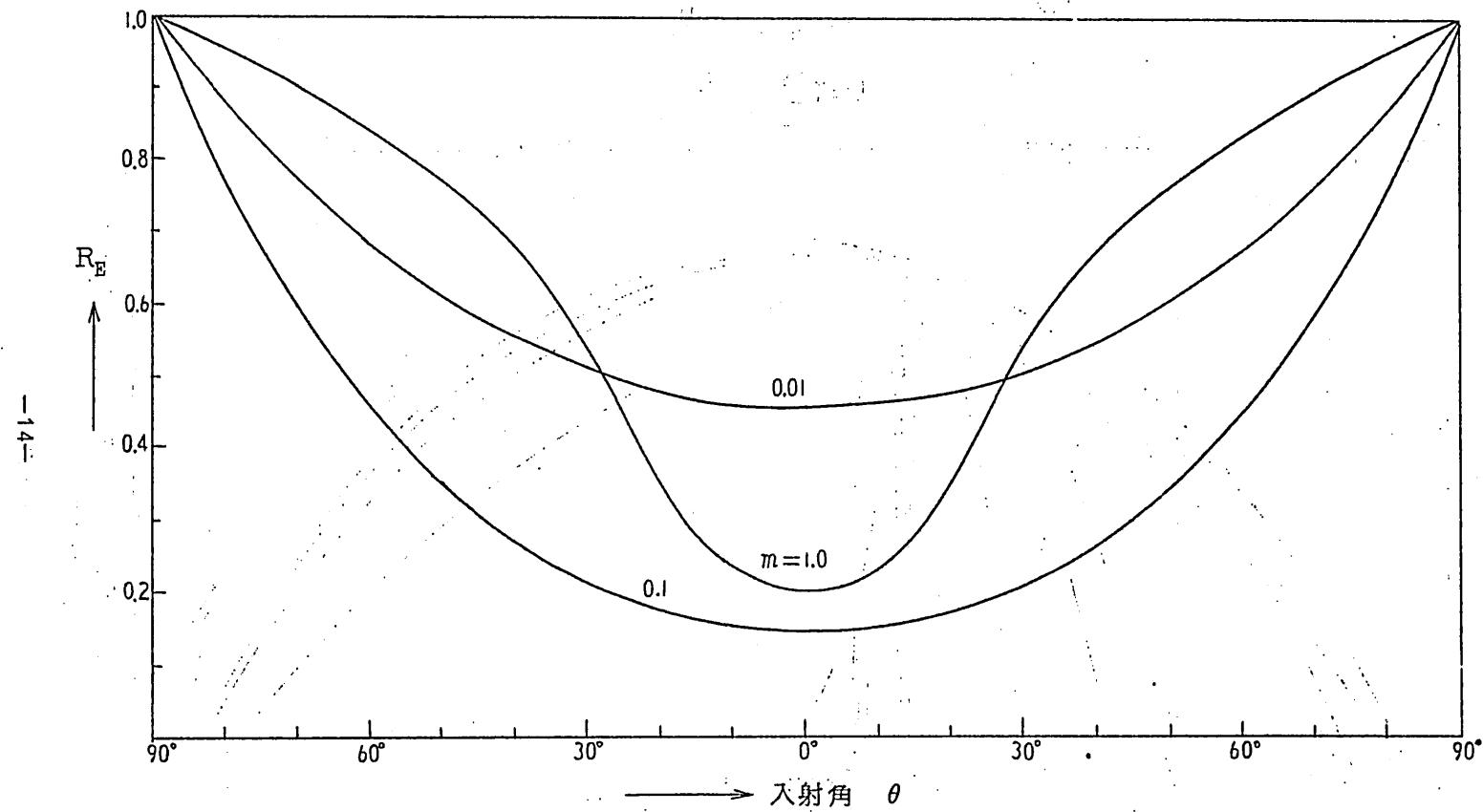


図3(a) 反射係数  $R_E$   
 $(\beta = 0, n_1 = 4, n_2 = \sqrt{2})$

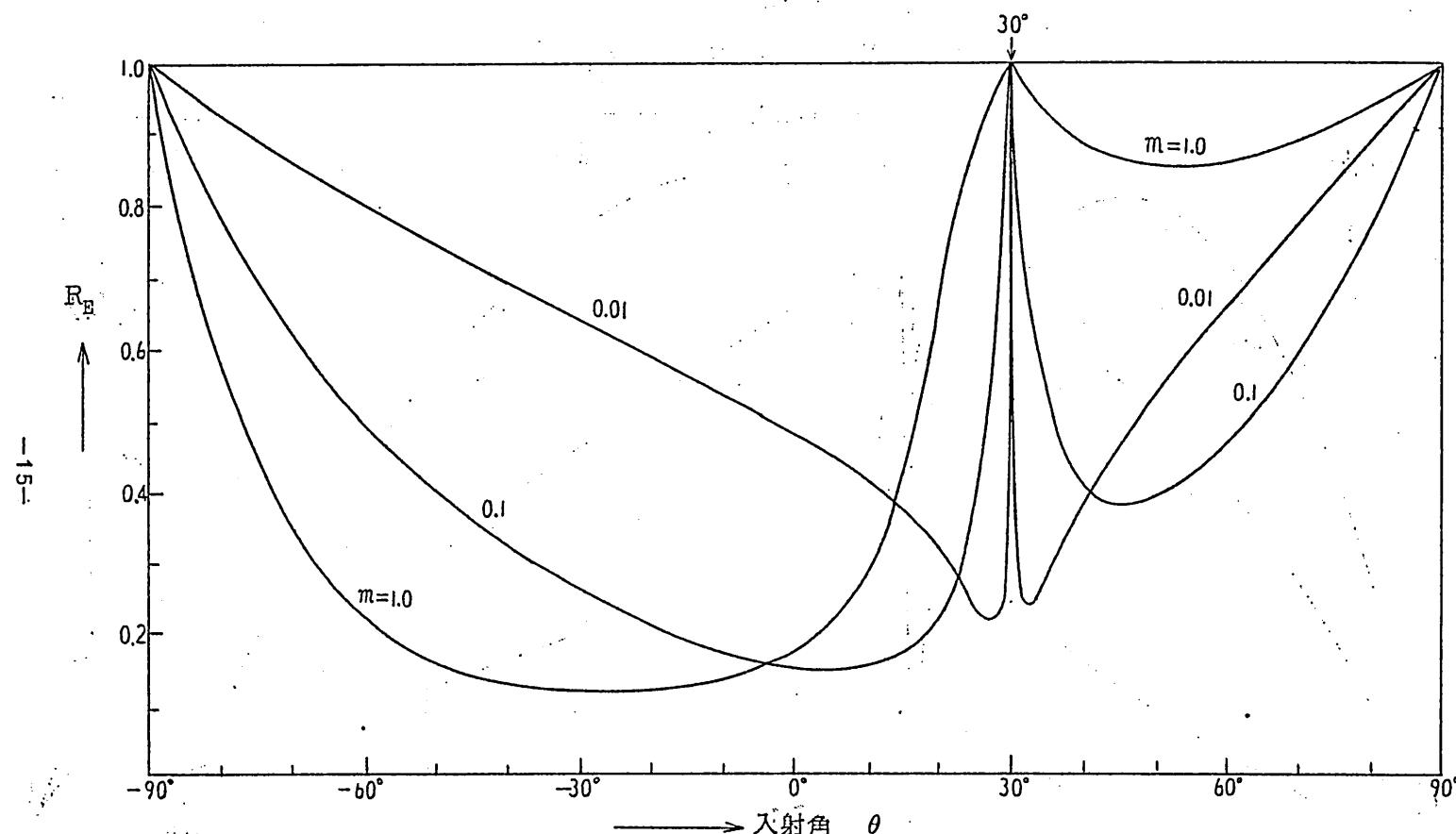


図3(b) 反射係数  $R_E$   
 $(\beta = 0.5, n_1 = 4, n_2 = \sqrt{2})$

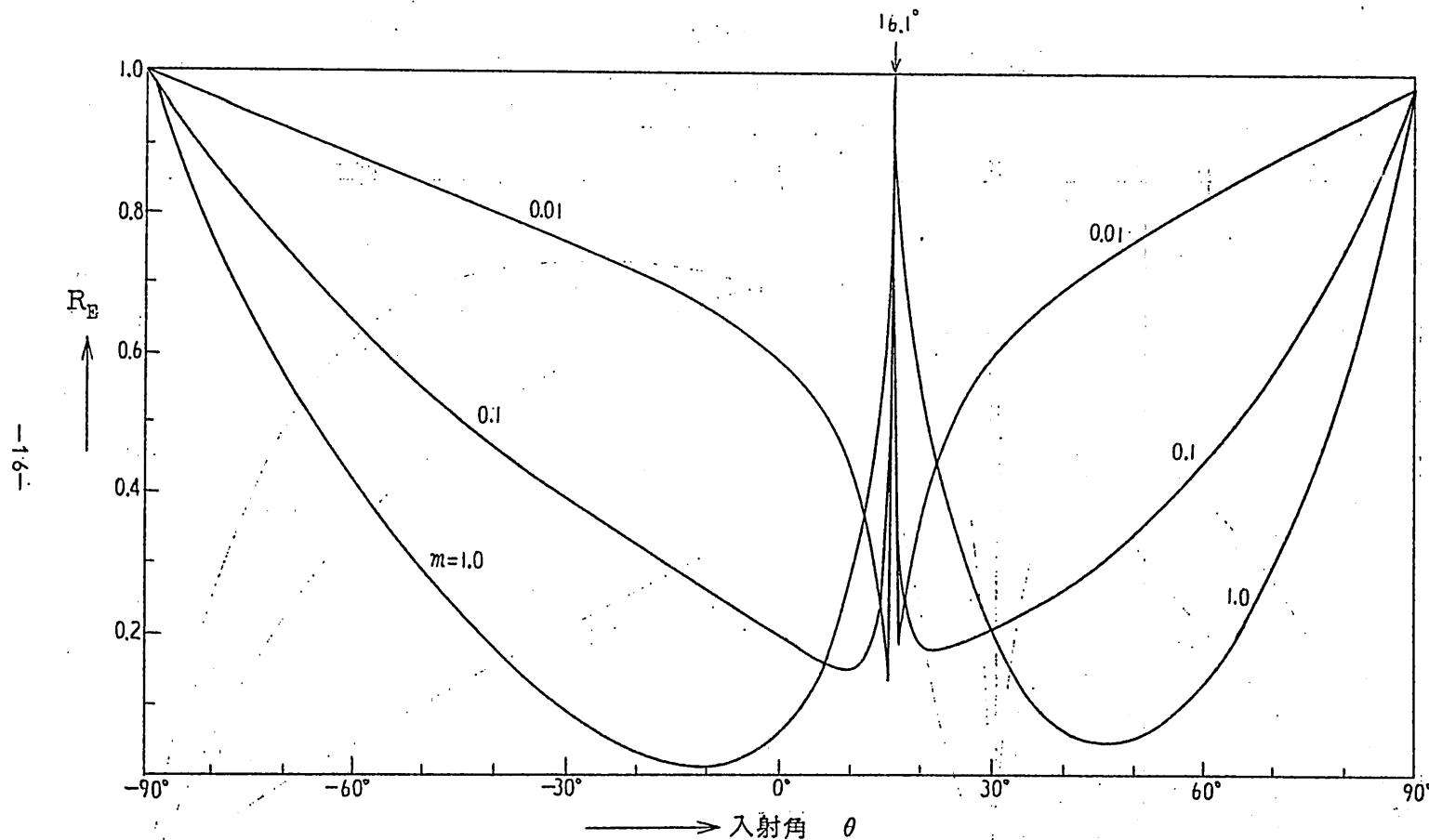


図3(c) 反射係数  $R_E$

$$(\beta = 0.9, n_1 = 4, n_2 = \sqrt{2})$$

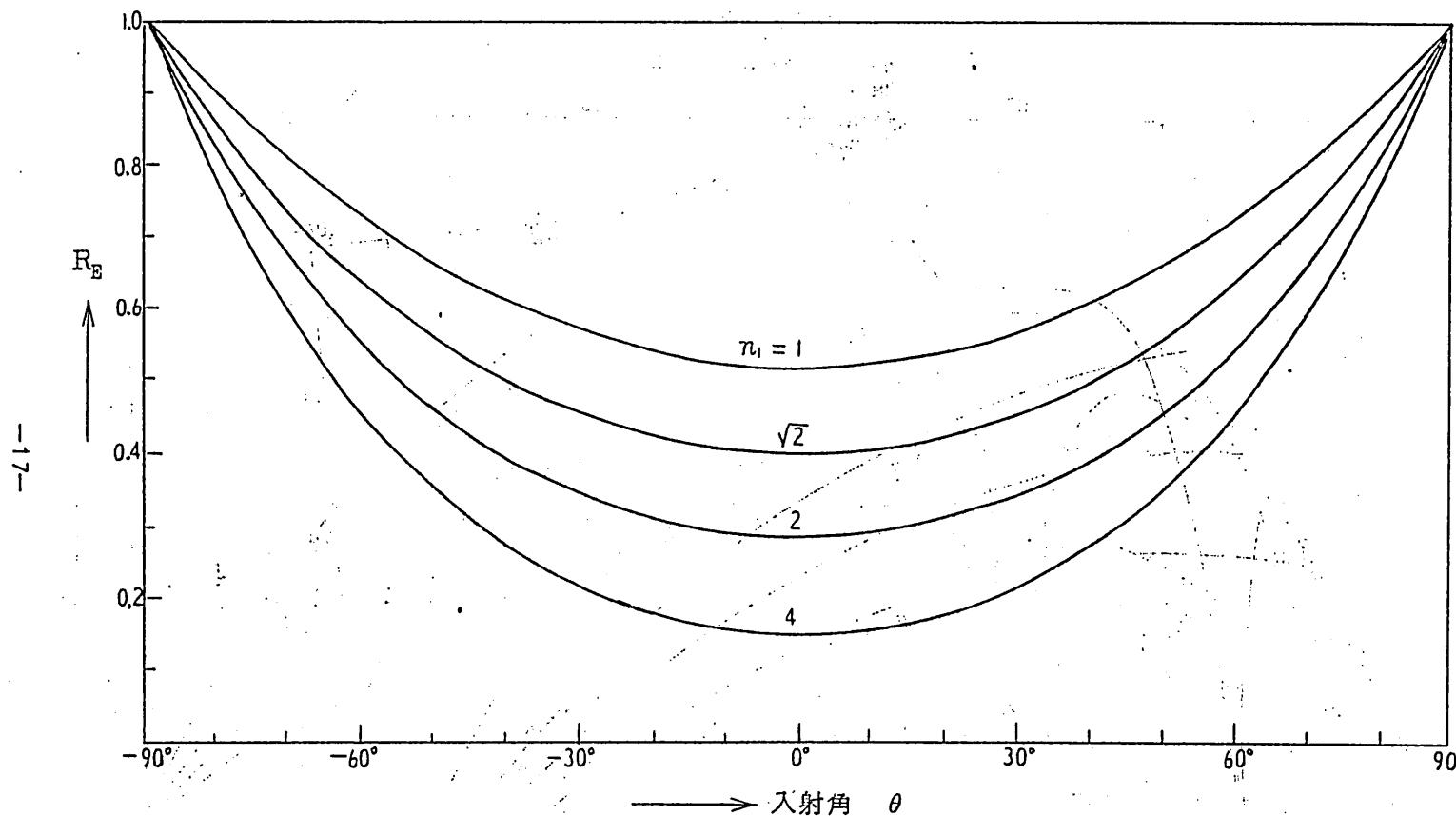


図 4(a) 反射係数  $R_E$   
 $(\beta = 0, m = 0.1, n_2 = \sqrt{2})$

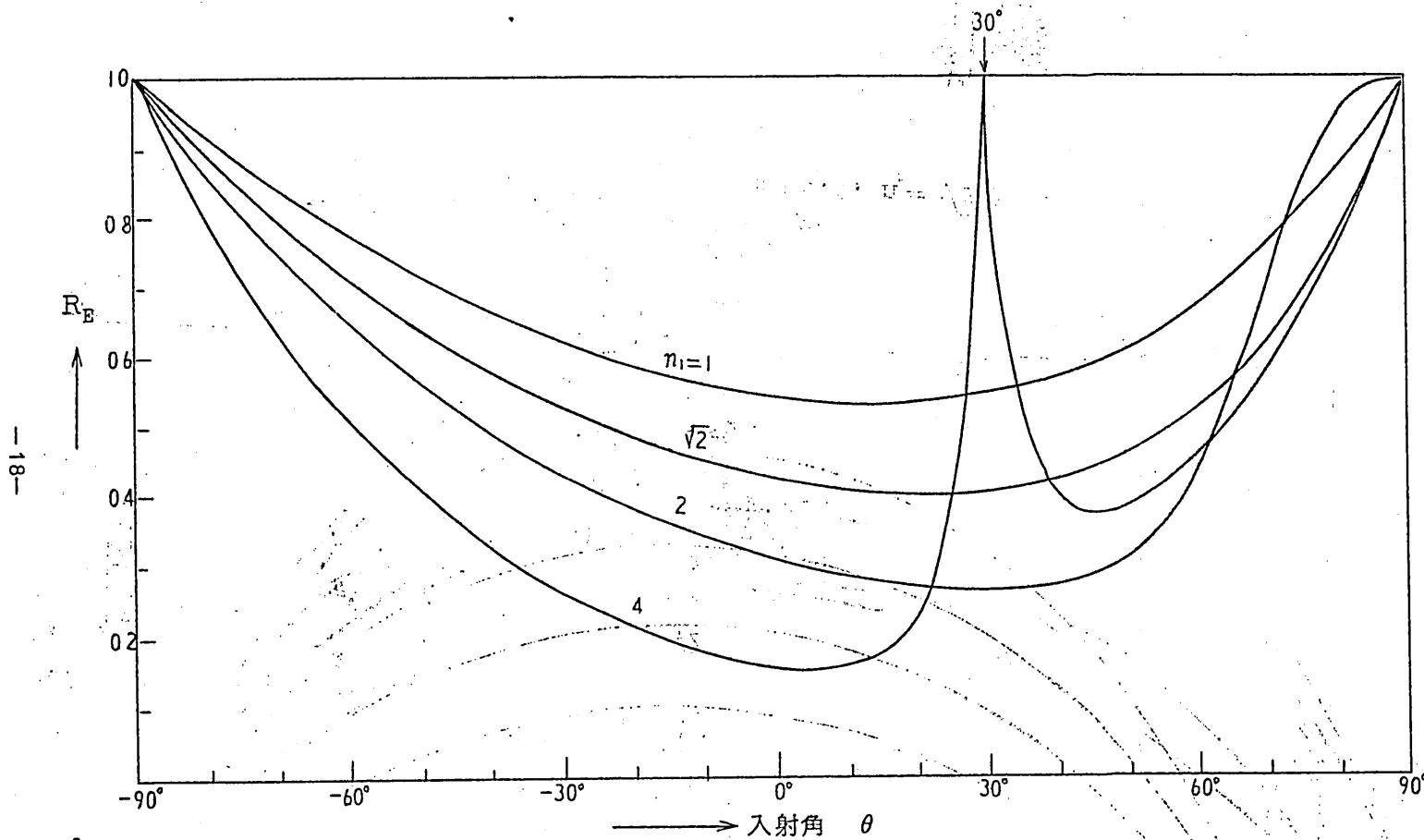


図4(b) 反射係数  $R_E$   
 $(\beta = 0.5, m = 0.1, n_2 = \sqrt{2})$

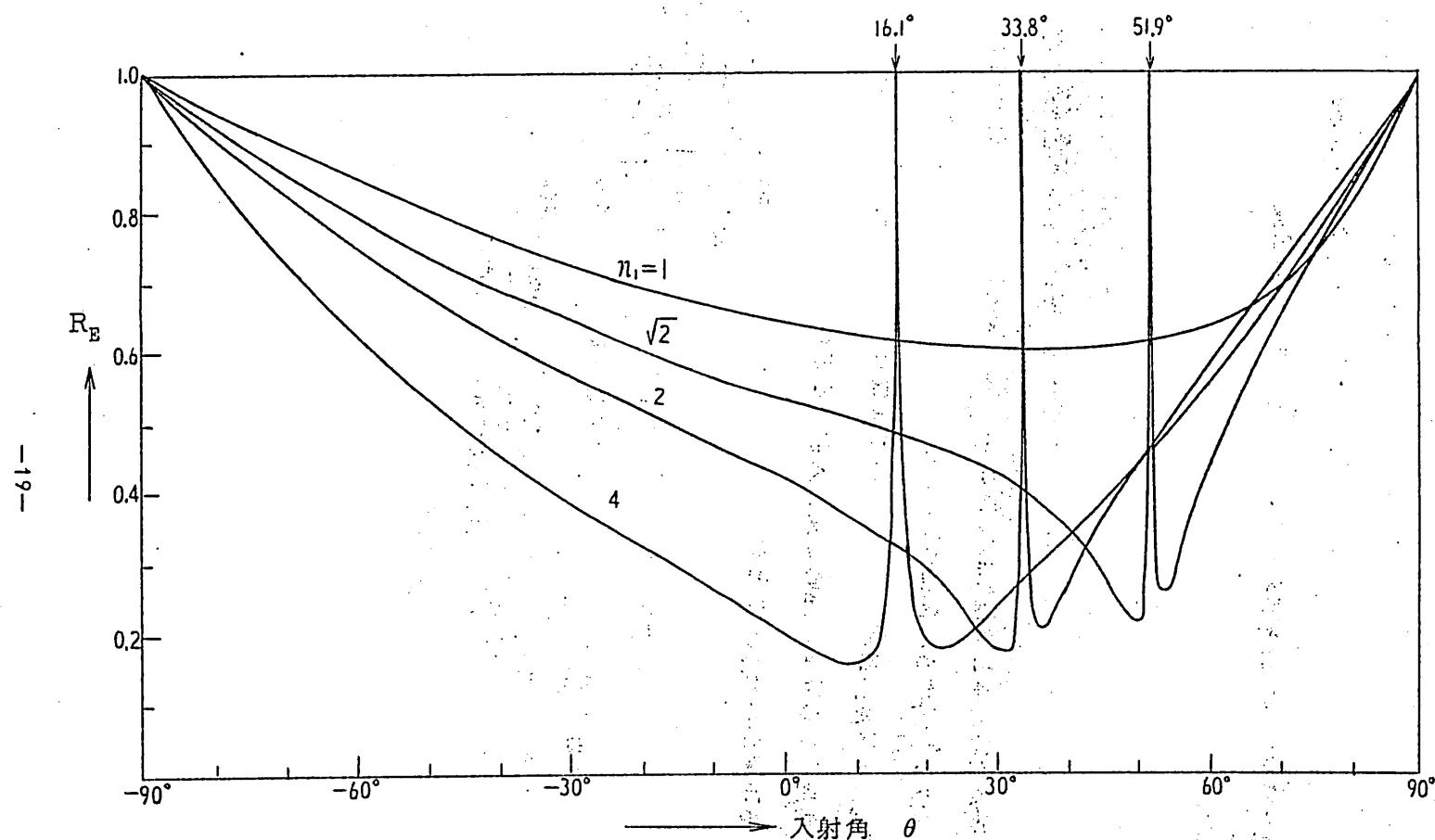


図4(c) 反射係数  $R_E$

( $\beta = 0.9$ ,  $m = 0.1$ ,  $n_2 = \sqrt{2}$ )

詳しく検討したが、入射波が丑波の場合にも式(26)、(27)から丑波の場合と類似の傾向を示すことがわかる。

#### 4. 結 言

相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界面に、完全誘電体側から丑波もしくは丑波が入射する場合について、反射係数、透過係数等を求めて検討した。特に、入射波が丑波の場合については数値計算例を挙げて詳しく検討し、波が真空側から導電性運動媒質に入射する場合<sup>(1)~(4)</sup>とは異なった種々の興味ある現象が現われることを明らかにした。

#### 謝 辞

日頃ご指導ご教えたついていただいている、本学工学部板倉清保教授、同熊谷信昭助教授に深謝する。また、常々ご討論いただく板倉研究室の諸氏に深謝する。

## 文 献

- (1) H.Fujioka, F.Nihei and N.Kumagai: "Interaction of a plane electromagnetic wave with a moving conducting dielectric half-space", J. Appl. Phys. (Communications), 39, pp. 2161-2162 (March 1968).
- (2) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "運動している導電性誘電体と平面電磁波との相互作用", 信学論(研究速報) 51-B, pp. 407~408 (昭43-08).
- (3) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "導電性運動媒質の境界面における電磁波の境界条件とエネルギー関係式", 信学論(研究速報) 51-B, pp. 103~104 (昭44-02).
- (4) H.Fujioka, F.Nihei and N.Kumagai: "Interaction of plane electromagnetic waves with a moving compressible plasma fluid", Can. J. Phys., 47, pp. 375~387 (Feb. 15, 1969).
- (5) 藤岡 弘: "相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界面における全反射現象", 昭44連大, No.1351 (昭44-03).
- (6) 藤岡 弘: "導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析", 信学会アンテナ・伝播研資, AP. 68-54 (昭44-01).
- (7) 藤岡 弘, 中川紀美雄, 熊谷信昭: "導電性運動媒質を含む導波管の厳密な取扱い", 信学論, 52-B, pp. 130~135 (昭44-03).

幅射科学研究会

超高速光パルス発生器

大阪大学産業科学研究所

小林哲郎

松尾幸人

昭和44年4月25日

於住友電気工業株式会社

訂正とお詫び、

EP刷りの因保で全頁にわたり一行が抜けていましたので下記のごとく追加しお詫び致します。

真

① 超高速光パルス発生器

②  $\overline{P}_0 = K_{IH} T N \left[ \left( \frac{G_0}{N(A+T)} \right)^2 - 1 \right] \quad (1)$

③ 2. 結合モード方程式

次1回がこのパルス発生器の原理を示す図である。

④  $\frac{dA_n^*}{dt} = -\frac{\alpha}{2\varepsilon_0} A_n^* - \frac{c\Omega}{2\varepsilon_0} P_n^* \quad (P)$

⑤ 3. 結合モード方程式の解

⑥  $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |b_0|^2 (1 + 2 \sum_n e^{-2n\theta r})$

⑦  $P_+ = \overline{P}_+ \frac{\tanh^3 \theta r}{\left( 1 - \frac{\sin x}{\cosh \theta r} \right)^2}$

⑧ 4. 定常的解

⑨  $\frac{g(|b_0|^2)}{\alpha} = \sqrt{1 + \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2} \quad (36)$

⑩ 1) それの場合も threshold 条件は同じで

⑪



⑫ 例) 共振器長(L)が 0.3m の He-Ne 3.39μL パルス

はじめに、高利得で飽和度の高いガスレーザや固体レーザでは、強制モード同期の同期信号を強くしてレーザの利得中外のモードにエネルギーを多く分散させてその飽和特性のため、共振器内部の全エネルギーはほとんど減少しない。しかし、てこのようにレーザでは平均出力の減少を余り叶えないと細くする二ことが可能になる。ここでは、この種のFM同期についてモード理論を用いて取扱った。なあきの結果、あるまかね例として、He-Ne 3.39 μm レーザではパルス巾数  $10 \mu\text{sec}$  ぐり返し周波数数  $6\text{GHz}$  程度のパルスを無変調時の最適結合出力の  $50\%$  以上の出力でとり出すことができる二ことを示した。

## 1. 一般的考察

レーザ出力のパルス化はふつうモード同期が用いられる。そして得られるパルスの中にはレーザのゲイン中にすってきまとされている (He-Ne 6328 Å では  $0.7 \mu\text{nsec}$ )。これは、パルス中に細くすべき同期信号を大きくすると、多くのサイドベンドが、ゲイン中外のモード (passive mode) に分布するようになり、そこでは、エネルギーが生み出されなく、たゞ損失の多いあるため、平均的に損失が大きくなって内部バリーが減少レートには発振停止に至るといふことで理解できる。しかもし、レーザ発振がそのゲイン中外のモード (active mode) では充分飽和しているような場合、passive mode にエネルギーが上げて少々損失がでても全体としてのパワーは余り変わらないであろう。たとえば active mode がただ一つの偏倉を考えよ。内部変調により  $N$  本のモード (ほゞ同じバリー持つとする) にエネルギーが分散したとすると、active mode の出力はほゞ  $N$  倍となり、出力パワーは

### inhomogeneous broadening

$$= K_H T N \left[ \left( \frac{G_0}{N(A+T)} \right) - 1 \right] \quad (1')$$

### homogeneous broadening

ここで  $K_H$ ,  $K_H$  は定数であり,  $T$  は共振器の外部への結合係数,  $G_0$  はレーザー振質の小信号利得,  $A$  は共振器内部の損失に対する値である。この式見ると homogeneous broadening では,  $G_0 / (A+T)$  が大きければ、平均的出力  $P_0$  の  $N$  に対する依存性がゆるやかであることがわかる。実際変調時と無変調時 ( $N=1$ ) の最大結合出力の比は

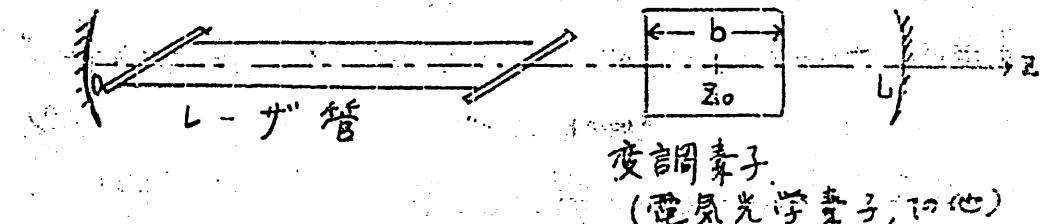
$$\left[ \sqrt{\frac{G_0}{A}} - \sqrt{N} \right]^2 / \left[ \sqrt{\frac{G_0}{A}} - 1 \right]^2 \quad (2)$$

となります。 $G_0/A \gg 1$  のはんりでは 結合出力の減少はほとんどあらわれない。パルス幅は変調周波数 ( $\pi$  は共振器差によって決定される) が  $f_m$  なら、 $\pi^2 / (N f_m)$  となり、したがって peak  $\frac{1}{\text{power}}$  が増大する。

この方法が有効なのは homogeneous broadening ができる利得  $G_0$  が非常に高いレーザーに限らずである。が、実際 gas laser では高利得で高飽和のもの (Hg など) は必ずしも homogeneous broadening ができこの方法が有効となる。しかし Hg 6328 Å のような low gain gas laser では、この方法は利点を見出すことはできない。この種のレーザーに対する高近パルス化は光キャッタ結合によることによることと思われる。

ア) 図 A このハルス先生の原理と示す(4)式  
リ) FMレーザの場合と何を変えるとこうはなる。

$$\delta E = 2\Delta E_0 \cos(\Delta \Omega t + \phi)$$



### ア) 原理図

ミラーを100%の反射係数を持つものとし、共振器内部の損失はすべて一様分布率で代用すると、電界  $E(z, t)$  と分極  $P(z, t)$  の間につきの関係式がある。

$$c^2 \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\alpha}{\epsilon_0} \frac{\partial E(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P(z, t)}{\partial t}$$

なお境界条件はつきのようになる。

$$E(0, t) = E(L, t) = 0 \quad (4)$$

振動分極  $P(z, t)$  が小さきものと仮定すれば  $E(z, t)$ ,  $P(z, t)$  はつきのように mode 展開されることがわかる。

$$E(z, t) = \sum_n (a_n^* e^{i\Omega_n t} + a_n e^{-i\Omega_n t}) \sin K_n z \quad (5)$$

$$\frac{2}{L} \int_0^L P(z, t) \sin K_n z \cdot dz \cong p_n^* e^{i\Omega_n t} + p_n e^{-i\Omega_n t} \quad (6)$$

$$\Omega_n = (n+q) \frac{c\pi}{L} = ck_n \quad (n, q \text{ 整数}) \quad (7)$$

であり。  $a_n$ ,  $p_n$  は時間とともに分子やから変化するカーブ振りで、\* は複素共役を示す。 (5)~(7)  
を (3) に代入して適當な近似を用ひると次式が得られる。

$dt$

$$2E_0 \cdots 2E_0 / m$$

さて、同期内部相変調が与えられていく場合、  
極  $P(z, t)$  はつぎのとおりの形をとる（ニードル  
一応レーザー模倣に付す分極は考えない）。

$$P(z, t) = \begin{cases} 2E_0 A \cos(\alpha \Omega t + \frac{\pi}{4}) F(z, t), & |z - z_0| \leq \frac{1}{2} b \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (9)$$

$$\Delta \Omega = \Omega_{n+1} - \Omega_n = \frac{c\pi}{L} = c \Delta K \quad (10)$$

(9), (10) を (5) に代入すると

$$P_n^* = E_0 A \left[ C_{n+1, n} a_{n+1}^* e^{-i\frac{\pi}{4}} + C_{n-1, n} a_{n-1}^* e^{i\frac{\pi}{4}} \right] \quad (11)$$

ここで

$$C_{m, n} = \frac{2}{L} \int_{z_0 - \frac{1}{2}b}^{z_0 + \frac{1}{2}b} \sin k_m z \cdot \sin k_n z dz \approx \frac{1}{L} \int_{z_0 - \frac{1}{2}b}^{z_0 + \frac{1}{2}b} \cos \frac{m-n}{L} \pi z dz \quad (12)$$

$$k < l \Rightarrow L \gg b \quad C_{m, n} \sim \frac{b}{L} \cos \frac{m-n}{L} \pi z_0$$

∴  $C_{n+1, n} \Omega_n \sim C_{n-1, n} \Omega_n \sim C_{1, 0} \Omega_0$  ので  $\pi = h \in \mathbb{R}$

$$\frac{da_n^*}{dt} + \frac{\alpha}{2E_0} a_n^* = -i \frac{\pi}{2} (a_{n+1}^* e^{-i\frac{\pi}{4}} + a_{n-1}^* e^{i\frac{\pi}{4}}) \quad (13)$$

( $\pm \frac{\pi}{2}$ )

$$b_n^* = a_n^* e^{-im(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} \quad (14)$$

と変数を変換すると (13) は

$$\frac{db_n^*}{dt} + \frac{\alpha}{2E_0} b_n^* = \frac{\pi}{2} (b_{n-1}^* - b_{n+1}^*) \quad (15)$$

となり、

総合して一元方程式が得られる。

定常では  $d|b_m|^2/dt = 0$  であるので  $db_m^*/dt = iy b_m^*$   
( $y$ は実数で一定同相数 shift に対する) とかく  $= e^{iy}$   
である。 (15) は

$$(\alpha + iy) b_m^* = \frac{1}{2} \pi (b_{m-1}^* - b_{m+1}^*) \quad (16).$$

又  $\alpha = \frac{\omega}{2\epsilon_0}$  である。 (16) で  $b_m^* = S^n$  とおくと  
(16) の特性方程式が得られる

$$S^2 + 2\left(\frac{\omega}{\pi} + i\frac{y}{\pi}\right)S - 1 = 0 \quad (17).$$

となる。この 2 根  $S_1, S_2$  ( $|S_1| \geq |S_2|$ ) はつぎのよう  
に書けるである。つまり

$$\begin{aligned} S_1 &= \pm e^{\mp(\theta_r + i\theta_i)} = \pm e^{\mp\theta} \\ S_2 &= \end{aligned} \quad (18).$$

$$\alpha/\pi = \sinh \theta_r \cos \theta_i, \quad (19)$$

$$\alpha/\pi = \cosh \theta_r \sin \theta_i, \quad (20)$$

$$\theta_r \geq 0. \quad (21).$$

$\alpha \neq 0$  であるので  $\theta_r > 0$  となる。 (たゞ、 $b_m^*$  が  $|n| \rightarrow \infty$   
で発散しないためには

$$b_m^* = b_0^* S_1^n = b_0^* e^{-n(\theta_r + i\theta_i)} \quad (n \geq 0 \text{ かつ } \ell) \quad (22)$$

$$b_m^* = b_0^* S_2^n = b_0^* (-1)^n e^{n(\theta_r - i\theta_i)} = (-1)^n b_{-n}^* \quad (n \leq 0) \quad (23).$$

次の step にて、電界 (5) の前進波部分だけを考へてみ

$$E_+(z, t) = \sum_n \frac{1}{2} i a_n^* e^{i(Q_n t - K_n z)} + \text{complex conjugate} \quad (23).$$

したがって前進波の平均パワー密度  $\bar{P}_+$  は

$$\bar{P}_+ = \frac{1}{2} \sum_n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |a_n^*|^2,$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |b_0^*|^2 \coth \theta_r \quad (24).$$

さう K. (23)はつぎのようにも書ける。 (アリヤス)

$$E_+ (z, t) = \frac{1}{2} i b_0^* e^{i(\Omega_0 t - K_0 z)} \frac{\coth \theta}{1 - i \frac{\sin X}{\sinh \theta}} + C.C. \quad (25).$$

$$X = \Delta \Omega t - \Delta K z + \psi - \frac{1}{2}\pi \quad (26).$$

さて、前進波の瞬時パワー  $P_+$  はつぎのようになる。

$$P_+ = \frac{1}{2} |b_0^*| \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left| \frac{\coth \theta}{1 - i \frac{\sin X}{\sinh \theta}} \right|^2 \quad (27).$$

(27)より  $P_+$  は  $\theta_i$  の値に大きく依存するとしておく。ここでその典型的な例として  $\theta_i = 0, \theta_r = \frac{\pi}{2}$  にて述べる。

Case 1,  $\theta_i = 0$ .

この場合 (27) は、

$$P_+ = \bar{P}_+ \frac{\coth \theta_r}{1 + \frac{\sin^2 X}{\sinh^2 \theta_r}} \quad (28).$$

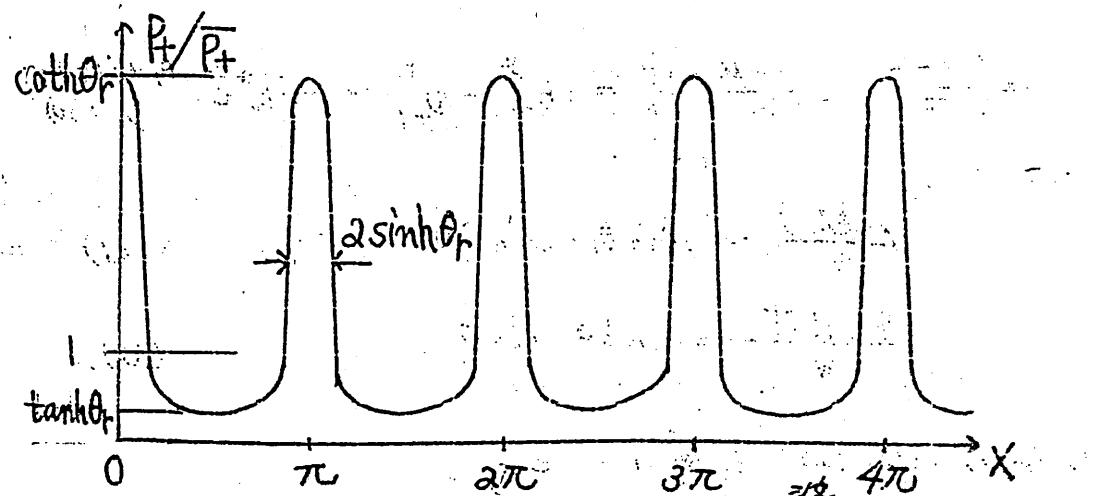
(28)式は第2回の(1)でパルス列に対応する。すなはちパルスの繰返し周波数は  $d/L$  で変調周波数の2倍、パルス中は  $(2L/\pi) \sinh \theta_r$ 。ビーグパワーは  $\bar{P}_+ \coth \theta_r$  となる。とくに  $\theta_r \ll 1$  の場合は パルス中、ビーグパワーはそれぞれ  $(2L/\pi) d/\pi$ ,  $\bar{P}_+ \pi/d$  となる。

Case 2,  $\theta_i = \frac{1}{2}\pi$ .

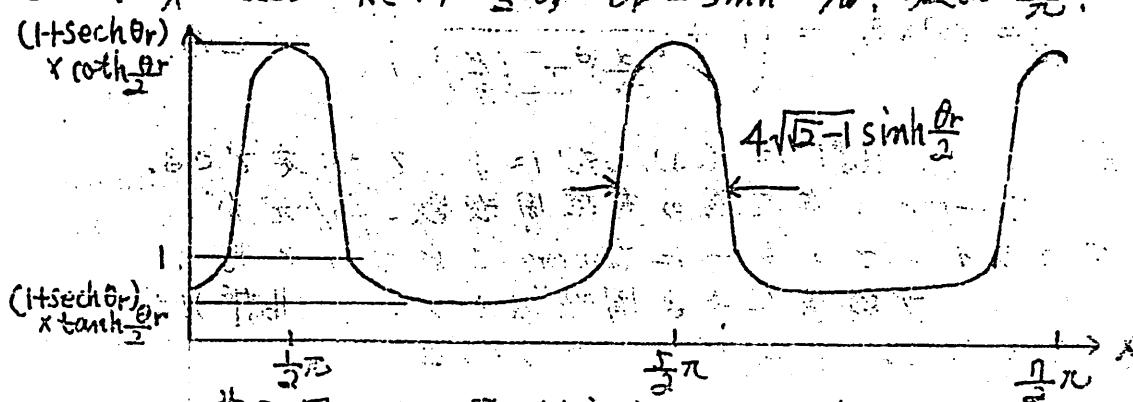
この場合 (27) は、

$$= \bar{P}_+ (1 + \operatorname{sech} \theta_r) \coth \frac{\theta_r}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sin^2 \frac{x-\pi}{2}}{\sinh^2 \frac{\theta_r}{2}}\right)^2} \quad (29)$$

これはオ<sup>2</sup>3図に示されるよろと、繰り返し周波数が  
 $c/2L$ 、パルス幅が  $4\sqrt{2}-1 (L/\pi) \sinh \frac{\theta_r}{2}$ 、 $\tau = T/1.7 -$   
 $\theta_r = \bar{P}_+ (1 + \operatorname{sech} \theta_r) \coth \frac{\theta_r}{2}$  のパルス列に対応する。  
 実際  $\alpha \neq 0$  でないのて  $\theta_r = \frac{\pi}{3}$  となるよろと、  
 1. しかし後述の FM エード周期は  $T/3$  に止  
 2. そのとき考えらる。



オ<sup>2</sup>4图.  $\theta_r = 0$  に対応する  $10^\circ$  ハンズ形  
 $\approx \pi$   $x = 4\Omega t - 4Kz + 4 - \frac{1}{2}\pi$ ,  $\theta_r = \sinh^{-1} \alpha/\pi$ , くらばは  $\frac{4\Omega}{\pi}$ .



オ<sup>3</sup>4图.  $\theta_r = \frac{\pi}{3}$  に対応するハルス形状。  
 くらばは  $4\Omega/3\pi$  である。

(22), (22)' は (15) そして (16) の  $n=0$  に対する関係式について考慮する = となく得られるものである。したがって  $n=0$  に対応する 固体としてニカルのものと異なるものをあてはめて もよしとすることになる。 $n=0$  に対するモードに注入電界の存在を仮定して新たな 固体式を考えると、Fabry-Pérot electro-optic<sup>4)</sup> modulator の問題をいくつに分ける。ここでは  $n=0$  に対するモードの "レーザ" ゲイントの内に存在し、active mode であるとしてこれを考慮する。mode 0 の レーザ 媒質による 時間的制限、および、角周波数シフトを  $g(|b_0|^2)$ ,  $\mu(|b_0|^2)$  でそれぞれあらわすと、(16) の  $n=0$  の代わりに  $\alpha$  を用いることとする。

$$\alpha \left( \frac{\alpha - \beta}{W} + i \frac{\gamma - \mu}{W} \right) b_0^* = b_{-1}^* - b_{+1}^* = -2b_0^* e^{-(\theta_r + i\theta_i)}, \quad (30)$$

$$\beta = -\gamma$$

$$\frac{\mu(|b_0|^2)}{W} = \sinh \theta_r \cdot \sin \theta_i \quad (31)$$

$$\frac{g(|b_0|^2)}{W} = \cosh \theta_r \cos \theta_i \quad (32).$$

(19), (20), (31), (32) を用いよと。

$$Y = \mu(|b_0|^2) g(|b_0|^2) / \alpha \quad (33)$$

$$\frac{g}{\mu} = \coth \theta_r = \left\{ 1 + \frac{1}{\left( \frac{\alpha}{W} \right)^2 + \left( \frac{\mu}{W} \right)^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (34).$$

したがって  $Y, |b_0|^2$  は (33), (34) によつて決定できる。

もし、モードの共振器の共振角周波数  $\Omega_0/2\pi$  が、

レーザのライナセナターに tuning されていたら、

小こうは レーザ 媒質による 周波数シフト  $\mu(|b_0|^2)$  には 存在しなくなる。(たゞしてこの場合、

$$Y = \mu(|b_0|^2) = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\alpha - i\omega}{\alpha} = \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\alpha})^2} \quad (36)$$

$$\sinh \theta_i = 0 \quad (37)$$

$\omega > 0$  とするたゞ.  $\theta_i = 0$  となり. (19), (32) は.

$$\alpha/\omega = \sinh \theta_r \quad (38)$$

$$\frac{g(|b_0^*|^2)}{\omega} = \cosh \theta_r \quad (39)$$

となる. レーザ利得  $g(|b_0^*|^2)$  は

$$g(|b_0^*|^2) = \frac{g_0}{\sqrt{1 + \frac{|b_0^*|^2}{|b_{0s}^*|^2}}} \quad (40)$$

(inhomogeneous broadening).

$$g(|b_0^*|^2) = \frac{g_0}{1 + \frac{|b_0^*|^2}{|b_{0s}^*|^2}} \quad (41)$$

(homogeneous broadening).

てえらる.  $g_0$  は小信号利得であり.  $|b_{0s}^*|^2$  は飽和パワーに対する. (40), (41) と (38), (39) は  $\lambda$  とニヒにまりつづの関係式がえらる.

$$|b_0^*|^2 = |b_{0s}^*|^2 \left( \frac{g_0^2}{\alpha^2} \tanh^2 \theta_r - 1 \right) = |b_{0s}^*|^2 \left( \frac{g_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} - 1 \right) \quad (42)$$

(inhomogeneous broadening).

$$|b_0^*|^2 = |b_{0s}^*|^2 \left( \frac{g_0}{\alpha} \tanh \theta_r - 1 \right) = |b_{0s}^*|^2 \left( \frac{g_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} - 1 \right)$$

(43) (homogeneous broadening).

$$g_0 \geq (\alpha^2 + \pi^2)^{\frac{1}{2}} \quad (44).$$

$$\text{または } g_0 \geq \alpha \coth \theta_r \quad (44)'$$

ここで (42), (43) 及び (44), (45) を代入すれば、平均パワー密度  $\bar{P}_+$  やビーグーパワー密度  $P_{+max}$  を求められる。

(inhomogeneous broadening)

$$\bar{P}_+ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |b_{0s}|^2 \left\{ \left( \frac{g_0}{\alpha} \right)^2 \tanh^2 \theta_r - 1 \right\} \coth \theta_r \quad (45).$$

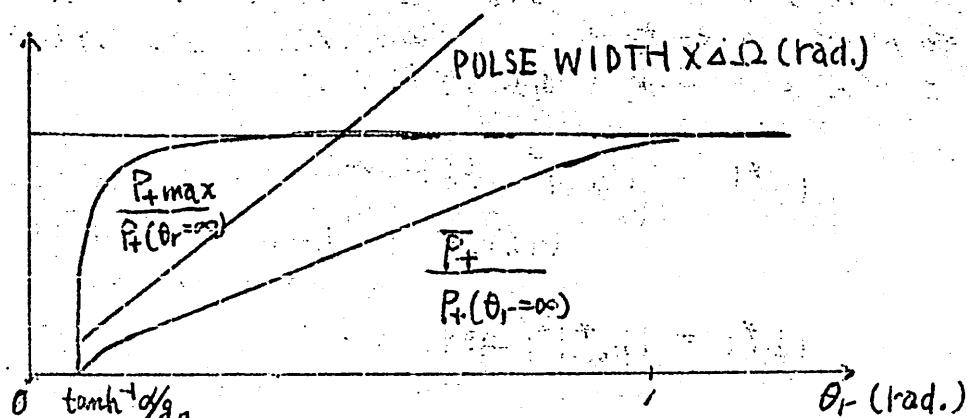
$$P_{+max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |b_{0s}|^2 \left\{ \left( \frac{g_0}{\alpha} \right)^2 - \coth^2 \theta_r \right\} \quad (46)$$

(homogeneous broadening).

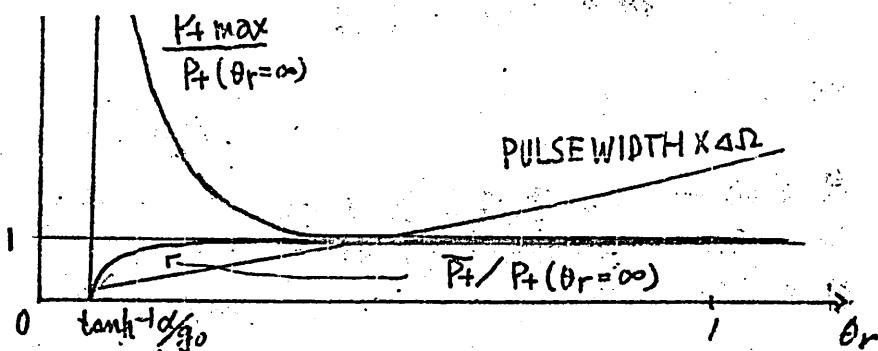
$$\bar{P}_+ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |b_{0s}|^2 \left( \frac{g_0}{\alpha} - \coth \theta_r \right) \quad (47)$$

$$P_{+max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |b_{0s}|^2 \coth \theta_r \left( \frac{g_0}{\alpha} - \coth \theta_r \right) \quad (48).$$

(45), (48) は結合度をかければそのまゝ。 (1), (1)' に対応する。オフ図は、(45)～(48) よりビーグーのパルスのビーグーパワー密度、平均パワー密度、パルス角  $\theta_r$  ( $= \sinh^{-1} \alpha/\pi$ ) の関数として示したものである。



オフ図 (a). inhomogeneous



第4圖 (b). inhomogeneous broadening

threshold ありじゆうぶん上の  $\beta_0 > \alpha \coth \theta_r$  の領域では、 homogeneous broadening の場合、平均パワー 密度  $P_0$  は無変調時 ( $\theta_r = \infty$ ) のときとほとんど変わらないが、 inhomogeneous broadening の場合は  $\tanh \theta_r$  だけ小さくなる。したがって前者の場合とは pulse compressor 的であり、後者は pulse shaper 的であるといえる。パワー損失がタリヒラ点で homogeneous broadening して「レーザ」のみの方法が有効である。（たがって固体レーザなどにはすぐ使えずが、ガスレーザでも  $\sqrt{1 + b_{\text{out}}^2/b_{\text{out}}^2} > KU/\sqrt{\gamma}$  ( $KU$ ,  $\gamma$  はドップラ中自然中に対応) なら homogeneous broadening 近似ができるので高利得の He-Ne 3.39 μL レーザなどは使える）である。この条件を  $\tanh \theta_r < (\beta_0/\alpha)(\sqrt{\gamma}/KU)$  とも書ける。(47), (48) は内部パワー密度なので、より実際的な外部パワーを考える。 $\alpha$  を外部への結合に与えるものと内部損失によるものとを区別すれば、 $d_0$  とすると、外部へ取り出せるパルスの平均パワー、およびピークパワーは、無変調時の最適結合率  $\alpha$  によって規格付せば次のようになる。

$$\text{平均出力} \left( \frac{\sqrt{\frac{d_0}{d_0}} - \sqrt{\coth \theta_r}}{\sqrt{\frac{d_0}{d_0}} - 1} \right)^2 \quad d_{\text{out}} = \sqrt{d_0 \tanh \theta_r} \quad (49)$$

$$\text{尖頭出力} \rightarrow \left( \frac{\frac{d_0}{d_0}}{\sqrt{\frac{d_0}{d_0}} - 1} \right)^2 \quad d_{\text{out}} = d_0 = \frac{d_0}{2} \tanh \theta_r \quad (50)$$

は、 $90^{\circ}$ から $110^{\circ}$ にかけては、この場合(49.50)  
がつきのように種々の値を具積みと/orされる。

- 得られる最大パルス幅 6psec.
- 無度調時の最適結合出力の  
50%程度の平均出力で得ら  
れるパルス幅 50psec.
- 得られる最大のピークパワー  
(無度調時最適結合出力の) 8倍
- パルスの繰返し周波数 1.0 GHz.

付、パルス幅を縮くすることは、磁界などゲイン幅  
を広げてもできず、どうやら有効性は目下検討中で  
ある。(これがの場合にも High gain であることが必  
要であるが)。

### 参考文献

全般的なもの。

- 1). T. Kobayashi, Y. Cho and Y. Matsuo,  
*Mem. Inst. Sci. & Ind. Res. Osaka Univ.*, 26 (1961).
- 2). D. E. Caddes, L. M. Osterink, and R. Targ,  
*Appl. Phys. Letters*, 12 #4 (1968)  
その他
- 3). 小林, 張, 松尾 昭44年電気学会連合年会 1707
- 4). E. I. Gordon and J. D. Rigden, *B.S.T.J.*  
42 155 (1963)

漏洩同軸ケーブル

昭和44年4月25日

於住友電工

中原恒雄  
倉内憲孝  
長尾多一郎  
吉田健一

住友電氣工業株式会社 研究部

## 1. まえがき

当社における漏洩同軸ケーブルの開発は、開放型線路研究の一環として昭和35年に開始され、今日に至るまで種々の形式の漏洩同軸ケーブルを試作検討してきた。

漏洩同軸ケーブルは、同軸ケーブルの外導体に電磁波漏洩部を設け、かつ、適当な周期構造を持たせて、同軸内を伝送される電磁波から漏洩波を取り出し、外部空間にケーブル軸に沿つて電磁界を形成するもので、移動体局と固定局間の通信、移動体局と移動体局間の通信に使用可能である。

一般に、移動体通信に使用される開放型線路に要求される性能としてつきのような点が考えられる。

- (1) 移動体局の受信レベルが均一であること。
- (2) 伝送線路のよごれ、伝送線路付近の障害物により、伝送特性が影響をうけないこと。
- (3) 特殊な構造であるにもかかわらず、製造が容易で安定であること。

本文においては、上記の条件を満足するジグザグスロット漏洩同軸ケーブルおよび漏洩同軸ケーブル用アンテナについて記述する。

ジグザグスロット漏洩同軸ケーブルは、筆者らの数年にわたる試作検討の結果、得られた高性能を有するものである。

## 2. ジグザグスロット漏洩同軸ケーブル

本文において取り扱うジグザグスロット漏洩同軸ケーブルを図1に示す。この漏洩同軸ケーブルの特徴は電磁波を漏洩させるスロットが、ジグザグに配置されていることである。

座標軸を図1に示すように定めると、伝送姿態を構成する空間高調波の中で、 $\phi$ 方向の電界を有する成分の伝搬定数  $\beta_{zn}^V$  はつきの式で与えられる。

$$\beta_{zn}^V = \beta_g + \frac{2\pi n}{p}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

また、z 方向の電界を有する成分の伝搬定数  $\beta_{zn}^H$  は

$$\beta_{zn}^H = \beta_g + \frac{4\pi n}{p}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
(2)

となる。ただし、 $\kappa$ はスロット配置の周期、 $\beta_g$ はケーブルの基本波の伝搬定数を表わす。

放射方向  $\boldsymbol{\varphi}$  は次式により与えられる。

ただし、 $\tilde{\gamma}_i$  は図 2 に示されるように定義される。また、

$k = 2\pi/\lambda$  ,  $\lambda$  は波長を表わす。

図3(a)は、基本波の波長短縮率を90%と仮定した場合の放射角 $\theta$ と $p/\lambda$ の関係を示している。ジグザグスロット漏洩同軸ケーブルの特徴は $p/\lambda$ を適当に選ぶことにより、 $\phi$ 方向(垂直方向)の電界を有する1つの空間高調波( $n = -1$ )のみが漏洩波となり、したがつてケーブルに沿つて一様な電磁界が形成され得ることになる。図3(b)は第( $n = -1$ )空間高調波のみが放射する場合の周波数に対する $\theta$ の実測値を示す。漏洩界は次式により表わされる。

ただし、ケーブルの外径が波長に比べて十分小さいものと仮定され、また  $k_r = \sqrt{k^2 - (\beta_g - \frac{2\pi}{p})^2}$  である。

ジグザグスロット漏洩同軸ケーブルの別の特徴は、スロットの1周期内に2つのスロットがあるため、ケーブルの近傍界が一様になり、通信に対して好都合となる。

### 3. 传 送 特 性

漏洩同軸ケーブルを伝送線路と見なした場合の基本特性、すなわち、特性インピーダンス  $Z_0$ 、位相走数  $\beta_p$ 、減衰定数  $\alpha$  を導出する。

図4にケーブルの断面構造を示す。図4(a)はケーブルの断面構造図、図4(b)は中心導体を支持するためのポリエチレン誘電体ひもの断面を示す。

す。各部の寸法を図に示すように規定すると、一次定数  $R$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $C$  は、つきの式で与えられる。

$$R = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} + \frac{m}{2\pi b_{av}} \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \log e \frac{b_{av}}{a} + \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu}{4\pi f \sigma}} + \frac{m}{2\pi b_{av}} \sqrt{\frac{\mu}{4\pi f \sigma}} \dots \quad (6)$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 - \eta(\dot{\varepsilon} - \varepsilon_0)} \log e \quad \frac{(b-t)[2\pi\varepsilon_0 - \eta(\dot{\varepsilon} - \varepsilon_0)] + 2D(\dot{\varepsilon} - \varepsilon_0)}{a[2\pi\varepsilon_0 - \eta(\dot{\varepsilon} - \varepsilon_0)] + 2D(\dot{\varepsilon} - \varepsilon_0)} \\ + \frac{1}{2\pi\dot{\varepsilon}} \log e \quad \frac{b}{b-t} \quad (8-a)$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \log e \frac{b+\Delta b}{b} \quad (8-b)$$

ただし、 $f$  は使用周波数、 $\sigma$  は導電率、 $b_{av}$  は外導体の平均径、 $m$  は外導体の擦り込み率、 $\Delta b$  は、しわ付の山高、 $\epsilon$  は絶縁体の複素誘電率である。

式(5), (6), (7)を用いると伝送線路と見なした場合の二次定数  $Z_0$ ,  $\beta_g$ ,

$\alpha$ はつぎのようになる。

ただし、 $R_r$  は放射抵抗を示し、次式により与えられる。

$$Rr = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \alpha_r \quad (\alpha_r : \text{放射损失}) \dots \dots \dots \quad (11)$$

いま、 $a = 17.7 \text{ mm}$ ,  $b_{av} = 43.0 \text{ mm}$ ,  $W = 6 \text{ mm}$ ,  $w = 4 \text{ mm}$ ,  $h = 10.8 \text{ mm}$ ,  $t = 1.5 \text{ mm}$ ,  $p = 5.0 \text{ mm}$  と仮定して特性インピーダンス  $Z_0$ , 波長短縮率  $\nu$ , 減衰定数  $\alpha$  の実測値と比較すると図 5 のようになる。

#### 4. 結合損失

システム構成上、結合損失は重要な要因である。結合損失は、伝送線路内を伝送される電力と外部空間に置かれたアンテナの受信電力のレベル差を意味するが本論文においては、ケーブルから2m離れた点におかれた標準ダイポールアンテナにより受信される電力について定義する。

##### (4-1) スロットの形状と結合損失の関係

結合損失はスロットの形状、すなわち、スロットの長さ、その傾き角 $\theta$ により変化する。図6はスロットの形状と結合損失の関係を示す実験結果である。この実験結果は設計の重要な資料となる。

##### (4-2) 総合伝送損失と結合損失の関係

前述のような定義に従がう結合損失 $L_c$  (dB) と放射による損失 $\alpha_r$  ( $dB/K_m$ ) の間の関係はつきのような理論式で与えられる。

$$L_c = -5.9.8 + 10 \log (\alpha_t - \alpha_h) \dots \dots \dots \text{②}$$

ただし、 $\alpha_r = \alpha_t - \alpha_h$ 、 $\alpha_h$ は基本伝送損失である。

図7は $L_c$  と総合伝送損失 $\alpha_t$  ( $dB/K_m$ ) の間の関係を示す。図において×印は実験値を示す。

#### 5. システム設計に関する新しい考え方——グレイディング法

一般に受信機の性能の1つにダイナミックレンジがある。ダイナミックレンジが小さい程受信機の簡略化が可能となり、したがつて低廉化がはかれる。移動体通信においてダイナミックレンジを小さくする方法として、伝送損失による受信レベルの低下を、結合量を大きくすることにより補償する方法すなわち、グレイディング法がある。図8はグレイディング法を図的に示している。図において折線(I)は受信レベルの軸方向変化を示し、(II)は伝送電力の軸方向変化を示す。レベル低下の早さが次第に増加しているのは図7に示されるように結合損失の低下に伴なう伝送損失の増加を意味している。図9はグレイディングを行なつたシステムの受信レベルの実測値を示す。使用アンテナはダイポールアンテナである。使用ケーブルはジグザグスロット漏洩同軸ケーブルであり、そのレベル変動幅は5dBである。このレベル変動幅は従来の形式の漏洩同軸ケーブルでは実現し得なかつた値である。

## 6. 漏洩同軸ケーブル用アンテナに関する新しい試み——進行波アンテナの試作

漏洩同軸ケーブルより放射された電磁波は理想的には式(4)で与えられるように軸方向には伝送損失によるレベル変化以外には変動がなく、均一となるが、実際には、障害物による反射波により干渉を受け定在波が立ち、レベル変動が生じる。このようなレベル変動をなくするには、指向性の鋭いアンテナを用い、ケーブルより放射された一次波のみを受信すれば理想状態に近づき得る。このような観点に立つと、なるべく軸方向に長いアンテナを使用すればよい。本論文で取り扱うアンテナは進行波給電方式のアンテナでケーブルとの関係を図10に示す。試作したアンテナは、外導体内径15.2mmの50Ω系同軸直管の外導体にジグザグ状スロットを切ることにより構成されている。進行波給電方式のアンテナの特徴は、(1)スロット間隔および波長短縮率を漏洩同軸ケーブルと同一に選んでおくと放射角 $\delta$ はともに、式(3)で与えられ、任意の周波数において放射方向の整合を実現することができる。(2)構造が簡単でかつ給電における損失が極めて少なく能率がよい、等々であると言える。進行波給電方式のアンテナの設計の要点はアンテナの伝送損失を如何なる値に決定するかということである。すなわち、伝送損失が大きい場合には、放射ビーム幅が広くなり、レベル変動ならびに利得向上の改善効果が減少し、逆に、伝送損失が小さい場合には、指向性が鋭くなるためレベル変動が小さくなるが、漏洩量が小さいため、かえって利得が低下するということである。したがつて伝送損失に最適値が存在し、この値に設計する必要がある。図11は4mの進行波アンテナを用いて測定した結合レベル変動の状態を示している。

## 7. むすび

本論文においてはジグザグスロット漏洩同軸ケーブルの基本的問題を取り扱い、若干の実験結果を記載して理論との対応関係を明らかにした。

## 参考文献

- (1) 中原恒雄、倉内憲孝、長尾多一郎：“漏洩導波管通信方式における輻射と結合、” 住友電気、90

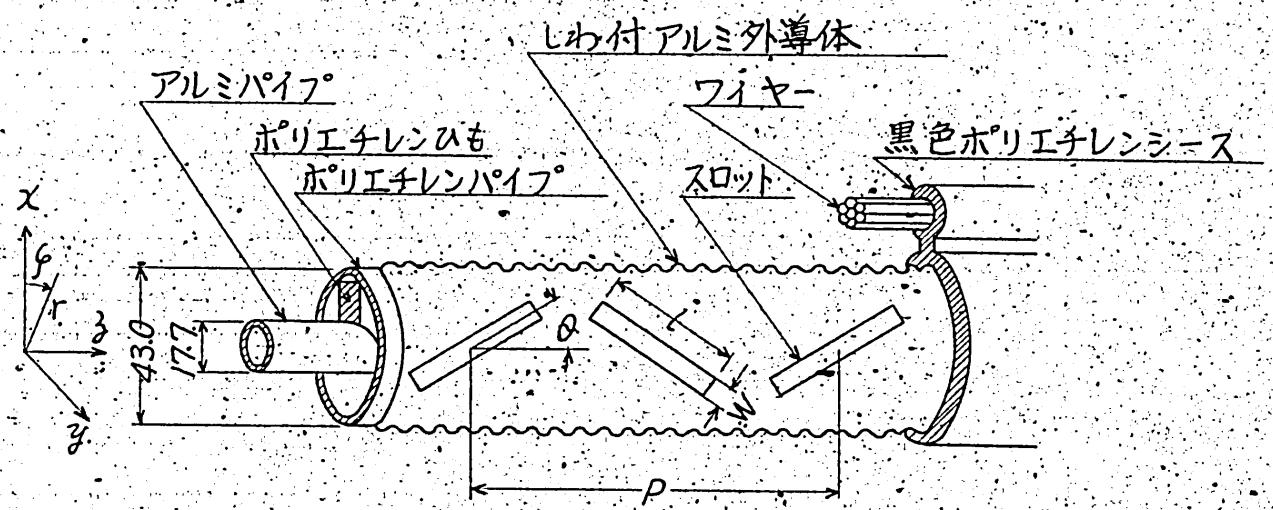


図1 ジグザグスロット漏洩同軸ケーブル

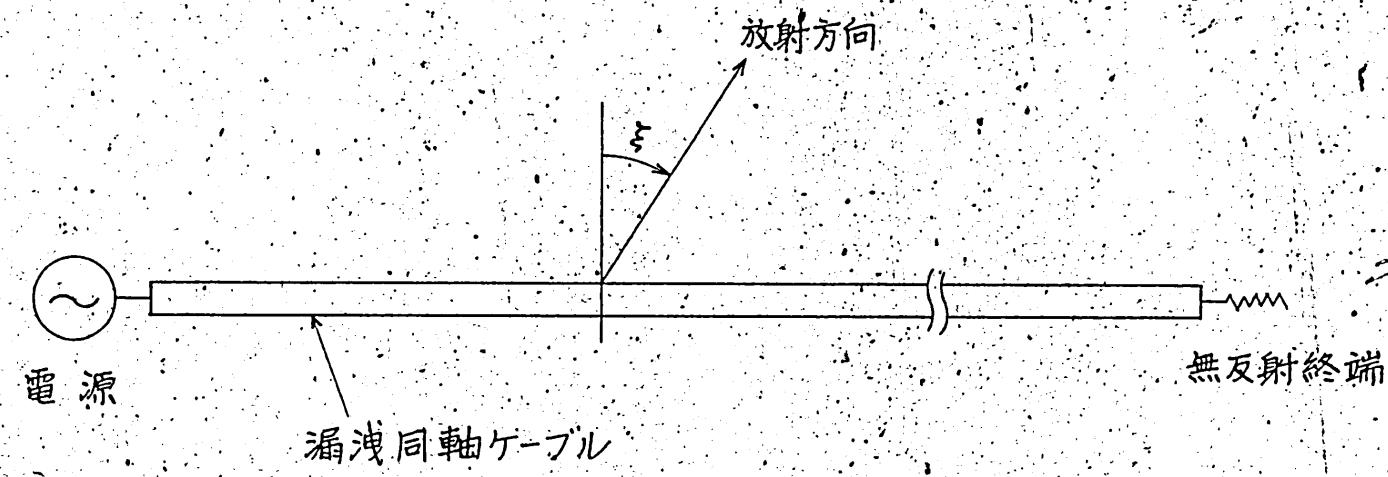


図2 放射角の定義

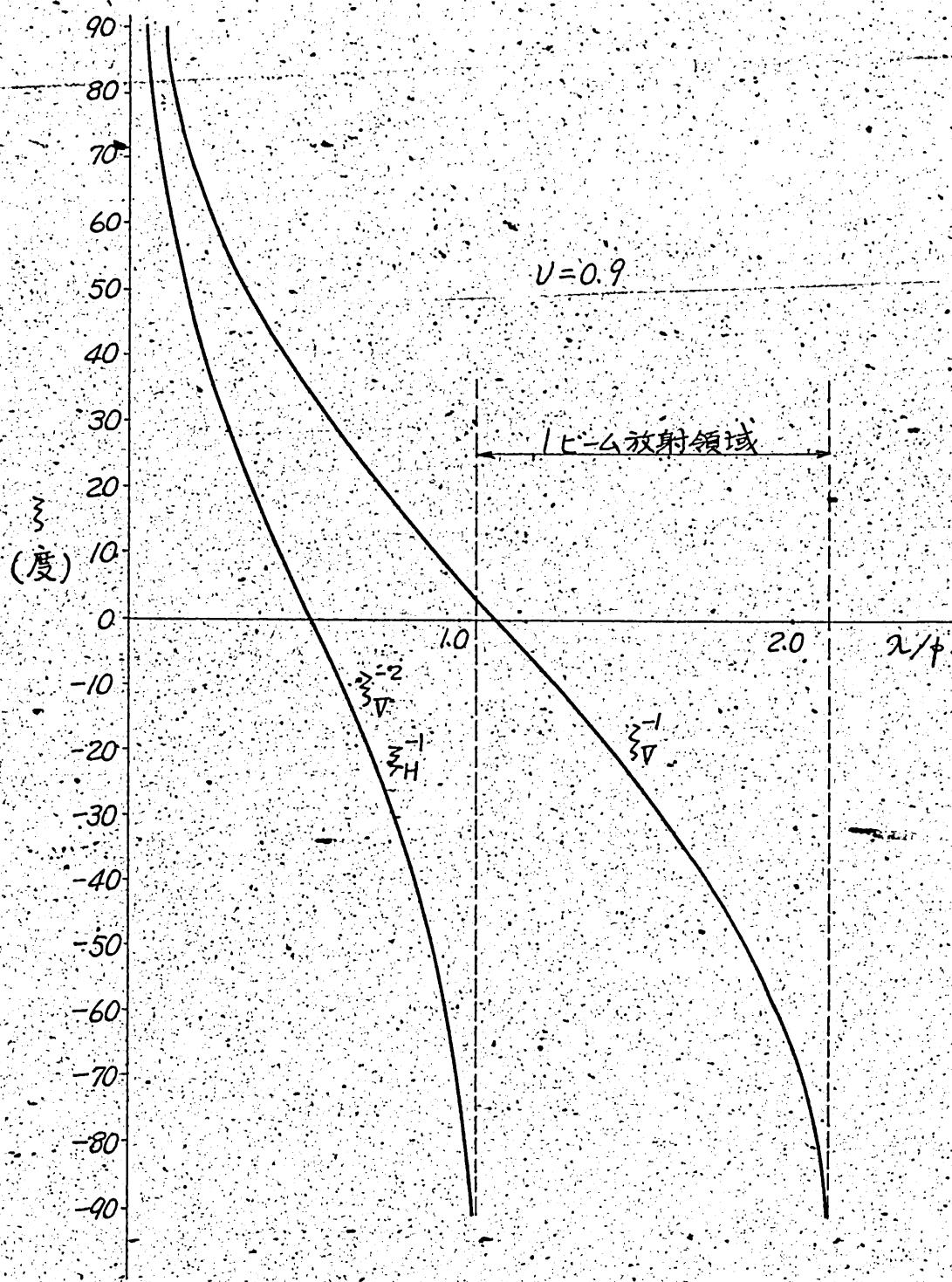


図3(a) 放射角とピッチおよび波長との関係

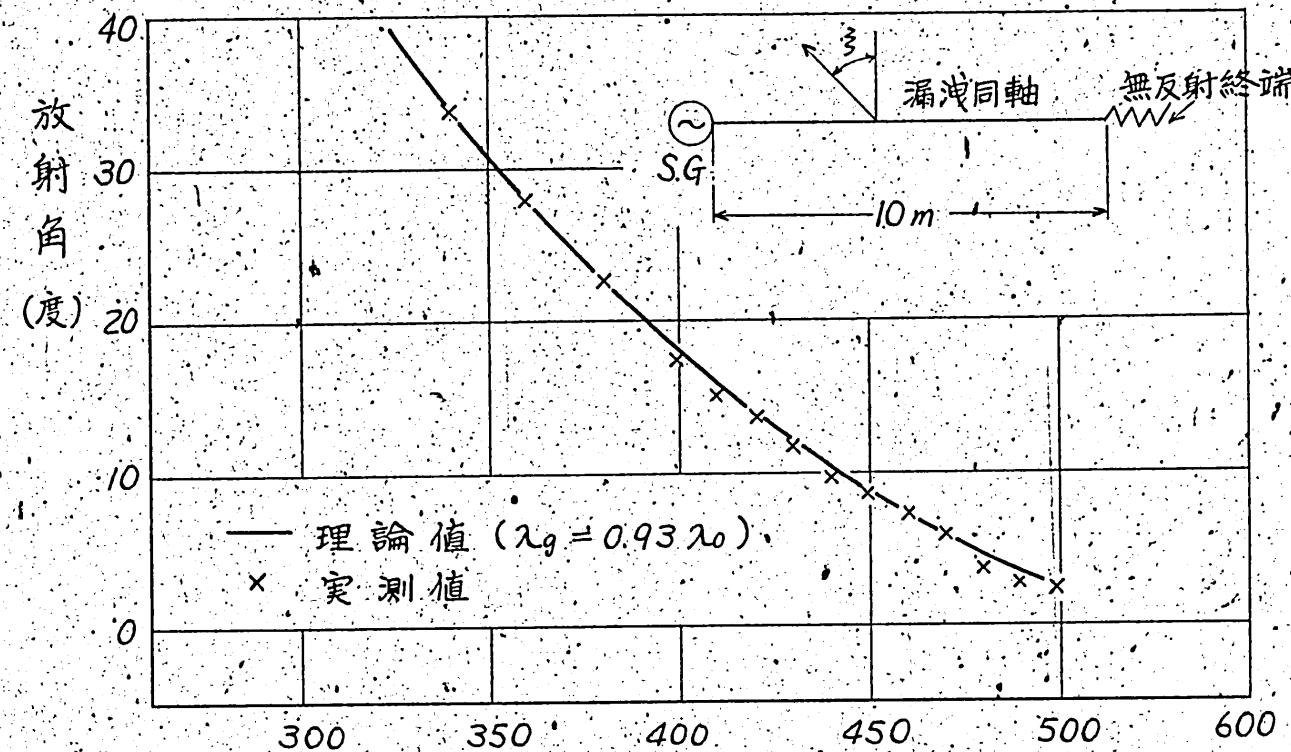


図3(6) 放射角の周波数特性

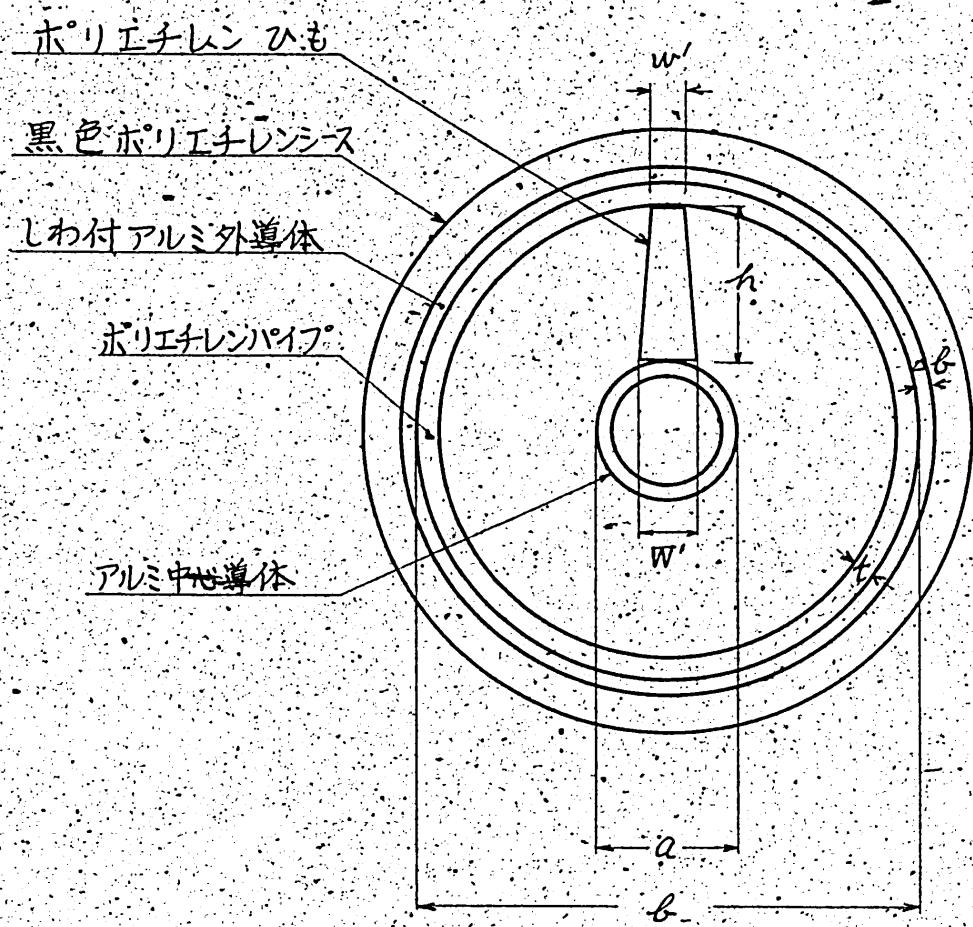


図4(a) ケーブルの断面構造

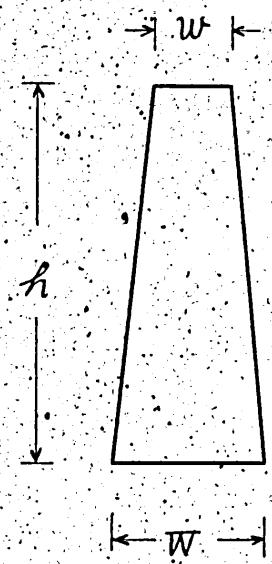


図 4(2) ポリエチレンひもの垂直断面

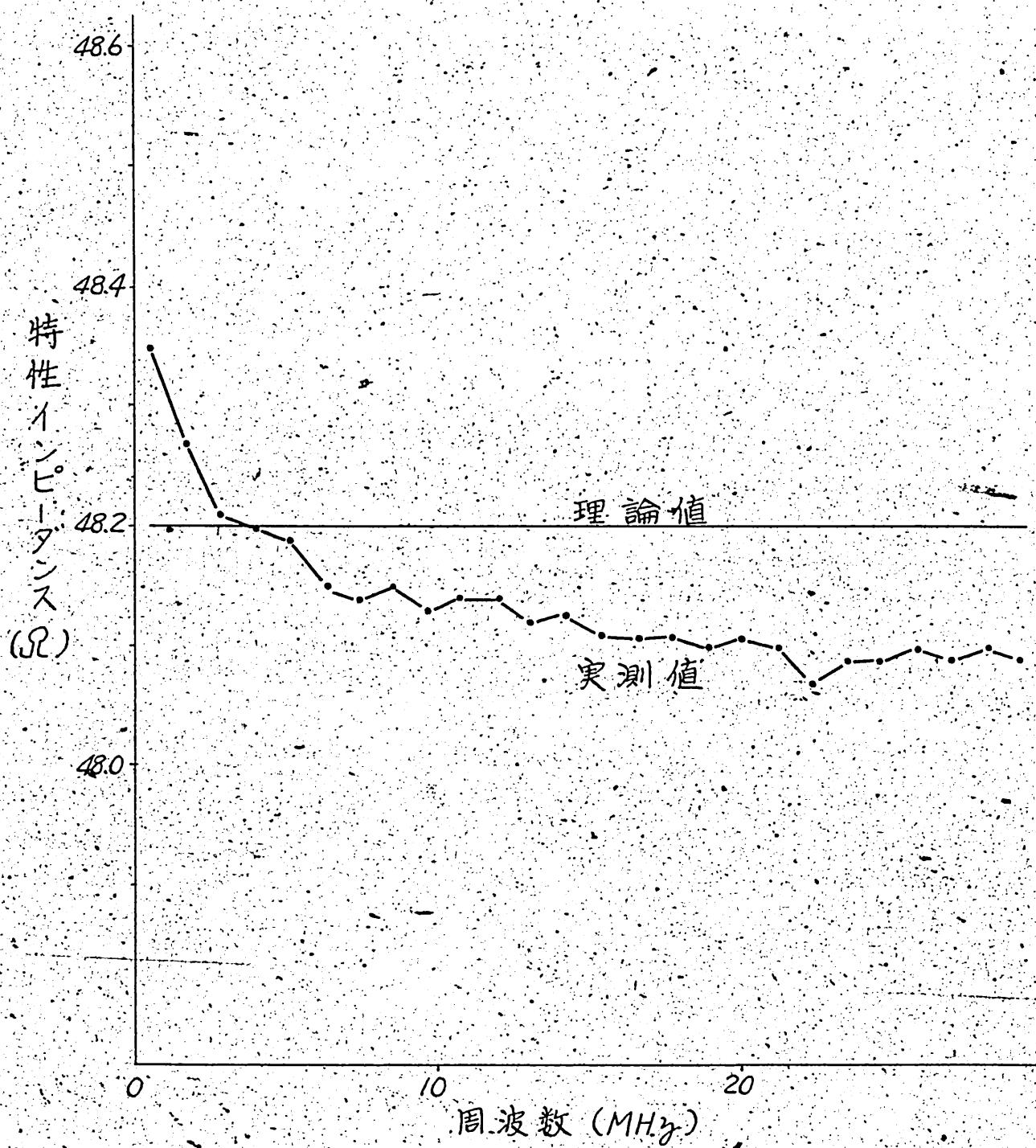


図 5(a) 特性インピーダンス

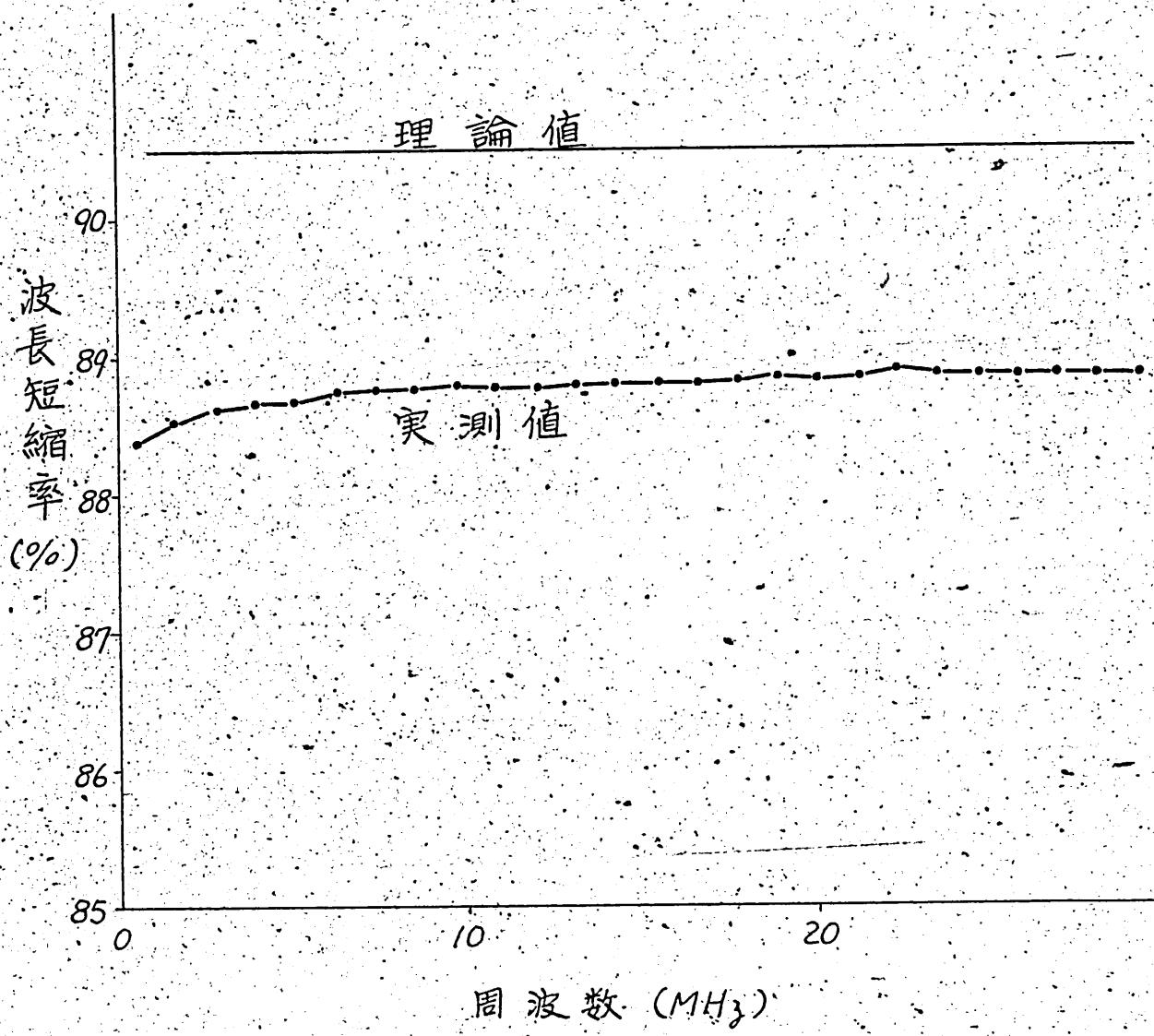


図 5(乙) 波長短縮率

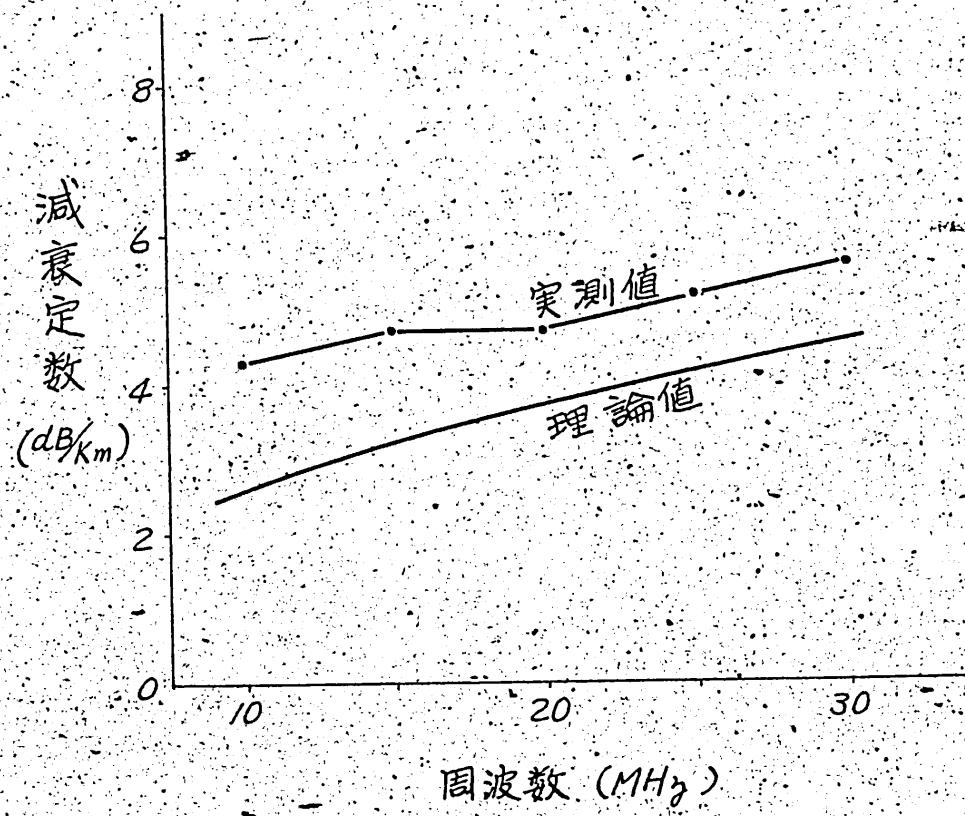


図 5(C). 減衰定数

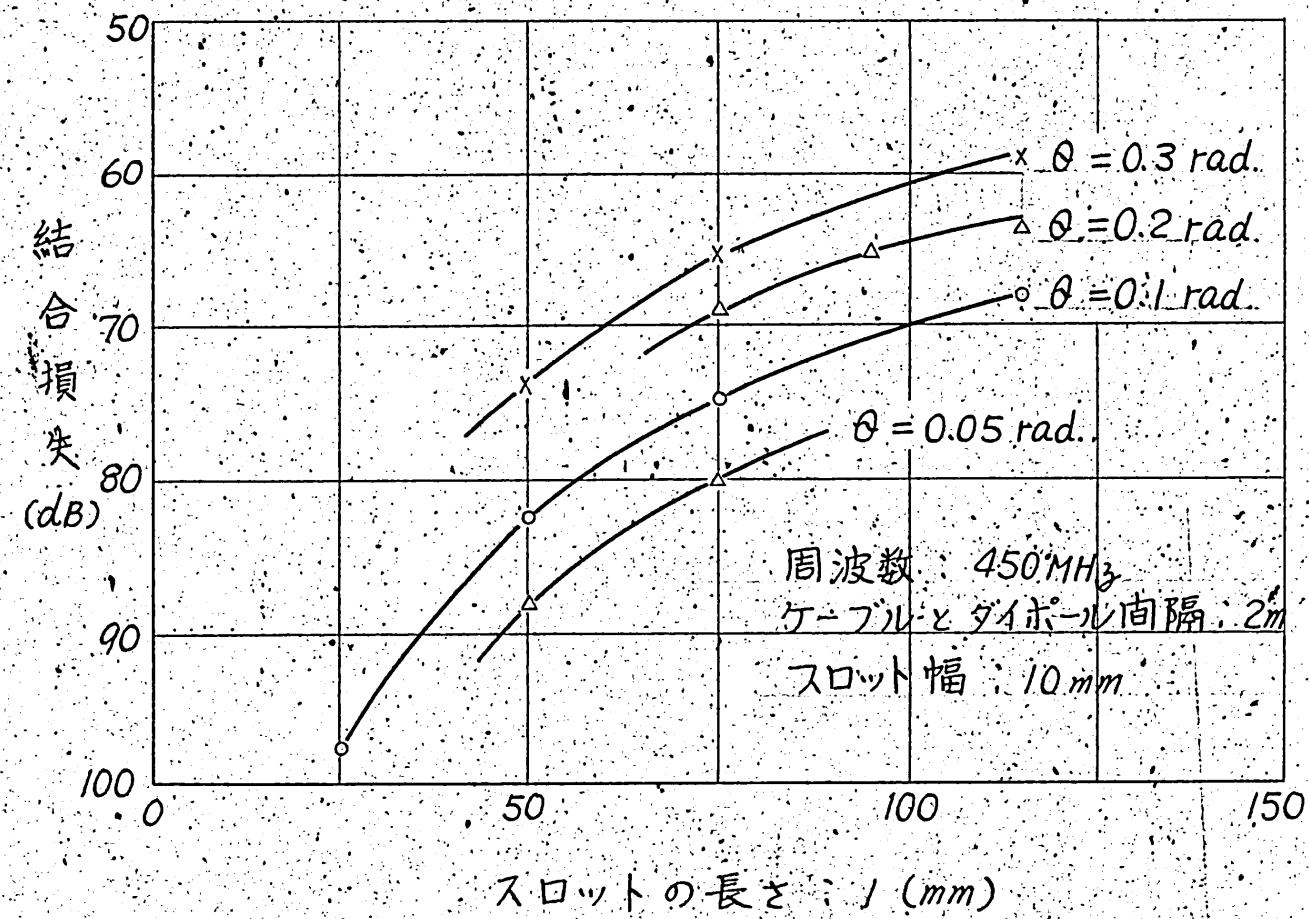


図6. スロットの寸法と結合損失の関係

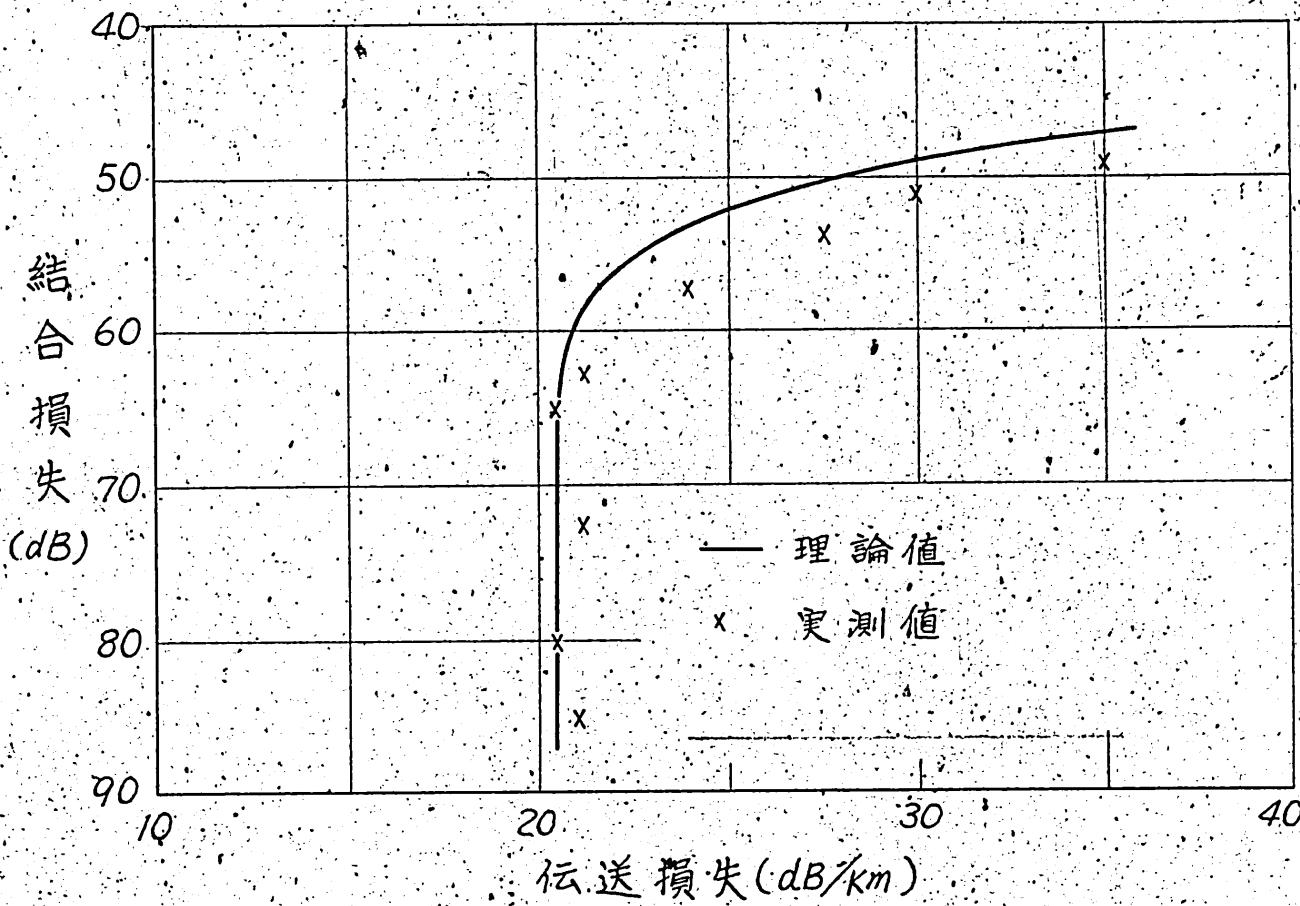


図7. 伝送損失と結合損失の関係

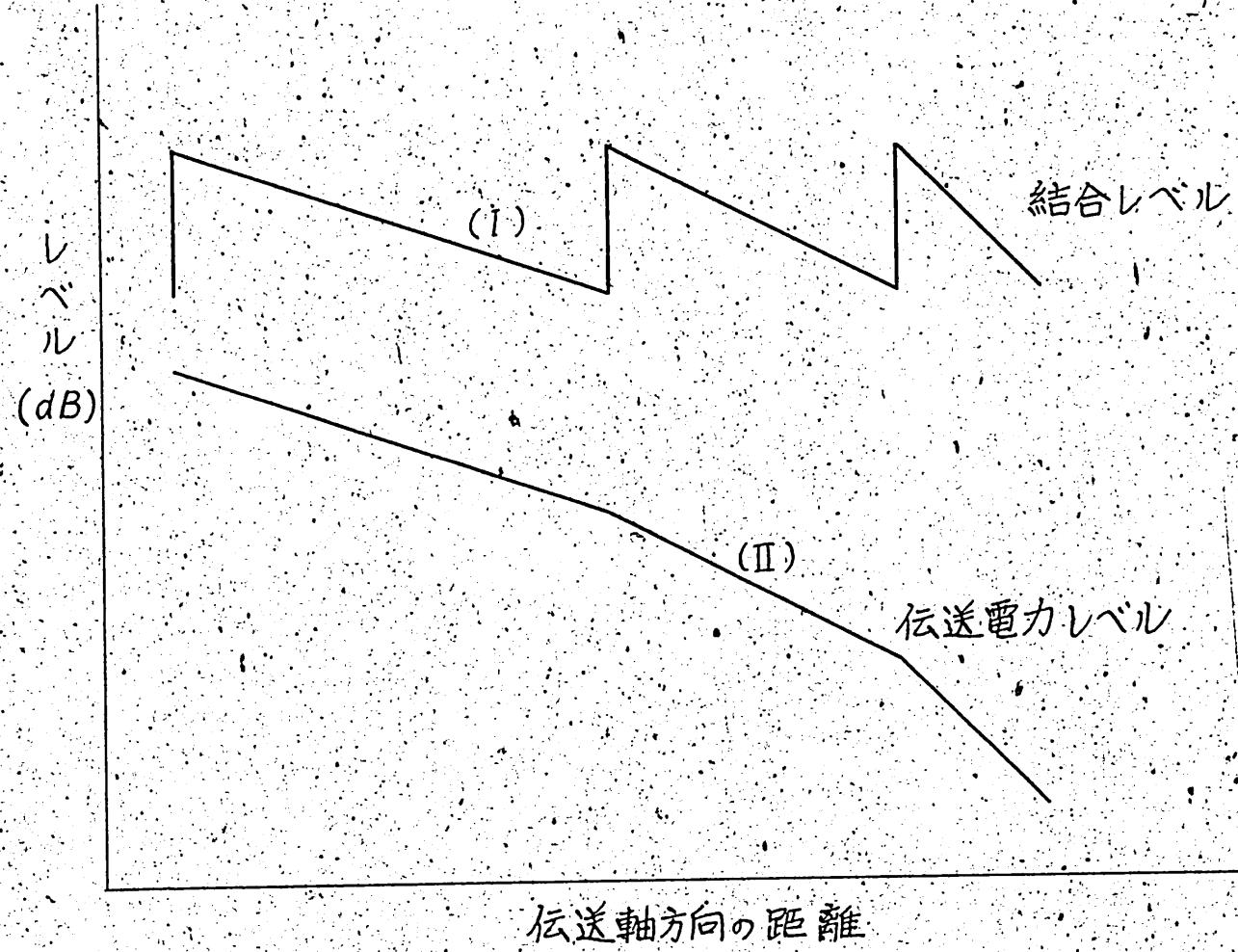


図8. グレイティングを行なったシステムのレベル変動

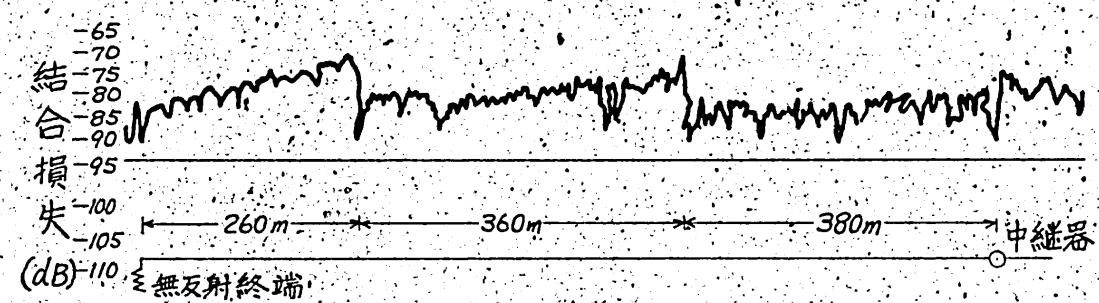


図9. グレーディングを行なったシステムのレベル 実測例

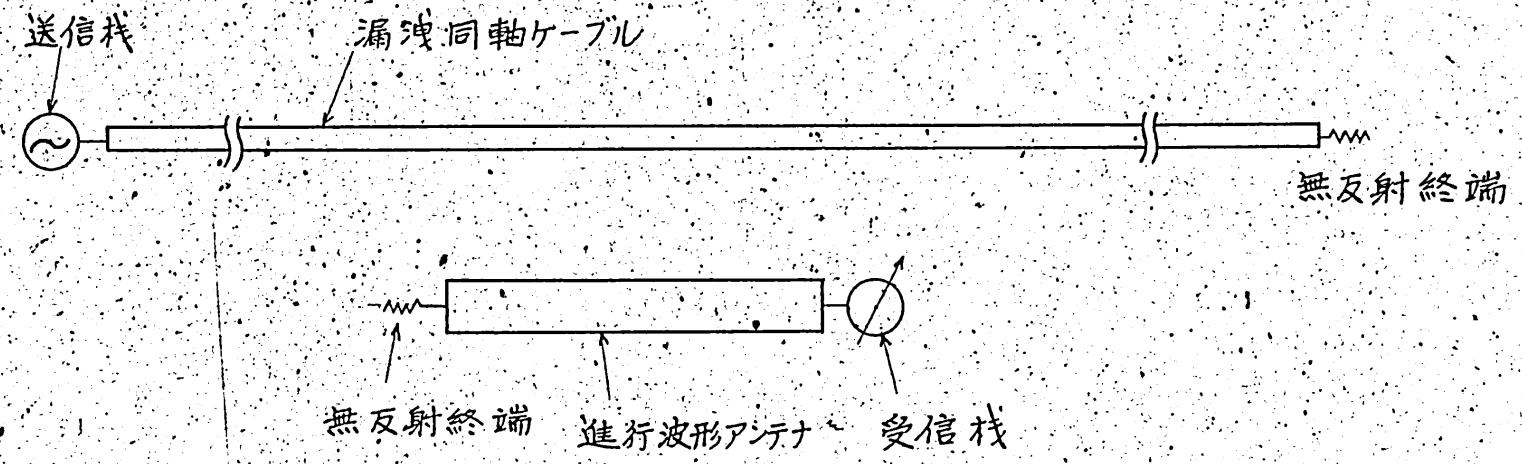
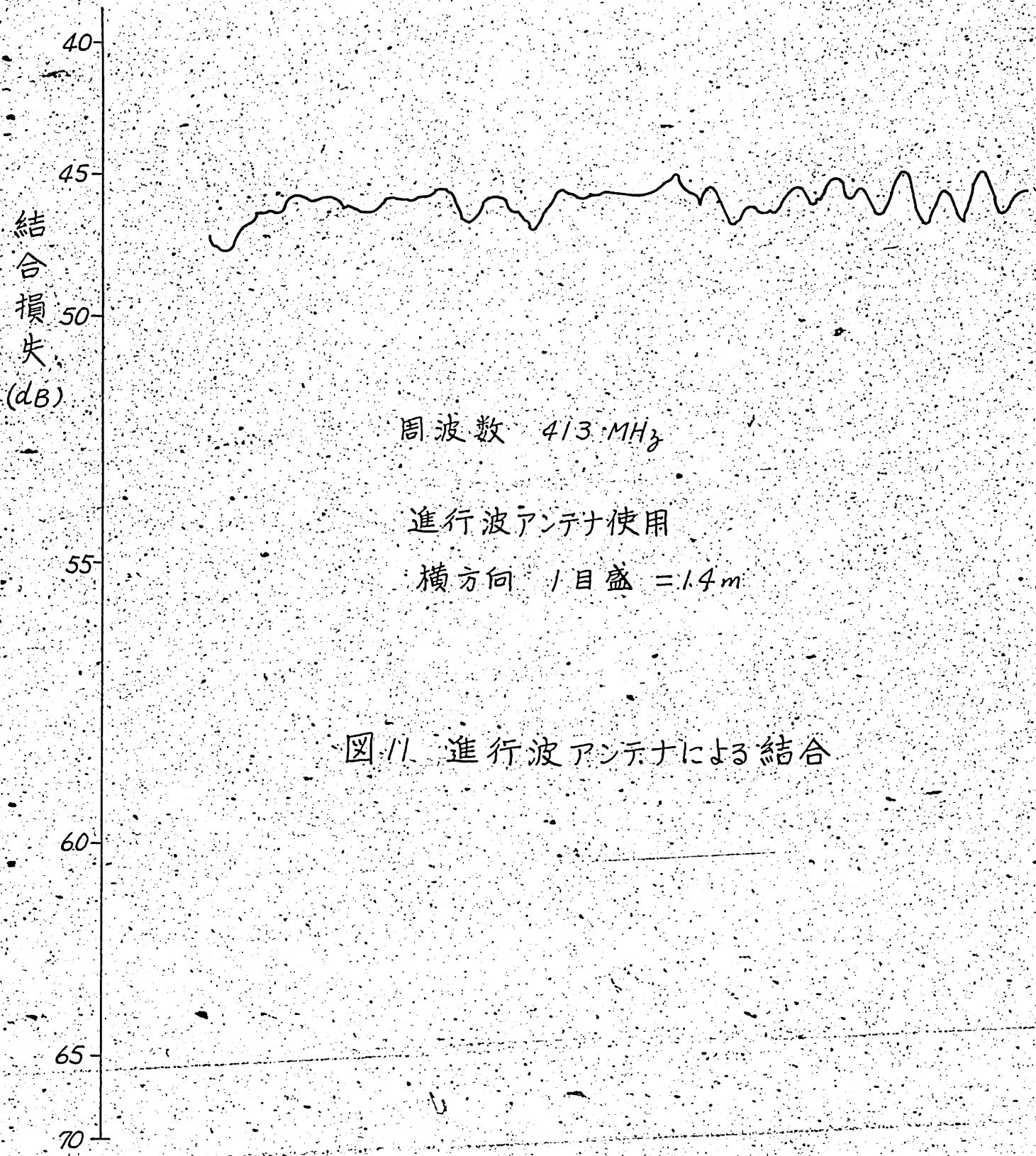


図10. 進行波形アンテナとケーブルとの関係



輻射科学研究会資料

# 大阪管の検波特性

— 平板形ならびに軸対称形について —

大東延久・石川正臣・森田正信・田 雅郎  
(関西大学工学部) (大阪工業大学)

1969年6月27日

## 大阪管の検波特性——平板形ならびに軸対称形について——

### I. 電子軌道について

#### [1-1] 電位分布

空間電荷と超高周波の影響を無視して考えると、電子に対する運動方程式は

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -e (\mathbf{E} + \frac{dr}{dt} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

となる。ただし、 $-e$ 、 $m$  はそれぞれ電子の電荷と質量を、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  はその場における静電界、静磁束密度ベクトルを、また  $r$ 、 $t$  は位置ベクトルと時間を示している。

ところで、大阪管の電子運動の特徴はある特定の方向（ここでは  $x$  軸方向をとる）に調和振動を行うことで、 $\mathbf{E}$  が  $r$  の線形函数であればよく、つきのように置ける。<sup>1)</sup>

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\omega \cdot \mathbf{r} \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \omega \cdot \mathbf{r} + \text{const.} \quad (3)$$

ただし、 $\omega$  は対称 diadics とし、 $V$  は電位を示す。いま空間電荷を無視するために

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

となり、これより  $\text{Sp}(\omega) = 0$  をなるべく  $\omega$ 、 $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{E}$  軸を  $x$  軸にとり、 $\omega$  の 3 つの固有値をそれぞれ  $\kappa_1$ 、 $\kappa_2$ 、 $\kappa_3$  とすると

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0 \quad (5)$$

が成り立つ。そこで  $\hat{\mathbf{x}}$  を  $x$  軸方向の単位ベクトルとして

$$\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{x}} \quad (6)$$

とすると、(1)式の  $x$  成分は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e \kappa_1 x \quad (7)$$

となり、

$$\kappa_1 < 0 \quad (8)$$

ならば、電子は  $x$  方向に

$$w_e = \sqrt{-\frac{e \kappa_1}{m}} \quad (9)$$

はる一定周期の調和振動を行うことが出来る。(5)、(8)両式を満足する大阪管として一般につきの 2 つが考えられる。

$$1. \kappa_3 = 0, -\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa > 0 \quad (10)$$

この場合、(2)式より  $E_x = \kappa x$ 、 $E_y = -\kappa y$ 、 $E_z = 0$  となるから(3)式によりつきの電位分布を得る。

$$V = \frac{\kappa}{2} (y^2 - x^2) + \text{const.} \quad (11)$$

これは  $Z$  方向に無限に伸びた平板大歓管の  $XZ$  面内の電位分布を示している。

$$2. \quad K_2 = K_3, \quad -K_1 = 2K_2 = 2K_3 = K > 0 \quad (12)$$

この場合は 磁束密度  $B$  の方向である  $Z$  軸に垂直な方向の固有値  $K_1, K_2, K_3$  が縮退している場合で、重が  $B$  のまわりに軸対称をしている軸対称大歓管を示している。1. の場合と同じにしてこの場合は  $E_x = Kx, E_y = -\frac{K}{2}y, E_z = -\frac{K}{2}z$  となるので電位分布は

$$V = \frac{K}{4}(y^2 + z^2) - \frac{K}{2}x^2 + \text{const.} \quad (13)$$

で表わされる。

## [2] 平板大歓管

### 1. 電極の式

$X$  軸上の電位分布の境界条件を図1(b)のようにとると(11)式の  $K$  と const. の値が求まり次式を得る

$$V(x, y) = V_0 \left\{ 1 - \left( \frac{x}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{y}{l_y} \right)^2 \right\} \quad (14)$$

したがって、陽極(A極)の式として(15)式、背離極(B<sub>a</sub>極)端電位(V<sub>a</sub>)の式として(16)式を得。これを図1(a)に示す。

$$y^2 - x^2 = \frac{1-d}{d} l_x^2 \quad (15)$$

$$x^2 - y^2 = l_x^2 \quad (16)$$

$$\text{ただし } d = \frac{V_a}{V_0}$$

漸近面の式は

$$y = \pm x \quad (18)$$

となって  $X$  軸と  $45^\circ$  の傾きをなす。また、原点からの陽極距離  $l_y$  と背離極距離  $l_x$  の比は次式で与えられる。

$$\frac{l_y}{l_x} = \sqrt{\frac{1-d}{d}} \quad (19)$$

### 2. 電子の運動方程式との解

(6), (14)両式を用いて、(1)式の各成分はつきのようになる。

$$\ddot{x} = -2\eta \frac{V_0}{l_x^2} x \quad (20)$$

$$\ddot{y} = 2\eta \frac{V_0}{l_x^2} y - \eta B \dot{z} \quad (21)$$

$$\ddot{z} = \eta B \dot{y} \quad (22)$$

ここで  $\dot{d}$  は  $d$  に関する微分を示し、 $\eta = v/m$  である。  
(20), (21), (22) 式の解は、初期  
条件  $t=0$  で 初速度が 0 であり、電子は初期位置  $F(-x_0, y_0, 0)$  にあるとしてつぎのようになる。

$$x = -x_0 \cos \omega_e t = -\sqrt{y_0^2 + l_z^2} \cos \omega_e t \quad (23)$$

$$y = \left(\frac{\omega_e}{\omega_m}\right)^2 y_0 (1 - \cos \omega_m t) + y_0 \quad (24)$$

$$z = \omega_c \left(\frac{\omega_e}{\omega_m}\right)^2 y_0 \left(t - \frac{1}{\omega_m} \sin \omega_m t\right) \quad (25)$$

ただし

$$\omega_e^2 = 2\eta \frac{V_0}{l_z^2}, \quad (26)$$

$$\omega_c = \eta B \quad (27)$$

$$\omega_m^2 = \omega_c^2 - \omega_e^2 > 0 \quad (28)$$

(23) 式により、電子は角周波数  $\omega_e$  で  $x$  軸方向に 等周期運動をしており、これに同期する電気  
振動の波長  $\lambda_e$  は

$$\lambda_e = C \frac{2\pi}{\omega_e} = 3.18 \times 10^3 \frac{l_z}{\sqrt{V_0}} \quad (29)$$

であるが、一般には

$$\lambda_e = n \lambda \quad (30)$$

なる整数値  $n$  で関係づけられる電気振動(波長入)と同期し、これを 微小波振動といい、 $n$   
を 微小波次数という。  $n$  は普通 奇数となるはずであるが、<sup>2), 3), 4)</sup> 実験的には 偶数も観測  
される。

つぎに、 $yz$  面の電子運動に関しては (24), (25) 両式を変形して

$$y = -y_A \cos \omega_m t + \left(1 + \frac{1}{k_w^2}\right) y_0 \quad (31)$$

$$z = z_A (\omega_m t - \sin \omega_m t) \quad (32)$$

$$y_A = \frac{1}{k_w} y_0 \quad (33)$$

$$z_A = y_A \sqrt{1 + \frac{1}{k_w^2}} = \frac{\sqrt{k_w^2 + 1}}{k_w} y_0 \quad (34)$$

$$k_w = \frac{\omega_m}{\omega_e} \quad [(40) 式 参照.]$$

とするとわかるように、長径  $2z_A$ 、短径  $2y_A$  なる楕円の間に沿って角周波数  $\omega_m$  で回転しながら、全体が等速度  $z_A \omega_m$  で  $z$  方向に推移していることになるが、磁界が強くなると  $k_w$  が大(後述)となるので  $z_A \approx y_A$  となり 楕円は円に近づき、cycloid 運動に近似される。磁界の弱い  $k_w=2$  でも  $z_A/y_A = 1.12$  である。また  $z$  方向には

$$y_0 \leq y \leq \left(1 + \frac{2}{k_w^2}\right) y_0 \quad (35)$$

で制限される領域を運動することになり、 $y_{\min}$ ,  $y_{\max}$  が存在する。

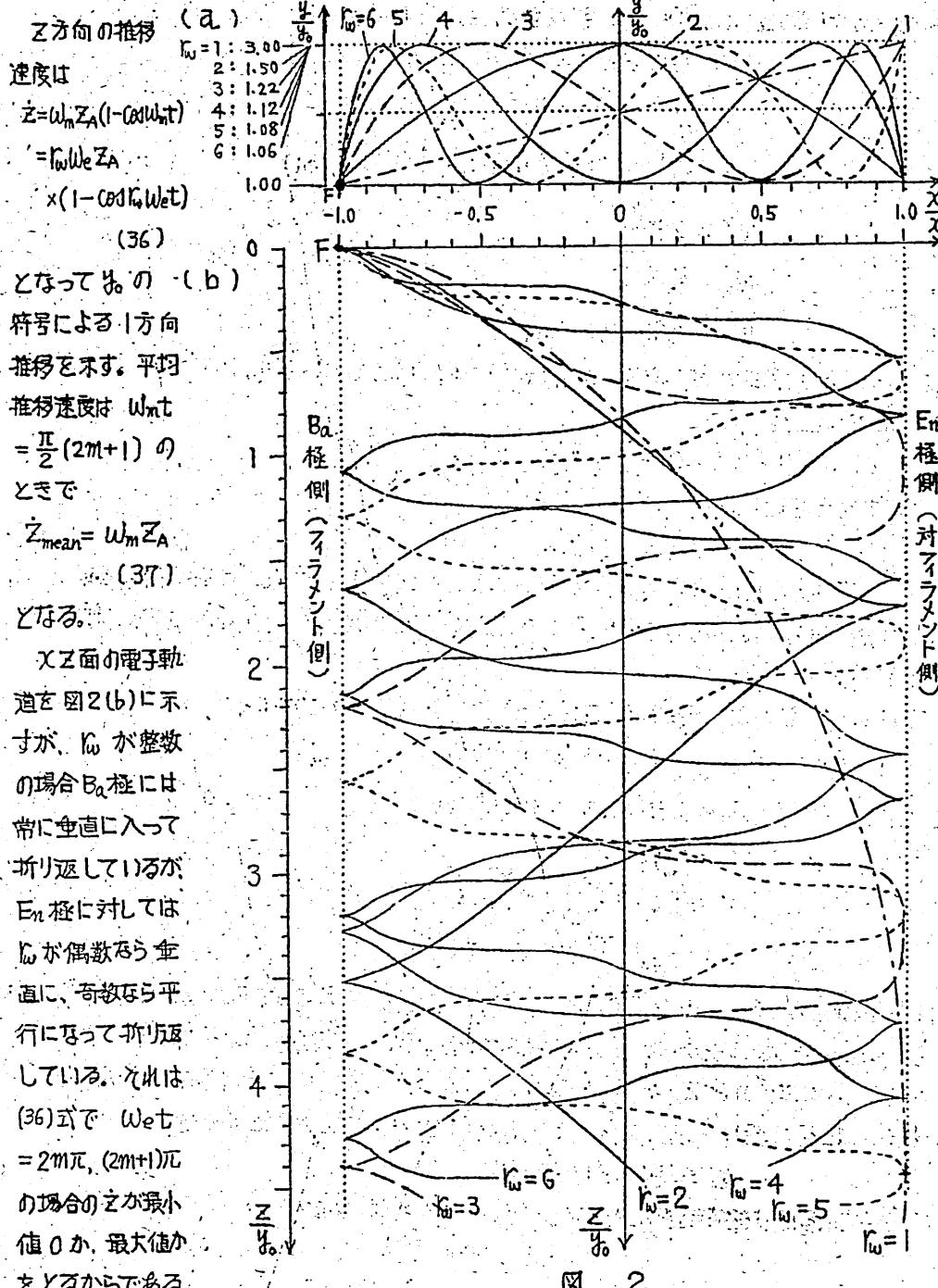


図 2

垂直に入って折り返す軌道はその折り返し点で運動のエネルギーが0となるので位置エネルギーの最も高いBa, En極まで丁度到達出来ることになり、これは逆説作用の最も大きい軌道となる。  
Z方向の推移にともなうピッチ $Z_p$ は $\omega_e t = 2\pi$ の間に進むZ方向距離を意味するので

$$Z_p = \frac{\sqrt{r_w^2 + 1}}{r_w} y_0 (2\pi - \frac{1}{r_w} \sin 2\pi r_w) \quad (38)$$

となるが、 $y_0$ が整数または半整数ならば回転運動の影響が現われず推移効果はかりとなるので上式第2項は0となる。この場合Z方向の距離 $l_z$ にわたって理想的に推移をしたとして、中央の超高周波间隙を横切る数は

$$n_z = \frac{2l_z}{Z_p} = \frac{r_w^2}{\sqrt{r_w^2 + 1}} \frac{l_z}{\pi y_0} \quad (39)$$

で与えられる。

### 3. 磁界指数<sup>5)</sup>

上述のように電子の運動は、Z方向への推移を行いつながらX方向にXyz面内の円運動をともなった多次回の往復運動をしていることになるが、大阪南動作ではこの往復運動の際の超高周波间隙での相互作用、Ba極, En極での逆説作用の累積効果が重要であるのでXyz面内の電子運動について先ず考える必要がある。そこで電子がX方向に1往復する間にY方向に何回振動するかを示す磁界指数 $r_w$ がつきのように定義される。

$$r_w = \frac{\omega_m}{\omega_e} = \sqrt{\frac{n_z l_z^2 B^2}{2V_0} - 1} \quad (40)$$

$r_w = 1 \sim 6$  のXyz面内の電子軌道を図2(a)に示す。

ところで、A極の中央Y軸上にある超高周波间隙で電子が最も有効に相互作用を行うことが出来、また加速、減速を受けた電子がY軸に対して左右対称位置にあるBa極, En極に飛びこんだり、その手前で引き返したりする逆説作用を最大にする軌道条件があると決って来る。

- (i) Ba, En極での逆説作用最大の条件に対しては  $t_1 = \frac{T_e}{2}$  で  $\gamma = \gamma_{min}$  なること
  - (ii) A極の间隙での相互作用最大の条件に対しては  $t_2 = \frac{T_e}{4}$  で  $\gamma = \gamma_{max}$  なること
- と表現出来、また(31)式より  $t_1 = \frac{2m\pi}{\omega_m}$ ,  $t_2 = \frac{(2m+1)\pi}{\omega_m}$  であるので(i), (ii)両条件を満足する磁界指数はつきのようになり、これを特に最適磁界指数 $r_{w, opt}$ という。

$$r_{w, opt} = 2(2m+1) = 2, 6, 10, 14, \dots \quad (41)$$

### 4. 磁界あるいは陽極電圧に対する制約

電子が有限領域を運動するためには(28)式の制約を受けるので

$$V_A = \text{一定なら } B > \frac{1}{l_x} \sqrt{\frac{2dV_A}{\eta}} = B_c \quad (42)$$

$$B = \text{一定なら} \quad V_A < \frac{\eta l_x^2 B^2}{2d} = V_{AC} \quad (43)$$

が成り立つ、それを以て臨界磁束密度  $B_c$ 、臨界陽極電圧  $V_{AC}$  が存在する。

しかし実際は、A極に電子が取られない条件により更に制限を受ける。いま  $y_{max} = l_y$  になる  $r_w$  を  $r_{wo}$  としてこれを求める

$$r_{wo} = \sqrt{\frac{2}{l_{yo}-1}} \quad (44)$$

$$l_{yo} = l_y / r_o \quad (45)$$

となる。一般の  $r_o$  ではこの  $r_{wo}$  よりも小さい場合も有り得るが、 $r_{wopt}$  に対しては

$$r_{wopt} > r_{wo} \quad (46)$$

の制約を受けることになる。 $r_{wo}$  による磁束密度  $B_o$  は

$$B_o = \alpha B_c \quad (47)$$

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{l_{yo}+1}{l_{yo}-1}} > 1 \quad (48)$$

で与えられる。

## 5. 低次モードと磁界指数の関係

入射波の角周波数  $\omega$  が電子振動の角周波数  $\omega_e$  に対する低次モードと同期している場合

$$\omega = n \omega_e \quad (49)$$

となるので次式が成り立つ。

$$l_w^2 + 1 = n^2 \left( \frac{\omega_e}{\omega} \right)^2 \quad (50)$$

とくに磁界が強いか、陽極電圧が低くて  $l_w$  が大きいときは

$$l_w \approx n \frac{\omega_e}{\omega} \quad (51)$$

となるので、 $B = \text{一定}$  の場合  $l_w$  と  $n$  の比例性が成り立つ。

## [3] 軸対称大磁管

### 1. 電位の式

(13) 式にて、 $x=y=z=0$  で  $V=V_0$  ;  $x=\pm l_x$ ,  $y=z=0$  で  $V=0$  ;  $y^2+z^2=r^2$  とおくと(図3(a)参照)次の電位分布を得る。

$$V(x, r) = V_0 \left\{ 1 - \left( \frac{x}{l_x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l_x} \right)^2 \right\} \quad (52)$$

Lしたがって A極の式は  $\frac{1}{2} r^2 - x^2 = \frac{1-x}{2} l_x^2$

$$B_z, E_n \text{ 极の式は } x^2 - \frac{1}{2} r^2 = \frac{l_x^2}{2} \quad (53)$$

$$B_z, E_n \text{ 极の式は } x^2 - \frac{1}{2} r^2 = \frac{l_x^2}{2} \quad (54)$$

となり、これを図3(a), (b) に示す。 $\mu$ は(17)式と同じで

$V_A$ に対する  $V_0$  の比である。電極の漸近面の式は

$$r = \pm \sqrt{2} x \quad (55)$$

となり、 $x$ 軸と  $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2} = 54^\circ 44'$  の傾きをなす。また

$l_x$ に対する陽極口径  $l_r$  の比は次式で表わされる。

$$\frac{l_r}{l_x} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{d}} \quad (56)$$

## 2. 電子の運動方程式とその解

(6), (52)両式により、(1)式の各成分はつきのようになる

$$\ddot{x} = -\omega_e^2 x \quad (57)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{2}\omega_e^2 y - 2\omega_L \dot{z} \quad (58)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{2}\omega_e^2 z + 2\omega_L \dot{y} \quad (59)$$

$$\text{たゞし } \omega_L = \frac{1}{2}\eta B \quad (60)$$

であり、 $\omega_e$ は(26)式で与えられる。

初期条件  $t=0$  で  $F(-x_0, y_0)$  にあり、その時は径方向面を示す複素平面上においては実軸上にあるとし、

また初速度を 0 とすると次式の解を得る。

$$x = -x_0 \cos \omega_e t \quad (61)$$

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} e^{j\Omega_1 t} + R e^{j\Omega_2 t} \quad (62)$$

$$\text{たゞし } R = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_L}{\omega_r} + 1 \right), \quad \frac{1}{R} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega_L}{\omega_r} - 1 \right) \quad (63)$$

$$\Omega_1 = \omega_L - \omega_r, \quad \Omega_2 = \omega_L + \omega_r \quad (64)$$

$$\omega_r^2 = \omega_L^2 - \frac{1}{2}\omega_e^2 > 0 \quad (65)$$

(61), (62) 両式からわかるように電子の運動は、径方向面では角周波数  $\Omega_1$  で回転する半径  $R$  の大きな円運動の上に角周波数  $\Omega_2$  で回転する半径  $\frac{1}{R}$  の小さな円運動が重畠して居り、それがさらに軸方向に角周波数  $\omega_e$  で往復運動をしていることになる。

## 3. 径方向軌道について

径方向軌道は図4に示す通りで、すなむち

$$\frac{1}{R} \Omega_2 = \frac{\Omega_1}{2\omega_r} + 1 = \frac{1}{4} + 1 > 1 \quad (66)$$

であるが、磁界の増加とともに  $\omega_r$  が増大(後述)して

軌道は Epi-cycloid に近づく。

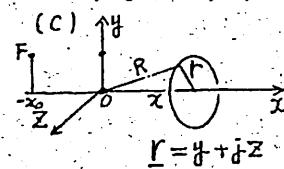
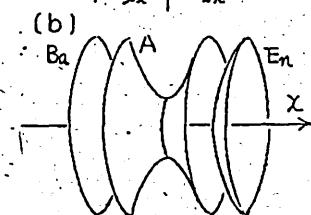
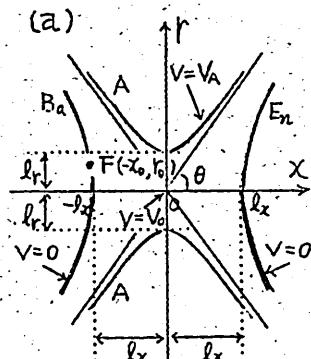


図 3

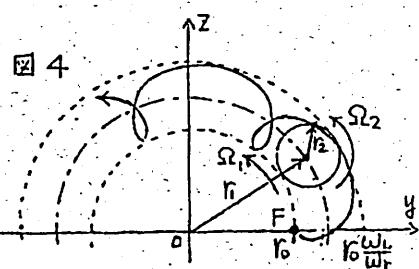


図 4

(62)式を変形して

$$r = \{ r_0 + r_2 e^{j2\omega_r t} \} e^{j\Omega_1 t} = r^* e^{j\Omega_1 t} \quad (67)$$

とおくとこの上<sup>\*</sup>は半径 $r_0$ の大きな円運動に対する小さな半径 $r_2$ の円運動で、その角周波数は $\Omega_2 - \Omega_1 = 2\omega_r$ となり、これを図5に示す。したがって、軸対称形の場合の磁界指数 $n_r$ は、xy面内の電子運動に基いて、軸方向振動回数に対する径方向振動回数の比の定義するならば

$$n_r = \frac{2\omega_r}{\omega_e} = \sqrt{\frac{\eta_r B^2}{2V_0}} - 2$$

で表わされる。

図5の関係より次式を得る。

$$r^* = \sqrt{r_0^2 + r_2^2 - 2r_0 r_2 \cos 2\omega_r t} = r_0 \sqrt{1 + \frac{1}{r_0^2} (1 - \cos 2\omega_r t)} \quad (69)$$

$$\theta^* = \tan^{-1} \frac{z^*}{y^*} = \tan^{-1} \frac{n_r r_0 \omega_e t}{\cos 2\pi r_0 - (n_r + 1)} \quad (70)$$

たゞし

$$n_r = \frac{2\omega_r}{\Omega_1} = r_0 (\sqrt{r_0^2 + 2} - 1) \quad (71)$$

したがって元のxyz系での動径 $r$ と周方向回転角 $\theta$ は

$$r = r^* \quad (72)$$

$$\theta = \Omega_1 t + \theta^* = \frac{1}{2} (\sqrt{r_0^2 + 2} - r_0) \omega_e t + \theta^* \quad (73)$$

で表われされ、結局、径方向には

$$r_0 \leq r \leq r_0 \sqrt{1 + \frac{2}{r_0^2}} \quad (74)$$

の領域を運動し、Bが大またはV<sub>A</sub>が小となって $r_0$ が増すと $r_{max} \rightarrow r_0$ となり、 $r = r_0$ の円筒面上の運動に近づく。周方向には角速度 $\Omega_1$ の等速回転の上にわづかなる角振動 $\theta^*$ が加っているが、 $r_0$ が増すと $\theta^*$ は0に近づく。

なお、径方向の軌道振幅 $r_2$ は

$$r_2 = r_0 = \frac{r_0}{n_r} \quad (75)$$

であり、また電子がx軸方向に1往復する間の回転角(ピッケ角) $\theta_P$ は

$$\theta_P = \theta_{t=2\pi} = \pi (\sqrt{r_0^2 + 2} - r_0) + \tan^{-1} \frac{\sin 2\pi r_0}{\cos 2\pi r_0 - (n_r + 1)} \quad (76)$$

であるが、 $n_r$ が整数または半整数では第2項は0となる。

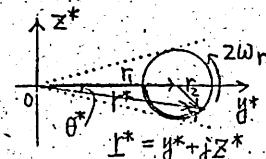


図 5

$$(68)$$

#### 4. 同一軌道をとる条件<sup>6)</sup>

$w_e, w_L, w_T$  の関係式(65)式を書き改めると

$$\frac{n_e^2}{2} = n_L^2 - n_r^2 = \Omega_1 \Omega_2$$

$$n_e = \frac{w_e}{\Omega_1} \quad (78)$$

$$\eta_r = \frac{2\omega_r}{\Omega_i} \quad (79)$$

であり、それは電子が1周回する間にそれ  
を左へ軸方向、径方向に何回振動するかを  
示している。そこで  $n_e, n_r$  がそれを

れ整数あるいは半整数を同時にとるならば、それは図6に示す通りフィラメント下を出て1周回した電子が元の出发点下を通る $Z_1$ 面(すなはち $Z_2$ 面)内の4点 $FABC$ の内のどこかの点に達していることになる。

それゆえ、電子が各周回軌道に、あるいは2周回軌道に同じ軌道をとる、2周回軌道の条件はつきのようになる。

1周回軌道:  $n_e, n_r$  がともに整数の場合

2周回軌道： $n_e, n_r$  のどちらか一方が整数で他方が半整数、または両方も半整数の場合

このような場合には磁界指数(68)式参照)は

$$\gamma_w = \frac{2\bar{\omega}_r}{\omega_e} = \frac{n_r}{n_e} \quad (80)$$

により必ずしも整数とはならない。ところで、(77)式より

$n_e$  が整数の場合、偶数なら  $n_r$  は整数(奇数)…………… | 周回軌道

奇数なら  $n_r$  は半整数 ..... 2周回軌道

$n_e$  が半整数の場合、 $n_r$  は整数 +  $\frac{1}{2}$  ..... (8周回軌道)

したがって  $n_e$  が偶数か奇数かによって、1周回軌道か2周回軌道かが決ることになる。

$f_w$  と  $N_e$  の関係は (77), (80) 式より

$$Y_W = \frac{Ne}{Z} - \frac{1}{Ne} \quad (81)$$

となるが磁界が強くなつて  $n_e$  が大となると右辺の 2 項は省略出来る。

以上のことより、 $n_e$ の整数値に対する諸数値をまとめて表1に示す。

$n_e$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_r (= \frac{1}{2} n_e^2 - 1)$	1	3.5	7	11.5	17	23.5	31	39.5	49
$k_w (= n_r/n_e)$	0.500	1.17	1.75	2.30	2.83	3.36	3.88	4.39	4.90
$k_a/k_r (= 1/n_r)$	1.00	0.286	0.143	0.0869	0.0588	0.0425	0.0322	0.0253	0.0204
$\theta_{po} (= 360^\circ/n_e)$	180°	120°	90°	72°	60°	51°	45°	40°	36°

表 1

### 5. 最適磁界指數

平板形の場合と同様にして、 $z$ 面内の軌道にのみ注目してつきの2条件を満たす磁界指數を求める。

#### (i) $B_a, E_m$ 極での選択作用最大条件

これは往復運動の際の引返し点で、電子のモーティオネルエネルギーが0となり位置エネルギーが最大になればよく、 $t_1 = \frac{T_e}{2}$  で  $r_{min}$  になることと表現出来る。

#### (ii) A極の超高周波間隙での相互作用最大条件

これは向隣位置の中央 $z$ 軸上に電子が来たときに $z$ 変位が最大になればよく、 $t_2 = \frac{T_e}{4}$  で  $r_{max}$  なることといえる。

一方 (69)式により、 $t_1 = \frac{m\pi}{\omega_r}$ 、 $t_2 = \frac{(2m+1)\pi}{2\omega_r}$ 、( $m=0, 1, 2, \dots$ ) であるので (i), (ii) 両条件を満足する磁界指數である最適磁界指數  $k_{w, opt}$  はつきのようになる。

$$k_{w, opt} = 2(2m+1) = 2, 6, 10, \dots \quad (82)$$

### 6. 磁界あるいは陽極電圧に対する制約

電子が有限領域を運動するためには (65)式により

$$\sqrt{V_A} = \text{一定なら} \quad B > \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{eV_A}{\pi}} = B_c \quad (83)$$

$$B = \text{一定なら} \quad \sqrt{V_A} < \frac{\pi e B^2}{4\alpha} = V_{Ac} \quad (84)$$

の制約を受け、臨界磁束密度  $B_c$ 、臨界陽極電圧  $V_{Ac}$  が存在する。さらにまた電子が陽極にとられないためには、 $k_{w, opt}$  の軌道に対しては

$$k_{w, opt} > k_{wo} \quad (85)$$

の制約を受け、ここで  $k_{wo}$  は  $r_{max} = r_r$  になる $k_w$  で、次式で与えられる。

$$k_{wo} = \sqrt{\frac{2}{l_{ro}^2 - 1}} \quad (86)$$

$$\text{ただし} \quad l_{ro} = l_r / k_r \quad (87)$$

一般の  $\mu_0$  では軌道の谷間に陽極位置が来るような場合には、この  $\mu_0$  よりも小さいものも有り得る。  $\mu_0$  による磁界  $B_0$  は次式で表わされる。

$$B_0 = \beta B_c \quad (88)$$

$$\beta = \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 - 1}} \quad (89)$$

#### 7. 每小波次数と磁界指数との関係

平板形の場合と同じ考え方で次式が成り立つ。

$$l_w^2 + 2 = n^2 \left( \frac{w_c}{w} \right)^2 \quad (90)$$

特に、磁界が強いか、陽極電圧が低くて  $\mu_0$  が大きいときは

$$l_w \approx n \frac{w_c}{w} \quad (91)$$

となって、 $B = \text{一定}$  の場合は  $n$  と  $l_w$  の比例性が成り立つ。

## II. 実験結果と考察

### [1] 平板大坂管

#### 1. 試作管と検波回路

試作管の電極構造、寸法等を一括して図7に示し、ここで  $l_z$  は Z 方向の電極長を表わす。

Tube 1 は  $B_a$  枕上で Z 軸に平行に 3 本の線状アラメント  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  が張ってあり、Tube 2 は  $B_a$  枕全面に Sb-Cs 光電面を施してある。これらの管は dm 波用で、何れも超高周波间隙は陽極片の片側 ( $y > 0$ ) にのみ設けてあり、これに外部にあるレヘル線を結合させ共振回路を形成するようになっている。Tube 3, 4 は導波管内へ電極全体が入るようにし陽極片がそのまま空洞状共振巻を形成、あるいは円筒空洞共振巻に連っている。この場合、電極は非常に小さくなるので手作りでは理想的な電極形状通りにはならず、それに近い形となっている。

室内で数 m 離れた送信塔より放射された 1 KHz の正弦波信号をのせた入束波を、dm 波の場合は直接レヘル線で受けて陽極上の超高周波间隙へ導き、また cm 波の場合は電磁ホーンで受けて導波管内へ入れた電極に連る共振巻に導いている。図8は二の実験に採用した直接検波の回路で、陽極间隙で電子と相互作用なし、 $B_a$ ,  $E_m$  枕で選択作用をなし検波された出力は、Tube 2 は  $E_a$  枕より、その他の管は  $B_a$ ,  $E_m$  両枕より取り出し、検波抵抗  $R_p$  にかかる信号電圧を増幅して、シングロモニタ面上での波形振幅もって検波出力の相対的大さ  $S$  とした。 $R_p$  の値 1 MΩ は実験的な最適値から決めたものである。なお Tube 1 の場合は Z 方向の両側に A 枕から 4, 5 mm 離れて、推進電子に対する集電子極(C 枕)があるが、これには +10 V を与えた。

	Tube 1	Tube 2	Tube 3	Tube 4
電極構造				
電極断面図				
$l_x$	9.11	9.88	1.0	0.46
$l_y$	2.98	4.82	0.32	0.35
$l_z$	20.3	20.0	5.0	2.06
$d$	0.9	0.8		

(Tube 1)  $F_1: Y_{01} = 1.14$ ;  $F_2: Y_{02} = 2.20$ ,  $F_3: Y_{03} = 2.79$

(Tube 4)  $a = 0.59$ ,  $l = 0.54$ ,  $d = 0.12$

単位 mm

図 7

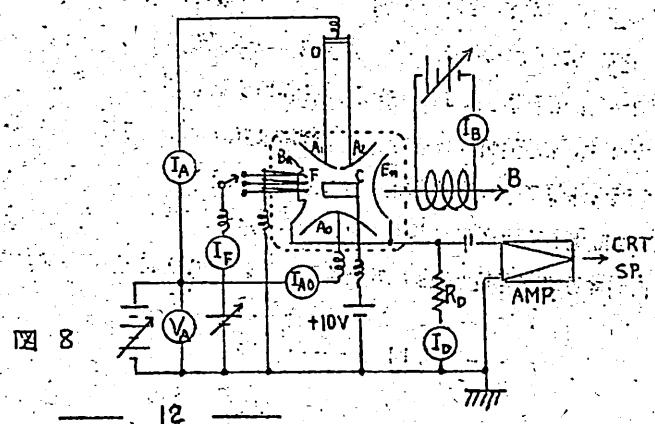


図 8

## 2. 一般特性

Tube 1による入射周波数 $\omega = 447 \text{ MHz}$ の場合の陽極電圧特性( $V_A$ 特性)を図9(a)に示す。検波出力  $S$  の出方は  $V_A$  の低い側は間隔が細かいパルス状に現われるが、 $V_A$  が高くなると起伏はあるが全体として  $S$  の大きな山をなし、その極大値は体小波次数  $n$  に相当する  $V_A$  の半周期で受信されていて電子振動周期の 1/2n と同期していることを示す。n は一般に整数であるが高次では主として奇数となる。これらの  $S$  極大値から逆算せる  $n$  の値は設計値 0.9 に大略等しい。

つぎに  $n=3$  の  $V_A = 235 \text{ V}$  における フィラメント  $F_1, F_2, F_3$  による磁界特性(B特性)を図9(b), (c), (d) に示す。図中の数字は磁界指数  $n$  を表わしている。これより、フィラメント位置はどうであろうとも全体として  $S$  極大値は  $n$  の整数値の  $B$  に大体一致していることがわかる。前述の選択作用、相互作用最大の条件を満足する  $k_{w0}$  なら(41)式により 2, 6, 10, ... の値であるが、その傾向は低磁界では認められるが少し磁界が高くなると連続せる整数値となる。 $k_w$  は磁界が強くなつて  $k_w$  が増すと(33)式で与えられる  $y_A$  方向の軌道振幅  $y_A$  が非常に小さくなるので A 极の超高周波領域での相互作用最大条件は近似的に省略出来、たゞ  $B_a, E_n$  极での選択作用の大きさの条件のみ効いていると考えられる。前述の通り、 $k_w$  が偶数の場合は  $B_a, E_n$  両極で、また奇数の場合は  $B_a$  极だけで選択作用を行つてあり、前者は片道毎の、後者は 1 往復毎の作用になる。

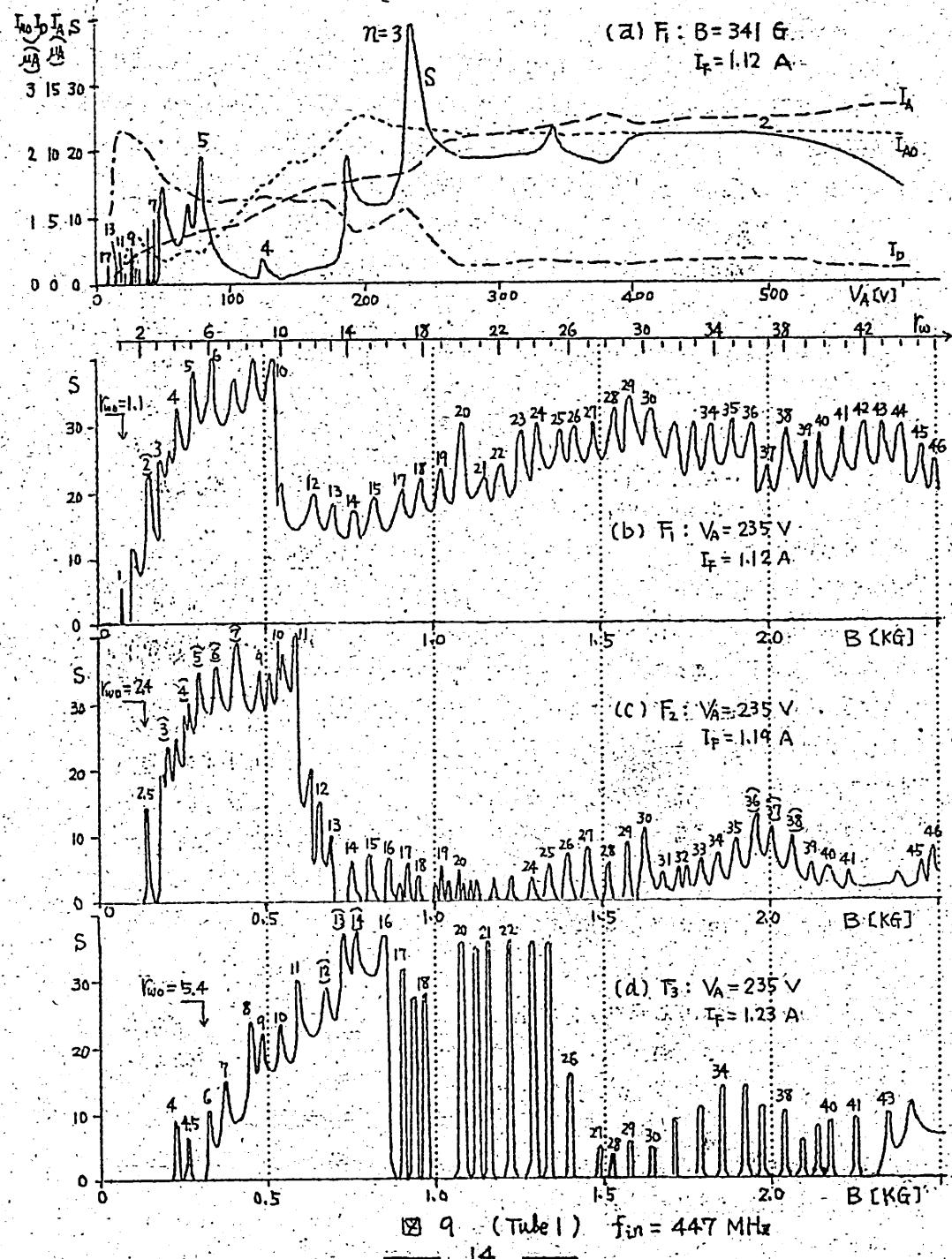
なお詳しくみると磁界を大きく変えた一連の実験データ中には部分的に  $k_w$  の半整数値が見られることは図中の数字にこゝを施してある。 $k_w$  が半整数値をとる軌道は 2 往復毎に運動のエネルギーが  $B_a$  极側引返し案で 0 となるので、 $k_w$  の整数値の場合の 2 次のオーダーの選択作用を行つているものと考えられる。

## 3. フィラメント位置 $k_w$ による影響

同じく図9(b), (c), (d) の結果から、大きく見て  $S$  の山は  $F_1$  から  $F_3$  に変るにしたがつて高磁界側へ移動していること、各山ゆえ最初の  $S$  が始める  $B_{start}$  も高磁界側へと変化している。また  $F_3$  になるにしたがつて低、中、高の 3 磁界領域にはっきりわかし、中磁界領域のパルス状の急峻な  $S$  の領域が拡つていることがわかる。

### (1) $B_{start}$ について

(44)式により  $y_{max} = l_y$  になる  $k_w$  を求めると  $F_1, F_2, F_3$  についてそれぞれ 1.1, 2.4, 5.4 となる。したがつてそれより小さな  $k_w$  は  $F_1$  では 1,  $F_3$  では 4, 4.5 の 3 つの  $S$  の場合である。このときの X-Y 面内の電子軌道を図10に示すが、図中中央上部に記した上に凹の形は電子軌道から見た相対的な陽極位置である。何れも軌道の各間に陽極が来て相互作用、選択作用の有効性から検波出来たものとみられる。



## (2) 磁界の3領域について

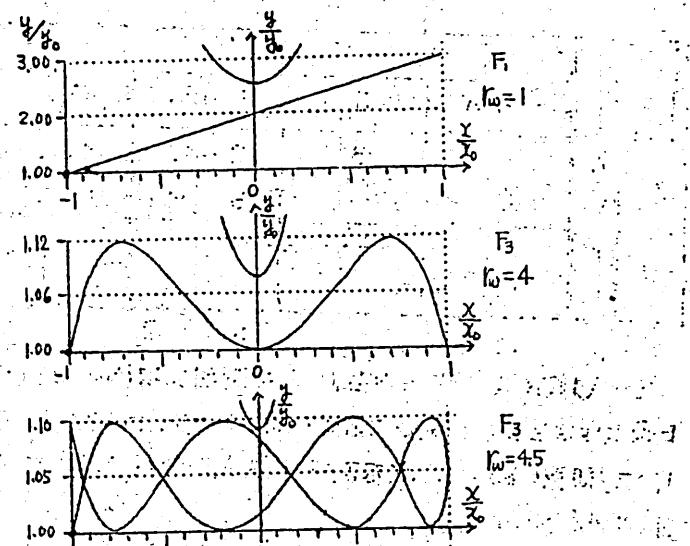
同じく図9(b),(c),(d)のB特性で特に  
 $F_3$ になるほど顕著であるが、最初のSの  
大きなかたまりの低磁界領域と、つきのパ  
ルス状のSが現われる中磁界領域と、それ  
から後に出て連続せるSが現われる高磁界  
領域にわけられる。

図 10

中磁界領域以後は弱い超高周波電界域しか通れない)電子軌道をもつ領域で、前述の理由で<sup>1)</sup>この整数値でのみパルス状にSが出るが、さらに磁界を増大するとZ方向の推移に伴うn<sub>z</sub>の増加により、その条件が弛められし、パルス状のSに幅をもつようになり端のパルス状のSと連結される領域となる。これが高磁界領域と解釈される。それゆえF<sub>1</sub>→F<sub>2</sub>→F<sub>3</sub>になるにしたがい、同じ磁界に対してn<sub>z</sub>が減少するので高磁界領域に入るまでにより大きな磁界が必要とし、中磁界領域が拡大される結果となる。この高磁界領域に入るn<sub>z</sub>は大体90回程度となる。

### (3) がにについて

超高周波回路、あるいは  $B_a$ ,  $E_b$  極との作用回数は実際には何回やっているかはわからぬが、一応の目安として 2 方向の推進によるピッヂ  $\chi_p$  が小さいほど多いと考えられる。したがつてもし途中 A 极にとられることなく同じピッヂで 2 方向に  $\chi_p$  なる歴程長全体にわたって推進を続けたとすると理想的な最大作用回数  $n_{\max}$  は (39) 式で与えられる。これについて Table 1 の類似管による B を変えた場合の接線可能な  $V_w$ ,  $n_{\max}$  の領域、最大校波出力  $S_{max}$  に対する  $V_w$ ,  $n_{\max}$  をまとめて表 2 に掲げる。



10

		$F_1$		$F_2$		$F_3$	
入 来 波 パ ー ー		S領域	$S_{max}$	S領域	$S_{max}$	S領域	$S_{max}$
強	$I_w$	1~10	3	2~12	4, 6	2~28	12, 14
	$n_s$	3~37	11	5~34	11, 18	4~68	28, 32
弱	$I_w$	—	—	—	11	—	11, 13
	$n_s$	—	—	—	32	—	25, 32

表 2

先ず入来波パワーが強い場合は S は広範囲に現われるが  $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$  によるにしたがって S 領域は高磁界側に移る。これは下が同様と同じ位置に並びくんどりが減るのでを補うだけの強い磁界が必要となるからで  $S_{max}$  に対して  $F_1, F_2$  では大体  $n_s$  が等しく 10~20 回である。

弱い入来波になると  $F_1$  では検波不可能となり、 $F_2$  よりも  $F_3$  による検波出力の方が大きくなる。これは電極内の超音波電界が非常に弱くて間際の点を通過するまでのアーチメント位置ではないと検波不可能と考えられる。また  $F_2, F_3$  でも  $V_A$  は同じどころ、すなは左高次の極小波だけが検波可能である。そして  $B$  变化に対する検波領域は狭範囲となり、 $F_1$  は  $F_2$  では  $F_3$  でも 30 回位である。

また  $n_s$  が小さくなると  $n_s$  が少くなるので超音波との有効な相互作用の関係から制限される最小の  $n_s$  が存在すると考えられ。

これにより前述の磁界の下限あるいは陽極電圧の上限は、特に弱い入来波に対してはさらにこの点も考慮すべきである。

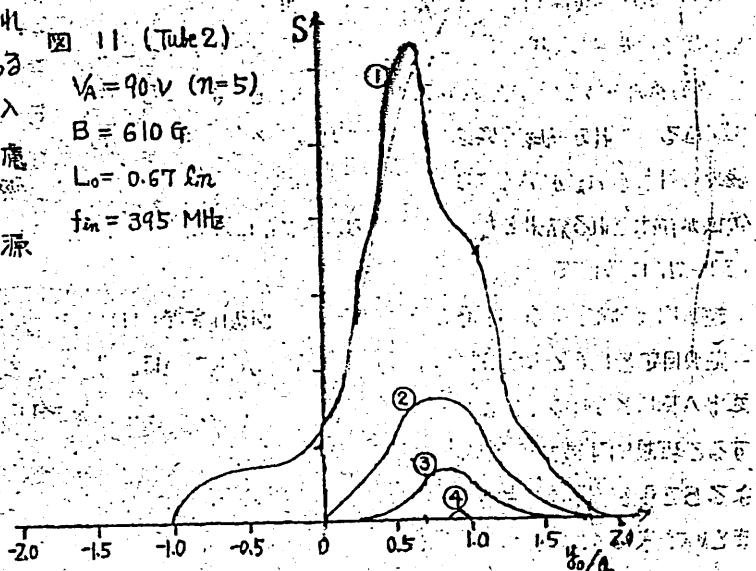
#### (4) 入来波パワーによる最適電子源

##### 位置

電子源位置を可変にするために  $B_\alpha$  極全面を Sb-Cs 光電面とした Tube 2 を試作した。この管の超音波周波に 395 MHz の入来波を導き、光電面上に厚さ 2 mm の板状光ビームを Y 軸

図 11 (Tube 2)

$V_A = 90$  V ( $n_s = 5$ )  
 $B = 610$  G  
 $L_0 = 0.67$  cm  
 $f_m = 395$  MHz

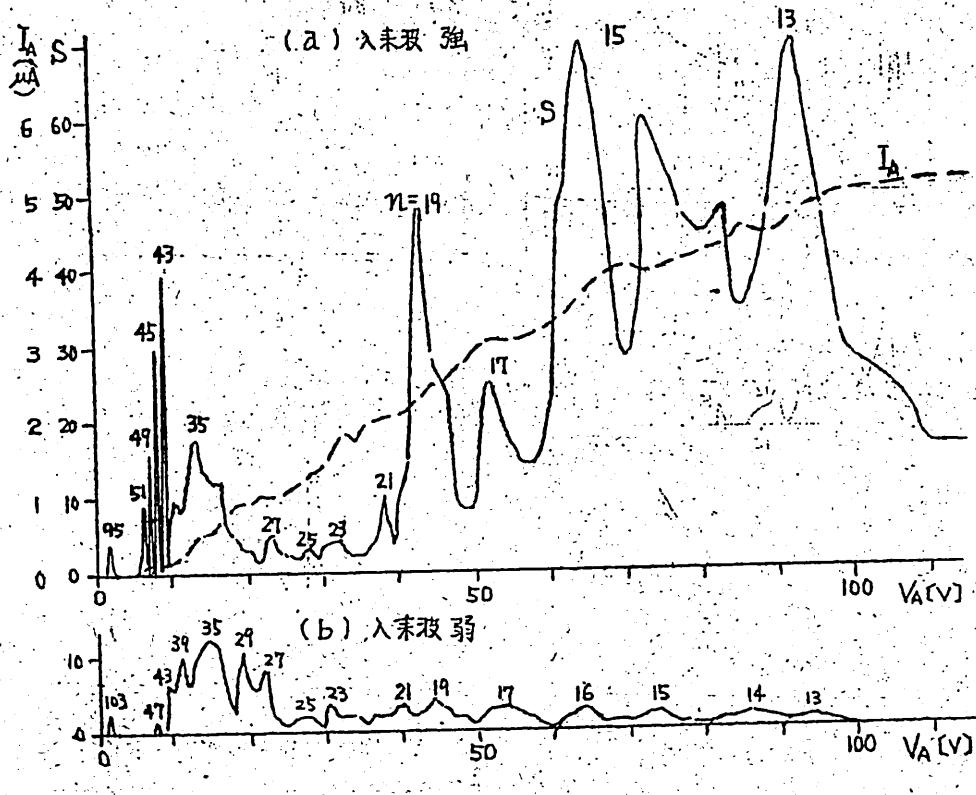


に平行にて、その光電陰極面上の光の照射位置を  $\pm$  方向に変化させて  $\lambda$  を変え、 $E_\alpha$  により検波出力を取り出した結果を図 11 に示す。この場合  $\lambda_A/\lambda_B \approx 1.5 \times 10^{-4}$  であるので  $\lambda_A$  は十分に小さく電子ビームは殆ど平らな板状になっているものとみられる。入末波のパワーが次第に弱くなるにつれて  $S$  の分布は  $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{4}$  と変化している。 $\textcircled{1}$  の場合は電極内の超高周波電界が強く  $\pm 10$  の領域にも入りこんでいるためにそこを通る電子でも検波可能となっているが、次第に弱くなるにつれて  $\textcircled{4}$  の領域に制限され、ついには间隙近くを通る電子源位置 ( $\lambda_A/\lambda_B = 1$ ) でのみ超高周波との相互作用が可能のことと表わしている。

#### 4. 高次導波の有用性

Tube 3 は  $\lambda$  が自体が WRJ-10 导波管内へ挿入出来、磁界は外より加えた。電極の向きは導波管の E 面が電極の X 面と ~~平行となる~~ ようにした。この場合の入末波の強弱による  $V_A$  特性を図 12 (a), (b) に示す。実験から求めた  $\alpha$  の値は 0.62 程度で  $\lambda$  は 100 位まで得られている。入末

図 12 (Tube 3)  $f_{ul} = 9.68 \text{ GHz}$ ,  $B = 3.01 \text{ kG}$ ,  $I_F = 1.37 \text{ A}$



波のパワーを弱めた場合、低次に比して高次の倍ト波による S の弱まり方は非常に少なくて、微弱電波に対して劣化した性質の 1 つと考えられる。

### 5. 波長が短い場合の特性

Tube 4 は 円筒空洞を走る太波管で、A 棒は銅のプロックを使い、B<sub>2</sub> 棒は幅 1.0 mm の Mo 板を平板のまま用いたもの前面に張った 0.1 mm 中のタンクスチールフレームとでまとめて双曲線状の等位線を近似的に形成するようにした。E<sub>1</sub> 棒は 0.8 mm φ のタンクスチール線をそのまま用いた。X の表面の一部が双曲線に近似するように利用した。製作せる座標寸法は図 7 に示した通りであるが、これより計算するとこの空洞の共振波長は 17.2 mm となる。<sup>4), 7)</sup> 送信側は 1 kHz の正弦波信号をのせたフライストロン 2K25 の発振出力クリスタル・ダイオード HN26 で、あるいは 3 倍して電磁ホーンより放射した。受信側ではこれを電磁ボーンで受けて電磁石にはさみこんだ導波管中の Tube 4 の電極(左側)へ導いて検波した。導波管中の電極の向きは下記の場合は同じ。

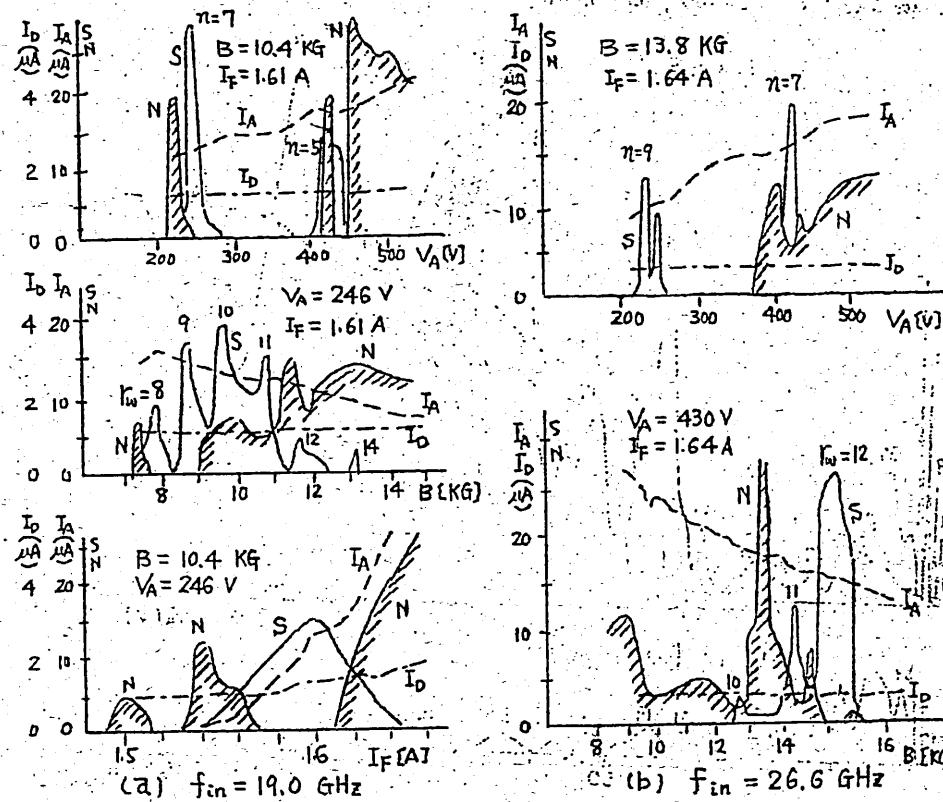


図 13 (Tube 4)

じである。また検波回路も基本的には図8と同じである。

図13(a), (b)に入射周波数 19.0, 26.6 GHz の場合のTube 4による実験結果を示す。(a)のVA特性では  $n=5, 7$  で受信され、これより  $\mu=0.69$  となる。同じく(b)のB特性は  $n=7$  での結果で、上で得た  $\mu$  の値を使って、 $f_0 = 8, 9, 10, 11, 12, 14$  の整数値で S極大となる。同図(a)の フィラメント電流 ( $I_F$ ) 特性では、大きな雑音出力 (N) の発生率の直前に S極大があるという一般的な  $I_F$  特性を示している。

図13(b)のVA特性では  $n=7, 9$  のままで検波され、 $\mu=0.75$  となっている。そのB特性は  $n=7$  での結果で、 $f_0 = 10, 11, 12$  で S極大となる。

なお、Tube 3 のような角形空腔状共振器をもつ試作管でも 30 GHz 帯の検波が可能であるが、磁界は非常に臨界的となり大体サイクロトロン周波数に対する磁界の 1 齧所だけとなることがある。この場合の VA 特性の倍小波次数  $n$  の値は、また(51)式により  $f_0$  の値に大略等しくなる。

## [2] 軸対称大阪管

### 1. 試作管

ここに掲げる試作管は Tube 5, 6 の 2 本であるが、何れも電極構造は同じで、フィラメントが環状か、環状かの違いだけである。 $l_x = 10 \text{ mm}$ ,  $d = 0.9$  で、(53), (54) 式にしたがって製作したが、図14には製作後の寸法が示してあり、材料は銅である。

Tube 5 は  $B_a$  極上中央に下、それより外側へ一列に  $F_2, F_3$  の孔 (1.5 mm 中) をあけ、後方よりヘアピン状に折り曲げて 0.1 mm 中のタングステン線を束状フィラメントとして入れ、前面にわざかのせかせた。Tube 6 は  $B_a$  極上にそれを約 1 周するように同心円状に 0.1 mm 中のタングステン線を環状フィラメントとして張り、埋めこんだもので、3 環状フィラメント共 (内より外へ  $F_1, F_2, F_3$ ) 両端以外に途中 2 齧所で支えている。

	Tube 5 (3 束状フィラメント)	Tube 6 (3 環状フィラメント)
電極断面図		
$l_x$	10	9.7
$l_y$		4.7
$d$		0.9
$F_1: l_{61}$	$\pm 0.2$	2.7 ~ 3.2
$F_2: l_{62}$	1.8	3.5 ~ 4.0
$F_3: l_{63}$	3.5	4.3 ~ 4.8

単位 mm

図 14

手作りのため フィラメントは完全な円にならず少し歪みがあり、それと併せて図14に示した時の範囲内にある。

なお、実験範囲、被波回路は平板形の場合と同じである(図8参照)。

## 2. Tube 5 による実験結果

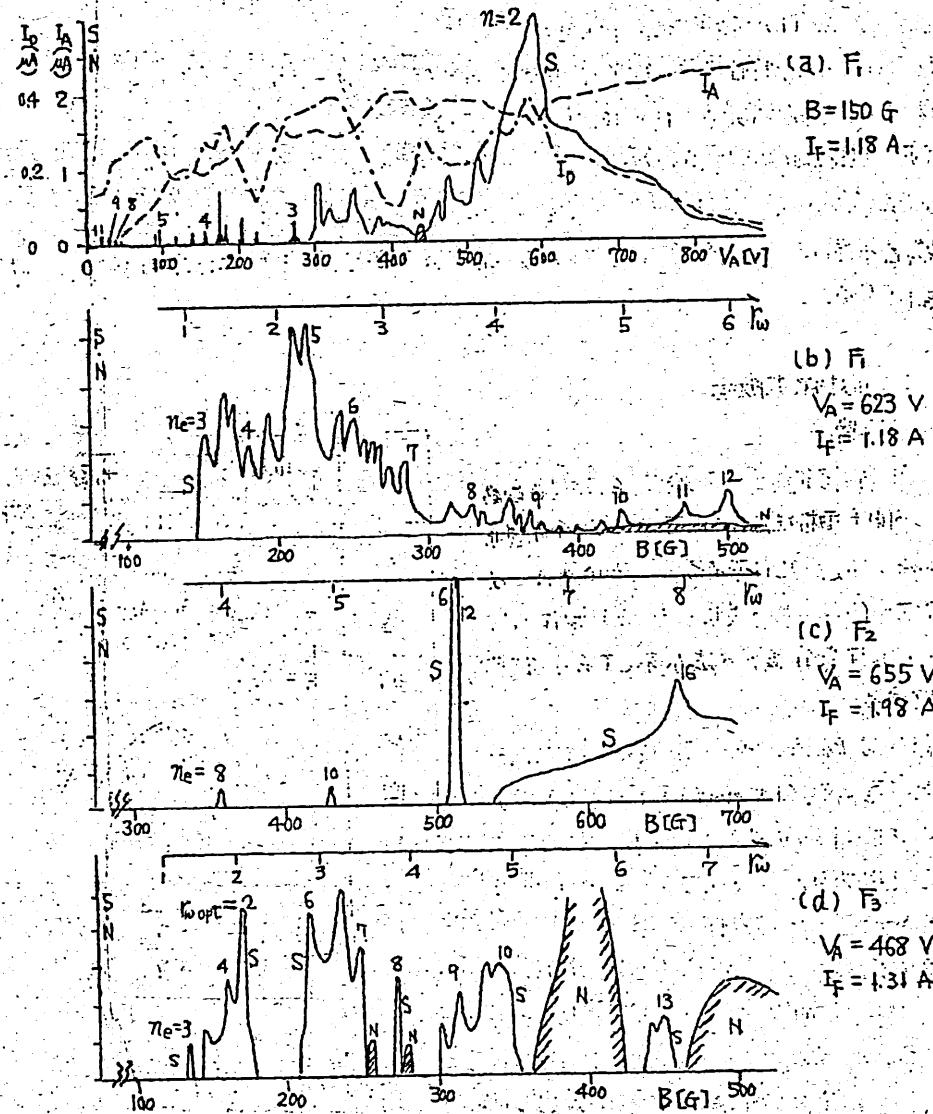


図 15 (Tube 5),  $f_{in} = 449$  MHz

入束周波数 449 MHz に対する Tube 5 の実験結果を 図15(a), (b), (c), (d) に示す。 (a) は中央の実芯フィラメント F<sub>1</sub> による V<sub>A</sub> 特性で、 S 極大気記した数字は 1 倍小波次数 n<sub>e</sub> を示し、 平板形と同様 入束波による電気振動の周期が 電子振動周期の 1/n<sub>e</sub> と同期していることを表わしている。 (b), (c), (d) は各々で F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, F<sub>3</sub> による B 特性である。 各図には n<sub>e</sub> のスケールが示してあり、 一般には S 極大気では n<sub>e</sub> の整数値とはならず、 n<sub>e</sub> の整数値となり。 1 周回あるいは 2 周回軌道をとっていることを表わしている。 たゞ F<sub>3</sub> では l<sub>w, opt</sub> = 2 が現われ、 また F<sub>2</sub> では n<sub>e</sub> の偶数値のみであるので 1 周回軌道のみであるが、 これはまた 磁界の強さときは l<sub>w</sub> の整数値に近くなるので (81) 式でオ 2 項が省略出来る場合) B<sub>a</sub>, E<sub>m</sub> 両極での選択作用最大の条件も効いていふことになる。

1 周回あるいは 2 周回軌道をとるということは、 旋移の周回性による動作条件のズレを出来るだけ防ぐために、 各周回毎にあるいは 2 周回毎に同一軌道をとつて同一動作条件を維持しているものと考えられる。

### 3. Tube 6 による実験結果

この管は Zト面内の電子軌道に基く l<sub>w</sub> あるいは l<sub>w, opt</sub> を議論するためには フィラメントを環状にしたものである。 入束周波数 452 MHz に対する V<sub>A</sub> 特性を 図16(a) に、 B 特性を 同図(b), (c), (d) に示す。 図(a)により得られる l<sub>w</sub> の値は 設計値通り 0.9 であり、 これにより計算した 図(b), (c), (d) の l<sub>w</sub>, n<sub>e</sub> の値は 図に記入したスケールの通りで、 S 極大気記した数字は n<sub>e</sub> の値である。 これによつても l<sub>w</sub> は わずか l<sub>w, opt</sub> = 2 が 図(b) に出てゐる程度で その他は n<sub>e</sub> の整数値となつてゐることがわかる。

磁界特性において、 S の出始めの B<sub>start</sub> について検討すると、 先ず (86) 式により l<sub>max</sub> = l<sub>p</sub> になる磁界指数 l<sub>w</sub> を求めると F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, F<sub>3</sub> に対して やはり 0.99, -1.6, 3.2 となる。 フィラメントの径方向位置 l<sub>w</sub> には幅があるが、 ここでは最も弱い磁界でも手近い 陽極出口径を通出する位置という意味から l<sub>w, min</sub> を採用した。 そこで l<sub>w</sub> よりも小さな l<sub>w</sub> で現れていふ S は F<sub>2</sub> の l<sub>w</sub> = 1.3, F<sub>3</sub> の l<sub>w</sub> = 3 であり、 この場合の Zト面内の電子軌道を 図17 に示す。 F<sub>2</sub> の l<sub>w</sub> = 1 1/3 とみた場合の軌道は l<sub>w, opt</sub> = 2 の条件に準ずるような軌道で、 軸方向に 1 往復半する間に B<sub>a</sub>, E<sub>m</sub> 両極で各 1 回ずつ選択作用を行い、 A 極の间隙では余裕通過の 2 回の相互作用しか行わなければ、 二の場合は超高周波间隙に非常に接近して通過するため S が現われたものと考えられる。 なお、 この実験では 排音出力 N が多く出ているが、 これは B<sub>start</sub> を強調するため に N を増加させた事に原因している。

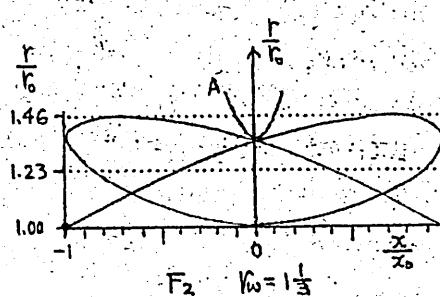
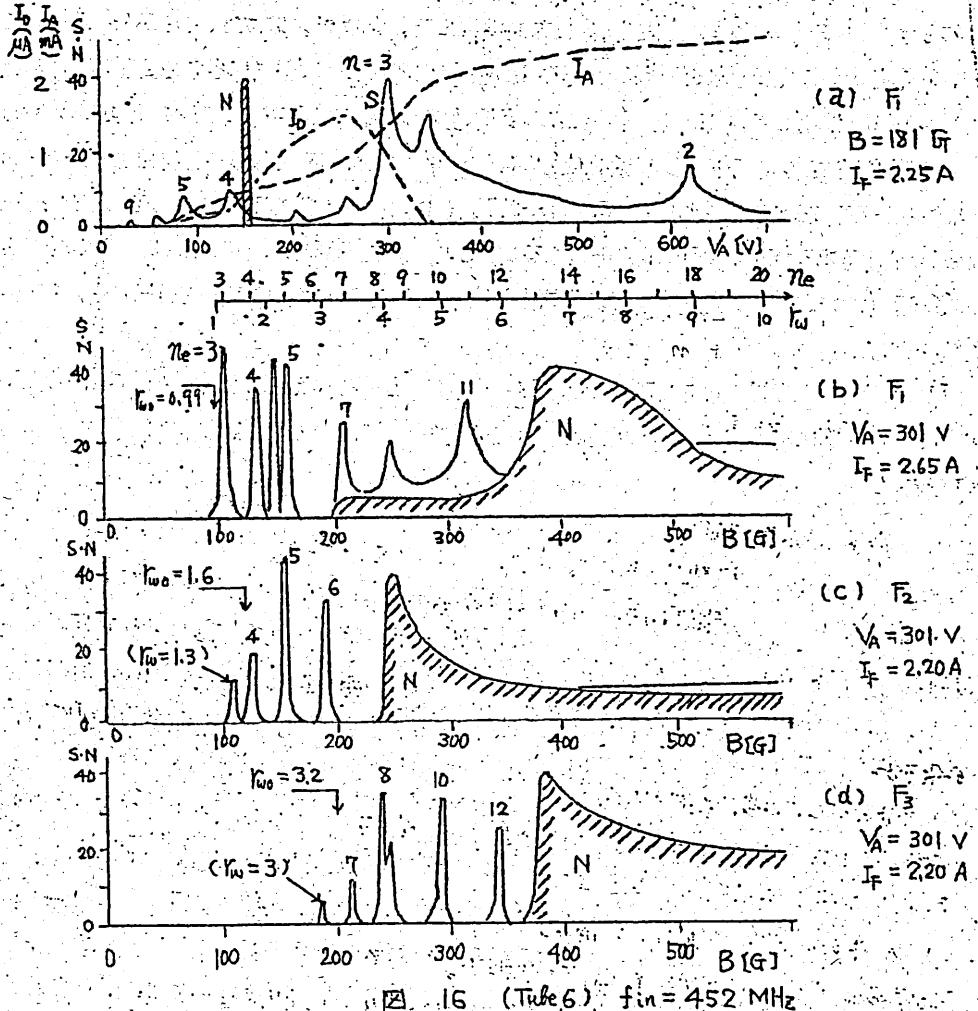
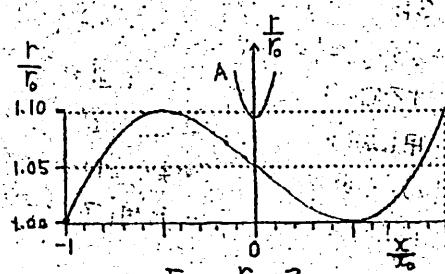


図 16

— 22 —



### III. 実験のまとめ

#### 1. S極となる $V_A$ ; Bについて

(1)  $V_A$ 変化に対しては、平板形、軸対称形とも  $n_e$  が整数となる  $V_A$  の値で得られ、 $n_e$  は高次では主に奇数となる。

(2) B変化に対しては、平板形の場合には  $n_e$  が主として整数、ときには半整数となる B の値で得られる。これは  $B_a, E_n$  極での選択作用だけが主に効いているためと考えられ、 $n_e$  の偶数は  $B_a, E_n$  両極で(片道毎に)、奇数は  $B_a$  極だけで(1往復毎に)、半整数は2往復毎の  $B_a$  極だけで(2往復毎に)、選択作用を行っているとみられる。

軸対称形の場合は、 $n_e$  が整数となる B の値で得られる。これは周方向の拡張による複数作用のずれを出来るだけ少くする軌道と考えられ、 $n_e$  の偶数は1周回毎に、奇数は2周回毎に同一複数作用を行っているとみられる。また磁界の強い場合は  $n_e$  の整数は  $V_A$  の整数あるいは半整数となるので平板形の場合のような  $B_a, E_n$  極での選択作用が有効に効く条件にもなる。

#### 2. 平板形の B特性について

(1) フィラメントの  $\pm$  变位を大きくすると複数可能な S 領域は高磁界側にうつる。その際の  $B_{start}$  には電子軌道の谷間に陽極が来る種々の場合が得られる。

(2) S領域は、フィラメントの  $\pm$  变位が大きいほど顕著に、低中高の3磁界領域にわかれる。

(3) 入束波のパワーを弱めたときの最高電子源位置は磁場周波数領域と同じ  $\pm$  变位のところとなる。この場合の  $V_A$  は低いほどよく、一般に弱入束波に対する高次の逸小波の有用性が現われる。

### 文 献

- 1) 伏見東若：力学(上)、岩波講座 現代物理学
- 2) 向井金治郎、中谷賢三：空洞大阪管とレフレックスクラリストロン、電評 35 (1947-5, 6)
- 3) 小谷正雄：電子振動による極超短波の発振、科学 16 (1946-11)
- 4) M. Uenohara : Theoretical and experimental study on the millimeter-wave cavity Barkhausen-Kurz oscillator (Aug. 1956)
- 5) 田雅郎、西川治：大阪管における最高磁場の問題、BB32 信学会全大 181
- 6) 大東英久、石川正臣、森田正信：軸対称大阪管の複数特性、昭44 電四学連大 1772
- 7) G. B. Collins : Microwave Magnetrons

輻射科学研究会資料

# 異常分散領域における光波と 媒質との相互作用

藤岡 弘

小川 英一

(大阪大学・工学部)

1969年6月27日

## 1. 序 言

近年、科学技術の進歩に伴って高性能の電磁波の検出器が開発され、観測される波長領域が急速に拡大されつつあり、赤外線天文学ないしは電波天文学のなかでも重要な位置を占めつつある。特に、1966年に初めて赤外線星が発見されてから、赤外線による宇宙観測は非常に豊富な成果を生みつつある。<sup>(1)</sup>一方、このような電波天文学あるいは宇宙工学の急速な進歩に伴い、運動系の電磁界理論は重要な研究課題となり、すでに数多くの研究成果が報告されている。例えば、運動している媒質と平面電磁波との相互作用の問題は、数多くの人々によって研究され幾多の興味深い結果が報告されている。<sup>(2)-(7)</sup>しかし、これらの研究は、運動している媒質と比較的低周波の電磁波との相互作用の問題に限られており、赤外線あるいは紫外線等の光波との相互作用の問題を取り扱う場合にはそのまま適用できない。

そこで、本文では運動している媒質と平面光波との相互作用の問題を、媒質中の電子の紫外共鳴振動あるいはイオンの赤外共鳴振動を考慮して取り扱い、従来の場合とは異なった種々の興味ある現象が現われることを示す。特に、異常分散領域における光波と媒質の相互作用については、数値計算例をあげて詳しく検討し、媒質の運動が分散曲線に与える影響等を明らかにしている。

## 2. 導電性媒質と非導電性媒質

静止媒質の電磁界を記述する巨視的な Maxwell 方程式は、微視的な Maxwell 方程式を平均化することによって直接得られつぎのようにかける。<sup>(8)</sup>

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1c)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1d)$$

ただし、 $\mathbf{E}$ および $\mathbf{B}$ は電界の強さおよび磁束密度を表わし、 $\epsilon_0$ および $\mu_0$ はそれぞれ真空中の誘電率および透磁率を表わす。ここで、媒質中において原子核に束縛された電子すなわち束縛電子の電荷密度および電流密度をそれぞれ $\rho_{\text{bound}}$ および $\mathbf{J}_{\text{bound}}$ で表わし、原子核に束縛されない電子、すなわち自由電子の電荷密度および電流密度をそれぞれ $\rho_{\text{free}}$ および $\mathbf{J}_{\text{free}}$ で表わせば、式(1)に含まれる $\rho$ および $\mathbf{J}$ はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\rho = \rho_{\text{bound}} + \rho_{\text{free}} \quad (2a)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{bound}} + \mathbf{J}_{\text{free}} \quad (2b)$$

以上、媒質中の荷電粒子として電子のみを考慮したが、イオンが存在するときには、その振動ももちろん媒質の光学的性質に寄与するが、この種の粒子の共鳴振動数は小さいので、特に赤外の領域において重要である。したがって、赤外領域における光学的性質が問題となるような場合には、電子の振動のかわりにイオンの振動を考慮すればよい。さて、 $\rho_{\text{bound}}$ および $\mathbf{J}_{\text{bound}}$ は、媒質の電気分極ベクトル $\mathbf{P}$ および磁気分極ベクトル $\mathbf{M}$ を導入することによってつぎのように表わされる。

$$\rho_{\text{bound}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3a)$$

$$\mathbf{J}_{\text{bound}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \quad (3b)$$

ここで、媒質に吸収がある場合、その吸収を束縛電荷による吸収と自由電荷による吸収とに分けて考え、自由電荷に基づく吸収が存在する場合にはその媒質を“導電性媒質”と呼び、たとえ媒質が吸収性であっても、その吸収が束縛電荷のみによるものであり自由電荷の寄与がない場合にはこの媒質を

“非導電性媒質”と呼ぶことにする。もちろん、媒質中には、一般には束縛電荷および自由電荷が同時に存在し、したがって両者を完全に分離して考えることはできないが、自由電荷による寄与が束縛電荷による寄与に比べて無視出来るほどに小さくなる周波数領域が存在するとき、その周波数領域において、この媒質は非導電性媒質と呼ぶことができる。

つぎに、電束密度  $D$  および磁界の強さ  $H$  を

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (4a)$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} B - M \quad (4b)$$

によって導入すれば Maxwell の方程式(1)は

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (5a)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J_{free} \quad (5b)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (5c)$$

$$\nabla \cdot D = \rho_{free} \quad (5d)$$

となる。なお、媒質の誘電率  $\epsilon$  および透磁率  $\mu$  を導入することによって式(4a)および(4b)はそれぞれつぎのように表わされる。

$$D = \epsilon E \quad (6a)$$

$$B = \mu H \quad (6b)$$

上式(5a)および(5b)から、媒質が静止している場合には自由電荷の存在の有無にかかわらず、電磁界  $E$  および  $H$  の接線成分は境界面においてそれぞれ連続になる。さて、Minkowskiによれば、式(5a)～(5d)の形の Max-

well 方程式が Lorentz 変換のもとに共変的であり、したがって運動媒質中においても式(5a)～(5d)の形の Maxwell 方程式がそのままなりたつ。<sup>(9)</sup>このことから、真空中を境界面に平行に運動している媒質に対して、たとえ媒質が吸収性であってもそれが束縛電荷のみの寄与によるものであれば、境界面上において電磁界の接線成分が連続となり、したがって境界面上における反射係数と透過係数の和が常に 1 となることを証明することができる。また自由電荷が媒質の吸収に寄与しているとき、境界面上において磁界の接線成分が一般には不連続となり、したがって反射係数と透過係数の和が 1 とはならないことは、筆者らによつてすでに報告されている。<sup>(6)～(7)</sup>

このように、運動している吸収性媒質を取り扱うときには、その吸収が束縛電荷のみによるものであり、自由電荷による寄与がない（非導電性媒質）か、あるいは自由電荷が媒質の吸収性に寄与している（導電性媒質）かを明確に区別する必要がある。

### 3. 非導電性媒質と光波との相互作用

#### 3・1 吸収のない場合

##### 3・1・1 静止媒質

運動媒質と平面光波との相互作用の問題を論じる前に、まず静止媒質の光学的性質について考察する。無限に拡がった非吸収性の等方性プラズマ媒質を考える。したがって、媒質中には自由電荷は存在せず、また束縛電荷による吸収もないものとする。このとき、角周波数  $\omega'$  の電界  $E'$  の中の電子の定常的な調和振動に対して、電気分極ベクトル  $P'$  は次式で与えられる。<sup>(10)</sup>

$$P' = \frac{N(e^2/m)}{\omega_0^2 - \omega'^2} E' \quad (7)$$

ただし、プライム記号は媒質の静止座標系  $K'(x', y', z', t')$  における電磁界量

であることを表わす。なお、

$m$  - 電子の質量

$e$  - 電子の電荷量

$N$  - 単位体積中の束縛電子の数

$\omega_0$  - 電子の共鳴振動数(固有振動数)

電子の共鳴振動数  $\omega_0$  は通常遠紫外部にあるが、比較的低周波の領域(マイクロ波領域～赤外領域)における光学的性質が問題となる場合には、電子のかわりにイオンの振動を考え、式(7)における  $N (e^2/m)$  を  $(\rho e^2/M)$  とすればよい。<sup>(10)</sup> ただし、 $\rho$  はイオンの原子価数であり、 $M$  はイオンの換算質量を表わす。

さて、この媒質の誘電率を  $\epsilon$  とすれば(本文においては、透磁率は真空の透磁率に等しいと仮定する。したがって、常に  $\mu = \mu_0$  とおく)，式(4a), (6a) および(7)から次式を得る。

$$\epsilon = \epsilon_0 \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad (8)$$

ただし

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \text{プラズマ周波数} \quad (9)$$

ここで、この媒質中を伝搬する平面光波の伝搬定数を  $k'$  とすれば、

$$k'^2 = \left(\frac{\omega'}{c}\right)^2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) = k_0^2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \quad (10)$$

であるから

$$k'^2 = k_0^2 \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega'^2} \right] \quad (11)$$

となる。ただし、式(10)における  $c$  は真空中の光速度を現わす。なお屈折率を  $n'$  とすれば次式がなりたつ。

$$n'^2 = \left(\frac{k'}{k_0}\right)^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega'^2} \quad (12)$$

### 3・1・2 運動媒質と光波との相互作用

つぎに、真空中を一様に運動しているこのような媒質と光波との相互作用の問題を取り扱う。図1に示すように、 $z > 0$  の空間は真空 ( $\epsilon_0, \mu_0$ ) であり、 $z < 0$  の空間は等方性プラズマ媒質 ( $\epsilon, \mu_0$ ) によって満たされているものとし、プラズマ媒質は観測者に対して一定速度  $v$  で  $x$  軸方向に運動しているものとする。いま真空側から一様な平面光波が入射するものとし、波は  $E$  波（電界が入射面に垂直な場合）もしくは  $H$  波（磁界が入射面に垂直な場合）であるとする。このとき、観測者の静止座標系  $K(x, y, z, t)$  においては、入射波はつぎのように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(i)} \\ H_y^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_i \\ H_i \end{Bmatrix} \exp [j(\omega t - k_x x - k_z z)] \quad (13_a)$$

$$\begin{Bmatrix} H_y^{(i)} \\ E_y^{(i)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (14_b)$$

ただし、

$$k_x = k_0 \sin \theta, \quad k_z = -k_0 \cos \theta \quad (15)$$

ここで、式 (13a), (14a) は  $E$  波を表わし、式 (13b), (14b) は  $H$  波を表わす。これらの式において、 $E_i, H_i$  はともに場所および時間に無関係な定数であり、 $\omega$  は入射波の角周波数、 $\theta$  は入射角を表わす。つぎに  $K$  系における反射波および透過波はそれぞれつぎのようになります。

反射波  $\begin{Bmatrix} E_y^{(r)} \\ H_y^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_r \\ H_r \end{Bmatrix} \exp [j(\omega t - k_x x + k_z z)] \quad (16_b)$

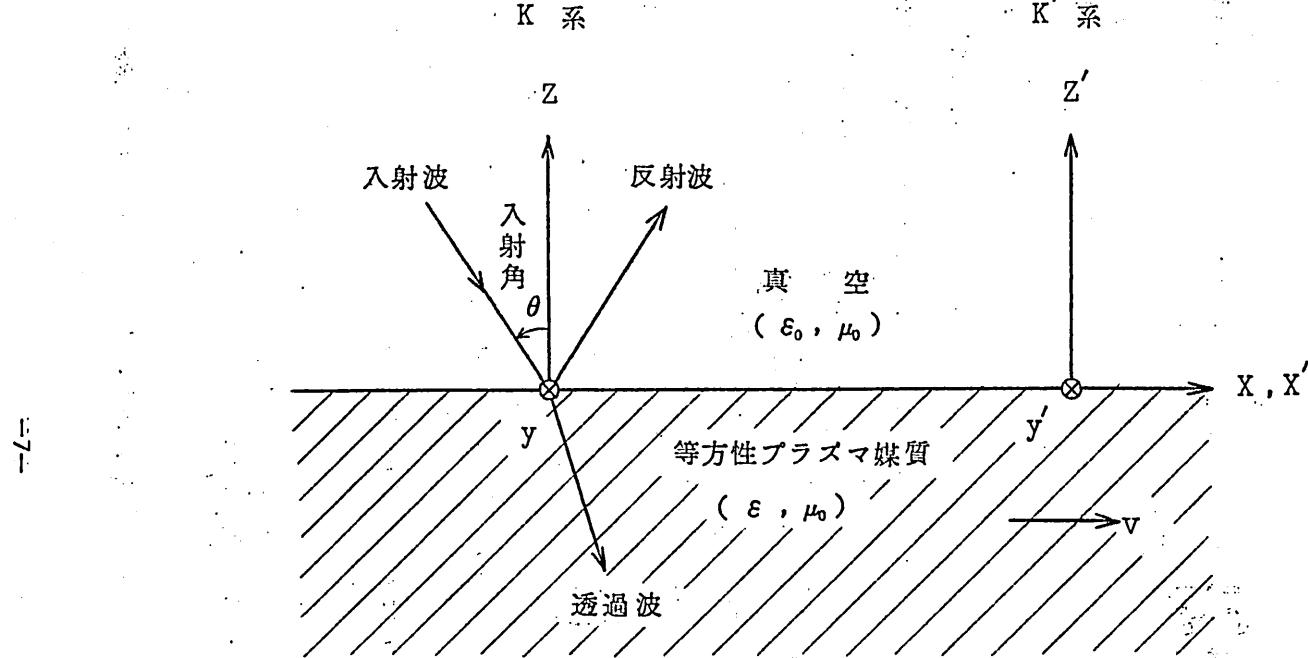


図1 座 標 系

$$\begin{Bmatrix} H_y^{(r)} \\ E_y^{(r)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (17_a^b)$$

透過波

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(t)} \\ H_y^{(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_t \\ H_t \end{Bmatrix} \exp[j(\omega t - k_x x - k_z^{(t)} z)] \quad (18_a^b)$$

$$\begin{Bmatrix} H_y \\ E_y \end{Bmatrix} = 0 \quad (19_a^b)$$

さて、 $K$ 系における入射波(13),(14)をLorentz変換を用いて $K'$ 系に移し、 $K'$ 系において通常の方法によって解を求め、得られた解を $K$ 系に移すことによって $K$ 系における反射波(16),(17)および透過波(18),(19)における未知係数( $E_r, E_t$ )あるいは( $H_r, H_t$ )を $E_i$ の関数として決定することができる。また、透過波の伝搬定数 $k_z^{(t)}$ は、関係式

$$(k_z^{(t)})^2 = (k_z'^{(t)})^2 = k'^2 - k_x'^2 \quad (20)$$

にて、式(11)および変換式

$$k'_x = \gamma (k_x - \beta k_0) = \gamma k_0 (\sin \theta - \beta) \quad (21_a)$$

$$\omega' = \gamma (\omega - v k_x) = \gamma \omega (1 - \beta \sin \theta) \quad (21_b)$$

ただし、

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (22)$$

を代入することによって求められる。いま、 $k_z^{(t)}$ を位相係数 $\rho$ と減衰係数 $q$ を用いて

$$k_z^{(t)} = -k_0 (\rho - j q) \quad (23)$$

のごとく表わすとき、 $\rho$ および $q$ はそれぞれつぎのように決定される。

$$\cos^2 \theta + \frac{1}{a} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 > 0 \quad (24)$$

のとき、

$$\rho = \left[ \cos^2 \theta + \frac{1}{a} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (25a)$$

$$q = 0 \quad (25b)$$

$$\cos^2 \theta + \frac{1}{a} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 < 0 \quad (26)$$

のとき、

$$\rho = 0 \quad (27a)$$

$$q = \left[ - \left\{ \cos^2 \theta + \frac{1}{a} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (27b)$$

ただし、

$$a = 1 - M_0^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \quad (28)$$

ここで、

$$M_0 = \frac{\omega}{\omega_0} = \text{固有振動数で正規化した周波数} \quad (29)$$

$$M_p = \frac{\omega}{\omega_p} = \text{プラズマ周波数で正規化した周波数} \quad (30)$$

したがって、条件式(26)を満足するような入射角 $\theta$ に対して全反射の現象が生ずることがわかる。なお、運動媒質中の屈折率 $n$ を静止媒質中の屈折率にならって、

$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{[(k_z^{(t)})^2 + k_x^2]^{\frac{1}{2}}}{k_0} \quad (31)$$

で定義すれば次式を得る。

$$n^2 = 1 + \frac{1}{a} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \quad (32)$$

つぎに、反射係数および透過係数を求める。反射係数  $R$  および透過係数  $T$  を、それぞれ境界面上における反射波と入射波、および透過波と入射波との Poynting ベクトルの時間平均値の境界面に垂直な成分の比で定義すれば  $R$  および  $T$  はそれぞれつぎのようにかける。

$$R = - \left[ \frac{\mathbf{S}^{(r)} \cdot \mathbf{i}_z}{\mathbf{S}^{(i)} \cdot \mathbf{i}_z} \right] = - \left[ \frac{Re(\mathbf{E}^{(r)} \times \mathbf{H}^{(r)*}) \cdot \mathbf{i}_z}{Re(\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*}) \cdot \mathbf{i}_z} \right] \quad (33a)$$

$$T = \left[ \frac{\mathbf{S}^{(t)} \cdot \mathbf{i}_z}{\mathbf{S}^{(i)} \cdot \mathbf{i}_z} \right] = \left[ \frac{Re(\mathbf{E}^{(t)} \times \mathbf{H}^{(t)*}) \cdot \mathbf{i}_z}{Re(\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*}) \cdot \mathbf{i}_z} \right] \quad (33b)$$

ただし、 $\mathbf{S}^{(i)}$ 、 $\mathbf{S}^{(r)}$  および  $\mathbf{S}^{(t)}$  はそれぞれ入射波、反射波および透過波の境界面上における Poynting ベクトルの時間平均値を表わし、 $\mathbf{i}_z$  は  $z$  方向の単位ベクトルを表わす。なお  $Re$  は複素量の実部をとる操作を表わし、記号\* は複素共役ベクトルを表わす。反射係数および透過係数を上式のように定義すれば、入射  $E$  波および  $H$  波に対する反射係数と透過係数はそれぞれつぎのように求められる。

$$R_E = \frac{(\cos \theta - \rho)^2}{(\cos \theta + \rho)^2} \quad (34a)$$

$$T_E = \frac{4\rho \cos \theta}{(\cos \theta + \rho)^2} \quad (34b)$$

および、

$$R_H = \frac{(\epsilon_r \cos \theta - \rho)^2}{(\epsilon_r \cos \theta + \rho)^2} \quad (35a)$$

$$T_H = \frac{4 \epsilon_r \rho \cos \theta}{(\epsilon_r \cos \theta + \rho)^2} \quad (35b)$$

ここで、

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{1}{a} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \quad (36)$$

ただし、入射角  $\theta$  が条件式 (26) を満足するときには、 $\rho = 0$  となり、したがって次式がなりたつ。

$$R_E = R_H = 1 \quad (37a)$$

$$T_E = T_H = 0 \quad (37b)$$

すなわち、全反射がおこる。なお上式 (34), (35) および (37) から

$$R_E + T_E = 1 \quad (38a)$$

$$R_H + T_H = 1 \quad (38b)$$

となることがわかる。

図 2 は、 $(M_0/M_p) = 0.1$ ,  $\theta = 0^\circ$  の場合の反射係数の数値計算例である。

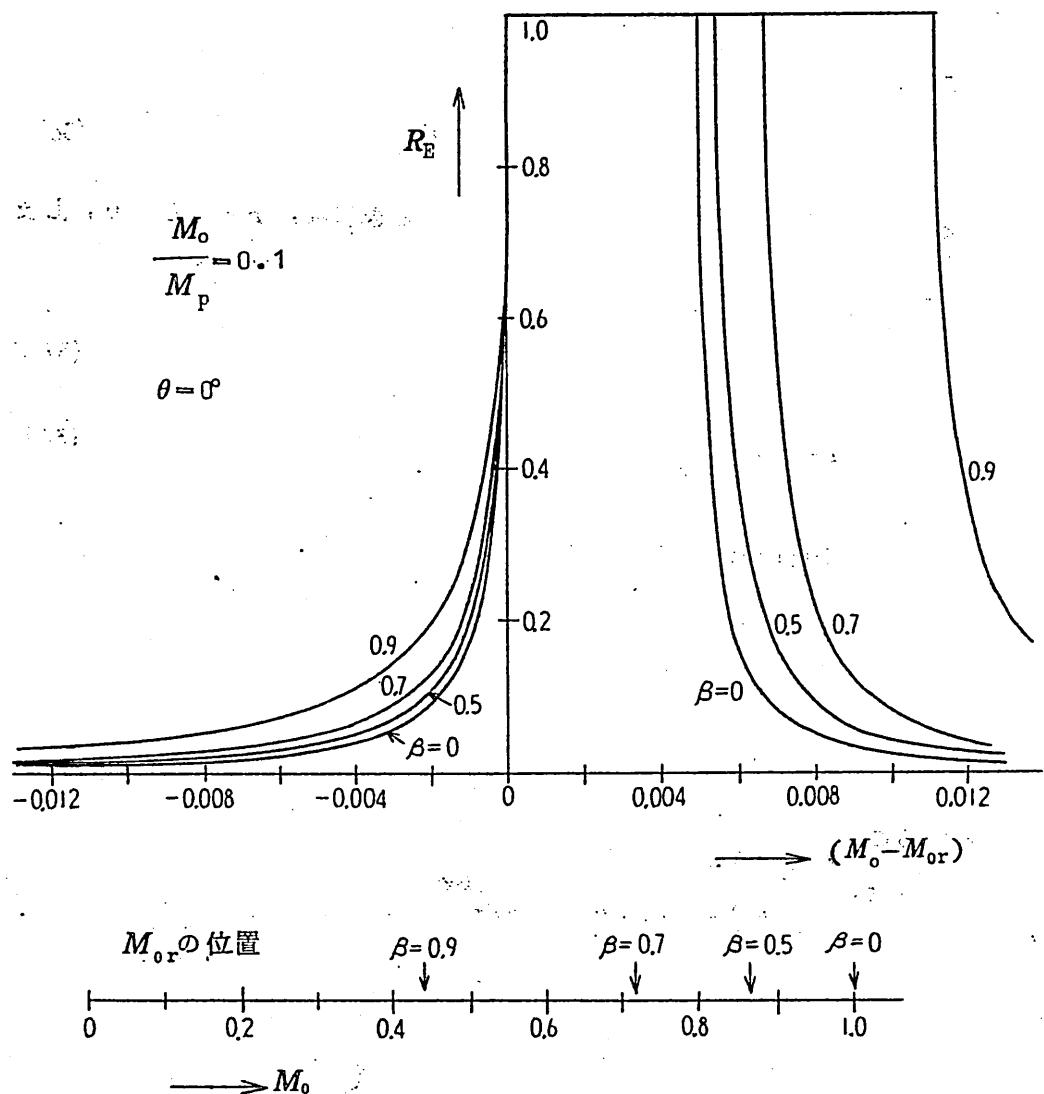


図2 反射係数  $R_E$

### 3・2 吸収のある場合

#### 3・2・1 静止媒質の光学的性質

前節では、媒質に吸収のない場合の光波と媒質との相互作用の問題を論じたが、ここでは媒質に吸収がある場合について考察する。ただし、前節同様自由電子は存在しないものとし、吸収は束縛電子のみによるものとする。このとき、吸収定数を  $\gamma$  とすれば式(7)のかわりに次式を得る。<sup>(10)</sup>

$$\mathbf{P}'_a = \frac{N(e^2/m)}{\omega_0^2 - \omega'^2 + j\gamma\omega'} \mathbf{E}' \quad (39)$$

ただし、添字  $a$  は吸収 (absorption) 性媒質の量であることを表わす。したがって、式(8), (11) および (12) はそれぞれつぎのように書き改められる。

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega'^2 + j\gamma\omega'} \right] \quad (40)$$

$$k'_a{}^2 = k_0^2 \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega'^2 + j\gamma\omega'} \right] \quad (41)$$

$$n'_a{}^2 = \left( \frac{k'_a}{k_0} \right)^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega'^2 + j\gamma\omega'} \quad (42)$$

#### 3・2・2 運動媒質と光波との相互作用

ここで、前節同様入射波を式 (13a), (14a) あるいは式 (13b), (14b) で表わすとき、透過波の伝搬定数  $k_{za}^{(t)}$  はつぎのように求められる。

$$k_{za}^{(t)} = -k_0 (\rho - j\gamma) \quad (43)$$

ここで、

$$p = \left[ \{ P + (P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} \} / 2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (44a)$$

$$q = \left[ \{ -P + (P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} \} / 2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (44b)$$

ただし、

$$P = \cos^2 \theta + \frac{a}{a^2 + b^2} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \quad (45a)$$

$$Q = \frac{b}{a^2 + b^2} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \quad (45b)$$

および、

$$a = 1 - M_0^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \quad (46a)$$

$$b = \left( \frac{M_0}{M_g} \right) M_0 \gamma (1 - \beta \sin \theta) \quad (46b)$$

$$M_0 = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (47a)$$

$$M_p = \frac{\omega}{\omega_p} \quad (47b)$$

$$M_g = \frac{\omega}{q} \quad (47c)$$

上式における  $a$ ,  $M_0$  および  $M_p$  は、前節において式 (28), (29) および (30) に定義したものであるがここに改めて記した。式 (47c) の  $M_g$  は吸収定数で正規化した角周波数を表わす。なお、式 (47a)~(47c) から、 $(M_0/M_p)$  および  $(M_0/M_g)$  はそれぞれ

$$\frac{M_0}{M_p} = \frac{\omega_p}{\omega_0} \quad (48a)$$

$$\frac{M_0}{M_g} = \frac{q}{\omega_0} \quad (48b)$$

となり，したがって周波数  $\omega$  に無関係な定数であることがわかる。また，屈折率  $n_a$  はつぎのように求められる。

$$n_a = n - j \kappa \quad (49)$$

ここで，

$$n = [\{ U + (U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} \} / 2]^{\frac{1}{2}} \quad (50\text{a})$$

$$\kappa = [\{ -U + (U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} \} / 2]^{\frac{1}{2}} \quad (50\text{b})$$

ただし， $U$ ， $V$  は次式で定義される。

$$n_a^2 = U - jV \quad (51)$$

ここで，

$$U = 1 + \frac{a}{a^2 + b^2} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \quad (52\text{a})$$

$$V = \frac{b}{a^2 + b^2} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \quad (52\text{b})$$

つぎに，反射係数および透過係数はそれぞれつぎのよう求められる。

$$R_{Ea} = \frac{(\cos \theta - p)^2 + q^2}{(\cos \theta + p)^2 + q^2} \quad (53\text{a})$$

$$T_{Ea} = \frac{4p \cos \theta}{(\cos \theta + p)^2 + q^2} \quad (53\text{b})$$

および，

$$R_{Ha} = \frac{(\varepsilon_r \cos \theta - p)^2 + (\varepsilon_i \cos \theta - q)^2}{(\varepsilon_r \cos \theta + p)^2 + (\varepsilon_i \cos \theta + q)^2} \quad (54\text{a})$$

$$T_{Ha} = \frac{4(p \varepsilon_r + q \varepsilon_i) \cos \theta}{(\varepsilon_r \cos \theta + p)^2 + (\varepsilon_i \cos \theta + q)^2} \quad (54\text{b})$$

ただし、

$$\frac{\epsilon_a}{\epsilon_0} = \epsilon_r - j \epsilon_i \quad (55)$$

ここで、

$$\epsilon_r = 1 + \frac{a}{a^2+b^2} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \quad (56a)$$

$$\epsilon_i = \frac{b}{a^2+b^2} \left( \frac{M_0}{M_p} \right) \quad (56b)$$

上式 (53) および (54) から、次式を得る。

$$R_{Ea} + T_{Ea} = 1 \quad (57a)$$

$$R_{Ha} + T_{Ha} = 1 \quad (57b)$$

したがって、運動している媒質が吸収性であっても非導電性の場合には、反射係数と透過係数の和は常に 1 に等しいことがわかる。

### 3・2・3 分散曲線

式 (52a) および (52b) の示す曲線、すなわち  $(M_0, U)$  曲線および  $(M_0, V)$  曲線を（標準形の）分散曲線と呼び、特に、 $(M_0, V)$  曲線を吸収曲線と呼ぶ。ここでは、媒質の運動が分散曲線に与える影響について考察する。

式 (52a) から明らかのように、 $(M_0, U)$  曲線は

$$M_0 = \alpha \left[ 1 + \left( \frac{M_0}{M_g} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{1}{\gamma (1 - \beta \sin \theta)} \quad (59)$$

において極値をもつ。極(最)大値および極(最)小値をそれぞれ  $U_{\max}$  および  $U_{\min}$  とすれば、

$$U_{\max} = 1 + \frac{\alpha^{-2} \left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right) \left[ 2 - \left(\frac{M_0}{M_g}\right) \right]} \quad (60a)$$

$$U_{\min} = 1 - \frac{\alpha^{-2} \left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right) \left[ 2 + \left(\frac{M_0}{M_g}\right) \right]} \quad (60b)$$

となる。 $(M_0, U)$  曲線において  $U$  の値が周波数  $M_0$  と共に増加する領域を正常分散領域、減少する領域を異常分散領域と呼ぶが、式(58)から異常分散領域の幅  $\Delta M_0$  は

$$\Delta M_0 = \alpha \left[ \left\{ 1 + \left(\frac{M_0}{M_g}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ 1 - \left(\frac{M_0}{M_g}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (61)$$

となり、したがって媒質が静止している場合に比べて  $\alpha$  倍になることがわかる。また、 $(M_0, V)$  曲線は式(52b)から直ちに分かるように

$$M_0 = \alpha \left[ \left\{ 2 - \left(\frac{M_0}{M_g}\right)^2 \right\} + \sqrt{\left\{ 2 - \left(\frac{M_0}{M_g}\right)^2 \right\}^2 + 12} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (62)$$

$V$  において極(最)大値  $V_{\max}$  を取る。

ここで、 $(M_0/M_g)^2$  は  $(M_0/M_g)$  に比べて無視でき、また必要な場合には  $(M_0/M_g)$  を 1 に比べて無視できるものとすると、式(58), (60), (61) から明らかなよう  $V$  ( $M_0, U$ ) は

$$M_0 = \alpha \left[ 1 \mp \frac{1}{2} \left(\frac{M_0}{M_g}\right) \right] \quad (63)$$

において、極値

$$U_{\max} = 1 + \frac{\alpha^{-2}}{2} \frac{\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right)} \quad (64a)$$

$$U_{\min} = 1 - \frac{\alpha^{-2}}{2} \frac{\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right)} \quad (64b)$$

をもつ。したがって、異常分散領域の幅  $\Delta M_0$  は

$$\Delta M_0 = \alpha \left( \frac{M_0}{M_g} \right) \quad (65)$$

となる。また、このような近似を行なえば

$$M_0 = M_{\text{or}} = \alpha \quad (66)$$

において、 $U = 1$  となり、このとき  $(M_0, V)$  曲線は極（最）大値

$$V_{\max} = \alpha^{-2} \frac{\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right)} \quad (67)$$

をとる。なお、 $(M_0, V)$  曲線は、 $(M_0, U)$  曲線が極値をとる  $M_0$  において

$$V = \frac{1}{2} V_{\max} \quad (68)$$

となり、したがって  $(M_0, V)$  曲線の半値幅は異常分散領域の幅  $\Delta M_0$  に等しくなる。図 3 は、これらの様子を示したものである。

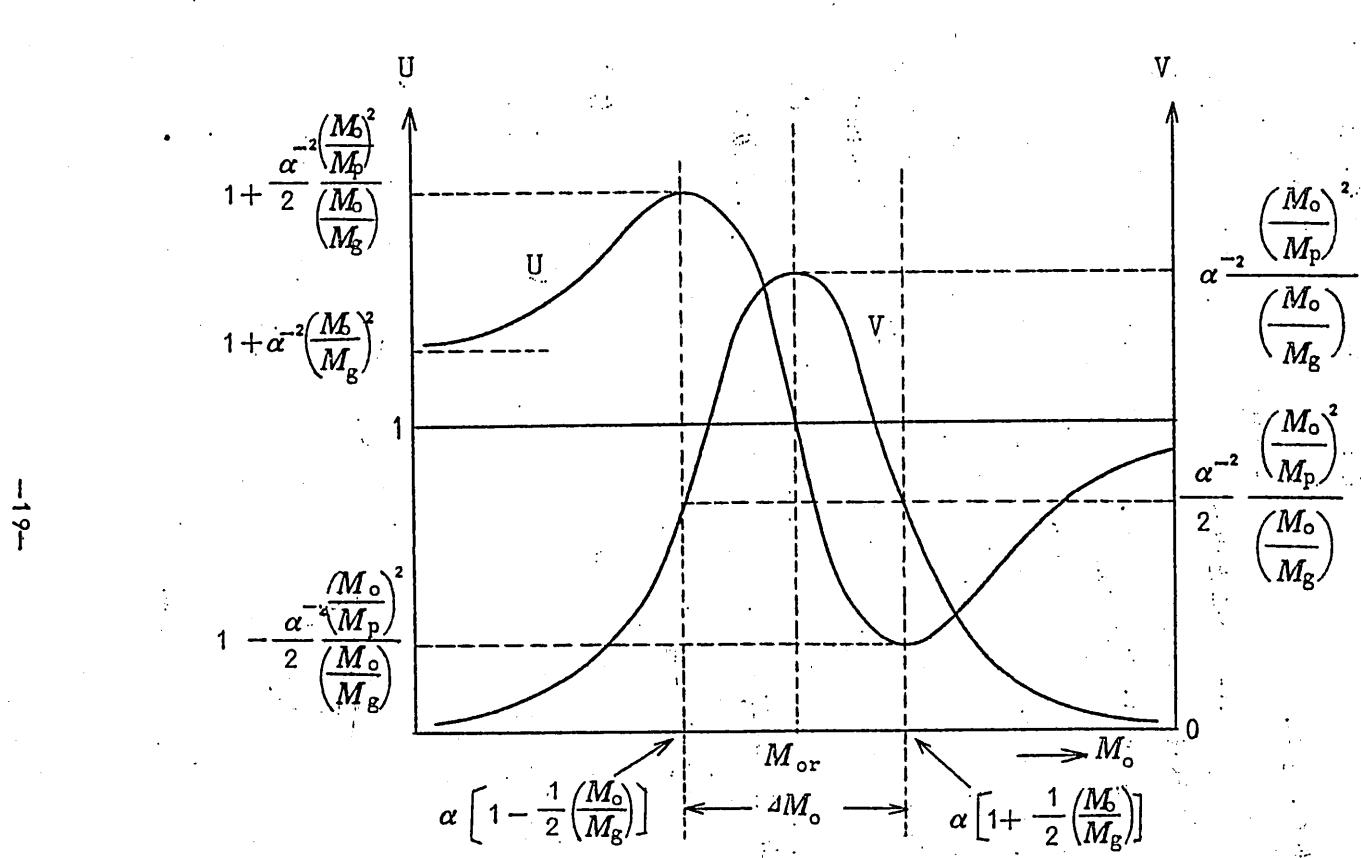


図3 分散曲線

以上のことから、 $(M_0/M_g)$  が十分小さい場合には、媒質が運動することによって、固有振動数は媒質が静止しているときの固有振動数  $\omega_0$  に比べて  $\alpha$  倍になり、また、 $(M_0, U)$  曲線における異常分散領域の幅  $\Delta M_0$ 、したがって $(M_0, V)$  曲線における半值幅も媒質が静止しているときのそれに比べて  $\alpha$  倍になることがわかる。また、式(64a), (64b) および (67) から

$$U_{\max} - U_{\min} = V_{\max} \quad (69)$$

なる関係があり、 $\Delta M_0$  が、媒質が静止しているときの  $\alpha$  倍になるとき、この  $V_{\max}$  なる値は  $(1/\alpha^2)$  倍になることがわかる。

つぎに、異常分散領域の幅  $\Delta M_0$  の速度依存性について考察する。式(65)からわかるよう ~~て~~ $\Delta M_0$  の速度依存性は係数  $\alpha$  の速度依存性に等しい。 $\alpha$  は式(59)に与えられているが、この式より  $\sin \theta \leq 0$  のとき  $\alpha$  は速度  $\beta$  の増加と共に 1 から 0 まで単調に減少し、また、 $\sin \theta > 0$  のときには、 $\beta = \sin \theta$  において極大値  $\alpha_{\max} = \sec \theta$  をもつことがわかる。したがって、 $\Delta M_0$  は  $\sin \theta \leq 0$  のときには、 $\beta$  の増加と共に  $(M_0/M_g)$  から 0 に単調に減少し、 $\sin \theta > 0$  のときには  $\beta = \sin \theta$  において極大値

$$(\Delta M_0)_{\max} = \left( \frac{M_0}{M_g} \right) \sec \theta \quad (70)$$

をとる。図 4 は、この様子を表わしたものである。

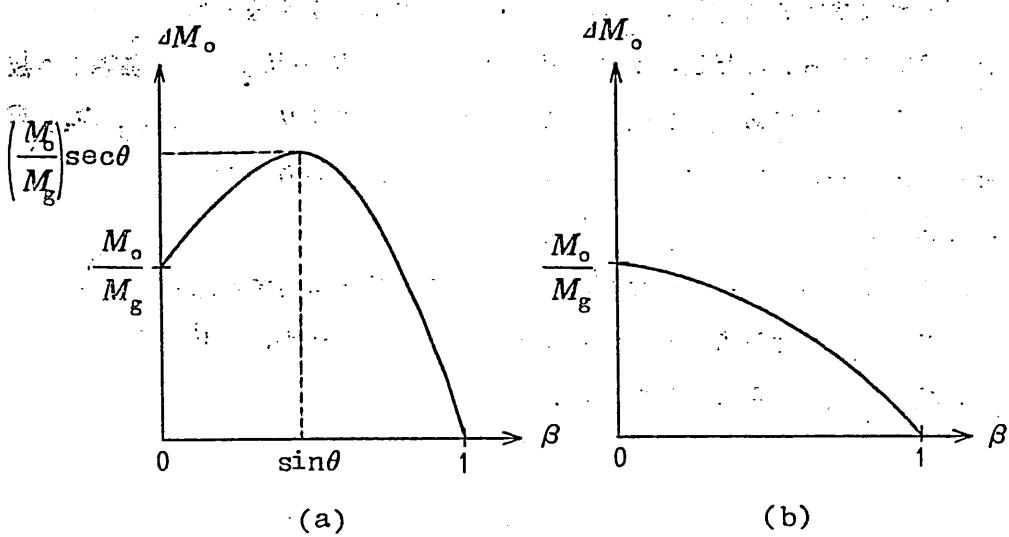


図 4  $\Delta M_0$  の速度依存性

(a)  $\sin \theta > 0$ , (b)  $\sin \theta \leq 0$

無限に拡がった運動媒質中を平面光波が、媒質の運動速度に平行な方向に伝搬する場合の  $\Delta M_0$  は、式 (65) において  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  とおくことによって求められるが、上に述べたことから、つぎのことがわかる。まず、媒質の運動方向と逆の方向に伝搬する場合 ( $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ) には、異常分散領域の幅  $\Delta M_0$  は、

$$\Delta M_0 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \left( \frac{M_0}{M_g} \right) \quad (71)$$

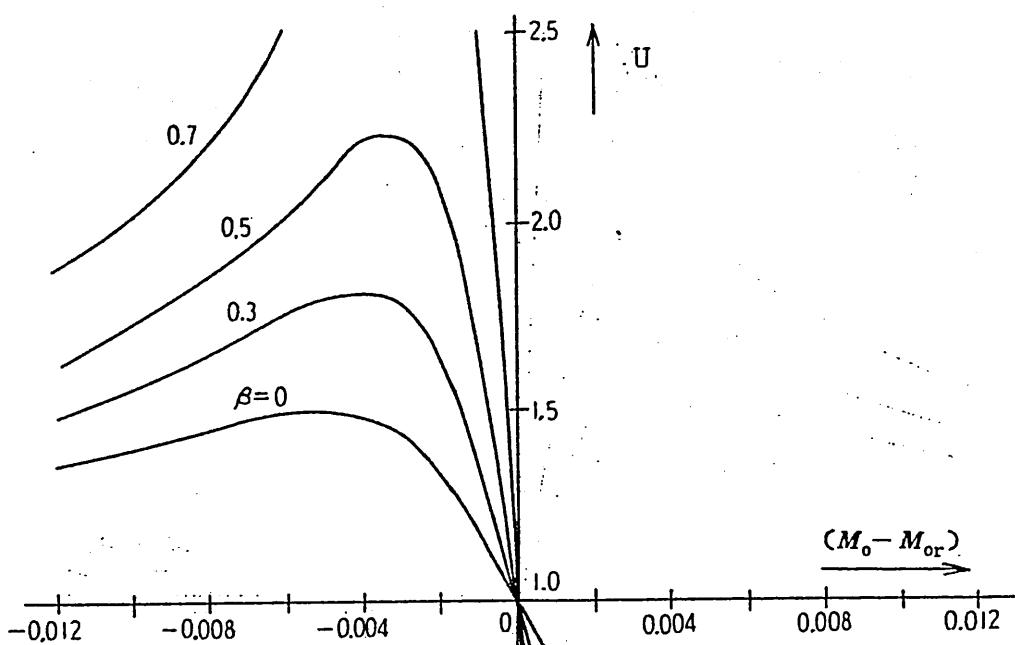
となり、 $\beta$  の増加と共に  $(M_0/M_g)$  から 0 まで単調に減少する。すなわち、媒質が運動することによって異常分散領域の幅がせまくなる。つぎに、媒質の運動方向に伝搬する場合 ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) には、

$$\Delta M_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \left( \frac{M_0}{M_g} \right) \quad (72)$$

となり、 $\beta$  の増加と共に  $(M_0/M_g)$  から  $\infty$  まで単調に増加する。すなわち、媒質が運動することによって異常分散領域の幅がひろがることがわかる。

図5および図6は( $M_0$ ,  $U$ )曲線および( $M_0$ ,  $V$ )曲線(吸収曲線)の数値計算例である。ただし、横軸は $M_0$ のかわりに( $M_0 - M_{0r}$ )とし、 $M_{0r}$ の位置は別に示してある。したがって、横軸が0の点は $M_0 - M_{0r}$ なる点(共鳴点)を表わし、また $M_{0r}$ の変化は $\beta$ の変化に伴う共鳴点の移動を示したものである。

図7および図8は、それぞれ入射E波およびH波に対する反射係数 $R_{Ea}$ および $R_{Ha}$ の数値計算例であるが、図5, 6と同様に横軸は( $M_0 - M_{0r}$ )をとり、 $M_{0r}$ の変化は別に示してある。



$$\frac{M_o}{M_g} = 0.01$$

$$\frac{M_o}{M_p} = 0.1$$

$$\theta = -45^\circ$$

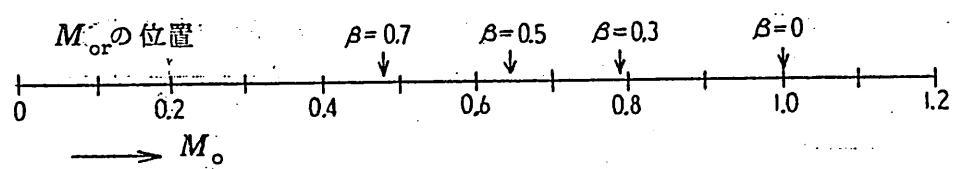
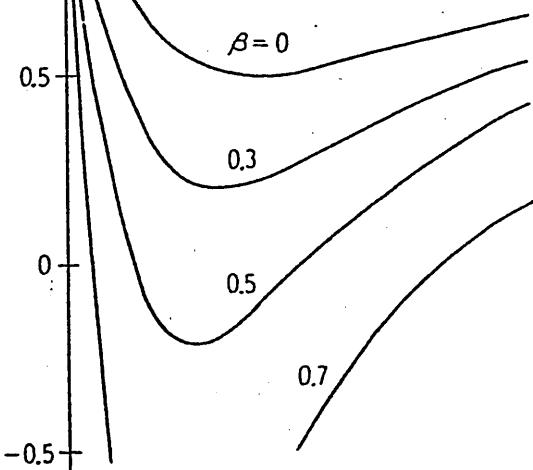


図 5(a) 異常分散領域 ( $\theta = -45^\circ$ )

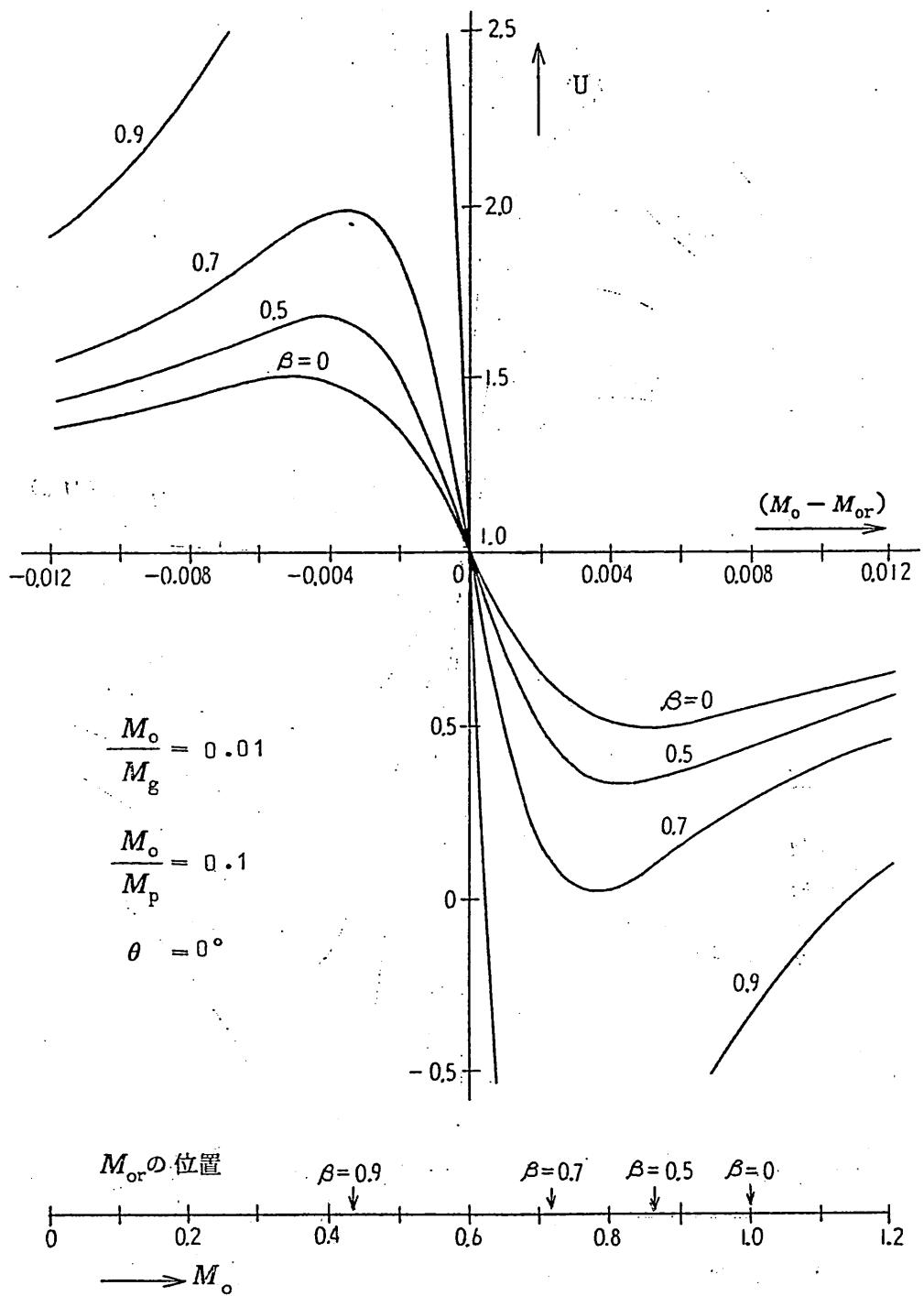


図 5(b) 異常分散領域 ( $\theta = 0^\circ$ )

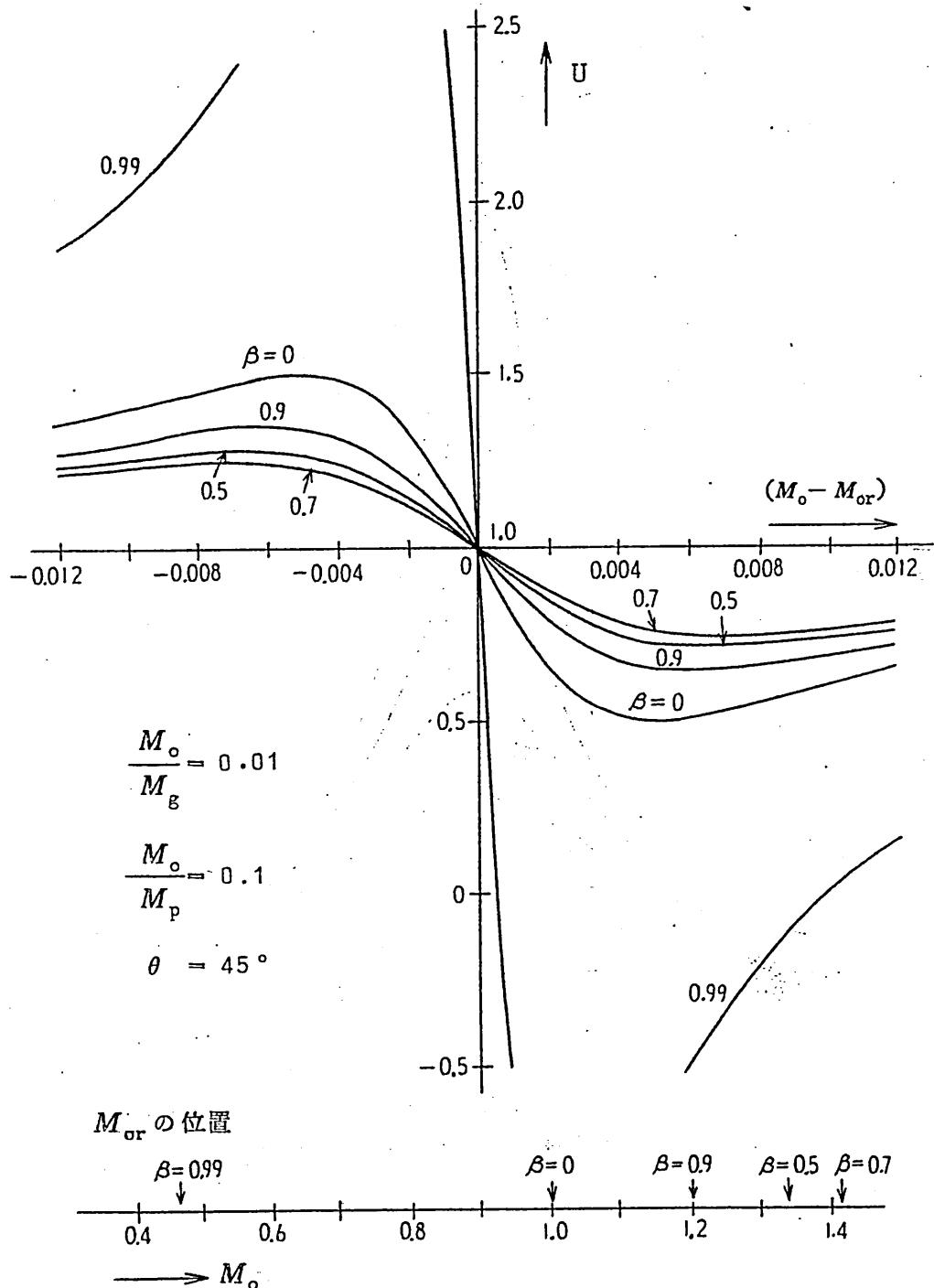


図 5(c) 異常分散領域 ( $\theta = 45^\circ$ )

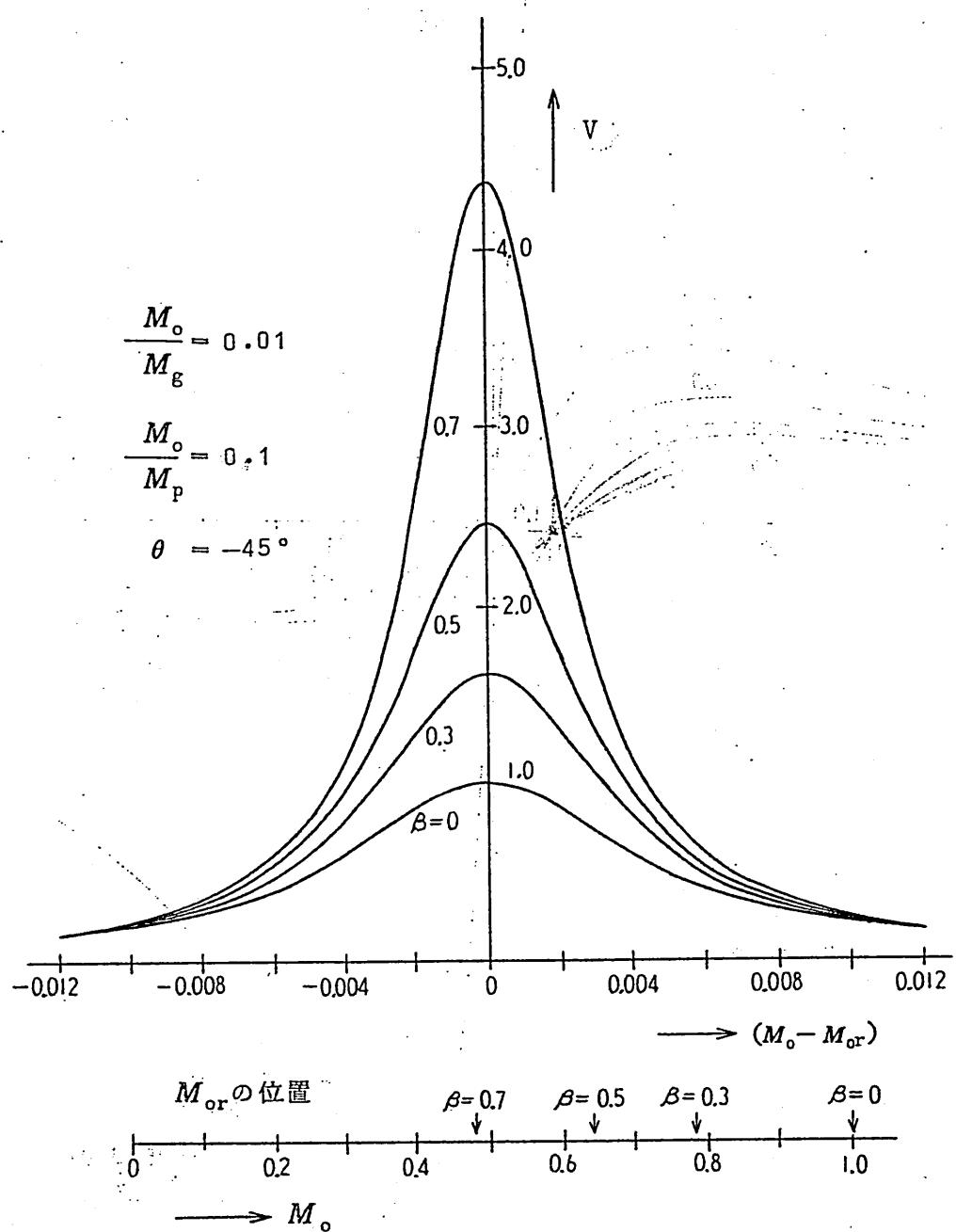


図 6(a) 吸収曲線 ( $\theta = -45^\circ$ )

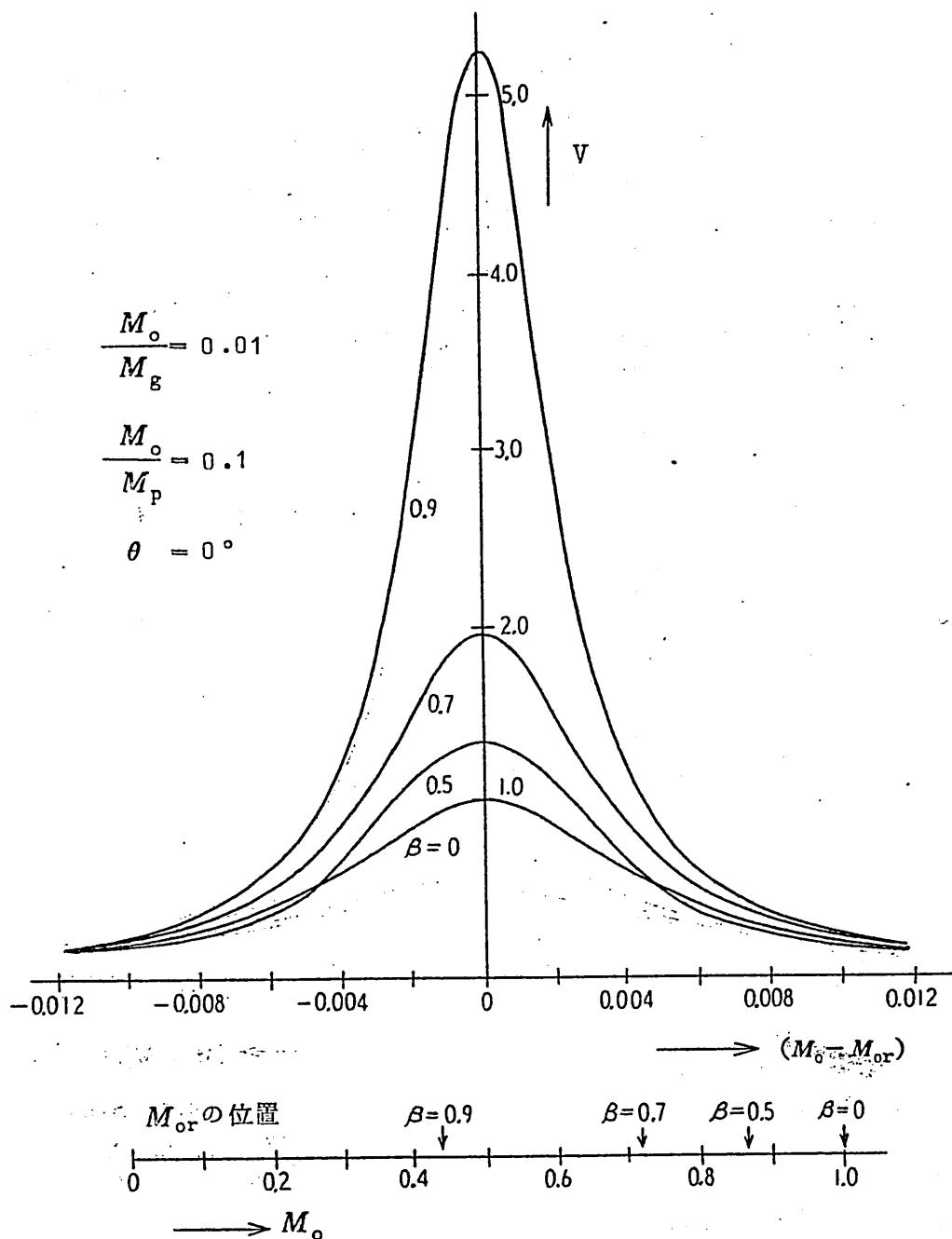


図 6(b) 吸 収 曲 線 ( $\theta = 0^\circ$ )

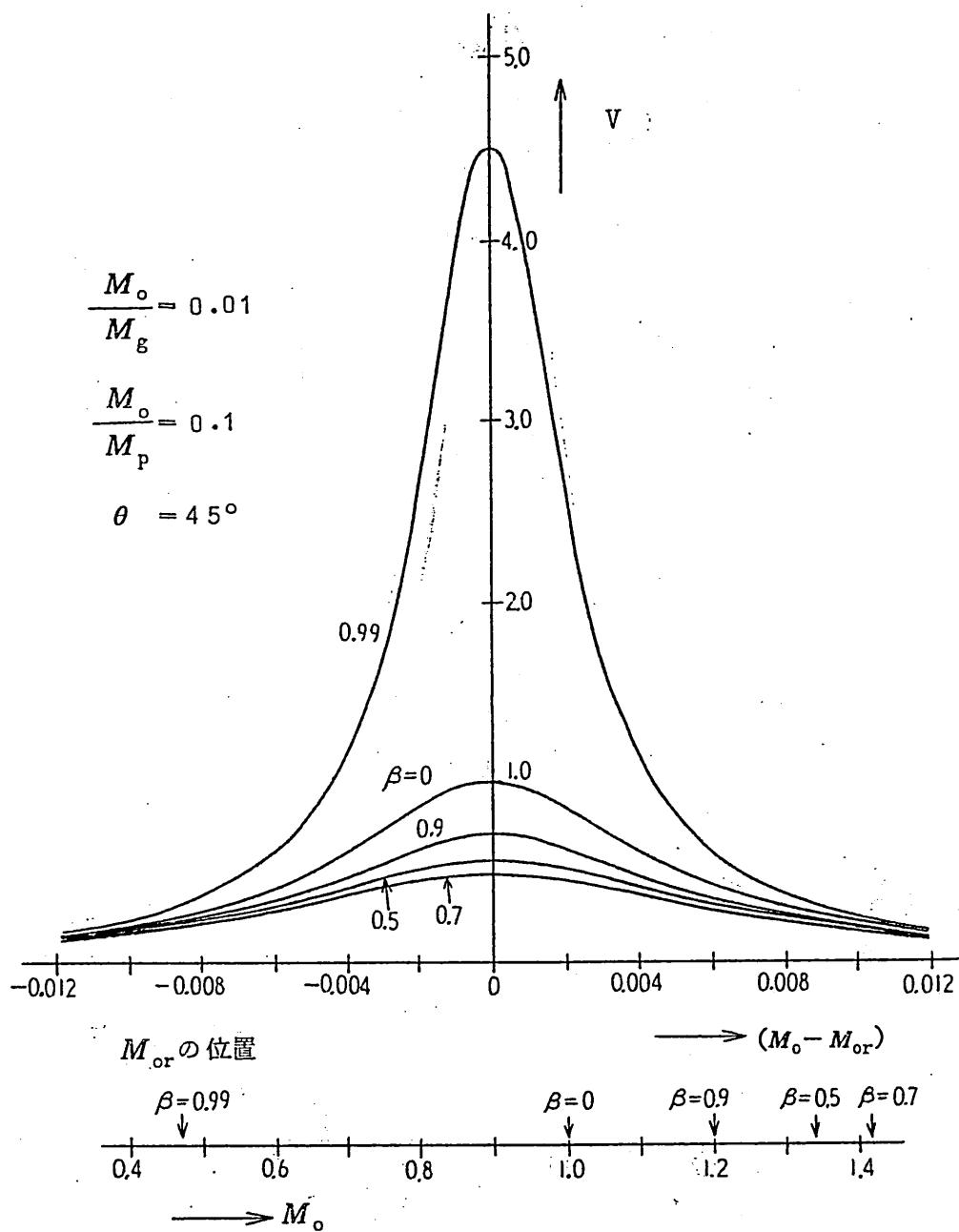


図 6(c) 吸 収 曲 線 ( $\theta = 45^\circ$ )

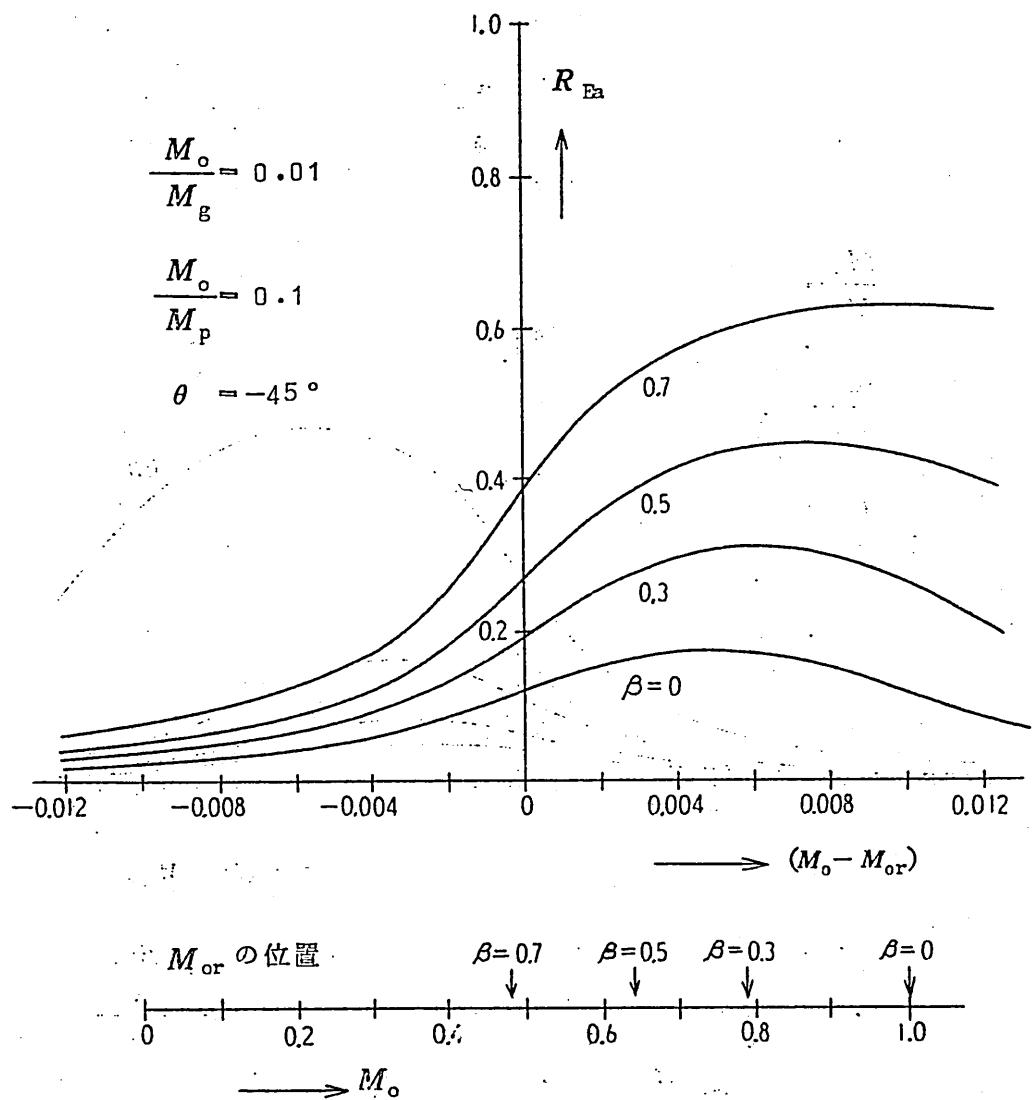


図 7(a) 反射係数  $R_{Ea}$  ( $\theta = -45^\circ$ )

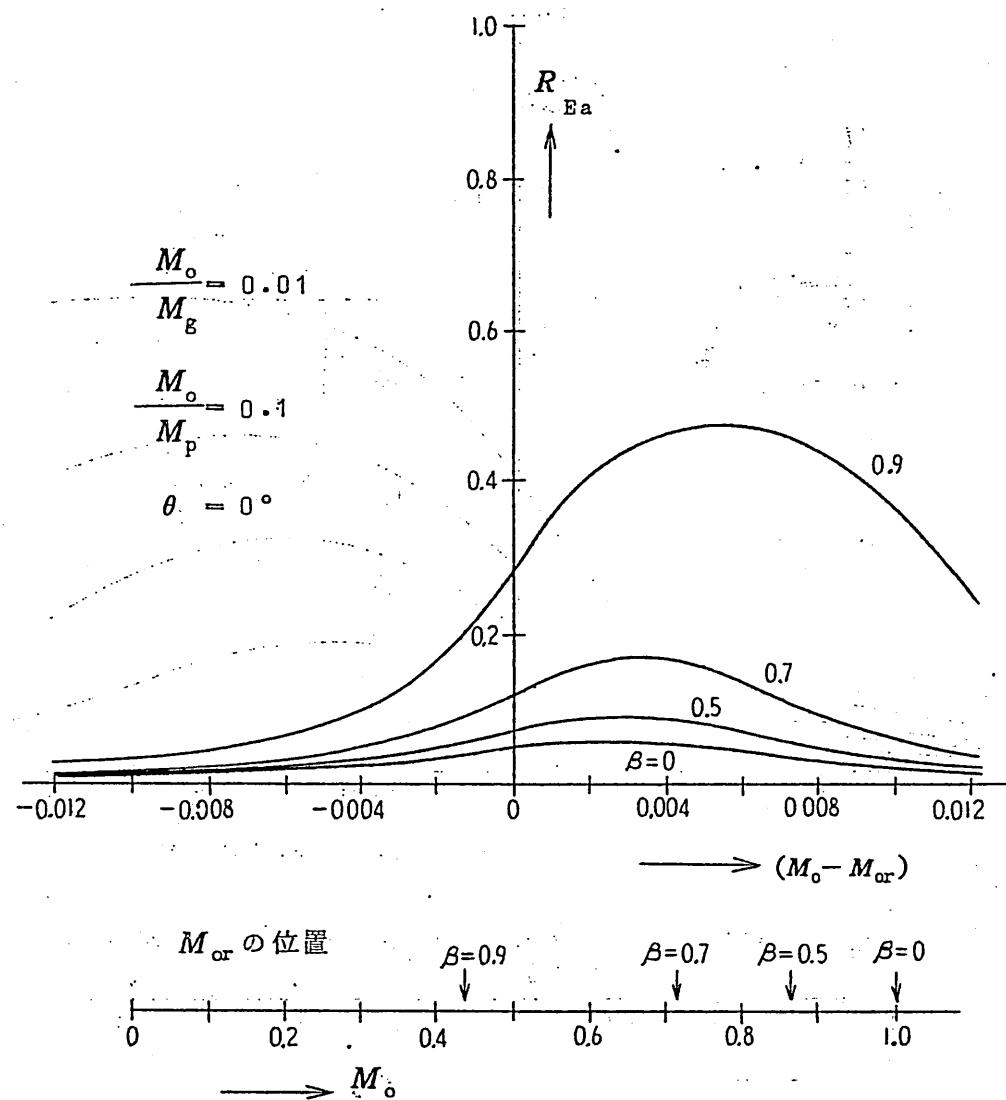


図7(b) 反射係数  $R_{Ea}$  ( $\theta = 0^\circ$ )

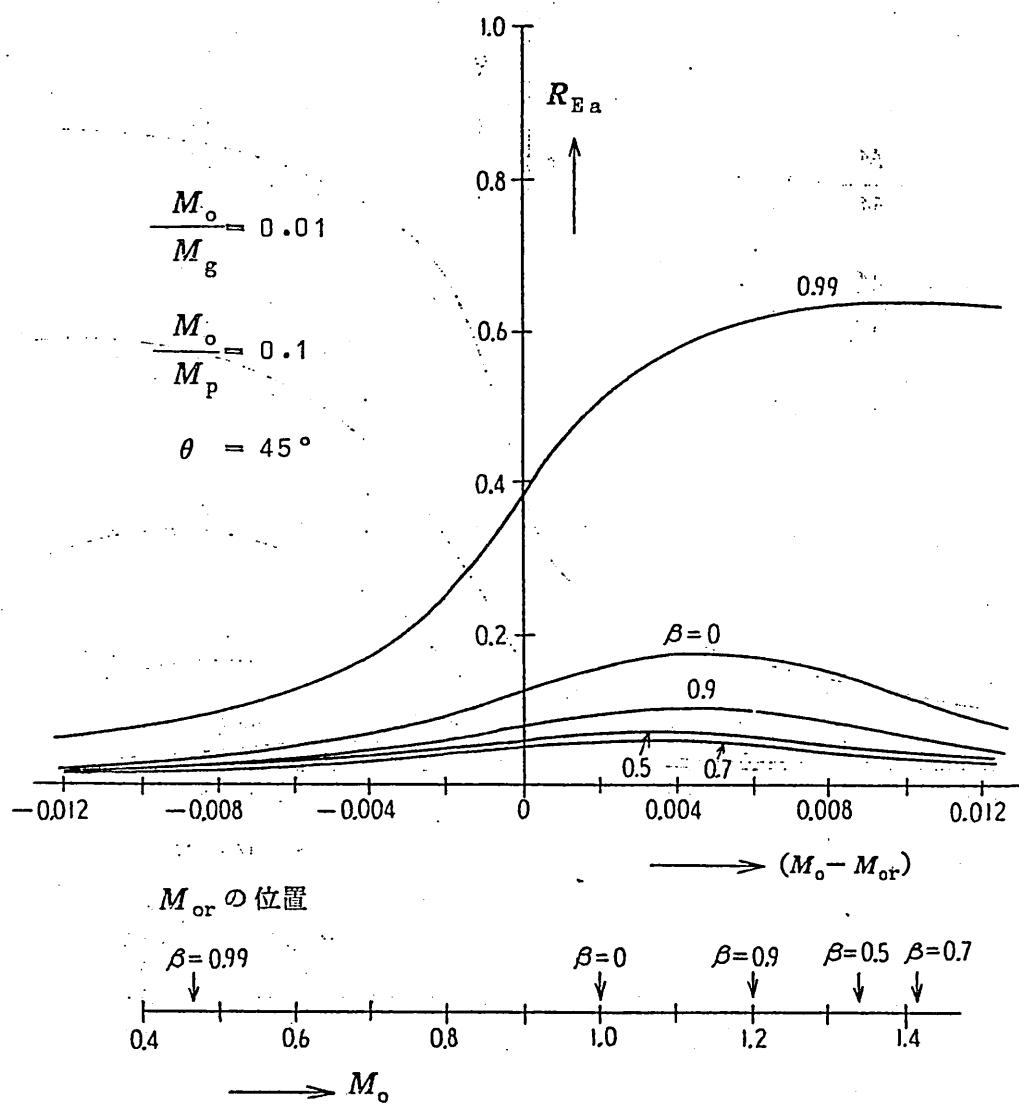


図 7(c) 反射係数  $R_{Ea}$  ( $\theta = 45^\circ$ )

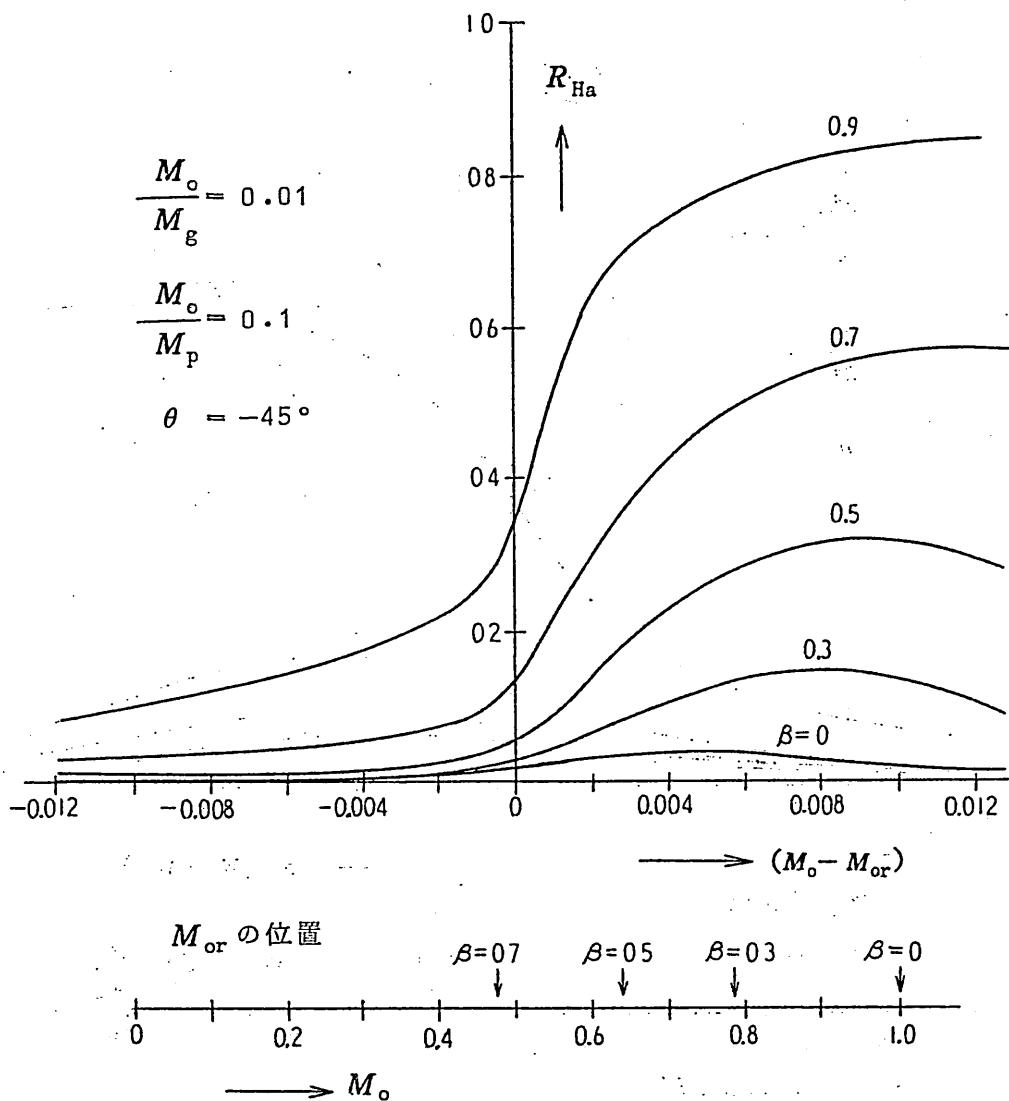


図 8(a) 反射係数  $R_{Ha}$  ( $\theta = -45^\circ$ )

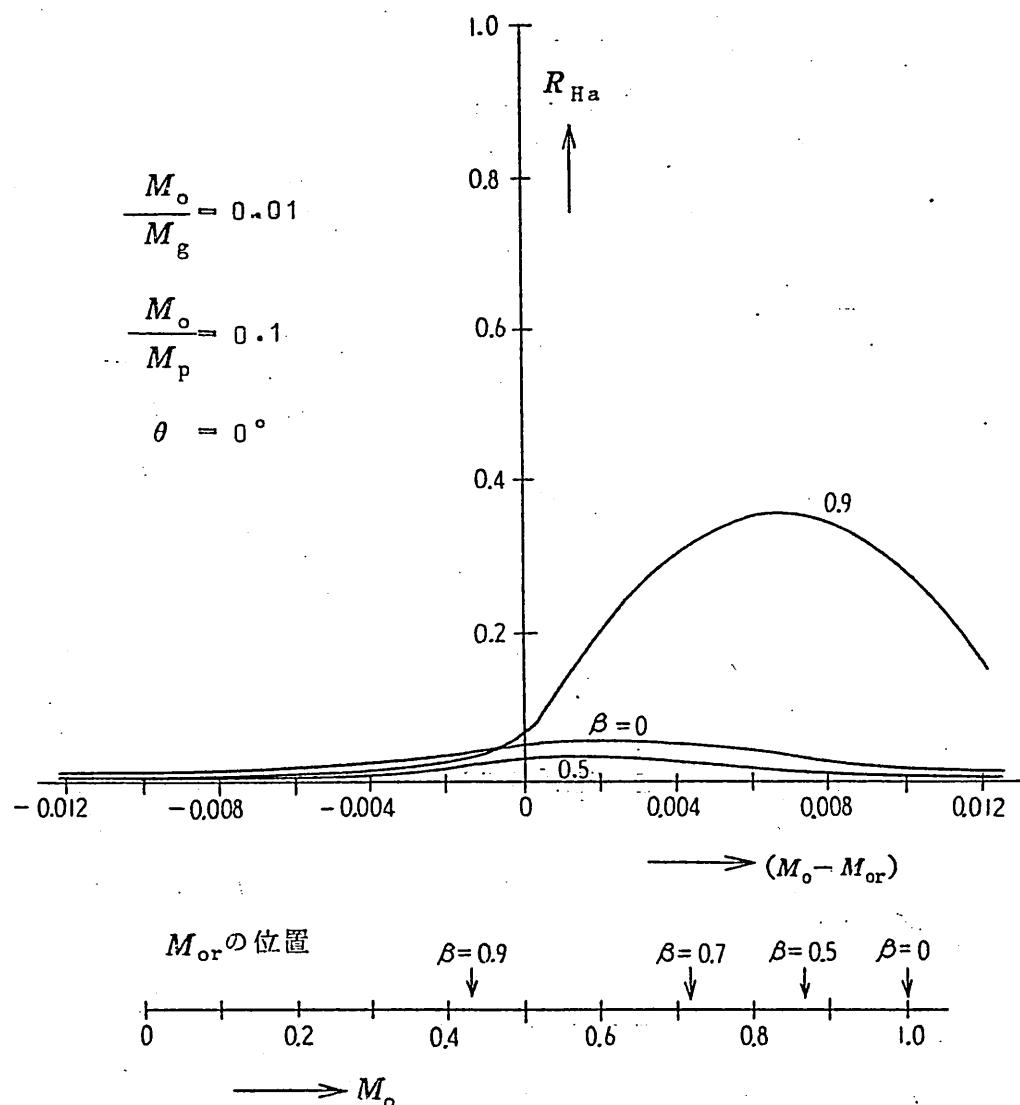


図 8(b) 反射係数  $R_{Ha}$  ( $\theta = 0^\circ$ )

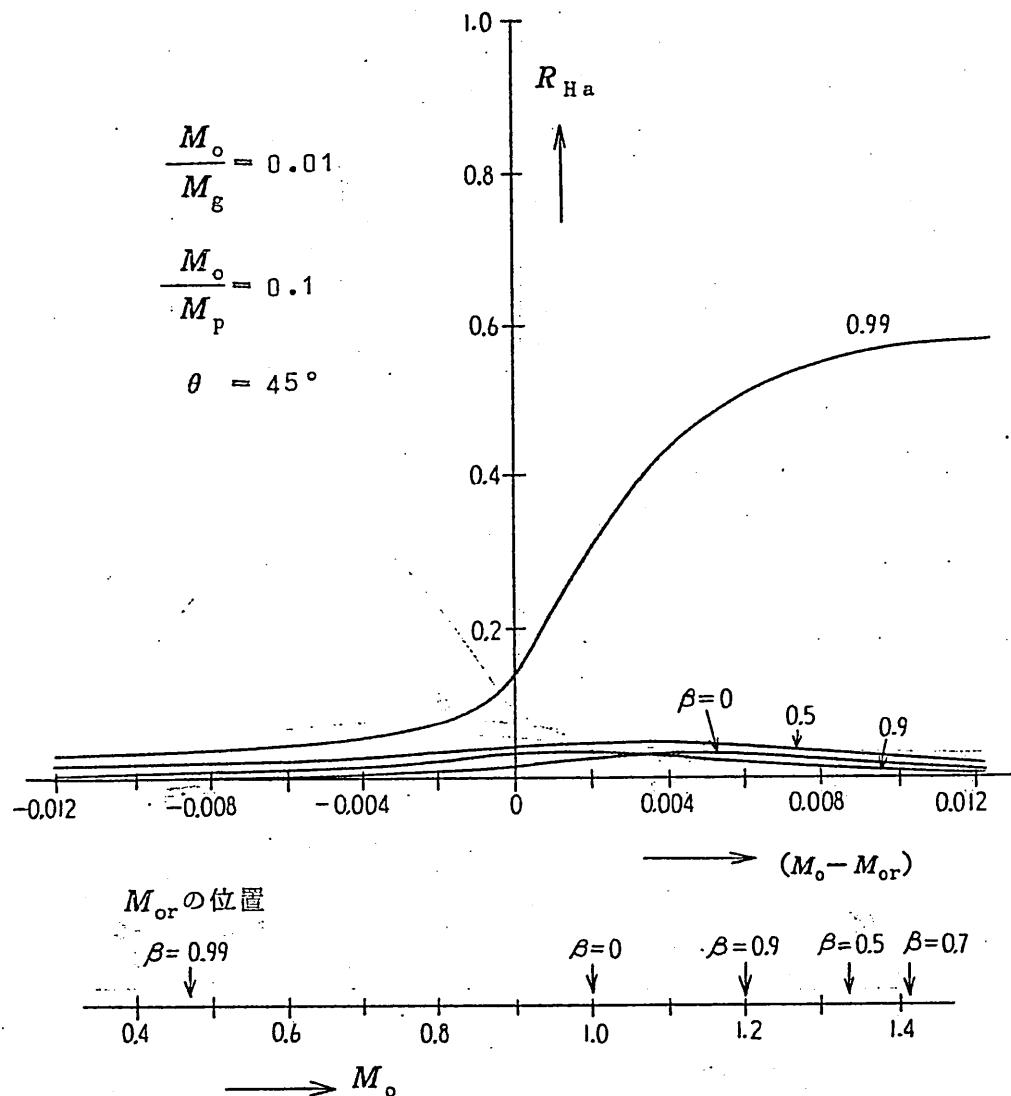


図 8(c) 反射係数  $R_{Ha}$  ( $\theta = 45^\circ$ )

#### 4. 結 言

運動している媒質と平面光波との相互作用の問題を、媒質中の電子の紫外共鳴振動あるいはイオンの赤外共鳴振動を考慮して取り扱い、従来の場合とは異なった種々の興味ある現象が現われることを示した。特に、異常分散領域における光波と媒質の相互作用については、数値計算例を挙げて詳しく検討し、媒質の運動が分散曲線に与える影響等を明らかにした。

なお、本文では非導電性媒質と光波との相互作用の問題のみを論じたが、媒質が導電性である場合も同様に取り扱うことができるが、ここでは省略する。

#### 謝 辞

日頃ご指導ご鞭撻ついただいている本学工学部板倉清保教授、同熊谷信昭助教授に深謝する。また、常々ご討論いただく板倉研究室の諸氏に深謝する。

なお、本文の数値計算は、大阪大学大型計算機センターのNEAC-2200によったことを付記する。

## 文 献

- (1) 奥田治之：“赤外線天文学”，自然，24, pp. 26-33 (昭44-05).
- (2) C.T.Tai: "Two scattering problems involving moving media", Tech. Report, 1961, Antenna Laboratory, Ohio State University (May 1964).
- (3) C.Yeh: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medium", J. Appl. Phys., 36, pp. 3513~3517 (Nov. 1965).
- (4) 塩沢後之, 間剛, 熊谷信昭：“静止媒質と運動媒質の境界面における平面波の反射および屈折”，信学誌，50, pp. 1381~1388 (昭42-08).
- (5) H.Fujioka, F.Nihei and N.Kumagai: "Interaction of a plane electromagnetic wave with a moving conducting dielectric half-space", J. Appl. Phys. (Communications), 39, pp. 2161-2162 (March, 1968).
- (6) H.Fujioka, F.Nihei and N.Kumagai: "Interaction of plane electromagnetic waves with a moving compressible plasma liquid", Can. J.Phys., 47, pp. 375-387 (Feb. 15, 1969).
- (7) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭：“導電性運動媒質の境界面における電磁波の境界条件とエネルギー関係式”, 信学論(研究速報)51-B, pp. 103~104 (昭44-02).
- (8) L.Landau and E.Lifshitz: Electrodynamics of Continuous Media (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960), Sec. 56.
- (9) A.Sommerfeld: Electrodynamics (Academic Press, New

York, 1964), p. 280.

- (10) A.Sommerfeld: Optics (Academic Press, New York, 1954)  
Secs. 17~19.

輻射科学研究会資料

レンズ状媒質からなる周期的導波系  
の波動光学的考察

沢 新之輔 熊谷信昭  
(大阪大学・工学部)

1969年6月27日

## 1. まえがき

光ビームの低損失伝送系の1つとして、ガスレンズのようなレンズ状媒質を伝送方向に周期的に配列した構造の導波系が提案されている。このようないくつかの周期的導波系については、従来から種々の検討<sup>(1),(2),(3),(4)</sup>がなされており、軸ずれ、斜入射ガウス波の応答および安定条件に関しても、今までに2,3の報告がある。<sup>(5),(6),(7)</sup>筆者等は、先の論文<sup>(6)</sup>において、このような周期的導波系の安定条件は、文献(5)の結論とは異なって、軸ずれ、斜入射に特有の位相変化項の境界における連続性を考慮に入れても、従来から知られている軸ずれ、傾きがない場合の安定条件と一致することを示し、文献(5)の安定条件に関する結論が不十分であることを指摘した。しかし、先の論文<sup>(6)</sup>では、レンズ状媒質の中央におけるスポットサイズ  $S$  (一般には波面係数  $1/S^2$ ) が、すべて等しい場合についてのみ検討し、さらに一般的な場合、すなわち、スポットサイズ  $S$  がレンズ状媒質ごとに異なるような場合については考察しなかった。

本論文では、レンズ状媒質の中央において、軸ずれと傾きとを同方向にもち、かつ、それぞれのレンズ状媒質ごとにその中央における波面係数  $1/S_n^2$  ( $n$ : レンズ状媒質の番号) が異なるようなガウス波の応答を波動光学的に詳しく考察する。まず、まっすぐなレンズ状媒質中におけるガウス波の一般的応答電磁界を、従来とは異なった方法<sup>(8),(9),(10)</sup>によって導出する。つぎに、周期的導波系における応答電磁界を求め、番号  $n$  の変化に対するビーム行路の応答および波面係数  $1/S_n^2$  の応答を求め、両者は互に独立であることを明らかにする。さらに、番号  $n$  の増加とともに、スポットサイズが無限大に発散しないための条件 (波動光学的安定条件) は、ビーム行路が導波系の中心

から離れていかないための条件（幾何光学的安定条件）と完全に一致することを示す。

## 2. レンズ状媒質中におけるガウス波の一般的応答電磁界

円筒座標系( $r, \phi, z$ )を図1のようにとり、レンズ状媒質の誘電率を、

$$\epsilon(r) = \epsilon(0) \{ 1 - (gr)^2 \} \quad (1)$$

とする。ただし、 $\epsilon(0)$ は、線路の中心軸上  $r=0$ における誘電率を表わし、また、 $g$ は、誘電率の変化率を定める媒質定数であり、自由空間波長  $\lambda_0$ に対し、 $g\lambda_0 \ll 1$  が成立すると仮定する。

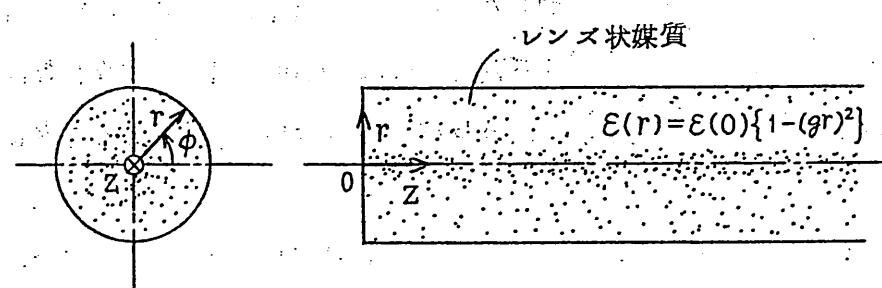


図1 レンズ状媒質からなる導波系

すると、このような媒質内の電磁界は、近似的に、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2(0) \{ 1 - (gr)^2 \} E = 0 \quad (2)$$

なる波動方程式を満足する。<sup>(2)</sup> ただし、

$$k^2(0) = \omega^2 \mu_0 \epsilon(0) \quad (3)$$

であり、また、 $e^{j\omega t}$ なる時間依存を仮定してある。

式(2)の解として、

$$\mathbf{E} = \psi(r, \phi, z) \cdot e^{-jkz} \quad (4)$$

ただし、

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll 2k(0) \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \quad (5)$$

を仮定すると、式(2)および(5)より、界分布関数 $\psi(r, \phi, z)$ は、つぎのよう  
なスカラ波動方程式を満足する。<sup>(1)</sup>

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} - j 2k(0) \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2(0) \left\{ 1 - (gr)^2 \right\} \psi = 0 \quad (6)$$

さて、ガウス波の一般的応答電磁界を求めるために、

$$\psi(r, \phi, z) = \exp \{ A(z)r^2 + B(\phi, z)r + C(z) \} \quad (7)$$

とおく。ここで、 $A(z)$ および $C(z)$ は、 $z$ のみの未知関数を表わし、また、  
 $B(\phi, z)$ は $\phi$ および $z$ の未知関数とする。

式(7)を(6)に代入し、 $r^2, r^1, r^0$ 、および $r^{-1}$ のそれぞれの係数を零を  
おくと、つぎのような連立微分方程式が得られる。

$$j 2k(0) \frac{dA}{dz} = 4A^2(z) - g^2 k^2(0) \quad (8a)$$

$$j 2k(0) \frac{\partial B}{\partial z} = 4A(z) \cdot B(\phi, z) \quad (8b)$$

$$j 2k(0) \frac{dC}{dz} = 4A(z) + B^2(\phi, z) + \left( \frac{\partial B}{\partial \phi} \right)^2 \quad (8c)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \phi^2} + B(\phi, z) = 0 \quad (8d)$$

式 (8a) ~ (8d) を解くと,

$$A(z) = \frac{gk(o)}{2} \frac{e^{jgz} + \alpha e^{-jgz}}{e^{jgz} - \alpha e^{-jgz}} \quad (9)$$

$$B(\phi, z) = \frac{\beta \sin \phi}{e^{jgz} - \alpha e^{-jgz}} \quad (10)$$

$$C(z) = r - \ln(e^{jgz} - \alpha e^{-jgz}) + \frac{\beta^2}{4gk(o)} \frac{(e^{jgz} + \alpha e^{-jgz})}{(e^{jgz} - \alpha e^{-jgz})} \quad (11)$$

となる。ここで、 $\alpha$ ,  $\beta$  および  $r$  は、それぞれ、 $A(z)$ ,  $B(\phi, z)$  および  $C(z)$  の  $z = 0$  における値（入射条件）によって定まる積分定数である。

入射面  $z = 0$  において、 $1/S^2$  なる波面係数をもち、かつ、 $\delta(o)$  なる軸ずれと  $\delta'(o)$  なる傾きとを同方向にもつ入射ガウス波、

$$\psi(r, \phi, o) = \exp \left[ -\frac{1}{2S^2} (r^2 - 2\delta(o)r \sin \phi) - jk(o)\delta'(o)r \sin \phi \right] \quad (12)$$

を仮定して、積分定数  $\alpha$ ,  $\beta$  および  $r$  を決定し、式 (9) ~ (11) をそれぞれ変形すると、 $A(z)$ ,  $B(\phi, z)$  および  $C(z)$  は、それぞれ、つぎのようになる。

$$A(z) = \frac{-1}{2S^2} \left( \frac{\cos g z - j \frac{S^2}{W_0^2} \sin g z}{\cos g z - j \frac{W_0^2}{S^2} \sin g z} \right) \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B(\phi, z) = -[2A(z)\delta(z) + jk(0)\delta'(z)] \sin \phi \\ C(z) = A(z)\delta^2(z) + j\frac{jk(0)}{2}(\delta(z)\delta'(z) - \delta(0)\delta''(0)) \end{array} \right. \quad (14)$$

$$C(z) = A(z)\delta^2(z) + j\frac{jk(0)}{2}(\delta(z)\delta'(z) - \delta(0)\delta''(0))$$

$$= \ln \left( \cos \varphi z - j \frac{w_0^2}{S^2} \sin \varphi z \right) \quad (15)$$

ここで、

$$\delta(z) = \delta(0) \cos \varphi z + \frac{\delta'(0)}{\varphi} \sin \varphi z \quad (16)$$

$$\delta'(z) = \frac{d}{dz} \{ \delta(z) \}, \quad \delta'(0) = \left. \frac{d}{dz} \{ \delta(z) \} \right|_{z=0} \quad (17)$$

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{\varphi k(0)}} \quad (18)$$

を表わす。

したがって、式(7)～式(13)～(15)を代入すると、応答電磁界はつき  
のようになる。

$$E(r, \phi, z) = \frac{E_0 e^{-jk(0)z}}{\cos \varphi z - j \frac{w_0^2}{S^2} \sin \varphi z} \cdot \exp \left\{ \frac{-\left( \cos \varphi z - j \frac{S^2}{w_0^2} \sin \varphi z \right)}{2S^2 \left( \cos \varphi z - j \frac{w_0^2}{S^2} \sin \varphi z \right)} \cdot \left\{ r^2 - 2\delta(z)r \sin \phi \right\} - jk(0)\delta'(z)r \sin \phi \right\} \quad (19)$$

ただし、 $E_0$  は、 $\tau$  および  $\phi$  に無関係な振幅係数を表わす。

式(19)は、本文とは異なった方法によって求められている従来の結果<sup>6)</sup>  
(6),<sup>7)</sup> と完全に一致している。

### 3. 周期的導波系の一般的応答と安定条件

#### 3.1 応答電磁界の表示式

長さが  $t$  なるレンズ状媒質が図 2 に示すように、等間隔  $b$  で伝送方向に周期的に配列されているような導波系を考える。円筒座標系  $(r, \phi, z)$  および  $(r, \phi, \eta)$  を同図のようにとる。さらに、レンズ状媒質の誘電率分布は、式(1)で与えられるとし、中心の誘電率  $\epsilon(0) = \epsilon_0$  (ギャップの誘電率) とする。<sup>(1),(2),(3),(5),(6),(7)</sup>

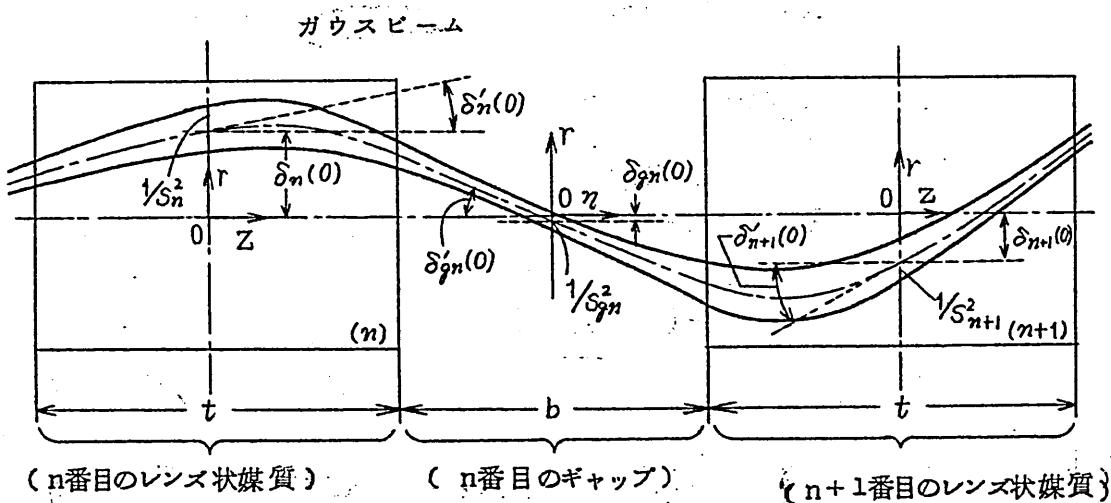


図 2 レンズ状媒質からなる周期的導波系

図2に示すように、n番目のレンズ状媒質の中央( $z=0$ )およびギャップ(自由空間)の中央( $\eta=0$ )において、それぞれ、 $\delta_n(o)$ なる軸ずれと $\delta'_n(o)$ なる傾き、および $\delta_{gn}(o)$ なる軸ずれと $\delta'_{gn}(o)$ なる傾きとを、ともに同方向にもつガウス波の電磁界は、それぞれ、つきのように表わされる。

レンズ状媒質内部では、式(19)より、

$$E^{(n)}(r, \phi, z) = \frac{E_0^{(n)} \cdot e^{-jk(0)z}}{\cos \varphi z - j \frac{w_0^2}{S_n^2} \sin \varphi z} \cdot \exp \left[ A_n(z) \{ r^2 - 2 \delta_n(z) r \sin \phi \} - j k(o) \delta'_n(z) r \sin \phi \right] \quad (20)$$

で与えられ、ギャップ内では、式(20)で $\varphi \rightarrow 0$ とおいて、

$$E_g^{(n)}(r, \phi, \eta) = \frac{E_{go}^{(n)} \cdot e^{-jk(0)\eta}}{1 - j \eta / k(0) S_{gn}^2} \cdot \exp \left[ A_{gn}(\eta) \{ r^2 - 2 \delta_{gn}(\eta) r \sin \phi \} - j k(o) \delta'_{gn}(\eta) r \sin \phi \right] \quad (21)$$

となる。ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n(z) = - \frac{1}{2S_n^2} \left( \frac{\cos \varphi z - j \frac{S_n^2}{w_0^2} \sin \varphi z}{\cos \varphi z - j \frac{w_0^2}{S_n^2} \sin \varphi z} \right) \\ \delta_n(z) = \delta_n(o) \cos \varphi z + \frac{\delta'_n(o)}{\varphi} \sin \varphi z \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\delta_n(z) = \delta_n(o) \cos \varphi z + \frac{\delta'_n(o)}{\varphi} \sin \varphi z \quad (23)$$

および

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{gn}(\eta) = -\frac{1}{2S_{gn}^2} / (1 - j\eta/k(o)S_{gn}^2) \\ \delta_{gn}(\eta) = \delta_{gn}(o) + \delta'_{gn}(o)\eta \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{gn}(\eta) = -\frac{1}{2S_{gn}^2} / (1 - j\eta/k(o)S_{gn}^2) \\ \delta_{gn}(\eta) = \delta_{gn}(o) + \delta'_{gn}(o)\eta \end{array} \right. \quad (25)$$

であり、 $1/S_n^2$  および  $1/S_{gn}^2$  は、それぞれ、 $z=0$  および  $\eta=0$  における  
波面係数を表わす。

### 3・2 境界条件の適用

レンズ状媒質とギャップ（自由空間）との境界面  $z=\pm t/2$  ( $\eta=\mp b/2$ )  
における電磁界の連続条件から、

$$E^{(n)}(r, \phi, t/2) = E_g^{(n)}(r, \phi, -b/2) \quad (26)$$

および

$$E^{(n+1)}(r, \phi, -t/2) = E_g^{(n)}(r, \phi, b/2) \quad (27)$$

が満足される必要がある。<sup>(5), (6), (7)</sup> 式(26)および(27)から、両辺の  $r^2$  および  $r$  の係数をそれぞれ等置すると、

$r^2$  の係数から、

$$A_n(t/2) = A_{gn}(-b/2) \quad (28)$$

および

$$A_{n+1}(-t/2) = A_{gn}(b/2) \quad (29)$$

を得る。また、 $r$  の係数から、

$$\begin{aligned} & 2A_n(t/2)\delta_n(t/2) + jk(o)\delta'_n(t/2) \\ & = 2A_{gn}(-b/2)\delta_{gn}(-b/2) + jk(o)\delta'_{gn}(-b/2) \end{aligned} \quad (30)$$

および

$$\left. \begin{aligned} & 2 A_{n+1}(-t/2) \delta_{n+1}(-t/2) + j k(0) \delta'_{n+1}(-t/2) \\ & = 2 A_{gn}(b/2) \delta_{gn}(b/2) + j k(0) \delta'_{gn}(b/2) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

が得られる。

### 3.3 ピーム中心部の応答

式(28)を(30)に代入し、両辺の実数部および虚数部をそれぞれ等置すると、

$$\left. \begin{aligned} \delta_n(t/2) &= \delta_{gn}(-b/2) \\ \delta'_n(t/2) &= \delta'_{gn}(-b/2) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

なる関係を得る。また、式(29)および(31)から、同様にして、

$$\left. \begin{aligned} \delta_{n+1}(-t/2) &= \delta_{gn}(b/2) \\ \delta'_{n+1}(-t/2) &= \delta'_{gn}(b/2) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

が得られる。

式(23)および(25)に、式(32)および(33)の関係を適用して、 $n$ 番目および $n+1$ 番目のレンズ状媒質の、それぞれの中央( $z=0$ )における軸ずれ量 $\delta_n(0)$ 、 $\delta_{n+1}(0)$ および傾き量 $\delta'_n(0)$ 、 $\delta'_{n+1}(0)$ との間の関係を求める

と、

$$\begin{pmatrix} \delta_{n+1}(0) \\ \delta'_{n+1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ar & Br \\ Cr & Dr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_n(0) \\ \delta'_n(0) \end{pmatrix} \quad (34)$$

となる。

式(34)の右辺の第1項のマトリックスは、 $n$ 番目のレンズ状媒質の中央から、 $n+1$ 番目のレンズ状媒質の中央に到る一周期区間の光線マトリックスを表わし、その要素はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} A_r &= D_r = \cos gt - \frac{g b}{2} \sin gt \\ B_r &= \frac{1}{g} \left( \sin gt + \frac{g b}{2} \cos gt + \frac{g b}{2} \right) \\ C_r &= -g \left( \sin gt + \frac{g b}{2} \cos gt - \frac{g b}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

で与えられる。

一般に、式(23)と(34)とから、

$$\begin{pmatrix} \delta_{n+1}(z) \\ \delta'_{n+1}(z) \end{pmatrix} = [R] \begin{pmatrix} \delta_n(z) \\ \delta'_n(z) \end{pmatrix} \quad (36)$$

なる関係が成立することが示される。ここで、 $[R]$ は $n$ 番目のレンズ状媒質の任意の面 $z$ から、 $n+1$ 番目のレンズ状媒質の面 $z$ に至る一周期区間の光線マトリックスである。

以上の結果から明らかにように、ビーム中心部の軌道は、波面係数 $A_n(z)$ あるいは $A_{gn}(\eta)$ 等の応答とは無関係であり、幾何光学的に求められた光線の軌跡<sup>(3)</sup>にしたがった応答を示すことが確かめられる。

### 3.4 波面係数の一般的応答

式(22)および(24)に、式(28)および(29)の関係を適用すると、 $S_n^2$ および $S_{gn}^2$ に関するつぎのような差分方程式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-j(\frac{s_n}{w_0})^2 \tan gt/2} + \frac{1}{1+j(\frac{s_{n+1}}{w_0})^2 \tan gt/2} = -\Gamma \quad (37) \\ (\frac{s_{gn}}{w_0})^2 = \frac{(\frac{s_n}{w_0})^2 - j \tan gt/2}{1-j(\frac{s_n}{w_0})^2 \tan gt/2} - j \frac{g_b}{2} \end{array} \right. \quad (38)$$

ただし、

$$\Gamma = \frac{g_b \tan gt/2 - 2}{1 + \tan^2 gt/2} \quad (39)$$

差分方程式(37)および(38)を解くと、 $(w_0/s_n)^2$ および $(w_0/s_{gn})^2$ の値は、それぞれ、つきのようになる(付録参照)。

(i)  $\theta = \frac{i\pi}{2(n-1)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) のとき、

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{w_0}{s_n})^2 = \frac{(\frac{w_0}{s_1})^2 \coth 2(n-1)\theta - j \tan \frac{gt}{2} \tanh \theta}{\tan \frac{gt}{2} \coth 2(n-1)\theta + j(\frac{w_0}{s_1})^2 \coth \theta} \cdot \tan \frac{gt}{2} \end{array} \right. \quad (40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{w_0}{s_{gn}})^2 = \frac{j \sin gt \cosh (2n-1)\theta \{ (\frac{w_0}{s_1})^2 \coth \theta \} \tanh (2n-1)\theta}{2 \sinh \theta \cosh 2n\theta \{ (\frac{w_0}{s_1})^2 \coth \theta - j 2 \tan \frac{gt}{2} \} \tanh 2n\theta} \\ \qquad \qquad \qquad - j 2 \tan \frac{gt}{2} \} \end{array} \right. \quad (41)$$

ただし、

$$\theta = \sinh^{-1} \sqrt{\Gamma/2} \quad (42)$$

$$(ii) \quad \theta = \frac{j\pi}{2(n-1)} \quad (n=1, 2, 3, \dots) のとき,$$

$n > m$  なる整数  $m$  ( $\geq 1$ ) に對しては、

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w_0}{S_m}\right)^2 = \frac{\tan \theta t/2 \tan \theta' - j \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \cot 2(m-1)\theta'}{\left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \cot \theta' - j \tan \theta t/2 \cot 2(m-1)\theta'} \tan \theta t/2 \\ \left(\frac{w_0}{S_{g^m}}\right)^2 = \frac{\sin \theta t \cos(2m-1)\theta' \left\{ \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \cot \theta' \tan(2m-1)\theta' \right.}{2 \sin \theta' \cos 2m\theta' \left\{ 2 \tan \frac{\theta t}{2} \tan 2m\theta' - \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \right.} \\ \left. \left. - j 2 \tan \theta t/2 \right\} \end{array} \right. \quad (43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w_0}{S_n}\right)^2 = \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \\ \left(\frac{w_0}{S_{g^n}}\right)^2 = \frac{\sin \theta t \left\{ \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 - j 2 \tan \theta t/2 \right\}}{2 \left\{ 4 \tan \theta t/2 \sin^2 \theta' - \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \cos 2\theta' \right\}} \end{array} \right. \quad (44)$$

となる。また、 $m=n$  なる整数  $m$  に對しては、

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w_0}{S_n}\right)^2 = \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \\ \left(\frac{w_0}{S_{g^n}}\right)^2 = \frac{\sin \theta t \left\{ \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 - j 2 \tan \theta t/2 \right\}}{2 \left\{ 4 \tan \theta t/2 \sin^2 \theta' - \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \cos 2\theta' \right\}} \end{array} \right. \quad (45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w_0}{S_n}\right)^2 = \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \\ \left(\frac{w_0}{S_{g^n}}\right)^2 = \frac{\sin \theta t \left\{ \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 - j 2 \tan \theta t/2 \right\}}{2 \left\{ 4 \tan \theta t/2 \sin^2 \theta' - \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \cos 2\theta' \right\}} \end{array} \right. \quad (46)$$

となる。ただし、

$$\theta' = \frac{\pi}{2(n-1)} = \sin^{-1} \sqrt{-T/2} \quad (47)$$

である。

式(40)～(47)から明らかのように、波面係数  $1/S_n^2$  および  $1/S_{gn}^2$  は、式(42)によって定まる  $\theta$  の値が実数のとき、レンズ状媒質の番号  $n$  の増大と共にスポットサイズが次第に増大していくような非周期的な応答を示す。これに対し、 $\theta$  が純虚数の場合には、 $1/S_n^2$  および  $1/S_{gn}^2$  は番号  $n$  の増大に対し、周期的な応答を示し、特に、 $\theta = j\theta'$  ( $= j\pi/2(n-1)$ ) なる場合には、式(43)～(47)から明らかのように、 $n$  番目のレンズ状媒質あるいはギャップごとに同じ置をくり返す。たとえば、 $\theta = j\pi/4$  ( $n=3$ ) とすると、図3に示すように、3番目のレンズ状媒質あるいはギャップごとに同一の波面係数がくり返えされる。

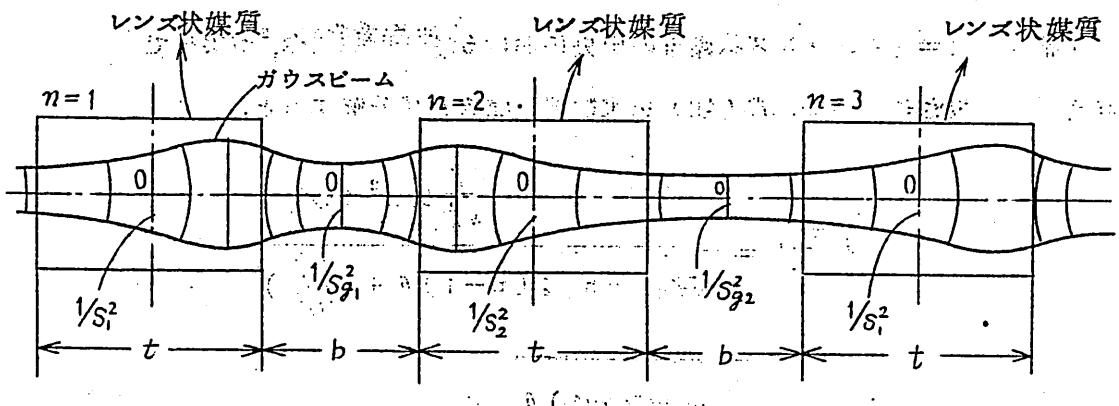


図3  $\theta = j\frac{\pi}{4}$  ( $n=3$ ) なる場合のガウスビームの応答例  
(ただし、 $\delta_n(0)=\delta'_n(0)=0$ 、 $0 \leq \theta t/2 \leq \pi/2$ )

特別の場合として、すべての番号  $n$  に対して、

$$\left(\frac{w_0}{S_n}\right)^2 = \left(\frac{w_0}{S_1}\right)^2 \quad \cdots \cdot (48)$$

とおくと、式(40)～(47)より、

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n = S_1 = w_0 \sqrt[4]{\left( 1 + \frac{g b}{2} \cot \frac{gt}{2} \right) / \left( 1 - \frac{g b}{2} \tan \frac{gt}{2} \right)} \\ S_{gn} = S_g = w_0 \sqrt[4]{\left( 1 + \frac{g b}{2} \cot \frac{gt}{2} \right) \left( 1 - \frac{g b}{2} \tan \frac{gt}{2} \right)} \end{array} \right. \quad (49), (50)$$

ただし、 $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$

となる。式(49)および(50)は、各々のレンズ状媒質の中央における波面係数がすべて等しいとおいて得られていた従来の結果<sup>(1), (5), (6), (7)</sup>と完全に一致している。

### 3.5 安定条件

1番目 ( $n=1$ ) のレンズ状媒質の中央における波面係数  $1/S_1^2$  が実数で与えられる場合について、式(40)を実数部と虚数部に分解すると、

$$P_n = R_e \left\{ \frac{w_0^2}{S_n^2} \right\} = \frac{\frac{S_1^2}{w_0^2} \tan^2 \frac{gt}{2}}{\coth^2 \theta \sinh^2 2(n-1)\theta + \left( \frac{S_1^2}{w_0^2} \right)^2} \\ \cdot \tan^2 \frac{gt}{2} \cosh^2 2(n-1)\theta \quad (51)$$

$$q_n = I_m \left\{ \frac{w_0^2}{S_n^2} \right\} = \frac{-\frac{1}{2} \tan \frac{gt}{2} \left\{ \coth^2 \theta + \left( \frac{S_1^2}{w_0^2} \right)^2 \tan^2 \frac{gt}{2} \right\}}{\coth^2 \theta \sinh^2 2(n-1)\theta + \left( \frac{S_1^2}{w_0^2} \right)^2} \\ \cdot \tanh \theta \sinh 4(n-1)\theta \\ \cdot \tan^2 \frac{gt}{2} \cosh^2 2(n-1)\theta \quad (52)$$

となる。

また、 $(w_0/S_{gn})^2$  の実数部および虚数部を、式(51)および(52)で与えられる  $p_n$  および  $q_n$  を用いて表わすと、式(38)より、それぞれ、

$$Re \left\{ \frac{w_0^2}{S_{gn}^2} \right\} = \frac{p_n \sec^2 \frac{gt}{2}}{\{(1 - \frac{gb}{2} \tan \frac{gt}{2}) + (\tan \frac{gt}{2} + \frac{gb}{2}) q_n\}^2 + p_n^2 (\tan \frac{gt}{2} + \frac{gb}{2})^2} \quad (53)$$

および

$$\text{Im} \left\{ \frac{w_0^2}{S_{gn}^2} \right\} = \frac{(p_n^2 + q_n^2 + q_n \tan \frac{gt}{2}) (\tan \frac{gt}{2} + \frac{gb}{2})}{\{(1 - \frac{gb}{2} \tan \frac{gt}{2}) + (\tan \frac{gt}{2} + \frac{gb}{2}) q_n\}^2 + p_n^2} - \frac{(q_n + \tan \frac{gt}{2})(1 - \frac{gb}{2} \tan \frac{gt}{2})}{(\tan \frac{gt}{2} + \frac{gb}{2})^2} \quad (54)$$

となる。

式(51)～(54)からわかるように、n番目のレンズ状媒質およびギャップのそれぞれの中央におけるスポットサイズは、 $\theta$ が実数のとき、 $n \rightarrow \infty$  なる極限において無限大に発散してしまう。したがって、波動光学的安定条件としては、 $\theta$ が実数にならないことが必要である。そのためには、式(42)より、

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma < 0 \\ \text{および} \\ \sqrt{-\Gamma/2} < 1 \end{array} \right\} \quad (55)$$

が満足されればよい。式(55)に(39)を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_b}{2} < \cot \frac{gt}{2} : N\pi \leq \frac{gt}{2} \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \\ \frac{g_b}{2} < -\tan \frac{gt}{2} : \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \leq \frac{gt}{2} \leq (N+1)\pi \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

を得る。ただし、 $N = 0, 1, 2, \dots$ である。

波動光学的安定条件式(56)は、幾何光学的安定条件、すなわち、式(34)の光線マトリックス要素の間に、

$$|A_r + D_r| < 2 \quad (57)$$

なる関係が成立するための条件<sup>(3),(6),(7)</sup>と完全に一致することが確かめられる。したがって、式(56)が成立するとき、ビーム中心部の軌跡（光線の軌跡）は、番号 $n$ の増加と共に、導波系の中心部から遠ざかって行かないことがわかる。

以上の結果、このような系の安定条件は、レンズ状媒質の番号 $n$ の増加と共に、スポットサイズおよびビーム中心部の軌跡が発散しないための条件式(56)で与えられることが知られる。なお、今井氏等の論文<sup>(5)</sup>によると、本文で考察したような周期的導波系の安定領域は、境界 $z = \pm t/2$  ( $t = \pm b/2$ )における波面の変化の連続条件を考慮に入れると、従来から知られている領域（幾何光学的安定領域）の一部分にかぎられると結論されている。しかし、文献(5)のこの結論は、既に先の論文<sup>(6),(7)</sup>において指摘したように、また、本節の結論からも一層明らかのように、誤ったものである。

#### 4. あとがき

ガスレンズのようなレンズ状媒質を伝送方向に周期的に配列した構造の導波系における軸ずれ、斜入射ガウス波の応答について、波動光学的観点から、従来よりも一層詳しく考察した。その結果、今まで明らかにされていなかつた伝送姿態、すなわち、レンズ状媒質ごとに、その中央における波面係数が異なるような新しい伝送姿態が存在し得ることを示し、また、ビーム行路の応答と波面係数の応答とは、互に独立であることを明らかにした。さらに、本文で見いたしたような新しい伝送姿態を考慮に入れても、周期的導波系の安定条件は、波動光学的にも幾何光学的にも完全に一致することを示し、従来よりも一層一般的な見地から、文献(5)の安定条件に関する結論が誤ったものであることを明確にした。

#### 謝 辞

日頃からご指導いただき大阪大学工学部板倉清保教授、ならびに、常々ご討論いただき板倉研究室の諸氏に深謝する。

## 文 献

- (1) E . A . J . Marcatili : " Mode in a sequence of thick astigmatic lens-like focusers ", Bell Syst. tech. J., 43, p 2887 (Nor. 1964).
- (2) 末松安晴, 吹抜洋司: “理想化されたガスレンズ導波系の解析”, 信学誌, 48, p. 1684 (Oct. 1965)
- (3) S . E . Miller : " Light propagation in generalized lens-like media ", Bell. Syst. tech. J., 44, p. 2017 (Nov. 1965).
- (4) 熊谷信昭, 沢新之輔: “周期的なレンズ収束効果をもつ誘電体薄膜表面波線路”, 信学論(B), 51-B, 12, p. 600 (Dec. 1968).
- (5) 今井正明, 伊藤精彦, 松本 正: “理想的ガスレンズの波動光学的考察”. 信学論(B), 51-B, 5, p 185 (May 1968)
- (6) 沢 新之輔, 態谷信昭: “周期的ガスレンズ導波系の一般的応答と安定条件”, 信学論(B), 52-B, 5, p. 273 (May 1969).
- (7) 沢 新之輔, 熊谷信昭: “周期的ガスレンズ導波系の一般的応答と安定条件”, マイクロ波研資(1968-09).
- (8) 沢 新之輔, 熊谷信昭: “レンズ状媒質からなる導波系のうねり曲りに関する波動光学的考察”, 信学論(B), 52-B, 5, p. 277 (May 1969).
- (9) 沢 新之輔, 熊谷信昭: “曲りガスレンズに関する一考察”, 信学論(B) (研究速報), 52-B, 3, p. 181 (March 1969)
- (10) 沢 新之輔, 熊谷信昭: “レンズ状媒質からなる導波系に関する一考察”.

信学誌投稿中，輻射科学研究会資料(1969-04)。

- (11) H .Kogelnik : " On the propagation of Gaussian beams of light through lens-like media including those with a loss or gain variation ", Applied Optics , 4 , 2 , p. 1562 ( Dec. 1965 ).
- (12) 電気学会通信教育会：“電気回路論（電気学会大学講座）”，p. 70，電気学会，東京(1959)。
- (13) 高木貞治：“初等整数論講義”，p. 147，共立出版，東京(1946)。

## 付 錄

差分方程式(37)は、

$$f_n = 1 - j \left( \frac{s_n}{w_0} \right)^2 \tan \theta t / 2 \quad (A.1)$$

なるおきかえをすると、つぎのように簡単になる。

$$f_{n+1} = 2 + \frac{1}{\Gamma + 1/f_n} \quad (A.2)$$

式(A.2)において、 $n=1$ とおくと、

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\Gamma + 1/f_1}} \quad (A.3)$$

を得る。また、 $n=2$ とおいて式(A.3)を代入すると、

$$\frac{1}{f_3} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\Gamma + \frac{1}{2 + \frac{1}{\Gamma + 1/f_1}}}} \quad (A.4)$$

となる。同様の手順をくり返していくと、 $1/f_n$ は、つぎのようを連分数式で表わされることがわかる。

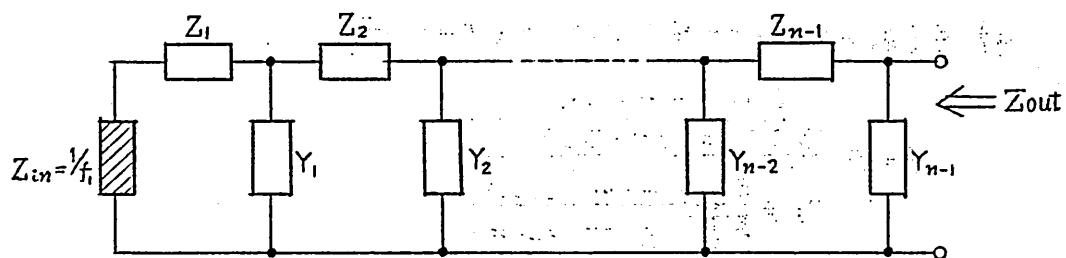
$$\frac{1}{f_n} = \frac{1}{Y_{n-1} +} \frac{1}{Z_{n-1} +} \frac{1}{Y_{n-2} +} \frac{1}{Z_{n-2} +} \cdots \frac{1}{+Y_1 +} \frac{1}{Z_1 +} \frac{1}{+1/f_1} \quad (A.5)$$

ただし、

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_{n-1} = \Gamma \\ Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_{n-1} = 2 \end{array} \right\} \quad (A.6)$$

である。

式(A.5)は、形式的には図4に示すような梯子形回路の出力インピーダンス $Z_{out}$ を表わしている。



$$\left( \begin{array}{l} Z_1 = Z_2 = \dots = Z_{n-1} = \Gamma \\ Y_1 = Y_2 = \dots = Y_{n-1} = 2 \end{array} \right)$$

図4 波面係数 $1/S_n^2$ の一般的応答を求めるための梯子形回路

式(A.5)の両辺に $\sqrt{Y_i/Z_i} = \sqrt{2/\Gamma}$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) を乗じると、

$$\sqrt{\frac{2}{\Gamma}} \cdot \frac{1}{f_n} = \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \dots + a_{2n-2} + \frac{1}{+ \frac{1}{f_1} \sqrt{2/\Gamma}}$$

(A.7)

を得る。ただし、 $a_j = \sqrt{Z_j Y_j} = \sqrt{2 \Gamma}$  (A.8)

( $j = 1, 2, \dots, 2(n-1)$ ) である。

式(A.7)の値は、Continuant,  $K[a_1 a_2 \dots a_n]$ を用いるとつぎのようにならざる。<sup>(12)(13)</sup>

$$F_n = \frac{K[a_1 a_2 \dots a_{2n-2}] F_1 + K[a_2 a_3 \dots a_{2n-2}]}{K[a_1 a_2 \dots a_{2n-3}] F_1 + K[a_2 a_3 \dots a_{2n-3}]} \quad (A.9)$$

ここで、

$$F_n = \sqrt{2/F} \cdot 1/f_n \quad (A.10)$$

である。

式(A.9)は、さらに、つぎのようにならん。

(ii)  $K[a_1 a_2 \dots a_{2n-3}] \neq 0$  のとき ( $\theta = \frac{i\pi}{2(n-1)}$  のとき)

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\frac{K[a_1 a_2 \dots a_{2n-2}]}{K[a_2 a_3 \dots a_{2n-3}]} F_1 + 1}{F_1 + \frac{K[a_2 a_3 \dots a_{2n-3}]}{K[a_1 a_2 \dots a_{2n-3}]}} \\ &= \frac{\frac{\cosh(2n-1)\theta}{\sinh(2n-2)\theta} F_1 + 1}{F_1 + \frac{\cosh(2n-3)\theta}{\sinh(2n-2)\theta}} \end{aligned} \quad (A.11)$$

ただし、

$$\theta = \sinh^{-1} \sqrt{F/2}, \quad n \geq 2$$

となる。式(A.11)に、式(A.1)および(A.10)を代入して書き改めると、本文の式(40)が導かれ、さらに、式(38)によって、式(41)が得られる。

(iii)  $K[a_1 a_2 \dots a_{2n-3}] = 0$  のとき ( $\theta = \frac{j\pi}{2(n-1)}$  のとき)

式(A.9)より、

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{K[a_1 a_2 \dots a_{2n-3}]}{K[a_2 a_3 \dots a_{2n-3}]} F_1 \\ &= \frac{a_{2n-1} K[a_1 a_2 \dots a_{2n-3}] + K[a_1 a_2 \dots a_{2n-4}]}{K[a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]} F_1 \end{aligned}$$

$$= \left\{ a_{2n-2} \cdot \frac{K [a_1 a_2 \dots a_{2n-3}]}{K [a_1 a_2 \dots a_{2n-3}]} + 1 \right\} F_1 = F_1 \quad (A.12)$$

となる。また、 $n > m$  なる整数  $m = 1, 2, 3, \dots, n-1$  に対しては、

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{K [a_1 a_2 \dots a_{2m-2}] F_1 + K [a_2 a_3 \dots a_{2m-2}]}{K [a_1 a_2 \dots a_{2m-3}] F_1 + K [a_2 a_3 \dots a_{2m-3}]} \\ &= \frac{\frac{\cosh(2m-1)\theta}{\sinh 2(m-1)\theta} F_1 + 1}{F_1 + \frac{\cosh(2m-3)\theta}{\sinh 2(m-1)\theta}} \end{aligned} \quad (A.13)$$

となる。

式(A.12)および(A.13)に、式(A.1)および(A.10)を代入すると、本文の式(43)～(47)が導かれる。

輻射科学研究会資料

CuCl よび GaAs による

CO<sub>2</sub> レーザ光の変調

西本 恒俊 松島 朋史

末田 正 牧本 利夫  
(大阪大学 基礎工学部)

昭和 44 年 6 月 27 日

## §1. まえがき

-1-

$\text{CO}_2$ レーザは高能率で容易に大出力が得られること、 $10.6\mu\text{m}$  从光は大気中の減衰が低いことなどから光通信およびレーダへの応用が考えられており。これらの応用に対して  $10.6\mu\text{m}$  帯光変調器の開発が要望されている。現在まで  $\text{GaAs}^{(1)}$   $\text{CdS}^{(2)}$   $\text{ZnTe}^{(2)}$   $\text{CdTe}^{(3)}$  などのポッケルス効果を利用して変調を行なう例や超音波<sup>(4)</sup>を利用した報告がなされている。 $\text{CuCl}$  は  $10.6\mu\text{m}$  帯で透明であることが知られているが、この帯域での変調器としての報告はない。

我々は  $\text{CuCl}$  よび  $\text{GaAs}$  のポッケルス効果を利用して  $\text{CO}_2$  レーザ光の変調を行なったのでその結果を報告する。な

む実験に用いた結晶はいずれも国産のものである。  
この様なポッケルス効果を利用した変調器において要  
求されることは；透明領域が  $\text{CO}_2$  レーザ光の波長  $10.6\mu\text{m}$  を含  
むこと、電気光学定数  $n_2$  が大きなこと、結晶育成が可  
能なこと、取扱が容易なこと（硬度および化学的安定性）  
などである。以上に関して  $\text{CuCl}$  と  $\text{GaAs}$  の諸性質と定数を  
次の表に示す。ただし  $\text{CuCl}$  の  $n_1, n_2$  の値は  $10.6\mu\text{m}$  帯での  
報告がない為可視光での値を示した。又  $V_g$  の値はそれ

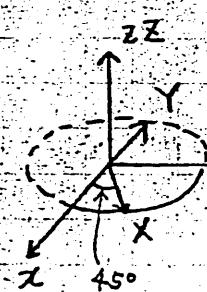
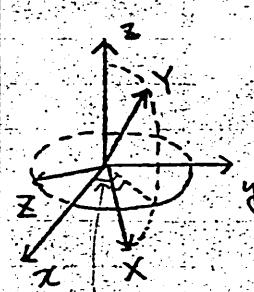
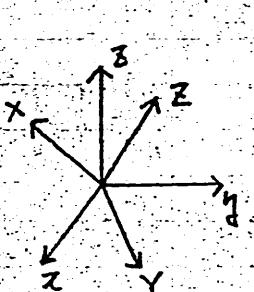
を假り  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$  の値とした。

	$n_0$	$\gamma_{41}$ $m/\tau$	$\epsilon/\epsilon_0$	$\sqrt{\lambda/\nu}$ $10.6 \mu\text{m}/\text{KJ}$	光の透過 領域 (波長)	大気中における 結晶の安定性
CuCl	1.97	$6.1 \times 10^{-12}$	7.5	120 KV	$0.4 \mu$ $\sim 20 \mu$	長時間の放置には 透過度が下る
GaAs	3.34	$1.6 \times 10^{-12}$	11.5	92 KV	$0.9 \mu$ $\sim 16 \mu$	安定

(5)

### §2 CuCl および GaAs における一次電気光学効果

CuCl および GaAs は等方性結晶で対称性は  $\bar{4}3m$  に属す。特定の電界の方向における  $n_x, n_y, n_z$  および電気的主軸の方向 ( $x, y, z$ ) を下の表に示す。

	case I	case II	case III
$E_x = E_y = 0$	$E_z = E$	$E_x = E_y = \frac{E}{\sqrt{2}}$ $E_z = 0$	$E_x = E_y = E_z = E/\sqrt{3}$
$n_x$	$n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{41} E$	$n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{41} E$	$n_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} n_0^3 \gamma_{41} E$
$n_y$	$n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{41} E$	$n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \gamma_{41} E$	$n_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} n_0^3 \gamma_{41} E$
$n_z$	$n_0$	$n_0$	$n_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} n_0^3 \gamma_{41} E$
			

但し  $x, y, z$  は結晶軸の方向

以上のそれぞれの場合、この結晶を横型変調器(電界Eの方向と光の入射方向が直角の場合)として動作させる  
と、両偏波の位相差はπの様になる。

case I 光の入射方向は(110)面に垂直

$$P_{xz} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{l}{d} n_0^3 \gamma_{41} V \quad (1)$$

case II 光の入射方向は(110)面に垂直

$$P_{xy} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{d} n_0^3 \gamma_{41} V \quad (2)$$

case III 光の入射方向は(111)面に垂直

$$P_{yz} = \frac{\sqrt{3}\pi}{\lambda} \frac{l}{d} n_0^3 \gamma_{41} V \quad (3)$$

たゞし 入；光の波長

d；電極間距離

l；結晶の長さ

次に最大の位相差の生じる Case IIについて各光学要素を  
図1の様に配置すると出力光の強度は次式で示される

$$\begin{aligned} I_{out} &= I_0 \sin^2 \left( \frac{P_{xy}}{2} \right) \\ &= I_0 \sin^2 \left( \frac{\pi l}{\lambda d} n_0^3 \gamma_{41} V \right) \quad (4) \end{aligned}$$

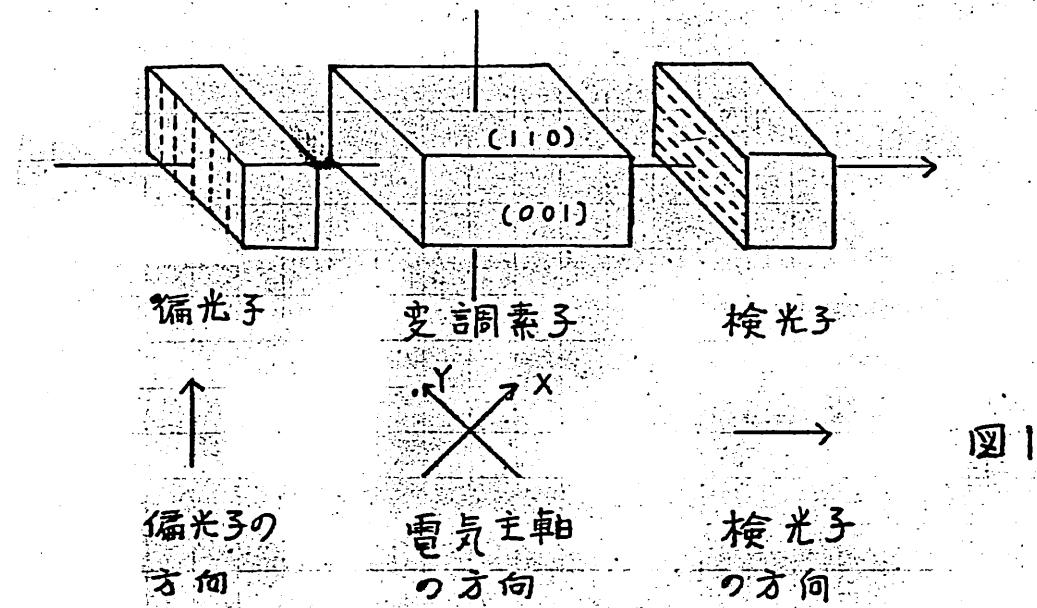


図1

(4) 式の様子を図2に表わすと次の様になる。

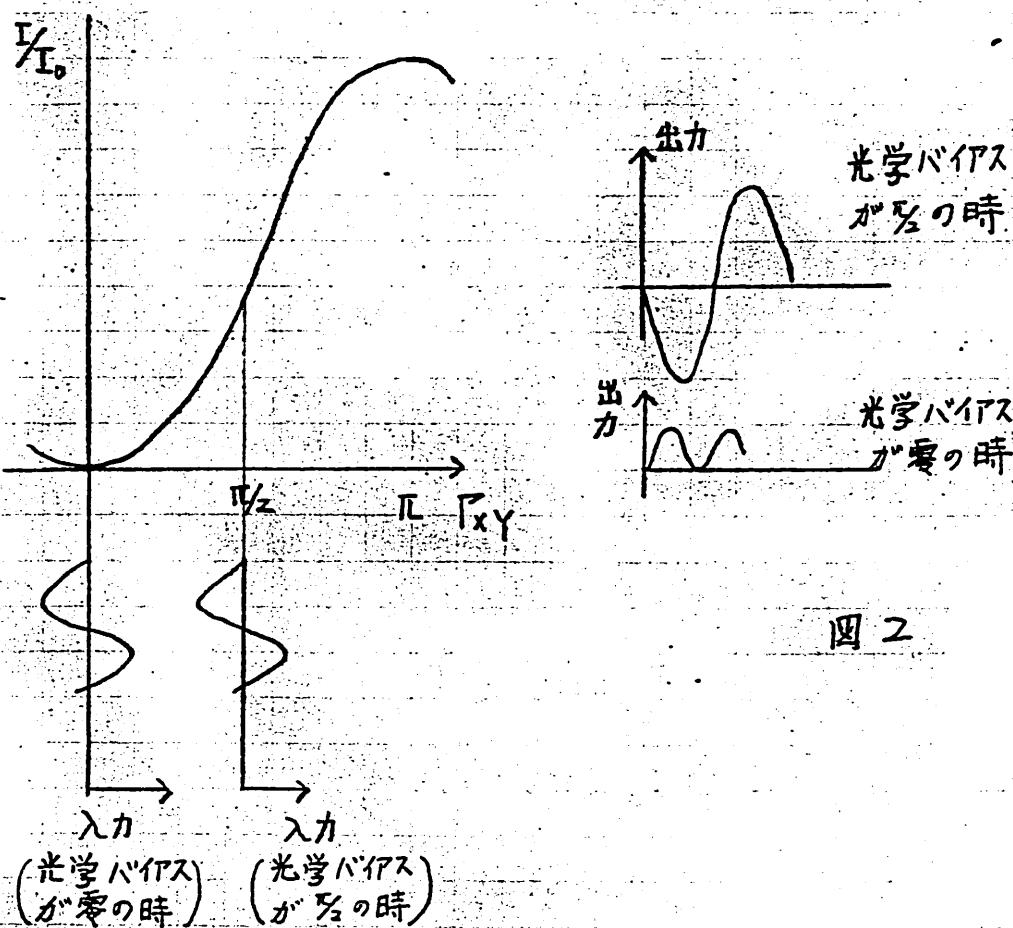


図2

### §3 実験

-5-

前節までの効果を利用して実際に  $\text{CO}_2$  L-サ光の変調実験を行った。変調素子は  $\text{CuCl}$  やび  $\text{GaAs}$  で変調周波数は  $1\text{kHz}$  である。結晶に加える電界の方向は §2 の case II を用いた。実験装置の配置の概略は下図の通りである。

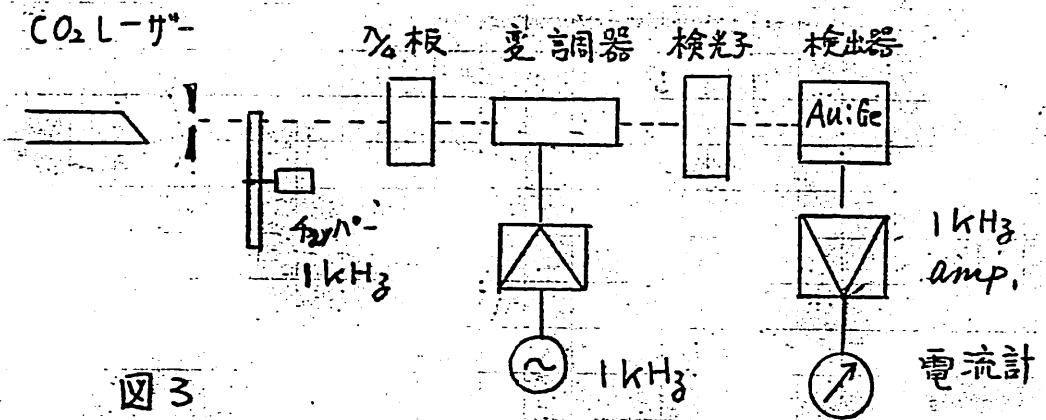
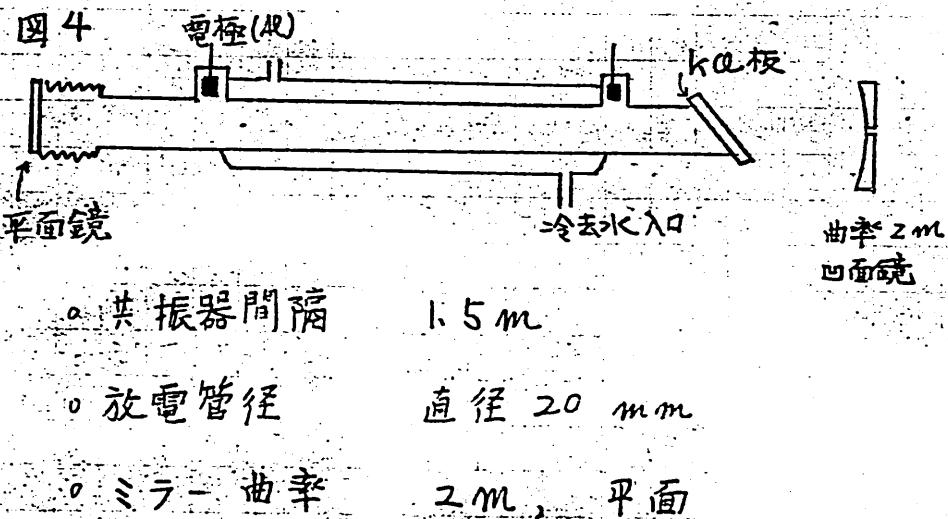


図3

次に各部の説明をすと

#### (1) $\text{CO}_2$ L-サ



○活性物質  $\text{CO}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{He}$  の混合ガス

$\text{CO}_2$ ; 1 torr

$\text{N}_2$ ; 2 torr

$\text{He}$ ; 4 torr

○実験時出力 数ワット

### (2) チョパン

$I_0$  を測定する時のみ使用。同期モーターで  $\text{CO}_2$  レーザ光を機械的に  $1\text{kHz}$  でチョップする。

### (3) $\frac{1}{4}$ 入板

結晶は  $\text{CdS}$  を使用。又使用に有効な大きさは表面

積は約  $2\text{mm} \times 2\text{mm}$  で長さ  $10\text{mm}$  程度である。

この結晶に入射した光の X 成分と Y 成分の正確な位相差は  $59^\circ$  であった。よって本実験に於ける光学バイアスは  $59^\circ$  である。

### (4) 变调器

(A)  $\text{Cu}(l)$

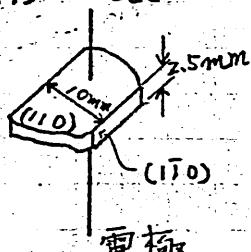


図 5

○形状は左図に示す

$$d = 2.5\text{mm} \quad l = 10\text{mm}$$

○電極は銀ペーストによる。

○透過度 波長  $10.6\mu$  で測定の結果、端面の反射

および内部の減衰を含めて 78.6%

(B) GaAs

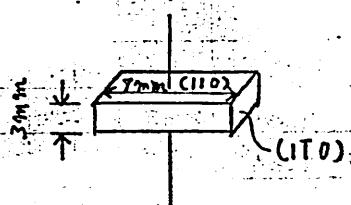


図6

。透過度 波長  $10.6 \mu\text{m}$  の光で測定の結果 端面  
の反射および内部の減衰等を含めて

46.5%

### (5) 検光子

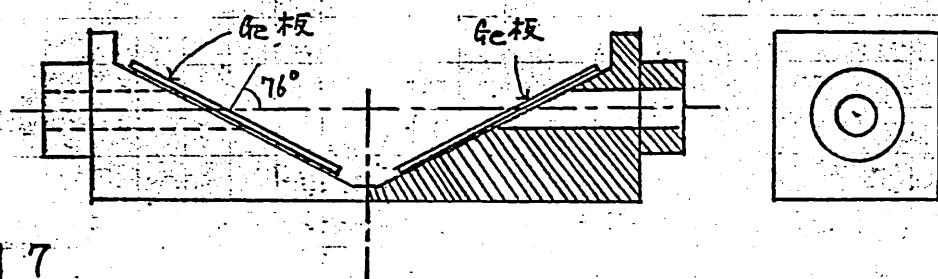


図7

。形状は上図に示す。これは中心線の周りに回転  
できる様にしてある。光は中心を通って二枚の  
Ge板を透過する様に入れた。この場合Ge板の端  
面は平行で鏡面に磨りてある。又光の通過方向  
(中心線)に対してプリュスター角に設置している。

$10.6 \mu\text{m}$  光で測定の結果この検光子を通過した光  
の直交する二つの偏波の透過度の比は  $1/200$  以下  
である。

## (6) 検出器

Ge; Au Photoconductor で液体N<sub>2</sub>温度(77°K)で

動作させたもの

以上の装置を用いて実験を行った。その結果は図7, 8に示す。グラフ上の実線は光学バイアスが90°の場合の計算値を示している。破線は本実験における光学バイアス(59°)の計算値を示している。X印は測定点を示している。

### 実験結果に対する考察

以上の測定結果より  $\pi_{\text{d}}$  の値を求めるに CuI では報告されている可視光での値より 30% 低く、GaAs では Kaminow が示す結果より 11% 低い。これらの原因としては、変調度の測定の誤差、光学系 alignment の不備、材料の不均一性や歪、などが考えられるが、今の段階ではどうとも断定できない。

しかしこの実験において CO<sub>2</sub> レーザの変調器として CuI と GaAs が有用である事が確認された。

CuI は可視域まで透明なので alignment の調整が容易であり、その結晶の光学的性質が可視光の装置で

確められるなど、有利である。また屈折率、誘電率が比較的小さいことと透過度が良いことも優れている。

一方 GaAs は  $\nabla\chi$  が CuCl より少し低いことと空気中で化学的に安定なので取扱が容易である点で優れて

いる。

### 謝 辞

本実験にあたり試料を提供された早川電機工業(株)  
中央研究所猪口部長、三菱電機(株)北伊丹製作所  
吉松部長 また実験装置について御援助をいたしました  
た(株)富士通研究所岩井部長に厚くお礼申し上げる。

### 文 献

(1) A. Yariv, C. A. Mead and J. V. Parker

"GaAs as an Electrooptic Modulator at  $10.6 \mu$ "

IEEE. J. Q.E., vol. QE-2, P243 (1966)

Lily Ho and C. F. Buhler

"Electro-Optic Effect of Gallium Arsenide"

Appl. Optics, Vol. 2, P 647 (1963)

(2) Ivan P. Kaminow

-10-

"Measurement of the Electrooptic Effect in CdS  
ZnTe and GaAs at 10.6 Microns"

IEEE, J. Q.E., Vol. QE-4, P23 (1968)

(3) James E. Kiefer and Amnon Yariv

"Electro-Optic Characteristics of CdTe at 3.39  
and 10.6 Microns"

1969 CLEA (Post Dead Line Paper)

Washington, D.C., May (1969)

(4) H. R. Carleton and R. A. Soref

"Modulation of 10.6  $\mu$  Laser Radiation by Ultra-  
sonic Diffraction"

Appl. Phys. Letters, Vol. 9, P110 (1966)

(5) S. Namba

"Electro-Optical Effect of Zincblende"

Jour. Opt. Soc. Amer., Vol. 51, P76 (1961)

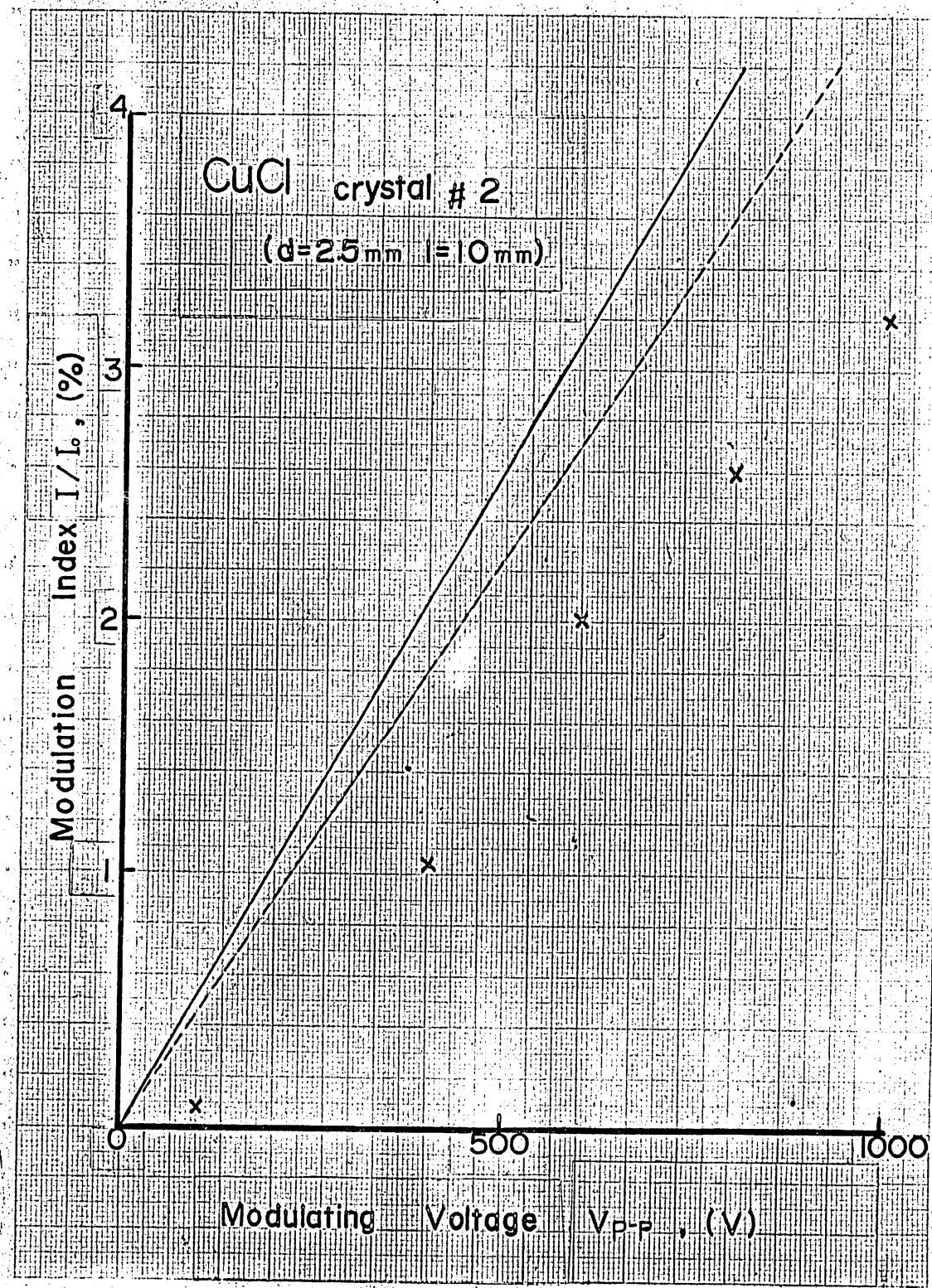


図 7

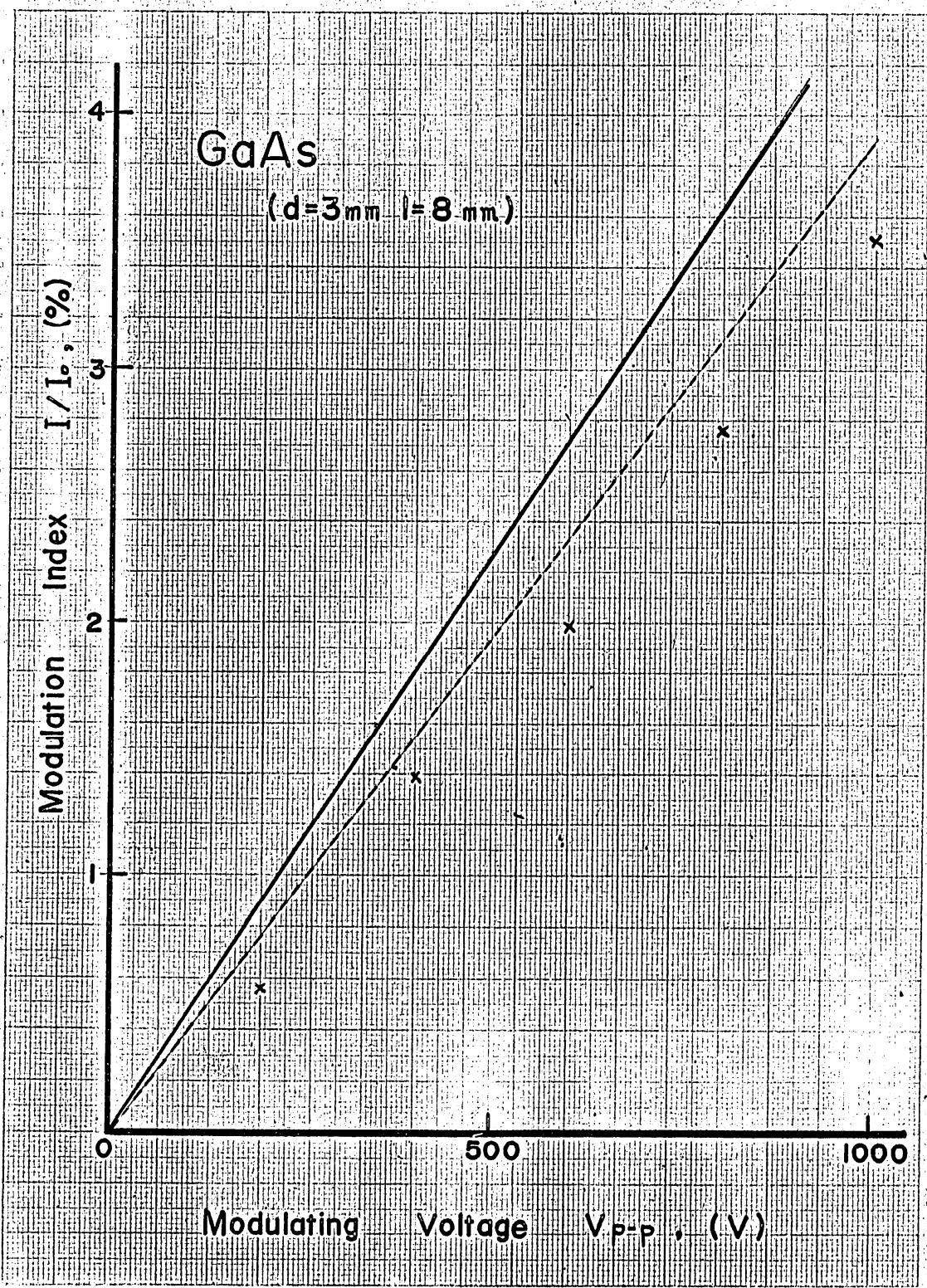


図 9

輻射科学研究会資料

ガン効果ダイオードの  
Self-pumped パラメトリック動作

佐々木 昭夫  
山田 喬彦\*

(京都大学 工学部)

1969年6月27日

---

\* 現在、通研

## I. はしがき

これまで研究されてきたガン効果ダイオードの多くは、(1)でもガン効果による不安定現象の結果発生した高電界層を直接利用する(走行時間モード)か、高電界層の発生、消滅を外部回路で制御して利用する(共振モード、LSAモード)かである。最近、高電界層の発生から安定までと、陽極に到達してから消滅までの過渡期の理論解析が行われ、高電界層の過渡変化の期間にパラメトリック効果のあることが指摘された。<sup>[1],[2]</sup>

本報告では、ガン効果ダイオードのパラメトリック動作の可能性と、Self-pumped パラメトリック動作の実験結果について述べる。Self-pumped パラメトリック動作では、周波数3.475 GHzで利得6dbを得た。

## II. Self-pumped パラメトリック動作の可能性

長さのダイオードに直流電圧 $V_b$ を印加する。ガン効果により高周波電流が発生し、外部回路に高周波電圧が生じる。したがって、ダイオードにかかるバイアス電圧は $V_b$ に高周波電圧が重畠される事になる。重畠される電圧を $\Delta V_c(t)$ とする。電圧に関する

$$V_b + \Delta V_c(t) = E_o(t)L + \Delta V(t) \quad (1)$$

が成り立つ。ここで $E_o(t)$ は低電界域の電界を、 $\Delta V(t)$ は高電界層の電圧を表す。式はダイオードの全バイアス電圧(左辺)が低電界域の電圧と高電界層の電圧との和(右辺)に等しいことを表す。この式をダイオードの全電流密度

$$J(t) = \rho_0 \mu_L E_o(t) + \epsilon \frac{\partial E_o(t)}{\partial t} \quad (2)$$

に代入することにより、次式を得る。

$$\Delta J(t) = G_p(t) \cdot \Delta V_c(t) + \partial \{ C_p(t) \cdot \Delta V_c(t) \} / \partial t \quad (3)$$

$$\Delta J(t) = J_a(t) - G_0 \cdot V_b, \quad G_0 \equiv \beta_0 \mu_L / L, \quad C_0 \equiv \epsilon / L \quad (4)$$

$$G_p(t) = G_0 \left\{ 1 - \frac{\Delta V(t)}{\Delta V_c(t)} \right\}, \quad C_p(t) = C_0 \left\{ 1 - \frac{\Delta V(t)}{\Delta V_c(t)} \right\} \quad (5)$$

ここで  $\beta_0$  は低周界域の電荷密度と移動度,  $L$  は誘電定数である。帯流  $J(t)$  の第一項は伝導電流密度を, 第二項は変位電流密度を表す。 $G_0$  はダイオードの低周界の状態でできるコンダクタンス,  $C_0$  はダイオードの幾何学的寸法でできる容量である。式(3)の  $\Delta J(t)$  はダイオードを流れる全電流密度  $J_0(t)$  から直流分  $G_0 \cdot V_b$  を差し引いた高周波電流成分である。式(3)はダイオードを流れる高周波電流  $\Delta J(t)$  と, ダイオード両端にかかる高周波電圧  $\Delta V_c(t)$  との関係式である。したがって  $G_p(t)$ ,  $C_p(t)$  はダイオードの高周波コンダクタンス, 容量と考えられ, 式(5)で与えられる。ダイオードの高周界層の過渡変化時ににおいては, 高周界層の電圧  $\Delta V(t)$  とバイアス電圧  $\Delta V_c(t)$  との比  $\Delta V(t)/\Delta V_c(t)$  は時間とともに変化するものと考えられる。したがって, ガン効果ダイオードでは, 高周界の発生, 消滅にともなって, アドミタンスが一定の周期をして時間変化するものと考えられる。チの周波数で共振してなるがシ効果ダイオードは, なかなかもみづからチの周波数でポンピングしてなるダイオードと考えられる。

パラメトリック増幅では, 別途にポンピング源を必要とすることが欠点の一つと考えられてる。ガン効果ダイオードの高周界層の過渡変化にともなうラパラメトリック効果を利用するならば, 別途にポンピング源を必要としない, いわゆる Self-pumped パラメトリック動作が可能と考えられる。

### III. パラメトリック増中ににおける信号波位相と増中度

信号波の増中がパラメトリック効果によることを確ひめる方法の理論的根柢を簡略に記す。ガン効果ダイオードでは、容量のみならず、コンダクタンスも時間変化を行なう。角周波数  $w_p$  で発振してなるダイオードの、その周波数成分での容量、コンダクタンスの変化が次式で表わされるものとする。

$$C = C_0 + C_1 \sin w_p t \quad (6)$$

$$G = G_0 + G_1 \sin(w_p t + \alpha) \quad (7)$$

ここで  $\alpha$  は容量、コンダクタンス時間変化の位相差である。ダイオードの両端に  $V_s = V_0 \sin(w_s t + \theta)$  で表わされる信号電圧が印加されるものとする。 $w_s$  は信号波の角周波数、 $\theta$  は信号波と容量の時間変化との位相差である。ダイオードを流れる電流  $i$  は

$$\begin{aligned} i &= \{G_0 + G_1 \sin(w_p t + \alpha)\} \cdot V_0 \sin(w_s t + \theta) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \{(C_0 + C_1 \sin w_p t) \cdot V_0 \sin(w_s t + \theta)\} \quad (8) \end{aligned}$$

で与えられる。第一項はコンダクタンスを流れる伝導電流、第二項は容量を流れる変位電流である。信号波角周波数  $w_s$  のダイオードの発振周波数  $w_p$  の丁度半分であるものとする。すなはち完全縮退形  $w_p = 2w_s$  である。このとき  $w_s$  成分の電流  $i$

$$\begin{aligned} i(w_s) &= \left\{ G_0 + \frac{G_1}{2} \cos \alpha \sin 2\theta - \left( \frac{G_1}{2} \sin \alpha + \frac{w_s C_1}{2} \right) \cos 2\theta \right\} V_0 \sin(w_s t + \theta) \\ &\quad + \left\{ w_s C_0 + \frac{G_1}{2} \cos \alpha \cos 2\theta + \left( \frac{G_1}{2} \sin \alpha + \frac{w_s C_1}{2} \right) \sin 2\theta \right\} V_0 \cos(w_s t + \theta) \end{aligned}$$

で与えられる。 $\cos(\omega_0 t + \theta) \rightarrow j \sin(\omega_0 t + \theta)$  を考慮すると、信号波に対するアドミッタンス  $Y(\omega_0)$  は

$$Y(\omega_0) = G_{01} + \frac{\omega_0 C_1}{2} \sqrt{R} \sin(2\theta - \beta) \\ + j \omega_0 C_{01} + j \frac{\omega_0 C_1}{2} \sqrt{R} \sin(2\theta + \gamma) \quad (9)$$

$$R = 1 + \left( \frac{G_1}{\omega_0 C_1} \right)^2 + \frac{2G_1}{\omega_0 C_1} \sin \alpha \quad (10)$$

$$\tan \beta = \tan \alpha + \frac{\omega_0 C_1}{G_1} \sec \alpha, \quad \tan \gamma = \cot \beta \quad (11)$$

容量変化の位相、すなわちポンピング波の位相、したがってダイオードの発振波の位相に対する信号波の位相の大きさによって、アドミッタンス  $Y(\omega_0)$  が変化することを知る。もし  $G_{01} < \omega_0 C_1 \sqrt{R}/2$  のとき、コンダクタンスは負または正を示すことになる。完全縮退形  $W_p = 2\omega_0$  のとき、信号波の位相によつて、ダイオードは増ゆまたは減衰を行なうこと意味する。\*

#### IV. Self-pumped パラメトリック動作の実験

信号波の増ゆがパラメトリック効果によることを確かめる方法として、第Ⅲ節の理論結果を用いた方法が取られる。すなわち、普通の一定負コンダクタンスによる増ゆでは、信号波の位相によつて増ゆ度は異なる。したがつて  $W_p = 2\omega_0$  すなわち完全縮退形のパラメトリック増ゆ回路で、信号波とダイオードの発振(ポン

\* ダイオードを実際に Self-pumped パラメトリック増ゆに使用するときは、 $W_p \neq 2\omega_0$  でアイドラー回路を用い、信号波位相に関係なく増ゆする条件で使う。

ピング) 波との位相差の大きさにより、信号波の増加、減衰の生じることが確かめられればよい。

実験に用いた完全縮退形のパラメトリック増力回路のブロック・ダイアグラムを図1に、その回路構成を図2に示す。ガン効果ダイオードのポンピングの位相、したがってダイオードの発振位相を信号波位相に対するものでおくために、信号源であるクライストロンの3.475 GHz の出力の一部を2倍にしてガン効果ダイオードに加える。この電力は0.1mW以下であり、ダイオードの発振出力(ポンピング電力)に比べて十分小さく、発振位相を定めるだけのものと考えられる。一方クライストロンからの3.475 GHz の出力の一部を、減衰器、移相器を通してダイオードに加える。ダイオードの前には4GHz 以下通過の低域通過フィルタを設けて、ダイオードからの発振出力の漏えいを防いでいる。移相器により信号波の位相を変化させながら、方向性結合器を通してダイオードからの反射波を観測しながら、定在波比を測定し、信号波の位相とダイオードのインピーダンスとの関係を求めた。図3に信号波の位相変化をパラメータにとしたときのダイオードのインピーダンスを示す。正確にはフィルタ回路も含めたインピーダンスである。図中、点線は負抵抗を、実線は正抵抗を表わす。したがってこれより信号波位相により増加、減衰の生じることを知る。

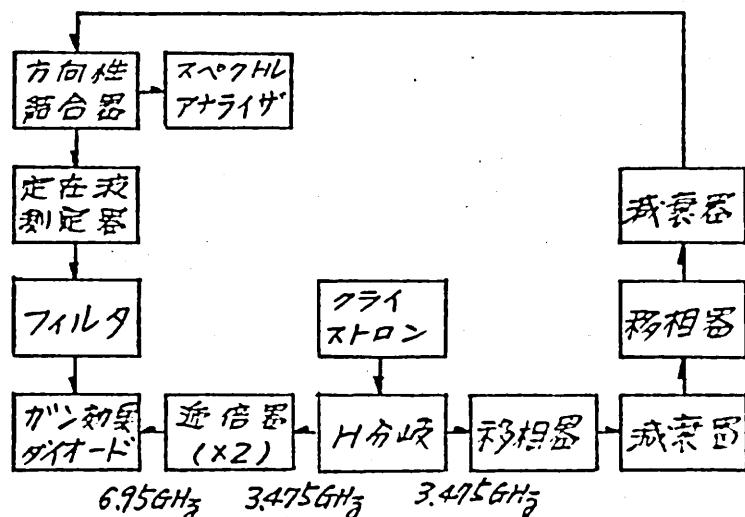


図1

ガン効果ダイオードの完全縮退形  
Self-pumped parame-  
tric power amplifier  
circuit's block dia-  
gram.

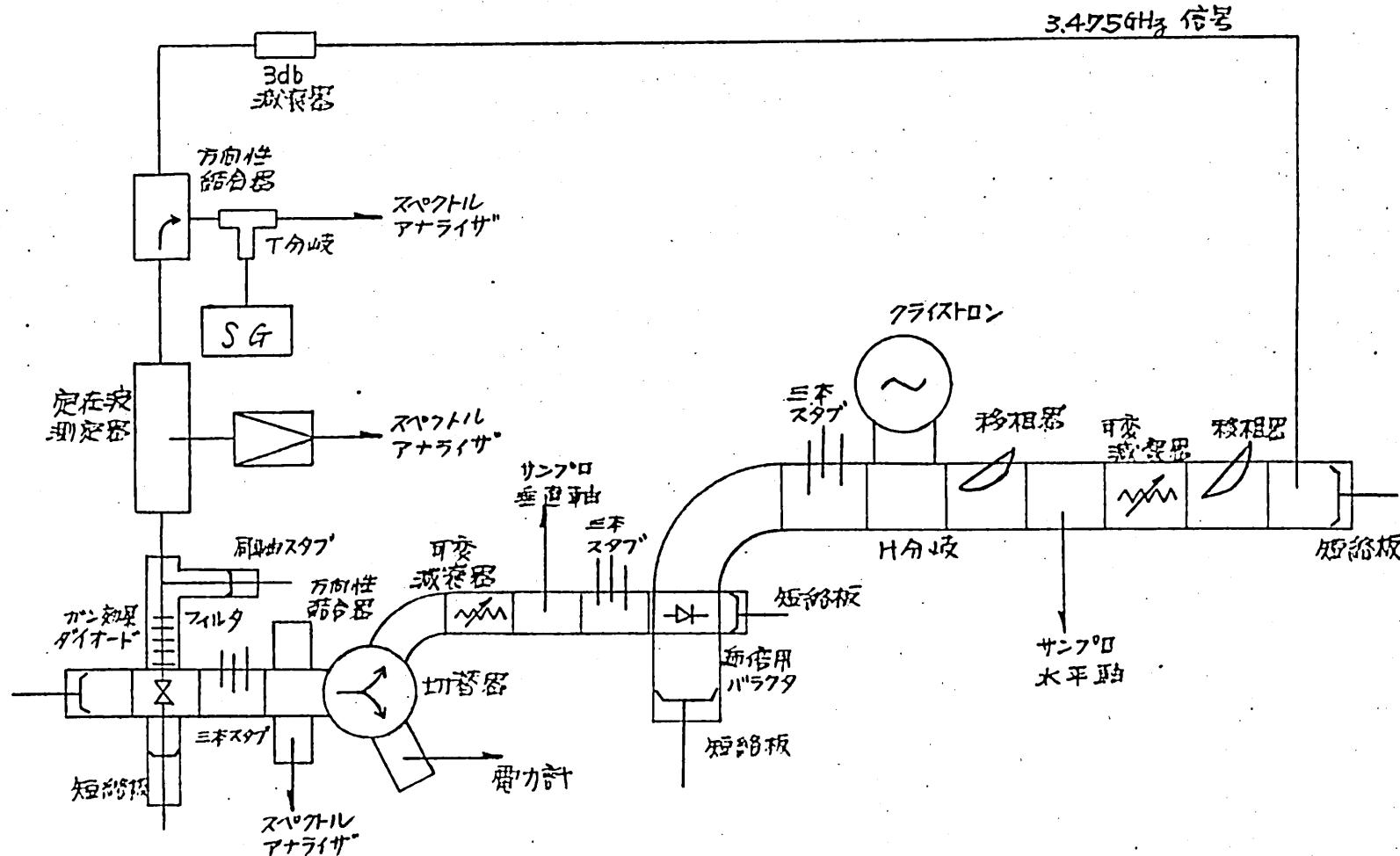


図2 ガン効果ダイオードの完全縮退形 Self-pumped パラメトリック増ゆの回路構成

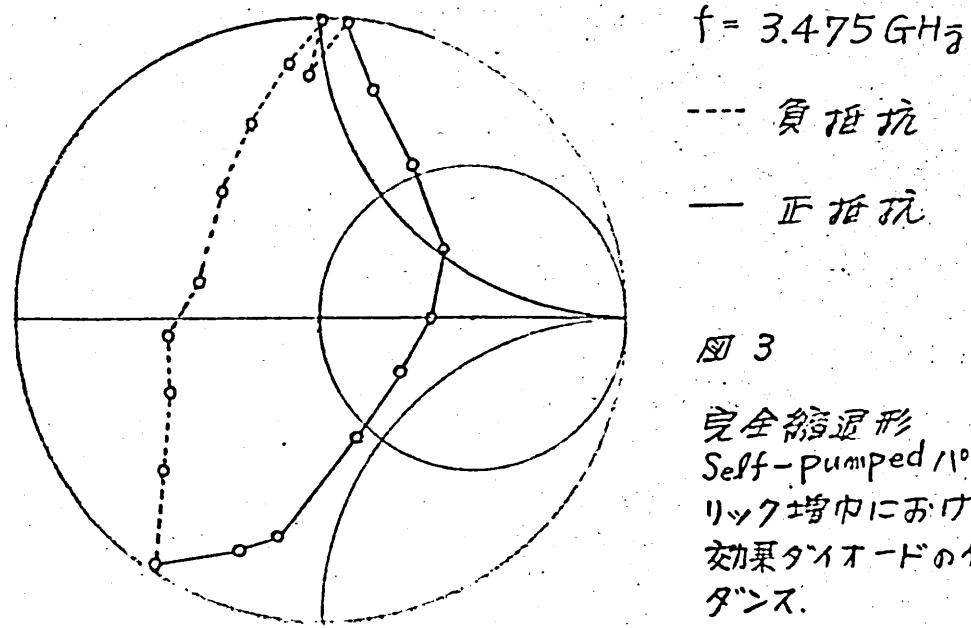


図3

完全縮退形  
Self-pumped パラメトリック増幅器内におけるガン  
効果ダイオードのインヒビターンス.

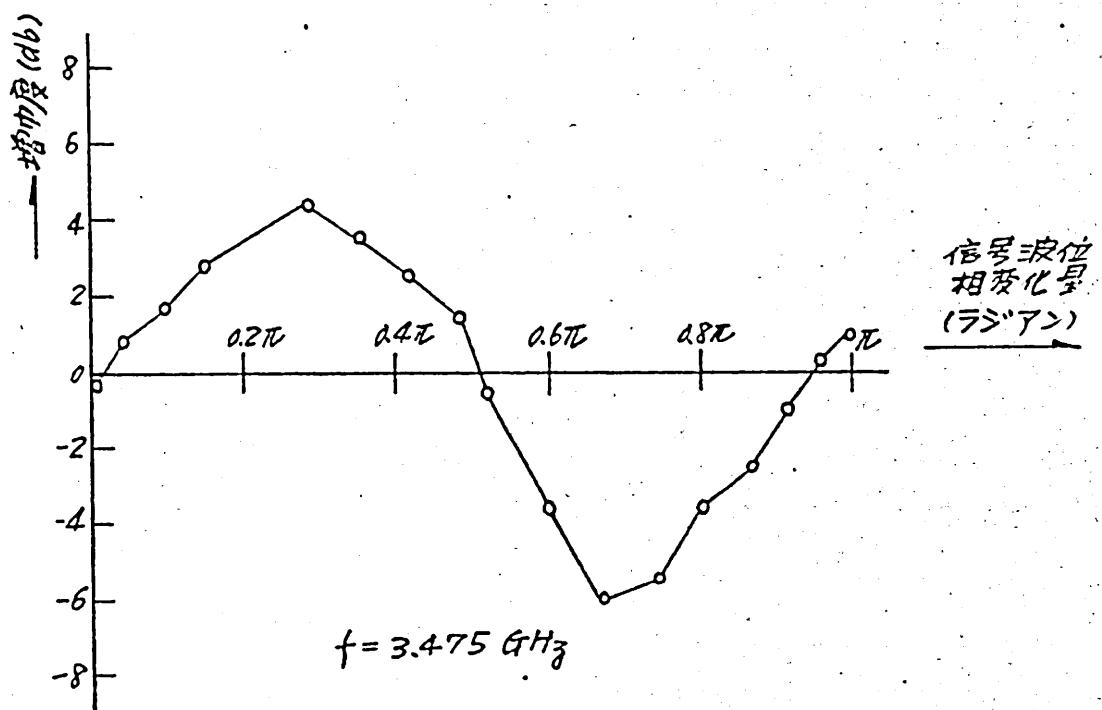


図4. ガン効果ダイオードの完全縮退形  
Self-pumped パラメトリック増幅器内  
における信号波位相と増力度の関係.

図4では、横軸に信号波の位相変化量を取り、縦軸に増幅度を表わす。この図から、信号波の位相の値によつて増幅度が異なり、増幅にも減衰にもなり得ること、その変化が位相変化  $\theta = 180^\circ$  の前後でなること等と、式(9)の結果とから、ガン効果ダイオードはパラメトリック効果を持ち、Self-pumped  $110$  ラメトリック動作が可能であることを示すものである。図5に入力の大きさを変えたときの、増幅度の線形特性を示す。

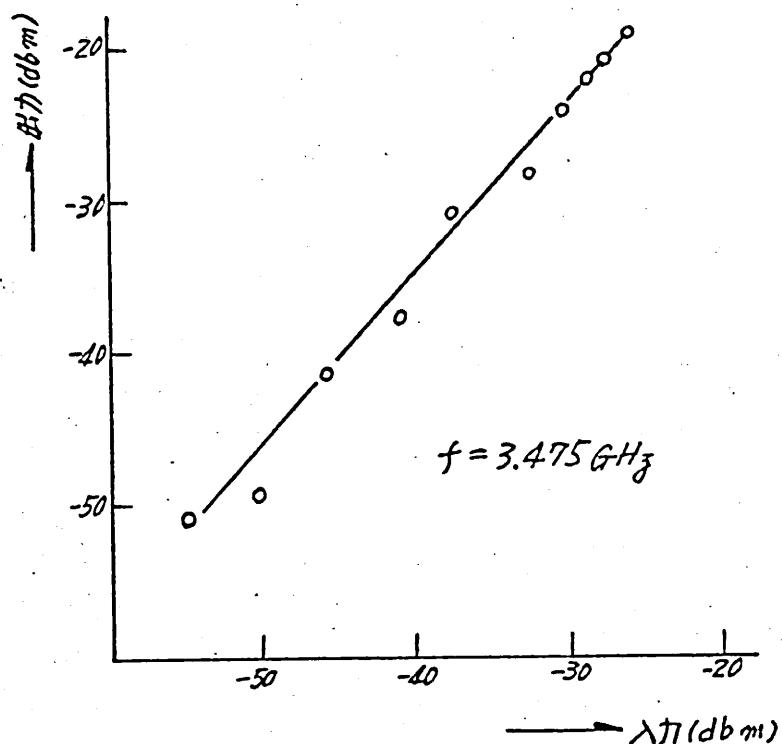


図5. ガン効果ダイオードの Self-pumped  
 $110$  ラメトリック増幅の入力対出力

最高利得として  $6\text{db}$  を実験で得た。用いたダイオードの $nL$  積は約  $3 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  であり、動作時のバイアス電界は約  $7\text{kV/cm}$  である。

## V. あとがき

理論的考察と実験結果から、ガン効果ダイオードを用いて、ポンピング源を必要としない Self-pumped 11°ラメトリック動作が可能であることが示された。我々の他の実験で、正の利得を持つサブハーモニックの発振を得ている。このことからガン効果ダイオードのパラメトリック動作では、コンダクタンスによるパラメトリック効果のあることが実験的にわかった。ダイオードの角類、バイアス周界と増幅度さらに雑音抑歛等の研究が今後の課題である。

終りに本学田中哲郎、高木俊宜両教授および実験に協力された服部秀文君に謝意を表します。

## 参考文献

- [1] 佐々木，“ガンダイオードのアドミッタンスとパラメトリック効果，” 電通学会電装研究会資料 ED67-53 (1968-3)
- [2] 佐々木，“ガンダイオード・アドミッタンスの過渡特性，” 電通学会電装研究会資料 ED68-10 (1968-06)

輻射科学研究会資料

軸方向に運動している無限長円柱による平面電磁波の散乱

塩沢俊之

河野磐生

(大阪大学・工学部)

1969年6月27日

## 1. まえがき

太陽コロナ、太陽風あるいは高速ロケットからの噴射ガス等による電磁波の散乱を取り扱う場合には、運動物体による電磁波の散乱の理論が必要になってくる。また、このような応用面もさることながら、運動物体による散乱の問題は電磁波理論における重要かつ基礎的な問題の一つであると考えられる。しかるに、この方面の研究は過去においてほとんど行なわれていなかつた。そこで、著者等は、最近、運動系の電磁界理論に関する研究の一環として運動物体による散乱の問題を取り上げ、すでにいくつかの場合について報告を行なった。<sup>(1)～(6)</sup>まず、軸方向に対して垂直に運動している無限長円柱による平面電磁波の散乱を考え、Maxwell の方程式の共変性および位相の不変性を用いて、遠距離散乱電磁界、散乱電力の角度分布、散乱断面積ならびに散乱波の周波数に現われる Doppler 効果等について解析を行ない、円柱の運動が散乱に及ぼす相対論的效果について検討した。<sup>(1)</sup>つぎに、運動物体による散乱の最も代表的な場合として、真空中を一様に運動する、任意の物質からなる微小な円体による散乱について考察した。<sup>(2)～(5)</sup>さらに運動物体による Rayleigh-Gans 散乱についても報告した。<sup>(6)</sup>

本論文では、いま一つの重要な場合として、軸方向に一様に運動している任意の等方性物質からなる無限長円柱による平面電磁波の散乱について、 Maxwell-Minkowski の方程式を用いて考察する。本論文で報告する理論は高速ロケットからの噴射ガスによる散乱、あるいは高速度で運動しているプラズマの診断等に適用することができるものと考えられる。

## 2. Maxwell-Minkowski の方程式の斉次解

軸方向に一様な速度で運動している無限長円柱による平面電磁波の散乱について考察するために、まず図 1 のように座標系を定める。円柱（半径  $\rho$ ）

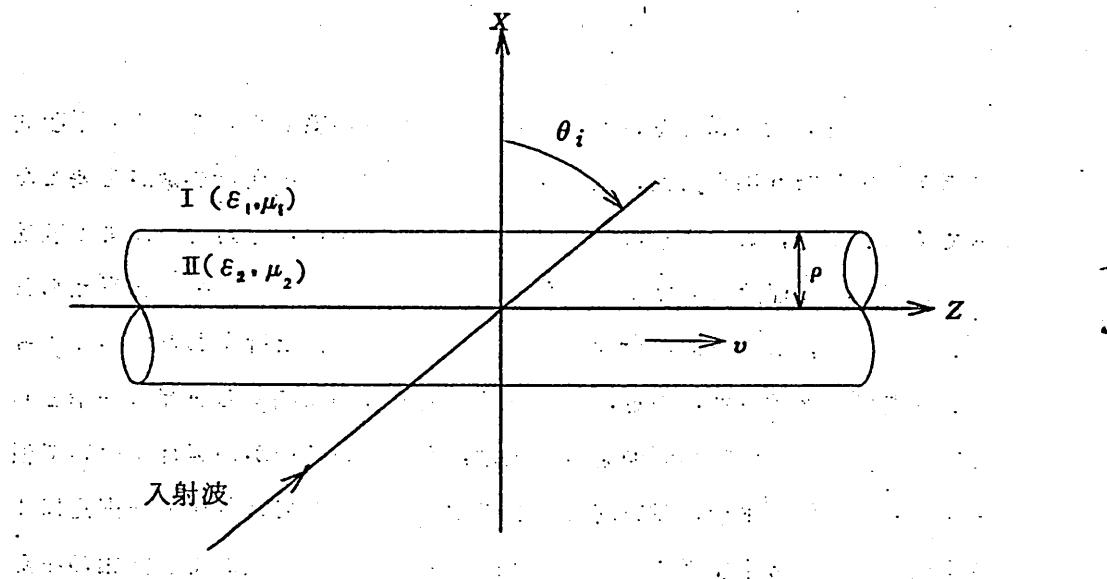


図1 座標系

の軸方向に  $z$  軸を選び、円柱は一様な速度  $v = \hat{z} v$  で運動しているものとする。また、周囲の媒質(媒質I)および円柱を構成する媒質(媒質II)の誘電率および透磁率を、それぞれ、 $\epsilon_1, \mu_1$  および  $\epsilon_2, \mu_2$  とする。本論文では、円柱の軸に対して任意の角度で入射した平面電磁波がどのように散乱されるかを調べる。

まず、以下の解析の準備として、一様に運動している円柱内部における電磁界の一般表示を求めよう。いま、電磁界の時間変化の因子を  $e^{j\omega t}$  とする、一様に運動している等方性媒質中における電磁界基本方程式、すなわち等方性媒質に対する Maxwell-Minkowski の方程式は次式で与えられる。<sup>(8)</sup>

$$\left. \begin{aligned} (\nabla - j\omega \Omega) \times \mathbf{E} &= -j\omega \mu_2 \bar{\alpha} \cdot \mathbf{H} \\ (\nabla - j\omega \Omega) \times \mathbf{H} &= j\omega \epsilon_2 \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

\* 静止した無限長円柱に斜方向から平面電磁波が入射する場合の散乱の問題は J.R.Wait によって取り扱われている。<sup>(7)</sup>

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= z \frac{(n_z^2 - 1) \beta}{(1 - n_z^2 \beta^2) c} \\ \beta &= \frac{v}{c}, \quad n_z = \sqrt{\frac{\epsilon_z \mu_z}{\epsilon_0 \mu_0}} \\ \alpha &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{1 - \beta^2}{1 - n_z^2 \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $z$  は  $z$  方向の単位ベクトルであり、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、および  $c$  は、それぞれ真空の誘電率、透磁率および光速度を表わす。

円筒座標 ( $r, \phi, z$ ) を用いて、式(1)の解を求めよう。一般に、円柱内部の電磁界の各成分は電界および磁界の  $z$  方向成分  $E_z, H_z$  によって表わすことができる。式(1)から、 $E_z$  および  $H_z$  に関する波动方程式を求めるとき、つぎのようになる。

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2jw\Omega}{a} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\omega^2 \Omega^2}{a} + k_z^2 a \right] \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = 0$$

ただし、

$$k_z = \omega \sqrt{\epsilon_z \mu_z} \quad (4)$$

$E_z$  および  $H_z$  を、静止媒質の場合にならって、つぎのように表わそう。

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \psi_{mz} \\ H_z &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \psi_{mz} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \psi_{mz} &= f_m(r) F_m \\ f_m &= e^{-jm\phi} e^{-jhz} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$A_m, B_m$  および  $h$  は任意の定数であり、  $f_m(r)$  は  $\gamma$  のみの関数である。式(5)を式(3)に代入すると、次式が得られる。

$$\left[ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} + \left\{ \frac{a^2 k_2^2 - (h + \omega \Omega)^2}{a} r^2 - m^2 \right\} \right] f_m(r) = 0 \quad (7)$$

$r = 0$  で有界となる式(7)の解は  $m$  次 Bessel 関数であることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} f_m(r) &= J_m(\lambda_2 r) \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{a^2 k_2^2 - (h + \omega \Omega)^2}{a}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(1)および(5)から、円柱内部における電磁界成分は円筒座標を用いて結局つぎのように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{j(h + \omega \Omega)}{\lambda_2} \sum_m A_m J'_m(\lambda_2 r) F_m - \frac{\omega \mu_2 a^2}{\lambda_2^2 r} \sum_m B_m J_m(\lambda_2 r) F_m \\ E_\varphi &= -\frac{(h + \omega \Omega)a}{\lambda_2^2 r} \sum_m A_m J_m(\lambda_2 r) F_m + \frac{j \omega \mu_2 a^2}{\lambda_2^2} \sum_m B_m J'_m(\lambda_2 r) F_m \\ E_z &= \sum_m A_m J_m(\lambda_2 r) F_m \\ H_r &= \frac{\omega \epsilon_2 a^2}{\lambda_2^2 r} \sum_m A_m J_m(\lambda_2 r) F_m - \frac{j(h + \omega \Omega)a}{\lambda_2} \sum_m B_m J'_m(\lambda_2 r) F_m \\ H_\varphi &= \frac{j \omega \epsilon_2 a^2}{\lambda_2^2} \sum_m A_m J'_m(\lambda_2 r) F_m - \frac{(h + \omega \Omega)a}{\lambda_2^2 r} \sum_m B_m J_m(\lambda_2 r) F_m \\ H_z &= \sum_m B_m J_m(\lambda_2 r) F_m \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} J'_m(v) &= \frac{d}{dv} J_m(v) \\ \Sigma &\equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

### 3. 散乱電磁界

本節では、軸方向に一様に運動している無限長円柱による散乱電磁界を求める。入射平面波の波動ベクトルは  $x - z$  平面内にあるものとし、波動ベクトルと  $x$  軸とのなす角を  $\theta_1$  とする（図 1 参照）。このとき、入射平面波は一般につぎのような円筒波の形に表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(i)} &= -\frac{j \hbar}{\lambda_1} \sum_m A_m^{(i)} J'_m(\lambda_1 r) F_m - \frac{\omega \mu_1}{\lambda_1^2 r} \sum_m m B_m^{(i)} J_m(\lambda_1 r) F_m \\ E_\varphi^{(i)} &= -\frac{\hbar}{\lambda_1^2 r} \sum_m m A_m^{(i)} J_m(\lambda_1 r) F_m + \frac{j \omega \mu_1}{\lambda_1} \sum_m B_m^{(i)} J'_m(\lambda_1 r) F_m \\ E_z^{(i)} &= \sum_m A_m^{(i)} J_m(\lambda_1 r) F_m \\ H_r^{(i)} &= \frac{\omega \epsilon_1}{\lambda_1^2 r} \sum_m m A_m^{(i)} J_m(\lambda_1 r) F_m - \frac{j \hbar}{\lambda_1} \sum_m B_m^{(i)} J'_m(\lambda_1 r) F_m \\ H_\varphi^{(i)} &= -\frac{j \omega \epsilon_1}{\lambda_1} \sum_m A_m^{(i)} J'_m(\lambda_1 r) F_m - \frac{\hbar}{\lambda_1^2 r} \sum_m m B_m^{(i)} J_m(\lambda_1 r) F_m \\ H_z^{(i)} &= \sum_m B_m^{(i)} J_m(\lambda_1 r) F_m \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし、

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = k_1 \cos \theta_i \\ h = k_1 \sin \theta_i \\ k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \end{array} \right\} \quad (12)$$

$A_m^{(i)}$  および  $B_m^{(i)}$  は入射平面波の振幅の大きさおよび偏波によってきまる定数である。

一方、円柱内部の電磁界は式(9)で与えられ、また散乱電磁界はつぎのような形に書くことができる。

$$\left. \begin{array}{l} E_r^{(s)} = -\frac{j h}{\lambda_1 r} \sum_m A_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m - \frac{\omega \mu_1}{\lambda_1^2 r} \sum_m m B_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m \\ E_\varphi^{(s)} = -\frac{h}{\lambda_1^2 r} \sum_m m A_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m + \frac{j \omega \mu_1}{\lambda_1} \sum_m B_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m \\ E_z^{(s)} = \sum_m A_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m \\ H_r^{(s)} = \frac{\omega \epsilon_1}{\lambda_1^2 r} \sum_m m A_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m - \frac{j h}{\lambda_1} \sum_m B_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m \\ H_\varphi^{(s)} = -\frac{j \omega \epsilon_1}{\lambda_1} \sum_m A_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m - \frac{h}{\lambda_1^2 r} \sum_m m B_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m \\ H_z^{(s)} = \sum_m B_m^{(s)} H_m^{(2)}(\lambda_1 r) F_m \end{array} \right\} \quad (13)$$

ただし、 $H_m^{(2)}$  は  $m$  次第二種 Hankel 関数を表わし、 $A_m^{(s)}$  および  $B_m^{(s)}$  は境界条件によってきまる定数である。

まず、円柱表面において入射波、散乱波および円柱内部の電磁界の位相が等しくなければならないという条件から、式(9)および(13)に現われる  $\epsilon$  は式(12)で与えられることがわかる。つぎに、式(9)および(13)における四組の未知数  $A_m, B_m, A_m^{(s)}, B_m^{(s)}$  は、円柱表面において電界および磁界の接線成分が連続でなければならないという境界条件、すなわち

$$\left. \begin{array}{l} E_\varphi^{(i)} + E_\varphi^{(s)} = E_\varphi \\ E_z^{(i)} + E_z^{(s)} = E_z \\ H_\varphi^{(i)} + H_\varphi^{(s)} = E_\varphi H_\varphi \\ H_z^{(i)} + H_z^{(s)} = E_z H_z \end{array} \right\} \quad (14)$$

から求まる。

いままでは一般論について述べたが、以下では、特別の場合として、Ⅰ) 入射波が  $E$  波の場合、およびⅡ) 入射波が  $H$  波の場合について、 $A_m, B_m, A_m^{(s)}, B_m^{(s)}$  を実際に求める。

### Ⅰ) 入射波が $E$ 波の場合

この場合には、入射平面波は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} E_z^{(i)} = -E_0 \cos \theta_i e^{-j(\lambda_i x + h z)} \\ H_z^{(i)} = 0 \end{array} \right\} \quad (15)$$

ここで、 $E_0$  は一定の振幅を表わす。

式(15)を円筒波で展開することにより、式(11)における  $A_m^{(i)}$  および  $B_m^{(i)}$  は次式で与えられることがわかる。

$$\left. \begin{array}{l} A_m^{(i)} = -(-j)^m E_0 \cos \theta_i \\ B_m^{(i)} = 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

散乱電磁界および円柱内部の電磁界の振幅は、それぞれ、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}
A_m^{(s)} &= -A_m^{(i)} \left\{ \frac{J_m(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)} - \frac{2j}{\pi q_1^2 [H_m^{(2)}(q_1)]^2 G} \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \frac{a^2}{q_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{J'_m(q_2)}{J_m(q_2)} - \frac{1}{q_1} \frac{H_m^{(2)}(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)} \right] \right\} \\
B_m^{(s)} &= A_m^{(i)} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{2m}{\pi q_1^2 [H_m^{(2)}(q_1)]^2 G} \\
&\quad \times \left[ \frac{\left( \sin \theta_i + \frac{Q}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \right) a}{q_2^2} - \frac{\sin \theta_i}{q_1^2} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned}
A_m &= \frac{2j A_m^{(i)}}{\pi q_1^2 J_m(q_2) H_m^{(2)}(q_1) G} \\
&\quad \times \left[ \frac{a^2}{q_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{J'_m(q_2)}{J_m(q_2)} - \frac{1}{q_1} \frac{H_m^{(2)}(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)} \right] \\
B_m &= A_m^{(i)} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{2m}{\pi q_1^2 J_m(q_2) H_m^{(2)}(q_1) G} \\
&\quad \times \left[ \frac{\left( \sin \theta_i + \frac{Q}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \right) a}{q_2^2} - \frac{\sin \theta_i}{q_1^2} \right]
\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

∴

$$\left. \begin{aligned}
G &= \left[ \frac{a^2 \epsilon_2}{q_2 \epsilon_1} \frac{J'_m(q_2)}{J_m(q_2)} - \frac{1}{q_1} \frac{H_m^{(2)}(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)} \right] \left[ \frac{a^2 \mu_2}{q_2 \mu_1} \frac{J'_m(q_2)}{J_m(q_2)} - \frac{1}{q_1} \frac{H_m^{(2)}(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)} \right] \\
&\quad - m^2 \left[ \frac{\left( \sin \theta_i + \frac{Q}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \right) a}{q_2^2} - \frac{\sin \theta_i}{q_1^2} \right]^2
\end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$q_1 = \lambda_1 \rho \quad , \quad q_2 = \lambda_2 \rho$$

### Ⅲ) 入射波が $H$ 波の場合

この場合には、入射波は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E_z^{(i)} &= 0 \\ H_z^{(i)} &= H_0 \cos \theta_i e^{-j(\lambda_1 x + h_z)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

I) の場合と同様にして、 $A_m^{(i)}$  および  $B_m^{(i)}$  は次式で与えられることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} A_m^{(i)} &= 0 \\ B_m^{(i)} &= (-j)^m H_0 \cos \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

散乱波および円柱内部の電磁界の振幅は、それぞれ、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_m^{(s)} &= B_m^{(i)} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \frac{2 m}{\pi q_1^2 [H_m^{(2)}(q_1)]^2 M} \\ &\times \left[ \frac{\left( \sin \theta_i + \frac{\varrho}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \right) a}{q_2^2} - \frac{\sin \theta_i}{q_1^2} \right] \\ B_m^{(s)} &= -B_m^{(i)} \left\{ \frac{J_m(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)} - \frac{2 j}{\pi q_1^2 [H_m^{(2)}(q_1)]^2 M} \right. \\ &\times \left. \left[ \frac{a^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} J'_m(q_2)}{q_2 \frac{J_m(q_2)}{\epsilon_1}} - \frac{1}{q_1} \frac{H_m^{(2)'}(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_m &= B_m^{(i)} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \frac{2m}{\pi q_1^2 J_m(q_2) H_m^{(2)}(q_1) M} \\
 &\times \left[ \frac{\left( \sin \theta_i + \frac{\varrho}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \right) a}{q_2^2} - \frac{\sin \theta_i}{q_1^2} \right] \\
 B_m^{(i)} &= \frac{2j B_m^{(i)}}{\pi q_1^2 J_m(q_2) H_m^{(2)}(q_1) M} \\
 &\times \left[ \frac{a^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{J_m'(q_2)}{J_m(q_2)} - \frac{1}{q_1} \frac{H_m^{(2)'}(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)}}{q_2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{J_m'(q_2)}{J_m(q_2)} - \frac{1}{q_1} \frac{H_m^{(2)'}(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)}} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 M &= \left[ \frac{a^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{J_m'(q_2)}{J_m(q_2)} - \frac{1}{q_1} \frac{H_m^{(2)'}(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)}}{q_2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{J_m'(q_2)}{J_m(q_2)} - \frac{1}{q_1} \frac{H_m^{(2)'}(q_1)}{H_m^{(2)}(q_1)}} \right]^2 \\
 &- m^2 \left[ \frac{\left( \sin \theta_i + \frac{\varrho}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \right) a}{q_2^2} - \frac{\sin \theta_i}{q_1^2} \right]^2
 \end{aligned} \quad (24)$$

以上からわかるように、入射波が  $E$  波 ( $H$  波) であっても、散乱波および円柱内部の電磁界は一般には  $E$  波 ( $H$  波) とはならず、 $E$  波と  $H$  波との一次結合になる。

#### 4. 散乱断面積

つぎに、軸方向に一様に運動している無限長円柱の単位長当たりの全散乱断面積および後方散乱断面積を求めよう。以下の議論では遠距離散乱電磁界のみに着目する。

まず、全散乱断面積  $C_T$  は、半径方向に散乱される全電力と円柱に垂直な入射電力の成分との比によって定義することができる。すなわち、

$$C_T = \frac{\int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^{(s)} \times \mathbf{H}^{(s)*} \} \cdot \mathbf{i}_r \right] r d\varphi}{-\left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*} \} \cdot \mathbf{i}_r \right]} \quad (25)$$

ただし、 $\mathbf{i}_r$  は半径方向の単位ベクトルを表わす。

一方、後方散乱断面積  $C_B$  は、円柱が入射波源の方へ散乱されて戻ってくる電力をあらゆる方向に一様に再放射しているとみなしたときの全散乱断面積によって定義される。すなわち、

$$C_B = \frac{2\pi r \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*} \} \cdot \mathbf{i}_r \right]_{\varphi=\pi}}{-\left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*} \} \cdot \mathbf{i}_r \right]} \quad (26)$$

$C_T$  および  $C_B$  を入射波が  $E$  波の場合および入射波が  $H$  波の場合について求める、それぞれ、つぎのようになる。

### I) 入射波が $E$ 波の場合

$$C_T = \frac{4}{E_0^2 \lambda_1 \cos^2 \theta_i} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m^{(s)}|^2 + \eta_1^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m^{(s)}|^2 \right] \quad (27)$$

$$C_B = \frac{4}{E_0^2 \lambda_1 \cos^2 \theta_i} \left[ \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-j)^m A_m^{(s)} \right|^2 + \eta_1^2 \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-j)^m B_m^{(s)} \right|^2 \right] \quad (28)$$

ただし、

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \quad (29)$$

また、 $A_m^{(s)}$  および  $B_m^{(s)}$  は式 (17) で与えられる。

### II) 入射波が $H$ 波の場合

$$C_T = \frac{4}{\eta_1^2 H_0^2 \lambda_1 \cos^2 \theta_i} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m^{(s)}|^2 + \eta_1^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m^{(s)}|^2 \right] \quad (30)$$

$$C_B = \frac{4}{\eta_1^2 H_0^2 \lambda_1 \cos^2 \theta_1} \left[ \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-j)^m A_m^{(s)} \right|^2 + \eta_1^2 \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-j)^m B_m^{(s)} \right|^2 \right] \quad (31)$$

ただし、 $A_m^{(s)}$  および  $B_m^{(s)}$  は式 (22) で与えられる。

## 5. 検討

ここで、円柱が軸方向に運動することによって、その散乱特性がどのように変化するかを定量的に知るために、特別の場合として、真空中を一様に運動している等方性プラズマ円柱の散乱特性を数値的に検討しよう。ただし、簡単のために、円柱の半径  $\rho$  は入射平面波の波長に比べて十分小さいものとする。すなわち、 $\lambda_1 \rho \ll 1$  および  $\lambda_2 \rho \ll 1$  なる条件が成り立つものとする。

さて、等方性プラズマの場合には、 $\epsilon_2$  および  $\mu_2$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_2 &= \epsilon_0 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega'^2} \right] \\ \mu_2 &= \mu_0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \gamma (1 - \beta \sin \theta_1) \omega \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$\omega_p$  および  $\omega'$  は、それぞれ、プラズマ周波数およびプラズマ円柱の静止座標系で測った入射波の角周波数を表わす。

$\lambda_1 \rho \ll 1$  および  $\lambda_2 \rho \ll 1$  なる条件が満たされる場合には、式 (13) で与えられる散乱電磁界は  $m = 0$  および  $m = \pm 1$  の項によって近似することができる：以下では、 $\omega/\omega_p = \sqrt{2}$  として、後方散乱断面積  $C_B$  と入射角  $\theta_1$  および円柱の速度との関係を数値的に検討する。まず、後方散乱断面積と入射角  $\theta_1$  との関係を、 $\beta$  をパラメータとして、図示すると、入射波が  $E$  波の場合に

は図2のようになり、また、入射波がH波の場合には図3のようになる、ただし、図において、 $F_B$  は  $C_B$  を  $\frac{\pi^2}{8} (k_1 \rho)^3 \rho$  によって正規化した値を表わす。

入射波がE波の場合には、一般に、 $F_B$  は  $\theta_i$  の正負各一点で0となり、その間の一点で一つの極大値をとる。この極大値は  $\beta = 0$  のときには  $\theta_i = 0$  で起こるが、 $\beta$  が増加するにつれて、極大値の起こる点は  $\theta_i > 0$  の方にずれ、極大値は次第に増大する。一方、入射波がH波の場合には、 $F_B$  は  $\beta$  が小さい間は一般に一つの極小値をもち、この極小値は  $\beta$  の増加とともに次第に減少する。 $\beta$  がある値に達すると、入射波がE波の場合と同様に、 $F_B$  は  $\theta_i$  の二点で0となり、その間で一つの極大値をとるようになる。

つぎに、 $F_B$  と  $\beta$  との関係を図示すると、入射波がE波の場合には図4のようになり、また入射波がH波の場合には図5のようになる。まず、入射波がE波の場合を考えると、 $\theta_i = 0^\circ$  のときには、 $F_B$  は  $\beta = 0$  で極小値をとり、 $\beta$  の絶対値が増加するにしたがって単調に増加する。 $\theta_i = 30^\circ$  のときには  $F_B$  は  $\theta_i = 0^\circ$  の場合に比べてかなり異なった傾向を示す。すなわち、 $\theta_i = 30^\circ$  の場合には、 $F_B$  は  $\beta < 0$  の範囲では非常に小さい値をとり、 $\beta > 0$  の範囲では  $\beta$  の増加とともに急激に大きくなる。一方、入射波がH波の場合には、図5に示すように、 $F_B$  には極大値および極小値の両方が現われる。すなわち  $\theta_i = 0^\circ$  のときには、 $F_B$  は  $\beta = 0$  において極大値をとり、その両側で極小値0をとる。 $\theta_i = 30^\circ$  の場合には、 $\beta < 0$  の領域における極小値はなくなり、 $\beta > 0$  の領域における極小点をえると、 $F_B$  は急激に増大する。

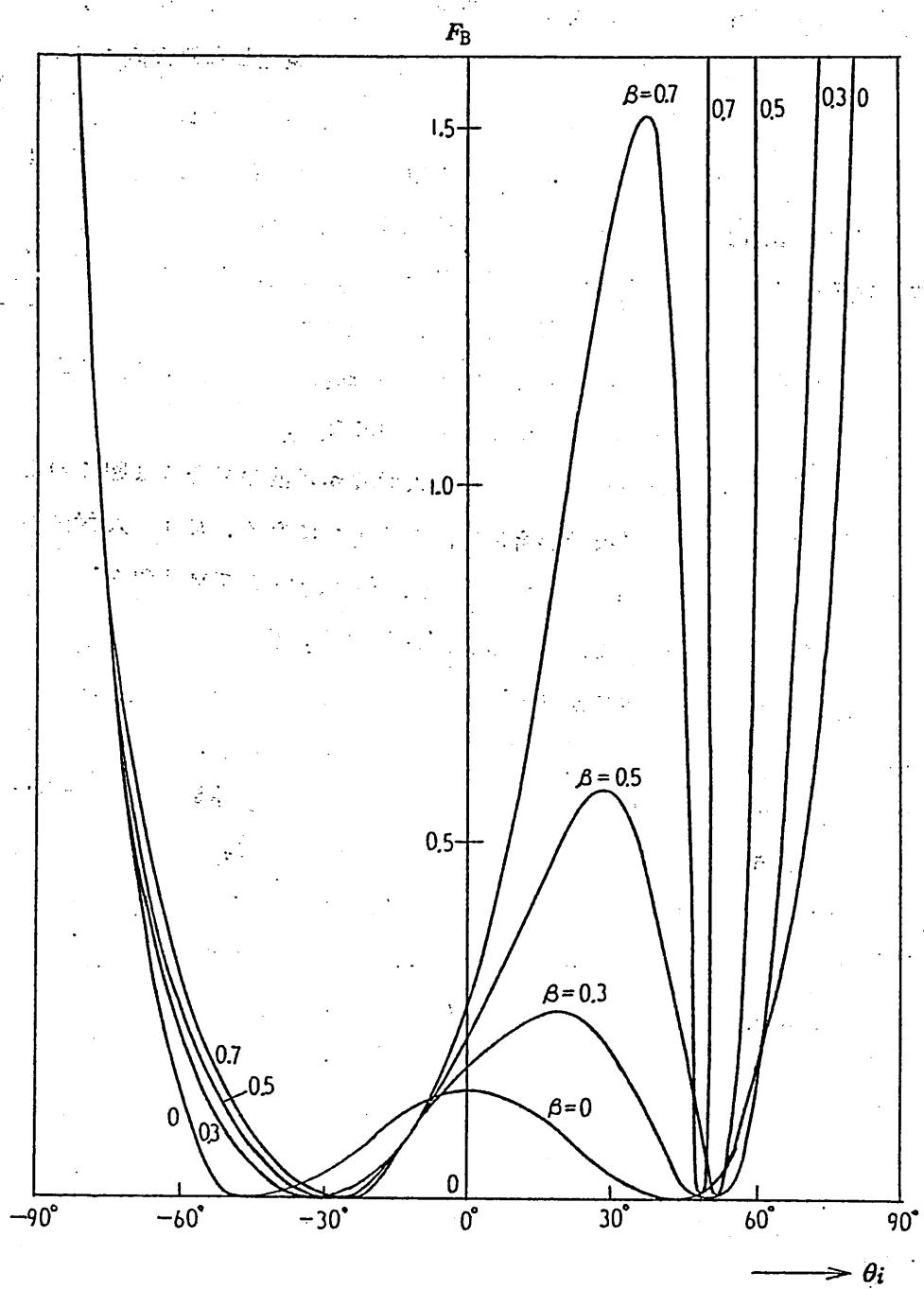


図 2 後方散乱断面積と入射角との関係  
(入射波が  $E$  波の場合)

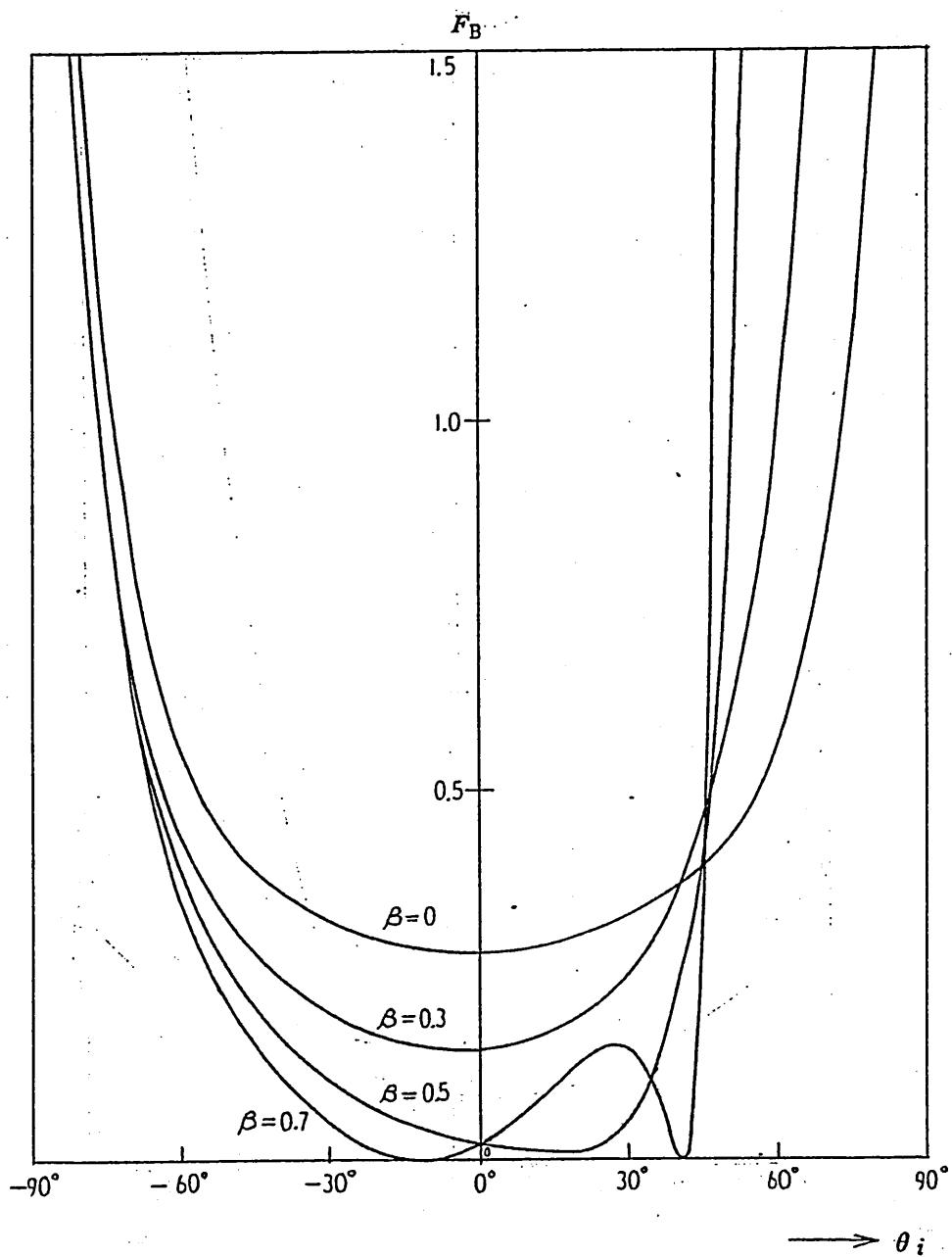


図 3 後方散乱断面積と入射角との関係(入射波がH波の場合)

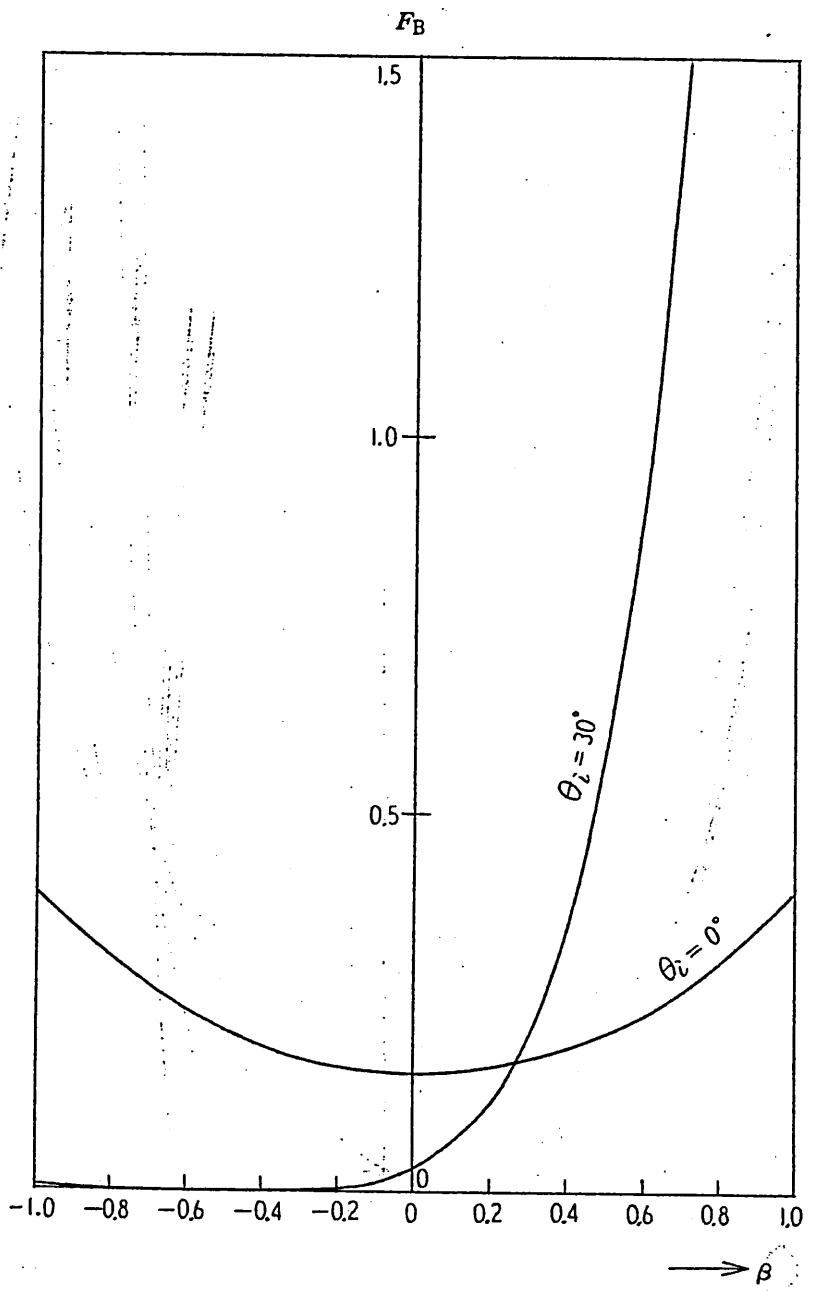


図 4 後方散乱断面積と速度との関係(入射波がE波の場合)

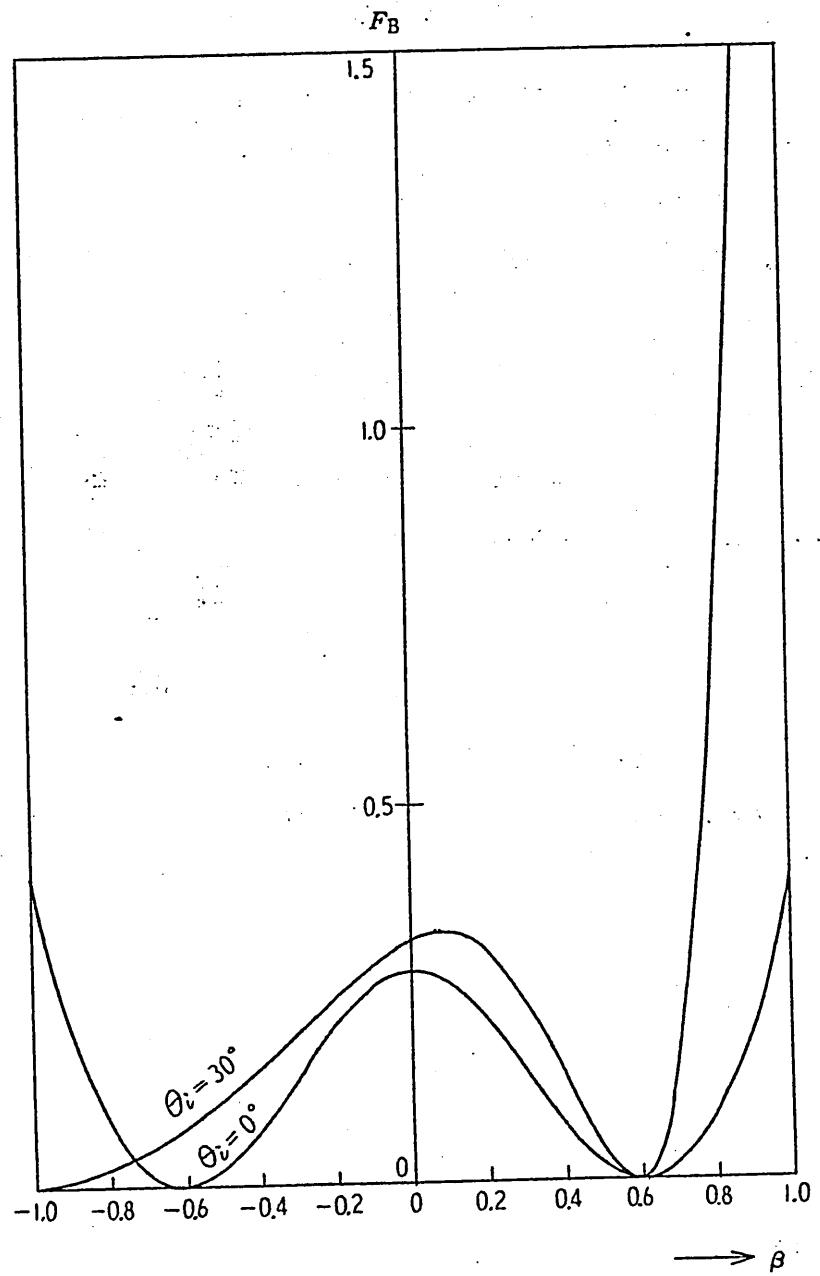


図 5 後方散乱断面積と速度との関係（入射波が  $H$  波の場合）

## 6. むすび

本論文では、軸方向に一様に運動している、任意の等方媒質からなる無限長円柱による平面電磁波の散乱について考察した。まず、準備として、等方性媒質に対する Maxwell-Minkowski の方程式の齊次解を円筒座標を用いて求めた。つぎに、入射波が  $E$  波の場合および  $H$  波の場合について、散乱電磁界および円柱内部の電磁界を決定し、散乱断面積の一般式を導いた。最後に、円柱の運動によって円柱による散乱がどのように変化するかを定量的に知るために、等方性プラズマからなる円柱が真空中を運動する場合を考え、後方散乱断面積と入射角および円柱の速度との関係を数値的に検討した。その結果、円柱の運動によって興味深い現象が現われることがわかった。

## 謝辞

終わりに、日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授、同熊谷信昭助教授、ならびに常々ご討論いただく板倉研究室の方々に深謝する。

## 文 献

- (1) 塩沢俊之, 竹中俊幸, 熊谷信昭: 一様に運動している無限長円柱による平面電磁波の散乱”, 信学論(B), 51-B, 4, p. 141 (昭43-04)
- (2) T.Shiozawa : “Electromagnetic scattering by a moving small particle”, J.Appl.Phys., 39, 7, p.2993 (June 1968).
- (3) 塩沢俊之: “運動微小円体による平面電磁波の散乱”, 信学論(B), 51-B, 8, p. 395 (昭43-08).
- (4) 塩沢俊之: “外部静磁界に沿って運動している微小プラズマ円体による散乱”, 信学論(B), 52-B, 1, p. 41 (昭44-01).
- (5) T.Shiozawa : “Electromagnetic scattering by a small plasma ellipsoid moving along the external static magnetic field”, J.Appl.Phys. (Communications), 40, 1 p. 435 (Jan. 1969).
- (6) 塩沢俊之: “運動物体によるレーレー・ガス散乱”, 昭和44年度電気四学会連合大会講演論文集, 1349.
- (7) J.R.Wait : “Scattering of a plane wave from a circular dielectric cylinder at oblique incidence”, Can. J. Phys. 34, p. 189 (Feb. 1955)
- (8) C.T.Tai : “The dyadic Greens function for a moving isotropic medium”, IEEE Trans. Antennas and Propagation (Communications), AP-13, 3, p. 322 (March 1965)
- (9) R.C.Costen and D.Adamson : “Three-dimensional derivation of the electromagnetic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary”, Proc. IEEE, 53, 9, p. 1181 (Sept. 1965).

輻射科学研究会資料

誘電体板装荷・矩形導波管  
分岐回路について

滝 猪一

六 島 克

森 啓真

(大阪府立大学工学部)

昭和44年9月26日

## 1 緒 言

二つの矩形導波管を正面同志で接合させ、その共通壁に導波管の短辺と同寸法の巾及び管軸方向に或る長さをもつスロットをもうけると、このスロットで結合された導波管分岐回路は Short Slot 形（または Riblet 形）結合器として知られており Short Slot Hybrid Coupler とも云われている。この形の結合器について理論的考察は今までに種々の論文で取扱われているが、1) ~ 4) しかし、実際に 3 dB 方向性結合器を設計する場合は入力電力の反射を遮減するための補償をいくつかの方法で行っている。

便宜的な方法として結合部導波管の長辺の巾を狭めること 又スロットの中央に調整用ポストを挿入することによって所期の目的を達している。これらの問題の理論的解析は論文 5) に報告されている。

一般に二つの導波管を一つのスロットで正面同志結合させた導波管分岐回路は電力分配比 0 dB と入力定在波比 1 を同時に満足する周波数特性を得ることが出来ず、理想的なる 3 dB 方向性結合器はつくり得ない。筆者等はこれらの問題を別の方法を用いて取扱い、検討を加えてみた。即ち、結合部導波管に誘電体板を装荷する方法を取ってみた。6), 7) この方法の概要は従来のポストによる集中容量の代りに誘電体板による分布容量を装荷することによって電力分配比を 0 dB とし入力定在波比を 1 とする、合せて使用周波数帯域を拡げることである。

本報告では二つの導波管の共通隔壁にスロットをもうけ、このスロット部に誘電体板をはめこんだ方向性結合器を理論的に解析している。計算の結果はスロットの長さ及び誘電体板の誘電率と厚みを適当に選ぶと電力分配比が 0 dB で、且つ入力定在波比が 1 に近い 3 dB 方向性結合器が得られることを示している。この結果は実験で確認された。従って本方法は理想的な 3 dB 方向性結合器の定量的な設計に有効な手段となるだろう。

## 2. S マトリックスによる表示

巾  $a$  なる二つの導波管が長さ  $\ell$  なる誘電体板を装荷したスロットによって結合された状態を図 1 に示している。回路の遷移面を図 2 の様に  $S_1$  面に定め、二つの  $S_1$  面の間を領域 II とし 又この領域を結合部と称している。領域 II 以外の導波管内部を領域 I とし 領域 I から領域 II への入射波及び反射波の振巾を  $a_i$ ,  $b_i$  ( $i = 1 \sim 4$ ) とする。

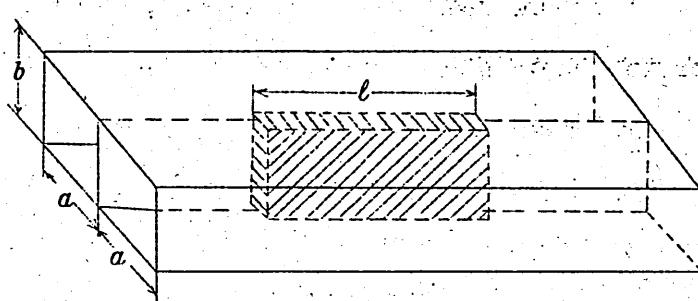


図 1 スロット部に誘電体板を装荷した導波管分岐回路

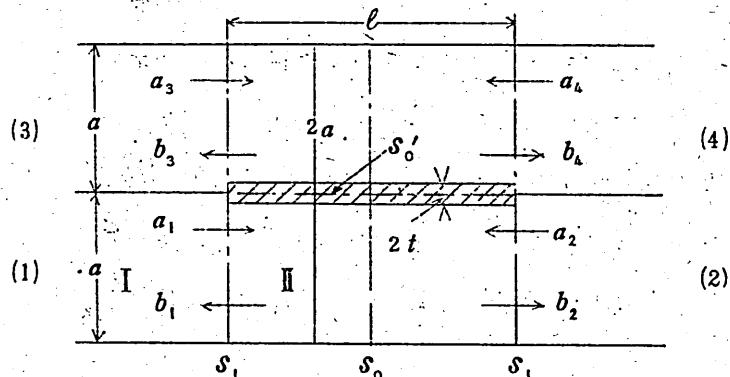


図 2 遷移面  $S_1$  上の入射及び反射波

構造の対称性から S マトリックス表示は(1)式によって与えられる。

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

図 2 に示すように二つの対称面  $S_0$ ,  $S_0'$  が存在する事からこれ等の S マトリックスの要素は対称面に磁気的及び電気的短絡をおいた境界条件から求められる。簡単なために導波管の隔壁及び誘電体板の厚みが小さいと仮定する。S マトリックスの各要素は：

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = \frac{1}{4} (e^{j\alpha} + e^{j\beta}) \\ S_{12} &= \frac{1}{4} (e^{j\alpha} - e^{j\beta} + 2e^{-j\theta}) \\ S_{21} &= \frac{1}{4} (e^{j\alpha} - e^{j\beta} - 2e^{-j\theta}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda_g} l, \quad \alpha = -2\tan^{-1} Y_0, \quad \beta = -2\tan^{-1} Y_s \quad (3)$$

で与えられる。ここで  $\lambda_g$  は結合部の  $H_{20}$  モードの管内波長で、 $jY_0$ ,  $jY_s$  はそれぞれ図 3(a), (b) に示す様に対称面  $S_0$  が磁気的及び電気的短絡したときの基準化入力アドミッタンスである。

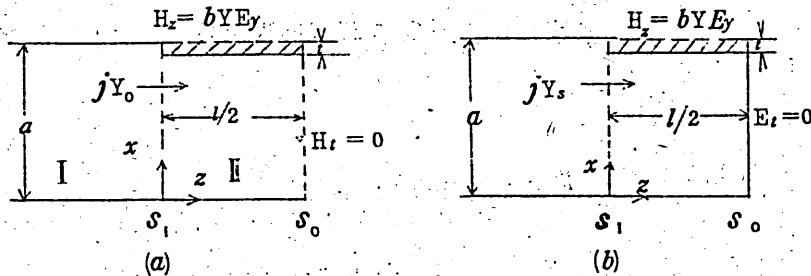


図 3. 基準化入力アドミッタンスに対する境界条件

図 3 に示す様な境界条件で電磁界問題を解いて  $Y_0$ ,  $Y_s$  を求めれば(1)~(3) 式によって S マトリックスの要素が計算出来、この導波管系の特性が明らかになる。

ある。

### 3. 電磁界の解析

電磁界の解析によって図3に示されている $Y_0$ ,  $Y_s$ を求める。今 $Z < 0$ の領域から単位基本波が入射したとすると、 $Z < 0$ 及び $Z > 0$ なる領域I, IIの電磁界成分は次のHスカラー関数より導かれる。

$$\begin{aligned}\phi_I &= \cos \frac{\pi}{a} x e^{-\Gamma_1 z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_m \cos \frac{m\pi}{a} x e^{\beta_m z} \\ \phi_{II} &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \theta_n x \frac{\cosh \Gamma_n (z - \ell/2)}{\sinh \Gamma_n (z - \ell/2)}, \quad n = 2n' + 1\end{aligned}\quad (4)$$

$$\Gamma_m = \sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 - (\frac{2\pi}{\lambda})^2}, \quad \Gamma_n = \sqrt{\beta_n^2 - (\frac{2\pi}{\lambda})^2}. \quad (5)$$

ここで、 $\Gamma_m$ ,  $\Gamma_n$ はそれぞれ巾 $a$ 及び $2a$ なる導波管の伝播定数,  $R_m$ ,  $D_n$ はモード振巾を表わす。又(4)式及び以下の解析において式中の上下の項はそれぞれ $Y_0$ ,  $Y_s$ に対応するものとする。 $\beta_n$ の値は誘電体板を装荷した矩形導波管の

万能解の解析から導かれ

$$\frac{\beta_n a}{\tan \beta_n a} = w^2 \mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) t a$$

の関係から決定される。もし誘電体板が結合部にマウントされていないならば $\beta_n$ は $\frac{n\pi}{2a}$ ( $n = 1, 3, 5, \dots$ )となる。今、領域Iでは $H_{10}$ モードのみ、領域IIでは $H_{10}$ 及び $H_{30}$ モード迄伝播し得るものとする。電界の $y$ 成分 $E_y$ と磁界の $x$ 成分 $H_x$ は

$$E_y = jw\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad H_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad (6)$$

によって(4)式から導かれる。

遷移面での横方向界成分の連続条件から次の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
& j \gamma_i \frac{Y_0}{Y_s} \int_0^a E_y(x') \sin \frac{\pi}{a} x' \sin \frac{\pi}{a} x dx' - \sum_{m=2}^{\infty} \gamma_m \int_0^a E_y(x') \sin \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{m\pi}{a} x dx' \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n'}{C_n} \cdot \frac{\tanh \Gamma_n l/2}{\coth \Gamma_n l/2} \cdot \int_0^a E_y(x') \sin \beta_n x' \sin \beta_n x dx' \\
& C_n = 1 + \frac{\sin 2\beta_n a}{2\beta_n a} \quad (7)
\end{aligned}$$

(7)式を部分積分して、次のフーリエ級数展開を用いて有限項で打ち切る。

$$\frac{\cos \beta_1 x' - \cos \beta_1 a}{1 - \cos \beta_1 a} = \sum_{n=1}^{\infty} q_1,_{2n-1} \cos \frac{2n-1}{2a} \pi x'$$

$$\sin \beta_1 x = \sum_{n=1}^{\infty} p_1,_{2n-1} \sin \frac{2n-1}{2a} \pi x$$

$$\sin \beta_3 x = \sum_{n=1}^{\infty} p_3,_{2n-1} \sin \frac{2n-1}{2a} \pi x$$

$$\cos \beta_3 x' = \sum_{n=1}^{\infty} q_3,_{2n-1} \cos \frac{2n-1}{2a} \pi x'$$

$$n \geq 5$$

$$\sin \beta_n x \approx \sqrt{c_n} \sin \frac{n\pi}{2a} x$$

$$\cos \beta_n x \approx \sqrt{c'_n} \cos \frac{n\pi}{2a} x$$

$$c'_n = 1 + \frac{\sin 2\beta_n a}{2\beta_n a} \quad (8)$$

を得る。

更に次の関係式を用いると、

$$\gamma_m / m\pi = (1 - k_m) / a; \quad m \geq 2$$

$$\frac{\Gamma_n'}{\Gamma_{ns}'} = \frac{\Gamma_{no}'}{\Gamma_n} = \Gamma_n \cdot \frac{\tanh \Gamma_n l/2}{\coth \Gamma_n l/2},$$

$$k_1'' = 1 - \left\{ \frac{\Gamma_1'}{\beta_1 c_1} (1 - \cos \beta_1 a) p_{11} q_{11} + \frac{\Gamma_3'}{\beta_3 c_3} p_{31} q_{31} \right\}$$

$$k_3'' = 1 - \left\{ \frac{\Gamma_3'}{\beta_3 c_3} p_{33} q_{33} + \frac{\Gamma_1'}{\beta_1 c_1} (1 - \cos \beta_1 a) p_{13} q_{13} \right\}$$

$$k_{13}'' = - \left\{ \frac{\Gamma_3'}{\beta_3 C_3} p_{11} q_{33} + \frac{\Gamma_1'}{\beta_1 C_1} (1 - \cos \beta_1 \alpha) p_{11} q_{13} \right\}$$

$$k_{33}'' = - \left\{ \frac{\Gamma_1'}{\beta_1 C_1} (1 - \cos \beta_1 \alpha) p_{13} q_{11} + \frac{\Gamma_3'}{\beta_3 C_3} p_{33} q_{31} \right\} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{2} x' \sin \frac{m\pi}{a} x = \frac{(1/2) \sin(\pi/a) x}{\cos(\pi/a) x' - \cos(\pi/a) x} \quad (10)$$

(7)式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{2a}{\lambda_g} \cdot \frac{Y_0}{Y_s} \right\} \int_0^a E_y' \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{a} x' dx' + k_2 \int_0^a E_y' \sin \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{a} x dx' \\ & + k_1'' \int_0^a E_y' \sin \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{\pi}{2a} x' dx' + k_3'' \int_0^a E_y' \sin \frac{3\pi}{2a} x \cos \frac{3\pi}{2a} x' dx' \\ & + k_{13}'' \int_0^a E_y' \sin \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{3\pi}{2a} x' dx' + k_{31}'' \int_0^a E_y' \sin \frac{3\pi}{2a} x \cos \frac{\pi}{2a} x' dx' \\ & = \frac{1}{2} \int_0^a E_y' \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{2a} x}{\cos \frac{\pi}{2a} x' - \cos \frac{\pi}{2a} x} \right\} dx' \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{ここで } E_y'(x') = \frac{d}{dx'} E_y(x'), \quad \gamma_1 = j \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (12)$$

次に変数変換を行い

$$\cos \frac{\pi x'}{2a} = \frac{1}{2} (1 + X'), \quad \cos \frac{\pi x}{2a} = \frac{1}{2} (1 + X) \quad (13)$$

そして  $E_y'(x') dx' = G(x') dx'$  とおくと

$$\begin{aligned} g(X) &= (B + F_{13}) + A(X+1) + (C+F_{31})(X^2+2X) + D(X^3+3X^2+X-1) \\ &+ E(X^4+4X^3+3X^2-2X-1) + \dots = \int_{-1}^1 \frac{G(X')}{X'-X} dX' \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。ここで

$$A = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2a}{\lambda_g} \cdot \frac{Y_0}{Y_s} \right\} \int_{-1}^1 G(X') (X'^2+2X'-1) dX'$$

$$B = \frac{1}{2} k_1'' \int_{-1}^1 G(X') (X'+1) dX'$$

$$C = \frac{1}{2} k_3'' \int_{-1}^1 G(X') (X'^3+3X'^2-2) dX'$$

$$D = \frac{1}{2} k_2'' \int_{-1}^1 G(X') (X'^4+4X'^3+2X'^2-4X'-1) dX'$$

$$E = \frac{1}{2} k_5'' \int_{-1}^1 G(X') (X'^5+5X'^4+5X'^3-5X'^2-5X'+1) dX'$$

$$F_{13} = \frac{k_{13}''}{k_3''} \cdot C$$

$$F_{31} = \frac{k_{31}''}{k_1''} \cdot B \quad (15)$$

(14)式で表示される形の積分方程式の解は Lewin によって次のように与えられている。

$$G(X') = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-X'^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-X^2}}{X-X'} g(X) dX + \frac{K}{\pi \sqrt{1-X'^2}} \quad (16)$$

ここで  $K$  は境界条件によって与えられる積分定数である。

(16)式に(14)式を代入して未知関数  $G(X')$  を求め、この  $G(X')$  を(15)式に代入すると  $A, B, C, D, E \dots \dots$  に関する齊次連立一次方程式を得る。有限の値の  $A, B, C \dots \dots$  が存在する条件、即ち連立方程式の係数の行列式が 0 となる条件より  $Y_0, Y_s$  が求められる。

今、 $k_2$  及び  $k_{31}''$ ,  $k_{3s}''$  近考慮に入れ、それ以外の  $k_m, k_n''$  を無視すると  $Y_0, Y_s$  の近似式として次式を得る。

$$\frac{Y_0}{Y_s} = \frac{\lambda_E}{2a} \cdot \frac{k_1 u + k_2}{k_3 u + k_4} \quad (17)$$

ここで

$$\begin{aligned} k_1 &= (15+5.75b) + v (-6.2311+6.2344bc) \\ &\quad + \delta_2 \{ (10.5-12.625b) + v (-42.867+42.867bc) \} \\ &\quad + \delta_5 \{ (4.687-1.1328b) + v (-3.3215+3.3215bc) \} \\ &\quad + \delta_2 \delta_5 \{ (-296.72-204.43b) + v (45.291-45.291bc) \} \\ k_2 &= (-13+5.75b) + v (12.016+17.25c+6.2344bc) \\ &\quad + \delta_2 \{ (12.5-12.625b) + v (-5.4922-37.875c+42.867bc) \} \\ &\quad + \delta_5 \{ (14.688-1.1328b) + v (-9.5862-3.3984c+3.3215bc) \} \\ &\quad + \delta_2 \delta_5 \{ (457.03-204.43b) + v (-492.31-613.30c-45.291bc) \} \\ k_3 &= (-1+1.75b) + v (0.015625-0.015625bc) \\ &\quad + \delta_2 \{ (-5.5+11.375b) + v (0.13281-0.13281bc) \} \\ &\quad + \delta_5 \{ (-0.3125+0.74219b) + v (0.096436-0.096436bc) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_2 \delta_5 \{ (18.281 - 18.809b) + v (0.81848 - 0.81848bc) \} \\
k_1 &= (35 + 1.75b) + v (-9.7344 + 5.25c - 0.015625bc) \\
& + \delta_2 \{ (-3.5 + 11.375b) + v (-70.492 + 34.125c - 0.13281bc) \} \\
& + \delta_5 \{ (9.6875 + 0.74219b) + v (-8.2776 + 2.2266c - 0.096436bc) \} \\
& + \delta_2 \delta_5 \{ (-847.97 - 18.809b) + v (20.089 - 56.426c - 0.81848bc) \}
\end{aligned}$$

ここで  $u = k_1'' - 1$

$$v = k_3''$$

$$b = \frac{k_{31}''}{k_1''}, \quad c = \frac{k_{13}''}{k_3''}$$

$$\delta_2 = \frac{k_2}{16 - 8.56k_2}, \quad k_2 = 1 - \sqrt{1 - (a/\lambda)^2}$$

$$\delta_5 = \frac{k_5''}{16 - 7.44k_5''}, \quad k_5'' = 1 - \frac{\Gamma_5'}{\beta_5} \sqrt{\frac{C_5'}{C_5}} \quad (10)$$

(18)式において  $\delta_2, \delta_5$  の積として表わされている項は補正項を示している。

より正確な値を求めるには多数の補正項を取り入れて計算すればよいが、通常  $\delta_2, \delta_5$  を取れば相当正確な値が得られる。

(17)式の  $Y_0, Y_s$  より

$$\alpha = -2 \tan^{-1} Y_0, \quad \beta = -2 \tan^{-1} Y_s, \quad \theta = 2\pi\ell/\lambda_g \quad (20)$$

によって  $\alpha, \beta, \theta$  が求まるから、これ等の値を(20)式に代入する事によって S マトリックスの要素が求められる。従って  $d_B$  で表した結合度  $C$ 、正方向電力分配比  $F$  及び入力  $V S W R \rho$  は次式から計算される。

$$\begin{aligned}
C &= 20 \log |1/s_{14}| (dB), \quad F = 20 \log |s_{12}/s_{14}| (dB) \\
D &= 20 \log |s_{14}/s_{13}| (dB), \quad \rho = \frac{1 + |s_{11}|}{1 - |s_{11}|} \quad (21)
\end{aligned}$$

ここで

$$|s_{11}| = |s_{13}| = 0.5 |\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})|$$

$$|s_{12}| = 0.5 \sqrt{\{1.5 - 0.5 \cos(\alpha - \beta)\} + \{\cos(\alpha + \theta) - \cos(\beta + \theta)\}}$$

$$|S_{14}| = 0.5 \sqrt{\{1.5 - 0.5 \cos(\alpha - \beta)\} - \{\cos(\alpha + \theta) - \cos(\beta + \theta)\}} \quad (22)$$

#### 4. 結果並びに検討

3節の電磁界の解析で導いた計算式に基づいて  $a/\lambda$  を 0.55 から 0.80 まで変化させた場合の  $Y_0, Y_s; \alpha, \beta; \alpha - \beta, \alpha + \theta, \beta + \theta; F, \rho$  の特性を求め、

図 4～10 に図示している。但し計算式の補正項は  $P_2 > 0$  に対しては  $k_2$  まで考慮に入れて、それ以外の  $k_m$  及び  $k_{n0''}, k_{ns''}$  については無視している。又  $P_2 = 0$  に対しては  $k_2$  及び  $k_{n0''}, k_{ns''}$  まで考慮に入れた文献 4)の式を用いている。

隔壁の厚さは  $2t' = 0.1\text{cm}$  を用いているので  $\Gamma_n$  の値は解析した式の  $a$  の代りに、  
 $a_w = a + t'$  を用いて計算している。図 8 の測定では 4GHz 帯の標準導波管  $a \times b$   
 $= 5.81 \times 2.91\text{cm}$  を用いている。

図 4 IC パラメータ  $P_1 = \ell/a, P_2 = \frac{a_w}{a} \cdot \frac{t}{a} (\epsilon_r - 1)$  とした  $Y_0, Y_s$  の  $a/\lambda$  に関する特性を示している。 $P_1 = 1.222$  で  $P_2$  の値が増大するとき  $Y_0, Y_s$  の共振の極が  $a/\lambda$  の低い方に移動することが判る。 $P_2$  を変えることは誘電体板の厚さ  $2t$  及び誘電率  $\epsilon_r$  を変えることに相当する。

図 5 に図 4 と同じパラメータをとったときの反射係数の位相角  $\alpha, \beta$  が表わされている。 $\theta$  は結合部における  $H_0$  の電気角で結合部の長さ  $\ell$  から求められる。 $\theta$  は  $P_2$  の値の変化にかかわりなく  $P_1 = \ell/a$  によって定まった周波数特性をとる。

図 6 に図 5 で示されている  $\alpha, \beta, \theta$  によって合成された  $\alpha + \theta, \alpha - \beta$  及び  $\beta + \theta$  の値が図示されている。(22)式から判るように  $\alpha + \theta$  と  $\beta + \theta$  が  $\pi$  (一定) の線に対称なる特性を示すとき、 $|S_{12}| / |S_{14}| = 1$  の条件をとり、同時に、 $\alpha - \beta$  が  $\pi$  に近い値をとれば 入力 VSWR は 1 に近い値となる。

A, B, C で示されている三つの特性曲線において、B が最もよい値をとっていることが判る。

図 7 に A, B, C が図 6 に示した  $\alpha + \theta, \alpha - \beta, \beta + \theta$  の値をとった場合の電力分配比  $F(dB)$  と入力 VSWR  $\rho$  を示している。A, B, C の特性のうち

Bの特性が最もよいことが更に明瞭となる。

図8に図7のBの特性を実線F及び破線ρで示している。このときP<sub>1</sub>及びP<sub>2</sub>は次のような値 P<sub>1</sub>=1.222, P<sub>2</sub>=0.0433996を得る。計算値の特性に極めてよく一致する測定値はP<sub>1</sub>=1.265, P<sub>2</sub>=0.0433996のときで○印の点がF(dB)を、×印の点がρの値を示している。計算に用いたP<sub>1</sub>の値と測定に用いたP<sub>1</sub>の値との間に少しの変差が生じていることが判る。

図9にP<sub>1</sub>の変差によるF(dB)及びρの値がP<sub>2</sub>=0としてP<sub>1</sub>を種々の値に変えることによって起る特性を調べている。図に示されている①から④はP<sub>1</sub>の値を1.033, 1.222, 1.463及び1.721と変えたときのF及びρの特性を示している。

図10に①から③の場合についてα-βの値を示しているが、この図からもP<sub>1</sub>=0, P<sub>2</sub>=1.222のとき最良であることがつきとめられる。ここで誘電体板を装荷することによって、α-βには大きな値の変化が生じないことが判る。

以上のことにより理想的3dB方向性結合器はP<sub>2</sub>=0のときP<sub>1</sub>の値を変化させてα-βの最適状態を求め、次のFの正の値をF=0とするように誘電体板を装荷することによって実現される。ここでは周波数の項はa/λ正規化されているが導波管の長辺aの値を変えることによって所要の周波数帯域に対する特性が得られる。

## 5. 結 言

Short Slot Hybrid Couplerにおいてスロット部に誘電体板(長さ7.1cm厚さ0.4cm比誘電率2.25)を装荷した場合の電力分配比F及び定圧波比ρを理論から近似計算した。

理論結果はl=7.35cmにおける測定値とよく一致した。a/λに対するパラメータP<sub>1</sub>=l/a, P<sub>2</sub>= $\frac{a_w}{a} \cdot \frac{l}{a} (\epsilon_r - 1)$ の種々の値に対する計算結果を求め

ておくことにより必要な Coupler が設計でき、与えられた中心周波数に対し  
て広帯域 3 dB Coupler の構成が可能になる。

## 文 献

- 1) H. J. Riblet, I. R. E., 40, 180 (1952).
- 2) N. Marcuvitz, Waveguide Handbook, Chapt. 7,  
McGraw-Hill, (1948).
- 3) H. Kaden, A. E. Ü., 15, 61 (1961).
- 4) 守口、六島、森，“細げきで結合された導管分岐回路の特性”  
信学誌, 47, 153 (1964).
- 5) I. Lucas, A. E. Ü., 21, 339 (1967).
- 6) 守口、六島、森，“3 dB 方向性結合器の広帯域化”電気関係学会  
関西支部連大 (Nov. 1962).
- 7) 六島、森、福島、祐田, 信全大 (Oct. 1967).
- 8) 石田、虫明, 信学誌, 43, 943 (1960).
- 9) L. Lewin, Trans. I. R. E., MTT-9, 321 (1961).

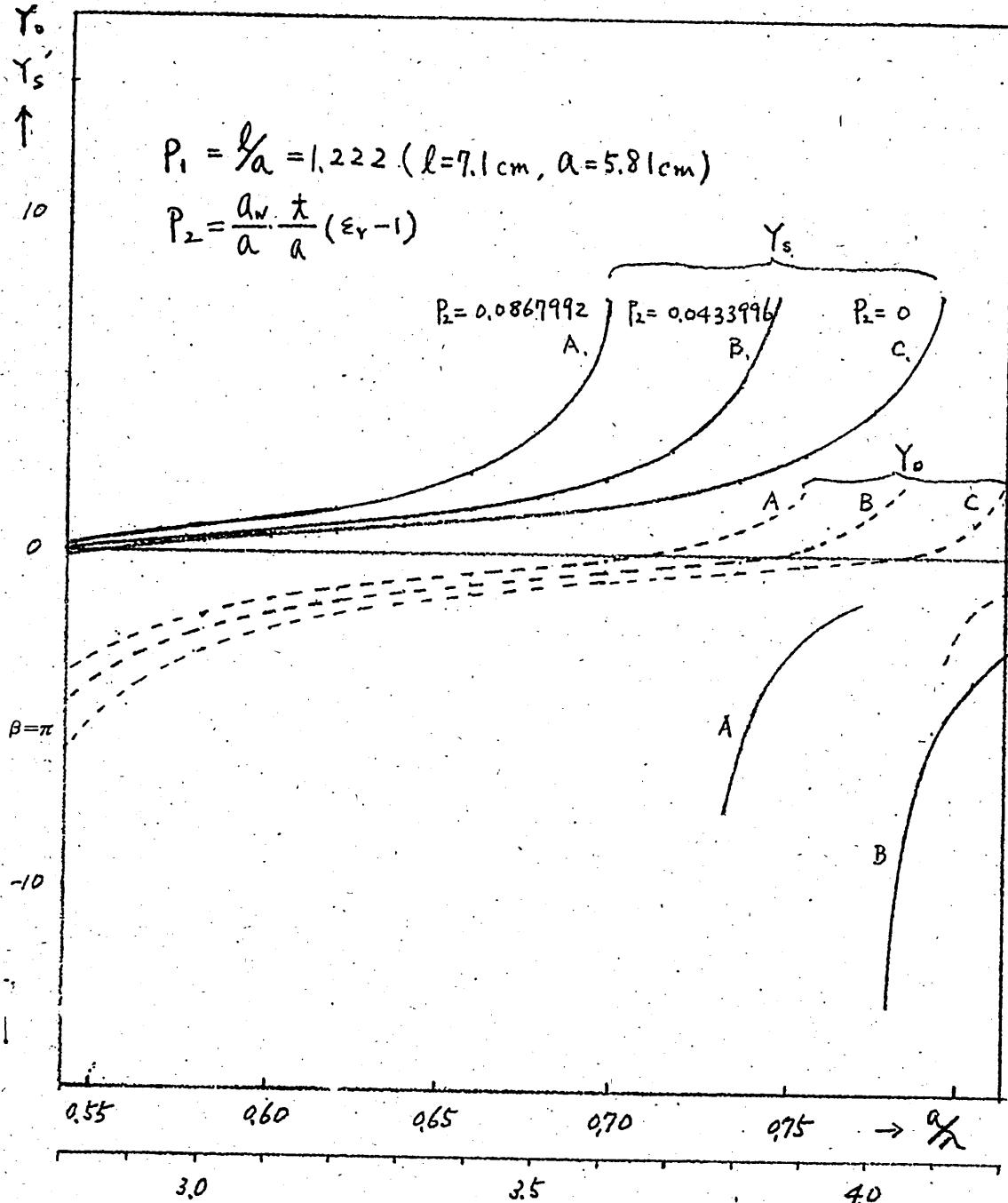


図4 図3の対称面  $S_0$  の開放及び短路等価サセプタンス  $Y_0$ ,  $Y_s$   $\rightarrow f(\text{GHz})$   
 $(a=5.81\text{cm})$

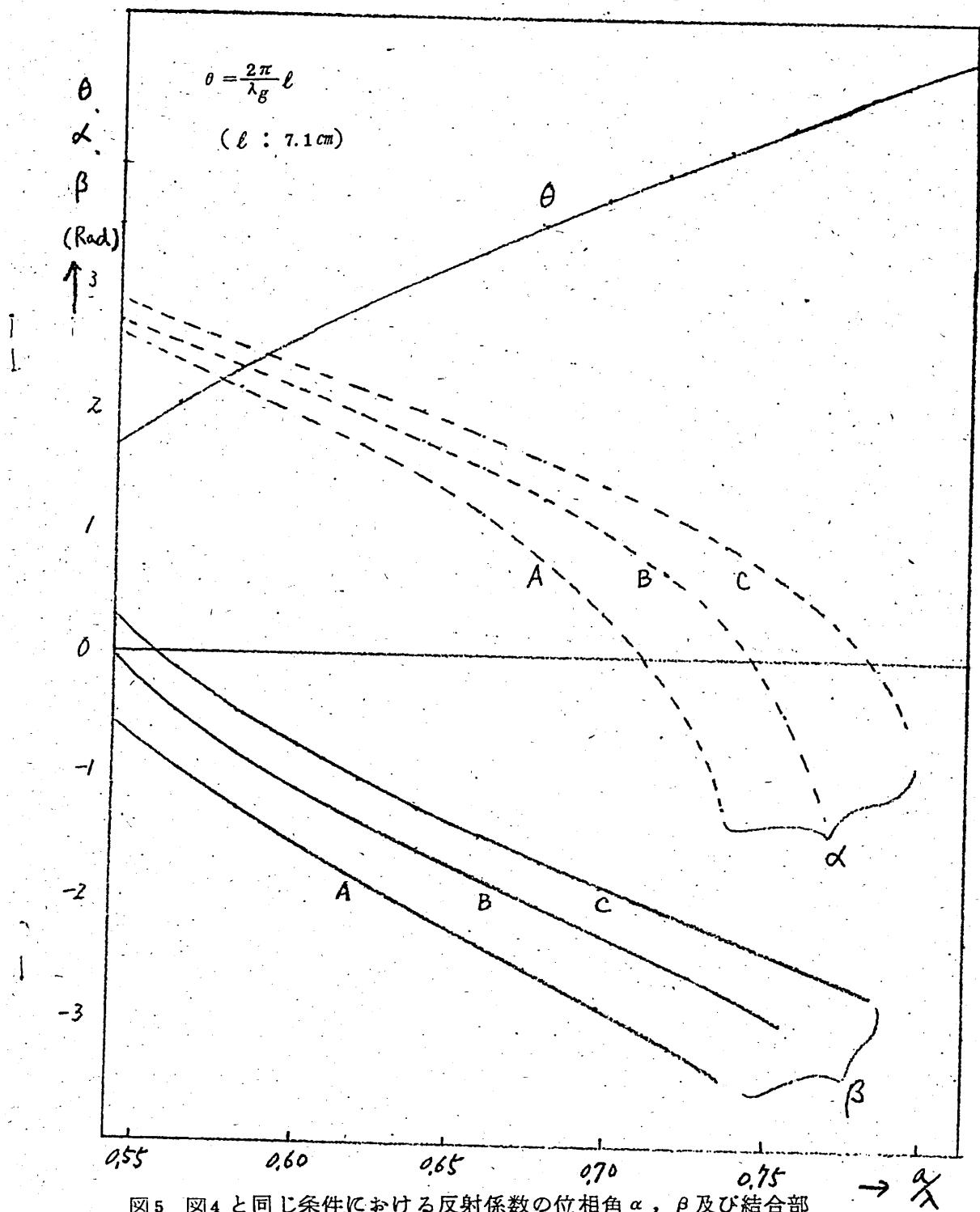


図5 図4と同じ条件における反射係数の位相角  $\alpha$ ，  $\beta$  及び結合部  
における  $H_{20}$  波の電気角  $\theta$

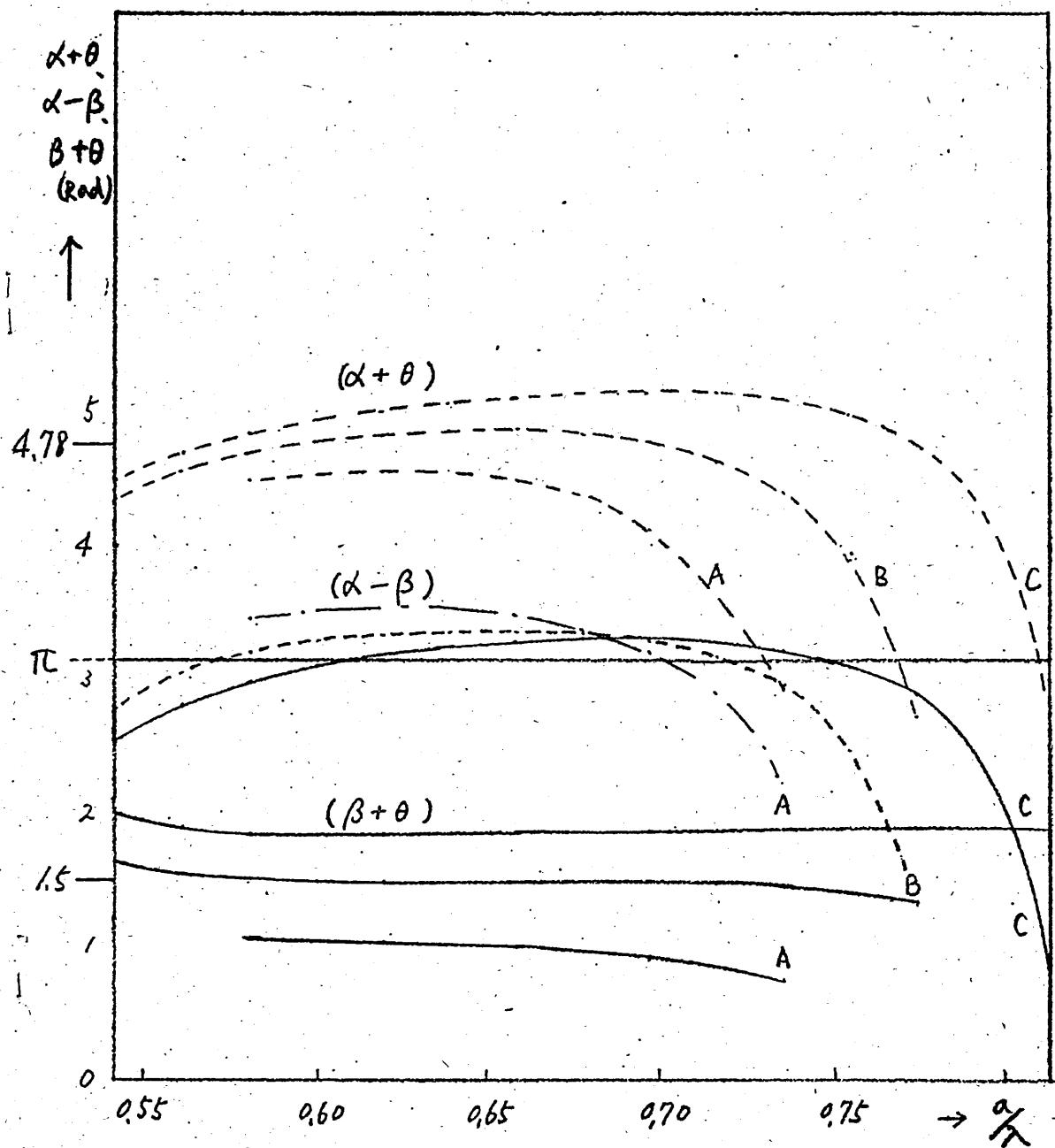


図 6 図 5 の  $\alpha$ ,  $\beta$  及び  $\theta$  の値から得られた  $(\alpha + \theta)$ ,  $(\alpha - \beta)$  及び  $(\beta + \theta)$  の値

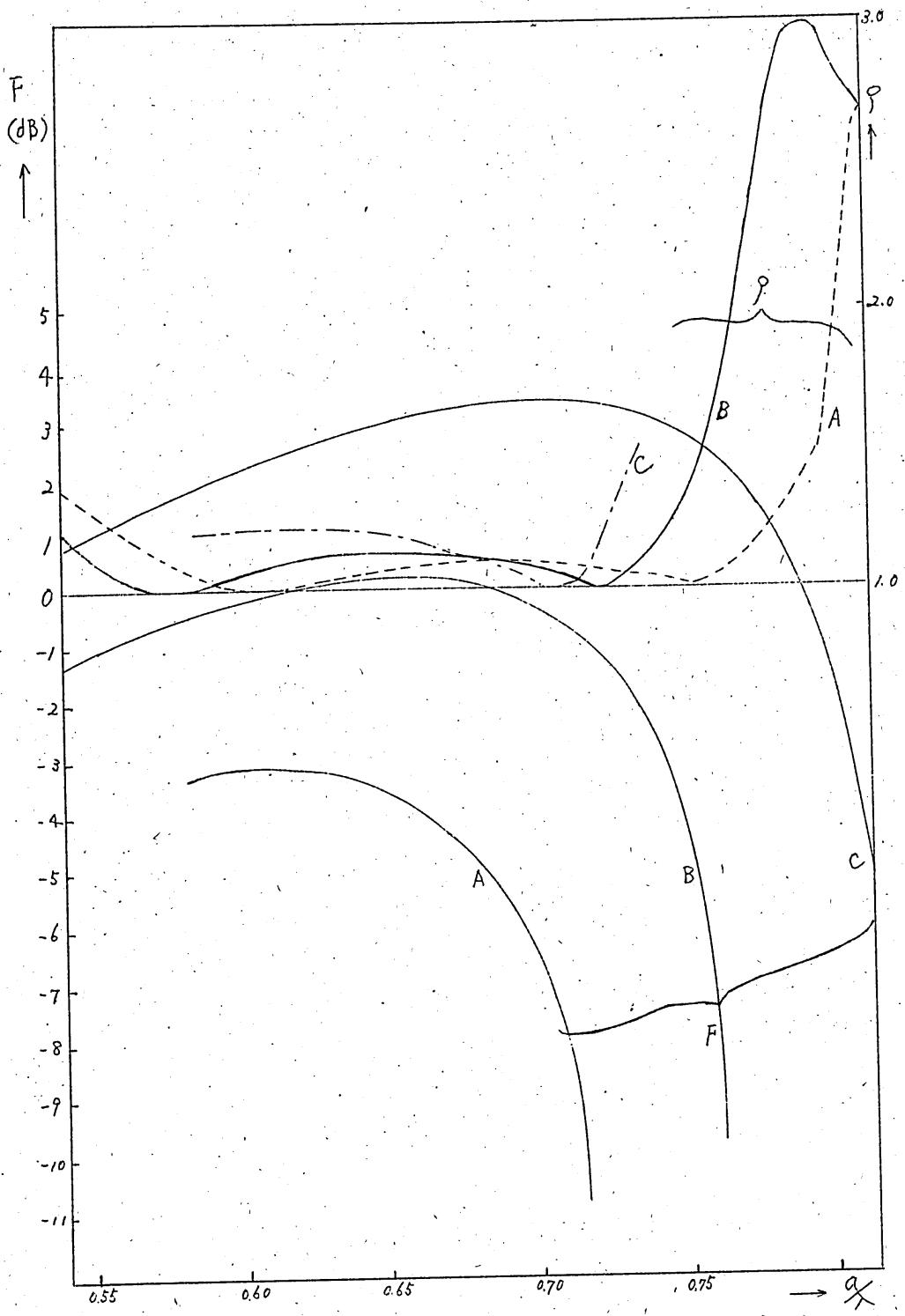


図7 図6の  $(\alpha + \theta)$ ,  $(\alpha - \beta)$  及び  $(\beta + \theta)$  を(2), 図式を代入して求めた  
電力分配比  $F$  及び入力 VSWR  $\rho$ .

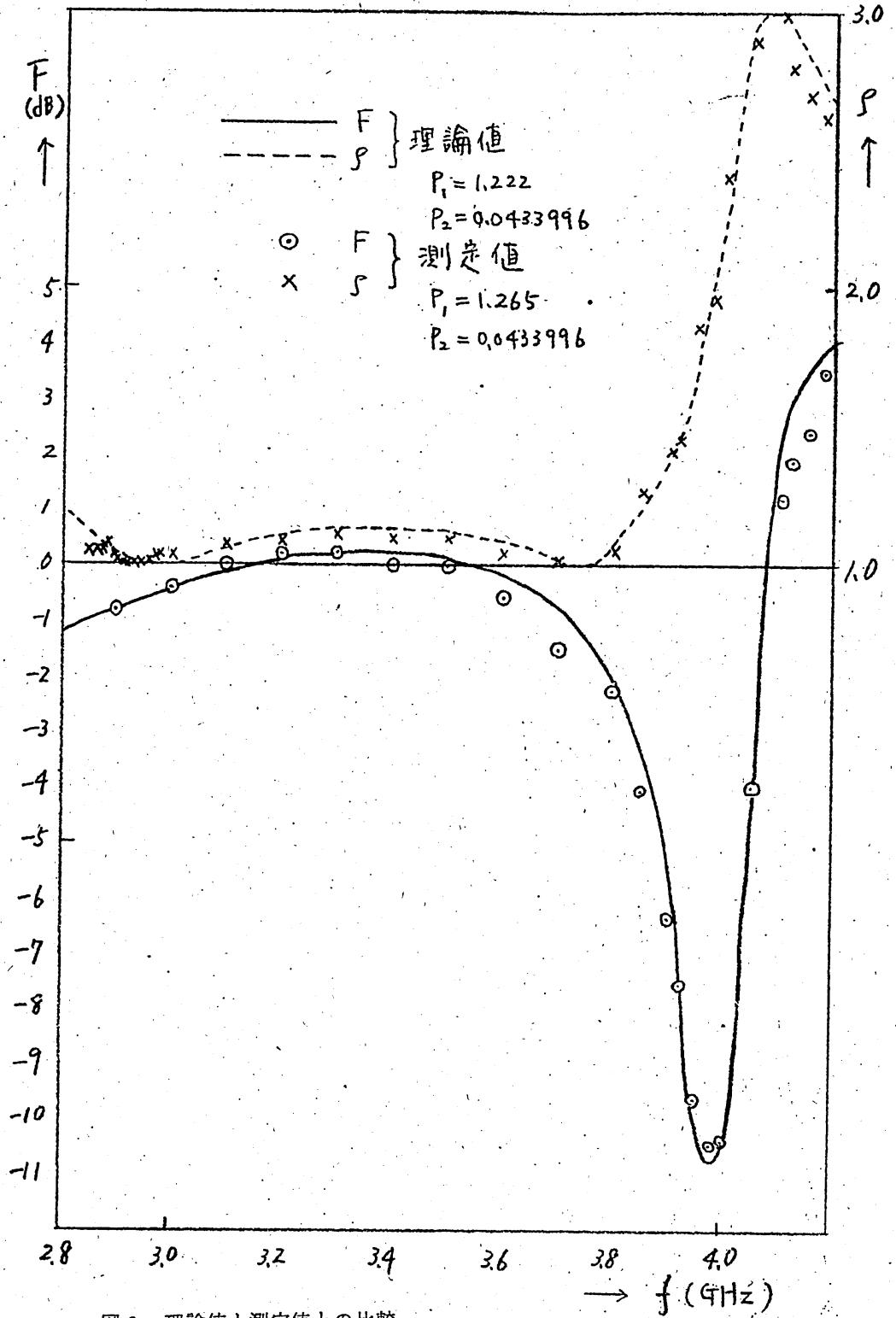


図 8 理論値と測定値との比較

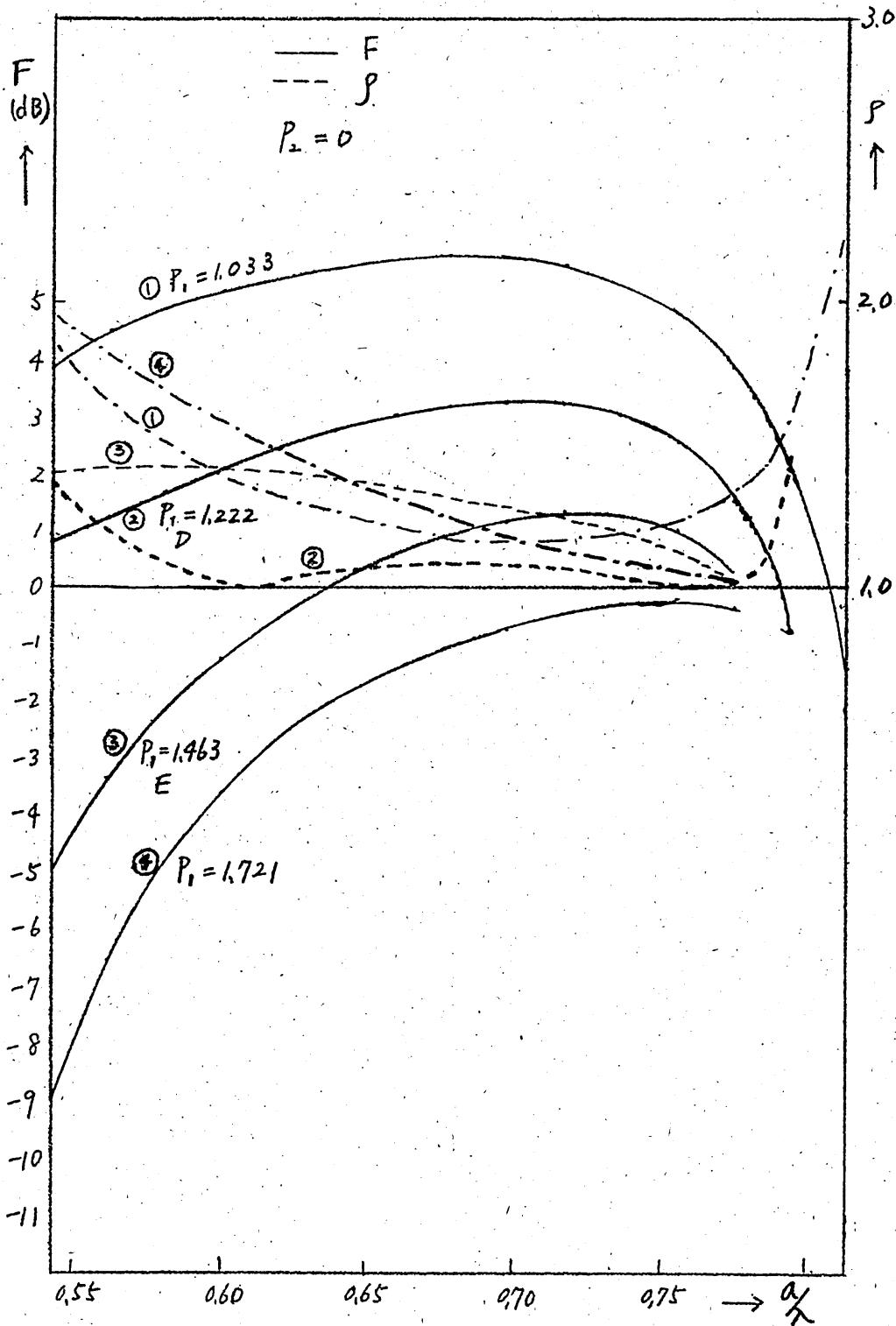


図9 パラメータ  $P_2 = 0$ ,  $P_1$ を4通りの値(①, ②, ③及び④)とし  $a/\lambda$ を変化した場合の電力分配比  $F$ と入力VSWR  $\rho$ .

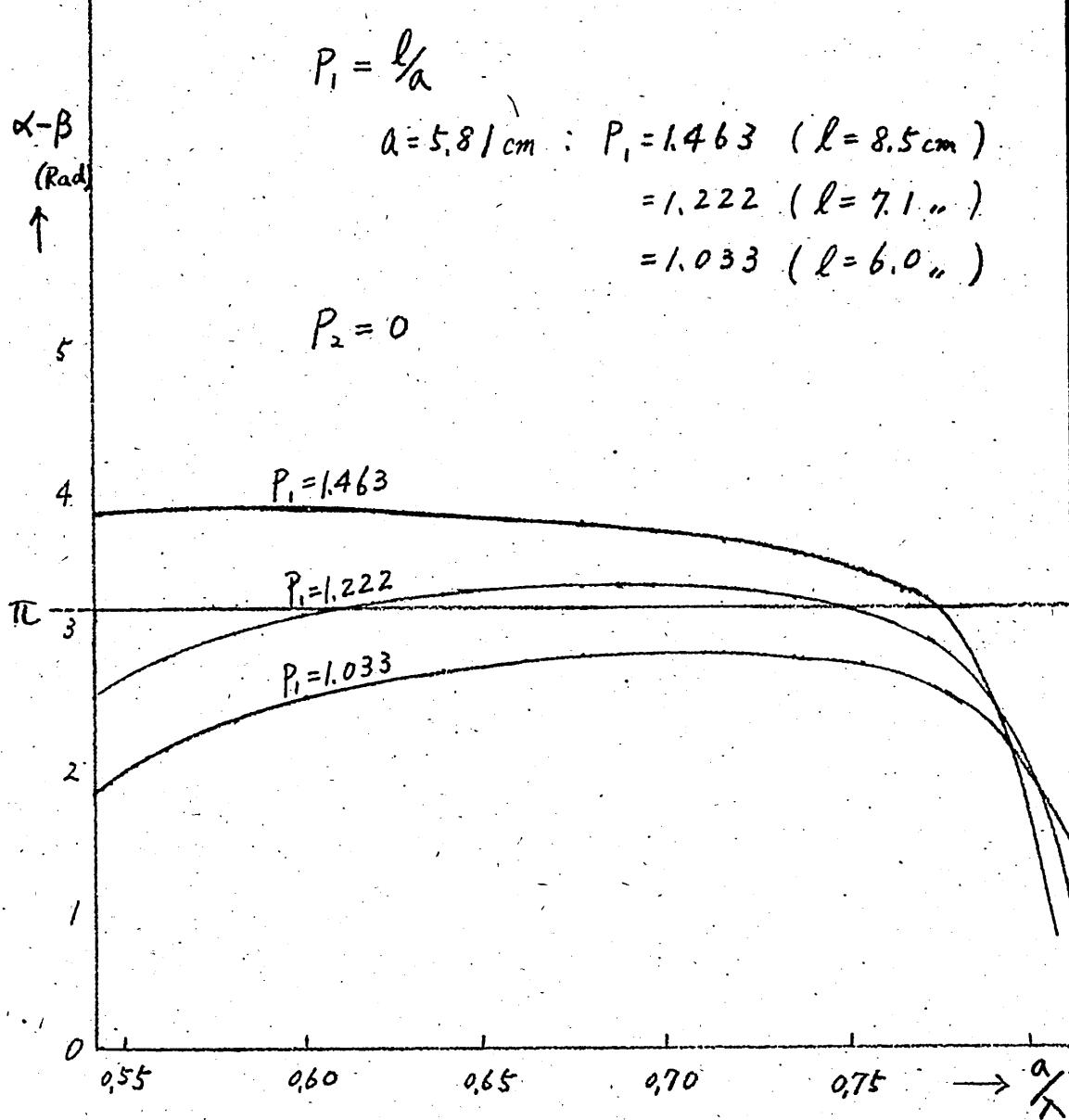


図 10 図 9 の①、②、③の場合の  $a/\lambda$  の関数 ( $\alpha - \beta$ )

輻射科学研究会資料

異方性結晶を用いた  
進行波形光変調器の側帯波について

高島 元

末田 正

牧本 利夫

(大阪大学 基礎工学部)

昭和44年 9月 26日

(松下電器産業株式会社 中央研究所)

# 異方性結晶を用いた進行波形光変調器の側帯波について

## §1. まえがき

温度補償を行なった Peters 形の進行波形光変調器では、光学結晶に異方性を用いた場合、常光線と異常光線の二つの偏波に走行時間差があるため、速度整合が完全に行なわれた場合でも、変調能率に周波数特性が生じ、高周波限界のあることを報告した<sup>(1)</sup>。この現象を側帯波の視点から見ると、上下二つの側帯波の非対称となって現われる。ここでは、この側帯波についての解析を行う。

## §2. 進行波形光変調器

進行波形光変調器の構成は図 1 に示す。自然複屈折の温度変化を補償するために、結晶を二つに分割して、間に半波長板を挿入している。

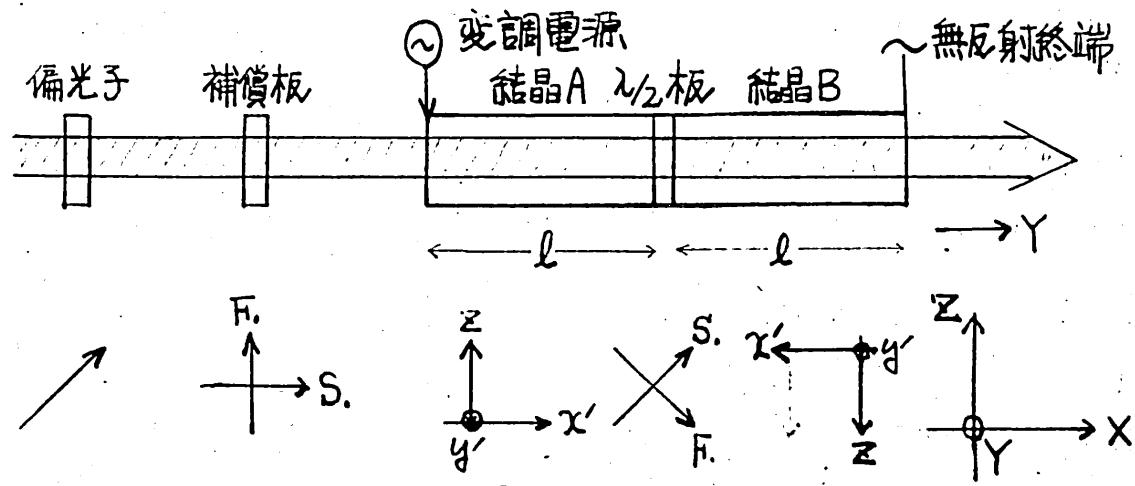


図. 1

(1)

各素子の軸方向は、光の進行方向に向かって見て左と  
その方向を図1の下に示している。

光学結晶として、 $45^\circ$ Cut  $\mp 2m$  結晶(左とえばKDP)  
を用いた場合について考える。

いま、結晶に入射する光のうちで、最初結晶Aの中ではZ偏波(常光線)で位相変調を受け、結晶BではX偏波(異常光線)となり変調を受けずに出光する成分を偏波Xとし、その振幅を $E_x$ とする。また、逆に結晶AでY偏波、結晶BでZ偏波となる成分を偏波Yとし、その振幅を $E_z$ とする。

位相変調を受けた、 $E_x, E_z$ を求めるとそれぞれ次式  
で与えられる。

$$E_x = (E_0/2) \sin [wt - \delta/2 + \varphi - \varphi_p \sin(\omega_m t + u)] \quad (1)$$

$$E_z = (E_0/2) \sin [wt - \delta/2 + \varphi + \varphi_p \sin(\omega_m t + u + 2\theta)] \quad (2)$$

ただし、 $E_0$ は入射光の最大振幅。 $w$ は光波の角周波数。 $\delta$ は補償板によるPhase retardation。 $\varphi$ は変調結晶の自然複屈折率によるPhase retardationで  $\varphi = (2\pi/\lambda) \times (n_o + n_e) l$  で与えられる。さらに、 $\varphi_p, u$ および $\theta$ は、結晶のZ軸と平行に角周波数 $\omega_m$ の変調電圧  $V = V_m \times \sin \omega_m t$  を印加した場合には、次式で与えられる。

(2)

$$\varphi_p = \frac{\pi}{V_{\pi}} \frac{V_m \sin u}{u} \quad (3) \quad u = \frac{\omega_m l}{2} \left( \frac{n_o}{c} - \frac{1}{U_m} \right) \quad (4)$$

$$\Theta = \frac{\omega_m l}{2} \left( \frac{n_e}{c} - \frac{1}{U_m} \right) \quad (5)$$

ここで、 $V_{\pi}$ は結晶 $l$ に対する半波長電圧。 $l$ は結晶長の半分の長さ。 $n_o, n_e$ はそれぞれ常光線、異常光線の屈折率。 $c$ は真空中の光速度。 $U_m$ は変調波の位相速度である。

(1)式および(2)式において、 $E_x, E_z$ が受けける位相変調の位相が、逆相にならず $\delta$ だけずれている。これが側帶波の非対称性の原因となっている。

### 3.3 側帶波

側帶波を求めるために、変調度が小さいものとして、すなわち $\varphi_p \ll 1$ として、2次以上のBessel関数を無視して、(1),(2)式をそれぞれFourier分析すると次式が求まる。ただし、いま二つの偏波の位相差が問題であるから、 $\varphi$ および $\varphi_i$ を省略しても、結果に影響を与えないで、簡単のために省略する。

$$E_x = (E_0/2) \{ J_0(\varphi_p) \sin(wt - \delta/2) - J_1(\varphi_p) [\sin(\overline{w} + \overline{w}_{mt} t - \delta/2) - \sin(\overline{w} - \overline{w}_{mt} t - \delta/2)] \} \quad (6)$$

(3)

$$E_Y = (E_0/2) \left\{ J_0(\varphi_p) \sin(\omega t + \delta/2) + J_1(\varphi_p) [\sin(\overline{\omega} + \omega_m)t + \delta/2 + 2\theta] - \sin(\overline{\omega} - \omega_m)t + \delta/2 - 2\theta] \right\} \quad (7)$$

ここに、 $J_k(\varphi_p)$ は $\varphi_p$ をArgumentとするk次のオーナー種Bessel関数である。

(6),(7)式のそれぞれのオーナー項は搬送波、オニ項は上側帶波、オミ項は下側帶波を表わしている。

ここで、上下二つの側帶波が分離する機構を明らかにするために、検光子を通す前に、搬送波および側帶波が、ビのようないい波になっているかを、(6),(7)式から調べてみる。

(i)  $\delta = 0$  すなわち補償板を取り除いた場合と、(ii)  $\delta = \pi/2$  すなわち補償板が4分の1波長板の場合について、光の進行方向をY軸とし、偏波X、偏波Yにそれぞれ平行な軸をX軸、Y軸として、 $\theta$ が変化したときの、側帶波の偏波の変化のようすを図示すると、図2で表わすことができる。

ただし、 $J_0$ は搬送波、 $J_1^+$ は上側帶波、 $J_1^-$ は下側帶波を表し、またそれぞれは、 $\theta$ が変化するとともに大きさが変化するがそれは無視している。

図2からわかつることは、搬送波は入射光と同じ偏波で、 $\theta$ が変化しても影響を受けない。上下の側帶波は、 $\theta=0$ 以外では、(i)の場合には、同じ長短軸を持つ左梢円偏波、

(4)

あるいは円偏波である  
が、回転方向が逆回りで  
ある。この場合検光子を  
通しても側帯波の非対称  
性は現われない。

(ii)では、二つの側帯波  
は、それぞれ長短軸の方  
向が逆の梢円偏波となり  
,  $\theta = \pm \pi/4$ では、互い  
に直角方向の直線偏波と  
なる。また、 $\theta$ の正と  
負の場合では上下の側帯  
波の関係が逆になってい  
る。いま、検光子の軸す  
きをX軸と $45^\circ$ の方向に  
定めて、出力光を通して  
観測すると、 $\theta = 0$ 以外

では非対称な側帯波とな  
り、 $\theta = \pm \pi/4$ では完全に一方の側帯波のみとなる。

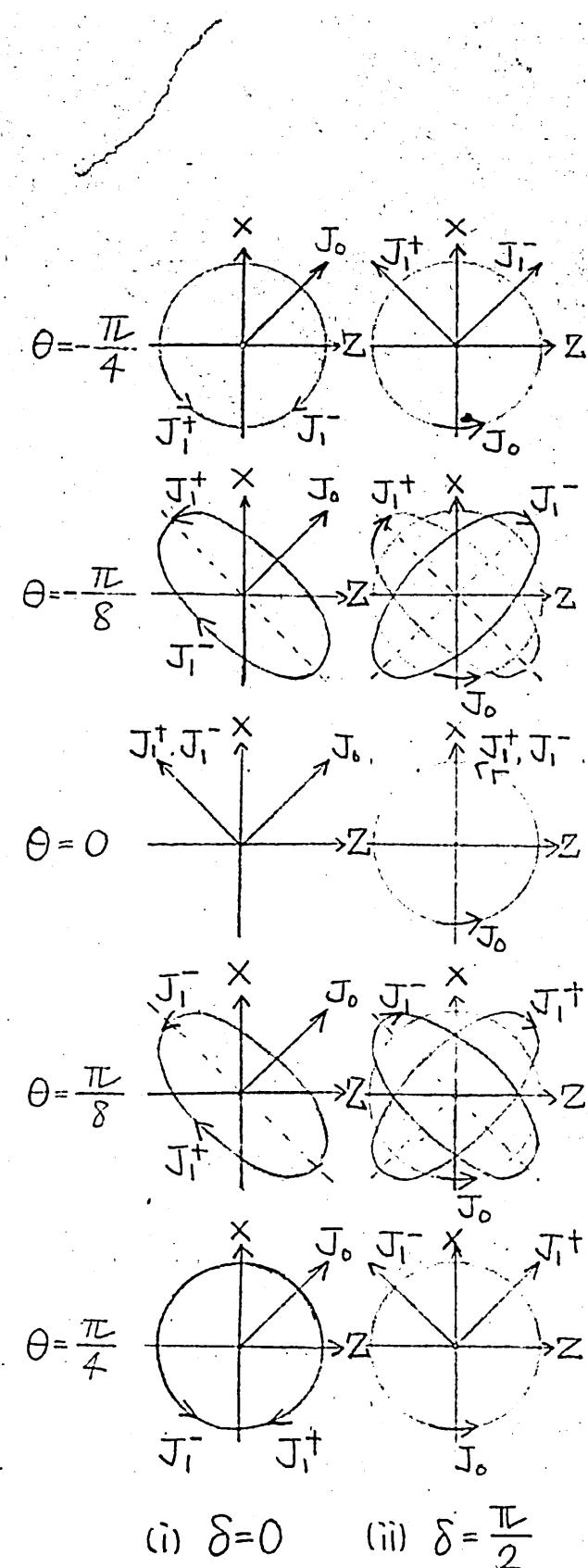


図2.  $\theta$ の値と側帯波の関係

## §4 側帶波の非対称性と速度整合

側帶波の非対称現象は、変調を受ない異常光線の光速度  $C/n_e$  と変調波の位相速度  $v_{ph}$  が異なる場合に発生することがわかった。このことから、逆に側帶波を観測することによって、光速度と変調波の位相速度との関係を知ることができる。いま、この関係を調べるために、まず直交ニコルとなるように設置した狭光路を通した光波の上、下側帶波の振幅を計算すると、(6), (7)式から

$$E_{out} = (E_x - E_z) / \sqrt{2} = -E_0 [ J_0(\varphi_p) \sin(\delta/2) \cos\omega t \\ - J_1(\varphi_p) \cos(\delta/2 + \theta) \sin\{(\omega + \omega_m)t + \theta\} \\ + J_1(\varphi_p) \cos(\delta/2 - \theta) \sin\{(\omega - \omega_m)t - \theta\} ]$$

が得られる。 (8)

ところで、振波器で実際に観測するのは、光波のエネルギーであるから、上、下側帶波の振幅の自乗平均を考え、それらをそれぞれ  $I^+$ ,  $I^-$  とすると、次式が得られる。

$$I^+ = [E_0^2 J_0^2(\varphi_p)/2] \cos^2\left(\frac{\delta}{2} + \theta\right) \quad (9)$$

$$I^- = [E_0^2 J_1^2(\varphi_p)/2] \cos^2\left(\frac{\delta}{2} - \theta\right) \quad (10)$$

側帶波から、速度整合を調べるには、上、下側帶波の比をとると便利である。そこで  $\delta = \pi/2$  のときの、側帶波の比と変調波の位相速度と周波数特性との関係を、光学

(6)

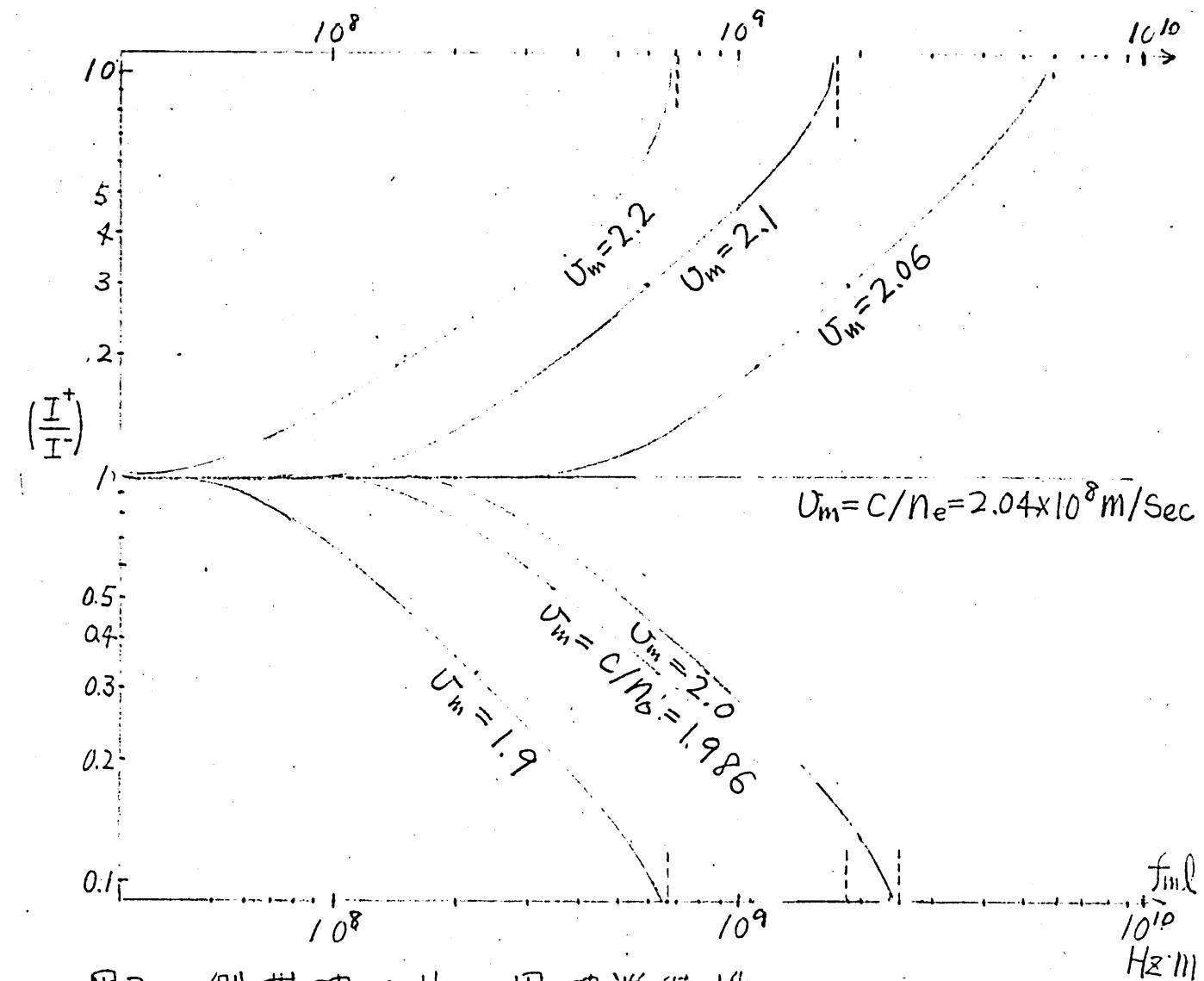


図3. 側帶波の比の周波数特性

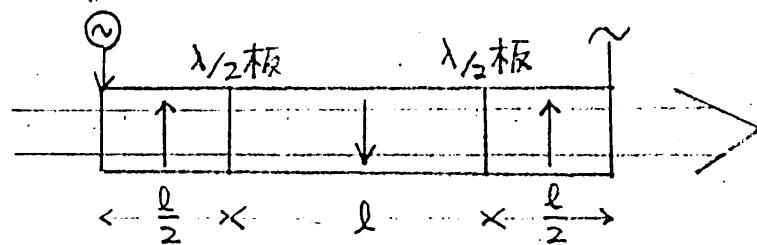
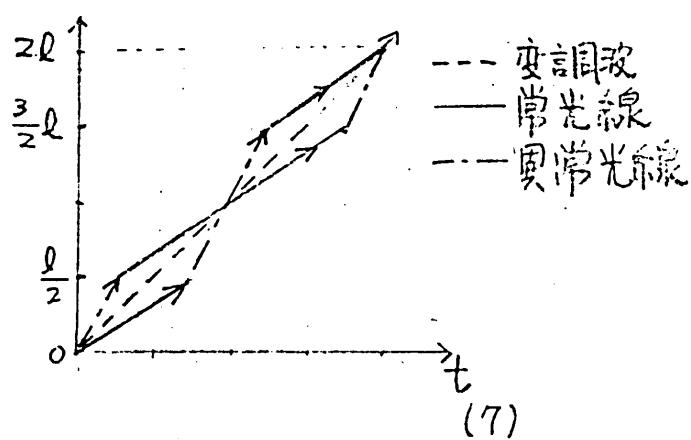


図4. 2段分割 Peters形変調器



(7)

図5. 光波と変調波  
の時間と進行  
距離との関係

結晶として KDP を使用した場合について求めると、図 3 となる。ここでは  $-\pi/4 < \theta < \pi/4$  の範囲内でのみ図示している。破線は、各曲線の漸近線で一方の側帯波だけとなる、 $f_{ml}$  の値を示している。たとえば、 $U_m$  を常光線の光速度に合わせた場合、 $f_{ml} = 1.9 \text{ GHz/m}$  のときは側帯波のみ観測される。

### §5 側帯波と変調能率

先に述べた変調能率の低下を側帯波の側面からみると、変調波の位相速度が常光線の光速度と異なるとき、いわゆる速度不整合の場合には、両方の側帯波は同じ割合でその大きさが小さくなり、異常光線の光速度と異なるときは、側帯波が非対称となり同時に上下の側帯波に位相差が生じ、変調能率の低下となって現われる。

この変調能率の低下を緩和させるために、結晶をさらに分割して、すなわち Peters 形変調器を多段に組合せて、変調波の位相速度を、常光線と異常光線との平均光速度にさせる方法を、先に提案した<sup>(3)</sup>。この場合、偶数に分割したときは、異常光線と変調波の速度が異なっているにかかわらず、偏波 X と偏波 Y には等しい大きさで走行時間差の影響を受けるので、側帯波の非対称現象は起らな

い。このことの説明のために、2段分割の場合の参考図を、図4,5に示す。

### §6 むすび

側帯波を調べることは、光変調の機構を知る有効な手段である。とくに、進行波形光変調では速度整合の調整に有用であることを、側帯波の非対称性について、国際電々の山本氏からも詳しい報告がなされている。<sup>(4)</sup>

この側帯波に関して、单一回路式レーザーを使って実験する予定である。

### (参考文献)

- (1) C.J. Peters: "Gigacycle-Bandwidth Coherent-Light Traveling-Wave Amplitude Modulator." Proc. IEEE. 53, 455 (1965)
- (2) 末田, 後藤, 牧本: "温度補償を行なった進行波形光変調器" 信学会量子エレクトロニクス研究会資料 QE67-30 (1968)
- (3) 後藤, 末田, 牧本: "異方性結晶を用いた進行波形光変調器の位相整合について" 信学会量子エレクトロニクス研究会資料 QE68-40 (1969)
- (4) 山本: "進行波形光変調器における非対称側帯波発

生機構の解析"信学系電子エレクトロニクス研究会資料 QE69-14 (1969)

輻射科學研究會資料

基本モード間隔の2倍  
の周波数での強制  
AMモード同期

宮下 豊勝  
伊東 洋一  
池上 真一

(京都大學工學部)

1969年 9月 26日

## 1. はしがき

ガスレーザの強制同期の研究は、1964年のHargrove, Fork, Pollackらの内部損失変調によるphase lockingの成功以来、今日に至るまで多くの人々によって、理論、実験の両面から研究されている。主な研究を拾うと、1964年にはDiDomenico<sup>(2)</sup>が、1965年にはYariv<sup>(3)</sup>が、考えていくモードにはすべて一樣の利得があり、かつ媒質の非線形性を無視した単純化されたモデルで、内部損失または位相変調を行ったとき、phase lockingが生ずる事を理論的に導いた。1965年には、さらに、Crowell<sup>(4)</sup>が媒質の非線形性によるモード間の結合をも考慮して、内部損失変調によるphase lockingの理論を試みている。さらに、基本モード間隔の倍数の周波数での強制同期の可能性についても言及している。同年HarrisとMcDuffは、Lambの方程式から出発して、定量的にも実験と比較し得るF Mレーザの理論<sup>(5)</sup>を発表し、Ammannらは、F Mレーザの詳しい実験<sup>(6)</sup>を行ない、HarrisとMcDuffの理論結果との比較を行った。1967年、McDuffとHarrisは損失変調したレーザのphase lockingについても同様の理論<sup>(7)</sup>を発表した。以上は、DiDomenicoの理論<sup>(2)</sup>を除いて、すべて、基本モード間隔の周波数での内部変調によるphase lockingについての研究である。最近、平野、木村両氏は、基本モード間隔のn倍の周波数での位相変調による、高次のphase lockingの型と変調周波数との関係を実験的に求めている<sup>(8)</sup>。

本報告では、基本モード間隔の2倍の周波数での損失変調によるphase lockingについて、理論的には、McDuffとHarrisの理論<sup>(7)</sup>をこの場合のに修正して、得られた微分方程式を数値的に解き、実験結果と比較した。理論と実験とは変調周波数の絶対値までは一致しなかったが、相対値はよく一致している。HarrisとMcDuffのF Mレーザの理論<sup>(5)</sup>と、Ammannらの実験<sup>(6)</sup>とは、定量的にはそれほどよい一致を示していない。

その原因の一つに、power-dependent to mode pulling, pushing の項を考慮している事にあると考え、我々の数値解前ではいわゆる combination tone の項以外はすべて考慮に入れている。

## 2. AM 強制同期の基礎方程式とその解

### 2.1. 基本モード 間隔の $k$ 倍の周波数での AM 強制同期の基礎方程式

McDuff と Harris の方法<sup>(7)</sup>に従って求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} & [\dot{\varphi}_n - \Delta\nu - \sigma_n - \beta_n E_n^2 - \sum_{m \neq n} T_{nm} E_m^2] E_n \\ &= -\frac{\alpha_{ckc}}{2L} [E_{n+k} \sin(\varphi_{n+k} - \varphi_n) - E_{n-k} \sin(\varphi_n - \varphi_{n-k})] \\ & \dot{E}_n - [\alpha_n - \beta_n E_n^2 - \sum_{m \neq n} \theta_{nm} E_m^2] E_n \\ &= -\frac{\alpha_a c}{2L} E_n - \frac{\alpha_{ckc}}{2L} [E_{n+k} \cos(\varphi_{n+k} - \varphi_n) + E_{n-k} \cos(\varphi_n - \varphi_{n-k})] \end{aligned} \quad \text{--- (2.1)}$$

但し、 $\Delta\nu = \Delta\Omega - 2\omega_0/k$  ( $\Delta\Omega/2\pi = \frac{c}{2L}$ ,  $\omega_0$ : 変調角周波数)

$\alpha_a$ : one-pass power loss at peak value

$$\alpha_{ckc} = \alpha_a \frac{L}{\ell k \pi} \sin\left(\frac{k\pi l}{2L}\right) \cos\left(\frac{k\pi z_0}{L}\right)$$

$\ell$ : 変調素子の長さ,  $z_0$ : 変調素子の鏡からの距離

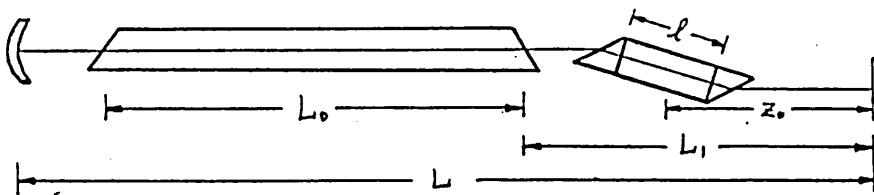
$\alpha_a$ , 変調信号の振幅  $V_0$  (ボルト), 光浮的バイアス  $\theta_b$  (ラディアン) で表わすと,

$$\alpha_a = \frac{\pi n_0^3 \gamma_{ee} V_0}{\lambda} \sin 2\theta_b \quad \text{--- (2.2)}$$

となる。

(2.1) 式の連立非線形微分方程式を、ルンゲ-クッタ-ギルの方法で数値的に、 $n = 1, 2$  の場合について解いた。但し、 $\rho_n, T_{nm}, \beta_n, \theta_{nm}$  等の表式は、 $\gamma_a, \gamma_b \ll \Delta$  の近似を行わなければ式<sup>(4)</sup>を用いている。

用いたレーザ飛振器のモデルは、2.1 図に示す通りである。



2.1 図 レーザ飛振器

各パラメータの値は、

$$\alpha (\text{相対励起の大きさ}) = 1.07 \text{ (five or six modes free-running)}$$

$$K_u/2\pi (\text{ドップラー半幅の} 0.6 \text{ 倍}) = 1000 \text{ MHz}$$

$$\gamma_a/2\pi (\text{上方準位の decay rate}) = 12 \text{ MHz}$$

$$\gamma_b/2\pi (\text{下方準位の decay rate}) = 25 \text{ MHz}$$

$$\gamma_{ab}/2\pi (\text{衝突を考えた時の decay rate}) = 62 \text{ MHz}$$

$$\Delta\Omega/2\pi (\text{基本モード間隔}) = 100 \text{ MHz}$$

$$\nu/2\pi Q (\text{飞振器のモード幅}) = 7 \text{ MHz}$$

$$L_1 = 0.3 \text{ m}, L_0 = 0.17 \text{ m}, l = 0.02 \text{ m}, z_0 = 0.06 \text{ m}$$

である。

また、変調素子を通過するハルス波形は、二乗被波したとき、

$$\begin{aligned} E^2(z_0, t) &= \frac{1}{8} \sum_n E_n^2(t) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{m < n} E_n(t) E_m(t) \cos[(\nu_n - \nu_m)t + \phi_n - \phi_m - (n-m)\frac{\pi z_0}{L}] \end{aligned} \quad --(2.3)$$

で表わされる。

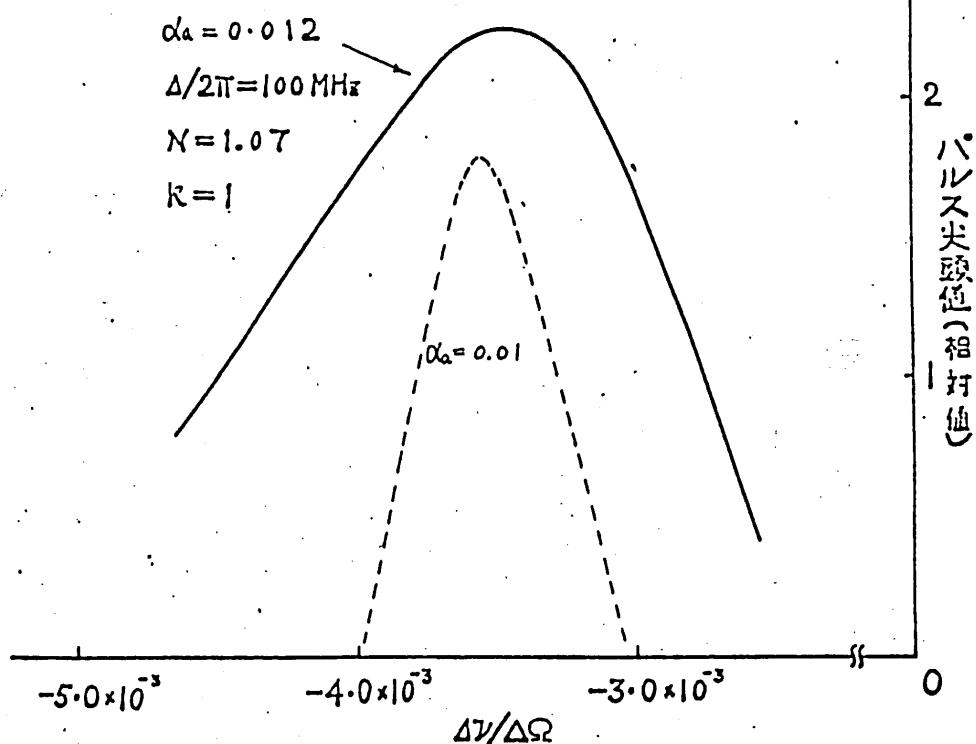
## 2.2. 数値解

a.  $k=1$  (基本モード間隔の周波数でのAM強制同期) の場合

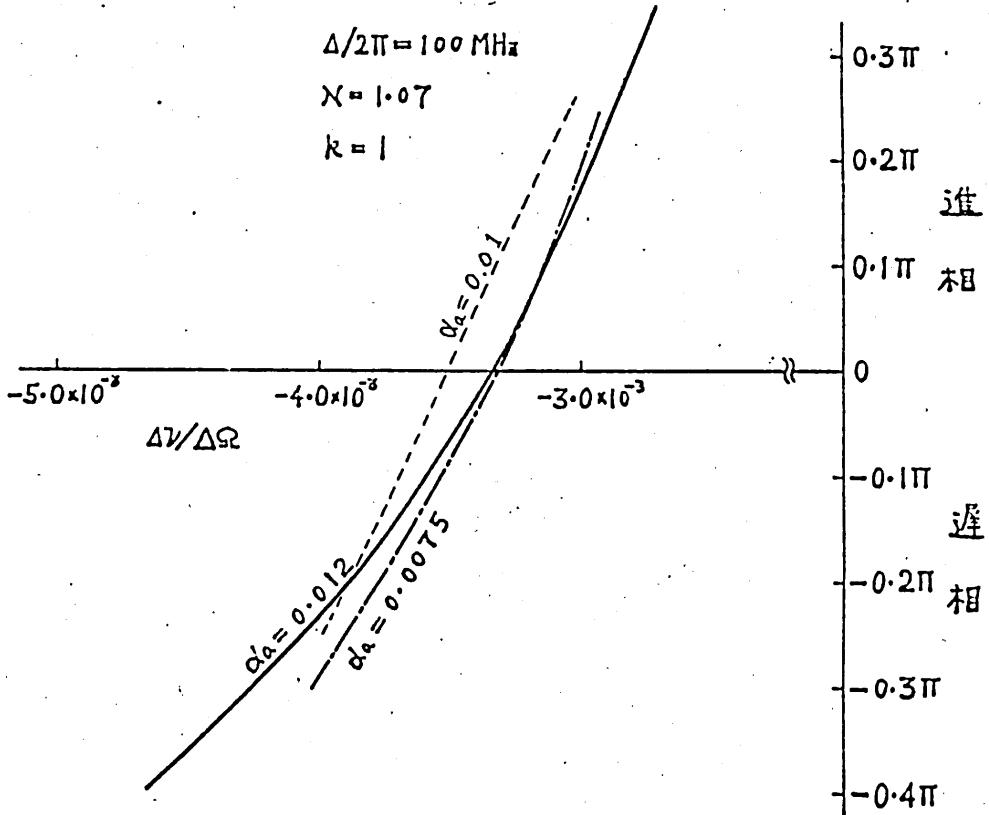
gain curveに対するモードの配置は, line centerにモードが存在する場合を計算して。2.2図, 2.3図にはほとんど同じパラメータ値での McDuff と Harris の解を比較のため添えてある。

b.  $k=2$  (基本モード間隔の2倍の周波数でのAM強制同期) の場合

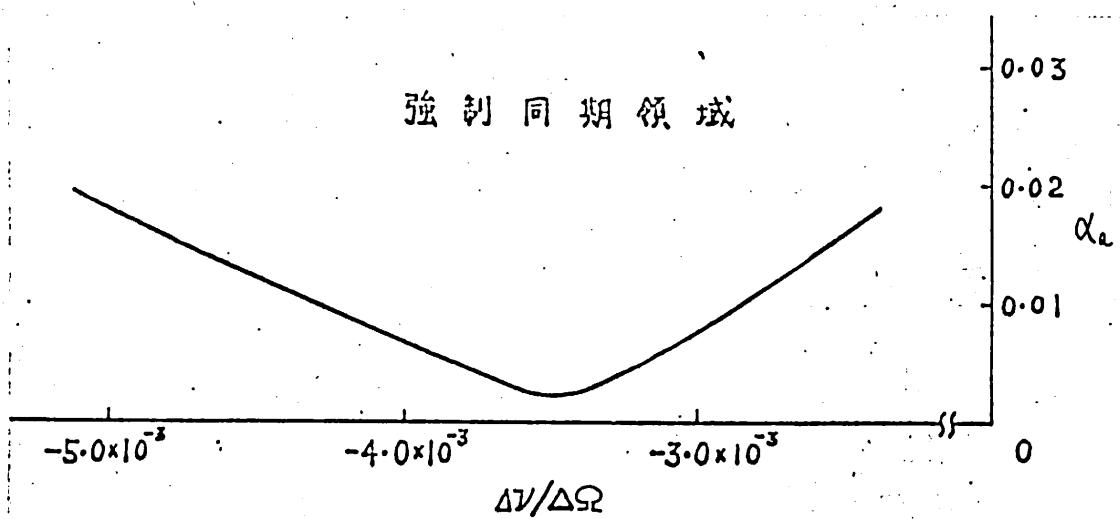
gain curveに対するモードの配置は, line centerにモードが存在する場合と line center が丁度 mode の中間になっている場合を計算して。2.6図, 2.7図は, 前者の場合の結果である。パルス波形とモードスペクトルについては両者の場合をそれぞれ2.8図, 2.9図に示してある。2.8図, 2.9図においてパルスの位相が  $\pi$  飛んでいるのは初期値による。即ち, ある解で,  $\varphi_{n+1} - \varphi_n$  の値を  $\pi$  だけずらすと (2.3) 式よりパルスの位相は  $\pi$  ずれる。しかし, (2.1) 式 ( $k=2$  の場合) は変化しない。よって, これも解である。



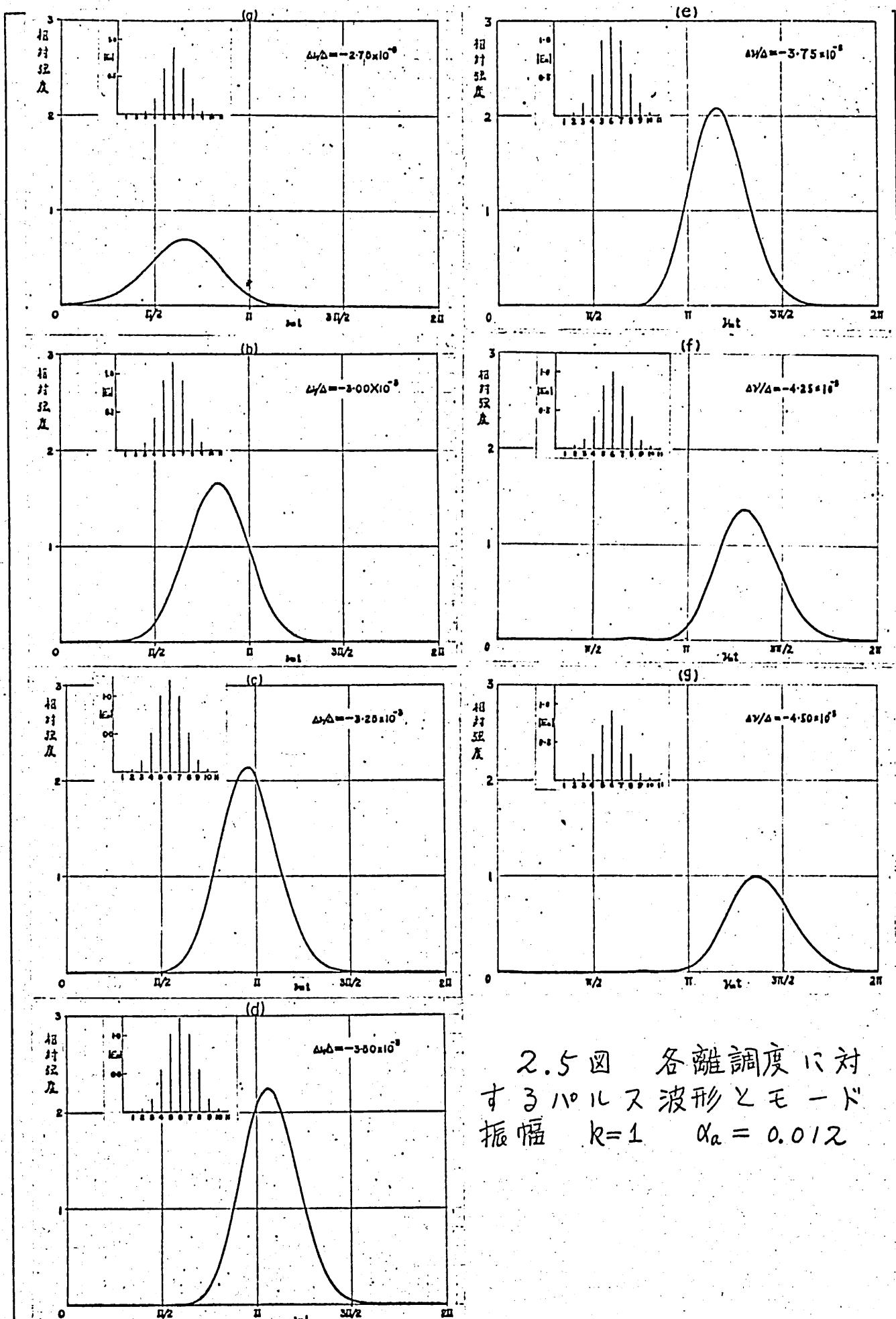
2.2図 離調度に対するパルス尖頭値の関係  $k=1$  (---: McDuff, Harris の解)



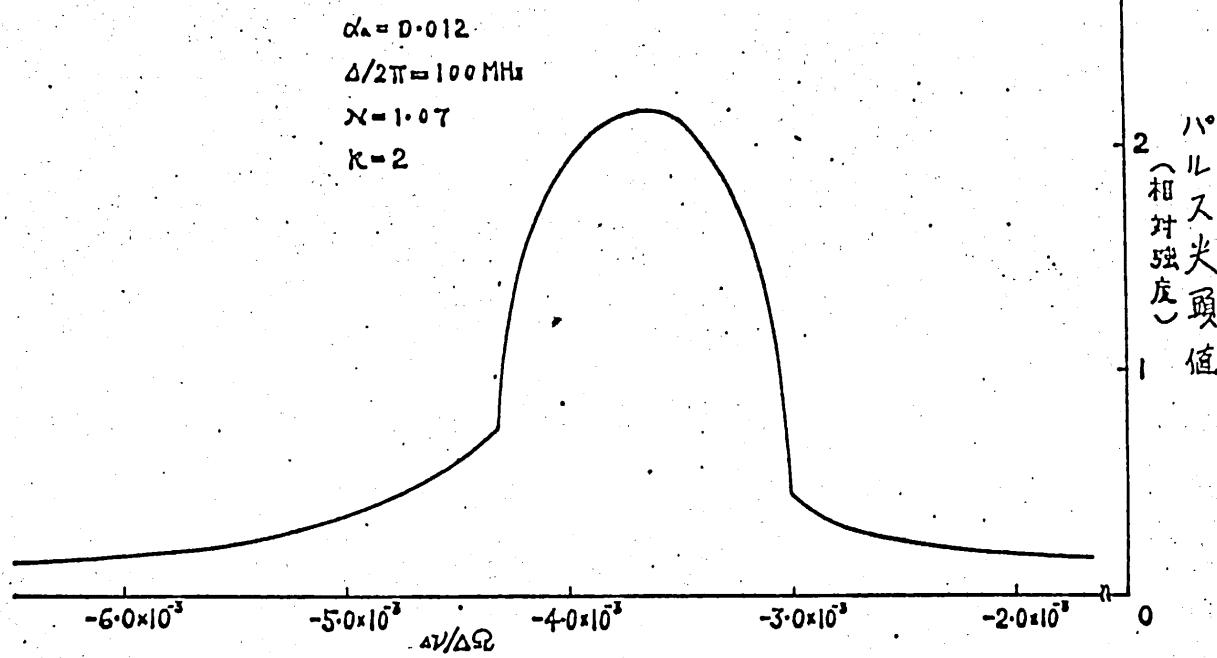
2.3 図 離調度とパルスの位相との関係  
 $k = 1$  (---: McDuff, Harris の解)



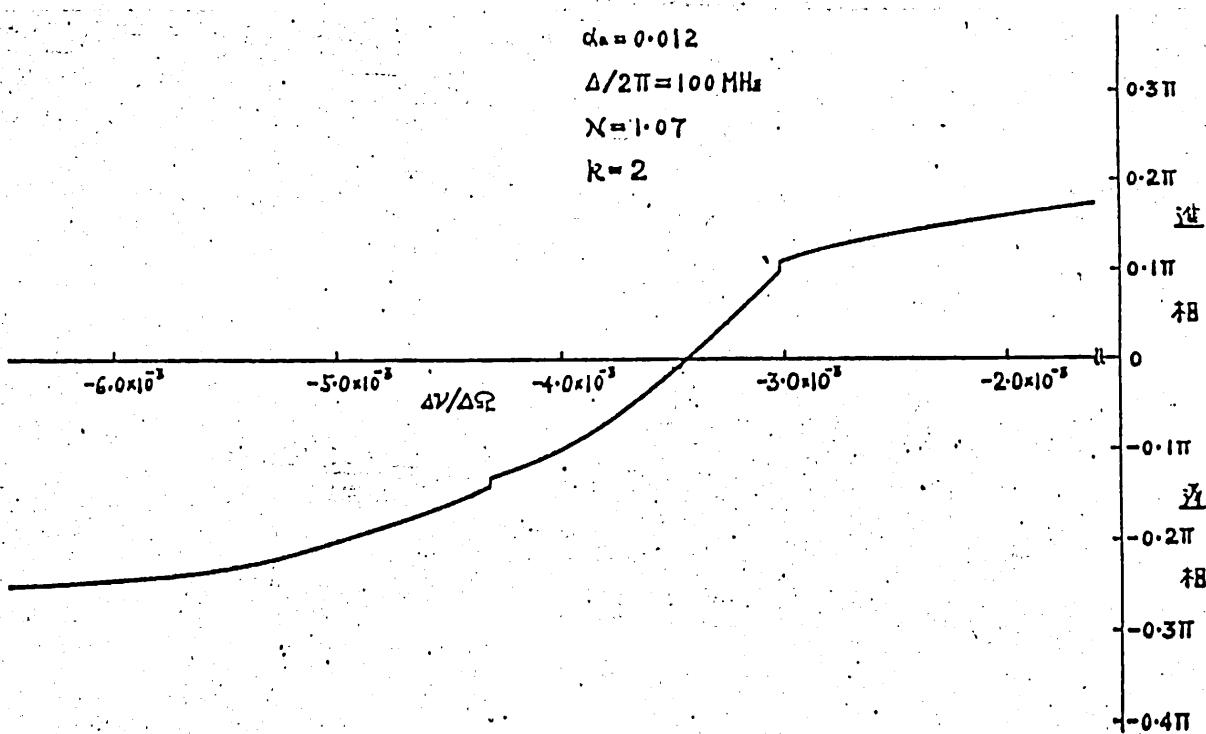
2.4 図 強制同期領域  $k = 1$



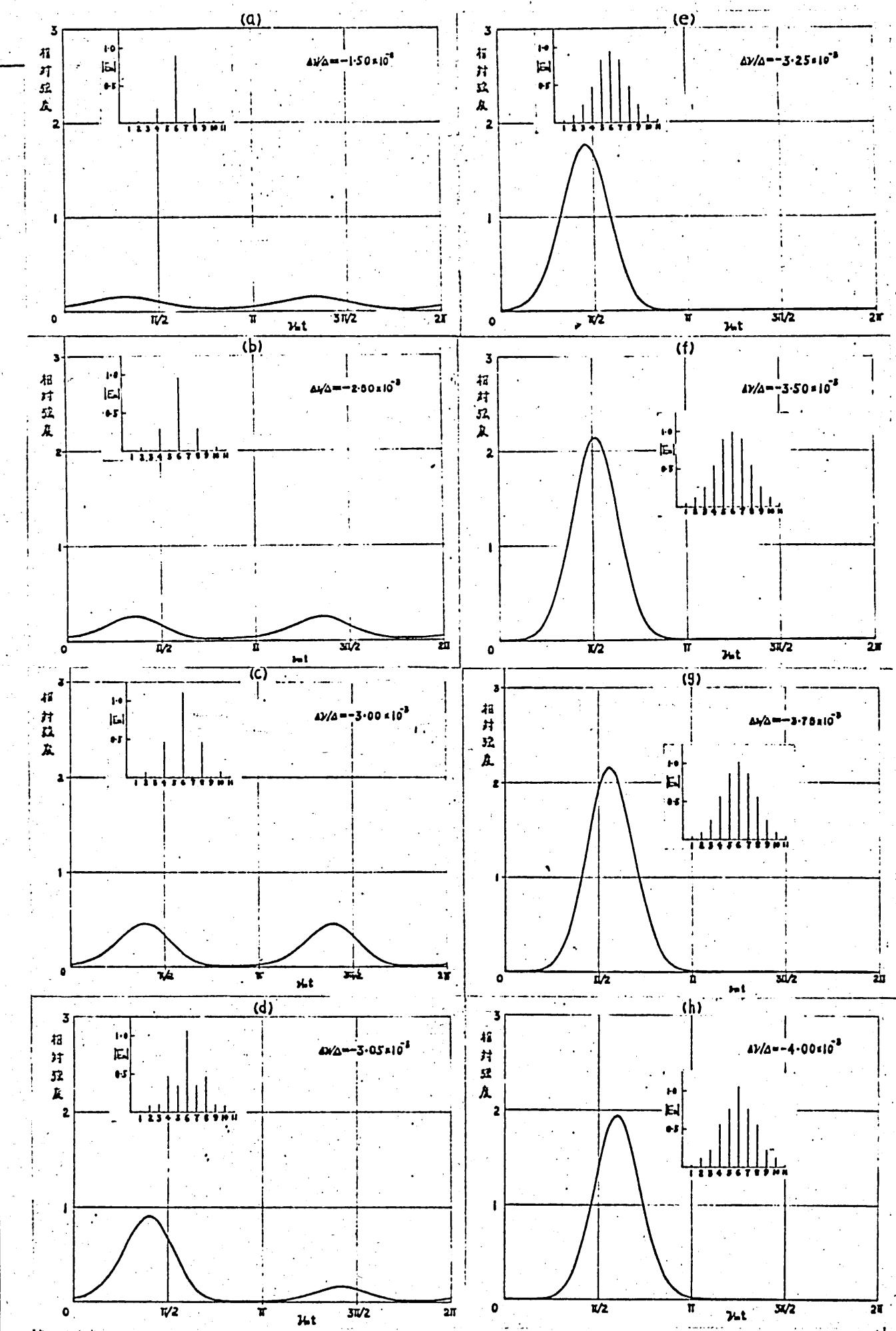
2.5 図 各離調度に対するハルス波形とモード振幅  $k=1$   $\alpha_a = 0.01\pi$



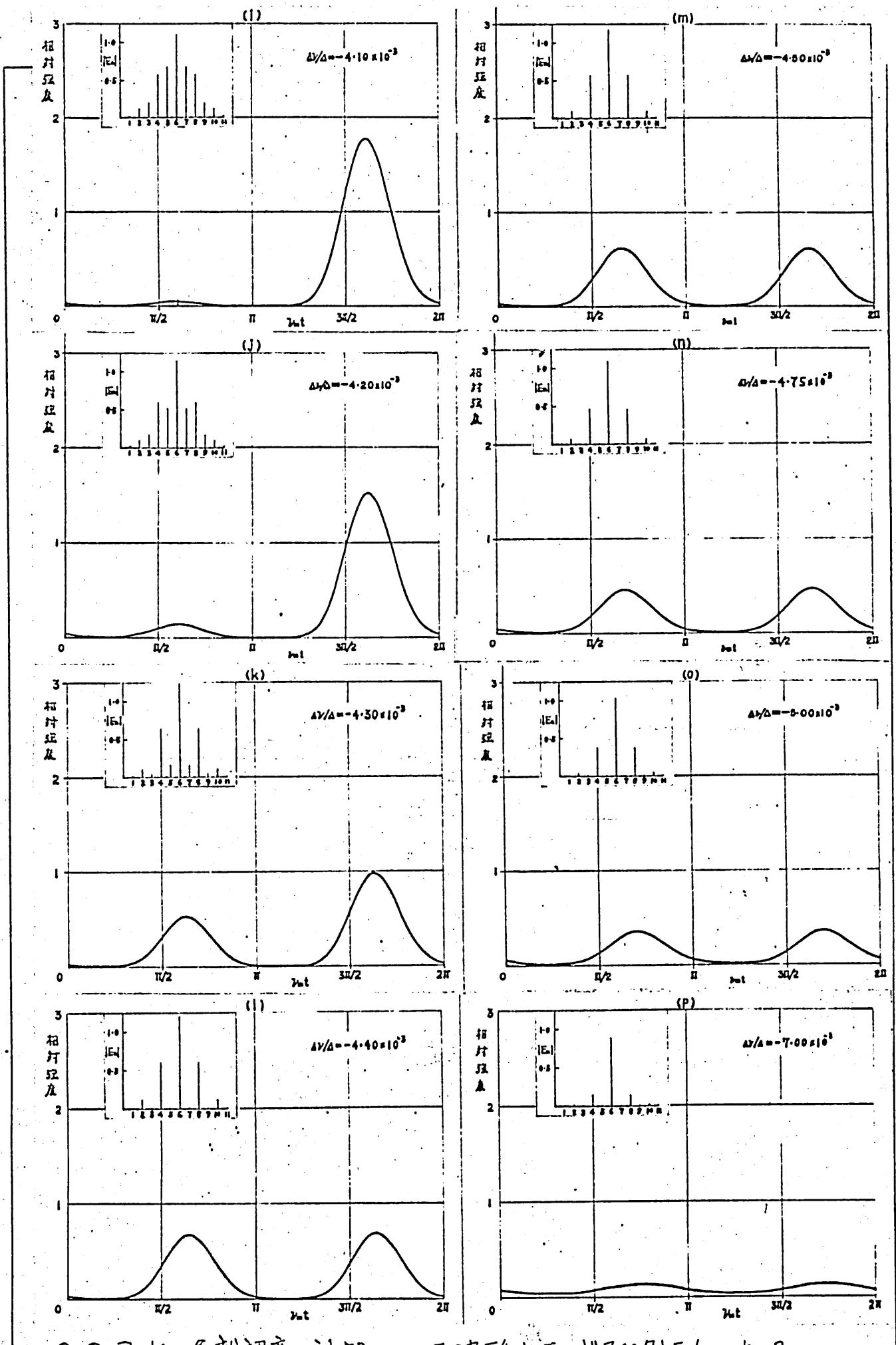
2.6 図 離調度とパルス尖頭値との関係  $k=2$



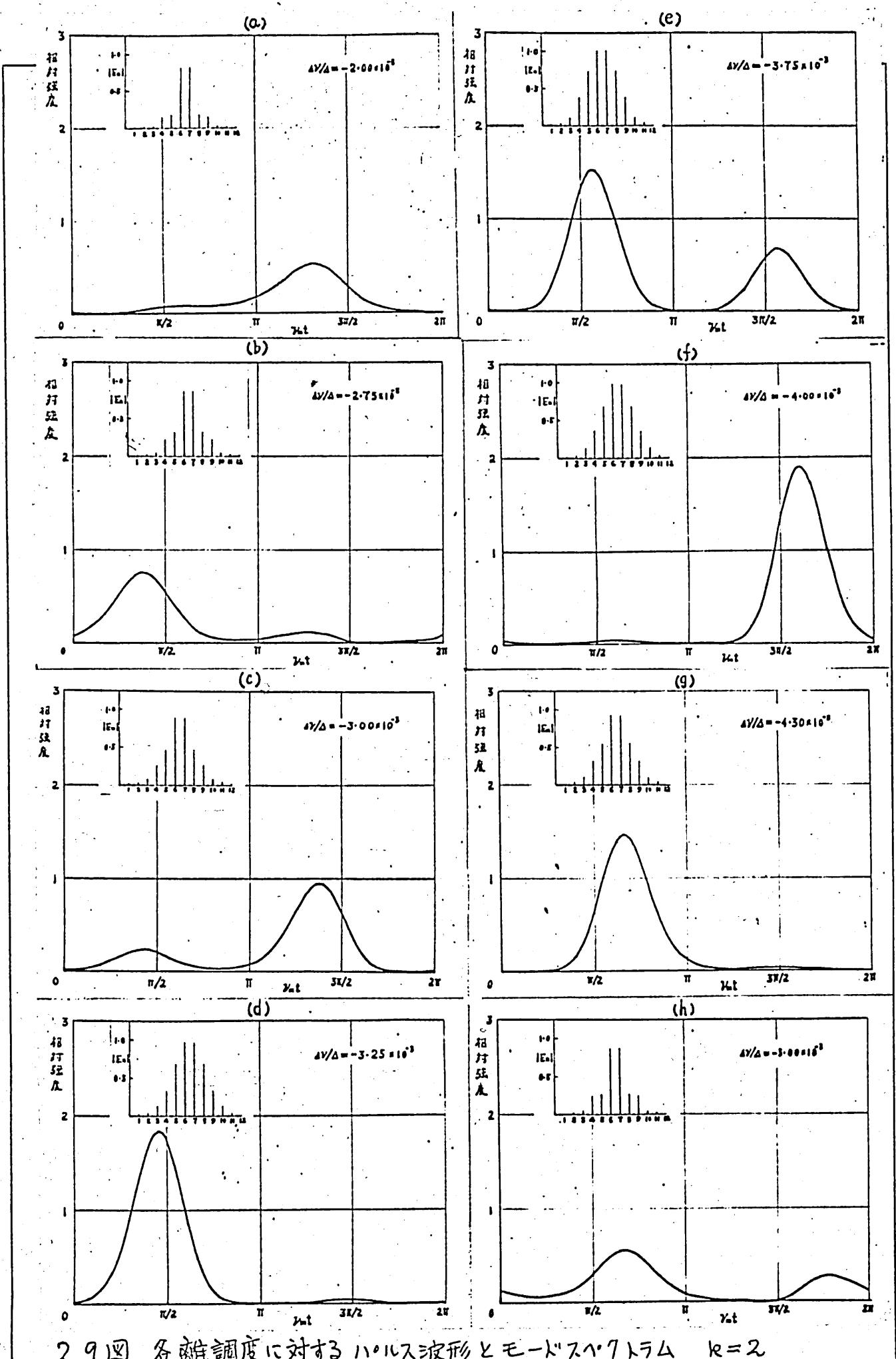
2.7 図 離調度とパルスの位相の関係  $k=2$   
(変調波の一周期をπとする。)



2.8 図(a) 各離調度に対する ハーリス波形とモードスペクトラム  $k=2$



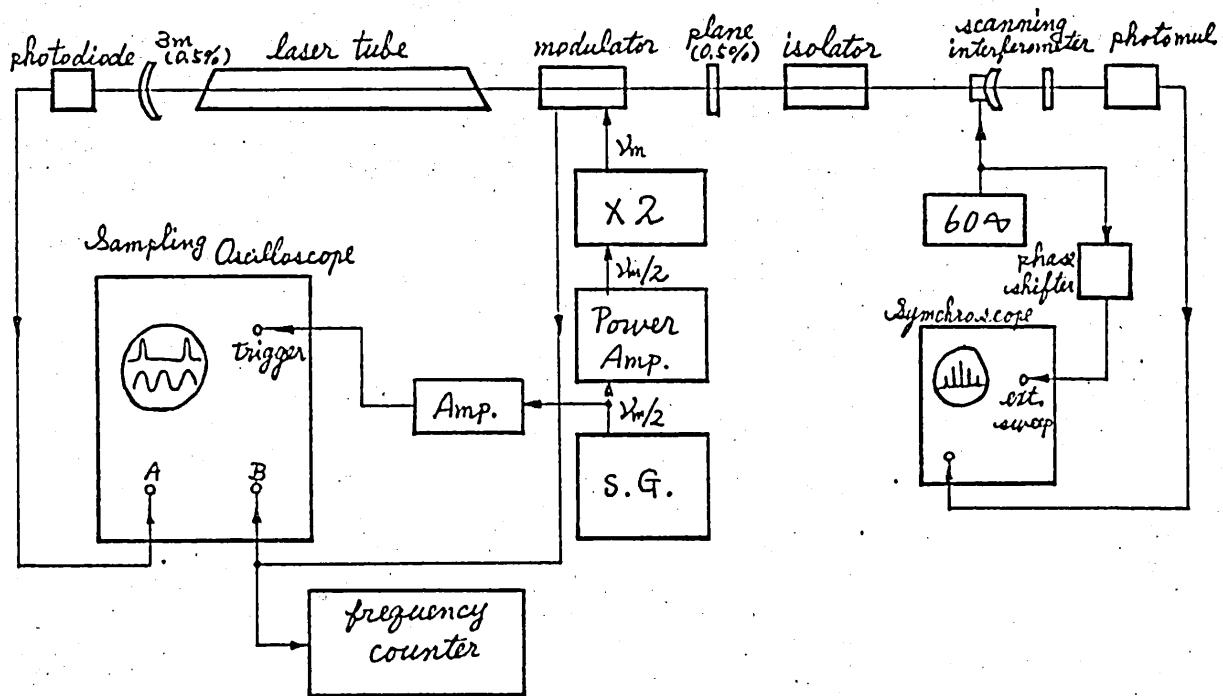
2.8 図 (b) 各離調度に対するハルス波形とモードスペクトラ  $k=2$ .



2.9図 各齧調度に対するハルス波形とモードスベクトラム  $k=2$

### 3. 基本モード間隔の2倍の周波数での強制AMモード同期の実験結果

#### 3.1. 実験のブロック図



3.1図 実験のブロック図

ごく普通の構成だが、サンプリングのトリガーを  $\nu_m/2$  (変調周波数の半分の周波数  $\approx \Delta\Omega$ ) で行うために、倍増器を用いている点だけ考慮してある。基本モード間隔の2倍の周波数 ( $\approx 2\nu_m$ ) で変調しているので、基本モード間隔の周波数 ( $\nu_m/2$ ) の繰返しパルスが発生している場合、変調波でトリガーすると、誤った波形 (繰り返し周波数  $\nu_m$  のパルス列) が出てくる。

#### 3.2. 実験結果

実験における各パラメータの値は、

$$\pi \approx 1.07 \text{ (five or six modes free-running)}$$

$$\Delta\Omega/2\pi \approx 99 \text{ MHz}$$

$$\alpha_a = 0.002 \sim 0.005$$

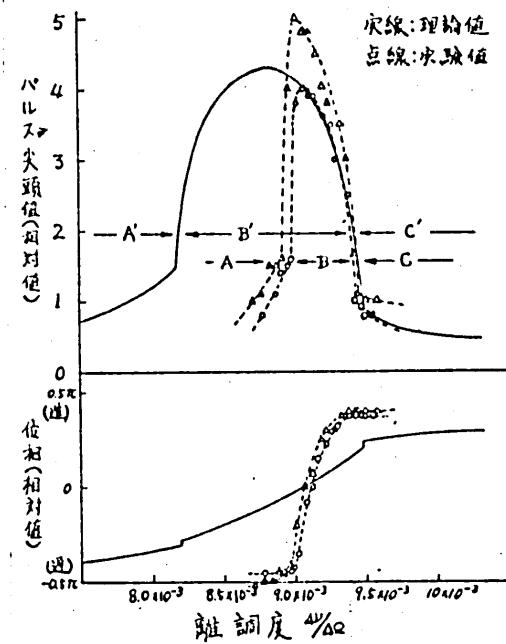
である。3.2 図に得られた実験結果を、比較のため理論結果(2.6 図, 2.7 図)と合わせて示す。離調度の絶対値まで両者は一致

しながら、たので、3.2 図では横軸は実験の場合の値を示し、理論値は  $12.5 \times 10^3$  ずらしてある。また、位相は変調波の一周期を  $2\pi$  としてある。

実験と理論計算としては他のパラメータはほとんど同じであるが、 $\alpha_a$  の値が両者の間で大きく、くい違つてあり、それが 3.2 図での実験結果と理論結果の差として現われている。即ち、基本モード間隔の周波数での phase locking の理論値(2.4 図)

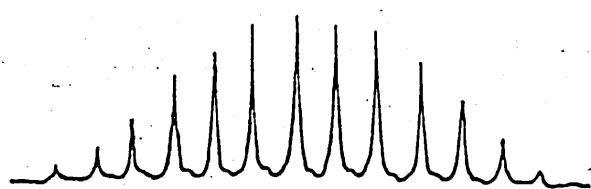
から、 $\alpha_a = 0.005$  のときと、 $\alpha_a = 0.012$  のときの locking の幅を求めると、離調度の値でそれぞれ、 $0.6 \times 10^{-3}$  と  $1.4 \times 10^{-3}$  で 2.3 倍異なる。そこで 3.2 図において実験値( $\alpha_a = 0.002 \sim 5$ )のカーブを 2.3 倍拡大すると、かなり良く理論値( $\alpha_a = 0.012$ )のカーブと一致する。

図で B, B' と示した領域では、通常の mode locking が起り、繰返し周波数  $m/n$  ( $\approx \Delta \Omega$ ) のパルス列が生じ、基本モード間隔の周波数での強制 AM モード同期の場合とよく似ている。こゝでは、初期値によって、位相が  $2\pi$  (変調周波数の一周期) 異なる二種類のパルス列が存在し得るが、離調度を変化させて行って途中でパルスの位相が  $2\pi$  離ぶ事は起らなかった。この領域でのモードスイッチングの一例を 3.3 図に示す。また、A, A'; C, C' と示した領域では、一つおき

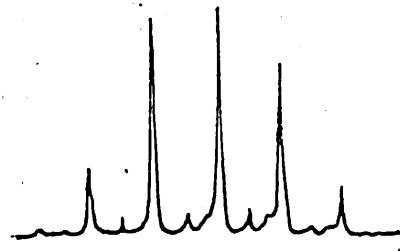


3.2 図 実験結果と理論結果

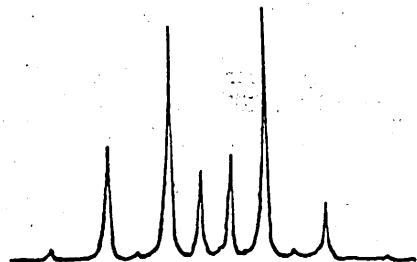
のモードがクエンチされ、残りのモードでモードローリングしている。よって繰返し周波数  $\nu_m$  ( $\approx 2\Delta\Omega$ ) のパルス列が発生している。この領域でのモードスペクトラムの一例を 3.4 図に示す。理論では gain curve の中心 line center がモードの中間に位置している場合には、2.9 図に示したように、一モードあきのモードクエンチは起らない。実験においてもそのようなモードスペクトラムが得られたが、少しでもモードの gain curve に対する位置がずれると、line center にモードが存在する場合 (2.8 図の場合) のモードスペクトラムになってしまって。また 3.5 図に示すような、一モードあきにモードクエンチし、gain curve の中心が約  $3\Delta\Omega$  ずれた二つのモードスペクトラムの、重なった状態が存在した。



3.3 図 B 領域のモードスペクトラム



3.4 図 A,C 領域のモードスペクトラム



3.5 図 2 の gain curve を  
持つ mode quenching

#### 4. あとがき

基本モード間隔の2倍の周波数での強制AMモード同期について理論、実験の両面から考察し、定量的（相対値）にかなり良く一致する結果を得た。実験と理論で変調の強さ $\alpha_a$ の値が大きく異なった。即ち、装置材料の性能から、実験の場合は $\alpha_a \approx 0.005$ 止まりで、収束の時間の都合で理論計算では $\alpha_a = 0.01$ と大きくした。手間をかけて $\alpha_a \approx 0.005$ ぐらいで理論計算を行うべきかもしれないが、基本モード間隔の周波数での強制AMモード同期の理論結果から、この $\alpha_a$ の値の違ひを考慮に入れれば、実験と理論とが良く合っていると言えるので、一応このままで結果を出した。

#### 5. 文献

- 1) Hargrove, L. E., R. L. Fork, and M. A. Pollack, "Locking of He-Ne laser modes induced by synchronous intracavity modulation," J. Appl. Phys. (Lett.) vol. 5, July 1964 pp 4-5
- 2) DiDomenico, M., Jr., "Small-signal analysis of internal (coupling-type) modulation of lasers," J. Appl. Phys. vol. 35, Oct. 1964 pp 2870-2876
- 3) Yariv, A., "Internal modulation in multimode laser oscillators," J. Appl. Phys. vol. 36, Feb. 1965 pp 388-391
- 4) Crowell, M. H., "Characteristics of mode-coupled lasers," IEEE J. Quantum Electronics vol. QE-1 April 1965 pp 12-20
- 5) Harris, S. E., and O. P. McDuff, "Theory of FM laser oscillation," IEEE J. Quantum Electronics vol. QE-1 Sept. 1965 pp 245-262
- 6) Ammann, E. O., B. J. McMurry, and M. H. Ashman, "Detailed Experiments on helium-neon FM lasers," IEEE J. Quantum Electronics vol. QE-1 Sept. 1965 pp 263-272
- 7) McDuff, O. P., and S. E. Harris, "Nonlinear theory of the Internally loss-modulated laser," IEEE J. Quantum Electronics

vol. QE-3 March 1967 pp 101-111

8) Hirano, J., and M. Kimura, "Multiple mode locking of lasers" IEEE J. Quantum Electronics vol. QE-5 May 1969 pp 219-225

9) 福井, 宮下, 伊東, 池上, "3, 4 モード レーザ" の安定解 輻射科学研究会資料

1967年 2月 24日

輻射科学研究会資料

レーザ光による回転物体からの粒状性パターン

稻 荷 隆 彦

(三菱電機 中央研究所)

1969年11月28日

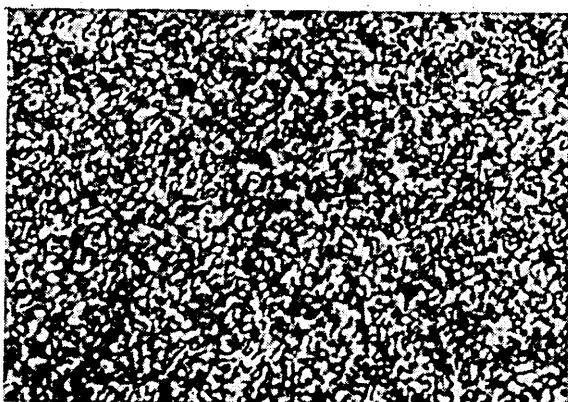
(於 三菱電機株式会社 中央研究所)

## レーザ光による回転物体からの粒状性パターン

### 1. まえがき

ガスレーザの光線を拡散物体面に照射した場合、そこからの反射、あるいは透過してくる光線は、多数のランダムな粒状性パターンを形成していることはよく知られている。

この現象は、レーザの出現後、すぐに注目され、これは拡散面上の多数の小さい散乱体からの散乱光が相互に干渉しあって形成される回折パターンであるとされている。この回折パターンはレーザを応用する際の難点となることが多いが、また逆にこれを利用することもできる。写真1に粒状性パターンの一つの例を示す。



写 真 1

この論文では、上記の回折パターンを利用する一つの例を示す。回折パターンは反射物体が移動すれば、それにしたがって変化することは周知のとおりであるが、反射物体が回転体のように周期的に変化するものであれば、回折パターンの変化もまた周期的になる。この周期性を検出することにより、回転体の回転周波数を、物体の形状に関係なく、無接触にて検出することができる。

このことは既に筆者により発表されたが、<sup>1)</sup> ここではさらに回折パターンの周期性に関し、回転体の表面状態と関連させ、その後くわしくおこな

った実験結果について述べる。

なお、上に述べた回折パターンの周期性を検出する実験は、筆者の発表とほぼ同時期に米国にて発表された。この実験は回折パターンを用いたストロボ方式ともいべきもので、筆者の実験とはやゝ異っている。しかし周期性に着目した点では同じであるので、文献名のみ記しておく。<sup>2)</sup>

以下、§ 2 に回折パターンの形成と運動に関して、L.I. Goldfischer による理論的取扱いをもとにして簡単に述べる。つぎに § 3 で回転数の検出の原理、§ 4 で実験装置および実験結果について述べる。最後に § 5 にて結果の検討をおこなう。

この論文の結論はつぎのとおりである。

- (i) 回転体からの回折パターンの運動は、その周期性のために 1 種の“変調”がかかる形となる。この変調は回転体の回転周波数  $\omega$  を最低の周波数とし、 $\omega$  の整数倍の周波数成分から構成されている。
- (ii) 上記の“変調”的各周波数成分は、回転体のレーザ光が照射される面の空間周波数に関連している。すなわち面の各空間周波数にそれぞれ対応した“変調”的周波数を基本周波数とした高調波成分を重ね合せたものになっている。
- (iii) “変調”的周波数成分のうち、最も低い周波数はいかなる場合でも回転の周波数  $\omega$  に一致する。したがって、この周波数を検出すれば、無接触の回転計をつくることができる。

## § 2. 粒状性パターンの形成とその運動

粒状性パターンの形成に対する L.I. Goldfischer の理論的取扱い<sup>3)</sup>を中心にして、パターンの形成の機構について述べる。

図 1 はパターンを形成する実験系の基本的な構成である。レーザ光線が照射されている拡散面を( u v )座標系、レーザ光線が反射、または透過して回折パターンを形成する観測面を( x y )座標系で示す。いま拡散面を、ひとしい反射率ないしは透過率をもつ散乱体の無限の集合によりできているとする。

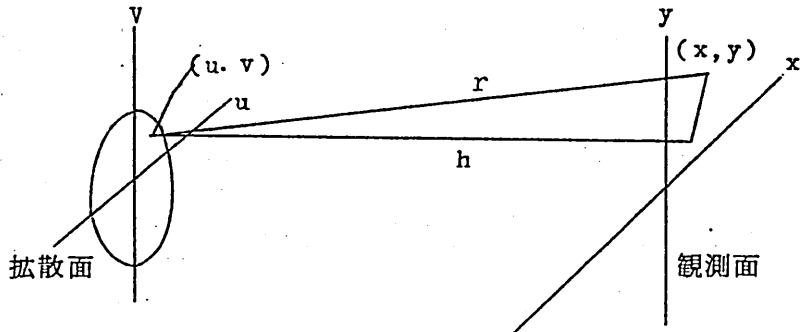


図 1. 実験系の構成

拡散面に入射するレーザ光線のパワー密度を  $P(u, v)$ 、散乱による減衰係数を  $\alpha$  とすれば、 $(u, v)$  点からの散乱光の強度は指向性を無視すれば、 $\alpha P(u, v) \Delta u \Delta v$  となる。

したがって時刻  $t$  における  $(x, y)$  点での光の場に対する  $(u, v)$  点からの寄与は、

$$[\alpha P(u, v) \Delta u \Delta v]^{1/2} \cos [2\pi(c t - r)/\lambda + \phi_{uv}] \quad (2-1)$$

となる。ここで  $\phi_{uv}$  は  $(u, v)$  点の散乱体に特有の位相因子である。

この式を  $r \approx h$  となる条件を入れ、座標  $(x, y)$  に関する式に書きなおし、拡散面  $(u, v)$  の全ての点から観測点  $(x, y)$  におよぼす光の場を加え合せると、観測点  $(x, y)$  における全体の光の場の方程式

$$A(x, y) = \left[ \frac{\alpha \Delta u \Delta v}{\pi h^2} \right]^{1/2} \left\{ \cos \left( \frac{2\pi c t}{\lambda} + \theta_{xy} \right) \sum_{u,v} [P(u, v)]^{1/2} \right.$$

$$\times \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{xu + yv}{h} \right] + \phi_{uv} \right) - \sin \left( \frac{2\pi c t}{\lambda} + \theta_{xy} \right)$$

$$\left. \times \sum_{u,v} [P(u, v)]^{1/2} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{xu + yv}{h} \right] + \phi_{uv} \right) \right\} \quad (2-2)$$

が得られる。ここで  $\theta_{xy}$  は  $(x, y)$  点に特有の位相因子である。

$(x, y)$  点での輻射のパワー密度は (2-2) 式の光の場の 2 乗の

時間平均で与えられるから、簡単な計算によりパワー密度は

$$B(x, y) = \frac{\alpha \Delta u \Delta v}{2\pi h^2} \left\{ \left( \sum_{u,v} [P(u, v)]^{1/2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{xu+yv}{h} \right) + \varphi_{uv} \right] \right)^2 + \left( \sum_{u,v} [P(u, v)]^{1/2} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{xu+yv}{h} \right) + \varphi_{uv} \right] \right)^2 \right\} \quad (2-3)$$

となる。

(2-3)式を展開すると

$$[\sum (\ )]^2 = \sum (\ )^2 + (\text{remaining terms})$$

の形になるから、上式第1項を  $\bar{B}$  とすると

$$\bar{B} = \frac{\alpha}{2\pi h^2} \sum_{u,v} P(u, v) \Delta u \Delta v \quad (2-4)$$

$\bar{B}$  は輻射密度の平均値を与える。

粒状性パターンを与えるのは第2項以下の remaining terms であつ

て、これを整理すると、

$$\begin{aligned} \tilde{B}(x, y) &= \frac{\alpha \Delta u \Delta v}{2\pi h^2} \sum_{u,v} \sum_{k,l} [P(u, v) P(k, l)]^{1/2} \\ &\times \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{x(u-k)+y(v-l)}{h} \right) + \varphi_{uv} - \varphi_{kl} \right] \quad (2-5) \end{aligned}$$

ただし  $u \neq k, v \neq l$

いま、

$$2\pi(u-k)/\lambda h = p \quad 2\pi(v-l)/\lambda h = q \quad (2-6)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{B}(x, y) &= \frac{\alpha \Delta u \Delta v}{2\pi h^2} \sum_{u,v} \sum_{p,q} [P(u, v) P(u - \frac{\lambda h}{2\pi} p, v - \frac{\lambda h}{2\pi} q)]^{1/2} \\ &\times \cos(p x + q y + \psi_{uvpq}) \quad (2-7) \end{aligned}$$

ここで  $\psi_{uvpq}$  は拡散反射面の散乱体に特有の位相因子である。

これが粒状性パターンをあたえる最終的な方程式であるが、この式の意味はつぎのように解釈できる。つまり粒状性パターンは拡散面上の散乱中心群の集合の中で、ある空間周波数で代表される散乱中心群からの干渉を、すべての空間周波数に関し、重ね合せることによっておこっている。また散乱中心が変化すれば、位相項  $\psi_{u v p q}$  で表わされる粒状性パターンの位相関係が全く変化することを表わしている。

対象である拡散面が運動するとき、粒状性パターンが運動することも上記の位相の関係から説明することができる。すなわち、拡散面がわずかに照射光源に対し移動したとき、移動前と同じ粒状性パターンを観測しようと思えば、上記位相項  $\psi_{u v p q}$  が変化した分を相殺するような位置に観測点を移動しなければならない。この条件を満す位置の計算を前述の L.I.Goldfischer らは二つの散乱中心に関して光源一拡散面一観測点までの光路差が常に一定になるという条件から導いている。<sup>4)</sup>

しかし実際には粒状性パターンが拡散面の運動とともに運動するようみえるのは、ある限られた範囲内のことである。たとえばレーザ光線をレンズで集光して照射すると、パターンは拡散面の運動に伴って、まったく別の粒状性パターンに変化してしまう。その他の粒状性パターンの現象とともに、これらの種々の現象を説明する完全な理論的取り扱いはまだおこなわれていない。

### § 3. 回転数検出の原理

上に述べたように、粒状性パターンは拡散面の運動に従って変化していくが、これを粒状性パターンの平均的な粒径に対し同程度、もしくは十分小さいスリットをとおし、光検出器により検出すると、粒状性パターンの変化に対応した電気信号が得られる。粒状性パターンは写真 1 でみるとおりまったくランダムなものであり、したがって得られる電気信号もランダムなパルスにより構成されている。

ところが拡散面が回転体などのように周期的に変化している場合には 1 周期後には必ず同じ粒状性パターンが形成されるはずである。つまり光検出器からの電気信号は短い時間でのパルスはまったくランダムであ

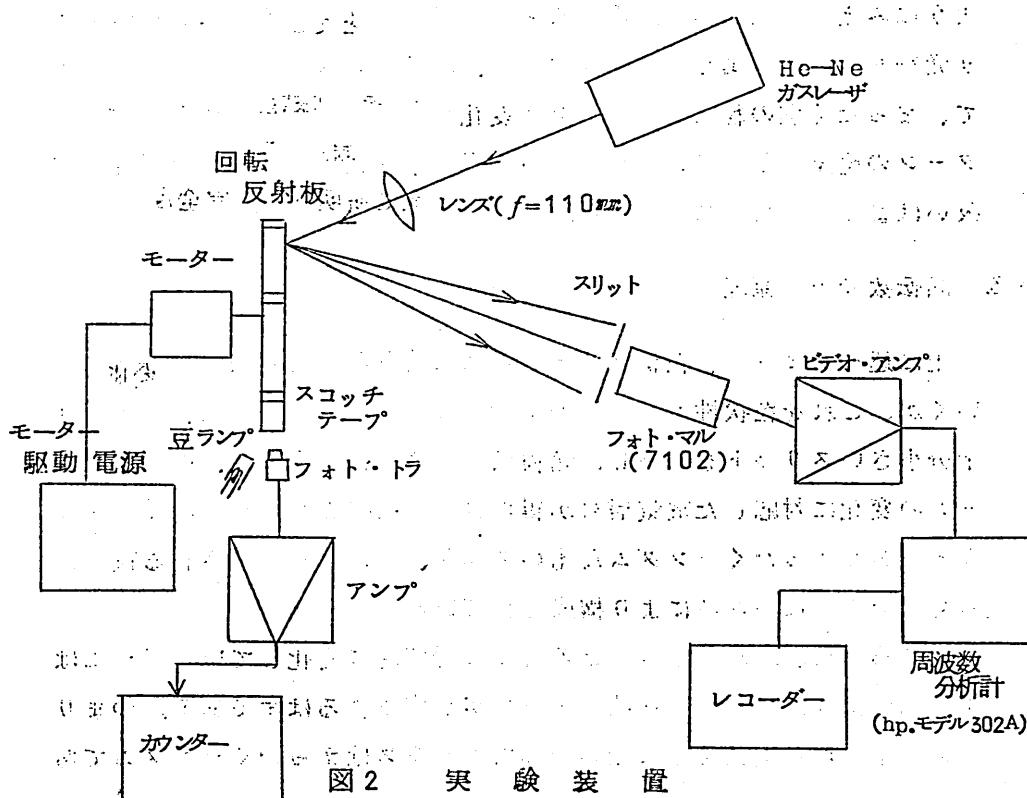
っても、全体としては回転周期を最も長い周期とする周期性をもつはずである。これをかりに粒状性パターンによる電気信号に対する“変調”とよぶ。したがってこの電気信号を周波数分析計により分析すれば、最低の周波数が回転体の周波数  $\omega$  に一致し、あとはその高調波成分となる周波数成分があらわれることは容易に予想できる。

#### § 4. 実験

##### 4-1 実験装置

実験装置系を図 2 に示す。光源は 1 mW 出力の He-Ne ガスレーザ、観測系のうちスリットは口径 2.0 mm の円形スリット、光検出器は光電子増倍管 RCA 7102 を用いている。

レンズは焦点距離 110 mm、レンズから反射板までの距離は 115 mm とした。周波数分析計は横河ヒューレットパッカード社製 Model 302A を使用し、出力をレコーダー記録した。



回転反射板はシンクロナスマーターにとりつけ、回転数は電源の周波数を変えて変化させた。回転数の正しい読みとりは、反射板の側面にはりつけた白色スコッチテープからの光の反射をフォトランジスターで検出し、カウンターにて計数した。

#### 4-2 実験結果

回転反射板として表面にペーパー磨きをほどこした一様な鉄板を用いた場合の信号の周波数スペクトルを第3図に示す。

図3 (a), (b), (c)はそれぞれ回転反射板の回転数が20, 30, 40 Hzの場合に対応している。0 Hzでのピークは装置から発生するもので、信号ではない。おのののスペクトルは、それぞれの回転周波数を最低の周波数とし、その整数倍の周波数をもつ周波数成分があらわれている。なお40 Hzのスペクトル(c)では60 Hzとその高調波成分が現われているが、これは雑音によるものである。

上に述べた周波数スペクトルで、一様な拡散面の場合は各周波数成分の相対的な大きさはまったくランダムのようにみえる。この周波数成分の相対的な大きさは、拡散面の性質に依存していることは容易に推定される。

一様な鉄板の1部に黒いテープをはりつけ、その影響を調べたのが、第4図のデータである。図4で(a)が、表面の回転中心に対して対称の位置にそれぞれ2枚の黒テープをはりつけた場合、(b)が1枚のみはりつけた場合、(c)がまったくはりつけてない場合である。(a)は2枚のテープがはりつけられたため、回転数 $\omega$ の2倍の空間周波数成分が故意につくられたわけであり、(b)は $\omega$ の成分が強調されるはずである。図4の結果は黒テープが無反射体であるため、あまりいちじるしい効果はみられないが、それでも(a)と(b)とを比較すると(b)においては $\omega$ の成分(この場合は25 Hzを基本周波数とする成分、図で矢印を付してある)が強くあらわれることは明瞭にみられる。

この、よりいちじるしい例が図5に示した場合である。

この場合は図 6 に示された

ような三角形の物体を、アルミニウム板で作り、これを図 6 のようにレーザ光線を照射しながら回転させた結果であ

る。

$\omega = 2\pi f$  であるが、周波数スペクトルは  $3\omega$  を基本波とする。

周波数とする高調波成分がない。

ちじるしく強調され、 $3\omega$  の周波数をもつ波形はほぼ Gauss 分布に近い形をしていることを示している。さらに  $\omega$  を基本周波数とする成分もやはりあらわれている。

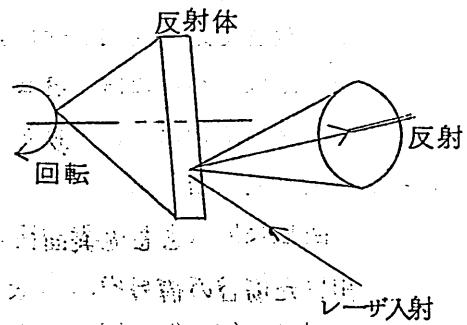


図 6. 三角形物体の回転

## § 5. 検 討

### 5-1 周波数スペクトル

第 4 図のデータは、粒状性パターンの運動が、回転周波数  $\omega$  の整数倍の周波数成分からなる変調をうけていることを示している。また図 5 の結果から明らかのように周波数成分の相対強度は回転体表面の空間周波数と対応していることがわかる。すなわち周波数スペクトルは単に  $\omega$  を基本波とする高調波成分で構成されているのではなく回転体の空間周波数に対応して  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$  の周波数それぞれを基本波とする高調波成分の重ね合せとしてあらわれる。

すなわち変調の波形  $f(t)$  は

$$f(t) = \sum_n C^{(1)} e^{jn\omega t} + \sum_{n'} C^{(2)} e^{j2n'\omega t} + \sum_{n''} C^{(3)} e^{j3n''\omega t} + \dots \quad (5-1)$$

であらわされる。図 5 の場合は回転体表面が変調度の大きい 3 倍の周期をもっているために (5-1) 式の  $C^{(3)}$  がいちじるしく大きくなっていると解釈できる。

上記の結果は回転体の表面の周期性を考えれば当然のことであっ

て、レーザによる粒状性パターンを用いなくても、通常の光源による照射によっても同様な現象を観測できるはずである。たゞしその場合は一様の表面をもつ物体の場合には信号の S/N 比を十分に得ることはむずかしく、また形状が複雑な場合には  $\omega$  の成分を他の成分から区分するのが困難になることが予想される。

### 5-2 回転計

図 5 の結果からわかるように、三角形の物体においても  $\omega$  の成分が明瞭にあらわれることから、任意の形状の物体の回転周波数を無接触にて検出する装置として有効である。実際には 0.1Hz から分析計の周波数を掃引して、最初にピークが現われる位置を検出するようすればよい。検出精度はこの電子回路系でできる。またストロボによる方式にくらべ、人間による判別を必要としないなどの長所がある。

なお、結論についてのまとめは § 1 まえがきのところで述べたとおりである。

### 参考文献

- 1) T.Inari, Japan.J.Appl.Phys. 8 (1969) 970
- 2) L.Feigen, D.Mackeen, S.Fine, Rev.Sci.Instr. 40 (1969) 381
- 3) L.I.Goldfischer, J.Opt.Soc.Am. 55 (1965) 247
- 4) " G.P.L Memorandum to J.Kaufman.  
nov. 26 (1963)

Fig.

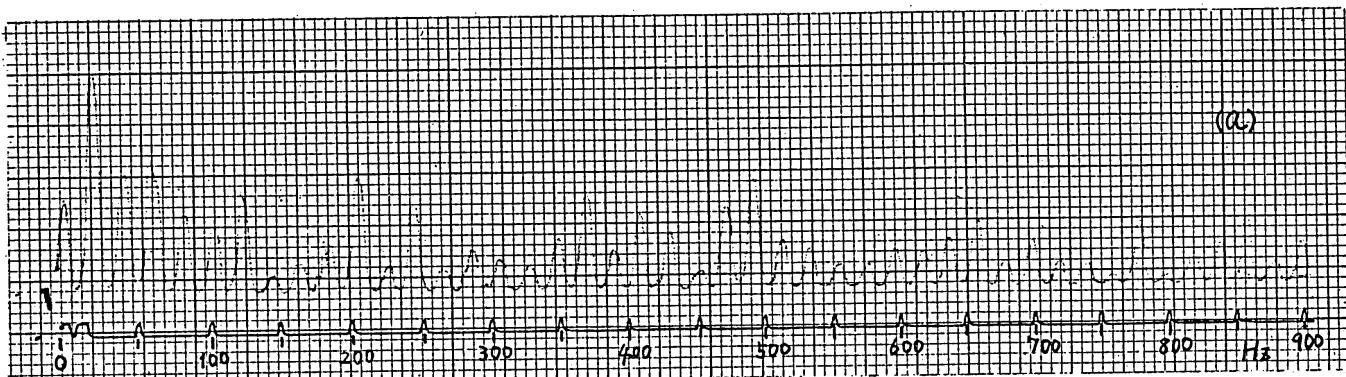
Frequency Spectrum of Speckled patterns  
for rotating Iron plate

the number of rotation

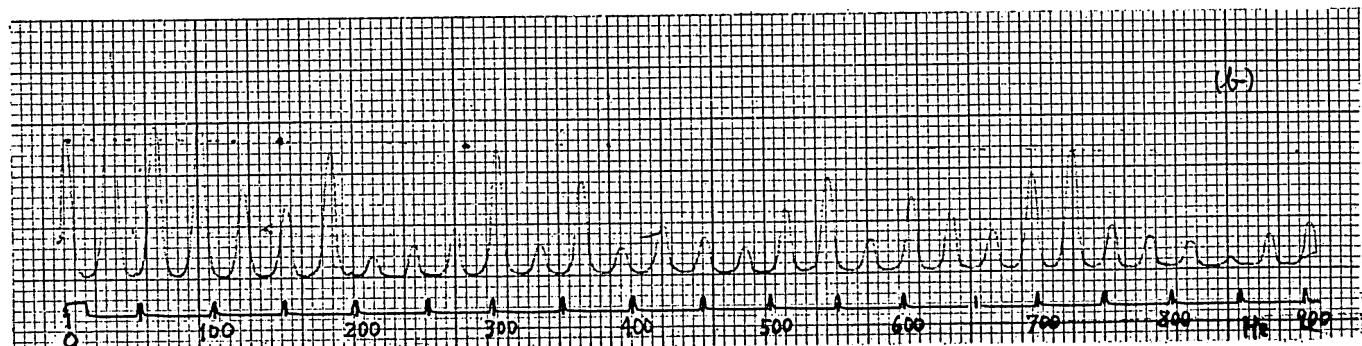
$$a : 20 \text{ Hz}$$

$$b : 30 \text{ Hz}$$

$$c : 40 \text{ Hz}$$



(a)



(b)



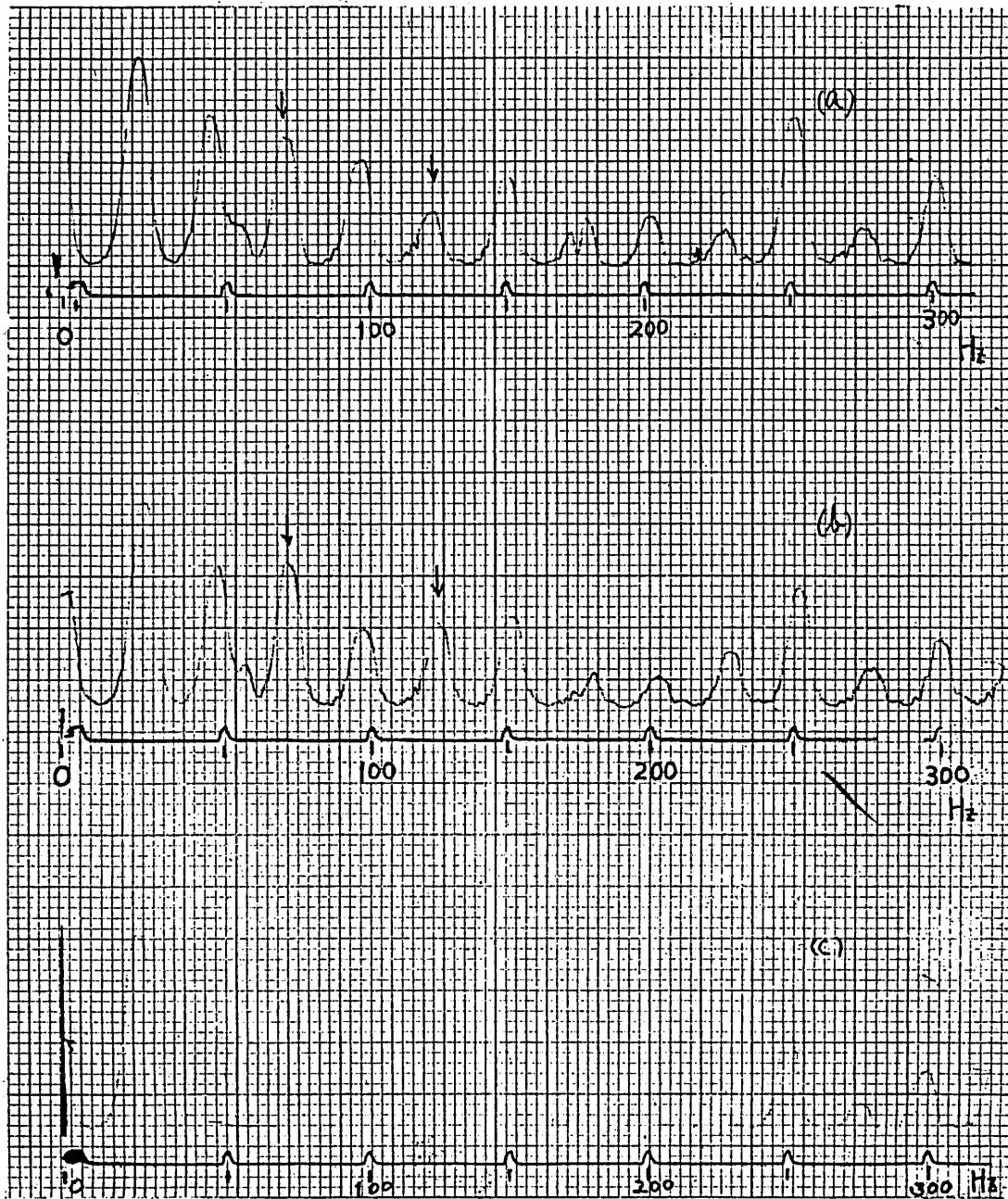
(c)

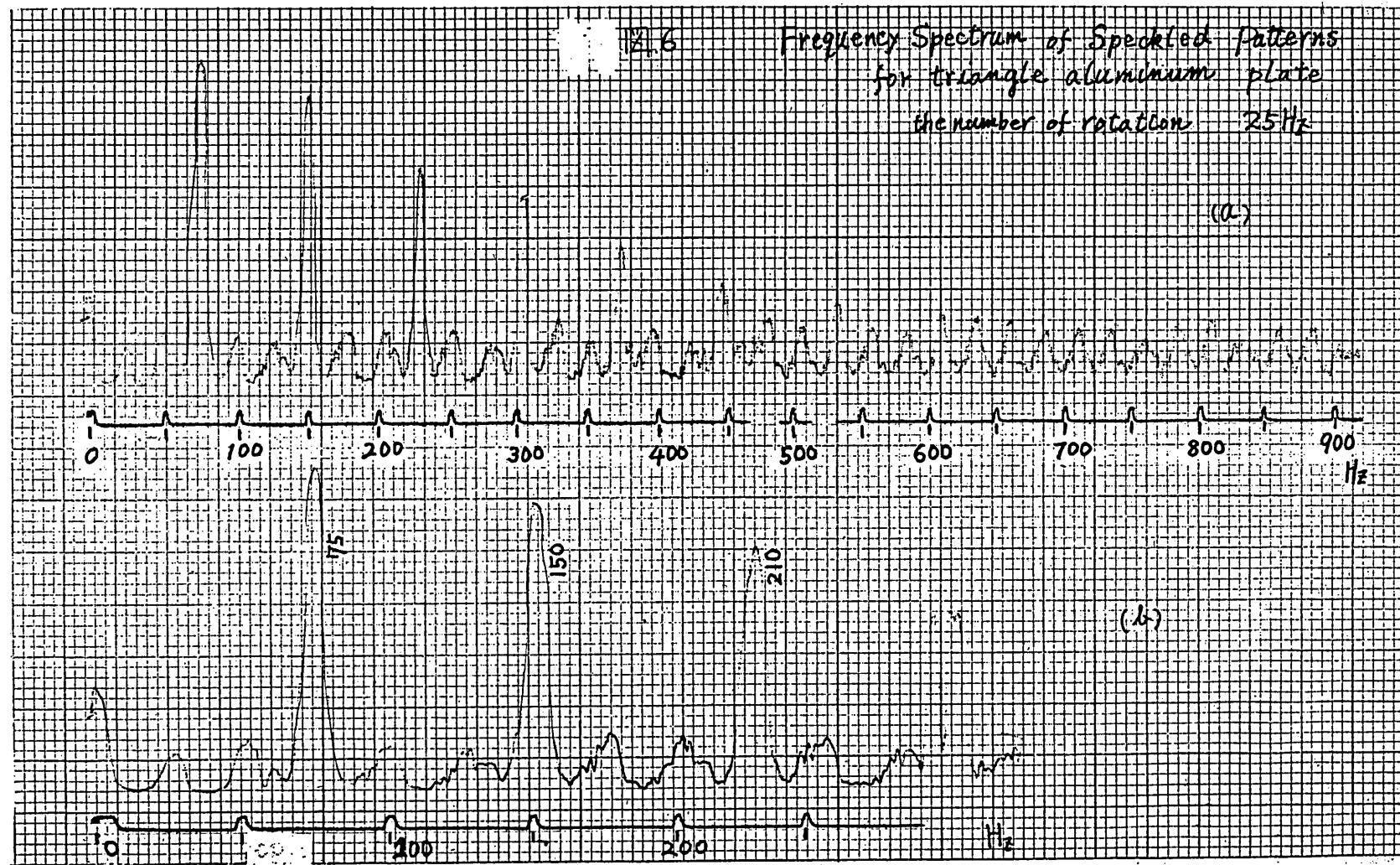
125

Frequency Spectrum of Speckled Patterns  
for Iron Plate (Black Tape)

the number of rotation 25 Hz

- (a) 2-Black Zone
- (b) 1-Black Zone
- (c) no Black Zone.





輻射科学研究会資料

## EL板を用いたテレビの画像表示

新居 宏 壬

(三菱電機 中央研究所)

1969年11月28日

(於 三菱電機株式会社 中央研究所)

## Ⅳ E L板を用いたテレビの画像表示

### 1. まえがき

未来生活を描いた挿絵の中によくでてくるものの一つに“壁かけテレビ”がある。将来のテレビの一形態として壁にかけて生活空間をセーブすること、また持運び自由な形として個人の所有の即進をはかることが考えられる。

それでは如何にしてその実現をはかるか。プラウン管を薄くする方法、壁にTV画像を映写する方法があるが、それについては今回は除外する。その他プラウン管の代りに薄い映像板を作ろうという試みがいろいろの方法を用いて行われた。我々もELを利用して映像板を作り、商用のTV放送を受像し、かなりの像を得ることができたのでこの機会に報告したい。

ELを用いてTVの映像を出すことは以前から試みられた。

RCAからTransfluxerを用いたもの、WestinghouseからELスクリーンの報告があった。

しかしながらELの輝度が今一つ上らぬこと、明るさを増そうと思って印加電圧を上げれば寿命が短くなること、X-Yマトリックス方式をとるときにCross-talkが問題になること、走査が複雑になり高価につくことなどの理由のためにこの方法は無理であるとされていた。

我々はそれで明るさを上げてともかく像を出すことを試みた。それには、蛍光体自身の明るさを増すこと、明るく光るように映像板をつくること、回路に工夫して光る時間を伸ばし、見かけの明るさを上げることが考えられ、その各々について実行し、5EL迄に達することができた。

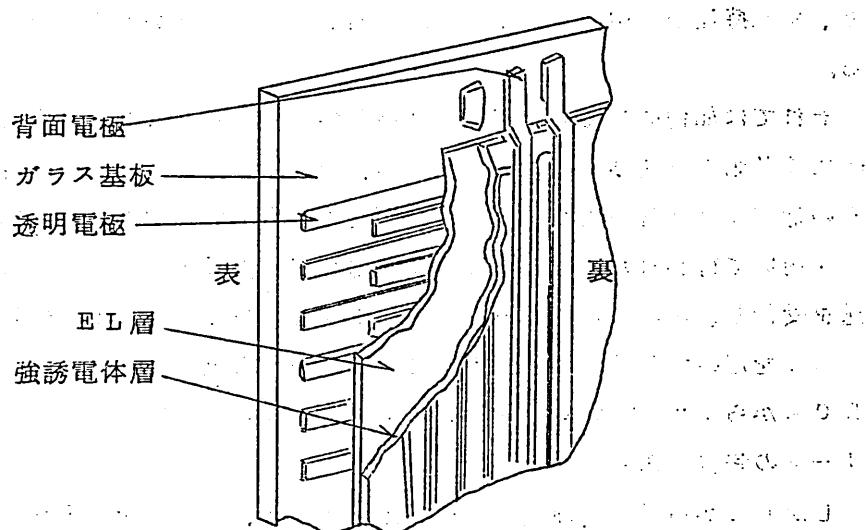
### 2. 装置概略

さて、我々の試作した映像板は第1図に示す如く通常のX-Yマトリックス方式の両電極の間に蛍光体と誘電体層をはさみ、蛍光体に接する電極を透明にしたもので、映像面の大きさは $100 \times 75\text{mm}$ 、厚さ $3\text{mm}$ で、電極数は縦、横各々80本、従って電極のピッチは $0.95 \sim 1.25\text{mm}$ である。

蛍光体はZnS:Se:Cu,Br、色調は緑、誘電体としてはBaTiO<sub>3</sub>を用いた。

これを駆動する回路は第3図に示す如くであり、これについては後に詳しく述べる。この回路を用いて映像板に450Vのパルス電圧を印加したときの明るさは5FL、白黒のテストパターンを写したとき5段階のパターンを判別することができた。

写真1に映像板を、写真2にこれを用いて写し出した映像を示す。



第1図 構造図

### 3. 融光体及び映像板

用いた融光体は、ZnS(0.7)·Se(0.3):Cu(0.002)·Br(0.01)である。

ZnSe, Cu 及び Br は、いずれも調合時のモル比で焼成により ZnSe は約 1/2、焼成後のシアン洗滌により、Cu は約 1/2 に減少する。Br は NH<sub>4</sub> Br の形で添加したが、最終的には融光体中に存在する Cu と当モル程度残存していることが認められた。粒径は電子顕微鏡による観察では、最大 7~8 μ 平均して 5~6 μ 程度である。

ZnS, Se 系を母体に用いた理由は、劣化の改善を期待してあるが、現在のところはっきりした結果は得られていない。

これについては、高誘電体や気密封着材料と関連して総合的に検討することが必要である。

発光スペクトルは、第2図に示す様に励起周波数が高くなると短波長側

の Peak が高くなる傾向をしめし明るさも増大する。

EL パネルの基板は透明電極として用いる  $\text{SnO}_2$  膜をコートしたガラス板で、絵素を作るため 80 本の線状に  $\text{SnO}_2$  膜をエッティングしてある。この線状電極の巾は 0.65 mm、ピッチは 0.95 mm である。

このガラス基板上に高誘電率を有する樹脂中に EL 融光体粉末を分散させた層をスクリーン印刷法により約 60  $\mu$  の厚さに塗布する。

融光体層の上には、耐圧を上げまた反射層としての役割をはたす  $\text{BaTiO}_3$  粉末の層を融光体層と同じ様に約 10  $\mu$  の厚さに塗布されている。

電圧を印加するためのもう一方の電極は、この  $\text{BaTiO}_3$  層の上に金属を蒸着して作られる。この金属蒸着膜電極は、 $\text{SnO}_2$  の電極と同じように 80 本の線状になっており、巾は 0.95 mm、ピッチは 1.25 mm である。

#### 4. 走査変調回路

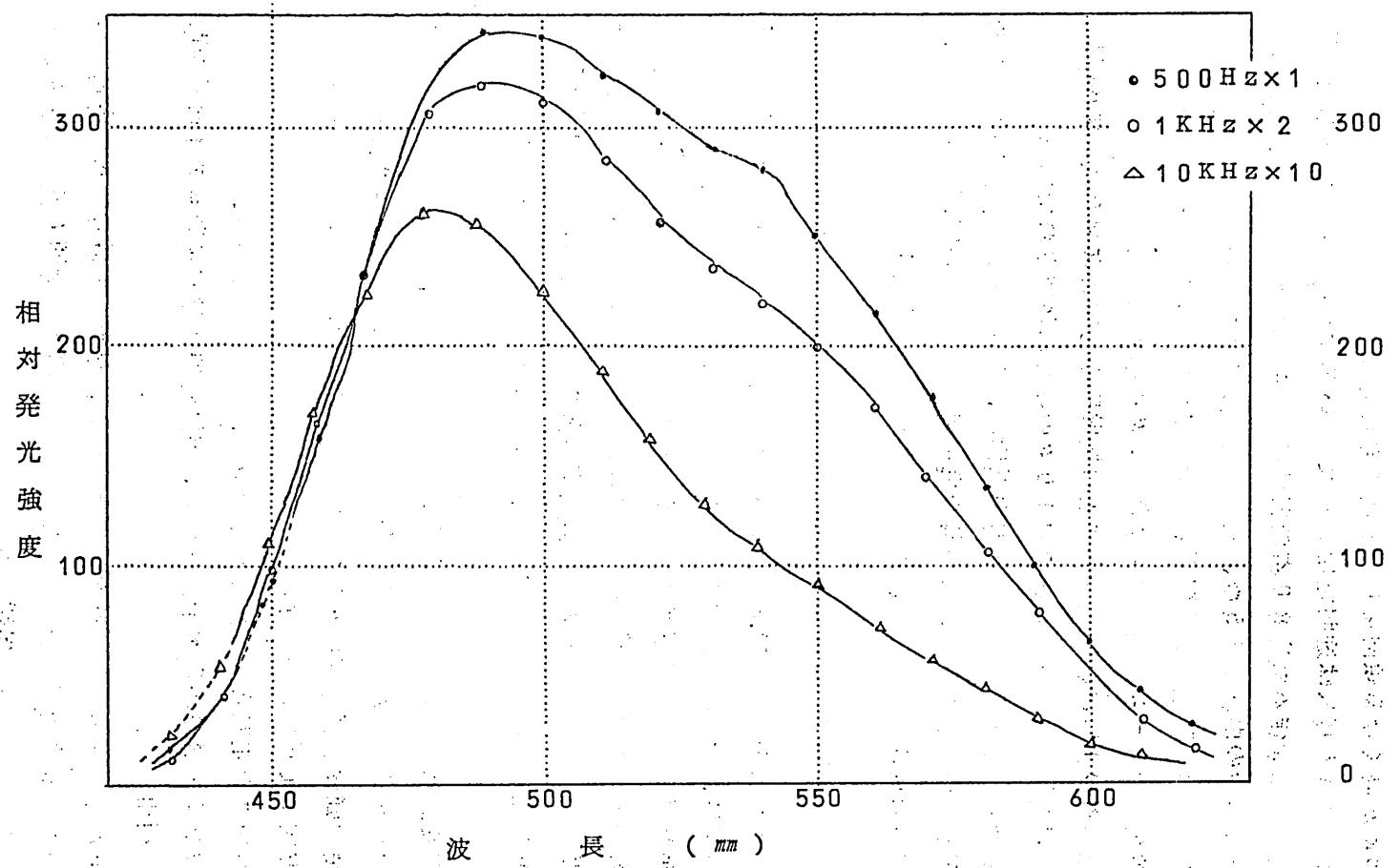
EL 板発光を X-Y マトリックス選択方式で制御し、TV 画像を表示するためには、一般的には発光点を走査する X, Y 方向のシフトパルス発生器と発光点強度を映像信号によって変化させる変調回路に大別される。

前者のシフトパルス発生器としては、Delay line, Gas 放電の利用等部品点数を少なくする方式が各方面で研究されているが、我々の試作器には最も原理的ではあるが、調整不用な IC によるシフトレジスタを採用した。

輝度変調は実質的にはパルス数変調になっており、これは、1 フレーム 1 回のパルス印加だけでは画面が暗いこと、更に印加電圧を変化しても EL 発光強度が直線的に変化しないこと等の理由によるもので、パルス数変調方式により比較的良好な階調と明るさを得た。

この他この走査変調装置の機能の概略は次の通りである。

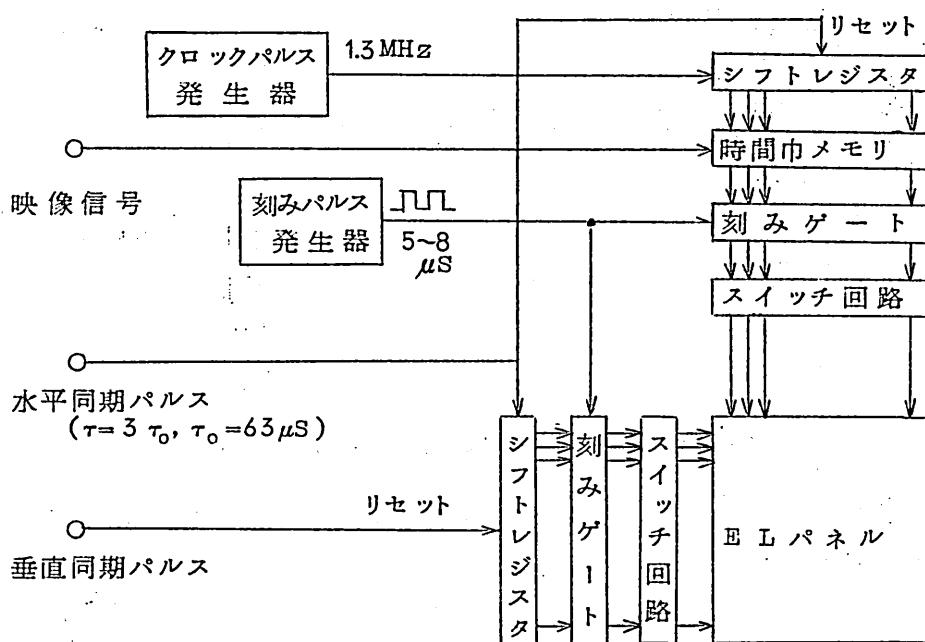
- (1) 標準 TV 信号から水平同期信号、垂直同期信号およびビデオ信号を取り出し利用する。
- (2) 走査線 80 本で全画域をまかうため、標準 TV 信号三水平走査に一度の割合で映像信号を取り出し、最大二水平走査時間（約 130  $\mu$ s）メモリによりそれを保持する。



第2図 ZnS:Cu,Br の E.D. 発光スペクトル

- (3) メモリは時間巾メモリとし、ビデオ信号の大小をメモリ時間の長短に交換する。最大振巾のビデオ信号に対しては、上述の如く二水平走査時間、最小振巾のビデオ信号に対してはゼロ時間メモリを保持する。
- (4) メモリの保持の間、対応する E L 板選択点に約 70 KHz のパルスを印加する。
- (5) E L に印加するパルス電圧は略々 350 V p-p である。

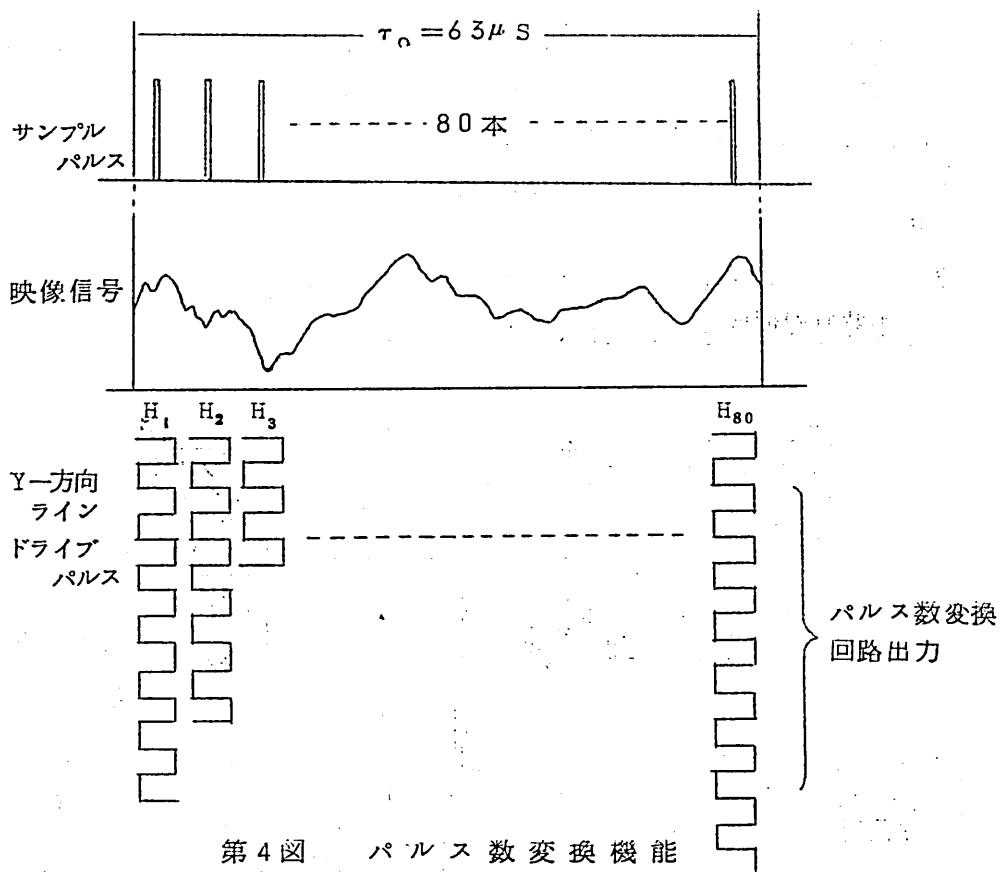
本装置の構成を第3図に示す。



第3図 試作 E-L板走査変調装置構成図

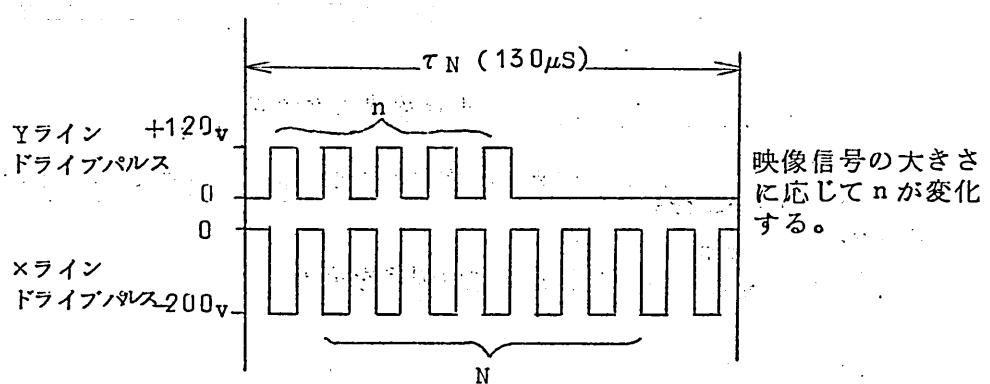
図中、水平同期パルスは標準 TV 信号の水平同期パルスを 3 個に 1 個の割合で抜き出したものである。

第4図は映像信号とパルス数変換の関係を示す。



第4図 パルス数変換機能

第5図は、X-Yマトリックス選択における選択点にかかるX方向、Y方向ドライブパルスの関係を示す。



第5図 パルス数変調によるマトリックス選択

一般に選択点の輝度を変化させるためには、選択点の E-L 板にかかる電圧を変化するか、あるいは印加時間を変化させる方法が考えられるが、前述の如く電圧変化に対する E-L 発光の強度関係は直線的でないこと、更に後者に属する方法として、一水平走査時間を最大とする時間巾パルスを印加する方法は輝度変調を深くできないこと等に難点がある。

この装置では、二水平走査時間内で印加パルス数を変化させることによって輝度変調を行なったものである。

## 5. 今後の問題点

以上、我々の試作した E-L 映像装置の概略を述べた。

さて、今後の課題であるが

- (1) まず、T V の受像装置としては、映像面をもう少し大きくしなければならないであろう。従って我々としては 12" 位の大きさのものまで試作する予定にしている。
- (2) 次には明るさを現在のブラウン管などにはしたい。しかしこれはなかなか難しい問題であり、蛍光体及び映像板の製作法、発光時間の増大法などに一段と工夫をしなければならない。
- (3) 色調を緑から白黒へ更にカラーにする問題がある。  
白黒にするのはたいしたことではないし、カラーも原理的には不可能ではない。けれども明るさとコストのかね合いになるのでこの点を考慮する必要がある。
- (4) 解像度を上げるには映像面を大きくして、電極数を増やせばよい。  
勿論、今述べたような駆動回路そのままでは、コスト高になる。
- (5) コントラストの増大をはからなければならない。  
それには、パルス数を増やすのが一方法であるが、極端に増やしてもコントラストはよくならない。  
他方 cross-talk をへらすことを考えれば、上述のままのパルスでもコントラストはもっとよくなる。  
従って、電圧の上昇に対して抵抗が下るような物質を蛍光体層に、重ねて塗ってやる、などのことを考えねばならないだろう。

(6) 回路の重容積の縮少とコストダウンであるが、この方式では、ELの明るさと密接な関係をもち、EL層が明るく光るようになれば、印加電圧を下げられ、全国路をICO化することが可能になる。

さらに、走査方式に抜本的な改革を行ってシフトレジスター方式より、例えばHakkiのPaperのような強電界を移動する方式<sup>1)</sup>とか、放電を移動する方式<sup>2)</sup>といった機能素子を使った簡単な方式を用いる、というような段階に達しなければ、ブラウン管のない“壁かけテレビ”的商品化が実現するようにはならないであろう。

文献 1) B.W.Hakki : Appl.Phys.Let. 11(1967) 159

2) G.W.Oprea.Jr : Electrical World 170

Aug 26 (1968) 73

ランダム伝送路における波動伝播

京都大学工学部

小倉 久直

中野 貞彦

池上 淳一

1969年11月28日

輻射科学研究会資料

## 1. 序論

大気の屈折率とか導波管の特性インピーダンスのように、媒質の特性が空間的にランダムにゆれ動くことによって波動の伝播は影響を受ける。このようなランダム不均質は、例えれば空気のじょう乱あるいは導波管壁の歪曲等によって生じる。波動伝播に及ぼす不均質の効果は多くの研究者が研究しており、種々の解析方法が展開されている。よく知られているように短距離の伝播に及ぼす弱い不均質の効果は単一散乱もししくは二重散乱の近似によつて十分よく評価されうるが、強い不均質あるいは弱い不均質の媒であつてもその伝播距離が長い場合は多重散乱効果のため簡単に取り扱うことが不可能になる。KayとSilverman<sup>1)</sup>は誘電体層をランダムに積み重ねてできる媒質に平面波を入射したときの多重散乱を研究し、多重散乱の強度の上限を評価することを試みている。多重散乱効果の計算において、種々の近似方法が工夫されている。例えば、我々が後章で検討する Brown, Jr<sup>2)</sup>の方法と de Wolf<sup>3)</sup>の方法は、多重散乱の特徴のパターンを表わすグラフから特別のパターンだけを選びだしてそれらの和を求める方法である。しかしながら、このような近似法の適用可能な範囲は時として明らかになつていない。

この論文では最初は、モデルランダム媒質中的一次元の波動伝播を取り扱い媒質の平均透過係数と平均位相常数を求める。KayとSilvermanが考えたモデルランダム媒質は二種類の屈折率の値をランダムに等しい確率でとる同一の厚さの誘電体層を積み重ねたものである。この論文ではこのモデルランダム媒質をより一般化する。即ち、二種類の誘電体層を任意の比率で混合したモデルランダム媒質に Faulkner と Korringa<sup>4)</sup>が使った方法を適用して、長距離伝播の極限における平均透過係数と平均位相常数の漸近的な表式を求める。さらに、周波数、混合の比率、屈折率等のパラメータを変化させてモデルランダム媒質の特性に立ち入る。このようにして得られた結果は平均値を考えるかぎりでは何ら近似を行なわずに得られる漸近的に正しいものである。

次いで、このモデルランダム媒質に既に使われている種々の近似法を適用して得られる結果と我々の方法から得られた結果とを比較することによつて、これらの近似法の適用可能な範囲に検討を加える。我々はモデルランダム媒質中の波動伝播を一次元でのみ扱うにもかかわらず、この比較検討は種々の近似法の適用可能な範囲について何らかの結論を与えるであろう。この論文では Born 近似、Rytov 近似、多重散乱

の Brown, Jr の方法、de Wolf の方法を取り上げる。

誘電率がランダム関数で表わされヘルムホルツの波動方程式を使って取り扱われるランダム媒質中の波動伝播の問題と、ホテンシャルがランダム関数であるシェレディンガーの方程式を使って解析するリキッドメタル、ランダム合金あるいは不完全結晶等における電子状態の問題との間には、注目に値する類似が存在する。それ故、一方の分野で展開された方法は他の分野でも有効なはずである。実際、Brown, Jr の多重散乱の理論は不規則な系における電子状態に関する Edward の理論と同一線上のものであり、またこの論文においてもランダム合金のエネルギーバンドの研究に使われた Faulkner と Korringa の方法をモデルランダム媒質の透過特性の計算に転用している。

この論文では幾分特別なランダム媒質を取り扱ったが、同じ方法はもっと一般的なモデルランダム媒質にも適用できる。引き続きそのような研究を報告できるであろう。

## 2. モデルランダム媒質中の波動伝播

### 2-1 特性マトリクスの平均

次のようなモデルランダム媒質を想定する。Aを厚さ  $l$  屈折率  $1$  の誘電体層、Bを同じ厚さ  $l$  屈折率  $n$  の誘電体層とする。 $(N-r)$  個のAと  $r$  個のBを任意に選んで重ね合わせて得られる厚さ  $Nl$  のモデルランダム媒質を考える。 $x$  軸を厚さの方向にとり媒質の外部は屈折率  $1$  とする。モデルランダム媒質の左方から平面波  $e^{ikx}$  を入射し  $x$  軸正方向に透過するものとする。  $k$  は自由空間の伝播定数である。(第1図参照)

よく知られているように、一次元の波動伝播は伝送路における波動伝播と等価であるから媒質の特性は  $2 \times 2$  行列によって決定することができる。附録Aにおいて伝送路における特性マトリクスとモデルランダム媒質の特性

マトリクスとの対応を述べる。

二種類の原子からなる一次元合金の電子状態を研究するのに Faulkner と Korringa、及び Faulkner<sup>5)</sup> が用いた方法を修正し第1図のモデルランダム媒質の特性マトリクスの統計的平均を求めるのに転用する。

附録Aに述べるように、 $N$  個の誘電体層からなるモデルランダム媒質の特性マトリクスは  $N$  個の  $F$  マトリクスの積で与えられる。

$$F = F_N F_{N-1} \cdots F_2 F_1 = A^r B^r B^r A^r \cdots A^r B^r \quad (1)$$

ここで  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) は  $i$  番目の誘電体層の  $F$  マトリクスでありそれが A か B かによって A あるいは B で与えられる。A, B はそれぞれ誘電体層 A, B の  $F$  マトリクスであり次式で与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$IB = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \frac{i}{n} \sin n\theta \\ i n \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここで

$$\theta = kl \quad (4)$$

である。簡単な計算によって  $\det A = \det IB = 1$  であることがわかる。

$(N-r)$  個の  $A$  と  $r$  個の  $B$  を配列するやり方は  $\binom{N}{r}$  個あり  
 (1)式はそのうちのひとつである。そしてモデルランダム媒質の特性はこのような表現可能なあらゆるモデルの平均をとることによって表わすことができる。モデルランダム媒質の平均の特性マトリクスを  $\langle F \rangle$  であらわす。うまい工合にマトリクス  $(A + zIB)^N$  の  $z^r$  の係数は  $(N-r)$  個の  $A$  と  $r$  個の  $B$  のあらゆる組み合わせの積の和になつていることを利用して  $\langle F \rangle$  は  $z^r$  の係数を  $\binom{N}{r}$  で割って得られる。即ち  $F$  のアンサンブル平均  $\langle F \rangle$  は次式で与えられる。

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi i} \binom{N}{r}^{-1} \oint (A + zIB)^N z^{r-1} dz \quad (5)$$

積分は原点のまわりを一周する。 $(5)$ 式の計算に、Luttinger が工夫し Faulkner と Korringa が用いた方法を使う。

次のマトリクスを導入する。

$$G(z) = \frac{A + zIB - D \mathbb{I} \cos p}{iD \sin p} \quad (6)$$

ここで  $\mathbb{I}$  は単位マトリクスであり  $D$  と  $p$  は以下に定義する。

$$D^2 = \det(A + zIB) = 1 + 2\beta z + z^2 \quad (7)$$

$$E = a + z b \quad (8)$$

$$\cos p = \frac{E}{D} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= a_{11} = a_{22}, \quad b = b_{11} = b_{22} \\ \beta &= ab - \frac{1}{2} (a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$a_{ij}, b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) は  $A$ ,  $B$  の要素である。マトリクス

$G(z)$  は対角要素が 0 であり  $\text{trace } G = 0$ ,  $\det G = 1$ ,  $G^2 = I$  なることが素直な計算によってわかる。実際、 $G$  をあらわに書き下せば次のようになる。

$$G(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{a_{12} + z b_{12}}{a_{21} + z b_{21}}} \\ -\sqrt{\frac{a_{21} + z b_{21}}{a_{12} + z b_{12}}} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(6) 式より

$$A + zB = D(I \cos p + iG \sin p)$$

でありまた  $G^2 = I$  を使って

$$e^{ipG} = I \cos p + iG \sin p$$

であるから

$$A + zB = D e^{ipG} = D(I \cos p + iG \sin p) \quad (12)$$

$$(A + zB)^N = D^N e^{iNpG} = D^N(I \cos Np + iG \sin Np) \quad (13)$$

の両式が成り立つ。したがって(4)式は

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi i} \binom{N}{r}^{-1} \oint (I D^N \cos Np + iG D^N \sin Np) \bar{z}^{-r-1} dz \quad (14)$$

と書くことができる。各要素毎に積分を計算することによって  $\langle F \rangle$  を求めることができる。

## 2-2 鞍部点法

この節では  $N$  が十分大きい場合鞍部点法を用いて(14)式の積分の漸近形を求め  $\langle F \rangle$  の漸近形を求める。まず対角要素に注目する。

$$\langle F_{11} \rangle = \langle F_{22} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \binom{N}{r}^{-1} \oint D^N \cos Np \bar{z}^{-r-1} dz \quad (15)$$

(15)式は(7),(8),(9)式を用いて変形することができて

$$\langle F_{11} \rangle = \frac{1}{4\pi i} \binom{N}{r}^{-1} \oint [\{f_+(z)\}^N + \{f_-(z)\}^N] dz \quad (16)$$

但し

$$f_{\pm}(z) = \frac{E \pm i\sqrt{D^2 - E^2}}{z^{\frac{1}{2}}} \quad (17)$$

また

$$\xi = \frac{r+1}{N} \quad (18)$$

は  $N$  が無限大に近づく時、 $B$  の混合比率に等しくなる。二価関数  $(D^2 - E^2)^{1/2}$  は二枚のリーマン面  $R_+$  と  $R_-$  で定義し  $\sqrt{D^2 - E^2}$ ,  $-\sqrt{D^2 - E^2}$  はそれぞれリーマン面  $R_+$ ,  $R_-$  上の値である。リーマン面  $R_+$  と  $R_-$  を定義するカシトは  $D^2 - E^2 = 0$  から得られる二つの分岐点を結ぶ直線に達ぶ。(17)式で定義される  $f_{\pm}(z)$  は  $\xi N = r = \text{整数}$  であるから  $\{f_{\pm}(z)\}^N$  は二価関数となる。

$$f(z) = \frac{E + i(D^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}} \quad (19)$$

とすれば、 $f_+^N$ ,  $f_-^N$  は二価関数  $f^N$  の二つの値であるから(16)式の積分は  $f^N$  の積分と考えてもよい。このとき積分路はリーマン面  $R_+$ ,  $R_-$  の二つの原点をそれぞれ回る二つの積分路をとりそれらは分岐を通して一つの積分路に変形することができる。分岐点は次の二次方程式の二根である。

$$D^2 - E^2 = -(a_{12} + z b_{12})(a_{21} + z b_{21}) = 0 \quad (20)$$

即ち

$$\left. \begin{aligned} z &= -\frac{a_{12}}{b_{12}} = -n \frac{\sin \theta}{\sin n \theta} \\ z &= -\frac{a_{21}}{b_{21}} = -\frac{1}{n} \frac{\sin \theta}{\sin n \theta} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

これらは共に実数で常に同符号をとるから分岐は正の実軸上か負の実軸上に存在し原点をはさんで存在することはない。以上のことから次の関係式が成り立つ。

$$f_+^*(z) = f_-(z^*) \quad (22)$$

\* は複素共役を示す。(22)式から  $f_+(z)$  を知れば直ちに  $f_-(z)$  がわかることになる。即ちリーマン面  $R_+$  上の  $f_+$  の形が定まるとき  $z$  についてこれを反転させればそれはリーマン面  $R_-$  上の  $f_-$  になっている。

次の二次方程式

$$D^2 = 1 + 2\beta z + z^2 = 0 \quad (23)$$

の二根は  $f(z)$  の零点を与える。リーマン面  $R_+$ ,  $R_-$  上にそれぞ

れひとつづつ存在する。(10)式で与えられる  $\beta$  は  $n > 1$  であることから  $| \beta | < 1$  である。したがって(23)式の二根は必ず虚根となる。即ち  $f(z)$  の零点は実軸上には存在しない。

$N \rightarrow \infty$  に対する(16)式の漸近形を求めるためまず  $\binom{N}{r}^{-1}$  をスターリングの公式を使って求める。

$$\binom{N}{r}^{-1} = \sqrt{2\pi} \{ \xi (1-\xi) \}^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}} e^{-N\mu} \quad (24)$$

但し

$$\mu = -\xi \ln \xi - (1-\xi) \ln (1-\xi) \quad (25)$$

一般に積分  $\int e^{Nq(z)} dz$  は  $N$  が十分大きい時、鞍部点法を用いて評価することができます。したがって(16)式の複素積分を  $\oint e^{Nh(z)} dz$  と書きかえることによって鞍部点法を用いることができる。

$$h(z) = \ln f(z) \quad (26)$$

である。この時鞍部点は

$$\frac{dh(z)}{dz} = 0 \quad (27)$$

の根として与えられる。(7), (8)そして(19)式を利用すれば(27)式は四次の代数方程式<sup>†</sup>として書き下すことができて

$$\sum_{n=0}^4 c_n z^n = 0 \quad (28)$$

但し

$$\begin{aligned} c_0 &= (1-\xi)^2 (1-b^2) \\ c_1 &= 2 \{ (2\beta - b^2 \beta - ab) \xi^2 - (3\beta - b^2 \beta - 2ab) \xi + (\beta - ab) \} \\ c_2 &= \{ (1-a^2) + 4\beta (\beta - ab) + (1-b^2) \} \xi^2 \\ &\quad - 2 \{ (1-a^2) + 2\beta (\beta - ab) \} \xi + (\beta^2 - 2ab\beta + b^2) \\ c_3 &= 2 \{ (2\beta - \beta a^2 - ab) \xi^2 - \beta (1-a^2) \xi \} \\ c_4 &= (1-a^2) \xi^2 \end{aligned} \quad (29)$$

<sup>†</sup> Faukner と Korringa は六次方程式を導いているが六根のうちの余分な二根は(23)式で与えられる  $f(z)$  の零点である。 $\beta = 1$  の時  $D = z + 1$  となり(28)式は  $D = z + 1$  なる因子を持つため Faukner と Korringa が示しているように三次方程式になる。

(2), (3)式で与えられるマトリクス A, Bに対して

$$a = \cos \theta$$

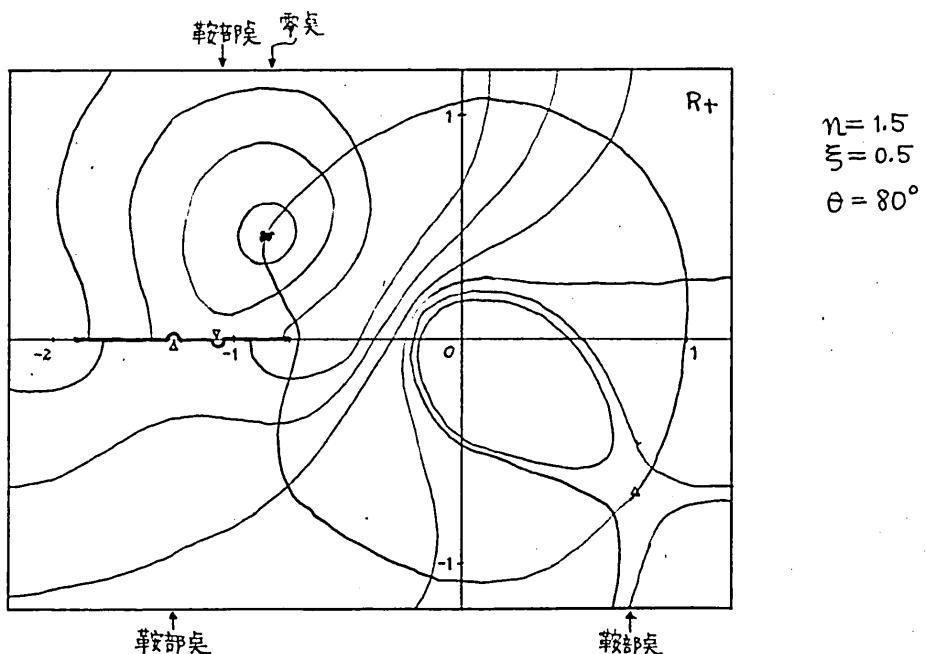
$$b = \cos n\theta$$

$$\beta = \cos \theta \cos n\theta + \frac{1}{2} (n + \frac{1}{n}) \sin \theta \sin n\theta$$

(30)

となる。そして(28)式の四根のうち二根は常に複素根であつてリーマン面  $R_+$ ,  $R_-$  上にそれぞれひとつづつ存在する。この二根は常に実根であり分歧の上に存在する。ここで  $R_+$  に属する鞍部点は  $R_+$  に属するよう、 $R_-$  に属する鞍部点は  $R_-$  に属するようこれらをもめずかにさせて分歧を引き直すことにする。 $f(z)$  は多くのパラメータに依存するから積分路がどの鞍部点を通るかを見極めることは簡単にはわからぬ。

積分  $\int e^{Nq(z)} dz$  に鞍部点法を適用する時積分路は  $\Im m [q(z_s)] = \text{一定}$  ( $z_s$  は鞍部点) で与えられる。被積分関数の絶対値を高さとする曲面をすれば起伏の等高線は  $\Re e [q(z)] = \text{一定}$  で表現される。そして鞍部点法の積分路はこの等高線図で鞍部点を通る最急勾配路になっている。パラメータのいくつかの組み合わせについてこのような等高線図を描いて実際最急勾配路がどのようになっているか調べて見た。 $\Re e [h(z)] = \ln |f(z)| = \text{一定}$  と等価な  $|f(z)| = \text{一定}$  について等高線図を描いてみたところ次の二つの場合がある。

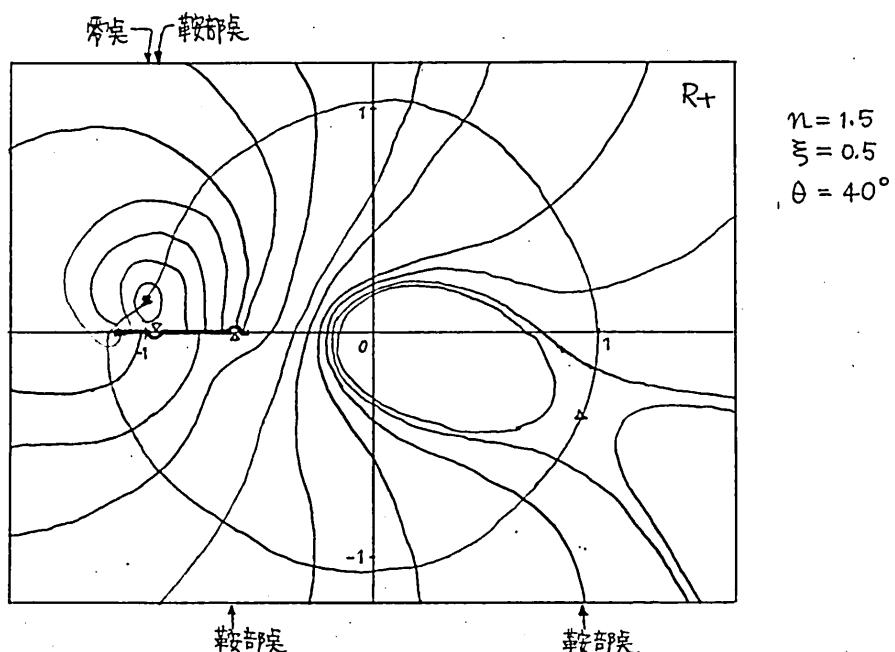


第2図 鞍部点と最急勾配路

即ち①リーマン面  $R_+$  上において最急勾配路は  $f_+(z)$  の零点から出発し  $f_+(z)$  の複素の鞍部点を通過して再び零点に帰る。この時とじた路の内部の特異点は原点だけである。②①と同じよう  $f_+(z)$  の零点から複素の鞍部点を通り再び零点に帰るが、その路の内部に特異点として原点の他に分岐点を含む。(第2, 3図参照) ②の場合にはとじた積分路内に分岐点を含むことにより分岐からの積分への寄与を考慮しなければならない。しかし、それは数値的には省略できる程小さいものであるが省略するまでもなくリーマン面  $R_-$  上の  $f_-(z)$  の同じ寄与により互いに相殺してしまう。これは(22)式から直ちにわかる。同じ(22)式から①, ②についてもリーマン面  $R_-$  上の積分路は実軸についてリーマン面  $R_-$  上の積分路を反転させることによって得られる。結局(16)式の積分の漸近的な評価に寄与するのは一対の複素鞍部点のみである。分岐上の二つの実の鞍部点は①と②の臨界においてのみ積分路が通過することになるが積分への寄与はしない。

リーマン面  $R_+$  上の複素鞍部点を  $z_0$  とすればリーマン面  $R_-$  上の複素鞍部点は  $\bar{z}_0$  である。鞍部点法の公式を使えば複素鞍部点  $z_0$  からの寄与は次のように書ける。

$$\langle F_{11} \rangle_+ = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{r} \right)^{-1} \left\{ 2\pi N - \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} \right\}^{-\frac{1}{2}} \{ f_+(z_0) \}^N \quad (31)$$



第3図 鞍部点と最急勾配路

そして (22) 式によれば  $z_0$  カラの寄与は (31) 式の複素共役で与えられることになる。これらを使って結局  $\langle F \rangle$  の対角要素の漸近形は次式のようになる。

$$\begin{aligned}\langle F_{11} \rangle &= \{\xi(1-\xi)\}^{\frac{1}{2}} e^{-N\mu} \operatorname{Re} \left[ \left\{ \frac{f_+(z_0)}{f''_+(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ f_+(z_0) \right\}^N \right] \\ &= C e^{N\gamma} \cos(N\Theta + \delta) \end{aligned}\quad (32)$$

但し

$$C = \{\xi(1-\xi)\}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{f_+(z_0)}{f''_+(z_0)} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

$$\gamma = \ln |f_+(z_0)| - \mu \quad (34)$$

$$\Theta = \arg f_+(z_0) \quad (35)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \arg \frac{f_+(z_0)}{f''_+(z_0)} \quad (36)$$

同様にして  $\langle F \rangle$  の非対角要素を求めることができる。(11) と (14) 式を使って

$$\langle F_{12} \rangle = \frac{1}{4\pi i} \left( \frac{N}{r} \right)^{-1} \oint [g_+(z) \{f_+(z)\}^N + g_-(z) \{f_-(z)\}^N] dz \quad (37)$$

但し

$$g_{\pm}(z) = \pm \sqrt{\frac{a_{12} + z b_{12}}{a_{21} + z b_{21}}} \quad (38)$$

流字土はリーマン面  $R_+$ ,  $R_-$  上の値であることを示す。

$$g_+(z) \equiv e^{\lambda + i\nu} \quad (39)$$

と表わせば 結局

$$\langle F_{12} \rangle = -i C e^{N\gamma + \lambda} \sin(N\Theta + \delta + \nu) \quad (40)$$

$$\langle F_{21} \rangle = -i C e^{N\gamma - \lambda} \sin(N\Theta + \delta - \nu) \quad (41)$$

となる。 $(32)$ ,  $(40)$ ,  $(41)$  式で  $F$  のアンサンブル平均  $\langle F \rangle$  の各要素が求められた。

## 2-3 平均透過係数と平均位相常数

モデルランダム媒質の平均透過係数と平均位相常数を前節で求めた  $\langle F \rangle$  から求める。 $F$  マトリクスと  $T$  マトリクスの関係について述べる附録B から  $\langle F \rangle$  に対応する  $T$  マトリクス  $\langle T \rangle$  は次式で示される。

$$\langle T \rangle = \begin{pmatrix} \langle F_{11} \rangle - \frac{1}{2} (\langle F_{12} \rangle + \langle F_{21} \rangle) & \frac{1}{2} (\langle F_{12} \rangle - \langle F_{21} \rangle) \\ \frac{1}{2} (\langle F_{12} \rangle + \langle F_{21} \rangle) & \langle F_{11} \rangle + \frac{1}{2} (\langle F_{12} \rangle + \langle F_{21} \rangle) \end{pmatrix} \quad (42)$$

モデルランダム媒質は無損失でありまた  $N$  が十分大きいからその平均特性を考える場合は対称回路として取り扱うことができる。そして一般に無損失四端子回路の  $T$  マトリクスは透過係数を位相常数を  $\varphi$  とすれば

$$T = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\varphi}}{t} & i \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \\ -i \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} & \frac{e^{-i\varphi}}{t} \end{pmatrix} \quad (43)$$

で与えられる。 $(42)$  と  $(43)$  式から

$$\langle F_{11} \rangle - \frac{1}{2} (\langle F_{12} \rangle + \langle F_{21} \rangle) = \langle T_{11} \rangle = \frac{1}{t} e^{i\tilde{\varphi}} \quad (44)$$

なる対応がなされる。ここで  $\sim$  は一応平均的なものであることを意味する。 $(44)$  式に  $(40)$ ,  $(41)$  式を代入し  $N$  に比して入を  $N \oplus$  に比して  $\delta$ , リを無視すれば両辺の対応から  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{\varphi}$  が推論できる。また同様の対応

$$\langle F_{11} \rangle = \frac{1}{2} (\langle T_{11} \rangle + \langle T_{22} \rangle) = \frac{1}{\tilde{t}} \cos \tilde{\varphi} \quad (45)$$

において漸近形  $\langle F_{11} \rangle$  の  $N \oplus$  に比して  $\delta$  を無視すれば同じ  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{\varphi}$  を見い出すことができる。結局

$$\tilde{t} = \frac{1}{c} e^{-N\varphi} \quad (46)$$

$$\tilde{\varphi} = N \oplus \quad (47)$$

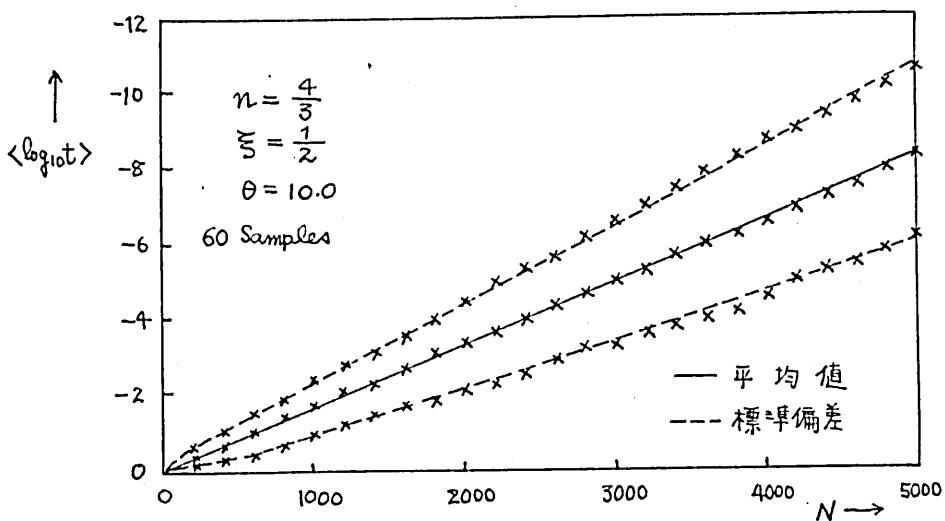
を得る。

$(44)$  式の関係から  $\langle F \rangle$  を使って透過係数を定義することは理論的には正しくない。なぜなら  $\det F = 1$  であるが  $\det \langle F \rangle = C^2 e^{2N\varphi} \cos^2(\arg f + (z_0)) \neq 1$  であり  $\langle F \rangle$  による透過係数の定義はできないからである。もしこのような定義による  $\tilde{t}$  を正しく計算しようとするなら、 $F$  の各要素は確率変数であるからそれ

らの間の共分散を求めなければならない。それを求めることが今のところできていらない。さらに(44)または(45)式の形から推論して求めた  $\bar{\tau}$ ,  $\sigma$  も必ずしも確率変数  $\tau$ ,  $\sigma$  の平均  $\langle \tau \rangle$   $\langle \sigma \rangle$  と一致しない。それは(44)または(45)式は行列要素の平均値即ち  $\langle T_{11} \rangle$ ,  $\langle F_{11} \rangle$  であるからである。 $\bar{\tau}$  を  $\langle \tau \rangle$  と見做すことが許されるためには、確率変数  $\tau$  の標準偏差  $\sqrt{\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2}$  が平均値  $\langle \tau \rangle$  より小さいことが必要である。今のところ標準偏差を求める方法を見出していくないが、乱数を使ってシュミレーションすることにより平均値と標準偏差を求めて確かめることができることができる。

第4図はパラメータ  $\theta$ ,  $n$ ,  $\xi$  に値を与え、乱数を使って行列積(1)式を計算し 60 個のサンプルについて平均値  $\langle \log_{10} \tau \rangle$  をとり、 $N$  に対してプロットしたものである。 $\langle \log_{10} \tau \rangle$  は  $N$  に比例した直線になり、この勾配から  $\gamma$  を求めることができる。第4図に最小自乗法を用いて  $\langle \log_{10} \tau \rangle$  の勾配を計算し、この勾配から(46)式を使って求めた  $\gamma$  と、解析的に求めた(34)式の  $\gamma$  の値とはよく一致する。第4図から求めた  $\gamma = 3.835 \times 10^{-3}$  (34)式から求めた  $\gamma = 3.893 \times 10^{-3}$  である。パラメータの異なる幾つかの値についてもふたつの  $\gamma$  はよく一致する。

また第4図には  $\langle \log_{10} \tau \rangle$  の標準偏差  $\sigma = \sqrt{\langle (\log_{10} \tau)^2 \rangle - \langle \log_{10} \tau \rangle^2}$  が点線で示されている。 $\sigma$  はパラメータによって大分異なるが、 $N$  が大きくなつて  $\langle \log_{10} \tau \rangle \gg \sigma$  ( $N > 2000$ ) のところでは  $\sigma$  はほぼ  $\sqrt{N}$  に比例して増大する。この様子は 10000 までの  $N$  に対して  $\sigma$  をプロットした第5図からよくわかる。 $\langle \log_{10} \tau \rangle$  は  $N$  に比例するので  $\sigma / \langle \log_{10} \tau \rangle \sim 1 / \sqrt{N}$  ( $N \rightarrow \infty$ ) であり、したがつて  $\gamma$  は確率変数ではなく確定する値である。



第4図  $\langle \log_{10} \tau \rangle$  と標準偏差  $\sigma$

これは一種の中心極限定理が成り立っていることを示している。即ち

$$\gamma = -\frac{1}{N} \ln t(N) = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log_{10} t(N) \quad (48)$$

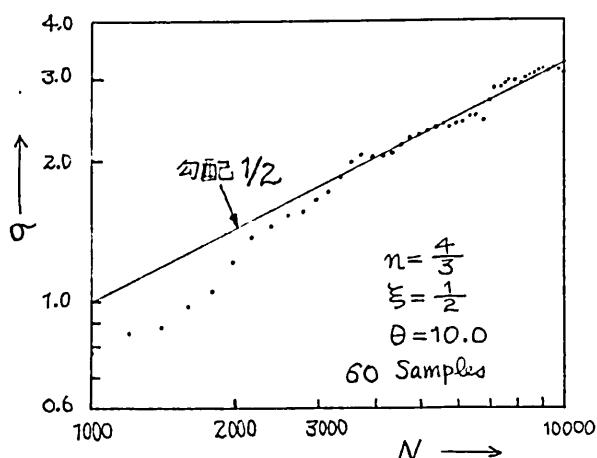
同様のこととは位相常数についても言えて

$$\Theta = \frac{\Theta(N)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Theta(N)}{N} \quad (49)$$

となる。 $\Theta$ が確定した値であることは媒質中の平均的な波動は一定の波長をもつことを意味し、したがって

$$\langle n \rangle = \frac{\Theta}{\theta} \quad (50)$$

はモデルランダム媒質の平均屈折率を与える。



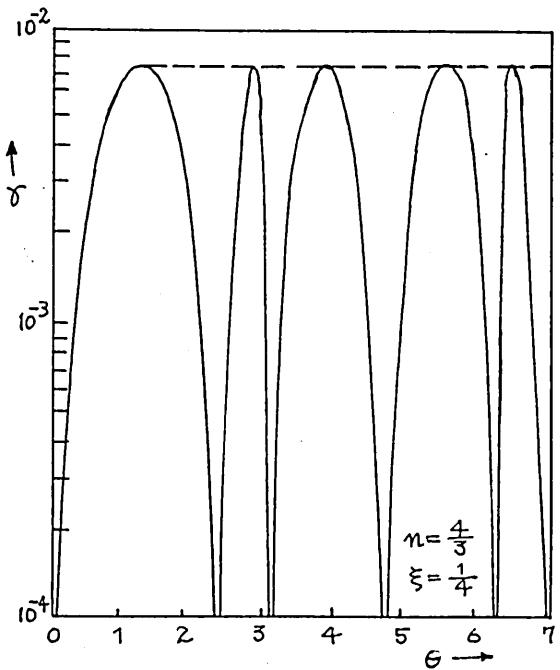
第5図 標準偏差

## 2-4 数値計算

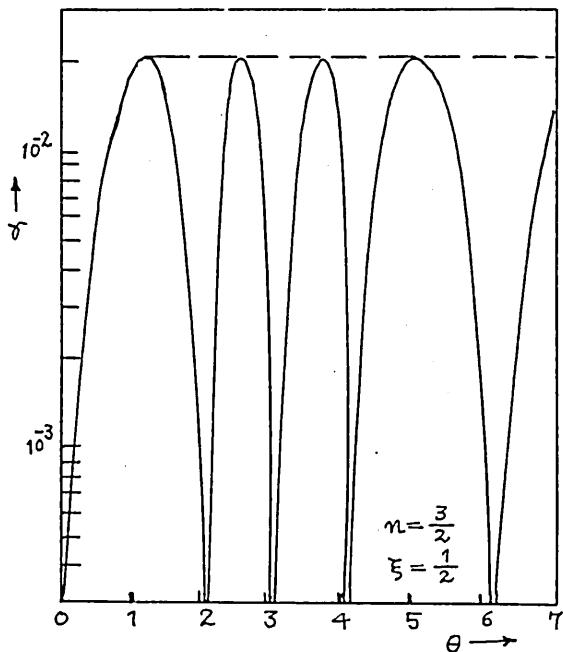
(34) 式で与えられる減衰率  $\gamma$  を  $\theta = k l$  の関数として第6,7 図に示す。この二例では  $n$  が共に有理数であるために、 $\gamma$  に周期性がもたらされている。両図から直ちにわかる顕著なこの第一の点は、 $\gamma$  が次式で与えられる  $\theta$  の点において谷をもつことである。

$$\theta = M\pi, M \frac{\pi}{n} \quad M = 1, 2, 3, \dots \quad (51)$$

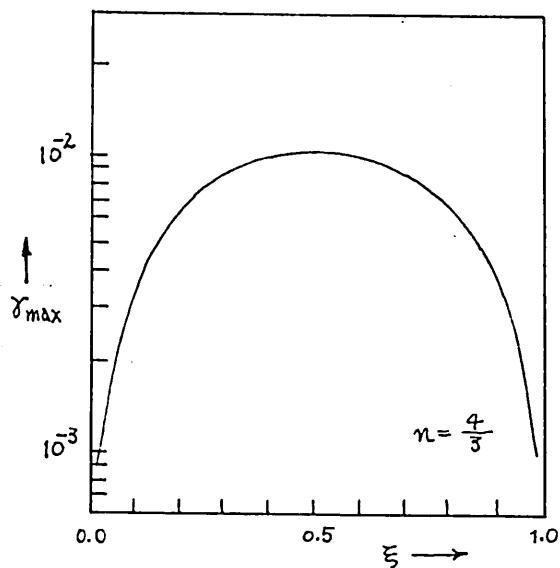
この谷はちょうど誘電体層 A, B の共振点の整数倍になって



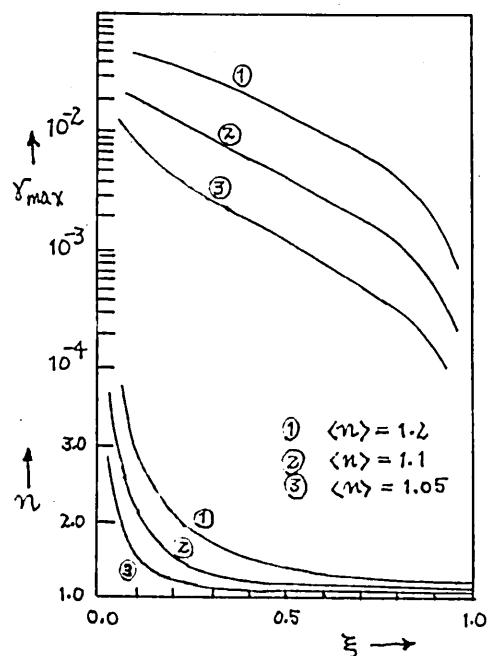
第6図  $\gamma$ - $\theta$  特性



第7図  $\gamma$ - $\theta$  特性



第9図  $\gamma_{\max}$ - $\xi$  特性 ( $n$ =一定)



第8図  $\gamma_{\max}$ - $\xi$  特性 ( $\langle n \rangle$ =一定)

おり、モデルランダム媒質の共振点である。顕著なことの第二の点は山が同じ高さを持つことである。これを  $\gamma_{max}$  で表わすこととする。 $\gamma-\theta$  の特性は(51)式の谷と山の高さ  $\gamma_{max}$  によって大いに特徴づけられる。さらに  $\gamma-\theta$  の関係で注目すべき点は、 $\theta < 1$  の領域では log-log でプロットした第10図に示されるように  $\gamma$  は  $\theta^2$  に比例して増大する。第8図は(53)式で与えられるモデルランダム媒質の平均屈折率  $\langle n \rangle$  を一定に保って  $\gamma_{max}$  をもつあるいはそれに対して描いたものである。また第9図は、 $\gamma_{max}$  が  $\gamma = 1/2$  のとき極大値をとることを示している。このことはモデルランダム媒質が  $\gamma = 1/2$  のときもっともランダムであることを意味している。

(51)式で示される共振点のふるまいは、我々が想定したモデルランダム媒質の特殊性によっている。もしも  $\gamma$  を任意に選んださらには一般的なモデルランダム媒質では、このような共振は現われず、山は第6, 7図中に示した点線のようになめらかになるであろう。したがって一般のランダム媒質においては、 $\theta \rightarrow 0$  の近傍においては減衰率  $\gamma$  は  $\theta^2$  に比例して増大し  $\theta$  が大きくなると極大値  $\gamma_{max}$  に飽和することが予想される。

(32)式に現われる位相常数  $\Theta$  は(35)式で与えられている。 $\Theta$  を  $\theta$  のなめらかな関数としてプロットするために、 $\Theta$  のかわりに  $\Theta(\theta)$  を用いることにする。即ち  $\cos \Theta$  と同じ値を与えるか  $\Theta(\theta)$  が  $\theta$  のなめらかな関数となるように  $\Theta(\theta)$  を定めることができる。このようにしてあるれ、 $\gamma$  の値に対して数値を計算したところ、 $\Theta(\theta)$  は全く比例していた。即ち

$$\Theta(\theta) = \langle n \rangle \theta \quad (52)$$

但し

$$\langle n \rangle = (1 - \gamma) + \gamma \gamma \quad (53)$$

数値計算から(52)式は(51)式の共振点の近傍においても完全に成り立っていることがわかった。(53)式はモデルランダム媒質の平均屈折率にほかならない。(50)式と(53)式は我々のモデルランダム媒質が屈折率  $\langle n \rangle$  の非分散媒質と等価であることを示す。

### 3. 多重散乱理論との比較

この章では我々の想定したモデルランダム媒質に、よく使われる弱い散乱の理論と多重散乱理論を適用し、前章で得た結果と比較する。現在取り扱っているのは一次元であり三次元での正しい比較検討はできないが、これらの散乱理論の適用範囲の限界に何らかの示唆を与えるであろう。

#### 3-1 弱い散乱理論 I

この節では Born の散乱理論を我々のモデルランダム媒質に適用する。屈折率  $n(x)$  を次式で与える。

$$n(x) = n_0 + \Delta n(x) \quad (54)$$

ここで  $\Delta n(x)$  は屈折率の変動部分を表す。簡単のため  $\Delta n(x) \ll 1$  として一次元の波动方程式を書くと次のようになる。

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right] u(x) = -2 \frac{k^2}{n_0} \Delta n(x) u(x) \quad (55)$$

$k = n_0 k_0$  であり、 $k_0$  は  $n_0=1$  のときの波数である。自由空間のグリーン関数

$$G(x|x') = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-x'|} \quad (56)$$

を用いて (55) 式を積分方程式に書き直すことができて

$$u(x) = e^{ikx} - 2 \frac{k^2}{n_0} \int_0^{Nl} G(x|x') \Delta n(x') u(x') dx' \quad (57)$$

となる。 $e^{ikx}$  は入射波である。(57) 式を逐次近似することによってノイマン級数が得られる。複素透過程数  $T$  を  $u(x) = T e^{ikx}$  ( $x > Nl$ ) で定義する。ノイマン級数のニ次までの近似から  $T$  は次式で与えられる。

$$T = 1 + ik_0 \int_0^{Nl} \Delta n(x) dx - k_0^2 \iint_0^{Nl} e^{-ikx_2} e^{ik|x_2-x_1|} e^{ikx_1} \Delta n(x_2) \Delta n(x_1) dx_1 dx_2 \quad (58)$$

(58) 式を導くとき、 $n_0=1$  とするのではなくランダム媒質の外部の媒質の屈折率を  $n_a$  として

$$n_0 = \langle n \rangle = 1 + (n-1) \xi \quad (59)$$

とした。ランダム媒質中には誘電体層 A, B がそれぞれ (1- $\xi$ )

この確率で出現するから、 $\Delta n(x)$  はランダム関数

$$\Delta n(x) = \begin{cases} 1 - \langle n \rangle & x \text{が } A \text{ 内にあるとき} \\ n(x) - \langle n \rangle & x \text{が } B \text{ 内にあるとき} \end{cases} \quad (60)$$

であらわされる。ここで

$$\langle \Delta n(x) \rangle = 0 \quad (61)$$

$$\langle \Delta n(x_1) \Delta n(x_2) \rangle = \begin{cases} \langle \Delta n^2 \rangle = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})(n-1)^2 & x_1, x_2 \text{が同一層内} \\ & \text{にあるとき} \\ 0 & x_1, x_2 \text{が異なる層内} \\ & \text{にあるとき} \end{cases} \quad (62)$$

(61), (62)式を用いて  $T$  の平均を求めることができる。

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= 1 - k_0^2 N \langle \Delta n^2 \rangle \left\{ \frac{l^2}{2} - \frac{l}{2ik} - \frac{1}{4k^2} (e^{2ikl} - 1) \right\} \\ &= 1 - k_0^2 N \langle \Delta n^2 \rangle \left\{ \frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} \frac{\sin^2 kl}{(kl)^2} + i \left( \frac{l}{2k} - \frac{\sin 2kl}{4k^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (63)$$

(63)式には单一散乱の項があらわれていないが、これは (61)式のために消えているのである。(63)式の虚部は  $k_0^2 \langle \Delta n^2 \rangle$  のオーダーでは振幅に影響を与えない。したがって  $\langle T \rangle$  の振幅を  $t_B$  であらわし

$$t_B = 1 - \gamma_B N \quad (64)$$

とすれば  $\gamma_B$  は  $\theta^2(n-1)^2$  のオーダーである。

$$\gamma_B = \frac{\theta^2}{2} (n-1)^2 \frac{1}{3} (1-\frac{1}{3}) \left\{ 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \right\} \quad (65)$$

となる。ここで  $\theta = k_0 l$  である。さらに  $\langle |T|^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$  に対する同様の式を得るが、このときは单一散乱の効果が含まれることになる。

$$\langle |T|^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\theta^2}{2} (n-1)^2 \frac{1}{3} (1-\frac{1}{3}) N \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \quad (66)$$

(66)式から出て来る  $\gamma_B$  は (65)式の  $\gamma_B$  のおよそ半分の値である。明らかに (64)式 (66)式は

$$N \theta^2 (n-1)^2 \frac{1}{3} (1-\frac{1}{3}) \ll 1 \quad (67)$$

の場合にのみ成り立つので、 $N$  は任意に大きく取ることはできない。外部の媒質が真空 ( $n_0 = 1$ ) のとき  $T$  は  $T \neq 1$  たりくえを変換して求めなければならぬが、 $(n-1) \ll 1$  のかぎり

ではこの変換は無視することができる。

### 3-2 弱い散乱理論 II

この節では Rytov 近似を取り扱う。  $U(x)$  を次式のように書くことができる。

$$U(x) = e^{ikx} e^{\psi(x)}, \quad \psi(x) = e^{-ikx} w(x) \quad (68)$$

$|\Delta\psi(x)| \ll k$  のとき、  $w(x)$  は次式を満たす。

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right] w(x) = -2k^2 \Delta n(x) e^{ikx} \quad (69)$$

(69)式と (55)式は同じ形の非齊次波動方程式である。(ここでは  $n_0=1$  とおいている。) (56)式のグリーン関数を用いて  $w(x)$  を求めることができる。

$$w(x) = ik \int_0^{Nl} \Delta n(x') e^{ik|x-x'|} e^{ikx'} dx' \quad (70)$$

(70)式を (68)式に用いたのが Rytov 近似である。  $x > Nl$  のとき (68)式は

$$U(x) = e^{ikx} \exp \left[ ik \int_0^{Nl} \Delta n(x) dx \right] \quad x > Nl \quad (71)$$

となる。これから複素透過係数の平均は次のように求められる。

$$\langle T \rangle = \left\langle \exp \left[ ik \int_0^{Nl} \Delta n(x) dx \right] \right\rangle \quad (72)$$

ここでランダム関数  $\Delta n(x)$  は

$$\Delta n(x) = \begin{cases} 0 & x \text{が } A \text{にあるとき} \\ n-1 & x \text{が } B \text{にあるとき} \end{cases} \quad (73)$$

で表わされる確率変数である。  $j$  番目の層内の  $\Delta n(x)$  を  $\Delta n_j$  とすれば (72)式は

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \left\langle \exp \left[ ikl \sum_{j=1}^N \Delta n_j \right] \right\rangle \\ &= \left\{ (1-\xi) + \xi e^{i\theta(n-1)} \right\}^N \end{aligned} \quad (74)$$

となり。これをさらに

$$\langle T \rangle = e^{-N(\gamma_R + i\Theta_R)} \quad (75)$$

とおく。結局 Rylov 近似を使えば“平均透過係数”として

$$t_R = e^{-N\gamma_R} \quad (76)$$

を得る。但し

$$\gamma_R = -\frac{1}{2} \ln [1 - 4\frac{\lambda}{(n-1)}(1-\frac{\lambda}{n}) \sin^2 \frac{(n-1)\theta}{2}] \quad (77)$$

である。そして特に

$$\gamma_R \approx \frac{1}{2} \theta^2 (n-1)^2 \frac{\lambda}{(n-1)} \quad (n-1)\theta \ll 1 \text{ のとき} \quad (78)$$

となり、 $\theta \ll 1$  のとき (65) 式において  $\sin^2 \theta / \theta^2 \sim 1$  とすれば

$$\gamma_R = \frac{1}{2} \gamma_B \quad (n-1)\theta \ll 1 \text{ のとき} \quad (79)$$

であることがわかる。

(74)式から同様にして位相常数が求められる。(51)式参照)

$$\Theta_R = (n-1) \theta \quad (n-1)\theta \ll 1 \text{ のとき} \quad (80)$$

以上の近似的適用可能な限界について簡単にふれる。(70)式で用いた条件

$$|\Delta \psi(x)| = \left| 2k^2 \int_x^{x+\Delta x} \Delta n(x') e^{2ikx'} dx' \right| \ll k \quad (81)$$

から

$$N(n-1) \theta \frac{\lambda}{n} \ll 1 \quad (82)$$

を得る。即ち四つのパラメータ  $N$ ,  $(n-1)$ ,  $\theta$ ,  $\frac{\lambda}{n}$  の積は限界がある。

### 3-3 多重散乱理論 I

この節では前方散乱近似をとりあげる。de Wolf はもっと一般的な多重散乱の研究でこの近似を使っている。我々の簡単なモデルランダム媒質を少しばかり異なった取り扱いをする。

ノイマン級数の完全な表式は (55) と (56) 式を使って ( $n_0=1$  とする)、次のように書かれる。

$$U(x) = e^{ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} (ik)^n \int_0^{N\ell} \cdots \int_0^{N\ell} e^{ik\{ |x-x_n| + |x_n-x_{n-1}| + \dots + |x_2-x_1| + \alpha_1 \}} \\ \times \Delta n(x_1) \cdots \Delta n(x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (82)$$

そして複素透過係数は

$$T = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (ik)^n \int_0^{N\ell} \cdots \int_0^{N\ell} e^{ik\{ -x_n + |x_n-x_{n-1}| + \dots + |x_2-x_1| + \alpha_1 \}} \\ \times \Delta n(x_1) \cdots \Delta n(x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (83)$$

級数の  $n$  番目の項は  $n$  重散乱をあらわしている。 $n$  重散乱は散乱点  $(x_1, \dots, x_n)$  をつきつきに結びつけて観測点  $x_{n+1} = x$  まで致るグリーン関数  $G(x_m | x_{m+1})$  ( $m = 1, \dots, n$ ) であらわされる。一次元の場合前方散乱と後方散乱があり、一般に後方散乱の強度は前方散乱のそれより弱い。この点に注目して、すべての散乱過程における後方散乱を省略する考えが当然思いつかれる。この考えに従って (83) 式の  $n$  番目の項の積分を  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$  の領域で行ないこの領域外からの寄与を省略してしまえば、 $T$  は次式のようになる。

$$T = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (ik)^n \int_0^{N\ell} dx_n \int_0^{N\ell} dx_{n-1} \cdots \int_0^{N\ell} dx_1 \Delta n(x_1) \cdots \Delta n(x_n) \quad (84)$$

この式は次式と等しくなることが簡単に示される。

$$T = \exp \left[ ik \int_0^{N\ell} \Delta n(x) dx \right] \quad (85)$$

(85) 式は Rytov 近似の (70) 式と同じである。したがってこの近似方法による平均透過係数を  $t_D$  で示せば

$$t_D = e^{-N\gamma_R} \quad (86)$$

となる。

Rytov 近似は (81) 式の条件の下に成り立つ。この近似方法は仮定が正しい所では勿論正しい結果を与えるが、後方散乱がどこでどのようにして多重散乱に影響を与えるかということは明確になっていない。

$\gamma$  と  $\gamma_R$  の比較を第 10 図に示す。 $n\theta < 1$  の領域では  $\gamma_R$  は  $\gamma$  によく一致していることがわかる。したがって  $n\theta < 1$  の領域において、(86) 式は (75) 式の Rytov 近似を (78) 式の制限を越えてより大きさ  $N$  に延長適用するものであることを結論してよい。

### 3-4 多重散乱理論 II

この節では多重散乱についての Brown の方法をとりあげる。ノイマン級数(83)式の平均をとるとき、各積分をグラフで示すことができる。そして特定のグラフを選んで和をとる操作は積分方程式を取り扱うことのやき直しであるが、ランダム媒質の伝播常数を定めることができる。この方法を用いには、媒質は均質なランダム媒質でなければならぬ。ところが(59), (61)式で示されるように我々のモデルランダム媒質は均質でないるので両者の正確な比較を行なうことはできない。

$\Delta n(x)$  を(59)式で与えられる  $\Delta n(x)$  とする。無限長のランダム媒質におけるグリーン関数の平均をあらわし、その伝播定数を求めるために今までの問題を少しばかり変えて設定する。ポイント・ソースを  $x=0$  にいたとき、非齊次波動方程式は(55)式のかわりに

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right] u(x) = \delta(x) - 2 \frac{k^2}{n_0} \Delta n(x) u(x) \quad (87)$$

となる。グリーン関数(56)式を使って(87)式から

$$u(x) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x|} - 2 \frac{k}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x|x') \Delta n(x') u(x') dx' \quad (88)$$

を得る。逐次近似をすれば

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2ik} e^{ik|x|} + \frac{ik}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x|x') \Delta n(x') e^{ik|x'|} dx' \\ &\quad + \frac{4k^2}{n_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x|x_1) G(x_1|x_2) \Delta n(x_1) \Delta n(x_2) u(x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (89)$$

(89)式の平均をとれば、第2項は(59)式の関係から消えてしまい、第3項は被積分関数に三次モーメント  $\langle \Delta n(x_1) \Delta n(x_2) u(x_2) \rangle$  を含むことになる。近似を行なって三次モーメントを分解する。

$$\langle \Delta n(x_1) \Delta n(x_2) u(x_2) \rangle \simeq \langle \Delta n(x_1) \Delta n(x_2) \rangle \langle u(x_2) \rangle \quad (90)$$

このようにすれば、 $\langle u(x) \rangle$  を求めることができて

$$\begin{aligned} \langle u(x) \rangle &= \frac{1}{2ik} e^{ik|x|} + 4k^2 \frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{n_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x|x_1) G(x_1|x_2) \\ &\quad \times R(x_1, x_2) \langle u(x_2) \rangle dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (91)$$

ここで

$$R(x_1, x_2) = \frac{\langle \Delta n(x_1) \Delta n(x_2) \rangle}{\langle \Delta n^2 \rangle} \quad (92)$$

は  $\Delta n(x)$  の相関関数である。もし  $\Delta n(x)$  が均質なランダム関数であれば  $R(x_1, x_2)$  は  $(x_1 - x_2)$  のみの関数となり、(91)式はフーリエ変換を用いて直ちに角解くことができる。しかし我々のモデルランダム媒質については  $R(x_1, x_2)$  は  $(x_1 - x_2)$  と  $(x_1 + x_2)$  に依存する。即ち  $R(x_1, x_2)$  は直線  $x_1 = x_2$  上に連続で存在する  $l \times l$  の正方形内部では 1 であり、その他の所では 0 となる。(91) 式の被積分関数についてグリーン関数の変化が  $R(x_1, x_2)$  の変化より遅くしかも  $k l \ll 1$  の場合は、 $R(x_1, x_2)$  は近似的に次のようす関数と考えてよい。

$$R(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - \frac{|x_1 - x_2|}{l} & |x_1 - x_2| < 1 \text{ のとき} \\ 0 & |x_1 - x_2| > 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (93)$$

そして (91) 式 は  $k l \ll 1$  のとき

$$\langle U(x) \rangle = \frac{1}{2ik} e^{ik|x|} - k^2 \frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{m_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i k |x - x_1|} e^{-i k |x_1 - x_2|} \times R(x_1 - x_2) \langle U(x_2) \rangle dx_1 dx_2 \quad (94)$$

となる。

$$r(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k |x|} R(x) e^{-i s x} dx \quad (95)$$

$$U(s) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{-i s x} dx \quad (96)$$

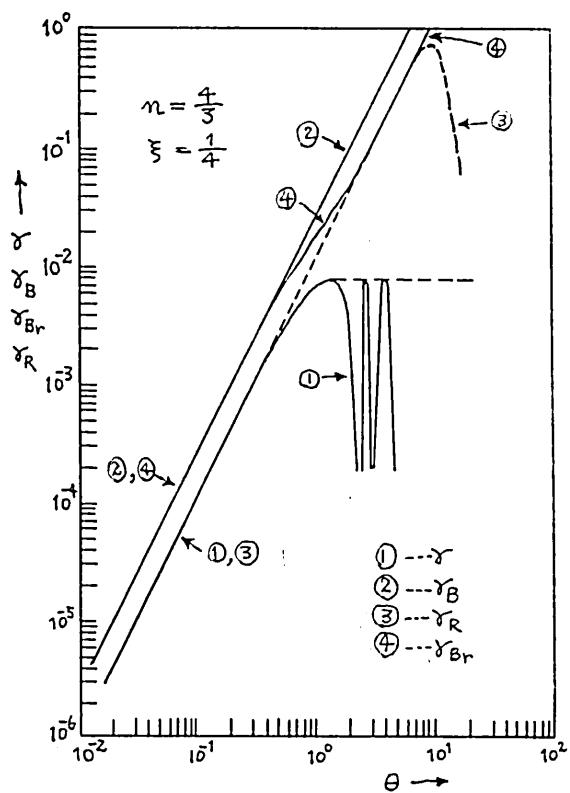
とおき、さらにグリーン関数をフーリエ変換すれば、(94) 式は代数方程式となつて

$$U(s) = -\frac{1}{s^2 - k^2} + 2ik^3 \frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{m_0^2} \frac{1}{s^2 - k^2} r(s) U(s) \quad (97)$$

これを解いて

$$U(s) = -\frac{1}{s^2 - k^2 - 2ik^3 \frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{m_0^2} r(s)} \quad (98)$$

を得る。 $\langle U(x) \rangle$  を求めるには (98) 式を (96) 式に代入して 積分路を適当にとつて積分を行なうことになる。(98) 式の極は、 $k$



第10図  $\gamma, \gamma_B, \gamma_R, \gamma_{Br}$  の比較

これらに異なる実効伝播常数を与える。即ち

$$k_e = k + i k_0^2 \langle \Delta n^2 \rangle r(k) \quad (99)$$

ここで

$$r(k) = \int_0^l R(x) dx + \int_0^l R(x) \cos 2kx dx + i \int_0^l R(x) \sin 2kx dx \quad (100)$$

最後に減衰定数は。

$$\gamma_{Br} = \operatorname{Im}(k_e l) = \frac{\theta^2}{2} (m-1)^2 \xi (1-\xi) \left[ 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \right] \quad (101)$$

となり (63) 式で与えられる  $\gamma_B$  と同じになる。先述のように、この式は  $kl \ll 1$  のときに正しくて次のようになる。

$$\gamma_{Br} = \theta^2 (m-1)^2 \xi (1-\xi) \quad \theta \ll 1 \text{ のとき} \quad (102)$$

## 附録 A

伝送路を伝播する波動の電圧、電流表示は

$$V(x) = \sqrt{Z_0} (c e^{i\beta x} + d e^{-i\beta x}) \quad (A1)$$

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (-c e^{i\beta x} + d e^{-i\beta x})$$

ここで  $Z_0$  は伝送路の特性インピーダンスと伝播常数であり、 $c, d$  は前進波および後進波の振幅である。いま特性インピーダンス  $Z_0$  の伝送路に両端子回路を挿入する。 $C_{n-1}, d_{n-1}$  を入力端子におけるそれそれ前進波、後進波の複素振幅とし、 $C_n, d_n$  を出力端におけるそれらとする。このとき電圧、電流表示で表せば

$$V_i = \sqrt{Z_0} (c_i + d_i) \quad i = n-1, n \quad (A2)$$

$$I_i = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (-c_i + d_i)$$

$Z_0=1$  となるように、V, I の単位を適当に選べば、値の異なる特性インピーダンスとは  $Z_0$  との比によって表わすことができる。簡単のため以下では  $Z_0=1$  とする。 $(A \cdot 2)$  式をマトリクスであらわせば

$$\begin{pmatrix} V_n \\ I_n \end{pmatrix} = F_n \begin{pmatrix} V_{n-1} \\ I_{n-1} \end{pmatrix} \quad (A \cdot 3)$$

$$\begin{pmatrix} C_n \\ d_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} C_{n-1} \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \quad (A \cdot 4)$$

となる。そして  $F_n$  は四端子回路の F マトリクスであり、 $T_n$  は対応する T マトリクスである。

四端子回路  $F_1, F_2, \dots, F_N$  をカスケード接続してできる四端子回路 F の F マトリクスは  $(A \cdot 3)$  式から直ちに

$$F = F_N F_{N-1} \cdots F_2 F_1 \quad (A \cdot 5)$$

となることがわかる。

## 附録 B

F マトリクスと T マトリクスの間の変換は、 $(A \cdot 2), (A \cdot 3), (A \cdot 4)$  式から次のようになる。

$$T_n = U^{-1} F_n U \quad (B \cdot 1)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

これを書き下せば

$$T_n = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F_{11} + F_{22} - F_{12} - F_{21} & F_{11} - F_{22} + F_{12} - F_{21} \\ F_{11} - F_{22} - F_{12} + F_{21} & F_{11} + F_{22} + F_{12} + F_{21} \end{pmatrix} \quad (B \cdot 2)$$

無損失の対称四端子回路では、 $F_{11} = F_{22}$  (実数)、 $F_{12}$  と  $F_{21}$  は純虚数であるから、 $t_{11} = t_{22}^*$ 、 $t_{12} = t_{21}^*$  となり  $(B \cdot 2)$  は次式のように簡単になる。

$$\Pi = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12}^* & t_{11}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} - \frac{1}{2}(F_{12} + F_{21}) & \frac{1}{2}(F_{12} - F_{21}) \\ -\frac{1}{2}(F_{12} - F_{21}) & F_{11} + \frac{1}{2}(F_{12} + F_{21}) \end{pmatrix} \quad (B-3)$$

$t$ を透過係数,  $\varphi$ を位相常数とすれば

$$t_{11} = \frac{1}{t} e^{i\varphi} \quad (B-4)$$

であり、透過係数  $t$  は次式で求められる。

$$t = \frac{1}{|t_{11}|} \quad (B-5)$$

(B-3) 式のトレースをとればもう一つの関係式が得られる。

$$2F_{11} = (t_{11} + t_{11}^*) = \frac{2}{t} \cos \varphi \quad (B-6)$$

いま、伝送路の長さ  $l$ 、位相常数  $\beta$ 、 $\lambda$ に対する特性インピーダンス  $Z$  の両端子回路を考える。この回路のマトリクスは一般に

$$\Pi = \begin{pmatrix} \cos \beta l & iZ \sin \beta l \\ \frac{i}{Z} \sin \beta l & \cos \beta l \end{pmatrix} \quad (B-7)$$

で与えられることが直ちにわかる。導波管の場合には  $Z$ 、 $\beta$  は伝播モードに依存するが、屈折率  $n$  の均質媒質では

$$Z = \frac{1}{n}, \quad \beta = mk \quad (B-8)$$

である。但し、 $k$  は真空中における波数である。

## 文献

- 1) Kay and Silverman : Nuovo Cimento. Suppl. Vol. 9 Ser. 2. (1958) pp 626.
- 2) Brown, Jr : IEEE Trans. A P & A P-15 (1967) pp 81-77.
- 3) de Wolf : Radio Sci. Vol. 2 (New Series) (1967) pp 1379.
- 4) Faulkner and Korringa : Phys. Rev. Vol. 122 (1961) pp 390.
- 5) Faulkner : Phys. Rev. Vol. 135 (1964) pp A124.

輻射科学研究会資料

導電性媒質の境界面における  
平面電磁波の反射と透過

藤岡 弘

小川 英一

(大阪大学・工学部)

1969年11月28日

## 1. 序 言

異種媒質の境界面における平面電磁波の反射・透過の問題は電磁界理論の基本的な問題として古くから研究されており、入射波の存在する媒質が導電性媒質である場合も、例えば Stratton<sup>(1)</sup> によって論じられている。しかし、導電性媒質中を伝搬する平面波が、本質的にその等位相面と等振幅面とが一致しない、いわゆる一様でない平面波であるにもかかわらず、Stratton にはこれら 2 つの面が一致する特別な場合、すなわち入射波が一様な平面波の場合しか論じられておらず、しかもエネルギー関係式については何ら考察されていない。

そこで、本文ではこのような問題を一般的に取り扱い、まず 2 つの半無限導電性誘電体の境界面における反射・透過の問題を入射波が一様でない平面波の場合を含めて一般的に取り扱い、そのエネルギー関係式等についても考察する。つぎに、2 つの半無限完全誘電体によってはさまれた導電性誘電体 slab による平面電磁波の反射・透過の問題について考察し、反射係数および透過係数等を求める。

## 2. 半無限導電性誘電体による反射・透過

### 2.1 反射係数と透過係数

図 1 に示すように、 $z > 0$  の空間は  $(\epsilon_1, \mu_0, \sigma_1)$  なる導電性誘電体（媒質 I）で満されており、また  $z < 0$  の空間は  $(\epsilon_2, \mu_0, \sigma_2)$  なる導電性誘電体（媒質 II）で満されているものとする。いま、媒質 I の側から平面電磁波が入射するものとし、入射波が E 波の場合、すなわち電界が入射面に垂直な場合、および入射波が H 波の場合、すなわち磁界が入射面に垂直な場合のそれぞれについてその反射係数および透過係数を求める。

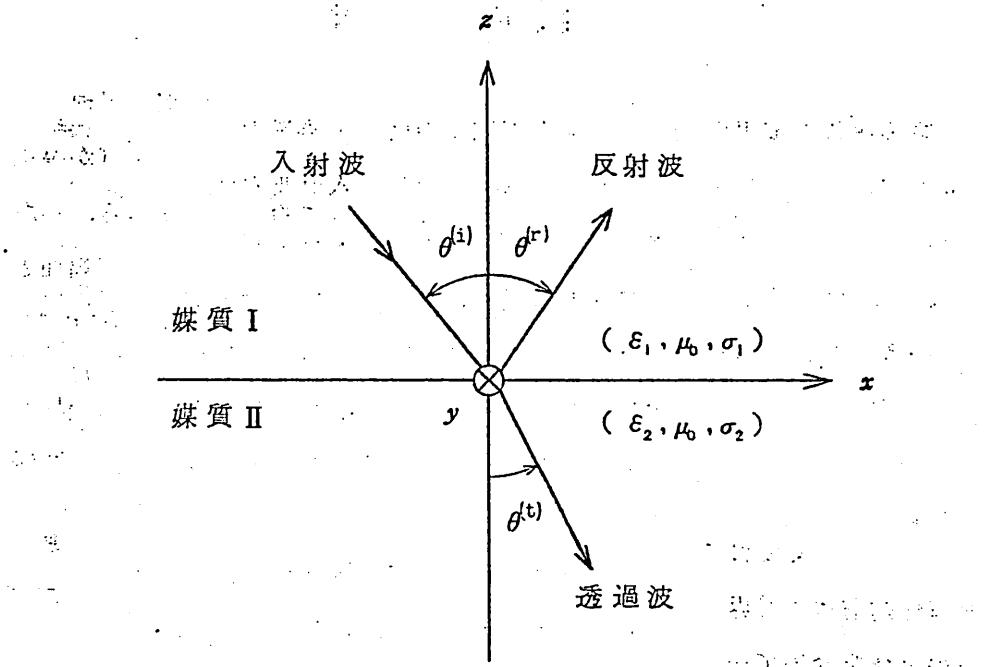


図1 座標系

### 2.1.1 入射波がE波の場合

本節においては、入射波がE波の場合を取り扱う。このとき、入射波、反射波および透過波はそれぞれつぎのようく表わされる。

入射波

$$E_y^{(i)} = E_{0i} e^{j(\omega t - k_x^{(i)} x - k_z^{(i)} z)} \quad (1a)$$

$$H_x^{(i)} = -\frac{k_z^{(i)}}{\omega \mu_0} E_{0i} e^{j(\omega t - k_x^{(i)} x - k_z^{(i)} z)} \quad (1b)$$

$$H_z^{(i)} = \frac{k_x^{(i)}}{\omega \mu_0} E_{0i} e^{j(\omega t - k_x^{(i)} x - k_z^{(i)} z)} \quad (1c)$$

反射波

$$E_y^{(r)} = E_{0r} e^{j(\omega t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z)} \quad (2a)$$

$$H_x^{(r)} = \frac{k_z^{(r)}}{\omega \mu_0} E_{0r} e^{j(\omega t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z)} \quad (2b)$$

$$H_z^{(r)} = \frac{k_z^{(r)}}{\omega \mu_0} E_{0r} e^{j(\omega t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z)} \quad (2c)$$

透過波

$$E_y^{(t)} = E_{0t} e^{j(\omega t - k_x^{(t)} x - k_z^{(t)} z)} \quad (3a)$$

$$H_x^{(t)} = -\frac{k_z^{(t)}}{\omega \mu_0} E_{0t} e^{j(\omega t - k_x^{(t)} x - k_z^{(t)} z)} \quad (3b)$$

$$H_z^{(t)} = \frac{k_x^{(t)}}{\omega \mu_0} E_{0t} e^{j(\omega t - k_x^{(t)} x - k_z^{(t)} z)} \quad (3c)$$

ただし、他の電磁界成分は0、すなわち  $E_x^{(\ell)} = E_z^{(\ell)} = 0$ ,  $H_y^{(\ell)} = 0$  である。ここで、 $E_{0i}$ ,  $E_{0r}$  および  $E_{0t}$  は場所および時間に無関係な定数である。なお、添字  $i$ ,  $r$  および  $t$  はそれぞれ入射波、反射波および透過波の電磁界量であることを表わし、また添字  $\ell$  は  $i$ ,  $r$  または  $t$  を表わす。また、入射波および透過波の伝搬定数は媒質の構成定数とつきの関係で結ばれている。

$$[k_x^{(i)}]^2 + [k_z^{(i)}]^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - j \omega \sigma_1 \mu_0 \quad (4a)$$

$$[k_x^{(r)}]^2 + [k_z^{(r)}]^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - j \omega \sigma_1 \mu_0 \quad (4b)$$

$$[k_x^{(t)}]^2 + [k_z^{(t)}]^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 - j \omega \sigma_2 \mu_0 \quad (4c)$$

さて、反射波および透過波の振幅  $E_{or}$  および  $E_{ot}$  は  $z = 0$  における境界条件

$$E_{oi} e^{j(\omega t - k_x^{(i)} x)} + E_{or} e^{j(\omega t - k_x^{(r)} x)} = E_{ot} e^{j(\omega t - k_x^{(t)} x)} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} -k_z^{(i)} E_{oi} e^{j(\omega t - k_x^{(i)} x)} + k_z^{(r)} E_{or} e^{j(\omega t - k_x^{(r)} x)} \\ = -k_z^{(t)} E_{ot} e^{j(\omega t - k_x^{(t)} x)} \end{aligned} \quad (5b)$$

を用いて決定されるわけであるが、上式が  $x$  に無関係に常に成り立つためには、 $k_x^{(\ell)}$  に関するつきの関係が成立しなければならない。

$$k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} \quad (6)$$

上式から反射・透過の Snell の法則が導かれるが、これに関しては 2.3 において述べる。式(6)の関係を考慮して、伝搬定数  $k_x^{(\ell)}$  および  $k_z^{(\ell)}$  はつきのように表わされる。

$$k_x^{(\ell)} = k_0 (p_{ix} - j q_{ix}), \quad (\ell = i, r, t) \quad (7a, b, c)$$

$$k_z^{(i)} = k_z^{(r)} = -k_0 (p_{iz} - j q_{iz}) \quad (8a, b)$$

$$k_z^{(t)} = -k_0 (p_{tz} - j q_{tz}) \quad (8c)$$

ただし、入射波、反射波および透過波のそれぞれがその進行方向に減衰するためには

$$p_{jx} q_{jx} > 0, \quad (j = 1, 2) \quad (9a)$$

$$p_{jz} > 0 \quad (j = 1, 2) \quad (9b)$$

$$q_{jz} > 0 \quad (j = 1, 2) \quad (9c)$$

でなければならない。また式(4)および式(7)～(8)からつきの関係式が

導かれる。

$$k_0 [(p_{1x} - jq_{1x})^2 + (p_{1z} - jq_{1z})^2] = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - j\omega \sigma_1 \mu_0 \quad (10a)$$

$$k_0 [(p_{1x} - jq_{1x})^2 + (p_{2z} - jq_{2z})^2] = \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 - j\omega \sigma_2 \mu_0 \quad (10b)$$

以上のことから、反射波および透過波の振幅はそれぞれつきのように求められる。

$$E_{0r} = \frac{(p_{1z} - p_{2z}) - j(q_{1z} - q_{2z})}{(p_{1z} + p_{2z}) - j(q_{1z} + q_{2z})} E_{0i} \quad (11a)$$

$$E_{0t} = \frac{2(p_{1z} - jq_{1z})}{(p_{1z} + p_{2z}) - j(q_{1z} + q_{2z})} E_{0i} \quad (11b)$$

つぎに、入射波、反射波および透過波の電磁エネルギー流を

$$\langle S^{(\ell)} \rangle = \frac{1}{2} Re [E^{(\ell)} \times H^{(\ell)*}], (\ell = i, r, t) \quad (12a, b, c)$$

で定義するとき、その成分  $\langle S_x^{(i)} \rangle$ ,  $\langle S_z^{(i)} \rangle$  は入射波、反射波および透過波のそれについてつきのように表わされる。ただし、ここで  $Re$  は複素量の実数部をとる操作を表わし、また記号\* は複素共役を表わす。

$$\langle S_x^{(i)} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |p_{1x}| |E_{0i}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x - q_{1z}z)} \quad (13a)$$

$$\langle S_z^{(i)} \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |p_{1z}| |E_{0i}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x - q_{1z}z)} \quad (13b)$$

$$\langle S_x^{(r)} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |p_{1x}| \frac{(p_{1z} - p_{2z})^2 + (q_{1z} - q_{2z})^2}{(p_{1z} + p_{2z})^2 + (q_{1z} + q_{2z})^2} |E_{0i}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x + q_{1z}z)} \quad (14a)$$

$$\langle S_z^{(r)} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} p_{1z} \frac{(p_{1z} - p_{2z})^2 + (q_{1z} - q_{2z})^2}{(p_{1z} + p_{2z})^2 + (q_{1z} + q_{2z})^2} |E_{0i}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x + q_{1z}z)} \quad (14b)$$

$$\langle S_x^{(t)} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} p_{1x} \frac{4(p_{1z}^2 + q_{1z}^2)}{(p_{1z} + p_{2z})^2 + (q_{1z} + q_{2z})^2} |E_{0i}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x - q_{2z}z)} \quad (15a)$$

$$\langle S_z^{(t)} \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} p_{2z} \frac{4(p_{1z}^2 + q_{1z}^2)}{(p_{1z} + p_{2z})^2 + (q_{1z} + q_{2z})^2} |E_{0i}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x - q_{2z}z)} \quad (15b)$$

したがって、反射係数  $R$  および透過係数  $T$  を

$$R = - \left[ \frac{\langle S_z^{(r)} \rangle}{\langle S_z^{(i)} \rangle} \right]_{z=0} \quad (16)$$

および

$$T = \left[ \frac{\langle S_z^{(t)} \rangle}{\langle S_z^{(i)} \rangle} \right]_{z=0} \quad (17)$$

によって定義すれば、入射  $E$  波に対する反射係数  $R_E$  および透過係数  $T_E$  は  
それぞれつぎのようによく表わされる。

$$R_E = \frac{(p_{1z} - p_{2z})^2 + (q_{1z} - q_{2z})^2}{(p_{1z} + p_{2z})^2 + (q_{1z} + q_{2z})^2} \quad (18)$$

$$T_E = \frac{4p_{2z}(p_{1z}^2 + q_{1z}^2)}{p_{1z}[(p_{1z} + p_{2z})^2 + (q_{1z} + q_{2z})^2]} \quad (19)$$

式 (18), (19) からつぎの関係式を得る。

$$R_E + T_E = 1 + \frac{4 q_{1z} (p_{2z} q_{1z} - p_{1z} q_{2z})}{p_{1z} [(p_{1z} + p_{2z})^2 + (q_{1z} + q_{2z})^2]} \quad (20)$$

上の関係式については、2.2において境界条件を用いて検討する。

### 2.1.2 入射波がH波の場合

本節においては、入射波がH波の場合を取り扱う。このとき、入射波、反射波および透過波はそれぞれつきのように表わされる。

入射波

$$H_y^{(i)} = H_{0i} e^{j(\omega t - k_x^{(i)} x - k_z^{(i)} z)} \quad (21a)$$

$$E_x^{(i)} = \frac{k_z^{(i)}}{\omega \epsilon_1 - j\sigma_1} H_{0i} e^{j(\omega t - k_x^{(i)} x - k_z^{(i)} z)} \quad (21b)$$

$$E_z^{(i)} = -\frac{k_x^{(i)}}{\omega \epsilon_1 - j\sigma_1} H_{0i} e^{j(\omega t - k_x^{(i)} x - k_z^{(i)} z)} \quad (21c)$$

反射波

$$H_y^{(r)} = H_{0r} e^{j(\omega t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z)} \quad (22a)$$

$$E_x^{(r)} = -\frac{k_z^{(r)}}{\omega \epsilon_1 - j\sigma_1} H_{0r} e^{j(\omega t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z)} \quad (22b)$$

$$E_z^{(r)} = -\frac{k_x^{(r)}}{\omega \epsilon_1 - j\sigma_1} H_{0r} e^{j(\omega t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z)} \quad (22c)$$

透過波

$$H_y^{(t)} = H_{0t} e^{j(\omega t - k_x^{(t)} x - k_z^{(t)} z)} \quad (23a)$$

$$E_x^{(t)} = \frac{k_z^{(t)}}{\omega \varepsilon_2 - j\sigma_2} H_{0t} e^{j(\omega t - k_x^{(t)}x - k_z^{(t)}z)} \quad (23b)$$

$$E_z^{(t)} = -\frac{k_x^{(t)}}{\omega \varepsilon_2 - j\sigma_2} H_{0t} e^{j(\omega t - k_x^{(t)}x - k_z^{(t)}z)} \quad (23c)$$

ただし、伝搬定数  $k_x^{(\ell)}$  および  $k_z^{(\ell)}$ , ( $\ell = i, r, t$ ) は式 (7) ~ (8) に与えられているとおりである。また式 (9) ~ (10) の関係もそのまま成立する。また、反射波および透過波の振幅はそれぞれつきのように求められる。

$$H_{0r} = \frac{(p_{1z}\omega\varepsilon_2 - p_{2z}\omega\varepsilon_1 - q_{1z}\sigma_2 + q_{2z}\sigma_1)}{(p_{1z}\omega\varepsilon_2 + p_{2z}\omega\varepsilon_1 - q_{1z}\sigma_2 - q_{2z}\sigma_1)} * \\ * \frac{-j(q_{1z}\omega\varepsilon_2 - q_{2z}\omega\varepsilon_1 + p_{1z}\sigma_2 - p_{2z}\sigma_1)}{-j(q_{1z}\omega\varepsilon_2 + q_{2z}\omega\varepsilon_1 + p_{1z}\sigma_2 + p_{2z}\sigma_1)} H_{0i} \quad (24a)$$

$$H_{0t} = \frac{2[(p_{1z}\omega\varepsilon_2 - q_{1z}\sigma_2)]}{(p_{1z}\omega\varepsilon_2 + p_{2z}\omega\varepsilon_1 - q_{1z}\sigma_2 - q_{2z}\sigma_1)} * \\ * \frac{-j(q_{1z}\omega\varepsilon_2 + p_{1z}\sigma_2)}{-j(q_{1z}\omega\varepsilon_2 + q_{2z}\omega\varepsilon_1 + p_{1z}\sigma_2 + p_{2z}\sigma_1)} H_{0i} \quad (24b)$$

つぎに、入射波、反射波および透過波の電磁エネルギー流の成分はそれぞれつきのように表わされる。

$$\langle s_x^{(i)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{(p_{1x}\omega\varepsilon_i + q_{1z}\sigma_i)}{(\omega\varepsilon_i)^2 + \sigma_i^2} k_0 |H_{0i}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x - q_{1z}z)} \quad (25a)$$

$$\langle s_z^{(i)} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{(p_{1z}\omega\varepsilon_i + q_{1z}\sigma_i)}{(\omega\varepsilon_i)^2 + \sigma_i^2} k_0 |H_{0i}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x - q_{1z}z)} \quad (25b)$$

$$\langle S_x^{(r)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{(p_{1x}\omega\epsilon_1 + q_{1x}\sigma_1)}{(\omega\epsilon_1)^2 + \sigma_1^2} k_0 |H_{0r}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x + q_{1z}z)} \quad (26a)$$

$$\langle S_z^{(r)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{(p_{1z}\omega\epsilon_1 + q_{1z}\sigma_1)}{(\omega\epsilon_1)^2 + \sigma_1^2} k_0 |H_{0r}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x + q_{1z}z)} \quad (26b)$$

$$\langle S_x^{(t)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{(p_{1x}\omega\epsilon_2 + q_{1x}\sigma_2)}{(\omega\epsilon_2)^2 + \sigma_2^2} k_0 |H_{0t}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x - q_{2z}z)} \quad (27a)$$

$$\langle S_z^{(t)} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{(p_{1z}\omega\epsilon_2 + q_{1z}\sigma_2)}{(\omega\epsilon_2)^2 + \sigma_2^2} k_0 |H_{0t}|^2 e^{-2k_0(q_{1x}x - q_{2z}z)} \quad (27b)$$

したがって、反射係数  $R_H$  および透過係数  $T_H$  はそれぞれつぎのように求められる。

$$R_H = \frac{(p_{1z}\omega\epsilon_2 - p_{2z}\omega\epsilon_1 - q_{1z}\sigma_2 + q_{2z}\sigma_1)^2}{(p_{1z}\omega\epsilon_2 + p_{2z}\omega\epsilon_1 - q_{1z}\sigma_2 - q_{2z}\sigma_1)^2} * \frac{+ (q_{1z}\omega\epsilon_2 - q_{2z}\omega\epsilon_1 + p_{1z}\sigma_2 - p_{2z}\sigma_1)^2}{+ (q_{1z}\omega\epsilon_2 + q_{2z}\omega\epsilon_1 + p_{1z}\sigma_2 + p_{2z}\sigma_1)^2} \quad (28)$$

$$T_H = \frac{(\omega\epsilon_1)^2 + \sigma_1^2}{(\omega\epsilon_2)^2 + \sigma_2^2} \times \frac{p_{2z}\omega\epsilon_2 + q_{2z}\sigma_2}{p_{1z}\omega\epsilon_1 + q_{1z}\sigma_1} * \frac{4 \left[ (p_{1z}\omega\epsilon_2 - q_{1z}\sigma_2)^2 + (q_{1z}\omega\epsilon_2 + p_{1z}\sigma_2)^2 \right]}{(p_{1z}\omega\epsilon_2 + p_{2z}\omega\epsilon_1 - q_{1z}\sigma_2 - q_{2z}\sigma_1)^2 + (q_{1z}\omega\epsilon_2 + q_{2z}\omega\epsilon_1 + p_{1z}\sigma_2 + p_{2z}\sigma_1)^2} \quad (29)$$

式(28), (29)からつぎの関係式を得る。

$$\begin{aligned}
 & R_H + T_H \\
 & = 1 + \frac{4(p_{1z}\sigma_1 - q_{1z}\omega\epsilon_1)\{(p_{1z}\omega\epsilon_2 - q_{1z}\sigma_2)(p_{2z}\sigma_1 + q_{2z}\omega\epsilon_1)\}}{(p_{1z}\omega\epsilon_1 + q_{1z}\sigma_1)\{(p_{1z}\omega\epsilon_2 + p_{2z}\omega\epsilon_1 - q_{1z}\sigma_2 - q_{2z}\sigma_1)^2\}} * \\
 & * \frac{+(q_{2z}\sigma_1 - p_{2z}\omega\epsilon_1)(p_{1z}\sigma_2 + q_{1z}\omega\epsilon_2)}{+(q_{1z}\omega\epsilon_2 + q_{2z}\omega\epsilon_1 + p_{1z}\sigma_2 + p_{2z}\sigma_1)^2} \quad (30)
 \end{aligned}$$

なお、上の関係式については、2.2においてさらに検討する。

## 2.2 エネルギー関係式

ここでは、式(20)および式(30)のエネルギー関係式について境界条件を用いて考察する。まず、 $z=0$ における入射E波の電磁界に関する境界条件(5a), (5b)を改めて記せば

$$E_y^{(i)} + E_y^{(r)} = E_y^{(t)}, \quad (z=0) \quad (31a)$$

$$H_x^{(i)} + H_x^{(r)} = H_x^{(t)}, \quad (z=0) \quad (31b)$$

となるが、式(31a)と式(31b)の複素共役式との辺々をそれぞれ掛け合せ、両辺の実数部をとることによってつぎのエネルギー関係式を得る。

$$R_E + T_E = 1 + \alpha_E \quad (32)$$

ただし、 $R_E$ および $T_E$ は式(16)および(17)または式(18)および(19)で与えられているとおりである。また、 $\alpha_E$ は次式によって定義される。

$$\alpha_E = \frac{Re [E_y^{(i)} H_x^{(r)*} + E_y^{(r)} H_x^{(i)*}]_{z=0}}{Re [E_y^{(i)} H_x^{(i)*}]_{z=0}} \quad (33)$$

ここで、

$$Y = \left[ \frac{H_x^{(1)}}{E_y^{(1)}} \right]_{z=0} \quad (34a)$$

$$r_E = \left[ \frac{E_y^{(r)}}{E_y^{(i)}} \right]_{z=0} = \frac{E_{or}}{E_{oi}} \quad (34b)$$

なる量を導入すれば、式(33)はつぎのようて表わされる。

$$\alpha_E = \frac{Re[(r_E - r_E^*) Y^*]}{Re[Y^*]} \quad (35)$$

式(35)から、 $(r_E - r_E^*)$  は純虚数であり、したがって式(34)で定義される  $Y$  なる量が実数量でないかぎり  $\alpha_E$  は一般には 0 とならないことがわかる。すなわち、入射波の存在する媒質 I が完全誘電体 ( $\sigma_1 = 0$ ) の場合に限って  $\alpha_E = 0$  となり、媒質 I が導電性誘電体 ( $\sigma_1 \neq 0$ ) のときには一般には  $\alpha_E \neq 0$  となることがわかる。なお、当然のことながらこのようにして導かれた  $\alpha_E$  の表示式(35)はさきに導出した式(20)と完全に一致する。

つぎに、入射波が H 波の場合には上と同様にして、エネルギー関係式

$$R_H + T_H = 1 + \alpha_H \quad (36)$$

を得る。ただし  $R_H$  および  $T_H$  は式(16)および(17)または式(28)および(29)で与えられるとおりである。また、 $\alpha_H$  は次式で定義される。

$$\alpha_H = \frac{Re[E_x^{(i)} H_y^{(r)*} + E_x^{(r)} H_y^{(i)*}]}{Re[E_x^{(i)} H_y^{(i)*}]}_{z=0} \quad (37)$$

ここで、

$$Z = \left[ \frac{E_x^{(i)}}{H_y^{(i)}} \right]_{z=0} \quad (38a)$$

$$r_H = \left[ \frac{H_y^{(r)}}{H_y^{(i)}} \right]_{z=0} = \frac{H_{or}}{H_{oi}} \quad (38b)$$

なる量を導入すれば、式(37)はつぎのようく表わされる。

$$\alpha_H = \frac{\operatorname{Re}[(r_H - r_H^*) z^*]}{\operatorname{Re}[z^*]} \quad (39)$$

上式から、入射波が  $E$  波の場合と同様に、媒質 I が完全誘電体 ( $\sigma_i = 0$ ) のときには常に  $\alpha_H = 0$  となるが、媒質 I が導電性誘電体 ( $\sigma_i \neq 0$ ) のときに一般には  $\alpha_H \neq 0$  であることがわかる。

### 2.3 Snell の法則

導電性誘電体中を伝搬する平面波は一般的にはその等位相面と等振幅面とが一致しない。いわゆる一様でない平面波 (nonuniform plane wave または inhomogeneous plane wave) となる。したがって、媒質が完全誘電体の場合とは違って、位相角 (等位相面の法線と  $Z$  軸とのなす角)  $\theta_p$  と振幅角 (等振幅面の法線と  $Z$  軸とのなす角)  $\theta_a$  の両者を同時に指定しなければ導電性誘電体中の平面波の伝搬定数を一意的に決定することができない (図 2 参照)。いま、入射波、反射波および透過波の位相角および振幅角をそれぞれ  $\theta_p^{(\ell)}$  および  $\theta_a^{(\ell)}$  ( $\ell = i, r, t$ ) とするとき、 $\theta_p^{(\ell)}$  および  $\theta_a^{(\ell)}$  はそれぞれ次式で定義される。

$$\theta_p^{(\ell)} = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Re}[k_x^{(\ell)}]}{|\operatorname{Re}[k_z^{(\ell)}]|}, \quad (\ell = i, r, t) \quad (40a, b, c)$$

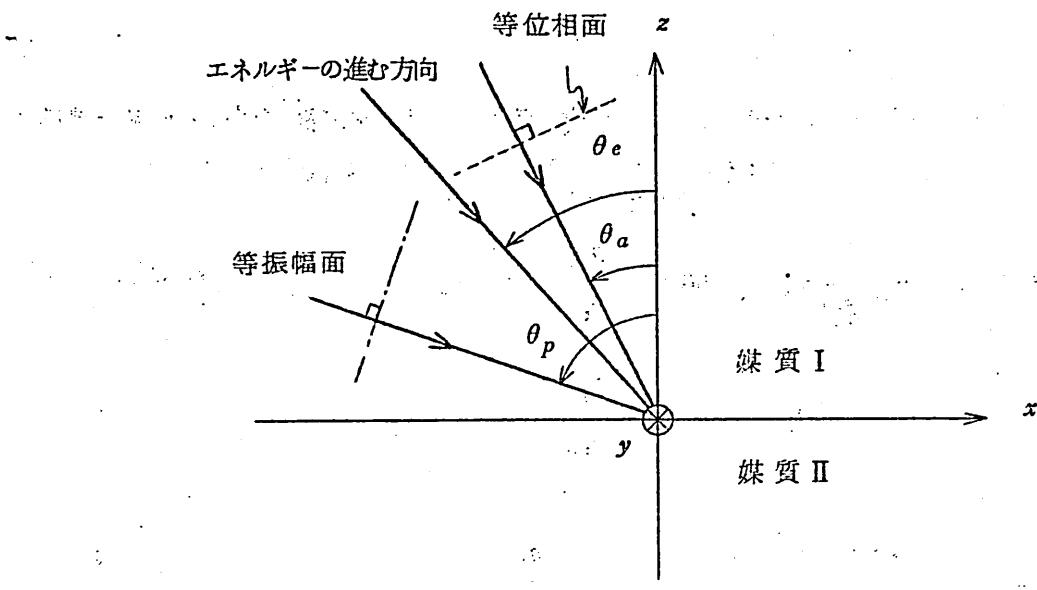


図 2 位相角、振幅角およびエネルギー角

$$\theta_a^{(\ell)} = \tan^{-1} \frac{-Im[k_x^{(\ell)}]}{Im[k_z^{(\ell)}]}, \quad (\ell = i, r, t) \quad (41a, b, c)$$

ただし、 $Im$  は複素量の虚数部をとる操作を表わす。また、一様な平面波の場合には位相の進む方向とエネルギー流の進む方向は常に一致するが、上のような一様でない平面波の場合には位相の進む方向とエネルギー流の進む方向とは一般には一致しない。いま、エネルギー流の進む方向と  $Z$  軸とのなす角、すなわちエネルギー角を  $\theta_e$  (図 2 参照) とすれば、 $\theta_e$  は次式で定義される。

$$\theta_e^{(\ell)} = \tan^{-1} \frac{\langle s_x^{(\ell)} \rangle}{\langle s_z^{(\ell)} \rangle}, \quad (\ell = i, r, t) \quad (42a, b, c)$$

ここで、まず入射波が  $E$  波の場合の位相角、振幅角およびエネルギー角は式(7)～(8)および(13)～(15)を用いてつきのように表わされる。

$$\theta_p^{(i)} = \theta_p^{(r)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}}{p_{1z}} \quad (43a, b)$$

$$\theta_p^{(t)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}}{p_{2z}} \quad (43c)$$

$$\theta_a^{(i)} = \theta_a^{(r)} = \tan^{-1} \frac{q_{1x}}{q_{1z}} \quad (44a, b)$$

$$\theta_a^{(t)} = \tan^{-1} \frac{q_{1x}}{q_{2z}} \quad (44c)$$

$$\theta_e^{(i)} = \theta_e^{(r)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}}{p_{1z}} \quad (45a, b)$$

$$\theta_e^{(t)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}}{p_{2z}} \quad (45c)$$

式(43)～(44)は、媒質ⅠおよびⅡが共に導電性誘電体の場合の反射・透過に関する Snell の法則を表わす。なお、式(43)と(45)とを比較することにより入射波が  $E$  波の場合には位相角とエネルギー角は等しい、すなわち

$$\theta_p^{(\ell)} = \theta_e^{(\ell)}, \quad (\ell = i, r, t) \quad (46)$$

となることがわかる。つぎに、入射波が  $H$  波の場合の位相角と振幅角は  $E$  波の場合と同様に式(43)～(44)で表わされるが、エネルギー角は式(25)～(27)を用いてつきのように求められる。

$$\theta_e^{(i)} = \theta_e^{(r)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}\omega\epsilon_1 + q_{1x}\sigma_1}{p_{1z}\omega\epsilon_1 + q_{1z}\sigma_1} \quad (47a, b)$$

$$\theta_e^{(t)} = \tan^{-1} \frac{p_{1x}\omega\epsilon_2 + q_{1x}\sigma_2}{p_{2z}\omega\epsilon_2 + q_{2z}\sigma_2} \quad (47c)$$

したがって、入射波がH波の場合には一般には

$$\theta_p^{(\ell)} \neq \theta_e^{(\ell)}, \quad (\ell = i, r, t) \quad (48a, b, c)$$

となる。

#### 2.4.4 伝搬定数の決定

入射波の位相角および振幅角を添字<sup>(i)</sup>を省略して $\theta_p$ および $\theta_a$ と表わすとき、式(43)～(44)および関係式(9)を用いて次式を得る。

$$p_{1x} = p_{1z} \tan \theta_p \quad (49)$$

$$q_{1x} = q_{1z} \tan \theta_a \quad (50)$$

ただし、

$$0 \leq \theta_a, \quad \theta_p \leq \frac{\pi}{2} \quad (51a)$$

または

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_a, \quad \theta_p \leq 0 \quad (51b)$$

式(49)～(50)を式(10a)に代入することによって、 $p_{1x}$ 、 $p_{1z}$ および $q_{1x}$ 、 $q_{1z}$ はそれぞれつきのように表わされる。

$$p_{1x} = p_i \sin \theta_p \quad (52a)$$

$$p_{1z} = p_1 \cos \theta_p \quad (52b)$$

および

$$q_{1x} = q_1 \sin \theta_a \quad (53a)$$

$$q_{1z} = q_1 \cos \theta_a \quad (53b)$$

ただし

$$p_1 = n_1 \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \{ 1/m_1 \cos(\theta_p - \theta_a) \}^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (54)$$

$$q_1 = n_1 \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 + \{ 1/m_1 \cos(\theta_p - \theta_a) \}^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (55)$$

つぎに、上に得られた式(52)～(53)を関係式(10b)に代入することにより、 $p_{2z}$  および  $q_{2z}$  はそれぞれつきのように求められる。

$$p_{2z} = \left[ \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (56)$$

$$q_{2z} = \left[ \frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (57)$$

ただし、

$$P = p_{2z}^2 - q_{2z}^2 = n_2^2 - (p_1^2 \sin^2 \theta_p - q_1^2 \sin^2 \theta_a) \quad (58a)$$

$$Q = 2 p_{2z} q_{2z} = (n_2^2/m_2) - 2 p_1 q_1 \sin \theta_p \sin \theta_a \quad (58b)$$

ここで式(54)～(55)および式(58)に含まれる  $n_1$ ,  $n_2$  および  $m_1$ ,  $m_2$  なる量はそれぞれ次式によって定義される。

$$n_j = \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}}, \quad (j = 1, 2) \quad (59a, b)$$

$$m_j = \sqrt{\frac{\omega \epsilon_j}{\sigma_j}}, \quad (j = 1, 2) \quad (60a, b)$$

なお、式(9b~c)から  $Q > 0$  でなければならず、したがって媒質Ⅱ中に透過波が存在するためには位相角  $\theta_p$  および振幅角  $\theta_a$  はつきの関係式を満足しなければならない。

$$\sin \theta_p \sin \theta_a < \frac{n_2^2}{2 p_1 \sigma_1 m_2} \quad (61)$$

上に求められた、諸量を用いて反射係数、透過係数等を表わせばつぎのようになる。まず入射波が  $E$  波の場合には

$$R_E = \frac{(p_1 \cos \theta_p - p_{2z})^2 + (q_1 \cos \theta_a - q_{2z})^2}{(p_1 \cos \theta_p + p_{2z})^2 + (q_1 \cos \theta_a + q_{2z})^2} \quad (62)$$

$$T_E = \frac{4 p_{2z} (p_1^2 \cos^2 \theta_p + q_1^2 \cos^2 \theta_a)}{p_1 \cos \theta_p [(p_1 \cos \theta_p + p_{2z})^2 + (q_1 \cos \theta_a + q_{2z})^2]} \quad (63)$$

$$\alpha_E = \frac{4 q_1 \cos \theta_a [p_{2z} q_1 \cos \theta_a - q_{2z} p_1 \cos \theta_p]}{p_1 \cos \theta_p [(p_1 \cos \theta_p + p_{2z})^2 + (q_1 \cos \theta_a + q_{2z})^2]} \quad (64)$$

つぎに、入射波が  $H$  波の場合には

$$R_H = \frac{[m_1 n_2^2 (p_1 \cos \theta_p + m_2 q_1 \cos \theta_a) - m_2 n_1^2 (p_{2z} + m_1 q_{2z})]^2 *}{[m_1 n_2^2 (p_1 \cos \theta_p + m_2 q_1 \cos \theta_a) + m_2 n_1^2 (p_{2z} + m_1 q_{2z})]^2} \\ * \frac{+ [m_1 n_2^2 (m_2 p_1 \cos \theta_p - q_1 \cos \theta_a) - m_2 n_1^2 (m_1 p_{2z} - q_{2z})]^2}{[m_1 n_2^2 (m_2 p_1 \cos \theta_p - q_1 \cos \theta_a) + m_2 n_1^2 (m_1 p_{2z} - q_{2z})]^2} \quad (65)$$

$$T_H = \frac{(m_1^2 + 1)(m_2 p_{2z} + q_{2z})}{(m_2^2 + 1)(m_1 p_1 \cos \theta_p + q_1 \cos \theta_a)} \\ \times \frac{4 m_1 m_2 n_1^2 n_2^2 [(p_1 \cos \theta_p + m_2 q_1 \cos \theta_a)^2]}{[m_1 n_2^2 (p_1 \cos \theta_p + m_2 q_1 \cos \theta_a) + m_2 n_1^2 (p_{2z} + m_1 q_{2z})]^2} * \\ * \frac{[(m_2 p_1 \cos \theta_p - q_1 \cos \theta_a)^2]}{[m_1 n_2^2 (m_2 p_1 \cos \theta_p - q_1 \cos \theta_a) + m_2 n_1^2 (m_1 p_{2z} - q_{2z})]^2} \quad (66)$$

$$\alpha_H = \frac{4 m_1 m_2 n_1^2 n_2^2 (p_1 \cos \theta_p - m_1 q_1 \cos \theta_a)}{m_1 p_1 \cos \theta_p + q_1 \cos \theta_a} \\ \times \frac{[(m_2 p_1 \cos \theta_p - q_1 \cos \theta_a) (p_{2z} + m_1 q_{2z})]}{[m_1 n_2^2 (p_1 \cos \theta_p + m_2 q_1 \cos \theta_a) + m_2 n_1^2 (p_{2z} + m_1 q_{2z})]^2} * \\ * \frac{-(p_1 \cos \theta_p + m_2 q_1 \cos \theta_a) (m_1 p_{2z} - q_{2z})}{[m_1 n_2^2 (m_2 p_1 \cos \theta_p - q_1 \cos \theta_a) + m_2 n_1^2 (m_1 p_{2z} - q_{2z})]^2} \quad (67)$$

### 3. 導電性誘電体 slab による反射・透過

2. ICにおいて、半無限の導電性誘電体の境界面における平面電磁波の反射・透過現象について考察したが、ここでは導電性誘電体 slab による平面電磁波の反射・透過現象を取り扱う。

図3 IC示すように、媒質Ⅰは完全誘電体 ( $\epsilon_1, \mu_0$ )、媒質Ⅱは導電性誘電体 ( $\epsilon_2, \mu_0, \sigma$ )、媒質Ⅲは完全誘電体 ( $\epsilon_3, \mu_0$ ) であり、媒質Ⅰ、Ⅱ、Ⅲはそれぞれ、 $Z > h$ 、 $0 < Z < h$ 、 $Z < 0$  の空間を満たしているものとする。いま、媒質ⅠからE波が入射するものとすれば、媒質Ⅰ、ⅡおよびⅢ内の波は前節の結果を用いてそれぞれつぎのよう表わされる。

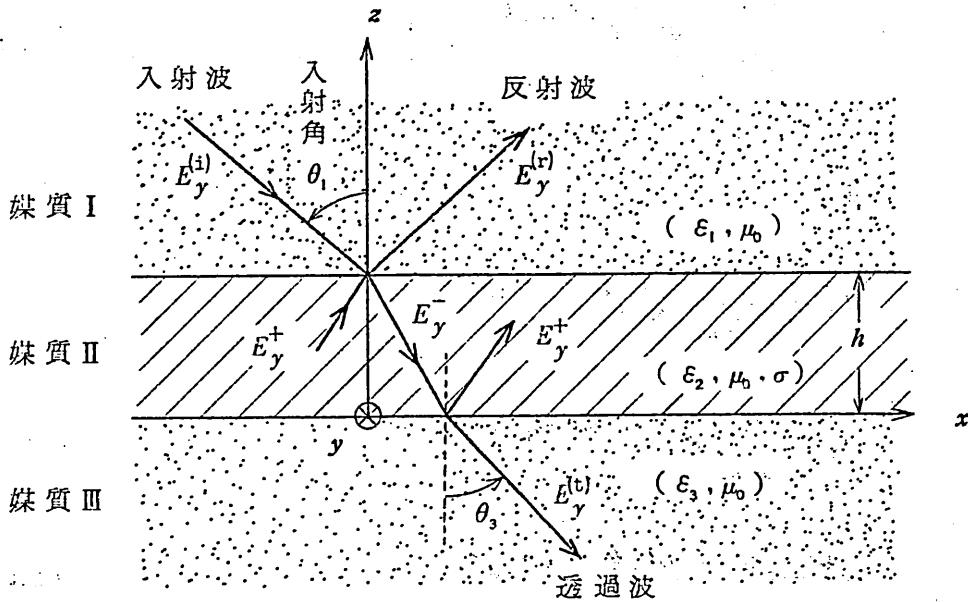


図3 座標系

媒質Ⅰ

入射波

$$E_y^{(i)} = E_{0i} e^{j(\omega t - k_{ix}x - k_{iz}z)} \quad (68a)$$

$$H_x^{(i)} = -\frac{k_{iz}}{\omega \mu_0} E_{0i} e^{j(\omega t - k_{ix}x - k_{iz}z)} \quad (68b)$$

$$H_z^{(i)} = \frac{k_{ix}}{\omega \mu_0} E_{0i} e^{j(\omega t - k_{ix}x - k_{iz}z)} \quad (68c)$$

反射波

$$E_y^{(r)} = E_{0r} e^{j(\omega t - k_{ix}x + k_{iz}z)} \quad (69a)$$

$$H_x^{(r)} = \frac{k_{iz}}{\omega \mu_0} E_{0r} e^{j(\omega t - k_{ix}x + k_{iz}z)} \quad (69b)$$

$$H_z^{(r)} = \frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_{0r} e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{1z}z)} \quad (69c)$$

媒質Ⅱ

$$E_y^- = E_0^- e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{2z}z)} \quad (70a)$$

$$H_x^- = -\frac{k_{2z}}{\omega \mu_0} E_0^- e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{2z}z)} \quad (70b)$$

$$H_z^- = \frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_0^- e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{2z}z)} \quad (70c)$$

$$E_y^+ = E_0^+ e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{2z}z)} \quad (71a)$$

$$H_x^+ = \frac{k_{2z}}{\omega \mu_0} E_0^+ e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{2z}z)} \quad (71b)$$

$$H_z^+ = \frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_0^+ e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{2z}z)} \quad (71c)$$

媒質Ⅲ：

透過波

$$E_y^{(t)} = E_{0t} e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{3z}z)} \quad (72a)$$

$$H_x^{(t)} = -\frac{k_{3z}}{\omega \mu_0} E_{0t} e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{3z}z)} \quad (72b)$$

$$H_z^{(t)} = \frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_{0t} e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{3z}z)} \quad (72c)$$

ただし、式(70)～(71)における上部の添字 $-$ および $+$ は、それぞれ媒質Ⅱ中を $z$ の負および正の方向に進む波の電磁界量を表わす。なお、伝搬定数は構成定数と次式によって結ばれている。

$$(k_{1x})^2 + (k_{1z})^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 \quad (73a)$$

$$(k_{1x})^2 + (k_{2z})^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 - j\omega \sigma \mu_0 \quad (73b)$$

$$(k_{1x})^2 + (k_{3z})^2 = \omega^2 \epsilon_3 \mu_0 \quad (73c)$$

さて、 $z = h$  および  $z = 0$  における境界条件はそれぞれつきのように表わされる。

$$z = h$$

$$E_{0i}^- e^{-jk_{1z}h} + E_{0r} e^{jk_{1z}h} = E_0^- e^{-jk_{2z}h} + E_0^+ e^{jk_{2z}h} \quad (74a)$$

$$\begin{aligned} -k_{1z} E_{0i}^- e^{-jk_{1z}h} + k_{1z} E_{0r} e^{jk_{1z}h} &= -k_{2z} E_0^- e^{-jk_{2z}h} \\ &\quad + k_{2z} E_0^+ e^{jk_{2z}h} \end{aligned} \quad (74b)$$

$$z = 0$$

$$E_0^- + E_0^+ = E_{0t} \quad (75a)$$

$$-k_{2z} E_0^- + k_{2z} E_0^+ = -k_{3z} E_{0t} \quad (75b)$$

式(74)～(75)を用いて、 $E_{0r}$ 、 $E_0^-$ 、 $E_0^+$ および $E_{0t}$ はそれぞれつきのよう求められる。

$$E_{0r} = E_{0i} \frac{k_{1z} (1 + r_{23} e^{2jk_{2z}h}) - k_{2z} (1 - r_{23} e^{2jk_{2z}h})}{k_{1z} (1 + r_{23} e^{2jk_{2z}h}) + k_{2z} (1 - r_{23} e^{2jk_{2z}h})} e^{-2jk_{1z}h} \quad (76a)$$

$$E_0^- = E_{0i} \frac{2 k_{1z} e^{-j(k_{1z} - k_{2z}) h}}{k_{1z}(1 + r_{23} e^{2jk_{2z}h}) + k_{2z}(1 - r_{23} e^{2jk_{2z}h})} \quad (76b)$$

$$E_0^+ = E_{0i} \frac{2 r_{23} k_{1z} e^{-j(k_{1z} - k_{2z}) h}}{k_{1z}(1 + r_{23} e^{2jk_{2z}h}) + k_{2z}(1 - r_{23} e^{2jk_{2z}h})} \quad (76c)$$

$$E_{0t} = E_{0i} \frac{2 t_{23} k_{1z} e^{-j(k_{1z} - k_{2z}) h}}{k_{1z}(1 + r_{23} e^{2jk_{2z}h}) + k_{2z}(1 - r_{23} e^{2jk_{2z}h})} \quad (76d)$$

したがって、 $E_{0r}$  と  $E_{0i}$  の比および  $E_{0t}$  と  $E_{0i}$  の比をそれぞれ  $r$  および  $t$  とすれば次式を得る。

$$r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{r_{12} + r_{23} e^{2jk_{2z}h}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2jk_{2z}h}} e^{-2jk_{1z}h} \quad (77)$$

$$t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{t_{12} t_{23} e^{-j(k_{1z} - k_{2z}) h}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2jk_{2z}h}} \quad (78)$$

ただし、上式において  $r_{jk}$  および  $t_{jk}$  はそれぞれ次式によって定義される量である。

$$r_{jk} = \frac{k_{jz} - k_{kz}}{k_{jz} + k_{kz}} = \rho_{jk} e^{-j\phi_{jk}}, \quad (jk = 12, 23) \quad (79a, b)$$

$$t_{jk} = \frac{2 k_{jz}}{k_{jz} + k_{kz}} = \tau_{jk} e^{-j\chi_{jk}}, \quad (jk = 12, 23) \quad (80a, b)$$

ここで、図3に示すように入射角を  $\theta_i$  とすれば

$$k_{1x} = k_0 n_1 \sin \theta_1 \quad (81a)$$

$$k_{1z} = -k_0 n_1 \cos \theta_1 \quad (81b)$$

となり、したがって  $k_{2z}$  は式(73b)を用いてつきのように求められる。

$$k_{2z} = -k_0 (p - j q) \quad (82)$$

ただし、

$$p = \left\{ \frac{(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1) + \sqrt{(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1)^2 + (n_2^2/m)^2}}{2} \right\}^{1/2} \quad (83a)$$

$$q = \left\{ \frac{-(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1) + \sqrt{(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1)^2 + (n_2^2/m)^2}}{2} \right\}^{1/2} \quad (83b)$$

ここで、 $m = \frac{\omega \epsilon_2}{\sigma}$  である。さらに、 $k_{3z}$  は式(73c)を用いてつきのように求められる。

$$k_{3z} = \begin{cases} -k_0 \sqrt{n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}, & (n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 > 0) \\ j k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2}, & (n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 < 0) \end{cases} \quad (84a)$$

$$j k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2}, \quad (n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 < 0) \quad (84b)$$

さて、つぎに反射係数  $R$  および透過係数  $T$  を求める。まず、 $n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 > 0$  のときの  $k_{3z}$  を改めて

$$k_{3z} = -k_0 n_3 \cos \theta_3 \quad (85)$$

と表わせば、式(81)～(83)および式(85)を用いて  $r_{jk}$  および  $t_{jk}$  はそれぞれつきのように表わされる。

$$r_{12}^2 = \frac{(p - n_1 \cos \theta_1)^2 + q^2}{(p + n_1 \cos \theta_1)^2 + q^2} \quad (86a)$$

$$\tan \phi_{12} = \frac{2 q n_1 \cos \theta_1}{p^2 + q^2 - n_1^2 \cos^2 \theta_1} \quad (86b)$$

$$\rho_{23}^2 = \frac{(p - n_3 \cos \theta_3)^2 + q^2}{(p + n_3 \cos \theta_3)^2 + q^2} \quad (87a)$$

$$\tan \phi_{23} = \frac{2 q n_3 \cos \theta_3}{p^2 + q^2 - n_3^2 \cos^2 \theta_3} \quad (87b)$$

$$\tau_{12}^2 = \frac{4 n_1^2 \cos^2 \theta_1}{(p + n_1 \cos \theta_1)^2 + q^2} \quad (88a)$$

$$\tan \chi_{12} = \frac{-q}{p + n_1 \cos \theta_1} \quad (88b)$$

$$\tau_{23}^2 = \frac{4 (p^2 + q^2)}{(p + n_3 \cos \theta_3)^2 + q^2} \quad (89a)$$

$$\tan \chi_{23} = \frac{q n_3 \cos \theta_3}{p^2 + q^2 + p n_3 \cos \theta_3} \quad (89b)$$

上に求められた  $\rho_{jk}$ ,  $\phi_{jk}$  および  $\tau_{jk}$  を用いて,  $n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 > 0$  のときの反射係数  $R$  および透過係数  $T$  はそれぞれつきのように表わされる。

$$R = |r|^2 \quad (90a)$$

$$= \frac{\rho_{12}^2 e^{2k_0 q h} + \rho_{23}^2 e^{-2k_0 q h} + 2 \rho_{12} \rho_{23} \cos [\phi_{23} - \phi_{12} + 2 k_0 p h]}{e^{2k_0 q h} + \rho_{12}^2 \rho_{23}^2 e^{-2k_0 q h} + 2 \rho_{12} \rho_{23} \cos [\phi_{12} + \phi_{23} + 2 k_0 p h]} \quad (90b)$$

$$T = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} |t|^2 \quad (91a)$$

$$= \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} \times \frac{\tau_{12}^2 \tau_{23}^2}{e^{2k_0 q h} + \rho_{12}^{-2} \rho_{23}^{-2} e^{-2k_0 q h} + 2 \rho_{12} \rho_{23} \cos [\phi_{12} + \phi_{23} + 2k_0 q h]} \quad (91b)$$

ここで、 $\rho_{jk}$ ,  $\tau_{jk}$  のかわりに次の諸式

$$R_{12} = \rho_{12}^{-2} = \frac{(p - n_1 \cos \theta_1)^2 + q^2}{(p + n_1 \cos \theta_1)^2 + q^2} \quad (92)$$

$$R_{23} = \rho_{23}^{-2} = \frac{(p - n_3 \cos \theta_3)^2 + q^2}{(p + n_3 \cos \theta_3)^2 + q^2} \quad (93)$$

$$T_{12} = \frac{p}{n_1 \cos \theta_1} \tau_{12}^2 = \frac{4 p n_1 \cos \theta_1}{(p + n_1 \cos \theta_1)^2 + q^2} \quad (94)$$

$$T_{23} = \frac{n_3 \cos \theta_3}{p} \tau_{23}^2 = \frac{4 (p^2 + q^2) n_3 \cos \theta_3}{p [(p + n_3 \cos \theta_3)^2 + q^2]} \quad (95)$$

を導入すれば、式(90b)および(91b)はそれぞれつきのようにならわされる。

$$R = \frac{R_{12} e^{2k_0 q h} + R_{23} e^{-2k_0 q h} + 2 \sqrt{R_{12} R_{23}} \cos [\phi_{23} - \phi_{12} + 2k_0 p h]}{e^{2k_0 q h} + R_{12} R_{23} e^{-2k_0 q h} + 2 \sqrt{R_{12} R_{23}} \cos [\phi_{12} + \phi_{23} + 2k_0 p h]} \quad (96)$$

$$T = \frac{T_{12} T_{23}}{e^{2k_0 q h} + R_{12} R_{23} e^{-2k_0 q h} + 2 \sqrt{R_{12} R_{23}} \cos [\phi_{12} + \phi_{23} + 2k_0 p h]} \quad (97)$$

ただし、 $R_{jk}$  および  $T_{jk}$  はそれぞれ、2つの半無限媒質 J および K の境界面における反射係数および透過係数を表わす。なお、式(9.1)の結果は、文献(2)において、特性マトリックスを用いて求められている結果(式(2.4), p. 630)と係数  $e^{-2k_0 q h}$  だけ異なるが、著者らの結果の方が正しいと思われる。

れる。つぎに、 $n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 < 0$  のときには反射係数  $R$  は、式(86a~b)および、 $\rho_{23}$ 、 $\phi_{23}$  に関するつぎの表示式

$$\rho_{23}^2 = \frac{p^2 + (q^2 - \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2})^2}{p^2 + (q + \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2})^2} \quad (98a)$$

$$\tan \phi_{23} = \frac{-2p\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2}}{p^2 + q^2 - (n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2)} \quad (98b)$$

を式(90)に代入することによって求められるが、 $k_{3z}$  が式(84b)で与えられるように純虚数となるため、透過係数は 0、すなわち

$$T = 0, \quad (n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 < 0) \quad (99)$$

となる。したがって、このとき媒質Ⅲへの透過エネルギー流は 0 となる。

#### 4. 数値計算例と検討

数値計算例は、当日会場において発表の予定。

#### 5. 結 言

まず、2つの半無限導電性媒質の境界面における平面電磁波の反射・透過の問題を入射波が一様でない平面波の場合も含めて一般的に取り扱い、入射波の存在する媒質が導電性媒質である場合には反射係数と透過係数の和は一般には 1 にならないこと等を明らかにした。

つぎに、2つの完全誘電体によってはさまれた導電性誘電体 slab による平面電磁波の反射・透過現象について考察し、反射係数、透過係数等を求めた。

## 謝 辞

日頃ご指導ごべんたついただいている本学工学部板倉清保教授、  
同熊谷信昭助教授に深謝する。また、常々ご討論いただく板倉研  
究室の諸氏に深謝する。

文 献

- (1) J.A.Stratton: Electromagnetic Theory (McGraw-Hill,  
New York, 1941), Secs. 9.4 ~ 9.12.
- (2) M.Born and E.Wolf: Principles of Optics (Pergamon  
Press, New York, 1959), Sec. 13.4.1.

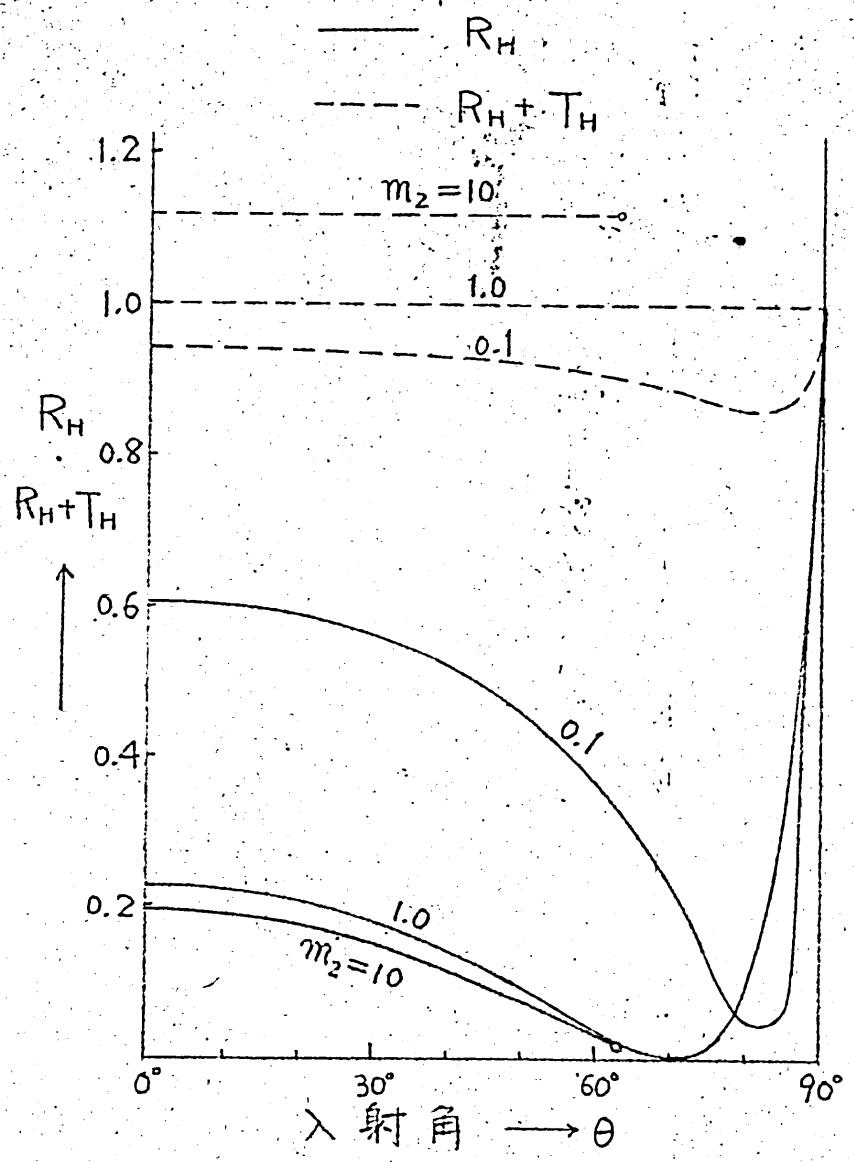


図1(a) 反射係数

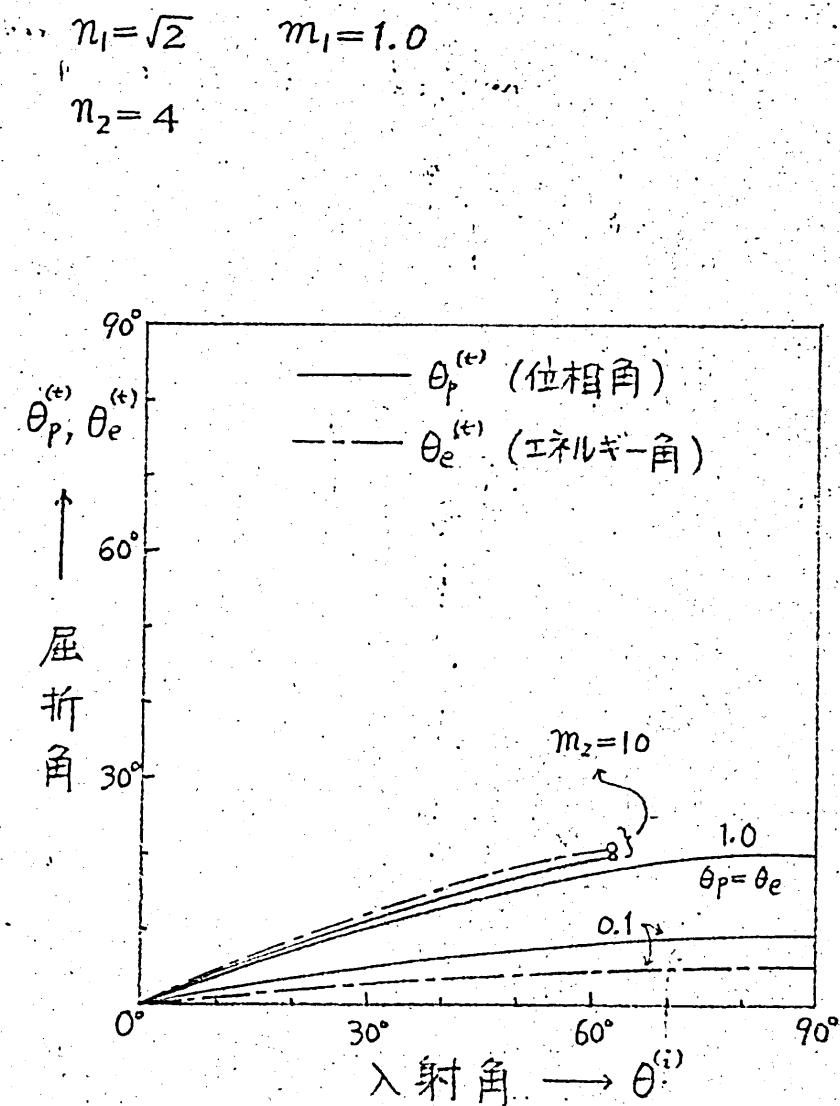


図1(b) 入射角と屈折角の関係

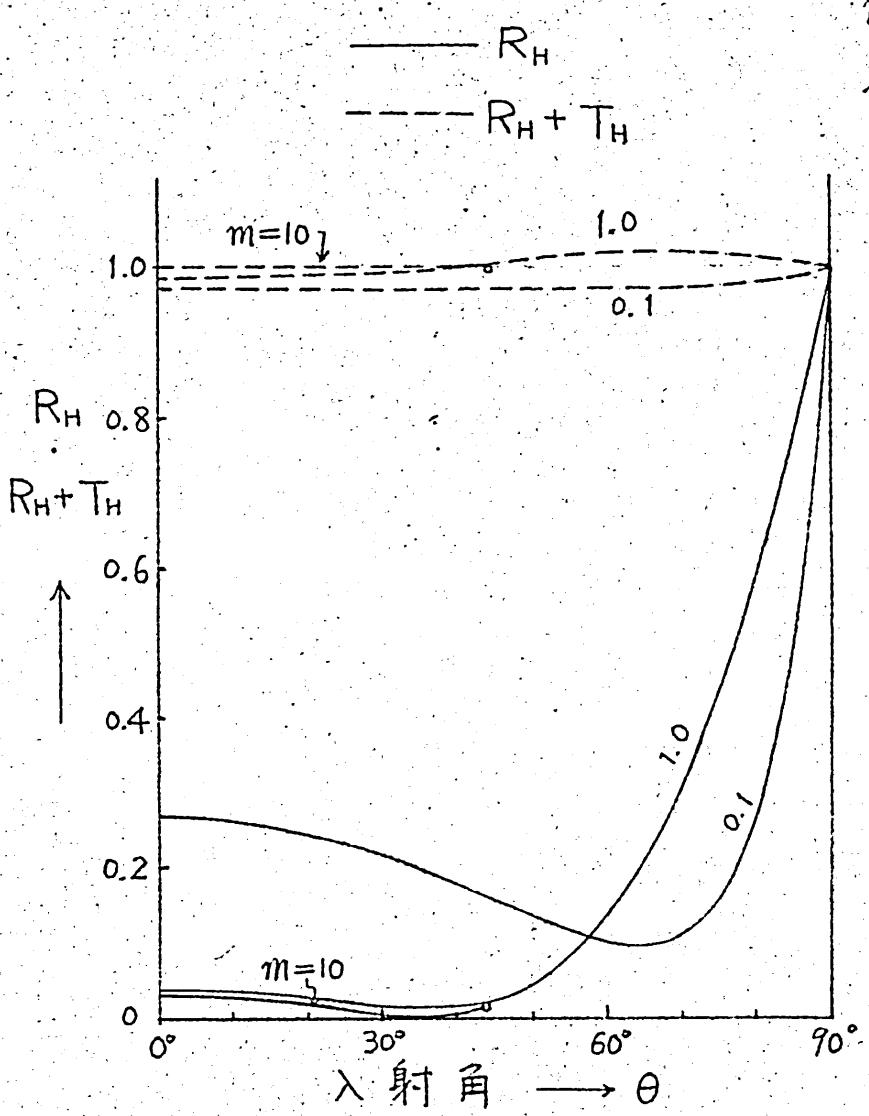


図2(a) 反射係数

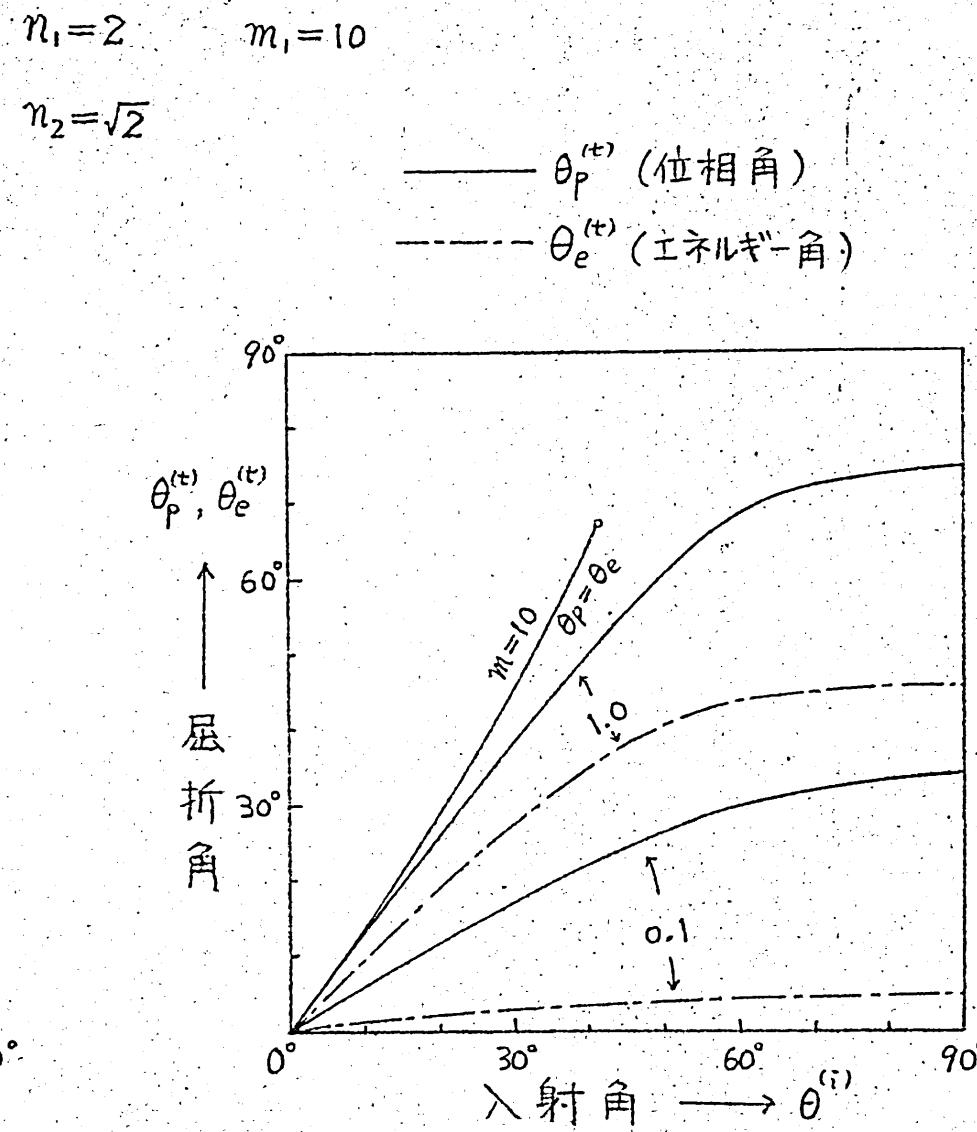


図2(b) 入射角と屈折角の関係

輻射科学研究会資料

# 導電性運動媒質中の增幅波の励振

藤岡 弘

小川 英一

(大阪大学・工学部)

1969年11月28日

## 1. 序 言

著者らは、先に境界のない無限に拡がっている導電性運動媒質中を伝搬する平面電磁波の性質について考察し、媒質の運動速度が波の位相速度よりも大きくなるとき波動増幅の現象が起ることを明らかにした。<sup>(1)~(4)</sup>

ここでは、このような増幅波を平面波によって励振できることを示す。すなわち、静止している完全誘電体媒質から境界面に平行に運動している導電性誘電体媒質に平面電磁波が入射するとき、適当な条件の下に導電性運動媒質中に増幅波が励振されることを示す。なお、このように増幅波が励振され得ることは著者らによって以前に指摘されている<sup>(5)~(6)</sup>が、ここでは著者らによって最近導かれたエネルギー関係式<sup>(3), (7)~(8)</sup>をもとにして詳しく考察する。ただし、本文では導電性媒質が半無限の場合および slab の場合について解析する。

## 2. Minkowski の電磁エネルギー・運動量テンソル と波動増幅現象

Minkowski によれば電磁界のエネルギー・運動量テンソルを  $S_{ik}$  とするとき、運動量およびエネルギーの保存則はつぎのようにかける。

$$f_i = - \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \quad (1)$$

ここで、 $f_i$  はその値が正のときには電磁系（電磁場）から力学系（媒質）に作用する四元力の密度を表わし、また負の場合には逆に力学系から電磁系に作用する力を表わす。四元力の密度  $f_i$  を電磁界量で表わせばつぎのようになる。

$$f_i = (\mathbf{t}, \frac{j}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f)) \quad (2)$$

ただし、

$$\mathbf{f} = \rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f \times \mathbf{B} \quad (3a)$$

$$\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_c + \rho_f \mathbf{v} \quad (3b)$$

上式における  $\mathbf{J}_c$  は伝導電流を表わし、 $\rho_f \mathbf{v}$  は携帯電流を表わす。

式(1)において  $i = 4$  とおくと、エネルギー保存則

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = - \frac{c}{j} f_4 \quad (4)$$

をうる。ただし

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \quad (5a)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5b)$$

$$f_4 = \frac{j}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f) \quad (5c)$$

式(5c)で表わされる  $f_4$  はさらにつぎのようにかける。

$$f_4 = \frac{j}{c} (A + Q) \quad (6)$$

ただし、

$$A = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (7a)$$

$$Q = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J}_c = \mathbf{E}_{eff} \cdot \mathbf{J}_c \quad (7b)$$

ここで、 $A$  は単位時間に単位体積あたりになされる力学的仕事を表わし、また  $Q$  は単位時間に単位体積あたりに放出される力学的エネルギー以外のエネルギー量、すなわち発生する熱量を示すものと解釈できる。<sup>(9)</sup>

さて、電磁界が正弦的に時間変化しているときには式(4)のエネルギー保存則はつぎのようにかける。

$$-\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathcal{W} \rangle = \langle A \rangle + \langle Q \rangle \quad (8)$$

ただし、

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} Re [ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* ] \quad (9a)$$

$$\langle \mathcal{W} \rangle = \frac{1}{2} Re [ \mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E} ] \quad (9b)$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2} Re [ \mathbf{v} \cdot (\rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f^* \times \mathbf{B}) ] \quad (9c)$$

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} Re [ \mathbf{J}_c^* \cdot \mathbf{E}_{eff} ] \quad (9d)$$

ここで、 $\langle \mathbf{S} \rangle$ は電磁エネルギー流の時間平均値を表わし、 $\langle \mathcal{W} \rangle$ は電磁場が媒質に対してなす全仕事量の時間平均値を表わすものと解釈できる。 $\langle A \rangle$ は電磁場が媒質に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わし、また $\langle Q \rangle$ は発生する熱量の時間平均値を表わすものと解釈できる。

以上の諸量のうち、 $\langle \mathcal{W} \rangle$ および $\langle A \rangle$ はあとで示すように媒質の運動速度によって正にも負にもなりうるが、 $\langle Q \rangle$ は媒質の運動速度の如何にかかわらず決して負にはならないことは式(9d)をつきのように書き改めることによって直ちにわかる。

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{\gamma} \langle Q' \rangle = -\frac{1}{2\gamma} \sigma |\mathbf{E}|^2 \quad (10a)$$

または、

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma Re [ |\mathbf{E}_{eff}|^2 - \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c} \right) \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^*}{c} \right) ] \quad (10b)$$

ここで、プライム記号は媒質の静止座標系における量を表わす。なお、式(10a)は熱力学における熱量の変換式に一致する。

さて、つぎに $\langle A \rangle$ について考察する。

$\langle A \rangle$ は式(9c)からつぎのように表わされる。

$$\langle A \rangle = v \cdot \left[ \frac{1}{2} Re (\rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f^* \times \mathbf{B}) \right] \quad (11a)$$

$$= v \langle f_{11} \rangle \quad (11b)$$

ここで、 $\langle f_{11} \rangle$  は Lorentz 力の媒質の運動方向に平行な成分の時間平均値を表わす。上式から  $v \langle f_{11} \rangle > 0$ ，すなわち Lorentz 力が媒質を加速させる方向に働くときには  $\langle A \rangle > 0$  となり、このとき  $\langle A \rangle$  は電磁場が媒質に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わすことがわかる。また、

$v \langle f_{11} \rangle < 0$ ，すなわち Lorentz 力が媒質を減速させる方向に働くときは  $\langle A \rangle < 0$  となり、このとき  $-\langle A \rangle$  なる量は媒質が電磁場に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わすものと解釈できる。エネルギー関係式(8)から  $\langle A \rangle < 0$  で  $|\langle A \rangle| > \langle Q \rangle$  なる場合には  $-\nabla \cdot \langle S \rangle = \langle W \rangle < 0$  となり、したがって波動增幅の現象がおこることになる。このときエネルギー関係式はつきのようにかける。

$$[-\langle W \rangle] = [-\langle A \rangle] - \langle Q \rangle \quad (12)$$

上式の右辺は、媒質が電磁場に対してなす力学的仕事の時間平均値から媒質中に発生する熱量の時間平均値を差し引いた量を表わし、したがって左辺は媒質が電磁場に対してなす total の仕事量の時間平均値を表わすことになる。

### 3. 半無限の導電性運動媒質中の增幅波

#### 3・1 反射波および透過波の決定

図1は平面電磁波によって半無限の導電性運動媒質中に增幅波を励振する場合の構成図である。図1において、 $z > 0$  の空間は完全誘電体 ( $\epsilon_1, \mu_0$ )、 $z < 0$  の空間は導電性誘電体 ( $\epsilon_2, \mu_0, \sigma$ ) によってそれぞれ満されており、導電性誘電体は完全誘電体に対して一定速度  $v$  で  $x$  軸方向に運動しているも

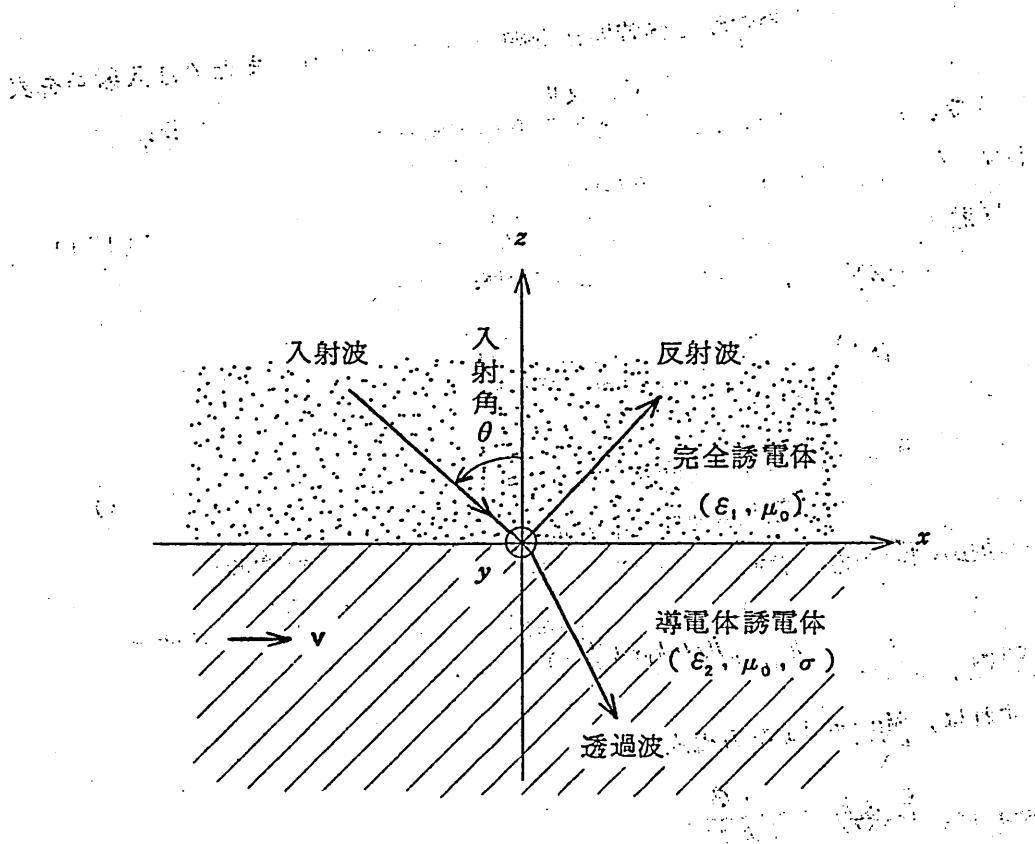


図1 座 標 系

のとする。いま、完全誘電体側から  $E$  波、すなわち電界が入射面に垂直な波が入射するものとすれば、入射波はつぎのように表わされる。

入射波

$$E_y^{(i)} = E_{0i} e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \quad (13a)$$

$$H_x^{(i)} = -\frac{k_z}{\omega \mu_0} E_{0i} e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \quad (13b)$$

$$H_z^{(i)} = \frac{k_x}{\omega \mu_0} E_{0i} e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \quad (13c)$$

ただし、

$$k_x = k_0 n_1 \sin \theta \quad (14a)$$

$$k_z = -k_0 n_1 \cos \theta \quad (14b)$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} \quad (14c, d)$$

ここで、 $E_{oi}$  は場所および時間に無関係な定数であり、また  $\theta$  は入射角を表わす。入射波(13)に対して、反射波はつぎのように表わされる。

反射波

$$E_y^{(r)} = E_{or} e^{j(\omega t - k_x x + k_z z)} \quad (15a)$$

$$H_x^{(r)} = \frac{k_z}{\omega \mu_0} E_{or} e^{j(\omega t - k_x x + k_z z)} \quad (15b)$$

$$H_z^{(r)} = \frac{k_x}{\omega \mu_0} E_{or} e^{j(\omega t - k_x x + k_z z)} \quad (15c)$$

ただし、振幅  $E_{or}$  は後で境界条件から決定される。

さて、つぎに導電性運動媒質中の電磁界を求める。入射平面電磁波によって励振される波の電界を

$$E_y^{(t)} = E_{ot} e^{j(\omega t - k_x x - k_z^{(t)} z)} \quad (16a)$$

とすれば、Maxwellの方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (17a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f \quad (17b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (17c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (17d)$$

および、構成関係式

$$\mathbf{B} = \mu_0 \bar{\alpha} \cdot \mathbf{H} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E} \quad (18a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_2 \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \quad (18b)$$

$$\mathbf{J}_f = \gamma \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (18c)$$

$$\rho_f = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_f}{c^2} \quad (18d)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \frac{(n_2^2 - 1)v}{(1 - n_2^2\beta^2)c^2} = \frac{(n_2^2 - 1)\beta}{(1 - n_2^2\beta^2)c}, \quad i_x = \Omega i_x \\ \bar{\alpha} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad a = \frac{1 - \beta^2}{1 - n_2^2\beta^2} \\ \beta &= \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

を用いて磁界成分はつぎのように求められる。

$$H_x^{(t)} = -\frac{k_z^{(t)}}{\omega \mu_0} E_{0t} e^{j(\omega t - k_x x - k_z^{(t)} z)} \quad (16b)$$

$$H_z^{(t)} = \frac{k_x + \omega \Omega}{\omega \mu_0 a} E_{0t} e^{j(\omega t - k_x x - k_z^{(t)} z)} \quad (16c)$$

ただし、式(16a)において透過波の伝搬定数の  $x$  方向成分が、境界条件により入射波の伝搬定数の  $x$  方向成分と一致することを用いた。また、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{j}_f$  および  $\rho_f$  はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\mathbf{B} = -\left[ i_x \frac{k_z^{(t)}}{\omega} - i_z \frac{k_x}{\omega} \right] E_{0t} e^{j(\omega t - k_x x - k_z^{(t)} z)} \quad (21a)$$

$$\mathbf{D} = i_y \left[ \epsilon_2 a - \frac{(k_x + \omega \Omega) \Omega}{\omega \mu_0 a} \right] E_{0t} e^{j(\omega t - k_x x - k_z^{(t)} z)} \quad (21b)$$

$$\mathbf{j}_f = i_y \gamma \sigma \left( 1 - \frac{v k_x}{\omega} \right) E_{0t} e^{j(\omega t - k_x x - k_z^{(t)} z)} \quad (22a)$$

$$\rho_f = 0 \quad (22b)$$

なお、透過波の伝搬定数の  $z$  方向成分  $k_z^{(t)}$  は、式(16b~c)および(21b)、(22a)を代入することによってつぎのように決定される。

$$(k_z^{(t)})^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 a - \frac{(k_x + \omega \Omega)^2}{a} - j \omega \mu_0 \sigma \gamma \left( 1 - \frac{v k_x}{\omega} \right) \quad (23)$$

したがって、

$$k_z^{(t)} = -k_0(p - jq) \quad (24)$$

とおけば、 $p$ および $q$ はそれぞれつきのように表わされる。

$$p = \left[ \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

$$q = \left\{ \begin{array}{l} + \left[ \frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1 - n_1 \beta \sin \theta \geq 0) \\ - \left[ \frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1 - n_1 \beta \sin \theta < 0) \end{array} \right. \quad (26a)$$

$$q = \left\{ \begin{array}{l} + \left[ \frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1 - n_1 \beta \sin \theta \geq 0) \\ - \left[ \frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1 - n_1 \beta \sin \theta < 0) \end{array} \right. \quad (26b)$$

ただし、

$$P = p^2 - q^2 = \gamma^2 \left[ n_2^2 (1 - n_1 \beta \sin \theta)^2 - (n_1 \sin \theta - \beta)^2 \right], \quad (27a)$$

$$Q = 2pq = (\gamma n_2^2/m)(1 - n_1 \beta \sin \theta). \quad (27b)$$

ここで、 $m = (\omega \epsilon_2 / \sigma)$ である。

つぎに、反射波および透過波の振幅を求める。入射波が $E$ 波の場合には境界面上において電磁界の接線成分は連続となり<sup>(10)</sup>したがって反射波および透過波の振幅は式(13a,b), (15a,b)および(16a,b)を用いてそれぞれつきのように決定される。

$$E_{or} = \frac{k_z - k_z^{(t)}}{k_z + k_z^{(t)}} E_{oi} \quad (28a)$$

$$E_{ot} = \frac{2k_z}{k_z + k_z^{(t)}} E_{oi} \quad (28b)$$

上式に式(14b)および(24)を代入することにより次式を得る。

$$E_{or} = \frac{(n_1 \cos \theta - p) + jq}{(n_1 \cos \theta + p) - jq} E_{oi} \quad (29a)$$

$$E_{ot} = \frac{2 n_i \cos \theta}{(n_i \cos \theta + p) - jq} E_{oi} \quad (29b)$$

以上で、反射波および透過波に関する電磁界量はすべて決定された。

### 3・2 エネルギー関係式

ここでは2.で導かれたエネルギー関係式を用いて、導電性誘電体が波の位相速度より大きい速度で運動するときには、透過波は增幅波となることを示す。

まず、式(9a)で定義されるPoyntingベクトルは3・1の結果を用いてつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} < S_x^{(t)} > = & 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\gamma^2 n_i^2 \cos^2 \theta [(n_i \sin \theta - \beta) + \beta n_i^2 (1 - n_i \beta \sin \theta)]}{(n_i \cos \theta + p)^2 + q^2} \\ & \cdot |E_{oi}|^2 e^{2k_0 qz} \end{aligned} \quad (30a)$$

$$< S_z^{(t)} > = -2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{p n_i^2 \cos^2 \theta}{(n_i \cos \theta + p)^2 + q^2} |E_{oi}|^2 e^{2k_0 qz} \quad (30b)$$

つぎに、式(9b~d)で定義される $\langle W \rangle$ ,  $\langle A \rangle$ および $\langle Q \rangle$ なる量はそれぞれつぎのように求められる。

$$\langle W \rangle = \frac{2 \gamma \sigma n_i^2 \cos^2 \theta (1 - n_i \beta \sin \theta)}{(n_i \cos \theta + p)^2 + q^2} |E_{oi}|^2 e^{2k_0 qz} \quad (31a)$$

$$\langle A \rangle = \frac{2 \gamma \sigma \beta n_i^3 \sin \theta \cos^2 \theta (1 - n_i \beta \sin \theta)}{(n_i \cos \theta + p)^2 + q^2} |E_{oi}|^2 e^{2k_0 qz} \quad (32a)$$

$$\langle Q \rangle = \frac{2 \gamma \sigma n_i^2 \cos^2 \theta (1 - n_i \beta \sin \theta)^2}{(n_i \cos \theta + p)^2 + q^2} |E_{oi}|^2 e^{2k_0 qz} \quad (33a)$$

あるいは、

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left(1 - \frac{v}{v_p}\right) |\mathbf{E}^{(t)}|^2 \quad (31b)$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left(1 - \frac{v}{v_p}\right) \left(\frac{v}{v_p}\right) |\mathbf{E}^{(t)}|^2 \quad (32b)$$

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left(1 - \frac{v}{v_p}\right)^2 |\mathbf{E}^{(t)}|^2 \quad (33b)$$

ただし、 $v_p$  は

$$v_p = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k_0 n_i \sin \theta} \quad (34)$$

で定義される量であり、透過波の位相速度の  $x$  方向成分、すなわち媒質の運

$\langle W \rangle, \langle A \rangle, \langle Q \rangle$

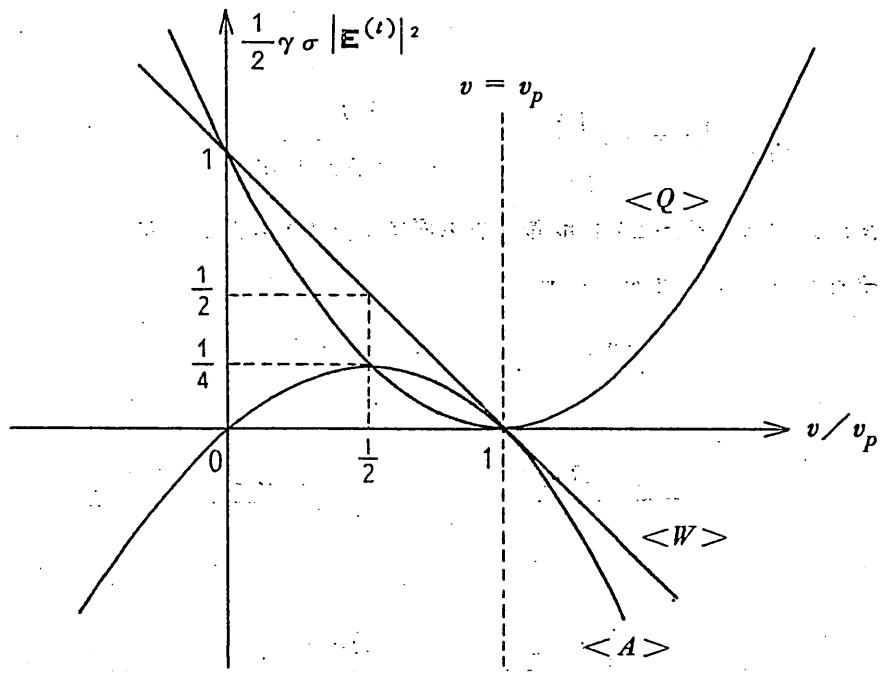


図 2  $\langle W \rangle, \langle A \rangle$  および  $\langle Q \rangle$  の変化

動方向に平行な成分を表わす。上式から  $v_p$  は、無限に拡がっている導電性運動媒質中の平面波<sup>(1)～(4)</sup>の場合とは違って、運動媒質自身の構成定数や媒質の運動速度とは無関係に定まることがわかる。図2は ( $v/v_p$ )を横軸にとった場合の  $\langle W \rangle$ ,  $\langle A \rangle$  および  $\langle Q \rangle$  の変化の様子を示したものである。また、表1は  $\langle W \rangle$ ,  $\langle A \rangle$  および  $\langle Q \rangle$  の符号を示したものである。

表1  $\langle W \rangle$ ,  $\langle A \rangle$  および  $\langle Q \rangle$  の符号

	$\theta < 0$	$0 < n_1 \beta \sin \theta < 1$	$n_1 \beta \sin \theta > 1$
	$\frac{v}{v_p} < 0$	$0 < \frac{v}{v_p} < 1$	$\frac{v}{v_p} > 1$
$\langle W \rangle$	正	正	負
$\langle A \rangle$	負	正	負
$\langle Q \rangle$	正	正	正
	減衰波	減衰波	増幅波

表1から、 $n_1 \beta \sin \theta > 1$  したがって  $v > v_p$  のときには  $\langle W \rangle$  が負となり波動増幅現象が起ることがわかる。なお、このとき式(30a～b)からわかるように、

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{s}^{(t)} \rangle = \frac{\partial \langle S_z^{(t)} \rangle}{\partial z} > 0 \quad (35)$$

となり、したがって透過波は媒質の運動に垂直な方向に増幅され、平行な方向には増幅されないことがわかる。透過波が境界面に平行な方向には増幅されないことは、透過波の伝搬定数の境界面に平行な成分が境界条件により実数量として定まることからも当然の結果である。

以上の議論から、平面電磁波によって導電性運動媒質中に増幅波を励振できることが明らかとなった。

## 4. 運動している導電性誘電体 slab 中の增幅波

### 4・1 反射係数と透過係数

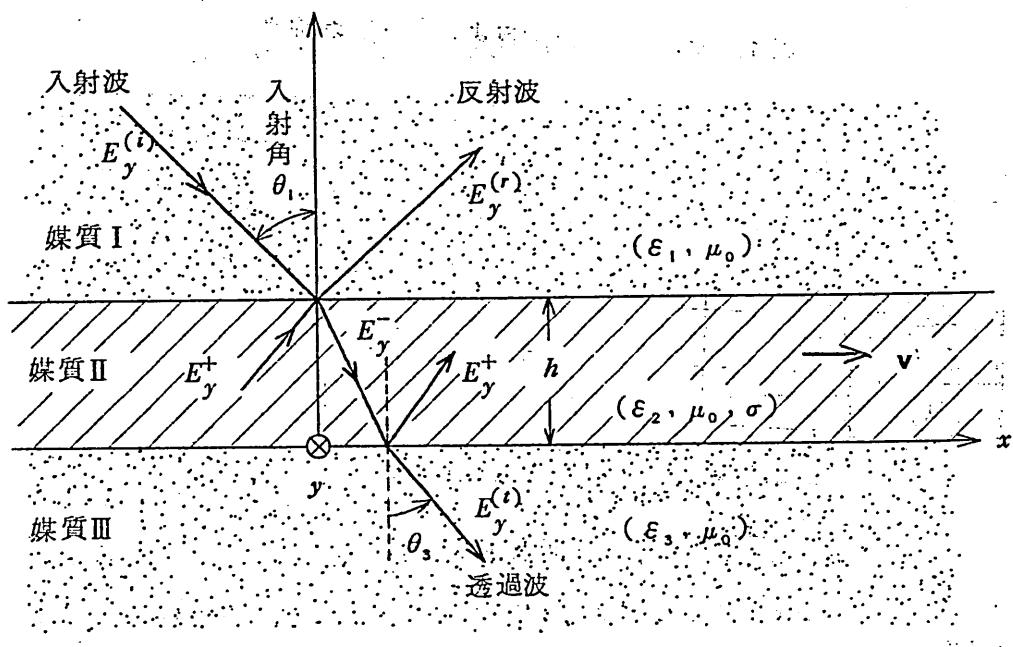


図3 座標系

図3に示すように、 $z > h$ の空間は $(\epsilon_1, \mu_0)$ なる完全誘電体(媒質I)によって、 $0 < z < h$ なる空間は $(\epsilon_2, \mu_0, \sigma)$ なる導電性誘電体(媒質II)によって、また $z < 0$ なる空間は $(\epsilon_3, \mu_0)$ なる完全誘電体(媒質III)によってそれぞれ満されており、媒質IIは媒質IおよびIIIに対して一様なる速度 $v$ で $x$ 軸方向に運動しているものとする。いま、媒質IからE波が入射するものとすれば、媒質I, IIおよびIII内の波は前節の結果を用いてそれぞれつぎのように表わされる。

媒質 I :

入射波

$$E_y^{(i)} = E_{0i} e^{j(\omega t - k_1 x - k_{1z} z)} \quad (36a)$$

$$H_x^{(i)} = -\frac{k_{1z}}{\omega \mu_0} E_{0i} e^{j(\omega t - k_1 x - k_{1z} z)} \quad (36b)$$

$$H_z^{(i)} = \frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_{0i} e^{j(\omega t - k_1 x - k_{1z} z)} \quad (36c)$$

反射波

$$E_y^{(r)} = E_{0r} e^{j(\omega t - k_1 x + k_{1z} z)} \quad (37a)$$

$$H_x^{(r)} = -\frac{k_{1z}}{\omega \mu_0} E_{0r} e^{j(\omega t - k_1 x + k_{1z} z)} \quad (37b)$$

$$H_z^{(r)} = \frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_{0r} e^{j(\omega t - k_1 x + k_{1z} z)} \quad (37c)$$

媒質 II :

$$E_y^- = E_{0}^- e^{j(\omega t - k_1 x - k_{2z} z)} \quad (38a)$$

$$H_x^- = -\frac{k_{2z}}{\omega \mu_0} E_{0}^- e^{j(\omega t - k_1 x - k_{2z} z)} \quad (38b)$$

$$H_z^- = \frac{k_{1x} + \omega \Omega}{\omega \mu_0 \alpha} E_{0}^- e^{j(\omega t - k_1 x - k_{2z} z)} \quad (38c)$$

$$E_y^+ = E_{0}^+ e^{j(\omega t - k_1 x + k_{2z} z)} \quad (39a)$$

$$H_x^+ = -\frac{k_{2z}}{\omega \mu_0} E_{0}^+ e^{j(\omega t - k_1 x + k_{2z} z)} \quad (39b)$$

$$H_z^+ = \frac{k_{1x} + \omega\Omega}{\omega\mu_0 a} E_0^+ e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{2z}z)} \quad (39c)$$

媒質III：

透過波

$$E_y^{(t)} = E_{0t} e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{3z}z)} \quad (40a)$$

$$H_x^{(t)} = -\frac{k_{3z}}{\omega\mu_0} E_{0t} e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{3z}z)} \quad (40b)$$

$$H_z^{(t)} = \frac{k_{1x}}{\omega\mu_0} E_{0t} e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{3z}z)} \quad (40c)$$

ただし、式(38)～(39)における上部の添字<sup>-</sup>および<sup>+</sup>は、それぞれ運動媒質中を $z$ の負および正の方向に伝搬する波(4・2参照)の電磁界量を表わす。また、伝搬定数 $k_{1x}$ および $k_{1z}$ は入射角 $\theta_i$ を用いてそれぞれつぎのように表わされる。

$$k_{1x} = k_0 n_i \sin \theta_i \quad (41a)$$

$$k_{1z} = -k_0 n_i \cos \theta_i \quad (41b)$$

したがって、 $k_{2z}$ は前節と同様につぎのように求められる。

$$k_{2z} = -k_0 (p - j q) \quad (42)$$

ここで、

$$p = \left[ \frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

$$q = \begin{cases} + \left[ \frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, & (n_i \beta \sin \theta_i \leq 1) \\ - \left[ \frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, & (n_i \beta \sin \theta_i > 1) \end{cases} \quad (44a)$$

$$q = \begin{cases} - \left[ \frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, & (n_i \beta \sin \theta_i > 1) \end{cases} \quad (44b)$$

ただし、

$$P = p^2 - q^2 = \gamma^2 [n_2^2 (1 - n_i \beta \sin \theta_i)^2 - (n_i \sin \theta_i - \beta)^2] \quad (45a)$$

$$Q = 2 p q = (\gamma n_2^2 / m) (1 - n_1 \beta \sin \theta_i) \quad (45b)$$

ここで、 $m = (\omega \varepsilon_2 / \sigma)$ である。さらに、 $k_{3z}$ はつぎのように求められる。

$$k_{3z} = \begin{cases} -k_0 \sqrt{n_3^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i} = -k_0 n_3 \cos \theta_3, & (n_3^2 > n_1^2 \sin^2 \theta_i) \\ j k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_3^2}, & (n_3^2 < n_1^2 \sin^2 \theta_i) \end{cases} \quad (46a)$$

$$j k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_3^2}, \quad (n_3^2 < n_1^2 \sin^2 \theta_i) \quad (46b)$$

さて、入射波が  $E$  波の場合には、静止媒質 I と運動媒質 II、および運動媒質 II と静止媒質 III の境界における電磁界の境界条件は、媒質 I、II および III が共に静止している場合の境界条件と全く同様になり、したがって三者が共に静止している場合の理論<sup>(11)</sup>をそのまま用いて、反射係数  $R$  および透過係数  $T$  はそれぞれつぎのように求められる。まず、 $n_3^2 > n_1^2 \sin^2 \theta_i$ 、すなわち  $k_{3z}$  が式 (46a) で表わされるときには；

$$R = \frac{R_{12} e^{2k_0 q h} + R_{23} e^{-2k_0 q h} + 2 \sqrt{R_{12} R_{23}} \cos [\phi_{23} - \phi_{12} + 2 k_0 p h]}{e^{2k_0 q h} + R_{12} R_{23} e^{-2k_0 q h} + 2 \sqrt{R_{12} R_{23}} \cos [\phi_{12} + \phi_{23} + 2 k_0 p h]} \quad (47)$$

$$T = \frac{T_{12} T_{23}}{e^{2k_0 q h} + R_{12} R_{23} e^{-2k_0 q h} + 2 \sqrt{R_{12} R_{23}} \cos [\phi_{12} + \phi_{23} + 2 k_0 p h]} \quad (48)$$

ただし、

$$R_{12} = \frac{(p - n_1 \cos \theta_i)^2 + q^2}{(p + n_1 \cos \theta_i)^2 + q^2} \quad (49a)$$

$$R_{23} = \frac{(p - n_3 \cos \theta_3)^2 + q^2}{(p + n_3 \cos \theta_3)^2 + q^2} \quad (49b)$$

$$T_{12} = \frac{4 p n_1 \cos \theta_i}{(p + n_1 \cos \theta_i)^2 + q^2} \quad (50a)$$

$$T_{23} = \frac{4(p^2 + q^2) n_3 \cos \theta_3}{p[(p + n_3 \cos \theta_3)^2 + q^2]} \quad (50b)$$

および

$$\tan \phi_{12} = \frac{2q n_1 \cos \theta_1}{p^2 + q^2 - n_1^2 \cos^2 \theta_1} \quad (51a)$$

$$\tan \phi_{23} = \frac{2q n_3 \cos \theta_3}{p^2 + q^2 - n_3^2 \cos^2 \theta_3} \quad (51b)$$

つぎに、 $n_3^2 < n_1^2 \sin^2 \theta_1$  のとき、すなわち  $k_{3z}$  が式(46b)で表わされるときには、反射係数  $R$  は式(49a)、(51a)および  $R_{23}$ 、 $\phi_{23}$  に関するつぎの表示式

$$R_{23} = \frac{p^2 + (q - \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2})^2}{p^2 + (q + \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2})^2} \quad (52)$$

$$\tan \phi_{23} = \frac{-2p \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2}}{p^2 + q^2 - (n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_3^2)} \quad (53)$$

を式(47)に代入することによって求められる。なお、透過係数  $T$  は  $k_{3z}$  が純虚数であるため 0、すなわち

$$T = 0, \quad (n_3^2 < n_1^2 \sin^2 \theta_1) \quad (54)$$

となる。したがって、このとき媒質Ⅲへのエネルギー流はない。

#### 4・2 エネルギー関係式

ここでは、媒質Ⅱ、すなわち運動している導電性誘電体媒質中を伝搬する波のエネルギー関係式について検討する。

まず、式(9a)で定義される Poynting ベクトルは 4・1 の結果を用いてつぎのように求められる。

$$\langle S_z^- \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} p |E_0^-|^2 e^{2k_0 q z} \quad (55a)$$

$$\begin{aligned} \langle S_x^- \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \gamma^2 [(n_1 \sin \theta_1 - \beta) + n_2^2 \beta (1 - n_1 \beta \sin \theta_1)] \\ &\cdot |E_o^-|^2 e^{2k_0 qz} \end{aligned} \quad (55b)$$

および

$$\langle S_z^+ \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \beta |E_o^+|^2 e^{-2k_0 qz} \quad (56a)$$

$$\begin{aligned} \langle S_x^+ \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \gamma^2 [(n_1 \sin \theta_1 - \beta) + n_2^2 \beta (1 - n_1 \beta \sin \theta_1)] \\ &\cdot |E_o^+|^2 e^{-2k_0 qz} \end{aligned} \quad (56b)$$

式(55a) および (56a) から,  $\langle S_z^- \rangle$  および  $\langle S_z^+ \rangle$  はそれぞれ  $z$  の負および正の方向に伝搬するエネルギー流を表わすことがわかる。つぎに, 式(9b) ~ d)で定義される  $\langle W \rangle$ ,  $\langle A \rangle$  および  $\langle Q \rangle$  なる量は 4・1 の結果を用いてそれぞれつきのように求められる。

$$\langle W^\pm \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma (1 - n_1 \beta \sin \theta_1) |E_o^\pm|^2 e^{\mp 2k_0 qz} \quad (57a)$$

$$\langle A^\pm \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma (1 - n_1 \beta \sin \theta_1) n_1 \beta \sin \theta_1 |E_o^\pm|^2 e^{\mp 2k_0 qz} \quad (58a)$$

(58a)

$$\langle Q^\pm \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma (1 - n_1 \beta \sin \theta_1)^2 |E_o^\pm|^2 e^{\mp 2k_0 qz} \quad (59a)$$

あるいは

$$\langle W^\pm \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left(1 - \frac{v}{v_p}\right) |\mathbf{E}^\pm|^2 \quad (57b)$$

$$\langle A^\pm \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left(1 - \frac{v}{v_p}\right) \left(\frac{v}{v_p}\right) |\mathbf{E}^\pm|^2 \quad (58b)$$

$$\langle Q^\pm \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left(1 - \frac{v}{v_p}\right)^2 |\mathbf{E}^\pm|^2 \quad (59b)$$

ただし、 $v_p$  は

$$v_p = \frac{\omega}{k_{ix}} = \frac{\omega}{k_0 n_i \sin \theta_i} \quad (60)$$

で定義される量であり、媒質Ⅱ中の波の位相速度の  $x$  方向成分を表わす。上式の結果から、半無限の導電性運動媒質の場合と同様に  $v > v_p$  のときには  $\langle \mathbf{W}^\pm \rangle$  が負となり波動増幅現象が起こることがわかる。なお、このとき式 (55a) および (55b) からわかるように

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{s}^- \rangle = \frac{\partial \langle S_z^- \rangle}{\partial z} > 0 \quad (61a)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{s}^+ \rangle = \frac{\partial \langle S_z^+ \rangle}{\partial z} > 0 \quad (61b)$$

となり、したがって添字  $-$  および  $+$  をもつ波はそれぞれ  $z$  の負および正の方向に増幅されることがわかる。

## 5. 数値計算例および検討

数値計算例については、当日会場において発表の予定である。

## 6. 結 言

静止している完全誘電体媒質から境界面に平行に運動している導電性誘電体媒質に平面電磁波 ( $E$  波) が入射するとき、適当な条件の下で導電性運動媒質中に増幅波が励振されることを示し、この現象を Minkowski の電磁エネルギー・運動量テンソルから導かれたエネルギー関係式をもとにして詳しく考察した。

## 謝 辞

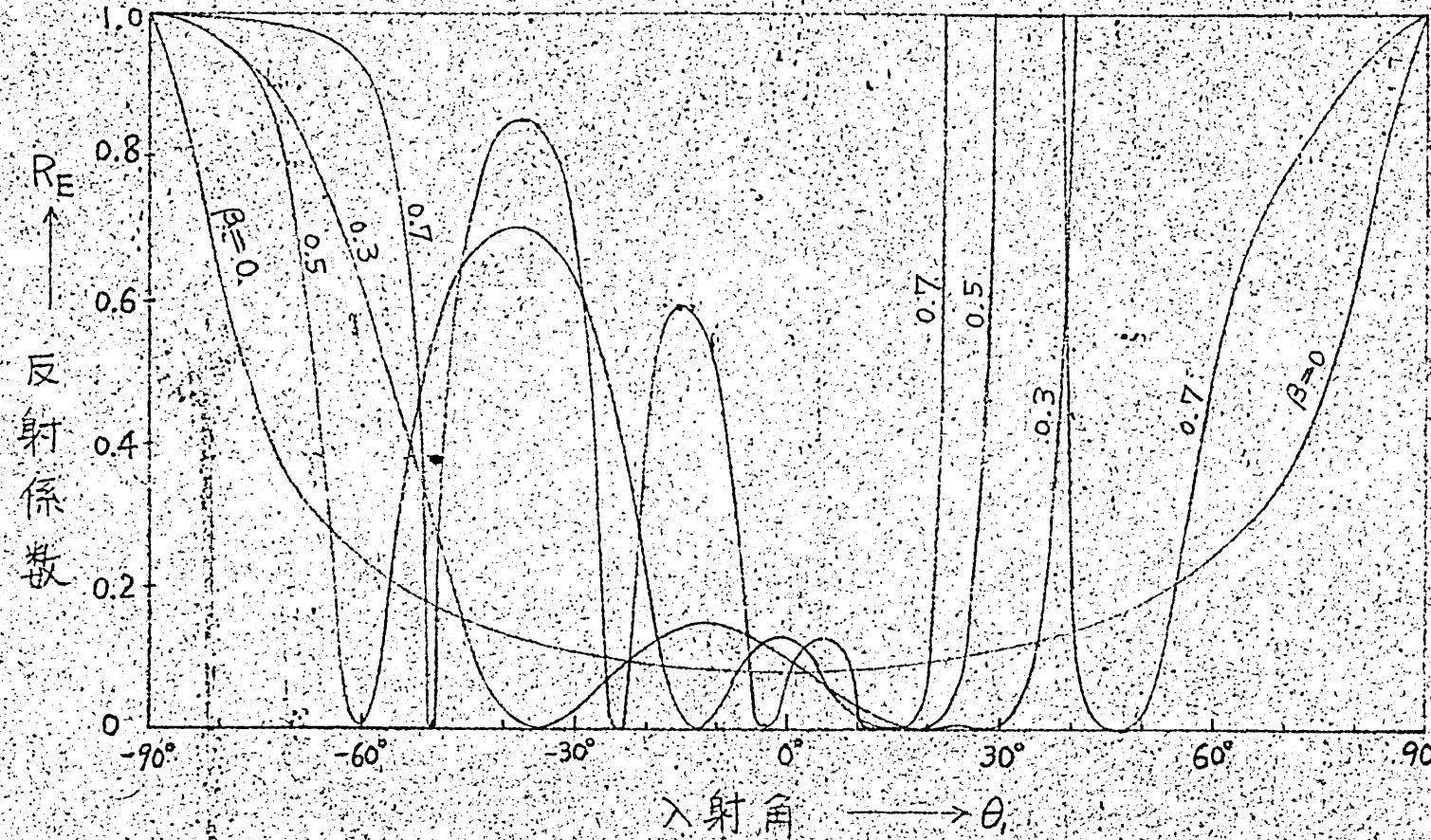
日頃ご指導ご鞭撻をいただいている本学工学部板倉清保教授、同熊谷信昭助教授に深謝する。また、常々ご討論いただく板倉研究室の諸氏に深謝する。

## 文 献

- (1) 藤岡 弘、熊谷信昭：“導電性運動媒質中の電磁界と波動増幅現象”，輻研資(1968-07).
- (2) 藤岡 弘、熊谷信昭：“導電性運動媒質中の平面波と波動増幅現象”昭43信学全大, No S6-2 (昭43-10)
- (3) 藤岡 弘：“導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析”，信学会アンテナ・伝播研資A・P 68-54 (1969-01).
- (4) 藤岡 弘、熊谷信昭：“導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析”，信学論(B), 52-B, pp. 429~433 (昭44-08).
- (5) 藤岡 弘：“相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界面における全反射現象”，昭44連大, No. 1351 (昭44-03).
- (6) 藤岡 弘、小川英一：“相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界面における平面電磁波の反射と透過”，輻研資(1969-04).
- (7) 藤岡 弘、中川紀美雄、熊谷信昭：“導電性運動媒質を含む導波管の厳密な取扱い”，信学論(B), 52-B, pp. 130~135 (昭44-03).
- (8) 藤岡 弘：“導電性運動媒質中の波動増幅現象と ac MHD generator”電気学会電磁界理論専門委員会資料 (1969-09).
- (9) C.Möller : The Theory of Relativity (Oxford University

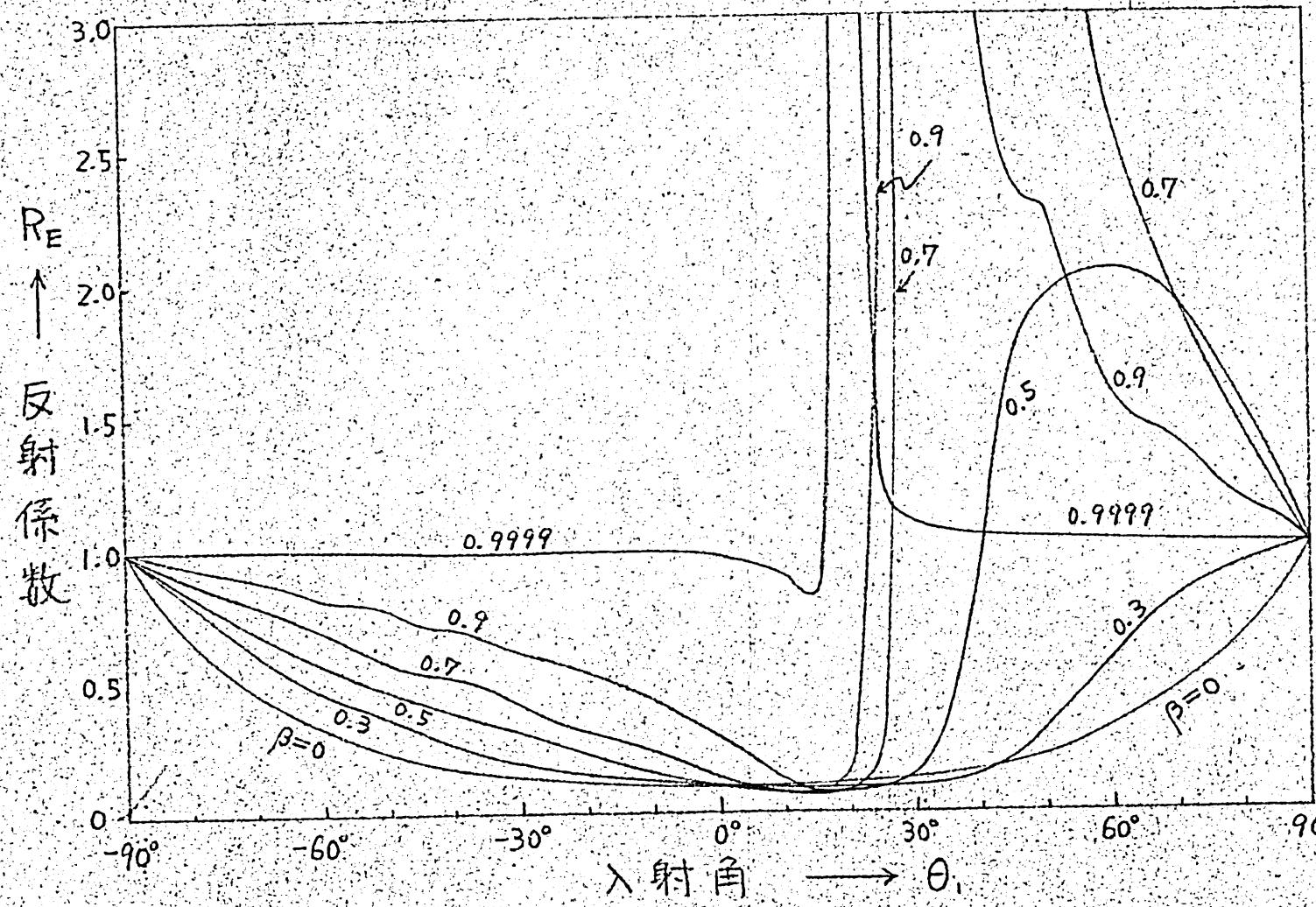
Press, London, 1952), Chap. 7.

- (10) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: “導電性運動媒質の境界面における電磁波の境界条件とエネルギー関係式”, 信学論(B)(研究速報), 52-B, pp. 103~104 (昭44-02).
- (11) 藤岡 弘, 小川英一: “導電性媒質の境界面における平面電磁波の反射と透過”, 輔研資(1969-11).



$$(n_1=3, n_2=4, n_3=3, \sigma=0, h/\lambda=0.5)$$

図4 导電性誘電体 slab による反射



$$(n_1=3, n_2=4, n_3=3, m=1.0, \frac{h}{\lambda} = 0.5)$$

図5. 導電性誘電体 slab による反射

輻射科学研究会資料

ル ピ 一 レ 一 ザ 加 工 機

宮 沢 生 行

(三菱電機 中央研究所)

1969年11月28日

(於 三菱電機株式会社 中央研究所)

## ルビーレーザ加工機

### 1. まえがき

レーザを加工、溶接に応用する研究が開始されてから約8年になり、ようやく実用化段階に入ろうとしている。レーザ加工は微小加工ができること、真空などの特殊な環境を必要としないこと、加工材料の制限が少ないとこと、無接触であること、周囲への熱的影響が少ないとことなど我々のすぐれた特長をもっているため、金属、半導体、セラミックの精密加工、ICなど微小回路部品の加工、超硬合金、タンクステン、フェライトなど特殊材料の加工など多くの用途が期待される。また加工機用のレーザとしては、ルビー、ガラス、YAG、炭酸ガス、時にはアルゴン、He-Neなどのレーザが使用され、通常発振のパルス、Q-スイッチした高くり返しパルス、連続発振光と、極めてバラエティに富んでいて、今後さらに新しい広範な用途が開発されるものと考えられる。

ここではルビーレーザを用いた加工機の特性および数種の金属について行なった加工実験の結果を報告する。

### 2. 装置

加工機の構成は図1に示すように、加工機ヘッド、電源、冷却系、架台試料台などから成り、加工機ヘッドには、ルビーレーザ、集光レンズおよび位置決めと焦点合わせ用の顕微鏡が組み込まれている。

#### 特性概略

ルビーロッド寸法	38" × 3"
ランプ	E G & G 製 FX 42 C - 3
最大出力	3.5 丁
最大入力	600 丁
発振くり返し	最大 1 P.P.S
冷却	純水循環水冷
穴の直径	0.05 - 0.4 mm
加工できる板厚	約 4 mm
集光レンズ鏡点距離	25 mm または 50 mm
位置決め精度	± 30 μ

焦点合わせ精度  $\pm 50 \mu$

なお、この加工機は加工に適しているが、細線や薄板の溶接にも使用できる。

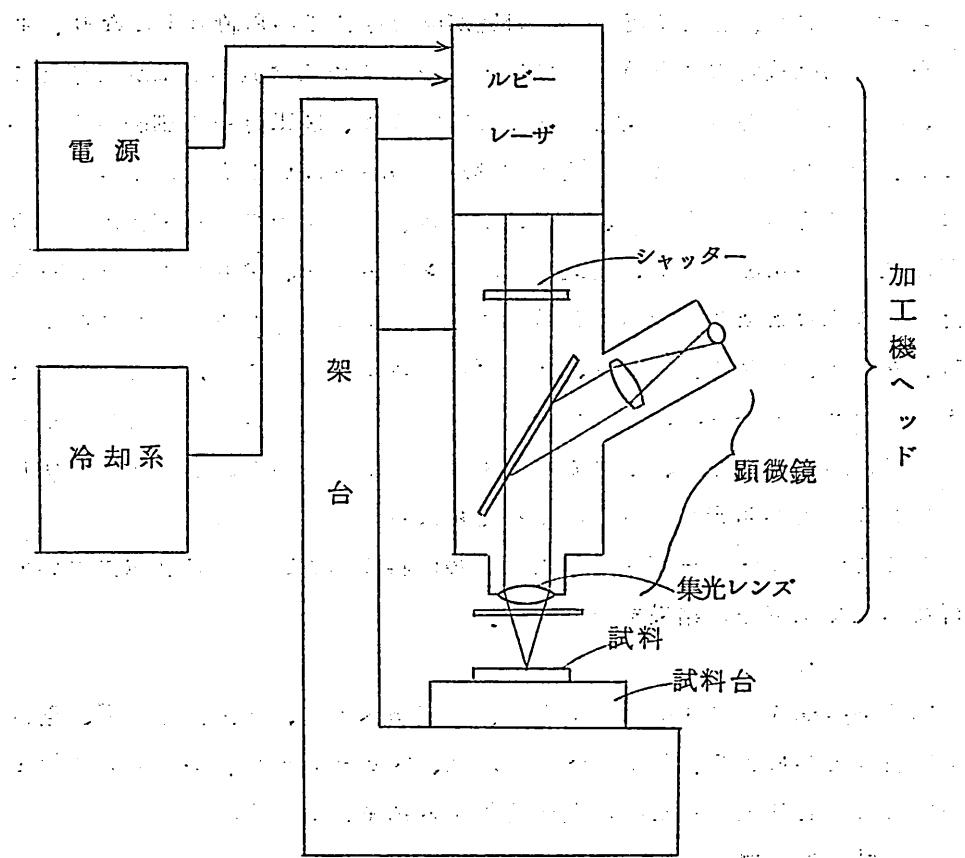


図 1 ルビーレーザ加工機の構成

### 3. ルビーレーザの特性

この加工機に使用したルビーレーザの出力エネルギーを図 2 に示す。共振器は Fabry-Perot、ミラーの反射率は公称 100% と 50% である。Overall Efficiency は最大 0.6%、Slope Efficiency は最大 1.0% である。図 3 は出力エネルギーとビームの拡り角 (full angle) の関係であり、Far Field Pattern によって測定した。軸外モードの除去はとくに行なっていない。このルビーレーザは特に穴あけなどの加工

用に作られており、パルス継続時間は最大で約 0.55 msec のスパイクを無視した平均出力パワーは最大約 6.5 KW であった。またこのレーザは発振くり返しが最大 1 ppm であるが、この限界をきめているのは、フラッシュランプの電極温度であり、ルビーロッドは充分冷却されている。パルスごとの出力変動は ±5 % 以下であった。

#### 4. 加工特性

##### 4-1 穴の径

レーザ加工は本質的には熱加工であるが、レーザ光が試料面に入射してから穴あけが完了するまでの過程は極めて複雑であり穴の径だけをとってみても今だに正確な予測ができないのが実情である。

図 4 は 4 種の金属についての穴の径の測定値で、スポット径の計算値と比較した。スポット径の計算値としては通常レンズの焦点距離を  $f$ 、ビームの拡り角

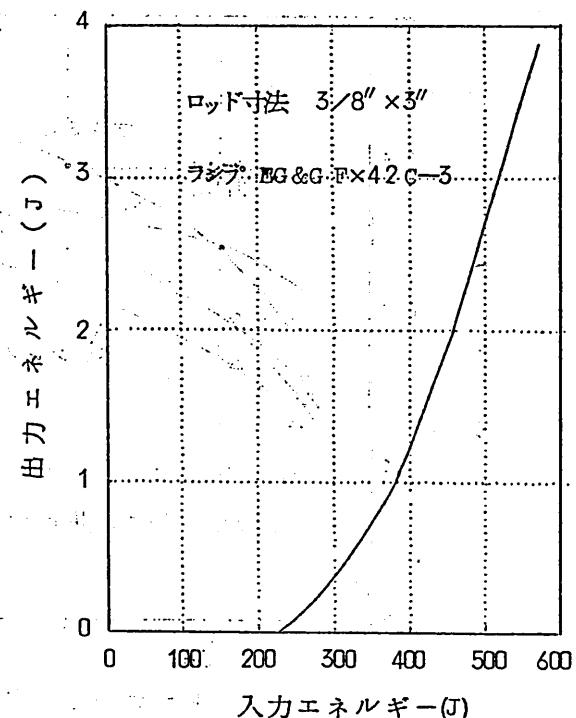


図 2 ルビーレーザの出力特性

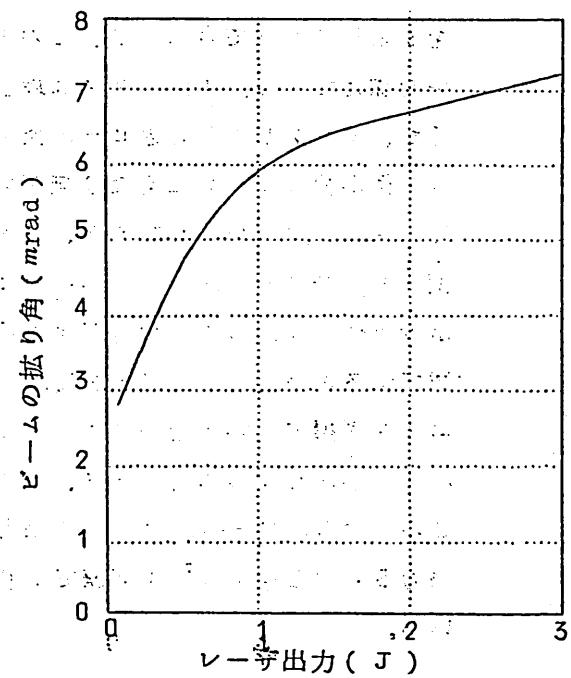


図 3 出力ビームの拡り角

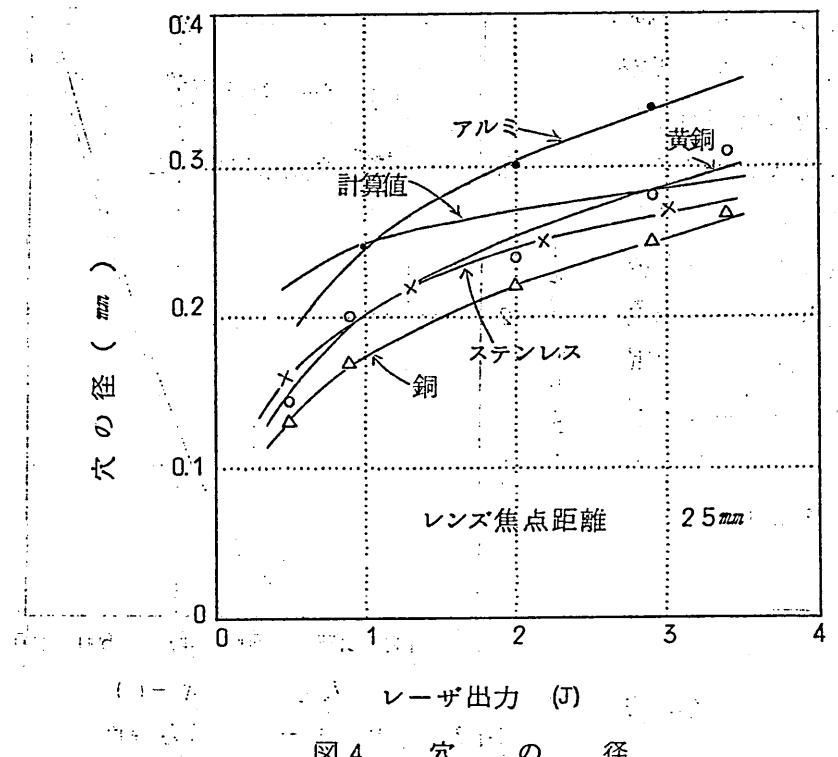


図4 穴の径

を  $\theta$  として  $f\theta$  で表わすが、この場合は集光レンズの球面収差の効果を加えてある。集光レンズは最小収差の曲面をもつ単レンズであるが、 $f = 25\text{ mm}$  のときビーム径  $10\text{ mm}$  の平行光に対する最小スポット径が約  $0.12\text{ mm}$  にもなり無視できなくなる。焦点距離を長くすると球面収差は小さくなるが、 $f\theta$  が大きくなるので、単レンズを使用する場合にはある与えられたビームの拡り角に対して最小のスポット径を与える焦点距離がきまる。ただしレーザ出力の小さい領域ではスポット内のパワー密度が小さいので周囲への熱伝導によるエネルギー損失が影響を持つようになって計算値より、あけられる穴の径が小さくなる傾向があり、それは図4でも現われている。なおこの場合のパワー密度はレーザ出力  $0.5\text{ J}$  のとき  $4 \times 10^6\text{ W/cm}^2$  出力  $3\text{ J}$  のとき  $10^7\text{ W/cm}^2$  であり、その間は直線的に増加している。

#### 4-2 穴あけに要するエネルギー

ある厚さの試料に1回のレーザ Shot で穴を貫通させるのに必要なレーザ出力を調べ、その結果を図5にまとめた。この図からわかるように試料の板厚が増大すると穴あけに必要なエネルギーが急激に増大する。このことは1回で貫通しない試料についてくり返し入射する場合でも同様で、穴が貫通するまでに要する Shot 回数は板厚の増大とともに急激に増えるが、これらの傾向は材料によって大きく異なり、またレンズの焦点距離を変えたときの特性も

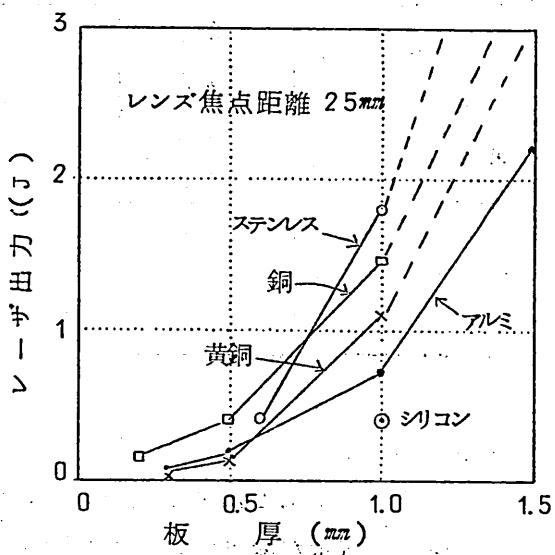


図5 穴あけに要するエネルギー

材料によって異なる。1回当たりのレーザ出力2.6 Jで穴の貫通に必要なくり返し入射の回数を調べた結果が表1であるが、結局現在のところ経験のない条件のもとでこれらの数値を予測することは困難である。

なお詳細は省くが、パルス継続時間変えることによって、材料によってはより深い穴があけられることもあり、各材料についての最適条件があるものと考えられる。

表1 穴あけに必要な入射回数

材 料	板 厚 mm	貫通に要した入射回数	
		f = 25 mm	f = 50 mm
アルミ	3.0	7	20回でも不可
ステンレス	2.0	3	5
	3.0	16	26
黄 銅	3.2	7	8
	4.0	10	15
アルミナ	0.7	2	3
	1.0	3	4
	1.5	5	6

#### 4-3 加工減量

穴あけ加工とは被加工物の一部を除去することであり、したがって試料の重量が減少する。この重量差を仮に加工減量と呼ぶことにし、精密天秤を使って測定した加工減量を図6に示す。

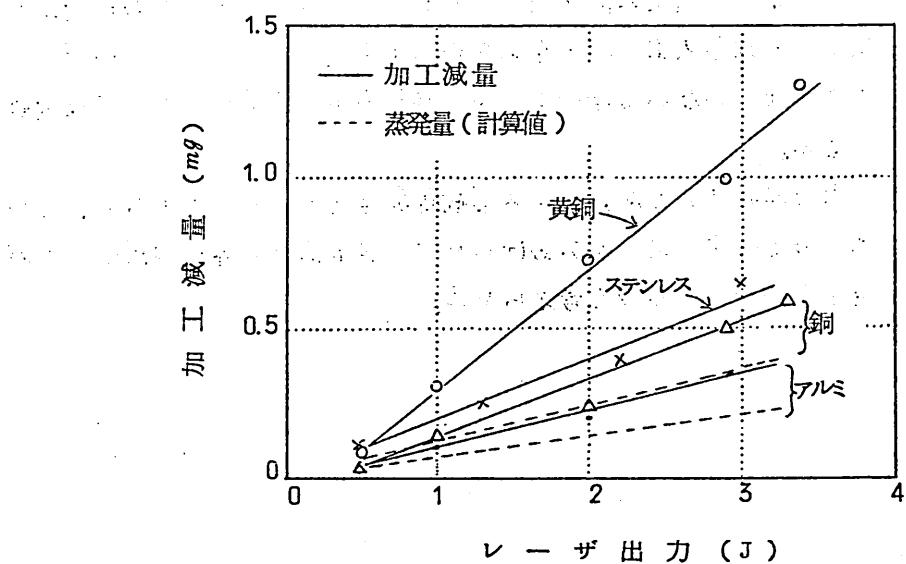


図6 単発入射の場合の加工減量

点線は、物質がすべて蒸発によって取除かれたと仮定した場合に得られる筈の加工減量を計算した結果である。実測値が点線より大きいということは、穴あけの過程で試料物質が蒸発して気体として取除かれるだけでなく液体の状態のまま飛出したものが含まれることを意味する。つまりレーザ加工は試料を加熱して単に蒸発させるだけの過程でなく、もっと複雑な過程が含まれていることがわかる。使用した材料の熱常数を使って加工減量の液体成分と気体成分が計算でき、その比(液体重量)/(気体重量)は Liquid to Vapor Ratio と呼ばれるが、これを図 7 に示す。他の材料については物理常数の一部が入手できず計算できなかった。液体成分が多いということはより小さなレーザ出力で加工ができるることを意味するから本質的に加工効率が高いことを示している。図 7 から銅よりアルミの方が効率が高いこと、レーザ出力の増大とともに(少くもこの領域では)加工効率が上昇することがわかる。

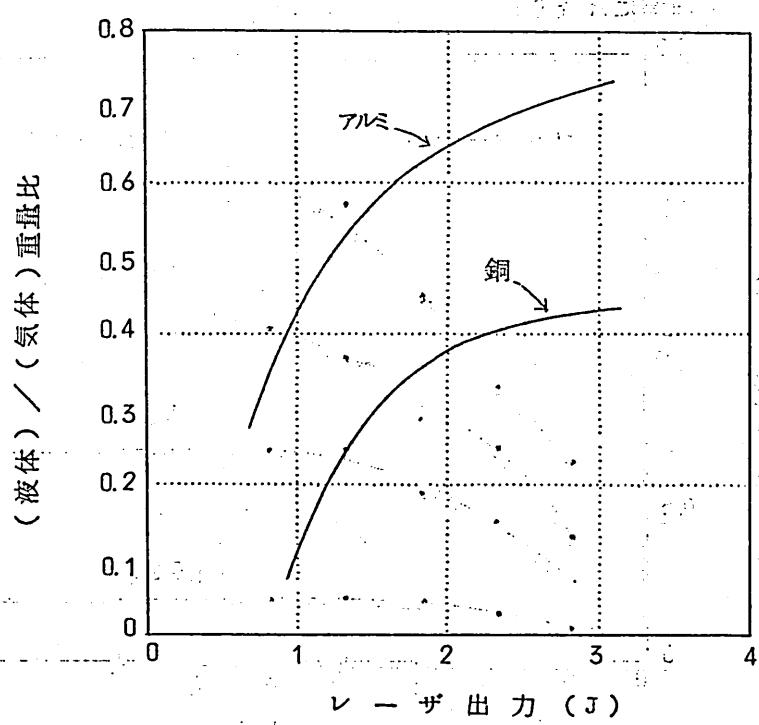


図 7 加工減量の液体／気体重量比

レーザ加工が複雑な過程を含むことがこの例からもわかるが、逆に Liquid to Vapor Ratio から加工過程の解析の一つの手がかりが得られるものと考えられる。

#### 4-4 加工減量の飽和

試料の板厚増大とともに穴あけに要するエネルギーが急激に増大することはすでに述べたが、これを加工減量によって調べた。充分な厚さ（穴が貫通しない）のステンレスを用いて、くり返し入射を行ない、その加工減量を追跡した結果が図 8 である。パラメータは 1 回当りの入射エネルギーで、同じデータを、全入射エネルギーに関して書き直したもののが図 9 である。これらの図からわかるように 1 回当りの入射エネルギーが決まれば加工減量の限界が決まり、したがって穴の深さの最大値がきまる。また 1 回当りの入射エネルギーが小さいほどこの飽和する値も小さくなるから、1 パルス当りの出力の小さいレーザはくり返し入射回数を増しても大出力のレーザと同等にはなり得ないことがわかる。

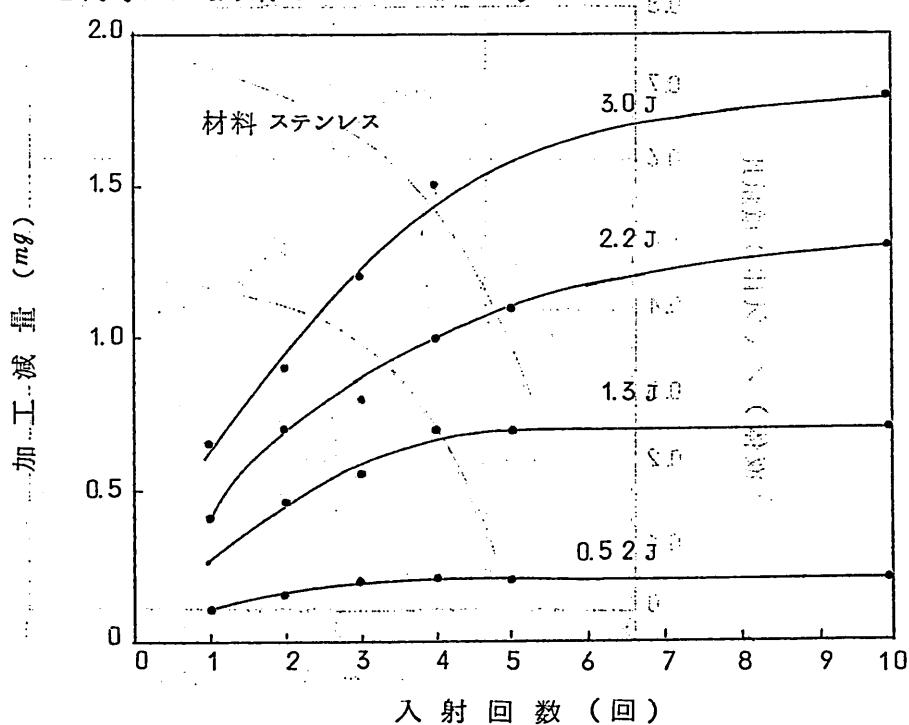


図 8 くり返し入射の場合の加工減量

また穴の深さおよび(穴の深さ)/(穴の径)に関しても同様の傾向が確認された。

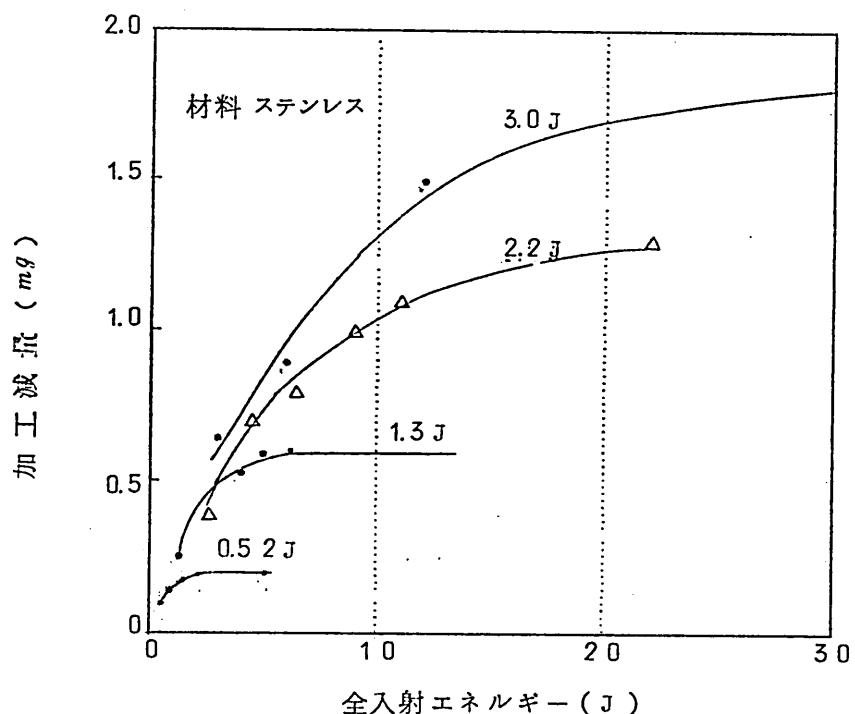


図9 くり返し入射の場合の加工減量

## 5. あとがき

レーザ加工機の実用化のためには、加工特性の解析をはじめまだ多くの未解決の問題があり、更に実験と検討が必要であるが、同時にレーザの寿命、効率、安定性などについての改良および用途開発の努力も不可欠である。

輻射科学研究会資料

CO<sub>2</sub>レーザの加工への応用

樋口 隆一

谷口 一郎

(三菱電機 中央研究所)

1969年11月28日

(於 三菱電機株式会社 中央研究所)

# CO<sub>2</sub> レーザの加工への応用

## 1. まえがき

CO<sub>2</sub> レーザの開発が進むにつれて、その特長である大出力の波長10.6 μmの赤外線を利用する熱加工への応用が開けた。CO<sub>2</sub> レーザはルビーレーザ等の固体レーザと比べると、連続発振であること、波長が10.6 μmであることが特長である。

CO<sub>2</sub> レーザをカッター、スリッターとして使用すれば、刃先の磨耗のおそれがなく、また従来の方法よりも高速に加工ができる。

レーザによる厚板の穴あけ、切断は、光ビームの性質上、困難とされているが、ライトパイプ効果により、意外に深い穴があく。その性質を知るために、おもにアクリル板を使って穴あけの実験を行なった。また、数種の試料について切断試験の結果を述べる。

## 2. CO<sub>2</sub> レーザの性質

使用したCO<sub>2</sub> レーザは、全長3m、内部鏡形であり、直流放電により励起する。CO<sub>2</sub> , N<sub>2</sub>, He の混合気体をポンベより管内に送るいわゆる Flow Type である。

出力は最大100W、効率は10%である。

ビーム径はレーザ管直後で9.0mmである。

ビームの広がりは、半頂角  $2.4 \times 10^{-3}$  rad である。

## 3. レンズの性能

レンズの素材はGeである。Geは屈折率が大きいため(波長10.6 μmでn=4.0)、反射損失が大きいので、両面に反射防止膜をつけた。透過率は99%である。

焦点距離f~30mm、およびf~100mmの2種のレンズを製作して使用した。形状はメニスカズ型であり、球面収差が最小になる曲率を選んでいる。

このレンズによりレーザビームを集束させ、そのスポット径を測定した。

その方法は、レンズの焦点附近に幅  $100 \mu\text{m}$  のスリットをおき、横方向に微動させて、スリットを通ったレーザ出力を測定し、強度分布を求めるものである。

$f = 3.0 \text{ mm}$  のレンズで、レンズからの距離  $L = 24.0 \text{ mm}$  のとき最小のスポットを得た。その形状を図 1 に示す。また  $f = 100 \text{ mm}$  のレンズで、 $L = 10.5 \text{ mm}$  のときスポットが最小になった。

最小スポット径は、球面収差による最小錯乱円直径より大きくビームのひろがりによるスポット径とほぼ一致している。

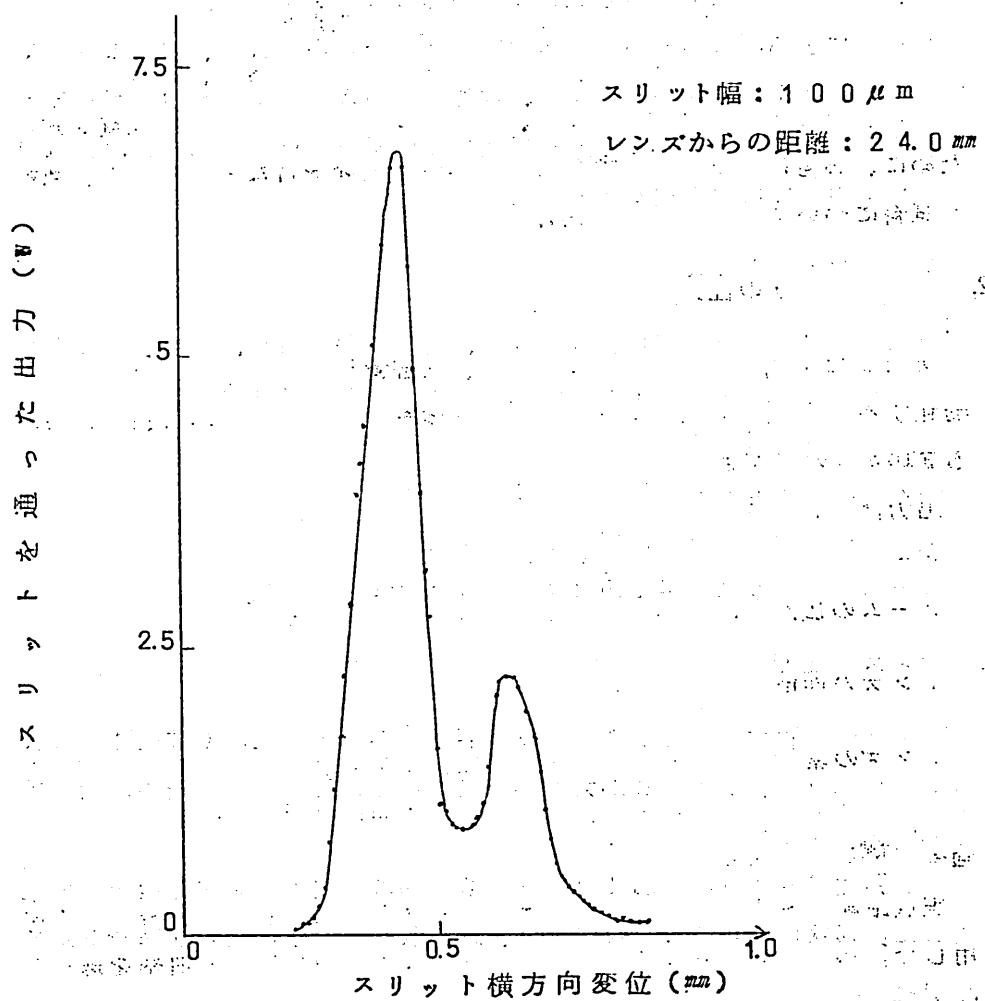


図 1 スポットの強度分布

#### 4. ライトパイプ効果

アクリル酸樹脂は可視光に対しては透明であるが、 $1\text{--}0.6 \mu\text{m}$ では不透明である。そのために穴の形状を観察しやすいために、アクリル板にレーザを照射して穴の深さ、穴の径、形状、レンズからの最適の距離を求めた。

レーザ出力、照射時間を一定にして、 $f=30\text{ mm}$ のレンズと試料表面の距離 $L$ を変えたとき、穴の深さおよび穴の径は図2のように変わる。

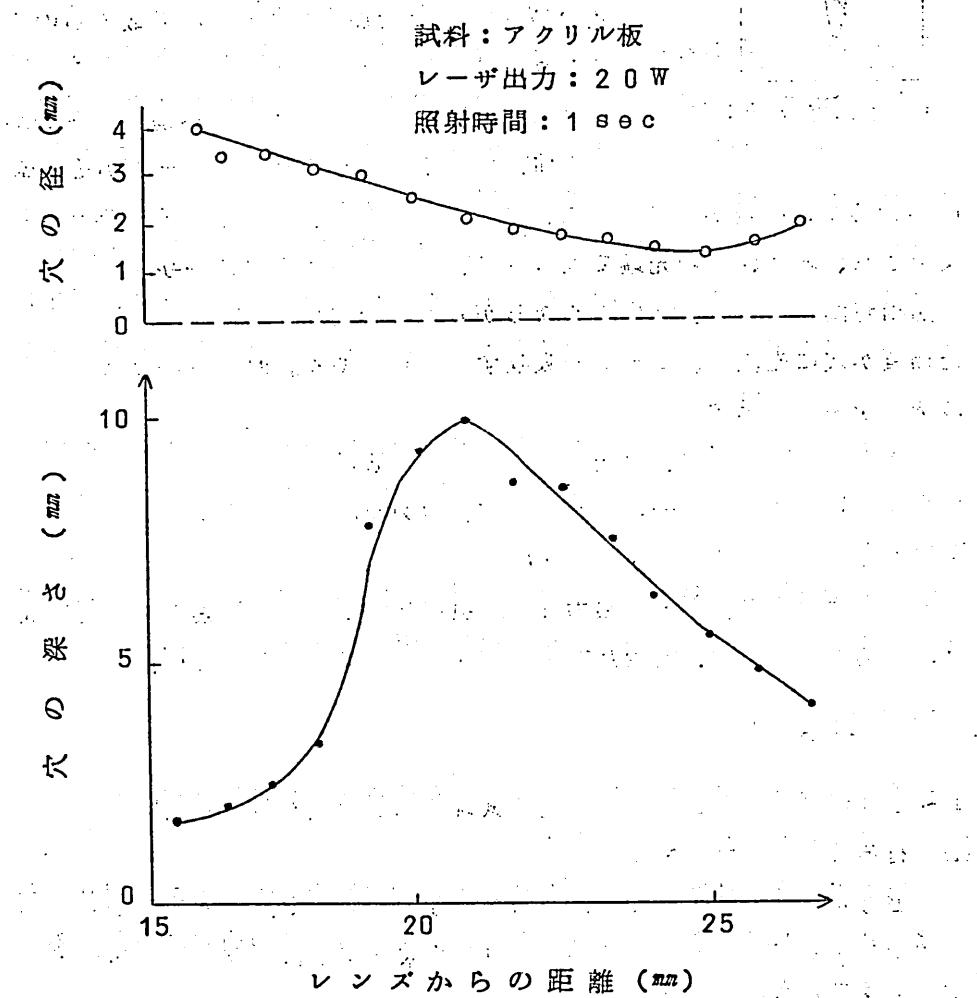
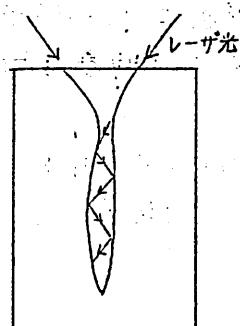


図2 レンズからの距離と穴の深さおよび穴の径との関係

図から  $L = 2.15 \text{ mm}$  のとき穴の深さが最大である。この距離を最適加工距離とよぶことにする。最適加工距離は焦点距離より小さい。

最適加工距離付近の穴の形状は下図のようである。



ライトパイプ効果

焦点の位置でくびれを生ずるが、それから奥は、ほぼ一様な太さで進み、径は  $400 \mu\text{m}$  程度である。

これはつぎのように説明できる。焦点の位置までは、ビームの形状にしたがって円すい状の穴があく。焦点を通過するとビームは発散するので、中心から外れるビームの Power Density が小さくなり、中心付近だけが奥へ進む。中心が少し前進すると、中心を外れるビームがその壁

に当たるが、照角が小さいので、反射率が大きく、反射される。繰り返し反射され、結局、穴の先端で吸収され、中心部の穴あけに寄与する。

照射時間とともに、穴は深くなるが飽和の傾向がある。これは、蒸発した物質が穴に充満し、ビームを吸収するからである。照射時間と穴の深さの関係を図 3 に示す。

ライトパイプ効果は、照角が小さいほど顕著になる。 $f \sim 100 \text{ mm}$  のレンズを使ったとき、同一のレーザ出力、照射時間で  $f \sim 30 \text{ mm}$  のレンズを使ったときより、40%深い穴があいた。

最適加工距離は、レーザ出力および照射時間が増すと、短くなる。また、石英に対しては、最適加工距離は焦点距離とほぼひとしい。

## 5. 加工の実例

$f \sim 30 \text{ mm}$  のレンズを使って数種の試料の切断実験を行なった。

### (1) 石英管 ( $18 \text{ mm} \phi \times 1 \text{ mm} t$ )

出力  $4.0 \text{ W}$ 、速度  $3.5 \text{ mm/sec}$  ( $1.6 \text{ sec}$ ) で切断できた。切りしろは  $100 \mu\text{m}$  である。  $\text{SiO}_2$  の白い粉末が切り口の周囲に付着する。

### (2) ナイロン布地 ( $0.1 \text{ mm} t$ )

出力  $2.0 \text{ W}$ 、速度  $1,400 \text{ mm/sec}$  で切断できた。切りしろは  $100$

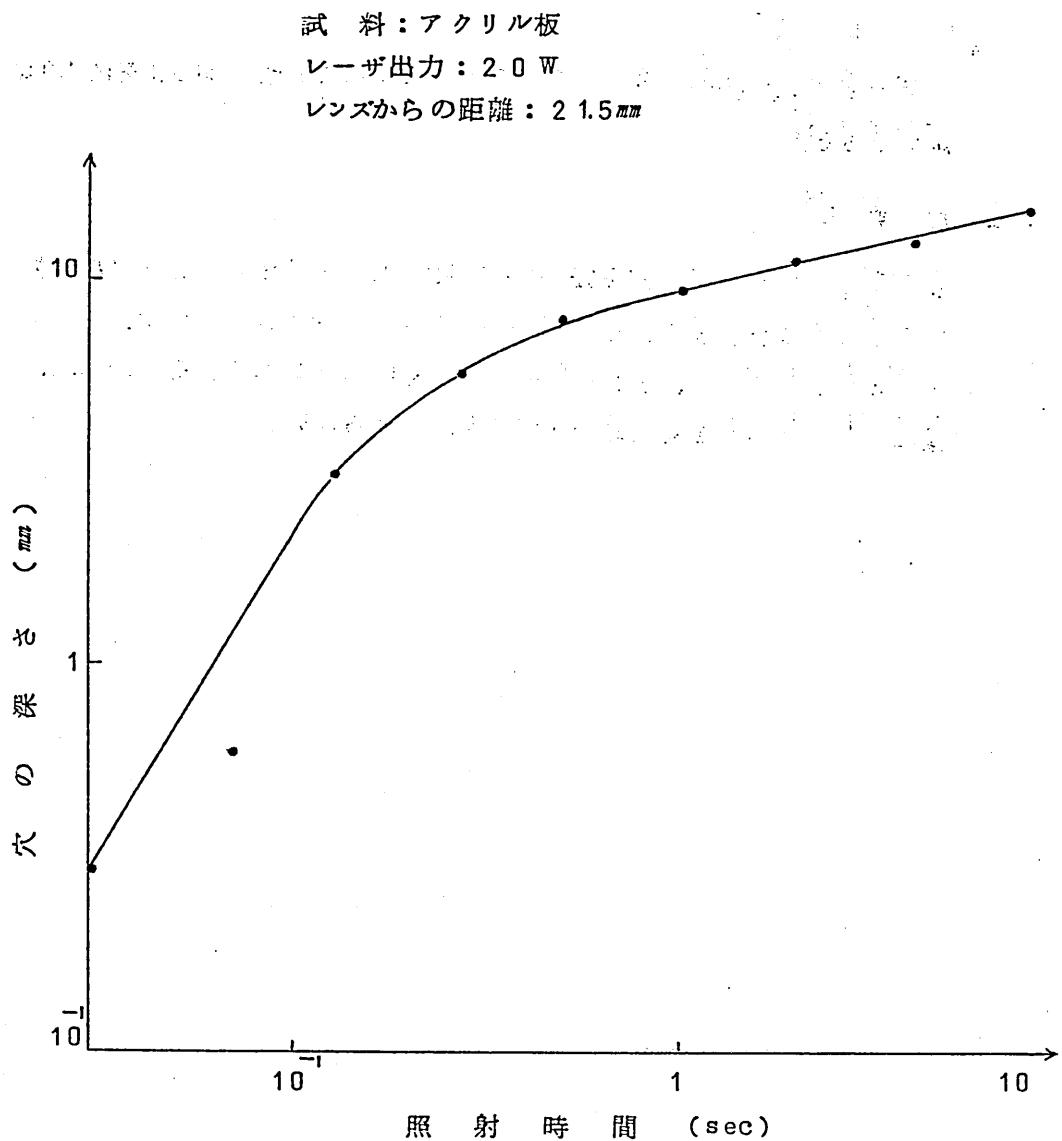


図3 照射時間と穴の深さの関係

μmである。切り口が固まってぼつれを生じない。

(3) 木綿布地 (0.1 mm t)

出力 2.0 W、速度  $320 \text{ mm/sec}$  で切断できた。切りしろは 100 μm である。

#### (4) 新聞紙

出力 50 W、速度 1,230 mm/sec で切断できた。切りしろは 100  $\mu$ m である。

#### 6. むすび

レーザ加工のときは、Power Density を大きくすることが必要である。スポット径を小さくして Power Density を大きくすれば、ライトパイプ効果からすれば、むしろ穴があきにくいことがある。そのために、対象に適した光学系を効果的に用いなければならない。

輻射科学研究会資料

# 微小振動子法による相対電界の測定

松尾 優 弓場芳治 山根国義

(京都工芸繊維大学 工芸学部)

1970年1月30日

## 第1章 まえがき

近年，マイクロ波大開口アンテナについて放射近接電磁界の解析から，そのアンテナの遠方界における諸特性を推定したり，開口アンテナの最適設計化を進める問題が追求されている。またビーム伝送線路等のマイクロ波準光学立体回路，あるいはマイクロ波無給電中継の研究においても，アンテナの放射近接電界分布の解析が非常に重要な要素となる。これらは厳密な理論解析が必要であるが，同時に実験による確証をうるための精密測定が要求される。

従来行なわれてきたマイクロ波開口アンテナ放射電界の測定法には，大別して probe 法<sup>1)</sup>と scattering 法<sup>2)</sup>とがある。probe 法は開口寸法が小さく，しかも高感度 probe を実現することが困難で，近接界の測定には不向きである。しかも位相の測定が極めて難しい等欠点が多い。scattering 法とは被測定電界中に極く小さな反射体を置き，その散乱波を受信して電界に関する情報を検出する，一種のレーダ法である。この方法によれば，前述の probe 法がもっていた欠点はすべて解消されるが，新たに受信々号波に背景雑反射波が混入して，検出値に影響を及ぼすという問題を生じる。この点を解決すべく開発されたのが modulated scattering 法で，これには反射体として半導体ダイオードを用い，交流バイアスを加えたときに生じる導電性の変化を利用し散乱波を変調する diode scattering 法<sup>3,5)</sup>と，金属ダイポールを回転させたとき，これが偏波の方向と一致，不一致を繰返すことを利用して散乱波を変調する spinning dipole 法<sup>4)</sup>とが発表されている。いずれも反射体の後方散乱断面積の変化を利用して，反射体による散乱波だけを振巾変調し，背景雑反射波と区別する方法である。従って modulated scattering 法は電波暗室など

の特別な設備を要せず、反射の多い室内でも測定が可能という特長をもつている。

本報告で提案する微小振動子法は、極く小さな反射体を波源に向って僅かな偏位で正弦波振動（原理的には複雑であっても周期振動ならよい）させたとき、この反射体からの散乱波が通路長の時間的な変化を受け位相変調されることを利用して、背景雜反射波を含んだ受信波中から信号波を分離検出することを根本原理としている。受信波の処理や測定系に新しい考え方を提案するが、基本的には modulated scattering 法の一種と考えられ、雜反射波を分離できる特長はそのままもっている。

以下に、測定原理および測定方法について述べ、測定原理と精度を確かめるための測定例を示す。

## 第2章 測定原理

### 2-1 振動子による変調と受信波

一般にマイクロ波電界中の任意の一点に波長に較べて小さな寸法の反射体を置いたとき、反射体から散乱する後方散乱波の受信電圧振巾  $V_s$  はその点の電界強度  $E_x$  の二乗に比例し、さらに送信波を基準とした受信信号電圧位相  $\theta_s$  は電界位相  $\theta_x$  の 2 倍に比例する。<sup>3,4)</sup>

$$V_s = K_1 E_x^2 \quad , \quad \theta_s = 2\theta_x + \theta_d \quad (1)$$

ここで  $K_1$  は比例定数、 $\theta_d$  は反射器および送受信機内における定常的な位相のずれである。

従って  $K_1$  が一定という条件の下で電界中の任意の各点について散乱波受信電圧の振巾と位相を測定すれば、それらの相対電界強度、相対電界位

相を求めることができる。しかし一般に受信波中には背景雑反射波が含まれており、これが正しい散乱波受信電圧の測定を困難にしている。

そこでこの背景雑反射波の影響を除くために、反射波を位相変調することを考える。

いま、上で考えたような微小反射体をその電界中で供試アンテナに向って  $\delta = \delta_m \sin pt$  ( $\delta_m$  : 最大振巾,  $p$  : 振動角周波数) という正弦波振動させるものとすると、その反射体(以下振動子と言う)による後方散乱波成分だけが通路長の時間的变化を受けて位相変調され、他の雑反射波は無変調のままで受信される。そしてその合成波としての受信波  $v_s$  は次式のように表わされる。

$$v_s = V_s \cos(\omega t + A\theta \sin pt + \theta_s) + V_n \cos(\omega t + \theta_n) \quad (2)$$

ここに

$$A\theta = 2k \delta_m \quad (k = 2\pi/\lambda : \text{波長定数}) \quad (3)$$

$V_n$  は背景雑反射波の電圧振巾、 $\theta_n$  は背景雑反射波の送信波を基準とした位相、 $\omega$  は送信波角周波数である。第1項が振動子による信号成分、第2項が背景雑反射波を表わしている。

## 2-2 雜反射波の除去と検出出力

式(2)に示された受信波から検出出力をうるために、これに送信波の一部(ここでは基準波と呼ぶ)

$$v_r = V_r \cos(\omega t + \theta_r) \quad (4)$$

を印加する。基準波  $v_r$  と受信波  $v_s$  との合成波は次式のようになる。

$$v_m = V_s \cos(\omega t + A\theta \sin pt + \theta_s) + V_{rn} \cos(\omega t + \theta_{rn}) \quad (5)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} V_{rn} &= \sqrt{(V_r + V_n)^2 \cos^2 \left( \frac{\theta_r - \theta_n}{2} \right) + (V_r - V_n)^2 \sin^2 \left( \frac{\theta_r - \theta_n}{2} \right)} \\ \theta_{rn} &= \frac{\theta_r + \theta_n}{2} - \tan^{-1} \left\{ \frac{V_r - V_n}{V_r + V_n} \tan \left( \frac{\theta_n - \theta_r}{2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

いまここで、基準波の振巾は受信波の振巾に較べて充分大きく

$$V_r \gg V_s + V_n \quad (7)$$

が成立すると、式(6)は

$$V_{rn} \approx V_r, \quad \theta_{rn} \approx \theta_r \quad (8)$$

となるので、式(5)は

$$v_m \approx V_s \cos(\omega t + 4\theta \sin pt + \theta_s) + V_r \cos(\omega t + \theta_r) \quad (9)$$

とみなすことができる。

次にこの合成波  $v_m$  を包絡線検波すると、その出力には

$$v_d = \sqrt{V_s^2 + V_r^2 + 2V_s V_r \cos(4\theta \sin pt + \theta_s - \theta_r)} \quad (10)$$

なる電圧がえられる。これを級数展開し式(7)に含まれる条件  $V_s \ll V_r$  を考慮すると、近似的に高次の余弦関数を含む項が無視できて

$$v_d \approx \sqrt{V_s^2 + V_r^2 + \frac{V_s \cos(4\theta \sin pt + \theta_s - \theta_r)}{\sqrt{1 + \left( \frac{V_s}{V_r} \right)^2}}} = v_d' \quad (11)$$

となり、さらに第2項の分母を1に近似できるので

$$v_d' = \sqrt{V_s^2 + V_r^2} + V_s \cos(\Delta\theta \sin pt + \theta_s - \theta_r) \quad (12)$$

とすることができる。右辺第1項は直流成分を、第2項は振動子位相変調された信号波成分を表わしている。

さらに第2項は

$$V_s J_0(\Delta\theta) \cos(\theta_s - \theta_r) + 2V_s \left\{ \cos(\theta_s - \theta_r) \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\Delta\theta) \cos 2npt \right. \\ \left. - \sin(\theta_s - \theta_r) \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(\Delta\theta) \cdot \sin(2n-1)pt \right\} \quad (13)$$

と表わすことができ、無限個のスペクトルをもっていることがわかる。ここに、 $J_n(\Delta\theta)$  は第1種  $n$  次 Bessel 関数である。

検波器出力  $v_d'$  に含まれる各周波数成分の内、直流成分（主として比較波強度に依存する）をのぞいて最大振巾をもちうるのは基本波成分であるから、沪波器でこれを取出し、第2検波すると

$$v_o = 2V_s |J_1(\Delta\theta) \sin(\theta_s - \theta_r)| \quad (14)$$

なる出力がえられる。なお、所要の相対電界値は、式(13)の交流項の内どの周波数成分からでも得られるが、ここでは感度の点を考えて基本波成分を取出した。

### 2-3 電界強度および位相

出力電圧を電界強度値と位相値で表わすために式(14)に式(1)を代入すると

$$v_o = K_2 E_x^2 |\sin(2\theta_x + \theta_d - \theta_r)| \quad (15)$$

となる。ここに  $K_2 = 2K_1 J_1(\Delta\theta)$  : 比例定数である。この  $K_2$  を一定に保つという条件の下で、被測定点の電界位相  $\theta_x$  に応じて、基本波の位相

$\theta_r$  を加減して

$$2\theta_E + \theta_d - \theta_r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m : \text{零または正整数}) \quad (1)$$

となるようにすれば、そのときの出力電圧  $v_o$  は最大となり、最大値の平方根が被測定点の相対電界強度を与える。また基準波位相の半分の値が相対電界位相を与える。ただし、このときえられる位相角は主値であり，“ambiguity”をもっている。

### 第3章 測定装置と測定方法

#### 3-1 基本測定系

図1に示すような基本構成において、信号波の経路Iと基準波の経路IIとに分けて考える。

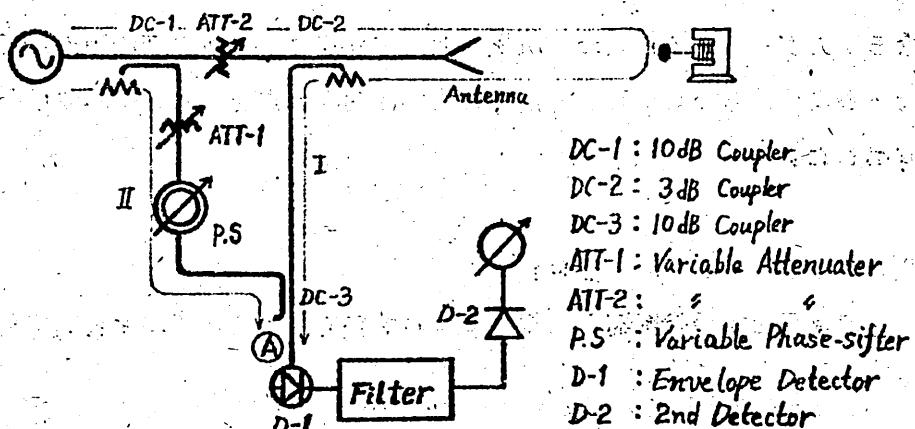


図1 基本測定系

経路Ⅰでは送信源からのC.W波(角周波数 $\omega$ )は供試アンテナを経て放射され、被測定電界を形成する。そしてその電界中におかれた振動子によって、その点の電界強度と電界位相の情報を含む位相変調された散乱波となつて、同じアンテナから方向性結合器DC-2を経てA点に達する。

経路Ⅱでは送信波の一部が方向性結合器DC-1によって分岐され、可変減衰器ATT-1と可変移相器P.Sによって基準波としての振巾と位相を調整されて、方向性結合器DC-2<sup>3</sup>からA点に達する。

両波はA点において合成され、第1検波器D-1で包絡線検波される。このとき基準波が充分強く、式(8)の条件が満たされているものとすると、この検波出力は式 $\text{式} \text{viii}$ 、 $\text{viii}$ で示されるようなスペクトルをもつものとなる。

次に渦波器を用いて、この中から振動子基本周波数成分を取り出し、第2検波すれば式 $\text{式} \text{viii}$ で示したような出力電圧がえられる。ここで位相器P.Sを加減して出力を最大にしたときの出力から相対電界強度の2乗値を、位相器の加減変化位相量から相対電界位相を知ることができる。

検出出力を表わす式 $\text{式} \text{viii}$ の比例定数 $K_2$ は、 $J_1(\alpha\theta)$ に比例している。従って検出利得を最大とするためには $J_1(\alpha\theta)$ が最大となる条件、すなわち $\alpha\theta \approx 1.84$ となるあたりで動作させねばならない。この条件を式(3)に適用すると適正振動振巾 $\delta_{opt}$ が決まり、その値は

$$\delta_{opt} \approx 0.146\lambda$$

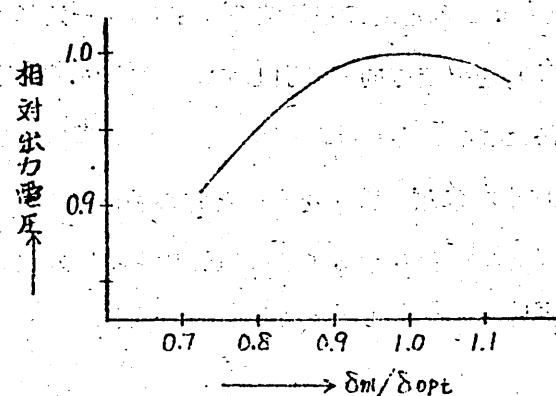


図2 振動振巾と出力電圧

となる。図 2 に振動振巾に対する出力電圧の変化を示した。なおこの条件は必ずしも厳密に考えなくとも測定できるが、この値を一応の目安とすればよい。

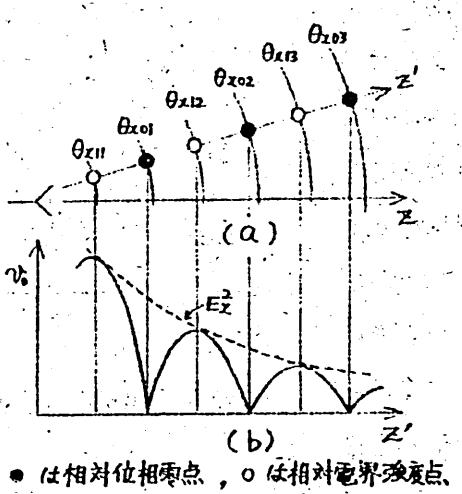
振動子周波数には特に制限はなく、振動機構や済波器の構成上の都合などから適当に選んでよい。また振動子としては被測定電界を不要に乱すことのないように、最大径が半波長程度以下の金属反射体を用いることが望ましい。検波器 D-1 はその入出力特性が広範囲に亘って良好な直線性を保っていることが望ましいが、被測定電界の dynamic range が広くて検波器の直線範囲を越えるときは補助可変減衰器 ATT-2 を調整して、入力を直線範囲に収まるようにしなければならない。

### 3-2 改良測定系 1- (ambiguity の解消)

上述の方法では測定点を全く任意に選ぶので、測定結果として得られる電界位相値には式(4)に見るような不確定値  $m$  が含まれ、いわゆる "ambiguity" をもつことになる。また数多くの測定点毎に測定を繰返すには相当な長時間を要し、その間に送信源の出力や周波数が変動すると考えられる。

前節の方法では各点での受信波の位相  $\theta_x$  に応じてその都度基準波の位相  $\theta_r$  を加減したが、これを逆に基準波の位相  $\theta_r$  を一定にしておき、測定点（振動子の位置）を一定方向に掃引して出力波形を観測する。このときえられる出力波形は式(4)から、 $\theta_x - \theta_r (= \theta)$  の関数となり、掃引軸上のある点における位相の情報を含んだ電界強度がわかる。

例えば、図 3 (a) に示されるような電界中を  $z'$  方向に掃引して得られる出力変化は同図 (b) のようになる。



(1)  
図3 改良測定<sup>断</sup>における位相判定  
(a) は  $\pi/4$  每の等位相面  
(b) は出力波形

この波形において、出力が零に落込んでいる点では  $\theta = m\pi$ 、すなわち相対電界位相が

$$\theta_{x0} = \frac{m\pi - \phi}{2} \quad (\text{ただし } \phi = \theta_a/2 : \text{一定}) \quad (18)$$

なる相対位相零点を表わし、また出力が極大となる点では

$$\theta_{x1} = \frac{m\pi}{2} - \left( \phi - \frac{\pi}{4} \right) \quad (19)$$

なる相対電界強度点を表わしており、このときの出力電圧が相対電界強度の二乗となる。

掃引軸の位置を変えて、次々と掃引、観測を繰返せば、上記相対電界位相零点および相対電界強度の点分布が求まり、これらのうち隣接する同一関係位相、同一強度点をそれぞれ結べば、ambiguity のない電界位相およ

び強度分布図がえられる。

なおこの方法で、急峻な起伏をもつ電界分布を測定するとき、あるいは掃引軸が波面をかすめて通るようなときは、正しい相対電界強度点を判定することが困難になる場合がある。このようなときは、

図4の例に示すように、同一掃引軸上で基準波の位相を順

次変えながら数回の波形観測を行い（図4では $\theta_{r1}$ ,  $\theta_{r2}$ ,  $\theta_{r3}$ がそれにある），それらの極大点を連ねれば所要の強度分布を知ることができる。

### 2-3 改良測定系(2) — (long-line effect の解消)

上述の構成で遠方界を測定する場合、すなわち被測定点がアンテナから遠く離れている場合、電波径路Ⅰの通路長 $R_1$ は径路Ⅱの通路長 $R_2$ に比べて非常に大きくなる。このとき送信周波数の僅かな漂動に対しても、いわゆる“long-line effect”が起り、位相測定が非常に困難となる。式(4)において、送信周波数の漂動により波長が $\lambda$ から土 $4\lambda$ だけ変化したと仮定すると

$$V'_o \approx 2V_s | J_1(4\theta) \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_0} (R_1 - R_2) \left( 1 \pm \frac{4\lambda}{\lambda_0} \right) \right\} | \quad (20)$$

となり、 $R_1 - R_2 \gg \lambda$  の場合は、僅かな周波数の漂動に対しても上式 {} 内が大きく変動し、出力電圧が定まらず、測定が困難になる。

以上の考察から、long-line effect を避けるためには、両径路間の通路長差ができるだけ小さくすればよいことがわかる。そこで構成を図

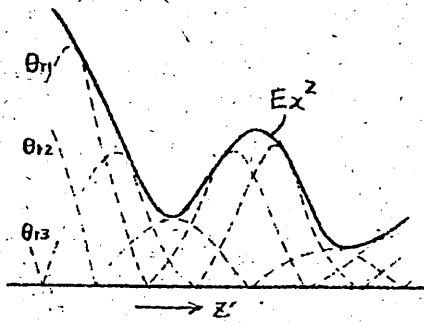


図4 起伏の激しい電界分布

4

では $\theta_{r1}$ ,  $\theta_{r2}$ ,  $\theta_{r3}$ がそれにある

）

これらの極大点を連ねれば所要の強度分布を知ることができる。

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

）

5に示すように、径路Ⅱの通路長を故意に延長すればよい。例えば周波数安定度が $10^{-3}$ 程度の発振器を用いたとして、 $(R_1 - R_2)/\lambda_0$ を10倍程度以下にすれば、出力の変動は約6%（角度誤差3~4°程度）以下になる。

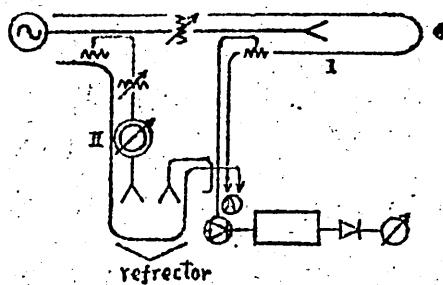


図5 改良測定案(2)

#### 第4章 測定結果および検討

本章では測定原理を確かめるための予備実験結果と導波管開口アンテナおよび角錐ホーンアンテナの放射電界について行った測定例について述べる。これらの実験には35GHz帯を用い、振動子として直径約3mmの金属球を用い、振動子の振動機構にはスピーカの駆動部を改造して使用した。振動子の振動周波数は80Hzとした。もちろん実験は雑反射波に対して、何の考慮もなされていない普通の実験室で行った。

##### 4-1 予備実験

予備実験としては、第1検波（包絡線検波）器出力が式(4)で示したような位相変調波となることを確認するため、変調指数 $A\theta$ （振動振巾に対応）と位相 $\theta_s - \theta_r (= \theta)$ を変えて出力電圧波形 $v_o$ を観測した。図6(a)

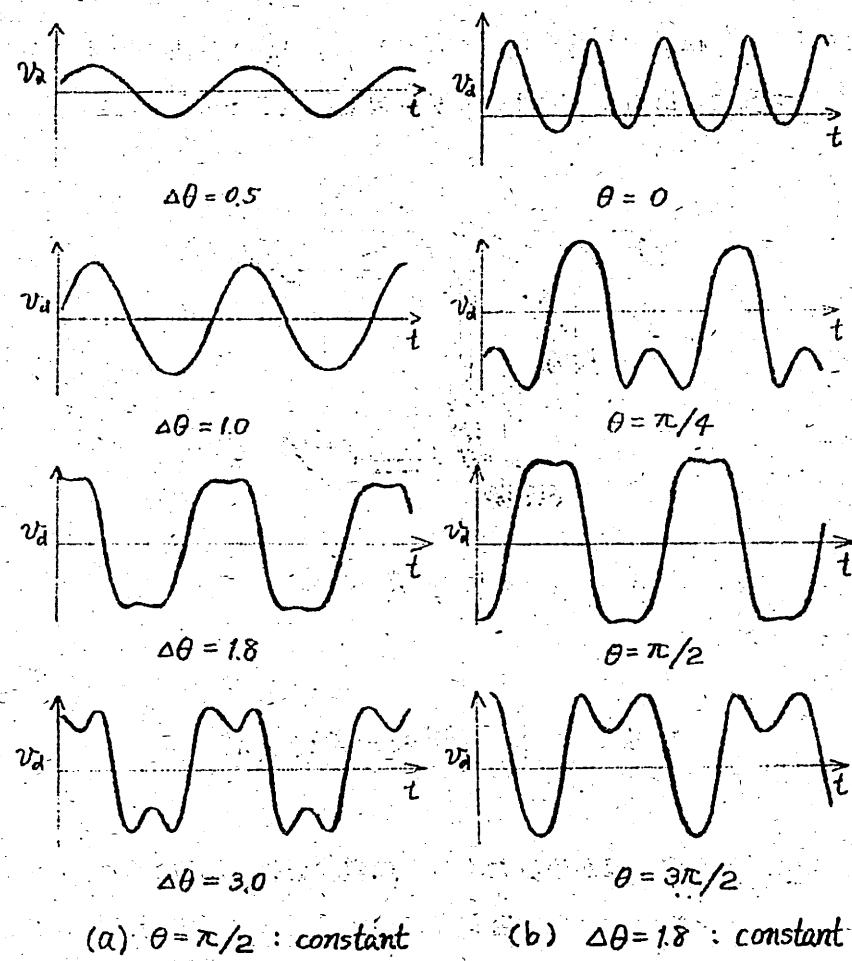


図 6 第 1 検波器出力波形

(a)  $\theta = \pi/2$  : constant  
 (b)  $\Delta\theta = 1.8$  : constant

にて  $\theta = \pi/2$  で一定にしておき  $\Delta\theta$  を順次大きくして行ったときの波形を、  
 また (b) にて  $\Delta\theta \approx 1.8$  ( $\delta_{opt}$  に対応) で一定にして  $\theta$  を  $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$  に対する出力波形を示す。

なお (b) の  $\theta = \pi/2 \sim \pi$  の波形は  $\theta = \pi/2 \sim 0$  の波形と極性(正負)が  
 反転する以外は全く同じとなるので省略した。それぞれの波形は理論波形  
 とよく一致し、測定装置が第 2 章で述べた原理どおりに動作しているもの

と思われる。

また図6からでは波形例が少なくてわかりにくいが、この予備実験から明らかに振動子基本周波数成分は  $4\theta \approx 1.8$ ,  $\theta = \pi/2$  および  $3\pi/2$  で最大となることが確認できた。これは検出出力の式(5), 適正振動振巾の条件式(6)による計算値とよく一致していることがわかる。

#### 4-2 測定例

供試アンテナとして図7(a), (b)に示すような角錐ホーンアンテナと導波管開口アンテナを用い、それらの磁界面内 ( $y=0$ ) 相対電界強度と相対位相分布を測定した。

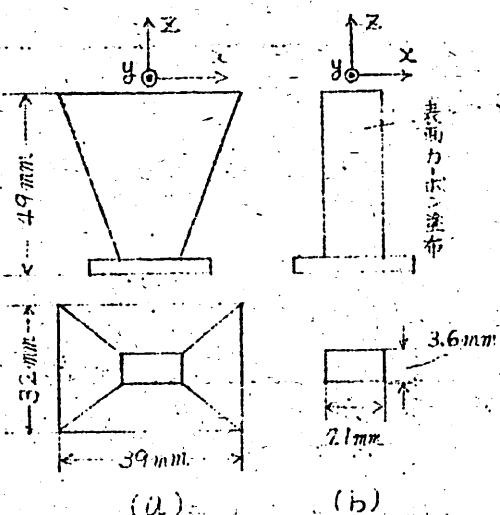


図7 供試アンテナと座標

先ず基本測定系による測定例として、角錐ホーンアンテナを用い、 $y=0$ ,  $z=5.0$  mmの線上を  $x$  方向に測定した結果を図8に示す。同図の実線は最大値を1に正規化した相対電界強度の自乗値を、破線は相対電界位相を表わす。

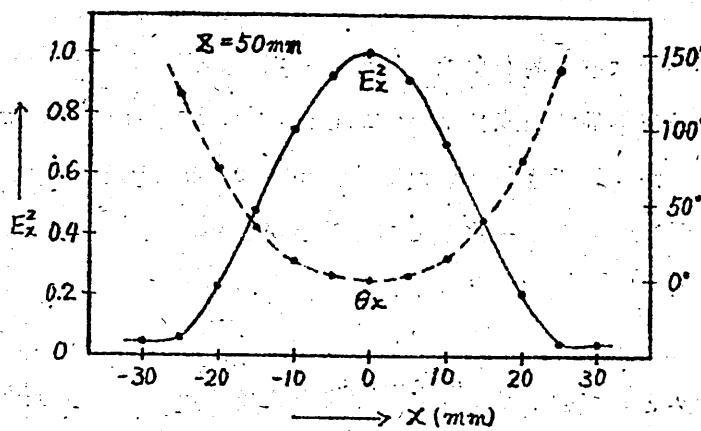


図 8 基本測定系による測定例

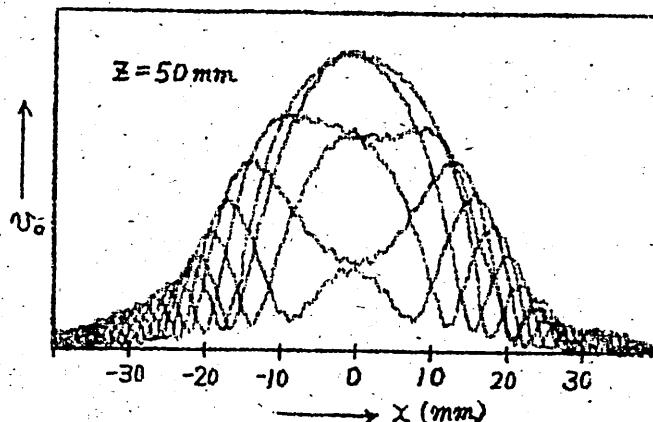


図 9 出力波形の一例

改良測定(1)による測定例として角錐ホーン導波管開口アンテナの相対電界を測定した。測定にあたって、振動子位置検出用ポテンショメータをX-YレコーダX軸に連動させて、測定点と測定値を対応させた。先ず前述の基本測定系による測定結果と比較するため、角錐ホーンアンテナを用い  $y = 0$ ,  $z = 50 \text{ mm}$  で  $x$  方向に掃引して得られた波形を図 9 に示す。同図

は 6 個の波形が重なって描かれているが、これは相対電界強度の測定点の数を増すために基準波の位相を  $\frac{30}{2}$ °ずつずらせて観測したものである。

次に掃引軸を測定範囲全域に亘って変え、えられた結果を整理して図 10 に示す。同図から電界が近接界から次第に遠方界に移る様子がよくうかがえる。導波管開口アンテナによる相対電界測定結果を図 11 に示す。

同図ではアンテナ開口が小さいため、近接界が極めて狭い範囲に限られている。

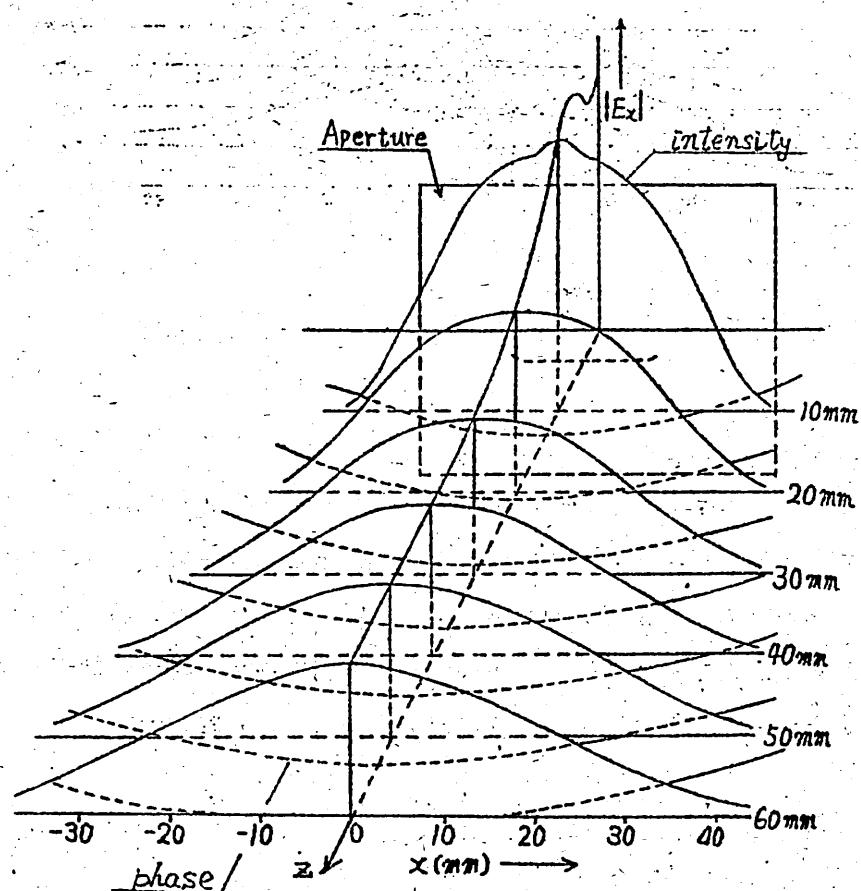


図 10 角錐ホーンアンテナ電界分布測定結果

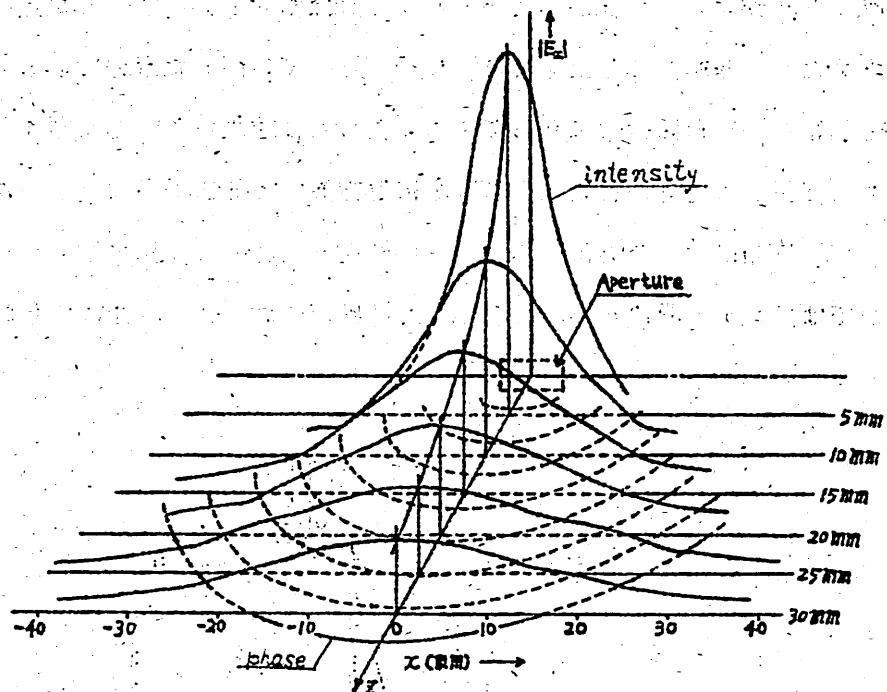


図 1-1 導波管開口アンテナ電界分布測定結果

#### 4-3 検討

測定原理では、振動子の振動方向は波源に向う方向としたが、厳密には等位相面に垂直な方向でなくてはならない。ところが一般にこの等位相面は未知であるので、振動方向を常に正しく保つことはできない。いま仮に振動振巾は適正であるが、その方向が正しい方向から角度 $\psi$ だけずれているものとすると、それによって検出出力電圧に生じる誤差は

$$\left\{ 1 - \frac{J_1(2k\delta_{opt} \cos \psi)}{J_1(2k\delta_{opt})} \right\} \times 100\% \quad (2)$$

となる。図 1-2 は角度 $\psi$ を変数として、この誤差を計算した結果である。

同図から、ほぼ波源と思われる方向に振動させておくだけで、ほとんどこ

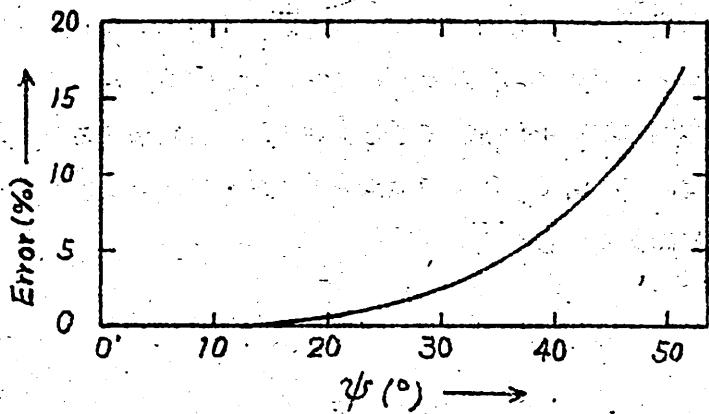


図 1.2 振動方向のずれによる誤差

の誤差は無視できることがわかる。

振動機構とその支持構造物からの散乱波が被測定電界を乱し、これが測定誤差となって表われることが考えられる。測定に際してこの影響を軽減させるため、これら構造物の散乱断面積をできるだけ小さくし、また振動子をこのような構造物からできるだけ離すなどの配慮が必要である。なお前節で述べた測定において、これらを電波吸収体で覆った。

振動子の位置（被測定点）は空間に浮んだ点であるので、これを正確に計って測定値と対応させることに難かしさがある。前節の測定結果にもこの種の誤差、測定装置の設定とか機構上の不備などの測定誤差が含まれていると思われる。

## 第 5 章 む す び

以上、マイクロ波放射電界の相対振巾および位相分布の測定法として微小振動子法を提案し、測定原理、測定法および測定例を示した。本測定法は modulated scattering 法の一種と考えられるが、従来の modulated scattering 法に較べると、散乱波を位相変調するという点が異っている。

る。測定方法として改良測定系(1)を用いることによって ambiguity の影響を、また改良測定系(2)を用いることによって long-line effect の影響を除くことができた。角錐ホーンアンテナと導波管開口アンテナの測定例から、本測定法は十分信頼できる方法であると結論することができる。

終りに、実験に討論に熱心に協力された本学卒業生および在学中の卒業研究生諸君に謝意を表します。

### 参考文献

- 1) J. H. Richmond and I. E. Tice "Probes for Microwave Near-field Measurements" (IRE Trans. on MTT-3, pp. 32-34 April 1955)
- 2) R. Justice and V. H. Rumsay "Measurement of Electric Field Distributions" (IRE Trans. on AP-3, pp. 177-180, October 1955)
- 3) J. H. Richmond "A Modulated Scattering Technique for Measurement of Field Distribution" (IRE Trans. on MTT-3, pp. 13-15, July 1955)
- 4) A. L. Cullen and J. C. Parr "A New Perturbation Method for Measuring Microwave Fields in Free Space" (Proc. IEE, Vol. 102, Part-B, pp. 836-844, November 1955)
- 5) 滝山, 豊永, 三宅, 堀 "Light-Modulated Scattering 法によるビドームの近傍電界分布の測定"

昭和43年度電気四学会連合大会 1166 昭和43年3月

輻射科學研究會資料

多モード・リングレーザ  
の基礎方程式

宮下 豊勝

池上 淳一

1970年 1月30日

## 1. まえがき

リング・レーザは、レーザの成功後、早くから *laser gyro* として注目されている。リング・レーザを回転させると、互いに反対方向に回れる進行波間に、回転角速度に比例して周波数差が生ずる。そのビートを検出すれば回転角速度を知る事ができる。しかし鏡において、どうしても若干の *backscattering* が存在するので、そのビート周波数がある値以下になると、同期してしまう。即ち、ある回転速度以下では測定できない。例えば、地球の回転速度を *laser gyro* で測ると、ビート周波数は普通  $50\text{Hz}$  前後となるはずであるが、必ず同期がかかり、測定できない。この同期現象の解析と最小測定可能回転速度を下げる方法についてかなり研究されている。<sup>(1)~(4)</sup> またリング・レーザの発振特性の基礎的研究も行われている。<sup>(5)(6)</sup>

我々は、多モード・リング・レーザの強制同期の解析<sup>(1)</sup>を目的として、多モード・リング・レーザの基礎方程式を導いた。リング・レーザの基礎方程式については、Aronowitz の理論<sup>(7)</sup>があるが、单一モード発振（互いに反対方向に進む進行波が一モードづつ存在する発振）の場合に限定されている。本報告では多モード・リング・レーザの基礎方程式を、Lamb のレーザ理論<sup>(8)</sup>を参考にして求め、二、三の場合について、モード競合と位相同期について簡単に考察する。

## 2. リング・レーザの基礎方程式

### 2.1. 自己無撞着方程式

Maxwellの方程式より、レーザ電界 $E$ は次式から求まる。

$$\text{curl curl } E + \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1)$$

$E$ は軸に垂直で、軸方向にのみ変化する、即ち $\mathbf{z}$ にのみ依存するとすると、

$$\text{curl curl } E = -\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad (2)$$

となる。

normal laser の場合には、電界は定在波形のモードで展開されだが、ring laser の場合には、縮退が解け両方向に進む独立した進行波が存在するため、電界は進行波形のモードで展開される。

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \sum_n E_n^l(t) \sin(\lambda_n^l t + \phi_n^l(t) + K_n^l z) - \sum_n E_n^r(t) \sin(\lambda_n^r t + \phi_n^r(t) - K_n^r z) \\ &= \sum_n \{E_n^l(z, t) + E_n^r(z, t)\} = \sum_n \left( \frac{E_n^l(z, t)}{E_n^r(z, t)} \right) = \sum_n E_n(z, t) \end{aligned} \quad (3)$$

但し  $K_n^l = 2n\pi/L$ 、 $L^l$ : リングレーザの全長

(2)(3)式を(1)式に代入すると、

$$(K_n^{l2} - K_n^{r2}) E_n(z, t) + (\mu_0 \sigma_e \mu_0 \sigma_r) \frac{\partial}{\partial t} E_n(z, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_n(z, t) = -\mu_0 \frac{\partial^2 P_n}{\partial t^2} \quad (4)$$

さらに、 $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$  で両辺を割ると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_n(z, t) + \left( \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \frac{\sigma_r}{\epsilon_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} E_n(z, t) + (Q_n^{l2} - Q_n^{r2}) E_n(z, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} P_n(z, t) \quad (5)$$

但し  $Q_n^l = c K_n^l$  : 共振器の共振角周波数

巨視的分極 $P(z, t)$ も電界 $E(z, t)$ と同様に、進行波形のモードで次式のように展開される。

$$\begin{aligned} P(z, t) &= \sum_n S_n^l(t) \sin(\lambda_n^l t + \phi_n^l(t) + K_n^l z) - \sum_n S_n^r(t) \sin(\lambda_n^r t + \phi_n^r(t) - K_n^r z) \\ &\quad - \sum_n C_n^l(t) \cos(\lambda_n^l t + \phi_n^l(t) + K_n^l z) + \sum_n C_n^r(t) \cos(\lambda_n^r t + \phi_n^r(t) - K_n^r z) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、モード間の周波数差は  $100\text{MHz}$  の程度で、共振器のスロットル幅は  $1\text{MHz}$  程度であるので、共振器の共振角周波数

$\Omega_n$  から大きく離れた周波数成分は無視できる。即ち、 $E_n(t)$ ,  $S_n(t)$ ,  $C_n(t)$  等は時間的にゆっくりしか変動しない。この事を考慮に入れて (3)(6) の両式を (5) 式に代入して、各モードについて等式を作ると (8) 式を得る。但し (7) 式を用ひる。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} P(z, t) = -\nu^2 P(z, t) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} (\nu_n^\ell + \dot{\phi}_n^\ell - \Omega_n^\ell) E_n^\ell(t) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{\epsilon_0} \right) S_n^\ell(t) \\ (\nu_n^r + \dot{\phi}_n^r - \Omega_n^r) E_n^r(t) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{\epsilon_0} \right) S_n^r(t) \\ \dot{E}_n^\ell(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{Q_n^\ell} \right) E_n^\ell(t) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{\epsilon_0} \right) C_n^\ell(t) \\ \dot{E}_n^r(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{Q_n^r} \right) E_n^r(t) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{\epsilon_0} \right) C_n^r(t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上式は normal laser の場合の Lamb の式<sup>(1)</sup>と全く同様である。

## 2.2. 巨視的分極 $P(z, t)$

二準位  $(a, b)$  系の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{ab} &= -i\omega \rho_{ab} - \gamma_a \rho_{ab} + iV(t)(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \\ \dot{\rho}_{aa} &= -\gamma_a \rho_{aa} + iV(t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \\ \dot{\rho}_{bb} &= -\gamma_b \rho_{bb} - iV(t)(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \\ \rho_{ba} &= \rho_{ab}^* \end{aligned} \quad (9)$$

で表わされる。“ここで”，  $\rho_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = a, b$ )：密度行列の行列要素，  $\omega$ ：遷移角周波数，  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_{ab}$  は各準位の decay constant である。また、時刻  $t_0$  において  $\rho_{ab}$  にあり、速度  $v$  を持つ、時刻  $t$  において  $\rho_{ab}$  に存在する原子に対する運動  $V(t)$  は次式で与えられる。

$$V(t) = -(\partial/\partial z) E(z_0 + v(t-t_0), t) \quad (10)$$

巨視的分極  $P$  は、 electric dipole operator の量子力学的平均値として求まる。即ち、  $a, b$  間の electric dipole moment  $\mathcal{D}$  を用いて、

$$P = (\rho_{ab} + \rho_{ba}) \mathcal{D}$$

で表わされる。実際には、原子は熱運動を行っているので、正確には次式で表わされる。

$$\mathcal{P}(z, t) = \partial \sum_{d=a,b} \int_{-\infty}^t dt_0 \int dz_0 \int dv \lambda_d(z_0, v, t_0) [\rho_{ab}(d, z_0, t_0, v, t) + \text{conj.}] \\ \times \delta(z - z_0 - v(t - t_0)) \quad (11)$$

" $\lambda$ "は単位時間、単位体積当たり、 $d=a, b$ の準位に励起される原子の数である。

(9)式を iteration method で解く。即ち、 $t=t_0$ で、 $\rho_{aa}=1, \rho_{bb}=0$  の初期条件で得られる解を  $\rho(a)$ 、 $t=t_0$ で  $\rho_{bb}=1, \rho_{aa}=\rho_{ab}=\rho_{ba}=0$  の初期条件で得られる解を  $\rho(b)$  とし (12) 式のよ

$$\begin{aligned} \rho_{aa}(a) &= \rho_{aa}^{(0)}(a) + \rho_{aa}^{(2)}(a) + \dots \\ \rho_{bb}(a) &= \rho_{bb}^{(0)}(a) + \rho_{bb}^{(2)}(a) + \dots \\ \rho_{ab}(a) &= \rho_{ab}^{(0)}(a) + \rho_{ab}^{(2)}(a) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

うに展開し、第  $n$  項までを逐次 (9) 式に代入して解くと、第  $n$  次近似の解が得られる。

### 第一次近似

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(1)}(a, z, v, t) &\equiv \int_{-\infty}^t dt_0 \int dz_0 \lambda_a(z_0, v, t_0) \rho_{ab}^{(0)}(a, z_0, t_0, v, t) \delta(z - z_0 - v(t - t_0)) \\ &= i \lambda_a(z, v, t) \int_{-\infty}^t dt' V(t') \exp[(Y_{ab} + i\omega)(t' - t) + Y_a(t_0 - t')] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{但し}, V(t') = -(\partial/\partial_t) E(z - v(t - t'), t')$$

(3)式を (13) 式に代入し、(14) ~ (16) 式の条件を入れると、(17) 式が求まる。

$$\lambda_a(z, v, t) = W(v) \lambda_a(z, t) \quad (14)$$

$$N(z, t) = \frac{\Lambda_a(z, t)}{\gamma_a} - \frac{\Lambda_b(z, t)}{\gamma_b} \quad (15)$$

$$W(v) = \frac{1}{v\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{v^2}{\mu^2}) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(1)}(z, t) &= \sum_{d=a,b} \partial \int dv \{ \rho_{ab}^{(0)}(d, z, v, t) + \rho_{ba}^{(0)}(d, z, v, t) \} \\ &= -\frac{1}{2} (\partial/\partial_t) N(z, t) \int_0^\infty d\tau \sum_\mu [-E_\mu^2(t) \exp\{-Y_{ab}\tau - i(\omega - \omega_\mu^2)\tau - \frac{1}{2} K_\mu^{d2} u^2 \tau^2\} \\ &\quad \times \exp\{-i[\omega_\mu^2 t + \varphi_\mu^2(t) + K_\mu^d z]\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_{\mu}^r(t) \exp \{-\gamma_{ab}\tau - i(\omega - \gamma_{\mu}^r)\tau - \frac{1}{2}k_{\mu}^2 u^2 \tau^2\} \\
& \times \exp \{-i[\gamma_{\mu}^r t + \phi_{\mu}^r(t) - k_{\mu}^r z]\} \\
& + \text{complex conjugate}
\end{aligned} \tag{17}$$

ここで、

$$Z(\nu - \omega) = ik_u \int_0^\infty dt \exp [i(\nu - \omega)\tau - \gamma_{ab}\tau - \frac{1}{2}k^2 u^2 \tau^2] \tag{18}$$

とおく。

$N(z, t)$  の時間的变化は、モード間隔、即ち、 $\gamma_{\mu} - \gamma_{\mu-1}$  にからめて充分遅いとするとき、 $N(z, t) \exp \{-i[\gamma_{\mu} t + \phi_{\mu}(t) + k_{\mu} z]\}$  は  $\exp \{-i[\gamma_n t + \phi_n(t) + k_n z]\}$  附近の成分のみで、 $\exp \{-i[\gamma_n t + \phi_n(t) + k_n z]\}$  ( $n \neq \mu$ ) 附近の成分はない。よって、

$$N_0(t) = \frac{1}{L} \int_0^L N(z, t) dz \tag{19}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
P^{(1)}(z, t) &= -(\rho^2 / k_u) N_0(t) \sum_n \left[ -E_n^{\ell}(t) \left\{ -Z_r(\gamma_n^{\ell} - \omega) \sin(\gamma_n^{\ell} t + \phi_n^{\ell}(t) + k_n^{\ell} z) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + Z_i(\gamma_n^{\ell} - \omega) \cos(\gamma_n^{\ell} t + \phi_n^{\ell}(t) + k_n^{\ell} z) \right\} \right. \\
&\quad \left. + E_n^r(t) \left\{ -Z_r(\gamma_n^r - \omega) \sin(\gamma_n^r t + \phi_n^r(t) - k_n^r z) + Z_i(\gamma_n^r - \omega) \cos(\gamma_n^r t + \phi_n^r(t) - k_n^r z) \right\} \right] \\
&\quad \cdots \tag{20}
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)}(t) &= -(\rho^2 / k_u) Z_r(\gamma_n^{\ell} - \omega) N_0(t) E_n^{\ell}(t) \\
S_n^{(r)}(t) &= -(\rho^2 / k_u) Z_r(\gamma_n^r - \omega) N_0(t) E_n^r(t) \\
C_n^{(1)}(t) &= -(\rho^2 / k_u) Z_i(\gamma_n^{\ell} - \omega) N_0(t) E_n^{\ell}(t) \\
C_n^{(r)}(t) &= -(\rho^2 / k_u) Z_i(\gamma_n^r - \omega) N_0(t) E_n^r(t)
\end{aligned} \tag{21}$$

ここで、 $K$  は  $k_n$  の代表値を、 $Z_r, Z_i$  は  $Z$  の実部、虚部をそれぞれ表わす。

### 第三次近似

$$\begin{aligned}
& \beta_{ab}^{(3)}(a, z, \nu, t) \\
& = -i \int_{-\infty}^t dt_0 \int_{t_0}^t dt' V(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' V(t'') V(t''') \left\{ \exp [\gamma_a(t'' - t') + (\gamma_{ab} + i\omega)(t''' - t'')] \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \exp[Y_b(t''-t') + (Y_{ab}+i\omega)(t'''-t')] + \text{conj.}] \exp[Y_a(t_0-t'') + (Y_{ab}+i\omega)(t'-t)]$$

--- (22)

$t_0$  についての積分を行い、(20)式を代入し、 $\tau' = t - t'$ ,  $\tau'' = t' - t''$ ,  $\tau''' = t'' - t'''$  とおくと次式が求まる。

$$\begin{aligned} P_{ab}^{(3)}(z, v, t) &\equiv \Lambda_a(z, t) P_{ab}^{(3)}(a, z, v, t) + \Lambda_b(z, t) P_{ab}^{(3)}(b, z, v, t) \\ &= i(\rho/\hbar)^3 N(z, t) \left[ \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau'' \int_0^\infty d\tau''' E(z-v\tau', t-\tau') E(z-v(\tau'+\tau''), t-\tau'-\tau'') \right. \\ &\quad \times E(z-v(\tau'+\tau''+\tau'''), t-\tau'-\tau''-\tau''') \exp \{-Y_a \tau'' - (Y_{ab}+i\omega) \tau'''\} \\ &\quad \left. + \text{same with } a \text{ and } b \text{ interchanged.} + \text{conj.} \right] \exp \{-(Y_{ab}+i\omega) \tau'\} \end{aligned}$$

--- (23)

(3)式を(23)式に代入して、 $\tau', \tau'', \tau'''$ について積分するとき、光の周波数の程度で振動する項は、積分値が小さいので無視できる。よって、(24)式に示す組合せを計算すればよい。

$$\begin{aligned} P_{ab}^{(3)}(z, v, t) &= -\frac{1}{8}(\rho/\hbar)^3 N(z, t) \sum_\mu \sum_p \sum_\sigma \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau'' \int_0^\infty d\tau''' \left[ \right. \\ &\quad \exp[-(Y_{ab}-i\nu_u^0+i\nu_p^0-i\nu_\sigma^0+i\omega)\tau' - (Y_a+i\nu_p^0-i\nu_\sigma^0)\tau'' - (Y_{ab}+i\omega-i\nu_\sigma^0)\tau'''] \\ &\quad \times \exp[-i(\nu_u^0-\nu_p^0+\nu_\sigma^0)t - i(\varphi_u^0-\varphi_p^0+\varphi_\sigma^0)] \\ &\quad \times \left\{ -E_u^r E_p^r E_\sigma^r \exp[i((k_u^r-k_p^r+k_\sigma^r)z - K(\tau'+\tau'')v)] \right. \\ &\quad + E_u^l E_p^r E_\sigma^r \exp[i(-(k_u^l+k_p^r-K_\sigma^r)z + K(\tau'-\tau'')v)] \\ &\quad - E_u^l E_p^l E_\sigma^r \exp[i(-(k_u^l+k_p^l+k_\sigma^r)z - K(\tau'+2\tau''+\tau'')v)] \\ &\quad + E_u^l E_p^l E_\sigma^l \exp[i[-(k_u^l+k_p^l+k_\sigma^l)z + K(\tau'+2\tau''+\tau'')v]] \\ &\quad + E_u^l E_p^l E_\sigma^l \exp[i[-(k_u^l-k_p^l+k_\sigma^l)z + K(\tau'+\tau'')v]] \\ &\quad - E_u^l E_p^l E_\sigma^l \exp[i[(k_u^l+k_p^l-K_\sigma^l)z - K(\tau'-\tau'')v]] \} \\ &\quad + \exp[-(Y_{ab}-i\nu_u^0-i\nu_p^0+i\nu_\sigma^0+i\omega)\tau' - (Y_a-i\nu_p^0+i\nu_\sigma^0)\tau'' - (Y_{ab}-i\omega+i\nu_\sigma^0)\tau'''] \\ &\quad \times \exp[-i(\nu_u^0+\nu_p^0-\nu_\sigma^0)t - i(\varphi_u^0+\varphi_p^0-\varphi_\sigma^0)] \\ &\quad \times \left\{ E_u^r E_p^l E_\sigma^r \exp[i[-(k_u^r+k_p^l+k_\sigma^r)z + K(\tau'+2\tau''+\tau'')v]] \right. \\ &\quad + E_u^l E_p^r E_\sigma^r \exp[i[-(k_u^l-k_p^r+k_\sigma^r)z + K(\tau'+\tau'')v]] \\ &\quad - E_u^r E_p^r E_\sigma^r \exp[i[(k_u^r+k_p^r-K_\sigma^r)z - K(\tau'-\tau'')v]] \\ &\quad - E_u^r E_p^l E_\sigma^r \exp[i[(k_u^r-k_p^l+k_\sigma^r)z - K(\tau'+\tau'')v]] \\ &\quad + E_u^l E_p^r E_\sigma^l \exp[i[-(k_u^l+k_p^r-K_\sigma^l)z + K(\tau'-\tau'')v]] \\ &\quad - E_u^l E_p^r E_\sigma^l \exp[i[-(k_u^l+k_p^l-K_\sigma^l)z - K(\tau'+2\tau''+\tau'')v]] \} \} \\ &\quad + \text{same with } a \text{ and } b \text{ interchanged.} \end{aligned}$$

(24)

但し、○印の上添字を持つ変数を含む因子は {} 内の各項に分配して、同じ下添字を持つEの上添字を○印のかわりに付すべき所を、簡単のためにこのようにして表わした。

先にひについての平均を行ふ。

$$\rho_{ab}^{(3)}(z, t) = \int \rho_{ab}^{(3)}(z, v; t) W(v) dv \quad (25)$$

その場合に出てくる積分は次の三通りである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv W(v) \exp[\pm i k(\tau' + \tau'') v] = \exp[-\frac{1}{4} k^2 u^2 (\tau' + \tau'')^2] \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv W(v) \exp[\pm i k(\tau' - \tau'') v] = \exp[-\frac{1}{4} k^2 u^2 (\tau' - \tau'')^2] \quad (27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv W(v) \exp[\pm i k(\tau' + 2\tau'' + \tau'') v] = \exp[-\frac{1}{4} k^2 u^2 (\tau' + 2\tau'' + \tau'')^2] \quad (28)$$

$\tau'$ ,  $\tau''$ ,  $\tau'''$ についての積分は、正確には Plasma Dispersion Function にあるが、 $\gamma_{ab}/ku \approx 10^{-2}$ であるので、(26)～(28)式の関数を  $ku$ が大きいとして、テルタ関数的に扱って積分を行う。しかし、 $\tau'$ ,  $\tau''$ ,  $\tau'''$ の積分範囲は  $0 \sim +\infty$ であるので、(26), (28)の積分値は小さいので省略する。

$$P^{(3)}(z, t) = P \left\{ \rho_{ab}^{(3)}(z, t) + \rho_{ba}^{(3)}(z, t) \right\} \quad (29)$$

$$P^{(3)}(z, t) = -\frac{i\pi}{8} (\eta^4 / (k^3 ku)) N(z, t) \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \left[ \frac{1}{\gamma_{ab} + i(-\frac{1}{2}\nu_{\mu}^0 + \frac{1}{2}\nu_{\rho}^0 - \nu_{\sigma}^0 + \omega)} \cdot \frac{1}{\gamma_a + i(\nu_{\rho}^0 - \nu_{\sigma}^0)}$$

$$\times \left\{ E_{\mu}^{\ell} E_{\rho}^r E_{\sigma}^r \exp[-i((\nu_{\mu}^{\ell} - \nu_{\rho}^r + \nu_{\sigma}^r)t + (\varphi_{\mu}^{\ell} - \varphi_{\rho}^r + \varphi_{\sigma}^r) z] + (K_{\mu}^{\ell} + K_{\rho}^r - K_{\sigma}^r) z \right\} \\ - E_{\mu}^r E_{\rho}^{\ell} E_{\sigma}^{\ell} \exp[-i((\nu_{\mu}^r - \nu_{\rho}^{\ell} + \nu_{\sigma}^{\ell})t + (\varphi_{\mu}^r - \varphi_{\rho}^{\ell} + \varphi_{\sigma}^{\ell}) - (K_{\mu}^r + K_{\rho}^{\ell} - K_{\sigma}^{\ell}) z] \right\}$$

$$+ \frac{1}{\gamma_{ab} + i(-\frac{1}{2}\nu_{\mu}^0 - \frac{1}{2}\nu_{\rho}^0 + \nu_{\sigma}^0)} \cdot \frac{1}{\gamma_a + i(-\nu_{\rho}^0 + \nu_{\sigma}^0)}$$

$$\times \left\{ -E_{\mu}^r E_{\rho}^r E_{\sigma}^r \exp[-i((\nu_{\mu}^r + \nu_{\rho}^r - \nu_{\sigma}^r)t + (\varphi_{\mu}^r + \varphi_{\rho}^r - \varphi_{\sigma}^r) - (K_{\mu}^r + K_{\rho}^r - K_{\sigma}^r) z] + E_{\mu}^{\ell} E_{\rho}^{\ell} E_{\sigma}^{\ell} \exp[-i((\nu_{\mu}^{\ell} + \nu_{\rho}^{\ell} - \nu_{\sigma}^{\ell})t + (\varphi_{\mu}^{\ell} + \varphi_{\rho}^{\ell} - \varphi_{\sigma}^{\ell}) + (K_{\mu}^{\ell} + K_{\rho}^{\ell} - K_{\sigma}^{\ell}) z] \right\} ]$$

+ same with a and b interchanged + complex conjugate (30)

〔〕内の第二項において、Pとρとを入れ替えてまとめ直すと、

$$P^{(3)}(z, t) = -\frac{i\pi}{8} (\eta^4 / (k^3 ku)) N(z, t) \sum_{\mu} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \left[ \exp\{-i((\nu_{\mu}^0 - \nu_{\rho}^0 + \nu_{\sigma}^0)t + (\varphi_{\mu}^0 - \varphi_{\rho}^0 + \varphi_{\sigma}^0))\} \right. \\ \times \left\{ E_{\mu}^{\ell} E_{\rho}^{\ell} E_{\sigma}^{\ell} \exp[-i(K_{\mu}^{\ell} - K_{\rho}^{\ell} + K_{\sigma}^{\ell}) z] \right\} \otimes (-\frac{1}{2}\nu_{\mu}^{\ell} - \frac{1}{2}\nu_{\sigma}^{\ell} + \nu_{\rho}^{\ell}) \\ + E_{\mu}^r E_{\rho}^r E_{\sigma}^r \exp[-i(K_{\mu}^r + K_{\rho}^r - K_{\sigma}^r) z] \otimes (\omega - \frac{1}{2}\nu_{\mu}^r + \frac{1}{2}\nu_{\sigma}^r - \nu_{\rho}^r) \left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \exp \{-i[(\nu_u^0 - \nu_p^0 + \nu_\sigma^0)t + (\varphi_u^0 - \varphi_p^0 + \varphi_\sigma^0)]\} \\
& \times \{E_u^r E_p^r E_\sigma^r \exp [+i(\kappa_u^r - \kappa_p^r + \kappa_\sigma^r)z] \mathcal{D}(-\frac{1}{2}\nu_u^r - \frac{1}{2}\nu_p^r + \nu_\sigma^r) \\
& + E_u^r E_p^l E_\sigma^l \exp [+i(\kappa_u^l + \kappa_p^l - \kappa_\sigma^l)z] \mathcal{D}(\omega - \frac{1}{2}\nu_u^l + \frac{1}{2}\nu_p^l - \nu_\sigma^l)\} \mathcal{D} \\
& \times [\mathcal{D}_a(\nu_p^0 - \nu_\sigma^0) + \mathcal{D}_b(\nu_p^0 - \nu_\sigma^0)] + \text{complex conjugate.} \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\text{但し } \mathcal{D}(\omega) = \frac{1}{\gamma_{ab} + i\omega}, \quad \mathcal{D}_a(\omega) = \frac{1}{\gamma_a + i\omega} \quad (a=a, b).$$

$N(z, t)$  を  $\cos k_n z, \sin k_n z$  で展開する。但し、式を簡単ににするため  $N(z, t)$  は  $z=0$  を中心にして対称に分布しているとする。

$$\begin{aligned}
N(z, t) &= N_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} N_n(t) \cos \frac{2n\pi}{L} z \\
&= N_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} N_n(t) \{ \exp(i k_n z) + \exp(-i k_n z) \} \quad (32)
\end{aligned}$$

但し、

$$N_n(t) = \frac{1}{L} \int_0^L N(z, t) \cos \frac{2n\pi}{L} z dz \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(32)式を(31)式に代入し、各の係数が  $\pm k_n z$  である項のみを選択すると、 $P_n^{(3)}(z, t)$  が求まる。このとき  $\kappa_n^r$  と  $\kappa_n^l$  の違いは無視できる。

$$\begin{aligned}
P_n^{(3)}(z, t) &= -\frac{r\pi}{8} (\rho^4 (\kappa^2 k_n)) \sum_{\mu}^l \sum_{p}^l \sum_{\sigma}^l \{ \exp \{-i(\nu_n^r t + \varphi_n^r(t) + k_n z)\} \\
& \times \{E_u^r E_p^r E_\sigma^r N_0 \exp \{-i[(\nu_u^r - \nu_p^r + \nu_\sigma^r - \nu_n^r)t + (\varphi_u^r - \varphi_p^r + \varphi_\sigma^r - \varphi_n^r)]\} \mathcal{D}(-\frac{1}{2}\nu_u^r - \frac{1}{2}\nu_\sigma^r + \nu_p^r) \\
& + E_u^r E_p^l E_\sigma^l N_0 \exp \{-i[(\nu_u^l - \nu_p^l + \nu_\sigma^l - \nu_n^l)t + (\varphi_u^l - \varphi_p^l + \varphi_\sigma^l - \varphi_n^l)]\} \mathcal{D}(\omega - \frac{1}{2}\nu_u^l + \frac{1}{2}\nu_p^l - \nu_\sigma^l)\} \\
& - \exp \{-i(\nu_n^r t + \varphi_n^r(t) - k_n z)\} \\
& \times \{E_u^r E_p^r E_\sigma^r N_0 \exp \{-i[(\nu_u^r - \nu_p^r + \nu_\sigma^r - \nu_n^r)t + (\varphi_u^r - \varphi_p^r + \varphi_\sigma^r - \varphi_n^r)]\} \mathcal{D}(-\frac{1}{2}\nu_u^r - \frac{1}{2}\nu_\sigma^r + \nu_p^r) \\
& + E_u^r E_p^l E_\sigma^l N_0 \exp \{-i[(\nu_u^l - \nu_p^l + \nu_\sigma^l - \nu_n^l)t + (\varphi_u^l - \varphi_p^l + \varphi_\sigma^l - \varphi_n^l)]\} \mathcal{D}(\omega - \frac{1}{2}\nu_u^l + \frac{1}{2}\nu_p^l - \nu_\sigma^l)\} \\
& \times [\mathcal{D}_a(\nu_p^0 - \nu_\sigma^0) + \mathcal{D}_b(\nu_p^0 - \nu_\sigma^0)] + \text{complex conjugate.} \quad (33)
\end{aligned}$$

但し、 $\sum_{\mu}^l \sum_{p}^l \sum_{\sigma}^l$  は  $\mu - p + \sigma = n$  となるような組合せのみを取る。

(33)式と(6)式とを比較して、次式を得る。

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\frac{\rho}{\epsilon_0}) S_n^{(3), l}(t) &= \sum_{\mu}^l \sum_{p}^l \sum_{\sigma}^l \left[ (-\eta_{n, \mu p \sigma}^a \sin \psi^{r, l} + \xi_{n, \mu p \sigma}^a \cos \psi^{r, l}) E_u^r E_p^r E_\sigma^r \right. \\
& \left. + (-\eta_{n, \mu p \sigma}^{b, l r} \sin \psi^{r, l} + \xi_{n, \mu p \sigma}^{b, l r} \cos \psi^{r, l}) E_u^r E_p^l E_\sigma^r \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{\epsilon_0}) C_n^{(3)\ell}(t) &= \sum_{\mu}^l \sum_{\rho}^l \sum_{\sigma}^l [ (-\zeta_{n,\mu\rho\sigma}^a \sin \psi^{\ell\ell} - \eta_{n,\mu\rho\sigma}^a \cos \psi^{\ell\ell}) E_{\mu}^{\ell} E_{\rho}^{\ell} E_{\sigma}^{\ell} \\
&\quad + (-\zeta_{n,\mu\rho\sigma}^{b,\ell r} \sin \psi^{r\ell} - \eta_{n,\mu\rho\sigma}^{b,\ell r} \cos \psi^{r\ell}) E_{\mu}^{\ell} E_{\rho}^r E_{\sigma}^r] \\
-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{\epsilon_0}) S_n^{(3)r}(t) &= \sum_{\mu}^l \sum_{\rho}^l \sum_{\sigma}^r [ (-\eta_{n,\mu\rho\sigma}^a \sin \psi^{rr} + \zeta_{n,\mu\rho\sigma}^a \cos \psi^{rr}) E_{\mu}^r E_{\rho}^r E_{\sigma}^r \\
&\quad + (-\eta_{n,\mu\rho\sigma}^{b,r\ell} \sin \psi^{r\ell} + \zeta_{n,\mu\rho\sigma}^{b,r\ell} \cos \psi^{r\ell}) E_{\mu}^r E_{\rho}^{\ell} E_{\sigma}^{\ell}] \\
-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{\epsilon_0}) C_n^{(3)r}(t) &= \sum_{\mu}^l \sum_{\rho}^l \sum_{\sigma}^r [ (-\zeta_{n,\mu\rho\sigma}^a \sin \psi^{rr} - \eta_{n,\mu\rho\sigma}^a \cos \psi^{rr}) E_{\mu}^r E_{\rho}^r E_{\sigma}^r \\
&\quad + (-\zeta_{n,\mu\rho\sigma}^{b,r\ell} \sin \psi^{r\ell} - \eta_{n,\mu\rho\sigma}^{b,r\ell} \cos \psi^{r\ell}) E_{\mu}^r E_{\rho}^{\ell} E_{\sigma}^{\ell}] \\
&\quad \cdots \quad (34)
\end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned}
\eta_{n,\mu\rho\sigma}^a &= H N_0 [\mathcal{L}_{ab}'(\frac{1}{2}\nu_p - \frac{1}{2}\nu_n) \{ \mathcal{L}_a'(\nu_p - \nu_n) + \mathcal{L}_b'(\nu_p - \nu_n) \} \\
&\quad - \mathcal{L}_{ab}^2(\frac{1}{2}\nu_p - \frac{1}{2}\nu_n) \{ \mathcal{L}_a^2(\nu_p - \nu_n) + \mathcal{L}_b^2(\nu_p - \nu_n) \}] \\
\zeta_{n,\mu\rho\sigma}^a &= -H N_0 [\mathcal{L}_{ab}'(\frac{1}{2}\nu_p - \frac{1}{2}\nu_n) \{ \mathcal{L}_a^2(\nu_p - \nu_n) + \mathcal{L}_b^2(\nu_p - \nu_n) \} \\
&\quad + \mathcal{L}_{ab}^2(\frac{1}{2}\nu_p - \frac{1}{2}\nu_n) \{ \mathcal{L}_a'(\nu_p - \nu_n) + \mathcal{L}_b'(\nu_p - \nu_n) \}] \\
\eta_{n,\mu\rho\sigma}^{b,\alpha\beta} &= H N_{2(\mu-n)} [\mathcal{L}_{ab}'(\omega - \frac{1}{2}\nu_\sigma^\beta - \frac{1}{2}\nu_n^\alpha) \{ \mathcal{L}_a'(\nu_p - \nu_n) + \mathcal{L}_b'(\nu_p - \nu_n) \} \\
&\quad - \mathcal{L}_{ab}^2(\omega - \frac{1}{2}\nu_\sigma^\beta - \frac{1}{2}\nu_n^\alpha) \{ \mathcal{L}_a^2(\nu_p - \nu_n) + \mathcal{L}_b^2(\nu_p - \nu_n) \}] \\
\zeta_{n,\mu\rho\sigma}^{b,\alpha\beta} &= -H N_{2(\mu-n)} [\mathcal{L}_{ab}'(\omega - \frac{1}{2}\nu_\sigma^\beta - \frac{1}{2}\nu_n^\alpha) \{ \mathcal{L}_a^2(\nu_p - \nu_n) + \mathcal{L}_b^2(\nu_p - \nu_n) \} \\
&\quad + \mathcal{L}_{ab}^2(\omega - \frac{1}{2}\nu_\sigma^\beta - \frac{1}{2}\nu_n^\alpha) \{ \mathcal{L}_a'(\nu_p - \nu_n) + \mathcal{L}_b'(\nu_p - \nu_n) \}] \quad (35) \\
&\quad (\alpha, \beta = \ell, r) \\
\psi^{\alpha\beta} &= (\nu_\mu^\alpha - \nu_p^\beta + \nu_\rho^\beta - \nu_n^\alpha) t + (\phi_\mu^\alpha - \phi_p^\beta + \phi_\rho^\beta - \phi_n^\alpha) \\
&\quad (\alpha, \beta = r, \ell) \\
\mathcal{L}_\alpha'(\omega) &= \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\alpha^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}_\alpha^2(\omega) = \frac{\omega}{\gamma_\alpha^2 + \omega^2}, \quad (\alpha = a, b, ab)
\end{aligned}$$

$$H = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \nu (\delta^4 / (\hbar^3 \epsilon_0 K u))$$

$$\Delta, Y_a, Y_b, Y_{ab} \gg \nu_\mu^0 - \nu_p^0 + \nu_\rho^0 - \nu_n^0 \approx 0, \mu - \rho + \sigma - n = 0 \quad \text{τの} \beta \text{と} \sigma \text{の} \Delta$$

$$\mathcal{D}(-\frac{1}{2}\nu_\mu - \frac{1}{2}\nu_\rho + \nu_p) \cong \mathcal{D}(\frac{1}{2}\nu_p - \frac{1}{2}\nu_n)$$

$$\mathcal{D}(\omega - \frac{1}{2}\nu_\mu + \frac{1}{2}\nu_p - \nu_n) \cong \mathcal{D}(\omega - \frac{1}{2}\nu_\sigma - \frac{1}{2}\nu_n)$$

∴  $\tau = 0$

(21)式及(34)式を(8)式に代入すると、第三次近似までの"リング"レーザの基礎方程式が得られる。

### 3. モード競合と位相同期

#### 3.1. 単一方向一モード動作

Faraday rotator 等の非可逆素子を用いる事によって、單一方向発振が実現できる。特に、一モード動作の場合の方程式は、前節の結果より、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1^{\ell} &= \alpha_1^{\ell} E_1^{\ell} - \beta_1^{\ell} E_1^{\ell 2} \\ \dot{v}_1^{\ell} + \dot{\phi}_1^{\ell} - \Omega_1^{\ell} &= \sigma_1^{\ell} + \rho_1^{\ell} E_1^{\ell 2} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

但し、

$$\alpha_1^{\ell} = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{Q_1^{\ell}} \right) \left\{ \frac{Z_i(v_1^{\ell} - \omega)}{Z_i(0)} \mathcal{N}^{\ell} - 1 \right\}$$

$$\beta_1^{\ell} = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \nu \left( \frac{P^{\ell}}{(\epsilon_0 k^3 K u)} \right) N_0 \frac{1}{Y_{ab}} \left( \frac{1}{Y_a} + \frac{1}{Y_b} \right)$$

$$\sigma_1^{\ell} = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{Q_1^{\ell}} \right) \frac{Z_r(v_1^{\ell} - \omega)}{Z_i(0)} \mathcal{N}^{\ell}$$

$$\rho_1^{\ell} = 0$$

(36)式より、発振周波数のずれは、unsaturated gain curve の dispersion による mode pulling のみで、発振強度に依存する mode pushing は存在しない。また、定常発振強度は、

$$(E_1^{\ell})^2 = \frac{\alpha_1^{\ell}}{\beta_1^{\ell}} \propto \left\{ \frac{Z_i(v_1^{\ell} - \omega)}{Z_i(0)} \mathcal{N}^{\ell} - 1 \right\} \quad (37)$$

となり、unsaturated gain curve の中のこの発振強度からわかる。

#### 3.2. 単一方向二モード動作におけるモード競合

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1^{\ell} &= \alpha_1^{\ell} E_1^{\ell} - \beta_1^{\ell} E_1^{\ell 2} - \theta_{12}^{\ell} E_1^{\ell} E_2^{\ell 2} \\ \dot{E}_2^{\ell} &= \alpha_2^{\ell} E_2^{\ell} - \beta_2^{\ell} E_2^{\ell 2} - \theta_{21}^{\ell} E_2^{\ell} E_1^{\ell 2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

但し、

$$\theta_{12}^a = \theta_{21}^a \\ = \frac{1}{\delta} \nu (\rho^a / (\hbar^3 \epsilon_0 k u)) N_0 \frac{1}{Y_{ab}^2 + (\Delta/2)^2} \left\{ Y_{ab} \left( \frac{1}{Y_a} + \frac{1}{Y_b} \right) + \frac{Y_{ab} Y_a - \frac{\Delta^2}{2}}{Y_a^2 + \Delta^2} + \frac{Y_{ab} Y_b - \frac{\Delta^2}{2}}{Y_b^2 + \Delta^2} \right\}$$

この形の非線形方程式の定常解とその安定条件は付録に示す通りである。He-Ne レーザにおいて、モード間隔  $\Delta \approx 40 \text{ MHz}$  程度以上であると、

$$\beta_1^a = \beta_2^a > \theta_{12}^a = \theta_{21}^a$$

よって、

$$\beta_1^a \beta_2^a - \theta_{12}^a \theta_{21}^a > 0$$

となり、二つのモード間の結合は weak coupling であり、双対状態は存在しない。利得曲線に対する二つのモードの配置があまり非対称でない限り、二モード共鳴である。 $\Delta \approx 0$  のときは、

$$\theta_{12}^a = \theta_{21}^a \approx 2\beta_1^a = 2\beta_2^a$$

となるので strong coupling となり、双対状態が存在する。

### 3.3. 双方向ニモード動作における位相同期

$$(\omega_1^\ell + \dot{\phi}_1^\ell - \Omega_1^\ell) E_1^\ell = \eta_1^\ell E_1^\ell + \rho_1^a E_1^{\ell 3} + \tau_{12}^a E_1^\ell E_2^{\ell 2} + \tau_{11}^b E_1^\ell E_1^{r 2} + \tau_{12}^b E_1^\ell E_2^{r 2} \\ + (\xi_{1,221}^b \cos \psi_{2211}^{er} - \eta_{1,221}^b \sin \psi_{2211}^{er}) E_2^\ell E_2^r E_1^r$$

$$(\omega_2^\ell + \dot{\phi}_2^\ell - \Omega_2^\ell) E_2^\ell = \eta_2^\ell E_2^\ell + \rho_2^a E_2^{\ell 3} + \tau_{21}^a E_2^\ell E_1^{\ell 2} + \tau_{22}^b E_2^\ell E_2^{r 2} + \tau_{21}^b E_2^\ell E_1^{r 2} \\ + (\xi_{2,112}^b \cos \psi_{1122}^{er} - \eta_{2,112}^b \sin \psi_{1122}^{er}) E_1^\ell E_1^r E_2^r$$

$$(\omega_1^r + \dot{\phi}_1^r - \Omega_1^r) E_1^r = (\text{上式 } \tau^r \cdot \ell \leftrightarrow r)$$

$$(\omega_2^r + \dot{\phi}_2^r - \Omega_2^r) E_2^r = (\text{上式 } \tau^r \cdot \ell \leftrightarrow r) \quad (39)$$

但し、

$$\rho_n^a = 0, \quad \tau_{nm}^a = \xi_{n,nmm}^a + \xi_{n,mnn}^a, \quad \tau_{nm}^b = \xi_{n,nmm}^b$$

$$\psi_{2211}^{er} = (\omega_1^\ell - \omega_2^r + \omega_r^r - \omega_n^\ell) t + (\phi_u^\ell - \phi_p^r + \phi_o^r - \phi_n^\ell) = -\psi_{1122}^{er} = -\psi_{2211}^{rr} = \psi_{1122}^{rl} \equiv \psi$$

であるから、(39)式より

$$\psi = A + B \cos \psi + C \sin \psi \quad (40)$$

が得られる。但し、 $A, B, C$  は、 $E_n^{\ell}, E_n^r, \omega, \nu_1^{\ell}, \nu_1^r, \omega$  の関数である。 $|A| < \sqrt{B^2 + C^2}$  の場合、 $\{\nu_1^{\ell} + \dot{\phi}_1^{\ell}\} - \{\nu_2^{\ell} + \dot{\phi}_2^{\ell}\}$  と  $\{\nu_1^r + \dot{\phi}_1^r\} - \{\nu_2^r + \dot{\phi}_2^r\}$  とが "phase lock" する。

### 3.4. 双方向一モード動作におけるモード競合

双方向一モード動作は複合共振器を用いる事によって実現できる。さうに、Faraday rotator を用いる事により、両進行波の周波数間隔を  $n\Delta$  ( $\Delta$ :主共振器のモード間隔) にとる事ができる。<sup>(16)</sup>

$$\dot{E}_1^{\ell} = \alpha_1^{\ell} E_1^{\ell} - \beta_1^a E_1^{\ell 2} - \theta_{11}^b E_1^{\ell} E_1^{r 2} \quad (41)$$

$$\dot{E}_1^r = \alpha_1^r E_1^r - \beta_1^a E_1^{r 2} - \theta_{11}^b E_1^r E_1^{\ell 2}$$

従し、

$$\theta_{11}^b = \beta_1^a \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \nu_0}{\gamma_{ab}}\right)^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_1^{\ell} + \nu_1^r}{2}$$

この形の非線形微分方程式の定常解とその安定条件は、付録に示す通りである。双安定の条件が成り立つとき、 $\alpha, \beta > 0$  であるから、

$$(\beta_1^a)^2 - (\theta_{11}^b)^2 < 0 \quad (42)$$

が成り立つ。しかし、(41)式の場合、常に、

$$(\beta_1^a)^2 - (\theta_{11}^b)^2 > 0 \quad (43)$$

である。よって、この場合、双安定状態は存在しない。

$$\omega - \nu_0 = \delta, \quad (\nu_1^r - \nu_1^{\ell})/2 = \Delta\nu$$

とき、

$$\delta/\kappa u \lesssim 10^{-3}, \quad \Delta\nu/\kappa u \lesssim 10^{-1}, \quad \gamma_{ab}/\kappa u \approx 6 \times 10^{-2}$$

として、安定条件を計算すると、

$$\alpha_1^{\ell} \beta_1^a - \theta_{11}^b \alpha_1^r \propto \left\{ \left(1 - \frac{1}{\pi^r}\right) - \left(\frac{\Delta\nu}{\kappa u}\right)^2 \right\} \left(\frac{\kappa u}{\gamma_{ab}}\right)^2 \left(\frac{\delta}{\kappa u}\right)^2 - 4 \frac{\Delta\nu}{\kappa u} \left\{ 1 - \left(\frac{\Delta\nu}{\kappa u}\right)^2 \right\} \cdot \frac{\delta}{\kappa u} + \frac{1}{\pi^r} - \frac{1}{\pi^r} \quad (44)$$

となる。 $\delta/\kappa u$  が十分大きいとき (但し、 $\delta > 0, \Delta\nu > 0, \pi^r \approx \pi^{\ell}$ )

$$\alpha_1^{\ell} \beta_1^a - \theta_{11}^b \alpha_1^r < 0$$

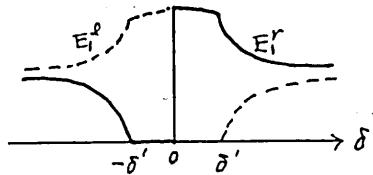
となるから、 $E_i^l = 0$  となり、片方の進行波 ( $E_i^r$ ) だけの発振となる。

特に、 $\pi^l = \pi^r$  の場合。

$0 < \delta < \delta'$  のとき、單一方向一モード発振  
 $\delta > \delta'$  のとき、双方向一モード発振

但し、

$$\frac{\delta'}{\Delta\nu} = -\frac{4\left\{1 - \left(\frac{\Delta\nu}{ku}\right)^2\right\}}{1 - \frac{1}{n} - \left(\frac{\Delta\nu}{ku}\right)^2} \left(\frac{Y_{ab}'}{ku}\right)^2$$



(例)

$$\frac{\Delta\nu}{ku} = 1 \times 10^{-2}, \frac{Y_{ab}'}{ku} = b \times 10^{-2}, n = 1.07 \text{ のとき } \frac{\delta'}{\Delta\nu} = 0.016,$$

$$\Delta\nu = 10 \text{ MHz} \text{ とする} \text{ と, } \delta' = 160 \text{ kHz} \text{ となる。}$$

## 付録

一般に、次式で表わされる非線形微分方程式の定常解とその安定条件は次表に示す通りである。<sup>(15)</sup> (但し、 $\alpha, \beta > 0$  とする)

$$\dot{E}_i = \alpha_i E_i - \beta_i E_i^3 - \theta_{ij} E_j E_i^2$$

$$\dot{E}_j = \alpha_j E_j - \beta_j E_j^3 - \theta_{ji} E_i E_j^2$$

	安定条件	定常値 ( $E_i, E_j$ )
单一モード発振	$A_{ij} < 0$	$(\alpha_i/\beta_i, 0)$
	$A_{ij} < 0$	$(0, \alpha_j/\beta_j)$
二モード発振	$A_{ij} > 0, A_{ji} > 0, C_{ij} > 0$	$(A_{ij}/C_{ij}, A_{ji}/C_{ji})$
双 安 定	$A_{ij} < 0, A_{ji} < 0$	$(\alpha_i/\beta_i, 0), (0, \alpha_j/\beta_j)$

$$\text{但し, } A_{ij} = \alpha_i \beta_j - \theta_{ij} \alpha_j, C_{ij} = \beta_i \beta_j - \theta_{ij} \theta_{ji}.$$

## 文献

- 1) W.E. Lamb, Jr., "Theory of an Optical Maser," Phys. Rev., vol. 134, p A1429 (1964)
- 2) W.E. Mack et al., "Ring Laser Rotation Rate Sensor," Proc. Symposium on Optical Masers, (1963) p 199
- 3) W.E. Mack et al., "Ring Laser Rotation Rate Sensor," III International Congress of Quantum Electronics (1964)
- 4) W.E. Mack et al., "The Ring Laser," Proc. Symposium on Modern Optics (1967) p 389.
- 5) B.K. Garside, "Mode Spectra in Ring and Normal Lasers," IEEE J. Quantum Electronics, vol. QE-4 p 940 (1968)
- 6) B.K. Garside, "Mode Pulling in Ring Lasers" IEE J. Quantum Electronics, vol. QE-5, p 97 (1969)
- 7) F. Aronowitz, "Theory of a Traveling-Wave Optical Maser," Phys. Rev., vol. 139, p A635 (1965)
- 8) J.J. Hutchings et al., "Amplitude and Frequency Characteristics of a Ring Laser," Phys. Rev., vol. 152 p 467 (1966)
- 9) H. de Lang, "Derivation of the Relation between Two Weakly Coupled Nonlinear Optical Oscillators," Appl. Phys. letters, vol. 9, p. 205 (1966)
- 10) F. Aronowitz, R.J. Collins, "Mode Coupling due to back-scattering in a He-Ne Traveling-Wave Ring Laser," Appl. Phys. Lett., vol 9, p 55 (1966)
- 11) 宮下,池上, "1) リンガーレーザーの強制AMモード" 河内昭和45年電気回路会連合大会
- 12) Bagaev et al., "The polarization of radiation and the frequency characteristics of ring lasers with a triangular resonator," Opt. Spectra. USSR, p 768 (1966)
- 13) Balenov, "Interaction of traveling waves in a ring laser," JETP Lett. vol. 3, p 54 (1966)
- 14) J. Killpatrick, "The laser gyro," IEEE Spectrum October (1963), p 44
- 15) 福井,宮下,伊東,池上, "3,4モードリザーバーの安定解,  $\omega = \pi/2$ ," 量子工学トピックス研究会資料, 1967年6月
- 16) P.W. Smith, "Stabilized Single-Frequency Output from a Long Ring Laser," IEEE J. Quantum Electronics vol. QE-4, p 485 (1968)

輻射科學研究會資料

二つの発振器の電力合成と  
雑音遮減について

池上 淳一  
中島 将光  
(京都大学工学部)

1970年1月30日

## 二つの発振器の電力合成と 雑音遮減について

### §1. はじめに

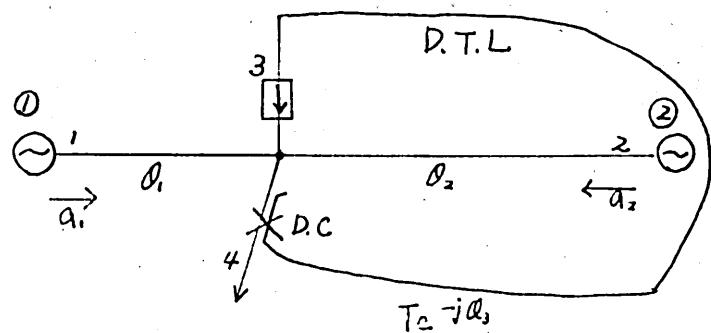
最近、ガンダイオード、IMPATT、ダイオードなどのマイクロ波固体発振素子が開発研究されている。これらの素子は簡単にマイクロ波を発生するという点で優れているが、出力電力が小さいこと、(FM)雑音が大きいことが、次に解決すべき問題であると思われる。出力電力を大きくするために、二個以上の素子を同時に発振動作させることが種々試みられ、又、安定な標準周波数に同期させるによって、雑音の遮減化もはかられている。

この小論は、FM雑音の多い二つの発振器を適当な回路素子を用いて相互同期させた場合、出力の合成と雑音の遮減に關し、その動作を簡明に考察したものである。

### §2. 回路について

図Iのようにマジック・ティーM.T.の両腕①②にFM雑音の多い、二つの発振器を接続し、腕④から同期出力が得られることに關する研究は、福井氏によつて詳細になされた[1]。④の出力の一部を方向性結合器によつてとりだし、適当な長さの遅延線D.T.L.を通じてM.T.の端子③に入れ、回路条件を適当に選定すれば、FM雑音の減少した合成電力

が、④の端子より  
とりだすこととする。  
する。



図I. 相互同期雑音遮断回路

### §3 回路解析の方法

発振素子の種類により、動作は相当異なると思われるが、現在のマイクロ波発振素子は大まかにえって、負性抵抗素子をもつた共振回路におけることしかできない。負性抵抗による発振器は外部回路状態の影響を受けやすく、特に二つの能動素子がある場合は、その振舞は微妙で一概に論じ難くなる。以下の解析は上記の回路動作の原理を把握することを目的として、二つの発振器の結合が余り大きくならないとして[方向性結合器の結合度が小さい]、遅延線での損失が大きい場合に対応]、簡潔に行なう。このときアドラー-[2]の式、或いは類似の式が成立するので、これを用いては簡単である。又、マイクロ波回路の解析には、シグナル・フロー・グラフ[3]による方法を用いると便利である。

#### さて、発振器

①に於ける入る波を  
 $a_1$ 、入る波を  $b_1$ 、②  
に於けるそれと  
夫々  $a_2$ 、 $b_2$  とすると、  
図Iのシグナル・フロー  
グラフは図2のよう  
にかくことができる。

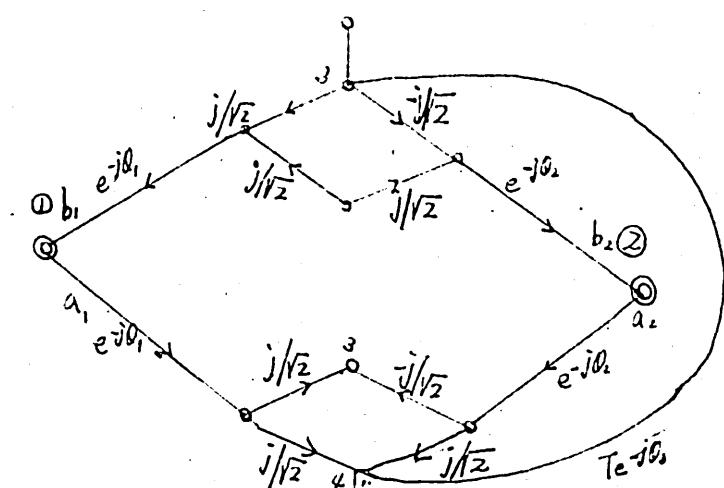


図2 シグナル・フロー・グラフ

## S4 一個の発振器について

先ず一個の発振器について考える。アドラーの式は

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{E_s}{AE} \sin \alpha + \omega_0 - \omega_s \quad (1)$$

である[附録A参照]。ここに、 $\omega_s$ : 外部信号の角周波数、 $\omega_0$ : 発振器の自由振動角周波数、 $\alpha$ : 発振出力とト漏電圧との位相差、 $E_s$ : 外部信号電圧、 $E$ : 発振出力電圧である。

今、発振器が外部信号に同期している場合を考え、発振器のFM雑音の原因として、(1)式で  $\omega_0$  が時間的に

$$\omega_0(t) = \omega_0 + \Delta \omega_0(t) \quad (2)$$

のように変化するものとする。左と右の二つの角周波数の変動は  $d\alpha/dt$  であるが、アドラーの式自身、準静的に成り立つものであり、以下議論は、従ってこの式が成立する範囲にある。(2)式は基づいて、位相差  $\alpha$  を

$$d(t) = d + \Delta d(t) \quad (3)$$

とおき、変動分  $\Delta d$  小さいとすれば、変動分  $\Delta d$  に対して

$$\frac{d\Delta d(t)}{dt} = -\frac{E_s}{AE} \cos \alpha \cdot \Delta d(t) + \Delta \omega_0(t) \quad (4)$$

を得る。これをフーリエ変換すれば

$$j\Omega \Delta d(\Omega) = -B_1 \cos \alpha \cdot \Delta d(\Omega) + \Delta \omega_0(\Omega) \quad (5)$$

ここで

$$B_1 = E_s / AE \quad (6)$$

従って周波数変動分  $d\alpha/dt$  のパワースペクトラムは

$$|j\Omega \Delta d|^2 = \frac{\Omega^2}{B_1^2 \cos^2 \alpha + \Omega^2} |\Delta \omega_0|^2 \quad (7)$$

(7)式は回路定数の揺動が出力FM雑音と(2)の式に表されると示して居り、左の係数を  $\Omega$  に対してプロットすると図3を得る[4]。

次の準備として、

(1) 式の電圧に(関1  
7, 複素表示を行ふ)。

$$\begin{aligned} & E_s \cos \varphi_s(t) \\ & = R_e E_s e^{j\varphi_s(t)} \\ & = R_e \dot{E}_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E \cos \varphi(t) \\ & = R_e E e^{j\varphi(t)} = R_e \dot{E} \end{aligned}$$

とおくとき

$$\alpha(t) = \varphi(t) - \varphi_s(t)$$

であるから、(1)式は

$$\frac{d\alpha}{dt} + \omega_s = -\frac{-j}{2A} \left( \frac{E_s}{E} - \frac{E_s^*}{E^*} \right) + \omega_0 \quad (10)$$

と表わされる[詳細については(1)付録Aを参照]。

### §5 二個の発振器について

結合線路の特性インピーダンスを $Z_0$ とすると

$$a_1 \propto E_1 / 2\sqrt{Z_0}, \quad b_1 \propto E_s / 2\sqrt{Z_0}, \text{ etc.} \quad (11)$$

であるから、 $\rightarrow$ の発振器には

$$\frac{da_1}{dt} + \omega_s = \frac{-j}{2A_1} \left( \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1^*}{a_1^*} \right) + \omega_1 \quad (12)$$

$$\frac{da_2}{dt} + \omega_s = \frac{-j}{2A_2} \left( \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_2^*}{a_2^*} \right) + \omega_2 \quad (13)$$

が成立する。ここに $\omega_s$ は  $da_1/dt$ ,  $da_2/dt$  の時間平均が零となるようにえらぶるものとす。又

$$a_1 = |a_1| e^{j(\omega_s t + d_1)}, \quad a_2 = |a_2| e^{j(\omega_s t + d_2)} \quad (14)$$

$$\frac{\Omega^2}{B_1^2 C_0 \omega^2 A + \Omega^2}$$

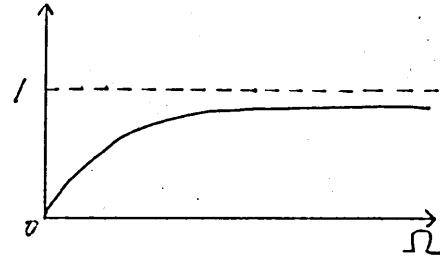


図3. FM雑音遮減度のスペクトラム

(8)

(9)

-

(10)

[詳細については(1)付録Aを参照]。

であるから、(12) 式より  $b_1$  を求めると

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 e^{-j\theta_{11}} j/\sqrt{2} \cdot T e^{-j\theta_{31}} \cdot j/\sqrt{2} \cdot e^{j\theta_{11}} \\ &\quad + a_2 e^{-j\theta_{22}} j/\sqrt{2} \cdot T e^{-j\theta_{22}} \cdot j/\sqrt{2} \cdot e^{j\theta_{12}} \\ &= -\frac{T}{2} e^{j\omega_s t} \left\{ |a_1| e^{j(d_1 - 2\theta_{11} - \theta_{31})} + |a_2| e^{j(d_2 - \theta_{12} - \theta_{22} - \theta_{32})} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、第一項中の位相  $(-2\theta_{11} - \theta_{31})$  は  $\omega_s + dd_1/dt$  の関数である。第二項中の位相  $(-\theta_{12} - \theta_{22} - \theta_{32})$  は  $\omega_s + dd_2/dt$  の関数である。

同様に

$$b_2 = \frac{T}{2} e^{j\omega_s t} \left\{ |a_1| e^{j(d_1 - \theta_{21} - \theta_{11} - \theta_{31})} + |a_2| e^{j(d_2 - 2\theta_{22} - \theta_{32})} \right\} \quad (16)$$

以後、二つの発振器は全（同様にすると）、 $|a_1| = |a_2| = |a|$ 、  
 $A_1 = A_2 = A$  とすると、(14), (15), (16) 式より  $\omega_1 = \omega_2$ 、(12), (13) 式より

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} + \omega_s &= B \left\{ -\sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_{12} - \theta_{22} - \theta_{32}) \right. \\ &\quad \left. + \sin(2\theta_{11} + \theta_{31}) \right\} + \omega_1 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dt} + \omega_s &= B \left\{ \sin(\theta_1 - \theta_2 - \theta_{11} - \theta_{21} - \theta_{31}) \right. \\ &\quad \left. - \sin(2\theta_{22} + \theta_{32}) \right\} + \omega_2 \end{aligned} \quad (18)$$

と成る。

したがって

$$B = T/2A \quad (19)$$

## §6 同期

定常状態

$$\frac{da_1}{dt} = 0, \quad \frac{da_2}{dt} = 0, \quad \theta_{12} = \theta_{11} = \theta_1, \quad \text{etc.} \quad (20)$$

を考慮して、(17), (18) 式より

$$\omega_s = B \{ -\sin(\phi_2 - \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) + \sin(2\theta_1 + \theta_3) \} + \omega_1 \quad (21)$$

$$\omega_s = B \{ \sin(\phi_1 - \phi_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) - \sin(2\theta_2 + \theta_3) \} + \omega_2 \quad (22)$$

上式より  $(\phi_2 - \phi_1)$  を消去すると

$$\left\{ \frac{2\omega_s - \omega_1 - \omega_2}{2B \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} - \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2 = 1$$

$$-\left\{ \frac{\omega_2 - \omega_1}{2B \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} - \cos(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2$$

これより両発振器の自由振動角周波数差  $\omega_1 - \omega_2$  は

$> B \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 \}$  と  $2B \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + 1 \}$  の間にあれば、同期がこれることを知る。

$$\theta_1 - \theta_2 = (2na + 1)\pi/2 \quad (23)$$

のとき、同期範囲は

$$|\omega_1 - \omega_2| < 2B |\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)| \quad (24)$$

とかける。これより、位相  $(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$  が  $\pi/2$  の奇数倍に等しいとき、 $\omega_p$  は

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = (2nb + 1)\pi/2 \quad (25)$$

のとき、最も同期範囲が広く、 $(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$  が  $\pi/2$  の偶数倍のときは、同期がない事を知る。又、同期あるときの両発振器の位相差は

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2B \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} - \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \pm \sqrt{1 - \left\{ \frac{\omega_2 - \omega_1}{2B \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} - \cos(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2} \quad (26)$$

で与えられる。よって、 $\Rightarrow$  の発振状態が存在する事が判る。

(26) 式には対応して発振周波数は

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + B \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ &\times \left[ \sin(\theta_1 - \theta_2) \pm \sqrt{1 - \left\{ \frac{\omega_2 - \omega_1}{2B \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} - \cos(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

で与えられる。

### §7 出力(同期状態)

図2のシグナル・フロー・グラフによると、出力波は

$$\begin{aligned} b_{out} &= a_1 e^{j\phi_1} j/\sqrt{2} + a_2 e^{-j\phi_2} j/\sqrt{2} \\ &= (j/\sqrt{2}) |a| e^{jw_0 t} \{ e^{j(d_1 - \theta_1)} + e^{j(d_2 - \theta_2)} \} \end{aligned} \quad (28)$$

従って

$$d_1 - d_2 - \theta_1 + \theta_2 = 2n_0 \pi \quad (29)$$

のとき

$$|b_{out}|^2 = 2 |a|^2 \quad (30)$$

つまり、両発振器出力は完全合成され、 $d_1 - d_2 - \theta_1 + \theta_2$  が  $\pi/2$  の奇数倍のとき、出力は打ち消される。

### §8 出力信号の雜音

発振器より生ずるFM雑音の原因とて、自由角振動周波数 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ が時間的に

$$\omega_1(t) = \omega_1 + \Delta \omega_1(t), \quad \omega_2(t) = \omega_2 + \Delta \omega_2(t) \quad (31)$$

のように変化するものとし、夫々の発振器の位相変動を

$$\alpha_1(t) = \alpha_1 + \Delta \alpha_1(t), \quad \alpha_2(t) = \alpha_2 + \Delta \alpha_2(t) \quad (32)$$

と表わす。このとき、出力波は (29)式を援用[出力最大の場合]変動幅が小さいとする

$$\begin{aligned} b_{out} &= \frac{j}{\sqrt{2}} |a| e^{jw_0 t} \{ e^{j(d_1 + \Delta d_1 - \theta_1)} + e^{j(d_2 + \Delta d_2 - \theta_2)} \} \\ &\approx j\sqrt{2} |a| e^{j\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2}{2}} e^{j\{\omega_0 t + \frac{\Delta \alpha_1(t) + \Delta \alpha_2(t)}{2}\}} \end{aligned} \quad (33)$$

と表わすことができる。 $\{\Delta\alpha_1(t) + \Delta\alpha_2(t)\}/2$  が位相の時間変動を表し、この時間微分が FM 雑音を表す。

さて、二つの発振器が同期する状態(20)にあるとして、(31), (32)式と (17), (18)式に代入すると

$$\frac{d\Delta\alpha_1(t)}{dt} + \omega_s = B \left\{ -\sin(\alpha_2 - \alpha_1 + \Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1 - \theta_{12} - \theta_{22} - \theta_{32}) \right. \\ \left. + \sin(2\theta_{11} + \theta_{31}) \right\} + \omega_1 + \Delta\omega_1 \quad (34)$$

$$\frac{d\Delta\alpha_2(t)}{dt} + \omega_s = B \left\{ \sin(\alpha_1 - \alpha_2 + \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 - \theta_{11} - \theta_{21} - \theta_{31}) \right. \\ \left. - \sin(2\theta_{22} + \theta_{32}) \right\} + \omega_2 + \Delta\omega_2 \quad (35)$$

ここで  $\theta_{12}, \theta_{22}$  は  $\omega_s + d\Delta\alpha_2/dt$  の関数であるが、 $\theta_1, \theta_2$  の周波数依存性は小さいと見て  $[\omega_s \gg d\Delta\alpha_2/dt, d\Delta\alpha_1/dt]$  を視し、  
 $\theta_{12} = \theta_1 (\omega_s + d\Delta\alpha_2/dt) \approx \theta_1 (\omega_s) = \theta_1$ , etc (36)  
 とおく。又  $\theta_3$  の周波数依存性は大きいものと見らる故

$$\theta_{32} = \theta_3 (\omega_s + d\Delta\alpha_2/dt) \approx \theta_3 (\omega_s) + \frac{d\theta_3(\omega_s)}{d\omega_s} \cdot \frac{d\Delta\alpha_2}{dt} \\ = \theta_3 + \Delta\alpha_2 \theta'_3, \text{ etc.} \quad (37)$$

とおく。但し、 $\overset{\circ}{\equiv} d/dt$ 。  
 (21), (22)式より定常項を除去し、  
 変動分だけを取ると、(34), (35)式は

$$\overset{\circ}{\Delta\alpha}_1 = B \left\{ \overset{\circ}{\Delta\alpha}_1 \theta'_3 \cos(2\theta_1 + \theta_3) - (\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1 - \overset{\circ}{\Delta\alpha}_2 \theta'_3) \right. \\ \left. \times \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \right\} + \Delta\omega_1 \quad (38)$$

$$\overset{\circ}{\Delta\alpha}_2 = -B \left\{ \overset{\circ}{\Delta\alpha}_2 \theta'_3 \cos(2\theta_2 + \theta_3) - (\Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 - \overset{\circ}{\Delta\alpha}_1 \theta'_3) \right. \\ \left. \times \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \right\} + \Delta\omega_2 \quad (39)$$

このランダム時間関数と (41) を変換すると

$$\{j\Omega - B \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) - j\Omega \theta'_3 B \cos(2\theta_1 + \theta_3)\} \Delta\alpha_1(\Omega) \\ + B(1 - j\Omega \theta'_3) \times \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \Delta\alpha_2(\Omega) = \Delta\omega_1(\Omega) \\ (40)$$

$$\begin{aligned} & \{j\Omega + B \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) + j\Omega \theta'_3 B \cos(2\theta_2 + \theta_3)\} \Delta \alpha_2 (\Omega) \\ & - B(1-j\Omega \theta'_3) \times \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \Delta \alpha_1 (\Omega) = \Delta \omega_2 (\Omega) \end{aligned} \quad (41)$$

これより、出力変動周波数  $\Delta \{\Delta \alpha_1(t) + \Delta \alpha_2(t)\}/2dt$  のスペクトルを求める

$$\begin{aligned} & j\Omega \{\Delta \alpha_1 (\Omega) + \Delta \alpha_2 (\Omega)\} / 2 \\ & \{j\Omega + j\Omega B \theta'_3 \cos(2\theta_2 + \theta_3) + B(2-j\Omega \theta'_3) \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3)\} \Delta \omega_1 (\Omega) \\ & + \{j\Omega - j\Omega B \theta'_3 \cos(2\theta_2 + \theta_3) - B(2-j\Omega \theta'_3) \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3)\} \Delta \omega_2 (\Omega) \\ & = \frac{j\Omega}{2} \cdot \frac{\{j\Omega - j\Omega B \theta'_3 \cos(2\theta_1 + \theta_3) - B \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3)\}}{\{j\Omega + j\Omega B \theta'_3 \cos(2\theta_2 + \theta_3) + B \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3)\}} \\ & \times \{j\Omega + j\Omega B \theta'_3 \cos(2\theta_2 + \theta_3) + B \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3)\} \\ & + B^2 (1-j\Omega \theta'_3)^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \end{aligned} \quad (42)$$

簡単のため、系が理想的な状態、即ち両発振器の自由角振動周波数が等しく [ $\omega_1 = \omega_2, \Delta \omega \neq \Delta \omega_2$ ]、同期範囲が最も広く [(25)式]、最大出力が得られる [(29)式] 状態を考へると、このときの発振周波数は一回りに縮退し [(27)式] で  $\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0$ 、FM 雑音のスペクトルは

$$|j\Omega \frac{\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2}{2}|^2 = \frac{1}{\{1 + (-)^{n_a+n_b} 2B\theta'_3\}^2} \cdot \frac{|\Delta \omega_1|^2 + |\Delta \omega_2|^2}{2} \quad (43)$$

となる。但し、 $\Delta \omega_1(t)$  と  $\Delta \omega_2(t)$  とは独立と見てよい。

図 I に於いて、端子 ③④ を周波数特性のない天板、線路で結合した場合、即ち  $\theta'_3 \approx 0$  のときは

$$|j\Omega \frac{\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2}{2}|^2 = \frac{|\Delta \omega_1|^2 + |\Delta \omega_2|^2}{2} \quad (44)$$

となり、出力の FM 雑音は全く減少 (も増加) したこととなる。従って (43) 式の前の系数  $1/\{1 + (-)^{n_a+n_b} 2B\theta'_3\}^2$  は FM 雑音の減少の度合を示す (27) 式の一般形である。即ち  $n_a+n_b$  が偶数のとき、 $\theta'_3$  が大きくなる程、即ち遅延線が長い程、单调に FM 雑音が減少

少する二ことが判る。

尚、(43)式より、この雑音遮減は無雜音の信号へ同期させた場合[(7)式]と異なり、 $\alpha_3$ が一定ならば、周波数特性もしない( $\Omega$ に直角偏角)ことは注目すべきである。

### §9 FM雑音の改善度

遙延線としてカットオフ( $\omega_c$ )に近い長さの導波管を使用する場合を考えると

$$\alpha_3 = \beta l = (l/c) \cdot \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \quad (45)$$

であるから

$$\alpha'_3 = \frac{d\alpha_3}{d\omega} = \frac{l}{c} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad (46)$$

である。故に導波管がカットオフに近い程、長程 $\alpha'_3$ が大きくなり、雑音の改善度がよくなることがわかる。

- 531 x 17

$$n_a + n_b = \text{even}, \quad \omega/\omega_c = 1.05$$

$$l = 1/m, \quad B = 2\pi \times 30 \text{ MHz}$$

とすれば、 $2B\alpha'_3 = 4.12$ と計算し、雑音は

$$(1 + 2B\alpha'_3)^2 = 26.2 = 14.2 \text{ db}$$

改善される=といふこと。

### §10. まとめ

二つの発振器出力を同期させ、かつ発振器FM雑音を遮減させることについて概観した。更に具体的かつ詳細に検討する意義があると思われる。

## 文献

- [1] 池上・福井, "反射形クライストロンの相互同期引込現象", 信学誌, 49巻7号, PP. 1321 - 1328, 昭41-07.
- [2] R. Adler, "A Study of Locking Phenomena in Oscillators", Proc. IRE. vol. 34, PP. 351 - 357 June, 1946.
- [3] S. J. Mason, "Feedback Theory - Further Properties of Signal Flow Graphs", Proc. IRE. vol. 44 PP. 920 - 926, July, 1956.
- [4] 磯部・時田, "同期引込による発振器雑音の改善", 信学誌, 50巻11号, PP. 2093 - 2100, 昭42-11.

## 附録 A. マイクロ波回路におけるアドラーの式

図A1のように特性アドミタンス  $Y_0$  の伝送線に負性抵抗発振器を接続 (T=場合を考へる。この発振器へ入射する波と

$$b = \bar{b} e^{\lambda t + j\varphi_b(t)}$$

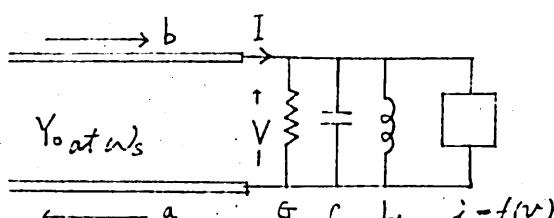
発振器より出る波を

$$a = \bar{a} e^{\lambda t + j\varphi_a(t)}$$

とすると、発振器の両端における電流、電圧  $I, V$

$$I = \sqrt{Y_0} (b - a) = \sqrt{Y_0} e^{\lambda t} (\bar{b} e^{j\varphi_b} - \bar{a} e^{j\varphi_a}) \quad (A_3)$$

$$V = (b + a) / \sqrt{Y_0} = \sqrt{Z_0} e^{\lambda t} (\bar{b} e^{j\varphi_b} + \bar{a} e^{j\varphi_a}) \quad (A_4)$$



図A1. 伝送線と負性抵抗・(A1)  
発振器

(A2)

瞬時電流、電圧

$$i = \frac{1}{\sqrt{2}} (I e^{j\omega_s t} + I^* e^{-j\omega_s t})$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} (V e^{j\omega_s t} + V^* e^{-j\omega_s t}) \quad (A5)$$

とおけるから、図 A1 の回路に於いて

$$i = Gv + C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int v dt + f(v) \quad (A6)$$

が成立する。今簡単のため非線形負性抵抗  $f(v)/v$  を等価的に線形抵抗とみなす

$$Gv + f(v) = G'v \quad (A7)$$

とおき、(A6) 式を微分すると

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2v}{dt^2} + G' \frac{dv}{dt} + \frac{v}{Z} \quad (A8)$$

(A8) 式は線形であるから、(A5) 式における  $i$ ,  $v$  が  $e^{j\omega_s t}$  の項と  $e^{-j\omega_s t}$  の項を別々に表すことはできる。従って一方のみとて、

$$i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{Y_0} (\bar{b} e^{j\varphi_b} - \bar{a} e^{j\varphi_a}) e^{(\lambda + j\omega_s)t} \quad (A9)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{Y_0}} (\bar{b} e^{j\varphi_b} + \bar{a} e^{j\varphi_a}) e^{(\lambda + j\omega_s)t} \quad (A10)$$

とおきなべてみる。これらを (A8) 式に代入すると

$$b[(\lambda + j\omega_s + j\varphi_b') \frac{Y_0 - G'}{C} - j\varphi_b'' - (\lambda + j\omega_s + j\varphi_b')^2 - \omega_0^2]$$

$$= a[(\lambda + j\omega_s + j\varphi_a') \frac{Y_0 + G'}{C} + j\varphi_a'' + (\lambda + j\omega_s + j\varphi_a')^2 + \omega_0^2] \quad (A11)$$

今、入力波  $a, b$  が時間的に変化しない(定常状態)場合

$$\varphi_a'(t) = \varphi_b'(t) = 0 \quad (A12)$$

を考へると

$$(\lambda + j\omega_s)^2 + \frac{\bar{a}(Y_0 + G') - \bar{b}(Y_0 - G')}{(\bar{a} + \bar{b})C} (\lambda + j\omega_s) + \omega_0^2 = 0 \quad (A13)$$

を得る。

振幅が時間的に変化しない ( $\omega = 0$ ) ため  $i = 1$

$$\bar{a}(Y_0 + G') - \bar{b}(Y - G') = 0$$

或は

$$G' = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{\bar{b} + \bar{a}} Y_0 \quad (A14)$$

であればよりことが判る。

さて、(A11)式に於いて、 $\omega = 0$  とき、その共役式との関係を用いて  $j\varphi_a'$  を消去すると

$$\begin{aligned} \omega_0 - \omega_s - 4\varphi_a' + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} + \frac{b^*}{a^*} \right) (\omega_0 - \omega_s - 4\varphi_b') \\ - j \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} - \frac{b^*}{a^*} \right) \left\{ \frac{Y_0 - G'}{2\omega_2 c} (\omega_s + 4\varphi_b') - \frac{4\varphi_b''}{2\omega_3} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (A15)$$

を得る。更に簡単化するために、アドラーのゼロく、

$$|b| \ll |a| \quad (A16)$$

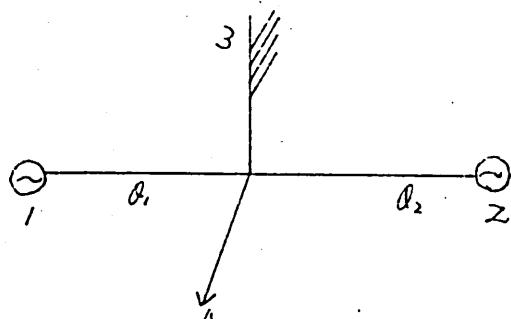
と仮定すると、(A14)式に注意して

$$\frac{d\varphi_a}{dt} + \omega_s = \frac{\omega_s}{j2\omega_{ext}} \left( \frac{b}{a} - \frac{b^*}{a^*} \right) + \omega_0 \quad (A17)$$

を得る。

## 附録B 標準マジックT結合発振器

福井氏によって詳細  
に研究された 図B1  
の回路の動作は、アドラ  
ーの式及びシグナルフロー  
グラフの方法を用いては、  
非常に簡潔に記述  
することができる。図  
B1 のシグナルフロー・グラフ



図B1 マジックT結合発振器

は図B2のようになる。このときのアドラー式は、本文と同様  
すなはち(17), (18)式に対応する式

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \omega_s = B' \{ \sin(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_{11} - \theta_{22} - \theta_{33}) \\ + \sin(2\theta_{11} + \theta_{33}) \} + \omega_1$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} + \omega_s = B' \{ \sin(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_{11} - \theta_{22} - \theta_{33}) \\ + \sin(2\theta_{11} + \theta_{33}) \} + \omega_2$$

が得られる。こには

$$B' = |T'| / 2A$$

前と同様、解釈

に付いて、系が同期する

ためには  $\omega_1 = \omega_2$  かつ

$$-2B' \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\times \{1 + \sin(\theta_2 - \theta_1)\}$$

$$+ 2B' \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\{1 - \sin(\theta_2 - \theta_1)\} = 0$$

すなはち  $\theta_1 = \theta_2$  とすれば

$$|\omega_1 - \omega_2| < 2B |\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)|$$

とおける。このときの発振位相差は

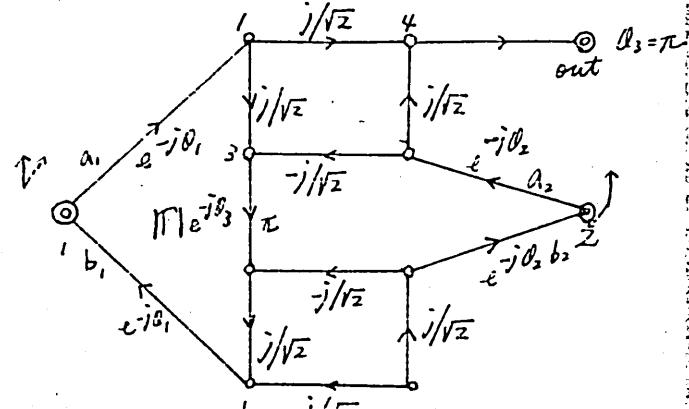
$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2B \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} + \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \pm \sqrt{1 - \left\{ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2B \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} + \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2}$$

であり、発振周波数は、上の二つの位相に応じて

$$\omega_s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + B \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\times \left[ \cos(\theta_1 - \theta_2) \mp \sqrt{1 - \left\{ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2B \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} + \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\}^2} \right]$$



図B2 ニグモル・フローラフ

である。

端子③に長い遅延線又は空胴同軸振器と接続すれば、本文とよく似た原理で FM 集音の遮蔽ができるのでないかと思われるが、以下の角解析によて、3台スピーカの効果がどうなことがわかる。集音による変動力を (31), (32) のように表し、変動力の方程式を作ると

$$\Delta \alpha_1 = B' \{ \Delta^\circ \alpha_1 \theta_3' \cos(2\theta_1 + \theta_3) + (\Delta \alpha_2 - \Delta \alpha_1 - \Delta^\circ \alpha_2 \theta_3') \\ \times \cos(\alpha_2 - \alpha_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \} + \Delta w_1$$

$$\Delta \alpha_2 = B' \{ \Delta^\circ \alpha_2 \theta_3' \cos(2\theta_2 + \theta_3) + (\Delta \alpha_1 - \Delta \alpha_2 - \Delta^\circ \alpha_1 \theta_3') \\ \times \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) \} + \Delta w_2$$

理想状態の条件

$$\omega_1 = \omega_2, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2n_b \pi \quad (\text{同期範囲最大})$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \theta_1 + \theta_2 = 2n_c \pi \quad (\text{最大出力})$$

有用な式

$$|\Im \frac{\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2}{2}|^2 = \frac{|\Delta w_1|^2 + |\Delta w_2|^2}{2}$$

がえられ、 $\theta_3'$  の効果は表れないと。

# ファウシュモトロンの位相選択 並びに能率について

楠 陽

松 尾 幸 人

(大阪大学・産業科学研究所)

昭和45年1月30日

輻射科学研究会資料

# ファウシュモトロンの位相選択

## 並びに能率について

楠 陽  
松 尾 幸 人

(大阪大学・産業科学研究所)

### § 1. あらまし

著者等はさきに単振動波と名付けた新しい電子ビーム波動を見付け、これと遅波構造を持たない伝送回路上の回路波との結合を用いたマイクロ波発振管が、電子同調型の極めて広帯域の発振特性を示すことを実験的に証明し、このような発振管をファウシュモトロンと名付けた。<sup>(1)(2)(3)(4)</sup>

A型ファウシュモトロンの動作で、電子の相互作用空間内の運動は Ma-thieu の微分方程式で表現されることを示し、動作領域並びに増巾系数等を与えた。<sup>(5)</sup>

一方、モード結合理論の観点から B型、C型ファウシュモトロンの動作について報告した。<sup>(2)</sup>

近年、ソ聯に於いても著者等と同じような発想に基づく、進行波ストロボトロンに関する数多くの理論並びに実験結果について報告されている。<sup>(6)~(9)</sup>

こゝでは B, C 型ファウシュモトロンの電子の相互作用空間内の運動について考察し、準線形微分方程式の解より位相選択並びに能率について導かれた結果について報告する。

## § 2. 相互作用空間内の電子の運動方程式

作用空間内の任意の点の  $DC$

電位は次式で与えられる。

$$V_0(x, y) = V_0 \left\{ \left( \frac{x}{l_0} \right)^2 - \left( \frac{y}{l_0} \right)^2 \right\}, \quad (1)$$

ここで  $V_0$  は  $DC$  陽極電位、又  $l_0$  は  
座標原点から陽極までの距離である。  
一方、振動電極間の  $RF$  電位

は

$$V_1(x, y, z, t) = \frac{4}{\pi} V_1(z) \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \cos(\omega t \pm \beta z + \varphi_0) \quad (2)$$

で与えられる。

$y$  方向の静磁界が充分に大きいとすると、電子の運動は  $x = \text{const}$  面にある  
と近似される。

$y$  方向の電子の運動方程式は次のように与えられる。

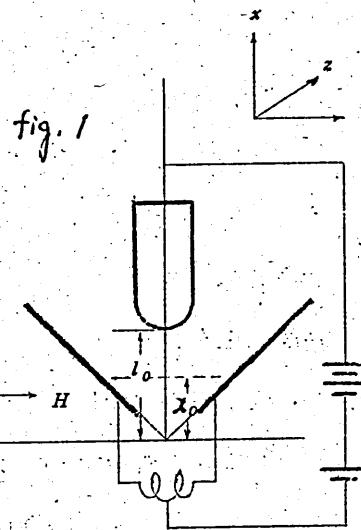
$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{2eV_0}{ml_0^2} y + \frac{4e}{m\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} V_1(z) \cos(\omega t \pm \beta z + \varphi_0), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y &= \frac{4e}{m\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} V_1(z) \cos(\omega t \pm \beta z + \varphi_0), \end{aligned} \quad (3)$$

ここで

$$\omega_0^2 = \frac{2eV_0}{ml_0^2} \quad (4)$$

で与えられる。

ファウシュモトロンのモード結合理論による解析で、<sup>(2)</sup>  $B$  型及び  $C$  型動作の同  
期条件は次式によって得られている。



B型  $\alpha - b = 0$  従って  $\omega t = \omega_0 t + \beta z$

C型  $2 - \alpha - b = 0$  //  $\omega t = \omega_0 t - \beta z$

こゝで

$$\alpha = \frac{\beta_0}{\beta_e}, \quad b = 1 - \frac{\beta_c}{\beta_e}, \quad \beta_0 = \frac{\omega_0}{u_0}, \quad \beta_e = \frac{\omega}{u_0}, \quad \beta_c = \frac{\omega}{v_p}$$

$u_0$  :  $z$  方向の電子の漂流速度

$v_p$  : 回路波の位相速度

従って運動方程式は次のように書直せる。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{4e}{m\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} V_1(z) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5)$$

今こゝで

$$u = \omega_0 t + \varphi_0$$

とおき、更に電子の振動面を  $x_0 = \text{const}$  面と仮定して、 $x_0 (= y_0)$  で規格化すると

$$\frac{d^2 \bar{y}}{du^2} + \frac{\bar{y}}{u^2} = \frac{AM(z)}{1 + \bar{y}^2} \cos u \quad (6)$$

のようく表わされる。こゝで

$$A = \frac{2I_0^2}{\pi y_0^2}, \quad M(z) = \frac{V_1(z)}{V_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{y_0} \quad (7)$$

とおいてある。式(6)は準線形の振動の微分方程式を示し、Kryloff と Bogoliuboff の方法を用いる。

外力によって電子の運動の多周期にわたっての変化を調べるために、短い時間の電子は一定の振幅、位相で振動しており、その振幅、位相が RF 電圧の影響を受けて徐々に変化すると仮定する。

それゆえ  $M(z) = 0$  の場合の解は

$$\bar{y} = Y \cos(u + \varphi) = Y \cos \varphi \quad (8)$$

$$\bar{y} = -Y \sin(u + \varphi) = -Y \sin \varphi \quad (9)$$

$$\varphi = u + \varphi \quad (10)$$

で与えられる。上述によって、 $Y$  と  $\varphi$  についてゆるやかな変化について調べる。即ち  $u$  の未知関数として  $\bar{Y}(u)$ ,  $\varphi(u)$  を考慮して、上式の形の解を見出す。

式(8)を微分して

$$\frac{d\bar{y}}{du} = \frac{dY}{du} \cos \varphi - Y \sin \varphi - Y \sin \varphi \frac{d\varphi}{du} \quad (11)$$

式(9)と式(11)より

$$\frac{dY}{du} \cos \varphi - Y \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{du} = 0 \quad (12)$$

の関係が補助的に成立つことが必要である。

式(9)を微分して

$$\frac{d^2\bar{y}}{du^2} = - \left[ \frac{dY}{du} \sin \varphi + Y \{ \cos \varphi + \cos \varphi : \frac{d\varphi}{du} \} \right] \quad (13)$$

を得る。式(8), (13)を式(6)に代入すると

$$\frac{dY}{du} \sin \varphi + Y \cos \varphi \frac{d\varphi}{du} = - \frac{AM(z)}{1 + Y^2 \cos^2 \varphi} \cos u \quad (14)$$

を得、さらに式(12)と式(14)を  $\frac{dY}{du}$  と  $\frac{d\varphi}{du}$  について解くと

$$\frac{dY}{du} = - \frac{AM(z)}{1 + Y^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi \cos u, \quad (15a)$$

$$Y \frac{d\varphi}{du} = - \frac{AM(z)}{1 + Y^2 \cos^2 \varphi} \cos \varphi \cos u \quad (15b)$$

を得る。  
○右辺

式(15)は周期函数であるからフーリエ級数に展開する。

$$\frac{AM(z) \sin \varphi \cos u}{1 + Y^2 \cos^2 \varphi} = \frac{P_0(Y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ P_n(Y) \cos n\varphi + P'_n(Y) \sin n\varphi \right]$$

$$\frac{AM(z) \cos \phi \cos u}{1 + Y^2 \cos^2 \phi} = \frac{Q_0(Y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [Q_n(Y) \cos n\phi + Q'_n(Y) \sin n\phi]$$

ここで正弦函数の多周期について、どのように変化するかを見るためにフーリエ級数の定数項のみをとると十分である。

$$P_0(Y) = \frac{AM(z)}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi \cos u}{1 + Y^2 \cos^2 \phi} d\phi ,$$

$$Q_0(Y) = \frac{AM(z)}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi \cos u}{1 + Y^2 \cos^2 \phi} d\phi$$

故に、式(15a), (15b)は次のように書ける。

$$\frac{dY}{du} = - \frac{AM(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi \cos u}{1 + Y^2 \cos^2 \phi} d\phi , \quad (16a)$$

$$Y \frac{d\varphi}{du} = - \frac{AM(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi \cos u}{1 + Y^2 \cos^2 \phi} d\phi , \quad (16b)$$

式(10)によって

$$\cos u = \cos(\phi - \varphi)$$

を考慮し、更に積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi \sin \phi}{1 + Y^2 \cos^2 \phi} d\phi = 0$$

の結果を用いると

$$\frac{dY}{du} = - \frac{AM(z) \sin \varphi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi}{1 + Y^2 \cos^2 \phi} d\phi , \quad (17a)$$

$$Y \frac{d\varphi}{du} = - \frac{AM(z) \cos \varphi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \phi}{1 + Y^2 \cos^2 \phi} d\phi , \quad (17b)$$

のように書ける。右辺の積分の結果

$$\frac{dY}{du} = - \frac{AM(z) \sin \varphi}{Y^2} (\sqrt{Y^2 + 1} - 1) \quad (18a)$$

$$Y \frac{d\varphi}{du} = - \frac{AM(z) \cos \varphi}{Y^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{Y^2 + 1}} \right) \quad (18b)$$

を得る。

従って式 (18a) と式 (18b) との連立微分方程式を解くことに帰着する。

こゝで (18a)  $\times Y \frac{d\varphi}{du}$  — (18b)  $\times \frac{dY}{du}$  をとると

$$Y \sin \varphi d\varphi - \frac{1}{\sqrt{Y^2 + 1}} \cos \varphi dY = 0$$

の変数分離形の微分方程式

$$\int \frac{dY}{Y - \sqrt{Y^2 + 1}} = \int \tan \varphi d\varphi + c \quad (19)$$

に導かれて、初期条件

$$Y = 1 \text{ で } \varphi = \varphi_0$$

即ち、電子は初期位相角  $\varphi_0$  で陰極点を放射する条件で解くと

$$\frac{Y}{\sqrt{Y^2 + 1} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1) \cos \varphi_0}{\cos \varphi} \quad (20)$$

を得る。

式 (20) より

$$\sin \varphi = (1 - \cos \varphi)^{\frac{1}{2}} = \left\{ 1 - \left( \frac{CY}{\sqrt{Y^2 + 1} - 1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

を得る；こゝで

$$C = (\sqrt{2} - 1) \cos \varphi_0$$

とおいてある。

式(21)の関係式を式 (18a) に代入すると

$$\frac{dY}{du} = \frac{AM(z) \{ (\sqrt{Y^2 + 1} - 1)^2 - C^2 Y^2 \}^{\frac{1}{2}}}{Y^2}$$

となり、電子の軌跡の包絡線を表す式は次のように与えられる。;

$$\int_1^Y \frac{Y^2 dY}{\{(Y^2 + 1 - 1)^2 - C^2 Y^2\}^{1/2}} = \int_0^u \mu M(z) dz$$

$$= A \beta_0 \int_{\varphi_0}^{\beta_0 z + \varphi_0} \frac{M(z) dz}{\beta_0} \quad (22)$$

上の積分式は解析的に解けるが、得られた結果は複雑で、こゝでは示さなかった。電算機による数値解の結果について、 $\varphi_0$ をパラメーターとして縦方向の推移に対する横方向の変位を図 2 に示す。

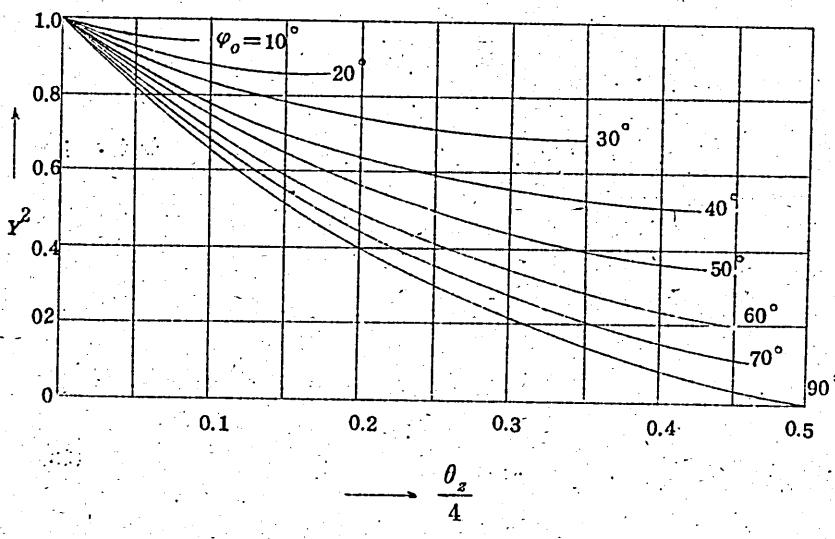


fig 2

上述のことから解るように、相互作用空間内の電子軌道を与える結果式は複雑で数値解が必要である。こゝで動作について見通しをよくするために、作用空間内の RF 電位の与え方が実際の場合とやゝ異なるが、問題の取扱いを簡単化するために、次のように RF 電位を与える。

$$V_1(x, y, z, t) = V_1(z) \left(\frac{y}{x}\right) \cos(\omega t \pm \beta z + \varphi_0)$$

途中の式の誘導を省略するが、前述の式 (18) に対応する式は

$$\frac{dY}{du} = -\frac{1}{2} \mu M(z) \sin \varphi \quad (18a')$$

$$Y \frac{d\varphi}{du} = -\frac{1}{2} \mu M(z) \cos \varphi \quad (18b')$$

のように得る。ここで  $\mu = \frac{i}{2} \left(\frac{\theta_z}{Y}\right)^2$

上式で  $u$  を消去し、電子が陰極点 ( $Y = 1$ ) を初期位相角  $\varphi = \varphi_0$  で放出するような初期条件のもとで積分すると

$$\cos \varphi = \frac{1}{Y} \cos \varphi_0$$

を得る。上の関係式を用いて、式 (18a') を書き直すと

$$Y \frac{dY}{du} = -\frac{1}{2} \mu M(z) \sqrt{Y^2 - \cos^2 \varphi_0}$$

と書け、この場合の電子の軌道包絡線を与える式は次のようになる。;

$$\begin{aligned} \int_1^Y \frac{2Y dY}{(Y^2 - \cos^2 \varphi_0)^{1/2}} &= -\mu \theta_z \int_0^z M(z) dz \\ &= -\theta_z \end{aligned}$$

上式を積分すると

$$Y^2 = 1 - \theta_z \left( \sin \varphi_0 - \frac{\theta_z}{4} \right) \quad (23)$$

のようになる。振巾は初期位相角  $\varphi_0$  と相互作用空間長  $\theta_z$  との函数である。或る位相角で陰極を出た電子は  $RF$  電界によって位相選択を受ける。即ち加速周期に相互作用空間に入った電子は回路波よりエネルギーを得て、振動電極に突入して作用空間より除去され、減速周期に入射した電子のみが作用空間に残る。

この場合、電子が作用空間に残るには振巾は常に

$$Y \leq 1$$

の条件を満足せねばならない。このときの入射位相角の臨界値は式 (23) より

$$\varphi_0 \Big|_{cri} = \sin^{-1} \left( \frac{\theta_z}{4} \right) \quad (24)$$

で与えられる。式(28)を図3に示す。

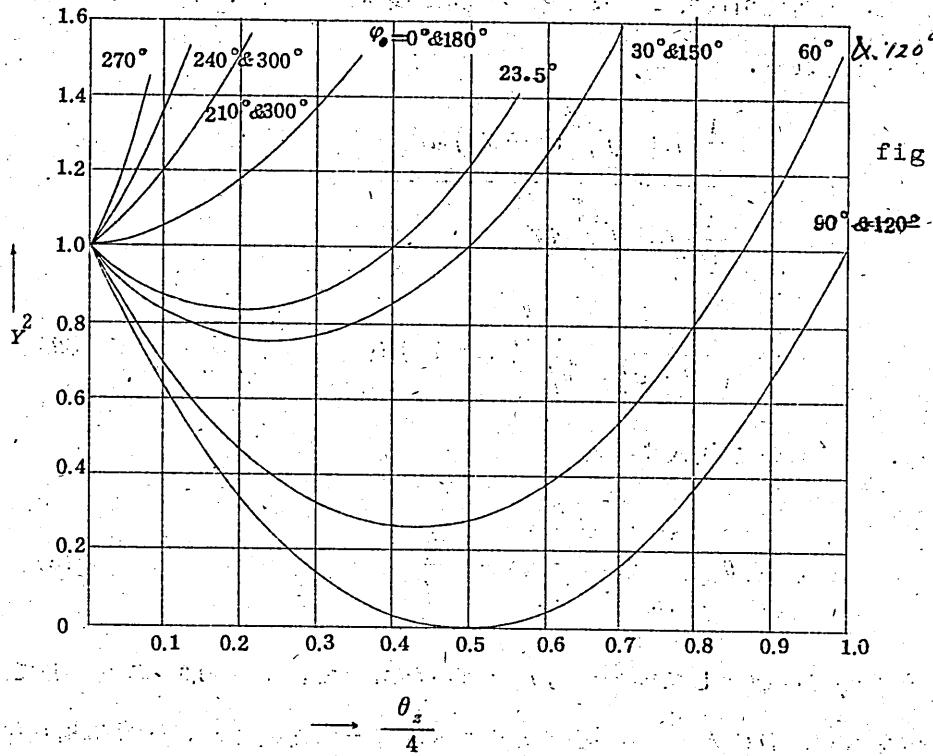


fig 3

位相選択を受けて、相互作用空間内に残る電子は運動のエネルギーを回路波のエネルギーに変換して、徐々にその振巾が小さくなつて、ついに集電子極によって作用空間から取除かれる。電子が回路に与えるパワーは次のように示される。;

$$P = \frac{I_0 V_0}{2\pi} \int_{\varphi'_0}^{\varphi''_0} (1 - Y^2) d\varphi_0 \quad (25)$$

式(23)を式(25)に代入して積分すると

$$P = \frac{I_0 V_0 \theta_s}{\pi} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\theta_s}{4} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\theta_s}{4} \cos^{-1} \left( \frac{\theta_s}{4} \right) \right\} \quad (26)$$

のようになる。

次に電子能率について考察すると、式(25)より解るように電子はその振巾が

丁度  $Y = 0$  の時に、集電子極によって作用空間より除去することが望ましい。

従って、初期位相選択によって作用空間に残った電子に対する能率を次のように定義される。

$$\eta = \frac{\frac{1}{2\pi} I_0 V_0 \int_{\varphi'_0}^{\varphi''_0} (1 - Y^2) d\varphi_0}{\frac{1}{2\pi} I_0 V_0 \int_{\varphi'_0}^{\varphi''_0} d\varphi_0},$$

$$= \frac{1}{(\varphi''_0 - \varphi'_0)} \int_{\varphi'_0}^{\varphi''_0} (1 - Y^2) d\varphi_0 \quad (27)$$

式(27)に式(28)を代入すると

$$\eta = \theta_z \left\{ \frac{\sqrt{1 - (\frac{\theta_z}{4})^2}}{\cos^{-1}(\frac{\theta_z}{4})} - \frac{\theta_z}{4} \right\} \quad (28)$$

図4は  $\theta_z$  の函数として発振出力  $P$  を画いたもので、 $\theta_z = 1.6$  の点に於て最大値をもち、DC入力の約  $1/4$  がRFエネルギーに変換され、最適の相互作用空間長が存在することが解る。

図5は  $\theta_z$  の函数として電子能率  $\eta$  を画いたもので、最大電子能率は 64%である。

相互作用空間内の電子の振動回数は次のように表わされる。

$$n T_0 = \frac{z}{u_0} \quad (29)$$

ここで

$T_0$  ; 電子の振動周期

$n$  ; 振動回数

式(29)の関係を式(26)に代入すると振動回数の函数として  $P$  が求まる。

$$P = 2\mu M(z) I_0 V_0 n \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\pi \mu M(z) n}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\pi \mu M(z) n}{2} \cos^{-1} \left( \frac{\pi \mu M(z) n}{2} \right) \right\} \quad (30)$$

fig 4

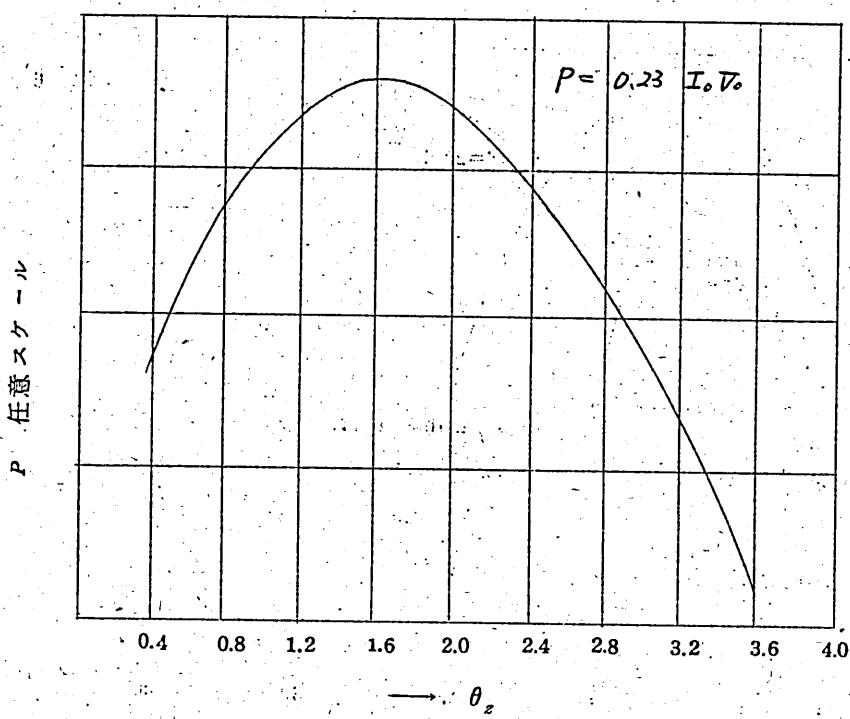


fig 5

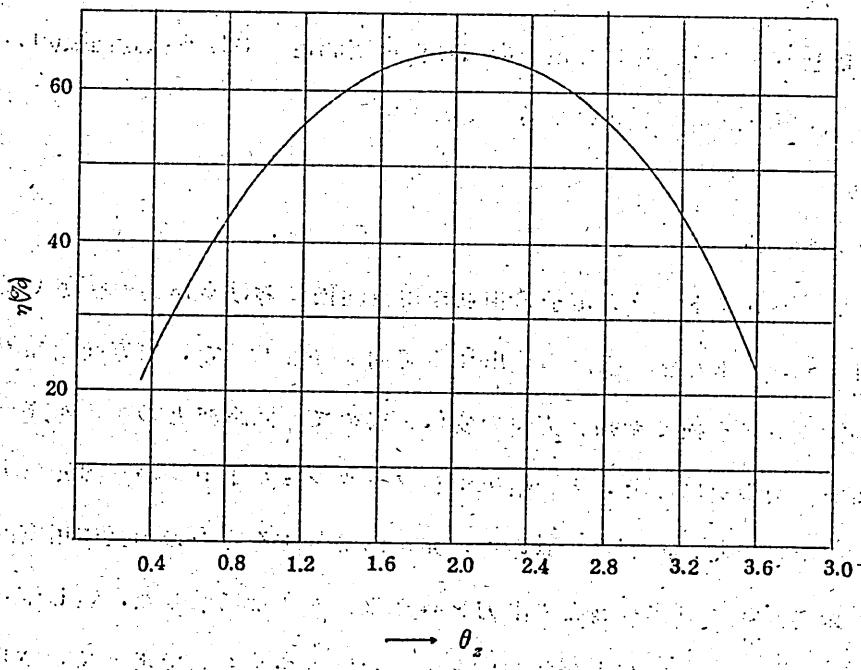


fig 6

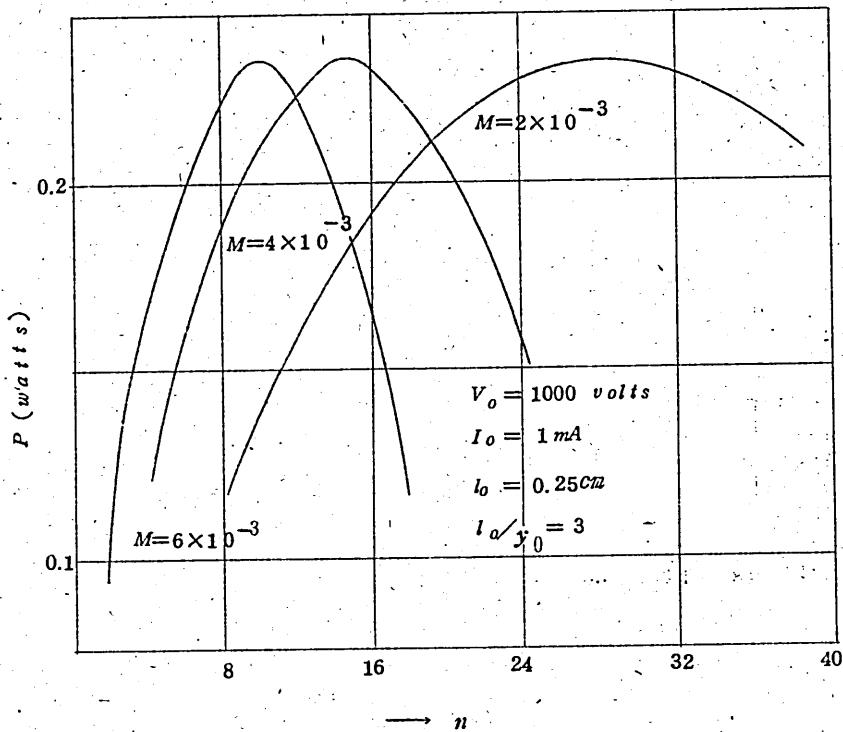


図 6 は  $M$  を パラメータとして電子の相互作用空間内における振動回数( $n$ )の  
函数として高周波出力  $P$  を画いたものである。

### § 3. むすび

ファウシュモトロンの電子の相互作用空間内における運動の軌跡（軌導包絡線）を、電子が陰極点から放出する初期位相角について、軸方向の漂流変位の推移に対する横（振動）方向の変位を求めて、回路波とのエネルギー授受の関係を明らかにした。その結果からファウシュモトロンの高周波出力を与える式を求めて、能率式を導いた。発振に寄与する電子の相互作用空間における振動回数に対する高周波出力を与える式も合せて示した。然し乍ら、これらは横方向の静磁界が十分に強いとの仮定に基づくものであって、さら

に一般的には任意磁界強度の場合について、次の点から考慮する必要がある。

ファウシュモトロンも電子振動管であり、このような管では相互作用空間内の電子流密度の大きさによって、発振特性（例えば、周波数ブッシング）が変化する。これらは今後の問題としてさらに解析をすゝめる。

## 文 献

- (1) Y. Matsuo : Proc. IRE, Vol. 48, Nov. 1960. p 1908.
- (2) 松尾, 戎谷, 楠 : 信学誌, Vol. 48, No. 1, p 87 (昭 40-01)
- (3) 松尾, 戎谷, 楠 : 信学誌, Vol. 49, No. 6, p 1184 (昭 41-06)
- (4) 松尾, 戎谷, 楠 : 信学誌, Vol. 51-B, No. 2, p 45 (昭 43-02)
- (5) 松尾, 戎谷, 楠 : マイクロ波真空管研資, (11. 9. 1962)
- (6) B. M. Bakov : Radiofizika, Vol. 3, No. 5, 1960, p 826.
- (7) Yu. G. Alitsushuler : Radiofizika, Vol. 7, No. 6, 1964, p 1223
- (8) P. A. Bolodovskiy : Radiotekhnika i Electronika, Vol. 10, No. 10, 1965, p 1829.
- (9) P. A. Bolodovskiy : Radiofizika, Vol. 8, No. 5, 1965, p 955.
- (10) P. A. Bolodovskiy : Radiofizika, Vol. 9, No. 1, 1966, p 209.
- (11) B. A. Berbasov : Radiofizika, Vol. 10, No. 8, 1967, p 1191.
- (12) B. B. Anisimov : Radioelectronika, Vol. 10, No. 4, 1967, p 384.
- (13) A. A. Kurayev : Radiotekhnika i Electronika, Vol. 13, No. 10, 1968, p 1831.