輻射科学研究会資料

# レンズ状媒質からなる導波系と円形$TE_{01}$姿態導波管伝送系との類似性について

熊谷信昭
(大阪大学・工学部)

沢新之輔
(愛媛大学・工学部)

1970年4月24日

## 1．序　　言

光波帯における伝送路として将来主要な地位を占めるものと考えられるものの一つに，誘電体によって構成された伝送路がある．誘電体に沿って光をGuided waveとして伝送するためには，伝送方向に垂直な横断面上で，たとえば図1のように適当な誘電率（屈折率）分布の変化を作らなければならない．[1] しかし，誘電率の変化は必ずしも図1のように境界が明確である必要はない．たとえば，図2のように，誘電率の値を中心軸からの距離$x$の二乗に比例して減少させてもよい，

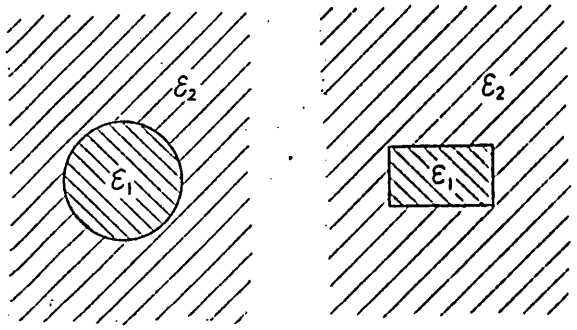



図1　誘電率が階段的に変化する誘電体線路

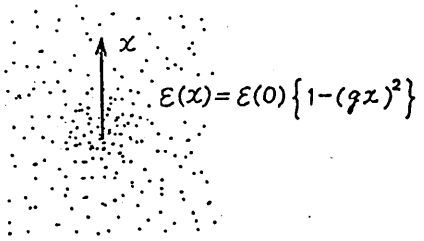
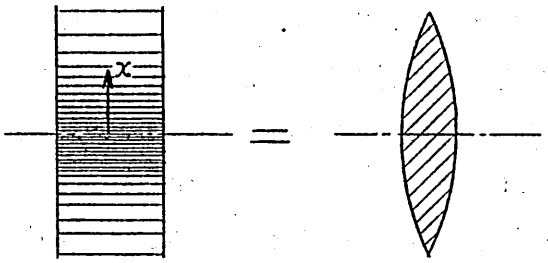



図2　誘電率が連続的に変化する誘電体線路

このような誘電率分布をもつ媒質は図3のように通常の光学レンズと等価であるからレンズ状媒質(lens-like medium)とよばれている．レンズ状媒質を固体で実現した例が日本電気株式会社で開発されたSELFOC[2] であり，気体で実現した例がBell Telephone Laboratories で開発された，Gas-lens Beam-waveguide[3] である．

レンズ状媒質に沿う光の伝播特性を解析するには，大別して，幾何光学的




レンズ状媒質　　光学レンズ

図3　レンズ状媒質と光学レンズ

な取り扱いと波動光学的な取り扱いの二つがある．前者の場合は，伝送光をOptical Rayとして取り扱い，後者の場合は，Electromagnetic Wave として取り扱う．伝送光ビームの中心部の軌跡（いわゆるビーム行路）の振舞いだけを知るには，幾何光学的な取り扱いで十分であるが，伝送光ビームのfield 分布（いわゆるSpot size など）やmode conversion の模様などまで調らべるためには，波動論的な取り扱いが必要である．

筆者等は，レンズ状媒質を用いた光伝送系を波動論的な立場から詳しく考察してきた[4]~[11]が，ここではこの種のguide が一定の周期で正弦状にうねり曲った場合，一定の間隔で支持したとき線路の自重でたわみ曲った場合，および有限の曲率半径で円形に曲った場合の三つをとりあげ，それぞれの場合に起る現象と設計条件を，円形$TE_{01}$姿態導波管を用いたミリ波伝送系の場合[12]~[18] と比較して論じ，両者の間に非常に興味ある類似性（対応性）が存在することを示す．

## 2．正弦状うねり曲り

レンズ状媒質からなる導波系が図4に示すように

$$x_0(z)=q\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{p_e}z\right) \qquad (1)$$

なる正弦曲線（ただし，振幅 $q$ は十分に小いとする）に沿って，きわめてゆるやかにうねり曲っている場合を考える[4]．この場合，誘電率分布は，

$$\varepsilon(x,z)=\varepsilon(0)\left\{1-g^2\,(x-x_0(z))^2\right\} \qquad (2)$$

で表わされる．ここで，$g$ は誘電率の変化率を定める定数であり，また，$\varepsilon(0)$ は導波系の中心 $x=x_0(z)$ における誘電率を表わす．

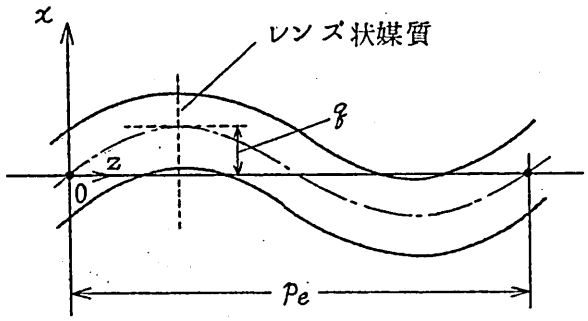



図4　レンズ状媒質からなる導波系の正弦状うねり曲り

このような系については，既に，H.G.Unger[19]が簡単な幾何光学的取り扱いをしているが，特定の入射条件の光ビーム，すなわち，系の軸上に平行に入射した光ビームのビーム中心部の振舞いを明らかにしているに過ぎない．

これに対して，任意の入射条件で入射した光ビームの振舞いを波動光学的に解析すると，近軸理論の範囲でつぎのような結論が得られる[4]．すなわち，入射条件とは無関係に，

(i)　うねり曲りの周期 $p_e$ が $2\pi/g$ なる量に等しくないとき（$p_e \neq 2\pi/g$ なる場合）．ビーム行路は導波系の中心軸のまわりに振動しながら周期的に同じ状態をくりかえす．いいかえれば，光ビームは導波系の中心軸から発散することなく，系に沿って脈動しつつ，安定に伝送される．

(ii) うねり曲りの周期$p_e$が$2\pi/g$なる量に等しいとき($p_e=2\pi/g$なる場合)，ビーム行路は伝送距離とともに振動しながら導波系の中心軸から次第に遠ざかっていく．すなわち，いわゆるビーム行路発散の現象が起る．したがって，導波系の口径が有限であるために生じる回折損失は無制限に増大し，低損失伝送ができなくなる．

さて，上述の現象を円形$TE_{01}$姿態導波管の正弦状うねり曲り部における姿態変換現象と対応させて考えてみると，きわめて興味ある類似性の存在することがわかる．すなわち，円形$TE_{01}$姿態導波管伝送系の正弦状うねり曲りでは，うねりの周期$p_e$が，$TE_{01}$姿態と特定の結合姿態との間のビート波長に等しいとき，$TE_{01}$姿態からその結合姿態へ電力が連続的に変換されて，大きな姿態変換損失を生じることが知られている[12][13]ところで，レンズ状媒質からなる導波系の場合，前述の$2\pi/g$なる量は，まさにこの導波系における固有モード間のビート波長となっている．* したがって，レンズ状媒質の場合に生じる前述の現象は，うねりの周期$p_e$がビート波長$2\pi/g$に等しいとき高次姿態への姿態変換が起り，その結果がビーム行路発散の現象となって現われるのであると考えることができる．

3．線路の自重によるたわみ曲り

レンズ状媒質からなる導波系を図5のように一定の間隔$L$で支持すると，線路自体の重量のために，次式(3)に示すようなたわみ曲りを生じる．

---

* 直線部の固有モードの伝播定数は，横断面方向に一次元のモデルでは，$\beta_n=k(0)-g(n+1/2)$で表わされる．したがって，ビート波長の定義，$1/\lambda_n-1/\lambda_{n-1}=1/\lambda_b$より，ビート波長$\lambda_b$を求めると，$\lambda_b=2\pi/g$となる．

$$x_0(z) = -\frac{W \cdot L^4}{24eI}\left(\frac{z}{L}\right)^2\left(1-\frac{z}{L}\right)^2 \qquad (3)$$

ただし，

$W$：線路の単位長当りの重量

$e$：弾　性　係　数

$I$：慣　性　能　率

$L$；支　持　間　隔

である．

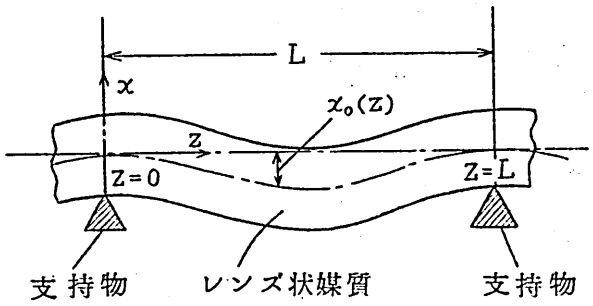



図５　レンズ状媒質からなる導波系のたわみ曲り

式(3)は，$0 \leqq z \leqq L$なる区間において，つぎのようなFourier 級数に展開することができる

$$x_0(z) = -\frac{W L^4}{24eI}\left[\frac{1}{30} - \frac{3}{\pi^4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^4}\cos\left(\frac{2\pi\nu z}{L}\right)\right] \qquad (4)$$

このような場合について，正弦状うねり曲りの場合と同様に，任意の入射条件で入射した光ビームの伝播特性を波動光学的に検討すると，近軸理論のもとで，つぎのような結論が得られる。[5]すなわち，入射条件とは無関係に，

(i) 支持間隔 $L$ が $2\pi/g$ の整数倍に等しくないとき，（$L \neq 2\pi\nu/g$；$\nu = 1,2,3,\cdots$ なる場合），ビーム行路は，導波系の中心軸のまわりに振動しながら周期的に同じ状態をくりかえす．すなわち，光ビームは導波系の中心軸から発散することなく系に沿って脈動しつつ安定に伝送される．

(ii) 支持間隔 $L$ が $2\pi/g$ の整数倍に等しいとき，（$L = 2\pi\nu/g$；$\nu = 1,2,3,\cdots$なる場合），ビーム行路発散の現象が起る．すなわち，ビーム行路の脈動振幅が伝送距離と共に増大して，光ビームは系の中心軸から次第に遠ざかっていく．したがって，この場合も回折損失が無制限に増大し，低損失伝送ができなくなる．正弦状うねり曲りの場合には，前述のように，うねりの周期 $p_e$ がビート波長 $2\pi/g$ に等しいときにのみ，ビーム行路発散の現象が起ったが，たわみ曲りの場合には，たわみ曲線 $x_0(z)$ が，式(4)に示すごとく，支持間隔 $L$ を基本周期とする空間高調波成分を含むため，$L = 2\pi/g$ のときだけでなく，その整数倍に等しいときにも同様の現象が起ることになる．

ところで，たわみ曲りの場合にも，円形 $TE_{01}$ 姿態導波管伝送系との間に非常に面白い類似性を見い出すことができる．すなわち，円形 $TE_{01}$ 姿態導波管のたわみ曲り部では，支持間隔 $L$ が $TE_{01}$ 姿態と結合姿態とのビート波長の整数倍に等しいとき，$TE_{01}$ 姿態からその結合姿態へ電力が連続的に変換されて，大きな姿態変換損失を生ずることが知られている．[13] レンズ状媒質からなる導波系の場合にも，支持間隔 $L$ が，前述のビート波長 $2\pi/g$ の整数倍に等しいとき，高次姿態への姿態変換が生じ，その結果，ビーム行路発散の現象が起ると考えられる．

## 4．円　形　曲　り

レンズ状媒質からなる導波系が図6に示すように，一定の曲率半径 $R$ で円形に曲った場合を考える．このような円形曲り部に入射した光ビームは，一般に，ビーム行路の脈動と，ビームスポットの脈動とを伴うことが知られて

いる。[6]～[8][11][19]このような脈動現象が顕著に生じると，導波系の有限な口径による回折損失が増大したり，信号歪を生じて通信の品質を低下させたりするおそれがある。そこで，従来からこの脈動を除去するための方法が，いくつか提案されている。[6][7][11][19]～[21] たとえば，H.G. Unger[19]や末松等[20]は，表1の図Aのように，曲り部の中心軸を曲率中心の側へδだけずらせることによってビーム行路の脈動を除去する方法を提案している。また，H.G.Unger[19] は，表1の図cのように，曲り部の中心軸を直線部と一致させたままで，曲率半径$R$をテーパ状に変化させて，ビーム行路の脈動を除去する方法を提案している。これらの方法は，ビーム行路の脈動を除去するために考えられたもので，ビームスポットの脈動の除去までは考慮されていない。これに対して，今井，松本等[21] は，円形曲り部における姿態結合方程式を解いて，姿態結合を打消すための条件を求め，曲り部の中心軸を図Aのようにδだけずらせてビーム行路の脈動を除去すると同時に，図Bのように曲り部の誘電率分布を適当に変えてビームスポットの脈動を除去する方法を示した。さらに，筆者等は，図Dに示すように，中心軸を直線部と一致させたまま，A なる点で曲率半径$R_1$を$R_2$に階段的に変化させることによって，ビーム行路の脈動を除去し，かつ，直線部とスポットサイズの整合がとれるように誘電率の分布を適当に変えることによって，ビームスポットの脈動をも同時に除去する方法を提案した。[6][7]

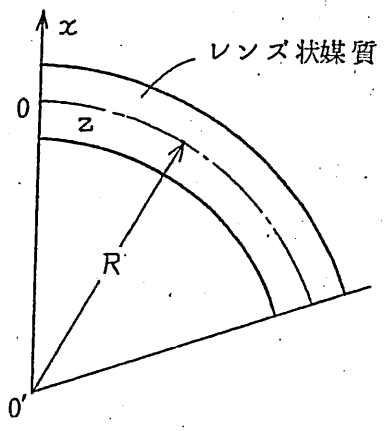


図6　レンズ状媒質からなる導波系の円形曲り

以上の設計方法を，円形$TE_0$，姿態導波管の円形曲り部に対して従来から

提案されているいくつかの方法[14]~[18]と対比してみると，表１のようになり，この場合にも，両者の間に非常に面白い対応性があることがわかる．すなわち，ビーム行路の脈動を除去する図Ａに示したUnger[19]や末松等[20]の方法は，$TE_{0l}$ 姿態と $TE_{ln}$ 姿態との結合を除去するために熊谷，吉田[16][17]が提案した図Ａ′の方法と対応し，ビームスポットの脈動を除去する図Ｂに示した今井，松本[21]の方法は，$TE_{0l}$ 姿態と $TM_{1l}$ 姿態との結合を除去するためにS.P.Morgan[15]が提案した図Ｂ′の方法と対応している．これに対して，ビーム行路とビームスポットの脈動を同時に除去する図Ａ，Ｂを併用する形式の今井，松本[21]の方法は，$TE_{1n}$ 姿態と $TM_{1l}$ 姿態との結合を同時に除去する図Ａ′，Ｂ′を併用する形式の熊谷，吉田[16]の方法に対応している．また，ビーム行路の脈動を除去する図Ｃに示したH.G.Unger[19]の方法は，$TE_{1n}$ 姿態との結合を除去するために同じくUnger[19]が提案した図Ｃ′の方法に対応している．さらに，ビーム行路とビームスポットの脈動を同時に除去する図Ｄに示した筆者等の方法[6][7]は，$\overset{\frown}{OA}$ の部分で入射ビームを曲り部 $\overset{\frown}{AB}$ のnormal modeに変換するものであって，これは，入射 $TE_{0l}$ 姿態を $\overset{\frown}{OA}$ 部分で曲り部 $\overset{\frown}{AB}$ のnormal modeに変換する図Ｄ′に示したS.E.Miller[18]の方法に対応している．

## 5．結　　言

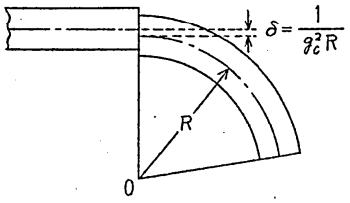
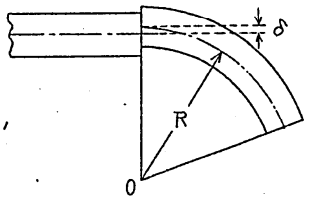
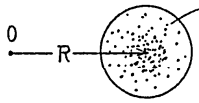
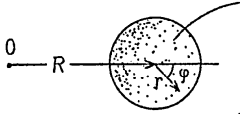
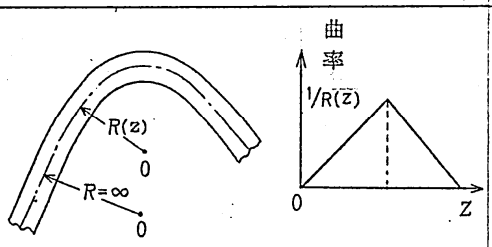
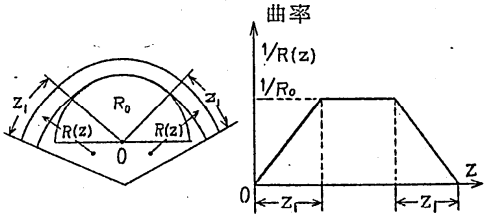
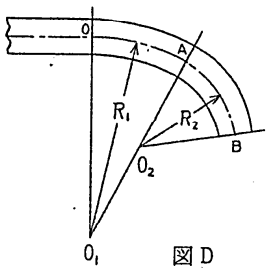
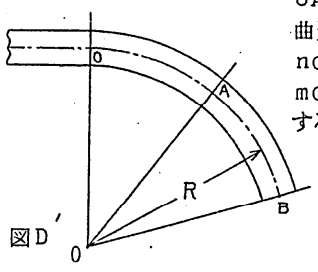
レンズ状媒質からなる導波系と円形 $TE_{0l}$ 姿態導波管伝送系との間にきわめて興味深い類似性（対応性）が存在することを，正弦状うねり曲り，たわみ曲り，および円形曲りの三つの場合を例にとって示した．

謝辞　日頃からごべんたついただく大阪大学工学部板倉清保教授に謝意を表する．

## 文　　献

(1) S.E.Miller;“Integrated Optics:An Introduction”,Bell Syst.tech.J.,48,7,pp.2059~2069(Sept.1969).

表1　レンズ状媒質からなる導波系と円形$TE_{01}$姿態導波管伝送系との円形曲り部における類似性

| | レンズ状媒質からなる導波系の円形曲り | 円形$TE_{01}$姿態導波管伝送系の円形曲り |
|---|---|---|
| 中心軸をδだけずらせる方法 |  <br>図A<br>○ビーム行路の脈動を除去することができる.(19)~(21) |  <br>図A′<br>○ $TE_{1n}$姿態との結合を除去することができる.(16)(17) |
| 誘電率分布を変える方法 |  <br>$\varepsilon(r)=\varepsilon(R)\{1-g^2(r-R)^2\}$<br>中心の誘電率$\varepsilon(R)$，または，誘電率の変化率$g$を変える.(7)(21)<br>図B<br>○ビームスポットの脈動を除去することができる. |  <br>誘電率分布を<br>$\varepsilon(r,\varphi)=\varepsilon_0(1-\frac{2r}{R}\cos\varphi)$<br>にしたがって変化させる.(15)(16)<br>図B′<br>○ $TM_{11}$姿態との結合を除去することができる. |
| 曲率半径をテーパ状に変える方法 |  <br>図C<br>○ビーム行路の脈動を除去することができる.(19) |  <br>図C′<br>○ $TE_{1n}$姿態との結合を除去することができる.(14) |
| 曲り部の固有モードに変換する方法 |  <br>$\widehat{OA}$の部分で曲り部$\widehat{AB}$のnormal modeに変換する.<br>図D<br>○すべての脈動を除去することができる.(6)(7) |  <br>$\widehat{OA}$の部分で曲り部$\widehat{AB}$のnormal modeに変換する.<br>図D′<br>○すべての不要姿態との結合を除去することができる.(18) |

(2) T.Uchida, et al:"A light focusing fibre guide",1969 IEEE Conference on Laser Engineering and Applications, Washington, D.C., May26-28, 1969.

(3) D.W.Berrman:"A lens or light guide using convectively distorted thermal gradients in gases", Bell Syst.tech. J., 43, 3, pp.1469~1475(July 1964).

(4) 沢新之輔, 熊谷信昭:"レンズ状媒質からなる導波系の新しい解析法", 信学論(B), 52-B, 10, pp.624~631 (昭44-10)

(5) 沢新之輔, 熊谷信昭:"レンズ状媒質からなる導波系のうねり曲りに関する波動光学的考察", 信学論(B), 52-B, 5, pp.277~283 (昭44-05)

(6) 沢新之輔, 熊谷信昭:"曲りガスレンズに関する一考察", 信学論(B) (研究速報), 52-B, 3, p.181 (昭44-03)

(7) 沢新之輔, 熊谷信昭:"レンズ状媒質からなる曲り導波系の設計方法に関する一提案", 信学論(B)(技術談話室), 52-B, 11, pp.718~719 (昭44-11).

(8) 沢新之輔, 熊谷信昭:"今井, 伊藤, 松本氏の論文「理想的媒質をもつ曲りガスレンズについて」に対する質疑, 討論", 信学論(B)(技術談話室), 52-B, 5, pp.307~308 (昭44-05).

(9) 沢新之輔, 熊谷信昭:"周期的ガスレンズ導波系の一般的応答と安定条件", 信学論(B), 52-B, 5, pp.273~276 (昭44-05).

(10) 沢新之輔, 熊谷信昭:"レンズ状媒質からなる周期的導波系における不整合入射ガウス波の応答", 信学論(B)(技術談話室), 52-B, 3, pp.152~154 (昭45-03).

(11) S.Sawa and N.Kumagai:"A theoretical study on the beam waveguide consisting of lens-like media",

Technology Reports of the Osaka University, 20, 1, pp.145~161(March 1970).

(12) W.J.Albersheim:"Propagation of $TE_{01}$ waves in curved wave guides", Bell Syst. tech.J., 28, pp.1~32(Jan. 1949).

(13) H.G.Unger:"Circular electric wave transmission through surpentine bends", Bell Syst.tech.J., 36, pp.1279~1291(Sept.1957).

(14) H.G.Unger:"Normal mode bends for circular electric waves", Bell Syst.tech.J., 36, pp.1292~1307(Sept.1957).

(15) S.P.Morgan:"Theory of curved circular waveguide containing an inhomogeneous dielectric", Bell Syst.tech. J., 36, pp.1209~1251(Sept.1957).

(16) 熊谷信昭, 吉田健一:"円形$TE_{01}$姿態導波管の円形曲りに関する一考察", 信学会マイクロ波研資, 伝送65.2~28(1966-02).

(17) 熊谷信昭, 吉田健一:"円形$TE_{01}$姿態導波管の曲りに関する一考察", 昭41全大, 389(昭41-11).

(18) S.E.Miller:"Notes on methods of transmitting the circular electric wave around bends", Proc.of I.R.E., 40., 9, pp.1104~1113(Sept.1952).

(19) H.G.Unger:"Light beam propagation in curved schlieren guides", Arch.elekt.Übertragung, 19, 4, pp.189~198(April 1965).

(20) 末松晴安, 吹抜洋司:"理想化されたガス光導波系の解析", 信学誌, 48, 10, pp.1684~1690(昭40-10).

（２１） 今井正明，松本正：“ガスレンズの曲りによる姿態変換を打消す誘電率分布”，信学論(B)，５２－Ｂ，１２，ｐｐ．５９８～５９９（昭43－１２）

# Ne吸収による6328ÅHe—Neレーザの周波数単一化

松尾幸人・西山太一郎

（大阪大学産業科学研究所）

昭和45年4月24日

輻射科学研究会資料

# Ne吸収によるHe-Neレーザの周波数単一化

松尾幸人
西山太一郎
(大阪大学産業科学研究所)

## I はしがき

高出力の単一周波数発振のレーザは通信への利用等に有用である。レーザ光の単一周波数化の方法としては、マイケルソン・モーレ型(MM型)干渉計を用いる方法[1]、折れ曲り型共振器を用いる方法[2]、及びファブリーペロット型電気光学変調器を用いる方法[3]等がある。又、6328Åの同位元素分離をしたHe-Neレーザ管に別に励起された、これも同様に同位元素分離をしたNe吸収管を共振器内に挿入して、発振モード間のcouplingを弱くすることによる単一周波数化の方法[4]などがある。ここではnatural Neを使って、同様の実験を行なったので報告する。

周波数単一化が実現した場合、次に問題となるのは周波数安定化の問題である。周波数安定化の方法としては、複合共振器型にして、共振器に鋭い周波数選択性をもたせこれを利用したもの[5][6]、1.52-μmのHe-Ne

レーザ（J=1→J=0の遷移）に軸磁場を印加した時、右及び左回りの円偏向のレーザ光は、原子線の中心付近で鋭いcrossoverを生じる。この効果を利用したもの[7]、3.39-μm He-Neレーザに対し、メタンの飽和吸収特性を利用したもの[8]及びHe-Neレーザの共振器の外部にNe吸収管を置き、この吸収管に軸磁場を印加し右及び、左回りの円偏向レーザに対するNe吸収管の吸収特性を利用したもの[9]等があるが、ここでは、6328Å He-Neレーザ管と、Ne-吸収管を共振器内に挿入し、Ne-吸収管に軸磁場を印加することによる周波数安定化の一つの方法を提案した。

## II 理論的考察

レーザ発振の動作方程式はLambの理論[10]でよく知られているが、$N_2$吸収管を共振器内に挿入した時の3モードレーザの動作方程式は次のようになる。[11]（$E^3$までの近似）

$$\dot{E}_1=(\alpha_1-a_1-l)E_1-(\beta_1-b_1)E_1^3-(\theta_{12}-t_{12})E_1E_2^2-(\theta_{13}-t_{13})E_1E_3^2 \quad (1)$$

$$\dot{E}_2=(\alpha_2-a_2-l)E_2-(\beta_2-b_2)E_2^3-(\theta_{21}-t_{21})E_2E_1^2-(\theta_{23}-t_{23})E_2E_3^2 \quad (2)$$

$$\dot{E}_3=(\alpha_3-a_3-l)E_3-(\beta_3-b_3)E_3^3-(\theta_{31}-t_{31})E_3E_1^2-(\theta_{32}-t_{32})E_3E_2^2 \quad (3)$$

但し、$E_{\substack{1\\2\\3}}$：モード$\substack{1\\2\\3}$のレーザの電界成分

$\alpha, \theta, \beta$：レーザ媒質によってきまる係数

$a, b, t$：吸収媒質　〃

$l$：共振器による損失

(1)、(2)、(3)式のそれぞれの係数は、圧力効果を考慮に入れた単一同波数での動作方程式の理論[12]を基礎にして、3モード動作の場合について計算すると、次のようになる。

$$\beta_{\substack{1\\2\\3}}=\frac{\nu\pi^{1/2}\wp^4\hbar^{-3}}{32\epsilon_0 kU}\cdot\overline{N}\left[\bar{\gamma}'_{ab}\left(\frac{1}{\gamma'_a}+\frac{1}{\gamma'_b}\right)\left(\frac{1}{\bar{\gamma}'_{ab}}+\mathcal{L}(\omega-\nu_{\substack{1\\2\\3}}+\Delta)\right)+\frac{2\pi^{1/2}}{kU}\left(\frac{1}{\gamma_a}+\frac{1}{\gamma_b}-\frac{1}{\gamma'_a}-\frac{1}{\gamma'_b}\right)\right] \quad (4)$$

$$\theta_{\substack{12\\21}}=\frac{\nu\pi^{1/2}\wp^4\hbar^{-3}}{32\epsilon_0 kU}\Big[\overline{N}\Big\{\bar{\gamma}'_{ab}\left(\frac{1}{\gamma'_a}+\frac{1}{\gamma'_b}\right)\left(\mathcal{L}(\omega-\nu_{12}+\Delta)+\mathcal{L}\left(\frac{\Lambda}{2}\right)\right)+\mathcal{L}\left(\frac{\Lambda}{2}\right)\left(\bar{\gamma}'_{ab}(\gamma'_a\mathcal{L}'_a(\Lambda)+\gamma'_b\mathcal{L}'_b(\Lambda))-\frac{\Lambda^2}{2}(\mathcal{L}'_a(\Lambda)+\mathcal{L}'_b(\Lambda))+\frac{2\pi^{1/2}}{kU}\times\left(\frac{1}{\gamma_a}+\frac{1}{\gamma_b}-\frac{1}{\gamma'_a}-\frac{1}{\gamma'_b}\right)\right)\Big\}+N_2\Big\{\mathcal{L}(\omega-\nu_{\substack{1\\2}}+\Delta)\left(\bar{\gamma}'_{ab}(\gamma'_a\mathcal{L}'_a(\Lambda)+\gamma'_b\mathcal{L}'_b(\Lambda))-\Lambda(\mathcal{L}'_a(\Lambda)+\mathcal{L}'_b(\Lambda))(\omega-\nu_{\substack{1\\2}}+\Delta)\right)\Big\}\Big] \quad (5)$$

$$\theta_{\substack{13\\31}} = \frac{\gamma\pi^{1/2}\delta^{6}\hbar^{-3}}{32\varepsilon_0 K u}\Big[\overline{N}\Big\{\overline{\gamma}'_{ab}\Big(\frac{1}{\gamma_a'}+\frac{1}{\gamma_b'}\Big)\big(\mathcal{L}(\omega-\nu_1+\Delta)+\mathcal{L}(\Delta)\big)$$

$$+\frac{2\pi^{1/2}}{(Ku)}\Big(\frac{1}{\gamma_a}+\frac{1}{\gamma_b}-\frac{1}{\gamma_a'}-\frac{1}{\gamma_b'}\Big)+\mathcal{L}(\Lambda)\Big(\overline{\gamma}'_{ab}\big(\gamma_a'\mathcal{L}_a'(2\Lambda)$$

$$+\gamma_b'\mathcal{L}_b'(2\Lambda)\big)-2\Lambda^2\big(\mathcal{L}_a'(2\Lambda)+\mathcal{L}_b'(2\Lambda)\big)\Big\}+N_4\Big\{$$

$$\mathcal{L}(\omega-\nu_{\substack{1\\3}}+\Delta)\Big(\overline{\gamma}'_{ab}\big(\gamma_a'\mathcal{L}_a'(2\Lambda)+\gamma_b'\mathcal{L}_b'(2\Lambda)\big)-2\Lambda\cdot$$

$$(\omega-\nu_{\substack{1\\3}}+\Delta)\big(\mathcal{L}_a'(2\Lambda)+\mathcal{L}_b'(2\Lambda)\big)\Big]\qquad(6)$$

$\theta_{23}$ : $\theta_{12}$ の $\nu_{12}\to\nu_{23}$ $\nu_1\to\nu_3$

$\theta_{32}$ : $\theta_{21}$ の $\nu_{12}\to\nu_{23}$ $\nu_2\to\nu_3$

但し、

$\omega$ : 圧力効果がない時のレーザの遷移間隔

$\nu_{\substack{1\\3}}$ : モード $\substack{1\\3}$ のレーザ発振周波数

$\Delta$ : 圧力効果 (van der Waals 力等による) $\omega$ の拡がり分

$\gamma_a, \gamma_b$ : 圧力効果がない時のレベル a, b の寿命の逆数.

$\gamma_a', \gamma_b'$ : 圧力効果を考慮した時の 〃

$\gamma_{ab}$ : 圧力効果がない時のレベル a, b 間の自然幅

$\overline{\gamma}'_{ab}$ : 圧力効果を考慮した時の 〃

$\Lambda$ : モード間隔

$\overline{N}=\frac{1}{L}\int_0^L dz\, N(z)$ $\qquad N(z)$ : excitation density

$N_{\substack{2\\4}}=\frac{1}{L}\int_0^L dz\cdot N(z)\cdot\cos\frac{2}{4}\cdot\frac{\pi z}{L}$

$\mathcal{L}(x)=\frac{1}{\overline{\gamma}'^2_{ab}+x^2}$ , $\mathcal{L}_{\substack{a\\b}}(x)=\frac{1}{\gamma'^2_{\substack{a\\b}}+x^2}$

3モードのレーザ発振方程式での strong coupling の条件、すなわち、単一周波数で発振する条件を求める。

$$\dot{X} = 2X(\alpha_1 - \beta_1 X - \theta_{12} Y - \theta_{13} Z) \quad (7)$$

$$\dot{Y} = 2Y(\alpha_2 - \beta_2 Y - \theta_{21} X - \theta_{23} Z) \quad (8)$$

$$\dot{Z} = 2Z(\alpha_3 - \beta_3 Z - \theta_{31} X - \theta_{32} Y) \quad (9)$$

但し、$X = E_1^2$ $Y = E_2^2$ $Z = E_3^2$

(7)、(8)、(9)の定常解($\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0$)を $X_s$, $Y_s$ $Z_s$ とし、strong coupling の条件を求めるために、この時の定常解を、$X_s = Z_s = 0$ $Y_s = \alpha_2/\beta_2$ とする。この解の安定性を調べるために、定常解から、$\Delta X$, $\Delta Y$, $\Delta Z$ だけ変動した時を考える。

$$\Delta\dot{X} = 2\Delta X(\alpha_1 - \theta_{12}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2}) \quad (10)$$

$$\Delta\dot{Y} = 2\Delta Y(-\alpha_2) - 2\frac{\alpha_2}{\beta_2}(\theta_{12}\Delta X + \theta_{23}\Delta Z) \quad (11)$$

$$\Delta\dot{Z} = 2\Delta Z(\alpha_3 - \theta_{32}\frac{\alpha_2}{\beta_2}) \quad (12)$$

(10)、(11)、(12)の $\Delta X$, $\Delta Y$, $\Delta Z$ の解を次のように仮定する。

$$\Delta X = Ae^{kt} \quad \Delta Y = Be^{kt} \quad \Delta Z = Ce^{kt} \quad (13)$$

(13)を(10)~(12)に代入して、A, B, C のすべてが zero でない解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \theta_{12}\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\theta_{21} & -\alpha_2 - \frac{k}{2} & -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\theta_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_3 - \theta_{32}\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{k}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

$X_s = Z_s = 0$, $Y_s = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ の定常解が安定であるためには、$k$が負になればよいから、(14)より

$\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 - \theta_{12}\frac{\alpha_2}{\beta_2} < 0$, $\alpha_3 - \theta_{32}\frac{\alpha_2}{\beta_2} < 0$ となる。

同様に定常解 $X_s = Y_s = 0$, $Z_s = \frac{\alpha_3}{\beta_3}$, 及び $X_s = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $Y_s = Z_s = 0$ の安定条件を求めて、これらが同時に成立する条件を求めると次のようになる。

$$\theta_{12}\cdot\theta_{21} > \beta_1\beta_2, \quad \theta_{32}\theta_{23} > \beta_2\beta_3 \quad \theta_{13}\theta_{31} > \beta_1\beta_3 \quad (15)$$

故に、Ne吸収管を共振器内に挿入した時の3モードでのレーザ動作方程式(1)〜(3)のstrong couplingの条件は次のようになる。

$$(\theta_{12} - t_{12})\cdot(\theta_{21} - t_{21}) > (\beta_1 - b_1)\cdot(\beta_2 - b_2)$$
$$(\theta_{23} - t_{23})\cdot(\theta_{32} - t_{32}) > (\beta_2 - b_2)\cdot(\beta_3 - b_3) \quad (16)$$
$$(\theta_{31} - t_{31})\cdot(\theta_{13} - t_{13}) > (\beta_3 - b_3)\cdot(\beta_1 - b_1)$$

$\theta_{12}$, $t_{12}$, $\beta_1$, $b_1$ 等に、種々のパラメータを与える。すなわち、レーザ管及びNe吸収管の圧力を2torr及び0.2torr圧力に関係する原子の寿命、自然幅等は参考文献(12)より求める。また共振器長を1m(モード間隔150MHz)とする。これより(16)の条件をみたすには、$\overline{N'} \geq \overline{N} \times$(数十分の1)程度であればよい。

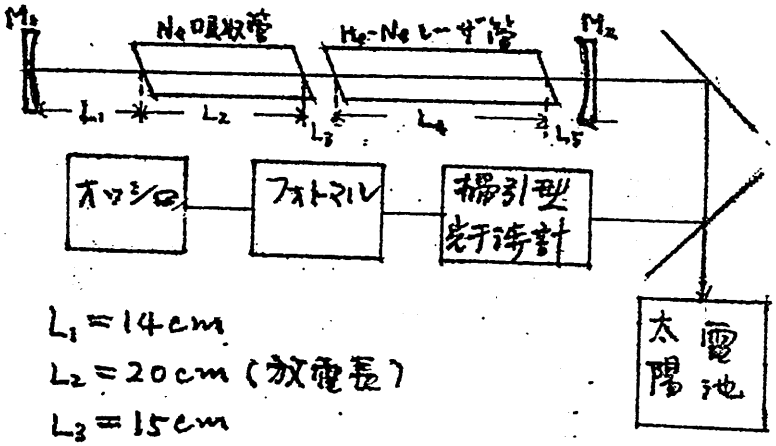
但し、$\overline{N'} = \frac{1}{L}\int_0^L dz\, N'(z)$ $\quad N'(z)$: absorption density

$\overline{N} = \frac{1}{L}\int_0^L dz\, N(z)$ $\quad N(z)$: excitation density

## Ⅲ 実験及び検討

### 1. 装置

実験に用いた装置の配置図を第1図に示す。各部の寸法、ミラーの曲率、反射率等は図中に示すとおりである。



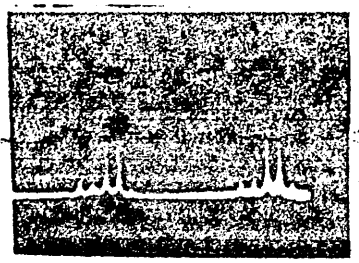

$L_1 = 14\,cm$
$L_2 = 20\,cm$ (放電長)
$L_3 = 15\,cm$
$L_4 = 28\,cm$ (放電長)
$L_5 = 6\,cm$

$M_1 \cdots \begin{cases} r = 1.2\,m \\ R = 100\,\% \end{cases}$ $M_2 \cdots \begin{cases} r = 3\,m \\ R = 99.9\,\% \end{cases}$

第1図

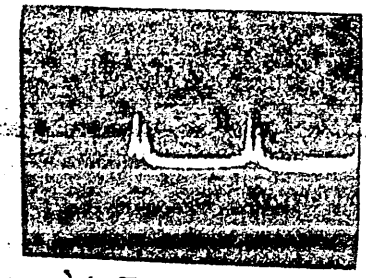
### 2. 実験

$Ne$ 吸収管には、0.2 torr の natural Neon (同位元素分離されていない) を封入した。6328 Å He-Ne レーザの出力は、太陽電池で検出した。そのスペクトルは掃引型分光器、フォトマルをとうして、オシロで観測した。観測されたスペクトル図、及びこの時のレーザ出力、$Ne$ 吸収管の放電電流を図2以下に示す。



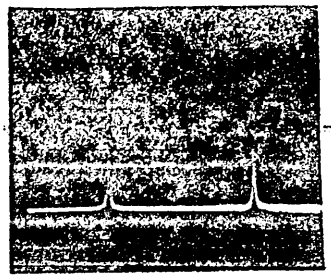
モード間隔
179 MHz
出力 0.125 mW

図2



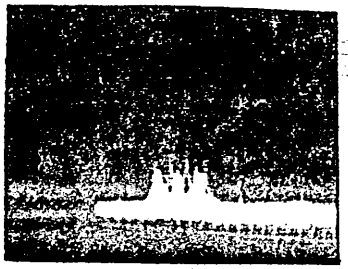
放電電流
8 mA

図3



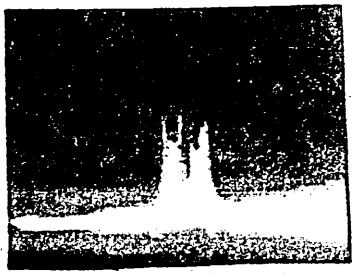
放電電流
20 mA
出力 0.1 mW

図4



発振幅
716 MHz

図5



発振幅
358 MHz

図6

図2は、Ne吸収管の放電を行なっていない時のスペクトルである。図3は、Ne吸収管の放電を開始(放電電流8mA)した時のスペクトルで発振モードの数は5本から2本に減少した。さらにNe吸収管の放電電流を増加させると、図4のように単一周波数での発振が得られた。このように単一周波数発振での出力は、多モード発振の時

の出力の約80%程度に減少した。また放電電流(Ne吸収管)を増加させていくと、レーザ出力はさらに減少し、レーザ発振がとまった。次に図5は、ミラーを手でゆすった時に観測された図です。ミラーを手でゆすると共振器の長さが変わり、これによって、共振器によってきまるモードが移動する。発振モードがある程度移動すると、単一周波数で発振している発振モードが隣のモードへjumpする現象がおこり、その結果の図が図5のようになる。但しこの実験中は常に単一モードで発振するように、Ne吸収管の放電電流を増加させてある。この時の発振できる幅は、共振器によってきまるモード間隔の約4倍程度になった。図6は、反射率99.9%のミラーのかわりに99.5%のミラーを使って同様の実験を行なった時、観測された図である。この時の発振できる幅は、モード間隔の約2倍程度になった。また、99.9%の反射率のミラーを使用した時でも、ミラーの調節をずらして、レーザ出力を減少させて、同様の実験を行なった時にも、図5のような特性は得られず図6と同様に発振できる幅は、モード間隔の約2倍程度になった。参考文献[4]では全ゲイン幅にわたって、tuningができたと、報告されていて、この点は違っています。

次にNe吸収管の共振器内の位置による単一周波数化のためのNe吸収管の放電電流の依存性を調べた。この実験は、図1

において、ミラー $M_1$ を移動させ、共振器長を 96 cm とし、Ne 吸収管の中心をミラー $M_1$ から 24 cm, 35 cm, 43 cm の各々の位置にした。その結果、単一周波数化のための Ne 吸収管の放電電流は、以下に示す。但しこの実験中は、Ne 吸収管の放電を行なっていない時の出力は一定に保った。

| Ne吸収管の位置（ミラー $M_1$ から） | Ne吸収管の放電電流 |
|---|---|
| 24 cm | 37 mA |
| 35 cm | 31 mA |
| 43 cm | 25 mA |

## 3. 検討

(1) ミラーの変動による発振モードの移行。

モード 2 の発振が起っているとした時、(2) より

$$E_2^2 = \frac{\alpha_2 - a_2 - l}{\beta_2 - b_2} \quad (17)$$

(3) 及び (17) より（但し、$E_3^2$ の項は充分小さいとして無視）

$$\frac{E_3}{E_2} = (\alpha_3 - a_3 - l) - (\alpha_2 - a_2 - l) \cdot \frac{a_{32} - t_{32}}{\beta_2 - b_2} \quad (18)$$

モード 2 からモード 3 への jump が起こるのは、(18) の右辺が正となる時である。

同様に、モード 2 から 1 への jump の条件は、

$$\frac{E_1}{E_2} = (\alpha_1 - a_1 - l) - (\alpha_2 - a_2 - l) \cdot \frac{a_{12} - t_{12}}{\beta_2 - b_2} > 0$$

である。

(iii) Ne-吸収管の位置に対する単一周波数化のための Ne-吸収管の放電電流の依存性.

3モードでのstrong couplingの条件,すなわち,(16)式は,それぞれモード1と2,2と3,3と1の2モードのstrong couplingの条件式からなっている。また,モード間の結合は,モード1と3の場合よりも,隣りあうモード間(モード1と2,2と3)の方が大きいと考えられる。このことから,strong couplingの条件(16)を充している時,Ne-吸収を減少させていくと,この条件の内で最初にstrong couplingの条件をみたさなくなるのは,モード1と3の条件(18)である。

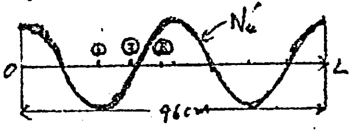
$$(\theta_{31}-t_{31})\cdot(\theta_{13}-t_{13}) > (\beta_3-b_3)(\beta_1-b_1) \quad (18)$$

(18)でNe-吸収管の位置に依存する項は,$t_{13}$, $t_{31}$ である。吸収管の圧力 0.2 torr,モード間隔 150 MHz の時 $t_{13}$, $t_{31}$ は次式で与えられる。

$$t_{\substack{13\\31}} = \frac{\sqrt{\pi}k^2\wp^4\hbar^{-3}}{32\epsilon_0 K u}\left[\bar{N}'\left(\frac{3.27}{605+(\omega-\nu_2+6)^2}+0.281\times10^{-3}\right)\right.$$
$$\left.+N'_c\,\frac{1}{605+(\omega-\nu_3+6)^2}\left(0.893\times10^{-2}\mp0.665\times10^{-2}(\omega-\nu_3+6)\right)\right] \quad (19)$$

但し,$N'_c=\frac{1}{L}\int_0^L dz\,N'(z)\cos\frac{4\pi z}{L}$

(19)の $N'_c$ を含む項が小さいほど(18)を満足させやすい。また,単一モード発振がまず起るのは出力の大きい $\omega$ 付近であるので,$N'_c$ を含む項のかっこの中は,負になるから,$N'_c$ が大きいほど,(18)の条件を充たしやすい。これは,実験と定性的に一致している。




| 吸収管の中心 | 放電電流 |
|---|---|
| ① | 37 mA |
| ② | 31 mA |
| ③ | 25 mA |

## IV 周波数安定化の方法

Ne-吸収管を使った周波数安定化の方法としては、これをHe-Neレーザの共振器の外部に置き、このNe-吸収管に軸方向磁場を印加して、右及び左回りの円偏向レーザに対するNe-吸収管の吸収特性を利用したものがあるが、ここでは、Ne-吸収管を共振器内に挿入し、これに軸方向磁場を印加した時を考える。この時のsingle mode動作方程式は次のようになる。但し、共振器の損失は、等方的(内部ミラー励行のような場合)であるとする。

$$\dot{E}_+ = E_+\{(\alpha - a_+ - l) - (\beta - b_+)E_+^2 - (\theta - t_{+-})E_-^2\} \quad (1)$$

$$\dot{E}_- = E_-\{(\alpha - a_- - l) - (\beta - b_-)E_-^2 - (\theta - t_{-+})E_+^2\} \quad (2)$$

但し、$E_+, E_-$：右及び左回りの円偏向レーザの電界成分

$\alpha, \beta, \theta$：レーザ媒質によってきまる係数

$a_\pm, b_\pm, t_{\pm\mp}$：軸磁場印加の時の吸収媒質によってきまる係数

$l$：共振器による損失

ここで(1),(2)式の係数$a_\pm, b_\pm, t_{\pm\mp}$はZeeman Laserの理論[13]から求める。(1),(2)式より、周波数に対する出力$E_+^2$及び$E_-^2$を求めると、図1から図3のようになる。

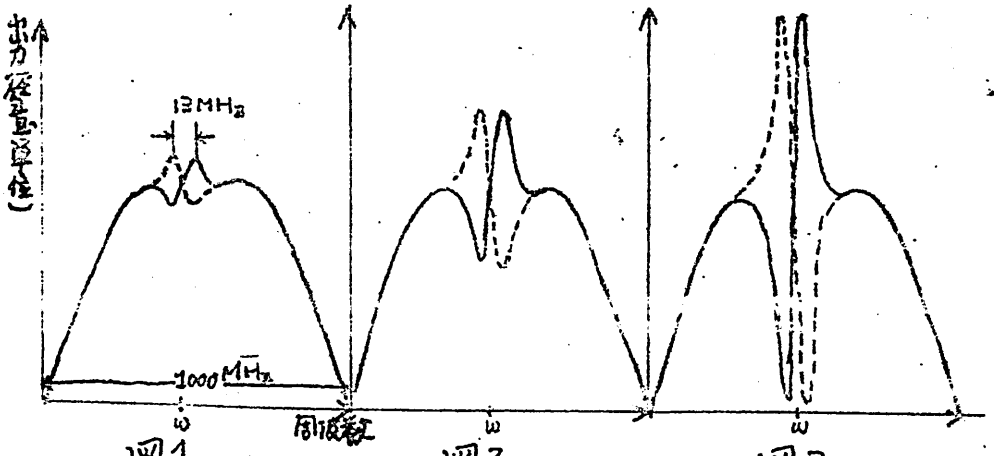



図1
$\bar{N}=1.5\cdot l$
$\bar{N}'=0.03\cdot l$

図2
$\bar{N}=1.5\cdot l$
$\bar{N}'=0.05\cdot l$

図3
$\bar{N}=1.5\cdot l$
$\bar{N}'=0.075\cdot l$

$\bar{N}$ : excitation density

$\bar{N}'$ : absorption density

但し、図1～図3のprofileは、レーザ管の圧力を2torr Ne-吸収管の圧力は、この圧力効果が無視できる程度であるとする。圧力に関係する、原子の寿命、自然幅等は、論文[2]を参照した。レーザ遷移は、磁気量子数 $J=1\rightarrow J=2$ の遷移 (He-Neレーザ 6328Å) において、また、磁場による Zeeman splitting は Ne吸収管の原子の自然幅 ($\gamma_{ab}=13\,MHz$) に等しいとおいた。また、この数値計算の結果 $(\beta-b_+)(\beta-b_-)>(\theta-t_{+-})\times(\theta-t_{-+})$ なる条件 (weak couplingの条件) をみたすことがわかった。すなわち、右および左回りの円偏光レーザが同時に発振できる。図1～図3でわかるように、周波数 $\omega$ の点でかなり鋭い crossover が見られ、Ne吸収 ($\bar{N}'$) の増加にしたがって、この crossover での傾きが鋭くなる。これは、Ne吸収によって、

$E_+$と$E_-$のcouplingが強くなるからである。このcross-overの点を利用して、絶対周波数安定化が可能である。またこの方法では、安定させようとする周波数からのずれが、どちらにずれているかの情報を含んでいるのでセンシングの必要はない。

## V あとがき、

$^{20}Ne$吸収による$^{3}He$-$^{20}Ne$レーザの単一周波数化の実験は、すでにP.H.Lee[4]等によって報告されているが、ここではnatural Neonを使って、同様の実験を行なった。彼等は、単一周波数で全ゲイン幅にわたって、tuningできたと報告しているが、本実験では、ミラーの反射率の違いなどによって、発振できる幅は、モード間隔の約2倍、4倍となった。これを検討で与えた式で説明できるかどうか、数値計算をして確かめる必要がある。また図6の中央でのピークの原因として考えられるのは$^{20}Ne$の吸収であるが、そうすると、図5での中央の二つのピークは説明困難である。($^{22}Ne$による吸収ピークは$^{20}Ne$のそれより約900MHz upshiftしているので、2つのピークの一方を$^{22}Ne$によるものとは見なせない。)理論的には、$E^2=\frac{\alpha-a-l}{\beta-b}$で求められるが、これでは図6は説明されるが、図7の2つのピークは説明できない。これを説明するには、$(\beta-b)$は$\bar{N}'$($Ne$吸収)が大きくなる時、負の値をとり、より高次な近似が必要となるのかもしれない。

## 文献


(1) P.W. Smith. IEEE QE-1 P.343 '65
(2) M.D. Domenico Jr Appl. Phys. Lett. 8.20. '66
(3) 小林.張.松尾 昭44信学会大637 '69
(4) P.H.Lee etal Appl. Phys. Lett, 1 Dec. '68
(5) P.W.Smith IEEE QE-2 P.666 '66
(6) 田辺.米.張.松尾、昭43信学会大650
(7) W.J. Tomlincon etal Appl. Opt. No.1 vol.8 Jan. '69
(8) R.L.Barqer etal Phys. Rev. Lett. No.1 vol.22 Jan. '69
(9) A.W. White Rev. Sci. Instrum. 38. 1079 '67
(10) W.E. Lamb Jr. Phys. Rev. No.6A vol. 134 June '64
(11) M.S. Feld etal Appl. Phys. Lett. 15 Dec. '68
(12) B.L. Gyorffy etal Phys. Rev. No.2 vol.169 May '68
(13) M. Sargent III Phys. Rev. No.2 vol.164 Dec. '67

（輻射科学研究会資料）

# “PRR法と異方性光学遅延素子を用いた低電圧光強度変調器.”

後藤幸一，末田 正，牧本利夫

（大阪大学 基礎工学部）

昭和45年4月24日

（住友電工 K.K）

# PRR法*と異方性光学遅延素子を用いた低電圧光強度変調器.

## §1. まえがき

レーザ光のようなコヒーレントな光に強度変調を行なう方法としては (1) 直交二偏光成分の一方又は両方に電気光学結晶を用いて位相変調を行ない干渉させて強度変調を得る方法 (2) 半透過鏡で直線偏光を二つに分割して個別に位相変調を行ない干渉させる方法, の二つがひろく採られている。しかしいづれの場合にも干渉しあう二つの成分はその光路長差が無変調時には常に一定であることが大切である。外部条件によってこの値が容易に変化すれば、そのことは消光比の劣化の原因となる。特に光PCMの場合にはこの点は重要である。

筆者等はこの光路長差を自動的に消去することによって自然複屈折の影響を取除いて、温度制御等を必要としない変調器について提案し、報告した。[1][2] 本文ではこの方法について簡単にまとめ、この考え方に基いて光学遅延回路を構成すれば、従来のものに比べてかなり低電圧で動作する変調器が得られるという興味ある応用例の一つを示す。

## §2. PRR法とその応用

直交二偏光成分に完全に等しい光路長をもたせて光路

---

* Polarization-Rotated Reflection (偏光回転反射法)

長差を自動的に消去して，安定な光学バイアスを得る一方法としてＰＲＲ法がある．図１はその動作原理図である．

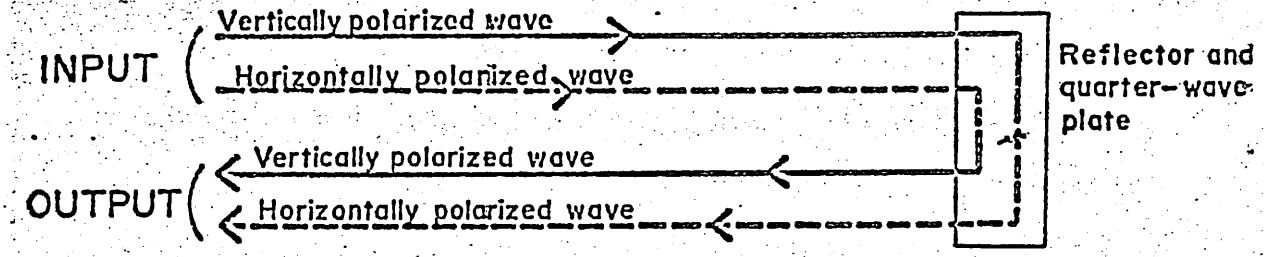



Fig.1 Principle of PRR-method.

図１より明らかな如く，光の伝播する媒質の異方性であるなしにかかわらず，両偏光成分はともに等しい光路長（$n_oL + n_eL$）をもつ．ここでＬは光の伝播媒質の長さ，$n_o$，$n_e$はそれぞれ垂直，水平偏光成分に対する屈折率である．これによって異方性電気光学結晶を用いた光強度変調器における自然複屈折は取除くことができる．しかし逆に光路長差をあたえたいときでも，可逆性の光学素子や直流を印加した変調器では光学バイアスは得られない．また交流電界でも変調波の周期が光の走行時間に比べて同程度かそれより長い場合には有効な変調は得られないが高周波では安定な変調動作が得られる．

図２，図３にＰＲＲ法を応用した変調器の例を示す．図２は進行波形[1]，図３は集中形[2]である．進行波形では変調周波数には上限はないが，集中形では結晶と反射板の間隔によって帯域がきまる．

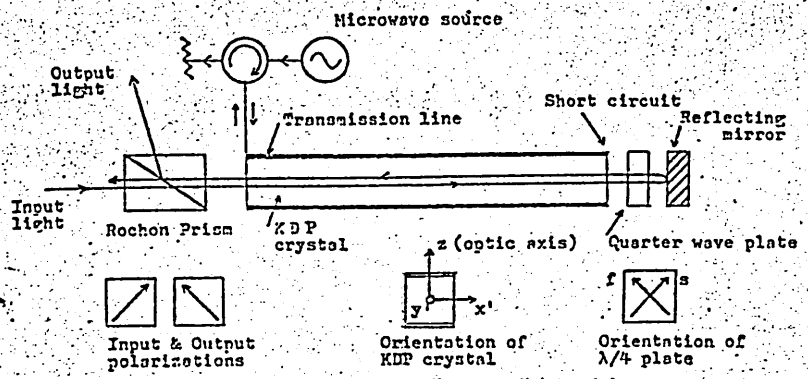



Fig. 2. A reflection-type traveling-wave light modulator.

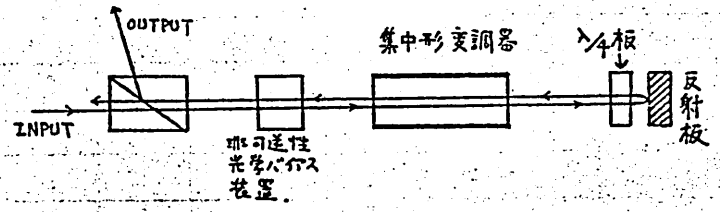



図3. PRR法を用いた集中形光強度変調器

なおPRR法は直交二偏光成分の光路長を等しくする方法であるが，半透過鏡で二分された同じ偏光方向をもつ二つの成分に対して同じ光路長をもたせて安定な光学バイアスを得るには図4の構成をとればよい。

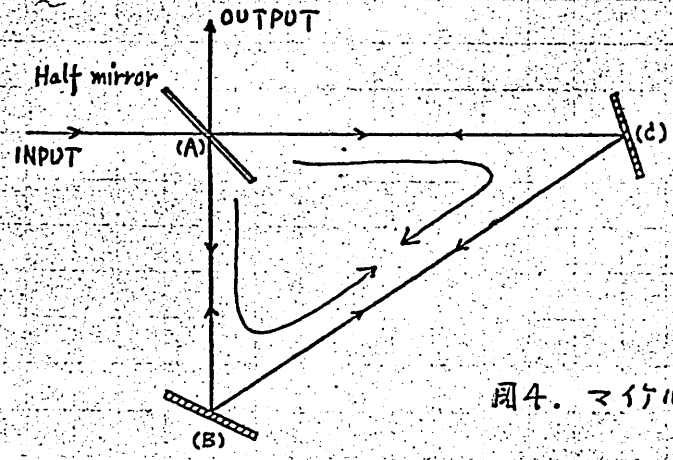



図4. マイケルソン干渉計の変形

この場合両成分は同一光路を逆方向に回転するが，光路

長は完全に等しいのでその効果はPRR法と同様である。集中形変調器を用いる場合には光路(A)(B)(C)(A)の中点に変調器をおいたのでは強度変調は得られないので，逆回転する二つの成分に対して逆位相で位相変調がかかる位置に変調器をおかねばならない。

## §3. 3m対称結晶の電気光学効果

低電圧光変調を行なう有望な電気光学結晶として，最近 $LiNbO_3$ や $LiTaO_3$ 等の3m対称の結晶が注目されている。これらの結晶は横形動作において次の様な屈折率をもつ。

$$\begin{cases} n_x = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \gamma_{13} E \quad \cdots\cdots (x偏光に対して) \\ n_z = n_e - \frac{1}{2} n_e^3 \gamma_{33} E \quad \cdots\cdots (z偏光に対して) \end{cases} \tag{1}$$

両偏光の移相量 $\Gamma_x$ と $\Gamma_z$ の差 $\Delta\Gamma$ は

$$\Delta\Gamma = \Gamma_x - \Gamma_z = \frac{2\pi}{\lambda_o} L(n_o - n_e) + \frac{\pi}{\lambda_o} L(n_e^3 \gamma_{33} - n_o^3 \gamma_{13}) E \tag{2}$$

ここで $E$ は変調電界，$L$ は結晶長である。

(2)より半波長電圧 $V_\pi$ は $(n_e^3 \gamma_{33} - n_o^3 \gamma_{13})^{-1}$ に比例する。したがって低電圧変調には $n_e^3 \gamma_{33} \gg n_o^3 \gamma_{13}$ であることが望ましい。しかし $LiNbO_3$ や $LiTaO_3$ ではその値は(3)に示すように $n_o^3 \gamma_{13}$ の影響を無視できない程度のものである。

$$\left(n_o^3 \gamma_{13} / n_e^3 \gamma_{33}\right) \fallingdotseq 0.313\ (0.219) \cdots\cdots LiNbO_3\ (LiTaO_3) \tag{3}$$

変調器に適当な工夫をすれば $n_o^3 \gamma_{13}$ の効果をなくす方法は容易に考えられる。たとえば二つの結晶を逆位相で

個別に位相変調器として動作させ，干渉させて強度変調を得る方法では $n_o^3\gamma_{13}$ は変調に関係がなく，$V_\pi$ は $(n_e^3\gamma_{33})^{-1}$ に比例する．その一例を図5に示す．

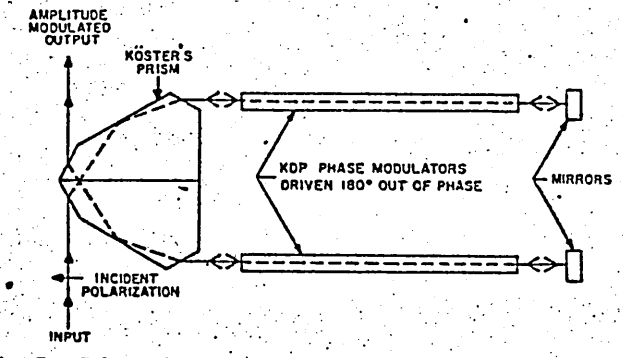



Fig. 5. Schematic of experimental KDP push-pull modulator.[3]

本文では $n_o^3\gamma_{13}$ の効果を加算的に利用することにより さらに $V_\pi$ を低下させる方法について述べる．

## §4. 異方性光学遅延素子の変調器への応用

前述の如く強度変調器において直交二偏光成分に対する屈折率は (4) で示される．

$$\begin{cases} n_x = n_{ox} + n_{mx}\cos\omega_m t \\ n_z = n_{oz} + n_{mz}\cos\omega_m t \end{cases} \tag{4}$$

ここで $\omega_m$ は変調角周波数である．

$n_{mx}$ と $n_{mz}$ が同符号の場合には $n_x$ と $n_z$ に対する変調波の位相を逆転させておけば，$V_\pi$ は $(n_{mx}+n_{mz})^{-1}$ に比例することになる．このためには図6に示すように $(\lambda_m/2)$ だけ変調後の一方の偏光成分を遅らせた後で干渉させて強度変調として取出せばよい．

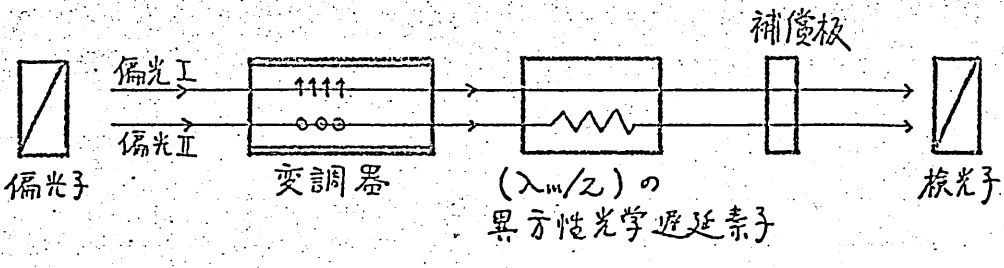



図6. 異方性光学遅延素子を用いた変調器のモデル.

ここで $\lambda_m$ は変調波の波長である. また直交二偏光成分の内に変調波の波長程度の相対的な遅延をあたえる光学素子のことを異方性光学遅延素子とよぶことにする.

さて図6の変調器モデルがうまく動作するためには, 異方性光学遅延素子の相対的遅延量が光波長程度で正確に制御されねばならない. ここでも, 無変調時には両偏光成分の光路長差は常に一定でなければならないという変調器の安定動作の条件が要求されるのである. しかし図6のモデルでこの条件を満足させることは極めて困難であろうと思われる. その理由としては遅延素子の温度依存性や機械的不安定性等が考えられるであろう.

この様な不都合をなくすには遅延素子の光路長にも自然複屈折の問題の場合と同様にPRR法の考え方を応用して, 変調器や遅延素子の全ての光路長が両偏光成分に対して等しくなる構成をとればよい. (図7参照)

図7(B)において, まず一方の偏光成分が他方に対して $(\lambda_m/2)$ の遅延をうけて変調器に入る. したがって両偏光は逆相で変調をうけることになる. その後, 四分の一波長板と反射鏡で, おのおの偏光方向が逆転して, 再び変調器に入るが, そのとき どちらの偏光成分とも

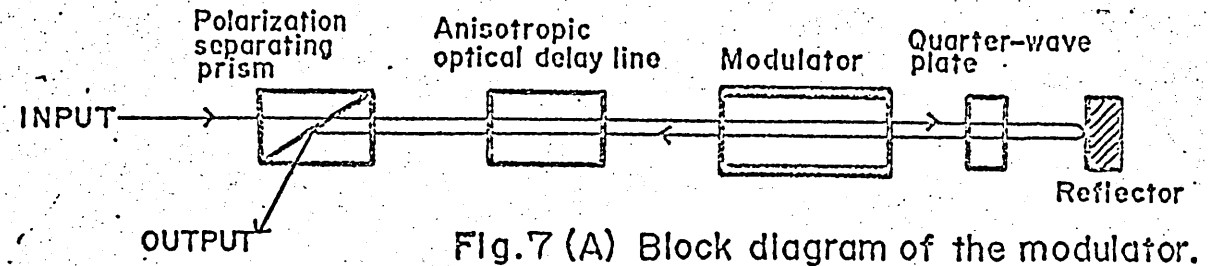



Fig.7 (A) Block diagram of the modulator.

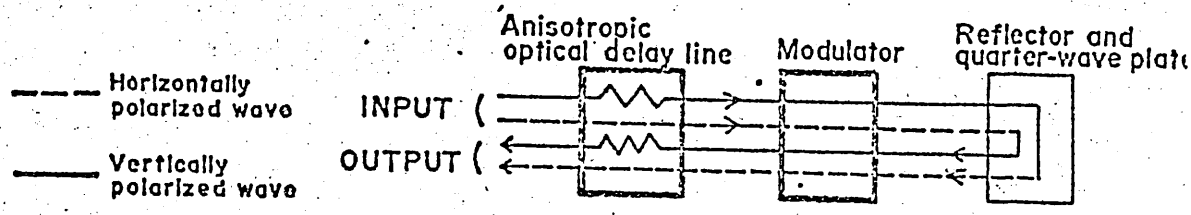



Fig.7 (B) Principle of the modulation.

往復で加算的に変調をうけるように、結晶と反射板との距離は零か半波長の整数倍（$\frac{\lambda}{2}\times n$ , $n=0,1,2,\cdots$）になるようにする。その後再度遅延素子に入るが両偏光成分は偏光方向が逆転しているので、遅延素子によって、相対的遅延量が完全に解消される。そして、そのことによって逆相で変調をうけた両偏光成分は干渉することが可能になり強度変調として偏光合離プリズムによって取出される。以上述べたことを簡単な数式で説明する。

直交二偏光成分が往復でうける移相量 $\Phi_I$, $\Phi_{II}$ は次式であらわされる。

$$\begin{cases} \Phi_I = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_0 L + n_e L) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(D_1 + D_2) + \frac{2\pi}{\lambda_0} n_e^3 \gamma_{33} L E \cos\omega_m t \\ \Phi_{II} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_0 L + n_e L) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(D_1 + D_2) + \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0^3 \gamma_{13} L E \cos(\omega_m t + \pi) \end{cases}$$

ここで $D_1$ $D_2$ は異方性光学遅延素子の直交二偏光成分に対する光路長で、相対的遅延量は $(D_1 - D_2)$ である。

(5) より 位相差 $\Delta\Phi$ を求めると.

$$\Delta\Phi = \Phi_I - \Phi_{II} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e^3\gamma_{33} + n_o^3\gamma_{13})LE\cos\omega_m t \qquad (6)$$

(6) より 遅延素子はその相対的な遅延量を変調波の波長程度にとっておけば、外部条件の変化に対して遅延量が若干変化しても光波長程度の制御は全く不要であることがわかる. 同時に自然複屈折も完全に取除かれることは言うまでもない. またこの変調器は反射形であり, 結晶の有効長が2倍になっていることも注意すべきである. 詳しい計算は付録を参照されたい.

従来の反射形と比較して, この方法では $LiNbO_3$ ($LiTaO_3$) を用いた場合, 半波長電圧を 48% (36%) 低下させることができる. 変調周波数の帯域については, その下限は遅延素子の相対的遅延量によってまるから原理的には任意の低周波帯で変調可能であるが実際問題として遅延量は数10cmが適当とすれば下限は数100MHz付近である. またその帯域幅は変調器のマイクロ波特性で制限される帯域幅より十分広いので問題はない.

## §5. 異方性光学遅延素子の例.

直交二偏光成分の間に相対的遅延量をあたえるには, 両偏光の光路長をかえてやる必要がある. その際には偏光を分離し, 再び収束させてやる必要がある. その方法は色々考えられるが, 技術的には光を反射させて, 分離と収束の位置を一致させる方法が容易である.

ここでは 偏光分離プリズムを一つ用いた方法を示す.

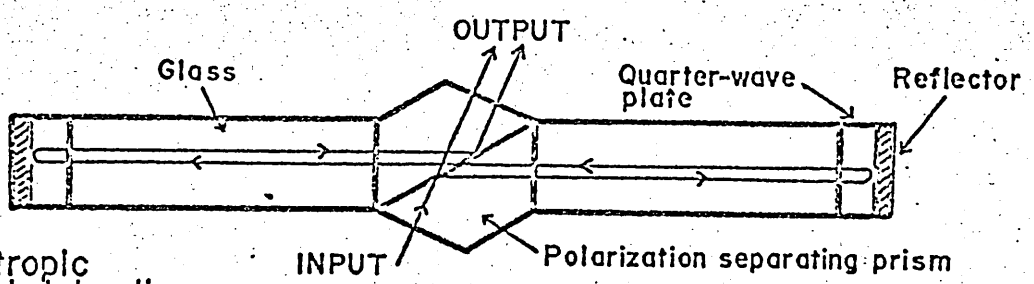



Fig.8 Anisotropic optical delay line.

## (参考文献)

(1) 末田 他「PRR法を用いた進行波形光強度変調器」信学会. 論文誌 (掲載予定)

(2) 後藤 他「PRR法を用いた集中形マイクロ波光変調器」昭和45年連大 No 1523

(3) W.H.STEIER: "A Push-Pull Optical Amplitude Modulator", IEEE, QE3, No12, Dec. 1967.

## (付録) 変調の深さの計算.

同時刻に入射した直交二偏光成分 I, II に対する結晶の屈折率はそれぞれ

$$(\text{往路})\begin{cases} n_{\mathrm{I}} = n_{o1} + n_{m1}\cos\omega_m t \\ n_{\mathrm{II}} = n_{o2} + n_{m2}\cos(\omega_m t + \varphi) \end{cases} \quad (1)$$

ここで $\varphi$ は遅延素子による位相の遅れ

$$(\text{後路})\begin{cases} n_{\mathrm{I}} = n_{o2} + n_{m2}\cos(\omega t + \varepsilon) \\ n_{\mathrm{II}} = n_{1o} + n_{m1}\cos(\omega t + \varphi + \varepsilon) \end{cases} \quad (2)$$

ここで $\varepsilon$ は結晶と反射板の間の走行時間による位相の遅れ

偏光成分 I, II の移相量はそれぞれ

$$\Phi_I = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_{01}+n_{02})L + \frac{2\pi}{\lambda_0}(D_1+D_2) + \frac{2\pi}{\lambda_0}\left\{n_{m1}\cos\omega_m t + n_{m2}\cos(\omega_m t+\varepsilon)\right\}$$

$$\Phi_{II} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_{01}+n_{02})L + \frac{2\pi}{\lambda_0}(D_1+D_2) + \frac{2\pi}{\lambda_0}\left\{n_{m2}\cos(\omega_m t+\varphi)+n_{m1}\cos(\omega_m t+\varphi+\varepsilon)\right.$$

ここで $D_1, D_2$ は直交二偏光成分に対する遅延素子の光路長である. 相対的遅延量は $(D_1-D_2)$ であたえられる.

(3) (4) より位相差 $\Delta\Phi$ は

$$\Delta\Phi = \Phi_I - \Phi_{II} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot 2L\cdot\Gamma_m\sin(\omega_m t+\alpha)$$

$$\Gamma_m = \left\{\left(n_{m1}\sin\frac{\varphi+\varepsilon}{2}\right)^2+\left(n_{m2}\sin\frac{\varphi-\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n_{m1}\sin\frac{\varphi+\varepsilon}{2}\right)\left(n_{m2}\sin\frac{\varphi-\varepsilon}{2}\right)\cos\varepsilon\right\}^{1/2}$$

変調の深さ $\Gamma_m$ が最適になるのは $\varepsilon=0$ のときで

$$\Gamma_m = (n_{m1}+n_{m2})\sin\frac{\varphi}{2} \qquad (4)$$

となる. (4) より $\varphi=(2k-1)\pi$, $k=1,2,3,\cdots\cdots$

となるように遅延量を決める.

輻射科学研究会資料

# 光の電場勾配を考慮した電気光学効果

牧本利夫
井上敦雄
（大阪大学　基礎工学部）

昭和45年7月3日
（於　シャープ株式会社）

## §1. まえがき.

レーザー(LASER)の出現以来，強力な光を発生することが出来るようになり，非線形光学現象が目覚しく進展した．又，レーザー光は位相のそろったcoherentな光(誘導放射光)であることから，電磁波的なふるまいをするので，レーザ光を通信に使おうと研究され，それにともなって，光変調技術が大いに進歩した。さらに変調分光法によつて，固体の光学的性質を得る研究も進んだ。

外部電場のない場合の光の電場勾配による偏光面の回転は自然旋光性(光学活性)として古くから知られている。[1),2)]
さらに，溶液中での分子の構造に対する新しい情報を増すために，電場等によって，分子の配向の規則性をもたせ，この状態での光学活性を測定することは，それ程，活発ではないが，かなり以前から知られている。[文3)~文6)]

結晶(誘電体)に外部電場を印加した場合，Pockels効果のある場合の光の電場勾配を考慮した非線形光学現象はほとんど知られていないので，この論文ではその効果を報告することにする。

まず最初に，形式的に光の電場勾配まで考慮した場合の量子論的な双極子モーメント$\langle 生|P|生\rangle$を求める。ここでは，簡単のために，一電子模型とし，さらに無損失媒質として，一次の摂動まで計算する。

次に，その電気光学効果を古典論的に考察する。exampleとして，Td型結晶のPockels効果と外部電場による旋光性

を考察し，外部電場による旋光性の測定方法を述べ，さらに Td 型結晶の例として，KDP 結晶について行った実験を報告する。文献

## §2. 光の電場勾配を考慮した場合の電気光学効果の量子論的考察。

まず最初に光の電場勾配を考慮した場合の電気光学効果の式を量子論的に求めることにする。

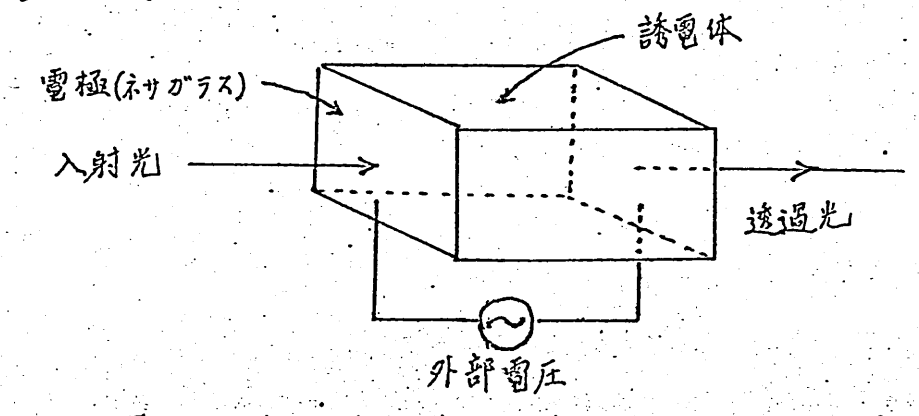



Fig. 1. 誘電体に光を入射し，電圧を印加した場合。

Fig. 1. のように光と外部電圧が誘電体に作用した場合，その電場によって誘電体の原子系や分子系に誘起されるモーメントに対する式を求める。摂動を受けていない原子や分子に対する波動函数を $\phi_g e^{-i\omega_g t}$ とする。ここで，この誘電体の固有振動数は光又は外部電圧の周波数からずれているものとする。この誘電体に光を入射し，外部から電圧を加える為，その影響での摂動による新しい波動函数を $\psi$ とする。

今，$\psi$ を

$$\psi(t) = \sum_n \left( \delta_{ng} + a_n^{(1)}(t) + a_n^{(2)}(t) + \cdots \right) \phi_n e^{-i\omega_n t} \qquad (2.1)$$

と展開する。ここで、$\delta_{ng}$はデルタ記号、$a_n^{(1)}(t)$は一次での時間の展開係数、$a_n^{(2)}(t)$は二次での時間の展開係数である。ここでは、一次の摂動までしか考えないから、(2.1)式は

$$\Psi(t) = \sum_n (\delta_{ng} + a_n^{(1)}(t)) \phi_n e^{-i\omega_n t} \tag{2.2}$$

となる。次に一次での時間の展開係数$a_n^{(1)}(t)$を求める。$a_n^{(1)}(t)$の時間微分は次式で与えられる。(文献)

$$\frac{da_n^{(1)}(t)}{dt} = (i\hbar)^{-1} \mathcal{H}'_{ng} e^{i\omega_{ng} t} \tag{2.3}$$

ここで、$\omega_{ng} = \omega_n - \omega_g$で、$\mathcal{H}'$は誘電体と電界(光と外部電圧との電界)による相互作用のHamiltonianであって、

$$\mathcal{H}'_{ng} = (\phi_n, \mathcal{H}'\phi_g) = (\phi_n, \mathbf{E}_{loc} \cdot \mathbf{P}\phi_g) \tag{2.4}$$

である。但し、$\mathbf{P}$は局所電界$\mathbf{E}_{loc}$の中にある粒子モーメントである。外部電圧の誘電体中における局所場電界を$\mathbf{E}_{1loc}\cos\omega_1 t$、光の誘電体中における局所場電界を$\mathbf{E}_{2loc}\cos\omega_2 t$とすると、

$$\mathbf{E}_{loc}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{1loc}(\mathbf{r})\cos\omega_1 t + \mathbf{E}_{2loc}(\mathbf{r})\cos\omega_2 t \tag{2.5}$$

とおける。誘電体内でμ番目の粒子が占めている場所において、電界$\mathbf{E}_{loc}(\mathbf{r})$のj成分を空間展開すると、

$$E_{jloc}(\mathbf{r}^\mu) = E_{jloc}(0) + \mathbf{r}^\mu (\nabla E_{jloc})_0 + \cdots \tag{2.6}$$

となる。但し、jはx, y, zである。

ここでは (2.6) 式の第2項まで考えると，相互作用の Hamiltonian $\mathcal{H}'$ は (2.4)，(2.6) 式より

$$\mathcal{H}' = \sum_{\mu} \left\{ E_{loc}(0) P^{\mu} + \frac{1}{2} (\nabla \times E_{loc})_0 (r^{\mu} \times P^{\mu}) + \sum_j r_j^{\mu} \frac{\partial E_{j\,loc}}{\partial r_j} P_j^{\mu} \right\} \tag{2.7}$$

となり，$\mathcal{H}'$ の第1項及び第2項はそれぞれ電気的及び磁気的双極子モーメントに対する演算子を含んでいる。第3項はここでは重要でないので省略する。[注9]

(2.3)，(2.5)，(2.7) 式より

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= (i\hbar)^{-1} \int_{-\infty}^{t} \mathcal{H}'_{ng}\, e^{i\omega_{ng} t}\, dt \\ &= (i\hbar)^{-1} \sum_{\mu} \Big\{ \langle E_{1\,loc}(0) P^{\mu} \rangle_{ng} \int_{-\infty}^{t} \cos\omega_1 t\, e^{i\omega_{ng} t}\, dt \\ &\quad + \langle E_{2\,loc}(0) P^{\mu} \rangle_{ng} \int_{-\infty}^{t} \cos\omega_2 t\, e^{i\omega_{ng} t}\, dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle (r^{\mu} \times P^{\mu}) (\nabla \times (E_{1\,loc} + E_{2\,loc}))_0 \rangle_{ng} \int_{-\infty}^{t} (\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \\ &\qquad \cdot e^{i\omega_{ng} t}\, dt \Big\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。但し，$\langle E_{1\,loc}(0) P^{\mu} \rangle_{ng} = (\phi_n, E_{1\,loc}(0) P^{\mu} \phi_g)$

$\langle E_{2\,loc}(0) P^{\mu} \rangle_{ng} = (\phi_n, E_{2\,loc}(0) P^{\mu} \phi_g)$

$\langle (r^{\mu} \times P^{\mu}) (\nabla \times (E_{1\,loc} + E_{2\,loc}))_0 \rangle_{ng} = (\phi_n, (r^{\mu} \times P^{\mu}) (\nabla \times (E_{1\,loc} + E_{2\,loc}))_0 \phi_g)$

ここでは，電界は時間的に次の法則にしたがって変動するものとする。[注10]

$t < 0$ では，$E_{loc} = E_{1\,loc}\, e^{\alpha t} \cos\omega_1 t + E_{2\,loc}\, e^{\alpha t} \cos\omega_2 t$

$t \geq 0$ では，$E_{loc} = E_{1\,loc} \cos\omega_1 t + E_{2\,loc} \cos\omega_2 t$

$t$について$-\infty$から任意の時刻まで積分した後$\lambda$を0に近づける。
又，$E_{1,loc}(r)$は考察している領域では一定と見做しうるので，電気双極子近似として取り扱えるから，$\nabla\times E_{1,loc}(r)=0$となる。
故に，

$$a_n^{(1)}(t)=(2\hbar)^{-1}\sum_{\mu}\left\{\langle E_{1,loc}(0)\cdot P^{\mu}\rangle_{ng}\left[\frac{e^{i(\omega_{ng}-\omega_1)t}}{\omega_{ng}-\omega_1}+\frac{e^{i(\omega_{ng}+\omega_1)t}}{\omega_{ng}+\omega_1}\right]\right.$$
$$+\langle E_{2,loc}(0)\cdot P^{\mu}\rangle_{ng}\left[\frac{e^{i(\omega_{ng}-\omega_2)t}}{\omega_{ng}-\omega_2}+\frac{e^{i(\omega_{ng}+\omega_2)t}}{\omega_{ng}+\omega_2}\right]$$
$$\left.+\langle(\nabla\times E_{2,loc})_0(\Pi^{\mu}\times P^{\mu})\rangle_{ng}\left[\frac{e^{i(\omega_{ng}-\omega_2)t}}{\omega_{ng}-\omega_2}+\frac{e^{i(\omega_{ng}+\omega_2)t}}{\omega_{ng}+\omega_2}\right]\right\} \tag{2.9}$$

となる。
(2.2)，(2.9)式より，電界の依存の仕方によって，双極子モーメントを分類してみると，次のようになる。

$$\langle\Psi|P|\Psi\rangle=\langle\Psi|P|\Psi\rangle_{E_{loc}=0}+\langle\Psi|P|\Psi\rangle_{E_{1,loc}}+\langle\Psi|P|\Psi\rangle_{E_{2,loc}}$$
$$+\langle\Psi|P|\Psi\rangle_{E_{1,loc}^2}+\langle\Psi|P|\Psi\rangle_{E_{2,loc}^2}+\langle\Psi|P|\Psi\rangle_{(\nabla\times E_{2,loc})_0}$$
$$+\langle\Psi|P|\Psi\rangle_{E_{1,loc}\cdot E_{2,loc}}+\langle\Psi|P|\Psi\rangle_{(\nabla\times E_{2,loc})_0\cdot E_{1,loc}}$$
$$+\langle\Psi|P|\Psi\rangle_{(\nabla\times E_{2,loc})_0\cdot E_{2,loc}} \tag{2.10}$$

ここでは，誘電体を透過してきた光の状態のみ観測するのであるから，光の電界$E_{2,loc}\cos\omega_2 t$による双極子モーメントだけが必要となる。又，$E_{2,loc}^2$による項と，$(\nabla\times E_{2,loc})_0\cdot E_{2,loc}$による項は光の電界$E_{2,loc}(r)\cos\omega_2 t$がそれほど強くない

時には省略できる。結局，ここで必要なのは次の四項のみとなる。

$$\langle 出|P|出\rangle_{light} = \langle 出|P|出\rangle_{E_{2loc}} + \langle 出|P|出\rangle_{(\nabla\times E_{2loc})_0} + \langle 出|P|出\rangle_{E_{1loc}\cdot E_{2loc}} + \langle 出|P|出\rangle_{(\nabla\times E_{2loc})_0\cdot E_{1loc}} \quad (2.11)$$

(2.11)式の右辺の第1項 $\langle 出|P|出\rangle_{E_{2loc}}$ は光の屈折率を与えるところの電気双極子モーメントである。第2項 $\langle 出|P|出\rangle_{(\nabla\times E_{2loc})_0}$ は自然旋光性効果を示す磁気双極子モーメントである。第3項の $\langle 出|P|出\rangle_{E_{1loc}\cdot E_{2loc}}$ は外部電圧と光との電界によって誘起されるところの電気双極子モーメントで，これを一次の電気光学効果(Pockels効果)と呼ばれている。最後の第4項は $\langle 出|P|出\rangle_{(\nabla\times E_{2loc})_0\cdot E_{1loc}}$ は光の電場勾配を考慮した電気光学効果で，第2項の自然旋光性効果に対して，この効果を誘導旋光性効果と呼ぶことにする。

これらの項を計算すると次のようになる。

$$\langle 出|P_i|出\rangle_{E_{2loc}} \simeq \frac{2}{h}\sum_l\sum_n\sum_\mu \langle P_i^\mu\rangle_{gn}\langle P_l^\mu\rangle_{ng}\left[\frac{\omega_{ng}}{(\omega_{ng}-\omega_2)(\omega_{ng}+\omega_2)}\right] \cdot E_{2l\,loc}\cos\omega_2 t \quad (2.12)$$

$$\langle 出|P_i|出\rangle_{(\nabla\times E_{2loc})_0} \simeq \frac{1}{h}\sum_l\sum_n\sum_\mu \langle P_i^\mu\rangle_{gn}\langle(\Psi^\mu\times P^\mu)_{kl}\rangle_{ng} \cdot\left[\frac{\omega_{ng}}{(\omega_{ng}-\omega_2)(\omega_{ng}+\omega_2)}\right](\nabla\times E_{2loc})_{0kl}\cos\omega_2 t \quad (2.13)$$

$$\langle \Psi | P_i | \Psi \rangle_{E_{1loc}\cdot E_{2loc}} \simeq \frac{1}{2\hbar^2} \sum_l \sum_j \sum_n \sum_\mu \langle P_i^\mu \rangle_{mn} \langle P_j^\mu \rangle_{gn} \langle P_l^\mu \rangle_{mg}$$

$$\left\{ \left[ \frac{1}{(\omega_{mg}-\omega_1)(\omega_{mg}+\omega_2)} + \frac{1}{(\omega_{mg}+\omega_1)(\omega_{mg}-\omega_2)} \right] \right.$$

$$\cdot E_{1j\,loc}(0) \cdot E_{2l\,loc}(0) \cos(\omega_1+\omega_2)t$$

$$+ \left[ \frac{1}{(\omega_{mg}-\omega_1)(\omega_{mg}-\omega_2)} + \frac{1}{(\omega_{mg}+\omega_1)(\omega_{mg}+\omega_2)} \right]$$

$$\left. \cdot E_{1j\,loc}(0) \cdot E_{2l\,loc}(0) \cdot \cos(\omega_1-\omega_2)t \right\} \tag{2.14}$$

$$\langle \Psi | P_i | \Psi \rangle_{(\nabla\times E_2)_{loc}\cdot E_{1loc}} \simeq \frac{1}{4\hbar^2} \sum_l \sum_j \sum_n \sum_\mu \langle P_i^\mu \rangle_{mn} \langle P_j^\mu \rangle_{gn} \langle (\mu^\mu \times P^\mu)_{kl} \rangle_{mg}$$

$$\left\{ \left[ \frac{1}{(\omega_{mg}-\omega_1)(\omega_{mg}+\omega_2)} + \frac{1}{(\omega_{mg}+\omega_1)(\omega_{mg}-\omega_2)} \right] \right.$$

$$\cdot E_{1j\,loc}(0) \cdot (\nabla\times E_{2\,loc})_{okl} \cos(\omega_1+\omega_2)t$$

$$+ \left[ \frac{1}{(\omega_{mg}-\omega_1)(\omega_{mg}-\omega_2)} + \frac{1}{(\omega_{mg}+\omega_1)(\omega_{mg}+\omega_2)} \right]$$

$$\left. \cdot E_{1j\,loc}(0) \cdot (\nabla\times E_{2\,loc})_{okl} \cos(\omega_1-\omega_2)t \right\} \tag{2.15}$$

次の節で，これらの4つの効果を古典論的に考察し，誘導旋光性効果の古典論的表現を示す。

## §3. 光の電場勾配を考慮した場合の電気光学効果の古典論的考察.

(2.12), (2.13), (2.14), (2.15)式の双極子モーメント $P$ を簡単の為に次のような電気分極 $P$ に置き換える。

$$P_{i E_2} = \sum_l \chi'_{il} E_{2l} \cos\omega_2 t \Rightarrow \sum_l \chi'_{il} E_{2l}^{\omega_2} \qquad (3.1)$$

$$P_{i(\nabla\times E_2)_0} = \sum_l \sum_k \chi''_{ilk} (\nabla\times E_2)_{0kl} \cos\omega_2 t$$

$$\Rightarrow \sum_l \sum_k i^0 \chi''_{ilk} k_k E_{2l}^{\omega_2} \qquad (3.2)$$

$$P_{i E_1 \cdot E_2} = \sum_l \sum_j \chi'''_{ijl} E_{1j} \cos\omega_1 t \cdot E_{2l} \cos\omega_2 t$$

$$\Rightarrow \sum_l \sum_j \chi'''_{ijl} E_{1j}^{\omega_1} \cdot E_{2l}^{\omega_2} \qquad (3.3)$$

$$P_{i E_1 (\nabla\times E_2)_0} = \sum_l \sum_j \sum_k \chi''''_{ijkl} E_{1j} \cos\omega_1 t (\nabla\times E_2)_{0kl} \cos\omega_2 t$$

$$\Rightarrow \sum_l \sum_j \sum_k i^0 \chi''''_{ijkl} E_{1j}^{\omega_1} k_k E_{2l}^{\omega_2} \qquad (3.4)$$

但し, $i^0 = \sqrt{-1}$, $k = |k|$, $k$; 波数ベクトルで, 分極率 $\chi$ は次のようにおいた。

$$\chi'_{il} = \frac{2}{h} \sum_n \sum_\mu \langle P_i^\mu \rangle_{gn} \langle P_l^\mu \rangle_{ng} \frac{\omega_{ng}}{(\omega_{ng}-\omega_2)(\omega_{ng}+\omega_2)}$$

$$\chi''_{ikl} = \frac{1}{h} \sum_n \sum_\mu \langle P_i^\mu \rangle_{gn} \langle (r^\mu \times p^\mu)_{kl} \rangle_{ng} \frac{\omega_{ng}}{(\omega_{ng}-\omega_2)(\omega_{ng}+\omega_2)}$$

$$\chi'''_{ijl} = \frac{1}{2h} \sum_n \sum_\mu \langle P_i^\mu \rangle_{nn} \langle P_j^\mu \rangle_{gn} \langle P_l^\mu \rangle_{gn}$$

$$\cdot \left[ \frac{1}{(\omega_{ng}-\omega_1)(\omega_{ng}+\omega_2)} + \frac{1}{(\omega_{ng}+\omega_1)(\omega_{ng}-\omega_2)} + \frac{1}{(\omega_{ng}-\omega_1)(\omega_{ng}-\omega_2)} \right.$$

$$+\frac{1}{(\omega_{ng}+\omega_1)(\omega_{ng}+\omega_2)}\Big]$$

$$\chi'''' {}_{ijkl} = \frac{1}{\hbar^2}\sum_n\sum_\mu \langle P_i^\mu\rangle_{nn}\langle P_j^\mu\rangle_{gn}\langle(W^\mu \times P^\mu)_{kl}\rangle_{ng}$$
$$\cdot\Big[\frac{1}{(\omega_{ng}-\omega_1)(\omega_{ng}+\omega_2)}+\frac{1}{(\omega_{ng}+\omega_1)(\omega_{ng}-\omega_2)}+\frac{1}{(\omega_{ng}-\omega_1)(\omega_{ng}-\omega_2)}$$
$$+\frac{1}{(\omega_{ng}+\omega_1)(\omega_{ng}+\omega_2)}\Big] \qquad (3.5)$$

又, $E_{2loc}=S_1E_2$, $E_{1loc}\cdot E_{2loc}=S_2E_1\cdot E_2$, $S_1, S_2$ は Lorentz factor である。 $P=\mathbb{P}V$ で, $V$ は電界 $E$ と物質とが相互作用しているところの体積である。

---

光の電界 $E_2$ によって誘起されるところの電気分極 $P_2$ は (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) 式より

$$P_{2i}=P_{light\,i}=P_{iE_2}+P_{i\,ik\cdot E_2}+P_{iE_1\cdot E_2}+P_{i\,E_1\,ik\cdot E_2}$$
$$=\sum_l\Big\{\chi'_{il}+\sum_k i\chi''_{kl}k_k+\sum_j\Big(\chi'''_{ijl}+\sum_k i\chi''''_{ijkl}k_k\Big)E_{1j}^{\omega_1}\Big\}E_{2l}^{\omega_2}$$
$$=\sum_l \chi_{2il}E_{2l}^{\omega_2} \qquad (3.6)$$

但し, $\chi_{2il}=\chi'_{il}+\sum_k i\chi''_{ikl}k_k+\sum_j\Big(\chi'''_{ijl}+\sum_k i\chi''''_{ijkl}k_k\Big)E_{1j}^{\omega_1}$

今, 考察している誘電体には異常分散や吸収がないとしているから, エネルギー恒存則が成立しなければならないから, 分極率 $\chi_2$ は Hermite 形式をとり

$$\chi^*_{2il}=\chi_{2li} \qquad (3.7)$$

でなければならない。(文献)

$[\chi_{il}]$を対称 tensor $[\gamma_{il}]$ と非対称 tensor $[g_{il}]$ に分解し，かつ $[\gamma_{il}]$ について主軸上に変換すると，

$$[\chi_{il}] = \begin{bmatrix} \gamma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{zz} \end{bmatrix} + i^{\circ} \begin{bmatrix} 0 & -g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & 0 & -g_{yz} \\ -g_{xz} & g_{yz} & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

となる。[注9] 上式の非対称2階 tensor $g_{il}$ は軸性 vector であるから，それを $\sigma(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ として表わすと，さらに

$$[\chi_{il}] = \begin{bmatrix} \gamma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{zz} \end{bmatrix} + i^{\circ} \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_z & \sigma_y \\ \sigma_z & 0 & -\sigma_x \\ -\sigma_y & \sigma_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

とかける。[注11] $[\gamma_{il}]$ の主軸を座標軸にとると，$P_i$ 成分は

$$P_{2i} = \sum_l \chi_{2il} E_{2l}^{\omega_2} = \sum_l \delta_{il} \gamma_{il} E_{2l}^{\omega_2} + i^{\circ} (\sigma \times E_2^{\omega_2})_i \qquad (3.10)$$

となる。[注11] (3.6), (3.8), (3.9) 式より

$$\gamma_{il} = \chi'_{il} + \sum_j \chi'''_{ijjl} E_{1j}^{\omega_1}$$

$$g_{il} = \sigma_m = \sum_k \left\{ \chi''_{ikl} k_k + \sum_j \chi'''_{ijjkl} k_k E_{1j}^{\omega_1} \right\} \qquad (3.11)$$

とおける。又，(3.10) 式に対して，$D_2^{\omega_2}$ と $E_2^{\omega_2}$ の関係が次のようにえられる。[注11]

$$D_2^{\omega_2} = [\varepsilon_2] E_2^{\omega_2} + i^{\circ} (G \times E_2^{\omega_2}) \qquad (3.12)$$

但し，$G$ は gyration vector と呼ばれるものである。

(3.12) 式を matrix で表現すると，

$$\begin{bmatrix} D_x^{\omega_2} \\ D_y^{\omega_2} \\ D_z^{\omega_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{\omega_2} \\ E_y^{\omega_2} \\ E_z^{\omega_2} \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y \\ \delta_z & 0 & -\delta_x \\ -\delta_y & \delta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{\omega_2} \\ E_y^{\omega_2} \\ E_z^{\omega_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & -i\delta_z & i\delta_y \\ i\delta_z & \varepsilon_y & -i\delta_x \\ i\delta_y & i\delta_x & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{\omega_2} \\ E_y^{\omega_2} \\ E_z^{\omega_2} \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

となる。ここで，誘電率 $\varepsilon_{il}$ について主軸上に変換している。

又，電束密度 $D_z^{\omega_2}$ の $i$ 成分は

$$D_{2i}^{\omega_2} = \varepsilon_0 E_{2i}^{\omega_2} + P_{2i} = \sum_l \left\{ \varepsilon_0 \delta_{il} + \chi_{2il} \right\} E_{2l}^{\omega_2} \qquad (3.14)$$

である。但し，$\varepsilon_0$ は真空の誘電率である。

(3.6), (3.13), (3.14) 式より

$$\varepsilon_{il} = \varepsilon_0 + \chi'_{il} + \sum_j \chi'''_{ijl} E_j^{\omega_1}$$

$$\delta_m = \sum_k \left\{ \chi''_{ikl} k_k + \sum_j \chi''''_{ijkl} k_k E_j^{\omega_1} \right\} \qquad (3.15)$$

なる関係が成立する。次に，この tensor を $T_d$ 型結晶に用いて，Pockels 効果と誘導旋光性効果を考察する。

## §4. 光の電場勾配を考慮した場合の $T_d$ 型結晶の電気光学効果の光変調法による測定方法.

ここでは，$T_d$ 型結晶の一次の電気光学効果（Pockels 効果）と誘導旋光性効果が同時に存在する場合の測定方法を考察する。

Td 型結晶では $\delta_{x'}=\delta_{y'}=0$ であるので，(3.13)式より この場合の誘電率 tensor は

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} & -i\delta_z & 0 \\ i\delta_z & \varepsilon_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

となる。[注13),注13)] 但し，外部電界 $E_{1z}^{\omega_1}$ を Td 型結晶の z 軸方向に印加し，x', y', z は Pockels 効果のみの場合の電気光学軸である。

次に，この tensor を対角化する。そこで，この tensor の固有値(主値)を $\eta_i$ $(i=1,2,3)$ とすると，

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} & -i\delta_z & 0 \\ i\delta_z & \varepsilon_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2x'}^{\omega_2} \\ E_{2y'}^{\omega_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \eta_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2x'}^{\omega_2} \\ E_{2y'}^{\omega_2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

とおける。但し，レーザー光は Td 型結晶の z 軸方向に伝搬するものとした。(4.2)式の固有値(主値) $\eta_i$ を求めると，

$$\eta_i = \frac{\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} \pm \sqrt{(\varepsilon_{x'}-\varepsilon_{y'})^2 + 4\delta_z^2}}{2} \qquad (4.3)$$

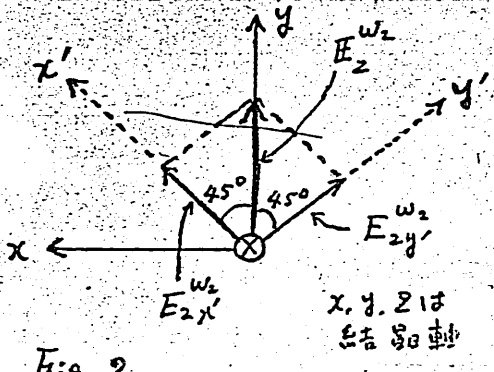



Fig. 2.

となる。次に，Fig. 2. に示すように入射光線の電界 vector を $E_z^{\omega_2}(z,t)$ とする。その電界 vector の x' 軸及び y' 軸方向の成分を $E_{2x'}^{\omega_2}$ 及び $E_{2y'}^{\omega_2}$ とし，それぞれの軸の unit vector を a, b と

すると,

$$\vec{E}_2^{\omega_2}(z,t) = \vec{E}_2 e^{-i(\omega_2 t - k z)} = E_{2x'} \vec{a} e^{-i(\omega_2 t - k_1 z)} + E_{2y'} \vec{b} e^{-i(\omega_2 t - k_2 z)} \quad (4.4)$$

とおける。又, 電界 $\vec{E}_2^{\omega_2}$ の $x'$ 軸及び $y'$ 軸の電界成分 $E_{2x'}^{\omega_2}$, $E_{2y'}^{\omega_2}$ と, 固有値 $\eta_1$, $\eta_2$, 及び固有 vector $(E_{2x'_1}^{\omega_2}, E_{2y'_1}^{\omega_2})$, $(E_{2x'_2}^{\omega_2}, E_{2y'_2}^{\omega_2})$ との間には, 次の関係式が成立する。

$$\begin{cases} E_{2x'}^{\omega_2}(z,t) = A_1 E_{2x'_1} e^{-i(\omega_2 t - n_1 k_0 z)} + A_2 E_{2x'_2} e^{-i(\omega_2 t - n_2 k_0 z)} \\ E_{2y'}^{\omega_2}(z,t) = A_1 E_{2y'_1} e^{-i(\omega_2 t - n_1 k_0 z)} + A_2 E_{2y'_2} e^{-i(\omega_2 t - n_2 k_0 z)} \end{cases} \quad (4.5)$$

ここで, $A_1$, $A_2$ は complex number で境界条件(初期条件)で決まる。又, $k_1 = \eta_1^{1/2} \frac{\omega_2}{c} = n_1 k_0$, $k_2 = \eta_2^{1/2} \frac{\omega_2}{c} = n_2 k_0$ とおいた。但し, $c$ は真空中の光速で; $n_1$, $n_2$ は $n_1 = \eta_1^{1/2}$, $n_2 = \eta_2^{1/2}$ で主屈折率である。

(4.2), (4.3)式より, $E_{2x'_1}/E_{2y'_1}$, $E_{2x'_2}/E_{2y'_2}$ を求めると,

$$\begin{cases} \dfrac{E_{2x'_1}}{E_{2y'_1}} = \dfrac{i 2\delta_2}{\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'} - \sqrt{(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'})^2 + 4\delta_2^2}} \\ \dfrac{E_{2x'_2}}{E_{2y'_2}} = \dfrac{i 2\delta_2}{\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'} + \sqrt{(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'})^2 + 4\delta_2^2}} \end{cases} \quad (4.6)$$

今, 簡単化の為に $E_{2x'_1} = K_1 E_{2y'_1}$ $E_{2x'_2} = K_2 E_{2y'_2}$, $A_1 E_{2y'_1} = B_1$, $A_2 E_{2y'_2} = B_2$ とおくと, (4.5)式は

$$E_{2x'}^{\omega_2}(z,t) = K_1 B_1 e^{-i(\omega_2 t - n_1 k_0 z)} + K_2 B_2 e^{-i(\omega_2 t - n_2 k_0 z)} \quad (4.7)$$

$$\left\{ E_{2y'}^{\omega_2}(z,t) = B_1 e^{-i(\omega_2 t - n_1 k_0 z)} + B_2 e^{-i(\omega_2 t - n_2 k_0 z)} \right.$$

となる。但し、

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{i2\delta_z}{\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'} - \sqrt{(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'})^2 + 4\delta_z^2}} \\ K_2 = \dfrac{i2\delta_z}{\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'} + \sqrt{(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'})^2 + 4\delta_z^2}} \end{cases} \qquad (4.8)$$

[I]. 結晶に入射する光線が直線偏波の場合。

今、入射光線が Fig. 2. のように Pd 型結晶の z 軸方向に直線偏波 $E_2^{\omega_2}$ が入射したとする。そのとき、$E_2^{\omega_2}$ の方向は y 軸方向であったとすると、

$z=0$ においては、

$$E_{2x'}^{\omega_2}(0,t) = E_{2y'}^{\omega_2}(0,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_2(0) e^{-i\omega_2 t} \qquad (4.9)$$

となる。この境界条件を (4.7) 式に代入し、$B_1$, $B_2$ を求めると、

$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{K_2 - 1}{K_2 - K_1} \dfrac{E_2(0)}{\sqrt{2}} \\ B_2 = \dfrac{1 - K_1}{K_2 - K_1} \dfrac{E_2(0)}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (4.10)$$

となる。この $B_1$, $B_2$ を (4.7) 式に代入すると、

$$\begin{cases} E_{2x'}^{\omega_2}(z,t) = \dfrac{E_2(0)}{\sqrt{2}(K_2 - K_1)} \left\{ K_1(K_2 - 1) e^{-i(\omega_2 t - n_1 k_0 z)} \right. \\ \qquad\qquad \left. - K_2(K_1 - 1) e^{-i(\omega_2 t - n_2 k_0 z)} \right\} \\ E_{2y'}^{\omega_2}(z,t) = \dfrac{E_2(0)}{\sqrt{2}(K_2 - K_1)} \left\{ (K_2 - 1) e^{-i(\omega_2 t - n_1 k_0 z)} \right. \end{cases} \qquad (4.11)$$

$$-(K_1-1)e^{-i(\omega_2 t-n_2 k_0 z)}\Big\}$$

となる。

i). x'軸方向に検光子を向けた場合 ($\omega_1$波の測定).

ここで，測定されるのは光の強度の変化である。光の強度は電界の振幅の二乗に比例し，又検光子からはx'軸方向の電界成分 $E_{2x'}^{\omega_2}(z,t)$ のみ現われるから，$\left[(E_{2x'}^{\omega_2}(z,t))^* \cdot E_{2x'}^{\omega_2}(z,t)\right]_{A.C.}$ を計算すればよい。

故に，(4.8)，(4.10)式より

$$\left[(E_{2x'}^{\omega_2}(z,t))^* \cdot E_{2x'}^{\omega_2}(z,t)\right]_{A.C.} = \left[\frac{E_2^2(0)}{2}\left\{1+\frac{2\delta_z}{\sqrt{(\varepsilon_{x'}-\varepsilon_{y'})^2+4\delta_z^2}}\right\} \cdot \sin\frac{\sqrt{(\varepsilon_{x'}-\varepsilon_{y'})^2+4\delta_z^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_{x'}+\varepsilon_{y'}}} k_0 z\right]_{A.C.} \quad (4.12)$$

となる。

$$\varepsilon_{x'}=n_{x'}^2=\frac{n_0^2}{1-n_0^2 r_{63}E_{1z}^{\omega_1}}, \quad \varepsilon_{y'}=n_{y'}^2=\frac{n_0^2}{1+n_0^2 r_{63}E_{1z}^{\omega_1}} \quad (4.13)$$

$\delta_z = p_z V_{1z}^{\omega_1}/z$, より (4.12)式は

$$\left[(E_{2x'}^{\omega_2})^* \cdot (E_{2x'}^{\omega_2})\right]_{A.C.} \simeq E_2^2(0)\frac{p_z}{2\sqrt{(n_0^4 r_{63})^2+p_z^2}}\sin\Phi \quad (4.14)$$

となる。但し，$n_0$ は Td 型結晶の自然屈折率，$r_{63}$ は Td 型結晶の一次の電気光学定数[12]で，$V_{1z}^{\omega_1}=V_{1z}\sin\omega_1 t$ は変調電圧である。又，

$$\Phi=\frac{\sqrt{(\varepsilon_{x'}-\varepsilon_{y'})^2+4\delta_z^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_{x'}+\varepsilon_{y'}}}k_0 z \simeq \frac{2\pi}{\lambda_2}\sqrt{(n_0^3 r_{63})^2+(p_z/n_0)^2}\, V_{1z}^{\omega_1} \quad (4.15)$$

である。

ii). 検光子を x 軸方向に向けた場合. (2ω, 波の測定)

x' 軸方向の電界成分 $E_{2x'}^{\omega_2}$, y' 軸方向の電界成分 $E_{2y'}^{\omega_2}$ の x 軸方向への電界成分 $E_{2x}^{\omega_2} = \dfrac{E_{2x'}^{\omega_2} - E_{2y'}^{\omega_2}}{\sqrt{2}}$ となるから,

(4.11)式より $\left[(E_{2x}^{\omega_2})^* \cdot E_{2x}^{\omega_2}\right]_{A.C.}$ を求めると,

$$\left[(E_{2x}^{\omega_2})^* \cdot E_{2x}^{\omega_2}\right]_{A.C.} = \left[\frac{(E_{2x'}^{\omega_2} - E_{2y'}^{\omega_2})^* \cdot (E_{2x'}^{\omega_2} - E_{2y'}^{\omega_2})}{2}\right]_{A.C.}$$

$$= E_2^2(0) \sin^2 \frac{\Gamma}{2} \qquad (4.16)$$

となる。

[II]. 結晶に入射する光線が円偏波の場合.

偏光子と結晶との間に $\frac{1}{4}\lambda$ 板を挿入すると, 偏光子を通過した直線偏波は円偏波となり, x' 軸方向の電界成分 $E_{2x'}(0)$ と, y' 軸方向の電界成分 $E_{2y'}(0)$ との位相が 90° 異なるから, (4.7)式において, 境界条件として $z=0$ で, $E_{2x'}(0) = i E_{2y'}(0) = i E_2(0)/\sqrt{2}$ なる条件を入れると,

$$\begin{cases} E_{2x'}(0) = i\dfrac{E_2}{\sqrt{2}} = K_1 B_1 + K_2 B_2 \\ E_{2y'}(0) = \dfrac{E_2}{\sqrt{2}} = B_1 + B_2 \end{cases} \qquad (4.17)$$

となる。この式より $B_1$, $B_2$ を求め; それを(4.7)式に代入すると,

$$E_{2x'}^{\omega_2}(z,t) = \frac{E_2(0)}{\sqrt{2}(K_2 - K_1)} \left\{ K_1(K_2 - i) e^{-i(\omega_2 t - n_2 k_0 z)} \right.$$

$$E_{2y'}^{\omega_2}(z,t)=\frac{E_2(0)}{\sqrt{2}(K_2-K_1)}\left\{\begin{array}{l}-K_2(K_1-i)e^{-i(\omega_2 t-n_2k_0z)}\\ (K_2-i)e^{-i(\omega_2 t-n_1k_0z)}\\ -(K_1-i)e^{-i(\omega_2 t-n_2k_0z)}\end{array}\right\} \quad (4.18)$$

となる。

i). 検光子をx軸方向に向けた場合 ($\omega_1$ 波の測定).

x'軸およびy'軸方向の電界成分 $E_{2x'}^{\omega_2}$, $E_{2y'}^{\omega_2}$ のx軸方向の電界成分 $E_{2x}^{\omega_2}$ は

$$E_{2x}^{\omega_2}(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{E_{2x'}^{\omega_2}(z,t)-E_{2y'}^{\omega_2}(z,t)\right\} \quad (4.19)$$

であたえられるので，観測される電界の振幅の二乗の変化を求めると，

$$\left[\left|E_{2x}^{\omega_2}(z,t)\right|^2\right]_{A.C.}=\left[\left(E_{2x}^{\omega_2}\right)^*\cdot E_{2x}^{\omega_2}\right]_{A.C.}$$

$$=\left[\frac{E_2^2(0)}{2}\left\{1+2\frac{\varepsilon_{x'}-\varepsilon_{y'}}{\sqrt{(\varepsilon_{x'}-\varepsilon_{y'})^2+4\delta_z^2}}\cos\Gamma\cdot\sin\Gamma\right\}\right]_{A.C.}$$

$$\simeq E_2^2(0)\left\{\frac{n_0^4\gamma_{63}}{\sqrt{(n_0^4\gamma_{63})^2+p_z^2}}\right\}\sin\Gamma \quad (4.20)$$

となる。(4.14)式と(4.20)式との比をとると，

$$\frac{\left[\left(E_{2x'}^{\omega_2}\right)^*\cdot E_{2x'}^{\omega_2}\right]_{A.C.}}{\left[\left(E_{2x}^{\omega_2}\right)^*\cdot E_{2x}^{\omega_2}\right]_{A.C.}}\simeq\frac{p_z}{2n_0^4\gamma_{63}} \quad (4.21)$$

となり，実験データより $p_z/2n_0^4\gamma_{63}$ の値を求めることができる。

一方，$n_0^4\gamma_{63}\gg p_z$ の場合，(4.20)式は

$$\left[\left|E_{2x}^{\omega_2}\right|^2\right]_{A.C.}\simeq E_0^2(0)\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda_2}n_0^3\gamma_{63}V_{12}^{\omega_1}\right\} \quad (4.22)$$

となり，この式は，Pockels効果のみを示しており，実験データと(4.22)式を比較することによって，$\gamma_{63}$ の値を求めることができる。又，光の屈折率 $n_0$ の値は一般によく知られているので，$n_0$ と $\gamma_{63}$ の値を $p_{12}/2n_0^4\gamma_{63}$ の値に代入することによって，$p_{12}$ の値を求めることができる。

## §5. KDP結晶のPockels効果と誘導旋光性効果の実験。

この節では，Vd型結晶の例としてKDP結晶を用いて，前節で考察したことを実験し，$p_{12}/2n_0^4\gamma_{63}$ の値を求める。

この実験の構成は Fig.3 に示すように，光源として，NEC 105のHe-Ne レーザーを用い，横モードをシングルにするためにスリットを用い，レーザー光をKDP結晶のy軸方向の直線偏波にするために，偏光子としてグラントムソンプリズムを用い，変調周波数として60c/sを使用し，検光子として，グラントムソンプリズムを用い，光の雑音を出来るだけ少なくするために，He-Ne レーザー光の周波数 6328Å のみ通過するフィルターを使用し，検出器には太陽電池を用いた。太陽電池からの出力を線形のところで使用するために，その前に光の attenuator を用い，さらに，太陽電池からの出力を，60 c/s 及び120 c/s 用の増幅器を用いて，増幅し，それをシンクロスコープで測定した。

この実験に用いたKDP結晶を Fig.4 に示す。Fig.5 にはこの実験で得たデータと，$\frac{p_{12}}{2n_0^4\gamma_{63}} \simeq 0.4$ として，(4.14)式，(4.16)式，(4.20)式の

計算結果をグラフに示したものである。Fig. 5より 実験結果と計算結果との傾向がほぼ一致していることがわかる。

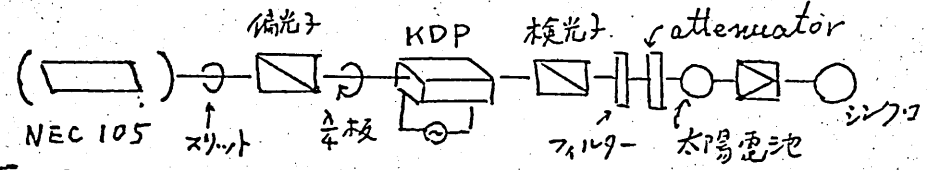



Fig. 3.

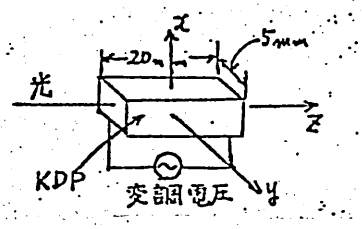



Fig. 4.

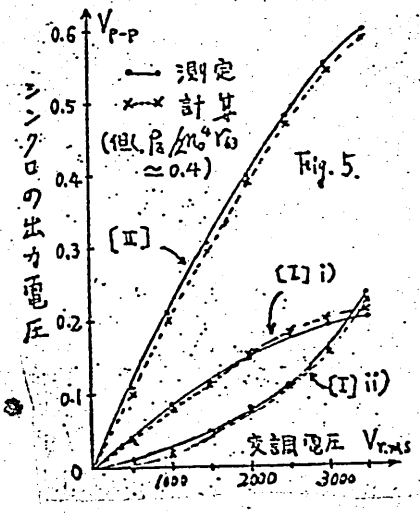



Fig. 5.

## §6. あとがき.

Pockels効果と誘導旋光性効果とがある場合の解析を量子論的,及び古典論的に示した。その傍ら,KDP結晶の実験を行ない,一応のデーターを示し,$P_3/2\pi\varepsilon_0^2 r_{63}$の値をおめた。さらに,KDP結晶の$P_3/2\pi\varepsilon_0^2 r_{63}$の値を正確なものにするために,他の色々なKDP結晶について実験をする必要がある。又,旋光性の電気分極Pは波数kに比例するので,分極率χが周波数fにおいて一定ならば,$P \propto f$となるために,一般に,光の周波数が高い程,旋光性の効果は大きくなる。

終りに,御討論下さった末田正助教授,ならびにレーザーグループの皆様に深く感謝いたします。

(参考文献).


注1). 今堀和友;"旋光性", 東京化学同人 (1964年).

注2). C. Djerassi 著, 中西香爾, 山崎二葉 共訳;"旋光分散", 東京化学同人 (1961年).

注3). J. Kunz, Andrew McLean;"Optical Rotatory Power of Solutions in an Electric Field," Nature, No. 16, PP. 795~796 (1935年).

注4). E. B. Ludlam, A. W. Pryde, H. Gordon Rule;"Optical Rotatory Power of Turbid Solutions in an Electric Field," Nature, No. 31, P. 194 (1937年).

注5). Ignacio Tinoco, Jr., and Willian G. Hammerle;"The Influence of an External Electric Field on the Optical Activity of Fluids," J. Phys. Chem., 61, P. 1619 (1956年).

注6). Ignacco Tinoco, Jr.;"The Optical Rotation of Oriented Helices," J. Phys. Chem., 81, P. 1540 (1959年).

注7). 牧本利夫, 井上敦雄;"外部電場による旋光性", 第14回応用物理学関係連合講演会, 2a-c-12, P. 38 (1967年).

注8). L. J. Schiff 著, 井上健訳;"量子力学", 吉岡書店, P. 228 (1964年).

注9). 小谷正雄, 富田和久訳;"量子化学", 山口書店, P. 383 (1953年).

注10). 山内恭彦, 高見穎郎 訳;"理論物理学", 岩波書店, P. 440 (1964年).

注11). 小林謙三;"強誘電体における結晶光学の諸問題", Butsuri vol. 19, No. 9, PP. 576~589 (1964年).

注12). 日本物理学会編;"量子エレクトロニクス", 朝倉書店, PP. 80~89 (1965年).

注13). J. F. Nye;"Physical Ropeties of Crystals," Oxford Univ. Press, P. 272 (1957年).

輻射科学研究会資料

# 計算機合成Binary Hologramの一構成法

滝山敬文　繁沢宏
中村佳弘　安田聖
（同志社大学工学部）

昭和45年7月3日

# 計算機合成 Binary Hologram の一構成法

滝山 敬　繁沢 宏
中村佳弘　安田 聖
（同志社大学　工学部）

## 1. はじめに

1948年 D.Gabor[1] によって電子顕微鏡の解像力をあげるために提案された Holography 技術は Laser の出現と E.N.Leith, J.Upatnieks[2] による画期的な改良によってめざましい発展を遂げてきた。一方電算機の大型化および計算技術の発達によって、Hologram を合成する研究が成され、これまでにも種々の方法が発表されてきた[3]~[6]。これらのうちで特に興味のある方法は B.R.Brown; A.W. Lohmann[3] の提案した Binary Mask 法と呼ばれる技法によって合成 Hologram を作成するものであろう。これは Hologram 面上に与えるべき情報を適当な Sample 点の値で代表し、これを微小な Binary cell の集合によって Hologram を作成しようとするものである。[redacted]

[redacted] これらの方法は Hologram 面と再生面が Fraunhofer 領域にある場合にその合成の可能性を示したものであるが，本文では通常取り扱っている Fresnel 領域においても特定の面の間に限れば Fraunhofer 領域で残されたと同様に有限個の Binary cell によって Hologram が合成できることを示し，さらに上記した従来の cell の構成法より簡単な設計法を導き，又物体が方形状の場合には情報処理上有利な方法を提案するものである。

## 2. Fresnel 領域における Sampling Hologram の像再生

図1に示す系において物体面 $(x, y)$ 上の複素振幅分布

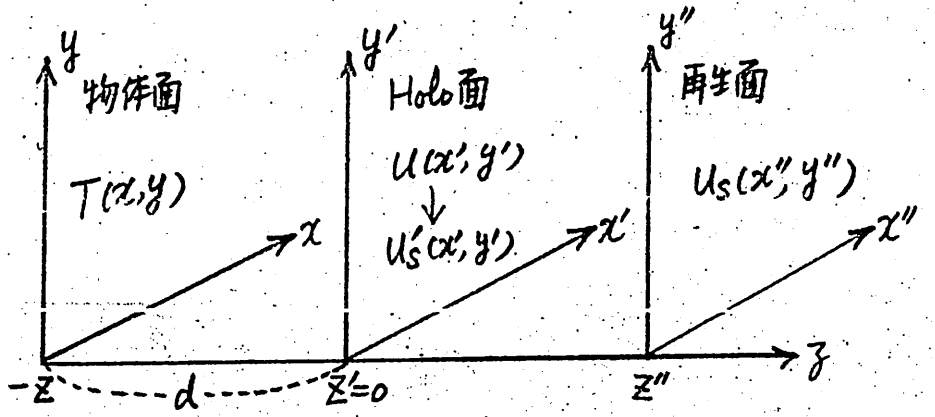



図1

$T(x,y)$,(簡単のため2次元分布としたが3次元分布の時は距離$d$が変化するものとして取り扱えばよい)によってHologram面(以下Holo面と称す)に複素振幅分布$U(x',y')$が生ずるものとしよう。いまこの$U(x',y')$をこの面上で適当にSamplingしたもの、$U_s(x',y')$によって生ずる再生面$(x'',y'')$上の複素振幅分布$U_s(x'',y'')$が元の物体波$T(x,y)$と同一のものになるためには$U_s(x',y')$に対応して、どのようなHologramを与え、どのような光源でこれを照射し、どの位置で観測すればよいかを、いずれもの面がFresnel領域にある場合を前提にして誘導しよう。

さてHolo面上に生ずる複素振幅分布$U(x',y')$はFresnel diffractionの式より

$$U(x',y') = K_1 \exp\left[j\frac{k}{2d}(x'^2+y'^2)\right] \iint_A T(x,y) \exp\left[j\frac{k}{2d}(x^2+y^2)\right] \cdot \exp\left[-j\frac{k}{d}(xx'+yy')\right] dx\,dy \qquad (1)$$

で与えられる。ここで$d$は物体面とHolo面間の距離であり、$K_1$は$1/j\lambda d$を表わす複素定数で、$k=2\pi/\lambda$である。

いまこの$U(x',y')$をHolo面上で$x,y$方向に各々間隔$B_x$, $B_y$で Samplingしたもの、つまり

$$U_s(x';y') = comb\left(\frac{x'}{B_x}\right) comb\left(\frac{y'}{B_y}\right) U(x';y') \qquad (2)$$

ただし $$comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \qquad (3)$$

であり．$\delta$ は Diracの Delta function である．

で置き換え，これによる再生面上の複素振幅分布 $U_s(x'';y'')$ を考えてみよう。この時には(1)と同様にして

$$U_s(x'';y'') = K_2 \exp\left[j\frac{k}{2z''}(x''^2+y''^2)\right] \iint_{A'} U_s(x';y') \exp\left[j\frac{k}{2z''}(x'^2+y'^2)\right]$$

$$\cdot \exp\left[-j\frac{k}{z''}(x'x''+y'y'')\right] dx'dy' \qquad (4)$$

となる。ここで $z''$ はHol.面を原点と考えた時の再生面の位置を示し，$K_2$ は $1/j\lambda z''$ を表わす複素定数である．

従って(4)を(1)，(2)を用いて書き直すと次の結果が得られる．

$$U_s(x'';y'') = K \exp\left[j\frac{k}{2z''}(x''^2+y''^2)\right] \cdot$$

$$\cdot \iint_A \iint_{A'} comb\left(\frac{x'}{B_x}\right) comb\left(\frac{y'}{B_y}\right) \cdot T(x,y) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[j\frac{k}{2d}(x^2+y^2)\right] \exp\left[j\frac{k}{2d}(x'^2+y'^2)\right] \exp\left[j\frac{k}{2z''}(x'^2+y'^2)\right] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-j\frac{k}{z''}(x'x''+y'y'')\right] \exp\left[-j\frac{k}{d}(xx'+yy')\right] dxdydx'dy' \qquad (5)$$

ただし $K = K_1 K_2$

上式において いま

$$\exp\left[j\frac{k}{2d}(x'^2+y'^2)\right]\exp\left[j\frac{k}{2z''}(x'^2+y'^2)\right]\equiv 1 \qquad (6)$$

換言すると $$z'' = -d \qquad (7)$$

が成立するように $z''$ を定めてみよう。ある時には (5) は次式のように変形できる。

$$U_s(x'',y'') = K\exp\left[-j\frac{k}{2d}(x''^2+y''^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\iint_A\iint_{A'} comb\left(\frac{x}{B_x}\right)\cdot comb\left(\frac{y}{B_y}\right)\cdot T(x,y)\cdot\exp\left[j\frac{k}{2d}(x^2+y^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left[j\frac{k}{d}(x'x''+y'y'')\right]\exp\left[-j\frac{k}{d}(xx'+yy')\right]dxdy\,dx'dy' \qquad (8)$$

ここで Holo面 $(x',y')$ 上の積分について考え、これを I とおこう。ただし $f_x = x/\lambda d$, $f_y = y/\lambda d$, $f_{x''} = x''/\lambda d$, $f_{y''} = y''/\lambda d$ とすると、かくときには

$$I \equiv \iint_{A'} comb\left(\frac{x'}{B_x}\right) comb\left(\frac{y'}{B_y}\right)\cdot\exp\left[j2\pi(f_{x''}x'+f_{y''}y')\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-j2\pi(f_x x'+f_y y')\right]dx'dy' \qquad (9)$$

である。これは $comb(x'/B_x)\,comb(y'/B_y)$ と $\exp[j2\pi(f_{x''}x'+f_{y''}y')]$ の関数の積の $f_x, f_y$ の空間周波数における

Fourier Transform である から, Convolution の定理[注] より

$$I = \mathcal{F}\left\{comb\left(\frac{x'}{B_x}\right) comb\left(\frac{y'}{B_Y}\right)\right\} * \mathcal{F}\left\{\exp[j2\pi(f_{x''}x' + f_{Y''}y')]\right\} \tag{10}$$

と表わせる。ここで $\mathcal{F}\{\ \}$ は $\{\ \}$ の Fourier Transform を表わし, $*$ は convolution を表わすものとする。
しかるに Fourier Transform の公式(7) より

$$\mathcal{F}\left\{comb\left(\frac{x'}{B_x}\right) comb\left(\frac{y'}{B_Y}\right)\right\} = B_x B_Y comb(f_x B_x)\, comb(f_Y B_Y)$$

$$= \sum_P \sum_q \delta\left(f_x - \frac{p}{B_x},\ f_Y - \frac{q}{B_Y}\right) \tag{11}$$

および

$$\mathcal{F}\left\{\exp[j2\pi(f_{x''}x' + f_{Y''}y')]\right\} = \delta(f_{x''} - f_x,\ f_{Y''} - f_Y) \tag{12}$$

となるから, これらを用いれば (10) は次式のように書き直せる。

$$I = \sum_P \sum_q \iint \delta\left(\xi - \frac{p}{B_x}, \eta - \frac{q}{B_Y}\right) \cdot \delta[(f_{x''} - f_x) + \xi, (f_{Y''} - f_Y) + \eta]\, d\xi d\eta$$

---

(注) $g_2 = g_1 \cdot h$ で $\mathcal{F}\{g_n\} = G_n$, $\mathcal{F}\{h\} = H$ が存在するとき

$G_2 = G_1 * H$ が成立する.

$$= \sum_P \sum_Q \delta\left[\left(f_{x''} - f_x\right) + \frac{P}{B_x}, \left(f_{y''} - f_y\right) + \frac{Q}{B_y}\right]$$

$$= \sum_P \sum_Q \delta\left[\frac{1}{\lambda d}(x''-x) + \frac{P}{B_x}, \frac{1}{\lambda d}(y''-y) + \frac{Q}{B_y}\right] \quad (13)$$

従って上式の結果を(8)に代入すると $U_S(x'', y'')$ として次式を得る.

$$U_S(x'', y'') = K_3 \exp\left[-j\frac{k}{2d}(x''^2 + y''^2)\right] \cdot$$

$$\cdot \sum_P \sum_Q \iint_A \delta\left[\frac{1}{\lambda d}(x''-x) + \frac{P}{B_x}, \frac{1}{\lambda d}(y''-y) + \frac{Q}{B_y}\right] \cdot T(x, y) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[j\frac{k}{2d}(x^2 + y^2)\right] dx\,dy$$

$$= K_3 \exp\left[-j\frac{k}{2d}(x''^2 + y''^2)\right] \sum_P \sum_Q T\left(x'' + \frac{\lambda d}{B_x}P,\ y'' + \frac{\lambda d}{B_y}Q\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{j\frac{k}{2d}\left[\left(x'' + \frac{\lambda d}{B_x}P\right)^2 + \left(y'' + \frac{\lambda d}{B_y}Q\right)^2\right]\right\} \quad (14)$$

(14)で表わされる再生波は P, Q の違いによって示される種々の方向に回折している波の合成で表わされていることを示すものであるから, 今 $P = Q = 0$ の harmonic zone の回折波のみを観測するならば (14) より

$$U_S(x'', y'')_{P=Q=0} = K\,T(x'', y'') \quad (15)$$

となり. 元の物体波そのものを表わすことになり, $|U_S(x'',y'')_{p=q=0}|^2$ に感ずる人間の眼, あるいは写真フィルムで観測するならば完全に元の物体が再生面上に再生しうることを示している。
このことが成立するのは(7)で与えた位置関係においてのみであって, これは従来のHologramがFresnel領域で結像することと同様のことを示すものである。したがって今何等かの方法で(2)で与えられると同等の情報をもたせうる透過膜を作成し, その前面でその透過波を観測することによって元の物体(この場合は $z''=-d$ より虚像)を再生しうることになる。
なお人間の眼などが $|U_S(x'',y'')|^2$ にのみ感ずることから, 上述したごとく $p=q=0$ のharmonic zoneのみに限ることなく, いずれのharmonic zoneの波の観測によっても物体の再生が可能なことは当然である。
以上の結果にもとづき, 次節では(2)で与えられるsample点の情報をBinary maskによって与える方法を新らしく提案するcellに対して求め, その合成Hologramをどのような波で照射した時に物体が再生できるかについて述べることにしよう。

## 3. Binary Hologramの一構成法とその像再生

さて(2)で与えられると同等な複素振幅をBinary maskによる微小cellの集合のHologramによって得ることを考える。これは(2)で与えられる各々のSample点の情報(振幅と位相)を有限の大きさのcellで置き換えようとするものであり，前述のA.W. Lohmann等は正方形の不透明な微小cellを考え，その中に適当な大きさの方形開口を適当な位置を中心にして配し，これをtilted plane waveで照射することを行なったが，[redacted]

[redacted]

図2に示すような方形cellを提案する。今図の如く(m,n)番目のcellの一辺を各々$\Delta x$, $\Delta y$とし，変化しうる量として開口の幅$W_{mn}$とその中心位置$P_{mn}$をとろう。今このようなcellの多数の集りでHologram面を合成した時，このHolo面の振幅透過係数$t(x,y)$は次式で表わすことができる。

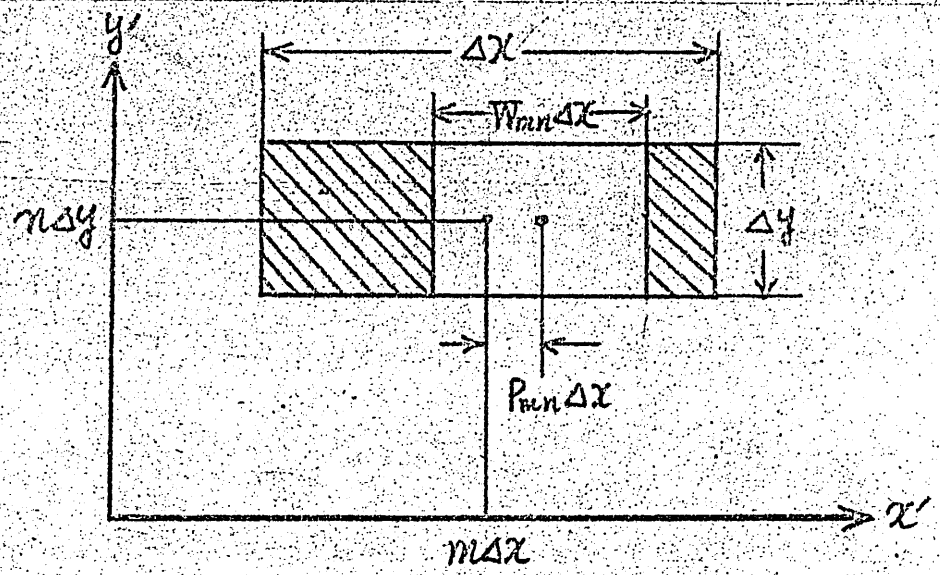



図 2

$$t(x',y') = \sum_m \sum_n \mathrm{rect}\left[\frac{x' - (m+P_{mn})\Delta x}{W_{mn}\Delta x}\right] \cdot \mathrm{rect}\left[\frac{y' - n\Delta y}{\Delta y}\right] \quad (16)$$

ただし

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

これは $(x',y')$ 面において不連続な関数だから，連続関数表示するために空間周波数スペクトル $G(r/\Delta x, s/\Delta y)$ を用いて表わすと次式のように示せる。

$$t(x',y') = \sum_r \sum_s G\left(\frac{r}{\Delta x}, \frac{s}{\Delta y}\right) \exp\left[j2\pi\left(\frac{r}{\Delta x}x' + \frac{s}{\Delta y}y'\right)\right] \quad (18)$$

ただし

$$G\left(\frac{r}{\Delta x},\frac{s}{\Delta y}\right)=\iint t(x',y')\exp\left[-j2\pi\left(\frac{r}{\Delta x}x'+\frac{s}{\Delta y}y'\right)\right]dx'dy'$$

$$=\sum_m\sum_n\iint \mathrm{rect}\left[\frac{x'-(m+P_{mn})\Delta x}{W_{mn}\Delta x}\right]\mathrm{rect}\left[\frac{y'-n\Delta y}{\Delta y}\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-j2\pi\left(\frac{r}{\Delta x}x'+\frac{s}{\Delta y}y'\right)\right]dx'dy'$$

$$=\sum_m\sum_n\int_{(m-\frac{1}{2})\Delta x}^{(m+\frac{1}{2})\Delta x}\mathrm{rect}\left[\frac{x'-(m+P_{mn})\Delta x}{W_{mn}\Delta x}\right]\exp\left[-j\frac{2\pi r}{\Delta x}x'\right]dx'$$

$$\cdot\int_{(n-\frac{1}{2})\Delta y}^{(n+\frac{1}{2})\Delta y}\mathrm{rect}\left[\frac{y'-n\Delta y}{\Delta y}\right]\exp\left[-j\frac{2\pi s}{\Delta y}y'\right]dy' \qquad (19)$$

ここで(19)の$x'$に関する積分(これを$I_{xmn}$とおく)について考えてみると，rect関数の性質(17)を考慮すると次のように書き直せる．

$$I_{xmn}\equiv\int_{(m+P_{mn}-\overline{W}_{mn}/2)\Delta x}^{(m+P_{mn}+\overline{W}_{mn}/2)\Delta x}\exp\left[-j\frac{2\pi r}{\Delta x}x'\right]dx' \qquad (20)$$

したがって $\xi=x'-(m+P_{mn})\Delta x$ なる変数変換を行なえば(20)は次のように求まる．

$$I_{xmn}=\exp\left[-j2\pi r(m+P_{mn})\right]\int_{-\overline{W}_{mn}\Delta x/2}^{\overline{W}_{mn}\Delta x/2}\exp\left[-j\frac{2\pi r}{\Delta x}\xi\right]d\xi$$

$$= W_{mn}\Delta x \cdot \mathrm{sinc}(rW_{mn}) \exp[-j2\pi r(m+P_{mn})] \quad (21)$$

ただし $\mathrm{sinc}(x) = \sin\pi x/\pi x$ (22)

同様にして(19)の $y'$ に関する積分 $I_{ymn}$ を求めると次の結果が得られる。

$$I_{ymn} = \Delta y \,\mathrm{sinc}(s) \exp[-j2\pi s n] \quad (23)$$

したがって(21), (23)より(19)で与えられるスペクトル $G(r/\Delta x, s/\Delta y)$ は次式の如く表わされることになる。

$$G\left(\frac{r}{\Delta x}, \frac{s}{\Delta y}\right) = \Delta x \Delta y \,\mathrm{sinc}(s) \sum_m \sum_n W_{mn} \,\mathrm{sinc}(rW_{mn}) \cdot \cdot \exp\{-j2\pi[r(m+P_{mn})+sn]\} \quad (24)$$

そこでこの(24)を用いることによって図2に示した Binary Hologram の振幅透過係数 $t(x', y')$ が(18)より求まり, 次式のようになる。

$$t(x', y') = \sum_r \sum_s \Delta x \Delta y \,\mathrm{sinc}(s) \sum_m \sum_n W_{mn} \,\mathrm{sinc}(rW_{mn}) \cdot \cdot \exp[-j2\pi(rP_{mn}+sn)] \cdot \exp\left[j2\pi\left(\frac{r}{\Delta x}x' + \frac{s}{\Delta y}y'\right)\right] \quad (25)$$

そこで、いまのようなBinary Hologramを、その面上で $\exp[-j2\pi x'/\Delta x]$ で表わせる波面をもつtilted plane waveで照射したとすると透過波の複素振幅分布 $U_B(x',y')$ は

$$U_B(x',y') = t(x',y')\exp\left(-j2\pi\frac{x'}{\Delta x}\right)$$

$$= \sum_r \sum_s \Delta x \Delta y \, \mathrm{sinc}(s) \sum_m \sum_n W_{mn} \mathrm{sinc}(rW_{mn}) \cdot$$

$$\cdot \exp[-j2\pi(rp_{mn}+sn)] \exp\left\{j2\pi\left[\frac{x'}{\Delta x}(r-1)+\frac{s}{\Delta y}y'\right]\right\}. \quad (26)$$

となる。これはBinary Holo面上の波が種々の $r, s$ によって表わされる方向に回折しようとする波の合成で表わせることを意味するものであるから、いま $r=1, s=0$ で表わされるharmonic zoneの透過波 $U_{B10}(x',y')$ のみを考えると(26)より

$$U_{B10}(x',y') = \Delta x \Delta y \sum_m \sum_n \mathrm{sinc}(W_{mn}) \exp[-j2\pi p_{mn}] \quad (27)$$

が得られる。従っていま若し(27)が(2)で与えられるsample波と等しくできるならば像再生が出来ることが前節の結果によって言えることになる。そのために(2)に示した各sample要

に対して，(27)の $m, n$ で定まる cell に対応させることにし，いま sample 点での $U(x', y')$ の既知の振幅，位相を各々 $U_{mn}$, $\Phi_{mn}$ とすれば決定すべき cell 定数 $W_{mn}$, $P_{mn}$ は

$$\left.\begin{aligned} W_{mn}\,\mathrm{sinc}(W_{mn}) &= U_{mn} \\ P_{mn} &= \Phi_{mn}/2\pi \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

によって決定できることになり，従ってこのような $W_{mn}$, $P_{mn}$ によって構成された合成 Binary Hologram によっても像再生ができることになる。

## 4. 結言

以上述べてきたように Fresnel 領域においてもある特定の面に限れば有限個の Binary cell によって Hologram が合成できることが示し得た。この時 Binary cell として従来考えられていたものの欠点を補なう[redacted] cell の構成法を示し，その設計公式を導びいた。なお実際の合成 Hologram の作成，ならびに再生については現在行なっ

であり，さらに詳細な理論的検討をあわせて，別の機会に御報告するつもりである。

文献


(1) D. Gabor; Nature 161, P.777, (1948)

(2) E. N. Leith, J. Upatnieks; J. Opt. Soc. Am., 52, P.1123, (1962)

(3) B. R. Brown, A. W. Lohmann; Appl. Opt., 5, P.967, (1966)

(4) J. P. Waters; Appl. Phyo. Lett., 9, P.405, (1966)

(5) L. B. Lesem, P. M. Hirsch, J. A. Jordan; A. C. M., 13, P.661, (1968)

(6) L. B. Lesem, et. al.; I. B. M. Jour., 13, P.150, (1969)

(7) J. W. Goodmann; "Introduction to Fourier Optics", McGraw-Hill Book Co., (1968)

輻射科学研究会資料

# 方形断面を有する漏れ導波管の複素伝播定数

繁沢 宏，藤山和男，滝山敬
（同志社大学 工学部）

昭和45年7月3日

# "方形断面を有する漏れ導波管の複素伝播定数の解析"

繁沢宏，藤山和男，滝山敬
（同志社大学 工学部）

## はじめに

漏れ導波管では電力放射のために一般に伝播定数が複素数となる，いわゆるcomplex waveが存在する。本文では今まで成されていなかった方形断面を有する漏れ導波管の伝播定数の解析法及び解析例の結果について述べている。

この種の問題に対して従来から成されてきた研究の代表的なものはRumsey[1]やGoldstone，Oliner[2]等によるGround plane中に設けられたSlotted Rectangular WaveguideとHarrington[3]やOliner[4]等によるSlotted circular Waveguideの解析がある。これらの解析は変分法，あるいは等価回路に対する横共振法によって行われている事は周知の通りである。しかし，これらのいづれの場合も境界値問題としては簡単化されたものであって，実際に漏れ導波管，あるいはアンテナとして使用されている方形導波管のようにGround planeの存在しない方形断面を有する

導波管については境界値問題としてみた時に存在する特異性のために正確には解き得ず解析された例を見ない。しかし筆者らはこの様な形状の導波管の特性の検討に有効な近似法を以前に提案し[5],[6]、各種の方形断面導波管の放射指向性、さらには変分法による複素伝播定数の解析を行ない[7]、良好な結果が得られる事を明らかにしてきた。本文ではさらにこの近似法を導入すればGround planeが存在しない場合にも導波管断面を表わす伝送線路表示が出来ることを示し、横共振法によって極めて容易にその複素伝播定数の解析が出来ることを、混成姿態を伝送している漏れH-ガイドを中心にして述べ、良好な結果が得られる事を示し御批判をあおぐ次第である。

## [1] 漏れH-ガイドの横断面内等価伝送線路表示

今図1(a)の様に幅2Wの導体板から成る漏れH-ガイドを考える。このガイドに存在し得る姿態は大別してTMs-sym,asym, TEs-sym,asymの4種の姿態群に区別し得ることは周知の通りであり、特にその低損

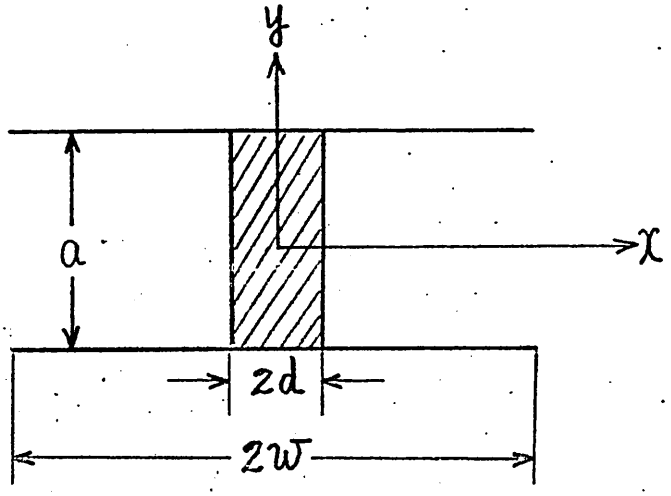



図1 (a)

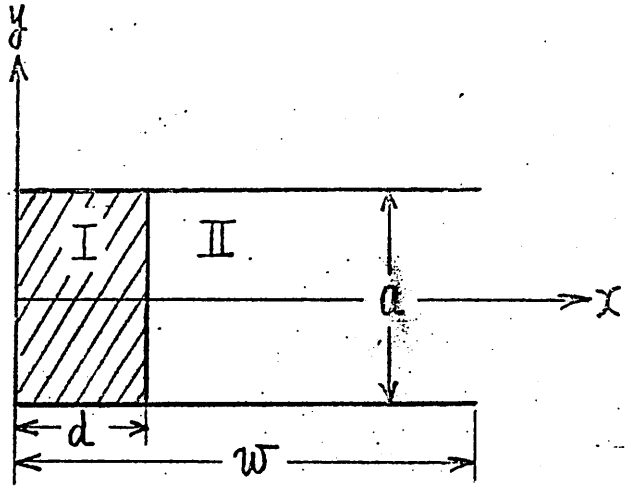



図1 (b)

実性の為に興味あるものはTMs-sym姿態である。この姿態は図1(a)のx=0のyz面を短絡面で置換えた同図(b)のガイドに存在し得るものと同等なので,以下ではこの場合について検討していく。

この様なガイドの電磁界は一般に混成波であってEzとHz両成分が存在する。従って電磁界はEzのみで表わせる界(Hz=0)とHzのみで表わせる界(Ez=0)の結合で示せるが,ここではx方向に見た等価線路表示を行なうので,便宜上前者をE-type波,後者をH-type波と称する(2)ことにする。

さて図1(b)にて誘電体部分(0≦x≦d)を領域I,空気中(d≦x≦w)を領域IIとし,各領域に於いてx方向にtransverseな面内の電磁界を求めると$e^{j(\omega t-hz)}$を省略して次式の様になる。

$$E_{t\alpha}(x,y)=\sum_n\left\{\left[V'_{n\alpha}(x)\cdot e'_{yn\alpha}(y)+V''_{n\alpha}(x)\cdot e''_{yn\alpha}(y)\right]i_x+V'_{n\alpha}(x)\cdot e'_{zn\alpha}(y)\,i_z\right\} \quad (1)$$

$$H_{t\alpha}(x,y)=\sum_n\left\{\left[I'_{n\alpha}(x)\cdot h'_{yn\alpha}(y)+I''_{n\alpha}(x)\cdot h''_{yn\alpha}(y)\right]i_x+I''_{n\alpha}(x)\cdot h''_{zn\alpha}(y)\,i_z\right\} \quad (2)$$

ここでsuffix αは領域I及びIIに対応してα=I又はIIを取るものとし,(')をつけたものはE-type

lineのmodeを示し，(″)をつけたものはH-type lineのそれを示すものとする。(1),(2)の$V_{n\alpha}(x)$, $I_{n\alpha}(x)$はmodal amplitudeであってE及びH-type line modeに対し，共に次式で与えられる同形式の線路方程式を満している。

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV_{n\alpha}(x)}{dx} &= -j k_{xn\alpha} Z_{n\alpha} \cdot I_{n\alpha}(x) \\ \frac{dI_{n\alpha}(x)}{dx} &= -j k_{xn\alpha} Y_{n\alpha} \cdot V_{n\alpha}(x)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ここで$k_{xn\alpha}$は各領域に於けるx方向波数であり，特性インピーダンス$Z_{n\alpha} = 1/Y_{n\alpha}$は

E-type lineに対して

$$Z_{n\alpha} = Z'_{n\alpha} = \frac{K_\alpha^2}{\omega \varepsilon_\alpha k_{xn\alpha}}$$

H-type lineに対して

$$Z_{n\alpha} = Z''_{n\alpha} = \frac{\omega \mu_0 k_{xn\alpha}}{K_\alpha^2} \qquad (4)$$

ただし，　$K_I^2 = \varepsilon_r k_0^2 - h^2$ (5)　$K_{II}^2 = k_0^2 - h^2$ (6)

である。さらに$e_{n\alpha}(y)$, $h_{n\alpha}(y)$はmodal functionであり，$e'_{zn\alpha}(y)$, $h''_{zn\alpha}(y)$が

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + k_{yn\alpha}^2\right)\begin{Bmatrix} e'_{zn\alpha} \\ h''_{zn\alpha}\end{Bmatrix} = 0 \qquad (7)$$

但し, $K_\alpha^2 = k_{xn\alpha}^2 + k_{yn\alpha}^2$ (8)

を満たす事より y 成分の modal function はこれらによって次式で与えられる。

$$e'_{yn\alpha} = -\frac{jh}{K_\alpha^2}\frac{de'_{zn\alpha}}{dy} \quad , \quad e''_{yn\alpha} = -h''_{zn\alpha} \tag{9}$$

$$h'_{yn\alpha} = e'_{zn\alpha} \quad , \quad h''_{yn\alpha} = -\frac{jh}{K_\alpha^2}\frac{dh''_{zn\alpha}}{dy} \tag{10}$$

ここで $e(y), h(y)$ に

$$\left.\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} e'_{m\alpha}\cdot h'^{*}_{n\alpha}\times i_x\,dy &= \int_{-a/2}^{a/2} e''_{m\alpha}\cdot h''^{*}_{n\alpha}\times i_x\,dy = \delta_{mn} \\ \int_{-a/2}^{a/2} e'_{m\alpha}\cdot h''^{*}_{n\alpha}\times i_x\,dy &= \int_{-a/2}^{a/2} e''_{m\alpha}\cdot h'^{*}_{n\alpha}\times i_x\,dy = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

但し, * は complex conjugate を示し, $i_x$ は x 方向単位ベクトルなる正規直交条件を課し, (7)～(11)によって図1(b)のガイドの E 及び H-type line mode の modal function を求めると, これ等は次式で示し得る事が導ける。

$$\left.\begin{aligned} e'_{yn\alpha} &= j\frac{h}{K_\alpha^2}\frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}y \\ h'_{yn\alpha} &= \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}y \\ e'_{zn\alpha} &= \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}y \\ h'_{zn\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

E-type modal function

$$
\left.
\begin{aligned}
e''_{ynd} &= -\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}y \\
h''_{ynd} &= -j\frac{h}{K_d^2}\frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}y \\
h''_{znd} &= \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}y \\
e''_{znd} &= 0
\end{aligned}
\right\}
\begin{array}{l}(13)\\ \text{H-type modal}\\ \text{function}\end{array}
$$

直を，ここでは y 方向波数 $k_{ynd}=n\pi/a$ の n が 1.3.5…… の奇数で与えられる界を対象にしている。

(12),(13)より領域 I, II の特定の modal function には媒質の電気定数の違いにもかかわらず，次の関係が成立している事になる。

$$
\left.
\begin{aligned}
e'_{znI} &= e'_{znII}\ ,\quad e''_{xnI} = e''_{xnII} \\
h'_{xnI} &= h'_{xnII}\ ,\quad h''_{znI} = h''_{znII}
\end{aligned}
\right\}
\quad (14)
$$

さて，(1),(2)で求めた界成分は $x=d$ にて連続でなければならないから

$$
\left.
\begin{aligned}
E_{tI}(d,y) &= E_{tII}(d,y) \\
H_{tI}(d,y) &= H_{tII}(d,y)
\end{aligned}
\right\}
\quad (15)
$$

であり．従って

$$V'_{nI}(d)e'_{znI} = V'_{nII}(d)e'_{znII} \tag{16}$$

$$V'_{nI}(d)e'_{ynI} + V''_{nI}(d)e''_{ynI} = V'_{nII}(d)e'_{ynII} + V''_{nII}(d)e''_{ynII} \tag{17}$$

$$I''_{nI}(d)h''_{znI} = I''_{nII}(d)h''_{znII} \tag{18}$$

$$I'_{nI}(d)h'_{ynI} + I''_{nI}(d)h''_{ynI} = I'_{nII}(d)h'_{ynII} + I''_{nII}(d)h''_{ynII} \tag{19}$$

が成立しなければならない。これに(14)を考慮すると(16),(18)より

$$V'_{nI}(d) = V'_{nII}(d)\ ,\ I''_{nI}(d) = I''_{nII}(d) \tag{20}$$

が成立している事がわかるから，結局(17),(19)より次式が得られる。

$$\frac{V''_{nI}(d)}{I''_{nI}(d)} - \frac{V''_{nII}(d)}{I''_{nII}(d)} = \frac{V'_{nII}(d)}{I''_{nII}(d)}\left[\frac{e'_{ynII} - e'_{ynI}}{e''_{ynII}}\right] \tag{21}$$

$$\frac{I'_{nI}(d)}{V'_{nI}(d)} - \frac{I'_{nII}(d)}{V'_{nII}(d)} = \frac{I''_{nII}(d)}{V'_{nII}(d)}\left[\frac{h''_{ynII} - h''_{ynI}}{h'_{ynII}}\right] \tag{22}$$

さらに(21),(22)の左辺各項は$x=d$にて領域Ⅰあるいは Ⅱを見た時のEあるいはH-type lineの入力インミッタンスであるから，これらを$\overleftarrow{Z}_{n\alpha}(d)$, $\overrightarrow{Y}_{n\alpha}(d)$等で表わし，$-V'_{nII}(d)/I''_{nII}(d) = Z_m$と置けば上式は次の様に書き直せる。

$$\overleftarrow{Z}''_{nI}(d) + \overrightarrow{Z}''_{nII}(d) = Z_m\left[\frac{e'_{ynII} - e'_{ynI}}{e''_{ynII}}\right] \tag{23}$$

$$\overleftarrow{Y}'_{nI}(d) + \overrightarrow{Y}'_{nII}(d) = \frac{1}{Z_m}\left[\frac{h''_{ynII} - h''_{ynI}}{h'_{ynII}}\right] \tag{24}$$

従って上式より

$$\left[\overleftarrow{Z}''_{nI}(d)+\overrightarrow{Z}''_{nII}(d)\right]\left[\overleftarrow{Y}'_{nI}(d)+\overrightarrow{Y}'_{nII}(d)\right]=N^2 \qquad (25)$$

が得られる。但し

$$N^2=\left(\frac{e'_{ynII}-e'_{ynI}}{e''_{ynII}}\right)\cdot\left(\frac{h''_{ynII}-h''_{ynI}}{h'_{ynII}}\right)$$

であり，(12)，(13)を用いれば

$$N^2=-\left(\frac{n\pi h}{a}\right)^2\cdot\left[\frac{1}{K_{II}^2}-\frac{1}{K_I^2}\right]^2 \qquad (26)$$

となる。この(25)は誘電体表面における界の連続条件より導けたものであるから，H-ガイドの特性方程式を表わすべきものであり，事実導体幅 $w\to\infty$ の時には $TM_{s\text{-}sym}$ 姿態のそれ，つまり

$$k_{ynI}\tan k_{ynI}d=-j\varepsilon_r k_{ynII} \qquad (25)'$$

を示している事が容易に証明し得る。さて(25)の $\overleftarrow{Z}''_{nI}(d)$，$\overleftarrow{Y}'_{nI}(d)$ は図1(b)より明らかな如く終端短絡の線路(長さ $d$)を $x=d$ の面で $-x$ 方向を見た時の E，H-type line の入力インミッタンスであり，$\overrightarrow{Z}''_{nII}(d)$，$\overrightarrow{Y}'_{nII}(d)$ は終端($x=w$)に開口部の不連続を表わす等価インミッタンス $Z''_a$，$Y''_a$ が負荷されている線路(長さ $w-d$)を $x=d$ 面で $+x$ 方向に見た E，H-type line の入力インミッタンスであるから，結局(25)は図2に示す等価回路の共振方程式を示して

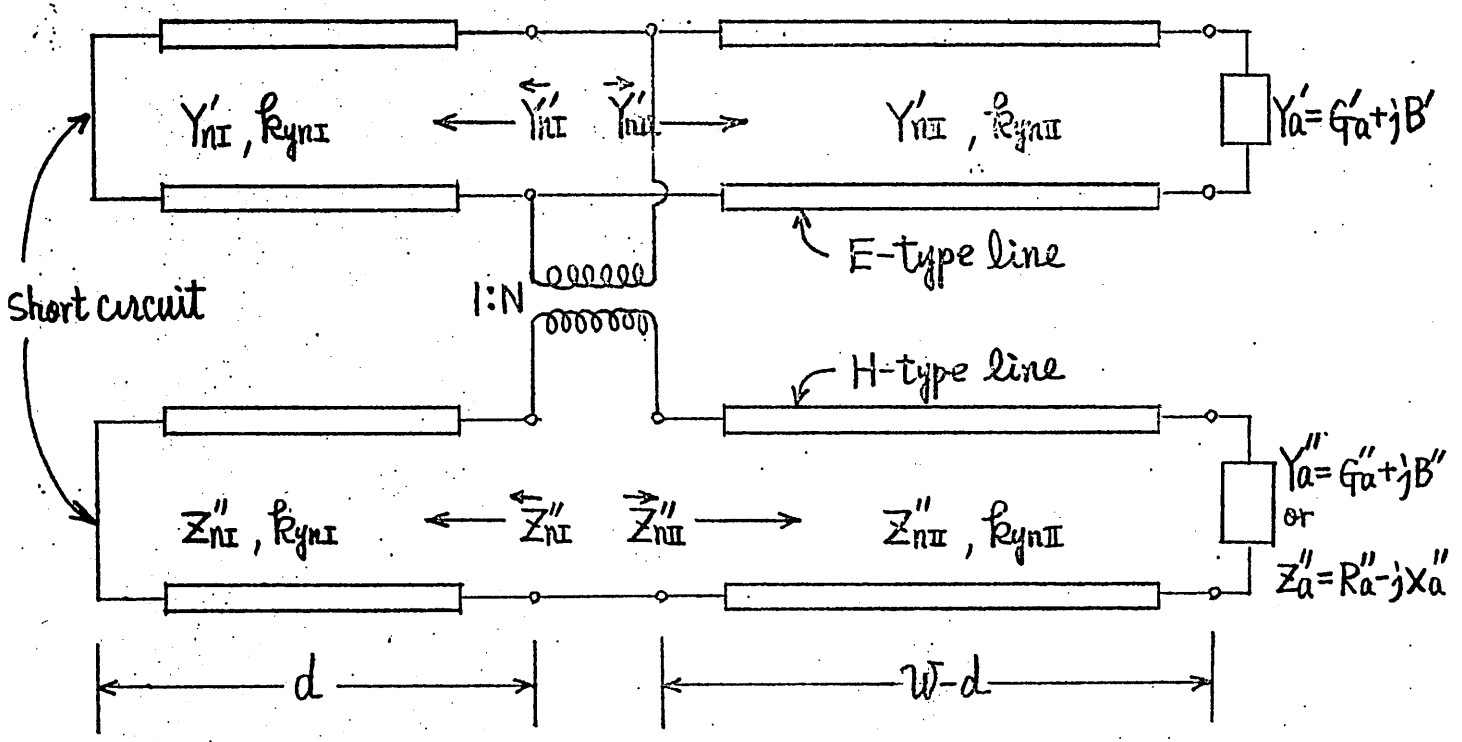



図 2

いる事になる。これが図1(b)のガイドの断面を表わす等価伝送線路表示であり，若しこの構造に対する開口の不連続インミッタンス $z''_a$, $Y'_a$ が求まれば横共振法の適用により比較的容易に複素伝播定数が求められる。Oliner, Clarricoats[8],[9]等は同様な考えで slotted inhomogeneous circular waveguide の解析を行なったが，ここで問題としている如き開口面に Ground plane の存在しない方形断面のガイドに対する開口インミッタンスの誘導及び伝播定数の解析は未だ行われた例がない。しかし，以下では先に筆者らが示した近似法を用いればこの様な場合の解析が容易に出来る事を示そう。

## [2] 開口部の不連続インミッタンス

一般的に開口部の不連続アドミタンス $Y'_a$, $Y''_a = 1/z''_a$ の conductance part $G'_a$, $G''_a$ は放射によってガイドから失われる電力に対応して定まり，susceptance part $B'_a$, $B''_a$ は開口部の不連続によってその付近に蓄積されるエネルギーに対応して定まる事は明らかである。そこで今 Susceptance $B_a$ をガイド内部に蓄積されるエネルギーに対応する Internal susceptance part $B^i_a$ と外部空間に蓄積されるエネルギーに対応する External susceptance part $B^e_a$ に分け，そして

$B_a = B_a^i + B_a^e$ と考える。しかる時には $B_a^i$ は図1(b)にて $y > w$ の部分にまで $y \leqq w$ の線路を仮定した時に $y = w$ に現われる不連続 susceptance によって(厳密にはその $1/2$ によって)得られるものと同じであるが[2]，今の場合，開口幅が導体間隔 $a$ と一致している事より，$B_a^i$ に対応する不連続は存在せず( $B_a^i = 0$ )，$B_a = B_a^e$ となる事は明らかである。さて以下では TMs-sym mode の最低次($n=1$)のもの〔以下このmodeを $TM_{s(1,0)}$ と称す〕が伝播している場合について考える。この時開口面から外部空間に流出する複素電力流を $P$ とすれば，図2の各線路の負荷端 $x = w$ における modal amplitude は芳節によれば $V_{I,II}(w)$ で与えられるから $Y_a = G_a + jB_a$ の各part は次式で定められる。

$$G_a = \frac{Re\{P\}}{|V_{I,II}(w)|^2} \quad , \quad B_a = \frac{-Im\{P\}}{|V_{I,II}(w)|^2} \qquad (27)$$

但し，Re{ }, Im{ } は{ }の real 及び Imaginary part を示す。従って以後では複素電力流 $P$ を求める必要があるが，これはガイド外部における界の取り扱いとなり，図1(b)に示すままでは取り扱えないからここで先に提案した楕円筒近似法を用いる事にする。なを詳細については文献(6)を参照されたい。そこで本節では先づ以後の取り扱いにおいて必要となる楕円筒柔に対する断面内の

伝送線路方程式の誘導を行なっておく。

## (2-1) 楕円断面の等価伝送線路方程式

図3に示した楕円筒座標系(近似楕円面 $\xi=\xi_0$)において, $\xi$ 方向に transverse な面内の電磁界を求めると次式の様になる。

$$E_t(\xi,\eta)=\sum_m\left\{\left[V_m'(\xi)e'_{\eta m}(\xi,\eta)+V_m''(\xi)e''_{\eta m}(\xi,\eta)\right]\mathring{i}_\eta + V_m'(\xi)e'_{zm}(\eta)\mathring{i}_z\right\} \qquad (28)$$

$$H_t(\xi,\eta)=\sum_m\left\{\left[I_m'(\xi)h'_{\eta m}(\xi,\eta)+I_m''(\xi)h''_{\eta m}(\xi,\eta)\right]\mathring{i}_\eta + I_m''(\xi)h''_{zm}(\eta)\mathring{i}_z\right\} \qquad (29)$$

ここでこの様な楕円面に対する等価線路を elliptic line と称すると,(1),(2)と同様に(′)をつけたものは E-type elliptic line mode を示し,(″)をつけたものは H-type のそれを示す。(28),(29)の modal amplitude $V_m(\xi)$, $I_m(\xi)$ は楕円筒系における波動方程式より

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2}+(c_0^2K_{II}^2\cosh^2\xi-\lambda_m)\right]\begin{Bmatrix}V_m(\xi)\\I_m(\xi)\end{Bmatrix}=0 \qquad (30)$$

で示せる Mathieu の微分方程式を満たしている事になるから,これより両 line mode に対して次式で示せる同形式の線路方程式が成立する。(詳細は省略する。)

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV_m(\xi)}{d\xi} &= -j k_{\xi m} Z_{me} I_m(\xi) \\ \frac{dI_m(\xi)}{d\xi} &= -j k_{\xi m} Y_{me} V_m(\xi)\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

ここで $k_{\xi m} = \sqrt{c_0^2 K_{II}^2 \cosh^2\xi - \lambda_m}$ は elliptic line の伝播定数であり，$c_0$ は楕円の焦点，$\lambda_m$ は Mathieu 方程式の固有値，$K_{II}^2 = k_0^2 - h^2$ である。又 $Z_{me} = 1/Y_{me}$ は elliptic line の特性インピーダンスであって

$$\left.\begin{aligned}&\text{E-type elliptic line に対して} \\ &Z_{me} = Z'_{me} = \frac{K_{II}^2}{\omega \varepsilon_0 k_{\xi m}} \\ &\text{H-type elliptic line に対して} \\ &Z_{me} = Z'_{me} = \frac{\omega \mu_0 k_{\xi m}}{K_{II}^2}\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

で与えられる。なを (30) の解 $V_m(\xi)$, $I_m(\xi)$ は周知の如く径 Mathieu 関数 $He^{(2)}_{e,om}(\xi)$ であるから，E-type line の mode についてみると (31), (32) より

$$\left.\begin{aligned}V'_m(\xi) &= He^{(2)}_{e,om}(\xi) \\ I'_m(\xi) &= \frac{j}{k_{\xi m} Z_{me}} \cdot \frac{dV'_m}{d\xi} = \frac{j\omega\varepsilon_0}{K_{II}^2} \cdot \dot{He}^{(2)}_{e,om}(\xi)\end{aligned}\right\} (33)$$

但し (˙) は $\xi$ に関する微分を表わす。

従って elliptic line において $\xi = \xi_0$ の点で $+\xi$ 方向を見た

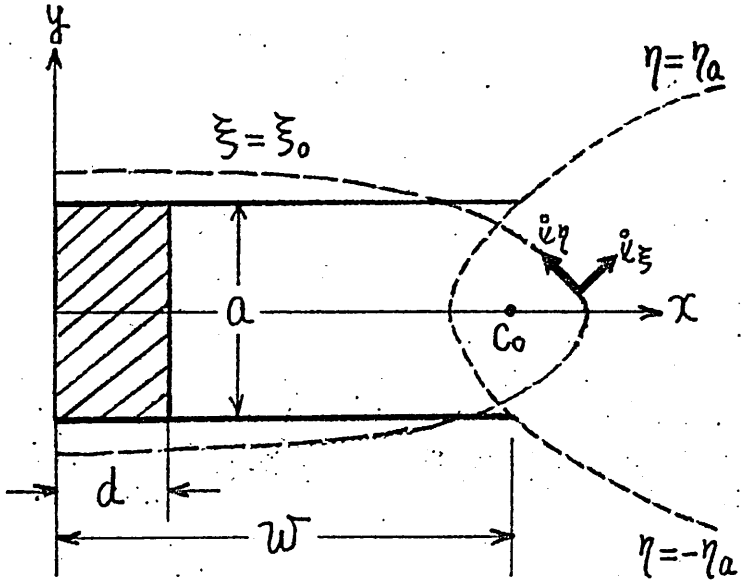



図 3

アドミタンス $\vec{Y}'_m(\xi_0)$ は

$$\vec{Y}'_m(\xi_0)=\frac{I'_m(\xi_0)}{V'_m(\xi_0)}=\frac{j\omega\varepsilon_0}{K_{II}^2}\cdot\frac{\dot{H}_{e,om}^{(z)}(\xi_0)}{\dot{H}_{e,om}^{(z)}(\xi_0)} \qquad (34)$$

で与えられる。同様にして H-type line mode に於いては

$$\vec{Y}''_m(\xi_0)=\frac{I''_m(\xi_0)}{V''_m(\xi_0)}=\frac{K_{II}^2}{j\omega\mu_0}\cdot\frac{He,om(\xi_0)}{\dot{H}_{e,om}^{(z)}(\xi_0)} \qquad (35)$$

となる事が導ける。又一方 modal function $e'_{zm}(\eta), h''_{zm}(\eta)$ は

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2}+(\lambda_m-c_0^2K_{II}^2\cos^2\eta)\right]\begin{Bmatrix}e'_{zm}(\eta)\\ h''_{zm}(\eta)\end{Bmatrix}=0 \qquad (36)$$

を満たしている事より，$\eta$ 成分の modal function はこれらによって次式で与え得る。

$$\left.\begin{aligned}e'_{\eta m}(\xi,\eta)&=\frac{-jh}{h_1(\xi,\eta)K_{II}^2}\frac{de'_{zm}(\eta)}{d\eta},\quad e''_{\eta m}(\xi,\eta)=\frac{h''_{zm}(\eta)}{h_1(\xi,\eta)}\\ h'_{\eta m}(\xi,\eta)&=\frac{-e'_{zm}(\eta)}{h_1(\xi,\eta)},\quad h''_{\eta m}(\xi,\eta)=\frac{-jh}{h_1(\xi,\eta)K_{II}}\cdot\frac{dh''_{zm}(\eta)}{d\eta}\end{aligned}\right\}(37)$$

但し $h_1(\xi,\eta)=c_0\sqrt{\sinh^2\xi+\sin^2\eta}$ は $\xi,\eta$ 座標の測度係数

ここで $e_m(\xi,\eta), h_m(\xi,\eta)$ に

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{N_m^{e,o}}\int_0^{2\pi}e'_i\cdot h'^{*}_j\times i_\xi h_1 d\eta&=\frac{1}{N_m^{e,o}}\int_0^{2\pi}e''_i\cdot h''^{*}_j\times i_\xi h_1 d\eta=\delta_{ij}\\ \frac{1}{N_m^{e,o}}\int_0^{2\pi}e'_i\cdot h''^{*}_j\times i_\xi h_1 d\eta&=\frac{1}{N_m^{e,o}}\int_0^{2\pi}e''_i\cdot h'^{*}_j\times i_\xi h_1 d\eta=0\end{aligned}\right\}(38)$$

但し $i_\xi$ は $\xi$ 方向単位ベクトルで $N_m^{e,o}$ は正規化因数なる

正規直交条件を課し，(36)～(38)によって楕円筒系のE及びH-type elliptic lineのmodal functionを求めると次式の様になる。

E-type elliptic line；

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}'_m(\xi,\eta) &= Se_{,om}(\eta)\mathring{i}_z - \frac{\gamma h}{h_1(\xi,\eta)K_{II}^2}\cdot\frac{dSe_{,om}(\eta)}{d\eta}\mathring{i}_\eta \\ \mathcal{H}'_m(\xi,\eta) &= \frac{-1}{h_1(\xi,\eta)}\cdot Se_{,om}(\eta)\mathring{i}_\eta \end{aligned}\right\} (39)$$

H-type elliptic line；

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}''_m(\xi,\eta) &= \frac{1}{h_1(\xi,\eta)}\cdot Se_{,om}(\eta)\mathring{i}_\eta \\ \mathcal{H}''_m(\xi,\eta) &= Se_{,om}(\eta)\mathring{i}_z - \frac{\gamma h}{h_1(\xi,\eta)K_{II}^2}\cdot\frac{dSe_{,om}(\eta)}{d\eta}\mathring{i}_\eta \end{aligned}\right\} (40)$$

但し $Se_{,om}(\eta)$ はm次の偶又は奇の角Mathieu関数であり，$\mathring{i}_\alpha$ は$\alpha$方向の単位ベクトルである。

## (2-2) 不連続アドミタンスの導出

さて，上述してきた楕円筒系における界の取扱いによって(27)で与えられる方形断面に対する不連続アドミタンスを求めよう。今図3に示す近似された楕円筒上の開口($-\eta_a \leqq \eta \leqq \eta_a$)上における接線方向電磁界を$\mathcal{E}_{ta}$，$\mathcal{H}_{ta}$とすると，楕円筒上の開口から流出する複素電力$P^e$は

$$P^e = \int_{-\eta_a}^{\eta_a} (\mathcal{E}_{ta} \times \mathcal{H}^*_{ta}) \cdot i_\xi h_1 d\eta \qquad (41)$$

で表わせる。しかるに(27)で用いているPは方形断面上 $x=w$ に存在する開口から流出する複素電力流であるから(41)の $P^e$ を(27)のPとして使用するには若干の検討を要する。しかし後述の如く $x=w$ の開口界から近似的に誘導された $\xi=\xi_0$ 上の開口界が妥当なものであるならば，両系における複素電力流は等しいと考えてよいので以下では(38)の $P^e$ によって(27)のPとする。しかる時には楕円筒系での界の取り扱いによって方形断面の等価線路に対する $G_a, B_a$ が解析し得る事になる。さて，開口界 $\mathcal{E}_{ta} = e_{\eta a} i_\eta + e_{za} i_z$ が分っているものとして，これを(28)によってelliptic lineのmodal amplitude, functionを用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ta} &\equiv e_{\eta a} i_\eta + e_{za} i_z \\ &= \sum_m V'_m(\xi_0) \mathcal{E}'_m(\xi_0, \eta) + \sum_m V''_m(\xi_0) \mathcal{E}''_m(\xi_0, \eta) \qquad (42) \end{aligned}$$

但し $|\eta| \leqq \eta_a$

の様に展開するとmodal amplitudeは(38)の直交性を用いることによって得られ，(39)，(40)を考慮すると次式の如く導ける。

$$V'_m(\xi_0) = \frac{1}{N^{e,o}_m} \int_{-\eta_a}^{\eta_a} \mathcal{E}_{ta} \cdot \mathcal{H}'^*_m \times i_\xi h_1 d\eta$$

$$= -\frac{1}{N_m^{e,o}}\int_{ap} e_{za} h_{\eta m}^{*} h_1 d\eta = \frac{1}{N_m^{e,o}}\int_{ap} e_{za} S_{e,om}(\eta) d\eta \quad (43)$$

$$V_m''(\xi_0) = \frac{1}{N_m^{e,o}}\int_{ap} e_{\eta a} \mathring{\imath}_\eta \cdot \mathbb{h}_m''^{*} \times \mathring{\imath}_\xi h_1 d\eta$$

$$= \frac{1}{N_m^{e,o}}\int_{ap} e_{\eta a} h_{zm}''^{*} h_1 d\eta = \frac{1}{N_m^{e,o}}\int_{ap} e_{\eta a} S_{e,om}(\eta) h_1 d\eta \quad (44)$$

次に $\mathbb{h}_{ta}$ も(29)を用いて展開し

$$\mathbb{h}_{ta} = \sum_n I_n'(\xi_0)\mathbb{h}_n'(\xi_0,\eta) + \sum_n I_n''(\xi_0)\mathbb{h}_n''(\xi_0,\eta) \quad (45)$$

とし，これと(42)を用いて(41)の $P^e \equiv P$ を書き直すと $\mathbb{e}_{ta}$ は開口以外では恒等的に零である事及び(38)より

$$P = \int_{ap} (\mathbb{e}_{ta} \times \mathbb{h}_{ta}^{*}) \cdot \mathring{\imath}_\xi h_1 d\eta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\sum_m (V_m'\mathbb{e}_m' + V_m''\mathbb{e}_m'')\right] \times \left[\sum_n (I_n'\mathbb{h}_n' + I_n''\mathbb{h}_n'')\right]^{*} \cdot \mathring{\imath}_\xi h_1 d\eta$$

$$= \sum_m V_m' \sum_n I_n' \int_0^{2\pi} \mathbb{e}_m' \cdot \mathbb{h}_n'^{*} \times \mathring{\imath}_\xi h_1 d\eta + \sum_m V_m'' \sum_n I_n'' \int_0^{2\pi} \mathbb{e}_m'' \cdot \mathbb{h}_n''^{*} \times \mathring{\imath}_\xi h_1 d\eta$$

$$= \sum_m N_m^{e,o} V_m'(\xi_0) I_m'^{*}(\xi_0) + \sum_m N_m^{e,o} V_m''(\xi_0) I_m''^{*}(\xi_0) \quad (46)$$

が導ける。この結果の右辺オ1項目はE-type elliptic lineを流れる複素電力分を与え，オ2項目はH-type lineのそれを与えている事になるから，これらを各々 $P'$ 及び $P''$ で表わす事に

しよう。しかる時には(27)より図2のE-type lineに負荷されるべき不連続アドミタンス $Y'_a = G'_a + jB'_a$ は

$$G'_a = \frac{\mathrm{Re}\cdot\{P'\}}{|V'_{1,II}(w)|^2} = \sum_m N_m^{e,0} \frac{\mathrm{Re}\cdot\{V'_m(\xi_0)\cdot I'^{*}_m(\xi_0)\}}{|V'_{1,II}(w)|^2} \qquad (47)$$

$$B'_a = \frac{-\mathrm{Im}\cdot\{P'\}}{|V'_{1,II}(w)|^2} = \sum_m N_m^{e,0} \frac{\mathrm{Im}\cdot\{-V'_m(\xi_0)\cdot I'^{*}_m(\xi_0)\}}{|V'_{1,II}(w)|^2} \qquad (48)$$

で与えられ，H-type lineのそれ，$Y''_a = G''_a + jB''_a$ は

$$G''_a = \frac{\mathrm{Re}\cdot\{P''\}}{|V''_{1,II}(w)|^2} = \sum_m N_m^{e,0} \frac{\mathrm{Re}\cdot\{V''_m(\xi_0)\cdot I''^{*}_m(\xi_0)\}}{|V''_{1,II}(w)|^2} \qquad (49)$$

$$B''_a = \frac{-\mathrm{Im}\cdot\{P''\}}{|V''_{1,II}(w)|^2} = \sum_m N_m^{e,0} \frac{\mathrm{Im}\cdot\{-V''_m(\xi_0)\cdot I''^{*}_m(\xi_0)\}}{|V''_{1,II}(w)|^2} \qquad (50)$$

で与えられる事になる。しかるに(34),(35)で求めた様に

$$I_m(\xi_0) = \vec{Y}_m(\xi_0) V_m(\xi_0)$$

だから，これを用いて(47)～(50)を書き直し，$Y'_a$, $Y''_a$ を同一の表示で表わすと次の様になる。

$$G_a = \sum_m N_m^{e,0} (\mathrm{Re}\cdot\vec{Y}_m) \frac{|V_m(\xi_0)|^2}{|V_{1,II}(w)|^2} \qquad (51)$$

$$B_a = \sum_m N_m^{e,0} (\mathrm{Im}\cdot\vec{Y}_m) \frac{|V_m(\xi_0)|^2}{|V_{1,II}(w)|^2} \qquad (52)$$

この様にして得られた $G_a, B_a$ においては $V_{1,II}(w)$ 及び $V_m(\xi_0)$ が共に図1(b)の $\chi = w$ 上の開口界によって与えられるものだから，(51),(52)の $G_a, B_a$ の表示は明らかに開口界に

対して停留性を有している事が云える。従ってこれらのmodal amplitudeの決定に対しては適当なtrial fieldを用いれば良いことになる。そこでtrial fieldとして図2にて$w\to\infty$の場合のH-ガイドの電磁界を用いる事にすれば$x=w$上の開口界は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} E_{xa} &= \frac{h^2+(\pi/a)^2}{h k_{y1\mathrm{II}}}\cos\frac{\pi}{a}x \\ E_{ya} &= -j\frac{\pi}{ah}\sin\frac{\pi}{a}x \\ E_{za} &= \cos\frac{\pi}{a}x \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

従って$x=w$の開口上の接線電界$E_{ta}=E_{ya}\mathring{i}_y+E_{za}\mathring{i}_z$を(1)によって領域IIのE及びH-type line modeで展開すると(1),(2)を用いれば

$$E_{ya}\mathring{i}_y+E_{za}\mathring{i}_z=\sum_n V'_{n\mathrm{II}}(w)\mathcal{E}'_{n\mathrm{II}}(y)+\sum_n V''_{n\mathrm{II}}(w)\mathcal{E}''_{n\mathrm{II}}(y) \qquad (54)$$

となるから(11),(12)及び(13)より

$$V'_{1\mathrm{II}}(w)=\int_{-a/2}^{a/2}(E_{ya}\mathring{i}_y+E_{za}\mathring{i}_z)\cdot(\mathrm{h}'^{*}_{1\mathrm{II}}\times\mathring{i}_x)\,dy=-\sqrt{\frac{a}{2}} \qquad (55)$$

$$V''_{1\mathrm{II}}(w)=\int_{-a/2}^{a/2}E_{ya}\mathring{i}_y\cdot(\mathrm{h}''^{*}_{1\mathrm{II}}\times\mathring{i}_x)\,dy=-j\frac{\pi}{h\sqrt{2a}} \qquad (56)$$

の如く求まる。

次に(53)より(43),(44)の式中にある $\xi=\xi_0$ 上の開口の界分布 $e_{za}, e_{\eta a}$ を求める為には筆者らの示した近似法を用いれば容易に導け,(53)より次の様に出来る。

$$e_{za} = \cos F(\eta)\cdot e^{-jD(\eta)} \tag{57}$$

$$e_{\eta a} = \frac{-1}{h}\left[\frac{h^2+(\pi/a)^2}{k_{y1,II}}\tilde{H}(\eta)\cos F(\eta)+\frac{j\pi}{ah}\tilde{G}(\eta)\sin F(\eta)\right]e^{-jD(\eta)} \tag{58}$$

ここで $\tilde{H}(\eta)$ 及び $\tilde{G}(\eta)$ は $\xi=\xi_0$ 上における $x$ 及び $y$ 軸に対する $\eta$ 軸の方向余弦であり, $F(\eta)=\frac{\pi}{a}F_0(\eta)$ で表わされる $F_0(\eta)$ は $x=w$ 上での $y$ と $\eta$ の関係を与える因るである。また $D(\eta)=K_{II}\cdot S(\eta)$ で表わされる $S(\eta)$ は図1(b)にて $|y|\leqq a/2$ における $x=w$ 上と $\xi=\xi_0$ 上の2矢南の $\eta$ 軸に沿う長さを与えるものである。[5]

以上の様にして(51),(52)で必要となる $V_{1,II}(w)$, $V_m(\xi_0)$ が(55),(56)及び(57),(58)を用いた(43),(44)で求められたから最後に $Re\cdot\vec{Y}_m$, $Im\cdot\vec{Y}_m$ を求めよう。まず $\vec{Y}_m$ についてみると

$$Re\cdot\vec{Y}'_m(\xi_0)=\frac{1}{2}(\vec{Y}'_m+\vec{Y}'^{*}_m)=\frac{j\omega\varepsilon_0}{2K_{II}^2}\left(\frac{\dot{H}^{(2)}_{e,om}}{H^{(2)}_{e,om}}-\frac{\dot{H}^{(2)*}_{e,om}}{H^{(2)*}_{e,om}}\right)$$

$$Im\cdot\vec{Y}'_m(\xi_0)=\frac{1}{2j}(\vec{Y}'_m-\vec{Y}'^{*}_m)=\frac{\omega\varepsilon_0}{2K_{II}^2}\left(\frac{\dot{H}^{(2)}_{e,om}}{H^{(2)}_{e,om}}+\frac{\dot{H}^{(2)*}_{e,om}}{H^{(2)*}_{e,om}}\right)$$

となるから

$$\dot{H}^{(2)}_{e,0m}\cdot\dot{H}^{(2)*}_{e,0m}-\dot{H}^{(2)}_{e,0m}\cdot\dot{H}^{(2)*}_{e,0m}=j2$$

の関係を用いれば結局上式は次の様に示せる。

$$R_e\cdot\vec{Y}_m=\frac{\omega\varepsilon_0}{K_{II}^2\left|H^{(2)}_{e,0m}(\xi_0)\right|^2} \tag{59}$$

$$I_m\cdot\vec{Y}_m=\frac{\omega\varepsilon_0}{K_{II}^2}\cdot\frac{J_{e,0m}(\xi_0)\dot{J}_{e,0m}(\xi_0)+N_{e,0m}(\xi_0)\dot{N}_{e,0m}(\xi_0)}{\left|H^{(2)}_{e,0m}(\xi_0)\right|^2} \tag{60}$$

但し $H^{(2)}_{e,0m}(\xi)=J_{e,0m}(\xi)-jN_{e,0m}(\xi)$ である。

同様にして $\vec{Y}''_m$ に対しては次式の様になる。

$$R_e\cdot\vec{Y}''_m=\frac{K_{II}^2}{\omega\mu_0\left|H^{(2)}_{e,0m}(\xi_0)\right|^2} \tag{61}$$

$$I_m\cdot\vec{Y}''_m=\frac{-K_{II}^2}{\omega\mu_0}\cdot\frac{J_{e,0m}(\xi_0)\dot{J}_{e,0m}(\xi_0)+N_{e,0m}(\xi_0)\dot{N}_{e,0m}(\xi_0)}{\left|H^{(2)}_{e,0m}(\xi_0)\right|^2} \tag{62}$$

以上の諸式を用いれば(51),(52)より求めるべき開口部の不連続アドミタンスが誘導出来る事になるが，ここで(57),(58)を用いた(43),(44)の $V_m(\xi_0)$ について先づ考えてみる。今(43)の示す内容は次式と同じものである。

$$V'_m(\xi_0)=\frac{1}{N^e_m}\int_{ap}e_{za}S_{em}(\eta)\,d\eta+\frac{1}{N^o_m}\int_{ap}e_{za}S_{om}(\eta)\,d\eta \tag{63}$$

しかるに(57)より明らかな如く $e_{za}$ は $\eta$ に関し偶関数であるから(63)の右辺第2項は零となる事がわかる。さらに図1(b)において $x=0$ の $y$-$z$ 面が短絡面である事を考えるとmode次数 $m$ は奇数のものしか許されない

ことが導けるから結局(63)は次の様になる。

$$V'_m(\xi_0)=\frac{1}{N^e_m}\int_{ap} e_{za}\,Sem(\eta)\,d\eta\ ,\quad m=1,3,5\cdots\cdots \qquad (64)$$

同様に(44)の$V''_m(\xi_0)$についてみると(58)の$e_{\eta a}$は$\eta$に関し奇関数である事より

$$V''_m(\xi_0)=\frac{1}{N^o_m}\int_{ap} e_{\eta a}\,Som(\eta)\,h_1\,d\eta\ ,\quad m=1,3,5\cdots\cdots \qquad (65)$$

と書き直せることがわかる。
なを，角Mathieu関数 $Se,om(\eta)$ は

$$\left.\begin{aligned} Sem(\eta)&=\sum_{n=1}^{\infty}{}' D^m_n(c_0k_{II})\cos n\eta \\ Som(\eta)&=\sum_{n=1}^{\infty}{}' F^m_n(c_0k_{II})\sin n\eta \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

で表わされるもので，$\sum'_n$ は $m$ が奇数の時には $n$ の奇数のもののみの和を示し，$D^m_n, F^m_n$ は展開係数である。
以上の諸結果を用いれば求めるべき不連続アドミタンスが得られ，次式に示す如く表わせる。

E-type line mode に対し；

$$G'_a=\frac{2\omega\varepsilon_0}{ak^z_{II}}\sum_{m=1}^{\infty}{}'\frac{|I^m_z|^2}{N^e_m\,|H^{(2)}_{em}(\xi_0)|^2} \qquad (67)$$

$$B'_a=\frac{2\omega\varepsilon_0}{ak^z_{II}}\sum_{m=1}^{\infty}{}'\frac{J_{em}(\xi_0)\dot{J}_{em}(\xi_0)+N_{em}(\xi_0)\dot{N}_{em}(\xi_0)}{N^e_m\,|H^{(2)}_{em}(\xi_0)|^2}\,|I^m_\eta|^2 \qquad (68)$$

H-type line mode に対し；

$$G''_a = \frac{2ah^2K_{II}^2}{\omega\mu_0\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{|I_\eta^m|^2}{N_m^o |\dot{H}_{om}^{(2)}(\xi_0)|^2} \qquad (69)$$

$$B''_a = \frac{-2ah^2K_{II}^2}{\omega\mu_0\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{J_{om}(\xi_0)\dot{J}_{om}(\xi_0)+N_{om}(\xi_0)\dot{N}_{om}(\xi_0)}{N_m^o |\dot{H}_{om}^{(2)}(\xi_0)|^2} |I_\eta^m|^2 \qquad (70)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} I_z^m &= \int_{ap} e_{za} S_{em}(\eta)\, d\eta \\ I_\eta^m &= \int_{ap} e_{\eta a} S_{om}(\eta) h_1\, d\eta \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

## 3. 伝播定数の決定及び実測値との比較

### (3-1) 横共振方程式及び伝播定数

前節までで誘導してきた横共振方程式〔(25)式〕と開口部の不連続アドミタンス Ga, Ba〔(67)~(70)式〕を用いて quasi $TM_{s(1,0)}$ mode〔(25)にて n=1 としたもの〕に対する伝播定数を (25)' で与えられる特性方程式から得られる $TM_{s(1,0)}$ mode の伝播定数からの摂動近似により求める。

今 (5), (6) 及び (8) の波数関係より

$$\left.\begin{aligned} k_{y1I} &= \sqrt{(\varepsilon_r - 1)k_0^2 + k_{y1II}^2} \\ K_I &= \sqrt{(\varepsilon_r - 1)k_0^2 + (\pi/a)^2 + k_{y1II}^2} \\ K_{II} &= \sqrt{(\pi/a)^2 + k_{y1II}^2} \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

の如く $k_{y1I}, K_\alpha$ 等が $k_{y1II}$ によって示せる事より(25)の共振方程式は未知変数 $k_{y1II}$ のみで表わす事が可能であるが，ここでは更らに便宜上 $k_{y1II}$ の替りに

$$\gamma = k_{y1II}(w-d) \tag{73}$$

なる新らしい変数を用いる事にすると(25)は

$$\overleftrightarrow{Z}_1''[\gamma]\cdot\overleftrightarrow{Y}_1'[\gamma] = N^2[\gamma] \tag{74}$$

但し，$\overleftrightarrow{Z}_1''[\gamma] = [\overleftrightarrow{Z}_{1I}(d)+\overleftrightarrow{Z}_{1II}(d)]_{\gamma=\gamma}$，$\overleftrightarrow{Y}_1'[\gamma]$ も同様に表わせる。

そこで(74)を $TM_{s(1,0)}$ mode の $k_{y1II}$ の値，$k^0_{y1II}$（これは(25)'より明らかに $k^0_{y1II} = j\alpha^0_{y1II}$ なる純虚数となる）従って $\gamma = \gamma_0 = \alpha^0_{y1II}\cdot(w-d)$ によって quasi $TM_{s(1,0)}$ mode の $\gamma = \alpha_{y1II}(w-d)$ を

$$\gamma = \alpha^0_{y1II}(w-d) - \delta = \gamma_0 - \delta \quad , \quad \left|\frac{\delta}{\gamma_0}\right| \ll 1 \tag{75}$$

の如く表わし，(74)を $\gamma = \gamma_0$ で Taylor 展開して $\delta$ を求める事にする。そこで(74)において

$$F(\gamma) \equiv \overleftrightarrow{Z}_1''[\gamma]\cdot\overleftrightarrow{Y}_1'[\gamma] - N^2[\gamma] = 0 \tag{76}$$

と置くと

$$F(\gamma_0) + \left\{\frac{d}{d\gamma}F(\gamma)\right\}_{\gamma=\gamma_0}\cdot\delta \simeq 0 \tag{77}$$

となるから $\delta$ は

$$\delta = -\frac{F(\gamma_0)}{\left\{\frac{d}{d\gamma}F(\gamma)\right\}_{\gamma=\gamma_0}} \tag{78}$$

で求められる。しかし今開口が使用波長に対して非共振状態である時には(78)の分母中に含まれてくる不連続インミッタンスのγに対する変分はゆるやかであり無視出来ることを考慮し，さらに等価巻線比Nの変化も無視出来るとすれば(78)は

$$\delta = -\frac{\overleftrightarrow{Z}_1''[\gamma_0]\overleftrightarrow{Y}_1''[\gamma_0] - N^2[\gamma_0]}{\overleftrightarrow{Z}_1''[\gamma_0]\overleftrightarrow{Y}_1'[\gamma_0] + \overleftrightarrow{Z}_1'[\gamma_0]\overleftrightarrow{Y}_1[\gamma_0]} \qquad (79)$$

によって求める事が出来る。さてこの様にして求まったδを用いれば，求めるべき伝播定数hは(5),(75)より

$$h^2 = k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \alpha_{y1\text{II}}^2 = k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\alpha_{y1\text{II}}^0 - \frac{\delta}{w-d}\right)^2$$
$$\simeq \left[k_0^2 - (\pi/a)^2 + \alpha_{y1\text{II}}^{0\,2}\right] - \frac{2\delta\gamma_0}{(w-d)^2} = h_0^2 - \frac{2\delta\gamma_0}{(w-d)^2} \qquad (80)$$

但し $h_0 = \sqrt{k_0^2 - (\pi/a)^2 + \alpha_{y1\text{II}}^{0\,2}}$ はTMs(1,0) modeの位相定数

従って $h = \beta - j\alpha$ とし，$\delta = \delta_r + j\delta_i$ とおくと(80)より

$$\alpha = \frac{\gamma_0 \cdot \delta_i}{h_0(w-d)^2} \qquad (減衰定数) \qquad (81)$$

$$\beta = h_0\left[1 - \frac{\gamma_0 \cdot \delta_r}{h_0^2(w-d)^2}\right] \qquad (位相定数) \qquad (82)$$

の様に求められる。

(3-2) 実測値との比較

前節までの結果を確かめるために，以前に実験，検討してきた漏れH-ガイド[10]に対して計算を試みた。ガイドの構成は図4に示す通りであり，誘電体として$\varepsilon_r \simeq 2.0$（推定）のテフロンを用いている。ここで問題はこの方形断面に対する近似楕円の決定であるが，これはすでに述べてきたように$\xi_0$の決定には方形断面の長，短辺比で定まる楕円率を用いて（ただし上下導体板の厚さ$t$を考慮して）$\tanh \xi_0 = (a+2t)/2w$によって与え，焦点$C_0$はこれが大きいために$C_0 = w$として楕円を決定するのが妥当であることが分っている。さらに$x=w$上の開口（$|y| \leq \frac{a}{2}$）に対する楕円筒上の開口を決定する$\eta_a$は$x=w$, $y=a/2$を通る$\eta$座標で与えるのが便利であることを述べてきているので，以下ではこの方法によって$\xi_0$, $C_0$, $\eta_a$を定めることにする。またさらに図3に示すように$x=w$と$\xi=\xi_0$の交点を通る$\eta$座標$\eta_0$及び焦点距離$C_0$と断面内波数$k_{\perp}$の積$C_0 k_{\perp}$が(71)などの計算に必要となるfactorなのでこれらをいま近似楕円に対する特性値と呼ぶことにする。さて以下では導体幅$w$に対する減衰定数$\alpha$，位相定数$\beta$の変化を検討するため，各導体幅に対する特性値を求めたのが表1である。今周波数$f = 9.5\,GHz$における$TM_{s(1,0)}$ modeの各波数

を(25)'から求めると次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{0}_{y1\,\mathrm{II}} &= 0.293\ (\mathrm{neper/cm}) \\ K_{\mathrm{II}} &= 1.33\ (\mathrm{rad./cm}) \\ h_0 &= 1.48\ (\mathrm{rad./cm}) \end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

これらの値を用い，(67)~(71)，(79)および(81)(82)によって数値計算を行なった結果が図5(a)，(b)の実線で示したものである。また同図(a)中の点線で示すものは以前に筆者らが行なった実測結果であり，本文で示した解析結果と良く一致していることがわかる。しかしここでみられるような計算値と実測値間の差異のまず原因は解析法に2，3の近似が入っていることも以外にも考えられる。まず第1にガイド構成に用いたテフロンの比誘電率である。計算に於ては $\varepsilon_r = 2.0$ としたが，実際にはこれよりも若干上回る値のようであるが10GHz帯において信頼性のある実測値は未だ得ていない。若し $\varepsilon_r > 2.0$ であればガイド内の界の集中度はよくなり(例えば $\varepsilon_r = 2.2$ とすれば $\alpha^{0}_{y1\,\mathrm{II}} = 0.327$ neper/cm)，従ってガイドの放射電力は減少し，実測値とさらに良く一致する結果が得られることになる。第2に考えられる原因は測定から放射損のみによる減衰定数を求める点である。例えばガイドの伝送損失(=線路損失+放射損失)をStorerの方法で測定すると図5(a)の破線の如き結果が

表1 近似楕円に対する特性値

| W (cm) | $\xi_0$ | $\eta_0$ | $\eta_a$ | $C_0K_{II}=WK_{II}$ |
|---|---|---|---|---|
| 4.0 | 0.3372 | 0.3318 | 0.5228 | 5.324 |
| 5.0 | 0.2661 | 0.2626 | 0.4681 | 6.650 |
| 6.0 | 0.2202 | 0.2174 | 0.4304 | 7.986 |
| 7.0 | 0.1879 | 0.1860 | 0.3984 | 9.312 |
| 8.0 | 0.1640 | 0.1634 | 0.3757 | 10.648 |
| 9.0 | 0.1451 | 0.1445 | 0.3531 | 11.974 |

($a=2.3$cm, $d=0.15$cm, $\varepsilon_y=2.0$, $f=9.5$ GHz)

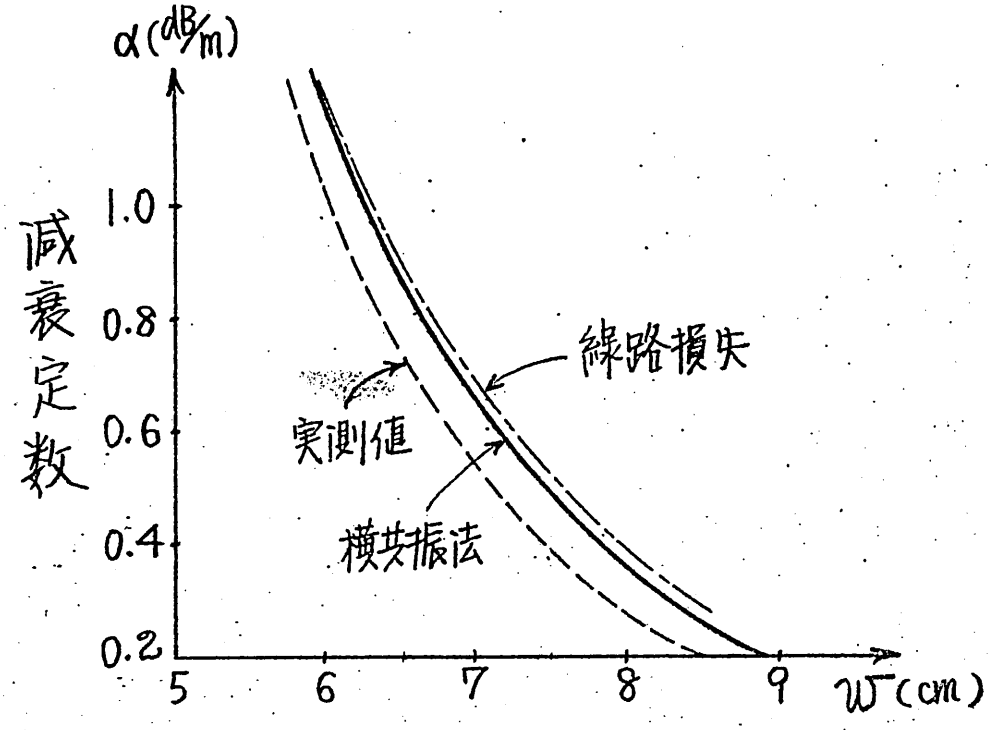
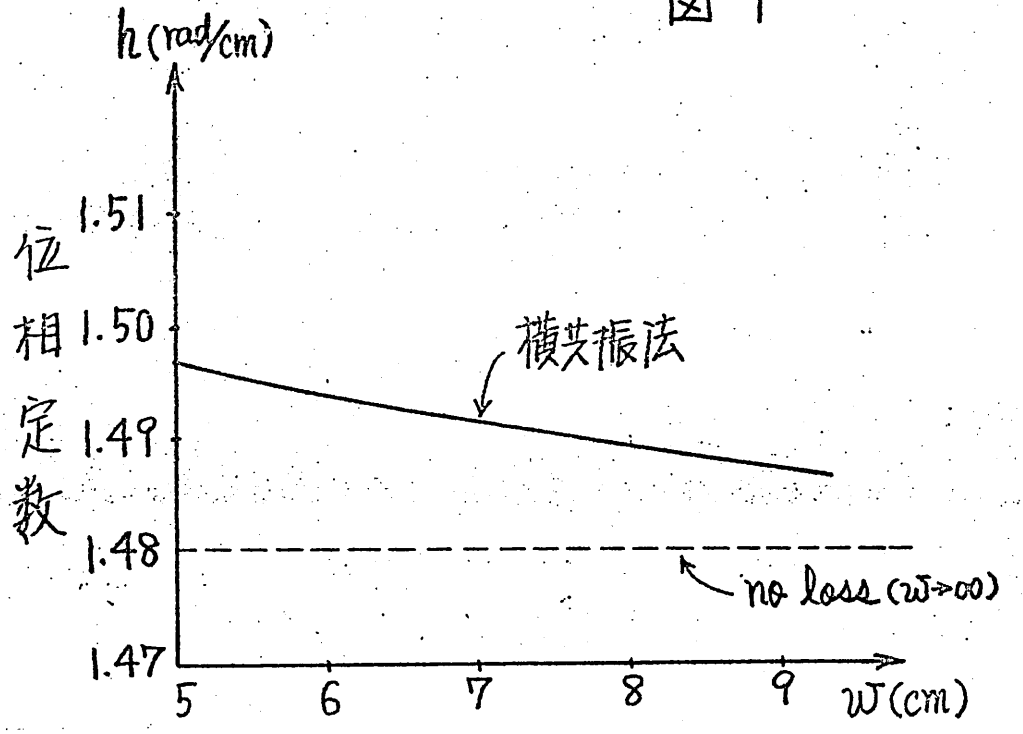

α(dB/m)
減衰定数
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
5
6
7
8
9
W(cm)
線路損失
実測値
横共振法

図4


h(rad/cm)
位相定数
1.51
1.50
1.49
1.48
1.47
5
6
7
8
9
W(cm)
横共振法
no loss (W→∞)

得られる。しかしこれからは放射損のみを求められないので，一応の評価として線路損の実測値が経験的に導体の不完全性などから理論値のほぼ2倍程度になる事を認め，ここで伝送損失から$w\to\infty$の時に得られる線路損失の理論値の2倍を差引いたものをもって放射損失の実測値としている。従って評価の仕方によって図5(a)の実測値なるものはある程度の幅を持ち，この為に計算値との差異についての正しい検討が行ないにくい事にもなる。
次に同図(b)に示す位相定数に関してはその$w$に対する変化がきわめてわずかであり，測定がきわめて困難なので実測値を得るまでには現在至っていない。

## 4. 結言

以上述べてきた様に若干の検討すべき点を考慮すれば本文で示した解析法及びその結果は良い一致でもって実測値を説明し得るものであり，漏れH-ガイドに限らず，種々の方形断面の漏れガイドの伝播定数の解析に対し，物理的にも明確にその現象をとらえ易い有効な一方法であると考える。なを他の種々の形状のものについても同様にして詳しく解析しているが，別の機会に発表させて頂く。

# 文献


(1) V.H.Rumsey; J.Appl.phys., vol.24, p1358, (Nov.1953)

(2) L.O.Goldstone, A.A.Oliner; I.R.E.Trans.AP-7, No.4, p.307, (Oct., 1959)

(3) R.F.Harrington; J.Appl.phys., vol.24; p1336 (Nov.1953)

(4) L.O.Goldstone, A.A.Oliner; I.R.E.Trans.AP-9, No.3, p280, (May, 1961)

(5) H.Shigesawa, K.Takiyama; I.E.E.E., Trans.AP-17, No.1, p36, (Jan., 1969)

(6) 繁沢, 滝山; 信学誌, vol.52-B, No.8, p434, (Aug., 1969)

(7) 繁沢他; 信学会マイクロ波研資, MW69-34, (Sep., 1969)

(8) P.J.B.Clarricoats, A.A.Oliner; P.I.E.E., vol.112, No.5, p.883, (May., 1965)

(9) A.A.Oliner, P.J.B.Clarricoats; P.I.E.E., vol.114, No.5, p.445, (April, 1967)

(10) 繁沢, 滝山; 信学誌, vol.50, No.2, p.11, (Feb., 1967)

輻射科学研究会資料

# 部分球面状開口の放射特性

西村貞彦・牧本利夫
(大阪大学・基礎工学部)

昭和45年7月3日

# 部分球面状開口の放射特性

西村貞彦・牧本利夫
（大阪大学・基礎工学部）

## §1. まえがき

近年，フェイズド・アレー（Phased-array）の研究が盛んに行なわれているが，素子アンテナの配置が，直線状および平面状の場合が多い．通常，フェイズド・アレーを設置したときは，半球状のレドーム（Radom）を覆っているが，素子アンテナを直接レドームに配置したインテグレイテッド・レドーム・アンテナ（Integrated radom antenna）が考えられる。この場合は，レドーム内部の空間が広く使用できる利点がある。

球面状に素子アンテナを配置したフェイズド・アレーの研究は，未だ詳細になされておらず，全球状配置の場合について数値解析法（Hoffman 1963）[1]，Poisson sum formulaを用いた方法（Chan, et al 1968）[2]等がある。半球状配置の場合について実験も行なわれており，Chan等[3]が報告している。また，Hughes Aircraft社で実験が行なわれ，ADAR（Advanced Design

Array Radar)[4] と名付けられているが，その詳細は発表されていない。

本報告書では，素子アンテナが部分球状配置のフェイズド・アレーの基本的な放射特性を知るために，部分球面状開口（素子アンテナ間隔無限小）の場合について，その放射特性を Legendre の多項式および球 Bessel 関数で展開してまとめ，その結果を導出し，合わせて数値計算例を示している。

## §2. 部分球面状開口の放射特性

図1に示すように，原点Oより z 軸に角 $\alpha$ の直線が球面と交わる点において，xy 面に平行に切った部分球面状開口（斜線部分）の放射特性を計算する。

この部分球面状開口の放射特性 $E(\theta,\phi)$ は次式で示される。

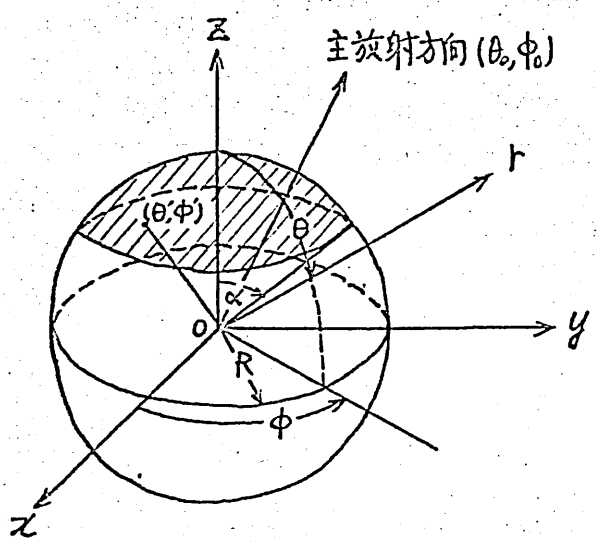



図1. 部分球面状開口

$$E(\theta,\phi)=\int_A f(\theta',\phi')e^{-i\psi'}\frac{e^{-ikr'}}{r'}dA \qquad (1)$$

ただし，$f(\theta',\phi')e^{-i\psi'}$ は開口面上の点$(\theta',\phi')$における振幅と位相，$r'$は点$(\theta',\phi')$から無限遠点までの距離を示している。無限遠点への動径と点$(\theta',\phi')$への動径とのなす角を$\gamma$とすると，

$$r'=r-R\cos\gamma \qquad (2)$$

となる。ただし，$r$は原点Oより無限遠点までの距離，Rは球の半径を示す。式(2)を式(1)に代入すると，

$$E(\theta,\phi)=\frac{e^{-ikR}}{r}\int_A f(\theta',\phi')e^{i(kR\cos\gamma-\psi')}dA \qquad (3)$$

となる。無限遠点の方向への単位ベクトルは

$$a_r=a_x\sin\theta\cos\phi+a_y\sin\theta\sin\phi+a_z\cos\theta, \qquad (4)$$

点$(\theta',\phi')$の方向への単位ベクトルは

$$a_R=a_x\sin\theta'\cos\phi'+a_y\sin\theta'\sin\phi'+a_z\cos\theta' \qquad (5)$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= a_r\cdot a_R \\ &= \sin\theta\sin\theta'\cos\phi\cos\phi'+\sin\theta\sin\theta'\sin\phi\sin\phi'+\cos\theta\cos\theta'\end{aligned} \qquad (6)$$

は，開口面上の点$(\theta', \phi')$の振幅は1とし，また無指向性とする。すなわち，

$$f(\theta', \phi') = 1 \tag{7}$$

したがって，式(3)，(7)より放射特性は次式に比例する。

$$F(\theta, \phi) = \int_A e^{i(kR\cos\varphi - \psi')} dA \tag{8}$$

は，主放射方向を$(\theta_0, \phi_0)$とすると，

$$\psi' = kR\cos\varphi_0 \tag{9}$$

のとき，

$$F(\theta_0, \phi_0) = \int_A dA \tag{10}$$

となり，最大値を示す。したがって，放射特性は次式で示される。

$$F(\theta, \phi) = \int_A e^{ikR(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} dA \tag{11}$$

式において$\cos\varphi - \cos\varphi_0$を次のように変形する。

$$\begin{aligned}\cos\varphi - \cos\varphi_0 &= \sin\theta\sin\theta'\cos\phi\cos\phi' + \sin\theta\sin\theta'\sin\phi\sin\phi' + \cos\theta\cos\theta' \\ &\quad - (\sin\theta_0\sin\theta'\cos\phi_0\cos\phi' + \sin\theta_0\sin\theta'\sin\phi_0\sin\phi' + \cos\theta_0\cos\theta') \\ &= \rho\sin\theta'\cos(\psi - \phi') + (\cos\theta - \cos\theta_0)\cos\theta' \end{aligned} \tag{12}$$

ただし,

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(\sin\theta\cos\phi - \sin\theta_0\cos\phi_0)^2 + (\sin\theta\sin\phi - \sin\theta_0\sin\phi_0)^2} \\ \cos\psi &= \frac{\sin\theta\cos\phi - \sin\theta_0\cos\phi_0}{\rho} \\ \sin\psi &= \frac{\sin\theta\sin\phi - \sin\theta_0\sin\phi_0}{\rho} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

したがって, 式(12), (13)を用いると, 式(11)は次のようになる。

$$F(\theta,\phi) = \int_A e^{ikR[\rho\sin\theta'\cos(\psi-\phi') + (\cos\theta-\cos\theta_0)\cos\theta']} \, dA \quad (14)$$

いま, 上式を部分球面状開口の面積で規格化すると, 放射特性 $F(\theta,\phi)$ は次式で示される。

$$F(\theta,\phi) = \frac{1}{2\pi R^2(1-\cos\alpha)} \int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} e^{ikR[\rho\sin\theta'\cos(\psi-\phi') + (\cos\theta-\cos\theta_0)\cos\theta']} R^2\sin\theta' d\theta' d\phi' \quad (15)$$

ただし, $\pi \geq \alpha > 0$, $\alpha \geq \theta' > 0$, $2\pi \geq \phi' \geq 0$ である。

以下, 式(15)について積分を実行する。

$$F(\theta,\phi) = \frac{1}{2\pi(1-\cos\alpha)} \int_0^{\alpha} \sin\theta' e^{ikR(\cos\theta-\cos\theta_0)\cos\theta'} \int_0^{2\pi} e^{ikR\rho\sin\theta'\cos(\psi-\phi')} d\phi' d\theta'$$

$$= \frac{1}{1-\cos\alpha}\int_0^{\alpha} e^{ikR(\cos\theta-\cos\theta_0)\cos\theta'} J_0(kR\rho\sin\theta')\sin\theta' d\theta' \quad (16)$$

上式は，素子因子が $J_0(kR\rho\sin\theta')$ のアレテナ素子が Z軸上に連続に配置され，各アレテナ素子は $2\pi R\sin\theta'$ の振幅分布，$\exp[ikR(\cos\theta-\cos\theta_0)\cos\theta']$ の位相分布でもって励振された場合の合成放射特性を示している．すなわち，三次元問題から一次元連続列の問題にすりかったことになる。ここで，

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv kR(\cos\theta_0-\cos\theta) \\ B &\equiv kR\rho \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

とおくと，式(16)は

$$F(\theta,\Phi) = \frac{1}{1-\cos\alpha}\int_0^{\alpha} e^{-iA\cos\theta'} J_0(B\sin\theta')\sin\theta' d\theta'$$

$$= \frac{1}{1-\cos\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-i)^n(2n+1)\,j_n(A)(-1)^m(4m+1)\,P_{2m}(0)\,j_{2m}(B)$$

$$\times\int_0^{\alpha} P_n(\cos\theta')P_{2m}(\cos\theta')\sin\theta' d\theta' \quad (18)$$

---

☆ 数学公式 III (岩波全書) P.178

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta} d\theta$$

☆☆ 同上 P.215

$$e^{-iA\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n(2n+1)\,j_n(A)\,P_n(\cos\theta)$$

$j_n(A)$ ：球Bessel関数
$P_n(\cos\theta)$：Legendre関数

P.216

$$J_0(B\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!/(4n+1)}{(n!)^2\,2^{2n}}\,j_{2n}(B)P_{2n}(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(4m+1)\,P_{2m}(0)\,j_{2m}(B)\,P_{2m}(\cos\theta)$$

正P.216の公式は間違っている。$(-1)^m \to 1$ が正しい。Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press) P.977, 8.531の3参照，

となる。これは放射特性を球Bessel関数とLegendre関数の無限級数とで表わしたものである。上式において，$\int_0^{\alpha} P_n(\cos\theta')P_{2m}(\cos\theta')\sin\theta' d\theta'$ について計算する。いま，

$$z \equiv \cos\theta', \qquad dz = -\sin\theta' d\theta' \tag{19}$$

とおくと，

$$\int_0^{\alpha} P_n(\cos\theta')P_{2m}(\cos\theta')\sin\theta' d\theta' = -\int_1^{\cos\alpha} P_n(z)P_{2m}(z)\,dz$$

$$= \int_{\cos\alpha}^{1} P_n(z)P_{2m}(z)\,dz \tag{20}$$

附録1を参照すると，

$$\int_{\cos\alpha}^{1} P_n(z)P_{2m}(z)\,dz = \begin{cases} 1-\cos\alpha & [n=m=0] \\ \dfrac{1}{4m+1}\left[1-\cos\alpha P_{2m}^2(\cos\alpha)+2\sum_{l=1}^{m} P_{2l-1}(\cos\alpha)\left\{P_{2l}(\cos\alpha)-\cos\alpha P_{2l-1}(\cos\alpha)\right\}\right] & [n=2m\neq 0] \\ \sin^2\alpha\,\dfrac{P_n(\cos\alpha)P_{2m}'(\cos\alpha)-P_{2m}(\cos\alpha)P_n'(\cos\alpha)}{(2m-n)(2m+n+1)} & [n\neq 2m] \end{cases} \tag{21}$$

となる。ゆえに，式(20)，(21)より式(18)は次のように示される。

$$F(\theta,\phi) = j_0(A)j_0(B) + \frac{1}{1-\cos\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}(4m+1)P_{2m}(0)j_{2m}(A)j_{2m}(B)\left[1-\cos\alpha P_{2m}^2(\cos\alpha)\right.$$

$$\left.+2\sum_{l=1}^{m} P_{2l-1}(\cos\alpha)\left\{P_{2l}(\cos\alpha)-\cos\alpha P_{2l-1}(\cos\alpha)\right\}\right]$$

$$+\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(1-\delta_{n,2m})(-i)^n(2n+1)j_n(A)(-1)^m(4m+1)P_{2m}(0)j_{2m}(B)$$

$$\times\frac{P_n(\cos\alpha)P_{2m}'(\cos\alpha)-P_{2m}(\cos\alpha)P_n'(\cos\alpha)}{(2m-n)(2m+n+1)} \tag{22}$$

ただし、 $\delta_{n,2m} = \begin{cases} 0 & : n \neq 2m \\ 1 & : n = 2m \end{cases}$

ここで、上式を次のように変形する。

$$F(\theta,\phi) \equiv F_1(\theta,\phi) + F_2(\theta,\phi) + F_3(\theta,\phi)$$

ただし、

$$F_1(\theta,\phi) = j_0(A)j_0(B) + \sum_{m=1}^{\infty}(4m+1)P_{2m}(0)j_{2m}(A)j_{2m}(B)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(4m+1)P_{2m}(0)j_{2m}(A)j_{2m}(B)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)P_r(0)j_r(A)j_r(B) \quad \text{☆}$$

$$= \frac{\sin\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{☆☆} \qquad (23)$$

$$F_2(\theta,\phi) = \frac{1}{1-\cos\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}(4m+1)j_{2m}(A)j_{2m}(B)P_{2m}(0)\left[\cos\alpha\left\{1-P_{2m}^2(\cos\alpha)\right\} + 2\sum_{\ell=1}^{m}P_{2\ell-1}(\cos\alpha)\left\{P_{2\ell}(\cos\alpha)-\cos\alpha P_{2\ell-1}(\cos\alpha)\right\}\right] \qquad (24)$$

$$F_3(\theta,\phi) = \frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(1-\delta_{n,2m})(i)^n(-1)^{n+m}\frac{(2n+1)(4m+1)}{(2n-1)(2n+2m+1)}j_n(A)j_{2m}(B)P_{2m}(0) \times\left\{P_n(\cos\alpha)P_{2m}'(\cos\alpha)-P_{2m}(\cos\alpha)P_n'(\cos\alpha)\right\}$$

---

☆ 数学公式 II (岩波全書) P.83

$$P_{2m+1}(0) = 0$$

☆☆ 同上 P.216 $\quad \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)j_n(x)j_n(y)P_n(\cos\theta)$

$$= \frac{1}{1-\cos\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (1-\delta_{n,2m}) (i)^n (-1)^{n+m} \frac{(2n+1)(4m+1)}{(2m-n)(2m+n+1)} j_n(A) j_{2m}(B) P_{2m}(0)$$

$$\times \left[ (2m-n)\cos\alpha P_n(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) - (2m+1) P_n(\cos\alpha) P_{2m+1}(\cos\alpha) + (n+1) P_{n+1}(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) \right]$$

ここで，$n$ が偶数の場合と奇数の場合とに分けると，

$$= \frac{1}{1-\cos\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (1-\delta_{n,m}) (-1)^{n+m} \frac{(4n+1)(4m+1)}{(2m-2n)(2m+2n+1)} j_{2n}(A) j_{2m}(B) P_{2m}(0)$$

$$\times \left[ 2(m-n)\cos\alpha P_{2n}(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) - (2m+1) P_{2n}(\cos\alpha) P_{2m+1}(\cos\alpha) + (2n+1) P_{2n+1}(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) \right]$$

$$+ \frac{i}{1-\cos\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m+1} \frac{(4n+3)(4m+1)}{(2m-2n-1)(2m+2n+2)} j_{2n+1}(A) j_{2m}(B) P_{2m}(0)$$

$$\times \left[ (2m-2n-1)\cos\alpha P_{2n+1}(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) - (2m+1) P_{2n+1}(\cos\alpha) P_{2m+1}(\cos\alpha) + (2n+2) P_{2n+2}(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) \right]$$

(25)

ゆえに，任意の角 $\alpha$ に対する部分球面状開口の放射特性は次式で表される。

$$F(\theta,\phi) = \frac{\sin\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$+ \frac{1}{1-\cos\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} (4m+1) j_{2m}(A) j_{2m}(B) P_{2m}(0) \left[ \cos\alpha \left\{ 1 - P_{2m}^2(\cos\alpha) \right\} + 2 \sum_{\ell=1}^{m} P_{\ell-1}(\cos\alpha) \left\{ P_\ell(\cos\alpha) - \cos\alpha P_{\ell-1}(\cos\alpha) \right\} \right]$$

$$+ \frac{1}{1-\cos\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (1-\delta_{n,m}) (-1)^{n+m} \frac{(4n+1)(4m+1)}{2(m-n)(2m+2n+1)} j_{2n}(A) j_{2m}(B)$$

$$\times P_{2m}(0) \left[ 2(m-n)\cos\alpha P_{2n}(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) - (2m+1) P_{2n}(\cos\alpha) P_{2m+1}(\cos\alpha) + (2n+1) P_{2n+1}(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) \right]$$

$$+ i \frac{1}{1-\cos\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m+1} \frac{(4n+3)(4m+1)}{2(2m-2n-1)(m+n+1)} j_{2n+1}(A) j_{2m}(B)$$

$$\times P_{2m}(0) \left[ (2m-2n-1)\cos\alpha P_{2n+1}(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) - (2m+1) P_{2n+1}(\cos\alpha) P_{2m+1}(\cos\alpha) + 2(n+1) P_{2n+2}(\cos\alpha) P_{2m}(\cos\alpha) \right]$$

(26)

* 前出 P.83
$(1-x^2) P_n'(x) = (n+1)\left[ x P_n(x) - P_{n+1}(x) \right]$

ただし　$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ 1 & : n = m \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} A &= kR(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ B &= kR\rho \\ \rho &= \sqrt{(\sin\theta\cos\phi - \sin\theta_0\cos\phi_0)^2 + (\sin\theta\sin\phi - \sin\theta_0\sin\phi_0)^2} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

したがって，式(26)，(27)を用いて数値計算を行なえば，任意の角$\alpha$に対する部分球面状開口の放射特性が求められる。

以下，$\alpha$の特別な値について考察する。

## 2-1 全球面状開口の放射特性

この場合は式(26)において，$\alpha = \pi$とおけばよい。したがって，$\cos\alpha = -1$であるから，$P_n(-1) = (-1)^n$の関係を用いると，式(26)において第2項，第3項および第4項は0となる。ゆえに，

$$F(\theta,\phi)_{\alpha=\pi} = \frac{\sin\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad (28)$$

ここで，式(27)の関係を用いると，

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{(kR)^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2 + (kR)^2\{(\sin\theta\cos\phi - \sin\theta_0\cos\phi_0)^2 + (\sin\theta\sin\phi - \sin\theta_0\sin\phi_0)^2\}}$$

$$= kR\sqrt{2\{1 - \cos\theta_0\cos\theta - \sin\theta_0\sin\theta\cos(\phi_0 - \phi)} \quad (29)$$

ゆえに,

$$F(\theta,\phi)_{\alpha=\pi}=\frac{\sin\left[kR\sqrt{2\{1-\cos\theta_0\cos\theta-\sin\theta_0\sin\theta\cos(\phi_0-\phi)\}}\right]}{kR\sqrt{2\{1-\cos\theta_0\cos\theta-\sin\theta_0\sin\theta\cos(\phi_0-\phi)\}}} \quad (30)$$

したがって, 全球面状開口の放射特性は $\sin x/x$ 形になる。

特別な例として, 主放射方向 $\theta_0=\phi_0=0$ のときについて求める。この場合は, 開口が z 軸に関して回転対称であるから, $\phi$ 方向には変化がない放射特性となる。式(30)について $\theta_0=0$ とおくと,

$$F(\theta)_{\substack{\alpha=\pi\\ \theta_0=0}}=\frac{\sin\{kR\sqrt{2(1-\cos\theta)}\}}{kR\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$$

$$=\frac{\sin\left(2kR\sin\frac{\theta}{2}\right)}{2kR\sin\frac{\theta}{2}} \quad (31)$$

となる。上式の結果は, 別解(附録2参照)と一致する。

## 2-2 半球面状開口の放射特性

この場合は式(26)において, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ におけばよい。したがって, $\cos\alpha=0$ であるから, $P_{2n+1}(0)=0$, $(n+2)P_{n+2}(0)=(n+1)P_n(0)$ の関係を用いると, 式(26)において第2項および第3項は0となる。ゆえに, 半球面状開口の放射特性は次のように示される。

$$F(\theta,\phi)_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$+i\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{(2n+1)(4n+3)(4m+1)}{2(m+n+1)(2m-2n-1)}\left\{P_{2n}(0)\right\}^2 P_{2n}(0)\, j_{2n+1}(A)\, j_{2m}(B)$$

$$= \frac{\sin\left[kR\sqrt{2\{1-\cos\theta_0\cos\theta-\sin\theta_0\sin\theta\cos(\phi_0-\phi)\}}\right]}{kR\sqrt{2\{1-\cos\theta_0\cos\theta-\sin\theta_0\sin\theta\cos(\phi_0-\phi)\}}}$$

$$+i\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{(2n+1)(4n+3)(4m+1)}{2(m+n+1)(2m-2n-1)}\left\{P_{2m}(0)\right\}^2 P_{2n}(0)$$

$$\times j_{2n+1}\{kR(\cos\theta_0-\cos\theta)\}\, j_{2m}\left\{kR\sqrt{(\sin\theta\cos\phi-\sin\theta_0\cos\phi_0)^2+(\sin\theta\sin\phi-\sin\theta_0\sin\phi_0)^2}\right\}$$

(32)

したがって，半球面状開口の放射特性は，第1項は全球面状開口の場合の $\sin x/x$ 形を示し，第2項はその補正項になる．上式において，主放射方向附近（$\theta\simeq\theta_0$, $\phi\simeq\phi_0$）では球Bessel関数の値は小さく無視できる．ゆえに，主ビームおよび第1サイドローブは $\sin x/x$ 形になり，第2サイドローブ以降は第2項の影響がでてきて $\sin x/x$ 形と異なる放射特性となる．

特別な例として，主放射方向 $\theta_0=\phi_0=0$ のときについて求める．

$$F(\theta)_{\substack{\alpha=\frac{\pi}{2}\\ \theta_0=0}} = \frac{\sin(2kR\sin\frac{\theta}{2})}{2kR\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$+i\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{(2n+1)(4n+3)(4m+1)}{2(m+n+1)(2m-2n-1)}\left\{P_{2m}(0)\right\}^2 P_{2n}(0)\, j_{2n+1}\{kR(1-\cos\theta)\}\, j_{2m}(kR\sin\theta)$$

(33)

## 2-3 数値計算例

部分球面状開口を実際に適用する場合には、おおむね $0 \sim \frac{\pi}{2}$ の範囲であると思われる。したがって、部分球面状開口の正弦波の半径が一定としたときの放射特性について比較した方が良い。すなわち、$a = R\sin\alpha$ （図2参照）を一定として比較検討する。この場合、$\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき半球、$\alpha = 0$ のとき円形開口となる。*

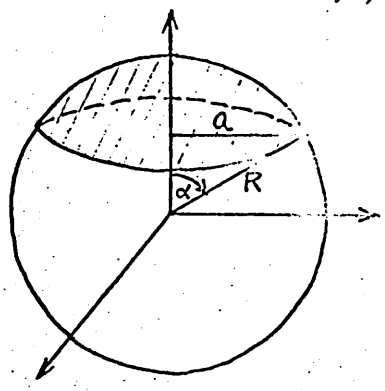


図 2.

図3に、全球（$\alpha = \pi$, $kR = 20$）、半球（$\alpha = \frac{\pi}{2}$, $kR = 20$）および部分球（$\alpha = \frac{\pi}{3}$, $kR = \frac{40}{3}$）について、主放射方向 $\theta_0 = 0$ のときの放射特性の数値計算例を示す。

(i) 半球；全球と比較すると、第2サイドローブ以降はミニマムレベルが浮上っており、サイドローブレベルも多少高くなっているが、放射特性として顕著な劣化はみられない。

(ii) 部分球；全球と比較すると、ビーム幅は少し広くなり、$\theta = 90°$ 附近以外はサイドローブレベルは低くなっている。したがって、放射特性は少し良くなっている。

---

* 円形開口の放射特性

$$F(\theta)_{\theta_0=0} = \frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}$$

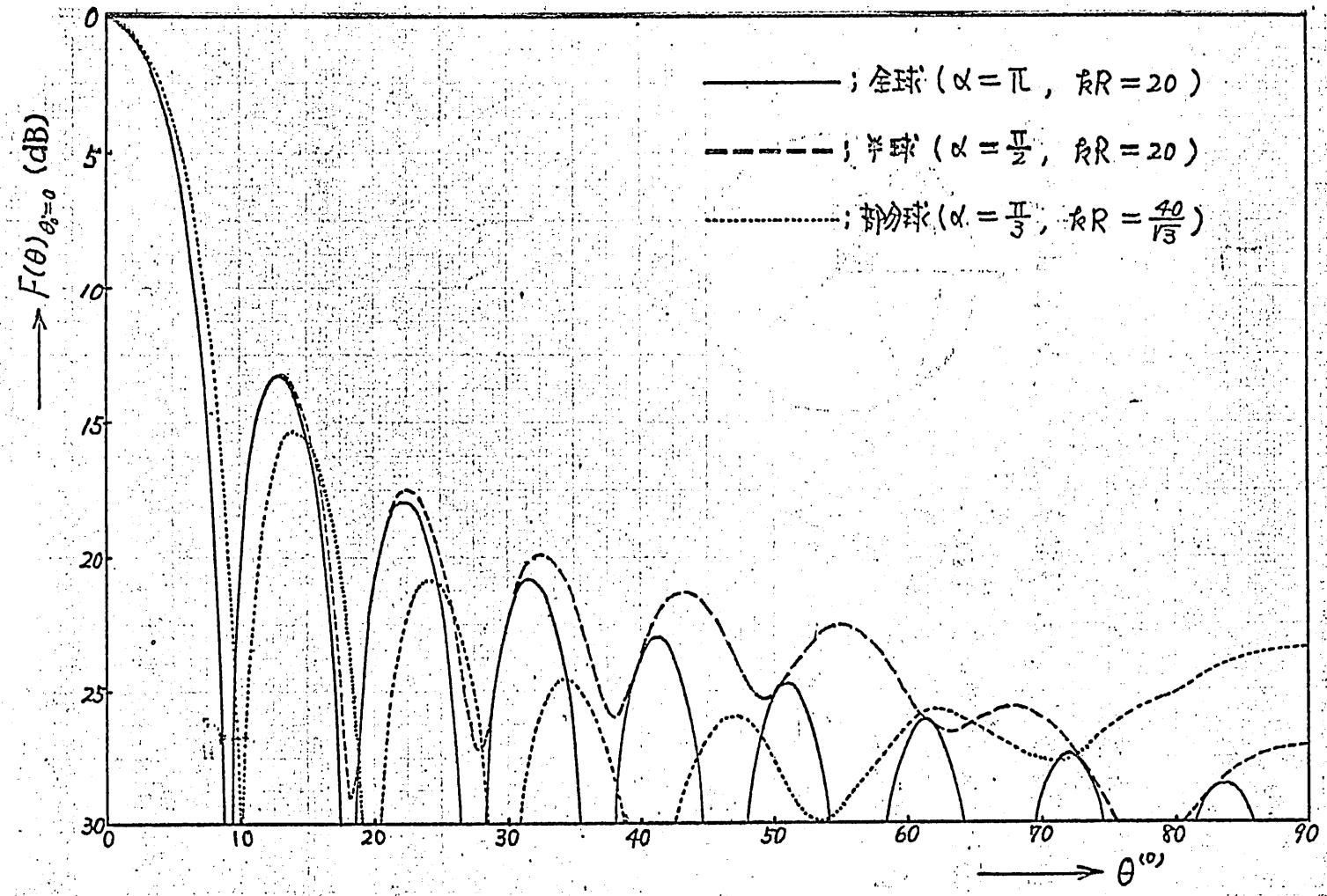

0
5
10
15
20
25
30
$F(\theta)_{\theta=0}$ (dB)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
$\theta^{(0)}$
——— ; 全球 ( $\alpha=\pi$ , $kR=20$ )
– – – – ; 半球 ( $\alpha=\frac{\pi}{2}$ , $kR=20$ )
…… ; 3分球 ( $\alpha=\frac{\pi}{3}$ , $kR=\frac{40}{\sqrt{3}}$ )

図 3. 放射特性 (計算値)

部分球面状開口の放射特性の傾向は，

半球［$kA=kR=20$，ビーム幅 4°，サイドローブレベル 13.2dB］

より

円形開口［$kA=20$，ビーム幅 4.7°，サイドローブレベル 17.6dB］

の放射特性へと移行していくものと思われる。

## §3. むすび

部分球面状開口の放射特性について計算した。このような開口は物理的に実現不可能な仮想のものであるが，実際に部分球面状配置のアンテナ・アレー（フェイズド・アレー）に適用する場合は，素子アンテナの間隔が $\frac{\lambda}{2}$ 程度ならば，その放射特性は部分球面状開口の放射特性で近似できるものと思われる。

数値計算は京都大学および大阪大学の大型計算機センターにおいて行なった。プログラムは東大ライブラリープログラム・登録番号 35，36 を使用した。

〔文献〕

(1) M. Hoffman "Conventions for the Analysis of Spherical Arrays" IEE trans. on AP, Vol. AP-11, No.4, PP390-393, July 1963.

(2) A. K. Chan, A. Ishimaru, and R.A. Sigelmann, "Equally Spaced Spherical Arrays" RADIO SCIENCE, Vol.3 (New Series), No.5, PP.401-404, May 1968.

3) A. K. Chan, and R.A. Sigelmann, "Experimental Investigation on Spherical Arrays" IEEE trans. on AP, Vol. AP-16, No.3, PP348-349, May 1969.

(4) Machine Design, P.4, July 18, 1968.

# 附録 1.

$\int_{\mu}' P_n(\mu) P_m(\mu)\, d\mu$ について調べる。

(i) $n \neq m$ のとき

$$\int_{\mu}' P_n(\mu) P_m(\mu)\, d\mu = (1-\mu^2)\frac{P_m(\mu)P_n'(\mu) - P_n(\mu)P_m'(\mu)}{(n-m)(n+m+1)} \quad (A-1)$$ ★

(ii) $n = m = 0$ のとき

$$\int_{\mu}' P_0^2(\mu)\, d\mu = \int_{\mu}' d\mu = [\mu]_{\mu}' = 1-\mu \quad (A-2)$$

(iii) $n = m \neq 0$ のとき ★★

$$\int_{\mu}' P_n^2(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2n+1}\left[1 - \mu P_n^2(\mu) - 2\mu\left\{P_0^2(\mu) + P_1^2(\mu) + \cdots\cdots + P_{n-1}^2(\mu)\right\}\right.$$
$$\left. + 2\left\{P_0(\mu)P_1(\mu) + P_1(\mu)P_2(\mu) + \cdots\cdots + P_{n-1}(\mu)P_n(\mu)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[1 - \mu P_n^2(\mu) + 2\sum_{p=1}^{n} P_{p-1}(\mu)\left\{P_p(\mu) - \mu P_{p-1}(\mu)\right\}\right] \quad (A-3)$$

ただし，$n$ は正の整数である。

ここで，式 (A-3) の関係が正しいことを以下に帰納法により証明する。

---

★ 数学ハンドブック（丸善） P.216

★★ 数学公式 II 第17篇；ここでは次の関係を随所に用いている。

$$P_0(\mu) = 1,\ P_1(\mu) = \mu,\ P_2(\mu) = \frac{3\mu^2-1}{2},\ \mu P_0^2(\mu) = P_0(\mu)P_1(\mu)$$

$n=1$ のとき

$$\int_\mu^1 P_1^2(\mu)\,d\mu = \int_\mu^1 \mu^2\,d\mu = \left[\frac{\mu^3}{3}\right]_\mu^1 = \frac{1}{3}(1-\mu^3) = \frac{1}{3}\{1-\mu P_1^2(\mu)\}$$

$$= \frac{1}{3}\{1-\mu P_1^2(\mu) - 2\mu P_0^2(\mu) + 2P_0(\mu)P_1(\mu)\} \qquad (A-4)$$

ゆえに，$n=1$ のとき 式(A-3)は成立つ。

$n=2$ のとき

$$\int_\mu^1 P_2^2(\mu)\,d\mu = \int_\mu^1 \left(\frac{3\mu^2-1}{2}\right)^2 d\mu = \frac{1}{4}\left[\frac{9}{5}\mu^5 - 2\mu^3 + \mu\right]_\mu^1$$

$$= \frac{1}{5}\left\{1 - \frac{9}{4}\mu^5 + \frac{5}{2}\mu^3 - \frac{5}{4}\mu\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\left\{1 - \mu\left(\frac{3\mu^2-1}{2}\right)^2 - 2\mu^3 + 2\mu\left(\frac{3\mu^2-1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\{1 - \mu P_2^2(\mu) - 2\mu P_1^2(\mu) + 2P_1(\mu)P_2(\mu)\} \qquad (A-5)$$

ゆえに，$n=2$ のときも 式(A-3)は成立つ。

つぎに，式(A-3)の右辺について $n$ を $n+1$ にしたときの値を求める。

$$\frac{1}{2n+3}\left[1 - \mu P_{n+1}^2(\mu) - 2\mu\{P_0^2(\mu) + P_1^2(\mu) + \cdots\cdots + P_{n-1}^2(\mu) + P_n^2(\mu)\}\right.$$

$$\left. + 2\{P_0(\mu)P_1(\mu) + P_1(\mu)P_2(\mu) + \cdots\cdots + P_{n-1}(\mu)P_n(\mu) + P_n(\mu)P_{n+1}(\mu)\}\right]$$

$$= \frac{2n+1}{2n+3}\int_{\mu}^{1} P_n^2(\mu)\,d\mu + \frac{1}{2n+3}\left\{\mu P_n^2(\mu) - \mu P_{n+1}^2(\mu) - 2\mu P_n^2(\mu) + 2P_n(\mu)P_{n+1}(\mu)\right\}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+3}\int_{\mu}^{1} P_n^2(\mu)\,d\mu + \frac{1}{2n+3}\left[2P_n(\mu)P_{n+1}(\mu) - \mu\left\{P_{n+1}^2(\mu) + P_n^2(\mu)\right\}\right]$$

$$= \frac{2n+1}{2n+3}\int_{\mu}^{1} P_n^2(\mu)\,d\mu + \frac{1}{2n+3}A \qquad (A-6)$$

ただし,

$$A = 2P_n(\mu)P_{n+1}(\mu) - \mu\left\{P_{n+1}^2(\mu) + P_n^2(\mu)\right\}$$

ここで $\frac{d}{d\mu}A$ について調べる。

$$\frac{d}{d\mu}A = \frac{d}{d\mu}\left[2P_n(\mu)P_{n+1}(\mu) - \mu\left\{P_{n+1}^2(\mu) + P_n^2(\mu)\right\}\right]$$

$$= 2P_n'(\mu)P_{n+1}(\mu) + 2P_n(\mu)P_{n+1}'(\mu) - P_{n+1}^2(\mu) - P_n^2(\mu) - 2\mu\left\{P_{n+1}(\mu)P_{n+1}'(\mu) + P_n(\mu)P_n'(\mu)\right\}$$

$$= -(2n+3)P_{n+1}^2(\mu) + (2n+1)P_n^2(\mu)$$

上式の両辺を定積分 $\int_{\mu}^{1}$ 積分すると

$$\text{左辺} = \int_{\mu}^{1} dA = [A]_{\mu}^{1}$$

$$= \left[2P_n(\mu)P_{n+1}(\mu) - \mu\left\{P_{n+1}^2(\mu) + P_n^2(\mu)\right\}\right]_{\mu}^{1}$$

$$= -\left[2P_n(\mu)P_{n+1}(\mu) - \mu\left\{P_{n+1}^2(\mu) + P_n^2(\mu)\right\}\right]$$

$$= -A$$

$$\text{右辺} = -\left\{(2n+3)\int_{\mu}^{1} P_{n+1}^2(\mu)\,d\mu - (2n+1)\int_{\mu}^{1} P_n^2(\mu)\,d\mu\right\}$$

ゆえに，

$$A=(2n+3)\int_{\mu}^{1}P_{n+1}^{2}(\mu)\,d\mu-(2n+1)\int_{\mu}^{1}P_{n}^{2}(\mu)\,d\mu$$

たがって，上式の関係を式(A-6)に代入すると，

$$\frac{1}{2n+3}\left[1-\mu P_{n+1}^{2}(\mu)-2\mu\left\{P_0^2(\mu)+P_1^2(\mu)+\cdots\cdots\cdots+P_n^2(\mu)\right\}\right.$$

$$\left.+2\left\{P_0(\mu)P_1(\mu)+P_1(\mu)P_2(\mu)+\cdots\cdots\cdots+P_n(\mu)P_{n+1}(\mu)\right\}\right]$$

$$=\frac{2n+1}{2n+3}\int_{\mu}^{1}P_n^2(\mu)+\frac{1}{2n+3}\left[(2n+3)\int_{\mu}^{1}P_{n+1}^{2}(\mu)\,d\mu-(2n+1)\int_{\mu}^{1}P_n^2(\mu)\,d\mu\right]$$

$$=\int_{\mu}^{1}P_{n+1}^{2}(\mu)\,d\mu \qquad \cdots\cdots (A-7)$$

ゆえに，求めた関係式(A-7)は，式(A-3)において，$n$を$n+1$においたものに等しい。したがって，式(A-3)は成立する。

## 附録 2.

球面状開口で主放射方向 $\theta_0=0$ のときの放射特性を計算する。この場合は，開口が$z$軸に関して回転対称であるから，$\phi$方向には変化がない放射特性となる．このとき本文式(16)において，

$$\alpha=\pi,\quad \cos\theta_0=1,\quad \rho=\sin\theta$$

とおくと，放射特性は次式で示される。

$$F(\theta)_{\substack{\alpha=\pi \\ \theta_0=0}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{ikR(\cos\theta-1)\cos\theta'} J_0(kR\sin\theta\sin\theta')\sin\theta' d\theta'$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{ikR\cos\theta\cos\theta'} J_0(kR\sin\theta\sin\theta')\sin\theta' e^{-ikR\cos\theta'} d\theta'$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n(2n+1)j_n(kR)\int_0^{\pi} e^{ikR\cos\theta\cos\theta'} J_0(kR\sin\theta\sin\theta') \times P_n(\cos\theta')\sin\theta' d\theta' \quad *$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n(2n+1)j_n(kR)\cdot 2(i)^n j_n(kR) P_n(\cos\theta) \quad **$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\{j_n(kR)\}^2 P_n(\cos\theta)$$

$$= \frac{\sin\left(2kR\sin\frac{\theta}{2}\right)}{2kR\sin\frac{\theta}{2}} \quad *** \qquad (A-8)$$

ゆえに，求めた結果式 (A-8) は本文式 (31) と同じ結果になっている。

---

* 数学公式 III (岩波全書) P.215

$$e^{-iz\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n(2n+1)j_n(z)P_n(\cos\theta)$$

** 同上 P.185

$$j_n(z)P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2(i)^n}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta\cos\theta'} J_0(z\sin\theta\sin\theta')P_n(\cos\theta')\sin\theta' d\theta'$$

*** 同上 P.216

$$\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)j_n(x)j_n(y)P_n(\cos\theta),$$

$x=y$ のとき

$$\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta} = \sqrt{2x^2(1-\cos\theta)} = 2x\sin\frac{\theta}{2}$$

# マイクロ波発振源の雑音スペクトラム測定

笠木訓典　・　裏　克己

〔大阪大学工学部〕

昭和45年7月3日

輻射科学研究会資料

## §1. はじめに

この報告は超伝導化したマイクロ波空胴共振器による線形加速器を用いた，超高エネルギー電子顕微鏡[1],[2]（2～3 Mev）の研究の一環をなすものである。空胴共振器の電圧$V$，入射電力$P$と空胴共振器の$Q$との間には

$$V^2 = \mathfrak{L} PQ$$

の関係がある。この関係から同じ加速電圧を得るには$Q$が大きい程，入射電力は少なくてすむ。そこで空胴共振器を超伝導化することによって高い$Q$（$10^8$～$10^9$）にすれば，少ない電力で高い加速エネルギーが得られる。

そこでそのような高い$Q$の共振器に安定したマイクロ波電力を供給出来るような，共振器の$Q$より少なくとも一桁程高い安定度を持ったマイクロ波発振源の開発が必要になってくる。それにはまず発振源の安定度あるいは雑音を測定する装置が必ず必要である。この報告ではマイクロ波発振源の雑音検出装置及び検出された雑音のスペクトラム分析装置について述べる。そして試作したマイクロ波発振源の雑音スペクトラムの測定結果を述べる。

## §2. FM雑音測定用周波数弁別器

マイクロ波の雑音を大別してAM雑音，FM雑音に分類することが出来る。AM雑音の測定は比較的容易なので後に述べることにする。FM雑音の測定と発振器の周波数の自動制御とは密接な関係がある。最初に発表されたマイクロ波の周波数弁別器としては1946年R.V.Pound[3]の方法がある。それは以前から短波の発振周波数安定化のために用いられていた周波数弁別回路を忠実にマイクロ波回路素子で構成したものである。図1.にPoundの回路を示す。

弁別器で最も重要な値は感度である。それは弁別器に入るマイクロ波の弁別器中心周波数からの周波数偏移に対する弁別器の出力電圧V/Hzで表わされ，同時に入力電力の函数となっている。

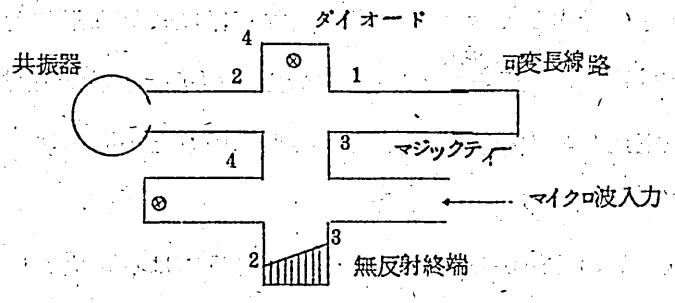



図 1.　Pound 型周波数弁別器

Poundの方法で感度を上げるには，弁別器に入るマイクロ波の電力を増せば良いが，それにはダイオードの損焼と言う点から限度がある。そこで S. B. Marsh[4] はPound の方法を改良して図 2.に示すように，Reference とSignal の系を分離し，更に局部発振器を利用して周波数変換を行い，中間周波　増幅を行なうことにより感度を上げている。

しかしこの方法は局部発振器の安定度が問題となり，価格も高くなる。そこでJ.R.Ashley[5] はPound 型とMarsh 型を組合せて図 3.に示す方法を考えた。

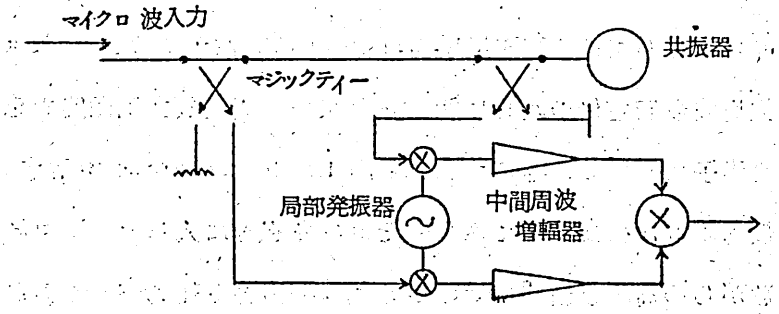



図 2.　Marsh型　周波数弁別器

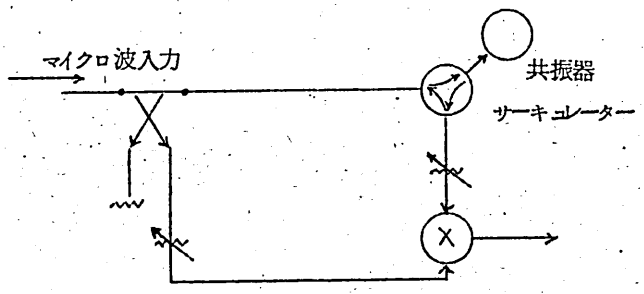



図 3.　Ashley 型 周波数弁別器

弁別器の感度を上げるために入力電力を増加させたとき，ダイオードに加わる電力が一定になるように，reference の系の減衰器を調整する。この方法によって弁別器の入力電力を増加させても，ダイオードによる制限は受けない。

これまで述べた方法は反射型共振器を使用する方法で，その利点を上手に使うためには結合係数 $\beta$ を $\simeq 1$ に調整すること，また共振器の共振周波数を常に入力周波数に追随させなければならなく，もしそうしないと共振器からの反射電力が大きくなり，最悪のときはダイオードを損焼する。したがって取扱いが微妙である。そこで取扱いや構成がかんたんな透過型共振器を用いた方法があり V. C. Rideout[6], C.H. Grauling[7] が発表している。

以上述べた方法はいずれもマジックティーを使用する方法の分類に属する。これ以外の周波数弁別器としては，定在波[8]を利用するもの，空胴を機械的あるいは回路的，例えばバラクタ[9]を用いて振動させるもの，2 空胴逆離調[10]あるいは空胴の多重共振[11]を利用したものが発表されている。

この報告では，少ない回路素子で特別な機械工作も必要としなく，共振器の取扱いも容易な Grauling の方法を用いて実験を行い，最近発表された Ashley の値との比較を行う。

§ 3. 周波数弁別器の原理

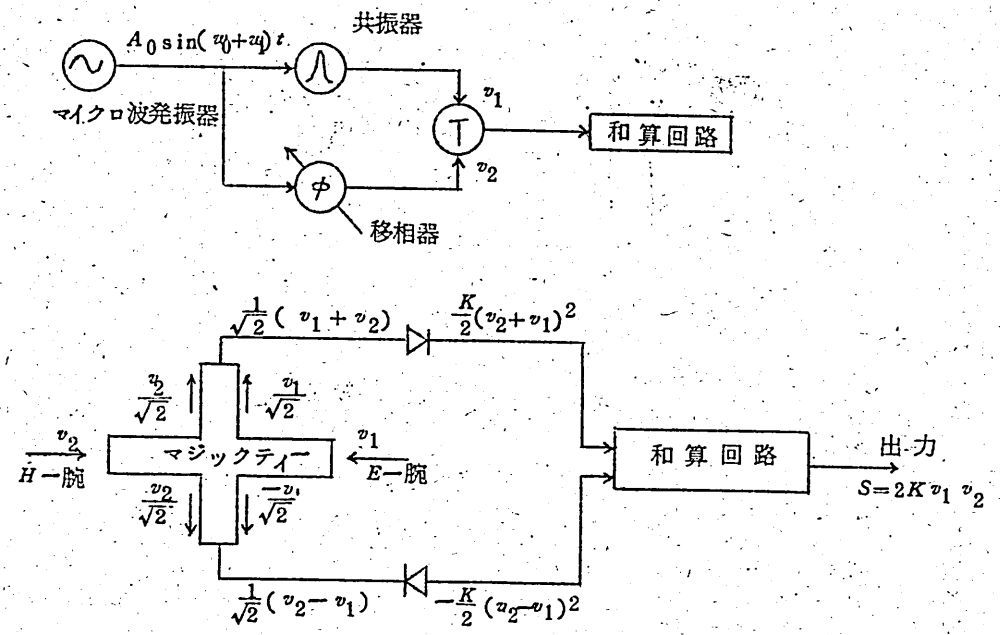



図 4. 周波数弁別器原理図

図 4. が周波数弁別器の原理図である。マイクロ波発振器からの波は 2 分され一方は共振器を通過し，他の一方は移相器を通過し，2 つの波はマジックティーに入る。その出力はダイオードで検波され和算回路に入る。今マイクロ波発振器からの出力を

$$A_0 \sin(\omega_0+\omega_1)t \qquad (1)$$

とする。$\omega_0$ はマイクロ波の角周波数，$\omega_1$ は FM 雑音の角周波数を示す。この波が共振器と移相器を通過した後の電圧を $v_1$, $v_2$ とすると

$$v_1 = \frac{A_0 k_1}{\sqrt{1+\frac{4\omega_1^2}{\Delta\omega^2}}} \sin(\omega_0 t + \omega_1 t + \varphi) \qquad (2)$$

$$\varphi = -\tan^{-1}\frac{2\omega_1}{\Delta\omega}$$

$$v_2 = k_2 A_0 \sin(\omega_0 t + \omega_1 t + \phi) \qquad (3)$$

と書ける。弁別器の用語として$v_1$をsignal　$v_2$をreferenceと呼ぶ。ここで$k_1$，$k_2$は波の分割比を表わし，$\phi$は移相器の移相量を，$\Delta\omega$は共振器の半値幅を表わす。和算回路の出力は 図 4. に示すように

$$S = 2K v_1 v_2 \qquad (4)$$

となるので（4）式に（2），(3) 式を代入すると

$$S = A_0^2 k_1 k_2 K \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_1^2}{\Delta\omega^2}}} \cos(\varphi - \phi) \qquad (5)$$

となる。

$\omega_1 = 0$ のときは

$$S = A_0^2 k_1 k_2 K \cos\phi \qquad (6)$$

又（5）式で$\phi = \pi/2$ とすると

$$S = A_0^2 k_1 k_2 K \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_1^2}{\Delta\omega^2}}} \sin\varphi$$

$$= A_0^2 k_1 k_2 K \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_1^2}{\Delta\omega^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta\omega^2}{4\omega_1^2}}} \qquad (7)$$

$\left|2\omega_1/\Delta\omega\right| << 1$ の時（7）式は

$$S = A_0^2 k_1 k_2 K \cdot \frac{2\omega_1}{\Delta\omega} \qquad (8)$$

となり，FM雑音を示す$\omega_1$と和算回路の出力は直線的に変化する。したがって周波数弁別器はこのSを観測して$\omega_1$を知ることになる。そこで前もって$\omega_1$

を変化させた時のSの値を求めておく必要がある。

(8)式より，△ωを出来るだけ小さく，つまり共振器のQを大きくすることが感度が良くなる。又通常，雑音はAM・FM雑音を伴なっており，(8)式の $A_0^2$ はAM雑音に感じる係数，$2\omega_1/\triangle\omega$ はFM雑音に感じる係数なので，AM雑音によるFM雑音測定の誤差を除くためにも△ωは小さく，つまりQを大きくする必要がある。

このように周波数弁別器の感度は使用する共振器のQの値によって決定される。使用ダイオードが自乗特性に乗っている範囲内では感度は弁別器入力電力に比例して増加する。

FM雑音の測定に際しては，今説明したようにAM雑音による誤差がある。それについては§ 5.で述べる。

## § 4. 周波数弁別器の調整

§ 3.で周波数弁別器の原理を述べたが，ここではその数式と実際の回路との比較を行なう。そして周波数弁別器の調整の手順も同時に示す。数式との比較を行う時に問題となるのは非線形素子であるダイオードであるが，これは横河ヒューレットパッカード社の423Aマッチドペアダイオードを用いて，十分自乗特性に合っている範囲で使用する。

周波数弁別器の構成を図 5.に示す。調整手順を示すと

1. マイクロ波入力端子より一定レベルのマイクロ波を導入する。このレベルは実験中は常に一定に保つことが必要である。次に抵抗減衰器(2)を最大減衰にして，直流電圧計の読みが0Vを示すように和算回路の可変抵抗を調整する。

これは図 4.のマジックティーの分配率，ダイオードの整流能率Kが同一でないので，それを補正することになる。

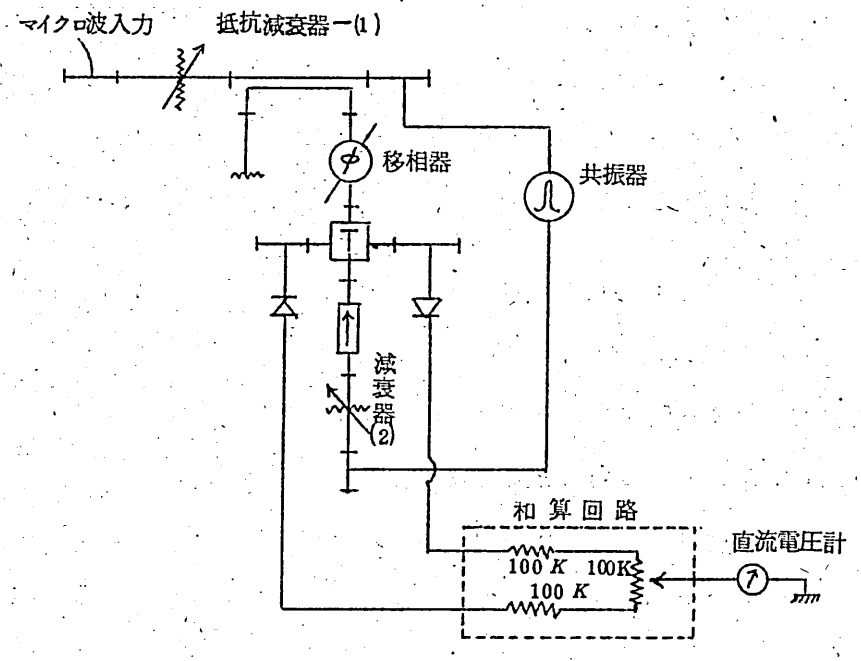



図 5.　周波数弁別器の構成

2. 共振器を入力マイクロ波の周波数にきっちり合せる。その方法は共振器の出力側の同軸線をはずして，代りに同軸型クリスタルマウントを接続しその出力が最大になるように共振器の周波数ダイヤルを回わす。調整が出来ればもとの同軸線に変える。

3. 抵抗減衰器(2)を最大減衰から最小にして，移相器を可変にし，その値に対する和算回路の出力を読む。これは(6)式で示されるように $\cos\phi$ で変化する。この時の $\phi$ は移相器の移相量である。これを図 6.に示す。この時山から $\pi/2$ 離れた所では和算出力は (6)式により０Ｖになるはずであるが，実際は数 $\mu$Ｖ～数 100 $\mu$Ｖの出力が表われる。これは各素子特にダイオードの２乗特性からの微少なずれによるものである。

したがって山から$\pi/2$離れた所，つまり(7)式の条件である$\phi = \pi/2$の時，和算回路の出力が０Ｖを示すように和算回路を調整する。これで移相器の調整$\phi = \frac{\pi}{2}$を終り(7)式まで完了したことになる。

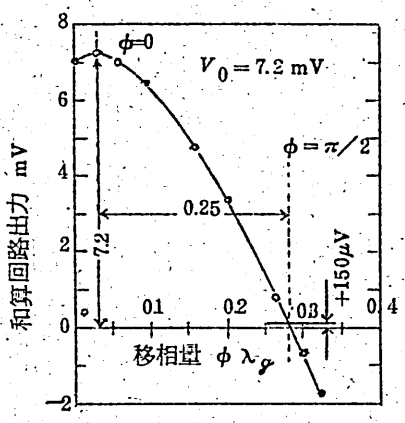



図 6.　移相量と和算出力

4. 実際に$\omega_1$を変化させ和算回路の出力を測定する。$\omega_1$の変化はマイクロ波発振器の周波数ツマミを回すか，リペラ電圧を変えれば良いが，同時に発振出力も変化するので注意しなければいけない。和算回路の出力を図 7.に示す。この図において弁別器入力周波数が 3880.00　MHz の時，出力が０Ｖを示すように(2)の段階で共振器を調整したが，少し電圧があらわれているのは，実験中の室温の

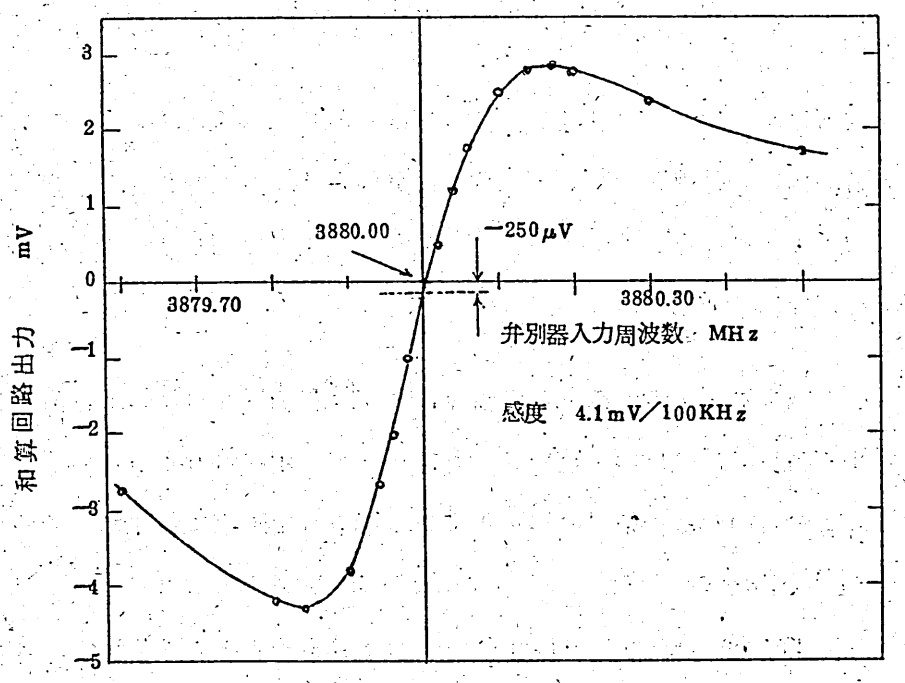



図 7.　周波数弁別器特性

変化で共振器の中心周波数が変化したものと思われる。

この図から勾配V/Hzを求めておけば，実際のFM雑音測定の際，和算出力電圧を測定して，勾配即ち感度から逆に周波数が計算できる。以上で周波数弁別器の調整は完了である。

図7.の周波数弁別器の感度を計算値と比較する。勾配の直線部分を示す式は(8)式である。この式で$A_0^2 k_1 k_2 K$と$\Delta\omega$が求まれば$\omega_1$とSの比が求まる。$A_0^2 k_1 k_2 K$は(6)式で$\phi = 0$とすれば求められる。これは図6において$V_0$に相当するので

$$A_0^2 k_1 k_2 K = V_0 = 7.2\ \mathrm{mV}$$

となる。$\Delta\omega$は別に実験で求めて$Q_L = 13000$より

$$\Delta\omega = \frac{2\pi \times 3.88 \times 10^9}{1.3 \times 10^4} = 2\pi \times 2.98 \times 10^5$$

これを(8)式に代入すると

$$S = 4.83 \times 10^{-3}$$

したがって勾配即ち感度は$4.83\ \mathrm{mV}/100\ \mathrm{KHz}$となり，実測値の$4.1\mathrm{mV}/100\ \mathrm{KHz}$と比較的良く合っている。

次に周波数弁別器に入るマイクロ波電力を変えた時の感度を図8に示す。入力電力と感度が比例していないのは，ダイオードの自乗特性からのずれによるものである。

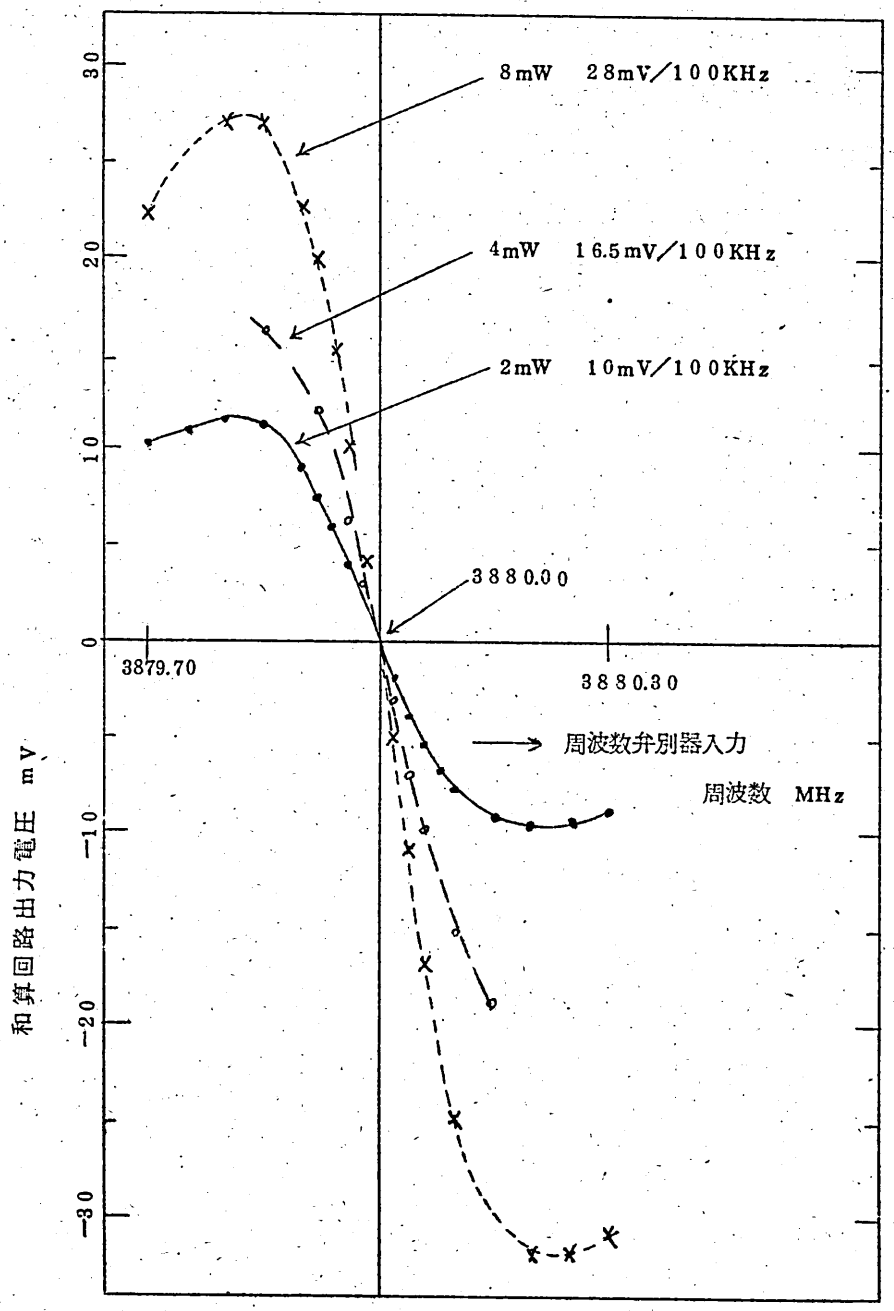



図 8. HP－423A 使用 周波数弁別器特性

## §5. 周波数分析装置

周波数弁別器で検出されたＦＭ雑音と，ここで述べるＡＭ雑音の周波数分析を行うための装置を製作した。雑音は $\overline{v_n^2}$ のように自乗平均で示されるので図9.に示すように周波数分析器と自乗平均回路を組合わせて使用した。

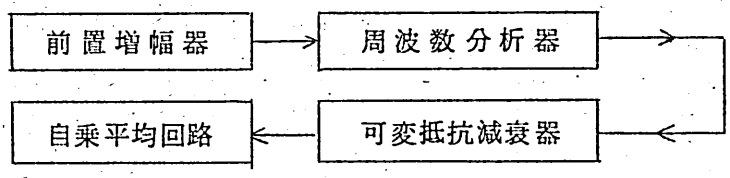



図 9.　周波数分析装置ブロック図

周波数分析器は目黒電波測器株式会社のMWA－482 を使用した。方式はスーパーベテロダイン方式で，分析出来る周波数は 50 Hz より 20KHz で出力は 5KHz のＡＭ変調波である。自乗平均回路は市販の適当な物がなく当研究室で製作した。それは真空管 12AU7 の $e_g - I_p$ 特性を利用した回路である。その特性を図 10.に示す。自乗平均回路は定点法を使用し，自乗平均出力が一定になるように可変抵抗減衰器で調整する。

ここでＡＭ雑音の測定法を述べておく。マイクロ波発振源からのマイクロ波をダイオードで検波し，その交流分と直流分との比をＡＭ雑音とした。したがって使用するダイオードとしては広い範囲で自乗特性に乗っている事が要求される。

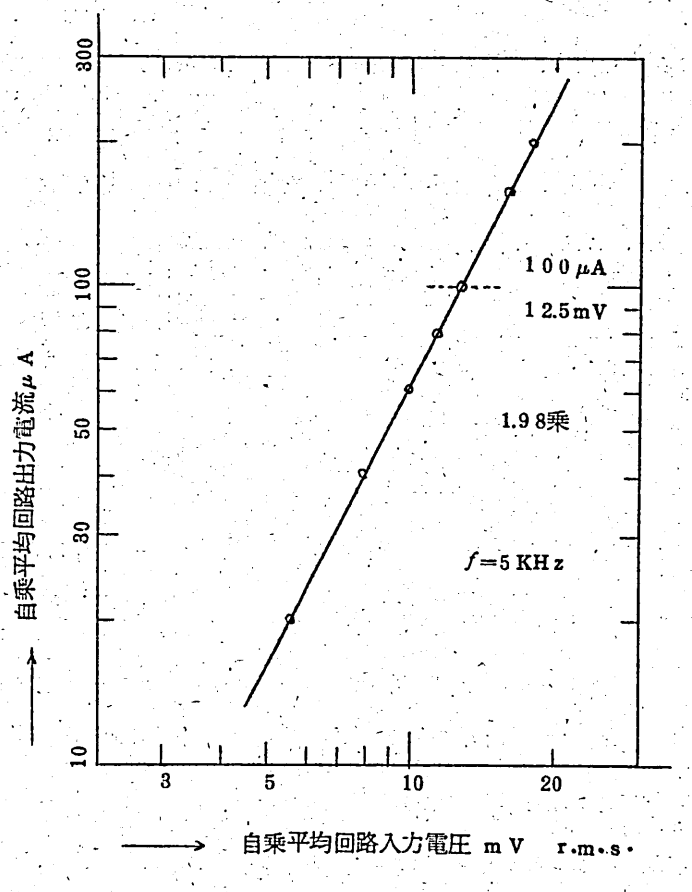



図 10.　自乗平均回路特性

§ 6.　FM雑音測定の分解能

FM雑音の測定は § 4.で述べた周波数弁別器と周波数分析装置を組合せて測定する。測定の分解能は弁別器の感度V/Hz と測定系の残留雑音電圧 $(\overline{V_n^2})^{\frac{1}{2}}$ によって決まる。残留雑音電圧を測定するのに2つの方法がある。一つはAshleyが用いている方法で図 3.を参照するとsignal の減衰器を最大減衰にして行う方法である。これはマイクロ波がダイオードに入射したとき発生する雑音を含めて系の残留雑音を測定する方法である。他の一つは周波数弁別器に入るマイクロ波を減衰器で減衰させ，その減衰量を微少変化させたとき，弁別器出

力にその変化が表われないことをたしかめて，つまりマイクロ波の影響を全く受けないようにして，系の残留雑音電圧を測定する方法である。

反射型共振器を使用する方法ではsignalよりreferenceが十分大きいので前者の測定方法が良い。透過型共振器の場合はsignalとreferenceが同じ程度なので，前者の方法は中途半端なので後者を取った。弁別器の入力を増せば感度は増大する。このことから他の報告と比較をするために発振器出力を進行波管で増幅して弁別器入力レベルを大きくした実験も行った。

分解能を計算した結果を図11.に示す。

図11.より判ることは，

1. 周波数弁別器入力を考慮に入れないで単純に分解能を比較すると，変調周波数1KHzではAshley，川村・笠木，Marshの順に悪くなる。笠木とAshleyとを比較するとき，Ashleyは入力電力の平方根に比例するので，600$^{mw}$が8$^{mw}$になったとすると分解能は$1/8.63$倍となる。図より求めた分解能の差は30 dB 31.7倍の差があって，Ashleyの方が良い結果を得ている。しかしこの実験に用いた共振器は本来周波数計として使用されていたもので，透過型と言っても整合のとれたものでなく，この点を改良すれば良い結果が得られると思う。

2. しかしAshleyのように反射型共振器を使用した方が良いことがわかっている。例えば，感度を上げるために入力を増した場合，透過型だとダイオードの損焼の点から限度がある。又2つのダイオードのバランスの点からも，反射型にするとsignal ＜＜ referenceと言う条件が成立してバランスが取りやすい。透過型はsignal ≒ referenceなので，referenceでバランスを取ってもsignalが入射したときバランスがくずれることがある。

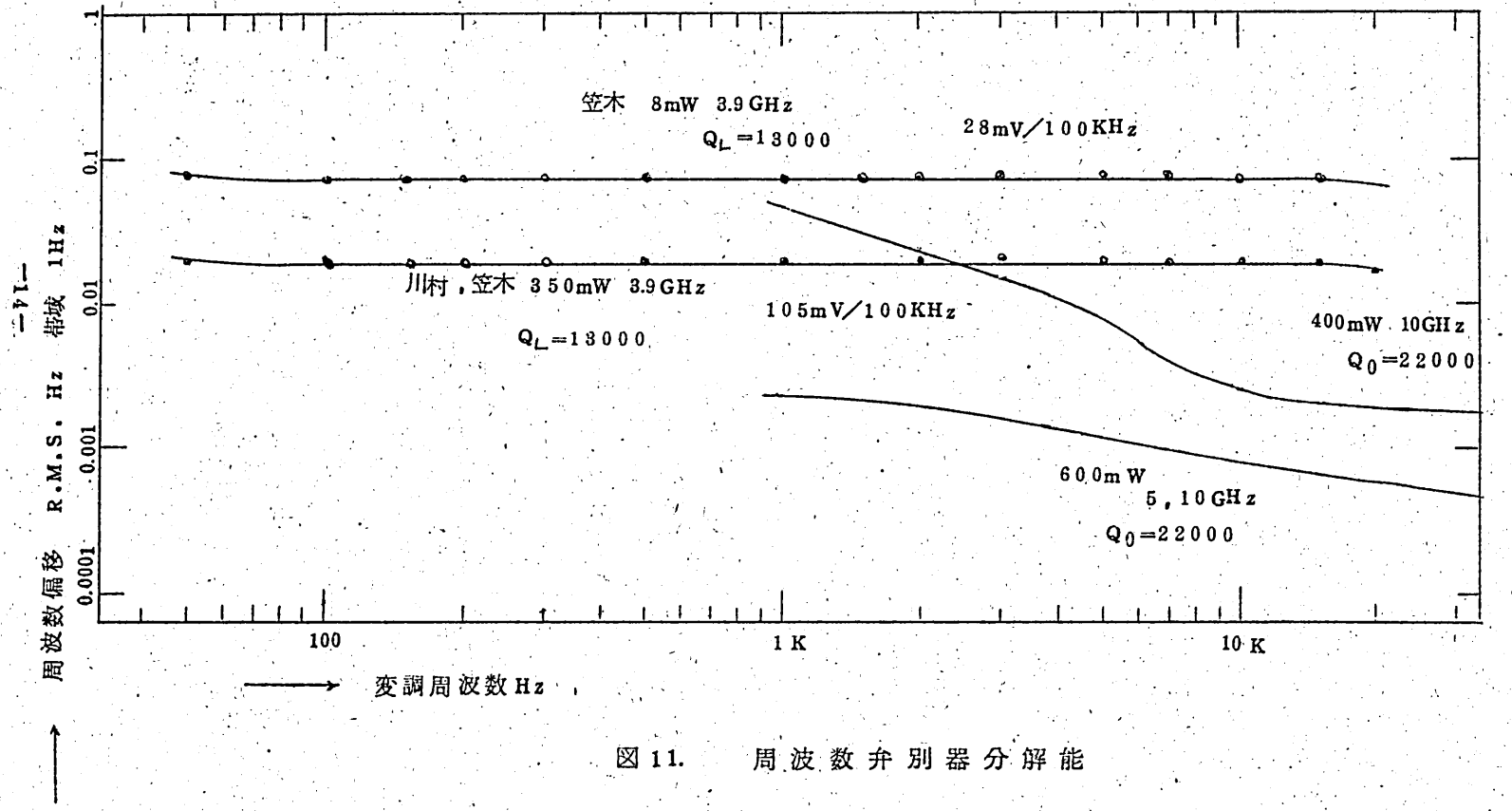



図 11. 周波数弁別器分解能

## §7. 雑音測定上の注意

1. 外来の機械的な振動を防ぐために発振器，導波管等に防震を施す必要がある。特に弁別器の共振器は厳重な注意が必要である。この報告の実験では，発振器・導波管を乗せている机の足にソフトウレタンで防震を施し，更に共振器の下にソフトウレタンを挿入した。次に外来の電気的雑音であるが，これの対策は相当困難である。私の経験から日曜日は雑音が少なく変調周波数60 Hz で数dB下る。

2. 次の問題は温度の変化である。特に敏感なのは共振器である。実験に用いた共振器は島田理化の周波数計を流用したものであるが，温度1° で共振周波数が50KHz変化する。図8.より50KHzも変化すると動作点が 相当変り測定不能となる。したがって温度変化には十分の注意を要する。

3. 最後の問題は前のとは少し異るが，FM雑音測定の際，§3.の(8)式より判るように，AM雑音が混入して誤差となる。それがどの程度かを知る良い方法がある。それはPINダイオードを使用したAM変調法である。FM雑音測定の前にAM雑音を測定してその雑音レベルより20 dB 程度大きいAM変調をPINダイオードで与える。その時の変調周波数は900Hz とした。このAM変調波を周波数分析すると図12(a)のように測定される。このマイクロ波を 周波数弁別器に導入したとき，その周波数分析出力が図12(b)のように900Hzで信号が急に増加すると言うようなことがなければ，この弁別器は確かにFM雑音を測定していると言える。もちろんのことであるが，PINダイオードで変調されたマイクロ波を弁別器に導入するのはチェックのときだけで，FM雑音測定の際にはPINダイオードはマイクロ波回路から取去っておく。

AM雑音変調周波数 (a)　　FM雑音変調周波数 (b)

図 12.　FM雑音測定の信頼性

PINダイオードによるAM変調回路を図 13.に示す。

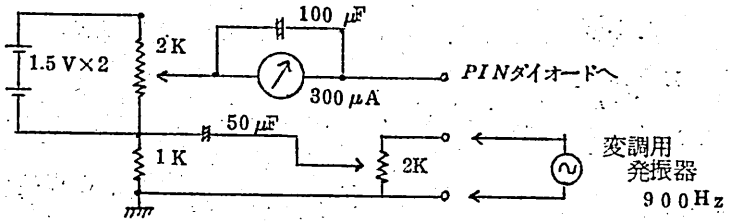



図 13.　PINダイオードを使用するAM変調回路

§ 8.　雑音スペクトラム測定

以上述べた装置を用いて，研究室で試作したマイクロ波発振源の雑音スペクトラム測定を行った。マイクロ波発振源は，Pound[3]が発表したAFCを用いたクライストロン発振器で，周波数弁別器の部分を変更してW. G. Tuller[12] が発表したEqual－arm を使用した。AFC系のブロック図を図 14.に示す。AFCの誤差電圧増幅を行うとき，DC増幅ではドリフトが問題になるので，25MHzのAM変調を行ってLock－in Mixer で復調している。AFCの帯域は この

Lock — in Mixer のプレート側の定数で決定される。その値を図 15.に示す。

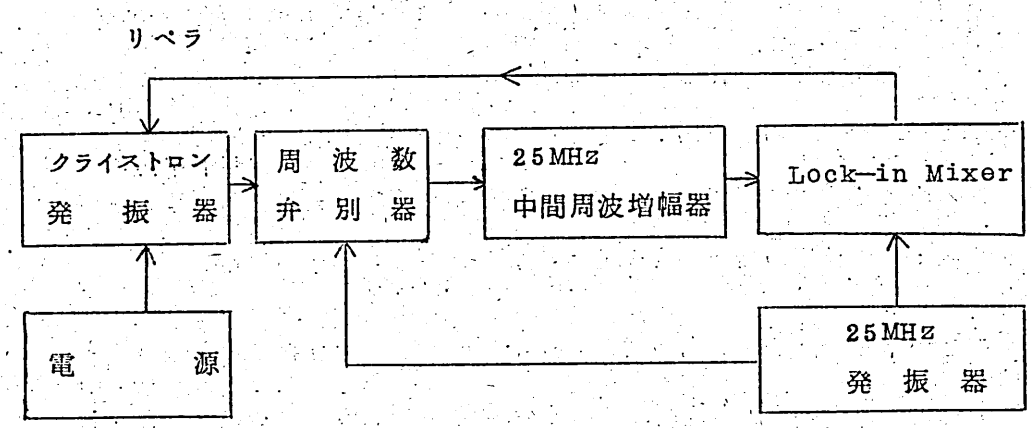



図 14.　　AFC ブロック図

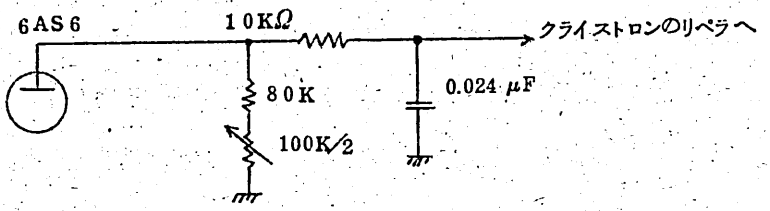



図 15.　　しゃ断周波数 75 Hz のフィルターの定数

その測定結果を図 16.～20.に示す。

1. 結果より明らかなことは，ＡＦＣを切ったときの雑音スペクトラムがフィルターの特性と良く一致していることである。このフィルターは図15.に示した様にLock-in Mixerのプレート側の定数で決定され，クライストロンのリペラに直接接続されている。このことからリペラに与える電源電圧の雑音がクライストロン発振の雑音に大きく寄与していることがわかった。

2. そこでクライストロンの電源を全部電池に置換えて雑音スペクトラムを測定した。図18.に見られるようにその雑音は，ＡＦＣ なしのときより数10 dB 低く，ＡＦＣを動作させたときと同程度である。このことからリペラ電源部を改造して雑音を相当抑える必要がある。

3. ＡＦＣの帰還量は，周波数弁別器に入射 マイクロ波を減衰器で減衰させることによって変えた。図に示してあるdBはその減衰量である。図 17.に示したＡＦＣの帰還量を 3 dB段階で変化させた時，雑音は 6 dB段階の変化を示している。これはダイオードの自乗特性より説明される。この図に示す帰還量を増すとＡＦＣ系は発振を生じた。

4. 図 18. 19.に内部空胴型2K 54BクライストロンのＦＭ雑音スペクトラムを示した。外部空胴型6BL6クライストロンより数dB雑音が少ない結果を示している。

図１６.　６ＢＬ６を使用したＦＡＣのＦＭ雑音スペクトラム

電　源　8K010
しゃ断周波数　75Hz
帰還利得の変化は弁別器入力を
減衰器で６ｄＢ段階で変えた。

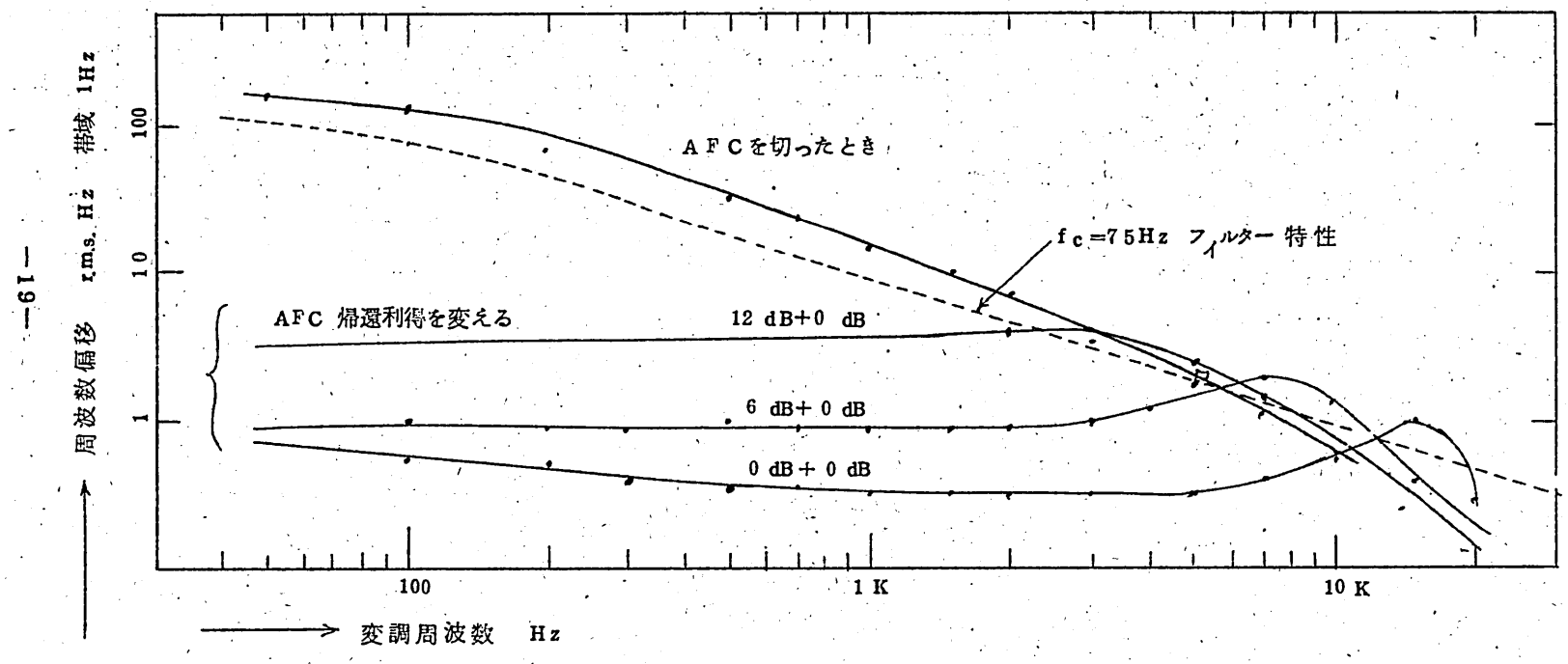


図17. 6BL6を使用したAFCのFM雑音スペクトラム

電 源　8K010
しゃ断周波数　1KHz

ループゲインの変化は，弁別器入力を減衰器で3dB段階で変えた。

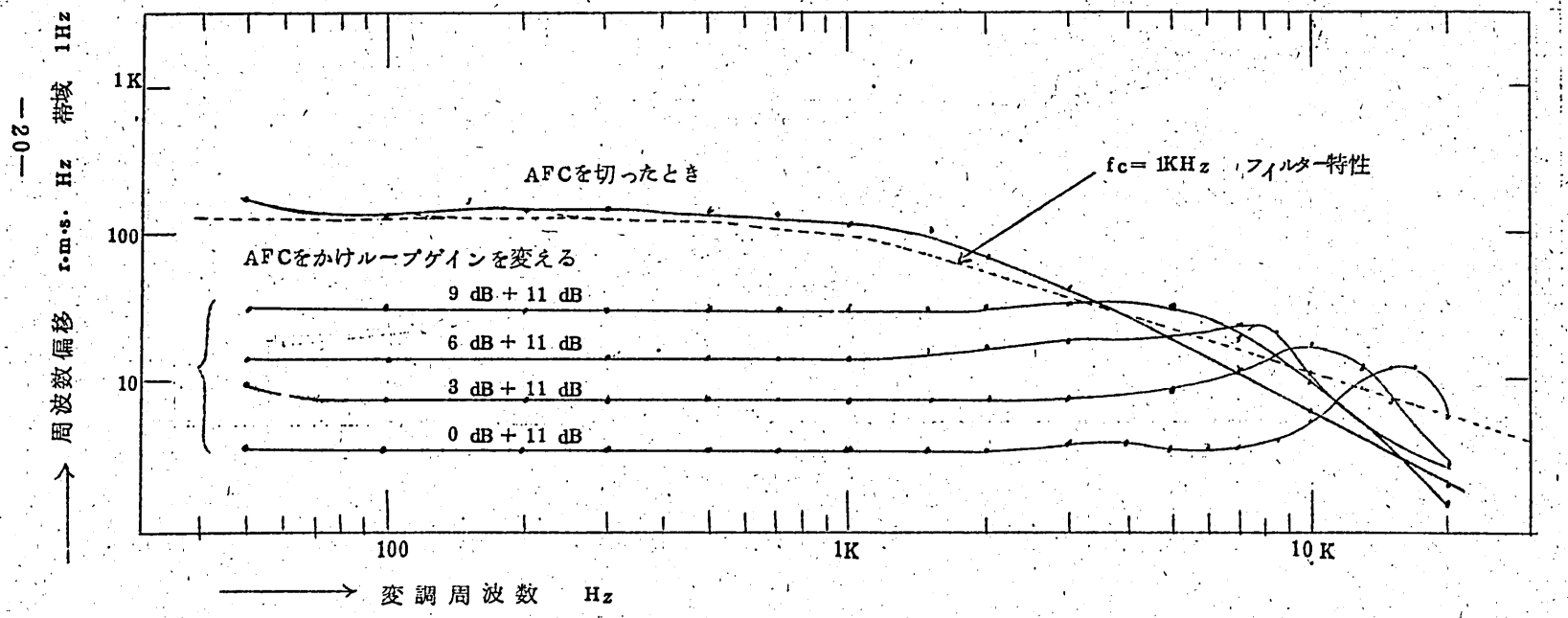


図 18. 6BL6を電池で点火したときのFM雑音スペクトラム

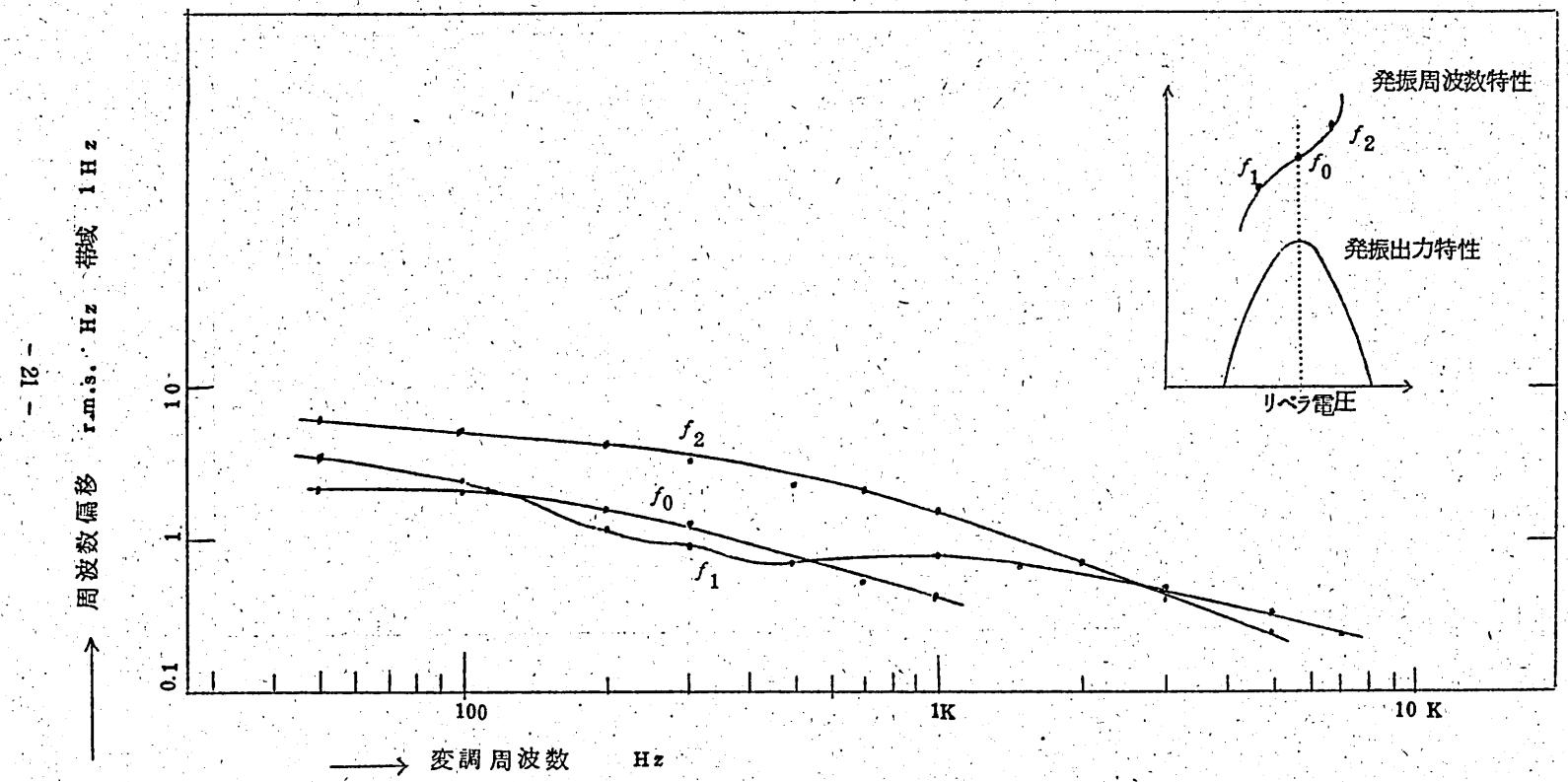


図 19.　2K54Bを使用したAFC のFM 雑音スペクトラム

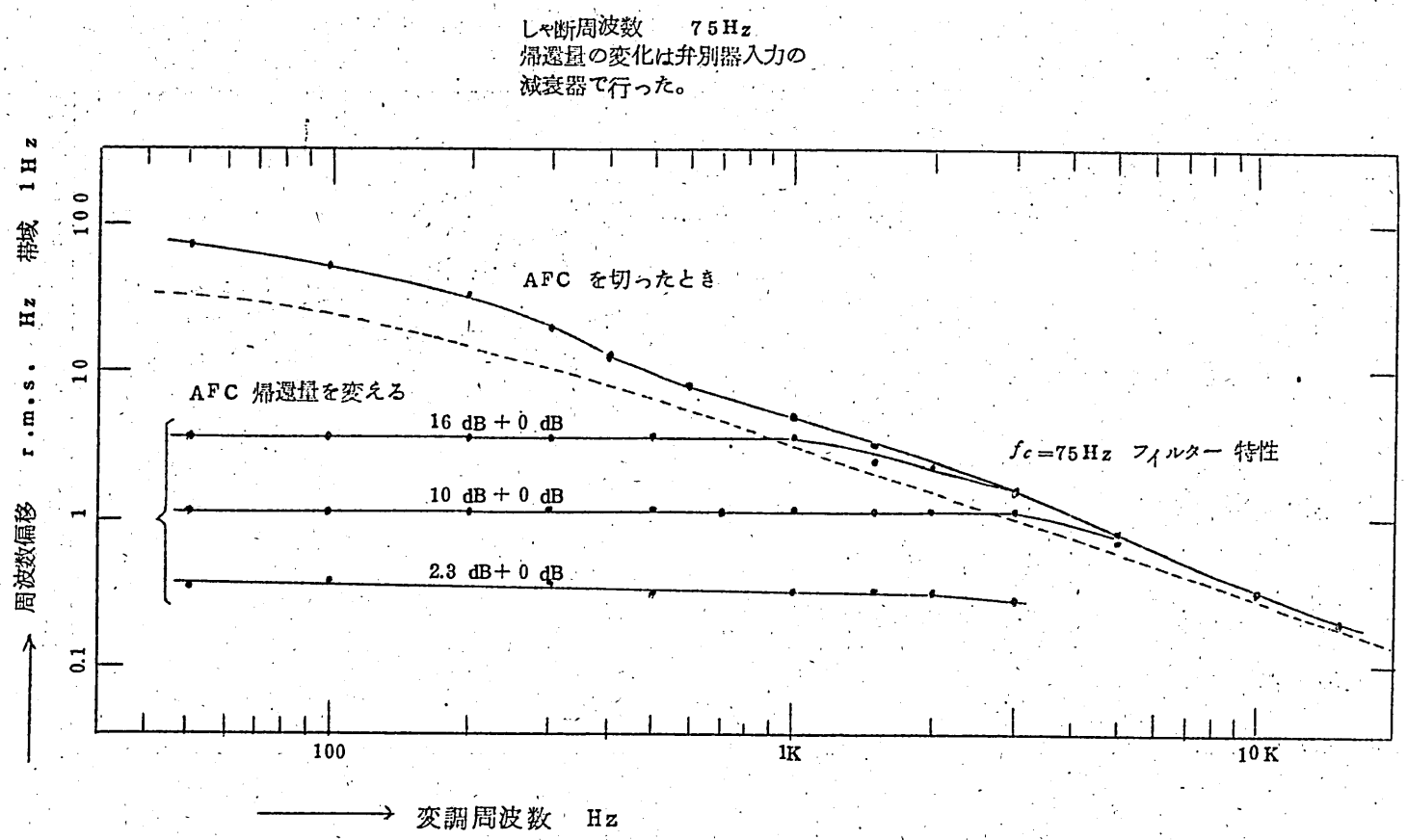
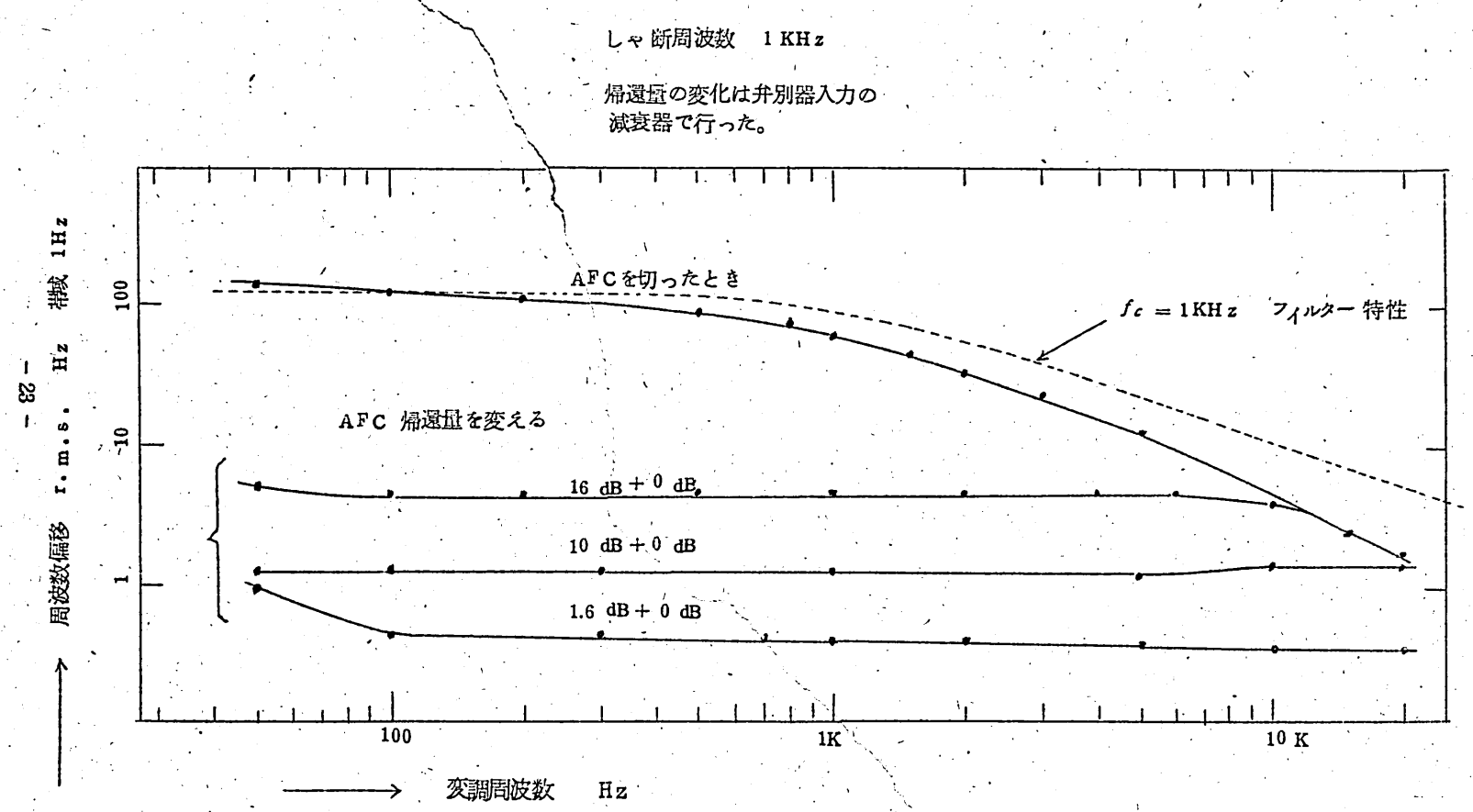


図 20.　2K54Bを使用したAFC の FM 雑音スペクトラム



# 文　　献


(1) 浜清，藤田広志，裏克己："日本における超高圧電子顕微鏡の建設とその将来性"，　応用物理，38，pp. 734－748 (1969)。

(2) 裏克己，藤田広志："電子顕微鏡のメガボルト化"，生産と技術（大阪大学），20，pp. 2－10 （昭43）。

(3) R. V. Pound : "Electronic Frequency Stabillization of Microwave Oecillators"，R. S. I.，17，pp. 490－505 (Nov. 1946)。

(4) S. B. Marsh and A. S. Wiltshire : "The Use of a Microwave Discriminator in the Measurement of Noise Modulation on CW Transmitter"，Proc. IEEE (London)，109，pt. B，Suppl. 23，pp. 665－667，(May 1962)。

(5) J. R. Ashley，C. B. Searles and F. M. Palka : "The Measurement of Osillator Noise at Microwave Frequencies"，IEEE Trans.，MTT－16，pp. 753－760 (Sep. 1968)。

(6) V. C. Rideout : "Automatic Frequency Control of Microwave"，I. R. E.，pp. 767－771 (Aug. 1947)。

(7) C. H. Grauling and D. J. Healey : "Instrumentation for Measurement of the Short－Term Frequency Stability of Microwave Sources"，Proc. IEEE，54，pp. 249－257 (Feb. 1966)。

(8) 沢崎憲一："輝波に於ける周波数安定の一方式に就いて"，信学誌，34. pp. 16－20 （昭26－01）。

(9) 西田昌弘，佐藤敏雄："パラクタを用いたマイクロ波ＡＦＣ"，
電気四学会連合大会予稿集－118，（昭 39）。

(10) 沢崎憲一，天野昇："極波パルス通信用ＡＦＣの一方式について"，
信学誌，34. pp. 30－36（昭 26－04）。

(11) 林周一："空胴の多重共振を利用した極波周波数弁別器"，
信学誌，34. pp. 443－447（昭 26－08）。

(12) W. G. Tuller, W. C. Galloway and F. P. Zaffarano :
"Recent Developments in Frequency Stabilization of
Microwave Oscillators", I.R.E., pp. 794－800
(June 1948).

輻射科学研究会資料

# 有限導波管開口アレーの相互結合

杉尾嘉秀・牧本利夫
(大阪大学・基礎工学部)

昭和45年10月2日

# 有限導波管開口アレーの相互結合

杉尾嘉秀・牧本利夫
(大阪大学・基礎工学部)

## §1. まえがき

近年、導波管アレーアンテナの相互結合の問題が種々の方法で解析されているが[1),2)]、これらはいずれも無限アレーの解析法をそのまま有限アレーに適用しているため、実用される有限アレーの放射特性を正しく表示できない場合が生じてくる。放射特性に及ぼす相互結合の効果を知るためには有限アレー、しかも導波管開口の数が比較的小いアレーについて具体的に調べてみる必要がある。2個の導波管開口の相互結合については二、三解析されているが[3),4)]、3個以上のものについてはほとんどやられていないようである。

筆者等は有限導波管開口アレーの相互結合と放射特性について変分法(および最小自乗法)によって解析しているので、本論文では、3個の結合導波管の場合につき、その二、三の結果を御報告する。

## §2. 有限導波管開口アレーの相互結合と放射特性

図1に示すように、N個の開口が完全導体の基板面上に設けられている場合につき考察する。開口は方形、円形いずれでもよく、かつ断面寸法も任意でよいが本論文では等しい断面をも

つ方形開口につき解析した。

領域を導波管領域($z<0$)と自由空間($z>0$)に分けて考え、各領域にGreenの定理を適用すると、電磁界は次式のように表示される。

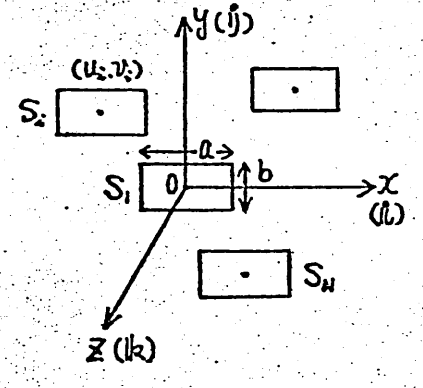



図1. 有限導波管開口アレー

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_j^{ref}(\mathbf{r}) \\ &\quad -\nabla\times\int_{S_j}\dot{\mathbf{G}}_s^*(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})\cdot\mathbf{K}_j(\boldsymbol{\rho})\,dS_j, \quad (1) \\ \mathbf{H}_j(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_j^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_j^{ref}(\mathbf{r}) \\ &\quad -j\omega\varepsilon\int_{S_j}\dot{\mathbf{G}}_s^*(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})\cdot\mathbf{K}_j(\boldsymbol{\rho})\,dS_j, \quad (2) \end{aligned}\right\} \quad (z<0)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= z\nabla\times\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i}\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})\cdot\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\rho})\,dS_i, \quad (3) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= jz\omega\varepsilon\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i}\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})\cdot\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\rho})\,dS_i \quad (4) \end{aligned}\right\} \quad (z>0)$$

ここに、$\dot{\mathbf{G}}_s^*$は半無限導波管内のダイアディック・グリーン関数で、$\dot{\mathbf{G}}$は自由空間のそれである。さらに、$\mathbf{K}_j(\boldsymbol{\rho})=\mathbf{k}\times\mathbf{E}_j(\boldsymbol{\rho})$である。

導波管内の電磁界はまた次のようにも表わされる。

$$\mathbf{K}_i(\mathbf{r}_i)=\sum_{mn}[V_{mn}^i(z)\mathbf{h}_{mn}^{iH}(\boldsymbol{\rho}_i)+U_{mn}^i(z)\mathbf{h}_{mn}^{iE}(\boldsymbol{\rho}_i)]. \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_{ti}(\mathbf{r}_i)=\sum_{mn}[Y_{mn}^H V_{mn}^i(z)\mathbf{h}_{mn}^{iH}(\boldsymbol{\rho}_i)+Y_{mn}^E U_{mn}^i(z)\mathbf{h}_{mn}^{iE}(\boldsymbol{\rho}_i)]. \quad (6)$$

ここに、$\mathbf{h}_{mn}^{iH}$, $\mathbf{h}_{mn}^{iE}$はそれぞれ導波管(i)のH-波およびE-波の固有モード関数、$V_{mn}^i(z)$, $U_{mn}^i(z)$はそれらの振幅(電圧)、$Y_{mn}^H$, $Y_{mn}^E$は各固有アドミッタンスである。

いま、各導波管を$\mathbf{E}_j^{inc}(\mathbf{r})=E_{0j}e^{-j\beta_{10}z}(\mathbf{h}_{10}^{jH}\times\mathbf{k})$なる入射波で

励振したとすると、開口面上における横方向磁界(x-y成分)の連続条件より次式を得る。

$$I_j \mathbb{H}_{10}^{jH} = Y_0 Y_j V_j \mathbb{H}_{10}^{jH} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{H}_j^i + \sum_{mn}{}' [Y_{mn}^H V_{mn}^j \mathbb{H}_{mn}^{jH} + Y_{mn}^E U_{mn}^j \mathbb{H}_{mn}^{jE}] \quad (7)$$

ここに、$I_j = Y_0(E_{0j} - V_{0j})$, $V_j = E_{0j} + V_{0j}$ ($V_{0j}$は主モードの反射波振幅)であり、かつ

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{H}_j^i &= \frac{j}{2\pi\omega\mu} \int_{S_i} [\nabla_0 \nabla_t \psi + k^2 (\vec{i}\vec{i}_t + \vec{j}\vec{j}_t)\psi] \cdot \mathbb{K}_i(q_i)\, dS_i, \\ \psi &= \frac{e^{-jk[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{1/2}}}{[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{1/2}} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

である。(7)式の$Y_j$は導波管(j)の開口($z=0$)より見た、主モードについての規格化入力アドミッタンスとなる。

リアクション則[57]より、開口面上で

$$\int_{apert} (H \cdot K)_{int}\, dS = \int_{apert} (H \cdot K)_{ext}\, dS \quad (9)$$

なる関係が成立するので、この関係を用いて、まず、自己および相互アドミッタンスを求める。

いま、導波管(i)のみを励振し、他の導波管は開口面から$\frac{n\lambda_g}{2}$($\lambda_g$:主モード波長、$n$:整数)の位置で短絡して開口面上の主モード電圧を零にした場合、次の関係を得る。

$$\sum_{j=1}^{N} U_j I_j^{(i)} \mathbb{H}_{10}^{jH} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} U_j \mathbb{H}_j^{k(i)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{mn}{}' U_j [Y_{mn}^H V_{mn}^{j(i)} \mathbb{H}_{mn}^{jH} + Y_{mn}^E U_{mn}^{j(i)} \mathbb{H}_{mn}^{jE}] \quad (10)$$

$$U_j = \begin{cases} 1 : (x,y) \text{が} S_j \text{上にあるとき} \\ 0 : (x,y) \text{がその他の位置のとき} \end{cases}$$

ここに、肩の(i)は導波管(i)のみを励振した場合の電磁界であることを示す。

(10)式の両辺に $\sum_{\ell=1}^{N} U_\ell K_\ell^{(i)}$ をスカラー積して $z=0$ の面上にわたって積分を実行すると次式を得る。

$$Y_{ij} = \frac{1}{V_i^{(i)} V_j^{(i)}} \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} \int_{S_\ell} H_\ell^{k(i)} \cdot K_\ell^{(i)} dS_\ell + \frac{1}{V_i^{(i)} V_j^{(i)}} \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N}{}' \left[ Y_{mn}^{H} V_{mn}^{k(i)} V_{mn}^{\ell(j)} + Y_{mn}^{E} U_{mn}^{k(i)} U_{mn}^{\ell(j)} \right]. \tag{11}$$

ここに、$I_j^{(i)} = Y_0 Y_{ij} V_i^{(i)}$ である。$Y_{ij}$ は主モードの固有アドミッタンス $Y_0$ によって規格化された相互(または自己)アドミッタンスと見なすことができる。ローレンツの相反定理より $I_j^{(i)} V_j^{(i)} = I_i^{(j)} V_i^{(j)}$ が導かれ、$Y_{ij} = Y_{ji}$ となる。

リアクション法則[5]を(11)式に拡張適用すると、上式は $Y_{ij}$ の定留表示式になっていることが示される。したがって、リッツの方法を用いて $Y_{ij}$ を求めることができる。

(11)式を書き直すと次式のようになる。

$$Y_{ij} V_i^{(i)} V_j^{(i)} - \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{m}^{M_k N_k}\sum_{r}^{M_\ell N_\ell} \left[ P_{mn}^{rs}(kH;\ell H) V_{mn}^{k(i)} V_{rs}^{\ell(j)} + P_{mn}^{rs}(kH;\ell E) V_{mn}^{k(i)} U_{rs}^{\ell(j)} \right.$$
$$\left. + P_{mn}^{rs}(kE;\ell H) U_{mn}^{k(i)} V_{rs}^{\ell(j)} + P_{mn}^{rs}(kE;\ell E) U_{mn}^{k(i)} U_{rs}^{\ell(j)} \right] = 0 \tag{12}$$

ここに、$(M_i, N_i)$ は導波管(i)の試行関数の展開モード数の上限を示し、さらに

$$\left.\begin{aligned}
&P_{mn}^{rs}(kH;\ell H) = Y_{mn}^{rs}(kH;\ell H) + \delta_{k\ell}\frac{1}{Y_0}\sum_{ab}{}' Y_{ab}^{H}\delta_{am}\delta_{ar}\delta_{bn}\delta_{bs}, \quad P_{mn}^{rs}(kH;\ell E) = Y_{mn}^{rs}(kH;\ell E),\\
&P_{mn}^{rs}(kE;\ell H) = Y_{mn}^{rs}(kE;\ell H), \quad P_{mn}^{rs}(kE;\ell E) = Y_{mn}^{rs}(kE;\ell E) + \delta_{k\ell}\frac{1}{Y_0}\sum_{ab}{}' Y_{ab}^{E}\delta_{am}\delta_{ar}\delta_{bn}\delta_{bs}\\
&Y_{mn}^{rs}(kH;\ell E) = \frac{j}{2\pi\omega\mu Y_0}\int_{S_\ell}\int_{S_k} h_{mn}^{kH}\cdot\left[\nabla_t\nabla_t\psi + k^2(\ell i_t + j j_t)\psi\right]\cdot h_{rs}^{\ell E} dS_k dS_\ell\\
&\qquad = Y_{rs}^{mn}(\ell E;kH)
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

である。(付録1)

(12)式の両辺を各展開係数で偏微分し、$Y_{ij}$ の定留性を考慮すると、次の連立方程式を得る。

$$
\left.
\begin{aligned}
&Y_{ji}V_j^{(i)} - \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{mn}^{10}(\ell H,jH)V_{mn}^{\ell(i)} + P_{mn}^{10}(\ell E,jH)U_{mn}^{\ell(i)}\right] = 0,\\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{mn}^{rs}(\ell H,jH)V_{mn}^{\ell(i)} + P_{mn}^{rs}(\ell E,jH)U_{mn}^{\ell(i)}\right] = 0, \quad (r,s)\neq(1,0)\\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{mn}^{rs}(\ell H,jE)V_{mn}^{\ell(i)} + P_{mn}^{rs}(\ell E,jE)U_{mn}^{\ell(i)}\right] = 0, \quad (r,s)\neq(1,0)\\
&Y_{ji}V_i^{(i)} - \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{mn}^{10}(\ell H,iH)V_{mn}^{\ell(i)} + P_{mn}^{10}(\ell E,iH)U_{mn}^{\ell(i)}\right] = 0,\\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{mn}^{rs}(\ell H,jH)V_{mn}^{\ell(i)} + P_{mn}^{rs}(\ell E,jH)U_{mn}^{\ell(i)}\right] = 0, \quad (r,s)\neq(1,0)\\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{mn}^{rs}(\ell H,jE)V_{mn}^{\ell(i)} + P_{mn}^{rs}(\ell E,jE)U_{mn}^{\ell(i)}\right] = 0. \quad (r,s)\neq(1,0)
\end{aligned}
\right\} \qquad (14)
$$

(14)式において、展開係数の少くとも一つが零でないためには行列式が零とならなければいけないから、それより$Y_{ji}$を求めることができる。上側の3組の式と下側の3組の式は全く同一の行列式を与えるので、一方の組について解けばよい。$Y_{ji}$は次式で与えられる。

$$
Y_{ji} = \frac{\begin{vmatrix} (P_{mn}^{rs}(\ell H,jH)) & (P_{mn}^{rs}(\ell E,jH)) \\ (P_{mn}^{rs}(\ell H,jE)) & (P_{mn}^{rs}(\ell E,jE)) \end{vmatrix}}{\dfrac{\partial}{\partial P_{10}^{10}(jH,jH)}\begin{vmatrix} (P_{mn}^{rs}(\ell H,jH)) & (P_{mn}^{rs}(\ell E,jH)) \\ (P_{mn}^{rs}(\ell H,jE)) & (P_{mn}^{rs}(\ell E,jE)) \end{vmatrix}} \qquad (15)
$$

ここに、$(P_{mn}^{rs}(\ell H,jH))$等は行列を表わす。

(15)式から求まった$Y_{ji}$を(14)式に代入すれば各展開係数も決定されるので、任意励振の場合の展開係数は肩の(i)または(j)を1からNまで変えた場合の重ね合せとして求めることができる。主モードより見た散乱係数$S_{ji}$は

$$
(S_{ji}) = ((\mathrm{II}) - (Y_{ji}))((\mathrm{II}) + (Y_{ji}))^{-1} \qquad (16)
$$

より求めることができる。ここで(II)は単位行列である。

これまではリアクション法を適用して解析してきたが、最小自乗法を用いても同様に解析することができる(付録2)。

遠方界は次のように表わされる。

$$E_\theta(r,\theta,\phi)=\frac{jk}{2\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}F_1(\theta,\phi) \tag{17}$$

$$E_\phi(r,\theta,\phi)=\frac{jk}{2\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}F_2(\theta,\phi) \tag{18}$$

$$H_\theta(r,\theta,\phi)=-\frac{jk\eta}{2\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}F_2(\theta,\phi) \tag{19}$$

$$H_\phi(r,\theta,\phi)=\frac{jk\eta}{2\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}F_1(\theta,\phi) \tag{20}$$

ここに、$\eta=\sqrt{\varepsilon/\mu}$ であり、さらに

$$F_1(\theta,\phi)=\sum_{i=1}^{N}f_{1i}(\theta,\phi),\qquad F_2(\theta,\phi)=\sum_{i=1}^{N}f_{2i}(\theta,\phi) \tag{21}$$

$$\begin{aligned}f_{1i}(\theta,\phi)=j\sqrt{\frac{ab}{2}}e^{jka\sin\theta(U_i\cos\phi+V_i\sin\phi)}\Big\langle&|E_{oi}+V_{oi}|e^{j(\alpha_{io}^{i}+\frac{\pi}{2})}\{S(X_1^1)+S(X_1^2)\}S(Y_o^1)\sin\phi\\&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{mn}{}'\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\,e^{j\frac{m+n}{2}\pi}}{\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}}\Big[\Big(\frac{n\pi}{b}|V_{mn}^{i}|e^{j\alpha_{mn}^{i}}-\frac{m\pi}{a}|U_{mn}^{i}|e^{j\tau_{mn}^{i}}\Big)\cos\phi\\&\times\{S(X_m^1)+(-1)^mS(X_m^2)\}\{S(Y_n^1)-(-1)^nS(Y_n^2)\}\\&-\Big(\frac{m\pi}{a}|V_{mn}^{i}|e^{j\alpha_{mn}^{i}}+\frac{n\pi}{b}|U_{mn}^{i}|e^{j\tau_{mn}^{i}}\Big)\sin\phi\\&\times\{S(X_m^1)-(-1)^mS(X_m^2)\}\{S(Y_n^1)+(-1)^nS(Y_n^2)\}\Big]\Big\rangle.\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}f_{2i}(\theta,\phi)=j\sqrt{\frac{ab}{2}}e^{jka\sin\theta(U_i\cos\phi+V_i\sin\phi)}\Big\langle&|E_{oi}+V_{oi}|e^{j(\alpha_{io}^{i}+\frac{\pi}{2})}\{S(X_1^1)+S(X_1^2)\}S(Y_o^1)\cos\phi\cos\theta\\&+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{mn}{}'\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\,e^{j\frac{m+n}{2}\pi}}{\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}}\Big[\Big(\frac{n\pi}{b}|V_{mn}^{i}|e^{j\alpha_{mn}^{i}}-\frac{m\pi}{a}|U_{mn}^{i}|e^{j\tau_{mn}^{i}}\Big)\cos\theta\sin\phi\\&\times\{S(X_m^1)+(-1)^mS(X_m^2)\}\{S(Y_n^1)-(-1)^nS(Y_n^2)\}\\&+\Big(\frac{m\pi}{a}|V_{mn}^{i}|e^{j\alpha_{mn}^{i}}+\frac{n\pi}{b}|U_{mn}^{i}|e^{j\tau_{mn}^{i}}\Big)\cos\theta\cos\phi\\&\times\{S(X_m^1)-(-1)^mS(X_m^2)\}\{S(Y_n^1)+(-1)^nS(Y_n^2)\}\Big]\Big\rangle.\end{aligned} \tag{23}$$

である。ここに

$$S(x)=\frac{\sin(x)}{x},\quad X_m^{1,2}=\frac{a}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\pm k\sin\theta\cos\phi\right),\quad Y_n^{1,2}=\frac{b}{2}\left(\frac{n\pi}{b}\pm k\sin\theta\sin\phi\right). \tag{24}$$

であって、複号(±)はそれぞれ肩の1,2に対応する。$\alpha_{mn}^{i}$, $\tau_{mn}^{i}$はいずれも導波管(i)の固有モードの位相を表わす。これらの位相は、励振条件によって任意に変え得る励振の位相と、境界条件より決る位相との和になっている。

## §3. 直線状アレー

いま、簡単のために図2.に示されるような3個の導波管開口から成る直線状アレー(1次元配列アレー)につき考察する。さらに$D_1=D_2=D$としておく。

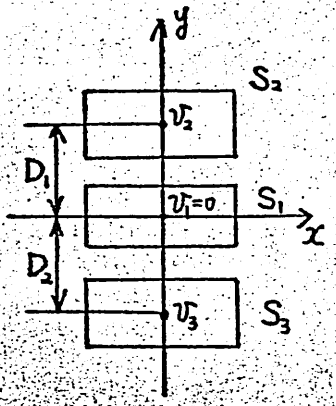



図2. 直線状アレー(3開口)

### 3-1. 1モード近似($TE_{10}$)

この場合にはアドミッタンス・エレメント$Y_{ik}$は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} Y_{11}&=Y_{22}=Y_{33}=Y_{10}^{10}(1H,1H),\\ Y_{12}&=Y_{13}=Y_{10}^{10}(1H,2H),\\ Y_{23}&=Y_{10}^{10}(2H,3H)\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

そうに、散乱係数$S_{ik}$は

$$\left.\begin{aligned} S_{11}&=\frac{(1-Y_{11})(1+Y_{11}+Y_{23})+2Y_{12}^2}{(1+Y_{11})(1+Y_{11}+Y_{23})-2Y_{12}^2},\quad S_{12}=S_{13}=-\frac{2Y_{12}}{(1+Y_{11})(1+Y_{11}+Y_{23})-2Y_{12}^2},\\ S_{22}&=S_{33}=\frac{(1+Y_{11})(1-Y_{11}^2+Y_{23}^2)+2Y_{12}^2(Y_{11}-Y_{23})}{\{(1+Y_{11})(1+Y_{11}+Y_{23})-2Y_{12}^2\}(1+Y_{11}-Y_{23})},\quad S_{23}=\frac{2\{Y_{12}^2-Y_{23}(1+Y_{11})\}}{\{(1+Y_{11})(1+Y_{11}+Y_{23})-2Y_{12}^2\}(1+Y_{11}-Y_{23})}\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

と表わされる。

この場合放射特性式は

$$\left.\begin{aligned} F_1(\theta,\phi) &= \sum_{i=1}^{3} f_{1i}(\theta,\phi), \\ f_{1i}(\theta,\phi) &= V_i\left[\frac{\sin\frac{a}{2}\left(\frac{\pi}{a}+k\sin\theta\cos\phi\right)}{\frac{a}{2}\left(\frac{\pi}{a}+k\sin\theta\cos\phi\right)}+\frac{\sin\frac{a}{2}\left(\frac{\pi}{a}-k\sin\theta\cos\phi\right)}{\frac{a}{2}\left(\frac{\pi}{a}-k\sin\theta\cos\phi\right)}\right]\frac{\sin\frac{b}{2}(k\sin\theta\sin\phi)}{\frac{b}{2}k\sin\theta\sin\phi}\sin\phi\, e^{jkv_i\sin\theta\sin\phi}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

となる。

いま、主放射方向を $\theta_0=0$, $\phi_0=\frac{\pi}{2}$ にとり、かつ、$f_{1i}(\theta,\phi)$ の振幅電圧を相互結合がない場合（1個の開口が孤立している場合）の主モード電圧 $V_0$ で規格化しておくと、$f_{1i}(\theta,\phi)$ は次のように表わすことができる。

$$f_{1i}\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{V_i}{V_0}\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}e^{j2B\sin\theta}, \quad B=\frac{kb}{2} \tag{28}$$

この式を(27)式に代入すると全体の放射特性 $F_1\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)$ が得られる。

いま、導波管(1)のみを励振し、他の導波管は整合負荷で終端されている場合の放射特性（エレメント・ファクター）は次式のように表示される。

$$F_1^{[1]}\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}\left[\frac{1+S_{11}}{1+\Gamma_{11}}+\frac{2S_{12}}{1+\Gamma_{11}}\cos(2B\sin\theta)\right]. \tag{29}$$

同様にして、導波管(2),(3)を単独で励振した場合のエレメント・ファクターは次のように表示される。

$$F_1^{[2]}\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}\left[\frac{S_{12}}{1+\Gamma_{11}}+\frac{1+S_{22}}{1+\Gamma_{11}}e^{j2B\sin\theta}+\frac{S_{23}}{1+\Gamma_{11}}e^{-j2B\sin\theta}\right]. \tag{30}$$

$$F_1^{[3]}\left(\theta,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}\left[\frac{S_{13}}{1+\Gamma_{11}}+\frac{S_{23}}{1+\Gamma_{11}}e^{j2B\sin\theta}+\frac{1+S_{33}}{1+\Gamma_{11}}e^{-j2B\sin\theta}\right]. \tag{31}$$

ここに、$\Gamma_{11}$ は孤立導波管の開口における反射係数である。

合成の放射特性は次式のようになる.

$$F_1(\theta,\varphi)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}F_1^{(i)}(\theta,\varphi) \qquad (32)$$

・2モード以上の近似についても同様な手順で解析できる.

## §4. 数値計算結果

1例として、直線状アレー(図2.)につき、主モード近似で $a/\lambda=0.7$, $b/\lambda=0.31179$ の導波管につき、アドミッタンス・エレメント、散乱係数、および放射特性を求め、図3.～図7.に示してある.

データが十分でないため、断定的なことは言えないが、主モード近似の場合においてさえ、相互結合のため放射特性が結合のない場合からずれてくることがわかる。アドミッタンス・エレメントと散乱係数については、$TE_{10}$ と $TM_{11}$ の2モードを考慮して計算した結果では、その振幅および位相のいずれについても高々0.2%程度変化するのみである。反射係数 $S_{11}$ および $S_{22}$ のいずれも、$b/\lambda<D\leq 2.0\,b/\lambda$ の範囲で、$D=1.5\,b/\lambda$ の近くに最小点がある.

図 3. アドミッタンス・エレメント

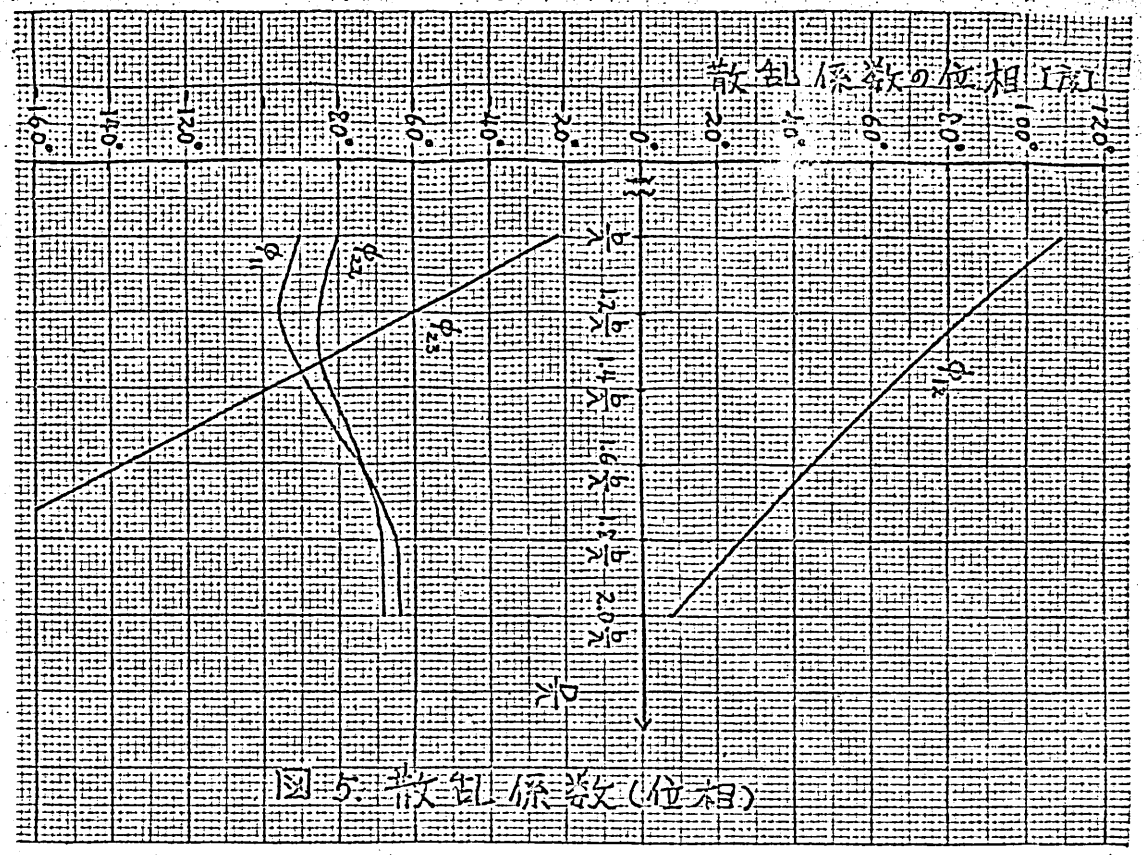



図5. 散乱係数(位相)

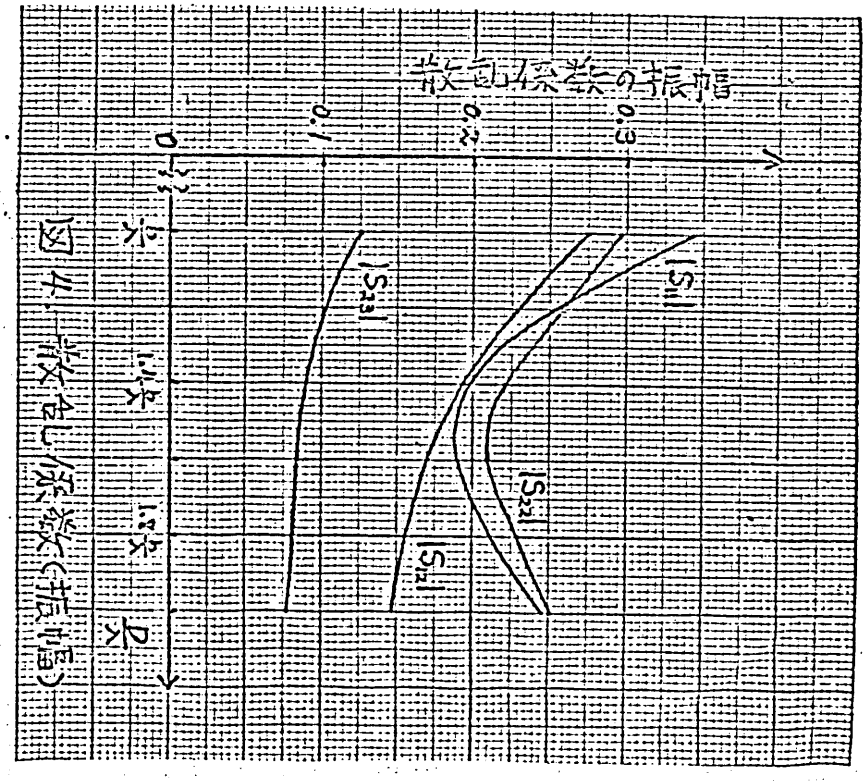



図4. 散乱係数(振幅)

図 6. $E_0(\theta,\frac{\pi}{2})$, $H_1(0,\frac{\pi}{2})$ の放射特性 ($TE_{10}$ モード波伝)

図 7. $E_0(\theta,\frac{\pi}{2})$, $H_\phi(\theta,\frac{\pi}{2})$ の放射特性 (TE$_{10}$モード近似)

[文献]

1) G.F. Farrell et al, IEEE AP-16, NO.4, Jul. 1968, P405~

2) G.V. Borgiotti, IEEE Proc. Vol.56, NO.11, Nov. 1968, P1881~

3) G.V. Borgiotti, IEEE AP-16, NO.3, May, 1968. P329~

4) R.J. Mailloux, IEEE AP-17, NO.6, Nov. 1969. P740~

5) R.F. Harrington; Time Harmonic Electromagnetic Field, New York: McGraw-Hill, 1961


[付録 1.]

$$Y^{rs}_{mn}(\hat{i}H,\hat{k}H)=\frac{j}{4}\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n\varepsilon_r\varepsilon_s}}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}\sqrt{\{(\frac{m}{a})^2+(\frac{r}{b})^2\}\{(\frac{n}{a})^2+(\frac{s}{b})^2\}}}\Big[mr(\frac{\lambda}{a})^2\{4A^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})-mr(\frac{\lambda}{a})^2C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})\}$$
$$+ns(\frac{\lambda}{b})^2\{4B^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})-ns(\frac{\lambda}{b})^2C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})\}-(\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b})^2\{(ms)^2+(nr)^2\}C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})\Big]. \quad (1-1)$$

$$Y^{rs}_{mn}(\hat{i}H,\hat{k}E)=\frac{j}{2}\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}\sqrt{\{(\frac{m}{a})^2+(\frac{r}{b})^2\}\{(\frac{n}{a})^2+(\frac{s}{b})^2\}}}\Big[ms\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\{4A^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})-mr(\frac{\lambda}{a})^2C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})\}$$
$$-nr\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\{4B^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})-ns(\frac{\lambda}{b})^2C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})\}+rs\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\{(\frac{m}{a})^2-(\frac{n}{b})^2\}C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})\Big]. \quad (1-2)$$

$$Y^{rs}_{mn}(\hat{i}E,\hat{k}E)=j\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}\sqrt{\{(\frac{m}{a})^2+(\frac{r}{b})^2\}\{(\frac{n}{a})^2+(\frac{s}{b})^2\}}}\Big[ns(\frac{\lambda}{b})^2\{4A^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})-mr(\frac{\lambda}{a})^2C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})\}$$
$$+mr(\frac{\lambda}{a})^2\{4B^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})-ns(\frac{\lambda}{b})^2C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})\}+2mnrs(\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b})^2C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})\Big]. \quad (1-3)$$

ここに.

$$A^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})=\int_{\frac{x_2-b_2}{\lambda}}^{\frac{x_2+b_2}{\lambda}}\int_{\frac{u_2-a_2}{\lambda}}^{\frac{u_2+a_2}{\lambda}}\int_{\frac{y_2-b_2}{\lambda}}^{\frac{y_2+b_2}{\lambda}}\int_{\frac{u_2-a_2}{\lambda}}^{\frac{u_2+a_2}{\lambda}}\sin m\pi\frac{\lambda}{a}(\xi_2+\frac{a_2-u_2}{\lambda})\cos n\pi\frac{\lambda}{b}(\eta_2+\frac{b_2-y_2}{\lambda})\phi\sin r\pi\frac{\lambda}{a}(\xi_1+\frac{a_1-u_1}{\lambda})\cos s\pi\frac{\lambda}{b}(\eta_1+\frac{b_1-y_1}{\lambda})d\xi_2d\xi_1. \quad (1-4)$$

$$B^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})=\int_{\frac{x_2-b_2}{\lambda}}^{\frac{x_2+b_2}{\lambda}}\int_{\frac{u_2-a_2}{\lambda}}^{\frac{u_2+a_2}{\lambda}}\int_{\frac{y_2-b_2}{\lambda}}^{\frac{y_2+b_2}{\lambda}}\int_{\frac{u_2-a_2}{\lambda}}^{\frac{u_2+a_2}{\lambda}}\cos m\pi\frac{\lambda}{a}(\xi_2+\frac{a_2-u_2}{\lambda})\sin n\pi\frac{\lambda}{b}(\eta_2+\frac{b_2-y_2}{\lambda})\phi\cos r\pi\frac{\lambda}{a}(\xi_1+\frac{a_1-u_1}{\lambda})\sin s\pi\frac{\lambda}{b}(\eta_1+\frac{b_1-y_1}{\lambda})d\xi_2d\xi_1. \quad (1-5)$$

$$C^{rs}_{mn}(\hat{i},\hat{k})=\int_{\frac{x_2-b_2}{\lambda}}^{\frac{x_2+b_2}{\lambda}}\int_{\frac{u_2-a_2}{\lambda}}^{\frac{u_2+a_2}{\lambda}}\int_{\frac{y_2-b_2}{\lambda}}^{\frac{y_2+b_2}{\lambda}}\int_{\frac{u_2-a_2}{\lambda}}^{\frac{u_2+a_2}{\lambda}}\cos m\pi\frac{\lambda}{a}(\xi_2+\frac{a_2-u_2}{\lambda})\cos n\pi\frac{\lambda}{b}(\eta_2+\frac{b_2-y_2}{\lambda})\phi\cos r\pi\frac{\lambda}{a}(\xi_1+\frac{a_1-u_1}{\lambda})\cos s\pi\frac{\lambda}{b}(\eta_1+\frac{b_1-y_1}{\lambda})d\xi_2d\xi_1. \quad (1-6)$$

$$\phi(x_1,y_1;x_2,y_2)=\frac{e^{-j2\pi\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}. \qquad (1\text{-}7)$$

これら4重積分は積分変数を

$$\tau=x_1-x_2-\frac{u_1-u_2}{\lambda},\quad \sigma=y_1-y_2-\frac{v_1-v_2}{\lambda},\quad \mu=x_1+x_2-\frac{u_1+u_2}{\lambda},\quad \nu=y_1+y_2-\frac{v_1+v_2}{\lambda}$$

と変換することにより次のような2重積分に戻すことができる。

$$A_{mn}^{rs}(i,j)=\frac{1}{\pi^2}\frac{a}{\lambda}\frac{b}{\lambda}\frac{1}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}[\phi(\tau,\sigma)+(-1)^{m+r}\phi(-\tau,\sigma)+(-1)^{n+s}\phi(\tau,-\sigma)+(-1)^{m+r+n+s}\phi(-\tau,-\sigma)]$$
$$\times[(-1)^{m+r}m\sin r\pi\tfrac{a}{\lambda}\tau-r\sin m\pi\tfrac{a}{\lambda}\tau]\,[(-1)^{n+s}s\sin s\pi\tfrac{b}{\lambda}\sigma-n\sin s\pi\tfrac{b}{\lambda}\sigma]\,d\tau d\sigma.$$
$$(m\neq r,\ n\neq s) \qquad (1\text{-}8)$$

$$B_{mn}^{rs}(i,j)=\frac{1}{\pi^2}\frac{a}{\lambda}\frac{b}{\lambda}\frac{1}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}[\phi(\tau,\sigma)+(-1)^{m+r}\phi(-\tau,\sigma)+(-1)^{n+s}\phi(\tau,-\sigma)+(-1)^{m+r+n+s}\phi(-\tau,-\sigma)]$$
$$\times[(-1)^{m+r}r\sin r\pi\tfrac{a}{\lambda}\tau-m\sin m\pi\tfrac{a}{\lambda}\tau]\,[(-1)^{n+s}n\sin s\pi\tfrac{b}{\lambda}\sigma-s\sin n\pi\tfrac{b}{\lambda}\sigma]\,d\tau d\sigma.$$
$$(m\neq r,\ n\neq s) \qquad (1\text{-}9)$$

$$C_{mn}^{rs}(i,j)=\frac{1}{\pi^2}\frac{a}{\lambda}\frac{b}{\lambda}\frac{1}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}[\phi(\tau,\sigma)+(-1)^{m+r}\phi(-\tau,\sigma)+(-1)^{n+s}\phi(\tau,-\sigma)+(-1)^{m+r+n+s}\phi(-\tau,-\sigma)]$$
$$\times[(-1)^{m+r}r\sin r\pi\tfrac{a}{\lambda}\tau-m\sin m\pi\tfrac{a}{\lambda}\tau]\,[(-1)^{n+s}s\sin s\pi\tfrac{b}{\lambda}\sigma-n\sin n\pi\tfrac{b}{\lambda}\sigma]\,d\tau d\sigma.$$
$$(m\neq r,\ n\neq s) \qquad (1\text{-}10)$$

以下、$(m,r)$、$(n,s)$の種々の組合せに対しても同様に計算できる。

## [付録2]

横方向磁界の連続条件より、(2)、(4)式を用いて

$$\sum_{i=1}^{N}A_j^i\cdot K_i=H_{j0}^{inc} \qquad (2\text{-}1)$$

と書ける。ここで、$H_{j0}^{inc}=2H_{tj}^{inc}/Y_0$であり、$A_j^i$は積分作用素として

$$A_j^i\cdot K_i=\frac{j2\omega\varepsilon}{Y_0}\int_{S_i}[\delta_{ij}\dot{G}_{st}^{*}(P_j,P_i)+\dot{G}_t(P_j,P_i)]\cdot K_i(P_i)\,dS_i \qquad (2\text{-}2)$$

を意味するように用いてある。$\dot{G}_{st}^{*}$、$\dot{G}_t$はそれぞれ$\dot{G}_s^{*}$、$\dot{G}$の$k(=$

の成分を除いたものを意味する.

管内の横方向電界を

$$K_i(\rho_i) = K_i^{inc}(\rho_i) + \sum_{mn}^{M_i N_i} [V_{mn}^i h_{mn}^{iH}(\rho_i) + U_{mn}^i h_{mn}^{iE}] \qquad (2\text{-}3)$$

と近似すれば、この解は

$$J^2 = \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \| \sum_{i=1}^{N} A_j^i \cdot K_i - H_{j0}^{inc} \|^2 dS_j \qquad (2\text{-}4)$$

を最小にしなければならない。ここで(2-4)式の右辺は

$$\int_{S_j} \| \sum_{i=1}^{N} A_j^i \cdot K_i - H_{j0}^{inc} \|^2 dS_j = \int_{S_j} \{ \sum_{i=1}^{N} A_j^i \cdot K_i - H_{j0}^{inc} \} \cdot \overline{\{ \sum_{k=1}^{N} A_j^k \cdot K_k - H_{j0}^{inc} \}} \, dS_j$$
$$= [ \sum_{i=1}^{N} A_j^i \cdot K_i - H_{j0}^{inc}, \sum_{k=1}^{N} A_j^k \cdot K_k - H_{j0}^{inc} ]_j \qquad (2\text{-}5)$$

を意味し、さらに横棒線(bar)は共役複素量であることを示す.

(2-4)式の右辺に(2-3)式を代入して、積分を実行し、$J^2$を$\overline{V_{rs}^i}$, $\overline{U_{rs}^i}$で偏微分した結果を零とおけば次の連立方程式を得る.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{mn}^{M_i N_i} \{ \sum_{j=1}^{N} [A_j^i \cdot h_{mn}^{iH}, A_j^k \cdot h_{rs}^{kH}]_j V_{mn}^i + \sum_{j=1}^{N} [A_j^i \cdot h_{mn}^{iE}, A_j^k \cdot h_{rs}^{kH}]_j U_{mn}^i \} = F_{rs}^{kH} \qquad (2\text{-}6)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{mn}^{M_i N_i} \{ \sum_{j=1}^{N} [A_j^i \cdot h_{mn}^{iH}, A_j^k \cdot h_{rs}^{kE}]_j V_{mn}^i + \sum_{j=1}^{N} [A_j^i \cdot h_{mn}^{iE}, A_j^k \cdot h_{rs}^{kE}]_j U_{mn}^i \} = F_{rs}^{kE} \qquad (2\text{-}7)$$

ここに.

$$F_{rs}^{kH} = \sum_{j=1}^{N} \{ [H_{j0}^{inc}, A_j^k \cdot h_{rs}^{kH}]_j - \sum_{i=1}^{N} [A_j^i \cdot K_i^{inc}, A_j^k \cdot h_{rs}^{kH}]_j \}, \qquad (2\text{-}8)$$

$$F_{rs}^{kE} = \sum_{j=1}^{N} \{ [H_{j0}^{inc}, A_j^k \cdot h_{rs}^{kE}]_j - \sum_{i=1}^{N} [A_j^i \cdot K_i^{inc}, A_j^k \cdot h_{rs}^{kE}]_j \}. \qquad (2\text{-}9)$$

いま、§2.の(13)式と同様にして結合係数を

$$P_{mn}^{rs}(jH, kE) = \int_{S_j} h_{mn}^{jH} \cdot (A_j^k \cdot h_{rs}^{kE}) \, dS_j$$
$$= \frac{j2\omega\varepsilon}{\gamma_0} \delta_{jk} \int_{S_j} h_{mn}^{jH} \cdot \dot{G}_{st}^{*}(\rho_j, \rho_k) \cdot h_{rs}^{kE} \, dS_k dS_j + Y_{mn}^{rs}(jH, kE), \qquad (2\text{-}10)$$

で定義すると.

$$A_j^k \cdot h_{rs}^{kH} = \sum_{mn}^{M_i N_i} [P_{mn}^{rs}(jH, kH) h_{mn}^{jH} + P_{mn}^{rs}(jE, kH) h_{mn}^{jE}], \qquad (2\text{-}11)$$

$$\mathbb{A}_j^k \cdot \mathbb{h}_{rs}^{kE} = \sum_{mn}^{M_j N_j} [P_{mn}^{rs}(jH, kE)\mathbb{h}_{mn}^{jH} + P_{mn}^{rs}(jE, kE)\mathbb{h}_{mn}^{jE}] \qquad (2\text{-}12)$$

と展開でき、さらにこれらの式を用いると

$$[\mathbb{A}_j^i \cdot \mathbb{h}_{mn}^{iE}, \mathbb{A}_j^k \cdot \mathbb{h}_{rs}^{kH}]_j = \sum_{pq}^{M_j N_j} [P_{pq}^{mn}(jH, iE)\overline{P_{pq}^{rs}(jH, kH)} + P_{pq}^{mn}(jE, iE)\overline{P_{pq}^{rs}(jE, kH)}]. \qquad (2\text{-}13)$$

と表すことができる。その他の組合せについても(2-13)式と同様の形式で表わされる。

(2-6), (2-7)式から展開係数$V_{mn}^i$, $U_{mn}^i$を求めれば、開口部の横方向電界$\mathbb{K}_i$が決り、電磁界は完全に決定される。

輻射科学研究会資料

# "複素変数を用いた界の記述およびその応用"

橋本正弘　藤沢和男

大阪大学基礎工学部

昭和45年10月2日

## まえがき

電磁界境界値問題において境界が円，楕円等のように直交座標系に適している場合，境界値問題は解析的に容易に解ける．しかし任意形状境界に対しては解析処理が非常に難しく，変分法[1]や point-matching 法[2]等の近似的数値解法で処理される．これは波動関数が複雑な関数のため解析過程で数式の操作が煩雑になるからである．静電場問題では，これらを克服するため，変数を複素数にし，複素関数論（解析接続，留数計算，等角写像等）を駆使し解析的に解かれている[1]．波動問題では Wiener-Hopf 法[3]がこれに当る．しかし Fourier 解析に基礎づけられているため特別な形状（線状）の境界に限られる．

一般に波動界を複素変数で表わす試みは Vekua[4]によってなされた．しかし彼は閉領域における，内部に波源をもたない界の記述式しか得ていない．本文では，外領域

で外向放射条件をみたす界の複素積分表示式を示し，これを用いれば留数計算でき解析処理が容易になることを示している．また，この記述式を内部の界に適用すればVekuaの得たものと一致することを示している．さらに，複素変数を領域の写像関数を使って変数変換し，境界形状に適した記述式にして，これを任意形状の導体散乱体からの散乱波の解析に応用している．

## 1. 内部界

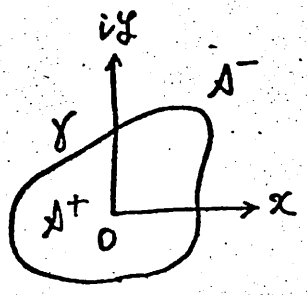



図 1．

2次元座標系を$(X, Y)$，波数を$k$とする．本文ではすべて次の規格化座標系を用いる．

$$x=\frac{1}{2}kX,\quad y=\frac{1}{2}kY \qquad (1)$$

そのとき2次元波動界$u$は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u+4u=0 \qquad (2)$$

をみたす．時間因子を$e^{j\omega t}$とすれば一般に$u$は

$j$ を含む複素数であるが，これとは別に

$$z = x + iy \tag{3}$$

のように $i$ で結ばれた複素数と考え，これらと同時に取り扱う．各記号の上に ‾ を付けるとその $i$ に関する共役を表わす．関数 $u$ を $z, \bar{z}$ で表わせば

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{4}$$

および共役微分（$z \to \bar{z}$, $i \to -i$）演算子より

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} u + u = 0 \tag{5}$$

を得る．Vekua は式(2)を解くかわりに式(5)を，双曲型偏微分方程式の解法を用いて解いた．[4] 彼は $A^+$（図1）で正則な関数 $u$ が次のように表わせることを示した．

$$u(z, \bar{z}) = \overline{w}(z) - \int_0^z \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(2\sqrt{z(z-t)}\right) \overline{w}(t)\, dt + C.C. \tag{6}$$

ここで $J_0$ は Bessel 関数，$w(z)$ は $A^+$ で正則な関数，C.C. は先行する項の $i$ に関する共役量，すなわち

$$C_1C_1 = \overline{\Phi(z)} - \int_0^{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial t} J_0(2\sqrt{z(z-t)})\,\overline{\Phi(t)}\,dt$$

である．いま式(6)で $z$, $\bar{z}$ を全く独立な変数とみなせば $U(z,\bar{z})$ は実際の界の"一般化された界"であると考えられる．そして $\bar{z}=0$ とすれば $C_1C_1 = \overline{\Phi(0)}$, $\partial J_0(2\sqrt{z(z-t)})/\partial t = 0$ より $U(z,0) = \Phi(z) + \overline{\Phi(0)}$．さらに $z=0$ とすれば実際の界（原点における）$U(0,0) = \Phi(0) + \overline{\Phi(0)}$ である．すなわち $\Phi(0)$ の虚部は物理的な意味をもたない．したがって $\Phi(0)$ をこれに関して実数であると仮定する．これより

$$\Phi(z) = U(z,0) - \frac{1}{2}U(0,0) \qquad (7)$$

式(6)は，界 $U$ は式(7)の正則関数 $\Phi(z)$ から得られ，界 $U$ のもつ情報量は全て $\Phi(z)$ に含まれていることを示す．したがって界 $U$ を直接，解析処理するのが難しい場合 $\Phi(z)$ を処理すればよい．たとえば界 $U$ を平面波の合成で表わすことを考える．界 $U$ の実変数に $x = (z+\bar{z})/2$, $y = (z-\bar{z})/2i$ を代入し，$z, \bar{z}$ の関数にする．そのうち $\bar{z}=0$ として式(7)の正則関数を作る．

$\overline{u}(z)$ を原点のまわりで展開する.

$$\overline{u}(z) = \frac{1}{2}C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n!} z^n \qquad (8)$$

$$C_n = \frac{\partial^n}{\partial z^n} u(z,0)\Big|_{z=0}$$

$C_n$ を使って $F(\phi)$ を定義する

$$F(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} j^n C_n e^{jn\phi}$$

これの Fourier 逆変換より

$$C_n = \frac{1}{2\pi j^n} \int_0^{2\pi} F(\phi) e^{-jn\phi} d\phi \qquad (9)$$

式(9)を式(8)に代入し, 無限級数を指数関数に直せば

$$\overline{u}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \left( e^{jze^{-j\phi}} - \frac{1}{2} \right) d\phi \qquad (10)$$

を得る. 上式の ( ) は $x$ 軸に対し $\phi$ の角度の方向に伝搬する平面波 $e^{-2j(x\cos\phi + y\sin\phi)}$ に対応する (式(7)参照) 正則関数である. これから直ちに $u$ は平面波の合成として次のように書ける.

$$u(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) e^{-2j(x\cos\phi + y\sin\phi)} d\phi \qquad (11)$$

式(11)は，もちろん，実変数解析でも導びけるが，煩雑で かつ数値公式も幾つか用いる必要がある．

## 2. 外部問題

領域 $\Delta^-$（図1）は無限遠点を含む．散乱波のように波源は全て $\Delta^+$ にあり，放射条件をみたす解は式(6)で表わせない．そこで $\Delta^-$ で正則，$z=\infty$ で有界な正則関数 $\Psi_*(z)$ を定義する．$\Psi_*(z)$ は $\zeta$ と共に含む複素数で，かつ

$$\Psi_*(\infty) = \zeta \text{ に関して実数} \qquad (12)$$

とする．図2に示すように $\gamma$ を囲む閉曲線を $\gamma_c$，$z$ を $\gamma_c$ の外にあるものとする．放射解 $U_0$ と $\Psi(z)$ を用いて

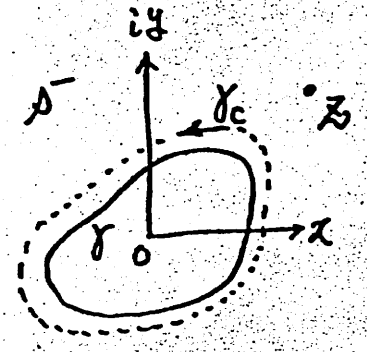


図 2

$$U_0(z,\bar{z}) = A_0 K(z,\bar{z};0)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_c}\frac{\partial}{\partial t}K(z,\bar{z};t)\Psi_*(t)\,dt + C.C \qquad (13)$$

と表わす．ここで

$$A_0 = \Psi_*(\infty)$$
$$K(z,\bar{z};t) = \pi j H_0^{(2)}\left(2\sqrt{\bar{z}(z-t)}\right)$$

$H_0^{(2)}$は Hankel関数 $(=J_0-jY_0)$. 積分は$\gamma_c$を正方向に遂行され, 留数計算できる. $z$が$\gamma_c$より十分離れているとき

$$\frac{\partial}{\partial t}K = \pi j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} H_m^{(2)}(2\rho)\, e^{-im\theta} \qquad (14)$$

もし $\Psi_*(z)$が次のように与えられているとき

$$\Psi_*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad (15)$$

式(14)を使って留数計算すれば

$$u_0(z,\bar{z}) = \pi j\, b_0 H_0^{(2)}(2\rho) + \pi j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(n-1)!} H_n^{(2)}(2\rho)\, e^{-in\theta} + C.C. \qquad (16)$$

ただし $z=\rho e^{i\theta}$. $z=\infty$の近傍では$\Psi_*(z)$は必ず式(15)で表わせる. したがって式(13)は放射界を表わす複素記述式である. 前章と同様に, やはり$\Psi_*(z)$の性質を調べると$u_0$の振舞いを明らかにできる.

$\gamma$が十分小さく, $z$も$\gamma$の付近にある場合, 高次項を無視すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}K \sim \frac{1}{t-z} \qquad (17)$$

式(13)の第2項は Cauchy 積分となり, $\Psi_*(\infty)-\Psi_*(z)$を与える. 一方 $H_0^{(2)} \sim (\pi j + 2C + 2\log\rho)/\pi j$ $(C=0.5772\cdots\cdots)$であるから

$$u_0(z,\bar{z}) \sim A_0(\pi j + 2C + 1 + 2\log\rho) - \Psi_*(z) + C.C. \qquad (18)$$

式(18)は $u_0$ の $\gamma$ 作正の静電近似界である．静電界は等角写像法[1]によって求められる．いまこれを $U(z)$ とすれば写像関数は $U(z)$ の共役関数 $V(z)$ の複素結合 $U+iV$ で表わせる．(実際は写像関数をみつけ，この実部で静電界を知る．)

この写像関数と $\Psi_*(z)$ の関係は近似的に

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \Psi_*(\infty) = \frac{1}{4}\left(\frac{U+iV}{\log z}\right)_{z=\infty} \\ \Psi_*(z) &= A_0 + 2A_0\log z - \frac{1}{2}(U+iV) \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

である．$U+iV$ より $\Psi_*(z)$ は容易に求められ，これを式(13)に代入すれば波動界を得る．したがって従来静電場問題にしか適用できなかった等角写像理論を波動界にまで拡張できる．

式(13)は部分積分より

$$u_0(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_c} K(z,\bar{z};t)\,\Psi(t)\,dt + C.C. \qquad (20)$$

と変形される．ただし，

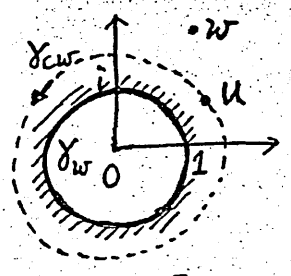
$$\Psi(z)=\frac{\Psi_*(\infty)}{z}-\Psi_*'(z) \qquad (21)$$

$\Psi_*'$ は $\Psi_*$ の微分である. Kの定義式(頁6下)より明らかなように式(20)(あるいは式(13))は $z=0$ で発散し, 境界の内部に原点が選べない Strip のような薄い板状境界には適用できない. そこで以下では, これらを含む任意形状境界に適用した記述式を示す. $\Lambda^-$ を $w$-平面の単位円の外領域に写像する関数は, $z$-平面を適当に $z_0$ ($=x_0+iy_0$) だけ移動すれば, 次のように定数項のない級数で表わせる.[5]

$$\zeta=z-z_0=\alpha w+\frac{\beta_1}{w}+\frac{\beta_2}{w^2}+\cdots\cdots \qquad (22)$$

$$(\alpha>0)$$

$\beta_n$ は $i$ を含む複素定数である. $z$-平面と $z_0$ 移動した平面と $\zeta$-平面とする. $\zeta$-平面の境界, 点, 等は $z$-平面のそれらと全く同じであるから図2の記号をそのまま借用する. $\zeta$-平面の $\gamma$, $\gamma_c$, 点 $\zeta$, $\zeta$ はそれぞれ $w$-平面の $\gamma_w$, $\gamma_{cw}$, $w$, $u$ に対応するとする(図3). そして次の量を定義する.




$w$-平面

図3

$$G_0(\xi,\bar{\xi};\zeta,\bar{\zeta}) = -\pi j H_0^{(2)}\left(2\sqrt{(\xi-\zeta)(\bar{\xi}-\bar{\zeta})}\right) \tag{23}$$

$$\tilde{G}_0(\xi,\bar{\xi};\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{cw}} \overline{G_0(\xi,\bar{\xi};\zeta,\bar{\zeta})}\,\frac{du}{u} \tag{24}$$

次で式(24)の積分は $\overline{G_0}$ の $u$ のみについて（$\bar{u}$ は定数とみなす）正方向に遂行される．式(24)を使って放射場 $u_0$ を

$$u_0(\xi,\bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_c} \tilde{G}_0(\xi,\bar{\xi};\zeta)\,\Pi(\zeta)\,d\zeta + C.C. \tag{25}$$

で表わす．式(25)は，$\tilde{G}_0$ を $-G_0(\xi,\bar{\xi};\zeta,0)$ とすれば式(20)と一致する．$\Pi(\xi)$ は先に述べたように $\xi=\infty$ で零，$\Delta$ で正則な関数で

$$\Pi(\xi)\frac{d\xi}{dw} = \frac{a_0}{w} + \frac{a_1}{w^2} + \frac{a_2}{w^3} + \cdots\cdots \tag{26}$$

と展開できる．式(21)と対応づければ

$$a_0 = i\text{に関して実数} \tag{27}$$

である．特に閉路 $\gamma$ が十分大きいとすれば，その近くで

$$G_0(\xi,\bar{\xi};\zeta,\bar{\zeta}) \sim -\{\pi j + 2C + \log(\xi-\zeta) + \log(\bar{\xi}-\bar{\zeta})\} \tag{28}$$

公式

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{cw}} \frac{\log(\zeta-z)}{u^{m+1}}\,du = \begin{cases} -\dfrac{1}{m w^m} & (m\geq 1) \\ \log(\alpha w) & (m=0) \end{cases} \qquad (29)$$

を利用すれば（留数計算で容易に算出できる）

$$\tilde{G}_0(\zeta,\bar{\zeta};z) \sim -\{\pi j + 2C + \log(\alpha\bar{w}) + \log(\bar{\zeta}-z)\}$$

ところで式(25)より

$$U_0(\zeta,\bar{\zeta}) \sim -A_0\{\pi j + 2C + 2\log\alpha + \log(w\bar{w})\}$$
$$+\frac{A_1}{w}+\frac{A_2}{2w^2}+\frac{A_3}{3w^3}+\cdots\cdots + C_1\bar{C}_1 \qquad (30)$$

$\zeta$が境界上の点のとき，$w$は$\gamma_w$上の点である．すなわち$w=e^{j\psi}$
$w\bar{w}=1$．したがって式(25)は境界形状の如何にかかわらず$\gamma$上で発散しない．また式(30)は$\gamma$上で($w=e^{j\psi}$) $\psi$に関するFourier展開になるため，未知係数$a_n$は解析的にもとめられる．

## 3. 散乱問題への応用

実空間の座標を(X, Y, Z)とし，全この界に$e^{-j\beta Z}$を仮定する．X-Y平面の波数は

$$k = \sqrt{k_0^2 - \beta^2} \qquad (31)$$

である. $k_0$ は自由空間の波数である. 式(1)と同様, $k$ で規格化した座標を用いる.

入射波 $U_0^i$ の $z$ 成分が境界成分 $E_z^i$ のみの場合, 完全導体散乱体からの散乱波 $U_0$ の $z$ 成分もやはり $E_z$ のみである(E波散乱). $\gamma$ を十分小さいとすれば $\gamma$ 付近の $U_0^i$ は $\xi=0$ で展開できる. これをさらに $w, \bar{w}$ の関数として書く. 散乱波の境界値は

$$f(\psi) = f_0 + f_1 w + f_2 w^2 + \cdots\cdots + C.C. \qquad (32)$$

$$(w = e^{i\psi})$$

ただし $f_0$ は $\psi$ に関して実数とする. $f_n$ は $\gamma$ の大きさの位について分けられる.

$$f_n = f_n^{(0)} + f_n^{(1)} + f_n^{(2)} + \cdots\cdots \qquad (33)$$

式(33)を式(32)に代入し, 境界値を零次, 1次, …の境界値に分解すれば零次の境界値は $-U_0^i(0,0)$, 1次の境界値は $-\frac{\partial}{\partial\xi}U_0^i(0,0)\xi - \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}U_0^i(0,0)\bar{\xi}$ である. 前者は $w, \bar{w}$ について定数, 後者は $w, \bar{w}$ の定数項を含まない. したがって

$$f_n^{(0)}=0\ (n\geq 1),\quad f_0^{(1)}=0 \tag{34}$$

$f_n$と同様に$a_n$についても分解する.

$$a_n=a_n^{(0)}+a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+\cdots\cdots \tag{35}$$

式(30)と式(32)とを上で($w\bar{w}=1$)等しく置けば

$$a_0^{(0)}=-f_0^{(0)}/(\pi j+2C+2\log\alpha) \tag{36}$$

$$a_n^{(0)}=0\quad(n\geq 1) \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(1)}&=0\\ a_n^{(1)}&=n\bar{f}_n^{(1)}\quad(n\geq 1)\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

式(30)は2次以上を無視した近似式であるため,係数は1次までしか求められない. 2次以上の係数を求めるにはさらに精度を上げなければならない. ここでは簡単のため2次までの係数にとどめる.

$$G_0(\xi,\bar{\xi};\eta,\bar{\eta})=-\{\pi j+2C+\log(\xi-\eta)+\log(\bar{\xi}-\bar{\eta})\}\{1-(\xi-\eta)(\bar{\xi}-\bar{\eta})\}-2(\xi-\eta)(\bar{\xi}-\bar{\eta})$$

とを式(24)に代入し,四数計算すれば(頁15下参照)

$$\tilde{G}_0(\xi,\bar{\xi};\eta)=-\{\pi j+2C+\log(\xi-\eta)+\log(d\bar{\xi})\}\{1-(\xi-\eta)\bar{\xi}\}$$

$$-(\bar{\xi}-\bar{\eta})\left(\bar{\xi}+\alpha\bar{w}-\frac{\bar{\beta}_1}{\bar{w}}-\frac{1}{2}\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{w}^2}-\frac{1}{3}\frac{\bar{\beta}_3}{\bar{w}^3}-\cdots\cdots\right) \tag{39}$$

これに式(25)に代入し再び階数計算し，2次までの項のみを残す．
そのとき式(37)を考慮すれば

$$\begin{aligned}
U_0(\xi,\bar{\xi}) = &-(a_0^{(0)}+a_0^{(2)})(\pi j+2C+2\log\alpha+\log w+\log\bar{w}) \\
&-a_0^{(0)}\left\{2\bar{\xi}\left(\alpha w-\frac{\beta_1}{w}-\frac{1}{2}\frac{\beta_2}{w^2}-\frac{1}{3}\frac{\beta_3}{w^3}-\cdots\cdots\right)\right. \\
&\qquad\left.-\xi\bar{\xi}\left(\pi j+2C+2\log\alpha+\log w+\log\bar{w}\right)\right\} \\
&+\frac{1}{w}(a_1^{(1)}+a_1^{(2)})+\frac{1}{2}\frac{1}{w^2}(a_2^{(1)}+a_2^{(2)})+\frac{1}{3}\frac{1}{w^3}(a_3^{(1)}+a_3^{(2)}) \\
&+\cdots\cdots+C_1C_1
\end{aligned} \tag{40}$$

を得る．上式で $a_0^{(0)}$, $a_n^{(1)}$ は既に求められている．2次の係数は，
Y上で $w,\bar{w}$ の関数として表わし，2次の境界値と合せて得られる．

$$\left.\begin{aligned}
a_0^{(2)} &= -\left\{f_0^{(2)}+P_0 f_0^{(0)}+2Q_0 f_0^{(0)}/(\pi j+2C+2\log\alpha)\right\}/(\pi j+2C+2\log\alpha) \\
a_n^{(2)} &= n\bar{f}_n^{(2)}+2n\bar{P}_n+2n\bar{Q}_n f_0^{(0)}/(\pi j+2C+2\log\alpha) \\
&\qquad (n\geq 1)
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
P_0 &= \alpha^2+|\beta_1|^2+|\beta_2|^2+\cdots \\
P_n &= \alpha\bar{\beta}_{n-1}+\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\bar{\beta}_{m+n} \\
Q_0 &= -\alpha^2+|\beta_1|^2+\frac{1}{2}|\beta_2|^2+\frac{1}{3}|\beta_3|^2+\cdots \\
Q_n &= -\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\alpha\bar{\beta}_{n-1}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+n}\right)\beta_m\bar{\beta}_{m+n}
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

ただし $\beta_0 \equiv 0$ とする。以上で2次までの係数が全て求まった。

これらを用いて遠方界を表わす。$|\xi|$ が十分大きいとき公式

$$H_0^{(2)}\left(2\sqrt{(\xi-\eta)(\bar{\xi}-\bar{\eta})}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,n!}\eta^m\bar{\eta}^n\left(\frac{\xi}{\bar{\xi}}\right)^{\frac{n-m}{2}} H_{n-m}^{(2)}\left(2\sqrt{\xi\bar{\xi}}\right)$$

を用いて近傍界(40)を求めた場合と同様にして

$$\begin{aligned} u_0(\xi,\bar{\xi}) = &-\pi j\, H_0^{(2)}(2\rho)\left(a_0^{(0)}+a_0^{(2)}\right) \\ &-\pi j\, H_1^{(2)}(2\rho)\, e^{-i\theta}\left(\alpha a_1^{(1)}\right) \\ &-\pi j\, H_2^{(2)}(2\rho)\, e^{-2i\theta}\left(2\alpha\beta_1 a_0^{(0)}\right) + C.C. \qquad (43) \\ &(\xi = \rho e^{i\theta}) \end{aligned}$$

を得る。式(43)は任意形状の導体散乱体からのE波散乱波である。

---

$$\log(\xi-\eta) = \log(\alpha w) - \left(\frac{u}{w}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{u}{w}\right)^3 - \cdots\cdots$$
$$- \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{3}\Delta^3 - \cdots\cdots$$

$$\Delta = \left(\frac{\beta_1}{\alpha w} + \frac{\beta_2}{\alpha w^2} + \cdots\right)\frac{1}{u} + \left(\frac{\beta_2}{\alpha w} + \frac{\beta_3}{\alpha w^2} + \cdots\right)\frac{1}{u^2} + \left(\frac{\beta_3}{\alpha w} + \frac{\beta_4}{\alpha w^2} + \cdots\right)\frac{1}{u^3} + \cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned} \eta^0 &= 1 \\ \eta^1 &= \alpha u + \cdots\cdots \\ \eta^2 &= \alpha^2 u^2 + 2\alpha\beta_1 + \cdots \\ \eta^3 &= \alpha^3 u^3 + 3\alpha^2\beta_1 u + 3\alpha^2\beta_2 + \cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

入射波 $u_0^i$ の Z 成分が磁界 $H_z^i$ の場合 散乱波の境界値は法線微分量 $-\partial u_0^i/\partial n$ で与えられる(H波散乱). $\xi$-平面における $\gamma$ の法線 $\varepsilon$ それぞれの軸成分 $n_{\xi x}, n_{\xi y}$ の複素結合で定義する.

$$n_\xi = n_{\xi x} + i n_{\xi y} \tag{44}$$

$n_\xi$ は $\gamma$ 上 $(w = e^{i\psi})$ で

$$n_\xi = w \frac{d\xi}{dw} \left| \frac{dw}{d\xi} \right| \tag{45}$$

と書ける. 一方

$$\frac{\partial}{\partial n} = n_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{n}_\xi \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \tag{46}$$

と式(45)より

$$\left| \frac{d\xi}{dw} \right| \frac{\partial}{\partial n} = w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial \rho_w} \tag{47}$$

$$(w = \rho_w e^{i\psi})$$

を得る. 式(47)は $w$-平面の境界 $\gamma_w$ (単位円)の法線微分であり, 外部領域の任意の点で定義できる. この意味で式(47)は"拡張された法線微分"という. また, これは境界上で連続な微分演算子であるから, 鋭い edge のある境界にも適している.

散乱波 $U_0^i$ の境界値 $g(\psi)$ を

$$g(\psi)=-\frac{\partial U_0^i}{\partial \rho_w}\Big|_{\rho_w=1}=g_0+g_1 w+g_2 w^2+\cdots\cdots+C.C. \qquad (48)$$

$$(w=e^{i\psi})$$

と書く．先に示したように $U_0^i$ を原点付近で展開したとき零次項は定数 $U_0^i(0,0)$ であった．したがって式(48)に零次項は含まれない．

$$g_n=g_n^{(1)}+g_n^{(2)}+g_n^{(3)}+\cdots\cdots \qquad (49)$$

1次項は $w(d\bar{z}/dw)$, $\bar{w}(dz/d\bar{w})$ から成る．しかし式(22)より明らかなように これらには定数項がない．したがって

$$g_0^{(1)}=0 \qquad (50)$$

最も粗い近似の近傍則(30)に式(47)を演算すれば

$$\frac{\partial U_0}{\partial \rho_w}=-2a_0-\frac{1}{w}a_1-\frac{1}{w^2}a_2-\cdots\cdots+C.C. \qquad (51)$$

境界上($w=e^{i\psi}$)で1次の境界値と合せば

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(1)}&=-g_0^{(1)}/2=0\\ a_n^{(1)}&=-\bar{g}_n^{(1)} \quad (n\geq 1)\end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

ただし $g_0^{(m)}$ を $\psi$ に関して実数と約束する．同様に2次の境界値と合せば

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(2)} &= -g_0^{(2)}/2 \\ a_n^{(2)} &= -\bar{g}_n^{(2)} \quad (n \geq 1) \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

E波散乱界を求めたとき $G_0$ を3次の精度で近似した。ところが式(52)より $\Psi(\xi)$ は最低次が零次，したがって界 $u_0$ は，式(25)より，4次の精度で表わせる。4次の精度の遠方散乱界は，E波散乱界と同様の方法で次のように求められる。

$$\begin{aligned} u_0(\xi,\bar{\xi}) = &-\pi j H_0^{(2)}(2\rho)\left(a_0^{(2)}+a_0^{(3)}+a_0^{(4)}\right) \\ &-\pi j H_1^{(2)}(2\rho)e^{-i\theta}\left\{\alpha\left(a_1^{(1)}+a_1^{(2)}+a_1^{(3)}\right)-\alpha^2\beta_1\bar{a}_1^{(1)}\right\} \\ &-\pi j H_2^{(2)}(2\rho)e^{-2i\theta}\left\{2\alpha\beta_1 a_0^{(2)}+\alpha^2\left(a_2^{(1)}+a_2^{(2)}\right)/2\right\} \\ &-\pi j H_3^{(2)}(2\rho)e^{-3i\theta}\left\{\alpha^2\beta_1 a_1^{(1)}/2+\alpha^3 a_3^{(1)}/6\right\}+C.C. \qquad (5 \end{aligned}$$

すなわち，さらに $a_0^{(3)}$, $a_0^{(4)}$, $a_1^{(3)}$ を必要とする。これらは多少煩雑であるが先に示したのと全く同様にして求められる。ここでは結果のみを書く。

$$a_0^{(3)} = -\frac{1}{4}g_0^{(3)} - \frac{\alpha^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(R_n - \frac{\bar{\beta}_{n-1}}{\alpha}\right)\bar{g}_n^{(1)} + C.C. \qquad (55)$$

$$\begin{aligned} a_0^{(4)} = &-\frac{1}{4}g_0^{(4)} - \frac{\alpha^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(R_n - \frac{\bar{\beta}_{n-1}}{\alpha}\right)\bar{g}_n^{(2)} \\ &-\frac{\alpha^2}{4}\left\{(1-R_0)(\pi j+2C+2\log\alpha)-\frac{P_0}{\alpha^2}\right\}g_0^{(2)}+C.C. \qquad (5 \end{aligned}$$

$$a_1^{(3)} = -\bar{g}_1^{(3)} + d^2\left\{(\pi j + 2C - 1 + 2\log d)\left(\bar{g}_1^{(1)} - \frac{\beta_1}{d} g_1^{(1)}\right)\right.$$
$$\left. + [2(1-R_0) + U_{01}]\,\bar{g}_1^{(1)} - (\bar{R}_2 + \bar{S}_2 - \bar{V}_{21})\, g_1^{(1)}\right\}$$
$$+ d^2 \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\bar{V}_{n-1,n} - \frac{1}{n}(R_{n-1} + S_{n-1}) + \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n-1}\right)\frac{\bar{\beta}_{n-2}}{d}\right\}\bar{g}_n^{(1)}$$
$$+ d^2 \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\bar{V}_{n+1,n} - \frac{1}{n}(\bar{R}_{n+1} + \bar{S}_{n+1}) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)\frac{\beta_n}{d}\right\} g_n^{(1)} \qquad (57)$$

ここで $\beta_0 \equiv 0$, および

$$\left.\begin{aligned} R_l &= \frac{1}{d^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\beta_m \bar{\beta}_{m+l}, \\ S_l &= \frac{1}{d^2}\sum_{m=1}^{\infty} (m+l)\beta_m \bar{\beta}_{m+l}, \\ U_{ln} &= \frac{1}{d^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m+n+l}\beta_m \bar{\beta}_{m+l}, \\ V_{ln} &= \frac{1}{d^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+l}{m+n}\beta_m \bar{\beta}_{m+l}. \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

以上より，入射波の如何により $g(\psi)$, $f(\psi)$ が定まり，境界形状から $d, \beta_n$ を与えると E, H 波散乱界を計算できる．

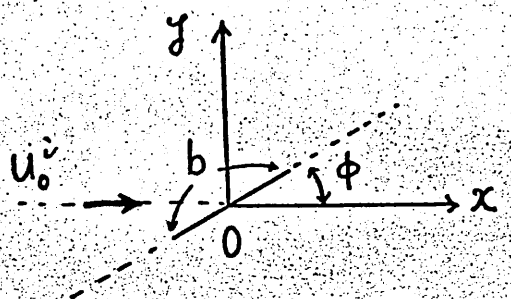



図 4

入射波をX方向に伝搬する平面波 $e^{-jkX} = e^{-2jx}$ とし，図4に示されるように，巾b（想定化中）の導体 strip が $\phi$ の向後で原点におかれている場合を考える．$\phi=0$ のとき写像関数は

$$\xi = z = \frac{b}{4}\left(w + \frac{1}{w}\right) \qquad (59)$$

$z_0 = 0$

である[1]．$\phi \neq 0$ のとき $\alpha > 0$ に送るため $\xi \to \xi e^{-i\phi}$, $w \to w e^{-i\phi}$ とすれば

$$\xi = \frac{b}{4}\left(w + \frac{e^{2i\phi}}{w}\right) \qquad (60)$$

すなわち

$$\alpha = \frac{b}{4},\ \beta_1 = \frac{b}{4}e^{2i\phi},\ \beta_2 = \beta_3 = \cdots = 0$$

これより

$$\left.\begin{aligned} &P_0 = \frac{b^2}{8},\ P_2 = \frac{b^2}{16}e^{-2i\phi},\ P_1, P_n = 0\ (n \geq 3) \\ &Q_n = 0\ (n \geq 0),\ R_0 = S_0 = 1, \\ &R_n = S_n = 0\ (n \geq 1) \\ &U_{0n} = V_{0n} = \frac{1}{n+1},\ U_{ln} = V_{ln} = 0\ (l \neq 0) \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

$$\left.\begin{aligned} &f_0^{(0)} = -\frac{1}{2},\ f_1^{(1)} = \frac{jb}{2}\cos\phi\, e^{-i\phi},\ f_0^{(2)} = \frac{b^2}{8}\cos^2\phi \\ &f_2^{(2)} = \frac{b^2}{8}\cos^2\phi\, e^{-2i\phi},\ \text{その他の } f_n^{(1)}, f_n^{(2)} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

$$g_1^{(1)} = -\frac{jb}{2i}\sin\phi\, e^{i\phi},\quad g_2^{(2)} = -\frac{b^2}{4i}\sin\phi\cos\phi\, e^{-2i\phi}$$
$$g_1^{(3)} = \frac{jb^3}{16i}\sin\phi\cos^2\phi\, e^{i\phi},\quad g_3^{(3)} = \frac{jb^3}{16i}\sin\phi\cos^2\phi\, e^{-3i\phi} \qquad (63)$$
$$g_0^{(1)} = g_0^{(2)} = g_0^{(3)} = g_0^{(4)} = 0,\quad \text{その他の } g_n^{(1)}, g_n^{(2)} = 0$$

式(61), (62)を式(36)-(38), (41)に代入し, 得られた係数 $a_n$ を式(40)に入れると 2次の精度の E波散乱界

$$u_0 = -\pi j H_0^{(2)}(2\beta)\left\{1-\frac{b^2}{4}\cos^2\phi\right\}\Big/\left\{\left(1-\frac{b^2}{8}\right)\left(\pi j+2C+2\log\frac{b}{4}\right)\right\}$$
$$-\pi j H_1^{(2)}(2\beta)(jb^2/4)\cos\phi\cos(\theta-\phi)$$
$$-\pi j H_2^{(2)}(2\beta)(b^2/8)\cos 2(\theta-\phi)\Big/\left(\pi j+2C+2\log\frac{b}{4}\right) \qquad (64)$$

を得る. また 式(61), (63), (52), (53), (55), (56), (54)より 4次の精度の H波散乱界は

$$u_0 = \pi H_1^{(2)}(2\beta)(b^2/4)\left\{1-\frac{b^2}{8}\left(\pi j+2C-\frac{5}{4}+\cos^2\phi+2\log\frac{b}{4}\right)\right\}$$
$$\cdot\sin\phi\sin(\theta-\phi)$$
$$-\pi j H_2^{(2)}(2\beta)(b^4/64)\sin\phi\cos\phi\sin 2(\theta-\phi)$$
$$+\pi H_3^{(2)}(2\beta)(b^4/128)\sin\phi\sin 3(\theta-\phi) \qquad (65)$$

ただし $z=\xi=\rho e^{i\theta}$.

次に図5に示す一辺 $b$ (超接化長)の正四角導体棒

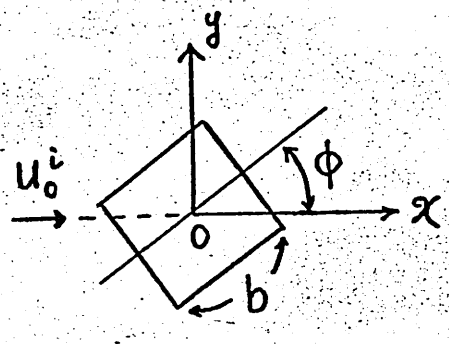



図5

がある場合を考える．そのとき写像関数は逐次近似法でもめられる[6]．$\phi=0$ のとき，近似的に

$$\frac{z}{z_0}=\frac{b}{2}\left(\frac{1125}{1024}w-\frac{203}{2048}\frac{1}{w^3}+\frac{1}{2048}\frac{1}{w^7}\right)$$

$z_0=0$

$\phi\neq0$ の場合は先と同様に $\alpha>0$ となるようにする．すなわち

$$\alpha=0.54932\,b,\quad \beta_3=-0.09022\,\alpha e^{4i\phi},\quad \beta_7=0.00044\,\alpha e^{8i\phi}$$ (6

これより

$$P_0=1.00814\alpha^2,\quad P_4=-0.09026\alpha^2e^{-4i\phi},\quad P_8=0.00044\alpha^2e^{-8i\phi}$$

$$Q_0=-0.99729\alpha^2,\quad Q_4=-0.06013\alpha^2e^{4i\phi},\quad Q_8=0.00038\alpha^2e^{8i\phi}$$

$$R_0=S_0=0.02442,\quad R_4=-0.00012e^{4i\phi},\quad S_4=-0.00028e^{4i\phi}$$

$$U_{0n}=V_{0n}=\frac{0.02442}{n+3},\quad U_{4n}=\frac{R_4}{n+7},\quad V_{4n}=\frac{S_4}{n+3}$$

その他の $\beta_n, P_n, Q_n, R_n, S_n, U_{\ell n}, V_{\ell n}=0$ (6

これより求めた E波散乱界は

$$U_0 = -\pi j H_0^{(2)}(2\beta)(1-1.00814\alpha^2)/\{(1-P_0)(\pi j+2C+2\log\alpha) - 2Q_0\} + 2\pi H_1^{(2)}(2\beta)\alpha^2\cos\theta \qquad (68)$$

および H波散乱界は次のように求める.

$$U_0 = \pi j H_0^{(2)}(2\beta)\{0.97558\alpha^2 + 0.95175\alpha^4(\pi j+2C+2\log\alpha) - 1.45896\alpha^4\}$$
$$-2\pi H_1^{(2)}(2\beta)\alpha^2\{\cos\theta - \alpha^2[(\pi j+2C+2\log\alpha+2.396207)\cdot\cos\theta + 0.045112\cos(\theta-4\phi)]\}$$
$$+\pi j H_2^{(2)}(2\beta)\alpha^4\{\cos 2\theta + 0.18044\cos(2\theta-4\phi)\}$$
$$-\pi j H_3^{(2)}(2\beta)\cdot 0.09022\alpha^4\cdot\cos(3\theta-4\phi) \qquad (69)$$

参考文献


(1) P.M. Morse, H. Feshbach; "Methods of theoretical Physics", P.275, 443, McGraw-Hill, (1953).

(2) R.H.T. Bates; "The theory of the point-matching method for perfectly conducting waveguide and transmission lines", IEEE, MTT-17, June 1969, P.294.

(3) B. Nobel; "Methods based on the Wiener-Hopf

techniques for solution of partial differential equations;" Pergamon (1958).

(4) I.N. Vekua; "New methods for solving elliptic equations;" North-Holland pub. P.58, 89, (1967)

(5) 辻正次; "複素関数論", 槇書店 (昭43).

(6) L.V. Kantrovitch, V.I. Krylov; "Approximate methods of higher analysis;" Noordhoff Ltd., P.358, 447 (1958).

# 円筒状フェライト中の静磁モードについて

増田正光・張年錫・松尾幸人

（大阪大学産業科学研究所）

昭和45年10月

輻射科学研究会

# 円筒状フェライト中の静磁モードについて

# Magnetostatic Modes in the Hollow Pipe of Ferrite and Ferrite Rods.

増田正光
Masumitsu Masuda

張年錫
Nion Sock chang

松尾幸人
Yukito Matso

## 1. 緒　言

平板状及び棒状のフェライト中を伝播する波動のふるまいは多くの研究者によって解析され，又実験による観測も成されている。さて，この波動が満足する方程式を正確に解くことによって，フェライト中の波動の伝播モード関する情報を得ることができるが，フェライト自身が異方性媒質であるために、解析は困難となる。しかし対象にしている波の自由空間波長に比べて，試料が十分に小さいならば，問題を準静磁的に取り扱うことが可能となる。このような場合の伝播モードは静磁モードと呼ばれ，準定常近似については、L.R.Walker[1]が詳細に検討している。

軸方向に磁化された無限あるいは半無限平板状のフェライト中を伝播する静磁モードについての研究はR.W.Damon等[2]によって行なわれた。この時，印加磁界と同方向に遅波特性を持つ後進波（Magnetostatic Volume mode）が誘起され，これと垂直な面内を前進波（Magnetostatic surfa-

ce mode) が伝播することが明らかにされている。最近境界を有する Magnetostatic surface mode についてP.Young[3]が考察している。

棒状フェライト中においても，平板状のものと同様に，静磁モードとして Volume, Surface mode の両方が存在する[4]。この時，両波共に直流印加磁界と同方向に伝播する後進波となる。今静磁モードの方位角に対する依存性を $e^{jn\theta}$ で表わすと，任意の $n$ に対して Volume Wave は多くのモードを持つのに対して，単一の Surface wave mode のみが存在し，$n=0$ の場合には Surface wave は誘起されない。その後、F.W.Schott 等[5]は棒状フェライト中の波動に関する方程式を正確に解き，この結果を静磁モードと比較し，$2\pi b/\lambda_0 < 1$（$b$：フェライト棒の半径，$\lambda_0$：自由空間波長）程度であれば，両者がほぼ一致することを示している。これに対して T.F.Tao 等[6]は棒状フェライト中の波動を実験によって観測し，$\lambda_0$ によって得られる静磁モードが存在することを確認している。

これに先き立ってTrivelpiece等[7]は遅波特性を持つフェライト中の静磁モードと電子ビームとの相互作用による後進波発振器の構成を提案している。彼等は円筒形導波管中にフェライトをつめた場合の静磁モードを解析しており，その後Spector 等[8]はこれと同じ主旨の下に中空円筒状のフェライトを導波管で囲んだ系内を伝播する $n=0$ の方位角に依存しない。Volume magnetostatic mode についての解析を行なっている。

さて，１９６８年、我々の研究室においてフェイトと半導体を用いた固体進行波増幅器の提案が成された[9]。これはフェライト中の後進波と半導体中の空間電荷波との結合によって，増幅作用を得ようとするものであるが、[10]この素子の構成に先き立って，所望の形状のフェライト中を伝播する波動のふるまいを知らねばならない。しかしながら，ここで必要としている中空円筒状のフェライト及び誘電体中に挿入された棒状フェライト（共に導波管で

囲まれた系である）中を伝播する，方位角に依存する静磁モードはこれまでに解析されていない。そこで本論文においてこれを取り扱い，また誘電体中に置かれた中空円筒状のフェライト中を伝播するモードも合わせて考察する。

## 2. 円筒状フェライト中の静磁モード

固体進行波増幅器に使用される円筒状フェライトの半径は0.1$cm$，長さ1$cm$程度のものを考えている。したがって，動作周波数が1～5 $GH_Z$ であれば，フェライトの円周 $2\pi b$ と自由空間波長の比 $2\pi b/\lambda_0$ は0.08～0.4ぐらいとなり，準定常近似は十分に成立する範囲内にある[5]。この時フェライト中には静磁モードが誘起され，これと半導体中のSlow space charge wave との結合が可能であろう。

この章では，導波管で囲まれた中空円筒状のフェライト；誘電体中に挿入された棒状フェライトを導波管で囲んだ系、及び誘電体中に置かれた中空円筒状のフェライトを想定しこれらの系内を伝播する静磁モードを解析する。

準定常近似の下では，磁界の強さHをスカラーポテンシャル$\phi$の勾配として表現することができる。

$$\vec{H} = -\nabla\phi \tag{1}$$

更に

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{B} = \bar{\mu} \cdot \vec{H} \tag{3}$$

ここで

$$\bar{\mu} = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu_1 & -j\mu_2 & 0 \\ j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\mu_1 = 1 + [G/(1-F^2)]$$

$$\mu_2 = [GF/(1-F^2)]$$

$$F = \omega / \gamma H_0$$

$$G = 4\pi M s / \mu_0 H_0$$

$H_0$ ： 直流印加磁界（Z方向に印加する）

$4\pi Ms$ ：フェライトの飽和磁化

$\gamma$ ：磁気回転比　$\gamma H_0$ ：フェライトの共振周波数

$F$ ： Normalized Frequency

(4)式で与えられる透磁率テンソルには，損失及び減磁場係数は含まれていない。なお，$F$に対する$\mu_1$，$\mu_2$の変化は図1のようになる。

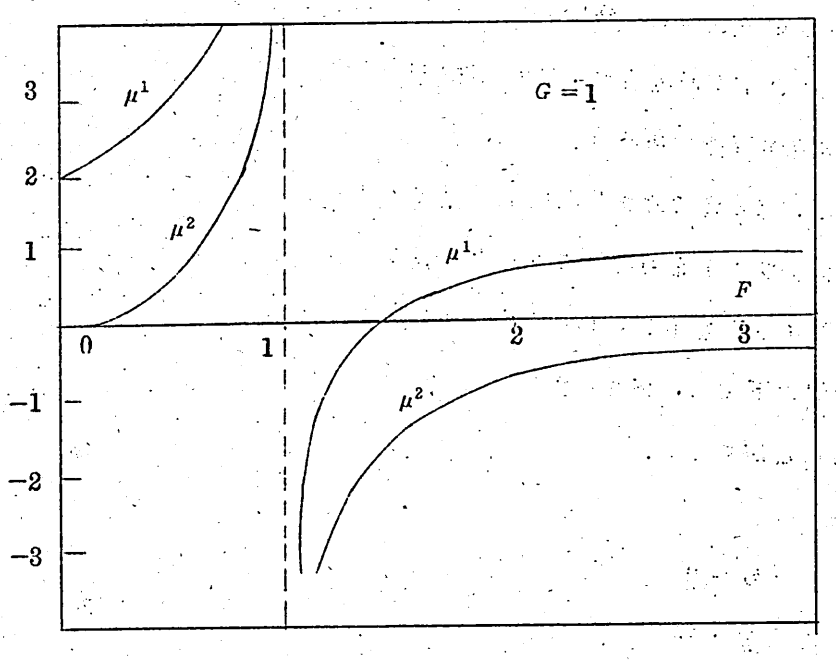



図1　$F$に対する$\mu_1$，$\mu_2$の変化

(1)～(4)式により，スカラーポテンシャル$\phi$の満足する式は次のようになる。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2}=0 \qquad (5)$$

今，$\phi$が$\exp j(\omega t-\beta Z)\cdot\exp(jn\theta)$で変化するとすれば(5)式より次式を得る。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)-\left(\frac{n^2}{r^2}-T^2\right)\phi=0 \qquad (6)$$

ここで $T^2=-\beta^2/\mu_1$ (7)

又，方位角の依存性は$n$に含まれている。この論文では$n=1$の方位角に依存する静磁モード(Azimuthally dependent, magnetostatic mode)について解析する。

2－1　導波管で囲まれた中空円筒状フェライト中の静磁モード

この系は図2のように，導波管で囲まれたフェライトの中心部を空洞にし

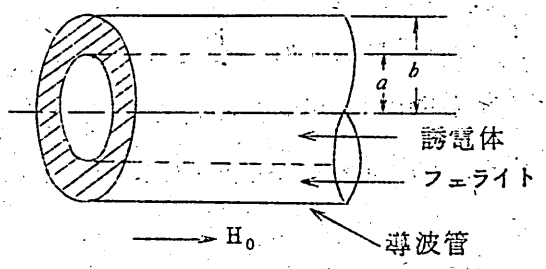



図2　（系1）

ここに誘電体棒を挿入したものである。誘電体の部分に半導体を入れれば，先に述べたような固体進行波増幅器を構成することができる。$H_0$はフェライトの軸方向に印加されている。

$n=1$の場合の静磁モードについて解析するのであるが，図2からもわかるように，二つの領域について考えねばならない。(6)式よりスカラーポテン

シャルφは求められるが，誘電体媒質中では透磁率が$\mu_0$ である（$\mu_1 = 1$，$\mu_2 = 0$）ことを考慮すると，(1)式を使って各領域の磁界成分が決定できる。

$0 \leqq r \leqq a$ （誘電体中）

$$\phi_i = C_1 I_1 (\beta r) \tag{8}$$

$$H_{ir} = -C_1 \beta \left\{ I_0 (\beta r) - \frac{1}{\beta r} I_1 (\beta r) \right\} \tag{9}$$

$$H_{i\theta} = -C_1 j \frac{1}{r} I_1 (\beta r) \tag{10}$$

$$H_{iz} = C_1 j\beta I_1 (\beta r) \tag{11}$$

$$B_{ir} = -C_1 \mu_0 \beta \left\{ I_0 (\beta r) - \frac{1}{\beta r} I_1 (\beta r) \right\} \tag{12}$$

$a \leqq r \leqq b$ （フェライト中）

$$\phi_f = C_2 J_1 (Tr) + C_3 N_1 (Tr) \tag{13}$$

$$H_{fr} = -T \left[ C_2 \left\{ J_0 (Tr) - \frac{1}{Tr} J_1 (Tr) \right\} + C_3 \left\{ N_0 (Tr) - \frac{1}{Tr} N_1 (Tr) \right\} \right] \tag{14}$$

$$H_{f\theta} = -\frac{1}{r} j \left\{ C_2 J_1 (Tr) + C_3 N_1 (Tr) \right\} \tag{15}$$

$$H_{fz} = j\beta \left\{ C_2 J_1 (Tr) + C_3 N_1 (Tr) \right\} \tag{16}$$

$$B_{fr} = -\mu_0 C_2 \left[ \mu_1 T \left\{ J_0 (Tr) - \frac{1}{Tr} J_1 (Tr) \right\} + \mu_2 \frac{1}{r} J_1 (Tr) \right] - \mu_0 C_3 \left[ \mu_1 T \left\{ N_0 (Tr) - \frac{1}{Tr} N_1 (Tr) \right\} + \mu_2 \frac{1}{r} N_1 (Tr) \right] \tag{17}$$

但し，添字 $i$ は誘電体中の諸量を表わし，添字 $f$ はフェライト中の諸量を表わすものとする。又，各諸量に附加される $exp\{j(\omega t - \beta z) + j\theta\}$ は省略してある。

さて，境界条件を導入して，この系の分散関係式を求めよう。

先ず，$r = b$ で $B_{fr} = 0$ より

$$C_2 \left\{ \mu_1 T J_0 (Tb) - \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{b} \right) J_1 (Tb) \right\}$$

$$+C_3\left\{\mu_1 T N_0(Tb)-\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{b}\right)N_1(Tb)\right\}=0 \tag{18}$$

$r=a$ で $Br$ が連続であることから

$$C_2\left\{\mu_1 T J_0(Ta)-\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{a}\right)J_1(Ta)\right\}$$

$$+C_3\left\{\mu_1 T N_0(Ta)-\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{a}\right)N_1(Ta)\right\}$$

$$=C_1 j\beta\left\{I_0(\beta a)-\frac{1}{\beta a}I_1(\beta a)\right\} \tag{19}$$

更に，$r=a$ でポテンシャル $\phi$ も連続であるから

$$C_1 J_1(Ta)+C_3 N_1(Ta)=C_1 I_1(\beta a) \tag{20}$$

(18)，(19) より

$$C_2=\frac{1}{\triangle}(-\beta)\left\{I_0(\beta a)-\frac{1}{\beta a}I_1(\beta a)\right\}$$

$$\times\left\{\mu_1 T N_0(Tb)-\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{b}\right)N_1(Tb)\right\}C_1 \tag{21}$$

$$C_3=\frac{1}{\triangle}\beta\left\{I_0(\beta a)-\frac{1}{\beta a}I_1(\beta a)\right\}$$

$$\times\left\{\mu_1 T J_0(Tb)-\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{b}\right)J_1(Tb)\right. \tag{22}$$

$$\triangle=\left\{\mu_1 T J_0(Tb)-\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{b}\right)J_1(Tb)\right\}$$

$$\times\left\{\mu_1 T N_0(Ta)-\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{a}\right)N_1(Ta)\right\}$$

$$-\left\{\mu_1 T N_0(Tb)-\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{b}\right)N_1(Tb)\right\}$$

$$\times\left\{\mu_1 T J_0(Tb)-\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{a}\right)J_1(Ta)\right\} \tag{23}$$

(20)～(23)式より

$$\beta a \frac{I_0(\beta a)}{I_1(\beta a)} - 1$$

$$\{J_0(Tb) - (1-\frac{\mu_2}{\mu_1})\frac{1}{Tb}J_1(Tb)\}$$

$$\times\{N_0(Ta) - (1-\frac{\mu_2}{\mu_1})\frac{1}{Ta}N_1(Ta)\}$$

$$-\{N_0(Tb) - (1-\frac{\mu_2}{\mu_1})\frac{1}{Ta}N_1(Tb)\}$$

$$\times\{J_0(Ta) - (1-\frac{\mu_2}{\mu_1})\frac{1}{Ta}J_1(Ta)\}$$

$$= \mu_1 Ta \frac{}{} \qquad (24)$$

$$N_1(Ta)\{J_0(Tb) - (1-\frac{\mu_2}{\mu_1})\frac{1}{Tb}J_1(Tb)\}$$

$$-J_1(Ta)\{N_0(Tb) - (1-\frac{\mu_2}{\mu_1})\frac{1}{Tb}N_1(Tb)\}$$

(24)式がこの系の分散関係式であるが，(7)式からわかるように，$\mu_1$ の正負によって，$T$が実数か純虚数かになり，この系内で2種のモードが誘起されることになる。（図1参照）。

$\mu_1 < 0$ なる領域のうち $1 \leq F \leq \sqrt{1+G}$ の周波数範囲内では magneto-static Volume modeが誘起される。この時，$T$は実数となるので，(24)式はこのモードに関する分散関係を表現していることになる。

もう一方のモードは $\mu_1 > 0$ の時に誘起されるものであり，これは magnetostatic surface mode と呼ばれているものである。このモードに関する情報は(24)式に既に含まれている。この時，(7)式で与えられる$T$は純虚数となるので $T = jT'$ として，(24)式を変形すればよい。

$$N_0(jT'b) = -\frac{2}{\pi}K_0(T'b) + jI_0(T'b) \qquad (25)$$

$$N_1(jT'b) = -I_1(T'b) + j\frac{2}{\pi}K_1(T'b) \qquad (26)$$

(25)，(26)式を使って，(24)式を変形すると

$$\beta a \frac{I_0(\beta a)}{I_1(\beta a)} - 1$$

$$\left\{ I_0(T'a) - \frac{1}{T'a}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) I_1(T'a) \right\}$$

$$\times \left\{ K_0(T'b) + \frac{1}{T'b}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) K_1(T'b) \right\}$$

$$- \left\{ I_0(T'b) - \frac{1}{T'b}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) I_1(T'b) \right\}$$

$$\times \left\{ K_0(T'a) + \frac{1}{T'a}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) K_1(T'a) \right\}$$

$$= \mu_1 T'a \frac{}{} \qquad (27)$$

$$I_1(T'a)\left\{ K_0(T'b) + \frac{1}{T'b}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) K_1(T'b) \right\}$$

$$+ K_1(T'a)\left\{ I_0(T'b) - \frac{1}{T'b}\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) I_1(T'b) \right\}$$

(27)式が $n = 1$ の場合の Azimuthally dependent, magnetostatic surface mode に関する分散関係を与えてくれる。

(24)式及び(27)式を計算式を用いて解いた結果を，図3及び図4に示してある。ここで，パラメーターとして，誘電体とフェライトの半径の比 $a/b$ をとり，又 G = 1 と仮定している。

図3に示されている Volume mode の $a/b$ に対する変化は，Specfor 等[8] が求めた $n = 0$ の場合の (Azimuthally independent, magneto-static volume mode) 結果と一致している。すなわち $a/b$ の比が大きくなるにつれて，曲線はしだいに上昇し，遅波率が増加する。しかし，この mode の通過帯域は $a/b$ の比に関係なく $1 \leq F \leq \sqrt{1+G}$ で与えられる。

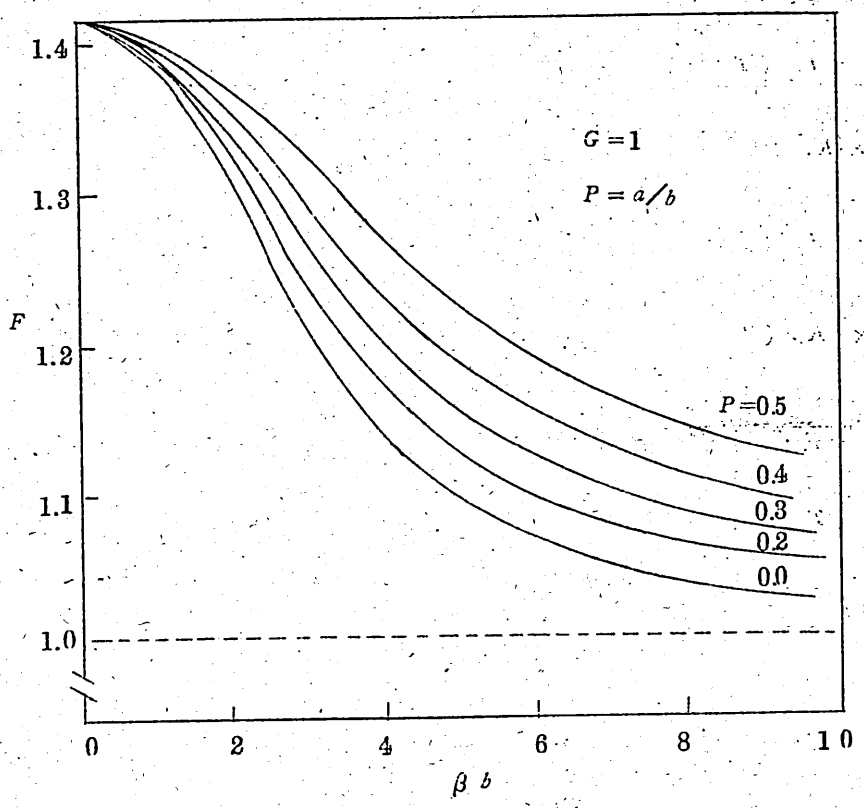



図 3　系 1 の Volume mode (n=1)

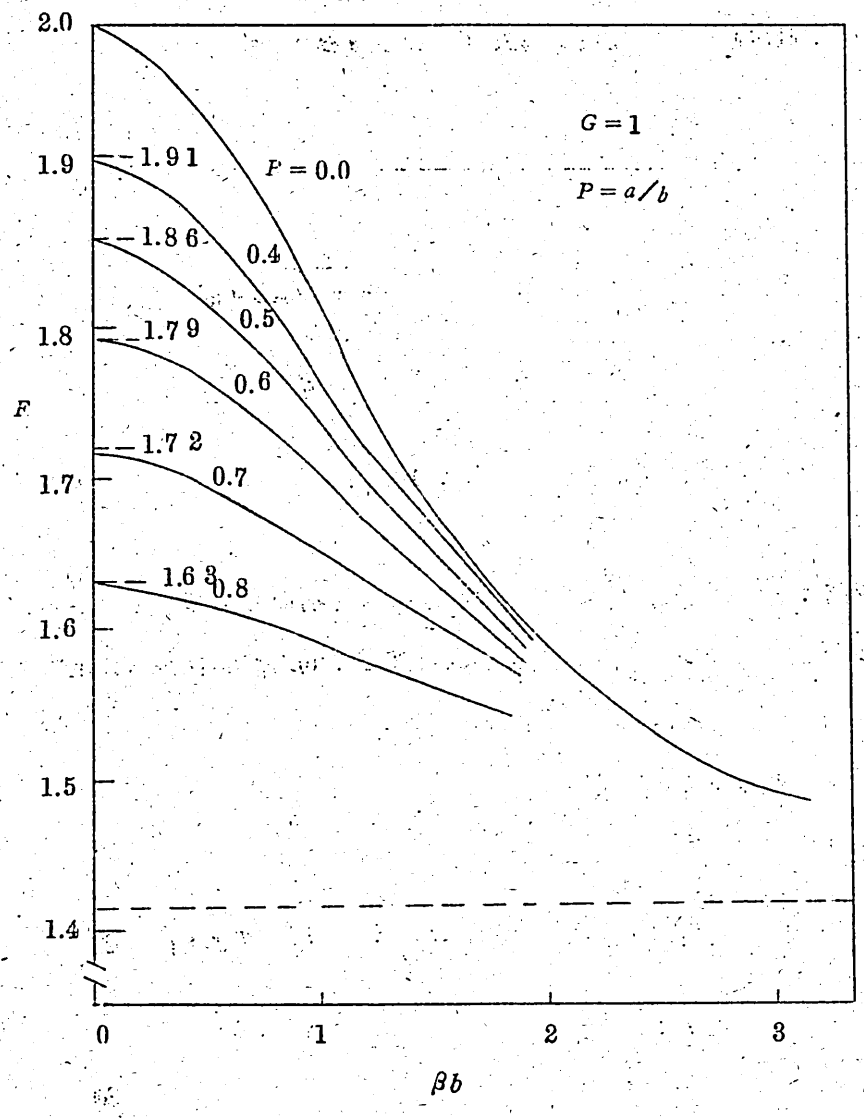



図 4. 系 1 の Surface mode (n=1).

2－2　導波管で囲まれた誘電体中に挿入された棒状フェライト中の静磁モード

この系は図5に示されている。前節の系と同様に，誘電体に置き換えることによって，固体進行波増幅器が構成できるであろう。

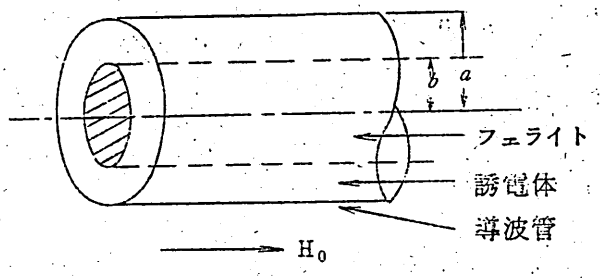



図5　　（系2）

この系内を伝播する静磁モードに関する解析は，前節と全く同様である。各領域のスカラーポテンシャル及び磁界成分は(1)，(6)式から容易に決定できる。

$0 \leq r \leq b$（フェライト中）

$$\phi_f = D_1 J_1 (Tr) \tag{28}$$

$$B_{fr} = -\mu_0 D_1 \{ \mu_1 T J_0 (Tr) - (\frac{\mu_1 - \mu_2}{r}) J_1 (Tr) \} \tag{29}$$

$b \leq r \leq a$（誘電体中）

$$\phi_i = D_2 I_1 (\beta r) + D_3 K_1 (\beta r) \tag{30}$$

$$B_{ir} = -\mu_0 [ D_2 \beta \{ I_0 (\beta r) - \frac{1}{\beta r} I_1 (\beta r) \} - D_3 \beta \{ K_0 (\beta r) + \frac{1}{\beta r} K_1 (\beta r) \} ] \tag{31}$$

$r = a$ 及び $r = b$ での境界条件を導入して，この系の Azimuthally dependent, magnetostatic Volume mode に関する分散関係式を得る。

$$
\begin{aligned}
&Tb\left\{\mu_1 \frac{J_0(Tb)}{J_1(Tb)} - \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{Tb}\right)\right\} \\
&\beta b\left[\left\{I_0(\beta b) - \frac{1}{\beta b} I_1(\beta b)\right\}\left\{K_0(\beta a) + \frac{1}{\beta a} K_1(\beta a)\right\}\right. \\
&\left.-\left\{K_0(\beta b) + \frac{1}{\beta b} K_1(\beta b)\right\}\left\{I_0(\beta a) - \frac{1}{\beta a} I_1(\beta a)\right\}\right] \\
&= \frac{}{K_1(\beta b)\left\{I_0(\beta a) - \frac{1}{\beta a} I_1(\beta a)\right\} + I_1(\beta b)\left\{K_0(\beta a) + \frac{1}{\beta a} K_1(\beta a)\right\}}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Surface mode に関する分散関係式は上式において，$T = jT'$ として変形すれば得られる。

$$
\begin{aligned}
&T'b\left\{\mu_1 \frac{I_0(T'b)}{I_1(T'b)} - \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{T'b}\right)\right\} \\
&\beta b\left[\left\{I_0(\beta b) - \frac{1}{\beta b} I_1(\beta b)\right\}\left\{K_0(\beta a) + \frac{1}{\beta a} K_1(\beta a)\right\}\right. \\
&\left.-\left\{K_0(\beta b) + \frac{1}{\beta b} K_1(\beta b)\right\}\left\{I_0(\beta a) - \frac{1}{\beta a} I_1(\beta a)\right\}\right] \\
&\frac{}{K_1(\beta b)\left\{I_0(\beta a) - \frac{1}{\beta a} I_1(\beta a)\right\} + I_1(\beta b)\left\{K_0(\beta a) + \frac{1}{\beta a} K_1(\beta a)\right\}}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

(32)及び(33)式の計算機による解を図6，図7に示してある。ここでパラメータとして，$b/a$をとってある。

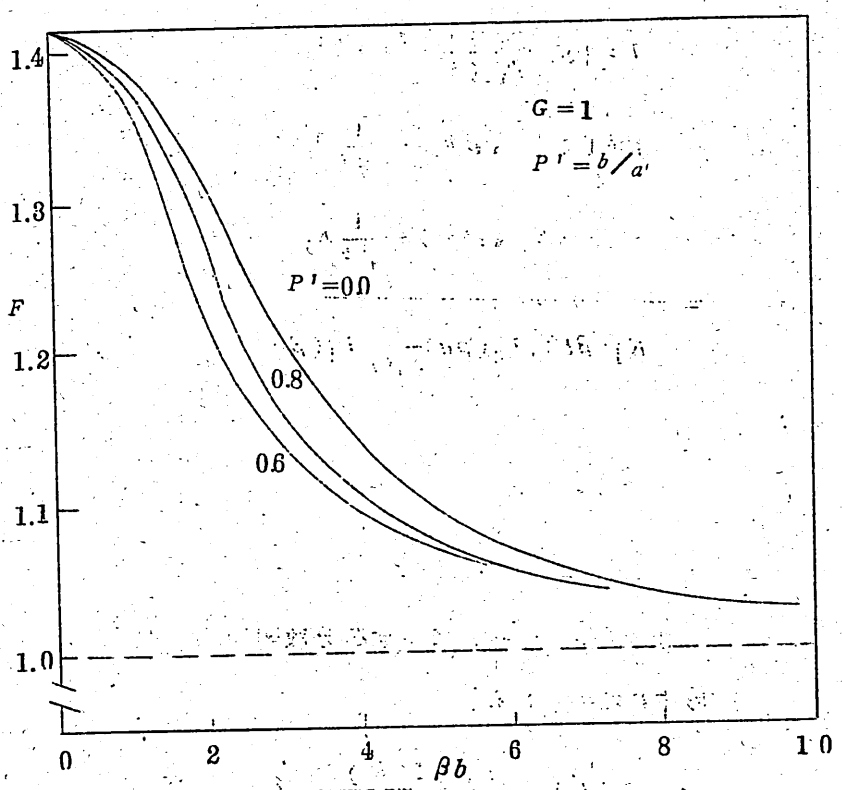



図6　系2のVolume mode（$n=1$）

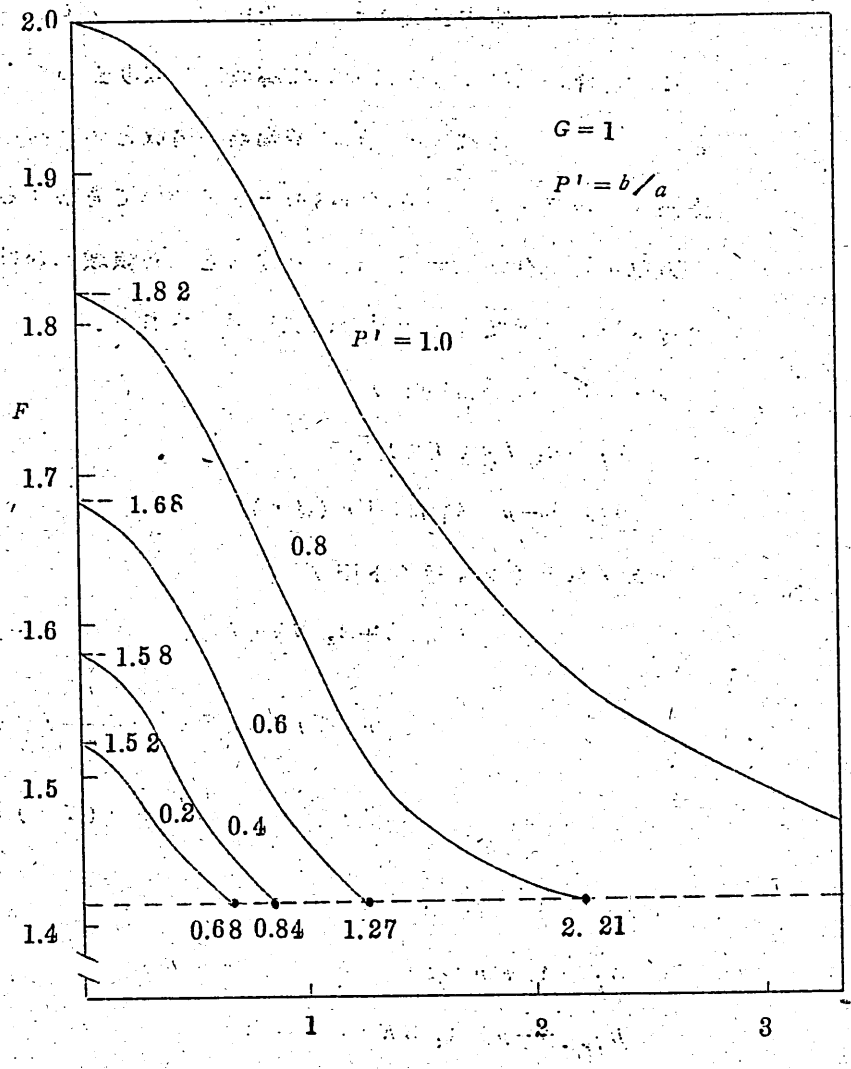



図 7　系 2 の Surface mode ( $n=1$ )

なお，図6のVolume modeにおいて，$b/a$の値が大きくなるにつれて，曲線は下降するが，このmodeの通過帯域は不変である。

2－3　誘電体中に置かれた中空円筒状フェライト中の静磁モード

この場合の系は，図2において導波管を取り去ったものである。2－1節とは別に，ここでは固体進行波増幅器の構成という観点から少し離れて，中空円筒状のフェライト中の静磁モードについて考察する。

方位角の依存性は一般的に$n$とすると，各領域におけるスカラーポテンシャル及び磁束密度の$r$－成分は次式で示される。

$0 \leq r \leq a$（誘電体中）

$$\phi_i = A_1 \, In(\beta r) \tag{34}$$

$$B_{ir} = -\mu_0 \, A_1 \, \beta \, I'n(\beta r) \tag{35}$$

$a \leq r \leq b$（フェライト中）

$$\phi_f = A_2 \, Jn(Tr) + A_3 \, Nn(Tr) \tag{36}$$

$$B_{fr} = -\mu_0 \left[ A_2 \left\{ \mu_1 \, TJ'n(Tr) + \frac{n\mu_2}{r} Jn(Tr) \right\} + A_3 \left\{ \mu_1 \, TN'n(Tr) + \frac{n\mu_2}{r} Nn(Tr) \right\} \right] \tag{37}$$

$r \geq b$（誘電体中）

$$\phi_i = A_4 \, Kn(\beta r) \tag{38}$$

$$B_{ir} = -\mu_0 \, A_4 \, \beta K'n(\beta r) \tag{39}$$

ここで，$r = a$及び$r = b$において，$\phi$と$Br$が連続であるという境界条件から，次の分散関係式を得る。

$$\frac{\beta I'_n(\beta a)Nn(Ta)-In(\beta a)\left\{\mu_1 TN'_n(Ta)+\frac{n\mu_2}{r}Nn(Ta)\right\}}{\beta I'_n(\beta a)Jn(Ta)-In(\beta a)\left\{\mu_1 TJ'_n(Ta)+\frac{\mu_2}{r}Jn(Ta)\right\}}$$

$$=\frac{Kn(\beta b)\left\{\mu_1 TN'_n(Tb)+\frac{n\mu_2}{r}Nn(Tb)\right\}-\beta K'_n(\beta b)Nn(Tb)}{Kn(\beta b)\left\{\mu_1 TJ'_n(Tb)+\frac{n\mu_2}{r}Jn(Tb)\right\}-\beta K'_n(\beta b)Jn(Tb)} \tag{40}$$

(40)式は $\mu_1 < 0$ , つまり magnetostatic Volume mode に関する分散関係式である。

また , Surface mode に関する式も同様にして求められ次のようになる。

$$\frac{\beta I'_n(\beta a)Kn(T'a)-In(\beta a)\times\left\{\mu_1 T'K'_n(T'a)+\frac{n\mu_2}{r}Kn(T'a)\right\}}{\beta I'_n(\beta a)I'_n(T'a)-In(\beta a)\times\left\{\mu_1 T'In(T'a)+\frac{n\mu_2}{r}In(T'a)\right\}}$$

$$K_n'(\beta b)\left\{\mu_1 T' K_n'(T' b)+\frac{n\mu_2}{r} K_n(T' b)\right\}$$

$$-\beta K_n'(\beta b) K_n(T' b)$$

$$= \frac{}{} \tag{41}$$

$$K_n(\beta b)\left\{\mu_1 T' I_n'(T' b)+\frac{n\mu_2}{r} I_n(T' b)\right\}$$

$$-\beta K_n'(\beta b) I_n(T' b)$$

surface mode は $n \geq 1$ なる整数値に対してのみ存在する。なお $T'$ は前節同様 $T = jT'$ を満足する。

今，我々が興味の対象としているのは，方位角に依存する静磁モードである。$n = 1$ の場合の分散関係式(49)及び(50)式の計算機による解を図 8，図 9 に各々示してある。

## 3. Magnetostatic Surface mode の考察

前章の解析の結果から，magnetostatic surface mode は形状の変化に敏感であることがわかる。そこで，改めてこの mode についての考察を行なう。

### 3－1 surface mode の通過帯域

図 4 及び図 7 などから，わかるように，この mode の通過帯域はフェライトと誘電体の半径の比によって変化する。すなわち誘電体の半径が増加するにつれて，surface mode の通過帯域が減少する。これを分散関係式から定量的に示すことができる。

系 1 の満合（図 4 参照）

この mode の通過帯域の上限の周波数は，分散関係式(27)の $\beta \to 0$ なる極限

をとることによって求められる。この時，変形ベッセル関数の$\beta = 0$のまわりでの展開式を利用する。

(27)式の両辺の$\beta \to 0$なる極限をとると，次式を得る。

$$1 = \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)(P^2 - 1)}{P^2(\mu_1 - \mu_2) + (\mu_1 + \mu_2)} \tag{42}$$

ここで$P = a/b$である。(42)式の$\mu_1$と$\mu_2$に(4)式を代入すると，Normalized frequency $F$に対する2次式を得る。

$$2F^2 + G(P^2 - 1)F + (1 + G)(GP^2 - G - 2) = 0 \tag{43}$$

(43)式でSurface modeの通過帯域の上限を表わす周波数$F_0$が与えられる。

$$F_0 = \frac{1}{4}\{(1 - P^2)G + \sqrt{G^2(P^2 - 1)^2 - 8(1 + G)(GP^2 - G - 2)}\} \tag{44}$$

$P = 0$の時，すなわち棒状フェライトの場合には$F_0 = 1 + G$となることがわかるが，これはSpector等[8]の結果と一致する。

図4には$G = 1$の場合の各$P$の値に対する$F_0$が示されている。誘電体の比率が大きくなるにしたがって，Surface modeの通過帯域は狭くなり，$P = 0.8$以上になるとこの通過帯域は，$P = 0$の場合の約30%以下に減少する。つまり中空円筒状フェライトにおいて断面が非常に薄いリング状の場合に，このSurface modeの励起は困難であることが予想される。

対象にしている波の自由空間波長$\lambda_0$に対して，フェライト棒の半径$b$がある程度以上になるとmagnetostatic surface modeが消滅することが示されている。[6] これに対し，我々の解析においては，中空円筒状のフェ

ライトにおいて半径 $b$ が $\lambda_0$ に対して十分小さくても，内部の誘電体の比率を大きくすることによって，magnetostic surface mode の通過帯域を減少させ得ることが示されたわけである。

系2の場合（図7参照）

この場合も同様に，分散関係式(33)から $F_0$ を求めることができる。

(33)式の $\beta \to 0$ の極限をとると

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{P'^2 - 1}{P'^2 + 1} \tag{45}$$

(45)式に(4)式の $\mu_1$ ，$\mu_2$ を代入して次式を得る

$$F_0 = 1 + G\left(\frac{1 + P'^2}{2}\right) \tag{46}$$

ここで，$P' = b/a$ である。$G = 1$ の時の各 $P'$ に対する $F_0$ の値は図7に示してある。$P' = 0.2$ になると通過帯域は $P' = 1$ の場合の20%以下になってしまう。この場合も，誘電体の比率の増加にともなって，magnetostatic surface mode の通過帯域は減少する。

3－2 Surface mode の $\beta$－cut off

図4から系1の場合の Surface mode に対して波数には制限がないことがわかる。すなわちあらゆる波数を持つ Surface Wave が，この系内を伝播する可能性があるわけである。これに対して，図7からわかるように，系2の場合にはある一定値以上の波数を持つ surface Wave はもはやこの系内を伝播することができないことがわかる。今この一定の波数を $\beta$－cut off と呼ぶことにする。

系2の場合の $\beta$－cut off は分散関係式(33)から求めることができる。この $\beta$－cut off は Surface mode の通過帯域の下限で存在するから，(33)式において $\mu_1 = 0$ と置くことができる。（図1参照）

すると，(33)式の左辺は $-\sqrt{1+G}$ となることが容易にわわる。そこで(33)式の右辺を数値計算し，グラフを用いることによって $\beta$-cut off を求めることができる。各 $P'$ の値に対する $\beta$-cut off が図7に示されている。

このような $\beta$-cut off が通過帯域の下限，すなわちフェライトの透磁率テンソル $\mu_1$ が0になるところで存在することは注目に価する。magnetostatic surface mode のフェライト中での実効的な波数は $\beta/\sqrt{\mu_1}$ と考えられる。$\mu_1 = 0$ の時この実効的な波数は無限大となり，もはや，surface mode はこの系内を伝播することができなくなる。すなわち，$\mu_1 = 0$ となる周波数に対して有限の波数が存在するならば，これが $\beta$-cut off を与えてくれるわけである。

誘電体中に置かれた棒状フェライトの場合の magnetostatic surface mode の $\beta$-cut off については R. I. Joseph 等[4] が言及している。系2のモデルにおいて我々が得たところの，誘電体の比率によって $\beta$-cut off が変化するという現象は興味深いと思われる。

## 4. あ と が き

我々は導波管で囲まれた円筒状フェライト中を伝播する $n=1$ の場合の静磁モードについて解析した。

固体進行波増幅器の構成を考える時，先ず Volume mode と半導体中の空間電荷波との結合が考えられる。この mode の伝播特性は誘電体の比率によって変化するが，常に十分な遅波特性を持つので，両者の結合は可能である。しかし，半導体中の電子のドリフト速度が $10^7$ cm/sec程度であるために，この素子の動作周波数がフェライトの共振周波数に近くなり，フェライト固有の損失が大きくなる。これは素子の寸法を小さくするとか，損失の小さなフェライトを使用することによって防止できるであろう。また動作周波数は

直流印加磁界によって直線的に変化させることができるが，これを高くするためには飽和磁化の大きなフェライトが望まれる。

Surface mode は形状に強く依存することが明らかになった。ことに誘電体の比率を増加させると，この mode の通過帯域が減少することがわかる。このことを利用して，フィルターの構成が考えられる。しかしながら，この mode の通過帯域の変化については，更に詳細な検討が要求され，表面における電磁界分布を調べてこの点を明らかにしたいと思っている。

Surface mode と半導体中の空間電荷波との結合も興味ある問題である。この mode を利用する方が Volume mode の場合よりも動作周波数を高くできるという利点がある。しかし，Surface mode を回路波として用いる際には，損失を正確に評価する必要があろう。

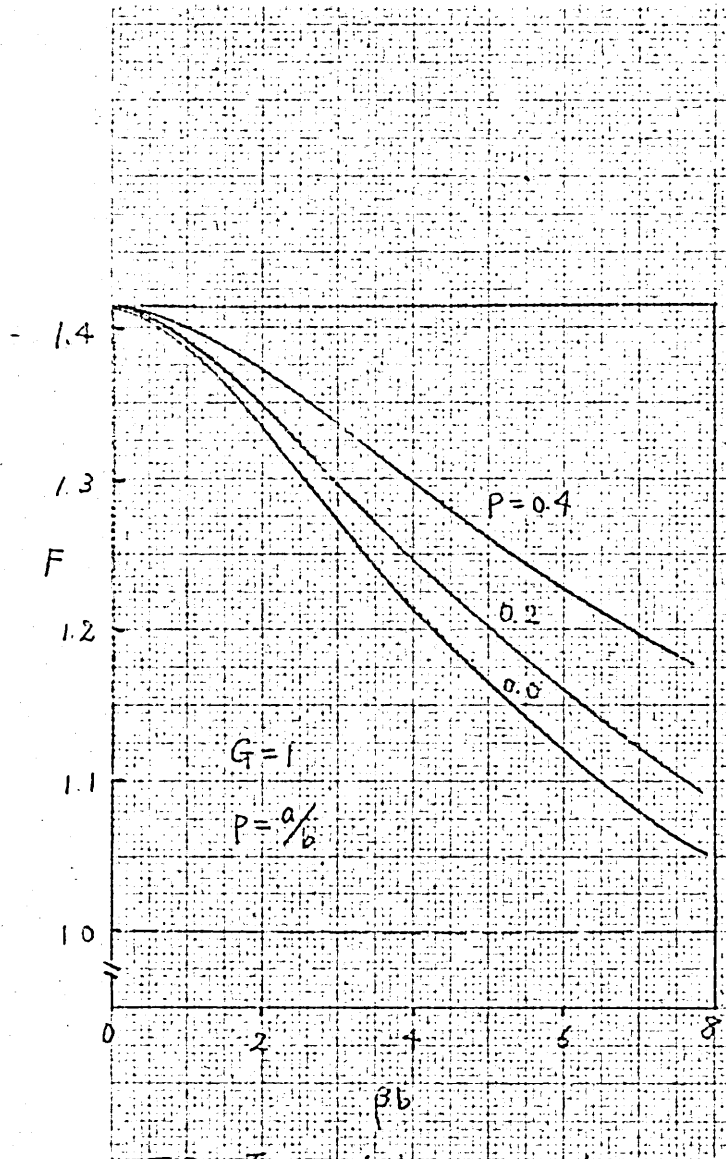



図8. 表3の Volume mode (n=1)

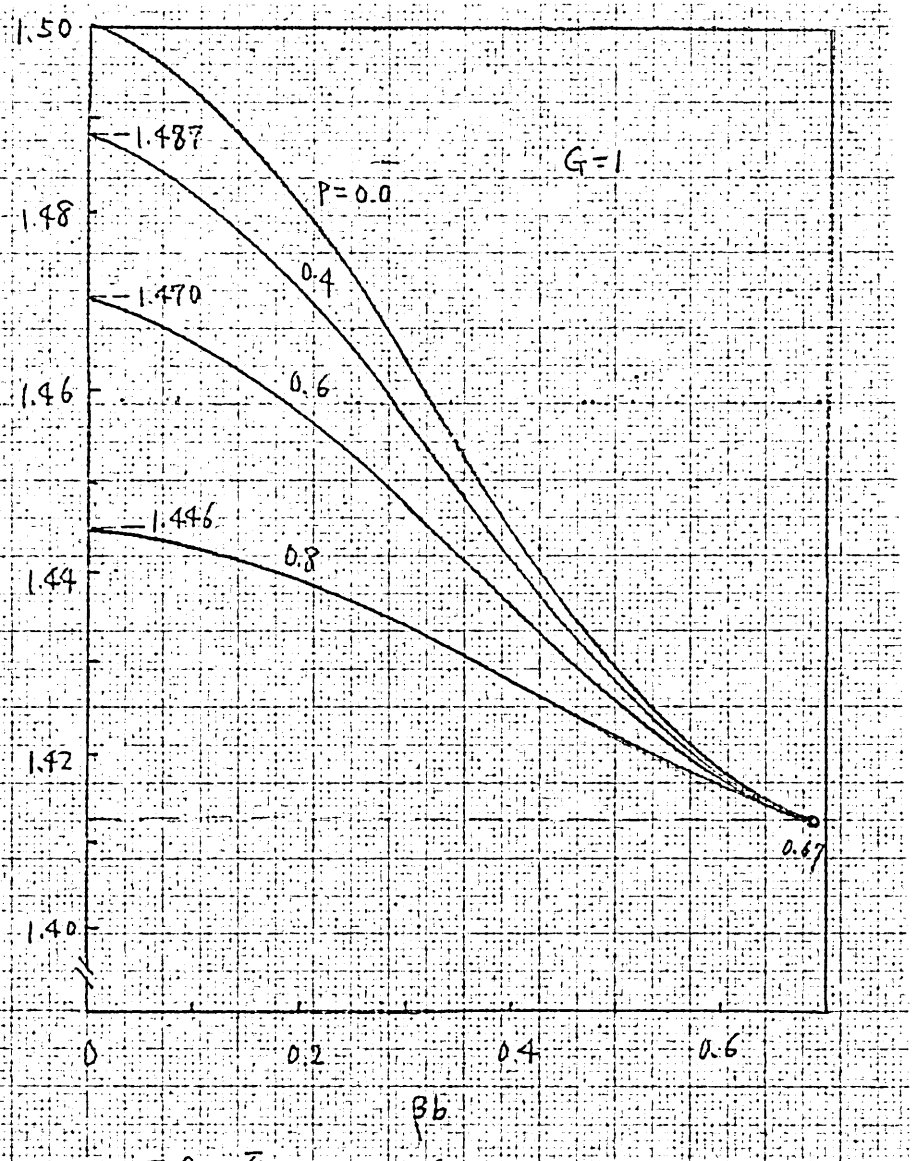



図9 表3の Surface mode (n=1)

## 文　献


1) L.R.Walker, "Magnetostatic modes in ferromagnetic resonance," Phys Rev Vol 105, pp.390-398, 1957

2) R.W.Damon. and J.R.Eshbach, "Magnetostatic modes of a ferromagnetic slab," J.A.P. Vol.31, No.5 pp.104S-105S, 1960

3) P.Young, "Effect of boundary conditions on the propagation of surface magnetostatic waves in a transversely magnetized thin y.i.g. slab," Electron. Lett. Vol.5, No.18, pp.429-431, 1969

4) R.I.Joseph, and E.Schlomann, "Theory of magnetostatic modes in long, axially magnetized cylinders," J.A.P. Vol.32, No.6, pp.1001-1005, 1961

5) F.W.Schott, T.F.Tao, and R.A.Freibrun, "Electro magnetic waves in longitudinally magnetized ferrite rods," J.A.P. Vol.38, No.7, pp.3015-3002, 1967

6) T.F.Tao, J.W.Tully, and F.W.Schott, "Dynamic mode surface waves on magnetized YIG and ferrite rods," Appl. Phys. Lett. Vol.14, No.3, pp.106-108, 1969

7) A.W.Trivelpiece, A.Ignatius, and P.C.Holscher, "Backward waves in longitudinally magnetized ferrite rods," J.A.P. Vol.32, No.2, pp.259-267, 1961

8) J.Spector, and A.W.Trivelpiece, "Slow waves in ferrites and their interactions with electron streams," J.A.P. Vol.35, No.7, pp.2030-2039, 1964

9) N.S.Chang, and Y.Matsuo, "Possibility of utilizing the coupling between a backward wave in YIG and waves associated with drift carrier stream in semiconductors," Proc. of the IEEE Lett. Vol.56, No.4, pp.765-766, 1968

10) 増田，張，松尾，"半導体とフェライトを用いた固体進行波増幅器"電気四学会連合大会半導体素子－１７７２，昭４５.４.

輻射科学研究会資料

# 送受分離レーダの探知範囲

山根国義　弓場芳治　松尾　優

（京都工芸繊維大学　工芸学部）

１９７０年１０月２日

# 1. まえがき

今日多く用いられているレーダは送受信機が一体となった，いわゆる〝送受一体レーダであり，この探知範囲は単なる球体状となるにすぎない。一方これとは別に送受信機を隔てて配置した〝送受分離レーダ〟というものを考えることができるが，この探知範囲は送受一体レーダの場合と異り，送受信機間距離，送受信アンテナの指向性とその指向方向，ターゲットの散乱特性などによってきわめて多様な変化を示す。この送受分離レーダそのものの着想は古くからあるが，その探知範囲についての研究はほとんどされていない。

本文では送受分離レーダの探知範囲のもつ諸特徴を明らかにすることを目的としている。探知範囲を解析するにあたり，先づ探知範囲係数を定義し，これを用いた代表的と思われる数例の探知強度分布の計算例をもとに，探知範囲の特徴について論じる。さらに探知範囲係数定義式の妥当性を確かめるために行った，単純な配置の送受分離レーダの探知強度分布を求める実験について述べる。

# 2. 探知範囲係数

図1 に示す配置の送受分離レーダ系において，送受信電力間の関係はよく知られている送受分離レーダ基本方程式で表わされる[1]。

$$\frac{W_{Rb}}{W_T}=\frac{G_T(\varphi_T-\theta_T)\cdot G_R(\varphi_R-\theta_R)\lambda^2}{(4\pi)^3 D_T^2\cdot D_R^2}\sigma_b(\beta) \qquad (1)$$

ここに，

$W_{Rb}$ , $W_T$ ：送受信電力

$G_T(\varphi_T-\theta_T)$ , $G_R(\varphi_R-\theta_R)$ ：送受信アンテナ利得

$\varphi_T$ , $\varphi_R$ ：送受信アンテナの指向方向

$\theta_T$ , $\theta_R$ ：送受信機からターゲットSを望む角度

$\lambda$ ：波長

$D_T$ , $D_R$ ：散乱体と送受信機間の距離

$\sigma_b(\beta)$ ：散乱角$\beta$のときのターゲットの側方散乱断面積

である。

なお，このときの送受信機間の距離を$D_0$とし，以下これを距離の基準にとることにする。

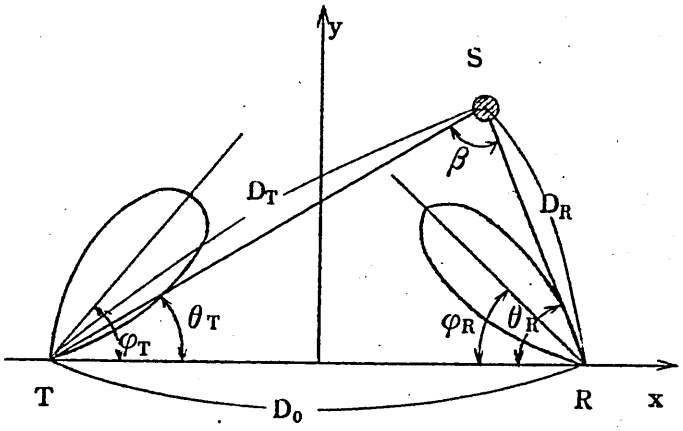



図 1.

一方送受一体レーダの基本方程式は

$$\frac{W_{Rm}}{W_T}=\frac{G_{TO}\cdot G_{RO}\lambda^2}{(4\pi)^3 D^4}\sigma_m \qquad (2)$$

で与えられる。ここに$W_{Rm}$：受信電力，$G_{TO}$，$G_{RO}$：送受信アンテナの最

大利得（通常アンテナを共用するから$G_{TO}=G_{RO}$），$\sigma_m$：ターゲットの後方散乱断面積，D：ターゲットとレーダ間の距離である。

ここで，上記両レーダ系の送信電力，アンテナの最大利得および波長はそれぞれ等しいものとし，式(1)の送受分離系の受信電力$W_{Rb}$を，$D=D_0$としたときの送受一体系の受信電力$W_{Rm0}$で基準化すると[2][3]

$$\frac{W_{Rb}}{W_{Rm0}}=\frac{G_T'(\varphi_T-\theta_T)\cdot G_R'(\varphi_R-\theta_R)}{D_T'^2\,D_R'^2}\,\frac{\sigma_b(\beta)}{\sigma_m}\equiv C \qquad (3)$$

となる。この比をCとおき探知範囲係数と定義する。ここに$D_T'=D_T/D_0$，$D_R'=D_R/D_0$であり，また$G_T'(\varphi_T-\theta_T)=G_T(\varphi_T-\theta_T)/G_{TO}$，$G_R'(\varphi_R-\theta_R)=G_R(\varphi_R-\theta_R)/G_{RO}$は送受信アンテナ指向性である。

計算の都合上送受信アンテナの指向性がガウス分布形で近似できるものとする。

$$G(\triangle\varphi)=G_0\exp\left[-4\log 2\cdot\left(\frac{\triangle\varphi}{\phi_h}\right)^2\right]$$

$$=G_0\cdot 2^{-4}(\triangle\varphi/\phi_h)^2 \qquad (4)$$

ここに，$\triangle\varphi$はアンテナ最大利得方向からのずれ角度，$\phi_h$は電力半値角である。したがって，この関係を(3)に代入すると探知範囲係数は

$$C=\frac{1}{D_T'^2\,D_R'^2}\,\frac{\sigma_b(\beta)}{\sigma_m}\,2^{-4}\cdot\left[\left(\frac{\varphi_T-\theta_T}{\phi_{hT}}\right)^2+\left(\frac{\varphi_R-\theta_R}{\phi_{hR}}\right)^2\right] \qquad (5)$$

となる。

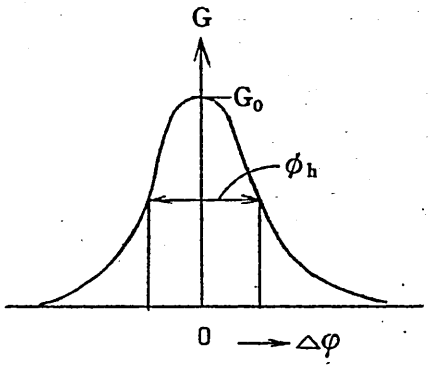



図　2.

## 3. 探知範囲の計算例と特性

すでに述べたように，送受分離レーダの探知範囲は数多くのパラメータを含んでいて，その特性を一般的に論じることがむづかしいので，代表的な計算例(A)～(D)を示し，その都度探知範囲に関する特性を(1)～(4)まで列記する。以下の計算例ではいづれも $D_0=1$ と基準化してある。

計算例(A)：送受信アンテナがともに無指向性で，ターゲットの側方散乱断面積を一定（$\sigma_b(\beta)=\sigma_m$）と見なした場合

一般に波長に較べて寸法が等しいか，または小さいターゲットの側方散

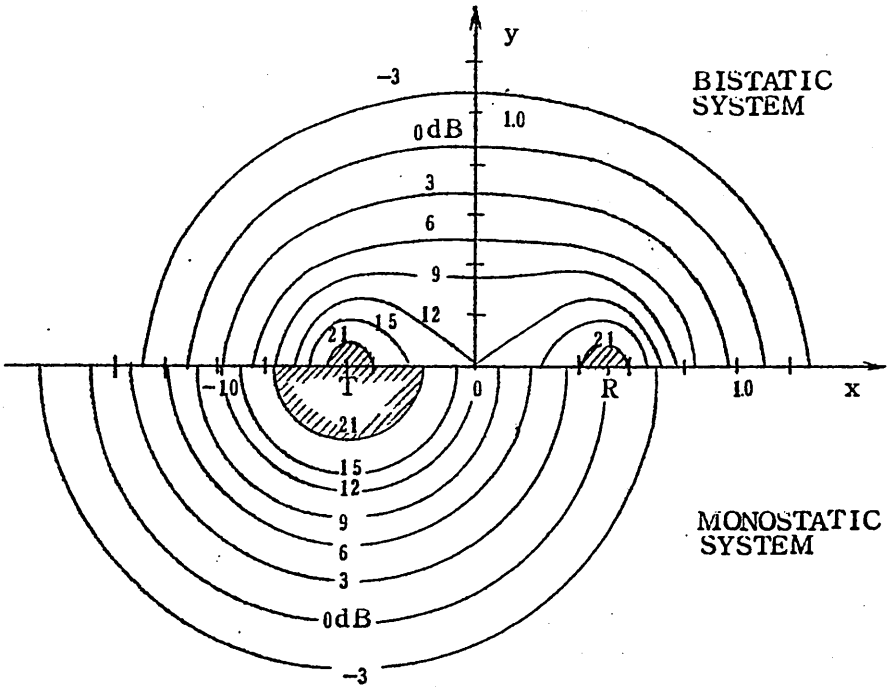



図 3.

乱断面積はほぼ一定で，しかも後方散乱断面積とほぼ等しいと見てよい。すなわち，このようなターゲットの場合，$\sigma_b(\beta)=\sigma_m$ とみなすことができる。

図3の上半面にこの場合の探知強度分布を示した。なお同図下半面には，参考のためTの位置にある送受一体レーダの探知強度分布を示した。

特性(1)：探知範囲を特定の方向へ伸張，拡大することができる。

図3から明らかなごとく，送受一体レーダの探知範囲はレーダを中心とした円形であるが，送受分離レーダの場合には図4のように希望する探知方向へ$T_1$，$T_2$のように送信機（あるいは受信機）を分離してゆけば，探知領域は小さくなるが，その方向へ探知範囲を伸ばすことができる。

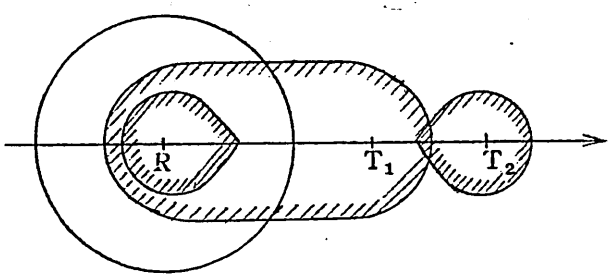



図 4.

特性(2)：ターゲットが送受信機の中心付近にあるより，いづれかの近傍にある方が探知強度が増す場合がある。

図3において探知強度が6dB以上の場合には送受信機を結ぶ線の2等分線上にターゲットがあるよりも，送受信機いづれかに近い位置にターゲットのある方が探知強度が大きいことがわかる。

計算例(B)：送受信アンテナが無指向性でターゲットの側方散乱断面積を考慮した場合

ターゲットとしてka＝5.8の金属球（k：位相定数，a：球の半径）を

仮定し，その側方散乱断面積（図５－(a)）を考慮した場合の探知強度分布を図５(b)に示した。電波の偏波面が散乱体に対してＨ面，Ｅ面である場合をそれぞれ左，右半面に示した。なお参考のため側方散乱断面積が一定（$\sigma_b(\beta)=\sigma_m$）の場合を破線で示した。

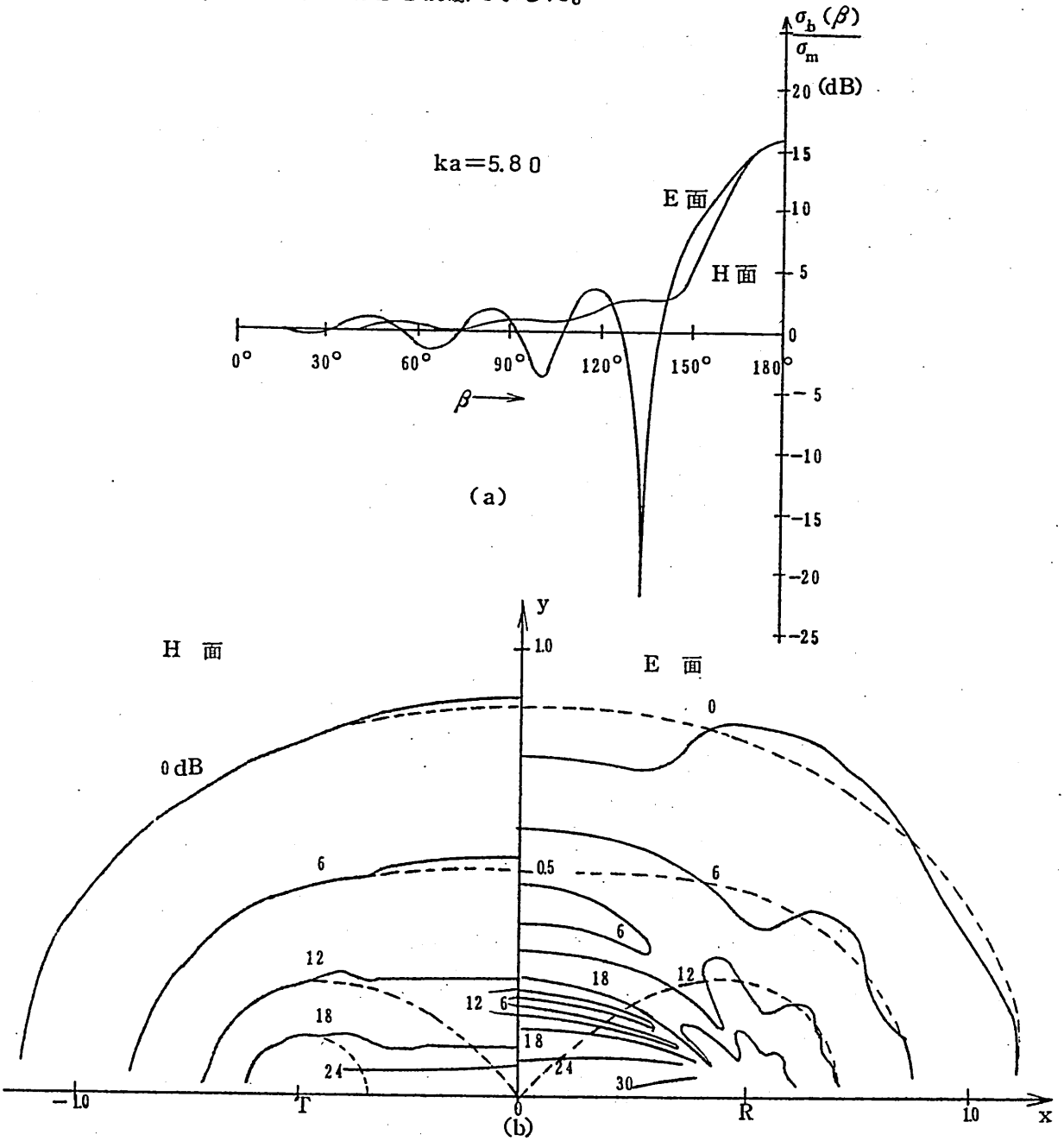



図　５

特性(3)：送受信機を結ぶ線の近傍では探知強度が著しく大きく，またその分布は入組んで複雑となる。

この金属球のように一般に波長に比べて寸法の大きなターゲットの側方散乱断面積は図５－(a)に示したように散乱角が１８０°に近づくにつれて急激に大きくなる[1]。したがって探知強度分布にもその影響があらわれて，強度そのものは大きく，分布は複雑となる。

計算例(C)：送受信アンテナがともに鋭い指向性をもち，ビームが交差する場合

送受信アンテナのビーム半値角 $\phi_{hT}$，$\phi_{hR}$ がともに１０°と５°との場合，指向方向 $\varphi_T$，$\varphi_R$ の種々の組み合わせによる探知強度分布を図６に示した。図の右半面に半値角５°，左半面に１０°の場合を示した。各分布は C＝６dB，９dB（斜線部分）だけを示し，ターゲットの側方散乱断面積は一定（$\sigma_b(\beta)=\sigma_m$）とした。

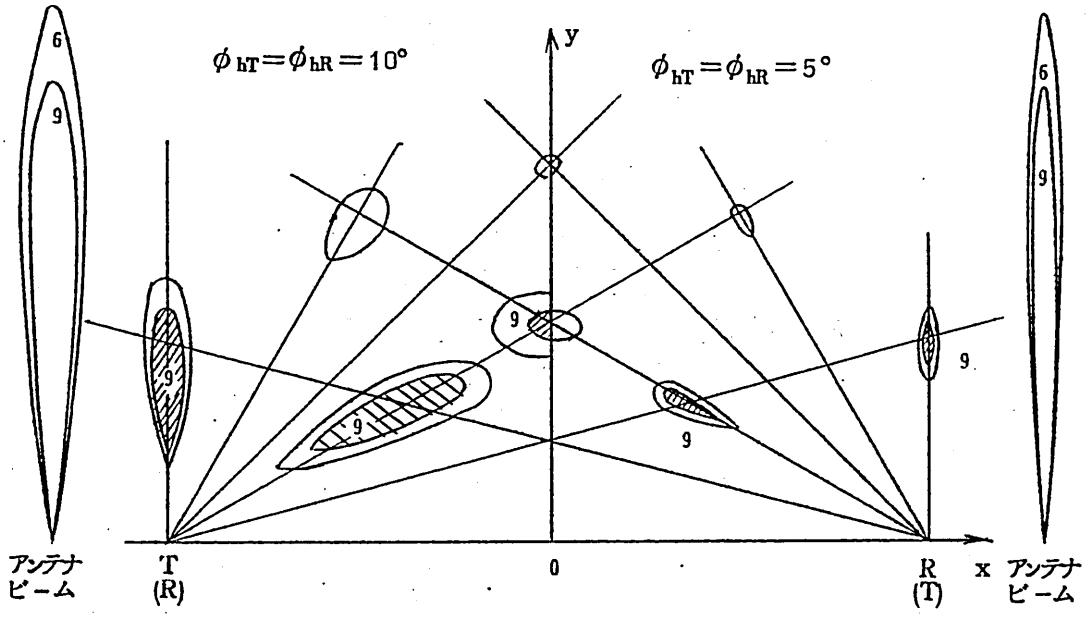



図　6.

特性(4)：特定の限られた領域だけを高感度に探知できる。

図６の計算例に示すように，両ビームの交差域（探知範囲）内が強い探知強度で探知できる。このように空間の限られた小さい領域のみが高感度で探知できることは，送受一体レーダがアンテナビーム全領域（図６の両端に示す）にある散乱体をすべて探知してしまうのとは著しく趣きを異にしている。

計算例(D)：探知範囲を立体的に求めた例[5]

半値巾３０°のガウス分布形指向性をもつ送信アンテナを指向方向 $\varphi_T = 45°$ に向け，受信アンテナは無指向性とした場合，探知強度 C＝０ｄＢで探知できる限界領域を図７に示した。立体的なふくらみを表現するために，ｘ－ｚ面に平行な面で切断した線を（ｙ＝0.1～0.8）で示した。なおこのとき側方散乱断面積は一定（$\sigma_b(\beta) = \sigma_m$）とした。

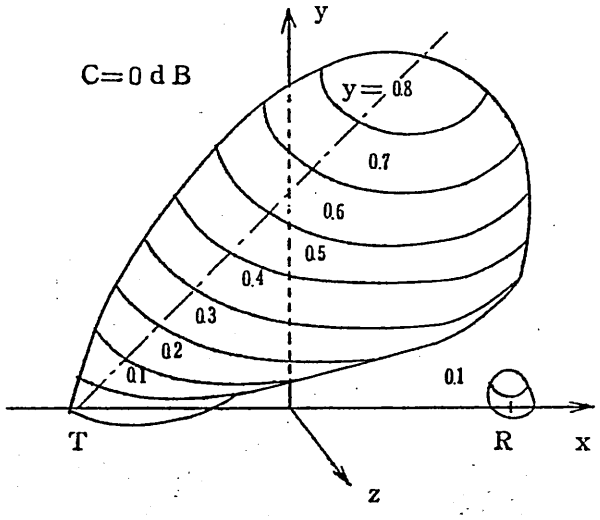



図　7.

以上示した計算例はいづれも送受分離レーダの探知範囲のもつ特徴を強調するための特殊例である。この他，ターゲットの散乱特性を考慮し，送受信アンテナの指向方向が同一平面内にない場合，さらにアンテナ指向性

が扇形の場合などの一般的な送受分離レーダの立体的探知範囲を求めるための計算プログラムも用意されている。

## 4. 探知強度分布の測定

これまでに述べてきた探知範囲の考え方，とりわけ探知範囲係数の定義式を確かめるために行った測定の概要について述べる。

### 4.1 測定方法

送受分離系の被測定空間に同一ターゲットを置いたときの散乱波受信電力強度の分布が求める探知強度分布となる。実際の測定に当ってはターゲットによる散乱受信波を送信機からの直接波および実験室内からの雑反射波などの不要波成分から分離・検出することが必要となる。

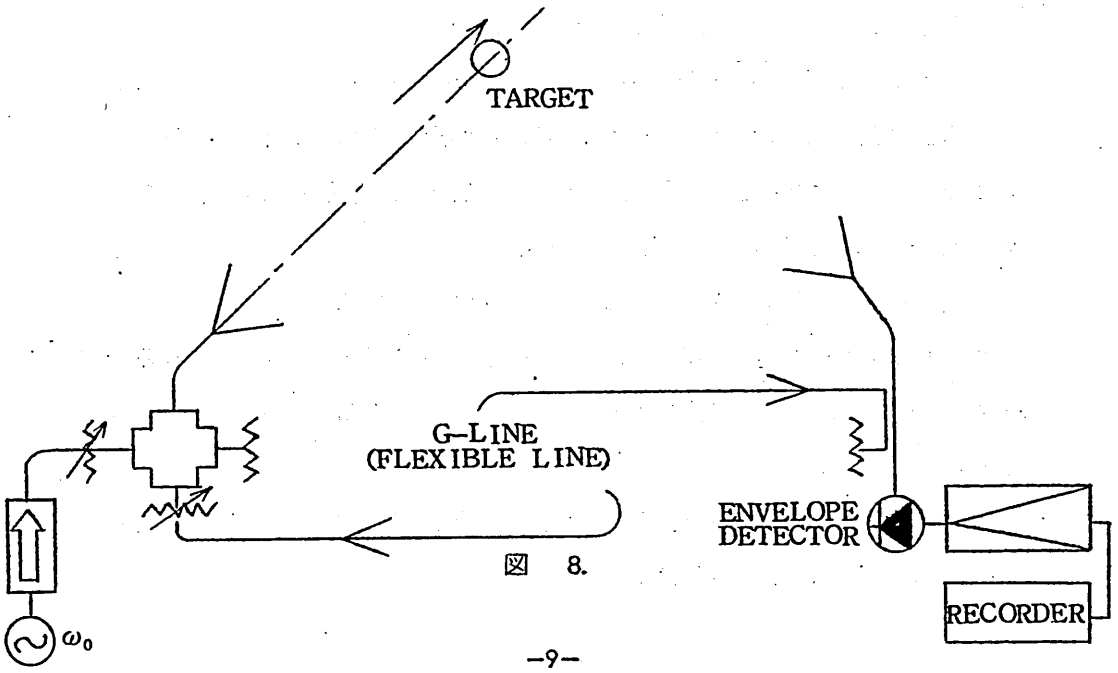



図 8.

そこで今回はターゲットを被測定空間中で移動させ，ターゲットによる散乱波だけをドップラ変調し，これに送信波の一部を基準波として加え包絡線検波することによって不要波成分を分離する方法を用いた。[4][6][7]この方法をドップラ法と呼ぶ。

ターゲットの移動によってドップラ変調された散乱波受信電圧 $v_s$ は位相変調を受け，次式のようになる。

$$v_s = V_s \cos(\omega_0 t - \phi(t) + \theta_1) \tag{6}$$

ここに，$V_s$ ：散乱波受信電圧振巾，$\omega_0$ ：送信角周波数，$\phi(t) = k\ell(t)$，($\ell(t)$ は送信機から散乱体を経て受信機に至る電波の通路長）であり，$\theta_1$ は初位相である。

一方雑反射波などの不要波成分と基準波はいづれも無変調波のままであるから，一括して

$$v_r = V_r \cos(\omega_0 t + \theta_2) \tag{7}$$

と表わせる。

包絡線検波器には上記 $v_s$ ，$v_d$ の和の電圧が加えられるが，このとき，

$$v_r \gg v_d \tag{8}$$

という条件が成立すれば，検波器出力は近似的に

$$v_{out} \simeq \sqrt{V_r^2 + V_s^2} + V_s \cos(\phi(t) - \theta_1 + \theta_2) \tag{9}$$

となる。右辺第１項は直流成分で，第２項が所要の信号成分である。従ってこの波形の最大変化分から散乱波受信電圧 $V_s$ が得られる。そしてその $V_s$ の大きさがその散乱体の位置での探知範囲強度に比例するので，同様な測定を被測定空間全域にわたって繰り返すことにより，探知強度分布が求められる。なおこのとき，ターゲット支持台からの変調散乱波をできるだけ小さく抑え，また，検波器の動作直線範囲を広くとるなどの注意が必要である。

なお，今回は測定の都合上送信機を中心として，ターゲットを放射状に等速直線運動させて，散乱波を変調した。

4.2 測　定　例

以下に述べる2例は，いづれも前節の測定方法にしたがい，送受信機間距離 1.5 m，波長 $\lambda$=8.6 mm，偏波面はH面，散乱体移動速度 v=1.9 cm/sec とし，送信側は散乱体を常に送信アンテナの最大利得方向に移動させることにより無指向性とした。

(1) 受信アンテナとして角錐ホーン（H面指向性半値角20°）を用い，指向方向を $\varphi_R$=45° に向けた。ターゲットとしては直径38.10 mm（1½", ka=13.9）の金属球を用いた。測定結果および理論計算値を図9に示す。

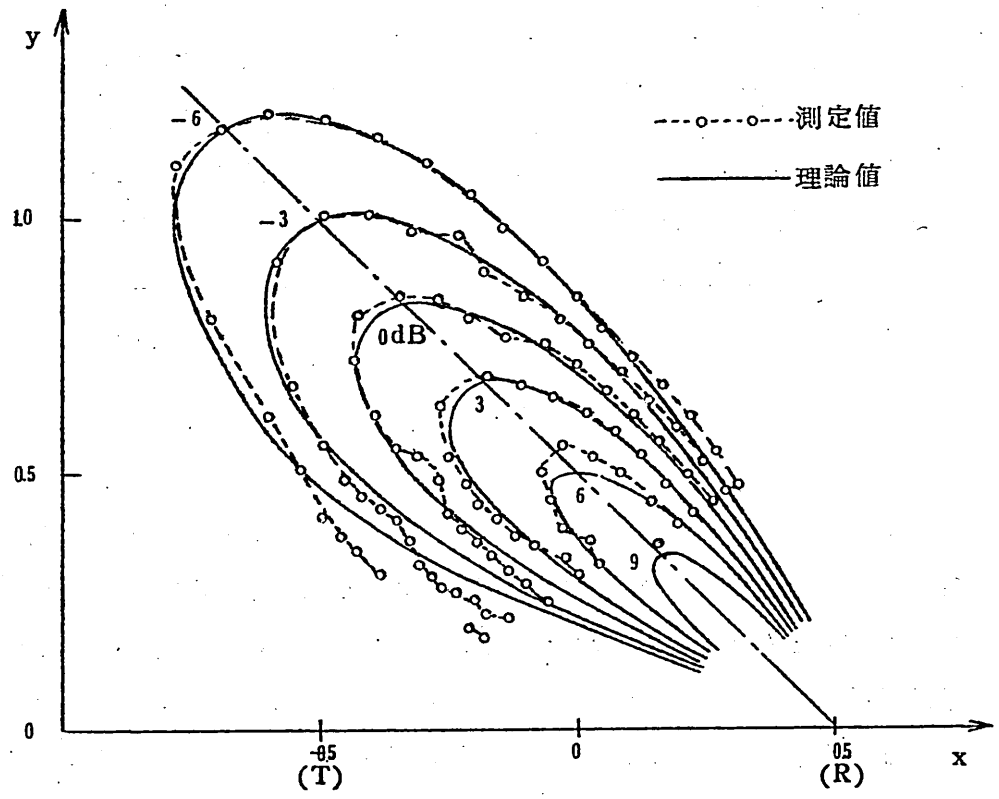



図　9.

(2) 受信アンテナは導波管開口（H面測定半値角60°）を用い指向方向 $\varphi_R = 45°$ に向けた。ターゲットとしては直径44.45㎜（$1\frac{3}{4}$″，$k_a = 16.2$）の金属球を用いた。測定結果および理論計算値を図10に示す。

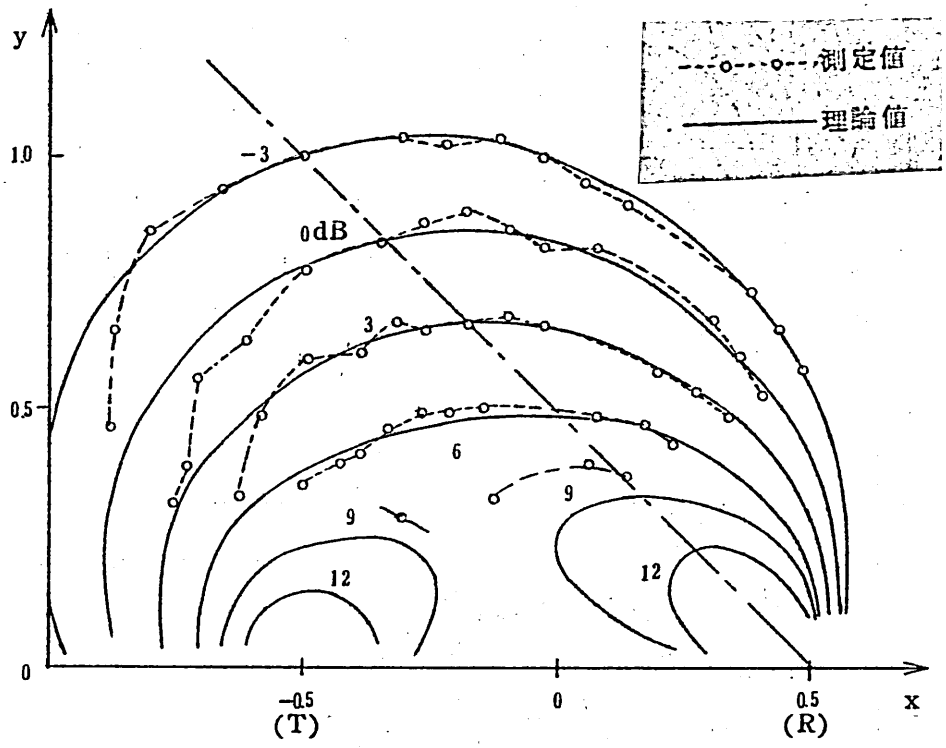



図 10.

装置の都合上，ターゲット移動範囲は送信機から50～255㎝の間で，移動方向 $\theta_T$ も30°～110° の範囲に限られた。従って測定時の最大散乱角は130°となり，用いた金属球の散乱特性からみて，この測定では側方散乱断面積による影響はきわめて小さいと見なすことができ，測定結果も側方散乱断面積を一定とした場合の理論計算値と（図9，10の実線）と比較的よく一致していることがわかる。

## 5. むすび

送受分離レーダの探知範囲を解析するに当り，その受信電力を送受一体レーダの受信電力と対比することによって，探知範囲係数を定義し，これを用いた代表的な計算例によって，送受一体レーダの場合と著しく異なる4つの特徴を示した。また，ドップラ変調法を用いて探知強度分布を求める実験を行い，その結果から解析法のだ当性を確かめた。今後送受分離レーダの応用面を考えるとき，この解析が役立つものと思われる。

本研究に際し，熱心に討論，実験に協力された本学卒業生および卒業研究生諸君に深謝する。

## 文　献

1) M.I.Skolnik : "Introduction to radar systems", McGraw-Hill, New York p.585 (1962)

2) 松尾　優："Bistatic radar の探知可能範囲", 信学誌, Vol. 49, No.4, p.771 (昭41-04)

3) M.Matsuo : "Effective coverage of bistatic radar with fixed directional antenna", Memoirs of the Faculty of Industrial Arts, Kyoto Technical Univ., Science and Technology, No.14, p.101 (Dec. 1965)

4) M.Matsuo, Y.Yuba and K.Yamane : "Bistatic radar cross-section measurements by pendulum method", IEEE Trans. on AP, Vol. AP-18, No.1, p.83 (Jan.1970)

5) 松尾，弓場，山根，重藤"送受分離レーダの立体的探知可能範囲" 昭44 連合大会，1388

6) 松尾，弓場，山根，重藤"振子法によるレーダ側方散乱断面積の測定" 輻射科学研資(昭43-09)

7) 松尾，弓場，山根"微小振動子法による相対電界の測定" 輻射科学研資(昭45-01)

輻射科学研究会資料

# 導電性運動媒質中の波動増幅現象とac MHD generator

藤岡　弘
小川英一
鈴木俊雄
(大阪大学・工学部)

1970年12月4日

# 1. 序　　言

著者らは先に平面電磁波による導電性運動媒質中の増幅波の励振の問題を取り扱い，静止している完全誘電体媒質から境界面に平行に運動している導電性誘電体媒質に平面電磁波が入射するとき，媒質の運動速度が媒質中を伝搬する波の位相速度よりも大きくなるときには導電性運動媒質中に増幅波が励振されることを示した。[1], [2]

ここでは，静止媒質と導電性運動媒質とを分ける2枚の十分薄い導体板（図1参照）のそれぞれに互いに逆向きの励振進行波電流を流し，この励振電流の位相速度よりも大きい速度で媒質を運動させるとき，媒質中の波動は増幅され，このとき装置はac MHD generatorとして動作することを示す。

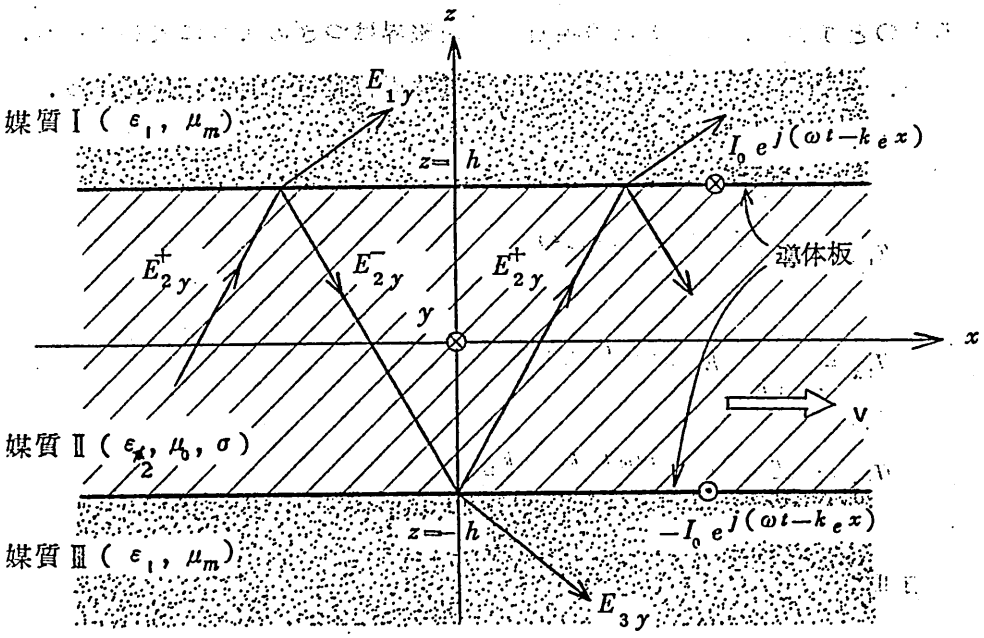



図1　座標系

## 2. 各媒質中の電磁界

図1において，領域ⅠおよびⅢは共に（$\varepsilon_1$，$\mu_m$）なる半無限媒質であり，領域ⅠとⅡ，およびⅡとⅢとはそれぞれ $z=h$ および $z=-h$ なる面に存在する厚さが十分薄い導体板によって分けられている．また，領域Ⅱは（$\varepsilon_2$，$\mu_0$，$\sigma$）なる導電性誘電体であり，導体板に対し速度 $v$ で $x$ 方向に一様に運動しているものとする．

いま，導体板面上にそれぞれ

$$\mathbf{I}_e = \mathbf{i}_y I_0 e^{j(\omega t - k_e x))} \tag{1a}$$

$$\mathbf{I}_e = -\mathbf{i}_y I_0 e^{j(\omega t - k_e x)} \tag{1b}$$

なる進行波電流を流し，この電流によって媒質Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ中に電磁界を励振するものとすれば，それぞれの媒質中の電磁界はつぎのように表わされる．[1],[2]
ただし，式（1）における $I_0$ なる量の次元は単位長さ当りの電流である．

媒質Ⅰ：

$$E_{1y} = E_{01} e^{j(\omega t - k_e x + k_{1z} z)}$$

$$H_{1x} = \frac{k_{1z}}{\omega \mu_m} E_{01} e^{j(\omega t - k_e x + k_{1z} z)} \tag{2}$$

$$H_{1z} = \frac{k_e}{\omega \mu_m} E_{01} e^{j(\omega t - k_e x + k_{1z} z)}$$

媒質Ⅱ：

$$E_{2y}^{-} = E_{02}^{-} e^{j(\omega t - k_e x - k_{2z} z)}$$

$$H_{2x}^{-} = -\frac{k_{2z}}{\omega \mu_0} E_{02}^{-} e^{j(\omega t - k_e x - k_{2z} z)} \tag{3}$$

$$H_{2z}^{-} = \frac{k_e + \omega \Omega}{\omega \mu_0 a} E_{02}^{-} e^{j(\omega t - k_e x - k_{2z} z)}$$

$$E_{2y}^{+} = E_{02}^{+} e^{j(\omega t - k_e x + k_{2z} z)}$$

$$H_{2x}^{+} = \frac{k_{2z}}{\omega \mu_0} E_{02}^{+} e^{j(\omega t - k_e x + k_{2z} z)} \tag{4}$$

$$H_{2z}^{+} = \frac{k_e + \omega \Omega}{\omega \mu_0 a} E_{02}^{+} e^{j(\omega t - k_e x + k_{2z} z)}$$

媒質Ⅲ：

$$E_{3y} = E_{03} e^{j(\omega t - k_e x - k_{1z} z)}$$

$$H_{3x} = -\frac{k_{1z}}{\omega \mu_m} E_{03} e^{j(\omega t - k_e x - k_{1z} z)} \tag{5}$$

$$H_{3z} = \frac{k_e}{\omega \mu_m} E_{03} e^{j(\omega t - k_e x - k_{1z} z)}$$

ただし，ここで境界条件より各媒質中の波の伝搬定数の境界面に平行な成分，すなわち $x$ 方向成分が励振進行波電流の伝搬定数 $k_e$ に等しくなることを用いた．上式において，下部の添字１，２および３はそれぞれ媒質Ⅰ，Ⅱおよび Ⅲに付随する量を表わし，上部の添字 $^{-}$ および $^{+}$ はそれぞれ媒質Ⅱ中を $z$ の負および正の方向に伝搬する波に属する電磁界量を表わす．なお，媒質Ⅱの電磁界量に含まれる $\Omega$ および $a$ なる量はそれぞれ次式で定義される量である．

$$\Omega = \frac{(n_2^2 - 1)\beta}{(1 - n_2^2\beta^2)c}$$

$$a = \frac{1 - \beta^2}{1 - n_2^2\beta^2}$$

ただし，

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \qquad n_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}$$

さて，式(2)～(5)にそれぞれ含まれる $E_{01}$，$E_{02}^-$，$E_{02}^+$，$E_{03}$なる量は場所および時間によらない定数であり，$z = h$ および $z = -h$ のそれぞれの導体板表面における境界条件を用いて進行波電流の振幅 $I_0$ で表わすことができる．まず，$z = h$ なる導体板上における電磁界の接線成分に対する境界条件より次式を得る．

$$E_{01} e^{jk_{1z}h} - E_{02}^+ e^{jk_{2z}h} - E_{02}^- e^{-jk_{2z}h} = 0$$

$$M^{-2} k_{1z} E_{01} e^{jk_{1z}h} - k_{2z} E_{02}^+ e^{jk_{2z}h} + k_{2z} E_{02}^- e^{-jk_{2z}h} = \omega \mu_0 I_0$$

つぎに，同じく $z = -h$ なる導体板上における境界条件より次式を得る．

$$E_{02}^+ e^{-jk_{2z}h} + E_{02}^- e^{jk_{2z}h} - E_{03} e^{jk_{1z}h} = 0$$

$$-k_{2z} E_{02}^+ e^{-jk_{2z}h} + k_{2z} E_{02}^- e^{jk_{2z}h} - M^{-2} k_{1z} E_{03} e^{jk_{1z}h} = \omega \mu_0 I_0$$

ただし，

$$M=\sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_0}}$$

以上のように，4つの未知量$E_{01}$，$E_{02}^-$，$E_{02}^+$，$E_{03}$に対して，4つの境界条件を用いて4つの方程式が導かれ，したがってこれらの未知量は一意的に決定されつぎのようになる．

$$E_{01}=\frac{e^{-jk_{2z}h}-e^{jk_{2z}h}}{e^{jk_{1z}h}}E_{02}^- \tag{6a}$$

$$E_{02}^-=\frac{-\omega\mu_0 I_0}{M^{-2}k_{1z}(e^{jk_{2z}h}-e^{-jk_{2z}h})-k_{2z}(e^{jk_{2z}h}+e^{-jk_{2z}h})} \tag{6b}$$

$$E_{02}^+=-E_{02}^- \tag{6c}$$

$$E_{03}=-E_{01} \tag{6d}$$

上の関係式のうち(6c)，(6d)は座標の対称性から考えて当然の結果である．

ここで，各媒質中の伝搬定数の境界面に垂直な成分，すなわち$z$方向成分について考察する．まず，媒質ⅠおよびⅢ中を伝搬する波の伝搬定数の$z$方向成分はつぎのように表わされる．

$$k_{1z}=\begin{cases}-k_0\sqrt{n_1^2M^2-n_e^2}, & (n_1^2M^2-n_e^2\geq 0) \qquad (7a)\\ jk_0\sqrt{n_e^2-n_1^2M^2}, & (n_1^2M^2-n_e^2<0) \qquad (7b)\end{cases}$$

ただし，$n_e$は次式で定義される量である．

$$k_e=\frac{\omega}{v_{pe}}=\frac{c}{v_{pe}}k_0=\frac{k_0}{\beta_{pe}}=n_e k_0 \tag{8}$$

ここで，$v_{pe}$ は励振進行波電流の位相速度を表わし，また $n_e$ は等価的な屈折率を表わす．式（7b）から，$n_1^2M^2 - n_e^2 < 0$ のときには，媒質ⅠおよびⅢ内の電磁界は境界面から離れるにしたがってreactiveに減衰することがわかる．ここで，以後の式の取り扱いを簡単にするため，式（7a），（7b)を一つにまとめて

$$k_{1z} = -k_0(\alpha_r - j\alpha_i) \tag{9}$$

と表わすことにする．ここで，$\alpha_r$ および $\alpha_i$ はそれぞれ次式で定義される量である．

$$\alpha_r = \begin{cases} \sqrt{n_1^2M^2 - n_e^2} & , \quad (n_1^2M^2 - n_e^2 > 0) \quad (10a) \\ 0 & , \quad (n_1^2M^2 - n_e^2 < 0) \quad (10b) \end{cases}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & , \quad (n_1^2M^2 - n_c^2 > 0) \quad (11a) \\ \sqrt{n_e^2 - n_1^2M^2} & , \quad (n_1^2M^2 - n_c^2 < 0) \quad (11b) \end{cases}$$

つぎに $k_{2z}$ は文献（1），（2）と同様にしてつぎのように表わされる．

$$k_{2z} = -k_0(p - jq) \tag{12}$$

ただし，$p$ および $q$ はそれぞれ次式で定義される量である．

$$p = \pm\left[\frac{P + \sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{13a}$$

$$q = \pm\left[\frac{-P + \sqrt{P^2+Q^2}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{13b}$$

ここで，

$$P = p^2 - q^2$$

$$= \gamma^2\left[n_2^2(1-n_e\beta)^2 - (n_e-\beta)^2\right] \qquad (14a)$$

$$Q = 2pq$$

$$= \frac{\gamma}{m} n_2^2(1-n_e\beta) \qquad (14b)$$

あるいは，式(8)の関係を用いて

$$P = \gamma^2\left[n^2\left(1-\frac{v}{v_{pe}}\right)^2 - \left(\frac{v}{v_{pe}}-\beta\right)^2/\beta^2\right] \qquad (15a)$$

$$Q = \frac{\gamma}{m} n_2^2\left(1-\frac{v}{v_{pe}}\right) \qquad (15b)$$

ここで $m = \dfrac{\omega\varepsilon_2}{\sigma}$

さて，$k_{1z}$ および $k_{2z}$ をそれぞれ式(9)および(12)のように表わすとき，さきに求めた式(6)の諸式はつぎのように書き表わされる．

$$E_{01} = \frac{e^{jk_0(p-jq)h} - e^{-jk_0(p-jq)h}}{e^{-jk_0(\alpha_r - j\alpha_i)h}} E_{02}^-$$

$$E_{02}^- = \frac{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} I_0}{M^{-2}(\alpha_r - j\alpha_i)\left[e^{-jk_0(p-jq)h} - e^{jk_0(p-jq)h}\right]} *$$

$$* \frac{}{-(p-jq)\left[e^{-jk_0(p-jq)h} + e^{jk_0(p-jq)h}\right]}$$

$$E_{02}^+ = -E_{02}^-$$

$$E_{03} = -E_{01}$$

上式からつぎの関係式を得る．

$$|E_{01}|^2 = 2\left[\cosh(2k_0 qh) - \cos(2k_0 ph)\right] e^{2k_0 \alpha_i h} |E_{02}^-|^2 \quad (16a)$$

$$|E_{02}^-|^2 = \frac{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}|I_0|^2}{\Delta} \quad (16b)$$

$$|E_{02}^+|^2 = |E_{02}^-|^2 \quad (16c)$$

$$|E_{03}|^2 = |E_{01}|^2 \quad (16d)$$

ただし，

$$\Delta = 2\left[\left\{M^{-4}(\alpha_r^2 + \alpha_i^2) + (p^2 + q^2)\right\}\cosh(2k_0 qh)\right.$$
$$-\left\{M^{-4}(\alpha_r^2 + \alpha_i^2) - (p^2 + q^2)\right\}\cos(2k_0 ph)$$
$$+2\left\{M^{-2}(\alpha_r p + \alpha_i q)\sinh(2k_0 qh)\right.$$
$$\left.\left.-M^{-2}(\alpha_r q - \alpha_i p)\sin(2k_0 ph)\right\}\right]$$

以上導いた諸式を用いて，媒質ⅠおよびⅢ中の電磁エネルギー流の時間平均値，すなわちPoyntingベクトルの時間平均値$\langle \mathbf{S}_1 \rangle$および$\langle \mathbf{S}_3 \rangle$はそれぞれつぎのように求められる．

$$\langle S_{1x} \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{n_e}{M^2}\left[\cosh(2k_0 qh) - \cos(2k_0 ph)\right]$$
$$\times |E_{02}^-|^2 e^{-2k_0 \alpha_i (z-h)} \quad (17a)$$

$$\langle S_{1z} \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\alpha_r}{M^2}\left[\cosh(2k_0 qh) - \cos(2k_0 ph)\right]$$
$$\times |E_{02}^-|^2 e^{-2k_0 \alpha_i (z-h)} \quad (17b)$$

および

$$<S_{3x}> = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \times \frac{n_e}{M^2} \left[ \cosh(2k_0 qh) - \cos(2k_0 ph) \right]$$

$$\times |E_{02}^-|^2 e^{2k_0 \alpha_i (z+h)} \qquad (18a)$$

$$<S_{3z}> = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \times \frac{\alpha_r}{M^2} \left[ \cosh(2k_0 qh) - \cos(2k_0 ph) \right]$$

$$\times |E_{02}^-|^2 e^{2k_0 \alpha_i (z+h)} \qquad (18b)$$

ただし，式(10)からわかるとおり $n_1^2 M^2 - n_e^2 < 0$ のときには $\alpha_r = 0$ であり，したがって

$$<S_{1z}> = <S_{3z}> = 0 \ , \quad (n_1^2 M^2 - n_e^2 < 0)$$

となる．なお媒質Ⅱ中のエネルギー関係式については次節で詳しく考察する．

## 3．導電性運動媒質中のエネルギー関係式

ここでは，媒質Ⅱ，すなわち導電性運動媒質中のエネルギー関係式について考察する．著者らが以前に示したように導電性運動媒質中ではつぎのエネルギー関係式が成立する[1],[2]

$$-\nabla \cdot <\mathbf{S}> = <W> = <A> + <Q> \qquad (19)$$

ただし，

$$<\mathbf{S}> = \frac{1}{2} Re \left[ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right] \qquad (20a)$$

$$\langle W\rangle = \frac{1}{2} Re\left[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}\right] \tag{20b}$$

$$\langle A\rangle = \frac{1}{2} Re\left[\mathbf{v} \cdot (\rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f^* \times \mathbf{B})\right] \tag{20c}$$

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{2} Re\left[\mathbf{J}_c^* \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\right] \tag{20d}$$

ここで，$\langle \mathbf{S}\rangle$は電磁エネルギー流の時間平均値を表わし，$\langle W\rangle$は電磁場が媒質に対してなす全仕事量の時間平均値を表わす．$\langle A\rangle$ は電磁場が媒質に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わし，また$\langle Q\rangle$ は発生する熱量の時間平均値を表わす．なお，式(20)に含まれる$\mathbf{J}_f$および$\mathbf{J}_c$はそれぞれ自由電流密度および伝導電流密度を表わし，次式で定義される．

$$\mathbf{J}_f = \gamma\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{21a}$$

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{J}_f - \rho_f \mathbf{v} \tag{21b}$$

ただし，

$$\rho_f = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_f}{c^2} \tag{22}$$

さて，媒質Ⅱ中には式(3)，(4)に示したように上部の添字$^-$および$^+$を持った波がそれぞれ存在し，したがって全体としての電磁界はつぎのように表わされる．

$$E_{2y} = E_{2y}^- + E_{2y}^+$$

$$= E_{02}^-\left[e^{jk_0 pz} e^{k_0 qz} - e^{-jk_0 pz} e^{-k_0 qz}\right] e^{j(\omega t - k_e x)} \tag{23a}$$

$$H_{2x} = H_{2x}^{-} + H_{2x}^{+}$$

$$= \frac{k_0}{\omega \mu_0} (p - j q) E_{02}^{-}$$

$$\times \left[ e^{jk_0 pz} e^{k_0 qz} + e^{-jk_0 pz} e^{-k_0 qz} \right] e^{j(\omega t - k_e x)} \qquad (23b)$$

$$H_{2z} = H_{2z}^{-} + H_{2z}^{+}$$

$$= \frac{k_e + \omega \Omega}{\omega \mu_0 a} E_{02}^{-} \left[ e^{jk_0 pz} e^{k_0 qz} - e^{-jk_0 pz} e^{-k_0 qz} \right] e^{j(\omega t - k_e x)} \qquad (23c)$$

したがって，媒質Ⅱ中の電磁エネルギー流$<\mathbf{S}_2>$は上式を式(20a)に代入することによってつぎのように求められる．

$$<S_{2x}> = \gamma^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[ n_2^2 \beta \left( 1 - \frac{v}{v_{pe}} \right) + \left( \frac{v}{v_{pe}} - \beta^2 \right) / \beta \right] |E_{02}^{-}|^2$$

$$\times \left[ \cosh(2k_0 qz) - \cos(2k_0 pz) \right] \qquad (24a)$$

$$<S_{2z}> = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_{02}^{-}|^2 \times \left[ p \sinh(2k_0 qz) - q \sin(2k_0 pz) \right] \qquad (24b)$$

上式から次式を得る．

$$-\nabla \cdot <\mathbf{S}_2> = \gamma \sigma \left( 1 - \frac{v}{v_{pe}} \right) |E_{02}^{-}|^2 \times \left[ \cosh(2k_0 qz) - \cos(2k_0 pz) \right] \qquad (25)$$

また，式(20b)～(20d)で定義される$<W>$，$<A>$および$<Q>$なる量はそれぞれつぎのように求められる．

$$<W> = \gamma \sigma \left( 1 - \frac{v}{v_{pe}} \right) |E_{02}^{-}|^2 \left[ \cosh(2k_0 qz) - \cos(2k_0 pz) \right] \qquad (26a)$$

$$<A> = \gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_{pe}}\right)\left(\frac{v}{v_{pe}}\right)|E_{02}^{-}|^2\left[\cosh(2k_0qz)-\cos(2k_0pz)\right] \tag{26b}$$

$$<Q> = \gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_{pe}}\right)^2|E_{02}^{-}|^2\left[\cosh(2k_0qz)-\cos(2k_0pz)\right] \tag{26c}$$

ここで，ac MHD generatorの解析に通常よく用いられるslip parameter

$$s = 1-\frac{v}{v_{pe}} \tag{27}$$

を導入すれば，$<W>$，$<A>$，$<Q>$はそれぞれつぎのように書ける．

$$<W> = \gamma\sigma s|E_{02}^{-}|^2\left[\cosh(2k_0qz)-\cos(2k_0pz)\right] \tag{28a}$$

$$<A> = \gamma\sigma s(1-s)|E_{02}^{-}|^2\left[\cosh(2k_0qz)-\cos(2k_0pz)\right] \tag{28b}$$

$$<Q> = \gamma\sigma s^2|E_{02}^{-}|^2\left[\cosh(2k_0qz)-\cos(2k_0pz)\right] \tag{28c}$$

式(28a)，(28b)からわかるようにslip parameterが負，すなわち$s<0$のときには$<W>$も$<A>$も共に負の量となり，この場合には$-<W>$なる量は媒質が電磁場に対してなす全仕事量の時間平均値を表わし，また$-<A>$なる量は媒質が電磁場に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わす．また，エネルギー関係式(19)からわかるように，$<W>$が負のときには

$$\nabla\cdot<\mathbf{S}_2> = \frac{\partial<S_{2z}>}{\partial z} > 0 \tag{29}$$

となり，電磁エネルギー流$<\mathbf{S}_z>$はその流れの方向に増大することがわかる．

ここで，式(13)の$p$，$q$の複号について考察しよう．式(14b)，(15b)から明らかなように$1-\frac{v}{v_{pc}}>0$，すなわちslip parameter sが正のときには$pq>0$となり，したがって式(13)の複号は同順となる．また，$s<0$のときには$pq<0$となり，したがって$p$，$q$は異符号となる．ところで，本文の場合には以前に取り扱った場合[1],[2]，すなわち入射平面電磁波によって導電性運動媒質中に増幅波を励振する場合とは違って，$p$および$q$の個々の符号を決定する必要はない．なぜならば，式(23)から明らかなように，たとえば合成電界$E_{zy}$について

$$E_{zy}(p,q)=E_{zy}(-p,-q),\quad (pq>0)$$

$$E_{zy}(p,-q)=E_{zy}(-p,q),\quad (pq<0)$$

なる関係式が成立(このことは磁界$H_{zx}$および$H_{zz}$についても同様である)し，したがって2つの波を同時に考えるとき，両者の合成電磁界については，slip parameter $s$の正，負に応じて$p$と$q$の積の符号を決めれば十分であり，$p$および$q$の個々の符号を決める必要はないからである．

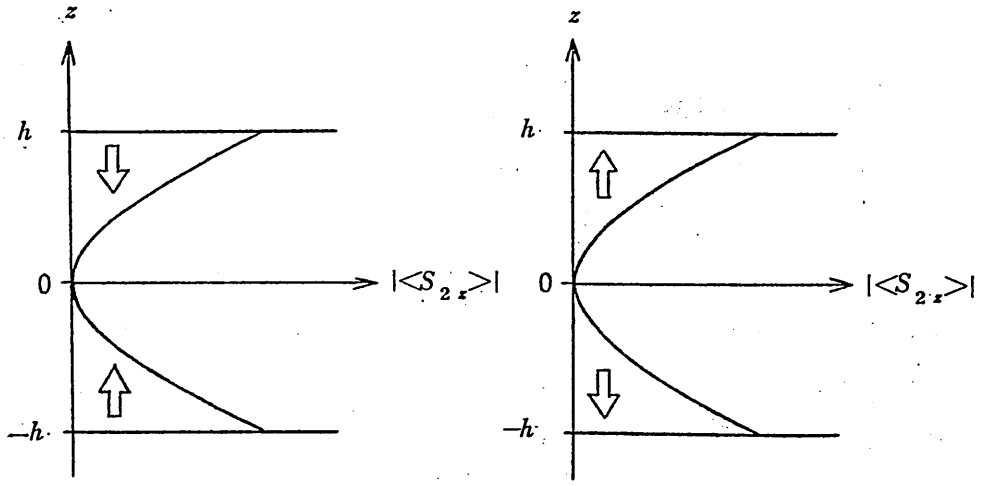
つぎに，導電性運動媒質中の電磁エネルギー流について考察する．さきに述べたように，$s$が正のときには$<W>>0$，すなわち$\nabla\cdot<\mathbf{S}_z><0$となり，電磁エネルギー流はその流れの方向に減衰し，$s$が負のときには$<W><0$，すなわち$\nabla\cdot<\mathbf{S}_z>>0$となり，したがって電磁エネルギー流はその流れの方向に増大するわけであるが，以下においてその様子を簡単に考察しよう．まず，$<S_{zz}>$は$z=0$において0となり，その$z$方向の微係数は減衰領域($s>0$)では負，増幅領域($s<0$)では正となる．したがって，まず$s>0$，すなわち減衰領域では

$$<S_{2z}>\begin{cases} >0 & (z<0) \\ =0 & (z=0) \\ <0 & (z>0) \end{cases} \tag{30}$$

となり，つぎに $s<0$，すなわち増幅領域では

$$<S_{2z}>\begin{cases} <0 & (z<0) \\ =0 & (z=0) \\ >0 & (z>0) \end{cases} \tag{31}$$

となる．式（30）および（31）の関係を図示したのが図2（a）および2（b）である．つぎに，$<S_{2x}>$の符号は式（24a）から分かるように $\left[n_2^2\beta\left(1-\frac{v}{v_{pe}}\right)+\left(\frac{v}{v_{pe}}-\beta^2\right)/\beta\right]$ の符号と一致する．したがって，媒質の構成定数と運動速度，および外部励振回路を流れる進行波電流の位相速度が決まれば$<S_{2x}>$の方向は決定される．なお，$z=0$において$<S_{2x}>=0$となる．以上のこ




(a) 減衰領域（$s>0$）　　(b) 増幅領域（$s<0$）

図2　$<S_{2z}>$の様子

とからつぎのことがわかる．すなわち，電磁エネルギー流$<\mathbf{S}_2>$はその減衰領域においては，$z=\pm h$なる面から対称面$z=0$に向って減衰し，増幅領域においては$z=0$なる面から$z=\pm h$なる面に向って増大する．なお，対称面$z=0$上においては電磁エネルギー流は0となる．

## 4. ac MHD generator

前節でのべたように，$s$が負の場合，すなわち媒質の運動速度が励振進行波電流の位相速度より大きい場合には，運動媒質から電磁場にエネルギーが与えられ，その結果電磁エネルギー流がその流れの方向に増大し，したがって$s<0$の領域は波動増幅領域となるわけであるが，ここではこの領域は図1で示した構造がac MHD generatorとして動作する領域であることを示そう．このため以下においては$s<0$とする．

いま，導体板にはさまれた，$x$および$y$方向の長さが共に単位長さに等しいような体積$V$を考える．この体積$V$にわたって$-<A>$を積分することによって次式を得る．

$$P_{in}=\int_0^1\int_0^1 dx\,dy\int_{-h}^{h}(-<A>)\,dz$$

$$=-2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(1-s)|E_{02}^{-}|^2\left[p\sinh(2k_0qh)-q\sin(2k_0ph)\right] \tag{32}$$

$P_{in}$は，体積$V$内の媒質が電磁場に対してなす力学的仕事を表わす．つぎに，体積$V$内の媒質が電磁場に対してなす全仕事量は$-<W>$を体積$V$にわたって積分することによって

$$P_{out} = \int_0^1 \int_0^1 dx\, dy \int_{-h}^{h} (-\langle W \rangle)\, dz$$

$$= -2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, |E_{02}^{-}|^2 \left[ p \sinh(2k_0 q h) - q \sin(2k_0 p h) \right] \tag{33}$$

となるが，この量が導体板につないだ負荷からとりだせる電力に等しいことを示すことができる[3]．したがって，generatorとしての効率$\eta_g$，すなわち電気的出力$P_{out}$と力学的入力$P_{in}$との比は式(32)，(33)の結果を用いてつぎのように与えられる．

$$\eta_g = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{1}{1-s} \qquad (s < 0) \tag{34a}$$

あるいは

$$\eta_g = \frac{v_{pe}}{v} = \frac{\beta_{pe}}{\beta} \qquad (v_{pe} < v) \tag{34b}$$

上式は媒質の運動速度が十分小さいという仮定のもとに導かれたKijewski 等の結果[3]と一致する．

著者らは，さきに平面電磁波によって導電性運動媒質中に増幅波が励振できることを，本文の場合と同様にMinkowski 理論の立場から示し，これを報告した[1],[2]．これに対し，最近安元[4]はChu記述形式を用いて，無限に拡がった導電性運動媒質中に$TE$波を励振する問題を取り扱い，媒質の運動速度が励振進行波電流の位相速度を越えるとき，ac MHD generatorとして利用できるが電磁波は増幅しないという結論を導いた．しかし，彼のこの結論は媒質中の電磁波の伝搬定数$k_{zz} = -k_0(p - jq)$を求めるさい，$p$，$q$の符号の決定を誤ったからであり，取り扱う系が本文図1のような構成の場合には，前節において述べたようにslip parameter $s$の正負に応じて$p$

と $q$ との積の符号を決めれば十分であり，$p$ および $q$ の個々の符号を決める必要はなく，したがってこのような誤った結論が生ずる余地はない．本文の結果から波動増幅領域は，すなわちgenerator 動作領域であり，両者は同じ現象を立場をかえて見た結果にほかならないことは明らかである．したがって，安元の報告は，むしろ「導電性運動媒質中の電磁波の励振の問題を取り扱う場合，Minkowski 理論を用いてもChu理論を用いてもまったく同じ結果を得る．」ことを示したとして評価すべきであると考えられる．

## 5．数 値 計 算 例

まず式（32）および（33）で与えられる $P_{in}$ および $P_{out}$ が無次元の量となるようにつぎのように規格化する．

$$P_{inN} = \frac{P_{in}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,|I_0|^2} \tag{35}$$

$$P_{outN} = \frac{P_{out}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,|I_0|^2} \tag{36}$$

ここで，導体板間隔 $d$，および誘電率が $\varepsilon_2$ の静止誘電体中を伝搬する平面波の波長 $\lambda_2$

$$d = 2h$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{n_2 k_0}$$

を導入すれば $P_{inN}$ および $P_{outN}$ はそれぞれつぎのように表わされる．

$$P_{inN} = -2(1-s)\frac{p\sinh\left[\frac{d}{\lambda_2}\cdot\frac{2\pi}{n_2}q\right] - q\sin\left[\frac{d}{\lambda_2}\cdot\frac{2\pi}{n_2}p\right]}{\Delta} \tag{37}$$

$$P_{outN} = -2\frac{p\sinh\left[\frac{d}{\lambda_2}\cdot\frac{2\pi}{n_2}q\right] - q\sin\left[\frac{d}{\lambda_2}\cdot\frac{2\pi}{n_2}p\right]}{\Delta} \tag{38}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\Delta = 2\Big[&\left\{M^{-4}(\alpha_r^2+\alpha_i^2)+(p^2+q^2)\right\}\cosh\left[\frac{d}{\lambda_2}\cdot\frac{2\pi}{n_2}q\right]\\&-\left\{M^{-4}(\alpha_r^2+\alpha_i^2)-(p^2+q^2)\right\}\cos\left[\frac{d}{\lambda_2}\cdot\frac{2\pi}{n_2}p\right]\\&+2\Big\{M^{-2}(\alpha_r p+\alpha_i q)\sinh\left[\frac{d}{\lambda_2}\cdot\frac{2\pi}{n_2}q\right]\\&-M^{-2}(\alpha_r q-\alpha_i p)\sin\left[\frac{d}{\lambda_2}\cdot\frac{2\pi}{n_2}p\right]\Big\}\Big]\end{aligned}$$

したがって，静止媒質の構成定数 $n_1$，$n_2$，$m$，導体板間隔 $d$，媒質の運動速度 $\beta$，および励振進行波電流の位相速度 $\beta_{pe}$ を与えれば $P_{inN}$，$P_{outN}$ は決定される．

$P_{outN}$ の数値計算例を図３～５に示す．図３，４および５はそれぞれ導体板間隔 $d$，媒質の運動速度 $\beta$，および励振進行波電流の位相速度 $\beta_{pe}$ に対する $P_{outN}$ の変化の様子を示している．

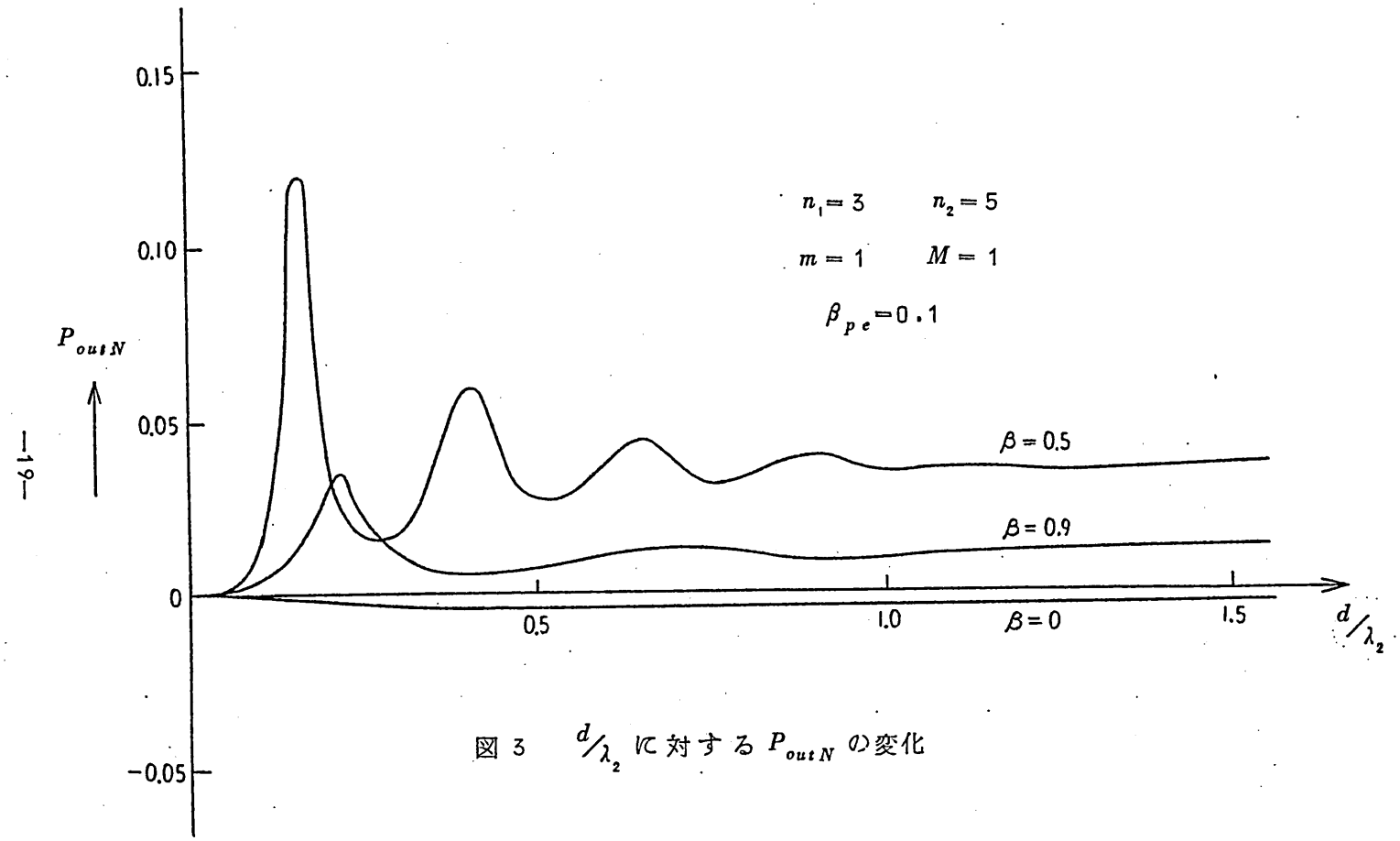



図 3 $d/\lambda_2$ に対する $P_{outN}$ の変化

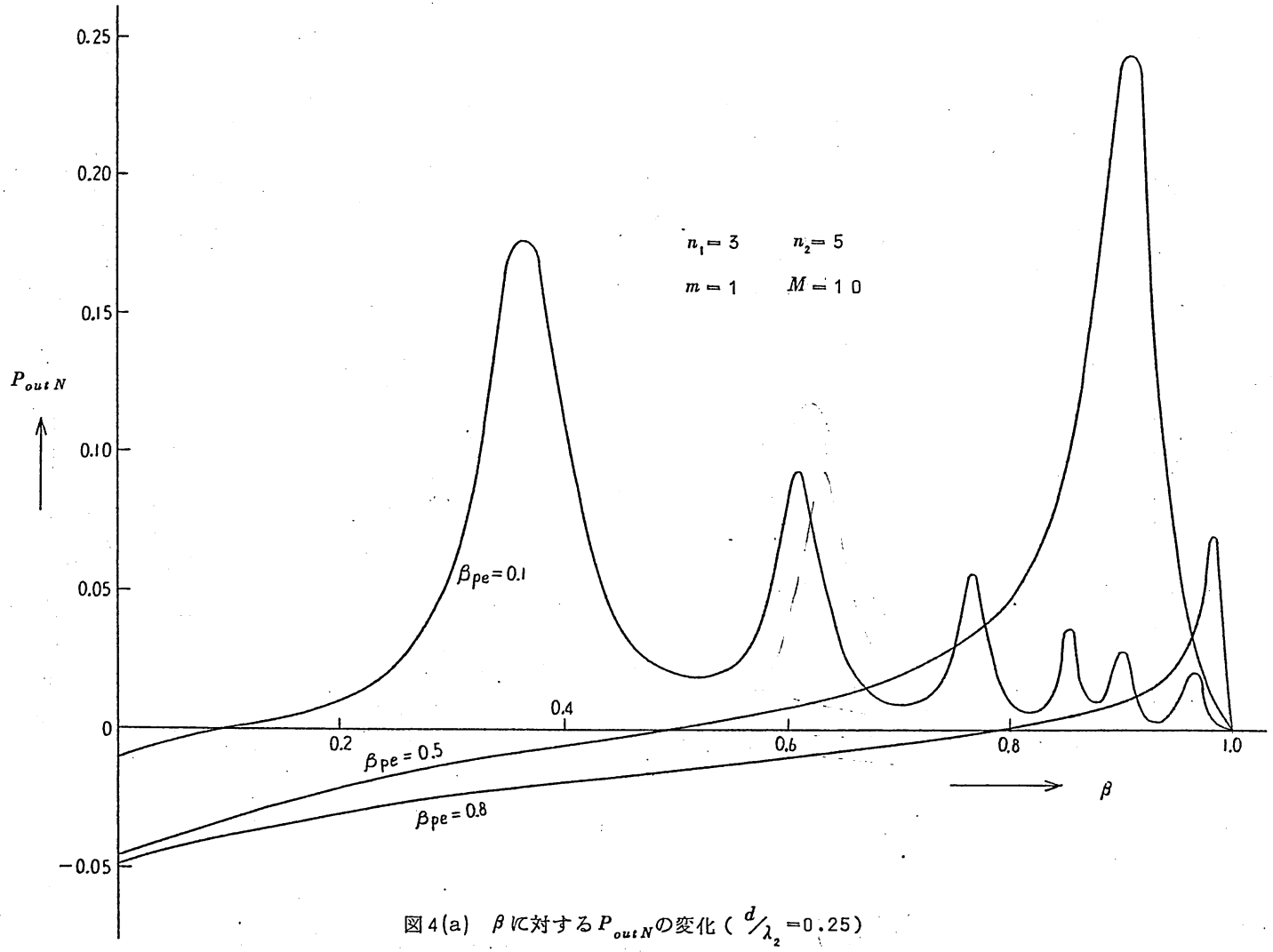



図4(a) $\beta$に対する$P_{out\,N}$の変化（$d/\lambda_2 = 0.25$）

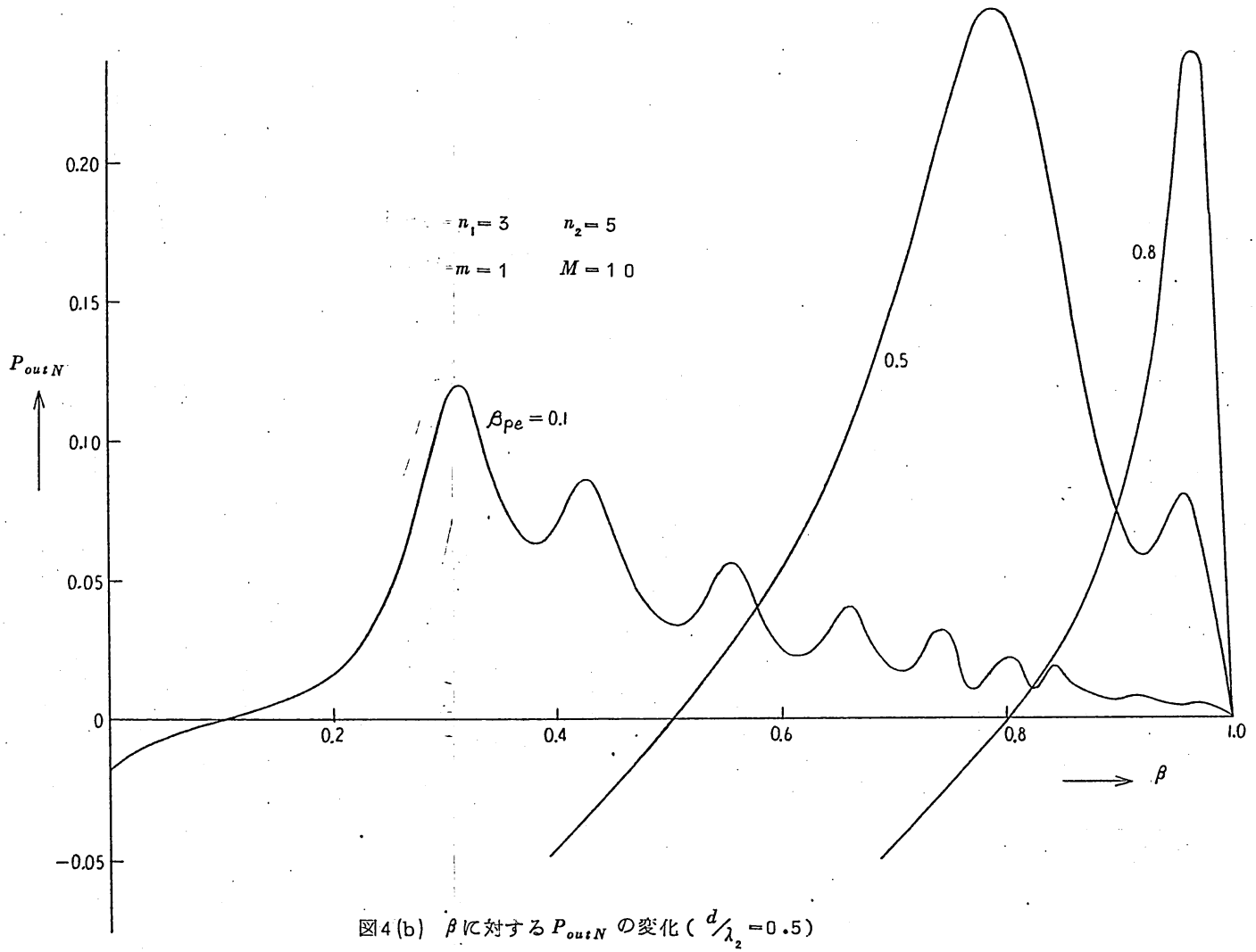



図4(b) $\beta$に対する$P_{outN}$の変化( $d/\lambda_2 = 0.5$ )

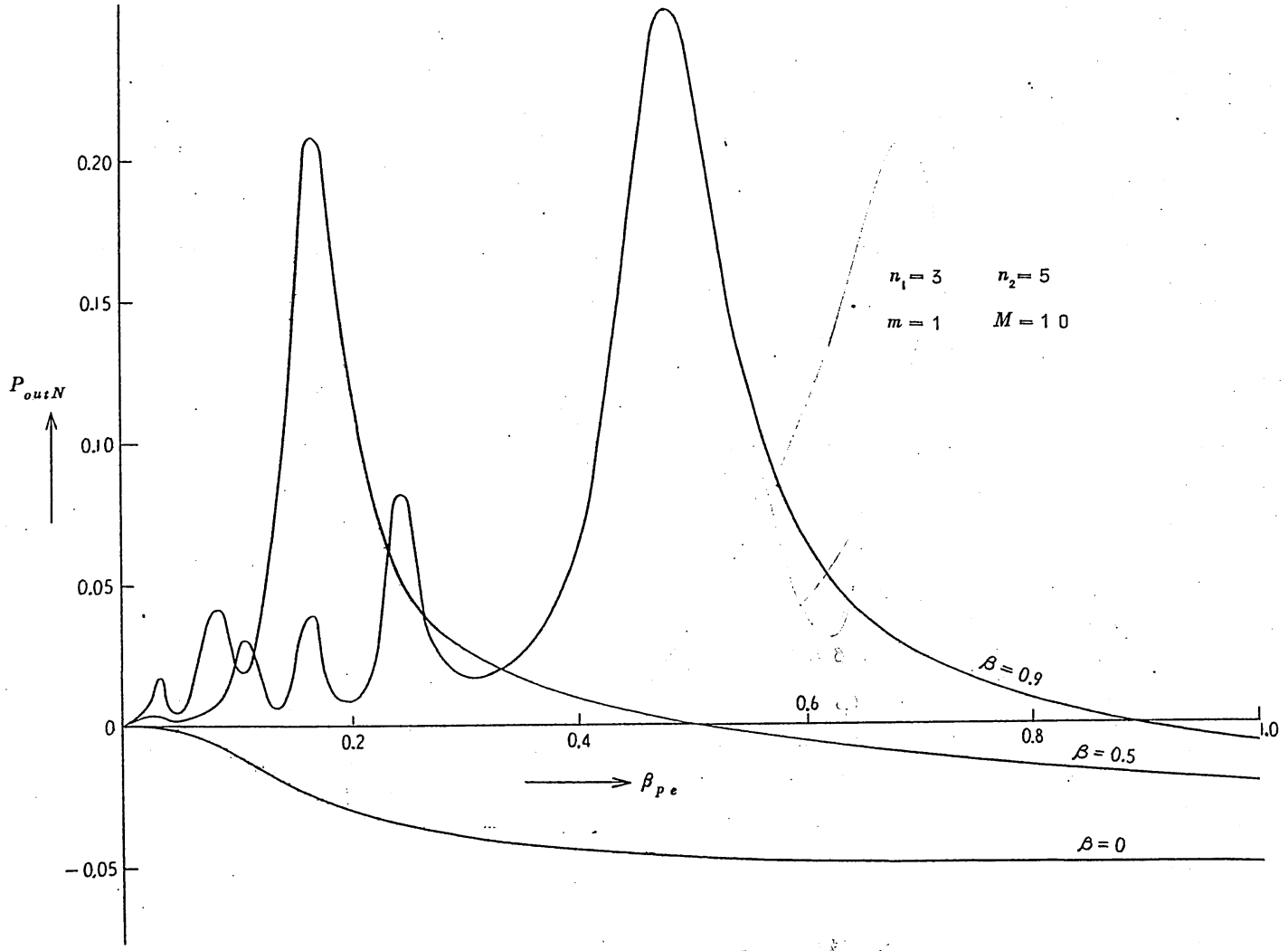



図5(a) $\beta_{pe}$に対する$P_{outN}$の変化 ( $d/\lambda_2 = 0.25$ )

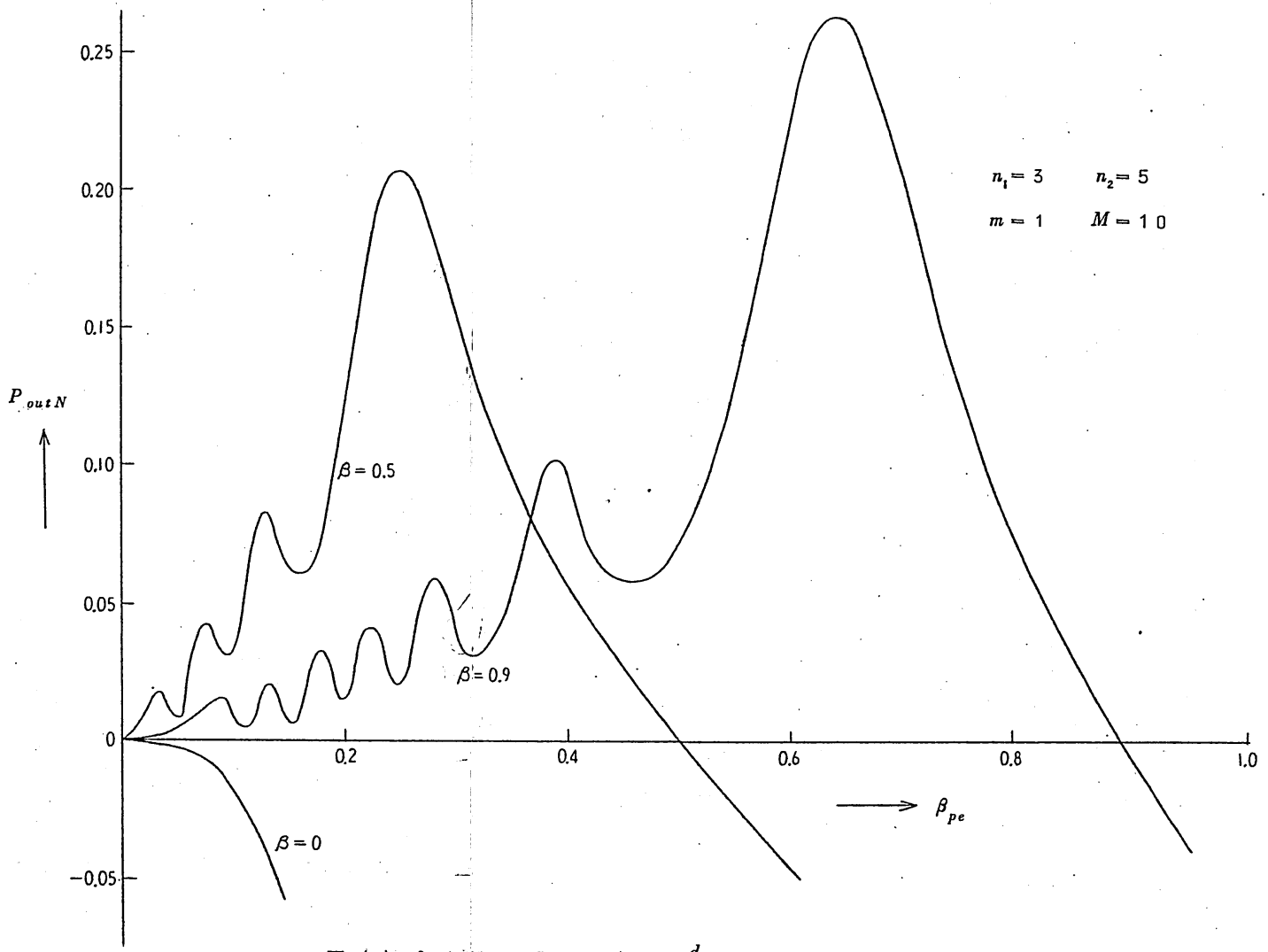



図5(b) $\beta_{pe}$に対する$P_{outN}$の変化（$d/\lambda_z = 0.5$）

## 謝　　辞

日頃ご指導ごべんたついただいている本学工学部板倉清保教授および裏克己教授，ならびに種々有益な御教示，御助言をいただいた本学工学部熊谷信昭助教授に深謝する．また，常々ご討論いただく板倉研究室の諸氏に深謝する．

## 文　　献

(1) 藤岡　弘，小川英一："導電性運動媒質中の増幅波の励振"，輻研資(1969-11)．

(2) 藤岡　弘，小川英一："導電性運動媒質中の増幅波の励振"，信学論(B)，掲載予定．

(3) L. J. Kijewski, J. B. Fanucci, and N. Ness : "Impedance characteristics of an AC MHD generator", IEEE Trans. Electron Devices, Vol. ED-11, pp. 14-20, January 1964.

(4) 安元清俊；"導電性運動媒質と電磁波の相互作用について — Chu の記述形式からの考察 —"，信学会アンテナ・伝播研資A·P 70-10 (1970-06)．

輻射科学研究会資料

# 全反射現象に関する一考察

藤岡　弘
小川英一
(大阪大学・工学部)

1970年12月4日

# 1. 序　　言

本文では，全反射波によって半無限誘電体媒質（図１参照）あるいは誘電体Ｓｌａｂ（図３参照）中に励振された波の性質について論じている．まず，半無限誘電体中に励振される波について考察し，真空層の厚さの増加と共に励振された波の電磁エネルギー流は単調に減衰することを明らかにした．つぎに，全反射波によって誘電体Ｓｌａｂ中に励振される波について論じ，誘電体Ｓｌａｂの厚さｄ，媒質の屈折率$n_1$，$n_3$および入射角$\theta$が適当な条件を満足するとき，励振された波の電磁エネルギー流を最大にする真空層の厚さ$h$が存在することを明らかにしている．

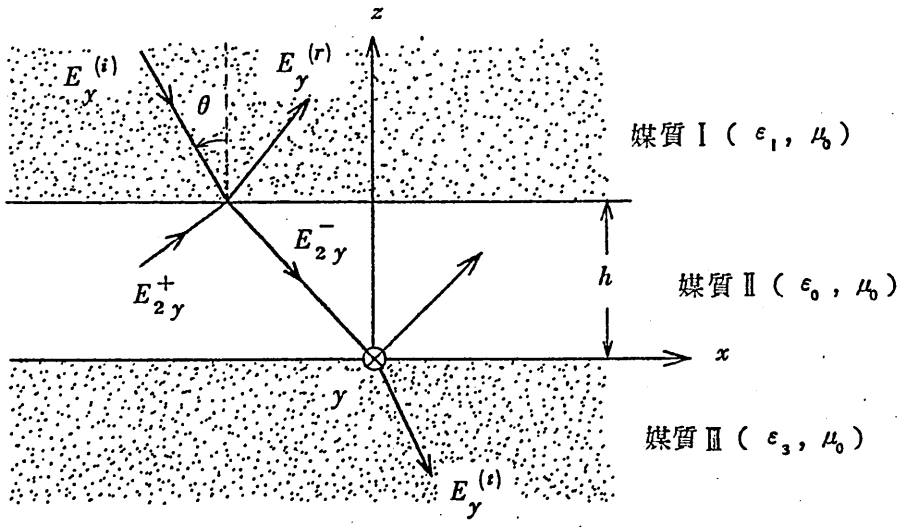



図１　　座　標　系

## 2. 全反射波による半無限誘電体中の波

本節においては全反射波によって半無限誘電体中に励振される波の性質について考察する．図1において媒質Ⅰは（$\varepsilon_1$, $\mu_0$）なる半無限誘電体媒質，媒質Ⅱは厚さ$h$なる真空層であり，また媒質Ⅲは（$\varepsilon_3$, $\mu_0$）なる半無限誘電体であるとする．

いま，媒質Ⅰから入射角$\theta$をもつ平面$E$波が入射するものとすれば，媒質Ⅰ，Ⅱ，およびⅢ中の波はそれぞれつぎのように表わされる．

媒質Ⅰ：

入射波

$$E_y^{(i)} = E_{0i}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{1z}z)}$$

$$H_x^{(i)} = -\frac{k_{1z}}{\omega\mu_0} E_{0i}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{1z}z)} \qquad (1)$$

$$H_z^{(i)} = \frac{k_{1x}}{\omega\mu_0} E_{0i}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x - k_{1z}z)}$$

反射波

$$E_y^{(r)} = E_{0r}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{1z}z)}$$

$$H_x^{(r)} = \frac{k_{1z}}{\omega\mu_0} E_{0r}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{1z}z)} \qquad (2)$$

$$H_z^{(r)} = \frac{k_{1x}}{\omega\mu_0} E_{0r}\, e^{j(\omega t - k_{1x}x + k_{1z}z)}$$

媒質Ⅱ：

$$E_{2y}^{-} = E_0^{-} e^{j(\omega t - k_{1x} x - k_{2z} z)}$$

$$H_{2x}^{-} = -\frac{k_{2z}}{\omega \mu_0} E_0^{-} e^{j(\omega t - k_{1x} x - k_{2z} z)} \qquad (3)$$

$$H_{2z}^{-} = \frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_0^{-} e^{j(\omega t - k_{1x} x - k_{2z} z)}$$

$$E_{2y}^{+} = E_0^{+} e^{j(\omega t - k_{1x} x + k_{2z} z)}$$

$$H_{2x}^{+} = \frac{k_{2z}}{\omega \mu_0} E_0^{+} e^{j(\omega t - k_{1x} x + k_{2z} z)} \qquad (4)$$

$$H_{2z}^{+} = \frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_0^{+} e^{j(\omega t - k_{1x} x + k_{2z} z)}$$

媒質Ⅲ：

透過波

$$E_y^{(t)} = E_{0t} e^{j(\omega t - k_{1x} x - k_{3z} z)}$$

$$H_x^{(t)} = -\frac{k_{3z}}{\omega \mu_0} E_{0t} e^{j(\omega t - k_{1x} x - k_{3z} z)} \qquad (5)$$

$$H_z^{(t)} = \frac{k_{1x}}{\omega \mu_0} E_{0t} e^{j(\omega t - k_{1x} x - k_{3z} z)}$$

ただし，$E$波の定義より他の電磁界成分は0であり，また$E_{0i}$，$E_{0r}$，$E_0^{-}$，$E_0^{+}$，および$E_{0t}$はそれぞれ場所および時間に無関係な定数である．添字$i$，$r$および$t$はそれぞれ入射波，反射波および透過波の電磁界量であることを

表わし，また上部の添字$^{-}$および$^{+}$は，それぞれ媒質Ⅱ中を$z$の負および正の方向に伝搬する波の電磁界量を表わす．なお伝搬定数$k_{1x}$，$k_{1z}$，$k_{2z}$および$k_{3z}$は入射角$\theta$および各媒質の構成定数とそれぞれつぎの関係によって結ばれている．

$$k_{1x} = n_1 k_0 \sin\theta = \beta \tag{6a}$$

$$k_{1z} = -n_1 k_0 \cos\theta = -\beta_z \tag{6b}$$

$$k_{2z} = \begin{cases} \sqrt{-k_0\sqrt{1-n_1^2\sin^2\theta}} & (n_1^2\sin^2\theta \leq 1) \\ \sqrt{j k_0\sqrt{n_1^2\sin^2\theta-1}} & (n_1^2\sin^2\theta > 1) \end{cases}$$

$$k_{3z} = \begin{cases} \sqrt{-k_0\sqrt{n_3^2-n_1^2\sin^2\theta}} & (n_1^2\sin^2\theta \leq n_3^2) \\ \sqrt{j k_0\sqrt{n_1^2\sin^2\theta-n_3^2}} & (n_1^2\sin^2\theta > n_3^2) \end{cases}$$

ただし，

$$n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}, \quad n_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}}, \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

ここで，$n_1$，$n_3$および$\theta$が

$$1 \leq n_1^2\sin^2\theta \leq n_3^2 \tag{7}$$

なる関係式を満足するものとすれば$k_{2z}$および$k_{3z}$はそれぞれつぎのように

表わされる．

$$k_{2z} = j\alpha \tag{8}$$

$$k_{3z} = -\gamma \tag{9}$$

ただし，

$$\alpha = k_0\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta - 1}$$

$$\gamma = k_0\sqrt{n_3^2 - n_1^2 \sin^2\theta}$$

したがって，$n_1$および$\theta$がいわゆる全反射の条件(7)を満足するとき式(3)および(4)で与えられる媒質Ⅱ中の電磁界（$\mathbf{E}_2^-$，$\mathbf{H}_2^-$）および（$\mathbf{E}_2^+$，$\mathbf{H}_2^+$）はそれぞれ$z$の負および正の方向にreactiveに減衰することがわかる．本文においては，このようにある境界面を通過した後，電磁界が境界面に垂直な方向にreactiveに減衰するような波を全反射波と呼ぼう．位相の進む方向と直角の方向にreactiveに減衰するような波は一般にはevanescent waveと呼ばれ，この波に伴う電磁エネルギー流の向きは位相の方向と同じであり，これと直角な方向の電磁エネルギー流は0であることはよく知られている．さて，媒質Ⅱ中の電磁エネルギー流も，（$\mathbf{E}_2^-$，$\mathbf{H}_2^-$）および（$\mathbf{E}_2^+$，$\mathbf{H}_2^+$）の個々の波に伴う電磁エネルギー流

$$\langle S_{2z}^- \rangle = \frac{1}{2} Re\,[\mathbf{E}_2^- \times \mathbf{H}_2^{-*}] \cdot i_z$$

$$\langle S_{2z}^+ \rangle = \frac{1}{2} Re\,[\mathbf{E}_2^+ \times \mathbf{H}_2^{+*}] \cdot i_z$$

をそれぞれ別個に計算してやれば

$$<S_{2z}^{-}>=0$$

$$<S_{2z}^{+}>=0$$

となりそれぞれの波に伴う電磁エネルギー流の境界面に垂直な成分は0となるわけであるが，実際には（$\mathbf{E}_2^-$，$\mathbf{H}_2^-$）および（$\mathbf{E}_2^+$，$\mathbf{H}_2^+$）は同時に存在しており，したがって媒質Ⅱ中の全電磁界は

$$\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_2^- + \mathbf{E}_2^+$$

$$\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_2^- + \mathbf{H}_2^+$$

で与えられ，この全電磁界に伴う電磁エネルギー流の境界面に垂直な成分は次式で与えられる．

$$<S_{2z}>=\frac{1}{2}Re\,[\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_2^*]\cdot i_z$$

$$=<S_{2z}^{-}>+<S_{2z}^{+}>+\frac{1}{2}Re\,[\mathbf{E}_2^-\times\mathbf{H}_2^{+*}+\mathbf{E}_2^+\times\mathbf{H}_2^{-*}]\cdot i_z$$

上式の右辺第3項は一般には0ではなく，したがって

$$<S_{2z}>\neq<S_{2z}^{-}>+<S_{2z}^{+}>=0$$

となり，個々のevanesent waveに注目したときの電磁エネルギー流の位相と直角方向の成分が，たとえそれぞれ0であっても，これら2つの波を合成した全電磁界のそれは一般には0とならないことに注意しなければならない．

さて，各媒質中の電磁エネルギー流は式(1)～(9)を用いてそれぞれつぎのよ

うに表わされる．

媒質Ⅰ：

$$\langle S_x^{(i)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \left| E_{0i} \right|^2 \tag{10a}$$

$$\langle S_z^{(i)} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\beta_z}{\omega \mu_0} \left| E_{0i} \right|^2 \tag{10b}$$

$$\langle S_x^{(r)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \left| E_{0r} \right|^2 \tag{11a}$$

$$\langle S_z^{(r)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\beta_z}{\omega \mu_0} \left| E_{0r} \right|^2 \tag{11b}$$

媒質Ⅱ：

$$\langle S_{2x} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} Re \left[ \left| E_0^- \right|^2 e^{2\alpha z} + \left| E_0^+ \right|^2 e^{-2\alpha z} + \left( E_0^- E_0^{+*} + E_0^{-*} E_0^+ \right) \right] \tag{12a}$$

$$\langle S_{2z} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\omega \mu_0} Re \left[ j \left( E_0^- E_0^{+*} - E_0^{-*} E_0^+ \right) \right] \tag{12b}$$

媒質Ⅲ：

$$\langle S_z^{(t)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \left| E_{0t}{}^2 \right| \tag{13a}$$

$$\langle S_x^{(t)} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\gamma}{\omega \mu_0} \left| E_{0t}{}^2 \right| \tag{13b}$$

ここで，$z = 0$ および $z = h$ における境界条件を用いて，上の諸式に含まれ

る未定定数$E_{0r}$，$E_0^-$，$E_0^+$，および$E_{0t}$を入射波の電界の振幅$E_{0i}$で表わせばそれぞれつぎのようになる．(1)

$$E_{0r} = E_{0i} \frac{r_{12} + r_{23} e^{2jk_{2z}h}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2jk_{2z}h}} e^{-2jk_{1z}h} \qquad (14a)$$

$$E_0^- = E_{0i} \frac{t_{12} e^{-j(k_{1z} - k_{2z})h}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2jk_{2z}h}} \qquad (14b)$$

$$E_0^+ = E_{0i} \frac{t_{12} r_{23} e^{-j(k_{1z} - k_{2z})h}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2jk_{2z}h}} \qquad (14c)$$

$$E_{0t} = E_{0i} \frac{t_{12} t_{23} e^{-j(k_{1z} - k_{2z})h}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2jk_{2z}h}} \qquad (14d)$$

ただし，

$$r_{jk} = \frac{k_{jz} - k_{kz}}{k_{jz} + k_{kz}} = \rho_{jk} e^{-j\phi_{jk}} \quad , \quad (jk = 12, 23) \qquad (15a)$$

$$t_{jk} = \frac{2k_{jz}}{k_{jz} + k_{kz}} = \tau_{jk} e^{-j\chi_{jk}} \quad , \quad (jk = 12, 23) \qquad (15b)$$

反射係数$R$および透過係数$T$をそれぞれ

$$R = -\frac{\langle S_z^{(r)} \rangle}{\langle S_z^{(i)} \rangle} \qquad (16)$$

$$T = \frac{\langle S_z^{(t)} \rangle}{\langle S_z^{(i)} \rangle} \qquad (17)$$

によって定義すれば(10)～(15)の諸式を用いて$R$および$T$はつぎのように求められる．

$$R=\frac{\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}-\phi_{23})}{\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})} \tag{18}$$

$$T=\frac{\gamma\,\tau_{12}^2\,\tau_{23}^2}{2\beta_z\,[\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})]} \tag{19}$$

ただし，

$$\phi_{12}=\tan^{-1}\frac{-2\alpha\beta_z}{\beta_z{}^2-\alpha^2} \tag{20a}$$

$$\phi_{23}=\tan^{-1}\frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2-\gamma^2} \tag{20b}$$

$$\tau_{12}^2=\frac{4\beta_z{}^2}{\alpha^2+\beta^2{}_z} \tag{20c}$$

$$\tau_{23}^2=\frac{4\alpha^2}{\alpha^2+\gamma^2} \tag{20d}$$

式(18)および(19)からつぎの関係式を得る．

$$R+T=1 \tag{21}$$

なお，式(14)，(15) を用いて実際に計算を実行することにより，

$$<S_{2z}>=<S_z^{(t)}> \tag{22}$$

となることを容易に確かめることができる．このことは，境界面に垂直な方向の電磁エネルギー流の連続性から考えて当然のことである．

以上，電磁エネルギー流の境界面に垂直な成分について論じたが，次節の結果と比較するため透過波の電磁エネルギー流の境界面に平行な成分も求めておこう．$<S_x^{(t)}>$ を入射波の電磁エネルギー流の大きさ$|<S^{(i)}>|$で 規格

化し，これを$S_{xN}$で表わせば

$$S_{xN}=\frac{\langle S_x^{(t)}\rangle}{\langle S^{(i)}\rangle}=\frac{\tau_{12}^2\ \tau_{23}^2\ \sin\theta}{2\left[\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})\right]} \qquad (23)$$

となる．上式と式(19)を比較することによって

$$S_{xN}=\frac{\beta_z\ \sin\theta}{\gamma}\ T \qquad (24)$$

となることがわかるが，媒質ⅠとⅢの屈折率が等しい場合には$\beta_z=\gamma$となり，したがって

$$S_{xN}=\sin\theta\ \ T \qquad (n_1=n_3) \qquad (25)$$

となる．

ここで，$T$および$S_{xN}$の真空層の厚さ$h$に対する変化の様子を知るため，式(19)および(23)をそれぞれ$h$で微分すれば

$$\frac{dT}{dh}=-\frac{\alpha\gamma\tau_{12}^2\tau_{23}^2\sinh(2\alpha h)}{\beta_z\left[\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})\right]^2}<0$$

$$\frac{dS_{xN}}{dh}=-\frac{\alpha\tau_{12}^2\tau_{23}^2\sinh(2\alpha h)}{\left[\cosh(2\alpha h)+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})\right]^2}<0$$

となる．上式から，$T$および$S_{xN}$は$h=0$のとき最大値

$$T_0=\frac{\gamma\ \tau_{12}^2\ \tau_{23}^2}{2\beta_z\left[1+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})\right]^2} \qquad (26)$$

$$S_{xN_0}=\frac{\tau_{12}^2\ \tau_{23}^2\ \sin\theta}{2\left[1+\cos(\phi_{12}+\phi_{23})\right]^2} \qquad (27)$$

をとり，$h$の増加と共に単調に減少し，真空層の厚さ$h$が自由空間波長$\lambda_0 = 2\pi/k_0$に比べて十分大きくなれば

$$T \rightarrow 0 \quad (h/\lambda_0 \rightarrow \infty) \tag{28}$$

$$S_{xN} \rightarrow 0 \quad (h/\lambda_0 \rightarrow \infty) \tag{29}$$

となることがわかる．全反射波によって半無限誘電体媒質中に励振される波のこのような性質は，例えば，光学回路素子に利用することができる．[2],[3]

図2は$R$，$T$および$S_{xN}$の数値計算例である．

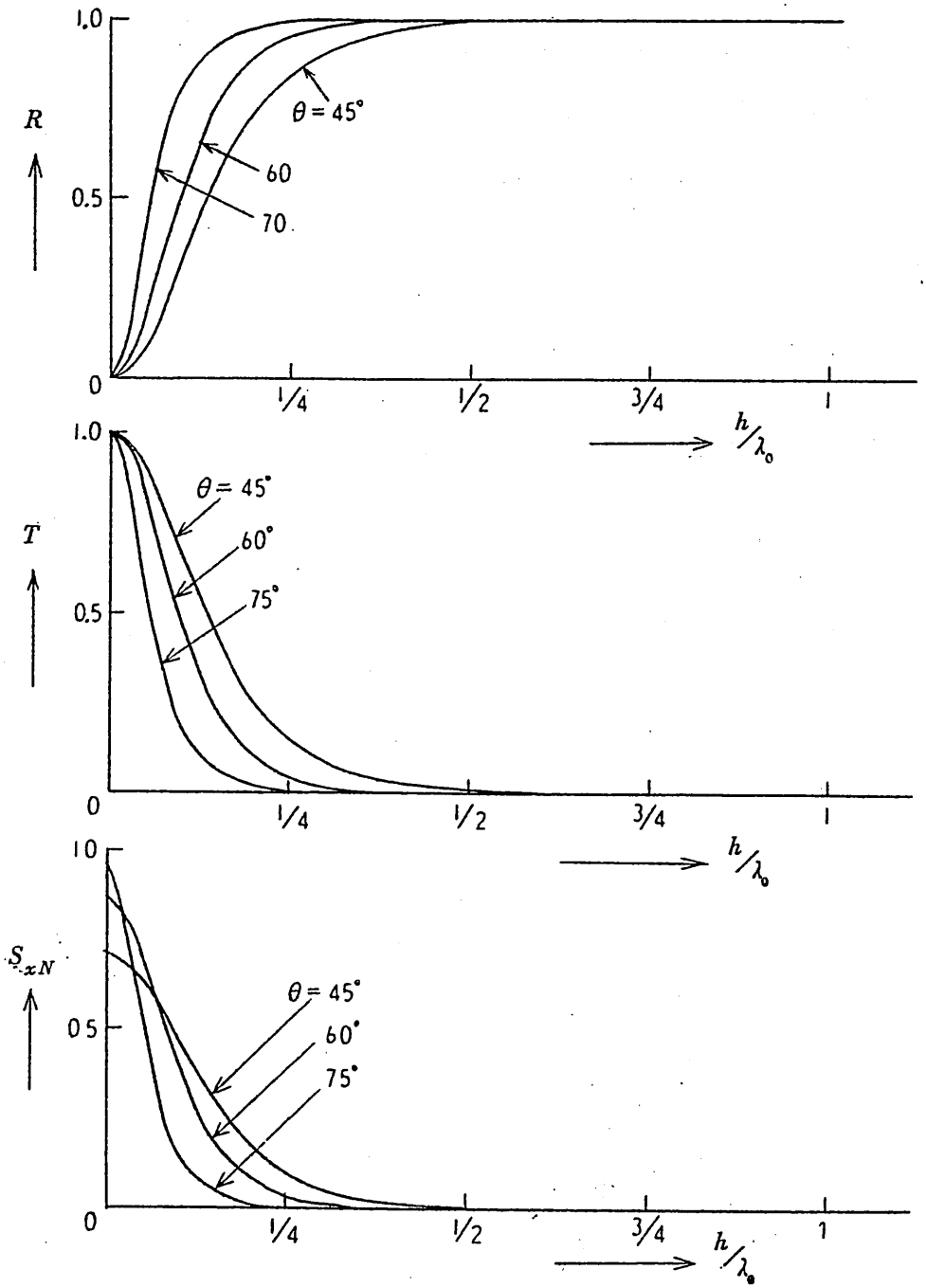



図２　真空層の厚さ $h/\lambda_0$ に対する $R$，$T$ および $S_{xN}$ の変化
(a)　$n_1 = 2$，$n_3 = 2$

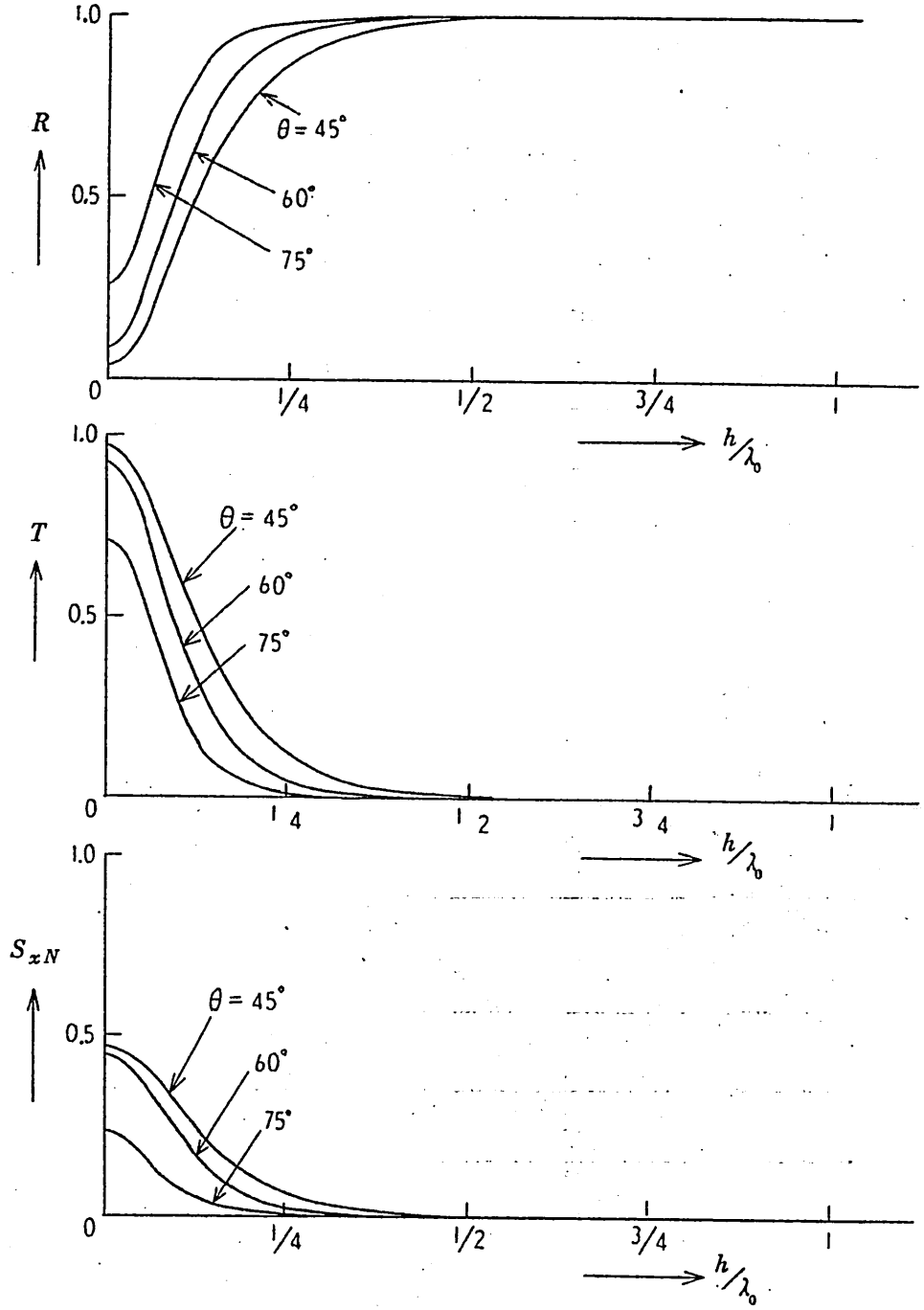



図２　真空層の厚さ $h/\lambda_0$ に対する $R$，$T$ および $S_{xN}$ の変化
(b)　$n_1 = 2$，$n_3 = 2.5$

## 3. 全反射波による誘電体slab中の波

前節においては，全反射波によって半無限誘電体中に励振される波の性質について考察したが，ここでは同じく全反射波によって誘電体slab中に励振される波について検討する．

図3において，媒質Ⅰは（$\varepsilon_1$，$\mu_0$）なる半無限誘電体，Ⅱは厚さ$h$なる真空層，Ⅲは（$\varepsilon_3$，$\mu_0$）なる厚さ$d$の誘電体slab，Ⅳは（$\varepsilon_0$，$\mu_0$）なる半無限自由空間であるとする．いま，前節同様に媒質Ⅰから平面$E$波が入射するものとする．ここで，媒質ⅠおよびⅢの屈折率$n_1$および$n_3$と入射角$\theta$が条件式(7)を満足しているものとすれば媒質中の伝搬定数はそれぞれつぎのように表わされる．

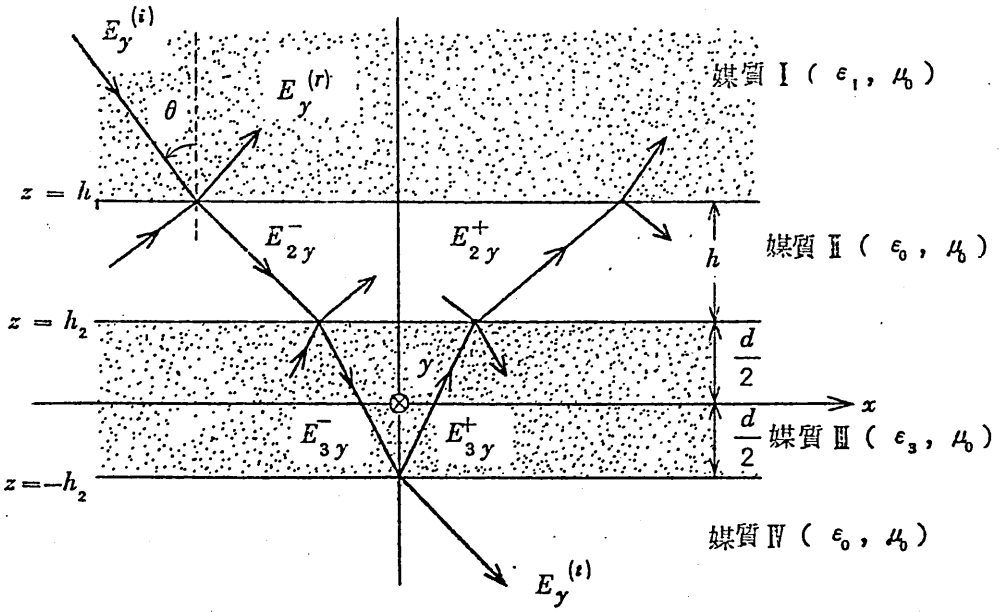



図3　座標系

$$k_{1x} = k_{2x} = k_{3x} = k_{4x} = n_1 k_0 \sin\theta = \beta$$

$$k_{1z} = -n_1 k_0 \cos\theta = -\beta_z$$

$$k_{2z} = k_{4z} = j k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2\theta - 1} = j\alpha \qquad (30)$$

$$k_{3z} = -k_0 \sqrt{n_3^2 - n_1^2 \sin^2\theta} = -\gamma$$

したがって，各媒質中の電磁界はそれぞれつぎのように書ける．

媒質Ⅰ：

入射波

$$E_y^{(i)} = E_{0i}\, e^{j\beta_z z}\, e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$H_x^{(i)} = \frac{\beta_z}{\omega\mu_0} E_{0i}\, e^{j\beta_z z}\, e^{j(\omega t - \beta x)} \qquad (31)$$

$$H_z^{(i)} = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{0i}\, e^{j\beta_z z}\, e^{j(\omega t - \beta x)}$$

反射波

$$E_y^{(r)} = E_{0r}\, e^{-j\beta_z z}\, e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$H_x^{(r)} = -\frac{\beta_z}{\omega\mu_0} E_{0r}\, e^{-j\beta_z z}\, e^{j(\omega t - \beta x)} \qquad (32)$$

$$H_z^{(r)} = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{0r}\, e^{-j\beta_z z}\, e^{j(\omega t - \beta x)}$$

媒質Ⅱ：

$$E_{2y}^{-} = E_{02}^{-}\, e^{\alpha z}\, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$H_{2x}^{-} = \frac{j\alpha}{\omega\mu_0} E_{02}^{-}\, e^{\alpha z}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (33)$$

$$H_{2z}^{-} = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{02}^{-}\, e^{\alpha z}\, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$E_{2y}^{+} = E_{02}^{+}\, e^{-\alpha z}\, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$H_{2x}^{+} = \frac{j\alpha}{\omega\mu_0} E_{02}^{+}\, e^{-\alpha z}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (34)$$

$$H_{2z}^{+} = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{02}^{+}\, e^{-\alpha z}\, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

媒質Ⅲ：

$$E_{3y}^{-} = E_{03}^{-}\, e^{j\gamma z}\, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$H_{3x}^{-} = \frac{\gamma}{\omega\mu_0} E_{03}^{-}\, e^{j\gamma z}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (35)$$

$$H_{3z}^{-} = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{03}^{-}\, e^{j\gamma z}\, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$E_{3y}^{+} = E_{03}^{+}\, e^{-j\gamma z}\, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$H_{3x}^{+} = -\frac{\gamma}{\omega\mu_0} E_{03}^{+}\, e^{-j\gamma z}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (36)$$

$$H_{3z}^{+} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{03}^{+} e^{-j\gamma z} e^{j(\omega t-\beta x)}$$

媒質Ⅳ：

透過波

$$E_y^{(t)} = E_{0t} e^{\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$H_x^{(t)} = -\frac{j\alpha}{\omega\mu_0} E_{0t} e^{\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (37)$$

$$H_z^{(t)} = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{0t} e^{\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)}$$

ここで，$z=h_1$，$z=h_2$ および $z=-h_2$ における境界条件を用いて上の諸式に含まれる未定定数 $E_{0r}$，$E_{02}^{-}$，$E_{02}^{+}$，$E_{03}^{-}$，$E_{03}^{+}$ および $E_{0t}$ を入射波の電界の振幅 $E_{0i}$ で表わせばそれぞれつぎのようになる．

$$E_{0r} = E_{0i}\frac{r_{12}+R_{23}e^{-2\alpha h_1}}{1+r_{12}R_{23}e^{-2\alpha h_1}} e^{2j\beta_z h_1} = E_{0i}R_{12} \qquad (38)$$

$$E_{02}^{-} = E_{0i}\frac{t_{12}e^{j(\beta_z+j\alpha)h_1}}{1+r_{12}R_{23}e^{-2\alpha h_1}} = E_{0i}T_{12} \qquad (39)$$

$$E_{02}^{+} = E_{02}^{-}\frac{r_{23}+r_{34}e^{-2j\gamma h_2}}{1+r_{23}r_{34}e^{-2j\gamma h_2}} e^{2\alpha h_2} = E_{0i}T_{12}R_{23} \qquad (40)$$

$$E_{03}^{-} = E_{02}^{-}\frac{t_{23}e^{-j(\gamma+j\alpha)h_2}}{1+r_{23}r_{34}e^{-2j\gamma h_2}} = E_{0i}T_{12}T_{23} \qquad (41)$$

$$E_{03}^{+} = E_{03}^{-} r_{34} = E_{0i} r_{34} T_{12} T_{23} \qquad (42)$$

$$E_{0t} = \bar{E_{03}}\ t_{34} = E_{0i}\ t_{34}\ T_{12}\ T_{23} \qquad (43)$$

ただし，$r_{jk}$，$t_{jk}$（$jk$=12，23）は式（15）で定義される量であり，$k_{jz}$（$j$=1，2，3）が式（30）で与えられるときには つぎのように表わされる．

$$r_{12}=\frac{\beta_z+j\alpha}{\beta_z-j\alpha}=\rho_{12}\ e^{-j\phi_{12}}$$

$$r_{23}=\frac{\gamma+j\alpha}{\gamma-j\alpha}=\rho_{23}\ e^{-j\phi_{23}}$$

$$t_{12}=\frac{2\beta_z}{\beta_z-j\alpha}=\tau_{12}\ e^{-j\chi_{12}}$$

$$t_{23}=\frac{-2j\alpha}{\gamma-j\alpha}=\tau_{23}\ e^{-j\chi_{23}}$$

ここで，

$$\rho_{12}=1,\qquad \phi_{12}=tan^{-1}\frac{-2\beta_z\alpha}{\beta_z^2-\alpha^2}$$

$$\rho_{23}=1,\qquad \phi_{23}=tan^{-1}\frac{2\alpha\gamma}{-(\gamma^2-\alpha^2)}$$

$$\tau_{12}=\frac{2\beta_z}{\sqrt{\beta_z^2+\alpha^2}},\qquad \chi_{12}=tan^{-1}\frac{-\alpha}{\beta_z}$$

$$\tau_{23}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}},\qquad \chi_{23}=tan^{-1}\frac{\gamma}{\alpha}$$

また，$r_{34}$および$t_{34}$は次式で与えられる．

$$r_{34}=\frac{\gamma+j\alpha}{\gamma-j\alpha}\ e^{-2j\gamma h_2}=\rho_{34}\,e^{-j(\phi_{34}+2\gamma h_2)}$$

$$t_{34}=\frac{2\gamma}{\gamma-j\alpha}\ e^{-2j(\gamma+j\alpha)h_2}=\tau_{34}\,e^{-j\left\{\chi_{34}+(\gamma+j\alpha)h_2\right\}}$$

ただし，

$$\rho_{34}=1\quad,\quad \phi_{34}=tan^{-1}\frac{-2\alpha\gamma}{\gamma^2-\alpha^2}$$

$$\tau_{34}=\frac{2\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}\quad,\quad \chi_{34}=tan^{-1}\frac{-\alpha}{\gamma}$$

さて，ここで媒質Ⅰおよび媒質Ⅳ中の電磁エネルギー流について考察する．まず，媒質Ⅰ中の波すなわち入射波および反射波の電磁エネルギー流は式(31)および(32)を用いてつぎのように求められる．

$$<S_x^{(i)}>=\frac{1}{2}\frac{\beta}{\omega\mu_0}\left|E_{0i}\right|^2 \qquad (44a)$$

$$<S_z^{(i)}>=-\frac{1}{2}\frac{\beta_z}{\omega\mu_0}\left|E_{0i}\right|^2 \qquad (44b)$$

$$<S_x^{(r)}>=\frac{1}{2}\frac{\beta}{\omega\mu_0}\left|E_{0r}\right|^2 \qquad (45a)$$

$$<S_z^{(r)}>=\frac{1}{2}\frac{\beta_z}{\omega\mu_0}\left|E_{0r}\right|^2 \qquad (45b)$$

つぎに，透過波の電磁エネルギー流は式(37)から，つぎのように求められる．

$$<S_x^{(t)}>=\frac{1}{2}\frac{\beta}{\omega\mu_0}|E_{0t}|^2\ e^{2\alpha z} \tag{46a}$$

$$<S_z^{(t)}>=0 \tag{46b}$$

ところで，$E_{0r}$ と $E_{0i}$ の間には式(38)から

$$|E_{0r}|^2=|E_{0i}|^2\ |R_{12}|^2=|E_{0i}|^2$$

なる関係があり，したがって前節の式(16)，(17) によって定義される反射係数 $R$ および透過係数 $T$ はそれぞれつぎのように求められる．

$$R=1 \tag{47}$$

$$T=0 \tag{48}$$

つぎに，媒質 III，すなわち誘電体 slab 中の電磁エネルギー流について考察しよう．媒質 III 中の電磁界に関するエネルギー流は

$$<S_{3x}>=\frac{1}{2}\frac{\beta}{\omega\mu_0}\left\{|E_{03}^-|^2+|E_{03}^+|^2+E_{03}^-\ E_{03}^{+*}\ e^{2j\gamma z}+E_{03}^{-*}\ E_{03}^+\ e^{-2j\gamma z}\right\} \tag{49}$$

$$<S_{3z}>=-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\omega\mu_0}\left\{|E_{03}^-|^2-|E_{03}^+|^2\right\} \tag{50}$$

となる．ここで式(42)の関係を用いて上式を整理すればつぎのようになる．

$$<S_{3x}>=\frac{\beta}{\omega\mu_0}|E_{03}^-|^2\left\{1+\cos\left\{2\gamma(z+h_2)+\phi_{34}\right\}\right\} \tag{51}$$

$$<S_{3z}>=0 \tag{52}$$

上式から誘電体slab中の電磁エネルギー流の境界面に垂直な成分は0となることがわかる．境界面に平行な成分は式(51)から明らかなように場所$z$の関数となっているが，その平均の電磁エネルギー流は

$$\frac{1}{d}\int_0^1 dy\int_{-h_2}^{h_2} < S_{3x} > dz$$

$$= \frac{1}{\omega\mu_0\gamma d}\left|E_{03}^{-}\right|^2 \left[\gamma d + \sin\gamma d\cdot\cos(\gamma d+\phi_{34})\right] \qquad (53)$$

で与えられる．前節の場合と同様にこの値を入射波の電磁エネルギー流の大きさで規格化し，これを$S_{3xN}$で表わせば

$$S_{3xN} = 2\left|\frac{E_{03}^{-}}{E_{0i}}\right|^2 \frac{\left[\gamma d+\sin\gamma d\cdot\cos(\gamma d+\phi_{34})\right]\sin\theta}{\gamma d} \qquad (54)$$

となる．ただし，式(41)から

$$\left|\frac{E_{03}^{-}}{E_{0i}}\right|^2 = \frac{A}{\Delta} \qquad (55)$$

ここで

$$A = \frac{4\alpha^2\beta_z^2}{(\gamma^2+\alpha^2)(\beta_z^2+\alpha^2)}$$

$$\Delta = e^{2\alpha h}\sin^2(\phi_{23}+\gamma d)+e^{-2\alpha h}\sin^2\gamma d$$

$$+2\sin(\phi_{23}+\gamma d)\cdot\sin\gamma d\cdot\cos\phi_{12}$$

$S_{3xN}$の真空層の厚さ$h$に関する微係数は

$$e^{4ah}=\frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\phi_{23}+\gamma d)} \tag{56}$$

のとき0となり，$S_{3xN}$はこのとき極大となる．すなわち，$S_{3xN}$は

$$h=h_0=\frac{1}{4a}\log\frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\phi_{23}+\gamma d)} \tag{57}$$

において最大（極大）値をもつ．ただし，$h$が正の値をとるためには

$$\sin^2\gamma d \geq \sin^2(\phi_{23}+\gamma d) \tag{58}$$

でなければならない．$\gamma d$と$\phi_{23}$が上の条件を満足しないとき，すなわち

$$\sin^2\gamma d \leq \sin^2(\phi_{23}+\gamma d) \tag{59}$$

のときには，$S_{3xN}$の微係数は常に負の値をとり，したがって，$S_{3xN}$は$h=0$で最大値をとり，$h$の増加と共に単調に減少する．以上のことから，誘電体slabの厚さ$d$，媒質の屈折率$n_1$，$n_3$および入射角$\theta$が条件式(58)を満足するときには，真空層の厚さ$h$が式(57)で与えられる値$h_0$をもつとき$S_{3xN}$は最大となり，$h=h_0$の前後で単調に減少することがわかる．また，諸定数が式(58)の条件式を満足しない場合には，前節において述べた全反射波によって半無限の誘電体中に波を励振する場合と同様に，真空層の厚さが0のとき，すなわち半無限媒質Ⅰと誘電体slab Ⅲが接しているときに$S_{3xN}$は最大となり，$h$の増加と共に単調に減少する．

以上，全反射波によって誘電体slab中に励振される波の性質について検

討し，誘電体slabの厚さ$d$，屈折率$n_1$，$n_3$，および入射角$\theta$が与えられたとき，誘電体slab中を伝搬する電磁エネルギー流が最大となる真空層の厚さが存在することを明らかにしたわけであるが，実際に誘電体slab中に波を励振する場合には，入射波は平面波でなく広がりが空間的に有限な，いわゆるbounded beamであり，したがって以上の結論が実際に起こりうる物理現象にどれほど近いものであるかはわからないわけであるが，bounded beamを用いて解析するさいの第一段階としてここに報告する次第である．なお，現在入射波がbounded beamの場合について解析を進めておりまた別の機会に報告する予定である．

図4および図5は$S_{3xN}$の数値計算例である．図4は，誘電体slabの厚さ$d/\lambda_3$をパラメータとする，入射角$\theta$に対する$S_{3xN}$の最大値とそのときの真空層の厚さ$h_0/\lambda_0$を示している．また，図5は誘電体slabの厚さ$d/\lambda_3$をパラメータとする，真空層の厚さ$h/\lambda_0$に対する$S_{3xN}$の変化を示している．

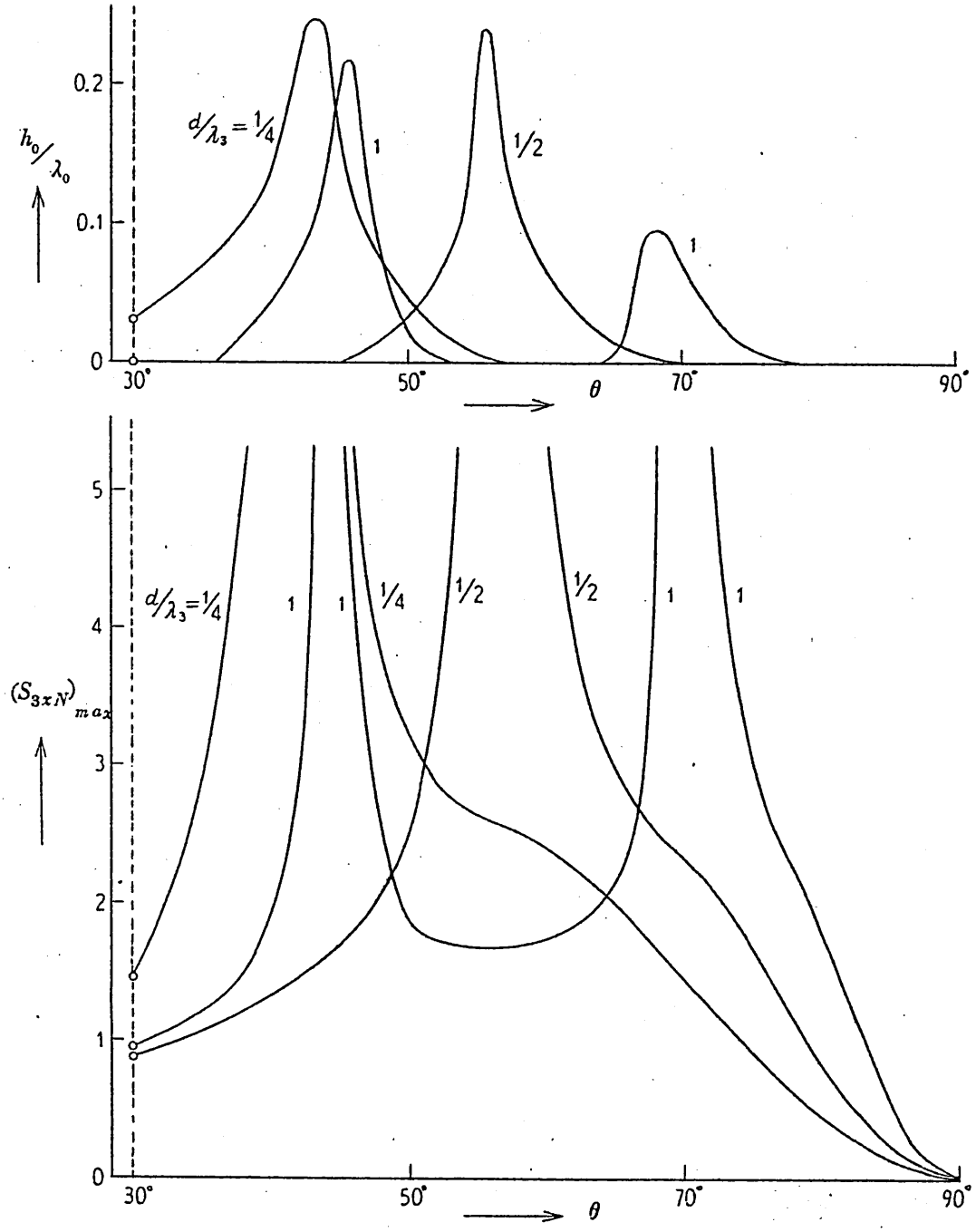



図4　入射角 $\theta$ に対する $(S_{3xN})_{max}$ とそのときの $h_0/\lambda_0$ の変化
(a)　$n_1 = 2$，$n_3 = 2$

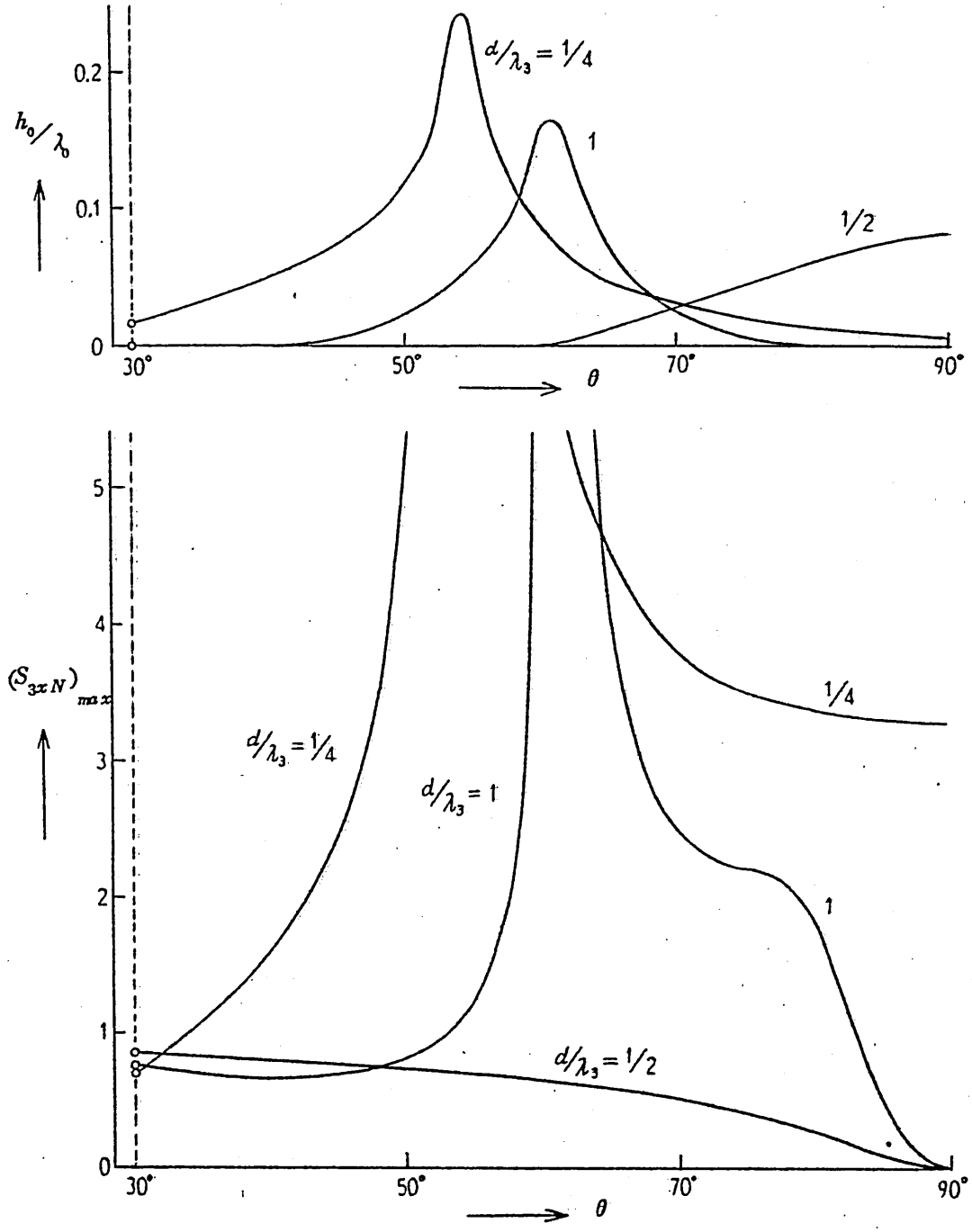



図 4　入射角 $\theta$ に対する $(S_{3xN})_{max}$ とそのときの $h_0/\lambda_0$ の変化
(b)　$n_1 = 2.0$，$n_3 = 2.5$

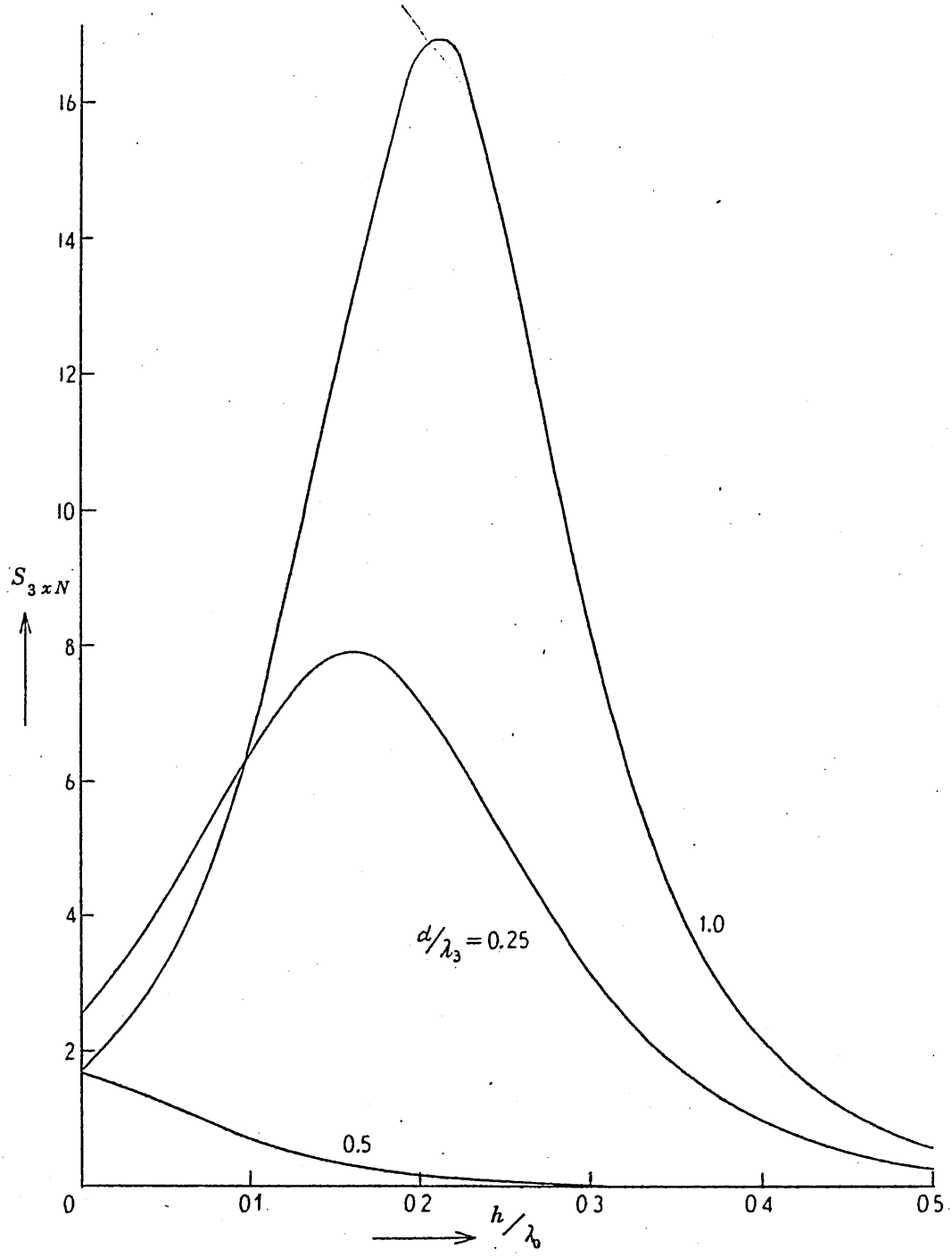



図5　真空層の厚さ $h/\lambda_0$ に対する $S_{3xN}$ の変化
(a)　$n_1 = 2$，$n_3 = 2$，$\theta = 45°$

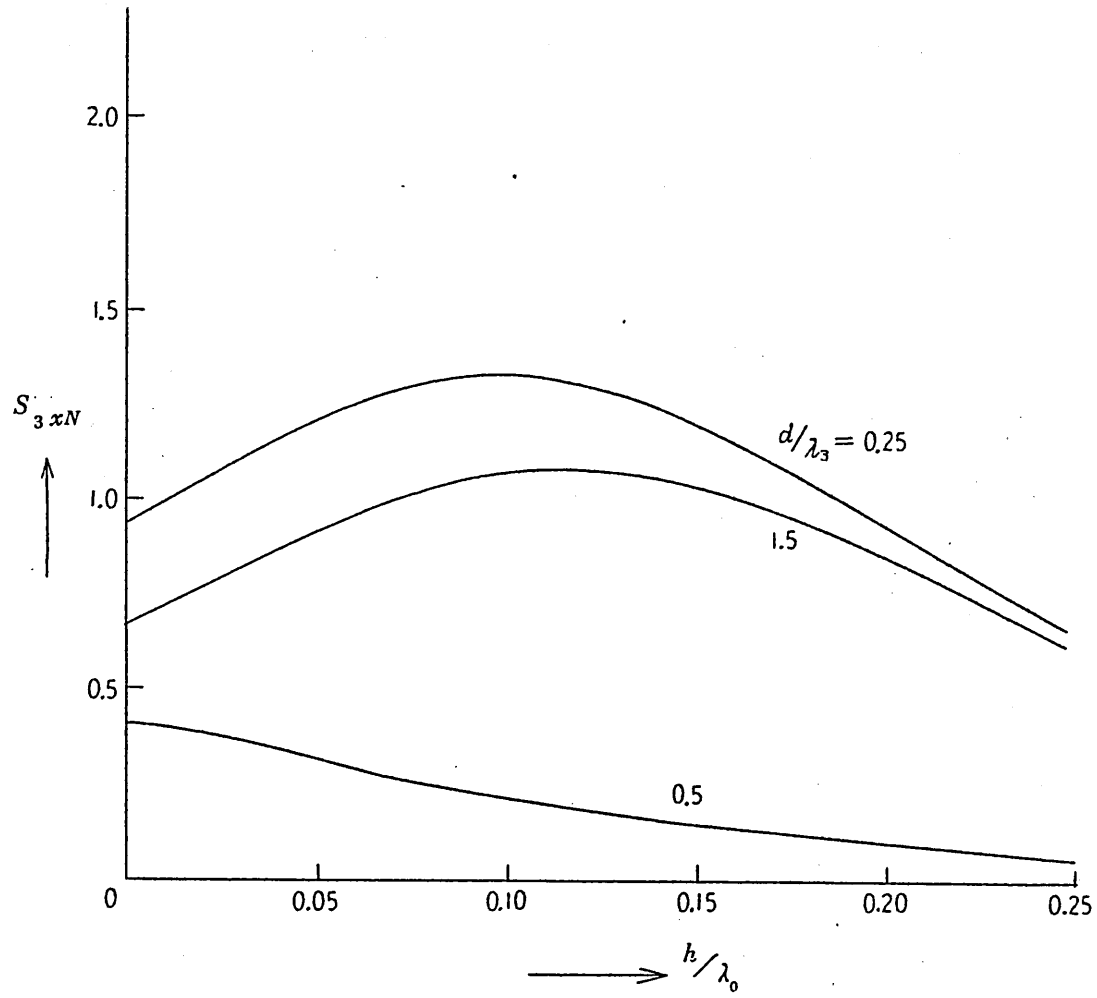



図5　真空層の厚さ $h/\lambda_0$ に対する $S_{3xN}$ の変化
(b)　$n_1=\sqrt{2}$，$n_3=2$，$\theta=60^\circ$

## 謝　　辞

日頃ご指導ごべんたついただいている本学工学部板倉清保教授および裏克己教授，ならびに種々有益な御教示，御助言をいただいた本学工学部熊谷信昭助教授に深謝する．また，常々ご討論いただく板倉研究室の諸氏に深謝する．

## 文　　献

(1) 藤岡　弘，小川英一："導電性媒質の境界面における平面電磁波の反射と透過"，電波科学研究会資料（1969－11）．

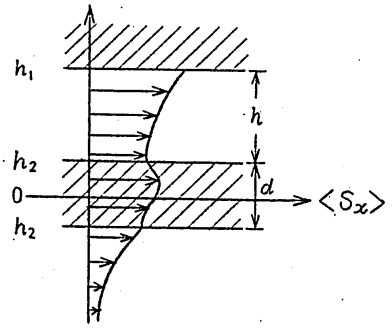
(2) 牧本利夫，末田　正："Brewster角を利用したミリ波プリズム形方向性結合器"，電波科学研究会資料（昭38－02）．

(3) 末田　正，熊谷信昭，倉薗貞夫"広帯域導光学プリズム回路素子"，信学誌，49，p．457（昭41－03）．

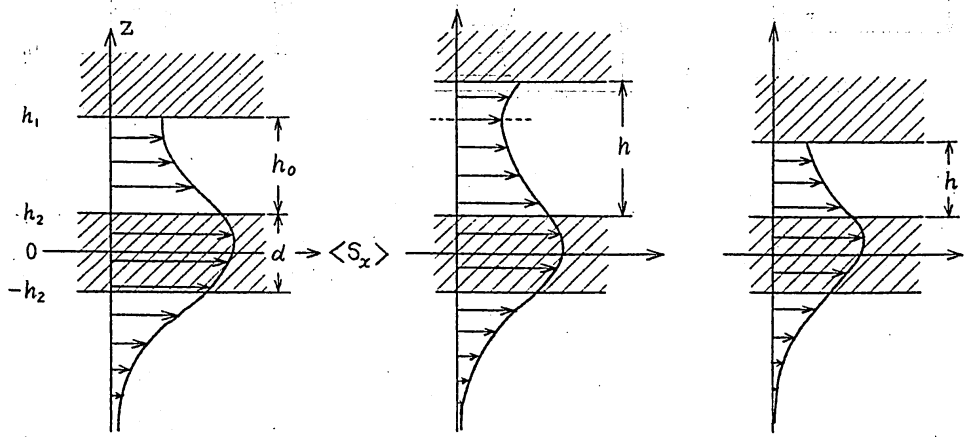
# 検　　討

媒質Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ中の電磁界分布の様子

i) $\dfrac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2(\phi_{23}+\gamma d)} \leq 1$ のとき（式（５９）の場合）




ii) $\dfrac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2(\phi_{23}+\gamma d)} > 1$ のとき（式（５８）の場合）




$$h = h_0 = \frac{1}{4\alpha} \log \frac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2(\phi_{23}+\gamma d)} \qquad h > h_0 \qquad h < h_0$$

ここで

$$S_{2x}(h_2) = S_{3x}(h_2) \quad , \quad S_{3x}(-h_2) = S_{4x}(-h_2)$$

輻射科学研究会資料

# 半無限完全導体平板による ガウスビームの回折

根本承次郎　　牧本利夫
(大阪大学　基礎工学部)

昭和45年12月4日
於 中央電気クラブ

## 1. まえがき

ビーム導波系における回路素子としては，誘電体で構成される結合器，分波器などのほかに，モードフィルタ，絞りとして用いる種々な形状の開口があげられる．開口のビーム波に及ぼす影響は種々論じられているが[(1),(2)]，そこでは完全吸収体にあけられた開口を取り扱っており，さらに，つぎのような仮定，すなわち，開口面上の界分布は，入射波が衝立のないときに開口面に相当する面上でとる界分布に等しく，また衝立の裏側では界強度は0である，という仮定がなされている．しかし実際のビーム導波系においては，開口を形成する物体として完全吸収体に近いものを用いることは少なく，便宜上，ほとんど金属板を用いている．そこで，金属板にあけられた開口を用いる際，前述の仮定がどの程度なりたっているか，また，一般に金属板がビーム波にどのような影響を及ぼすかを調べておく必要がある．

本論文は，このような問題を解明するための基本的な課題として，半無限完全導体平板によるガウスビームの回折問題をとりあげており，簡単のため，二次元問題として取り扱っている．解析方法としては，入射電磁界および散乱電磁界を平面波スペクトル表示したのち，境界条件より定まる双対積分方程式を解くことにより散乱波のスペクトル関数を求める方法をとっている．すなわち以下の解析は，電磁界の平面波スペクトル表示を用いた，平面波の回折理論[(3),(4)]の拡張である．

## 2. 入射波および散乱波の平面波スペクトル表示

本章では，入射波および導体板上を流れる電流によって生じる散乱波を，種々な方向に伝搬する平面波の重ね合わせとして表示する．

図1において，$O_1$ を原点とする直角座標 $[x_1, y_1, z_1]$ および $O$ を原点とする直角座標 $(x, y, z)$ を，それぞれ入射波および散乱波を記述するための座標系とし，両座標系間の関係を次式で与える．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_0 & -\cos\theta_0 & 0 \\ -\cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + x_0 \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ただし，$0 < \theta_0 < \pi$ とする．なお上式より，$O_1$ の $x$, $y$, $z$ 座標は $(x_0, 0, 0)$ である．$x > 0$, $y = 0$ なる面を無限に薄い半無限完全導体平板 $M$ とし，$x < 0$, $y = 0$ なる面を $A$ と表わすことにする．ここでは，すべての電磁界が $z_1$, $z$ 座標によらぬ二次元問題を考え，空間は一様で等方な媒質（誘電率 $\varepsilon$，透磁率 $\mu$）でみたされているとする．なお本論文では，あるベクトル $F$ を $x_1$, $y_1$, $z_1$ 成分 $F_{x1}$, $F_{y1}$, $F_{z1}$ および $x$, $y$, $z$ 成分 $F_x$, $F_y$, $F_z$ で表示するときは，それぞれ $F = [F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}]$, $F = (F_x, F_y, F_z)$ と書くことにする．

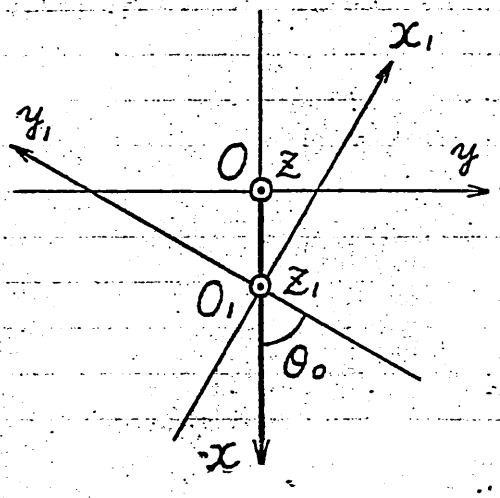



図1 入射波および散乱波を記述するための座標系

入射電磁界 $E^i$, $H^i$ を，スペクトル関数 $P^i(\cos\alpha)$ を用いて次式のように平面波スペクトル表示する．

$$E^i = \int_C [0, 0, 1] P^i(\cos\alpha) e^{-jk r_1 \cos(\theta_1 - \alpha)} d\alpha \tag{2-a}$$

$$H^i = Y \int_C [\sin\alpha, -\cos\alpha, 0] P^i(\cos\alpha) e^{-jk r_1 \cos(\theta_1 - \alpha)} d\alpha \tag{2-b}$$

ただし時間因子を $e^{j\omega t}$ と仮定しており，$r_1$, $\theta_1$ は

$$x_1 = r_1 \cos\theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin\theta_1 \tag{3}$$

で定まる極座標，$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $Y = \sqrt{\varepsilon/\mu}$ である．

また積分路$C$は図2に示してある．つぎに，$M$上を流れる電流によって生じる散乱電磁界$E^s$，$H^s$に対しても，これらをスペクトル関数$P^s(\cos\alpha)$を用いて次式のように平面波スペクトル表示する．

$$E^s=\int_C (0,0,1)P^s(\cos\alpha)e^{-jkr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha \qquad (4-a)$$

$$H^s=Y\int_C (\pm\sin\alpha,-\cos\alpha,0)P^s(\cos\alpha)e^{-jkr\cos(\theta\mp\alpha)}d\alpha \qquad (4-b)$$

ただし$r$，$\theta$は

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta \qquad (5)$$

で定まる極座標であり，複号は$y>0$なる領域に対しては上符号を，$y<0$なる領域に対しては下符号をとるものとする．なお積分変数を$\alpha$から$\zeta=\cos\alpha$に変換すると，たとえば式(2-a)，(4-a)より電界の$z_1$，$z$成分は

$$E_z^i=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P^i(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-jk(x_1\zeta+y_1\sqrt{1-\zeta^2})}d\zeta$$

$$E_z^s=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P^s(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-jk(x\zeta\pm y\sqrt{1-\zeta^2})}d\zeta \qquad (6)$$

となる*．ただし二価関数$\sqrt{1-\zeta^2}$については，$Re(\sqrt{1-\zeta^2})>0$，$Im(\sqrt{1-\zeta^2})<0$であるような分枝をとるものとし，図3に示すように$\zeta$平面上の積分路は$Im(\sqrt{1-\zeta^2})<0$となるように分枝点$\zeta=\pm1$を避けるものとする．

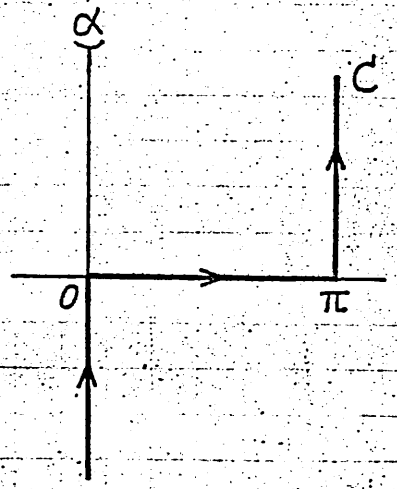


図2　$\alpha$平面上の積分路

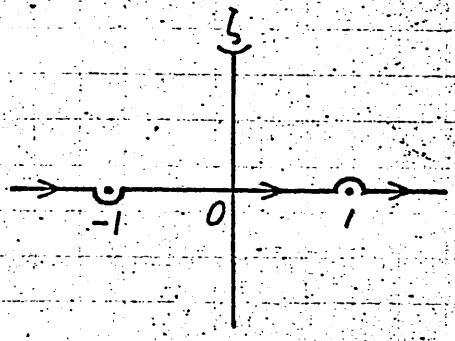


図3　$\zeta$平面上の積分路

＊$E_z^i$は$E_{z1}^i$と記すべきであるが，式(1)より$z_1=z$であることから添字1を省略した

## 3. 境界条件

本章では，電磁界に対する境界条件について述べる．

全電磁界 $\mathbb{E}$，$\mathbb{H}$ は次式で与えられる．

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}^i + \mathbb{E}^s \quad , \quad \mathbb{H} = \mathbb{H}^i + \mathbb{H}^s \tag{7}$$

電界に対する境界条件は，$\mathbb{n}$ を $y$ 軸の正方向を向く単位ベクトルとして

$$\mathbb{n} \times \mathbb{E} = 0 \quad , \qquad M\text{上}$$

$$\therefore \mathbb{n} \times \mathbb{E}^s = -\mathbb{n} \times \mathbb{E}^i \quad , \qquad M\text{上} \tag{8}$$

であり，磁界に対しては，A上には電流が流れないことから

$$\mathbb{n} \times (\mathbb{H}_+ - \mathbb{H}_-) = 0 \quad , \qquad A\text{上}$$

$$\therefore \mathbb{n} \times \mathbb{H}_+^s = \mathbb{n} \times \mathbb{H}_-^s \quad , \qquad A\text{上} \tag{9}$$

である．ただし添字 $\pm$ は，$y = 0$ なる面上の点に $y \gtrless 0$ なる領域から近づいたときの値を示す．一方，$y = 0$ なる面に関して対称な二点における散乱磁界ベクトルの反対称性により

$$\mathbb{n} \times \mathbb{H}_+^s = -\mathbb{n} \times \mathbb{H}_-^s \tag{10}$$

であるから，上式と式 (9) より次式が得られる．

$$\mathbb{n} \times \mathbb{H}_+^s = \mathbb{n} \times \mathbb{H}_-^s = 0 \quad , \qquad A\text{上} \tag{11}$$

すなわち，A上では散乱磁界の接線成分は0である．

結局，式 (8)，(11) より境界条件は

$$\left.\begin{aligned} E_z^s &= -E_z^i \quad , \quad x > 0,\ y = 0 \\ H_x^s &= 0 \quad , \quad x < 0,\ y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

であり，上式を式 (4-a)，(4-b) に適用して積分変数を $\alpha$ からに変換すると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P^s(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-jk_0 x\zeta}\, d\zeta = -E_z^i\big|_{y=0}, && x>0 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} P^s(\zeta)\, e^{-jk_0 x\zeta}\, d\zeta = 0, && x<0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

## 4. 入射ガウスビームの性質

本章では，入射ガウスビームを与えて，その性質を簡単に述べる．

ここでは，$P^i(\zeta)$ のかわりに

$$\hat{P}^i(\zeta) \equiv P^i(\zeta)/\sqrt{1-\zeta^2} \quad (14)$$

を，あらためて入射波のスペクトル関数と考えることにする．上式と式（6）第一式より

$$E_z^i = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}^i(\zeta)\, e^{-jk_0(x_1\zeta + y_1\sqrt{1-\zeta^2})}\, d\zeta \quad (15)$$

であり，$\hat{P}^i(\zeta)$ として，つぎのような関数を採用する．

$$\hat{P}^i(\zeta) = \frac{k_0 S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(k_0 S)^2 \zeta^2}, \quad k_0 S \gg 1 \quad (16)$$

$k_0 S \gg 1$ なる仮定より，$\hat{P}^i$ は $\zeta = 0$ の付近でのみ非常に大きな値をとるから，上式を式（15）に代入して積分を実行する際，$\sqrt{1-\zeta^2} \simeq 1 - \zeta^2/2$ と近似する．ただし，この近似が許されるためには，$\sqrt{1-\zeta^2}$ なる量が素平面波の位相に関係する量であることから，$\sqrt{1-\zeta^2}$ を二項展開したときの $\zeta^4$ 以上の項による位相が無視できねばならない．すなわち $\hat{P}^i$ が比較的大きな値をとる $|\zeta| \lesssim \sqrt{2}/k_0 S$ なる範囲で

$$k_0 y_1 (\zeta^4/8) \ll \pi \quad (17)$$

でなければならず，上式に，たとえば $\zeta = \pm\sqrt{2}/k_0 S$ を代入すると，入を波長として

$$(k_0 S)^4 \gg y_1/\lambda \quad (18)$$

である．上述の近似をもとに，式（16）を式（15）に代入して積分を実行した結果を次式に示す．

$$E_z^i = \sqrt{\frac{S}{w}}\, e^{-jk y_1} e^{-\frac{1}{2}P x_1^2} e^{j\frac{1}{2}\arg P} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} P &\equiv (1/w^2) + j(k/R) \\ w &\equiv S\sqrt{1+(y_1/kS^2)^2} \\ R &\equiv y_1\left[1+(kS^2/y_1)^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$w$は，$|E_z^i|^2$ が $y_1$ 軸上での値の $1/e$ 倍に下がるような $x_1$ 軸方向の距離であり，スポットサイズと呼ばれる量である．また $R$ は，式 (19) 最後の指数因子を無視した $E_z^i$ に対する等位相面の，$y_1$ 軸上での曲率半径である．$y_1=0$ において，$w$ は最小値 $S$ をとり，$1/R$ は 0 となるから，$E_z^i$ は $y_1=0$ で最小のスポットサイズ $S$ をもち，かつ，この位置で平面の等位相面をもつ*．なお，入射磁界 $H^i$ は近似的に次式で与えられる．

$$H^i = Y[1,0,0]E_z^i \qquad (21)$$

式 (13) で与えられる境界条件中の，$y=0$ なる面上での $E_z^i$ は，式 (19) で $y=0$ としたときの $x_1$, $y_1$，すなわち

$$x_1 = -(x-x_0)\sin\theta_0, \quad y_1 = -(x-x_0)\cos\theta_0 \qquad (22)$$

を式 (19) に代入すれば得られ，その結果は

$$E_z^i\Big|_{y=0} = \sqrt{\frac{S}{w'}}\, e^{jk(x-x_0)\cos\theta_0} e^{-\frac{1}{2}P'(x-x_0)^2\sin^2\theta_0} \cdot e^{j\frac{1}{2}\arg P'} \qquad (23)$$

である．ただし上式中の $w'$, $P'$ は，式 (20) 中の $y_1$ を式 (22) 第二式の $y_1$ で置き換えたときの $w$, $P$ である．上式をそのまま式 (13) に用いて積分方程式を解くことは困難なので，$w'$, $P'$ を $x=x_0$ のときの値 $S$, $1/S^2$ で近似する．よって式 (23) は，つぎのようになる．

$$E_z^i\Big|_{y=0} \simeq e^{jk(x-x_0)\cos\theta_0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S}\right)^2(x-x_0)^2\sin^2\theta_0} \qquad (24)$$

* $|E_z^i|$ は点 $O_1$ で最大値 1 をとる

## 5. 散乱波の導出

本章では，積分方程式を解くことにより散乱波のスペクトル関数を求めた結果を示し，鞍部点法により散乱波の遠方界を求める．

式（13）に式（24）を代入して式の順序を変えると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} P^s(\zeta)\, e^{-jkx\zeta}\, d\zeta = 0, \quad x<0 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P^s(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-jkx\zeta}\, d\zeta = -e^{jk(x-x_0)\zeta_0} \cdot e^{-ak^2(x-x_0)^2}, \quad x>0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$a \equiv \sin^2\theta_0 / 2(kS)^2, \quad \zeta_0 \equiv \cos\theta_0 \tag{26}$$

この双対な積分方程式を解いた結果は

$$P^s(\zeta) = \frac{g_1}{2\pi j}\left[ g_2 \frac{\sqrt{1-\zeta_0}\sqrt{1-\zeta}}{\zeta+\zeta_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n-1} a_{nm} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{(\zeta+\zeta_0)^p} \right]$$

$$g_1 \equiv e^{-jkx_0\zeta_0}, \quad g_2 \equiv e^{-a(kx_0)^2} \tag{27}$$

$$a_{nm} \equiv \frac{(2n)!}{n!m!} a^n (jkx_0)^m, \quad p \equiv 2n-m+1 \tag{28}$$

であり（付録1参照），変数を$\zeta$から$\alpha$に変えると

$$P^s(\cos\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^s(\cos\alpha) \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} P_0^s(\cos\alpha) &\equiv \frac{g_1 g_2}{\pi j} \cdot \frac{\sin(\theta_0/2)\sin(\alpha/2)}{\cos\alpha+\cos\theta_0} \\ P_n^s(\cos\alpha) &\equiv \frac{g_1}{2\pi j} \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{a_{nm}\sin\alpha}{(\cos\alpha+\cos\theta_0)^p}, \quad n \geq 1 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

である．散乱電界$E_z^s$は式（29）を式(4-a)に代入することにより，つぎのように表わすことができる．

$$E_z^s = \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \quad E_n \equiv \int_C P_n^s(\cos\alpha)\, e^{-jkr\cos(\theta\mp\alpha)}\, d\alpha \tag{31}$$

式(30)第一式の $P_0^s$ から $g_1 g_2$ を除いた関数は，入射波が次式

$$\left.\begin{aligned} E^i &= (0,0,1)\, e^{jkr\cos(\theta-\theta_0)} \\ H^i &= Y(\sin\theta_0, -\cos\theta_0, 0)\, e^{jkr\cos(\theta-\theta_0)} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

のような平面波であるときの散乱波を与える入ペクトル関数であり，そのときの散乱波は厳密に求められている[3],[4]．したがって $E_0$ はただちに得られる．しかし $E_n$, $n \geq 1$ を厳密に求めることは困難なので，$kr \gg 1$ の場合の漸近表示を求めることにし，同時に，$E_0$ に対する漸近表示も求めることにする．なお，散乱電界の界分布は $y=0$ なる面に関して対称であるから，以下では $y \geq 0$ なる領域での散乱電界を求める．

式(31)第二式中の関数

$$e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}$$

の鞍部点 $\alpha_s$ は

$$\alpha_s = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (33)$$

であり，この鞍部点を通る最急降下路を S とする（図4参照）．式(31)中の積分路 C を S に変え，その際，$P_n^s$ の極 $\alpha_p = \pi - \theta_0$ に対する鞍部点 $\alpha_s = \theta$ の位置を考慮して留数定理を用いることにより次式が得られる．

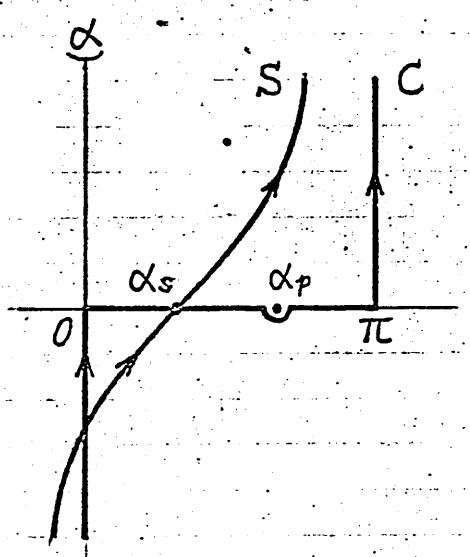


図4　最急降下路 S

$$E_n = E_n^{(1)} + E_n^{(2)} \quad (34)$$

$$E_n^{(1)} \equiv \int_S P_n^s(\cos\alpha)\, e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}\, d\alpha \quad (35)$$

$$E_n^{(2)} \equiv 2\pi j k R_{es(n)}(\alpha_p) \quad (36)$$

ただし

$$h \equiv \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi - \theta_0 \\ 0, & \pi - \theta_0 < \theta < \pi \end{cases} \tag{37}$$

であり，$Res_{(n)}(\alpha_p)$ は

$$P_n^s(\cos\alpha)\, e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}$$

の，極 $\alpha_p$ における留数である（付録2参照）．

S 上での積分 $E_n^{(1)}$ を計算する際，つぎの二つの場合にわけて考えねばならない．

(i) 鞍部点 $\alpha_s$ が極 $\alpha_p$ の近くにないとき
(ii) 鞍部点 $\alpha_s$ が極 $\alpha_p$ の近くにあるとき

まず，(i) の場合について考える．鞍部点 $\alpha_s$ が極 $\alpha_p$ の近くにないから，式(35)中の $P_n^s$ を $\alpha = \alpha_s$ のときの値で近似して積分記号の外へ出すことができ，さらに，つぎの漸近式[4]

$$\int_S e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}\, d\alpha \sim \sqrt{2\pi}\, e^{j\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}}, \quad kr \gg 1 \tag{38}$$

を用いると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} E_0^{(1)} &\sim g_1 g_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}} \cdot \frac{\sin(\theta_0/2)\sin(\theta/2)}{\cos\theta + \cos\theta_0} \\ E_n^{(1)} &\sim g_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}} \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{a_{nm}\sin\theta}{(\cos\theta + \cos\theta_0)^p}, \quad n \geq 1 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

つぎに，(ii) の場合について考える．この場合，$P_n^s$ に対する式(30)の表示式のかわりに，極 $\alpha_p$ をもつ関数 $\sec[(\alpha+\theta_0)/2]$ をくくり出したつぎの表示式を用いることにする．

$$\left.\begin{aligned} P_0^s(\cos\alpha) &= \frac{g_1 g_2}{2\pi j} \sin\frac{\theta_0}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \sec\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}\right) \sec\left(\frac{\alpha-\theta_0}{2}\right) \\ P_n^s(\cos\alpha) &= \frac{g_1}{2\pi j} \sin\alpha \sum_{m=0}^{2n-1} a_{nm} \left[\frac{1}{2}\sec\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}\right)\sec\left(\frac{\alpha-\theta_0}{2}\right)\right]^p \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

上式を式(31)に代入し，$\sec[(\alpha+\theta_0)/2]$ 以外の

関数を $\alpha=\alpha_s$ のときの値で近似して積分記号の外へ出すと次式が得られる：

$$\left.\begin{aligned} E_0^{(1)} &\sim \frac{g_1 g_2}{2\pi j}\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sec\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right) \\ &\quad\cdot\int_S \sec\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}\right)e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \\ E_n^{(1)} &\sim \frac{g_1}{2\pi j}\sin\theta\sum_{m=0}^{2n-1}a_{nm}\left[\frac{1}{2}\sec\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)\right]^p \\ &\quad\cdot\int_S \sec^p\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}\right)e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

式（41）中の積分

$$I\equiv\int_S \sec\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}\right)e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \quad (42)$$

は厳密に求められており[3],[4]

$$I=\begin{cases} CF(u), & 0\le\theta<\pi-\theta_0 \\ -CF(-u), & \pi-\theta_0<\theta\le\pi \end{cases} \quad (43)$$

$$\left.\begin{aligned} F(z)&\equiv e^{jz^2}\int_z^\infty e^{-jt^2}dt \\ C&\equiv 4\sqrt{\pi}\,e^{j\frac{3}{4}\pi}e^{-jkr}, \quad u\equiv\sqrt{2kr}\cos\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

である．なお，$F(z)$ は複素フレネル積分と呼ばれている．この結果を用いて式（41）中の積分

$$I_{nm}\equiv\int_S \sec^p\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}\right)e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}d\alpha \quad (45)$$

を求めることにする．ただし，この $I_{nm}$ は，以下でわかるように $p\equiv 2n-m+1$ が奇数のときしか厳密に求められない．そこで，$p$ が偶数のときの $I_{nm}$ を近似的に求めるため，つぎのような積分を考える．

$$I'_{nm} \equiv \int_S \sin\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}\right) \sec^p\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}\right) e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)} d\alpha \tag{46}$$

上式中の $\sin[(\alpha+\theta_0)/2]$ を $\alpha=\alpha_s$ のときの値で近似して積分記号の外へ出し，式（45）を考慮すると次式が得られる．

$$I_{nm} \sim \operatorname{cosec}\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right) I'_{nm} \tag{47}$$

以上の準備をもとに，$p$ が奇数および偶数のときの $I_{nm}$ は，つぎの等式（証明は付録3を参照）を用いることにより求められる．

$$(\sec z)^{2r+1} = \frac{1}{(2r)!}\left[\prod_{t=1}^{r}\left\{D^2+(2t-1)^2\right\}\right]\sec z \tag{48-a}$$

$$\sin z\,(\sec z)^{2r} = \frac{1}{(2r-1)!} D\left[\prod_{t=1}^{r-1}\left\{D^2+(2t-1)^2\right\}\right]\sec z \tag{48-b}$$

$$D^r \equiv \frac{d^r}{dz^r}, \quad r=1,2,3,\cdots$$

すなわち，$z=(\alpha+\theta_0)/2$ のとき

$$D^r \sec z = 2^r \frac{\partial^r}{\partial\theta_0^r} \sec\left(\frac{\alpha+\theta_0}{2}\right) \tag{49}$$

であることに注意して，$m=2q$，$q=0,1,2,\cdots$（$\therefore p$ は奇数）のとき式(48-a)を用い，また $m=2q+1$，$q=0,1,2,\cdots$（$\therefore p$ は偶数）のとき式（47），(48-b)を用いると次式が得られる．

$$I_{nm} = \frac{1}{(2n-2q)!}\left[\prod_{t=1}^{n-q}\left\{4\frac{\partial^2}{\partial\theta_0^2}+(2t-1)^2\right\}\right] I, \quad m=2q \tag{50-a}$$

$$I_{nm} \sim \operatorname{cosec}\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}\right) \frac{1}{(2n-2q-1)!} \cdot 2\frac{\partial}{\partial\theta_0}\left[\prod_{t=1}^{n-q-1}\left\{4\frac{\partial^2}{\partial\theta_0^2}+(2t-1)^2\right\}\right] I, \quad m=2q+1 \tag{50-b}$$

以上で (i), (ii) の場合につき, $E_n^{(i)}$ の漸近表示が求められた. 結局, 散乱電界 $E_z^s$ は (i), (ii) の場合について, 次式で与えられる.

(i) 鞍部点 $\alpha_s = \theta$ が極 $\alpha_p = \pi - \theta_0$ の近くにないとき

$$E_z^s \sim \frac{g_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{kr}} \left[ g_2 \frac{2\sin(\theta_0/2)\sin(\theta/2)}{\cos\theta + \cos\theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{a_{nm}\sin\theta}{(\cos\theta + \cos\theta_0)^p} \right] + 2\pi j k \sum_{n=0}^{\infty} Res_{(n)}(\alpha_p) \qquad (51)$$

(ii) 鞍部点 $\alpha_s = \theta$ が極 $\alpha_p = \pi - \theta_0$ の近くにあるとき

$$E_z^s \sim \frac{g_1}{2\pi j} \left[ g_2 \sin\frac{\theta_0}{2} \sin\frac{\theta}{2} \sec\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right) I + \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-1} a_{nm} \left\{ \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right) \right\}^p I_{nm} \right] + 2\pi j k \sum_{n=0}^{\infty} Res_{(n)}(\alpha_p) \qquad (52)$$

ただし上の二式は, $y \geq 0$ すなわち $0 \leq \theta \leq \pi$ なる領域での漸近表示である. なお, 散乱磁界の $r$, $\theta$ 成分 $H_r^s$, $H_\theta^s$ は $E_z^s$ を次式

$$H_r^s = -\frac{Y}{jkr} \frac{\partial E_z^s}{\partial \theta}, \quad H_\theta^s = \frac{Y}{jk} \frac{\partial E_z^s}{\partial r} \qquad (53)$$

に代入すれば得られ, さらに, 散乱磁界の $x$, $y$ 成分 $H_x^s$, $H_y^s$ は上式と次式より求められる.

$$\left.\begin{aligned} H_x^s &= H_r^s \cos\theta - H_\theta^s \sin\theta \\ H_y^s &= H_r^s \sin\theta + H_\theta^s \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

## 6. 導体板上の電流分布

本章では，導体板上を $z$ 方向に流れる，$x$ 方向の単位長あたりの電流 $J_z$ について考える．

$J_z$ は次式より求められる．

$$J_z = H_x^s\Big|_{\theta=2\pi} - H_x^s\Big|_{\theta=0} \tag{55}$$

式（32）の平面波が入射したときの電流は厳密に求められており[3]，参考までに，その近似式を記すと

$$J_z \simeq -Y\sqrt{\frac{8}{\pi}}e^{j\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-jkx}}{\sqrt{kx}}\left(j-2u_0^2e^{ju_0^2}\right)\sin\frac{\theta_0}{2}, \quad u_0 \ll 1 \tag{56}$$

$$J_z \sim 2Y\sin\theta_0\, e^{jkx\cos\theta_0}, \quad u_0 \gg 1 \tag{57}$$

$$u_0 \equiv \sqrt{2kx}\cos(\theta_0/2) \tag{58}$$

である．ガウスビーム入射時の電流分布を厳密に求めることは困難なので，$kx \gg 1$ の場合の漸近式を求めることにする．式（4-b），（55）より次式が得られる．

$$J_z = -2Y\int_C \sin\alpha\, P^s(\cos\alpha)\, e^{-jkx\cos\alpha}\, d\alpha \tag{59}$$

上式において積分路 $C$ を

$$e^{-jkx\cos\alpha}$$

の鞍部点 $\alpha_s = 0$ を通る最急降下路 $S_0$ に変えると，極 $\alpha_p = \pi - \theta_0$ の存在を考慮して

$$J_z = -2Y\left[\int_{S_0}\sin\alpha\, P^s(\cos\alpha)\, e^{-jkx\cos\alpha}\, d\alpha + 2\pi j\, Res(\alpha_p)\right] \tag{60}$$

となる．ただし，$Res(\alpha_p)$ は被積分関数の，極 $\alpha_p$ における留数である．$kx \gg 1$ のとき，上式［　］中の第一項については，$P^s$ を $\alpha = \alpha_s$ のときの値

で近似して積分記号の外へ出すことにより

$$P^s(\cos\alpha_s)\int_{s_0} \sin\alpha\, e^{-j\beta x\cos\alpha}\, d\alpha$$

となり，さらに，この積分は0であること（証明略）から無視できる．ただし，上でおこなった近似は，極 $\alpha_p=\pi-\theta_0$ が鞍部点 $\alpha_s=0$ に近くないとき，すなわち $\theta_0$ が $\pi$ に近くないとき，にのみ有効である．よって，この条件下で次式がなりたつ．

$$J_z \sim -4\pi j Y \mathrm{Res}(\alpha_p)\ ,\quad \beta x \gg 1 \qquad (61)$$

$\mathrm{Res}(\alpha_p)$ は付録2における計算と同様にして求められ，その結果を上式に代入すると次式が得られる．

$$J_z \sim 2Y g_1\Big[g_2 \sin\theta_0\, e^{j\beta x\cos\theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n-1} \frac{a_{nm}}{(2n-m)!} \lim_{\zeta\to-\zeta_0} \frac{d^{2n-m}}{d\zeta^{2n-m}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\, e^{-j\beta x\zeta}\right)\Big] \qquad (62)$$

## 7. 電磁界分布および電流分布の数値計算例

本章では，ガウスビームが入射したときの全電界，全磁界分布および電流分布などの数値計算例を示し，同時に，これらを平面波入射時の結果と比較する．なお，数値計算例はすべて別冊に示してあり，表1には各図の内容を，表2には各図におけるパラメータの値をあげてある．以下に，図A，Bにおけるガウスビーム入射時の全電界を例にとって計算手順を述べる．

4章で $y=0$ なる面上での入射電界：式（23）を式（24）で近似したが，この近似が与えられたパラメータに対し正当かどうかを調べる必要がある．そこで $x_0/\lambda=-10, 0, 10$，$S/\lambda=20$，$\theta_0=45°$ のとき $x/\lambda=0\sim30$ の範囲で式（23）と式（24）とを比較したところ，振幅誤差，位相誤差の絶対値はそれぞれ0.01％以下，0.005％以下であった．したがってこの近似は十分なりたつといえる．また，式（51）

(52) で与えられる散乱電界を計算する際，$n$ についての無限級数をどこで打ち切ればよいかが問題となり，たとえば $n=N$ なる項までで打ち切ったとすると，このことは，付録1の式(A・2)を参照すればわかるように，式(25)中の指数関数

$$e^{-ak^2(x-x_0)^2}$$

を無限級数に展開して，そのはじめの $(N+1)$ 項で近似したことに対応している．そこで，上記のパラメータに対し，このような近似が十分なりたつような $N$ の値を調べたところ $N=5$ とすればよいことがわかり*，$n=5$ までで打ち切って散乱電界を計算することにした**．以上のような準備をもとに，まず，入射電界を式(19)を用いて計算した．つぎに $y\geq 0$ なる半空間での散乱電界を，$0°\leq\theta<125°$，$145°<\theta\leq 180°$ なる $\theta$ に対しては式(51)を用いて，また $125°\leq\theta\leq 145°$ なる $\theta$ に対しては式(52)を用いて計算した***．さらに，このようにして求めた入射電界と散乱電界の和として $y\geq 0$ なる半空間での全電界を求めた．なお，$y<0$ なる半空間での全電界は，散乱電界が $y=0$ なる面に関して対称に分布することを利用して求めた．以上，図A，Bにおけるガウスビーム入射時の全電界を例にとって計算手順を述べた．以下順次，各図における電磁界のふるまいについて簡単に述べる．

図Aにおける，平面波入射時の全電界には，$0°\leq\theta\leq 75°$ の範囲で，非常にはげしい，かつ，規則的な振幅変動がみられる．これは，この範囲では無限に広い完全導体平板に平面波が入射したとき入射側

* $N=5$ のとき，上記のパラメータに対する誤差の絶対値は0.4％以下である．

** 図A，B，D，E，Gは $n=5$ までで打ち切って計算した結果であり，図C，Fについては $|x_0/\lambda|$ の値が大きいため $n=7$ までとって計算した．

*** 鞍部点 $\alpha_s=\theta$ と極 $\alpha_p=\pi-\theta_0$ とが一致するような $\theta$ は，$\theta_0=45°$ のとき $\theta=135°$ である．

に生じる定在波がほぼそのままの形で現われるためである．なお，この振幅変動は当然のことながら入射平面波の振幅1を中心としておこっている．ガウスビーム入射時の全電界にも，やはり $0° \leq \theta \lesssim 75°$ の範囲で規則的な振幅変動がみられるが，平面波入射時のそれほどは，はげしくない．なお，この変動は入射ガウスビームの振幅を中心としておこっており，そのため変動の中心は $\theta = 0°$ からしだいに増してゆき，$\theta = 45°$ 付近で最大となっている．つぎに $135° \lesssim \theta \leq 225°$ の範囲をみると，この範囲でガウスビーム入射時の全電界の振幅は平面波入射時のそれにしだいに近づいてゆき，ついには $\theta = 225°$ 付近で一致する．これは，図Aでは $x_0/\lambda = 0$，$\theta_0 = 45°$ の場合を考えていることからわかるように，入射ガウスビームの振幅は $\theta = 225°$ なる線上で，ほぼ，平面波と同じ振幅1をとるためである．さらに，幾何光学的な影の領域である $\theta > 225°$ の範囲では，平面波入射時，ガウスビーム入射時の全電界の振幅はほぼ同じ値を示し，かつ，急速に減衰することがわかる．

図Bには，ガウスビーム入射時（$\theta_0 = 45°$）の全電界の振幅を，$x_0/\lambda = -10, 10$ の場合について示してある．実線は $x_0/\lambda = -10$ のときの全電界，破線は $x_0/\lambda = 10$ のときの全電界である．$0° \leq \theta \lesssim 75°$ の範囲をみると，$x_0/\lambda = -10$ のときの振幅変動は，$x_0/\lambda = 10$ のときのそれにくらべてかなり小さい．これは，$x_0/\lambda = 10$ のとき入射ガウスビームの振幅最大点 $O_1$ が導体板上にあるのに対し，$x_0/\lambda = -10$ のときは導体板上にないからである．また $\theta = 225°$ 付近で両者の振幅は一致するが，これは，$x_0/\lambda = -10$ のときの入射ガウスビームの振幅と，$x_0/\lambda = 10$ のときの入射ガウスビームの振幅とは，$\theta = 225°$ なる線上で一致するからである．

図Cには，ガウスビーム入射時（$\theta_0 = 90°$）につき，$x < 0$，$y = 0$ なる面上での全電界（実線）と入射電界（破線）とを示してある．$S/\lambda = 20$ であることより，$x_0/\lambda = -20$ の場合，入射ガウスビームの振幅最大点 $O_1$ は導体板の端からちょうどスポットサ

イズSと同じ距離だけ離れており，$x_0/\lambda = -30$ の場合は，それ以上離れている．$x_0/\lambda = -20$ の場合，全電界の，入射電界を基準とした振幅変動は $r/\lambda = 20$ 付近で約 ±3 %であるが，$x_0/\lambda = -30$ の場合，$r/\lambda = 30$ 付近で約 ±1.2 %とかなり小さい．したがって，$\theta_0 = 90°$ のとき，入射ガウスビームの振幅最大点 $O_1$ が導体板の端からスポットサイズの1.5倍程度以上離れていれば，$x<0$，$y=0$ なる面上での全電界の振幅は入射電界のそれにほぼ等しいとみなすことができる．

図Dには，ガウスビーム入射時の全磁界*（$x_0/\lambda = 0$，実線）と平面波入射時の全磁界（破線）を $\theta_0 = 45°$ の場合について示してある．全磁界の $r$ 成分に振幅変動がほとんどみられないのは，散乱磁界の $r$ 成分の振幅が，入射磁界の $r$ 成分の振幅にくらべて無視できるほど小さいためである．

図Eには，ガウスビーム入射時（$\theta_0 = 45°$）の全磁界を $x_0/\lambda = -10, 10$ の場合について示してある．実線は $x_0/\lambda = -10$ のときの全磁界であり，破線は $x_0/\lambda = 10$ のときのそれである．この図における $\theta$ の範囲内では，$r$，$\theta$ 成分とも $x_0/\lambda = -10$ のときの全磁界の振幅の方が $x_0/\lambda = 10$ のときのそれよりも大きい．これは，前者の場合の方が，後者の場合よりも入射ガウスビームの振幅最大点が観測点に近いためである．

図Fには，ガウスビーム入射時（$\theta_0 = 90°$）につき，$x<0$，$y=0$ なる面上での全磁界を示してある．実線は $x_0/\lambda = -20$ の場合，破線は $x_0/\lambda = -30$ の場合である．この図より，$\theta_0 = 90°$ のとき $x<0$，$y=0$ なる面上では，全磁界の $\theta$ 成分の振幅は $r$ 成分のそれにくらべて十分小さいことがわかる．これは，$\theta_0 = 90°$，$\theta = 180°$ のとき $H_\theta^i = 0$ であることから，全磁界の $\theta$ 成分には $H_\theta^s$ のみが寄与するためである．なお，$x<0$，$y=0$ なる面上では散乱磁界の $x$ 成分

＊図D～Gには全磁界および電流の振幅を，媒質の固有アドミッタンス $Y$ で割った量を示してある．

は0であるから，この面上での全磁界のγ成分は入射磁界のγ成分そのものである．すなわち，この面上では，$|H_r|/Y = |H_r^i|/Y = |E_z^i|$ である．

図Gには，ガウスビーム入射時の電流（実線）と平面波入射時の電流（破線）とを $\theta_0 = 45°$ の場合について示してある．この図より，$x_0/\lambda$ を -10，0，10 と変化させると，それにつれて電流分布も全体として x の正方向へ移動することがわかる．なお，平面波入射時の電流は導体板の端で，すなわち $x/\lambda = 0$ で発散するから，ガウスビーム入射時の電流も $x/\lambda = 0$ で発散する．

以上，本論文では図5に示すように E-偏波界が入射したときの回折界を求めたが，図6に示すように $x<0$，$y=0$ なる面が完全導体平板であるとき，H-偏波界が入射したときの回折界（散乱電界を $E_2^s$，全磁界を $H_2$ とする）は，E-偏波界が入射したときの散乱電界を $E_1^s$，全磁界を $H_1$ とすると，Babinet の原理より，$E_1^s \to -H_2$，$H_1 \to E_2^s$ と置き換えることにより得られる．

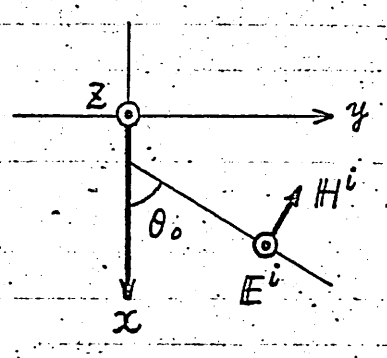



図5 入射E-偏波界

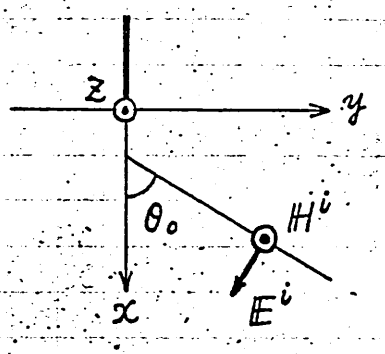



図6 入射H-偏波界

## 8. むすび

本論文では，半無限完全導体平板に E-偏波がガウスビームが入射したときの散乱電磁界を求め，これをもとに全電磁界分布および電流分布の数値計算例を示した．同時に，これらを平面波入射時の結果と比較した．その結果，(1) ガウスビーム入射時の全電界分布には，定在波による振幅変動は平面波入射時のそれほどは大きくないこと，(2) 幾何光学的な影の領域における全電界の振幅は，平面波入射時および導体板を含む平面内で±10入程度の範

囲を動く入射ガウスビームに対し，ほとんど同じ，かつ，非常に小さな値をとること，(3) ガウスビームが導体板に垂直に入射した場合，開口面上における全電界の振幅分布は，入射ガウスビームの振幅最大点が，開口面上で導体板の端からスポットサイズの1.5倍程度以上離れていれば，入射ガウスビームの振幅分布にほぼ等しいこと，などがわかった．

## 文献


(1) 根本，牧本："開口によるビーム波の回折に関する一考察"，信学論 (B)，52-B，6，p.338 (昭44-06)

(2) 田中，福光："方形開口によるビーム波の回折"，信学論 (B)，53-B，4，p.184 (昭45-04)

(3) M. Born and E. Wolf : "Principles of optics", p.556 Pergamon Press (1964)

(4) P. C. Clemmow : "The plane wave spectrum representation of electromagnetic fields", Pergamon Press (1966)


## 付録1　双対積分方程式：式(25)の解

式(25)第二式の右辺を，指数関数の無限級数展開および二項定理を用いて書き変え，第一式とともに記すと

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^s(\zeta) e^{-jk_2 x\zeta} d\zeta = 0 , \quad x<0 \qquad (A\cdot 1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P^s(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-jk_2 x\zeta} d\zeta = -g_1 e^{jk_2 x\zeta_0} \cdot\left[g_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n-1} b_{nm} x^{2n-m}\right], \quad x>0 \qquad (A\cdot 2)$$

$$b_{nm} \equiv \frac{(-ak_2^2)^n}{n!} {}_{2n}C_m (-x_0)^m \qquad (A\cdot 3)$$

である．ただし $g_1$，$g_2$ は式(28)で定義される量である．ここで，$\zeta$ 平面上で定義される関数 $U(\zeta)$，$L(\zeta)$ を考え，これらを

$U$：上半平面で一価正則で，かつ $0 \le \arg\zeta \le \pi$ で一様に $|U| \to 0$，$|\zeta| \to \infty$ である関数

$L$：下半平面で一価正則で，かつ $-\pi \le \arg\zeta \le 0$ で一様に $|L/(\zeta+\zeta_0)| \to 0$，$|\zeta| \to \infty$ である関数

とする．このとき，Jordan の補助定理および留数定理より，次式がなりたつ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) e^{-jk\chi\zeta} d\zeta = \lim_{R\to\infty} \int_{C_+} U(\zeta) e^{-jk\chi\zeta} d\zeta = 0, \quad \chi < 0 \qquad (A\cdot 4)$$

$$\frac{g_1 g_2}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\zeta)}{L(-\zeta_0)} \cdot \frac{1}{\zeta+\zeta_0} e^{-jk\chi\zeta} d\zeta$$

$$= \frac{g_1 g_2}{2\pi j} \lim_{R\to\infty} \int_{C_-} \frac{L(\zeta)}{L(-\zeta_0)} \cdot \frac{1}{\zeta+\zeta_0} e^{-jk\chi\zeta} d\zeta$$

$$= -g_1 g_2 e^{jk\chi\zeta_0}, \quad \chi > 0 \qquad (A\cdot 5)$$

ただし $C_\pm$ は図 A・1 に示したような周回積分路である．同様に，$p \equiv 2n-m+1$ 位の極における留数を計算することにより次式が得られる．

$$\frac{g_1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{a_{nm}}{(\zeta+\zeta_0)^p} \right] e^{-jk\chi\zeta} d\zeta$$

$$\doteq -g_1 e^{jk\chi\zeta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-1} b_{nm} \chi^{2n-m}, \quad \chi > 0 \qquad (A\cdot 6)$$

ただし $a_{nm}$ は式 (28) で定義される量である．式 (A・4) ～ (A・6) より，式 (A・1)，(A・2) をみたす $P^s(\zeta)$，$P^s(\zeta)/\sqrt{1-\zeta^2}$ はそれぞれ次式で与えられる．

$$P^s(\zeta) = U(\zeta) \qquad (A\cdot 7)$$

$$\frac{P^s(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{g_1}{2\pi j} \left[ \frac{L(\zeta)}{L(-\zeta_0)} \cdot \frac{g_2}{\zeta+\zeta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{a_{nm}}{(\zeta+\zeta_0)^p} \right] \qquad (A\cdot 8)$$

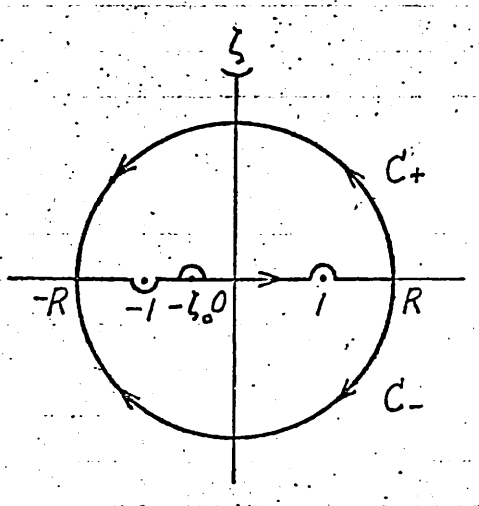



図 A・1 周回積分路 $C_\pm$

式(A・7)，(A・8)より $P^s(\zeta)$ を消去すると

$$\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\cdot\frac{U(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta}}=\frac{g_1}{2\pi j}\left[\frac{L(\zeta)}{L(-\zeta_0)}\cdot\frac{g_2}{\zeta+\zeta_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n-1}\frac{a_{nm}}{(\zeta+\zeta_0)^p}\right] \tag{A・9}$$

である．上式において，下半平面で正則な関数は左辺では $1/\sqrt{1+\zeta}$ であり，右辺では $L(\zeta)/L(-\zeta_0)$ であるから

$$L(\zeta)/L(-\zeta_0)=\sqrt{1-\zeta_0}/\sqrt{1+\zeta} \tag{A・10}$$

でなければならない．ただし右辺の $\sqrt{1-\zeta_0}$ は $\zeta=-\zeta_0$ のとき $L(\zeta)/L(-\zeta_0)=1$ なる条件から定まる定数である．式(A・10)を式(A・9)に代入することにより，$U(\zeta)$ すなわち $P^s(\zeta)$ は次式で与えられる．

$$P^s(\zeta)=\frac{g_1}{2\pi j}\left[g_2\frac{\sqrt{1-\zeta_0}\sqrt{1-\zeta}}{\zeta+\zeta_0}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n-1}\frac{a_{nm}\sqrt{1-\zeta^2}}{(\zeta+\zeta_0)^p}\right] \tag{A・11}$$

以上のようにして得られた $U(\zeta)$，$L(\zeta)$ が，これらに課した諸条件をみたすことは明らかである．

## 付録2　$Res(n)(\alpha_p)$ の導出

留数の定義より，$n\geq 1$ に対しては

$$\begin{aligned}
&2\pi j\,Res(n)(\alpha_p)\\
&=\oint P_n^s(\cos\alpha)\,e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha\\
&=\frac{g_2}{2\pi j}\sum_{m=0}^{2n-1}a_{nm}\oint\frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha+\cos\theta_0)^p}\,e^{-jkr\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha\\
&=-\frac{g_2}{2\pi j}\sum_{m=0}^{2n-1}a_{nm}\oint\frac{1}{(\zeta+\zeta_0)^p}\,e^{-jkr(\zeta\cos\theta+\sqrt{1-\zeta^2}\sin\theta)}\,d\zeta\\
&=-g_2\sum_{m=0}^{2n-1}\frac{a_{nm}}{(2n-m)!}\lim_{\zeta\to-\zeta_0}\frac{d^{2n-m}}{d\zeta^{2n-m}}\,e^{-jkr(\zeta\cos\theta+\sqrt{1-\zeta^2}\sin\theta)}
\end{aligned} \tag{A・12}$$

である．ただし $\oint$ は極 $\alpha_p$ を反時計方向に一周す

る積分を表わす．同様に $n=0$ に対しては

$$2\pi j \, Res_{(0)}(\alpha_p) = -g_1 g_2 e^{jkr\cos(\theta+\theta_0)} \qquad (A\cdot 13)$$

である．

付録3　式(48-a), (48-b)の証明

帰納法による．式(48-a)が $r=1$ に対してなりたつことは，恒等式

$$D^2 \sec z = 2\sec^3 z - \sec z \qquad (A\cdot 14)$$

より明らかである．式(48-a)が $r=t$ に対してなりたつとすれば

$$(D^2+1)(D^2+3^2)\cdots\{D^2+(2t-1)^2\}\sec z = (2t)!(\sec z)^{2t+1} \qquad (A\cdot 15)$$

であり，証明すべき式は $r=t+1$ とした次式

$$(D^2+1)(D^2+3^2)\cdots\{D^2+(2t+1)^2\}\sec z = (2t+2)!(\sec z)^{2t+3} \qquad (A\cdot 16)$$

である．上式左辺は微分演算子の可換性と式(A·15)より

$$(左辺) = \{D^2+(2t+1)^2\}(2t)!(\sec z)^{2t+1}$$

$$= (2t)!\left[D^2(\sec z)^{2t+1} + (2t+1)^2(\sec z)^{2t+1}\right] \qquad (A\cdot 17)$$

であり，上式［　］中の第一項は

$$D^2(\sec z)^{2t+1} = (2t+1)D\left[\sin z\,(\sec z)^{2t+2}\right]$$

$$= (2t+1)\left[(2t+2)(\sec z)^{2t+3} - (2t+1)(\sec z)^{2t+1}\right] \qquad (A\cdot 18)$$

であるから，上式を式(A·17)に代入すれば式(A·16)右辺に一致する．式(48-b)は，式(48-a)において $n$ を $n-1$ で置き換え，両辺を $z$ について一回微分することによりただちに得られる．

輻射科学研究会資料

# 半無限完全導体平板による ガウスビームの回折

別　冊

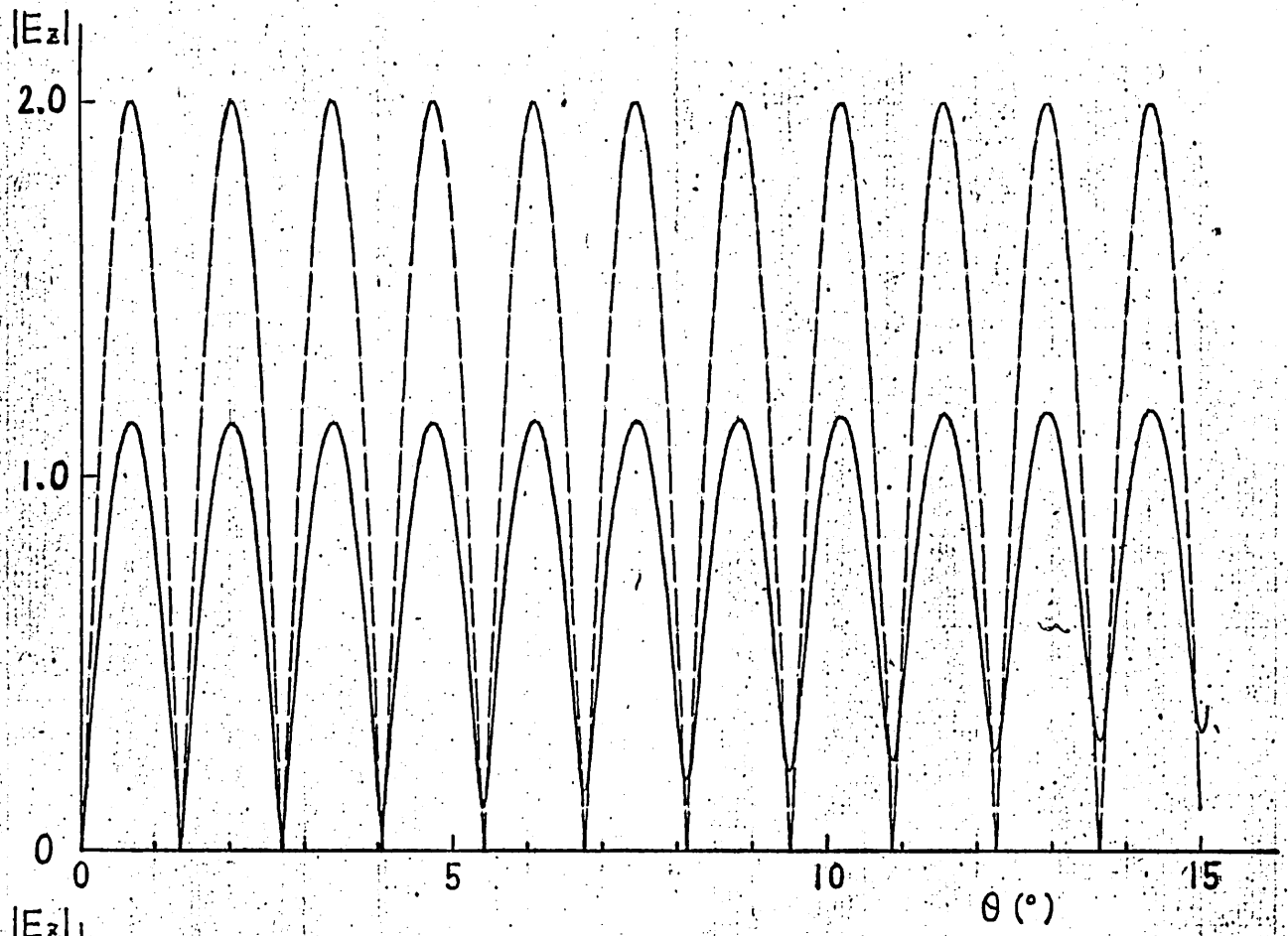
昭和45年　12月　4日

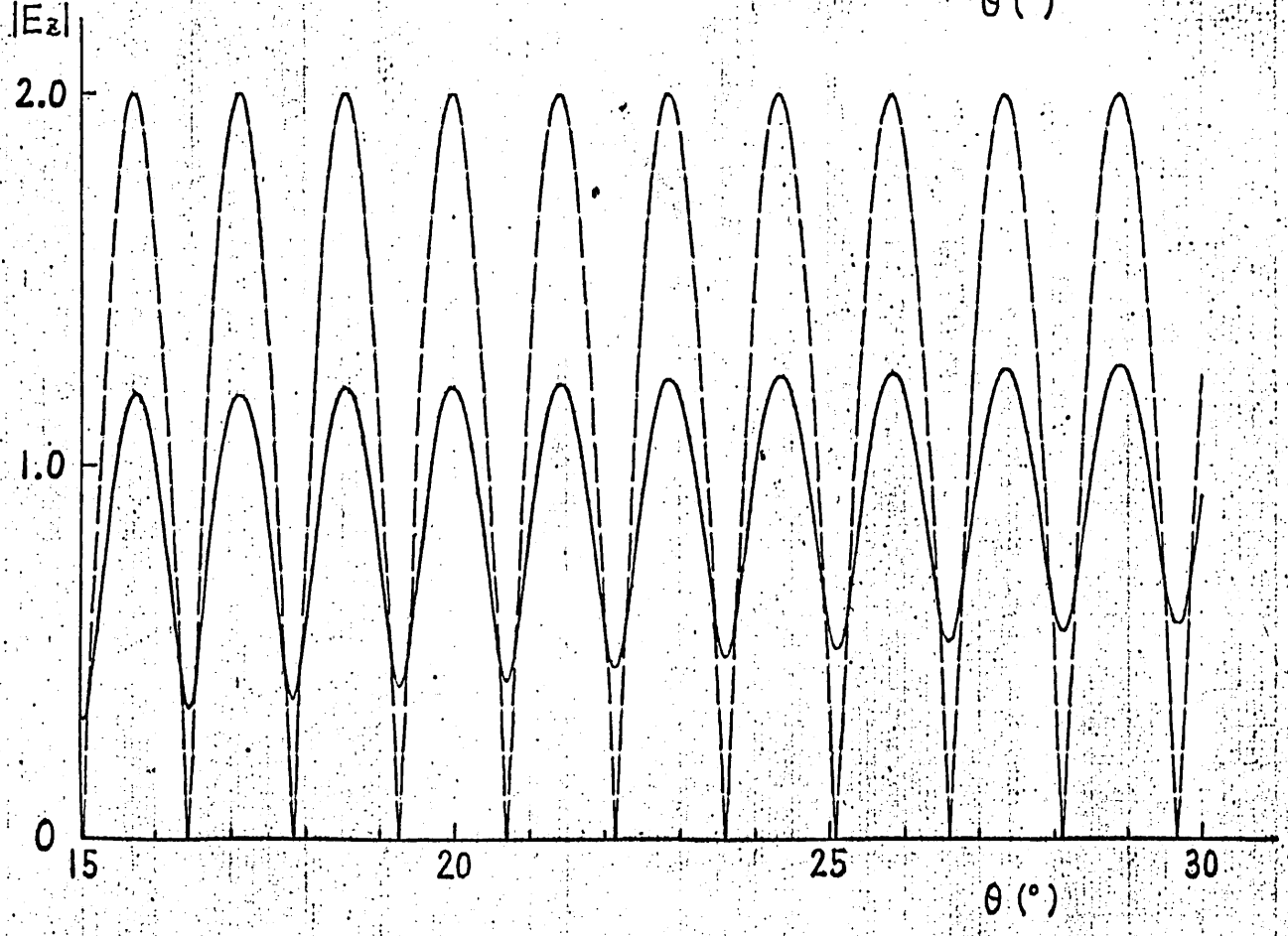
| 図 | ページ | | 内容 |
|---|---|---|---|
| A | 2～8 | 実線 | ガウスビーム入射時の全電界 $\|E_z\|$ |
| | | 破線 | 平面波入射時の全電界 $\|E_z\|$ |
| B | 9～14 | 実線 | ガウスビーム入射時の全電界 $\|E_z\|$ |
| | | 破線 | ガウスビーム入射時の全電界 $\|E_z\|$ |
| C | 15, 16 | 実線 | ガウスビーム入射時の全電界 $\|E_z\|$ |
| | | 破線 | 入射ガウスビームの全電界 $\|E_z^i\|$ |
| D | 17 | 実線 | ガウスビーム入射時の全磁界 $\|H_r\|, \|H_\theta\|$ |
| | | 破線 | 平面波入射時の全磁界 $\|H_r\|, \|H_\theta\|$ |
| E | 18 | 実線 | ガウスビーム入射時の全磁界 $\|H_r\|, \|H_\theta\|$ |
| | | 破線 | ガウスビーム入射時の全磁界 $\|H_r\|, \|H_\theta\|$ |
| F | 19 | 実線 | ガウスビーム入射時の全磁界 $\|H_r\|, \|H_\theta\|$ |
| | | 破線 | ガウスビーム入射時の全磁界 $\|H_r\|, \|H_\theta\|$ |
| G | 20 | 実線 | ガウスビーム入射時の電流 $\|J_z\|$ |
| | | 破線 | 平面波入射時の電流 $\|J_z\|$ |

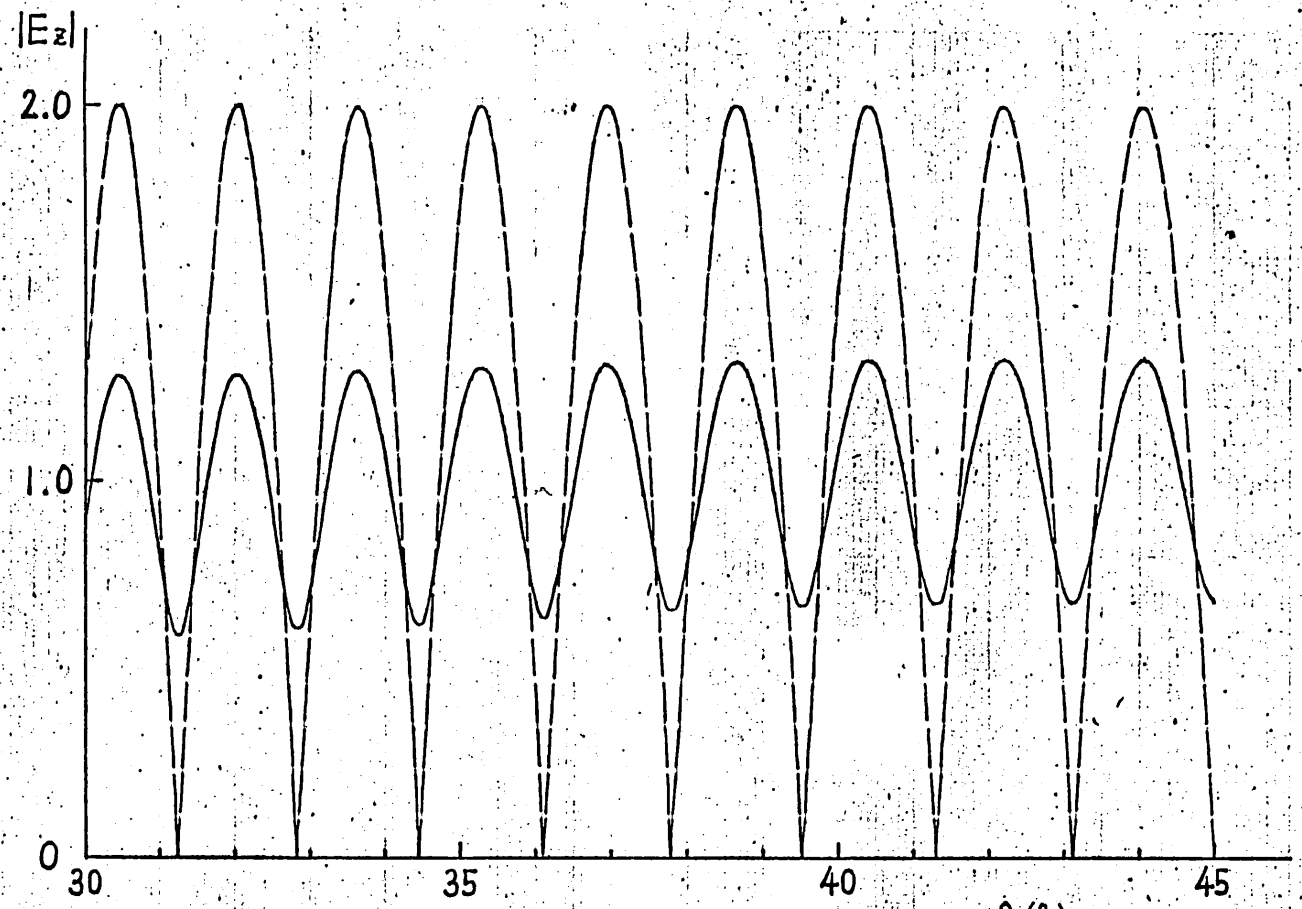
表 1　　各図の内容

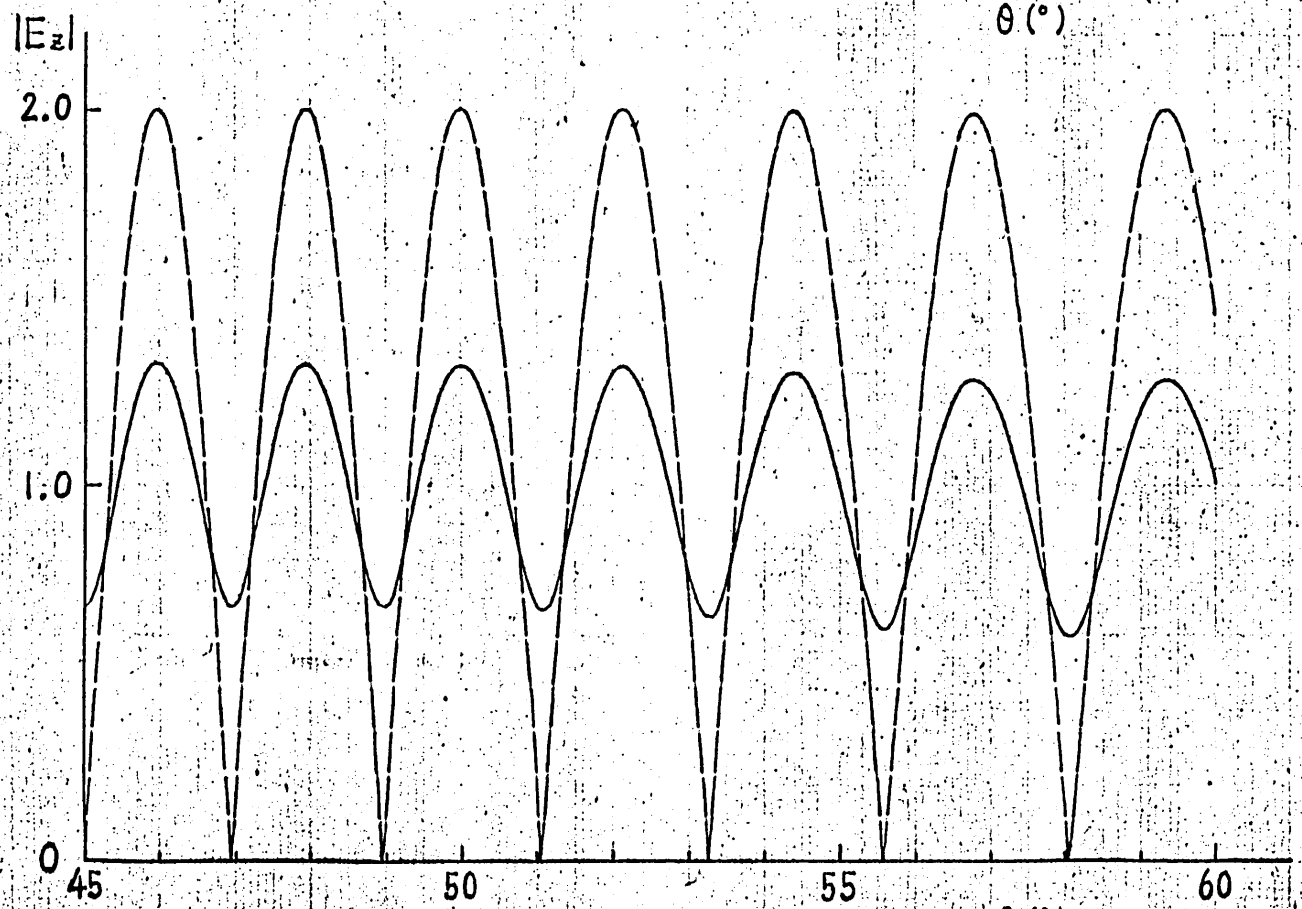
| 図 | | $x_0/\lambda$ | $S/\lambda$ | $\theta_0$ | $r/\lambda$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 実線 | 0 | 20 | 45° | 30 | 0°～240° |
| | 破線 | | | 45° | 30 | 0°～240° |
| B | 実線 | -10 | 20 | 45° | 30 | 0°～240° |
| | 破線 | 10 | 20 | 45° | 30 | 0°～240° |
| C | 実線 | -20, -30 | 20 | 90° | 5～60 | 180° |
| | 破線 | -20, -30 | 20 | 90° | 0～60 | 180° |
| D | 実線 | 0 | 20 | 45° | 30 | 145°～190° |
| | 破線 | | | 45° | 30 | 145°～190° |
| E | 実線 | -10 | 20 | 45° | 30 | 145°～205° |
| | 破線 | 10 | 20 | 45° | 30 | 145°～205° |
| F | 実線 | -20, -30 | 20 | 90° | 5～30 | 180° |
| | 破線 | -20, -30 | 20 | 90° | 5～30 | 180° |
| G | 実線 | -10, 0, 10 | 20 | 45° | 5～40 | 0° |
| | 破線 | | | 45° | 0～40 | 0° |

表 2　　各図におけるパラメータの値

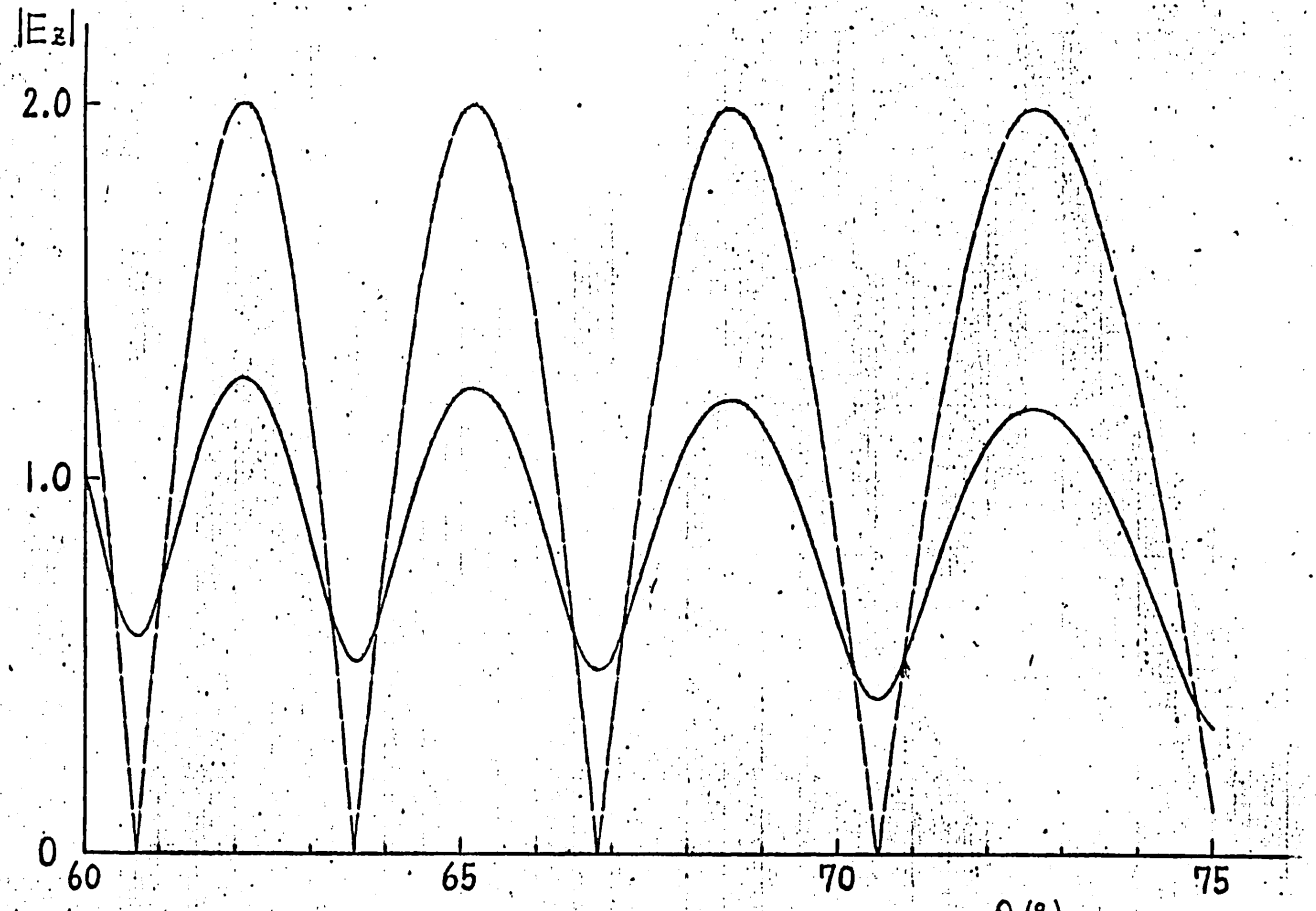

|Ez|
2.0
1.0
0
0
5
10
15
θ (°)

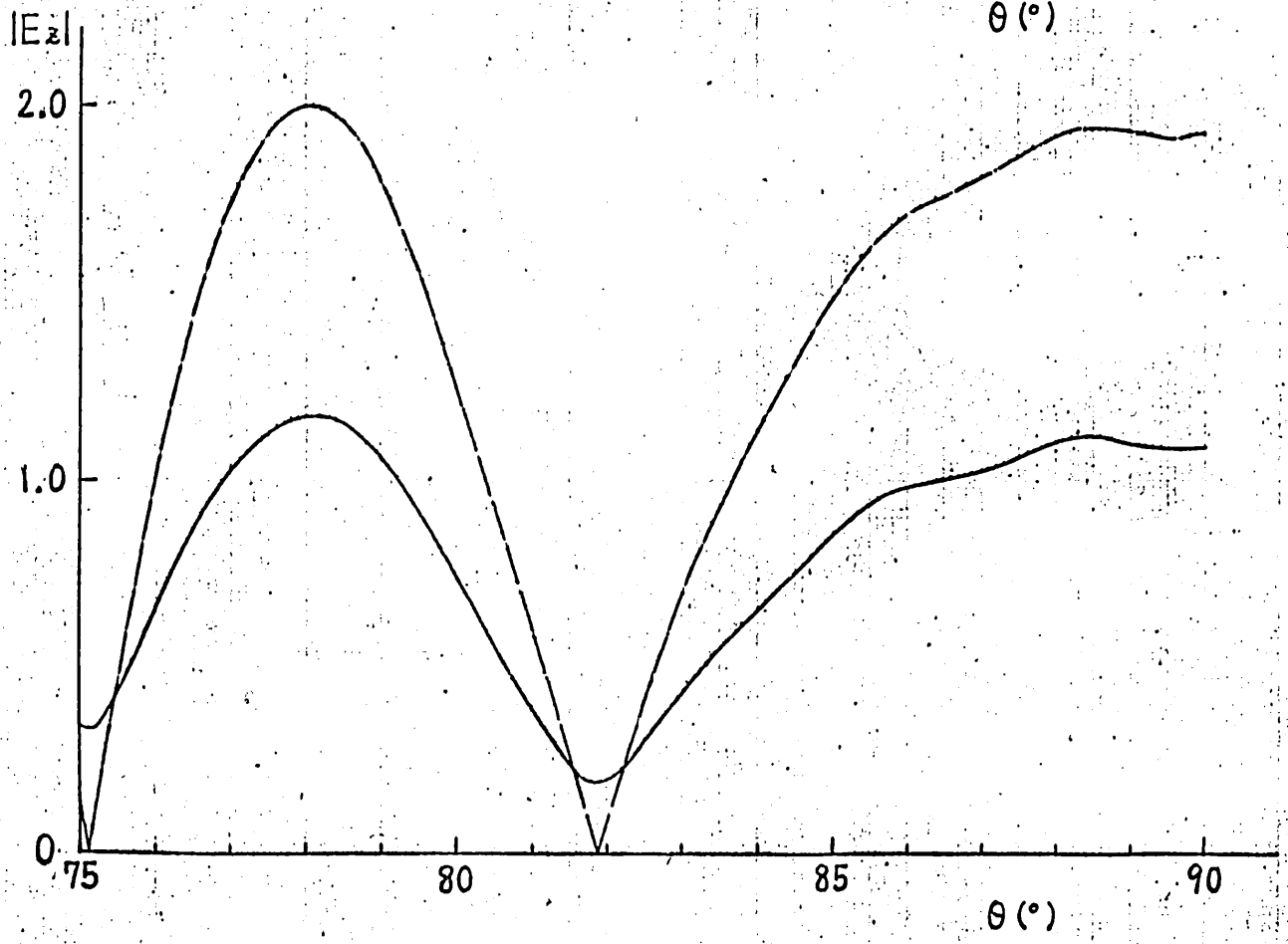

|Ez|
2.0
1.0
0
15
20
25
30
θ (°)

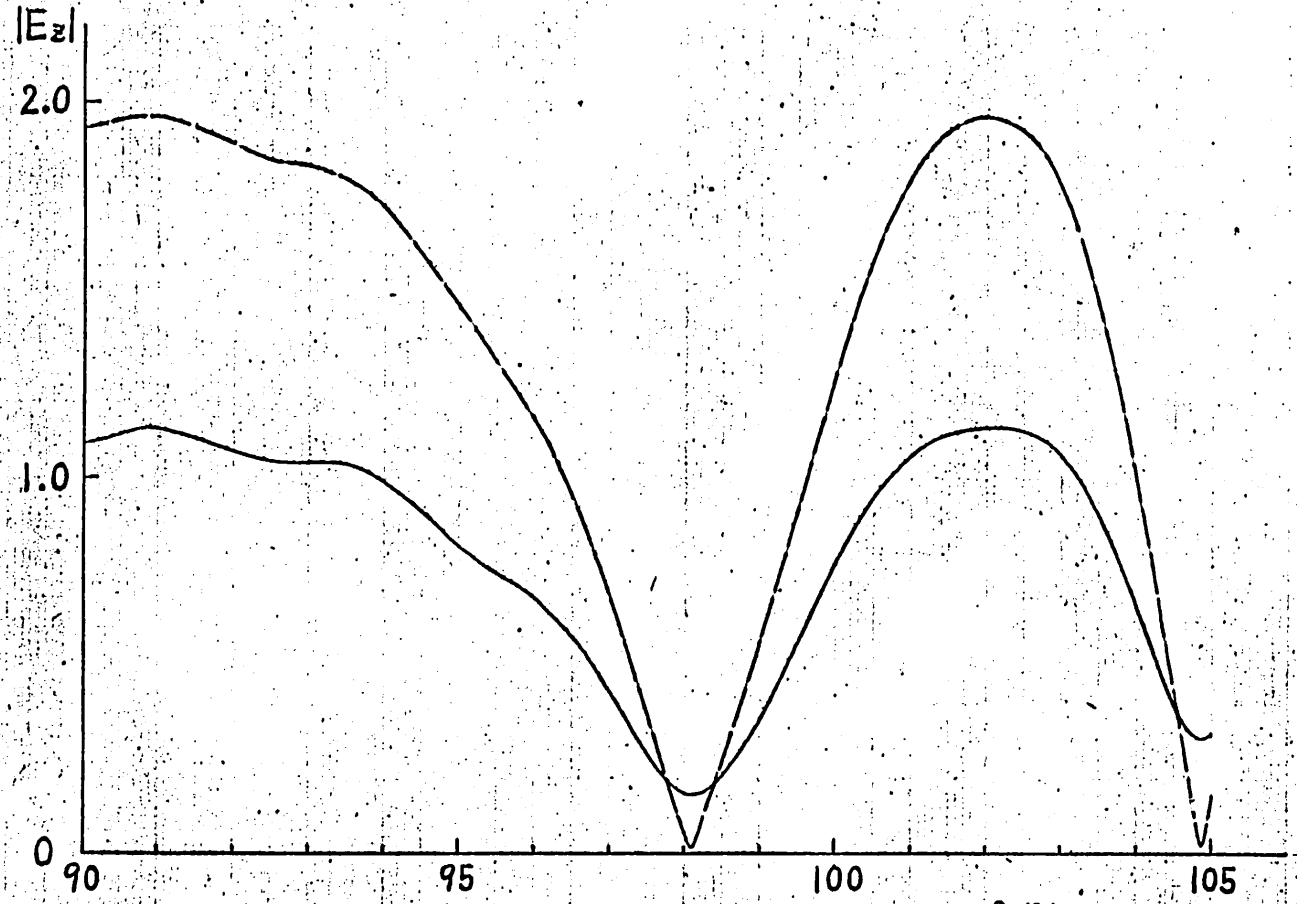

|Ez|
2.0
1.0
0
30
35
40
45
θ(°)

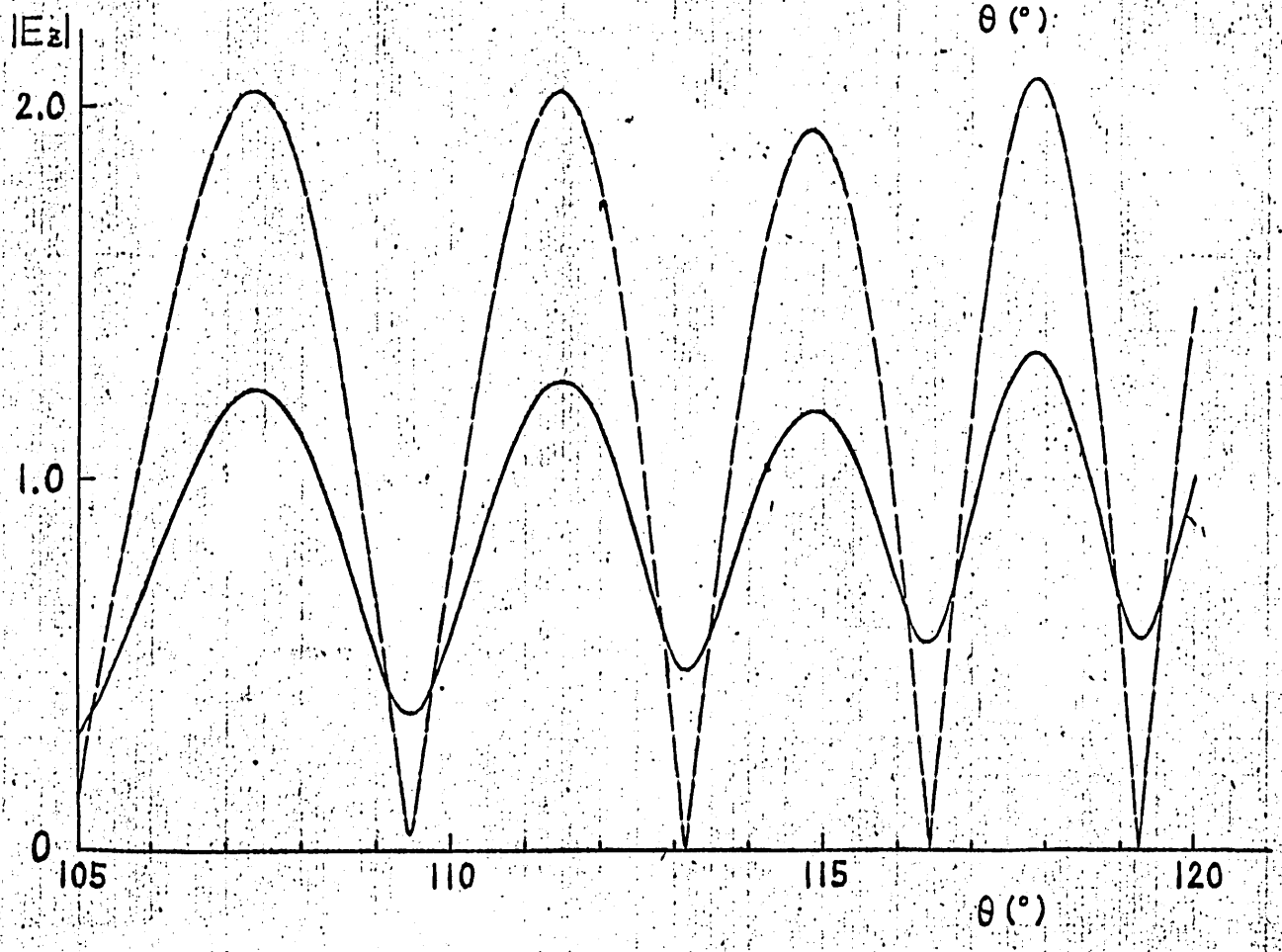

|Ez|
2.0
1.0
0
45
50
55
60
θ(°)

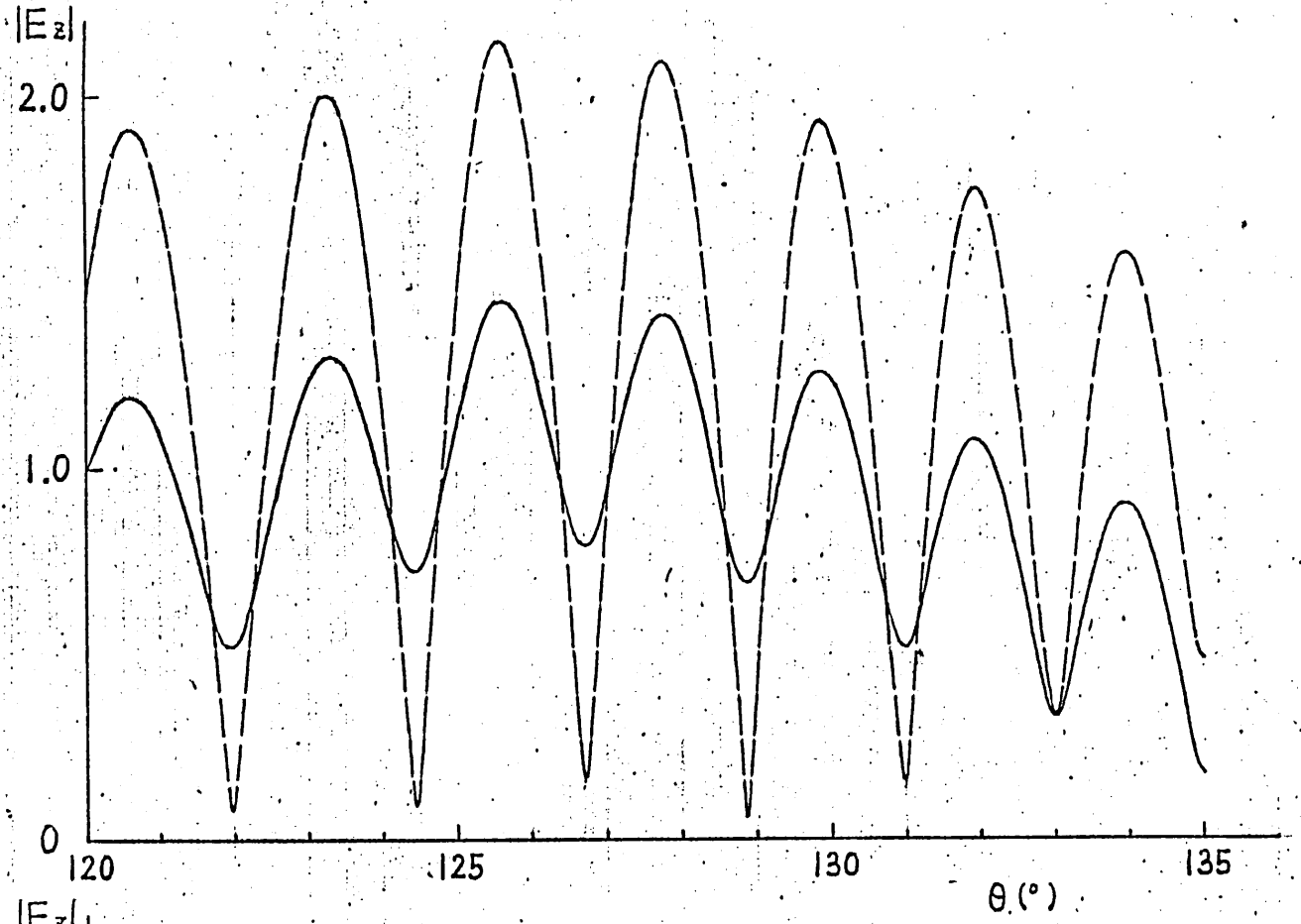
4 (A)

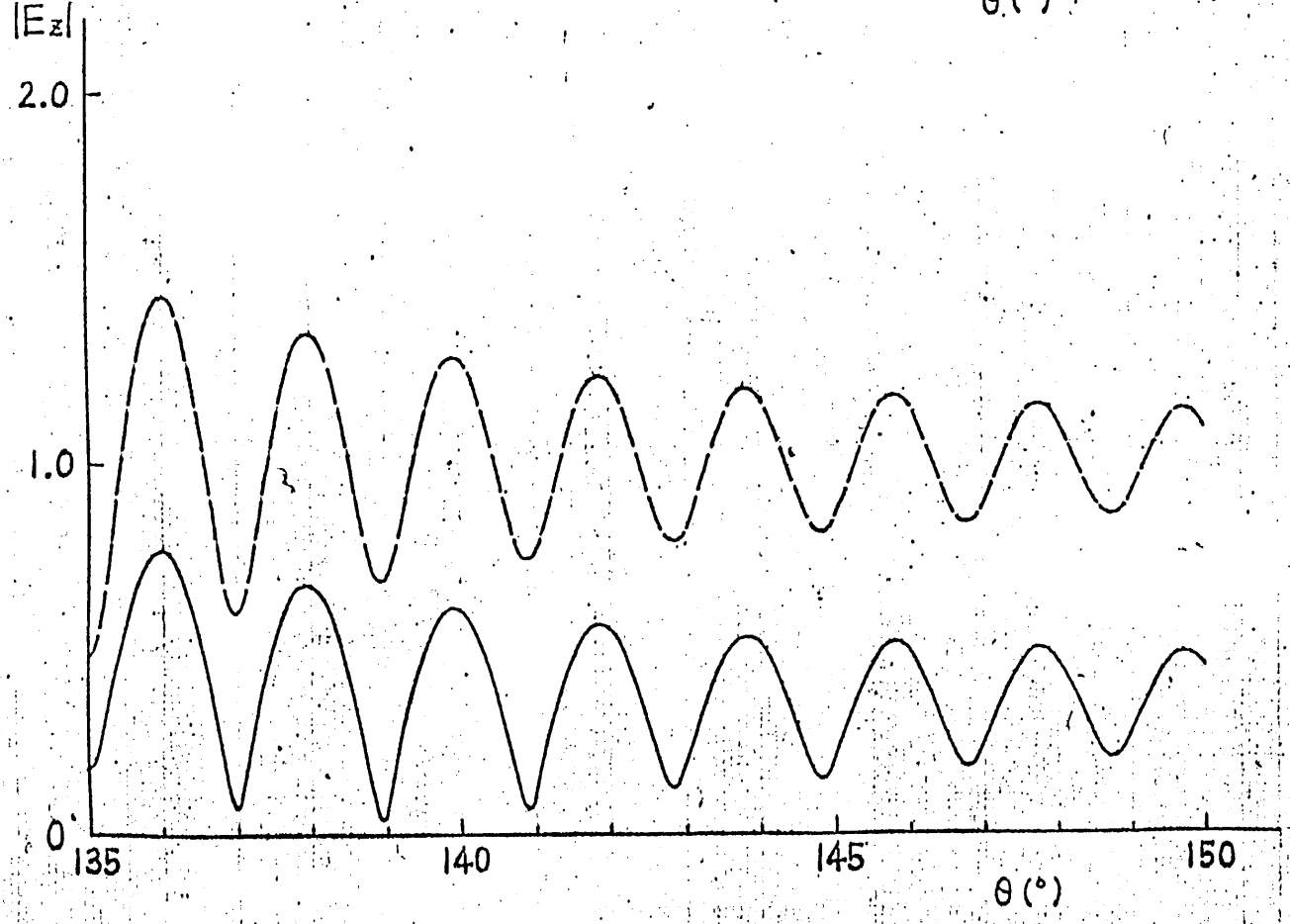


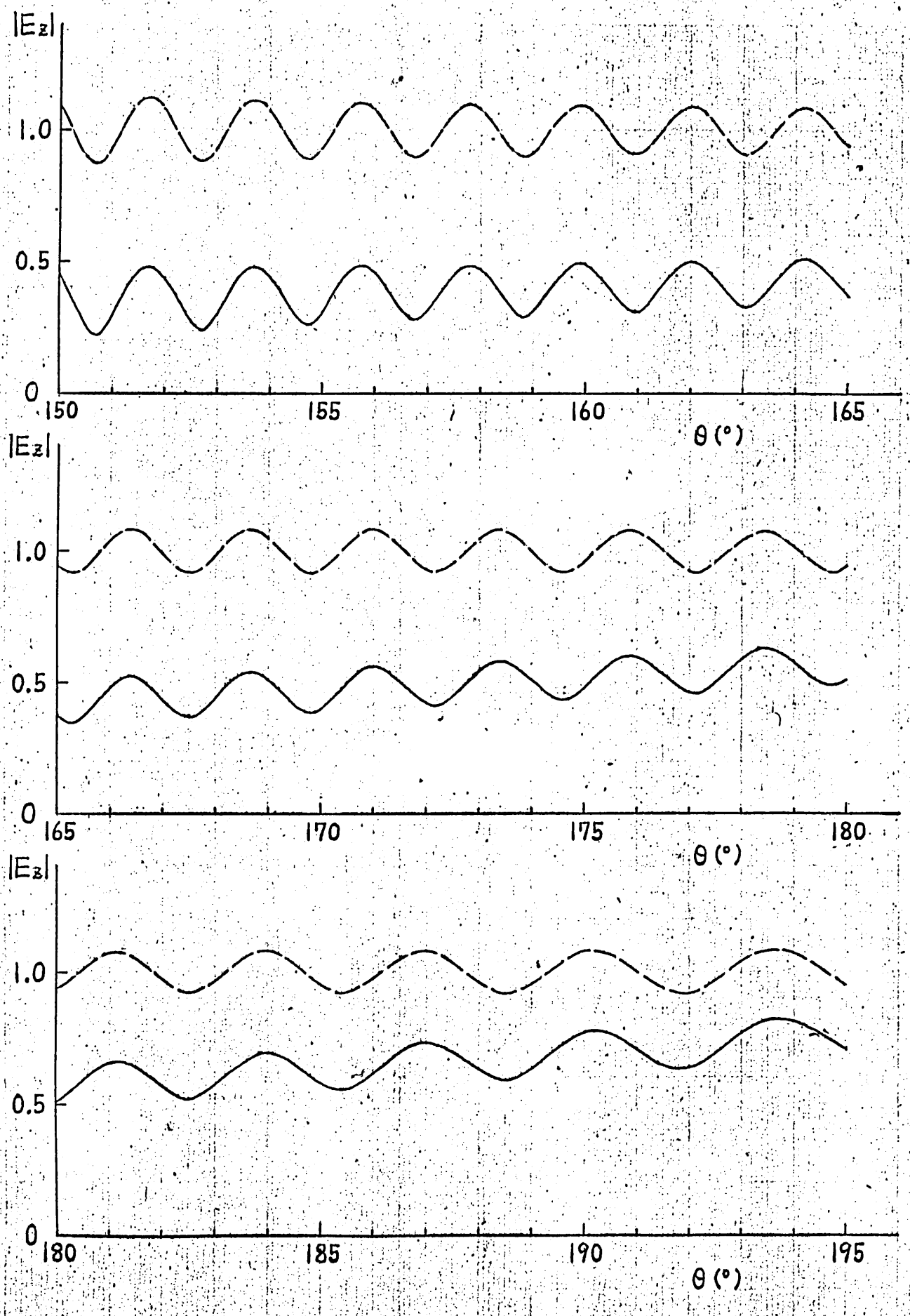



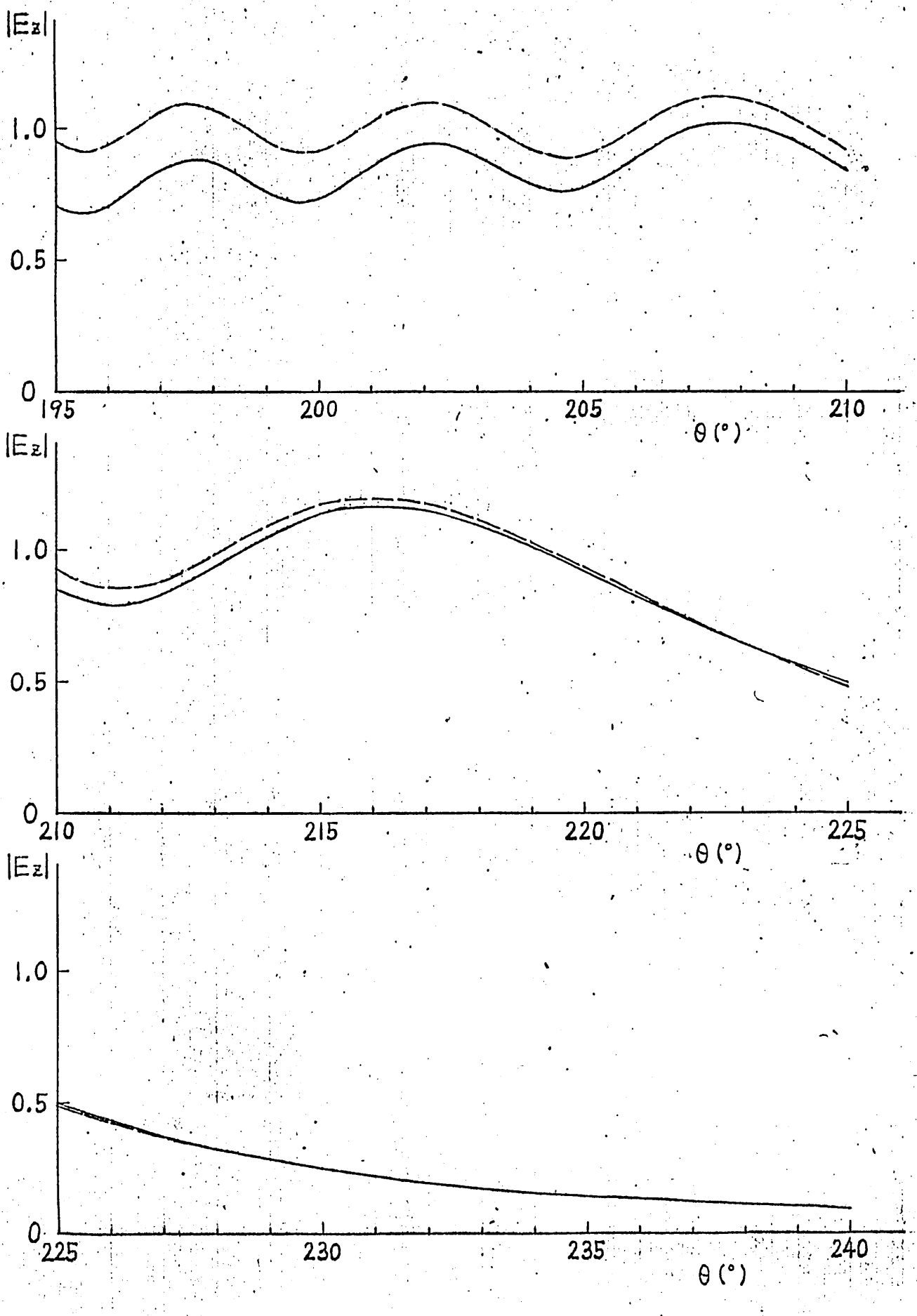

|Ez|
2.0
1.0
0
90
95
100
105
θ (°)

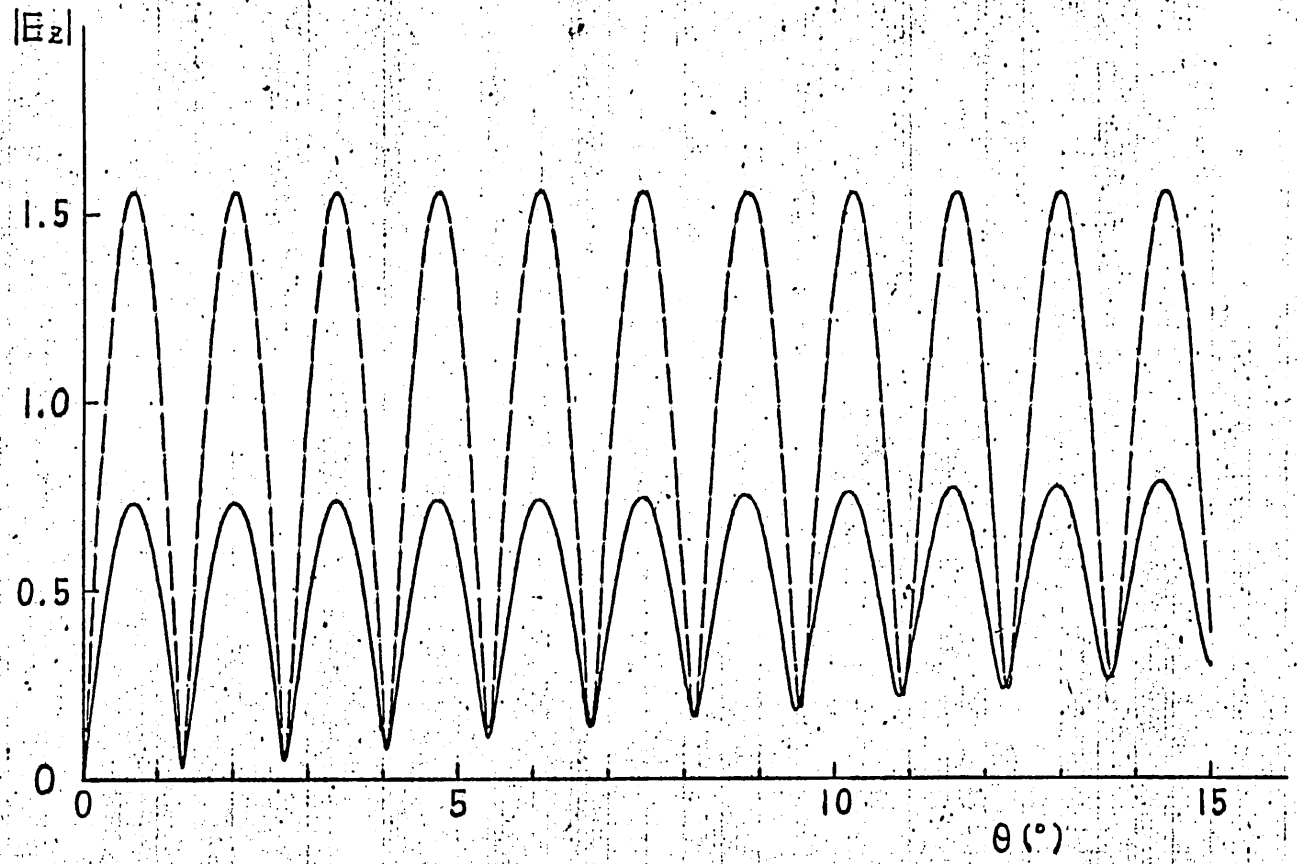

|Ez|
2.0
1.0
0
105
110
115
120
θ (°)

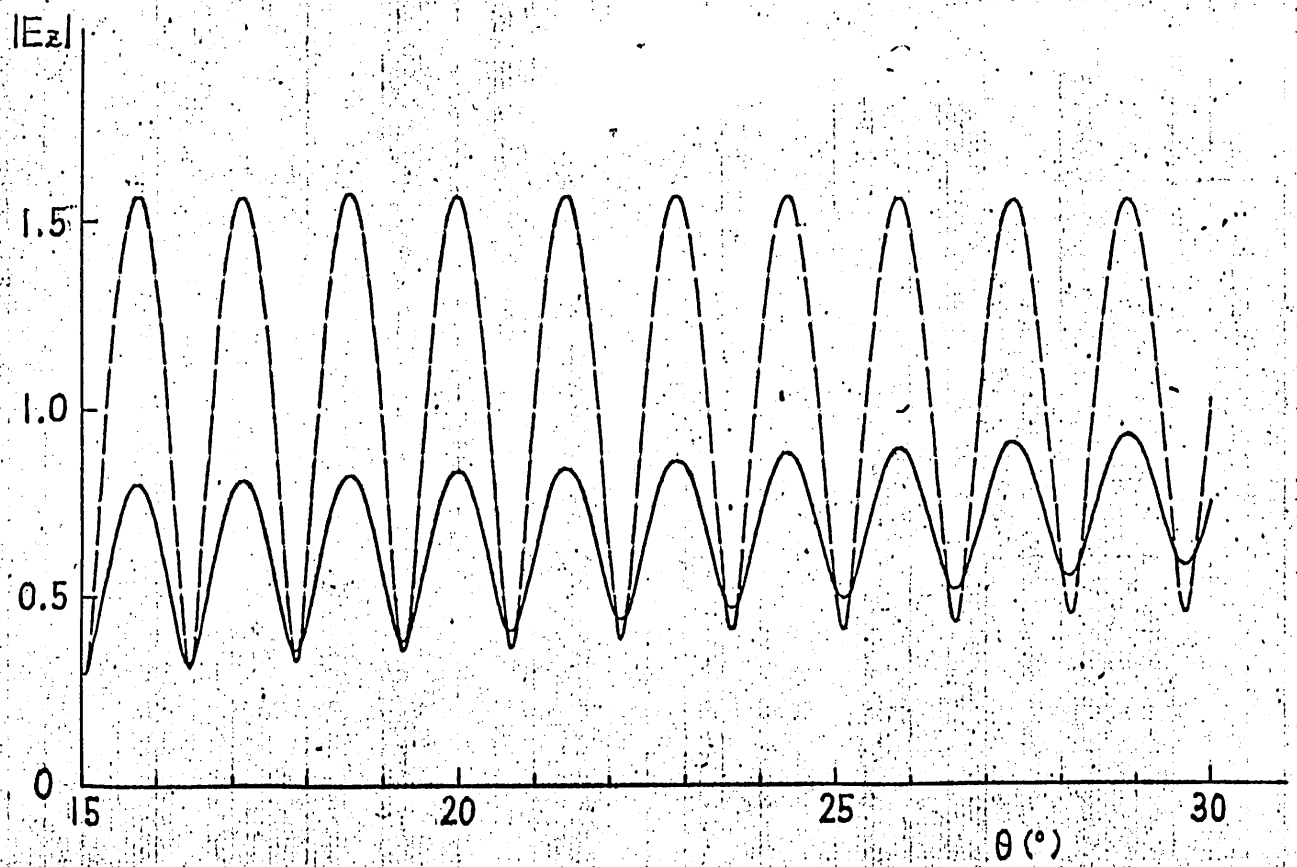

|Ez|
2.0
1.0
0
120
125
130
135
θ(°)

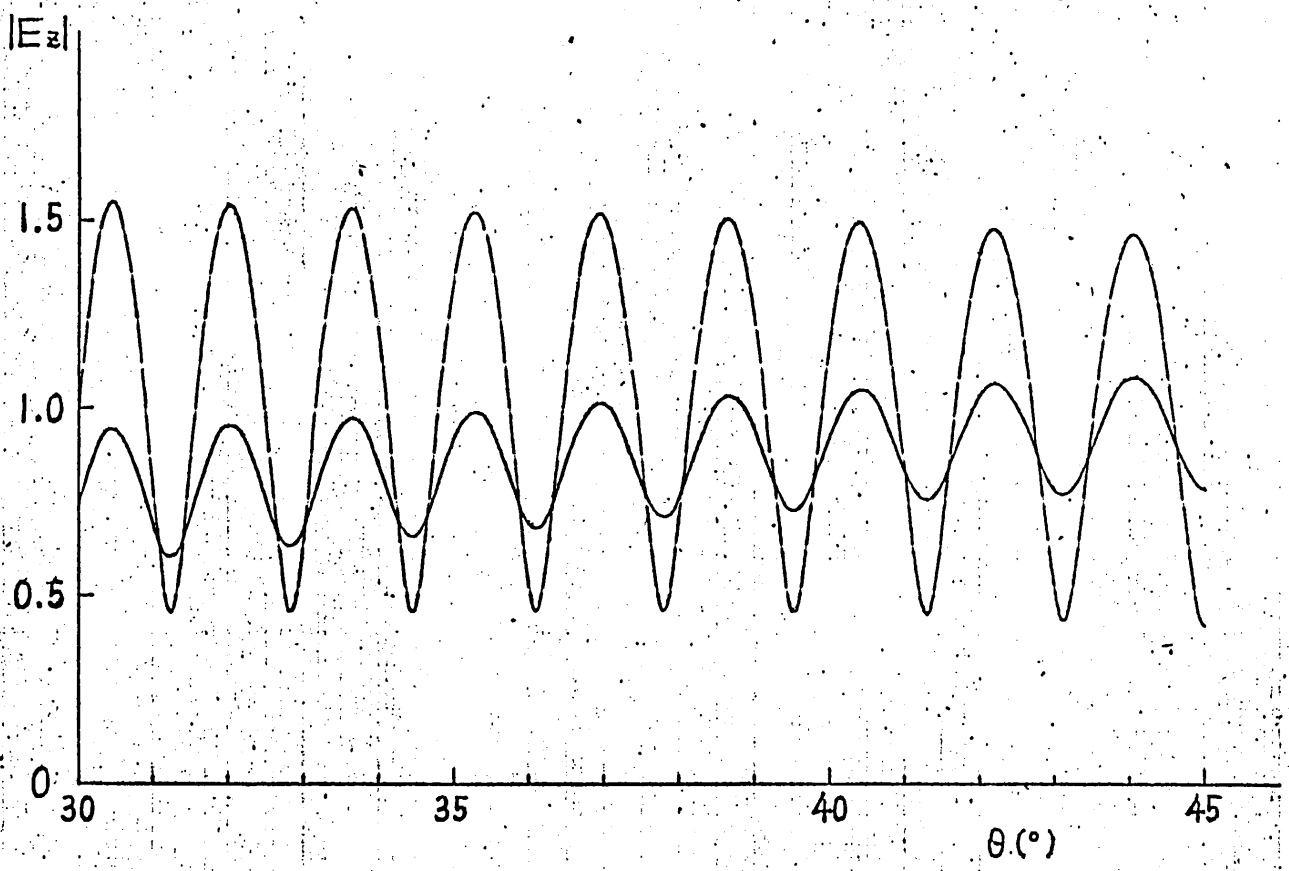

|Ez|
2.0
1.0
0
135
140
145
150
θ(°)

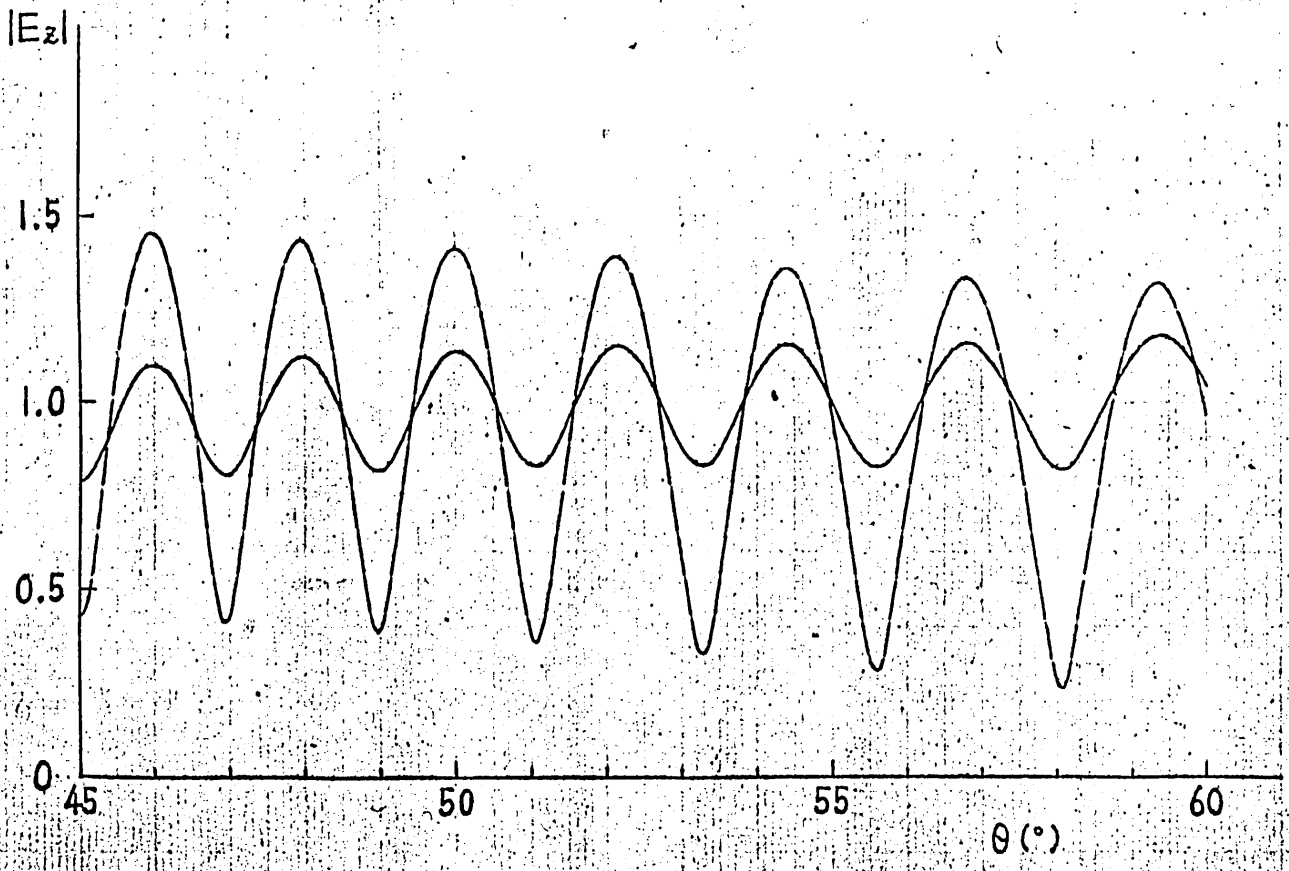

|Ez|
1.0
0.5
0
150
155
160
165
θ(°)
|Ez|
1.0
0.5
0
165
170
175
180
θ(°)
|Ez|
1.0
0.5
0
180
185
190
195
θ(°)

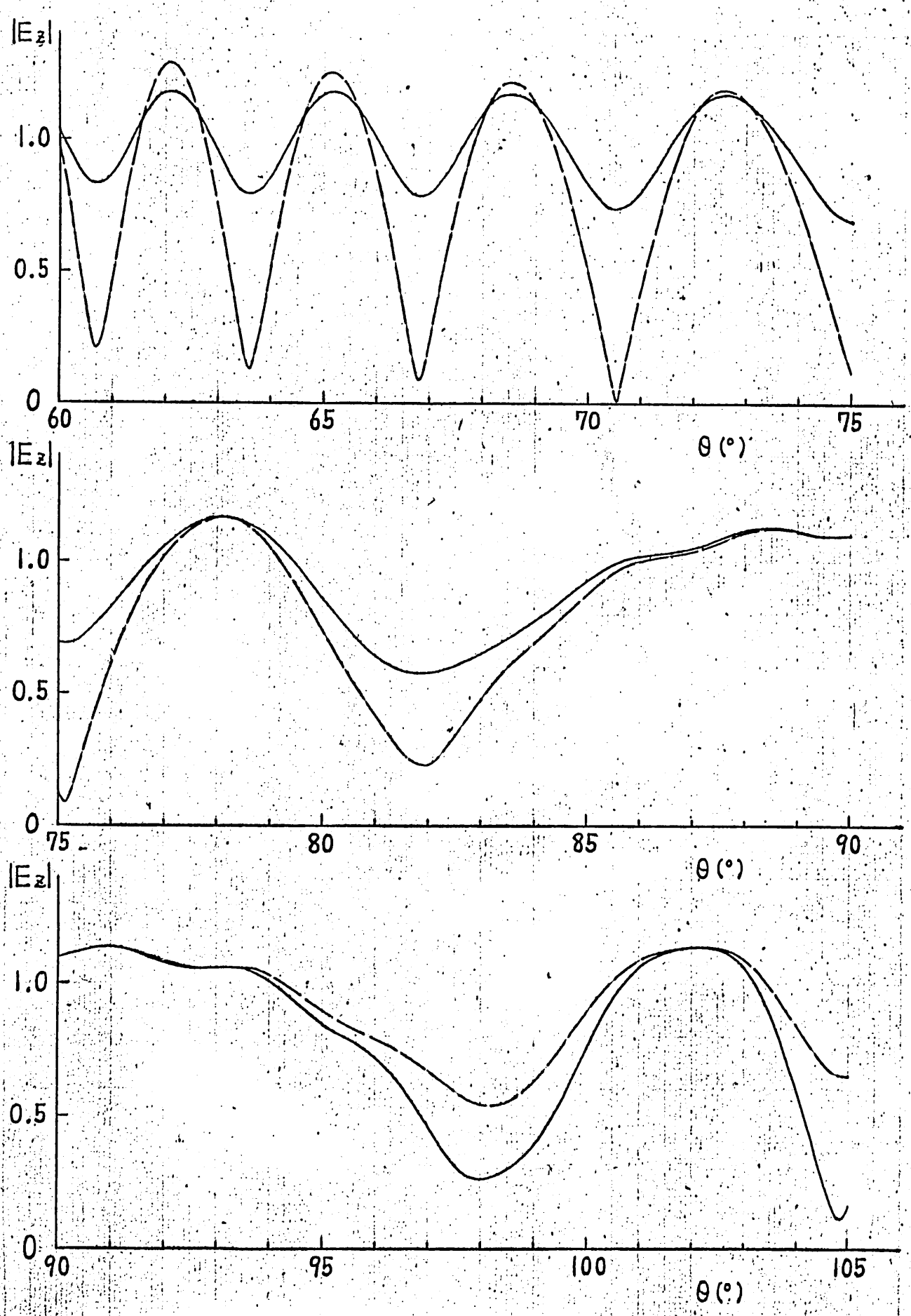

|Ez|
1.0
0.5
0
195
200
205
210
θ (°)
|Ez|
1.0
0.5
0
210
215
220
225
θ (°)
|Ez|
1.0
0.5
0
225
230
235
240
θ (°)

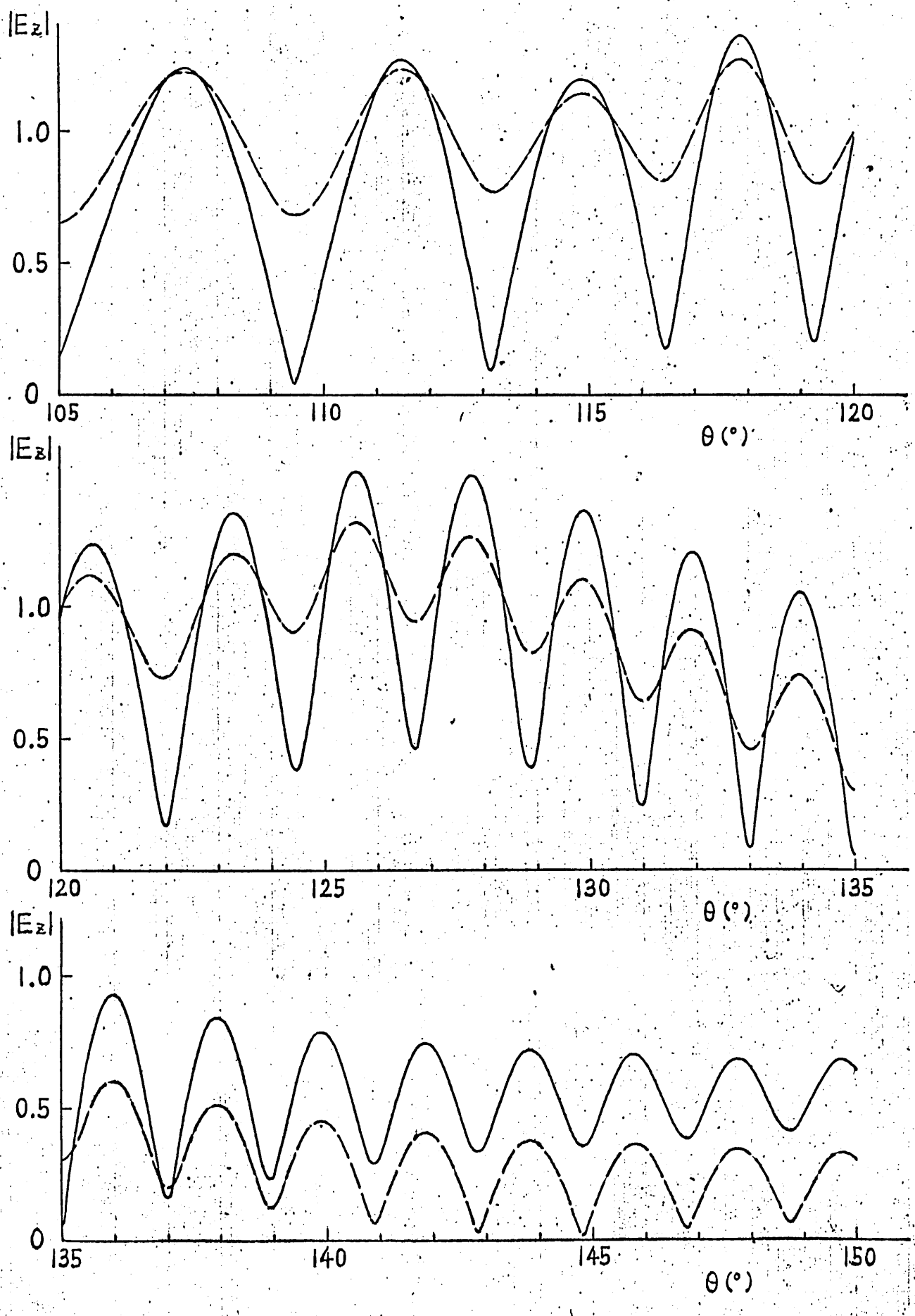

|Ez|
1.5
1.0
0.5
0
0
5
10
15
θ(°)

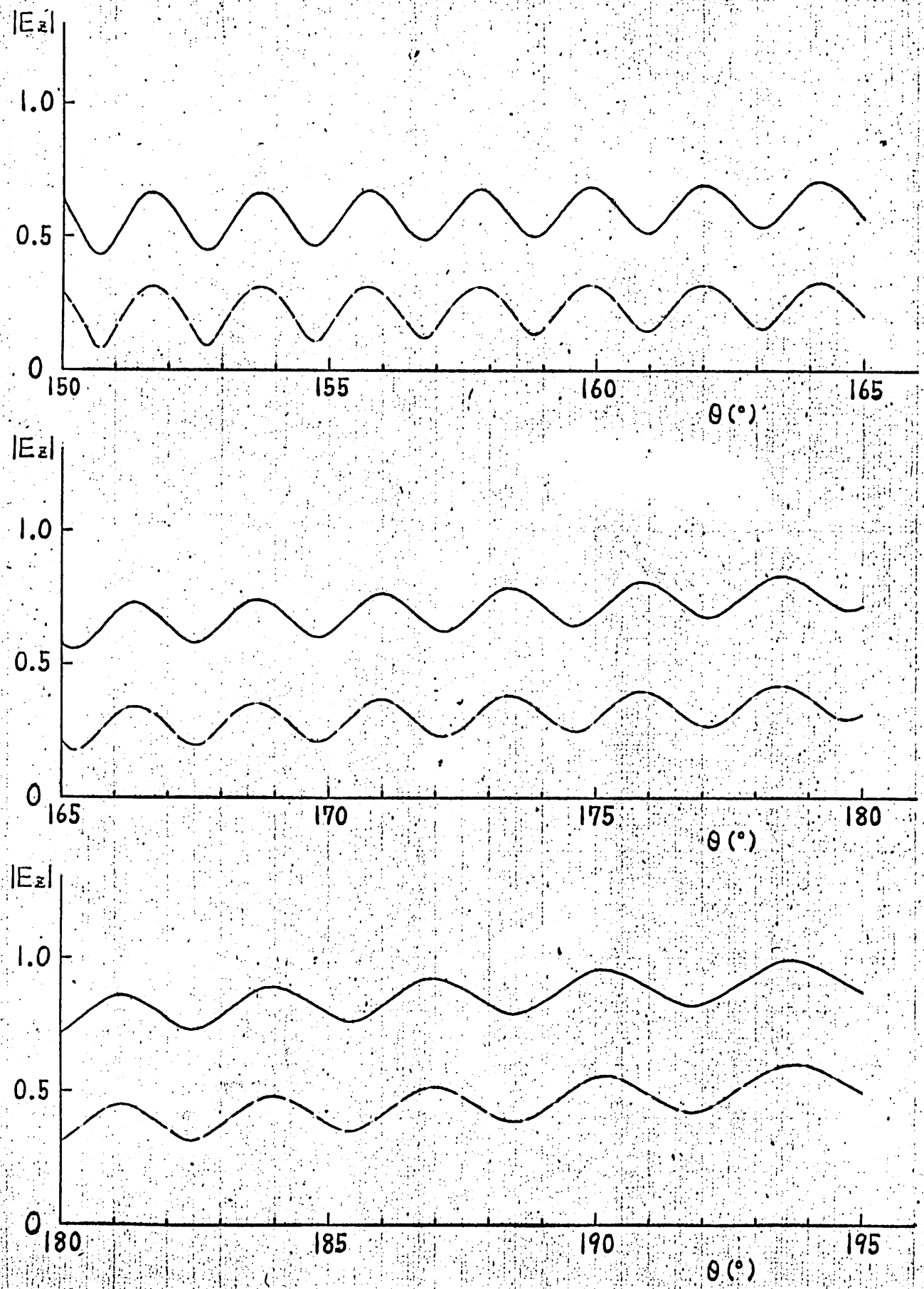

|Ez|
1.5
1.0
0.5
0
15
20
25
30
θ(°)

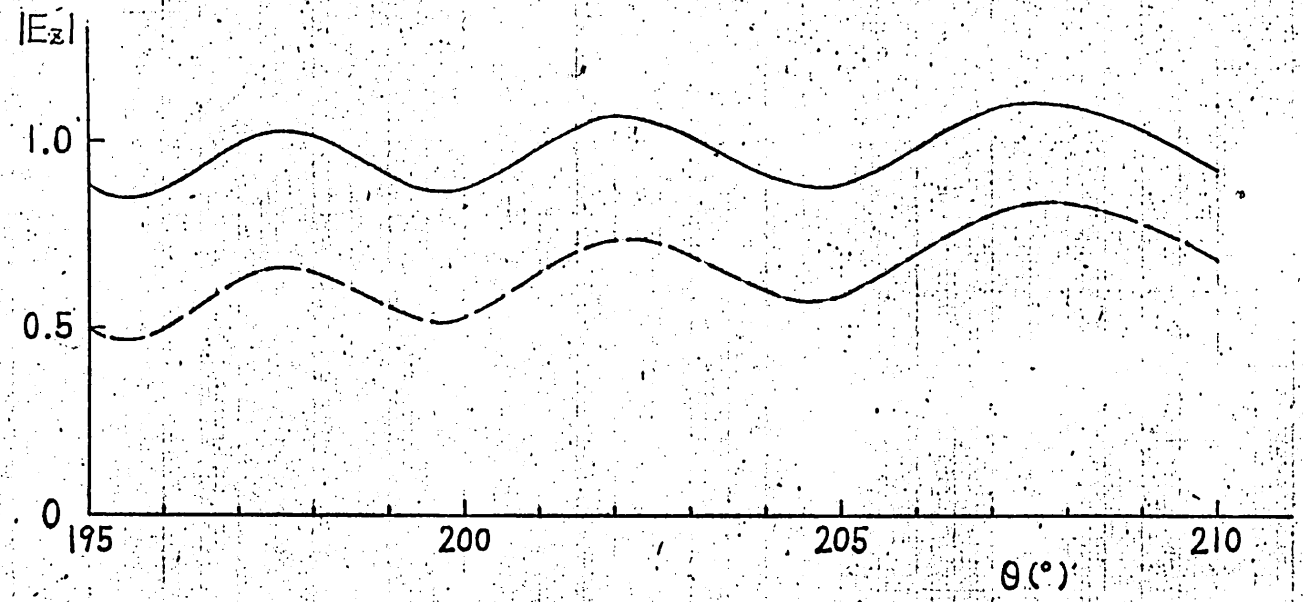

|Ez|
1.5
1.0
0.5
0
30
35
40
45
θ(°)

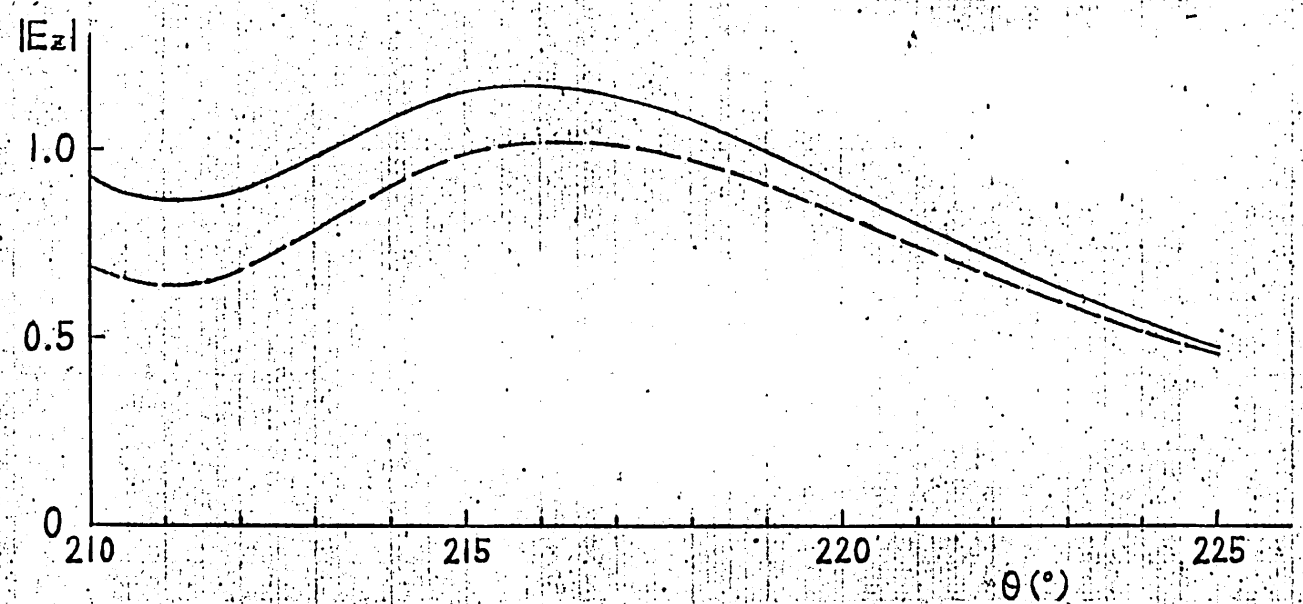

|Ez|
1.5
1.0
0.5
0
45
50
55
60
θ(°)

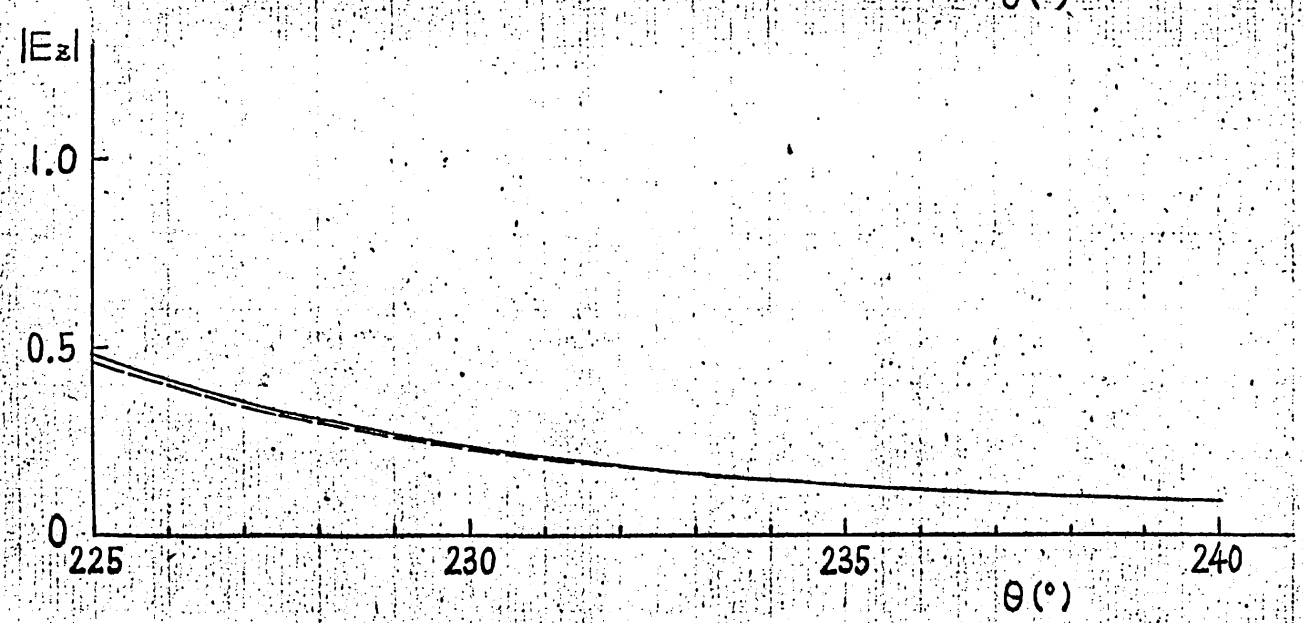

|Eᵩ|
1.0
0.5
0
60
65
70
75
θ (°)
|Eᵩ|
1.0
0.5
0
75
80
85
90
θ (°)
|Eᵩ|
1.0
0.5
0
90
95
100
105
θ (°)

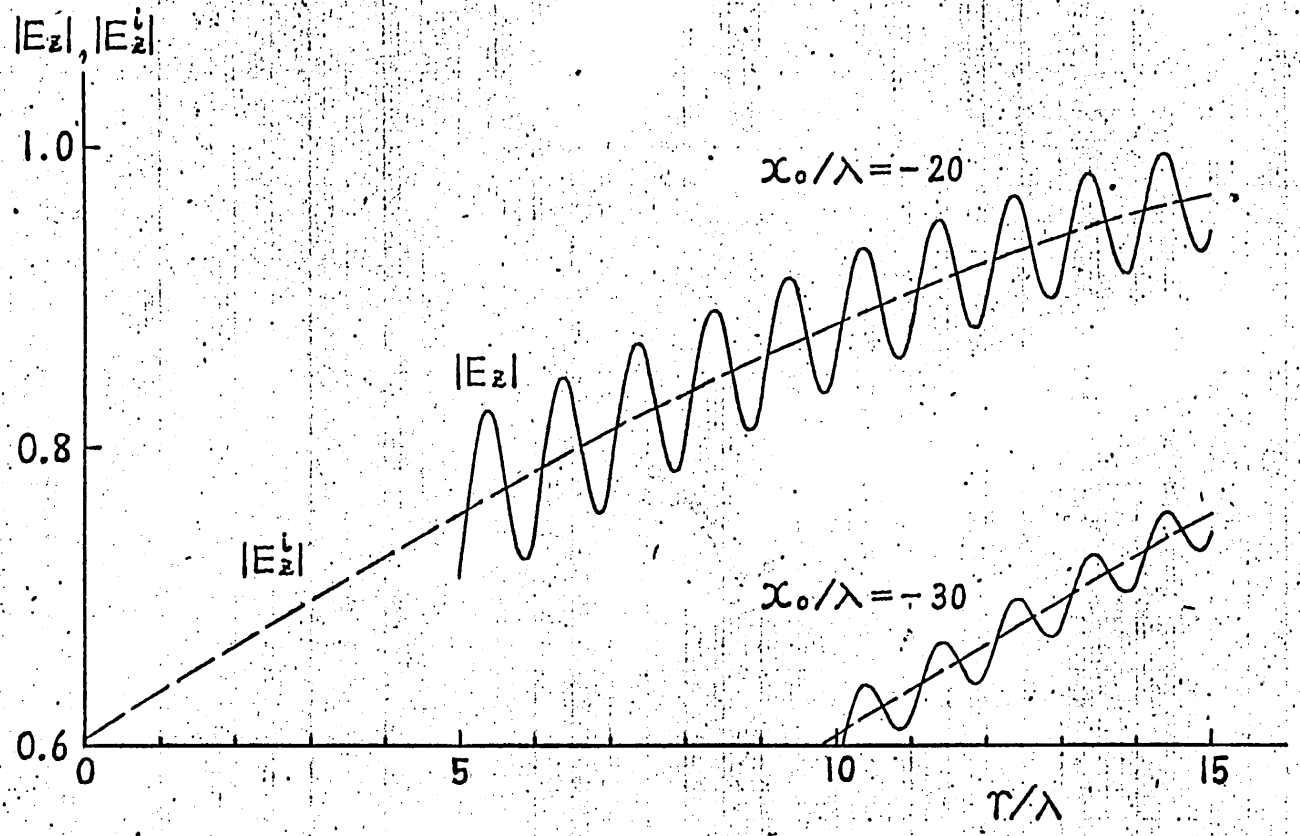

|Ez|
1.0
0.5
0
105
110
115
120
θ (°)
|Ez|
1.0
0.5
0
120
125
130
135
θ (°)
|Ez|
1.0
0.5
0
135
140
145
150
θ (°)

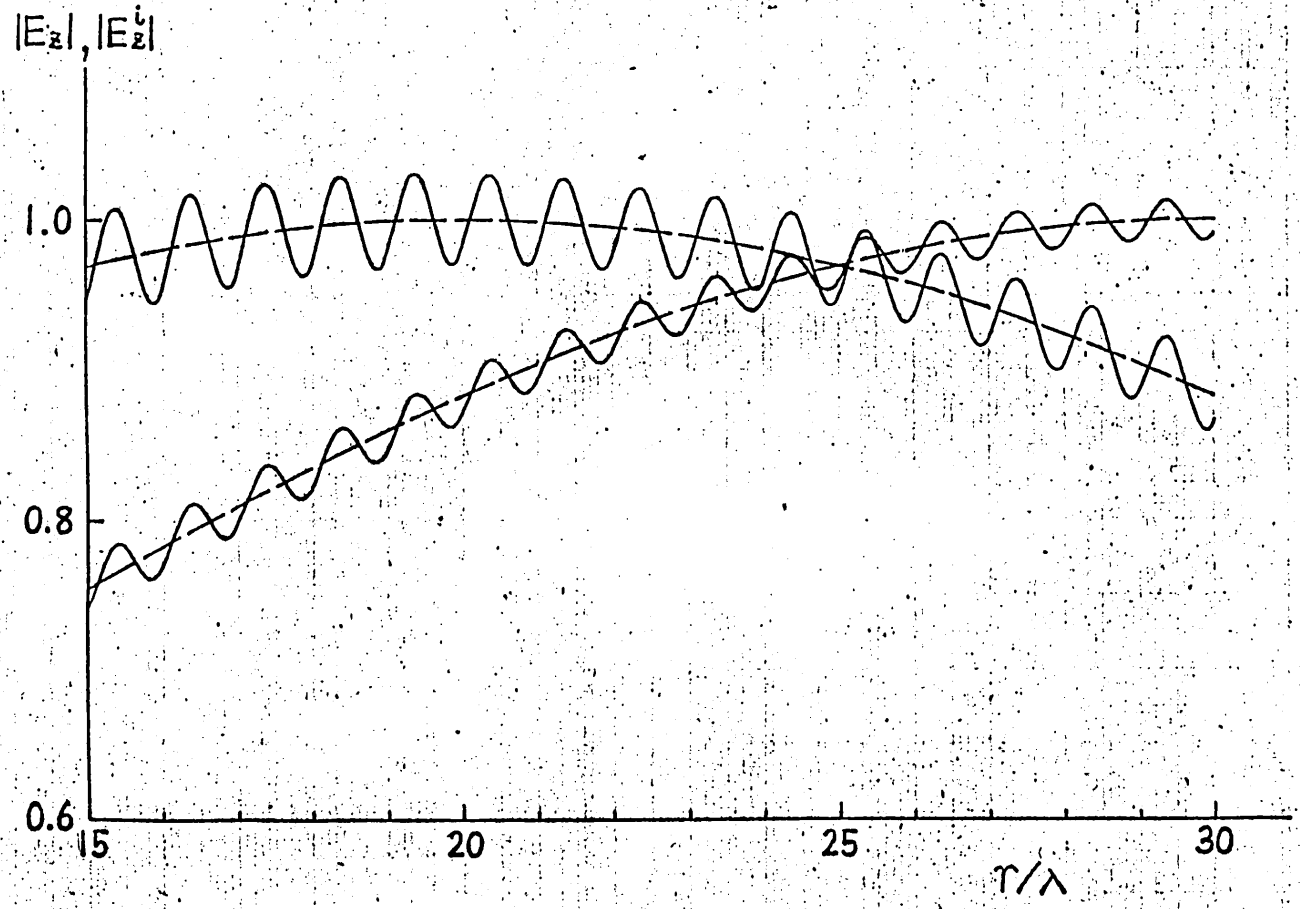

|Ez|
1.0
0.5
0
150
155
160
165
θ(°)
|Ez|
1.0
0.5
0
165
170
175
180
θ(°)
|Ez|
1.0
0.5
0
180
185
190
195
θ(°)

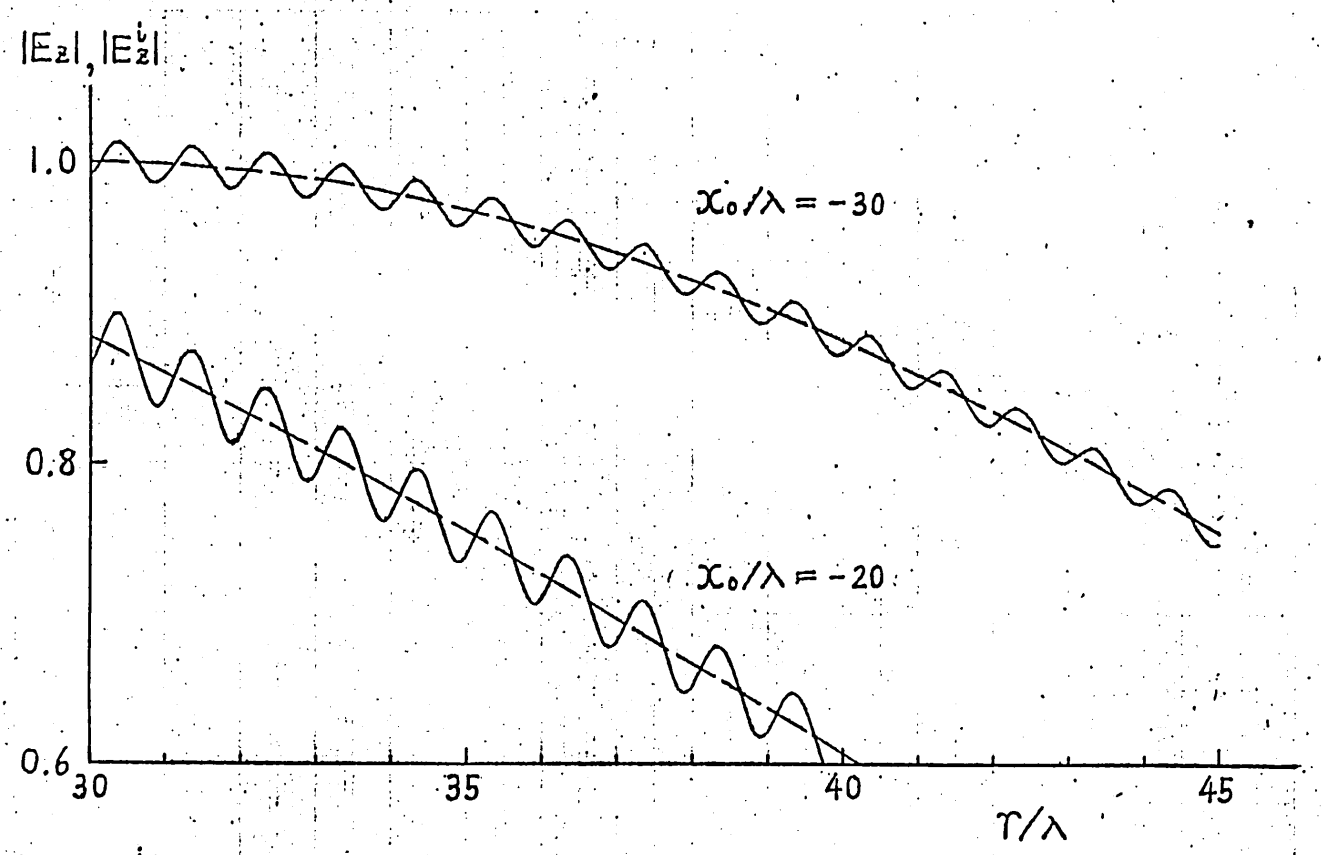

|Ez|
1.0
0.5
0
195
200
205
210
θ(°)

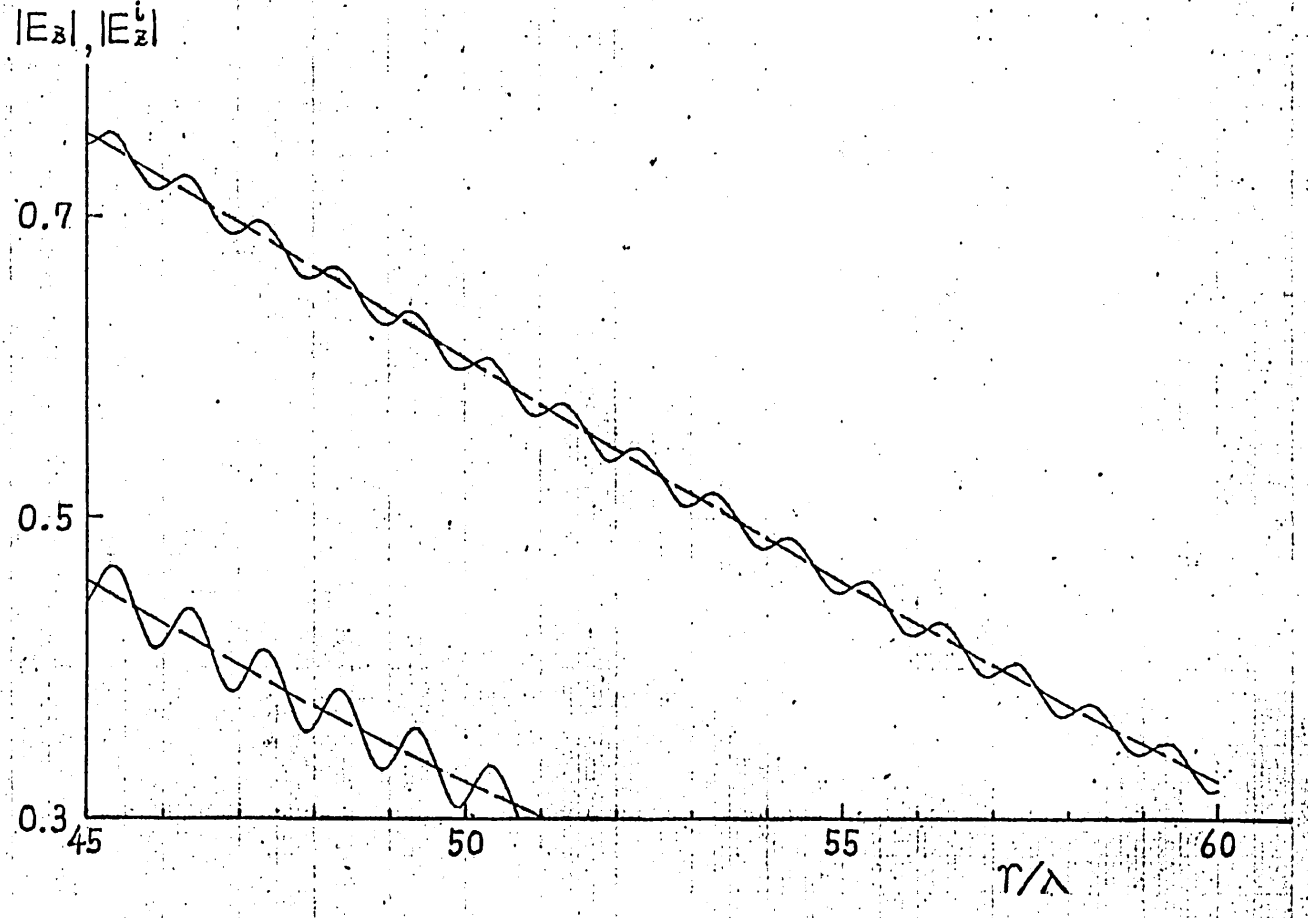

|Ez|
1.0
0.5
0
210
215
220
225
θ(°)

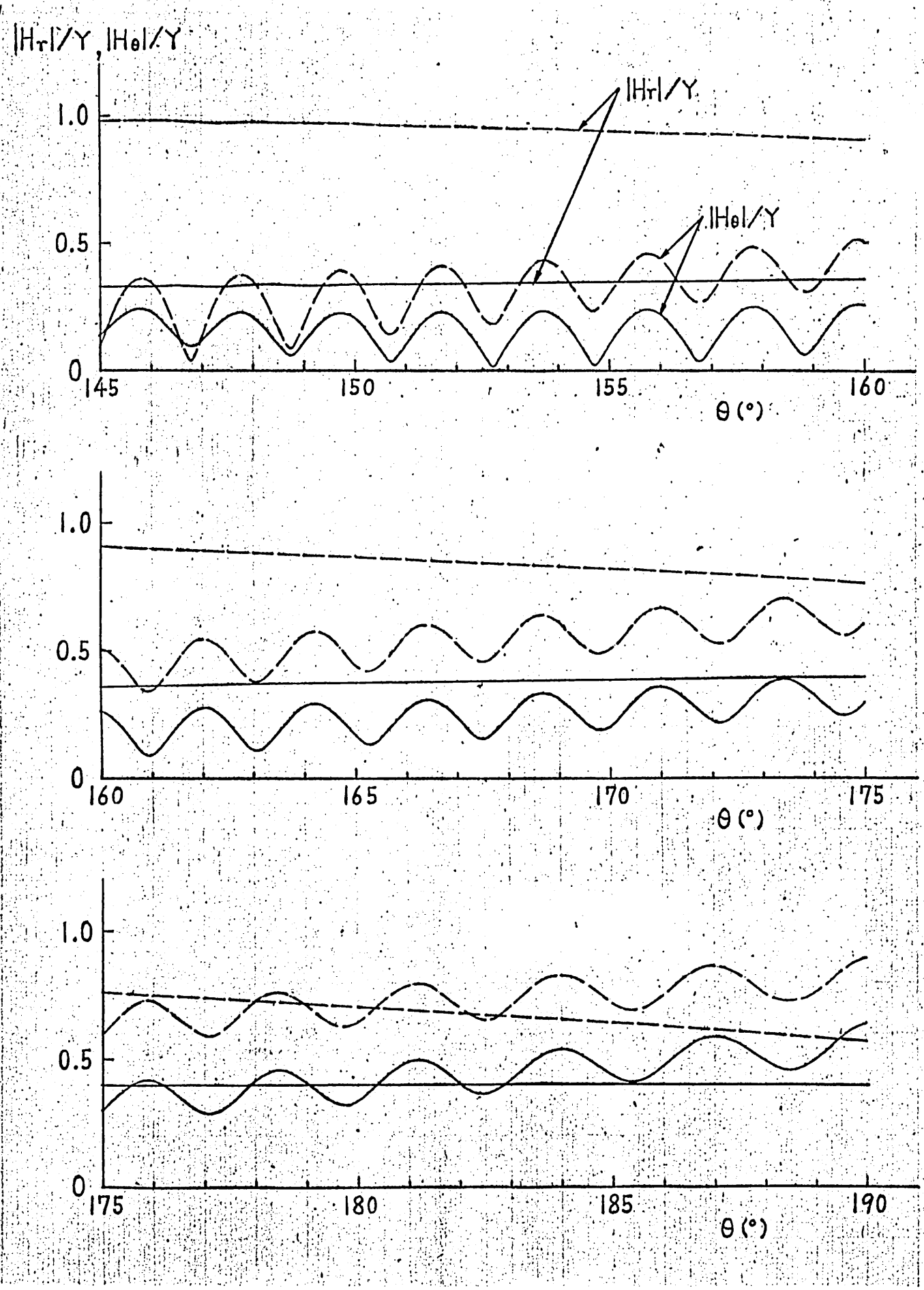

|Ez|
1.0
0.5
0
225
230
235
240
θ(°)

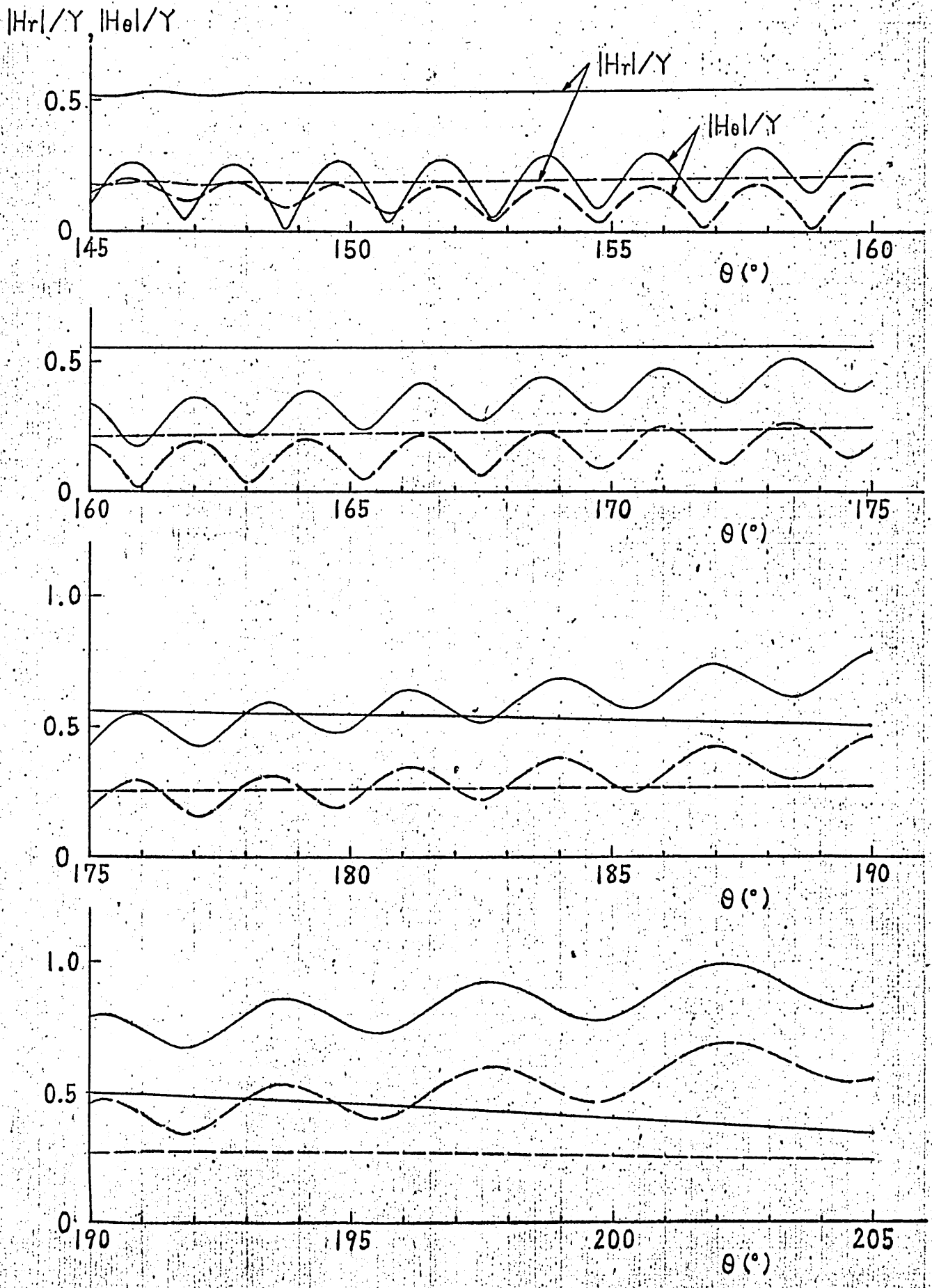

$|E_z|, |E_z^i|$
1.0
0.8
0.6
$x_0/\lambda = -20$
$|E_z|$
$|E_z^i|$
$x_0/\lambda = -30$
0
5
10
15
$r/\lambda$

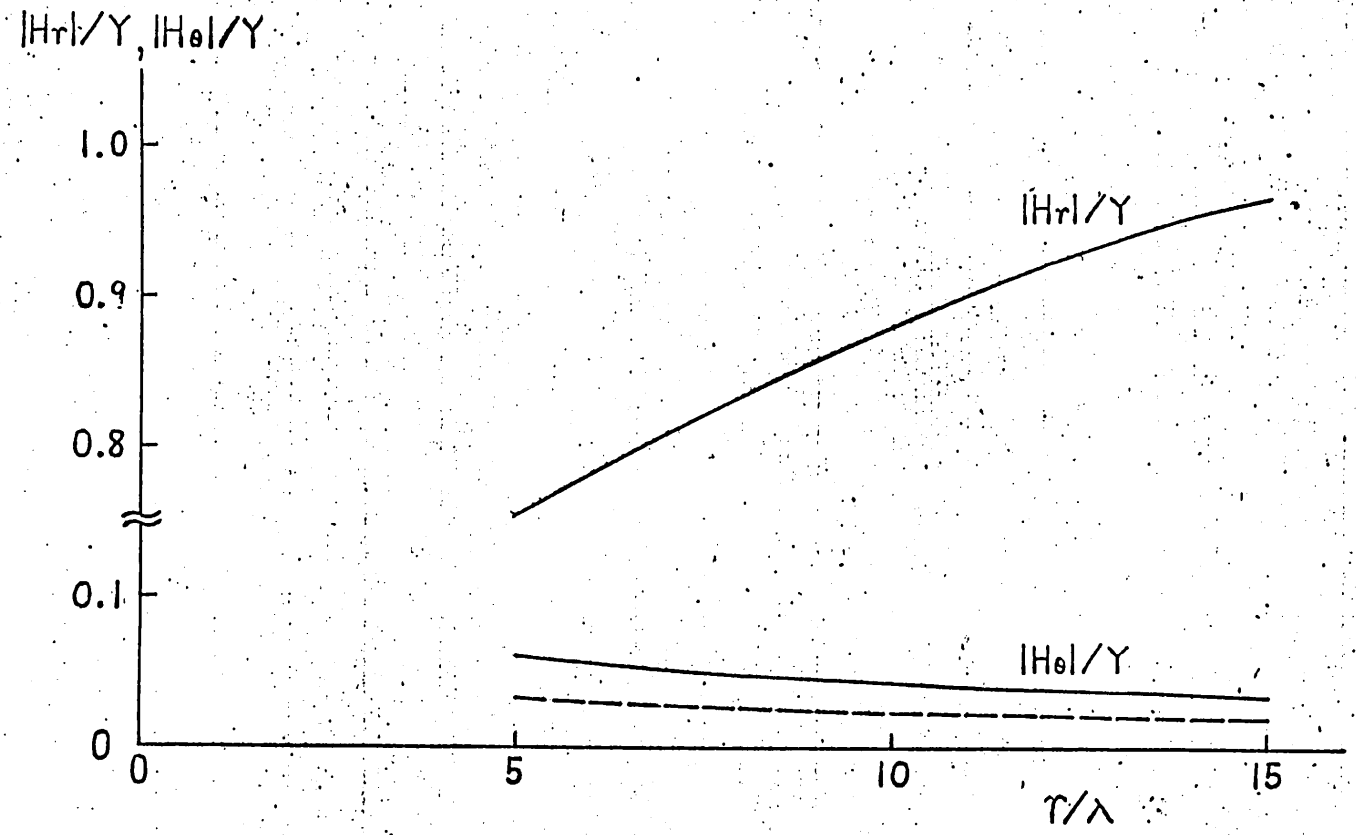

$|E_z|, |E_z^i|$
1.0
0.8
0.6
15
20
25
30
$r/\lambda$

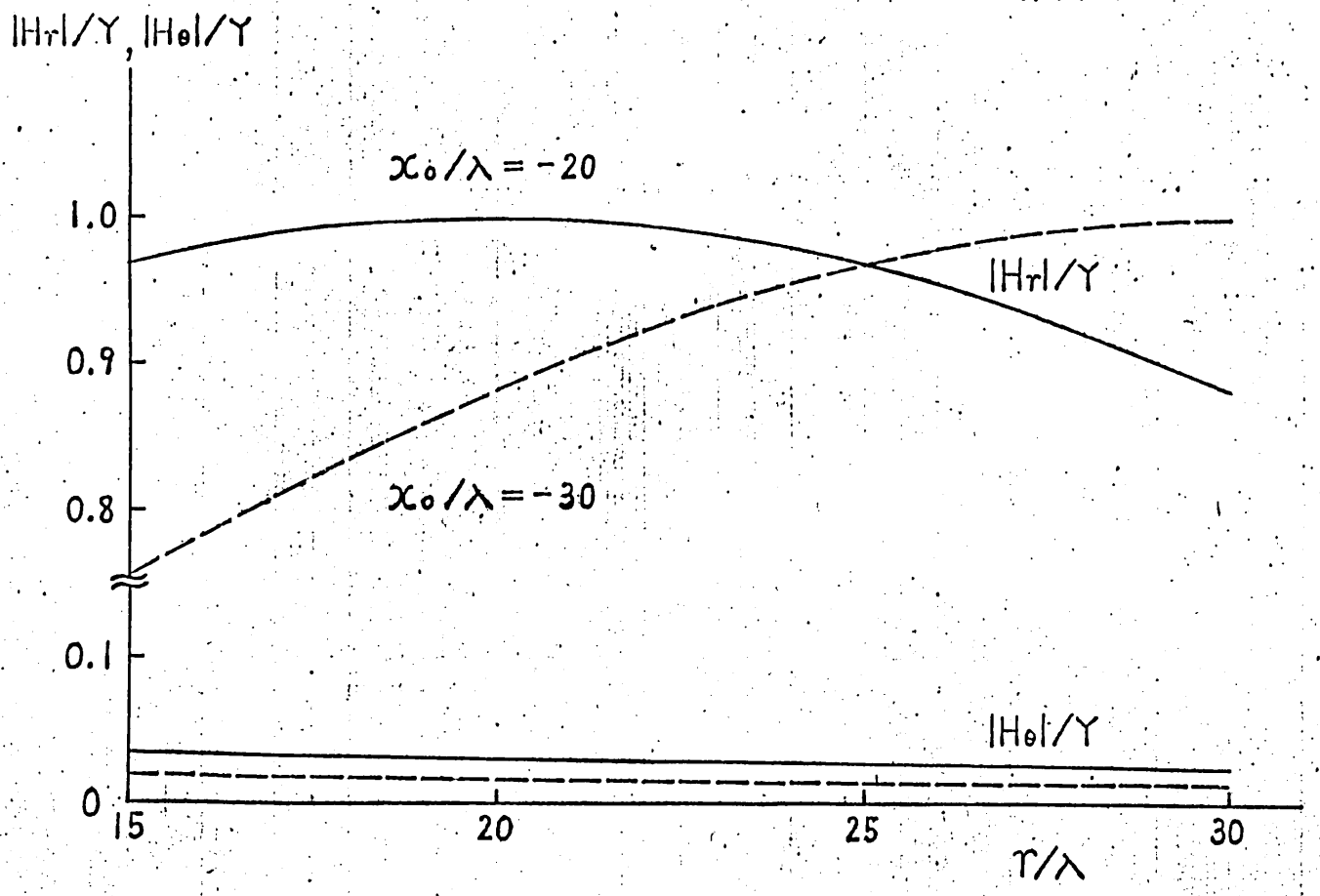

|Ez|, |Ezi|
1.0
0.8
0.6
30
35
40
45
r/λ
x₀/λ = −30
x₀/λ = −20

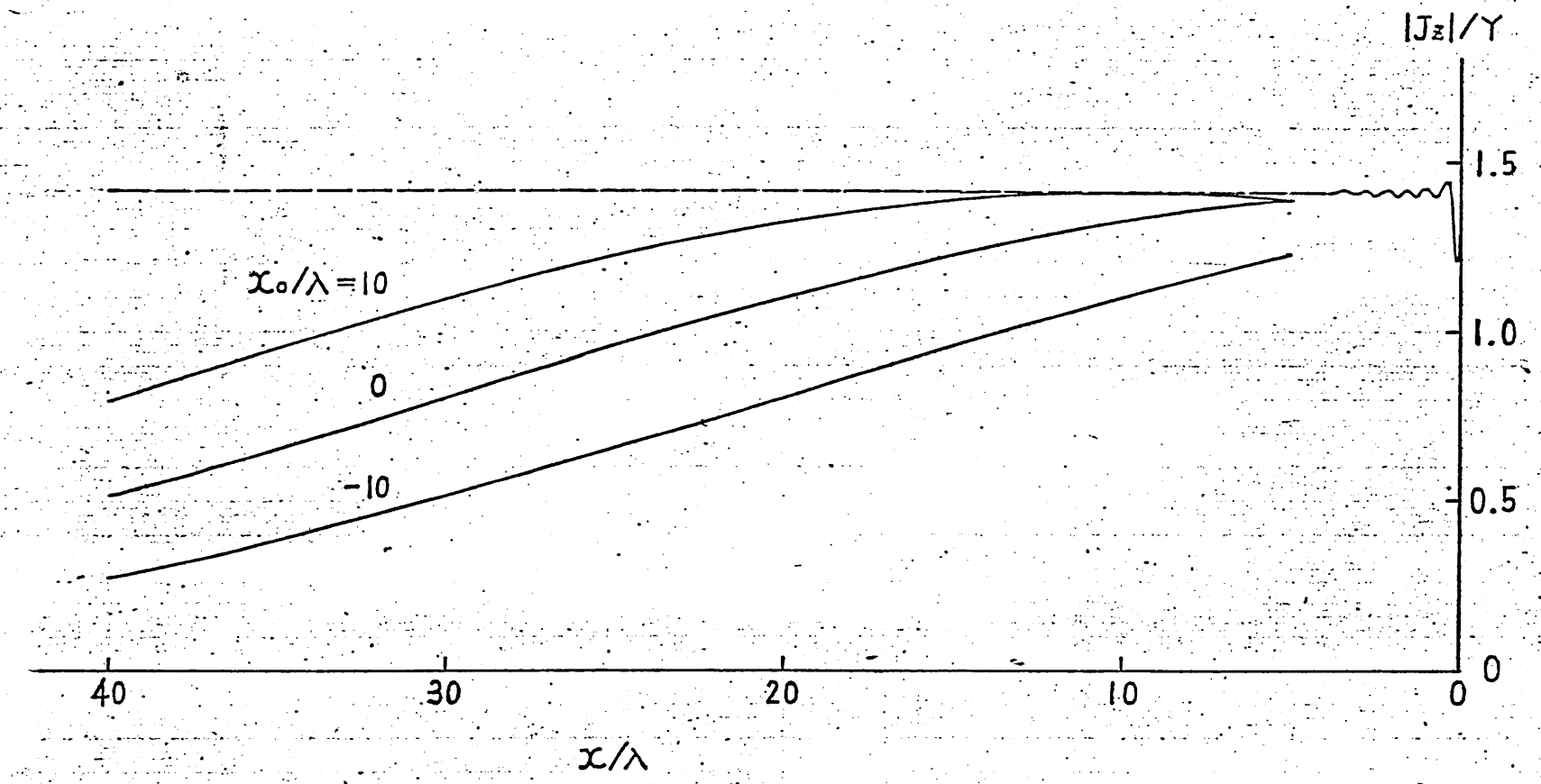

|Ez|, |Ezi|
0.7
0.5
0.3
45
50
55
60
r/λ


|Hr|/Y, |Hθ|/Y
|Hr|/Y
|Hθ|/Y
1.0
0.5
0
145
150
155
160
θ (°)
1.0
0.5
0
160
165
170
175
θ (°)
1.0
0.5
0
175
180
185
190
θ (°)


|Hr|/Y, |Hθ|/Y
|Hr|/Y
|Hθ|/Y
0.5
0
145
150
155
160
θ(°)
0.5
0
160
165
170
175
θ(°)
1.0
0.5
0
175
180
185
190
θ(°)
1.0
0.5
0
190
195
200
205
θ(°)


|Hr|/Y, |Hθ|/Y
1.0
0.9
0.8
0.1
0
0
5
10
15
r/λ
|Hr|/Y
|Hθ|/Y


|Hr|/Y, |Hθ|/Y
x₀/λ = −20
1.0
0.9
0.8
0.1
0
15
20
25
30
r/λ
|Hr|/Y
x₀/λ = −30
|Hθ|/Y


|Jz|/Y
1.5
1.0
0.5
0
x₀/λ=10
0
-10
40
30
20
10
0
x/λ

輻射科学研究会資料

# テーパ・レンズ状媒質からなる光ビーム導波系の解析とその応用

沢　新之輔
（愛媛大学・工学部）
熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1970年12月4日

# 1．まえがき

光ビーム導波系の一形式として注目を集めている集束性光伝送体（たとえばSELFOC）[1]やガスレンズ[2]のようなレンズ状媒質において，誘電率分布が伝送方向に対してテーパ状に変化している場合，これをテーパ・レンズ状媒質とよんでいる[3]~[8]テーパ・レンズ状媒質は，伝送軸方向に集光作用をもつので，光学回路素子として種々の興味ある応用が考えられる．たとえば，レーザ発振器と光線路の間，または，光線路同志の間のビーム・モード整合器（スポットサイズの変換器，一般には波面係数の変換器）としての応用[6][8]あるいはPhotomultiplierやAvalanche Photodiodeなどの光検出素子の受光面積の拡大器としての応用[3][4][6]などがある．このようなテーパ・レンズ状媒質に関しては，既に，二，三の報告があるが[3][4]従来の解析は，テーパの形が指数関数で与えられる場合に限られていた．しかし，実際には，テーパの形を指数関数のみに限定しないで，目的に応じた関数形のテーパを採用する方が，光回路の設計上，都合がよい場合も考えられる．

そこで，本論文では，まず，任意の関数形で与えられるテーパをもったレンズ状媒質中における光ビームの応答電磁界を定める一般式を，筆者らの波動光学的解析法[9][10]によって導出し，ビームスポットおよびビーム行路の脈動を除去するための整合条件を求める．つぎに，その結果を，従来から検討されている指数関数形テーパ，および本文で新らたに考えた直線形ならびにRaised Cosine 形のテーパの場合に適用し，それぞれのテーパ導波系の直線部分および円形曲り部分における光ビームの振舞いが，非常に見通しよく，総括的に解析されることを示す．さらに，応用例として，Raised Cosine形テーパのレンズ状媒質を用いたスポットサイズの変換器および円形曲り部用のモード変換器を提案し，その設計条件を明らかにする．

なお，本文の解析では，議論を簡単にするため，テーパ・レンズ状媒質の

二次元モデルを対象とし，W.K.B. 近似を用いて，近軸理論の範囲で取り扱っている．

## 2．光ビームの応答電磁界を定める一般式の導出

### 2．1 直線部分

図1に示すようなテーパ・レンズ状媒質からなる光ビーム導波系の直線部分を考え，その誘電率分布を

$$\varepsilon(x,z)=\varepsilon(0)\{1-g_0^2G^2(z)\,x^2\} \qquad \cdots\cdots(1)$$

と表わす．ここで，$\varepsilon(0)$は系の中心軸 $x=0$ 上における誘電率，$g_0$は定数，$G(z)$はテーパの形を定める伝送方向 $z$ の関数である．ただし，$G(z)$の変化は十分にゆるやかであって，その変化は伝送ビーム波の自由空間波長 $\lambda_0$ の範囲では無視することができるものとする．すなわち，

$$\lambda_0 g_0 \cdot |G(z)| \ll 1 \qquad \cdots\cdots(2a)$$

$$\left|\frac{dG(z)}{dz}\right| \Big/ \{g_0 G^2(z)\} \ll 1 \qquad \cdots\cdots(2b)$$

が成立すると仮定する．

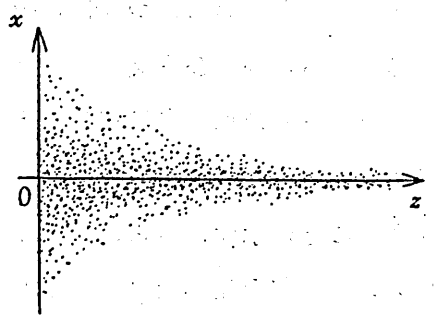



図1 テーパ・レンズ状媒質からなる光ビーム導波系の直線部分

さて，誘電率分布が式(1)のように伝送軸と直角な横断面方向（$x$方向）に放物線的に変化するような系における光ビームの振舞いを知るためには，$x$方向に見た界分布がGauss-Hermite関数で表わされるようなビーム波（Gauss-Hermite波）の応答電磁界を明らかにすることが基本となる．そこで，テーパの入口$z=0$における入射ビームとして，$x$方向に$\delta(0)$なる軸ずれと$\delta'(0)$なる傾きをもち，かつ，$1/S^2(0)$なる波面係数をもったGauss-Hermite波，

$$U(x,0)=e^{-\frac{\{x-\delta(0)\}^2}{2s^2(0)}-jk(0)\delta'(0)x}\cdot H_{e_n}\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2(0)}+\frac{1}{s^{*2}(0)}\right)}\{x-\delta(0)\}\right] \quad (3)$$

ただし　　$k(0)=\omega\sqrt{\mu\varepsilon(0)}$ ..... (4)

を考える．ここで，$H_{e_n}$は$n$次のHermite多項式を表わし，また，$*$印は複素共役量を表わす．

筆者らの波動光学的解析法[9][10]にしたがって，式(3)の入射ビームに対する応答電磁界を求めると次式のようになる．

$$U(x,z)=\frac{\rho^{1/4}(z)\cdot e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left\{\frac{w^2/s^2(0)}{u(0)+\cot g\theta}\right\}+j\frac{\delta(z)\delta'(z)-\delta'(0)\delta(0)}{2gw^2}}}{\sqrt{\left|\cos g\theta+u(0)\sin g\theta-j\frac{w^2}{s^2(0)}\sin g\theta\right|}}$$

$$\cdot e^{-\frac{\{x-\delta(z)\}^2}{2s^2(z)}-j\frac{\delta'(z)}{gw^2}x}\cdot H_{e_n}\left[\frac{\sqrt{\frac{\rho(z)}{2}\left(\frac{1}{s^2(0)}+\frac{1}{s^{*2}(0)}\right)}\{x-\delta(z)\}}{\left|\cos g\theta+u(0)\sin g\theta-j\frac{w^2}{s^2(0)}\sin g\theta\right|}\right] \quad (5)$$

ただし

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{s^2(z)}=\dfrac{\rho(z)}{s^2(0)}\left[\dfrac{\cos g\theta-u(z)\sin g\theta-j\dfrac{s^2(0)}{w^2}\{(1+u(0)u(z))\sin g\theta+(u(z)-u(0))\cos g\theta\}}{\cos g\theta+u(0)\sin g\theta-j\dfrac{w^2}{s^2(0)}\sin g\theta}\right] \quad \cdots\cdots (6)\\[2ex] \delta(z)=\rho^{-1/2}(z)\{(\cos g\theta+u(0)\sin g\theta)\,\delta(0)+\dfrac{\delta'(0)}{g}\sin g\theta\} \quad \cdots\cdots (7)\\[2ex] \left.\begin{array}{l}\rho(z)=G(z)/G(0)\,,\quad u(z)=\rho'(z)/\{2g\rho^2(z)\}\\ \theta=\int_0^z\rho(z)\,dz\,,\quad g=g_0G(0)\,,\quad w=1/\sqrt{gk(0)}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (8)\end{array}\right.$$

である．

式(5)から，ガウス波（$n=0$）のスポットサイズ $w(z)$（$\equiv 1/\sqrt{Re\{1/s^2(z)\}}$）を求めると，

$$w(z)=\frac{\left|\cos g\theta+u(0)\sin g\theta-j\dfrac{w^2}{s^2(0)}\sin g\theta\right|}{\sqrt{\dfrac{\rho(z)}{2}\left(\dfrac{1}{s^2(0)}+\dfrac{1}{s^{*2}(0)}\right)}} \quad \cdots\cdots (9)$$

となる．また，ビーム中心部の軌跡（ビーム行路）は式(7)で与えられる．

特別の場合として，入射波面係数 $1/s^2(0)$ を，

$$\frac{1}{s^2(0)}=\frac{1}{w^2}-j\frac{u(0)}{w^2} \quad \cdots\cdots (10)$$

とえらぶと，スポットサイズ $w(z)$ および波面係数 $1/s^2(z)$ は，それぞれ，式(9)および(6)より，

$$\left\{w(z)=w/\sqrt{\rho(z)} \quad \cdots\cdots (11)\right.$$

$$\frac{1}{s^2(z)} = \frac{\rho(z)}{w^2}\{1 - j\,u(z)\} \qquad \cdots\cdots (12)$$

となる．すなわち，$\sin g\theta$ あるいは $\cos g\theta$ なる振動項に基づく脈動が無くなり，テーパ・レンズ状媒質内における伝送ビーム波の脈動が完全に除去されることがわかる．この意味で，式(10) をテーパ・レンズ状媒質に対する整合入射波面係数とよび，また，式(12) を整合波面係数とよぶことにする．

## 2．2　円形曲り部分

図2に示すように，テーパ・レンズ状媒質からなる光ビーム導波系が，一定の曲率半径 $R$ で円形に曲っている場合を考える．誘電率分布を

$$\varepsilon_c(r, z) = \varepsilon_c(R)\{1 - g_0^2 G^2(z)(r-R)^2\} \qquad \cdots\cdots (13)$$

とし，曲りの程度は比較的ゆるやかであって，

$$|(r-R)/R| \ll 1 \qquad \cdots\cdots (14)$$

が成立するとする．

直線部分の場合と同様に，式(2a)および(2b)なる仮定のもとで，式(3)の入射ビームに対する応答電磁界を求めると，[6][9][10] その結果は，式(5)～(8)における $\rho(z)$, $u(z)$, $\theta$, $g$, $w$, $\delta(z)$ および $k(0)$ を，それぞれ，次式で示す $\rho_c(z)$, $u_c(z)$, $\theta_c$, $g_c$, $w_c$, $\delta_c(z)$ および $k_c(0)$ でおきかえた式で表わされる．

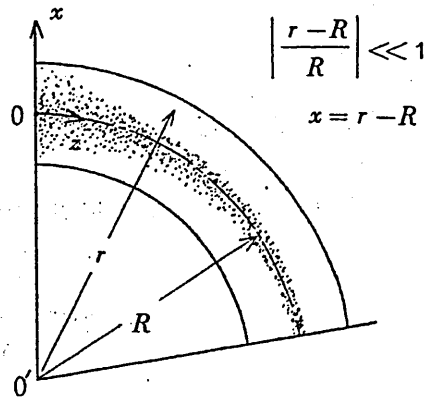



図2　テーパ・レンズ状媒質からなる光ビーム導波系の円形曲り部分

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_c(z)=G_c(z)/G_c(0)\,,\quad u_c(z)=\rho_c'(z)/\{2\,g_c\,\rho_c^{\,2}(z)\}\\
&\theta_c=\int_0^z \rho_c(z)\,dz\,,\quad g_c=g_0\,G_c(0),\quad w_c=1/\sqrt{g_c\,k_c(0)}
\end{aligned}\right\}\qquad (15)$$

$$\begin{aligned}
\delta_c(z)=\rho_c^{-1/2}(z)\Bigg[&\left(\delta(0)-\frac{1}{g_c^{\,2}R}\right)\cos g_c\theta_c+\Big\{u_c(0)\left(\delta(0)-\frac{1}{g_c^{\,2}R}\right)\\
&+\frac{1}{g_c}\left(\delta'(0)+\frac{2\rho_c'(0)}{g_c^{\,2}R}\right)\Big\}\sin g_c\theta_c\Bigg]+\frac{1}{g_c^{\,2}R\rho_c^{\,2}(z)}
\end{aligned}\qquad \cdots\cdots (16)$$

ただし

$$G_c(z)=\sqrt{G^2(z)-\frac{2}{g_0^{\,2}R^2}}\,,\qquad k_c(0)=\omega\sqrt{\mu\,\varepsilon_c(R)}\qquad \cdots\cdots (17)$$

である．

すなわち，ビーム行路は，式(16)によって与えられ，また，ガウス波のスポットサイズは，式(9)の $\rho(z)$，$u(0)$，$\theta$，$g$ および $w$ の代りに，それぞれ，式(15)の $\rho_c(z)$，$u_c(0)$，$\theta_c$，$g_c$ および $w_c$ を代入した式で与えられる．また，ビームスポットおよびビーム行路の脈動を除去するための整合入射条件は，つぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{s^2(0)}=\frac{1}{w_c^{\,2}}-j\frac{u_c(0)}{w_c^{\,2}}\\
&\delta(0)=\frac{1}{g_c^{\,2}R}\,,\quad \delta'(0)=-\frac{2\rho_c'(z)}{g_c^{\,2}R}
\end{aligned}\right\}\qquad \cdots\cdots (18)$$

式(18)が成立するとき，波面係数 $1/s_c^{\,2}(z)$ およびビーム行路 $\delta_c(z)$ は，それぞれ，

$$\frac{1}{s_c^{\,2}(z)}=\frac{\rho_c(z)}{w_c^{\,2}}\{1-j\,u_c(z)\}\qquad \cdots\cdots (19)$$

表1　テーパ・レンズ状媒質からなる導波系における光ビームの応答電磁界を定めるパラメータ

（ただし，$2|u(z)| \ll 1$，$2|u_c(z)| \ll 1$ および $\gamma = \sqrt{2}/g_0 R$ ）

| テーパの種類 | | 直線部 | | 円形曲り部 | |
|---|---|---|---|---|---|
| (I) 直線形テーパの場合 | $\rho(z)$ | $az+1$ | $\rho_c(z)$ | $\sqrt{(az+1)^2-\gamma^2}/\sqrt{1-\gamma^2}$ |
| | $u(z)$ | $\dfrac{a}{2g_0(az+1)^2}$ | $u_c(z)$ | $a(az+1)/\left[2g_0\{\sqrt{(az+1)^2-\gamma^2}\}^3\right]$ |
| | $\theta$ | $\dfrac{1}{2}az^2+z$ | $\theta_c$ | $\dfrac{1}{2a}\left[(az+1)\sqrt{(az+1)^2-\gamma^2}/\sqrt{1-\gamma^2}-1 - \dfrac{\gamma^2}{\sqrt{1-\gamma^2}} l_n \left| \{az+1+\sqrt{(az+1)^2-\gamma^2}\}/(1+\sqrt{1-\gamma^2}) \right| \right]$ |
| | $g$ | $g_0$ | $g_c$ | $g_0\sqrt{1-\gamma^2}$ |
| | $w$ | $w_0\ (=1/\sqrt{g_0 k(0)})$ | $w_c$ | $w_0/\sqrt[4]{1-\gamma^2}$ |
| (II) 指数関数形テーパの場合 | $\rho(z)$ | $e^{az}$ | $\rho_c(z)$ | $\sqrt{e^{2az}-\gamma^2}/\sqrt{1-\gamma^2}$ |
| | $u(z)$ | $ae^{-2az}/2g_0$ | $u_c(z)$ | $ae^{az}/\left[2g_0\{\sqrt{e^{2az}-\gamma^2}\}^3\right]$ |
| | $\theta$ | $\dfrac{e^{az}-1}{a}$ | $\theta_c$ | $\dfrac{1}{a}\left[\sqrt{e^{2az}-1}/\sqrt{1-\gamma^2}-1 + \dfrac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\{\mathrm{Cosec}^{-1}\dfrac{e^{az}}{\gamma}-\mathrm{Cosec}^{-1}\dfrac{1}{\gamma}\}\right]$ |
| | $g$ | $g_0$ | $g_c$ | $g_0\sqrt{1-\gamma^2}$ |
| | $w$ | $w_0$ | $w_c$ | $w_0/\sqrt[4]{1-\gamma^2}$ |
| (III) Raised Cosine 形テーパの場合 | $\rho(z)$ | $\dfrac{1+a\cos bz}{1+a}$ | $\rho_c(z)$ | $\sqrt{(1+a\cos bz)^2-\gamma^2}/\sqrt{(1+a)^2-\gamma^2}$ |
| | $u(z)$ | $\dfrac{-ab\sin bz}{2g_0(1+a\cos bz)^2}$ | $u_c(z)$ | $\dfrac{-ab(1+a\cos bz)\sin bz}{2g_0\{\sqrt{(1+a\cos bz)^2-\gamma^2}\}^3}$ |
| | $\theta$ | $\dfrac{z+\dfrac{a}{b}\sin bz}{1+a}$ | $\theta_c$ | $\left(z+\dfrac{a}{b}\sin bz\right)/\sqrt{(1+a)^2-\gamma^2} - \gamma^2\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-a^2}\sin bz}{1+a\cos bz}\right)/\left[2b\sqrt{(1-a^2)\{(1+a)^2-\gamma^2\}}\right]$ （ただし，$0<\lvert a\rvert<1$，$\gamma^2/(1+a\cos bz)^2 \ll 1$） |
| | $g$ | $g_0(1+a)$ | $g_c$ | $g_0\sqrt{(1+a)^2-\gamma^2}$ |
| | $w$ | $w_0/\sqrt{1+a}$ | $w_c$ | $w_0/\sqrt[4]{(1+a)^2-\gamma^2}$ |

および

$$\delta_c(z)=\frac{1}{g_c^2 R\rho_c^2(z)} \qquad \cdots\cdots (20)$$

となる．

## 3．テーパ・レンズ状媒質からなる導波系における光ビームの伝搬特性

### 3．1　直線形テーパの場合

誘電率分布を表わす式(1)および(13)において，テーパの形を定める関数 $G(z)$ が

$$G(z)=az+1 \qquad \cdots\cdots (21)$$

なる直線で与えられる場合を考える．ただし，$a$ は定数とする．式(4)の入射ビームに対する応答電磁界を求めると，その結果は，直線部分では表1の(I)に示した $\rho(z)\sim w$ を，また，円形曲り部では，同表の(I)の $\rho_c(z)\sim w_c$ を，それぞれ，式(5)に代入した式で表わされる．したがって，ガウス波のスポットサイズおよびビーム行路は，それぞれ，

$$w(z)=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\frac{w_0^4}{s^4(0)}+\left(1-\frac{w_0^4}{s^4(0)}\right)\cos 2g_0\theta+\frac{a}{2g_0}\sin 2g_0\theta+\frac{a^2}{4g_0^2}(1-\cos 2g_0\theta)\right\}}\sqrt{\frac{az+1}{2}\left(\frac{1}{s^2(0)}+\frac{1}{s^{*2}(0)}\right)} \qquad \cdots\cdots (22)$$

$$\delta(z)=\frac{1}{\sqrt{az+1}}\left\{\left(\cos g_0\theta+\frac{a}{2g_0}\sin g_0\theta\right)\delta(0)+\frac{\delta'(0)}{g_0}\sin g_0\theta\right\} \qquad \cdots\cdots (23)$$

となり，円形曲り部分では，

$$
\begin{cases}
w_c(z)=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left\{1+\dfrac{w_c^4}{s^4(0)}+\left(1-\dfrac{w_c^4}{s^4(0)}\right)\cos 2g_c\theta_c+\dfrac{a\sin 2g_c\theta_c}{2g_c(1-\gamma^2)}+\dfrac{a^2(1-\cos 2g_c\theta_c)}{4g_c^2(1-\gamma^2)^2}\right\}} \\
\qquad\qquad \Big/\left\{\sqrt[4]{\dfrac{(az+1)^2-\gamma^2}{1-\gamma^2}}\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s^2(0)}+\dfrac{1}{s^{*2}(0)}\right)}\right\} \qquad \cdots\cdots (24) \\
\delta_c(z)=\dfrac{\sqrt[4]{1-\gamma^2}}{\sqrt[4]{(az+1)^2-\gamma^2}}\left[\left(\delta(0)-\dfrac{1}{g_c^2R}\right)\cos g_c\theta_c+\left\{\dfrac{a}{2g_c(1-\gamma^2)}\left(\delta(0)-\dfrac{1}{g_c^2R}\right)\right.\right. \\
\qquad \left.\left.+\dfrac{1}{g_c}\left(\delta'(0)+\dfrac{2a}{g_c^2R}\right)\right\}\sin g_c\theta_c\right]+\dfrac{1-\gamma^2}{g_c^2R\{(az+1)^2-\gamma^2\}} \qquad \cdots\cdots (25)
\end{cases}
$$

となる．ただし，$w_0$，$w_c$，$\theta$，$\theta_c$，$g_c$および$\gamma$は表1の(I)に与えられている．

入射波面係数$1/s^2(0)$が$1/s^2(0)=1/w_0^2$なるとき，直線部分のスポットサイズ$w(z)$は，式(22)より，

$$
w(z)=\frac{w_0}{\sqrt{az+1}}\sqrt{1+\frac{a}{4g_0}\sin 2g_0\theta+\frac{a^2}{8g_0^2}(1-\cos 2g_0\theta)} \qquad \cdots\cdots (26)
$$

となる．すなわち，$s(0)=w_0$なる入射ガウス波の応答スポットサイズは，テーパが無い場合（$a=0$なる場合）は一定値$w_0$を保つのに対して，テーパがある場合（$a\neq 0$なる場合）には，上式に示すように，$\sin 2g_0\theta$および$\cos 2g_0\theta$にもとずく脈動を伴う．この脈動を除去するためには，式(10)より，入射波面係数を

$$
\frac{1}{s^2(0)}=\frac{1}{w_0^2}-j\frac{a}{2g_0w^2} \qquad \cdots\cdots (27)
$$

なる複素量で表わされる整合入射波面係数に等しくえらんでおけばよい．このとき，

$$
w(z)=w_0/\sqrt{az+1} \qquad \cdots\cdots (28)
$$

となり，ビームスポットは脈動することなく，一様に減少（$a>0$ なるとき）または増大（$a<0$ なるとき）することがわかる．

同様に，円形曲り部における整合入射波面係数を求めると，式(18)より

$$\frac{1}{s^2(0)}=\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{w_0^2}-j\frac{a\sqrt{1-\gamma^2}}{2g_0w_0^2} \quad \cdots\cdots (29)$$

となり，このときのスポットサイズは

$$w_c(z)=w_0\sqrt[4]{(az+1)^2-\gamma^2} \quad \cdots\cdots (30)$$

となる．

図3は，直線部のスポットサイズ $w(z)$ の数値計算例を示したものである．同図では，$a/2g_0=0.05$ とえらび，入射波面係数を $1/s^2(0)=4/w_0^2$，$1/w_0^2$ および $1/4w_0^2$ とした場合の例を示してある．図4は，直線部におけるビーム行路 $\delta(z)$ を，$a/2g_0=0.05$，$\delta'(0)=0$ および $\delta(0)\neq 0$ とえらんで数値計算したものである．

これらの図から，光ビームは，一般に，伝送距離の増加と共に，ビームスポットとビーム行路の脈動を伴いながら，脈動の振幅と周期を減少（$a>0$ のとき）させつつ伝搬することがわかる．また，これらの脈動は，入射軸ずれ量および傾き量が共に零，すなわち，$\delta(0)=\delta'(0)=0$ で，かつ，入射波面係数 $1/s^2(0)$ が式(27)の整合入射波面係数に等しい特別の場合に限って除去されることが知られる．

図5は，円形曲り部におけるビーム行路（式(25)）の数値計算例を示したものである．同図では，$a/2g_c=0.05$，$g_c^2R\cdot\delta(0)=0.6$ および $g_cR\cdot\delta'(0)=0.12$ とえらんである．この図から，円形曲り部のビーム行路は脈動しながら振幅と周期を減じつつ，次第に線路の中心軸（$r=R$）に近づいていくことがわかる．

特に，入射軸ずれ量および入射傾き量を，それぞれ，

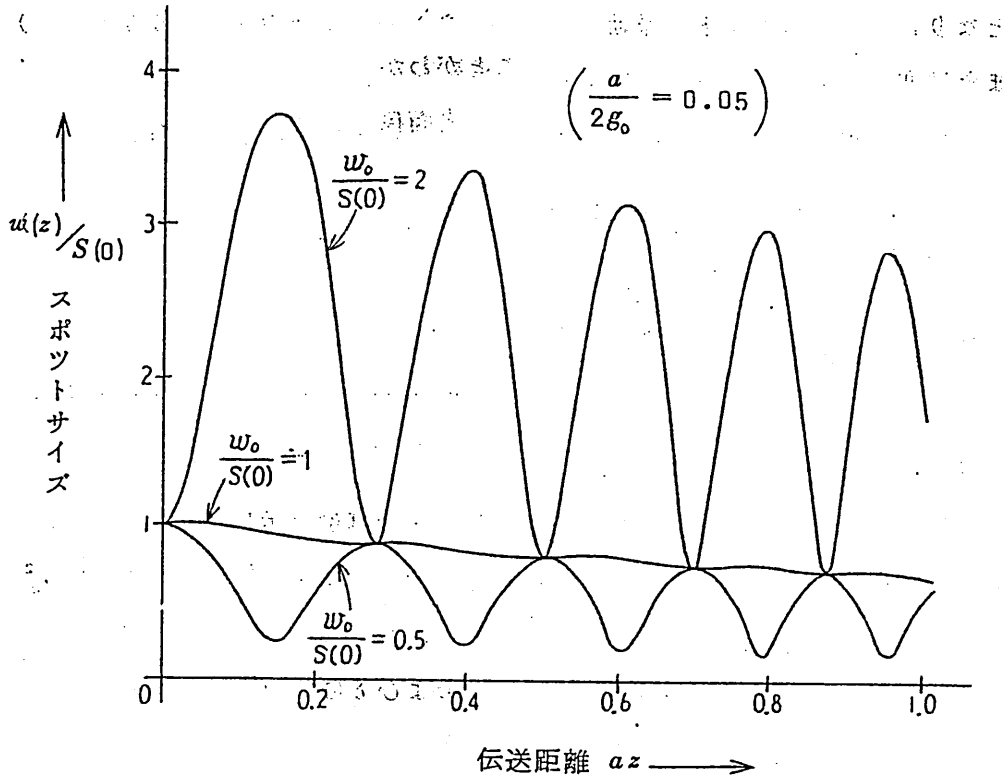



図３　直線形テーパをもつレンズ状媒質からなる光ビーム導波系の直線部におけるスポットサイズ．

$$\delta(0)=1/g_c^2R \quad \text{および} \quad \delta'(0)=-2a/g_c^2R \qquad \cdots\cdots (31)$$

とえらぶと，

$$\delta_c(z)=(1-\gamma^2)/\left[g_c^2R\{(az+1)^2-\gamma^2\}\right] \qquad \cdots\cdots (32)$$

となって，ビーム行路の脈動はなくなる．（式(18)参照）さらに，入射波面係数を，式(29)の整合入射波面係数に等しくえらぶと，ビームスポットの脈動もなくなる．

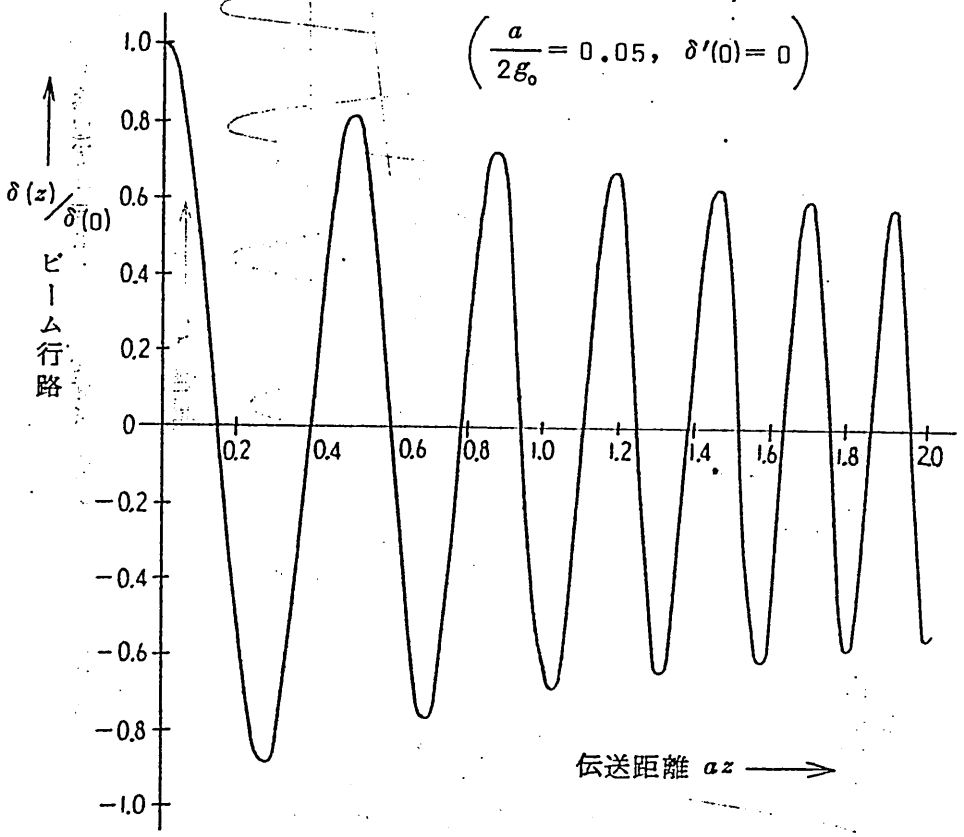



図4　直線形テーパをもつレンズ状媒質からなる光ビーム導波系の直線部におけるビーム行路

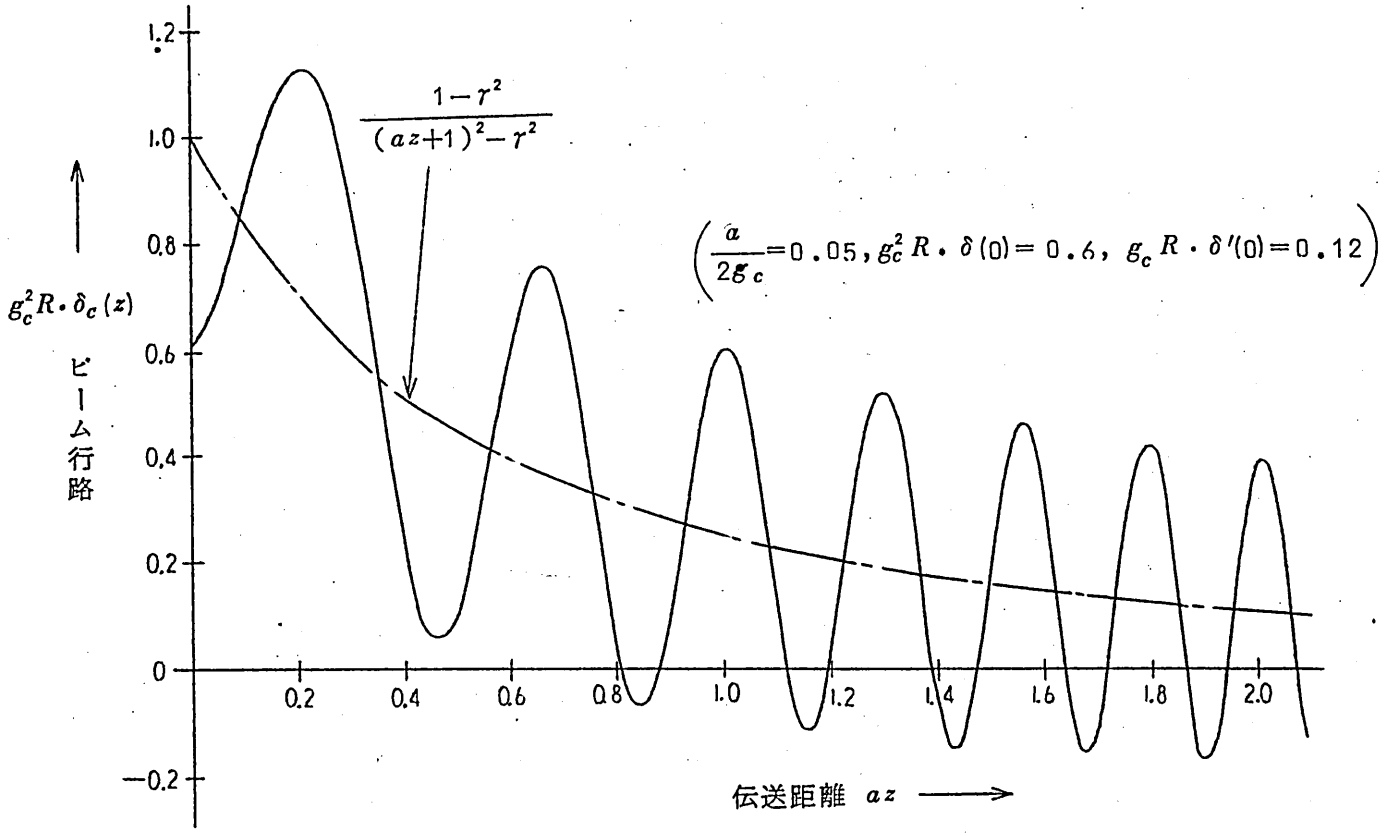



図5　直線形テーパをもつレンズ状媒質からなる光ビーム導波系の円形曲り部におけるビーム行路

3．2　指数関数形テーパの場合

テーパの形を定める関数$G(z)$が

$$G(z)=e^{az} \qquad \cdots\cdots (33)$$

（ただし，$a$は定数とする）なる指数関数で与えられる場合，式(4)の入射ビームに対する応答電磁界を求めると，その結果はつぎのようになる．すなわち，直線部分および円形曲り部分の応答電磁界は，それぞれ，表1の(Ⅲ)の$\rho(z)\sim w$および$\rho_c(z)\sim w_c$を，式(5)に代入した式で表わされる．また，スポットサイズおよびビーム行路は，同表(Ⅲ)の$\rho(z)\sim w$および$\rho_c(z)\sim w_c$を，式(7)，(9)および(16)に代入した式で，それぞれ，与えられる．

以上の結果から，指数関数形テーパをもつレンズ状媒質の場合には，前節で考察した直線形テーパの場合と同じように，光ビームは，ビーム行路とビームスポットの脈動を伴いながら，脈動の振幅と周期を減少（$a>0$のとき）または増大（$a<0$のとき）させつつ，伝搬することがわかる．これらの脈動現象は，式(10)～(12)および(18)に，それぞれ，表1の(Ⅲ)の$\rho(z)\sim w$および$\rho_c(z)\sim w_c$を代入すればわかるように，直線形テーパの場合と同一の入射条件のもとで除去することができる．すなわち，直線部では，$\delta(0)=\delta'(0)=0$および式(27)が成立するとき，ビーム行路およびスポットサイズは，それぞれ，

$$\delta(z)\equiv 0 \quad \text{および} \quad w(z)=w_0e^{-az/2} \qquad \cdots\cdots (34)$$

となり，また，円形曲り部では，式(29)および(31)が成立するとき，

$$\delta_c(z)=\frac{1-\gamma^2}{g_c^2R(e^{2az}-\gamma^2)} \quad \text{および} \quad w_c(z)=\frac{w_0}{\sqrt[4]{e^{2az}-\gamma^2}} \qquad \cdots\cdots (35)$$

となる．

3．3　Raised Cosine形テーパの場合

テーパの形が

$$G(z)=1+a\cos bz \qquad \cdots\cdots (36)$$

なるRaised Cosine関数で与えられる場合を考える．ここで，$a$および$b$は，それぞれ，$0<|a|<1$および$b>0$なる定数とする．式(4)の入射ビームに対する応答電磁界を求めると，その結果は，直線部および円形曲り部では，それぞれ，表1の(iii)に示した$\rho(z)\sim w$および$\rho_c(z)\sim w_c$を，式(5)に代入した式で表わされる．また，直線部および円形曲り部におけるビーム行路およびスポットサイズは，同表(iii)の$\rho(z)\sim w$および$\rho_c(z)\sim w_c$を，式(7)，(9)および(16)に代入した式で，それぞれ，与えられる．

以上の結果から，Raised Cosine形テーパの場合にも，ビーム行路およびビームスポットは，一般に，脈動することがわかる．この脈動が除去される入射条件を求めると，式(10)，(18)および表1の(iii)より，直線部では，

$$\left.\begin{aligned}&\delta(0)=\delta'(0)=0\\&\frac{1}{s^2(0)}=\frac{1+a}{w_0^2}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (37)$$

となり，円形曲り部では

$$\left.\begin{aligned}&\delta(0)=\frac{1}{g_c^2R},\quad \delta'(0)=0\\&\frac{1}{s^2(0)}=\sqrt{(1+a)^2-\gamma^2}\,/\,w_0^2\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (38)$$

となる．このとき，スポットサイズおよびビーム行路は，それぞれ，直線部では

$$\left.\begin{aligned}&w(z)=w_0/\sqrt{1+a\cos bz}\\&\delta(z)\equiv 0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (39)$$

となり，円形曲り部では，

$$\left.\begin{aligned} w_c(z) &= w_0 \Big/ \sqrt[4]{(1+a\cos bz)^2-\gamma^2} \\ \delta_c(z) &= 1 \Big/ \{ g_c^2 R (1+a\cos bz)^2 \} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (40)$$

となる．

ビームスポットの脈動を除去するための整合入射波面係数は，前節で考察した直線形テーパや指数関数形テーパの場合には，式(27)あるいは(29)のような複素量になったのに対し，本節でとりあげたRaised Cosine形テーパの場合には，式(37)あるいは(38)に示したような実数値となる．

3．4　整合波面係数

テーパ・レンズ状媒質の直線部分および円形曲り部分における整合波面係数は，2節で求めたように，それぞれ，式(12)および(19)で与えられる．これらの式を用いて，直線形テーパ，指数関数形テーパおよびRaised Cosine形テーパのレンズ状媒質について，それぞれの場合の整合波面係数を求めると，表2のようになる．

図6の(a)および(b)は，各種のテーパレンズ状媒質の直線部分における整合波面係数の数値計算例を示したものである．同図では，テーパ部の長さ $l$ に対する整合波面係数の実数部と虚数部の変化を示してある．この図から，テーパ・レンズ状媒質の入口（$z=0$）および出口（$z=l$）における整合波面係数の値を容易に知ることができる．

表2　テーパ・レンズ状媒質からなる光ビーム導波系における整合波面係数

| テーパの種類 | 直線部分における整合波面係数 | 円形曲り部分における整合波面係数 |
|---|---|---|
| 直線形テーパ | $\frac{(az+1)}{w_0^2}\left\{1-j\frac{a}{2g_0(az+1)^2}\right\}$ | $\frac{\sqrt{(az+1)^2-\gamma^2}}{w_0^2}\left[1-j\frac{a(az+1)}{2g_0\{(az+1)^2-\gamma^2\}^{3/2}}\right]$ |
| 指数関数形テーパ | $\frac{e^{az}}{w_0^2}\left\{1-j\frac{a e^{-2az}}{2g_0}\right\}$ | $\frac{\sqrt{e^{2az}-\gamma^2}}{w_0^2}\left[1-j\frac{a e^{az}}{2g_0\{e^{2az}-\gamma^2\}^{3/2}}\right]$ |
| Raised Cosine 形テーパ | $\frac{(1+a\cos bz)}{w_0^2}\left\{1+j\frac{ab\sin bz}{2g_0(1+a\cos bz)^2}\right\}$ | $\frac{\sqrt{(1+a\cos bz)^2-\gamma^2}}{w_0^2}\left[1+j\frac{ab(1+a\cos bz)\sin bz}{2g_0\{(1+a\cos bz)^2-\gamma^2\}^{3/2}}\right]$ |

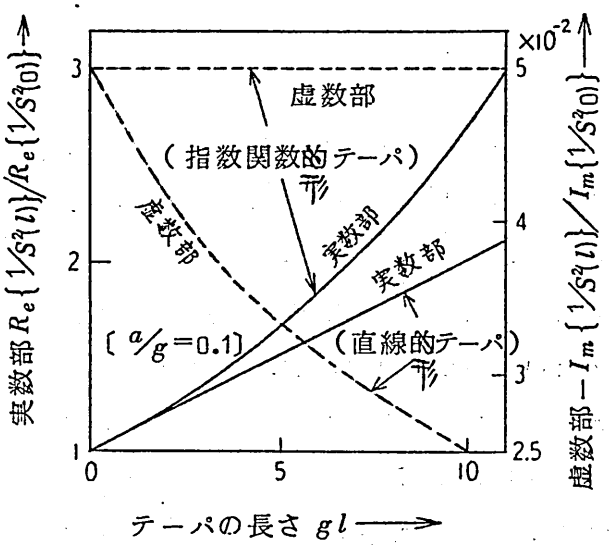
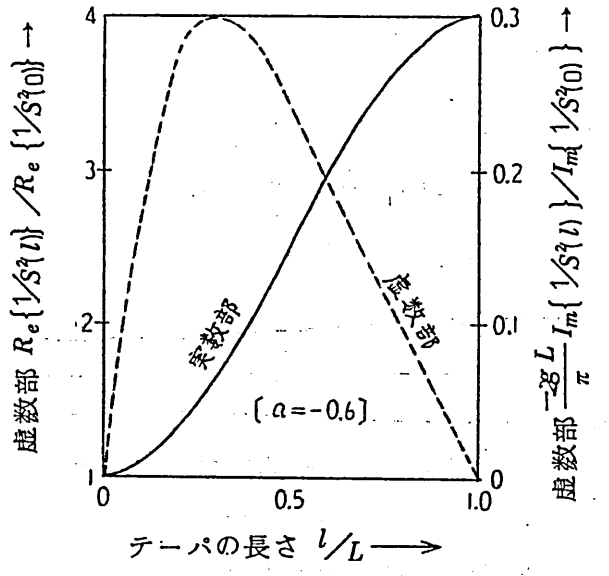



図6 (a) 直線形テーパおよび指数形テーパの場合




(b) Raised Cosine 形テーパの場合

図6 テーパ・レンズ状媒質からなる光ビーム導波系の直線部分における整合波面係数

## 4．テーパ・レンズ状媒質からなる光ビーム導波系の応用

### 4．1　スポットサイズの変換器

固有スポットサイズが異なるレンズ状媒質からなる二つの直線状導波系を接続する場合を考える．両導波系を直結すると，固有スポットサイズが異なるために，伝送ビーム波は，モード変換，再変換を生じ，その結果がビームスポットやビーム行路の脈動となって現われる．この脈動現象が顕著になると，導波系の有限な口径による回折損失を増大したり，信号歪を生じて通信の品質を低下させるおそれがある．このような現象をさけるためには，図7に示すように，両導波系の間に適当なスポットサイズの変換器を挿入して，両系の整合をとればよい．本節では，テーパ・レンズ状媒質からなる光導波系をこのようなスポットサイズの変換器として応用することを考えてみる．

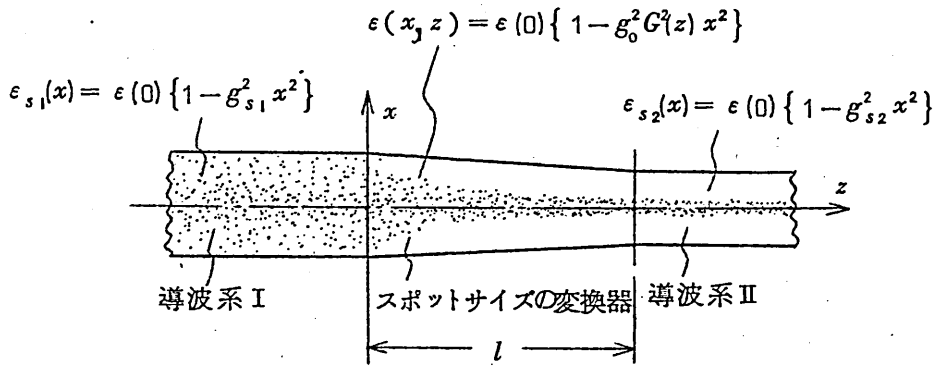



図7　テーパレンズ状媒質を応用したスポットサイズの変換器

モード変換，再変換に起因するビームスポットやビーム行路の脈動をさけるためには，テーパ導波系の両端 $z=0$ および $l$ における波面係数 $1/s^2(0)$ および $1/s^2(l)$ を，それぞれ，導波系Ⅰおよび Ⅱにおける固有波面系数 $1/w_{s1}^2$ および $1/w_{s2}^2$ に等しくえらぶ必要がある．すなわち，

$$1/s^2(0) = 1/w_{s1}^2 \quad \text{および} \quad 1/s^2(l) = 1/w_{s2}^2 \qquad \cdots\cdots (41)$$

でなければならない．導波系Ⅰおよび Ⅱの誘電率分布を，それぞれ，

$$\varepsilon_{s1}(x) = \varepsilon(0)\{1 - g_{s1}^2 x^2\} \quad \text{および} \quad \varepsilon_{s2}(x) = \varepsilon(0)\{1 - g_{s2}^2 x^2\}$$

と表わすと，$1/w_{s1}^2$ および $1/w_{s2}^2$ は，それぞれ，

$$1/w_{s1}^2 = g_{s1}\, k(0) \quad \text{および} \quad 1/w_{s2}^2 = g_{s2}\, k(0) \qquad \cdots\cdots (42)$$

なる実数となる．$1/w_{s1}^2$ および $1/w_{s2}^2$ が共に実数であることを考慮して，式(41)の関係を式(12)に適用すると，

$$\begin{cases} u(0) = u(l) = 0 & \cdots\cdots (43) \\ s^2(0) = w_{s1}^2 = \rho(l)\, w_{s2}^2 & \cdots\cdots (44) \end{cases}$$

なる条件が導かれる．前節で考察した三種類のテーパのうち，有限の長さ $l$ に対して式(43)の条件を満足することができるものは，表2および図6(b)から明らかなように，Raised Cosine形テーパのみである．すなわち，式(36)における定数 $b$ を $b = \pi/l$ とえらぶと式(43)が満足される．そこで，以下ではRaised Cosine形テーパを例にとってスポットサイズの変換器の設計を試みる．

式(37)の入射条件を満足するビームの波面係数（整合波面係数）は，式(39)より

$$\frac{1}{s^2(z)} = \frac{1 + a\cos(\pi z/l)}{w_0^2} \qquad \cdots\cdots (45)$$

となる．式(45)に(41)を代入し，式(42)の関係を用いて，$a$および$g_0$を決定すると，それぞれ，

$$a=\frac{g_{s1}-g_{s2}}{g_{s2}+g_{s2}} \qquad \cdots\cdots (46)$$

および

$$g_0=\frac{1}{2}\left(g_{s1}+g_{s2}\right) \qquad \cdots\cdots (47)$$

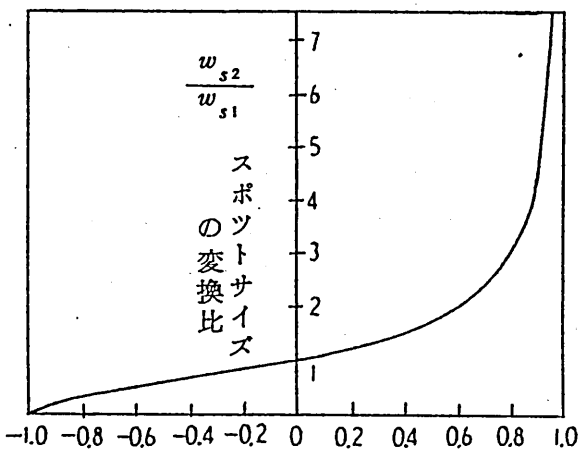
となる．式(45)に，式(42)，(46)および(47)を代入すると，テーパ導波系内のスポットサイズ$w(z)$は，

$$w(z)=w_{s1}\Bigg/\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{w_{s1}}{w_{s2}}\right)^2+\left(1-\frac{w_{s1}^2}{w_{s2}^2}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)\right\}} \qquad \cdots\cdots (48)$$

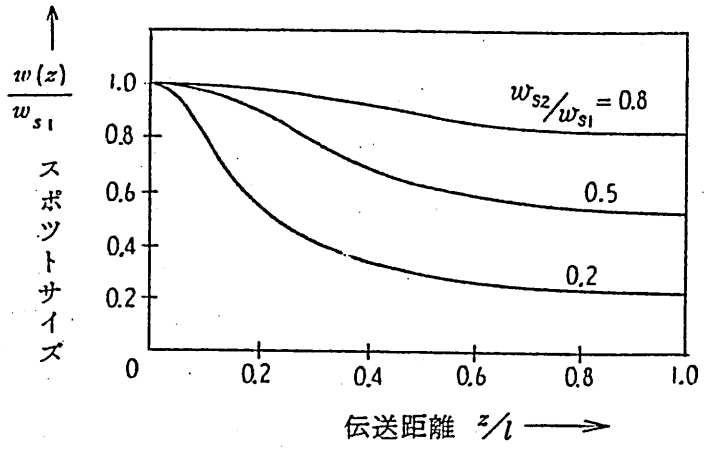
となる．また，式(42)および(46)から，スポットサイズの変換比$w_{s2}/w_{s1}$は，

$$\frac{w_{s2}}{w_{s1}}=\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \qquad \cdots\cdots (49)$$

となる．図8(a)は，式(49)の関係を図示したものである．この図から，テーパの形を与える式(36)に含まれているパラメータ$a$に対するスポットサイズの変換比$w_{s2}/w_{s1}$の値が直読できる．たとえば，$a=-0.6$とえらぶと，$w_{s2}/w_{s1}=0.5$となって，テーパの出口$z=l$では，入射ビームの2分の1のスポットサイズをもったビームに変換されることがわかる．図8(b)は，変換比$w_{s2}/w_{s1}$を変えたときのテーパ導波系内におけるスポットサイズ$w(z)$の変化の様子を，式(48)を用いて数値計算したものである．




(a) スポットサイズの変換比




(b) スポットサイズの変化

図8 Raised Cosine形テーパのレンズ状媒質を応用したスポットサイズの変換器におけるスポットサイズの変化および変換比.

以上に求めた設計条件（式(46)および(47)）が満足されていると，導波系Ⅰにおける固有モード$\phi_n^{(1)}$（$n=0,1,2\cdots$）が固有モード$\phi_n^{(2)}$（$n=0,1\cdots$）に変換されることが容易に確かめられる．したがって，導波系Ⅰにおける伝送光ビームが，たとえば，ビームスポットとビーム行路の脈動を伴った脈動ビームの場合でも，変換器の影響を受けることなく，導波系Ⅱの脈動ビームに比例的に変換される．何故なら，このような脈動ビームは，導波系Ⅰでは固有モード$\phi_n^{(1)}$の一次結合$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\phi_n^{(1)}$によって，また，導波系Ⅱでは固有モード$\phi_n^{(2)}$の一次結合$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)}\phi_n^{(2)}$によって，表わされるものであるからである．

## 4．2　円形曲り部用モード変換器

筆者らは，先に，レンズ状媒質からなる円形曲り導波系の設計方法の一つとして，文献(10)～(12)のような方法を提案した．この方法は，入射ビームを円形曲り部の固有モードに変換するものであって，図9に示すように曲り部の中心軸を直線部の中心軸と一致させたままで，ビーム行路とビームスポットの脈動を同時に除去することができるという特長がある．しかし，前論文[10)～(12)]の方法では，曲り部$AB$における誘電率の変化率$g_{c2}$を直線部と同じ値にえらぶことができないという設計上の難点があった．そこで，本節では，本文でとりあげたRaised Cosine形テーパのレンズ状媒質をモード変換器の部分$OA$に応用することによって，前論文[10)～(12)]における上記のような難点をとりのぞくことができることを示す．

円形曲り部の中心軸上に平行に入射したビームの中心部の軌跡は，式(16)に表1のⅢの$\rho_c(z)\sim w_c$を代入し，$\delta(0)=\delta'(0)=0$とおくことにより，

$$\delta_c(z)=-(T\cos g_c\theta_c-T^4)/g_c^2R \qquad \cdots\cdots(50)$$

ただし

$$T=\sqrt[4]{(1+a)^2-\gamma^2}\Big/\sqrt[4]{(1-a)^2-\gamma^2} \qquad \cdots\cdots(51)$$

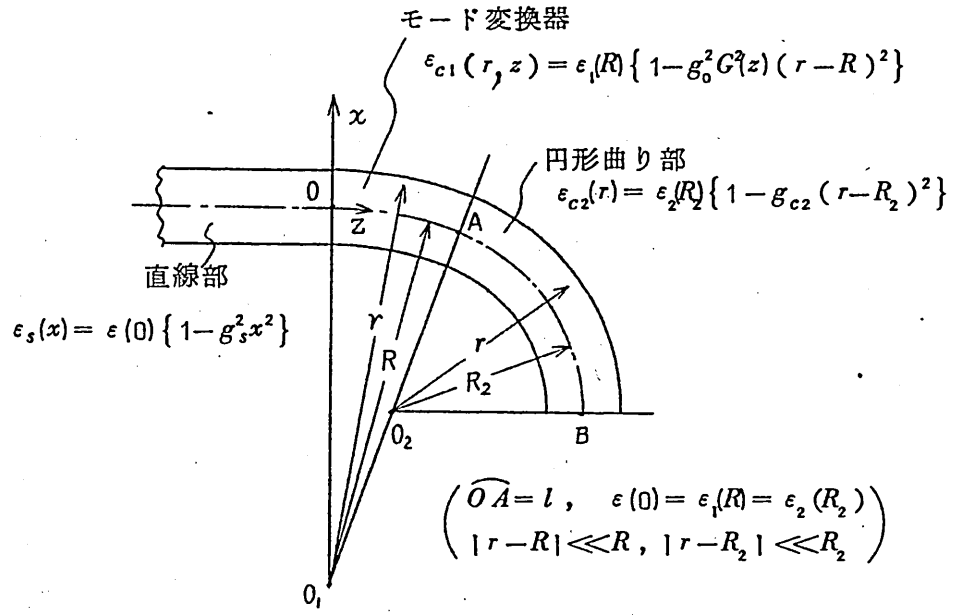



図9　テーパ・レンズ状媒質を応用した円形曲り部用モード変換器

となる．式(50)における $g_c$ および $\theta_c$ は，表1の(m)に示したとおりである．

さて，テーパの長さを $l$ とし，

$$b=\frac{\pi}{l}=\tilde{g}_0=g_0\sqrt{1-\frac{2}{g_0^2R^2\sqrt{1-a^2}}} \qquad \cdots\cdots (52)$$

とえらぶと，式(50)より

$$\delta_c(l)=(T^4+T)\Big/g_c^2R \qquad \cdots\cdots (53)$$

$$\delta_c'(l)=\frac{d}{dz}\,\delta_c(z)\Big|_{z=l}=0 \qquad \cdots\cdots (54)$$

を得る．したがって，円形曲り部 $AB$ におけるビーム行路の脈動を除去するための条件[10)~12)]は，

$$\frac{1}{\tilde{g}_{c2}^{\,2}R_2}=\frac{1}{g_c^{\,2}R}\left(T+T^4\right) \quad \cdots\cdots (55)$$

ただし

$$\tilde{g}_{c2}=g_s\sqrt{1-\frac{2}{g_s^{\,2}R_2^{\,2}}} \quad \cdots\cdots (56)$$

となる．ここで，曲り部$AB$における誘電率分布を与える式$\varepsilon_{c2}(r)=\varepsilon_2(R_2)\{1-g_{c2}^{\,2}(r-R_2)^2\}$において，中心軸$r=R_2$上の誘電率$\varepsilon_2(R_2)$および誘電率の変化率$g_{c2}$は，それぞれ，直線部の値$\varepsilon_s(0)$および$g_s$に等しくえらんである．

さらに，テーパの入口および出口における固有スポットサイズの整合条件[11)(12)]は，式(40)および(52)より

$$\begin{cases} w_0\Big/\sqrt[4]{(1-a)^2-\gamma^2}=w_{c2}\left(=1\Big/\sqrt{\tilde{g}_{c2}\,k(0)}\right) \cdots\cdots (57) \\ w_0\Big/\sqrt[4]{(1+a)^2-\gamma^2}=w_s\left(=1\Big/\sqrt{g_s\,k(0)}\right) \cdots\cdots (58) \end{cases}$$

となる．式(55)～(58)を連立して解き，モード変換器の部分$OA$における誘電率分布の式

$$\varepsilon_{c1}(r,z)=\varepsilon_1(R)\{1-g_0^{\,2}(1+a\cos bz)^2(r-R)^2\} \quad \cdots\cdots (59)$$

に含まれている定数$g_0$，$a$，$b$および曲率半径$R$を求めると，それぞれ，つぎのようになる．ただし，$\varepsilon_1(R)=\varepsilon_s(0)$とする．

$$g_0=\frac{g_s}{2}\left\{\sqrt{1+\kappa^2}+\sqrt{1+\kappa^2-2/g_s^{\,2}R_2^{\,2}}\right\} \quad \cdots\cdots (60)$$

$$a=2\Big/\left[g_s^{\,2}R_2^{\,2}\left\{\sqrt{1+\kappa^2}+\sqrt{1+\kappa^2-2/g_s^{\,2}R_2^{\,2}}\right\}^2\right] \quad \cdots\cdots (61)$$

$$b=g_0\sqrt{1-\frac{\sqrt{1+\kappa^2}+\sqrt{1+\kappa^2-\dfrac{2}{g_s^{\,2}R_2^{\,2}}}}{g_0^{\,2}R_1^{\,2}\sqrt[4]{(1+\kappa^2)\left(1+\kappa^2-\dfrac{2}{g_s^{\,2}R_2^{\,2}}\right)}}} \quad \cdots\cdots (62)$$

$$R_1 = R_2 \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{2}{g_s^2 R_2^2} \right)^{3/4} \right\} \quad \cdots\cdots (63)$$

ただし

$$\kappa = \sqrt{2} \Big/ \left[ g_s R_2 \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{2}{g_s^2 R_2^2} \right)^{3/4} \right\} \right] \quad \cdots\cdots (64)$$

である．また，テーパ部の長さ $l$ は，$\pi/b$ で与えられる．

以上に示したように，モード変換器 $OA$ の部分に，Raised Cosine形テーパのレンズ状媒質を応用した本文の方法では，前論文の方法[10)~(12)]とは異なって，曲り部 $AB$ に直線部と同じ線路定数の導波系を用いることができる．

## 5．あ と が き

テーパ・レンズ状媒質からなる光導波系において，テーパの形が任意の関数で与えられる場合の光ビームの応答電磁界を定める一般式を導き，直線形テーパ，指数関数形テーパ，および Raised Cosine形テーパの場合に適用した．その結果，各種のテーパ導波系に沿う光ビームの振舞いを，総括的に非常に見通しよく論じることができた．さらに，応用例として，Raised Cosine形テーパのレンズ状媒質を用いたスポットサイズの変換器および円形曲り部用のモード変換器を提案し，その設計条件を明らかにした．なお，本文で示した二つの応用例は，いずれも，実数波面係数のビームを異なった実数波面係数のビームに変換する変換器であった．しかし，テーパの関数形を Raised Cosineから適当に変えることによって，実数波面係数のビームから複素波面係数のビームへの変換器，あるいは複素波面係数のビームから異なった複素波面係数のビームへの変換器を設計することも，もちろん，可能である．

謝辞．数値計算に御協力いただいた大阪大学大学院板倉研究室の上田照夫氏に深謝する．

# 文　　献


(1) T.Uchida et al:"A light focusing fibre guide", 1969 IEEE Conference on Laser Engineering and Applications, Washington, D.C.May 26−28, 1969.

(2) D.W.Berrman: "A lens or light guide using convectively distorted thermal gradients in gases", Bell Syst. tech. J., 43, 3, pp.1469~1475 (July 1964).

(3) 末松安晴，北野利彦："テーパ・レンズ状ビームガイドの解析"，昭42信学全大，535.

(4) N.Nishida, Y.Nannichi, T.Uchida and I.Kitano:"An avalanche photodiode with a tapered light-focusing fibre guide", Proc. IEEE (Letters), 58, 5, p.790 (May-1970).

(5) 沢新之輔，熊谷信昭："テーパ・レンズ状媒質からなる光導波系の応答電磁界"，昭45信全大，571.

(6) 沢新之輔，熊谷信昭："テーパ・レンズ状媒質からなる光導波系の解析"，昭45電気関係学会四国支部連大，通信10−1.

(7) 沢新之輔，上田照夫，熊谷信昭："テーパレンズ状媒質に沿う光ビームの伝搬特性"，昭45電気関係学会関西支部連大，G8−6.

(8) 山本錠彦，牧本利夫："二次元分布定数系の等価性について−レンズ状媒質"，信学論(B)，53−B，2，pp.84~91（昭45−02）.

(9) 沢新之輔，熊谷信昭："レンズ状媒質からなる導波系の新しい解析法"，信学論(B)，52−B，10，pp.624~631（昭44−10）.

(10) 沢新之輔，熊谷信昭："曲りガスレンズに関する一考察"，信学論(B)（研究速報），52−B，3，p.181（昭44−03）.

(11) 沢新之輔，熊谷信昭："レンズ状媒質からなる曲り導波系の設計方法に関する一提案"，信学論(B)（技術談話室），52−B，11，pp.718~

719（昭４４－１１）．
(12) 沢新之輔，熊谷信昭：“レンズ状媒質からなる導波系の円形曲りについて”，信学会マイクロ波研資，MW７０－３４（１９７０－０９）．

輻射科学研究会資料

# 軸方向に磁化されたYIGのマイクロ波吸收

栗井郁雄　　池上淳一

（京都大学工学部）

1970年12月4日

## 1. まえがき

ＹＩＧのような強磁性体の共鳴吸収は常磁性体とは異なり非常に複雑である。その理由は才１に直流磁場をかけると試料の端面に磁極ができそれによって引き起される反磁場が内部磁場を一様でなくしてしまう点である。才２は透磁率がテンソルとなりしかもある成分の値は負になる事さえあるので種々の共鳴モードが存在し得る事である。才３に電磁波が他の波動即ちスピン波、弾性波と結合するために、それらの共鳴があたかも電磁波の共鳴のようにマイクロ波共鳴吸収として現われてくる点である。

以上のうち才２は静磁共鳴吸収として才３は磁気弾性共鳴吸収として述べる予定であるが、当然夫々が静磁波及び磁気弾性波の励振，伝播過程に深いつながりを持っている。それゆえ上の二種の共鳴吸収の原因を追求して行けば静磁波，磁気弾性波の基本的な性質の解明ができるわけで我々はそのような観点から実験及び解析を行なった。

静磁共鳴吸収の実験は古くは１９６３年にEschbachが円板状ＹＩＧについて行なっており、静磁共鳴の始まりと終りに対応する直流磁場が理論的予測と一致する事を示している。[1] 又Patton等が１９６８年に充分長い円柱状多結晶試料を用いる事によって端面の自発磁化による反磁場の影響を消去して，分散関係から計算される共鳴ピークの間隔と実験結果が相当良く一致する事を論じた。[2] しかし両者共導波管空胴中に試料を入れているため励振モードを任意に変える事は困難である上，どのモードが励振されているのかを予測する事もできない。それに対して我々は同軸線の中心導体を引きのばした(アンテナ)て励振するのでアンテナの形状を変えればある程度自由に励振される静磁波のモードを選ぶ事ができる。このようにしてモード分離を行ない、静磁波の伝播実験に我々が用いてきたストリップ型マウント[3]において基本モードの静磁波が最も効率良く励振されている事を示した。

一方磁気弾性共鳴吸収については１９６５年に［１００］試料についてKohane等が発表している[4]がそれとは異なった様相を呈する［１１０］試料については未だ実験はなされていないようである。我々は［１００］試料の共鳴吸収ピークの間隔が信号周波数の上昇と共に理論値によく合ってくる事を示し，その原因の考察を行なった。又［１１０］試料特有の共鳴現象（これを弾性共鳴吸収と仮に名づけよう）の実験結果と解析を合せて示した。

## 2. 静磁共鳴吸収

静磁近似が成り立つものとすれば、自由空間中にあって軸方向に磁化されたYIG中の静磁波の分散関係は次のようになる[5]

$$(-\mu)^{\frac{1}{2}}\frac{J_n'}{J_n}+\frac{K_n'}{K_n}+\frac{n\kappa}{kR}=0 \quad (\text{体積モード}) \qquad (1)$$

$$(-\mu)^{\frac{1}{2}}\frac{I_n'}{I_n}+\frac{K_n'}{K_n}+\frac{n\kappa}{kR}=0 \quad (\text{表皮モード}) \qquad (2)$$

但し $J_n=J_n[kR(-\mu)^{\frac{1}{2}}]$, $I_n=I_n[kR(-\mu)^{-\frac{1}{2}}]$, $K_n=K_n[kR]$

$$\mu=\frac{HB-(\omega/\gamma)^2}{H^2-(\omega/\gamma)^2}, \quad \kappa=\frac{4\pi M_s(\omega/\gamma)}{(\omega/\gamma)^2-H^2} \qquad (3)$$

$R$；試料の半径，$H$；内部磁場，$\omega$；信号周波数
$4\pi M_s$；飽和磁化，$\gamma$；磁気回転比，$k$；波数

式(1)(2)を図示すると図1のようになる。

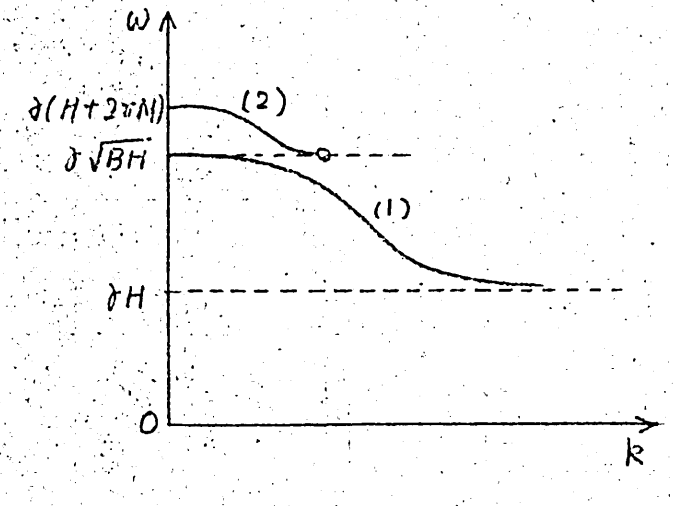



図1 静磁波の分散曲線

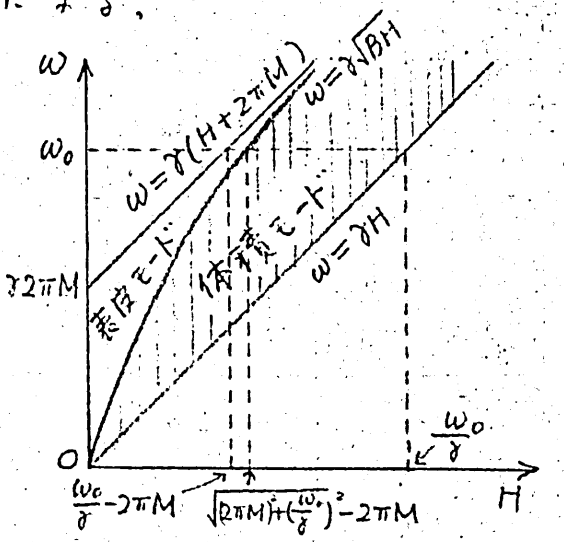



図2 体積，表皮モードの存在範囲

図1から $\gamma H\le\omega\le\gamma\sqrt{BH}$ であれば体積モード，$\gamma\sqrt{BH}<\omega\le\gamma(H+2\pi M)$ であれば表皮モードとして静磁波が存在する事がわかる。そしてその境界は内部磁場の値によって変化し図2のように表わされる。但し両図とも $4\pi M$ は $4\pi M_s$ に等しい，即ちYIGは磁気的に充分やわらかいものという仮定が入っている。又図1では式(1)，(2)の $n$ 及びベッセル函数の無限個の根に対応して夫々のモードについて無限の曲線が出てくるのであるが，後述するように励振アンテナの形状に対応する単一モードを励振する事が可能なので体積，表皮モードについて夫々1本づつの曲線しか描いていない。

励振周波数を決めれば($\omega_0$)，図1からある大きさの内部磁場$H$に対して波長が一意的に決まるので，試料の内部磁場が仮に一様であると仮定すれば，その波長の半整数倍が試料の全長に

等しい時に静磁共鳴が起る事は容易にわかる。その場合静磁共鳴吸収は振巾を考慮しなければ図1,2を参照して図3のようになる事が予想される。所が周知のように非楕円体試料においては外部から一様な磁場を印加しても内部磁場は一様にはならず円柱状試料中では式(4)のように中心部では内部磁場は大体印加磁場$H_e$に等しいが端面附近では約$2\pi M_s$だけ減少する。

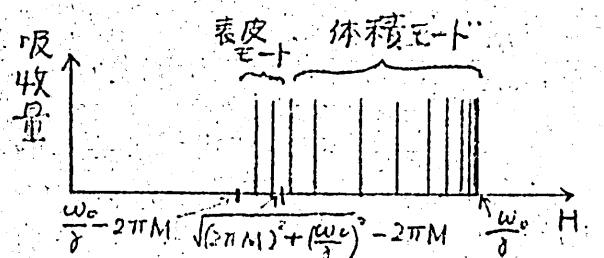



図3. 内部磁場一様な円柱状試料の静磁共鳴吸収

$$H = H_e + H_a - 2\pi M_s\left\{2 - \frac{1-\zeta}{[(1-\zeta)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1+\zeta}{[(1+\zeta)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad (4)$$

$H_e$; 印加磁場, $H_a$; 異方性磁場, $\zeta = 2z/L$, $\rho = D/L$
$D$; 試料直径, $L$; 試料全長, $z$; 試料中心から軸方向への距離

このように内部磁場が一様でなければ静磁波の波長が場所によって変化すると考えて、共鳴の条件は

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\lambda(z)}\,dz = \frac{N}{2} \quad (5)$$

となる。ここにNは正整数である。(5)式は

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k(z)\,dz = \pi N \quad (6)$$

と書きかえる事ができる。それゆえ(1)(2)式をkについて解きkをHの函数とし、更に(4)式を用いてkをz(あるいは$\zeta$)の函数すれば(5)式の積分が計算できる。しかし(1)(2)は超越方程式でありこのままでは解析的に解けないので以下のような近似を行なう。

$\omega/\gamma$が$2\pi M_s$より相当大きい周波数$\omega_0$で励振するものとして内部磁場Hの最大値(試料中心部での値)が$\omega_0/\gamma$より小さいけれどもそれから余り離れていないような領域について考える。このような時、試料内に存在を許される静磁波は図4のように中心部で波数が大きく端面近傍では小さい上に、全体として(5)又は(6)式のNはかなり大きくなる。それゆえ(6)式の積分に対する寄与は殆んど中心部でのみなされる。そこで(4)式を$\zeta=0$の近傍で$\zeta^2$までのテイラー展開で近似する事にしよう。

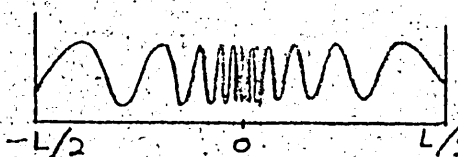



図4. $H_{max} \lesssim \frac{\omega_0}{\gamma}$の時の静磁波

$$H = He + Ha - (Ho + H_2\zeta^2) \tag{7}$$

とすれば Damon 等により[6]

$$Ho = 4\pi Ms\left[1 - \frac{1}{(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right], \quad H_2 = \frac{6\pi Ms\,\rho^2}{(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{8}$$

又試料中心部では $\omega_0 \simeq \gamma H$ となるので(1)式は

$$\omega = \gamma H + \gamma 2\pi Ms\left(\frac{Y_i}{kR}\right)^2 \tag{9}$$

と簡単化される.[7] $Y_i$ はベッセル函数 $J_{n-1}(y)=0$ の解であり最低次から順に値を示せば 2.405, 3.832, 5.135…… の如くである。これらは夫々 $n=1$, $0$, $-1$(又は2) に対応している。
(7) (9) を (6) に代入して積分を実行すれば(附録参照)

$$N = \frac{Y_i(1+\rho^2)^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{3}\pi\rho^2}\log\left\{\frac{4\pi Ms}{\Delta H}\,\frac{6\rho^2}{(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\right\} \tag{10}$$

を得る。但し $\Delta H = (\omega_0/\gamma) - Hc = (\omega_0/\gamma) - (He + Ha - Ho)$

$4\pi Ms = 1980$ gauss, $\rho = 0.3$ を代入し更に $\Delta H$ について (10)式を解くと $Y_i = 2.405$, $3.832$ に対して

$$\Delta H = 775 \times 10^{-0.0796N} \quad (n=1\ \text{モード}) \tag{11}$$

$$\Delta H = 775 \times 10^{-0.0501N} \quad (n=0\ \text{モード}) \tag{12}$$

となる。この2曲線は片対数目盛上に直線として示されている。(附図1) 又静磁共鳴吸収の様子は附図2にある。
共鳴吸収実験は全て図5のような測定器配置で行う。

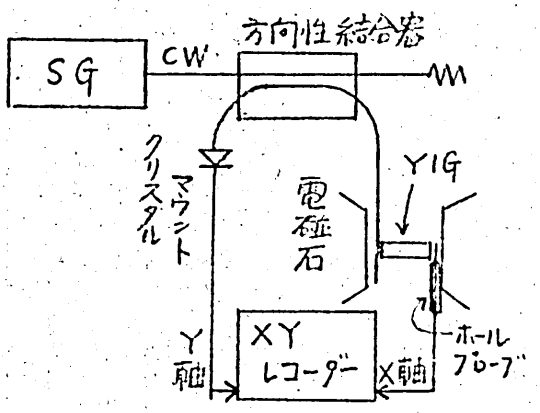



図5 測定器のブロック図

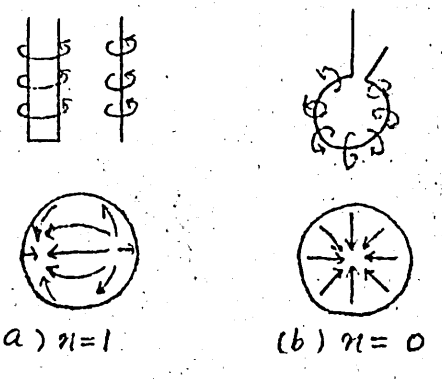



図6. 最低次2モードの高周波磁場分布

同軸型マウントでアンテナの形状を線状とループ状に作ったもの及びストリップ型マウントを用いて励振した結果を附図3に示す。これを見ると線状及びストリップ線アンテナ(板状)によるピーク位置がよく一致しているのに対し、ループアンテナのピーク位置はそれらとはかなり違っているのがわかる。

$n=1$モードの高周波磁場分布を計算すると図6(a)のようになりそれは線状及び板状アンテナの回りに存在する磁場分布とよく似ている事，$n=0$モードヒループアンテナの磁場分布についても同様な事が言える事から，図6の夫々のモードが対応するアンテナによって励振されているのではないかと考えるのは自然である．そこで附図3のデータを用いてNと$\Delta H$の関係をプロットすれば附図1の○印で示された通りで$\Delta H$が小さい時には，非常に理論とよく一致している．$\Delta H$が大きくなると次第に両者が離れるのは(7),(9)式が実際の状態を正しく表わさなくなるからである．以上の結果からパルス変調された信号による静磁波の伝播実験においてもストリップ型マウントによってかなり純粋な静磁波の基本モードが励振されていると考えて良いであろう．

次にYIGを支持する誘電体に薄い銅板を張りつけてYIGのそれより右側の部分をマイクロ波磁界からシールドすると共鳴のピークの位置がYIG端面と銅板との距離を変えるに従って移動して行くのが見られる．（図7及び附図4参照）

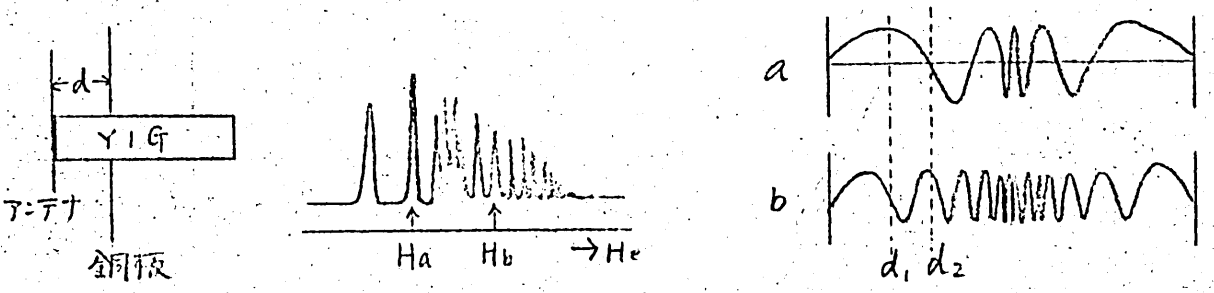



図7．励振長変化による共鳴ピーク移動の原因

静磁波の波長は$(\omega/\gamma-H)^{-\frac{1}{2}}$に比例するから試料内で図4のように変化するのであるが，外部磁場の大小によっても図7a,bのような差が現われる．a,b図はc図の共鳴ピークに対応する外部磁場$H_e=H_a$, $H_b$の時の解であるとする．励振効率は交流磁場と静磁波の磁気モーメントとの重なり積分に比例するであろう．試料外部から励振する交流磁場が一様であるとすればb図の場合なら$d=d_1$，a図なら$d_2$のときに最も励振効率が高くなるものと思われる．即ちそれが共鳴ピーク最大値を与える．従ってdが小さくなれば共鳴ピーク最大値が磁場の大きい方に移動する附図4の実験結果が説明された．

## 3. 磁気弾性共鳴吸收

磁気弾性波の分散関係は，その伝播方向が直流磁場の方向に一致している場合

$$(\omega^2 - c_t^2 k^2)(\omega - \omega_k) - \sigma c_t^2 k^2 = 0 \qquad (13)$$

で与えられる。[7] ここに $c_t$；横波弾性波の速度，$\sigma$；磁気弾性相互作用に関する係数 $\omega_k$；スピン波周波数

$$\omega_k = \gamma(H + Dk^2) \qquad (14)$$

$H$；直流内部磁場，$D$；交換係数

印加直流磁場と信号周波数を適当に選べば磁気弾性波を効率良く励振する事ができるがその場合試料内で何度もモード変換が行なわれる。即ちマイクロ波回路を伝送されてきた電磁波はアンテナ又は空胴共振器の強い交流磁界によって試料内に静磁波として入りこみ，転回点（$\omega/\gamma = H$ なる点，以後TPと略す）まで伝播した所でスピン波に変換され群速度の向きは逆転する。その後スピン波として伝播する間に，磁気弾性相互作用によって進行波的結合を通して弾性波へと変って行き，よく磨かれた試料端面で反射された後上と丁度逆の過程をたどって最後に電磁波となって試料の外へ出て行く。これらは静磁波，スピン波の分散曲線が $H$ の関数であり $H$ が左図の如く試料内部で変化するために生ずる現象である。（式(14)参照）

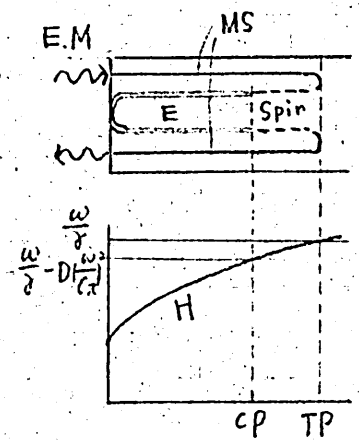



図8. 磁気弾性波の伝播

共鳴の条件式は前節と同様に考える事ができるがこの場合は端面とTPの間を一往復する波動についての共鳴条件を考えねばならない。

$$\int_0^{TP} \frac{dz}{\lambda_{MS}} + \int_{TP}^{0} \frac{dz}{\lambda_{ME}} = \frac{N}{2} \qquad (15)$$

MSは静磁波，MEは磁気弾性波を意味する。磁気弾性波の分散関係式(13)を $k$ について解き(15)に代入しても解析的処理が行なえないので交叉点（スピン波と弾性波の波数が等しくなる点，以後CPと略す）でスピン波から弾性波に突然変わるものと仮定して(15)を書き直せば

$$\int_0^{TP} k_{MS}\, dz + \int_{TP}^{CP} k_S\, dz + \int_{CP}^{0} k_E\, dz = \pi N \qquad (16)$$

磁気弾性波の波長は非常に小さく(16)式の $N$ は大きくなり過ぎて静磁共鳴の場合のように図示するのが困難なので，ここでは隣り合う共鳴の山の間隔を印加磁場 $H$ の関数として求めてみよう。試料が充分に飽和するまで磁化されているとき，$H$ を $\Delta H$ だけ変えれば内部磁場 $H$ も至る所で $\Delta H$ だけ変る。

図9の分散曲線から明らかなように静磁波の波数は磁気弾性

波に比べて小さいので，Hが$\Delta H$だけ変わっても端面からTPまでの波の数は殆んど変らない．

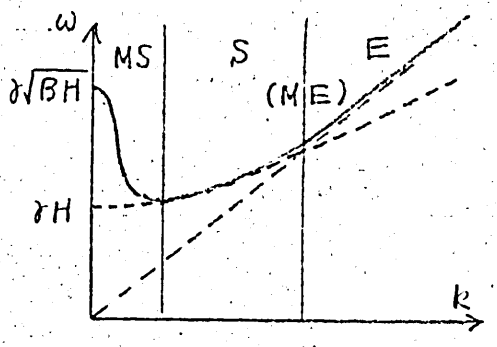



図9 静磁波，磁気弾性波の分散曲線

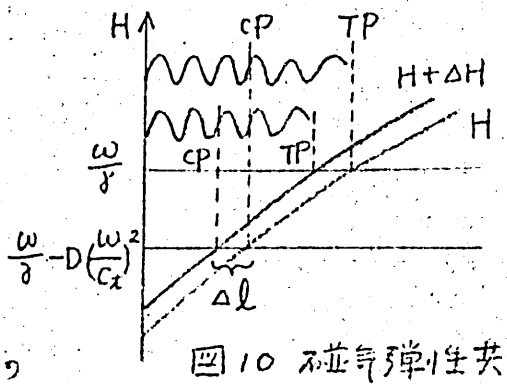



図10 磁気弾性共鳴吸収

又試料中心での内部磁場が$\omega/\gamma$より2～300 oe以上大きい時はTPから端面までの内部磁場変化は近似的に直線状であると考える事ができて，Hが$\Delta H$だけ変ってもTPからCPまでに存在するスピン波の数には何ら変化がない．従って$\Delta H$の変化はCPから端面までの距離を変えるだけでありその効果は弾性波の波の数を増減させるだけである．(図10参照)

そこで磁場を変える事によってCPから端面までに存在する弾性波の数が1/2だけ変れば往復で1つになるので共鳴の条件式はCPの移動距離を$\Delta l$として

$$\Delta l \cdot \frac{f}{c_x} = \frac{1}{2} \tag{17}$$

となる．又Hをベキ級数に展開してξについて4次の項まで取れば

$$H = H_e + H_a - (H_0 + H_2\xi^2 + H_4\xi^4) \tag{18}$$

となるのでCPの位置は $H = (\omega/\gamma) - D(\omega/c_x)^2$ とおいて

$$\xi_{cp} = \left[\frac{-H_2 + \sqrt{H_2^2 - 4H_4\{H_0 - H_e - H_a + (\omega/\gamma) - (\omega/c_x)^2 D\}}}{2H_4}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

である．端面からCPまでの距離を$l$とすれば

$$l = \frac{L}{2}(1 - \xi_{cp}) \tag{20}$$

一方

$$\Delta l = \frac{dl}{dH_e}\Delta H \tag{21}$$

を用いれば(17)式は

$$\Delta H = \frac{c_x}{2f \cdot \frac{dl}{dH_e}} \tag{22}$$

$\Delta H$は隣り合う共鳴を与える直流磁場の差である．
(19)を(20)に代入すれば$l$が$H_e$の関数で書けているので$l$を$H_e$で微分したものを(22)の$dl/dH_e$に代入すればよい．
[100] Y.I.Gにおいては $H_a = -80$ oe, $c_x = 3.90 \times 10^5$ cm/sec

であり その形状は直径3mm, 長さ1cmであるから $H_0 = 95$ oe $H_2 = 155$ oe, $H_4 = 732$ oe となる。 これらの値を(22)に代入して周波数2GHz, 3GHzについて計算すると附図5の実線のような結果が得られる。

附図2のようにHeの種々の点で磁気弾性共鳴吸収曲線を拡大してΔHを読みとり附図5に重ねて記してある。 2GHzにおいては理論と実験とでは曲線の傾きが3倍程度異なっているが3GHzではよく合っている。 この差は内部磁界分布として(4)式(又は(18)式)を用いた事に由来するものと考えられる。 信号周波数が低い時は印加磁場も小さく試料は飽和するまで磁化されないから内部磁場分布は図11のように(4)式より傾きがずっと小さくなる。 そこでHeが比較的小さい時に(4)式によって計算した $dl/dH_e$ (理論値)と実際の $dl/dH_e$ (実験値)がどう違うか検討してみよう。 $H_e = H_{e0}$ のとき実際の $l$ が $l_1$ であり(4)式から計算した $l$ は $l_1'$ であるとしよう。 Heを$\Delta H_e$だけ増した時それらは夫々 $l_2$, $l_2'$ になるものとすれば、 $l_2' - l_2$ は $l_1' - l_1$ よりも小さい。 何故ならHeを増す事によって試料はより飽和に近づき、内部磁場分布は飽和を仮定した(4)式に近づくはずだからである。 それ故

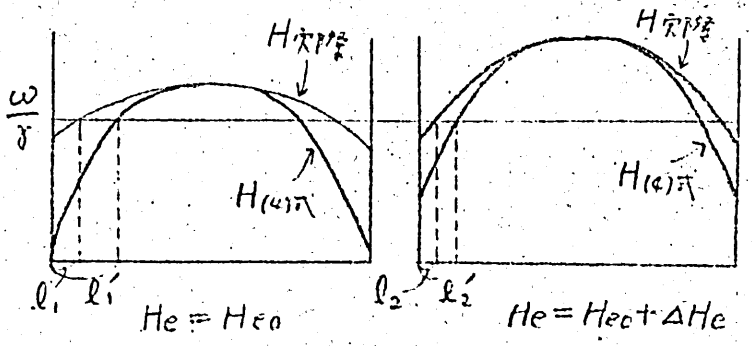



図11. $dl/dH_e$ の理論と実際の差を説明する図

$$l_1 - l_2 < l_1' - l_2'$$

であるから

$$\left|\frac{dl}{dH_e}\right|_{実際} < \left|\frac{dl}{dH_e}\right|_{(4)式}$$

となり $\Delta H$ に関する(22)式より明らかなように $\Delta H$ は周波数が低いほど理論値よりも大きな値を示す事がわかる。

以上の事実を逆に用いれば試料の内部磁場分布を共鳴吸収の実験から求める事ができる。 それとは若干異なった方法即ち印加磁場とパルス信号の遅延時間測定から内部磁場を逆算した報告が院にあるが[9]、遅延時間の測定には誤差が多い事からしてこの方法による方がすぐれているのではないかと思われる。

又[110]試料についても殆んど同様の実験結果が得られた。もちろん異方性磁場 $H_a$ の値が[100]より100oe大きいために図形がそれだけ右へずれるという差はある。

## 4. 弾性共鳴吸收

3章で述べた磁気弾性共鳴吸收を振巾変調するような形で、弾性波の複屈折性に起因すると思われる共鳴吸收が存在する（附図6参照）。そのメカニズムは次のようなものであると考えられる。試料端面で励振された静磁波は右回り円偏波であるから転回点TPで変換されるスピン波も交叉点CPで更に変換される弾性波も直流磁場に対して右回りの円偏波である。但し前章同様CPで突然にスピン波から弾性波に変るという単純化されたモデルに沿って考える事にする。

[100]軸を試料の軸方向に取れば横波弾性波の偏波方向は互いに直角な[010],[001]方向となりYIGのような立方結晶では両者は等価であるから複屈折性は現われない。しかし[110]軸を試料軸方向にとると偏波方向は[$\bar{1}$10],[001]でこの2方向については異方性が現れるはずである。事実YIGでは[$\bar{1}$10]方向を向いた直線偏波の弾性波の速度は3.950$\times 10^5$cm/sec, [001]は3.844$\times 10^5$cm/secであり複屈折的である。(8)

そこでCPを出発した円偏波弾性波を夫々直角方向成分に分けて考えれば、初め時間的に$\pi/2$だけ位相差のあったものが、信号が端面に向って進むに従って増加しそれが$3\pi/2$になると円偏波の向きは逆転する事になる。端面で反射して再びCPに戻った弾性波が丁度そのように逆回転の円偏波になっていると右回りの円偏波であるスピン波には変換されずに弾性波のままでTP更に試料中心部を通り抜けてもう一つの端面まで到達する。従ってパルス変調したマイクロ波信号を試料に加えれば種々の軌跡と時間遅れを持った信号が試料両端で検出されるので図12のように入射側に出てくるものを$R(m,n)$, 試料を透過して反対側に出るものを$T(m,n)$で表わす事にしよう。(9) 印加磁場の大きさを変えると端面とCPの距離が変り丁度上のように左側から励振された信号が試料中心部を通り抜けるようにFP加磁場を設定する事ができる。その時$R(1,1)$は最小値をとるはずであるが$T(1,1)$は最大とは限らない。何故なら左側のCPから右側の端面までの距離とそこから右側CPまでの距離の和が両直線偏波の位相差をもとの$\pi/2$にして再び円偏波の向きを逆転させているとは限らないからである。これらの予測は実験的にも確かめられた。

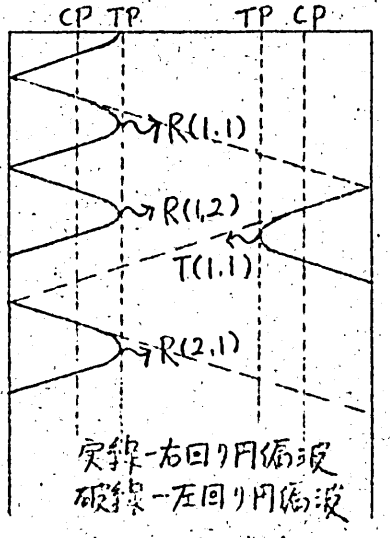



図12 試料両端で検出される信号

次に無変調の信号を与えて反射を観測する共鳴吸收実験について述べよう。入射信号のうち大部分は試料に結合せずそのま

ま反射してくるが，印加磁場を変えると試料のみかけのインピーダンスが変るためにその反射波は緩慢な変化を示す．そしてその上に乗って R(1,1) に相当する部分が小さな振巾の変動をするが，それ以外の R(n,n) に当る電力は試料を往復する間に減衰して殆んど観測されないものと思われる．

ではこの弾性共鳴吸収のピーク間隔を前章と同様にして計算してみよう．印加磁場の変化 $\Delta H_e$ による端面と CP 間の距離の変化を $\Delta l$ とし，2方向の直線偏波の伝播速度を $C_{x1}$, $C_{x2}$ とすれば隣り合う吸収のピーク間では次の関係が成り立つ．

$$\Delta l \cdot f\left(\frac{1}{C_{x1}} - \frac{1}{C_{x2}}\right) = \frac{1}{2} \tag{23}$$

この式は前章の (17) 式と殆んど同じであり解き方も同じである即ち隣り合う共鳴ピークの直流磁場の差を $\Delta H$ とすれば (23) は

$$\Delta H = \frac{1}{2\frac{dl}{dH_e} \cdot f \cdot \left(\frac{1}{C_{x1}} - \frac{1}{C_{x2}}\right)} \tag{24}$$

と書き直され，$dl/dH_e$ については前章と全く同じものを用いる．

直径 3mm，長さ 10mm の〔110〕円柱状 YIG について (24) 式を計算したもの及び $f = 2\,GHz$ における実験結果を附図7に示す．これも前章の 2GHz での理論値，実験値の差と類似した開きがあるが，ここでも理論値を左右するものが端面と CP の間隔であるから，信号周波数を上げれば両者は次第に一致するものと期待できよう．

## 5. あとがき

損失の小さい単結晶 YIG は静磁波，磁気弾性波のすぐれた線路であり，有限長の試料においては長さ方向の共鳴が観測される．それらの共鳴吸収によって我々は次の事を明らかにした．

① 導波管の励振の場合と同様結合用アンテナの形状を変える事によって静磁波の伝送モードを変える事ができる．実験的には最低次及び次の低次モードを任意に分離する事が可能となった．又ストリップ形マウントによっては最低次モードが効率良く励振されている事が判明した．

② 磁気弾性波の共鳴吸収ピーク間隔はほとんど弾性波の伝播によって決定され，内部磁場の記述が正しければ理論値は実験値と良く一致する

③ 弾性波の複屈折性に起因する共鳴吸収が存在する．印加磁場の値によって信号電力が他端へ逃げて行ったり，励振端に戻ったりするために反射電力に変動が現われる．又この現象をうまく用いれば遅過形の遅延素子が得られる．

## 附録

N及び $\Delta H$ の計算

$$N = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k(z)\,dz \qquad \left(\zeta = \frac{2z}{L} \rightarrow dz = \frac{L}{2}d\zeta\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} k(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \frac{LY_i}{2\pi R}(2\pi M_s)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}\left\{\Delta H + \frac{6\pi M_s \rho^2\zeta^2}{(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}^{-\frac{1}{2}} d\zeta \qquad ((7),(8),(9)式代入)$$

$$= \frac{Y_i}{\pi\rho}(2\pi M_s)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{6\pi M_s\rho^2}{(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\log\left|\zeta+\sqrt{\zeta^2+c}\right|\right]_{-1}^{1}$$

但し $c = \dfrac{(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}}\Delta H}{6\pi M_s \rho^2} \ll 1$

$$= \frac{Y_i}{\pi\rho^2\sqrt{3}}(1+\rho^2)^{\frac{5}{4}}\log\frac{\sqrt{1+c}+1}{\sqrt{1+c}-1}$$

$c \ll 1$ であるから

$$\log\frac{\sqrt{1+c}+1}{\sqrt{1+c}-1} \simeq \log\frac{4}{c} = \log\frac{4\pi M_s}{\Delta H}\frac{6\rho^2}{(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$\rho = 0.3$, $4\pi M_s = 1780$ gauss, $Y_i = 2.41$ を代入すれば

$$N \simeq 5.46\log\frac{775}{\Delta H}$$

これを逆に $\Delta H$ について表わせば

$$\Delta H = 775 \times 10^{-0.0796N}$$

## 参考文献


(1) J.R. Eschbach, "Spin-Wave Propagation and the Magneto-elastic Interaction in Yttrium Iron Garnet" JAP 34 P1298 1963

(2) C.E. Patton, E. Schlömann "Magnetostatic Modes in Axially Magnetized Polycrystalline YIG Rods at 9.96 GHz" IEEE Trans. on MAG 4 P596 1968

(3) 栗井, 池上 "ストリップ型マウントによる静磁波の励振" 通信学会マイクロ波研究会資料, MW-69-21 (1969-07)

(4) T. Kohane, E. Schlömann, R.I. Joseph "Microwave Magneto-elastic Resonances in a Nonuniform Magnetic Field" JAP 36 P1267 1965

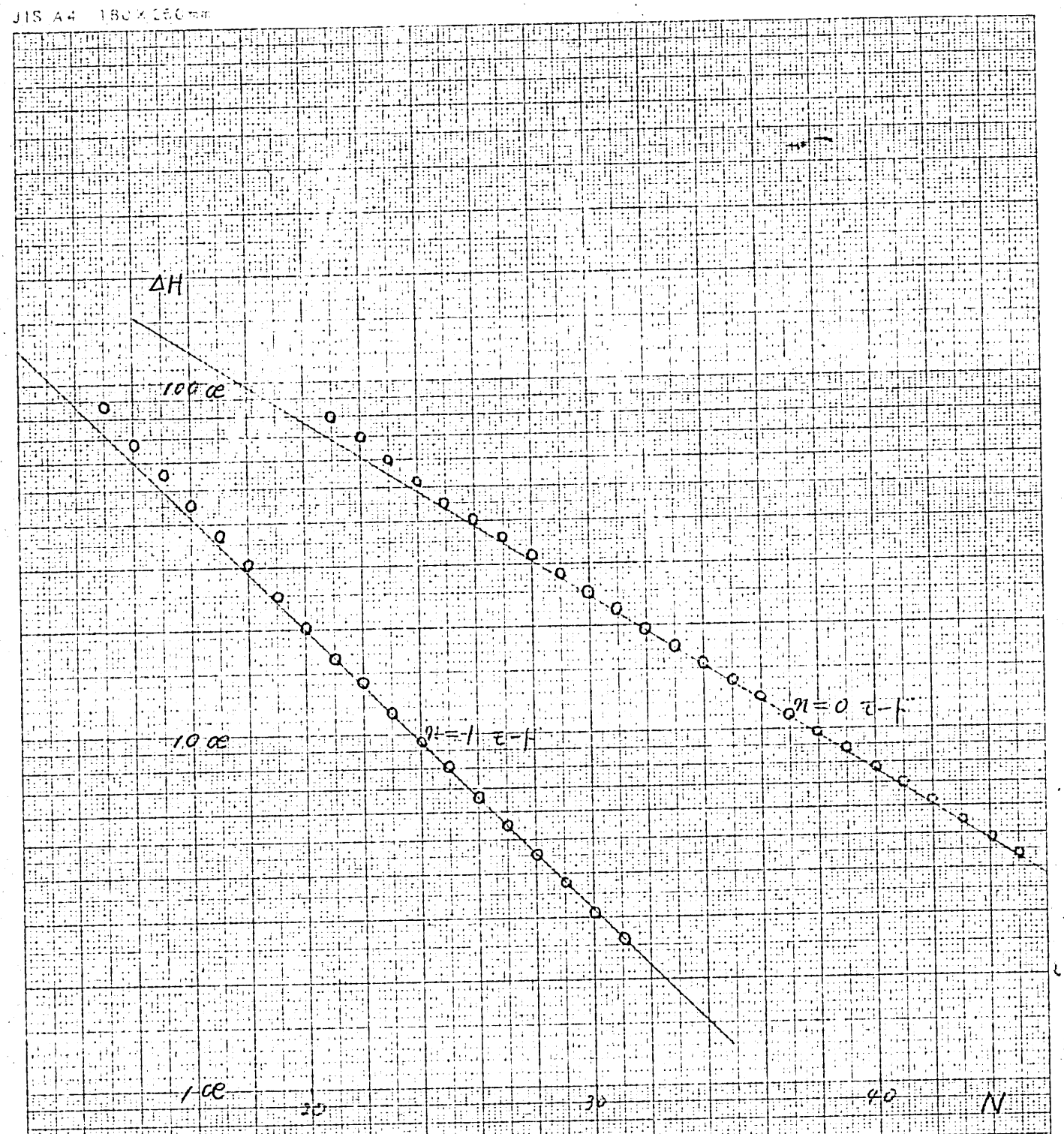
(5) R.I. Joseph, E. Schlömann "Theory of Magnetostatic Modes in Long, Axially Magnetized Cylinders" JAP 32 P1001 1961

(6) R.W. Damon, H. van de Vaart "Propagation of Magnetostatic Spin Waves at Microwave Frequencies. II. Roar" JAP 37 P2445 1966

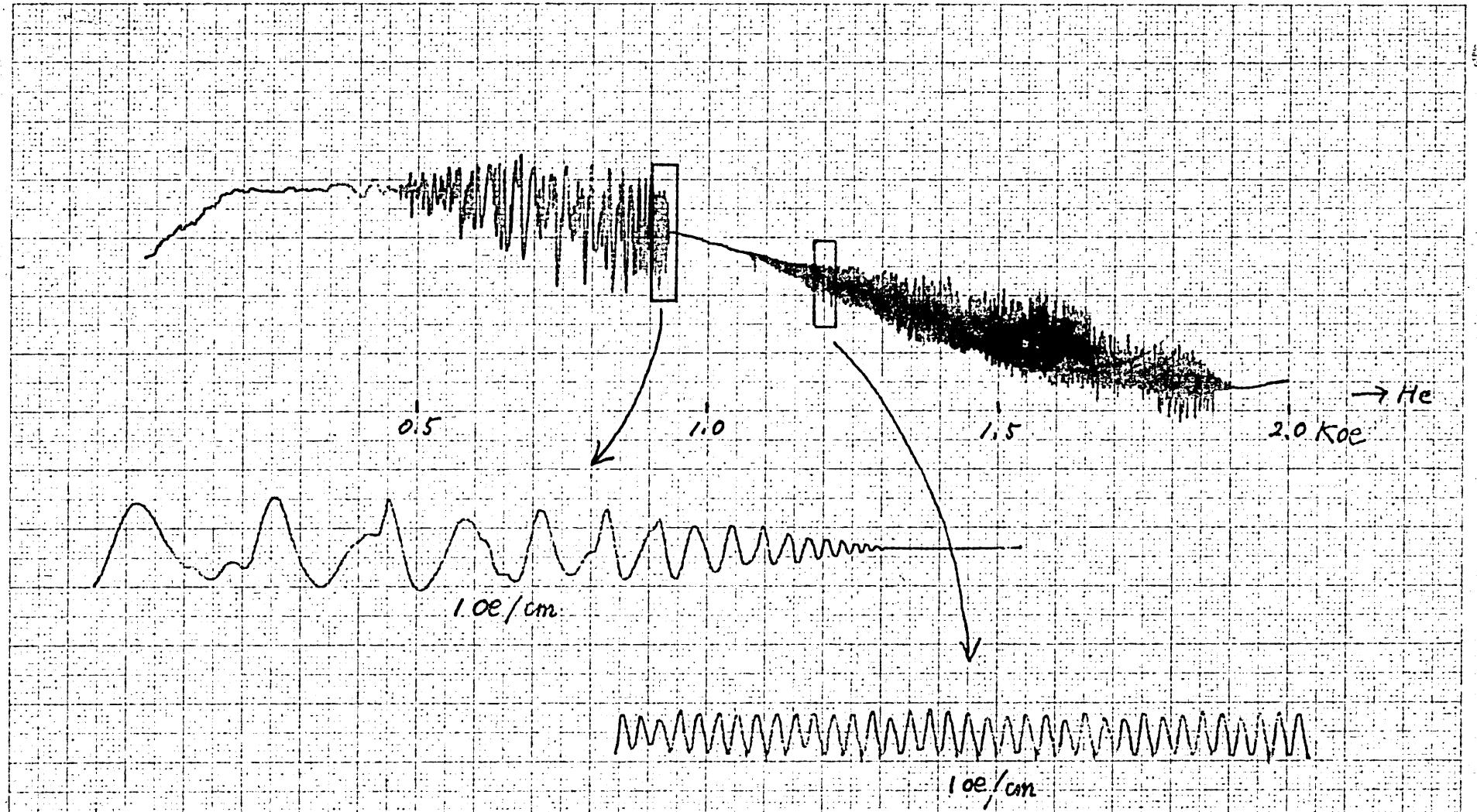
(7) W. Strauss "Elastic and Magnetoelastic Waves in Yttrium Iron Garnet" Proc. IEEE 53 P1485 1965

(8) E.K. Kirchner "Rapid Amplitude Fluctuation of Magnetoelastic Wa

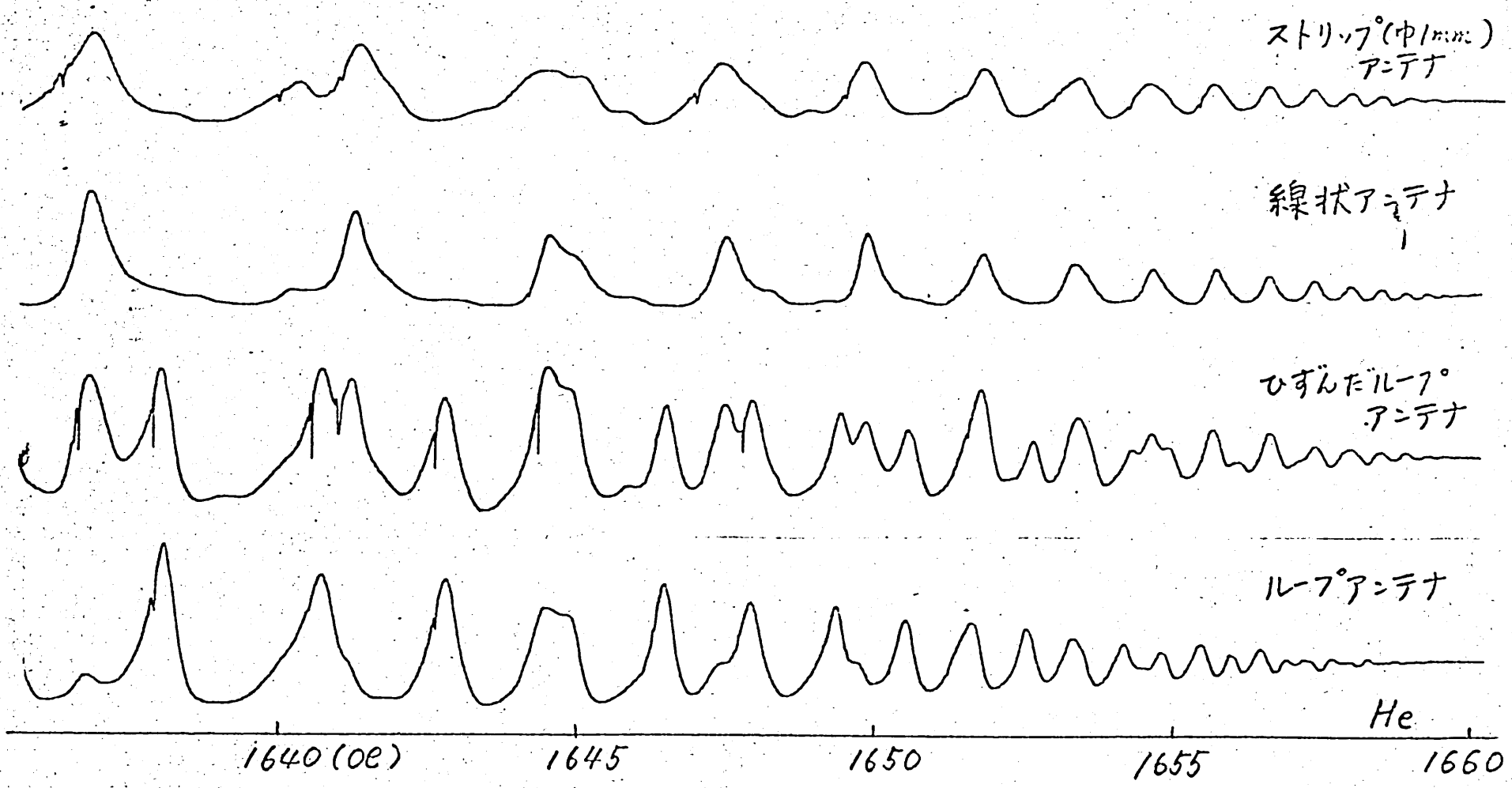
(9) D.F. Lacklison, M.F. Lewis Electron. Letters 2 398 1966; 2, 457 (1966)



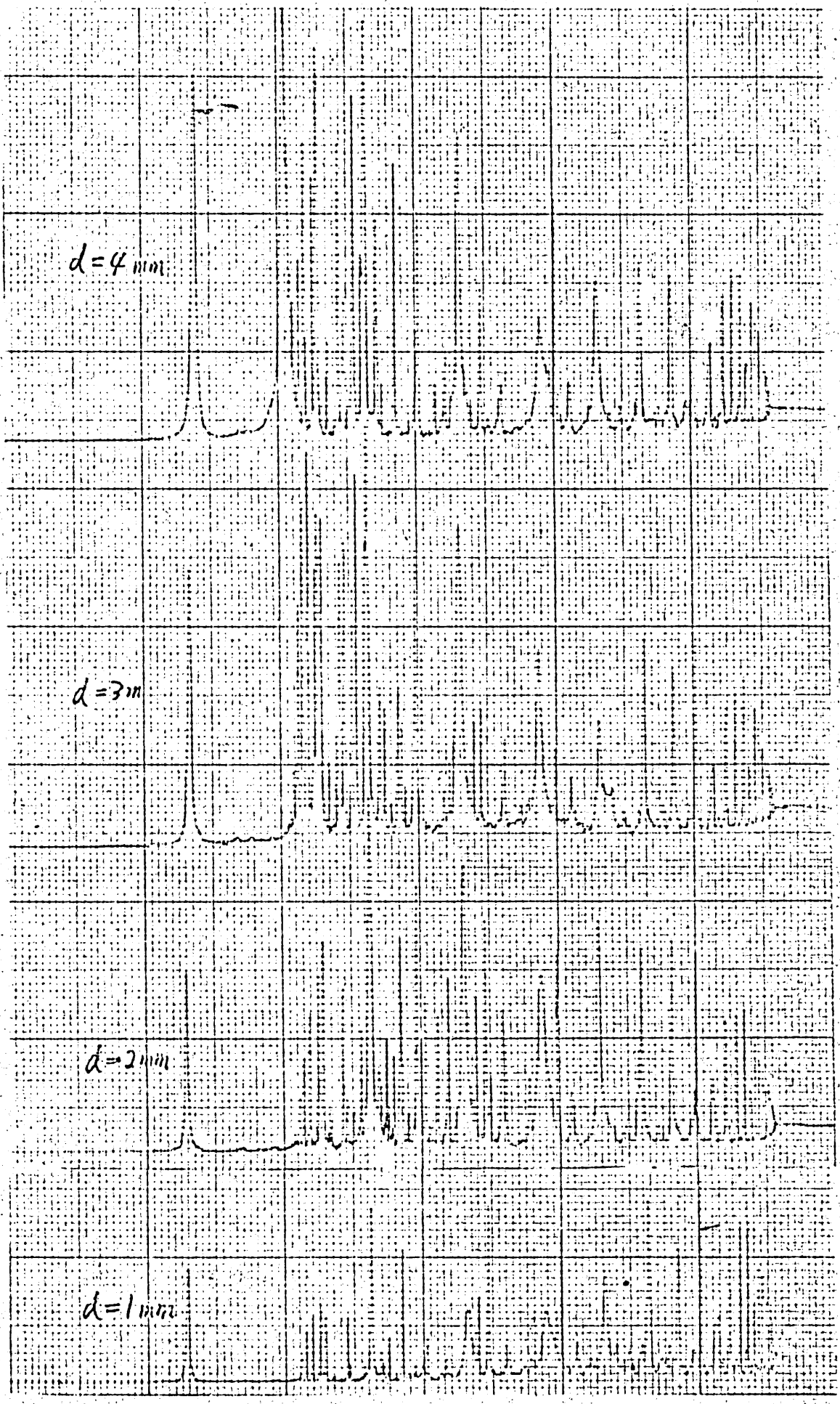

附図1 静磁共鳴の定在波数とΔH
([100]試料, f=4GHz, 同軸形マウント)



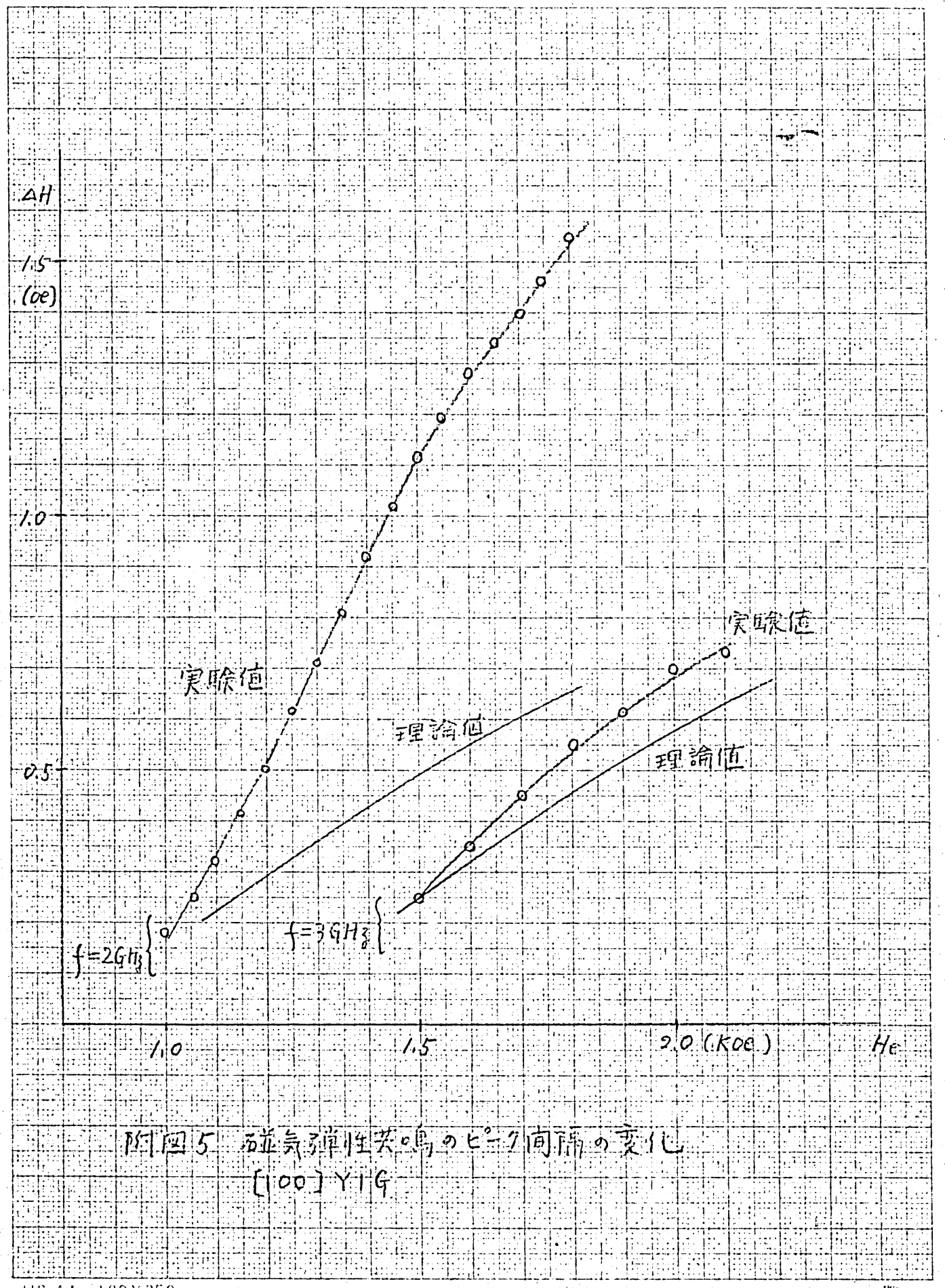

附図2 [100]試料の共鳴吸収(全体図と拡大図)
$f = 2GHz$, ストリップ形マウント



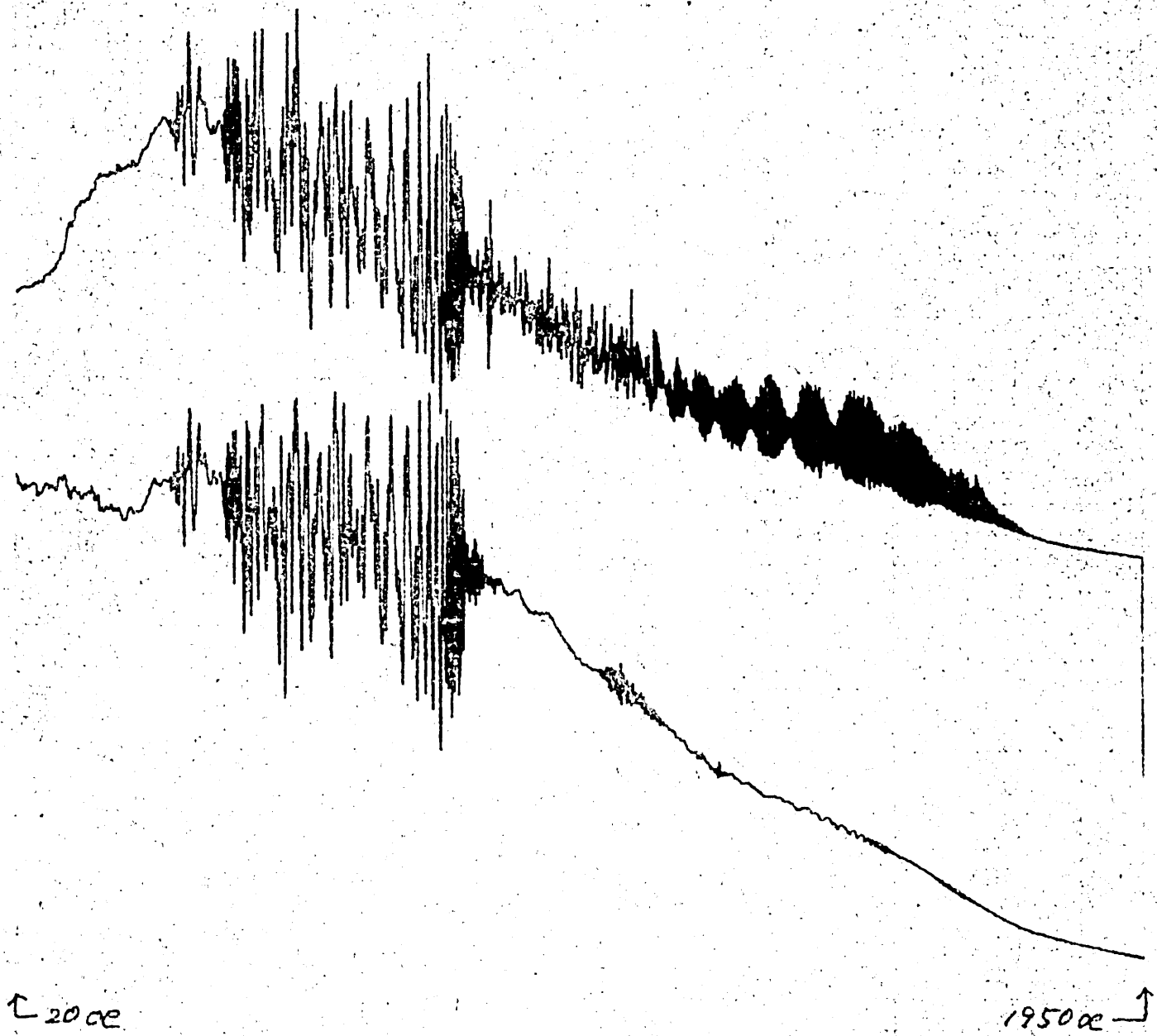

附図3 アンテナの形状による吸收曲線の違い 4GHz, [100] YIG




附図4　励振長による共鳴ピークの移動　f=4GHz
同軸形マウント，[100] YIG

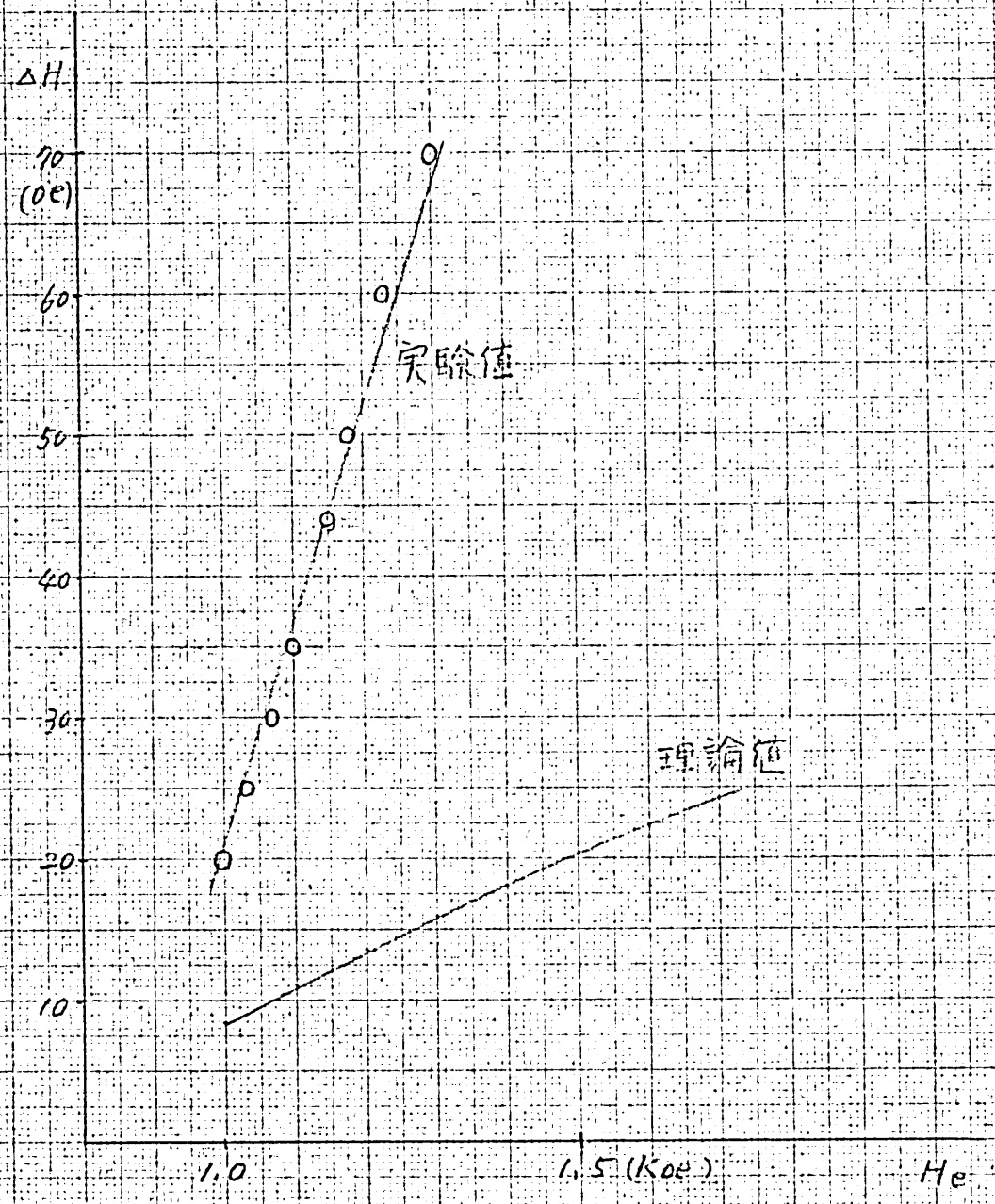



附図5 磁気弾性共鳴のピーク間隔の変化
[100] YIG




附図6 〔110〕試料の共鳴吸収
(片側端面に欠損有り)

$f = 2\,GHz$, ストリップ形マウント




附図7 弾性共鳴のピーク間隔の変化
[110] YIG f = 2GHz

JIS A4 180×250mm

輻射科学研究会資料

# エサキダイオードを負荷した導波管形アクチブアンテナ

滝　　猪　一
六　島　　克
森　　啓　真
北　村　幹　夫

（大阪府立大学工学部）

昭和45年12月

## 1. まえがき

従来のアンテナは自由空間を伝搬する電磁波と伝送線に沿って伝搬する電磁波との間の整合、変換素子としてのみ考えられ、四端子理論の概念より受動アンテナとして示されている。最近このアンテナ系に他の素子を含む回路を組合せてそれ等を一体化したものがIntegrated antenna systemと呼ばれ従来にない、能動、非線形、非可逆、時間的変化等の特性をもった系に拡張されている。アクチブアンテナはこの一種で、アンテナ部に能動素子を組込むことによりアンテナの小形化、広帯域化を計り、またその特性を電気的に制御したり、アンテナ部で低雑音増幅を行ない給電部の損失を補償してSN比の向上に寄与することができる。[1]

能動素子としてエサキダイオード(ED)を負荷した受信増幅形アンテナとしては、UHF帯以下においてはループアンテナやダイポールアンテナにEDを負荷したものが報告されている。[2],[3] マイクロ波帯においては導波管ストロットアンテナにEDを負荷したものが報告され、サーキュレータ等の非可逆素子の省略により相当な重量と空間の節約が見込まれている。[4] また普通の導波管部にEDを負荷すると導波管のしゃ断周波数附近で発振し、安定に動作させることが困難となるのでこの発振を防止した導波管形ED増幅器も報告されている。[5]

本報告においては電磁ホーンと導波管の接続部にEDを負荷し、誘導性窓で調整を取ることにより増幅作用をもった導波管形アクチブアンテナの構成を試み、その特性を解析して実験結果と比較検討した。この構造においては、電磁ホーンは、一様な導波管程急激なしゃ断特性を示さないのでしゃ断域における発振をさけることができ、通過域においては自由空間に接続して略一様な放射抵抗を示すので、この放射抵抗によりEDを安定化させることにより比較的簡単な構造で中程度の増幅度と帯域巾をもったアクチブアンテナが構成され、受信アンテナとして給電線の損失を補償しSN比の改善が期待できる。

## 2. 解　　析

### 2．1　等価回路

図１に示すように一様な導波管と電磁ホーンの接続部にＥＤを負荷した場合の等価回路表示を求める。ＥＤを図２のように中心導体を同心的に取り囲む誘電体層で置換して考え中心導体にはｙ方向に一様な電流Ｊが流れているとしてその挿入点より見たインピーダンスを計算する。この場合ＥＤの寸法が波長に比して十分小さいのでＥＤ内部の電磁界はほぼラジアルガイドの基本姿態で表わせると仮定して誘電体層の影響を近似的に考慮する。図１の場合のＥＤ外部の必要な電磁界成分は式(1)，(2)で与えられる。

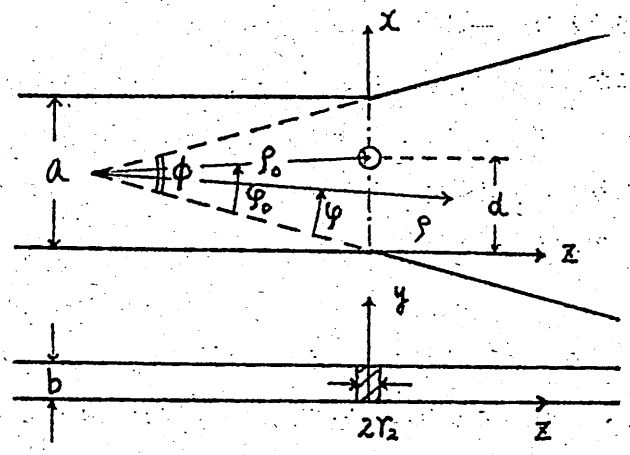



図１

$$Z \leq 0 \quad E_{y1}(x,Z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi}{a} x\, e^{\gamma_m Z}$$

$$H_{x1}(x,Z) = \frac{1}{j\omega\mu_0}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_m \sin\frac{m\pi}{a} x\, e^{\gamma_m Z} \qquad (1)$$

$$\rho \geq \rho_0 \quad E_{y2}(\rho,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m H_{mp}^{(2)}(k\rho) \sin\frac{m\pi}{\phi}\varphi$$

$$H_{\varphi 2}(\rho,\varphi) = \frac{1}{j\omega\mu_0}\sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\partial}{\partial\rho} H_{mp}^{(2)}(k\rho) \sin\frac{m\pi}{\phi}\varphi \qquad (2)$$

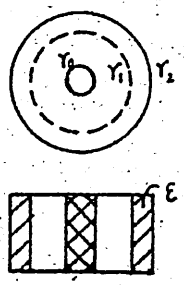



図２

ただし　$\gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2}$，$k = \frac{2\pi}{\lambda}$，$p = \frac{\pi}{\phi}$　　(3)

で $H_{mp}^{(2)}(k\rho)$ は $mp$ 次の第２種Hankel関数を示す。

$Z = 0$，$\rho = \rho_0$ における境界条件を

$$E_{y1}(x,0) = E_{y2}(x,0) \approx E_{y2}(\rho_0,\varphi) \qquad (4)$$

$$H_{x1}(x,0) - H_{x2}(x,0) = -J' \delta(x-d) \approx H_{x1}(x,0) - H_{\varphi 2}(\rho_0,\varphi)$$

なる式(4)で近似的に満足させて両領域の電磁界を求め、ED挿入点より導波管側を見たインピーダンス $Z_{r2}$ を計算すると

$$Z_{r2} = \left[ -\int_0^b E_y(x,0)\,dy \,/\, J' \right]_{x=d+r_2}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{j\,2\omega\mu_0 \frac{b}{a}}{\gamma_m - k \dfrac{H_{mp}^{(2)'}(k\rho_0)}{H_{mp}^{(2)}(k\rho_0)}} \sin\frac{m\pi}{a}d \sin\frac{m\pi}{a}(d+r_2) \qquad (5)$$

$$= Z_{ow} + Z_{sw}$$

となる。

ここに $Z_{ow}$ は $m=1$ なる基本モードによる項、$Z_{sw}$ は $m \geqq 2$ なる高次モードによる項を示す。更に誘電体層の影響による項がこれに加わるがこの項はEDの低周波等価回路定数と対応している[6]。また、調整用誘導性窓は等価伝送線路に並列に入るインピーダンスとして表わさられるので、この場合の等価回路は結局図3のように表わされる。(付録参照)

$$Z_{o1} = j\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{b}{\lambda}\right)\left(\frac{4\pi}{a\gamma_1}\right)\sin^2\frac{\pi d}{a}$$

$$\vec{Z}_{o2} = -j\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{2b}{a}\right)\frac{H_p^{(2)}(k\rho_0)}{H_p^{(2)'}(k\rho_0)}\sin^2\frac{\pi\varphi}{\phi} \qquad (6)$$

$$\overleftarrow{Z}_{o2} = \vec{Z}_{o2}^{\,*}$$

$$Z_{sw} = j\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{b}{\lambda}\right)\left\{ l_n\left(\frac{2a}{\pi r_2}\sin\frac{\pi d}{a}\right) - 2\sin^2\frac{\pi d}{a} + K_1 \right\}$$

$Z_{o1}$, $\vec{Z}_{o2}$, $\overleftarrow{Z}_{o2}$ はED挿入点両側の等価伝送線路の特性インピーダンス、$K_1$ は補

正項、$Z_{sw}$ はＥＤの挿入による電磁界の乱れに対応するインピーダンス、$Z_w$は誘導性窓の等価インピーダンス、また $-R$ , $C_j$ , $R_s$ はそれぞれＥＤの負性抵抗、接合容量、直列抵抗を示し、$L_s$, $C_s$ は略ＥＤの直列インダクタンスおよび容器容量に等しい。以上により図３の等価回路に基いて安定条件の検討、増幅、雑音特性の計算が可能となる。

## 2．2　安定条件

ＥＤは０～$f_{r0}$なる広い周波数範囲で負性抵抗を示すので、発振等の不安定性を示さないように回路を構成する必要がある。図３の等価回路において$C_j$の両端より負荷側を見たアドミタンスを$Y = G - jB$とすると$Y$は受動回路でＥＤの電圧制御形負性コンダクタンス$-g = -\frac{1}{R}$が$C_j$と並列に接続されているので、Niquist線図より$Y + j\omega C_j$の軌跡が$g$を囲まなければ安定、囲めば不安定となる。この回路構成においては不規則なアドミタンス変化をするサーキュレータを含まないので、解析的にも安定条件は

1）全周波数範囲で　$G > g$

2）$G < g$なる周波数範囲で$B - \omega C_j \neq 0$

によって与えられる。

一般に導波管回路にＥＤを負荷すると導波管のしゃ断周波数$f = f_c$で$Z_{01} = j\infty$となるためにこの附近で特に発振しやすい。しかしホーン部の$\vec{Z}_{02}$は$f = f_c$の附近でも複素量を示し$Z_{01}$ほど急激にしゃ断域に移らないのでこの附近での発振を防止することができる。また$f > f_c$なる通過域ではＥＤが電磁ホーンを介して直接自由空間に接続されているため、略一様なホーンの放射抵抗によりＥＤを安定化することができ、導波管線路中に装荷する場合より他の回路素子の反射による影響が少く、安定な動作が期待できる。

## 2．3　増幅特性

図３の等価回路よりＥＤ増幅器としての透過利得を求める。図３において伝

送線路に並列に入るアドミタンスを $Y_{wd} = G_{wd} + jB_{wd}$ とし、$I_i$ を電磁ホーン開口部より入射して来た受信電力に対応する等価電流源とすると、増幅系を負荷した場合としない場合との $Y_{01}$ に与えられる電力 $P_a$ , $P_0$ は

$$P_0 = \frac{1}{2} Y_{01} \left| \frac{I_i}{Y_{01} + \vec{Y}_{02}} \right|^2 , \quad P_a = \frac{1}{2} Y_{01} \left| \frac{I_i}{Y_{01} + \vec{Y}_{02} + Y_{wd}} \right|^2 \tag{7}$$

ただし $Y_{01} = 1/Z_{01}$ $\quad \vec{Y}_{02} = 1/\vec{Z}_{02}$ (8)

となる。従って増幅系の透過利得 $g_a$ は

$$g_a = \frac{P_a}{P_0} = \left| \frac{Y_{01} + \vec{Y}_{02}}{Y_{01} + \vec{Y}_{02} + Y_{wd}} \right|^2 \tag{9}$$

となる。

2．4　雑音特性

ED から発生する雑音は $R_s$ で発生する熱雑音 $e_n^2 = 4KT_d R_s B$ と接合電流 $I_0$ によるショット雑音 $i_n^2 = 2eI_0B$ である。これらの雑音源を $Y_{wd}$ に並列に入った雑音電流源で表わすと図4の雑音等価回路を得る。ここに

$$i_{np}^2 = 4KT_d G_{eq} B \left| \frac{G_{wd}}{G_T} \right| \left| \frac{g_p}{g} \right|$$

$$i_{sp}^2 = 4KT_d G_{sp} B \left| \frac{G_{wd}}{G_T} \right| \tag{10}$$

$$G_{eq} = \frac{eI_0}{2KT_d} \quad G_{sp} = \frac{g^2 R_s}{\Delta}$$

$$g_p = \frac{-g}{\{1 + (\omega C_j / g)^2\}\Delta} \quad G_T = G_{sp} + g_p \tag{11}$$

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{1 + (\omega C_j / g)^2} - g R_s \right\}^2 + \left( \frac{\omega C_j}{g} \right)^2 \left\{ \frac{1}{1 + (\omega C_j / g)^2} - \frac{g^2 L_s}{C_j} \right\}^2$$

従って図4の等価回路より全雑音電力Nを計算すれば雑音指数 $F_a$ 等価雑音温度 $T_a$ は

$$F_a = 1 + \frac{N}{g_a K T_e B}$$

$$= 1 + \frac{4 Y_{01} \left| \frac{G_{wd}}{G_T} \right| \{ G_{eq} \left| \frac{g_p}{g} \right| + G_{sp} \} T_d + \left| Y_{01} - \vec{Y}_{02} - Y_{wd} \right|^2 T_i}{\left| Y_{01} + \vec{Y}_{02} \right|^2 T_e} \quad (12)$$

$$T_a = \frac{4 Y_{01} \left| \frac{G_{wd}}{G_T} \right| \{ G_{eq} \left| \frac{g_p}{g} \right| + G_{sp} \} T_d + \left| Y_{01} - \vec{Y}_{02} - Y_{wd} \right|^2 T_i}{\left| Y_{01} + \vec{Y}_{02} \right|} \quad (13)$$

となる。ここに $T_e$ ：入力の等価雑音温度，

$T_d$ ：ＥＤの温度，$T_i$ ：アイソレータの温度（アイソレータを用いないときは $T_i = T_\ell$ ：負荷の温度）を示す。

## 3. 計算および実験結果

以上の解析結果より通常用いられている $-R = 70\,\Omega$ 前後のＥＤを用いて 7 GHz 帯でこの種のアクチブアンテナの構成を試みた。ＥＤは Silvania D 5561（$-R = 73.5\,\Omega$, $C_j = 0.58\,pF$, $R_s = 2.2\,\Omega$, $f_{ro} = 21.2$ GHz, $L_s = 0.1\,nH$, $C_p = 0.4\,pF$）でこの値を用い $\phi = \frac{\pi}{6}$ なるホーンの開き角の場合の計算結果を図５，図６に示す。図５はＧ，Ｂ の周波数による変化より求めた。

安定条件の検討で $b = 0.8$ mm の場合の結果を示す。$w/a = 1.0$ は誘導性窓のない場合で $f \approx f_c$ の附近でも安定条件を満足しているが増幅特性は殆んど示さない。$Z_w$ の値として一応ＥＤとの相互誘導を無視した一様な導波管中の窓の値を用い、$w/a$ を~~増加~~減少してゆくと図示のように通過領域での受動コンダクタンスが減少して $|-g|$ に近付きやがて安定条件を満足しなくなって発振する。計算結果より導波管の高さ b と窓の幅 $w/a$ とを $b = 0.6 \sim 1.0$ mm，$w/a = 0.5 \sim 0.6$ 程度の範囲に選ぶと安定条件を満足して透過利得をもつことが判り、この場合の増幅，雑音特性の計算結果を図６に示す。

実験は b ＝0.8 mm で構成した場合について行ない、WRJ－7 導波管とホーンアンテナの高さを徐々にテーパをつけて絞り、$Z_{sw}$ が最小になる $d/\lambda = 0.5$ の位置に E.D を負荷して $w/a \simeq 0.6$ の窓を付加した。この場合の増幅系としての利得および雑音指数の周波数特性，バイアス依存性，飽和特性を図７～図９に示す。計算値よりも中心周波数が低く、また $w/a$ の値が大きくなっているが、これは ED バイアス回路による管内の不連続性のため $Z_{sw}$ が増加し、また ED と窓との相互誘導に基づくものと思われる。猶テーパ部の反射が残存しているため周波数特性の結果はあまり滑かでない。現在までに得られている結果としては、増幅器の利得は中心周波数 6.5 GHz で約１２dB，帯域幅４７０MHz，雑音指数９dB 前後、飽和入力レベル－４５dBm 程度である。

## 4. むすび

導波管形 DE 増幅器で問題となる導波管のしゃ断周波数附付で生じる発振を防止するため、電磁ホーンの開口部近くに ED を負荷し、同時にアクチブアンテナとして動作させた場合の特性の解析を行ない実験結果と比較検討した。構造的な問題としてはテーパ部の反射を少なくして周波数特性を滑かにするために、広帯域にフラットな特性のテーパが必要である。電気的にはサーキュレータを用いない点から雑音特性は余り低くならず、利得もそれ程大きくなし得ないが、小形軽量、中程度の増幅度をもった受信用増幅アンテナとして給電線の損失を補償しSN 比の向上が期待できる。又アレイ素子として用いることができれば種々の応用が考えられるがこの場合は相互インピーダンスを考慮した十分な安定性の検討が必要である。

# 文　献


(1) H. H. Meinke, "Aktive Antennen", N. T. Z., 19, 12, p.697 (Dec 1966)

(2) H. H. Meinke, "Tunnel diodes integrated with microwave antenna systems," The Radio and Electronic Engineer, 31, 2, p.76 (Fed 1966)

(3) 藤本，"エサキダイオードを負荷したアクチブアンテナ," 信学誌, 48, 4, p.758 (昭40. 4)

(4) M. E. Pedinoff, "The negative conductance slot amplifier" IRE Trans., MTT-9, p.557 (Nov 1961)

(5) 豊田，牧本，"導波管透過形エサキダイオード増幅器" 信学論(B), 52-B, 5, p.299 (昭44. 5)

(6) 滝、六島、森、福島、"導波管形アクチブアンテナの解析". 信学会全大, 407 (Nov 1968)

(7) 六島、森、福島，"導波管形エサキダイオード発振器の特性." 信学論(B), 52-B, 7, p.375 (昭44. 7)

付録　式(6)の導出

式(4)の境界条件で近似的に Z = 0 上の電磁界と $\rho = \rho_0$ 上の電磁界を連続させこの面上では $\frac{\pi}{a}x \approx \frac{\pi}{\phi}\varphi$　とおくと式(1)～(4)より

$$A_m = \frac{j\,2\omega\mu_0 J'/a \cdot H_{mp}^{(2)}(k\rho_0)}{k H_{mp}^{(2)}(k\rho_0) - \gamma_m H_{mp}^{(2)}(k\rho_0)} \sin\frac{m\pi}{a}d \qquad (A\,1)$$

$$B_m = A_m / H_{mp}^{(2)}(k\rho_0)$$

となる。上式を式(1), (2)に代入することにより Z = 0 （$\rho = \rho_0$） 上の電磁界が求まり $Z_{r_2}$ は式(5)の形となる。

式(5)の $m = 1$ の項 $Z_{ow}$ は

$$\frac{1}{Z_{ow}} = \frac{\gamma_1}{2j\omega\mu_0\frac{b}{a}\sin^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)} - \frac{k H_p^{(2)}(k\rho_0) / H_p^{(2)}(k\rho_0)}{2j\omega\mu_0\frac{b}{a}\sin^2\left(\frac{\pi\varphi_0}{\phi}\right)} \qquad (A\,2)$$

$$= \frac{1}{Z_{01}} + \frac{1}{\vec{Z}_{02}}$$

とおくと $Z_{01}$, $\vec{Z}_{02}$ は式(6)で与えられ、$\rho > \rho_0$ の領域を両方向に進行する波を考慮して計算すれば $\rho$ の正負方向に進行する電磁波に対応する特性インピーダンス $\vec{Z}_{02}$, $\overleftarrow{Z}_{02}$ は $\overleftarrow{Z}_{02} = \vec{Z}_{02}^{*}$ なることが判る。

つぎに $m \geq 2$ の項による $Z_{sw}$ は

$$H_{mp}^{(2)}(x) = J_{mp}(x) - j N_{mp}(x) \qquad (A\,3)$$

において、$mp \gg x$ のときは

$$J_{mp}(x) \approx \frac{1}{(mp)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{mp} \qquad N_{mp}(x) \approx \frac{(mp-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^{mp} \qquad (A\,4)$$

を用いて

$$-\frac{H_{mp}^{(2)\prime}(x)}{H_{mp}^{(2)}(x)} \approx \frac{p}{x}\left[m - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{p}\right)^2\left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2 p}\right\}\right] \qquad (A\,5)$$

また

$$\gamma_m \approx \frac{\pi}{a}\left\{m-\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2}{\lambda}\right)\cdot\frac{1}{m}\right\} \qquad (A\,6)$$

$$p=\frac{\pi}{\phi}, \quad \rho_0\phi = \ell \approx a \qquad (A\,7)$$

の関係を用いると

$$\frac{1}{\gamma_m - k H_{mp}^{(2)'}(k\rho_0)/H_{mp}^{(2)}(k\rho_0)}$$

$$\approx \frac{a\ell}{\pi(a+\ell)}\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2}{\lambda}\right)\frac{\ell}{a}\frac{1}{m^3}+\frac{2a}{a+\ell}\left(\frac{2\ell}{\lambda}\right)^2\frac{1}{pm^4}\right\} \qquad (A\,8)$$

となり、$\frac{1}{m}\sin\frac{m\pi d}{a}\cdot\sin\frac{m\pi(d+r_2)}{a}$ 等の総和はよく知られた公式を用い、

$(a+\ell)/a \approx 2$ とおくと

$$Z_{sw} = \sum_{m=2}^{\infty} j\omega\mu_0\frac{2b}{a}\cdot\frac{\sin\frac{m\pi d}{a}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}(d+r_2)}{\gamma_m - k H_{mp}^{(2)'}(k\rho_0)/H_{mp}^{(2)}(k\rho_0)} \qquad (A\,9)$$

$$\approx j\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{b}{\lambda}\right)\left\{\ell_n\left(\frac{2a}{\pi r_2}\sin\frac{\pi d}{a}\right)-2\sin^2\frac{\pi d}{a}+K_1\right\}$$

$$K_1 = \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2\left[\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{36}\left(\frac{\pi d}{a}\right)^2-\ell_n\frac{2\pi d}{a}\right\}-\sin^2\frac{\pi d}{a}\right.$$

$$\left.+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\phi}{\pi}\frac{1}{m^4}\sin^2\frac{m\pi d}{a}\right] \qquad (A.10)$$

と式(6)が導かれる。

式(5)の $Z_{r2}$ に同軸誘電体層の影響の項が $L_s$, $C_s$ として、接合部の定数 $r_s$, $C_j$, $-R$ とともに接続される。$L_s$, $C_s$ は $r_2 \ll \lambda$ なる場合には

$$L_s \approx \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ell_n\left(\frac{r_2}{r_0}\right) \qquad C_s = C_p - C_0, \qquad (A\,11)$$

$$C_p = \frac{\pi\varepsilon_0}{b}\left\{\varepsilon(r_2^2-r_1^2)+(r_1^2-r_0^2)\right\}, \quad C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{b}(r_2^2-r_0^2)$$

と与えられるので、$L_s$ はＥＤの直列インダクタンス，$C_p = C_s + C_0$ が容器容量を与えることになる[7]。また誘導性窓のインピーダンス $Z_w$ は伝送線路に並列に入いると考えられるので、この場合の等価回路は図３で与えられる。

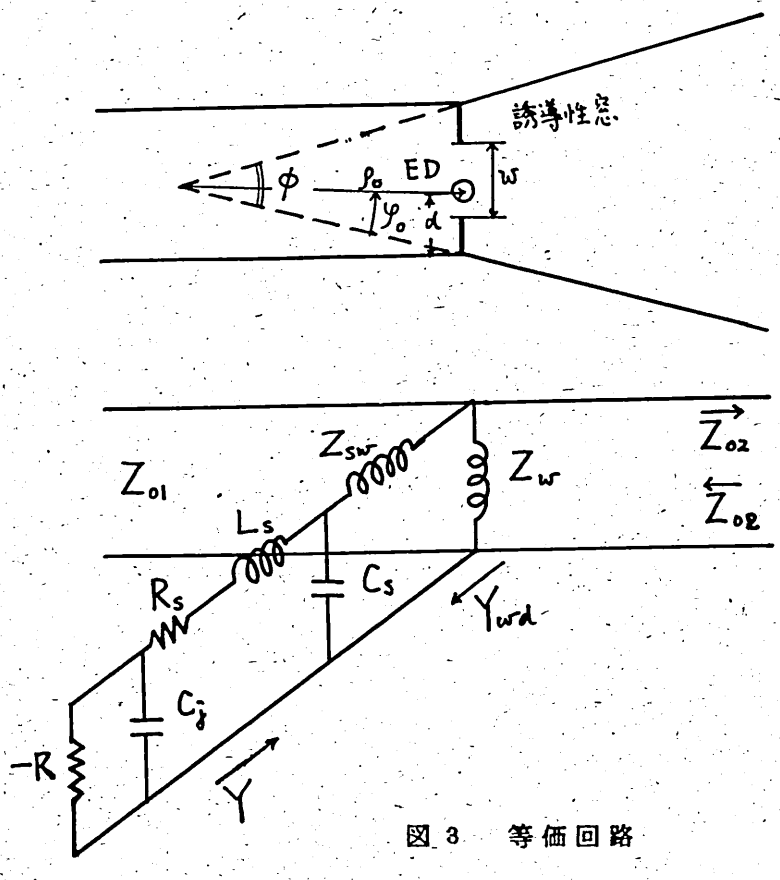



図 3　等価回路

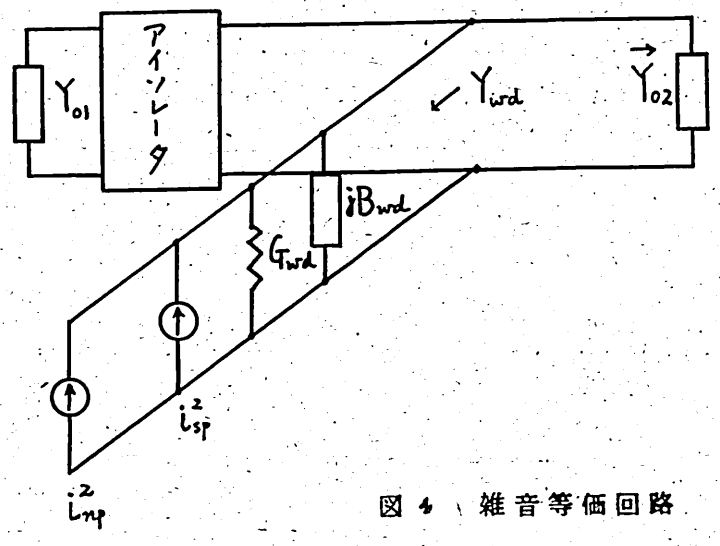



図 4　雑音等価回路

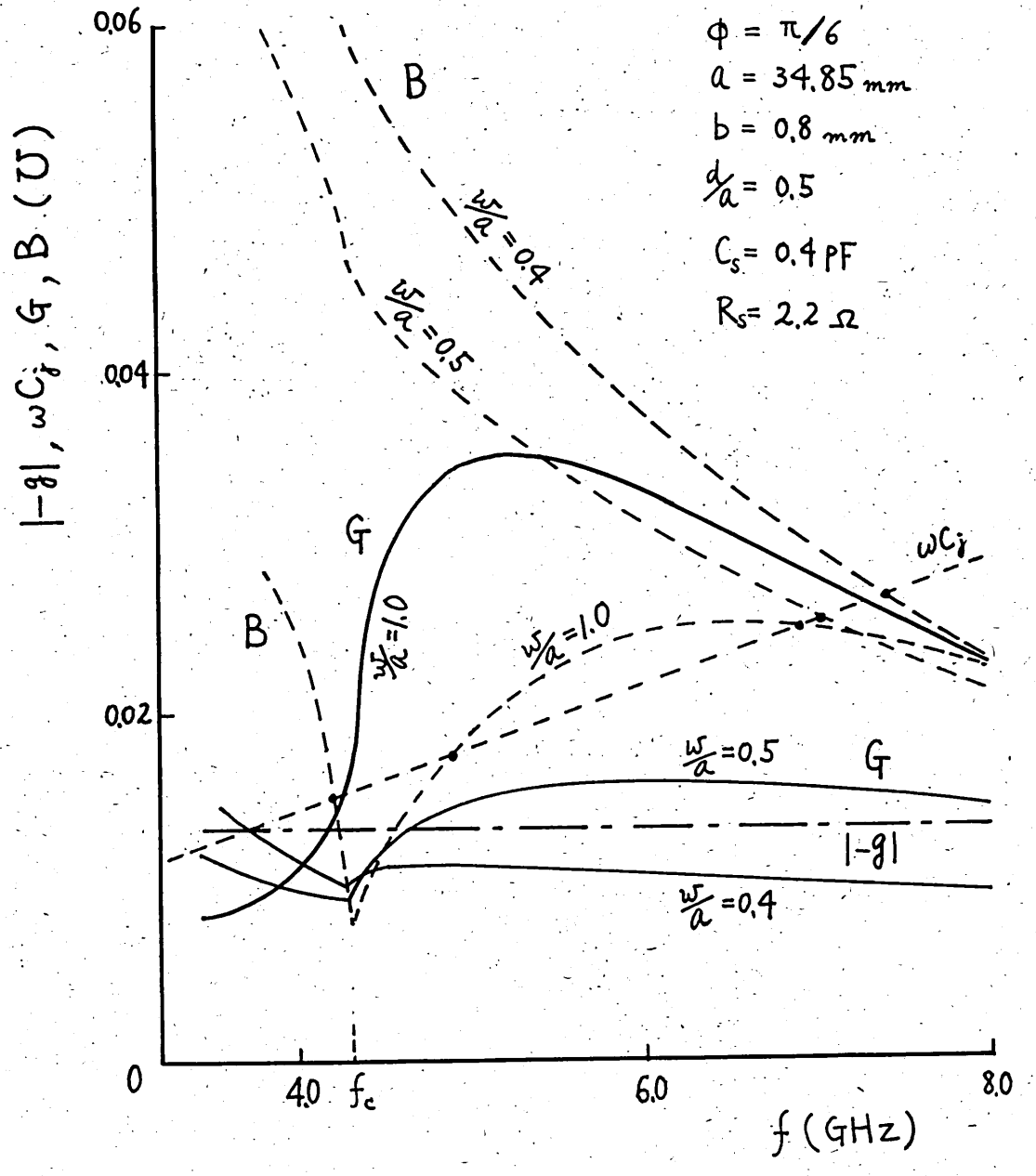



図 5　G, B の周波数に対する変化

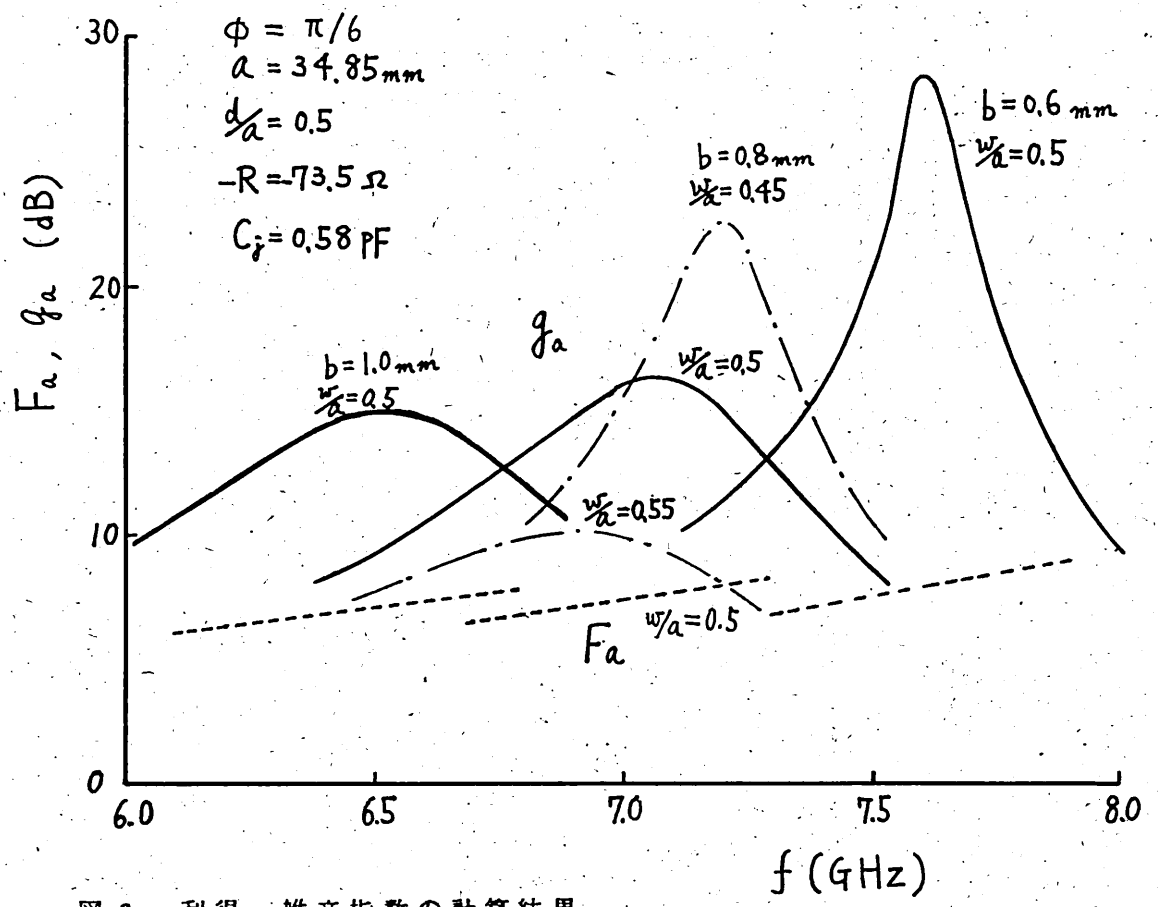



図 6　利得、雑音指数の計算結果

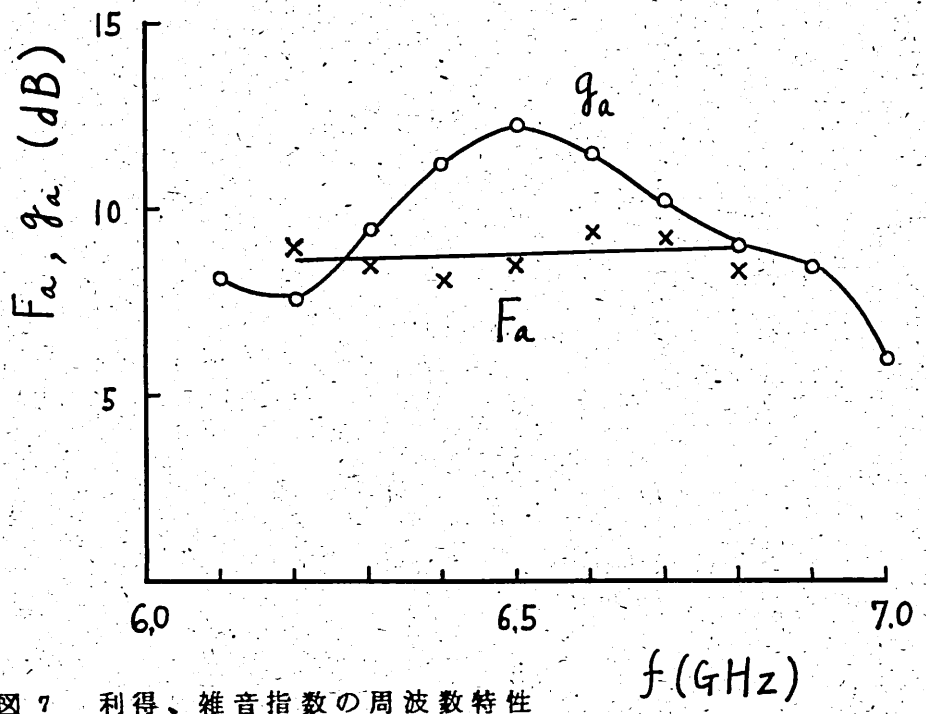



図 7　利得、雑音指数の周波数特性

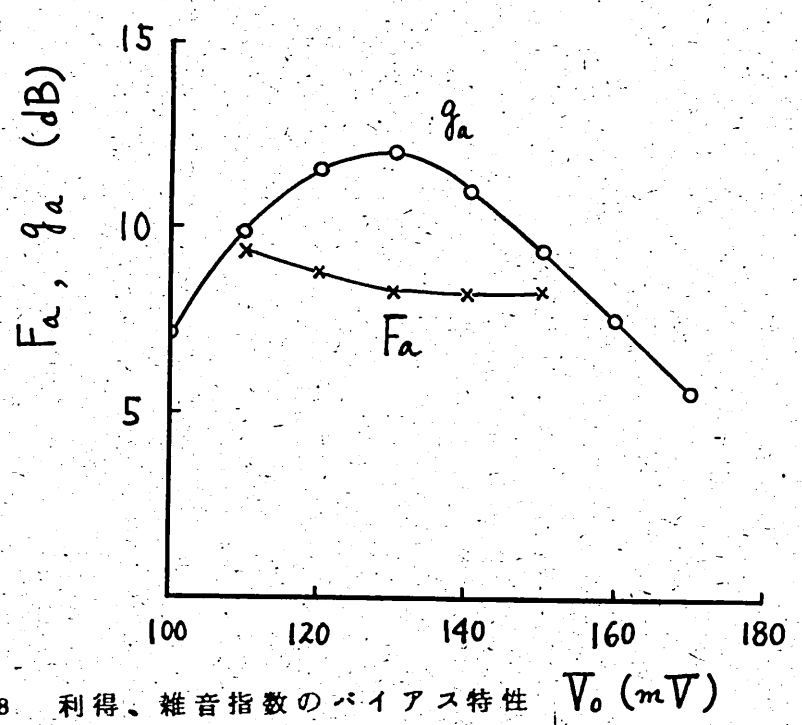



図 8　利得、雑音指数のバイアス特性

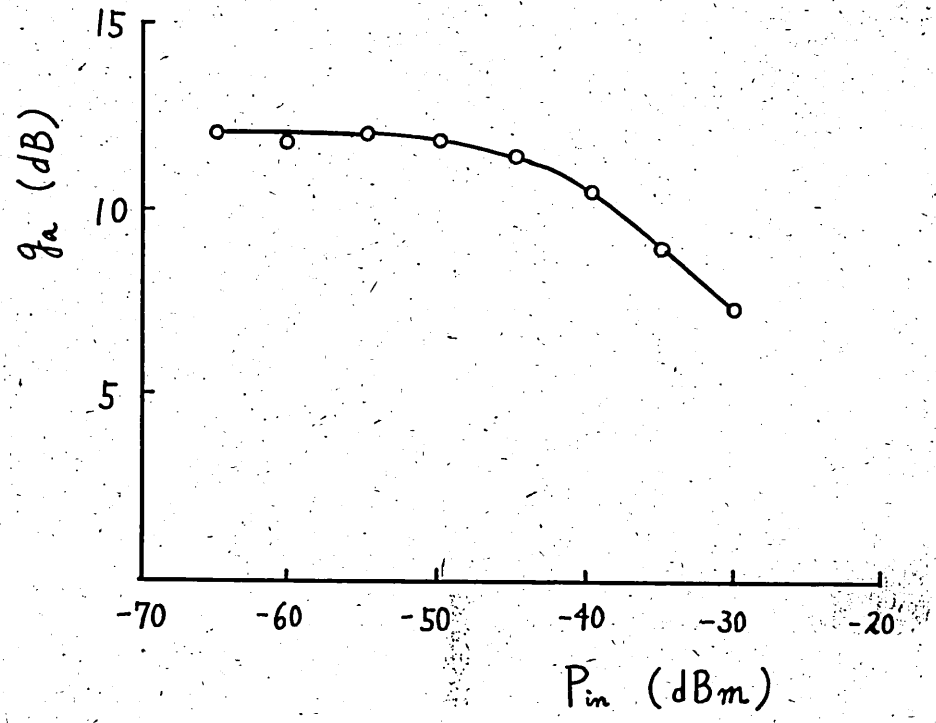



図 9　利得の飽和特性

昭和４５年１２月４日

# 円柱誘電体付加空中線の理論

大阪工業大学電子工学科

飯田一男
安藤俊一
角　修吉
園田　忍

# 目　　次


1　まえがき …… 1

2　解析の方法および厳密解 …… 2

3　遠点における近似解 …… 6

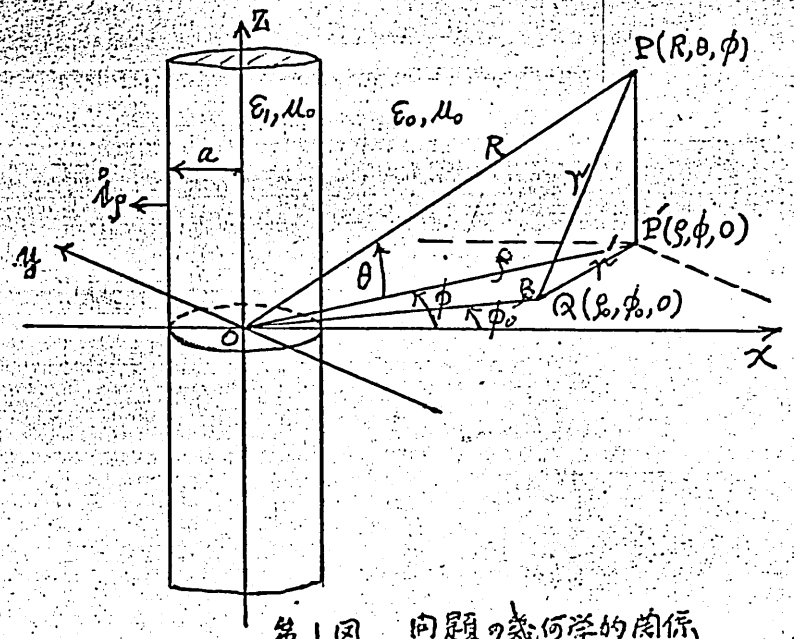
4　考　　察 …… 9

5　Tsandoulas 氏の解析の検討 …… 11

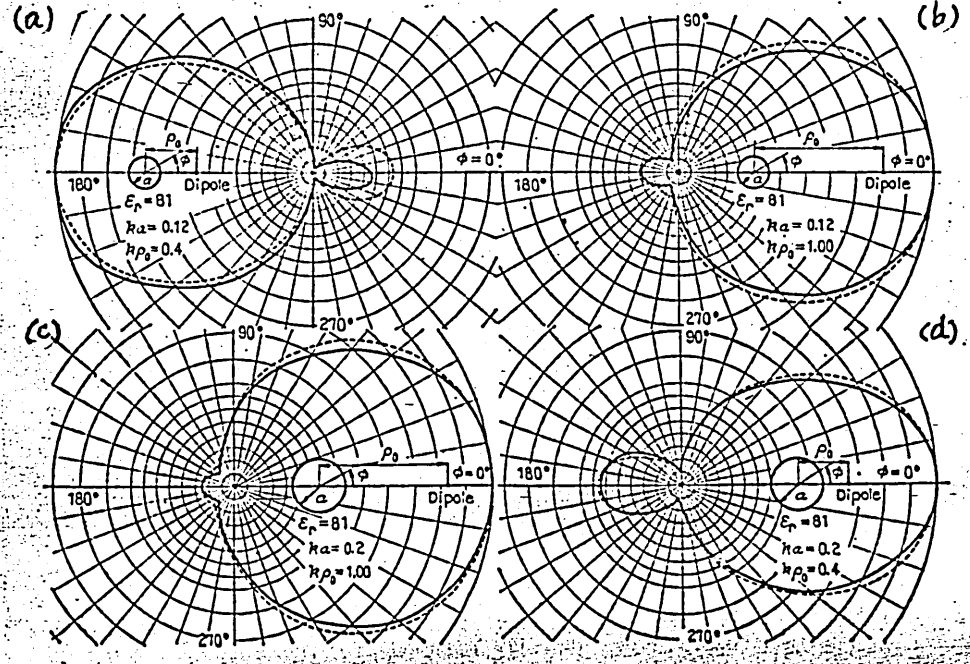
6　円柱誘電体付加空中線に関する電磁界の相反性 …… 12

7　むすび …… 14

8　参考文献 …… 15




第1図. 問題の幾何学的関係




実線：測定値，点線：計算値

第2図 赤道面における放射特性

Fig. 2. Equatorial radiation pattern.

# 円柱誘電体付加空中線の理論

## (1) まえがき

筆者らは誘電率の比較的大きな棒状誘電体（主として円柱）が、これと平行におかれた線状空中線（主としてユニポール）の輻射界におよぼす効果について研究を重ね幾多の興味ある結果を得ている。[(1)〜(3)] この近似理論として、原点に垂直に無限長円柱誘電体があり、これと平行に任意の距離をへだてて無限長円筒波空中線があるとすると、二次元の境界値問題として解くことができる。これにより円柱軸と直角な平面内の指向特性を計算して、これらが誘電体円柱棒の中央（$Z=0$）を通る赤道面における実験結果とかなりよく合致することを知つた。[(4)(5)]

理論をもつと実際に近づけるには、空中線をダイポールとし、これと平行な長軸をもつ回転楕円誘電体とを考えれば最もよいのであるが、これは後日の研究にまつこととし、こゝでは空中線をダイポールとし誘電体を無限長円柱と仮定する。これは G. N. Tsandoulas 氏[(6)]によつて最近取扱われているが、その結果に奇異で理解しにくい所があるので、改めて解析を試みた。この結果、きわめて当然でかつ常識的な結論に達したので、ここに正しい理論結果を報告する次第である。

(2) 解析の方法、および厳密解

解析の方法としては

1 相反定理を用いる方法[7]

2 グリーン関数と Stratton-chu の電磁界の直接積分を用いる方法[8]

3 三次元の境界値問題とする方法[6]

があるが、ここでは Tsandoulas 氏の論文を検討する意味で第三の法を採用し且つなるべく同じ符号を用いた。すなわち

第一図に示すように、座標は直交座標 $(x,y,z)$、円筒座標 $(\rho,\phi,z)$、球座標 $(R,\theta,\phi)$ を併用する。誘電体無限長円柱の半径を $a$ とし、円柱の軸を Z 軸にとる。ダイポールは $Q(\rho_0,\phi_0,0)$ 点にあり、その軸は Z 軸に平行とする。また角周波数を $\omega$、$\varepsilon_1,\varepsilon_0;\mu_0$ を誘電体の誘電率、および自由空間の誘電率と透磁率とする。また誘電体の波数を $k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}$、自由空間のそれを $k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ とする。

また誘電体の円柱表面における外向きの単位法線ベイトルを $\vec{u}_\rho$ とする。

いま、電磁界の時間依存性をすべて $\exp(-j\omega t)$ に比例するものとすると、$Q(\rho_0,\phi_0,0)$ 点にある電気ダイポールが観測点 $P(R,\theta,\phi)$ につくる遅延ヘルツベクトル $\Pi$ は Z 方向をむき、Sommerfeld の輻射の条件を満足することから

$$\Pi_z^p = -\frac{Idz}{4\pi\varepsilon_0 j\omega}\cdot\frac{e^{jkr}}{r} \qquad (1)$$

として考えられる。

ここで $Idz$ はダイポールの電流とその長さである。また $r$ は Q 点と P 点の距離である。

なおヘルツベクトルには一次界の意味で右肩に添字 $p$ をつけた。また時間因子 $\exp(-j\omega t)$ は以下においてすべて省略することにする。

さて $\Pi_z^p$ を三次元における円筒波として展開する。二次元におけるグリーン関数は

$$G(Q/r) = j\pi H_0^{(1)}(kr) \qquad (2)$$

でまえられる。

そこで、$\exp(jkr)/r$ を Z 方向の波数 $h$ に関するフーリエ積分であらわすと

$$\frac{e^{jkr}}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\pi H_0^{(1)}(\beta r')\cdot e^{jhz}\,dh \qquad (3)$$

となり、$\beta^2 = k^2 - h^2$ である。　$r, r'$ は第一図に示してある。

$H_0^{(1)}$ に関する加法定理を用い、0 を原点として展開すると

$$H_0^{(1)}(\beta r') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\phi-\phi_0)} \begin{cases} J_m(\beta\rho)\cdot H_m^{(1)}(\beta\rho_0) \\ J_m(\beta\rho_0)\cdot H_m^{(1)}(\beta\rho) \end{cases} ;\ \rho \lessgtr \rho_0 \qquad (4)$$

となる。ただし，$J_m$，$H_m^{(1)}$ はそれぞれベッセルおよびハンケルの関数である。

(3)、(4)式から(1)式はつぎのように支えられる。

$$\Pi_z^p = -\frac{I\,dz}{8\pi\varepsilon_0\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\phi-\phi_0)} \begin{cases} J_m(\beta\rho)\cdot H_m^{(1)}(\beta\rho_0) \\ J_m(\beta\rho_0)\cdot H_m^{(1)}(\beta\rho) \end{cases} \cdot e^{jhz}\,dh \quad ;\ \rho \lessgtr \rho_0 \qquad (5)$$

これは、ヘルツベクトル $\Pi_z^p$ の三次元表示であり、つぎの波動方程式の特解でもある。

$$(\nabla^2 + k^2)\,\Pi_z(\rho,\phi,z) = -\frac{I\,dz}{j\varepsilon_0\omega}\delta(R-R_0) \qquad (6)$$

ただし、

$$\delta(R-R_0) = \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\cdot\delta(\phi-\phi_0)\,\delta(z-z_0) \qquad (7)$$

であつて、いまの場合 $z_0=0$, $\delta(0-0)=1$ である。

ダイポールがない場合には(6)式に $I=0$ とおいて

$$(\nabla^2 + k^2)\Pi_z(\rho, \phi, z) = 0 \qquad (8)$$

円柱外 ( $\rho \geq a$ ) における(8)式の一般解から、ゾンマーフエルトの輻射条件を満足するものとして、つぎの式をえらぶ。

$$\Pi_z^S = -\frac{I dz}{8\pi\varepsilon_0\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\phi-\phi_0)} B_m H_m^{(1)}(\beta\rho_0)\cdot H_m^{(1)}(\beta\rho)$$

$$\cdot e^{jhz}\,dh \;;\quad \rho \geq a \qquad (9)$$

ここで、右肩の添字 S は散乱波をあらわし、右辺の未定係数 $B_m$ はあとでのべる境界条件からきまる常数である。さらに散乱波の磁気ヘルツベクトルは常数を $C_m$ とすると

$$\Pi_z^{*S} = -\frac{I dz}{8\pi\varepsilon_0\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\phi-\phi_0)} C_m H_m^{(1)}(\beta\rho_0)\cdot H_m^{(1)}(\beta\rho)$$

$$\cdot e^{jhz}\,dh \;;\quad \rho \geq a \qquad (10)$$

で支えられる。

このときに $I dz/\omega$ の代りに磁気ダイポールのモーメントを用いまた $1/\varepsilon_0$ の代りに $1$ とすべきであるが、そのままにして、このことは $C_m$ の中に含めるものとすると ( 10 ) 式はそのまま用いてよい。

また円柱棒の中では回折波のヘルツベクトルは前と同様にして

$$\Pi_z^r = -\frac{I dz}{8\pi\varepsilon_1\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\phi-\phi_0)} D_m J_m(\alpha\rho)\cdot e^{jhz}\,dh \;;\; \rho \leq a \qquad (11\text{-}1)$$

$$\Pi_z^{*r} = -\frac{I dz}{8\pi\varepsilon_1\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\phi-\phi_0)} F_m J_m(\alpha\rho)\cdot e^{jhz}\,dh \;;\; \rho \leq a \qquad (11\text{-}2)$$

こゝで、$\alpha^2 = k_1^2 - h^2$ である。 $D_m$, $F_m$ はそれぞれ常数である。

以上のヘルツベクトルから電磁界は周知の関係式

$$\mathbf{E} = \nabla\times\nabla\times\mathbf{\Pi} + j\omega\mu_0\cdot\nabla\times\mathbf{\Pi}^*$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{H} &= \left(k^2/j\omega\mu_0\right)\cdot\nabla\times\mathbb{\Pi} + \nabla\times\nabla\times\mathbb{\Pi}^* \\ \mathbb{H} &= \left(k^2/j\omega\mu_0\right)\cdot\nabla\times\mathbb{\Pi} - \nabla\times\nabla\times\mathbb{\Pi}^* \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

を用いて求められる。

また境界条件としては、誘電体円柱の表面 $\rho=a$ において

$$\left.\begin{aligned} \mathring{u}_\rho\times(\mathbb{E}^P+\mathbb{E}^S) &= \mathring{u}_\rho\times\mathbb{E}^r \\ \mathring{u}_\rho\times(\mathbb{H}^P+\mathbb{H}^S) &= \mathring{u}_\rho\times\mathbb{H}^r \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

によつて未定係数 $B_m$、$C_m$、$D_m$、$F_m$ が $\rho_0$ と $a$ の関数としてすべて決定される。そして任意の観点 $P$ における電磁界は一次波と散乱波による電磁界の和として、その厳密解が求められる。

計算の結果、観測点 $P$ の電界の Z 成分 $E_z$ は

$$E_z = E_z^P + E_z^S,$$

$$E_z^P = -\frac{Idz}{8\pi\varepsilon_0\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\beta^2 e^{jm(\phi-\phi_0)}H_m^{(1)}(\beta\rho)\cdot J_m(\beta\rho_0)\cdot e^{j\hbar z}\,d\hbar \qquad (14\text{-}1)$$

$$E_z^S = -\frac{Idz}{8\pi\varepsilon_0\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\beta^2 e^{jm(\phi-\phi_0)}B_m H_m^{(1)}(\beta\rho_0)\cdot H_m^{(1)}(\beta\rho)\cdot e^{j\hbar z}\,d\hbar \qquad (14\text{-}2)$$

で支えられる。

また境界条件より

$$B_m = \frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{\hbar m}{a}\right)^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^2\frac{J_m(\beta a)}{H_m^{(1)}(\beta a)} - k^2\beta^2\left\{\frac{H_m^{(1)\prime}(\beta a)}{H_m^{(1)}(\beta a)} - \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{J_m'(\alpha a)}{J_m(\alpha a)}\right\}\cdot\left\{\frac{J_m'(\beta a)}{H_m^{(1)}(\beta a)} - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{k_1}{k}\right)^2\cdot\frac{J_m'(\alpha a)}{J_m(\alpha a)}\cdot\frac{J_m(\beta a)}{H_m^{(1)}(\beta a)}\right\}\right] \qquad (15)$$

$$F_m=\frac{1}{\Delta}\varepsilon_1\left[\frac{\beta k^2}{j\omega\mu_0}\cdot\frac{H_m^{(1)}(\beta\rho_0)}{H_m^{(1)}(\beta a)}\cdot\frac{1}{J_m(\alpha a)}\cdot\frac{hm}{a}\cdot\frac{1}{\alpha^2}\right.$$
$$\cdot\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\beta^2\left\{J_m'(\beta a)\cdot H_m^{(1)}(\beta a)-J_m(\beta a)\right.$$
$$\left.\left.\cdot H_m^{(1)\prime}(\beta a)\right\}\right] \qquad (16)$$

ただし、

$$\Delta=-\left[\left(\frac{hm}{a}\right)^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^2+\beta^2k^2\left\{\frac{H_m^{(1)\prime}(\beta a)}{H_m^{(1)}(\beta a)}-\frac{\beta}{\alpha}\frac{J_m'(\alpha a)}{J_m(\alpha a)}\right\}\right.$$
$$\left.\cdot\left\{\frac{H_m^{(1)\prime}(\beta a)}{H_m^{(1)}(\beta a)}-\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{k_1}{k}\right)^2\frac{J_m'(\alpha a)}{J_m(\alpha a)}\right\}\right] \qquad (17)$$

である。

円柱が完全導体のときには $\varepsilon_1=j\sigma/\omega\to\infty$ となり、$k_1\to\infty$, $\alpha\to\infty$ であるので（１５）式から

$$B_m=-\frac{J_m(\beta a)}{H_m^{(1)}(\beta a)} \qquad (18)$$

になる。したがつてこのときの電界は $\rho_0=a$ においては $E_z=0$ になる。これは当然の結果である。

(3) 遠点における近似解

P点の電界を支える（１４－１）、（１４－２）式にはZ方向に関する波数 $h$ についての無限積分があるので、このままではその厳密解を求めることはほとんど不可能である。

そこで、P点がつぎの関係を満すほど遠方にあるときを考える

$$H_m^{(1)}(\beta\rho)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}}\,e^{j\left(\beta\rho-\frac{2m+1}{4}\pi\right)}$$

また第一図より

$\rho = R\cos\theta, \quad z = R\sin\theta$

であるから、散乱波による電界は

$$E_z^S = -\frac{Idz}{8\pi\varepsilon_0\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\left[m(\phi-\phi_0)-\frac{2m+1}{4}\pi\right]}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\beta)\sqrt{\frac{2}{\pi\beta R\cos\theta}}\cdot e^{jR(\beta\cos\theta+h\sin\theta)}\cdot dh \qquad (19)$$

ただし、 $f_1(\beta) = \beta^2 \cdot B_m \cdot H_m^{(1)}(\beta\rho_0)$

で与えられる。

こゝで変数変換を行い、

$h = k\sin\gamma, \quad \gamma = \textcircled{H} + j\psi$

として、$h$ 平面から $\gamma$ なる複素平面に変数を変換し、鞍点法[9]を用いて漸近値を求めるとP点の散乱波による電界は

$$E_z^S \cong -\frac{Idz}{4\pi\varepsilon_0\omega}\frac{e^{-jkR}}{R}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\phi-\phi_0)-j\frac{m+1}{2}\pi}\cdot(k\cos\theta)^2 \cdot B_{ms}\cdot H_m^{(1)}(k\rho_0\cos\theta) \qquad (20)$$

また一次波による電界は

$$E_z^P \cong -\frac{Idz}{4\pi\varepsilon_0\omega}\frac{e^{-jkR}}{R}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\phi-\phi_0)-j\frac{m+1}{2}\pi}\cdot(k\cos\theta)^2 \cdot J_m(k\rho_0\cos\theta) \qquad (21)$$

したがつて、P点の電界はその和となり

$$E_z = E_z^S + E_z^P \cong -\frac{Idz}{4\pi\varepsilon_0\omega}\frac{e^{-jkR}}{R}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\phi-\phi_0)-j\frac{m+1}{2}\pi}\cdot(k\cos\theta)^2 \cdot\left[J_m(k\rho_0\cos\theta) + B_{ms}\cdot H_m^{(1)}(k\rho_0\cos\theta)\right] \qquad (22)$$

となる。

また $e^{-j\frac{m+1}{2}\pi} = (-j)^m$, $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, $H_{-m}^{(1)}(x) = (-1)^m H_m^{(1)}(x)$

であるから、 $B_{-ms} = B_{ms}$ 、したがつて（２２）式は

$$E_z \cong -\frac{Idz}{4\pi\varepsilon_0\omega}\cdot\frac{e^{jkR}}{R}(k\cos\theta)^2\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m(-j)^m\cos m(\phi-\phi_0)$$

$$\left[J_m(kf_0\cos\theta)+B_{ms}H_m^{(1)}(kf_0\cos\theta)\right] \tag{23}$$

を得る。

ここで、 $\epsilon_m=2$ ( $m=1,2,3,4;\cdots$ ), $\epsilon_0=1$ また

$$B_{ms}=\frac{1}{\Delta_s}\left[\left(\frac{km\sin\theta}{a}\right)^2\left(1-\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_r-\sin^2\theta}\right)^2\frac{J_m(ka\cos\theta)}{H_m^{(1)}(ka\cos\theta)}\right.$$

$$-k^4\cos^2\theta\left\{\frac{H_m^{(1)\prime}(ka\cos\theta)}{H_m^{(1)}(ka\cos\theta)}-\frac{\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta}}\frac{J_m'(ka\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta})}{J_m(ka\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta})}\right\}$$

$$\cdot\left\{\frac{J_m'(ka\cos\theta)}{H_m^{(1)}(ka\cos\theta)}-\varepsilon_r\frac{\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta}}\cdot\frac{J_m'(ka\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta})}{J_m(ka\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta})}\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{J_m(ka\cos\theta)}{H_m^{(1)}(ka\cos\theta)}\right\}\right] \tag{24}$$

ただし

$$\Delta_s=-\left[\left(\frac{km\sin\theta}{a}\right)^2\left(1-\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_r-\sin^2\theta}\right)^2+k^4\cos^2\theta\left\{\right.\right.$$

$$\frac{H_m^{(1)\prime}(ka\cos\theta)}{H_m^{(1)}(ka\cos\theta)}-\frac{\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta}}\cdot\frac{J_m'(ka\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta})}{J_m(ka\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta})}\left.\right\}\cdot$$

$$\left.\cdot\left\{\frac{H_m^{(1)\prime}(ka\cos\theta)}{H_m^{(1)}(ka\cos\theta)}-\varepsilon_r\frac{\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta}}\cdot\frac{J_m'(ka\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta})}{J_m(ka\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta})}\right\}\right] \tag{25}$$

である。

また

$$\left.\begin{aligned}E_\theta&=E_z/\cos\theta\\H_\phi&=\sqrt{(\varepsilon_0/\mu_0)}\cdot E_\theta\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

から、それぞれ遠点における輻射界 $E_\theta, H_\phi$ が求められる。

なお、ダイポールの代りに長さ $\ell$ の線状空中線を考えるとき、もし腹電流 $I_0$ の

$\lambda/2$空中線のときには $Idz$ の代りに $I_0\lambda/\pi$ を（２３）式に入れるとよい。

(4) 考　　察

誘電体円柱が金属円柱である場合には（１８）式と（２２）式によつて

$$E_\theta \cong -\frac{Idz}{4\pi}\mu_0\omega\cos\theta\frac{e^{-jkR}}{R}\sum_{m=0}^{\infty}(-j)^m\epsilon_m\cos m(\phi-\phi_0)\cdot\frac{J_m'(kf_0\cos\theta)\cdot H_m^{(1)\prime}(ka\cos\theta)-J_m(ka\cos\theta)\cdot H_m^{(1)\prime}(kf_0\cos\theta)}{H_m^{(1)\prime}(ka\cos\theta)} \tag{27}$$

となり、P.S. Carter [7]、W.S. Lucke [6] の結果に一致する。

なお、$E_\theta$ の分母 $H_m^{(1)}(ka\cos\theta)$ は $k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ が実数であることから決して零になることはない。$H_m^{(1)\prime}(y_{mn})=0$ が成立するためには $y_{mn}$ は複素数でなければならない。いま

$$\frac{y_{m.n}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cdot a\cos\theta}=\omega=\omega_{m.n}-j\kappa_{m.n} \tag{28}$$

とすれば

$$Re\{e^{-j\omega t}\}=e^{-\kappa_{m.n}}\cdot\cos\omega_{m.n}t \tag{29}$$

となり、これは金属円柱固有の角振動数 $\omega_{mn}$ と減衰定数 $\kappa_{mn}$ をもつ自由振動をあらわすものである。（２７）式は金属円柱を実数の励振角周波数 $\omega$ によつて強制励振する場合であつて $\omega$ が $\omega_{mn}$ に近付くにしたがつて共振現象があらわれてくるが、その大きさは $\kappa_{mn}$ の値によつて制限され、決して無限大になることはないのである。

誘電体円柱の場合も散乱波のモード振幅をあらわす $B_{ms}$ の分母 $\Delta_s$ には固有振動角周波数 $\omega_{mn}$ と減衰定数 $\kappa_{mn}$ を確定する $\Delta_s(y_{mn})=0$ の複素根 $y_{mn}$ が存在するが、角周波数 $\omega$ は実数であることから $B_{ms}$ が無限大になることは決してないのである。

この間の事情をさらに明確にするために、$\theta=0$ すなわち赤道面の電磁界に着目する。

このときの $B_{ms}$ は（２４）、（２５）式から

$$B_{ms}|_{\theta=0} = -\frac{J_m'(ka)\cdot J_m(ka\sqrt{\varepsilon_r}) - \sqrt{\varepsilon_r}\cdot J_m(ka)\cdot J_m'(ka\sqrt{\varepsilon_r})}{H_m^{(1)\prime}(ka)\cdot J_m(ka\sqrt{\varepsilon_r}) - \sqrt{\varepsilon_r}\cdot H_m^{(1)}(ka)\cdot J_m'(ka\sqrt{\varepsilon_r})}$$

$$\equiv b_{ms} \qquad (30)$$

を得る。

$b_{ms}$ は円柱誘電体をこれと平行な電界の平面波によつて励振した場合の散乱波 $E_z^s$ のモード振幅であり、Cl. Schaefer 等[10]の詳細な理論ならびに実験研究がある。この分母もまた実数のωに対して決して零となることはない。Schaefer らはこの分母を零とする複素根 $\gamma_{mn}$ を具体的に計算し固有振動数 $\omega_{mn}$ の近くで共振があり、$K_{mn}$ が小さいほどそれが顕著にあらわれることを実証している。

また、無限長円筒空中線の輪射界が、これと平行におかれた無限長誘電体円柱によつて散乱されるときの散乱波のモード振幅も（３０）式の $b_{ms}$ によつて与えられる。(4)(5)

以上のことから、無限長誘電体円柱をこれと平行な軸をもつダイポール或は線状空中線によつて励振する場合、赤道面における散乱波のモード振幅は平面波、あるいは無限長円筒波　　励振の場合のいづれ、全く同一であるという常識的な結論に到着した。したがつて赤道面における遠点の指向性はこの散乱波に一次波を重畳したものとして決定することから、一次波が円筒波、ダイポール波および線状空中線波のいづれの場合でも同一の指向性で、（２３）式であらわされる。しかし一次波が平面波のときは少しちがつてくる。

すなわち（２３）式および文献(4)より

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-j)^m \varepsilon_m \cos m(\phi-\phi_0)\left[J_m(k\rho_0) + b_{ms}\cdot H_m^{(1)}(k\rho_0)\right] \qquad (31)$$

なる形に対し、平面波の場合には文献（１０）により

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-j)^m \varepsilon_m \cos m(\phi-\phi_0)\left[J_m(k\rho) + b_{ms}\cdot H_m^{(1)}(k\rho)\right] \qquad (32)$$

なる形で与えられる。

この二式において $\rho \gg \rho_0$ なる場合は指向性は全く同一になる。このことは

空中線が相反定理を満足するという当然の帰結である。相反定理については後で述べる。

(5) Tsandoulas の解析の検討

Tsandoulas の解析を検討するため（１５）式を変形すると、

$$B_m = \frac{1}{\Delta_1}\left[\left[\frac{\alpha^3}{\beta} J_m(\alpha a)\cdot J_m'(\alpha a)\left\{k_1^2 J_m(\beta a)\cdot H_m^{(1)\prime}(\beta a) + k^2 H_m^{(1)}(\beta a)\cdot J_m'(\beta a)\right\} + \left[J_m(\alpha a)\right]^2\left\{\left(\frac{hm}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1\right)^2 J_m(\beta a)\cdot H_m^{(1)}(\beta a) - k^2\frac{\alpha^4}{\beta^2}\cdot J_m'(\beta a)\cdot H_m^{(1)\prime}(\beta a)\right\} - k_1^2\alpha^2\left[J_m'(\alpha a)\right]^2 J_m(\beta a)\cdot H_m^{(1)}(\beta a)\right]\right] \quad (33)$$

また、このとき

$$F_m = \frac{1}{\Delta_1}\left[\left[\frac{k_1^2\beta}{j\omega\mu_0}\cdot\frac{hm}{a}\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1\right)\cdot H_m^{(1)}(\beta\rho_0)\cdot H_m^{(1)}(\beta a)\cdot J_m(\alpha a)\left\{H_m^{(1)}(\beta a)\cdot J_m'(\beta a) - H_m^{(1)\prime}(\beta a)\cdot J_m(\beta a)\right\}\right]\right] \quad (34)$$

こゝで

$$\Delta_1 = \left[\left[k^2\alpha^2\cdot H_m^{(1)\prime}(\beta a)\cdot J_m(\alpha a)\left\{\frac{\alpha^2}{\beta^2}\cdot J_m(\alpha a)\cdot H_m^{(1)\prime}(\beta a) - \frac{\alpha}{\beta}H_m^{(1)}(\beta a)\cdot J_m'(\alpha a)\right\} - J_m(\alpha a)\cdot H_m^{(1)}(\beta a)\cdot\left\{\left(\frac{hm}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1\right)^2 J_m(\alpha a)\cdot H_m^{(1)}(\beta a) + k_1^2\frac{\alpha^3}{\beta}\cdot J_m'(\alpha a)\cdot H_m^{(1)\prime}(\beta a)\right\} + k_1^2\alpha^2\left[H_m^{(1)}(\beta a)\right]^2\left[J_m'(\alpha a)\right]^2\right]\right] \quad (35)$$

（３３）、（３４）式は Tsandoulas の（１０）、（１１）式に対応し、

（３５）式は（１０）式の分母に対応するのであるが ～～～ を施した部分が脱落している。とくに（３５）式で最後の項がないと共通の因子 $J_m(\alpha a)$ が存在する。この因子は誘電体の時には $J_m\{ka\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta}\}$ となり、導体のときは $J_m(-ka\sqrt{(j\sigma/\omega)-\sin^2\theta})$ となる。 $J_m(x)=0$ は実数の根しかもたないので、導体の場合にはこのような状態は生じないが、誘電体の場合には $y_{mn}$ なる実根が存在し

$$\omega_{m.n}=\frac{y_{m.n}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cdot a\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta}} \qquad (36)$$

なる角周波数において、$A_1=0$、$B_m\to\infty$、すなわち、散乱波のモード振幅は無限大になる。

これが Tsandoulas 氏の主要結論である。

誘電体円柱については、古くは Schaefer ら[10]により、近くは筆者ら[1]-[4]や Wheeler [5]によつて数多くの実験がなされているが、いまだこのような事実は確認されていない。

第２図は実測指向特性（実線）と我々の理論式によつて得た指向特性（点線）とを示したものである。両者はよく合致している。これらから条件さえ整えれば、円柱誘電体は導波（第２図 a）或は反射（第２図 b,c,d）作用をすることがわかる。

(6) 円柱誘電体付加空中線に関する電磁界の相反性

任意の媒質 $\varepsilon,\mu,\sigma$ 中に同一角周波数 $\omega$ の二つの波源 $\mathbb{J}_1,\mathbb{J}_2$ なる分布電流密度があるとする。これらの分布電流による電磁界 $\mathbb{E},\mathbb{H}$ を１、２なる添字をつけて区別すると

$$\nabla\times\mathbb{E}_1=j\omega\mu\mathbb{H}_1\ ;\quad \nabla\times\mathbb{H}_1=-(j\omega\varepsilon-\sigma)\mathbb{E}_1+\mathbb{J}_1 \qquad (37)$$

$$\nabla\times\mathbb{E}_2=j\omega\mu\mathbb{H}_2\ ;\quad \nabla\times\mathbb{H}_2=-(j\omega\varepsilon-\sigma)\mathbb{E}_2+\mathbb{J}_2 \qquad (38)$$

これらの関数とベクトル関数に関する公式より次式を導きうる。

$$\nabla\cdot[\mathbb{E}_1\times\mathbb{H}_2-\mathbb{E}_2\times\mathbb{H}_1]=-\mathbb{E}_1\cdot\mathbb{J}_2+\mathbb{E}_2\cdot\mathbb{J}_1 \qquad (39)$$

ただし、$\varepsilon,\mu,\sigma$ はスカラーまたは対称テンソルと仮定する[11]

（３９）式の両辺をそれぞれ体積$V$について積分すると、左辺はガウスの定理により$V$でつつむ閉面$S$の面積分となる。この面積分は、その中に上記条件を満足する導体、磁性体、誘電体が雑多にあつても零となることが証明されている。[12]したがつて次式を得る。

$$\int_{V_1} \mathbb{E}_2 \cdot \mathbb{J}_1 \, dV = \int_{V_2} \mathbb{E}_1 \cdot \mathbb{J}_2 \, dV \tag{40}$$

ここで$V_1, V_2$はそれぞれ$\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2$の分布している体積である。いま波源をダイポールとすれば$V_1, V_2$の内部ではそれぞれ$\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_1$は一定であると考えられるので積分の外に出せる。

いま、ダイポールの長さを$d\ell$、断面積を$dS$とし、そのモーメントを$\mathbb{P}$とすれば、つぎの関係がある。

$$\int_V \mathbb{J} \, dV = \mathbb{J} \, dS \, d\ell = \mathbb{I} \, d\ell = \frac{d\mathbb{P}}{dt} = -j\omega \mathbb{P} \tag{41}$$

したがつて（４０）式は

$$\mathbb{E}_2 \cdot \mathbb{P}_1 = \mathbb{E}_1 \cdot \mathbb{P}_2 \tag{42}$$

これがダイポールに関する電磁界の相反定理である。

（２３），（２５）式より

$$E_\theta = -\frac{I dZ}{4\pi\varepsilon_0 \omega} k^2 \frac{e^{jkR}}{R} \cos\theta \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-j)^m \cos m(\phi - \phi_0)$$
$$\left[ J_m'(k\rho_0 \cos\theta) + B_{ms} \cdot H_m^{(1)\prime}(k\rho_0 \cos\theta) \right] \tag{43}$$

これは第一図に示すごとく、$Q(\rho_0, \phi_0, 0)$すなわち点１に$P_1 = \frac{I dZ}{\omega}$なるモーメントのダイポールがZ方向にむいているとき、遠点$P(R\to\infty, \theta, \phi)$すなわち点２に発生する電界$\mathbb{E}_1$の$\theta$成分$E_{\theta 1}$である。

いま、点２すなわち$P(R\to\infty, \theta, \phi)$に$P_2 = \frac{I dZ}{\omega} = P_1$なる同じ大きさのモーメントをもち、$\theta$方向をむいたダイポールが点１すなわち$Q(\rho_0, \phi_0, 0)$に発生する電界$\mathbb{E}_2$のZ成分$E_{z2}$は（４２）式の左辺から

$$\mathbb{E}_2 \cdot \mathbb{P}_1 = P_1 \mathring{\imath}_z \cdot \mathbb{E}_2 = P_1 E_{z2}$$

また、右辺から

$$\mathbb{E}_1 \cdot \mathbb{P}_2 = P_1 \mathring{\imath}_\theta \cdot \mathbb{E}_1 = P_1 E_{\theta 1}$$

故に

$$E_{Z2}=E_{\theta 1}=(43)\text{式の右辺} \qquad (44)$$

これを腹電流 $I_0$ の半波長ダブレットに適用する場合には $Idz \rightarrow I_0(\lambda/\pi)$ とすればよい。

（４４）式は $\theta, \phi$ 方向から、$\theta$ 方向に偏波した平面波が円柱誘電体に入射した場合、その周囲の点 $Q(\rho_0, \phi_0, 0)$ に発生する電界のZ成分である。

P.S. Carter[7] は円柱導体の場合に（４４）式に相当する式を直接求めておいて、これから $E_{\theta 1}$ に相当する式を相反定理を用いて導いた。

赤道面即ち $\theta=0$ なる面では

$$E_{\substack{Z2\\ \theta=0}}=E_{\substack{Z1\\ \theta=0}}=-\frac{Idz}{4\pi\varepsilon_0\omega}k^2\frac{e^{jkR}}{R}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m(-j)^m\cos m(\phi-\phi_0)\cdot$$

$$\left[J_m(k\rho_0)+b_{ms}H_m^{(1)}(k\rho_0)\right] \qquad (45)$$

これは赤道面における相反定理をあらわすものであつて、４．考察のところの最後に述べた所と一致する。

(7) むすび

本文でのべた理論は誘電体を無限に長い円柱としているため、$\theta=0$ 面以外の点の電磁界は実際の有限長誘電体円柱の場合にはほとんど用をなさない。誘電体の円柱の長さ、すなわち $\theta$ の効果を見るには回転楕円体についてこの解析をする必要がある。したがつて本文の理論によれば赤道面（$\theta=0$）内における電磁界のみが実験結果をよく説明することになる。この場合一次波が平面波、円筒波、ダイポール波あるいは線形空中線波のいづれであつても散乱波のモード振幅は同一で（３０）式の $b_{ms}$ で支えられる。この $b_{ms}$ の分母は複素根 $y_{mn}$ をもちこれから誘電体柱の固有角振動数 $\omega_{mn}$ および減衰定数 $\gamma_{mn}$ が決定される。実角周波数 $\omega$ によつて誘電体柱を強制振動さす本題の場合、この励振角周波数が $\omega_{mn}$ に近づくにしたがつて共振現象があらわれるがその振幅は $\gamma_{mn}$ によつて制限され、決して無限大になることはないのである。空中線として重要な特性の

一つは、赤道面における指向特性である。本文での場合これは $b_{ms}$ をモード振幅とする散乱波に一次波を重畳して求められるので、一次波が平面波、円筒波、ダイポール波：あるいは線形空中線波のいづれの場合でも遠点における指向性は前述のように同形になることが結論される。

(8) 参考文献


1. 飯田 安藤 宮内
誘電体を付加した空中線の放射特性 昭35 連合大会 1183

2. 飯田 安藤 宮内 津川
誘電体付加空中線 昭39 信学会 全国大会 227

3. 飯田 安藤 宮内 津川
誘電体付加空中線、阪工大、紀要、理工篇、9巻 No.3 pp.16
昭39 (1964)

4. 飯田 安藤 宮内 津川
誘電体付加空中線 阪工大 紀要 理工篇 12巻 No.1 pp.77
昭42 (1967)

5. W. R. Wheeler. "The experimental and theoretical Investigation on the Effect of Square, Rectangular, Circular and Elliptic Dielectric Cylinder near a dipole antenna."
ICMCI. Tokyo. Summaries of Papers. I. 339. 1964

6. G. N. Tsandoulas. "Scattering of a Dipole Field by infinitely conducting and Dielectric Circular Cylinders."
IEEE. Trans. Ap-16. No.3. 324. 1968.

7. P. S. Carter. "Antenna Arrays around Cylinders."
Proc. of IRE. 691. 1943

8. W. S. Lucke. "Electric Dipoles in the Presence of Elliptic and Circular Cylinders."
J. of App. Phys. Vol. 22. pp14. Jan. 1951.

9. C.H. Papas, "On the infinitely long Cylindrical Antenna."
J. of App. Phys. 20. 439. May 1949.

10. Cl. Schaefer u. F. Grossman. "Untersuchungen über die Beugung Elektromagnetischen Wellen an Dielectrischen Zylinder."
Ann. d. Phys. Bd. 31. 455. 1910

Cl. Schaefer u. J. Merzkirch. "Experimentelle untersuchungen über die Beugung ungedämpfter Elektrischer Wellen an Dielectrischen Zylindern und über die Eigenschwingungen dielectrischer Zylinder."
Zs. f. Phys. Bd. 13. 116. 1923.

11. R.F. Harrington et. al. "Reciprocity Relations for Gyrotropic Media."
IRE, MIT-6, pp 308-310 1958

12. S. Uda and Y. Mushiake. "Yagi-Uda Antenna."
Maruzen C.L. p.3~6 1954.

輻射科学研究会資料

# 有限導波管開口アレイの相互結合(II)

杉尾嘉彦　　牧本利夫
(大阪大学　基礎工学部)

昭和46年2月5日
(於　三菱電機)

# 有限導波管開口アレイの相互結合（II）

杉尾嘉彦・牧本利夫
（大阪大学 基礎工学部）

## 1. まえがき

近年，走査アレイ・アンテナの研究が盛んに行われているが[1,2]，なかでも，その放射特性に及ぼす相互結合の効果については未だ満足な解明がなされていない。大形アレイについては無限アレイの計算法を適用して相互結合を考慮した場合の解析が比較的精度よくできるが，小形アレイ（素子数が数十個程度まで）の場合には，この方法では端効果のために正確な解析ができない。相互結合の効果を知るためには、比較的小形のアレイについて具体的に解析しておく必要がある。

2個の導波管開口間の相互結合の問題は，モーメント法[3]，フーリエ変換法[4]等である程度解析されているが，本報告では，変分法がこのような小形開口アレイについて有用な解析法と考えられるので[5]，この方法により相互結合の問題を解析している。まず，任意個数の開口が存在する場合の，着目する2個の開口以外の開口の高次モードの影響を考慮した相互アドミッタンスに対する厳密な停留表示式を導き[6]，つぎにリッツの方法によって回路定数を求め，あわせて放射特性に及ぼ

す相互結合の効果について、3個の直線状開口アレイを例にとって解析している。

## 2. 有限導波管開口アレイの相互結合と放射特性

図1に示すように、N個の開口が完全導体の基板面上に設けられている場合につき考察する。開口は方形、円形のいずれでもよく、かつ断面寸法も任意でよいが本報告では等しい断面をもつ方形開口につき解析する。さらに、導波管内の伝播可能モードの数も任意でよいが、ここでは1モード($TE_{10}$)のみが伝播可能モードの場合を考察する。

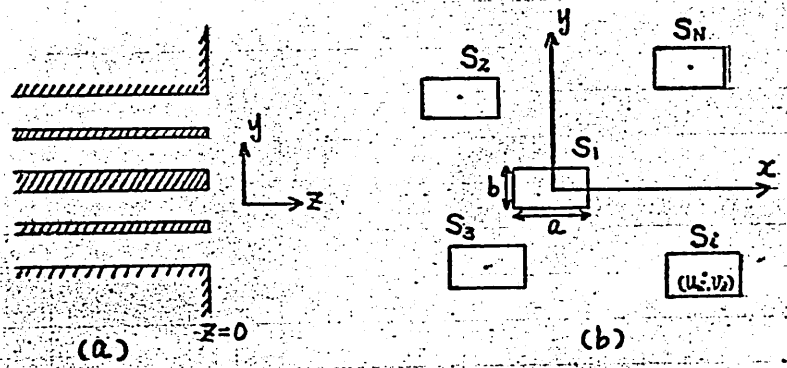



図1. 有限導波管開口アレイ

領域を導波管領域($z<0$)と自由空間($z>0$)に分けて考え、自由空間ではグリーンの定理を適用して得られる電磁界の一般表示式

$$E(r) = -j\omega\mu\int_V G^{(1)}\cdot J(r_0)\,dv - \nabla\times\int_V G^{(2)}\cdot J^*(r_0)\,dv$$
$$-\nabla\times\int_S G^{(2)}\cdot[n\times E(r_0)]\,ds + j\omega\mu\int_S G^{(1)}\cdot[n\times H(r_0)]\,ds \quad (1)$$

$$H(r) = -j\omega\varepsilon\int_V G^{(2)}\cdot J^{*}(r_0)dv + \nabla\times\int_V G^{(1)}\cdot J(r_0)dv$$
$$-\nabla\times\int_S G^{(1)}\cdot[n\times H(r_0)]ds - j\omega\varepsilon\int_S G^{(1)}\cdot[n\times E(r_0)]ds \quad (2)$$

を図1に適用すると次の電磁界表示式を得る。

$$E(r) = 2\nabla\times\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} G(r,\rho)\cdot K_i(\rho)ds_i \quad (3)$$
$$(z>0)$$
$$H(r) = j2\omega\varepsilon\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} G(r,\rho)\cdot K_i(\rho)ds_i \quad (4)$$

ここに、$G$は自由空間のダイアディック・グリーン関数、$K_i(\rho) = n\times E_i(\rho)$、さらに$G^{(1)}$、$G^{(2)}$はそれぞれ閉曲面Sで囲まれた領域V内の電気形および磁気形ダイアディック・グリーン関数である。

導波管内の電磁界は次のように展開する。

$$E_t(r_t) = \sum_{mn}[V_{mn}^{i}(z)\,h_{mn}^{iH}(\rho_t) + U_{mn}^{i}(z)\,h_{mn}^{iE}(\rho_t)] \quad (5)$$

$$H_t(r_t) = \sum_{mn}[Y_{mn}^{H}V_{mn}^{i}(z)\,h_{mn}^{iH}(\rho_t) + Y_{mn}^{E}U_{mn}^{i}(z)\,h_{mn}^{iE}(\rho_t)] \quad (6)$$

ここに、$h_{mn}^{iH}$、$h_{mn}^{iE}$はそれぞれi番目の導波管のH-波およびE-波の固有モード関数、$V_{mn}^{i}(z)$、$U_{mn}^{i}(z)$はそれらの展開係数(電圧振幅)、$Y_{mn}^{H}$、$Y_{mn}^{E}$は各固有アドミッタンスである。

いま、各導波管を$K_j^{inc} = E_{0j}e^{-j\beta_{10}z}h_{10}^{jH}$ ($\beta_{10}$：主モード伝播定数)なる入射波で励振したとすると、開口面($z=0$)上の横方向磁界(x-y成分)の連続条件より次の関係を得る。

$$I_j h_{10}^{jH} = Y_0 Y_j V_j h_{10}^{jH}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} H_j^{i} + \sum_{mn}{}'[Y_{mn}^{H}V_{mn}^{j}\,h_{mn}^{jH} + Y_{mn}^{E}U_{mn}^{j}\,h_{mn}^{jE}] \quad (7)$$

ここに、$I_j \equiv Y_0(E_{0j}-V_{0j})$、$V_j = E_{0j}+V_{0j}$ ($V_{0j}$：主モードの反射波振幅)

であり、かつ

$$\mathbb{H}_j^i = \frac{j}{2\pi\omega\mu}\int_{S_i}[\nabla_t\nabla_t\psi + k^2(\vec{i}\vec{i}+\vec{j}\vec{j})\psi]\cdot\mathbb{K}_i(\rho_i)\,dS_i \qquad (8)$$

$$\psi = \frac{e^{-jk[(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2]^{1/2}}}{[(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2]^{1/2}} \qquad (9)$$

である。式(7)の$Y_j$は、導波管$j$の開口($z=0$)より自由空間側を見た主モードについての規格化入力アドミッタンスとなる。

いま、$i$番目の導波管のみを励振し、他の導波管はすべて開口面から$n\lambda_g/2$ ($\lambda_g$：主モード波長、$n$：整数)の位置で短絡して開口面上の主モード電圧のみを零にした場合、次の関係を得る。

$$\sum_{j=1}^{N} U_j I_j^{(i)}\mathbb{h}_{10}^{jH} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} U_j \mathbb{H}_j^{k(i)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{mn}{}' U_j\left[Y_{mn}^{H}V_{mn}^{j(i)}\mathbb{h}_{mn}^{jH} + Y_{mn}^{E}U_{mn}^{j(i)}\mathbb{h}_{mn}^{jE}\right] \qquad (10)$$

$$U_j = \begin{cases} 1 : (x,y)\text{が}S_j\text{上のとき} \\ 0 : (x,y)\text{がその他の位置のとき} \end{cases}$$

ここに、肩の$(i)$は上述の条件の下に$i$番目の導波管のみを励振した場合の電磁界であることを示す。

式(10)の両辺に$\sum_{l=1}^{N} U_l\mathbb{K}_l^{(j)}$をスカラー積して$z=0$の面上にわたって積分を実行すると次式を得る。

$$Y_{ii}+Y_{ji} = \frac{1}{\left(\int_{S_i}\mathbb{K}_i^{(i)}\cdot\mathbb{h}_{i0}^{iH}dS_i\right)\left(\int_{S_j}\mathbb{K}_j^{(j)}\cdot\mathbb{h}_{j0}^{jH}dS_j\right)}\Bigg[\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{S_l}\mathbb{H}_l^{k(i)}\cdot\mathbb{K}_l^{(j)}dS_l$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{mn}{}'\left\{Y_{mn}^{H}\int_{S_l}\mathbb{K}_l^{(i)}\cdot\mathbb{h}_{mn}^{lH}dS_l\cdot\int_{S_l}\mathbb{K}_l^{(j)}\cdot\mathbb{h}_{mn}^{lH}dS_l + Y_{mn}^{E}\int_{S_l}\mathbb{K}_l^{(i)}\mathbb{h}_{mn}^{lE}dS_l\cdot\int_{S_l}\mathbb{K}_l^{(j)}\cdot\mathbb{h}_{mn}^{lE}dS_l\right\}\Bigg] \qquad (11)$$

ここに，$I_j^{(i)}=Y_0 Y_{ji} V_i^{(i)}$ であり，$Y_{ji}$ は主モードの固有アドミッタンス $Y_0$ によって規格化された相互(または自己)アドミッタンスと見なすことができる．ローレンツの相反定理より $I_j^{(i)}V_j^{(j)}=I_i^{(j)}V_i^{(i)}$ が導かれ，$Y_{ji}=Y_{ij}$ となる．

次に式(11)の $Y_{ji}$ の停留性について調べる．電磁界の微小変化に対する $Y_{ji}$ の第1次変分を取ると

$$Y_0 Y_{ji}\left(V_i^{(i)}\delta V_j^{(j)}+V_j^{(j)}\delta V_i^{(i)}\right)+Y_0 V_i^{(i)}V_j^{(j)}\delta Y_{ji}=\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{S_\ell}\left[\delta H_\ell^{k(i)}\cdot K_\ell^{(j)}+H_\ell^{k(i)}\cdot\delta K_\ell^{(j)}\right]dS_\ell$$

$$+\sum_{\ell=1}^{N}{\sum_{mn}}'\left[Y_{mn}^{H}\left(V_{mn}^{\ell(j)}\delta V_{mn}^{\ell(i)}+V_{mn}^{\ell(i)}\delta V_{mn}^{\ell(j)}\right)+Y_{mn}^{E}\left(U_{mn}^{\ell(j)}\delta U_{mn}^{\ell(i)}+U_{mn}^{\ell(i)}\delta U_{mn}^{\ell(j)}\right)\right] \quad (12)$$

となる．さらに，式(10)の両辺に $\sum_{s=1}^{N}U_s\delta K_s^{(j)}$ をスカラー積して $z=0$ の面上にわたって積分すると

$$Y_0 Y_{ji}V_i^{(i)}\delta V_j^{(j)}=\sum_{s=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{S_s}H_s^{k(i)}\cdot\delta K_s^{(j)}dS_s$$

$$+\sum_{s=1}^{N}{\sum_{mn}}'\left[Y_{mn}^{H}V_{mn}^{s(i)}\delta V_{mn}^{s(j)}+Y_{mn}^{E}U_{mn}^{s(i)}\delta U_{mn}^{s(j)}\right] \quad (13)$$

なる関係を得る．式(13)で $j$ と $i$ を交換して得られる式と式(13)との和を式(12)から辺々減じると次の結果を得る．

$$V_i^{(i)}V_j^{(j)}Y_0\delta Y_{ji}=\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\int_{S_\ell}\delta\left(H_\ell^{k(i)}\cdot K_\ell^{(j)}\right)dS_\ell-\int_{S_k}\left(H_k^{\ell(i)}\cdot\delta K_k^{(j)}+H_k^{\ell(j)}\cdot\delta K_k^{(i)}\right)dS_k\right]$$

$$=\frac{j}{2\pi\omega\mu}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{S_\ell}\int_{S_k}\left[\delta\left(K_k^{(i)}\cdot G\cdot K_\ell^{(j)}\right)-\left(K_k^{(i)}\cdot G\cdot\delta K_\ell^{(j)}+K_\ell^{(j)}\cdot G\cdot\delta K_k^{(i)}\right)\right]dS_\ell dS_k$$

$$=\frac{j}{2\pi\omega\mu}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{S_\ell}\int_{S_k}\left[\delta\left(K_k^{(i)}\cdot G\cdot K_\ell^{(j)}\right)-\delta\left(K_\ell^{(j)}\cdot G\cdot K_k^{(i)}\right)\right]dS_\ell dS_k$$

$$=0 \quad (14)$$

ここで，上式の変形途中で積分の結果を変えることな

くとℓを交換し，かつGの対称性を用いた。$V_i^{(i)}$と$V_j^{(j)}$はともに零ではないので，$\delta Y_{ji}=0$となる。したがって$Y_{ji}$は電界分布の真の値からの微小変化に対して停留であると言える。それ故，式(11)が$Y_{ji}$に対する停留表示式となる。

式(11)を書き直すと次式のようになる。

$$Y_{ji}V_i^{(i)}V_j^{(j)}-\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{mn}^{M_\ell N_\ell}\sum_{rs}^{M_k N_k}\left[P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)V_{mn}^{\ell(j)}V_{rs}^{k(i)}+P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)V_{mn}^{\ell(j)}U_{rs}^{k(i)}\right.$$
$$\left.+P_{mn}^{rs}(\ell E,kH)U_{mn}^{\ell(j)}V_{rs}^{k(i)}+P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)U_{mn}^{\ell(j)}U_{rs}^{k(i)}\right]=0 \qquad (15)$$

ここに，$(M_i,N_i)$は導波管$i$の試行関数の展開モード数の上限を示し，さらに

$$\left.\begin{aligned}
&P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)=Y_{mn}^{rs}(\ell H,kH)+\frac{\delta_{ik}}{Y_0}\sum_{ab}{}'Y_{ab}^{H}\delta_{am}\delta_{ar}\delta_{bn}\delta_{bs},\quad P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)=Y_{mn}^{rs}(\ell H,kE)\\
&P_{mn}^{rs}(\ell E,kH)=Y_{mn}^{rs}(\ell E,kH),\quad P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)=Y_{mn}^{rs}(\ell E,kE)+\frac{\delta_{ik}}{Y_0}\sum_{ab}{}'Y_{ab}^{E}\delta_{am}\delta_{ar}\delta_{bn}\delta_{bs}\\
&Y_{mn}^{rs}(\ell H,kE)=\frac{j/Y_0}{2\pi\omega\mu}\int_{S_\ell}\int_{S_k}\boldsymbol{h}_{mn}^{\ell H}\cdot[\nabla_t\nabla_0\psi+k^2(\boldsymbol{i}i+\boldsymbol{j}j)\psi]\cdot\boldsymbol{h}_{rs}^{kE}\,dS_k\,dS_\ell=Y_{rs}^{mn}(kE,\ell H)
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

である（付録1）。

リッツの方法により，式(15)の両辺を各展開係数で偏微分し，$Y_{ji}$の停留性を考慮すると次の連立方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&Y_{ji}V_j^{(j)}-\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{mn}^{10}(\ell H,iH)V_{mn}^{\ell(j)}+P_{mn}^{10}(\ell E,iH)U_{mn}^{\ell(j)}\right]=0\\
&-\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)V_{mn}^{\ell(j)}+P_{mn}^{rs}(\ell E,kH)U_{mn}^{\ell(j)}\right]=0\quad (r,s)\neq(1,0)\\
&-\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)V_{mn}^{\ell(j)}+P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)U_{mn}^{\ell(j)}\right]=0\quad (r,s)\neq(1,0)
\end{aligned}\right\} \qquad (17a)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&Y_{ij}V_{ni}^{(i)} - \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{10}^{mn}(\ell H,\ell H)\ V_{mn}^{\ell(i)} + P_{10}^{mn}(\ell H,\ell E)\ U_{mn}^{\ell(i)}\right] = 0 \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{rs}^{mn}(\ell H,\ell H)\ V_{mn}^{\ell(i)} + P_{rs}^{mn}(\ell H,\ell E)\ U_{mn}^{\ell(i)}\right] = 0 \quad (r,s)\neq(1,0) \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left[P_{rs}^{mn}(\ell E,\ell H)\ V_{mn}^{\ell(i)} + P_{rs}^{mn}(\ell E,\ell E)\ U_{mn}^{\ell(i)}\right] = 0 \quad (r,s)\neq(1,0)
\end{aligned}
\right\} \quad (17b)
$$

式(17a)と(17b)を見比べると，$P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)$等の対称性より両式は全く同一の行列式を与えるので，どちらか一方の組について解けばよい。展開係数の少くとも一つが零でないためには行列式が零となることより，$Y_{ji}$は次式のように求められる。

$$
Y_{ji} = \frac{\begin{vmatrix} (P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)) & (P_{mn}^{rs}(\ell E,kH)) \\ (P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)) & (P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)) \end{vmatrix}}{\dfrac{\partial}{\partial P_{10}^{jo}(jH,iH)} \begin{vmatrix} (P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)) & (P_{mn}^{rs}(\ell E,kH)) \\ (P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)) & (P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)) \end{vmatrix}} \quad (18)
$$

ここに，$(P_{mn}^{rs}(\ell H,kH))$等は行列を表わす。

式(18)より求まった$Y_{ji}$を用いて，主モードより見た散乱係数$S_{ji}$は次式から求まる。

$$
(S_{ji}) = ((\mathrm{I}) - (Y_{ji}))((\mathrm{II}) + (Y_{ji}))^{-1} \quad (19)
$$

ここで，(II)は単位行列を表わす。

式(17)より高次モードの各展開係数も決定できるので，任意励振の場合の展開係数は肩の(i)または(j)を1からNまで変えた場合の重ね合せとして求めることができる。いま，i番目の導波管のみを励振し，他の導

導波管はすべて整合負荷で終端した場合の電磁界には肩に[i]をつけて表示することにすると，このときの高次モードの励開係数は次のように表わされる．

$$\frac{V_{rs}^{s[i]}}{\sqrt{2Z_{rs}^{H}}}=\sum_{j=1}^{N}M_{rs}^{s(j)}(\delta_{ji}+S_{ji})a_i,\quad \frac{U_{rs}^{s[i]}}{\sqrt{2Z_{rs}^{E}}}=\sum_{j=1}^{N}N_{rs}^{s(j)}(\delta_{ji}+S_{ji})a_i \qquad (20)$$

ここに，$M_{rs}^{s(j)}$, $N_{rs}^{s(j)}$はそれぞれ式(17)より求めた$V_{rs}^{s(j)}/V_j$，$U_{rs}^{s(j)}/V_j$に等しく，高次モードの生成(または分布)係数とでも呼ばれ得るものであり．また$a_i$は主モードの入射波振幅で，さらに$Z_{rs}^{H}$, $Z_{rs}^{E}$はそれぞれH-波およびE-波のモードインピーダンスである．

遠方界(放射特性)

開口から十分遠方の電磁界は球座標$(r,\theta,\phi)$表示で次のように与えられる．

$$E(r,\theta,\phi)=\frac{2}{\pi^2}\sqrt{Y_0ab}\,(1+\Gamma_{11})a_0N\frac{jke^{-jkr}}{r}[i_\theta^{\,i}F_1(\theta,\phi)+i_\phi^{\,i}F_2(\theta,\phi)] \qquad (21)$$

$$H(r,\theta,\phi)=-\frac{2}{\pi^2}\sqrt{Y_0ab}\,(1+\Gamma_{11})a_0N\frac{jke^{-jkr}}{r}[i_\theta^{\,i}F_2(\theta,\phi)-i_\phi^{\,i}F_1(\theta,\phi)] \qquad (22)$$

$$F_1(\theta,\phi)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_1^{[i]}(\theta,\phi),\qquad F_2(\theta,\phi)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_2^{[i]}(\theta,\phi) \qquad (23)$$

$$F_1^{[i]}(\theta,\phi)=-\frac{\pi}{4}\sum_{j=1}^{N}\frac{(\delta_{ji}+S_{ji})a_i}{(1+\Gamma_{11})a_0}\{S(X_1^1)+S(X_1^2)\}S(Y_0^1)\sin\phi\,e^{jka\sin\theta(l_j\cos\phi+\eta_j\sin\phi)-j\psi_j}$$

$$+\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{mn}\frac{j\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\,e^{j(m+n-1)\pi/2}}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}}\frac{(\delta_{ik}+S_{ik})a_i}{(1+\Gamma_{11})a_0}\Big[\Big(\frac{n}{b}M_{mn}^{j(k)}-\frac{m}{a}N_{mn}^{j(k)}\Big)$$

$$\times\{S(X_m^1)+(-1)^mS(X_m^2)\}\{S(Y_n^1)-(-1)^nS(Y_n^2)\}\cos\phi-\Big(\frac{m}{a}M_{mn}^{j(k)}+\frac{n}{b}N_{mn}^{j(k)}\Big)$$

$$\times\{S(X_m^1)-(-1)^mS(X_m^2)\}\{S(Y_n^1)+(-1)^nS(Y_n^2)\}\sin\phi\Big]e^{jka\sin\theta(l_j\cos\phi+\eta_j\sin\phi)-j\psi_j} \qquad (24)$$

$$F_2^{[i]}(\theta,\phi)=-\frac{\pi}{4}\sum_{j=1}^{N}\frac{(\delta_{ij}+S_{ij})a_j}{(1+\Gamma_{ii})a_0}\{S(X_1^1)+S(X_1^2)\}S(Y_0^1)\cos\theta\cos\phi\, e^{jka\sin\theta(y_j\cos\phi+z_j\sin\theta)-j\psi_j}$$

$$-\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{mn}{}'\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\,e^{j(m+n-1)\pi/2}}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}}\frac{(\delta_{jk}+S_{jk})a_j}{(1+\Gamma_{ii})a_0}\cos\theta\Big[\Big(\frac{n}{b}M_{mn}^{j(k)}-\frac{m}{a}N_{mn}^{j(k)}\Big)$$

$$\times\{S(X_m^1)+(-1)^mS(X_m^2)\}\{S(Y_n^1)-(-1)^nS(Y_n^2)\}\sin\phi+\Big(\frac{m}{a}M_{mn}^{j(k)}+\frac{n}{b}N_{mn}^{j(k)}\Big)$$

$$\times\{S(X_m^1)-(-1)^mS(X_m^2)\}\{S(Y_n^1)+(-1)^nS(Y_n^2)\}\cos\phi\Big]e^{jka\sin\theta(y_j\cos\phi+z_j\sin\theta)-j\psi_j}\qquad(25)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}&S(X)=\frac{\sin X}{X},\quad X_m^{1,2}=\frac{a}{2}\Big(\frac{m\pi}{a}\pm k\sin\theta\cos\phi\Big),\quad Y_n^{1,2}=\frac{b}{2}\Big(\frac{n\pi}{b}\pm k\sin\theta\sin\phi\Big)\\&\eta=\sqrt{\varepsilon/\mu},\quad \varepsilon_m=\begin{cases}1: m=0\\2: m\neq0\end{cases}\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

であり、複号(±)はそれぞれ肩の1および2に対応する。さらに、$a_0$, $\Gamma_{ii}$はそれぞれ1個の開口が孤立している(相互結合がない)場合の主モード入射波の振幅および反射係数である。$\psi_j$は$j$番目の開口の主モードの走査位相角度である。

$F_1^{[ij]}$, $F_2^{[ij]}$はいずれもエレメント・ファクターである。

## 3. 3開口アレイ

いま、簡単のために図2に示されるような3個の導波管開口から成る直線状アレイにつき考察する。

散乱係数は次のように与えられる。

$$S_{11}=\frac{1}{W}[(1-Y_{11})\{(1+Y_{22})(1+Y_{33})-Y_{23}^2\}+Y_{12}\{Y_{12}(1+Y_{33})-Y_{13}Y_{23}\}-Y_{12}\{Y_{12}Y_{23}-Y_{13}(1+Y_{22})\}]$$

$$S_{12}=\frac{1}{W}[2\{Y_{13}Y_{23}-Y_{12}(1+Y_{33})\}]$$

$$S_{13}=\frac{1}{W}\left[2\{Y_{12}Y_{23}-Y_{13}(1+Y_{22})\}\right]$$

$$S_{22}=\frac{1}{W}\left[(1+Y_{11})\{(1-Y_{22})(1+Y_{33})+Y_{23}^2\}+Y_{12}\{Y_{12}(1+Y_{33})-Y_{13}Y_{23}\}-Y_{13}\{Y_{12}Y_{23}+Y_{13}(1-Y_{22})\}\right]$$

$$S_{23}=\frac{1}{W}\left[2\{Y_{12}Y_{13}-Y_{23}(1+Y_{11})\}\right]$$

$$S_{33}=\frac{1}{W}\left[(1+Y_{11})\{(1+Y_{22})(1-Y_{33})+Y_{23}^2\}-Y_{12}\{Y_{12}(1-Y_{33})+Y_{13}Y_{23}\}-Y_{13}\{Y_{12}Y_{23}-Y_{13}(1+Y_{22})\}\right]$$

$$W=(1+Y_{11})\{(1+Y_{22})(1+Y_{33})-Y_{23}^2\}-Y_{12}\{Y_{12}(1+Y_{33})-Y_{13}Y_{23}\}+Y_{13}\{Y_{12}Y_{23}-Y_{13}(1+Y_{22})\} \qquad (27)$$

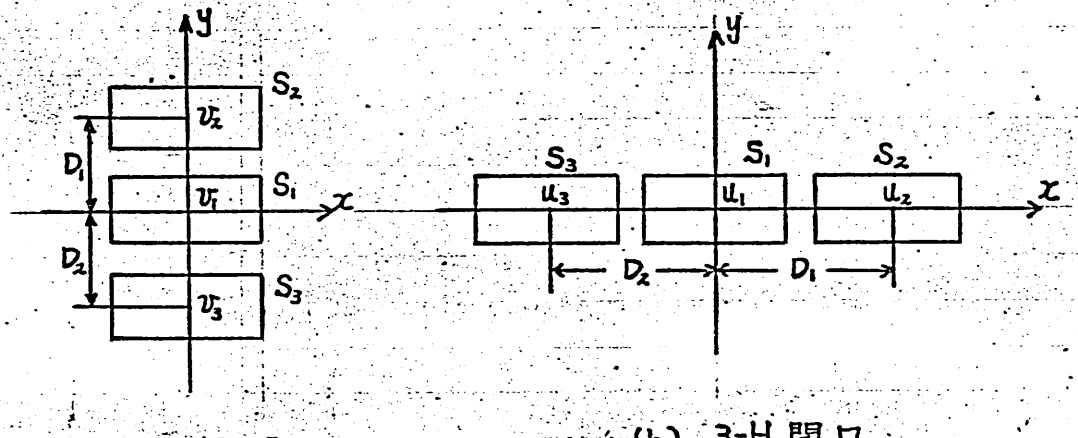



図2. 3開口直線状アレイ

## 3-1. 3-E開口アレイ

### (A) 1モード近似 ($TE_{10}$)

以下簡単のため $D_1=D_2=D$ としておく。この場合にはアドミッタンス・エレメントは次のようになる。

$$Y_{11}=Y_{22}=Y_{33}=Y_{10}^{10}(1H,1H),\quad Y_{12}=Y_{13}=Y_{10}^{10}(1H,2H),\quad Y_{23}=Y_{10}^{10}(2H,3H) \qquad (28)$$

エレメント・ファクターは次のように表わされる。

$$F_1^{[3]}(\theta,\tfrac{\pi}{2})=\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}\left[\frac{1+S_{11}}{1+\Gamma_{11}}+\frac{2S_{12}}{1+\Gamma_{11}}\cos(2\nu\sin\theta-\psi)\right] \qquad (29)$$

$$F_1^{[2]}(\theta,\varphi)=\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}\left[\frac{S_{12}}{1+\Gamma_{11}}+\frac{1+S_{22}}{1+\Gamma_{11}}e^{j(2V\sin\theta-\psi)}+\frac{S_{23}}{1+\Gamma_{11}}e^{-j(2V\sin\theta-\psi)}\right] \quad (30)$$

$$F_1^{[3]}(\theta,\varphi)=\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}\left[\frac{S_{13}}{1+\Gamma_{11}}+\frac{S_{23}}{1+\Gamma_{11}}e^{j(2V\sin\theta-\psi)}+\frac{1+S_{33}}{1+\Gamma_{11}}e^{-j(2V\sin\theta-\psi)}\right] \quad (31)$$

ここに，$B=kb/2$，$V=kD/2$，であり，さらに$\psi_1=0$および$\psi_2=-\psi_3=\psi$とし，等振幅励振($a_i=a_0$)を考える．

合成の放射特性は次式で与えられる．

$$F_1(\theta,\varphi)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}F_1^{[i]}(\theta,\varphi) \quad (32)$$

また，相互結合がない場合の合成の放射特性は

$$F_1^{\circ}(\theta,\varphi)=\frac{\sin(3V\sin\theta-3\psi/2)}{3\sin(V\sin\theta-\psi/2)}\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta} \quad (33)$$

となる．

(B) 2モード近似 ($TE_{10}$, $TE_{30}$)

この場合の$M_{30}^{j(k)}$および$N_{30}^{j(k)}$は表1に与えてある．アドミッタンス・エレメントは式(18)より求める．

エレメント・ファクターは次のように表わされる．

$$F_1^{[1]}(\theta,\varphi)=\frac{1}{1+\Gamma_{11}}\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}\left[1+S_{11}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}M_{30}^{1(j)}(\delta_{j1}+S_{j1})\right.$$
$$\left.+\left\{S_{12}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}M_{30}^{2(j)}(\delta_{j1}+S_{j1})\right\}e^{j(2V\sin\theta-\psi)}+\left\{S_{13}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}M_{30}^{3(j)}(\delta_{j1}+S_{j1})\right\}e^{-j(2V\sin\theta-\psi)}\right] \quad (34)$$

$$F_1^{[2]}(\theta,\varphi)=\frac{1}{1+\Gamma_{11}}\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}\left[S_{12}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}M_{30}^{1(j)}(\delta_{j2}+S_{j2})\right.$$
$$\left.+\left\{1+S_{22}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}M_{30}^{2(j)}(\delta_{j2}+S_{j2})\right\}e^{j(2V\sin\theta-\psi)}+\left\{S_{23}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}M_{30}^{3(j)}(\delta_{j2}+S_{j2})\right\}e^{-j(2V\sin\theta-\psi)}\right] \quad (35)$$

$$F_1^{[3]}(\theta,\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{1+\Gamma_{11}} \frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta}\Big[S_{13} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} M_{30}^{(3)}(\delta_{j3}+S_{j3})$$

$$+\Big\{S_{23}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} M_{30}^{(3)}(\delta_{j3}+S_{j3})\Big\}e^{j(2\nu\sin\theta-\psi)} + \Big\{1+S_{33}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} M_{30}^{(3)}(\delta_{j3}+S_{j3})\Big\}e^{-j(2\nu\sin\theta-\psi)}\Big] \quad (36)$$

相互結合のない場合の合成の放射特性は

$$F_1^{\circ}(\theta,\tfrac{\pi}{2}) = \Big(1+\frac{1}{3}M_{30}^{(1)}\Big)\frac{\sin(3\nu\sin\theta-3\psi/2)}{3\sin(\nu\sin\theta-\psi/2)}\frac{\sin(B\sin\theta)}{B\sin\theta} \quad (37)$$

となる。2個以上のモードを考慮した場合も同様の手順で解析できる。

3-2. 3-H開口アレイ

(A) 1モード近似 ($TE_{10}$)

この場合のエレメント・ファクターは次のようになる。

$$F_2^{[1]}(\theta,0) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{1+\Gamma_{11}}\cos\theta\cos(A\sin\theta)\Big\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+A\sin\theta}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-A\sin\theta}\Big\}$$

$$\times\big[1+S_{11}+2S_{12}\cos(2\nu\sin\theta-\psi)\big] \quad (38)$$

$$F_2^{[2]}(\theta,0) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{1+\Gamma_{11}}\cos\theta\cos(A\sin\theta)\Big\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+A\sin\theta}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-A\sin\theta}\Big\}$$

$$\times\big[S_{12}+(1+S_{22})e^{j(2\nu\sin\theta-\psi)}+S_{23}e^{-j(2\nu\sin\theta-\psi)}\big] \quad (39)$$

$$F_2^{[3]}(\theta,0) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{1+\Gamma_{11}}\cos\theta\cos(A\sin\theta)\Big\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+A\sin\theta}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-A\sin\theta}\Big\}$$

$$\times\big[S_{13}+S_{23}e^{j(2\nu\sin\theta-\psi)}+(1+S_{33})e^{-j(2\nu\sin\theta-\psi)}\big] \quad (40)$$

相互結合のない場合の合成の放射特性は

$$F_2^{\circ}(\theta,0) = \frac{\sin(3\nu\sin\theta-3\psi/2)}{3\sin(\nu\sin\theta-\psi/2)}\cos\theta\cos(A\sin\theta)\Big\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+A\sin\theta}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-A\sin\theta}\Big\} \quad (41)$$

となる．ここで，$A=kd/2$ である．

2モード以上の場合についても同様の手順で解析できる．

## 4. 数値計算結果

図2に示されるような3個の導波管開口より成るアレイにおいて，$a/\lambda=0.7$，$b/\lambda=0.31179$ の場合につき数値計算を行った．アドミッタンス・エレメントを図3および図4に，散乱係数を図5および図6に示してある．周知のように，相互アドミッタンスは振動しながら減衰している．3-E開口の場合の反射係数$|S_{11}|$および$|S_{22}|$もともに比較的大きな振動をしながら収束しているが，収束の度合はほぼ$(D/\lambda)^{-2}$に比例し，$D/\lambda$の十分大きな状況下では孤立開口の反射係数$|\Gamma_1|$に近づくものと考えられる．3-H開口の場合の散乱係数については，$D/\lambda$の変化に対して $0.24695\leq(|S_{11}|\simeq|S_{22}|)\leq 0.2548$，$|S_{12}|\leq 0.0594$，および$|S_{23}|\leq 0.01211$であるので図示していない．2モード$(TE_{10}+TE_{30})$近似の解析を行っても，3-Eおよび3-Hいずれの場合にもアドミッタンス・エレメントおよび散乱係数の値は1モード近似の値から高々0.3％程度のずれしか生じなかった．2モード近似の場合の$M_{30}^{(k)}$の値を表1に示してある．

図7には開口間隔をパラメータとした場合の，3-Eアレイの一連の放射特性を示してある．図7から得られる主放射方向$(\theta=0°,\ \phi=90°)$における相対振幅を描い

たのが図8である。開口間隔が $0.40533 \leq D/\lambda \leq 0.93537$ ($1.3b/\lambda \leq D/\lambda \leq 3b/\lambda$) の範囲で相対振幅が零デシベル以上になり、さらに $0.62358 \leq D/\lambda \leq 0.7483$ ($2b/\lambda \leq D/\lambda \leq 2.4b/\lambda$) の範囲でエレメント・ファクター $F_1^{(1)}$ に対しては最大値が約+2.2dB, 合成特性に対しては約+1.5dBという値になっている。主放射方向の振幅はエレメント・ファクターでは約4.5dB, 合成特性では約2.5dB程度の変動がある。またエレメント・ファクター $F_1^{(1)}$ については、$D/\lambda = 3.2b/\lambda$ (=0.99773) のときと同様素着時 ($D/\lambda = b/\lambda$) にも主放射方向の振幅が最大にならず約-2.5dB程度に下るという逆転現象が起っている。これは、E-面配置のアレイでは壁面電流の分布が比較的強く乱され相互結合の効果によって位相の関係がくずれてくるためと予想される。図9にはZモード近似の場合の3-E開口アレイの放射特性を示してある。1モード近似の場合に比べて相対振幅が全般に下ってくる。

表1. $M_{30}^{j(n)}$ の値 ($b/\lambda \leq D/\lambda \leq 2b/\lambda$)

| |
|---|
| $0.0514407 \leq \lvert M_{30}^{1(1)} \rvert \leq 0.0519355$ |
| $0.0141604 \leq \lvert M_{30}^{2(1)} \rvert \leq 0.0159243$ |
| $0.0141784 \leq \lvert M_{30}^{1(2)} \rvert \leq 0.0163014$ |
| $0.0514940 \leq \lvert M_{30}^{2(2)} \rvert \leq 0.0517171$ |
| $0.0096323 \leq \lvert M_{30}^{3(2)} \rvert \leq 0.0146929$ |

3-H開口アレイの放射特性は図10に示してある。この場合には、壁面電流の分布は余り乱されず、かつ、$a/\lambda = 0.7$ で1波長に近いため相互結合の効果もそれ程利いてこない。

図11および図12に励振源の位相を走査させた場合の放射特性の例を示してある。

## 5. むすび

有限導波管開口アレイについて、相互アドミッタンスに対する厳密な停留表示式を求め、放射特性におよぼす相互結合の効果を変分法の立場より解析し、3個の開口から成るアレイを例にとって数値計算を行った。1モードおよび2モード近似の場合においてさえ相互結合効果が放射特性に十分利くことを示し、とくにE-面配列アレイに対してその効果は顕著で、エレメント・ファクターの逆転現象を生じる。

現実の放射特性に近いものを得ようとすれば、高次モードの数を増して解析する必要がある。

数値計算は京都大学および大阪大学の大型計算機を用いて行った。

[文 献]


1) G.F.Farrell etal, IEEE AP-16, NO.4, Jul. 1968, P405~
2) G.V.Borgiotti, IEEE Proc. Vol 56, NO.11, Nov. 1968, P1881~
3) R.J.Mailloux, IEEE AP-17, NO.6, Nov. 1969, P740~
4) G.V.Borgiotti, IEEE AP-16, NO.3, May, 1968, P329~
5) 杉尾・牧本, 輻射科学研究会資料 昭和45年10月
6) 杉尾・牧本, 電通学会アンテナ・伝播研資料 昭和45年10月

[付 録 1]

$$Y_{mn}^{rs}(i_H,k_H)=\frac{j}{4}\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n\varepsilon_r\varepsilon_s}}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}\sqrt{\{(\frac{m}{a})^2+(\frac{r}{b})^2\}\{(\frac{s}{a})^2+(\frac{s}{b})^2\}}}\Big[mr(\frac{\lambda}{a})^2\{4A_{mn}^{rs}(i,k)-mr(\frac{\lambda}{a})^2C_{mn}^{rs}(i,k)\}$$

$$+ns(\frac{\lambda}{b})^2\{4B_{mn}^{rs}(i,k)-ns(\frac{\lambda}{b})^2C_{mn}^{rs}(i,k)\}-(\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b})^2\{(ms)^2+(nr)^2\}C_{mn}^{rs}(i,k)\Big] \quad (1-1)$$

$$Y_{mn}^{rs}(i_H,k_E)=\frac{j}{Z_0}\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}}{\sqrt{\{(\frac{m}{a})^2+(\frac{r}{b})^2\}\{(\frac{s}{a})^2+(\frac{s}{b})^2\}}}\Big[ms\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\{4A_{mn}^{rs}(i,k)-mr(\frac{\lambda}{a})^2C_{mn}^{rs}(i,k)\}$$

$$-nr\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\{4B_{mn}^{rs}(i,k)-ns(\frac{\lambda}{b})^2C_{mn}^{rs}(i,k)\}+rs\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\{(\frac{ms}{a})^2-(\frac{nr}{b})^2\}C_{mn}^{rs}(i,k)\Big] \quad (1-2)$$

$$Y_{mn}^{rs}(i_E,k_E)=j\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b}\frac{1}{\sqrt{\{(\frac{ms}{a})^2+(\frac{nr}{b})^2\}\{(\frac{rs}{a})^2+(\frac{ns}{b})^2\}}}\Big[ns(\frac{\lambda}{a})^2\{4A_{mn}^{rs}(i,k)-mr(\frac{\lambda}{a})^2C_{mn}^{rs}(i,k)\}$$

$$+mr(\frac{\lambda}{a})^2\{4B_{mn}^{rs}(i,k)-ns(\frac{\lambda}{b})^2C_{mn}^{rs}(i,k)\}+2mnrs(\frac{\lambda}{a}\frac{\lambda}{b})^2C_{mn}^{rs}(i,k)\Big] \quad (1-3)$$

ここに

$$A_{mn}^{rs}(i,k)=\int_{x_k-\frac{b}{2}}^{x_k+\frac{b}{2}}\int_{y_k-\frac{a}{2}}^{y_k+\frac{a}{2}}\int_{x_i-\frac{b}{2}}^{x_i+\frac{b}{2}}\int_{y_i-\frac{a}{2}}^{y_i+\frac{a}{2}}\sin\frac{m\pi}{a}(x_i+\frac{a}{2}-u_i)\cos\frac{n\pi}{b}(y_i+\frac{b}{2}-v_i)\,\phi\,\sin\frac{r\pi}{a}(x_k+\frac{a}{2}-u_k)\cos\frac{s\pi}{b}(y_k+\frac{b}{2}-v_k)\,dS_i\,dS_k \quad (1-4)$$

$$B_{mn}^{rs}(i,k)=\int_{x_k-\frac{b}{2}}^{x_k+\frac{b}{2}}\int_{y_k-\frac{a}{2}}^{y_k+\frac{a}{2}}\int_{x_i-\frac{b}{2}}^{x_i+\frac{b}{2}}\int_{y_i-\frac{a}{2}}^{y_i+\frac{a}{2}}\cos\frac{m\pi}{a}(x_i+\frac{a}{2}-u_i)\sin\frac{n\pi}{b}(y_i+\frac{b}{2}-v_i)\,\phi\,\cos\frac{r\pi}{a}(x_k+\frac{a}{2}-u_k)\sin\frac{s\pi}{b}(y_k+\frac{b}{2}-v_k)\,dS_i\,dS_k \quad (1-5)$$

$$C_{mn}^{rs}(i,k)=\int_{x_k-\frac{b}{2}}^{x_k+\frac{b}{2}}\int_{y_k-\frac{a}{2}}^{y_k+\frac{a}{2}}\int_{x_i-\frac{b}{2}}^{x_i+\frac{b}{2}}\int_{y_i-\frac{a}{2}}^{y_i+\frac{a}{2}}\cos\frac{m\pi}{a}(x_i+\frac{a}{2}-u_i)\cos\frac{n\pi}{b}(y_i+\frac{b}{2}-v_i)\,\phi\,\cos\frac{r\pi}{a}(x_k+\frac{a}{2}-u_k)\cos\frac{s\pi}{b}(y_k+\frac{b}{2}-v_k)\,dS_i\,dS_k \quad (1-6)$$

$$\phi(x_i,y_i:x_k,y_k)=\frac{e^{-j2\pi\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2}}}{\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2}} \quad (1-7)$$

これらの4重積分は積分変数を

$\tau = x_2 - x_1 - (U_2 - U_1)/\lambda$, $\sigma = y_2 - y_1 - (V_2 - V_1)/\lambda$, $\mu = x_2 + x_1 - (U_2 + U_1)/\lambda$, $\nu = y_2 + y_1 - (V_2 + V_1)/\lambda$

と変換することにより次のような2重積分にもどすことができる。

$$A_{mn}^{rs}(i,k) = \frac{1}{\pi^2}\frac{a}{\lambda}\frac{b}{\lambda}\frac{1}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}[\phi(\tau,\sigma)+(-1)^{m+r}\phi(-\tau,\sigma)+(-1)^{n+s}\phi(\tau,-\sigma)+(-1)^{m+r+n+s}\phi(-\tau,-\sigma)]$$
$$\times[(-1)^{m+r}m\lambda\sin m\pi\tau - r\lambda\sin m\pi\tau][(-1)^{n+s}s\lambda\sin s\pi\sigma - n\lambda\sin n\pi\sigma]\,d\tau d\sigma \qquad (1\text{-}8)$$
$$(n\neq s,\ m\neq r)$$

$$B_{mn}^{rs}(i,k) = \frac{1}{\pi^2}\frac{a}{\lambda}\frac{b}{\lambda}\frac{1}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}[\phi(\tau,\sigma)+(-1)^{m+r}\phi(-\tau,\sigma)+(-1)^{n+s}\phi(\tau,-\sigma)+(-1)^{m+r+n+s}\phi(-\tau,-\sigma)]$$
$$\times[(-1)^{m+r}r\lambda\sin m\pi\tau - m\lambda\sin m\pi\tau][(-1)^{n+s}n\lambda\sin s\pi\sigma - s\lambda\sin n\pi\sigma]\,d\tau d\sigma \qquad (1\text{-}9)$$
$$(m\neq r,\ n\neq s)$$

$$C_{mn}^{rs}(i,k) = \frac{1}{\pi^2}\frac{a}{\lambda}\frac{b}{\lambda}\frac{1}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}[\phi(\tau,\sigma)+(-1)^{m+r}\phi(-\tau,\sigma)+(-1)^{n+s}\phi(\tau,-\sigma)+(-1)^{m+r+n+s}\phi(-\tau,-\sigma)]$$
$$\times[(-1)^{m+r}r\lambda\sin m\pi\tau - m\lambda\sin m\pi\tau][(-1)^{n+s}s\lambda\sin s\pi\sigma - n\lambda\sin n\pi\sigma]\,d\tau d\sigma \qquad (1\text{-}10)$$
$$(m\neq r,\ n\neq s)$$

以下同様の手順で $(m,r)$, $(n,s)$ の種々の組合せに対しても計算できる。

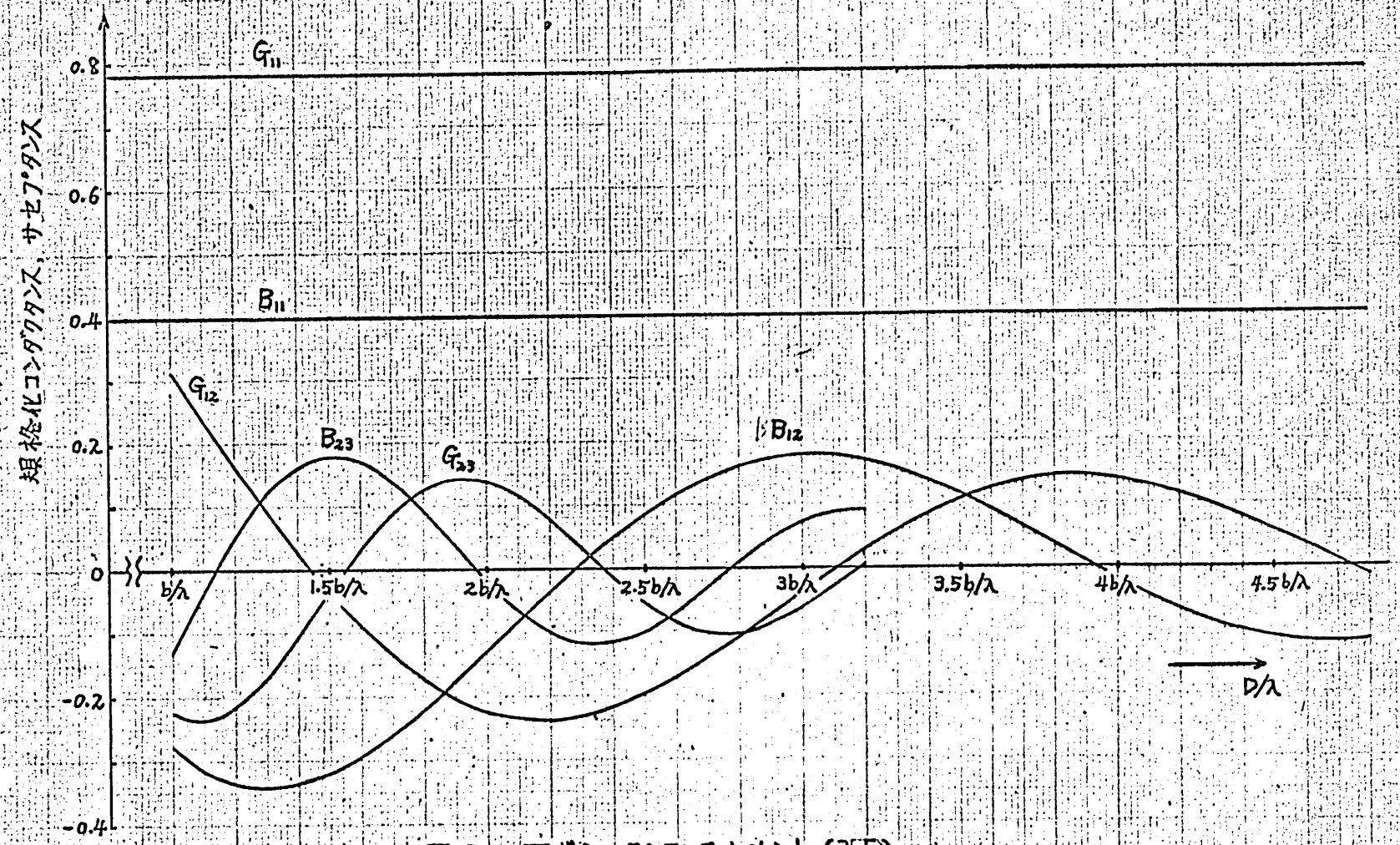



図.3　アドミッタンス・エレメント（3EE）

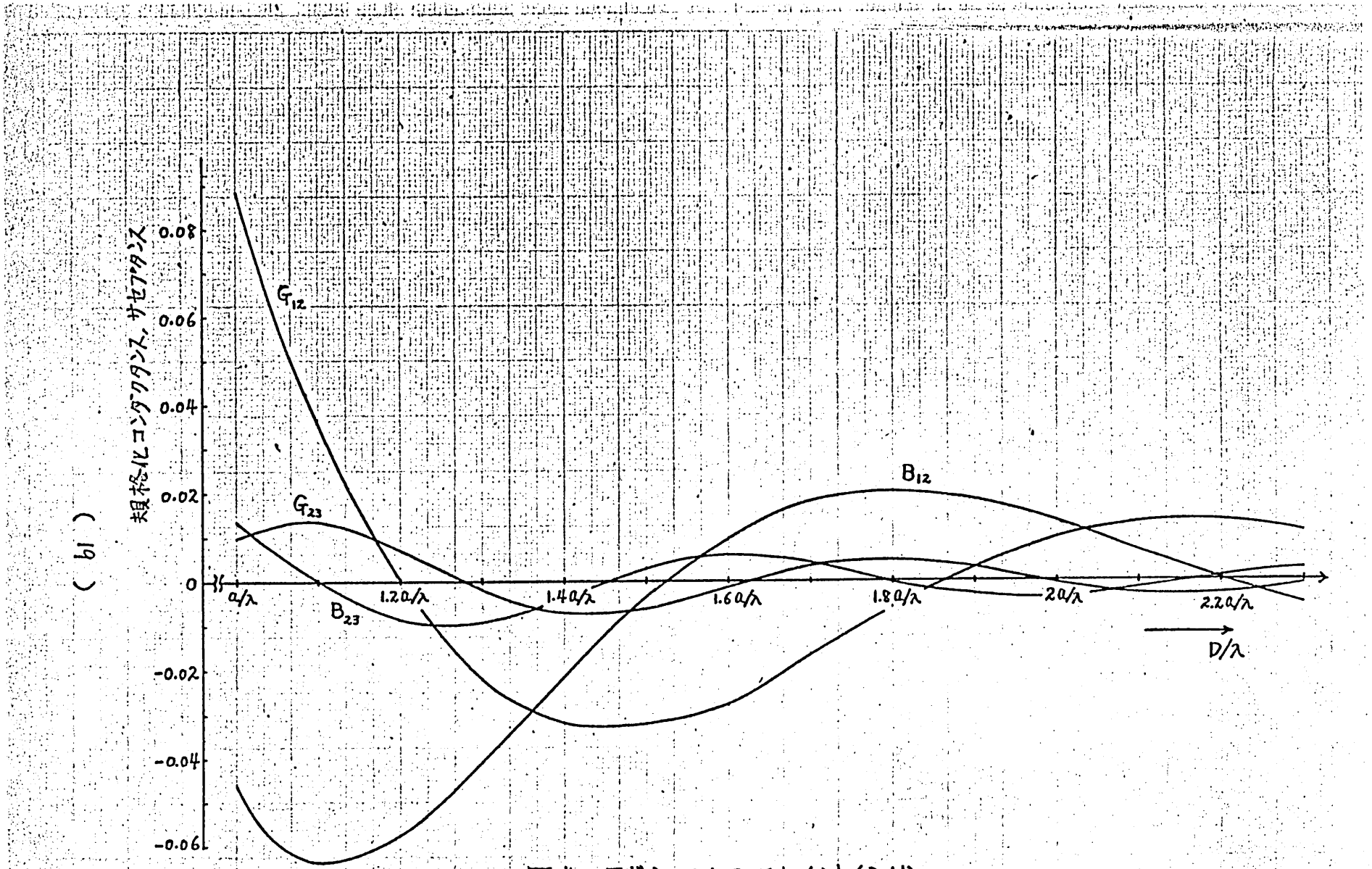



図4. アドミッタンス・エレメント(3-H)

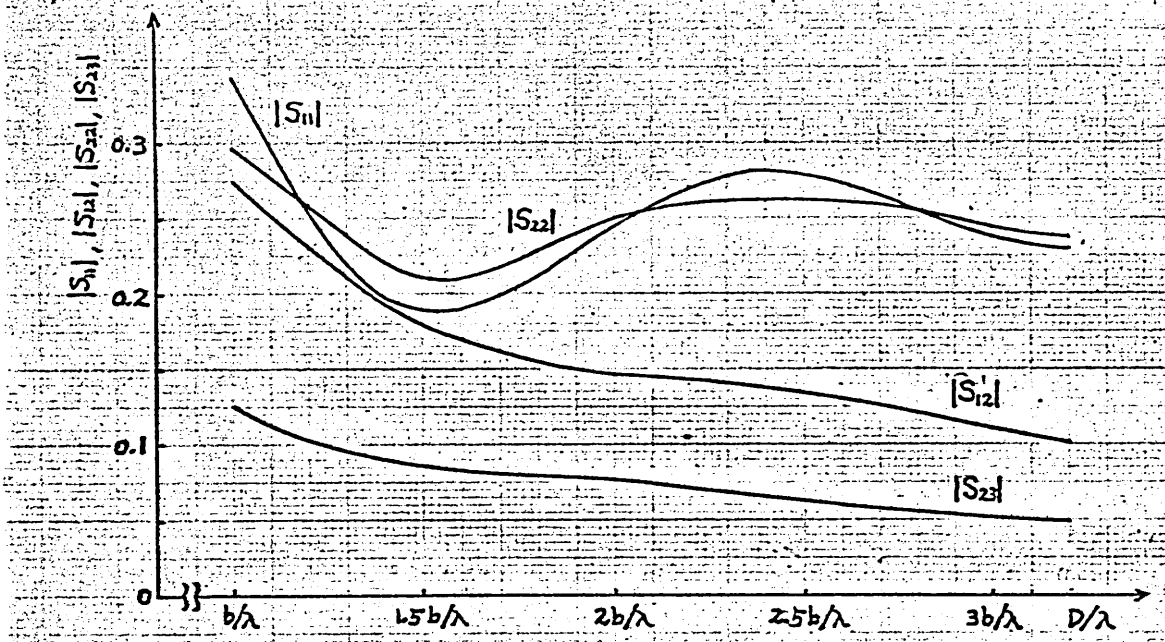



図5. 散乱係数の振幅 (3-E)

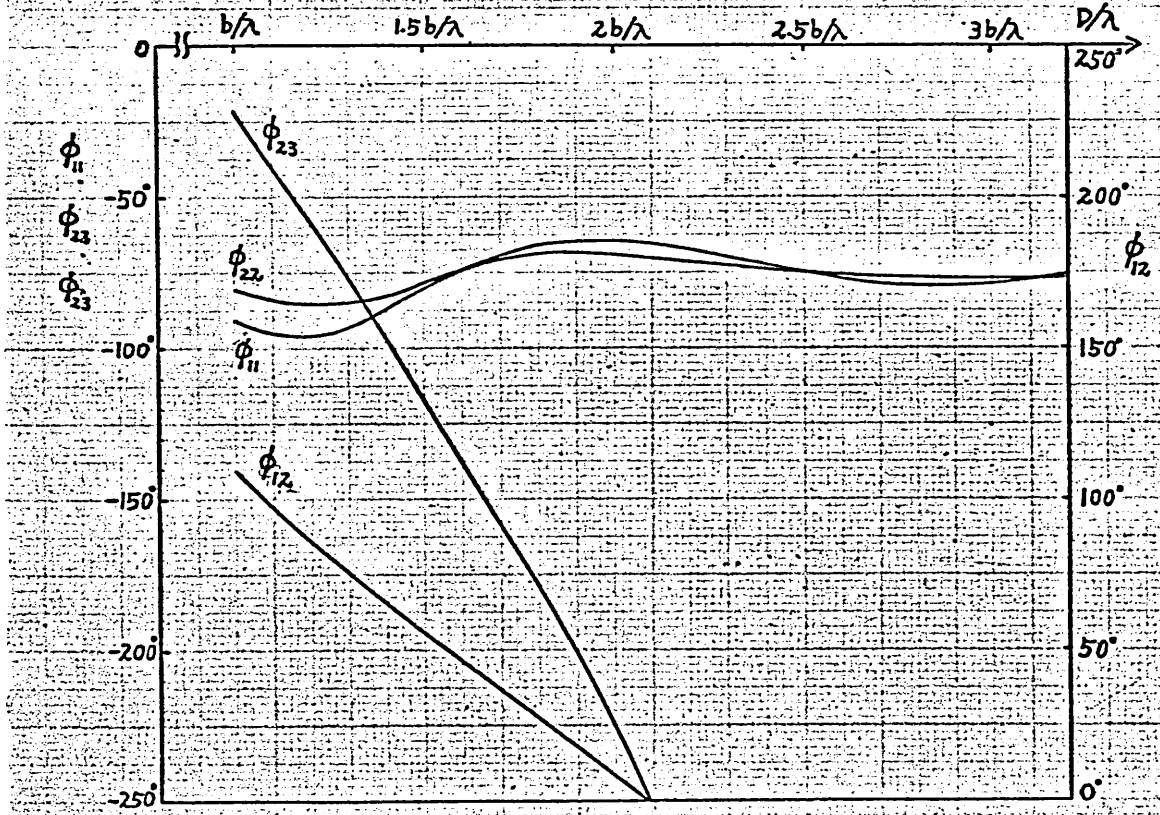



図6. 散乱係数の位相 (3-E)

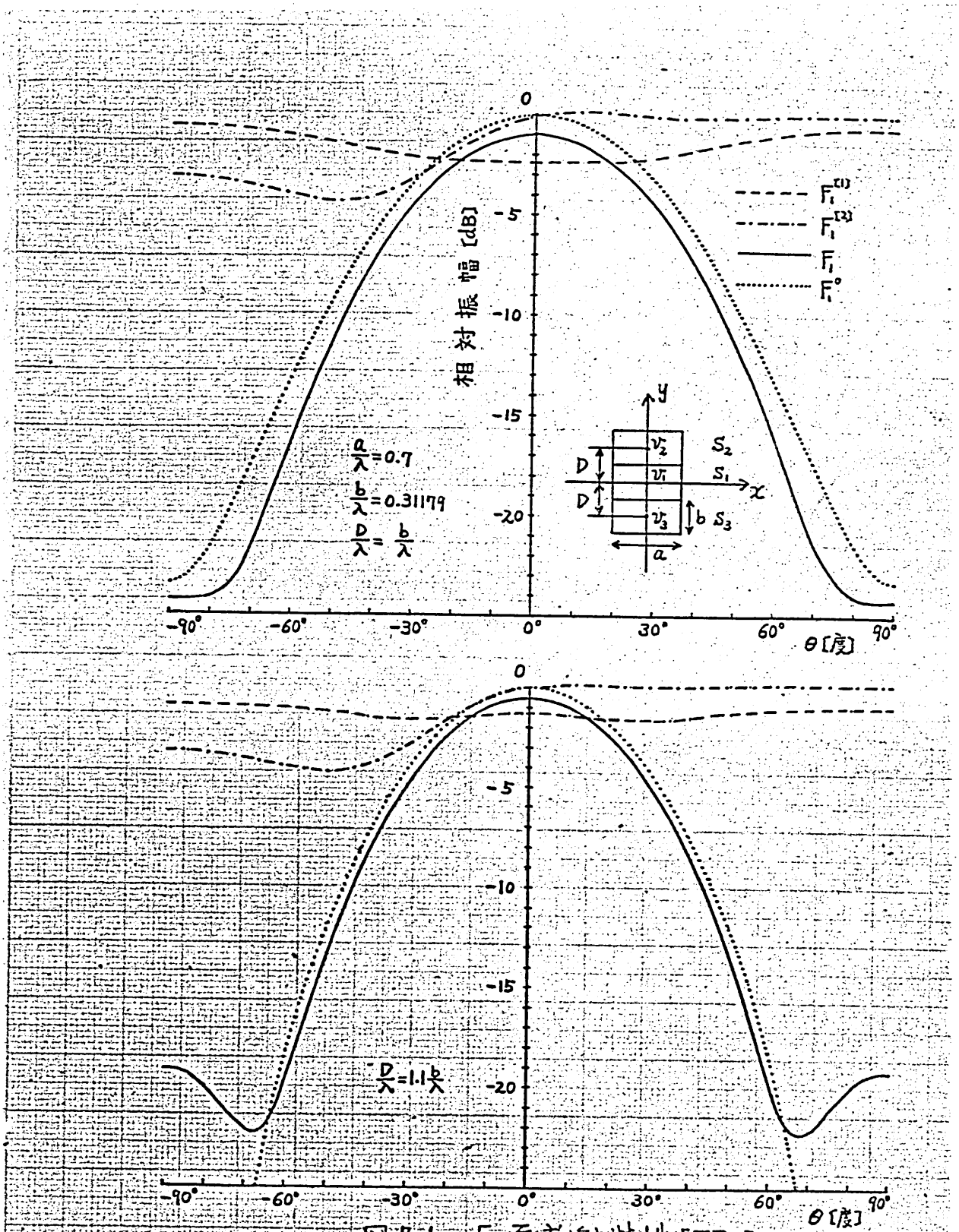



図 7-1. E-面放射特性 [$TE_{10}$]

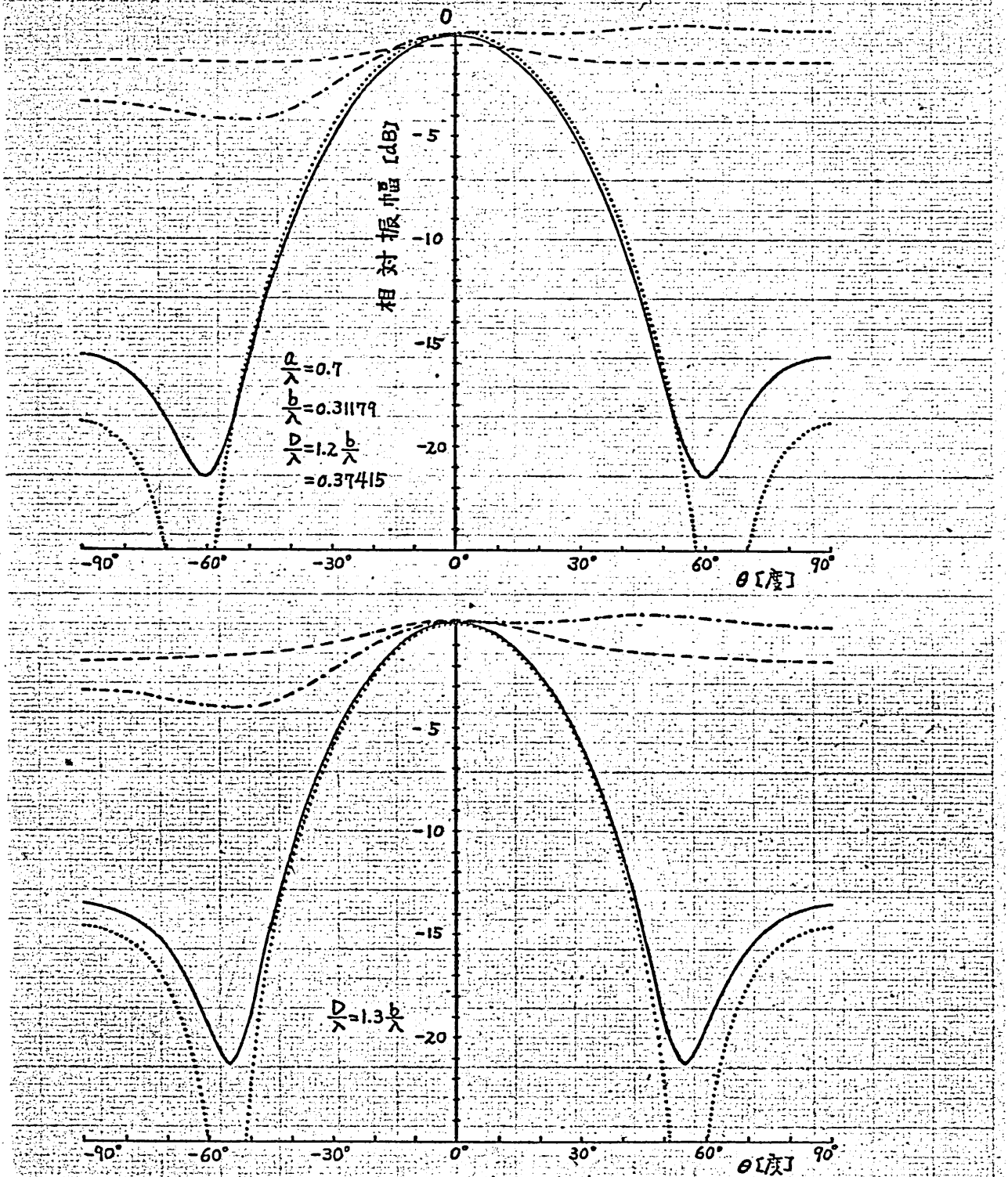

0
-5
-10
-15
-20
相対振幅 [dB]
a/λ=0.7
b/λ=0.31179
D/λ=1.2 b/λ
=0.37415
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
θ[度]
-5
-10
-15
-20
D/λ=1.3 b/λ
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
θ[度]

図7-2. E-面放射特性

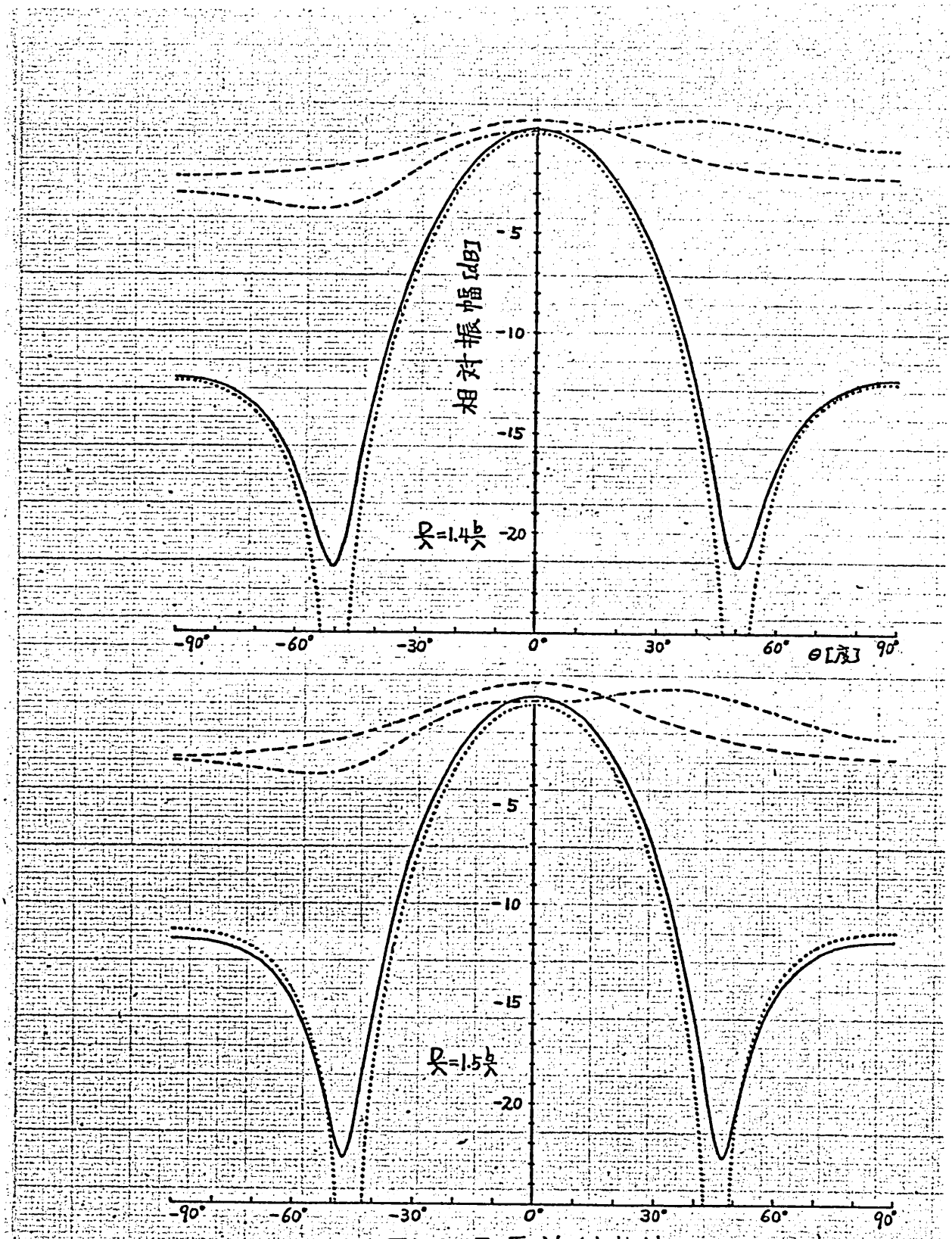

相対振幅[dB]
-5
-10
-15
-20
$R_x=1.4\lambda_x$
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
θ[度]
-5
-10
-15
-20
$R_x=1.5\lambda_x$
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°

図7-3. E-面放射特性

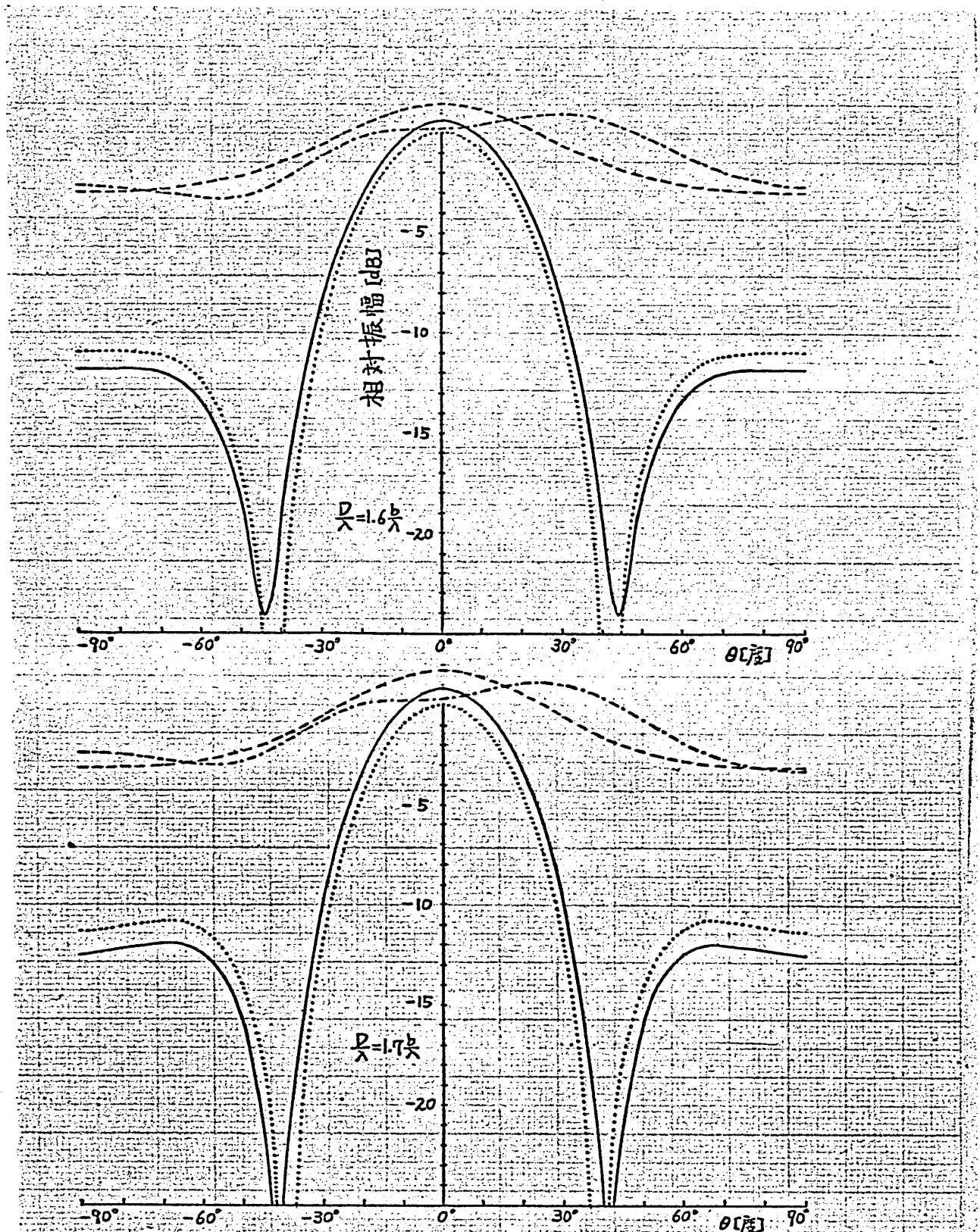
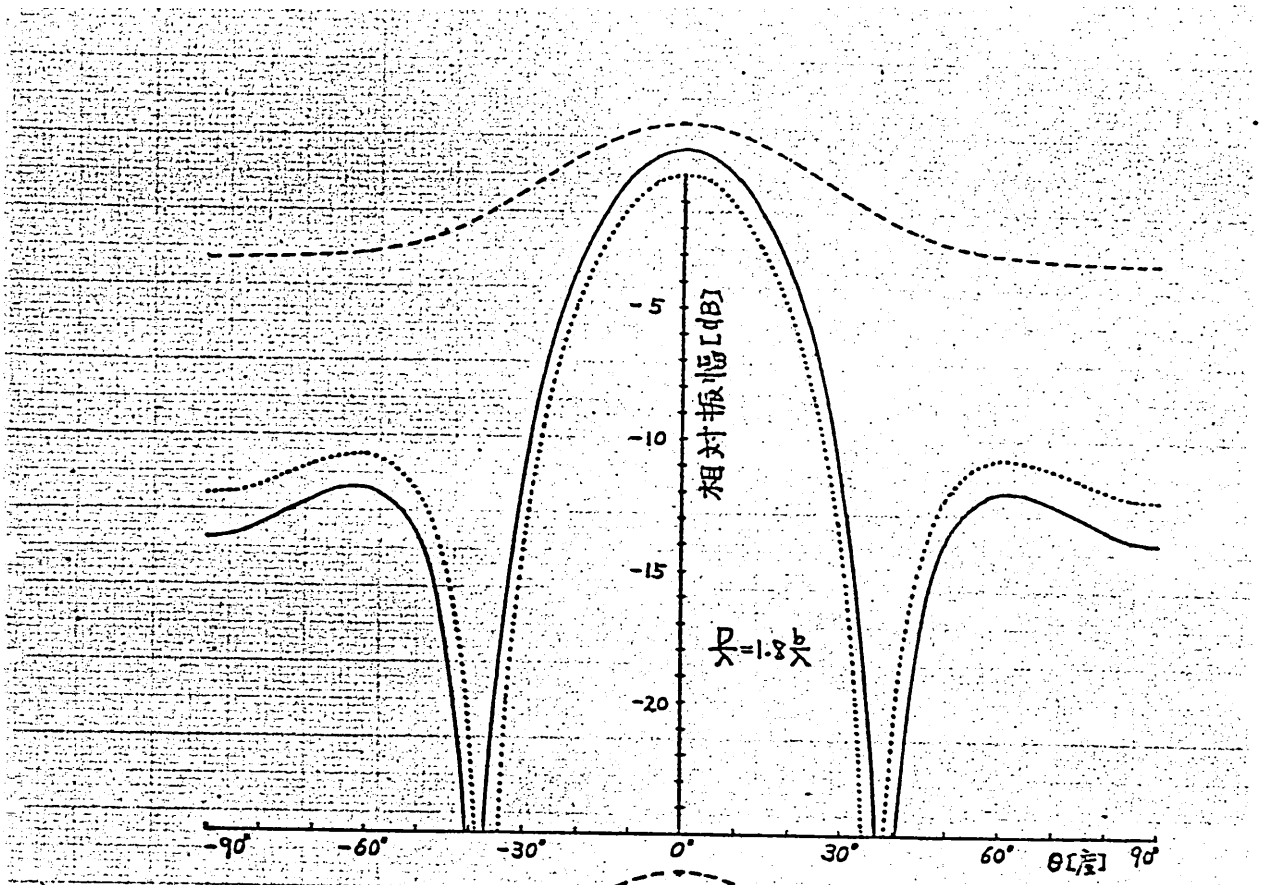

相対振幅[dB]
-5
-10
-15
-20
$P_x$=1.6$\lambda$
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
θ[度]
-5
-10
-15
-20
$P_x$=1.7$\lambda$
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
θ[度]

図7-4. E-面放射特性


-5
-10
-15
-20
相対振幅[dB]
R=1.8λ
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
θ[度]

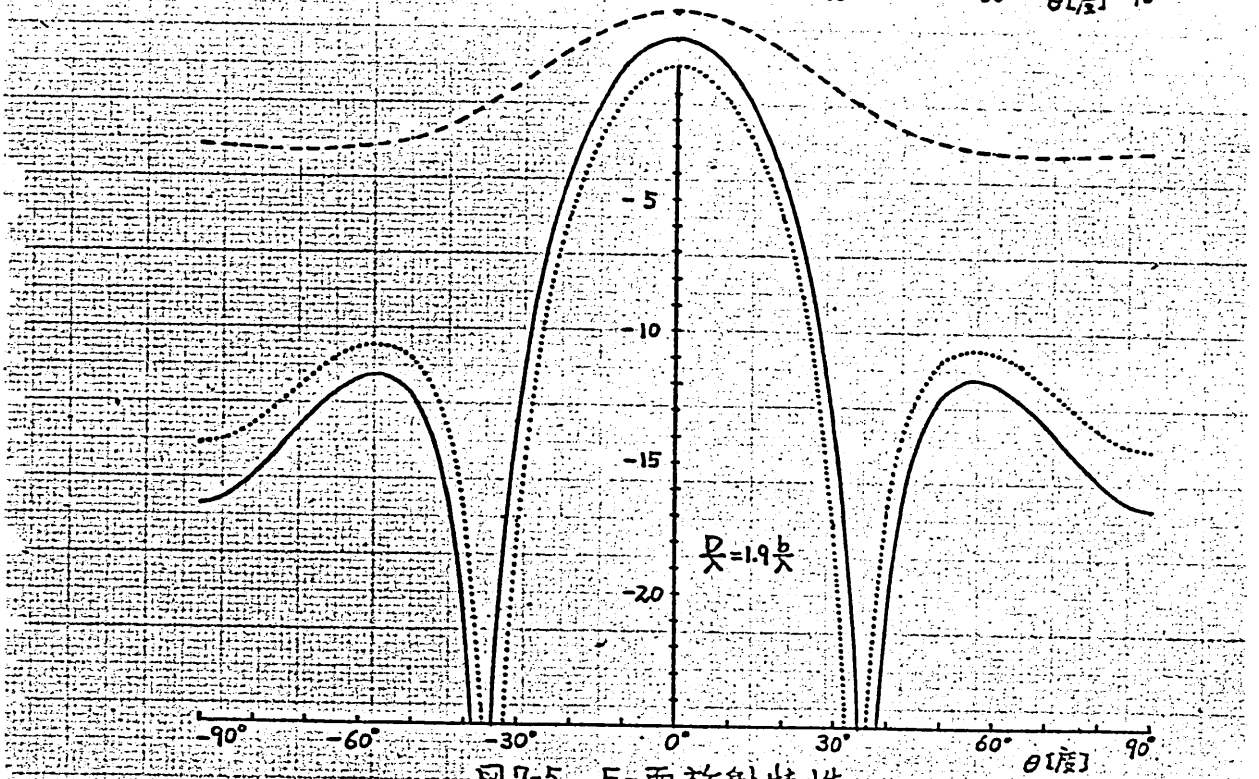

-5
-10
-15
-20
R=1.9λ
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
θ[度]

図7-5. E-面放射特性

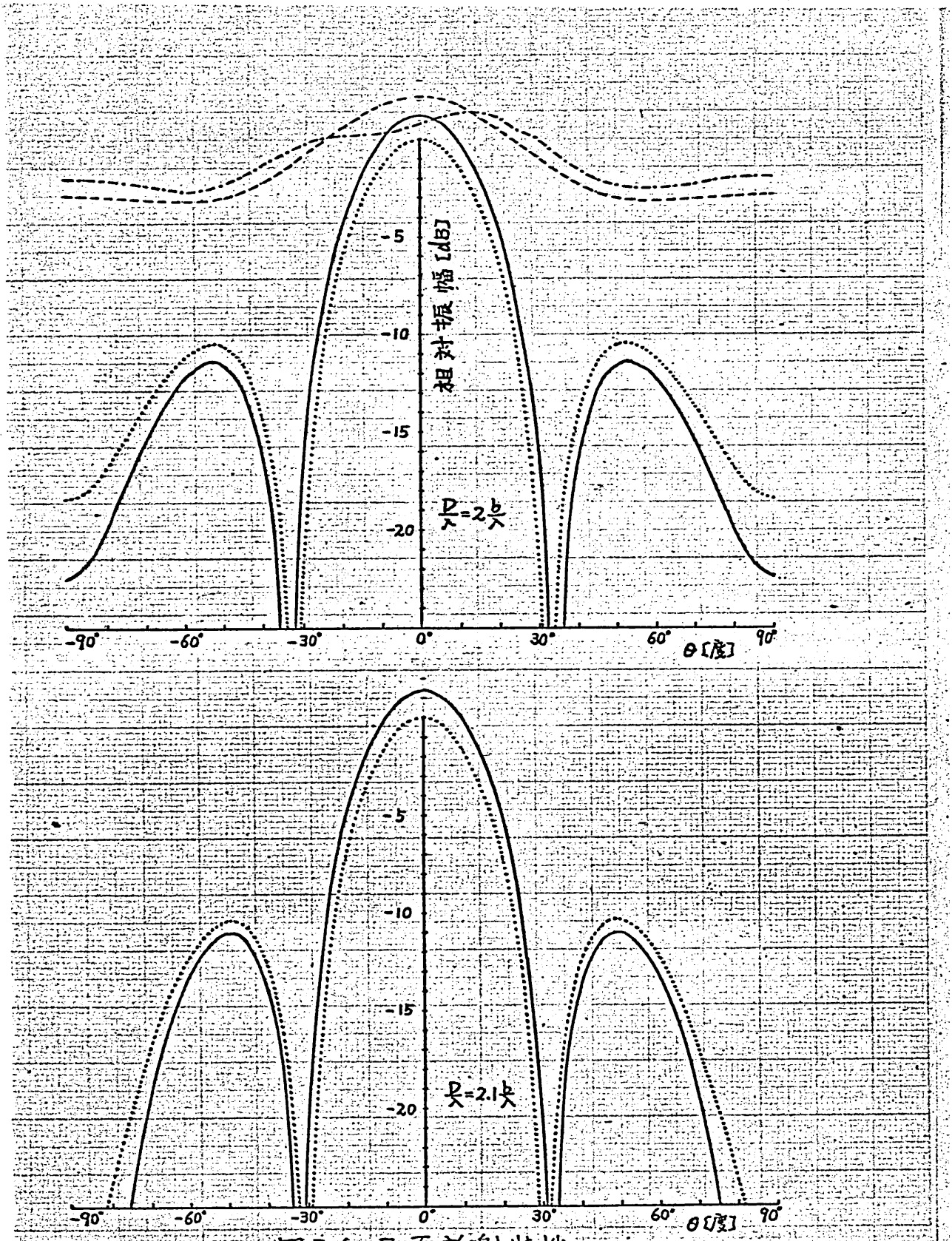

相対振幅[dB]
-5
-10
-15
-20
$D_y=2\lambda_y$
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
θ[度]
-5
-10
-15
-20
$D_y=2.1\lambda_y$
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
θ[度]

図7-6. E-面放射特性

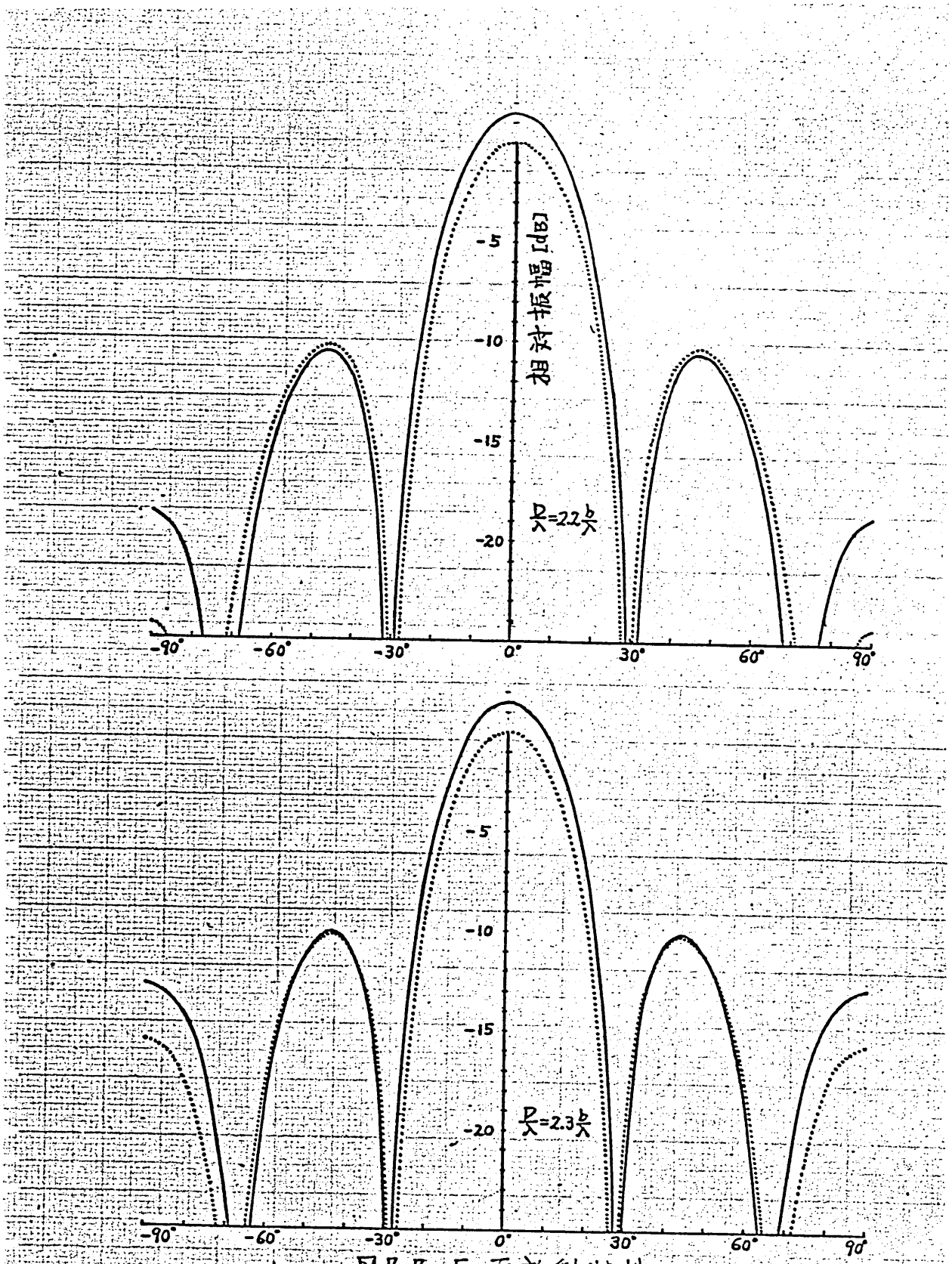

相対振幅[dB]
-5
-10
-15
-20
$P_x$=2.2$\lambda_x$
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°
-5
-10
-15
-20
$P_x$=2.3$\lambda_x$
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°

図7-7. E-面放射特性

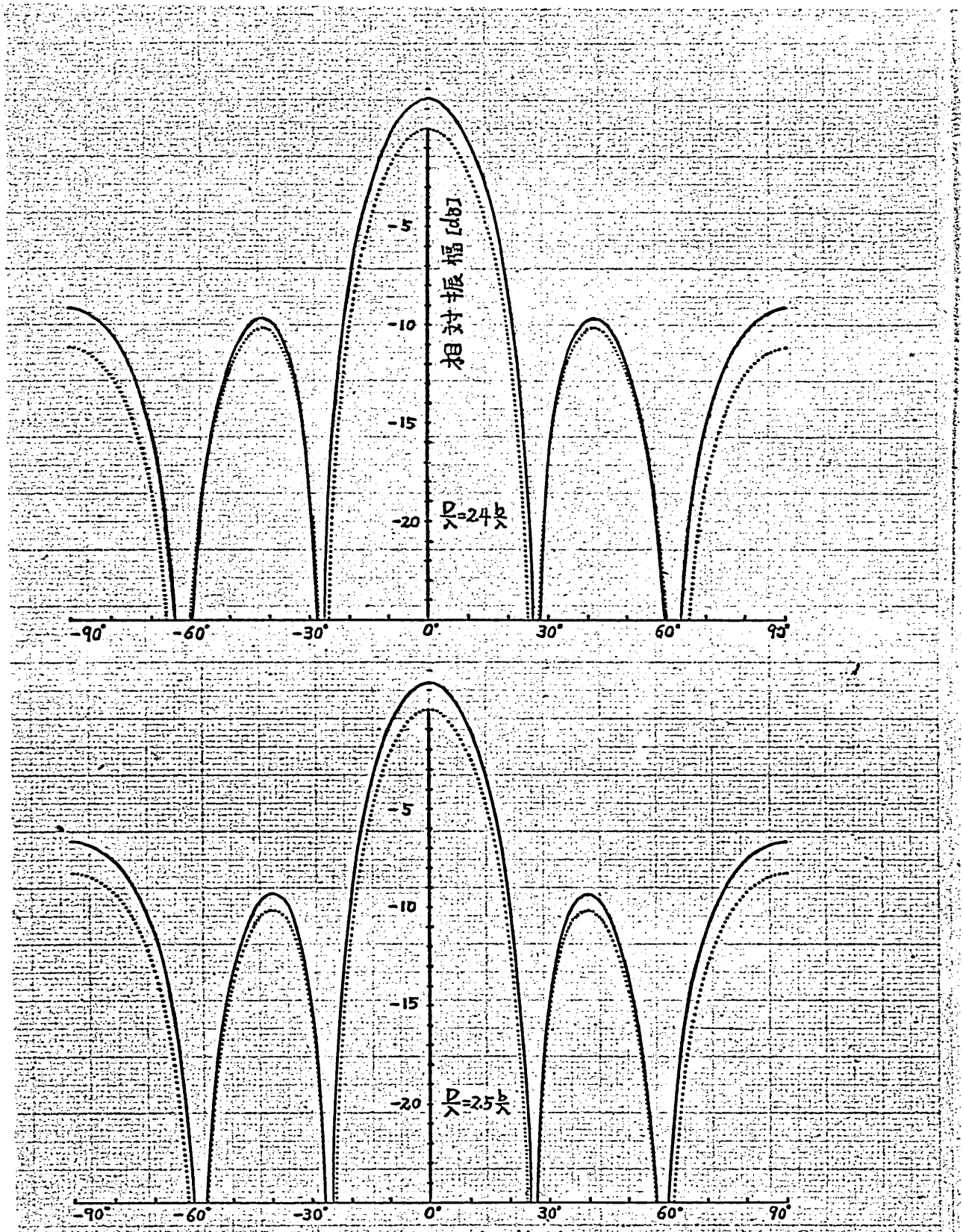

相対振幅 [dB]
-5
-10
-15
-20
$\frac{D}{\lambda}=2.4$
$\frac{D}{\lambda}=2.5$
-90°
-60°
-30°
0°
30°
60°
90°

図7-8. E-面放射特性

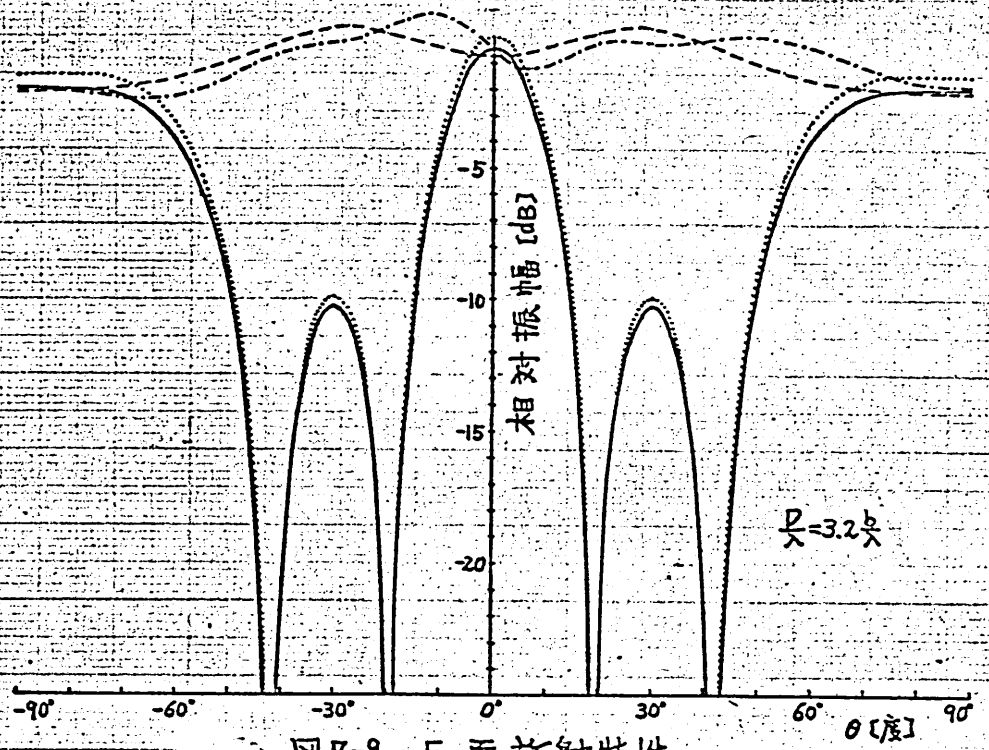



図7-9. E-面放射特性

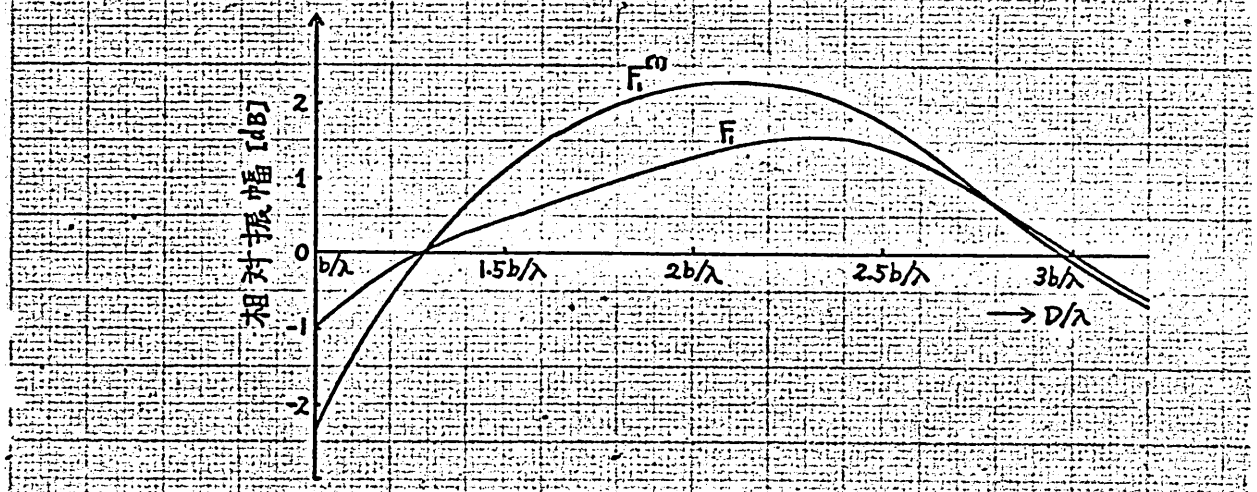



図8. 主放射方向($\theta_0=0°, \phi=90°$)の相対振幅(3-E)

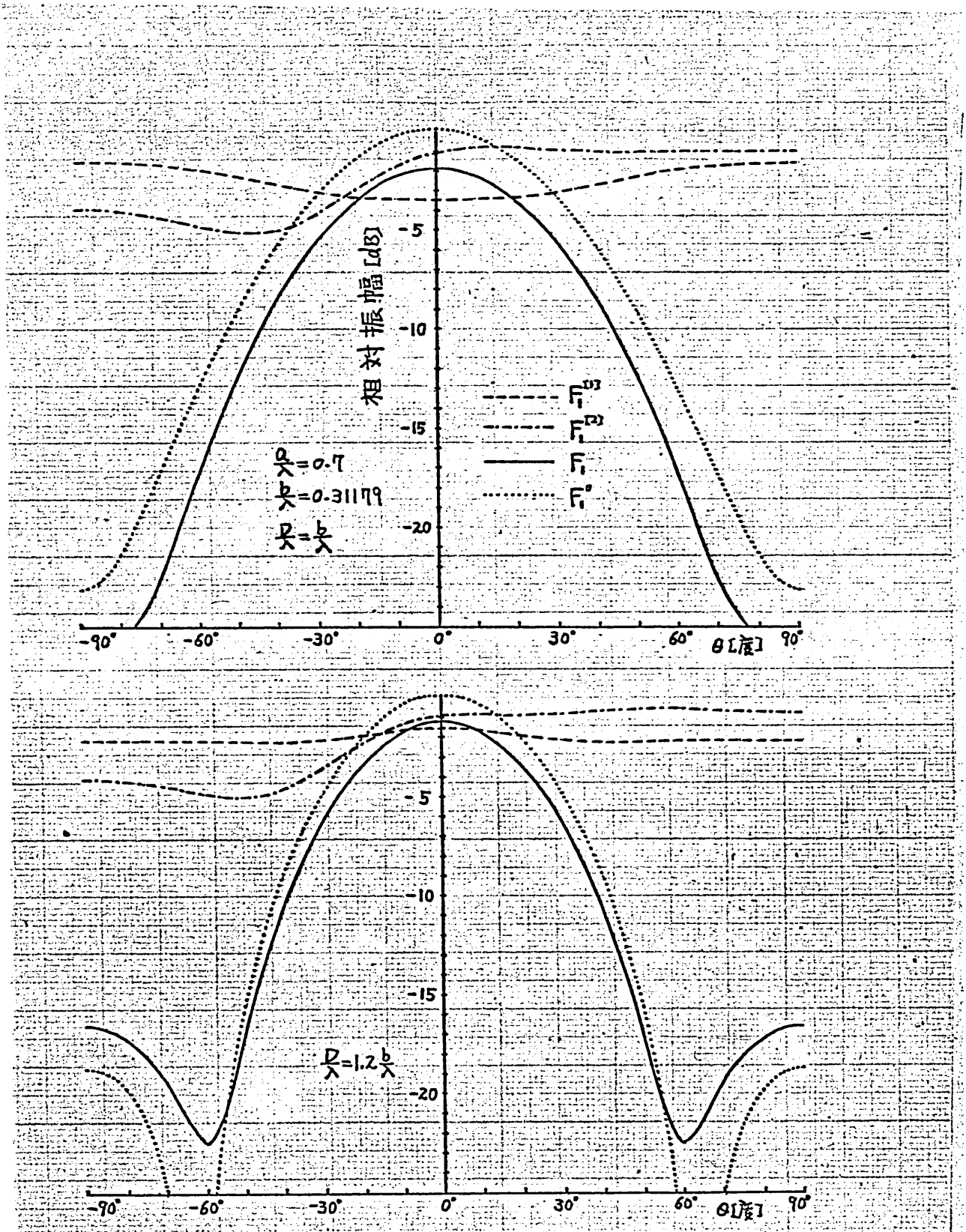



図9-1. E-面放射特性 [$TE_{10}+TE_{30}$]

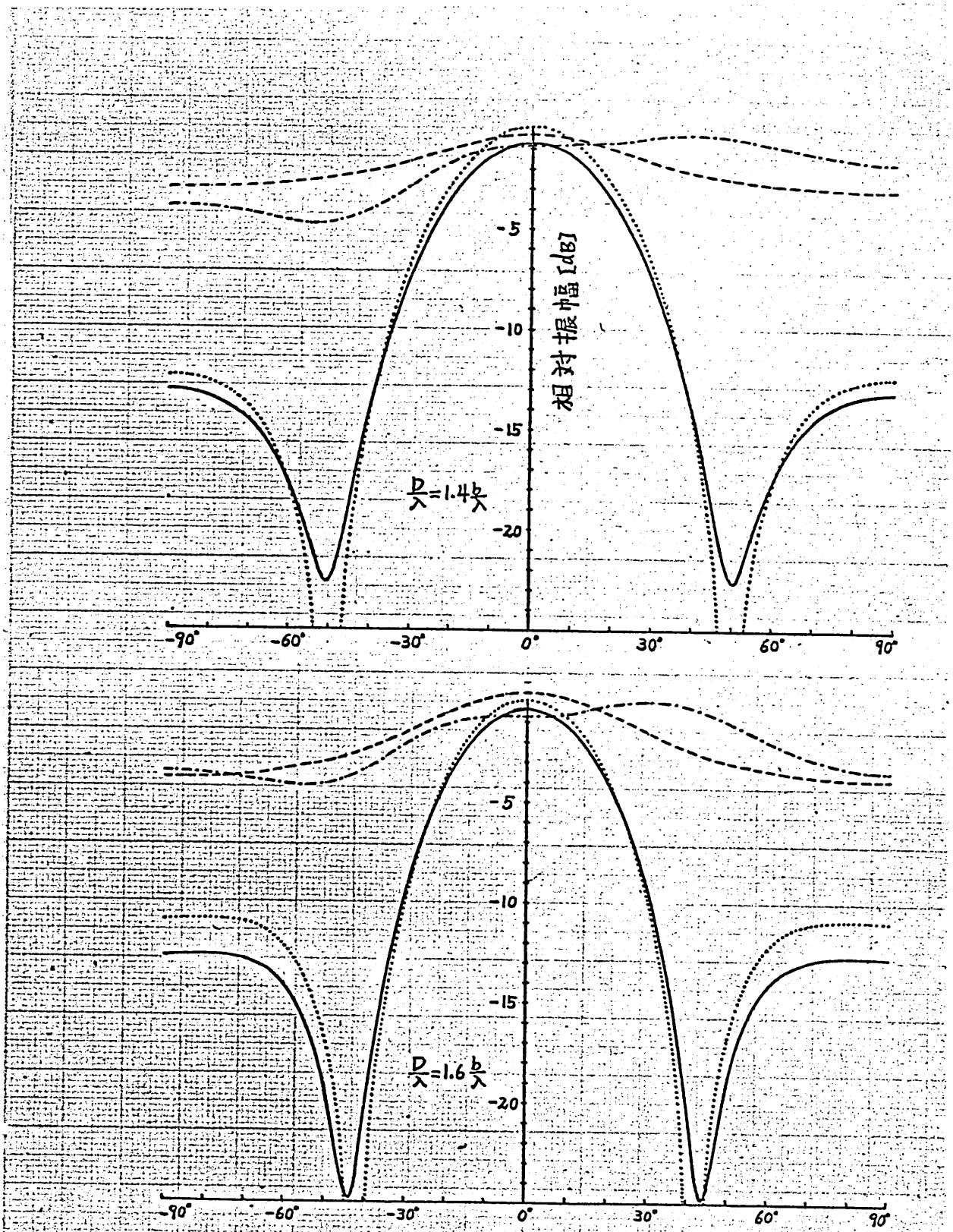



図9-2. E-面 放射特性 [$TE_{10}+TE_{30}$]

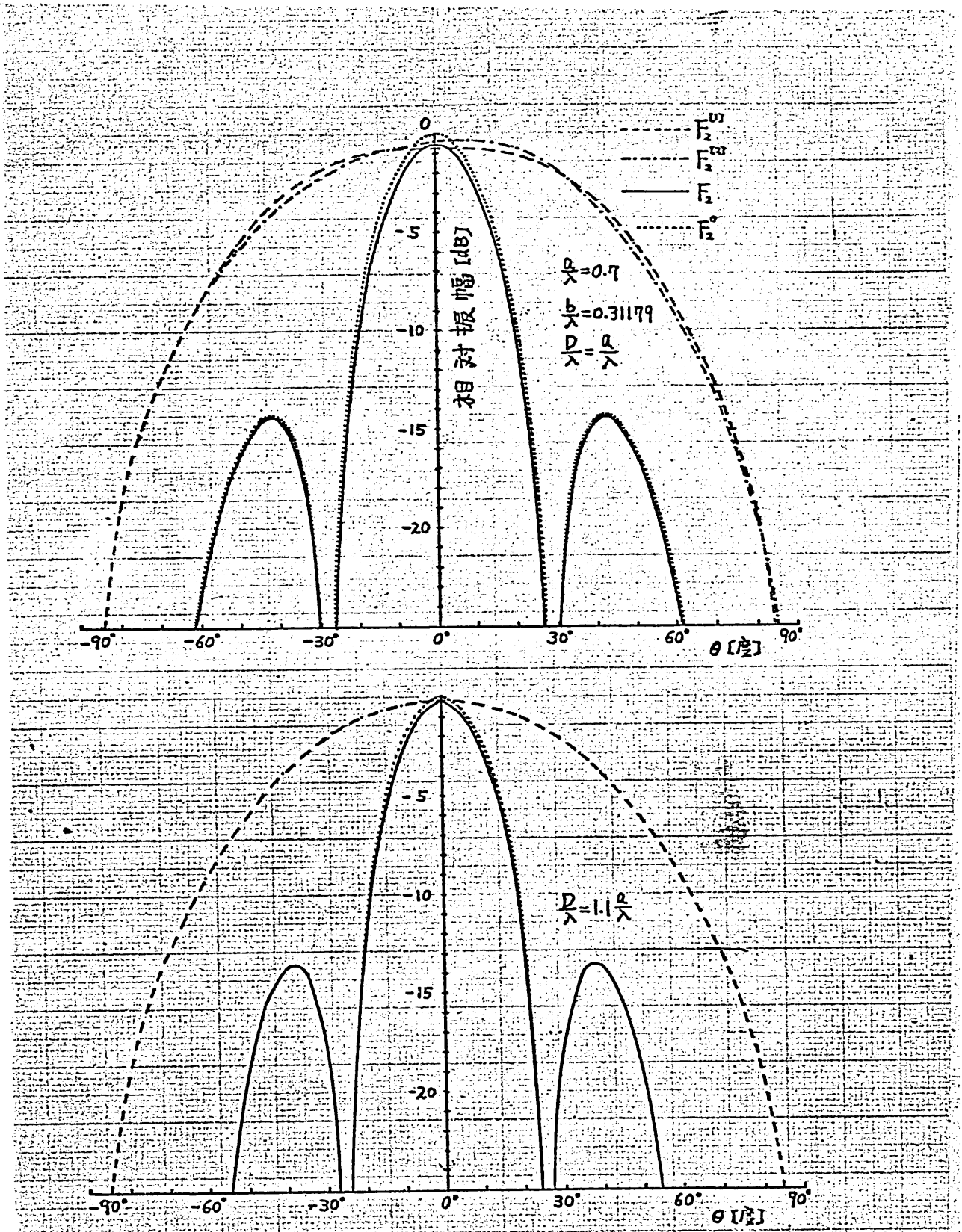



図 10-1. H-面放射特性 [$TE_{10}$]

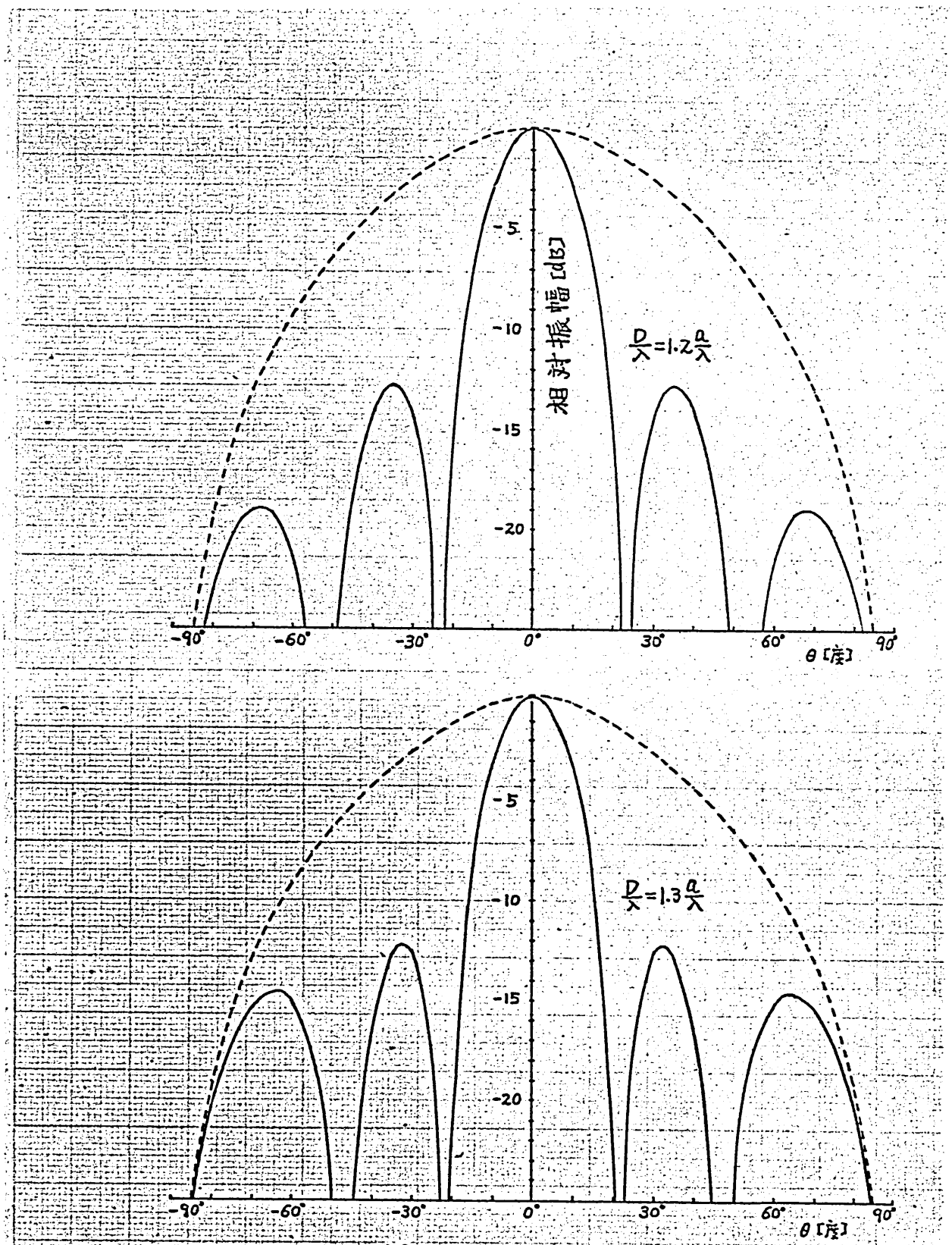
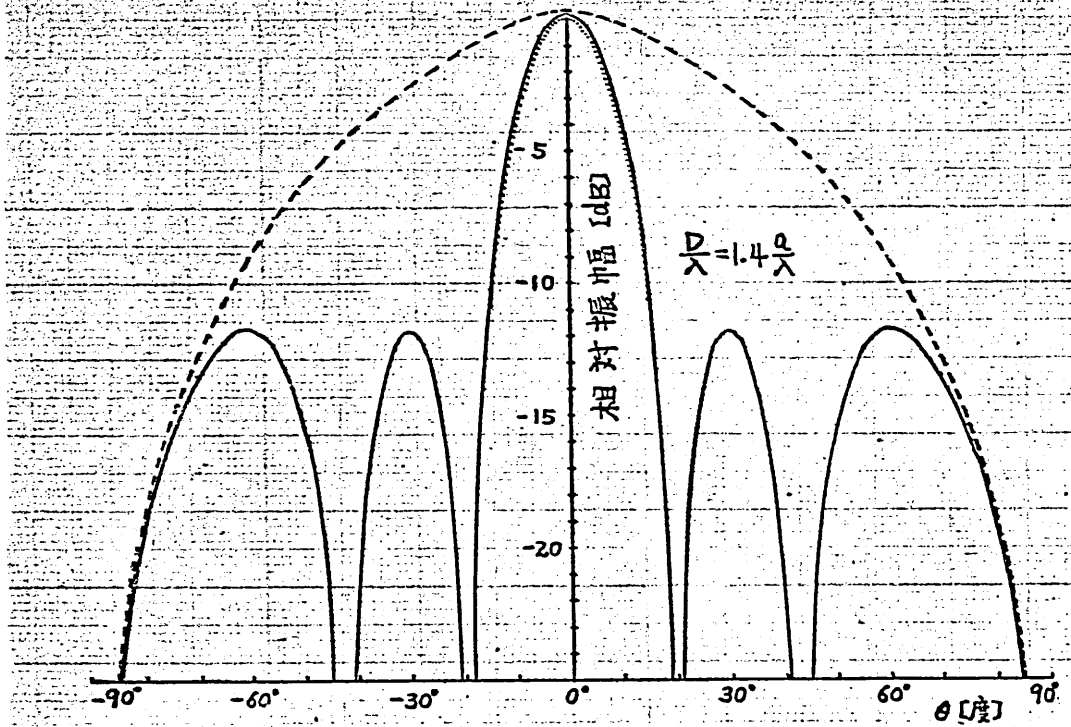



図10-2. H-面放射特性[$TE_{10}$]



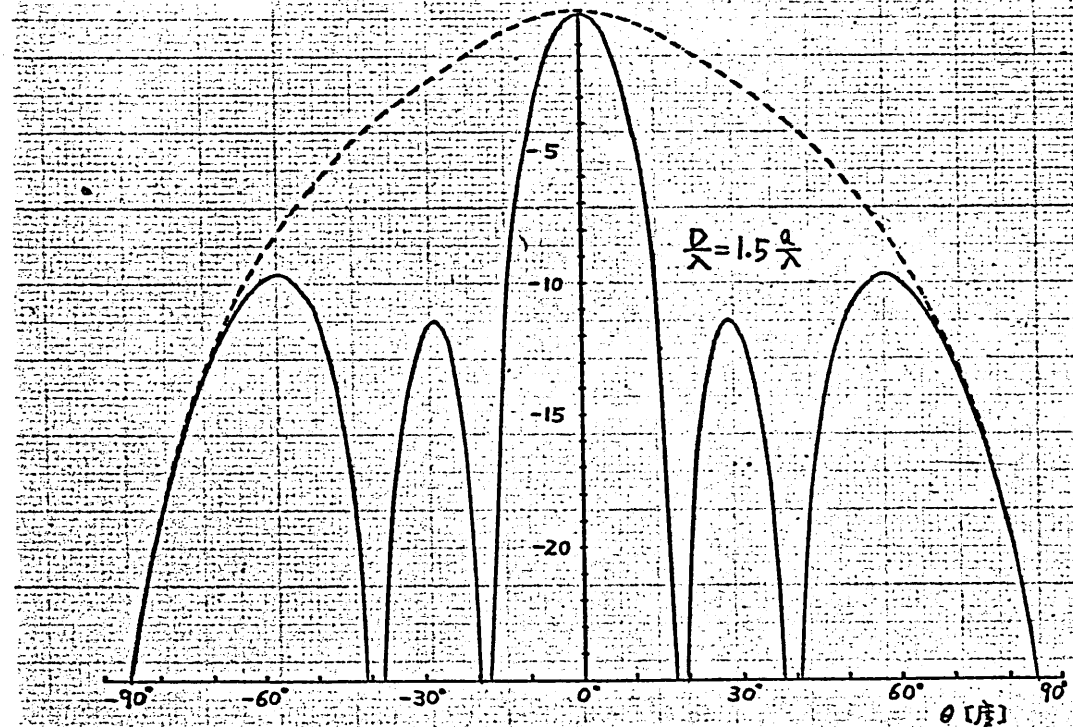




図 10-3. H-面放射特性 [$TE_{10}$]

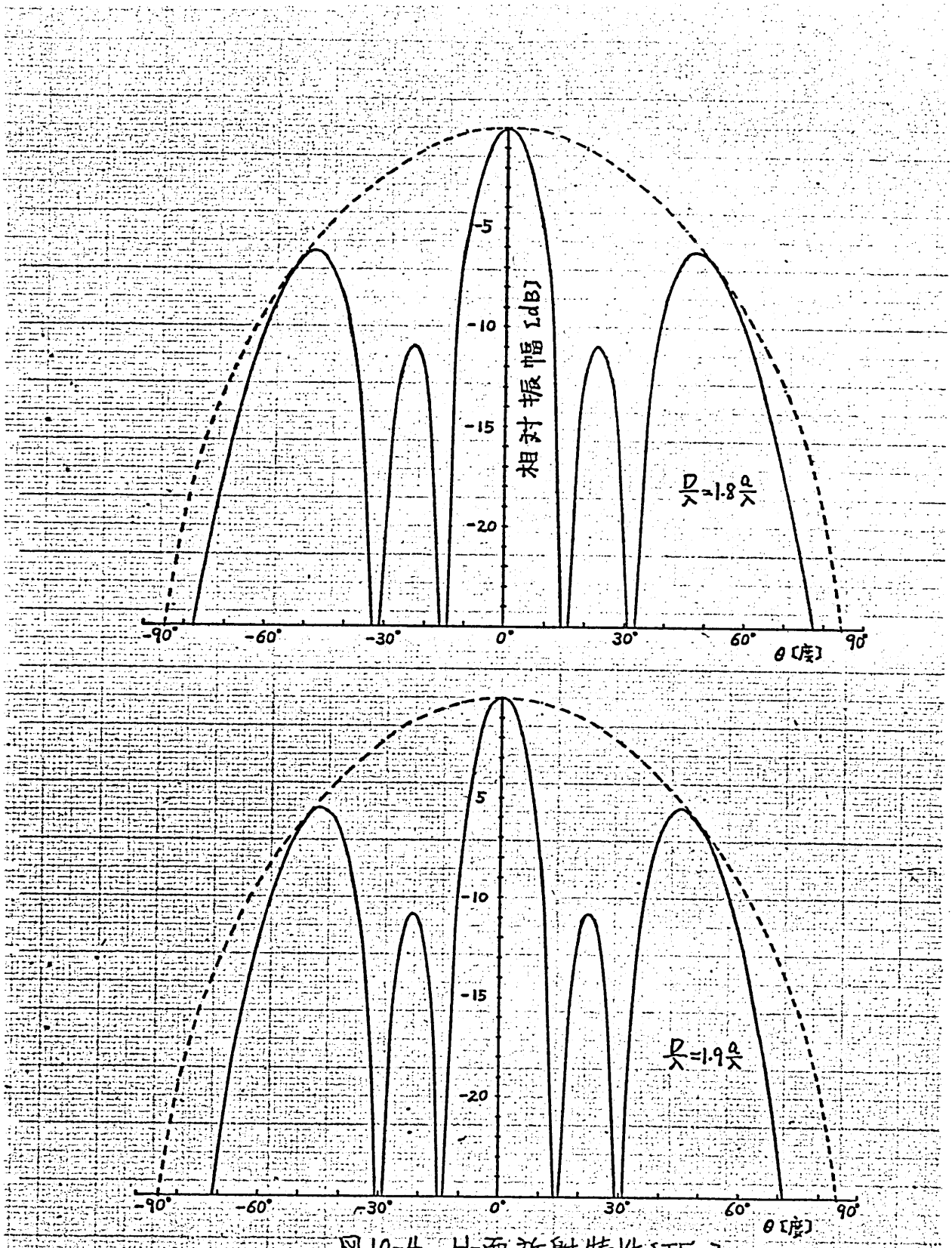



図 10-4. H-面放射特性 [$TE_{10}$]

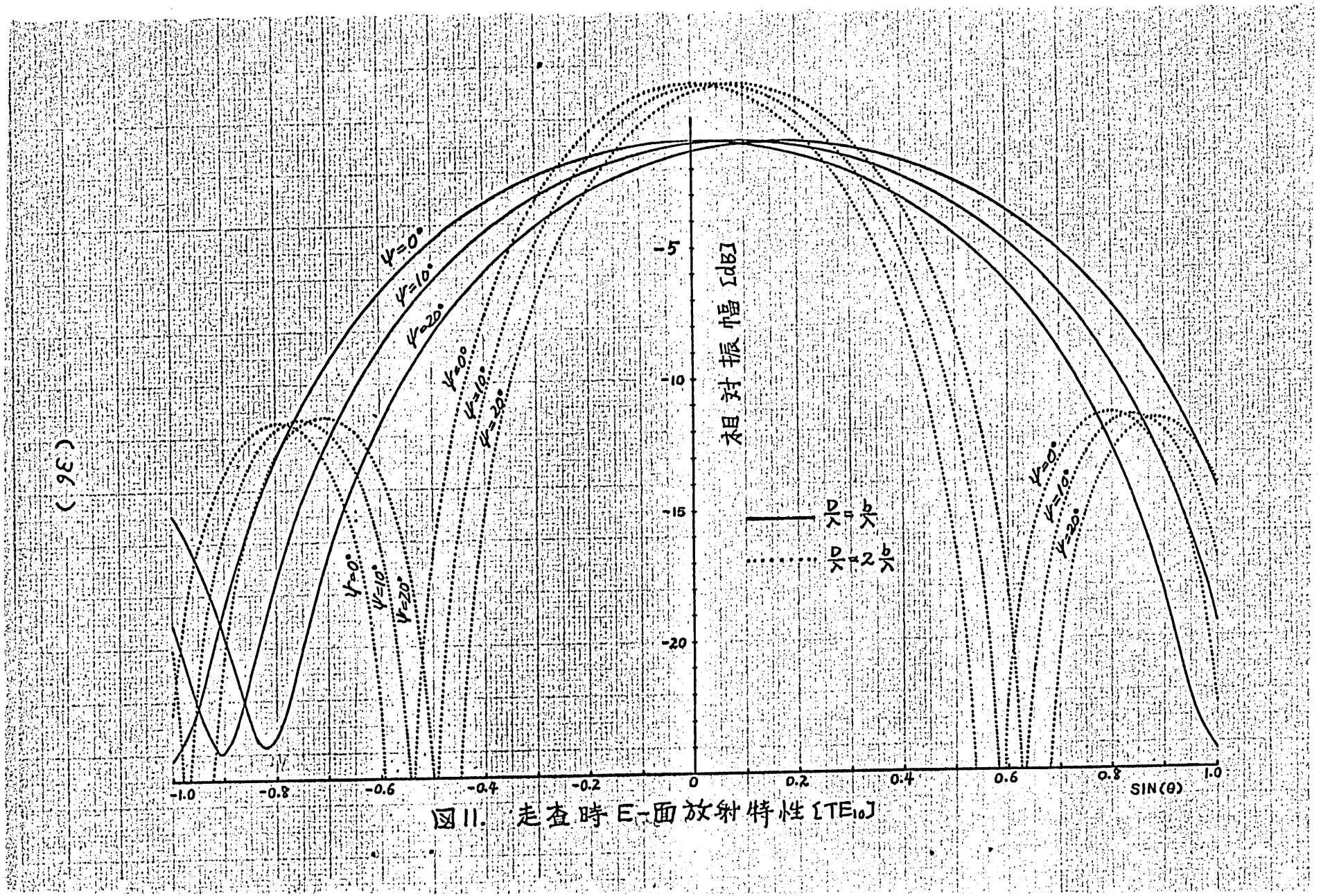



図11. 走査時E-面放射特性 [$TE_{10}$]

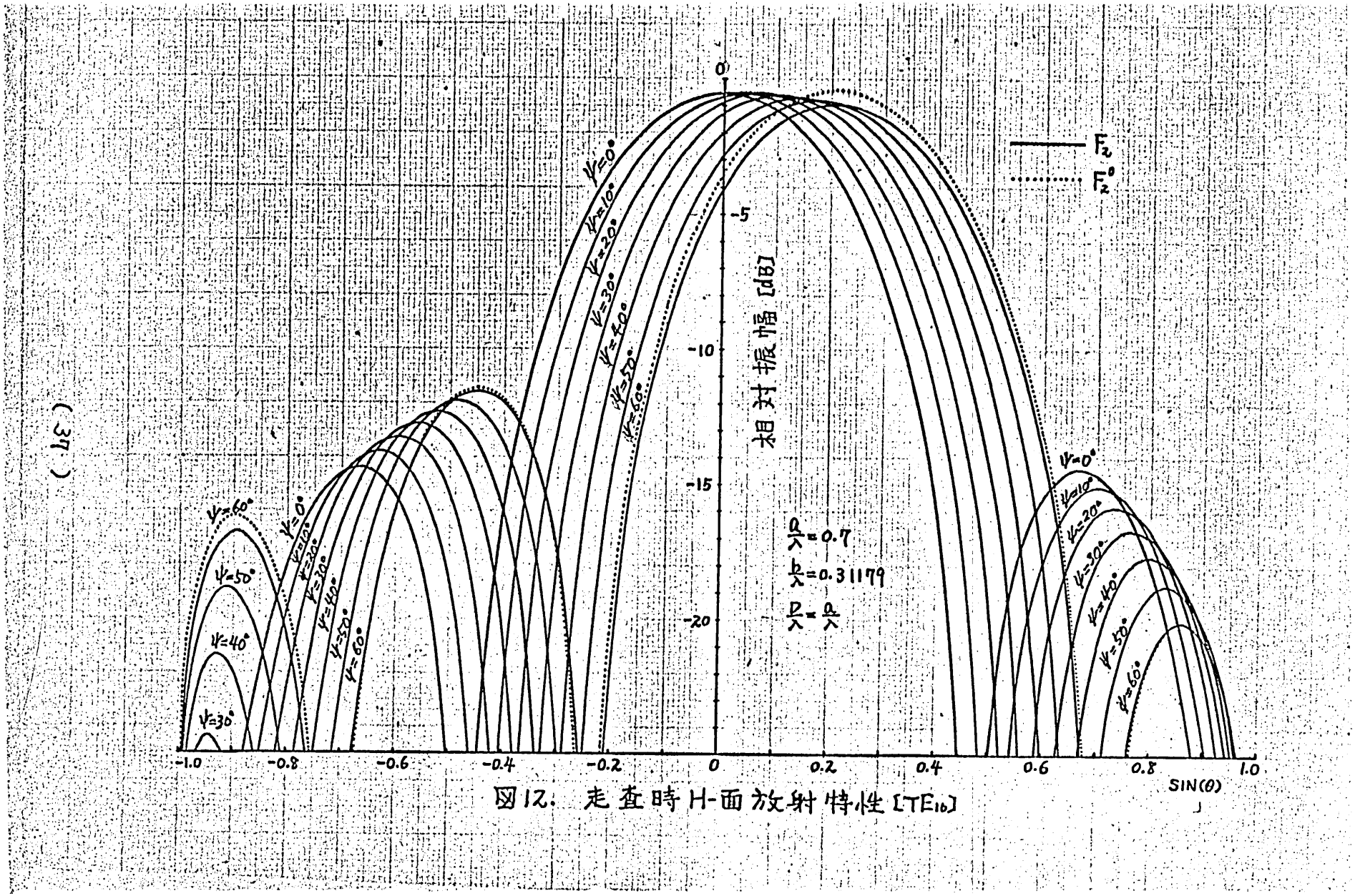



図12. 走査時H-面放射特性 [$TE_{10}$]

輻射科学研究会資料

# 全反射現象に関する一考察 II

## (固有モードの伝搬)

藤岡 弘
小川英一
安川交二
熊谷信昭
(大阪大学・工学部)

1971年2月5日

# 1．序　　言

我々は先に，全反射波によって半無限誘電体媒質あるいは誘電体 slab 中に励振される波の一般的性質について報告した[1]．ただし，先の報告では入射波が平面$E$波の場合のみを取り扱った．本報告では，入射波が平面$E$波の場合のほか，平面$H$波の場合もあわせて取り扱い，また特に固有モードの励振について詳しく考察した．

なお，最近このような全反射現象を光学回路素子に利用しようとする試みが活発にされており，その成果は Tien，Ulrich あるいは Midwinter らによって相ついで報告されている[2]～[5]．本報告は彼等の結果と重複する部分もあるが，我々の研究は彼等とは独立に進められていたものであり，ここに報告する次第である．

# 2．全反射波による誘電体 slab 中の波

ここでは，全反射波によって誘電体 slab 中に励振される波の一般的性質について検討する．

図1において，媒質Ⅰは（$\varepsilon_1$，$\mu_0$）なる半無限誘電体，Ⅱは厚さ$h$なる真空層，Ⅲは（$\varepsilon_3$，$\mu_0$）なる厚さ$d$の誘電体 slab，Ⅳは（$\varepsilon_0$，$\mu_0$）なる半無限自由空間であるとする．いま，半無限媒質Ⅰから真空層Ⅱに向って一様な平面波が入射するものとし，波は$E$波（電界が入射面に垂直な波）もしくは$H$波（磁界が入射面に垂直な波）であるとする．ここで，媒質ⅠおよびⅢの屈折率$n_1$および$n_3$と入射角$\theta$が条件式

$$1 \leq n_1^2 \sin^2\theta \leq n_3^2 \qquad (1)$$

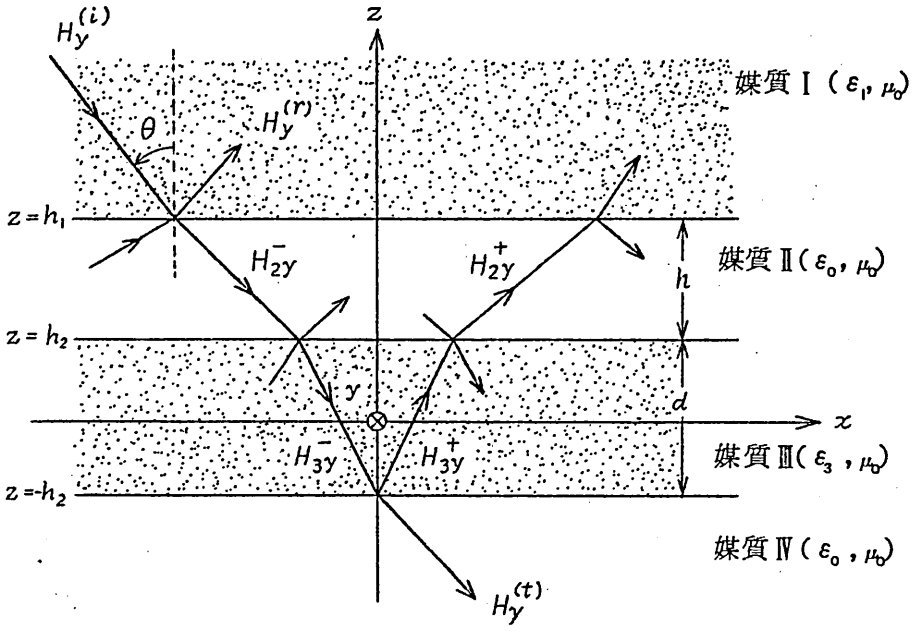



図１　座標系（入射波が$H$波の場合）

ただし，

$$n_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}\quad,\qquad n_3=\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}}$$

を満足しているものとすれば，各媒質中の伝搬定数はそれぞれつぎのように表わされる．

$$\begin{aligned}
&k_{1x}=k_{2x}=k_{3x}=k_{4x}=n_1\,k_0\sin\theta=\beta\\
&k_{1z}=-\,n_1\,k_0\cos\theta=-\,\beta_z\\
&k_{2z}=k_{4z}=jk_0\sqrt{n_1^2\sin^2\theta-1}=j\alpha\\
&k_{3z}=-\,k_0\sqrt{n_3^2-n_1^2\sin^2\theta}=-\,\gamma
\end{aligned}\qquad(2)$$

ただし，

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

なお，条件式(1)のうち，$1 \leq n_1^2 \sin^2\theta$ は全反射の条件を表わし，$n_1^2 \sin^2\theta \leq n_3^2$ は，媒質Ⅲ，すなわち誘電体slab 中を伝搬する波の伝搬定数の $z$ 方向成分が real であるための条件を表わしている．伝搬定数が上のように定められているとき，各媒質中の電磁界はそれぞれつぎのように書ける．ただし，{　} の中の量のうち上段は $E$ 波に関する量を表わし，下段は $H$ 波の量である．

媒質Ⅰ：

入射波

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(i)} \\ H_y^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{0i} \\ H_{0i} \end{Bmatrix} e^{j\beta_z z} \; e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x^{(i)} \\ E_x^{(i)} \end{Bmatrix} = \beta_z a_1 \begin{Bmatrix} E_{0i} \\ -H_{0i} \end{Bmatrix} e^{j\beta_z z} \; e^{j(\omega t - \beta x)} \qquad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} H_z^{(i)} \\ E_z^{(i)} \end{Bmatrix} = \beta a_1 \begin{Bmatrix} E_{0i} \\ -H_{0i} \end{Bmatrix} e^{j\beta_z z} \; e^{j(\omega t - \beta x)}$$

反射波

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(r)} \\ H_y^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{0r} \\ H_{0r} \end{Bmatrix} e^{-j\beta_z z} \; e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x^{(r)} \\ E_x^{(r)} \end{Bmatrix} = \beta_z a_1 \begin{Bmatrix} -E_{0r} \\ H_{0r} \end{Bmatrix} e^{-j\beta_z z} \; e^{j(\omega t - \beta x)} \qquad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} H_z^{(r)} \\ E_z^{(r)} \end{Bmatrix} = \beta a_1 \begin{Bmatrix} E_{0r} \\ -H_{0r} \end{Bmatrix} e^{-j\beta_z z} e^{j(\omega t-\beta x)}$$

媒質Ⅱ：

$$\begin{Bmatrix} E_{2y}^{-} \\ H_{2y}^{-} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{02}^{-} \\ H_{02}^{-} \end{Bmatrix} e^{\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{2x}^{-} \\ E_{2x}^{-} \end{Bmatrix} = j\alpha a_0 \begin{Bmatrix} -E_{02}^{-} \\ H_{02}^{-} \end{Bmatrix} e^{\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} H_{2z}^{-} \\ E_{2z}^{-} \end{Bmatrix} = \beta a_0 \begin{Bmatrix} E_{02}^{-} \\ -H_{02}^{-} \end{Bmatrix} e^{\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$\begin{Bmatrix} E_{2y}^{+} \\ H_{2y}^{+} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{02}^{+} \\ H_{02}^{+} \end{Bmatrix} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{2x}^{+} \\ E_{2x}^{+} \end{Bmatrix} = j\alpha a_0 \begin{Bmatrix} E_{02}^{+} \\ -H_{02}^{+} \end{Bmatrix} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} H_{2z}^{+} \\ E_{2z}^{+} \end{Bmatrix} = \beta a_0 \begin{Bmatrix} E_{02}^{+} \\ -H_{02}^{+} \end{Bmatrix} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t-\beta x)}$$

媒質Ⅲ：

$$\begin{Bmatrix} E_{3y}^{-} \\ H_{3y}^{-} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{03}^{-} \\ H_{03}^{-} \end{Bmatrix} e^{j\gamma z} e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{3x}^{-} \\ E_{3x}^{-} \end{Bmatrix} = \gamma a_3 \begin{Bmatrix} E_{03}^{-} \\ -H_{03}^{-} \end{Bmatrix} e^{j\gamma z} e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} H_{3z}^{-} \\ E_{3z}^{-} \end{Bmatrix} = \beta a_3 \begin{Bmatrix} E_{03}^{-} \\ -H_{03}^{-} \end{Bmatrix} e^{j\gamma z} \, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$\begin{Bmatrix} E_{3y}^{+} \\ H_{3y}^{+} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{03}^{+} \\ H_{03}^{+} \end{Bmatrix} e^{-j\gamma z} \, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{3x}^{+} \\ E_{3x}^{+} \end{Bmatrix} = \gamma a_3 \begin{Bmatrix} -E_{03}^{+} \\ H_{03}^{+} \end{Bmatrix} e^{-j\gamma z} \, e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} H_{3z}^{+} \\ E_{3z}^{+} \end{Bmatrix} = \beta a_3 \begin{Bmatrix} E_{03}^{+} \\ -H_{03}^{+} \end{Bmatrix} e^{-j\gamma z} \, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

媒質Ⅳ：

透過波

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(t)} \\ H_y^{(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{0t} \\ H_{0t} \end{Bmatrix} e^{\alpha z} \, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x^{(t)} \\ E_x^{(t)} \end{Bmatrix} = j\alpha a_0 \begin{Bmatrix} -E_{0t} \\ H_{0t} \end{Bmatrix} e^{\alpha z} \, e^{j(\omega t-\beta x)} \qquad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} H_z^{(t)} \\ E_z^{(t)} \end{Bmatrix} = \beta a_0 \begin{Bmatrix} E_{0t} \\ -H_{0t} \end{Bmatrix} e^{\alpha z} \, e^{j(\omega t-\beta x)}$$

ただし，上の諸式に含まれる $a_k$ は次式で定義される量である．

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega \mu_0} & (E\text{波の場合}) \\ \dfrac{1}{\omega \varepsilon_k} \quad (k = 0,\ 1,\ 3) & (H\text{波の場合}) \end{cases} \qquad (10)$$

ここで，$z = h_1$，$z = h_2$ および $z = -h_2$ における電磁界の境界条件を用いて，未定定数を入射波の電界の振幅 $E_{oi}$（$E$ 波の場合），あるいは磁界の振幅 $H_{oi}$（$H$ 波の場合）で表わせば，それぞれつぎのようになる．ただし，以下において表式を簡単化するため $E_{o\kappa}$ と $H_{o\kappa}$（$\kappa = i,\ r,\ t,\ 2,\ 3$）をまとめて $F_{o\kappa}$ で表わし，$E$ 波の場合には $F_{o\kappa} = E_{o\kappa}$，$H$ 波の場合には $F_{o\kappa} = H_{o\kappa}$ とする．

$$F_{or} = F_{oi}\ \frac{r_{12} + R_{23}\ e^{-2\alpha h_1}}{1 + r_{12} R_{23}\ e^{-2\alpha h_1}}\ e^{2j\beta_z h_1} = F_{oi} R_{12} \tag{11}$$

$$F_{o2}^{-} = F_{oi}\ \frac{t_{12}}{1 + r_{12} R_{23}\ e^{-2\alpha h_1}}\ e^{j(\beta_z + j\alpha) h_1} = F_{oi} T_{12} \tag{12}$$

$$F_{o2}^{+} = F_{o2}^{-}\ \frac{r_{23} + r_{34}\ e^{-2j\gamma h_2}}{1 + r_{23} r_{34}\ e^{-2j\gamma h_2}}\ e^{2\alpha h_2} = F_{oi} T_{12} R_{23} \tag{13}$$

$$F_{o3}^{-} = F_{o2}^{-}\ \frac{t_{23}}{1 + r_{23} r_{34}\ e^{-2j\gamma h_2}}\ e^{-j(\gamma + j\alpha) h_2} = F_{oi} T_{12} T_{23} \tag{14}$$

$$F_{o3}^{+} = F_{o3}^{-}\ r_{34} = F_{oi}\ r_{34} T_{12} T_{23} \tag{15}$$

$$F_{ot} = F_{o3}^{-}\ t_{34} = F_{oi}\ t_{34} T_{12} T_{23} \tag{16}$$

ただし，$r_{jk}$，$t_{jk}$（$jk = 12,\ 23,\ 34$）は次式で定義される量である．

$$r_{12} = \frac{\beta_z + j\delta_1}{\beta_z - j\delta_1} = \rho_{12}\ e^{-j\phi_{12}}$$

$$r_{23} = -\frac{\gamma + j\delta_3}{\gamma - j\delta_3} = \rho_{23}\, e^{-j\phi_{23}}$$

$$r_{34} = \frac{\gamma + j\delta_3}{\gamma - j\delta_3}\, e^{-2j\gamma h_2} = \rho_{34}\, e^{-j(\phi_{34} + 2\gamma h_2)}$$

$$t_{12} = \frac{2\beta_z}{\beta_z - j\delta_1} = \tau_{12}\, e^{-j\chi_{12}} \qquad (17)$$

$$t_{23} = \frac{-2j\delta_3}{\gamma - j\delta_3} = \tau_{23}\, e^{-j\chi_{23}}$$

$$t_{34} = \frac{2\gamma}{\gamma - j\delta_3}\, e^{-j(\gamma + j\alpha)h_2} = \tau_{34}\, e^{-j\{\chi_{34} + (\gamma + j\alpha)h_2\}}$$

ここで，

$$\rho_{12} = 1 \quad , \quad \phi_{12} = \tan^{-1}\frac{-2\beta_z\delta_1}{\beta_z^2 - \delta_1^2}$$

$$\rho_{23} = 1 \quad , \quad \phi_{23} = \tan^{-1}\frac{2\delta_3\gamma}{-(\gamma^2 - \delta_3^2)}$$

$$\rho_{34} = 1 \quad , \quad \phi_{34} = \tan^{-1}\frac{-2\delta_3\gamma}{\gamma^2 - \delta_3^2} \qquad (18)$$

$$\tau_{12} = \frac{2\beta_z}{\sqrt{\beta_z^2 + \delta_1^2}} \quad , \quad \chi_{12} = \tan^{-1}\frac{-\delta_1}{\beta_z}$$

$$\tau_{23} = \frac{2\delta_3}{\sqrt{\gamma^2 + \delta_3^2}} \quad , \quad \chi_{23} = \tan^{-1}\frac{\gamma}{\delta_3}$$

$$\tau_{34} = \frac{2\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \delta_3^2}} \quad , \quad \chi_{34} = \tan^{-1}\frac{-\delta_3}{\gamma}$$

なお，$\delta_k$ なる量は次式で定義される．

$$\delta_k = \begin{cases} \alpha & (E\text{波の場合}) \\ \alpha n_k^2, \quad (k=1,\ 3) & (H\text{波の場合}) \end{cases} \tag{19}$$

以上の諸式（11）～（19）からつぎの関係式が導かれる．

$$\left|\frac{F_{0r}}{F_{0i}}\right|^2 = 1 \tag{20}$$

$$\left|\frac{F_{02}^-}{F_{0i}}\right|^2 = \frac{1}{\Delta} \times \frac{4\beta_z^2}{\beta_z^2+\delta_1^2} \sin^2(\gamma d+\phi_{23})\ e^{-\alpha d} \tag{21}$$

$$\left|\frac{F_{02}^+}{F_{02}^-}\right|^2 = \frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\gamma d+\phi_{23})}\ e^{2\alpha d} \tag{22}$$

$$\left|\frac{F_{03}^-}{F_{0i}}\right|^2 = \frac{1}{\Delta} \times \frac{4\beta_z^2\delta_3^2}{(\beta_z^2+\delta_1^2)(\gamma^2+\delta_3^2)} \tag{23}$$

$$\left|\frac{F_{03}^+}{F_{03}^-}\right|^2 = 1 \tag{24}$$

$$\left|\frac{F_{0t}}{F_{03}^-}\right|^2 = \frac{4\gamma^2}{\gamma^2+\delta_3^2}\ e^{\alpha d} \tag{25}$$

ただし，

$$\Delta = e^{2\alpha h}\sin^2(\gamma d+\phi_{23}) + e^{-2\alpha h}\sin^2\gamma d + 2\sin(\gamma d+\phi_{23})\cdot\sin\gamma d\cdot\cos\phi_{12} \tag{26}$$

さて，ここで各媒中の電磁エネルギー流，すなわちPoyntingベクトルの時間平均値を求めよう．まず，媒質Ⅰ中の波すなわち入射波および反射波の

エネルギー流は式(3)，(4)および式(20)を用いてつぎのように求められる．

$$<S_x^{(i)}>=\frac{1}{2}\beta a_1 |F_{0i}|^2 \qquad (27a)$$

$$<S_z^{(i)}>=-\frac{1}{2}\beta_z a_1 |F_{0i}|^2 \qquad (27b)$$

$$<S_x^{(r)}>=\frac{1}{2}\beta a_1 |F_{0r}|^2=<S_x^{(i)}> \qquad (28a)$$

$$<S_z^{(r)}>=\frac{1}{2}\beta_z a_1 |F_{0r}|^2=-<S_z^{(i)}> \qquad (28b)$$

つぎに，媒質Ⅱ，すなわち真空層の電磁エネルギー流は式(5)および(6)からつぎのように求められる．

$$<S_{2x}>=\frac{1}{2}\beta a_0 Re\left[|F_{02}^-|^2 e^{2\alpha z}+|F_{02}^+|^2 e^{-2\alpha z}\right.$$
$$\left.+F_{02}^- F_{02}^{+*}+F_{02}^{-*} F_{02}^+\right] \qquad (29a)$$

$$<S_{2z}>=\frac{1}{2}\alpha a_0 Re\left[j\{F_{02}^- F_{02}^{+*}-F_{02}^{-*} F_{02}^+\}\right] \qquad (29b)$$

ここで，式（21）および（22）の関係を用いれば上式はそれぞれつぎのように表わされる．

$$<S_{2x}>=\frac{1}{2}\beta a_0 \frac{4\beta_z^2}{\beta_z^2+\delta_1^2}\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot|F_{0i}|^2$$
$$\times\{e^{2\alpha(z-h_2)}\sin^2(\gamma d+\phi_{23})+e^{-2\alpha(z-h_2)}\sin^2\gamma d$$
$$+2\sin(\gamma d+\phi_{23})\sin\gamma d\} \qquad (30a)$$

$$<S_{2z}>=0 \qquad (30b)$$

媒質Ⅲ，すなわち誘電体slab中の電磁エネルギー流は，式(7)および(8)を用いてつぎのように求められる．

$$<S_{3x}>=\frac{1}{2}\beta a_3\left[|F_{03}^{-}|^2+|F_{03}^{+}|^2+\left(F_{03}^{-}F_{03}^{+*}e^{2j\gamma z}+F_{03}^{-*}F_{03}^{+}e^{-2j\gamma z}\right)\right] \qquad (31a)$$

$$<S_{3z}>=-\frac{1}{2}\gamma a_3\left[|F_{03}^{-}|^2-|F_{03}^{+}|^2\right] \qquad (31b)$$

ここで，式（24）の関係を用いて上式を整理すればつぎのようになる．

$$<S_{3x}>=\beta a_3|F_{03}^{-}|^2\left[1+\cos(2\gamma z+\gamma d+\phi_{34})\right] \qquad (32a)$$

$$<S_{3z}>=0 \qquad (32b)$$

最後に，媒質Ⅳ中の波，すなわち透過波の電磁エネルギー流は式(9)からつぎのように求められる．

$$<S_x^{(t)}>=\frac{1}{2}\beta a_0|F_{0t}|^2e^{2\alpha z} \qquad (33a)$$

$$<S_z^{(t)}>=0 \qquad (33b)$$

以上で，各媒質中を伝搬する波の電磁エネルギー流がそれぞれ求まったわけであるが，以下において媒質ⅢおよびⅡ，すなわち誘電体slabおよび真空層内の電磁界についてさらに詳しく考察しよう．式（32）からわかるように，誘電体slab中の電磁エネルギー流の境界面に垂直な成分は0となる．また，境界面に平行な成分は場所$z$の関数となっているが，その平均の値は

$$\frac{1}{d}\int_0^1 dy \int_{-h_2}^{h_2} \langle S_{3x} \rangle \, dz$$

$$= \frac{\beta a_3}{\gamma d} |\bar{F_{03}}|^2 \left[\gamma d + \sin\gamma d \cdot \cos(\gamma d + \phi_{34})\right] \tag{34}$$

で与えられる．この値を入射波の電磁エネルギー流の大きさで規格化し，これを $S_N$ で表わせば

$$S_N = 2\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)\left|\frac{\bar{F_{03}}}{F_{0i}}\right|^2 \cdot \frac{\left[\gamma d + \sin\gamma d \cdot \cos(\gamma d + \phi_{34})\right]\sin\theta}{\gamma d} \tag{35}$$

となる．上式から直ちにわかるように，$S_N$ の真空層の厚さ $h$ に関する微係数は

$$e^{4\alpha h} = \frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\gamma d + \phi_{23})} \tag{36}$$

のとき0となり，$S_N$ はこのとき極大となる．すなわち，$S_N$ は

$$h = h_0 = \frac{1}{4\alpha}\log\frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\gamma d + \phi_{23})} \tag{37}$$

において最大（極大）値をもつ．ただし，$h$ が正の値をとるためには

$$\sin^2\gamma d \geq \sin^2(\gamma d + \phi_{23}) \tag{38}$$

でなければならない．$\gamma d$ と $\phi_{23}$ が上の条件を満足しないとき，すなわち

$$\sin^2\gamma d < \sin^2(\gamma d + \phi_{23}) \tag{39}$$

のときには，$S_N$ の微係数は常に負の値をとり，したがって，$S_N$ は $h=0$ で最大値をとり，$h$ の増加と共に単調に減少する．以上のことから，誘電体

slab の厚さ $d$，媒質の屈折率 $n_1$，$n_3$および入射角 $\theta$ が条件式（38）を満足するときには，真空層の厚さ $h$ が式（37）で与えられる値 $h_0$をもつとき $S_N$ は最大となり，$h = h_0$の前後で単調に減少することがわかる．また，諸定数が式（38）の条件式を満足しない場合には，真空層の厚さが0のとき，すなわち半無限媒質Ⅰと誘電体 slab Ⅲが接しているとき $S_N$ は最大となり，$h$ の増加と共に単調に減少する．つぎに，媒質Ⅱ，すなわち真空層内（$h_2 \leq z \leq h_1$）の電磁エネルギー流の境界に平行な成分について考察する．$<S_{2x}>$ は式（30）から

$$<S_{2x}> = K\left[e^{2\alpha(z-h_2)}\sin^2(\gamma d+\phi_{23}) + e^{-2\alpha(z-h_2)}\sin^2\gamma d + 2\sin(\gamma d+\phi_{23})\sin\gamma d\right] \quad (40)$$

ただし，

$$K = \frac{1}{2}\beta a_0 \frac{4\beta_z^2}{\beta_z^2+\delta_1^2}\cdot\frac{1}{\Delta}|F_{0i}|^2$$

とかける．したがって $z$ に関する微分は次式で与えられる．

$$\frac{d<S_{2x}>}{dz} = 2\alpha e^{-2\alpha(z-h_2)} K \times\left[e^{4\alpha(z-h_2)}\sin^2(\gamma d+\phi_{23}) - \sin^2\gamma d\right] \quad (41)$$

この式から

$$\frac{\sin^2\gamma d}{\sin^2(\gamma d+\phi_{23})} < 1 \quad (42)$$

の場合には，$h_2 \leq z \leq h_1$ の範囲で $<S_{2x}>$ は単調に増加する，すなわち $z$ の負の方向に単調に減少することがわかる．また，

$$\frac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2(\gamma d + \phi_{23})} \geq 1 \qquad (43)$$

の場合には

$$e^{4\alpha(z-h_2)} = \frac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2(\gamma d + \phi_{23})}$$

を満足する $z$ において $<S_{2x}>$ は極小値をとる．このときの $z$ を $z_{min}$ とすれば，$z_{min}$ は次式で与えられる．

$$(z_{min} - h_2) = \frac{1}{4\alpha} \log \frac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2(\gamma d + \phi_{23})} = h_0 \qquad (44)$$

ただし，上式を満足する $z_{min}$ が，境界の外側，すなわち

$$z_{min} \geq h_1$$

に存在するときには，$<S_{2x}>$ は $z$ の負の方向に単調に増加することになる．図2および図3はこの様子を示したものである．

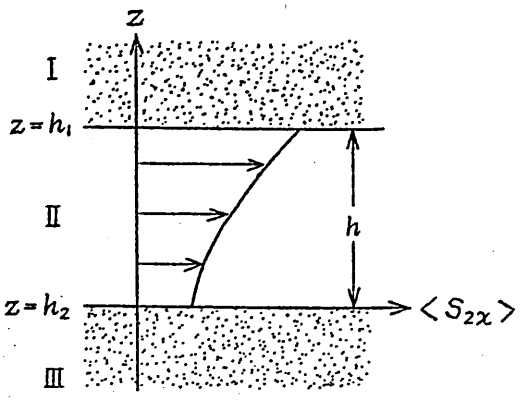
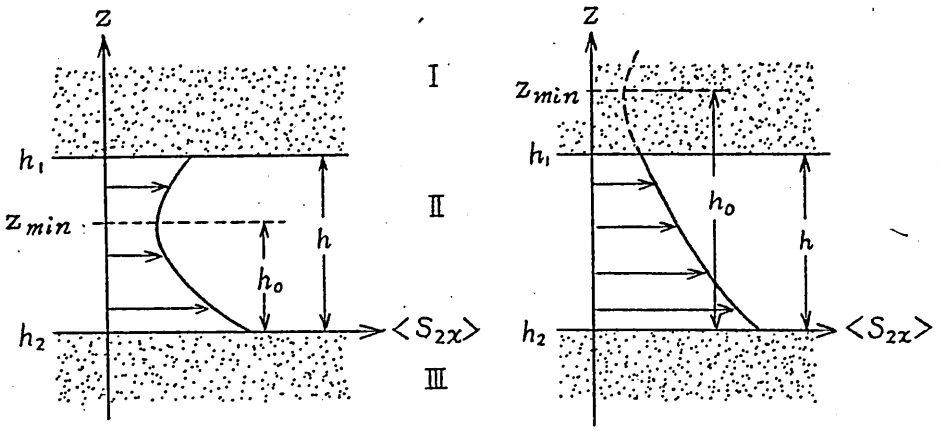



図2　$<S_{2x}>$ の様子

$$\left(\frac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2(\gamma d + \phi_{23})} < 1\right)$$




(a) $h_2 < z_{min} < h_1$ (b) $z_{min} > h_1$

図3 $<S_{2x}>$の様子 $\left(\dfrac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2(\gamma d + \phi_{23})} \geq 1\right)$

なお，条件式 (~~43~~ 42) および (~~44~~ 43) はそれぞれ式 (39) および (38) と同一のものであることに注意されたい．また，$z_{min} = h_1$ としたとき，式 (44) から

$$h_1 - h_2 = h_0 = \frac{1}{4\alpha} \log \frac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2(\gamma d + \phi_{23})}$$

すなわち，$h = h_0$ となり，したがって先にのべたように，このとき誘電体 slab 中の平均の電磁エネルギー流 $S_N$ は最大となる．

以上，媒質 II および III 内の電磁界の様子について検討したわけであるが，最後に媒質 II と III および媒質 III と IV の境界面上における電磁エネルギー流の連続性について考察しよう．式 (30a)，(32a)，(33a) に関係式 (23) および (25) を用いて次式を得る．

$$\alpha^2\left[<S_{2x}>\right]_{z=h_2}=\delta_3^2\left[<S_{3x}>\right]_{z=h_2} \tag{45a}$$

$$\alpha^2\left[<S_x^{(t)}>\right]_{z=-h_2}=\delta_3^2\left[<S_{3x}>\right]_{z=-h_2} \tag{45b}$$

上式から，電磁エネルギー流の境界面に平行な成分は一般に境界面上で不連続となることがわかる．ここで，式（19）の関係を用いれば，$E$波の場合には

$$\left[<S_{2x}>\right]_{z=h_2}=\left[<S_{3x}>\right]_{z=h_2} \tag{46a}$$

$$\left[<S_x^{(t)}>\right]_{z=-h_2}=\left[<S_{3x}>\right]_{z=-h_2} \tag{46b}$$

となり，$H$波の場合には

$$\left[<S_{2x}>\right]_{z=h_2}=n_3^2\left[<S_{3x}>\right]_{z=h_2} \tag{47a}$$

$$\left[<S_x^{(t)}>\right]_{z=-h_2}=n_3^2\left[<S_{3x}>\right]_{z=-h_2} \tag{47b}$$

となる．したがって，$E$波の場合には電磁エネルギー流は各境界面において連続となるが，$H$波の場合には誘電体slab中の電磁エネルギー流は，境界面上においてslab外部のエネルギー流の$1/n_3^2$となることがわかる．ただし，$E$波の場合には連続となるのは各媒質中の透磁率$\mu$をすべて$\mu_0$とおいたためであり，$E$波の場合と$H$波の場合との間に本質的な差異はない．以上のことから，各媒質中の電磁エネルギー流の様子は図4および図5に示すようになる．図4は$\sin^2\gamma d<\sin^2(\gamma d+\phi_{23})$の場合の媒質Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ中の電磁エネルギー流の様子を示したものであり，また図5は$\sin^2\gamma d\geq\sin^2(\gamma d+\phi_{23})$の場合の様子を示したものである．

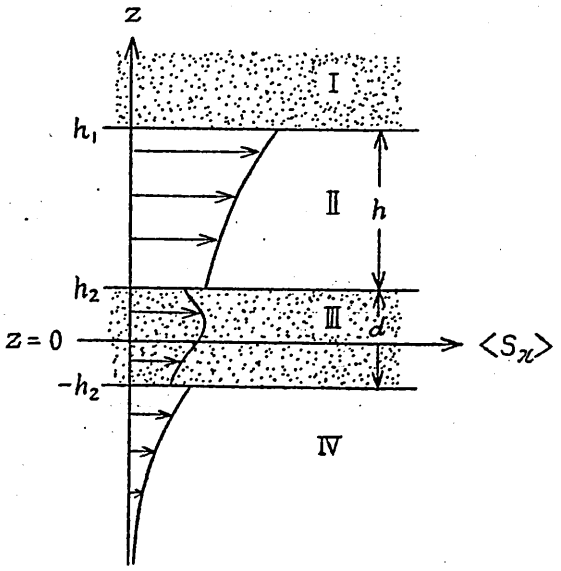
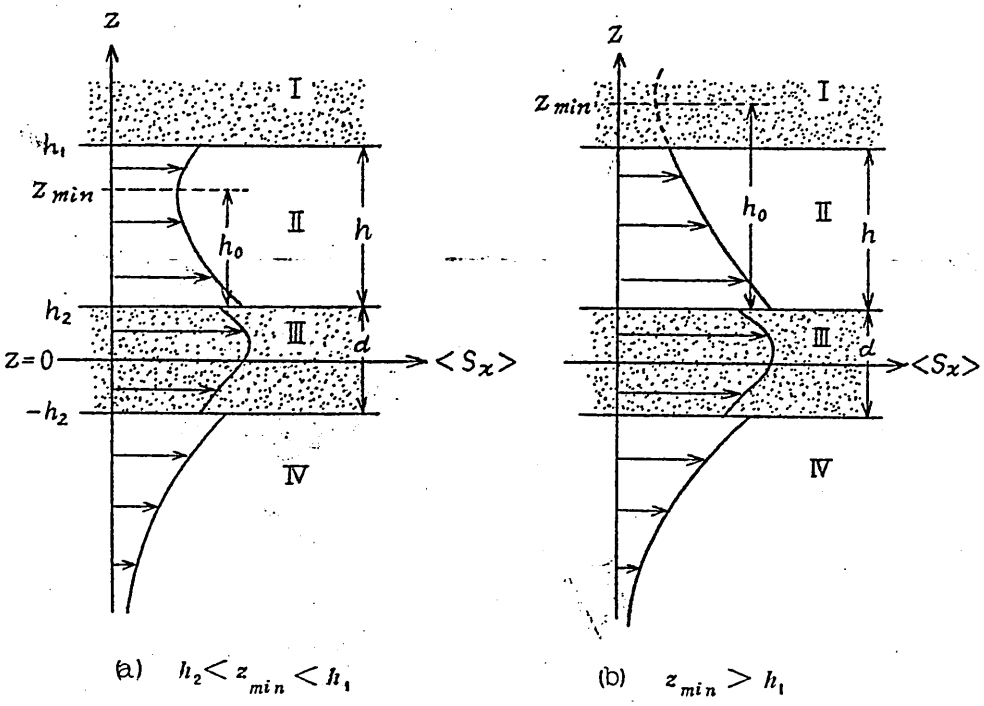



図 4　$\langle S_x \rangle$の様子

$$\left( \frac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2 ( \gamma d + \phi_{23} )} < 1 \right)$$




(a)　$h_2 < z_{min} < h_1$　　(b)　$z_{min} > h_1$

図5　$\langle S_x \rangle$の様子 $\left( \dfrac{\sin^2 \gamma d}{\sin^2 ( \gamma d + \phi_{23} )} \geq 1 \right)$

## 3．表面波固有モードの励振

前節においては，全反射波によって誘電体slabに励振される波の一般的性質について論じたが，ここでは固有モードの励振について考察しよう．

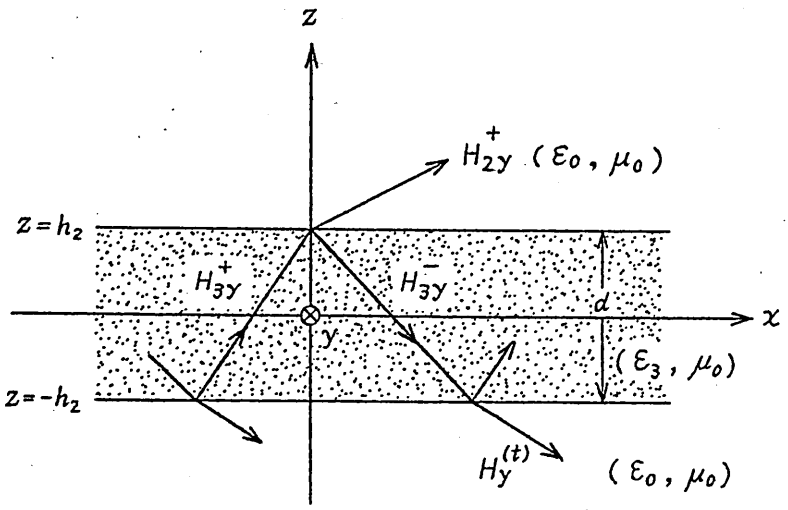



図6　誘電体表面波線路（$H$波の場合）

まず，図6に示すような誘電体表面波線路の特性方程式は次式で与えられる．

$$\tan \gamma d = \frac{2\delta_3 \gamma}{\gamma^2 - \delta_3^2} \tag{48}$$

あるいは，上式をevenおよびoddの各モードに分けて表わすと

$$\delta_3 - \gamma \tan \frac{\gamma d}{2} = 0 \qquad (\text{even モード}) \tag{49a}$$

$$\delta_3 + \gamma \cot \frac{\gamma d}{2} = 0 \qquad (\text{odd モード}) \tag{49b}$$

となる．図6は図1において，媒質Ⅰが存在しないような場合にあたっている．以下においては図1に示した構造において伝搬定数$\alpha$，$\gamma$，媒質の屈折率$n_3$および誘電体slabの厚さ$d$が条件(48)を満足しているときには，固有モードが励振できることを示す．

各媒質中の伝搬定数は式(2)に与えられているがこれらの式からつぎの関係式を得る．

$$\beta^2 - \alpha^2 = k_0^2 \tag{50a}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = k_0^2 n_3^2 \tag{50b}$$

あるいは

$$\alpha^2 + \gamma^2 = k_0^2 ( n_3^2 - 1 ) \tag{51}$$

したがって，式(48)と式(51)から$\alpha$および$\gamma$が決定され，これを式(50)に用いれば$\beta$の値が一意的に決定される．すなわち，誘電体slab中に表面波線路の固有モードを励振すべき入射角$\theta = \theta_m$が一意的に決定される．このとき，すなわち$\theta = \theta_m$のとき式(18)と式(48)とからつぎの関係式が得られる．

$$\gamma d + \phi_{23} = ( m \pm 1 ) \pi \tag{52}$$

$$\gamma d + \phi_{34} = m \pi \tag{53}$$

したがって

$$\sin ( \gamma d + \phi_{23} ) = 0 \tag{54}$$

$$\sin \gamma d = (-1)^m \frac{2 \delta_3 \gamma}{\delta_3^2 - \gamma^2} \tag{55}$$

となる．また，式(26)で与えられる$\Delta$のモードのときの値を$\Delta_m$とすれば，

式(54)および(55)の関係を用いて

$$\Delta_m = \frac{4\delta_3^2\gamma^2}{(\delta_3^2+\gamma^2)^2} e^{-2\alpha h} \tag{56}$$

となる．

ここで，$\theta = \theta_m$ のときの各媒質中の電磁界の振幅を求めてみよう．一般の場合の振幅の関係式は，式(20)～(25)に与えられているが，ここで式(54)および(56)を用いれば，モードの場合の関係式

$$\left|\frac{F_{0r}}{F_{0i}}\right|^2 = 1 \tag{57}$$

$$\left|\frac{F_{02}^-}{F_{0i}}\right|^2 = 0 \tag{58}$$

$$\left|\frac{F_{02}^+}{F_{0i}}\right|^2 = \frac{4\beta_z^2}{\beta_z^2+\delta_1^2} e^{2\alpha h_1} \tag{59}$$

$$\left|\frac{F_{03}^-}{F_{0i}}\right|^2 = \frac{\beta_z^2(\delta_3^2+\gamma^2)}{\gamma^2(\beta_z^2+\delta_1^2)} e^{2\alpha h} \tag{60}$$

$$\left|\frac{F_{03}^+}{F_{03}^-}\right|^2 = 1 \tag{61}$$

$$\left|\frac{F_{0t}}{F_{03}^-}\right|^2 = \frac{4\gamma^2}{\gamma^2+\delta_3^2} e^{\alpha d} \tag{62}$$

が得られる．この式から明らかなように $\theta = \theta_m$ のとき $F_{02}^- = 0$ となり，したがって媒質Ⅱ，すなわち真空層内の電磁界のうち $^-$ の添字をもつ電磁界成分は0となる．このとき，媒質Ⅲ，すなわち誘電体slabから見た電磁界成

分は誘電体表面波線路（図６）の場合と同様になり，したがって固有モードが励振されるわけである．

つぎに，固有モードの場合の各媒質中の電磁エネルギー流は，式（３０a），（３２a），（３３a）に式（５２）～（５６）の関係を用いて，それぞれつぎのように表わされる．

$$\langle S_{2x} \rangle = \beta a_0 \frac{2\beta_z^2}{\beta_z^2 + \delta_1^2} |F_{0i}|^2 e^{2\alpha(h_1 - z)} \tag{63}$$

$$\langle S_{3x} \rangle = \beta a_3 \frac{\beta_z^2(\gamma^2 + \delta_3^2)}{\gamma^2(\beta_z^2 + \delta_1^2)} |F_{0i}|^2 e^{2\alpha h} \begin{cases} (1+\cos 2\gamma z)\,(\text{even}モード) & (64a) \\ (1-\cos 2\gamma z)\,(\text{odd}モード) & (64b) \end{cases}$$

$$\langle S_x^{(t)} \rangle = \beta a_0 \frac{2\beta_z^2}{\beta_z^2 + \delta_1^2} |F_{0i}|^2 e^{2\alpha(z + h_1)} \tag{65}$$

ここで，even および odd の各モードの場合になりたつ関係式

$$\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \delta_3^2} = \cos^2 \gamma h_2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\gamma h_2) \quad (\text{even モード}) \tag{66}$$

$$\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \delta_3^2} = \sin^2 \gamma h_2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\gamma h_2) \quad (\text{odd モード}) \tag{67}$$

を用いると，式（６３）および（６５）は下に示すように式（６４）と同様の形に書き表わすことができる．

$$\langle S_{2x} \rangle = \beta a_0 \frac{\beta_z^2(\gamma^2 + \delta_3^2)}{\gamma^2(\beta_z^2 + \delta_1^2)} |F_{0i}|^2 e^{2\alpha(h_1 - z)} \times \begin{cases} (1+\cos 2\gamma h_2) \quad (\text{even モード}) & (68a) \\ (1-\cos 2\gamma h_2) \quad (\text{odd モード}) & (68b) \end{cases}$$

$$<S_x^{(t)}> = \beta a_0 \frac{\beta_z^2(\gamma^2+\delta_3^2)}{\gamma^2(\beta_z^2+\delta_1^2)} |F_{0i}|^2 e^{2\alpha(z+h_1)}$$

$$\times \begin{cases} (1+\cos 2\gamma h_2) & (\text{even モード}) \quad (69a) \\ (1-\cos 2\gamma h_2) & (\text{odd モード}) \quad (69b) \end{cases}$$

したがって，ここで次式で定義される量

$$M = \frac{\beta_z^2(\gamma^2+\delta_3^2)}{\gamma^2(\beta_z^2+\delta_1^2)} \qquad (70)$$

を導入するとき，$<S_{2x}>$，$<S_{3x}>$および$<S_x^{(t)}>$はそれぞれつぎのように書ける．

$$<S_{2x}> = \beta a_0 M |F_{0i}|^2 e^{-2\alpha(z-h_1)} \begin{cases} (1+\cos 2\gamma h_2)\ (\text{even モード}) \\ \qquad (71a) \\ (1-\cos 2\gamma h_2)\ (\text{odd モード}) \\ \qquad (71b) \end{cases}$$

$$<S_{3x}> = \beta a_3 M |F_{0i}|^2 e^{2\alpha h} \begin{cases} (1+\cos 2\gamma z)\ (\text{even モード}) \quad (72a) \\ (1-\cos 2\gamma z)\ (\text{odd モード}) \quad (72b) \end{cases}$$

$$<S_x^{(t)}> = \beta a_0 M |F_{0i}|^2 e^{2\alpha(z+h_1)} \begin{cases} (1+\cos 2\gamma h_2)\ (\text{even モード}) \\ \qquad (73a) \\ (1-\cos 2\gamma h_2)\ (\text{odd モード}) \\ \qquad (73b) \end{cases}$$

上式から，各媒質中の電磁エネルギー流の様子は図7に示すようになることがわかる．

さて，ここで$\theta = \theta_m$ の場合の$S_N$を$S_{Nm}$と表わせば，式(35)に式(52)～(56)を用いて$S_{Nm}$はつぎのように求められる．

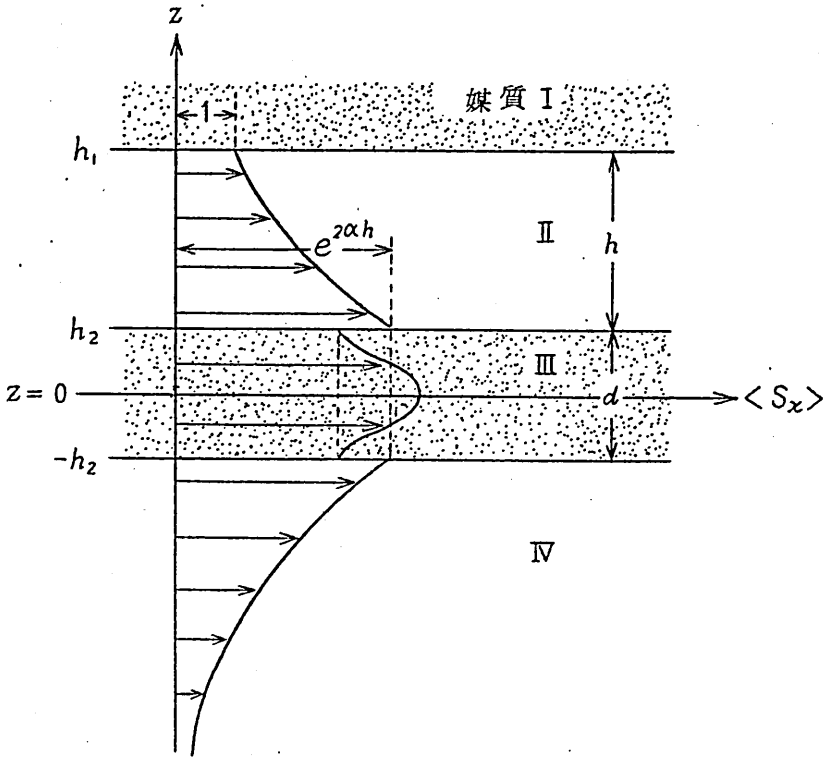



図7　固有モードの場合の$\langle S_x \rangle$の様子

$$S_{Nm} = 2\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)\sin\theta_m\left[1 + \frac{2\delta_3}{d(\gamma^2+\delta_3^2)}\right] M e^{2\alpha h} \qquad (74)$$

この式から，$\theta = \theta_m$ の場合には，$h$が大きければ大きいほど，すなわち真空層の厚さが厚ければ厚いほど誘電体slab中に励振される波の電磁エネルギー流は大きくなることがわかる．この一見奇妙に思われる結論は，入射電磁波が平面波であると仮定したためであり，空間的に大きさが制限される，いわゆるbounded beamが入射する場合には$S_{Nm}$を最大にする$h$の有限な値が存在することが期待される[3],[5]

図8，図9および図10は，入射波が$H$波の場合の数値計算例である．図

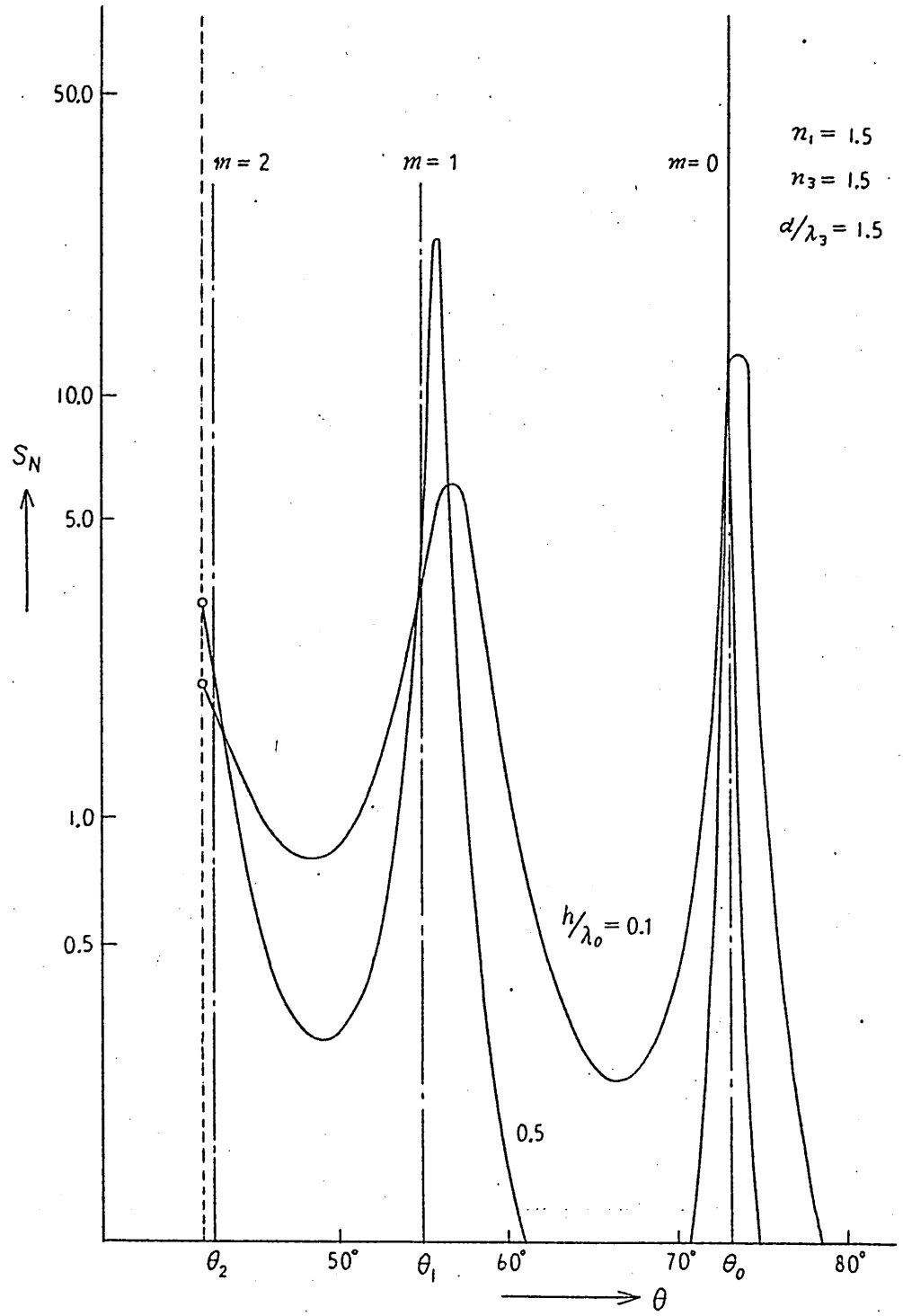



図8　入射角 $\theta$ に対する $S_N$ の変化

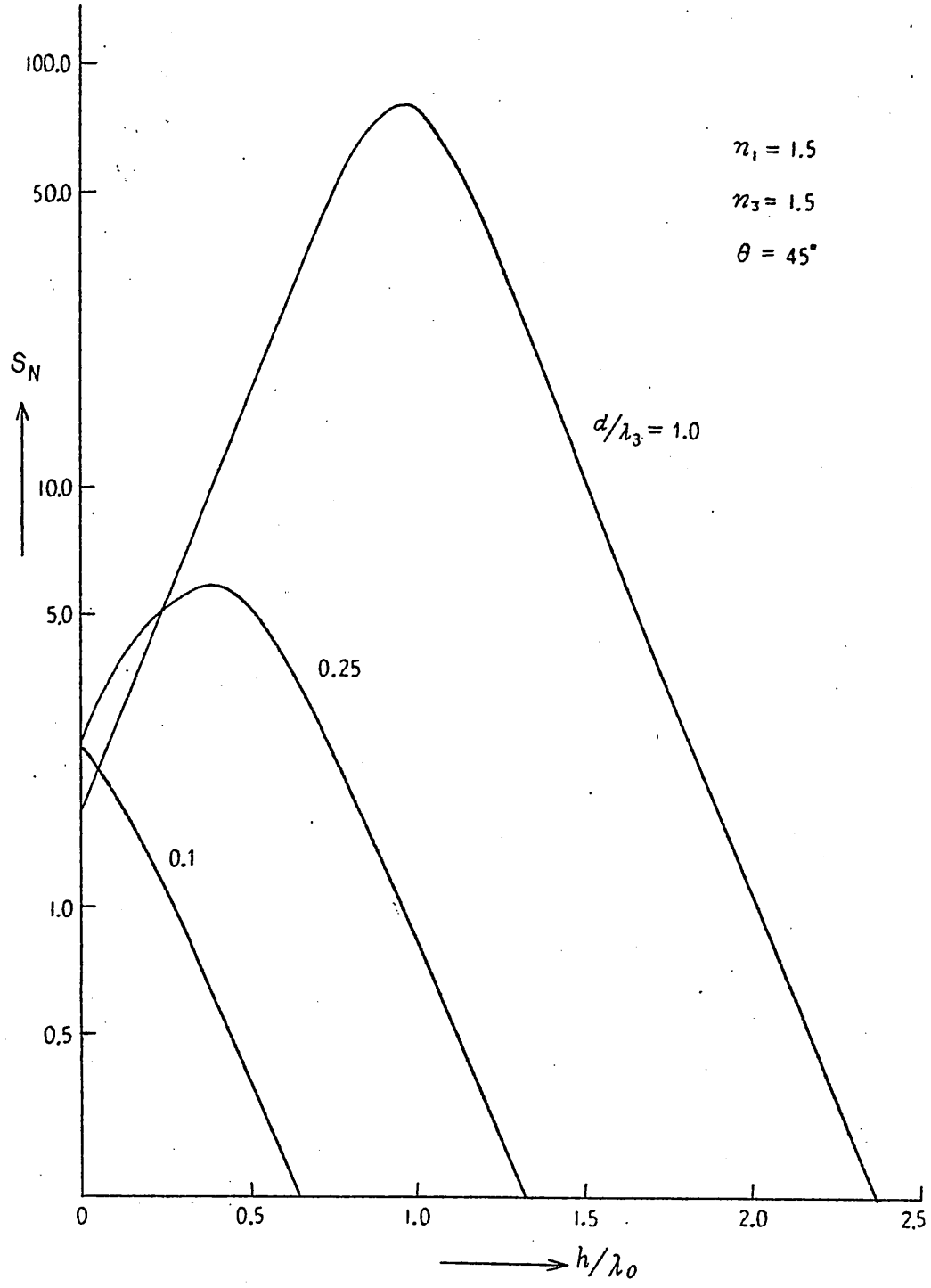



図 9　真空層の厚さ $h/\lambda_0$ に対する $S_N$ の変化

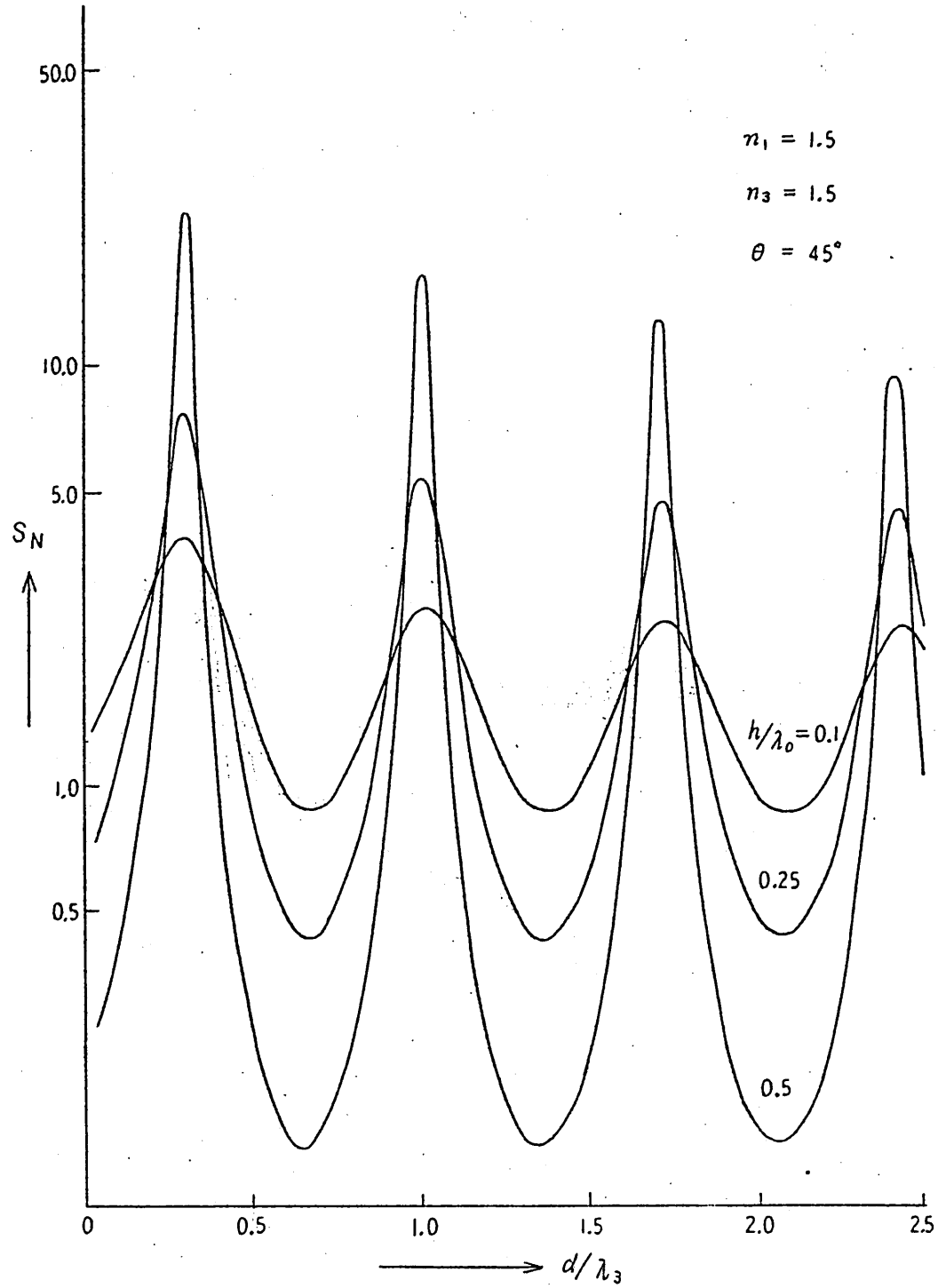



図１０　slabの厚さ $d/\lambda_3$ に対する $S_N$ の変化

8は，真空層の厚さ $h/\lambda_0$ をパラメータとしたとき，入射角 $\theta$ に対する $S_N$ の変化を示している．図9は，誘電体slab の厚さ $d/\lambda_3$ をパラメータとしたとき，真空層の厚さ $h/\lambda_0$ に対する $S_N$ の変化の様子を示している．また，図10は真空層の厚さ $h/\lambda_0$ をパラメータとしたとき，誘電体slab の厚さ $d/\lambda_3$ に対する $S_N$ の変化の様子を示している．

## 謝　　辞

日頃ご指導ごべんたついただいている本学工学部板倉清保教授および裏克己教授に深謝する．また，常々ご討論いただく板倉研究室の諸氏に深謝する．

## 文　　献

(1) 藤岡弘，小川英一：“全反射現象に関する一考察”，輻射科学研究会資料（1970−12）．

(2) P.K.Tien, R.Ulrich, and R.J.Martin：“Modes of Propagation Light Waves in Thin Deposited Semiconductor Film”, Appl. Phys. Letters, Vol. 14, №9, p.291 (1969).

(3) R.Ulrich：“Theory of the Prism-Film Coupler by Plane-Wave Analysis”, J.Opt.Soc.Am. Vol. 60, №10, p.1337, (1970).

(4) P.K.Tien and R.Ulrich：“Theory of Prism-Film Coupler and Thin-Film Light Guides”, J.Opt.Soc. Am., Vol.60, №10, p.1325, ('1970)

(5) J.E.Midwinter：“Evanescent Field Coupling into a Thin-Film Waveguide”, IEEE Trans. QE, Vol.QE−6, №10, p.583, (1970).

輻射科学研究会資料

# ホログラフィ干渉による超音波振動子の振動姿態の測定

滝山　敬　繁沢　宏
松田昌盛　三宅崇夫
（同志社大学　工学部）

昭和46年2月5日

# ホログラフィ干渉による超音波振動子の振動姿態の測定

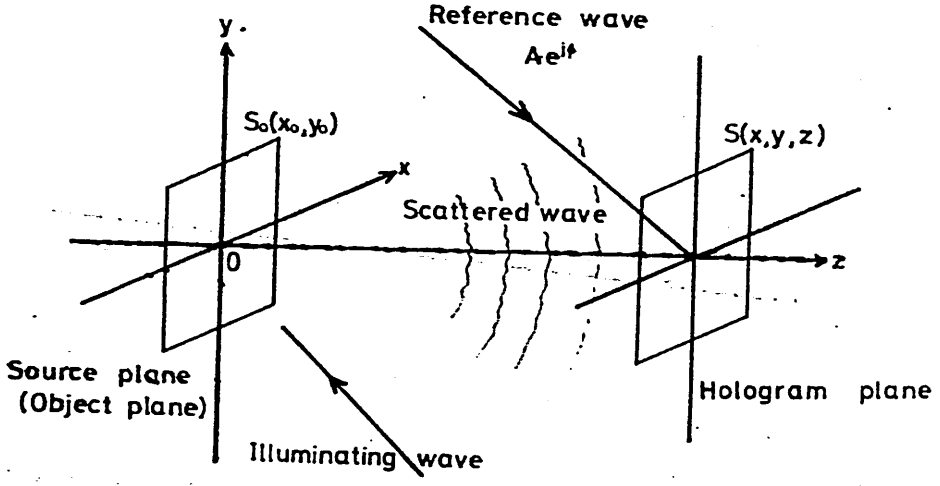
滝山敬　　繁沢宏
松田昌盛　三宅崇夫

## 1. 緒言

ホログラフィは、波動の振巾と位相、即ち複素振巾を同時に記録したり、再生したりする技術である。ホログラフィ干渉で振動物体を解析するのに、ストロボ露光法と時間平均法がある。本論文は時間平均法によって50KHzの共振周波数をもつ、ランジュバン型超音波振動子(3SD-60-50)の振動姿態を測定し、かゝる節のない振動物体の振動振巾の絶対値の決定について現在までに得た測定結果を御報告いたします。

## 2. R. L. Powell と K. A. Stetson の測定理論

Fig. 1 にて Source plane は静止物体面であり, Hologram plane は写真乾板面である。




Reference frame for analysis of vibrating object

Doshisha Univ.

Fig.1

$$S_0(x_0, y_0, t) = S_{0t} \qquad (1)$$

は Source plane における Complex amplitude distribution にて振動物体の変位によって変化し、振動周波数 $\omega_t$ によって位相のみが変調される。また

$$S(x, y, z, t) = S_t \qquad (2)$$

は $S_0(x_0, y_0, t)$ なる源よりの Scattered field であり、$A e^{j\phi}$ は Reference field にて、もし乾板に $\theta$ なる角度で入射する Plane wave

はらば

$$A \exp\left[ j \frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta \cdot y \right]$$

と表わし得る。

Hologram plane 上の Total field E は

$$E(x, y, z, t) = A e^{j\phi} + S_t \qquad (3)$$

ここで光の周波数 $\omega$ による factor $e^{j\omega t}$ は省略、よって乾板を感光させる光の Intensity は

$$I = E E^* = (A e^{j\phi} + S_t)(A e^{-j\phi} + S_t^*)$$

$$= A^2 + |S_t|^2 + A e^{-j\phi} S_t + A e^{j\phi} S_t^* \qquad (4)$$

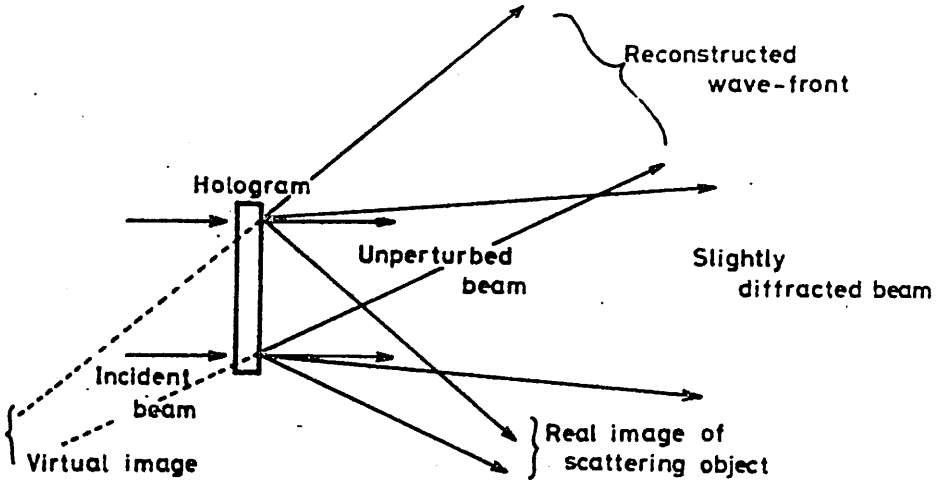
今露光時間を $t_r$ とし、上式の時間平均値を求めると、

$$\frac{1}{t_r} \int_0^{t_r} E E^* dt = A^2 + \frac{1}{t_r} \int_0^{t_r} |S_t|^2 dt$$

$$+ A e^{-j\phi} \frac{1}{t_r} \int_0^{t_r} S_t \, dt + A e^{j\phi} \frac{1}{t_r} \int_0^{t_r} S_t^* dt \qquad (5)$$

Eq.(5) の 3 項と 4 項が Scattered field と Reference field との干渉により生ずるものである。

今現象処理後の乾板のAmplitude transmittanceがEq.(5)に比例しているならば、乾板をレーザ光で照射すると、Fig.2の透過波を得る。




Reconstruction of the images. Doshisha Univ.

Fig.2

振動物体の姿態撮影に用いているのは3項の虚像である。3項中の$\frac{1}{t_r}\int_0^{t_r} S_t dt$が振動物体のどんな情報を記録しているかを考察してみる。今

$$\frac{1}{t_r}\int_0^{t_r} S_t dt \simeq \frac{1}{t_r}\left[S_1\Delta t + S_2\Delta t + S_3\Delta t + \cdots\right]$$

$$= \frac{\Delta t}{t_r}[S_1 + S_2 + S_3 + \cdots\cdots] \quad (6)$$

のように分解して考えてみる。

Eq.(6)の[ ]内は振動変位にそって各位置に多数の物体が、同時に存在すると仮定した時、乾板上に生ずるScattered fieldであり、これを観察すると干渉縞が見える。

更に理解を深めるために、もし上の如く数多くの静止物体が、同時に存在すると仮定した極限にて、この静止系よりのScattered fieldを記録する場合を考えると乾板上のTotal fieldは

$$E_{av}(x,y,z) = \frac{1}{t_r}\int_0^{t_r} S_t\,dt + Ae^{i\phi} \quad (7)$$

Eavは時間に無関係なfieldでその Intensity は

$$I_{av} = E_{av}E_{av}^* = A^2 + \left|\frac{1}{t_r}\int_0^{t_r} S_t\,dt\right|^2$$

$$+ Ae^{-i\phi}\frac{1}{t_r}\int_0^{t_r} S_t\,dt + Ae^{i\phi}\frac{1}{t_r}\int_0^{t_r} S_t^*\,dt \quad (8)$$

Eqs.(5)と(8)の相違は、第2項のみである。即ち3項、4項は全く同一の情報を乾板に記録しており、再生の際

にも同じ像を生ずる。第2項は、それぞれ違った回折波を生じさせるが Fig.2 に示す如く、3項、4項と分離し得る。

つまり要約してみると次のようになる。

振動物体よりの時間的に変化する Scattered field を次々と連続して記録したホログラムより再生し得る像は振動変位にそって空間的に連続して物体が同時に無限に存在すると仮定した静止物体系より生ずる時間に無関係な Scattered field を記録したホログラムよりの再生像と全く同じである。即ちホログラム再生は記録時間中に占める物体のすべての位置に対応している像の干渉の重ね合せと考えることが出来る。

次に再生像にあらわれる干渉縞の分布と振動振巾の関係を調べる。今振動する表面を拡散性の反射面と考え、その任意の点Pにおける振動変位振巾を $D(p)$ とすれば、振動によって

おこるP点の拡散反射光の位相変化 $\phi_p(t)$ はFig.3を参照すれば次式のように示せる。

$$\phi_p(t) \simeq \frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_i + \cos\theta_r) D(p) \sin\omega_e t \qquad (9)$$

(正弦波状振動の時)

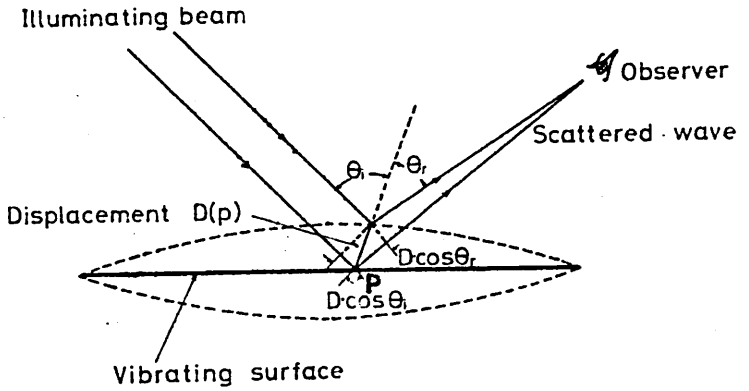
ここに

$\lambda$ : レーザ光の波長

$\theta_i$ : 振動変位と照射光のなす角度

$\theta_r$ : 振動変位と反射光のなす角度

$\omega_e$ : 振動子の振動角周波数




Where

$\lambda$ : wave length (6328 Å)

$\omega_t$ : vibrating angular frequency

Doshisha Univ.

Fig.3

すでに証明した如く、ホログラム再生により得られる像は、変位$D(P)$にそって連続して物体が同時に存在すると考えた時のScattered fieldから生ずる像と同一であるから、P点の振動が、その再生像の明暗に与える影響は、振動周期を$T=\frac{2\pi}{\omega_e}$とする時

$$\int_0^T e^{j\Phi_P(t)}dt = T_0\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_i+\cos\theta_r)D(P)\right] \quad (10)$$

ただし$J_0(x)$は0次第1種ベッセル関数

従って物体表面上に生ずる干渉縞の強度分布は

$T_0^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_i+\cos\theta_r)D(P)\right]$に比例する。

$D(P)=0$の時(振動の節)、$J_0[0]=1$にて最も明るく、

$$T_0\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_i+\cos\theta_r)D(P)\right]=0 \quad (11)$$

の時暗部となる。したがってEq.(11)より
$n$番目の暗線の位置における変位振巾$D_n$は次式で決定される。

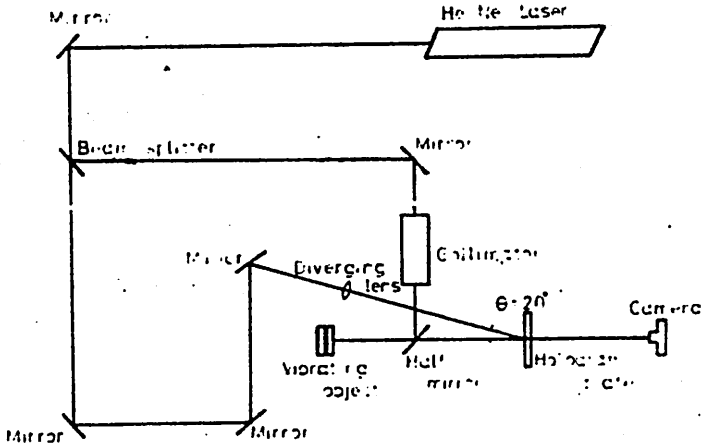
$$D_n=\frac{S_n}{\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_i+\cos\theta_r)}\simeq\frac{S_1+(n-1)\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_i+\cos\theta_r)} \quad (12)$$

ここに
$\rho_n$ : $J_0(x)$ の $n$ 番目の零点
$\rho_1 \simeq 2.4$

## 3. 測定装置及び方法

### 3-1. 測定装置

Fig. 4 に測定装置の概略を示す。
ホログラムを撮影する際には光の干渉縞を撮影するので干渉性のよい光源及び測定装置全体が外部からの振動に対して十分安定であることが要求される。
光源には $He$-$Ne$ ガスレーザ(波長 $\lambda = 6328$ Å 出力 30mW, TEM$_{00}$ mode)を使用し、光源から発射したレーザビームは鏡で曲げられ、次にビームスプリッタで 8:2 の割合に分けられ、object wave と reference wave として利用する。乾板に達する2光束の光路差がレーザ光の可干渉距離内でできるだけ小さくなるような光学系を配置してその差をほぼ零とした。
なお、この光学系は8個のスプリン




Experimental arrangement
for hologram recording

Doshisha Univ

Fig.4

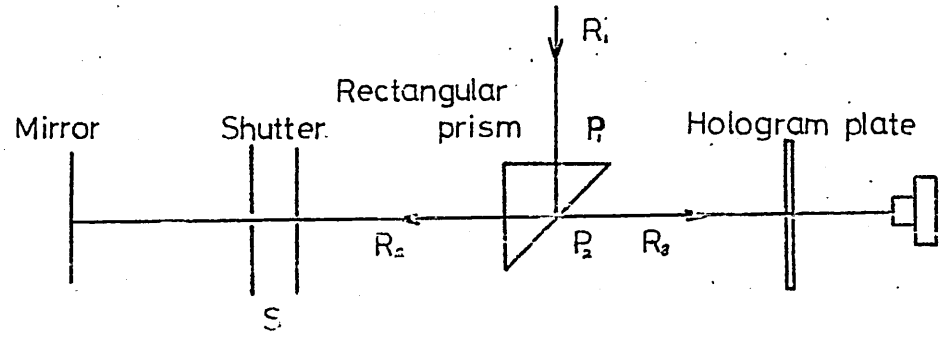



Fig.5

グショーマウントで支持された定盤上に設置して振動を除去した。微細な干渉縞を撮影するホログラム用乾板としてコダック649Fを使用し、現象には指定の現象液D19を用い、ホログラム撮影時間は20秒程度であった。再生像は焦点距離200mmの望遠レンズ付カメラを用い、再生像から146cmの位置より撮影し、反射光の方向θrが一定になるようにした。
なお再生像の撮影には市販のSSフィルムを用い露光時間は1/2秒程度である。

3-2. 測定方法

振動変位を測定する場合、振動子に対する入射光の方向θi、及び反射光の方向θrを如何に選ぶかが問題となる。本実験では、振動方向がわからないので、振動子の金属面に垂直に入射させ、同じく反射させるようにした。この取付け手順のあらましを述べてみると、まず入射光と反射光の光路の調整は次のようにする。Fig.4でコリメータを除いてHalf mirror

の位置に直角プリズムをFig.5の如く置き、その$P_1$面を鏡として利用しその面が入射光$R_1$に垂直になるように調整する。(プリズム反射面$P_1$からの反射光と入射光を一致させる。)直角プリズムであるので$P_2$面での反射光$R_2$は入射光$R_1$に直角な方向に光が出ていく。この光路上にシャッター二個とその後に鏡を置き、しかる後プリズムの位置にHalf mirrorをセットし、シャッターの二つの穴を光が通り鏡で同じ位置にもどるように調整する。このもどって来た光はHalf mirrorを通過して光線$R_3$となる。その光路上にHologram plateとカメラをセットする。次に振動子を光線$R_2$に垂直になるように、直角プリズムを使って調整する。なお振動子はスポンジの上に設置した。

上述のようなSettingによれば照射光と反射光の方向は同一となり，次式のようになる。(Fig.3参照)

$$\theta_i = \theta_r = \theta \tag{13}$$

従ってEq.(11)より干渉縞の暗部は

$$J_0\left[\frac{4\pi}{\lambda} D\cos\theta\right] = 0 \tag{14}$$

をみたす振動変位の位置に生ずることになる。

そこで

$$D(P)\cos\theta \equiv D_z \tag{15}$$

と置くと，Z軸方向の変位$D_z$が求められ，

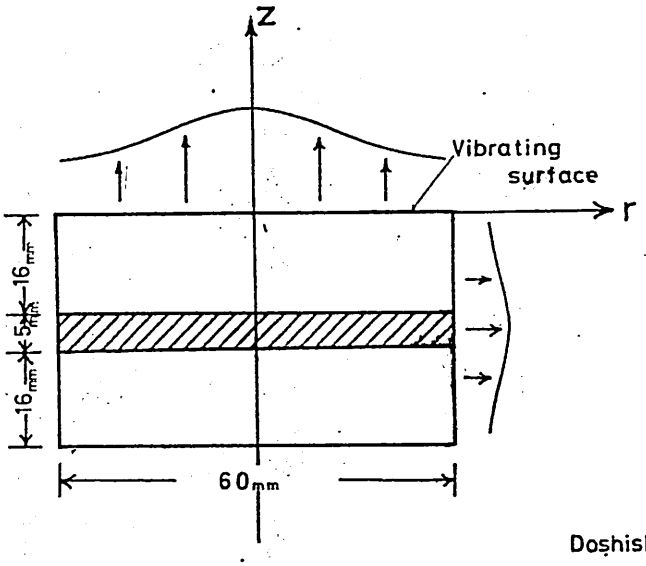
$$D_z(P) = \left[\frac{2.4 + (n-1)\pi}{4\pi}\right]\lambda$$

$$= 0.191\lambda + (n-1)\frac{\lambda}{4} \tag{16}$$

の場所に暗線を生ずる。

以下に述べる測定は上述の如き照射光の方向の変位の外を測定したものである。

## 4. 節のない振動子面の振動変位振巾 $D_z$ の測定




Doshisha Univ.

図の如き節のないランジェバン形超音波振動子を例にとって説明する。まず正面方向の場合を考えて振動面の変位はくわみの関数 $D_z(r)$ と表わし得る。Eq.(16)により干渉縞の暗部は

$$D_z(r) = 0.191\lambda + (n-1)\frac{\lambda}{4} \qquad (16')$$

振動子の再生像である干渉縞の写真判定及びミクロホトメータによるそ

のフィルムの透過係数の測定曲線の極値より暗部の位置 $r$ を測定し、Eq.(6)' を用いて $D_2(r)$ の相対振巾値を求め Fig. 6 の如く plot する。実験は共振周波数を監視しながら行なった。

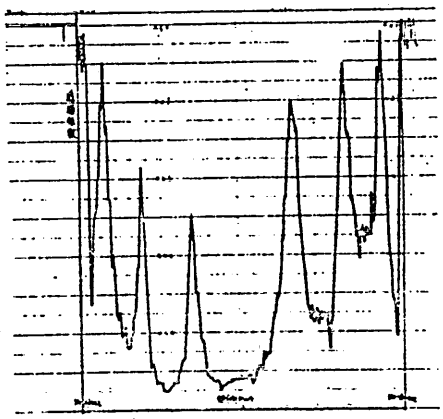
Fig. 6 の零レベルのまだ決定していない段階での相対変位振巾値には $\lambda/4$ の整数倍のあいまいさが存在している。$\Delta V$ なる電位差の値は、干渉縞の移動の模様がよくわかるように選ぶ、即ち同一の $n$ の値の縞が、$\Delta V$ なる印加電圧の変化によって、どこへ移動したかを判定出来るように選べばよい。Fig. 6 をもとにして、Fig. 7 を作図し $V=0$ ボルトの時の振巾を零と置くことにより、$D_2=0$ の大略のレベルが決定される。

このレベルを用いて、X印の暗部の大略の絶対振巾値が求まるから Eq.(6)' に代入して $n$ の値を計算し、その値に最も近い整数値をもって $n$ の正しい値とする。この $n$ の正しい値によって $D_2=0$ の正しいレベルが定まり、節

のない振動子の絶対振巾の値が決定
され、振動姿態が定量的にわかる。
零レベルが決定したので、あらためて Fig.6 をみてみよう。Photo.1 のすべての一番外側の暗線は $n=1$ つまり外周から一番外側までの絶対振巾は

$$0 < D_2(r) < 0.191\lambda \qquad (18)(17)$$

である。そして印加電圧が増加するに従って Eq.(18)(17) をみたす範囲が小さく



Microdensicmeter plot
drive voltage 5V

Fig. 6

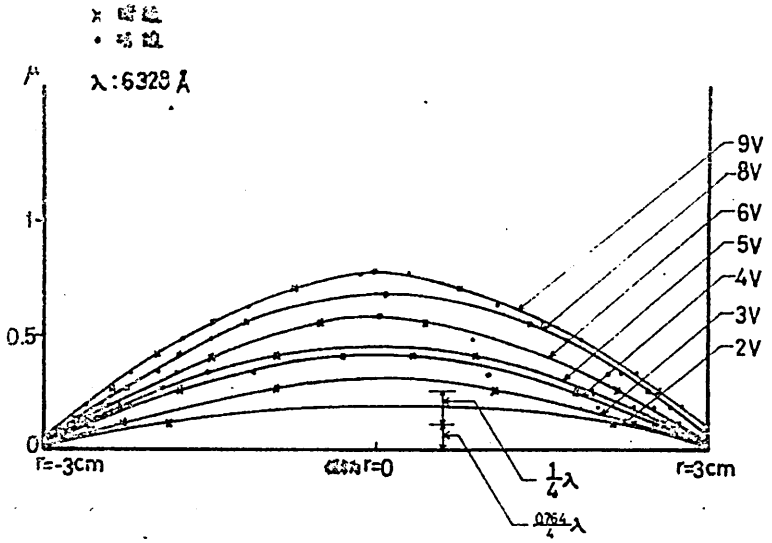

λ:6328 Å
1
0.5
0
r=-3cm
r=0
r=3cm
9V
8V
6V
5V
4V
3V
2V
1/4λ

Fig.7

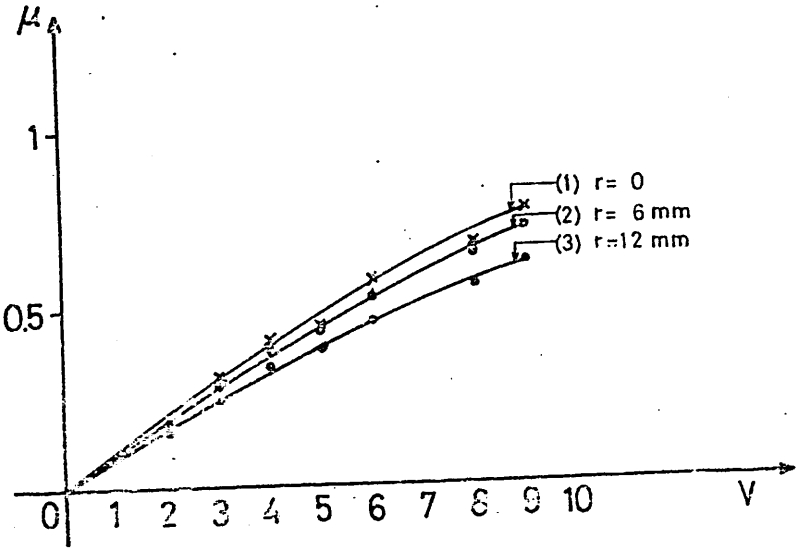

1
0.5
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
V
(1) r= 0
(2) r= 6 mm
(3) r=12 mm

Fig.8

なり9V近くでは、ほとんど外周近くまで来ている。言い換えると9V近傍では、外周は約0.191λ(≒0.12μ)振動していることがわかる。一番よく振動している中心部では、印加電圧9Vの時0.84μで動く。

次にPhoto.2の側面方向の場合について見てみよう。
印加電圧8Vの場合正面方向のホログラム再生像と比較すると縞の数が約半分であるので、側面方向の振動振巾は正面方向の約半分であることがわかる。
なお、空気中にて測定した機械的Q値は1192であり、測定結果をFig.9に示しておいた。

## 5. 結言

以上述べて来たように、従来なされていなかった無接触で節のない振動子の絶対振巾を測定することが出来たのである。
なお今後の問題として振動物体面の振動変位ベクトルの絶対値と方向の測定、無接触にて機械的振動子のQ

値の測定、材料の圧電歪定数の測定
高次の振動姿態の解析等がある。
最後に種々御検討いただいた本学卜
部教授、種々実験その他手助けしてくだ
さった本学学生、星崎、渡辺、中島
池田諸氏並びに振動子を御提供下さ
った村田製作所に謝意を表します。

文献

1) R. L. Powell and K. A. Stetson : J. J. Opt. Soc. Amer. 55 (1965) 1593
2) 広瀬、都築、飯島： 電子通信学会論文誌 53-A, No 6 p324 (1970)

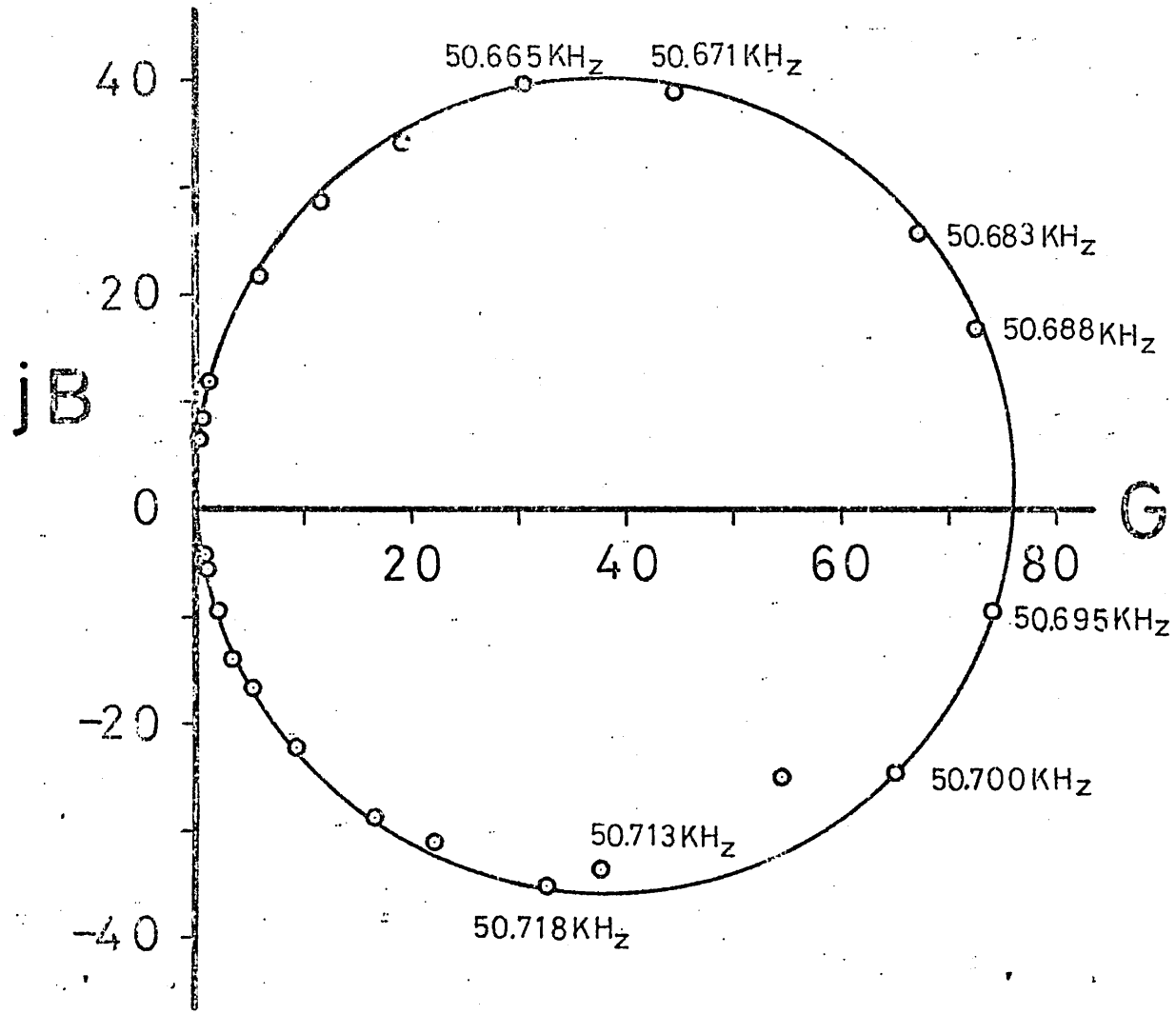
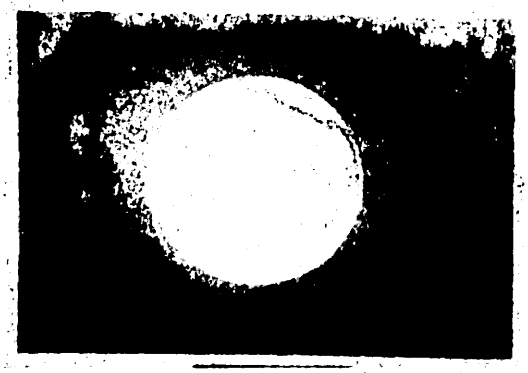
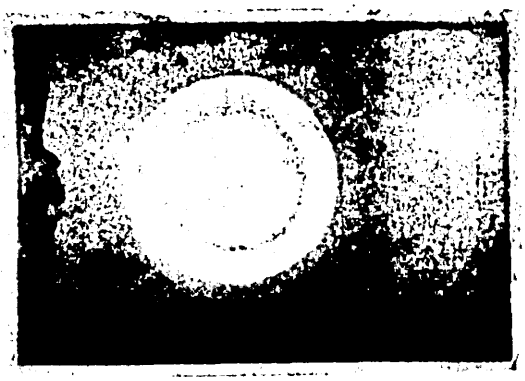

40
20
0
-20
-40
jB
G
20
40
60
80
50.665 KHz
50.671 KHz
50.683 KHz
50.688 KHz
50.695 KHz
50.700 KHz
50.713 KHz
50.718 KHz

Fig. 9

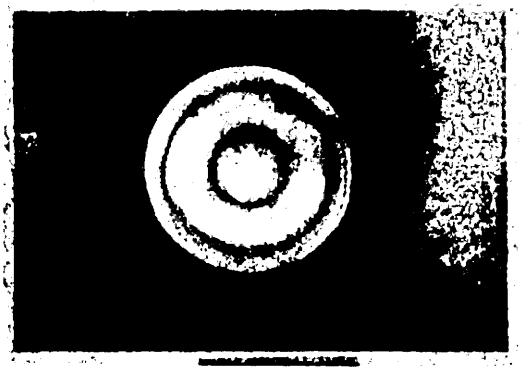
0 V



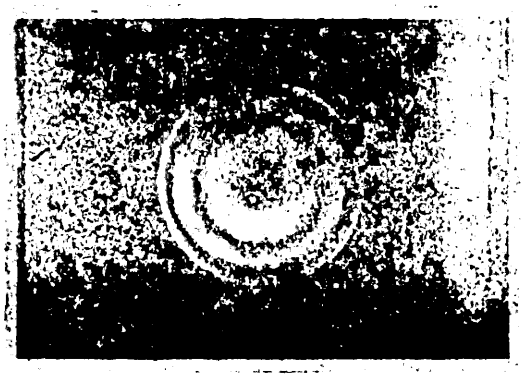
1 V



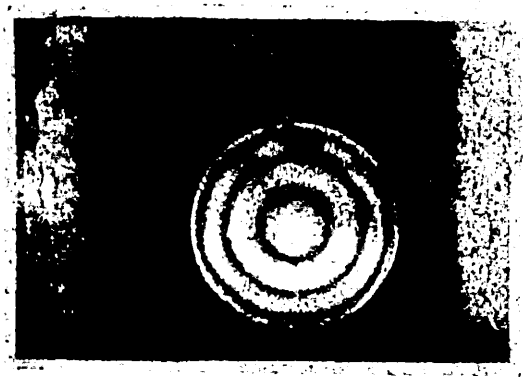
2 V



3 V



4 V



5 V

Photo. 1-1

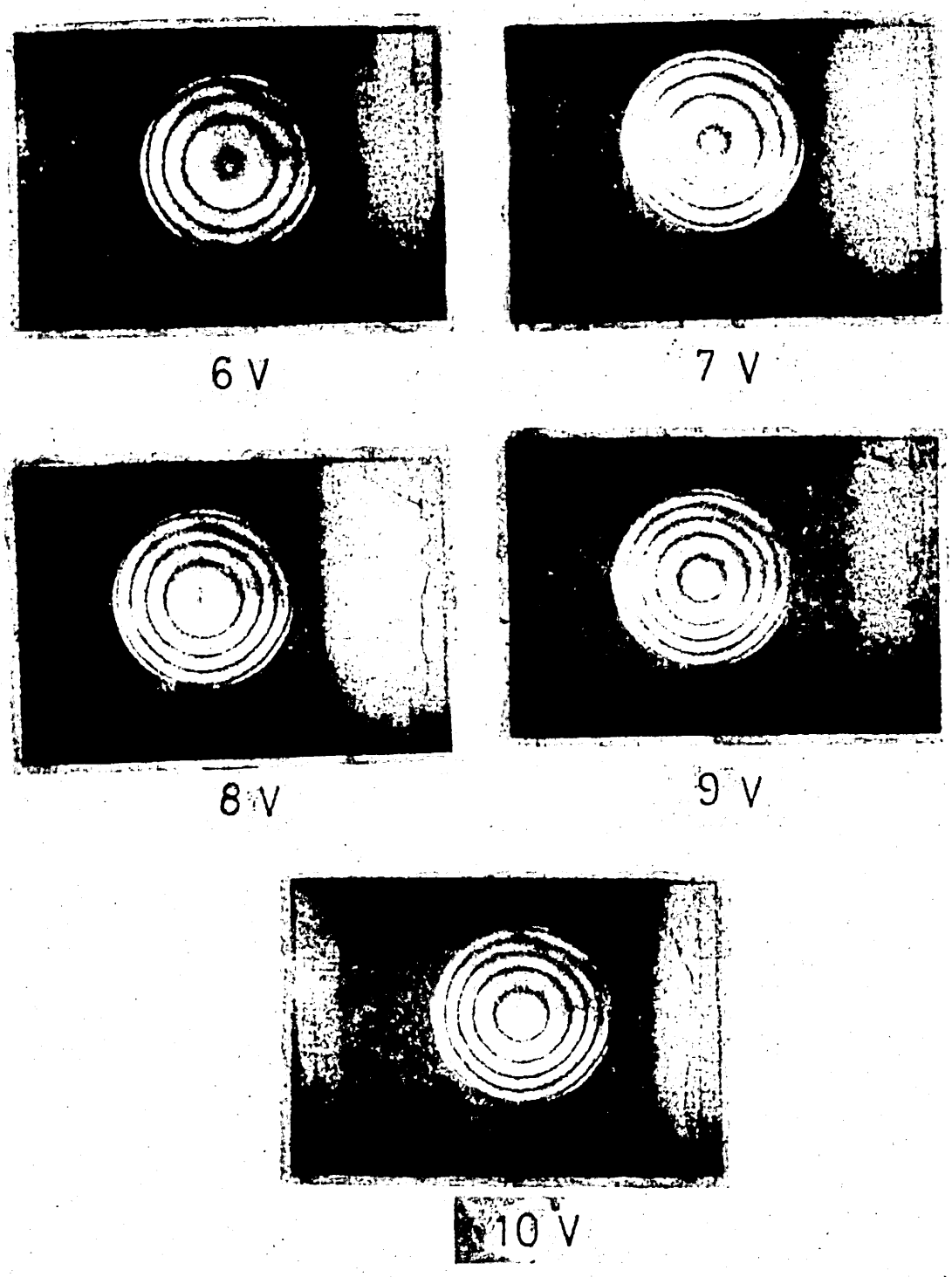
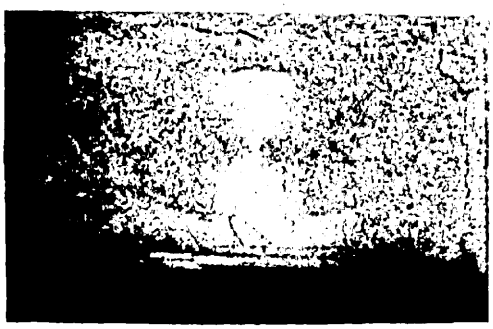
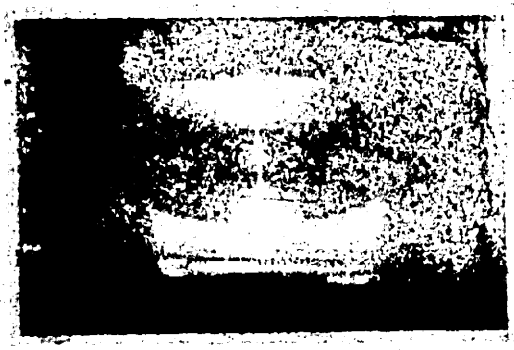



Photo. 1-2

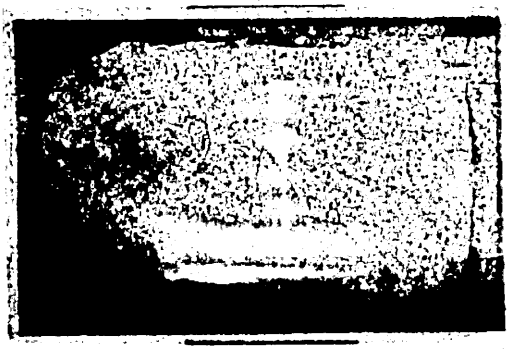


0 V

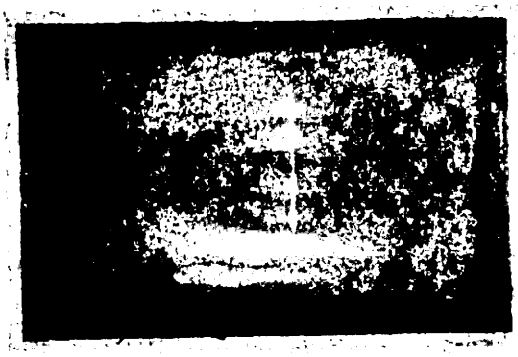


3 V

6 V



8 V



10 V

Photo. 2

輻射科学研究会資料

# 準ミリ波帯ＰＳＫの動作原理の一考察

1971. 2. 5

藤野　忠　　伊藤久明　　岡野　晃

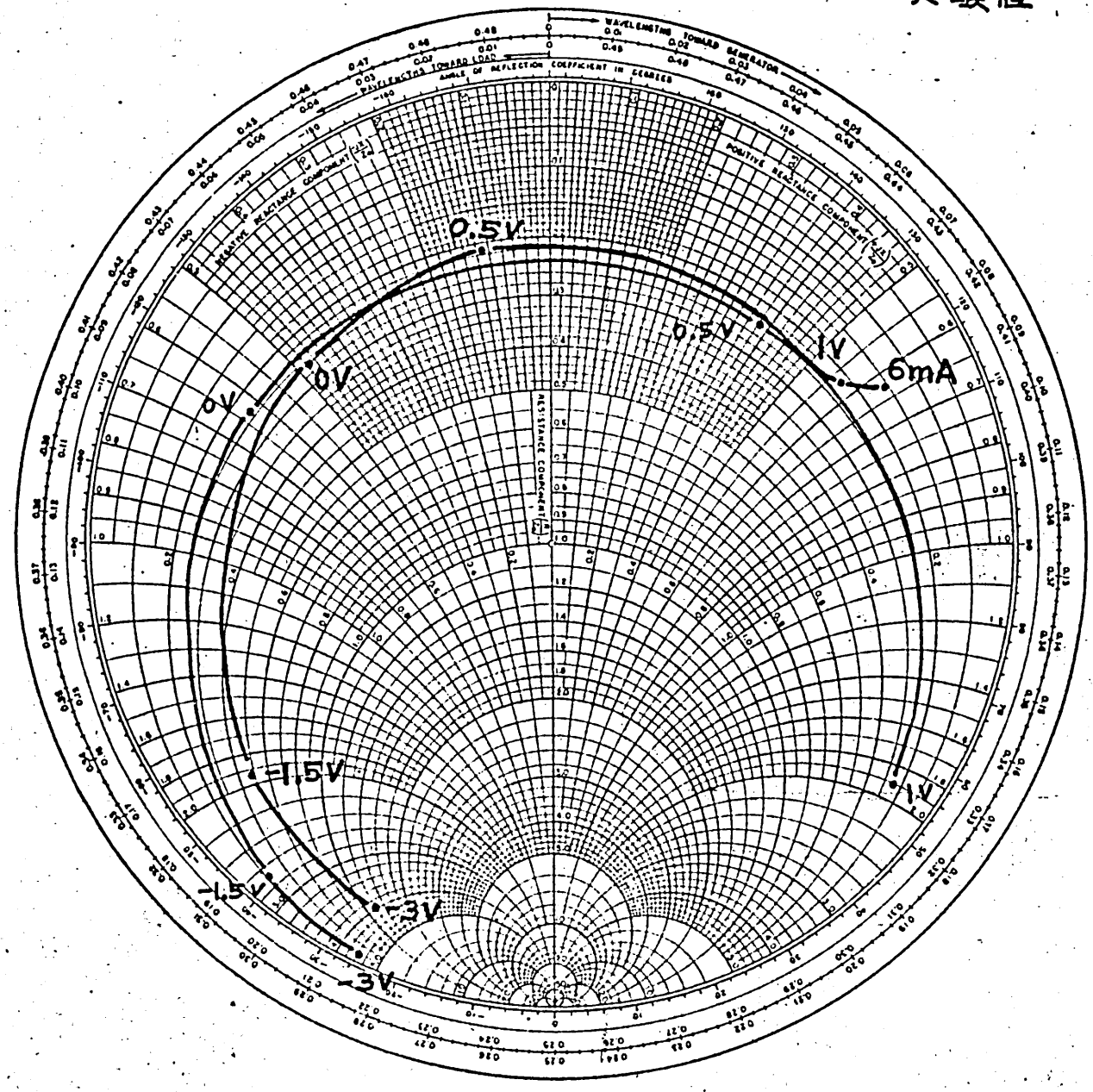
尾形睦奥男　　陶山昌雄　　鍛治栄二

（三菱電機㈱通信機製作所）

# PSKのインピーダンス特性

—·— 理論値

—·— 実験値



## 1. まえがき

バラクタおよびショットキー・ダイオードを用いて準ミリ波帯のPSK（位相変調器）の動作原理をマイクロ波回路の面から理論的に解析し、さらに実際に試作を行ない18.5 GHzで実験したので報告する。本報告では反射係数Γを等価回路を用いて理論的に解析し、PSK主部の挿入損失および出力波の入力波に対する位相の変化について論じ、さらに低損失PSKの設計方法を見出だすことを目的とする。

## 2. PSKの動作原理の解析

PSKの回路および動作を図1に示す。すなわちサーキュレータの端子①より入った入力はPSK主部で反射され端子③に出力として出る。変調パルスのOFFのときとONのときでダイオードに異なる値のバイアス電圧をかけるようにすると、ダイオードの接合容量や接合抵抗に変化が生じるため反射係数Γの位相が変化し位相変調を行なうことができる。

PSK主部は図2に示すように断面 a×b（試作品は12.9mm×1.80mm）の導波管中にダイオードをマウントする。ダイオードの上下にフィルタと空胴があるが、フィルタはバイアス付加回路にマイクロ波がもれないようにするためで、空胴は共振周波数を調整するためのものである。図4は図2のマウント部の等価回路である。[1] $jX_i$ は小さいとして無視する。

まず短絡板の代りにダミーを装荷し、バイアス電圧 $V = V_0$ で定在波比が1になるように空胴を調整し、さらにバイアス電圧を変化させると、バラクタの場合は図7(a)のようにインピーダンスの軌跡は等抵抗線上を、バリスタの場合は等リアクタンス線上を動く。このことは $V = V_0$ のとき図4の等価回路が並列共振していることを示している。つぎにダミーをはずし短絡板を挿入しバイアス電圧を変化させると、図7(b)

のようなPSKのインピーダンス特性を得る。 PSKの主部はサーキュレータの端子②のWRJ-180の導波管と接続するためテーパを用いる。

## 2.1 ダイオードをマウントしたときの等価回路

一般にダイオード・パッケージの大きさがマイクロ波の波長に比べて小さいときはバラクタの等価回路は図3(a)に、[2] ショットキー・ダイオードの場合は図3(b)[3]に示すように集中定数を用いて表わすことができる。 これよりマウントの等価回路は図4のようになる。 ここにバラクタの場合は、

$$R_m(V) = \frac{R_s}{[\omega C_j(V) R_s]^2 + \left[1 + \frac{C_f}{C_j(V)} + \omega^2 C_j(V) C_f R_s^2\right]^2} \qquad (2.1.1a)$$

$$C_m(V) = \frac{\left[\frac{\omega C_j(V) R_s}{1 + C_f/C_j(V)}\right]^2 + \left[1 + \frac{\omega^2 C_j(V) C_f R_s^2}{1 + C_f/C_j(V)}\right]^2}{\frac{1}{C_j(V) + C_f} + \frac{\omega^2 C_f R_s^2}{[1 + C_f/C_j(V)]^2}} \qquad (2.1.2a)$$

$C_f/C_j(V) < 1$, $(\omega^2 C_j R_s)^2 \ll 1$ であるから (2.1.1a), (2.1.2a) はそれぞれ次式のようになる。

$$R_m(V) = \frac{R_s}{[1 + C_f/C_j(V)]^2} \qquad (2.1.3a)$$

$$C_m(V) = C_j(V) + C_f \qquad (2.1.4a)$$

ショットキー・ダイオードの場合は、

$$R_m(V) = \frac{R_j(V)}{1 + \omega^2 C_j^2(V) R_j^2(V)} + R_s \qquad (2.1.1b)$$

$$C_m(V) = C_j(V) + \frac{1}{\omega^2 C_j(V) R_j^2(V)} \qquad (2.1.2b)$$

$(\omega C_j R_j)^2 \ll 1$ であるから (2.1.1b), (2.1.2b) は次のようになる。

$$R_m(V) = R_j(V) + R_s \qquad (2.1.3b)$$

$$C_m(V) = 1/\omega^2 C_j(V) R_j^2(V) \qquad (2.1.4b)$$

(2.1.3), (2.1.4) を用いてダイオードのアドミタンス $Y_d$ を表わすと、

$$Y_d(V) = \frac{R_m(V)}{R_m^2(V)+X_s^2(V)} - j\left[\frac{X_s(V)}{R_m^2(V)+X_s^2(V)} - \omega C_c\right] \quad (2.1.5)$$

であるからダイオードをマウントしたときのアドミタンス $Y$ は、

$$Y(V) \triangleq G(V) - jB(V) = Y_d(V) + Y_a \triangleq Y_a(V) - jB_a$$
$$= \frac{R_m(V)}{R_m^2(V)+X_s^2(V)} - j\left[\frac{X_s(V)}{R_m^2(V)+X_s^2(V)} + B_a - \omega C_c\right] \quad (2.1.6)$$

を得る。ここに

$$X_s(V) = \omega L_s - \frac{1}{\omega C_m(V)} \quad (2.1.7)$$

バイアス電圧 $V=V_0$ のとき並列共振するとすると、共振条件は

$$B_a = \omega C_c - \frac{X_s(V_0)}{R_m^2(V_0)+X_s^2(V_0)} \quad (2.1.8)$$

であり、マウントのアドミタンスは

$$Y(V_0) = G(V_0) = \frac{R_m(V_0)}{R_m^2(V_0)+X_s^2(V_0)} \quad (2.1.9)$$

となる。

## 2.2 PSK の動作原理

ダイオードより距離 $\ell$ だけ離れたところに短絡板を挿入すると（図2および図5参照）、ダイオードより短絡板側を見たときのアドミタンス $Y_A$ は、

$$Y_A(V,\ell) = Y(V) - jY_c \cot\beta\ell$$
$$= G(V) - j[B(V) + Y_c \cot\beta\ell] \quad (2.2.1)$$

ここに

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2} \quad (2.2.2)$$

面Aにおける反射係数を$\Gamma$とすると、

$$\Gamma(\nu,\ell) = \frac{Y_c - Y_A(\nu,\ell)}{Y_c + Y_A(\nu,\ell)} \tag{2.2.3}$$

または、

$$\Gamma(\nu,\ell) = |\Gamma(\nu,\ell)|\, e^{j\phi(\nu,\ell)} \tag{2.2.4}$$

ここに

$$|\Gamma(\nu,\ell)| = \left\{\frac{[Y_c - G(\nu)]^2 + [B(\nu) + Y_c \cot\beta\ell]^2}{[Y_c + G(\nu)]^2 + [B(\nu) + Y_c \cot\beta\ell]^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.2.5}$$

$$\cos\phi(\nu,\ell) = \frac{Y_c^2 - G^2(\nu) - [B(\nu) + Y_c \cot\beta\ell]^2}{\{[Y_c - G(\nu)]^2 + [B(\nu) + Y_c \cot\beta\ell]^2\}^{\frac{1}{2}}\{[Y_c + G(\nu)]^2 + [B(\nu) + Y_c \cot\beta\ell]^2\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2.2.6a}$$

$$\sin\phi(\nu,\ell) = \frac{2Y_c[B(\nu) + Y_c \cot\beta\ell]}{\{[Y_c - G(\nu)]^2 + [B(\nu) + Y_c \cot\beta\ell]^2\}^{\frac{1}{2}}\{[Y_c + G(\nu)]^2 + [B(\nu) + Y_c \cot\beta\ell]^2\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2.2.6b}$$

$$G(\nu) = \frac{R_m(\nu)}{R_m^2(\nu) + X_s^2(\nu)} \tag{2.2.7}$$

$$B(\nu) = \frac{X_s(\nu)}{R_m^2(\nu) + X_s^2(\nu)} + B_a - \omega C_c \tag{2.2.8}$$

たとえば

$$\cot\beta\ell = 0 \quad \text{または} \quad \ell = \lambda_g/4 \tag{2.2.9}$$

すなわち短絡板をダイオードから$\lambda_g/4$だけ離れたところでは、

反射係数$\Gamma(\nu, \lambda_g/4)$は、

$$\Gamma(\nu, \lambda_g/4) = |\Gamma(\nu, \lambda_g/4)|\, e^{j\phi(\nu, \lambda_g/4)} \tag{2.2.10}$$

ここに

$$|\Gamma(\nu, \lambda_g/4)| = \left\{\frac{[Y_c - G(\nu)]^2 + B^2(\nu)}{[Y_c + G(\nu)]^2 + B^2(\nu)}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.2.11}$$

$$\cos\phi(\nu,\lambda_g/4) = \frac{Y_c^2 - G^2(\nu) - B^2(\nu)}{\{[Y_c - G(\nu)]^2 + B^2(\nu)\}^{\frac{1}{2}}\{[Y_c + G(\nu)]^2 + B^2(\nu)\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2.2.12a}$$

$$\sin\phi(V,\lambda_g/4) = \frac{2Y_c B(V)}{\{[Y_c - G(V)]^2 + B^2(V)\}^{\frac{1}{2}}\{[Y_c + G(V)] + B^2(V)\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.2.12b)$$

いま変調パルス OFF, ON のときダイオードにバイアス電圧をそれぞれ $V_1$, $V_2$ かけたとすると,

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(V_1) &= |\Gamma(V_1)| e^{j\phi(V_1)} \\ \Gamma(V_2) &= |\Gamma(V_2)| e^{j\phi(V_2)} \end{aligned}\right\} \quad (2.2.13)$$

挿入損失を $L(V)$ とすると.

$$L(V) = -10\log\frac{P_{out}}{P_{in}} = -20\log|\Gamma(V)| \quad (2.2.14)$$

より

$$\left.\begin{aligned} L(V_1) &= -20\log|\Gamma(V_1)| \\ L(V_2) &= -20\log|\Gamma(V_2)| \end{aligned}\right\} \quad (2.2.15)$$

この損失を小さくするには反射係数の絶対値を大きくする必要がある。
また OFF のときに対する ON のときの位相変化の大きさ $\Delta\phi$ は、

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \arg[\Gamma(V_2)] - \arg[\Gamma(V_1)] \\ &= \phi_2 - \phi_1 \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

であらわされる。

## 3. まとめ

三菱製ピル形バラクタ・ダイオードを用いて18.5 GHzで動作させたときの理論値と実験値を比較する。バラクタの定数は表1に示す。ダミーを入れてバイアス電圧V＝0で定在波比を1にした後、短絡板を$\ell = \lambda_g/4$のところに置き、バイアス電圧V＝0としてこれらの定数を(2.1.3a), (2.1.4a), (2.1.7), (2.2.7), (2.2.8)を用いて(2.2.11)に代入すると、理論値は、反射係数の絶対値は0.5、挿入損失は6 dB，実験値は図7よりそれぞれ0.6，4 dBとなり、比較的よく一致した値が得られた。ここで導波管の特性アドミタンス$Y_c$は、

$$Y_c = \frac{2}{\pi}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \qquad (3.1)$$

を用いた。しかし実用化するためには損失をより小さくする必要がある。そのためには(2.2.11)において$|Y_c - G(V)|$をできるだけ大きくした方がよく、一般に$Y_c > G(V)$となるところから、導波管の厚さbを小さくして$Y_c$を大きくし、しゃ断周波数の高いダイオードを選んで$R_s$すなわち$G(V)$の値を小さくすればよい。また$B(V)$を0から遠ざけた値をとる方がよい。すなわち図4の等価回路を共振させるバイアス電圧を動作バイアスからさけた方がよい。

位相変化に関しては図7より実験的に$\Delta\phi$が180度以上変化することが確かめられた。このことはバラクタがPSKとして使用できる必要条件をもつ反面、変調パルスのOFF, ON時におけるバイアス電圧が規定値に正確にバラクタにかからないと、位相変調にひずみを生じるおそれがある。この点バリスタならばインピーダンスの軌跡は等リアクタンス線上を動くのでバラクタほどひずまず、ショットキー・ダイオードの方が波形ひずみに関する点では有利である。PSKとして実際に動作させる時は位相変調の移相量に応じてダイオードのバイアス電圧を決

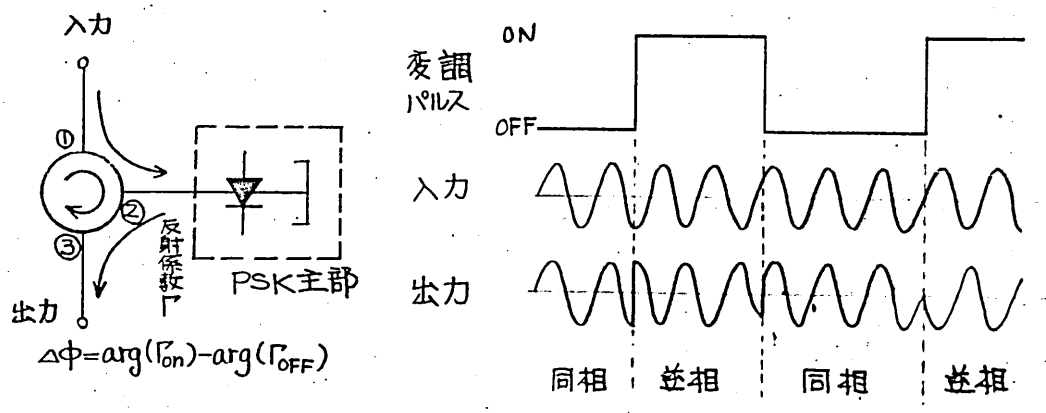
定することは困難なので、図6に示すようにダイオードのバイアスにかけるドライブ電圧を一定にしておいてダイオードと短絡板間の距離$l$を変えることによって$\arg(\Gamma)$の大きさを変え移相量$\Delta\phi$を決定するようにする。理論式より$\Delta\phi$を数値的に求めることは今後の課題として残すことにする。

## 参考文献


(1) N. MARCUVITZ, "Waveguide Handbook" MIT Radiation Lab. Series, Vol. 10, P. 112 (McGraw Hill Book Co., Inc., NY, 1951)

(2) H.A.WATSON, "Microwave Semiconductor Devices and Their Circuit Applications," p. 155, Mc Graw Hill Book Co., NY, Toronto, London, Sydney.

(3) (2)と同じ, p.373




(a) PSKの回路　　(b) 180度のPSKの位相

図1. PSKの回路および動作

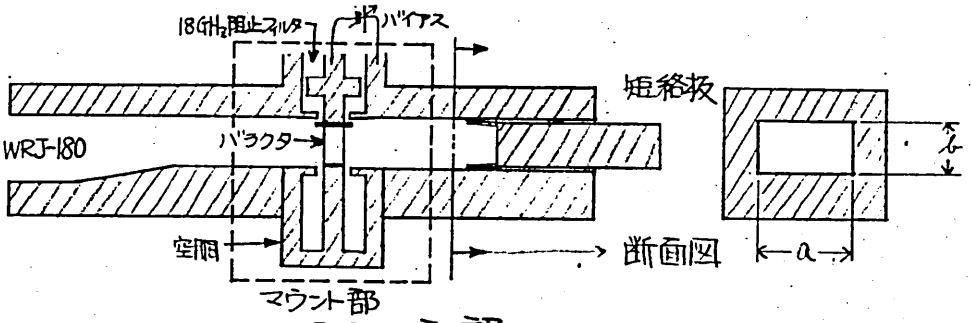
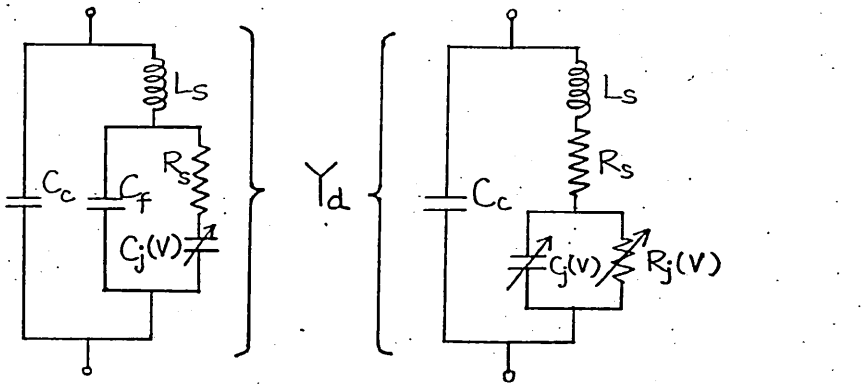


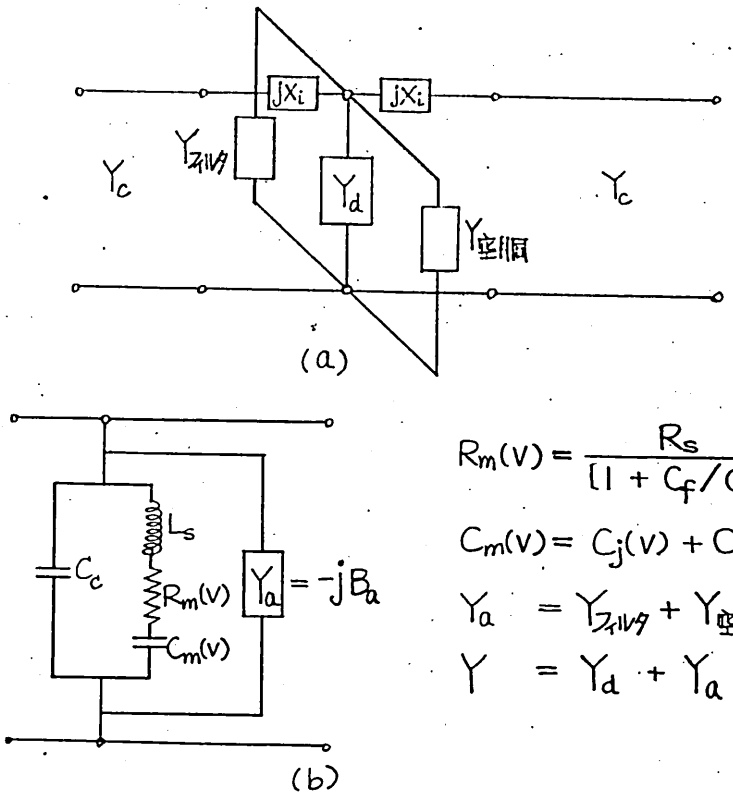

図2. PSK主部




(a) バラクタの等価回路　　(b) ショットキー・ダイオードの等価回路

$C_c$ : 筐体容量　　$L_s$ : 直列インダクタンス
$C_f$ : フリンジの容量　　$R_s$ : 直列抵抗
$C_j$ : 接合容量　　$R_j$ : 接合抵抗
$V$ : バイアス電圧

図3. ダイオードの等価回路



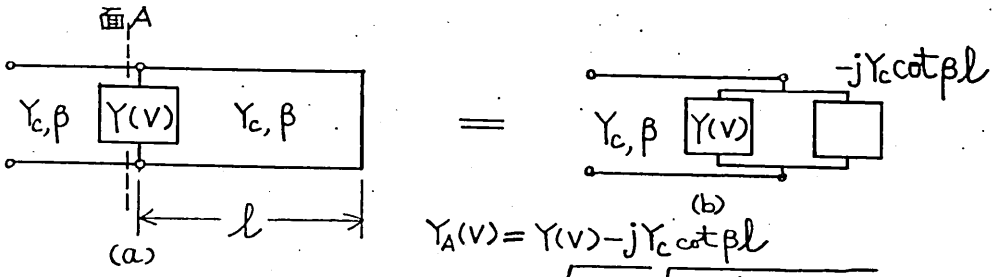

$$R_m(V) = \frac{R_s}{[1 + C_f/C_j(V)]^2}$$

$$C_m(V) = C_j(V) + C_f$$

$$Y_a = Y_{フィルタ} + Y_{空胴}$$

$$Y = Y_d + Y_a$$

図4. ダイオードをマウントしたときの等価回路



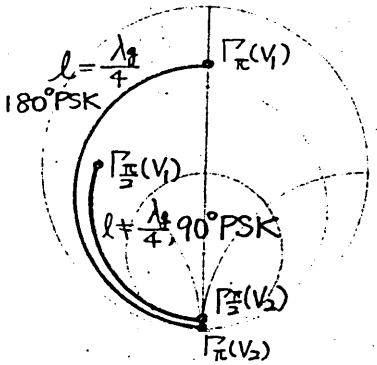

$$Y_A(V) = Y(V) - jY_c \cot\beta\ell$$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}$$

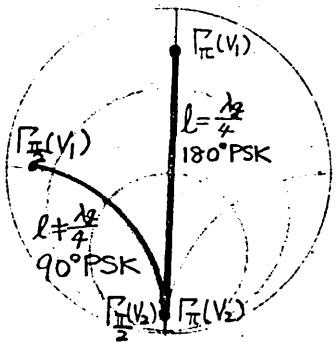
図5. 短絡板挿入時の等価回路

| | |
|---|---|
| 筐体容量 $C_c$ | 0.23 pF |
| 接合容量 $C_{jo}$ | 0.4 pF |
| 直列インダクタンス $L_s$ | 0.35 nH |
| 直列抵抗 $R_s$ | 1.3 Ω |
| しゃ断周波数 $f_c$ | 270 GHz |

表1. 三菱製ピル形バラクタの定数(代表値)



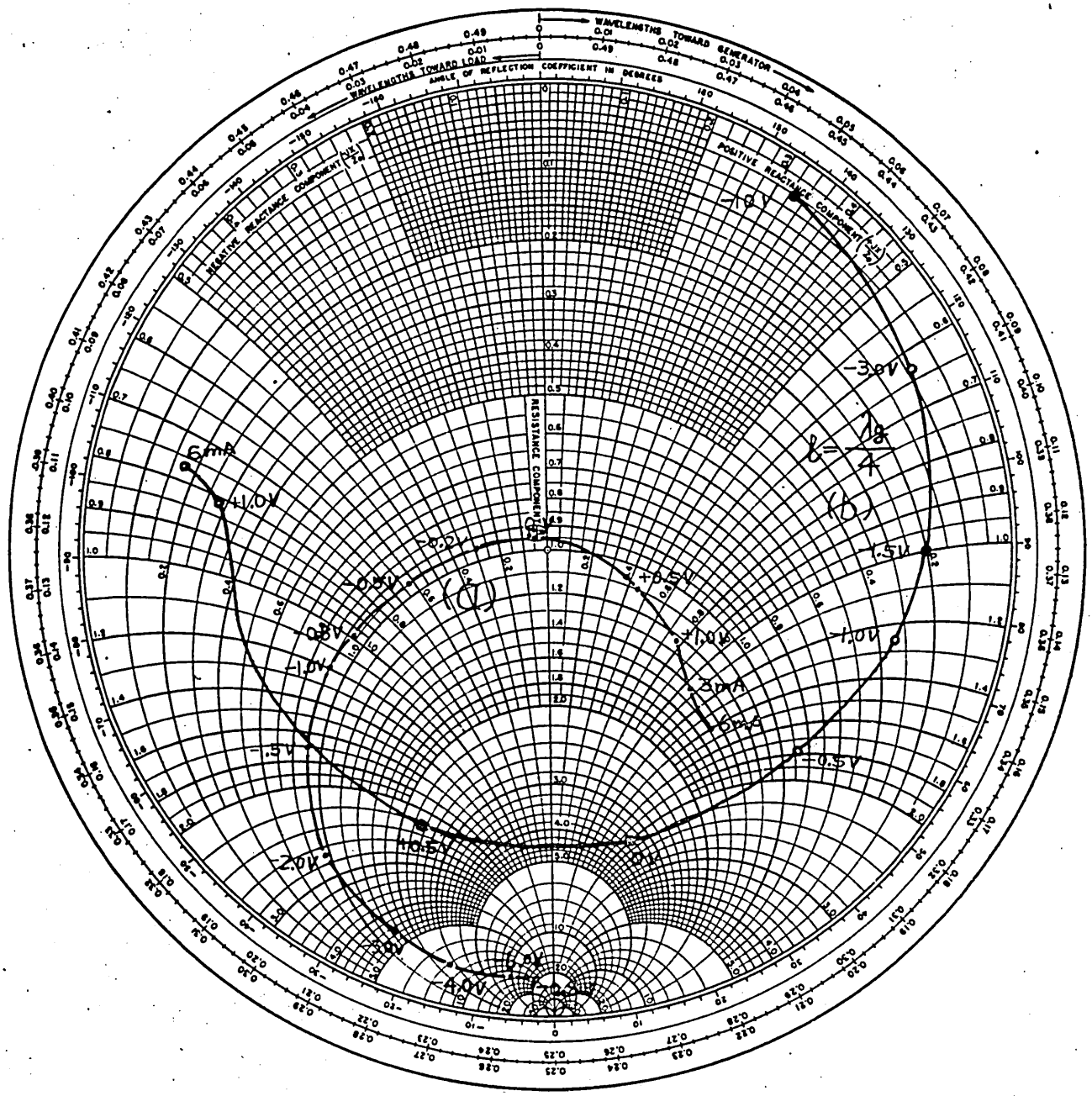

(a) バラクタによるPSKの
インピーダンス特性




(b) バリスタによるPSKの
インピーダンス特性

図6. PSKのインピーダンス特性

図7　ダイオードをマウントしたときのインピーダンス特性(a)と
PSKのインピーダンス特性(b)



# 付　録

入力信号パルス（100 Mc/s）をバイアスにかけたとき、位相変調されたrf出力はダイオードのもつパラメータによって過渡現象によるひずみが生じるが、このひずみが出力信号に影響を及ぼすかどうかを調べてみた。

## 1．バラクタの場合

図-付1-1に示すような等価回路を考える。 $L_s$, $R_s$, $C_j$, $C_c$ はそれぞれバラクタの直列インダクタンス，直列抵抗，接合容量，筐体容量で，$E(t)$は入力信号としてのバイアス電圧，$R_g$ は入力抵抗である。 $L_s$, $R_s$ は表皮効果のため周波数の関数になると考えると、次のようなキルヒホッフの方程式が成り立つ。

$$
\left\{
\begin{aligned}
& R_g\left[i_1(t)+i_2(t)\right]+\frac{1}{C_c}\int i_2(t)\,dt = E(t) && \text{(a)}\\
& \frac{1}{C_c}\int i_2(t)\,dt = v_L(t)+v_R(t)+v(t) && \text{(b)}\\
& v_L(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} i_1(\tau)h(t-\tau)\,d\tau && \text{(c)}\\
& h(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L_s(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega && \text{(d)}\\
& v_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i_1(\tau)p(t-\tau)\,d\tau && \text{(e)}\\
& p(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_s(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega && \text{(f)}\\
& v(t) = \phi_d-\left[(\phi_d-V_1)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2C_{j0}\sqrt{\phi_d}}\int_0^t i_1(t)\,dt\right]^2 && \text{(g)}
\end{aligned}
\right\} \text{(付1-1)}
$$

この連立方程式より時間的に変化する接合容量の電圧 $v(t)$ を求め、

$$C_j = \frac{C_{j0}}{\left[1 - v(t)/\Phi_d\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (付1-2)$$

によって接合容量を求めると、反射係数Γの過渡応答が求まる。いま簡単のためLs, Rs が周波数の関数でないとし、表-付1 のようなパラメータの値をとるとすると、反射係数の過渡応答は図-付1-2のようになる。

2. ショットキーの場合

図-付2-1に示すような等価回路を考える。 バラクタの場合と同様にLs, Rs は周波数の関数であるとすると、次のようなキルヒホッフの方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} R_g i_1(t) + \frac{1}{C_c}\int [i_1(t) - i_2(t)]\,dt = E(t) & (a) \\ \frac{1}{C_c}\int [i_2(t) - i_1(t)]\,dt + v_L(t) + v_R(t) + v(t) = 0 & (b) \\ v_L(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} i_2(\tau) h(t-\tau)\,d\tau & (c) \\ h(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L_s(\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega & (d) \\ v_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i_2(\tau) p(t-\tau)\,d\tau & (e) \\ p(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_s(\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega & (f) \\ v(t) = \Phi_d - \left[(\Phi_d - V_1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2C_{j0}\sqrt{\Phi_d}}\int_0^t \{i_2(t) - i_3(t)\}\,dt\right]^2 & (g) \\ i_3(t) = i_{st}\left[\exp\left(\frac{e v(t)}{kT}\right) - 1\right] & (h) \\ i_{st} = AST^2 \exp\left(-\frac{e\Phi_d}{kT}\right) & (i) \end{cases} \qquad (付2-1)$$

ここにAは定数、Tは絶対温度、kはボルツマン定数、eは電子の電荷である。　この連立方程式より時間的に変化する接合容量の電圧$v(t)$と接合抵抗に流れる電流を求め（付2-1・h)式と

$$R_j = \frac{dv}{di_3} \qquad (付2\text{-}2)$$

および

$$C_j = \frac{C_{j0}}{\left(1 - v/\phi_d\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (付2\text{-}3)$$

によって時間的に変化する$R_j$, $C_j$を求めると、反射係数Γの過渡応答が求まる。　いま簡単のため$L_s$, $R_s$が周波数に対して独立な値をとると仮定し、さらにショットキーが　表-付2　のようなパラメータの値をとるとすると、反射係数の過渡応答は 図-付2-2 のようになる。

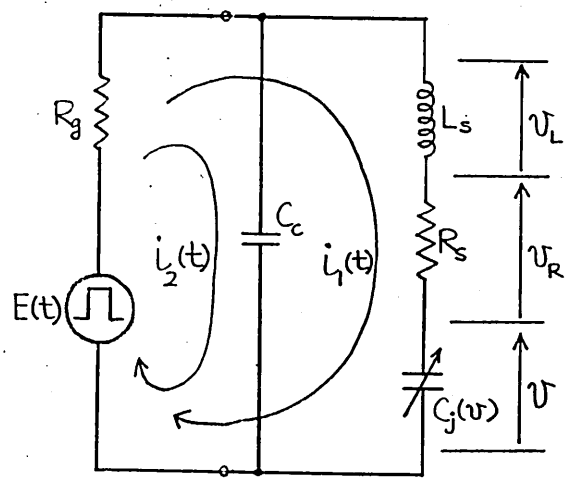



図-付1-1 バラクタを用いたときの等価回路

| | | |
|---|---|---|
| 直列インダクタンス $L_s$ | 0.35 | nH |
| 直列抵抗 $R_s$ | 1.3 | Ω |
| 接体容量 $C_c$ | 0.23 | pF |
| 接合容量 $C_{jo}$ | 0.4 | pF |
| 拡散電位 $\phi_d$ | 1.2 | V |
| 入力抵抗 $R_g$ | 75 | Ω |

$E(t)=V_1+(V_2-V_1)\,u(t)$

表-付1 バラクタを用いたときの等価回路のパラメータの定数

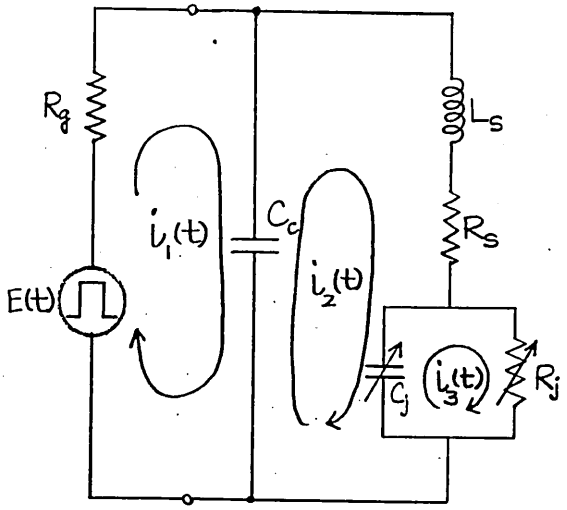



図-付2-1 ショットキーを用いたときの等価回路

| | | |
|---|---|---|
| 直列インダクタンス $L_s$ | 0.35 | nH |
| 直列抵抗 $R_s$ | 1.3 | Ω |
| 接体容量 $C_c$ | 0.23 | pF |
| 接合容量 $C_{jo}$ | 0.3~0.4 | pF |
| 拡散電位 $\phi_d$ | 0.8~0.9 | V |
| 定数 A | 0.068×120 ~1.2×120 | Amp/cm²/°K² |
| 温度 T | 300 | °K |
| 入力抵抗 $R_g$ | 75 | Ω |

$E(t)=V_1+(V_2-V_1)\,u(t)$

表-付2 ショットキーを用いたときの等価回路のパラメータの定数