輻射科学研究会資料

運動圧縮性プラズマスラブによる平面電磁波の反射

小嶋敏孝
東恒人
板倉清保
(大阪大学・工学部)

1971年4月30日

1. まえがき

宇宙開発の進歩に伴って，運動媒質中の電磁現象は，宇宙通信工学，電波天文学等に関連して，近年さかんに理論的研究がなされている．

これらの問題のうちで，運動媒質による電磁波の反射問題は，最も基本的な問題の1つであってかなりの数の研究結果が報告されている．これらの反射問題を大別すると，運動する半無限媒質の境界面での反射とスラブのような有限な運動媒質の境界面での反射に分けられる．

運動する誘電体スラブ，あるいはプラズマスラブによる電磁波の反射は色々な場合について報告されているが，[1]～[4] プラズマスラブで圧縮性を考慮した場合はまだ報告されていないようである．

圧縮性を考慮すれば，プラズマ内で電磁波以外にプラズマ波（縦波）の存在が可能になり，したがって運動の影響はこの両者に現われ，cold プラズマスラブの場合と異なった結果が予想される．

本稿では，境界面に平行に運動する圧縮性プラズマスラブによる平面電磁波の反射と透過について論じ，電力反射係数，および電力透過係数を求め，スラブの運動によりそれらがどのような影響を受けるか，数値計算例を掲げ，スラブが静止している場合には見られない興味ある結果が得られることを示す．

2. 問題の定式化

2．1　入射平面電磁波

まず，ここで考える問題の構成図を図1に示す．以下，観測系をK系，運動プラズマの静止系をK'系とし，この2つの慣性系での物理量を区別するために，K'系での量には全てプライムを付記する．

圧縮性スラブはx方向に一様な速度vで境界面に平行に運動していて，入射面に垂直な磁界成分を有するH波が入射した場合を考える．

K系で，入射平面電磁波はつ

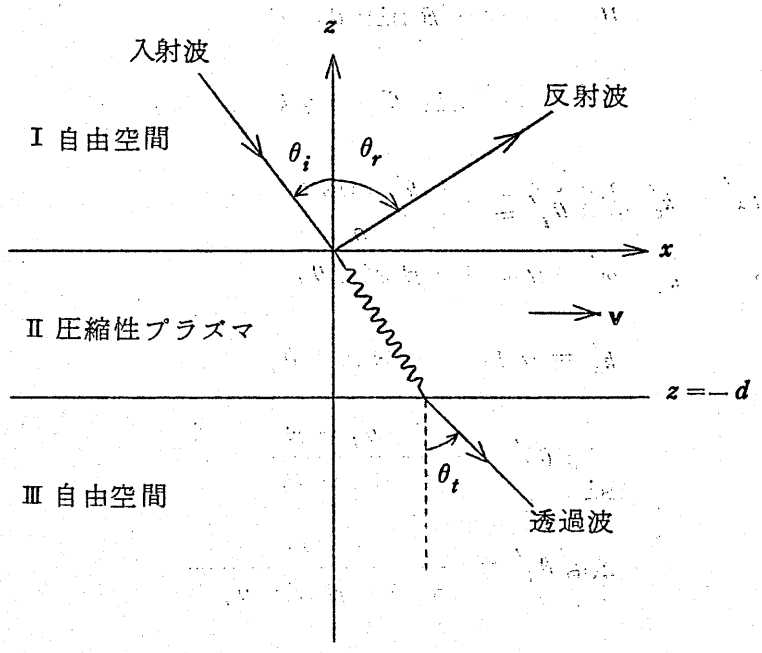


図1　構　成　図

ぎのように表わされるものとする．ただし，時間変化を $exp(-i\omega t)$ と仮定する．また電磁界成分は後の議論に必要なものだけを記す．

$$H_{iy} = H_0 \, exp\left[i(k_{ix} x - k_{iz} z - \omega t) \right] \tag{1.1}$$

$$E_{ix} = -\frac{k_{iz}}{\varepsilon_0 \omega} H_{iy} \tag{1.2}$$

ただし，入射角を θ_i とすると，

$$\left.\begin{aligned} k_{ix} &= k_0 \sin\theta_i \\ k_{iz} &= k_0 \cos\theta_i \\ k_0 &= (\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2} \omega \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

また，ε_0，および μ_0 は自由空間の誘電率，および透磁率であり，H_0 は入射波の振幅である．

つぎに，入射波を K' 系で表わすために，式(1)，(2)に対して電磁界ベクトル，および波動4元ベクトルのLorentz変換式[8],[9]を用いる．入射波は K' 系で次式のように表わされる．

$$H_{iy}' = H_0' \, exp\left[i(k_{ix}' x' - k_{iz}' z' - \omega' t') \right] \tag{3.1}$$

$$E_{ix}' = -\frac{k_{iz}'}{\varepsilon_0 \omega'} H_{iy}' \tag{3.2}$$

ただし，

$$H_0' = \gamma(1 - \beta \sin\theta_i) H_0 \tag{4.1}$$

$$k_{ix}' = k_0' \sin\theta_i' = \gamma k_0 (\sin\theta_i - \beta) \tag{4.2}$$

$$k_{iz}' = k_{iz} = k_0' \cos\theta_i' \tag{4.3}$$

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \sin\theta_i) \tag{4.4}$$

$$k_0' = \gamma k_0 (1 - \beta \sin\theta_i) \tag{4.5}$$

$$\sin\theta_i' = \frac{\sin\theta_i - \beta}{1 - \beta \sin\theta_i} \tag{4.6}$$

$$\cos\theta_i' = -\frac{\cos\theta_i}{\gamma(1 - \beta \sin\theta_i)} \tag{4.7}$$

および，

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \tag{5.1}$$

$$\beta = v/c \tag{5.2}$$

2．2　圧縮性プラズマスラブ内での電磁界

K' 系においてはプラズマスラブは静止しているので，通常の方法で電磁界を求めることができる．すなわち，プラズマは中性で，電子の運動のみを考え，小信号近似が成立すると仮定すれば，次式で示すようにMaxwellの方程式，連続の方程式および運動方程式で記述できる．[5],[6]

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = i\omega' \mu_0 \mathbf{H}' \tag{6.1}$$

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = -e n_0' \mathbf{u}' - i\varepsilon_0 \omega' \mathbf{E}' \tag{6.2}$$

$$m' n_0' u_0'^2 \nabla' \cdot \mathbf{u}' = i\omega' P' \tag{7}$$

$$-im' n_0' \omega' \mathbf{u}' = -e n_0' \mathbf{E}' - \nabla' P' \tag{8}$$

ただし，n_0' はプラズマが摂動を受ける前の状態における電子の平均密度，P' は電子ガスの圧力の変動分，$\mathbf{u}'$ は電子の速度，および u_0' は電子ガス中の音速である．

式(6)～(8)は良く知られているように電磁波モードとプラズマ波モードの項[5],[6]に分離できるので，全電磁界はつぎのように表わせる．ただし，式(3.1)で波動の変化を $exp[i(k_{ix}' x' - \omega' t')]$ と仮定しているので，以下の式ではこの項を省略する．また，煩雑さを避けるため境界条件に必要な成分のみを示す．

$$H_y' = A e^{-i\xi_e' z'} + B e^{i\xi_e' z'} \tag{9.1}$$

$$E_x' = \left[\frac{\xi_e'}{\varepsilon_0 \omega' \hat{\varepsilon}_p'} \left\{ -A e^{-i\xi_e' z'} + B e^{i\xi_e' z'} \right\} + \frac{i k_{ix}' (1-\hat{\varepsilon}_p')}{e n_0' \hat{\varepsilon}_p'} \left\{ C e^{-i\xi_p' z'} + D e^{i\xi_p' z'} \right\} \right] \tag{9.2}$$

$$u_z' = \left[-\frac{e k_{ix}'}{i\varepsilon_0' m' \omega'^2 \hat{\varepsilon}_p'} \left\{ A e^{-i\xi_e' z'} + B e^{i\xi_e' z} \right\} + \frac{\xi_p'}{m n_0' \omega' \hat{\varepsilon}_p'} \left\{ -C e^{-i\xi_p' z'} + D e^{i\xi_p' z'} \right\} \right] \tag{9.3}$$

ただし，A，B，C および D は境界条件より決まる定数である．また，

$$(k_{ix}')^2 + (\xi_e')^2 = (k_e')^2 \tag{10.1}$$

$$(k_e')^2 = k_0'^2 \hat{\varepsilon}_p' \tag{10.2}$$

$$\hat{\varepsilon}_p' = 1 - \left(\frac{\omega_p'}{\omega'}\right)^2 \tag{10.3}$$

$$(k_{ix}')^2 + (\xi_p')^2 = (k_p')^2 \tag{10.4}$$

$$(k_p')^2 = \frac{(\omega')^2 - (\omega_p')^2}{u_0'^2} \tag{10.5}$$

さらに，

$$\omega_p' = \left(\frac{e^2 n_0'}{m' \varepsilon_0}\right)^{1/2} \tag{10.6}$$

はプラズマ角周波数である．

2．3　反射波と透過波

K' 系において，領域Ⅰおよび領域Ⅲでの反射波および透過波を求める．

まず，反射波はつぎのように表わされる．

$$H_{ry}' = H_r' \exp\left[i(k_{rx}' x' + k_{rz}' z' - \omega' t')\right] \tag{11.1}$$

$$E_{rx}' = \frac{k_{rz}'}{\omega' \varepsilon_0} H_{ry}' \tag{11.2}$$

ただし，反射角を θ_r' とし，

$$(k_{rx}')^2 + (k_{rz}')^2 = (k_0')^2 \tag{12.1}$$

$$k_{rx}' = k_0' \sin\theta_r' \tag{12.2}$$

$$k_{rz}' = k_0' \cos\theta_r' \tag{12.3}$$

であり，H_r' は定数である．

さらに，透過波はつぎのように表わせる．

$$H_{ty}' = H_t' \exp\left[i(k_{tx}' x' - k_{tz}' z' - \omega' t')\right] \tag{13.1}$$

$$E_{tx}' = -\frac{k_{tz}'}{\varepsilon_0 \omega'} H_{ty}' \tag{13.2}$$

ただし，透過角を θ_t' とし，

$$(k_{tx}')^2 + (k_{tz}')^2 = (k_0')^2 \tag{14.1}$$

$$k_{tx}' = k_0' \sin\theta_t' \tag{14.2}$$

$$k_{tz}' = k_0' \cos\theta_t' \tag{14.3}$$

であり，H_t' は定数である．

3. 反射係数と透過係数

まず，K' 系での反射波と透過波を完全に決定するためつぎのような境界条件を用いる．

$z=0$，$-d$ で電磁界の接線成分は連続でなければならない．すなわち

$z=0$ で

$$\left.\begin{aligned} E_x' &= E_{ix}' + E_{rx}' \\ H_y' &= H_{iy}' + H_{ry}' \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$z=-d$ で

$$\left.\begin{aligned} E_x' &= E_{tx}' \\ H_y' &= H_{ty}' \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

さらに，スラブの境界面で通常よく用いられているように，[6],[7] 剛体境界面の条件（rigid boundary condition）が適用できるものと仮定すると（ただし，ここではこの境界条件の正当性については論及しない），

$z=0$，および $z=-d$ で

$$u_z' = 0 \tag{17}$$

以上，6個の境界条件より，H_r' および H_t' をつぎのように求めることができる．

$$H_r' = \frac{\mathfrak{f}_1}{a+ib} H_0' \tag{18}$$

$$H_t' = \frac{if_2}{a+ib} H_0' e^{-ik_{iz}'d} \tag{19}$$

ただし，

$$\begin{aligned} a = &\left\{\hat{\varepsilon}_p'^2 \xi_0'^2 \xi_p'^2 + (\xi_e'\xi_p' + \Omega_p'^2\zeta'^2)^2\right\}\cos(\xi_e' + \xi_p')d \\ &- \left\{\hat{\varepsilon}_p'^2 \xi_0'^2 \xi_p'^2 + (\xi_e'\xi_p' - \Omega_p'^2\zeta'^2)^2\right\}\cos(\xi_e' + \xi_p')d \\ &- 4\xi_e'\xi_p'\zeta'^2\Omega_p'^2 \end{aligned} \tag{20.1}$$

$$b = -2\xi_0'\xi_p'\hat{\varepsilon}_p' \{ (\xi_e'\xi_p' + \Omega_p'^2\zeta'^2) \sin(\xi_e' + \xi_p')d$$

$$- (\xi_e'\xi_p' - \Omega_p'^2\xi_e'^2) \sin(\xi_e' - \xi_p')d \} \qquad (20.2)$$

$$f_1 = 4\Omega_p'^2\zeta'^2\xi_e'\xi_p' + \{ \hat{\varepsilon}_p'^2\xi_0'^2\xi_p'^2 - (\xi_e'\xi_p' + \Omega_p'^2\zeta'^2)^2 \} \times \cos(\xi_e' + \xi_p')d$$

$$- \{ \hat{\varepsilon}_p'^2\xi_0'^2\xi_p'^2 - (\xi_e'\xi_p' - \Omega_p'^2\zeta'^2)^2 \} \cos(\xi_e' - \xi_p')d \qquad (20.3)$$

$$f_2 = -4\xi_0'\xi_p'\hat{\varepsilon}_p' (\xi_p'\xi_e' \sin\xi_p'd + \zeta'^2\Omega_p'^2 \sin\xi_e'd) \qquad (20.4)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} \xi_0' &= k_0' \cos\theta_i' \\ \zeta' &= k_0 \sin\theta_i' \\ \Omega_p' &= \omega_p'/\omega' \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

また，位相に関してつぎの関係を得る．

$$\left.\begin{aligned} k_{ix}' &= k_{rx}' = k_{tx}' = \zeta' \\ \theta_i' &= \theta_r' = \theta_t' \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

以上でK'系での反射波と透過波は完全に決定されたので，再び電磁界ベクトルと波動4元ベクトルのLorentz変換を用いて，式(11)と(13)をK系に変換すると，反射波は，

$$H_{ry} = H_r \exp[i(k_{rx}x + k_{rz}z - \omega''t)] \qquad (23.1)$$

$$E_{rx} = \frac{k_{rz}}{\varepsilon_0\omega''} H_{ry} \qquad (23.2)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \gamma(1 + \beta\sin\theta_i') H_r' \\ k_{rx} &= \gamma k_0' (\sin\theta_r' + \beta) = k_{ix} \\ k_{rz} &= k_{rz}' \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

また，透過波は

$$H_{ty} = H_t \exp[i(k_{tx}x - k_{tz}z - \omega''t)] \qquad (25.1)$$

$$E_{tx} = -\frac{k_{tz}}{\varepsilon_0\omega''} H_{ty} \qquad (25.2)$$

ただし，

$$
\left.
\begin{aligned}
H_t &= \gamma\,(1+\beta\sin\theta_i')\,H_t' \\
k_{tx} &= \gamma\,k_0'\,(\sin\theta_i'+\beta) = k_{ix} \\
k_{tz} &= k_{tz}' \\
\omega'' &= \omega
\end{aligned}
\right\} \qquad (26)
$$

つぎに電力反射係数，および電力透過係数を次式で定義する．

$$R = -\frac{\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{S}_r}}{\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{S}_i}} \qquad (27)$$

$$T = \frac{\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{S}_t}}{\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{S}_i}} \qquad (28)$$

ただし，nは境界面に垂直な~~外向きの~~単位ベクトルであり，$\overline{\mathbf{S}_i}$，$\overline{\mathbf{S}_r}$ および $\overline{\mathbf{S}_t}$ は入射波，反射波および透過波のポインティングベクトルの時間平均である．式(1)，(23)および(25)を用いると，

$$\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{S}_i} = \frac{1}{2}R_e\left[E_{ix}\cdot H_{iy}^*\right] \qquad (29)$$

$$\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{S}_r} = \frac{1}{2}R_e\left[E_{rx}\cdot H_{ry}^*\right] \qquad (30)$$

$$\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{S}_t} = \frac{1}{2}R_e\left[E_{tx}\cdot H_{ty}^*\right] \qquad (31)$$

である．ただし，$R_e[\quad]$は実数部をとることを意味する．

式(29)，(30)および(31)を計算し，R，T を求めるとけっきょくつぎのようになる．

$$R = \left|\frac{f_1}{a+ib}\right|^2 \qquad (32)$$

$$T = \left|\frac{i\,f_2}{a+ib}\right|^2 \qquad (33)$$

ただし，a，b，f_1 および f_2 は式(20)で与えられるが，ξ_0'，ζ'，ξ_e'，ξ_p'，$\hat{\varepsilon}_p'$ および Ω_p' 等を全てK系の量で書き直したもので，つぎのように表わされる．

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi_0' d &= k_0 d\cos\theta_i' \\
\zeta' d &= k_0 d\,\gamma(\sin\theta_i-\beta) \\
\xi_e' d &= k_0 d\,(\cos^2\theta_i-\Omega_p^{\,2})^{1/2} \\
\xi_p' d &= k_0 d\left[\beta_p^{\,2}\left\{\gamma^2(1-\beta\sin\theta_i)^2-\Omega_p^2\right\}-(\sin\theta_i-\beta)^2\gamma^2\right]^{1/2} \\
\beta_p &= \frac{c}{u_0'}
\end{aligned}
\right\} \qquad (34)
$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_p' &= 1 - \frac{\Omega_p^2}{\gamma^2(1-\beta\sin\theta_i)^2} \\ \Omega_p' &= \frac{\Omega_p}{\gamma(1-\beta\sin\theta_i)} \\ \Omega_p &= \omega_p/\omega \end{aligned}\right\}$$

以上で，反射係数と透過係数は求まった．式(32)，(33)から

$$R + T = 1 \tag{35}$$

なる関係が成立することが確かめられる．

また，$\beta = 0$ とすれば，R，T はスラブが静止している場合に求められた反射係数と透過係数[7]に一致する．

4. 数値計算例

4．1 冷プラズマスラブの場合

まず，式(32)，(33)の傾向を検討する前に，$u_0' \to 0$ の場合，すなわち冷プラズマスラブの場合を検討しよう．式(32)および(33)で $u_0' \to 0$ の極限を考えると，R，T はつぎのようになる．

$$R_c = \frac{l^2}{g^2 + h^2} \tag{36}$$

$$T_c = \frac{q^2}{g^2 + h^2} \tag{37}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} g &= (\hat{\varepsilon}_p'^2 \xi_0'^2 + \xi_e'^2)\sin\xi_e' d \\ h &= 2\xi_0'\xi_e'\hat{\varepsilon}_p'\cos\xi_e' d \\ l &= (\hat{\varepsilon}_p'^2 \xi_0'^2 - \xi_e'^2)\sin\xi_e' d \\ q &= 2\xi_0'\xi_e'\hat{\varepsilon}_p' \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

境界面に平行に運動している冷プラズマスラブにH波が入射した場合の反射問題はYeh[3]によって報告されていて，式(36)と(37)は彼の求めたものに一致する．しかしながら，反射係数の数値計算は垂直入射の場合しか求めていない．そこで，Ω_p，$k_0 d$，β を適当に選び入射角 θ_i に対する反射係数の計算結果を図2，および3に示す．ただし，以下の各図は，通常実

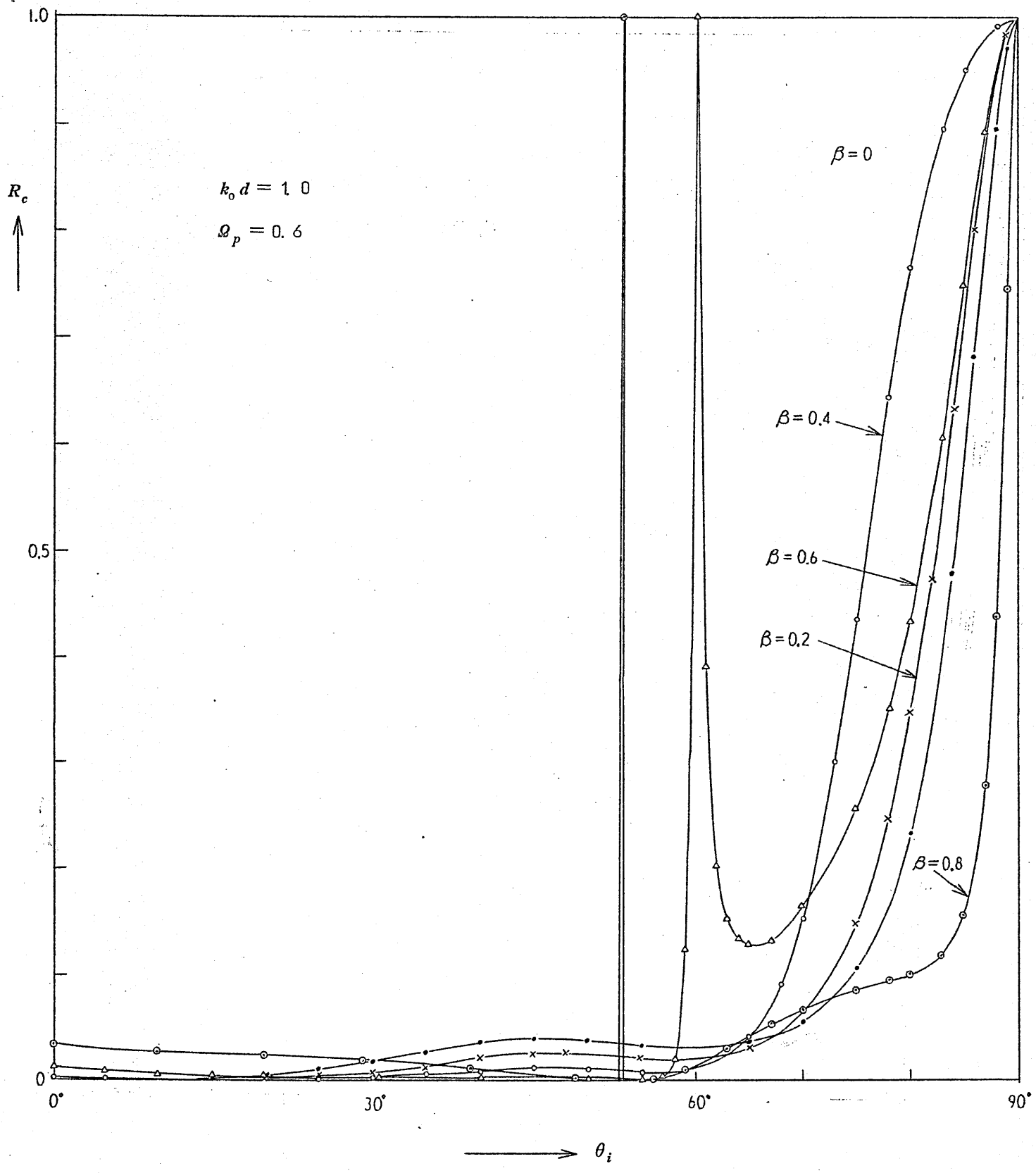


図 2 (a)　電力反射係数R_c（$k_0 d = 1.0$，$\Omega_p = 0.6$，$\theta_i \geqq 0$）

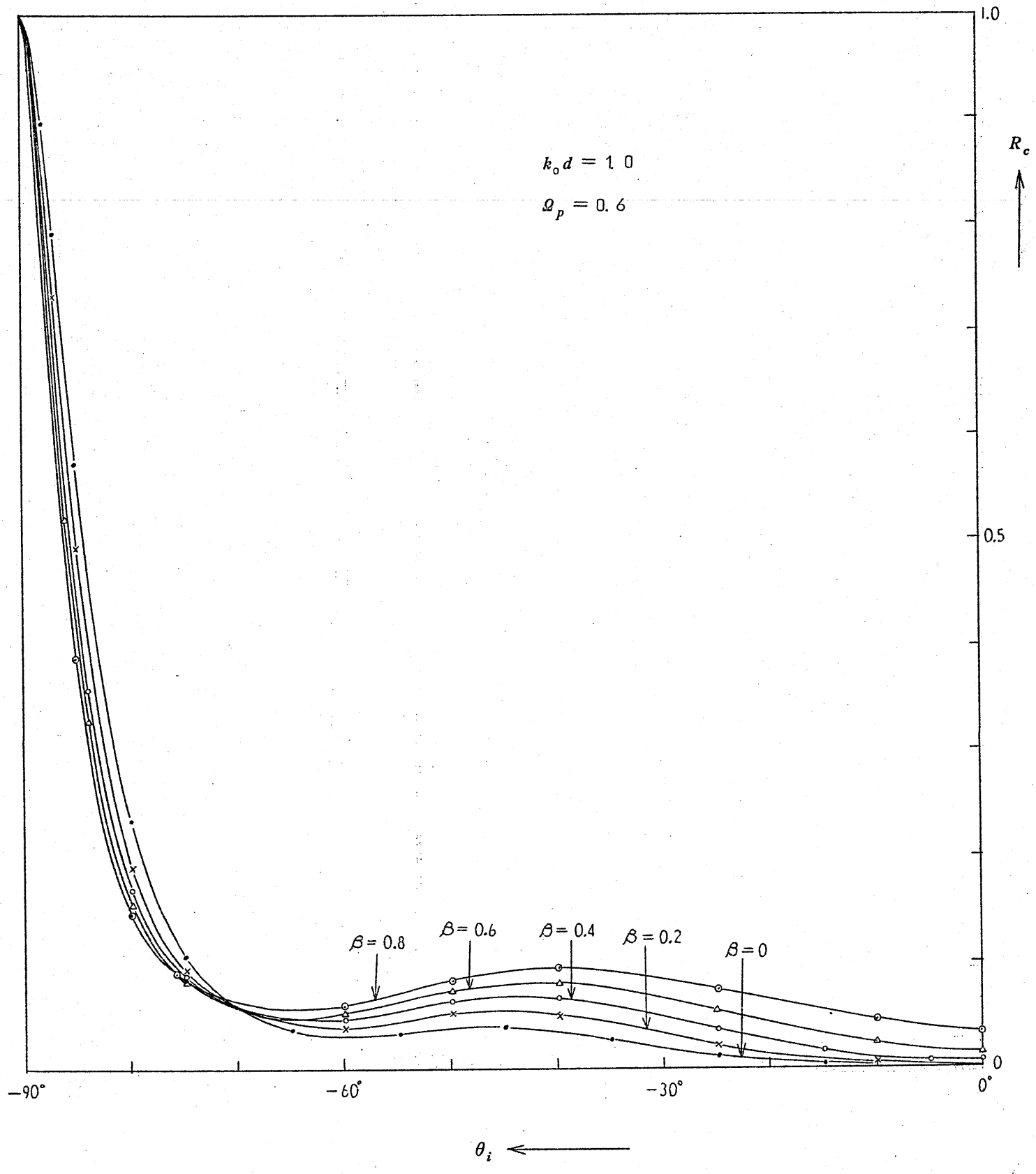


図 2 (b)　電力反射係数 R_c（$k_0 d = 1.0$，$\Omega_p = 0.6$，$\theta_i = 0$）

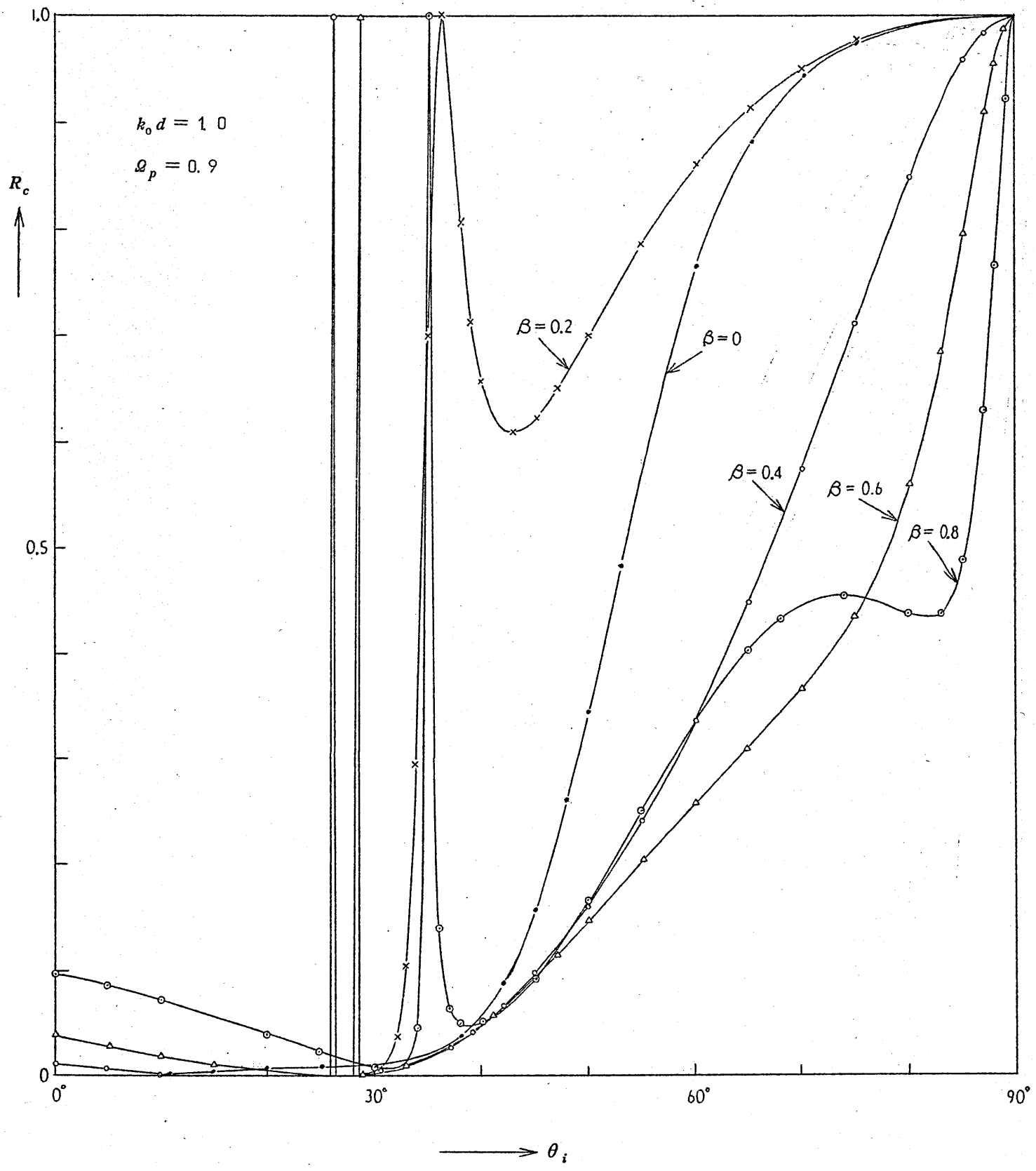


図 3 (a)　電力反射係数 R_c ($k_0 d = 1.0$, $\Omega_p = 0.9$, $\theta_i \geqq 0$)

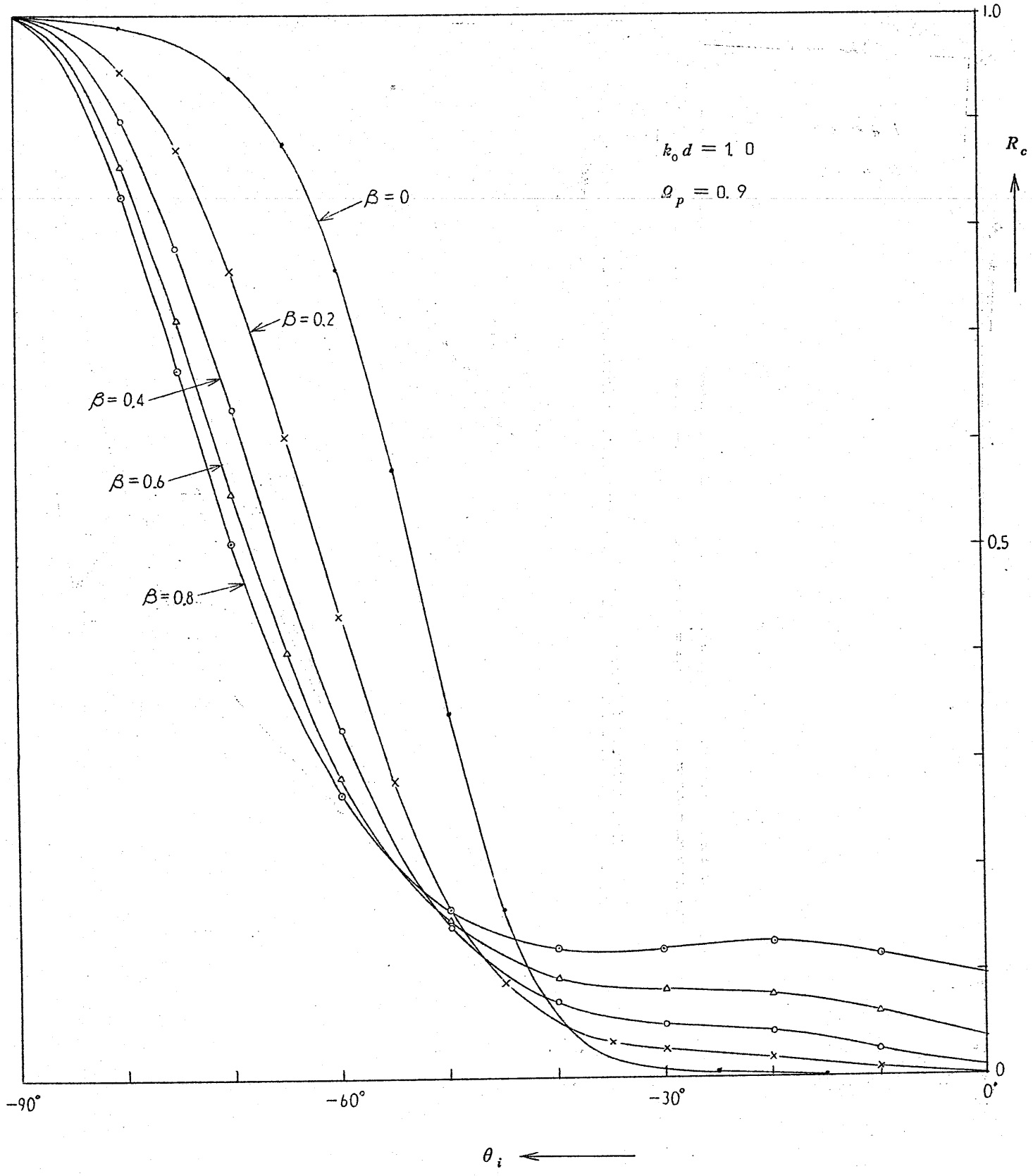


図 3 (b)　電力反射係数R_c（$k_0 d = 1.0$，$\Omega_p = 0.9$，$\theta_i \leqq 0$）

験値を表わす手法を用いて表現されているが，これは，各曲線を識別しやすくするためであって，ここで示している各図はあくまでも理論計算値である．図において，βの値によって，ある入射角で反射係数が1になる鋭いピークを有することが示されているが，これは式(36)で

$$\hat{\varepsilon}_p' = 0 \tag{39}$$

を満たすβとθ_iの値の時に生ずることがわかる．すなわち，この時K'系での角周波数ω'が

$$\hat{\varepsilon}_p' = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega'}\right)^2 = 0$$

を満たしている．ω'はスラブの運動の為にドプラー偏移を受けているので，式(4.4)で与えられるようにβとθ_iの関数になり，式(39)を満たすβとθ_iの時に反射係数は1になる．またこのピークの位置はスラブの幅dに無関係である．したがって，dが十分に小さい場合でも，ピークの位置で入射波が完全に反射されるという結果が導かれるが，これはプラズマの構成粒子同志の衝突による損失を考慮していないからである．

また，$(\xi_e')^2 < 0$を満たすθ_iに対して，半無限プラズマの場合は全反射になるが，スラブでは幅が有限であるから，透過電力が存在する．

さらに，$\theta_i \leqq 0°$では反射係数はβの影響をあまり受けない．またΩ_pが1に近い程，反射係数に現われる運動の影響は顕著である．

なお，参考の為に，$\hat{\varepsilon}_p'$がβとθ_iによってどのように変るかを図4に示す．図4の$\hat{\varepsilon}_p'$が零になるθ_iと，図2，および図3のピークの位置は対応していることがわかる．

4．2　圧縮性プラズマスラブの場合

圧縮を考慮した場合，反射係数は式(32)で与えられるので，Ω_p，$k_0 d$，β_p，βを適当に選び，θ_iに対するRの数値計算例を図5～8に示す．$\theta_i \geq 0$　では冷プラズマの場合に示した$\hat{\varepsilon}_p' = 0$を満たすβとθ_iでやはりピークが存在する．さらに，前記のピーク以外に，β_pとβの値によっては，反射係数がほとんど1に近いピークも存在し，それ以外に小さなピークも存在する．また$\theta_i \leqq 0$では，$\beta \neq 0$の時には多数のピークが存在する．これらは$\beta = 0$では現われないし，また$u_0' = 0$でも現われないので，運動の影響がスラブ内に励起されるプラズマ波に現われた結果と推察できる．このことは，式(34)で電磁波成分のz方向の伝搬定数ξ_e'はβに無関係であるが，プラズマ波成分のξ_p'はβを含んでいて，しかもβ_p^2はかなり大きい値であるから，θ_iとβによりξ_p'は大きく変化するということからも理解できる．

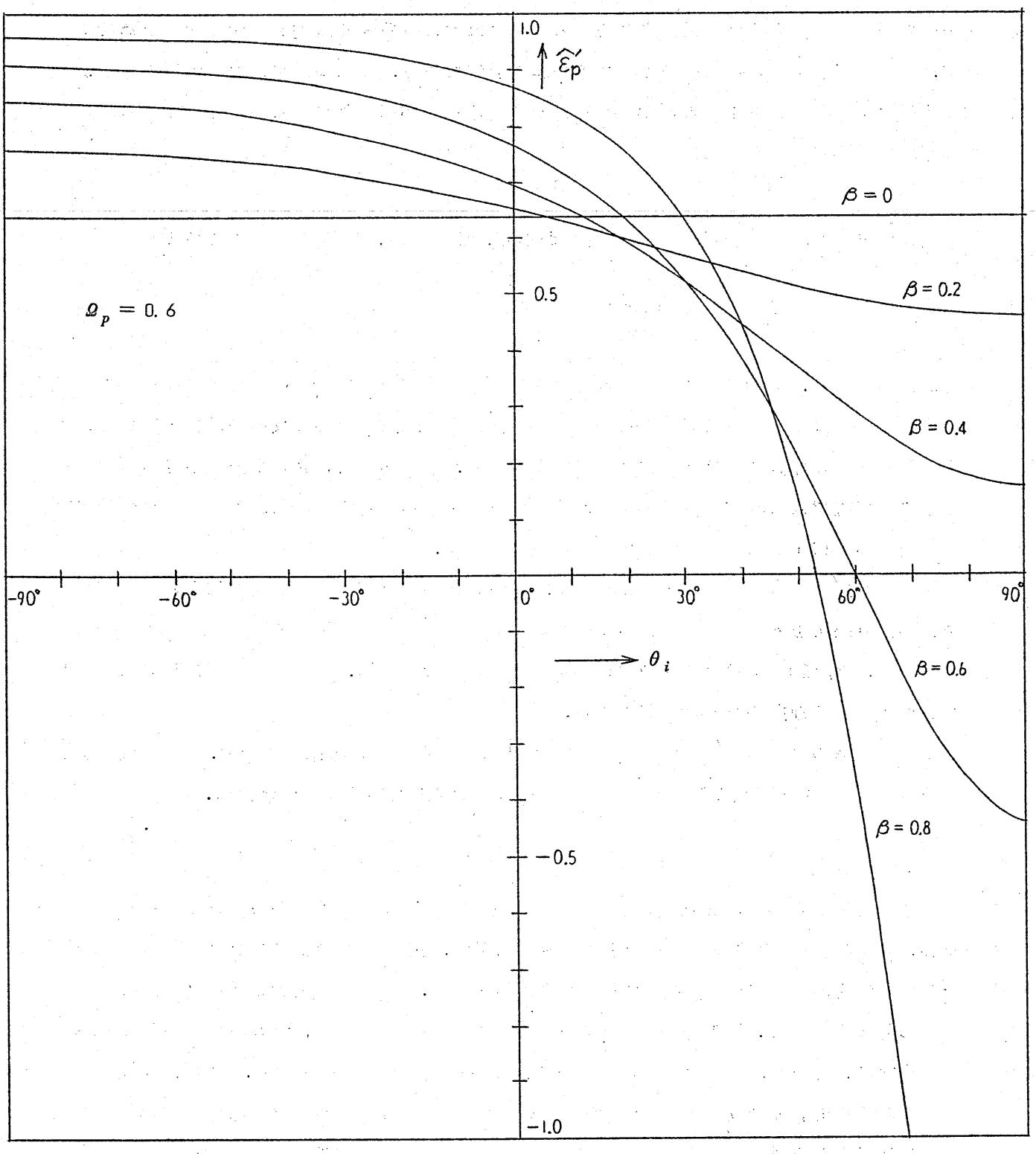


図 4 (a)　β と θ_i に対する $\hat{\varepsilon}_p'$ の変化（$\Omega_p = 0.6$）

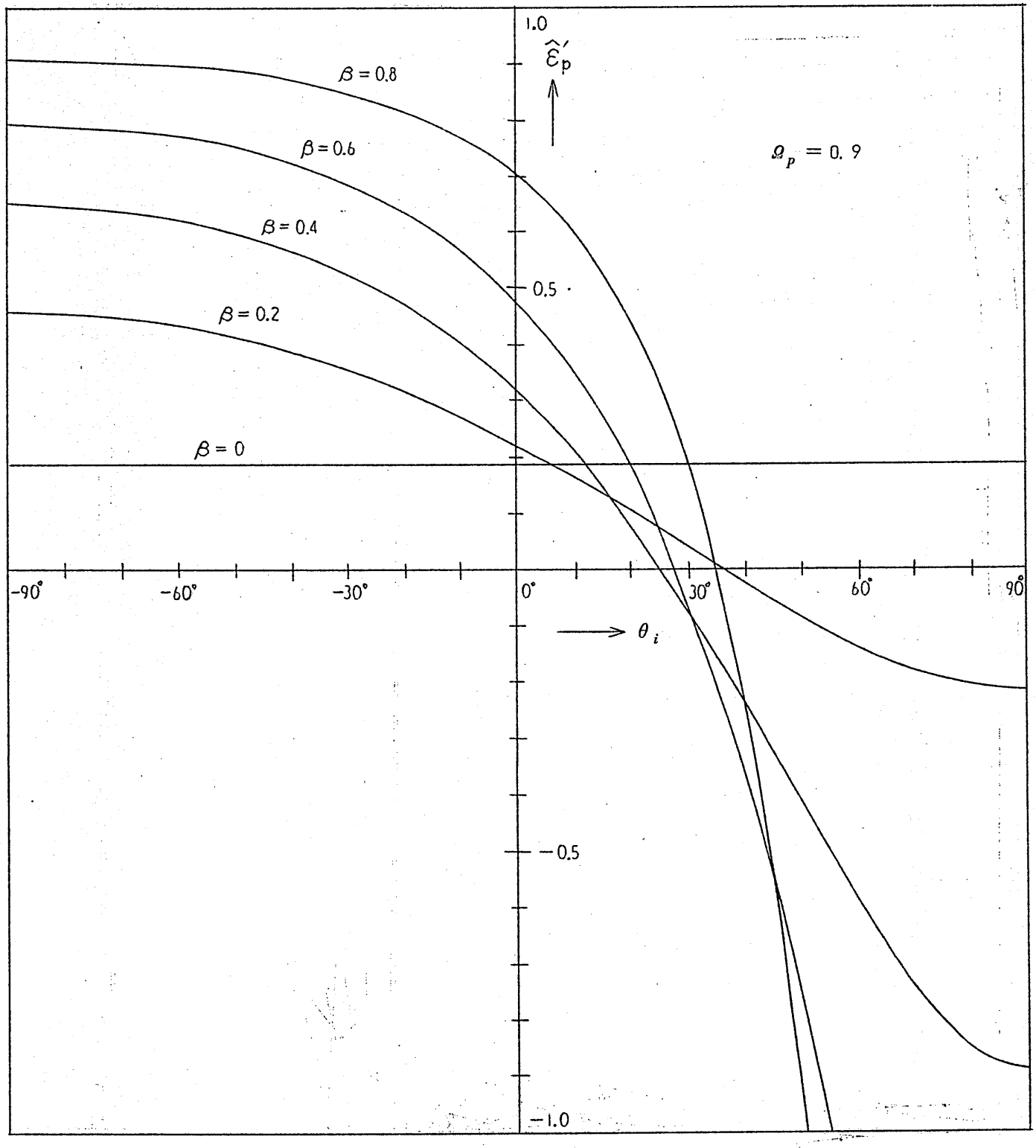


図 4 (b)　β と θ_i に対する $\hat{\varepsilon}'_p$ の変化（$\Omega_p = 0.9$）

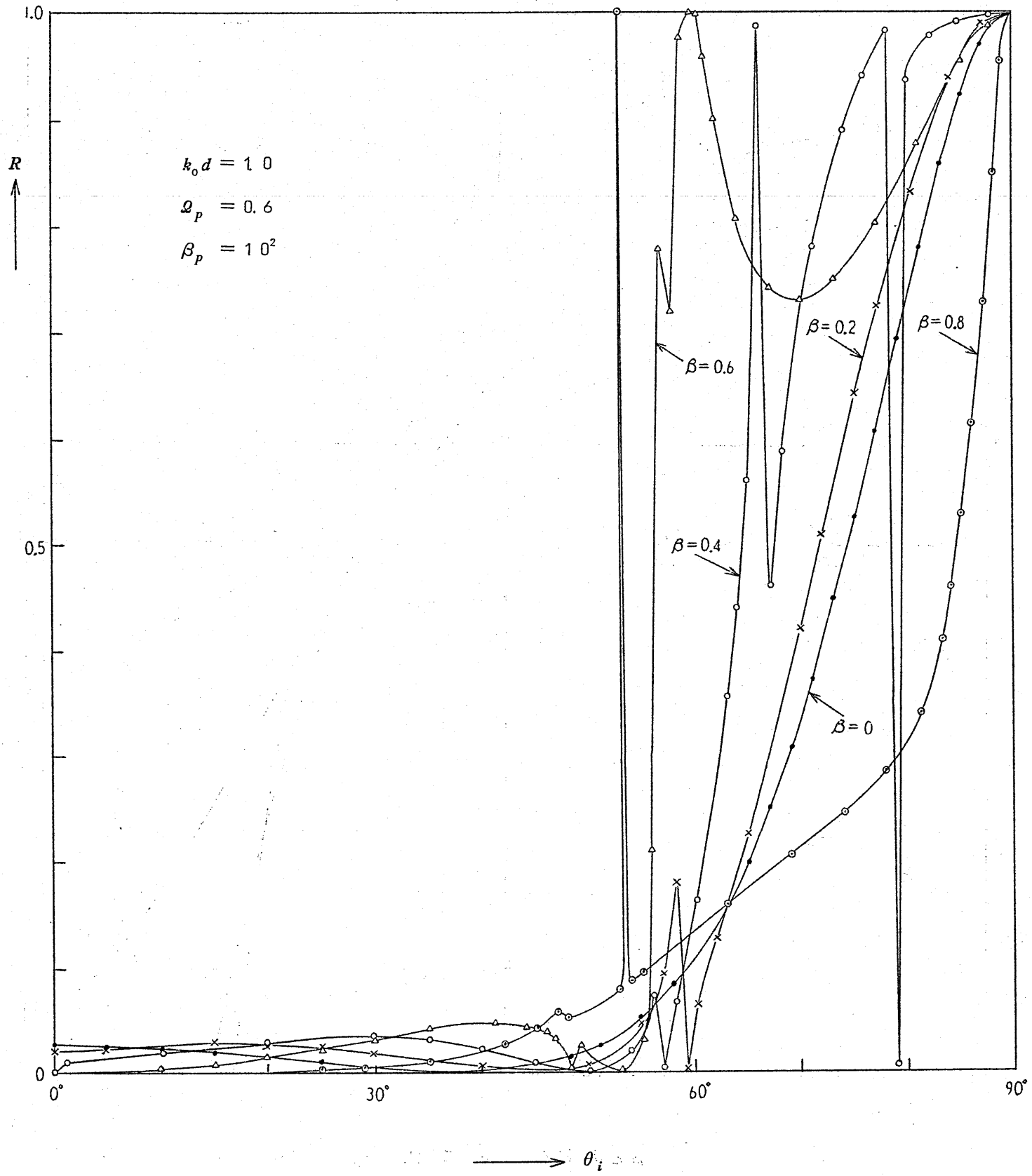


図 5 (a)　電力反射係数 R ($k_0 d = 1.0$, $\Omega_p = 0.6$, $\beta_p = 10^2$, $\theta_i \geqq 0$)

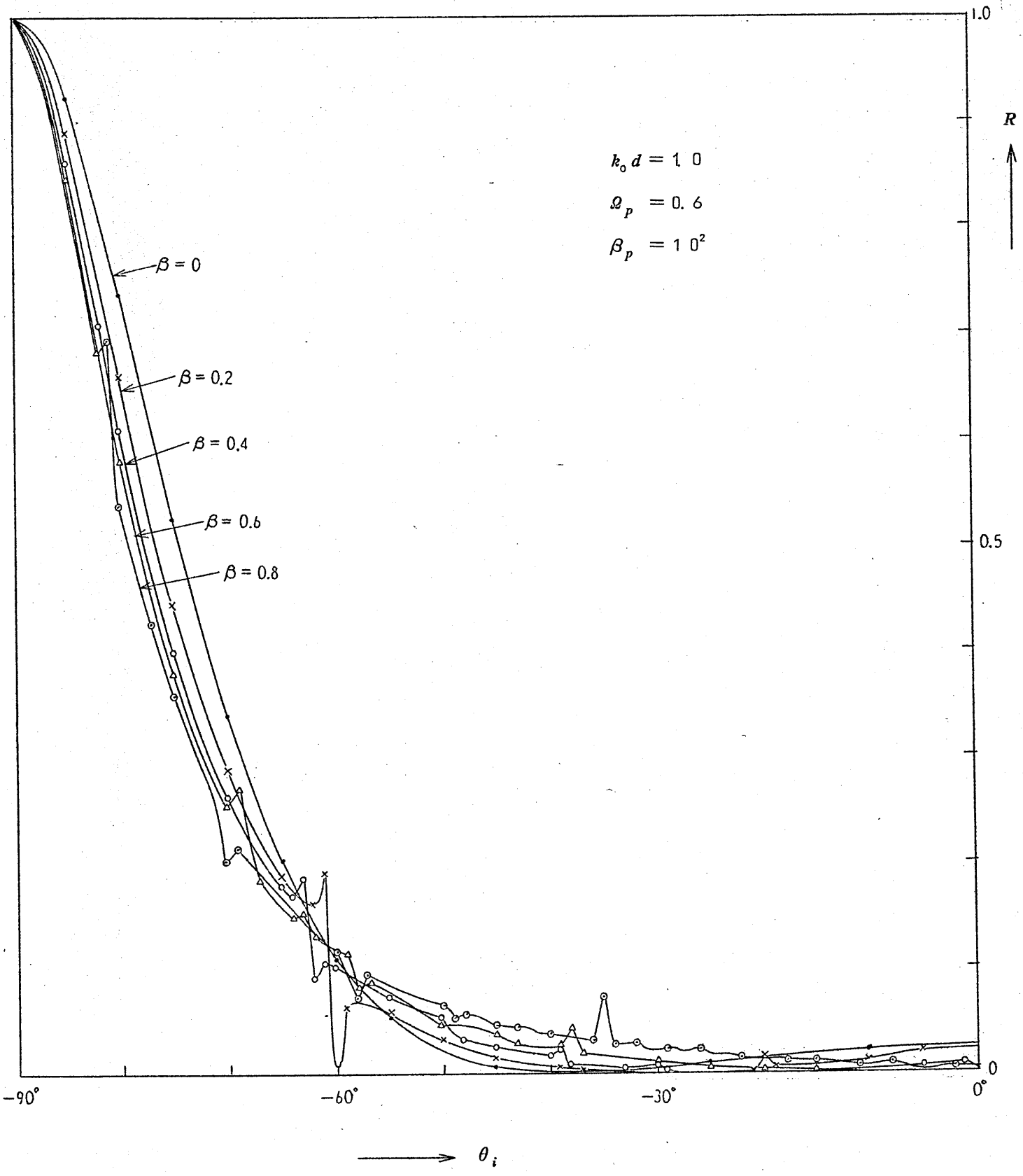


図 5 (b)　電力反射係数 R（$k_0 d = 1.0$，$\Omega_p = 0.6$，$\beta_p = 10^2$，$\theta_i \leqq 0$）

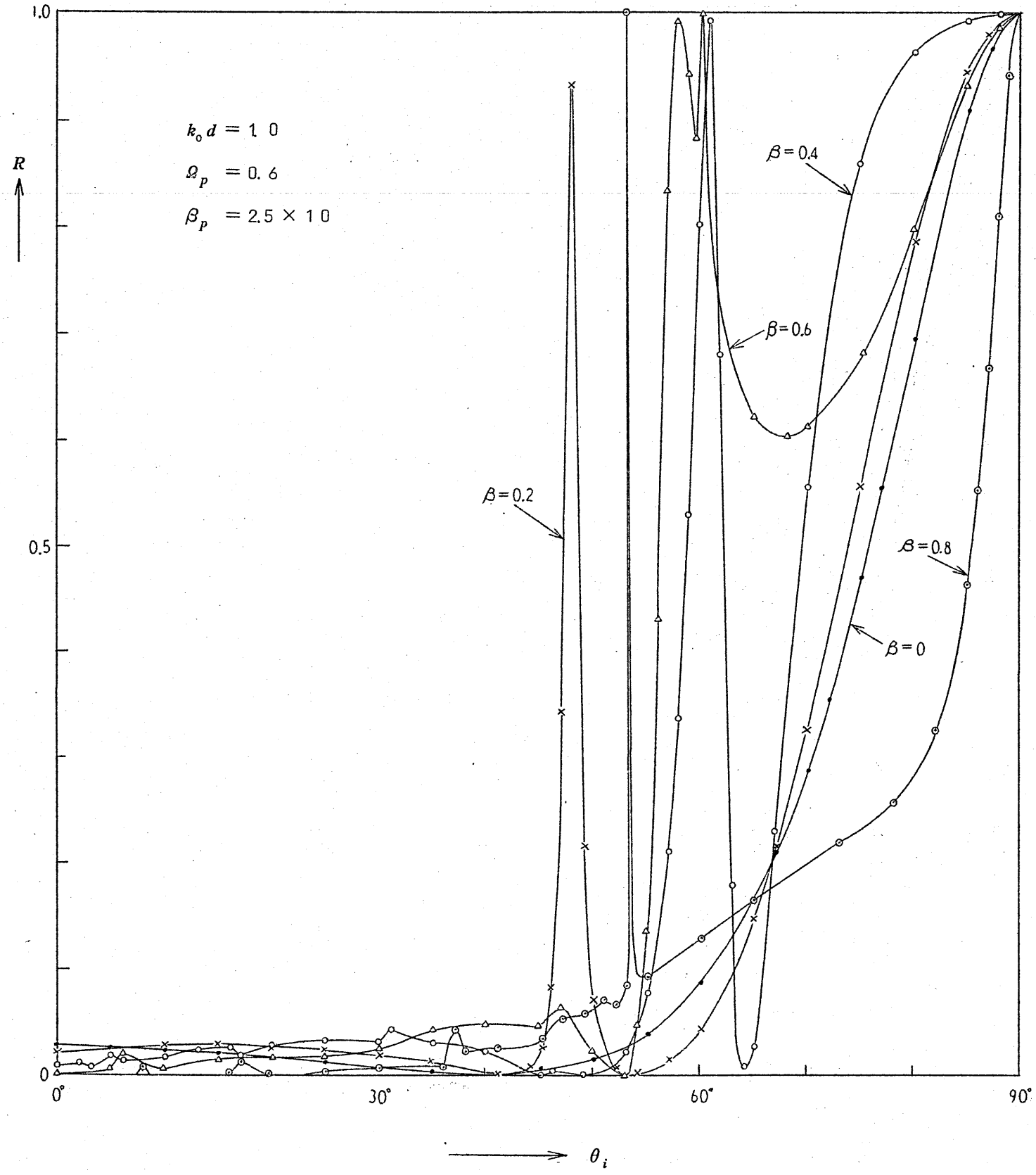


図 6 (a)　電力反射係数 R ($k_0 d = 1.0$, $\Omega_p = 0.6$, $\beta_p = 2.5 \times 10$, $\theta_i \geqq 0$)

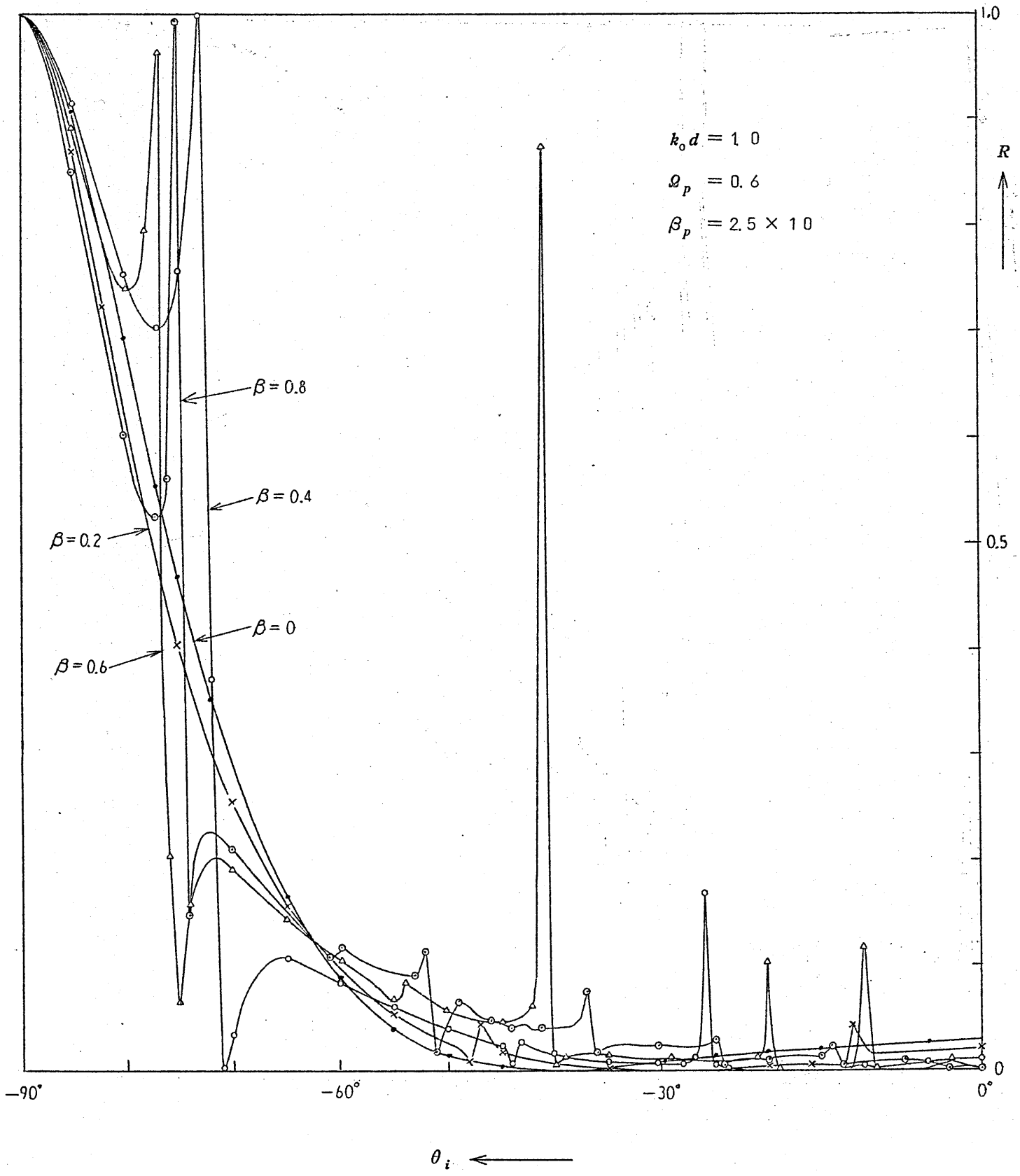


図 6 (b)　電力反射係数 R ($k_0 d = 1.0$, $\Omega_p = 0.6$, $\beta_p = 2.5 \times 10$, $\theta_i \leqq 0$)

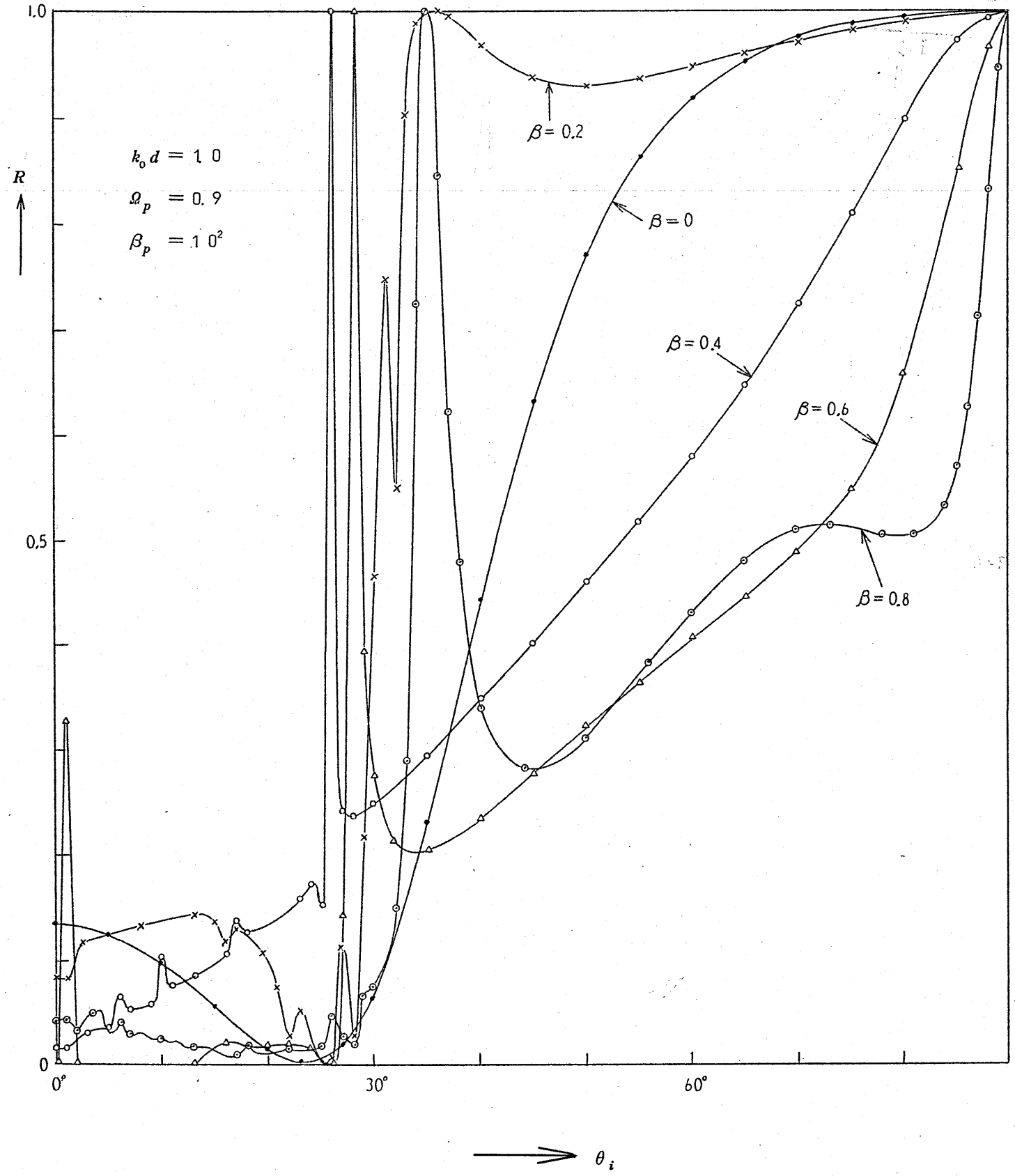


図 7 (a)　電力反射係数 R ($k_0 d = 1.0$, $\Omega_p = 0.9$, $\beta_p = 10^2$, $\theta_i \geqq 0$)

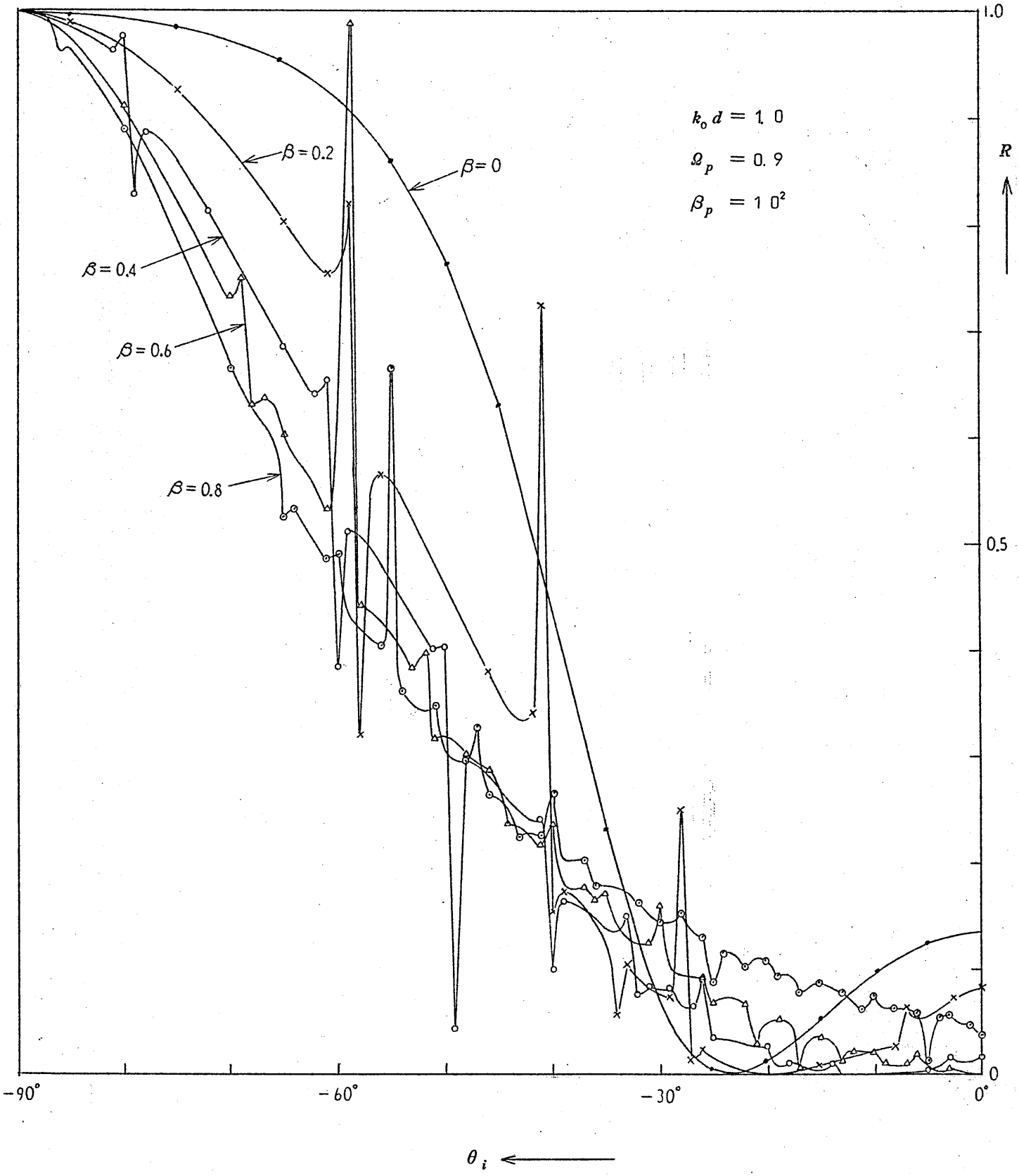


図 7 (b)　電力反射係数 R ($k_0 d = 1.0$, $\Omega_p = 0.9$, $\beta_p = 10^2$, $\theta_i \leqq 0$)

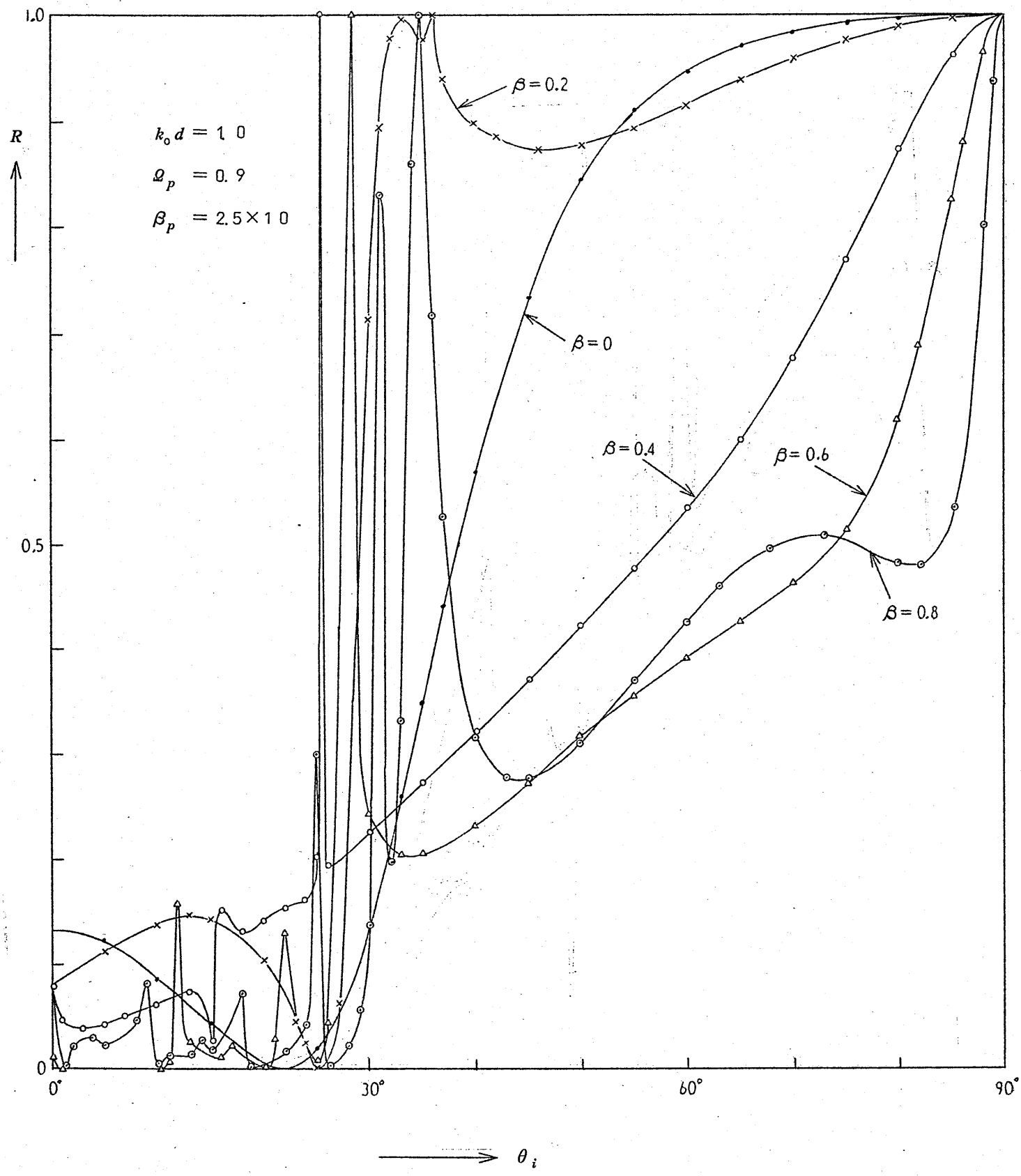


図 8 (a)　電力反射係数 R ($k_0 d = 1.0$, $\Omega_p = 0.9$, $\beta_p = 2.5 \times 10$, $\theta_i \geqq 0$)

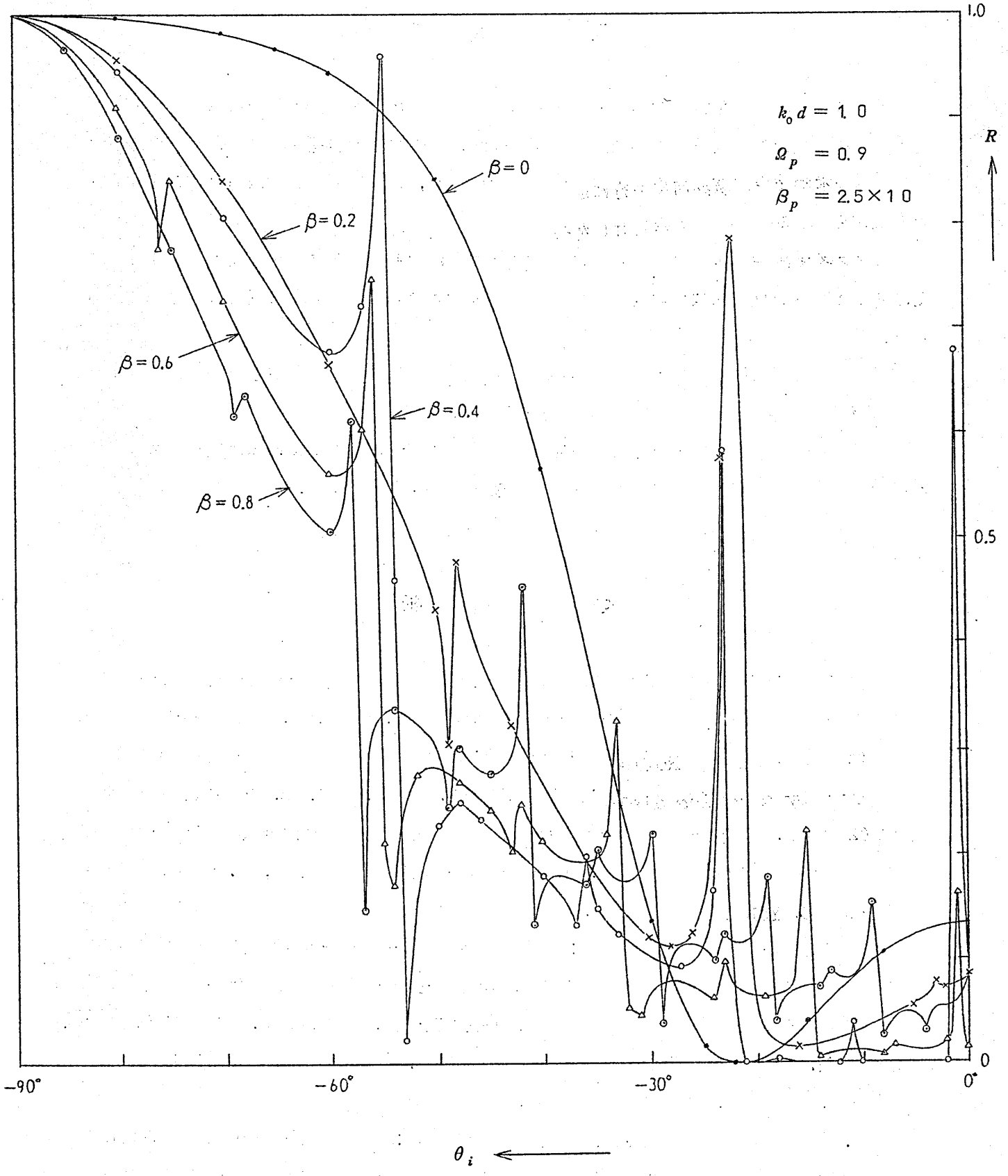


図 8 (b)　電力反射係数R（$k_0 d = 1.0$，$\Omega_p = 0.9$，$\beta_p = 2.5 \times 10$，$\theta_i \leqq 0$）

5. むすび

本稿では，境界面に平行に運動する圧縮性等方プラズマスラブに，入射面に垂直な磁界成分を有する平面電磁波が入射した場合の電力反射係数，および電力透過係数を求め，それらがプラズマスラブの運動によってどのような影響を受けるか，電力反射係数の数値計算例を示し検討した．

その結果，圧縮性を考慮することにより，スラブ内に励起されるプラズマ波が運動の影響を受けるので，電力反射係数の傾向は，冷プラズマスラブの場合とは著しく異なったものが得られた．

なお，数値計算には，大阪大学，ならびに京都大学計算センタの大型電子計算機 NEAC-2200，ならびにFACOM 230-60 を使用した．

終りに，日ごろご討論いただく板倉研究室の方々に深謝するとともに，本研究にご協力いただいた瀬戸祐一君（現在，新日本無線株式会社勤務）に謝意を表する．

文　献

(1) C. Yeh : “Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric slab”, Phys. Rev., 144, p. 665 (April 1966).

(2) C. Yeh : “Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium”, J. appl. Phys., 37, p. 3079 (July 1966).

(3) C. Yeh : “Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium. II. Parallel polarization”, J. appl. Phys., 38, p. 2871 (June 1967).

(4) B. R. Chawla and H. Unz : “Reflection and transmission of electromagnetic waves normally incident on a plasma slab moving uniformly along a magnetostatic field”, IEEE Trans. AP-17, p. 771 (Nov. 1969).

(5) M. H. Cohen : “Radiation in plasma I. Čerenkov effect”, Phys. Rev., 123, p. 711 (Aug. 1961).

(6) A. Hessel, N. Marcuvitz and J. Shmoys : “Scattering and guided waves at an interface between air and compressible plasma”, IRE Trans. AP-10, p. 48 (Jan. 1962).

(7) 大久保元晶：“圧縮性等方プラズマ層からの電磁波の透過”信学論（B），53-B，1，p. 6（昭45-01）．

(8) W. Pauli : “ Theory of relativity ”, Sec. 33, Pergamon Press, New York (1958).

(9) メラー :“ 相対性理論 ”, 永田, 伊藤訳, p. 38 および p. 53, みすず書房(昭34).

輻射科学研究会資料

運動異方性誘電体スラブ内の線波源からの放射

小嶋敏孝
東恒人
板倉清保
(大阪大学・工学部)

1971年4月30日

運動異方性誘電体スラブ内の線波源からの放射

1. まえがき

最近，運動媒質中の電磁気学的諸問題につき，多くの研究報告がなされ，種々の興味ある結果が示されている．

これらの問題のうちで，運動媒質と波源の相互作用の問題は，宇宙通信工学，再突入問題（re-entry problem）あるいは電波天文学等に関係する重要な問題の一つであろう．

運動する無限あるいは半無限媒質中の波源からの放射に関する研究はかなりの数にのぼるが，(1)～(7) スラブあるいはシースのような境界面に囲まれた媒質中の波源からの放射に関する報告は少ないようである．(8)～(11)

筆者等は，後者の問題に関して二，三報告してきたが，これらの放射問題の一環として，ここでは，運動する biaxial 誘電体スラブ内の線波源からの放射につき述べる．

ここで述べる内容はすでに発表したものをより一般的に拡張したもので，まず，運動 biaxial 媒質内での波源を含むMaxwell－Minkowski の方程式を導出し，波源として，線状磁流源および線状電流源の二通りの場合を取り扱い，各々の場合における遠距離放射電磁界および放射パターンを求め，それらに与える誘電体スラブの運動の影響について，数値計算例を掲げ検討する．また，運動プラズマスラブの場合への応用例も示す．

2. 基礎理論

まず，ここで考える問題の構成図を図１に示す．$x-z$ 面は完全導体で，その上に厚さ d の誘電体スラブ（領域 I，$d>y>0$ ）が x 方向に一様な速度 v で運動していて，領域 II（$y>d$ ）は自由空間とする．さらに，無限長線状波源が z 軸に平行に，誘電体内の $x=0$，$y=l$ に位置しているものと仮定する．

つぎに，各領域内での基礎方程式を導出しよう．誘電体スラブの誘電率をその静止系でつぎのように仮定する．

$$\bar{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{pmatrix} \tag{1}$$

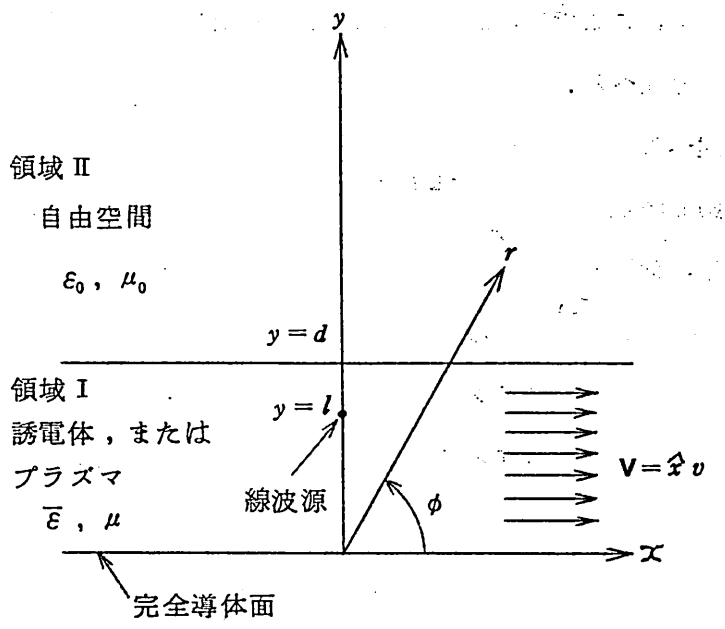


図１　問題の構成図

また，波源の時間変化を $e^{-i\omega t}$，電流源を $\mathbf{J}_e$，磁流源を $\mathbf{J}_m$ とする．

領域Ⅰ内で，波源の静止系でのMaxwellの方程式は次式で表わされる．

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = i\omega \mathbf{B}_1 - \mathbf{J}_m \qquad (2\cdot1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = -i\omega \mathbf{D}_1 + \mathbf{J}_e \qquad (2\cdot2)$$

また，運動媒質に対する構成関係式は

$$\mathbf{D}_1 + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}\times\mathbf{H}_1 = \bar{\varepsilon}\,(\mathbf{E}_1 + \mathbf{V}\times\mathbf{B}_1) \qquad (3\cdot1)$$

$$\mathbf{B}_1 - \frac{1}{c^2}\mathbf{V}\times\mathbf{E}_1 = \mu\,(\mathbf{H}_1 - \mathbf{V}\times\mathbf{D}_1) \qquad (3\cdot2)$$

ただし，μ は誘電体スラブの透磁率であり，c は自由空間中の光速である．

また，領域Ⅱ でMaxwellの方程式の共変性に注目すると，つぎのように書ける．

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_2 \qquad (4\cdot1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_2 \qquad (4\cdot2)$$

ただし，ε_0，μ_0 は自由空間の誘電率と透磁率であり，式(2)，(3)および(4)で領域Ⅰおよび Ⅱ内の電磁界ベクトルを区別するために添字1，2を付記した．

まず，領域Ⅰ内の波動方程式を求めるため，式(3・1)および(3・2)から $\mathbf{B}_1$，$\mathbf{D}_1$ を $\mathbf{E}_1$，$\mathbf{H}_1$ の項で表わすとつぎのようになる．

$$\mathbf{B}_1 = \bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}_1 + \bar{\tau}\cdot\mathbf{E}_1 \qquad (5\cdot1)$$

$$\mathbf{D}_1 = \bar{\kappa} \cdot \mathbf{E}_1 + \bar{\chi} \cdot \mathbf{H}_1 \qquad (5\cdot2)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu a_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu a_y \end{pmatrix}, \qquad \bar{\kappa} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y a_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z a_z \end{pmatrix} \\ \bar{\chi} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_y \\ 0 & \Omega_z & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_z \\ 0 & -\Omega_y & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (6)$$

および

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{1-\beta^2}{1-n_i^2\,\beta^2}, \qquad \Omega_i = \frac{n_i^2-1}{1-n_i^2\,\beta^2} \cdot \frac{\beta}{c} \\ n_i^2 &= c^2\,\varepsilon_i\,\mu, \qquad \beta = \frac{v}{c} \end{aligned}\right\} (7)$$

ここで，$i = y, z$ をとるものとする．

式(5・1)および(5・2)を式(2・1)および(2・2)に代入し，整理すると，つぎのような運動 biaxial 媒質に関する Maxwell－Minkowski の方程式を得る．

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 - i\omega\bar{\tau} \cdot \mathbf{E}_1 = i\omega\bar{\alpha} \cdot \mathbf{H}_1 - \mathbf{J}_m \qquad (8\cdot1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 + i\omega\bar{\chi} \cdot \mathbf{H}_1 = -i\omega\bar{\kappa} \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{J}_e \qquad (8\cdot2)$$

式(8・2)で $\mathbf{J}_e = 0$ と置けば，波源が磁流源の場合となり，

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{i\omega}\,\bar{\kappa}^{-1}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}_1) - \bar{\kappa}^{-1}\cdot(\bar{\chi}\cdot\mathbf{H}_1) \qquad (9)$$

を，(8・1)に代入して整理すると，つぎの波動方程式を得る．

$$\nabla\times\{\bar{\kappa}^{-1}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}_1) + i\omega\bar{\kappa}^{-1}\cdot(\bar{\chi}\cdot\mathbf{H}_1)\}$$
$$- i\omega\bar{\tau}\cdot\{\bar{\kappa}^{-1}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}_1) + i\omega\bar{\kappa}^{-1}\cdot(\bar{\chi}\cdot\mathbf{H}_1)\}$$
$$- \omega^2\,\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}_1 = i\omega\mathbf{J}_m \qquad (10)$$

ただし，

$$\bar{\kappa}^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y^{-1}\,a_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^{-1}\,a_z^{-1} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

つぎに，式(8・1)で $\mathbf{J}_m = 0$ と置けば，電流源の場合となり，

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{i\omega}\,\bar{\alpha}^{-1}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}_1) - \bar{\alpha}^{-1}\cdot(\bar{\tau}\cdot\mathbf{E}_1) \qquad (12)$$

を式(8・2)に代入して整理すると，つぎの波動方程式を得る．

$$\nabla\times\{\bar{\alpha}^{-1}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}_1) - i\omega\bar{\alpha}^{-1}\cdot(\bar{\tau}\cdot\mathbf{E}_1)\}$$
$$+ i\omega\bar{\chi}\cdot\{\bar{\alpha}^{-1}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}_1) - i\omega\bar{\alpha}^{-1}\cdot(\bar{\tau}\cdot\mathbf{E}_1)\}$$

$$-\omega^2 \bar{\pi} \cdot \mathbf{E}_1 = i\omega \mathbf{J}_e \qquad (13)$$

ただし，

$$\bar{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{-1} a_x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} a_y^{-1} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

以上で，運動 biaxial 媒質内での Maxwell－Minkowski の方程式を導出した．

以下の節では，磁流源の場合と電流源の場合を分けて考えてゆく．

3. 磁流源からの放射

3.1 遠距離放射電磁界

磁流源を次式のように，z 方向に一様な無限長の線状磁流源と仮定する．

$$\mathbf{J}_m = \hat{z}\, E_0\, \delta(x)\, \delta(y - l) \qquad (15)$$

ここで，$\hat{z}$ は z 方向の単位ベクトル，δ は Dirac の delta 関数であり，E_0 は励振の強さを表わす定数である．

式（15）の仮定より，$\partial / \partial z = 0$，$H_{1x} = H_{1y} = E_{1z} = 0$ だから，式(10)を成分に分けると H_{1z} に関して，つぎの偏微分方程式を得る．

$$\left[\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y a_y} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\omega\Omega_y \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \varepsilon_x \mu a_y \right] H_{1z}(x, y)$$

$$= -i\omega\varepsilon_x E_0\, \delta(x)\, \delta(y - l) \qquad (16)$$

また，他の成分E_{1x}，E_{1y}は式(16)の解を式(9)に代入することにより求められる．

つぎに，領域Ⅱでは，式(4)からH_{2z}につき，つぎの偏微分方程式を得る．

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_0^2\right]H_{2z}(x,\ y)=0 \tag{17}$$

ただし，

$$k_0^2=\varepsilon_0\ \mu_0\ \omega^2 \tag{18}$$

他の成分は，E_{2x}，E_{2y}は式(4・2)から求まる．

まず，式(16)および(17)を境界条件のもとに解くために，$H_{1z}(x,\ y)$および$H_{2z}(x,\ y)$をつぎのようなFourier積分で表わす．

$$H_{\nu z}(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int q_\nu(\zeta,\ y)\ e^{i\zeta x}\,dx,\quad(\nu=1,\ 2) \tag{19}$$

したがって，式(16)，(17)に式(19)を用いると，q_νはつぎのような微分方程式の解として与えられる．

$$\left[\frac{d^2}{dy^2}+q_\nu^2\right]q_\nu(\zeta,\ y)=\begin{cases}-i\ \omega\varepsilon_x\ E_0\,\delta(y-l), & (\nu=1)\\ 0 & (\nu=2)\end{cases} \tag{20}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}q_1^2&=\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y\ \ a_y}\left[-(\zeta+\omega\Omega_y)^2+\omega^2\ \varepsilon_y\ \mu\ a_y^2\right]\\ q_2^2&=k_0^2-\zeta^2\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式(20)の解はそれぞれつぎのように表わされる．

$$q_1 = \begin{cases} c_1 e^{iq_1 y} + c_2 e^{-iq_1 y}, & l \leqq y \leqq d \\ c_3 e^{iq_1 y} + c_4 e^{-iq_1 y}, & 0 \leqq y \leqq l \end{cases} \tag{22}$$

$$q_2 = c_5 e^{iq_2 y}, \quad y \geqq d \tag{23}$$

ただし，$c_1 \sim c_5$は未定定数である．

これらの未定定数を決定するために，$y=0$，$y=d$での境界条件，および$y=l$での波源に関する境界条件を用いると，けっきょく自由空間中のH_{2r}はつぎの積分で与えられる．

$$H_{2r}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_x \cos(q_1 l) E_0}{\triangle_m(\zeta)} \times e^{iq_2(y-d)+i\zeta x} \cdot d\zeta \tag{24}$$

ここで

$$\triangle_m(\zeta) = q_2 \varepsilon_x \cos(q_1 d) - i q_1 \varepsilon_0 \sin(q_1 d) \tag{25}$$

図1に示すような極座標(r, ϕ)を導入し，式(24)の積分を鞍部点法で近似計算すれば，[9] 波源から十分遠方の放射界はつぎのように求まる．ただし$\mu = \mu_0$と仮定する．

$$H_{2r}(r, \phi) = -\frac{1}{2\pi Z_0} \cdot \frac{D}{A - iB} \cdot E_0 \left(\frac{-i 2\pi k_0}{r}\right)^{1/2}$$

$$\times e^{i k_0 (r - d \sin\phi)} \tag{26}$$

ここで
$$\left.\begin{aligned} A &= n_x^2 \sin\phi \cdot \cos(k_0 d F) \\ B &= F \cdot \sin(k_0 d F) \\ D &= n_x^2 \cos(k_0 l F) \cdot \sin\phi \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

さらに,

$$\left.\begin{aligned} n_x^2 &= \varepsilon_x / \varepsilon_0 \\ F &= \frac{n_x}{n_y} \gamma \left\{ n_y^2 (1 - \beta \cos\phi)^2 - (\beta - \cos\phi)^2 \right\}^{1/2} \\ \gamma &= (1 - \beta^2)^{-1/2} \\ Z_0 &= (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

また電界はつぎのように与えられる.

$$E_{2\phi}(r, \phi) = Z_0 H_{2x}(r, \phi) \tag{29}$$

3.2 放射パターン

ポインティングベクトルは r 方向成分のみで，その時間平均を $\overline{S}_r$ とすれば,

$$\overline{S}_r = \frac{1}{2} Z_0 \left| H_{2r}(r, \phi) \right|^2 \tag{30}$$

で与えられる.

また，放射パターンを与える関数$G(\phi)$を次式で定義する．

$$G(\phi)=\frac{4\pi r}{\varepsilon_0 \omega E_0^2}\cdot \overline{S}_r \qquad (31)$$

式(30)から$\overline{S}_r$を求め，式(31)に用いると，$G(\phi)$は最終的につぎのように表わされる．

$$G(\phi)=\frac{D^2}{A^2+B^2} \qquad (32)$$

波源が線状磁流源の場合は，式(32)から$G(\phi)$はε_x，ε_yに依存するが，ε_rには無関係になる．また，式(32)で$k_0 l=0$と仮定すれば，磁流源が導体面に密着した場合になり，すでに求めた場合に一致する．[11]

$G(\phi)$の数値例として，波源が導体面の近傍にあるとき，誘電体スラブの中心にあるとき，および自由空間との境界面の近傍にあるときの三通りにつき，n_x，n_yを適当に選び，計算した結果を図2および図3に示す．

まず，図2では，$n_x=1.1$，$n_y=2.0$に選び，$k_0 d=5.0$に対し，$k_0 l=0.5$，2.5，4.95の三通りの場合を示している．図2(a)の波源が導体面の近傍にあれば($k_0 l=0.5$)，放射パターンはβの増加に伴い遅動方向に寄ってくる．すなわち，最大放射方向が遅動方向に傾く．また，$\beta=0.4$の場合は$\phi\simeq 5^\circ$の方向にかなり強い放射が存在する．

一方，波源がスラブの中央にある場合($k_0 l=2.5$)は，βの増加に伴い，一時遅動と逆方向にパターンは寄るが，その後遅動方向に傾いてくる．またβがかなり大きくなれば($\beta=0.8$)，ビームは二つに分かれる．さらに，

図2（c）の波源が自由空間との境界面の近傍（$k_0 l = 4.95$）にある時は，βの増加に伴い，運動方向への放射が生じ，大きくなる．また，βがかなり大きい場合（$\beta = 0.6$，0.8）は運動と逆の方向への放射も生ずる．

図3は，図2のn_xとn_yの値を交換して計算したものである．図3（a）の$k_0 l = 0.5$では，βの増加に伴い，運動方向の放射は増加し，逆方向のそれは減少するので図2（a）と同じ傾向を示している．また，図3（b）の波源がスラブの中央に位置するときは，図3（a）と大体同じような傾向を示すが，垂直方向の放射が大きく増加する．一方，図3（c）の$k_0 l = 4.95$の場合は，図3（a）および図3（b）の傾向とは異なり，βの増加に伴い，放射パターンは運動と逆方向に傾いてくる．

3.3 プラズマへの応用

ここでは，uniaxial プラズマスラブと等方性プラズマスラブへの応用例を考える．ただし，ここで考えるプラズマは，損失，熱運動を無視し，電子の運動のみを考慮した均質な冷プラズマである．

（i） uniaxial プラズマの場合

まず，運動方向に無限大静磁界が印加されていると仮定すると，その誘電率はつぎのように与えられる．(9)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\Omega_p^2}{\gamma^2 (1 - \beta \cos\phi)^2} \right] \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = \varepsilon_0 \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

ただし，$\Omega_p = \omega_p / \omega$であり，また，$\omega_p$はプラズマ角周波数である．

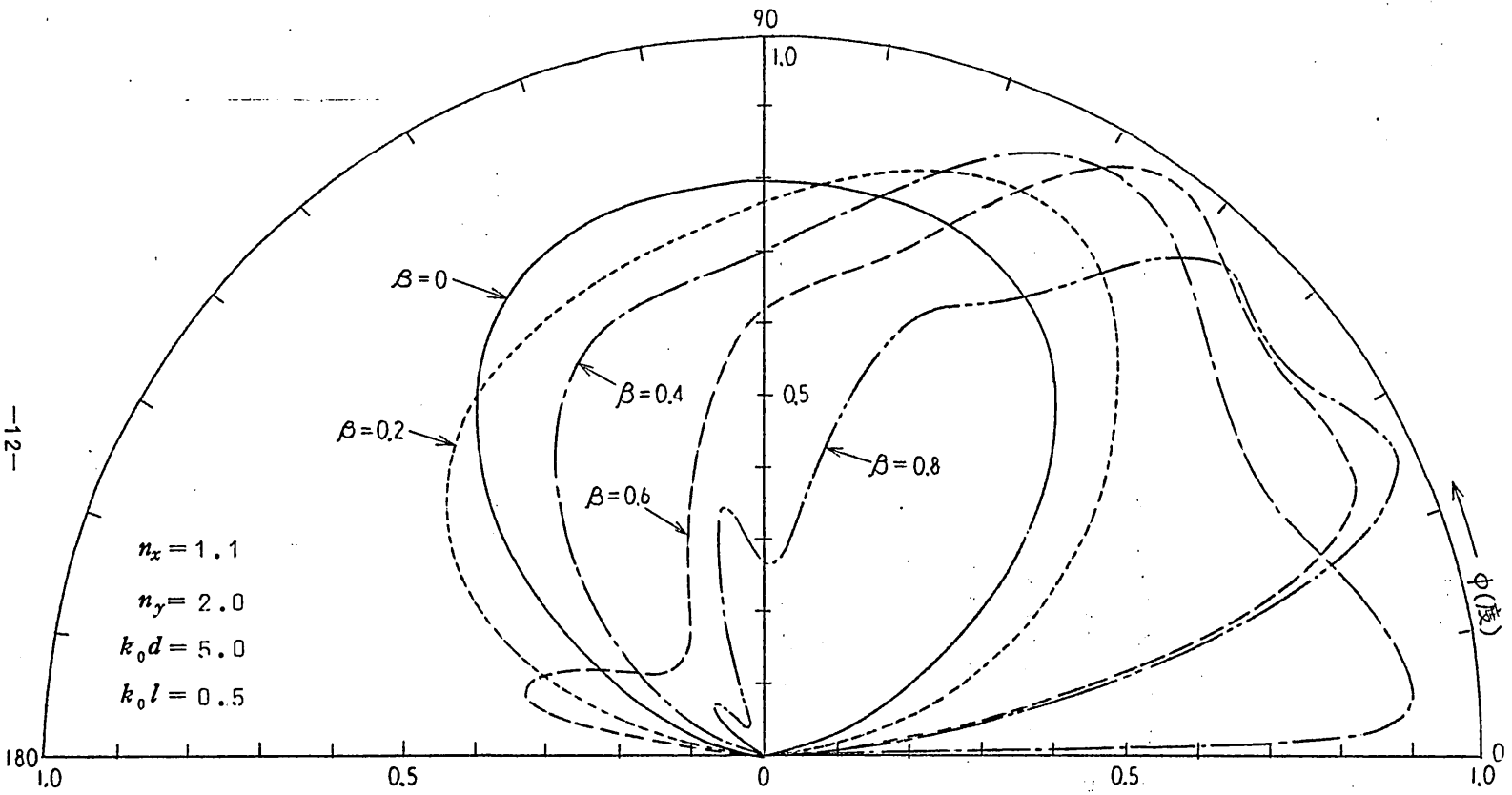


図２（a）　放射パターン（ $n_x=1.1$，$n_y=2.0$，$k_0d=5.0$，$k_0l=0.5$ ）

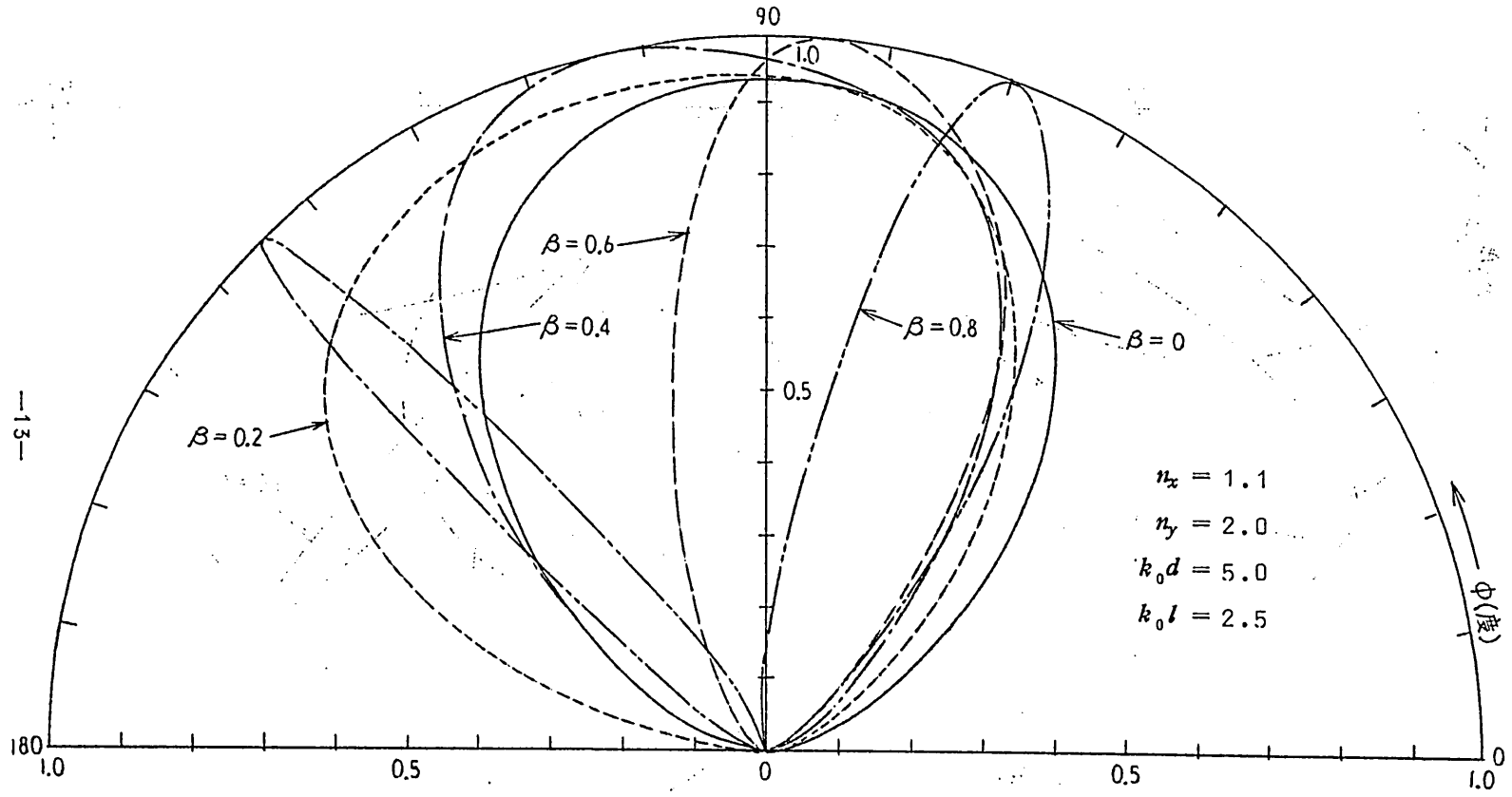


図2（b）　放射パターン（ $n_x=1.1$， $n_y=2.0$， $k_0 d=5.0$， $k_0 l=2.5$ ）

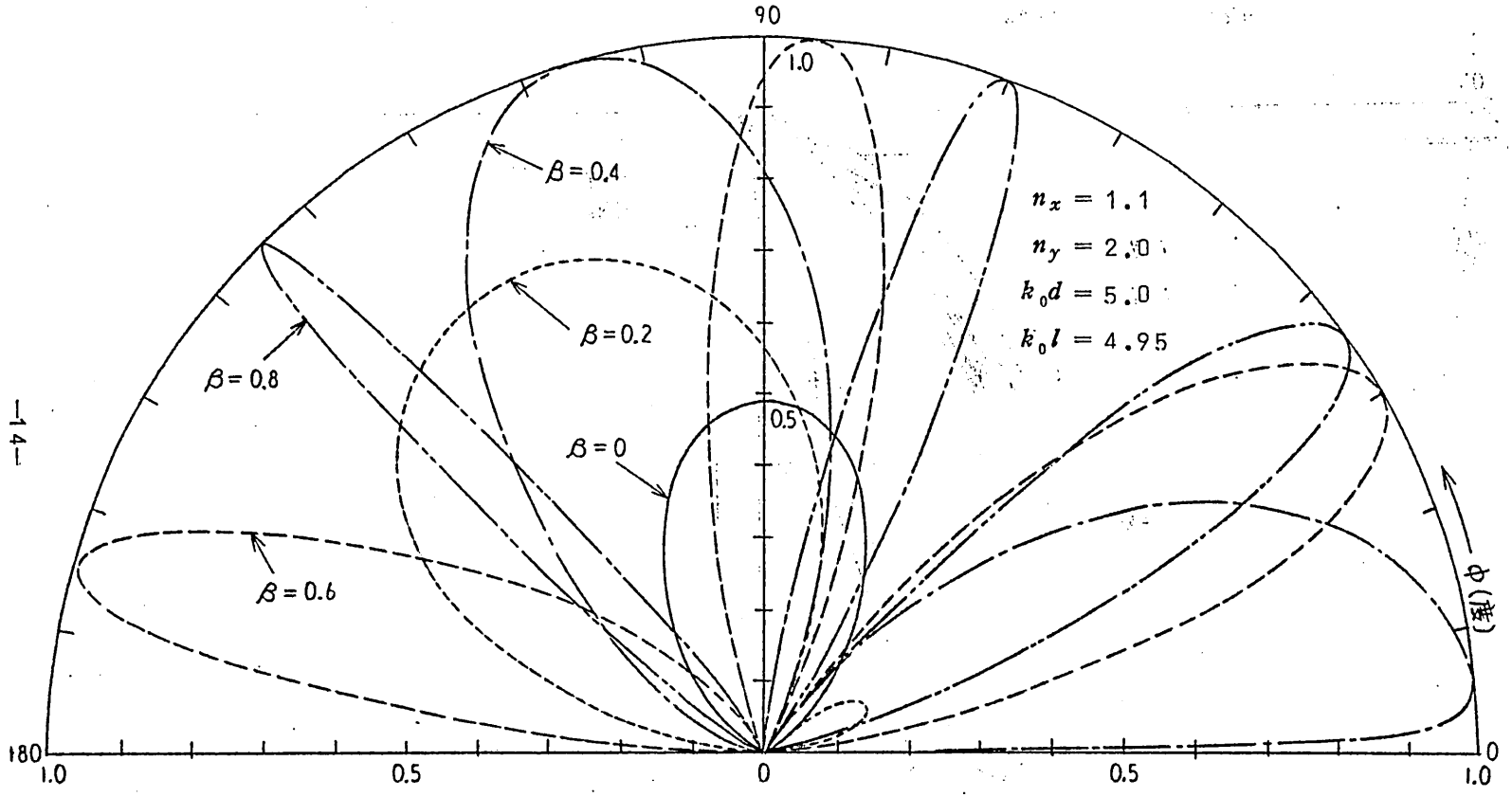


図２（c）　放射パターン（ n_x＝1.1，n_y＝2.0，$k_0 d$＝5.0，$k_0 l$＝4.95 ）

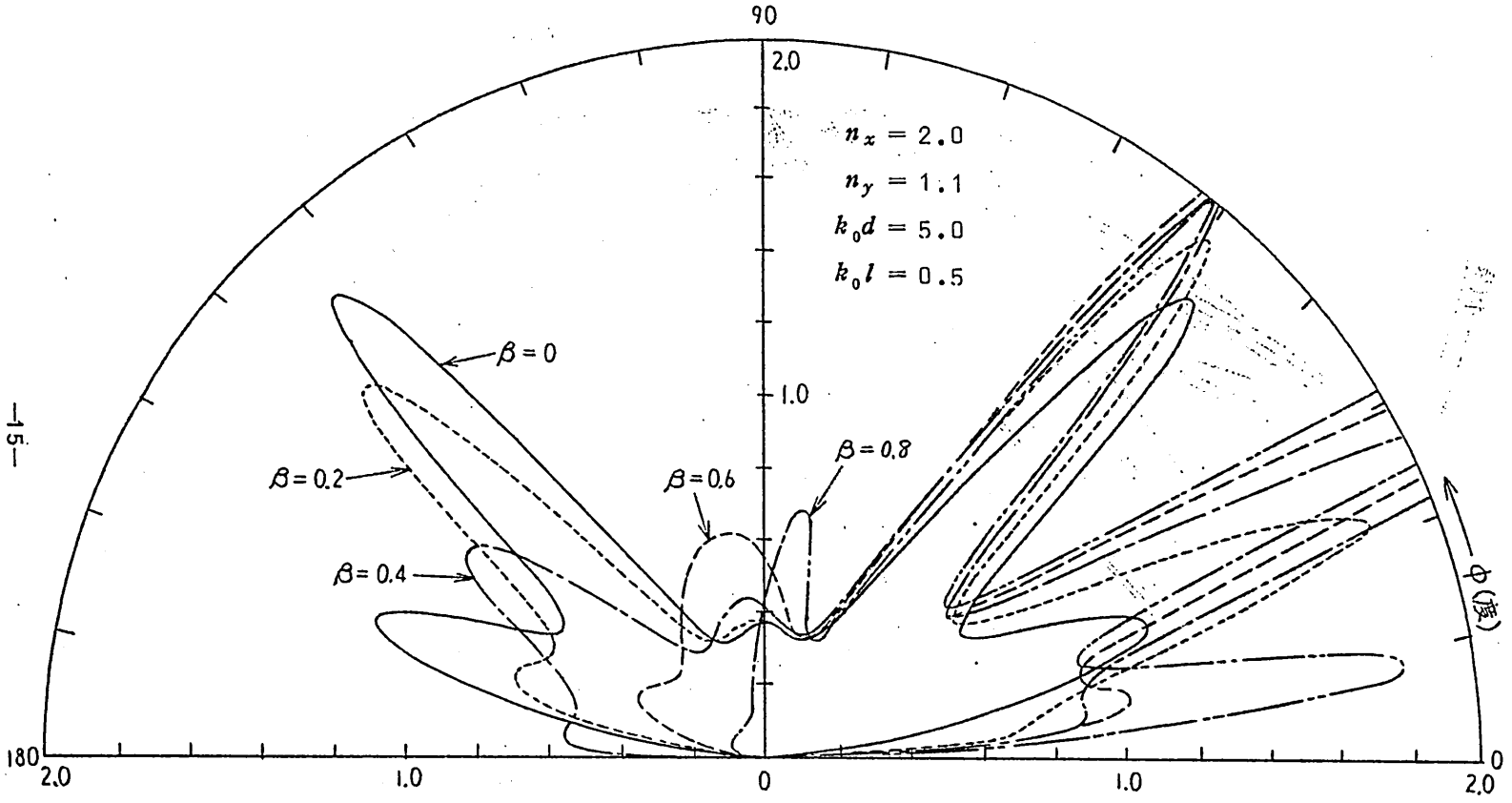


図３（a）　放射パターン（ $n_x=2.0$， $n_y=1.1$， $k_0 d=5.0$， $k_0 l=0.5$ ）

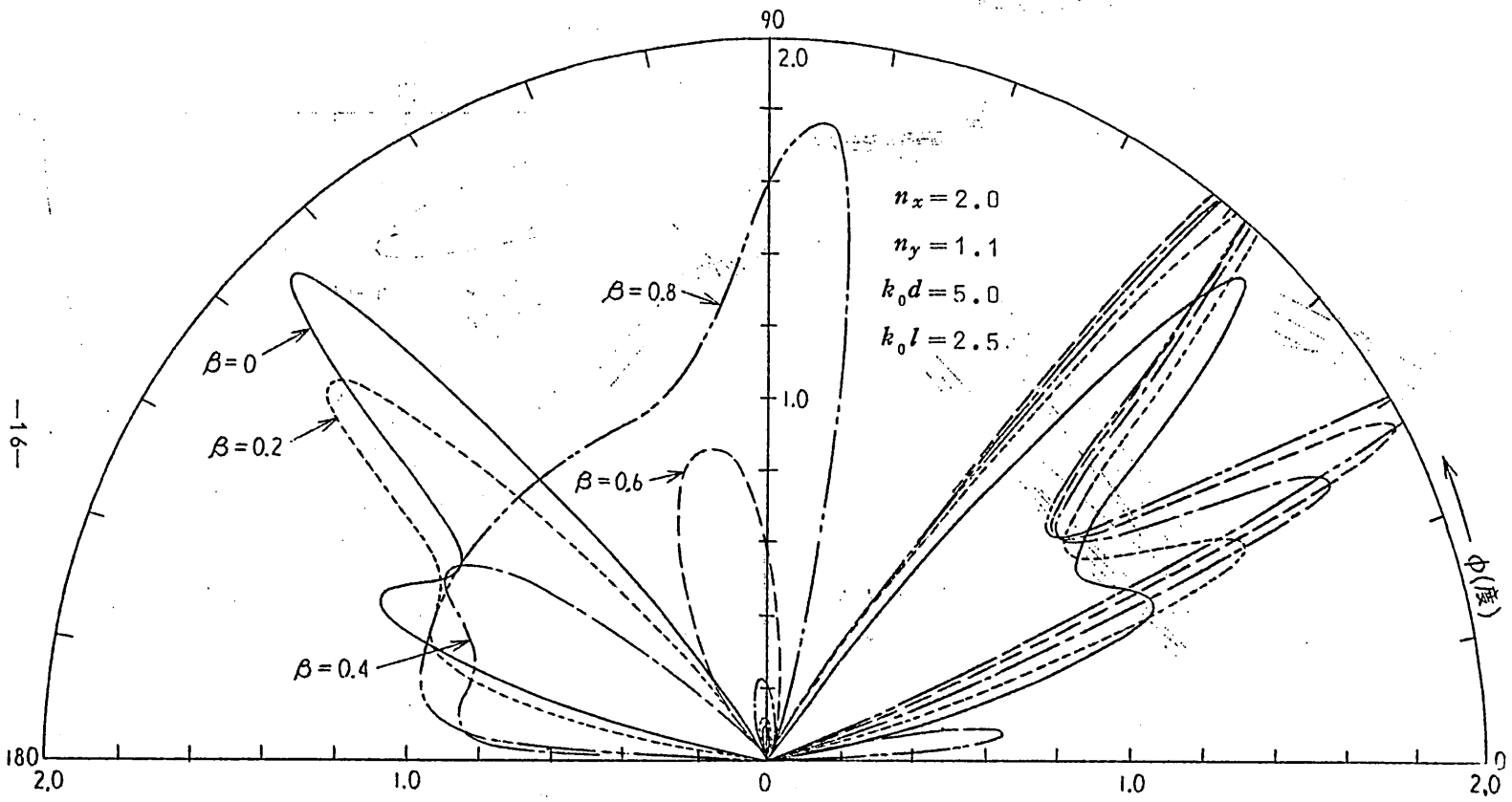


図3（b）　放射パターン（ $n_x = 2.0$， $n_y = 1.1$， $k_0 d = 5.0$， $k_0 l = 2.5$ ）

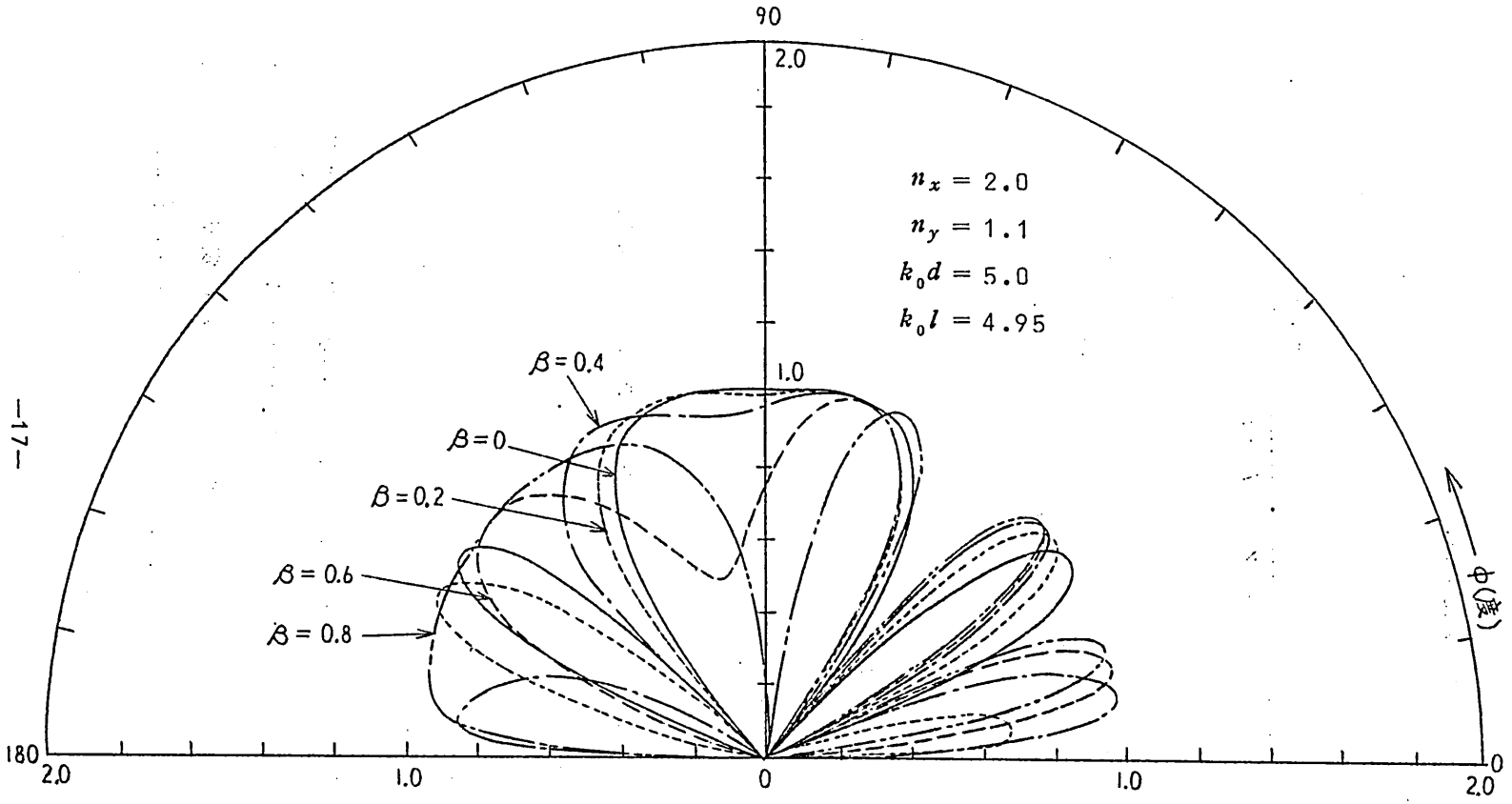


図3（c） 放射パターン（ $n_x = 2.0$， $n_y = 1.1$， $k_0 d = 5.0$， $k_0 l = 4.95$ ）

式(33)を前節の結果に用い，整理すると$H_{2z}(r, \phi)$はつぎのように書ける．

$$H_{2z}(r, \phi) = -\frac{E_0}{2\pi Z_0} \cdot \frac{H}{I - iK} \left(\frac{-i2\pi k_0}{r}\right)^{1/2} e^{ik_0(r - d\sin\phi)} \tag{34}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} H &= \cos(k_0 l \times \sin\phi) \\ I &= \cos(k_0 d \times \sin\phi) \\ K &= \sin(k_0 d \times \sin\phi)/x \\ x &= \left\{1 - \frac{\Omega_p^2}{\gamma^2(1-\beta\cos\phi)^2}\right\}^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$E_{2\phi}(r, \phi)$は式(34)を(29)に用いて求めることができるので，式(31)で定義された$G(\phi)$は次式で与えられる．

$$G(\phi) = \frac{H^2}{I^2 + K^2} \tag{36}$$

いま，$k_0 l = 0$とおくと，式(36)はすでに求めたものに一致する．[9]

式(36)の数値計算例を図4に示した．図4(a)はすでに求めた磁流源が導体面に密着した場合と同じ傾向を示しているが，波源がスラブの中央に存在する図4(b)の場合では，βの増加に対して運動方向と垂直な方向への放

射の増加が著しい．また，$k_0 l = 4.95$ の場合は，運動方向と逆の方向への放射はほとんど変らず，垂直方向（$\phi = 70^\circ \sim 130^\circ$）への放射は$\beta$の増加に伴い減少し，運動方向への放射は増加する．これは図4(a)および図4(b)の場合とかなり異なった傾向を示している．

(ii) 等方性プラズマの場合

外部静磁界が零の場合，等方性プラズマとして扱えるので，誘電率はつぎのように表わせる．

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\Omega_p^2}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \phi)^2} \right] = \varepsilon_p \qquad (37)$$

したがって，式(37)を用いると遠距離放射電磁界はつぎのようになる．

$$H_{2z} (r, \phi) = - \frac{E_0}{2\pi Z_0} \frac{L}{M - iN} \left(\frac{-i 2\pi k_0}{r} \right)^{1/2} e^{i k_0 (r - d \sin \phi)} \qquad (38)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} L &= x^2 \cos (k_0 l \tau) \cdot \sin \phi \\ M &= x^2 \sin \phi \cdot \cos (k_0 d \tau) \\ N &= \tau \sin (k_0 d \tau) \\ \tau &= (\sin^2 \phi - \Omega_p^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

また電界は式(29)から求まるので，$G(\phi)$はつぎのように与えられる．

$$G(\phi)=\frac{L^2}{M^2+N^2} \tag{40}$$

式(40)で$k_0 l=0$とすると，すでに求めたもの[9]に一致する．放射パターンの数値例は図5に示しておく．

波源の位置によって，放射パターンが受ける遅動の影響はそれほど現れない．傾向は，すでに求めた波源が導体面に密着した場合と[9]同様である．

4. 電流源からの放射

ここでは，前節の磁流源の代りに，線状電流源が誘電体スラブ中に置かれた場合を考える．前節と同様にz方向に一様な無限長の線電流源と仮定すると，次式で与えられる．

$$\mathbf{J}_e=\hat{z}\cdot J_0\,\delta(x)\,\delta(y-l) \tag{41}$$

ただし，J_0は励振の強さを表わす定数である．

式(41)を式(13)に代入し，$\partial/\partial z=0$，$E_{1x}=E_{1y}=H_{1z}=0$なることを考慮すれば，E_{1z}に対し，つぎの偏微分方程式を得る．

$$\left[\frac{1}{\mu a_z}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\omega\Omega_z\right)^2+\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\omega^2\varepsilon_z a_z\right]E_{1z}(x,y)$$

$$=-i\omega J_0\,\delta(x)\,\delta(y-l) \tag{42}$$

また，領域ⅡでE_{2z}に対してつぎの偏微分方程式を得る．

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_0^2\right]E_{2z}(x,\ y)=0 \qquad (43)$$

また，H_{1x}，H_{1y} は式（12）より，H_{2x}，H_{2y} は式（4・1）で与えられる．

前節と同様に，E_{1z}，E_{2z} をFourier積分で表わし，境界条件を用いれば，自由空間中の E_{2z} はつぎのような積分で与えられる．

$$E_{2z}(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\omega\mu\mu_0 J_0\sin(q_e l)}{\Delta_e(\zeta)} \times e^{iq_2(y-d)+i\zeta x}\cdot d\zeta \qquad (44)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\Delta_e(\zeta)&=q_e\mu_0\cos(q_e d)-iq_2\mu\sin(q_e d)\\ q_e^2&=-\frac{1}{a_z}(\zeta+\omega\Omega_z)^2+\omega^2\varepsilon_z\mu a_z\end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

式（44）を極座表（r，ϕ）で表わし，さらに鞍部点法で波源から十分遠方の E_{2z} を求めるとつぎのようになる．

$$E_{2z}(r,\ \phi)=\frac{iZ_0J_0}{2\pi}\ \frac{P}{Q-iR}\left(\frac{-i2\pi k_0}{r}\right)^{1/2} e^{ik_0(r-d\sin\phi)} \qquad (46)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} P &= \sin(k_0 l S)\cdot\sin\phi \\ Q &= S\cos(k_0 d S) \\ R &= \sin\phi\cdot\sin(k_0 d S) \\ S &= \gamma\{n_z^2(1-\beta\cos\phi)^2-(\cos\phi-\beta)^2\}^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

および$\mu=\mu_0$と仮定した．

また，磁界成分$H_{2\phi}(r,\ \phi)$は

$$H_{2\phi}(r,\ \phi)=-\frac{1}{Z_0}E_{2z}(r,\ \phi) \quad (48)$$

で与えられるので，放射パターンは次式で定義される．

$$G(\phi)=\frac{4\pi r}{\omega\mu_0 J_0^2}\bar{S}_r \quad (49)$$

ただし，$\bar{S}_r$は時間平均をとったポインティングベクトルのr方向成分であり，次式で与えられる．

$$\bar{S}_r=\frac{1}{2Z_0}|E_{2z}(r,\ \phi)|^2 \quad (50)$$

式(46)，(50)から，式(49)はつぎのようにあらわせる．

$$G(\phi)=\frac{P^2}{Q^2+R^2} \quad (51)$$

式(51)はε_zのみに依存するので，異方性の影響を受けない．したがって，領域Ⅰがε_z，μ_0なる誘電率と透磁率の等方性誘電体スラブの場合と同一の放射パターンを得ている．

$G(\phi)$の数値例として，$n_z=1.1$，$k_0 d=5.0$に選び，$k_0 l=1.0$，2.5，4.95に対する計算結果を図6に示す．図6(a)は$k_0 l=1.0$の場合であるが，運動と逆の方向への放射エネルギーは運動の影響を著るしく受けるが，同方向へのそれはβによってほとんど変らない．また，$k_0 l=2.5$では，やはり運動と逆の方向への放射エネルギーは同方向のそれと比べてより運動の影響を受けるが，$k_0 l=1.0$の場合と異なる点は，βの増加に伴い，放射パターンは運動方向に寄る．さらに，図6(c)の$k_0 l=4.95$の場合は，運動方向に逆の方向への放射の傾向は図6(a)および(b)と同様であるが，運動方向への放射はβの増加に伴い大きく増加する．

つぎに，プラズマへの応用を考える．まず，3・3の(i)で扱ったようなuniaxialプラズマの場合は，放射パターンはε_x，ε_yに依存しないので，けっきょく領域Ⅰは自由空間の場合と同様になる．したがって，ここでは3・3の(ii)と同様な場合を考える．すなわち，領域Ⅰが等方性プラズマスラブの場合はその誘電率は式(37)のように表わせるので，式(46)に(37)を用いるとE_{2z}は次式のようになる．

$$E_{2z}(r,\phi)=-\frac{Z_0 J_0}{2\pi}\cdot\frac{T}{U-iW}\left(\frac{-i2\pi k_0}{r}\right)^{1/2} e^{ik_0(r-d\sin\phi)} \tag{52}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} T &= \sin(k_0 d\tau)\cdot\sin\phi \\ U &= \tau\cdot\cos(k_0 d\tau) \\ W &= \sin\phi\cdot\sin(k_0 d\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

式(52)はβの項を全然含まない．すなわち，プラズマスラブが静止している場合の式になっている．したがって，いまの場合には放射パターンはプラズマスラブの運動の影響を全く受けない．

5. むすび

本稿では，一般的な場合として，運動するbiaxial 誘電体スラブ中の線磁流源，および線電流源からの放射の問題を論ずるために，運動biaxial 媒質に関するMaxwell－Minkowskiの方程式を導出し，さらに，線磁流源からの放射に関し，遠距離放射電磁界，放射パターンを求め，それらに及ぼす誘電体スラブの運動の影響を検討した．また，応用例として，運動方向へ無限大静磁界が印加されたuniaxialプラズマ，および等方性プラズマスラブの場合を取り扱った．

つぎに，波源が線電流源の場合について，遠距離放射電磁界，および放射パターンを求め同様の検討を加えた．

なお，数値計算には大阪大学計算センタ，および京都大学計算センタの大型電子計算機ＮＥＡＣ－２２００，およびＦＡＣＯＭ２３０－６０を使用した．

終りに，日ごろご討論いただく板倉研究室の方々に深謝する．

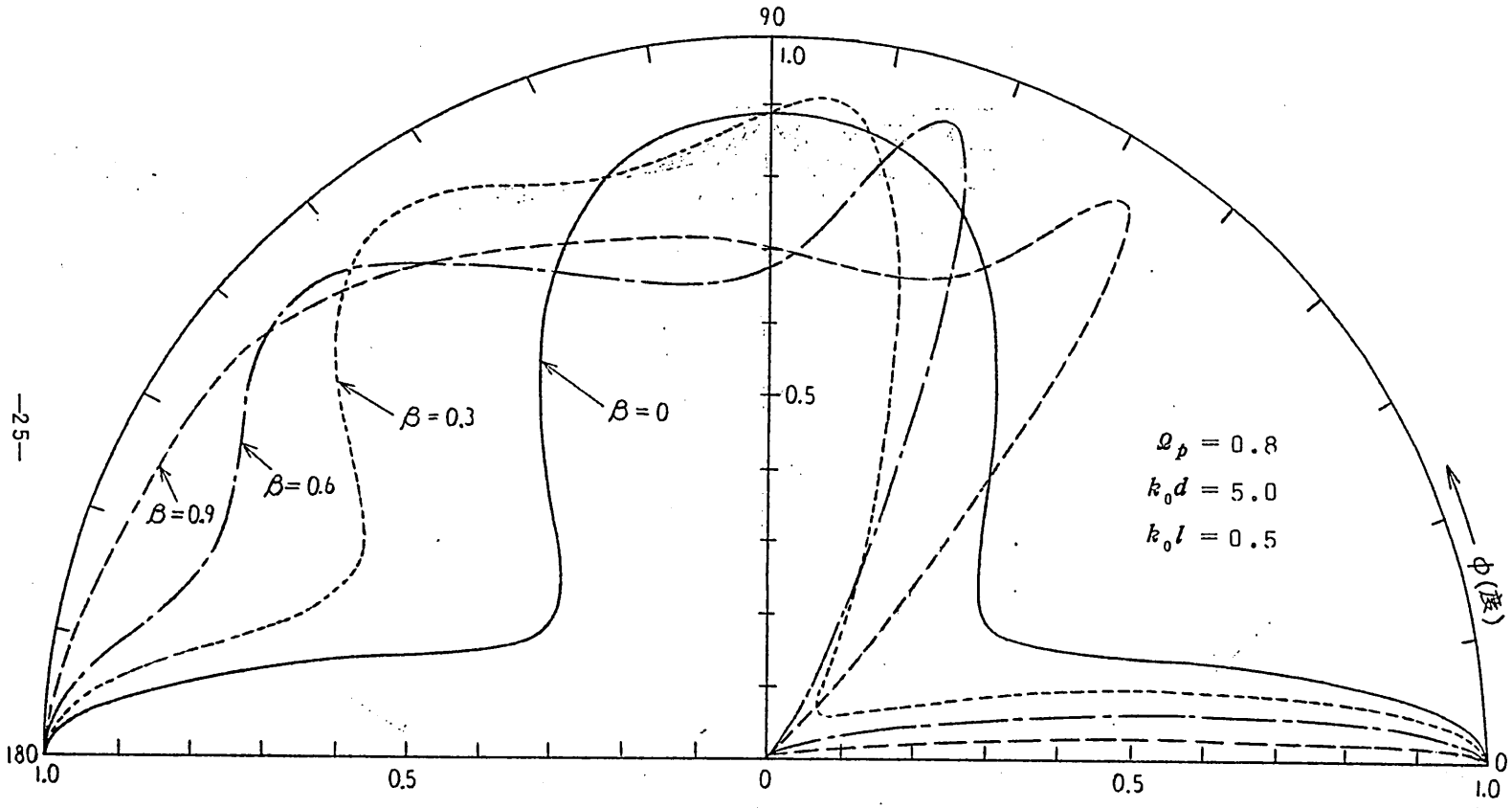


図4（a）　放射パターン（ $\Omega_p=0.8$，$k_0 d=5.0$，$k_0 l=0.5$ ）

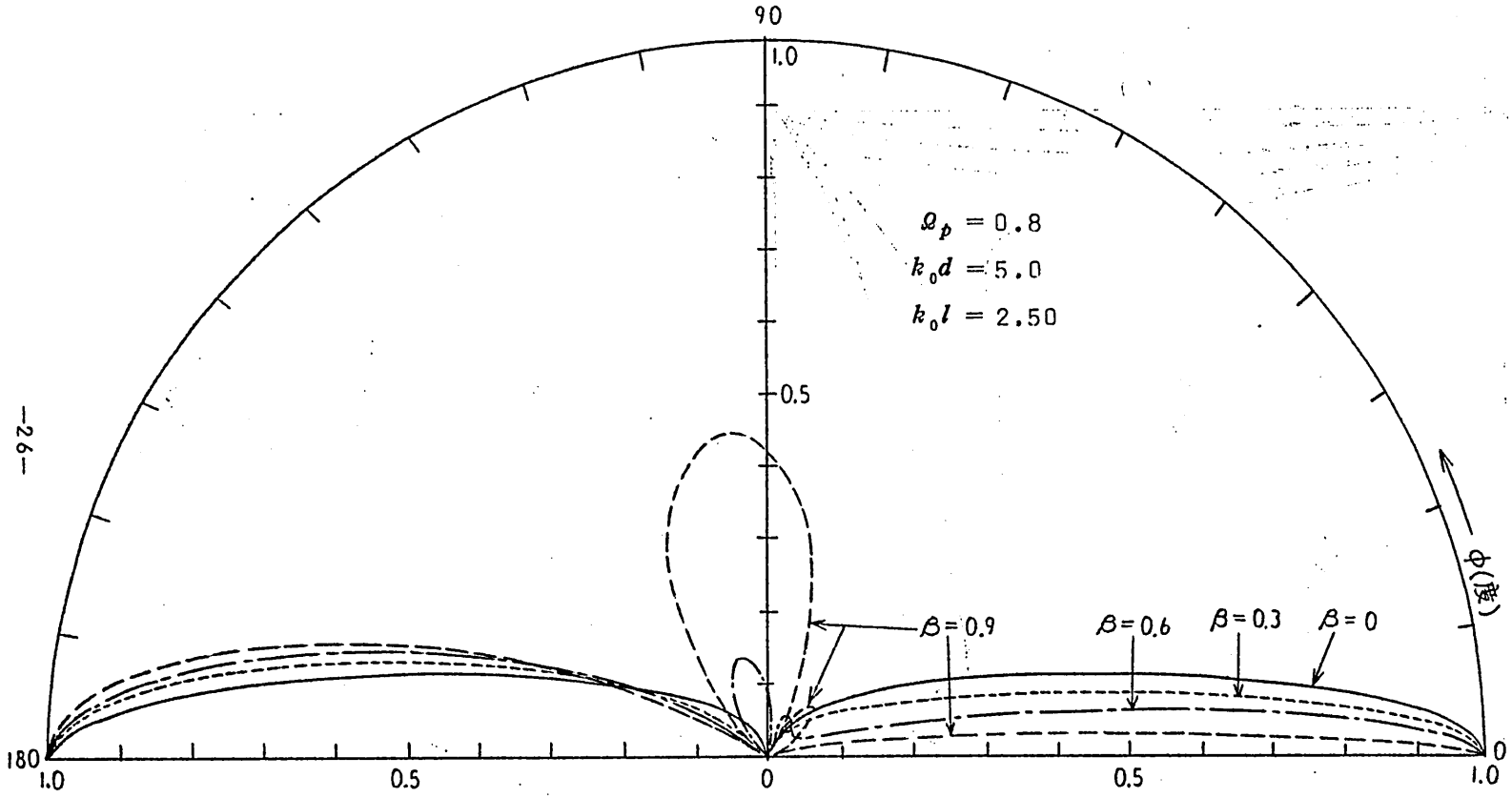


図4（b） 放射パターン（$\Omega_p = 0.8$, $k_0 d = 5.0$, $k_0 l = 2.5$）

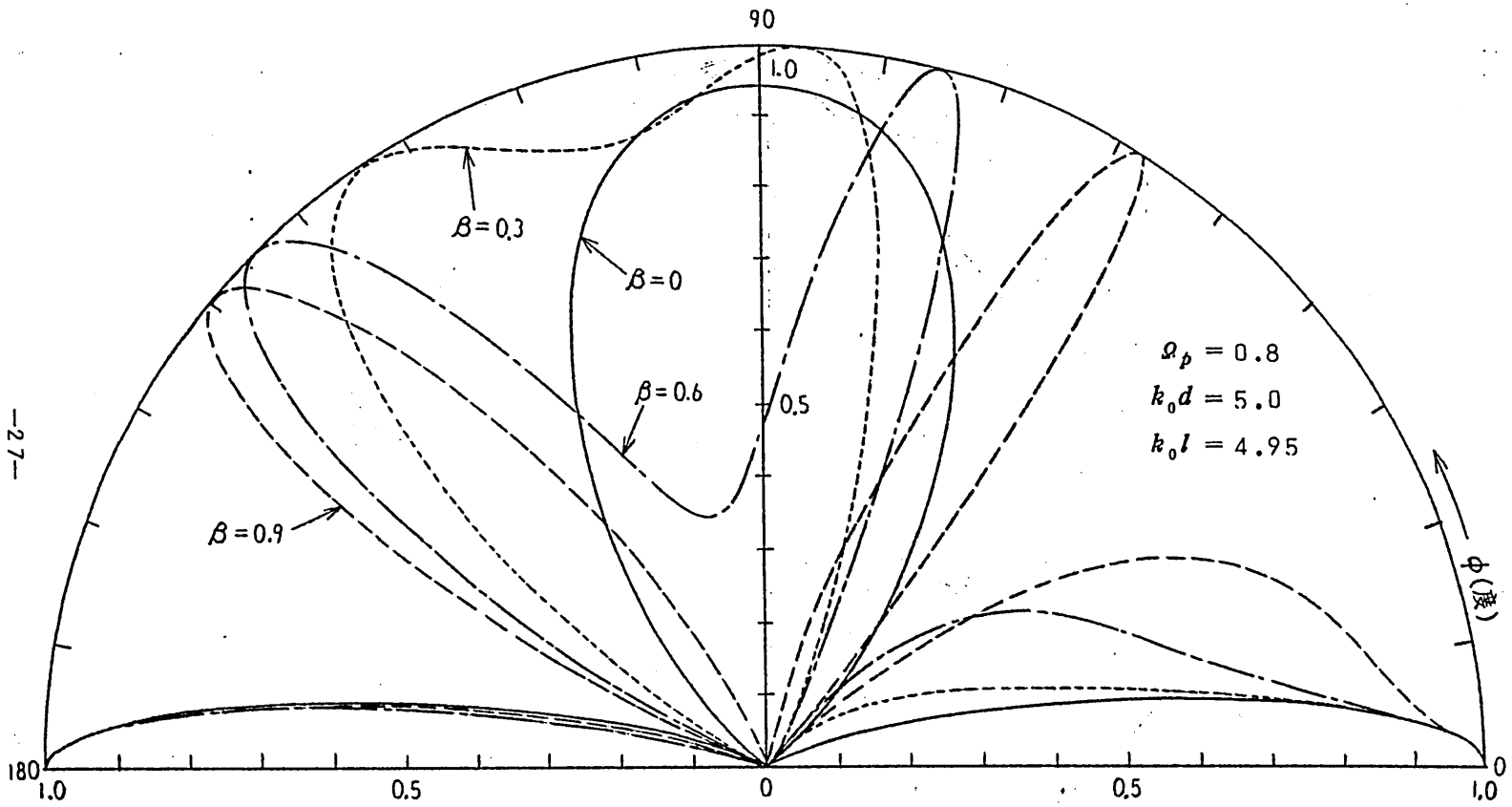


図4（c）　放射パターン（$\Omega_p=0.8$，$k_0d=5.0$，$k_0l=4.95$）

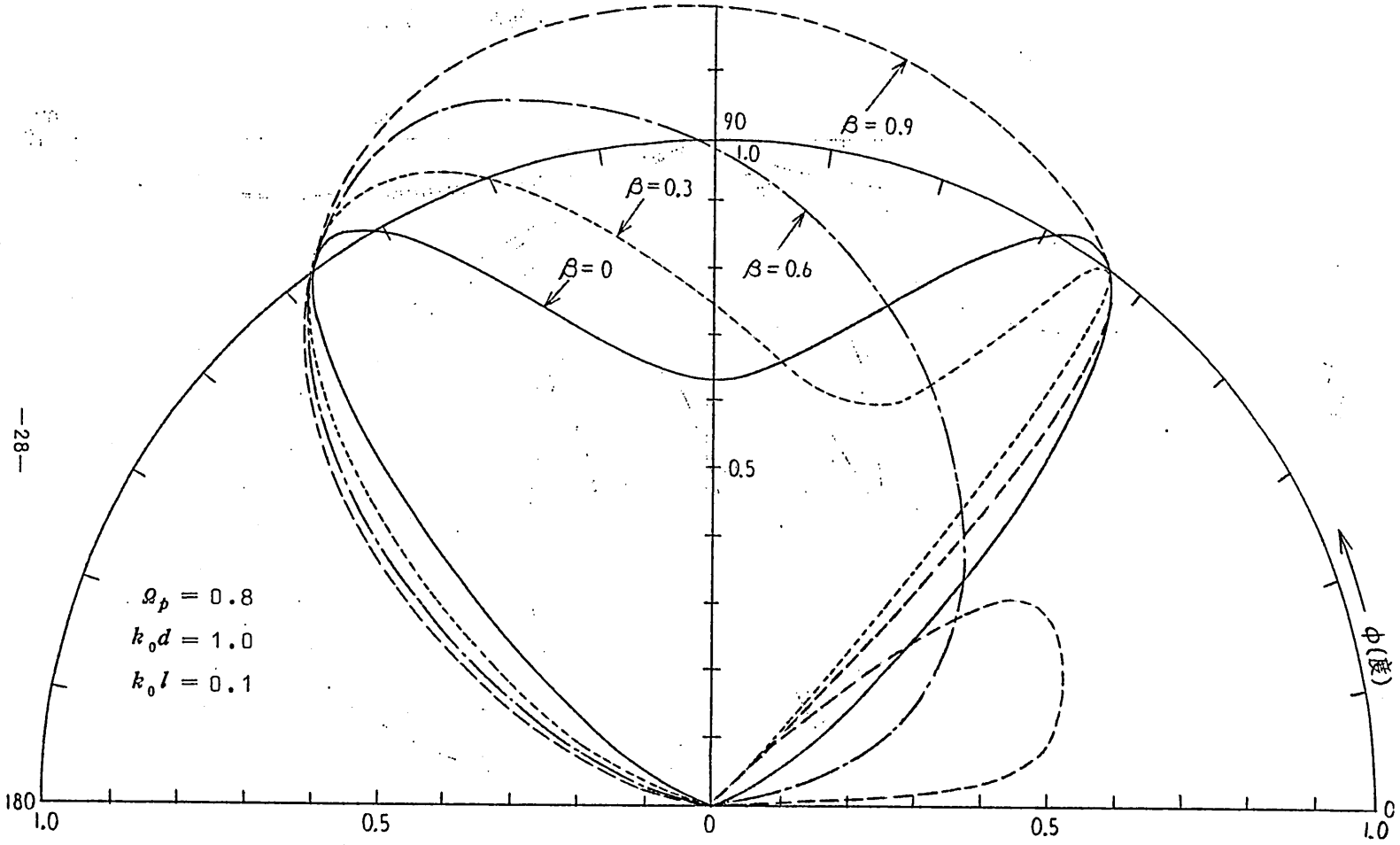


図5（a）　放射パターン（$\Omega_p=0.8$，$k_0 d=1.0$，$k_0 l=0.1$）

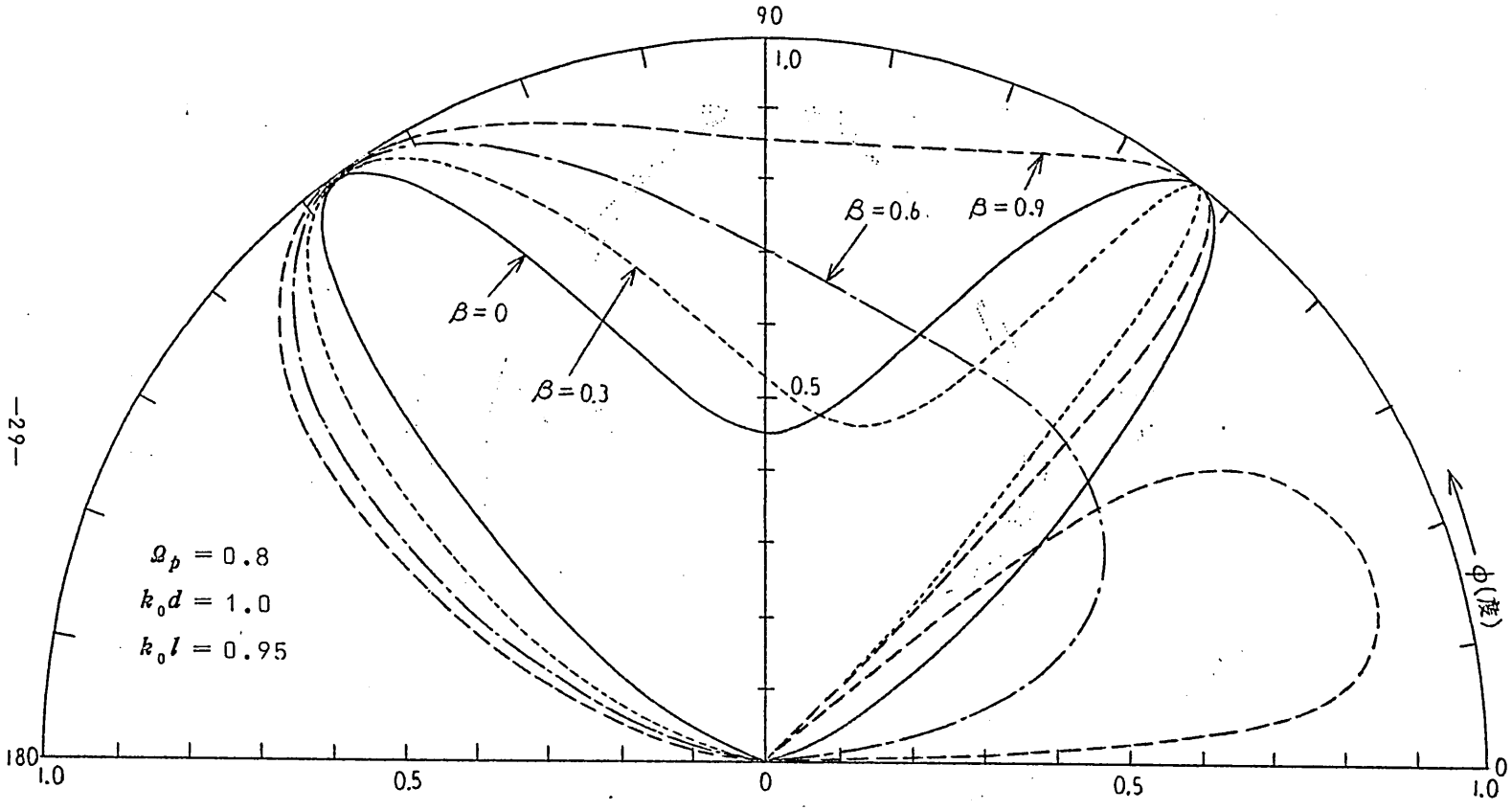


図5（b）　放射パターン（ $\Omega_p=0.8$，$k_0 d=1.0$，$k_0 l=0.95$ ）

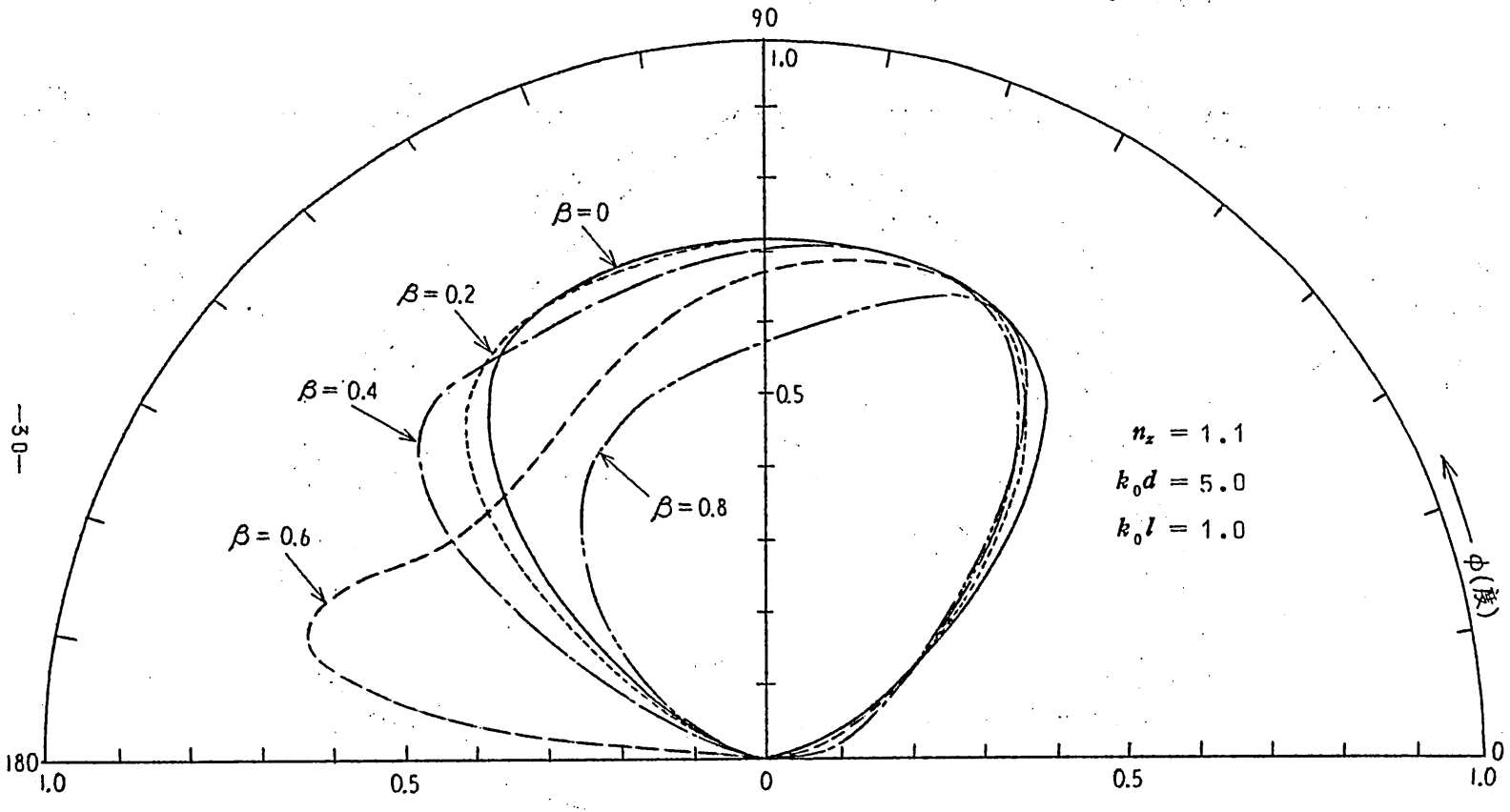


図6（a） 放射パターン（ n_z=1.1， $k_0 d$=5.0， $k_0 l$=1.0 ）

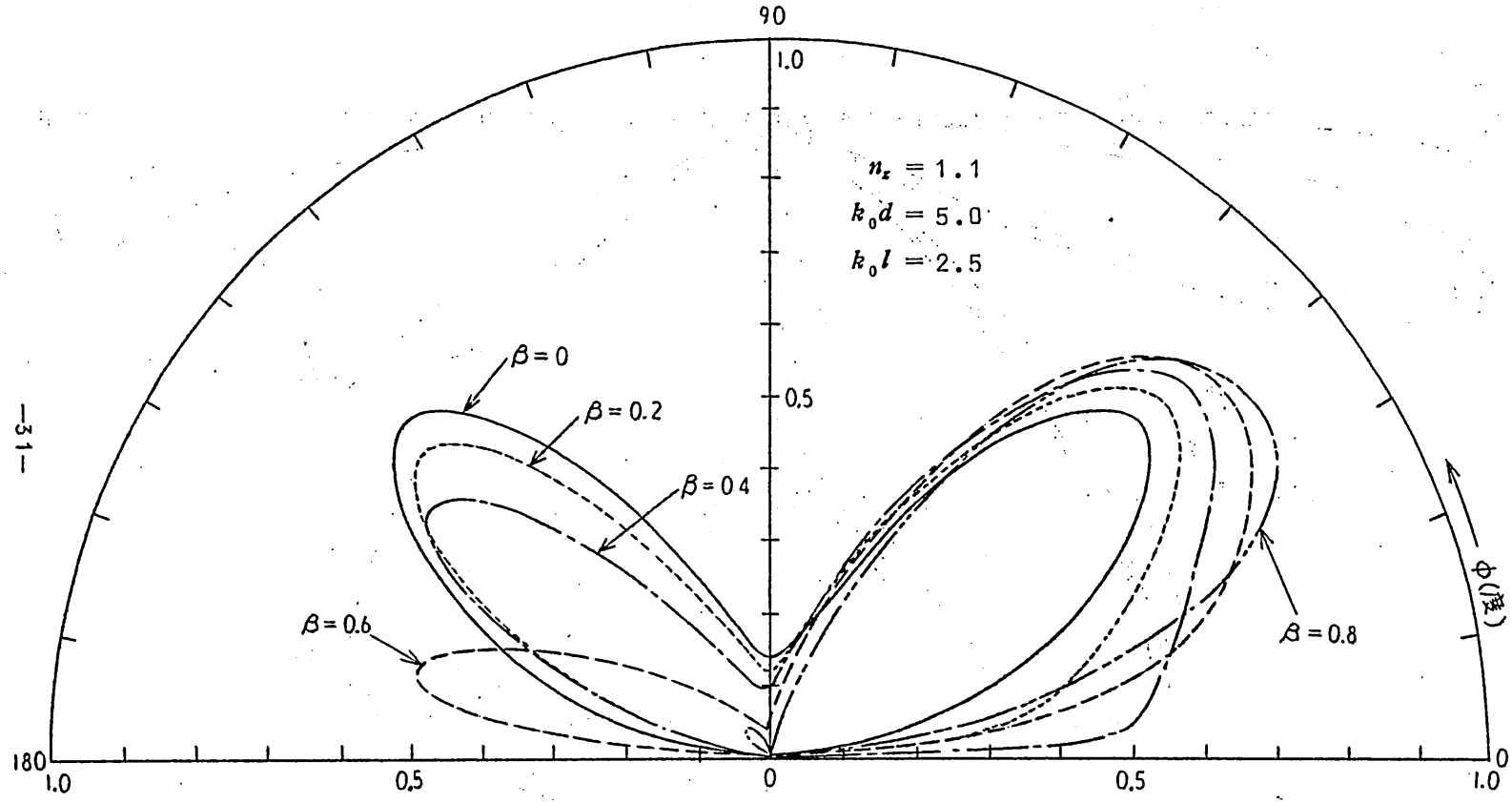


図 6 (b)　放射パターン ($n_z = 1.1$, $k_0 d = 5.0$, $k_0 l = 2.5$)

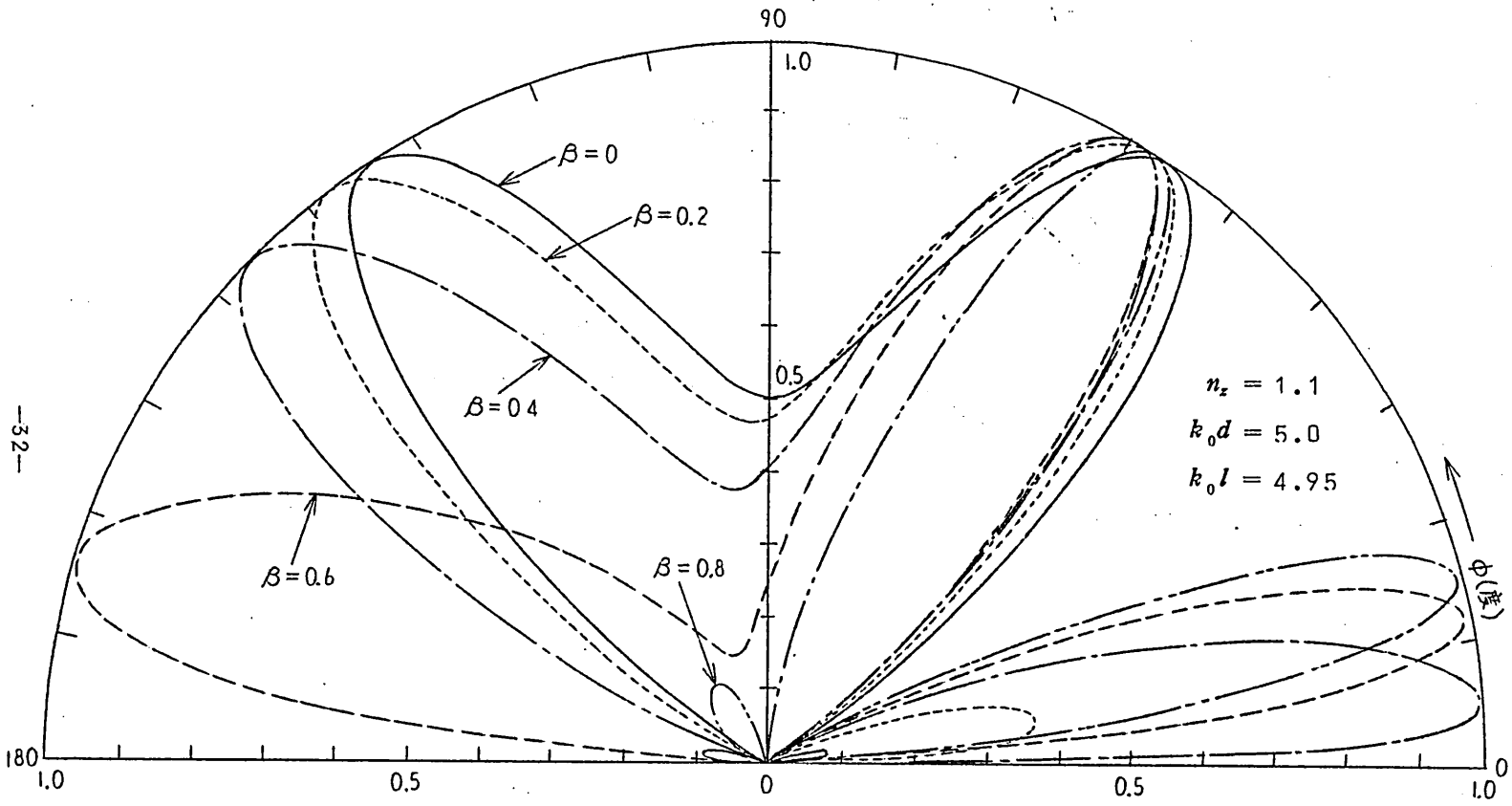


図6（c） 放射パターン（ $n_z = 1.1$， $k_0 d = 5.0$， $k_0 l = 4.95$ ）

文　献

(1) C. T. Tai : "The dyadic Green's function for a moving isotropic medium", IEEE Trans. (Communication), AP-13, p. 322 (Mar. 1965).

(2) R. T. Compton, Jr. and C. T. Tai : "Radiation from harmonic sources in a uniformly moving medium", IEEE Trans. AP-13, p. 574 (July 1965).

(3) P. Daly, K. S. H. Lee and C. H. Papas : "Radiation resistance of an oscillating dipole in a moving medium", IEEE Trans., AP-13, p. 583 (July 1965).

(4) K. S. H. Lee and C. H. Papas : "Antenna radiation in a moving dispersive medium", IEEE Trans., AP-13, p. 799 (Sep. 1965).

(5) R. T. Compton : "One-and two-dimensional Green's function for electromagnetic waves in a moving simple media", J. Mathe. Phys., 9, p. 1865 (Nov. 1968).

(6) T. Kojima and K. Itakura : "Radiation from magnetic line source in a moving isotropic plasma", Can. J. Phys., 48, p. 873 (April 1970).

(7) 間剛，田中嘉津夫："線波源からの放射に及ぼす運動半無限プラズマの影響"，信学論(B)，53-B，11，p. 664 (昭45－11).

(8) K. F. Casey and C. Yeh : "Radiation from an aperture in a conducting cylinder coated with a moving

plasma sheath", IEEE Trans., AP-17, p. 757 (Nov. 1969).

(9) 小嶋敏孝，板倉清保，東　恒人："運動するプラズマシースでおおわれた線状磁流源からの放射"，信学論(B)，53-B，4，p. 192(昭45－04).

(10) T. Kojima, K. Itakura and T. Higashi : "Radiation from magnetic line source covered with a moving sheath" to be published in Radio Science.

(11) 小嶋敏孝，板倉清保，東　恒人："運動する異方性誘電体シースでおおわれた線状磁流源からの放射" 信学論(B) 技術談話室に掲載予定.

輻射科学研究会

薄膜導波系における光波パラメトリック相互作用について

井筒雅之、末田正、

大阪大学基礎工学部

昭和46年4月30日

大阪大学基礎工学部

薄膜導波系における
光波パラメトリック相互作用について

§1 まえがき

1960年、レーザの出現によって、エネルギー密度の高い、コヒーレントな光波が得られる様になり、その翌年、Franken らによって水晶を用いたルビーレーザ光の第2高調波発生の実験が行なわれた。それ以後、赤外、可視および紫外領域で次々に新しい非線形光学現象が発見され、研究されて来た。

ここで扱う現象は、誘電体の2次の非線形分極、すなわち、

$$\mathbb{P}^{NL} = \varepsilon_0 d ; \mathbb{E}\mathbb{E} \tag{1}$$

であらわす

$$\mathbb{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbb{E} + \varepsilon_0 d ; \mathbb{E}\mathbb{E} \tag{2}$$

の第2項であらされる。電界の積に比例した分極のある場合の光波パラメトリック相互作用である。

3つの周波数成分 $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ からなる電磁界

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 \tag{3}$$

がこの様な誘電体に入射すれば、$\mathbb{P}^{NL}$ もまた、この3つの周波数成分を持つ。マックスウェルの方程式より波動方程式を立てれば、

$$curl\ curl\ \mathbb{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{P}^{NL} \tag{4}$$

となり、右辺に強制項を持った、非在次の波動方程式

となる。電磁界はz方向に進行し、その振巾が波長に比較してゆるやかに変化する平面波

$$E_i(z,t) = \frac{1}{2}[A_i(z)e^{j(\omega_i t - \beta_i z)} + c.c.] \quad (1)$$

と仮定して、この波動方程式を、各周波数について、変形すれば、

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = -j\frac{1}{2}\eta_1\omega_1 d A_2^* A_3 e^{-j\Delta\beta z}$$
$$\frac{dA_2(z)}{dz} = -j\frac{1}{2}\eta_2\omega_2 d A_3 A_1^* e^{-j\Delta\beta z} \quad (4)$$
$$\frac{dA_2(z)}{dz} = -j\frac{1}{2}\eta_3\omega_3 d A_1 A_2 e^{j\Delta\beta z}$$

となる。ただし

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \quad , \quad \Delta\beta = \beta_3 - \beta_2 - \beta_1$$

である。この連立微分方程式が、2次の非線形介在による、パラメトリック相互作用の基本方程式である。

相互作用を効率よく行なう為には、$\Delta\beta \simeq 0$ の位相整合が必要である。しかし、一般に誘電体の分散によりこの関係は満されない。そこで従来、結晶の複屈折、常光線と異常光線、をうまく利用する事により、位相整合が、実現されてきた。

しかしながら、この方法によれば、常光線と異常光線のエネルギーの伝搬方向が一般に異なり、その為に、相互作用を行なわせる事のできる長さは限られてしまう。また利用出来る誘電体としても、透過帯域内にありかつ位相整合の行なえるだけの複屈折がある事の、両方が満足されなければならない等、制約が多い。

特に CuCl, GaAs 等の立方晶系の結晶では、十分大きな非線形分極を持っているにもかかわらず、複屈折がなく、この方法では、位相整合が不可能である。
これらの問題を解決するものとして、誘電体薄膜導波系を用いる事が Anderson らにより提案され[2,3]、またその実験も報告されている。[4,5]
この方法は、導波系の分散特性を利用して、誘電体の分散を打ち消す事によって位相整合を取るもので、相互作用を行なう2周波の光波のモードを適当に選ぶ事と、導波系の厚さを変化する事により、位相整合を、実現する事が出来る。また、最近話題になっている、光波集積回路の能動素子として用いられる事も期待できる。
本文では、この様な誘電体導波系による光波相互作用の方程式を示し、赤外光から可視光への変換の可能性について検討する。~~さらに誘電体多結晶を用いた薄膜導波系の利用を提案する。~~
誘電体多結晶を用いる事が出来れば、薄膜の作成が容易になるとともに、単結晶の育成の困難な誘電体の非線形性を利用する事が可能になる。

§2 誘電体薄膜導波系のモード

図1の様に厚さ t、誘電率 ε_1 の誘電体平板中を、電磁波が z 方

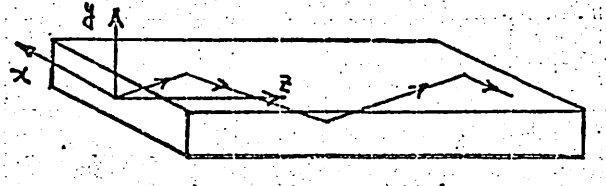


図1 誘電体薄膜導波系

向に進行しているものとする。平板外部の誘電率は、ε_2 である。$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ であれば電磁波は全反射をくり返えしながら進行して行く。誘電体平板がx方向に無限であるとすれば、電界がx方向成分のみ、磁界がy及びz方向成分からなるTEモードと、磁界がx方向成分のみ、電界がy及びz方向成分からなるTMモードとが存在する。

電界強度分布はy方向に、平板内部ではsinusoidal、平板外部ではexponentialになる。

z方向の伝搬定数は、平板内部では実数であるが、外部では純虚数となって、エネルギーが、平板附近にとじ込められている事を示している。しかしながら、z方向に進行する電力は、外部にもれている。図2にTE及びTM 0,1,2モードの電界強度分布を示す。

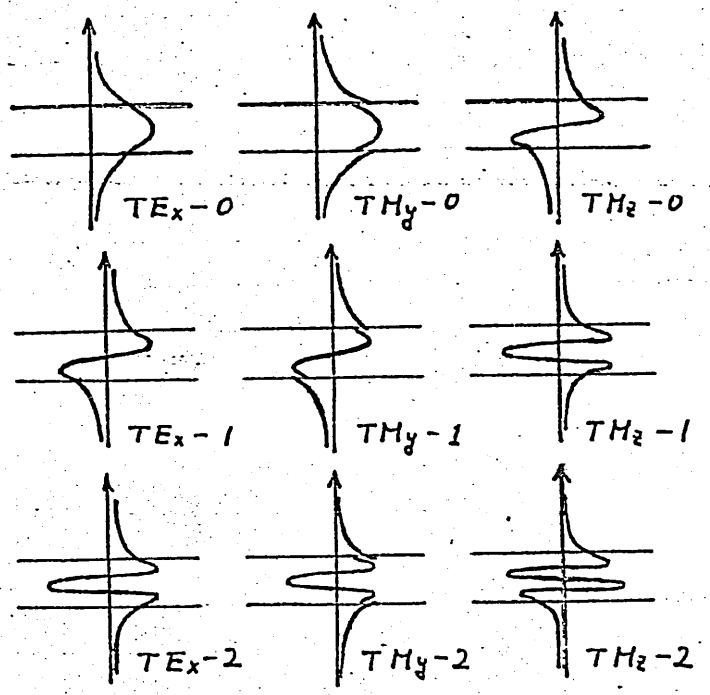


図2 薄膜導波系の電界強度分布

実際には平板はx方向に有限の巾であり、また電磁波もある所に集中しているのであるから、これを考慮する為に、x方向の強度分布がガウス分布で、それがy方向に比べて十分に広く、強度の変化は小さいものと

仮定する。実際に存在出来る電磁界分布及び、特性インピーダンス、伝播定数等は付録一1に示す。

伝播定数 β は $y=\pm t$ に於ける電磁界の接続条件から

$$\gamma_1 \cdot \tan\left(\gamma_1 t - m\frac{\pi}{2}\right) = \left(\varepsilon_1'/\varepsilon_2\right)\cdot\gamma_2 \qquad (7)$$

により与へられる。右辺の( )の中は、TEモードに対しては1を、TMモードに対しては $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ を取る。mはモード番号、γ_1, γ_2 は各々平板内部および外部のy方向伝播定数で、

$$\beta = \sqrt{k_1^2 - \gamma_1^2} = \sqrt{k_2^2 + \gamma_2^2}, \quad k_1^2 = \varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\omega^2 \qquad (8)$$

で決まる。一つの周波数の組 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を与へた場合 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が決まっていれば、各周波数のモードを適当に選ぶ事により、$\Delta\beta = \beta_3 - \beta_2 - \beta_1 = 0$ となる誘電体の厚さ t が計算出来る。モードの組合はせは、TEおよびTMモード各々が 0, 1, 2, --- となるので、その内で、結合係数が最大となるものを選ばなければならない。

§3 相互作用の方程式

たとえば、$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を各々 TE-0, TM-0, TM-0 モードに選べば、たしかに、位相整合を行なわせる事の出来る誘電体の厚さを求める事はできるが、それは非常に薄く、電磁界はほとんど平板外部に分布し、誘電体平板だけが非線形分極を持っているならば、結合係数は非常に小さなものとなってしまう。この様に等波系を用いたパラメトリック相互作用においては、位相

整合条件の他に，モードの組合わせ及び，電磁界の集中度が問題となる。

そこでまず，相互作用の方程式を導びき，結合係数を決定する因子について考えて見る。

まえがきにも述べた通り，非線形分極

$$\mathbb{P}^{NL} = \varepsilon_0 d ; \mathbb{E}\mathbb{E}$$

を持った誘電体薄膜中を，ω_1, ω_2, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ の3つの周波数成分からなる電磁波

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3$$

が，z方向に伝搬するものとする。各周波数成分，各x, y, z方向成分の電界は，

$$E_{fj} = \frac{1}{2}\left[A_f(z)\, T_{fj}(x,y)\, e^{j(\omega_f t - \beta_f z)} + c.c.\right] \qquad (9)$$
$$(f = 1, 2, 3, \quad j = x, y, z)$$

で表わせるものとする。ただし，$A_f(z)$ は，ω_f 成分の振中，$T_{fj}(x,y)$ は ω_f 成分 j 方向電界の，横方向相対振中分布である。この場合，非線形分極 $\mathbb{P}^{NL}$ の ω_1, ω_2, ω_3 成分は，

$$\overline{P_{1i}}^{NL} = \frac{1}{2}\left[P_{1i}^{NL} e^{j(\omega_1 t - \overline{\beta_3 - \beta_2} z)} + c.c.\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j,k} \varepsilon_0 d_{ijk} A_{2j}^* A_{3k} T_{2j}^* T_{3k} e^{j(\omega_1 t - \overline{\beta_3 - \beta_2} z)} + c.c.\right]$$

$$\overline{P_{2j}}^{NL} = \frac{1}{2}\left[P_{2j}^{NL} e^{j(\omega_2 t - \overline{\beta_3 - \beta_1} z)} + c.c.\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,i} \varepsilon_0 d_{ijk} A_{3k} A_{1i}^* T_{3k} T_{1i}^* e^{j(\omega_2 t - \overline{\beta_3 - \beta_1} z)} + c.c.\right] \qquad (10)$$

$$\overline{P_{3k}}^{NL} = \frac{1}{2}\left[P_{3k}^{NL} e^{j(\omega_3 t - \overline{\beta_1 + \beta_2} z)} + c.c.\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j} \varepsilon_0 d_{ijk} A_{1i} A_{2j} T_{1i} T_{2j} e^{j(\omega_3 t - \overline{\beta_1 + \beta_2} z)} + c.c.\right]$$

となる。一方非線形分極 P^{NL} のある場合にはマックスウェルの方程式より、非有次波動方程式

$$\nabla^2 E - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{NL} \tag{11}$$

が得られる。左辺を各周波数各 x y z 方向成分について書けば

$$\nabla^2 E_{fj} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_{fj} = \frac{1}{2}\left[-2j\beta_f \frac{\partial A_f}{\partial z} T_{fj}\, e^{j(\omega_f t - \beta_f z)} + c.c.\right] \tag{12}$$

を得る。ただし、

$$\left(k_f^2 - \nabla_t^2\right) T_{fj} = \beta_f^2 \cdot T_{fj}$$

$$\frac{\partial A_f}{\partial z} \ll -2j\beta_f A_f \tag{13}$$

とした。これより、非有次波動方程式の各成分は、

$$\frac{\partial A_f}{\partial z} \cdot T_{fj} = -\frac{1}{2} j \frac{\omega_f^2 \mu_0}{\beta_f} P_{fj}^{NL}\, e^{\mp j \Delta\beta z} \tag{14}$$

$$\therefore \Delta\beta = \beta_3 - \beta_2 - \beta_1$$

となる。指数関数内の符号は、$f=1,2$ に対しては $-$、$f=3$ に対しては $+$ 符号である。

そこで、この式の両辺に T_{fj}^*/η_f を掛け、x y 面で積分し、各 f 成分に関して j についての和を取れば、それに関する連立方程式

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{1}{2} j \frac{\omega_1^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\beta_1} A_2^* A_3\, e^{-j\Delta\beta z} \times \left[\sum_i \left\{\sum_{j,k} \iint_{-\infty}^{\infty} d_{ijk}\, T_{1i}^* T_{2j}^* T_{3k}\, dx dy\right\} \Big/ \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_1} T_{1i} T_{1i}^*\, dx dy\right]$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -\frac{1}{2} j \frac{\omega_2^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\beta_2} A_3 A_1^*\, e^{-j\Delta\beta z} \times \left[\sum_j \left\{\sum_{k,i} \iint_{-\infty}^{\infty} d_{ijk}\, T_{1i}^* T_{2j}^* T_{3k}\, dx dy\right\} \Big/ \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta_2} T_{2j} T_{2j}^*\, dx dy\right] \tag{15}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -\frac{1}{2}j\frac{\omega^2\varepsilon_0\mu_0}{\beta_2}A_1 A_2 e^{j\alpha\beta z}$$

$$\times\left[\sum_k\left\{\sum_{i,j}\iint_{-\infty}^{\infty} d_{ijk}T_{ti}T_{tj}T_{tk}^* dxdy\right\}\Big/\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_t}T_{tk}T_{tk}^* dxdy\right]$$

が得られる。この式は、初めにあげた(6)式と右辺の積分を除いて同じであり、一般的に横方向の強度分布が T_{tj} の平面波のパラメトリック相互作用の方程式に、なっている。電力は $A\cdot A^*$ で与えられる。ここで右辺の積分

$$S = \sum_i\left\{\sum_{j,k}\iint_{-\infty}^{\infty} d_{ijk}T_{ti}^*T_{tj}^*T_{tk}\,dx\,dy\right\}\Big/\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_t}T_{ti}T_{ti}^*dxdy \qquad (16)$$

が、結合係数の大きさを左右する。誘電体平板に非線形介在があり、外部には非線形性がないとすれば、

$$I = \iint_{-\infty}^{\infty} d_{ijk}T_{ti}^*T_{tj}^*T_{tk}\,dxdy = d_{ijk}\int_{-t}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}T_{ti}^*T_{tj}^*T_{tk}\,dxdy \qquad (17)$$

であるが、T_{tj} は sinusoidal に変化するので、この積分は、cosine・cosine・cosine あるいは cosine・sine・sine の積の形でなければ 0 となる。

TE モードでは電界は z 方向成分のみであり、even-mode では cosine 関数、odd mode では sine 関数である。また TM モードでは、電界の x 方向成分と z 方向成分が even mode では cosine および sine 関数、odd mode では sine および cosine 関数の分布をしている。しかしながら z 方向成分は、一般に、x 方向成分よりかなり小さい。そして、この様な積分の和が S であるので、結合係数の大きさは、モードの組合わせによって複雑に変化する。だいたいの傾向として、I は各周波数の光波の

モード番号が近いほど大きな値となるが、~~位相整合は~~モード番号が大きい、ある程度はなれている方が、位相整合の満足される平板の厚さ t が大きく、電界の非線形誘電体薄膜中に含まれる割合が大きくなって、結合係数の値が大きくなる。この様に、相反する様々の因子が、結合係数の大きさを左右する為に、最適のモードの組合わせを見つける事は、はなはだ困難である。この変化の一例は後節の表2に示す。

§4 誘電体の配置と多結晶の利用。

非線形分極率 d は3階のテンソルで表わされる。他の3階のテンソル（電気光学係数，圧電係数，等）と同様に18の成分を持っているが、結晶の対称性によって独立な成分の数が減り、また0となる成分もある。特に、結晶に中心対称があれば d の成分はすべて0となって1つも非線形分極は現れない。

ここでは CuCl 等、点群対称 $\bar{4}3m$ および 23 の立方晶系の結晶を考える事とする。この場合には、

$$d_{123} = d_{132} = d_{231} = d_{213} = d_{312} = d_{321} \quad (= d)$$

で他の成分はすべて0，あるいは、行列で表示すれば、

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \qquad (18)$$

の形になる。d がこの様に与えられるのは、座標軸が結晶軸に一致している場合であるが、この時には、

$$P^{NL} = \varepsilon_0 d ; EE$$

より TE モードの z 成分，TM モードの z 成分．および TM モードの z 成分の各電界が相互作用を起し，他のモードの組合わせでは，テンソルの成分が 0 であるので相互作用を起す事はない。もちろん，結晶の配置を変える事によって d の形が変化するので，他のモードの組合わせでも相互作用を起す事は出来る。
座標軸の変換と，非線形光学定数テンソルの変化の例を付録 2 にのべる。
この様に，相互作用を行なう為にはモードの組合わせに従って結晶の配置，即ち結晶軸に対する光波の伝搬方向及び Transverse の各方向を変えなければならない。実際に薄膜導波系を用いて光波相互作用を行なう上で結晶軸を定め，また位相整合の為に厚さを設定して，誘電体薄膜を作成する事にはかなりの困難が生ずる。
そこで誘電体の結晶を用いた光波相互作用を考えてみる。これが可能である事は S. K. Kurtz らによって報告された[6]．誘電体粉末に光波を照射する事により，第2高調波を発生する実験からも明らかである。
結晶が任意の方向を取る場合，3階のテンソル d の固定（実験室）系 FGH から見たテンソルの一つの成分 d_{FGH} のアンサンブル平均 $\langle d_{FGH} \rangle$ は 0 となるが，その二乗平均 $\langle d_{FGH} \cdot d_{F'G'H'} \rangle$ は 0 とならず，ある値を持つ。一方，パラメトリック光波相互作用は本質的

に光波間のエネルギーの相互変換によって起こるものであり，その利得は，電力についてのものを考えなければならない．(6)式，(10)式より電界そのものの利得は，近似的に d に比例するのであるから，電力利得は，d^2 に比例する．ここで $\langle d^2 \rangle \neq 0$ ならば，多結晶においても相互作用が起こる事になる．

付録－3にこれらの簡単な証明及び最終的には，光波相互作用の出力電力間の関係式に於て，d^2 を $\langle d^2 \rangle$ に置き換えればよい事を示す．

立方対称 23m，432 についての値を以下に示す．

$$
\begin{aligned}
\langle d_{ZZZ}^2 \rangle &= \frac{12}{35} d^2 \\
\langle d_{ZGG}^2 \rangle &= \frac{8}{35} d^2 \\
\langle d_{ZGH}^2 \rangle &= \frac{1}{7} d^2 \\
\langle d_{ZZZ} \cdot d_{ZGG} \rangle &= -\frac{6}{35} d^2 \\
\langle d_{ZGG} \cdot d_{ZHH} \rangle &= -\frac{2}{35} d^2
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

ただし，Z, G, H はすべて互いに異なった座標軸である．また，ここに示したもの以外はすべて0となる．

§5 赤外光の可視光への変換

前節までに，誘電体導波系を用いた光波相互作用の問題点を検討してきた．ここで実際の例として，10.6 μ の赤外光を可視光に変換する場合を考える．ここで波を可視光附近に選んで赤外光との和，あるいは差周波を得る．

ポンプ波の強度が十分に強く、エネルギー損失が無視出来るものとすれば、シグナルと和及び差周波の光波とのactiveなパラメトリック結合となり、周波数が変換される。

和、差周波の周波数 ω_{us}, ω_{ds} はシグナル及びポンプの周波数 ω_s, ω_p によって

$$\omega_{us} = \omega_p + \omega_s \quad , \quad \omega_{ds} = \omega_p - \omega_s$$

と表はされる。先の光波相互作用の方程式（(15)式）の $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ との対応は図3の通りである。

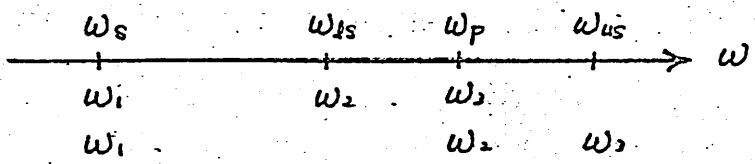


図3　ポンプ，シグナル，和・差周波の関係

和・差周波出力はポンプ波の振巾が一定であるとして(15)式を解く事により得られる。位相整合が完全で $\Delta\beta = 0$ とすれば $z = L$ における出力電力は、

和周波；
$$P_s(L) = P_s(0)\cos^2 sL$$
$$P_{us}(L) = \frac{K_{us}^*}{K_s^*} P_s(0) \sin^2 sL$$
$$s^2 = K_s K_{us}^* P_p \qquad (20)$$

差周波；
$$P_s(L) = P_s(0)\cosh^2 sL$$
$$P_{ds}(L) = \frac{K_{ds}}{K_s} P_s(0) \sinh^2 sL$$
$$s^2 = K_s K_{ds}^* P_p$$

となる。但し、相乗条件は、$z=0$ でシグナルは $P_s(0)$ 和・差周波成分は 0 とした。K_s, K_{us}, K_{ds} は結合係数

である。

図4の様に非線形誘電体として CuCl の単結晶を用い、その薄膜の両面を CsI で挟んだものを導波系として用いた場合、位相整合の為の内部誘電体薄膜の厚さおよびその時の結合係数の例を表1に示す。またモードの組合わせによる結合係数の変化の様子を表2に例示する。ただし、x方向のガウス分布のビーム中を 0.1mm とし、CuCl の非線形分極率を

$$d = (n_1^2-1)(n_2^2-1)(n_3^2-1)\times 3.80\times 10^{-13}\ (\mathrm{m.k.s}) \quad (21)$$

とした。

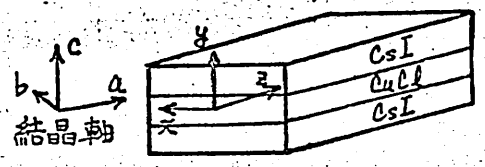


図4　誘電体の配置

モード，周波数の組合わせ	位相整合の厚さ $2t$	結合係数 $\sqrt{K_E^2/P_P}$	定数 K_{us}/K_s, K_{os}/K_s
10.5912μ + 0.6328μ → 0.5912μ TE-0　TM-3　TM-5	3.19μ	8.027	19.22
10.5912μ + 0.6328μ → 0.6730μ TE-0　TM-5　TM-9	10.40μ	2.757	15.88
10.5912μ + 0.6929μ → 0.6504μ TE-0　TM-5　TM-7	6.63μ	6.705	16.92
10.5912μ − 0.6929μ → 0.7414μ TE-0　TM-1　TM-5	7.99μ	4.838	14.32
10.5912μ + 1.0648μ → 0.9676μ TE-1　TM-5　TM-8	12.22μ	5.899	11.31
10.5912μ − 1.0648μ → 1.1838μ TE-0　TM-1　TM-5	15.95μ	2.929	8.94

表1．モード，周波数の組合わせと結合係数の例

モード番号 pgr	結合係数 $\kappa\kappa^*$	厚さ (μ)	モード番号 pgr	結合係数 $\kappa\kappa^*$	厚さ (μ)	モード番号 pgr	結合係数 $\kappa\kappa^*$	厚さ (μ)
002	2.02	2.28	004	0.23	6.35	127	0.05	8.33
013	32.54	4.16	015	25.76	7.51	138	8.27	9.19
024	8.03	4.91	026	0.64	8.53	149	2.46	10.04
035	51.49	5.59	037	12.45	9.45	1510	12.96	10.85
046	12.31	6.16	048	0.82	10.23	1611	5.75	11.62
057	40.22	6.69	059	7.66	11.04			
068	15.30	7.17	0610	0.29	11.75			

表2　モードの組合わせによる結合係数の変化.

(10.3912μ TE$_p$ + 0.6929μ TE$_8$ $\longrightarrow$ 0.6504μ TM$_r$ の結合に対して.)

CuCl は 0.5μ から 20μ の透過帯域を持つ立方対称. 43m の結晶で. 光学的特性も良好である. 一方, CsI は 0.3μ から 40μ の透過帯域を持つ等方性結晶で. 屈折率が CuCl に近いのでこれを用いた.

差周波を得る場合には. 利得がハイパボリックになり等位系を共振器中におけば. パラメトリック発振を行なう事が可能である. シグナルと差周波の両方が共振する場合の臨界ポンピング電力は.

$$K_s K_{ds}^* P_p L^2 \simeq \alpha_s \cdot \alpha_{ds}$$

で与えられる. ただし α_s, α_{ds} はシグナルおよび差周波の共振器を一往復した場合の損失で. P_p はポンピン

「が電力である。

$K_s \cdot K_{2s}^* \alpha 20$, $\alpha_s \cdot \alpha_{2s} \alpha 10^{-2}$, $L = 5mm$ とすれば $P_p \simeq 100W$ となり，パルス動作ではパラメトリック発振も可能である。

§6 むすび

誘電体薄膜導波系による光波パラメトリック相互作用についての諸問題を検討した。この結果より，10.6μの可視光への変換等に用いられる可能性があると思われる。現在，分極晶の利用を検討中であるが，これが出来れば，光波集積回路への応用も容易である。相互作用の方程式は電界のすべての空間成分を考慮してあるので他種の導波系を用いる場合にも適用出来る。実際問題としては，望むモードを励振する技術，薄膜の厚さを正確に導波系を作成する事が必要である。

最後に，有益な助言，討論を頂いた，技本教授，山本助教授に感謝する。数値計算は，大阪大学計算センターを利用した。

（参考文献）

1) P.A.Franken,A.E.Hill,C.W.Peters and G.Weinreich:"Generation of optical harmonics",Phys.Rev.Letters,7,p118,(1961)

2) D.B.Anderson,R.R.August and W.A.McDowell:"Enhancement of optical nonlinear interactions by a quasi-microwave technique",4-th Intn'l Quantum Electronics Conf.,Phoenix,April,1966

3) Y.Suematsu:"Tunable parametric oscillator using a guided wave structure",Japanese J.Appl.Phys.,9,798,(1970)

4) D.B.Anderson and J.D.McMullen:"Infrared parametric amplification in GaAs waveguide",1969 IEEE Conf.Laser Engrg and Appl.,Washington,D.C.,May 28

5) P.K.Tien,R.Ulrich and R.J.Martin:"Optical second harmonic generation in form of coherent Cerenkov radiation from a thin-film waveguide",Phys.Rev.Letters,17,10,p447,(1970)

6) S.K.Kurtz and T.T.Perry:"A powder technique for the evaluation of nonlinear optical materials",J.Appl.Phys.,39,8, p3798,(1968)

7) D.Chemla,P.Kupecek,C.Schwartz,C.Schwab and A.Goltzene: "Nonlinear properties of Cuprous Halides",IEEE J.Quantum Electronics,QE-7,3,p126,(1971)

(付録 1) 誘電体薄膜導波系のモード

回り様に，y方向に厚さ $2t$，誘電率 ε_1 の誘電体無限平板中を，

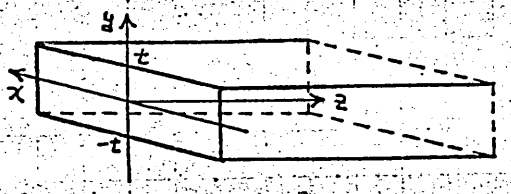


図 1 誘電体薄膜導波系

電磁波がz方向に進行しているものとする。平板外部の誘電率は ε_2 である。この場合，電界がx方向成分のみのTEモードと，磁界がx方向成分のみのTMモードとが存在する。電磁界の閉じ込め分布はx方向にがウシアン，y方向には平板中で sinusoidal，平板外部では exponential に分布し，x方向にはy方向に比べて分布

が充分に広く，その強度変化は小さいものとする．

・TEモード

電界を

$$E_x(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left[A(z)\cdot T_x(x,y)\,e^{j(\omega t-\beta z)} + c.c.\right] \tag{1}$$

ただし

$$\begin{aligned} T_x(x,y) &= X(x)\cdot Y_x(y) \\ X(x) &= e^{-x^2/2\omega^2} \\ Y_x(y) &= \begin{cases} N\cos(\gamma_1 y - m\frac{\pi}{2}) & |y|<t \\ N\cos(\gamma_1 t - m\frac{\pi}{2})\,e^{-\gamma_2(y-t)} & y>t \\ N\cos(\gamma_1 t + m\frac{\pi}{2})\,e^{\gamma_2(y+t)} & y<-t \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

と仮定する．ここで $A(z)$ は複素振中，$T(x,y)$ は相対強度分布，ω は x 方向のビーム径，γ_1,γ_2 はそれぞれ，媒質 1，2 における y 方向の伝搬定数，m はモード番号である．さらに

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta}\,|T_x(x,y)|^2 = 1 \tag{3}$$

即ち

$$N^2 = \frac{\beta}{\omega\mu_0}\Big/\sqrt{\pi}\,\omega\left[\frac{\gamma_1 t + \frac{1}{2}\sin 2\gamma_1 t\cos m\pi}{\gamma_1} + \frac{1+\cos 2\gamma_1 t\cos m\pi}{\gamma_2}\right] \tag{4}$$

とする．ただし，媒質インピーダンス η は，

$$\eta = \omega\mu_0/\beta \tag{5}$$

で，平均伝送電力 P は

$$P = \frac{1}{2}|A(z)|^2 \tag{6}$$

となる．

・TMモード

電界はまたもう2つの成分があり，今それを

$$E_y(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left[A(z)\cdot T_y(x,y)\,e^{j(\omega t-\beta z)} + c.c.\right] \tag{7}$$

$$E_z(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\left[A(z)T_z(x,y)e^{j(\omega t-\beta z)} + c.c.\right]$$

ただし

$$T_y(x,y) = X(x)\cdot Y_y(y),\quad T_z(x,y) = X(x)\cdot Y_z(y)$$

$$X(x) = e^{-x^2/2w^2}$$

$$Y_y(y) = \begin{cases} N\cos(\Gamma_1 y - m\frac{\pi}{2}) & |y|<t \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}N\cos(\Gamma_1 t - m\frac{\pi}{2})e^{-\Gamma_2(y-t)} & y>t \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}N\cos(\Gamma_1 t + m\frac{\pi}{2})e^{\Gamma_2(y+t)} & y<-t \end{cases} \quad (8)$$

$$Y_z(y) = \begin{cases} j\frac{\Gamma_1}{\beta}N\sin(\Gamma_1 y - m\frac{\pi}{2}) & |y|<t \\ j\frac{\Gamma_1}{\beta}N\sin(\Gamma_1 t - m\frac{\pi}{2})e^{-\Gamma_2(y-t)} & y>t \\ -j\frac{\Gamma_1}{\beta}N\sin(\Gamma_1 t + m\frac{\pi}{2})e^{\Gamma_2(y+t)} & y<-t \end{cases}$$

と仮定する。

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta}|T_y(x,y)|^2 = 1 \quad (9)$$

とすれば

$$N^2 = \frac{\omega\varepsilon_1}{\beta}\Big/\sqrt{\pi}\,w\left[\frac{\Gamma_1 t + \frac{1}{2}\sin 2\Gamma_1 t\cos m\pi}{\Gamma_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{1+\cos 2\Gamma_1 t\cos m\pi}{\Gamma_2}\right] \quad (10)$$

となる。ただし特性インピーダンス η は

$$\eta = \beta/\omega\varepsilon \quad (11)$$

である。

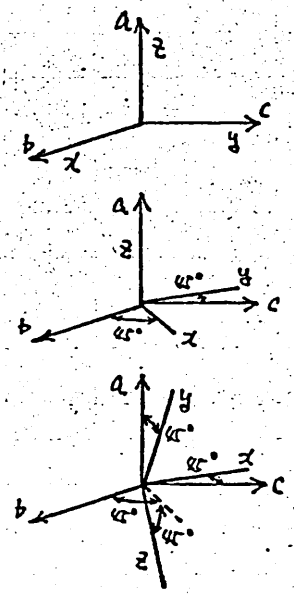
(付録 2) 非線形分極率テンソルの座標変換

3階のテンソル、非線形分極率 d の座標 ijk から座標 FGH への変換は、新旧両座標間の方向余弦 $a_{Fi}, a_{Fj}, a_{Fk}, a_{Gi}, \cdots$ を用いて

$$d_{FGH} = \sum_{ijk} a_{Fi}a_{Gj}a_{Hk}d_{ijk} \quad (12)$$

で示される。点群対称 $\bar{4}3m$, 23 についての座標変換の2,3の例を示す。但し a,b,c は結晶軸、x,y,z は変換後

の座標軸である。



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & 0 & 0 \\ d & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}d & \frac{-1}{\sqrt{2}}d \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}d & \frac{2}{\sqrt{2}}d & \frac{-1}{\sqrt{2}}d & \frac{1}{\sqrt{2}}d & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}d & \frac{1}{\sqrt{2}}d & \frac{2}{\sqrt{2}}d & \frac{-1}{\sqrt{2}}d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(付録 3) 多結晶における光波相互作用

S. K. Kurtzらは、誘電体粉末を用いた光波半と高調波発生の実験を行なった。その報告は光波相互作用の電力利得が非線形分極率 d の2乗に比例し、また3階のテンソル d の座標軸の方向がランダムな場合、d^2 の期待値 $\langle d^2 \rangle$ が0とならずにある値を持つ事による。

簡単の為に $\Delta\beta = 0$ として本文(18)式より和周波 (ω_3; ポンプ) の場合の電力関係式を導けば、

$$\begin{aligned} P_1(L) &= P_1(0)\cos^2 sL + \frac{\kappa_1^*}{\kappa_3^*} P_3(0)\sin^2 sL \\ P_3(L) &= P_3(0)\cos^2 sL + \frac{\kappa_3^*}{\kappa_1^*} P_1(0)\sin^2 sL \end{aligned} \qquad (13)$$

となる。ただし入射光とポンプ光の初期位相に適当な関係があるものとした。これより Manley-Rowe の関係は

$$\frac{1}{\kappa_1^*}\frac{dP_1}{dL} = -\frac{1}{\kappa_3^*}\frac{dP_3}{dL} = -\left(\frac{1}{\kappa_1^*}P_1(0) - \frac{1}{\kappa_3^*}P_3(0)\right) s \sin 2sL \qquad (14)$$

となる。ここで $s^2 \propto d^2$ を用いて $sL \ll 1$ とすれば、

$$dP/dL \simeq A \cdot 2d^2L \cdot \qquad (15)$$

あるいは

$$P(L+\Delta L) - P(L) = A \cdot 2d^2L \cdot \Delta L \qquad (16)$$

と書く事ができる。ただし A は比例定数である。区間 ΔL の間で結晶軸の方向が n 回ランダムに変化するものとする。各微少区間は等間隔でその長さは $\Delta L/n$, 第 i 番目の微小区間における d の値を d_i とすれば,

$$\begin{cases} \text{第1微少区間}; & P(L+\frac{\Delta L}{n}) - P(L) = A \cdot 2d_1^2 L \cdot \Delta L/n, \\ \text{第2微少区間}; & P(L+2\frac{\Delta L}{n}) - P(L+\frac{\Delta L}{n}) = A \cdot 2d_2^2 L \cdot \Delta L/n, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \text{第n微少区間}; & P(L+n\frac{\Delta L}{n}) - P(L+(n-1)\frac{\Delta L}{n}) = A \cdot 2d_n^2 L \cdot \Delta L/n. \end{cases} \qquad (17)$$

両辺の和をとれば,

$$P(L+\Delta L) - P(L) = A \cdot 2\frac{d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2}{n} L \cdot \Delta L = A \cdot 2\langle d^2\rangle L \cdot \Delta L \qquad (18)$$

を得る。すなわち

$$dP/dL \simeq A \cdot 2\langle d^2\rangle L \qquad (19)$$

である。これより多結晶を用いる場合には,電力間の関係式に於て d^2 のかわりに2乗平均 $\langle d^2\rangle$ を用いればよい事がわかる。

結晶軸が任意の方向を取る場合の d^2 の期待値 $\langle d^2\rangle$ は

$$\langle d_{\pi GH} \cdot d_{\pi G'H'}\rangle = \sum_{ijk\,ij'k'} \langle a_{\pi i} a_{Gj} a_{Hk} a_{\pi i'} a_{Gj'} a_{Hk'}\rangle d_{ijk} d_{ij'k'} \qquad (20)$$

となる。a の方向余弦で方向余弦の積の期待値がわかれば計算可能である。この値は Cyvin ら*によって示されており,これを用いた計算例が本文(19)式である。

*) S.J.Cyvin, J.E.Rauch and J.C.Decius: "Theory of hyper-Raman effects (nonlinear inelastic light scattering): selection rules and depolarization ratios for the second-order polarizability", J.Chem.Phys., 43, 11, p4083, (1965)

輻射科学研究会資料

開放形伝送線路間の結合理論とその光回路への応用

松原正則
熊谷信昭
(大阪大学・工学部)

1971年4月30日

1. まえがき

光集積回路や光伝送線路の問題において，２つの線路のあいだの結合を知ることは重要な研究課題である．たとえば，光集積回路としての結合器や，光集積回路と光伝送線路とのあいだの励振器などを取り扱う場合にこの問題が重要となる．また，この結合の問題は純粋の電磁理論としても十分興味のある事柄である．

開放形線路のあいだの結合についてはこれまでにもいくらかの成果は発表されているが[(1)~(3)]，それらはすべて結合する線路のあいだに完全な対称性が存在する特殊な場合についてであり，異なる線路間の結合にも適用しうる一般的な議論はなされていない．ここでのべる変分法による方法は，結合する個々の線路単独としての電磁界が知られているかぎり，いかなる２つの線路のあいだの結合をも簡単に求めることができるきわめて一般性の高い方法である．

本論文では変分法による結合の求め方を示すとともに，具体的な適用例として，２つのレンズ状誘電体線路（selfoc）のあいだの結合を示した．

2. 伝ぱん定数の変分表現

電界$\mathbf{E}$をz方向（伝送方向）成分$\mathbf{i}_z e_z$とそれに直角な成分$\mathbf{e}_t$とにわけ，z方向伝ぱん定数をβとすれば

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_t + \mathbf{i}_z e_z) e^{j(\omega t - \beta z)} \tag{1}$$

とあらわされる．ここで$\mathbf{i}_z$はz方向の単位ベクトルである．このとき，伝送方向に一様な無損失伝送線路の伝ぱん定数βの変分表現はつぎのようになる[(4)]．

$$\beta^2 = -\frac{\int\left[\mu\left\{\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{e}_t\right)-\omega^2\varepsilon\,\mathbf{e}_t\right\}^2-\omega^2\frac{1}{\varepsilon}(\nabla\cdot\varepsilon\,\mathbf{e}_t)^2\right]dS}{\int\left[\frac{1}{\mu}(\nabla\times\mathbf{e}_t)^2-\omega^2\varepsilon\,\mathbf{e}_t^{\,2}\right]dS} \qquad (2)$$

ただし，面積分は z に直角な横断面全体にわたって行なうものとする．式(2)が β の変分表現になっていることはつぎのようにして証明することができる．

$\mathbf{e}_t$ が $\mathbf{e}_t+\delta\mathbf{e}_t$ に変化したとき β^2 が $\beta^2+\delta\beta^2$ になったとして(2)の変分を計算し整理すると

$$\begin{aligned}&\delta\beta^2\int\left[\frac{1}{\mu}(\nabla\times\mathbf{e}_t)^2-\omega^2\varepsilon\,\mathbf{e}_t^{\,2}\right]dS\\&=-2\int\left(\mathbf{n}\frac{1}{\varepsilon}\nabla\cdot\varepsilon\,\mathbf{e}_t\right)\cdot\left\{\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\delta\mathbf{e}_t\right)-\omega^2\varepsilon\,\delta\mathbf{e}_t\right\}dl\\&\quad-2\beta^2\int(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_t)\cdot\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\delta\mathbf{e}_t\right)dl\end{aligned} \qquad (3)$$

となる[4]．ここで線積分は半径 R が無限大の円周および完全導体壁につい

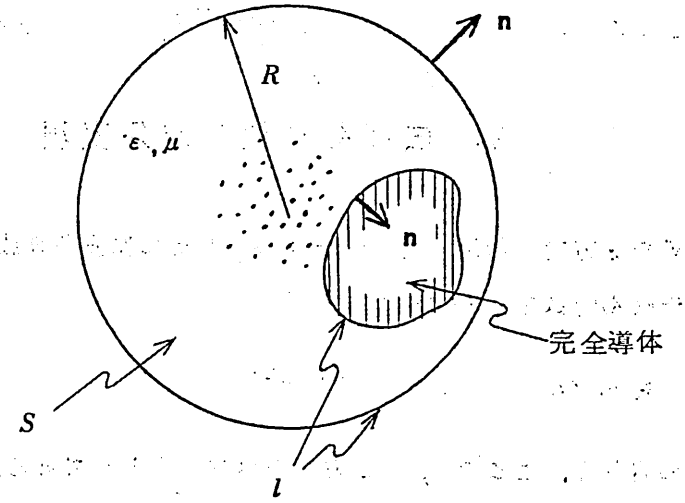


図1　式(3)に関する説明図

ての積分をあらわす．また n は図 1 に示すように R が無限大の円周および完全導体壁にたてた外向きの単位法線ベクトルである．さて，e_t は $R\to\infty$ において，一般に，

$$e_t \propto R^{-\frac{1}{2}} \exp(-aR) \quad , \qquad (a>0) \tag{4}$$

となるから，$R\to\infty$ における式 (3) の線積分は零になる．また，完全導体壁においては

$$\nabla\cdot\varepsilon e_t = 0 \quad , \quad n\times e_t = 0 \tag{5}$$

であるから，完全導体壁における式 (3) の線積分も零になる．したがって，

$$\int\left[\frac{1}{\mu}(\nabla\times e_t)^2 - \omega^2\varepsilon e_t^2\right]dS \neq 0 \tag{6}$$

であるかぎり，$\delta\beta^2$ は零になる．すなわち，式 (2) は変分表現であることが証明された．

式 (2) は変分表現であるから，e_t のだいたいの形がわかれば，それを式 (2) に代入して β^2 の 1 次高い近似値をうることができる．

3. 変分法を用いた結合理論

図 2 に示すように，線路 1 と線路 2 とが分布結合した複合系について考える．線路 1，線路 2 がそれぞれ単独に存在した場合の電磁界はすでに知られており，それらは電界の横断面成分

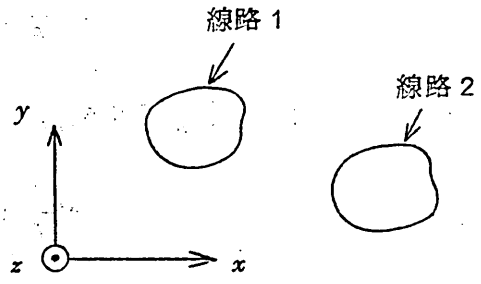


図 2　線路の結合

がそれぞれ e_{t1}, e_{t2} であり，伝ぱん定数がそれぞれ β_1, β_2 であるとする．β_1 と β_2 とがあまり大きく相違しないとき，複合系の電磁界の近似値は

$$e_t \cong m_1 e_{t1} + m_2 e_{t2} \tag{7}$$

とあらわされる．ここで，m_1, m_2 はもっとも近似度がよくなるように，すなわち，式(7)を式(2)に代入したとき，その値が定留値をとるように定められるべき定数である．

式(7)を式(2)に代入すると，

$$\beta^2 = -\frac{m_1^2 N_{11} + 2 m_1 m_2 N_{12} + m_2^2 N_{22}}{m_1^2 D_{11} + 2 m_1 m_2 D_{12} + m_2^2 D_{22}} \tag{8}$$

となる．ただし

$$D_{11} = \int \left[\frac{1}{\mu}(\nabla \times e_{t1})^2 - \omega^2 \varepsilon e_{t1}^2\right] dS \tag{9}$$

$$D_{22} = \int \left[\frac{1}{\mu}(\nabla \times e_{t2})^2 - \omega^2 \varepsilon e_{t2}^2\right] dS \tag{10}$$

$$D_{12} = \int \left[\frac{1}{\mu}(\nabla \times e_{t1}) \cdot (\nabla \times e_{t2}) - \omega^2 \varepsilon e_{t1} \cdot e_{t2}\right] dS \tag{11}$$

$$N_{11} = \int \left[\mu \left\{\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times e_{t1}\right) - \omega^2 \varepsilon e_{t1}\right\}^2 - \omega^2 \frac{1}{\varepsilon}(\nabla \cdot \varepsilon e_{t1})^2\right] dS \tag{12}$$

$$N_{22} = \int \left[\mu \left\{\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times e_{t2}\right) - \omega^2 \varepsilon e_{t2}\right\}^2 - \omega^2 \frac{1}{\varepsilon}(\nabla \cdot \varepsilon e_{t2})^2\right] dS \tag{13}$$

$$N_{12} = \int \left[\mu \left\{\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times e_{t1}\right) - \omega^2 \varepsilon e_{t1}\right\} \cdot \left\{\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times e_{t2}\right) - \omega^2 \varepsilon e_{t2}\right\} - \omega^2 \frac{1}{\varepsilon}(\nabla \cdot \varepsilon e_{t1})(\nabla \cdot \varepsilon e_{t2})\right] dS \tag{14}$$

である．

式(8)が定留値をとる条件，すなわち，$\partial\beta^2/\partial m_1=0$，$\partial\beta^2/\partial m_2=0$ より

$$\frac{m_1}{m_2}=-\frac{N_{12}+\beta^2 D_{12}}{N_{11}+\beta^2 D_{11}}=-\frac{N_{22}+\beta^2 D_{22}}{N_{12}+\beta^2 D_{12}} \tag{15}$$

となる．これより β^2 を求めると

$$\beta^2=\frac{1}{2(D_{11}D_{22}-D_{12}^2)}\left[(2D_{12}N_{12}-D_{11}N_{22}-D_{22}N_{11})\pm\right.$$
$$\left.\left\{(D_{11}N_{22}-D_{22}N_{11})^2+4(D_{11}N_{12}-D_{12}N_{11})(D_{22}N_{12}-D_{12}N_{22})\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \tag{16}$$

となる．式(16)からわかるように，2つの線路が結合した複合系の伝ぱん定数は2つの値に分離することになる．これらは対称モードと反対称モードに対応している．

式(16)は以下に示すように近似することができる．すなわち，近似的に，

$$N_{11}\cong-\beta_1^2 D_{11},\qquad N_{22}\cong-\beta_2^2 D_{22} \tag{17}$$

であるから，これを式(16)に代入し整理すると，つぎのようになる．

$$\beta^2\cong\beta_0^2\left\{\frac{1\mp N}{1\pm D}\mp\frac{1}{2(D+N)}\delta^2\right\} \tag{18}$$

$$\cong\beta_0^2\left[1\mp(D+N)\left\{1+\frac{1}{2(D+N)^2}\delta^2\right\}\right] \tag{19}$$

$$\frac{m_1}{m_2}\cong\pm\sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}}\left(1\mp\frac{1\pm D}{D+N}\delta\right) \tag{20}$$

$$\cong\pm\sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}}\left(1\mp\frac{1}{D+N}\delta\right) \tag{21}$$

ただし，式(18)から式(21)までにわたって複号は同順であり

$$\beta_0^2 = (\beta_1^2 + \beta_2^2)/2 \tag{22}$$

$$\delta = (\beta_1^2 - \beta_2^2)/(\beta_1^2 + \beta_2^2) \tag{23}$$

$$D = D_{12}/\sqrt{D_{11}D_{22}} \tag{24}$$

$$N = N_{12}/\sqrt{D_{11}D_{22}}/\beta_0^2 \tag{25}$$

である．

式(18)から式(21)までにおいて，上の複号をとるモードをaモード，下の複号をとるモードをbモードと呼ぶことにし，aモードの伝ぱん定数をβ_a，bモードの伝ぱん定数をβ_b，m_1/m_2のaモードの値をK_a，bモードの値を$-K_b$と書くことにする．

aモードの位相角をθ_a，bモードの位相角をθ_bと書けば，それらはそれぞれ次式で与えられる．

$$\theta_a = \int_0^z \beta_a \, dz \tag{26}$$

$$\theta_b = \int_0^z \beta_b \, dz \tag{27}$$

さて，aモードの電界$\mathbf{E}_{ta}$，bモードの電界$\mathbf{E}_{tb}$はそれぞれつぎのように書ける．

$$\mathbf{E}_{ta} = a\,(K_a\,\mathbf{e}_{t1} + \mathbf{e}_{t2})\,e^{j(\omega t - \theta_a)} \tag{28}$$

$$\mathbf{E}_{tb} = b\,(K_b\,\mathbf{e}_{t1} - \mathbf{e}_{t2})\,e^{j(\omega t - \theta_b)} \tag{29}$$

ただし，aおよびbは定数である．したがって

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{e}_{t1}\left(a K_a\, e^{-j\theta_a} + b K_b\, e^{-j\theta_b}\right) e^{j\omega t} \tag{30}$$

$$\mathbf{E}_{t2} = \mathbf{e}_{t2}\left(a\, e^{-j\theta_a} - b\, e^{-j\theta_b}\right) e^{j\omega t} \tag{31}$$

となる．式(30)と式(31)は線路1と線路2とのあいだの結合の様子をあらわしている．

結合区間に沿って$\mathbf{E}_{t1}$によって運ばれる電力と$\mathbf{E}_{t2}$によって運ばれる電力の和が一定であるという条件，および式(19)，(21)で与えられる関係を用いて，$z=0$において$\mathbf{E}_{t2}=0$である場合の式(30)，(31)の$\mathbf{E}_{t1}$，$\mathbf{E}_{t2}$の変化のようすを調べると図3のようになる．

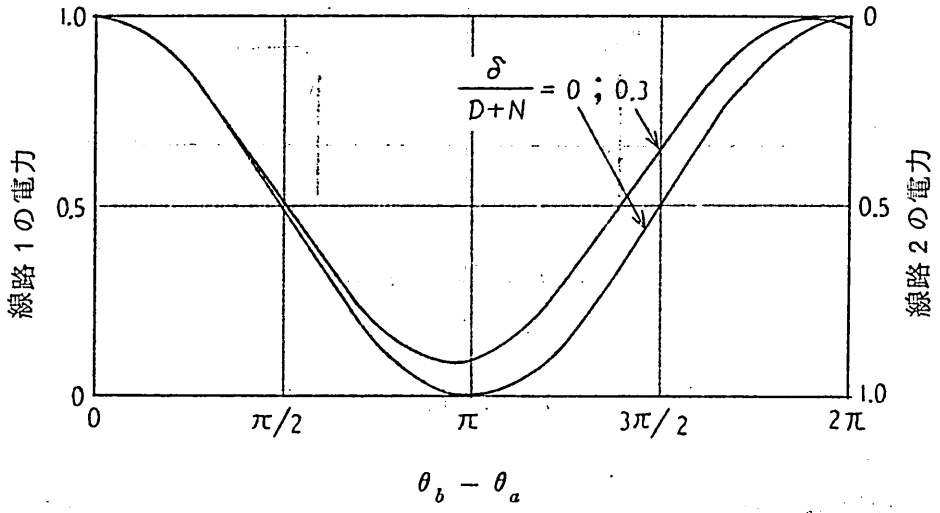


図3　結合による電力の変化

図3からもわかるように，$\delta=0$の場合には

$$\theta_b - \theta_a = \pi \tag{32}$$

で，線路1の電力はすべて線路2にうつることになる．

4. 光回路への応用

前節で述べた結合理論の具体的な適用例として，図4に示すような同形状の2本のレンズ状誘電体線路（selfoc）のあいだの結合を求めてみる．

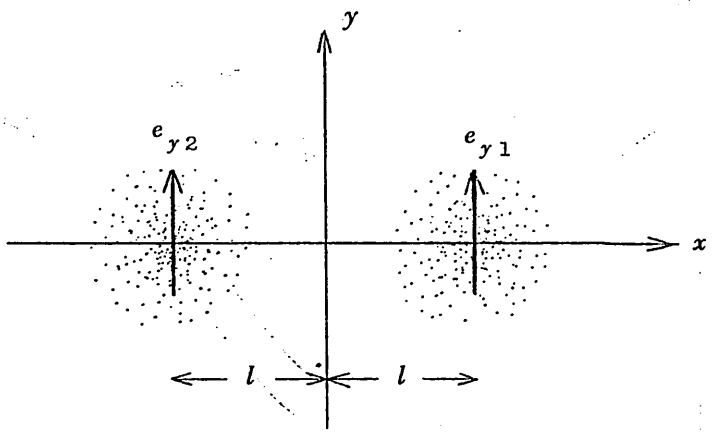


図 4　selfoc の結合

誘電率分布が

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega^2 \mu}\left\{ k^2 - 4\alpha^2 (x^2 + y^2) \right\} \tag{33}$$

で与えられるようなレンズ状誘電体線路の電磁界は，よく知られているように

$$e_y = e^{-\alpha (x^2 + y^2)} \tag{34}$$

$$\beta_0^2 = k^2 - 4\alpha \tag{35}$$

である．ただし，ここでは y 方向の直線偏波の基本モードの場合について考えることにする．

単独の線路の電磁界が上式のように知られているので，図４の複合系の結合の問題は前節の理論によって容易に求めることができる．図４の場合において

$$\omega^2 \varepsilon \mu = \begin{cases} k^2 - 4\alpha^2 \{(x-l)^2 + y^2\} & (x \geqq 0) \\ k^2 - 4\alpha^2 \{(x+l)^2 + y^2\} & (x < 0) \end{cases} \tag{36}$$

であり，２本の線路の中心間の距離は $2l$ である．

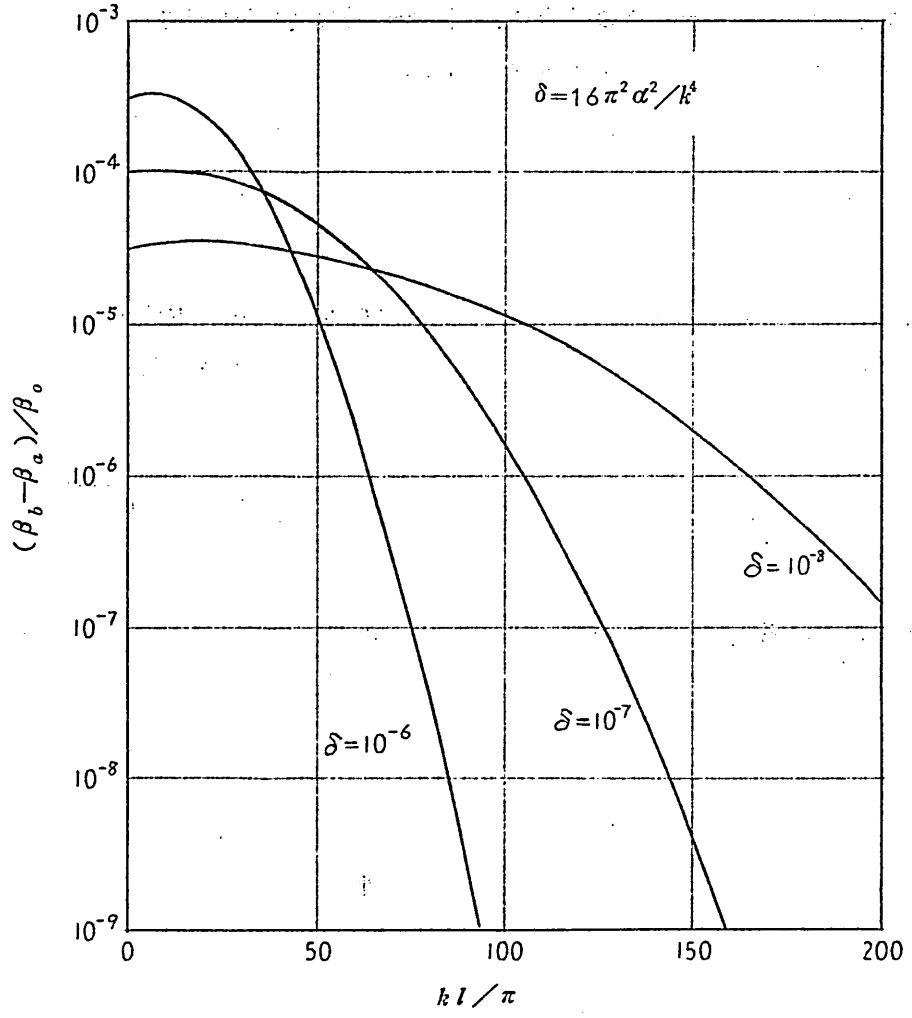


図５　selfoc の結合係数

式(34),(35),(36)を前節の結合理論に適用すれば

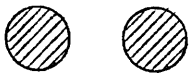
$$\frac{\beta_b - \beta_a}{\beta_0} \cong \frac{4\alpha}{k^2}\left(1 + \sqrt{\frac{2\alpha l^2}{\pi}}\right) e^{-2\alpha l^2} \tag{37}$$

が得られる．式(37)を図5に示した．　図5からもわかるように，lが増大すると結合$((\beta_b - \beta_a)/\beta_0)$は急激に減少する．

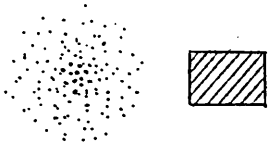
本節では2本のレンズ状誘電体線路のあいだの結合を例にとって述べたが，このほか図6(ii)～(vi)などのような結合の問題がある．図6(v)のレンズ状誘電体線路と誘電体矩形線路の結合や，図6(vi)の誘電体円柱線路と誘電体矩形線路の結合などは，光伝送線路と光集積回路との結合や励振の問題として，き

(i) 2本のレンズ状誘電体線路の結合

(iv) レンズ状誘電体線路と誘電体円柱線路の結合



(ii) 2本の誘電体円柱線路の結合



(v) レンズ状誘電体線路と誘電体矩形線路の結合

(iii) 2本の誘電体矩形線路の結合

(vi) 誘電体円柱線路と誘電体矩形線路の結合

図6　光伝送線路や光集積回路の結合

わめて重要である、前節で述べた結合理論はきわめて一般的であり，このような場合の結合も同様にして計算することができる．たとえば図6(iii)に示すような2本の同じ誘電体矩形線路のあいだの結合も前節で述べた方法によって簡単に求めることができ，その結果は全く別の方法で得られたMarcatili[3]の結果と完全に一致する．

5．むすび

変分法による開放形伝送線路間の結合を求める新しい方法を示した．この方法はきわめて一般性の高い方法であって，線路が単独に存在する場合の電磁界が知られているかぎり，伝ぱん定数の差があまり大きくない範囲でいかなる線路の組合せの場合の結合をも求めることができ，しかもその計算は比較的簡単である．したがって，光集積回路などの光回路の解析や設計にさいして有効な手段を与えるものであると考えられる．

おわりに，日ごろご指導ごべんたついただいている板倉清保教授，ならびにご討論いただく板倉研究室の諸氏に感謝する．

文　献

(1) M. F. Bracey, A. L. Cullen, E. F. F. Gillespie and J. A. Staniforth ; " Surface-Wave Research in Sheffield ", IRE Trans. Antennas and Propagation, **AP—7** , Special Supplement, p. S219 (Dec. 1959).

(2) A. L. Jones ; " Coupling of Optical Fibers and Scattering in Fibers ", J. Opt. Soc. Amer., **55**, 3, p.261 (Mar. 1965).

(3) E. A. J. Marcatili ; " Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics ", Bell Sys. Tech. J., **48**, 9, p.2071 (Sep. 1969).

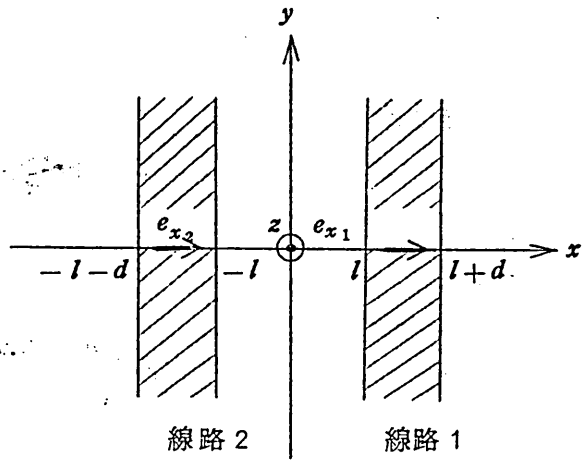
(4) K. Kurokawa ; " Electromagnetic Waves in Waveguides with Wall Impedance ", IRE Trans. Microwave Theory and Techniques, **MTT—10**, 9, p. 314 (Sep. 1962).

付録　本論文の結合理論の精度

本論文の結合理論の精度を検討するために，１例として，図Ａ１に示す同一形状の２つの板状誘電体線路の結合を求めてみる．結合するモードは，いまの場合，TM波の基本モードであるとする．板状誘電体線路の電磁界は簡単に求められ，それを式(9)から式(14)に代入すれば，D_{11}，D_{22}，D_{12}，N_{11}，N_{22}，N_{12}が得られる．これらの値を式(16)または式(18)に代入して２つの結合モード，すなわち，aモードとbモードの伝ぱん定数β_aおよびβ_bが得られる．式(16)から得られる$\beta_b-\beta_a$を$\triangle\beta_1$，式(18)から得られる$\beta_b-\beta_a$を$\triangle\beta_2$と書くことにする．

いっぽう，図Ａ１に示す線路のあいだの結合の場合には，$\triangle\beta_0=\beta_b-\beta_a$を「特性方程式を解く」という方法により全く正確に求めることができる[1]．

したがって，$\triangle\beta_0$と$\triangle\beta_1$または$\triangle\beta_0$と$\triangle\beta_2$とを比較することにより，本論文で述べた変分法を用いた結合理論の精度を知ることができる．

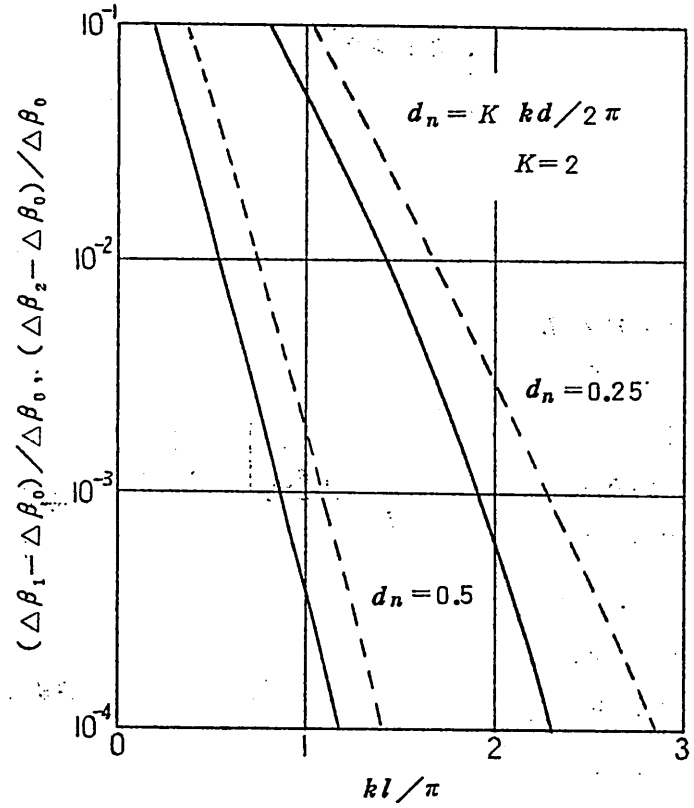


図Ａ１　板状誘電体線路の結合

図Ａ２はその具体的数値例である．ただし，Kは線路を構成する誘電体の誘電率と外部空間の誘電率との比であり，kは外部空間の自由空間伝ぱん定数である．また，実線は$(\triangle\beta_1-\triangle\beta_0)/\triangle\beta_0$をあらわし，破線は($\triangle\beta_2$

$-\Delta\beta_0)\ /\Delta\beta_0$をあらわしている．

図Ａ２よりlがある程度大きければ，十分良い精度が得られることがわかる．また，精度は電磁界の線路への集中の程度によっても変化することがわかる．



図Ａ２　変分法を用いた結合理論の精度

輻射科学研究会資料

ミリ波伝送用広帯域円形TEonモードフィルタ

倉薗貞夫
熊谷信昭
山田久
(大阪大学・工学部)

1971年4月30日

ミリ波伝送用広帯域TE_{0n}モードフィルタ

1. はじめに

円形TE_{01}モードを用いるミリ波導波管伝送方式においては，伝送特性の劣化を防ぐため，線路の途中で発生する不要モードはただちに除去する必要がある．このため，現在，誘電体内装導波管4に対して，不要モード除去フィルタとして，らせん導波管を1の割合いで挿入して線路を構成するのが適当と考えられている．(1) ところが，らせん導波管は伝送軸方向の壁面電流成分をもつ不要モードに対してはフィルタ効果を有するが，伝送軸方向の壁面電流成分のない高次円形電界モード群に対しては，その構造上フィルタ効果をもたない．したがって，このような高次円形電界モードに対しては，らせん導波管とは異なった原理によるモードフィルタが必要となる．

筆者らは先に分布結合形TE_{0n}モードフィルタを提案し，その設計理論や動作特性等を報告したが(2)，本文では特性の広帯域化を計るため，副導波管側に損失を与えた分布結合形モードフィルタを提案し，その動作原理，設計理論式ならびに具体的数値設計例とその理論的特性を示し，この方式によれば，信号TE_{01}モードにはほとんど影響を与えることなく，不要TE_{0n}モードをきわめて広い帯域にわたって除去しうることを示す．

2. 動作原理および構成

たがいに線路定数が等しく，軸方向に一様な2つの無損失線路間に一定の結合がある場合，結合の始端において一方の線路に与えられた電力は，伝送軸方向に進むに従って，次第に他方の線路に移行し，ある一定距離ごとに交

互に完全な電力の授受が行なわれる現象はよく知られている．従来，この原理にもとづいて方向性結合器，モード励振器等の設計がなされてきた．ところが，このような結合現象は，結合2線路を1つの線路とみなした場合の偶対称モードと奇対称モード間の干渉によって生ずるものであるため，この原理を用いて設計された結合器等の特性は本質的に狭帯域である．

広帯域にわたって高い結合度を得るためには上記の方法とは異なった方法を用いる必要がある．その一例としては線路の伝搬定数および線路間の結合係数を軸方向距離の適当な関数形で変化する方法が提案されているが[3]，構成が複雑となるため円形導波管回路には適用し難い．ところでわれわれの場合，円形導波管の不要 TE_{0n} モードを除去するのが目的であるから，分布結合に起因する干渉による悪影響を除く方法として，副導波管に適当な損失を与える方法が考えられる．この方法によれば，結合した2つの導波管の間で干渉による電力の移行が生ずることに変りはないが，適当な損失をもつ副導波管へ移行した電力は減衰を受けるために，再び主導波管側へもどることはほとんどなくなると考えられ，広い帯域にわたって，不要 TE_{0n} モードに対し，充分大きな減衰を与え得ることが期待される．

具体的な構成例を図1(a)，(b)および(c)に示す．A 形は円形導波管の TE_{0n} モードを半円形2分岐テーパによって，2つの半円形導波管の TE_{0n} モードに分割したのち，矩形導波管の TE_{10} モードに変換し除去するものである．B 形は円形 — 半円形テーパによって半円形 TE_{0n} モードに変換したのち，半円形 TE_{01} モードに結合させる方式のもので，結合孔をもうける位置は，信号モードへの影響を少なくするため，A 形，B 形とも TE_{01} モードの H_z 成分が零となる位置（$r_0 = 0.627R$）に選ぶ．C 形は円形導波管の円周上

にもうけた多数のスロット列を介して不要モードを外部の同軸導波管TE_{01}モードに変換するものである．なお，A，B，Cいずれの形式においても，副導波管には，損失をもたせるために，一様な損失誘電体を充填するか，もしくは損失誘電体膜を内装する．C形の場合，円周方向のスロット列の数をmとすれば，TE_{01}モードはTE_{mn}（$n=1, 2, 3\cdots\cdots$)モードに変換される可能性があるが，mの値に対して，円形導波管の半径をTE_{m1}モードが遮断域となるようにすれば，信号モードへの影響は，A形およびB形と同様にほとんどないものと考えられる．C形はA形，B形に比較して，構造が簡単であり，半円形テーパを必要としない点でも有利であるので，以下C形についてのべる．

3. 設計理論式

伝送軸方向（Z方向）に一様な2つの線路1および2が一定の結合係数jcによって互いに結合している場合，それぞれの線路を伝搬する波の規格化振巾をE_1およびE_2とし，結合部の始端（$Z=0$）において$E_1(0)=1$，$E_2(0)=0$とすると，任意の位置Zにおける振巾$E_1(Z)$は次式で与えられる．[4]

$$E_1(Z)=V_1(\xi)\ e^{-\left[\alpha_1+j\left(c+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)\right]z} \qquad (1)$$

ここに

$$V_1(\xi)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{P}{Q}\right)e^{(A+Q)\xi}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{P}{Q}\right)e^{(A-Q)\xi} \qquad (2)$$

$$A=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2C}\ ,\quad B=\frac{\beta_1-\beta_2}{2C}\ ,\quad \xi=CZ \qquad (3)$$

$$P = A + jB,\quad Q = \sqrt{P^2 - 1} \tag{4}$$

α_1, α_2 ：線路１および２の減衰定数

β_1, β_2 ：線路１および２の結合によるじょう乱分を考慮した位相定数

である．

さて，図１(C)のような構成における円形 TE_{0n} モードと同軸 TE_{01} モード間のスロット１個当りの振巾結合係数 C_{12} を Bethe の理論[5]にしたがって計算すると次式のようになる．

$$C_{12} = \sqrt{C_{11}\quad C_{22}} \tag{5}$$

ただし，C_{11} は同一寸法の２つの円形 TE_{0n} モード導波管を結合した場合の結合係数，C_{22} は同じく２つの同軸 TE_{01} モード導波管を結合した場合の結合係数であって，それぞれ次式で与えられる．

$$C_{11} = \frac{\hat{x}^2_n \ \lambda_{g1} M_z}{4\pi^2 \ R^4} A_t \tag{6}$$

$$C_{22} = \frac{x_1^2 \ \lambda_{g2} M_z}{4\pi^2 a^4 \left\{ \left(\frac{J_1(\hat{x}_1)}{J_1\left(\frac{b}{a}\hat{x}_1\right)} \right)^2 - 1 \right\}} A_t \tag{7}$$

ここで，R は円形導波管の半径，a および b はそれぞれ同軸導波管の内部導体および外部導体の半径，x_n および $\hat{x}_1$ はそれぞれ

$$J_1(x) = 0$$

の第 n 番目の根および

$$J_1\left(\frac{b}{a}x\right)N_1(x) - N_1\left(\frac{b}{a}x\right)J_1(x) = 0$$

の第1番目の根である．λ_{g1} および λ_{g2} はそれぞれ円形導波管および同軸導波管の管内波長を表わし，管内が真空のときそれぞれ

$$\lambda_{g1} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{x_n\lambda}{2\pi R}\right)^2}} \tag{8}$$

$$\lambda_{g2} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\hat{x}_1\lambda}{2\pi a}\right)^2}} \tag{9}$$

で与えられる．ここで，λ は自由空間波長を表わす．

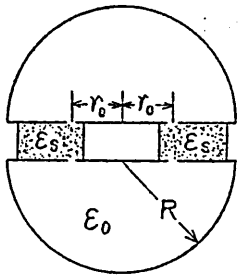
M_Z はスロットの軸方向磁気的分極率であって，その値はスロットの形状，寸法によって定まり，例えば 円形スロットの場合には

$$M_z = \frac{\pi l^3}{24}\cdot\frac{1}{l_n\frac{4l}{w}-1}, \quad (w \ll l) \tag{10}$$

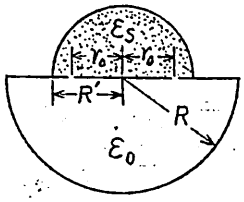
となる．ただし，l および w はそれぞれスロットの長径および短径を表わす．

また，A_t はスロットをもうける導体板の厚さtによって生ずる結合の減少の度合を表わす係数であって，近似的に次式で与えられる．(2)

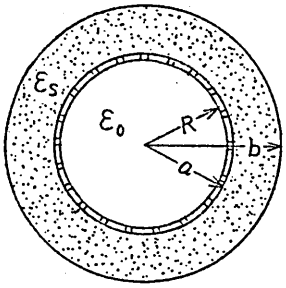
$$A_t = 10^{-1.364\frac{t}{l}\sqrt{1-(\frac{2l}{\lambda})^2}} \tag{11}$$

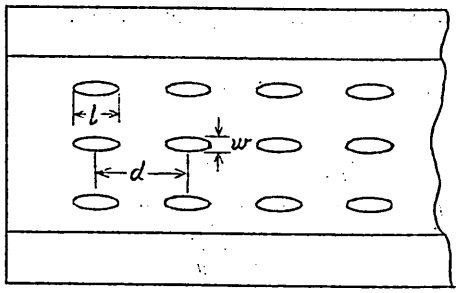


(a) *A*形



(b) *B*形





(c) *C*形

図1　TE_{0n}モードフィルタの構成例

円形導波管壁にもうけるスロットの円周方向の個数をmとし，スロット中心間の軸方向間隔をdとすると，単位長当りの結合係数Cは次のように表わされる．

$$C=\frac{m}{d}C_{12} \tag{12}$$

さらに，管壁にこのような結合スロットが存在すると，各導波管内を伝搬するモードの位相定数はじよう乱をうけて，結合がない場合とは異なってくる．このじよう乱分を考慮した位相定数は，円形TE_{0n}モードおよび同軸TE_{01}モードについてそれぞれ

$$\beta_1=\beta_{01}+\frac{m}{d}C_{11} \tag{13}$$

$$\beta_2=\beta_{02}+\frac{m}{d}C_{22} \tag{14}$$

である．[4] ただし，β_{01}およびβ_{02}は結合がない場合のそれぞれのモードの位相定数を表わし，$\beta_{01}=2\pi/\lambda_{g1}$，$\beta_{02}$は(i)同軸導波管内に一様な比誘電率$\varepsilon_s$の誘電体を入れたC－1形の場合には，$\beta_{02}=2\pi/\sqrt{\varepsilon_s-(\hat{x}_1\lambda/2\pi a)^2}$で与えられ，(ii)同軸導波管の内部導体表面を厚さt_1，比誘電率ε_sなる誘電体薄膜で被覆したC－2形の場合には

$$\beta_{02}=\frac{2\pi}{\lambda_{g2}}+\frac{2\pi}{3}(\varepsilon_s-1)\frac{\lambda_{g2}}{\lambda^2}\frac{x_1^2}{\left\{\dfrac{J_1(\hat{x}_1)}{J_1(\frac{b}{a}\hat{x}_1)}\right\}^2-1}\delta^3{}_e \tag{15}$$

となる．（付録参照）　ただし $\delta_e = t_1 / a$ である．

さて，結合する２つのモードの伝搬定数が相等しい場合，すなわち，

$$A = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2C} = 0 \tag{16}$$

$$B = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2C} = 0 \tag{17}$$

なる場合には，式(2)は

$$V_1(\xi) = \cos c z \tag{18}$$

となって　$cz_0 = \pi / 2$ の条件を満足する位置 z_0 において不要 TE_{0n} モードは１００％同軸 TE_{01} モードに変換される．したがって，この位置に適当な無反射終端を置き，その電力を吸収すれば，不要 TE_{0n} モードを除去しうることになる．ところが，A，B および C の値はいずれも周波数の関数であるために，この原理に基づいて設計されたモードフィルタは，不要モードに対し広帯域にわたって充分大きな減衰を与えることができない．

広帯域化を計るために $A \fallingdotseq 0$ なる場合について考える．モードフィルタの場合には，信号モードへの影響を考慮すると $A > 0$ とすることは不都合である．$A \leqq 0$ の場合について，式(2)を数値的に検討した結果を図２に示す．同図の縦軸 ξ_0 は，不要 TE_{0n} モードが結合部分を通過する場合にうける減衰量

$$I.L = -20 \log |V_1(\xi)| \tag{19}$$

の値を最大とする ξ の値を表わし，同じく，$\Delta\xi$ は挿入損失の大きさが１５

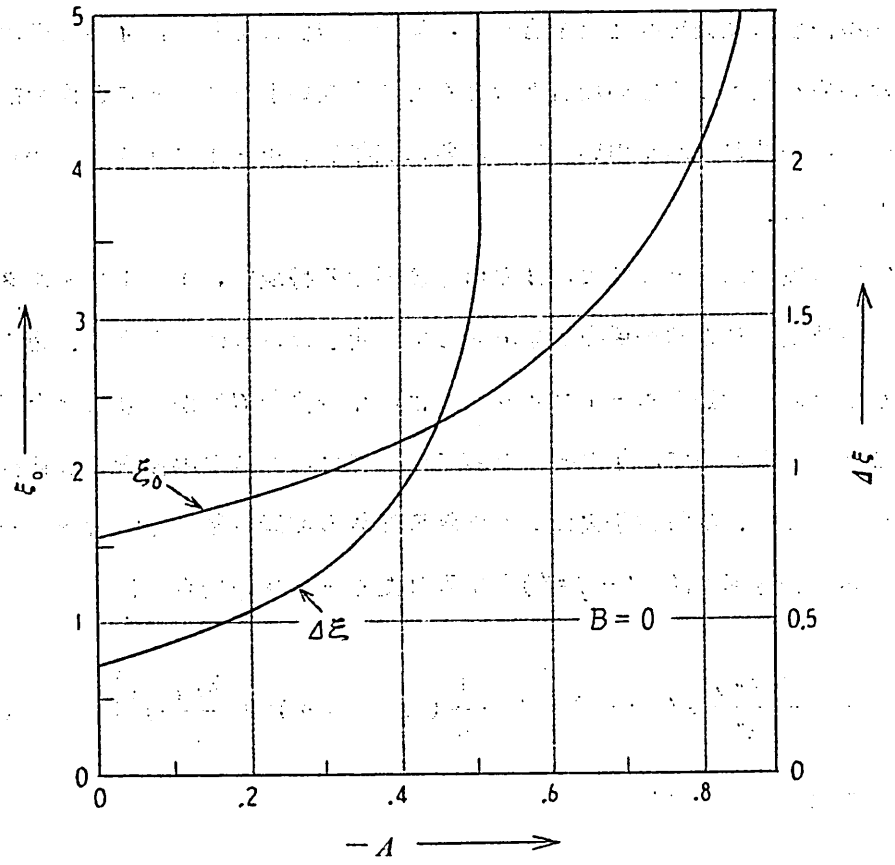


図２　$I.L=-20\log|V_1(\xi)|$ の最大値を与える ξ_0 および $I.L \geq 15\,dB$ となる ξ の範囲 $\triangle\xi$ と $-A$ の関係

dB 以上であるような ξ の範囲を表わす．図２より明らかなとおり，$-A$ の値を大きくするにしたがって，結合長 $Z_0=\xi_0/C$ も増加するが，$\triangle\xi$ の変化の割合はさらに大きく，$-A\simeq 0.5$ において $\triangle\xi\to\infty$ となる．この計算は $=0$ の割合について行なったものであるが，結合係数 C および $B=(\beta_1-$

$\beta_z)/C$ の値の周波数による変化の割合は，$A<0$ の条件を実現するために同軸導波管に損失を与えた場合にも，適当な方法によれば，$A=0$ の場合，すなわち損失を与えない場合とほとんど変らないようにすることが可能であるので，上述の原理を用いれば，非常に広帯域のモードフィルタが得られることになる．

実際の設計にあたっては，A の値は希望する帯域幅，モードフィルタの全長，単位長当りの結合係数等を考慮して決定しなければならない．図1（C）に示した同軸構造のモードフィルタでは，結合係数 C はかなり大きな値にすることができるので，A の値の計算においては，2つの導波管の導体損失は無視してよい．誘電体損失による同軸導波管の減衰定数は(i)管内に一様な誘電体（誘電率 $\varepsilon_0(\varepsilon'-j\varepsilon'')$）を入れた $C-1$ 形の場合には

$$\alpha_z=\frac{\pi\lambda_{gz}}{\lambda^2}\varepsilon'\tan\delta\left\{1-\frac{1}{8}(\varepsilon'\tan\delta)^2\left(\frac{\lambda_{gz}}{\lambda}\right)^4\right\} \qquad (20)$$

$$\tan\delta=\varepsilon''/\varepsilon'$$

によって与えられ，(ii)内部導体表面に誘電体薄膜を被覆した C－2 形の場合には

$$\alpha_z=\frac{2\pi}{3}\varepsilon'\frac{\lambda_{gz}}{\lambda^2}\frac{\hat{x}^2}{\left\{\dfrac{j_1(\hat{x}_1)}{j_1\left(\dfrac{b}{a}\hat{x}_1\right)}\right\}^2-1}\delta_e^3\tan\delta$$

となる．（付録参照）

4. 数値設計例および理論的特性

中心周波数を60 GHz に選び，前節の諸式を用いて図1(C)のような同軸構造分布結合形TE_{02}モードフィルタを設計した数値例が表1である．

表1　同軸構造分布結合形TE_{02}モードフィルタの設計例

諸量＼形式	C－1形	C－2形
R (mm)	11.0	11.0
a (mm)	11.5	11.5
b (mm)	16.0	16.3
l (mm)	2.0	2.0
w (mm)	0.8	0.8
d (mm)	2.5	2.5
m (個)	30	30
ε'	1.1	3.0
t_1 (mm)		0.41

C－1形TE_{02}モードフィルタの理論的特性を図3に示す．同軸導波管内に一様に誘電体を充填したこの形では，$\beta_1-\beta_2$の値の周波数による変化が大きいために，TE_{02}モードの減衰量10dB以上を与える周波数帯域幅は結合長L＝110 cmの場合　1.2 GHz 程度となっている．

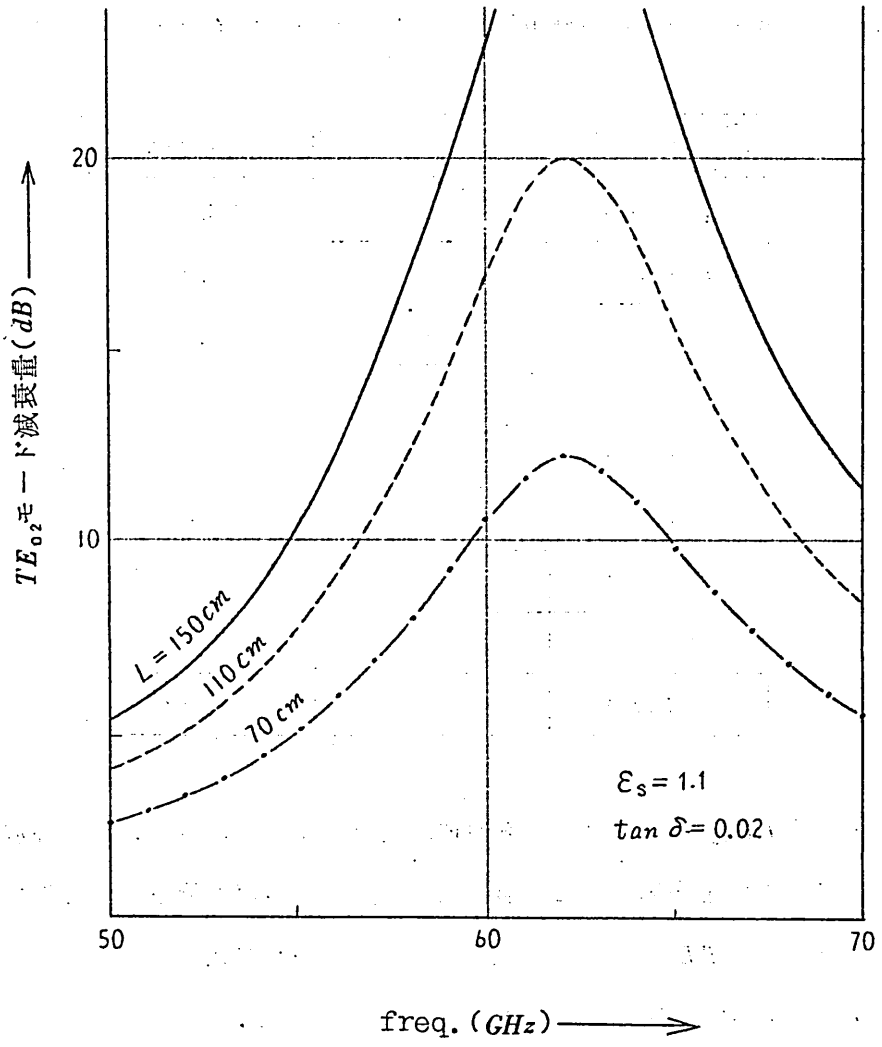


図３　C －１形 TE_{02} モードフィルタの特性

図４はＣ－２形モードフィルタの特性について，結合長Lおよび薄膜誘電体の tan δ をパラメータとして計算した結果を示したものである．図５は同じモードフィルタについて tan $\delta = 1.1$ 一定として結合長を変えた場合の特性を示したものである．これらの図から誘電体薄膜を内装したこの形の場合には，結合長を１m程度以上にすれば，３０GHz程度以上の広帯域にわたって２０dB程度以上の大きな不要モード除去効果が得られることがわかる．

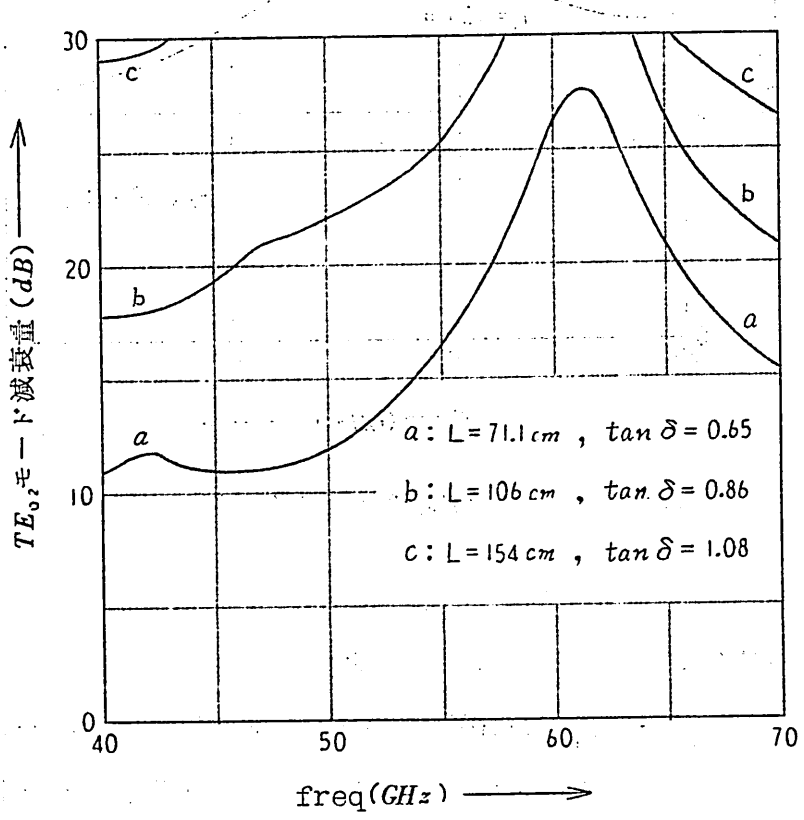


図４　Ｃ－２形TE_{02}モードフィルタの特性(1)

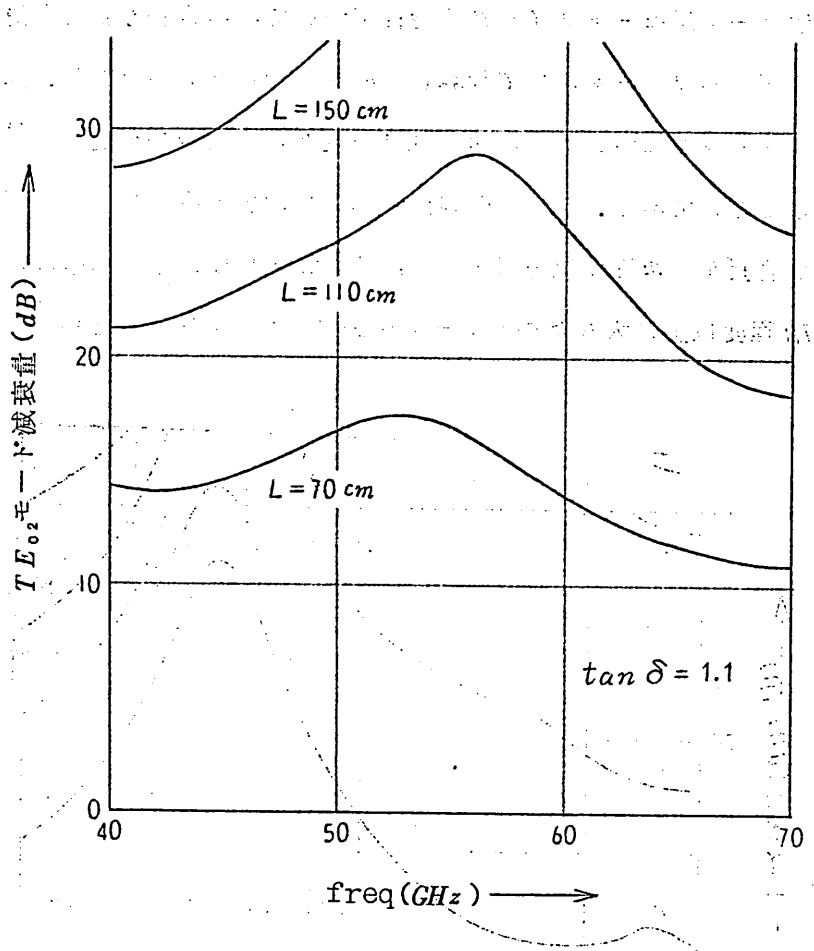


図5　C－2形TE_{02}モードフィルタの特性(2)

5. 検　　討

5.1　信号TE_{01}モードの結合による損失

C形の場合には，円形導波管壁面上にスロットをもうけているために，不要モードだけでなく，信号TE_{01}モードも同軸導波管TE_{01}モードと結合を生ずる可能性がある．C－2形についてその影響を調べた結果は図6に示す通りであって，信号TE_{01}モードの結合による損失は非常に少ないことがわか

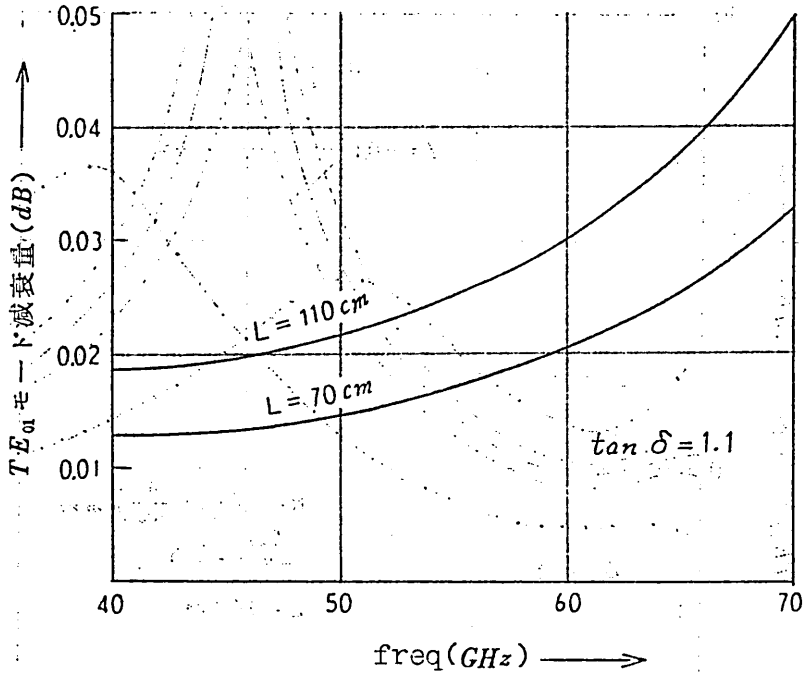


図6　C－2形TE_{02}モードフィルタにおける信号TE_{01}モードの結合量

る．

5.2　工作誤差の影響

一般にミリ波回路素子の製作にあたっては，非常に高い工作精度が要求される．そこで，C－2形モードフィルタについて，円形導波管の半径Rの誤差と特性の関係を調べた．計算結果は図7に示す通りである．また，同軸導波管に内装する誘電体薄膜の厚みt_1の誤差と特性との関係を調べた結果を図8に示す．図7から，半径Rに対する許容寸法誤差は，標準矩形導波管WRJ

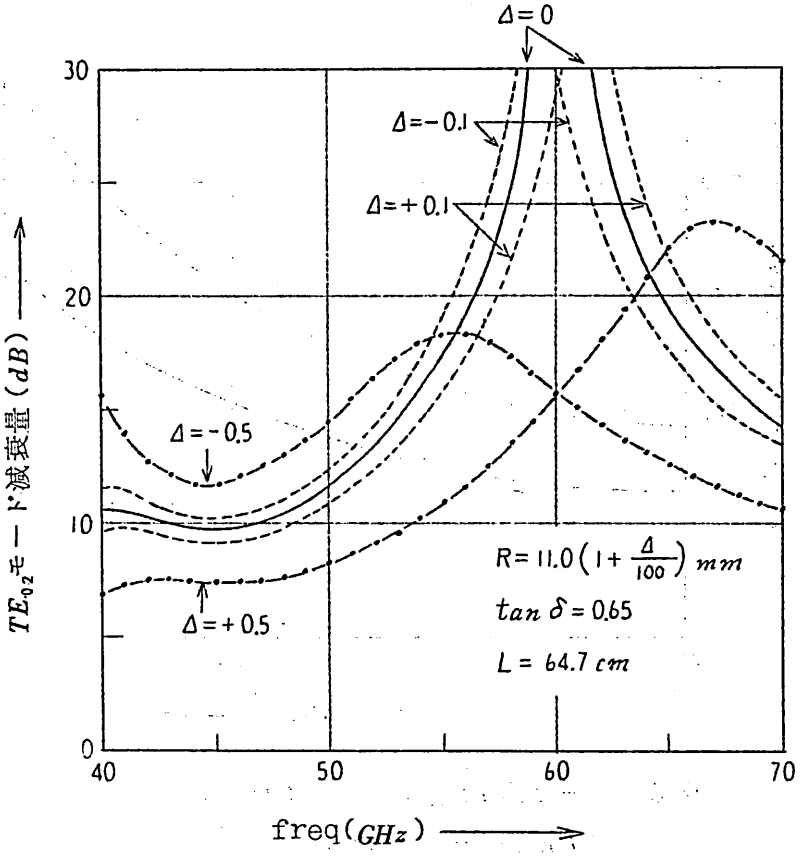


図7　C－2形モードフィルタの半径Rの寸法誤差による特性の変化

－15の許容寸法誤差0.38%程度以下にする必要があろう．

6. 結　　言

円形導波管の不要 TE_{0n} モードを，損失を有する副導波管に分布結合させて除去する方式のモードフィルタを提案し，その動作原理，設計理論式，具体的な数値設計例等を示してその理論的動作特性を調べた．その結果，この

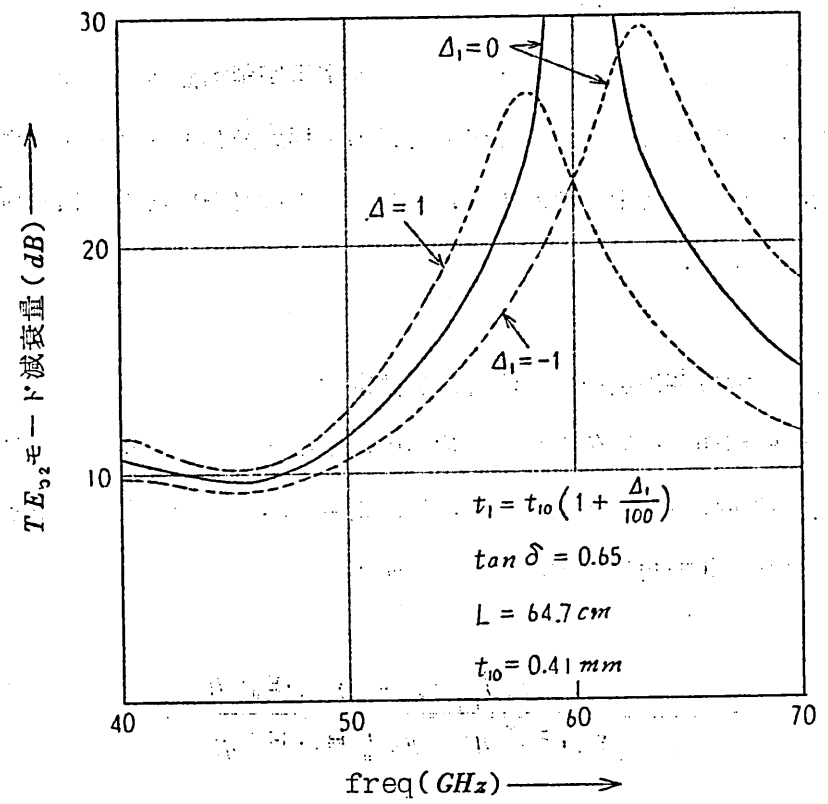


図８　Ｃ－２形モードフィルタの内装誘電体の厚さ
t_1の誤差による特性の変化

方式によれば，実現可能な寸法構造のフィルタによって不要TE_{0n}モードに対して，きわめて広い帯域にわたり充分大きなフィルタ効果が得られることがわかった．また，信号TE_{01}モードの結合による損失は理論的には無視しうる程度に小さいこともわかった．工作誤差と動作特性との関係についても計算例を示した．

謝　　辞

日頃ご指導ごべんたついただいている本学工学部板倉清保教授，ならびに種々有益な御討論をいただいた住友電気工業株式会社システム開発部倉内憲孝博士，吉田健一博士に深謝する．また，常々ご討論いただく板倉研究室の諸氏に感謝する．

付録　誘電体内装同軸導波管の伝搬定数

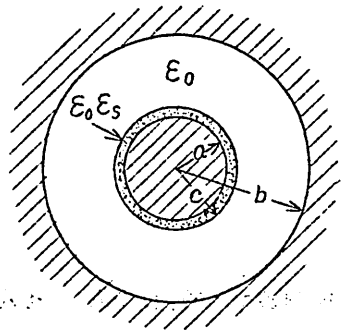
一般に壁面が完全導体からなる体積V，電磁界ベクトル$\mathbf{E}_0$および$\mathbf{H}_0$，共振角周波数ωなる空胴共振器中に，比誘電率ε_s，体積V_1なる微少誘電体を入れた場合の共振角周波数の変化分$\Delta\omega$は

$$\Delta\omega = -\omega \frac{\varepsilon_0 \int_{v_1} (\varepsilon_s - 1)\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0^* dV}{\varepsilon_0 \int_v \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* dV + \mu_0 \int_v \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^* dV} \qquad (A\cdot 1)$$

によって与えられる．[6] ここに，ε_0およびμ_0はそれぞれ真空中の誘電率および透磁率，$\mathbf{E}_1$は微少誘電体内の電界ベクトル，$*$印は共役複素数を表わす．

図Ａ１に示すように内部導体表面に厚さt_1なる誘電体薄膜を被覆した同軸共振器（内部導体半径a，外部導体半径b）に式（Ａ１）を適用する場合，同軸TE_{01}モードを対象とすると，$\mathbf{E}_0$は誘電体境界面に平行な成分のみであるから薄膜内の電界$\mathbf{E}_1$は円柱座標(r, φ, z)系において

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 = V_c \frac{x_1}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{J_1\left(\frac{\hat{x}_1}{a} r\right) N_1(\hat{x}_1) - N_1\left(\frac{\hat{x}_1}{a} r\right) J_1(\hat{x}_1)}{\sqrt{\left\{\frac{J_1(\hat{x}_1)}{J_1\left(\hat{x}_1 \frac{b}{a}\right)}\right\}^2 - 1}} \cdot \mathbf{i}_\varphi \qquad (A\cdot 2)$$



図Ａ１　誘電体内装同軸共振器の断面

と表示できる.[7] ただし i_φ は φ 方向単位ベクトル，V_c は振幅定数である．また，この共振器を構成する同軸導波管の伝搬定数と式（Ａ１）との間には，誘電体薄膜を内装しない場合の伝搬定数を γ，薄膜を内装したことによる変化分を $\triangle\gamma$ とすると次の関係がある．

$$\frac{\triangle\gamma}{\gamma} = -\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)^2 \frac{\triangle\omega}{\omega} \qquad (A\cdot 3)$$

以上の諸式および同軸導波管の電磁界表示式[6]を用いて計算すると，誘電体内装同軸導波管の TE_{01} モードの伝搬定数に関して次式が得られる．

$$\frac{\triangle\gamma}{\gamma} = \frac{1}{3}(\varepsilon_s - 1)\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)^2 \frac{\hat{x}_1^2}{\left\{\dfrac{J_1(\hat{x}_1)}{J_1(\frac{b}{a}\hat{x}_1)}\right\}^2 - 1}\,\delta_e^3 \qquad (A\cdot 4)$$

ここに，

$$\delta_e = \frac{e - a}{a} = \frac{t_1}{a}$$

である．

文　　献

(1) 山口，鈴木："誘電体内装導波管およびらせん導波管の構造とその特性" 研実報，16，12，p. 2741（昭42）

(2) 熊谷，倉茵，中原，倉内："TE_{01}姿態導波管用不要TE_{0n}姿態除去ろ波器"，信学誌，47，3，p. 325（昭39）

(3) W. H. Louisell : "Analysis of the Single Tapered Mode Coupler", B. S. T. J., 34, p. 853, July 1955

(4) S. E. Miller : "Coupled Wave Theory and Waveguide Applications", B. S. T. J., 33, 3, p. 661, May 1954

(5) H. A. Bethe : "Theory of Diffraction by Small Holes", Phy. Rev., 66, 10, p. 163, Oct 1944

(6) J. Müller : "Untersuchungen über elektromagnetische Hohlräume", Hochfreq. Technik, 54, p. 157, 1939

(7) N. Marcuvitz : "Waveguide Handbook" MIT Rad. Lab. Series, 10, 1951

半導体を装荷した矩形導波管中の電磁波の伝播特性

山口公明・張年錫・松尾幸人
（シャープ株式会社）（大阪大学産業科学研究所）

昭和46年4月30日

輻射科学研究会

1．緒　　言

矩形導波管に誘電体物質を装荷した場合の伝播特性の解析は，これまで多く行なわれているが，[1]最近，例えば半導体の誘電率・抵抗等の物理定数を測定するといった実用上の要請もあって，半導体を矩形導波管に装荷した場合の伝播特性の数値解析も二三報告されている．[2),3),4)]

R.H.Sheikh等は，半導体板を装荷した場合について計算している．[2)]彼らは図1に示すように半導体を対称に装荷した無限に長い系の伝播定数を，誘電率，導電率，t/a がそれぞれ $0.1 \leq \sigma \leq 10$ mho/m($0.001 \leq \sigma \leq 0.1$ mho/cm)，$0.001 \leq t/a \leq 0.25$ の範囲について，3つの周波数 10.0 GHz，34.5 GHz，70.0 GHz に対して計算している．彼らは，伝播定数の計算を，Rayleigh–Ritzの2モード近似と次章で述べる永年方程式による厳密解の両方について求めた．そしてこの近似解と厳密解を比較して，このように高い複素誘電率を持つ媒体を装荷した場合，2モード近似に大きな誤差を生じる事を指摘している．さらに得られた厳密解から，導電率 σ の変化に対する位相定数の変化は，ほとんど無視出来るほど小さい事，又 σ と t/a がある範囲内にある時，減衰定数 α と導電率 σ が線形関係を持ち，α が σ に比例して増加する事を示している．

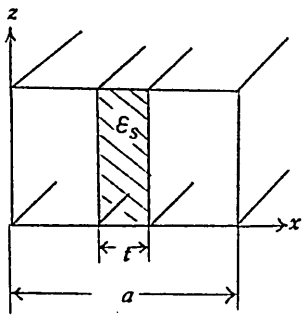


図 1.　半導体を対称に装荷

又これに先だって，M.W.Gunn は，半導体薄膜を装荷した場合の伝播特性の解析と実験を行っている．[3)]

以上これらはいずれも対称装荷の場合のみであり，その厚さ t 及び導電率 σ が特定の値に限られている．そこで我々は半導体装荷の場合をさらに一般的に考察するために，誘電率，導電率，t/a がそれぞれ $\varepsilon_r = 12.5$，($0.8/2^9$ =) $0.015625 \leq \sigma \leq 0.8$ mho/cm，$0.0 \leq t/a \leq 1.0$ の範囲で，周波数 $f =$ 16.0 GHz，導波管の巾 $a = 1.0668$ cm の場合について，対称装荷，非対称装荷の両方の系に対して伝播定数を計算した．その結果，新たな事実や問題点が出て来たので以下それらについて述べる．

2．一 般 理 論

この章では，これまでに既に確立されている誘電体（半導体）を装荷した矩形導波管の TE_{n0} モードの波に対する伝播定数を与える永年方程式と，これの近似解を与える Rayleigh－Ritz法について簡単にまとめておく．

2－1 永年方程式

半導体を装荷した場合も，誘電体を装荷した場合も数学的取り扱いからすれば全く同じであり，半導体の場合は，ただ導電率 σ を複素誘電率 $\varepsilon_s = \varepsilon_r - j(\sigma/\omega\varepsilon_0)$ の形で含ませれば良いだけである．図2のように誘電体を装荷した矩形導波管の電磁波の伝播特性に対する理論を要約すれば次のようになる．

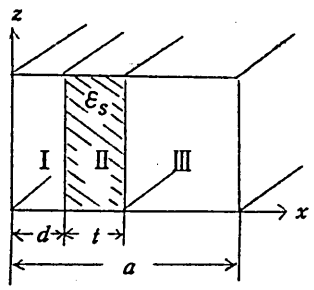


図2

誘電体板を図2のように装荷した場合，TE_{n0} モードが単独で伝播し得る事が知られている[5]．そこで以下 TE_{n0} モードについて考えてゆく事にする．図2の系に TE_{n0} モードが伝播する場合の永年方程式は次のようにして求ま

る．

誘電体中（領域Ⅱ）でのMaxwell eq.は

$$\nabla \times \mathbb{H} = j\omega\varepsilon_s\varepsilon_0 \mathbb{E} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbb{E} = -j\omega\mu_0 \mathbb{H} \tag{2}$$

ただしE，Hはマイクロ波の電磁界で時間について全て$e^{j\omega t}$で変化している．(1)，(2)より

$$\nabla \times \nabla \times \mathbb{H} = \omega^2 \varepsilon_s \varepsilon_0 \mu_0 \mathbb{H} \tag{3}$$

ところでTE_{n0}モードの場合H_x, H_yは$e^{jk_s x} e^{-\gamma y}$（k_s；誘電体中の波数，γ；伝播定数）の形で与えられるから，(3)式より

$$k_s^2 = \omega^2 \varepsilon_s \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2 \tag{4}$$

を得る．一方空気中（領域Ⅰ，Ⅲ）では$\varepsilon_s = 1$であるから，直ちに

$$k_a^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2 \tag{5}$$

を得る．ただしk_aは空気の部分（領域Ⅰ，Ⅱ）での波数．

次に導波管壁で電界の接線成分は零だから，TE_{n0}モードの場合，領域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲでの電界$E = \tilde{a}_z \cdot E_z$は次のように書ける．

$$E_z = (A \sin k_a x) \cdot e^{-\gamma y} \qquad \text{Ⅰ} \tag{6}$$

$$E_z = (Be^{jk_s x} + Ce^{-jk_s x}) \cdot e^{-\gamma y} \qquad \text{Ⅱ} \tag{7}$$

$$E_z = \{D \sin k_a (a - x)\} \cdot e^{-\gamma y} \qquad \text{Ⅲ} \tag{8}$$

誘電体と空気との境界でE_z, H_yは連続であるから，これから4つの境界条件を得る．そしてこの4つの条件式がA, B, C, Dに関して自明でない解を持つ条件より

$$k_a \cos k_a \cdot d\{k_a \cos k_a (a - d - t) \cdot \sin k_s t$$

$$+k_s \cdot \sin k_a(a-d-t)\cdot \cos k_s t\}$$

$$-k_s \cdot \sin k_a d\{k_s \cdot \sin k_a(a-d-t)\cdot \sin k_s t$$

$$-k_a \cos(a-d-t)\cdot \cos k_s t\} = 0 \qquad (9)$$

結局(9),(4).(5)が図2に示す系の永年方程式になっている.

2－2　Rayleigh－Ritz法

2－1に示した永年方程式を解析的に解く事は出来ないから，我々はこれをNewton－Raphson法で数値計算した．しかしこの場合，永年方程式が三角函数を含むため，無限個の解を持ち，特定のモードの解を得ようとすれば，初期値としてその十分良い近似値が必要である．

誘電体装荷の矩形導波管の伝播定数の近似値を求める方法は，一般に変分法と摂動法の2つの方法がある．しかし装荷部分が無視出来るほど小さくない限り，半導体のように大きな複素誘電率を持つものは系を大きく変化させるので摂動分が大きすぎて，良い近似は得られない．こういう観点から，半導体装荷の場合，変分法の一つであるRayleigh－Ritz法による多モード近似を用いて近似解を計算するのが良い．

そこでRayleigh－Ritz法を簡単にまとめると次のようになる[5]．

2－1の場合と同様に，図2の系にTE_{n0}モードが伝播する場合を考える．TE_{n0}モードは，一般にMagnetic Hertzian Potential

$$\Pi_h = \tilde{a}_x \psi_h(x,z)e^{-\gamma y} \qquad (20)$$

より得られる．TE_{n0}モードでは$E_x=0$であるから，εがxの関数であっても

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = 0 \qquad (21)$$

が成立する．従ってベクトルポテンシャルΠ_hを次のように定義出来る．

$$H = \varepsilon_r k_0^2 \Pi_h + \nabla\phi \tag{22}$$

ただし，ϕは任意のスカラー函数，そして適当なゲージ

$$\nabla \nabla \Pi_h = \nabla\phi \tag{23}$$

を取れば

$$\nabla^2 \Pi_h + \varepsilon_r k_0^2 \Pi_h = 0 \tag{24}$$

を得る．そこでz方向の境界条件を考慮して

$$\Pi_h = \tilde{a}_x \phi_h(x) \cos \frac{m\pi}{b} z e^{-\gamma y} \tag{25}$$

とすれば，これを(24)に代入して

$$\frac{d^2\phi_h}{dx^2} + \{\gamma^2 + \varepsilon_r k_0^2 - h^2\} \phi_n = 0 \tag{26}$$

ここで$h = m\pi/b$

(26)にϕ_hを掛けて，$0 \leq x \leq a$の範囲で積分し，さらに$x = 0$，$x = a$での境界条件を適用すれば，γ^2に対する変分表現

$$\gamma^2 \int_0^a \phi_h^2 \, dx = \int_0^a \left(\frac{d\phi_h}{dx}\right)^2 + (h^2 - \varepsilon_r k_0^2) \phi_h^2 \, dx \tag{27}$$

を得る．未知の函数ϕ_hは，一般の導波管の個有函数の級数和として近似されるから，今N個の個有函数で近似すれば

$$\phi_{hk} = \sum_{n=1}^{N} a_{nk} f_n(x) \tag{28}$$

ただし，$f_n(x) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$

ここで添字kは，k番目の近似個有函数である事を示している．

(28)を(27)に代入し，これが停留点となる条件より

$$\sum_{n=1}^{N} a_{nk} (T_{sn} - \gamma_k^2 \delta_{sn}) = 0 \quad s = 1, 2, \cdots N \tag{29}$$

ここで

$$T_{sn} = T_{ns} = \int_0^a \frac{df_n}{dx}\frac{df_s}{dx} - (\varepsilon_r k_0^2 - h^2) f_n \cdot f_s \, dx \qquad (30)$$

(29)式が，$a_{nk} = 0$ （$n = 1,2, \cdots N$）以外の解を持つための条件より

$$| T_{ns} - \gamma_k^2 \delta_{ns} | = 0$$

$$s = 1, 2, \cdots N \ , \quad n = 1, 2, \cdots N \qquad (31)$$

を得る．結局(31)式が永年方程式に対する近似式になっている．

行列式(31)の解は，真の個有値γ^2の上限になっており，(31) の個有値のうち最小のものγ_1^2は，真の最小個有値の近似値になっている．以下第2，第3，…… についても同様である[6]．しかしここで注意しなくてはならないのは，本研究のように半導体を取り扱う場合，個有値が複素数になって，その大小を論ずる事が出来ない点である．この事は，半導体装荷の矩形導波管の伝播特性と本質的にかゝわっており，そこでもう一度議論しよう．

3・結 果 と 考 察

3 — 1　半導体を対称に装荷した場合

図3に示すように半導体を対称に装荷したy方向に無限に長い系の伝播定数を計算しよう．まず2章の(9)，(4)，(5)をこの系に適用すれば，厳密解を与える永年方程式は，

$$\left.\begin{aligned} & k_s \tan k_s \frac{t}{2} - k_a \cot k_a (a-t)/2 = 0 \\ & k_s^2 = \varepsilon_s k_0^2 + \gamma^2 \\ & k_a^2 = k_0^2 + \gamma^2 \end{aligned}\right\} (32)$$

となる．

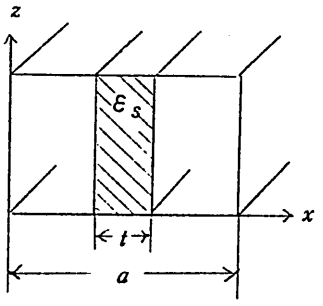


図3　対 称 装 荷

又Rayleigh — Ritz 法より得られる近似

式は，2章の(31)(30)より

$$|T_{ns} - \gamma^2 \delta_{ns}| = 0$$

$$T_{nn} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} - k_0^2 - k_0^2(\varepsilon_s - 1)\left\{\frac{t}{a} - \frac{1}{n\pi}\cos n\pi \cdot \sin\frac{t}{a}n\pi\right\}$$

$$T_{ns} = 2(\varepsilon_s - 1)k_0^2\left\{\frac{1}{(n+s)\pi}\cos\frac{n+s}{2}\pi \cdot \sin\left(\frac{t}{a}\cdot\frac{n+s}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(n-s)\pi}\cos\frac{n-s}{2}\pi \cdot \sin\left(\frac{t}{a}\cdot\frac{n-s}{2}\pi\right)\right\}$$

$$n = 1, 2, \cdots\cdots N, \quad s = 1, 2, \cdots\cdots N \qquad (33)$$

で与えられる．

まず我々は，Rayleigh－Ritz法の2モード近似から得られる近似解を初期値として，Newton－Raphson法を用いて(32)の基本モードに対する厳密解を計算した．ところがこの方法は，$\sigma \geq 0.2$ mho/cm になると2モード近似では近似が悪くて解が基本モードに収束しなくなる．そこで3モード近似まで近似を上げて，これを初期値にすると $\sigma = 0.8$ mho/cm で再び基本モードに収束しなくなる．ただし，この3モード近似も，2モード近似を初期値として，Newton 法を用いて計算した．さらに4モード近似まで近似を上げる方法も試みたが，この場合4モード近似の解自体が基本モードに収束せず，満足な結果は得られなかった．

結局，誘電率，導電率，t/a がそれぞれ $\varepsilon_\gamma = 12.5$，$(0.4/2^8 =)\ 0.015625 \leq \sigma \leq 0.4$ mho/cm，$0 \leq t/a \leq 1.0$ で周波数 $f = 16.0$ GHz，導波管の巾 $a = 1.0668$ cm の場合の TE_{10} モードに対する伝播定数が数値計算により得られた．

図4に厳密解と近似解の両方を示した．これによれば，$\sigma = 0.4$ mho/cm のように導電率の高い場合，装荷率 t/a が小さい所で異常に減衰定数 α が大きくなる事がわかる．

図5に得られた厳密解を，導電率 σ を変数，装荷比 t/a をパラメータとし

て描いてある．これより，$\sigma \leq 0.1$ mho/cm($\sigma/\omega\varepsilon_0 = 11.25$)では，R. H. Sheikh[2]等が指摘したように，αとσは線形関係を保ち，βの値も一定であるが，$\sigma \geq 0.1$ mho/cm ($\sigma/\omega\varepsilon_0 = 11.25$)になると，どちらも成立しなくなる事がわかる．

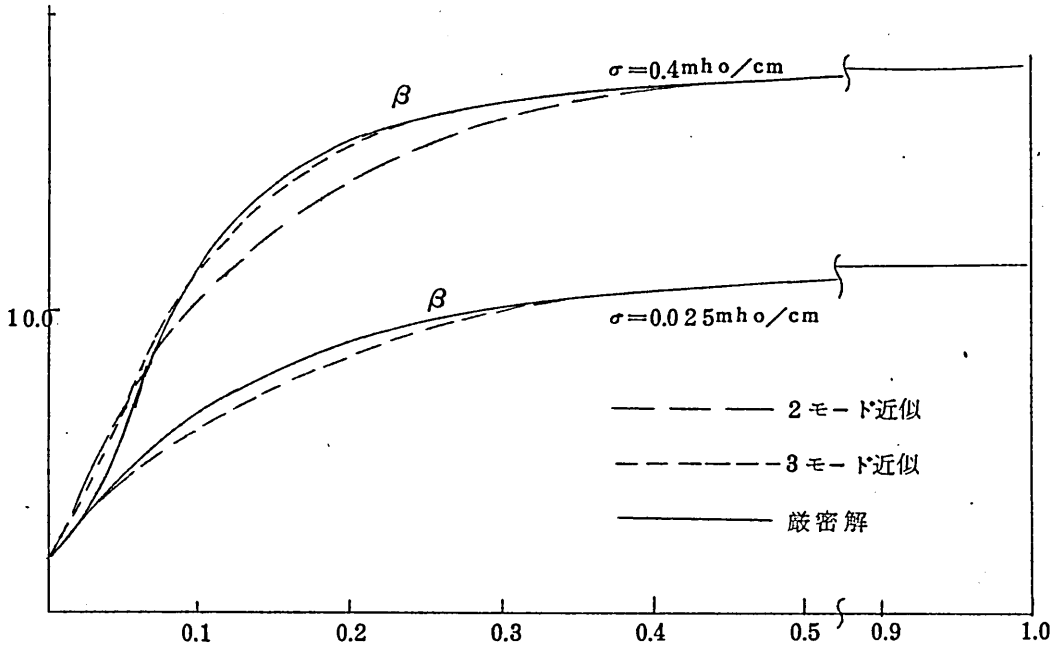
図6は伝播定数の厳密解と，Rayleigh－Ritz法の2モード及び3モード近似から得られた伝播定数の近似解との差のパーセントを示している．これによると，$\sigma \leq 0.1$ mho/cmのとき，誤差率は一定であるが，$\sigma \geq 0.1$ mho/cmになると誤差率が急激に増加する事がわかる．R. H. Sheikh等は，誤差率がσに無関係にほぼ一定だとしているが，これは彼らが，σの小さな領域での計算しかしなかったためである．誤差率が増加する事は，Newton法で厳密解を求める際，$\sigma \geq 0.2$ mho/cmの領域では，初期値として，2モード近似の解では不十分になる事と対応している．

以上の結果から，伝播定数およびその近似解の性質が，$\sigma = 0.1$ mho/cm ($\sigma/\omega\varepsilon_0 = 11.25$)あたりから大きく変化する事がわかる．ところで誘電率は12.5であるから，$\varepsilon_s = 12.5 - j11.25$あたりが境界になっている．これから，複素誘電率の実数部と虚数部が等しくなるあたりが境になっている事は十分考えられるが，他の誘電率の場合についても計算してみないと確実な事は言えない．

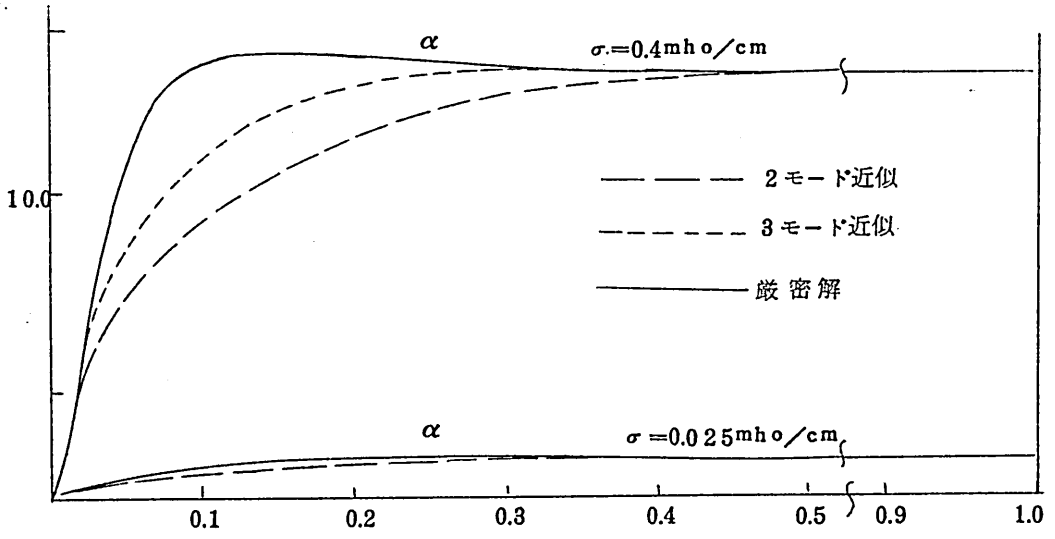
3－2　半導体を非対称に装荷した場合

次に図7に示すように非対称に装荷した場合について考えよう．まず伝播定数の厳密解を与える永年方程式は，2章の式(9), (4), (5)より

$$\left.\begin{aligned} & k_a \sin k_s t \cdot \cos k_a (a-t) + k_s \cos k_s t \cdot \sin k_a (a-t) = 0 \\ & k_s^2 = \varepsilon_s k_0^2 + \gamma^2 \\ & k_a^2 = k_0^2 + \gamma^2 \end{aligned}\right\} \quad (34)$$



a) 位 相 定 数



b) 減 衰 定 数

図 4　対称装荷のときの伝播定数とその近似解

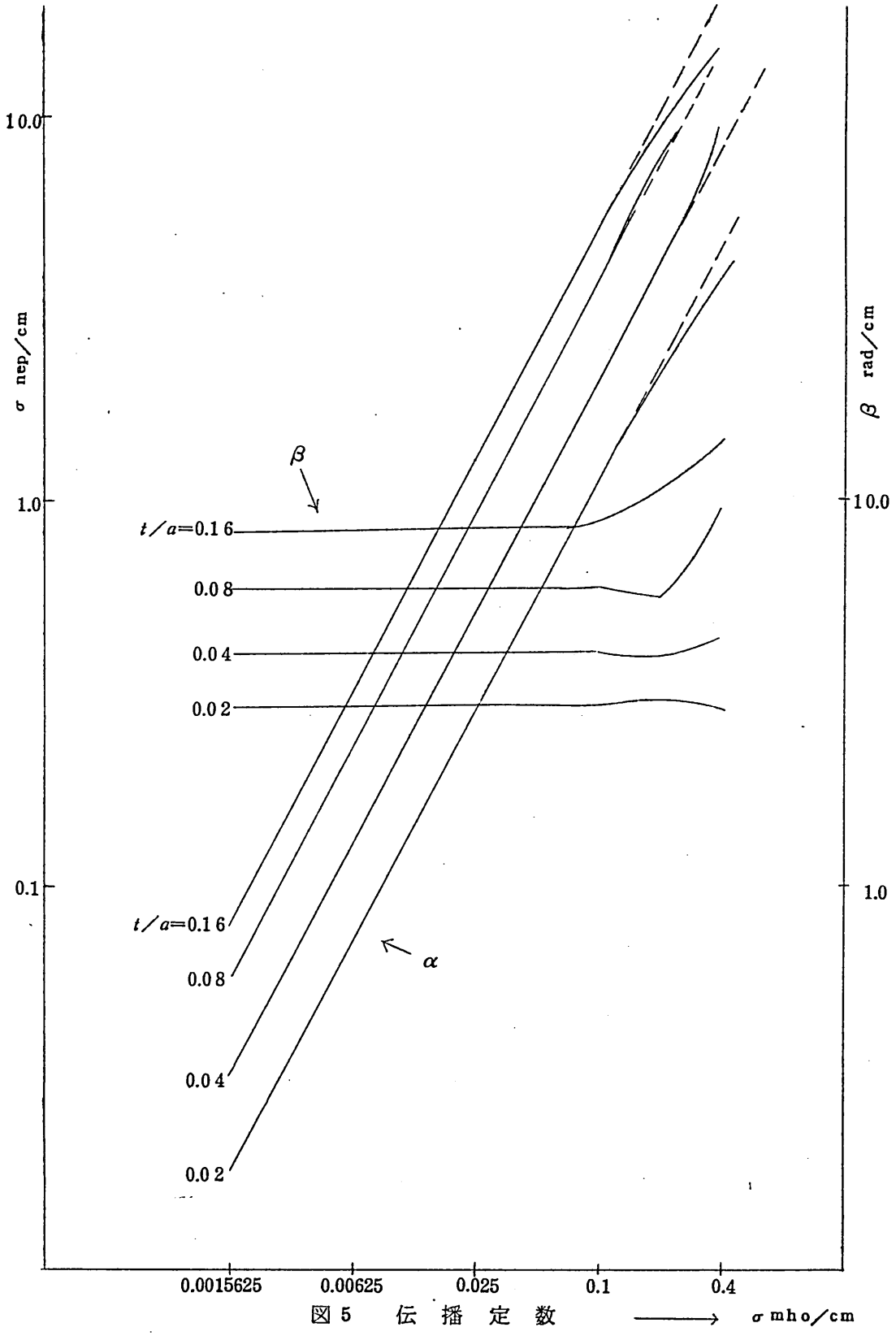
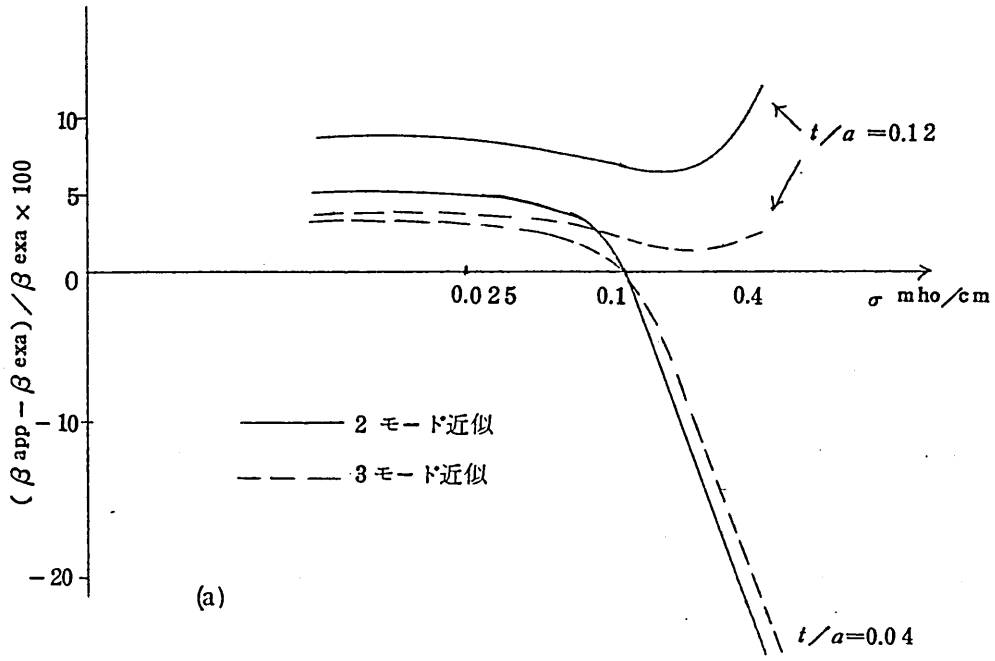
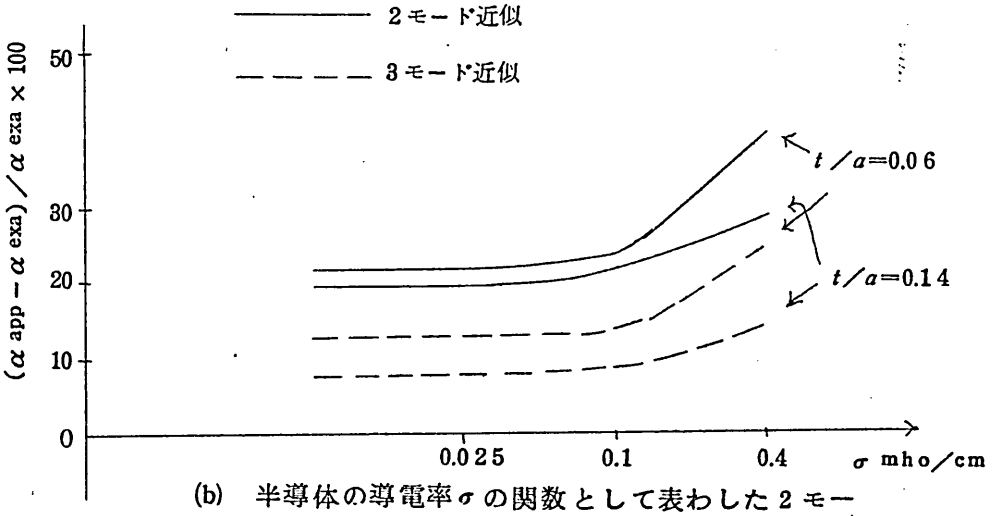

10.0
1.0
0.1
σ nep/cm
β rad/cm
10.0
1.0
β
t/a=0.16
0.08
0.04
0.02
t/a=0.16
0.08
0.04
0.02
α
0.0015625
0.00625
0.025
0.1
0.4
σ mho/cm

図 5　伝 播 定 数



(a)



(b) 半導体の導電率σの関数として表わした2モード近似及び3モード近似の誤差率

図 6

さらにRayleigh－Ritz法による近似式は，2章の(30),(31)より

$$|T_{ns}-\gamma^2\delta_{ns}|=0$$

$$T_{nn}=\frac{n^2\pi^2}{a^2}-k_0^2-k_0^2(\varepsilon_s-1)\{\frac{t}{a}-\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{a}t\}$$

$$T_{ns}=k_0^2(\varepsilon_s-1)\{\frac{1}{(n+s)\pi}\sin\frac{(n+s)\pi}{a}t-\frac{1}{(n-s)\pi}\sin\frac{(n-s)\pi}{a}t\}$$

$$n,s=1,2,\cdots\cdots N \qquad (35)$$

で与えられる。

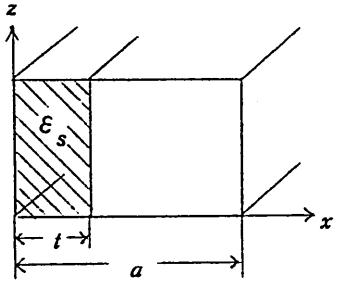


図7　非対称装荷

この系で考える半導体の誘電率，導電率，周波数は全て対称装荷の場合と同じである。

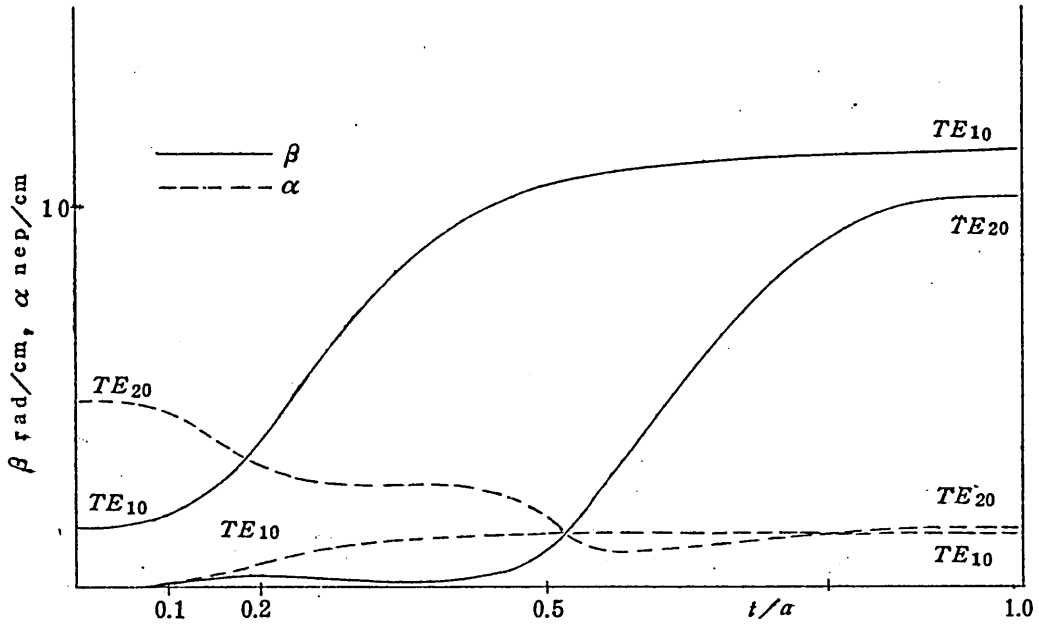
今度も，Rayleigh－Ritz法より得られた近似解を初期値としてNewton法を用いて(34)の解を求めるという手順を取った。

まずRayleigh－Ritz法の2モード近似による解を求めた。その結果，導電率σがほぼ0.2 mho／cm以上の領域では，$t=0$でTE_{10}であった解が$t=a$ではTE_{20}の解につながり，$t=0$でTE_{20}であった解が，$t=a$ではTE_{10}の解となるという一般の誘電体の場合には全く考えられなかった奇妙なつながり方をする事がわかった。図8参照。

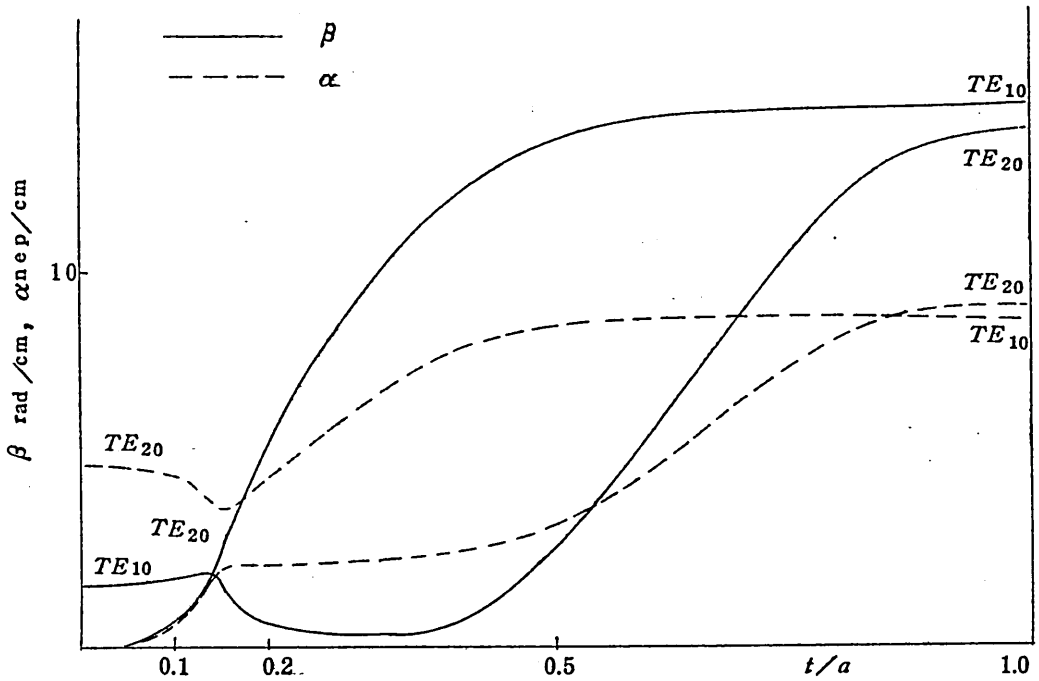
そこでこの場合の2モード近似を，近似解としての意味は又後で議論するとして，数値的に検討してみよう。念のために2モード近似の式を書けば，

$$\gamma^2=(T_{11}+T_{22})/2\pm\sqrt{T}$$

$$T=\left(\frac{T_{11}+T_{22}}{2}\right)^2-(T_{11}T_{22}-T_{12}^2) \qquad (36)$$



a)　σ = 0.025 mho/cm

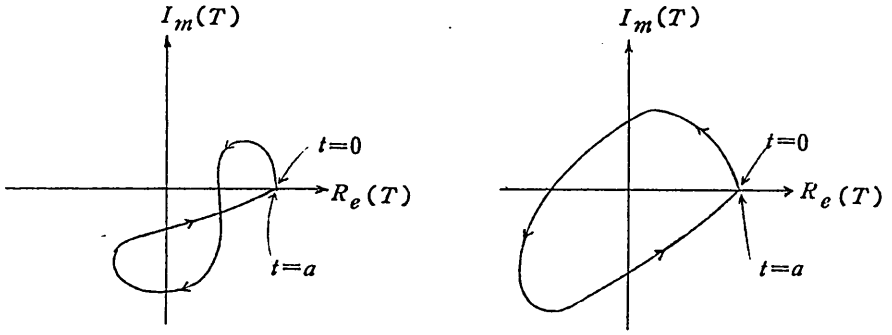


b)　σ = 0.2 mho/cm

図 8　2 モード近似の解

である．一般の誘電体の場合，この２つの γ^2 のうち小さい方が基本モードの伝播定数に対応する事は当然である．しかし２章２－２でも少し触れたように，複素誘電率の虚数部（σ/ω）が大きくなると，もはや γ^2 の大小を論ずる事は出来なくなる．

(36) で与えられる近似解は，$t=0$，a 付近で TE_{10}，TE_{20} モードの良い近似になっており，TE_{10} モードの近似は $\gamma^2=(T_{11}+T_{22})/2-\sqrt{T}$，$TE_{20}$ モードの近似は $\gamma^2=(T_{11}+T_{22})/2+\sqrt{T}$ で与えられる事は当然である．しかし，$t=0$，a から離れるに従い，$\sqrt{T}$ は２価函数になるために，その正負符号には意味が無くなる．そこで T の値が，t に対応してどのように変化するかを，具体的に $\sigma<\sigma_c$ と $\sigma>\sigma_c$ の場合について調べてみると，図９に略示するようになる事がわかった．ただし σ_c は境界になる導電率．図９からわかるように，$\sigma<\sigma_c$ の場合 $t=0$ から $t=a$ まで変化すると，各値は原点を含まない軌跡を描くから，$t=0$ と $t=a$ での扁角の差は零であるのに対し，$\sigma>\sigma_c$ の場合原点を含む軌跡を描くから，$t=0$ と $t=a$ での扁角の差は 2π になっている．すなわち $\sqrt{T}$ の符号は，$t=0$ と $t=a$ で反対になっている．



a) $\sigma<\sigma_c$　　b) $\sigma>\sigma_c$

図９　T の t に対する変化

これはいわゆるReimann面の性質である．以上が2モード近似でTE_{10}とTE_{20}モードの解が導電率σ大の領域で入れ換る数式上の意味である．もしnモード近似を考えれば，n葉のRiemann面になって，2モードと同様の事が起ると考えられる．

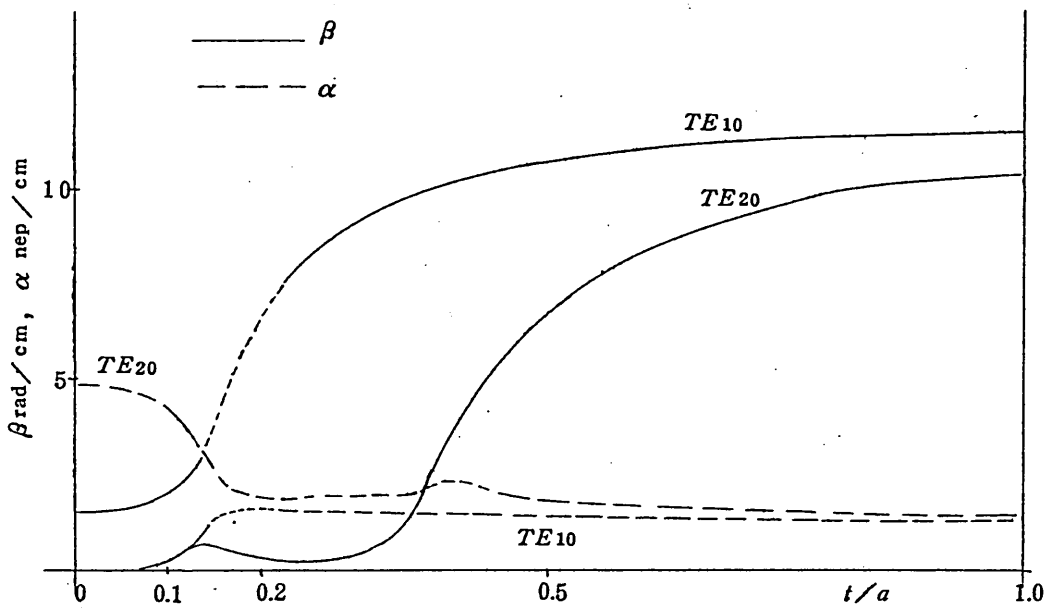
＜厳密解の計算と結果＞

次に対称装荷の場合と同様，2モード近似，3モード近似さらには4モード近似を初期値として，(34)の厳密解をNewton法を用いてTE_{10}およびTE_{20}モードについて求めてみた．図10参照．その結果$\sigma \leq 0.05$ mho/cmの範囲では，だいたい近似を上げるほど希望の根に収束するようである．しかし不思議なことに，$\sigma \geq 0.1$ mho/cmでは，明らかにTE_{10}モードの$t=0$から始まった根と，$t=a$から始まった根がつながらず，TE_{20}モードの$t=0$から始まった根と，$t=a$から始まった根もつながらない．又2モード近似の解のように，TE_{10}とTE_{20}モードの根がつながるという事もない，という奇妙な事になっている．

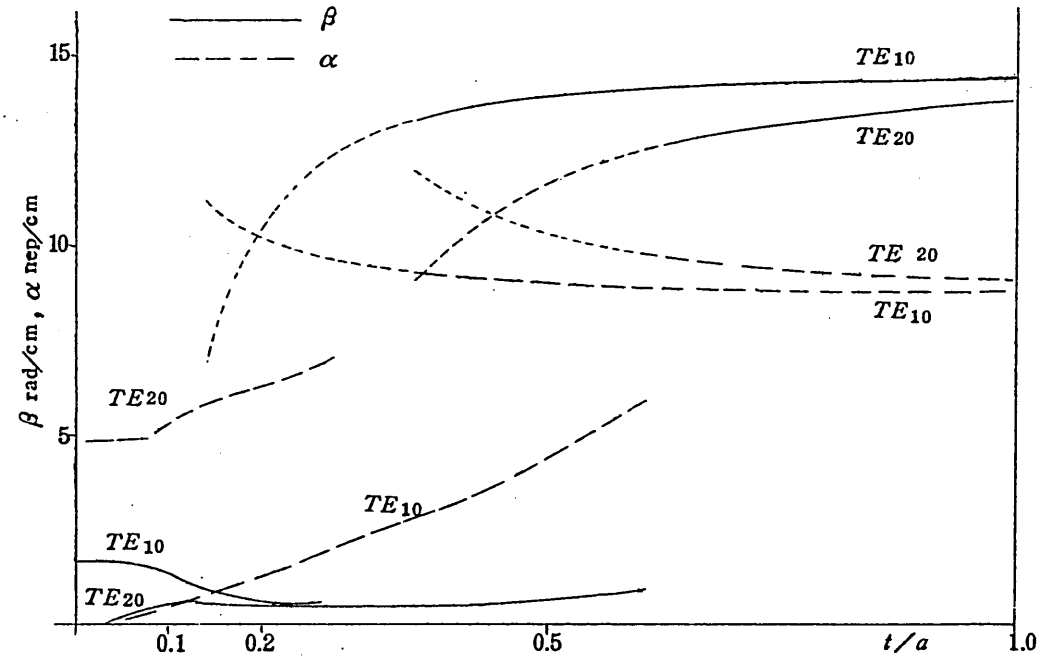
さらに確実な情報を得るために，$t=T+\Delta T$での解を計算するのに，$t=T$での解を初期値としてNewton法を用いるという方法で，中断している解の続きを求めてみた．これは図10に点線で示した．

＜半導体が高い導電率を持つ時の伝播定数＞

これまでの数値計算の結果，導電率σが増加すると，解が収束しないだけでなく，求まった伝播定数も$t=0$から始まるものと，$t=a$から始まるものが全く別の解になるように思われる．そこでこの事を定性的に説明するために，σがさらに大きくなって金属に近くなった場合に伝播定数がどのようになるかを考えてみよう．



a) $\sigma = 0.025$ mho/cm



b) $\sigma = 0.2$ mho/cm

図 10. (34)式より得られた厳密解

金属に近い（σが十分大きい）場合も，先に求めた永年方程式は成立するから，これを変形して

$$\frac{\cot k_s t}{k_s} + \frac{\cot k_a (a-t)}{k_a} = 0 \qquad (37)$$

$$k_a^2 = k_0^2 + \gamma^2 \qquad (38)$$

$$k_s^2 = k_0^2 \left(\varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0}\right) = \gamma^2 \qquad (39)$$

さらに$\sigma/\omega\varepsilon_0 \gg \varepsilon_r$が成立する．

さてσが十分大きい場合，2種類の電界分布と，その各々に対応する伝播定数が考えられる．まず金属の場合に常識的に考えられる装荷部分の電界が零に近いような伝播姿態．もう一方は，高誘電率の場合に常識的に考えられる非装荷部分の電界が零に近い伝播姿態である．次にそれぞれが，(37)～(39)を満足する伝播姿態である事を確かめよう．

1) 装荷部分の電界が零に近い場合

今装荷部分のσが十分大きければ，実質的に導波管の巾aがtだけ小さくなった図11のような電界分布を考える事が出来る．この場合の伝播定数γは，(40)式で書ける．

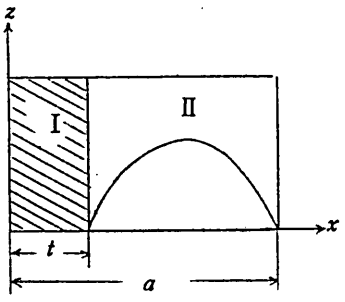


図 11. 非装荷部に電界の集中する場合

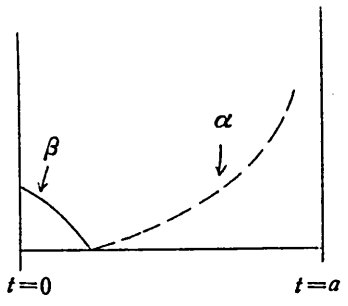


図 12. 装荷厚みtの関数として表わした伝播定数

$$\gamma^2 \simeq \left(\frac{\pi}{a-t}\right)^2 - k_0^2 \qquad (40)$$

従って伝播定数 γ は，t の厚みによって図 12 に示すように変化する．

さらに (40), (38) より

$$k_a \simeq \pi/(a-t) \qquad (41)$$

(40), (39) より

$$k_s^2 \simeq k_0^2(\varepsilon_r - 1) + \left(\frac{\pi}{a-t}\right)^2 - jk_0^2 \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \qquad (42)$$

ここで $\sigma/\omega\varepsilon_0 \gg \varepsilon_r$ を考慮すれば，

$$k_s \sim -\frac{1+j}{2} k_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \qquad (43)$$

となる．そこで (41), (43) で与えられる k_a, k_s を，$k_0\sqrt{\sigma/\omega\varepsilon_0} \gg 1$ の条件下で (37)式の左辺に代入すれば，直ちに

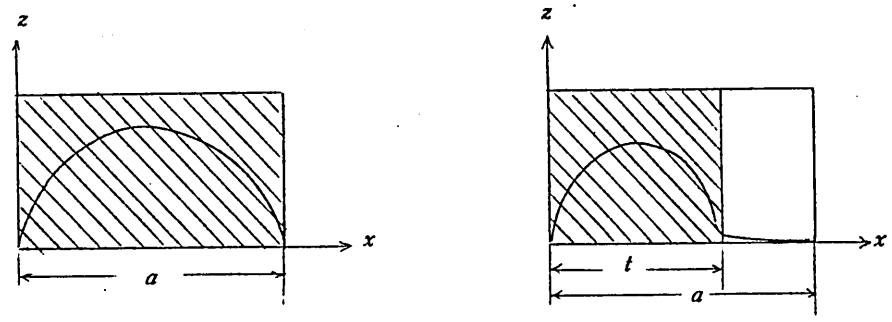
$$\text{左辺} = \frac{\cot k_s t}{k_s} + \frac{\cot k_a(a-t)}{k_a} \sim 0$$

となり，(37) を満足している事がわかる．すなわち，(40) 式から得られる伝播定数 γ が，確かに永年方程式 (37), (38), (39) を満足する解である事がわかる．

ii) 非装荷部分の電界が零に近い場合

図 13 (b)のように $t < a$ の場合に電界が非装荷部分で零になるような伝播姿態は，一見常識的には考えにくいので，まず図 13 (a)のように完全に満たされた場合を考えよう．この場合，たとえ σ が大きな値であっても，σ の小さな誘電体を装荷したのと全く同じように次式で与えられるような伝播定数 γ を持つはずである．

$$\gamma^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k_0^2\left(\varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0}\right) \qquad (44)$$



a)　　b)

図 13　装荷部に電界の集中する場合

そこでこの姿態の延長として，図 13 (b)のような電界分布になる場合を考えよう．このとき伝播定数 γ は (44) と同様に次の様に書ける．

$$\gamma^2 \simeq \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 - k_0^2\left(\varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0}\right) \tag{45}$$

(45) 式より得られる γ の t に関する変化は，

a)　$t \sim 0$ 以外 $\left(\left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \ll k_0^2 \ {}^{\sigma}\!/_{\omega\varepsilon_0}\right)$ で

$$\gamma^2 \sim jk_0^2 \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \qquad \therefore\ \gamma \sim \frac{1+j}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}}$$

b)　$t \to 0$ のとき

$$\gamma = \alpha + j\beta \qquad \alpha \to \text{増大} \to \infty$$

$$\beta \to \text{減少} \to 0$$

となり，これらを略示すれば，図 14 のようになるであろう．

さらに (45), (38), (39) より k_s, k_a はそれぞれ

$$k_s \simeq \frac{\pi}{t} \tag{46}$$

$$k_a^2 \simeq \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 - k_0^2(\varepsilon_r - 1) + jk_0^2\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \tag{47}$$

これは，さらに $t \sim 0$ 以外で

$$k_a \sim \frac{1+j}{2} k_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \tag{48}$$

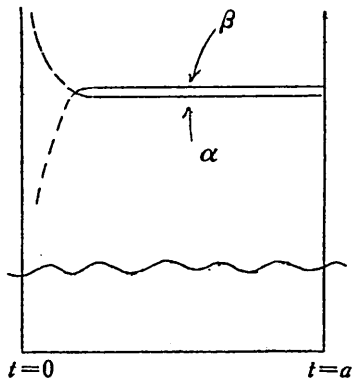


図 14．装荷厚み t の関数として表わした伝播定数

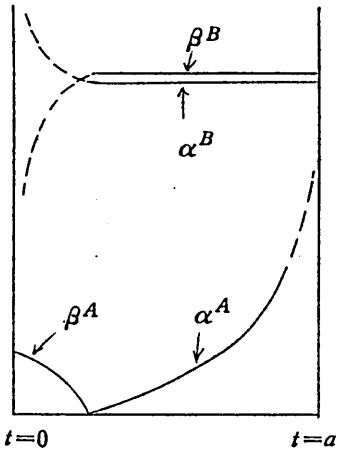


図 15. A, B モードの伝播定数

となる．

(46), (48) で与えられる k_s, k_a を，$k_0\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \gg 1$ の条件の下に (37) の左辺に代入すれば，これらも又 (37) を満足している．従って式 (45) から得られる伝播定数 γ も又，永年方程式 (37), (38), (39) を満足する解である事がわかる．

以上の議論から，σ が十分大きい媒体を装荷した場合，式 (37), (38), (39) を満足する伝播姿態として，i) ii) の 2 種類のものが考えられる事がわかった．そこで今仮りに，前者を A モード，後者を B モードとして，これら 2 つのモードの α 及び β の t に対する変化の様子を模式的に書けば，図 15 のようになる．ただし図 15 の縦軸の目盛りは，定性的な意味しかない．

以上の考察を元に，再び数値計算の結果得られた伝播定数について考えてみよう．$\sigma = 0.1$ mho/cm あたりから，$\gamma = \alpha + j\beta$ が不連続になり，$t = 0$ から始まった解と，$t = a$ から始まった解がつながらずに，ある厚み t に対して，2 つの伝播定数を与える一見不合理に思える計算結果も，σ がある値以上になって，上に考察した 2 種のモードが生じるようになったと考えれば説

明がつくことがわかる。

結局，半導体を非対称に装荷した場合，その導電率 σ による複素誘電率の虚数項が，実数項すなわち格子誘電率より大きくなるあたりから2種の伝播モードが生じることがわかった．しかしここで注意しなくてはならないのは，実際に伝播に寄与するのは，減衰定数 α の関係から，$t=0$ に近い場合は A モードで，$t=a$ に近い場合は B モードになる事である。

＜高導電率の場合のRayleigh－Ritz法による近似解の意味＞

これまでの考察で，σ が大の領域では，2つの伝播姿態すなわち A モードと B モードがあり，前者は $t=0$ で，後者は $t=a$ で普通の伝播定数の計算から得られる値になっている事がわかった．この知識をもとに，再びRayleigh－Ritz法の2モード近似による解を考察しよう。

2モード近似では $t=0$，a 付近で TE_{10}，TE_{20} モードの良い近似解を与える事は明らかであり，これまでの考察で，TE_{10}，TE_{20} それぞれに2種のモード，A モードと B モードが考えられるから，1つの近似解が2つの伝播定数の近似解でなくてはならない．そこで2モード近似の2つの近似解を，図16に示すように $R1$，$R2$ とする．$R1$，$R2$ が $t=0$，a でどの伝播姿態の伝播定数になっているかというと，次に示すとおりである。

	$t=0$	$t=a$
$R1$	TE_{10A}	TE_{20B}
$R2$	TE_{20A}	TE_{10B}

（添字 A，B はモードの種類を表わす）

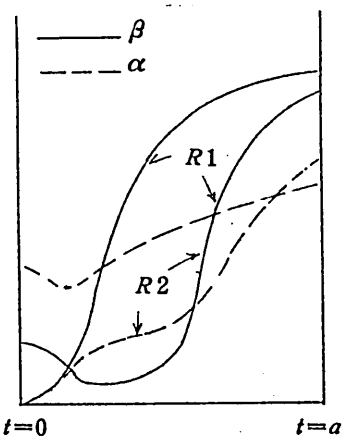


図 16. 2モード近似

従って近似解 $R1$ は $t=0$ 付近で TE_{10A} の，$t=a$ 付近で TE_{20B} の良い近似になっており，近似解 $R2$ は $t=0$ 付近で TE_{20A} の，$t=a$ 付近で TE_{10B} のよい近似になっている事がわかる．すなわち $R1$ は TE_{10A} と TE_{20B} 両モードの近似解であり，$R2$ は TE_{20A} と TE_{10B} 両モードの近似解である．従ってこの結論によれば，TE_{10} モードと TE_{20} モードの近似解が入れ換るという一見不合理な結果も，その意味が良く理解出来る．

以上の 2 モード近似だけの議論では，1 つの近似解が 2 つのモードの近似解になるという事は，その近似の悪さなどから議論にかなりの飛躍があるが，ここでさらに高次の多モード近似まで拡張して考えれば，近似解の意味が良く理解できる．

n モードの近似では，n 個の近似解が得られるわけだが，それぞれの近似解 $R1$，$R2$，$\cdots$ Rn は，2 モード近似の場合から考えて次のような対応になるであろう．

	$t=0$	$t=a$
$R1$	TE_{10A}	TE_{n0B}
$R2$	TE_{20A}	TE_{n-10B}
.....	.....	.....
Rn	TE_{n0A}	TE_{10B}

当然 n を増大してゆけば，厳密解に近づいてゆく．そこで $n=\infty$ まで考えると，

TE_{n0A} は $t=0$ で　$\alpha=\infty$，$\beta=0$

TE_{n0B} は $t=a$ で　$\alpha=0$，$\beta=\infty$

となり，一方

TE_{10B} は $t=0$ で　$\alpha=\infty$，$\beta=0$

TE_{10A}は $t=a$ で　$\alpha=0$，$\beta=\infty$

となる．従って，TE_{10A}と$TE_{\infty 0B}$及びTE_{10B}と$TE_{\infty 0A}$は極限でその伝播定数が一致する．

結局，TE_{10A}モードは$TE_{\infty 0B}$モードと，$TE_{\infty 0A}$モードはTE_{10B}モードとその極限に於いて同一のモードであると考える事が出来る．すなわち，AモードとBモードは，$n=\infty$の高次モードまで考えれば，同一モードであるとも言える．この事は又，個有値が複素数の場合，個有値の大小を論ずる事が出来ない事，すなわちこの場合に次数の持つ意味が絶対的なものでなくなる事と対応している．

さらに，$\sigma=0.1$ mho/cm程度の小さな値で，2種のモードに分かれ，Aモードの伝播定数が金属のそれとあまり違わない理由は，この場合の電界分布を考えてみると，かなり理解出来る．図17に$\sigma=0.4$ mho/cm，$t/a=0.16$の場合の電界強度の絶対値と，その扁角を示した．これによると，半導体装荷部と非装荷部で，電界の扁角が最高π近く異る事がわかる．すなわち，装荷部と非装荷部で電界がほぼ逆向きになっている．従って半導体装荷部では，金属のように電界は零にならないで，かなり大きな値を持つにもかかわらず，実質的に導波

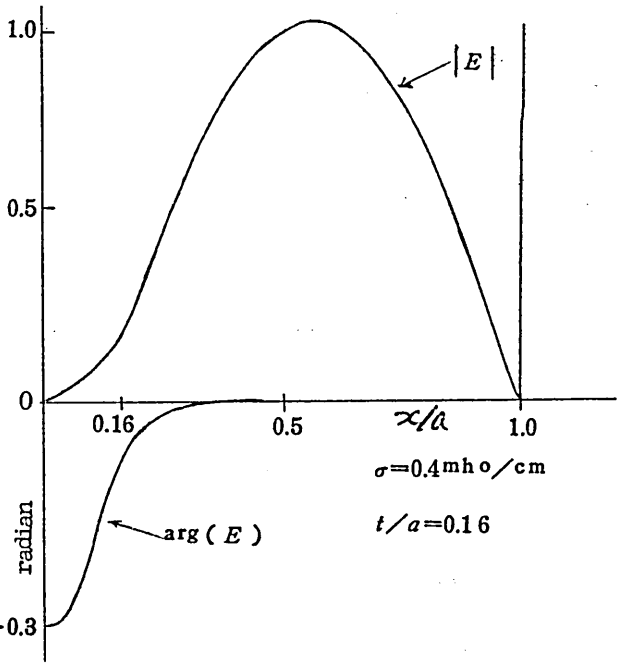


図 17.　電界の絶対値と扁角

管の巾がせまくなった場合に近い伝播特性を示すと考えられる．

4．結　　言

我々は，半導体を装荷した矩形導波管の伝播特性を計算した．

その結果，対称装荷，非対称装荷にかかわらず，導電率 σ が増加して，複素誘電率の虚数部が実数部より大きくなると，伝播特性に本質的な変化が現われる事がわかった．

特に非対称装荷の場合，σ が増大すると，伝播姿態はもはや誘電体の延長とはならず，これまでに指摘されていない2種類のモードが生じる事，さらにこの場合のRayleigh－Ritz法による近似解も，確かにこれら2種類のモードの近似解になっており，数学的にも納得出来る事を示した．

文　　献

1) 例えばN. Marcuvitz, Waveguide Handbook M. I. T. Radiation Lab. Series, No.10. New York ; McGraw－Hill, 1951, ch. 8.
P. H. Vartanian, W. P. Ayres and A. L. Helgesson, "Propagation in dielectric slab loaded rectangular waveguide," IRE Trans. Microwave and Technique, vol. MTT－6, PP 215, 1958.
W. E. Hord and F. J. Rosenbaum, "Approximation technique for dielectric loaded Waveguides," IEEE Trans. Microwave Theory and Technique. vol. MTT－16, No.4, 1968.

2) R. H. Sheikh and M. W. Gunn, "Wave Propagation in a rectangular waveguide Inhomogeneously filled with semiconductor," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniqus. vol. MTT－16, pp117－121, 1968.

3) M. W. Gunn, "Wave propagation in a rectangular waveguide containing a semiconductor film," Proc. IEE(London), vol. 114, pp207－210, 1967.

4) C. Hamaguchi, A. Moritani and J. Nakai, "Microwave Propagation in Rectangular Waveguide Loaded with Semiconductor Thin Film," Technology Reports of Osaka University, vol.18, No.818, pp191.

5) R. E. Collin, Field Theory of Guided Waves. New－York ; McGraw－Hill, 1960, ch. 6.

6) 寺沢，数学概論，応用編，岩波書店，1960, pp429－455.

輻射科学研究会資料

導波管反射形広帯域エサキダイオード増幅器

豊田幸弘　牧本利夫
（大阪大学　基礎工学部）

昭和46年4月30日
（於 大阪大学 基礎工学部）

導波管反射形広帯域エサキダイオード増幅器

§1 まえがき

同軸回路系を用いた広帯域エサキダイオード増幅器の報告は数多くなされているが，導波管回路系を用いた広帯域エサキダイオード増幅器の論文は1965年に，Bandler[1]が2.8(GHz)で反射形エサキダイオード増幅器を報告している。また，1963年に，W.J. Gestinger[2]はPrototypeを考え，Low pass回路をBand pass回路に変換して単共振増幅器を広帯域化する方法を述べている。この広帯域増幅器は同軸回路とかストリップ回路では実現できるが，導波管回路系では実現できない。

著者は導波管回路系で実現可能な広帯域用リアクタンス回路を回路網合成から見出した。この場合，回路網合成で得られるリアクタンス回路は集中定数回路であるから，これを分布定数回路に変換し，それに基づいて導波管回路系を設計した。この増幅器の理論値と実測値が得られたので報告する。

§2 導波管反射形広帯域エサキダイオードの等価回路

付録の図A-1の特性を与え，回路網合成から図1に示す等価回路を見出した。

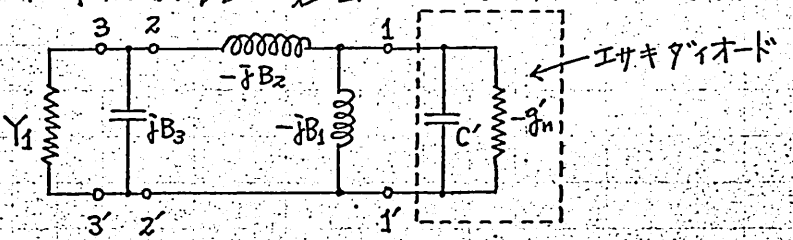


図1 広帯域エサキダイオード増幅器の等価回路

図1の等価回路のエサキダイオードは容量と抵抗の並列回路となっているため，エサキダイオードを容量と抵抗の並列回路に置換する。また，この等価回路は

集中定数回路であるから，導波管回路系で構成するには分布定数回路に変換しなければならない。

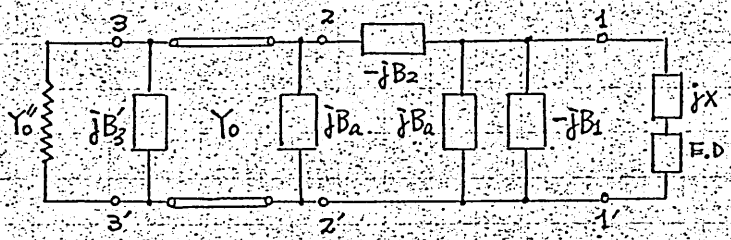


図2 分布定数回路に変換した等価回路

分布定数回路に変換した等価回路は図2のようになる。この等価回路から導波管回路系を構成する。

中心周波数は付録の解析において，$m=1$について考えると次式で与えられる。

$$f_0 = \frac{\omega_c(1+\omega_1)}{4\pi} \qquad (1)$$

ω_cは付録の図A-2に示されている規格化された値を実際の角周波数に変換するときの倍数であり，エサキダイオードの容量C'はエサキダイオードが決まれば決まってしまうもので，ω_cは

$$\omega_c = \frac{C_2'}{R_s C'} \qquad (2)$$

で決定される。

規格化された各定数の値は表1に示す。

15dB リップル 0.5dB					
ω_1	C_1	L_1	C_2	L_2	R_2
0.7	2.7013997	0.42848762	5.80818876	0.2941 0078	0.21687119
0.710	2.7914752	0.4146 2012	6.43202640	0.2688 7583	0.20336168
0.725	2.9363088	0.3946 534	7.4348448	0.2151 1934	0.18411568
0.74	3.0934504	0.3742 0001	8.6883 18828	0.1776 0681	0.16722772
0.76	3.3348754	0.34623087	10.87654078	0.1362 9587	0.14428703
0.775	3.5451 7698	0.3247 4704	13.07763524	0.1088 0503	0.12776704

18dB リップル 0.5dB

ω_1	C_1	L_1	C_2	L_2	R_2
0.7	2.08772857	0.51770068	3.70516040	0.43184671	0.23885721
0.72	2.22303626	0.49187724	4.41830172	0.38869611	0.26786469
0.75	2.46287258	0.44744611	5.91573174	0.26713542	0.22245300
0.76	2.56030888	0.43140089	6.61719704	0.23247857	0.20709033
0.78	2.77717743	0.39871716	8.38437715	0.17433293	0.17770619
0.8	3.03766714	0.36469645	10.88731877	0.12772416	0.14881273
0.805	3.11345340	0.35588941	11.75207776	0.11712192	0.14248276

15dB リップル 3dB

ω_1	C_1	L_1	C_2	L_2	R_2
0.6	2.60190425	0.50162557	6.04778088	0.32991477	0.25941364
0.61	2.66342461	0.48868117	6.48863767	0.29954278	0.24766245
0.63	2.79692119	0.46243500	7.52420080	0.24552549	0.22456073
0.65	2.94655561	0.43594248	8.81706858	0.19957709	0.20211525
0.66	3.02811569	0.42258592	9.58693910	0.17928025	0.19114074

18dB リップル 3dB

ω_1	C_1	L_1	C_2	L_2	R_2
0.6	2.05209223	0.51602571	3.82703250	0.54221162	0.34280071
0.62	2.14816070	0.56907016	4.48503363	0.44837356	0.31503460
0.64	2.25716203	0.54109375	5.17308307	0.36777637	0.28736881
0.66	2.37947756	0.51230152	6.03502023	0.29896057	0.26002970
0.67	2.44656110	0.49575632	6.28387153	0.26852077	0.24654185

表1　規格化された場合の定数の値

§3 試作導波管反射形広帯域エサキダイオード増幅器の構造

表1はw_1を種々変化してそれに対する集中定数回路の各素子の値を求めた。その中から，導波管のTE_{10} modeの領域での増幅と製作可能なw_1の値と各素子の値を求めた。それによると表1に示す範囲であった。

図2の分布定数に変換した等価回路から導波管回路系で構成すると図3に示すようになる。

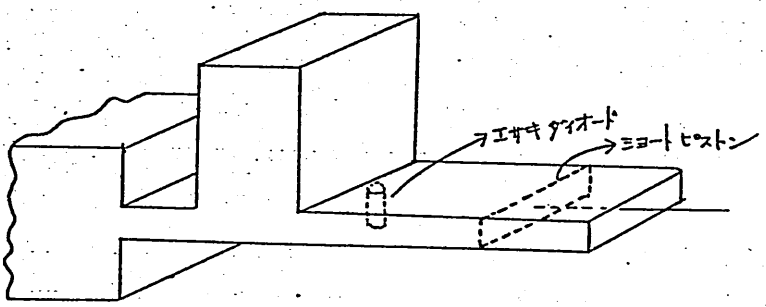
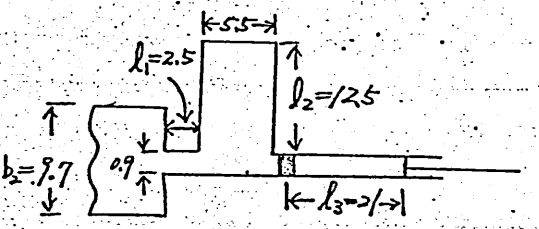


図3 試作増幅器の構造

いま，図2のZ－Z'端子から右側をみたアドミタンスの実数部をY_1，虚数部をjB_3とすると，図1の等価回路のY_1とjB_3となる。B_aは付録図B-2に導波管の寸法が決まれば決定される。Y_1，jB_3，$-jB_2$，$-jB_1$の値は回路網合成より求めた値に等しくなるようにすれば良い。

実際の導波管の寸法の決定は電子計算機を使って付録の各式に実際の寸法をいくつか入れて計算し，回路網合成より求めた値に近いものを選んだ。そして最終的には図4に示す値になった。図4の寸法は利得18dB（リップル0.5dB）の1例を示したものである。図2の特性アドミタンスY_0の導波管（図4の2.5mmの部分）はなるべく太い方が良いのであるが，次の理由によりやむなくこの部分を設けた。

即ち，図1のY_1の値が回路網合成によ



単位 mm

導波管の横幅は58mm

図4 試作増幅器の寸法

り与えられるため，図4の9.7mmの部分は一意的に決定される。同図の2.5mmの部分もエサキダイオードの高さと同じである。したがって，付録の図B-1の導波管の段違いのところで生じる等価的な容量の値も決定される。この不連続部分で生じる容量は回路網合成より求めた値より小さくなるため，2.5mmの長さの伝送線路を取除くと，この段違いになっているところに容量性窓を作らねばならない。ところが，この部分は図4に示すように，高さが0.9mmと低いために容量性窓を作ることは工作上ほぼ不可能である。

つぎに，Y_0の部分の長さの決定について述べる。図2において，2-2'端子から左側をみたときの虚数部jB_3と実数部Y_1が中心周波数付近で回路網合成から求めた値に最も近いときのY_0の伝送線路の長さが2.5mmであった。

また，Y_0の部分の両端でTMの高次モードが発生するが2.5mmの長さがあれば十分減衰してしまうことも確めた。

§4 数値計算と実験結果

実験に用いたエサキダイオード・MA4604B（$-R_n=75\Omega$, $R_s=1.8\Omega$, $C=0.7PF$, $C_s=0.38PF$, $f_{r_0}=12GHz$）を用いた。図6は利得18dBリップル0.5dBで設計したときの，集中定数回路の増幅特性と分布定数回路の増幅特性の理論値と実測値を示している。

エサキダイオードの静特性を直視装置で見たところではバイアス電圧110(mV)のところで微小発振がみとめられたのでバイアス電圧を120(mV)の点に固定した。この点では非常に安定であった。中心周波数3.65GHz，増幅度17.5dB，帯域幅330MHzで，広帯域化しなかったときは；理論値で100MHzで広帯域化することによって約3.3倍帯域幅が広くなった。

つぎに，図6で集中定数回路の増幅特性（理論値）と集中定数回路を分布定数回路に変換したときの増幅特性を比較すると，分布定数回路に変換したために思われる変化が見られた。即ち帯域幅の減少とリップルの消滅である。この原因として，導波管の周波数特性

が考えられる。導波管の周波数が変化すれば導波管の管内波長も変化する。したがって、中心周波数回路での各素子の値に近くなって、導波管の特性アドミタンスが変化し、したがって、集中定数回路の中心周波数から50MHzほどずれているが、導波管回路法に対する最も近い等価的アドミタンスを計算し、そのアドミタンスを定める各部の寸法として、電子計算機で種々の数値を選んだために生じた誤差による特性アドミタンスの数値からズレるためと考えられる。

図7は可変短絡板(l_3)だけを可変したときの増幅特性利得および帯域幅がかなり変化することがわかる。また、Y_0, Y_1と変えることによりB_3が変わる。l_2(−jB_2)も設計値より1mm長くなるだけで特性が変わる。図7, 図8から伝送線路(l_1)が設計値より0.5mm長くなるだけで帯域幅が変り、増幅特性は単峰特性になることがわかる。図8に示すように設計値から導波管回路の寸法を定めるとき正確に、また工作精度を良くしないと実測値と理論値の増幅特性は異ったものとなる。

図9は利得15dB(リップル0.5dB)の設計値での理論値と実測値の増幅特性を示してある。利得は理論値より0.2dB, 帯域幅は40MHz狭くなっている。

つぎに、図10は利得15dB リップル3dBの設計値の増幅特性で、リップルを大きくとると帯域幅は理論値で630MHz, 実測値で550MHzと広くなっているが、リップルの消滅である。これは図6の増幅特性のところで説明したように導波管の周波数特性が大きく影響していることがわかる。

図11は利得18dB リップル3dBの設計値の理論値と実測値の増幅特性で、帯域幅は理論値で610MHz, 実測値で490MHz, 利得は理論値より0.4dB低くなっている。

つぎに、増幅特性の中心周波数を変化する場合、表1のW_1を変えるか、エサキダイオードの障壁容量を変える2つの方法がある。

§4 検討

回路網合成により求めた集中定数回路を分布定数回路に変換して導波管反射形広帯域エサキダイオード増幅器を構成した。

集中定数回路と導波管反射形広帯域エサキダイオード増幅器の両者の増幅特性の理論値を比較すると，導波管反射形広帯域エサキダイオード増幅器の帯域幅が狭く，平坦特性になった。これは導波管回路を使用したため，導波管のもつ周波数特性の強い影響を受けたためと思われ，導波管を使用する以上宿命的なものと考えられる。

参照文献

1) J. W. Bandler: "Stability and Gain Prediction of Microwave Tunnel Diode Reflection Amplifier" I.E.E.E. Trans., MTT-13.6, P.814 (Nov 1965)

2) W.J. Getinger: "Prototype for use in broadbanding amplifier" I.E.E.E. Trans., MTT-11 486 (Nov 1963)

3) 豊田・牧本："Ladder 回路による負性抵抗増幅器の広帯域化" 昭和45年 信学全大 503

4) S. Hakim "Further table of element Values for inductive Coupled double-tunned networks" I.E.E.E. Vol III No10 October 1964

5) N. Marcuvitz: "Waveguide Handbook" Radiation Laboratory Series Vol 10 McGrow-Hill 1951

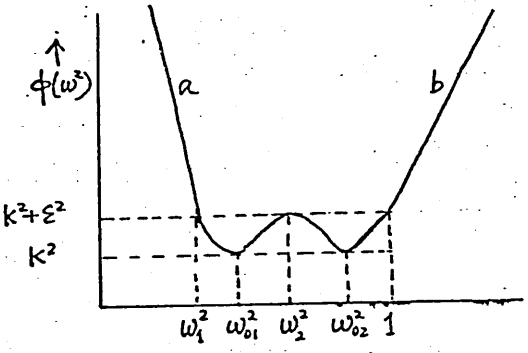
付録

A 解析

いま、通過域で等リップルをもつバンドパスフィルタの特性関数を求める[3,4]。
偶有理関数 $\phi(\omega^2)$ を用いると、反射係数 $\rho_1(j\omega)$ は次式のようになる。

$$|\rho_1(j\omega)|^2 = \frac{\phi(\omega^2)}{H+\phi(\omega^2)} \qquad (A-1)$$

いま、関数 $\phi(\omega^2)$ の特性をつぎのように与える。



図A-1　特性関数

i) フィルタのしゃ断周波数は高域を1.0で規格化する。

ii) 低域で 6m dB/octave, 高域で 6(4−m) dB/octave とする
ただし、m=1, 2, 3

図A-1の特性をもつための条件を数学的に表現すれば

$$\begin{aligned} &\omega^2=\omega_{01}^2,\ \omega_{02}^2 \text{ で } \phi(\omega^2)=k^2 \\ &\omega^2=\omega_1^2,\ \omega_2^2,\ 1 \text{ で } \phi(\omega^2)=k^2+\varepsilon^2 \\ &\omega^2=\omega_{01}^2,\ \omega_2^2,\ \omega_{02}^2 \text{ で } \frac{\partial\phi(\omega^2)}{\partial\omega^2}=0 \end{aligned} \qquad (A-2)$$

となる。以上の条件より

$$\begin{aligned} \phi(\omega^2)-k^2 &= (\omega^2)^{-m}(\omega^2-\omega_{01}^2)(\omega^2-\omega_{02}^2)^2 \\ &= \omega^{-2m}(\omega^4-a_2\omega^2+a_0)^2 \end{aligned} \qquad (A-3)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \\ a_2 &= \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (A-4)$$

また，

$$\phi(\omega^2) - (K^2+\varepsilon^2) = \omega^{-2m}(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)^2(\omega^2-1) \qquad (A-5)$$

式(A−3)と式(A−5)より，

$$\frac{\phi(\omega^2)-K^2}{\phi(\omega^2)-(K^2+\varepsilon^2)} = \frac{\omega^2-1}{\omega^2-\omega_1^2}\left[\frac{(\omega^2-\omega_{01}^2)(\omega^2-\omega_{02}^2)}{(\omega^2-1)(\omega^2-\omega_2^2)}\right]^2 \qquad (A-6)$$

ここで，

$$x^2 = \frac{\omega^2-\omega_1^2}{\omega^2-1}$$

とおき，ω^2を求めると

$$\omega^2 = \frac{x^2-\omega_1^2}{x^2-1} \qquad (A-7)$$

となる。式(A−7)を用いて，式(A−3)を整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi(x^2)-K^2 &= \left(\frac{x^2-\omega_1^2}{x^2-1}\right)^{-m}\left(\frac{x^2-\omega_1^2}{x^2-1}-\omega_{01}^2\right)\left(\frac{x^2-\omega_1^2}{x^2-1}-\omega_{02}^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{(x^2-1)^{4-m}(x^2-\omega_1^2)^m}\left[(1-a_2+a_0)x^4+\left\{(1+\omega_1^2)a_2-2a_0-2\omega_1^2\right\}x^2\right. \\ &\qquad \left. +a_0-a_2\omega_1^2+\omega_1^4\right]^2 \\ &= \frac{(1-a_2+a_0)^2}{(x^2-1)^{4-m}(x^2-\omega_1^2)^m}\cdot(x^4+c_2x^2+c_0)^2 \end{aligned} \qquad (A-8)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= \frac{(1+\omega_1^2)a_2-2a_0-2\omega_1^2}{1-a_2+a_0} \\ c_0 &= \frac{-\omega_1^2 a_2+a_0+\omega_1^4}{1-a_2+a_0} \end{aligned}\right\} \qquad (A-9)$$

式(A-5)へ式(A-7)を代入して次式を得る。

$$\Phi(x^2)-(K^2+\varepsilon^2)=\frac{(x^2-\omega_1^2)^{-m}}{(x^2-1)^{-m}}\left(\frac{x^2-\omega_1^2}{x^2-1}-\omega_1^2\right)\left(\frac{x^2-\omega_1^2}{x^2-1}-\omega_2^2\right)\left(\frac{x^2-\omega_1^2}{x^2-1}-1\right)$$

$$=(1-\omega_1^2)(1-\omega_2^2)\frac{x^2(x^2+b_2)^2}{(x^2-\omega_1^2)^m(x^2-1)^{4-m}} \qquad (A-10)$$

ここで

$$b_0=\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{1-\omega_2^2} \qquad (A-11)$$

式(A-8)と式(A-10)より$\Phi(x^2)$を消去する。

$$(x^4+C_2x^2+C_0)^2=\frac{(1-\omega_1^2)^2(1-\omega_2^2)^2x^2(x^2+b_0)^2}{(1-a_2+a_0)^2}+\varepsilon^2\frac{(x^2-1)^{4-m}(x^2-\omega_1^2)^m}{(1-a_2+a_0)^2} \qquad (A-12)$$

式(A-3), 式(A-5)で$\omega=1$とおくことにより

$$\varepsilon^2=(1-a_2+a_0)^2 \qquad (A-13)$$

を得る。

式(A-12)より次式を得る。

$$x^4+C_2x^2+C_0\pm\varepsilon^{-1}(1-\omega_1^2)(1-\omega_2^2)x(x^2+b_0)=(x\pm1)^{4-m}(x\pm\omega_1)^m \qquad (A-14)$$

$m=1$のとき

式(A-14)より

$$x^4+C_2x^2+C_0\pm\varepsilon^{-1}(1-\omega_1^2)(1-\omega_2^2)x(x^2+b_0)=(x\pm1)(x\pm\omega_1) \qquad (A-15)$$

両辺の係数を比較して

$$\left.\begin{aligned}C_2&=3(\omega_1+1)\\C_0&=\omega_1\end{aligned}\right\} \qquad (A-16)$$

$$b_0=\frac{3\omega_1+1}{3+\omega_1} \qquad (A-17)$$

式(A-11)と式(A-17)より

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 + 1}{2} \tag{A-18}$$

式(A-9)と式(A-15)を代入して、整理すると

$$\left.\begin{aligned}(\omega_1^2 + 3\omega_1 + 4)a_2 - (3\omega_1 + 5)a_0 &= 2\omega_1^2 + 3\omega_1 + 3\\ (\omega_1^2 - \omega_1)a_2 + (\omega_1 - 1)a_0 &= \omega_1^4 - \omega_1\end{aligned}\right\} \tag{A-19}$$

となる。

a_0, a_2, ε^2 を求めると

$$a_2 = \frac{1}{4}(3\omega_1^2 + 2\omega_1 + 3) \tag{A-20}$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\omega_1(\omega_1 + 1)^2 \tag{A-21}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{(\omega_1^2 - 4)^4(\omega_1 + 1)}{16} \tag{A-22}$$

を得る。

$m = 2$ のとき

$m = 1$ のときと同様にして、次の関係式を得る。

$$\left.\begin{aligned}c_2 &= \omega_1^2 + 4\omega_1 + 1\\ c_0 &= \omega_1^2\end{aligned}\right\} \tag{A-23}$$

$$b_0 = \omega_1 \tag{A-24}$$

$$\left.\begin{aligned}a_2 &= \frac{(\omega_1 + 1)^2}{2}\\ a_0 &= \omega_1^2\end{aligned}\right\} \tag{A-25}$$

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{1 - 2\omega_1}{2}\right)^4 \tag{A-26}$$

つぎに、反射係数 $\rho_1(j\omega)$ は関数 $\Phi(\omega^2)$ を用いて

$$\left|\rho_1(j\omega)\right|^2 = \frac{(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0)^2 + K^2\omega^{2m}}{(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0)^2 + (K^2 + H)\omega^{2m}} \tag{A-27}$$

となる。

終端に負性抵抗を接続した場合の反射電力Gは

$$G=\frac{1}{|\rho_1(j\omega)|^2} \tag{A-28}$$

である。

$$G_{max}=\max_{\omega_1^2\leqq\omega^2\leqq 1}\frac{H+\phi(\omega^2)}{\phi(\omega^2)}=\frac{H+K^2}{K^2} \tag{A-29}$$

$$G_{min}=\min_{\omega_1^2\leqq\omega^2\leqq 1}\frac{H+\phi(\omega^2)}{\phi(\omega^2)}=\frac{H+K^2}{K^2+\varepsilon^2} \tag{A-30}$$

$$\left|\rho_1(j\omega)\right|^2=\left|\rho(s)\cdot\rho(-s)\right|_{s=j\omega}$$

$$=\frac{(s^4+a_2s^2+a_0)^2+K^2(-s^2)^m}{(s^4+a_2s^2+a_0)^2+(K^2+H)(-s^2)^m} \tag{A-31}$$

$(m\leqq 3)$

式(A-30)より

$$K^2=\frac{H-\varepsilon^2(G_{min}-1)}{G_{min}-1} \tag{A-32}$$

式(A-29)と式(A-32)より

$$H=\frac{(G_{max}-1)(G_{min}-1)\varepsilon^2}{G_{max}-G_{min}} \tag{A-33}$$

となる。

規格化入力インピーダンス、$Z_{in}(s)/R_s$は

$$\frac{Z_{in}(s)}{R_s}=\frac{\beta_1s+\beta_2s^2+\beta_3s^3}{1+\beta_4s+\beta_5s^2+\beta_6s^3+\beta_7s^4}=\frac{a_0'\beta_1s+a_0'\beta_2s^2+a_0'\beta_3s^3}{a_0'+a_0'\beta_4s+a_0'\beta_5s^2+a_0'\beta_6s^3+s^4} \tag{A-34}$$

ただし $a_0'\beta_7=1$

となる。

反射係数は

$$\rho_1(s)=\frac{1-\frac{Z_{in}(s)}{R_s}}{1+\frac{Z_{in}(s)}{R_s}}$$

$$=\frac{s^4+a_0'(\beta_6-\beta_3)s^3+a_0'(\beta_5-\beta_2)s^2+a_0'(\beta_4-\beta_1)s+a_0'}{s^4+a_0'(\beta_6+\beta_3)s^3+a_0'(\beta_5+\beta_2)s^2+a_0'(\beta_4+\beta_1)s+a_0'} \tag{A-35}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&P_1(s)\cdot P_1(-s)\\
&=\left[s^8+\left\{2a_0'(\beta_5-\beta_2)-a_0'^2(\beta_6-\beta_3)^2\right\}s^6+\left\{a_0'^2(\beta_5-\beta_2)^2-2a_0'^2(\beta_6-\beta_3)(\beta_4-\beta_1)+2a_0'\right\}s^4\right.\\
&\left.+a_0'^2\left\{2(\beta_5-\beta_2)-(\beta_4-\beta_1)^2\right\}s^2+a_0'^2\right]\\
&\div\left[s^8+\left\{2a_0'(\beta_5+\beta_2)-a_0'^2(\beta_6+\beta_3)^2\right\}s^6+\left\{a_0'^2(\beta_5+\beta_2)^2-2a_0'^2(\beta_6+\beta_3)(\beta_4+\beta_1)+2a_0'\right\}s^4\right.\\
&\left.+a_0'^2\left\{2(\beta_5+\beta_2)-(\beta_4+\beta_1)^2\right\}s^2+a_0'^2\right] \qquad (A-36)
\end{aligned}
$$

式(A-31)と式(A-36)が恒等的に等しくなるためには，$a_0'=a_0$でなければならない。

$m=1$のときの連分数展開

式(A-31)において$m=1$とすると

$$
\left|P_1(s)\right|^2=\frac{s^8+2a_2s^6+(2a_0+a_2^2)s^4+(2a_2a_0-k^2)s^2+a_0^2}{s^8+2a_2s^6+(2a_0+a_2^2)s^4+(2a_0a_2-k^2-H)s^2+a_0^2} \qquad (A-37)
$$

となる。

式(A-36)と(A-37)の係数を比較すると

$$
\left.\begin{aligned}
2a_2&=2a_0(\beta_5-\beta_2)-a_0^2(\beta_6-\beta_3)^2\\
2a_2&=2a_0(\beta_5+\beta_2)-a_0^2(\beta_6+\beta_3)^2
\end{aligned}\right\} \qquad (A-38)
$$

$$
2a_0+a_2^2=a_0^2(\beta_5-\beta_2)^2-2a_0^2(\beta_6-\beta_3)(\beta_4-\beta_1)+2a_0 \qquad (A-39)
$$

$$
2a_0+a_2^2=a_0^2(\beta_5+\beta_2)^2-2a_0^2(\beta_6+\beta_3)(\beta_4+\beta_1)+2a_0
$$

$$
2a_0a_2-k^2=a_0^2\left\{2(\beta_5-\beta_2)-(\beta_4-\beta_1)^2\right\} \qquad (A-40)
$$

$$
2a_0a_2-k^2-H=a_0^2\left\{2(\beta_5+\beta_2)-(\beta_4+\beta_1)^2\right\}
$$

となる。式(A-38)～式(A-40)より，それぞれ次式を得る。

$$
\beta_2=a_0\beta_3\beta_6 \qquad (A-41)
$$

$$
\beta_2\beta_5=\beta_3\beta_4+\beta_1\beta_6 \qquad (A-42)
$$

$$
H=4a_0^2(\beta_1\beta_4-\beta_2) \qquad (A-43)
$$

式(A-37)の分母，分子の左半平面内の根を用いて$P_1(s)$を表わすと

1) 2対の共役複素根，2対の共役複素極

$$F_1(s)=\frac{(s+C_1+jD_1)(s+C_1-jD_1)(s+C_2+jD_2)(s+C_2-jD_2)}{(s+A_1+jB_1)(s+A_1-jB_1)(s+A_2+jB_2)(s+A_2-jB_2)} \quad (A-44)$$

ここで，A_1，B_1，A_2，B_2，C_1，D_1，C_2 および D_2 は正の実数である。式(A−44)と式(A−36)から

$$\beta_1=\frac{A_1(A_2^2+B_2^2)+A_2(A_1^2+B_1^2)-C_1(C_2^2+D_2^2)-C_2(C_1^2+D_1^2)}{a_0}$$

$$\beta_2=\frac{A_1^2+B_1^2+A_2^2+B_2^2-(C_1^2+D_1^2+C_2^2+D_2^2)+4(A_1A_2-C_1C_2)}{2a_0}$$

$$\beta_3=\frac{A_1+A_2-(C_1+C_2)}{a_0}$$

$$\beta_4=\frac{A_1(A_2^2+B_2^2)+A_2(A_1^2+B_1^2)+C_1(C_2^2+D_2^2)+C_2(C_1^2+D_1^2)}{a_0} \quad (A-45)$$

$$\beta_5=\frac{A_1^2+B_1^2+A_2^2+B_2^2+C_1^2+D_1^2+C_2^2+D_2^2+4(A_1A_2+C_1C_2)}{2a_0}$$

$$\beta_6=\frac{A_1+A_2+C_1+C_2}{a_0}$$

$$\beta_7=\frac{1}{a_0}$$

2) 2対の共役複素根
1対の共役複素極と2つの実数極

$$F_1(s)=\frac{(s+C_1+jD_1)(s+C_1-jD_1)(s+C_2+jD_2)(s+C_2-jD_2)}{(s+A_1+jB_1)(s+A_1-jB_1)(s+A_2)(s+A_3)} \quad (A-46)$$

3) 1対の共役複素根と2つの実数根
1対の共役複素極と2つの実数極

$$F_1(s)=\frac{(s+C_1+jD_1)(s+C_1-jD_1)(s+C_2)(s+C_3)}{(s+A_1+jB_1)(s+A_1-jB_1)(s+A_2)(s+A_3)} \quad (A-47)$$

となる。
式(A−34)を連分数展開すると

$$\frac{R_s}{Z_{in}(s)} = sC_1 + \cfrac{1}{sL_1 + \cfrac{1}{sC_2 + \cfrac{1}{sL_2 + \cfrac{1}{R_2}}}} \qquad (A-48)$$

となる。$m=1$ のときは連分数展開が可能であり，

$$C_1 = \frac{\beta_6}{\beta_2} \qquad C_2 = \frac{\beta_4^2 \beta_7}{\beta_6(\beta_1\beta_4 - \beta_3)}$$

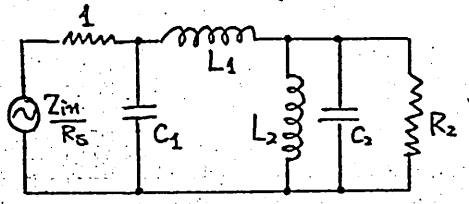
$$L_1 = \frac{\beta_2}{\beta_4} \qquad L_2 = \frac{\beta_1\beta_4 - \beta_2}{\beta_4} \qquad (A-49)$$

$$R_2 = \frac{\beta_1\beta_4 - \beta_3}{\beta_4^2}$$

となる。

$m=2$ のときは連分数展開可能で，$m=3$ は連分数展開できない。

以上のことより，$m=1, 2$ の場合に現実に回路を構成することができ，その回路は図A-2のようになる。本実験では $m=1$ の場合について行なった。



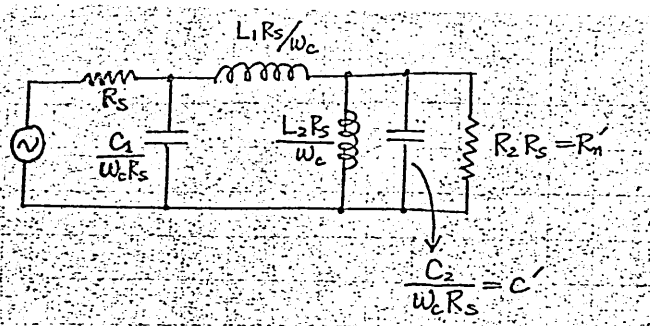
図A-2 回路網合成より求めた等価回路

図A-2は規格化された値を示しているので，実際に使用する場合の値に変換しなければならない。

まず，エサキダイオードが与えられるから，R_2 と C_2 がエサキダイオードの容量と抵抗に等しくなるように，インピーダンス・レベルと，周波数を決めた。すなわち，エサキダイオードを並列変換したときの負性抵抗を R_n'，容量を C' とすると

$$R_2 R_s = R_n' \quad , \quad \frac{C_2}{R_s C'} = \omega_c \qquad (A-50)$$

で R_s と ω_c が決まる。R_s と ω_c が決まると図A-3に示すように，各素子の値が求まる。



図A-3 与えられたエサキダイオードによって決まる各素子の値

B 導波管の不連続

導波管で等価的な容量，インダクタンスは次のような形で与えられる[3]。

1) キャパシタンス

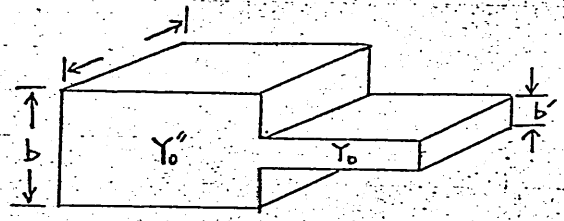


図 B-1 段違いの導波管

図B-1のような，高さの異なった導波管を接続すると，その不連続部分で生じる等価的サセプタンス B_3 は容量性となり，次式で与えられる。

$$B_3 = Y_0'' \frac{2b}{\lambda_g}\left[\ln\left(\frac{1-K^2}{4K}\right)\left(\frac{1+K}{1-K}\right)\frac{K+\frac{1}{K}}{2}+\frac{2}{A}\right]$$

$$A = \left(\frac{1+K}{1-K}\right)^{2K}\frac{1+\sqrt{1-(b/\lambda_g)^2}}{1-\sqrt{1-(b/\lambda_g)^2}} - \frac{1+3K^2}{1-K} \qquad (B-1)$$

$$K = b'/b$$

2) インダクタンス

図B-2のような導波管回路系を考える。

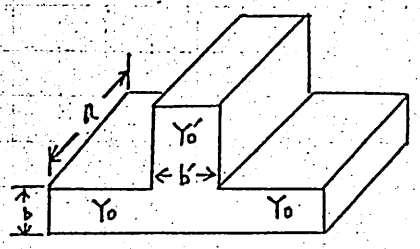


図 B-2　E-分岐を短絡した導波管回路

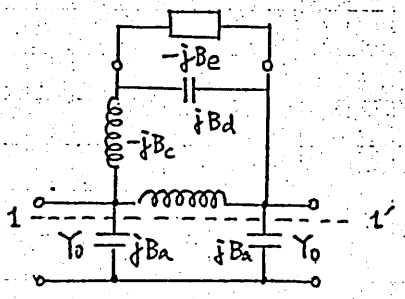


図 B-3　図 B-2 の等価回路

$$\frac{B_a}{Y_0} \approx \frac{\pi b'}{\lambda_g}\left[1 - \frac{b'}{2\pi b} + \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{2b'}{\lambda_g}\right)^2\left(1 - 0.368\frac{b'}{b}\right)\right] \qquad (B\text{-}2)$$

$$\frac{B_b}{Y_0} \approx 1.1\frac{b'}{\lambda_g}\left[1 - 0.227\frac{b'}{b} + 0.008\left(\frac{b'}{b}\right)^2\right] \qquad (B\text{-}3)$$

$$\frac{B_c}{Y_0} \approx \frac{\lambda_g}{2\pi b'} \qquad (B\text{-}4)$$

$$\frac{B_d}{Y_0} \approx \frac{b}{\lambda_g}\left[2\ln\frac{eb}{2b'} + 1.1\frac{b'}{b} - 0.167\left(\frac{b'}{b}\right)^2 + 0.008\left(\frac{b'}{b}\right)^3\right] \qquad (B\text{-}5)$$

$$\frac{B_e}{Y_0'} = -\cot\frac{2\pi l}{\lambda_g} \qquad (B\text{-}6)$$

図3の1-1'端子から上方を見た場合のアドミタンスYは

$$Y = -j\left\{\frac{B_c(B_d - B_e)}{B_d - B_e - B_c} + B_b\right\} \qquad (B\text{-}7)$$

となる。したがって，中括弧の中を正規化すればYはイニダクティブになる。式(B-7)のYが図1のB_2になる。

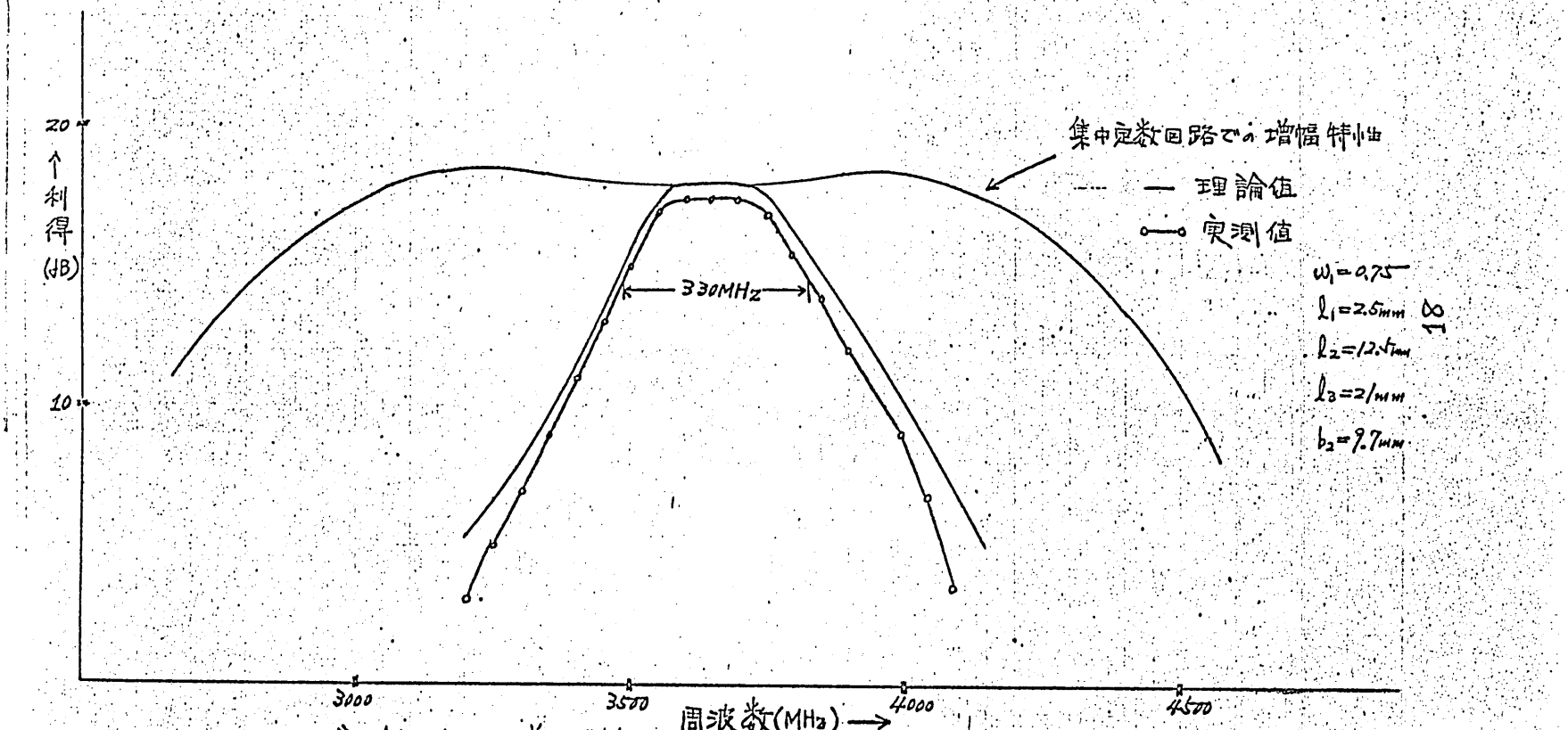


図 6　設計値での増幅特性

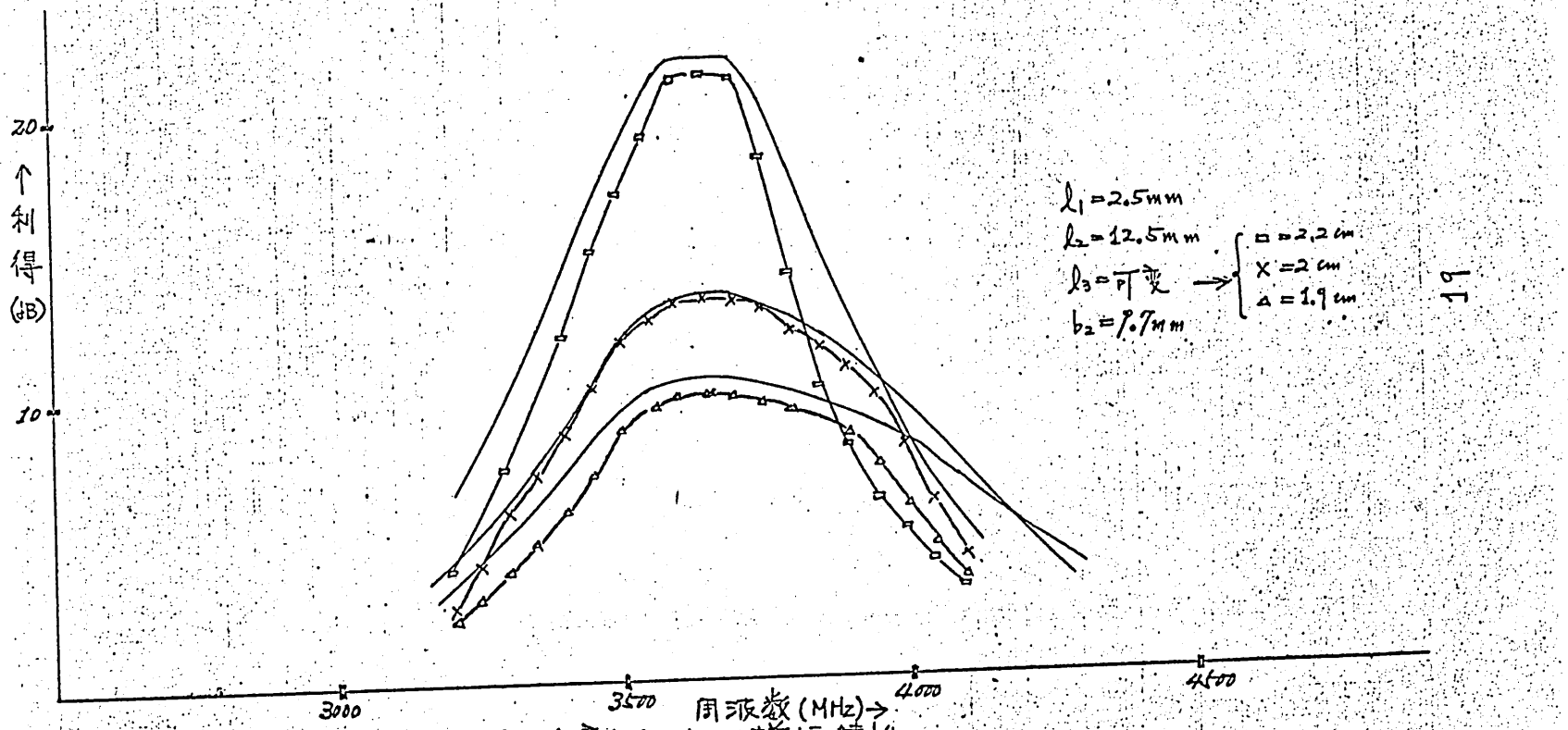


図7　短絡板(l_3)を変化したときの増幅特性

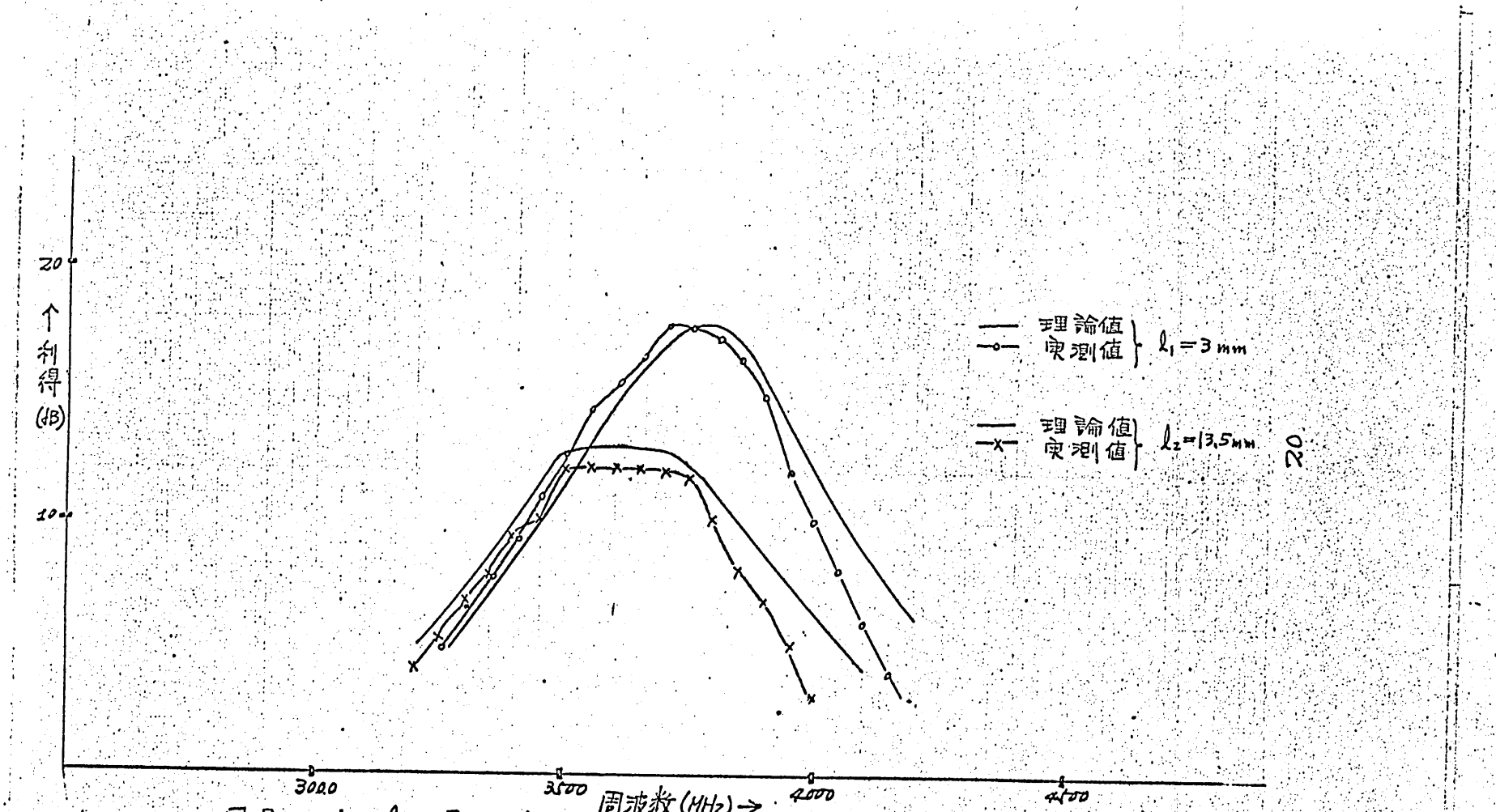


図 8　l_1 と l_2 の長さを変えたときの増幅特性

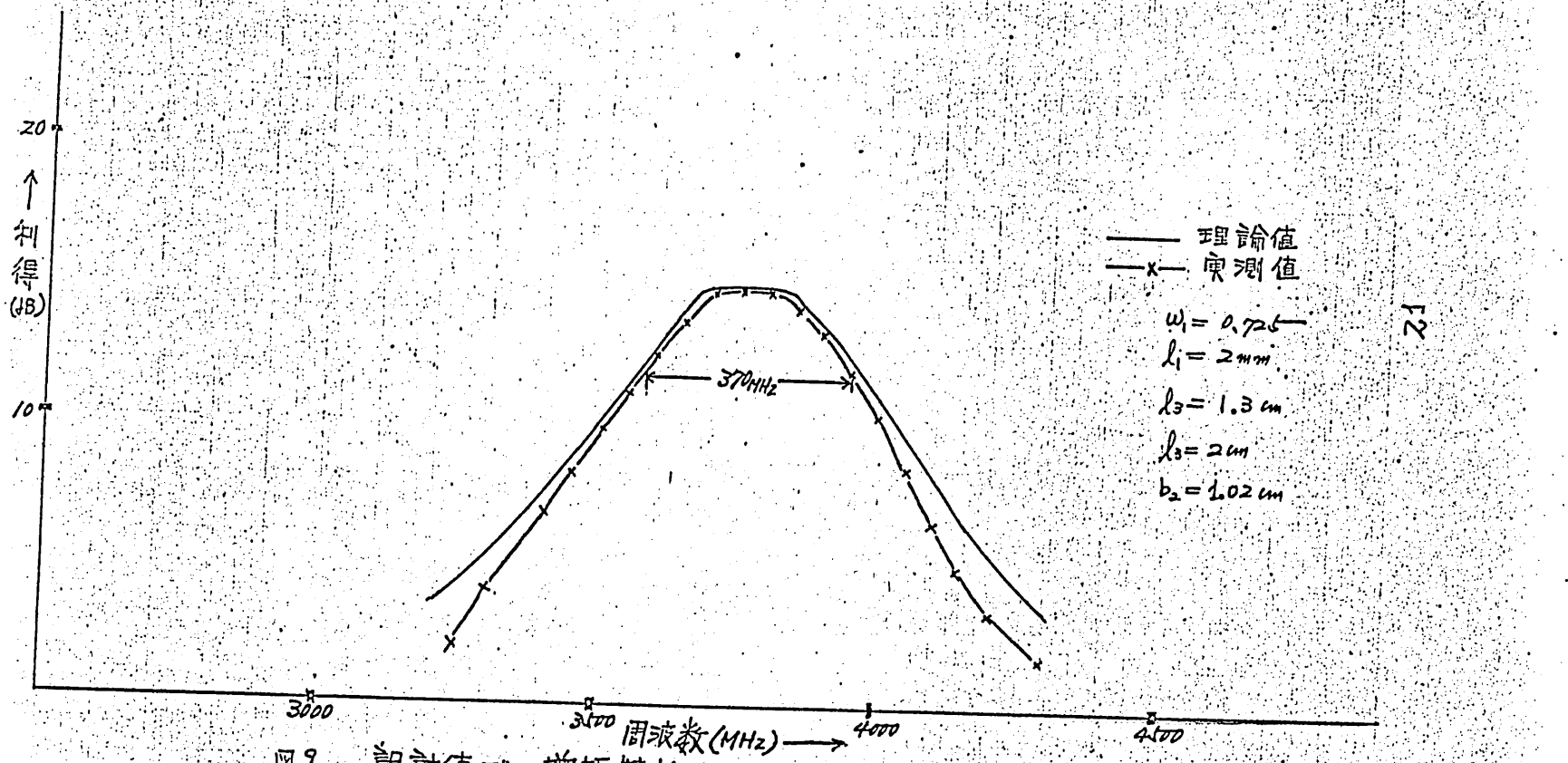


図9　設計値での増幅特性

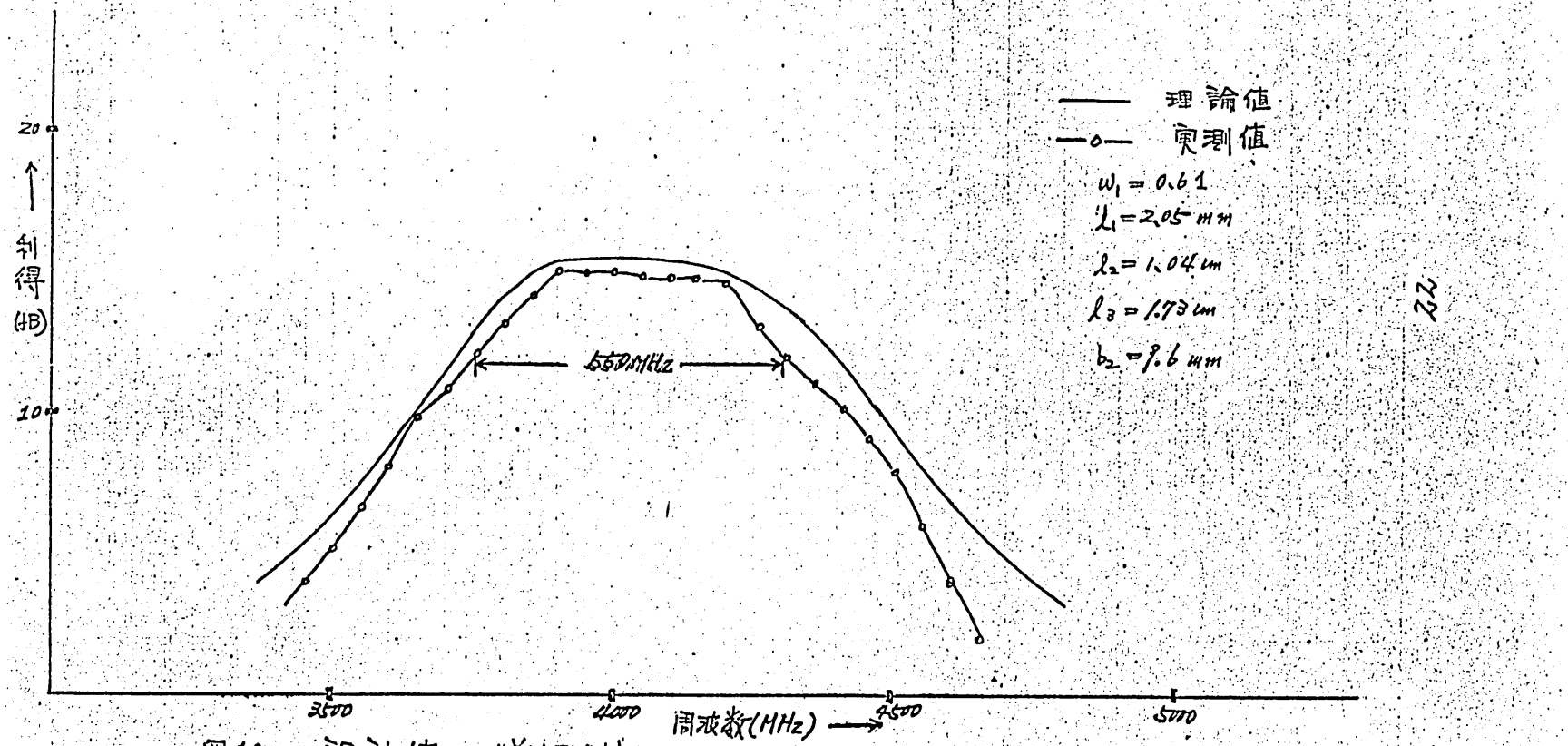


図10　設計値での増幅特性

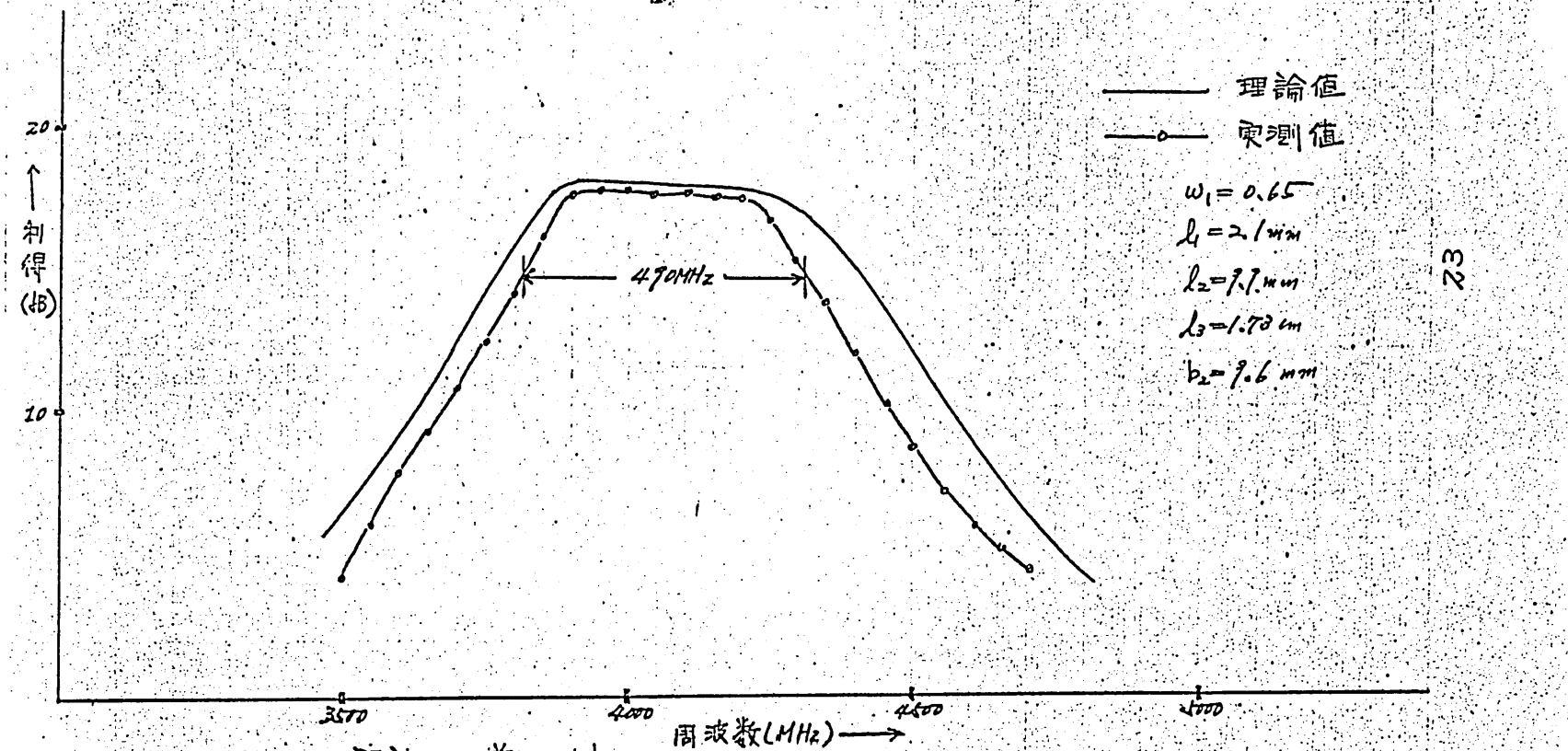


図11　設計値の増幅特性

輻射科学研究会資料

軸方向に運動している不均質プラズマ円柱による平面電磁波の散乱

塩沢俊之　青海恵之
（大阪大学・工学部）

1971年7月2日

1．まえがき

プラズマによる電磁波の散乱の問題は，電磁波理論における基礎的な問題の一つであること，プラズマの測定あるいは宇宙工学において遭遇する種々の問題等への応用が考えられること等から，これまでに，異なった種々の観点から詳しく調べられている[(1)～(3)]しかしながら，従来の理論では，プラズマが静止している場合のみしか取り扱われておらず，プラズマの運動（ドリフト）の影響については検討されていないようである．ところが，たとえば，プラズマ・ビームあるいは電子ビーム等のパラメータを電磁波の照射によって測定する場合には，プラズマの運動の影響について考慮する必要が生じてくる．最近，著者等は，軸方向に一様に運動している等方性プラズマおよび異方性プラズマからなる無限長円柱による平面電磁波の散乱について考察し，種々の興味ある結果を得た[(4),(5)] ところで，先の報告ではプラズマが均質の場合を考えたが，実際のプラズマ・ビームでは，電子密度はビームの中心で大きく，外側へいくほど小さくなるのが普通である[(6),(7)] そこで，本論文では，先の理論を拡張し，軸方向に一様に運動している，半径方向に不均質な異方性プラズマからなる無限長円柱による平面電磁波の散乱についてMaxwell－Minkowski の方程式を用いて考察する．

不均質プラズマの解析方法としては，プラズマ円柱を同軸円筒面によって多数の薄い層に分割し，各層内では媒質定数が近似的に一定であるとして，不均質なプラズマ円柱による散乱の問題を媒質定数がわすかづつ異なる多数の均質な層からなる円柱による散乱の問題に変換するという方法を用いる[(8)] この方法には，(1)均質媒質に対する理論を用いるために，解析が比較的簡単であること，(2)不均質さが任意であっても解析が可能であること，および(3)近似解法であるが，分割を細かくすることにより，実用上十分な精度を得ることができること等の利点があり，高速計算機による数値解析に適した方法

であると考えられる．

2．不均質プラズマ円柱内部の電磁界

軸方向に運動している，半径方向に不均質な異方性プラズマからなる無限長円柱による平面電磁波の散乱について考察するために，図1のように座標系を定める．円柱（半径 a ）の軸方向に z 軸を選び，円柱は一定の速度 $\mathbf{v} = \mathbf{i}_z v$ で運動しているものとする．また，一様な外部静磁界が z 方向に印加されているものとする．図1において，ε_0，μ_0 および ε_1，μ_1 は，それぞれ，真空および周囲の媒質の誘電率および透磁率である．また，ε は半径 r の関数であり，異方性プラズマの静止系で定義された誘電率テンソルを表わす．

まず，準備として，軸方向に運動している不均質プラズマ円柱内部の電磁界を求める．不均質プラズマに対する解析方法としては，先にも述べたように，

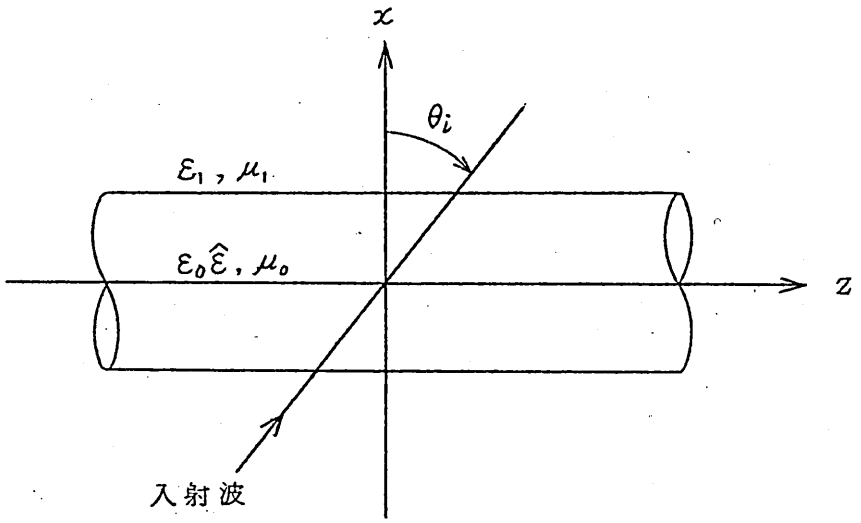


図1　座　標　系

プラズマ円柱を同軸円筒面によって多数の薄い層に分割し，各層内では媒質定数が近似的に一定であるとして，不均質なプラズマ円柱の問題を媒質定数がわずかづつ異なる多数の層からなる円柱の問題に変換するという方法を用いる．いま，プラズマ円柱を，図２のように，L 個の層に分割し，外側の層

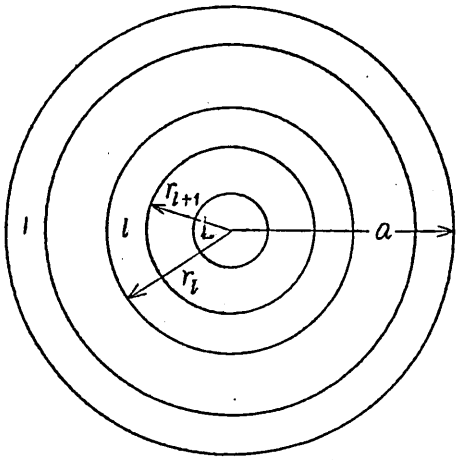


図２　円柱の分割

から数えて第 l 番目の層の外径を r_l とする．以下では，第 l 層に関する量であることを明示する場合には添字 l を付けることにする．

さて，各層は，それぞれ，均質であると仮定しているので，各層内では，先の報告で求められた均質な媒質に対するMaxwell－Minkowskiの方程式[5]が成立する．いま，入射電磁界が時間的に $e^{j\omega t}$ なる変化をするものとすると，第 l 層に関する誘電率テンソル $\hat{\varepsilon}_l$ は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_l = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & -j\varepsilon_{xy} & 0 \\ j\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 - \frac{X_l'}{1-Y'^2}, \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{X_l' Y'}{1-Y'^2} \\ \varepsilon_{zz} &= 1 - X_l' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} X_l' &= \frac{\omega_{pl}^2}{\omega'^2}, \qquad Y' = \frac{\omega_c}{\omega'} \\ \omega' &= \gamma\,(1 - n_1 \beta \sin\theta_i)\,\omega \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c}, \qquad n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ω', ω_c および ω_{pl} は，それぞれ，プラズマの静止系で測った入射波の角周波数，サイクロトロン角周波数および第 l 層に関するプラズマ角周波数である．また，n_1 および θ_i は周囲の媒質の屈折率および入射角を表わす．さて，プラズマ円柱内部の電磁界が z 方向に $\exp(-jk_z z)$ なる変化をするものとすると，第 l 層内における電界および磁界の z 方向成分 E_z および H_z はつぎの波動方程式から得られる．

$$\left.\begin{aligned} \nabla_t^2 E_z + k_0^2 (p_l E_z + j g_l H_z) &= 0 \\ \nabla_t^2 H_z + k_0^2 (q_l H_z + j h_l E_z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} p_l &= \varepsilon_{zz} (K_1 R_{xx} - K_2 R_{xy}) / K_3 \\ q_l &= (K_1 L_{xx} - K_2 L_{xy}) / K_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$g_l = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}\,(K_2 n_z' - K_1 N_{xx})/K_3$$

$$h_l = -(\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}\,(K_2 n_z' - K_1 N_{xx})/K_3$$

$$K_1 = n_z'^2 - L_{xx} R_{xx}$$

$$K_2 = 2 n_z' N_{xx} - (L_{xx} R_{xy} + L_{xy} R_{xx}) \qquad (5)$$

$$K_3 = N_{xx}^2 - L_{xx} R_{xx}$$

$$n_z' = n_z + N_{xy}, \quad n_z = k_z/k_0$$

$$k_0 = \omega/c \qquad (6)$$

$$R_{xx} = (1-\beta^2)(1-\beta^2\varepsilon_{xx})/D$$

$$R_{xy} = \beta^2(1-\beta^2)\,\varepsilon_{xy}/D$$

$$L_{xx} = (1-\beta^2)[\varepsilon_{xx} - \beta^2(\varepsilon_{xx}^2 - \varepsilon_{xy}^2)]/D$$

$$L_{xy} = (1-\beta^2)\,\varepsilon_{xy}/D \qquad (7)$$

$$N_{xx} = \beta(1-\beta^2)\,\varepsilon_{xy}/D$$

$$N_{xy} = \beta[(1-\beta^2\varepsilon_{xx})(\varepsilon_{xx}-1) + \beta^2\varepsilon_{xy}^2]/D$$

$$D = (1-\beta^2\varepsilon_{xx})^2 - \beta^4\varepsilon_{xy}^2$$

式(3)の解を円筒座標（r，φ，z）を用いて表わすと，つぎのようになる．

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\{A_{ln} k_{l1}^2 J_n(k_{l1} r) + B_{ln} k_{l2}^2 J_n(k_{l2} r)$$

$$+ C_{ln} k_{l1}^2 H_n^{(2)}(k_{l1} r) + D_{ln} k_{l2}^2 H_n^{(2)}(k_{l2} r)\} f_n \qquad (8)$$

$$H_z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{A_{ln}k_{l1}^2\xi_{l1}J_n(k_{l1}r)+B_{ln}k_{l2}^2\xi_{l2}J_n(k_{l2}r)$$
$$+C_{ln}k_{l1}^2\xi_{l1}H_n^{(2)}(k_{l1}r)+D_{ln}k_{l2}^2\xi_{l2}H_n^{(2)}(k_{l2}r)\}f_n$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} f_n&=exp(j\omega t-jn\varphi-jk_z z)\\ k_{li}&=\sqrt{s_{li}}\ k_0\quad(i=1,2)\\ \xi_{li}&=-j(s_{li}-p_l)/g_l\quad(i=1,2)\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

ただし，s_{li} $(i=1,2)$ は

$$s^2-(p_l+q_l)s+p_l q_l+g_l h_l=0\qquad(10)$$

の二根を表わす．また，J_n および $H_n^{(2)}$ はBessel関数および第2種Hankel関数を表わし，A_{ln}, B_{ln}, C_{ln} および D_{ln} は定数である．第 l 層内の電磁界の他の成分はMaxwell－Minkowski の方程式から求めることができる．そこで，n 次モードに関する電磁界の接線成分を行列を用いてまとめると，つぎのように表わすことができる．

$$F_n(k_{l1}r, k_{l2}r)=G_{ln}(k_{l1}r, k_{l2}r)K_{ln}\qquad(11)$$

ただし，

$$F_n(k_{l1}r, k_{l2}r)=\begin{bmatrix}E_{zn}\\ E_{\varphi n}\\ H_{zn}\\ H_{\varphi n}\end{bmatrix},\quad K_{ln}=\begin{bmatrix}A_{ln}\\ C_{ln}\\ B_{ln}\\ D_{ln}\end{bmatrix}\qquad(12)$$

また，G_{ln}は4行4例の行列であり，その要素は次式で与えられる．

$$
\left.
\begin{aligned}
G_{11} &= k_{l1}^{2} J_n(k_{l1} r) f_n \\
G_{21} &= k_{l1}^{2}(a_l + b_l \xi_{l1})(-jn/r) J_n(k_{l1} r) f_n \\
&\quad + k_{l1}^{3}(c_l + d_l \xi_{l1}) J_n'(k_{l1} r) f_n \\
G_{31} &= k_{l1}^{2} \xi_{l1} J_n(k_{l1} r) f_n \\
G_{41} &= k_{l1}^{2}(b_l' + a_l' \xi_{l1})(-jn/r) J_n(k_{l1} r) f_n \\
&\quad + k_{l1}^{3}(d_l' + c_l' \xi_{l1}) J_n'(k_{l1} r) f_n
\end{aligned}
\right\} \qquad (13)
$$

ただし，

$$
\left.
\begin{aligned}
a_l &= j k_0 (K_1 n_z' - K_2 N_{xx}) / K_4 \\
b_l &= \omega \mu_0 (K_2 R_{xx} - K_1 R_{xy}) / K_4 \\
c_l &= k_0 (K_2 n_z' - K_1 N_{xx}) / K_4 \\
d_l &= -j \omega \mu_0 (K_1 R_{xx} - K_2 R_{xy}) / K_4 \\
a_l' &= a_l , \qquad c_l' = c_l \\
b_l' &= \omega \varepsilon_0 (K_1 L_{xy} - K_2 L_{xx}) / K_4 \\
d_l' &= j \omega \varepsilon_0 (K_1 L_{xx} - K_2 L_{xy}) / K_4 \\
K_4 &= k_0^{2} (K_1^{2} - K_2^{2})
\end{aligned}
\right\} \qquad (14)
$$

式(13)ではG_{ln}の第1列の要素のみを示したが，他の列の要素はつぎのようにして求めることができる．すなわち，第3列の要素は，第1列の要素においてk_{l1}およびξ_{l1}をk_{l2}およびξ_{l2}によって置き換えることにより得られ，第2列および第4列の要素は，それぞれ，第1列および第3列の要素に

おいて J_n および J_n' を $H_n^{(2)}$ および $H_n^{(2)\prime}$ によって置き換えることにより得られる．なお，以下では簡単のために，$F_n(k_{l1}r, k_{l2}r)$ および $G_{ln}(k_{l1}r, k_{l2}r)$ を $F_n(k_l r)$，$G_{ln}(k_l r)$ と書くことにする．

式(11)から，

$$G_{ln}^{-1}(k_l r)F_n(k_l r) = K_{ln} \tag{15}$$

なる関係が得られるが，K_{ln} は第 l 層内では一定値をとるから，層の両端，すなわち，$r = r_l$ および $r = r_{l+1}$ においても同じ値をもつ．したがって，次式が成立する．

$$G_{ln}^{-1}(k_l r_l)F_n(k_l r_l) = G_{ln}^{-1}(k_l r_{l+1})F_n(k_l r_{l+1}) \tag{16}$$

あるいは，

$$\begin{aligned} F_n(k_l r_l) &= G_{ln}(k_l r_l)\, G_{ln}^{-1}(k_l r_{l+1})F_n(k_l r_{l+1}) \\ &= M_{ln}(k_l r_l, k_l r_{l+1})\, F_n(k_l r_{l+1}) \end{aligned} \tag{17}$$

ただし，

$$M_{ln} = G_{ln}(k_l r_l)G_{ln}^{-1}(k_l r_{l+1}) \tag{18}$$

式(17)は第 l 層の両端の電磁界の接線成分の間の関係を表わす．

さて，F_n は，境界条件により，各層の境界面上で連続，すなわち，$F_n(k_\nu r_{\nu+1}) = F_n(k_{\nu+1} r_{\nu+1})$ $(\nu = 1, 2, \cdots\cdots L-1)$でなければならないこと，および式(17)の関係をくり返し用いることにより，次式が得られる．

$$F_n(k_l r_l) = M_n(k_l r_l, k_{L-1} r_L) F_n(k_L r_L) \tag{19}$$

ここで,

$$M_n(k_l r_l, k_{L-1} r_L) = \prod_{\nu=l}^{L-1} M_{\nu n}(k_\nu r_\nu, k_\nu r_{\nu+1}) \tag{20}$$

一方，式(11)から，つぎの関係が成立する．

$$F_n(k_L r_L) = G_{Ln}(k_L r_L) K_{Ln} \tag{21}$$

ただし，プラズマ円柱の中心では電磁界は有界でなければならないことから，K_{Ln}はつぎのようになる．

$$K_{Ln} = \begin{bmatrix} A_{Ln} \\ 0 \\ B_{Ln} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

式(19)および(21)から，$F_n(k_l r_l)$は，結局，つぎのように表わすことができる．

$$F_n(k_l r_l) = M_n(k_l r_l, k_{L-1} r_L) G_{Ln}(k_L r_L) K_{Ln} \tag{23}$$

式(23)から，第 l 層の外側の境界面上における電磁界の接線成分が，円柱の中心における電磁界の振幅 A_{Ln} および B_{Ln} によって表わされることがわかる．A_{Ln} および B_{Ln} はまだ未知の量であるが，これらは，後に，プラズマ円柱と周囲の媒質との境界面における境界条件から決定される．

3．散 乱 電 磁 界

さて，つぎに，軸方向に一定の速度で運動している不均質プラズマ円柱による平面電磁波の散乱について考察する．いま，入射平面波の波動ベクトルが $x-z$ 平面内にあり，図1に示すように，x 軸と θ_i なる角度をなすものとすると，入射平面波は，一般に，つぎのような円筒波の形に表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(i)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(i)} J_n(\lambda_1 r)\exp(j\omega t - jn\varphi - jk_{iz}z) \\ H_z^{(i)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(i)} J_n(\lambda_1 r)\exp(j\omega t - jn\varphi - jk_{iz}z) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = k_1\cos\theta_i\,, \qquad k_{iz} = k_1\sin\theta_i \\ &k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

$A_n^{(i)}$ および $B_n^{(i)}$ は入射波の振幅の大きさおよび偏波によってきまる定数であり，与えられた入射平面波を円筒波に展開することによって得られる．いま，入射平面波の電界ベクトルが y 軸と ψ_i なる角度をなすものとし，その大きさを E_{io} とすると，$A_n^{(i)}$ および $B_n^{(i)}$ は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} A_n^{(i)} &= (-j)^n E_{io}\sin\psi_i\cos\theta_i \\ B_n^{(i)} &= (-j)^n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_{io}\cos\psi_i\cos\theta_i \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

一方，散乱電磁界も同様につぎのように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned} E_z^{(s)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(s)} H_n^{(2)}(\lambda_1 r)\exp(j\omega t - jn\varphi - jk_{sz} z) \\ H_z^{(s)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(s)} H_n^{(2)}(\lambda_1 r)\exp(j\omega t - jn\varphi - jk_{sz} z) \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

ここで，$A_n^{(s)}$および$B_n^{(s)}$は未定定数であり，後に境界条件から決定される．式(24)および(27)では，入射波および散乱波のz方向成分のみを示したが，他の成分はMaxwell の方程式から得られる．

式(27)および(23)に現われる未定定数$A_n^{(s)}$，$B_n^{(s)}$，A_{Ln}およびB_{Ln}は，円柱表面で電界および磁界の接線成分が連続でなければならないという境界条件，

$$F_n(k_1 a) = \begin{bmatrix} E_{zn}^{(i)} + E_{zn}^{(s)} \\ E_{\varphi n}^{(i)} + E_{\varphi n}^{(s)} \\ H_{zn}^{(i)} + H_{zn}^{(s)} \\ H_{\varphi n}^{(i)} + H_{\varphi n}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (r = a) \qquad (28)$$

から求められる．式(28)が成立するためには，まず，z方向の伝搬定数はすべて等しくなければならない．すなわち，

$$k_z = k_{sz} = k_{iz} \qquad (29)$$

つぎに，式(23)，(24)および(27)から，$A_n^{(s)}$，$B_n^{(s)}$，A_{Ln}およびB_{Ln}は次式で与えられることがわかる．

$$\begin{bmatrix} A_n^{(s)} \\ B_n^{(s)} \\ A_{Ln} \\ B_{Ln} \end{bmatrix} = [W_n] \begin{bmatrix} -A_n^{(i)} J_n(\lambda_1 a) \\ A_n^{(i)}(nk_{iz}/\lambda_1^2 a) J_n(\lambda_1 a) - B_n^{(i)}(j\omega\mu_1/\lambda_1) J_n'(\lambda_1 a) \\ -B_n^{(i)} J_n(\lambda_1 a) \\ A_n^{(i)}(j\omega\varepsilon_1/\lambda_1) J_n'(\lambda_1 a) + B_n^{(i)}(nk_{iz}/\lambda_1^2 a) J_n(\lambda_1 a) \end{bmatrix} \quad (30)$$

ただし，

$$[W_n]^{-1} = \begin{bmatrix} H_n^{(2)}(\lambda_1 a) & 0 & \sum_{i=1}^{4} m_{1i} g_{i1} & \sum_{i=1}^{4} m_{1i} g_{i3} \\ -(k_{iz} n/\lambda_1^2 a) H_n^{(2)}(\lambda_1 a) & (j\omega\mu_1/\lambda_1) H_n^{(2)\prime}(\lambda_1 a) & \sum_{i=1}^{4} m_{2i} g_{i1} & \sum_{i=1}^{4} m_{2i} g_{i3} \\ 0 & H_n^{(2)}(\lambda_1 a) & \sum_{i=1}^{4} m_{3i} g_{i1} & \sum_{i=1}^{4} m_{3i} g_{i3} \\ -(j\omega\varepsilon_1/\lambda_1) H_n^{(2)\prime}(\lambda_1 a) & (-k_{iz} n/\lambda_1^2 a) H_n^{(2)}(\lambda_1 a) & \sum_{i=1}^{4} m_{4i} g_{i1} & \sum_{i=1}^{4} m_{4i} g_{i3} \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで，m_{ij} および g_{ij} は，それぞれ，$M_n(k_1 a, k_{L-1} r_L)$ および $G_{Ln}(k_L r_L)$ の要素を表わす．

4．後方散乱断面積および散乱パターン

つぎに，軸方向に運動している不均質プラズマ円柱の単位長当りの後方散乱断面積，および円柱の軸に垂直な平面内における散乱パターンを求める．

まず，不均質プラズマ円柱の後方散乱断面積 C_B は，均質プラズマ円柱の場合と同様に，次式で与えられることがわかる[5]

$$C_B = \frac{4}{E_{i0}^2 \lambda_1 \cos^2\theta_i}\left[\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-j)^n A_n^{(s)}\right|^2 + \eta_1^2\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-j)^n B_n^{(s)}\right|^2\right] \quad (32)$$

ただし，

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \quad (33)$$

C_B によって入射波源の方へ散乱されて戻ってくる電力の大きさを知ることができる．

一方，散乱パターン，すなわち散乱電力の角度分布 $C(\varphi)$はつぎのようになる．[5]

$$C(\varphi) = \frac{2}{\pi E_{i0}^2 \lambda_1 \cos^2\theta_i}\left[\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(s)} e^{-jn\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\right|^2 + \eta_1^2\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(s)} e^{-jn\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\right|^2\right] \quad (34)$$

式(34)は，φ 方向の単位角度内に散乱される電力と入射波の電力密度の円柱の軸に垂直な成分との比を表わしており，これによって円柱の軸に垂直な平面内における散乱電力の分布を知ることができる．

5．検　　討

ここで，不均質プラズマ円柱の運動によって，その散乱特性がどのように変化するかを，数値例を上げて検討する．簡単のために，プラズマの周囲は真空とし，入射波は円柱の軸に垂直に入射するものとする．電子密度の分布としては，円柱状プラズマの場合には，近似的ではあるが，半径方向に直線

的あるいは半径の2乗に比例して減少する分布が実験的に知られている[6],[7]本論文では，2乗分布の場合について検討する．この場合，半径 r の位置における電子密度 N はつぎのように表わされる．

$$N = N_0 \left[1 - \alpha \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \tag{35}$$

ただし，N_0 は円柱の中心における電子密度，α は不均質の程度を表わすパラメータである．数値計算を行なう場合には，第 l 層の密度として，

$$N_l = N_0 \left[1 - \alpha \left(\frac{r_l + r_{l+1}}{2a} \right)^2 \right] \tag{36}$$

を用いる．このとき，式(2)における ω_{pl} は次式で与えられる．

$$\omega_{pl}^2 = \omega_{p0}^2 \left[1 - \alpha \left(\frac{r_l + r_{l+1}}{2a} \right)^2 \right] \tag{37}$$

ただし，

$$\omega_{p0}^2 = \frac{N_0 e^2}{\gamma m_0 \varepsilon_0} \tag{38}$$

ここで，m_0 および e は，それぞれ，電子の静止質量および電荷を表わす．

ω_{p0} は円柱の中心におけるプラズマ周波数であり，プラズマの速度に依存しない不変量である．

さて，以下では，ω/ω_{p0}，ω_c/ω_{p0} および $k_0 a$ の値を固定して，プラズマ円柱の散乱特性が，プラズマの速度(β)およびプラズマの不均質さ(α)によってどのように変化するかを定量的に調べる．数値計算に先だって，まず検討しなければならない問題は，種々のパラメータの値が与えられた時に，分割数

Lをいくらにすればよいかという問題である．いま，$\beta=0.3$，$\omega/\omega_{p0}=\sqrt{2}$ $\omega_c/\omega_{p0}=0.6$，$k_0a=\pi/100$とし，$\alpha=0.6$および0.9の場合について，Lを変えたときの後方散乱断面積の変化の様子を示すと表1のようになる．ただし，表1の計算は，各Lについて

表1　分割数を変えたときの後方散乱断面積の変化

$\frac{\omega}{\omega_{p0}}=2$，$\frac{\omega_c}{\omega_{p0}}=0.6$，$k_0a=\pi/100$，$\theta_i=0$，$\beta=0.3$		
分割数	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.9$
3	0.31488654×10^{-5}	0.20321724×10^{-5}
5	0.30562050	0.19205595
7	0.30309099	0.18903463
10	0.30175130	0.18743902
30	0.30060942	0.18608152
50	0.30051816	0.18597312
70	0.30049301	0.18594326
100	0.30047964	0.18592739
300	0.30046817	0.18591379
400	0.30046752	0.18591303

$$\frac{|C_n-C_{n-1}|}{|C_n|}\leqq 10^{-6} \tag{39}$$

なる条件が満たされた時に止めるものとする．ただし，C_n はC_B の$\pm n$項までの部分和を表わすものとする．表1からわかるように，$k_0a=\pi/100$の場合には，$L=30$とすると，誤差は0.1％以内におさえられる．そこで，以下では，$\omega_c/\omega_{p0}=\sqrt{2}$，$\omega_c/\omega_{p0}=0.6$および$k_0a=\pi/100$

の場合について，$L=30$として，後方散乱断面積ならびに散乱パターンを数値的に検討する．

まず，後方散乱断面積とプラズマの速度との関係をαの種々の値について図示すると，入射波がE波の場合（$B_n^{(i)}=0$）には図3のようになり，また入射波がH波の場合（$A_n^{(i)}=0$）には図4のようになる．図からわかるように，後方散乱断面積はαの増加とともに単調に減少する．ここで，興味のある問題として，上に考えた不均質プラズマ円柱の散乱特性と，電子密度が式（35）の平均値で与えられるような均質プラズマ円柱の散乱特性とがどのよ

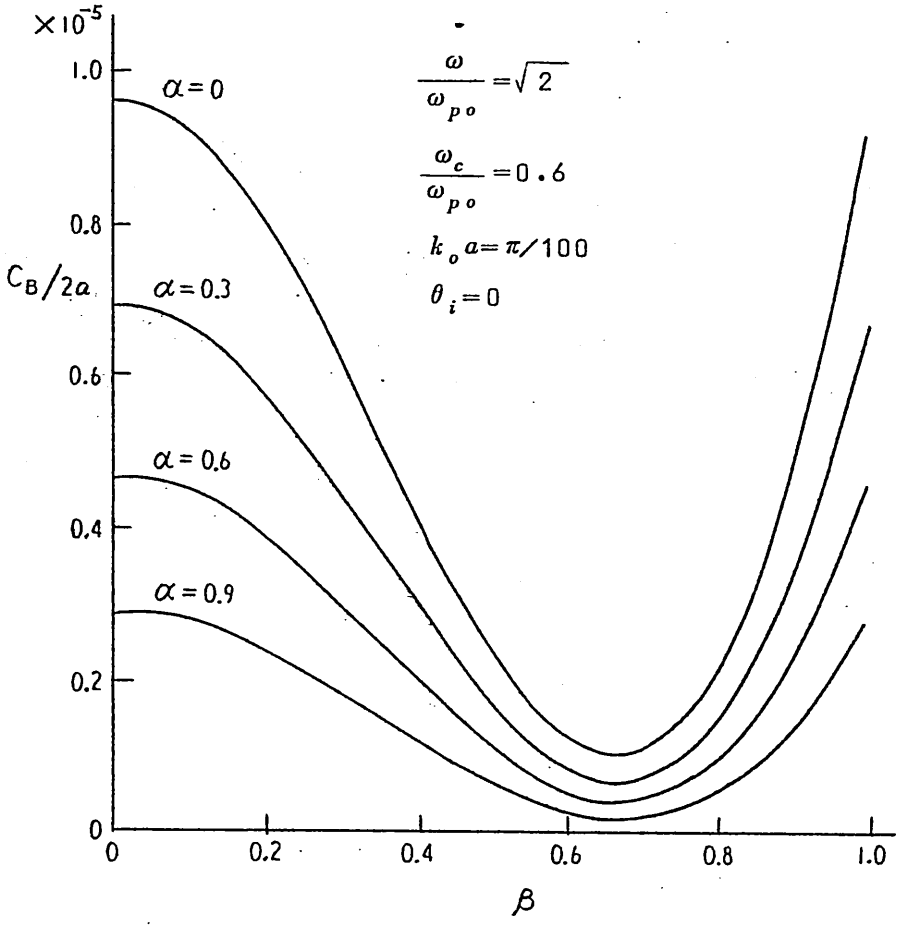


図3　後方散乱断面積とプラズマの速度との関係（入射波がE波の場合）

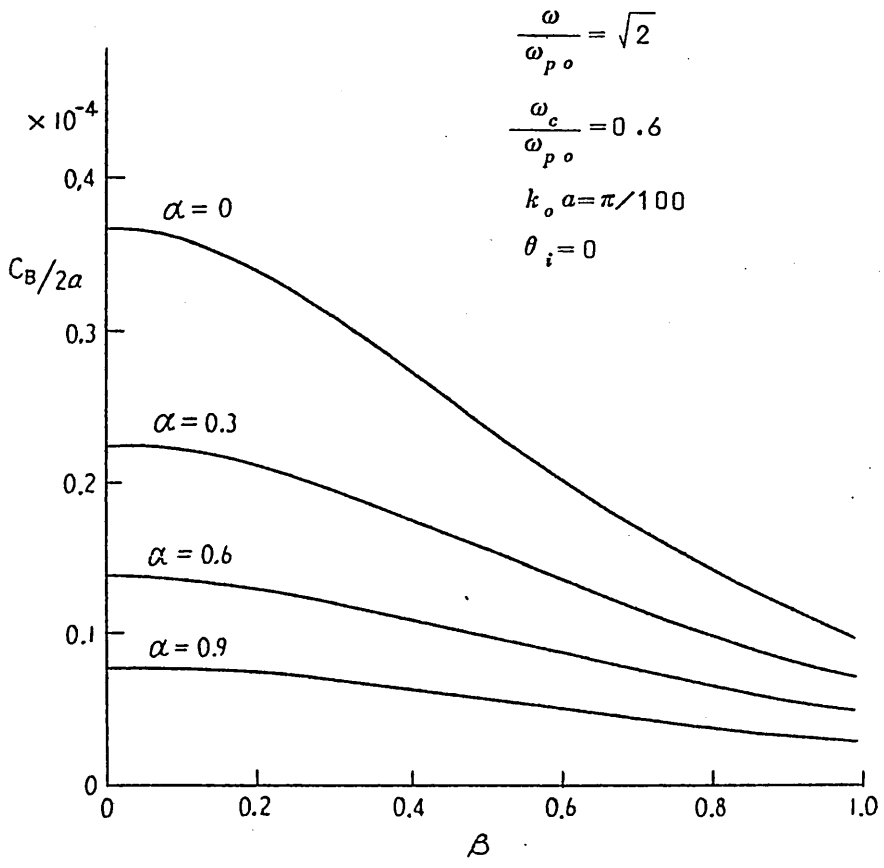


図 4　後方散乱断面積とプラズマの速度との関係（入射波がH波の場合）

うに異なるかを検討してみよう．そのために，図 4 の場合について，不均質プラズマ円柱とそれに対応する均質プラズマ円柱に対する後方散乱断面積の数値例を図 5 に示す．図から，電子がプラズマ円柱内部で一様に分布している場合の方が後方散乱断面積がわずかに小さくなることがわかる．

つぎに，散乱パターンについて調べよう．まず，均質プラズマの場合について散乱パターンの数値例を示すと，図 6 および図 7 のようになる．ただし，パラメータ ω/ω_{p0}，ω_c/ω_{p0} および $k_0 a$ の値は図 3 および図 4 の場合と同じ

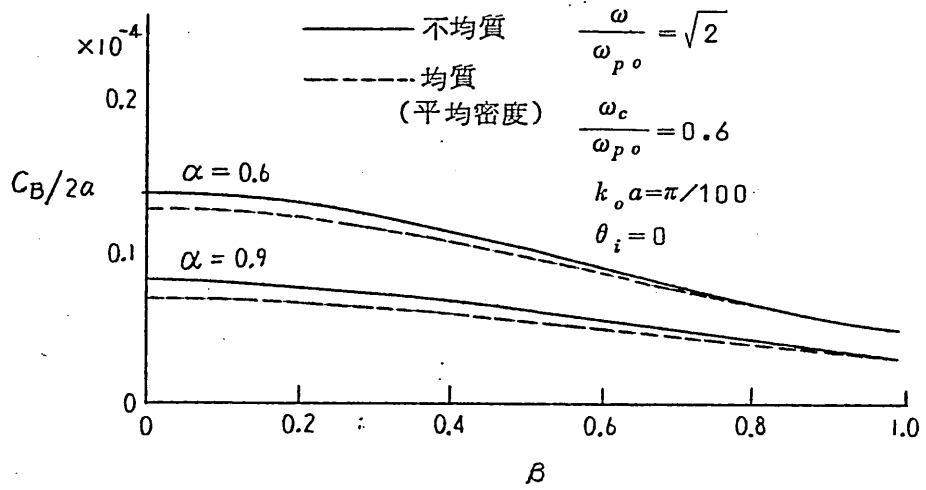


図５　後方散乱断面積の比較（入射波がH波の場合）

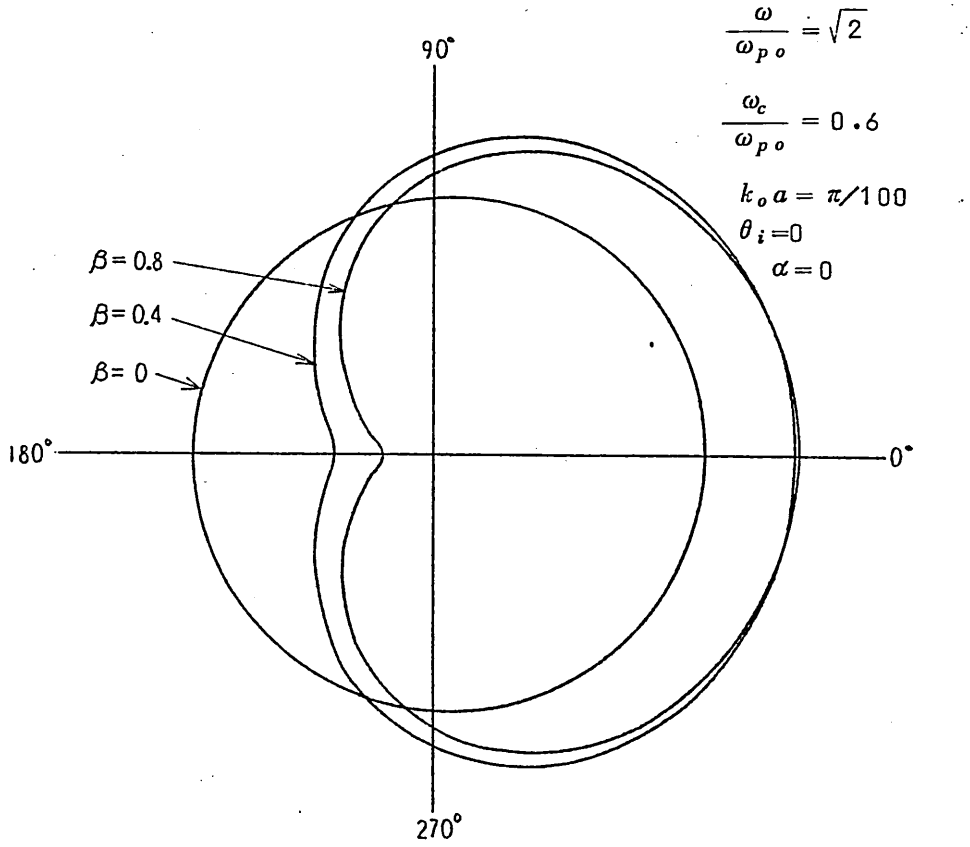


図６　均質プラズマ円柱の散乱パターン（入射波がE波の場合）

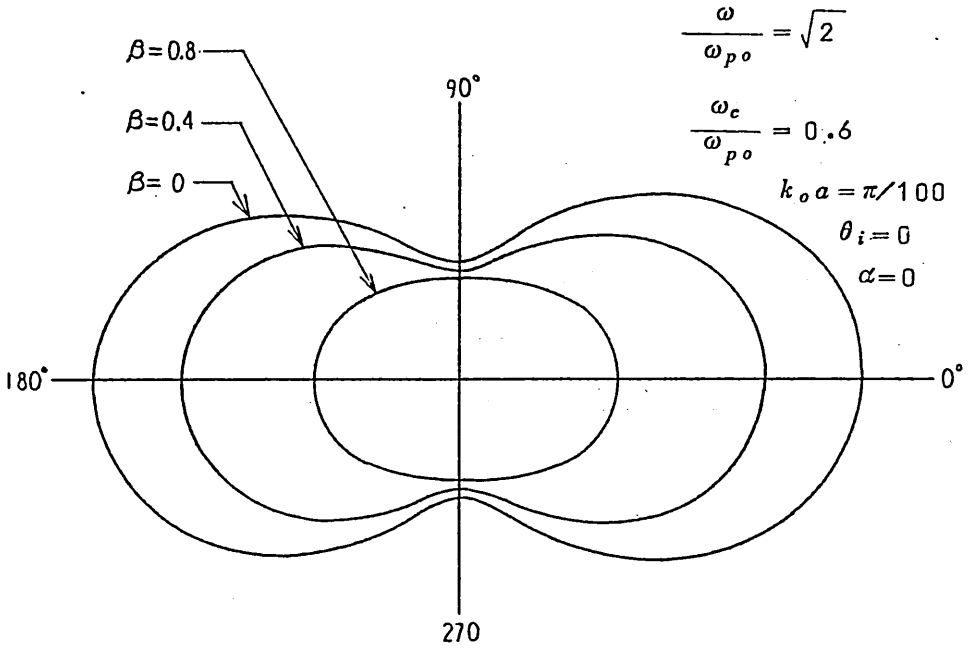


図7　均質プラズマ円柱の散乱パターン（入射波がH波の場合）

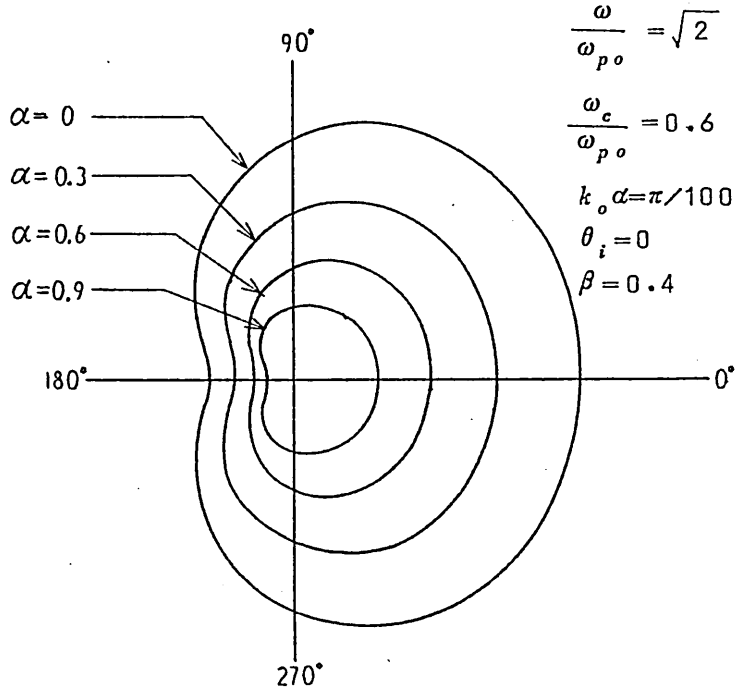


図8　不均質プラズマ円柱の散乱パターン（入射波がE波の場合）

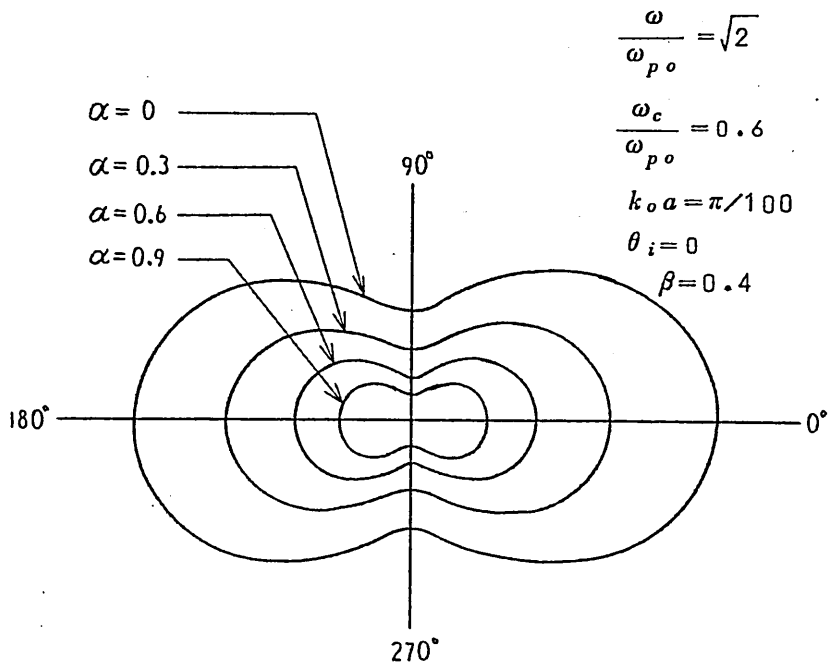


図9　不均質プラズマ円柱の散乱パターン（入射波がH波の場合）

であるとする．つぎに，βを固定して，αを変化させると，散乱パターンは図8および図9のようになる．図からわかるように，αが大きくなるにつれて，散乱パターンは次第に小さくなるが，形は変わらない．

6．むすび

本論文では，軸方向に一様に運動している，半径方向に不均質な異方性プラズマからなる無限長円柱による平面電磁波の散乱について，Maxwell－Minkowski の方程式を用いて考察した．不均質プラズマに対する解析方法としては，プラズマ円柱を同軸円筒面によって多数の薄い層に分割し，各層

内では媒質定数が近似的に一定であるとして，不均質なプラズマ円柱の問題を媒質定数がわずかづつ異なる多数の均質な層からなる円柱の問題に変換するという方法を用いた．具体例としては，電子密度の分布が2乗分布で与えられる場合について，後方散乱断面積ならびに散乱パターンを数値的に検討した．その結果，不均質の度合が大きくなるにつれて，後方散乱断面積は単調に減少すること，また散乱パターンの大きさは次第に小さくなるが，その形は変わらないこと等がわかった．以上の結論は，共振散乱のない領域については一般にいえることである．なお，共振散乱のある領域については稿を改めて報告するつもりである．

終りに，日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授，同熊谷信昭教授，ならびに常々ご討論いただく板倉研究室の方々に深謝する．

文　　献

(1) P.M.Platzman and H.T.Ozaki:"Scattering of electromagnetic waves from an infinitely long magnetized cylindrical plasma",J.appl.Phys.,31, 9,p.1597(Sept.1960).

(2) C.Yeh and W.V.T.Rusch: "Interaction of microwaves with an inhomogeneous and anisotropic plasma column",J.appl. Phys., 36, 7, p.2303(July 1965).

(3) R.J.Mayhan and F.V.Schultz:"Electromagnetic plane wave scattering from a plasma-coated conducting cylinder", Radio Sci., 2 (New Series), 8, p.853 (Aug. 1967).

(4) 塩沢俊之，河野磐生："軸方向に運動している無限長円柱による平面電磁波の散乱"，信学論(B)，53－B，7，p.361(昭45－07)

(5) 塩沢俊之，河野磐生："軸方向に運動している異方性プラズマ円柱による平面電磁波の散乱"，信学会アンテナ伝播研資，AP70－63(1971－02).

(6) B.Daves and P.J.Christiansen: "Heliconwaves in a gaseous plasma", Plasma Phys., 11, p.987(1969).

(7) Jerald V. Paker:"Collisionless plasma sheath in cylindrical geometry", Phys. Fluids, 6, 11, p.1657 (Nov. 1963).

(8) W.C.Wong and D.K.Cheng:"Wave scattering from a circular cylinder coated with an inhomogeneous plasma at oblique incidence", Proc. IEE, 115, 10 (Oct. 1968).

輻射科学研究会資料

運動不均質媒質スラブによる平面電磁波の反射と透過

塩沢俊之，田中克彦
（大阪大学・工学部）

1971年7月2日

1. まえがき

近年における宇宙開発の急速な進歩，あるいは高速度の電子ビームやプラズマ・ビームを用いる電子装置の開発に伴って，運動系の電磁界理論が工学における重要な研究課題の一つとして各方面で取り上げられるようになってきた．特に，運動媒質による平面電磁波の反射と透過に関しては，この問題が電磁波理論における基本的な問題の一つであることから，これまでに，数多くの報告がなされ，種々の興味ある結果が得られている[1]~[8] しかしながら，従来の理論では，すべて，媒質が均質の場合のみしか取り扱われておらず，媒質が不均質な場合については，わずかに二，三報告されているにすぎない[9]~[10] また，それらの報告では，媒質の速度が光速度に比べて十分小さく，かつ媒質の屈折率の変化の割合が非常に小さい場合に限られている．本論文では，境界面に平行に任意の速度で運動している等方性媒質からなるスラブを考え，媒質の屈折率が境界面に垂直な方向に任意の変化をするものとして，そのスラブによる平面電磁波の反射と透過についてMaxwell-Minkowskiの方程式を用いて一般的に考察する．

不均質媒質に対する解析方法としては，与えられたスラブを境界面に平行な平面によって多数の薄い層に分割し，それらの各層の中では媒質定数が近似的に一定であるものとして，一つの不均質なスラブによる反射と透過の問題を媒質定数がわずかづつ異なる多数の均質な層からなるスラブによる反射と透過の問題に変換するという方法[11]を用いる．この方法には，(1) 均質媒質に対する理論を用いるために，解析が比較的簡単であること，(2) 不均質さが任意であっても解析が可能であること，および (3) 近似解法であるが，分割を細かくすることにより，実用上十分な精度を得ることができる等の利点があり，高速計算機による数値解析に適した方法であると考えられる．

なお，本論文で報告する理論は，高速度で運動している平板状の電子ビームあるいはプラズマ・ビームの測定，あるいは宇宙工学において遭遇する種

種の問題等へ応用することができるものと考えられる．

2. 運動不均質媒質中における電磁界

運動不均質媒質スラブによる平面電磁波の反射と透過について考察するために，図１のように座標系を定める．媒質ⅠおよびⅢは静止しており，媒質Ⅱは境界面および入射面に平行に速度 v で運動しているものとする．媒質Ⅰ，ⅡおよびⅢは等方性かつ無損失とし，それらの誘電率は，それぞれ，ε_{I}，$\varepsilon_{\mathrm{II}}$ および $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ であり，透磁率はすべて μ_0 とする．ただし，ε_{I} および $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ は定数であり，$\varepsilon_{\mathrm{II}}$ は y の関数である．また，スラブの厚さを d とする．いま，媒質Ⅰから媒質Ⅱへ一様な平面波が入射するものとし，入射面を $x-y$ 平面に選ぶ．

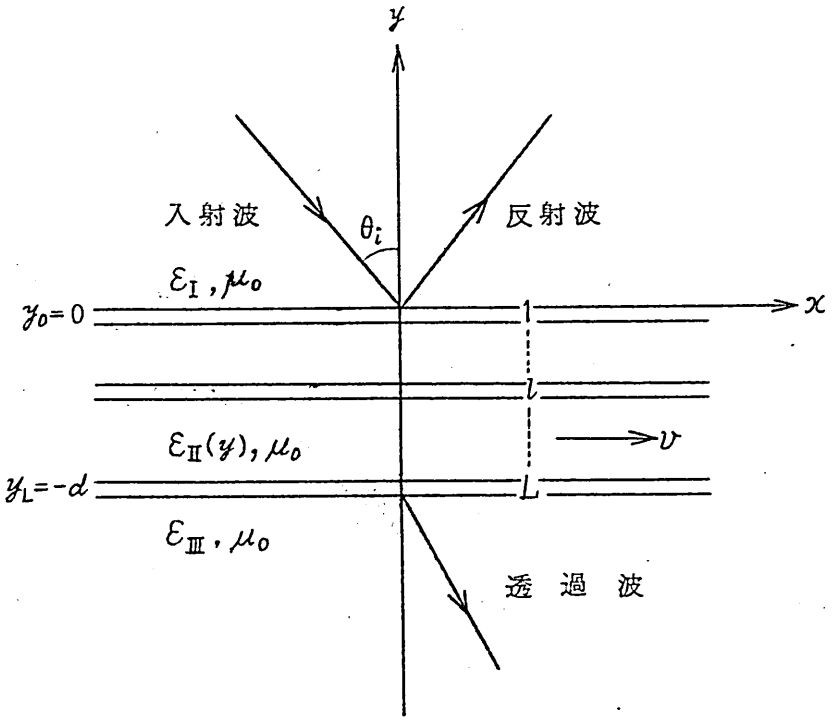


図１　座　標　系

まず，準備として，運動不均質媒質中における電磁界を求める．そのために，与えられた不均質媒質スラブを境界面に平行な平面によってL個の薄い層に分割し，第ℓ番目の層内における誘電率を$\varepsilon_{\Pi\ell}$（定数）とする．各層が均質であると仮定すると，これらの層内では均質媒質に対するMaxwell-Minkowski の方程式が成立する．いま，電磁界が時間的に$e^{j\omega t}$なる変化をするものとすると，第ℓ層内におけるMaxwell-Minkowski の方程式は次式で与えられる[12]

$$\left.\begin{aligned}(\nabla - j\omega \mathcal{Q}) \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0\, \bar{\alpha} \cdot \mathbf{H} \\ (\nabla - j\omega \mathcal{Q}) \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon_{\Pi\ell}\, \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \mathbf{i}_x \frac{(n_\ell^2 - 1)\beta}{(1 - n_\ell^2\beta^2)c} \\ \beta &= \frac{v}{c}, \qquad n_\ell = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\Pi\ell}}{\varepsilon_0}} \\ \bar{\alpha} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_\ell & 0 \\ 0 & 0 & a_\ell \end{bmatrix} \\ a_\ell &= \frac{1 - \beta^2}{1 - n_\ell^2\beta^2}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ε_0 および c は，それぞれ，真空の誘電率および光速度を表わす．

さて，第ℓ層内における電界および磁界のz方向成分はつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} E_{lz} &= A_l\, e^{-j(k_{lx}x + k_{ly}y)} + C_l\, e^{-j(k_{lx}x - k_{ly}y)} \\ H_{lz} &= B_l\, e^{-j(k_{lx}x + k_{ly}y)} + D_l\, e^{-j(k_{lx}x - k_{ly}y)} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ここで，A_l，B_l，C_l および D_l は定数である．また，k_{lx} および k_{ly} は，それぞれ，x 方向および y 方向の伝搬定数であり，つぎの関係によって結ばれている

$$\frac{(k_{lx} + \omega\Omega)^2}{a_l} + k_{ly}^2 = k_l^2 a_l \qquad (4)$$

ただし，

$$k_l = \omega \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{II}l}\,\mu_0} \qquad (5)$$

また，k_{lx} は，境界条件により，すべての l について等しい値をとる．すなわち，

$$k_{lx} = k_{\mathrm{II}x} \qquad (l = 1, 2, \cdots L) \qquad (6)$$

電磁界の他の成分は式 (3) と (1) から求められる．そこで，第 l 層内の電磁界の境界面に平行な面内における成分を行列を用いてまとめると，つぎのようになる．

$$F_l(k_{ly}y) = G_l(k_{ly}y)\,K_l \qquad (7)$$

ただし，

$$F_l(k_{ly}y) = \begin{bmatrix} E_{lz} \\ E_{lx} \\ H_{lz} \\ H_{lx} \end{bmatrix} e^{jk_{\mathrm{II}x}x}, \quad K_l = \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \\ C_l \\ D_l \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$G_l(k_{ly}y)=\begin{bmatrix} e^{-jk_{ly}y} & 0 & e^{jk_{ly}y} & 0 \\ 0 & -\frac{k_{ly}}{\omega\varepsilon_{IIl}}e^{-jk_{ly}y} & 0 & \frac{k_{ly}}{\omega\varepsilon_{IIl}}e^{jk_{ly}y} \\ 0 & e^{-jk_{ly}y} & 0 & e^{jk_{ly}y} \\ \frac{k_{ly}}{\omega\mu_0}e^{-jk_{ly}y} & 0 & -\frac{k_{ly}}{\omega\mu_0}e^{jk_{ly}y} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

式 (7) を変形すると，

$$G_l^{-1}(k_{ly}y)F_l(k_{ly}y)=K_l \tag{10}$$

なる関係が得られる．ここで，K_l は第 l 層内で一定値をとるから，その両端 $y=y_l$ および y_{l-1} においても同じ値をもつ．したがって，次式が成立する．

$$G_l^{-1}(k_{ly}y_l)F_l(k_{ly}y_l)=G_l^{-1}(k_{ly}y_{l-1})F_l(k_{ly}y_{l-1}) \tag{11}$$

すなわち，

$$F_l(k_{ly}y_{l-1})=M_l(k_{ly}y_{l-1},\ k_{ly}y_l)F_l(k_{ly}y_l) \tag{12}$$

ただし，

$$M_l(k_{ly}y_{l-1},\ k_{ly}y_l)=G_l(k_{ly}y_{l-1})\,G_l^{-1}(k_{ly}y_l) \tag{13}$$

式 (9) を用いて $M_l(k_{ly}y_{l-1},\ k_{ly}y_l)$ を求めると，つぎのようになる．

$$M_l(k_{ly}y_{l-1},\ k_{ly}y_l)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & \dfrac{\omega\mu_0}{k_{ly}}q \\ 0 & p & -\dfrac{k_{ly}}{\omega\varepsilon_{\Pi l}}q & 0 \\ 0 & -\dfrac{\omega\varepsilon_{\Pi l}}{k_{ly}}q & p & 0 \\ \dfrac{k_{ly}}{\omega\mu_0}q & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \tag{14}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} p &= e^{-jk_{ly}(y_{l-1}-y_l)}+e^{jk_{ly}(y_{l-1}-y_l)} \\ q &= e^{-jk_{ly}(y_{l-1}-y_l)}-e^{jk_{ly}(y_{l-1}-y_l)} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式（12）は第 l 層の両端における電磁界の接線成分の間の関係を表わしている．電界および磁界の接線成分が各層の境界面において連続になること，すなわち，$F_\nu(k_{\nu y}y_\nu)=F_{\nu+1}(k_{(\nu+1)y}y_\nu)$（$\nu=0,\ 1,\ \cdots L$）が成立すること，および式（12）の関係を繰り返し用いることにより，境界面 $y=y_{l-1}$ および $y=y_m$（ただし $y_{l-1}>y_m$）における電界および磁界の接線成分の間には，つぎの関係が成り立つことがわかる．

$$F_l(k_{ly}y_{l-1})=M(k_{ly}y_{l-1},\ k_{my}y_m)F_m(k_{my}y_m) \tag{16}$$

ここで

$$M(k_{ly}y_{l-1},\ k_{my}y_m)=\prod_{\nu=l}^{m}M_\nu(k_{\nu y}y_{\nu-1},\ k_{\nu y}y_\nu) \tag{17}$$

特に，式（16）において，$l=1$ および $m=L$ とおくと次式が得られる．

$$F_1(k_{1y}y_0)=M(k_{1y}y_0,\ k_{Ly}y_L)F_L(k_{Ly}y_L) \tag{18}$$

式（18）はスラブの両端における電界および磁界の接線成分の間の関係を表わしている。

3. 反射波および透過波

反射波および透過波を求めるために，まず，入射波をつぎのように仮定する。

$$\left.\begin{aligned} E_{iz} &= E_{io}\, e^{-j(k_{Ix}x + k_{Iy}y)} \\ H_{iz} &= H_{io}\, e^{-j(k_{Ix}x + k_{Iy}y)} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} k_{Ix} &= k_I \sin\theta_i \quad , \quad k_{Iy} = -k_I \cos\theta_i \\ k_I &= \omega\sqrt{\varepsilon_I \mu_o} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

E_{io} および H_{io} は一定の振幅を表わす。

また，反射波はつぎのように表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned} E_{rz} &= E_{ro}\, e^{-j(k_{Ix}x - k_{Iy}y)} \\ H_{rz} &= H_{ro}\, e^{-j(k_{Ix}x - k_{Iy}y)} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

さらに，透過波も同様につぎのように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} E_{tz} &= E_{to}\, e^{-j(k_{\mathrm{III}x}x + k_{\mathrm{III}y}y)} \\ H_{tz} &= H_{to}\, e^{-j(k_{\mathrm{III}x}x + k_{\mathrm{III}y}y)} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

ここで，$k_{\mathrm{III}x}$ および $k_{\mathrm{III}y}$ は透過波の x 方向および y 方向の伝搬定数を表わし，これらはつぎの関係を満足する。

$$k_{\mathrm{III}x}^2 + k_{\mathrm{III}y}^2 = \omega^2 \varepsilon_{\mathrm{III}} \mu_o \qquad (23)$$

式(21)におけるE_{ro}, H_{ro}, および式(22)におけるE_{to}, H_{to}は未定定数であり，後に境界条件から決定される．また，式(19)，(21)および(22)では電磁界のz方向成分のみを示したが，他の成分はMaxwell の方程式から得られる．

境界条件を適用するために，式(19)，(21)および(22)を用いて，媒質Ⅰおよび媒質Ⅲにおける電磁界のz方向成分およびx方向成分を式 (8) の形にまとめると，つぎのようになる．

$$F_{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}y}y)=\begin{bmatrix} E_{io}e^{-jk_{\mathrm{I}y}y}+E_{ro}e^{jk_{\mathrm{I}y}y} \\ -\dfrac{k_{\mathrm{I}y}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{I}}}H_{io}e^{-jk_{\mathrm{I}y}y}+\dfrac{k_{\mathrm{I}y}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{I}}}H_{ro}e^{jk_{\mathrm{I}y}y} \\ H_{io}e^{-jk_{\mathrm{I}y}y}+H_{ro}e^{jk_{\mathrm{I}y}y} \\ \dfrac{k_{\mathrm{I}y}}{\omega\mu_0}E_{io}e^{-jk_{\mathrm{I}y}y}-\dfrac{k_{\mathrm{I}y}}{\omega\mu_0}E_{ro}e^{jk_{\mathrm{I}y}y} \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$F_{\mathrm{III}}(k_{\mathrm{III}y}y)=\begin{bmatrix} E_{to}e^{-jk_{\mathrm{III}y}y} \\ -\dfrac{k_{\mathrm{III}y}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{III}}}H_{to}e^{-jk_{\mathrm{III}y}y} \\ H_{to}e^{-jk_{\mathrm{III}y}y} \\ \dfrac{k_{\mathrm{III}y}}{\omega\mu_0}E_{to}e^{-jk_{\mathrm{III}y}y} \end{bmatrix} \tag{25}$$

さて，式(24)および(25)における未定定数E_{ro}, H_{ro}およびE_{to}, H_{to}は，先にも述べたように，境界面$y=y_0$および$y=y_L$において電界および磁界の接線成分が連続でなければならないという境界条件から決定される．まず，上の境界条件が満足されるためには，媒質Ⅰ，ⅡおよびⅢにおけるx方向の伝搬定数はすべて等しくなければならない．すなわち，

$$k_{\mathrm{III}x} = k_{\mathrm{II}x} = k_{\mathrm{I}x} \tag{26}$$

つぎに，$y = y_0$ において電界および磁界の接線成分が連続になるべきことから，

$$F_{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}y} y_0) = F_{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}y} y_0) \tag{27}$$

が成立する．同様にして，$y = y_L$ において次式が成り立つ．

$$F_{\mathrm{III}}(k_{\mathrm{III}y} y_L) = F_L(k_{Ly} y_L) \tag{28}$$

式(27)および(28)を式(18)に代入すると，次式が得られる．

$$F_{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}y} y_0) = M(k_{\mathrm{I}y} y_0,\ k_{Ly} y_L)\, F_{\mathrm{III}}(k_{\mathrm{III}y} y_L) \tag{29}$$

ここで，$M(k_{\mathrm{I}y} y_0,\ k_{Ly} y_L)$ は，式(14)から，つぎのような形に書くことができる．

$$M(k_{\mathrm{I}y} y_0,\ k_{Ly} y_L) = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} \end{bmatrix} \tag{30}$$

式(29)は，四個の未知数 E_{ro}，H_{ro}，E_{to} および H_{to} に関する四元連立一次方程式を表わしている．式(29)から，$(E_{ro},\ E_{to})$ および $(H_{ro},\ H_{to})$ はそれぞれ独立に求まり，次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} E_{ro} = \frac{\left(m_{11} + \dfrac{k_{\mathrm{III}y}}{\omega\mu_0} m_{14}\right) - \dfrac{\omega\mu_0}{k_{\mathrm{I}y}}\left(m_{41} + \dfrac{k_{\mathrm{III}y}}{\omega\mu_0} m_{44}\right)}{\left(m_{11} + \dfrac{k_{\mathrm{III}y}}{\omega\mu_0} m_{14}\right) + \dfrac{\omega\mu_0}{k_{\mathrm{I}y}}\left(m_{41} + \dfrac{k_{\mathrm{III}y}}{\omega\mu_0} m_{44}\right)} E_{io} e^{-j2k_{\mathrm{I}y} y_0} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
E_{to} &= \frac{2E_{io}\, e^{-j(k_{Iy}y_0 - k_{IIIy}y_L)}}{\left(m_{11} + \frac{k_{IIIy}}{\omega\mu_0} m_{14}\right) + \frac{\omega\mu_0}{k_{Iy}}\left(m_{41} + \frac{k_{IIIy}}{\omega\mu_0} m_{44}\right)} \\
H_{ro} &= \frac{\left(m_{33} - \frac{k_{IIIy}}{\omega\varepsilon_{III}} m_{32}\right) + \frac{\omega\varepsilon_I}{k_{Iy}}\left(m_{23} - \frac{k_{IIIy}}{\omega\varepsilon_{III}} m_{22}\right)}{\left(m_{33} - \frac{k_{IIIy}}{\omega\varepsilon_{III}} m_{32}\right) - \frac{\omega\varepsilon_I}{k_{Iy}}\left(m_{23} - \frac{k_{IIIy}}{\omega\varepsilon_{III}} m_{22}\right)} H_{io}\, e^{-j2k_{Iy}y_0} \\
H_{to} &= \frac{2H_{io}\, e^{-j(k_{Iy}y_0 - k_{IIIy}y_L)}}{\left(m_{33} - \frac{k_{IIIy}}{\omega\varepsilon_{III}} m_{32}\right) - \frac{\omega\varepsilon_I}{k_{Iy}}\left(m_{23} - \frac{k_{IIIy}}{\omega\varepsilon_{III}} m_{22}\right)}
\end{aligned}
\right\} \quad (32)
$$

なお，不均質媒質中の電磁界は，式（16）において$m = L$とおき，上に求めたE_{to}およびH_{to}を用いることによって得られる．

4. 反射係数および透過係数

反射係数Rは，境界面に垂直な反射電力の流れと境界面に垂直な入射電力の流れとの比によって定義される．すなわち，

$$
R = \frac{\left| Re\left\{\frac{1}{2}\mathbf{E}_r \times \mathbf{H}_r^*\right\} \cdot \mathbf{n}\right|}{\left| Re\left\{\frac{1}{2}\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*\right\} \cdot \mathbf{n}\right|} \quad (33)
$$

ただし，$\mathbf{n}$は法線方向の単位ベクトルを表わし，アステリスクは複素共やくを意味する．

また，透過係数Tは，境界面に垂直な透過電力の流れと境界面に垂直な入

射電力の流れとの比によって定義される．すなわち，

$$T = \frac{\left| Re\left\{\frac{1}{2}\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*\right\} \cdot \mathbf{n}\right|}{\left| Re\left\{\frac{1}{2}\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*\right\} \cdot \mathbf{n}\right|} \tag{34}$$

式（19），（21）および（22）を用いて，RおよびTを入射波，反射波および透過波の振幅によって表わすと，つぎのようになる．

$$R = \frac{|E_{ro}|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_{\mathrm{I}}}|H_{ro}|^2}{|E_{io}|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_{\mathrm{I}}}|H_{io}|^2} \tag{35}$$

$$T = \frac{k_{\mathrm{III}y}}{k_{\mathrm{I}y}} \frac{|E_{to}|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_{\mathrm{III}}}|H_{to}|^2}{|E_{io}|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_{\mathrm{I}}}|H_{io}|^2} \tag{36}$$

5. 検　　討

ここで，不均質媒質の一例として等方性プラズマを考え，その反射特性を数値的に検討する．ただし，媒質ⅠおよびⅢは真空とし，入射波はH波（$E_{io}=0$）と仮定する．また，電子密度の分布としては2乗分布および直線状分布を考える．いま，等方性プラズマ・スラブ内部の電子密度をNとすると，2乗分布の場合には，Nは次式で与えられる．

$$N = N_0\left[1 + \alpha\left(\frac{2|y|}{d} - 1\right)^2\right] \tag{37}$$

$$(-d \leqq y \leqq 0)$$

また，直線状分布の場合には，Nは次式で与えられる．

$$N = N_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{2|y|}{d} - 1 \right) \right] \qquad (38)$$
$$(-d \leqq y \leqq 0)$$

式(37)および(38)において，N_0はスラブの中央における電子密度であり，αは不均質の度合を表わすパラメータである．

電子密度の分布が式(37)および(38)で与えられるとき，等方性プラズマの誘電率$\varepsilon_{II}(y)$はつぎのようになる．

$$\varepsilon_{II}(y) = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega'^2} f(y) \right] \qquad (39)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{p0} = \frac{N_0 e^2}{\gamma m_0 \varepsilon_0}, \qquad f(y) = \frac{N}{N_0} \\ &\omega' = \gamma (1 - \beta \cos\theta_i)\omega \\ &\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

m_0および$-e$は電子の静止質量および電荷を表わす．ω_{p0}はスラブの中央におけるプラズマ周波数であり，プラズマの速度によって変化しない不変量である．なお，以下での計算では，ε_{IIl}として$\varepsilon_{II}(y_l)$を用いることにする．そうすると，第l層内のy方向の伝搬定数は式(4)からつぎのようになる．

$$k_{ly} = -\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} f(y_l) - \sin^2\theta_i} \qquad (41)$$

計算に先だって，α，d/λ（λは入射波の波長）等のパラメータが与え

られたとき，スラブの分割数Lをいくらにすれば期待する精度が得られるかという問題を検討する．まず，２乗分布の場合について，d/λ，α等のパラメータを一定にしてLを変えたときの反射係数の変化の様子を表１に示す．

表１　分割数Lによる反射係数の変化
（２乗分布の場合）

$\beta=0.4$　　$\omega/\omega_{po}=\sqrt{2}$　　$d/\lambda=1.0$　　$\theta_i=0$		
分　割　数	$\alpha=0.5$	$\alpha=1.0$
50	0.906921×10^{-2}	0.145466×10^{-3}
100	0.907399	0.144931
150	0.907486	0.144824
200	0.907519	0.144793
250	0.907531	0.144775
300	0.907541	0.144767
350	0.907543	0.144765
400	0.907549	0.144756
450	0.907550	0.144753

表１において，$L=100$について考えると，$\alpha=0.5$のときには誤差は0.02％程度であり，$\alpha=1.0$のときには0.1％程度である．つぎに，直線状分布について反射係数とLとの関係の一例を示すと表２のようになる．表２からわかるように，直線状分布の場合には２乗分布の場合よりも精度が悪くなり，$L=100$に対して$\alpha=0.5$のときには誤差は0.2％程度になる．以上により，計算精度は不均質の度合を示すパラメータαによって大きく変化することがわかるが，一般にはd/λの値によっても大きく変化する．以下での計算は，簡単のために，$L=100$として行なう．

表2　分割数Lによる反射係数の変化

（直線状分布の場合）

$\beta=0.4$　$\omega/\omega_{po}=\sqrt{2}$　$d/\lambda=1.0$　$\theta_i=0$	
分　割　数	$\alpha=0.5$
50	0.353716×10^{-1}
100	0.352763
150	0.352423
200	0.352250
250	0.352144
300	0.352073
350	0.352022
400	0.351984
450	0.351954
500	0.351953

まず，均質プラズマ・スラブの場合について，反射係数と d/λ との関係をβをパラメータとして図示すると図2のようになる．つぎに，$\alpha=0.5$として，2乗分布および直線状分布の場合について図2と同様の関係を示すと図3および図4のようになる．図からわかるように，反射係数は一般に，スラブの厚さが変化すると振動する．また，均質プラズマの場合には，プラズマの速度が変化しても，反射係数の曲線の形は変わらず，ただ上下に平行移動するだけであるが，不均質プラズマの場合には曲線の形が変わり，特に反射係数の極小点の位置は，プラズマの速度が変化すると，移動する．さらに，直線状分布の場合には，均質あるいは2乗分布の場合に比べて，反射係数の変化はゆるやかになる．つぎに，2乗分布の場合について，反射係数とプラズマの速度との関係を示すと，図5のようになる．図から反射係数はβの一

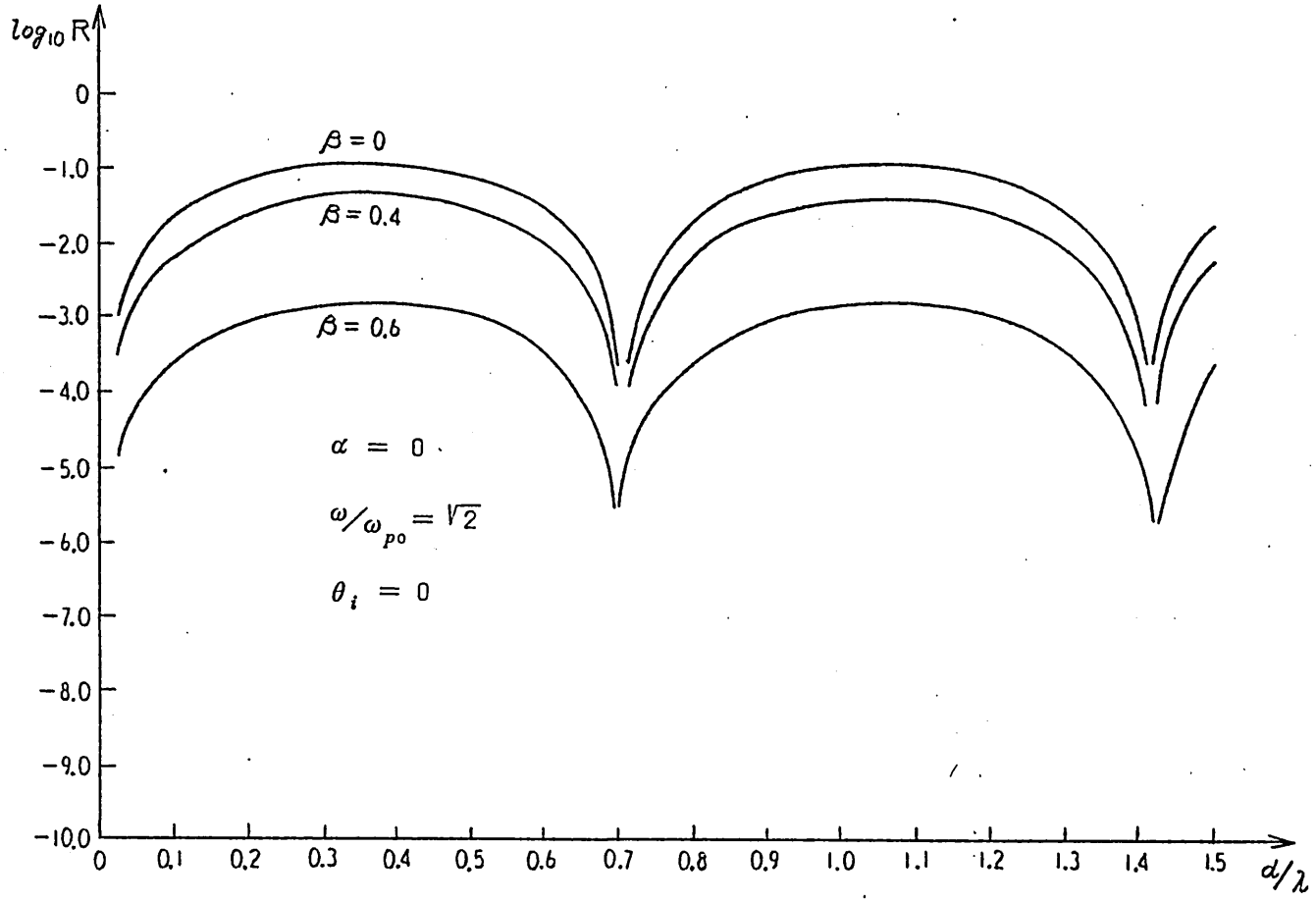


図２　反射係数とスラブの厚さとの関係（均質プラズマ）

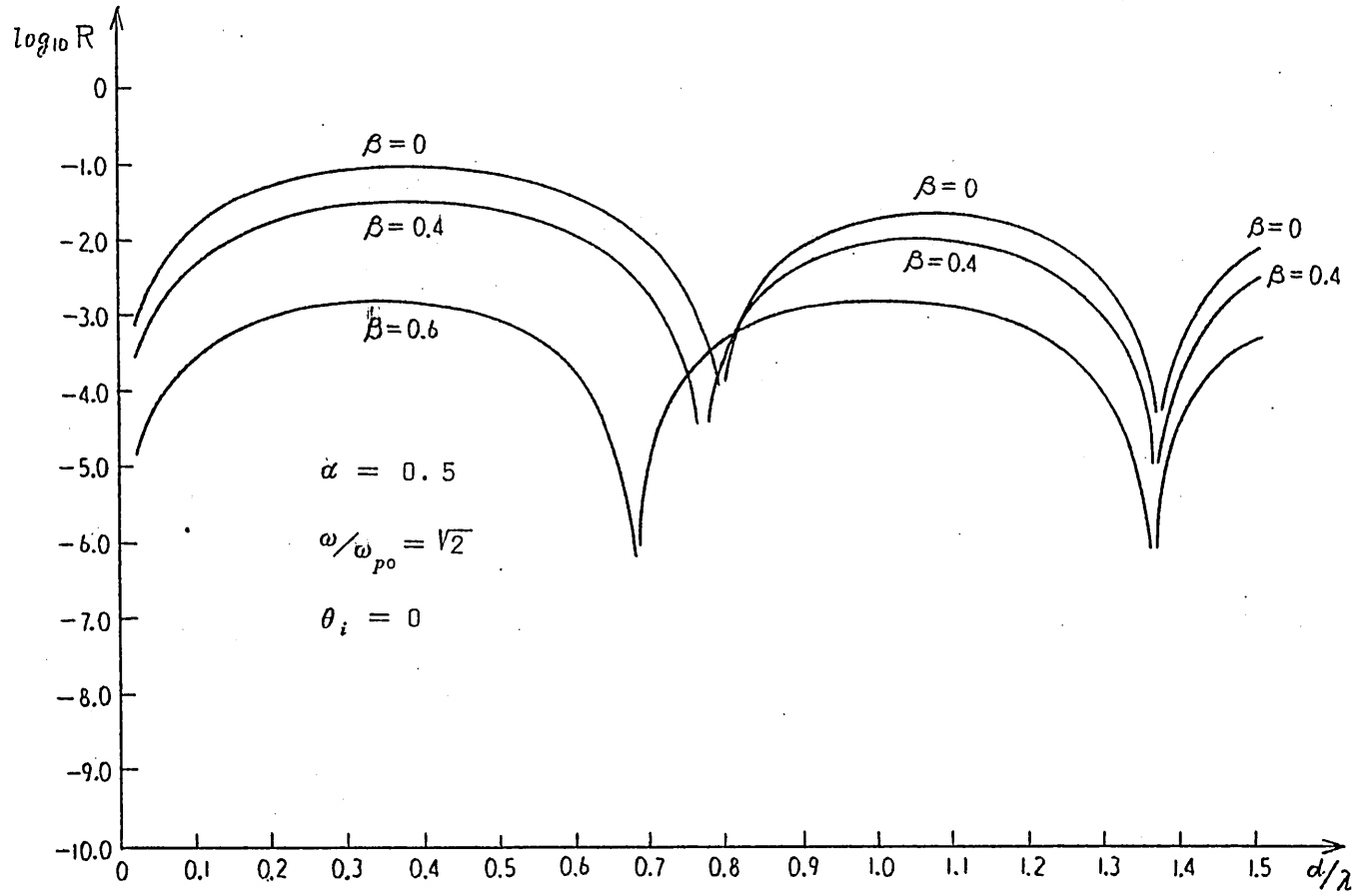


図３　反射係数とスラブの厚さとの関係（２乗分布）

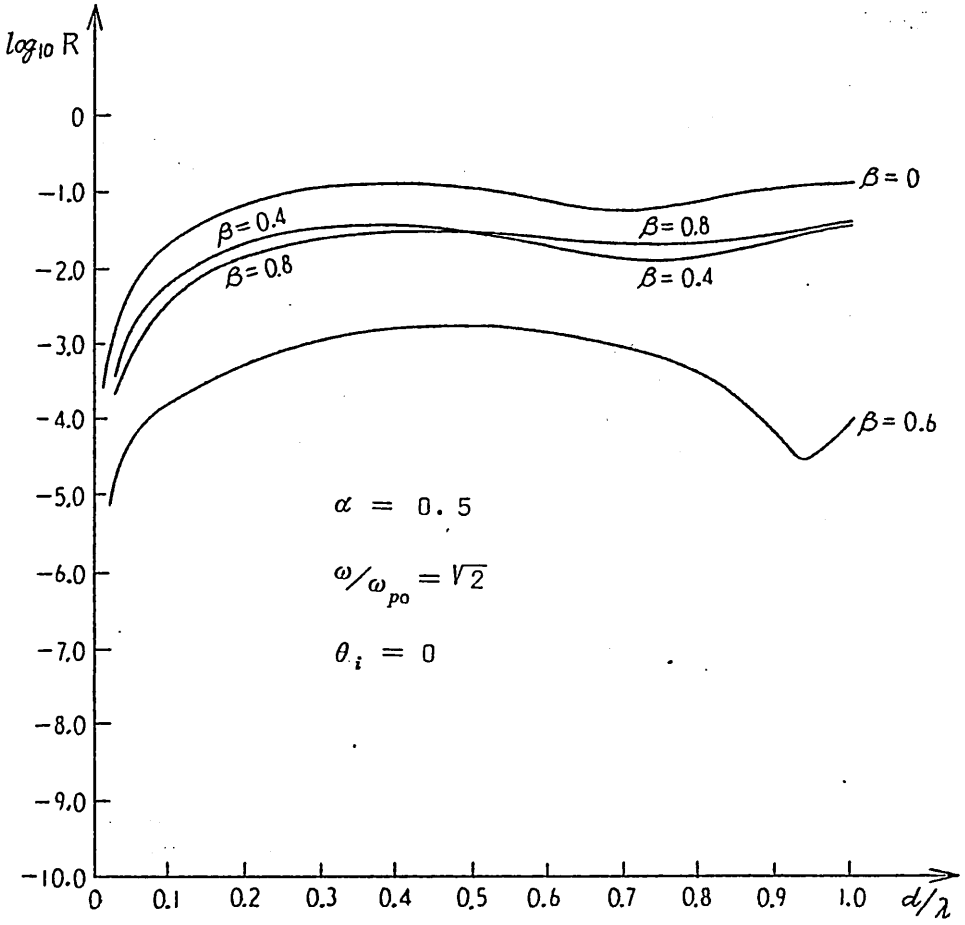


図 4　反射係数とスラブの厚さとの関係

（直線状分布）

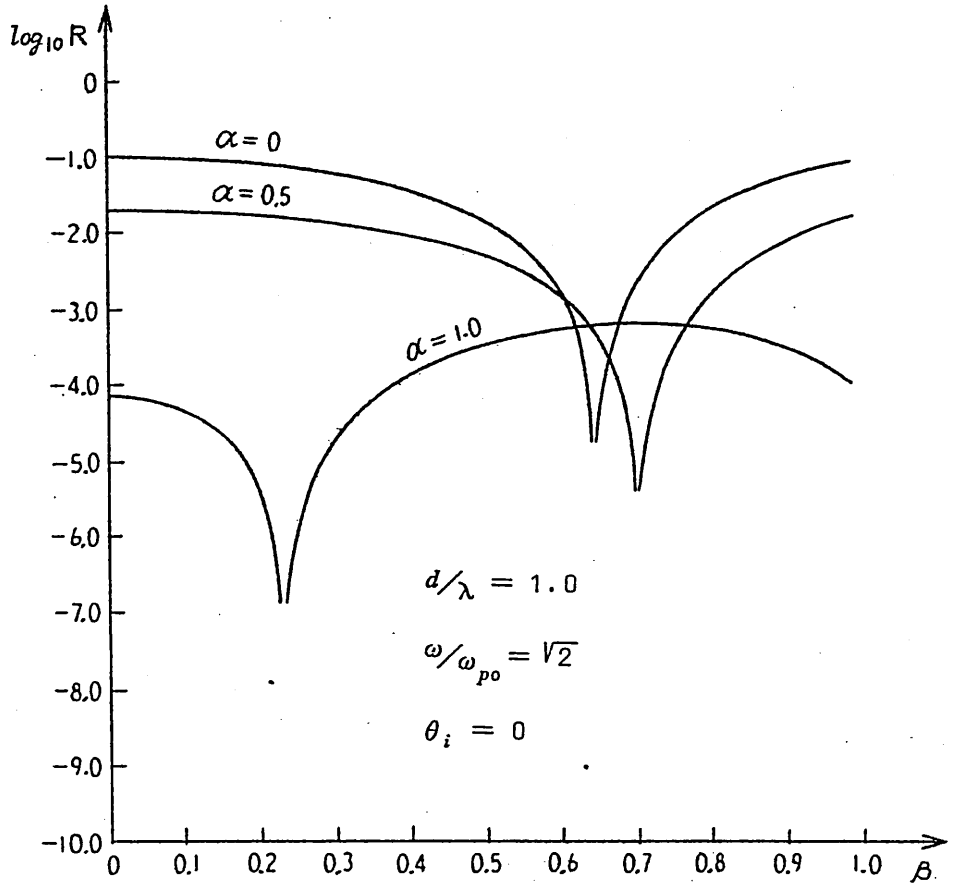


図５　反射係数とプラズマの速度との関係（２乗分布）

点で極小値をとり，この極小点はαが変化すると移動することがわかる．

6. むすび

本論文では，境界面に平行に運動している不均質な等方性媒質からなるスラブによる平面電磁波の反射と透過についてMaxwell-Minkowski の方程式を用いて一般的に考察した．不均質媒質に対する解析方法としては，与え

られたスラブを境界面に平行な平面によって多数の薄い層に分割し，それらの各層の中では媒質定数が近似的に一定であるとして，一つの不均質なスラブの問題を媒質定数がわずかづつ異なる多数の均質な層からなるスラブの問題に変換するという方法を用いた．具体例としては，等方性プラズマ・スラブを考え，電子密度の分布が２乗分布および直線状分布の場合について，反射係数を数値的に検討した．その結果，本論文で用いた方法が不均質媒質の解析にとって有用であることがわかった．

終りに，日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授，同熊谷信昭教授，ならびに常々ご討論いただく板倉研究室の方々に深謝する．

文　　献

(1) S.N.Stolyarov: 'Reflection and refraction of
e electromagnetic waves at a moving boundary', Soviet Phys.,8,p.418 (Nov. 1963).

(2) C.T.Tai: 'Reflection and refraction of a plane electromagnetic wave at the boundary of a semi-infinite moving medium', paper presented at URSI spring meeting, Washington, D.C. (1965).

(3) C.Yeh: 'Reflection and transmission of electro magnetic waves by a moving dielectric medium', J.appl.Phys.,36, p.3513(Nov. 1965)

(4) C.Yeh: 'Reflection and transmission of electro magnetic waves by a moving plasma medium', J.appl. Phys., 37, p.3079(July 1966).

(5) 塩沢俊之，間　剛，熊谷信昭：“静止媒質と運動媒質の境界面における平面波の反射および屈折”，信学誌，50，p. 1381（昭42-08）.

(6) T. Shiozawa and K. Hazama: "General solution to the problem of reflection and transmission by a moving dielectric medium", Radio Sci., 3 (New Series), p.569 (June 1968).

(7) 間　剛，塩沢俊之，熊谷信昭：“運動等方性プラズマによる平面電磁波の反射と透過（一般解）”，信学論(B) 51-B，p. 575（昭43-12）.

(8) 藤岡　弘，小川英一：“異常分散領域における光波と運動している分散性誘電体媒質との相互作用”，信学論(B)，53-B，p. 34（昭45-01）.

(9) H. N. Kritikos, K. S. H. Lee, and C. H. Papas: "Electromagnetic reflectivity of nonuniform jet streams", Radio Sci., 2 (New Series), p. 991 (Sept. 1967).

(10) 風間輝雄，深井一郎，鈴木道雄：“速度に分布をもって運動する損失のあるプラズマ・スラブの反射係数について”，信学論(B)，54-B，p. 280（昭46-05）.

(11) M. Born and E. Wolf: "Principles of optics", p. 51, Pergamon Press (1964).

(12) C. T. Tai: "The dyadic Green's function for a moving isotropic medium", IEEE Trans. Antennas and Propagation, AP-13, p. 322 (March 1965).

輻射科学研究会資料

運動不均質媒質による平面電磁波の反射と透過

—微分方程式による解法—

田中嘉津夫
(大阪大学・工学部)

間剛
(日立製作所・横浜研究所)

1971年7月2日

1．まえがき

運動媒質による平面電磁波の反射と透過の問題は，Stolyarov, Tai, Yeh，および著者等によって，それぞれ独立に研究が始められて以来，多くの人々によって活発に研究が進められ，種々の興味深い結果が報告されている[1)~3)]ところが，これまでに報告されているものは，均質媒質を対象としたものがほとんどであり，不均質媒質を取り扱ったものとしては，わずかに，Kritikos等[4)]および，その結果を利用した深井等[5)]の報告があるにすぎない．そこで，本論文では，誘電率が場所に関して直線的に変化するような媒質を考え，このような媒質が境界面および入射面に対して平行に運動している場合の平面電磁波の反射と透過の問題について，Maxwell-Minkowskiの方程式を直接解くことにより，厳密に解析を行ない，媒質の運動の効果を数値計算例をあげて詳しく調べる．

一般に運動媒質を取り扱う場合の解析方法としては，大きくわけて，Lorentz 変換を用いて静止系の問題に帰着させて解く方法と，運動媒質に対して成立するMaxwell-Minkowskiの方程式を直接解く方法とがあるが，ここでは，後者の微分方程式により解析を行なう．

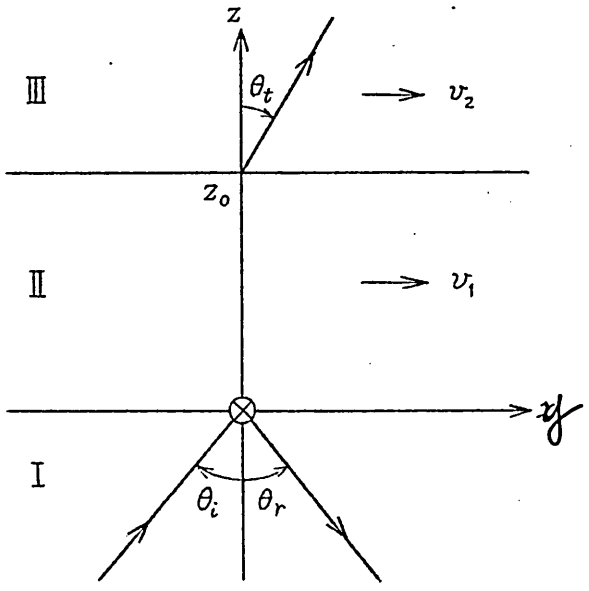


図1　座標系

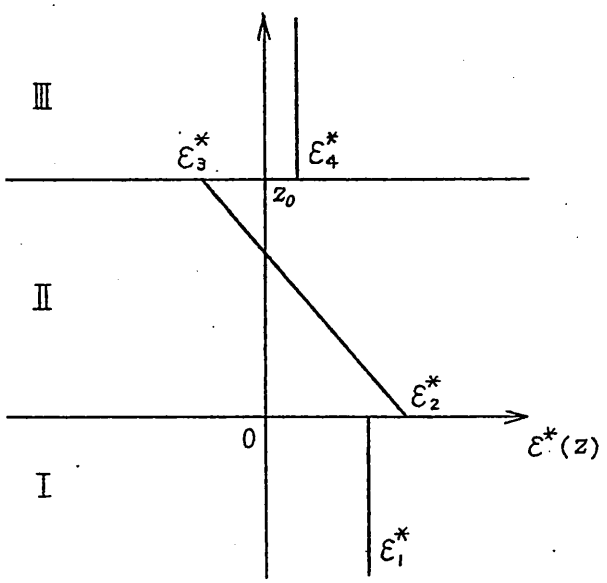


図２　媒質Ⅰ，ⅡおよびⅢの比誘電率

2．波　動　方　程　式

図１および，図２に示されているように，誘電率 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1^*$，透磁率 μ_0の均質媒質Ⅰが観測者に対して静止しており，誘電率 $\varepsilon(z)=\varepsilon_0 \varepsilon^*(z)$，透磁率 μ_0の不均質媒質Ⅱと，誘電率 $\varepsilon_4 = \varepsilon_0 \varepsilon_4^*$，透磁率 μ_0の均質媒質Ⅲがそれぞれ v_1，v_2 なる速さで y 方向に運動しているものとする．ただしすべての媒質は，線形，等方，非分散性とし，不均質媒質Ⅱの比誘電率 $\varepsilon^*(z)$は次式で与えられるものと仮定する†

＋　運動媒質の比誘電率は本来，媒質の静止系 $K'(x', y', z', t')$ で定義されるものであり，$\varepsilon^*(z') = \varepsilon_2^* - (\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*)\dfrac{z'}{z_0'}$ のように表わされている．しかし運動方向が y 方向の時は $z = z'$ であり，比誘電率は観測者の静止系でも（1）式のように表わされる．

$$\varepsilon^*(z) = \varepsilon_2^* - (\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*)\frac{z}{z_0} \quad (0 < z < z_0) \tag{1}$$

ただし，$\varepsilon_2^* > \varepsilon_3^*$とする．

さて，媒質Ⅰから Ⅱへ一様な平面電磁波が入射するものとし，電界が入射面に垂直，すなわちE波の場合について考えることにすれば．入射波（$\mathbf{E}_i$，$\mathbf{H}_i$）および反射波（$\mathbf{E}_r$，$\mathbf{H}_r$）は次のように表わされる．

$$E_{ix} = E_0 e^{i(k_{iy}y + k_{iz}z - i\omega t)} \tag{2,a}$$

$$H_{it} = 0 \tag{2,b}$$

また

$$E_{rx} = RE_0 e^{i(k_{iy}y - k_{rz}z - i\omega t)} \tag{3,a}$$

$$H_{rt} = 0 \tag{3,b}$$

ただし

$$k_{iy} = k_0\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i\ ,\ k_{iz} = k_0\sqrt{\varepsilon_1^*}\cos\theta_i = k_{rz} \tag{4,a}$$

$$k_0 = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}} \tag{4,b}$$

ここでE_0は一定の振巾，ωは入射波の角周波数，θ_iは入射角である．式(3)において，$z = 0$の境界面上で入射波と反射波の位相項は等しくならねばならないという境界条件からの要請を用いた．またRは電磁界に対する境界

条件から決まる未知数であり，式(2)，および(3)において，他の電磁界成分はmaxwell の方程式から求められる．

次に運動不均質媒質中の電磁界（$\mathbf{E}_{II}, \mathbf{H}_{II}$）について考察する[6],[7],[8]比誘電率の分布が z だけに依存する場合，系の時間変化が $e^{-i\omega t}$ であると仮定すると，Maxwell－Minkowski の方程式は次のようになる．

$$(\nabla + i\omega \mathbf{b}_1(z)) \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \bar{a}_1(z) \cdot \mathbf{H} \qquad (5,a)$$

$$(\nabla + i\omega \mathbf{b}_1(z)) \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon^*(z) \bar{a}_1(z) \cdot \mathbf{E} \qquad (5,b)$$

ただし

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \qquad (6,a)$$

$$\mathbf{b}_1(z) = \frac{(\varepsilon^*(z)-1)\beta_1}{(1-\varepsilon^*(z)\beta_1^2)C}\hat{y} = b_1(z)\hat{y} \qquad (6,b)$$

$$\bar{a}_1(z) = \begin{pmatrix} a_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1(z) \end{pmatrix} \qquad (6,c)$$

$$a_1(z) = \frac{1-\beta_1^2}{1-\varepsilon^*(z)\beta_1^2} \qquad (6,d)$$

ここで考えている問題では，境界条件を考慮すると，不均質媒質Ⅱの中の電界 $\mathbf{E}_{II}$ は x 方向成分のみをもち，つぎの方程式を満足しなければならない．

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{IIx} + \frac{1}{a_1(x)}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\omega b_1(z)\right)^2 E_{IIx} + k_0^2 \varepsilon^*(z) E_{IIx} = 0 \qquad (7)$$

式(7)の解を求めるために，$E_{\Pi x}$をつぎのように仮定する．

$$E_{\Pi x} = F(z)\ e^{ik(z)y} \tag{8}$$

式(8)を式(7)に代入すれば次の式が成立しなければならないことがわかる．

$$\frac{d}{dz}\left(k(z)\right) = 0 \tag{9,a}$$

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon^*(z)\, a_1(z) - \frac{\left(k(z) - \omega\, b_1(z)\right)^2}{a_1(z)}\right\} F = 0 \tag{9,b}$$

まず，式（9，a）から$k(z)$はzに無関係に一定であることがわかり，さらに，位相項に対する境界条件からの要請を考慮すれば，次式が成立する．

$$k(z) = \text{constant} = k_0\sqrt{\varepsilon_1^*}\ \sin\theta_i \tag{10}$$

式（10）を式（9，b）に代入して，式を変形してゆくと

$$\frac{d^2F}{dz^2} + k_0^2\gamma_1^2\left(\varepsilon^*(z)\left(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i\right)^2 - \left(\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i\right)^2\right) F = 0 \tag{11}$$

となる．ただし

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \tag{12}$$

である．

式（11）を解くために，次のような変数変換を行なう．

$$\zeta = \left(\frac{z_0 k_0 \gamma_1 (1-\beta\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\varepsilon_2^* - \left(\frac{\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}{1-\beta_1\ \varepsilon_1^*\sin\theta_i}\right)^2 - (\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*)\frac{z}{z_0}\right) \tag{13}$$

ここで，3乗根は実根をとるものとする．

式(13)の変数変換を行なえば，式(11)はStokesの方程式になる．すなわち

$$\frac{d^2F}{d\zeta^2} + \zeta F = 0 \tag{14}$$

となる．

式(14)の一般解はAiry関数，または1/3次のBessel関数で表わされるが，ここではBessel関数を使うことにする．

結局，媒質Ⅱの電界として次式を得ることができる．

$$E_{\Pi x} = \{ AS_A(\zeta) + BS_B(\zeta) \}\ e^{i(k(z)y - \omega t)} \tag{15}$$

ただし

$$S_A(\zeta) = \begin{cases} \zeta^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}\right) & \zeta \geqq 0 \quad (16,a) \\ -(-\zeta)^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(-\zeta)^{\frac{3}{2}}\right) & \zeta < 0 \quad (16,b) \end{cases}$$

$$S_B(\zeta) = \begin{cases} \zeta^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}\right) & \zeta \geqq 0 \quad (17,a) \\ (-\zeta)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(-\zeta)^{\frac{3}{2}}\right) & \zeta < 0 \quad (17,b) \end{cases}$$

ここで J，および I はそれぞれ，Bessel 関数，変形 Bessel 関数を表わし，A および B は，境界条件から決定せられる未知数である．

式（15）に対応する磁界 H_{II} は式(3)から次のように表わされる．

$$H_{IIy}=\frac{i}{\omega\mu_0}\left(k_0\gamma_1\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\beta_1\sin\theta_i\right)\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*}{z_0}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{AS_A'(\zeta)+BS_B'(\zeta)\right\}$$

$$e^{i\left(k(z)y-\omega t\right)} \qquad (18,a)$$

$$H_{IIz}=-\frac{1}{\omega\mu_0}\left(\frac{k_{iy}+\omega b_1(z)}{a_1(z)}\right)\left\{AS_A(\zeta)+BS_B(\zeta)\right\}e^{i\left(k(z)y-\omega t\right)} \qquad (18,b)$$

ここで $'$ は ζ に関する微分を表わす．

つぎに，媒質Ⅲにおける透過波（E_t，H_t）は Maxwell－Minkowski の方程式から次式のように表わされる．[1][2]

$$E_{ty}=TE_0\,e^{i\left(k_{iy}y+k_{tz}z-\omega t\right)} \qquad (19,a)$$

$$H_{ty}=0 \qquad (19,b)$$

ただし

$$k_{tz}=k_0\gamma_2\sqrt{\varepsilon_4^*\left(1-\beta_2\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i\right)^2-\left(\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i-\beta_2\right)^2} \qquad (20,a)$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\,,\qquad \beta_2=\frac{v_2}{c} \qquad (20,b)$$

式（19）において，$z=z_0$ なる境界上で，媒質Ⅱにおける電磁界と媒質Ⅲにおける透過波の位相項が等しくなければならないという境界条件からの要

請を用いた．また，他の電磁界成分はMaxwell－Minkowskiの方程式から求めることができる．

さて，式(3),(15)，および式(19)には，R，T，A，Bなる4個の未知数が含まれているが，これらは$z=0$および$z=z_0$なる境界面上で電界および磁界の接線成分が連続でなければならないという境界条件により定められる．結果を示すと次のようになる．

$$R=\frac{X-Y}{X+Y} \tag{21}$$

$$T=\frac{2V}{X+Y} \tag{22}$$

$$A=\frac{1}{X+Y}\left(\frac{2k_{rz}k_{tz}}{W}S_B(\zeta_1)-2k_{rz}S_B'(\zeta_1)\right)E_0 \tag{23}$$

$$B=\frac{1}{X+Y}\left(\frac{-2k_{rz}k_{tz}}{W}S_A(\zeta_1)+2k_{rz}S_A'(\zeta_1)\right)E_0 \tag{24}$$

ただし

$$X=\frac{k_{rz}k_{tz}}{W}\left(S_A(\zeta_0)S_B(\zeta_1)-S_A(\zeta_1)S_B(\zeta_0)\right)+k_{rz}\left(S_A'(\zeta_1)S_B(\zeta_0)-S_A(\zeta_0)S_B'(\zeta_1)\right) \tag{25,a}$$

$$Y=k_{tz}\left(S_A'(\zeta_0)S_B(\zeta_1)-S_B'(\zeta_0)S_A(\zeta_1)\right)+W\left(S_A'(\zeta_1)S_B'(\zeta_0)-S_A'(\zeta_0)S_B'(\zeta_1)\right) \tag{25,b}$$

$$W=\left(k_0^2r_1^2(1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i)^2\frac{(\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*)}{z_0}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{26}$$

$$\zeta_0=\left(\frac{k_0\tau_1\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\,\beta_1\sin\theta_i\right)}{\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\varepsilon_2^*-\left(\frac{\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}{1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}\right)^2\right)\quad(27,a)$$

$$\zeta_1=\left(\frac{k_0\tau_1\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\,\beta_1\sin\theta_i\right)}{\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\varepsilon_3^*-\left(\frac{\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}{1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}\right)^2\right)\quad(27,b)$$

3．幾何光学的反射点

式（15）で表わされる媒質Ⅱにおける電磁界において，Bessel関数のArgument ζ が0となる点 z を z_c とし，z_c が媒質Ⅱの内部にある場合には，$z_c<z<z_0$ の領域では z が増大するにつれて電磁界は急速に減衰する[9]．z_c は幾何光学的反射点と呼ばれ，式(13）を考慮すれば，次式で与えられることがわかる．

$$z_c=\frac{z_0}{\varepsilon_2^*-\varepsilon_3^*}\left(\varepsilon_2^*-\left(\frac{\beta_1-\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}{1-\beta_1\sqrt{\varepsilon_1^*}\sin\theta_i}\right)^2\right)\qquad(28)$$

z_c が媒質の運動によってどのように変化するかを具体的に知るために，入射角 θ_i に対する z_c/z_0 の数値計算例を β_1 をパラメーターとして，媒質Ⅰが真空の場合を図3（$\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=1.0$，$\varepsilon_3^*=-1$），媒質Ⅰが誘電体の場合を図4（$\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=2.0$，$\varepsilon_3^*=0.5$）および，図5（$\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=4.0$，$\varepsilon_3^*=2.0$）に示す．式（28）および図3からわかるように，$\varepsilon_3^*\leqq 0$ の場合には常に $z_c\leqq z_0$ となり，z_c が最大となる入射角は $\sin\theta_i=\dfrac{\beta_1}{\sqrt{\varepsilon_1^*}}$ で与えられる．

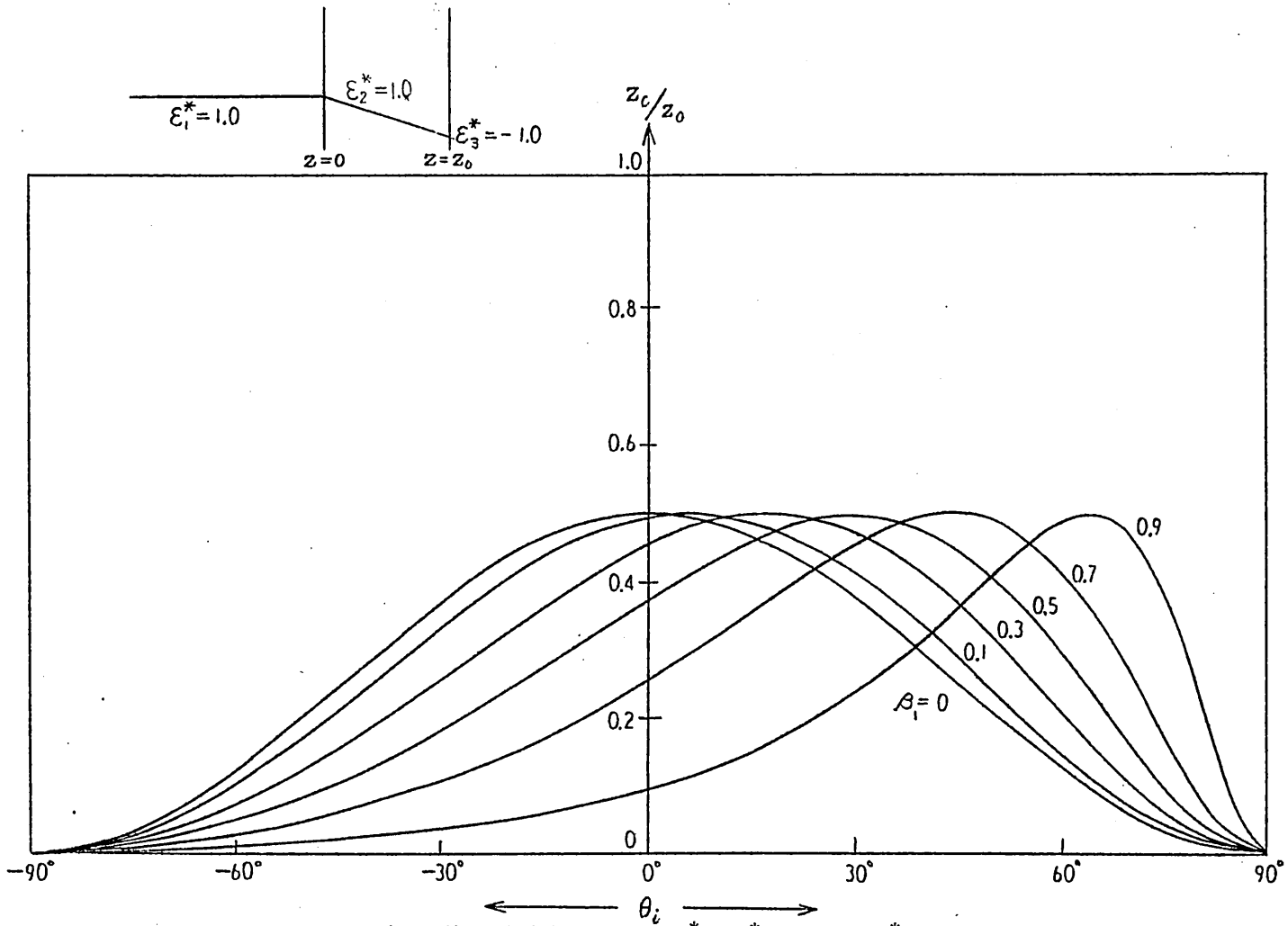


図３　幾何光学的反射点 z_c/z_0（ $\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=1.0$, $\varepsilon_3^*=-1.0$ ）

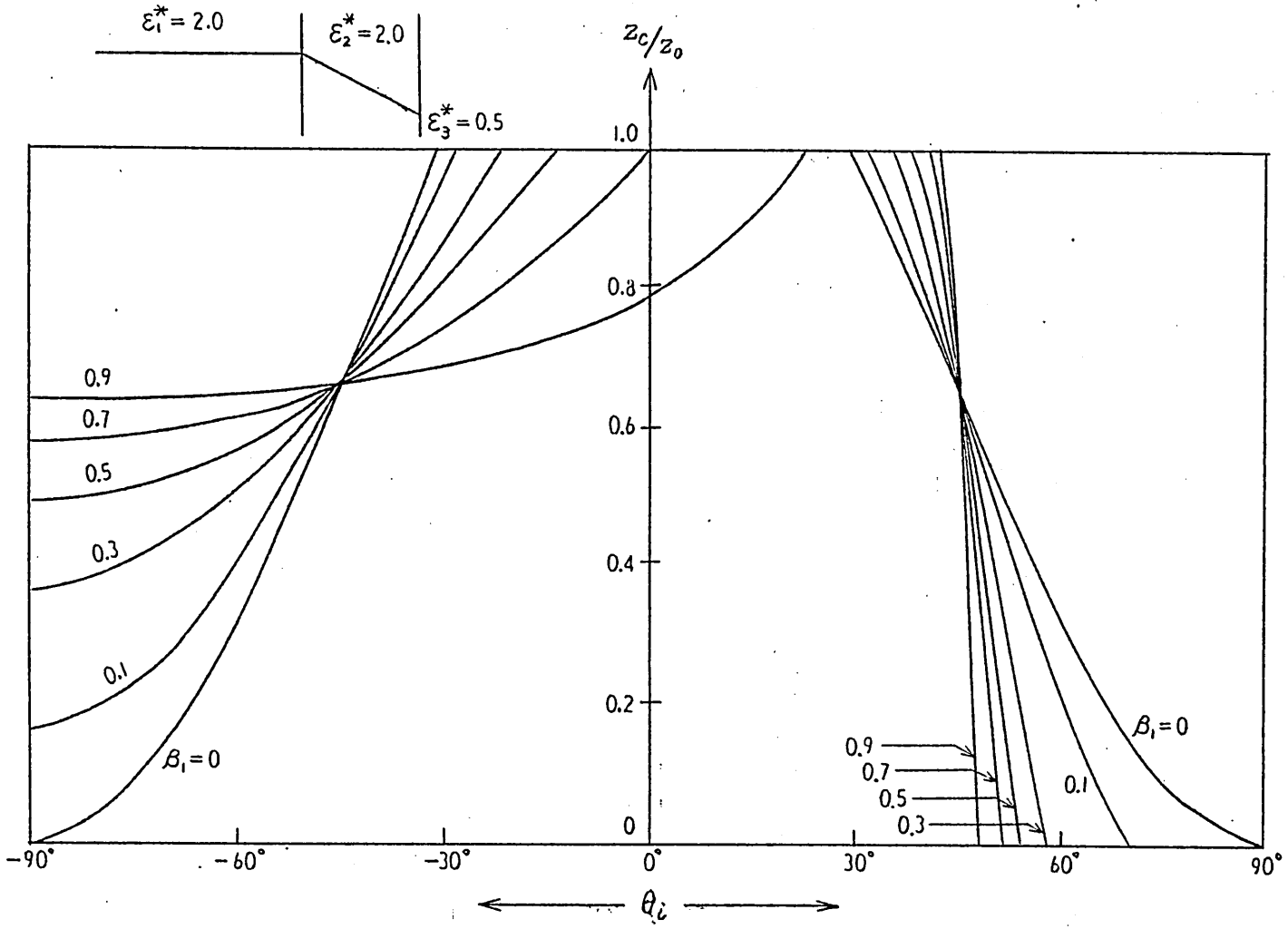


図４　幾何光学的反射点 z_c/z_0（ $\varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = 2.0$, $\varepsilon_3^* = 0.5$ ）

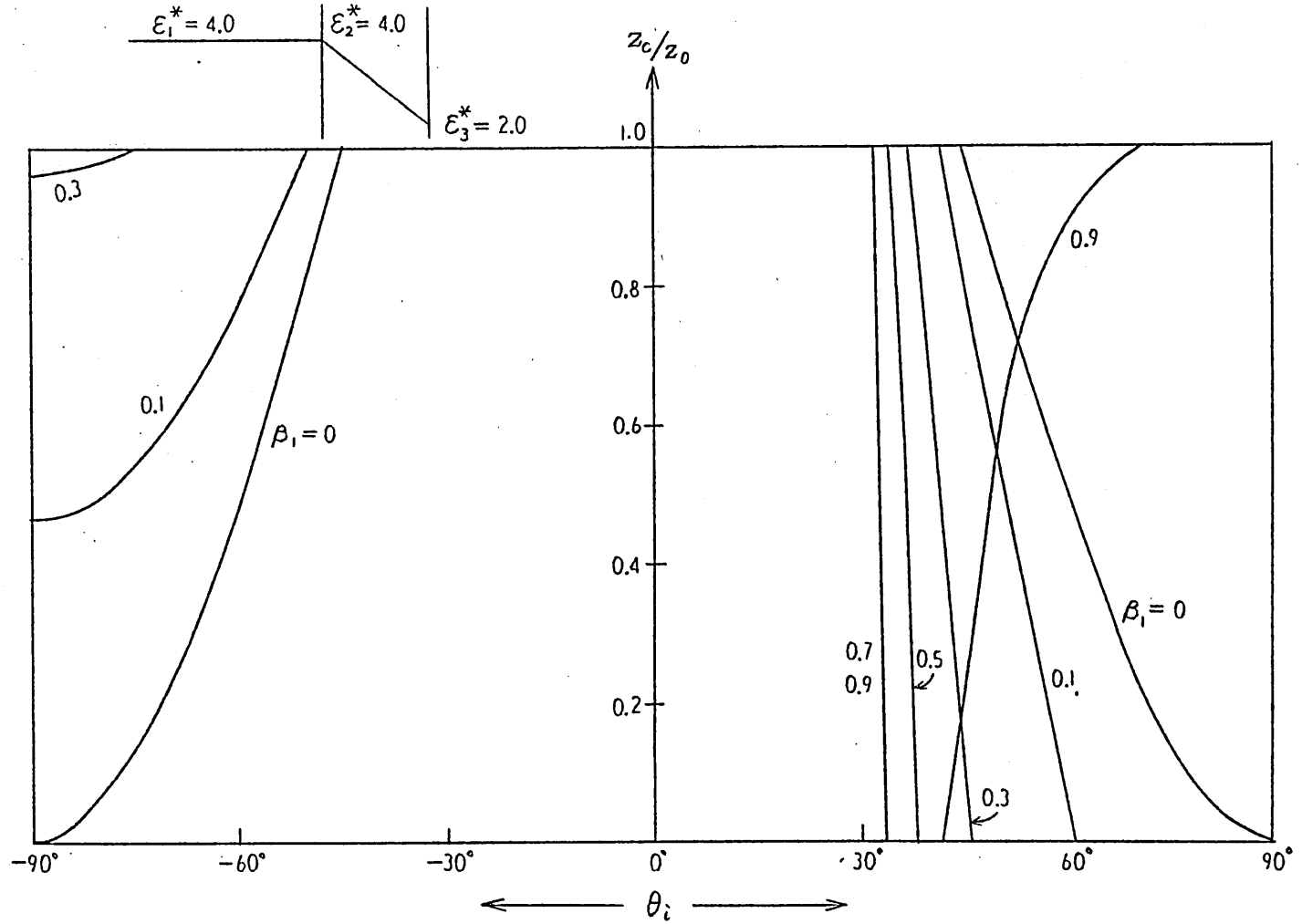


図5　幾何光学的反射点 z_c/z_0（ $\varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = 4.0$, $\varepsilon_3^* = 2.0$ ）

4．電力反射係数および電力透過係数

電力反射係数 Γ_R および電力透過係数 Γ_T は，それぞれ，つぎのように定義される．

$$\Gamma_R = -\frac{\hat{z}\cdot S_r}{\hat{z}\cdot S_i} \tag{29,a}$$

$$\Gamma_T = \frac{\hat{z}\cdot S_t}{\hat{z}\cdot S_i} \tag{29,b}$$

ここで，S_i，S_r，S_t はそれぞれ入射波，反射波および透過波の時間平均化されたPoyntingベクトルである．

式(2)，(3)，(19)，(21) および式(22) から Γ_R，Γ_T はそれぞれ次のように求めることができる．

$$\Gamma_R = R\bar{R} \tag{30,a}$$

$$\Gamma_T = Re\left(\frac{\overline{k_{tz}}}{\overline{k_{iz}}}\,T\bar{T}\right) \tag{30,b}$$

ただし Re は実数部を取る操作，－は複素共役を取る操作を表わす．
さらに，Γ_R および Γ_T は，つぎの関係式を満足することも証明できる．(+)

$$\Gamma_R + \Gamma_T = 1 \tag{40}$$

また不均質媒質の厚さが，波長に比べて十分小さいときには，Bessel関数の展開公式を使って，Γ_R，Γ_T をつぎのように表わすことができる．

(+) この証明においては，微分方程式(14)のWronskian が定数であるという関係，すなわち $S_A(\zeta_0)S_B'(\zeta_0)-S_B(\zeta_0)S_A'(\zeta_0)=S_A(\zeta_1)S_B'(\zeta_1)-S_B(\zeta_1)S_A'(\zeta_1)=\mathrm{const.}$ を使う．

$$\Gamma_R = \Gamma_{R0} \cdot \left| \frac{1 - \frac{N_1}{2} k_0 z_0 i - \frac{N_2}{6} k_0^2 z_0^2 + O(z_0^3)}{1 - \frac{D_1}{2} k_0 z_0 i - \frac{D_2}{6} k_0^2 z_0^2 + O(z_0^3)} \right|^2 \qquad (40,a)$$

$$\Gamma_T = \Gamma_{T0} \cdot \left| \frac{1 + O(z_0^3)}{1 - \frac{D_1}{2} k_0 z_0 i - \frac{D_2}{6} k_0 z_0^2 + O(z_0^3)} \right|^2 \qquad (40,b)$$

ただし

$$N_1 = \{ \gamma_1^2 \{ (\varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*)(1 - \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 - 2(\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 \} - k_{tz} k_{rz} \} / k_{rz} - k_{tz} \qquad (41,a)$$

$$D_1 = \{ \gamma_1^2 \{ (\varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*)(1 - \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 - 2(\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 \} + k_{tz} k_{rz} \} / k_{rz} + k_{tz} \qquad (41,b)$$

$$N_2 = (P k_{rz} - Q k_{tz}) / (k_{rz} - k_{tz}) \qquad (42,a)$$

$$D_2 = (P k_{rz} + Q k_{tz}) / (k_{rz} + k_{tz}) \qquad (43,b)$$

$$P = \gamma_1^2 \{ (\varepsilon_2^* + 2\varepsilon_3^*)(1 - \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 - 3(\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 \} \qquad (44,a)$$

$$Q = \gamma_1^2 \{ (2\varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*)(1 - \beta_1 \sqrt{\varepsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 - 3(\beta_1 - \sqrt{\varepsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 \} \qquad (44,b)$$

$$\Gamma_{R0} = \left| \frac{k_{rz} - k_{tz}}{k_{rz} + k_{tz}} \right|^2 \qquad (44,a)$$

$$\Gamma_{T0} = Re\left(\frac{\overline{k_{tz}}}{\overline{k_{rz}}}\right) \left| \frac{2k_{rz}}{k_{rz} + k_{tz}} \right|^2 \qquad (44,b)$$

式(40)からわかるように，z_0が小さくなるにつれ，Γ_R，Γ_T はそれぞれ式(44)，すなわち均質媒質の場合の電力反射係数Γ_{R0}，および電力透過係数$\Gamma_{T0}^{(1),(2)}$に近づくことがわかる．

入射角θ_i に対する電力反射係数Γ_R の数値計算例を，β_1をパラメーターとして，図6～図8に示す．また正規化された不均質媒質Ⅱの厚さz_0/λ_0に対する電力反射係数Γ_R の数値計算例をβ_1をパラメーターとし，θ_iを適当にとり図9～図12に示す．式(20)，(21)，(28)から$\varepsilon_3 = \varepsilon_4$，$\beta_1 = \beta_2$の場合で，幾何光学的反射点$z_c$ が媒質Ⅱに存在するときは，必ず全反射現象が起り$\Gamma_R = 1$ となるが，$\varepsilon_3 \leqq \varepsilon_4$，$\beta_1 = \beta_2$の場合は幾何光学的反射点$z_c$が媒質Ⅱに存在しても，必ずしも全反射現象は起らない．しかしΓ_R は，z_0の増加とともに急速に1に近づく(図9)．これは媒質Ⅱ内部の電磁界が前述のように，$z_c \leqq z \leqq z_0$で急速に減衰しているためである．媒質が静止している時，媒質Ⅱに幾何光学的反射点z_c が存在しなくても，運動によってz_c は大きく移動するため(図3～図5)，媒質Ⅱに反射点が現われることがあり，Γ_R 対 z_0/λ_0 のグラフはβ_1の値によりその傾向がかなり違ってくることがわかる．

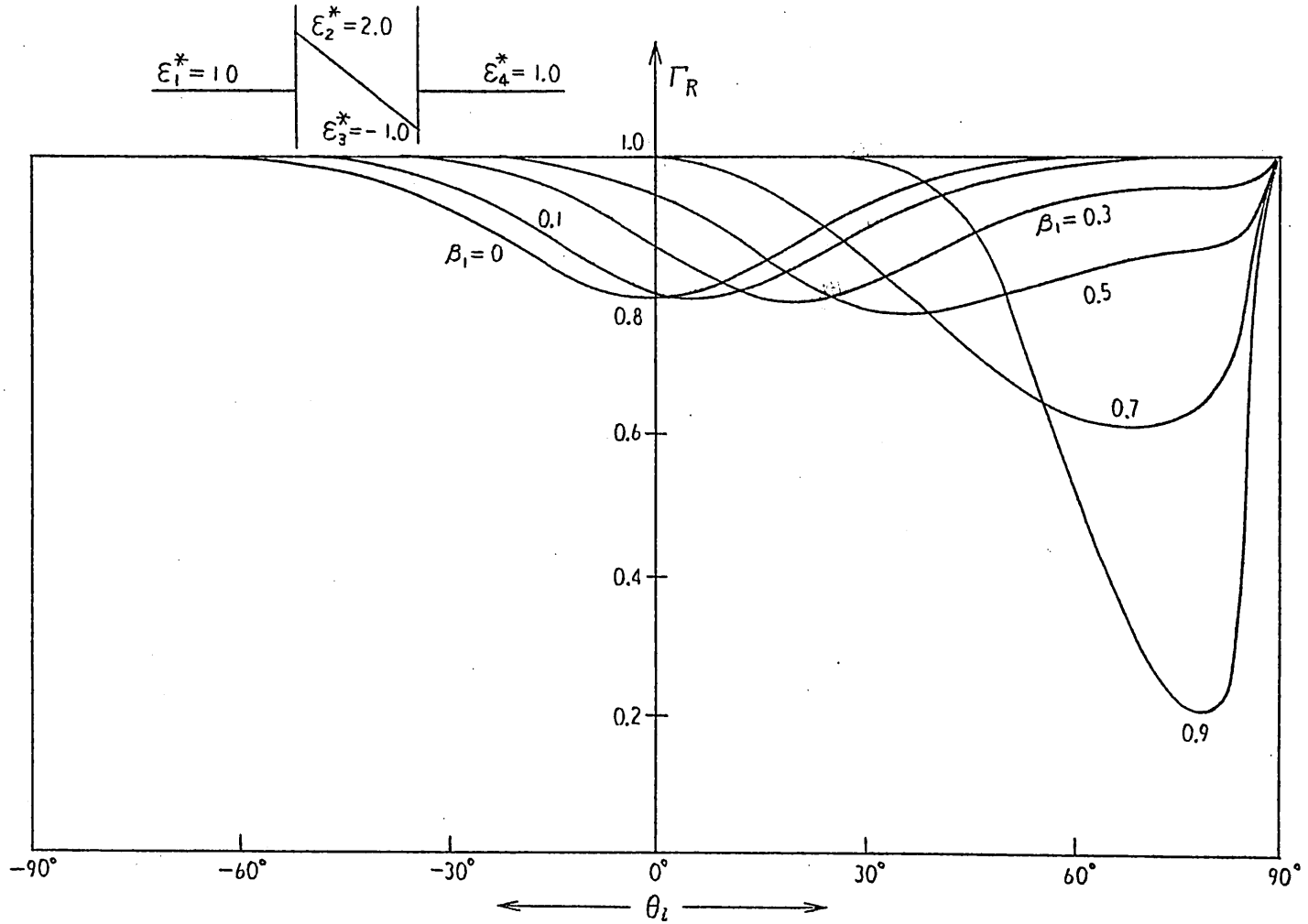


図6　電力反射係数 Γ_R ($\varepsilon_1^*=1.0$, $\varepsilon_2^*=2.0$, $\varepsilon_3^*=-1.0$, $\varepsilon_4^*=1.0$, $z_0/\lambda_0=3/4$)

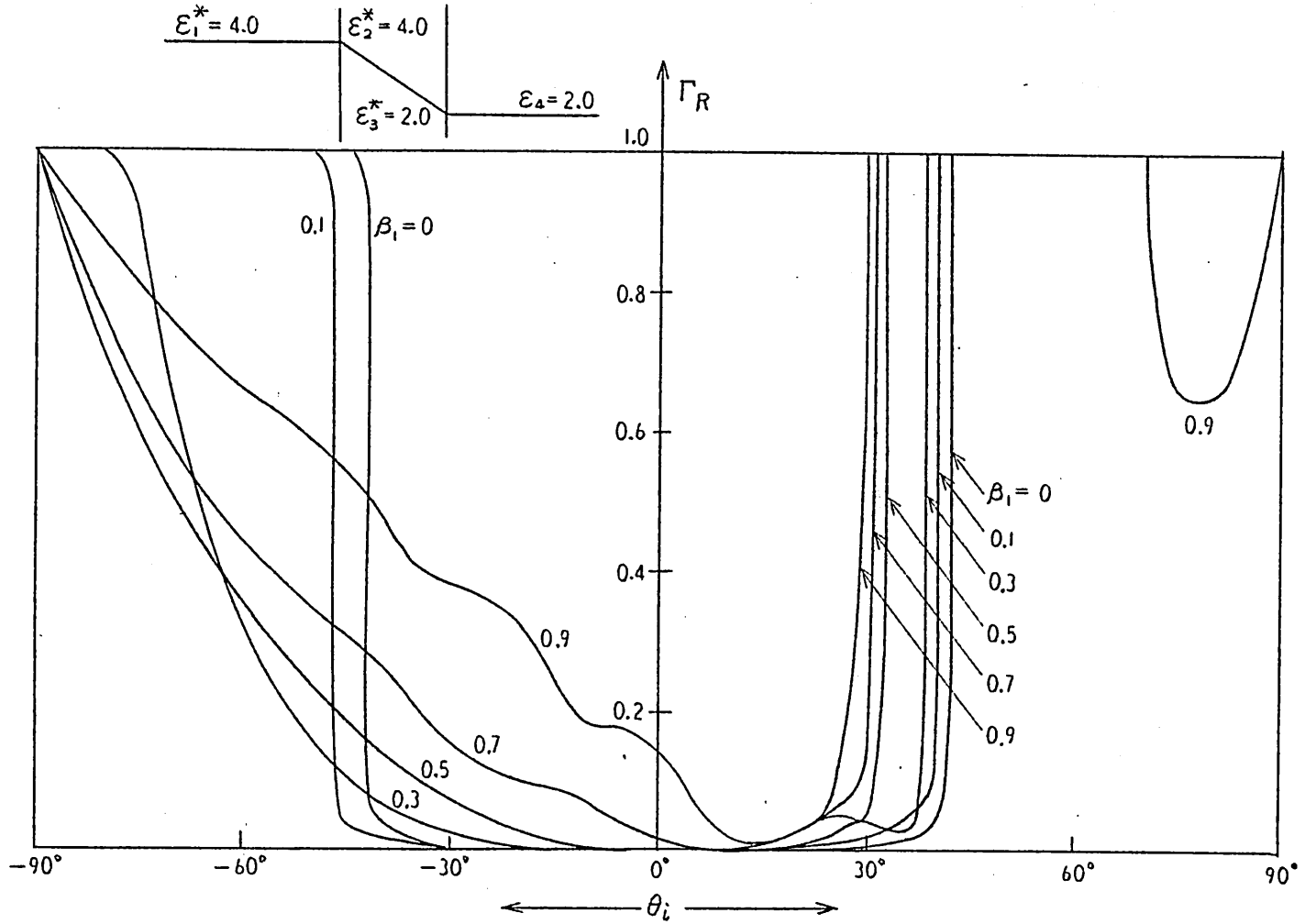


図 7　電力反射係数 Γ_R ($\varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = 4.0$, $\varepsilon_3^* = \varepsilon_4^* = 2.0$, $z_0/\lambda_0 = 0.5$)

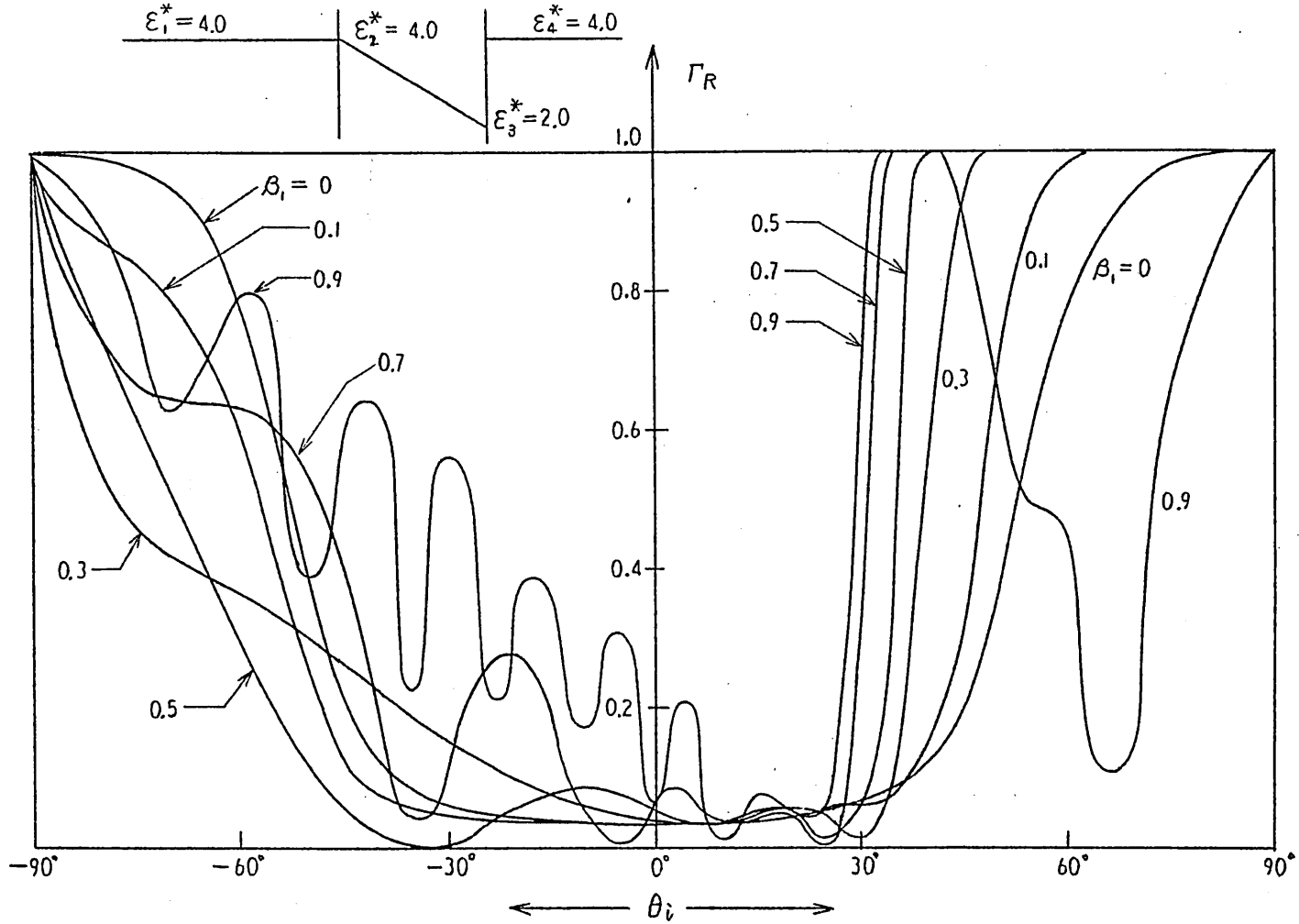


図 8　電力反射係数 Γ_R ($\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=4.0$, $\varepsilon_3^*=2.0$, $\varepsilon_4^*=4.0$, $z_0/\lambda_0=0.5$)

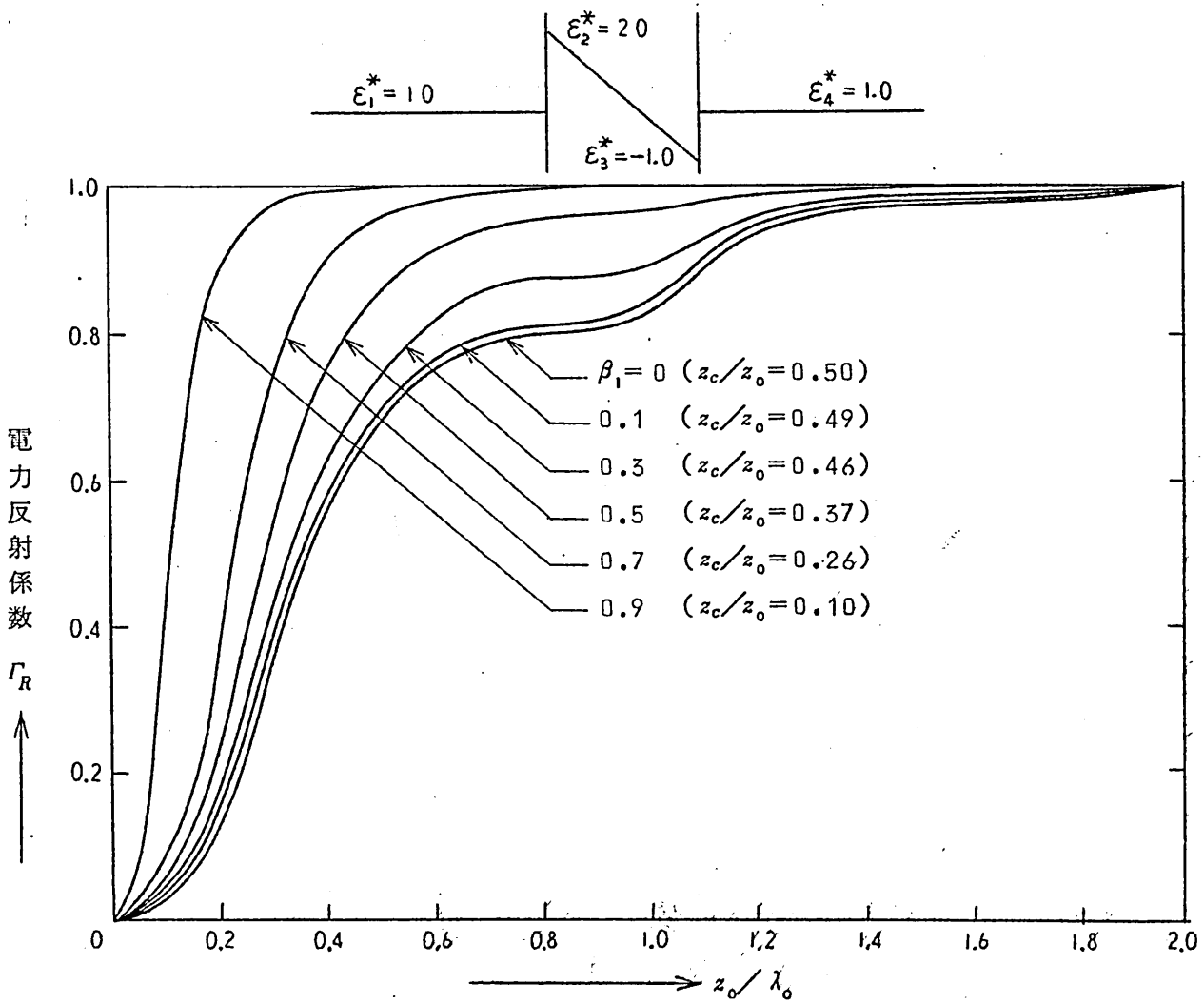


図9　電力反射係数 Γ_R（$\varepsilon_1^*=1.0$，$\varepsilon_2^*=2.0$，$\varepsilon_3^*=-1.0$，$\varepsilon_4^*=1.0$，$\theta_i=0°$）

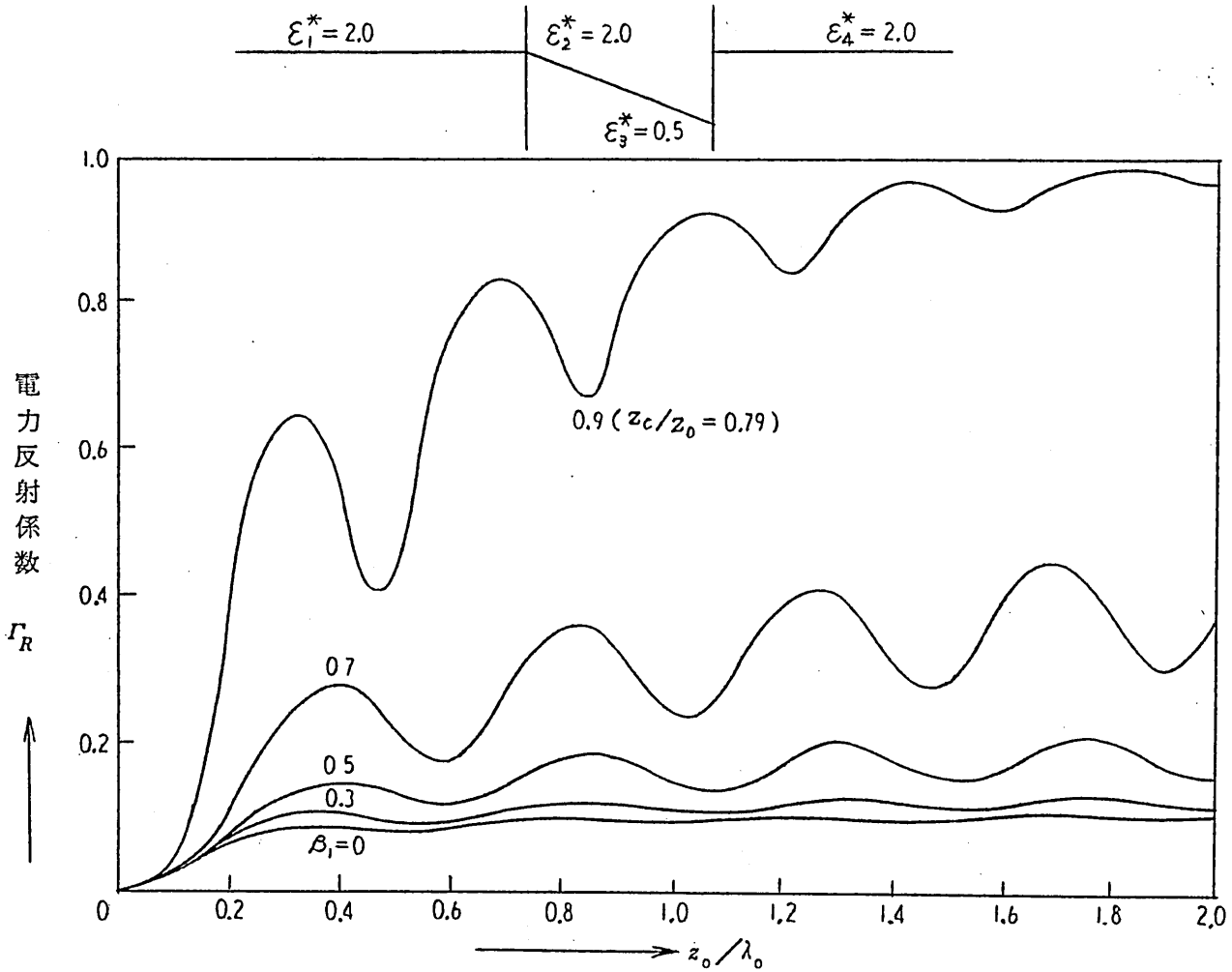


図１０　電力反射係数 Γ_R ($\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=2.0$, $\varepsilon_3^*=0.5$, $\varepsilon_4^*=2.0$, $\beta_1=\beta_2$, $\theta_i=0°$)

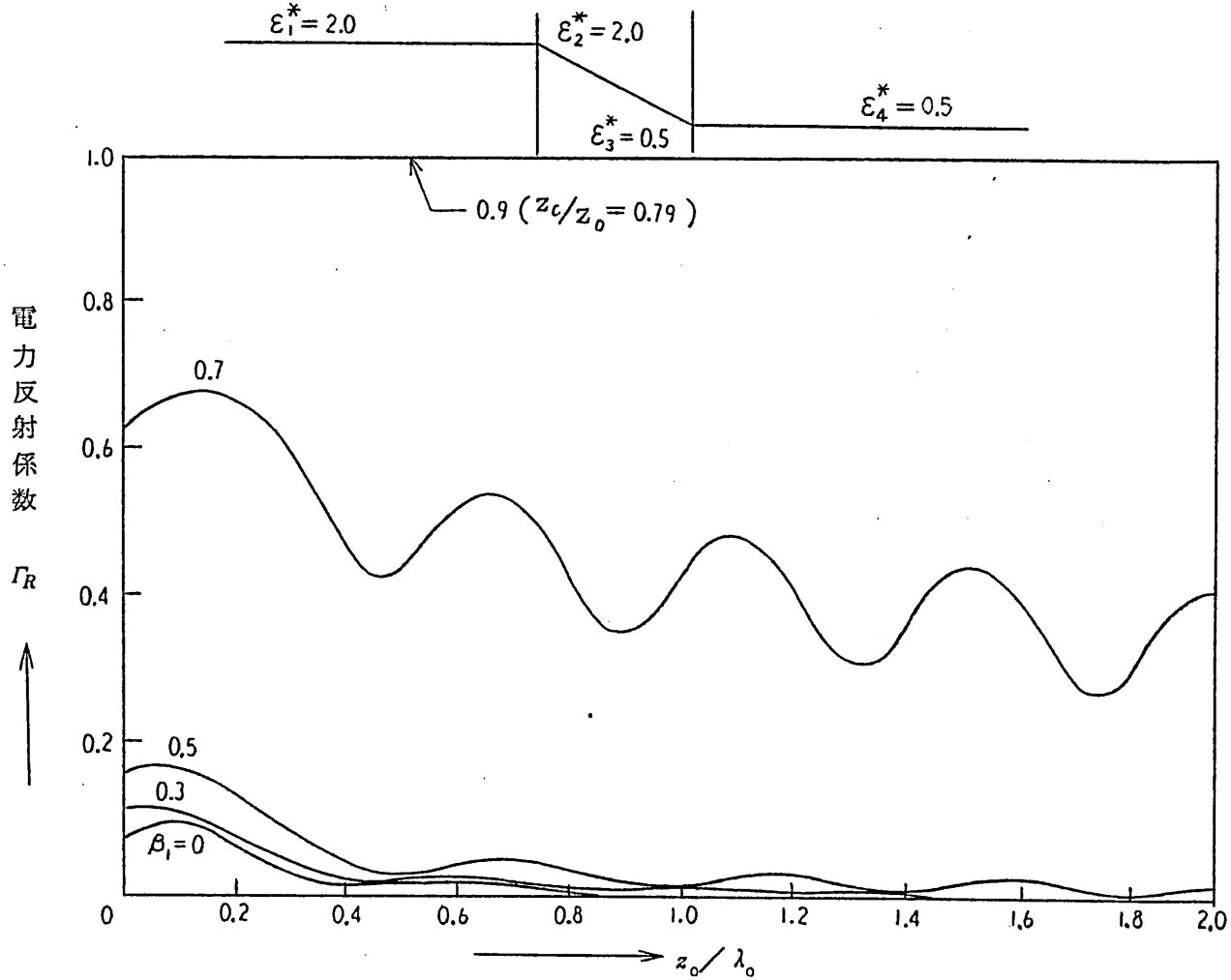


図１１　電力反射係数 Γ_R（$\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=2.0$，$\varepsilon_3^*=\varepsilon_4^*=0.5$，$\beta_1=\beta_2$，$\theta_i=0°$）

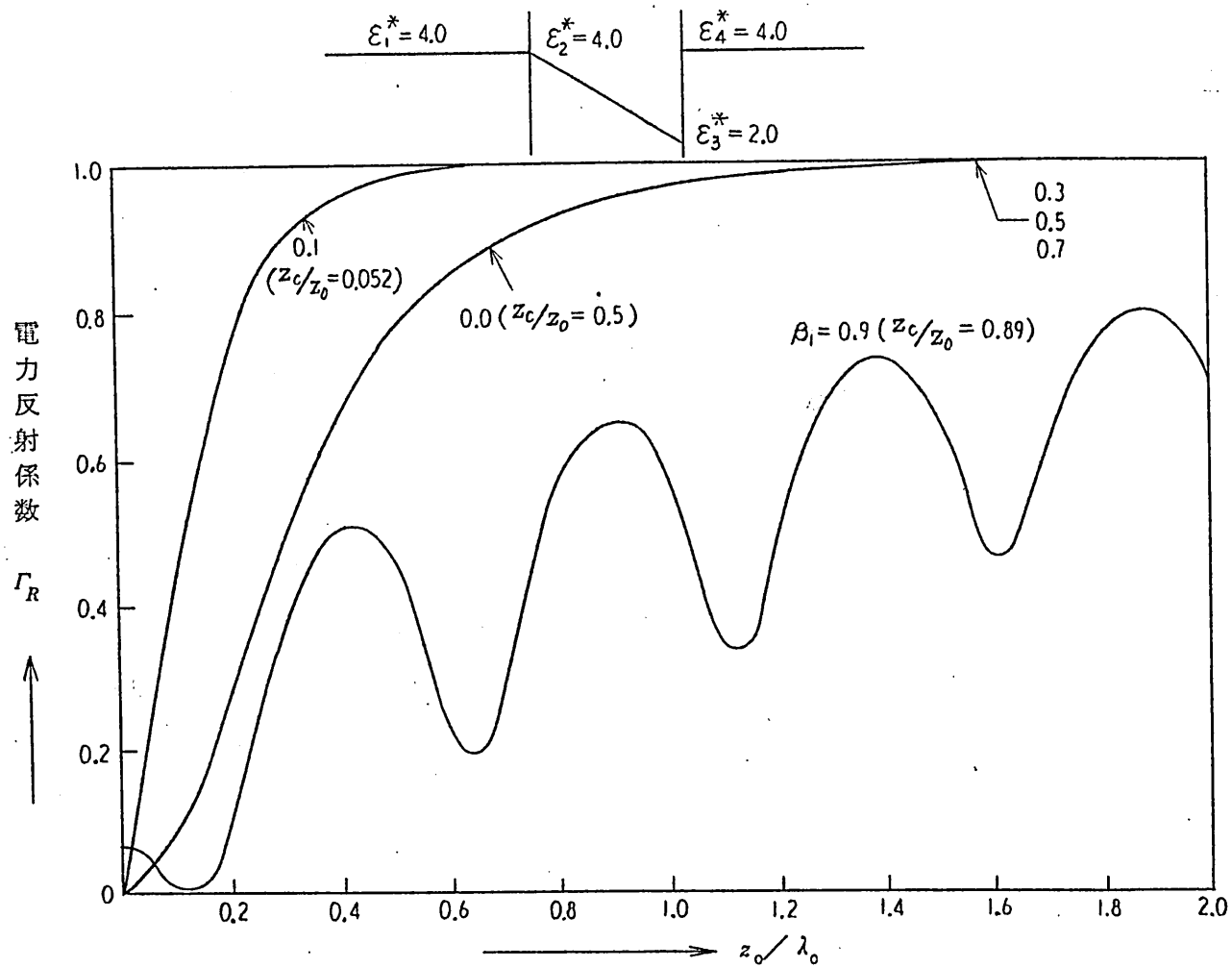


図 12　電力反射係数 Γ_R ($\varepsilon_1^*=\varepsilon_2^*=4.0$, $\varepsilon_3^*=2.0$, $\varepsilon_4^*=4.0$, $\beta_1=\beta_2$, $\theta_i=60°$)

5．むすび

本論文では，誘電率が場所に関して直線的に変化するような不均質誘電体slabと半無限均質誘電体とが，境界面および入射面に対して平行に運動している場合の平面電磁波の反射と透過について，運動不均質媒質に対して成り立つMaxwell－Minkowskiの方程式を導出，かつそれを解くことにより解析を行ない，厳密な解を得た．特に，電力反射係数および不均質誘電体中の電磁界に対する幾何光学的反射点については，数値計算例をあげて媒質の運動の影響を詳しく調べた．なお，本論文では，入射波がE波，すなわち電界が入射面に垂直の場合についてのみ考察したが，入射波がH波の場合や，媒質がプラズマの場合，また運動不均質媒質中におかれた波源からの放射の問題等についても同様な解析が可能であり現在検討中である．

謝　　辞

終りに日頃ご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授ならびに熊谷信昭助教授に深謝する．また，有益なご討論をいただいた板倉研究室の方々に感謝する．

文　　献

(1) T.Shiozawa and K.Hazama:"General solution to the problem of reflection and transmission by a moving dielectric medium", Radio Sci., 3, 6, p.569 (June 1968).

(2) 間剛，塩沢俊之，熊谷信昭："運動等方性プラズマによる平面電磁波の反射と透過（一般解）,", 信学論(B), 51-B, 12, p.575 (昭43-12)

(3) Dan Censor:" Scattering of a plane wave at a plane interface separating two moving media", Radio Sci., 4 11, p.1079 (Nov. 1969).

(4) H.N. Kritikos, K.S.H.Lee, and C.H.Papas:" Electromagnetic reflectivity of nonuniform jet streams", Radio Sci., 2, 9, p.991 (Sept. 1967).

(5) 深井一郎，風間輝雄，鈴木道雄，福岡醇一："運動する不均一媒質による平面電磁波の反射について．" 1 „ ", 昭44信学全大, 373.

(6) K.G.Budden: " Radio waves in the ionosphere", Chaps. 15 and 16, Cambridge University Press, London (1961).

(7) V.L.Ginzburg:" The propagation of electro-magnetic waves in plasmas, Chap. IV, Pergamon Press, Oxford (1964).

(8) C.T.Tai:" The dyadic Greens function for a moving isotropic medium", IEEE Trans.(Communication), AP-13, p.322 (Mar. 1965)

(9) 上崎省吾，安達三郎，虫明康人："誘電率が折れ線上に変化する媒質中における電波伝搬理論ならびにモデル実験", 信学誌, 49, 4, p.709 (昭41-04).

輻射科学研究会資料

外部帰還型進行波管発振器のヒステリシス

川村静治
（住友電工）

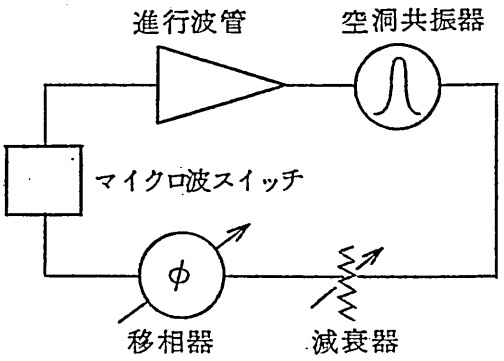
裏　克己
（大阪大学・工学部）

昭和46年7月2日

1. まえがき

超電導化した高Q（Q 7 1 0^6）の空胴共振器にマイクロ波電力を給電する一方式として，その空胴共振器を発振ループ内に含む発振器を構成することが考えられる．

図１．１は超電導円筒TM_{010}空胴共振器による電子加速のためのマイクロ波系統図である．Q測定のためと，液体ヘソウムの消費電力を少くするために，マイクロ波スイッチを用いてパルス制御した．この際，連続波で発振している状態からマイクロ波スイッチの動作状態に変えると，発振が停止することがあることがあった．これは図３．２のようなヒステリシス現象によって起ることが判った．



１－１図　進行波管発振器のブロック図

非線形素子を含む発振回路では，ヒステリシス現象は一般に知られている．[2],[3] このような回路の解析は，２端子の非線形素子と２端子の負荷を接続したときを主として扱っている．[2]～[5]

ここでは，外部帰還型進行波管発振器について，上記の解析における手法に準った．新しい解析法を示す．すなわち進行波管の入出力特性と$AM-PM$

変換特性および帰還回路の特性が与えられたとき，作図によって発振特性を求める．これは物理的に意味が把握され易く，他の外部帰還型発振器にもそのまま適用できる．

実験は，共振器に常電導のものを用いた場合と超電導のものを用いた場合について行ない，特に常電導のものを用いた場合は計算値と実験値がよく一致する．超電導共振器を用いた場合は，計算値に比べて発振特性のヒステリシスが顕著にあらわれる．

2．発振特性の解析

ここでは，進行波管の外部帰還回路に単一共振回路を用いた形式の発振器について発振特性の解析を行なう．

調和型発振器が定常的に発振を継続している場合，その発振ループ内について利得G及び移相量ϕは次の条件を満足している．

$$\begin{cases} \Pi G = 1 \\ \Sigma \phi = 2n\pi \quad (n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots) \end{cases} \tag{2-1}$$

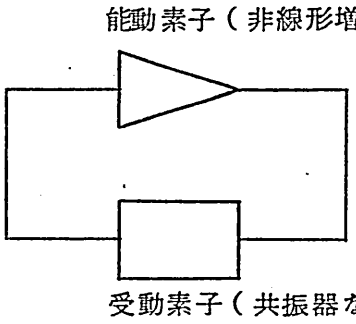
利得Gおよび移相量ϕは一般に発振周波数fおよび発振出力Pの関数になっている．

$$\begin{aligned} G &= G(f, P) \\ \phi &= \phi(f, P) \end{aligned} \tag{2-2}$$

$G(f, P)$及び$\phi(f, P)$を求めれば，式（２－１）を解くことによ

って与えられた発振器の発振周波数および発振出力が求まる．

調和型発振器の機能上からモデル化を行なうと，非線形増幅器からなる能動素子と，共振器（あるいはフィルタ），減衰器，移相器，線路などからなる受動素子に大別される．（２－１図）．ここで問題にしている外部帰還回路に単共振回路を用いた進行波管発振器について，G，ϕに関して一般性を失うことなくつぎのような仮定をおくことができる．



２－１図　調和型発振器のモデル化

$$\begin{cases} G_A = G_A(P), \quad G_p = G_p(f) \\ \phi_A = \phi_A(P), \quad \phi_p = \phi_p(f) \end{cases} \tag{2-3}$$

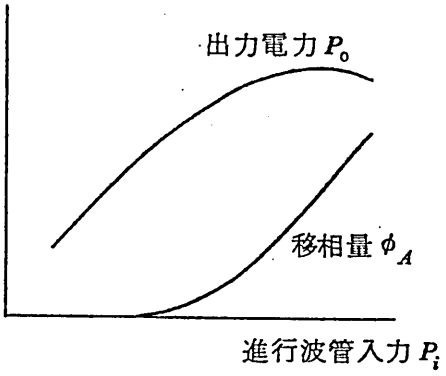
添字のA，Pは能動素子，受動素子を示す．

式（２－３）の物理的意味は，進行波管の周波数特性は帰還回路の周波数帯域幅に比べて十分広く，帰還回路の共振器を始めとする受動素子の特性は，取扱うマイクロ波電力の大きさには無関係に一定ということである．
式（２－１）をかき直すと次式になる．

$$\begin{aligned} &G_A = (P) \times G_p(f) = 1 \\ &\phi_A(P) + \phi_p(f) = 2\,n\pi \end{aligned} \tag{2-4}$$

式（２－４）を与えられた発振器について解くことを考えて見る．式（２－３）から進行波管の特性は，入力電力P_iに対する，出力電力P_0（入出力特性）及び移相量ϕ_A（$AM-PM$変換特性）によって与えられる（２－２図）．ここで，G_Aはつぎのようになる．

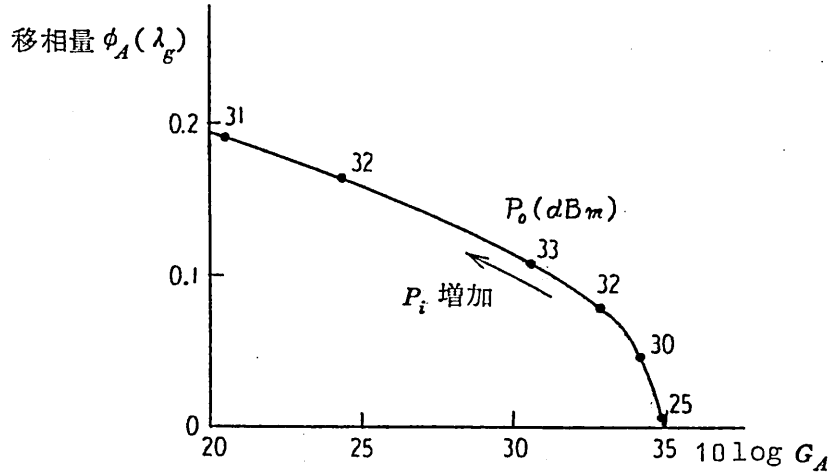
$$G_A = P_0 / P_i \qquad (2\text{-}5)$$



2－2図　進行波管の特性

2－2図の横軸，縦軸をそれぞれ $10\log_{10} G_A$（dB 単位の利得），ϕ_A にかき換える．2－3図は4 GH_z 帯の進行波管について実測した結果をかき換えた例である．2－2図あるいは2－3図は，進行波管の特性について入力電力が小さい時は利得 G_A が大きく，移相量 ϕ_A が小さいが，入力電力が増加するにつれて利得が減少し，移相量が増加するという一般的傾向をあらわしている．2－3図をデバイス線（Device Line）と呼ぶことにする．

受動素子側の特性を決定するのは主として共振器である．単共振回路について，その通過ロス A_r，及び移相量 ϕ_r は次式によって与えられる．



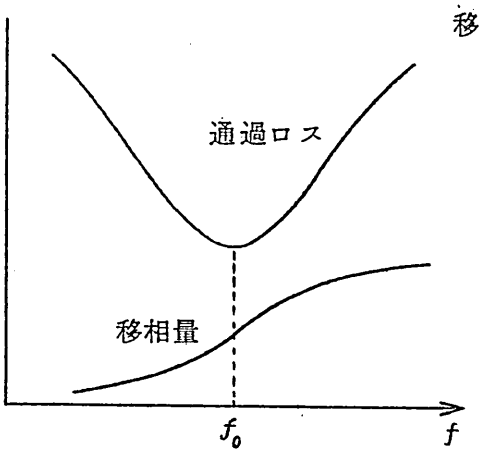
2－3図　進行波管のデバイス線図

$$\frac{A_r}{A_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f-f_0}{\delta f}\right)^2}} \qquad (2-6)$$

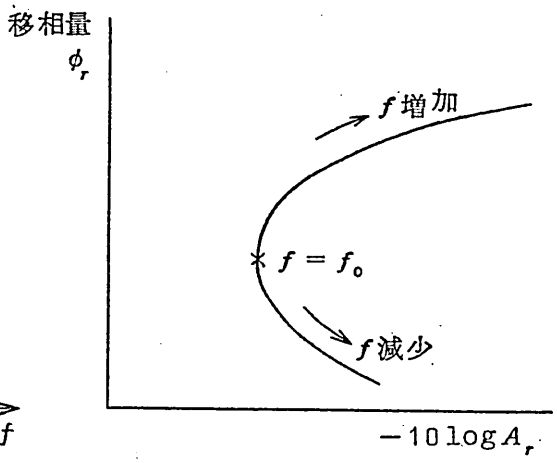
$$\phi_r-\phi_0=\frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\frac{f-f_0}{\delta f} \qquad (2-7)$$

A_0，ϕ_0はそれぞれ$f=f_0$における通過ロス及び移相量．$\delta f=f/Q_L$（半値幅）

式（２－６）及び（２－７）を図示するとよく知られた２－４図のような特性曲線となるが，これを能動素子の時と同じ要領でかき直すと２－５図となる．



２－４図　共振器の特性



２－５図　共振器の特性

受動素子側の特性について，発振ループを形成する線路長に基づく長線効果を無視できない場合がある．発振ループの電気的線路長をn波長とすれば，長線効果は次式であらわされる．

$$\phi_l = \frac{n}{f} \cdot 2\pi \Delta f \text{（ラジアン）} \qquad (2\text{–}8)$$

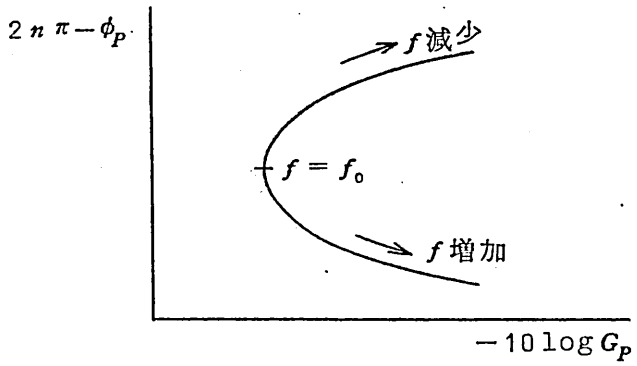
受動素子側の特性は長線効果を考慮に入れてつぎのようになる．

$$\begin{cases} \phi_p(f) = \phi_r(f) + \phi_l(f) \\ G_p(f) = G_c \times A_r(f) \end{cases} \qquad (2\text{–}9)$$

G_c は発振ループ中の減衰器及び線路による損失をあらわしており，f，Pとは独立な定数と見なす．

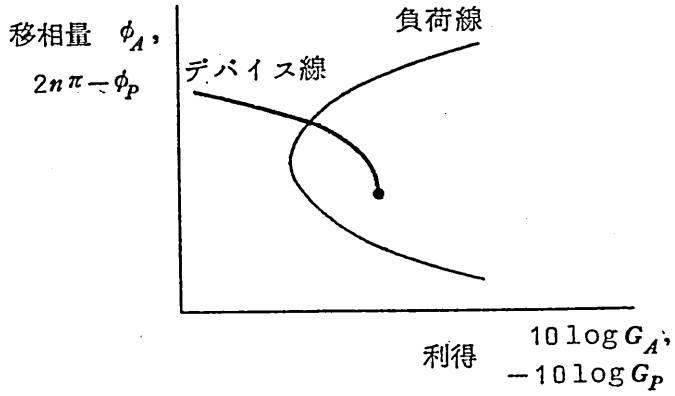
２－５図の縦軸を（$2n\pi - \phi_p$）に，横軸を$-10\log_{10} G_p$にかきなおしたものが２－６図である．２－６図を負荷線（Load Line）と呼ぶことにする．式（２－４）をかき直すと次式になる．

$$\begin{cases} 10\log_{10} G_A(P) = -10\log G_p(f) \\ \phi_A(P) = 2n\pi - \phi_p(f) \end{cases} \qquad (2\text{–}10)$$

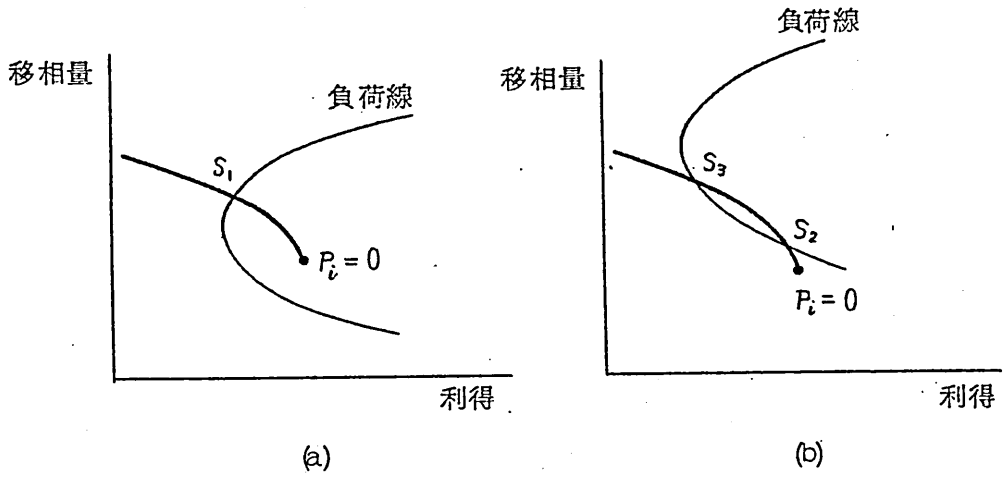


２－６図　共振器の負荷線図

式（2−10）によれば，2−3図と2−6図を重ねた時のデバイス線と負荷線の交点は式（2−4）の解であって発振動作点を与える．つまりこの交点におけるデバイス線のPが発振出力を，負荷線のfが発振周波数を与える．2−7図のようにデバイス線と負荷線を重ねて描いたものを“$D-L$線図”と仮に呼ぶことにする．



2−7図　$D-L$線図

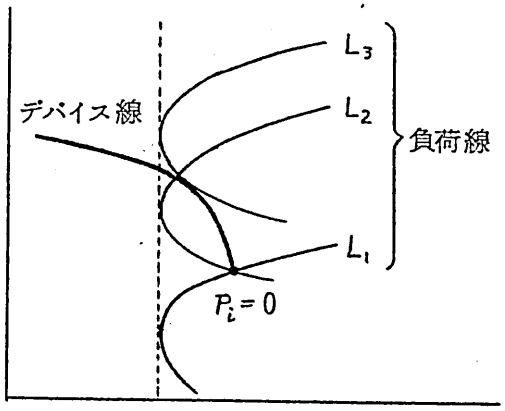


2−8図　$D-L$線図における発振動作点

発振器の動作点は発振ループ中の減衰器及び移相器によって変えられるが，減衰量の変化は$D-L$線図上において負荷線を水平方向に動かすことに相当し，移相量の変化は負荷線を上下方向に平行移動させることに相当する．ここで問題にしている進行波管発振器では，$D-L$線図においてデバイス線と負荷線は発振動作点の変化に伴ない２－８図に示すように１点または２点で交わる．発振立上り条件は次式で与えられる．

$$\begin{cases} \Pi G > 1 \\ \Sigma \phi = 2n\pi \end{cases} \qquad (2-11)$$

式（２－１１）は厳密には発振立上りのための必要条件であるが，第１近似として式（２－１１）を必要十分条件として取扱って図３・２を説明してみよう．式（２－１１）は，$D-L$線図の上でデバイス線の$P_i=0$の点が負荷線の右側に存在することと等価である．２－８図(a) の場合（２－１１）を満足するから発振が立上るが，２－８図(b) の場合（２－１１）を満足しないから発振は立上らない．したがって，２－８図(b)のS_2点は発振動作点として存在しない．つぎに，負荷線を適当に平行移動（例えば移相量，減衰量を変化させることによって）させた場合について考えて見よう．２－９図に示す



２－９図
移相量を変化させた時の
負荷線の移動．

ように，受動素子側の移相量を変化させて負荷線を連続的に上下に平行移動した場合を例にとって見る．最初，負荷線がデバイス線の下方に離れて存在しており交点がない時発振は起きない．つぎに，負荷線を上方へ移動させて２－９図のL_1を越えたとする．この時（２－１１）を満足するから発振が立上り，２－８図(a)のS_1点相当の所が発振動作点となる．さらに負荷線を上方に移動させてL_2を越えたとする．この時２－９図(b)のS_3点相当のところで発振が継続される．ふたたび負荷線を上方に移動させてL_3を越えたとすれば，デバイス線と負荷線の交点がなくなるので発振は停止する．

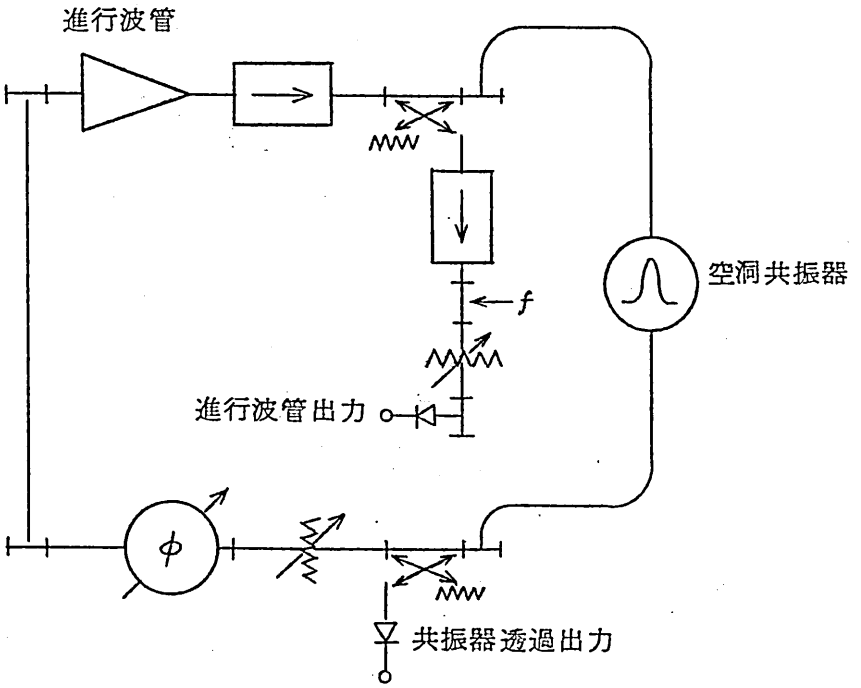
今度は逆に負荷線を上から下へ動かす場合について考えて見よう．最初，負荷線がデバイス線の上方に離れて存在している状態から負荷線を下方へ移動させてL_3を越えても$P_i = 0$　の点が（２－１１）を満足しないから発振は立上らない．ついで負荷線を下へ移動させてL_2を越せば始めて発振が立上る．

この時の発振動作点は，２－８図(a)のS_1点に相当する．さらに負荷線を下に移動させてL_1を越すとデバイス線と負荷線の交点がなくなり発振は停止する．

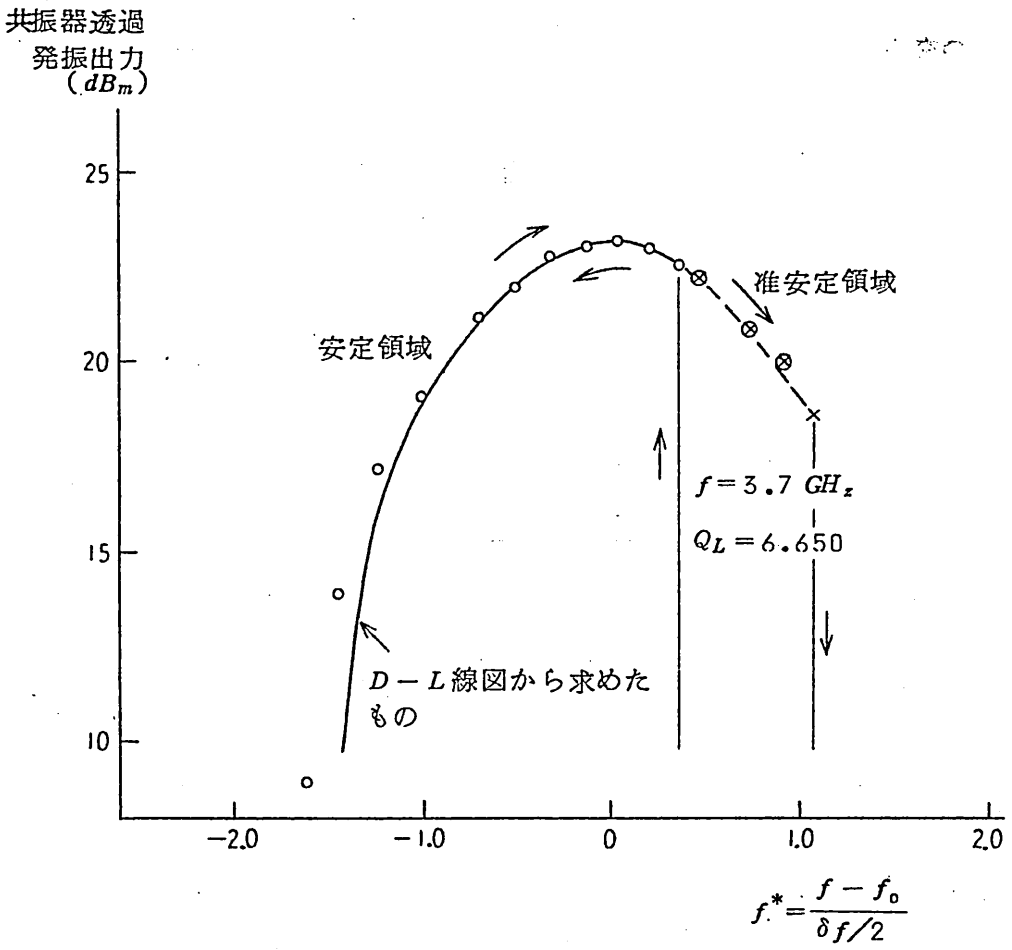
以上の過程の中で，発振特性にヒステリシスが存在することが示された．負荷線の移動方向によって発振領域に差がある．負荷線の移動方向にかかわらず発振する領域を“安定領域”，特定な条件のもとでのみ発振する領域を“准安定領域”と呼ぶことにする．$D-L$線図の上で安定領域はデバイス線と負荷線の交点が１点（２－８図(a)），准安定領域はデバイス線と負荷線の交点が２点（２－８図(b)）の場合に対応する．つまり発振特性がヒステリシスを示すためには，デバイス線と負荷線の交点が２点あるいはそれ以上あることが必要である．

3．実　験　結　果

ここでは，進行波管の入出力特性及び $AM-PM$ 変換特性を与えて2節の方法で求めた発振特性と，実測の発振特性の比較を行なった．3－1図の発振回路において共振器透過出力が最大となるように減衰器及び移相器を調整した後，移相器のみを変化させて発振出力及び発振周波数を測定した．3－2図には $D-L$ 線図から求めた発振特性と実測の発振特性を同時に描いてある．両者はかなり良く一致している．同じ発振回路で，超電導化した空洞共振器（$Q_L = 3.6 \times 10^5$）を用いた場合についても実験を行なっており，発振特性の実測値はほとんど3－2図と同様になるが，准安定領域が常電導共振器の場合に比べて広くなっている．前節の理論は，共振器の Q は直接関係



3－1図　実　験　回　路

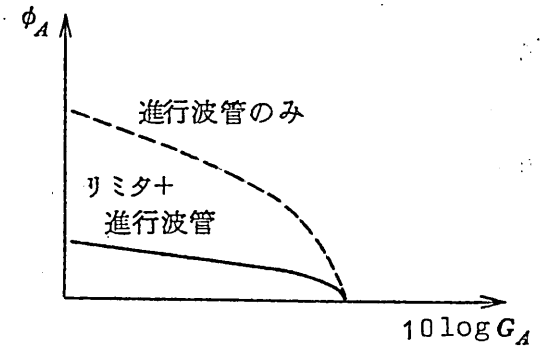


3－2図　進行波管発振器の発振特性

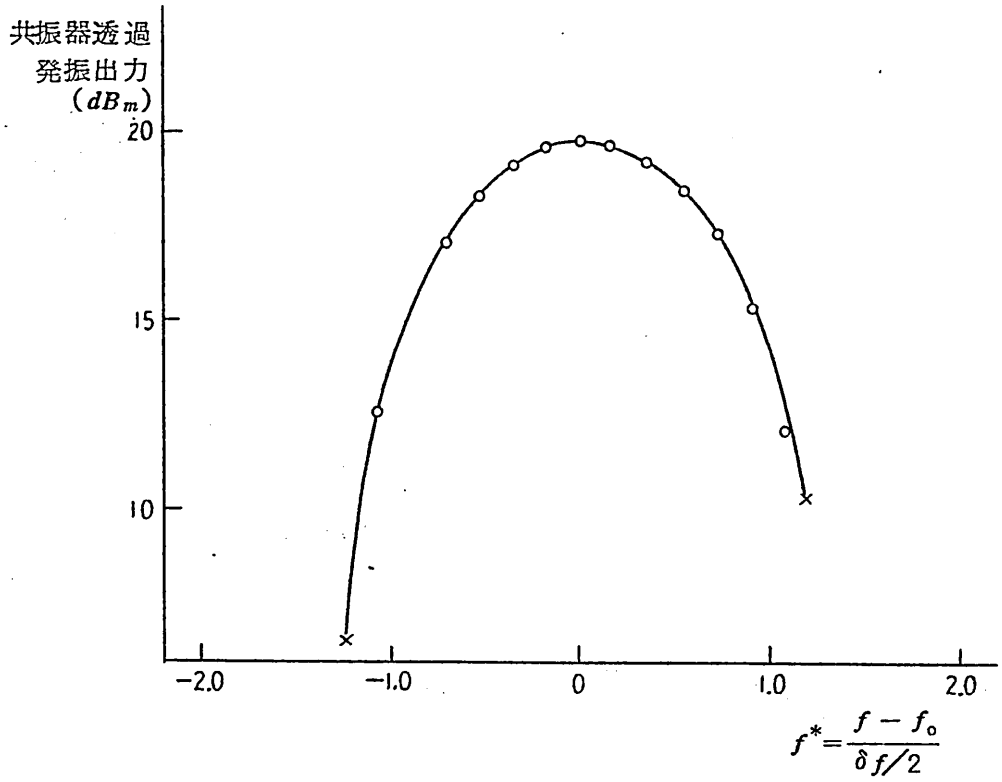
しない形で表現されているので，前節の理論だけでは空洞共振器に常電導のものを用いた場合と，超電導のものを用いた場合でヒステリシス特性に差があることを説明できない．いまのところ発振立上り条件に関して第1近似として（2－11）を必要十分条件として取扱ったことに問題があると考えている．

発振特性にヒステリシス現象が起きるのを防ぐには，デバイス線と負荷線

の交点が2点以上にならないようにすることが必要条件となる．そこで発振ループ中にリミタを付加して，進行波管の特性を3－3図のように見かけ上変えて発振特性を測定したところ，ヒステリシス現象は消失して発振領域も共振器の中心周波数に対して対称に近くなった（3－4図）．



3－3図
リミタの付加による
デバイス線の変化



3－4図　リミタを追加した時の発振特性

4. まとめ

進行波管の入出力特性及び $AM-PM$ 変換特性を与えられたとき進行波管発振器の発振特性を，作図で求めることができた．発振特性のヒステリシス現象，発振領域の共振器の中心周波数に対する非対称性などは，進行波管の $AM-PM$ 変換特性に左右されることが導かれ，実験的にも確かめられた．空洞共振器に超電導のものを用いた場合に，発振特性のヒステリシス現象がやや顕著にあらわれるが，これを説明するためには発振の立上り条件についての詳しい検討が今後の問題として残っている．

謝辞

実験に御協力して下さった笠木訓典氏（現在日立茂原工場）および鷹岡昭夫氏（大阪大学工学部）に感謝する．

文　　献

(1) 廣岡，裏；超電導円筒TM_{010}空洞共振による電子の加速，電子装置研究会．昭４６．６

(2) 熊谷他；電気回路(2)，第１７章．オーム社（昭４４）

(3) Hamilton他：klystrons and Microwave triodes Chapt 14，MIT. Series.（１９４６）

(4) Slater：Microwave Electronics. Chapt. 9 （１９５０）Van Nostrand.

(5) Kurokawa：Sume basic characteristics of broad band negative resistance oscillator circuits BSTS，48　１９３７（１９６９）.

輻射科学研究会資料

Schrödinger型の
単一化された電磁界方程式の近似解法

井　上　敦　雄
牧　本　利　夫
（大阪大学・基礎工学部）

昭和46年7月2日

(於 住友電気工業株式会社)

§1. まえがき

普通，Maxwell方程式は6つの方程式（初期条件を加えると，8つの方程式）より成立っている。三次元Euclid空間においては，これを簡単に二つの方程式（初期条件を加えると4つの方程式）で記述されている。さらに，一つの方程式（単一化された電磁界方程式）で記述することが考えられる。

一方，量子力学系においては正確にとける場合が少なく，ほとんど近似的にしか解けないので，近似解法が非常に進歩した。又，半導体やレーザ等の発展にともない，物性工学や量子電子工学等が大いに進歩し，工学にも量子力学が使われるようになってきた。

そこで，古典電磁学におけるMaxwell方程式を単一化し，その近似解法を量子力学系と似た方法で議論することは無駄なことではないように思われる。

A.D. Bresler，等[1]によって，伝導電流密度i_eがなく，しかも単一周波数ωの電磁波が伝搬方向に対して一様な媒質中を伝搬する場合，即ち，$i_e=0$，$\exp i(\omega t-kz)$の場合の，6元電磁界ベクトルを用いた単一化された電磁界方程式とその直交関係が示され，さらに，G.J. Gabrial，等[2]によってその方程式の近似解法（摂動法，変分法）が示された。Moses，等[3]によって，4元ベクトルを用いて，真空中での伝導電流密度i_eのある場合の，Diracの波動方程式と同型な単一化された電磁界方程式が示されている。

我々は前に，伝導電流密度 $\dot{e}_e = 0$ の場合の6元電磁界ベクトルを用いた単一化された電磁界方程式を示し，その方程式の摂動解法を数学的には量子力学系と同様な方法で議論するために，Hilbert空間を導入し，その摂動法について若干述べた。[4] 又，Ohmの法則が成立つ場合，即ち伝導電流密度 $\dot{e}_e = \sigma E$ が成立する場合の6元電磁界ベクトルを用いた，Schrödinger型とDirac型の単一化された電磁界方程式と，さらに一般的なSchrödinger型とDirac型の基礎方程式を示し，それらの数学的導具として，内積空間（前Hilbert空間）を導入し，摂動解法について若干述べた。[5]

ここでは，簡単にSchrödinger型の基礎方程式とその型の単一化された電磁界方程式を示し，それらの近似解法を量子力学系と似た方法で論じるための数学的導具として，Hilbert空間[6]を導入し，これらの方程式のベクトルの内積と直交関係を簡単に示し，それらを近似解法に用いる。近似解法においては，まずSchrödinger型の基礎方程式と単一化された電磁界方程式との摂動解法系を図示する。次に，Schrödinger型の基礎方程式の近似解法を述べておけば，単一化された電磁界方程式やその他のSchrödinger型の方程式にも適用できる。Schrödinger型の基礎方程式の近似解法として，x_i軸方向に一様な場合においては，摂動解法I，II及びRitz methodについて，x_i軸方向に変化している場合においては，摂動解法IIIについて述べる。それらの単一化さ

れた電磁界方程式への応用例として，誘電体装荷短形導波管，及び誘電体装荷直六面体共振器について述べる。

§2. Schrödinger 型の基礎方程式

$$\hat{L}\,\overline{\psi}_\alpha(x_i) = j\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{W}\,\overline{\psi}_\alpha(x_i) \qquad (2-1)$$

$$\overline{\psi}_\alpha(x_i) = C(x_i)\,\Psi_\alpha$$

$$\hat{L} \to \hat{L}(\check{x}_i) \quad \hat{L}(\check{x}_i)\,C(x_i) = C(x_i)\,\hat{L}(\check{x}_i)$$

$$\hat{W} \to \hat{W}(\check{x}_i) \quad \hat{W}(\check{x}_i)\,C(x_i) = C(x_i)\,\hat{W}(\check{x}_i) \qquad (2-2)$$

$$\hat{L}(\check{x}_i)\,\Psi_\alpha = k_{xi\alpha}\,\hat{W}(\check{x}_i)\,\Psi_\alpha \qquad (2-3)$$

$$\overline{\psi}_\alpha(x_i) = \Psi_\alpha \exp\{-jk_{xi\alpha}(x_i - x_{i0})\} \qquad (2-4)$$

Fig.1. Schrödinger 型の基礎方程式系.

物理系の時空間的変化をあらわす方程式として，変数 x_i についての系の変化を記述するところの Schrödinger 型の基礎方程式 (2-1) 式が成立するものと仮定する。

(2-1) 式において，状態ベクトル $\overline{\psi}_\alpha(x_i)$ が，変数 x_i による関数 $C(x_i)$ と，x_i に無関係なベクトル Ψ_α との積からなっているものとする。即ち，

$$\overline{\psi}_\alpha(x_i) = C(x_i)\,\Psi_\alpha \qquad (2-2)$$

とし，さらに，作用素 $\hat{L}$，$\hat{W}$ が，x_i についての演算を含まない作用素 $\hat{L}(\check{x}_i)$，$\hat{W}(\check{x}_i)$ とする。即ち，

$$\hat{L}(\check{x}_i)\,C(x_i) = C(x_i)\,\hat{L}(\check{x}_i)$$
$$\hat{W}(\check{x}_i)\,C(x_i) = C(x_i)\,\hat{W}(\check{x}_i) \qquad (2-2)$$

とすると，(2-1)式より，(2-3)式，(2-4)式を得る。(2-3)は，x_i軸方向に一様な系を表すSchrödinger型の基礎方程式である。又，固有値を$k_{xi\alpha}$，固有ベクトルを$\mathfrak{U}_\alpha$とする固有方程式でもある。

§3. Schrödinger型の単一化された電磁界方程式

$$\hat{L}\,\mathfrak{U}_\alpha(t) = j\frac{\partial}{\partial t}\hat{W}\,\mathfrak{U}_\alpha(t) \quad \cdots\cdots (3-1)$$

$\hat{W}\to\hat{W}(\check{t})$，$\hat{L}\to\hat{L}(\check{t})$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{U}_\alpha(t) = C(t)\,\mathfrak{U}_\alpha \\ &\frac{\partial}{\partial t}\hat{W}(\check{t}) = \hat{W}(\check{t})\frac{\partial}{\partial t} \\ &\hat{L}(\check{t})\,C(t) = C(t)\,\hat{L}(\check{t}) \end{aligned}\right\} \quad (3-2)$$

$$\hat{L}(\check{t})\,\mathfrak{U}_\alpha = -\omega_\alpha\,\hat{W}(t)\,\mathfrak{U}_\alpha \quad \cdots (3-3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \hat{L}(\check{t},\partial\check{z})\,\mathfrak{U}_\alpha(z) = j\frac{\partial}{\partial z}\hat{\Gamma}_{uz}\,\mathfrak{U}_\alpha(z) \quad (3-5)$$

$$\mathfrak{U}_\alpha(t) = \mathfrak{U}_\alpha \exp\{j\omega_\alpha(t-t_0)\} \quad \cdots (3-4)$$

$\hat{L}(\check{t},\partial\check{z})\to\hat{L}(\check{t},\partial\check{z},\check{z})$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{U}_\alpha(z) = C(z)\,\mathfrak{P}_\alpha \\ &\hat{L}(\check{t},\partial\check{z},\check{z})\,C(z) = C(z)\,\hat{L}(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) \end{aligned}\right\} \quad (3-6)$$

$$\hat{L}(\check{t},\partial\check{z},\check{z})\,\mathfrak{P}_\alpha = k_{z\alpha}\hat{\Gamma}_{uz}\,\mathfrak{P}_\alpha \quad \cdots (3-7)$$

$$\mathfrak{U}_\alpha(z) = \mathfrak{P}_\alpha \exp\{-jk_{z\alpha}(z-z_0)\} \quad \cdots (3-8)$$

Fig.2. Schrödinger型の単一化された電磁界方程式系

Maxwellの電磁界方程式を，時間的変化を記述するところのSchrödinger型の単一化された電磁界方程式へ変形すると，(3-1)となる。

但し，

$$\hat{L} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \nabla\times\mathbb{I} \\ \nabla\times\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} [\sigma(\mathbf{r},t)] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{W} \triangleq \begin{bmatrix} [\varepsilon(\mathbf{r},t)] & 0 \\ 0 & [\mu(\mathbf{r},t)] \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}9)$$

$$\mathfrak{F}_\alpha(t) \triangleq \begin{bmatrix} E_\alpha(\mathbf{r},t) \\ jH_\alpha(\mathbf{r},t) \end{bmatrix}$$

[ ] はMatrixを表わし, $(\mathbf{r},t)=(x,y,z,t)$

$\nabla = u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}$, $\mathbb{I}$ is unit dyadic

(2-2)式と同様な条件(3-2)式を与えると, (3-1)式は(3-3)式, (3-4)式となる。

但し, $$\hat{L}(t) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \nabla\times\mathbb{I} \\ \nabla\times\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} [\sigma(\mathbf{r})] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{W}(t) \triangleq \begin{bmatrix} [\varepsilon(\mathbf{r})] & 0 \\ 0 & [\mu(\mathbf{r})] \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}10)$$

$$\mathfrak{F}_\alpha \triangleq \begin{bmatrix} E_\alpha(\mathbf{r}) \\ jH_\alpha(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$$

(3-3)式は, 時間的に定常な系を記述するところのSchrödinger型の単一化された電磁界方程式である。固有値ω_α, 固有ベクトル$\mathfrak{F}_\alpha$を決定する固有方程式でもある。

(3-3)式を, z軸方向の変化を表わすところのSchrödinger型の単一化された電磁界方程式へ変形すると, (3-5)式となる。

但し,

$$\hat{L}(\check{\varepsilon}, \partial\check{z}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \nabla_{x,y}\times\mathbb{I} \\ \nabla_{x,y}\times\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} [\sigma(\omega)] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega_\alpha \begin{bmatrix} [\varepsilon(\omega)] & 0 \\ 0 & [\mu(\omega)] \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Gamma}_{uz} \triangleq j\begin{bmatrix} 0 & u_z\times\mathbb{I} \\ u_z\times\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \qquad (3-11)$$

(3-5)式に，条件(3-6)式を与えると，(3-7)式を得る。但し，

$$\hat{L}(\check{\varepsilon}, \partial\check{z}, z) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \nabla_{x,y}\times\mathbb{I} \\ \nabla_{x,y}\times\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} [\sigma(x,y)] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega_\alpha \begin{bmatrix} [\varepsilon(x,y)] & 0 \\ 0 & [\mu(x,y)] \end{bmatrix}$$

$$\phi_\alpha \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{E}_\alpha(x,y) \\ j\mathbb{H}_\alpha(x,y) \end{bmatrix} \qquad (3-12)$$

(3-7)式は，z軸方向に一様な状態を示し，固有値$k_{z\alpha}$，固有ベクトルϕ_αを決定するところの単一化された電磁界方程式である。

§4. 内積と直交関係

ここでは，近似解法を論じるための数学的道具として，Hilbert空間を導入し，状態ベクトル，及び6元電磁界ベクトルの直交関係を示す。

Hilbert空間とは，内積の定義されている完備な複素数体上のベクトル空間であるから，状態ベクトル，及び6元電磁界ベクトルは，内積，及びベクトル空間の性質を満足しなければならない。さらに，その内積から定義されたノルムに関して完備でなければならない。そこで，状態ベクトルはそれらの性質を満足するものとする。電磁界ベクトルにおいては，電界ベクトル$\mathbb{E}$

，及び磁界ベクトル jH は，普通には3次元 Euclid 空間として取扱われているから，ベクトル空間としての性質は満足する，又，次の E，及び jH の内積

$$\left.\begin{aligned}(E_\alpha, E_\beta) &\triangleq \int_{D[E]} E_\alpha^+(\mathbf{r})\cdot E_\beta(\mathbf{r})\, d^3r < \infty \\ (jH_\alpha, jH_\beta) &\triangleq \int_{D[jH]} -jH_\alpha^+(\mathbf{r})\cdot jH_\beta(\mathbf{r})\, d^3r < \infty\end{aligned}\right\} \quad (4-1)$$

但し，E，jH は可測函数

は内積の性質を満足する。そこで，6元電磁界ベクトル $\mathcal{F}$ の加法，スカラー倍，内積を

$$\left.\begin{aligned}&\text{加法；}\ \mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta = \begin{bmatrix}E_\alpha \\ jH_\alpha\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}E_\beta \\ jH_\beta\end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix}E_\alpha + E_\beta \\ jH_\alpha + jH_\beta\end{bmatrix} \\ &\text{スカラー倍；}\ \alpha\mathcal{F} = \alpha\begin{bmatrix}E \\ jH\end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix}\alpha E \\ \alpha jH\end{bmatrix} \\ &\text{内積；}\ (\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta) = \left(\begin{bmatrix}E_\alpha \\ jH_\alpha\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}E_\beta \\ jH_\beta\end{bmatrix}\right) \triangleq (E_\alpha, E_\beta) + (jH_\alpha, jH_\beta)\end{aligned}\right\} \quad (4-2)$$

と定義すると，$\mathcal{F}$ は Hilbert 空間のベクトルとなる。6元電磁界ベクトル $\mathcal{F}(x, y)$ についても，同様に行えば，$\mathcal{F}$ も Hilbert 空間のベクトルとなる。

次に，(2-3)式の状態ベクトル $\mathcal{F}$ の直交関係を得るために，共役関係を導入する。(2-3)式の作用素 $\hat{L}(\check{x}_i)$，$\hat{W}(\check{x}_i)$ の共役作用素を $\hat{L}^+(\check{x}_i)$，$\hat{W}^+(\check{x}_i)$ とすると，共役関係は，

$$\left.\begin{aligned}(\hat{L}^+(\check{x}_i)\mathcal{F}_\beta, \mathcal{F}_\alpha) &= (\mathcal{F}_\beta, \hat{L}(\check{x}_i)\mathcal{F}_\alpha) \\ (\hat{W}^+(\check{x}_i)\mathcal{F}_\beta, \mathcal{F}_\alpha) &= (\mathcal{F}_\beta, \hat{W}(\check{x}_i)\mathcal{F}_\alpha)\end{aligned}\right\} \quad (4-3)$$

である。又，(2-3)式，(4-3)式より，

$$\hat{L}^{+}(\check{x}_i)\,\Psi = k^{*}_{x_i}\,\hat{W}(\check{x}_i)\,\Psi \qquad (4\text{-}4)$$

でなければならない。(2-3)式，(4-3)式，(4-4)式より，

$$(k_{x_i\alpha} - k_{x_i\beta})(\Psi_\beta, \hat{W}(\check{x}_i)\,\Psi_\alpha) = 0 \qquad (4\text{-}5)$$

を得る。$\Psi \neq 0$ とすると，(4-5)式は，

$$(\Psi_\beta, \hat{W}(\check{x}_i)\,\Psi_\alpha) = \delta_{\beta,\alpha} \qquad (4\text{-}6)$$

となる。但し，Ψ は(4-6)式の内積を規格化するように選ばれている。(3-3)式，及び(3-7)式においても，上と同様にして直交関係を求めると，

$$\left.\begin{aligned}(\Psi_\beta, \hat{W}(\check{t})\,\Psi_\alpha) &= \delta_{\beta,\alpha}\\ (\Phi_\beta, \hat{\Gamma}_{\mu z}\,\Phi_\alpha) &= \delta_{\beta,\alpha}\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}7)$$

となる。

§5. 近似解法

この節では，始めに，Schrödinger型の基礎方程式と単一化された電磁界方程式との摂動解法系を示し，次に，x_i 軸方向に一様な系を表わすところのSchrödinger型の基礎方程式の近似解法としての摂動解法Ⅰ，Ⅱ，及びRitz methodについて述べ，最後に，x_i 軸方向に変化している系を表わすところのSchrödinger型の基礎方程式についての摂動解法Ⅲを述べる。

5－1．Schrödinger型の基礎方程式の摂動解法系

$$\hat{L}_0(x_i)\,\Psi_{\alpha 0} = k_{x_i\alpha 0}\,\hat{W}_0(x_i)\,\Psi_{\alpha 0} \qquad \cdots\cdots (5\text{-}1)$$

$$\hat{L}_0(x_i) \longrightarrow \hat{L}(x_i) = \hat{L}_0(x_i) + \hat{L}_P(x_i)$$

$$\hat{W}_0(x_i) \longrightarrow \hat{W}(x_i) = \hat{W}_0(x_i) + \hat{W}_P(x_i)$$

$$\Psi_{\alpha 0} \longrightarrow \Psi_\alpha \ ?$$

$$k_{x_i\alpha 0} \longrightarrow k_{x_i\alpha} \ ?$$

$$\hat{L}(x_i)\,\Psi_\alpha = k_{x_i\alpha}\,\hat{W}(x_i)\,\Psi_\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots (5\text{-}2)$$

$$\hat{L}(x_i) \longrightarrow \hat{L} = \hat{L}(x_i) + \hat{L}_P$$

$$\hat{W}(x_i) \longrightarrow \hat{W} = \hat{W}(x_i) + \hat{W}_P$$

$$\Psi_\alpha \longrightarrow \Psi_\alpha(x_i) \ ?$$

$$\hat{L}\,\Psi_\alpha(x_i) = j\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{W}\,\Psi_\alpha(x_i) \qquad \cdots\cdots\cdots (5\text{-}3)$$

Fig. 3. Schrödinger型の基礎方程式の摂動解法系

(5－1)式が知られているものとする。即ち，$\hat{L}_0(x_i)$, $\hat{W}_0(x_i)$ を無摂動系の作用素とし，$\Psi_{\alpha 0}$, $k_{x_i\alpha 0}$ がわかっているものとする。今，無摂動系の作用素 $\hat{L}_0(x_i)$, $\hat{W}_0(x_i)$ が摂動を受けて，$\hat{L}(x_i)$, $\hat{W}(x_i)$ に変化したとする。即ち，

$$\left.\begin{aligned} \hat{L}_0(x_i) &\longrightarrow \hat{L}(x_i) = \hat{L}_0(x_i) + \hat{L}_P(x_i) \\ \hat{W}_0(x_i) &\longrightarrow \hat{W}_0(x_i) = \hat{W}_0(x_i) + \hat{W}_P(x_i) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}4)$$

但し，$\hat{L}_P(x_i)$, $\hat{W}_P(x_i)$ は x_i に無関係な摂動系の作用素である。

とすると，(5－1)式より(5－2)式を得る。(5－2)式は(2－3)式と同じで，固有値 $k_{x_i\alpha}$，固有ベクトル Ψ_α を決定する固有方程式である。

次に，(5-2)式が知られているものとする。即ち，$\hat{L}(\check{x}_i)$，$\hat{W}(\check{x}_i)$を無摂動系の作用素とし，Ψ_α，$k_{z_i\alpha}$がわかっているものとする。今，無摂動系の作用素$\hat{L}(\check{x}_i)$，$\hat{W}(\check{x}_i)$が摂動を受けて$\hat{L}$，$\hat{W}$に変わったとする。即ち，

$$\left.\begin{aligned}\hat{L}(\check{x}_i) &\longrightarrow \hat{L} = \hat{L}(\check{x}_i) + \hat{L}_P \\ \hat{W}(\check{x}_i) &\longrightarrow \hat{W} = \hat{W}(\check{x}_i) + \hat{W}_P\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}5)$$

但し，$\hat{L}_P$，$\hat{W}_P$はx_iによって変化するところの摂動系の作用素である。

とすると，(5-2)式より(5-3)式を得る。(5-3)式は(2-1)式と同じで，変数x_iについての系の変化を記述するところのSchrödinger型の基礎方程式である。

5-2. 単一化された電磁界方程式の摂動解法系

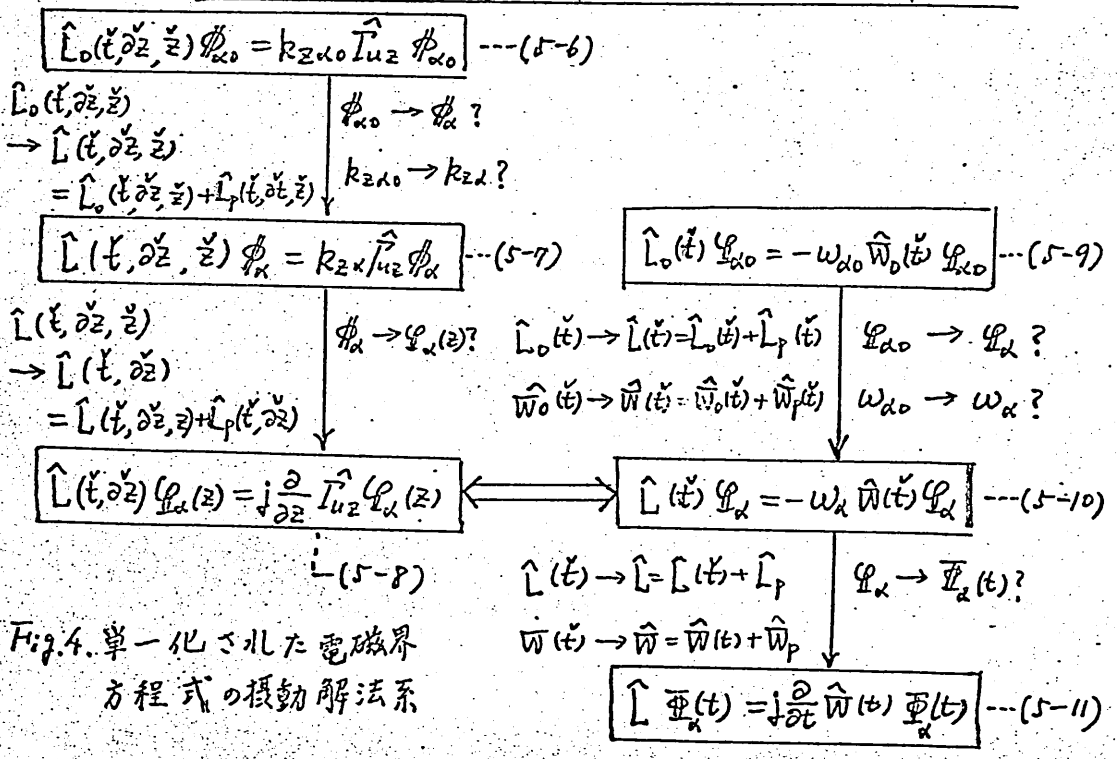


Fig.4. 単一化された電磁界方程式の摂動解法系

5-1.節における Schrödinger型の基礎方程式の摂動解法と同様に議論することができる。ここで，$\hat{L}_p(\check{\xi},\partial\check{\xi},\check{z})$, $\hat{L}_p(\check{\xi},\partial\check{z})$, $\hat{L}_p(\check{\omega})$, $\hat{W}_p(\check{\xi})$, $\hat{L}_p$, $\hat{W}_p$ は摂動系の作用素である。(5-7)式は(3-7)式と，(5-8)式は(3-5)式と，(5-10)式は(3-3)式と，(5-11)式は(3-1)と同じである。

5-3. 摂動解法 I. ((5-1) ⟶ (5-2))

この節では，Fig3.に示したように，(5-1)式がわかっているものとして，(5-2)式の固有ベクトル $\mathcal{G}_\alpha$, 及び固有値 $k_{xi\alpha}$ を求める場合を考える。

(5-2)式の固有ベクトル $\mathcal{G}_\alpha$, 及び固有値 $k_{xi\alpha}$ がべき級数に展開できるものとし，dummy parameter λ を用いると，

$$\left.\begin{aligned} \hat{L}(\check{x}_i) &= \hat{L}_0(\check{x}_i) + \lambda\,\hat{L}_p(\check{x}_i) \\ \hat{W}(\check{x}_i) &= \hat{W}_0(\check{x}_i) + \lambda\,\hat{W}_p(\check{x}_i) \\ \mathcal{G}_\alpha &= \mathcal{G}_{\alpha 0} + \sum_n \lambda^n \mathcal{G}_{\alpha n} \\ k_{xi\alpha} &= k_{xi\alpha 0} + \sum_n \lambda^n k_{xi\alpha n} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}12)$$

とおける。今，

$$\mathcal{G}_{\alpha 1} = \sum_{m} l_{m,1}\,\mathcal{G}_{m0} \quad (m \neq \alpha) \qquad (5\text{-}13)$$

とおくと，第1近似での固有値 $k_{xi\alpha}$, 及び固有ベクトル $\mathcal{G}_\alpha$ は，

$$\boxed{\begin{aligned} k_{xi\alpha} &\simeq k_{xi\alpha 0}\left\{1 - W_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)\right\} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i) \\ \mathcal{G}_\alpha &\simeq \mathcal{G}_{\alpha 0} + \sum_{m\neq\alpha} \frac{L_{pm,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha 0} W_{pm,\alpha}(\check{x}_i)}{k_{xi\alpha 0} - k_{xim 0}}\,\mathcal{G}_{m0} \end{aligned}} \qquad (5\text{-}14)$$

但し、
$$\left.\begin{aligned}(\varphi_{m0},\ \hat{W}_0(\check{x}_i)\,\varphi_{\alpha 0}) &= \delta_{m,\alpha}\\ (\varphi_{m0},\ \hat{L}_p(\check{x}_i)\,\varphi_{\alpha 0}) &= L_{pm,\alpha}(\check{x}_i)\\ (\varphi_{m0},\ \hat{W}_p(\check{x}_i)\,\varphi_{\alpha 0}) &= W_{pm,\alpha}(\check{x}_i)\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}15)$$

次に、
$$\varphi_{\alpha 2} = \sum_m a_{m2}\,\varphi_{m0} \qquad (5\text{-}16)$$

とおくと、
$$k_{xi\alpha 2} = \sum_{m\neq\alpha} a_{m1} L_{p\alpha,m}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha 0}\sum_{m\neq\alpha} W_{p\alpha,m}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha 1}\sum_{m\neq\alpha} a_{m2} W_{p\alpha,m}(\check{x}_i) \qquad (5\text{-}17)$$

となる。普通には、
$$k_{xi\alpha 0}\sum_{m\neq\alpha} a_{m1} W_{p\alpha,m}(\check{x}_i) > k_{xi\alpha 1}\sum_{m\neq\alpha} a_{m2} W_{p\alpha,m}(\check{x}_i)$$

とするから、第2近似での固有値 $k_{xi\alpha}$ は、
$$k_{xi\alpha} \simeq k_{xi\alpha 0}\left\{1 + W_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)\right\} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i) + \sum_{m\neq\alpha}\frac{\left\{L_{pm,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha 0} W_{pm,\alpha}(\check{x}_i)\right\}\left\{L_{p\alpha,m}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha 0} W_{p\alpha,m}(\check{x}_i)\right\}}{k_{xi\alpha 0} - k_{xim0}} \qquad (5\text{-}18)$$

となる。

5-4. 摂動解法 II. ((5-1) ⟶ (5-2))

(5-2)式と φ_{m0} ($m=\alpha,\beta,\cdots\cdots$) との内積をとると、
$$(\varphi_{m0},\ \{\hat{L}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\hat{W}(\check{x}_i)\}\,\varphi_\alpha) = 0 \qquad (5\text{-}19)$$

となる。今、
$$\varphi_\alpha = \sum_n a_n \varphi_{n0} \qquad (5\text{-}20)$$

とおくと、(5-19)式は、

$$\sum_n \left\{ L_{m,n}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha} \overline{W}_{m,n}(\check{x}_i) \right\} a_n = 0 \quad (m=\alpha,\beta,\gamma,\cdots)$$
$$\text{但し}, \quad L_{m,n}(\check{x}_i) \doteqdot (\mathcal{G}_{mo}, \hat{L}(\check{x}_i)\mathcal{G}_{no}), \quad \overline{W}_{m,n}(\check{x}_i) \doteqdot (\mathcal{G}_{mo}, \hat{W}(\check{x}_i)\mathcal{G}_{no}) \tag{5-21}$$

となる。(5-21)式の無限連立一次方程式が $a_n=0$ 以外の解をもつためには,

$$\det. \left\{ L_{m,n}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha} \overline{W}_{m,n}(\check{x}_i) \right\} = 0 \tag{5-22}$$

でなければならない。(5-20)式の展開ができるものとすると, (5-22)式の根は, 作用素 $\hat{L}(\check{x}_i)$ の正確な固有値を与える。

今, (5-22)式の行列式の最初の行と列以外の全ての非対角要素を無視すれば, (5-22)式は,

$$\begin{vmatrix} L_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i) & L_{\alpha,\beta}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,\beta}(\check{x}_i) & L_{\alpha,\gamma}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,\gamma}(\check{x}_i) & \cdots \\ L_{\beta,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\beta,\alpha}(\check{x}_i) & L_{\beta,\beta}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\beta,\beta}(\check{x}_i) & 0 & \cdots \\ L_{\gamma,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\gamma,\alpha}(\check{x}_i) & 0 & L_{\gamma,\gamma}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\gamma,\gamma}(\check{x}_i) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{5-23}$$

となる。この行列式の第2行に

$$\frac{L_{\alpha,\beta}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,\beta}(\check{x}_i)}{L_{\beta,\beta}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\beta,\beta}(\check{x}_i)}$$

をかけて, 第1行から引き, 次に, この行列式の第3行に

$$\frac{L_{\alpha,\gamma}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,\gamma}(\check{x}_i)}{L_{\gamma,\gamma}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\gamma,\gamma}(\check{x}_i)}$$

をかけて, 第1行から引く。さらに, この操作を続けていくと,

$$\begin{vmatrix} D_{\alpha,\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ L_{\beta,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\beta,\alpha}(\check{x}_i) & L_{\beta,\beta}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\beta,\beta}(\check{x}_i) & 0 & \cdots \\ L_{\gamma,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\gamma,\alpha}(\check{x}_i) & 0 & L_{\gamma,\gamma}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\gamma,\gamma}(\check{x}_i) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (5-24)$$

但し,

$$D_{\alpha,\alpha} = L_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i) - \sum_{m \neq \alpha} \frac{\{L_{\alpha,m}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,m}(\check{x}_i)\}\{L_{m,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{m,\alpha}(\check{x}_i)\}}{L_{m,m}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{m,m}(\check{x}_i)}$$

故に,

$$D_{\alpha,\alpha}\{L_{\beta,\beta}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\beta,\beta}(\check{x}_i)\}\{L_{\gamma,\gamma}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\gamma,\gamma}(\check{x}_i)\} \cdots = 0 \qquad (5-25)$$

固有値 $k_{xi\alpha}$ が縮退していなくて, $k_{xi\alpha}$ が $k_{xi\alpha 0}$ に近とすると,

$$D_{\alpha,\alpha} = L_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i) - \sum_{m \neq \alpha} \frac{\{L_{\alpha,m}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,m}(\check{x}_i)\}\{L_{m,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{m,\alpha}(\check{x}_i)\}}{L_{m,m}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha}\overline{W}_{m,m}(\check{x}_i)} = 0 \qquad (5-26)$$

とする。(5-26)式における固有値 $k_{xi\alpha}$ を求めるのに, 次の三つの場合を考える。

[i]. (5-26)式において, $m = \beta$ のみを考えると,

$$a k_{xi\alpha}^2 + b k_{xi\alpha} + c = 0 \qquad (5-27)$$

但し,

$$\left.\begin{aligned} a &= \overline{W}_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)\overline{W}_{\beta,\beta}(\check{x}_i) - \overline{W}_{\beta,\alpha}(\check{x}_i)\overline{W}_{\alpha,\beta}(\check{x}_i) \\ b &= \{L_{\beta,\alpha}(\check{x}_i)\overline{W}_{\alpha,\beta}(\check{x}_i) + \overline{W}_{\beta,\alpha}(\check{x}_i)L_{\alpha,\beta}(\check{x}_i)\} \\ &\quad - \{L_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)\overline{W}_{\beta,\beta}(\check{x}_i) + \overline{W}_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)L_{\beta,\beta}(\check{x}_i)\} \\ c &= L_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)L_{\beta,\beta}(\check{x}_i) - L_{\beta,\alpha}(\check{x}_i)L_{\alpha,\beta}(\check{x}_i) \end{aligned}\right\} \qquad (5-28)$$

故に,

$$\boxed{k_{xi\alpha} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \cdots\cdots\cdots (5-29)$$

[ii]. (5-26) 式において,

$$\left|\left\{L_{\alpha,m}(x_i^v)-k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,m}(x_i^v)\right\}\left\{L_{m,\alpha}(x_i^v)-k_{xi\alpha}\overline{W}_{m,\alpha}(x_i^v)\right\}\right|$$
$$\ll \left|L_{m,m}(x_i^v)-k_{xi\alpha}\overline{W}_{m,m}(x_i^v)\right|$$

及び, $\overline{W}_{\alpha,\alpha}(x_i^v) \neq 0$

と仮定すると,

$$k_{xi\alpha} \simeq \frac{L_{\alpha,\alpha}(x_i^v)}{\overline{W}_{\alpha,\alpha}(x_i^v)} \qquad (5-30)$$

となる。(5-5) 式, (5-15) 式より,

$$\left.\begin{aligned} L_{\alpha,m}(x_i^v) &= k_{xim0}\delta_{\alpha,m} + L_{p\alpha,m}(x_i^v) \\ \overline{W}_{\alpha,m}(x_i^v) &= \delta_{\alpha,m} + \overline{W}_{p\alpha,m}(x_i^v) \end{aligned}\right\} \qquad (5-31)$$

であるから, (5-30) 式は

$$\boxed{k_{xi\alpha} \simeq \frac{L_{\alpha,\alpha}(x_i^v)}{\overline{W}_{\alpha,\alpha}(x_i^v)} = \frac{k_{xi\alpha0}+L_{p\alpha,\alpha}(x_i^v)}{1+\overline{W}_{p\alpha,\alpha}(x_i^v)}} \qquad (5-32)$$

となる。$|\overline{W}_{p\alpha,\alpha}(x_i^v)| \ll 1$ とすると, (5-32) 式は,

$$\begin{aligned} k_{xi\alpha} &\simeq k_{xi\alpha0}\left\{1-\overline{W}_{p\alpha,\alpha}(x_i)\right\} + L_{p\alpha,\alpha}(x_i^v) - L_{p\alpha,\alpha}(x_i^v)\overline{W}_{p\alpha,\alpha}(x_i^v) \\ &\simeq k_{xi\alpha0}\left\{1-\overline{W}_{p\alpha,\alpha}(x_i^v)\right\} + L_{p\alpha,\alpha}(x_i^v) \end{aligned} \qquad (5-33)$$

となる。(5-33) 式は, (5-14) 式と一致している。

[iii]. (5-26) 式, (5-31) 式より,

$$\begin{aligned} k_{xi\alpha} &= \frac{L_{\alpha,\alpha}(x_i^v)}{\overline{W}_{\alpha,\alpha}(x_i^v)} - \sum_{m\neq\alpha} \frac{\left\{L_{\alpha,m}(x_i^v)-k_{xi\alpha}\overline{W}_{\alpha,m}(x_i^v)\right\}\left\{L_{m,\alpha}(x_i^v)-k_{xi\alpha}\overline{W}_{m,\alpha}(x_i^v)\right\}}{\overline{W}_{\alpha,\alpha}(x_i^v)\left\{L_{m,m}(x_i^v)-k_{xi\alpha}\overline{W}_{m,m}(x_i^v)\right\}} \\ &= \frac{k_{xi\alpha0}+L_{p\alpha,\alpha}(x_i^v)}{1+\overline{W}_{p\alpha,\alpha}(x_i^v)} - \sum_{m\neq\alpha} \frac{\left\{L_{p\alpha,m}(x_i^v)-k_{xi\alpha}\overline{W}_{p\alpha,m}(x_i^v)\right\}\left\{L_{pm,\alpha}(x_i^v)-k_{xi\alpha}\overline{W}_{pm,\alpha}(x_i^v)\right\}}{\left\{1+\overline{W}_{p\alpha,\alpha}(x_i^v)\right\}\left\{k_{xim0}+L_{pm,m}(x_i^v)-k_{xi\alpha}(1+\overline{W}_{pm,m}(x_i^v))\right\}} \end{aligned} \qquad (5-34)$$

(5-34) 式は, 未知の値 $k_{xi\alpha}$ を右辺にも含んでいるので,

これを解くために，逐次近似法を使う。第1近似として，(5-34)式の右辺の $k_{z\alpha}$ に(5-32)式を代入すると，

$$k_{xi\alpha} \simeq \frac{L_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}{W_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)} - \sum_{m\neq\alpha} \frac{\left\{L_{\alpha,m}(\check{x}_i) - \frac{L_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}{W_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)} W_{\alpha,m}(\check{x}_i)\right\}\left\{L_{m,\alpha}(\check{x}_i) - \frac{L_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}{W_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)} W_{m,\alpha}(\check{x}_i)\right\}}{W_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)\left\{L_{m,m}(\check{x}_i) - \frac{L_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}{W_{\alpha,\alpha}(\check{x}_i)} W_{m,m}(\check{x}_i)\right\}}$$

$$= \frac{k_{xi\alpha 0} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}{1 + W_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}$$

$$- \sum_{m\neq\alpha} \frac{\left\{L_{p\alpha,m}(\check{x}_i) - \frac{k_{xi\alpha 0} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}{1 + W_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)} W_{p\alpha,m}(\check{x}_i)\right\}\left\{L_{pm,\alpha}(\check{x}_i) - \frac{k_{xi\alpha 0} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}{1 + W_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)} W_{pm,\alpha}(\check{x}_i)\right\}}{\left\{1 + W_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)\right\}\left\{k_{xim0} + L_{pm,m}(\check{x}_i) - \frac{k_{xi\alpha 0} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}{1 + W_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)}\left(1 + W_{pm,m}(\check{x}_i)\right)\right\}}$$

(5-35)

となる。(5-35)式の右辺の第1項は(5-33)式を用い，第2項以下は，$|W_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)| \ll 1$ ，$|L_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)| \ll k_{xi\alpha 0}$ とすると，

$$k_{xi\alpha} \simeq k_{xi\alpha 0}\left\{1 - W_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)\right\} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{x}_i)$$

$$- \sum_{m\neq\alpha} \frac{\left\{L_{p\alpha,m}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha 0} W_{p\alpha,m}(\check{x}_i)\right\}\left\{L_{pm,\alpha}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha 0} W_{p\alpha,m}(\check{x}_i)\right\}}{k_{xi\alpha 0} - k_{xim0}}$$

(5-36)

となる。(5-36)式は(5-18)式と一致している。

固有ベクトル $\mathcal{E}_\alpha$ を求めるには，求められた固有値 $k_{xi\alpha}$ を(5-21)式に代入して，a_n を求め，それを(5-30)式に代入

すればよい。

5-5. Ritz method ((5-2))

Ritz method では，問題にしている系の任意の状態を展開することのできる完全正規直交系を考える。そして，その系の任意の状態をそれで展開し，展開係数を任意に変化させて，考えている固有値 $k_{xi\alpha}$ の最小(最大)を求めようとするものである。

(5-2)式と $\mathfrak{U}_\beta$ との内積を考えると，

$$(\mathfrak{U}_\beta, \hat{L}(\check{x}_i)\mathfrak{U}_\alpha) = k_{xi\alpha}(\mathfrak{U}_\beta, \hat{W}(\check{x}_i)\mathfrak{U}_\alpha) \qquad (5-37)$$

となる。今，

$$\mathfrak{U}_\alpha = \sum_n a_n \mathfrak{U}_{n0} \quad , \quad \mathfrak{U}_\beta = \sum_m b_m \mathfrak{U}_{m0} \qquad (5-38)$$

とおくと，

$$\sum_m \sum_n b_m^* a_n L_{m,n}(\check{x}_i) = k_{xi\alpha} \sum_m \sum_n b_m^* a_n W_{m,n}(\check{x}_i) \qquad (5-39)$$

となる。$\sum_m \sum_n b_m^* a_n W_{m,n}(\check{x}_i) \neq 0$ ならば，

$$k_{xi\alpha} = \frac{\sum_m \sum_n b_m^* a_n L_{m,n}(\check{x}_i)}{\sum_m \sum_n b_m^* a_n W_{m,n}(\check{x}_i)} \qquad (5-40)$$

となる。(5-40)式が最小(最大)になるように係数 a_n をきめれば，その最小値(最大値)が $\hat{L}(\check{x}_i)$ の最小(最大)固有値 $k_{xi\alpha}$ の近似になり，この係数値を(5-38)式に代入すると，その $\mathfrak{U}_\alpha$ は固有値 $k_{xi\alpha}$ に属する固有ベクトルの近似になる。

そこで，b_m^* $(m=\alpha, \beta, \cdots\cdots)$ について，(5-40)式の $k_{xi\alpha}$ を微分して，零とおけば，

$$\frac{\partial k_{xi\alpha}}{\partial b_m^{\vee}} = \frac{\sum_n a_n \left\{ L_{m,n}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha} \overline{W}_{m,n}(\check{x}_i) \right\}}{\sum_m \sum_n b_m^{\vee} a_n W_{m,n}(\check{x}_i)} = 0 \quad (m=\alpha,\beta,\cdots) \tag{5-41}$$

となる。(5-41)式より，無限連立一次方程式

$$\sum_n a_n \left\{ L_{m,n}(\check{x}_i) - k_{xi\alpha} \overline{W}_{m,n}(\check{x}_i) \right\} = 0 \quad (m=\alpha,\beta,\cdots) \tag{5-42}$$

を得る。(5-42)式は(5-21)式と一致する。

5-6. 摂動解法 III. ((5-2) ⟶ (5-3))

今，

$$\overline{\Phi}_\alpha(x_i) = \sum_n \left\{ \delta_{\alpha,n} + C_n^{(1)}(x_i) + C_n^{(2)}(x_i) + \cdots \right\} \Phi_n e^{-jk_{xin}x_i} \tag{5-43}$$

と展開する。ここで，$\delta_{\alpha,n}$はKroneker のデルタ，$C_n^{(1)}(x_i)$，$C_n^{(2)}(x_i)$は一次及び二次でのx_iについての展開係数である。ここでは，一次の摂動までしか考えないものとすると，(5-43)式は，

$$\overline{\Phi}_\alpha(x_i) \simeq \sum_n \left\{ \delta_{\alpha,n} + C_n^{(1)}(x_i) \right\} \Phi_n e^{-jk_{xin}x_i} \tag{5-44}$$

とおける。(5-44)式を(5-3)式に代入して，Φ_mとの内積をとると，

$$j\frac{d}{dx_i}\left\{ C_m^{(1)}(x_i) + \sum_n C_n^{(1)}(x_i) W_{pm,n} \right\} e^{-jk_{xim}x_i}$$

$$= \sum_n \left(\delta_{\alpha,n} + C_n^{(1)}(x_i) \right) \left\{ L_{pm,n} - k_{xin} \overline{W}_{pm,n} \right\} e^{-jk_{xin}x_i} \tag{5-45}$$

但し，

$$\left.\begin{aligned}(\Psi_m,\ \hat{W}(x_i)\ \Psi_n) &= \delta_{m,n}\\ (\Psi_m,\ \hat{L}_p\ \Psi_n) &\triangleq L_{pm,n}\\ (\Psi_m,\ \hat{W}_p\ \Psi_n) &\triangleq W_{pm,n}\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}46)$$

となる。(5-45)式において、$x_i = 0$ のとき

$$\sum_n C_n^{(1)}(0) = 0 \qquad (5\text{-}47)$$

とすると、第1近似では、

$$j\frac{dC_m^{(1)}(x_i)}{dx_i} \simeq \left\{L_{pm,\alpha} - k_{xi\alpha} W_{pm,\alpha}\right\} e^{j(k_{xim} - k_{xi\alpha})x_i} \qquad (5\text{-}48)$$

とおける。故に、

$$C_m^{(1)}(x_i) \simeq -j\int_0^{x_i} \left\{L_{pm,\alpha} - k_{xi\alpha} W_{pm,\alpha}\right\} e^{j(k_{xim} - k_{xi\alpha})x_i} dx_i \qquad (5\text{-}49)$$

となる。(5-45)式の $C_n^{(0)}(x_i)$ に、(5-49)式を代入して積分すれば、第2近似がえられる。この方法を繰り返せば、だんだん近似が進んでいく。

(5-44)式、(5-49)式より第1近似での状態ベクトル $\Psi_\alpha(x_i)$ は、

$$\Psi_\alpha(x_i) \simeq \sum_n \left\{\delta_{\alpha,n} - j\int_0^{x_i} \left(L_{pm,\alpha} - k_{xi\alpha} W_{pn,\alpha}\right) e^{j(k_{xin} - k_{xi\alpha})x_i} dx_i\right\} \cdot \Psi_n\, e^{-jk_{xin}x_i} \qquad (5\text{-}50)$$

となる。

これらの Schrödinger 型の方程式の近似解法を単一化された電磁界方程式へ適用するためには、Fig.3. と Fig.4. を対応させて、それぞれに応じて対応する作用素やベクトル等を入れ換えればよい。

§6. 単一化された電磁界方程式の近似解法への応用例

前節で求めた Schrödinger 型の基礎方程式の近似解法を単一化された電磁界方程式の近似解法へ少し適用してみる。その応用例として，誘電体装荷矩形導波管，及び誘電体装荷直六面体共振器について若干述べる。

Example I. 誘電体装荷矩形導波管 I (z軸方向に一様)

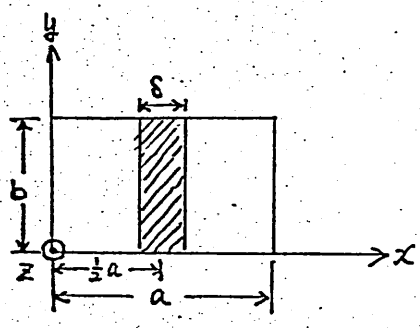


Fig. 5.

誘電体平板の入っていない矩形導波管を無摂動系(Fig. 4. に示す (5-6) 式)とし，Fig. 5. に示すように，z軸方向に一様な等方性の誘電体平板が対称に挿入された場合の矩形導波管を摂動系(Fig. 4. における (5-7) 式)とする。

単一化された電磁界方程式の近似解法は，Schrödinger 型の基礎方程式の近似解法における作用素，固有ベクトル，固有値を入れ換えればよい。即ち，

Fig. 3. ((5-1) → (5-2)) と Fig. 4. ((5-6) → (5-7)) より，

$$\left.\begin{aligned} &\hat{L}(x_i) = \hat{L}_0(x_i) + \hat{L}_p(x_i) \Longrightarrow \hat{L}(\check{t}, \partial\check{z}, \check{z}) = \hat{L}_0(\check{t}, \partial\check{z}, \check{z}) + \hat{L}_p(\check{t}, \partial\check{t}, \check{z}) \\ &\hat{W}(x_i) = \hat{W}_0(x_i) + \hat{W}_p(x_i) \Longrightarrow \hat{\Gamma}_{uz} \\ &\mathfrak{P}_{\alpha 0} \to \mathfrak{P}_\alpha,\ k_{xi\alpha 0} \to k_{xi\alpha} \Longrightarrow \phi_{\alpha 0} \to \phi_\alpha,\ k_{z\alpha 0} \to k_{z\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}1)$$

と置き換え，(5-31) 式，(6-1) 式より，

$$L_{\alpha,m}(\check{x}_i) = k_{xi\,m0}\,\delta_{\alpha,m} + L_{p\alpha,m}(\check{x}_i)$$
$$\Longrightarrow L_{\alpha,m}(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) = k_{z\,m0}\,\delta_{\alpha,m} + L_{p\alpha,m}(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) \qquad (6\text{-}2)$$
$$\overline{W}_{\alpha,m}(\check{x}_i) = \delta_{\alpha,m} + \overline{W}_{p\alpha,m}(\check{x}_i) \Longrightarrow \Gamma_{u\,z\alpha,m} = \delta_{\alpha,m}$$

と置き換えればよい。故に，第1近似での固有値 $k_{z\alpha}$ は，(5-16)式又は(5-32)式と(6-2)式より，

$$\boxed{k_{z\alpha} \simeq k_{z\alpha 0} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{t},\partial\check{z},\check{z})} \qquad (6\text{-}3)$$

となる。又，(5-28)式，(5-27)式，(6-2)式より二mode近似における固有値 $k_{z\alpha}$ は，

$$\boxed{k_{z\alpha} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \qquad (6\text{-}4)$$

となる。但し，

$$b = -\{k_{z\alpha 0} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) + k_{z\beta 0} + L_{p\beta,\beta}(\check{t},\partial\check{z},\check{t})\}$$
$$c = \{k_{z\alpha 0} + L_{p\alpha,\alpha}(\check{t},\partial\check{z},\check{z})\}\{k_{z\beta 0} + L_{p\beta,\beta}(\check{t},\partial\check{z},\check{z})\} - L_{p\beta,\alpha}(\check{t},\partial\check{z},\check{z})\,L_{p\alpha,\beta}(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) \qquad (6\text{-}5)$$

である。(3-12)式，Fig.5より，摂動作用素 $\hat{L}_p(\check{t},\partial\check{z},\check{z})$ は，

$$\hat{L}_p(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) = w\begin{bmatrix}[\varepsilon_p(x,y)] & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}\frac{1}{2}(a-\delta) \leqq x \leqq \frac{1}{2}(a+\delta)\\ 0 \leqq y \leqq b\end{matrix} \qquad (6\text{-}6)$$

である。今，無摂動系の矩形導波管中を TE_{m0} mode が伝搬している場合を考えると，

$$\phi_{m0} = \begin{bmatrix}E_{m0}(x,y)\\ jH_{m0}(x,y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_{ym0}(x)\,j\\ jH_{m0}(x)\end{bmatrix} \qquad (6\text{-}7)$$

$$E_{ym0}(x) = a_{ym0}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = \sqrt{\frac{w\mu_0}{ab\,k_{zm0}}}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

で与えられる。$L_{p1,1}(\check{t},\partial\check{z},\check{z})$，$L_{p3,1}(\check{t},\partial\check{z},\check{z})$ を求めると，

$$L_{p1,1}(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) = (\phi_{10}, \hat{L}_p(\check{t},\partial\check{z},\check{z})\,\phi_{10})$$

$$= \omega \int E^{*}_{y10}(x,y)\,\varepsilon_p(x,y)\,E_{y10}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_p}{2k_{z10}} \left\{ \frac{\delta}{a} + \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi\delta}{a} \right\} \qquad (6-8)$$

$$L_{p3,1}(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) = -\frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_p}{4\pi\sqrt{k_{z10}\,k_{z30}}} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{a}\delta\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{a}\delta\right) \right\} \qquad (6-9)$$

となる。(6-3)式，(6-8)式より，

$$k_{z1} \simeq k_{z10} + L_{p1,1}(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) = k_{z10} + \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_p}{2k_{z10}} \left\{ \frac{\delta}{a} + \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi\delta}{a} \right\} \qquad (6-10)$$

で与えられる[1]。(6-10)式より k^2_{z1} を求めると，

$$k^2_{z1} \simeq k^2_{z10} + 2k_{z10}\,L_{p1,1}(\check{t},\partial\check{z},\check{z}) \qquad (6-11)$$

となる。この(6-11)式は，A.D.Berk[7]によって，変分法より求められたものと一致する。

Example Ⅱ. 誘電体装荷矩形導波管Ⅱ(z軸方向に変化)

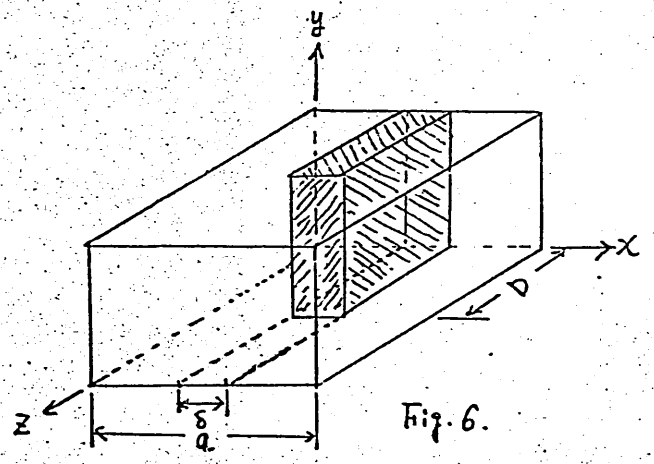


Fig. 6.

誘電体平板の入っていない矩形導波管を無摂動系(Fig. 4.に示す(5-6)式)とし，Fig. 6.に示すように，z軸方向にDまで等方性の誘電体平板を挿入した矩形導波管を摂動

系（Fig. 4 における (5-8) 式）とする。

Fig. 3. ((5-1) ⟶ (5-3)) と Fig. 4. ((5-6) ⟶ (5-8)) より，

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{L}=\hat{L}(\check{x}_i)+\hat{L}_p \Longrightarrow \hat{L}(\check{t},\partial\check{z})=\hat{L}_0(\check{t},\partial\check{z},\check{z})+\hat{L}_p(\check{t},\partial\check{z})\\
&\hat{W}=\hat{W}(\check{x}_i)+\hat{W}_p \Longrightarrow \hat{\Gamma}_{uz}\\
&\mathcal{G}_{\alpha 0}\longrightarrow \overline{\mathcal{G}}_\alpha \Longrightarrow \mathcal{G}_{\alpha 0}\longrightarrow \mathcal{G}_\alpha\\
&L_{pm,n} \Longrightarrow L_{pm,n}(\check{t},\partial\check{z})\\
&W_{pm,n} \Longrightarrow 0
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}12)$$

と置き換えればよい。(5-50)式，(6-12)式より，第1近似での電磁界ベクトル $\mathcal{G}_\alpha(z)$ は，

$$\boxed{\mathcal{G}_\alpha(z)\simeq\sum_n\left\{\delta_{\alpha,n}-j\int_0^z L_{pn,\alpha}(\check{t},\partial\check{z})\,e^{j(k_{zn}-k_{z\alpha})z}\,dz\right\}\mathcal{G}_{n0}\,e^{-jk_{zn0}z}} \quad (6\text{-}13)$$

となる。(3-11)式，Fig. 6. より，摂動作用素 $\hat{L}_p(\check{t},\partial\check{z})$ は，

$$\hat{L}_p(\check{t},\partial\check{z})=\omega\begin{bmatrix}[\varepsilon_p(x,y,z)] & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(a-\delta)\leqq x\leqq\tfrac{1}{2}(a+\delta)\\ &0\leqq y\leqq b\\ &0\leqq z\leqq D\end{aligned} \quad (6\text{-}14)$$

である。$\alpha=1$，$m=1$ とすると，Example I と同様にして電磁界ベクトル $\mathcal{G}_1(z)$ を求めると，

$$\mathcal{G}_1(z)\simeq\left\{1-j\,L_{p1,1}(\check{t},\partial\check{z})z\right\}\mathcal{G}_{10}\,e^{-jk_{z10}z} \quad (6\text{-}15)$$

但し，$0\leqq z\leqq D$ のとき $L_{p1,1}(\check{t},\partial\check{z})=\dfrac{\omega^2\mu_0\varepsilon_p}{2k_{z10}}\left\{\dfrac{\delta}{a}+\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{\pi\delta}{a}\right\}$

$D<z$ のとき $L_{p1,1}(\check{t},\partial\check{z})=0$

となる。

$$1-j\,L_{p1,1}(\check{t},\partial\check{z})z\simeq\exp\left\{-jL_{p1,1}(\check{t},\partial\check{z})z\right\}$$

であるから，(6−15) 式は，

$$\mathfrak{L}_1(z) \simeq \phi_{10} e^{-j\{k_{z10} + L_{p1,1}(\check{t}, \partial\check{z})\}z} \qquad (6-16)$$

但し，$z > D$ のとき $L_{p1,1}(\check{t}, \partial\check{z}) = 0$

となる。

Example Ⅲ. 誘電体装荷直六面体共振器 1. (時間に対して一定)

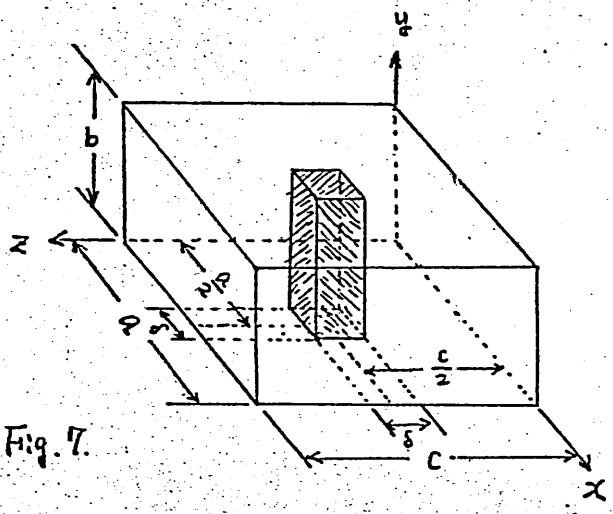


Fig. 7.

誘電体の入っていない直六面体空腔共振器を無摂動系(Fig. 4. に示す(5−9)式)とし，Fig. 7. に示すように，共振器の真中に誘電体四角棒を挿入した直六面体共振器を摂動系(Fig. 4. における(5−10)式)とする。

Fig. 3. ((5−1) ⟶ (5−2)) と Fig. 4. ((5−9) ⟶ (5−10)) より，

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{L}(\check{x}_i) = \hat{L}_0(\check{x}_i) + \hat{L}_p(\check{x}_i) \Longrightarrow \hat{L}(\check{t}) = \hat{L}_0(\check{t}) + \hat{L}_p(\check{t}) \\
&\hat{W}(\check{x}_i) = \hat{W}_0(\check{x}_i) + \hat{W}_p(\check{x}_i) \Longrightarrow \hat{W}(\check{t}) = \hat{W}_0(\check{t}) + \hat{W}_p(\check{t}) \\
&\mathfrak{L}_{\alpha 0} \longrightarrow \mathfrak{L}_\alpha \Longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha 0} \longrightarrow \mathfrak{L}_\alpha \\
&k_{x i \alpha 0} \longrightarrow k_{x i \alpha} \Longrightarrow -w_{i 0} \longrightarrow -w_\alpha \\
&L_{\alpha,m}(\check{x}_i) = k_{x i m 0}\delta_{\alpha,m} + L_{p\alpha,m}(\check{x}_i) \\
&\qquad \Longrightarrow L_{\alpha,m}(\check{t}) = -w_{m0}\delta_{\alpha,m} + L_{p\alpha,m}(\check{t}) \\
&W_{\alpha,m}(\check{x}_i) = \delta_{\alpha m} + W_{p\alpha,m}(\check{x}_i) \Longrightarrow W_{\alpha,m}(\check{x}_i) = \delta_{\alpha,m} + W_{p\alpha,m}(\check{t})
\end{aligned}\right\} \qquad (6-17)$$

と置き換えればよい。故に，第1近似での固有値w_αは，(5-32)式，(6-16)式，(6-17)式より，

$$\boxed{w_\alpha \simeq \frac{w_{\alpha 0} - L_{p\alpha,\alpha}(\check{t})}{1 + W_{p\alpha,\alpha}(\check{t})}} \qquad (6-18)$$

となる。(3-10)式，Fig.7より摂動作用素$\hat{L}_p(\check{t})$，$\hat{W}_p(\check{t})$は，

$$\hat{L}_p(\check{t}) = 0$$

$$\hat{W}_p(\check{t}) = \begin{bmatrix} [\varepsilon_p(x,y,z)] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \frac{1}{2}(a-\delta) \leqq x \leqq \frac{1}{2}(a+\delta) \\ \frac{1}{2}(a-\delta) \leqq y \leqq \frac{1}{2}(a+\delta) \\ 0 \leqq z \leqq c \end{matrix} \qquad (6-19)$$

である。今，無摂動系として，TE_{10}波形が伝搬している方形導波管を短絡した直六面体空胴共振器を考えると，

$$\varphi_{10} = \begin{bmatrix} E_{10}(r) \\ jH_{10}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{y10}(x,y)\vec{j} \\ jH_{10}(x,z) \end{bmatrix} \qquad (6-20)$$

$$E_{y10}(x,z) = a_{y10} \sin(k_{z10} z) \sin(\pi x/a)$$

で与えられる。

$$W_{p1,1}(\check{t}) = (\varphi_{10}, \hat{W}_p(\check{t})\varphi_{10}) = \int E^*_{y10}(x,z)\varepsilon_p(x,y,z)E_{y10}(x,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{|a_{y10}|^2 a \varepsilon_p \delta}{2\pi k_{z10}} \left\{ -\frac{1}{4}\sin(2k_{z10}C) + \frac{k_{z10}C}{2} \right\} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{a}\delta\right) + \frac{\pi}{a}\delta \right\} \qquad (6-21)$$

但し，

$$a_{y10} = \frac{2\beta}{ab\left\{\varepsilon_0 + \frac{k_{z10}^2}{\mu_0 w_{10}^2} + \frac{\pi^2}{\mu_0 (a w_{10})^2}\right\}\left\{ -\frac{1}{4}\sin(2k_{z10}C) + \frac{k_{z10}C}{2} \right\}}$$

(6-21)式を(6-18)式に代入すると，第1近似での固有値 ω_α が得られる。

Example Ⅳ. 誘電体装荷直六面体共振器(時間的に変化)

Example Ⅲと同様に，誘電体の入っていない直六面体空胴共振器を無摂動系(Fig.4.に示す(5-9)式)とし，Fig.7.に示すように，時間的に変動している誘電体四角棒を挿入した直六面体共振器を摂動系(Fig.4.における(5-11)式)とする。

Fig.3.((5-2)⟶(5-3))と Fig.4.((5-9)⟶(5-11))より，

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{L}=\hat{L}_0(x_i)+\hat{L}_P \Longrightarrow \hat{L}=\hat{L}_0(t)+\hat{L}_P\\
&\hat{W}=\hat{W}_0(x_i)+\hat{W}_P \Longrightarrow \hat{W}=\hat{W}_0(t)+\hat{W}_P\\
&\mathfrak{L}_{\alpha 0}\longrightarrow \mathfrak{F}_\alpha(x_i) \Longrightarrow \mathfrak{L}_{\alpha 0}\longrightarrow \mathfrak{F}_{\alpha 0}(t)\\
&k_{x i\alpha 0}x_i \Longrightarrow -\omega_{\alpha 0}t
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}22)$$

と置き換えればよい。故に，第1近似での電磁界ベクトル $\mathfrak{F}_\alpha(t)$ は，(5-50)式，(6-22)式より，

$$\boxed{\mathfrak{F}_\alpha(t)\simeq\sum_n\left\{\delta_{\alpha,n}-\frac{i}{\hbar}\int_0^t\left(L_{Pn,\alpha}+\omega_{\alpha 0}W_{Pn,\alpha}\right)e^{-j(\omega_{n0}-\omega_{\alpha 0})t}dt\right\}\mathfrak{L}_{n0}e^{j\omega_{n0}t}} \qquad (6\text{-}23)$$

となる。(3-9)式，Fig.6.より，摂動作用素 $\hat{L}_P$，$\hat{W}_P$ は，

$$\hat{L}_P=0$$

$$\hat{W}_P=\begin{bmatrix}[\varepsilon_P(r,t)] & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}&\varepsilon_P(r,t)=\varepsilon_P(r)\cos\omega_m t\\ &\tfrac{1}{2}(a-\delta)\leqq x\leqq\tfrac{1}{2}(a+\delta)\\ &\tfrac{1}{2}(b-\delta)\leqq y\leqq\tfrac{1}{2}(b+\delta)\\ &0\leqq z\leqq c\end{aligned} \qquad (6\text{-}24)$$

とする。無摂動系として，TE_{10} mode を考えると，第1近

似での電磁界ベクトル は，(6-23)式，(6-24)式より，

$$\overline{\mathbf{E}}_1(t) \simeq \left\{ 1 - j\omega_{10}\, \overline{W}_{P1,1}(\check{t})\, \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m} \right\} \mathcal{E}_{10}\, e^{j\omega_{10} t}$$

$$\simeq \mathcal{E}_{10}\, e^{j\omega_{10}\left\{ t - \overline{W}_{P1,1}(\check{t})\, \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m} \right\}} \qquad (6\text{-}25)$$

となる。$\omega_m t << 1$ ならば，

$$\overline{\mathbf{E}}_1(t) \simeq \mathcal{E}_{10}\, e^{j\omega_{10}\{1 - \overline{W}_{P1,1}(\check{t})\} t} \qquad (6\text{-}26)$$

となる。

§7. あとがき

Schrödinger型の基礎方程式は，かなり一般的で，その代表的な例は，量子力学系における Schrödinger の波動方程式であるが，ここで取扱ったところの単一化された電磁界方程式以外にも色々と適用できる[8),9)]。又，単一化された電磁界方程式の近似解法の応用例においても同様である。

文 献

1). A.D.Bresler, G.H.Joshi, and N.Marcuvity, J.Appl. Phys., vol.29, No.5, pp.794-799(1958).

2). G.J.Gabiriel, and M.E.Brodwin, IEEE. Trans. M.T.T., vol.MTT-13, No.5, pp.364-370(1965).

3). H.E.Mosses, Suppl. Nuovo Cimento, vol.7, No.10, pp. 1-18(1958).

4). 井上, 末田, 牧本, 昭和44年電気関係学会関西支部連合大会, G1-3.
5). 井上, 末田, 牧本, 電子通信学会, マイクロ波研究会資料, MW 70-72 (1971-2).
6). 竹之内, 脩, "函数解析", 朝倉書店 (1968)
7). A.D.Berk, IRE. Trans. A.P., vol.AP-4, No.2, pp.104-111(1956).
8). 牧本, 井上, 第18回応用物理学関係連合学術講演会講演予稿集, P.142 (1971).
9). 吉田, 河田, 岩村, "位相解析の基礎", 岩波書店 (1960).

輻射科学研究会資料

6MM圧電結晶における表面弾性波の伝搬特性

佐藤真一・牧本利夫
(大阪大学・基礎工学部)

1971年7月2日
(於 住友電工)

6mm圧電結晶における表面弾性波の伝搬特性

佐藤真一・牧本利夫
(大阪大学・基礎工学部)

1. まえがき

近年，固体中の弾性波の速さは電磁波の速さに比べておよそ5桁ぐらい遅いということに着目して，この弾性波をマイクロ波帯で使うことによりマイクロ波回路を小形化しようという試みがなされつつある．弾性波のうちでも応用面から表面弾性波に関する研究が盛んで，解析，基礎的実験も多くなされている．その中で，Tseng[1]は半無限6mm圧電結晶におけるレイリー波とラブ波の伝搬について論じている．また，Bleustein[2]は圧電結晶にのみ存在する新しい波を見い出し，6mm圧電結晶について論じている．

本報告では，6mm圧電結晶における表面弾性波の伝搬に関して，上述の波とは違った成分を持つ波が伝搬可能であることを示す．

2. 基本方程式

圧電結晶を伝搬する圧電性弾性波の満足する基本方程式[3]は外力がないとすると，次式で与えられる．

$$\begin{cases} \nabla_S : \mathbb{T} = \rho \dfrac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial t^2} & (1) \\ \nabla_S \cdot \mathbb{U} = \mathbb{S} & (2) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbb{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial^2 \mathbb{D}}{\partial t^2} & (3) \end{cases}$$

また，各量の間の基本関係式は次式で与えられる．

$$\begin{cases} \mathbb{T} = \mathbb{C}^E : \mathbb{S} - \mathbb{e} \cdot \mathbb{E} & (4) \\ \mathbb{D} = \mathbb{e} : \mathbb{S} + \mathbb{\varepsilon}^S \cdot \mathbb{E} & (5) \end{cases}$$

ここに，ρ は密度，$\mathbb{U}(U_i)$ は機械変位，$\mathbb{T}(T_I)$ は応力，$\mathbb{S}(S_I)$ は歪，$\mathbb{E}(E_i)$ は電界，$\mathbb{D}(D_i)$ は電気変位，$\mathbb{C}(C_{IJ})$ は弾性定数，$\mathbb{e}(e_{Ij}$ あるいは $e_{iJ})$ は圧電定数，$\mathbb{\varepsilon}(\varepsilon_{ij})$ は誘電率，μ_0 は透磁率である．ただし，$i,j = 1,2,3$; $I,J = 1,2,3,4,5,6$ をとるものとする．また，$\circ$ 記号は3列の，$:$ 記号は6列のテンソル演算を示し，$\mathbb{C}^E$, $\mathbb{\varepsilon}^S$ は $\mathbb{E}$, $\mathbb{S}$ が一定の時のそれぞれの値を示す．また，

$$\nabla_S : = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

で，$\nabla \times$ はベクトル記号の rotation を意味する．

3．特性方程式

図1のように，6mm圧電結晶の表面に座標系をとり，表面弾性波はx_1方向に伝搬するものとする．そして，ここで考える表面弾性波は次の成分を持つものとする．

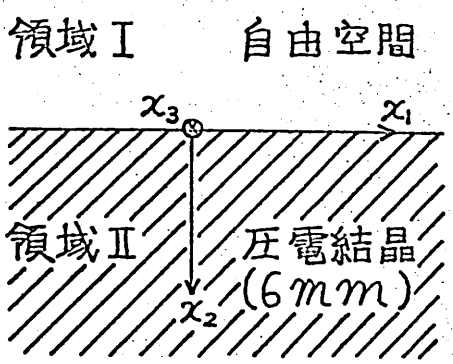


図1 座標系

$$\left.\begin{aligned} &U_1, U_2 \neq 0,\ U_3 = 0 \\ &E_1 = E_2 = 0,\ E_3 \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

また，この波はx_3方向には変化しないものとする．

いま，図1のx_1，x_2，x_3軸と結晶のX，Y，Z軸とを一致させた場合（Y-カット，X-伝搬）を考える．

このとき，領域Ⅱにおいては，

式(1)，(2)，(4)より，

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(C_{11}^E \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + C_{12}^E \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - e_{31} E_3\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial x_2} C_{66}^E \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) = \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \qquad (8) \\ &\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C_{12}^E \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + C_{11}^E \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - e_{31} E_3\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial x_1} C_{66}^E \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) = \rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \qquad (9) \end{aligned}\right.$$

式(3)，(5)より，

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2}=\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(e_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+e_{31}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\varepsilon_{33}^S E_3\right) \quad (10)$$

を得る．

ここで，

$$\left.\begin{aligned} u_1&=A\exp(\Omega k x_2)\exp[i(\omega t-kx_1)]\\ u_2&=B\exp(\Omega k x_2)\exp[i(\omega t-kx_1)]\\ E_3&=kC\exp(\Omega k x_2)\exp[i(\omega t-kx_1)]\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

と仮定する[1]．

ここに，無次元減衰定数Ω，波数k，振巾A, B, Cは決定され得る．

式(11)を式(8)，(9)，(10)に代入すると次式を得る．

$$\begin{bmatrix} C_{66}^E\Omega^2+\rho v_S^2-C_{11}^E & -i(C_{12}^E+C_{66}^E)\Omega & ie_{31}\\ i(C_{12}^E+C_{66}^E)\Omega & -(C_{11}^E\Omega^2+\rho v_S^2-C_{66}^E) & e_{31}\Omega\\ i\mu_0 e_{31}v_S^2 & -\mu_0 e_{31}v_S^2\Omega & -(\Omega^2+\varepsilon_{33}^S\mu_0 v_S^2-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=0 \quad (12)$$

式(12)において自明でない解が存在するためには，

$$\begin{vmatrix} C_{66}^E\Omega^2+\rho v_S^2-C_{11}^E & (C_{12}^E+C_{66}^E)\Omega & -e_{31}\\ (C_{12}^E+C_{66}^E)\Omega & -(C_{11}^E\Omega^2+\rho v_S^2-C_{66}^E) & e_{31}\Omega\\ \mu_0 e_{31}v_S^2 & -\mu_0 e_{31}v_S^2\Omega & -(\Omega^2+\varepsilon_{33}^S\mu_0 v_S^2-1)\end{vmatrix}=0 \quad (13)$$

でなければならない．

次に，領域Ⅰにおいては弾性量は零であるから，式(3)，(5)より，

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} \tag{14}$$

を得る．

ここで，

$$E_3=k\xi\exp(\alpha k x_2)\exp[i(\omega t-kx_1)] \tag{15}$$

と仮定する．

ここに，無次元減衰定数α，振巾ξは決定され得る．

式(15)を式(14)に代入すると次式を得る．

$$(\alpha^2+\varepsilon_0\mu_0 v_s^2-1)\xi=0 \tag{16}$$

このとき，$\xi\neq 0$より，

$$\alpha^2=1-\varepsilon_0\mu_0 v_s^2 \tag{17}$$

となる．

ただし，$v_s=\frac{\omega}{k}$は表面弾性波の位相速度である．

式(13)，(17)がそれぞれ，領域Ⅱ，Ⅰにおける特性方程式である．

4．表面弾性波の分布

表面弾性波としての境界条件，すなわち，領域Ⅱに

おいては$x_2=+\infty$のとき分布＝0，領域Ⅰにおいては$x_2=-\infty$のとき分布＝0を満足させるためには，

$$Re(\Omega)<0 \tag{18}$$

$$Re(\alpha)>0 \tag{19}$$

でなければならない．

式(13)はΩ^2に関する3次方程式である．よって式(18)を満たすものは最高三つある．このとき，$\Omega_j\ (j=1,2,3)$それぞれに対して式(11)の振巾はA_j, B_j, C_jの三つが存在する．そして，これら振巾の比は式(12)における三つの方程式のうち，任意の二つから見い出され得る．
ここで，

$$p_j=\frac{B_j}{A_j} \tag{20}$$

$$q_j=\frac{C_j}{A_j} \tag{21}$$

とおくと，領域Ⅱにおける分布は式(11)より，

$$\left.\begin{aligned} U_1&=\sum_{j=1}^{3}A_j\exp(\Omega_j k x_2)\exp[i(\omega t-kx_1)]\\ U_2&=\sum_{j=1}^{3}p_jA_j\exp(\Omega_j k x_2)\exp[i(\omega t-kx_1)]\\ E_3&=k\sum_{j=1}^{3}q_jA_j\exp(\Omega_j k x_2)\exp[i(\omega t-kx_1)] \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

と書かれ得る．

次に，領域Ⅰにおいては式(17)，(19)より，

$$\alpha = \sqrt{1 - \varepsilon_0 \mu_0 v_s^2} \tag{23}$$

と求まる．ここで，領域Ⅰにおける光速をv_{c0}とすると，

$$\varepsilon_0 \mu_0 v_s^2 = \left(\frac{v_s}{v_{c0}}\right)^2 \approx 10^{-10} \tag{24}$$

であるから，式(23)より，

$$\alpha \simeq 1 \tag{25}$$

となる．よって，領域Ⅰにおける分布は式(15)より，

$$E_3 = k_3 \exp(k x_2) \exp[i(\omega t - k x_1)] \tag{26}$$

となる．

式(22)と式(26)は$x_2 = 0$における境界条件によって結ばれている．$x_2 = 0$における境界条件は，

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= 0 \\ T_6 &= 0 \\ E_{3\text{Ⅱ}} &= E_{3\text{Ⅰ}} \\ H_{1\text{Ⅱ}} &= H_{1\text{Ⅰ}} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

である．磁界H_1はマクスウェルの方程式を用いて電界より求まる．

式(27)より次式を得る．

$$\begin{bmatrix} C_{11}^E p_1 \Omega_1 - e_{31} q_1 - i C_{12}^E & C_{11}^E p_2 \Omega_2 - e_{31} q_2 - i C_{12}^E & C_{11}^E p_3 \Omega_3 - e_{31} q_3 - i C_{12}^E \\ \Omega_1 - i p_1 & \Omega_2 - i p_2 & \Omega_3 - i p_3 \\ q_1(\Omega_1 - 1) & q_2(\Omega_2 - 1) & q_3(\Omega_3 - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

式(28)において自明でない解が存在するためには，

$$\begin{vmatrix} C_{11}^E p_1 \Omega_1 - e_{31} q_1 - i C_{12}^E & C_{11}^E p_2 \Omega_2 - e_{31} q_2 - i C_{12}^E & C_{11}^E p_3 \Omega_3 - e_{31} q_3 - i C_{12}^E \\ \Omega_1 - i p_1 & \Omega_2 - i p_2 & \Omega_3 - i p_3 \\ q_1(\Omega_1 - 1) & q_2(\Omega_2 - 1) & q_3(\Omega_3 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

でなければならない．そして，$a_{21} = \frac{A_2}{A_1}$，$a_{31} = \frac{A_3}{A_1}$ は式(28)における三つの方程式のうち，任意の二つから見い出され得る．

以上より，表面弾性波の分布は次のようになる．

領域Ⅱにおいては，

$$U_1 = A_1 [\exp(\Omega_1 k x_1) + a_{21} \exp(\Omega_2 k x_2) + a_{31} \exp(\Omega_3 k x_2)] \times \exp[i(\omega t - k x_1)]$$

$$U_2=A_1[P_1\exp(\Omega_1 k x_2)+P_2 a_{21}\exp(\Omega_2 k x_2)+P_3 a_{31}\exp(\Omega_3 k x_3)]$$
$$\times\exp[i(\omega t-kx_1)]$$
$$E_3=kA_1[g_1\exp(\Omega_1 k x_2)+g_2 a_{21}\exp(\Omega_2 k x_2)+g_3 a_{31}\exp(\Omega_3 k x_3)]$$
$$\times\exp[i(\omega t-kx_1)]$$

領域Ⅰにおいては，

$$E_3=kA_1[g_1+g_2 a_{21}+g_3 a_{31}]\exp(kx_2)\exp[i(\omega t-kx_1)] \quad (30)$$

5．数値計算

式(13)と式(29)を連立にして表面弾性波の速度v_sと減衰定数Ωを求めればよい．その方法としては，あるv_sを与え，式(13)より$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$を求め，これらを式(29)に代入する．その結果が零にならなければ，新しいv_sを与え，式(13)より$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$を求め，これらを式(29)に代入する．このようにして，式(13)と式(29)を同時に満たすv_s，$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$を求める．このとき，領域Ⅰ，Ⅱにおける分布は式(30)より求まる．

ここでは，6mm結晶のうち，CdSについて考え，次の定数値[4]を用いた．

$$e_{31}=-0.244\,(C/m^2),\quad \varepsilon_{33}^S=8.44\times10^{-11}\,(F/m)$$

$C_{11}^E = 9.07\times10^{10}\,(N/m^2)$, $\rho = 4.82\times10^{3}\,(Kg/m^3)$

$C_{12}^E = 5.81\times10^{10}\,(N/m^2)$, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,(H/m)$

$C_{66}^E = 1.63\times10^{10}\,(N/m^2)$

実際に，これら定数値を式(13)に代入すると，ε_{33}^S, e_{31}はΩを求めるとき，ほとんどきかないことがわかる．よって，式(29)に対してもε_{33}^S, e_{31}はほとんど関係しなくなる．すなわち，v_Sはε_{33}^S, e_{31}にほとんど関係なく定まることになる．このとき，分布に対して考えると，電界に対してはε_{33}^Sはほとんど関係しないが，e_{31}は関係があることがわかる．また，機械変位に対してはε_{33}^S, e_{31}はほとんど関係がないことがわかる．

数値計算の結果，

$$v_S = 2.604\times10^{3}\,(m/sec)$$
$$\Omega_1 = -1.0013$$
$$\Omega_2 = -0.9901$$
$$\Omega_3 = -0.8098$$

と求まる．このとき，

$$\begin{cases} p_1 = -1.0013i \\ p_2 = -0.9901i \\ p_3 = -0.8098i \end{cases} , \quad \begin{cases} g_1 = -1.3473\times10^{2}i \\ g_2 = -1.2643\times10^{2}i \\ g_3 = -0.0570\times10^{2}i \end{cases} , \quad \begin{cases} a_{21} = -1.0748 \\ a_{31} = 0.0777 \end{cases}$$

となる．このときの領域Ⅰ，Ⅱにおける規格化分布は図2，3に示されている．

6．むすび

6mm圧電結晶において，既存のレイリー波，ラブ波，ブリュースタイン波とは違った新しい表面弾性波が伝搬可能であることを示した．そして，特にCdSに対してその分布を示した．この波の特徴としては，電界に対しては誘電率はほとんど関係しないが，圧電定数は関係するということ，速度，機械変位に対しては誘電率，圧電定数はほとんど関係しないということ，また，分散性がないということがあげられる．

終りに，日ごろ，ご討論いただく牧本研究室の諸氏に深謝する．

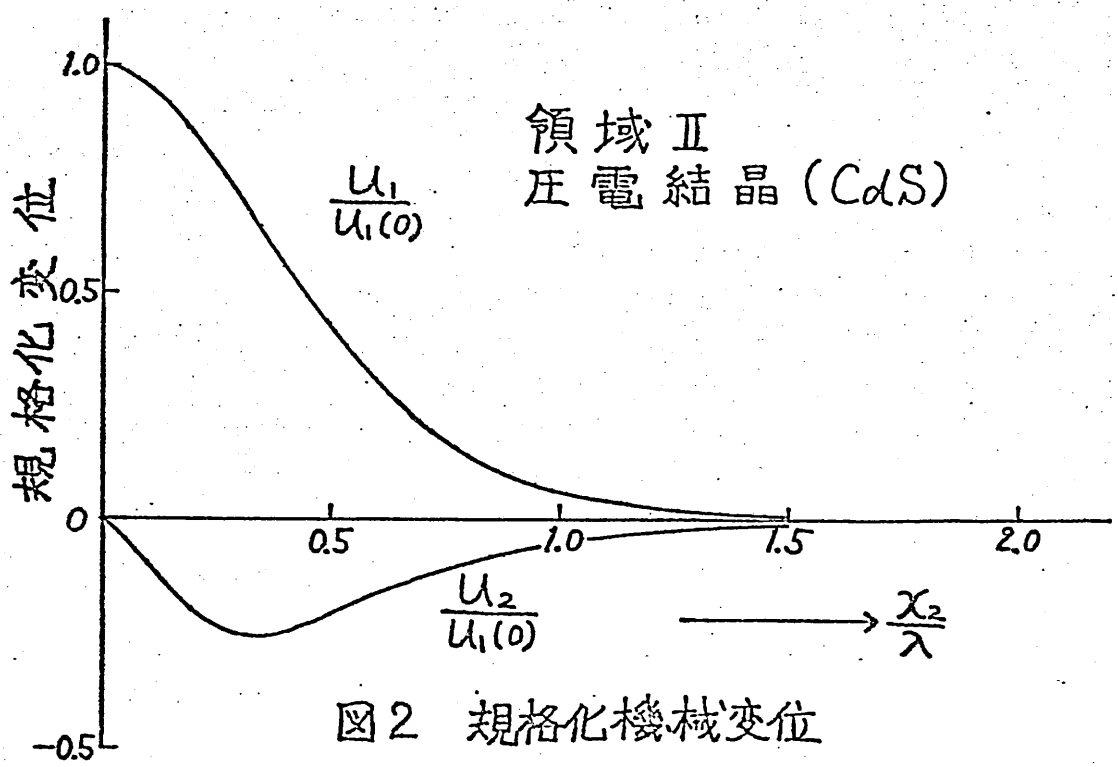


図2　規格化機械変位

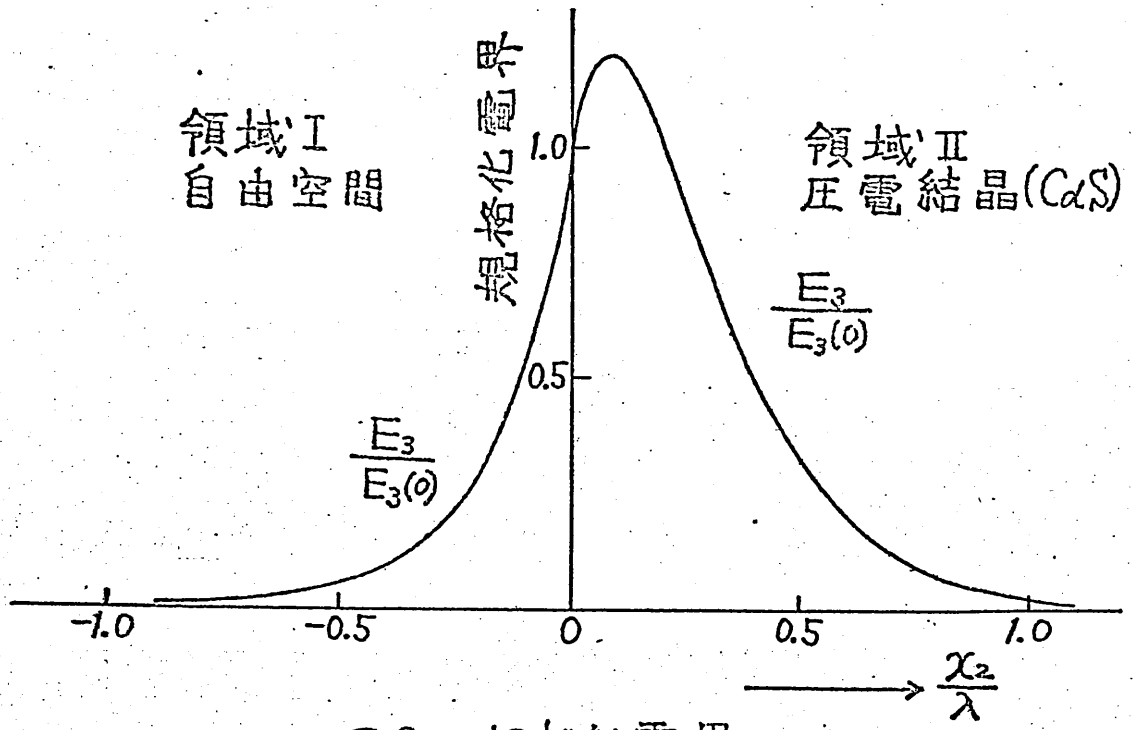


図3　規格化電界

文 献

1) C.C. Tseng and R.M. White, "Propagation of piezoelectric and elastic surface waves on the basal plane of hexagonal piezoelectric crystals", J. appl. Phys., Vol. 38, No. 11, p. 4274, Oct. 1967.

2) J.L. Bleustein, "A new surface waves in piezoelectric materials", Appl. Phys. Letters, Vol. 13, No. 12, p. 412, Dec. 1968.

3) B.A. Auld, "Application of microwave concepts to the theory of acoustic fields and waves in solids", IEEE Trans., MTT-17, No. 11, p. 800, Nov. 1969.

4) D. Berlincourt, H. Jaffe and L.R. Shiozawa, "Electroelastic properties of the sulfides, selenides, and tellurides of zinc and cadmium", Phys. Rev., Vol. 129, No. 3, p. 1009, Feb. 1963.

UHF 導波管、導波管部品及び切替器について

芝野儀三
天野嘉一
（住友電気工業株式会社）

1971年7月2日

輻射科学研究会

1. まえがき

UHF テレビ 放送も，ますます大電力化の傾向を見せ，その給電系に導波管部品を用いる必要が生ずる様になつて来た。

UHF 帯で用いられる導波管の寸度は，周波数によつて変化するが，５００MHz 近辺では，WR－１５００（３８１.０㎜ ×１９０.５㎜ ）方形導波管或は，WR－１８００（４５７.２㎜ ×２２８.６㎜ ）方形導波管が適当となる。これらの直線導波管の他にベンド，コーナー等も不可欠な部品である。又導波管切替器も重要な部品の一つである。

今回，これらを製作或は試作する機会を得たので，その設計及び結果につき紹介する。

2. 導波管設計に関連する問題

2－1 直線導波管の許容寸法誤差決定の試み

導波管の電気特性特に，入力ＶＳＷＲ の周波数特性は，その寸法精度によつて大きく左右される。導波管の接続数が多くなり，全長が長くなると許容される寸法誤差は非常に厳しいものとなる。導波管の入力ＶＳＷＲ を所定の値に抑える為の許容寸法誤差を決定する試みは，時折散見される様であるが，決定的なものは見当らない様である。

許容寸法誤差を定める方法として有力な方法は電子計算機による Simulation であろう。Simulation の限界は，使用計算機の記憶容量及び計算速度によって制限される。ここでは導波管１本毎に，その長辺，短辺，長さが Random に変化し，それ等が多数接続された時の入力 VSWR の Simulation の例を紹介する。

Simulation の方法は図－１に示した Flow Chart に従った。

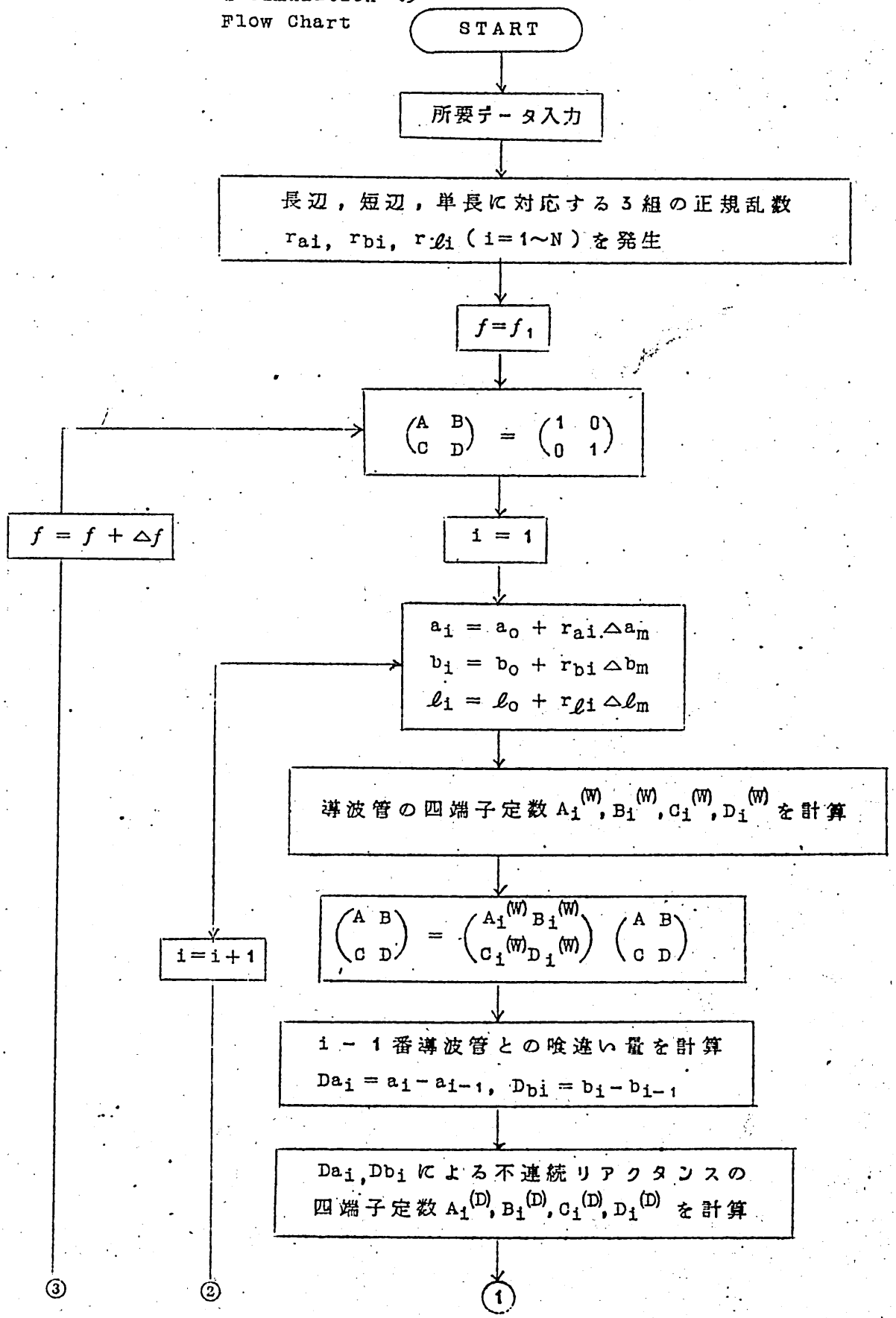
まず，所用入力データとして，導波管の標準寸度（長辺 a_0 ，短辺 b_0 ，単長 ℓ_0 ），最大誤差（長辺 $\triangle a_m$ ，短辺 $\triangle b_m$ ，単長 $\triangle \ell_m$ ），接続本数 N，周波数範囲 $f_1 \sim f_2$ 及び周波数ステップ $\triangle f$ を与える。次に長辺，短辺，単長の変動を表現する乱数 r_{ai} ，r_{bi} ，$r_{\ell i}$ を i ＝ １ ～N について発生させる。ここで r_{ai} ，r_{bi} ，$r_{\ell i}$ は互に独立で出現頻度が正規分布に従がいながら，

ランダムに変化させる様にした。又これらの確率変数は－1～1の範囲を0.1おきに量子化された。その次に周波数が設定され最初の導波管が選定されあらかじめ与えられた乱数に応じて，その寸度が決定される。これに応じて導波管1本当りの四端子定数，導波管接続部の不連続リアクタンスの四端子定数を求め，これ等がカスケードに接続された場合の四端子定数を求める。次に2番目の導波管を選び同様の計算を行ない更にN番目までこれを繰返す。その後得られの入力VSWR を計算してから周波数を$\triangle f$ づつ増して同様の手続きを設定周波数の上限f_2 にいたるまで繰返す。以上により Simulation が完成することになる。

図－2は，導波管を WR－1800 とし，標準単長6m最大接続本数100本とした時の Simulation 結果の1例を示す。この時変動の最大値は長辺短辺共に ±1.5 mm 長さは±3 mm とした。この結果では長さ600m 程度の時VSWR の Peak は1.1程度になるが，殆んど1.05程度に収まつていることがわかる。

実際の特性は導波管単長内での寸法変動が相当大きく影響するので，前述の結果を直ちに許容誤差へ結びつけるわけには行かないが，単長毎の寸法の平均値の変動の許容値と見ることは出来よう。勿論今後更に精度を上げて，単長内の変動をも考慮して行かねばならない。

図－1　導波管入力VSWRの電子計算機によるSimulationのFlow Chart



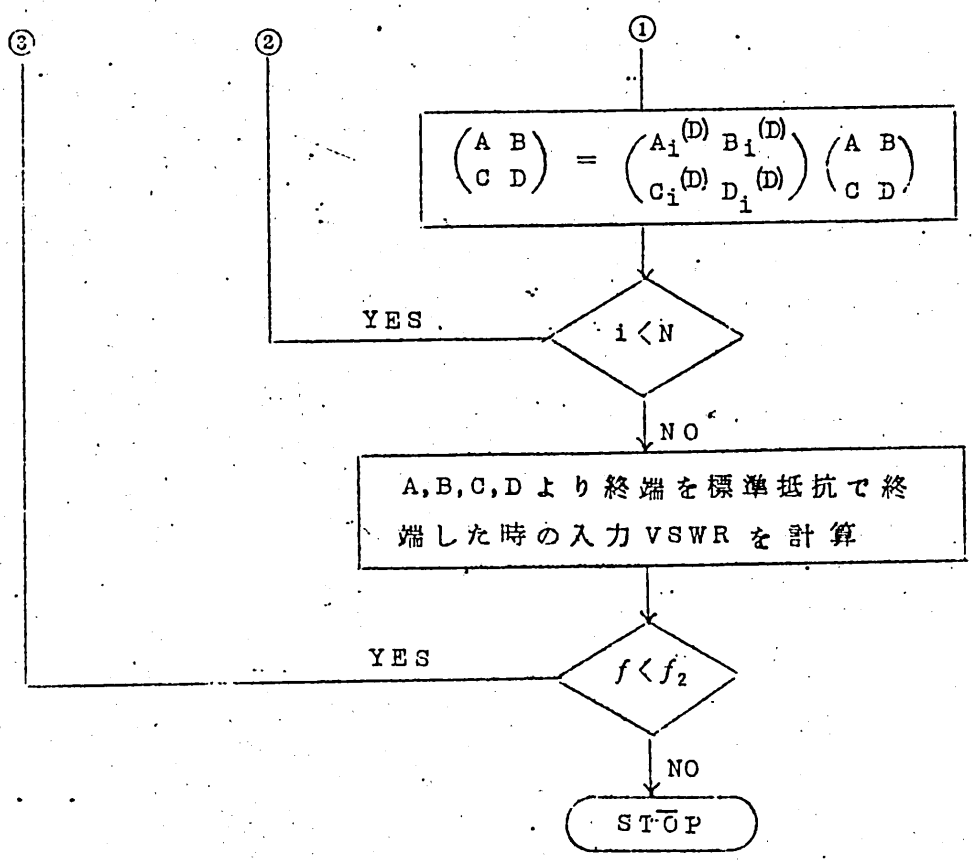

③
②
①
$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i^{(D)} & B_i^{(D)} \\ C_i^{(D)} & D_i^{(D)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$
YES
i < N
NO
A,B,C,D より終端を標準抵抗で終端した時の入力 VSWR を計算
YES
$f < f_2$
NO
STOP

図-2 TR-1800 送受信機 (600mm) ANT VSWR Simulation 結果

F(MHz)	VSWR-1	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
450.0	0.0228	+	+	+	+	+
450.5	0.1027	+	+	+	+	+
451.0	0.0102	+	+	+	+	+
451.5	0.0733	+	+	+	+	+
452.0	0.0535	+	+	+	+	+
452.5	0.0537	+	+	+	+	+
453.0	0.0081	+	+	+	+	+
453.5	0.0359	+	+	+	+	+
454.0	0.0252	+	+	+	+	+
454.5	0.0274	+	+	+	+	+
455.0	0.0748	+	+	+	+	+
455.5	0.0516	+	+	+	+	+
456.0	0.0329	+	+	+	+	+
456.5	0.0456	+	+	+	+	+
457.0	0.0293	+	+	+	+	+
457.5	0.0203	+	+	+	+	+
458.0	0.0118	+	+	+	+	+
458.5	0.0288	+	+	+	+	+
459.0	0.0126	+	+	+	+	+
459.5	0.0041	+	+	+	+	+
460.0	0.0144	+	+	+	+	+
460.5	0.0032	+	+	+	+	+
461.0	0.0013	+	+	+	+	+
461.5	0.0011	+	+	+	+	+
462.0	0.0047	+	+	+	+	+
462.5	0.0108	+	+	+	+	+
463.0	0.0152	+	+	+	+	+
463.5	0.0179	+	+	+	+	+
464.0	0.0241	+	+	+	+	+
464.5	0.0229	+	+	+	+	+
465.0	0.0328	+	+	+	+	+
465.5	0.0505	+	+	+	+	+
466.0	0.0483	+	+	+	+	+
466.5	0.0529	+	+	+	+	+
467.0	0.0433	+	+	+	+	+
467.5	0.0246	+	+	+	+	+
468.0	0.1034	+	+	+	+	+
468.5	0.0184	+	+	+	+	+
469.0	0.0536	+	+	+	+	+
469.5	0.0445	+	+	+	+	+
470.0	0.0020	+	+	+	+	+
470.5	0.0527	+	+	+	+	+
471.0	0.0160	+	+	+	+	+
471.5	0.0803	+	+	+	+	+
472.0	0.0307	+	+	+	+	+
472.5	0.0291	+	+	+	+	+
473.0	0.0347	+	+	+	+	+
473.5	0.0100	+	+	+	+	+
474.0	0.0466	+	+	+	+	+
474.5	0.0322	+	+	+	+	+
475.0	0.0732	+	+	+	+	+
475.5	0.0333	+	+	+	+	+
476.0	0.0163	+	+	+	+	+
476.5	0.0125	+	+	+	+	+
477.0	0.0073	+	+	+	+	+
477.5	0.0206	+	+	+	+	+
478.0	0.0057	+	+	+	+	+
478.5	0.0050	+	+	+	+	+
479.0	0.0018	+	+	+	+	+
479.5	0.0024	+	+	+	+	+

F(MHz)	VSWR-1	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
480.0	0.0046	+	+	+	+	+
480.5	0.0126	+	+	+	+	+
481.0	0.0104	+	+	+	+	+
481.5	0.0141	+	+	+	+	+
482.0	0.0246	+	+	+	+	+
482.5	0.0182	+	+	+	+	+
483.0	0.0388	+	+	+	+	+
483.5	0.0660	+	+	+	+	+
484.0	0.0341	+	+	+	+	+
484.5	0.0519	+	+	+	+	+
485.0	0.0195	+	+	+	+	+
485.5	0.0505	+	+	+	+	+
486.0	0.0155	+	+	+	+	+
486.5	0.0812	+	+	+	+	+
487.0	0.0555	+	+	+	+	+
487.5	0.0870	+	+	+	+	+
488.0	0.0166	+	+	+	+	+
488.5	0.0856	+	+	+	+	+
489.0	0.0847	+	+	+	+	+
489.5	0.0633	+	+	+	+	+
490.0	0.0276	+	+	+	+	+
490.5	0.0639	+	+	+	+	+
491.0	0.0781	+	+	+	+	+
491.5	0.0532	+	+	+	+	+
492.0	0.0240	+	+	+	+	+
492.5	0.0324	+	+	+	+	+
493.0	0.0145	+	+	+	+	+
493.5	0.0457	+	+	+	+	+
494.0	0.0396	+	+	+	+	+
494.5	0.0861	+	+	+	+	+
495.0	0.0148	+	+	+	+	+
495.5	0.0085	+	+	+	+	+
496.0	0.0174	+	+	+	+	+
496.5	0.0059	+	+	+	+	+
497.0	0.0050	+	+	+	+	+
497.5	0.0010	+	+	+	+	+
498.0	0.0013	+	+	+	+	+
498.5	0.0048	+	+	+	+	+
499.0	0.0091	+	+	+	+	+
499.5	0.0103	+	+	+	+	+
500.0	0.0057	+	+	+	+	+
500.5	0.0074	+	+	+	+	+
501.0	0.0474	+	+	+	+	+
501.5	0.0406	+	+	+	+	+
502.0	0.0390	+	+	+	+	+
502.5	0.0071	+	+	+	+	+
503.0	0.0269	+	+	+	+	+
503.5	0.0198	+	+	+	+	+
504.0	0.0313	+	+	+	+	+
504.5	0.0504	+	+	+	+	+
505.0	0.0828	+	+	+	+	+
505.5	0.0196	+	+	+	+	+
506.0	0.0749	+	+	+	+	+
506.5	0.0432	+	+	+	+	+
507.0	0.0023	+	+	+	+	+
507.5	0.0723	+	+	+	+	+
508.0	0.0259	+	+	+	+	+
508.5	0.0335	+	+	+	+	+
509.0	0.0143	+	+	+	+	+
509.5	0.1073	+	+	+	+	+
510.0	0.0494	+	+	+	+	+

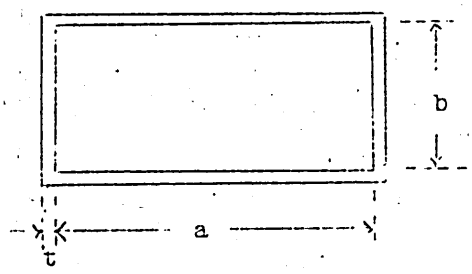
F(MHz)	VSWR-1
510.5	0.0241
511.0	0.0253
511.5	0.0419
512.0	0.0250
512.5	0.0243
513.0	0.0357
513.5	0.0556
514.0	0.0156
514.5	0.0074
515.0	0.0103
515.5	0.0060
516.0	0.0034
516.5	0.0009
517.0	0.0029
517.5	0.0043
518.0	0.0031
518.5	0.0150
519.0	0.0063
519.5	0.0249
520.0	0.0662
520.5	0.0218
521.0	0.0456
521.5	0.0220
522.0	0.0504
522.5	0.0519
523.0	0.0305
523.5	0.0313
524.0	0.0056
524.5	0.0382
525.0	0.0473
525.5	0.0446
526.0	0.0490
526.5	0.0256
527.0	0.0106
527.5	0.0369
528.0	0.0525
528.5	0.0392
529.0	0.0705
529.5	0.0376
530.0	0.0513
530.5	0.0093
531.0	0.0504
531.5	0.0282
532.0	0.0319
532.5	0.0241
533.0	0.0562
533.5	0.0174
534.0	0.0077
534.5	0.0176
535.0	0.0064
535.5	0.0037
536.0	0.0116
536.5	0.0046
537.0	0.0043
537.5	0.0059
538.0	0.0230
538.5	0.0017
539.0	0.0151
539.5	0.0228
540.0	0.0247
540.5	0.0333

F(MHz)	VSWR-1
541.0	0.0649
541.5	0.0276
542.0	0.0342
542.5	0.0059
543.0	0.0613
543.5	0.0640
544.0	0.0755
544.5	0.0126
545.0	0.0513
545.5	0.0251
546.0	0.0578
546.5	0.0732
547.0	0.0519
547.5	0.0707
548.0	0.0171
548.5	0.0256
549.0	0.0576
549.5	0.0510
550.0	0.0138
550.5	0.0500
551.0	0.0543
551.5	0.0312
552.0	0.0220
552.5	0.0376
553.0	0.0728
553.5	0.0266
554.0	0.0118
554.5	0.0144
555.0	0.0051
555.5	0.0036
556.0	0.0012
556.5	0.0039
557.0	0.0044
557.5	0.0057
558.0	0.0232
558.5	0.0012
559.0	0.0151
559.5	0.0218
560.0	0.0215
560.5	0.0304
561.0	0.0534
561.5	0.0051
562.0	0.0269
562.5	0.0229
563.0	0.0241
563.5	0.0104
564.0	0.1010
564.5	0.0449
565.0	0.0424
565.5	0.0457
566.0	0.0276
566.5	0.0074
567.0	0.0155
567.5	0.0366
568.0	0.0449
568.5	0.0339
569.0	0.1046
569.5	0.0460
570.0	0.0325

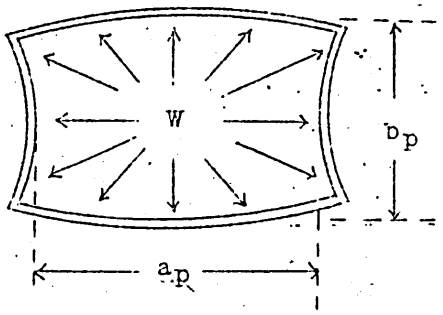
2－2　導波管の内圧による変形

通常導波管内には乾燥空気が封入されるので，その内圧による導波管の変形及びそれに関連して導波管肉厚の選定を選定することは導波管設計にあたつて充分考慮されなければならない。

図－3(a)に示す方形導波管の内部に加圧（内圧W）すると図－3(b)に示す如き変形をする。この変形量は，すでに計算されており次の如く与えられる。



図－3(a)
非加圧導波管



図－3(b)
加圧導波管

$$y_a = \frac{(1-\mu^2)W}{E}\left\{\frac{5}{32}\frac{a^4}{t^3} - \frac{a^2(a^3+b^3)}{8(a+b)t^3}\right\} \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y_b = \frac{(1-\mu^2)W}{E}\left\{\frac{5}{32}\frac{b^4}{t^3} - \frac{b^2(a^3+b^3)}{8(a+b)t^3}\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

ただし，y_a，y_b は下式によって定義される変位量である。

$$a_p = a + 2y_b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$b_p = b + 2y_a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

又，Eは材料のヤング率，μはポアソン比である。

発生する最大曲げ応力は支点部に発生し(5)式となる。

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Z} = \frac{(1-\mu^2)W(a^3+b^3)}{2t^2(a+b)} \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

但し，Z；断面係数

$$= I \Big/ \frac{t}{2}$$

となり，以上よりたわみ量が計算できる。

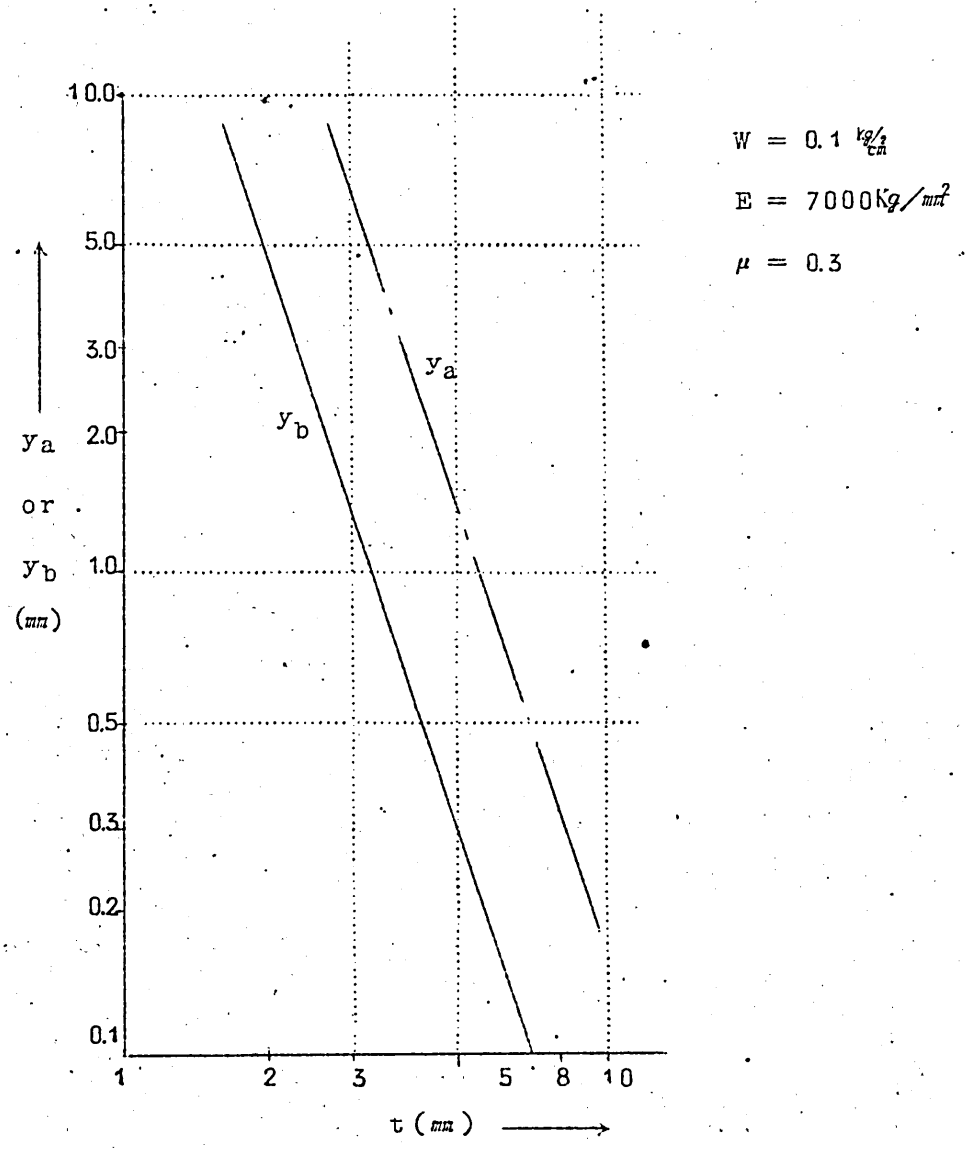
UHF 帯導波管の材料は Aℓ で考えられているので

$E = 7000\ Kg/mm^2$

$\mu \fallingdotseq 0.3$

として　W=0.1 kg/cm の時の肉厚 t に対する変位 y_a, y_b の計算結果を WR−1500 の場合について図−4 に示す。

これよりより電気特性に影響を及ぼさない程度に加圧値及び肉厚を決定すれば良い。



図−4　WR−1500 の内圧による変形

2－3　導波管伝送による波形歪

導波管の遅延時間は

$$\tau = \frac{\ell}{C} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2}} \qquad \text{(6)}$$

但　ℓ ＝導波管の長さ

C ＝光速

ωc ＝遮断角周波数

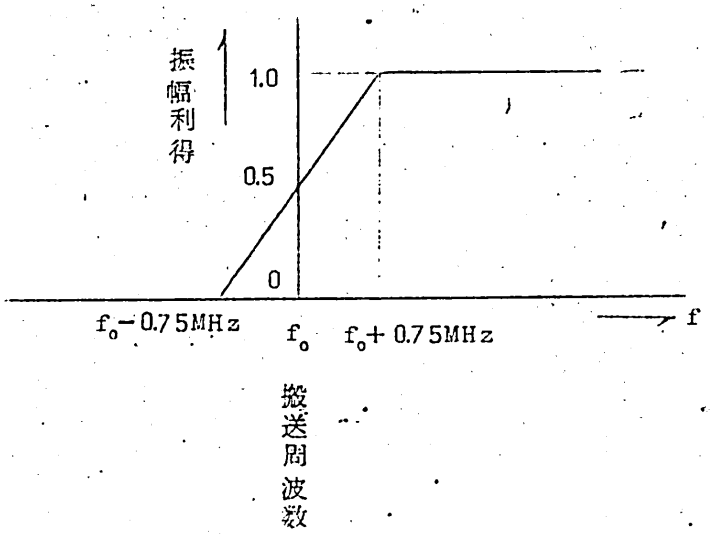
ω ＝角周波数

で与えられる。これより，遅延時間では，周波数に比例していないことがわかる。

この分散性により,導波管中を波が伝播すると当然，波形歪を受ける。この波形歪は，伝送波を周波数成分に分解し，各成分波について伝播特性を計算し，その後これらを合成することにより計算することが出来る。

ＴＶ波の伝送歪は，残留側帯波方式で伝送される故導波管に図－５に示された如き振幅利得特性を有する回路が接続されたものとして，通常のＡＭ変調方式として計算すれば良い。

計算例として



図－５　残留側波帯方式を表現する回路

$$e(t) = 0 \qquad |t| \geqq \frac{T}{2}$$
$$= \cos^2\left(\pi \frac{t}{T}\right) \qquad |t| \leqq \frac{T}{2} \quad \text{-------- (7)}$$

で現わされる所謂Tパルスを伝送した時の計算例を図－6に示した。

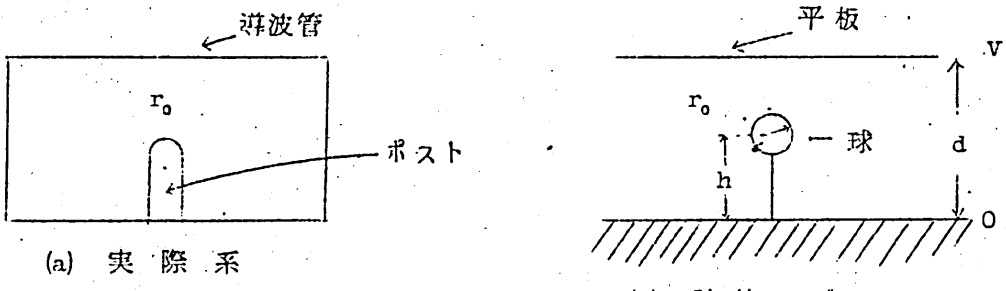
なお，同図ではT＝0.25μS，導波管はWR－1500で長さは80m，搬送周波数は471.25MHZ（13ch）とした。同図 a ）は無歪のTパルス b ）は導波管による伝送歪を受けた波形である。

2－4　導波管の耐圧

導波管及び部品の伝送電力を制限する要素としては温度上昇及び電圧破壊が考えられる。通常は温度上昇が主要素である。このことは，WR－1500 標準型アルミ直線導波管の場合温度上昇25℃以下とすると500 MHz にて約350KWの電力容量をもつているのに対し破壊電圧より制限される伝送電力は約250MW であることからも容易に推察される。

一方導波管及び導波管部品の調整においては容量性ポストが用いられる事が非常に多い。この時ポストの先端に電界集中が生ずるので大電力伝送を問題にする場合には電圧破壊による伝送電力の制限が問題にならぬ様にしておかねばならない。本節では先端を球状に丸くしたポストについて球の径が波長に比して充分小として静電近似により解析を行なう。

図－7 a に示す様に方形導波管の中に容量性ポストを挿入し，その先端を半径 r_0 の半球をなす様にしたものを



(a) 実際系　　(b) 計算モデル

図 － 7

同図(b)に示すモデルの様に導波管を平行平板で置換え,ポストを半径r_0なる球で置換えそれを接地し電位を零に保つたものとする。

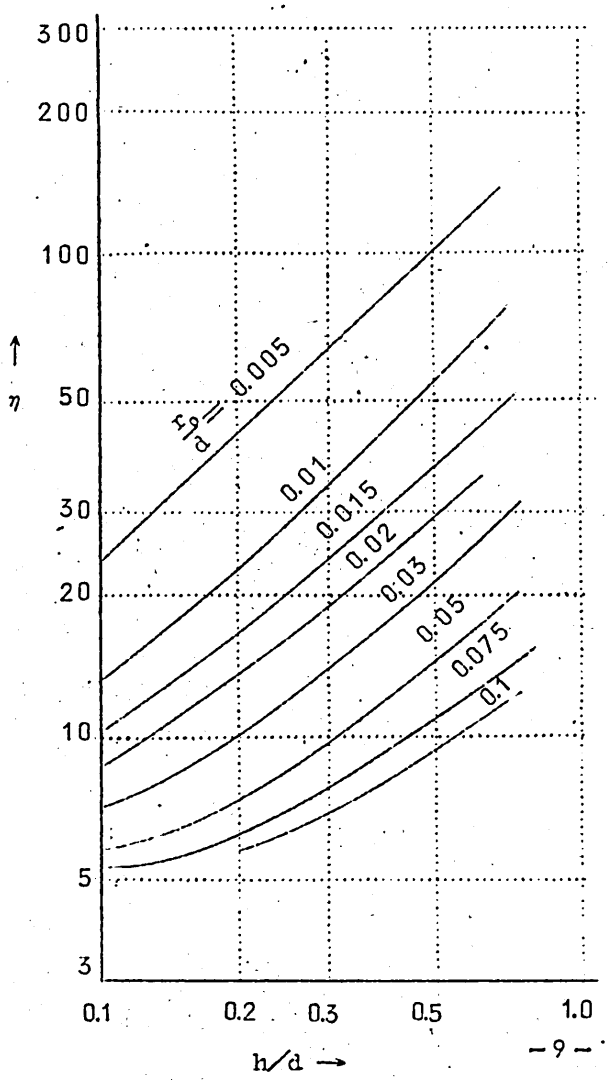
解析の結果最大電界は(8)式の如くなる。

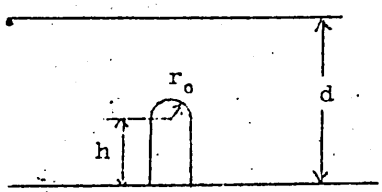
$$|Ermax| = \left[3 + \frac{\frac{h}{r_0}}{1 - \frac{r_0}{2h} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_0 h^2}{id\{(id)^2 - h^2\}}} \right] \frac{V}{d}$$

$$= \eta \frac{V}{d} \qquad \text{----------} \quad (8)$$

(8)式の右辺のV/dは導体の存在しない時の平等電界の値であるからηは電界集中係数とも言うべきものである。

(8)式にてh/d，r_0/dをパラメーターとして計算したηの値を図－8に示す。





図－8　容量性ポストの電界集中係数

通常 UHF帯導波管の調整に用いられるM35 ボルトを例にとり考えてみると，導波管をWR－1500とし（d ＝1905 mm ）ボルト挿入長(h) 40mm，ボルト先端等価半径（ r_0 ）3 mm として図－8より電界集中係数 η を計算すると η ＝18となる。この電界集中により制限される伝送電力は約770KWとなり実用上問題とならない。但しボルトの先端が鋭い場合や挿入長が長い場合には図－8より η を算出し電圧破壊に注意しておかねばならない。

2－5　導波管の単長

一定単長の導波管を多数接続した時，接続点に微小反射が発生し入力端に於けるVSWR が特定の周波数に於てピークを生ずる事は良く知られている。

本章では接続点での反射の位相が総て同一であるとした時の導波管単長とピーク周波数の関係をWR－1500の場合につき計算した結果を示す。

接続点での反射が入力端でピークとなるのは導波管単長を ℓ ,管内波長を λg とし

$$\ell = n\frac{\lambda g}{2} \qquad (9)$$

$$n = 1, 2, 3 \cdots$$

が成立する時である。

(9)を満足する周波数fは

$$f = fc\sqrt{1+\left(\frac{n\lambda c}{2\ell}\right)^2} \qquad (10)$$

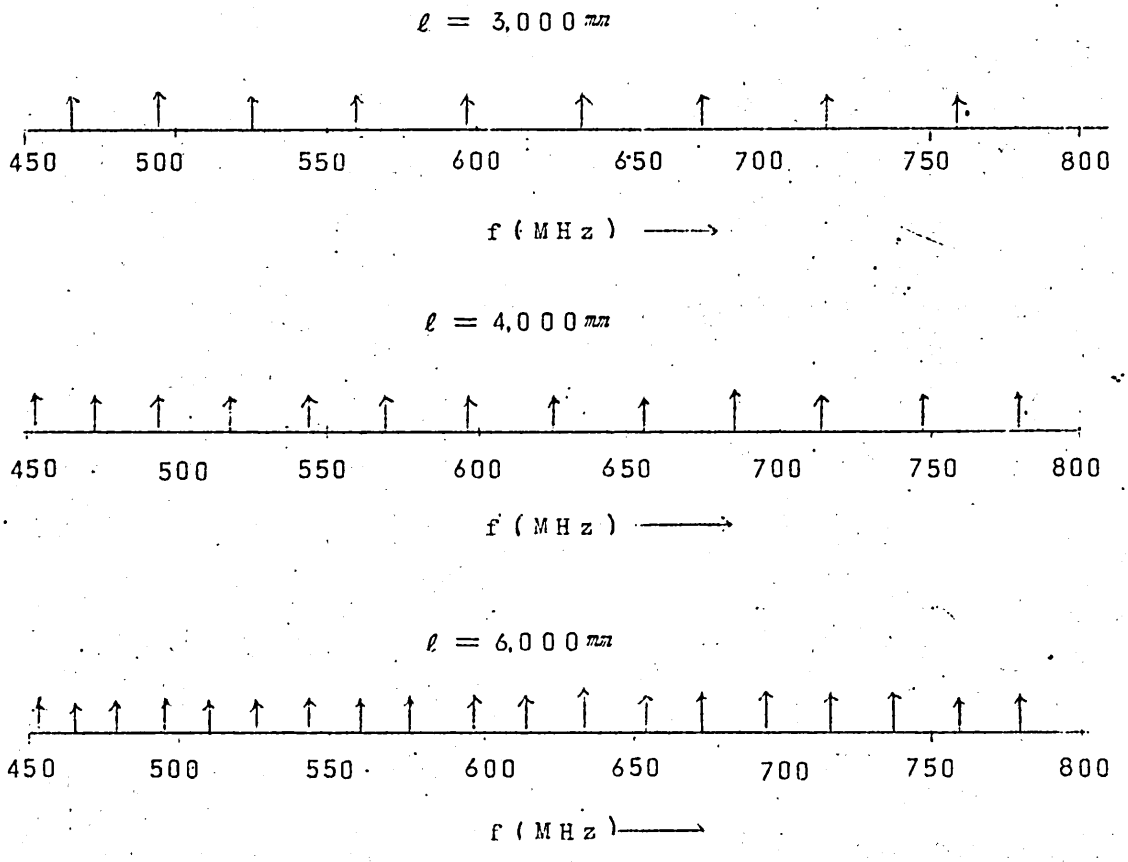
fc ：しや断周波数

λc ：しや断波長

λ ：自由空間波長

で与えられる。

WR－1500の場合につき( )式を計算しℓとfの関係を図－9に示す。



図－9 導波管単長と接続点反射が重なる周波数の関係/実用的には使用周波数帯にピークとなる周波数が生じるのを避ける様に単長を選べばよい。

3. 導波管部品のVSWR－f特性

3.1 直線導波管

前章までの導波管設計に関する諸検討をもとにして，WR－1500標準型直線導波管を製作した。その諸量を表－1に示す。

表－1 WR－1500導波管諸量

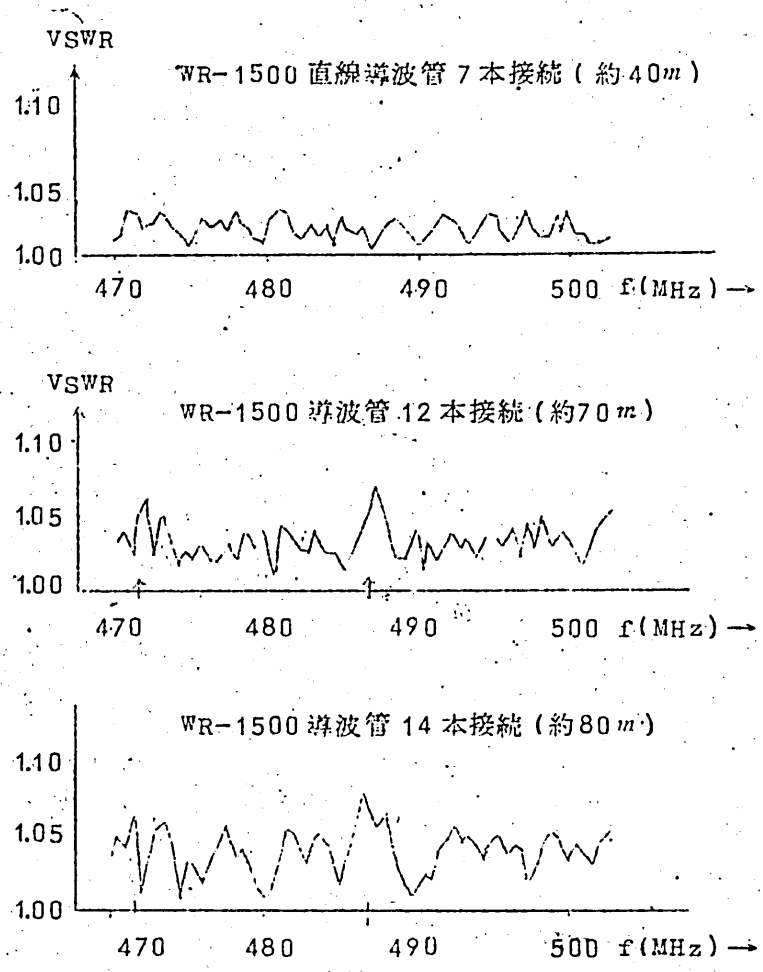
内径寸度	381.0×190.5㎜
材質	アルミニウム
単長	約6000㎜

WR－1500直線導波管の7本接続（約40m）12本接続（約70m）及び14本接続（約80m）時のVSWR－f特性を図－10に示す。測定は同軸導波管変換器を用いてλg/4（480MHz）半直で測定系の影響を除いて測定を行つた。

表－2に示す如くこの直線導波管は良好なVSWR－f特性を示している。尚フランジ面での反射の重なりは接続本数が10数本になるとその傾向が表われてくる。

接続本数	長　さ	帯　域	VSWR	VSWRピーク値
7本	約40m	30MHz以上	1.03	－
12本	約70m	〃	1.05	1.07
14本	約80m	〃	1.055	1.08

図－10WR－1500直線導波管VSWR－f特性

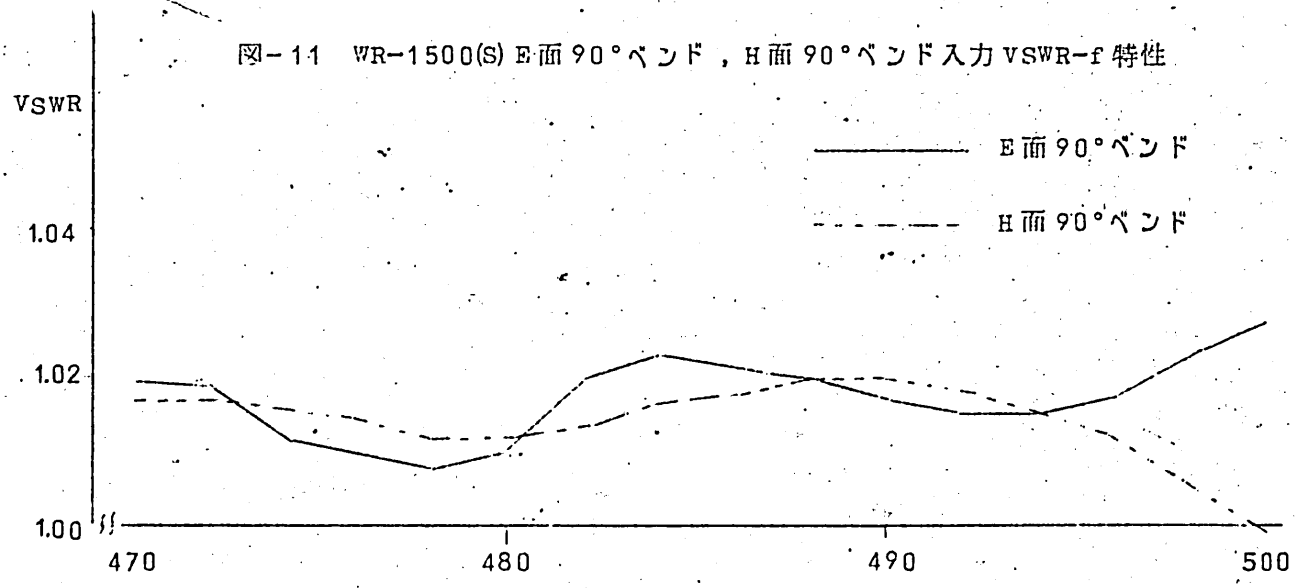


3－2　部　　品

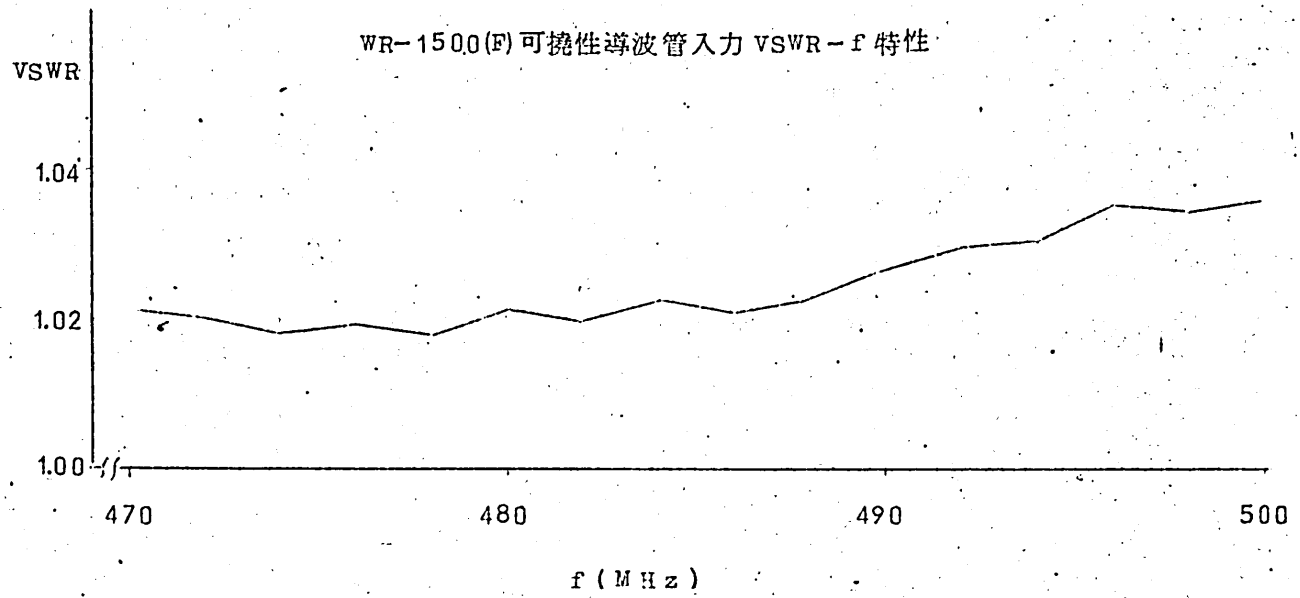
主給電線として導波管を用いる場合には直線導波管の他に曲り，可撓性導波管，分配回路ガス止めなどが必要となる。

図－11にWR－1500標準型E，Hベンド，WR－1500偏平型可撓性導波管のVSWR－f特性を示す。

図－11　WR-1500(S) E面90°ベンド，H面90°ベンド入力VSWR-f特性



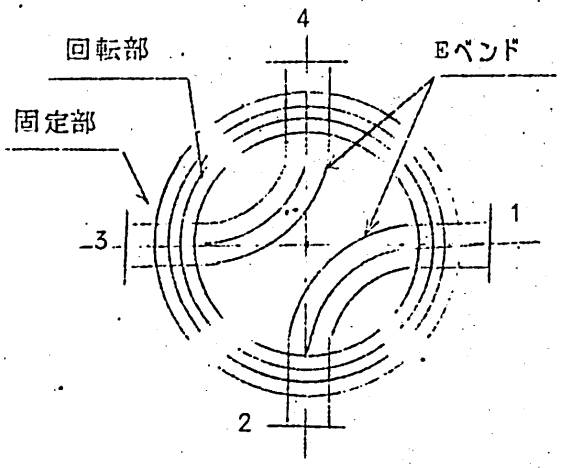
WR-1500(F)可撓性導波管入力VSWR－f特性



4. 導波管切替器

4－1 導波管切替器の構造

導波管切替器の構造は図－12に示す様に回転部に2組のWR－1500偏平型（断面寸度381.0×95.25㎜）Eベンドをもち，これを90度機械的に回転させて切替えを行うものである。



図－12

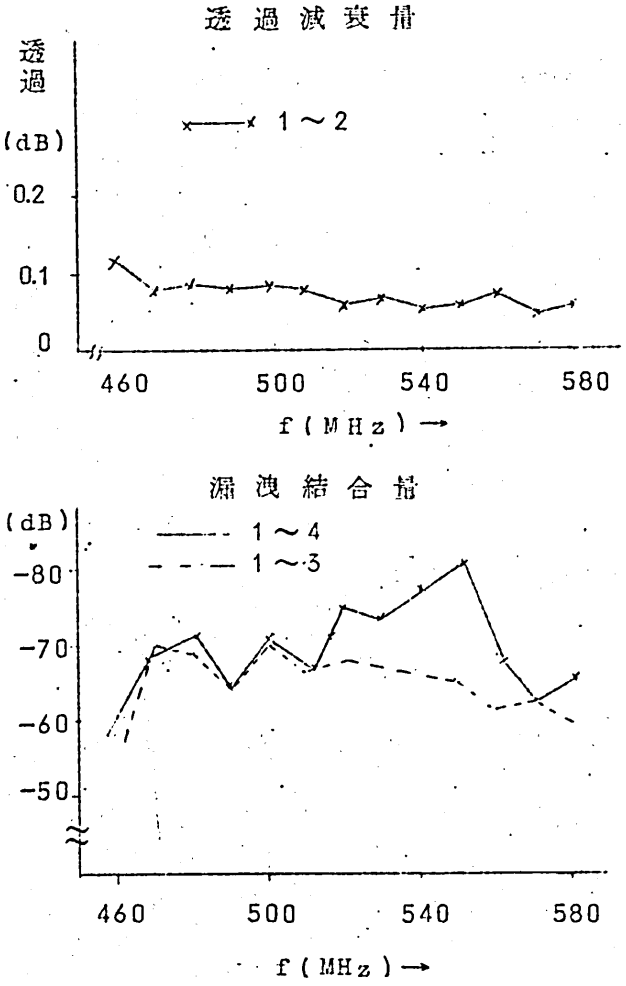
ベンドと固定端子の間はチョークフランジによる非接触結合である。チョークフランジは導波管の端部に2枚のバットフランジを平行に取付け回転曲面にそつて曲げている。導波管の端面とフランジ端部の距離は $\frac{1}{4}\lambda g$ になつており，フランジ端部と内側フランジが先端短絡 $\frac{1}{2}\lambda g$ 線路となりチョークの作用を示すものである。

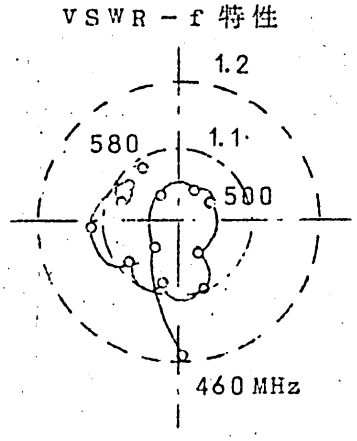
図－12の構造のものに駆動部及び金属ケースをとりつけた製品としての切替器の寸度は高さ1100㎜で800㎜角である。

4－2 電気特性

切替器に要求される電気特性のうち重要なものは透過減衰量，各線路間の漏洩結合量，入力VSWRの周波数特性である。図－13にこれらの諸特性を示す様に透過減衰量0.1dB以下漏洩結合量－60dB使用比帯175％のものが得られた。尚入力VSWR－f特性は固定端子に同軸－導波管変換器を取付け同軸系より測定を行つた。

図－１３　導波管切替器特性





5 むすび

以上一通りUHF帯の導波管及び諸部品の設計に関連する問題及び試作品の特性の実測結果を述べた。完全な設計指針を作り上げることは相当困難な仕事で，今後更に検討を重ねて行かねばならないが，本文に述べた範囲でも御参考になれば幸と思う。

6 参考文献

1) " Deflection of Waveguide Subjected to Internal Pressure "
IRE Trans. Vol. MTT-5 Oct., 1957

輻射科学研究会資料

分布結合線路を用いた新しい光変調方式

岩　崎　敬一郎
倉　薗　貞　夫
熊　谷　信　昭
（大阪大学・工学部）

1971年7月2日

1. はしがき

レーザを通信，計測その他情報処理等へ応用するためには，低損失光伝送線路の開発と並行して各種の光回路素子を開発する必要がある．光変調器はこれらの光回路素子のなかでも，もっとも重要な基本的回路素子の１つであって，これまでにも多くの提案がなされている[1]．

光変調器に要求される実上用の諸条件としては，その構造や幾何学的寸法などが適当で，製作技術上少なくとも実現の可能性がなければならないこのの他に，所要の変調電力ができるだけ少ないことや，目的によっては広帯域特性を有すること，変調周波数が高いこと等があげられる．

一方，最近の光回路素子は，マイクロ波帯やミリ波帯における回路素子と同様に集積回路化の方向に進んでおり，いわゆる Integrated Optics の研究開発が積極的に進められている[2]．

本文では，上記のような諸要求にできるだけ適合した光変調器として，２つの光ＩＣ線路を分布結合させた光ＩＣ線路間の媒質定数を電気的に変化することによって光波を変調する形式の変調器を提案し，その動作原理，理論的特性等について述べる．このような形式の変調器によれば，たとえば結合部分の結晶として $LiTaO_3$ を用い，結合部の長さを約５ｃｍ程度とした場合，理論上約５volt程度以下の変調電圧で１００％変調が可能である．

2. 動作原理

S. E. Miller のモード結合理論によれば[3]，軸方向に一様で線路定数の相等しい２つの無損失線路１および２の間に結合がある場合，結合部の始端における線路１の電力は結合部を伝送方向に進むに従って，しだいに線路２の方へ移行し，ある特定の距離において線路１の電力は完全に線路２へ移る．その後は逆に線路２の電力が線路１の方へ再変換され，以下特定の距離ごと

に線路１，２間で電力の受授がくりかえされる．線路１から線路２へ１００％電力が移行する最小の結合長（最小完全結合長）は２つの線路間の結合係数によって一義的に定まる．

いま，図１(a)に示すように屈折率n_1なる２本の誘電体光ＩＣ線路を屈折率n_3なる媒質を介して分布結合させた場合を考える．入力端①から入射された光は２つの線路間の結合係数Cおよび結合長L_1に応じて出力端③および④に一定の割合で分割される．そこで２線路間の媒質を電気光学効果をもった媒質とし，外部電界をかけることによってその屈折率を変化させると線路間の結合係数が変化し，完全結合長が変わる．最小完全結合長をL_0とすれば，結合長L_1が

$$L_1 = 2nL_0, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots\cdots \tag{1}$$

なる場合には出力はすべて端子③のみに現われ，④には現われない．また

$$L_1 = (2n-1)L_0 \tag{2}$$

なる場合には出力は端子④のみに現われ，③には現われない．したがって外部電界の強さを最小限L_0の値が$L_1/2n$から$L_1/(2n-1)$となるまで変化させると，端子③の出力光は１００％変調をうけることになる．

また，結合させる２つの光線路の一方または両方の位相定数の値を変調信号によって適当な方法で変化させることによっても結合係数および位相定数の差が変化し，したがって前記の場合と同様に２つの光線路間で電力の移行が行なわれる．したがって，たとえば図１(b)のような構成の光ＩＣ結合線路を用いた光変調器を考えることもできる．

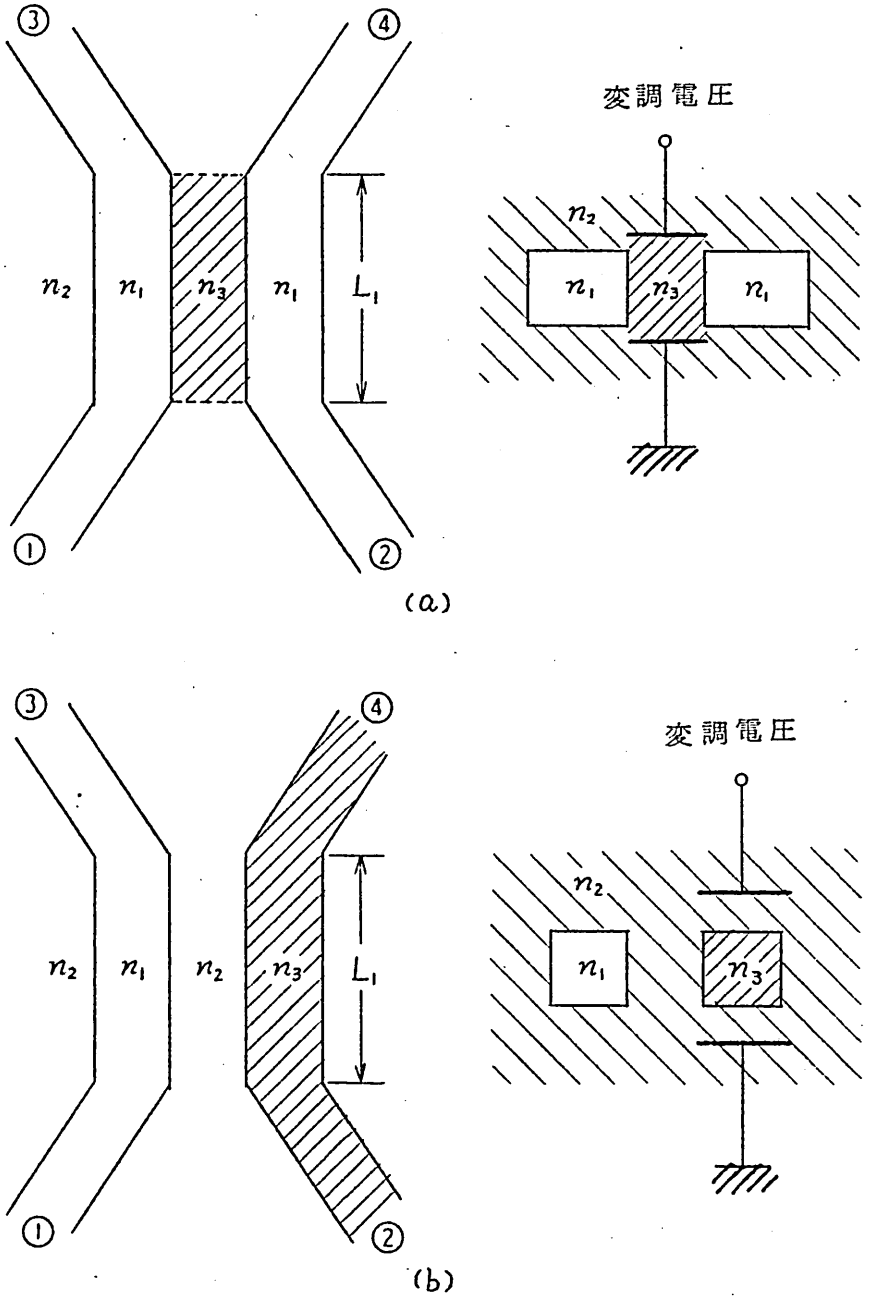


図１　分布結合線路を用いた光変調器の原理的構成

3. 設 計 理 論

3・1 結 合 係 数

図2において，媒質Ⅰ，ⅡおよびⅢの屈折率の差が非常に小さい場合，すなわち

$$\frac{n_1}{n_2} - 1 \ll 1 \quad \text{かつ} \quad n_2 \cong n_3 \tag{3}$$

の場合，光線路に沿って伝送可能なモードはほとんどTEM波に近い E^x_{pq} モードと E^y_{pq} モードとにわけられる．ただし添字 x および y は偏波方向を示し，p および q はそれぞれ x および y 方向における界分布の変化の数を表わす．

さて，このような2線路間の結合係数 C は

$$C = \frac{2}{a} \cdot \frac{k_1}{k_z} \cdot \left(\frac{k_x A_3}{\pi}\right)^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \left(\frac{k_x A_3}{\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{\pi c}{A_3}\left[1 - \left(\frac{k_x A_3}{\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\pi}{2L_0} \cdot \tag{4}$$

で与えられる[4]

ただし

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \frac{p\pi}{a}\left(1 + \frac{A_2 + A_3}{\pi a}\right)^{-1} \\ k_y &= \frac{q\pi}{b}\left(1 + \frac{2n_2^2 A_2}{\pi n_1^2 b}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} E^y_{pq}\ \text{モード}$$

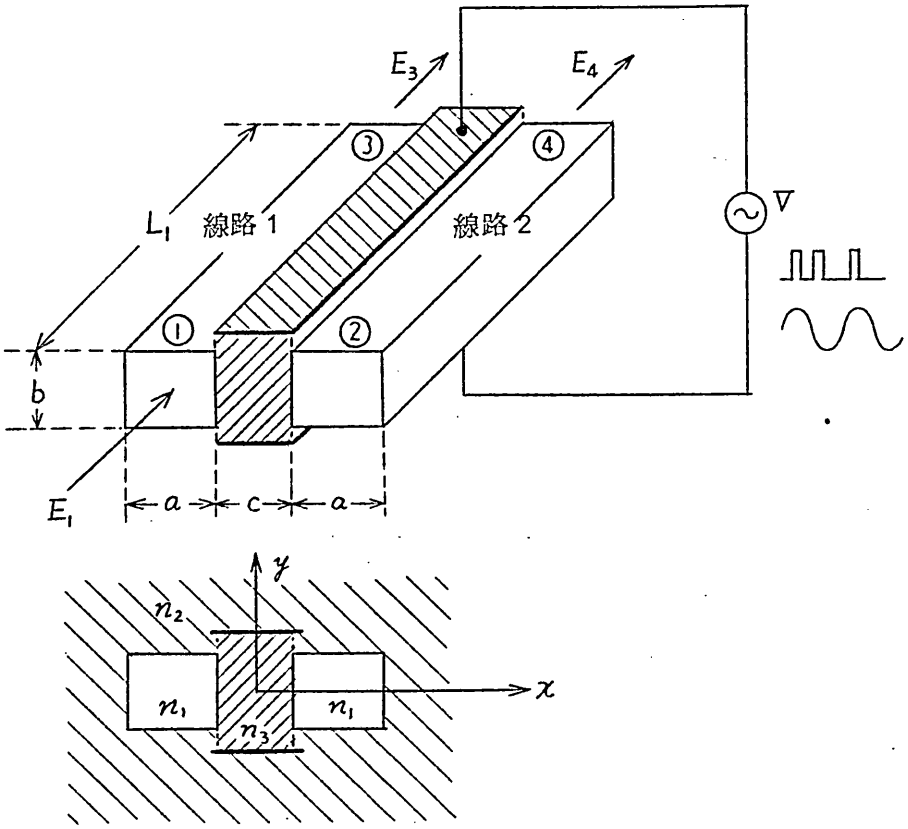
$$\left.\begin{aligned} k_x &= \frac{p\pi}{a}\left(1 + \frac{n_2^2 A_2 + n_3^2 A_3}{\pi n_1^2 a}\right)^{-1} \\ k_y &= \frac{q\pi}{b}\left(1 + \frac{2A_2}{\pi b}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} E^x_{pq}\ \text{モード} \tag{5}$$

$$k_z^2 = k_1^2 - k_x^2 - k_y^2$$

$$A_i = \frac{\lambda}{2(n_1^2 - n_i^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad i = 1, 2$$

λ：自由空間波長

である．



n_1 —— 誘電体光ＩＣ線路の屈折率　　（媒質Ⅰ）

n_2 —— 周囲の媒質の屈折率　　（媒質Ⅱ）

n_3 —— 電気光学効果を有する媒質の屈折率（媒質Ⅲ）

図２　分布結合形光変調器

さて，2線路間の媒質Ⅲの屈折率が n_3 および $n_3(1+\delta_0)$（ただし $\delta_0 \ll 1$）の時の最小完全結合長をそれぞれ L_{01} および L_{02} とすれば，式(4)および(5)より最低次モードについて

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{L_{02}}{L_{01}}=\exp\left\{-\pi\left(\frac{n_1^2}{n_3^2}-1\right)^{-1}\cdot\frac{c\delta_0}{A_3}\cdot\left[1-\left(\frac{2}{\pi}+\frac{a}{A_3}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (6)$$

なる関係が成立する．

また，上記のような誘電体線路が単独に存在する場合の電力集中度を，線路中（媒質Ⅰの領域中）を通る電力と全伝送電力との比で定義し，これを ρ と表わせば

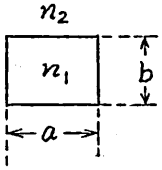
$$\rho=\frac{1+\dfrac{\sin k_x a}{2k_x a}}{1+\dfrac{\sin k_x a}{2k_x a}+\left\{\left(\dfrac{\pi a}{A_3}\right)^2-k_x^2a^2\right\}^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi a}{A_3}\right)^2-k_x^2a^2\right\}^{\frac{1}{2}}}} \quad (7)$$

となる．

いまの場合，線路には最低次モードのみが伝送されることが望ましい．最低次モードすなわち E_{11}^x モードまたは E_{11}^y モードのみを伝送可能とするためには，たとえば幅 a を表1の値以下とすればよい．[4], [5]

表1　最低次モードのみ伝送される線路

	$\frac{n_1}{n_2}=1.0001$	$\frac{n_1}{n_2}=1.001$	$\frac{n_1}{n_2}=1.01$
$a=b$	$48.4\times\frac{\lambda}{n_1}$	$15.3\times\frac{\lambda}{n_1}$	$4.9\times\frac{\lambda}{n_1}$
$a=2b$	60.0	19.0	6.1
$a=4b$	84.8	26.8	8.5



3・2　屈折率の変化量

図2において端子①から単位振幅の光を入射した時，端子③および④の出力振幅E_3およびE_4は次の様に表わされる.[3]

$$E_3 = \cos(CZ) \cdot e^{-i(C+\beta)Z} \tag{8}$$

$$E_4 = i \sin(CZ) \cdot e^{-i(C+\beta)Z} \tag{9}$$

ただし

C：式(4)で与えられる結合係数

β：結合系における位相定数

図3に屈折率の変化による端子③の出力振幅E_3の変化の様子を示す.

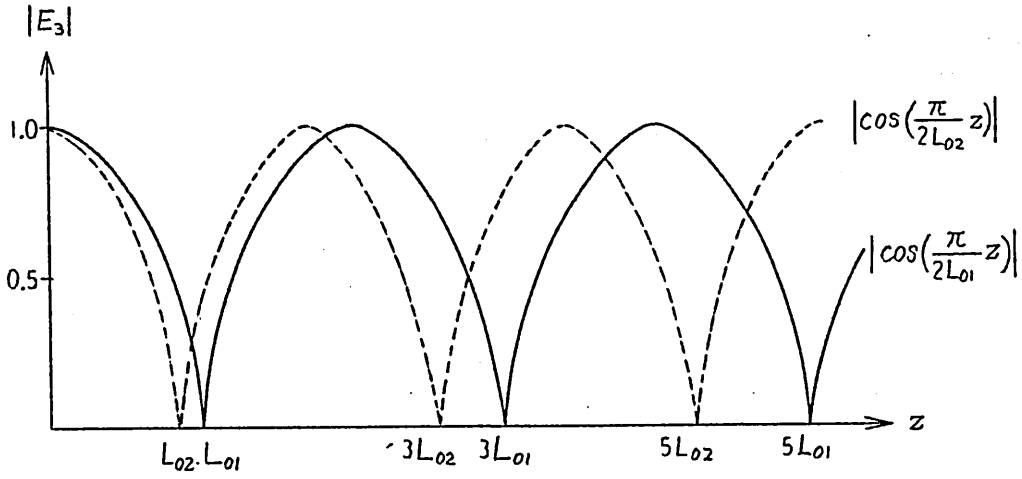


図3　結合長と出力振幅E_3の関係

結合部の長さを$(2n-1)L_{01}$，($n=1, 2, 3\cdots\cdots$) に選ぶと，結合部の終端における端子③の出力振幅は

$$|E_3| = \begin{cases} 0 & (\text{屈折率 } n_3 \text{ の時}) \\ \\ \left|\cos\left\{\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\cdot\dfrac{L_{01}}{L_{02}}\right\}\right| & (\text{屈折率 } n_3(1+\delta_0) \text{ の時}) \end{cases} \tag{10}$$

となる．この場合，最小の屈折率の変化で $|E_3|$ を零から１まで変えるには，δ_0 が正のとき $L_{01} > L_{02}$ なることを考慮すると

$$\frac{L_{01}}{L_{02}} = \frac{2n}{2n-1}, \qquad n = 1, 2, 3\cdots\cdots \tag{11}$$

とすればよいことになり，このとき１００％変調に必要な屈折率変化は式(6)より

$$\delta_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{n_1^2}{n_3^2}-1\right)\cdot\frac{A_3}{c}\cdot\left[1-\left(\frac{2}{\pi}+\frac{a}{A_3}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\log\left(\frac{2n}{2n-1}\right) \tag{12}$$

となる．n（＝1, 2, 3‥‥）を大きく選べば屈折率の変化はわずかでよいことになるが，結合長が長くなり，また，吸収による損失増加の問題などが生じてくる．そこで $n = 1$，すなわち結合部の長さ L_1 を最小完全結合長 L_{01} とすれば１００％変調に必要な屈折率変化は

$$\delta_0 = 0.22\cdot\left(\frac{n_1^2}{n_3^2}-1\right)\cdot\frac{A_3}{c}\cdot\left[1-\left(\frac{2}{\pi}+\frac{a}{A_3}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{13}$$

となる．

３・３　変調電圧

電気光学効果をもった誘電体に電界 $\mathbf{E}$ をかけると屈折率 n は一般に

$$n = n_0 + n_1\cdot\mathbf{E} + n_2\cdot\mathbf{EE} + \cdots\cdots \tag{14}$$

で表わされるような変化を生じる．いまEに関して１次の項によるPockels効果を利用することとし，図２のように光の進行方向と変調用の電界がたがいに垂直な場合について考える．

効率よく変調を行なうには，Pockels 効果の大きな結晶を用いるのがよいことは当然であるが，同時に結晶軸の方向も適当に選ぶ必要がある．たとえばPockels 効果をもった材料として最近注目されている$LiTaO_3$ または$LiNbO_3$ を用いる場合を考えてみよう．図４のＡＢＣＤ面およびＥＦＧＨ面を電極として－Ｚ軸方向に電界を加えるものとする．この時の屈折率楕円体は

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{13}E_Z\right)(X^2+Y^2) + \left(\frac{1}{n_e^2} - r_{33}E_Z\right)Z^2 = 1 \qquad (15)$$

となり，主軸Ｘ，ＹおよびＺ方向に偏波面をもつ光に対する屈折率n_X, n_Y およびn_zはそれぞれ

$$n_X = n_Y = n_o\left(1 + \frac{1}{2}n_o^2 r_{13}E_Z\right) \qquad (16)$$

$$n_Z = n_e\left(1 + \frac{1}{2}n_e^2 r_{33}E_Z\right) \qquad (17)$$

となる．ただしn_o およびn_e はそれぞれ常光線，異常光線に対する屈折率であり，r_{13} およびr_{33} はPockels 係数である．

電界振動面がＺ方向である光を入射したとき，１００％変調を得るのに必要な印加電圧は式(13)，(17)より

$$V = bE_Z = \frac{0.44b}{n_e^2 r_{33}} \cdot \left(\frac{n_1^2}{n_e^2} - 1\right) \cdot \frac{A_3}{c} \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{\pi} + \frac{a}{A_3}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (18)$$

となる．

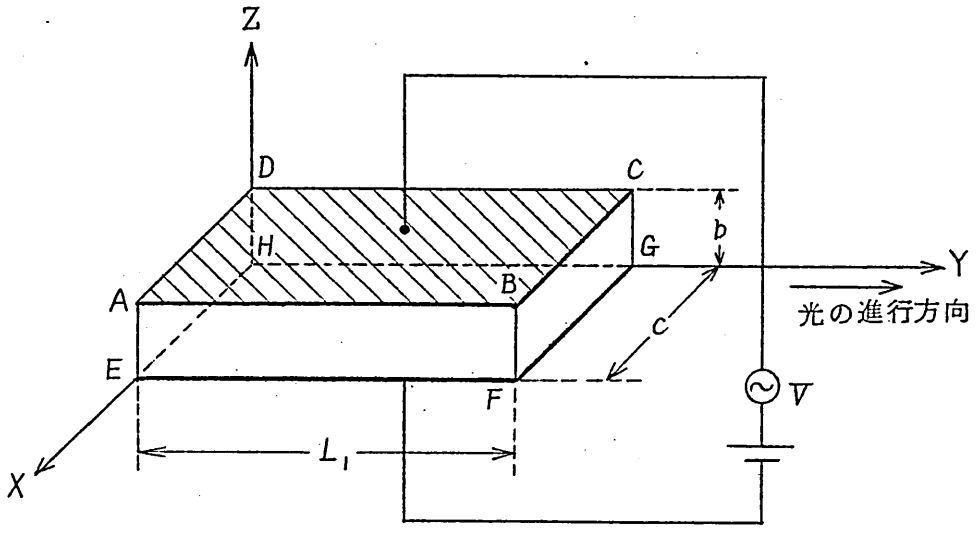


図4　$LiTaO_3$, $LiNbO_3$の結晶軸とcutting

また，ＫＤＰ系結晶を用いた場合は，$45°Z-$ cutを用いて，電界振動面がX'方向である光を入射したとき，同じく１００％変調を得るのに必要な印加電圧は

$$V=\frac{0.44b}{n_0^2\, r_{63}}\cdot\left(\frac{n_1^2}{n_0^2}-1\right)\cdot\frac{A_3}{c}\cdot\left[1-\left(\frac{2}{\pi}+\frac{a}{A_3}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (19)$$

となる．

4. 設　計　動　作　例

光変調器に用いる電気光学結晶としては，(i) 使用波長域で十分透明であること (ii) 光学的な均一性が高いこと (iii) 屈折率の温度依存性が少ないこと (iv) 屈折率および電気光学係数が大きいこと (v) 光損傷が少ないこと (vi) 必要な寸法の単結晶が得られること (vii) 潮解性がなく化学的・機械的に安定であ

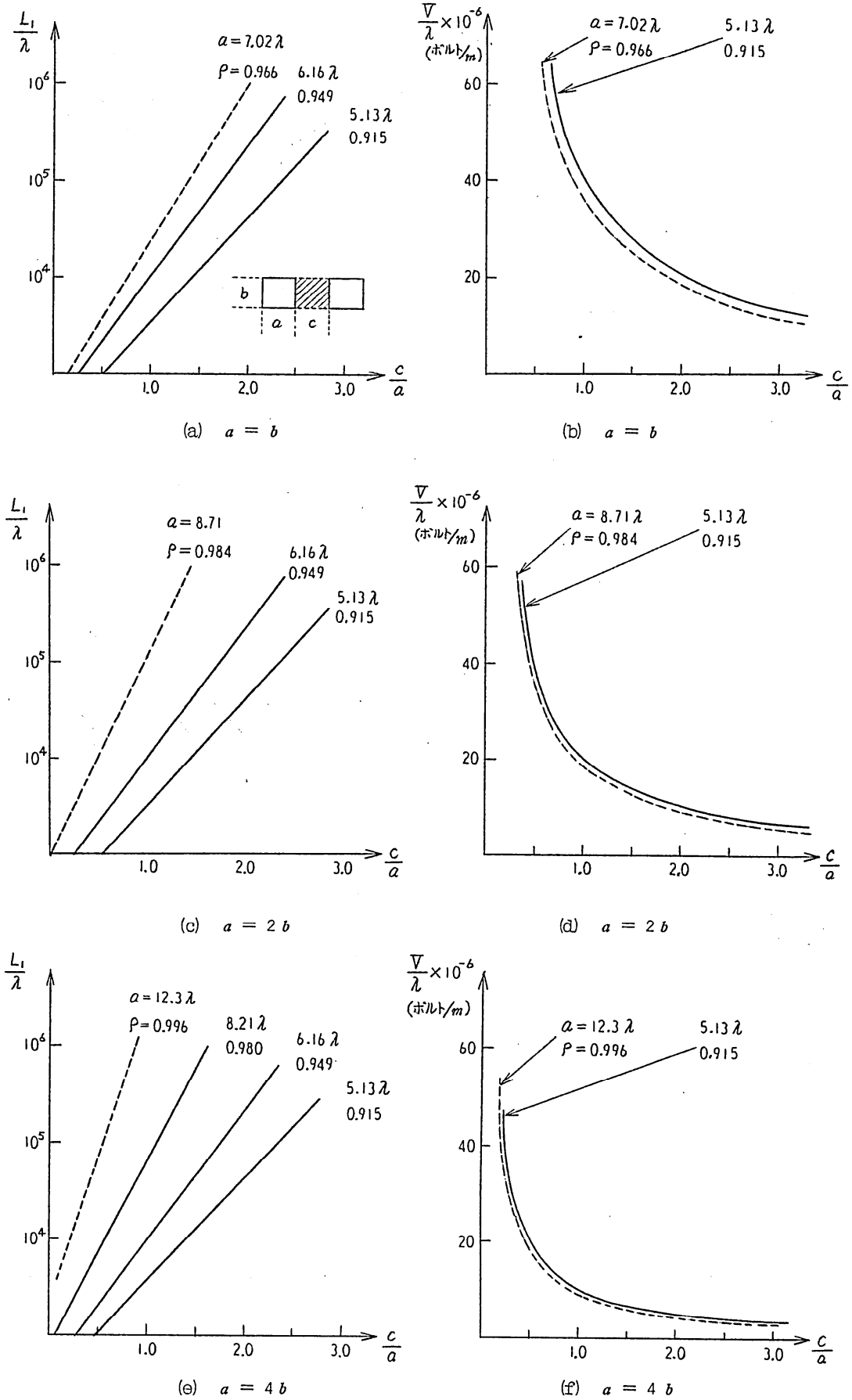


図5　$LiTaO_3$を使った時の結合長L_1および所要変調電圧Vとc/aの関係

ること (ii)抵抗率が大きく tan δ が小さいこと，などの条件にあったものがいいわけであるが，これらの点で比較的すぐれていると思われる $LiTaO_3$ ($n_e=2.180$, $r_{33}=30.3\times10^{-12}\,m/V$)[6],[7]を使った場合の数値設計例を図5(a)～(f)に示す．ただし $n_1/n_3=1.001$ とし，破線は幅 a を最低次モードのみとなる最大値に選んだ場合であり，また ρ は電力集中度を表わす．また，表2に波長 0.6328 μm の $He-Ne$ レーザを使用した場合の変調器の設計動作例を示す．

表2　変調器の設計例

a	3.25 μ	電気光学結晶	$LiTaO_3$
b	1.62 μ	n_3	2.180
c	7.33 μ	n_1/n_3	1.001
L_1	5 cm	δ_0	2.44×10^{-4}
V	5.5 volt	ρ	~~0.892~~ 0.915

変調電界は電気光学結晶全体に均一に加えられ，光が通過する間は一定であることが必要である．したがって変調周波数の上限 f_m は

$$L_1 \ll \frac{2\pi c}{2\omega_m n} \quad \text{または} \quad f_m \ll \frac{c}{2L_1 n} \tag{20}$$

ただし

c ：光速度

なる条件によって制限される．このような変調周波数の上限は，変調電界も進行波を用いる進行波形の構成に設計すれば大幅に高くできるはずである．

式(18)より，所要変調電圧を小さくするには n_1/n_3 が小さいほどよい．一方，屈折率の温度変化は

$$\frac{\partial n}{\partial T} = 10^{-5} \sim 10^{-6} \qquad /℃ \tag{21}$$

であり，したがって結晶内の場所的な温度変動がたとえば0.05℃程度とすれば，n_1/n_3 の値は1.0001程度以下にすることはできない．また電気光学結晶の高さ b が小さいほど所要変調電圧は小さくてすむ．しかし，高さ b をあまり小さくすると工作が困難になる．

5. むすび

分布結合形光変調器を提案し，その動作原理，設計理論式を示し数値設計例をあげて2，3の検討を行なった．本文で述べた光変調器は所要の変調電圧が比較的低く，IC化に適合した形態をもつものであって，光通信系におけるPCMまたはAM変調器として利用できる可能性があるほか，可変光結合器，可変光減衰器，光スイッチ等として動作させることもできる．また，本文で述べた原理を応用して光遅延回路その他の光回路素子を構成することも考えられる．

おわりに日頃御指導ごべんたつをいただいている本学工学部板倉清保教授に感謝する．

文　　献

(1) F. S. Chen: "Modulators for Optical Communications," Proc. IEEE vol. 58, pp 1440-1457 Oct. 1970

(2) S. E. Miller: "Integrated Optics: An Introduction," Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 2059-2069, Sep. 1969

(3) S. E. Miller: "Coupled Wave Theory and Waveguide Applications," Bell Syst. Tech. J., 33, 3, pp. 661-719, May. 1954

(4) E. A. J. Marcatili: "Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics," Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 2071-2102, Sep. 1969

(5) J. E. Goell: "A Circular-Harmonic Computer Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides," Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 2133-2160, Sep. 1969

(6) 特集"新しい結晶材料とその応用," vol. 90, No. 9, pp. 1656-1661　9月号　電気学会雑誌

(7) I. P. Kaminow and E. H. Turner: "Electrooptic Light Modulators," Proc. IEEE vol. 54, pp. 1374-1390, Oct. 1966

輻射科学研究会資料

運動不均質媒質による平面電磁波の反射と透過

—— H波の場合 ——

田　中　嘉津夫
（大阪大学・工学部）
間　　剛
（日立製作所・横浜研究所）

1971年10月1日

1. まえがき

運動媒質による平面電磁波の反射と透過の問題は，Stolyarov, Tai, Yeh, および筆者等によって，それぞれ独立に研究が始められて以来，多くの人々によって活発に研究が進められ，種々の興味深い結果が報告されている[1]~[3]ところが，これまでに報告されているものは，均質媒質を対象としたものがほとんどであり，不均質媒質を取り扱ったものとしては，Kritikos,[4] 深井等,[5] および塩沢等[6][7]の報告があるにすぎない．筆者等は先に誘電率が場所に関して直線的に変化するような運動媒質による平面電磁波の反射と透過について，入射波の電界が入射面に垂直な場合，すなわちE波入射についての厳密解を報告したが,[8] 今回は，同様な媒質に対し入射波の電界が入射面に平行，すなわちH波入射について，Maxwell-Minkowski の方程式を直接解くことにより，級数解を用いて厳密に解析を行なう．さらに入射波がE波の場合と比較しながら，H波特有の性質について媒質の運動の効果を数値計算例をあげて詳しく調べ，理論を実際的な応用として，電子密度が直線的に変化しているような運動不均質プラズマに適用し，プラズマの運動の効果を詳しく調べる．本報告で用いるような解析的な方法は，誘電率の分布が特殊な場合しか厳密に解くことができないが，(1) 厳密解であるので他の近似解法[+]の目安とすることができる．(2) 運動不均質媒質内部の解の解析的な性質がわかる．(3) 解析的方法であるので他の問題，例えば放射や伝搬の問題への応用ができる，等の特徴がある．

+ たとえば，多層近似，WKB近似，等がある．

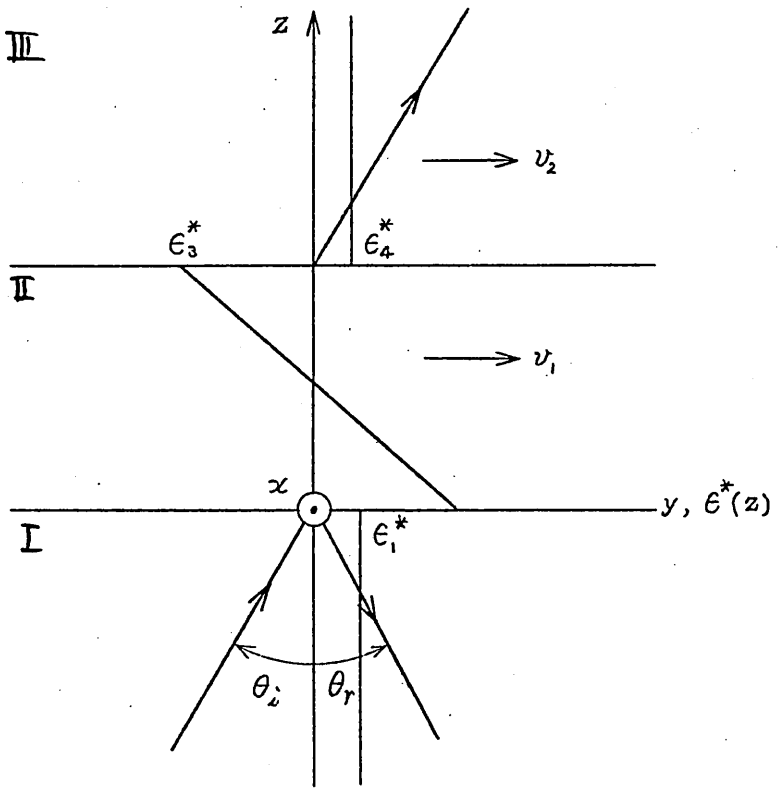


図１　座標系および媒質Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの比誘電率

2. 波 動 方 程 式

図１に示されているように，誘電率 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1^*$，透磁率 μ_0 の均質媒質Ⅰが観測者に対し静止しており，誘電率 $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 \varepsilon^*(z)$，透磁率 μ_0 の不均質媒質Ⅱと，誘電率 $\varepsilon_4 = \varepsilon_0 \varepsilon_4^*$，透磁率 μ_0 の均質媒質Ⅲがそれぞれ v_1，v_2 なる速さで y 方向に運動しているものとする．ただしすべての媒質は線形，等方

性とし，不均質媒質Ⅱの比誘電率 $\varepsilon^*(z)$ は次式で与えられるものと仮定する+

$$\varepsilon^*(z) = \varepsilon_2^* - (\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*)\frac{z}{z_0} \quad (0 < z < z_0) \tag{1}$$

ただし，$\varepsilon_2^* > \varepsilon_3^*$ とする．

さて，媒質ⅠからⅡへ一様な平面電磁波が入射するものとし，電界が入射面に平行，すなわちH波の場合について考えることにすれば，入射波（$\mathbf{E}_i$，$\mathbf{H}_i$）および反射波（$\mathbf{E}_r$，$\mathbf{H}_r$）は次のように表わされる．

$$H_{ix} = H_0\, e^{i(k_{iy}y + k_{iz}z - \omega t)} \tag{2,a}$$

$$E_{ix} = 0 \tag{2,b}$$

また

$$H_{rx} = R\,H_0\, e^{i(k_{iy}y - k_{iz}z - \omega t)} \tag{3,a}$$

$$E_{rx} = 0 \tag{3,b}$$

ただし

$$k_{iy} = k_0\sqrt{\epsilon_1^*}\,\sin\theta_i\,,\quad k_{iz} = k_0\sqrt{\epsilon_1^*}\,\cos\theta_i \tag{4,a}$$

$$k_0 = \omega(\varepsilon_0\,\mu_0)^{\frac{1}{2}} \tag{4,b}$$

ここでH_0は入射波の一定の振巾，ωは入射波の角周波数，θ_i は入射角である．式(3)において，$z = 0$ の境界面上で入射波と反射波の位相項は等

+ 運動媒質の比誘電率は本来，媒質の静止系K'（x',y',z',t'）で定義されるものであり，$\varepsilon^*(z') = \varepsilon_2^* - (\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*)\frac{z'}{z_0'}$ のように表わされている．しかし運動方向がy方向の時は$z = z'$であり，比誘電率は観測者の静止系でも（1）式のように表わされる．

しくならねばならないという境界条件からの要請を用いた．またRは電磁界に対する境界条件から決まる未知数であり，式(2)，および(3)において，他の電磁界成分はMaxwellの方程式から求められる．

次に運動不均質媒質中の電磁界（$\mathbf{E}_{II}$，$\mathbf{H}_{II}$）について考察する．[9][10] 誘電率の分布がzだけに依存する場合，系の時間変化が$e^{-i\omega t}$であると仮定すると，Maxwell-Minkowskiの方程式は次のようになる．

$$(\nabla + i\omega \mathbf{b}_1(z)) \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \bar{a}_1(z) \cdot \mathbf{H} \tag{5,a}$$

$$(\nabla + i\omega \mathbf{b}_1(z)) \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \epsilon^*(z) \bar{a}_1(z) \cdot \mathbf{E} \tag{5,b}$$

ただし

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \tag{6,a}$$

$$\mathbf{b}_1(z) = b_1(z)\hat{y} = \frac{(\epsilon^*(z) - 1)\beta_1}{(1 - \epsilon^*(z)\beta_1^2)}\hat{y} \tag{6,b}$$

$$\bar{a}_1(z) = \begin{pmatrix} a_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & a_1(z) \end{pmatrix} \tag{6,c}$$

$$a_1(z) = \frac{1 - \beta_1^2}{1 - \epsilon^*(z)\beta_1^2}, \quad \beta_1 = \frac{v_1}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \tag{6,d}$$

ここで考えている問題では，境界条件を考慮すると，不均質媒質IIの中の磁界$\mathbf{H}_{II}$はx方向成分のみをもち，つぎの方程式を満足しなければならない．

$$\frac{1}{\epsilon^*(z)a_1(z)}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\omega\Omega_1(z)\right)^2 H_{IIx} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\epsilon^*(z)}\frac{\partial}{\partial z}\right)H_{IIx} + k_0^2 a_1(z) H_{IIx} = 0 \tag{7}$$

式(7)の解を求めるために，$H_{\Pi x}$ をつぎのように仮定する．

$$H_{\Pi x} = G(z)\, e^{ik(z)y} \tag{8}$$

式(8)を式(7)に代入すれば，次の式が成立しなければならないことがわかる．

$$\frac{d}{dz}(k(z)) = 0 \tag{9,a}$$

$$\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\epsilon^*(z)}\frac{d}{dz}\right) + k_0^2 \epsilon^*(z) a_1(z) - \frac{(k(z)+\omega b_1(z))^2}{a_1(z)\,\epsilon^*(z)}\right\} G = 0 \tag{9,b}$$

まず，進(9,a)から $k(z)$ は z に無関係に一定であればよいことがわかり，さらに位相項に対する境界条件からの要請を考慮すれば，次式が成立する．

$$k(z) = k_0\sqrt{\epsilon_1^*}\,\sin\theta_i \tag{10}$$

式(10)を式(9,b)に代入して，式を変形してゆくと次式が得られる．

$$\frac{d^2}{dz^2}G - \frac{1}{\epsilon^*(z)}\frac{d\epsilon^*(z)}{dz}\cdot\frac{d}{dz}G + k_0^2 r_1^2\left(1-\beta_1\sqrt{\epsilon_1^*}\,\sin\theta_i\right)^2 \left\{\epsilon^*(z) - \frac{(\beta_1 - \sqrt{\epsilon_1^*}\,\sin\theta_i)^2}{(1-\beta_1\sqrt{\epsilon_1^*}\,\sin\theta_i)^2}\right\} G = 0 \tag{11}$$

ただし

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \tag{12}$$

である．

式(11)を解くために次のような変数変換を行なう．

$$\rho = \left(k_0^2 r_1^2 (1 - \beta_1 \sqrt{\epsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 \frac{\epsilon_2^* - \epsilon_3^*}{z_0}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\epsilon_2^* z_0}{\epsilon_2^* - \epsilon_3^*} - z\right) \quad (13)$$

ここで，3乗根は実根をとるものとする．

式(13)の変数変換を行なえば，式(11)の波動方程式は次のような2階線形微分方程式になる．

$$\frac{d^2}{d\rho^2} G - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} G + (\rho - B) G = 0 \quad (14)$$

ただし

$$B = \left(\frac{\beta_1 - \sqrt{\epsilon_1^*} \sin\theta_i}{1 - \sqrt{\epsilon_1^*}\, \beta_1 \sin\theta_i}\right)^2 \left(k_0 r_1 (1 - \beta_1 \sqrt{\epsilon_1^*} \sin\theta_i) \frac{z_0}{\epsilon_2^* - \epsilon_3^*}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (15)$$

である．

よく知られているように，不均質媒質中の波動方程式は入射波がE波の場合とH波の場合とでは型が違い，H波の場合はE波のようにStokesの方程式に帰着させてBessel関数を用いることはできない．そこで線型微分方程式の一般論にしたがって，この方程式の二つの独立解を$\rho = 0$のまわりの級数解，v_1およびv_2で表わすことにする．[10] すなわち

$$v_1(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n+2} \quad (16,a)$$

$$v_2(\rho) = \frac{B}{2} v_1(\rho) \ln|\rho| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \rho^n \quad (16,b)$$

とし，式(16)を式(15)に代入して，各ベキ項を比較すれば，次のような関係式が成り立たなければならないことがわかる．

$$a_n = \frac{-a_{n-3} + B a_{n-2}}{n(n+2)} \qquad n \geqq 3 \qquad (17,a)$$

ただし

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{B}{8} \qquad (17,b)$$

また

$$b_n = \frac{B b_{n-2} - b_{n-3} - B(n-1) a_{n-2}}{n(n-2)} \quad n \geqq 3 \qquad (18,a)$$

ただし

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0 \qquad (18,b)$$

式(16)の独立解 v_1, v_2, を用いれば，結局媒質Ⅱの中の磁界成分として次式を得ることができる．

$$H_{\Pi x} = \left\{ A_1 v_1(\rho) + A_2 v_2(\rho) \right\} H_0 e^{i(k_{iy} y - \omega t)} \qquad (19)$$

ここでA_1, A_2, は境界条件から決定せられる未知数である．

式(19)に対応する電界E_{Π}は式(5)から次のように表わされる．

$$E_{\Pi y} = -\frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon^*(z)} \left(k_0^2 r_1^2 (1 - \beta_1 \sqrt{\epsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 \frac{\epsilon_2^* - \epsilon_3^*}{z_0} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left\{ A_1 v_1'(\rho) + A_2 v_2'(\rho) \right\} H_0 e^{i(k_{iy} y - \omega t)} \qquad (20,a)$$

$$E_{\Pi z} = \frac{1}{\omega \epsilon_0 \epsilon^*(z) a_1(z)} (k_{iy} + \omega \Omega_1(z)) \left\{ A_1 v_1(\rho) + A_2 v_2(\rho) \right\} H_0$$

$$e^{i(k_{iy} y - \omega t)} \qquad (20.b)$$

ここで′はρに関する微分を表わす．

つぎに，媒質Ⅲにおける透過波（$\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$）はMaxwell-Minkowskiの方程式から次式のように表わされる[1][2]

$$H_{tx} = T H_0 e^{i(k_{iy}y + k_{tz}z - \omega t)} \tag{21,a}$$

$$E_{tx} = 0 \tag{21,b}$$

ただし

$$k_{tz} = k_0 r_2 [\epsilon_4^* (1 - \beta_2 \sqrt{\epsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 - (\sqrt{\epsilon_1^*} \sin\theta_i - \beta_2)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{22,a}$$

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}, \qquad \beta_2 = \frac{v_2}{c} \tag{22,b}$$

式(21)において，$z = z_0$ なる境界上で，媒質Ⅱにおける電磁界と媒質Ⅲにおける透過波の位相項が等しくなければならないという境界条件からの要請を用いた．また，他の電磁界成分はMaxwell-Minkowski の方程式から求めることができる．

さて式(3),(19)，および(21)には，R，T，A_1，A_2 なる4個の未知数が含まれているが，これらは$z = 0$および$z = z_0$なる境界面上で電界および磁界の接線成分が連続でなければならないという境界条件により定められる．結果を示すと次のようになる．

$$R = \frac{X - Y}{X + Y} \tag{23}$$

$$T = \frac{2V}{X + Y} \tag{24}$$

$$A_1 = \frac{2}{X+Y}\left(\frac{\epsilon_2^* k_{iz} k_{tz}}{\epsilon_1^* \epsilon_4^*} v_2(\rho_1) + \frac{\epsilon_2^* k_{iz}}{\epsilon_1^* \epsilon_3^* W} v_2'(\rho_1)\right) \tag{25}$$

$$A_2=\frac{-2}{X+Y}\left(\frac{\epsilon_2^* k_{iz} k_{tz}}{\epsilon_1^* \epsilon_4^*} v_1(\rho_1)+\frac{\epsilon_2^* k_{iz}}{\epsilon_1^* \epsilon_3^* W} v_1'(\rho_1)\right) \tag{26}$$

ただし

$$X=\frac{\epsilon_2^* k_{iz} k_{tz}}{i\epsilon_1^* \epsilon_4^* W}\left(v_1(\rho_0) v_2(\rho_1)-v_1(\rho_1) v_2(\rho_0)\right)$$

$$+\frac{\epsilon_2^* k_{iz}}{\epsilon_1^* \epsilon_3^*}\left(v_1(\rho_0) v_2'(\rho_1)-v_2(\rho_0) v_1'(\rho_1)\right) \tag{27,a}$$

$$Y=\frac{iW}{\epsilon_3^*}\left(v_2'(\rho_0) v_1'(\rho_1)-v_1'(\rho_0) v_2'(\rho_1)\right.$$

$$\left.+\frac{k_{tz}}{\epsilon_4^*}\left(v_2'(\rho_0) v_1(\rho_1)-v_1'(\rho_0) v_2(\rho_1)\right)\right. \tag{27,b}$$

$$V=\frac{\epsilon_2^* k_{iz}}{\epsilon_1^* \epsilon_3^*}\left(v_1(\rho_1) v_2'(\rho_1)-v_2(\rho_1) v_1'(\rho_1) e^{-ik_{tz} z_0}\right. \tag{27,c}$$

ただし

$$\rho_0=\rho\,|_{z=0}=\frac{\epsilon_2^* z_0 W}{\epsilon_2^*-\epsilon_3^*} \tag{28,a}$$

$$\rho_1=\rho\,|_{z=z_0}=\frac{\epsilon_3^* z_0 W}{\epsilon_2^*-\epsilon_3^*} \tag{28,b}$$

$$W=\left(k_0^2 r_1^2\left(1-\beta_1\sqrt{\epsilon_1^*}\sin\theta_i\right)^2\frac{(\epsilon_2^*-\epsilon_3^*)}{z_0}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{29}$$

3. 幾何光学的反射点および不均質媒質IIの内部の電磁界

不均質媒質Ⅱの中の幾何光学的反射点 z_c は，式(11)，または式(14)の第3項を零とするような z の値で与えられることが，運動媒質中で成り立つSnellの法則[1][2]から導いた幾何光学的反射点と一致することにより容易にわかる．すなわち E 波の場合と同様に，幾何光学的反射点 z_c は

$$\rho|_{z=z_c} = B \tag{30}$$

あるいは

$$z_c = \frac{z_0}{\epsilon_2^* - \epsilon_3^*}\left(\epsilon_2^* - \left(\frac{\beta_1 - \sqrt{\epsilon_1^*}\sin\theta_i}{1 - \beta_1\sqrt{\epsilon_1^*}\sin\theta_i}\right)^2\right) \tag{31}$$

で与えられる．級数解 $v_1(\rho)$，$v_2(\rho)$ および，$v_1'(\rho)$，$v_2'(\rho)$ の数値計算例が図2に，$B=1$ の場合について示してある．図からわかるように，$\rho > B$ の範囲で解は振動しているが，$\rho < B$ の範囲では解は指数関数的に増減する．これは，媒質Ⅱの中の電磁界が幾何光学的反射点を越えた領域では指数関数的に減小しているという物理的事情に対応している．また式(14)の微分方程式の独立解の間には，Wronskianが ρ に比例するという関係すなわち

$$v_1'(\rho)\,v_2(\rho) - v_2'(\rho)\,v_1(\rho) = 2\rho \tag{32}$$

が成り立つ．

媒質Ⅱの中の電界成分 $\mathbf{E}_{\mathrm{II}}$ は式(20)で与えられたが，今 $\varepsilon^*(z)=0$ 付近の状態を知るために $E_{\mathrm{II}y}$，$E_{\mathrm{II}z}$ の ρ に関する最低次の項だけ書き表わすと

$$E_{\mathrm{II}y} \simeq -\frac{i z_0 A_2}{\omega\epsilon_0} k_0^2 \gamma_1^2 (\beta_1 - \sqrt{\epsilon_1^*}\sin\theta_i)^2 \ln|\rho|\, H_0\, e^{i(k_{iy}y - \omega t)} \tag{33,a}$$

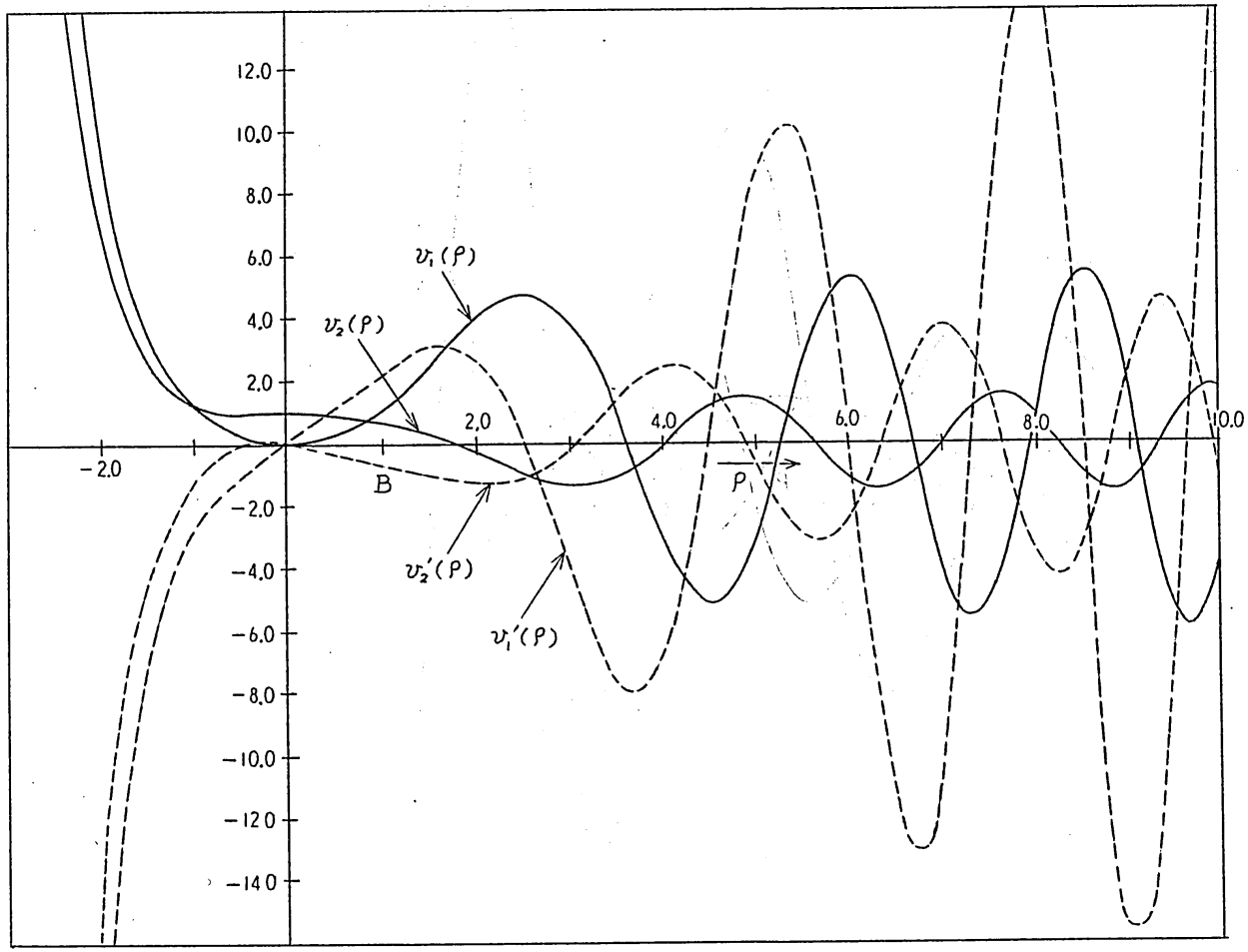


図 2　$v_1(\rho)$ $v_1'(\rho)$ $v_2(\rho)$ および $v_2'(\rho)$　($B=1,0$)

$$E_{\Pi z} \simeq \frac{z_0 A_2}{\omega \epsilon_0 \epsilon^*(z)} k_0 \tau^2 (\sqrt{\epsilon_1^*} \sin\theta_i - \beta_1) H_0 e^{i(k_{iy} y - \omega t)} \qquad (33,b)$$

となる．

ρ が $\epsilon^*(z)$ に比例することと式（33）から，$E_{\Pi y}$，$E_{\Pi z}$ は $\varepsilon^*(z)$ が零に近づくにしたがってそれぞれ，対数的および $1/z$ に比例して，無限大になることがわかる．しかし，$\varepsilon^*(z) = 0$ の面を通過する z 方向の電力，すなわち Poynting ベクトルの z 方向成分は，式（19），（20,a）および式（25），（26）から，式（32）の関係を用いれば，

$$S_z = \frac{1}{2} R_e \left(-E_{\Pi y} \times \overline{H}_{\Pi x}\right) = \frac{1}{2} R_e \left(-E_{ty} \times \overline{H}_{tx}\right) \qquad (34)$$

ただし $^-$ は複素共役をとることを表わす．したがって通過する電力は，有限で透過波の z 方向 Poynting ベクトルに等しくなることがわかる．

4. 電力反射係数および電力透過係数

電力反射係数 Γ_R および電力透過係数 Γ_T は，それぞれつぎのように定義される．

$$\Gamma_R = -\frac{\hat{z} \cdot \mathbf{S}_r}{\hat{z} \cdot \mathbf{S}_i} \qquad (35,a)$$

$$\Gamma_T = \frac{\hat{z} \cdot \mathbf{S}_t}{\hat{z} \cdot \mathbf{S}_i} \qquad (35,b)$$

ここで，$\mathbf{S}_i$，$\mathbf{S}_r$ および $\mathbf{S}_t$ はそれぞれ入射波，反射波および透過波の時間平均化された Poynting ベクトルである．式（3）（21）および（35）から

Γ_R, Γ_T はそれぞれ次のようになる.

$$\Gamma_R = R\overline{R} \tag{36,a}$$

$$\Gamma_T = \frac{\epsilon_1^*}{\epsilon_4^*} R_e \left(\frac{\overline{k_{tz}}}{k_{iz}} T\overline{T}\right) \tag{36,b}$$

さらに, Γ_R および Γ_T は, 式(32)の関係を使って, つぎの関係式を満足することも証明できる.

$$\Gamma_R + \Gamma_T = 1 \tag{37}$$

また不均質媒質の厚さが, 波長に比べて十分小さいときには, 式(16)を(36)に代入すれば Γ_R, Γ_T をつぎのように表わすことができる.

$$\Gamma_R = \Gamma_{RO} \cdot \left| \frac{1 + N_1 k_0 z_0 i + N_2 k_0^2 z_0^2 + 0(z_0^3)}{1 + D_1 k_0 z_0 i + D_2 k_0^2 z_0^2 + 0(z_0^3)} \right|^2 \tag{38,a}$$

$$\Gamma_T = \Gamma_{TO} \cdot \left| \frac{1 - k_{ti} z_0 i - \frac{k_{tz}^2 z_0^2}{2} + 0(z_0^3)}{1 + D_1 k_0 z_0 i + D_2 k_0^2 z_0^2 + 0(z_0^3)} \right|^2 \tag{38,b}$$

ただし

$$\Gamma_{RO} = \left| \frac{\epsilon_4^* k_{iz} - \epsilon_1^* k_{tz}}{\epsilon_4^* k_{iz} + \epsilon_1^* k_{tz}} \right|^2 \tag{39,a}$$

$$\Gamma_{TO} = \frac{\epsilon_1^*}{\epsilon_4^*} R_e \left(\frac{\overline{k_{tz}}}{\overline{k_{iz}}}\right) \left| \frac{2\epsilon_4^* k_{iz}}{\epsilon_4^* k_{iz} + \epsilon_1^* k_{tz}} \right|^2 \tag{39,b}$$

また

$$\begin{cases} N_1 = (n_1 + n_2) \,/\, (\epsilon_4^* k_{iz} + \epsilon_1^* k_{tz}) & (40,a) \\ D_1 = (n_1 - n_2) \,/\, (\epsilon_4^* k_{iz} + \epsilon_1^* k_{tz}) & (40,b) \end{cases}$$

$$n_1 = \frac{(\epsilon_2^* + \epsilon_3^*)}{2\,k_0}\, k_{iz} k_{tz} \tag{41,a}$$

$$n_2 = \left[\frac{\epsilon_1^* \epsilon_4^*}{\epsilon_2^* \epsilon_3^* (\epsilon_2^* - \epsilon_3^*)}\, ln\left(\frac{\epsilon_3^*}{\epsilon_2^*}\right) r_1^2 (\beta_1 - \sqrt{\epsilon_1^*}\sin\theta_i)(1 - \beta_1 \sqrt{\epsilon_1^*}\sin\theta_i)\right.$$

$$\left. - \epsilon_1^* \epsilon_4^* r_1^2 (1 - \beta_1 \sqrt{\epsilon_1^*}\sin\theta_i)^2\right] k_0 \tag{41,b}$$

$$\begin{cases} N_2 = (m_1 - m_2) / (\epsilon_4^* k_{iz} + \epsilon_1^* k_{tz}) & (42,a) \\ D_2 = (m_1 + m_2) / (\epsilon_4^* k_{iz} + \epsilon_1^* k_{tz}) & (42,b) \end{cases}$$

$$m_1 = \left\{\frac{\epsilon_3^{*2}}{2\epsilon_1^*}\, ln\left(\frac{\epsilon_3^*}{\epsilon_2^*}\right) + \frac{(\epsilon_2^{*2} - \epsilon_3^{*2})}{4}\right\} J k_{tz} \tag{43,a}$$

$$m_2 = \left\{\frac{\epsilon_2^{*2}}{2\epsilon_4^*}\, ln\left(\frac{\epsilon_3^*}{\epsilon_2^*}\right) + \frac{(\epsilon_2^{*2} - \epsilon_3^{*2})}{4}\right\} J k_{iz} \tag{43,b}$$

$$J = \frac{r_1^2 (\beta_1 - \sqrt{\epsilon_1^*}\sin\theta_i)(1 - \beta_1 \sqrt{\epsilon_1^*}\sin\theta_i)}{(\epsilon_2^{*2} - \epsilon_3^{*2})^2} \tag{44}$$

式(38)，(39)からわかるように，不均質媒質の厚さが零に近づくにつれ，Γ_R，Γ_T はそれぞれ Γ_{RO}，Γ_{TO} すなわち均質媒質の場合の電力反射係数および電力透過係数に近づくことがわかる．

入射角 θ_i に対する電力反射係数 Γ_R の数値計算例を β_1 をパラメーターとして図3に，また正規化された不均質媒質の厚さ z_0/λ_0 に対する電力反射係数 Γ_R の数値計算例を β_1 をパラメーターとして，垂直入射の場合に図4に，文献(8)で求めた E 波の場合とともに示す．

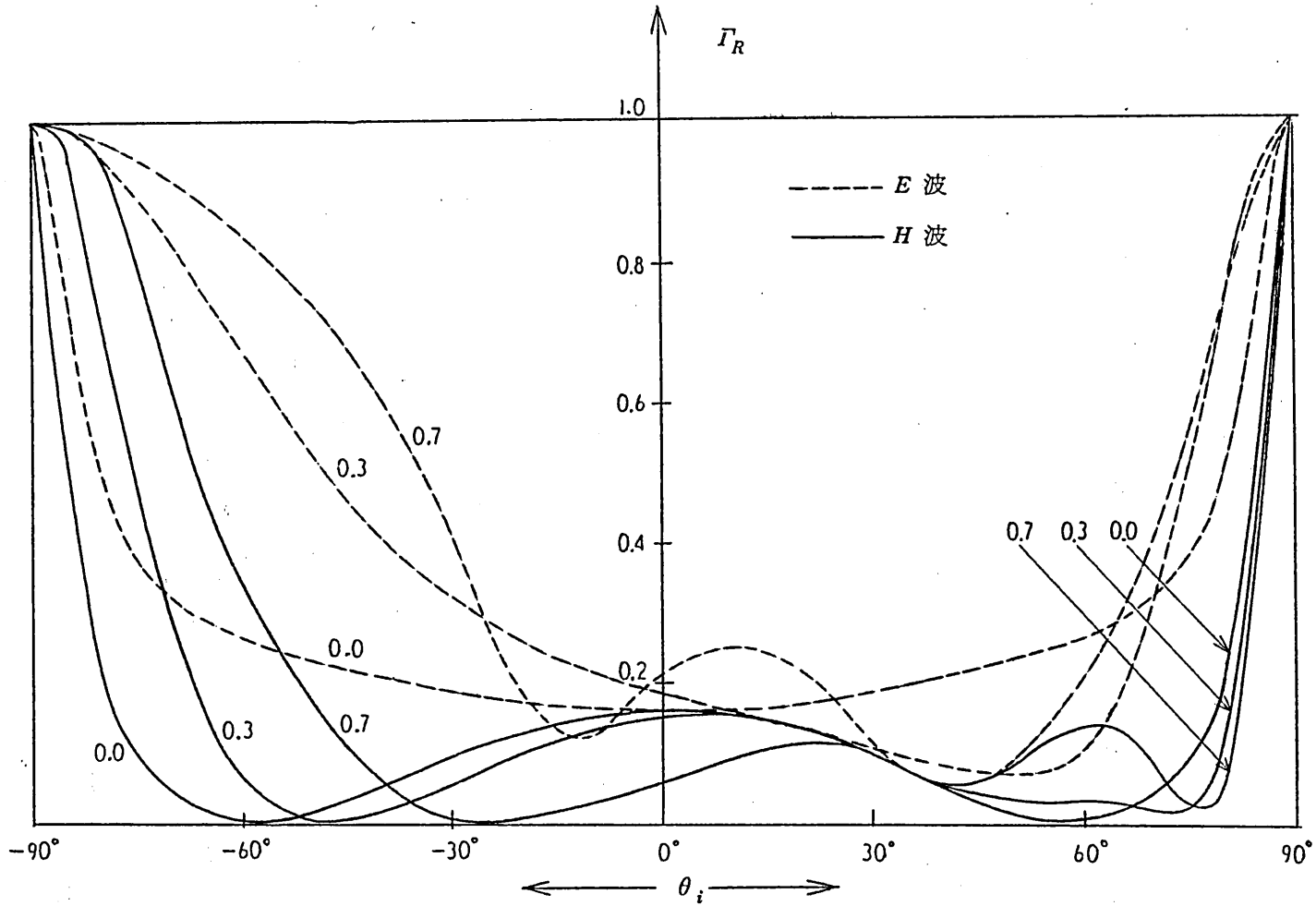


図３　電力反射係数 Γ_R ($\epsilon_1^*=1.0$, $\epsilon_2^*=4.0$, $\epsilon_3^*=\epsilon_4^*=1.0$, $\beta_1=\beta_2$, $z_0/\lambda_0=0.5$)

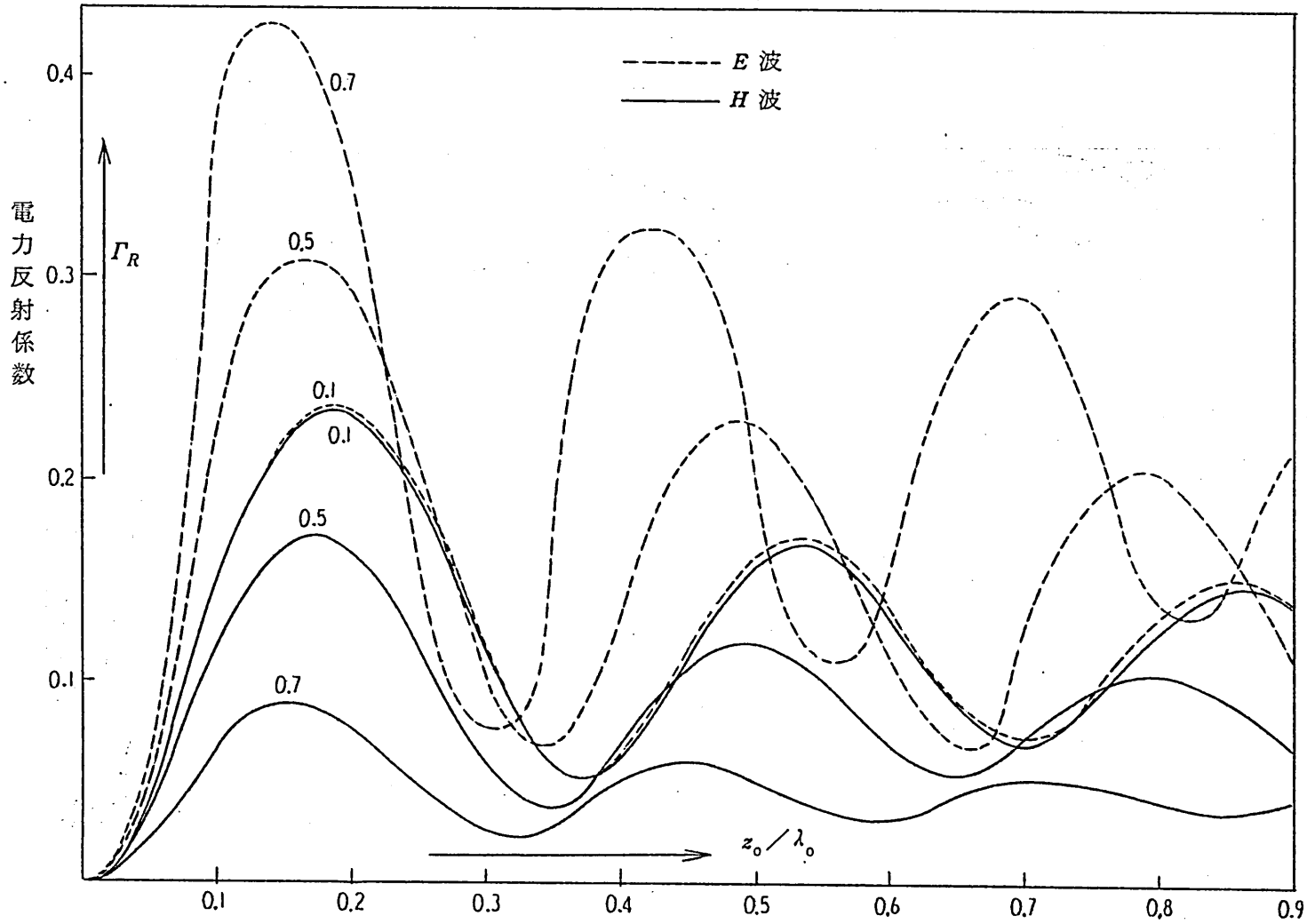


図 4　電力反射係数 Γ_R ($\epsilon_1^*=1.0$, $\epsilon_2^*=4.0$, $\epsilon_3^*=\epsilon_4^*=1.0$, $\beta_1=\beta_2$, $\theta_i=0°$)

5. 運動不均質プラズマへの応用

以上の議論は，電子密度が直線状に分布している運動等方性プラズマに，平面 H 波が入射した場合に，そのまゝ適用できる．今電子密度が z 方向に直線的に変化している運動等方性プラズマの比誘電率 $\varepsilon_p^*(z)$ は次のように表わせる．

$$\varepsilon_p^*(z) = 1 - \frac{\omega_p^{\,2}(z)}{\gamma_1^2 (1 - \sqrt{\epsilon_1^*}\,\beta_1 \sin\theta_i)^2 \omega^2} \tag{45}$$

ただし

$$\omega_p(z) = \frac{e^2}{\gamma_1 m_0 \varepsilon_0} N(z) \tag{46}$$

ここで m_0 および $-e$ は電子の静止質量および電荷を表わし，$N(z)$ はプラズマの静止系で測定した電子密度を表わす1次関数であり，結局 $\omega_p(z)$ はプラズマの速度によって変化しない不変量になる．式(45)を式(11)に代入すれば，運動不均質プラズマに対し波動方程式

$$\frac{d^2G}{dz^2} + F_1(z)\frac{dG}{dz} + k_0^{\,2} F_2(z)\, G = 0 \tag{47}$$

が成り立つ．ただし

$$F_1(z) = \left\{ \left(\frac{\omega_{p1}}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{p2}}{\omega}\right)^2 \right\} \Big/ \left\{ \gamma_1^2 (1 - \beta_1 \sqrt{\epsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 - \eta(z) \right\} \tag{48,a}$$

$$F_2 = 1 - \eta(z) - \epsilon_1^* \sin^2\theta_i \tag{48,b}$$

また

$$\eta(z) = \left(\frac{\omega_{p1}}{\omega}\right)^2 \left(1 + \frac{z}{z_0}\right) - \left(\frac{\omega_{p2}}{\omega}\right)^2 \qquad (49,a)$$

$$\omega_{p1} = \frac{e^2}{\gamma_1 m_0 \epsilon_0} N(0), \qquad \omega_{p2} = \frac{e^2}{\gamma_1 m_0 \epsilon_0} N(z_0) \qquad (49,b)$$

式(47)，(48,b)からわかるように式(47)の第3項の係数$F_2(z)$が全く運動の影響を受けないことから，第2項のない運動均質プラズマの波動方程式には運動の効果は現れないが，運動の影響をうける第2項$F_1(z)$をもつ運動不均質プラズマの場合には，波動方程式に運動の効果が現われる．これが運動不均質プラズマの特徴である．式(47)の$F_2(z)$が運動の影響を受けないことから，前節で述べたように式(31)で与えられる幾何光学的反射点z_cはプラズマの速度によって変化することなく次式で与えられる．

$$z_c = z_0 \left\{1 - \epsilon_1^* \sin^2\theta_i - \left(\frac{\omega_{p1}}{\omega}\right)^2\right\} \Big/ \left\{\left(\frac{\omega_{p2}}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{p1}}{\omega}\right)^2\right\} \qquad (50)$$

また，プラズマの比誘電率$\varepsilon_p^*(z)$が零になるような点z_pは式(45)からわかるように

$$z_p = z_0 \left\{\gamma_1^2 (1 - \beta_1 \sqrt{\epsilon_1^*} \sin\theta_i)^2 - \left(\frac{\omega_{p1}}{\omega}\right)^2\right\} \Big/ \left\{\left(\frac{\omega_{p2}}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{p1}}{\omega}\right)^2\right\} \qquad (51)$$

で与えられ，運動によって位置が変化する．(図5)このような点はプラズマ共振を起していることを示しており，式(33)で議論したようにz_p付近における電界は，z_pに近づくにつれ無現大になる．これは，z_p付近では誘電率が式(45)で与えられるようなコールドプラズマ近似が物理的でないことを示していると考えられる[11]

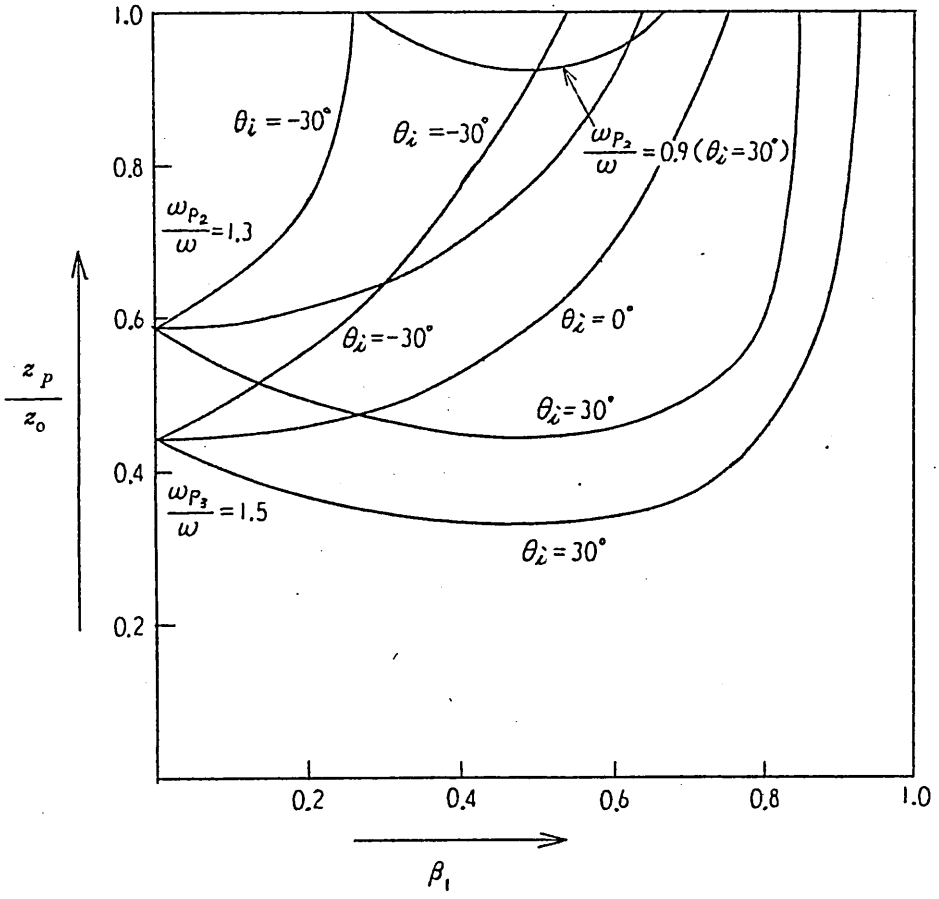


図5　z_p の位置 $\left(\frac{\omega_{p1}}{\omega} = 0.0\right)$

6. むすび

本論文では，誘電率が場所に関して直線的に変化しているような不均質slabと半無限均質誘電体とが，境界面および入射面に対して平行に運動している場合の平面電磁の反射と透過について，入射波の電界が入射面に対して平行な場合，すなわちH波入射について，Maxwell-Minkowski の方程

式を級数解を用いることにより，厳密に解析し，電力反射係については数値計算例をあげて，E波入射の場合と比較し，さらにH波入射特有の性質についても調べた．さらに理論を電子密度が直線状に変化しているような，運動不均質プラズマに対し応用し，運動の影響を調べた．

謝　　辞

終りに日頃ご指導いただいている大阪大学工学部熊谷信昭教授に深謝する．また，有益なご討論をいただいた熊谷研究室の方々に感謝する．

文　　献

(1) T. Shiozawa and K. Hazama : "General solution to the problem of reflection and transmission by a moving dielectric medium", Radio Sci., **3**, 6, p. 569 (June 1968).

(2) 間　剛，塩沢俊之，熊谷信昭："運動等方性プラズマによる平面電磁波の反射と透過（一般解）"，信学論(B)，**51-B**，12，p. 575 (昭43-12).

(3) Dan Censor : "Scattering of a plane wave at a plane interface separating two moving media", Radio Sci., **4**, 11, p. 1079 (Nov. 1969).

(4) H. N. Kritikos, K. S. H. Lee, and C. H. Papas : "Electromagnetic reflectivity of nonuniform jet streams", Radio Sci., **2**, 9, p. 991 (Sept. 1967)

(5) 深井一郎，風間燁雄，鈴木道雄，福岡醇一；"運動する不均一媒質による平面電磁波の反射について．"1„"，昭44信学全大，373

(6) 塩沢俊之，青海恵之；"軸方向に運動している不均質プラズマ円柱による平面電磁波の散乱"，輻射科学研究会資料(1971-7)

(7) 塩沢俊之，田中克彦；"運動不均質スラブによる平面電磁波の反射と

透過”，輻射科学研究会資料（1971-7）

(8) 田中嘉津夫，間　剛；“運動不均質媒質による平面電磁波の反射と透過”；輻射科学研究会資料（1971-7）

(9) C. T. Tai ; “The dyadic Green's function for a moving isotropic medium”, IEEE Trans. (Communication), AP-13, p. 322 (Mar. 1965)

(10) K. G. Budden ; “Radio waves in the ionosphere”, Chaps. 15 and 16, Cambridge University Press, London (1961)

(11) N. G. Denisov ; “On a Singularity of the Fieldn of an Electromagnetic Wave Propagated in an Inhomogeneous Plasma”, Soviet Phys. JETP 4,p.544(May.1957)

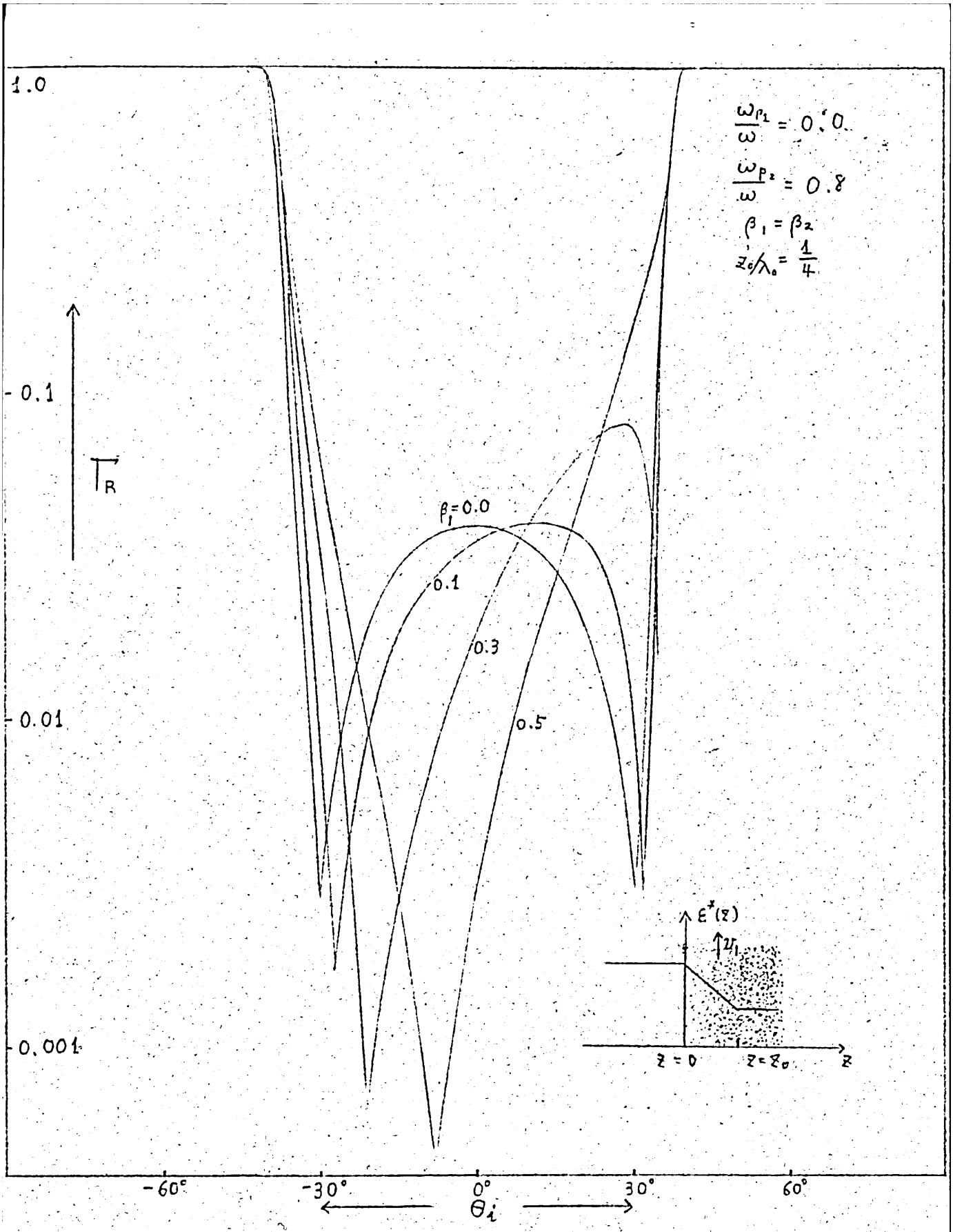


図 6　電力反射係数 ($\frac{\omega_{p_1}}{\omega} = 0.0$, $\frac{\omega_{p_2}}{\omega} = 0.8$, $\frac{\omega_{p_3}}{\omega} = 0.8$)

輻射科学研究会資料

運動媒質の境界面における Goos-Hänchen 効果

小川英一
安川交二
藤岡弘
(大阪大学・工学部)

1971年10月1日

1．序　　言

最最近，全反射波によって半無限誘電体媒質あるいは誘電体slab 中に励振される波について興味ある結果が報告され，このような現象を光学回路素子に利用しようという試みが活発になされている[1]~[6] また，このような全反射の問題にともなって，入射波として空間的に制限された波，すなわちbounded beam を取り扱う問題については，その実験結果とともに古くから議論され，種々の報告がなされている[7]~[10] この場合には，興味ある現象としてGoos－Hänchen 効果，すなわち境界面にbounded beam が入射し，その境界面において全反射が起こる場合には，反射波が入射面内において変位を受けるという現象が現われることが知られている．

著者らは先に，平面波が入射した場合の全反射現象について考察したが，[11],[12] 本文では，bounded beam が運動している誘電体媒質の境界面に入射する場合を取り扱い，運動媒質の境界面におけるGoos－Hänchen 効果について考察する．

2．入射波および反射波

本節においては，Kirchhoff の仮定を用いてbounded beam を形成し，この入射bounded beam による，運動している誘電体媒質からの反射波の性質について考察する．

図１に示すように，$z>0$ の領域は（ε_1，μ_0）なる完全誘電体（媒質Ⅰ），$z<0$ の領域は（ε_2，μ_0）なる完全誘電体（媒質Ⅱ）によって満されているものとし，媒質Ⅱは媒質Ⅰに対して x 方向に速度 v で一様に運動しているものとする．また，$z=l$ の平面上に，厚さが無限に小さい完全吸収体平板が

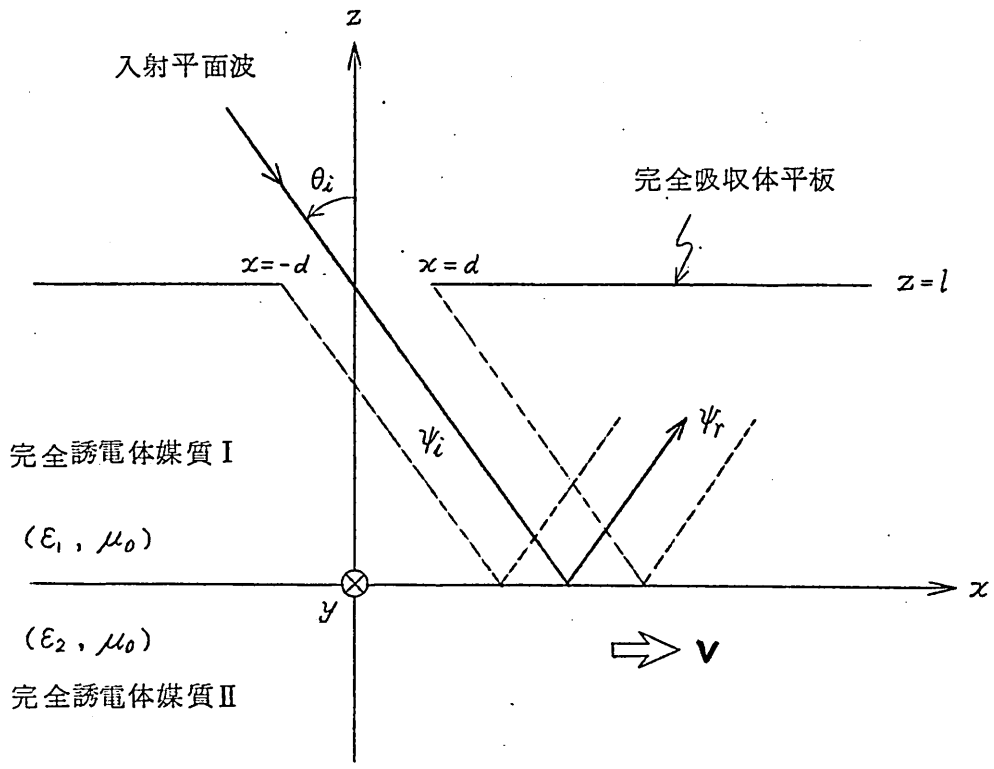


図１．座　標　系

存在し，この完全吸収体平板は幅が２ d の y 方向に一様なスリットをもっているものとする．

さて，いま z の正の側から，$z=l$ に存在する完全吸収体平板に向って平面波が入射するものとし，この入射平面波として，つぎのようなスカラー平面波 ϕ を考える．

$$\phi(x, z) = A\, e^{j(\omega t - k_{1x} x - k_{1z} z)}, \quad (z > l) \tag{1}$$

ここで，振幅Aは場所および時間に無関係な定数であり，入射平面波の伝搬定数k_{1x}およびk_{1z}はそれぞれ次式で与えられる．

$$k_{1x} = n_1 k_0 \sin \theta_i$$
$$k_{1z} = -n_1 k_0 \cos \theta_i \qquad (2)$$

ただし，

$$n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \quad , \qquad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c}$$

であり，θ_iは平面波の入射角，cは真空中の光速度を表わす．ここで，$z = l$に存在する幅$2d$なるスリットをもった完全吸収体平面において，Kirchhoff の仮定

$$\phi(x, l) = 0 \qquad , \ |x| \geq d$$
$$\phi(x, l) = A\, e^{j(\omega t - k_{1x} x - k_{1z} l)} \qquad , \ |x| < d \qquad (3)$$

が成り立つものとし，$z = l$なる面上の電磁界をつぎのようにFourier 積分によって平面波の和として表示する．

$$\phi(x, l) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x)\, e^{j(\omega t - k_x x - k_{1z} l)}\, dk_x \ , \ (z = l) \qquad (4)$$

ただし，$\Phi(k_x)$は次式で与えられる．

$$\Phi(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, l)\, e^{-j(\omega t - k_x x - k_{1z} l)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{d} A e^{-j(k_{1x}-k_x)x} \, dx \qquad (5)$$

したがって，$0 < z < l$ なる領域につくられるbounded beam はつぎのように表わされる．

$$\phi(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x) e^{j\{\omega t - k_x x - k_z z - (k_{1z}-k_z) l\}} \, dk_x, \qquad (0 < z < l) \qquad (6)$$

ただし，

$$k_z = -\sqrt{n_1^2 k_0^2 - k_x^2} \qquad (7)$$

式(6)で与えられる$\phi(x,z)$は，$0 < z < l$ で波動方程式を満たし，また，$z = l$ においてKirchhoff の境界条件式(4)を満たしていることは明らかである．したがって，式(6)で表わされる$\phi(x,z)$は z の負の方向に進む入射bounded beam となることがわかる．いま，これを添字 i をつけて$\phi_i(x,z)$で表わす．すなわち，

$$\phi_i(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x) e^{j\{\omega t - k_x x - k_z z - (k_{1z}-k_z) l\}} \, dk_x, \qquad (0 < z < l) \qquad (8)$$

つぎに，式(8)で表わされる入射bounded beam による，反射波について考察する．

本文では，反射波を求める方法として平面波近似を用いる．すなわち，まず入射波が平面波である場合の境界面における反射波と入射波の振幅比を求め，ついでこの振幅比を用いて入射波がbounded beam である場合の反射波を求める．いま，入射波が平面波である場合の，入射波に対する反射波の

振幅比を$R(k_x)$とすれば，$R(k_x)$は一般に次式のように表わされる．

$$R(k_x)=r(k_x)\ e^{-j\phi_r(k_x)} \tag{9}$$

ここで，$r(k_x)$は振幅比の絶対値，$\phi_r(k_x)$は位相角を表わし，k_xは入射平面波の伝搬定数のx方向成分を表わす．入射bounded beamは式(8)からわかるように種々の伝搬定数をもつ平面波の合成として表わされているが，これらの入射波の素波に式(9)で与えられる反射波の振幅比を乗ずれば反射波の素波が得られる．したがって，反射波$\phi_r(x,z)$はこれらの素波の合成として式(8)および式(9)から，つぎのように表わされる．

$$\phi_r(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty} r(k_x)\,\Phi(k_x)\,e^{j\{\omega t-k_x x+k_z z-(k_{1z}-k_z)l-\phi_r(k_x)\}}\,dk_x \qquad (0<z<l) \tag{10}$$

以上で，入射波および反射波の表式が求まったわけであるが，これらの式を式(5)を用いて書き直せば，$\phi_i(x,z)$，$\phi_r(x,z)$はそれぞれ次式のようになる．

$$\phi_i(x,z)=\frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-d}^{d} e^{j\{\omega t-k_x x-k_z z\}} \cdot e^{j\{-(k_{1x}-k_x)s-(k_{1z}-k_z)l\}}\,ds\,dk_x \tag{11}$$

$$\phi_r(x,z)=\frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-d}^{d} r(k_x)\,e^{j\{\omega t-k_x x+k_z z\}} \cdot e^{j\{-(k_{1x}-k_x)s-(k_{1z}-k_z)l-\phi_r(k_x)\}}\,ds\,dk_x \tag{12}$$

3．Goos-Hänchen効果

本節では，前節で求めたようなbounded beam が運動している誘電体媒質に入射したときの，Goos－Hänchen効果について検討する．

3．1　反射波の変位量の導出

式（11）および式（12）で示される入射および反射bounded beam の伝搬定数 k_x は－∞から＋∞の成分を含むが，$z = l$ なる面に存在するスリットの幅が入射平面波の波長に比べて十分に大きい場合，すなわち，条件式

$$\frac{2d}{\lambda_1} = \frac{2d}{(2\pi/n_1 k_0)} = \frac{d n_1 k_0}{\pi} \gg 1 \qquad (13)$$

が成り立つ場合には，スリットを通過した後のbounded beam が含む伝搬定数 k_x はほとんど入射平面波の伝搬定数 k_{1x} の付近に集中しているものと考えることができる．すなわち

$$| k_{1x} - k_x | \ll 1 \qquad (14)$$

と考えてよい．そこで，反射波の位相項に含まれる $\phi_r(k_x)$ を $k_x = k_{1x}$ の回りに展開すれば

$$\phi_r(k_x) = \phi_r(k_{1x}) + \left(\frac{\partial \phi_r(k_x)}{\partial k_x}\right)_{k_x=k_{1x}} (k_x - k_{1x}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi_r(k_x)}{\partial k_x^2}\right)_{k_x=k_{1x}} \cdot (k_x - k_{1x})^2 + \cdots\cdots \qquad (15)$$

となる．ここで，式（14）の仮定によって（$k_x - k_{1x}$）の2次以上の項を無視し，$\left(\frac{\partial \phi_r(k_x)}{\partial k_x}\right)_{k_x=k_{1x}} = \phi_r'(k_{1x})$ と書くと，$\phi_r(k_x)$ はつぎのようになる．

$$\phi_r(k_x) \cong \phi_r(k_{1x}) + \phi_r'(k_{1x}) \cdot (k_x - k_{1x}) \qquad (16)$$

一方 $r(k_x)$は，静止媒質Ⅰと運動媒質Ⅱの境界面，すなわち $z=0$ なる面上で全反射が起こる場合には後に示すように，

$$r(k_x) = 1 \qquad (17)$$

となる．したがって，境界面において全反射現象が起こる場合には，反射波 $\phi_r(x,z)$ は式(12)，(16)および(17)から

$$\phi_r(x,z) = \frac{A}{2\pi} e^{-j\{\phi_r(k_{1x}) - \phi_r'(k_{1x}) \cdot k_{1x}\}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-d}^{d} e^{j\{\omega t - k_x(x + \phi_r'(k_{1x})) + k_z z\}} \cdot e^{j\{-(k_{1x}-k_x)s - (k_{1z}-k_z)l\}} ds\, dk_x \qquad (18)$$

と表わされる．また，式(18)の反射波と幾何光学的反射波とを比較するために，完全反射の場合の反射波を求める．完全反射とは，式(9)で表わされる $r(k_x)$ および $\phi_r(k_x)$ がつぎのように表わされる場合をいう．

$$r(k_x) = 1$$

$$\phi_r(k_x) = \phi_0 = \text{const.} \qquad (19)$$

したがって，この場合の反射波 ϕ_{rp} は式(12)および(19)から

$$\phi_{rp}(x,z) = \frac{A}{2\pi} e^{-j\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-d}^{d} e^{j\{\omega t - k_x x + k_z z\}} \cdot e^{j\{-(k_{1x}-k_x)s - (k_{1z}-k_z)l\}} ds\, dk_x \qquad (20)$$

となる．上式は幾何光学的な反射波の光路を示している．ここで，全反射の場合の反射波ϕ_rと，完全反射の場合の反射波ϕ_{rp}とを比較すれば，式（18）および（20）から次式を得る．

$$\phi_r(x,z)=K\,\phi_{rp}(x+\phi_r'(k_{1x}),\ z) \tag{21}$$

ここで，

$$K=e^{j\{\phi_0-\phi_r(k_{1x})+\phi_r'(k_{1x})\cdot k_{1x}\}}=\text{const.}$$

したがって，式（21）からわかるように全反射の場合の反射bounded beamは幾何光学的反射波に対してx方向に

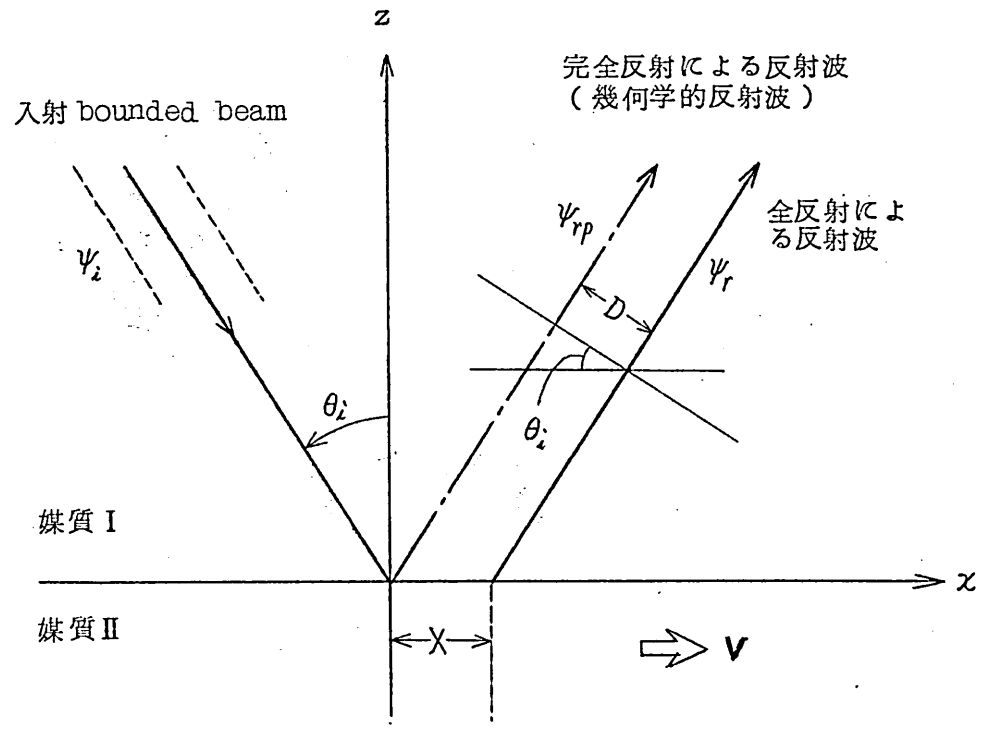


図２．Goos－Hänchen効果による変位

$$X = -\phi_r'(k_{1x}) = -\left(\frac{\partial \phi_r(k_x)}{\partial k_x}\right)_{k_x=k_{1x}} \tag{22}$$

なる量だけ変位していることがわかる（図2参照）．また，反射波の進行方向に垂直な面内での変位量をDとすれば，Dは図2からわかるように次式で与えられる．

$$D = X\cos\theta_i = -\phi_r'(k_{1x})\cos\theta_i \tag{23}$$

一方，伝搬定数k_xをもつ素波は入射角がθなる平面波と考えれば，

$$k_x = n_1 k_0 \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda_1}\sin\theta \tag{24}$$

なる関係が成り立ち，とくにθが入射平面波の入射角θ_iに等しい場合には

$$k_{1x} = n_1 k_0 \sin\theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_1}\sin\theta_i \tag{25}$$

となる．ただし，λ_1は媒質Ⅰ中の平面波の波長を表わす．以上の関係式を用いて，変位量Dを入射角θ_iの関数として表わせば，まず式(22)は

$$X = -\frac{\lambda_1}{2\pi}\left(\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\partial\phi_r(\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_i} = -\frac{\lambda_1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\cos\theta_i}\cdot\phi_r'(\theta_i)$$

となり，したがって変位量Dは式(23)から次式のように求められる．

$$D = -\frac{\lambda_1}{2\pi}\left(\frac{\partial\phi_r(\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_i} = -\frac{\lambda_1}{2\pi}\phi_r'(\theta_i) \tag{26}$$

同様に，式(9)で与えられる振幅比を素波の入射角θを用いて書き改めれば

$$R(\theta) = r(\theta)\,e^{-j\phi_r(\theta)} \tag{27}$$

と表わされるが，全反射の場合には後に示すように $r(\theta)=1$ となる．なお，誘電体媒質の境界面において全反射が起こらない場合には，振幅比 $R(\theta)$ は実数で表わされ，その位相角 $\phi_r(\theta)$ は定数（0または π）となり，したがって，この場合にはGoos－Hänchen 効果は現われない．

3．2　運動媒質の境界面におけるGoos－Hänchen 効果

つぎに，運動媒質の境界面における反射波の変位量を実際に求めるために，静止媒質Ⅰと運動媒質Ⅱの境界面において，平面波が入射した場合の反射波と入射波の振幅比 $R(\theta)$ を求める．平面波が運動媒質との境界面に入射した場合の反射波の振幅比 $R(\theta)$ は，媒質が静止している場合と同様に，一般に次式で与えられる．(13)

$$R(\theta)=\begin{cases}\dfrac{k_z^{(1)}-k_z^{(2)}}{k_z^{(1)}+k_z^{(2)}}\ , & (E\text{波の場合}) \qquad (28a)\\[2ex] \dfrac{n_2^2 k_z^{(1)}-n_1^2 k_z^{(2)}}{n_2^2 k_z^{(1)}+n_1^2 k_z^{(2)}}\ , & (H\text{波の場合}) \qquad (28b)\end{cases}$$

ただし，$k_z^{(1)}$ および $k_z^{(2)}$ はそれぞれ媒質Ⅰおよび媒質Ⅱ中を伝搬する波の伝搬定数の z 方向成分を表わし，$n_2=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}$ である．ここで，$k_z^{(1)}$ は平面波の入射角 θ および媒質の構成定数によってつぎのように表わされる．

$$k_z^{(1)}=-n_1 k_0 \cos\theta \qquad (29)$$

さて，静止媒質Ⅰと運動媒質Ⅱとの境界面で平面波が全反射を起こすための条件は

$$(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\theta_1)(\sin\theta-\theta_2)>0\ ,\quad (n_2^2\beta^2\neq 1) \qquad (30a)$$

$$2 n_1 \beta (n_2^2 - 1) \sin \theta - (n_2^2 - \beta^2) > 0 , \quad (n_2^2 \beta^2 = 1) \qquad (30b)$$

で与えられ，このとき $k_z^{(2)}$ はつぎのように表わされる．[13]

$$k_z^{(2)} = \begin{cases} j n_1 k_0 r \sqrt{(1 - n_2^2 \beta^2)(\sin \theta - \Theta_1)(\sin \theta - \Theta_2)} , \\ \qquad (n_2^2 \beta^2 \neq 1) \qquad (31a) \\ j k_0 r \sqrt{2 n_1 \beta (n_2^2 - 1) \sin \theta - (n_2^2 - \beta^2)} , \\ \qquad (n_2^2 \beta^2 = 1) \qquad (31b) \end{cases}$$

ここで，

$$\Theta_1 = \frac{n_2 + \beta}{n_1 (n_2 \beta + 1)} , \qquad \Theta_2 = \frac{n_2 - \beta}{n_1 (n_2 \beta - 1)}$$

$$\beta = \frac{v}{c} , \qquad r = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (32)$$

したがって，全反射の場合の振幅比 $R(\theta)$ は，式（28），（29）および（30）から，一般に次式のように表わすことができる．

$$R(\theta) = \frac{a + j b}{a - j b} \qquad (33)$$

ただし，a および b は E 波（すなわち電界が入射面に垂直な波）の場合，および H 波（磁界が入射面に垂直な波）の場合のそれぞれの場合について次式で定義される．

E 波の場合：

$$\begin{cases} a_{E1} = \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} & (\ n_2^2\beta^2 \fallingdotseq 1\ ) \\ b_{E1} = r\sqrt{(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\Theta_1)(\sin\theta-\Theta_2)} \end{cases} \tag{34a}$$

$$\begin{cases} a_{E2} = n_1\cos\theta & \\ & (\ n_2^2\beta^2 = 1\ ) \\ b_{E2} = r\sqrt{2n_1\beta(n_2^2-1)\sin\theta-(n_2^2-\beta^2)} \end{cases} \tag{34b}$$

H波の場合：

$$\begin{cases} a_{H1} = n_2^2\, a_{E1} & \\ & (\ n_2^2\beta^2 \fallingdotseq 1\ ) \\ b_{H1} = n_1^2\, b_{E1} \end{cases} \tag{35a}$$

$$\begin{cases} a_{H2} = n_2^2\, a_{E2} & \\ & (\ n_2^2\beta^2 = 1\ ) \\ b_{H2} = n_1^2\, b_{E2} \end{cases} \tag{35b}$$

さらに，$R(\theta)$を式（27）のような形式で表わせば，式（33）からわかるように$r(\theta)=1$となり，$R(\theta)$は次式のように表わされる．

$$R(\theta) = e^{-j\phi_r(\theta)} \tag{36}$$

ここで，

$$\phi_r(\theta) = \tan^{-1}\frac{-2ab}{a^2-b^2} \tag{37}$$

したがって，式（37）で与えられる$\phi_r(\theta)$をθで微分し，式（26）に代入す

れば，運動媒質の境界面における Goos－Hänchen 効果による変位量 D が求められる．そこで，これを実際に計算すれば変位量 D は次式のように表わされる．

$$D=\frac{\lambda_1}{\pi}\left\{\frac{a\,b'-a'\,b}{a^2+b^2}\right\}_{\theta=\theta_i} \tag{38}$$

ここで，a' および b' は式(34)～(35)で与えられる a および b を入射角 θ で微分した量を表わし，E 波の場合および H 波の場合のそれぞれの場合について以下の様に与えられる．

E 波の場合：

$$\begin{cases} a'_{E1}=-\sin\theta \\ b'_{E1}=\dfrac{r(1-n_2^2\beta^2)\{2\sin\theta-(\Theta_1+\Theta_2)\}\cos\theta}{2\sqrt{(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\Theta_1)(\sin\theta-\Theta_2)}} \end{cases} \quad (n_2^2\beta^2\fallingdotseq 1) \tag{39a}$$

$$\begin{cases} a'_{E2}=-n_1\sin\theta \\ b'_{E2}=\dfrac{n_1 r\beta(n_2^2-1)\cos\theta}{\sqrt{2n_1\beta(n_2^2-1)\sin\theta-(n_2^2-\beta^2)}} \end{cases} \quad (n_2^2\beta^2=1) \tag{39b}$$

H 波の場合：

$$\begin{cases} a'_{H1}=n_2^2\,a'_{E1} \\ b'_{H1}=n_1^2\,b'_{E1} \end{cases} \quad (n_2^2\beta^2\fallingdotseq 1) \tag{40a}$$

$$\begin{cases} a'_{H2}=n_2^2\,a'_{E2} \\ b'_{H2}=n_1^2\,b'_{H2} \end{cases} \quad (n_2^2\beta^2=1) \tag{40b}$$

また，変位量Dを入射平面波の波長λ_1で正規化した変位量をD_Nとすれば，D_N は

$$D_N = D/\lambda_1 = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{a\,b' - a'\,b}{a^2 + b^2}\right\}_{\theta=\theta_i} \tag{41}$$

となる．ただし，a，b および a'，b' はそれぞれ式(34)，(35)および式(39)，(40)で定義される量である．以上の結果から，ある入射角 θ_i で bounded beam が運動媒質の境界面に入射したとき，全反射によって反射波は式(41)で与えられる D_N なる量だけ変位をうけることがわかる．

なお，式(41)において $\beta = 0$ とおけば，E波およびH波の場合の静止媒質に対する変位量はそれぞれ

$$D_{NE} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\sin^2\theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}, \quad (E\text{波}) \tag{42a}$$

$$D_{NH} = D_{NE} \cdot \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right\}\sin^2\theta_i - 1}, \quad (H\text{波}) \tag{42b}$$

ただし

$$\sin\theta_i > \frac{n_2}{n_1} \tag{43}$$

となり，誘電体媒質Ⅱが静止している場合の表式[7]に一致する．

4．数値計算例および検討

第2節において，入射bounded beam に対する反射波を求める方法として，平面波近似を用いたが，静止媒質の場合については，この近似を用いて得られた理論式による計算結果と実験結果とはよい一致がみられることが知られている.[10] また，媒質が運動している場合にも，平面波近似の仮定は成立し，したがって運動媒質の境界面からの反射波を求める場合にも，この近似が適用できる.

式（41）で与えられる正規化された変位量 D_N の H 波の場合の数値計算例を図3～図6に示す．これらの数値計算例は，いずれも，bounded beam の入射角 θ_i に対する反射波の変位量 D_{NH} の変化の様子を，媒質の運動媒質 β をパラメータとして表わしたものである．図3～5は，$n_2 < n_1$ の場合，すなわち媒質が静止している場合にも全反射が起こる場合の数値計算例である．図6は，$n_2 > n_1$ の場合，すなわち媒質が静止している場合には全反射が起こらない場合の数値計算例であり，図3～5とは異なった傾向を示している.

5．結　　言

運動媒質の境界面にbounded beam が入射した場合のGoos－Hänchen 効果について，数値計算例を挙げて詳しく検討した．なお，本文では運動媒質として完全誘電体を取り扱ったが，プラズマ媒質が運動している場合も同様に取り扱うことができる．さらに，入射波がガウスビームの場合についても現在解析を進めている．これらについては，別の機会に報告する予定である.

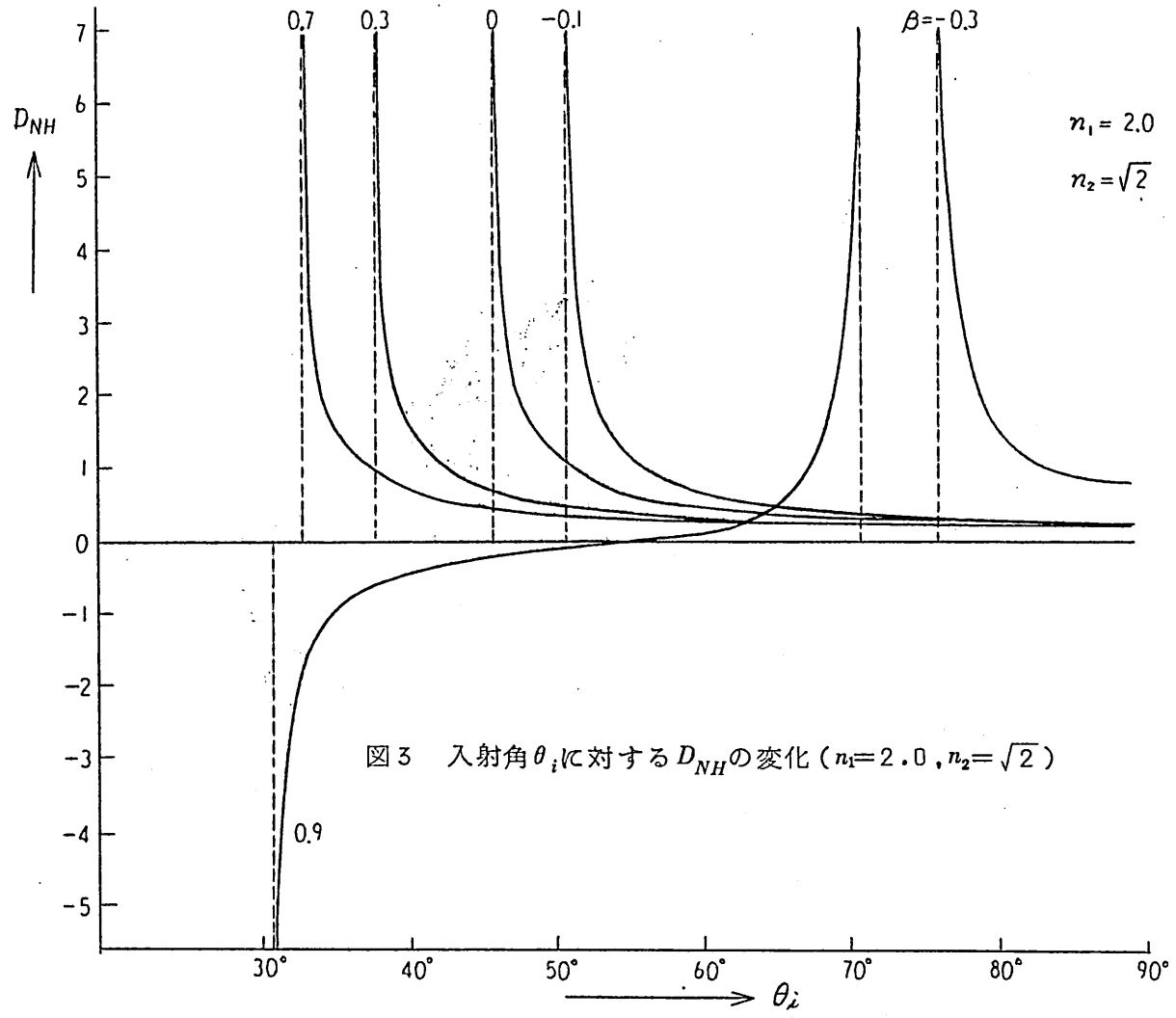


図３　入射角θ_iに対するD_{NH}の変化（$n_1=2.0$，$n_2=\sqrt{2}$）

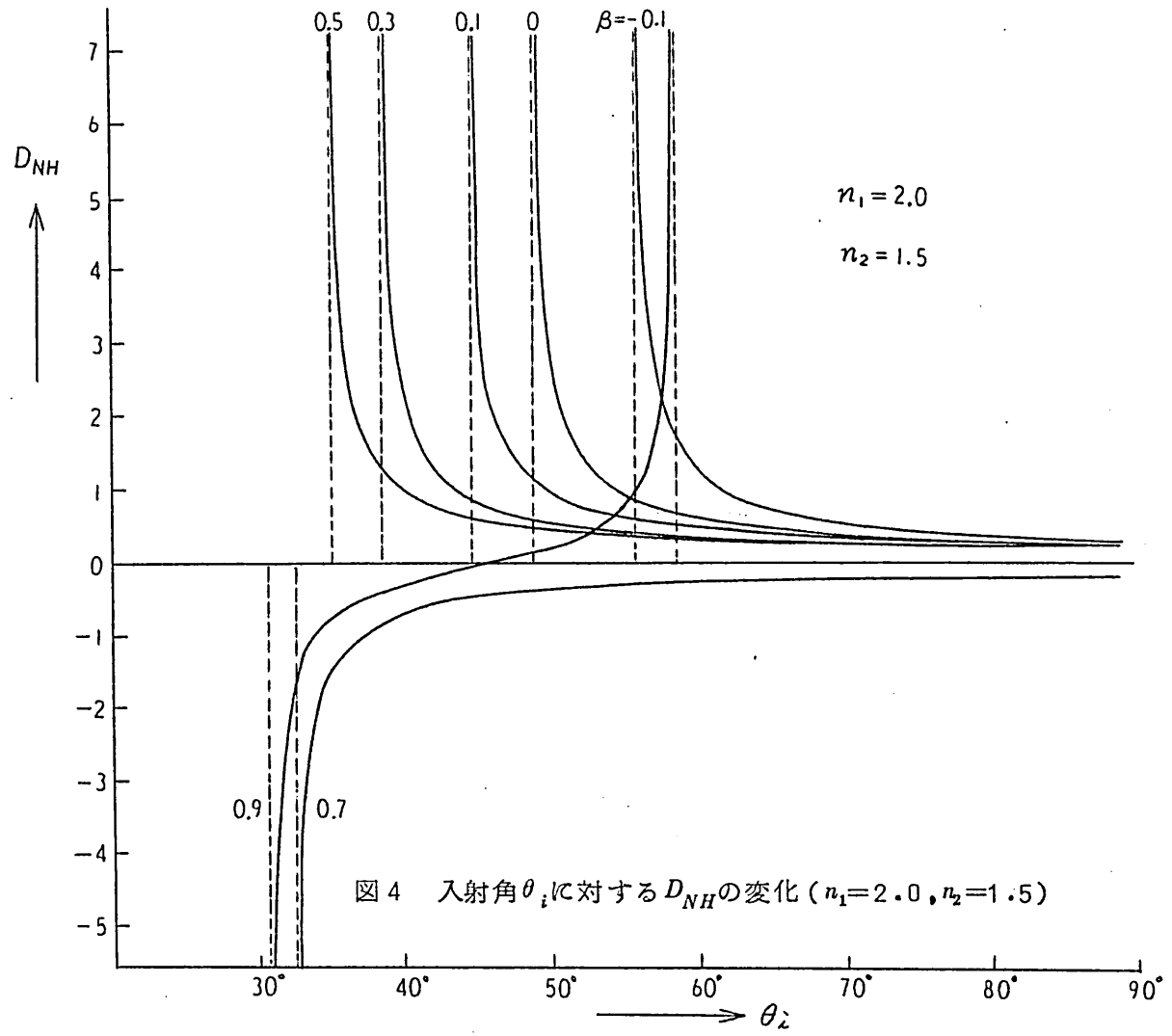


図 4　入射角θ_iに対するD_{NH}の変化（n_1=2.0，n_2=1.5）

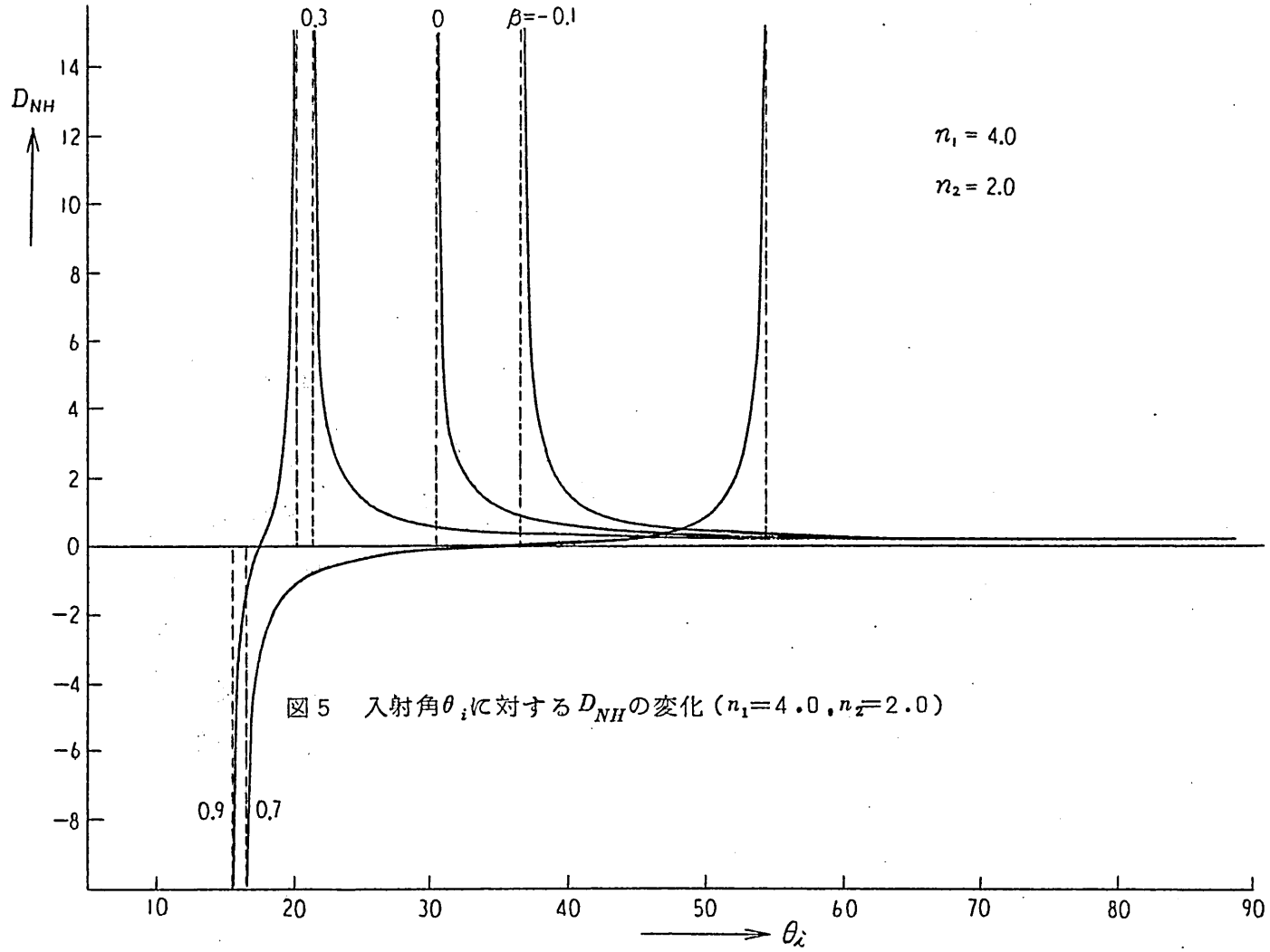


図5　入射角θ_iに対するD_{NH}の変化（n_1=4.0，n_2=2.0）

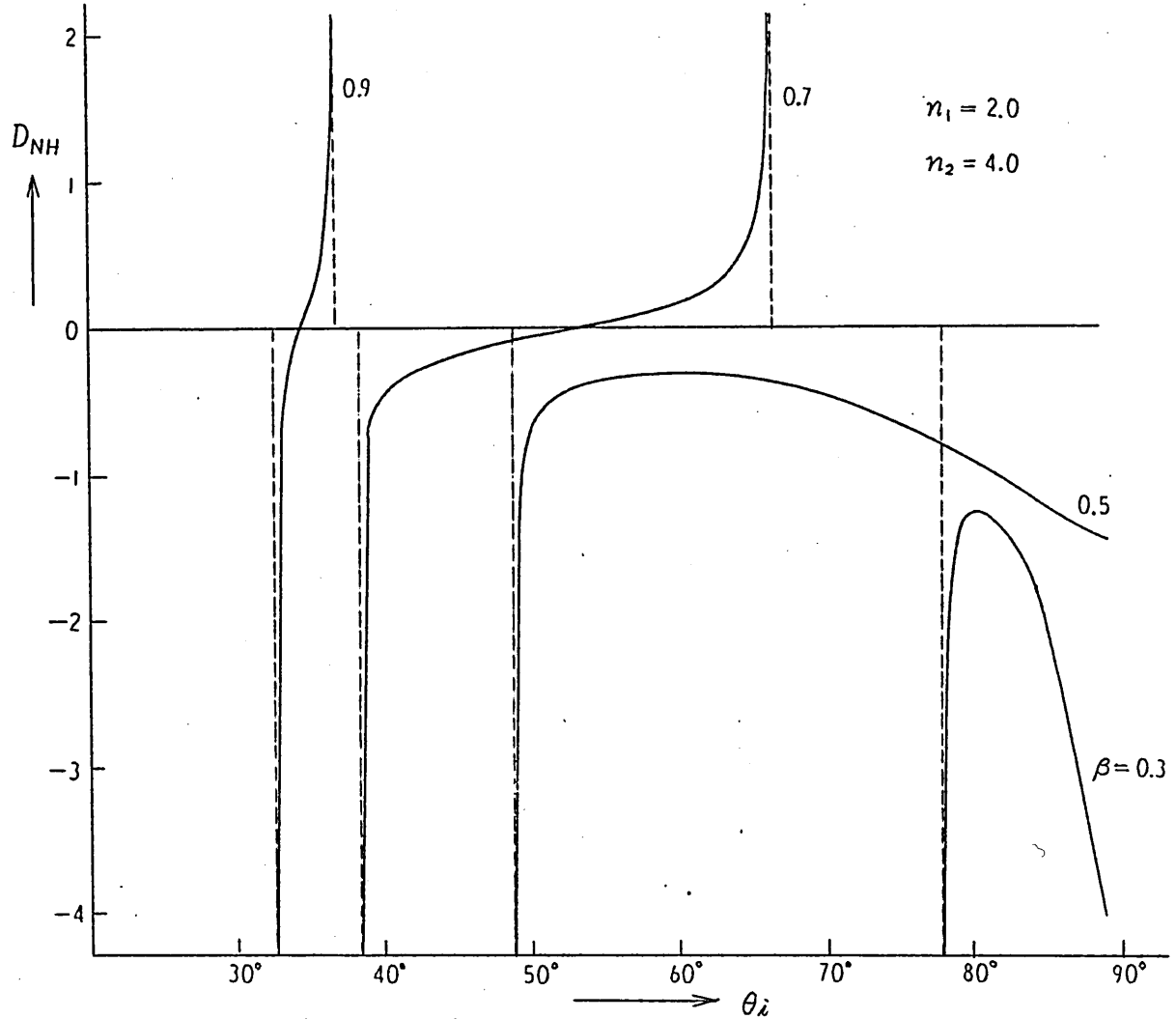


図6　入射角θ_iに対するD_{NH}の変化（$n_1=2.0, n_2=4.0$）

謝　　辞

日頃ご指導ごべんたついただいている本学工学部熊谷信昭教授および裏克己教授に深謝する．

また，常々ご討論いただく熊谷研究室の諸氏に深謝する．

文　　献

(1) 牧本利夫，末田正；“Brewster角を利用したミリ波プリズム形方向性結合器,”輻研資（昭３８－０２）

(2) 末田正，熊谷信昭，倉茵貞夫；“広帯域準光学プリズム回路素子,”信学誌，４９，p.４５７（昭４１－０３）．

(3) P.K. Tien, R.Ulrich, and R.J. Martin; “Modes of propagation light waves in thin deposited semiconductor film,” Appl. Phys. Letters, Vol. 14, №9, p.291 (1969).

(4) P.K. Tien and R. Ulrich; “Theory of prism-film coupler and thin-film light guides,” J. Opt. Soc. Am., Vol. 60, №10, p.1325 (1970).

(5) R. Ulrich; “Theory of the prism-film coupler by planewave analysis,” J. Opt. Soc. Am., Vol. 60, №10 p.1337 (1970).

(6) J.E. Midwinter; “Evanescent field coupling into a thin-film waveguide,” IEEE Trans. QE, Vol. QE-6, №10, p.583 (1970).

(7) F. Goos und H. Hänchen; " Ein neuer und fandamentaler Versuch zur Totalreflexion, " Ann. d. Phys., (6), 1 p.333(1947).

(8) K. Artmann; " Berechung der Seitenversetzung des totalreflektierten Strahles, " Ann. d. Phys., (6), 2, p.87(1948).

(9) C. Schaefer und R. Pich; " Ein Beitrag zur Theorie der Totalreflexion, " Ann. d. Phys., (5), 30, p.245 (1937).

(10) H.K.V. Lotsch; " Beam displacement at total reflection, Ⅰ～Ⅳ, " (2), 32, p.116(1970).

(11) 藤岡弘, 小川英一, 安川交二, 熊谷信昭; " 平面電磁波の全反射現象に関する一考察, " 信学論(B), 投稿中.

(12) 小川英一, 鈴木俊雄, 藤岡弘; " Evanescent wave と運動誘電体媒質との相互作用, " 信学論(B), 投稿中.

(13) 熊谷信昭, 藤岡弘: 相対論的電磁界理論序説(コロナ社, 近刊).

輻射科学研究会資料

軸方向に磁化された円柱状YIGの内部磁場
——磁気弾性共鳴を利用した測定——

京都大学 工学部

粟井 郁雄　　池上 淳一

1971年 10月 1日

1. まえがき

楕円体形の強磁性体に外部から一様な磁場を加えると、その強さの如何にかゝわらず内部磁場は一様となるのに対して、非楕円体形試料では決してそうはならない。それは試料端面に誘起される磁極及び磁化の体積分布から生ずる反磁場が一様でない事に起因する。もし印加磁場が非常に強く、試料を一様に磁化してなりある程であれば内部磁場分布は簡単に計算する事ができて、円柱状試料が軸方向に磁化された場合の軸上磁場分布として次式が与えられている。

$$H(\zeta) = He + Ha - Hd(\zeta) \qquad (1)$$

ここにHeは印加磁場、Haは異方性磁場で両者共場所によらず一定であり、Hdは反磁場で次式のように表わす事ができる。[1]

$$Hd(\zeta) = 2\pi M \left\{ 2 - \frac{1-\zeta}{[(1-\zeta)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1+\zeta}{[(1+\zeta)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \qquad (2)$$

但し、$\zeta = 2z/L$, $\rho = D/L$, zは円柱の中心から軸方向に取った距離、Dは円柱の直径、Lは全長、$2\pi M$は飽和磁化の1/2である。なお今後「内部磁場」という言葉を断りなしで用いる場合常に「円柱状磁性体の軸方向に一様な直流磁場を加えた時の中心軸上での内部磁場の大きさ」という意味で用いるものとする。

しかし、印加磁場があまり大きくない時には上のように簡単にH(ζ)を計算する事ができない。JosephとSchlömannは磁化ベクトルの大きさが試料内で一定であり、その方向は試料内の局所磁場（内部磁場）の方向に一致するという仮定のもとで反磁場をM/Heの級数を用いて計算しようとした。[2] 彼等の用いた仮定は言いかえれば「試料が磁気的に充分軟い」という事でありYIGの場合は丁度それに該当している。その級数展開の第1項はまさに式(2)を与え、高次の項は試料が一様に磁化されていないという点を加味する事になる。けれどもこの方法によっても我々の問題としている円柱状試料については展開の第2項までしか計算する事ができないし、しかも半無限の試料についてである。

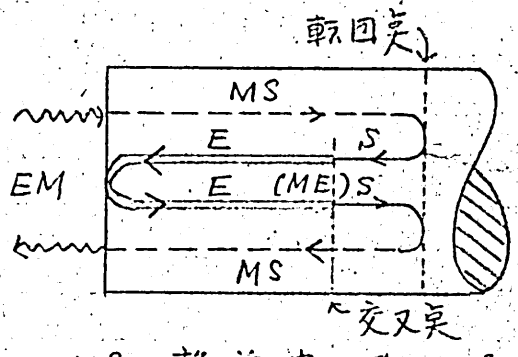
一方実験的に内部磁場を求めようという試みもある。良質のYIGはスピン波、弾性波あるいはその混成波である磁気弾性波を低損失で伝播させる。そして円柱状試料の内部磁場は上に凸の分布をしておりスピン波は$H = \omega/\gamma$（ωは信号角周波数、γは磁気回転比）より小さい磁場の領域でしか存在し得ない事を考え合わせると、信号は端面と試料内で$H = \omega/\gamma$を満

足する系（転回系）の向を往復する事がわかる。それゆえ磁気弾性波の群速度が知られていれば，パルス変調された信号の遅延時間を測定する事によって端面と転回系までの距離がわかる。そして信号周波数を変えながら，内部磁場の形状に従って変化して行く転回系までの距離を測れば形状が知れる事になる。この原理に基いて Lacklison と Lewis は内部磁場分布を測定し，先述の Joseph，Schlömann の予測とかなり良く一致する事が確かめられた。[3] しかし彼等の測定方法には用いられるパラメータのうちパルスの遅延時間は測定誤差が非常に大きくなり得る事，その上電磁波から磁気弾性波への変換効率が小さいために試料に結合せずにそのまま反射してくるパルス成分が大きく，遅延信号がそれにマスクされてしまうので短い遅延時間が測れないつまり端面近傍の磁場分布が測れないという欠点がある。

それに反して我々がこれから述べる方法は，無変調のマイクロ波信号の共鳴吸収によるものであり，上のような欠点は全くない。この方法は一言でいうと，磁気弾性共鳴吸収を起している試料の端面と転回系の向に存在する定在波の数をかぞえるという事であり，定在波の波長は他の実験から既に知られている。以下順次磁気弾性共鳴についての若干の説明，測定の原理，実験結果と考察を述べて行こう。

2. 磁気弾性共鳴

試料を磁化してその一つの端面にマイクロ波の信号を加えるとそこから静磁波が発生し，試料中心部に向って進行していく。それが転回系に達するとそこで反射し，一部のエネルギーは静磁波のまま，残りのエネルギーはスピン波として端面方向に進む。前者はここでの問題ではないので後者に注目すると，磁気弾性相互作用により，交又系近傍でスピン波は弾性波に変換されてしまい，磨き上げられた端面で全反射され以後上と逆の過程を経て最後に同じ端面で電磁波として出て行く。[4] もし入射波と反射波が以上の過程の後同位相となれば共鳴が起る。



MS；静磁波　S；スピン波
E；弾性波　EM；電磁波
ME；磁気弾性波

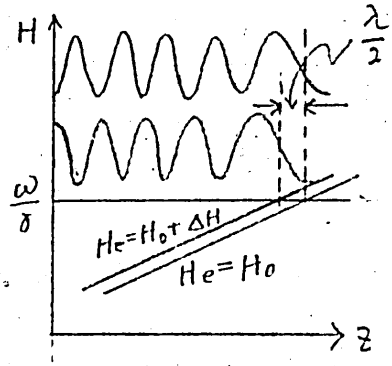
第1図　磁気弾性波の励振と伝播

静磁波の波数は一般にスピン波及び弾性波のそれよりも2～3桁小さいので第1回の共鳴を考える場合無視してさしつかえない。

Kohane等によれば共鳴の隣り合うピーク間に対応する磁場の強さにおいて以下の3つの仮定をすれば数式で表現できる。[5][6]

1. スピン波は交叉点において突然弾性波に変化する。
2. 反磁場の試料内における形は外部磁場の強さに依らない。
3. 反磁場は試料内で直線的な変化をする。

印加磁場を変化させれば交叉点が移動するが内部磁場の形は変らないのでスピン波の波の数は一定のままである。それ故弾性波の半波長分だけ交叉点が移動する様に印加磁場を変えた所で隣り合う共鳴のピークが生ずる。即ち



第2図 磁気弾性共鳴の概念図

$$\Delta H = \frac{1}{2}\lambda |Hd'| \qquad (3)$$

Hd'は交叉点における反磁場の傾き，λは弾性波の波長である。(第2図参照)

3. 内部磁場測定の原理

矢張りKohane等と同様にスピン波と弾性波のエネルギー変換は交叉点において急速に行なわれるものと仮定しよう。すると第1回において交叉点の左側では純粋な弾性波，右側では純粋なスピン波として信号が存在する事になる。このような仮定に基づく誤差は付録Aで検討するが殆んどの場合1%以下で問題とするに足りない。

次にKohane等の仮定2，3はとうぜん。我々の目的はまさに「反磁場は直線的な変化はせず」，「外部磁場の大きさによって形状を変化させる」事を見出す事にあるからである。

まず簡単のために第1回で交叉点より右側のスピン波の存在を無視してよい磁気弾性共鳴は弾性波だけで起るものと考えてみる。一般に交叉点と取回点の距離は非常に小さく10 μm程度であるから交叉点が非常に端面に近い場合を除けばこれでもたいした誤差は出ない。交叉点と端面の距離をz_cとすれば信号周波数を一定に保っている時，z_cは外部磁場H_eの変化によってだけ変るので隣り合う共鳴ピーク間について成り立つ式は

$$\frac{dz_c}{dH_e}\Delta H = -\frac{1}{2}\lambda \qquad (4)$$

となる。* ここで ΔH は微分量であると共に隣り合う共鳴ピークに対応する印加磁場の増分でありHeの関数でもある。後者の意味では共鳴吸収実験によって求める事のできる量である。そこで(4)式を適当に変形してHeで積分すれば

$$z_c = \frac{C_t}{2f}\int_{He}^{Heo}\frac{dHe}{\Delta H} \qquad (5)$$

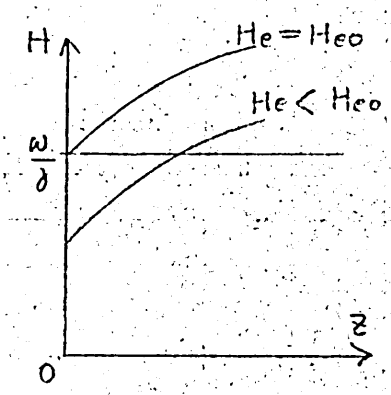
を得る。ここで C_t は弾性波の速度，Heo は第3図に示したように共鳴の起る最大のEP加磁場の大きさである。スピン波と弾性波の波数は交叉点で等しくなるので両者の分散関係

$$\omega = \gamma(H + Dk^2)$$

$$\omega = C_t k$$

から k を消去すれば交叉点における内部磁場の強さ Hc を求める事ができる。

$$Hc = \frac{\omega}{\gamma} - D\left(\frac{\omega}{C_t}\right)^2 \qquad (6)$$



第3図 共鳴の起る上限の外部磁場

D は交換常数である。かくして(5),(6)式によって z_c における磁場 H_c が求まった。外部磁場を一定にしたまま信号周波数を変化させれば交叉点が移動するので多くの信号周波数に対して上と同じ事をくり返せば内部磁場の形状が知られる。

次に今まで無視していたスピン波の共鳴に対する寄与を考慮に入れてみよう。もしもある共鳴ピークを与えるHeが存在してそれから ΔH だけ外部磁場を変化させた時に隣のピークが観測されるものとすれば共鳴の条件式は次のように表わされる。

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{z_t(He)} k_{ME}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_0^{z_t(He+\Delta H)} k_{ME}\,dz = 1 \qquad (7)$$

z_t は端面と転回点との距離であり，ME は磁気弾性波を意味する。左辺第1項の積分はHeの関数であるから $f(He)$ と書き直せば(7)式は

$$f(He) - f(He+\Delta H) = \pi$$

となり更に

$$\frac{f(He+\Delta H) - f(He)}{\Delta H} = -\frac{\pi}{\Delta H}$$

と書き直す事ができる。(4)式の場合と同様 ΔH の2重の意味に注意すればこの式は次のような微分方程式と考える事ができる。

---

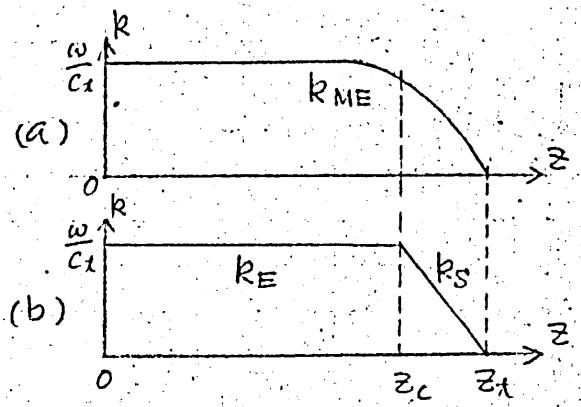
* 共鳴の条件式として必ずしも(4)式が一意的に出てくるわけではなく他に2つの可能性があるが，それらが物理的に無意味である事を付録Bに示す。

$$\frac{df(He)}{dHe} = -\frac{\pi}{\Delta H} \quad (8)$$

ここで右辺の $1/\Delta H$ は共鳴吸収の実験から He の近似的に連続な関数として定める事ができる。従って(8)式を積分する事により

$$f(He) = -\int_{He_0}^{He} \frac{\pi}{\Delta H} dHe \quad (9)$$

を得る。磁気弾性波の波数は円柱状試料の軸方向に第4図(a)のような変化をする。但し前述のように大ていの場合 $z_t - z_c$ は z_c に比べて非常に小さいのであるがこの図では誇張して大きく書いている。計算の便宜のために(a)のような変化を(b)のような折線で近似する事にしよう。それによる誤差は付録Aに示した。(7)式左辺第1項の積分で表わされる $f(He)$ は次のように変形される。



第4図 波数の位置的変化
(a) 磁気弾性波
(b) 近似的に弾性波とスピン波に分割したもの

$$f(He) = \int_0^{z_t(He)} k_{ME}\, dz$$

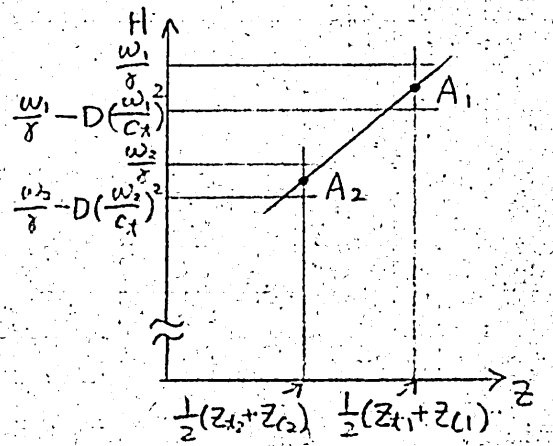
$$\simeq \int_0^{z_c(He)} k_E\, dz + \int_{z_c(He)}^{z_t(He)} k_S\, dz$$

$$\simeq \frac{\omega}{C_t} z_c + \frac{1}{2}\frac{\omega}{C_t}(z_t - z_c) = \frac{\omega}{2C_t}(z_t + z_c) \quad (10)$$

(9), (10)式から

$$\frac{1}{2}(z_t + z_c) = \frac{C_t}{2f}\int_{He}^{He_0} \frac{dHe}{\Delta H} \quad (11)$$

が得られる。先に求めた(5)式とこれを比較してみると右辺は同じであるが左辺が z_c から z_t と z_t の平均値に変っている点が異なる。ある与えられた外部磁場 He に対する内部磁場の分布は次のようにして決める事ができる。ある周波数 ω_1 に対する $(1/2)(z_{t1}+z_{c1})$ は式(11)によって ΔH の実験値から決定される。一方 z_{t1} および z_{c1} での内部磁場は夫々 $H_{t1} = \omega_1/\gamma$, $H_{c1} = \omega_1/\gamma - D(\omega_1/C_t)^2$ である。z_{t1} と z_{c1} の間隔は試料全長に比べて極めて小さいので内部磁場はその間で直線的に変化すると考えてさしつかえない。それ故 $(1/2)(z_{t1}+z_{c1})$ における内部磁場は $(1/2)(H_{t1}+H_{c1})$ で与え



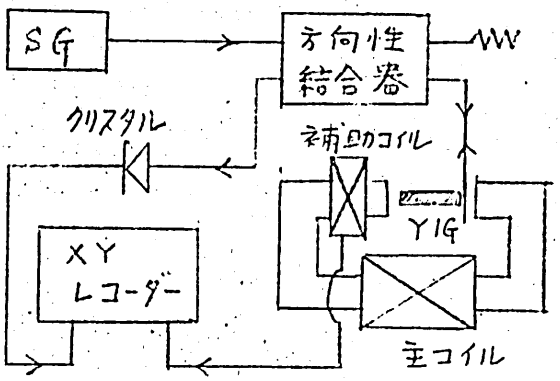
第5図 内部磁場分布の決め方

られる事になり第5図の矢 A_1 が決まった。ω_1 に充分近い信号周波数 ω_2 を次に選んで同じ事をくり返せば A_2 が求まり以下同様に周波数を変えていく事によって内部磁場分布の全貌が知られる。

磁気共鳴において内部磁場Hと信号角周波数を磁気回転比で除した量 ω/γ が同次元である事を考えると、同様の測定を隣接共鳴ピークの磁場の差ではなく、周波数の差について、つまり掃引発振器を用いて行なえる事に気づく。この方法による測定の原理を付録Cにまとめておこう。当然の事として隣接共鳴ピークの磁場の差による測定法での内部磁場分布と同じ結果が得られた。

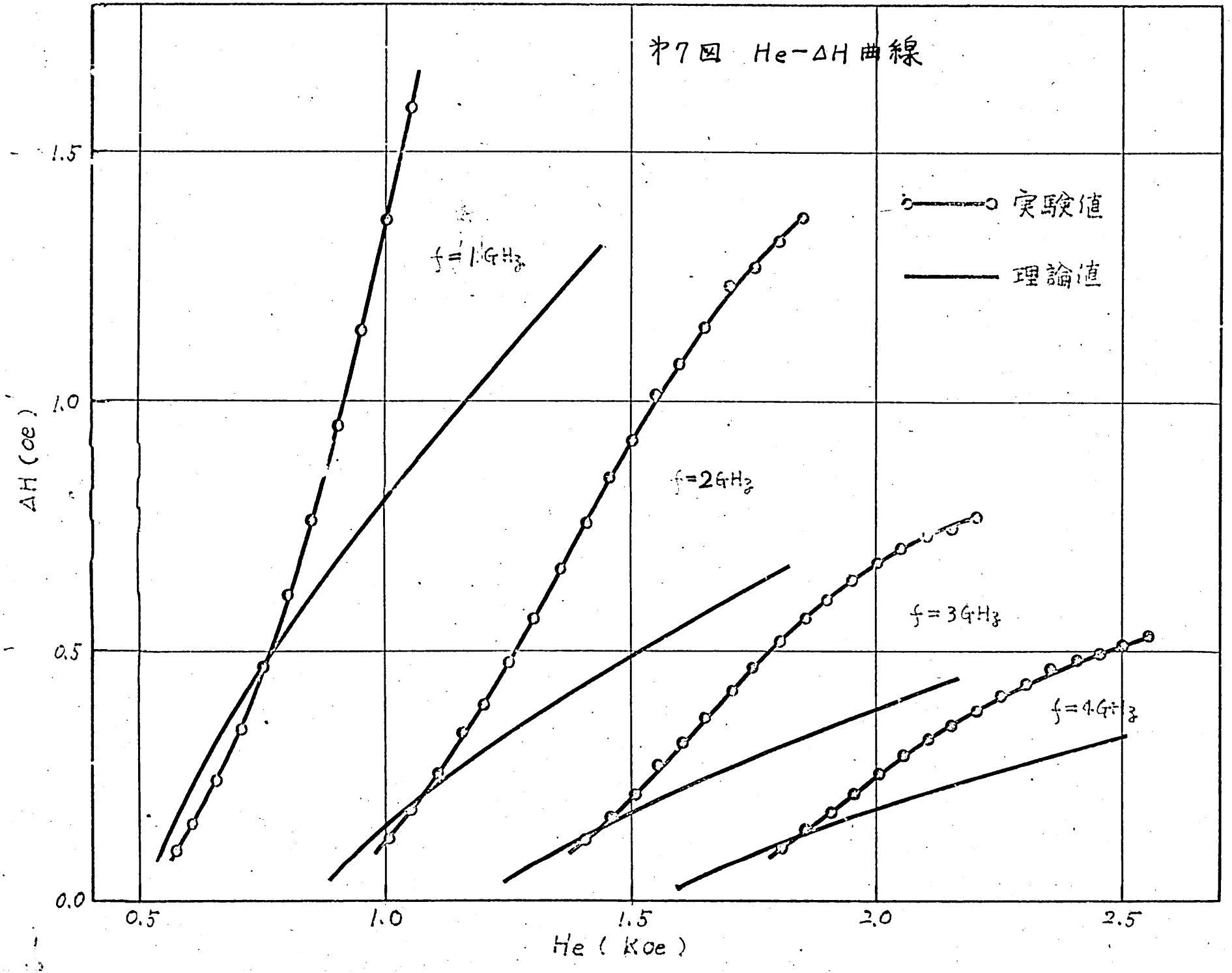
4. 実験結果とその検討

ΔH を測定するための装置の配置は第6図の通りである。測定は以下のような手順で行なわれた。まず電磁石の主コイルに電流を流してHeをある適当な値にするように定めてから補助コイルによってそれを少しだけ変化させる。補助コイルを流れる電流に比例する電圧がXYレコーダーのX軸端子に、YIGからの反射電力に比例する電圧がY軸端子に加えられて共鳴曲線がレコーダーに描かれる。この曲線から共鳴ピークの間隔を読み取ってあるHeに対する ΔH がわかるので種々のHeについて同じ事をくり返せば He－ΔH 曲線を知る。更に信号周波数を変えHe－ΔH 曲線を第7図に示したが、これは Schlömann らの前掲論文[5]の第11，12図に対応づけられる。第7図には式(1)，(2)，(3)から計算したHe－ΔH 曲線の理論値を実線にていくつかの代表的周波数に対して示したが、同じHeの値に対して ΔH の理論値は実験値の1/2～1/3の大きさでかなり大きく食いちがっている事がわかる。外部磁場を変えるとと共鳴ピークが1つ移るのは主に試料端面と交叉する距離が変化する事によるから、内部磁場の傾きが小さいほど、ピークが1つ移るに必要な外部磁場変化 ΔH は小さい。だから上の理論と実験の差からして、本当の内部磁場は式(1)(2)で与えられる Sommerfeld の内部磁場よりも、端面近傍で大きい傾きを持つ事が予想される。



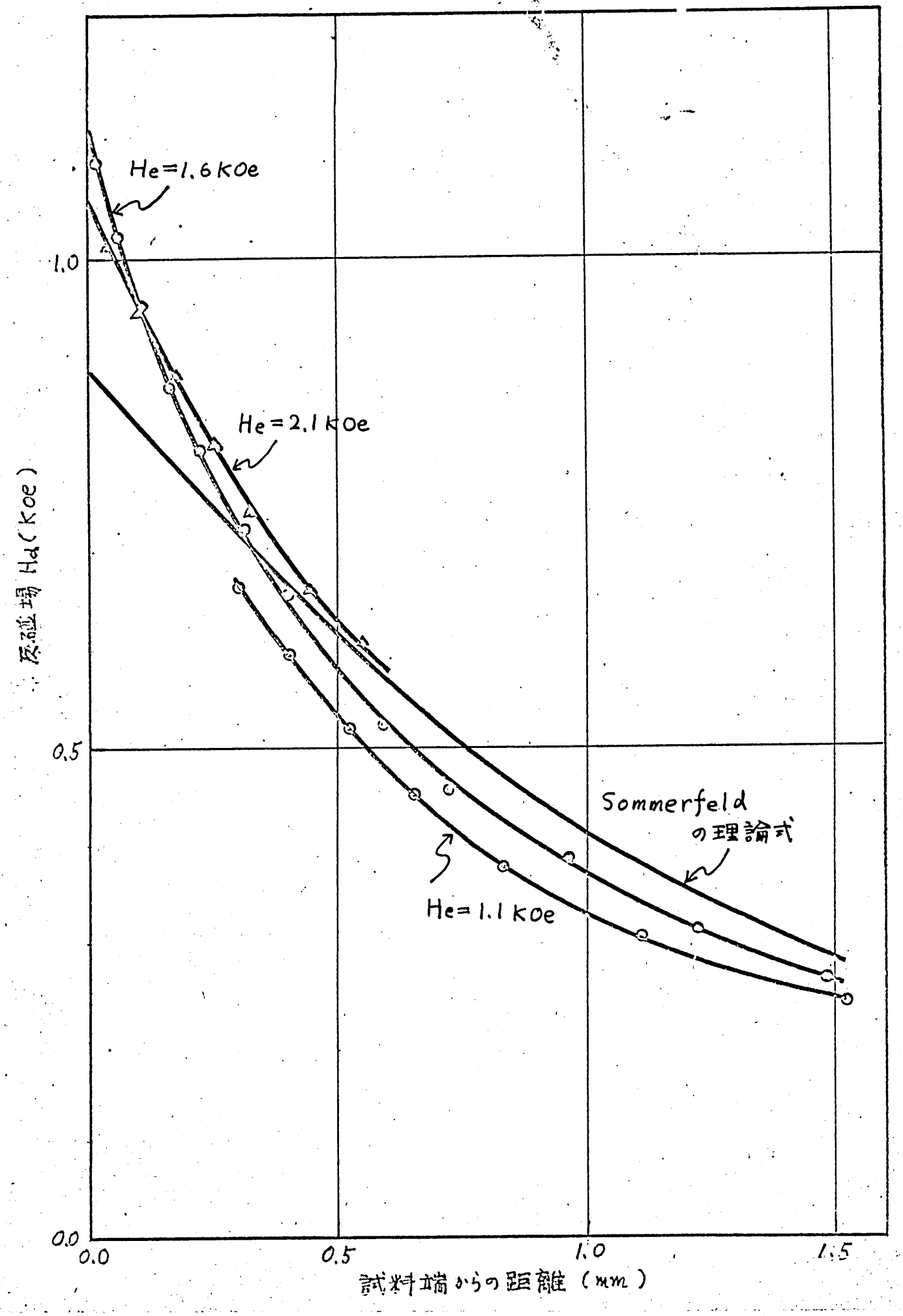
第6図 ΔH 測定の装置ブロック図

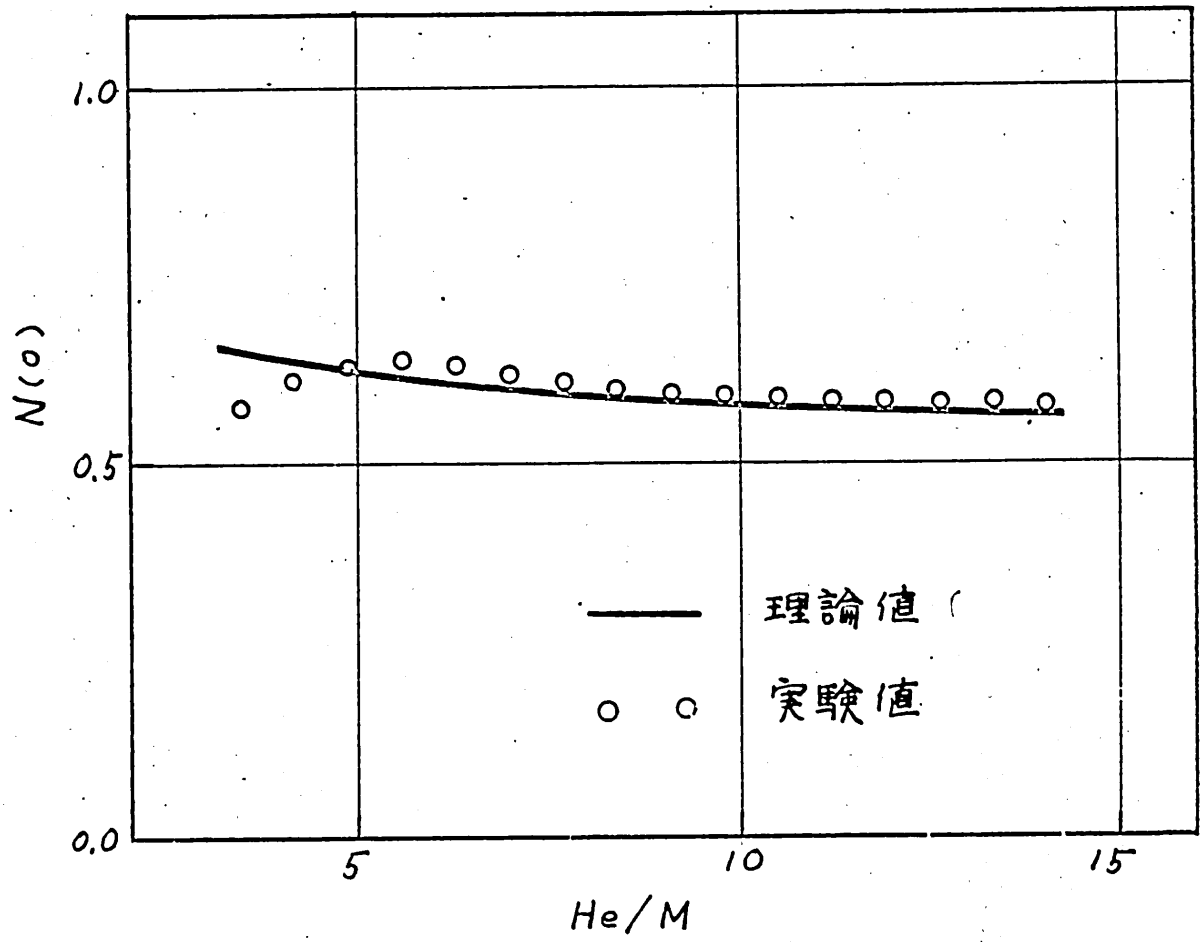
測定結果について検討してみよう。一般に内部磁場は印加磁場He，異方性磁場Ha，反磁場Hdの和で表わされるのであるが、He，Haが試料内で一様であるのに対してHdはそうではない。それゆえHを論ずるのにHe，Haは省略してHdについてだけ話を進


第7図 He-ΔH曲線
実験値
理論値
f=1GHz
f=2GHz
f=3GHz
f=4GHz
ΔH (oe)
He (Koe)
0.0
0.5
1.0
1.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

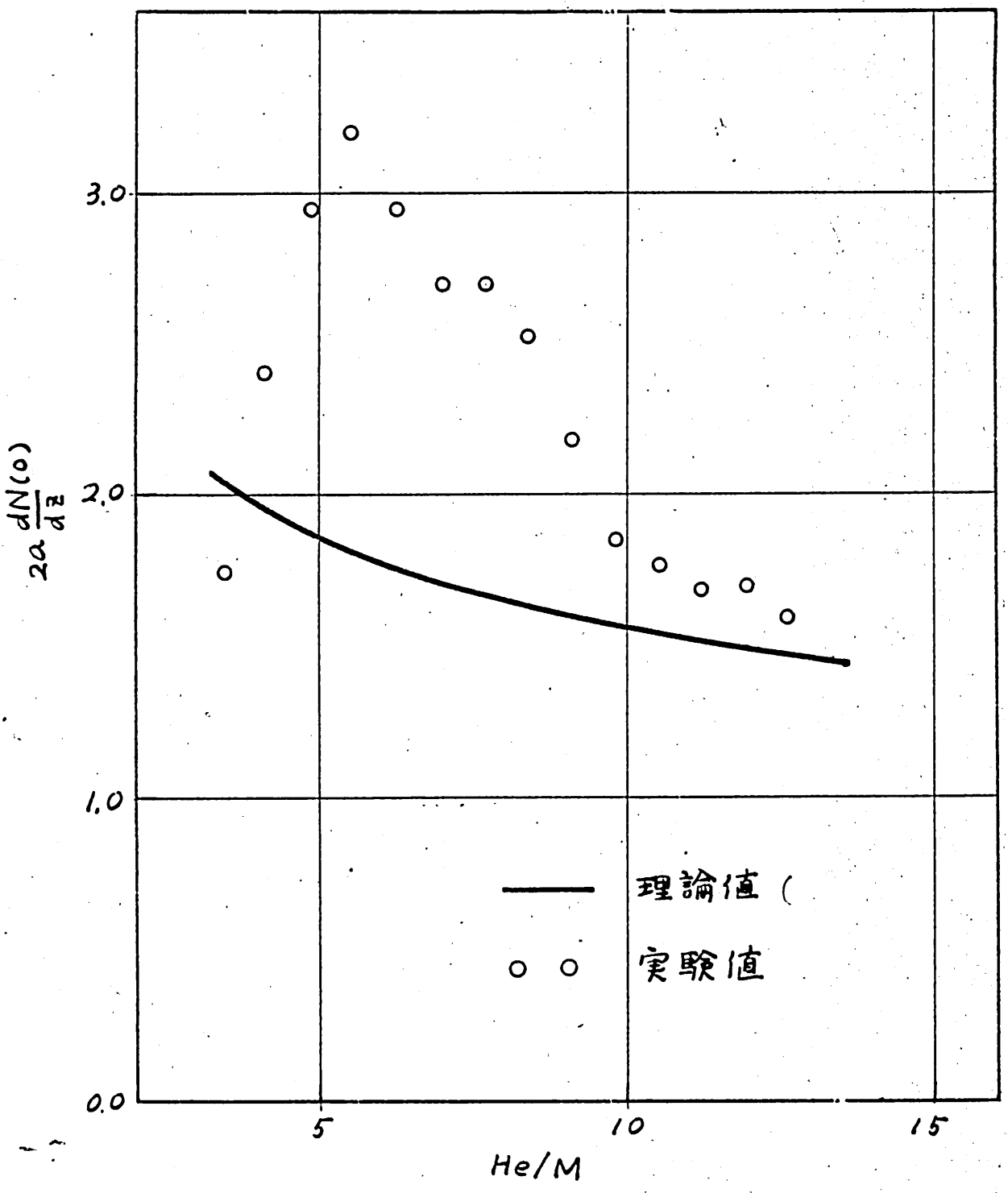
第8図　種々の外部磁場に対する反磁場

L＝10mm，D＝3mm





第9図　試料端面における反磁係数



第10図　試料端面における反磁性係数の傾き

める事にしよう。 第8図に種々のHeに対するHdを示した。外部磁場を0から増していくにつれて端面近傍でのHdの傾きは増加し、外部磁場が飽和磁化の大きさ程度にまるまでそれが続く。その後外部磁場の増加と共にかえって傾きは減少し、次第にSommerfeldの反磁場に近づく。

第8図での実験と理論の比較を更に明確にするため次のように定義される反磁係数を用いてみよう。

$$Hd(z) = 4\pi M \cdot N(z)$$

これを用いれば、試料の形状さえ等しければどんな4πMを持つ材料であっても相互に比較ができるという意味でより一般的である。端面におけるNの値とその軸方向変化の勾配即ちN(0)及びN'(0)を第9, 10図に描いてみた。 Joseph, Schlömannの計算値[2]を併せて示してある。なおSommerfeldの計算値は図ましていないがN(0)としては 0.5, 2aN'(0)は1で両者ともHe/Mによらず一定である。図まされた理論値と実験値を比べてみると磁場の低い所では大きく食い違い、大きい所ではかなりよく合っているのがわかる。Joseph, Schlömannの計算では前述のように印加磁場が相当大きく磁化ベクトルが試料内のどの所で等しい大きさを持つという仮定をしている事がHeの小さい所での相違の原因であると思われる。Heの大きる所でも少し差違が生ずるのは、彼等はM/Heの3次以上の項を無視している事、並びに現実には試料の長さは有限であるのに半無限長の試料について計算しているためであろう。

5. あとがき

磁気弾性共鳴吸収の実験によって軸方向に磁化された円柱状YIGの内部磁場分布が測定できる事を示した。この方法によれば比較的端面に近い部分の測定は容易であるが、印加磁場を大きくすればする程高い周波数の信号を用いねばならなくなり磁気弾性波の減衰の増加のため中心附近の分布は測定困難となる。ただ前述したLacklison, Lewisの方法にしても磁気弾性波を用いるので上に述べた点は同様であるから端面附近の分布が測れるだけこちらの方がすぐれていると言える。

付録A　磁気弾性波の分散関係をスピン波と弾性波の分散関係で近似し更にスピン波の波数がzに対して線型変化すると仮定する事の正当性

今問題としている右回りの円偏波特性をもった磁気弾性波の分散関係は次式で与えられる。[7]

$$(\omega-\omega_k)(\omega^2-C_t^2k^2)+\alpha C_t^2k^2=0 \qquad (A.1)$$

ここで $\omega_k=\gamma(H+Dk^2)$, αはスピン波と弾性波の結合定数である。(A.1)式において$\alpha=0$とすれば夫々スピン波と弾性波の分散関係が導びかれる。この式はk^2についての2次方程式であるから波数kを内部磁場H及び角周波数ωの関数として表わす事は容易でありその表現は若干煩雑であるが

$$k_{ME}=\left[\frac{\frac{\omega}{\gamma}-H+D\left(\frac{\omega}{C_t}\right)^2+\frac{\alpha}{\gamma}-\sqrt{\left\{\frac{\omega}{\gamma}-H+D\left(\frac{\omega}{C_t}\right)^2+\frac{\alpha}{\gamma}\right\}^2-4\left(\frac{\omega}{\gamma}-H\right)D\left(\frac{\omega}{C_t}\right)^2}}{2D}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (A.2)$$

となる。内部磁場分布として式(1),(2)のSommerfeldの計算値を用い式(10)の

$$\int_0^{z_k} k_{ME}\,dz = f(He)$$

なる積分を図表上で行なった。そしてそれを式(10)の

$$\int_0^{z_c} k_E\,dz+\int_{z_c}^{z_1} k_S\,dz=f'(He)$$

と比較し相対誤差を計算する。転回点が試料中心附近にある場合，端面附近にある場合，印加磁場の大きい場合小さい場合等を数値計算してみたがいずれも2%以下の誤差にとどまった。

ω/γ	H_0	$f(He)$	$f'(He)$	ε_1	ε_2
1300(oe)	1400(oe)	2.484	2.465	0.76(%)	4.5(%)
1000	900	1.746	1.738	0.50 〃	2.3 〃
1320	500	0.825	0.812	1.6	

但し H_0; 試料中心部における内部磁場，$\varepsilon_1=\{f(He)-f'(He)\}/f(He)$
転回点が試料中心と端面に近い場合に誤差は大きいはずであり，一般には上に示された値よりも小さくなる。なおz軸の最初に述べたスピン波の領域を無視した場合の誤差をε_2として与えておいた。これは周波数が増すにつれて大きくなる。

付録B 磁気弾性共鳴の条件式

信号周波数を一定にしておいてある外部磁場のときに共鳴が観測されたものとすれば交叉点と端面の間に整数個の弾性波の定在波が存在することになる。

$$z_c = n\frac{\lambda}{2} \tag{B.1}$$

今外部磁場を微小量ΔHだけ増して一つだけずれた共鳴が観測されればそれに対して次の3つの関係式のいずれかが成立する。

(i) $$z_c + \Delta z_c = (n+1)\frac{\lambda}{2} \tag{B.2}$$

(ii) $$\text{又は} \quad = n\frac{\lambda}{2} \tag{B.3}$$

(iii) $$\text{又は} \quad = (n-1)\frac{\lambda}{2} \tag{B.4}$$

周波数は一定に保ったままなのでz_cはH_eのみの関数であり

$$\Delta z_c = \frac{dz_c}{dH_e}\Delta H \tag{B.5}$$

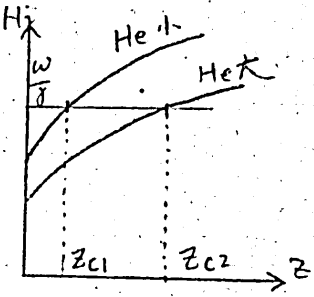
であるから(B.2)~(B.4)式は(B.1)式を参照して次のように変形される。

(i) $$\frac{dz_c}{dH_e}\Delta H = \frac{\lambda}{2} \tag{B.6}$$

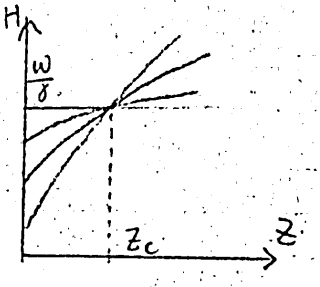
(ii) $$\text{又は} \quad = 0 \tag{B.7}$$

(iii) $$\text{又は} \quad = -\frac{\lambda}{2} \tag{B.8}$$

(i)の場合 $dz_c/dH_e > 0$ 即ち外部磁場を増やせば端面と交叉点の距離が増加する事をましている。しかしそれは外部磁場の増大と共に内部磁場が小さくならなければ不可能であるから物理的に考えられない。



(ii)の場合 $dz_c/dH_e = 0$ 外部磁場を変えても交叉点が移動しない事を意味する。しかし信号周波数によらずこのような事が起るためには内部磁場が外部磁場によって全然変化しない事になって不都合である。



以上においては暗黙のうちに(i)ないし(ii)の状態が周波数のいかんにかゝわらず常に成立するという仮定の上で話を進め矛盾に導く事をまし結局本文(4)式のように(iii)の状態しか取り得ないという結論に到達したかったのだが周波数によって(i)や(ii)更には(iii)のあれこれを取るという事も考え得る。そういう事が起らないという証明をして話を終えよう。実験結果(§4です)によればΔHはH_eおよび信号周波数fの連続関数でH_eについて

は単調増加，fについては単調減少である．fのある値で例えば(iii)から(ii)へ移行するには1/ΔHは0にならねばならないし(iii)から(i)へ移行するには負の値を取らねばならない．所が上述のようにΔHの存在するすべての周波数領域でそのような傾向は見られないのでこのような移行はないものと考えてよい．

付録C　隣接共鳴ピークの周波数差の測定から内部磁場分布を決定する方法

本文の式(7)から(9)までと全く同じ事をやればよい．(7)に対応して

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{z_t(f)} k_{ME}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_0^{z_t(f+\Delta f)} k_{ME}\,dz = -1 \qquad (C1)$$

を得る．差Σ中1項の積分をg(f)と書き直せば

$$g(f) - g(f+\Delta f) = -\pi$$

更に

$$\frac{g(f+\Delta f)-g(f)}{\Delta f} = \frac{\pi}{\Delta f}$$

となるから微分方程式に書き直して

$$\frac{dg(f)}{df} = \frac{\pi}{\Delta f}$$

積分すれば

$$g(f) = \int_{f_0}^{f} \frac{\pi}{\Delta f}\,df \qquad (C2)$$

g(f)は本文(10)式より

$$g(f) = \frac{\omega}{2c_t}(z_t + z_c) \qquad (C3)$$

であるから結局(C2)，(C3)式より

$$\frac{1}{2}(z_t + z_c) = \frac{c_t}{2f}\int_{f_0}^{f} \frac{df}{\Delta f} \qquad (C4)$$

が得られ本文(11)式と対応する．
この方法によれば外部磁場を一定に保って(C4)の右辺を実験によって求めるので「ある大きさの外部磁場に対する内部磁場を決定する」という我々の目的には本文の方法よりもすぐれているように思える．しかしf−Δf曲線を求める際検出巻の同調がfを変える事によってすぐ外れてしまうので実験上は苦労が多い．

参考文献

(1) A. Sommerfeld ; Electrodynamics (Academic , New York, 1952) P. 82.

(2) R.I. Joseph and E. Schlömann : J. appl. Phys. 36 (1965) 1579.

(3) D. F. Lacklison and M. F. Lewis ; Electron. Letters 2 (1966) 378 ; (1966) 457.

(4) B. A. Auld, J. H. Collins, and D. C. Webb : J. appl. Phys. 39 (1968) 1598.

(5) E. Schlömann, R. I. Joseph and T. Kohane : Proc. IEEE 53 (1965) 1495.

(6) T. Kohane, E. Schlömann, R. I. Joseph : J. appl. Phys. 36 (1965) 1267.

(7) E. Schlömann : J. appl. Phys. 31 (1960) 1647.

帰還制御方式による光変調器の温度補償

安　　精治、松尾幸人

大阪大学産業科学研究所

昭和46年10月1日

シャープ株式会社

輻射科学研究会

帰還制御方式による光変調器の温度補償

安精治　松尾幸人
（大阪大学産業科学研究所）

1. まえがき

レーザの工学への応用に重要な役割を演ずる光変調器は大くの材料に依存している。現在の光変調器は単結晶の電気光学効果を利用するのが最も有効とされている。ところでレーザ光線の外部に変調用結晶をおき横形（光の進行方向と垂直に電界を印加する）に構成した，いわゆる横形光強度変調器は集中形，進行波形を問わず結晶の自然複屈折の温度依存性が大きな問題となる。温度などによる自然複屈折の変化はそのまま変調時性の動作点の変動となり，消光比や変調の深さに好ましくない影響を与える。

光変調器の温度補償は最初 Pötz[1] によって進行波形光強度変調器で実現された。この方法はある程度の温度補償が期待できても，完全に等長の結晶を得ることの困難さと二個の結晶間の温度差の存在が問題となり高精度の温度補償はできない。つぎに Ramaswamy[2] は偏光回転効果による温度補償法を考案した。この方法によると結晶が完全である限り自然複屈折は理論的に0となる。その他光変調器の構成に合致した温度補償が行なわれているが[3]，原理的には上記のそれぞれの方法と類似している。光変調器の温度補償を，上で述べたように結晶の特別な構成によらずに結晶自身を精密に温度制御して得た報告もある[4]。この方法で 1cm の $LiTaO_3$ をもちいて ±0.05°C の温度制御をしている。

以上光変調器を温度補償という1つの側面から考察してきたが，変調器全体を通して問題をみるとき少しも満足とはいえない。すなわちPockelsの方法では特に直流成分において，変調効率の周波数特性に上限が存在(5)するし非対称側帯波(6)が問題となる。第4形で使用法としてきても軸ずれ(7)が変調特性に悪影響を与える。手回しの方法でも周波数特性の上限は光波およびマイクロ波遅延路の導入で取り除かれているが下限(100MHz付近)はとけられない。また本質的に零バイアスで動作するため，特にバイアスを得るには非可逆光学回路素子が必要となる。結晶の精密な温度制御による方法は結晶長が3cmに大きくなると困難である。

筆者の大きさは，従来の多くの光強度変調器がその温度補償のため構成が複雑化し，その結果として少なくない制限をうけるようになった事と広帯域光変調器には1個の結晶で構成する方が望ましい事を特に認識して，その場合の温度制御法として先に提案した帰還制御方式による温度補償法(8)を，1個で構成した光変調器に発展適用(9)しその動作性を検討する。

2. 光変調器の動作原理

ここでは後でのべる電流帰還制御方式による温度補償型光変調器の動作原理を出力強度の式を求める過程で考える。光変調器の構成は後で考察し易いように結晶を二個用いる。Fig 1でP1, P2はそれぞれ偏光子および検光子。CR(I), CR(II)は電気光学結晶。Ph(I), Ph(II)は4分の1波長板で，F.Rはファラデー回転子である。

Fig 1で結晶の光学軸を z, これに垂直な軸をx, yとおく。光波は y 軸方向に伝搬し入射偏光は x 軸と 45° 方向に振動する。図に示されている結

晶軸は，KDPなど（$\bar{4}2m$形）の場合は結晶軸をZ軸のまわりに$-45°$回転した座標系であり，$LiTaO_3$など（3m形）の場合は主軸変換しない座標系である．偏光子P_1と検光子P_2は直交している．位相板Ph(I)および Ph(II)（実際には$\lambda/4$板）はZ軸と$45°$回転させて速い軸と遅い軸を有する．F.Rにはコイルが巻かれ，そこに電流が流れて磁場が一定方向に作用しているものとする．なお以下の解析では結晶中を進行する光の減衰は無視する．

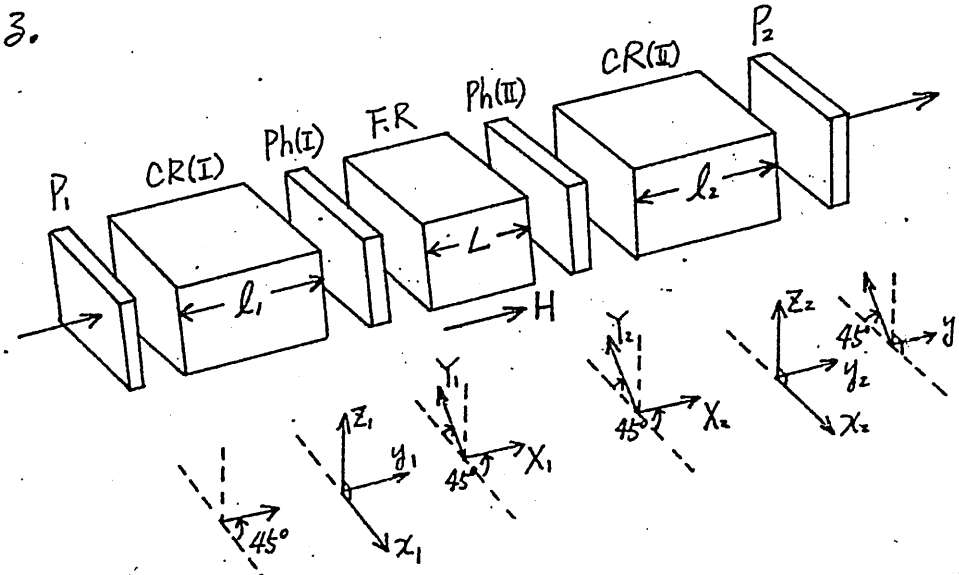


Fig 1. 電流帰還制御方式による光変調器の原理図

さて，入射偏光 $A\cos\omega t$（A：振幅，ω：光の角周波数）はCR(I)に入射と同時に

$$\frac{A}{\sqrt{2}}\cos\omega t \quad (x_1\text{方向}),\ \frac{A}{\sqrt{2}}\cos\omega t \quad (z_1\text{方向}) \quad \cdots\cdots (1)$$

のように重直な二つの偏波に（屈折しないで）わかれて伝搬する．これらがCR(I)を通過した直後では

$$\frac{A}{\sqrt{2}}\cos(\omega t-\alpha_1) \quad (x_1\text{方向}),\ \frac{A}{\sqrt{2}}\cos(\omega t-\beta_1) \quad (z_1\text{方向}) \quad \cdots\cdots (2)$$

となる。ここでα_1, β_1はそれぞれx_1およびz_1方向偏波が結晶CR(I)中を

伝搬するときうける位相で $(\alpha_1-\beta_1)$ が Retardetion となる。(2)式で与えられる直交二直線偏波は位相板 Ph(I) に入射し，X_1 および Y_1 方向成分となって伝搬する。その直後では上の二偏波はつぎのようになる。

$$\frac{A}{2}\left\{\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{x1})+\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{x1})\right\} \quad (X_1\text{方向})$$

$$\frac{A}{2}\left\{\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{y1})-\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{y1})\right\} \quad (Y_1\text{方向}) \qquad \text{---- (3)}$$

ϕ_{x1}, ϕ_{y1} はそれぞれ X_1 および Y_1 方向偏波が位相板 Ph(I) を伝搬するときうける位相で，後でのべるように実際は $\lambda/4$ 板を与えるため $\phi_{x1}-\phi_{y1}=\pi/2$ である。(3)式で表わされる二偏波はつぎにファラデー回転子 FR に向かう。はじめに仮定したように，FR にはたらく磁場が光の伝搬方向と一致して作用しているものとする。このとき偏波面は左旋性を示すことに注意して，上の二偏波は FR を伝搬することによって θ の回転をうける。θ だけ回転した X_1 および Y_1 方向偏波はつぎの位相板 Ph(II) に入射し，X_2 および Y_2 方向成分の偏波となって Ph(II) 中を進行する。位相板 Ph(I) と Ph(II) の光軸は一致していることに注意して位相板 (II) に入射したときの X_2 および Y_2 方向偏波に対する光波の式はつぎのように表わされる。

$$\frac{A}{2}\left[\begin{array}{l}\left\{\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{x1})+\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{x1})\right\}\cos\theta\\ +\left\{\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{y1})-\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{y1})\right\}\sin\theta\end{array}\right] \quad (X_2\text{方向})$$

$$\frac{A}{2}\left[\begin{array}{l}\left\{\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{y1})-\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{y1})\right\}\cos\theta\\ -\left\{\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{x1})+\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{x1})\right\}\sin\theta\end{array}\right] \quad (Y_2\text{方向}) \qquad \text{----(4)}$$

上の直交二偏波は位相板Ph(II)を伝搬しながら ϕ_{x_2}(X_2方向)，ϕ_{z_2}(Y_2方向)の位相をうけ結晶CR(II)に入射する．そこでは x_2 および z_2 方向偏波となって伝搬して検光子 P_2 の入力となる．軸に注意してCR(II)を出た直後での偏光の式はつぎのようになる．

$$\frac{A}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\{\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{x_1}-\phi_{x_2}-\alpha_2)+\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{x_1}-\phi_{x_2}-\alpha_2)\}\cos\theta\\ +\{\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{x_1}-\phi_{x_2}-\alpha_2)-\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{x_1}-\phi_{x_2}-\alpha_2)\}\sin\theta\\ -\{\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{x_1}-\phi_{z_2}-\alpha_2)-\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{x_1}-\phi_{z_2}-\alpha_2)\}\cos\theta\\ +\{\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{z_1}-\phi_{z_2}-\alpha_2)+\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{z_1}-\phi_{z_2}-\alpha_2)\}\sin\theta\end{bmatrix} \quad (x_2\text{方向})$$

$$\text{----(5)}$$

$$\frac{A}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\{\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{x_1}-\phi_{z_2}-\beta_2)-\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{x_1}-\phi_{z_2}-\beta_2)\}\cos\theta\\ -\{\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{z_1}-\phi_{z_2}-\beta_2)+\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{z_1}-\phi_{z_2}-\beta_2)\}\sin\theta\\ +\{\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{z_1}-\phi_{x_2}-\beta_2)+\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{x_1}-\phi_{z_2}-\beta_2)\}\cos\theta\\ +\{\cos(\omega t-\beta_1-\phi_{x_1}-\phi_{z_2}-\beta_2)-\cos(\omega t-\alpha_1-\phi_{z_1}-\phi_{x_2}-\beta_2)\}\sin\theta\end{bmatrix} \quad (z_2\text{方向})$$

上式で α_2, β_2 はそれぞれCR(II)の x_2 および z_2 方向偏波が結晶中を伝搬するときうける位相である．(5)式で与えられる二偏波が検光子 P_2 を通過したときの光の偏波成分は

$$(z_2\text{偏波成分})\times\cos\frac{\pi}{4}-(x_2\text{偏波成分})\times\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{----(6)}$$

となる．(6)式は $B\cos(\omega t+\delta)$ の形にまとめられる．なお光の強度は振幅Bの二乗で定義される．

出力強度の式を求める．Ph(I)，Ph(II)は実際には $\lambda/4$ 板を考えるため，$\phi_{x_1}-\phi_{z_1}=\phi_{x_2}-\phi_{z_2}=\pi/2$ となる．これを(6)式に代入し計算して

$B\cos(\omega t+\delta)$を求め B^2をとるとつぎのように簡単な式が得られる。
($I=B^2$, $I_0=A^2$ とおく)

$$I=\frac{I_0}{2}(1-\cos\Gamma) \qquad \cdots\cdots(7)$$

$$\Gamma=(\alpha_2+\beta_1)-(\beta_2+\alpha_1)-2\theta$$

(7)式は直交ニコル間に電気光学結晶をおいたときに得られる光の出力強度の式と同じ形である。Retardation Γの値から、CR(I)を伝搬した偏光は$\lambda/4$板をFRを介して2回通る間にπの位相変化をうけ、結果的に偏波面が90°回転してCR(II)の偏光となっていることがわかる。これは$\theta=0$と仮定したときPetersの光変調器のΓの値に相当している。(厳密にはPetersの光変調器では、二個の結晶を電界に対する屈折率変化の極性が反対となるよう接続する)。(7)式で重要な事はΓのなかに2θが存在することである。これは2枚の$\lambda/4$板とFRで位相差が与えられた事を意味する。これは磁場の大小で可変できると同時に符号もその磁場の符号で変えられる。(7)式を具体的に変調用結晶としてKDPと$LiTaO_3$を使用した場合について書き直すとつぎのようになる。

(KDP)

$$\Gamma=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)(l_2-l_1)-\frac{\pi}{\lambda}n_o^3\gamma_{63}(E_{z2}l_2-E_{z1}l_1)-2\theta$$

($LiTaO_3$) $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ ---(8)

$$\Gamma=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)(l_2-l_1)+\frac{\pi}{\lambda}(n_e^3\gamma_{33}-n_o^3\gamma_{13})(E_{z2}l_2-E_{z1}l_1)-2\theta$$

(8)式から2θ($\theta=VHL$)によって自然複屈折の変化を打ち消すことが可能であることがわかる。

3. 帰還制御方式により温度補償を行なった光変調器

3-1. 電流帰還制御方式

本方式により温度制御された光強度変調器（1個の結晶で構成）の略図をFig2に示す。

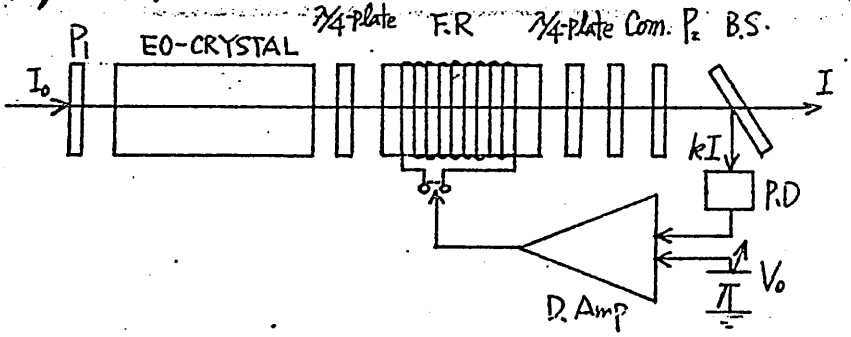


Fig 2. 電流帰還制御方式による温度補償型光変調器

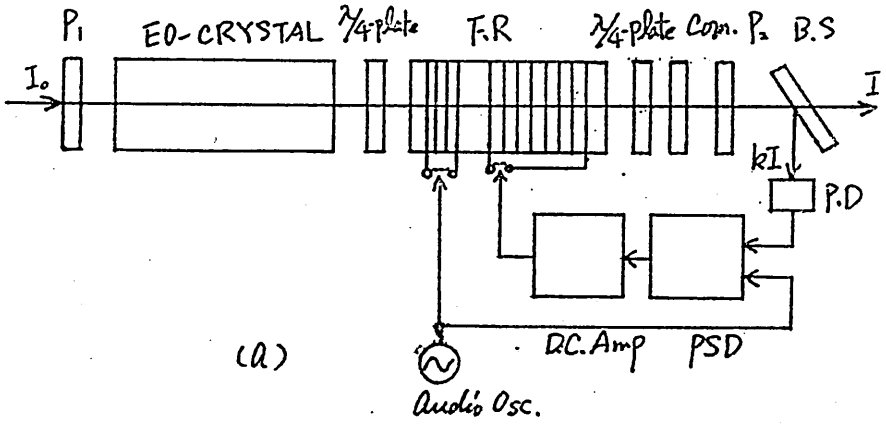
この場合の出力強度の式は(8)式を参考にてつぎのようになる。

$$I = \frac{(1-k)I_0}{2}\left\{1 - \cos(\Gamma_0 + \Gamma_E)\right\} \qquad \cdots\cdots(9)$$

$$\Gamma_0 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_0)l + \varphi_c + \Delta\varphi - 2\theta$$

φ_cは補償板(com.)による位相差。$\Delta\varphi$は自然複屈折の温度変化による位相差。光変調器のバイアスはφ_cで設定する。なおφ_cの代りに電気的に結晶に直流電圧を印加して与えてもよい。V_0はバイアスに応じて設定してやればよい。これはたとえば、$\frac{1}{2}$バイアスに変調電界が印加されても光電変換するP.D（応答が遅く高感度なもの）に感ずる光量は変化なく、これが電圧に変換された量に等しいV_0を与えてやれば、温度等による光の出力強度が変化したそれだけ2θがΓ_0に与えられて制御される。しかしながら、0バイアスの場合に変調電界が加わるとP.Dにはそれに比例した出力強度の平均値が感じるため、V_0を再調節する必要がある。

0バイアスで変調器を動作させる場合 Fig2の帰還回路では変調度の大きさに応じてその都度 V_0 を調節しなければならないが，変調度の大きさに関係なく常に0バイアスを保つ方法としてつぎのような帰還回路が考えられる．それは R.W. Smith[11] のレーザの周波数安定化の原理を適用すればよい．(Fig 3(a), (b) を参照)．



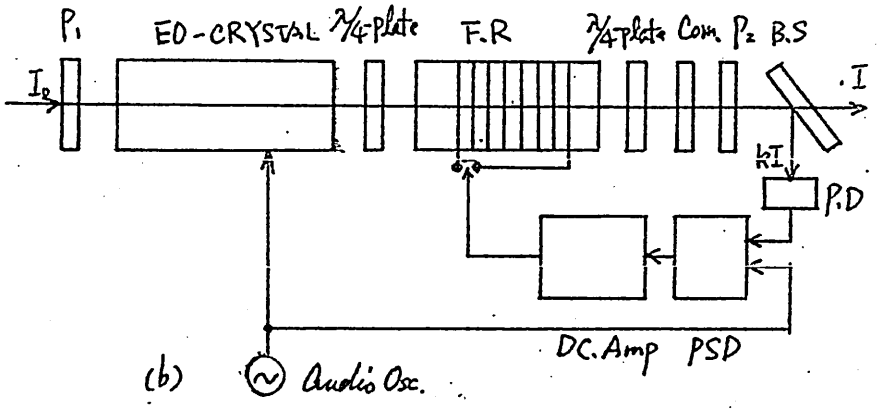


Fig3. 0バイアス動作のための温度補償型光変調器

Fig3で"PSD"は Phase Sensitive Detector でバイアスが0からわずかでもずれると位相が0かπずれてその出力に誤差信号が現われる．最後に本方式による温度制御は2枚の偏光子とEOを結晶の前に置いてもよい．(省略)

3-2. 電圧帰還制御方式

本方式による光変調器の温度制御法は電流帰還の場合と異なり，Fig4で明らかなように帰還ループが変調用結晶で閉じている．すなわち帰還電圧を結晶に直接加えて制御しようとするものである．その原理は先の式と同じである．Retardation Γ_0 は(10)式のようになる．

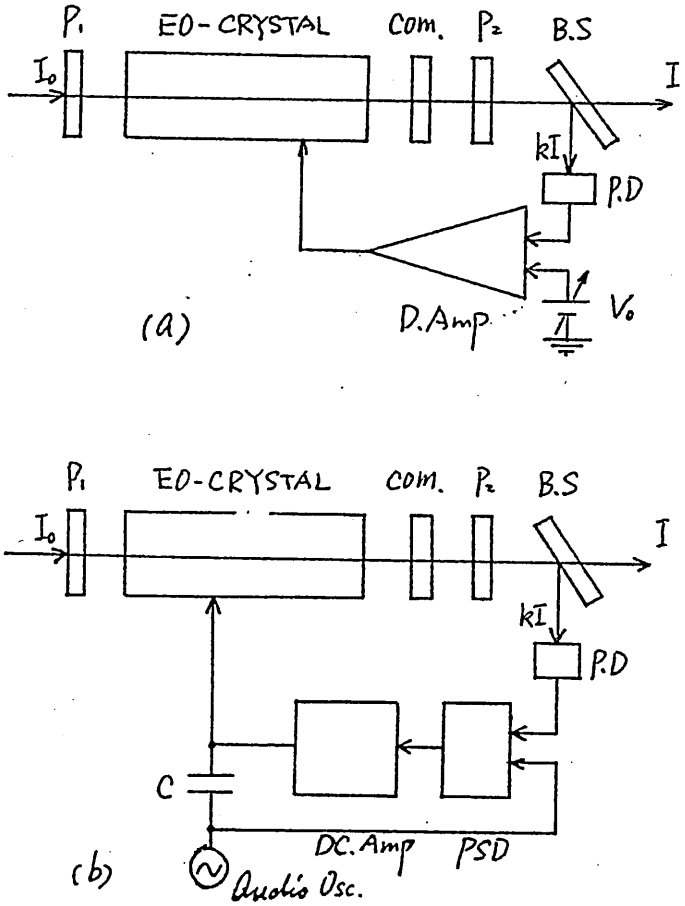


Fig4. 電圧制御方式による温度補償型光変調器

$$\Gamma_0 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_0 - n_e)l + \varphi_c + \Delta\varphi - \varphi_{Ef} \qquad \text{----(10)}$$

φ_{Ef} は帰還電圧による位相差である．

4. 検討

帰還制御方式による光強度変調器の温度制御の精度は帰還ループの利得に大きくかかっている。かなり高精度な温度制御が期待できる。本方式による温度補償法はあらゆる構成の外部横形光強度変調器に適用できる。たとえば，Zig-Zag形[12]元帯域光変調器の温度補償が考えられる。この場合強度変調で使用するより位相変調器として使用する方が良いとされているが，集中形の多重反射による強度変調器[13]のように，位相変調された偏波と無変調の偏波を合成して強度変調を実現させれば，伝送線路形進行波光変調器[14]より元帯域な強度変調器が完成され，この場合の温度補償は帰還制御方式で解決できる。光変調器の温度補償を帰還制御方式により行なうため，欠点として本質的に直流および温度変化に相当する速さの周波数付近で変調不可能となる。しかしながら，周波数応答の遅い光素子と積分回路を組合わせることにより直流付近の超低周波からの変調が可能となる。はじめに結晶を1個用いて構成された光変調器の利点を述べたが，KDP 45°y-cutのようにE偏波とO偏波が分離して伝搬するときは光線を合わす意味から二個の結晶を用いなければならない[15]。

5. あとがき

帰還制御方式による横形光強度変調器の温度補償法は，従来の方法のように結晶の特別な構成によるものでないため，集中形，進行波形，Zig-Zag形を問わずあらゆる構成の外部横形光強度変調器に適用させることができる。本方式による温度補償が実現できれば，特に進行波形において変調効率の周波数特性の上昇が

取り除かれる1個の結晶で構成された光変調器の実現が可能となる。本方式による光変調器の温度制御の実現のため、さらに検討を加えていくつもりである。

最後に御討論いただいた張吉夫助教授ならびに研究室の諸氏に深謝する。

6. 参考文献

1. C.J. Peters, "Gigacycle-bandwidth coherent-light traveling-wave amplitude modulator," Proc. IEEE, vol. 53, pp 455-460, May 1965
2. 末田, 後藤, 牧本, "偏光回転反射法をもちいた進行波光強度変調器", 信学会論文誌B vol. 53-B, no. 8, P464, Aug. 1970.
3. W. H. Steier, "A push-pull optical Amplitude modulator," IEEE J. of QE, vol. QE-3, no. 12, PP664-667, Dec. 1967
4. R.T. Denton, F.S. Chen, and A.A. Ballman, "Lithium tantalate light modulators," J. of Applied Physics, vol. 38, no. 4, PP1611-1617, March 1967
5. 後藤, 末田, 牧本, "異方性結晶を用いた進行波形光変調器の位相整合について", 量子エレクトロニクス研究会, QE68-40 (1969-01)
6. 山本泉他, "進行波光変調器における非対称側帯波", 信学会論文誌B vol. 53-B, no. 12, P777, Dec. 1970
7. 五十嵐, 松下, 植木, 後藤, "c軸直交温度補償型光変調器における軸ずれ効果の解析", 量子エレクトロニクス研究会, QE70-47 (1971-02)

8. 安 精治, 枚倉清保, "帰還形温度補償光変調器", 45年度電気関係学会関西支部, G1-14 (45-11).
9. 安 精治, 松尾彰人, "帰還制御方式による光変調器の温度補償", 46年度電気関係学会関西支部連合大会, G9-18(46-10) 発表予定.
10. ヒとこば, ロッシ, "光学下", 吉岡書店
11. P.W. Smith, "Stabilized, Single-frequency output from a long laser cavity", IEEE J. of QE, vol. QE-1, No.8, pp343-348, Nov. 1965.
12. W.W. Rigrod and I.P. Kaminow, "Wide-band microwave light modulation", Proc. IEEE, vol. 51, pp.137-140, Jan. 1963.
13. 波口伯部, 張吉夫, 松尾彰人, "縁反し及射による低電圧光変調器(その2)", 44年電気四学会連合大会, (21)量子エレクトロニクス(1707).
14. I.P. Kaminow and J. Liu, "Propagation characteristics of partially loaded two-conductor transmission line for broadband light modulators," Proc. IEEE, vol. 51, pp. 132-136, Jan. 1963
15. J.M. Ley, "Low-voltage light-amplitude modulator," Electronics letters, vol. 2, No. 1, Jan. 1966.

レーザのモードロッキングにおける非線形性

張　吉夫

大阪大学産業科学研究所

昭和46年10月1日

シャープ株式会社

輻射科学研究会

レーザのモードロッキングにおける非線形性

大阪大学産業科学研究所　　張　　吉夫

§はじめに

レーザのモードロック動作については、従来、2通りの定式化が行なわれてきた。1つはモード展開によって周波数軸上で取扱う方法であり、他の1つは、モード展開によることなく、時間軸内で取扱う方法である。この数年、特に固体レーザのモードロック動作によって、ピコ秒パルス列が得られるようになり、モードロック動作そのものが見直されてきている。一般に、固体レーザでは、利得幅内に存在するモード数が非常に多い（10^3オーダ）ので、周波数軸上で問題を処理することは到底不可能になるし、又、一方、この様に多数のモード間でモードロックがおこると、パルスのピーク値は、大ざっぱに考えても平均出力のモード数倍（10^3倍）となり、レーザ媒質そのものの非線形性が大きな問題となってくるので、従来の3次分極までを考慮する取扱いでは相対的にあやしくなってくる。

ただ、一般には、実際のモードロックのスタートが、お互いにランダムな位相関係をもつ多モード間の結合と

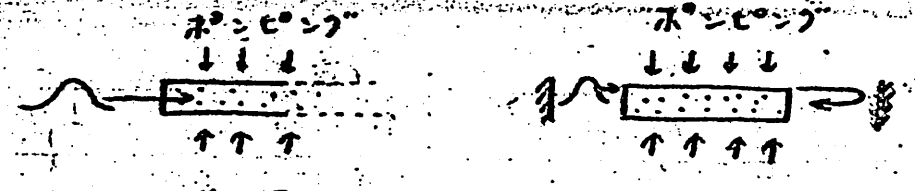
して、はじまるので、モードロック動作に対する、変調強度のしきい値を求めたりするのには、モード展開による方法によらなければならない。しかし、モードロックが定常に達して、十分大きなパルスが存在している状態では、モード間のロッキングという見方よりは、非線形な系が振動していると見る時間軸上の取扱いの方が、実際の状況をよく表わしていると考えられる。

以上の様なモードロックの問題点を念頭におきながら、ここでは損失変調による強制モードロックの時間軸上での取扱いを示し、モードロッキングの非線形性について考えていこう。

§ 問題の定式化

従来、共振媒質、特に2レベル系、についての時間軸上での取扱いは、主に半無限長のレーザ媒質(又は吸収媒質)中のパルスの伝搬の問題として、即ち、増幅器(又は減衰器)の問題として扱われてきた。[1)~4)] モードロッキングを時間軸上で取扱うのに、このレーザ増幅器の取扱いを応用することができる。ただし、モードロックは、あくまでも発振器中におこる現象であるから、増幅器の場合とは、その境界条件(又は初期条件)が異なる。即ち、第1図に示すように、レーザ増幅器

においては、初期条件として、ポンピングによって一定の反転分布に保たれた半無限長の媒質（界は0とする）に、境界条件として、任意の形の界を一端より入れ、



(a) レーザ増幅器（又は減衰器）　(b) レーザ発振器

第1図　レーザ増幅器とレーザ発振器

以後の界の伝搬の様子を追跡するが、一方、レーザ発振器では、界は有限長の媒質内で、共振器の存在のためくりかえし伝搬し、その通過毎に、媒質内にじょう乱を残すため、媒質は一定のポンピングを受けながらも、過去の下史の影響を受ける。

モードロックレーザ（とくにモードロックレーザの場合）に対して、上述のモデルを最初に使ったのは、Tang と Statz[5] であり、その後、Risken[6] によっても、さらに発展させられた。定式化のくわしいことなど、それらの文献にすでに述べられているが、以下に簡単に、概要を述べる。

Maxwell の式では、媒質の電界Eに対する影響は、分極として取扱われる。一方、媒質を2レベル系で、（その2エネルギー差を $\hbar\omega_0$ とする）

な拡がりをもつものとし．その単位体積あたりの分極，反転分布を．それぞれ P, S とすると，いわゆる媒質方程式は下の様に表わされる[7]。

$$\ddot{P} + 2\gamma_\perp \dot{P} + \omega_0^2 P = -\frac{2}{3}\left(\frac{|\mu|^2}{\hbar}\right)\omega_0 E S \qquad (1)$$

$$\dot{S} = \gamma_\parallel (d_0 - S) + \left(\frac{2}{\hbar\omega_0}\right) P \cdot E \qquad (2)$$

ここで．$\gamma_\perp$ は．分極の．又．$\gamma_\parallel$ は反転分布の減衰定数で μ は dipole matrix element, d_0 は．界 E がなく．ポンピングのみがあって．他と熱的に平衡しているときの反転分布密度である。問題を1次元（一様平面波）と考え．直線偏波を仮定すると．E，P はスカラ E, P で表わされる。一方 Maxwell の式より H を消去すると．界方程式として：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\ddot{E} - \left(\frac{2K}{c^2}\right)\dot{E} = \mu \ddot{P} \qquad (3)$$

が得られる。上式で μ は媒質の透磁率，K は媒質の遷移以外の原因による損失（diffraction loss など）で．c $(= 1/\sqrt{\mu\epsilon})$ は媒質の光速である。ここで簡単のため．ring laser を考え．この中を．何等かの方法によって（isolator など）界は一方方向（+x）にのみ伝播できるようにしてあるとする。さらに簡単のため．空洞モードの1つが原子系の遷移中心周波数に一致しているとすると．E, P, S の界を次のようにおく

ことができる。

$$\left.\begin{aligned} E &= \tilde{E}(x,t)\cos[\omega_0(\tfrac{x}{c}-t)] \\ P &= \tilde{P}(x,t)\sin[\omega_0(\tfrac{x}{c}-t)] \\ S &= \tilde{S}(x,t) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

一般に、(1), (2), (3)式中に含まれる減衰定数は、光の周波数 ω_0 よりもずっと小さいので、$\tilde{E}$, $\tilde{P}$, $\tilde{S}$ 等の変化は、光の周期 $(2\pi/\omega_0)$, 波長 $(2\pi c/\omega_0)$ より、ずっとゆっくり変化すると考えることができ、いわゆる slowly varying approximation を適用することができる。その結果、(1), (2), (3), (4)式より、$\tilde{E}$, $\tilde{P}$, $\tilde{S}$ に関して次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{P}} + \gamma_\perp \tilde{P} &= +(1/3)\left(\frac{|\mu|^2}{\hbar}\right)\tilde{E}\tilde{S} \\ \dot{\tilde{S}} &= \gamma_{\parallel}(d_0 - \tilde{S}) + \frac{1}{\hbar}\tilde{E}\tilde{P} \\ c(\partial\tilde{E}/\partial x) + \dot{\tilde{E}} &+ k\tilde{E} = (\omega_0/2\epsilon)\tilde{P} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(5)式の x, t に independent な解を求めると、

$$\left.\begin{aligned} \tilde{S}_{cw} &= 6\epsilon\hbar\gamma_\perp/\omega_0|\mu|^2 \\ \tilde{E}_{cw} &= [(\gamma_{\parallel}\hbar\omega_0/2\kappa\epsilon)(d_0 - \tilde{S}_{cw})]^{1/2} \\ \tilde{P}_{cw} &= (2\epsilon k/\omega_0)\tilde{E}_{cw} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

これは、定常(すなわち cw)な単一モード発振に相当する。(一様な拡がりをもつ媒質を含む ring

laserで：一方向にのみ発振がおこると、媒質の飽和は空間的にも一様におこるので：単一モード発振となる。）

モードロックがおこったときの各変数をcw状態と比較するのが便利であるので：以後、変数を、このcw状態の解で規格化し、

$$E = \tilde{E}/\tilde{E}_{cw}, \quad P = \tilde{P}/\tilde{P}_{cw}, \quad S = \tilde{S}/\tilde{S}_{cw} \qquad (7)$$

とする。この規格化変数 E, P, S を使えば：(5)式は

$$\left.\begin{aligned} &\dot{P} + \gamma_\perp P = \gamma_\perp E S \\ &\dot{S} + \gamma_\parallel S = \gamma_\parallel (\lambda + 1 - \lambda E P) \\ &c\frac{\partial E}{\partial x} + \dot{E} + \kappa E = \kappa P \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

となる。ただし、λ はパンピングパラメータで

$$\lambda = (d_0 - \tilde{S}_{cw})/\tilde{S}_{cw}$$

のことである。さらに、以後の数値計算の便利のため、t, x の変わりに、

$$z = \frac{\gamma_\perp}{c} x$$

$$\tau = \gamma_\perp (t - x/c)$$

などを用いると、(8)式は

$$\left.\begin{aligned} \dot{P} + P &= SE \\ \dot{S} + \Gamma S &= \Gamma(1+\lambda - \lambda E P) \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= K(P-E) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

となる。ただし、・は t についての微分であり、又、Γ, K は

$$\Gamma = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}, \quad K = \kappa/\gamma_{\perp} \qquad (10)$$

のことである。(9)式が今後とくべき基本式である。

§ 定常動作についての考察

強制モードロックレーザの各変数の時間、空間的変化は(9)式を適当な境界条件と初期条件のもとに解くことによって得られる。(9)式は非線形であるから、数値解が必要であるが、その前に大体の見通しを得るために定常動作について、簡単な解析を試みよう。

モードロッキングが定常に達して、一定のパルス出力が得られている状態を考える。通常そうであるように、強制変調の変調度が小さいとすると、モードロックの結果、形成されたパルスの形はレーザ媒質中を伝搬する間、ほぼ一定と考えることができ、又、そのパルスの速度がレーザ媒質中の光速 c にほぼ近いとすれば、(9)式の

第3式で $\partial E/\partial z \approx 0$ とおくことができ，$P \approx E$ と見なせる。その結果，(9)式の第1式より

$$\frac{\dot{P}}{P} = S - 1 \qquad (12)$$

ゆえ，$v = \ln P$ なる変数を使うと，(12)式は

$$\dot{v} = S - 1 \qquad (13)$$

つぎに，(9)式の第2式よりEを消去して，PをVで表わせば，

$$\dot{S} + \Gamma S = \Gamma(1 + \lambda - \lambda e^{2v})$$

変形して，さらにSをVで表わせば，

$$\ddot{v} + \Gamma \dot{v} + \Gamma\lambda(e^{2v} - 1) = 0$$

簡単のため減衰項を省略すると，

$$\ddot{v} + \Gamma\lambda(e^{2v} - 1) = 0 \qquad (14)$$

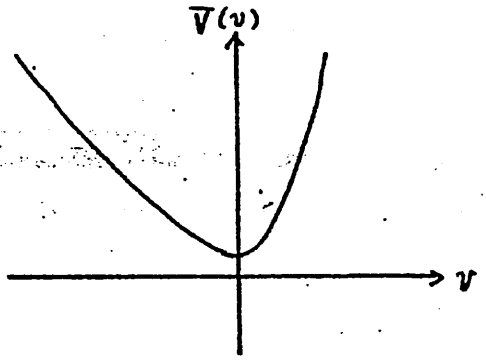
(14)式は，v（したがって，$\ln P$ または $\ln E$）に関する，擬調和振動を表わしており，その固有共振周波数 Ω_0 は

$$\Omega_0 = \sqrt{2\Gamma\lambda} \qquad (15)$$

で与えられる。また，この擬調和振動のポテンシャル $V(v)$ は

$$V(v) = \Gamma\lambda\left(\frac{e^{2v}}{2} - v\right) \qquad (16)$$

であって、その大体の様子は第2図のとおりである。



第2図 レーザのモードロックをあらわす
疑調和振動のポテンシャル

モードロックパルスのパワー $I(=e^{2v})$ の時間的変化を大体想像することができる。

(14)式で、vに関する3次の復元力までを考慮して近似すると、

$$\ddot{v}+\Omega_0^2 v=-\Omega_0^2\left(v^2+\frac{2}{3}v^3\right) \qquad (17)$$

と表わせる。即ち、$F_{NL}=-\Omega_0^2\left(v^2+\frac{2}{3}v^3\right)$ の非線形項を持つことがわかる。~~[illegible]~~ この非線形項による共振曲線のねじれの大体の様子を見るために、vの解の第1近似として

$$v=v_0\cos\psi$$

とおく。すると、共振周波数の振幅 v_0 に対する依存、すなわち骨格曲線 $\Omega(v_0)$ の第1近次は、

$$\Omega(v_0) = \Omega_0 + \frac{1}{2\pi\Omega_0 v_0}\int_0^{2\pi} F_{NL}(v_0\cos\psi)\cos\psi\, d\psi$$

で与えられる。[8] 計算すると、

$$\frac{\Omega(v_0)}{\Omega_0} = 1 - \frac{v_0^2}{4} \qquad (18)$$

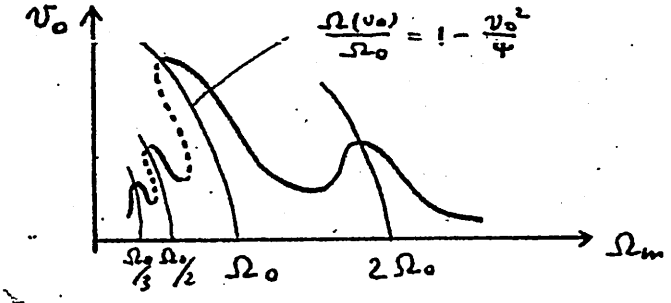
すなわち、共振周波数は、振幅の増大とともに減少する。つまり、レーザ媒質の外力に対する復元力は、「柔かい」特性をもっている。

非線形項 F_{NL} の存在のために、周期的外力に対する共振は、固有振動数 Ω_0 の近傍以外に（その周波数 Ω_m）

$$\Omega_m \approx \frac{p}{q}\Omega_0$$

の付近にも存在する。（p, q は整数）。

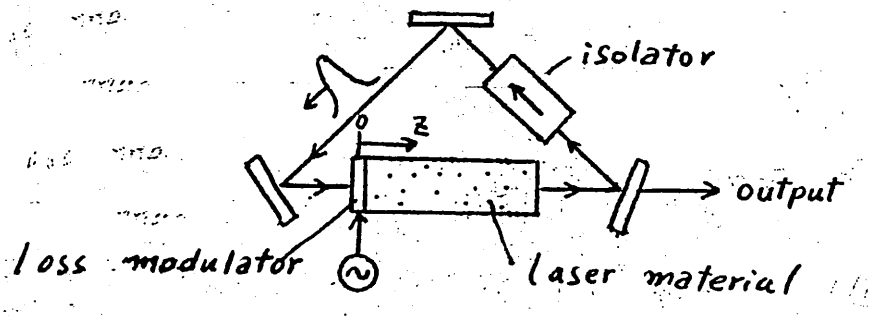
以上の結果、レーザ媒質に対する周期的外力（すなわち変調）の共振特性の大体の様子は、第3図の様なものであろうと想像される。



第3図　レーザ媒質の周期的外力（変調）に対する共振特性。点線部分は不安定解を示す。

§ 強制モードロックレーザの構成

前節で、レーザ媒質内に定常解が存在するものとして、その共振特性を考察したが、この様な定常解を維持する境界条件については触れなかった。先に(4)式で仮定したように、界は $+z$ (又は $+z$) 方向に進行しているのであるから、この様な定常解を維持するためには、実際の構成として、多界が循還して媒質内をくりかえし通過できるようにするか、又は、半無限長媒質に定常な振動をもつ界を一端より入れるかしなければならない。先の場合が、レーザ発振器であり、後の場合が、定常振動入力をもつレーザ増幅器である。界が $+z$ 方向のみに伝搬するよう構成するために第4図に示すような ring laser を考える。この様な配置においては、変調がない場合でも、ポンピングの第2のしきい値以上では定常パルス列の解の存在が示されている。[6]



第4図 強制(損失変調)モードロックレーザの配置図
レーザ媒質の長さを L, キャビティー長を L_0 とする。

これは、非線形振動のことばでいえば、その非線形システムが自励振動領域に入った場合に相当する。このポンピングの与えしきい値以下でも、第4図中に示したような変調器により周期的外力(変調)をかえると、減衰項とのつり合いのもとに定常振動(定常パルス列)が維持できることは明らかであり、これが内部強制変調によるモードロッキングの場合に相当する。

損失変調器は、第4図に示すように、$z=0$ に配置し、その厚さは無限小とする。又、レーザ媒質の長さは L、キャビティー長 L_0 とする。ring laser の光の経路にそって、z 軸をとり、$z=0$ に変調器をおき、レーザ媒質の左端をこれに接しておく。損失変調器の効果は電界の透過係数の変調として表わされ、したがって、上の配置より、境界条件の変調として、微分方程式の解にとり入れられる。電界透過係数の時間的変動を $F(t)$ とすれば、発振器としては、次の境界条件を満足しなければならない。

$$E_{(i)}(0,t) = F(t)\cdot E_{(i-1)}(L_0,t) \qquad (19)$$

ここに、(i) は、界のキャビティー周回の番号である。つぎに、各周回の終りの時間 $t=T$ (T は周期)は、次の周回の時間の始点 $t=0$ であることから、各周回の初期条件は、

$$\left.\begin{aligned} E_{(i)}(z,0) &= E_{(i-1)}(z,T) \\ P_{(i)}(z,0) &= P_{(i-1)}(z,T) \\ S_{(i)}(z,0) &= S_{(i-1)}(z,T) \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

で表わされる。

§ 損失変調モードロックレーザの数値解.

(9)式の非線形微分方程式を(19)式の境界条件と.(20)式の初期条件のもとに数値積分することにより.モードロックレーザの動作をさらに詳しくしらべよう。(19)式の境界条件の最も一般的な関数形として.

$$F(\tau) = 1 - \alpha \cos \Omega_m t \qquad (21)$$

を用いることとする。ただし($0 < \alpha < 1$)で.変調の深さを表わしており.Ω_mは変調周波数で.通常モード間隔に tuning をとって $\Omega_m = 2\pi c/L_0$ とることにする。

計算をスタートするには.第1周回目($(i)=1$)の境界条件と初期条件を与えなければならない。その条件として.物理的意味のはっきりしている cw 発振状態をとる。すなわち境界条件として.

$$E_{(1)}(0,\tau) = 1 \quad , \quad 0 < \tau < T \qquad (22)$$

初期条件として

$$\left.\begin{aligned} E_{(1)}(z,0) &= 1 \\ P_{(1)}(z,0) &= 1 \\ S_{(1)}(z,0) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad 0 < z < L_0 \qquad (23)$$

をとる。

(9)式を差分方程式で近似し、(22), (23)の条件のもとに第1周回について、τ, zの小さなステップ毎に逐次積分してゆく。その結果、$E_{(1)}(L_0, \tau)$, $E_{(1)}(z, T)$, $P_{(1)}(z, T)$, $S_{(1)}(z, T)$などの諸量が得られるから、(19), (20), (21)式により、$(i)=2$の境界ならびに初期条件が得られ、$(i)=1$同様に積分を行なうことができる。定常パルスが得られるまで(i)をくりかえせばよい。

以下の数値積分には、predictor-corrector法を用い、z, τについてのステップ数は、打ち切り誤差が10^{-3}となる程度にとらんだ。

実際に計算に用いたパラメータの数値は、以下の通りである。

$$\Gamma = 0.01, \quad K = 0.1, \quad \lambda = 4, \quad \alpha = 0.1$$

$$L = 5 \qquad L_0 = 可変$$

上のパラメータより、セルフモードロックをもたらすポンピングの境しきい値 $\lambda_c \simeq 8$ となるが、$\lambda = 4$ のポンピングでは、変調なしにはセルフ

ロックのおこらないことが保証されている。

§ Transient特性

第5図に $\Omega_m = \pi/20$ (レーザ媒質の規格化利得幅(半値全幅)は $\Delta\Omega = 2$ であるから、この幅内に入るモードの数は $N = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_m} + 1 \cong 13$ となる)これに合わせて、(一周回期=変調周期)キャビティー長は $L_0 = 2\pi/\Omega_m = 40$ の場合、cw発振から変調をかけて、周回回数とともにモードロックパルスのピークパワー $|E_{max}|^2$ がどのように成長し、定常状態に達するかを、$z = L_0$ 点で観測して示す(上図)。同時に変調信号の透過最大時に対するパルスピークの位置を示してある(下図)。約1000回の周回で定常に達する。定常モードロックにおけるピーク値は大体、利得幅内のモード数に等しい。注目すべきは、定常パルスの位置で、通常言われているように、透過最大点(0°)ではなく、約 $-60°$ である。これは、強制モードロックレーザを擬調和振動子に対する強制振動と見た場合、特性が軟かいので、定常振動は、骨格曲線の右側(周波数の高い側)にしか存在せず(第3図参照)、したがって、強制力に対する振動の位相は負値をとることとなるので、非線形振動としては当然である。

§ 定常特性 ―― パルスの形，非対称な振舞など

第5図の定常動作範囲でのパルスの形を示すと第6図のごとくなる。同時に反転分布の時間変化をも示した。このパルスを半対数目盛上にプロットして，形を詳細にしらべると，Gauss と sech の中間であることがわかる。従来レーザ増幅器中の安定パルスとしては，ガウス形[9]と sech[2),6)]形が知られているが，循環パルスであるモードロックレーザにおいても，それに近い形をとることがわかる。パルスの頂点でその形が Gauss 形に近いことは，第2図のポテンシャルから予想されるところである。

つぎに第3図に相当する非線形共振曲線を得るために，Ω_m の多くの値に対して，第5図と同様の計算を行ない，その定常動作におけるパルスのピークパワーをプロットすると第7図のごとくなる。第3図に想像した様に数かい特性をもつ共振曲線である。* ただし，$\Omega_m = \Omega_0(p/q)$ で $p=1$, $q=1, 2, 3, 4$ のみが存在する。$q=1, 2, 3, 4$ の各分枝で，パルスは，それぞれ1周期内に1ケ，2ケ，3ケ，4ケ入っていることがわかる。1周内に，2ケパルスが入る場合のパルスの形の1例を第8図に示す。

＊最初に仮定したように，(9)式の基本方程式はキャビティーの1つのモードが原子系の遷移中心周波数に一致した場合のものである。したがって，この共振曲線上，とびとびの点で正しい。

第7図からわかるように、Ω_mのある範囲で定常解は多重になって一義的にきまらない。第5図の計算を行なった様に、cw状態から変調をかけると、多重解のうち最初に到達する解、すなわち低い方の分枝の解しか得られない。第7図で上の方の分枝を得るためには、一義的にきまる範囲または下の分枝を得る範囲のΩ_mについての定常解からはじめて、Ω_mを小さなステップで変化させ、それぞれのステップに対する定常解を得るよう、つまり共振曲線に沿って計算をすすめるようにプログラムを変更する必要がある。図中の矢印で上向きはΩ_mを増大してゆくとき、下向きは減少させてゆくとき生ずるジャンプの向きを示している。つまりΩ_mの変化については、共振曲線は履歴特性をもつ。このジャンプは軟かい共振曲線において骨格曲線の左側の分枝が不安定で定常解とならないとき生ずるものである。

§ 非線形性によるパルス圧縮

第7図の共振曲線中、得られる最大ピークパワーは、cw値の約60倍である。このときの変調周波数は$\Omega_m = 0.072$、すなわち利得半値幅内のモード巻数は$N \approx 30$であるから、通常言われている（ピークパワーがモード数倍となる。）よりも約2倍大きい。一方、⟹

この最大ピークパワー時のパルス幅を見るに、$\tau_p \approx 1$ であることがわかる。小信号モード理論では、パルス幅は、利得半値全幅 $\Delta\Omega$ として、$\tau_p = 2\pi/\Delta\Omega$ であるから、いま $\Delta\Omega = 2$ として、$\tau_p = \pi$ となるはずである。すなわち、ここに得られたパルス幅は小信号モード理論から予想されるものの 1/3 である。この原因は、小信号モード理論では利得幅一定と見ているが、(9)式を用いる非直線理論では利得幅は界の強さによって増大する（saturation broadening）ので、強いパルスによって利得幅が増大し、それに応じてパルス幅が圧縮されているものと解釈される。この事実は CO_2 レーザのモードロッキングについて実験的に認められている。[10]

一般に、モードロックによってピーク値の大きいパルスを得ようとすれば、単純に考えても、キャビティー長を大きくとって、長時間内のエネルギーをパルス中に圧縮すればよいので、できるだけ長いキャビティーを使えばよいことになるが、その結果、大きなピーク値が得られたとすると、そのためにさらに利得幅が増大し、パルス幅がその分だけ圧縮され、更にピーク値は増大する。したがって、非直線性を考慮すると、単純に時間関係で得られるピーク値より大きなパルスが得られることになる。それならば、大ピーク値を得るのに、どこまでもキャビティー長を

大きくとればよいかと云うと、第7図で見られるように、
あるキャビティー長以上で、ジャンプがおこり、長い
キャビティー中のパルスは2パルスにわかれてしまう。
一番のぞましい点は、ジャンプのおこる手前で使うこ
とである。

§ Q-spoilによる大ピークパルスの発生
― 非線形性による多重定常解.

大ピークパルスを得るのに分枝1の頂上のところ
で使いたいが、この点は前述のように、cw状態
から変調をかけたのでは到達できない。(同図では、
分枝3に到達し、3パルスとなる) そうかといって、第7
図の共振曲線を得たのと同じ手順、つまり、ある程度
短かいキャビティーでモードロックしておき、これを変調
周波数と同調をとりながら、ゆっくり引きのばしてゆ
くということは、実際的には実現不可能である。

分枝1に達する方法としては、レーザのモードロックが
定常に達する前に、分枝3や2のパルスのピーク値
より大きなパルスを発生して、これらの分枝を乗り越
えることである。これを実現するためには、最初に外部か
ら強大なパルスを注入して、これと同期した強制変調
をかけることが考えられるが、これも実際的でない。

実際に実現の可能性があるのは、Q-spoilによって、反転分布をためておき、変調をかけながら、一挙にキャビティーのQを高めて、モードロックが定常に達する前に、大きなパルスを発生することである。これが実現できるかどうかを、次の様な状況でsimulateしてみた。

Q-spoilの状態では、キャビティー内に、電界分極は存在せず、E, Pの初期条件は、

$$E_{(1)}(z,0)=0, \quad P_{(1)}(z,0)=0 .$$

このとき、反転分布の初期条件は、(9)式の第2式より、

$$S_{(1)}(z,0)=\lambda+1$$

である。この状態で、変調をかけながら、キャビティーのQを一瞬のうちに上げたとき、小さなspontaneous emissionによる界を境界条件として仮定すると、この小さな界が変調を受けながら貯められていた反転分布により急激に成長するものとする。最初に仮定するspontaneous emissionは $z=L_0$ 点に局部的に発生し、時間的にはGauss形であるとして、

$$E_{(1)}(L_0,\tau)=E_{max(1)}\exp\left\{-\left(\frac{\tau-\tau_0}{a}\right)^2\right\}$$

とおく。以下の計算例では、$L_0=54$ (したがって、$\Omega_m=2\pi/54$) として、$E_{max(1)}=0.01$, $a=L_0/20$ とし、変調信号の透過最大点に対する

この Gauss 形電界の中心の位置 z_0 を 0, $\frac{L_0}{4}$, $\frac{L_0}{2}$ などと変化してみた。その計算結果を第9図に示す。$L_0 = 54$ すなわち $\Omega_m = 2\pi/54$ においては、定常解として、第9図からわかるように分枝1と2があり、分枝1で $|E_{max}|^2 = 23.4$, 分枝2で2パルスとなって $|E_{max}|^2 = 5.6$ である。第9図からわかるように、Q-spoil した状態で変調信号をかけても、最初に仮定する spontaneous な界の変調信号に対する相対位置によって、分枝1に到達したり、分枝2に到達したりする。すなわち、最初の微小なノイズが到達する2つの大きくことなる定常状態を決定するという非線形システムに特有な現象が見られた。この現象は実際にも、ルビーレーザの Q スイッチ強制モードロック動作で確認されている。[11]

§ 孤パルスとの関連

レーザ増幅器では、パルスはいわゆる孤パルスが安定解となるが、モードロックレーザではどうでは、どうであろうか。(Smith はモードロックレーザ中のパルスが孤パルスになると仮定して、定常モードロックの性質を論じているが[12]、これは、あくまでも仮定にすぎない。)
孤パルスの定義は、界と媒質との相互作用角

$$\phi = \frac{|\mu|}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}\,dt = \sqrt{\Gamma\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}E\,d\tau = \pi$$

である。定常パルスは幅が細いので、積分範囲を1周期にとって数値計算結果を分枝1と分枝2についてしらべると、分枝1では、ほぼπパルスであり、特に、その頂点のあたりでは、完全にπパルスであり、分枝2では3πに近いことがわかる。πパルスを確かめるいま1つの方法は、P, Sを時間をパラメータとして、xy座標にプロットすることである。その結果、P, Sの軌跡が原点を中心とする $x^2+P^2=0$ の範囲に半円をえがけばπパルスである。規格化を考慮して、$\sqrt{\Gamma\lambda}P-S$ をx-y上にプロットすると、$S=1$ に中心をもつ半円となることがわかる。すなわちモードロックレーザではπパルスによって反転される反転分布はSではなく、$S-1$ である。一方、無限長レーザ増幅器ではπパルスによって、反転分布Sそのものが反転する。つまり、モードロック中のパルスはπパルスであるが、反転分布は$S=1$を中心に反転し、平均として反転分布はほぼ1に保たれる。これはモードロックにおけるパルスでは発振を維持するために平均として$S=1$の反転分布が保持されなければならないと考えると当然である。

§おわりに

以上，強制モードロックレーザの時間軸上での取扱いを示した。その結果強制モードロックレーザは擬調和振動子に対する強制振動としての特性をもっていることが明らかとなった。このことから，その様な非線形システムに特有な種々の非線形特性が数値計算結果からも示された。このことは，今後，強制モードロック動作を，特に同位のようにモード数の多い場合について研究してゆくうえに1つの有用な考え方を与えるものと思う。

文献

1) J. P. Wittke, P. J. Warter, J. Appl. Phys. 35 (1964), 1668.

2) F. T. Arecchi, R. Bonifacio, IEEE J. Quantum Electronics 1 (1965), 169

3) S. L. McCall, E. L. Hahn, Phys. Rev. Letters 18 (1967), 908.

4) A. Iscevgi, W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. 185 (1969), 517.

5) C. L. Tang, H. Statz, J. Appl. Phys. 39 (1968), 31.

6) H. Risken, K. Nummedal, J. Appl. Phys. 39 (1968) 4662.

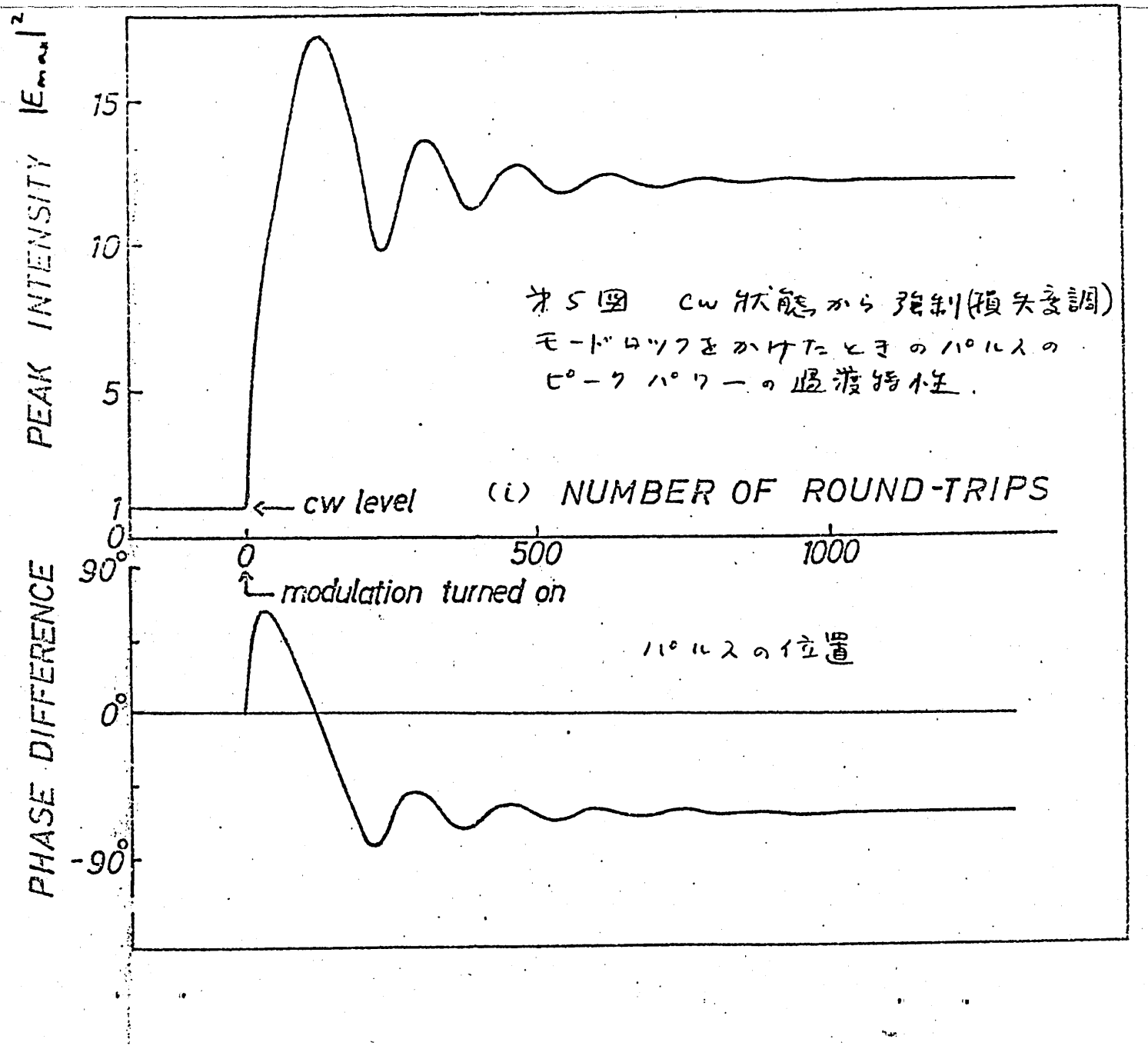
7) Pantell, Ruthoff, "Fundamentals of Quantum Electronics", John Wiley & Sons, Inc., N. Y., (1969), p.40.

8) ボゴリューボフ, ミトロポリスキー, 益子訳「非線型振動論」p.49, 共立出版 (0836).

9) H. Haken, M. Pauthier, IEEE J. Quantum Electronics, 4 (1968). 454.

10) S. Marcus, J. H. McCoy, Appl. Phys. Lett. 16, (1970), 11.

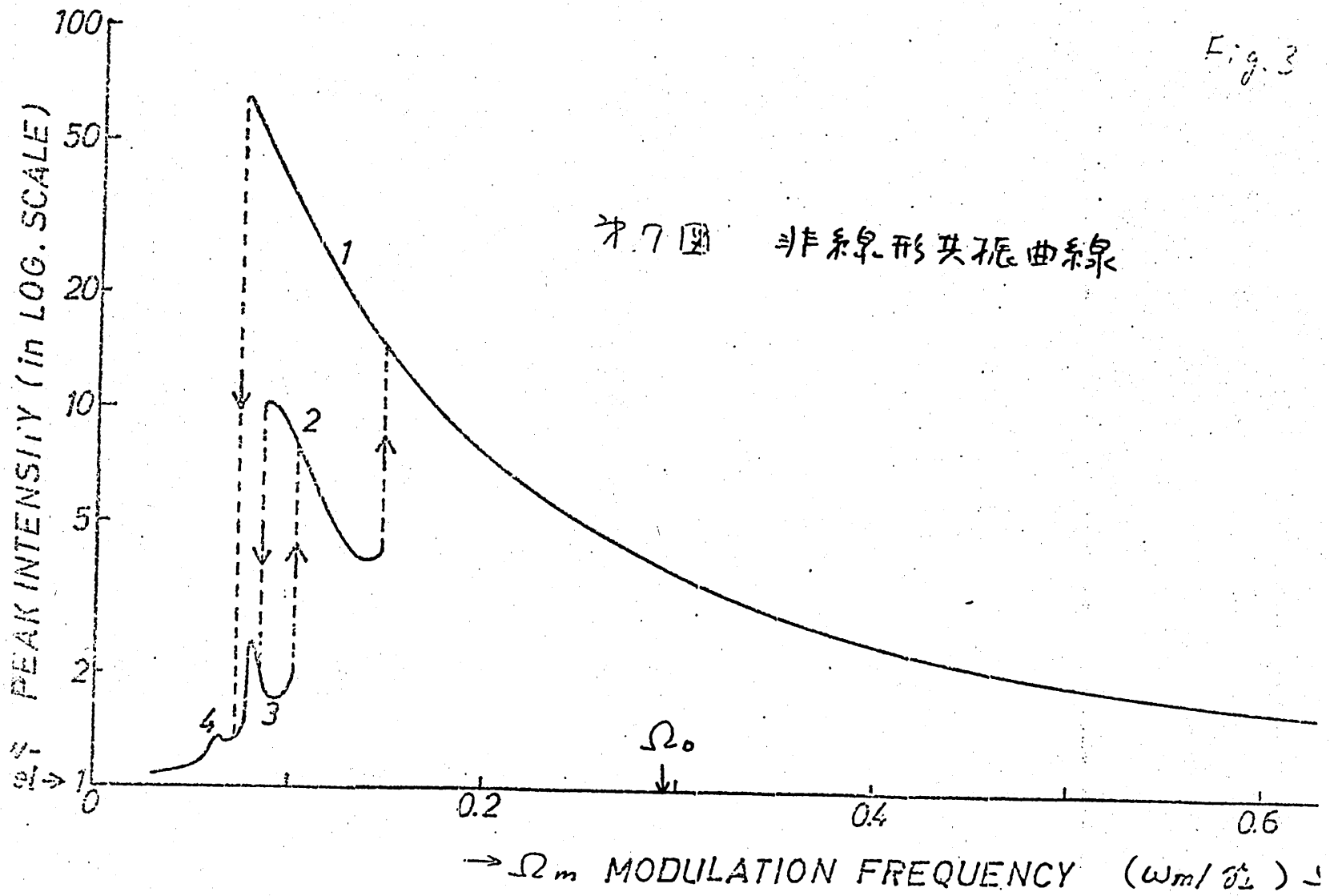
11) Eichler (T.U. Berlin) 私信.
12) P. W. Smith, IEEE J. Quantum Electronics, 3 (1967), 627.

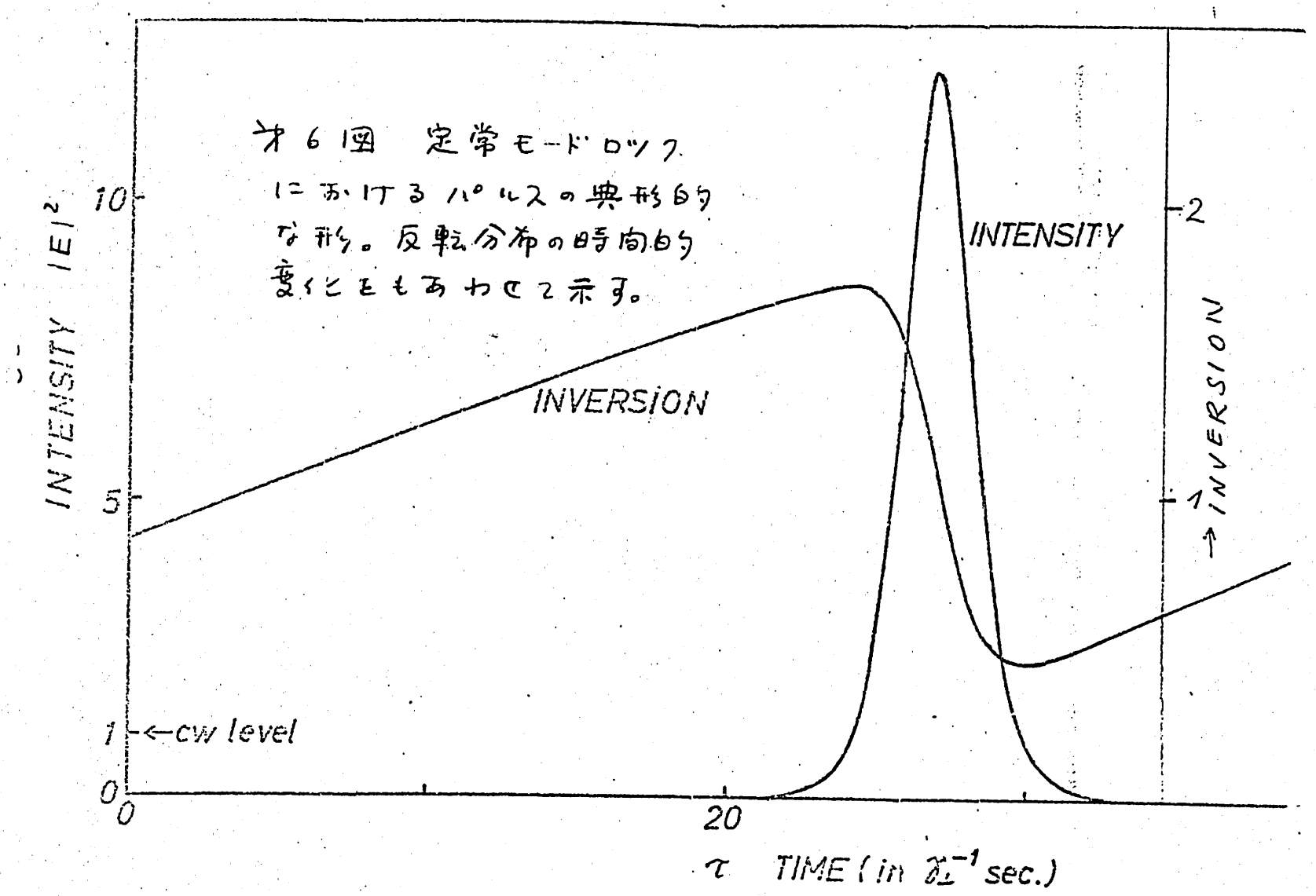


第5図 cw状態から強制(損失変調)モードロックをかけたときのパルスのピークパワーの過渡特性.

Fig. 3

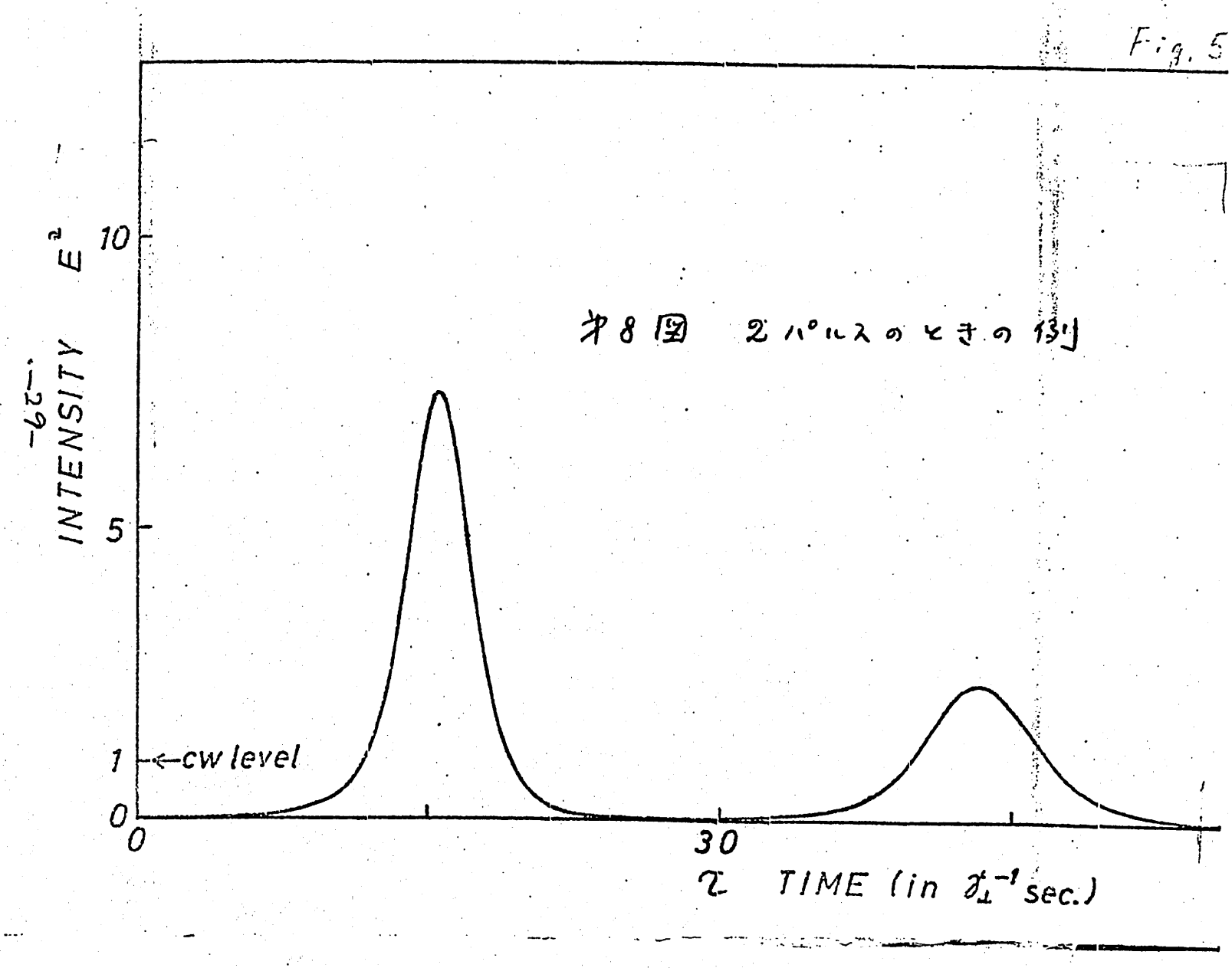
第7図　非線形共振曲線



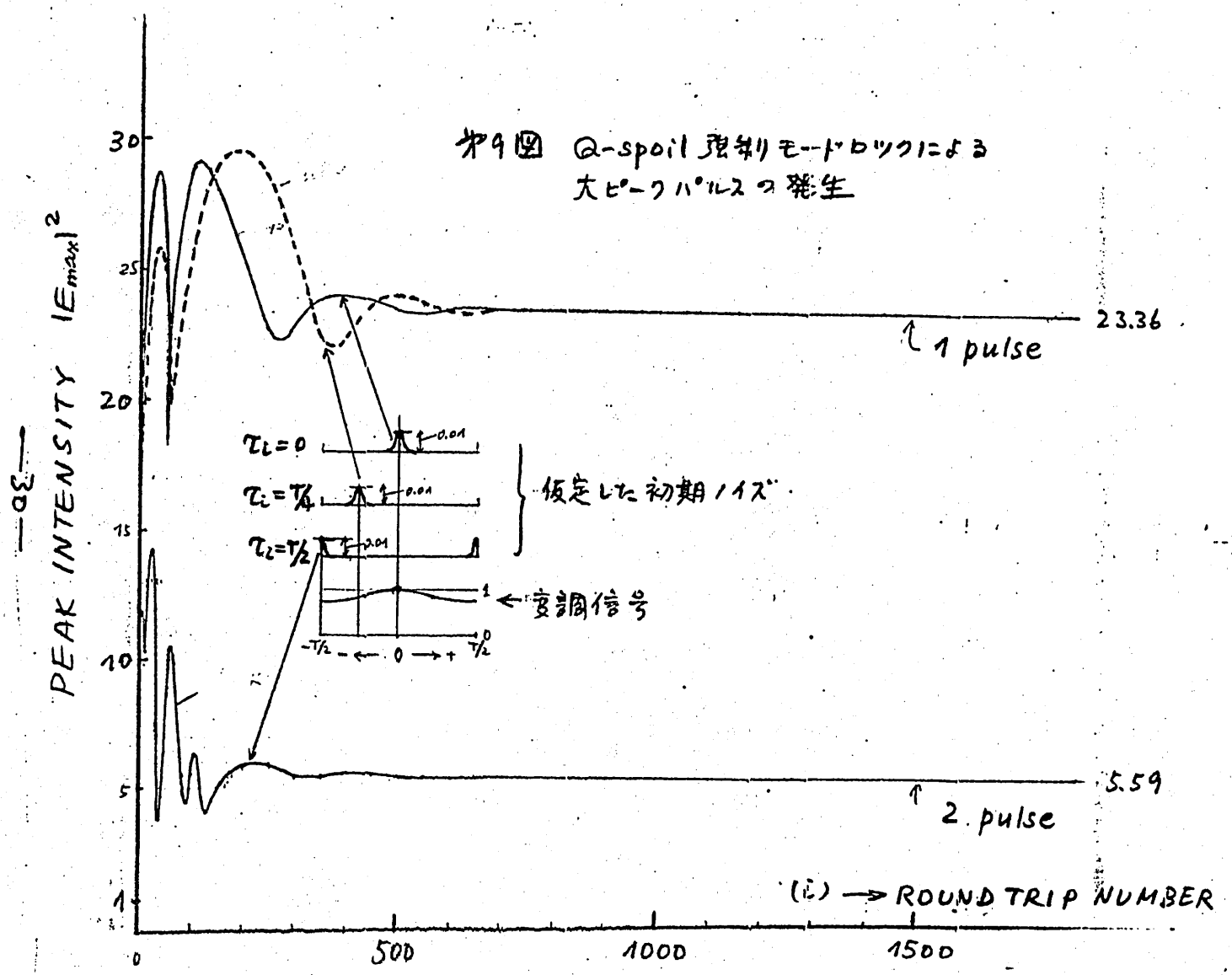


第6図　定常モードロック
における パルスの典形的
な形。反転分布の時間的
変化 とともあわせて示す。

Fig. 5



第8図　2パルスのときの強さ


第9図 Q-spoil 発振モードロックによる
大ピークパルスの発生
PEAK INTENSITY $|E_{max}|^2$
30
25
20
15
10
5
1
0
500
1000
1500
(t) → ROUND TRIP NUMBER
23.36
1 pulse
5.59
2. pulse
$\tau_i = 0$
$\tau_i = T/4$
$\tau_i = T/2$
0.01
仮定した初期ノイズ
変調信号
$-T/2$
0
$+T/2$

輻射科学研究会資料

半導体内のチャリヤ波の多速度理論

小林 猛・藤沢和男

(大阪大学 基礎工学部)

昭和46年11月26日

半導体内のキャリヤ波の多速度理論

小林 猛・藤沢和男
（大阪大学 基礎工学部）

1. まえがき

半導体内のドリフトキャリヤに伴なうキャリヤ波の伝搬は超音波増幅や固体進行波増幅で知られているがこの解析は従来、流体理論で扱かわれてきた。[1],[2] 周知のように流体理論はキャリヤの速度分布関数の代りにドリフト速度 v_0，実効熱速度 v_t，および交流速度 v_1 を用いるもので これによればキャリヤ波の減衰定数は比較的小さく且つ位相速度 v_p は v_0 に近い値をとる。通常キャリヤ波は $v_0 \leq v_t$ で励振されるのでキャリヤ波は $v_p \leq v_t$ で伝搬する。この場合キャリヤの速度分布を考慮すれば極めて強いランダウ減衰が生じることになるが[3]、逆にキャリヤの激しい衝突はランダウ減衰を強く抑制するであろう。これらを明らかにするためにここでは速度分布を考慮した多速度理論によるキャリヤ波の解析を行なう。また印加された直流高電界はドリフト速度 v_0 を通じて波動に影響するだけでなく衝突間のキャリヤの加速を通じても大きく影響するのでこの項を無視した Pines[4], Swartz[5] 等の取扱いは不適当である。ここでは線形化ボルツマン方程式に直流電界項および大きな衝突周波数をもつ衝突項を考慮し、キャリヤはドリフトマックスウェル分布に従うとする。この方程式を実周波数 ω に対して複素波数 k を求めるいわゆる空間的問題（spatial problem）として解き、特に衝突周波数が励振周波数よりも大きい場合は分散式を解いて伝搬特性が得られることを示す。最後に分散式を近似解析および厳密計算することにより(i)ランダウ減衰は生じない(ii)直流電界の影響でキャリヤ波が高速化することを明らかにしている。

2. 基本式

扱われる半導体プラズマは(a) 電荷$-e$, 有効質量mの自由電子および静止したドナーイオンから成り電子は熱速度分布をもつ (b)無擾動状態の速度分布関数$f_0(v)$はドリフトマックスウェル分布とする.(c) 一次元問題、すなわち電子は直流電界E_0の方向にのみ動く。(d) プラズマは一様であり、小信号理論のもとで等温度であるとする。このとき速度分布関数を

$$f(v,x,t) = f_0(v) + f_1(v,x,t) \qquad (1)$$

とおく。ただしf_1は分布関数のrf成分である。キャリヤ波を決定する式は(1)式を用いた線形化ボルツマン方程式, ポワッソン方程式, および連続の方程式である。

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{eE_1}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{eE_0}{m}\frac{\partial f_1}{\partial v} = -\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = -\frac{e}{\varepsilon}n_1 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}(-en_1) = 0 \qquad (4)$$

ここでn_1, J_1, E_1, およびεはそれぞれキャリヤ密度, 電流密度, 電界のrf成分および半導体の誘電率である。またJ_1, n_1は次式で定義される。

$$J_1(x,t) = -e\int_{-\infty}^{\infty} v f_1(v,x,t)\,dv \qquad (5)$$

$$n_1(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v,x,t)\,dv \qquad (6)$$

(2)式の右辺に、キャリヤが弾性散乱をするとして Krook 衝突項[6]を仮定する。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \left\{ f_1(v,x,t) - \frac{n_1(x,t)}{n_0} f_0(v) \right\} / \tau \qquad (7)$$

ただし n_0 は無摂動状態のキャリヤ密度，τ は平均緩和時間である。山下によれば $n_0 < 10^{15}\,cm^{-3}$ のとき τ は運動量緩和時間となる[7]。衝突項(7)に従って熱平衡からずれた分布は局所的マックスウェル分布に緩和する。

3. 応答関数 $G_{k\omega}$ の算出

キャリヤ波を調べるためにここでは rf 電界について検討する。波源 $S(x,t)$ は電荷密度でありその大きさは周波数 ω で正弦振動している。波源 S により励振される キャリヤ波の電界は一般に次式で与えられる。

$$E_1(x,t) = \iint G(x-x', t-t') S(x', t')\, dx'dt' \qquad (8)$$

ここで $G(x,t)$ は応答関数であり積分は波源 S に有する時間、空間で行われる。(8)式の Fourier・Laplace 変換*をとれば

$$E_{1k\omega} = G_{k\omega} \cdot S_{k\omega} \qquad (9)$$

になる。一方、発散定理 $(\partial/\partial x) D_1 = S$ を用いて電束密度 D_1 と波源 S は

$$ikD_{1k\omega} = S_{k\omega} \qquad (10)$$

で関係づけられる。(9), (10)式より応答関数が次式のように求ま

---

* 関数 $y(x,t)$ の Fourier・Laplace 変換は次式で定義される。

$$y_{k\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} dt\; y(x,t)\, e^{-ikx+i\omega t} \qquad (Im\,\omega > 0)$$

る。

$$G_{kw} = [ikK]^{-1} \tag{11}$$

$$K = 1 - \frac{\sigma_c}{i\omega\varepsilon} = 1 - \frac{J_{1kw}}{i\omega\varepsilon E_{1kw}} \tag{12}$$

ただしK, σ_cはそれぞれ相対プラズマ誘電率およびプラズマ導伝率である。(11)式より応答関数を得るためには電流密度J_{1kw}を電界E_{1kw}で表示すればよい。

(1)式の$f_1(v;x,t)$に対するv空間のFourier変換を次式のように定義する。

$$f_{1z}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v,x,t)\, e^{-izv}\, dv \tag{13}$$

基本式(2), (3), (4)式のx, v空間のFourier変換をとると

$$\frac{\partial f_{1kz}}{\partial t} - k\frac{\partial f_{1kz}}{\partial z} - \left(i\frac{e}{m}E_{0z} - \nu\right) f_{1kz} = \left(\frac{\nu n_{1k}}{n_0} + i\frac{ez}{m}E_{1k}\right) f_{0z} \tag{14}$$

$$ikE_{1k} = -\frac{e}{\varepsilon} n_{1k} \tag{15}$$

$$ikJ_{1k} = e\frac{\partial n_{1k}}{\partial t} \tag{16}$$

になる。ただし(14)式では衝突周波数ν(=1/τ)を用いている。またf_{0z}は分布関数$f_0(v)$に(13)の変換を施したものである。(14), (15)両式よりn_{1k}を消去すれば

$$\frac{\partial f_{1kz}}{\partial t} - k\frac{\partial f_{1kz}}{\partial z} - \left(i\frac{e}{m}E_{0z} - \nu\right) f_{1kz} = -ik\left(\frac{\varepsilon\nu}{en_0} - \frac{ez}{mk}\right) E_k f_{0z} \tag{17}$$

を得る。(17)式の微分方程式はt, zの特性曲線に沿って容易に解くことができる。(17)式の特性曲線は$z(t) = -kt' + C$であり、C

は任意の定数であるがここではCを次の様に選ぶ。(6),(13) 両式の比較から $n_{1k}(t)$ と $f_{1k2}(t)$ の間に次の関係を得る。

$$n_{1k}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{1k}(v,t)\,e^{-izv}\,dv\Big|_{z=0}=f_{1k0}(t) \qquad (18)$$

(17)式の解 $f_{1k2}(t)$ を $n_{1k}(t)$ に関連づけるためには特性曲線は $z(t'=t)=0$ であればよい。これより定数Cは定まり特性曲線は

$$z(t')=k(t-t') \qquad (19)$$

となる。(19)式を考慮したとき(17)式の解は次式で与えられる。

$$f_{1k0}(t)=-ik\int_0^t\left\{\frac{\varepsilon\nu}{en_0}-\frac{e}{m}(t-t')\right\}E_{1k}f_{0z}\exp\left\{\frac{ie}{2m}E_0k(t-t')^2-\nu(t-t')\right\}dt' \qquad (20)$$

(20)式の被積分関数は $E_{1k}(t')$ 以外はすべて $(t-t')$ の関数である。このとき両辺を Laplace 変換すれば右辺は周知の convolution 積分に帰着する。さらに $\xi=t-t'$ とおいて

$$f_{1k\omega 0}=n_{1k\omega}=ikE_{1k\omega}\int_0^{\infty}\left(\frac{e}{m}\xi-\frac{\varepsilon\nu}{en_0}\right)f_{0(k\xi)}\exp\left\{i\omega\xi+\frac{ie}{2m}E_0k\xi^2-\nu\xi\right\}d\xi \qquad (21)$$

を得る。更に(16),(21)式より rf 電流密度は

$$J_{1k\omega}=-i\omega\varepsilon\omega_p^2E_{1k\omega}\int_0^{\infty}\left(\xi-\frac{\nu}{\omega_p^2}\right)g_{0(k\xi)}\exp\left\{i\omega\xi+\frac{ie}{2m}E_0k\xi^2-\nu\xi\right\}d\xi \qquad (22)$$

になる。ここで $\omega_p=(n_0e^2/m\varepsilon)^{1/2}$ はプラズマ周波数、および $g_{0(k\xi)}=f_{0(k\xi)}/n_0$ は規格化分布関数の v-空間 Fourier 変換である。(11),(12)式に(22)式を代入して応答関数を次式に得る。

$$G_{1k\omega}=\frac{1}{ik\varepsilon}\left[1+\omega_p^2\int_0^{\infty}\left(\xi-\frac{\nu}{\omega_p^2}\right)g_{0(k\xi)}\exp\left(i\omega\xi+\frac{ie}{2m}E_0k\xi^2-\nu\xi\right)d\xi\right]^{-1} \qquad (23)$$

4. Rf 電界 $E_1(x,t)$ の平面波記述

前節で求めた E_{1kw} は任意の分布関数 f_0 および波源 S について成立するが伝搬特性は f_0 に強く依存している。ここでは f_0, S を具体的に定めこのような半導体内を伝搬するキャリヤ波は平面波 $\exp(ikx-iwt)$ の和で記述されることを示す。キャリヤはドリフト・マックスウェル分布に従がい，波源として時間的に正弦振動をする電荷密度を考える。

$$f_0(v)=\frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_t}\exp\left\{-\frac{(v-v_0)^2}{2v_t^2}\right\} \tag{24}$$

$$S(x,t)=\begin{cases} -e\Delta n\delta(x)e^{-iw_0t} & t>0 \quad (25a)\\ 0 & t\leq 0 \quad (25b)\end{cases}$$

ここで Δn, w_0 は励振の振幅および周波数であり，$\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である。波源 S の Fourier·Laplace 変換は

$$S_{kw}=-\frac{ie}{w-w_0}\Delta n \tag{26}$$

となり (24), (26)式を (9), (23)式に代入すれば rf 電界 E_{1kw} が求まる。計算の詳細は附録A で補足するがその結果は

$$E_{1kw}=\frac{-e\Delta n}{k\varepsilon(w-w_0)}\cdot\frac{1}{K_\pm} \tag{27}$$

ただし

$$K_\pm=1-\frac{w_p^2}{2(kv_t\Omega)^2}Z_\pm'(\zeta)+\frac{i\nu}{\sqrt{2}kv_t\Omega}Z_\pm(\zeta) \tag{28}$$

$$\zeta=\frac{w+i\nu-kv_0}{\sqrt{2}kv_t\Omega} \tag{29}$$

$$\Omega=\left(1-\frac{ieE_0}{mk\nu_t^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{i\nu v_0}{kv_t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (30)$$

(30)式の変形にはキャリヤの移動度 $\mu=e/m\nu$ および $v_0=-\mu E_0$ の関係を用いている。また(28)式の $Z_+(\zeta)$, $Z_-(\zeta)$ は周知のプラズマ分散関数でそれぞれ $\mathrm{Im}\,\zeta>0$, $\mathrm{Im}\,\zeta<0$ で定義され、その形は

$$Z_+(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\theta^2}}{\theta-\zeta}\,d\theta & \mathrm{Im}\,\zeta>0 \qquad (31a)\\ \text{解析接続} & \mathrm{Im}\,\zeta\leq 0 \qquad (31b)\end{cases}$$

$$Z_-(\zeta)=Z_+(\zeta)-i2\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2} \qquad (32)$$

で与えられる[8]。更に(28)式の $Z_\pm'(\zeta)$ は ζ に関する $Z_\pm(\zeta)$ の微係数である。

キャリヤ波の空間的応答は(27)式の $E_{1k\omega}$ の逆変換すなわち $E_1(x,t)$ を求めて得られる。この逆変換は

$$E_1(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ikx}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}d\omega\,e^{-i\omega t}E_{1k\omega} \qquad (33)$$

であり、σ は因果律を満たすようにとられた正の実数である。十分に時間が経過してのちの ω 平面の逆変換は $\omega=\omega_0$ の特異点の寄与のみを残し他の寄与は時間と共に消失してしまう。これは、とりもなおさず励振周波数 ω_0 のみが時間応答として現れることを意味する。このとき(33)式は次式のように書きかえられる。

$$E_1(x,t)=\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,(\omega-\omega_0)E_{1k\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}e^{ikx-i\omega_0 t},\quad(\omega_0 t\gg 1) \qquad (34)$$

(34)式の積分は複素k平面の実軸に沿っておこなわれる。しかし(29)式から明らかなようにk>0, k<0のとき Im ε>0, Im ε<0であるから(28)式の定義に従い被積分関数にそれぞれプラズマ誘電率 K_+, K_- を使用する。それ故に積分は二分されて

$$E(x,t)=\frac{ie\Delta n}{2\pi\varepsilon}e^{-i\omega t}\left\{\int_{-\infty}^{0}dk\,\frac{e^{ikx}}{kK_-}+\int_{0}^{\infty}dk\,\frac{e^{ikx}}{kK_+}\right\} \qquad (35)$$

となる。ただし(34)式では励振周波数 ω_0 を ω に改めている。

$x>0$ に対して、すなわち前進波の応答は $\mathrm{Im}\,k>0$ の条件のもとに決定されるので(34)式の積分は上半k面で変形ができる。またk=0に特異点が存在しているがこれからの寄与はconstant fieldであり問題から除去できる。更に図1-(b)に示す積分路 C_1 および C_2 を導入すればこれに沿う積分は留数定理により一部の計算が済む。このとき rf 電界は

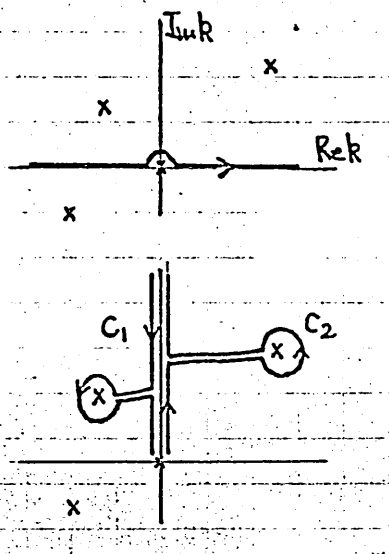


図 1.

$$E_1(x,t)=-\frac{e}{\varepsilon}\Delta n e^{-i\omega t}\left\{\sum_m\frac{e^{ikx}}{k\frac{\partial K_-}{\partial k}}\bigg|_{k_m}+\sum_n\frac{e^{ikx}}{k\frac{\partial K_+}{\partial k}}\bigg|_{k_n}+\frac{i}{2\pi}\int_0^{i\infty}dk\,\frac{e^{ikx}}{k}\left(\frac{1}{K_-}-\frac{1}{K_+}\right)\right\} \qquad (36)$$

で与えられる。最初の二項は平面波の和であり k_m, k_n は方程式 $K_-=0$, $K_+=0$ の上半k面に含まれる根である。第三項は正の虚軸に沿う積分であるが多衝突半導体プラズマ条件のもとでこの積分を無視しうることを証明する。(24)式の関係式を用いて被積分関数を整理すると

$$\frac{e^{ikx}}{2\pi k}\left(\frac{1}{K_-}-\frac{1}{K_+}\right)=\frac{e^{ikx-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}kK_-K_+}\left(\frac{i\omega_p^2\zeta}{k^2v_t^2\Omega^2}-\frac{\nu}{\sqrt{2}kv_t\Omega}\right) \qquad (37)$$

になる。$k\to 0$ のとき(29)式より $\zeta^2\simeq(\nu/2|k|v_0)\gg 1$ であるがこれは半導体条件の $\nu\gg\omega$ のときにのみ成立し、このとき(37)式は $\exp(-\nu/2|k|v_0)$ の形で減少する。一方、$k\to i\infty$ のときは(37)式は $\exp(-|k|x)$ の形で減少する。すなわち $x>\frac{1}{4}\lambda_D$ (λ_D はDebye長) のときは被積分関数(37)は正の虚軸全域にわたって極めて小さな値となり、このとき(36)式のオミ項積分は無視できるので

$$E_1(x,t)\simeq-\frac{e}{\varepsilon}\Delta n e^{-i\omega t}\left\{\sum_m\frac{e^{ikx}}{k\frac{\partial K_-}{\partial k}}\bigg|_{k_m}+\sum_n\frac{e^{ikx}}{k\frac{\partial K_+}{\partial k}}\bigg|_{k_n}\right\} \qquad (38)$$

を得る。後進波に関しても同様の結論を得る(附録B参照)。これらの結果は重要な意義をもっている。一般に多速度理論で空間的応答を扱う場合は積分を処理しえず[9]、最近 Dertler[10] は合流形超幾何関数を用いて表記できることを示した。ところが(38)式は多衝突半導体条件 $\nu\gg\omega$ のもとにオヤリヤ波は平面波で記述され、しかも伝搬特性はプラズマ誘電率を分散式とした $K_\pm=0$ を解いて得られることを明らかにしている。

5. 分散関係

(38)式で与えた E_1 電界は $x>\frac{1}{4}\lambda_D$ のとき分散式を複素k面で解いて求まる。分散式はプラズマ誘電率を用いて

$$K_+=0 \qquad (39a)$$

$$K_-=0 \qquad (39b)$$

である。(39)式の解は励振周波数 ω に対して複素波数 k として解かれるが(28)式に示されるように極めて複雑な関数である。この

とき，前進波に対して，$|\zeta| \gg 1$ となることからプラズマ分散関数は漸近展開される。

$$Z_+(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}\left[1 + \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{1}{4\zeta^4} + \cdots\right] \tag{40}$$

$$Z_+'(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}\left[1 + \frac{3}{2\zeta^2} + \frac{15}{4\zeta^4} + \cdots\right] \tag{41}$$

(40), (41)式の $\frac{1}{\zeta^4}$ 項まで残し高次項を無視すれば前進波の分散式は次式のようになる。

$$0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{2k^2v_t^2\Omega^2}\left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{3}{2\zeta^4}\right) - \frac{i\nu}{\sqrt{2}kv_t\Omega}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2\zeta^3}\right) \tag{42}$$

衝突周波数が大きい場合、すなわち $\nu \gg \omega, \omega_p, kv_t$ の場合は (29), (30)式より

$$\zeta^2 \simeq -i\frac{1 + i\frac{kv_t^2}{v_0\nu}}{2kv_0\nu}(\omega + i\nu - kv_0)^2 \tag{43}$$

を得る。(43)式を(42)式に代入し、更に適当な近似を施こせば次式を得る。

$$(\omega - kv_0)\left(1 + i\frac{kv_t^2}{v_0\nu}\right)(\omega + i\nu - kv_0)^2 = i\nu kv_0(\omega + i\nu - kv_0) \tag{44}$$

(44)式では $(\omega + i\nu - kv_0) \neq 0$ を仮定できる。何故ならば $(\omega + i\nu - kv_0) = 0$ より求まる波は、減衰定数が衝突周波数 ν に比例しているのでこの様な波は ν が大きい場合には強く減衰してしまうからである。これより(44)式より次の分散式を得る。

$$\left(1 + i\frac{kv_t^2}{v_0\nu}\right)(\omega - kv_0)(\omega - kv_0 + i\nu) = i\nu kv_0 \tag{45}$$

Re k, Im k を k_r, k_i と書き $k = k_r + ik_i$ として(45)式に代入し、更に $k_r > k_i$ を考慮して(45)式を実部、虚部に分けることができる。

$$(\omega - k_r v_0)^2 - \frac{v_t^2}{v_0} k_r (\omega - k_r v_0) \simeq -2\nu k_i v_0 \qquad (46a)$$

$$\omega - k_r v_0 \simeq k_r v_0 \qquad (46b)$$

(46)式を解いて $Re\,k$, $Im\,k$ を次式のように得る。

$$k_r \simeq \frac{\omega}{2v_0} \qquad (47a)$$

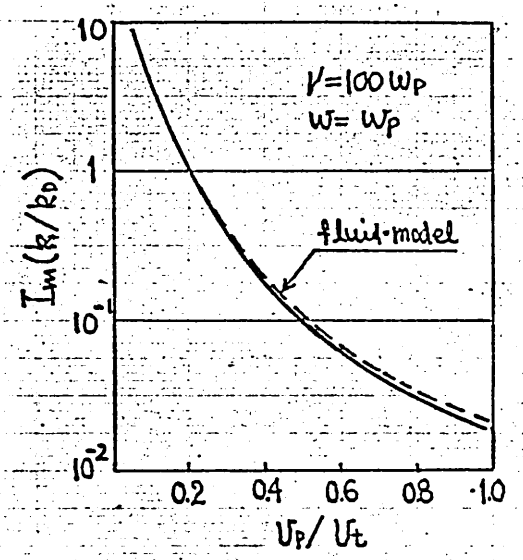
$$k_i \simeq \frac{\omega^2}{8\nu v_0^3}(v_t^2 - v_0^2) \qquad (47b)$$

一般にキャリヤ波の位相速度は $v_p = \omega / Re\,k$ で定義される。(47a)式を用いて位相速度は

$$v_p \simeq 2v_0 \qquad (48)$$

となる。(48)式は極めて興味深い結論であり、衝突の激しいキャリヤ波では位相速度 v_p はドリフト速度 v_0 のほぼ二倍であることが明らかである。これは直流電界 E_0 が電子を加速する項を基本式に考慮したことから生じ、もしこの加速作用を無視した結果は（これは(30)式で $\Omega = 1$ とすればよい）周知の $v_p \simeq v_0$ に帰着する。減衰定数は(47b)式に示されるが、衝突の大きいときは ν に逆比例し、更に v_0^3 に逆比例している。また、周波数の自乗 ω^2 に比例している。

一方、ここでは複素 k 面で分散式 $K_\pm$ の等高線図を求め、減衰の最も小さな波に関して厳密な数値解を得ている。波数 k の実部，虚部はそれぞれ位相定数，減衰定数であり $Re\,k > 0$ のときは前進波，$Re\,k < 0$ のときは後進波を意味する。$\nu = 100\,\omega_p$ および種々のドリフト速度 v_0 に対する $Re\,k$ の全貌を図2に示す。図3は $\nu = 100$, $500\,\omega_p$ の前進波の分散関係を表わすが実線，破線はそれぞれ $Re\,k$, $Im\,k$ を意味する。減衰定数 $Im\,k$ と v_p/v_t



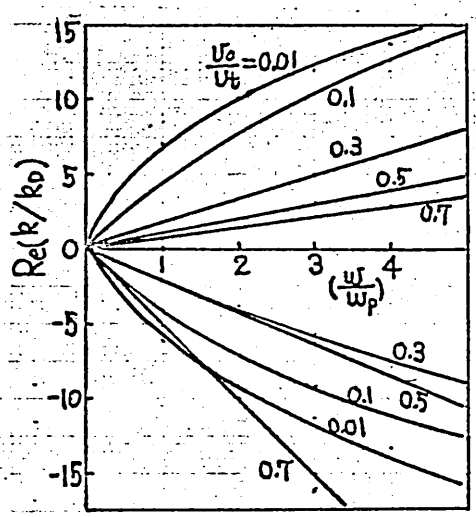


図2. Re k vs. ω

図4. Im k vs. v_p

の関係はキャリヤ波に於けるランダウ減衰の検討を容易にする。この関係は $\nu=100\,\omega_p$ に対して図4に流体理論で得られる結果を合せて示される。これより次の結論を得る。

(i)キャリヤ波にはランダウ減衰が見られない。それは図4に示されるように減衰定数 Im k が流体理論の値より小さく且つ $v_p \simeq v_t$ でも Im k の増加が全くないからである。これより半導体プラズマ中の激しい衝突は電子が波にトラップされるランダウ減衰機構を完全に破壊することが明らかになる。

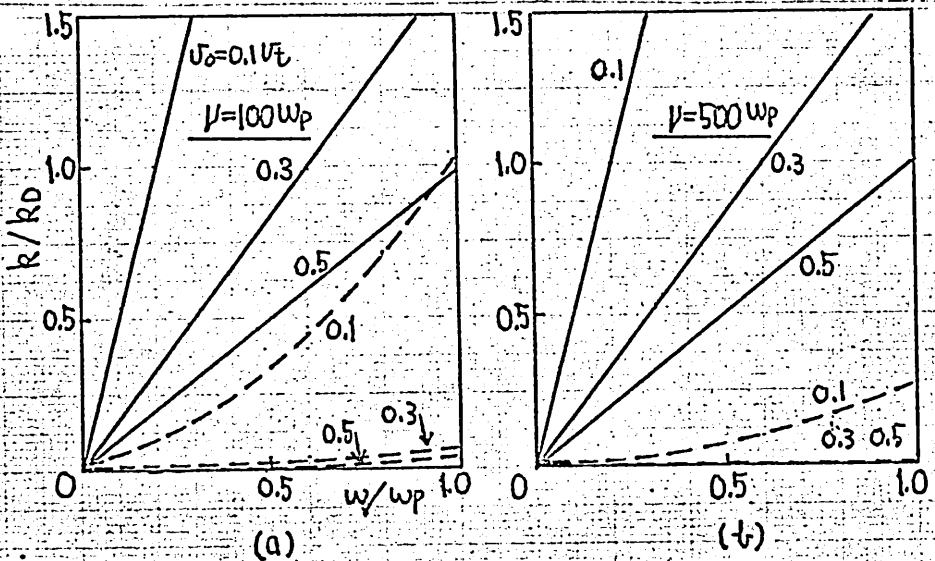


図3. Dispersion relation

(ii) $\omega/\mathrm{Re}\,k$ で定義される前進波の位相速度 v_p は流体理論の値の約二倍である。図5は両理論より導かれる v_p の v_0 依存性を示している。周知のように流体理論では $v_p \simeq v_0$ なので半導体のように $v_0 < v_t$ の場合は v_p は v_t を越せない。しかし多速度理論では同一条件のもとに $v_p > v_t$ が可能である。これは基本式(2)に考慮した直流電界の影響である。

(iii) (30)式で与えられる Ω は直流電界 E_0 を含めた複素係数である。E_0 の効果は v_0 による Doppler-shift ($\omega \to \omega - kv_0$) の他に衝突の平均自由時間内のキャリヤの加速からも生じ、とくに加速作用が Ω に含まれる。そして(28), (29)式を見るかぎり $v_t\Omega$ が実効緩速度として解釈される。(2)式から得られる運動量輸送式には n_1 に比例した項として $ikmv_t^2 n_1$ と $eE_0 n_1$ が含まれ、それらは共に n_1 に比例するところから拡散項と考えられる。これらはまとめて $ikmv_t^2 n_1 + eE_0 n_1 = ikmv_t^2 n_1\left(1 - \frac{eE_0}{mkv_t^2}\right) = ikmn_1(v_t\Omega)^2$ となる。図6に $|\Omega|$ の E_0 依存性を示しているが前進波に対しては $|\Omega| > 1$, 後進波に対しては $|\Omega| < 1$ となる。

6. 結論

半導体内のキャリヤ波を多速度理論で解析し空間的応答も分散式から検討できることを示した。そして分散式の数値計算結

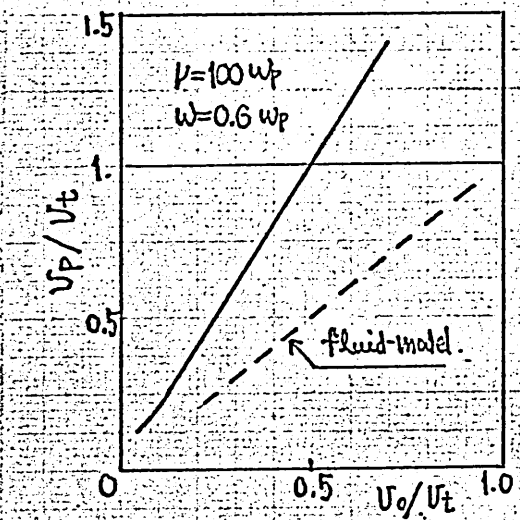


図5. v_p vs. v_0

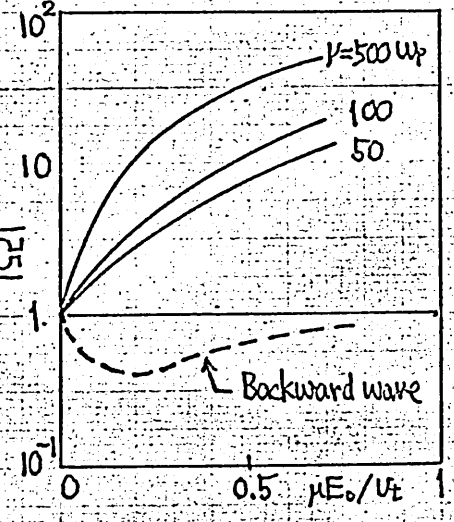


図6. $|\Omega|$ vs. E_0

果からキャリヤ波はランダウ減衰を伴なわないことを明らかにした。また直流電界の加速作用が拡散項に混入して波動に寄与するように解釈できることを示し、このためにキャリヤ波が高速化することを示した。尚、数値計算に用いた数値は例えばn-GaAsで $n_0 \simeq 10^{11}\ cm^{-3}$, $\omega_p \simeq 10^{11}\ rad \cdot sec^{-1}$, $\nu \simeq 10^{13}\ sec^{-1}$, $\omega \simeq 10^{10}\ rad \cdot sec^{-1}$ の場合に妥当な値である。最後にこの研究にあたり、有益な御討論を戴いた名古屋大学プラズマ研究所上村鉄雄氏ならびに大阪大学橋本正弘氏に感謝の意を表します。

文献

(1) K. Blotekjaer and Quate "The coupled modes of acoustic waves and drifting carriers in piezoelectric crystals" Proc. IEEE, 52.4 (1964) 360.

(2) 藤沢市川 "半導体内の変動増幅のモード結合理論" 信学論 52-C, 6 (1969) 327

(3) J.D. Jackson "Longitudinal plasma oscillation" J. Nuclear Energy, C-1 (1960) 171

(4) D. Pines and T.R. Schriefer "Collective behaviors in sold state plasmas" Phys. Rev. 124, 5 (1961) 1387

(5) B.B. Robinson and G.A. Swartz "Two stream instabilities in semiconductor plasmas" J. A. P 38, 6 (1967) 2461

(6) P.L. Bhatnagar et al. "A model of collision processes in Gases I" Phy. Rev. 94, 3 (1954) 511

(7) J. Yamashita "Electron-electron interaction in hot electron problems" Progr. theor. Phys. 24, 2 (1960).

(8) B.D. Fried and S. Conte "The plasma dispersion function" (Academic Press 1961)

(9) R.W. Gould "Excitation of ion-acoustic waves" Phys. Rev. 136 (1964) 991.

(10) H. Derfler et al. "Higher order Landau modes" Phys. of Fluid 12, 2 (1969) 269.

附録A. (28)式の導出

(23)式の括弧は相対プラズマ誘電率Kである。より簡便な記述を用いて次式を得る。

$$K=1-\omega_p^2\left(i\frac{\partial}{\partial\omega}+\frac{\nu}{\omega_p^2}\right)\int_0^\infty d\xi\, g_{0(k\xi)}\exp\left(i\omega\xi+\frac{ie}{2m}E_0k\xi^2-\nu\xi\right) \qquad (A\text{-}1)$$

(24)式のドリフトマックスウェル分布をv空間でFourier変換し、n_0で規格化すれば次式を得る。

$$g_{0(k\xi)}=\exp\left(-\frac{1}{2}k^2v_t^2\xi^2-ikv_0\xi\right) \qquad (A\text{-}2)$$

(A-2)を(A-1)に代入しさらに適当な変数変換を用いれば

$$K=1-\omega_p^2\left(i\frac{\partial}{\partial\omega}+\frac{\nu}{\omega_p^2}\right)\frac{\sqrt{2}}{kv_t\Omega}e^{-\zeta^2}\int_{-\infty e^{i\beta}}^{i\infty}e^{-\psi^2}\,d\psi \qquad (A\text{-}3a)$$

$$=1-\omega_p^2\left(i\frac{\partial}{\partial\omega}+\frac{\nu}{\omega_p^2}\right)\frac{1}{i\sqrt{2}kv_t\Omega}Z(\zeta) \qquad (A\text{-}3b)$$

$$=1-\frac{\omega_p^2}{2k^2v_t^2\Omega^2}Z'(\zeta)+\frac{i\nu}{\sqrt{2}kv_t\Omega}Z(\zeta) \qquad (A\text{-}3c)$$

ただし $\zeta=\dfrac{\omega+i\nu-kv_0}{\sqrt{2}kv_t\Omega}$, $\Omega=\left(1-i\dfrac{eE_0}{mkv_t^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\beta=\frac{1}{2}\arg\left(k^2v_t^2-i\frac{eE_0}{mk}\right)$$

である。尚、(A-3a)の積分項は(31), (32)式に定義されるプラズマ分散関数の変形にもである。

附録B. 後進波の平面波記述.

$x<0$ に於ける(3)式の積分は $\mathrm{Im}\,k<0$ の条件のもとに下半k面で変形ができる。ところが $k\Omega=\{k(k+i\nu v_0/v_t^2)\}^{1/2}$ は下半k面に二つの branch point をもつので branch cut の両側では $k\Omega$ は互に逆符号をもつ。図7には変形した積分路を示すが $-i\nu v_0/v_t^2$ から $-i\infty$ までの虚軸に沿う積分は $x>0$ の場合と同じ理由で無視され

$$E(x,t)\simeq\frac{e}{\varepsilon}\Delta n e^{-i\omega t}\left\{\sum_m \frac{e^{ik_m x}}{k\frac{\partial K_-}{\partial k}}\bigg|_{k_m}+\sum_n \frac{e^{ik_n x}}{k\frac{\partial K_+}{\partial k}}\bigg|_{k_n}+\frac{i\nu}{2\pi}\int_0^{-i\nu v_0/v_t^2} dk\,\frac{e^{ikx}}{k}\left(\frac{1}{K_+}-\frac{1}{K_-}\right)\right\} \tag{B-1}$$

を得る。ただし k_m, k_n は下半k面内の $K_+=0$, $K_-=0$ の根である。(B-1)の第三項の積分は branch cut に沿う積分であり K_+, K_- 中の $k\Omega$ とうはそれぞれ $k\Omega^+$, $k\Omega^-$ および ζ^+, ζ^- と区別されそれらの間に $\Omega^-=-\Omega^+$, $\zeta^-=-\zeta^+$ の関係を得る。このときプラズマ分散関数は

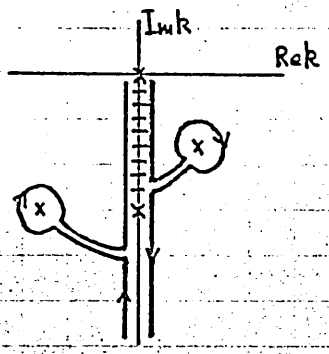


図7.

$$Z_-(\zeta^-)=-Z_+(\zeta^+) \tag{B-2}$$

$$Z'_-(\zeta^-)=Z'_+(\zeta^+) \tag{B-3}$$

となるのでプラズマ誘電率に関しても

$$K_-=K_+ \tag{B-4}$$

となる。これより branch cut の積分は除去され電界は次式のようになる。

$$E(x,t)\simeq\frac{e}{\varepsilon}\Delta n e^{-i\omega t}\left\{\sum_m \frac{e^{ik_m x}}{k\frac{\partial K_-}{\partial k}}\bigg|_{k_m}+\sum_n \frac{e^{ik_n x}}{k\frac{\partial K_+}{\partial k}}\bigg|_{k_n}\right\} \tag{B-5}$$

輻射科学研究会資料

負性抵抗発振器信号応答に関する基礎理論

池上淳一
中島将光
(京都大学工学部)

1971年11月26日

1. はしがき

発振器は電子工学における最も基本的な要素の一つであり，それに関する理論的な取扱いは単純な線形近似から，高次の非線形を含む系の解析に至るまで，数多くの研究がある。発振器は最初連続な交流信号を発生させるために用いられたが，技術の進展に伴なって発振器そのものを外部から変調させたり，発振器内部に存在する雑音によって発振器がどのような応答を示すかなど，発振器の信号応答に関連した問題が多く研究されるようになった。

発振器はその発振振巾が安定に一定値を保つために必然的に非線形要素を含むものであり，線形近似では発振が可能か否かの判別しか行えず，また高次の非線形性を考慮すれば，統一的な解析は殆んど不可能となる。しかし扨い実際に応用される発振器は，特殊な場合を除いて，非線形性がそれ程大きくはなく，定常発振の近傍の発振動作が問題となる場合が多い。このとき定常発振のまわりの振巾および位相の時間的に緩慢な変動を扱う解析手段として，摂動法，平均法等の方法がある。通常発振器理論では van der Pol または Duffing 方程式等の数学的モデルが用いられ，その基礎方程式は時間領域において樹てられる。真空管，トランジスタ発振器のような低周波領域では実際に即しているが，マイクロ波領域におけるガンダイオードやIMPATTダイオードのような場合には簡単な等価回路に表し難く，外部から周波数の関数としての発振器アドミタンスが測定される場合が多い。そのような場合に時間領域より樹てられたモデルでは問題が残り，時間領域における等価回路を複雑にすると解析が急激に繁雑となる。

本文は，発振器を非線形要素を含む一つの伝達関数とみなし，定常発振のまわりの非線形性および周波数特性の一次の微係数の範囲内で主として微小外部信号に対する応答を一般的に求めたものである。

微小信号に対する応答は，特定の発振器モデルを仮定することなく行えるので，具体的な問題に適用するには，それに必要な等価定数

を計算または測定するのみでよい。

外部信号によって変調をうけた発振器出力信号は定常な搬送波の上に変調信号が乗っていると考えられる。搬送波と被変調信号とを分離することはAM信号についての謂ゆるBand pass low pass analogyに対応するが、信号の複素表現を行うことによってFM信号をも包含できるように簡潔に一般化することができた。これを非線形要素を含む場合に拡張することによって負性抵抗発振器に対する基本式および簡約方程式を求め、その一次微係数の範囲で同期応答を求めた。それによって外部信号源をイミタンスの形で表現できることを示し、発振器の同期動作をイミタンス平面上に幾何学的に表現し、その原理を用いて非線形発振器の同期応答を図式的に求める方法を述べた。

最後に同期信号の他に微少信号が存在する場合の応答をもとめ、発振器定数との関係を明らかにし、白色雑音に対する応答を簡明な形で表現した。

2. 基礎式

変調信号に対するラプラス変換

まず，角周波数 ω_c の搬送波 $e^{j\omega_c t}$ が変調信号

$$x_m(t) = |x_m(t)|\, e^{j\varphi(t)} \qquad (2.1)$$

によって振巾および位相変調されている場合

$$x(t) = x_m(t) e^{j\omega_c t} = |x_m(t)|\, e^{j\{\omega_c t + \varphi(t)\}} \qquad (2.2)$$

について考える。振巾 $|x_m(t)|$ および位相 $\varphi(t)$ は任意の時間関数とし，複素時間関数 $x_m(t)$ のラプラス変換を

$$X_m(s) = \mathcal{L} x_m(t) = \int_0^\infty x_m(t) e^{-st} dt \qquad (2.3)$$

とおく。* このとき，被変調波 $x(t)$ のラプラス変換は

$$X(s) = \mathcal{L} x(t) = \mathcal{L} x_m(t) e^{j\omega_c t} = X_m(s - j\omega_c) \qquad (2.4)$$

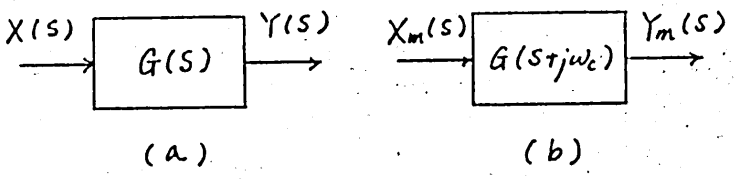
と表わされる。

図1 (a) のように信号 $X(s)$ が伝達関数 $G(s)$ を通過した場合を考えると

出力信号は

$$Y(s) = G(s) X(s)$$

であるが，これに式 (2.4) の関係を代入すると



(a) (b)

図1 被変調信号および変調信号と伝達関数との関係

---

* 通常ラプラス変換において時間関数は実数であるが，ここでは複素数へ拡張する。

$$Y_m(s) = G(s+jw_c)X_m(s) \qquad (2.5)$$

を得る。すなわち ある搬送波 e^{jw_ct} に乗っている変調波成分のみに着目する場合，回路の伝達関数 $G(s)$ を図1(b)に示すように $G(s+jw_c)$ で置きかえればよい事が判る。これはAM変調信号に対する Band pass low pass analagy の関係を一般化したものである。(1)

以上は信号を複素数によって表現したので，数式が簡潔になったのであるが，実際の信号は実数である。したがってそれを求めるには複素信号の実部をとるか，共役複素数との和に

$$\mathrm{Re}\, x(t) = \frac{x(t)+x^*(t)}{2} \qquad (2.6)$$

をとればよい。*

アドミタンスに対する変調信号

式(2.5)の考え方を拡張して負性抵抗発振器に関する基本式を導こう。図2.に示すように，任意のアドミタンス $Y(s)$ に電圧

$$v(t) = V(t)e^{jw_ct} \qquad (2.7)$$

が印加されたとき，流れる電流 $i(t)$ はラプラス変換の形で

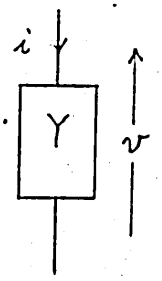


図2. アドミタンス

---

* 共役信号 $x^*(t)$ のラプラス変換は $X_m^*(s+jw_c) = \{X_m(s^*-jw_c)\}^*$ となるので，この信号に対して伝達関数は $G^*(s-jw_c)$ としなければならない。すなわち信号を複素数で表現することは 正負の周波数を区別することを意味する（付録B,C 参照）。

$$\mathcal{L}\, i(t) = Y(s)\,\mathcal{L}\, v(t) \qquad (2.8)$$

と表わされる。* ここに $i(t)$ も式 (2.7) と同じ形に表示する。振巾のラプラス変換を

$$\mathcal{L}\, V(t) = \int_0^\infty V(t) e^{-st}\, dt \quad , \text{ etc} \qquad (2.9)$$

と表わすと，式 (2.8) は

$$\mathcal{L}\, I(t) = Y(s + j\omega_c)\,\mathcal{L}\, V(t) \qquad (2.10)$$

とかける。$Y(s+j\omega_c)$ は $j\omega_c$ のまわりに s のべき級数に展開できるものとすると，式 (2.10) は逆ラプラス変換によって

$$I(t) = Y(j\omega_c + d/dt)\, V(t) \qquad (2.11)$$

とかき直すことができる。

発振器に関する基本式

式 (2.11) は線形なアドミタンス Y に対する複素電圧電流の関係式であるが，これに対して非線形アドミタンスは，それに印加される電圧振巾によって変化すると考えられる。Y が電圧振巾 $|V(t)|$ の関数でもあるとして，

$$I(t) = Y(|V|,\ j\omega_c + d/dt)\ V(t) \qquad (2.12)$$

と拡張定義すれば，発振器のような非線形アドミタンスをもっている一般的な回路に適用できる基本式が得られる。(2) 厳密には回路に非線形素子が存在すると，高周波が発生するので，各高調波について式 (2.11) に相当する式を同時に

---

* 実際の電圧・電流は式 (2.7) の実部で表わされるものとする。

考える必要があるが，ここでは単一正弦波 $e^{jw_c t}$ の振巾および位相変動という概念で近似できる場合を考える。[3]

実際に発振器が用いられる場合，定常な発振状態 (V_0, jw_0) の近傍の振巾および位相（周波数）の変化が問題となることが多い。したがって式(2.11)におけるアドミタンス Y を (V_0, jw_0) のまわりに展開して，一次の項までとると

$$Y(|V|, jw_c + d/dt) = Y(|V_0|, jw_0) + Y_V(\Delta|V| + \delta|V|) + Y_W(j\Delta w + d/dt) \quad (2.13)$$

を得る。ここに Δ および δ はそれぞれ時間的に定常および非定常なずれを表す。また Y_{jw} はアドミタンス Y の λ 変数（複素角周波数 $\lambda + jw$）に関する導関数であるが，Y が正則関数である限りコーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial Y}{\partial(\lambda + jw)} = \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{\partial Y}{\partial jw} \equiv Y_{jw}$$

が成立するので，Y の周波数特性から容易に求められる。したがって発振器の定常状態 (V_0, jw_0) が定まると，そこからの変動に対する振舞は，二個の複素定数 Y_V および Y_{jw} によって記述することができる。変動が大きい場合や，非線形性の大きい系についてはさらに高次の項まで考慮する必要があると思われるが実際問題として式(2.13)で充分な場合が多い。

非線形発振器の代表的な例として Van der Pol および Duffing 発振器がある。これらと上の二つの複素定数との関係は付録 A に述べる。

3. 発振器の動作特性

図3に示す如く，発振器アドミタンス Y_0 に信号電流源 I および外部アドミタンス Y_e が接続されている回路を考える。

そして

$$Y = Y_e + Y_a \quad (3.1)$$

とおくと，電圧Vおよび電流Iに関して式(2.12)が成立する。

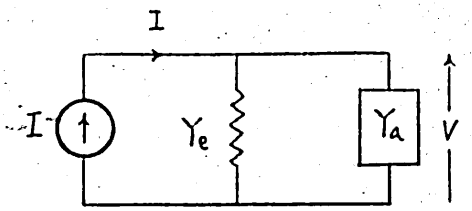


図3 発振器と外部回路との結合

自由発振状態

負性抵抗アドミタンスY_aに負荷コンダクタンス$Y_e = G_0$のみが接続されている場合，式(2.11)で$I=0$とおくと$Y=0$となる。このとき，式(3.1)より，$Y_a = -G_0$となるが，これは発振器アドミタンスY_aが$-G_0$に等しくなる電圧Vで自由発振していることを意味する。あるいは式(2.12)において定常状態($d/dt = 0$)に達し，$V = V_0$，$\omega_c = \omega_0$となった場合を考えると

$$Y(|V|, j\omega_c + d/dt) = Y(|V_0|, j\omega_0) = 0 \quad (3.2)$$

を得る。すなわち式(2.13)は自由発振状態のまわりに発振器アドミタンスをテーラー展開したものであり，その発振電圧振巾V_0および発振角周波数ω_0は式(3.2)を解くことによって得られる(付録A参照)。

同期特性

外部電流信号源を$I = I_s$とすると，式(2.11)または(2.12)より

$$I_S = \{Y(|V_0|, j\omega_0) + Y_V(\Delta|V| + \delta|V|) + Y_{j\omega}(j\Delta\omega + d/dt)\}(V_0 + \Delta V + \delta V)$$

$$= \{Y(|V_S|, j\omega_S) + Y_V \delta|V| + Y_{j\omega} d/dt\}(V_S + \delta V) \qquad (3.3)$$

を得る。ここに

$$V = V_0 + \Delta V + \delta V = V_S + \delta V, \quad \omega_S = \omega_0 + \Delta\omega$$

$$Y_S(|V_S|, j\omega_S) = Y(|V_0|, j\omega_0) + Y_V \Delta|V| + Y_{j\omega} j\Delta\omega \qquad (3.4)$$

である。式(3.2)に注意し、上式をVで除し、二次以上の微小項を省略し、

$$V = |V| e^{j\phi}, \quad Y_S = \frac{I_S}{V_S} = \frac{|I_S| e^{j\psi_S}}{|V_S| e^{j\phi_S}} \qquad (3.5)$$

とおけば

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{|V|}\frac{d|V|}{dt} + j\frac{d\phi}{dt} = \frac{Y_S(1 - \delta V/V_S) - Y_V(\Delta|V| + \delta|V|) - Y_{j\omega} \cdot j\Delta\omega}{Y_{j\omega}} \qquad (3.6)$$

が得られる。この式を実部および虚部に分離すると、発振器の振巾および位相の挙動を記述する所謂簡約方程式が与えられる。したがって式(3.6)はそれを複素表示にまとめた簡約方程式ということができる。* この式を用いて、発振器に外部信号が作用する場合の状態を一般的に記述することができるが；まず、一定の(正弦波)外部信号を加え、定常状態に達した場合を考える。

よって式(3.4)および(3.6)において $d/dt = 0$, $\delta = 0$ とおくと

$$Y_S = Y(|V_S|, j\omega_S) = Y_V \Delta|V| + Y_\omega \Delta\omega \qquad (3.7)$$

を得る。

式(3.7)にその複素共役式を乗ずると

$$(|Y_V| \Delta|V|)^2 + (|Y_\omega| \Delta\omega)^2 + 2|Y_V| \Delta|V| \cdot |Y_\omega| \Delta\omega \cos(\theta_\omega - \theta_r)$$

$$= |Y_S|^2 \qquad (3.8)$$

---

* 本文の簡約方程式と平均法によって求めたものとの関係は文献(4)に説明されている。

ここに $\theta_w - \theta_v$ は Y_w と Y_v とのなす角である。この式より信号源の角周波数 $\Delta w = w_s - w_0$ に対する同期発振中 $\Delta|V| = |V_s| - |V_0|$ の応答曲線が図4のように得られる。Y_w と Y_v が垂直 ($\theta_v - \theta_w = \pi/2$; Y_v と Y_{jw} が平行) である場合は応答曲線は完全な円となる。

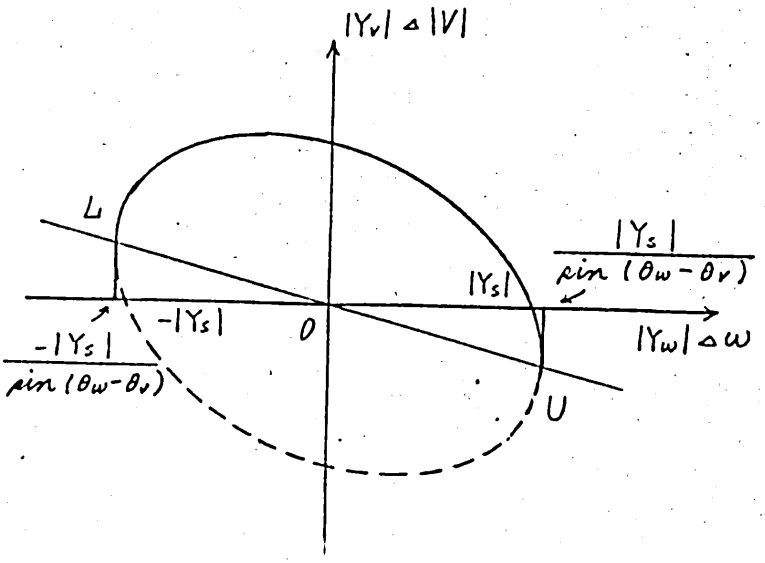


図4 同期応答曲線
$0 < \theta_w - \theta_v < \pi/2$ の場合

同期安定領域

次に同期の安定条件を求める。式(3.3)において式(3.7)の関係を用いると

$$0 = (Y_v \delta|V| + Y_{jw} d\delta/dt)(V_s + \delta V) + Y_s \delta V$$

を得るが、δ の高次の微小項を省略すると

$$(Y_v|V_s| + Y_s + Y_{jw} d\delta/dt)\delta|V|/|V_s| + (Y_s + Y_{jw} d\delta/dt) j\delta\phi = 0 \qquad (3.9)$$

とかける。上式に $-j(Y_v|V_s| + Y_s + Y_{jw} d\delta/dt)^*$ または $(Y_s + Y_{jw} d\delta/dt)^*$ を乗じてその実部をとると $\delta\phi$ または $\delta|V|$ に関する2階の微分方程式

$$\mathrm{Re}(Y_v|V_s| + Y_s + Y_{jw} d\delta/dt)^* (Y_s + Y_{jw} d\delta/dt) = 0$$

が得られる。

$\mathrm{Re}A^*B = A\circ B$ なる内積記号 $\circ$ を用いると*, 上式は

$$(Y_{jw})^2(d/dt)^2 + Y_{jw}\circ(Y_v|V_s| + 2Y_s)\,d/dt + (Y_v|V_s| + Y_s)\circ Y_s = 0 \qquad (3.10)$$

と書くことができる. したがって変動 δ が時間的に減少するためには安定条件

$$Y_{jw}\circ(Y_v|V_s| + 2Y_s) > 0 \qquad (3.11)$$

$$(Y_v|V_s| + Y_s)\circ Y_s > 0 \qquad (3.12)$$

が成立する必要がある. 今, 外部信号 I_s が小さい場合 ($|Y_v||V_s| \gg |Y_s|$) を考えると, 式 (3.11) は $Y_{jw}\circ Y_v > 0$ となる. 換言すれば ベクトル Y_{jw} および Y_v の交角は鋭角でなければならない. あるいは Y_w および Y_v の方向をそれぞれ θ_w, θ_r とすると**

$$0 < \theta_w - \theta_r < \pi \qquad (3\cdot11)'$$

とも表現できる.

また, 後の条件 (3.12) は $Y_v\circ Y_s > 0$ となり, これに式 (3.7) を用いると

$$|Y_v|\Delta|V| > -\cos(\theta_w - \theta_v)|Y_w|\Delta w \qquad (3\cdot12)'$$

が得られる. これは図4において原点 O を通り勾配 $-\cos(\theta_w - \theta_v)$ なる直線の上側を表す. この安定限界直線は同期応答曲線と $|Y_w|\Delta w = \pm|Y_s|/\sin(\theta_w - \theta_v)$ において交り, この交点における応答曲

---

* 複素数の計算において $\mathrm{Re}A^*B$ なる形がよく表れる. 例えば A を電圧 V, B を電流 I とすれば実効電力は $\mathrm{Re}V^*I$ である. 複素ベクトル A, B を形式的に空間ベクトルとみなすとこの値は内積 $A\cdot B$ に等しい. よって $\mathrm{Re}A^*B = A\circ B$ と表現すれば, 数式が直感的に分かり易くなるのみではなく, 演算に関して配分の法則が成立し, 以下に示す如く一般的な計算が容易になる. 因みに, $\mathrm{Im}\,A^*B$ は $A\times B$ に対応している.

** $Y_w(=jY_{jw})$ は Y_{jw} より $90°$ 位相が進んでいることに注意.

線の勾配は無限大である。したがって式(3.11)が成立している発振器において、$|I_s|$なる微小外部信号を注入した場合の同期範囲は

$$|\Delta w| < \frac{|Y_s|}{|Y_w| \sin(\theta_w - \theta_v)} \qquad (3.13)$$

となる。また、同期の良さ (Locking figure of merit)

$$\eta = \frac{2|\Delta w|_{max}}{w_0} \sqrt{\frac{P_{out}}{P_{in}}}$$

が用いられることがあるが、マイクロ波においてサーキュレーターを用いた同期発振回路を想定して

$$P_{in} = |I_s|^2 / 4G_0, \quad P_{out} = |V_s|^2 G_0$$

とおけば

$$\eta = \frac{4G_0}{w_0 |Y_w| \sin(\theta_w - \theta_v)} \qquad (3.14)$$

を得る。

同期発振器動作の図式表示

以上の数式表現を用いると発振器の同期状態を直感的に理解しやすいグラフに表示することができる。図5(a)に示すように複素アドミタンス平面上にベクトル$Y_v \Delta|V|$および$Y_w \Delta w$を描くとき、それらの合成ベクトルは式(3.7)によってY_sに等しい。

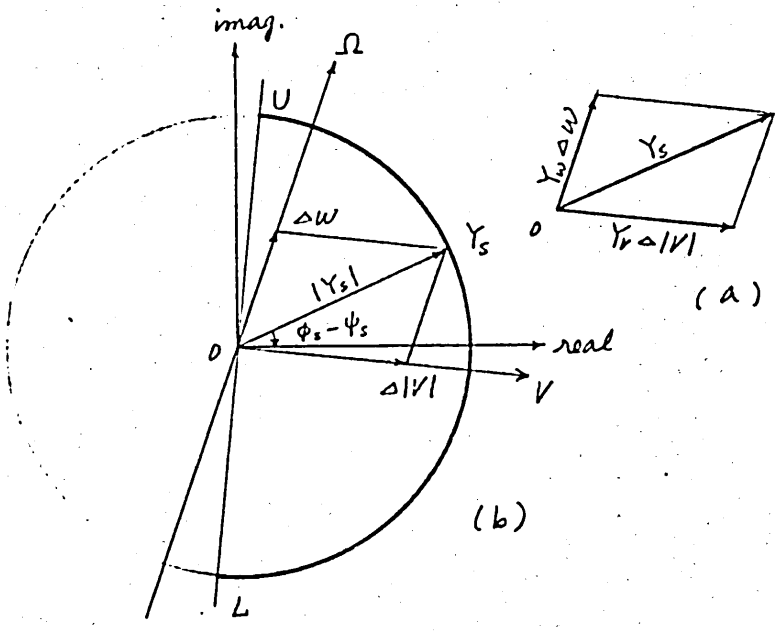


図5 小信号同期動作図

原点は $Y(|V_0|, \omega_0)=0$ すなわち自由振動状態の発振器系のアドミタンスを表し，点 $Y_s = Y(|V_s|, \omega_s)$ は同期発振している場合の発振器系のアドミタンスを示す。

図5(6)のように，

したがって，ベクトル $Y_w \Delta\omega$ および $Y_v \Delta|V|$ に沿って Ω-V 斜交軸をとり，それぞれ $\Delta\omega$, $\Delta|V|$ なる目盛を付ると，次のようにして ω_s, $|I_s|$ なる信号を注入した場合の発振器振巾及び位相応答が求められる。原点 O を中心として半径 $|Y_s| \approx |I_s/V_0|$* なる円を描き，Ω 軸上 $\Delta\omega = \omega_s - \omega_0$ なる点より，V 軸に平行な直線との交点を求めると，同期状態アドミタンス Y_s が決定される。この交点を通り Ω 軸に平行な直線と V 軸との交点の目盛を読めば，それが応答振巾を与える。また Y_s の位相は式(3.5)より $\psi - \phi_s$ であるから，Y_s を基準として実軸のなす角は，信号源の位相に対する同期発振電圧の位相 $\psi - \phi_s$ を示している。次に安定条件について考えると，第一の条件(3.11)′は V 軸が Ω 軸に対して右を向くべきことを意味する。第二の条件(3.12)′は Y_s と Y_v が鋭角をなすこと($Y_s \cdot Y_v > 0$)であるから，$|I_s|$ すなわち $|Y_s|$ を一定にして ω_s をかえたときの同期範囲は，V 軸方向に対称な太線の円周上 $\angle$～$\cup$ の区間である。なお，このベクトル図における Ω-V 斜交座標を直交座標に直したものが，図4の同期応答曲線であることは今や明らかであろう。

同期発振器の一般的図式解法

以上の考察は，入力信号が小さく，自由発振のまわりに準線形とみなされる場合であるが，テイラー展開しない元の式に戻って同様なアドミタンスベクトル図を描くと非線形同期発振器の完全な図式解法が与えられる。図6のアドミタンス平面上において，発振振巾 $|V|$ が一定値 $|V_0|$ で，発振角周波数 ω のみ変化させた場合の発振器アドミタンス軌跡 $Y(|V_0|, j\omega)$ を描くと，図5における Ω 軸

---

* $V_s \approx V_0$

に相当するものが得られる。また$|V|$のみをかえて$Y(|V|, j\omega_0)$を描くとV軸に相当するものがえられる。次にω_s, $|I_s|$なる信号を注入したときの発振器の応答を求める方法を述べよう。$|V_s|$の値を適当に仮定し，ωをかえて$Y(|V_s|; j\omega)$の軌跡を描き，原点Oに中心を有する半径
$|I_s/V_s| = |Y_s|$の円
との交点Y_sは，この場合にも式(3.7)の前半の式

$$Y_s = Y(|V_s|, j\omega_s)$$

を満足しているので，その点から軌跡$Y(|V_s|, j\omega)$上のパラメーターとしてのω_sが求められる。他の$|V_s|$を仮定して上と同様の操作を順次行えば，$|V_s|$とω_sの関係すなわち：応答曲線が得られる。

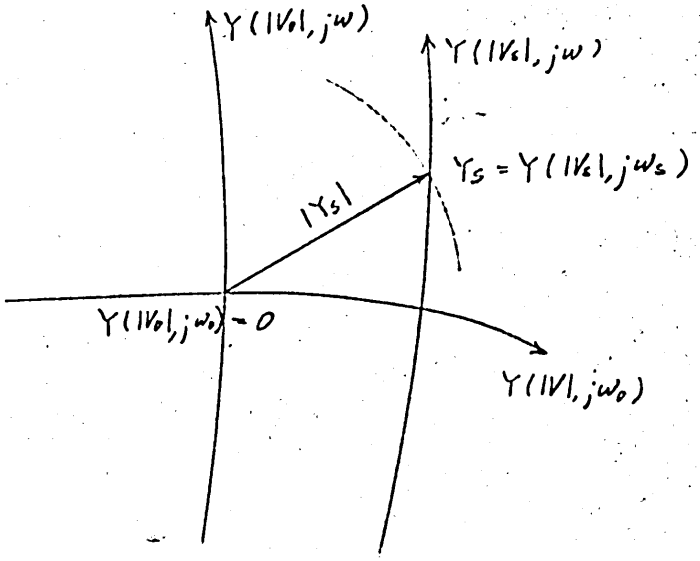


図6 非線形周期発振器の図式解法

また，Y_sの点において式(3.11)，(3.12)を適用すれば安定判別が行える。

4. 微小変調信号に対する発振器の応答

一般的考察

図3において外部同期信号源I_sの他に微小変調信号$I_m(t)$がある場合を考える。式(3.3)においてI_sの代りに$I_s + I_m(t)$とおき，両辺をV_sで割り $I_s/V_s = Y_s = Y(|V_s|, j\omega_s)$なる

ことに注意すると

$$Y_m = Y_s \frac{\delta V}{V_s} + Y_v \delta|V| + Y_{jw} \frac{1}{V_s} \frac{dV}{dt} \quad . \qquad (4.1)$$

を得る。ここに

$$Y_m(t) = I_m(t)/V_s = |I_m(t)| e^{j\phi_m(t)}/V_s \qquad (4.2)$$

であり，δ の二次の微小項は省略した。同様な省略により

$$\frac{dV}{dt} = V\left(\frac{1}{|V|}\frac{d|V|}{dt} + j\frac{d\phi}{dt}\right) \approx V_s \frac{d}{dt}(\delta \log|V| + j\delta\phi)$$

とかけることに注意して，式(4.1)を整理すると

$$(Y_v|V_s| + Y_s + Y_{jw}d/dt)\delta\log|V| + j(Y_s + Y_{jw}d/dt)\delta\phi = Y_m \qquad (4.3)$$

を得る。これは微小変調信号 $I_m(t) = Y_m(t)V_s$ がある場合に発振器応答 $\delta\log|V| = \delta|V|/|V_s|$, $\delta\phi$ を求めるための基本式である。上式は一定の同期信号 $I_s = Y_s V_s$ がある場合について求めたものであるが，同期信号のない場合は $Y_s = 0$, $V_s = V_0$ etc. とすればよい。また，外部信号は定電流源の形で与えられているが（電圧源でもよいことは勿論である）

$I_m(t)$ は時間的に変動する微小信号源であるが，それを V_s で除した $Y_m(t)$ はそのアドミタンス表示であり，$I_m(t)$ なる微小信号源の代りに $Y_m(t)$ なる（時間的に変動する）微小アドミタンス $Y_m(t)$ を実際に発振回路へ挿入しても効果は同様である。$I_m(t)$ が雑音源であれば，$Y_m(t)$ はそのアドミタンス表示である。従来，雑音の表示として電源表示とインピタンス表示が夫々独立になされて来たが両者は上述の如く関連していることが認識される。

さて，$Y_m(t)$ に対する発振器の応答を求めるために，式(4.1)を実部と虚部に分けてフーリエ変換すれば*

---

* 雑音に対しては通常そのフーリエ変換は存在しないが，その場合は付録B参照。

$$\left.\begin{aligned}(G_v|V_s|+G_s+j\omega G_{jw})\delta\log|V|(j\omega)-(B_s+j\omega B_{jw})\delta\phi(j\omega)&=G_m(j\omega)\\(B_v|V_s|+B_s+j\omega B_{jw})\delta\log|V|(j\omega)+(G_s+j\omega G_{jw})\delta\phi(j\omega)&=B_m(j\omega)\end{aligned}\right\}\quad(4.4)$$

或は

$$\begin{bmatrix}G_v|V_s|+G_s+j\omega G_{jw} & -(B_s+j\omega B_{jw})\\ B_v|V_s|+B_s+j\omega B_{jw} & (G_s+j\omega G_{jw})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\log|V|(j\omega)\\ \delta\phi(j\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_m(j\omega)\\ B_m(j\omega)\end{bmatrix}\quad(4.5)$$

したがって発振器振巾および位相応答は

$$\begin{bmatrix}\delta\log|V|(j\omega)\\ \delta\phi(j\omega)\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta et}\begin{bmatrix}G_s+j\omega G_{jw} & B_s+j\omega B_{jw}\\ -(B_v|V_s|+B_s+j\omega B_{jw}) & G_v|V_s|+G_s+j\omega G_{jw}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_m(j\omega)\\ B_m(j\omega)\end{bmatrix}\quad(4.6)$$

ここに

$$\Delta et=-\omega^2|Y_{jw}|^2+j\omega\cdot Y_{jw}\circ(Y_v|V_s|+2Y_s)+(Y_v|V_s|+Y_s)\circ Y_s\quad(4.7)$$

であり，式(3.10)の右辺で d/dt の代りに $j\omega$ と書いたものに等しい。
式(4.6)の逆フーリエ変換を求めれば，振巾および位相の時間応答が求まる。
Y_m の実部 G_m は発振回路のコンダクタンス分の変化を意味するので，AM源を表し，虚部 B_m は PM源を表すことに注意すれば，上のマトリクスの各成分は夫々

$$AM\rightarrow AM,\qquad PM\rightarrow AM$$
$$AM\rightarrow PM,\qquad PM\rightarrow PM$$

なる変換の大きさを指示していることが判る。一例として van der Pol 形発振器（Y_v, Y_{jw} 共に実数）で自由振動状態（$Y_s=0$）または自由振動周波数に等しい周波数で同期させている場合（Y_s が実数）は AM−PM 相互変換は行なわれないことを知る（図5(6)参照）。

白色雑音に対する応答

次に発振周波数のまわりに一様な雑音に対する応答を求める。$Y_m(t)$を雑音$Y_n(t)$でおきかえ,

$$\overline{G_n(t)^2} = \overline{B_n(t)^2}, \qquad \overline{G_n(t)B_n(t)} = 0 \tag{4.8}$$

とすると

$$\overline{|Y_n(t)|^2} = \overline{G_n(t)^2} + \overline{B_n(t)^2} = 2\overline{G_n(t)^2} = 2\overline{B_n(t)^2} \tag{4.9}$$

となる。附録B述べられている如く，測定時間T_mを適当に定めると応答のスペクトラムは*

$$\frac{|\mathrm{let}\ \delta \log|V|(jw)|^2}{T_m} = (|Y_s|^2 + w^2|Y_{jw}|^2)\frac{|Y_n(jw)|^2}{2T_m} \tag{4.10}$$

$$\frac{|\mathrm{let}\ \delta\phi(jw)|^2}{T_m} = (|Y_v|V_s| + Y_s|^2 + w^2|Y_{jw}|^2)\frac{|Y_n(jw)|^2}{2T_m} \tag{4.11}$$

相関電力スペクトルとして

$$|\mathrm{let}|^2\{-j\delta\log|V|(jw)\delta\phi(jw)^* + j\delta\log|V|(jw)^*\delta\phi(jw)\}/T_m$$
$$= 2w\cdot Y_{w0}(Y_v|V_s| + 2Y_s)\cdot\frac{|Y_n(jw)|^2}{2T_m} \tag{4.12}$$

を得る。** 従って全雑音電力のスペクトラムは式(4.10)～(4.12)の和として

---

* フーリエ変換は関数のargumentをjwにかえて表現することとする。

** $|\delta\log V|^2 = |\delta\log|V| + j\delta\phi|^2$

$$= |\delta\log|V||^2 + |\delta\phi|^2 - j\delta\log|V|\delta\phi^* + j\delta\log|V|^*\delta\phi$$

$$\frac{|\delta \log V(jw)|^2}{Tm} = \frac{|Ys+jwYjw|^2+|Yv|Vs|+Ys+jwYjw|^2}{|(Ys+sYjw)\cdot(Yv|Vs|+Ys+sYjw)|^2} \cdot \frac{|Yn(jw)|^2}{2Tm} \qquad (4\cdot13)$$

のようにまとめて表すことができる。ここで分母のsは実数として内積演算を行い，その後 $s=jw$ とおくことを意味する。発振器の雑音は出力電力に比してはるかに小さいので，非線形性は一次の項 Yv まで考慮すれば充分であり，その範囲において式(4·10)～(4·13)は最も一般的かつ厳密に求められた雑音応答である。また $\delta \log V = \delta.V/V = \delta|V|/|V| + j\phi$ とかけるので，このようにして求めた式(4·10)～(4·13)は N/C 比そのものを与えている。これからFM雑音の場合，周波数偏移による表現と N/C 比表現との関係は直ちに明らかである。(7)

式(4·10)～(4·13)は雑音成分のみであるが，発振器出力は式(3.4)より $Vs+\delta V(t) \approx Vs\{1+\delta \log V(t)\}$ であるから，そのスペクトラム表示は，式(C5)を用いて

$$\frac{|V(jw)|^2}{Tm} = |Vs|^2\delta(f) + \frac{|\delta V(jw)|^2}{Tm} \qquad (4\cdot14)^*$$

となり，搬送波をも含めた発振出力電圧 $V(t)e^{jwct}$ のパワースペクトラムは式(C2)によって

$$S(f) = |Vs|^2\delta(f-fc) + \frac{|\delta V(jw-jwc)|^2}{Tm} \qquad (4\cdot15)$$

とかける。第一項は同期信号によって位相の固定された搬送波を，第二項は全雑音を表す。

同期信号がない場合，第一項の搬送波スペクトラムは雑音によって拡がり付録Bで導出するごとく，$|Vs|^2\delta(f-fc)$ の代りに，マルコフのスペクトラム

---

* $\delta(t)$ はデラック関数を表す。

$$|V_0|^2 \frac{2w_n}{(w-w_c)^2+w_n^2}$$

が現われる。ここに

$$w_n = |Y_n|^2/2T_m|Y_{jw}|^2\cos^2(\theta_{jw}-\theta_r)$$

である。雑音が小さくなる($w_n \to 0$)に従ってこの項は$|V_0|^2\delta(f-f_c)$に近づく。また第二項雑音スペクトラムは式(4·15)で$Y_s=0$とおいたものに等しい。

以上求めた結果の意味を二つの場合について考察しよう。まず，低い雑音周波数成分について考えるために，式(4·10)～(4·12)において$w=0$とおくと，AM雑音，FM雑音について

$$|\delta \log|V|(jw=0)|^2 = \frac{|Y_n|^2/2}{|Y_rV_s|^2\cos^2(\theta_r-\psi_s)+|Y_s|^2}$$

$$|\delta\phi(jw=0)|^2 = \frac{|Y_n|^2/2}{|Y_s|^2\cos^2(\theta_r-\psi_s)}$$

となり，相互相関電力は零となる．PM雑音はすでに知られている如く同期信号の大きさ（詳しくは，図5(b)においてYsのYrへの正射影の長さの二乗）に反比例して減少する。AM雑音については同期信号$|Y_s|^2$が小さいとき，その影響をうけないが，同期信号が大きくなるとAM雑音も小さくなり得ることを示している。

次に高い雑音周波数について

$$|\delta \log|V|(jw\to\infty)|^2 = \frac{1}{w^2|Y_{jw}|^2}\cdot\frac{|Y_n|^2}{2}$$

$$|\delta\phi(jw\to\infty)|^2 = \frac{1}{w^2|Y_{jw}|^2}\cdot\frac{|Y_n|^2}{2}$$

$$\text{相互相関雑音電力} = \frac{2\{|Y_rV_s|\sin(\theta_r-\theta_{jw})+2|Y_s|\sin(\psi_s-\phi_s-\theta_{jw})\}}{w^3|Y_{jw}|^3}\cdot\frac{|Y_n|^2}{2}$$

を得る．AM雑音，PM雑音共に同期信号と関係が少なくなり，同

じ大きさ(N/c比)になることがわかる。周波数が高くなるに従って20db/decで雑音が減少する傾向は多くの測定結果とも合致している。また，発振器およびその動作状態によってAM，PM雑音の相関が生ずるが，その事情はすでに式(4.5)より明らかである。

5. あとがき

負性抵抗発振器の外部信号に対する応答を求める簡潔な数式表現および図式表現を示し，発振器定数との関係を明らかにした。最近，発振器雑音に関する研究は多いが，通常，雑音は出力信号に比してはるかに小さいので，雑音応答に関しては一次微係数の範囲で充分であろう。雑音に関しては通常なされているように発振周波数のまわりに白色な雑音を仮定したが，従来特殊な場合について得られている多くの結果の統一的な理解が容易となった。しかし，ガンまたはIMPATTダイオードのように白色雑音の仮定が成立しない(AM雑音よりFM雑音が大きい)場合が多いと思われるが，そのような発振器に対しては，さらに雑音源の性質およびその機構が今後の問題となろう。(8)

なお，本論においては，一貫して信号の複素表示を用いたが，これは単に表現の簡約化のみにあるのではなく，正負の周波数を区別することにより，搬送周波数のまわりに非対称なスペクトラムをもつ信号波に対しても一般的な取扱いができることにある。信号を実数で表現すると，正負の周波数が区別できないので，そのスペクトラムは原点に関して対称となるが，実数表現のままで，Band pass low pass analogyを適用すると上側帯波と下側帯波が混合される(折り重なる)。したがってこのanalogyは対称な両側帯波をもつAM波に対してのみ考えられていたのであるが，複素表現によって非対称なスペクトラムを有する場合に拡張することができたのである。また変調信号のスペクトラムは搬送周波数より高いものを含むとは考えられないが，実数計算の場合はそのような不要な項が表われる。

文献

(1) P. R. Aigrain, B. R. Teare Jr. and E. M. Williams; "Generalized Theory of the Band-Pass Low-Pass Analogy", Proc. IRE., 37, 10, PP.1152-1155. Oct 1949.

(2) 池上, 中島; "マイクロ波回休発振器の同期現象とその応用", 信学誌, 54, 5, PP.693～699, (昭46-5)

(3) 三好, 中島, 池上; "逓倍同期に関する考察", 信学会研資 MW (1971-11-30予定)

(4) 池上, 中島; "マイクロ波回休素子の電力合成と雑音低減", TV学会誌, 24, 12. P939～949 (昭45-12)

(5) R. L. Stratonovich; "Topics in the Random Noise", Translated from the Russian by Richard A. Silverman, Gordon and Breach, 1967.

(6) 白井, "雑音の加わった非線形系の解析", 信学会研資 (1971-8-14)

(7) John. G. Ondria, "A Microwave System for Measurements of AM and FM Noise Spectra", IEEE Trans. MTT-16, 9, P767-781 (1968)

(8) 橋口, 大越, "ガン発振器雑音の等価雑音源定数の決定 ——AM-FM相互変換の影響の補正", 信学論, 54-B 9. P601-2 (昭46-09)

(9) 斉藤，高木，真野，"ランダム雑音に対する同期引込み発振器の応答，"信学論，51-A，1，p16-23 (昭43-01)

(10) D. Middleton, "Some general results in the theory of noise through nonlinear devices," Quarterly of Applied Mathematics, 5, 4, p.445, (1948)

(11) K. Kurokawa, "Noise in synchronized oscillators", IEEE Trans., MTT-16, 4, p. 234, aug. 1960.

付録

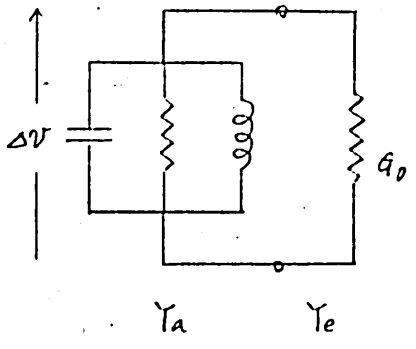
A. Van der Pol-Duffing Oscillator について

一例として，Van der Pol-Duffing 形発振器について考える。Van der Pol形の場合は図A1において

$$\Delta i_G = -G_1 \Delta v + G_3 (\Delta v)^3 \qquad (A1)$$

なるコンダクタンス分(G)の電圧依存性(バイアスは除く)をもち，Duffing形の場合は

$$\frac{d\Delta i_L}{dt} = \frac{1}{L_1}\Delta v + \frac{1}{L_3}(\Delta v)^3 \qquad (A2)$$



図A Van der Pol-Duffing 発振器

なるサセプタンス分(1/L)の電圧依存性をもつものとして代表させ得る。

図Aの発振器両端の電圧差を正弦波

$$\Delta v = \frac{V e^{jwt} + V^* e^{-jwt}}{2} \qquad (A3)$$

であると仮定し，電流 Δi についても同様に仮定する。これらを式(A1)に代入し，e^{jw} の係数を比較すると

$$\frac{I_G}{2} = -G_1 \frac{V}{2} + 3G_3 \left|\frac{V}{2}\right|^2 \frac{V}{2}$$

を得る。また式(A2)より

$$jw \frac{I_L}{2} = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{V}{2} + \frac{1}{L_3} \cdot \left|\frac{V}{2}\right|^2 \cdot \frac{V}{2}$$

容量Cに流れる電流は $I_C = jwCV$ であるから，発振器のアドミタンスYは $YV = I_C + I_G + I_L + G_0 V$ なる関係より

$$Y = G_0 - G_1 + \frac{3G_3}{4}|V|^2 + jwC + \frac{1}{jwL_1} + \frac{3}{j4wL_3}|V|^2 \qquad (A4)$$

とかける。

自由発振状態の電圧振巾および周波数は $Y=0$ とおくことによって

$$|V_0|^2=\frac{4(G_1-G_0)}{3G_3}, \qquad \omega_0^2=\frac{1}{L_1C}\left\{1+\frac{L_1(G_1-G_0)}{L_3G_3}\right\} \tag{A5}$$

と求まる。

式(A4)を微分することにより

$$\left.\begin{aligned} Y_{|V|}&=\frac{3}{2}|V_0|\left(G_3+\frac{1}{j\omega L_3}\right)\\ Y_{j\omega}&=C\left(1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\approx 2C \end{aligned}\right\} \tag{A6}$$

を得る。尚 式(A4)より振巾については $|V|^2$ の関数となっているのでそのような場合は

$$Y_{|V|^2}=(3/4)\left(G_3+1/j\omega L_3\right)$$

を考えた方がよい。

B. 電力スペクトラムの計算について

ある時間関数が与えられたとき その電力スペクトラムを求めるには，その自己相関関数を求め．それをフーリエ変換するのが普通である。しかしその計算はやや面倒であり，工学上の問題では数学的な厳密性が要求されず，またそのような仮定が成立しない場合も多いので，その場合は次のような考え方が成立し，計算の見通しもよくなる。

記述を一般的にするため．与えられた時間関数を複素数 $x(t)$, $y(t)$ とし，その相互相関スペクトラムを求めることにする。$x(t)\equiv y(t)$ の場合は自己相関関数ないし電力スペクトラムを与える。$x(t)$ が周期関数のように そのフーリエ変換が存在する場合は以下の方法は(近似ではなく)厳密になるが，ここでは白色雑音のように $x(t)$ の

フーリエ変換が存在しない場合を考える。工学上の問題では時間変数は時間的に無限に続くことはないので，測定の時間T_mの間のみ$x(t)$および$y(t)$が連続すると仮定してよい。それ以外の時間では，周期T_mの関数であると仮定すると，$x(t)$, $y(t)$のフーリエ変換は常に存在する。その意味における$x(t)$, $y(t)$のフーリエ変換を$X(j\omega)$, $Y(j\omega)$とすると，相互相関々数は次のように計算される。すなわち，

$$R_{xy}(T)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,y^*(t-\tau)\,dt$$

$$=\frac{1}{T_m}\int_{-T_m/2}^{T_m/2}dt\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}df\int_{-\infty}^{\infty}Y^*(j\omega')e^{j\omega'(t-\tau)}df',\ ^*$$

$$\approx\frac{1}{T_m}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\{Y(j\omega)\}^*e^{j\omega\tau}df \qquad (B1)$$

ここに$f=\omega/2\pi$であり，T_mが大きいものとして

$$\int_{-T_m/2}^{T_m/2}e^{j(\omega-\omega')t}dt\ \approx\delta(f-f') \qquad (B2)$$

と近似した。従ってパワースペクトラムは

$$S_{xy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(T)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{T_m}X(j\omega)\{Y(j\omega)\}^* \qquad (B3)$$

となる。すなわち時間関数のフーリエ変換の積に比例するものとしてパワースペクトラムが直ちに求められ，フーリエ変換の存在しない時間関数についても適当に長い測定時間T_mを定めることによって上式のように表現できることがわかる。なお近似の程度は式(B2)にかかっているが，工学的にはこれ以上精密に計算

---

* $Y^*(j\omega)$は$y^*(t)$のフーリエ変換を表す。$\{Y^*(j\omega)\}^*=Y(-j\omega)$に注意

するのは無意味である。

C 変調波スペクトラムと被変調波スペクトラム

変調波 $x_m(t)$ (複素数)の電力スペクトラムを $S_m(f)$ とするとき，被変調波 $x(t)=x_m(t)e^{j\omega_c t}$ の電力スペクトラム $S(f)$ を求める。先づ $x(t)$ の自己相関々数 $R(\tau)$ は

$$\left.\begin{aligned} R(\tau)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x^*(t-\tau)dt=R_m(\tau)e^{j\omega_c\tau}\\ R_m(\tau)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_m(t)x_m^*(t-\tau)d\tau \end{aligned}\right\}\quad (C1)$$

と表わされるので，$x_m(t)$ と $e^{j\omega_c t}$ が無相関であるとすれば

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau=S_m(f-f_c)\qquad (C2)$$

が得られる。すなわち，時間関数をすべて複素表示すると，被変調波の電力スペクトラムは複素振巾のスペクトラムを搬送周波数 f_c だけ移動させればよく，これは本文の一般化した Band Pass Low Pass Analogy に対応している。そして実数表示した場合に生じて来る不要な項 $S_m(f+f_c)$ は表れず，表現が簡潔となる。*

次に変調信号 $x_m(t)$ がある一定値 x_{ms} とそのまわりに変動する $x_{mt}(t)$ との和

$$x_m(t)=x_{ms}+x_{mt}(t)\qquad (C3)$$

---

* 変調波 $x_m(t)$ の変動は f_c に比してゆるやかであると仮定されているので，S_m の argument は f_c よりはるかに小さい。

で表現される場合について考える。自己相関係数は

$$R_m(\tau) = |x_{ms}|^2 + R_{mt}(\tau) \qquad (C4)$$

となるので（$R_{mt}(\tau)$は$x_{mt}(t)$の自己相関係数），パワースペクトラムは

$$S_m(f) = |x_{ms}|^2 \delta(f) + S_{mt}(f) \qquad (C5)$$

とかける。

D 自由振動発振器の雑音スペクトラム

自由振動の場合の基本式は，式(4·1)において，$Y_s = 0$, etc. とおくことによって得られ，

$$(Y_v|V_0| + Y_j \omega d/dt)\,\delta\log|V| + j\,Y_j \omega\, d\phi/dt = Y_n \qquad (D1)^*$$

とかける。以下式(4·13)まで全く同様であるが，同期信号がない場合は出力電圧の位相は確定しないので，

$$V(t) = |V(t)|\,e^{j\phi(t)} = (|V_0| + \delta|V|)\,e^{j\phi(t)}$$

$$= |V_0|\,e^{j\phi(t)} + \delta|V|\,e^{j\phi(t)} \qquad (D2)$$

なる表現を用いなければならない。第二項は式(4·13)で$Y_s = 0$としたものに対応するので，第一項に対するスペクトラム応答を求める。位相$\cdot\phi(t)$のスペクトラムは，式(4·10)で$Y_s = 0$とおくことにより*

$$\frac{|\Phi(j\omega)|^2}{T_m} = \frac{|Y_v V_0|^2 + \omega^2 |Y_j \omega|^2}{|Y_v V_0|^2 \cos^2(\theta_{j\omega} - \theta_v) + \omega^2 |Y_j \omega|^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 |Y_j \omega|^2} \cdot \frac{|Y_n|^2}{T_m} \qquad (D3)$$

となる。したがって位相$\phi(t)$の自己相関係数$R_\phi(\tau)$は

---

* 自由振動の場は$\delta\phi$の代りにϕそのものを考える。

$$R_\phi(\tau) - R_\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi(jw)|^2}{Tm} (e^{jw\tau} - 1)\, df$$

$$= -w_n|\tau| \left\{ 1 - \sin(\theta_{jw} - \theta_V) \frac{1 - e^{-w_V|\tau|}}{w_V|\tau|} \right\} \quad (D4)$$

$$w_V = |Y_V V_0| \cos(\theta_{jw} - \theta_V) / |Y_{jw}|$$

と表わされる. 通常の発振器では Y_V と Y_{jw} は平行に近く, 低周波の雑音スペクトラム ($|\tau|$ が大きい) を求めることになれば, 上式の括弧内オ二項は無視できる。また位相因子 $e^{j\phi(t)}$ の自己相関係数は $\exp\{R_\phi(\tau) - R_\phi(0)\}$ と表わされるので,[9][10] $|V_0| e^{j\phi(t)}$ のスペクトラム表示は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V_0|^2 e^{\{R_\phi(\tau) - R_\phi(0)\}} e^{-jw\tau} d\tau$$

$$= \frac{2w_n}{w^2 + w_n^2} |V_0|^2 \quad (D5)$$

となる.

輻射科学研究会資料

大阪管式ダイナミック形光電子増倍管

大東延久・倉田 昇・森田正信
（関西大学 工学部）

1971年11月26日

大阪管式ダイナミック形光電子増倍管

I. まえがき

O.L. Gaddy 等は、図1のような直交電磁界中の電子運動を利用した光電子増倍管（DCFP）を考えた。これは電磁界のパラメータにより位相に集束性を与えて、印加した高周波電界と同期した量子化された信号としてこれをとり出して高速光検波器の機能を与え[1]、また sampling angle の存在する事を利用して、光の subnanosecond pulse を用いた通信での検出装置としての応用を報告している。[2]

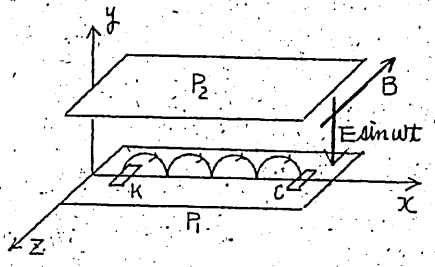


図 1

我々は、図2のように、大阪管の推移電子に着目して同じような光検波器として働かせた場合について種々計算してみた。以下これについて述べる。

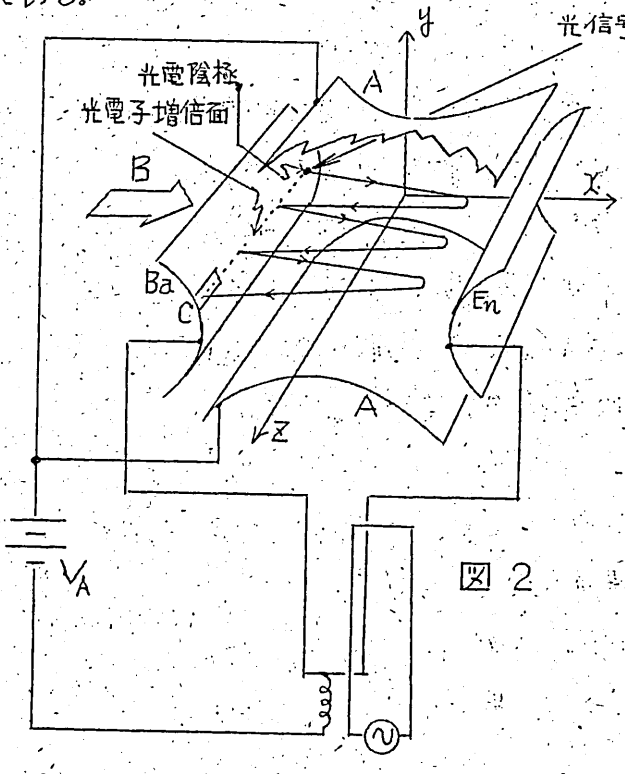


図 2

II. 解析と考察

この管の概略図の図2において、通常の大阪管の Backing-plate

(Ba) と End-plate (En) の間に高周波電界を印加して x方向の電子振動を毎回加速させ、適当な衝突エネルギーを与えて、二次電子を次々と生ぜしめて集電子極Cより信号を取り出し、その際位相の集束性をもたそうとするものである。

管内の電位分布は図3(b)に示す通り、DC電位分布は(陽極電圧) V_A を加えた事に基く中心電圧 V_0 ($=\alpha V_A$) を頂点とする放物線電位分布である。これに重畳して HF電位分布が加わり、この振幅関数を $V(x,y)$ とすれば、合成電位分布は次の様になる。

$$V(x,y,t) = V_0\left\{1-\left(\frac{x}{l_x}\right)^2+\left(\frac{y}{l_x}\right)^2\right\} + V(x,y)\cos\omega t \qquad (1)$$

磁界がある程度強くなれば y方向の軌道振幅は小さくなり、$y=y_0$ 近傍の運動と考えられるので、図3(c)の様な平行に近い電位分布の場合は HF電位の振幅関数 $V(x,y)$ は $V(x)$ と考えられ、また次式で表わされる線形電位分布を仮定する。

$$V(x) = -\frac{V_m}{x_0}x \qquad (2)$$

なお(1)式右辺第1項のDC電位分布を実現する電極の式は

Ba, En極の式　$x^2-y^2=l_x^2$　(3)

A極の式　$y^2-x^2=\frac{1-\alpha}{\alpha}l_x^2$　(4)

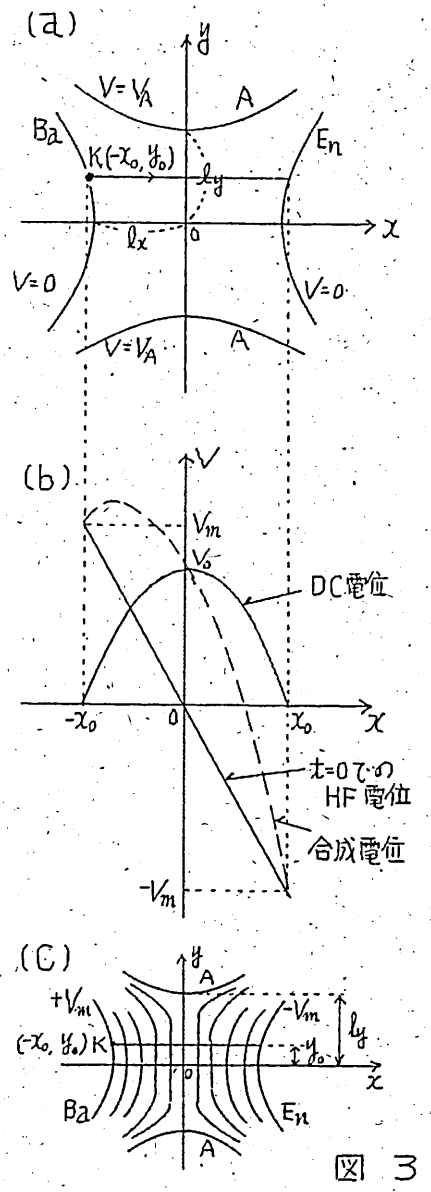


図 3

で表わされ、これを図3(a)に示す。

$\hat{\imath}$をx軸方向の単位ベクトルとすると加えられる磁界は

$$B = B\hat{\imath} \qquad (5)$$

となり、これらの関係から電子の運動方程式の各成分は

$$\ddot{x} = -\omega_e^2 x - \eta \frac{V_m}{x_0} \cos\omega t \qquad (6)$$

$$\ddot{y} = \omega_e^2 y - \omega_c \dot{z} \qquad (7)$$

$$\ddot{z} = \omega_c \dot{y} \qquad (8)$$

となる。ただし"・"は時間tに関する微分を示し、また

$$\eta = e/m, \quad \omega_e^2 = 2\eta V_0 / l_x^2, \quad \omega_c = \eta B \qquad (9)$$

である。

〔1〕到着位相に関する計算

(6)式の一般解は

$$x = A\cos\omega_e t + B\sin\omega_e t + \frac{\eta V_m}{x_0(\omega^2 - \omega_e^2)} \cos\omega t \qquad (10)$$

となるが、初期条件として、電子の出発時間 $t = t_0$ で $x = -x_0$, $\dot{x} = 0$ を入れると

$$x = -x_0 \cos\omega_e(t - t_0) + \frac{\beta l_x^2}{2x_0(a^2-1)} \{-\cos a\omega_e t_0 \cdot \cos\omega_e(t-t_0) + \cos a\omega_e t + a\sin a\omega_e t_0 \sin\omega_e(t-t_0)\} \qquad (11)$$

となる。ここで

$$a = \omega/\omega_e, \quad \beta = V_m/V_0 \qquad (12)$$

である。さらに

$$\omega_e t = \varphi_e, \quad \omega_e t_0 = \varphi_{e0} \qquad (13)$$

とおいて

$$x = -x_0 \cos(\varphi_e - \varphi_{eo}) + \frac{\beta l_x^2}{2x_0(a^2-1)}\{-\cos a\varphi_{eo}\cos(\varphi_e-\varphi_{eo}) + \cos a\varphi_e + a\sin a\varphi_{eo}\sin(\varphi_e-\varphi_{eo})\} \quad (14)$$

を得、これは電子の位置 x を 電子振動（HF電界のかからない時の）の位相 φ_e で表わした式である。

$a=1$ の場合は、$x=\infty$ となって 共振状態を示すので、$a\to 1$ のときの(14)式の極限移行を行うことによって

$$x = -x_0\cos(\varphi_e-\varphi_{eo}) + \frac{\beta l_x^2}{4x_0}\{-(\varphi_e-\varphi_{eo})\sin\varphi_e + \sin\varphi_{eo}\sin(\varphi_e-\varphi_{eo})\} \quad (15)$$

となる。

さて、この管で電子増倍を行う場合、Ba極だけで増倍する片側増倍（one-side multi. OSMと略記）と、Ba, E_n 両極で行う両側増倍（both-side multi. BSMと略記）とが考えられる。夫々の場合の到着位相を考えるには、(14)又は(15)式で、OSMのときは $x=-x_0$, BSMのときは $x=+x_0$ とおけば その時の $\varphi_e \equiv \varphi_{e1}$ が 到着位相を表わすことになり、それが出発位相 φ_{eo} によって どう影響を及ぼされるかを調べると位相の集束性を考える事が出来る。この様にして得られた位相関係式は次の通りである。

$a\neq 1$ の場合
$$\frac{2x_{oo}^2(a^2-1)}{\beta}\{\pm 1-\cos(\varphi_{e1}-\varphi_{eo})\} - \cos a\varphi_{eo}\cos(\varphi_{e1}-\varphi_{eo}) + \cos a\varphi_{e1} + a\sin a\varphi_{eo}\sin(\varphi_{e1}-\varphi_{eo}) = 0 \quad (16)$$

$a=1$ の場合
$$\frac{4x_{oo}^2}{\beta}\{\pm 1-\cos(\varphi_{e1}-\varphi_{eo})\} + \sin\varphi_{eo}\sin(\varphi_{e1}-\varphi_{eo}) - (\varphi_{e1}-\varphi_{eo})\sin\varphi_{e1} = 0 \quad (17)$$

ただし 式中 ± 1 の「+」は OSM, 「−」は BSM の場合にとる符号であり、また
$$x_{oo} = x_o/l_x \quad (18)$$
である。

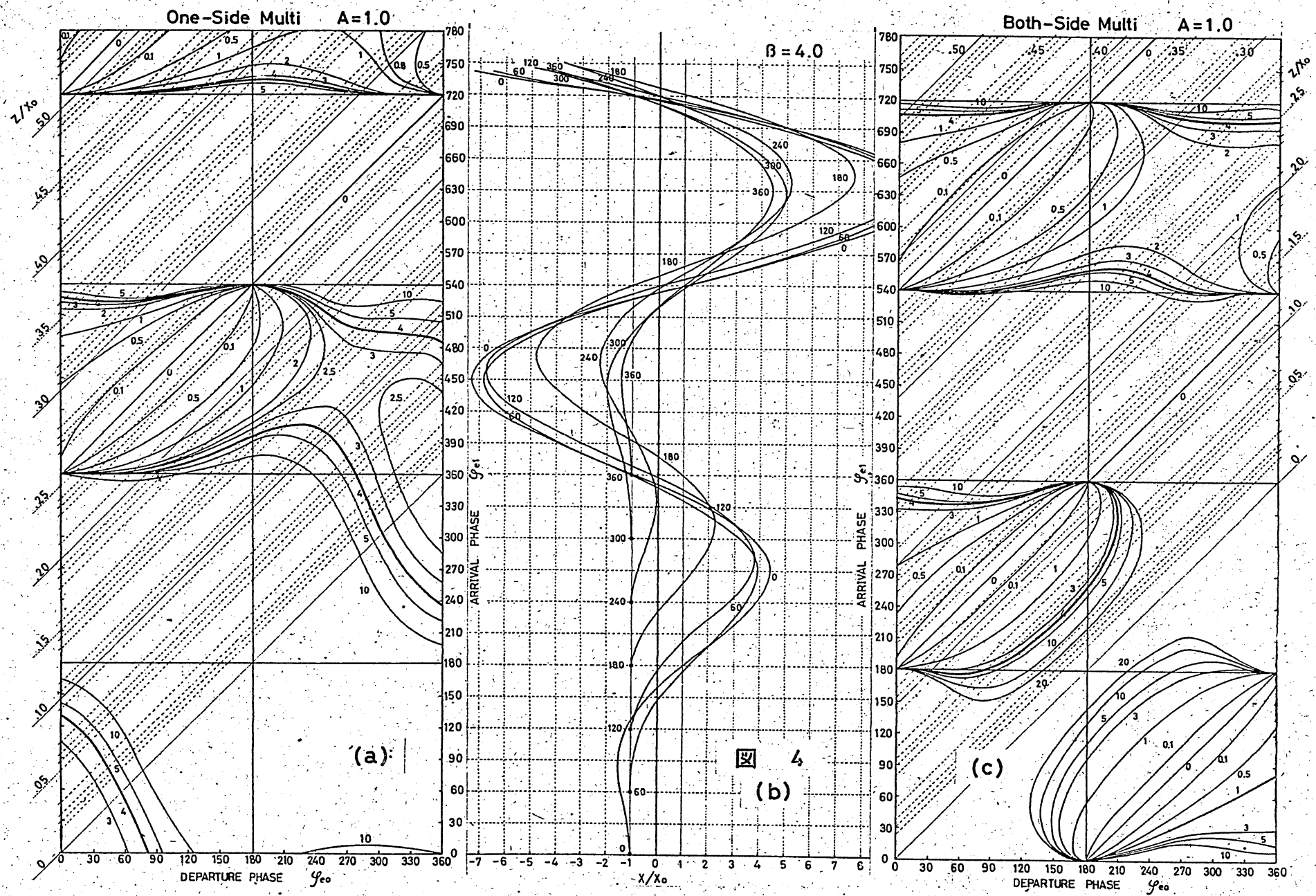

One-Side Multi A=1.0
β = 4.0
Both-Side Multi A=1.0
z/λo
ARRIVAL PHASE φe1
DEPARTURE PHASE φeo
X/λo
(a)
(b)
(c)

図 4

例として $\alpha=1$, $\chi_{00}=1.03^{*}$ の場合の位相関係を与える等β曲線の分布図を図4(a), (c)に示す。この図は φ_{e0}, φ_{e1} のそれぞれ6°おきに対するβの値を(17)式から電算機で求めて、βの等しい点を連ねて得たものである。ここで実際に存在可能な領域は原点から引いた傾斜1の直線より上の部分である。今、$\beta=4$ の場合を考えると、それは図中の太線で表わした数本の曲線となる。この太線の意味を明らかにするために、位置χの時間依存を(15)式から求めると図4(b)の様になり、OSMの場合は(a)図と(b)図、BSMの場合は(c)図と(b)図をそれぞれ対比させる事により、その意味を理解する事が出来る。

すなわち、OSMの場合のこの説明図を図5(a), (b)に示すが、$\beta=4$ ではBA-1, BA-2 と FA-1, FA-2 の4曲線がある。再びBa極に電子が戻って来た場合、前着はBa極の後面(原点と反対側の面)に到着する後面到着(backward arriving)、後着は前面到着(forward arriving)を意味している事が(a), (b)図の比較により分る。更にまた出発線ABがBA-1, FA-1 とそれぞれ交わる点 P_1, P_2 を境にして AP_1 間と P_2B 間は後面出発位相(backward departure phase)また P_1P_2 間は前面出発位相(forward departure phase)である事も分る。丁度この P_1, P_2 の位相では電子が前方にも後方にも進まず時間だけが経過する状態、つまり出発点のχ方向速度がしばらくの間0になる事を示している。これはまた(1), (2)式から求まるχ方向の電界が $\chi=-\chi_0$ で0になる条件より逆に P_1, P_2 点を出す事が出来て $\varphi_{e0}\fallingdotseq 58°, 302°$ を得る。

---

* $V(x)$ が線形であるという(2)式を実現するために $\alpha=0.4$, $g_0/l_y=0.2$ を仮定した(図3(c)参照)。すると(3), (4)式から $\chi_{00}=\chi_0/l_x=1.03$ を得る。

ところで、これらの曲線のうちで水平性の強いFA-2では 0～2πのφ_{e0}で出発した電子は $\varphi_{e1}=720°\sim735°$ の到着位相に集束され、その拡りは僅か15°になってしまう事がわかる。これを更に集束させるにはこの過程を数段に及ぼせばよい事になる。しかしながら、今の段での到着と次の段の出発に関して、前面到着の電子は前面出発、後面到着の電子は後面出発になる必要がある。もしそうならないならば生じた二次電子は電極の表裏の互に裏側へは通りぬけられないから所定の運動は不可能となり、図5

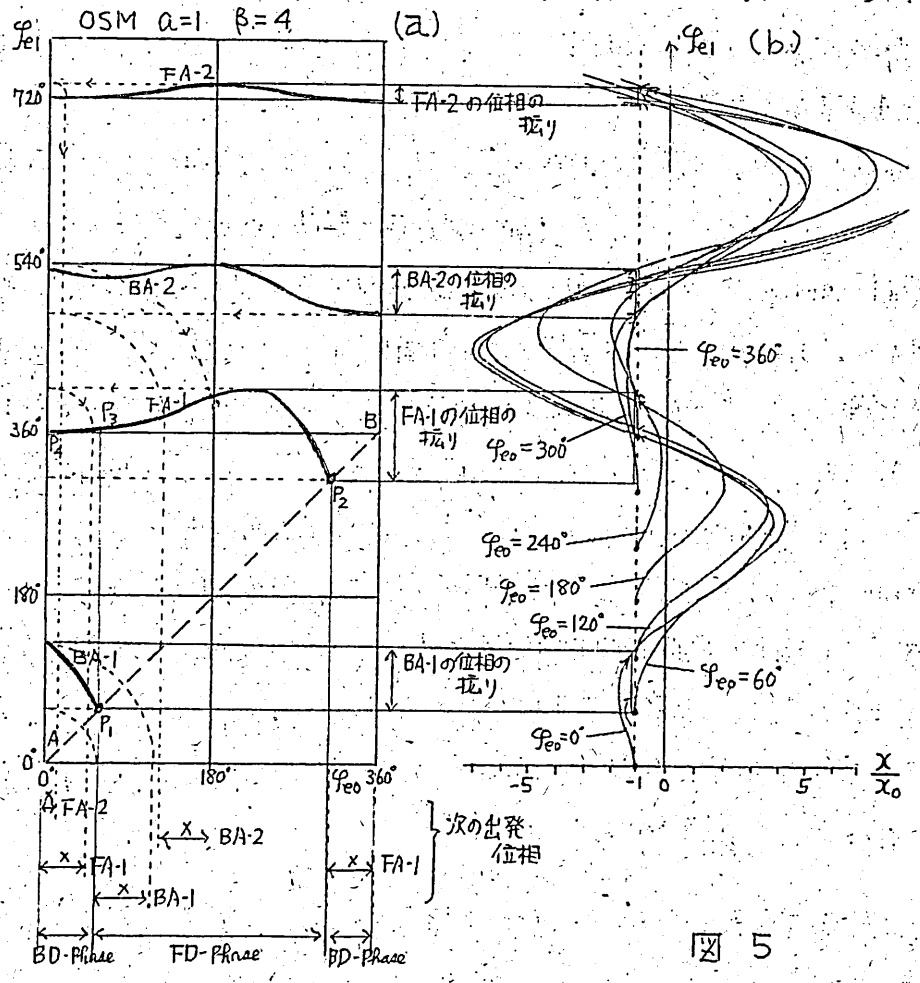


図 5

(a)の下の「x」印はこれを示している。従って設計に当っては2段目以後も所定の運動が続けられるβの値を選ぶ必要がある。

BSMでは、出発線になめる等β曲線はないので上述の心配はない。更にまたBSMの説明図の図6(a),(b)で、FA-1, BA-1部はsemi-loop状をなしているが、これに接する直線 $\varphi_{e0}=210°$ を境にして、Em極に飛びこむか、その手前で引き返すかが決る事も分る。この様にしてsemi-loop状部分に接する出発位相の電子はその電極の位置で丁度戻る為衝突エネルギは0になる。

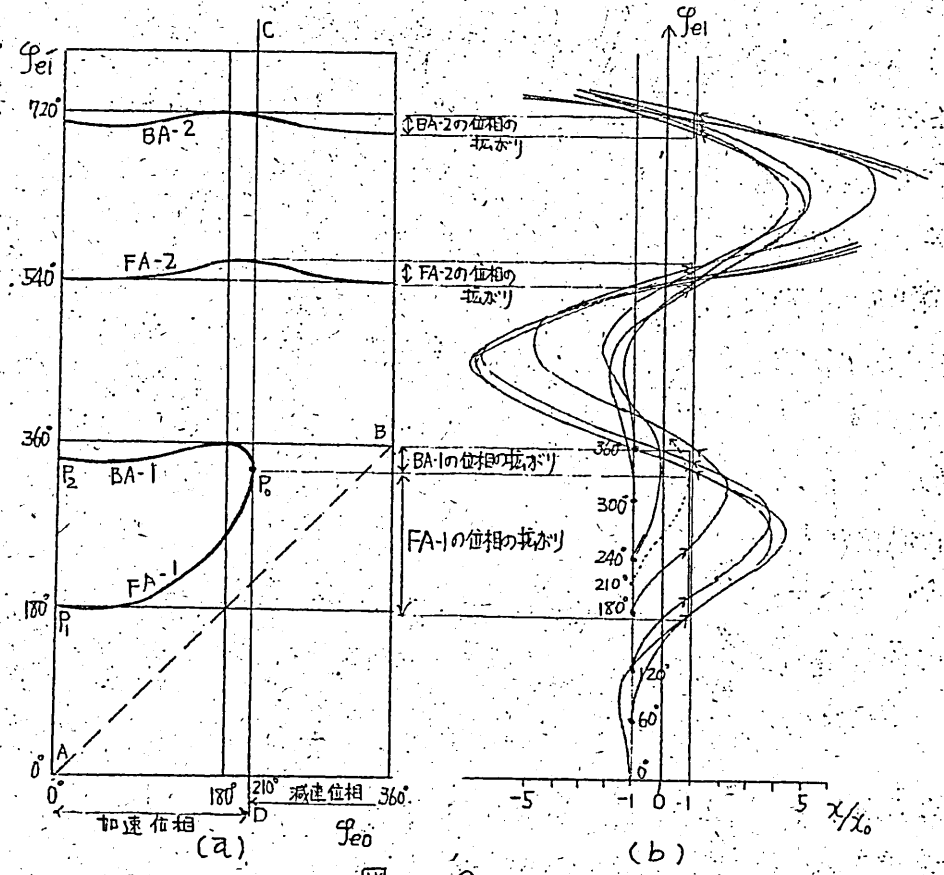


図 6

(17)式を使って図4(a),(c)に描いた等β曲線をβの負の値についても描けば図7の様になる。β<0とはHF電界の位相が180°ずれる事を意味し、今の場合a=1なるため電子の位相φeも180°ずれる事となる。それ故β<0の曲線群(実線)はその座標の原点を $\varphi_{eo}=\varphi_{e1}=180°$ の点に移した時の元のβ>0の曲線群(実線)と一致している。又、HF電位のt=0、従ってφ=0は図3(b)のように選んでいるので電位Vは φ=180° に関して対称になっている。それ故、同じ符号のβに対しては $\varphi_{eo}=\varphi_{e1}=180°$ の点に対して点対称図形になっている。

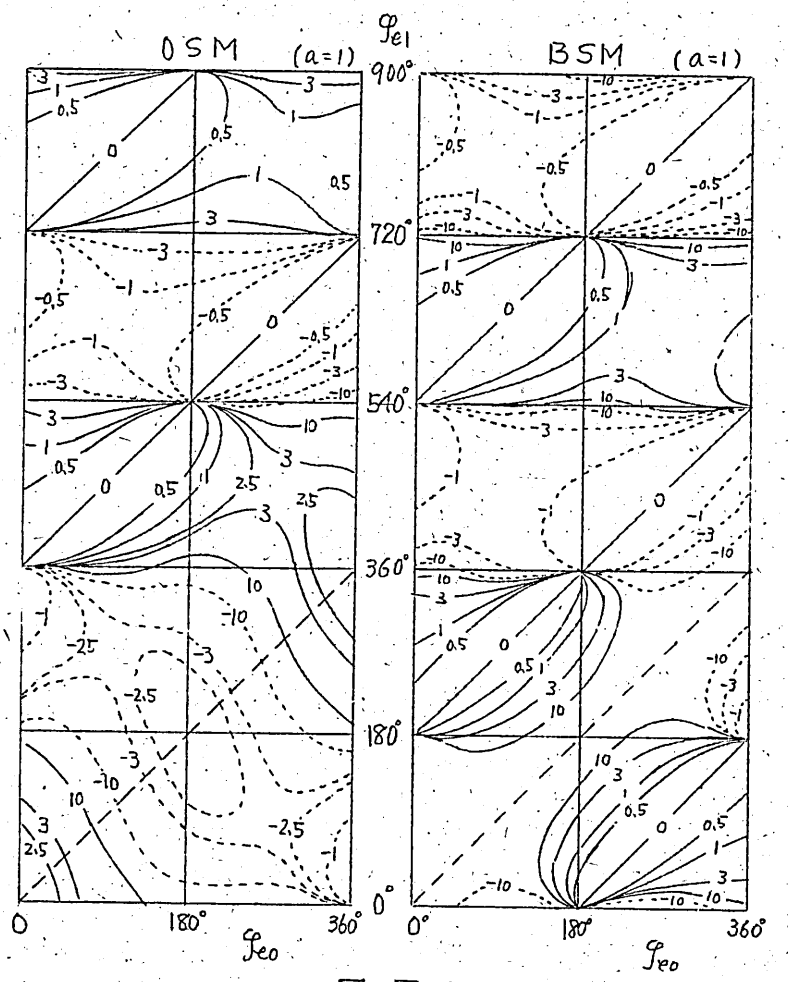


図 7

[2] 到着位置に関する計算

(7),(8)両式からy, Zに関する解は、初期条件 t=t₀ で y=y₀,

$\dot{y}=0$; $Z=0$, $\dot{z}=0$ として、次式となる。

$$y = \frac{y_0}{r_w^2}\{1-\cos r_w(\varphi_e-\varphi_{e0})\}+y_0 \qquad (19)$$

$$Z = \frac{\omega_c}{\omega_m}\frac{y_0}{r_w^2}\{r_w(\varphi_e-\varphi_{e0})-\sin r_w(\varphi_e-\varphi_{e0})\} \qquad (20)$$

ここで $\omega_m^2 = \omega_c^2 - \omega_e^2$ (21)

磁界指数 $r_w = \omega_m/\omega_e = \sqrt{\frac{\eta B^2 l_x^2}{2V_0}-1}$ (22)

である。(20)式は更に次の様に変形出来る。

$$Z/x_0 = \frac{\sqrt{x_{00}^2-1}}{x_{00}}\frac{\sqrt{r_w^2+1}}{r_w^3}\{r_w(\varphi_e-\varphi_{e0})-\sin r_w(\varphi_e-\varphi_{e0})\} \qquad (23)$$

従って、X-Z面内の電子軌道は、$a\neq 1$ の場合は (14)式と(23)式から、$a=1$ の場合は (15)式と(23)式から、φ_e を消去する事により得られる。

到着位置は、$\varphi_e=\varphi_{e1}$ の時の (23)式の値、すなわち

$$Z/x_0 = J\{r_w(\varphi_{e1}-\varphi_{e0})-\sin r_w(\varphi_{e1}-\varphi_{e0})\} \qquad (24)$$

$$J = \frac{\sqrt{x_{00}^2-1}}{x_{00}}\frac{\sqrt{r_w^2+1}}{r_w^3} \qquad (25)$$

で表わされる。今 φ_{e0}-φ_{e1} 面内に等Z曲線を引く事を考えると、(24)式は $(\varphi_{e1}-\varphi_{e0})$ の関数だから $Z/x_0=const$ では $\varphi_{e1}-\varphi_{e0}=const$ になる事に注目すれば

$$\varphi_{e1} = \varphi_{e0} + \frac{1}{r_w}\left\{\frac{1}{J}\left(\frac{Z}{x_0}\right)_{const}+K\right\} \qquad (26)$$

$$K = \sin r_w(\varphi_{e1}-\varphi_{e0})$$

なる傾斜1の直線の式を得る。図4(a), (c)の図中に引かれてある実線の直線群は、この様にして得られた $r_w=6$ の場合の等Z曲線を示している。

[3] 衝突エネルギーに関する計算

($a\neq 1$ の場合) 到着点に達した時のX方向の速さは(14)式より

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{00}\sqrt{2\eta V_0}\left\{\sin(\varphi_{e1}-\varphi_{e0}) + \frac{\beta}{2\dot{x}_{00}^2(a^2-1)}E\right\}$$

$$E = \cos a\varphi_{e0}\sin(\varphi_{e1}-\varphi_{e0}) - a\sin a\varphi_{e1} + a\sin a\varphi_{e0}\cos(\varphi_{e1}-\varphi_{e0}) \quad (27)$$

ところで電極面の弯曲を考慮して電極に垂直な速度成分 v は図8から $v = \dot{x}_1\cos p$ となる。

$$\tan\theta = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - l_x^2}}$$

から

$$\cos p = \frac{\dot{x}_{00}}{\sqrt{2\dot{x}_{00}^2-1}} \quad (28)$$

になる事を使って

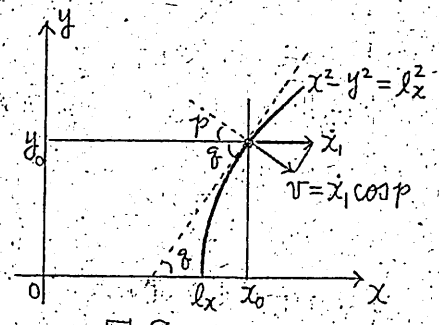


図 8

$$v = \dot{x}_1\cos p = \sqrt{\frac{2\eta V_0}{2\dot{x}_{00}^2-1}}\left\{\dot{x}_{00}^2\sin(\varphi_{e1}-\varphi_{e0}) + \frac{\beta}{2(a^2-1)}E\right\} \quad (29)$$

故に、電子ボルト単位で表わした衝突エネルギー ϕ は

$$\phi = \frac{1}{2\eta}v^2 = \frac{V_0}{2\dot{x}_{00}^2-1}\left\{\dot{x}_{00}^2\sin(\varphi_{e1}-\varphi_{e0}) + \frac{\beta}{2(a^2-1)}E\right\}^2 \quad (30)$$

で表わされる。

($a=1$ の場合) (15)式を使って上と同様に計算して

$$\phi = \frac{V_0}{2\dot{x}_{00}^2-1}\left\{\dot{x}_{00}^2\sin(\varphi_{e1}-\varphi_{e0}) + \frac{\beta}{4}F\right\}^2 \quad (31)$$

$$F = -\sin\varphi_{e1} - (\varphi_{e1}-\varphi_{e0})\cos\varphi_{e1} + \sin\varphi_{e0}\cos(\varphi_{e1}-\varphi_{e0}) \quad (32)$$

を得る。

ϕ を V_0 で規格化した ϕ/V_0 を(31)式から計算した結果を図9の実線の曲線にて示す。これは φ_{e0} の 6°毎、φ_{e1} の 3°毎に、先ず(17)式から各実、各実の β の値を出し、それを(31)式に入れて各実の ϕ/V_0 の値を求めて行き、その値の等しい実を連ねて描いたもので、( )を施した数値が ϕ/V_0 を示している。そのうち $\phi/V_0 = 0$ は画線となり、この部分を図10に示すと、それぞれ次の意味をもっている。

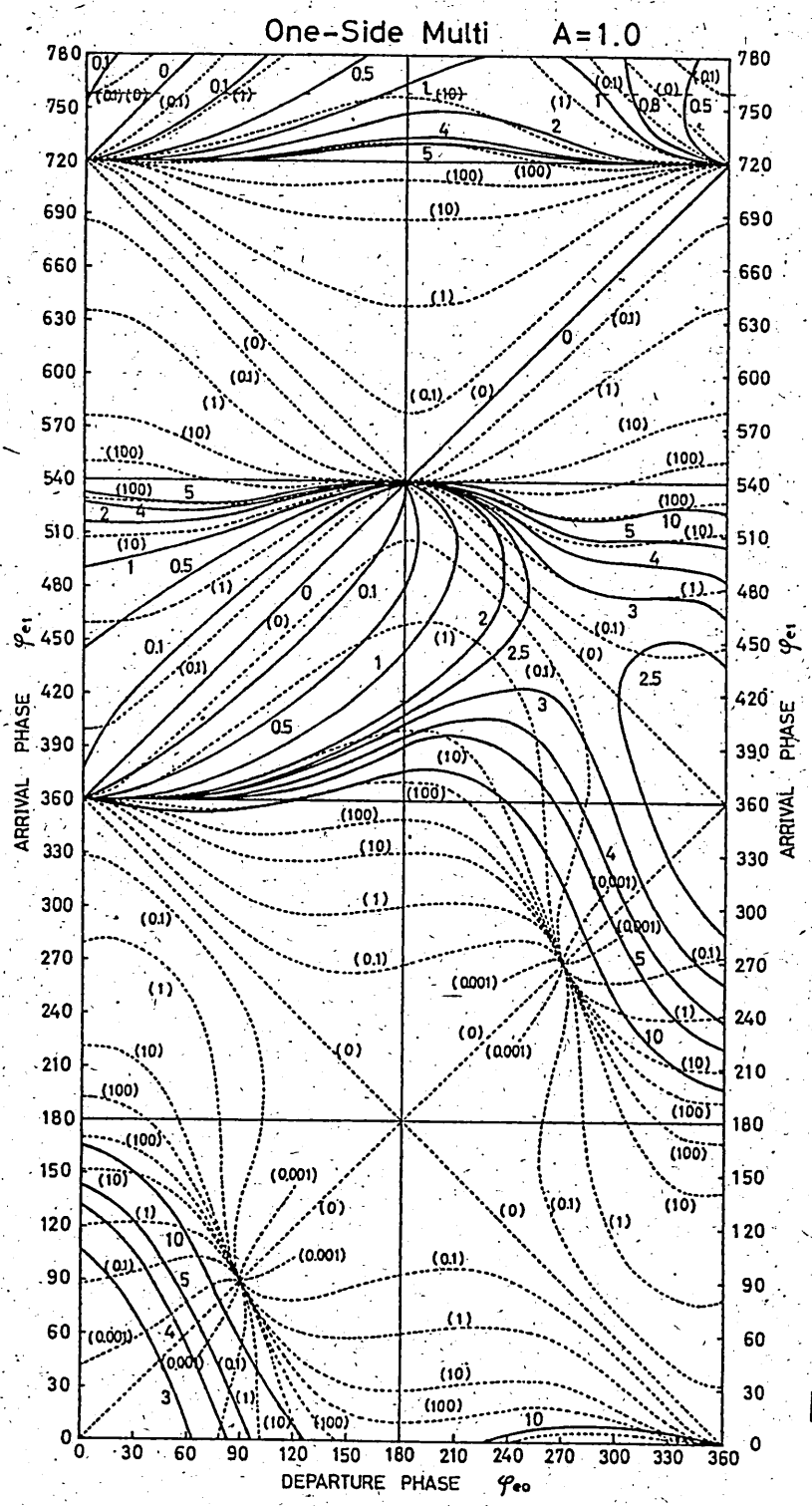

One-Side Multi A=1.0
ARRIVAL PHASE φ_{e1}
DEPARTURE PHASE φ_{e0}
0 30 60 90 120 150 180 210 240 270 300 330 360
0 30 60 90 120 150 180 210 240 270 300 330 360 390 420 450 480 510 540 570 600 630 660 690 720 750 780

図 9

直線①はβ=不定の場合の$\phi/V_0=0$を示し
これは出発線であるので当然$\phi=0$である。
直線②はβ=0の場合の$\phi/V_0=0$を示し
これはStaticな場合の$\phi=0$である。
直線③はβ≠0の場合の$\phi/V_0=0$を示し
これはPTのBSMの説明の項で述べた様なSemi-Loop状曲線に沿うφ_{e0}の所で、電子は電極ズレスレに戻るために$\phi=0$になる場合である。

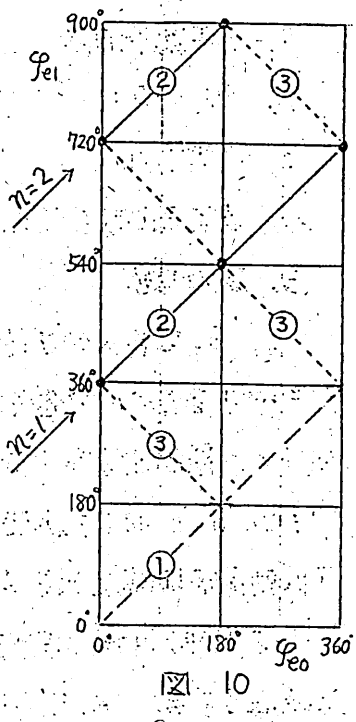


図 10

なお、「・」印を施した交点ではあらゆるβの値をとれる点で、その時の衝突エネルギーは採用せるβの値によって、α=1の場合は(31)式から

$$\phi/V_0=\frac{1}{2\chi_{00}^2-1}\cdot\frac{n^2\pi^2\beta^2}{4} \qquad (33)$$

となる。

Ⅲ. 設計の一例

〔1〕設計方針

1. 高速化出来るようにφ_{e0}の0~360°の電子はφ_{e1}において位相の集束作用をもたすこと。
2. どの時刻に入った光信号でも検出出来るようなるべくφ_{e0}の0~360°に亘って動作すること。
3. 衝突エネルギーが適当な値(数100 ev)をもつこと。

〔2〕 設計の基礎数値の決定

1. 光電陰極位置　　$x_{oo}\ (=x_o/l_x) = 1.03$
2. 中心電圧比　　$\alpha\ (=V_o/V_A) = 0.4$
3. 振動数比　　$a\ (=w/w_e) = 1$
4. 直流高周波電圧比　　$\beta\ (=V_m/V_o) = 2$ (OSM)
5. 磁界指数　　$k_w\ (=w_m/w_e) = 6$

1., 2. は計算の基礎となった高周波電圧の振幅関数 $V(x)$ の線形性を実現するための数値である（P5 脚注参照）。 3. は電子振動の毎回ごとに高周波電界で加速させる最も有効な関係のための数値である。 5. の $k_w=6$ は最適磁界指数であるが、磁界が強い場合は y 方向の電子振動振幅は無視出来るので、別に最適にする必要はない。ここではむしろ Z 方向の推移に伴う適当なピッチ間隔の考えと、今までの経験から選んだ数値である。 4. については以下に述べる。

今、もし OSM の $\beta=4$ を採用したとすると P6 の図5で述べた所定の運動不可能な状態を生ずる。すなわち BA-1 の部分だけの説明図を図11に示すと1段目の到着位相は φ_A で示す通りで後面到着となる。次の出発位相は φ_B となるが、この位相は前述の通り前面出発位相のところである。したがって後面に到着して同じく後面に生じた二次電子は前面に出発出来ず、運動出来なくなる。このような弊害を除く最も簡単な方法は総て

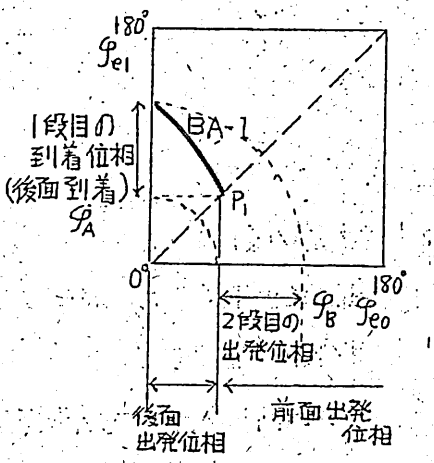


図 11

前面到着、前面出発の過程を繰り返す様にすることである。そのためには φ_{e0} が 0~360° の総ての電子が前面出発になる様なβの値を採用すればよい。出発線AB附近のβの分布は図12に示す通りで、このABと交わらないβの値をとるためには β< 2.3 であればよい。全体的な等β曲線の分布(例えば図4(a))を見て、更に位相の集束性の見地からゆるやかな傾斜の等β曲線である事、到着位置の拡りの少い事、利用出来る φ_{e0} の領域の広い事、等からβ=2が最適と考えられ、これを採用した。

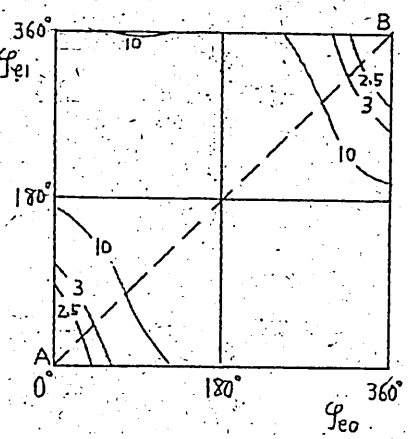


図 12

以上はOSMの場合であったが、BSMの場合には前述のような簡潔な動作をさせるためには2つの電極間で運動しなければならないという制約のため設計はOSMの場合ほど容易でなくなる。

〔3〕 管の動作機構

〔2〕で述べた数値の場合の位相関係図とx方向の運動の時間依存の様子を図13(a),(b)に示す。この時の説明図は図14の通りで、semi-loop状の曲線 P_1-P_2-P に φ_{e1} 軸に平行な接線CDを引く事によって φ_{e0}=0~238° の位相の電子は P_1-P_2 曲線で表わされる前面到着 FA-1 を、φ_{e0}=238°~360° の電子は Q_1-Q_2 曲線で示される前面到着 FA-2 をとり、夫々 P_1~P_2'' (従って(b)図の P_1'~P_2') 間の位相に集って来る。前着の第1段での到着位相の拡がり Q_1''~Q_2'' (従って(b)図の Q_1'~Q_2') 間の位相 P_1''~P_2'' は第2段の出発位相の拡がり P_1~P_3 となり、それが更に到着時には P_1~P_5 の拡がりに集束され、第3段では P_1~P_6 の出発位相の拡がりとなり

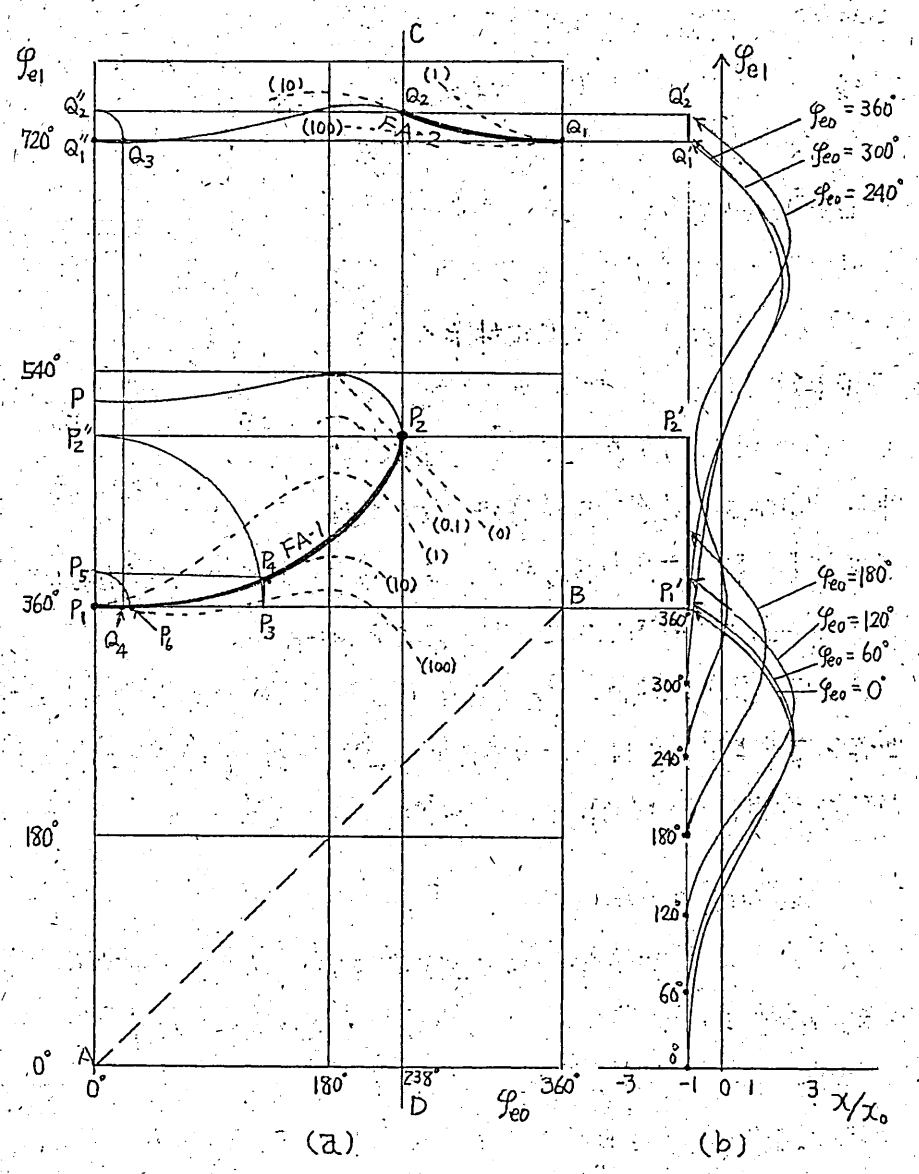


図 14

それが到着時には殆どP₁点に集束されてしまう。一方、後者に於て、第1段でのQ₁″～Q₂″の到着位相の拡がりとなった電子は、第2段ではQ₁″～Q₃即ち P₁～Q₄ 間の出発位相の拡がりとなり、それが到着時には殆どP₁の位相に集

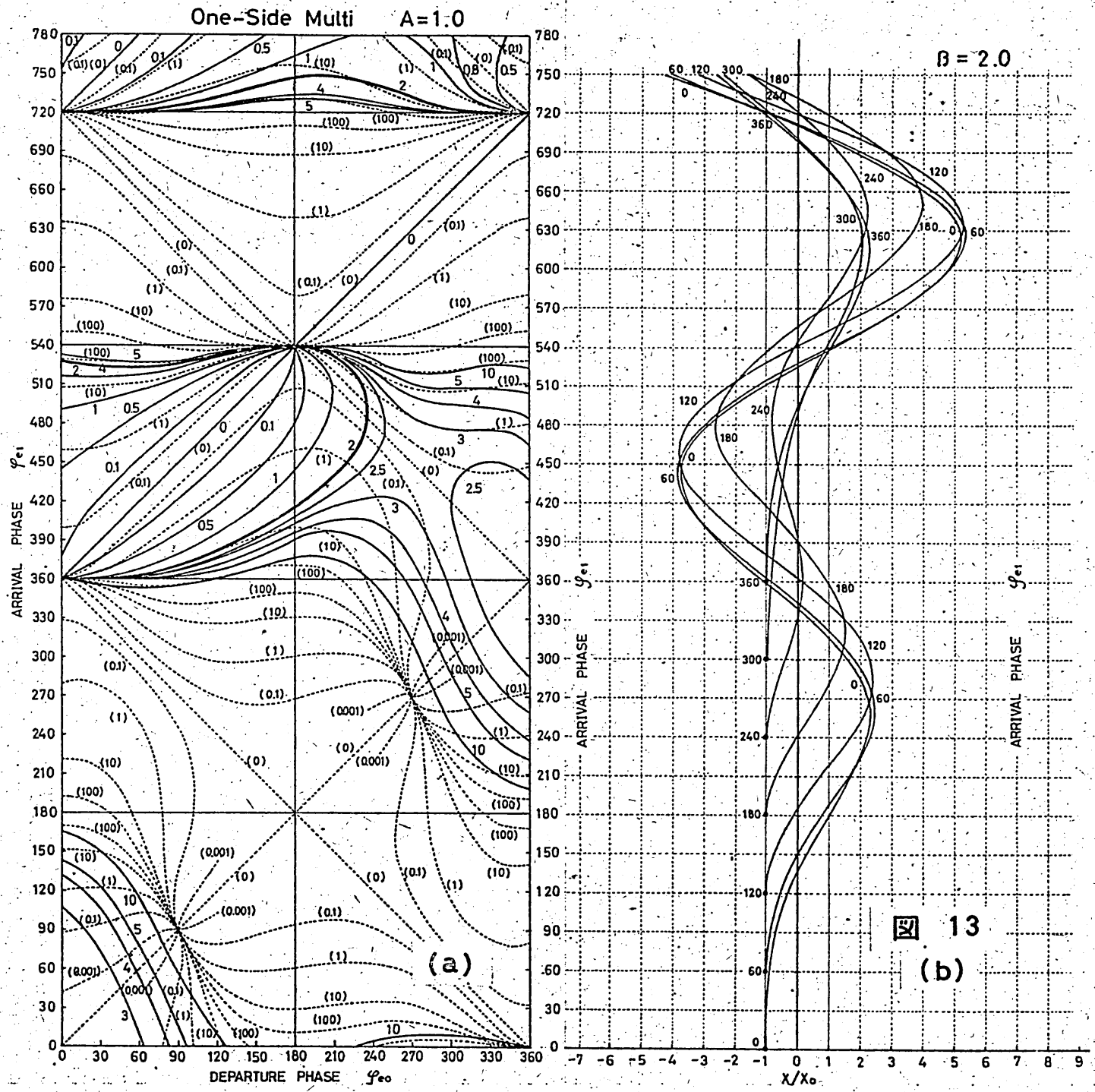

One-Side Multi A=1.0
ARRIVAL PHASE φ_{ei}
DEPARTURE PHASE φ_{eo}
(a)
β = 2.0
ARRIVAL PHASE φ_{ei}
X/Xo
(b)

図 13

The arrival phase and the position of electron for each step

A = 1.0 β = 2.0 r_ω = 6.0

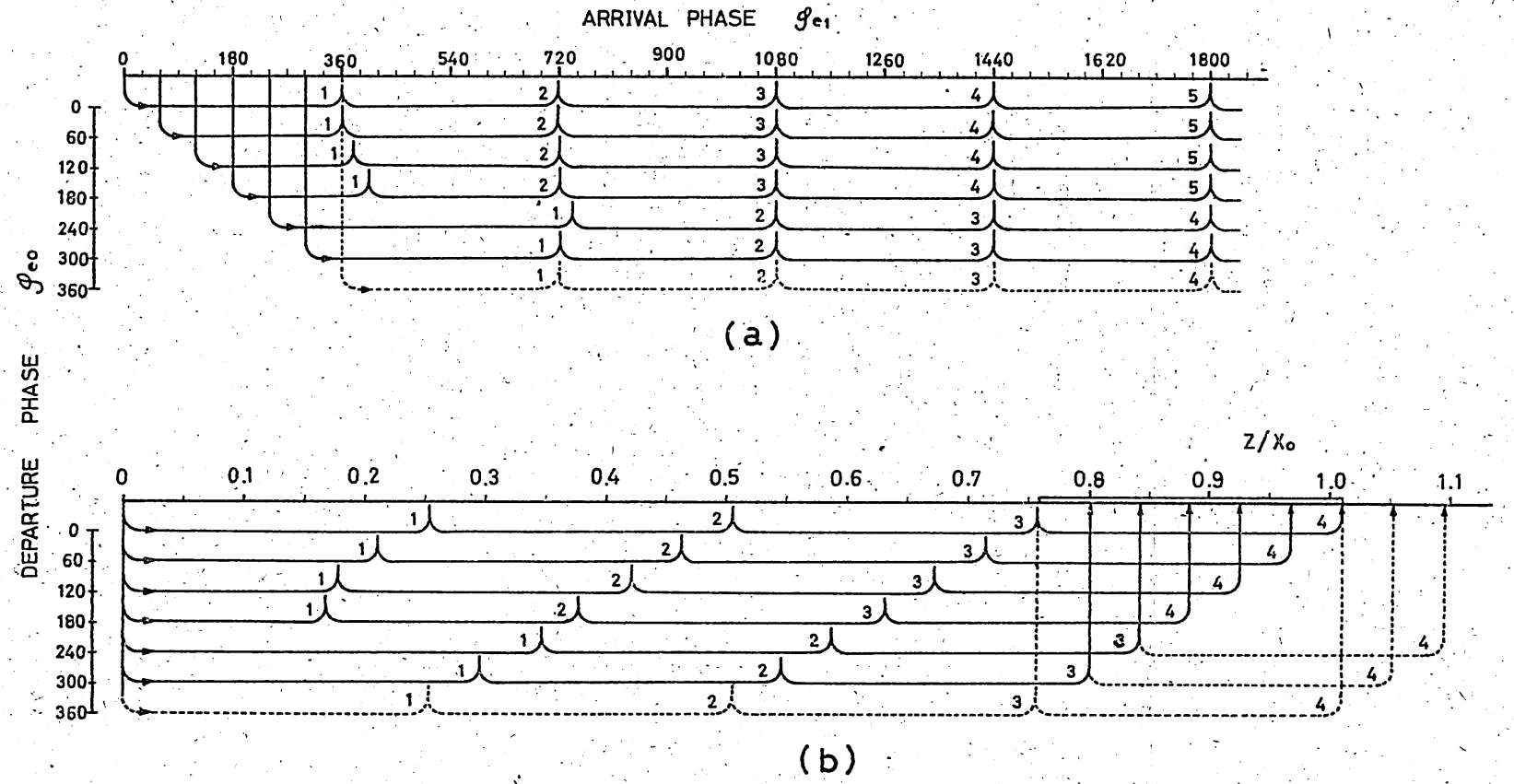


図 15

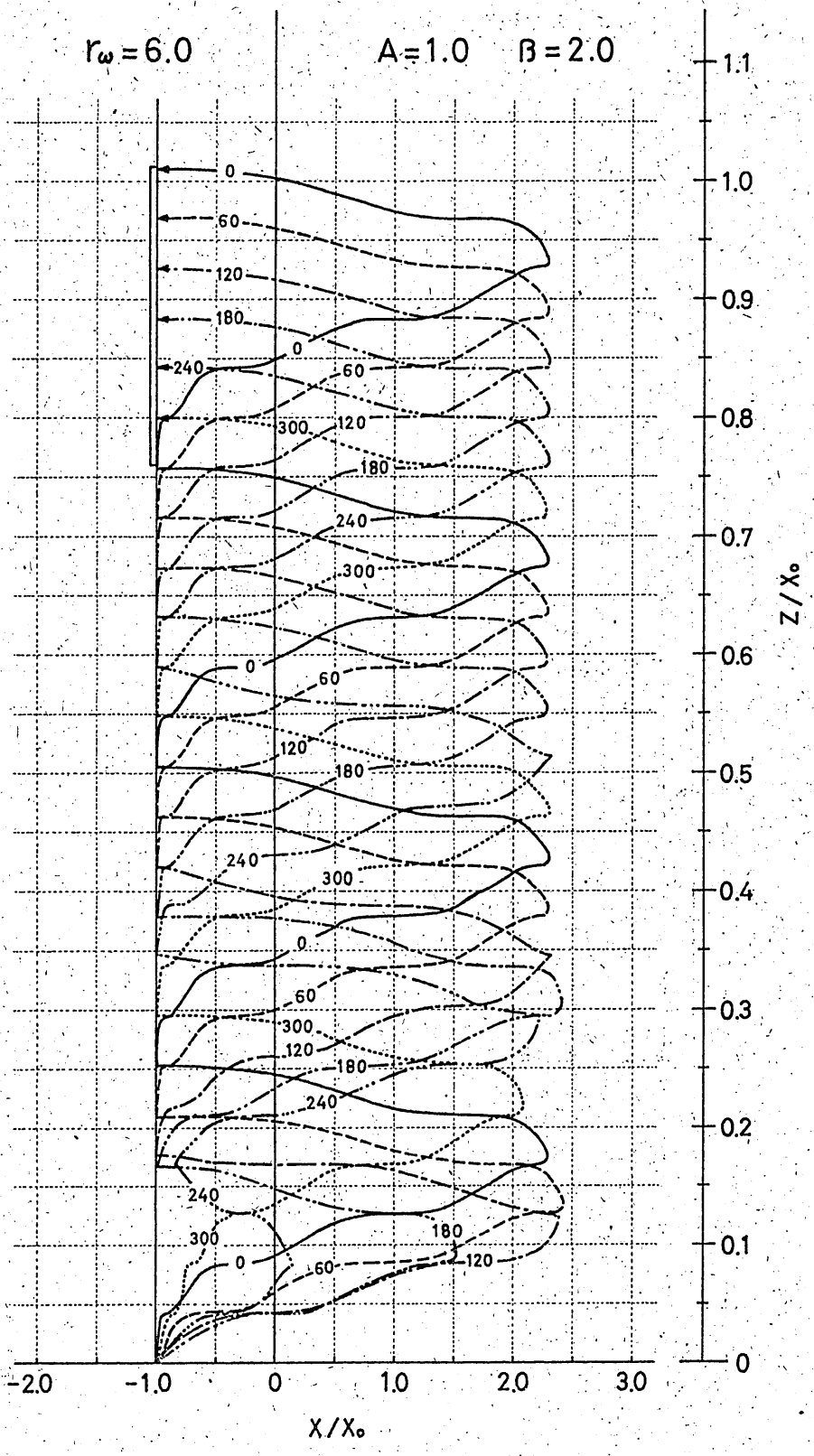

$r_\omega = 6.0$
A = 1.0
β = 2.0
0
60
120
180
240
300
X/X₀
Z/X₀
-2.0
-1.0
0
1.0
2.0
3.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1

図 16

束されてしまう事となる。結局、前着、後着を通して高周波電界の0°～360°の間に出発した電子は、数段の増倍過程で一応総てP点に集束されてしまう事となる。図15(a)には、この集束の状態が示されて居り、図中の数字は増倍段数を表わしている。たゞ φ_{e0} が238°以上の電子については、それ以下の位相の電子より増倍段数が1つ少なくなっているのでこの部分の二次電子増倍率を他の部分より大きくなる様に考慮すべきだろう。

図15(b)は各段のZ方向の到着位置を示す模式図であり、その実際の電子軌道は図16に示す通りである。これらの図より数段の後各電子の位相が集束されて同一時刻に到着する様になると、到着位置は φ_{e0} に対して比例的に変化する事がわかる。

衝突エネルギーについては、図13(a)とその説明図の図14(a)に示された実線の曲線が φ/V_0 を示して居るのでこれを調べるとわかる。P点では $\varphi/V_0=0$ で以後FA-1曲線に沿って P_1 に近づくに従い増加し、$\varphi/V_0=10$ の線に接近している。P_1 点では(33)式より $\varphi/V_0=8.81$ となる。従って、位相が集束されると毎回数100[eV]の衝突エネルギーが $V_0=30$～40[V]程度で得られる事になる。しかし P_2 の近所では φ/V_0 が非常に小さくなるので第1段の $\varphi_{e0}\fallingdotseq 180°\sim240°$ 位相の電子増倍はあまり望めない。しかしながらその他の位相では FA-2の Q_1～Q_2 も含んで $\varphi/V_0\fallingdotseq10$ が保てる。

[4] 設計

図13(a)または図14(a)にて、FA-2の Q_1-Q_2 曲線は全域 $\varphi/V_0\fallingdotseq8$ であり、FA-1の P_1-P_2 曲線は $\varphi_{e0}\fallingdotseq0\sim150°$ で $\varphi/V_0\fallingdotseq8$ となる。FA-1の方を、さらに $\varphi_{e0}=0\sim210°$ まで増倍可能にするには、$\varphi/V_0=2\sim8$ の範囲

に亘って中の値が数100[eV]になる様にV_0を決めるとよい。

今　　$V_0 = 50$ [V]　　$\therefore V_A = \frac{V_0}{\alpha} = 125$ [V]

を採用すると　衝突エネルギーは　100 [eV] ～400 [eV] の範囲となる。

加える高周波電界の周波数は (9), (12) 式より　$f = \frac{1}{2\pi l_x} \cdot 27.50$ [Hz]

$l_x = 5$ [mm] とすると　$f = 134$ [MHz] を得る。

高周波電圧の最大値は (12)式より　$V_m = \beta V_0 = 100$ [V]

印加磁界は (22) 式より　$B = \frac{1}{l_x}\sqrt{\frac{2V_0}{\eta}(k^2+1)} = 290$ [Gauss]

更に、電極の寸法等に関しては、先ず光電陰極面、二次電子放出面のy方向の位置y_0は、(18)式より $x_0 = \chi_{0a} l_x = 5.15$ [mm] となるのを使って

$y_0 = \sqrt{x_0^2 - l_x^2} = 1.23$ [mm]。　電極構造は図17に示す通りで、図16の電子軌道を基にして、原点からx軸上のBa極までの距離をl_xとして、E_n極までの距離を$3l_x$にとった。管内の静的な電位分布は (1)式右辺第1項を満足させねばならないから

Ba極の式	$x^2 - y^2 = l_x^2$	$V_{Ba} = 0$
E_n極の式	$x^2 - y^2 = (3l_x)^2$	$V_{En} = -400$ [V]
A極の式	$y^2 - x^2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} l_x^2$	$V_A = 125$ [V]

となる。高周波電圧の最大値$V_m = 100$ [V]（この意味は）、通常のx軸上で$x = \pm l_x$の位置を通るBa, E_n極の場合の話であるから、図17の非対称電極では高周波の電位分布が原点に関して対称になる様な加え方にしなければならない。

z方向の電極長は、増倍段を10段とすると (24), (25)式を使って、$\varphi_{e0} = 0$の電子に対しては、$\varphi_{e1} = 10 \cdot 2\pi = 20\pi$ に要する距離を求めて

$[z/x_0]_{10} = 0.0067 \times 6 \times 20\pi = 2.53$　$\therefore z_{10} = 2.53 \times 5.15 = 13.0$ [mm]

同様にして、$z_9 = 11.7$ [mm] となるので、総ての位相の10段目の電子(FA-2

曲線部を利用した電子は9段目)を捕えるには 11.8mm～13.1mm の集電子極を設ければよい。

Ⅳ. あとがき

この管の今後の研究として2つの方向が考えられる。1つは sampling angle をなくして全出発位相の電子に対して高速化する方向で、現段階では $\alpha=1$ の、いわば大阪管の基本波の様なものを使用しているので、ここで述べた一例では加える高周波の周波数は 134 MHz となり、通常の考えではこれより低い周波数の情報の検出にしか使えない。しかし α の値を大きくする事によって高速化が試みられると思う。

もう1つは、逆に狭い sampling angle を作って、光の PCM 通信で多重化された信号の内の特定の時間の信号を検出するのに用うる方向である。特にこの管では時間

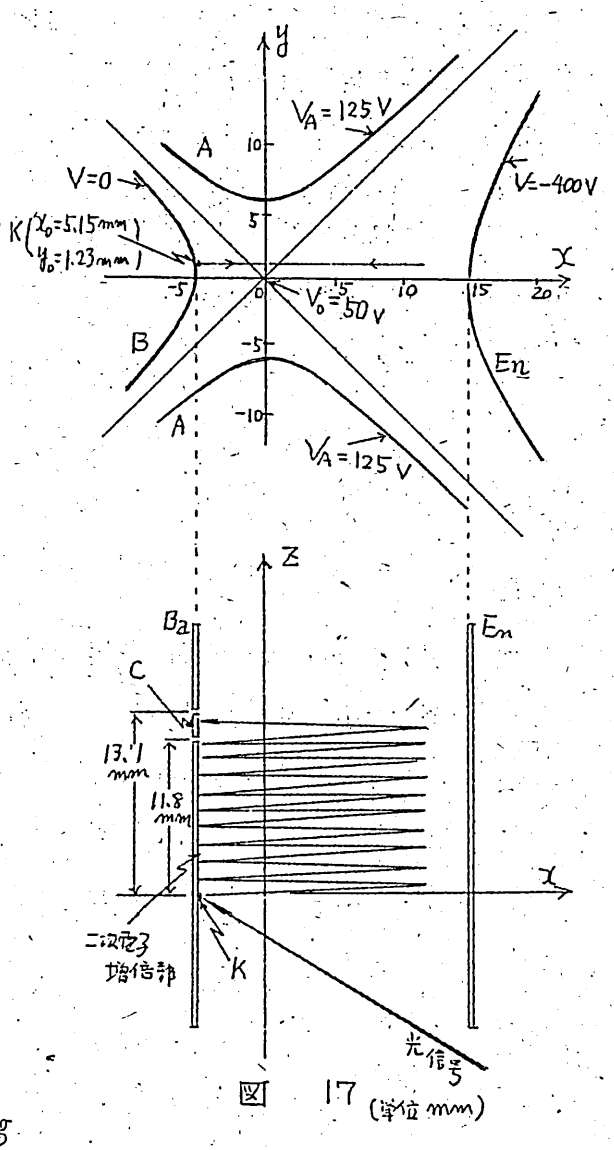


図 17 (単位 mm)

のズレは位置のズレに比例的に変換される特徴をもっているので、これを利用して集電子極を分割して出力を取り出す事によって一本の管で各信号を同時に分類して取り出す事も考えとして可能である。

終りに、本研究に対し御懇篤な御助言を賜りました大阪大学基礎工学部末田正教授に深謝致しますと共に、色々御討論頂った当研究室石川正臣氏に感謝します。

文献

1) O.L. Gaddy and D.F. Holshouser : A Microwave Frequency Dynamic Crossed-Field Photomultiplier, Proc. IEEE 51 153 (Jan., 1963).

2) D.J. Leverenz and O.L. Gaddy : Subnanosecond Gating Properties of the Dynamic Cross-Field Photomultiplier, Proc. IEEE 58 1487 (Oct., 1970).

輻射科学研究会資料

運動異方性誘電体スラブ内の線波源からの放射.II.

小嶋敏孝
東恒人
板倉清保
(大阪大学・工学部)

1971年11月26日

1. まえがき

宇宙通信工学，電波天文学等の進展に関連して，相対論的運動媒質と電磁波，あるいは波源との相互作用に関する研究結果が多数報告されている。[1)〜4)]

これらのうちで，運動する無限，あるいは半無限媒質中の波源からの放射に関する研究はかなりの数にのぼり，種々の観点から解析されてきたが，スラブ，あるいはシースのような境界面に囲まれた運動媒質中の波源からの放射に関する報告は比較的少い。

筆者らは，運動誘電体あるいはプラズマ内の線波源からの放射に関して，3報告してきたが，それらはスラブが1軸[5)]あるいは2軸[6)]異方性の場合であって，より一般的な異方性の場合（たとえばプラズマに有限静磁界が印加された場合）についてはまだ検討していない。

そこで，本稿では，運動磁化プラズマ内の線波源からの放射問題を検討するための一段階として，誘電率テンソルの周波数分散を考慮しない場合，すなわち，運動異方性誘電体スラブにおおわれたスロットアンテナからの放射について考察しよう。

まず，異方性媒質内のMaxwellの方程式と構成関係式をフーリエ変換し，波源の静止系におけるMaxwell-Minkowskiの方程式を導出する。さらに，それらを与えられた境界条件のもとで解くことによって，放射界をフーリエ[illegible]であらわし，鞍部点法を用いて遠距離

放射電磁界ならびに放射パターンを求め，さらにそれらに与える媒質の運動の影響について，数値計算例を掲げ検討する。

2. 基礎理論.

考察する問題の構成図を図1に示す。x-z面は完全導体平面であり，媒質Iは誘電体スラブであり，媒質IIは自由空間とする。また厚さdのスラブがz軸方向に一様な速度

$$\mathbb{V} = \hat{z} V \qquad (1)$$

で運動しているものとする。ただし，$\hat{z}$はz軸方向の単位ベクトル，Vは運動速度の大きさである。

媒質Iの静止系において，誘電率テンソルはつぎのように表わされる。

$$\overline{\varepsilon'} = \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_t'} & 0 \\ 0 & \varepsilon_3' \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ここで，

$$\overline{\varepsilon_t'} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1' & -j\varepsilon' \\ j\varepsilon' & \varepsilon_1' \end{pmatrix} \qquad (3)$$

であり，$'$は媒質Iの静止系における量を表わし，$\mu' = \mu_0$と仮定する。

以下電磁界成分をz軸方向成分とそれに垂直な成分に分けて考え，それぞれ，tの添字を付す。

波源の静止系での媒質工内の構成関係式はつぎのように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{D}_t &= \overline{\overline{\varepsilon}}_t \cdot \mathbb{E}_t + \overline{\Omega}_t \cdot \mathbb{H}_t \\ \mathbb{D}_z &= \hat{z} \cdot \varepsilon_3' E_z \\ \mathbb{B}_t &= \overline{u}_t \cdot \mathbb{H}_t - \overline{\Omega}_t \cdot \mathbb{E}_t \\ \mathbb{B}_z &= \hat{z} \mu_0 H_z \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ここで,

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_t = \varepsilon_1' \begin{pmatrix} a & -j a_0 \\ j a_0 & a \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_1'(1-\beta^2)}{n^2\left[(1-n^2\beta^2)^2 - n_0^4\beta^4\right]}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} n^2(1-n^2\beta^2) + n_0^4\beta^2 & -j n_0^2 \\ j n_0^2 & n^2(1-n^2\beta^2) + n_0^4\beta^2 \end{pmatrix} \quad (5\cdot 1)$$

$$\overline{u}_t = \mu_0 \begin{pmatrix} m & -j m_0 \\ j m_0 & m \end{pmatrix} = \frac{\mu_0(1-\beta^2)}{(1-n^2\beta^2)^2 - n_0^4\beta^4}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1-n^2\beta^2 & -j n_0^2\beta^2 \\ j n_0^2\beta^2 & 1-n^2\beta^2 \end{pmatrix} \quad (5\cdot 2)$$

$$\overline{\Omega}_t = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -j b_0 & -b \\ b & j b_0 \end{pmatrix} = \frac{\beta}{c\left[(1-n^2\beta^2)^2 - n_0^4\beta^4\right]}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -j n_0^2(1-\beta^2) & -(n^2-1)(1-n^2\beta^2) - n_0^4\beta^2 \\ (n^2-1)(1-n^2\beta^2) + n_0^4\beta^2 & -j n_0^2(1-\beta^2) \end{pmatrix}$$

$$(5\cdot 3)$$

$$\left.\begin{aligned} n_3 &= c^2\mu_0\varepsilon_3' \\ \beta &= V/c \\ n^2 &= c^2\mu_0\varepsilon_1' \\ n_0^2 &= c^2\mu_0\varepsilon' \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ここで，μ_0は真空中の透磁率であり，cは自由空間中の光速である。

つぎに，波源の時間変化を$e^{j\omega t}$と仮定すると，媒質Ⅰにおいて，Maxwellの方程式は次式で与えられる。

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_1 = -j\omega \boldsymbol{B}_1 \quad (7\cdot1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_1 = j\omega \boldsymbol{D}_1 \quad (7\cdot2)$$

また，媒質Ⅱではつぎのmaxwellの方程式が成り立つ。

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_2 = -j\omega\mu_0 \boldsymbol{H}_2 \quad (8\cdot1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_2 = j\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_2 \quad (8\cdot2)$$

ただし，ε_0は自由空間の誘電率である。以上媒質Ⅰ，および Ⅱにおける電磁界ベクトルにそれぞれ添字1，2を付した。

いま，電磁界をつぎのフーリエ積分であらわす。

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\boldsymbol{E}}\, e^{-jk_3 z}\, dk_3 \quad (9\cdot1)$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\boldsymbol{H}}\, e^{-jk_3 z}\, dk_3 \quad (9\cdot2)$$

したがって，演算子∇は次式で与えられる。

$$\nabla = \nabla_t - jk_3\hat{z} \quad (10)$$

いま，式(4)を式(7)に代入して，式(9)，(10)を用いると異方性媒質内のMaxwell－Minkowskiの方程式は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{d}\cdot & \nabla_t \times \\ \nabla_t \times & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_{t1} \\ \tilde{E}_{z1} \end{bmatrix} = -j\omega \begin{bmatrix} \bar{\mu}_t \cdot & 0 \\ 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_{t1} \\ \tilde{H}_{z1} \end{bmatrix} \quad (11\cdot1)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{d}\cdot & \nabla_t \times \\ \nabla_t \times & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_{t1} \\ \tilde{H}_{z1} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \bar{\bar{\varepsilon}}_t \cdot & 0 \\ 0 & \varepsilon_z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_{t1} \\ \tilde{E}_{z1} \end{bmatrix} \quad (11\cdot2)$$

ここで,

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} d_0 & jd \\ -jd & d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega b_0/c & j(k_z + \omega b/c) \\ -j(k_z + \omega b/c) & \omega b_0/c \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(11·1)と(11·2)の各々の第1行より次式を得る。

$$\tilde{E}_{t1} = T^{-1}\cdot\left\{-\bar{d}^{-1}\cdot(\nabla_t \times \tilde{E}_{z1}) + j\omega\bar{d}^{-1}\cdot\bar{\mu}_t\cdot\bar{d}^{-1}\cdot(\nabla_t \times \tilde{H}_{z1})\right\} \quad (13\cdot1)$$

$$\tilde{H}_{t1} = T^{-1}\cdot\left\{-\bar{d}^{-1}\cdot(\nabla_t \times \tilde{H}_{z1}) - j\omega\bar{d}^{-1}\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}_t\cdot\bar{d}^{-1}\cdot(\nabla_t \times \tilde{E}_{z1})\right\} \quad (13\cdot2)$$

ここで,

$$T = \bar{\bar{I}} - \omega^2\bar{d}^{-1}\cdot\bar{\mu}_t\cdot\bar{d}^{-1}\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}_t = \bar{\bar{I}} - \omega^2\bar{d}^{-1}\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}_t\cdot\bar{d}^{-1}\cdot\bar{\mu}_t \quad (14)$$

ただし, $\bar{\bar{I}}$ は単位マトリックスである。

つぎに自由空間中では式(8), (9), (10)より次式が得られる。

$$\tilde{E}_{t2} = -\frac{j}{p^2}\left[\omega\mu_0\nabla_t \times \tilde{H}_{z2} + k_z\bar{\bar{K}}\cdot\nabla_t \times \tilde{E}_{z2}\right] \quad (15\cdot1)$$

$$\tilde{H}_{t2} = -\frac{j}{p^2}\left[-\omega\varepsilon_0\nabla_t \times \tilde{E}_{z2} + k_z\bar{\bar{K}}\cdot\nabla_t \times \tilde{H}_{z2}\right] \quad (15\cdot2)$$

ここで,

$$p^2 = k_0^2 - k_z^2 \quad (16)$$

$$k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \qquad (17)$$

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

3. 波動方程式とその解.

式(11)の $\tilde{H}_{t1}$, $\tilde{E}_{t1}$ を消去することにより, $\tilde{E}_{z1}$, $\tilde{H}_{z1}$ に関する波動方程式が得られる。

$$(\nabla_t^2 + \frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_1'} k^2 e)\tilde{E}_{z1} = -j\omega\mu_0 f_0 \tilde{H}_{z1} \qquad (19\cdot1)$$

$$(\nabla_t^2 + k^2 h)\tilde{H}_{z1} = j\omega\varepsilon_3' f_0 \tilde{E}_{z1} \qquad (19\cdot2)$$

ここで, ∇_t^2 は横平面内でのラプラシアン演算子である。また,

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1' \qquad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} e &= \delta_m (Q^2 - Q_0^2)(d_0^2 - d^2)^2 / \chi \\ h &= \delta_a (Q^2 - Q_0^2)(d_0^2 - d^2)^2 / \chi \\ f_0 &= \tau_0 (Q^2 - Q_0^2)(d_0^2 - d^2)^3 / \chi \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

$$\delta_m = (md_0 - m_0 d)\tau_0 + (md - m_0 d_0)\tau \qquad (22)$$

$$\delta_a = (ad_0 - a_0 d)\tau_0 + (ad - a_0 d_0)\tau \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau &= Qd - Q_0 d_0 \\ \tau_0 &= Qd_0 - Q_0 d \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

$$Q_0 = -k^2[(ad_0 - a_0 d)(md - m_0 d) + (ad - a_0 d_0) \cdot (md_0 - m_0 d)] / (d_0^2 - d^2)^2 \qquad (25\cdot1)$$

$$Q = 1 - k^2[(ad_0 - a_0 d)(md_0 - m_0 d) + (m_0 d_0 - md) \cdot (ad - a_0 d_0)] / (d_0^2 - d^2)^2 \qquad (25\cdot2)$$

$$\chi = \tau_0^2 (d_0^2 - d^2)^2 - k^2 \tau^2 \qquad (26)$$

式(19)はE, Hの結合した偏微分方程式となっているが，次式で定義するスカラー関数ψ_iを用いることによって解くことができる。

すなわち，

$$\psi_i = \tilde{E}_{12} + j\sigma_i \tilde{H}_{12} \quad (i=1,2) \tag{27}$$

ただし，σ_iは次式の根である。

$$\omega\varepsilon_3' f_0 \sigma_i^2 - k^2\left(h - \frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_1'}e\right)\sigma_i - \omega\mu_0 e_0 = 0 \tag{28}$$

したがって，式(19)は次式のように二次元スカラー同次Helmholtz方程式となる。

$$(\nabla_t^2 + g_i^2)\psi_i = 0 \tag{29}$$

ここで，

$$g_i^2 = \frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_1'}k^2 e + \sigma_i \omega \varepsilon_3' f_0 \tag{30}$$

式(29)の解ψ_1, ψ_2と式(27)より$\tilde{E}_{12}$, $\tilde{H}_{12}$は式(31)で表わされる。

$$\tilde{E}_{12} = \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}(\sigma_2\psi_1 - \sigma_1\psi_2) \tag{31-1}$$

$$\tilde{H}_{12} = \frac{j}{\sigma_2 - \sigma_1}(\psi_1 - \psi_2) \tag{31-2}$$

つぎに媒質Ⅱでは次の波動方程式が得られる。

$$(\nabla_t^2 + p^2)\begin{bmatrix}\tilde{E}_{23}\\ \tilde{H}_{23}\end{bmatrix} = 0 \tag{32}$$

問題の性質により，$\partial/\partial x = 0$であることを考慮すると，ψ_1, ψ_2は…で表わされる。

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= A_1 e^{-j\beta_1(y-l)} + A_2 e^{j\beta_1(y-l)} \\ Y_2 &= B_1 e^{-j\beta_2(y-l)} + B_2 e^{j\beta_2(y-l)} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

したがって，式(33)と(31)より $\tilde{E}_{1z}$, $\tilde{H}_{1x}$ が求められ，他の成分は式(13)より得られる。また，式(32)より $\tilde{E}_{2x}$, $\tilde{H}_{2z}$ は次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{2x} \\ \tilde{H}_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ -D \end{bmatrix} e^{-j\beta(y-l)} \quad (34)$$

他の成分は式(15)より得られる。

ここで，A_1, A_2, B_1, B_2, C, D は未定定数である。これらの未定定数を決定するために，完全導体面上，$y=0$, $z=0$ の位置に x 軸方向に線状磁流源が存在するものと仮定すると，$y=0$ での境界条件は式(35)で表わされ，また，$y=l$ での境界条件として，電界，磁界の接線成分が連続でなければならないので，式(36)が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} E_{1x}(0,z) &= 0 \\ E_{1z}(0,z) &= E_0 \delta(z) \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

$$\left.\begin{aligned} E_{1x}(l,z) &= E_{2x}(l,z) \\ E_{1z}(l,z) &= E_{2z}(l,z) \\ H_{1x}(l,z) &= H_{2x}(l,z) \\ H_{1z}(l,z) &= H_{2z}(l,z) \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

4. 遠距離放射電磁界

式(35), (36)から未定定数を求め, フーリエ積分を用いると, 自由空間中の電磁界成分は次式で与えられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
H_{2x}(y,z) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0 E_0 \omega \frac{g_H}{p} e^{-jp(y-l)-jk_2 z}\, dk_2 \\
E_{2y}(y,z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0 \frac{k_2 g_H}{p} e^{-jp(y-l)-jk_2 z}\, dk_2 \\
E_{2z}(y,z) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0 g_H e^{-jp(y-l)-jk_2 z}\, dk_2
\end{aligned}
\right\} \quad (37)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
E_{2x}(y,z) &= \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_0 E_0 \omega \frac{g_E}{p} e^{-jp(y-l)-jk_2 z}\, dk_2 \\
H_{2y}(y,z) &= \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0 \frac{k_2 g_E}{p} e^{-jp(y-l)-jk_2 z}\, dk_2 \\
H_{2z}(y,z) &= \frac{-j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0 \frac{k_2 g_E}{p} e^{-jp(y-l)-jk_2 z}\, dk_2
\end{aligned}
\right\} \quad (38)
$$

ここで,

$$
\left.
\begin{aligned}
g_H &= (\sigma_2-\sigma_1)(\Delta_{b1} M_2 g_1 - \Delta_{b2} M_1 g_2)/\Delta \\
g_E &= (\sigma_2-\sigma_1)(\Delta_{a1} M_2 g_1 - \Delta_{a2} M_1 g_2)/\Delta
\end{aligned}
\right\} \quad (39)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\Delta_{ai} &= \varepsilon_0 \xi_i M_i \cos g_i l + j \sin g_i l \\
\Delta_{bi} &= \mu_0 \xi_i N_i \cos g_i l + j \sigma_i \sin g_i l \\
\Delta_{ci} &= \cos g_i l + j \varepsilon_0 \xi_i M_i \sin g_i l \\
\Delta_{di} &= \sigma_i \cos g_i + j \mu_0 \xi_i N_i \sin g_i l
\end{aligned}
\right\} \quad (40)
$$

$$\Delta = (\Delta_{a1} M_2 \xi_1 - \Delta_{a2} M_1 \xi_2)(\Delta_{d1}\sigma_2 - \Delta_{d2}\sigma_1) - (\Delta_{b1} M_2 \xi_1 - \Delta_{b2} M_1 \xi_2)(\Delta_{c1}\sigma_2 - \Delta_{c2}\sigma_1) \quad (41)$$

$$\xi_i = \omega(Q^2 - Q_0^2)(d_0^2 - d^2)^2 / (p\chi\xi_i) \quad (42)$$

$$\left.\begin{aligned} M_i &= \tau_0 (d_0^2 - d^2)\sigma_i + \omega\mu_0 \delta_m \\ N_i &= \tau_0 (d_0^2 - d^2) + \omega\varepsilon_1 \delta_a \sigma_i \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

したがって，図1に示すように極座標(r, ϕ)を導入し，式(37)，(38)の積分を鞍部点法で近似計算すれば，波源から十分遠方の放射界はつぎのように求められる。

$$\left.\begin{aligned} H_{2x}(r,\phi) &= -\varepsilon_0 E_0 \omega g_{HS} u e^{j\beta_3 l} / (2\pi\beta_3) \\ E_{2y}(r,\phi) &= E_0 k_{2S} g_{HS} u e^{j\beta_3 l} / (2\pi\beta_3) \\ E_{2z}(r,\phi) &= -E_0 g_{HS} u e^{j\beta_3 l} / (2\pi) \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

$$\left.\begin{aligned} E_{2x}(r,\phi) &= j\mu_0 E_0 \omega g_{ES} u e^{j\beta_3 l} / (2\pi\beta_3) \\ H_{2y}(r,\phi) &= jE_0 k_{2S} g_{ES} u e^{j\beta_3 l} / (2\pi\beta_3) \\ H_{2z}(r,\phi) &= -jE_0 g_{ES} u e^{j\beta_3 l} / (2\pi) \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

ここで，添字Sは停留点での停留値を表わし，停留点は式(46)で与えられる。

$$k_{2S} = k_0 \sin\phi \quad (46)$$

さらに，

$$u = \left(\frac{j2\pi k_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-jk_0 r} \cos\phi \quad (47)$$

5. 放射パターン。

電磁界成分を円筒座標で[illegible]，すと，ポインティング

ベクトルはr方向成分のみで，その時間平均を$\overline{S}_r$とすれば次式で与えられる。

$$\overline{S}_r = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \omega}{4\pi r}\left(|g_{HS}|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}|g_{ES}|^2\right) \qquad (48)$$

式(48)の放射電力は式(37),(38)で表わされているように，E波による寄与とH波による寄与の和になっている。また，放射パターンを与える関数$G(\phi)$を次式で定義する。

$$G(\phi) = \frac{4\pi r}{\varepsilon_0 E_0^2 \omega}\cdot \overline{S}_r \qquad (49)$$

したがって，式(48)を(49)に用いると式(50)が得られる。

$$G(\phi) = |g_{HS}|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}|g_{ES}|^2 \qquad (50)$$

$G(\phi)$の数値計算例として，n_0, n_1, n_2, $k_0 l$, βを適当に選び，計算した結果を図1－図5に示す。

まず，図1，2では，βの増加に伴い最大放射方向が運動方向に傾き，同時にその最大値の大きさは変らない。図1と図2を比較すると，スラブが静止している場合には，$k_0 l = 1.0$ と 2.0 ではほとんどパターンに変化が見られないが，$\beta \neq 0$のときはスラブが厚くなると，$\phi \lesssim 45°$の範囲のパターンは相当変化する。

つぎに図3，および4においては，βの増加に伴い運動方向の放射が増加する。図3と図4を比較することによって誘電率テンソルの非対角項による影響を調べると，スラブが静止している場合は，$n_0 = 0.05$と

0.9では，垂直方向の放射はほとんど変化しないが，$-65° \lesssim \phi \lesssim 65°$ $(\phi \neq 0)$ の範囲の放射は，$n_0 = 0.9$ の方が $n_0 = 0.05$ より増大している。また $\beta \neq 0$ の場合は，$\beta = 0.8$ の場合を除いて，垂直方向の放射が増加し，運動方向の放射は減少の傾向にある。さらに図5では，$\beta = 0$ のときに $-40°$ 付近にある最大放射は β の増加に伴い減少するが，$+40°$ 付近の最大放射は変化しない。最後に図1と図5を比較することによって，誘電率テンソルの対角項による影響を調べると，静止の場合では，$n_3 > n$ で $\phi \cong \pm 40°$ 付近に最大放射が現われるが，$n_3 < n$ で垂直方向に放射が最大となる。また $\beta \neq 0$ の場合は，$n_3 > n$ の場合の最大放射方向は β の変化に対して余り変化しないが $n_3 < n$ の場合は β の増加に伴い最大放射方向が運動方向に寄ってくる。

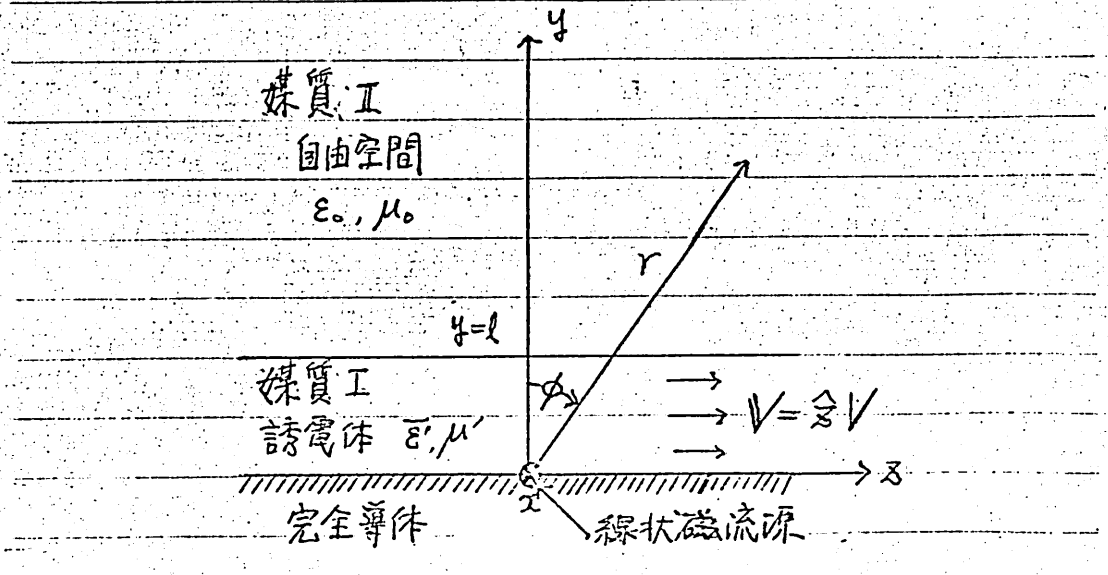
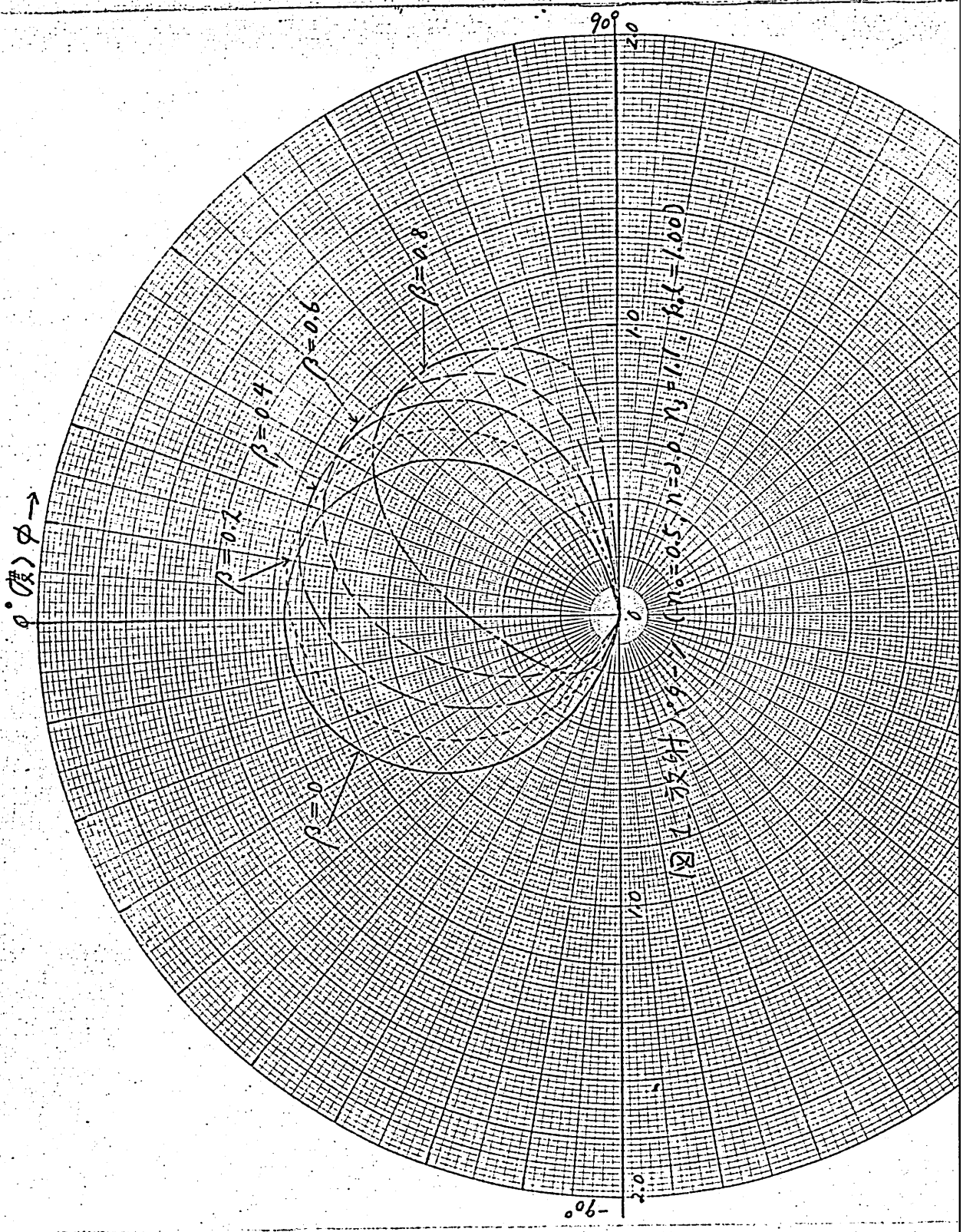
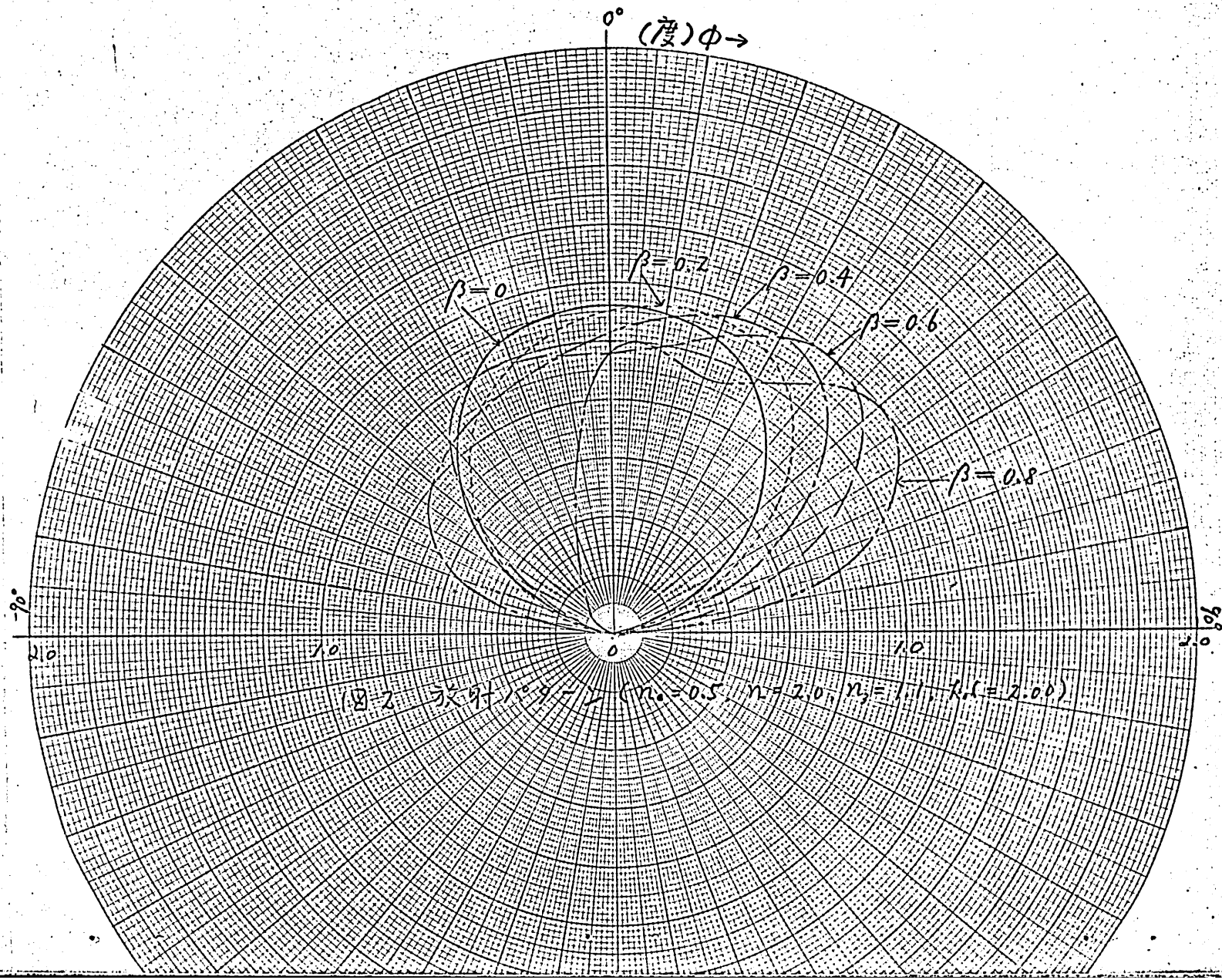


図1. [illegible] 構成図

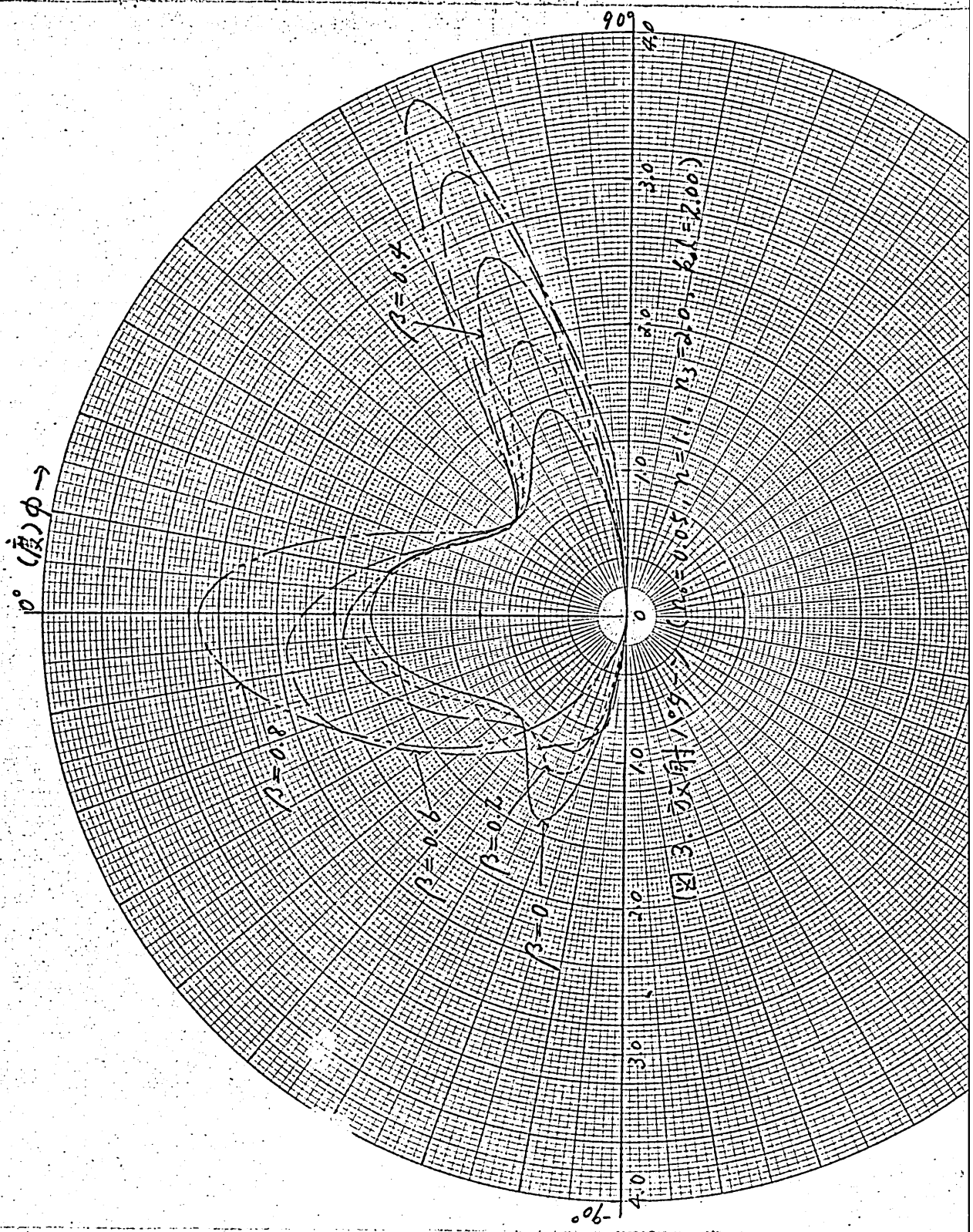

90°
20
1.0
0
1.0
2.0
-90°
0°
β=0.8
β=0.6
β=0.4
β=0.2
β=0
n₁=1.00
n₂=1.1
n₃=1.2
n=0.5
n=0.6
n=0.7
n=0.8
n=0.9
n=1.0



(図-2 二次計パターン) ($n_0=0.5$, $n=2.0$, $n_1=1.1$, $\mu_1=2.00$)

No. 14.

No. 15.


90°
4.0
3.0
2.0
1.0
0
1.0
2.0
3.0
4.0
-90°
0° (実) φ →
β=0.4
β=0.6
β=0.8
β=0
β=0.2
β=0.4
β=0
(R) 3素子ヤギ・ウダ (d=0.5λ, h=1.1, h3=0.9, ρ=2.00)

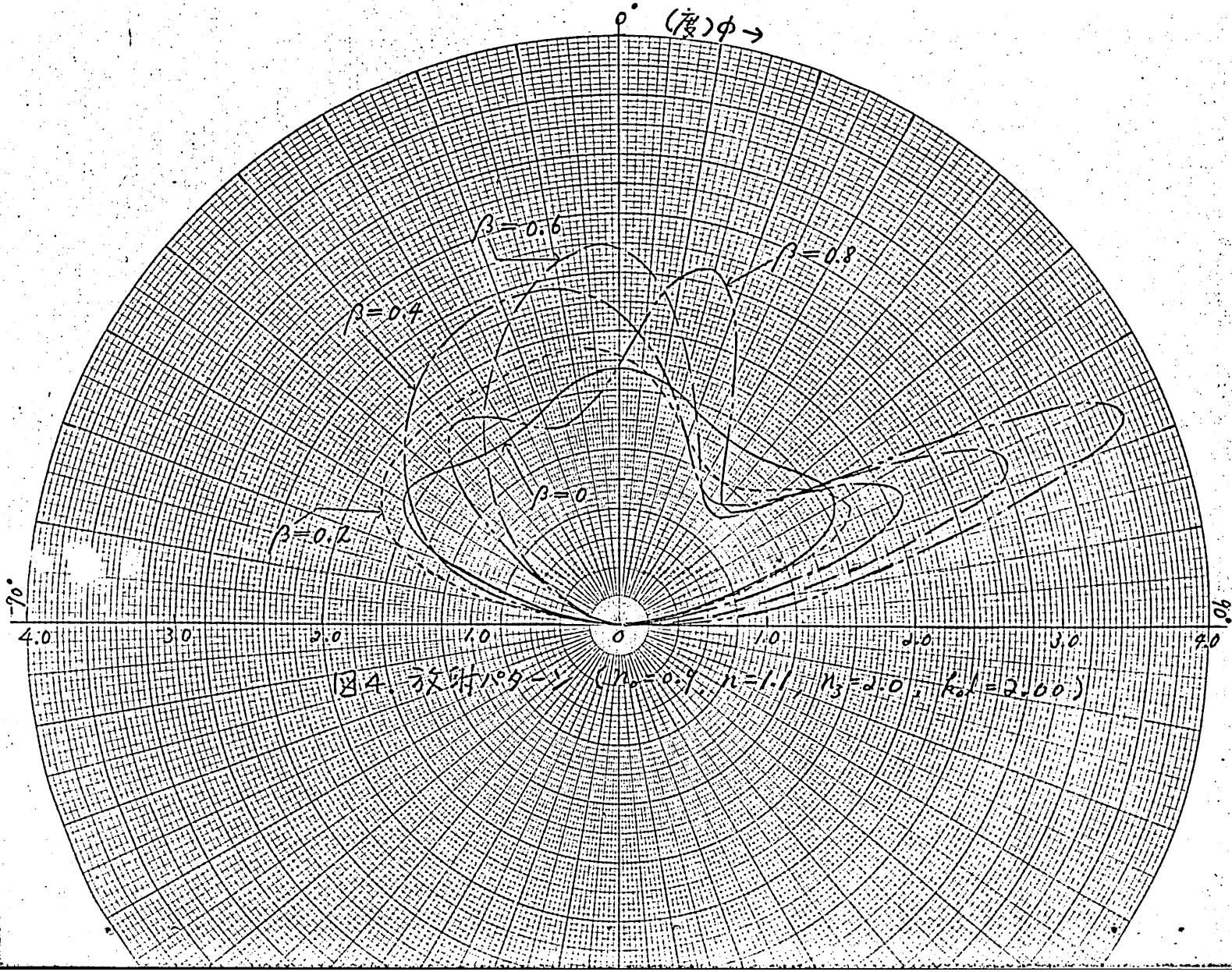
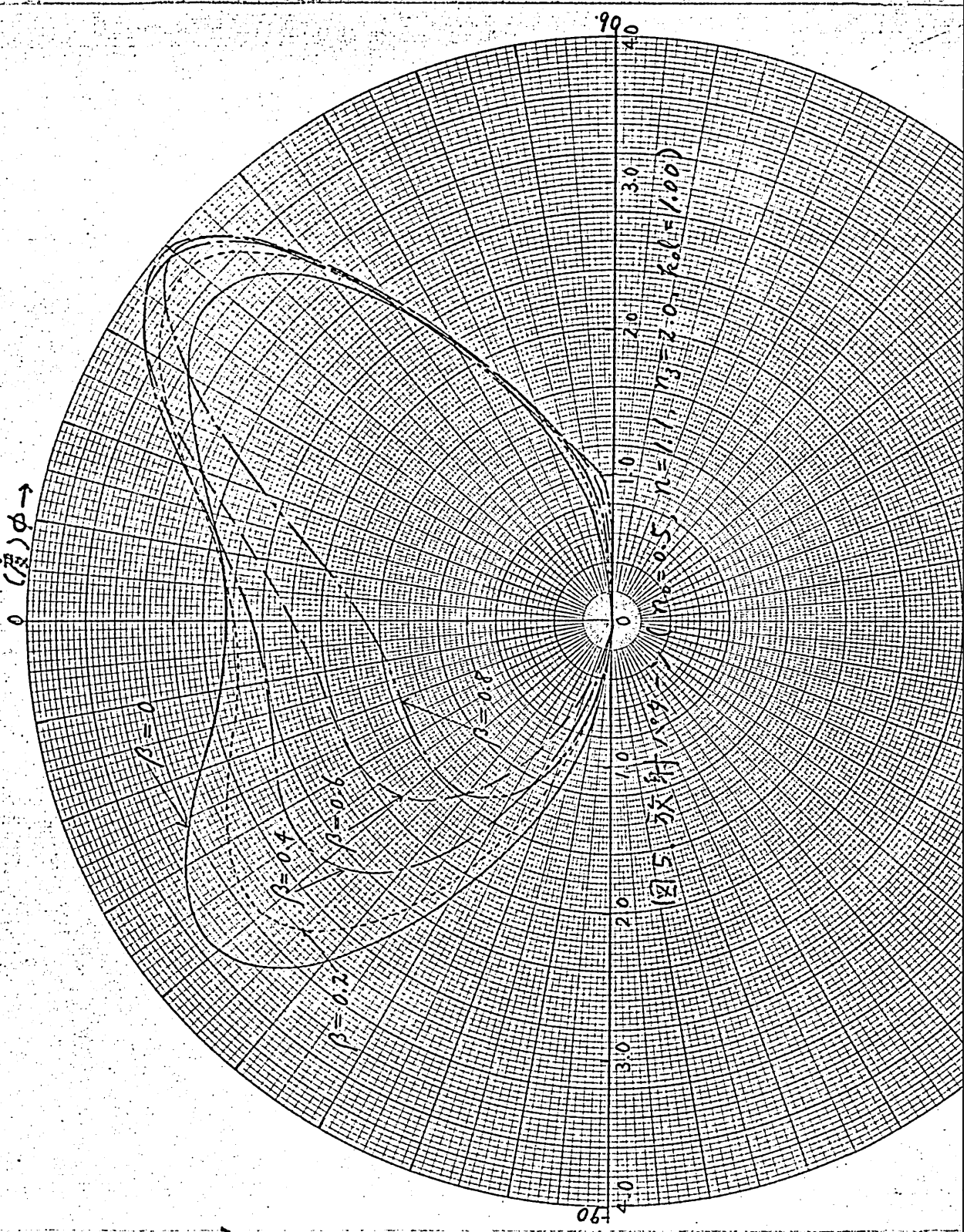


図4. 放射パターン ($\eta_0=0.9$, $n=1.1$, $n_3=3.0$, $k_0 l=2.00$)

No. 19

No. 17.


90
4.0
3.0
2.0
1.0
0
1.0
2.0
3.0
4.0
90
θ (または) φ
β=0
β=0.2
β=0.4
β=0.6
β=0.8
(図5) 球状ベッセル関数 (η₀=0.5, η=1.1, η₃=2.0, κa(=1.00))

6. むすび.

本稿では，運動磁化プラズマスラブ内の線波源からの放射問題を検討するための一段階として，その誘電率テンソルの周波数分散を考慮しない場合，すなわち，運動異方性誘電体スラブにおおわれたスロットアンテナからの放射について考察した。ここでの解析において，表面波，ならびにLeaky waveについては何ら考察をおこなわなかった。

磁化プラズマスラブ内の線波源からの放射波と表面波については，現在検討中であり，いずれ稿を改めて報告するつもりである。

終りに，日頃，ごべんたついただく熊谷教授をはじめ，御討論いただく核融合研究室，熊谷研究室の電磁界理論研究グループの方々に深謝する。

文献.

(1) K. S. H. Lee and C. H. Papas: "Antenna radiation in a moving dispersive medium", IEEE Trans. AP-13, p.799 (Sep. 1965)

(2) T. Kojima, K. Itakura: "Radiation from a magnetic line source in a moving isotropic plasma", Can. J. phys. 48, p.873 (April 1970)

(3) B. R. Chawla and H. Unz : "Reflection and transmission of electromagnetic waves normally incident on a plasma slab moving uniformly along a magnetostatic field", IEEE Trans., AP-17, p.771 (Nov, 1969)

(4) 小嶋, 東, 板倉 : "運動圧縮性プラズマスラブによる平面電磁波の反射", 輻研資 (1971-04) ; あるいは "Reflection and transmission of electromagnetic waves obliquely incident upon a moving compressible plasma slab", IEEE Trans. AP, (to be published).

(5) T. Kojima, K. Itakura and T. Higashi ; "Radiation from magnetic line source covered with a moving sheath", Radio Science (to be published).

(6) 小嶋, 東, 板倉 ; "運動異方性誘電体スラブ内の線源からの放射", 輻研資 (1971-04) ; あるいは "The effects of a moving anisotropic grounded layer on radiation from a line source", IEEE Trans. AP, (March 1972), to be published.

輻射科学研究会資料

パルス波と運動誘電体媒質との相互作用

小川英一
鈴木俊雄
藤岡弘
(大阪大学・工学部)

1972年1月28日

1．序　　言

運動媒質の境界面における反射・透過現象に関してすでに色々の報告がなされているが，これらはすべて入射波が平面波の場合である．ところで，入射波が平面波ではなく，空間的あるいは時間的に制限された波の場合には，従来見られなかった種々の興味ある現象が現われることが期待される．そこで，著者らは最近空間的に制限された波 すなわちbounded beam が運動誘電体媒質の境界面に入射した場合を取り扱い，本研究会において報告した.(1)

ここでは，入射波が時間的に制限された波，すなわちパルス波の場合を取り扱う．静止誘電体媒質の境界面にパルス波が入射するとき，部分反射の場合には反射波のパルス波形は入射波のパルス波形に相似であるが，全反射を起こす場合には反射波のパルス波形が崩れることは良く知られている.(2)本文では，境界面に平行に運動している誘電体媒質に適当に定義されたパルス波が入射する場合を取り扱い，媒質の運動が反射波のパルス波形におよぼす影響を数値計算例をあげて詳しく検討する．

2．入射パルス波

図１に示すように，$z>0$ の領域は（ε_1，μ_0）なる誘電体（媒質Ⅰ），$z<0$ の領域は（ε_2，μ_0）なる誘電体（媒質Ⅱ）によって満されているものとし，媒質Ⅱは媒質Ⅰに対して x 方向に速度 v で一様に運動しているものとする．

いま z の正の側から入射角 θ をもつパルス波が入射するものとし，この入射パルス波としてつぎのようなスカラパルス波 $F_i(\xi_i)$ を考える.(2)

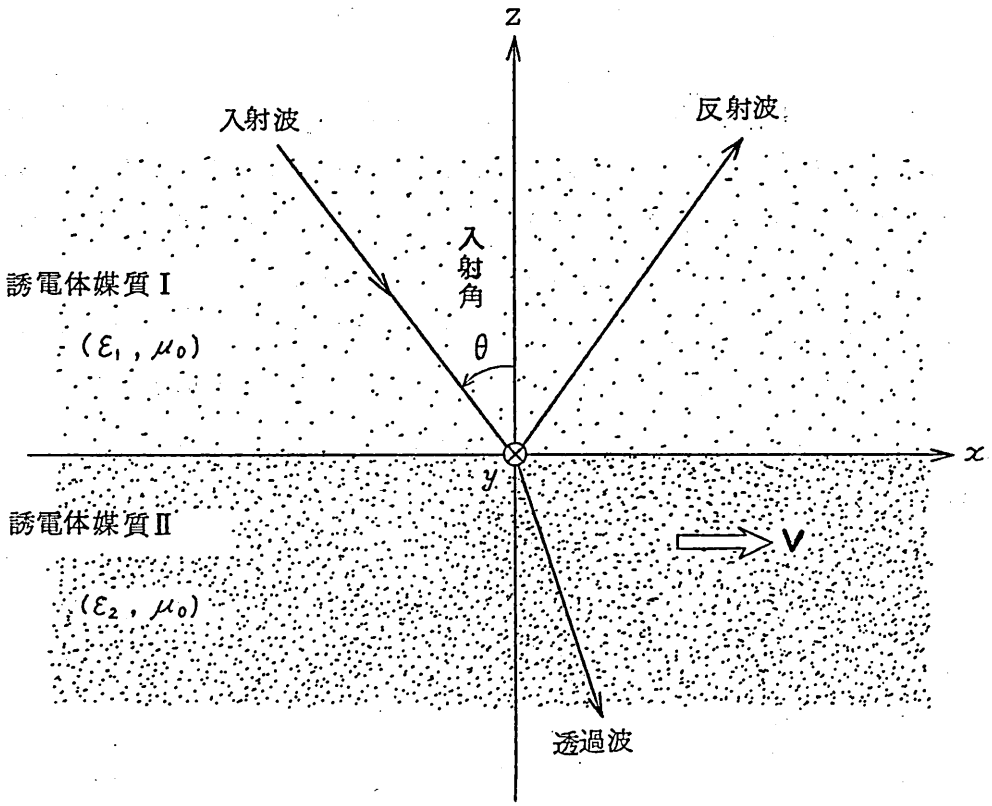


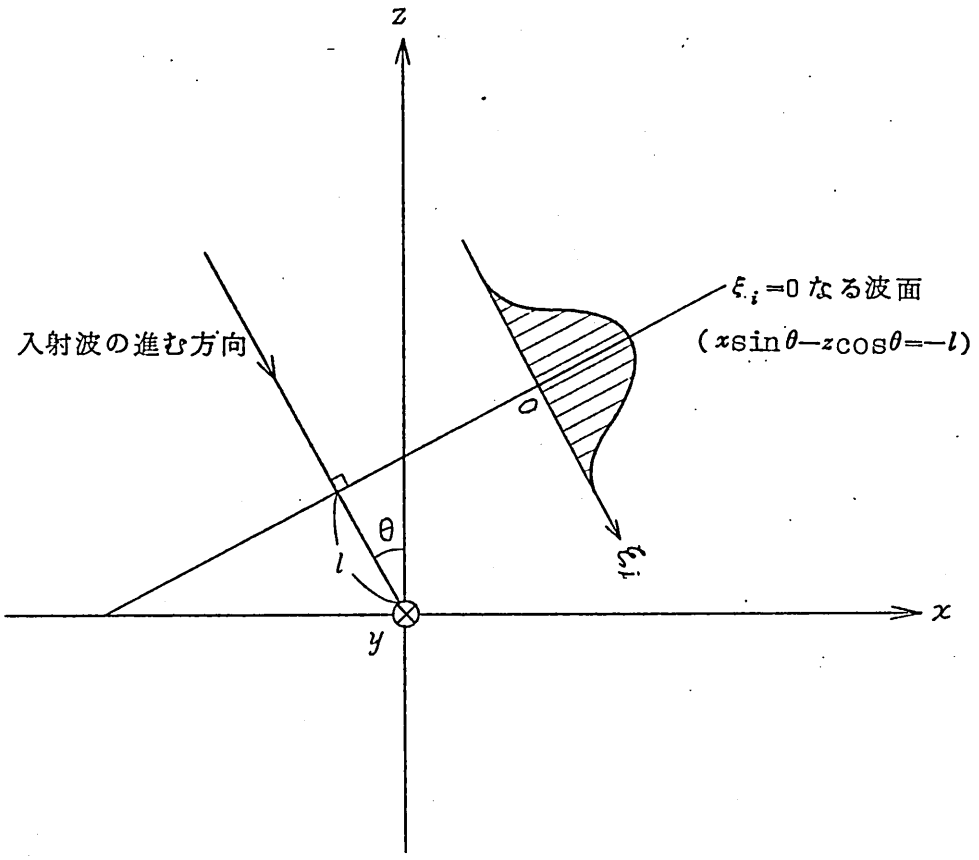
図1　座　標　系

$$F_i(\xi_i) = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \xi_i^2} \tag{1}$$

ただし，　$$\xi_i = \frac{x \sin\theta - z \cos\theta}{c} - t \tag{2}$$

ここで，c は誘電体媒質Ⅰ中を伝搬する平面波の位相速度を表わし

$$c = \frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}} \tag{3}$$



時刻 $t=-\frac{l}{c}$ (<0) のパルス波の位置

(l は原点から波面までの距離)

図2　入射パルス波の様子

である．またGはパルス波形を特徴づけるパラメータである．式(1),(2)から $F_i(\xi_i)$ は図2に示すように，$x\sin\theta-z\cos\theta=\text{const}$ を波面とし入射角 θ，速度 c をもつパルス波を表わすことがわかる．図2は $t=-l/c$ のときのパルス波形を表わしているが，$t=0$ の瞬間には最大振幅の波面(

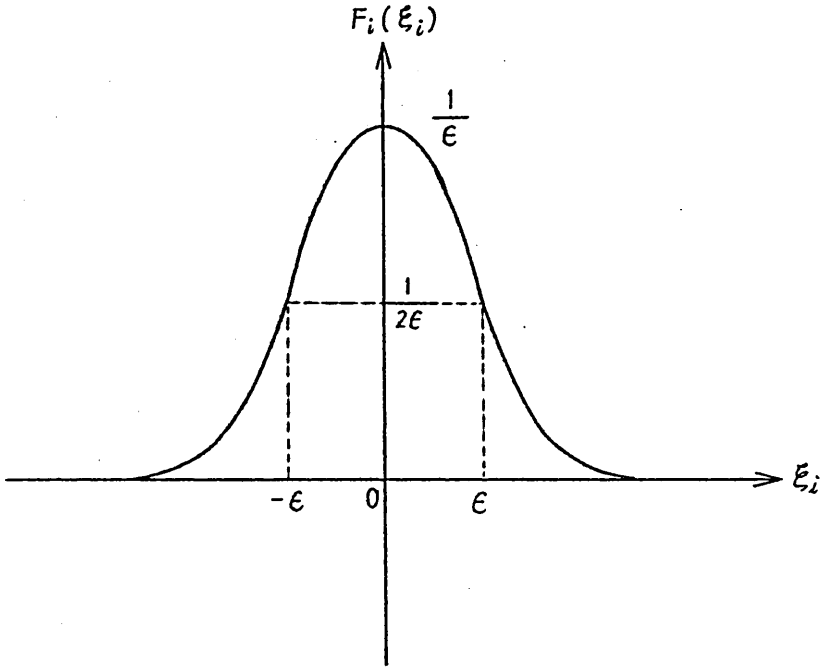


図３　$F_i(\xi_i)$の様子

$\xi_i = 0$ ）は座標原点を通過することになる．なお，式（1）で与えられる$F_i(\xi_i)$は図３に示すように高さ$1/\epsilon$，半値幅2ϵの波形を表わし，その面積はϵに無関係にπである．したがって，極限

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{F_i(\xi_i)}{\pi}$$

をとれば$F_i(\xi_i)/\pi$はDirac のデルタ関数$\delta(\xi_i)$となる．

さて，入射パルス波$F_i(\xi_i)$をつぎのようにFourier 積分によって平面波の和として表示する．

$$F_i(\xi_i) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{-j\omega\xi_i}\, d\omega$$

$$= Re \int_{0}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{-j\omega\xi_i}\, d\omega \qquad (4)$$

ただし，

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_i(\xi_i)\, e^{j\omega\xi_i}\, d\xi_i \qquad (5)$$

式(1)で表わされる$F_i(\xi_i)$に対して$\Phi(\omega)$は次式のように求まる．

$$\Phi(\omega) = \exp(-\epsilon|\omega|) \qquad (6)$$

したがって入射パルス波は結局次式のように表わされる．

$$F_i(\xi_i) = Re \int_{0}^{\infty} \exp(-\epsilon|\omega| - j\omega\xi_i)\, d\omega \qquad (7)$$

$F_i(\xi_i)$が$z > 0$の領域で波動方程式を満たしていることは明らかである．

次節で式(7)で表わされる入射パルス波による反射波について考察する．

3．反射パルス波

ここでは，反射波を求める方法として平面波近似を用いる．すなわち，まず入射波が平面波である場合の反射波と入射波の振幅比を求め，ついでこの振幅比を用いて入射波がパルス波である場合の反射波を求める．いま，入射

波が平面波である場合の，入射波に対する反射波の振幅比を$R(\omega)$とすれば，$R(\omega)$は一般には次式のように表わされる．

$$R(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \tag{8}$$

入射パルス波は式(4)からわかるように種々の周波数をもつ平面波の合成として表わされているが，これらの入射波の素波に式(8)で与えられる反射波の振幅比を乗ずれば反射波の素波が得られる．したがって，反射波$F_r(\xi_r)$はこれらの素波の合成として式(4)および(8)からつぎのように表わされる．

$$F_r(\xi_r) = Re \int_0^\infty R(\omega)\, \Phi(\omega)\, e^{-j\omega\xi_r}\, d\omega \tag{9}$$

ただし，

$$\xi_r = \frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{c} - t \tag{10}$$

ところで，入射平面波としてE波(電界が入射面に垂直な波)およびH波(磁界が入射面に垂直な波)を考えたとき，それぞれの場合について振幅比Rは次式で与えられる．[3]

$$R = \begin{cases} \dfrac{k_z^{(1)} - k_z^{(2)}}{k_z^{(1)} + k_z^{(2)}} & (E\text{波の場合}) \qquad (11a) \\ \dfrac{n_2^2 k_z^{(1)} - n_1^2 k_z^{(2)}}{n_2^2 k_z^{(1)} + n_1^2 k_z^{(2)}} & (H\text{波の場合}) \qquad (11b) \end{cases}$$

ただし，

$$n_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}\quad,\qquad n_2=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}$$

である．また，$k_z^{(1)}$および$k_z^{(2)}$はそれぞれ静止媒質Ⅰおよび運動媒質Ⅱ中の伝搬定数を表わし，次式のように与えられる．

$$k_z^{(1)}=-n_1 k_0\cos\theta \tag{12}$$

$$(k_z^{(2)})^2=\begin{cases}-k_0^2 n_1^2\gamma^2(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\theta_1)(\sin\theta-\theta_2)\ ,\ (n_2^2\beta^2\neq 1) & (13a)\\ -k_0^2\gamma^2\{2n_1\beta(n_2^2-1)\sin\theta-(n_2^2-\beta^2)\}\ ,\ (n_2^2\beta^2=1) & (13b)\end{cases}$$

ただし，

$$\theta_1=\frac{n_2+\beta}{n_1(n_2\beta+1)}\quad,\qquad \theta_2=\frac{n_2-\beta}{n_1(n_2\beta-1)} \tag{14}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad,\qquad \beta=\frac{v}{c_0}\quad,\qquad c_0=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

振幅比Rは一般には式(8)に示したように周波数ωの関数であるが，本文で取り扱っているような通常の誘電体媒質の場合には上式から明らかなように，たとえ媒質が運動している場合についても周波数ωには無関係となり，したがって式(9)においてRは積分記号の外に出すことができる．すなわち

$$F_r(\xi_r)=Re\left[R\int_0^\infty \Phi(\omega)\,e^{-j\omega\xi_r}\,d\omega\right] \tag{15}$$

ここで，振幅比Rの表式を具体的に求めよう．式(11)～(14)から部分反射

および全反射のそれぞれの場合についてRはつぎのように求められる．

(i)　部分反射の場合

$k_z^{(2)}$が実数の場合，すなわち

$$(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\theta_1)(\sin\theta-\theta_2)<0, \quad (n_2^2\beta^2\neq 1) \qquad (16a)$$

$$2n_1\beta(n_2^2-1)\sin\theta-(n_2^2-\beta^2)<0, \quad (n_2^2\beta^2=1) \qquad (16b)$$

のときには部分反射となり，振幅比RはE波およびH波のそれぞれの場合についてつぎのように求められる．

$$R=A=\begin{cases}\dfrac{n_1\cos\theta-p}{n_1\cos\theta+p}, & (E\text{波の場合}) \qquad (17a)\\[2ex] \dfrac{n_2^2n_1\cos\theta-n_1^2p}{n_2^2n_1\cos\theta+n_1^2p}, & (H\text{波の場合}) \qquad (17b)\end{cases}$$

ただし，

$$p=\begin{cases}\gamma n_1\sqrt{-(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\theta_1)(\sin\theta-\theta_2)}, & (n_2^2\beta^2\neq 1) \quad (18a)\\ \gamma\sqrt{-2n_1\beta(n_2^2-1)\sin\theta+(n_2^2-\beta^2)}, & (n_2^2\beta^2=1) \quad (18b)\end{cases}$$

(ii)　全反射の場合

$k_z^{(2)}$が純虚数の場合，すなわち

$$(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\theta_1)(\sin\theta-\theta_2)>0, \quad (n_2^2\beta^2\neq 1) \qquad (19a)$$

$$2n_1\beta(n_2^2-1)\sin\theta-(n_2^2-\beta^2)>0, \quad (n_2^2\beta^2=1) \qquad (19b)$$

のときには全反射が起こり，このとき振幅比Rはつぎのように表わされる．

$$R = A + jB \tag{20}$$

ただし

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \tag{21a}$$

$$B = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \tag{21b}$$

ここで，aおよびbはE波およびH波のそれぞれの場合についてつぎのように定義される量である．ただし，添字EおよびHはE波およびH波に関する量であることを表わす．

E波の場合：

$$a_E = \begin{cases} \cos\theta \quad , & (n_2^2\beta^2 \neq 1) \quad (22a) \\ n_1\cos\theta \quad , & (n_2^2\beta^2 = 1) \quad (22b) \end{cases}$$

$$b_E = \begin{cases} r\sqrt{(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\theta_1)(\sin\theta-\theta_2)}\,, & (n_2^2\beta^2 \neq 1) \quad (23a) \\ r\sqrt{2n_1\beta(n_2^2-1)\sin\theta-(n_2^2-\beta^2)}\,, & (n_2^2\beta^2 = 1) \quad (23b) \end{cases}$$

H波の場合：

$$a_H = n_2^2\, a_E \tag{24}$$

$$b_H = n_1^2\, b_E \tag{25}$$

以上の結果を用いて式(15)の積分を実行することにより，部分反射および全反射のそれぞれの場合について反射パルス波$F_r(\xi_r)$がつぎのように求められる．ただし，上部の添字(p)および(t)はそれぞれ部分反射および全反射に関する量を表わす．

$$F_r^{(p)}(\xi_r) = A\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\xi_r^2} \tag{26}$$

$$F_r^{(t)}(\xi_r) = A\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\xi_r^2} + B\frac{\xi_r}{\epsilon^2+\xi_r^2} \tag{27}$$

上式より反射波のパルス波形は部分反射の場合には入射パルス波形と相似形であるが，全反射が起こる場合には式(27)の第2項で表わされる量だけ変化を受けることがわかる．

4．電磁エネルギー流およびエネルギー保存則

本節では，入射パルス波および反射パルス波にともなう電磁エネルギー流すなわちPoyntingベクトルについて考察し，全反射の場合には，入射パルス波のもつエネルギーと反射パルス波のもつエネルギーとが等しくなりエネルギーの保存則が成り立つことを示す．

まず，入射パルス波がE波あるいはH波のそれぞれの場合について入射パルス波および反射パルス波の電磁界成分を求める．入射E波の場合の電界成分あるいは入射H波の場合の磁界成分が式(1)で表わされるスカラパルス波$F_i(\xi_i)$で表わされるものとすれば，入射パルス波の各電磁界成分はつぎのように表わされる．ただし{　}内の上段および下段はそれぞれE波および

H波に関する量である．

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(i)} \\ H_y^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_E \\ K_H \end{Bmatrix} F_i(\xi_i) \qquad \begin{matrix} (28a) \\ (28b) \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x^{(i)} \\ E_x^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{K_E}{Z_1} \\ -Z_1 K_H \end{Bmatrix} \cos\theta \cdot F_i(\xi_i) \qquad \begin{matrix} (29a) \\ (29b) \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_z^{(i)} \\ E_z^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{K_E}{Z_1} \\ -Z_1 K_H \end{Bmatrix} \sin\theta \cdot F_i(\xi_i) \qquad \begin{matrix} (30a) \\ (30b) \end{matrix}$$

ここでK_EおよびK_Hは次元を合わせるための定数であり，

$$Z_1 = \frac{1}{n_1\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \qquad (31)$$

は媒質Ⅰの波動インピーダンスを表わす．

つぎに，反射パルス波を表わすスカラパルス波を$F_r(\xi_r)$とすれば反射パルス波の各電磁界成分はつぎのように表わされる．ただし$F_r(\xi_r)$は部分反射の場合には式(26)の$F_r^{(p)}(\xi_r)$で与えられ，また全反射の場合には式(27)の$F_r^{(t)}(\xi_r)$で与えられる．

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(r)} \\ H_y^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_E \\ K_H \end{Bmatrix} F_r(\xi_r) \qquad \begin{matrix} (32a) \\ (32b) \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x^{(r)} \\ E_x^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{K_E}{Z_1} \\ Z_1 K_H \end{Bmatrix} \cos\theta \cdot F_r(\xi_r) \qquad \begin{matrix} (33a) \\ (33b) \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_z^{(r)} \\ E_z^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{K_E}{Z_1} \\ -Z_1 K_H \end{Bmatrix} \sin\theta \cdot F_r(\xi_r) \qquad \begin{matrix} (34a) \\ (34b) \end{matrix}$$

以上で入射パルス波および反射パルス波の電磁界成分が求められたわけであるが，ここで電磁エネルギー流すなわちPoyntingベクトル$\mathbf{S}$を

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \qquad (35)$$

で定義すれば，入射パルス波および反射パルス波にともなう電磁エネルギー流はE波およびH波の場合についてそれぞれつぎのように求められる．

入射パルス波：

$$S_x^{(i)} = \begin{Bmatrix} \dfrac{K_E^2}{Z_1} \\ Z_1 K_H^2 \end{Bmatrix} \sin\theta \cdot \{F_i(\xi_i)\}^2 \qquad \begin{matrix} (36a) \\ (36b) \end{matrix}$$

$$S_z^{(i)} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{K_E^2}{Z_1} \\ Z_1 K_H^2 \end{Bmatrix} \cos\theta \cdot \{F_i(\xi_i)\}^2 \qquad \begin{matrix} (37a) \\ (37b) \end{matrix}$$

$$S^{(i)} = \sqrt{S_x^{(i)^2} + S_z^{(i)^2}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{K_E^2}{Z_1} \\ Z_1 K_H^2 \end{array} \right\} \{ F_i(\xi_i) \}^2 \qquad \begin{array}{l} (38a) \\ (38b) \end{array}$$

反射パルス波：

$$S_x^{(r)} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{K_E^2}{Z_1} \\ Z_1 K_H^2 \end{array} \right\} \sin\theta \cdot \{ F_r(\xi_r) \}^2 \qquad \begin{array}{l} (39a) \\ (39b) \end{array}$$

$$S_z^{(r)} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{K_E^2}{Z_1} \\ Z_1 K_H^2 \end{array} \right\} \cos\theta \cdot \{ F_r(\xi_r) \}^2 \qquad \begin{array}{l} (40a) \\ (40b) \end{array}$$

$$S^{(r)} = \sqrt{S_x^{(r)^2} + S_z^{(r)^2}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{K_E^2}{Z_1} \\ Z_1 K_H^2 \end{array} \right\} \{ F_r(\xi_r) \}^2 \qquad \begin{array}{l} (41a) \\ (41b) \end{array}$$

以上の議論から明らかなように，本文では電磁界量はすべて実数量で与えられており，したがって式(35)で定義される電磁エネルギー流，すなわち式(36)～(41)で与えられる量はすべて電磁エネルギー流の瞬時値を表わしている．なお，式(38)および(41)で与えられる$S^{(i)}$および$S^{(r)}$はそれぞれの波の進む方向，すなわちξ_i方向およびξ_r方向に進む入射パルス波および反射パルス波の電磁エネルギー流を表わしている．

さて，つぎに入射波が境界面において全反射を起こす場合，入射パルス波のエネルギーと反射パルス波のエネルギーとが等しくなることを示そう．電磁エネルギー流の進む方向に垂直な面，すなわち波面の単位面積を通過する全電磁エネルギー I は入射パルス波および反射パルス波のそれぞれの場合について次式のように表わされる．

$$I_i=\int_{-\infty}^{\infty} S^{(i)}\,d\xi_i=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{K_E^2}{Z_1}\\[2ex] Z_1K_H^2\end{array}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\{F_i(\xi_i)\}^2\,d\xi_i \qquad \begin{array}{l}(42a)\\[2ex](42b)\end{array}$$

$$I_r=\int_{-\infty}^{\infty} S^{(r)}\,d\xi_r=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{K_E^2}{Z_1}\\[2ex] Z_1K_H^2\end{array}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\{F_r^{(t)}(\xi_r)\}^2\,d\xi_r \qquad \begin{array}{l}(43a)\\[2ex](43b)\end{array}$$

上式から I_i および I_r は，ある一定の波面を考えれば，その単位面積を垂直に横切る電磁エネルギー流を，ξ_i および ξ_r について $-\infty$ から $+\infty$ まで，すなわち時刻 t について $+\infty$ から $-\infty$ まで積分したものであり，したがってこれらの量は入射パルス波および反射パルス波の全エネルギーを表わしていることがわかる．式(42) および (43)から積分項にかかる定数は入射E波および入射H波のそれぞれの場合について等しく，$I_i=I_r$ を示すためには両式の積分項が等しいことを示せばよい．いまこの積分項を I_i' および I_r' とおけば，I_i' および I_r' は式(1) および (27)を用いて次式のように表わされる．

$$I_i'=\int_{-\infty}^{\infty}\{F_i(\xi_i)\}^2\,d\xi_i=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon^2}{(\epsilon^2+\xi_i^2)^2}\,d\xi_i \qquad (44)$$

$$I_r' = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_r^{(t)}(\xi_r)\}^2 d\xi_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(A\epsilon + B\xi_r)^2}{(\epsilon^2 + \xi_r^2)^2} d\xi_r \qquad (45)$$

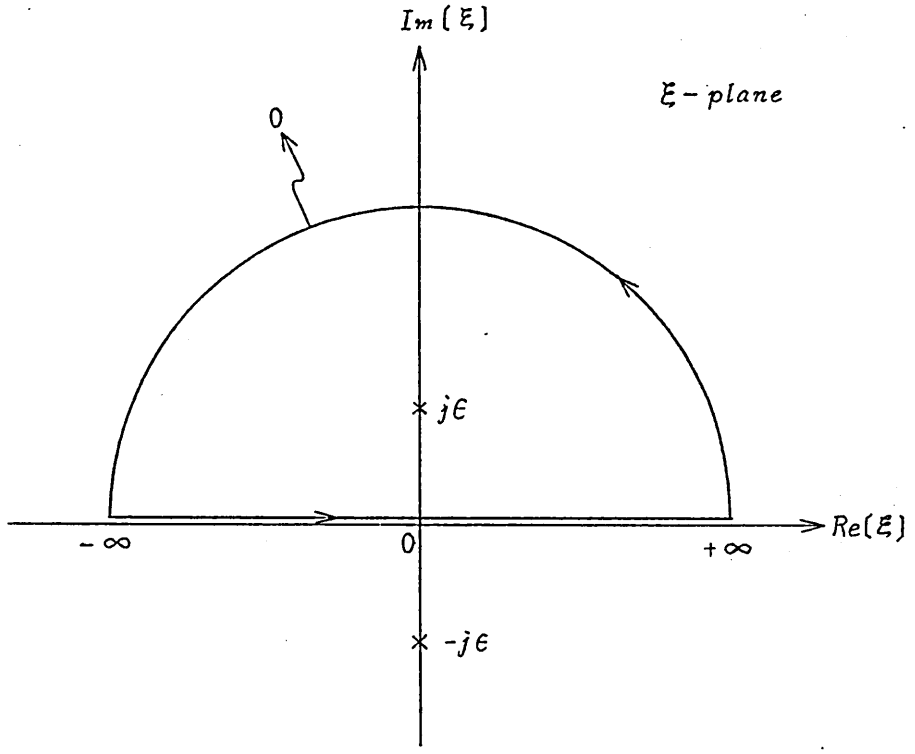


図 4　被積分関数の極と積分路

I_i' および I_r' の被積分関数は図 4 に示すように，ξ − plane において $\xi = \pm j\epsilon$ で 2 次の極をもち，ξ − planeの実軸上で正則，$|\xi| \to \infty$ で 0 となる性質をもつ．したがって I_i および I_r は留数計算を用いて簡単に求められそれぞれ次式のようになる．

$$I_i' = \frac{\pi}{2\epsilon} \tag{46}$$

$$I_r' = (A^2 + B^2)\frac{\pi}{2\epsilon} \tag{47}$$

ところで，全反射の場合には，$|R| = 1$ となることから

$$A^2 + B^2 = 1$$

が成り立ち，したがって結局

$$I_i' = I_r' \tag{48}$$

となることがわかる．以上のことから全反射の場合には入射パルス波のエネルギーと反射パルス波のエネルギーとが等しくなり，エネルギーの保存則が成り立っていることが確められた．なお，部分反射の場合についても透過パルス波を考慮すればエネルギーの保存則が成り立っていることを示すことができる．

5．検討および数値計算例

ここでは，全反射の場合の反射パルス波の形について詳しく検討し，つぎに部分反射および全反射のそれぞれの場合の数値計算例を示す．

全反射の場合の反射パルス波 $F_r^{(t)}(\xi_r)$ は式 (27) から

$$F_r^{(t)}(\xi_r) = A\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\xi_r^2} + B\frac{\xi_r}{\epsilon^2+\xi_r^2} \tag{49}$$

と表わされるが，上式から$F_r^{(t)}(\xi_r)$の曲線は2つの極値をもつことが簡単にわかる．これらの極値，すなわち最大値および最小値をそれぞれ$F_{rmax}^{(t)}$，$F_{rmin}^{(t)}$と表わし，その極値を与えるξ_rを$\xi_{r\,max}$および$\xi_{r\,min}$と表わせば，これらの量は次式のように求められる．

$$F_{r\,max}^{(t)} = F_r^{(t)}(\xi_{r\,max}) = \frac{B^2}{2(1-A)\epsilon} \tag{50a}$$

$$F_{r\,min}^{(t)} = F_r^{(t)}(\xi_{r\,min}) = \frac{-B^2}{2(1+A)\epsilon} \tag{50b}$$

$$\xi_{r\,max} = \frac{1-A}{B}\epsilon \tag{51a}$$

$$\xi_{r\,min} = \frac{-(1+A)}{B}\epsilon \tag{51b}$$

ところで，全反射の条件よりAおよびBの値の大きさは

$$\begin{aligned} -1 < A < 1 \\ 0 < B < 1 \end{aligned} \tag{52}$$

であるから，式(50)，(51)で与えられる量の符号はつぎのようになる．

$$F_{r\,max}^{(t)} > 0 \tag{53a}$$

$$F_{r\,min}^{(t)} < 0 \tag{53b}$$

$$\xi_{r\,max} > 0 \tag{54a}$$

$$\xi_{r\,min} < 0 \tag{54b}$$

ここで，$\xi_{r\,max}$および$\xi_{r\,min}$を入射パルス波形$F_i(\xi_i)$を表わす式(1)に代入すれば次式が成り立つ．

$$F_i(\xi_{r\,max}) = F_{r\,max}^{(t)} \tag{55}$$

$$F_i(\xi_{r\,min}) = -F_{r\,min}^{(t)} \tag{56}$$

上式から入射パルス波形と反射パルス波形を，共通のξ軸をもつ座標に表わした場合，反射パルス波形の最大値のピークは常に入射パルス波形の曲線上にあり，また最小値のピークは入射パルス波形のξ軸に関して対称な曲線上にあることがわかる．以上の様子を図5に示す．

つぎに，入射パルス波および反射パルス波のエネルギーについて考察する．全反射の場合には，式(38)および(41)から明らかなように，入射パルス波および反射パルス波の電磁エネルギー流はそれぞれ$\{F_i(\xi_i)\}^2$および$\{F_r^{(t)}(\xi_r)\}^2$に比例する．以下，$\{F_i(\xi_i)\}^2$および$\{F_r^{(t)}(\xi_r)\}^2$をそれぞれ入射電力波形および反射電力波形と呼ぶ．図6は，これらの電力波形をξ_iおよびξ_rの関数として表わしたものである．ところで，前節で述べたように，入射パルス波および反射パルス波の全エネルギーは保存され，したがって式(44)および(45)で与えられるI_i'とI_r'が等しくなることから，これらの電力波形の囲む面積は等しくなることがわかる．

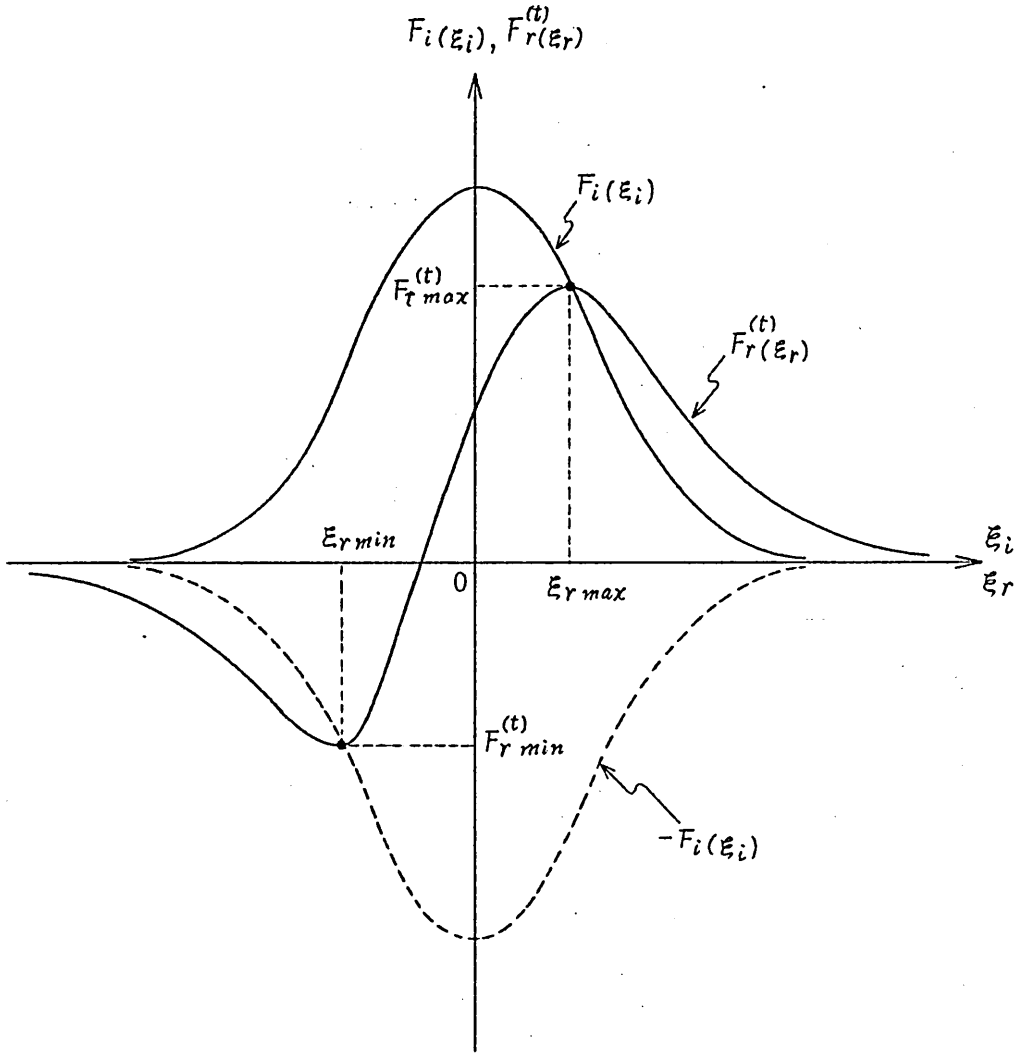


図5　入射パルス波形$F_i(\xi_i)$と反射パルス波形
$F_r^{(t)}(\xi_r)$との関係（全反射の場合）

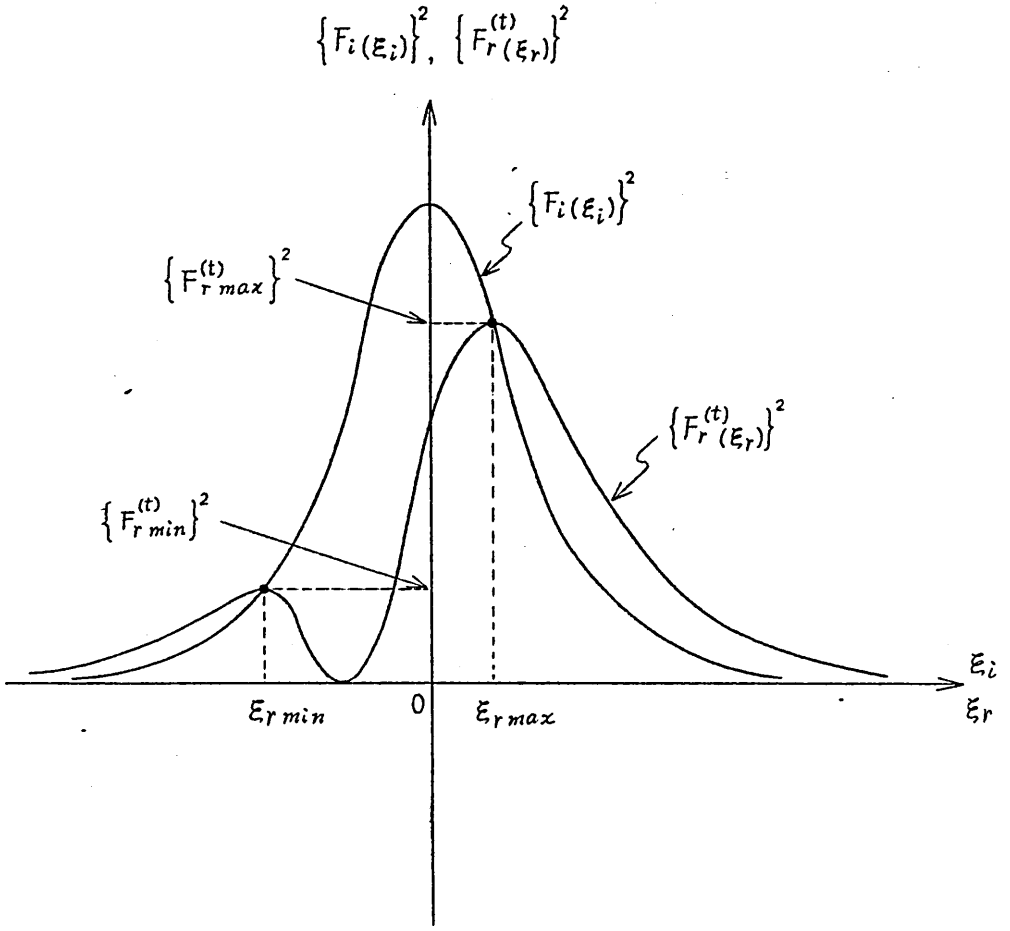


図６　入射パルス波および反射パルス波の電力波形：$\{F_i(\xi_i)\}^2$および$\{F_r^{(t)}(\xi_r)\}^2$（全反射の場合）

入射波がE波の場合の反射パルス波の波形$F_r^{(t)}(\xi_r)$および電力波形$\{F_r^{(t)}(\xi_r)\}^2$の数値計算例を図７～８に示す．ただし，同図において参考のため入射パルス波の波形$F_i(\xi_i)$および電力波形$\{F_i(\xi_i)\}^2$も同時に示されている．これらの図に

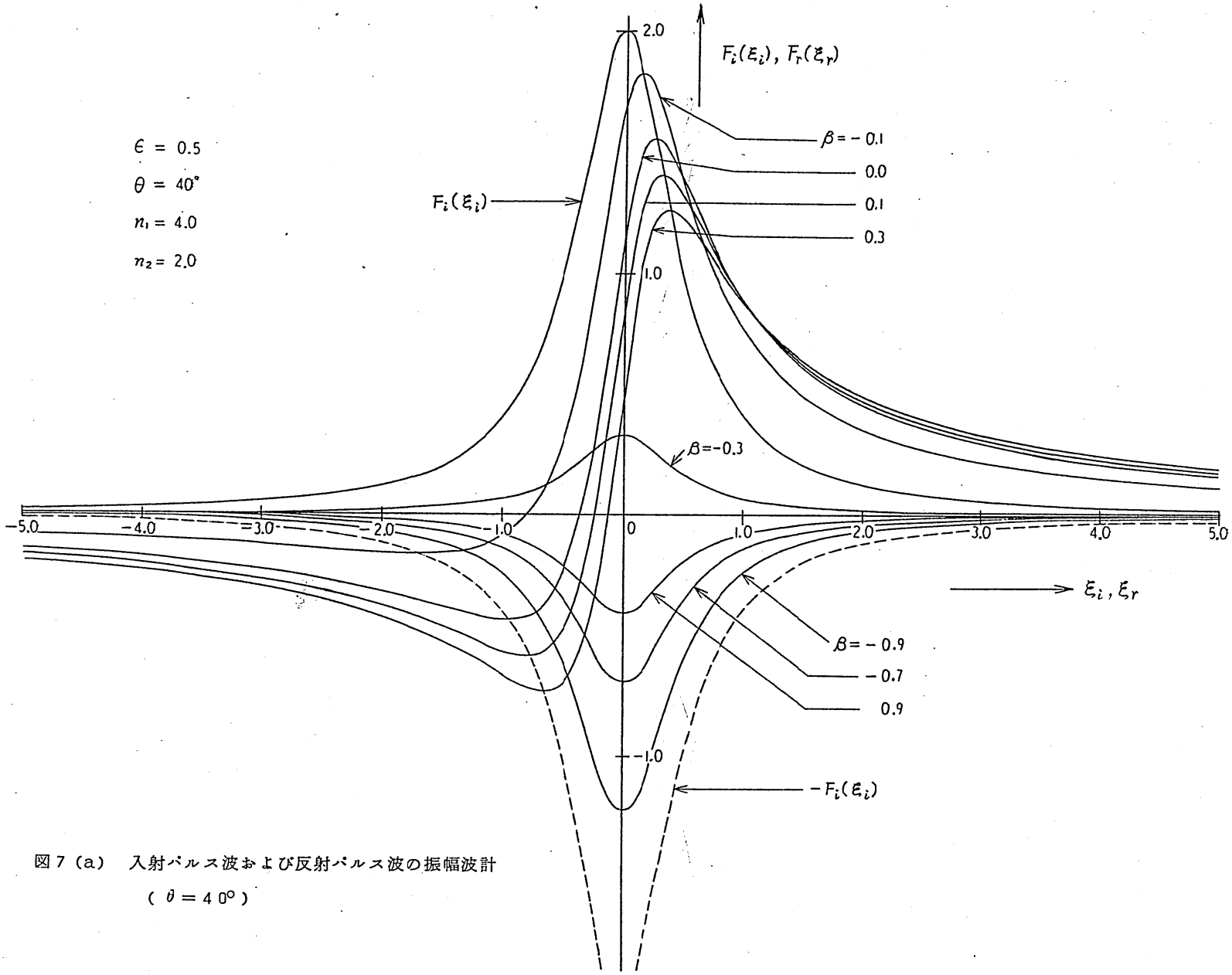


図７（a）　入射パルス波および反射パルス波の振幅波計

（ $\theta = 40°$ ）

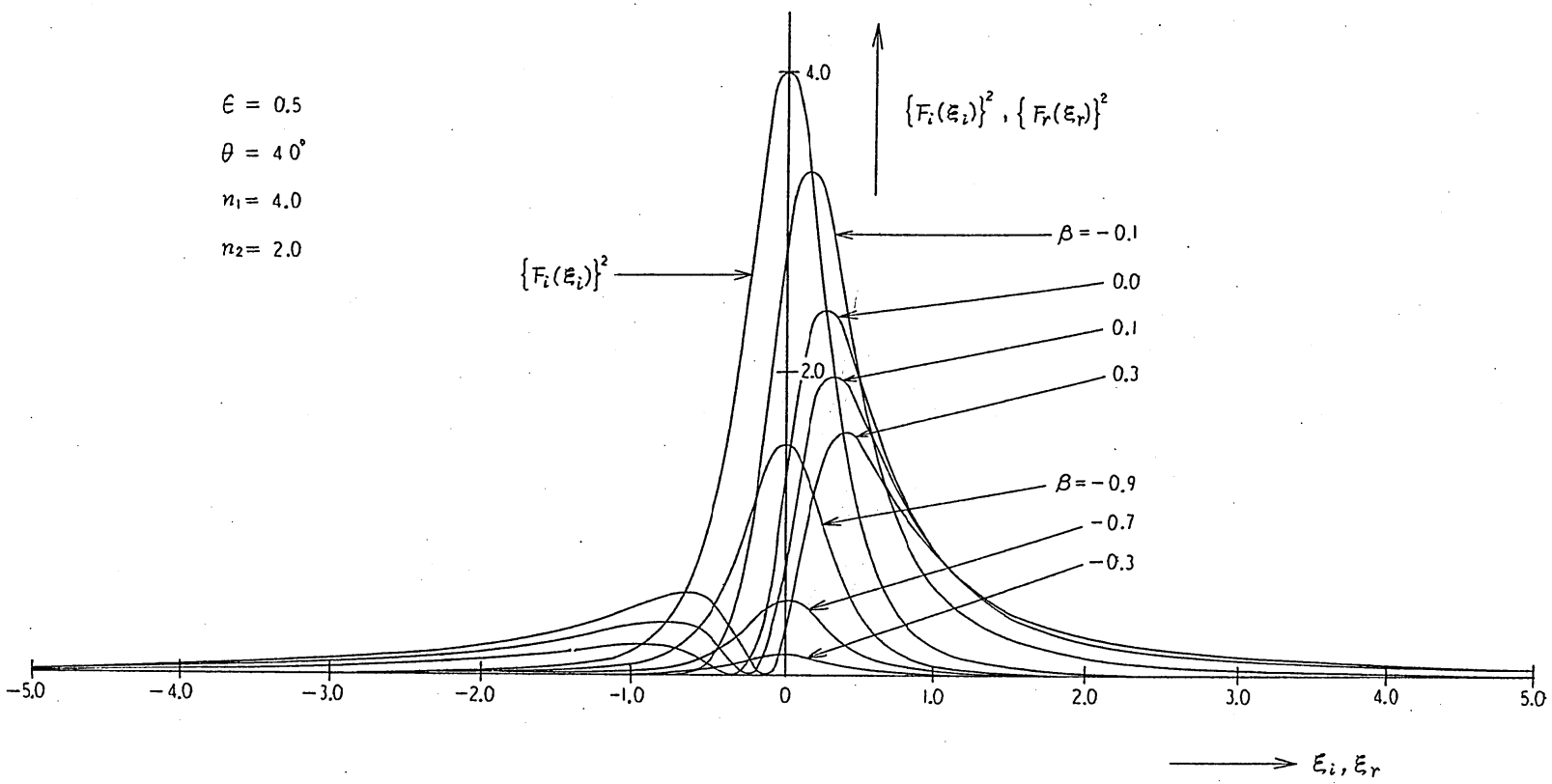


図7（b） 入射パルス波および反射パルス波の電力波形.

（ $\theta = 40^\circ$ ）

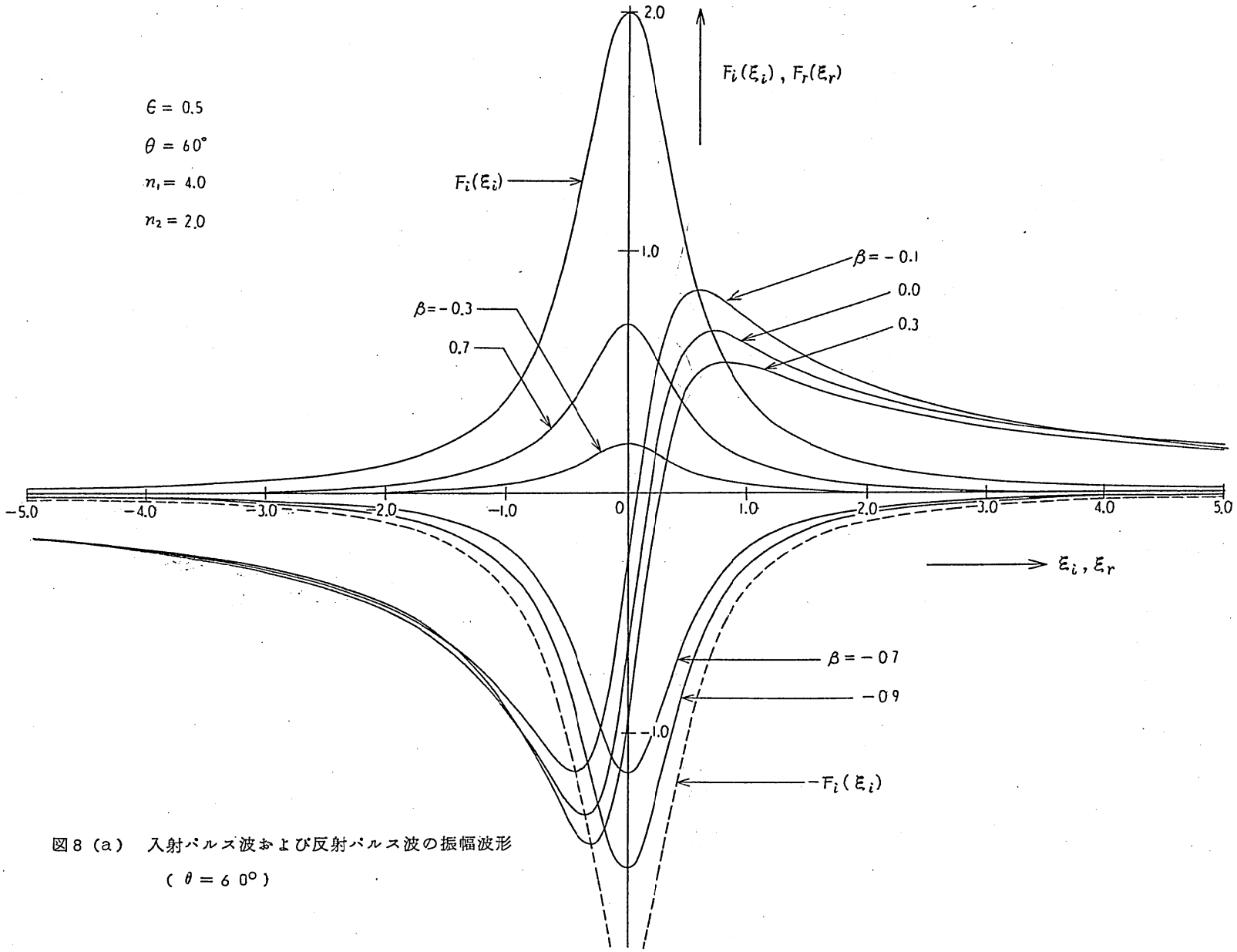


図8（a）　入射パルス波および反射パルス波の振幅波形

（θ＝60°）

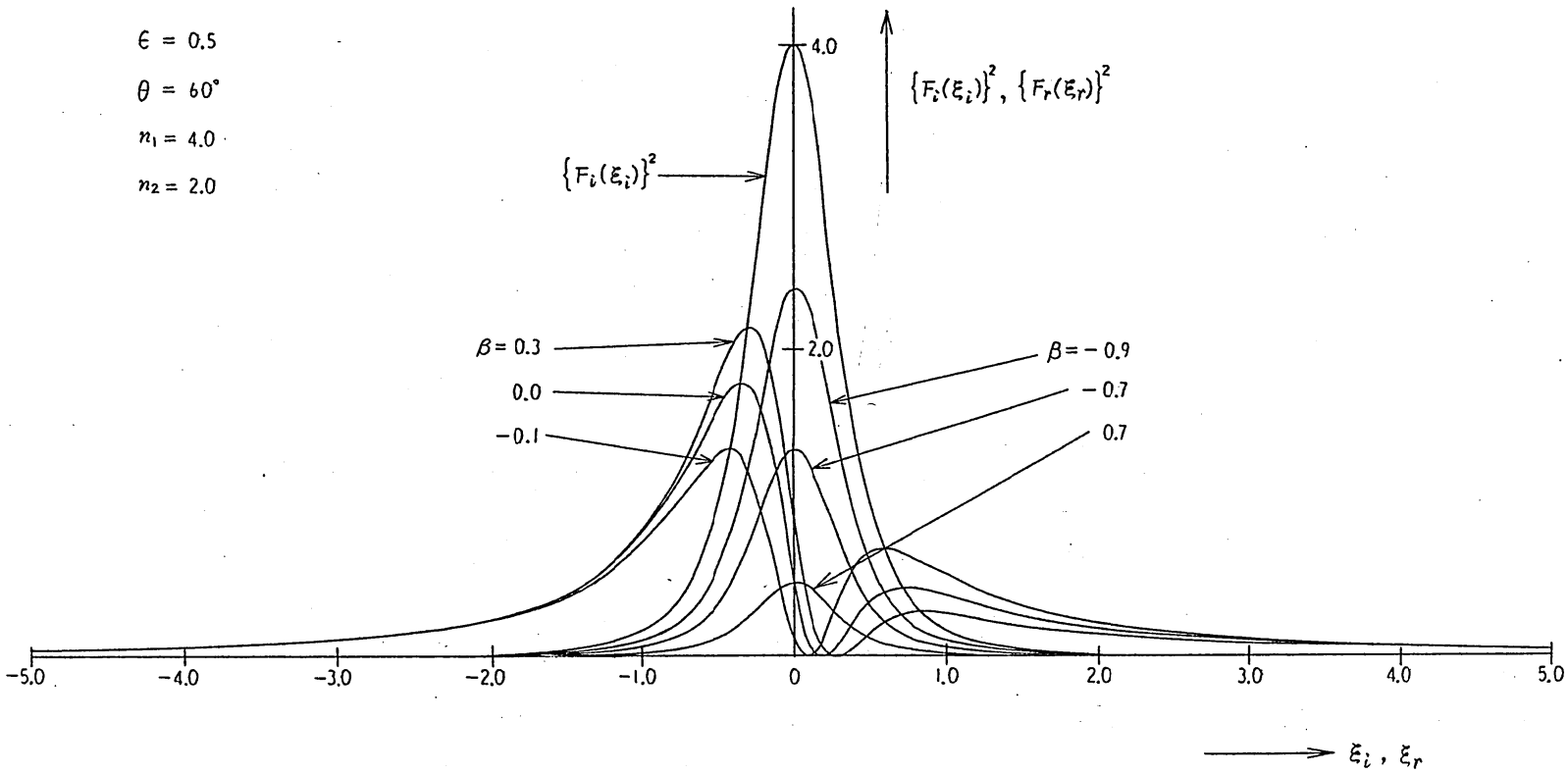


図８（b）　入射パルス波および反射パルス波の電力波形

（ $\theta = 60^{\circ}$ ）

おいて横軸はすべてξ_iあるいはξ_rであり，したがってこれらのグラフは入射パルス波あるいは反射パルス波をある一定の波面で観測したときの，その振幅あるいは電力の時間的経過を示していることになる．数値計算例はいずれも屈折率が$n_1 = 4.0$，$n_2 = 2.0$であり，媒質Ⅱの運動速度βをパラメータに描かれている．ただし，入射パルス波の波形を決めるパラメータϵは0.5に選ばれている．図7において$\beta = -0.9$，-0.7，-0.3，$+0.9$は部分反射，$\beta = -0.1$，0，$+0.1$，$+0.3$は全反射の場合である．また図8においては，$\beta = -0.9$，-0.7，-0.3，$+0.7$は部分反射，$\beta = -0.1$，0，$+0.3$は全反射の場合である．

謝　　辞

日頃ご指導いただく本学工学部熊谷信昭教授および裏　克己教授に深謝する。

また，常々ご討論いただく熊谷研究室の諸氏に深謝する。

文　　献

(1) 小川英一，安川交二，藤岡　弘；“運動媒質の境界面におけるGoos－Hänchen 効果”，輻研資（昭46－10）.

(2) L.M. Brekhovskikh: “Waves in layered media”, p. 122, Academic Press (1960).

(3) 熊谷信昭，藤岡　弘：“相対論的電磁界理論序説”，p. 138，コロナ社（1971）.

広域ホログラムの拡大による収差

堤　喜代司　　山根国義
弓場芳治　　松尾　優

（京都工芸繊維大学
工芸学部）

1972年1月28日

輻射科学研究会資料

広域ホログラムの拡大による収差

Aberration by Magnification in Wide-Area Holography

§1. まえがき

最も一般的なホログラフィ技術は，レーザ光でホログラムを作成し，レーザ光で再生して光学像を得るものである。しかし，ホログラフィは，コヒーレントな波動の物体による振幅変調と位相変調を記録して，ホログラムを作成し，それから，もとの物体の像を得る技術であるから，レーザ光などの光波だけでなく，より長波長の波動を用いてもよい。マイクロ波・ミリ波などの電波や可聴音波・超音波などの音波を用いてホログラムを作成し，光波で再生して光学像を得るという方法が種々試みられている。この場合，光波と長波長の波動の波長のちがいによって，ホログラムの拡大が不可避になってくる。例えば，波長8.6 mmのミリ波でホログラムを作成して，波長6328 ÅのHe-Neレーザで光学像を再生する場合，波長のちがいを補正しようとすると，ミリ波で作成したホログラムを 7.4×10^{-5} 倍に縮小しなければならず，ミリ波での100 mの記録が7.4 mmになり非常に小さくなる。

また，逆に，拡大を利用することを考えると，例えばホログラムの一部を取って拡大し全面のホログラムの代用をさせるとかして，ぼう大なホログラムの情報量を低減させる場合に拡大が使えるのではないかと考えられる。また，ある大きさのホログラム面の情報を拡大して，より大きいホログラム面の情報として用いれば，情報密度即ち波の干渉縞の密度が小さくなり，より分解能の低い感光材料を用いることも可能になる。

以上のことから，ホログラムを拡大した場合の再生された光学像がどれ位の歪み，即ち収差を伴うかということが問題になってくる。

ホログラムの収差については，既に，近軸領域に関してMeier,[1] Leith et al.[2]など，軸外領域に関してChampagne[3]によって解析がなされている。これらは，コヒーレントな波動の位相を定める，波源からホログラム面への距離（平方根）を二項展開して，収差を与えるものとして展開式の3次項を考え，それらに球面収差，コマ収差，非点収差，像面彎曲，歪曲収差のSeidelの5収差を対応づけたものである。

そこで，筆者らは，ホログラムの位相分布の空間微分量を考察することによって，直接に，再生光学像の特性を導くことを試みた。ホログラム面におけるコヒーレント波動の位相分布の空間微分量（1次及び2次）は，再生光学像の位置を決めるというだけでなく，2次元及び3次元の映像情報を規定するのに重要な因子ではないかと考えられる。

§2. コヒーレント波動の位相分布の空間微分特性

波源として，最も簡単で基本的な点波源を考える。点波源が（x，y，z）一直角座標系で点（0，0，z_0）にあるとし，その波動の位相分布φ（x，y）をz＝0なる平面上で考察する。なお，これより，座標値はすべて波動の波長による正規化値であるとする。

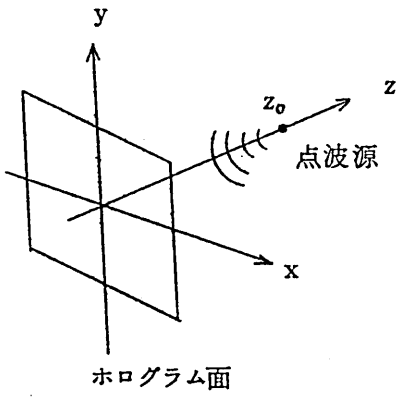


図 1

$$\varphi(x,y)=2\pi\left\{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}-z_0\right\} \tag{1}$$

$$\triangleq 2\pi r \tag{2}$$

と{ }内をrと定義しておく。この位相分布φ(x,y)の空間微分特性は，

1次微分

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2\pi\frac{\partial r}{\partial x}=2\pi\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\triangleq 2\pi f_x \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2\pi\frac{\partial r}{\partial y}=2\pi\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\triangleq 2\pi f_y \tag{4}$$

ここで，f_x，f_yと定義したものはx方向及びy方向の空間周波数である。

2次微分

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=2\pi\frac{\partial f_x}{\partial x}=2\pi\frac{y^2+z_0^2}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2\pi\frac{\partial f_y}{\partial y}=2\pi\frac{x^2+z_0^2}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}} \tag{6}$$

となる。パラメータx，y，z_0の大きさによって，いろいろな場合があり，まとめると次の様になる。

1) z_0が有限の場合

i) $x, y \ll z_0$

$$\varphi_x'\cong 2\pi\frac{x}{z_0}\quad,\quad \varphi_y'\cong 2\pi\frac{y}{z_0} \tag{7}$$

$$\varphi_x''\cong 2\pi\frac{1}{z_0}\quad,\quad \varphi_y''\cong 2\pi\frac{1}{z_0} \tag{8}$$

この場合が近軸領域であり，普通のFresnel変換ホログラムである。

ii) $x \ll z_0$，$y \not\ll z_0$（$x \not\ll z_0$，$y \ll z_0$ の時も同様にすればよい）

$$\varphi_x'\cong 2\pi\frac{x}{\sqrt{y^2+z_0^2}}\qquad \varphi_y'\cong 2\pi\frac{y}{\sqrt{y^2+z_0^2}} \tag{9}$$

$$\varphi_x''\cong 2\pi\frac{y^2+z_0^2}{(y^2+z_0^2)^{3/2}}\qquad \varphi_y''\cong 2\pi\frac{z_0^2}{(y^2+z_0^2)^{3/2}} \tag{10}$$

iii） x , y ≪ z_0 （軸外領域）

（3）～（6）式そのまま

近軸の条件があれば，φの1次微分はxあるいはyの1次関数，2次微分は定数となることがわかる。

2） z_0 が無限大の場合

i） x , y ≪ z_0

$$\varphi_x' = \varphi_y' = 0 \tag{11}$$

$$\varphi_x'' = \varphi_y'' = 0 \tag{12}$$

ii） x ≪ z_0 , y ≪ z_0 （x ≪ z_0 , y ≪ z_0 の時も同様にすればよい）

$$\varphi_x' = 0 \qquad \varphi_y' = 2\pi \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \tag{13}$$

$$\varphi_x'' = 0 \qquad y_y'' = 0 \tag{14}$$

iii） x , y ≪ z_0 （軸外領域）

$$\varphi_x' = \lim_{z_0 \to \infty} 2\pi \frac{a z_0}{\sqrt{(1+a^2+b^2) z_0^2}} = 2\pi \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \tag{15}$$

$$\varphi_y' = 2\pi \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \tag{16}$$

$$\varphi_x'' = \varphi_y'' = 0 \tag{17}$$

ここで，軸外の場合，$\frac{x}{z_0} = a$, $\frac{y}{z_0} = b$ とおく。z_0が無限大の場合，φの1次微分は定数，2次微分は0になる。この場合がFourier変換ホログラムである。

以上より，波源の奥行とか，z一定の平面上での波源のちらばり方によって，ホログラム面上の位相分布の空間微分量が決まることがわかる。

§3. 拡大された広域ホログラムの位相分布の空間微分特性

拡大された広域ホログラムの光学像再生がどの様になるかについて考察

する。簡単のためGabor型のホログラムとする。§２では直角座標系で点波源の位相分布の空間微分特性を求めたが，ここでは簡単のため（x，y）面を（ρ，θ）一極座標系で考えることにする。$x^2+y^2=\rho^2$である。

1次微分　$$\varphi' = 2\pi\frac{dr}{d\rho} = 2\pi\frac{\rho}{\sqrt{\rho_2+z_0^2}} \triangleq 2\pi f \qquad (18)$$

2次微分　$$\varphi'' = 2\pi\frac{df}{d\rho} = 2\pi\frac{z_0^2}{(\rho^2+z_0^2)^{3/2}} \qquad (19)$$

となる。ρとz_0が同じ位のオーダーの値（近軸領域でない）であり，かつz_0が有限の値である場合，即ち，記録ホログラム面が広域にわたっている広域ホログラムでは，§２で述べた近似・簡単化は出来ず，(18) (19)式そのままである。なお近軸領域では次式となる。

$$\varphi' \simeq 2\pi\frac{\rho}{z_0} \qquad (20)$$

$$\varphi'' \simeq 2\pi\frac{1}{z_0} \qquad (21)$$

以上の様な広域ホログラムをm倍拡大すると，拡大されたホログラムの位相分布の空間微分特性は，拡大されたホログラムの座標系に添字Mをつけて，次の様になる。

$$\varphi' = 2\pi\frac{\rho_M}{m^2\sqrt{\left(\frac{\rho_M}{m}\right)^2+z_0^2}} \qquad (22)$$

$$\varphi'' = 2\pi\frac{z_0^2}{m^2\left\{\left(\frac{\rho_M}{m}\right)^2+z_0^2\right\}^{3/2}} \qquad (23)$$

拡大されたホログラムの像再生特性を，拡大しないホログラム即ち拡大率m＝1のホログラムで，位相分布の空間微分特性が等しいものに対応させて求める。(22) (23)式より拡大されたホログラムの位相分布は，空間微分特

性の観点から，大体，$(0, 0, m^2 z_0)$付近に点波源がある場合のホログラム面の位相分布に等しいことがわかる。即ち，ホログラム面の座標値はm倍になるのに対し，点波源のz軸方向の距離はほぼm^2倍になり，拡大を行なうと程度の差はあるが近軸ホログラムに近づいていく。だから，拡大率mが十分大きいならば，拡大された広域ホログラムは等価的に近軸ホログラムであるとしてよい。従って，拡大された広域ホログラムに等価な近軸ホログラムの点波源の位置即ち再生像点の位置は，1次微分と2次微分を等しくおいて，等価なホログラムの座標系に添字Eをつけて

$$\frac{\rho_M}{m^2\sqrt{\left(\frac{\rho_M}{m}\right)^2 + z_0^2}} = \frac{\rho_E}{z_E} \tag{24}$$

$$\frac{z_0^2}{m^2\left\{\left(\frac{\rho_M}{m}\right)^2 + z_0^2\right\}^{3/2}} = \frac{1}{z_E} \tag{25}$$

より，

$$z_E = m^2\sqrt{\left(\frac{\rho_M}{m}\right)^2 + z_0^2}\left\{1 + \left(\frac{\rho_M}{mz_0}\right)^2\right\}$$

$$= m^2\sqrt{\rho^2 + z_0^2}\left(1 + \frac{\rho^2}{z_0^2}\right) \tag{26}$$

$$\rho_E = \rho_M\left\{1 + \left(\frac{\rho_M}{mz_0}\right)^2\right\}$$

$$= m\rho\left\{1 + \left(\frac{\rho}{z_0}\right)^2\right\} \tag{27}$$

$$\Delta\rho_E = \rho_M - \rho_E = -\frac{\rho_M^3}{m^2 z_0} = -\frac{m\rho^3}{z_0^2} \tag{28}$$

となる。これは，ρ_M従ってρが大きい程，即ち軸外領域である程，等価点波源あるいは再生像点のz軸方向の位置はホログラムから遠ざかり，半径ρ方向の位置は原点に対して，考えているホログラムの部分と逆方向に遠ざかるということを示している。光学的に像再生すると，この拡大された

広域ホログラムは，最もホログラムに近い位置で１点を再生結像し，そこからホログラムと反対方向に行くにつれて，ｚ軸に垂直な平面上では連続的に半径が増大していく様な円環を再生結像する。等価点波源あるいは再生像は１点であるべきなのに，全体として円錐状の等価点波源群あるいは光学再生像となり，大きな歪みが生じている。像としての観点からすると収差が生じているわけである。図２に計算例を示す。

軸外領域で比較的小さい領域のホログラム即ち軸外ホログラムを拡大して光学的像再生すると，広域ホログラムの場合の再生像の一部が結像されることになる。

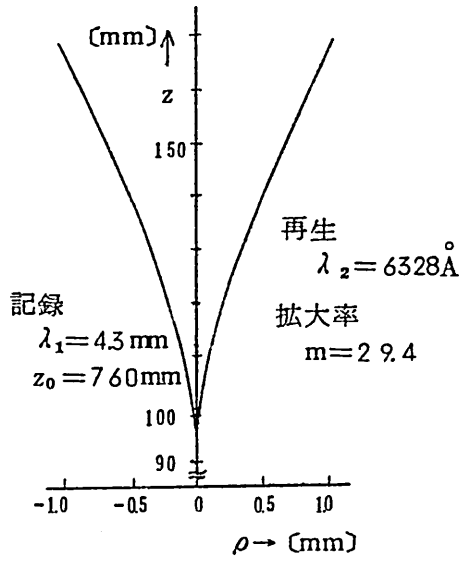


図 2.

§ 4. 位相分布の二項展開による結像特性

点波源によるホログラム面上の位相分布を二項展開して，空間変数の自乗項がレンズ作用（収束・発散）そして１乗項がプリズム作用（光軸傾斜）を示すという考え方から結像特性を求めてみよう。ここでは，一般によく行なわれる表示法に従って，点波源が直角座標系で（x_0，y_0，z_0）にあり，ホログラム面（ｘ，ｙ）がｚ＝０なる平面上にあるとする。ホログラム面上の位相分布 $\varphi(x,y)$ は

$$\varphi(x,y)=2\pi\left\{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\right. \tag{29}$$

となる。近軸領域では，$(x-x_0)\ll z_0$，$(y-y_0)\ll z_0$ として一般に

$$\varphi(x,y)=2\pi\left\{\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z_0}-\frac{\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}^2}{8z_0^3}+\cdots\right.$$
$$\left.-\frac{x_0^2+y_0^2}{2z_0}+\frac{(x_0^2+y_0^2)^2}{8z_0^3}-\cdots\cdots\right\} \tag{30}$$

$$\cong 2\pi\left\{-\frac{x_0x+y_0y}{z_0}+\frac{x^2+y^2}{2z_0}\right\} \tag{31}$$

という二項展開及び近似が行なわれる。しかし，軸外領域を含む場合，$(x-x_0)\ll z_0$，$(y-y_0)\ll z_0$ という条件が成立しないので，$(x^2-2x_0x)\ll x_0^2+y_0^2+z_0^2$，$(y^2-2y_0y)\ll x_0^2+y_0^2+z_0^2$ という条件の下で，次の様な展開及び近似を行なう。

$$\varphi(x,y)=2\pi\left\{\frac{(x^2+y^2-2x_0x-2y_0y)}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{(x^2+y^2-2x_0x-2y_0y)^2}{8(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}+\cdots\cdots\right\} \tag{32}$$

$$\cong 2\pi\left\{-\frac{x_0x+y_0y}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}-\frac{x_0^2x^2+y_0^2y^2}{2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}\right\} \tag{33}$$

拡大したあとの座標系 (x_M, y_M) でかくと

$$\varphi(x_M,y_M)\cong 2\pi\left\{-\frac{x_0x_M+y_0x_M}{m\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+\frac{x_M^2+y_M^2}{2m^2\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}-\frac{x_0^2x_M^2+y_0^2y_M^2}{2m^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}\right\} \tag{34}$$

となる。この式は，一般には3次収差の非点収差を与える x_M^2，y_M^2 の自乗項((33)(34) 式{ }内第3項) をレンズ作用の項として結像項の中に入れたものである。$m=1$ など m が小さい時は，(33)(34)式は結像点を正しく示さない。即ち，

プリズム作用 $$-\frac{x_0x_M+y_0y_M}{m\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} \tag{35}$$

レンズ作用 $$\frac{x_M^2+y_M^2}{2m^2\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\left(\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{z_0^2}\right)} \tag{36}$$

の結像作用を持つから，結像点は

$$z = m^2 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \left(1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0^2} \right) \tag{37}$$

$$x = - m\, x_0 \left(1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0} \right) \tag{38}$$

$$y = - m y_0 \left(1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0} \right) \tag{39}$$

となる。極座標系で考え，$\alpha = \alpha_0 = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$ の軸上では

$$\varphi(\rho) \cong 2\pi \left\{ - \frac{\rho \rho_0}{m\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}} + \frac{\rho^2}{2m\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}\left(1 + \frac{\rho_0^2}{z_0^2}\right)} \right\} \tag{40}$$

となり，各項は各々プリズム作用及びレンズ作用を表わし，その結像点は (26) (27) (28)式と同じになる。

$$\rho = -\sqrt{x^2 + y^2} = - m \rho_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_0}{z_0}\right)^2 \right\} \tag{41}$$

$$z = m^2 \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_0}{z_0}\right)^2 \right\} \tag{42}$$

§ 5. 実験による検証

前節までで，近軸だけでなく，軸外域を含む広域ホログラムを拡大した時の光学的像再生を数式的に求めた。本節では，実験結果について述べる。

1）ミリ波でホログラムを作成した場合

筆者らの研究室で試みられているレーダ・ホログラフィ（送受一体型）の手法により，波長8.6 mm のミリ波を用いて，Gabor型のホログラフィを作成し，これを波長6328 ÅのHe–Neレーザ光で光学的像再生を行なった。送受波器と物体の走査線との最短距離（z_0）を760mm＝88.4 λ とし，物体として直径80 mm の金属球を図3の様に930 mm（ρ_{max}＝465mm＝54.1 λ）移動させて，1次元のホログラム情報を得た。

レーダ・ホログラフィとは物体を走査してホログラフィを作成する場合にあたる。送受波器から球面波を発射し，送信波を参照波として加え，金属球からの反射波との干渉縞を記録した。よって通路長は，平面波を点物体に照射した場合の２倍になっており，位相項$\exp(j\frac{2\pi}{\lambda}2D)$より（Dは送受波器と点物体の距離）$\frac{\lambda}{2}$＝4.3 mm の波長の平面波を照射した時の普通のホログラム（フレネル・ゾーンプレート）に等価である。１次元情報のミリ波の記録を，等振幅として位相について白黒の２レベルで量子化し，幅をもたせて格子状にして，それを光学像再生実験段階で4 mm の長さとした。ホログラム作成波長を等価的に4.3㎜とすると，拡大率は２９.４となる。光学像の再生実験では，Gabor型なので実像を観測したところ，図２とよく合致した。最初ｚ＝１００㎜で１本の線が出て，スクリーンをホログラムから遠ざけると，鮮鋭な２本の線に分かれ，更にその間隔が広がっていくのが確認できた。

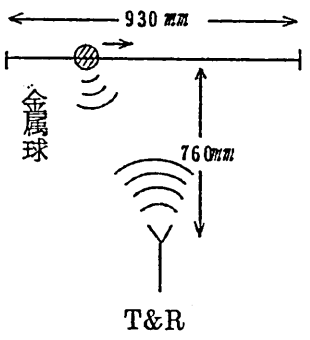


図 3.

２）計算でホログラムを作成した場合

z_0＝0.25mm＝395λ，ρ_{max}＝0.098㎜～0.113㎜＝155λ～210λとして，点物体のGabor型のホログラム（フレネル・ゾーンプレート）を計算し，ミリ波の場合と同じく位相項について白黒２レベルの量子化を行ない，像再生実験段階で４mm 前後の長さにした。拡大率ｍ＝２０である。１次元の情報に幅をもたせて格子状にしたホログラム（ρ_{max}＝210λ，長さ4.5 mm)では１）と同様の結果を得た。同心円状の２次元ホログラム（ρ_{max}＝155λ，直径3.9 mm)では，明確に円環を確認できず，全体に明かるい小円となった。これは，ρ_{max}が小さいということと，更にコンパスによる手書きのために周辺部がかなりの誤差を含むことに原因するのではないかと考えられる。

§6. あとがき

本報告では，近軸及び軸外領域にわたる広域のホログラムをかなりの拡大率で拡大した場合，その光学像再生がどの様な特性（歪み即ち収差）を持つかを，ホログラムの位相分布の空間微分特性の面から求めた。又，位相項の二項展開で，非点収差を与える項を結像項として導入しても，式の上では同様の結果が得られることを示した。最後に，若干の実験例を示して，数式による値とよく合致することを述べた。

本研究において，ミリ波及び計算によるホログラムを作成された，卒研生の橋本健次郎，千田博史両君に深く感謝します。

参考文献

(1) R.W. Meier: "Magnification and Third-Order Aberrations in Holography" J. Opt. Soc. Am. 55 (1965-8) 987-992

(2) E.N. Leith, J. Upatnieks, & K.A. Haines: "Microscopy by Wavefront Reconstruction" J. Opt. Soc. Am. 55 (1965-8) 981-986

(3) E.B. Champagne: "Nonparaxial Imaging, Magnification, and Aberration Properties in Holography" J. Opt. Soc. Am. 57 (1967-1) 51-55

輻射科学研究会資料

ガンダイオードを用いた高効率2倍調波マイクロ波逓倍器

金田重男
堀間弘秋
(大阪大学　基礎工学部)

昭和47年1月28日

1. 緒　論

高電界が印加された半導体中のホットエレクトロン効果による電流-電界非直線特性を利用してマイクロ波逓倍器を作ることができる。一般にホットキャリアが生じるような高電界領域における半導体のマイクロ波励振についての基礎的考察は、最初 Paranjape[1] によりなされた。そしてその非直線特性をマイクロ波領域の逓倍器として利用することに関しては Seeger[2] および Kobayashi 等[3] が n-Ge について 10→30 GHz 帯逓倍で効率約 1% の実験結果を得ており、また Nag 等[4] は、Acoustic および Optical 各フォノン散乱を考慮した場合の理論計算をやはり n-Ge についておこなっている。n-GaAs については Acket 等[5] が速度-電界特性の研究に関連して、高い周波数領域では n-GaAs の方が、n-Ge より有効であることを示している。また Chattopadhyay 等[5] は n-GaAs について電流の高調波成分の含有率に対する理論的考察をおこなっている。筆者らは先に、n-GaAs について導波管交叉型の構造のものにつき逓倍効率の計算ならびに 10→30 GHz 帯逓倍の実験的研究をおこない、n-GaAs では n-Ge より同一周波数帯で 5 倍程度高い効率が得られるという実測結果を得た。そしてその際、種々の考察により n-GaAs では 50→150 GHz 帯逓倍でも n-Ge の 10→30 GHz 帯逓倍に相当する程度の効率が期待できることを明らかにし n-GaAs の負性抵抗による非直線特性を利用する方法は常温におけるミリ波、サブミリ波の発生に対する有効な手段であることを示した。[7] 以上述べたのは総べて大振幅励振の場合であり、出力は 3 倍調波成分が優勢であり、一挙に 3 逓倍が得られるという大きな利点はあるが、基本波用の励振源、

としては一般に比較的大電力のマイクロ波源を必要とし，かつ変換効率もn-Geでは上記のように10→30 GHz帯逓倍で1%程度，n-GaAsについては筆者らが得た結果では同じ周波数帯で理論的には約8%，実験的には5%程度の変換効率しか得られなかった。そこでその後筆者等はこのような大振幅励振動作とは異なり，負性抵抗の発生する付近の最も非直線特性の強い領域のみを積極的に利用する小振幅励振の場合を検討し，非常に高い変換効率の得られる可能性[8]を示すとともに50→100 GHz帯逓倍の実験をおこない3mm帯ミリ波発生をおこなうことができた。[9]

本論文は小振幅励振によるこのような逓倍器の動作原理の実証ならびに変換効率の定量的な値を正確にうるために，比較的精度の高い実験が行なえる10→20 GHz帯逓倍について研究を行なったものである。実験結果によれば逓倍出力と励振用基本波の素子に吸収される電力との比は最高約50%の値が得られ，また逓倍出力と励振用基本波の全入力との比も最高12%程度が得られており小振幅励振により本質的に高効率な逓倍器が実現しうることが立証された。そして小振幅励振法は，先の大振幅励振では3逓倍が得られるのに対し，2逓倍しか得られないが比較的小電力のマイクロ波源により容易に動作でき，しかもその高効率性のゆえに少なくともクライストロン級の発振源として有効であると考えられる。

2. 動作原理

小振幅励振による逓倍の動作原理については先に簡単のため

材料の電流(速度)－電界特性を用いて2倍調波成分の基本波に対する比を示し、大なる変換効率が得られる可能性を示した[8]。ここではそれらにつきさらに詳細に検討を行なう。変換効率の算出に速度－電界特性の定常状態特性をもとにする方法は、励振電界に対し電流あるいは速度が追随しうる周波数帯域では充分使用できると考えられる。しかしもちろん非常に高い周波数領域では適用できないと考えられ、そのような場合には周波数の依存性が入った速度－電界特性を用いるか、散乱緩和時間の効果を考慮した輸送理論などから導出した特性を用いなくてはならぬと考えられる。しかし本研究において行なった10→20GHz帯逓倍実験の結果と比較する場合には緩和時間効果による周波数の影響は大体無視しうると考えられるのでここでは速度－電界特性の定常状態特性をもとにした場合につき考える。

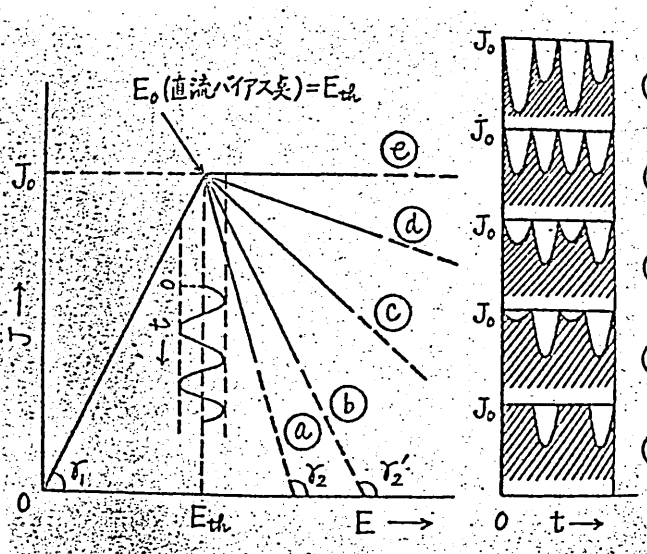


図1 小振幅励振による逓倍原理図

まず図1に小振幅励振による逓倍の原理図を示す。この方法では図示のように直流バイアス電界をいわゆるthreshold電界Ethの近傍に取れば出力電流は2倍調波電流成分が優勢となる。もちろんこの場合励振用マイクロ波はその励振振幅が適当

にオーム領域と負性抵抗領域に振り込んだ状態でしかもその周波数は、いわゆるドメインの形成が抑止されうる程度に高いこと(ドメイン生成時間の逆数よりも高い周波数でこれがこの逓倍器の動作下限周波数を規定すると考えられる)が必要である。いま原理的な説明上簡単のために図2のようにn-GaAsの電流-電界特性を部分的に直線近似して直流バイアス電界E_0を丁度E_{th}に等しく取り小振幅マイクロ波$E_1\cos\omega t$(E_1はマイクロ波のピーク電界値)で励振した場合を考察する。いまσ_1, σ_2を次のように定義する。

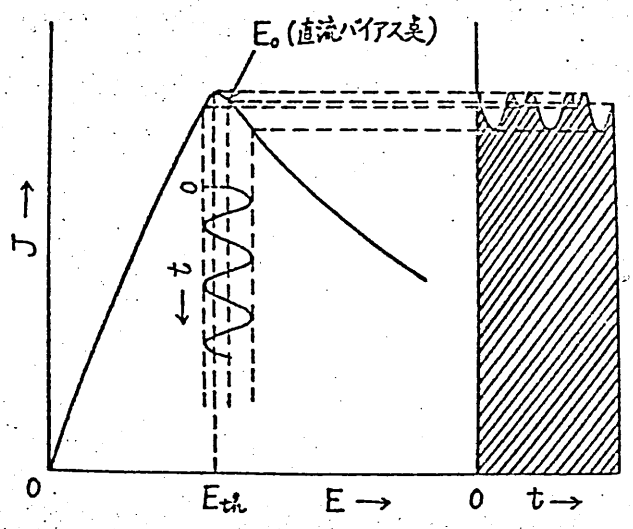


図2 J-E特性の部分的直線近似による逓倍原理図

$$\sigma_1 = \tan\gamma_1, \qquad \sigma_2 = \tan\gamma_2 \qquad (1)$$

すなわちσ_1, σ_2はそれぞれ$E<E_{th}$, $E>E_{th}$における導電率でσ_2の値は負である。このときの出力電流Jは印加電界$E=E_0+E_1\cos\omega t$に対して

$$J=J_0+\begin{cases}\sigma_1 E_1\cos\omega t & -\pi\le\omega t\le-\frac{\pi}{2}\\ \sigma_2 E_1\cos\omega t & -\frac{\pi}{2}\le\omega t\le\frac{\pi}{2}\\ \sigma_1 E_1\cos\omega t & \frac{\pi}{2}\le\omega t\le\pi\end{cases} \qquad (2)$$

で与えられる。J_0は直流バイアス電界に対応する直流電流分である。

式(2)をフーリエ展開すると

$$J = J_0 - \frac{E_1(\sigma_1-\sigma_2)}{\pi} + \frac{(\sigma_1+\sigma_2)}{2} E_1 \cos \omega t + \frac{2(\sigma_1-\sigma_2)E_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n\omega t}{4n^2-1} \quad (3)$$

となり、大振幅励振の場合第3高調波(一般に奇数次調波)が優勢となったのと異り、小振幅励振ではこのような直線近似においては第2高調波(一般に偶数次調波)が優勢となる。式(3)を用いて $|\sigma_2/\sigma_1|$ の値を変えて $|J_n/J_1| = \eta_n$ ($n=2, 4, 6\cdots\cdots$, J_1, J_n は基本波, n 次調波電流振幅成分)を求めた結果を図3に示す。同図から分るように, $|\sigma_2/\sigma_1| = 0.4$ 程度で η_2 が大体1となる。これはもちろん直線近似により理想化したものであるが実際の場合の $|\sigma_2/\sigma_1|$ の大体の値が分れば

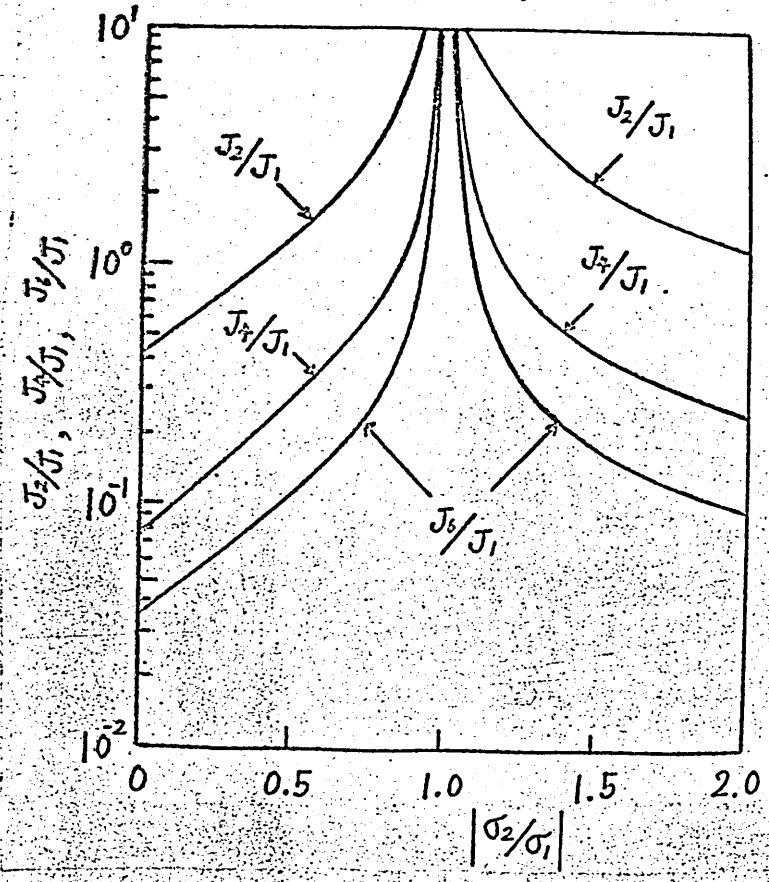


図3 J-E特性の部分的直線近似による変換効率の計算結果

変換効率 η_m の推測に役立つものと考えられる。また図2, 図3は励振用マイクロ波の角周波数の増大に対する定性的傾向の類推に対しても有効と思われる。すなわち角周波数 ω が大きくなり $\omega\tau > 1$ (τ は現象を支配する緩和時間) になると電流の電界に対する追従性が悪くなり (いわゆるマイクロ波導電率が微分導電率と異なってくる状態) 結果的には非直線性が劣化すると考えられるが, それは図2では丁度 ⓐ → ⓔ のように状態が変化するのに対応していると考えられる。そしてⓔは n-Ge のときのような飽和特性の場合と等価と考えられるものである。なお ⓐ → ⓔ の変化は, 図3においては $|G_2/G_1|$ が0に近づいてゆくことを示している。以上はもちろん定性的な傾向の類推に過ぎないが一般に周波数の上昇に伴い変換効率が低下してゆく傾向にあることを容易に推測することができる。

次に n-GaAs の実際の速度-電界特性より得られる変換効率を考える。いま速度-電界特性が $v = v(E)$ で与えられるものとする。印加電界は $E = E_0 + E_1 \cos\omega t$ で, いま $E_0 \gg E_1$ の条件下で $v(E)$ をテーラー展開すると

$$v = v(E_0 + E_1\cos\omega t) \simeq v(E_0) + (E_1\cos\omega t)\left[\frac{d}{dE}v(E)\right]_{E_0} + \frac{1}{2}(E_1\cos\omega t)^2\left[\frac{d^2}{dE^2}v(E)\right]_{E_0} + \frac{1}{6}(E_1\cos\omega t)^3 \times \left[\frac{d^3}{dE^3}v(E)\right]_{E_0} + \cdots\cdots \quad (4)$$

式(4)は一般に次のような形におくことができる。

$$v = v_0 + v_1 \cos \omega t + v_2 \cos 2\omega t + v_3 \cos 3\omega t + \cdots \quad (5)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} v_0 &\simeq v(E_0) + \frac{E_1^2}{4} \cdot \left[\frac{d^2}{dE^2} v(E)\right]_{E_0} \\ v_1 &\simeq E_1 \left[\frac{d}{dE} v(E)\right]_{E_0} + \frac{E_1^3}{8} \left[\frac{d^3}{dE^3} v(E)\right]_{E_0} \\ v_2 &\simeq \frac{E_1^2}{4} \left[\frac{d^2}{dE^2} v(E)\right]_{E_0} \\ v_3 &\simeq \frac{E_1^3}{24} \left[\frac{d^3}{dE^3} v(E)\right]_{E_0} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

式(6)を用いて第2高調波成分の基本波に対する電流変換効率 $\eta_2 = |J_2/J_1| = |v_2/v_1|$ を求めれば

$$\eta_2 = \left| \frac{\frac{E_1^2}{4}\left[\frac{d^2}{dE^2} v(E)\right]_{E_0}}{E_1 \left[\frac{d}{dE} v(E)\right]_{E_0} + \frac{E_1^3}{8}\left[\frac{d^3}{dE^3} v(E)\right]_{E_0}} \right| \quad (7)$$

で表わされる。すなわち $v(E)$ の関数形が分かれば容易に変換効率を求めることができる。n-GaAsの速度-電界定常特性の近似的表示式としては種々のものが考えられているが、ここでは大見ら等[10]が提案しているところの高電界領域まで Butcher-Fawcett の理論曲線[11]を良く近似するとされている次の関係式を用いる。

$$v_n = v_n(E) = 1.2422 \left\{ \frac{E_n}{E_n^7 + 1} + 0.38 \frac{E_n^9}{E_n^9 + 1.19} - 0.12 \frac{E_n^5}{E_n^5 + 2.25} \right\} \quad (8)$$

ただし $v_n = \dfrac{v}{\mu_c E_c}$, $E_n = \dfrac{E}{E_c}$ μ_c, E_c：定数

いま $\mu_c = 6,000\ cm^2/V\cdot sec$, $Ec = 4.3\ KV/cm$ として式(8)を用い，式(7)より第2高調波成分の変換効率を計算した結果を図4に示す。図から分かるように直流バイアス電界 E_0 を E_{th} の近傍にとることにより大なる変換効率が得られることを示しており、E_1/E_0 比が大となるとともに変換効率も大となることを示している。もちろん同図において E_0 が E_{th} より大なる領域でドメイン抑止条件が満足されない場合もあるが、そのような場合に対しても一応速度-電界特性より計算された結果を示してある。

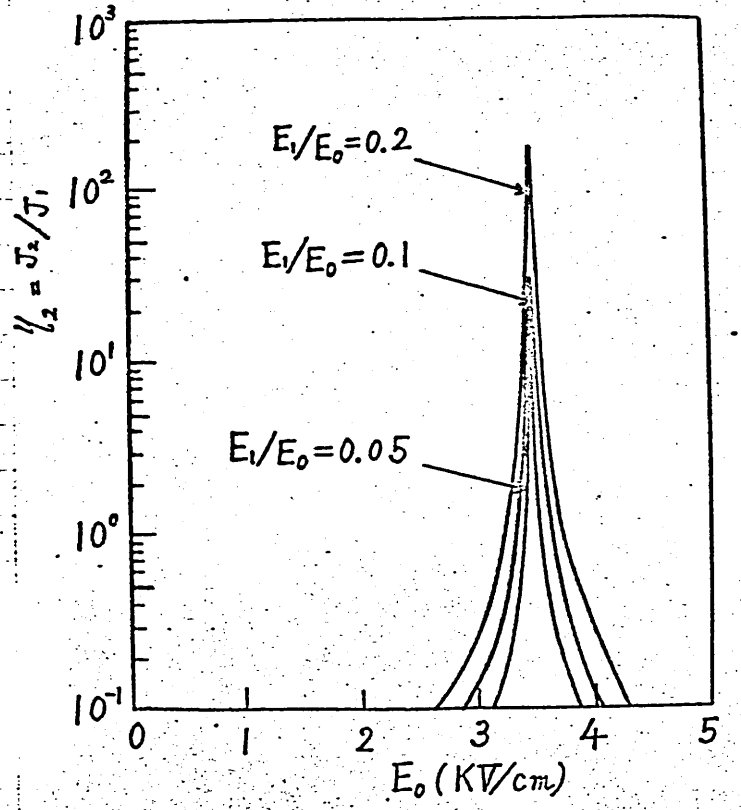


図4 J-E定常特性による変換効率の計算結果

3. 実験装置および実験方法

図5に実験装置の概略図を示す。小振幅励振基本波用のマイクロ波源は周波数10.86 GHz，出力最高1.2W程度まで得られるようになっている。これは励振入力が比較的大きい状態での

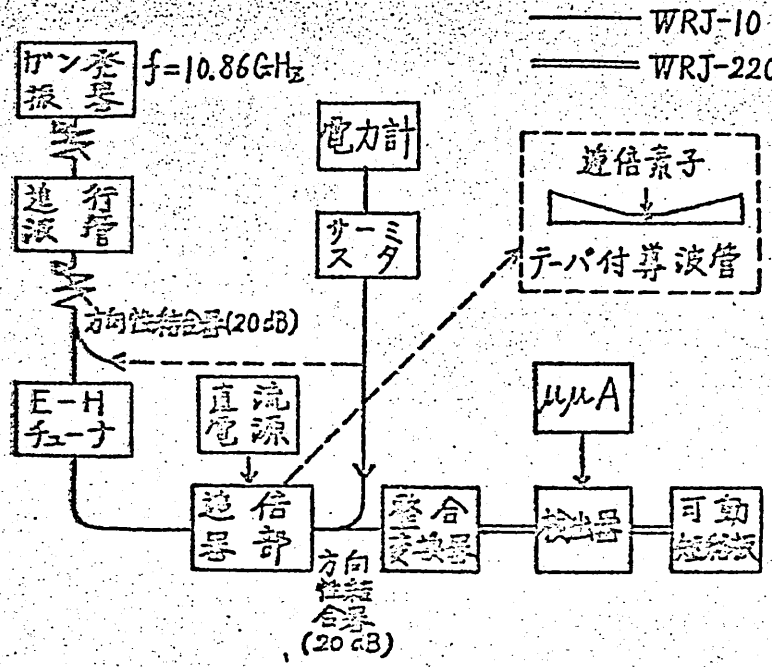


図5 実験装置図

実験もなしうるようにするためと、周波数帯が比較的低いため導波管などの構造上小振幅励振でもかなりの入力電力を必要とするため、ガンダイオードと進行波管を組合わせて用いたが、もっと高い周波数で通常の励振に対してはもちろんクライストロン級のマイクロ波源で充分である。(9) なお励振入力の大きさは可変減衰器により連続的に変化しうるようになっている。逓倍用素子を挿入する逓倍器部はWRJ-10導波管の狭幅高さを約400μmまで狭めており付図のように素子挿入部の両側部分に適当なテーパをつけている。整合変換部はWRJ-10とWRJ-220の各導波管を整合変換器で連結している。逓倍用素子としては市販のXバンド用のガンダイオードを用いており、その能動領域の素子長は8~9μmである。変換効率の測定のためには基本波と逓倍出力を較正された同一の検出素子で測定することにより正確な値が得られるようにしている。すなわち本実験における逓倍波の周波数よりその遮断

周波数が充分高いと考えられるクリスタルダイオード 1N26 を正確に較正して電力測定を行なった。逓倍出力の周波数は可動短絡板により管内波長を測定して逓倍波が得られていることを確かめている。実験においては電力変換効率を測定したが逓倍素子に印加される小振幅励振基本波の電界値も素子部の前後における 10GHz 帯マイクロ波電力値ならびに逓倍素子に吸収される電力の値などを測定することにより決定することができ，E_1/E_0 の値もそれより推測することができる。

実験は励振用マイクロ波入力を一定にして直流バイアス電界値を変化した場合，ならびに直流バイアス電界を一定に保持し励振入力を変化した両者の場合について行なった。

4. 実験結果ならびに検討

実験に使用したガンダイオードは，本来のガン発振の特性としては発振周波数，threshold 電界値などの値に関しては多少異なるもの二種類を用いたが，得られた実験結果には本質的な差異はほとんどなかった。励振入力をパラメータとして直流バイアス電圧 V_0 を変化して行なった実験結果の典型的な傾向を図6に示す。すなわち同図

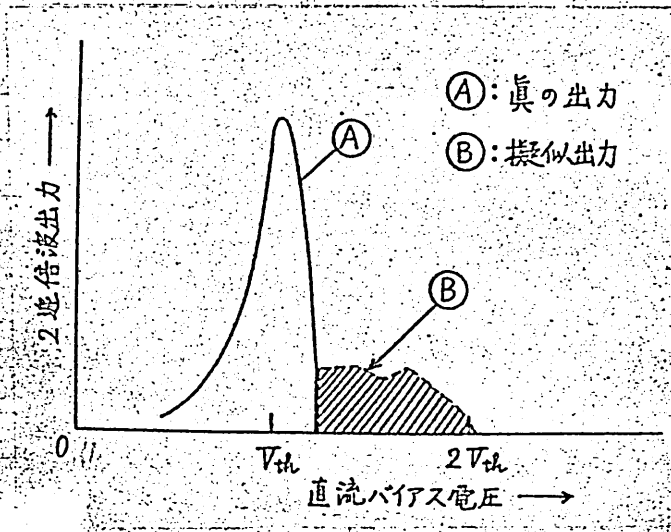


図6 二逓倍出力の傾向図

から分かるようにthreshold電圧V_{th}（これは素子定数として記された値）の近傍において強力な20GHz帯逓倍出力（同図のⒶ部）が得られ、逓倍出力が最高となる直流電圧値は励振入力の大きさにより多少異なるが、大体V_{th}あるいはそれよりやや大きい程度である。Ⓐ部より僅かに高いバイアス電圧領域から大体$2V_{th}$の電圧あたりまで微弱な20GHz帯出力（図示のⒷ部）が続き、それより高い電圧領域では逓倍出力は得られなかった。Ⓐ部は励振入力の値を大とすれば出力も大となり、これは小振幅励振の原理による真の出力と考えられるものであるが、Ⓑ部の出力は励振入力に対する応答関係はアトランダムであり擬似信号が発生するが我々の実験においても、そのような領域において、マルチドメインモードなどのため20GHz帯の微弱な出力が存在しているためではないかと思われる。そしてこのⒷ領域では励振マイクロ波のオーム性ならびに負性抵抗性両領域への適当な振り込みによるドメイン抑止条件が実現されてないものと考えられる。

真の逓倍出力が得られているⒶ領域に対して測定した種々の特性を図7～9に示す。図7は励振入力（P_{in}）をパラメータに取った場合の直流バイアス電圧V_0に対する逓倍出力（P_{out}）を示す。同図から分かるように励振用入力の値を大にしてゆくと逓倍出力の値もそれに応じて増大してゆく。V_0の増大に対して、最初比較的ゆるやかに出力が増大し、出力が最高値を越えてなおしばらくの間は先に述べたような真の逓倍出力の発生が継続する。真の逓倍出力の得られるV_0の上限値は、入力の大きさにより多少異る。なお同図の曲線①では出力最大の状態は明確でなかったが、これは励振入力が小さいためV_0の高い領域ではドメイン

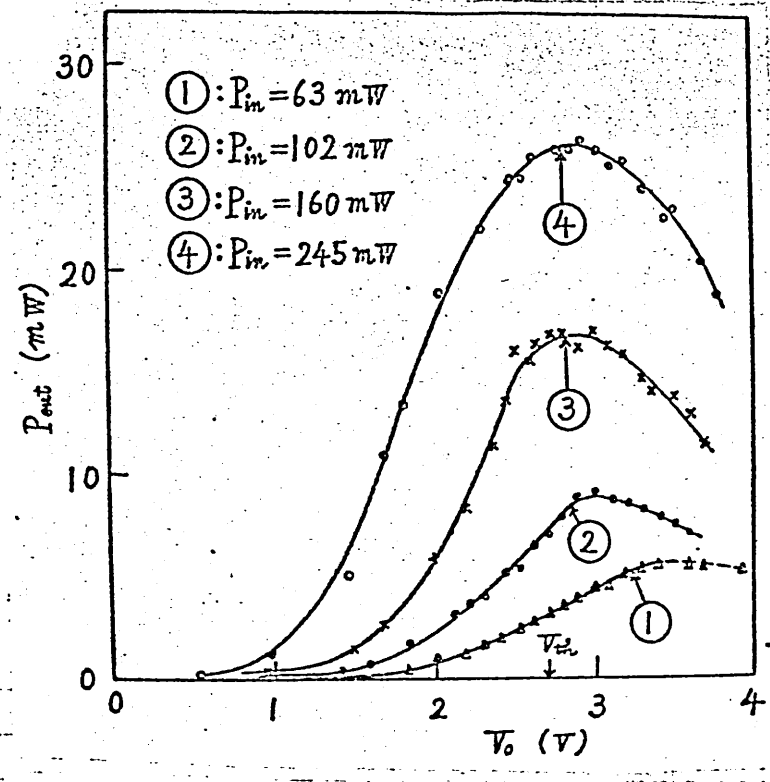


図.7 基本波入力 P_{in} をパラメータとした時の直流バイアス電圧 V_o に対する二逓倍出力 P_{out} の実験結果

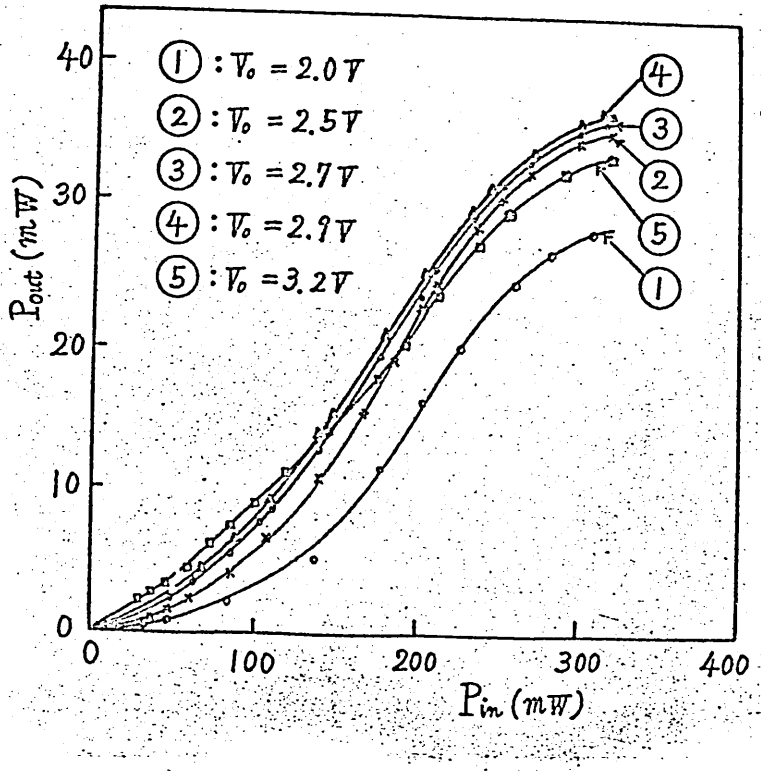


図.8 V_o をパラメータとしたときの P_{in} に対する P_{out} の実験結果

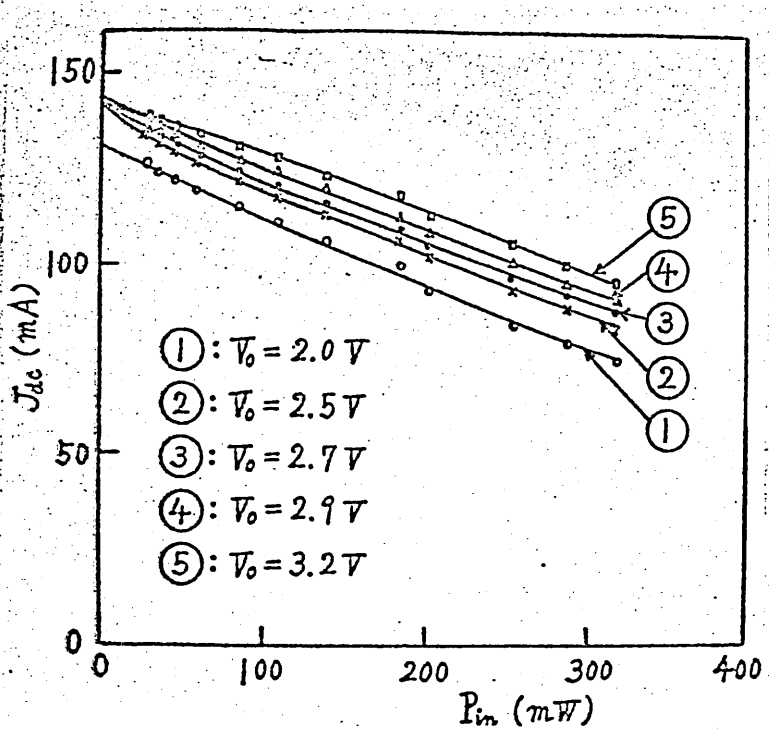


図.9 V_0をパラメータとしたときのP_{in}に対する素子直流電流の実験結果

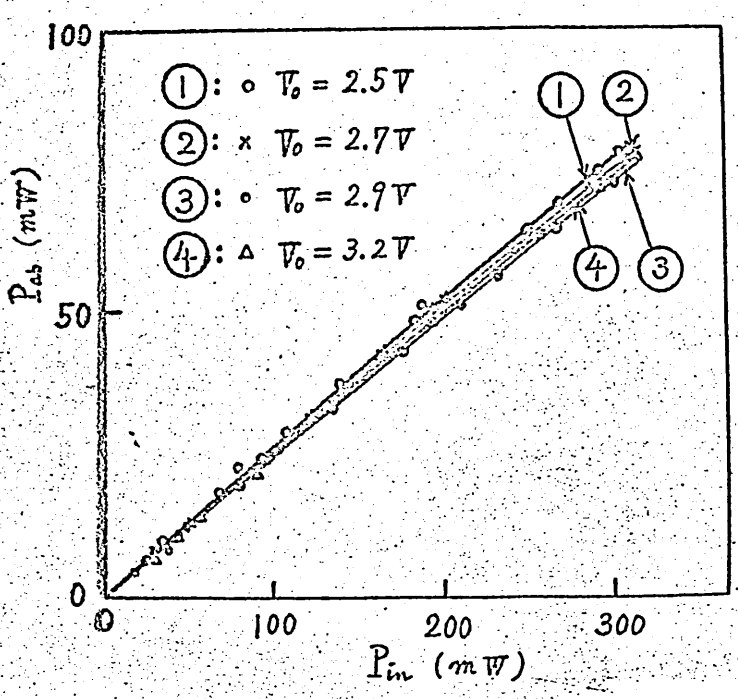


図.10 V_0をパラメータとしたときP_{in}に対する素子に吸収される基本波電力P_{ab}の実験結果

抑止効果が充分でなく先に述べたように擬似出力状態へ移行していっているものと思われる。図8は直流バイアス電圧をパラメーターに取り、励振入力に対する逓倍出力を示したものである。図7，図8より非直線特性がもっとも強い最良の動作点が存在することが容易に分かる。図8において曲線⑤は他のバイアス点におけるものより特異な傾向を示している。すなわち励振入力が小さい領域でそれより低い直流バイアス電圧におけるものより高い出力を得ているが、これは曲線⑤のバイアス電圧は V_{th} より大きく、小さい励振入力で先に説明した擬似モードが重畳されているものと考えられる。図9は直流バイアス電圧をパラメータにした時の励振入力に対する素子直流電流（J_{dc}）の変化を示したもので、式(3)から容易に分かるように励振入力の増大とともに、いわゆるミキシング電流の効果が大となって直流電流値が低下して収傾向を示している。以上の各図における励振入力 P_{in} は総べて逓倍器への全供給基本波電力を示すものであり、これらの一部は逓倍素子以外の部分での損失（テーパ回路の損失，逓倍素子挿入部付近にいくらか存在する放射損失）として失なわれる。従って逓倍出力 P_{out} と P_{in} との比を取って求めた変換効率は節2で求めた原理的な変換効率よりかなり小、となる可能性がある。そしてこれは逓倍器部の構造の改善によりかなり大に成しうるものと考えられる。原理的な変換効率に近いものとしては逓倍出力と、逓倍素子に消費される励振基本波の吸収電力 P_{ab} との比を求める必要がある。図10に V_0 の数種の値における P_{in} に対する P_{ab} の測定結果を示す。この P_{ab} の中には測定上もちろんガンダイオードの能動領域以外の部分で消費される電力も多少含まれるが，その値はかなり小、さいものとなっていることが確かめられている。図11および図12に

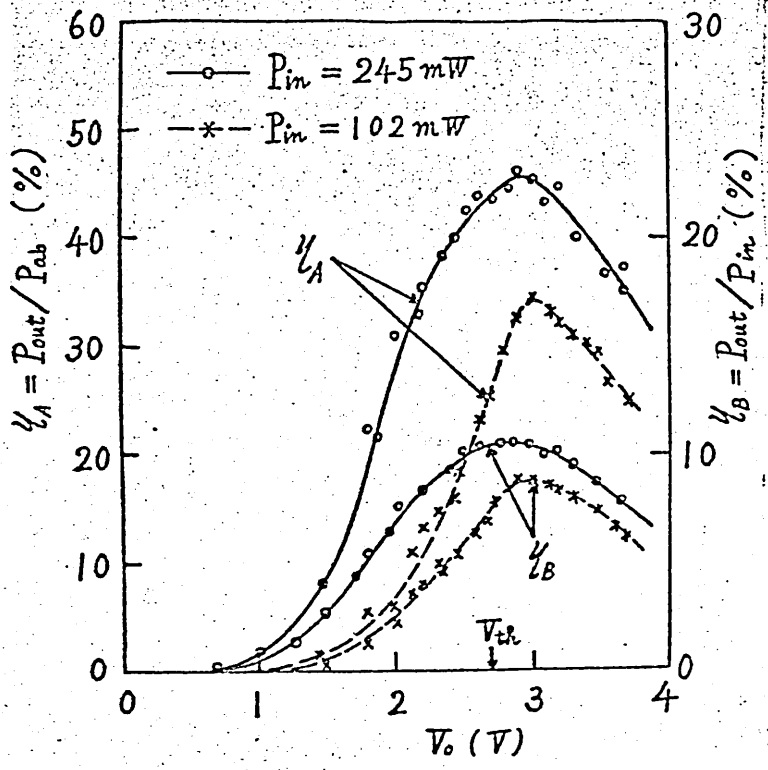


図11 P_{in} をパラメータとしたときの V_o に対する変換効率 $\eta_A = P_{out}/P_{ab}$ および $\eta_B = P_{out}/P_{in}$ の実験結果

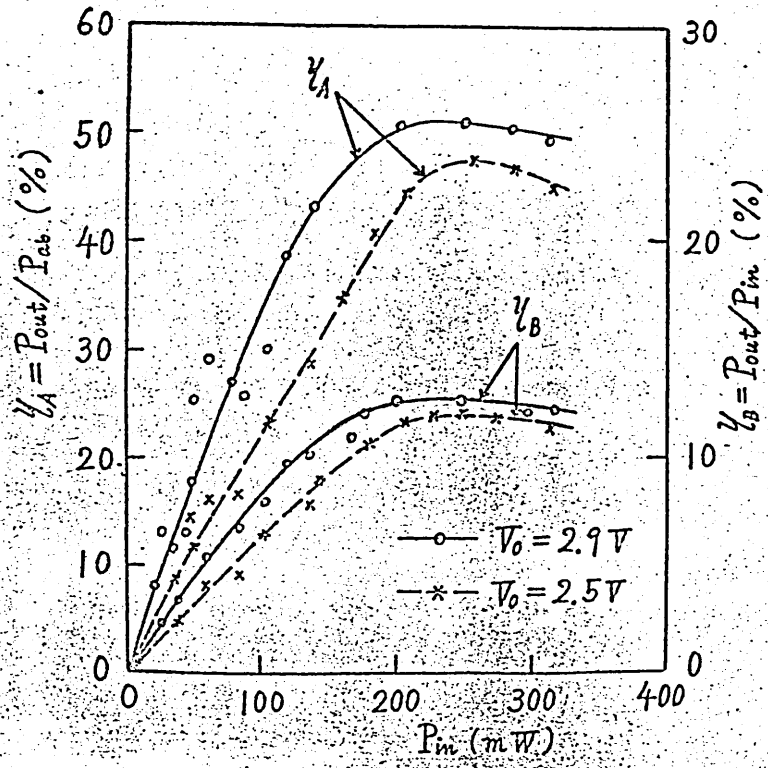


図12 V_o をパラメータとしたときの P_{in} に対する変換効率 η_A および η_B の実験結果

$\eta_A = P_{out}/P_{ab}$, $\eta_B = P_{out}/P_{in}$ の実測結果を示す。図11は P_{in} をパラメータとして V_0 に対するもの、図12は V_0 をパラメータとし P_{in} に対するものをそれぞれ示している。これらの図から分かるように実験をおこなった範囲で η_A は最高約50%程度が得られ、η_B は最高12%程度が得られている。なおこれらはいずれも V_0 が V_{th} よりやや高い値のところで得られている。節2の原理では変換比として分かり易いため電流比で表示したが実測は総べて電力比で与えられているのでその変換効率約50%ということは電流比的にはさらにずっと高いことを示しており、このような方法の本質的な高効率性が充分証されているものと思われる。また最高変換効率の得られる V_0 の値とか V_0 に対する変換効率曲線の傾向なども大体節2で原理的に推測したものと一致している。

5. 結論

高電界下の n-GaAs 中に発生する負性抵抗の電流-電界非直線特性を利用し、小振幅励振により非常に高効率の2倍調波逓倍器が得られることが、実験的に立証された。そして緩和時間効果による周波数の影響が無視し得るような周波数帯域では、n-GaAs の速度-電界の定常特性をもとにして導出した変換効率と実測結果はその傾向が大体一致することも確かめられた。

実験を行なった周波数帯は緩和時間効果が一応無視しうる領域であったが、さらに高いミリ波あるいはサブミリ波帯の発生に対しては、もちろん速度-電界特性の周波数依存性[12][13]により、定常状態特性をもとにすることはできず当然それらの効果を考慮した解析が必要であり

この問題に関しては輸送理論をもとにして現在詳しい検討を行なっている。[14]
なお筆者等が同時におこなっている50→100GHz帯逓倍の実験結果では現在までのところη_A, η_Bに関しては、それぞれ最高約25%, および約5%の値を得ている。この実験結果からもわかるように一般に周波数の上昇とともに非線形特性が劣化するため効率も低下すると考えられるが、筆者等が先に行なった理論解析では負性抵抗特性は100GHz程度でも存在し[12]、また最近行なったさらに詳細な解析[15]では、200GHz帯程度でも、なお若干の負性抵抗特性は存在しうるという解析結果を得ており、変換効率はかなり低下するとしても励振用基本波の周波数帯として、その帯域を選ぶことも可能でありサブミリ波帯の発生は充分可能性があるものと考えられている。また小振幅励振の特徴として励振源としてはクライストロン級の比較的小電力の発振源、があれば充分であり、励振源として固体素子が充分適用しうると思われることから、ミリ波, サブミリ波帯発生用素子の全固体化という問題に対しても、一つの有効な手段と考えられる。

謝辞　本研究に卒業研究として協力された安井克志君, および実験装置の製作に尽力された兼光勇輔元技官に謝意を表する。

文献

(1) B. V. Paranjape: "Behavior of hot electron in microwave fields", Phys. Rev., 122, 5, P1372 (June 1961)

(2) K. Seeger: "Microwave frequency multiplication by hot electron", J. appl. Phys., 34, 6, P1608 (June 1963).
(3) S. Kobayashi, S. Yabuki and M. Aoki: "Microwave harmonic generation with hot electrons in n-Germanium", Japan J. appl. Phys., 2, 2, P127 (Feb. 1963).
(4) B.R. Nag and S. Guha: "Hot carrier a.c. conductivity and harmonic generation in semiconductors", Brit, J. appl. Phys., 16, 10, P1461 (Oct. 1965).
(5) G. O. Ariet and H. 'T. Lam: "Behavior of n-type gallium arsenide in strong microwave field", Elect. Lett., 3, 6, P258 (June 1967).
(6) D. Chattopadhyay and B.R. Nag; "Harmonic generation using the non-linearity in the hot carrier characteristic of GaAs", Int. J. Elect., 27, 5, P443 (Nov. 1969).
(7) 金田, 安部, 大場: "n-GaAsの負性抵抗非直線特性を利用したマイクロ波逓倍器", 信学論 (B), 54-B, 9, P564 (昭46-09)
(8) 金田, 堀間: "n-GaAsによる高効率2倍調波用マイクロ波逓倍器", 信学論 (B), 54-B, 12, P848 (昭46-12).
(9) 金田, 堀間: "n-GaAsを用いた高効率100GHz帯2倍調波逓倍器", 信学会電子装置研資, ED71-44 (1971-11).
(10) 大見, 村山, 神戸: "Two-valley 半導体素子における電子遷移時間効果", 信学論 (C), 52-C, 1, P41 (昭44-01).

(11) P.N. Butcher and W. Fawcett: "Calculation of the velocity-field characteristic for gallium arsenide", Phys. Lett., 21, 5 P489 (June 1966).
(12) 金田, 安部: "ホットキャリヤ状態 n-GaAs のマイクロ波特性の解析", 信学論 (B), 53-B, 12, P760 (昭 45-12).
(13) S. Kaneda and M. Abe: "Microwave anisotropy and frequency dependence of hot electron in n-Type GaAs", Japan. J. appl. Phys., 10, P1396 (Oct 1971).
(14) 金田, 高部: "n-GaAs の非直線特性による Harmonic Generation の輸送理論による解析", 昭 47 信学全大.
(15) 安部, 金田: "n-GaAs のホットエレクトロンのミリ波周波数応答性", 信学論 (C), (投稿中)

円筒形半導体の小信号インピーダンスについて（1）

岡崎　芳・張　年錫・松尾幸人

大阪大学産業科学研究所

昭和47年1月28日

輻射科学研究会

円筒形半導体の小信号インピーダンスについて（1）

岡崎　芳
張　年錫
松尾幸人

大阪大学産業科学研究所

§序

Electron Transferred Effect に基づく Gunn 効果がマイクロ波発振器、マイクロ波増幅器として応用されてきた。これまで多くの研究者により、そのインピーダンスが、小信号解析、大信号解析や実験により調べられてきた。これらの解析は、実際のデバイスがそうであるように板状のいわゆる均一な形状、doping（以下 uniform sample と呼ぶ）についてである。[1] また一般に試料内の電界分布は均一ではなく、これらを考慮した場合の小信号インピーダンス[2]、さらに Gunn 発振が境界条件の影響を受けるように、これらの負性微分移動度を持つ試料の境界条件（cathode contact）による小信号インピーダンスの変化[3]等が調べられてきた。しかし形状効果についてはまだ充分に調べられていない。[5),6)]

ここでは，我々は円筒形半導体について考える。円筒形半導体は，数学的に解析しやすい形状であると同時に実現しやすい形状であること，電圧同調形ガン発振器として動作すること[4]，試料断面が陰極から陽極に向って変ることによるドメインの大きさの変化，それによるパラメトリックな効果等，実際のマクロ波デバイスとして多くの利点を持つ。はじめに我々は，負性微分移動度を持つ円筒形半導体について，小信号インピーダンスにおける形状効果を調べる。そして印加する電圧の極性により，その小信号インピーダンスが大きく異なることを示す。

§2で円筒形における小信号解析を，§3，その数値例と Uniform sample との比較について，§4で球状の半導体試料について若干ふれる。

§2 円筒形試料における小信号インピーダンス

解析は複雑さをさけるため拡散効果を省略する。基本式は Poisson の式と電流連続の式である。系が軸対称であると仮定し，$\exp j\omega t$ なる変化を考えると

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rE_1)}{\partial r} = \frac{qn_1}{\varepsilon} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(qn_1v_0+qn_0v_1+j\omega\varepsilon E_1\right)\right]=0 \qquad (2)$$

ここで q は単位電荷量，n は電子密度，v は電子速度，ε は誘電率，E_1 は電界で，添字 0 は直流量を 1 は交流量を表わす。

図-1 の形状における単位厚さ当りの電流密度を J_1 とすると系が軸対称であるから (2) から

$$J_1=2\pi r\left(qv_0n_1+qn_0v_1+j\omega\varepsilon E_1\right) \qquad (3)$$

で表わされ J_1 は場所によらず一定で時間 t の関数である。v_1 は

$$v_1=\mu_1 E_1 \qquad (4)$$

で表わされる。ここで μ_1 は微分移動度で，ある閾値以上でガン効果を示す GaAs では負の値を，Si, Ge など速度飽和特性を示すものでは 0 である。

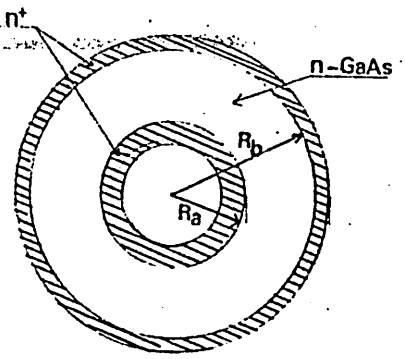
(1), (3), (4) 式より小信号電界 E_1 に対して次の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial E_1}{\partial r}+\left(\frac{1}{r}+\frac{qn_0\mu_1}{\varepsilon v_0}+j\frac{\omega}{v_0}\right)E_1=\frac{J_1}{2\pi v_0\varepsilon r} \qquad (5)$$

(5) 式において n_0, v_0 は一般に場所 r の関数であるが，円筒構造の半径が適当に大きく，内外径の差が大きくなければ，第1次近似で，ほぼ一定として

良いであろう。

この仮定の下で (5) 式の一般解は次式で表わされる。



図·1 円筒形半導体

$$E_1 = \frac{J_1}{2\pi V_0 \varepsilon(\beta_c + j\beta_e)} \cdot \frac{1}{r}\left[1 + C_1 e^{-(\beta_c + j\beta_e)r}\right] \quad (6)$$

ここで $\beta_c = \dfrac{qn_0\mu_1}{\varepsilon V_0}$, $\beta_e = \dfrac{\omega}{V_0}$

である。C_1 は境界条件から決まる量であるが，境界条件には次の2つの場合がある。

(A) 電子が内側 ($r=a$) 電極から注入される場合
すなわち $E_1(a) = 0$, $V_{ab} < 0$

(B) 電子が外側 ($r=b$) 電極から注入される場合
すなわち $E_1(b) = 0$, $V_{ab} > 0$

これら2つの場合に対する小信号電界 E_1 は

$$E_1 = \frac{J_1}{2\pi V_0 \varepsilon(\beta_c + j\beta_e)} \cdot \frac{1}{r}\left[1 - e^{-(\beta_c + j\beta_e)(r-a)}\right] \quad (7)$$

for (A)

$$E_1 = \frac{J_1}{2\pi\nu_0\varepsilon(\beta_c+j\beta_e)} \cdot \frac{1}{r}\left[1-e^{(\beta_c+j\beta_e)(r-b)}\right] \qquad (8)$$

for (B)

端子電圧 V_1 は

$$V_1 = \int E_1 dr \qquad (9)$$

で計算され，したがって小信号インピーダンスは単位厚さ当り V_1/J_1 で与えられる。各々の場合における小信号インピーダンスは

$$Z_{ab} = \frac{1}{2\pi\nu_0\varepsilon(\beta_c+j\beta_e)}\left[\ln b/a - \int_a^b \frac{e^{-(\beta_c+j\beta_e)(r-a)}}{r} dr\right] \qquad (10)$$

for (A)

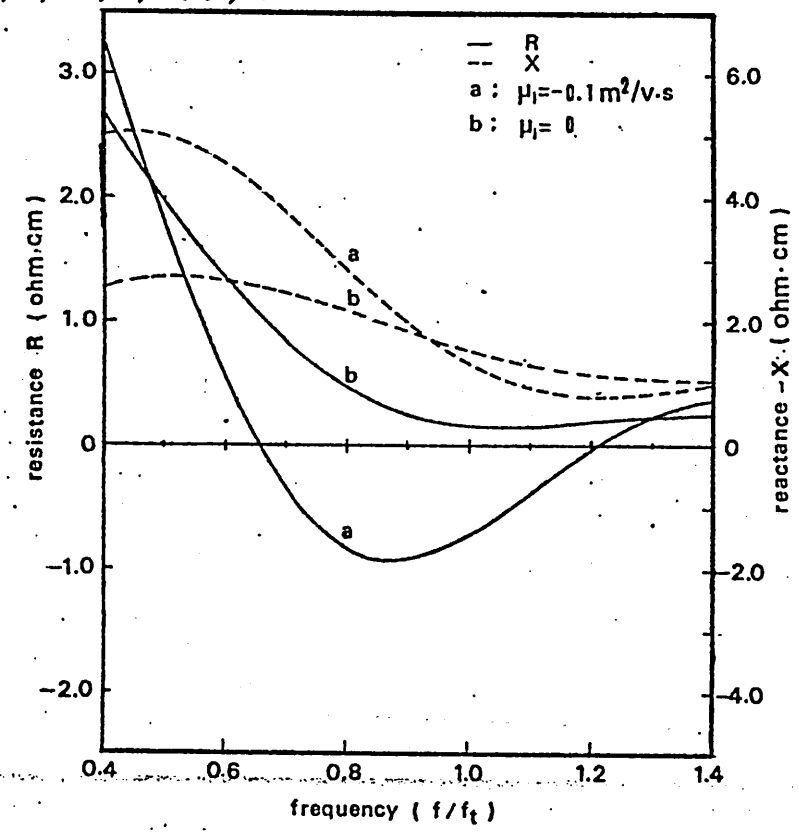
$$Z_{ba} = \frac{1}{2\pi\nu_0\varepsilon(\beta_c+j\beta_e)}\left[\ln b/a - \int_a^b \frac{e^{(\beta_c+j\beta_e)(r-b)}}{r} dr\right] \qquad (11)$$

for (B)

(10)，(11) の積分は初等関数で表わせず，$\beta_c=0$ すなわち $\mu_1=0$ のときでも積分正弦・余弦関数となる。したがって (10)，(11) 式の計算は計算機により数値積分を行った。

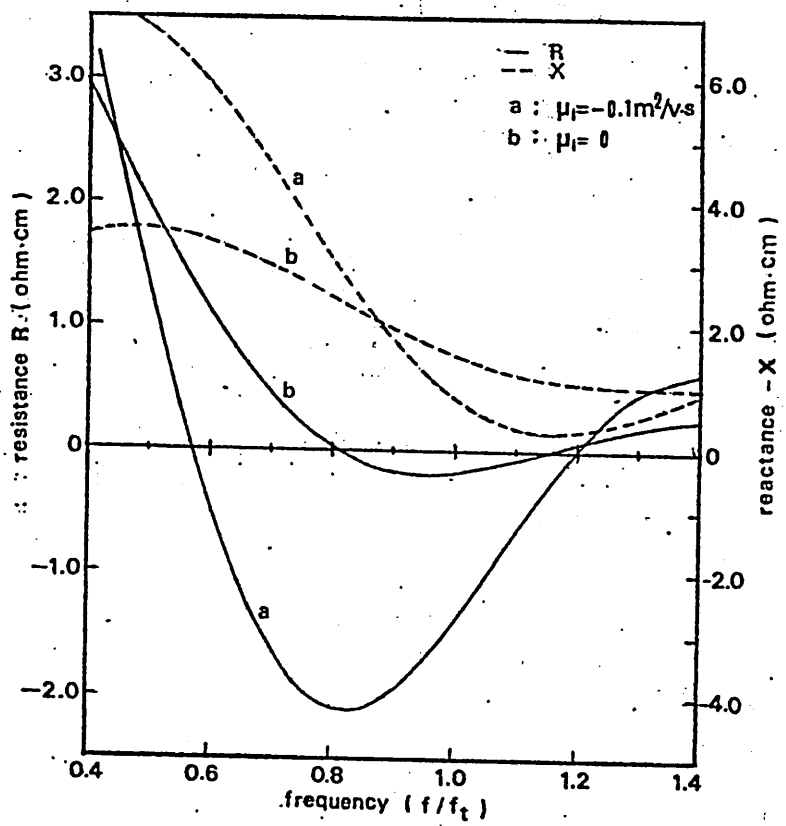
§3 数値例

図1において $R_a = 10\mu m$, $R_b = 20\mu m$ および電子密度 $n_0 = 1\times10^{14} cm^{-3}$, 電子速度 $v_0 = 1\times10^{7} cm/s$, 微分移動度 $\mu_1 = -1000 cm^2/V\cdot s$, 誘電率 $\varepsilon = 12.5\varepsilon_0$ とした場合の小信号インピーダンスを (10), (11) 式により計算したものを図2, 3に示す。以下 (10) 式のものを type A, (11) 式のものを type B と呼ぶことにする。なお空間の分割は R_a, R_b 間を100等分して数値積分した。この分割では, 計算誤差は1%以下である。



図·2 円筒形試料Aの小信号インピーダンス
$f_t = 10 GHz$

これらの図から明らかなように，その負性抵抗はtype Bの場合 −2.0 ohm·cm，type Aの場合 −0.95 ohm·cmで2倍も異なる。また負性抵抗を示すバンド中は f/f_t が0.1，すなわち f_t が10GHzであるから 1GHzもtype Bのほうが広い。この様な違いは uniform sampleでは表われない特性で明らかに形状効果である。



図·3 円筒形試料Bの小信号インピーダンス
f_t = 10GHz

形状効果を明らかにするために，負性抵抗の直接の原因である負微分移動度を持たない試料，すなわち速度飽和特性 $\mu_1 = 0$ の場合について考えてみる。その数値計算例がそれぞれ図2，3に添字bを付けて記入してある。比較のため uniform sample に対する小信号インピーダンスを図4に示す。uniform sample に対するインピーダンスを表わす式は

$$Z_u = \frac{1}{V_0 \varepsilon (\beta_c + j\beta_e)} \cdot \left[L + \frac{e^{-(\beta_c + j\beta_e)L} - 1}{\beta_c + j\beta_e} \right] \qquad (12)$$

ここで L は試料長である。

これらの図を比較することにより，円筒形試料における小信号インピーダンスの振舞が形状効果によるものであることが明らかになる。すなわち一般に速度飽和条件下において，uniform sample では，ある走行角（この場合 2π）において小信号インピーダンスは0になりうるが，図2の円筒形試料Aでは正の抵抗を，図3の type B では負の抵抗を持つ。これは uniform sample と違って，円筒形試料では空間電荷波の「振巾」が $1/r$ に比例するためである。すなわち，(7)，(8)式において $\mu_1 = 0$ したがって $\beta_c = 0$ とおいて，抵抗分に相当する実数部だけを書くと

$$Re\{E_1\} = \frac{1}{2\pi V_0 \varepsilon \beta_e} \cdot \frac{\sin \beta_e (r-a)}{r} \qquad (13)$$

for type A

$$Re\{E_1\} = \frac{1}{2\pi V_0 \varepsilon \beta_e} \cdot \frac{\sin\beta_e(b-r)}{r} \qquad (14)$$

for type B

$$Re\{E_1\} = \frac{1}{V_0 \varepsilon \beta_e} \sin\beta_e x \qquad (15)$$

for uniform sample

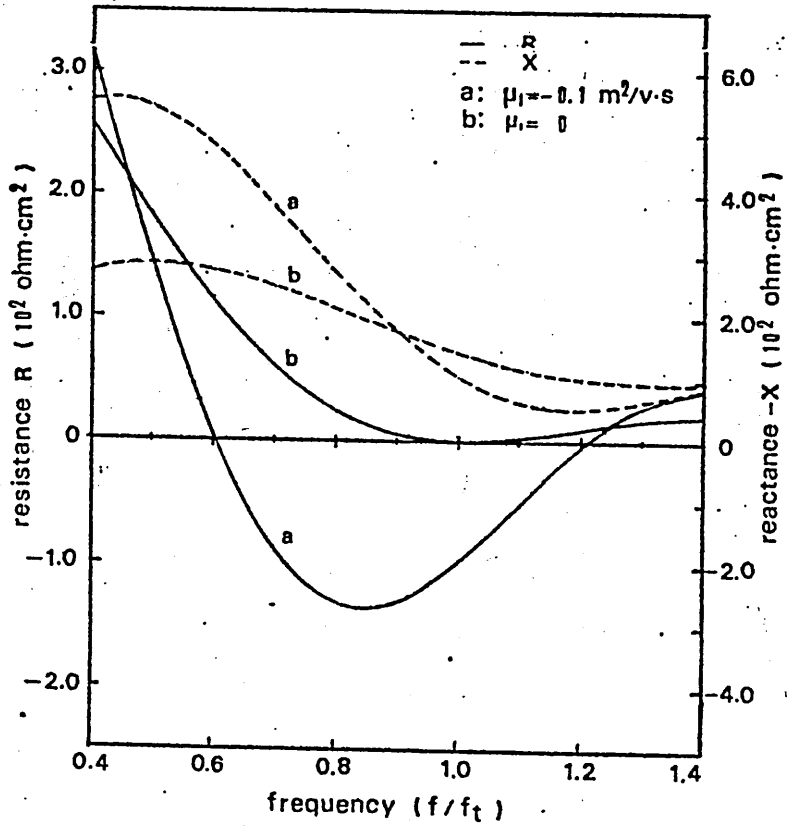
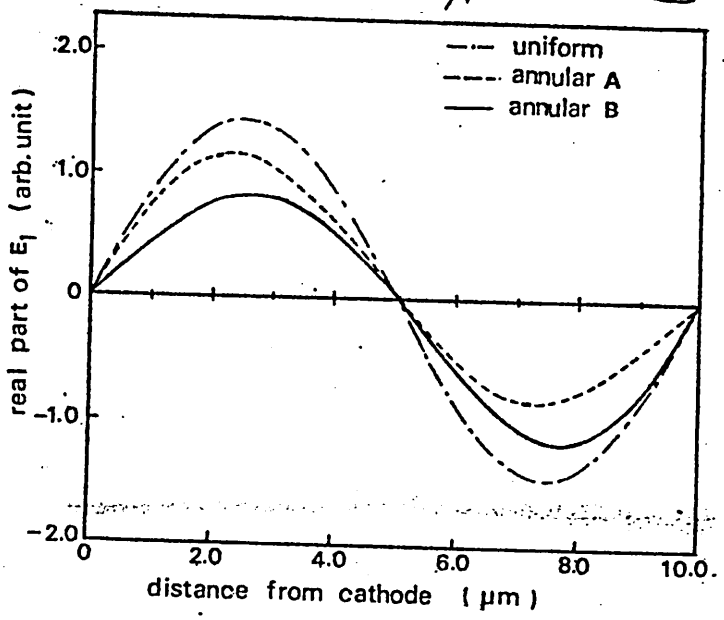


図-4 Uniform sample の小信号インピーダンス
$f_t = 10GHz$

(13), (14), (15) 式を走行角が 2π の場合について図にしたものが図·5である。uniform sample では「振巾」が一定であるため，この場合小信号インピーダンスは0となる。円筒形Aでは，カソードに向って $1/r$ で「振巾」が小さくなるので，キャリヤ·ウェーブはみかけ上減衰することになり，小信号インピーダンスは0に達せず，正の値を持つ。これに対し円筒形Bでは，逆に $\mu_1=0$ でもキャリヤ·ウェーブがみかけ上増大することになるので，負の抵抗を示すことになるのである。この負性抵抗は全く形状効果によるものである。

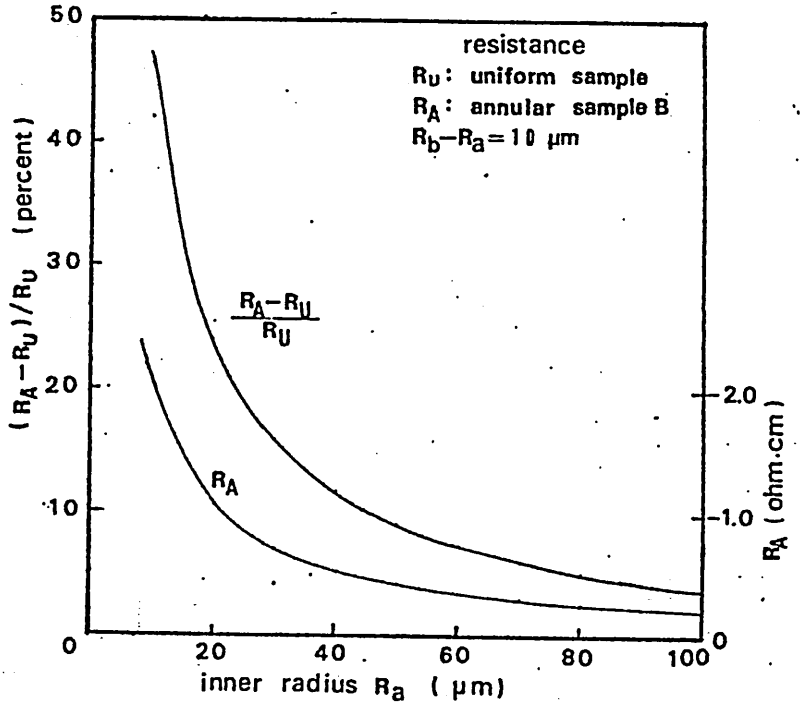
GaAs のように負性微分移動度 $\mu_1<0$ を持つ試料では $\exp(en_0|\mu_1|/\varepsilon v_0 \cdot r)$ の増大係数を持つが，上述のように，形状効果のため type A ではみかけ上 $1/r$ だけ増大係数は小さくなり，他方 type B では逆に大きく



図·5 $\mu_1=0$ における小信号電界の分布（走行角 2π）

なるため，図2，3に示すように極性により大きく異なった特性を示すことになる。

以上の計算例は $R_a = 10\mu m$，$R_b = 20\mu m$ の場合について計算したものであるが，内外径比 R_b/R_a によっても負性抵抗の大きさは変化を受けると考えられる。これを uniform sample との比で表わしたものを図·6に示す。この場合 uniform sample の寸法は長さが $R_b - R_a = 10\mu m$，横方向の寸法が $2\pi(R_a+R_b)/2$，厚さが円筒形と同じく単位長さ 1cm である。すなわち，同一の走行周波数 10GHz を持ち，同一の体



図·6 円筒構造の径の比によるインピーダンスの変化

積を持つ場合の uniform sample と円筒形試料 (annular sample) との負性抵抗の比である。いづれの場合も負性抵抗は 8.4 GHz ($f/f_t = 0.84$) で最大となり、この点で比較している。図にみられるように内径が 40μ ($R_b/R_a = 1.25$) までは、形状効果により uniform sample にくらべ 46% ～ 10% 大きな負性抵抗を持つ。円筒形の径が大きくなるにつれ、当然のことであるが、形状効果は小さくなり、100μ 以上では、uniform sample とほとんど変らなくなる。

以上の計算例は n_0 も v_0 も場所によらず一定であるとしているが、これらは一般に r の関数である。このときの円筒形試料 type B に対する小信号電界は (5) 式から

$$E_1(r) = \frac{J_1}{2\pi\varepsilon r} e^{\int^r \beta(r')dr'} \int_b^r \frac{e^{-\int^{r''} \beta(r')dr'}}{v_0(r'')} dr'' \qquad (16)$$

$$\beta(r) = \frac{q\mu_1 n_0(r)}{\varepsilon v_0(r)} + j\frac{\omega}{v_0(r)}$$

ま

$$\int^r \beta(r')dr' = \tau(r) \qquad (17)$$

とおくと小信号インピーダンスは

$$Z = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} \left[\int_b^r \frac{e^{\tau(r)-\tau(r_1)}}{v_0(r_1)} dr_1 \right] \qquad (18)$$

で表わされ，静電界分布から諸量を求め，数値計算しなければならない。不均一な電界分布，電子密度分布を導入すればuniform sampleにおいてそうであるように，陰極近傍において電界は閾値を越えず，その部分は損失抵抗として働くことになる。したがってこれまで計算したものより，負性抵抗の大きさは小さくなってくる。また速度飽和条件下で負性抵抗を示すかどうか調べなければならない。これは現在，計算中である。なお，n_0が$1/r$の分布をしていると仮定して導びいた式により小信号インピーダンスを計算したが，計算誤差内で，均一なものと一致した。

§4 球形半導体における小信号インピーダンス

円筒形試料における小信号インピーダンスの振舞から明らかなように，convergentな形状にすると，速度飽和下でも負性抵抗が得られる。したがって球形半導体を用いれば電界が$1/r^2$に比例して変化するため，さらに大きな負性抵抗が得られる。球形の場合小信号インピーダンスはtype Bに対して

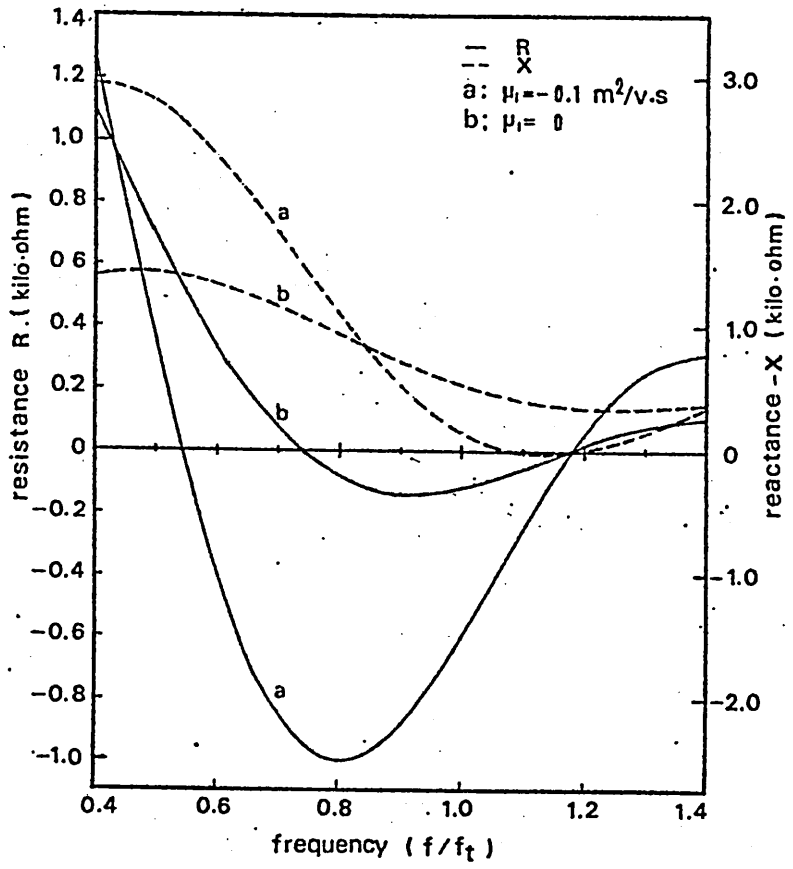
$$Z = \frac{1}{4\pi v_0 \varepsilon (\beta_c + j\beta_e)} \int_a^b \frac{1 - e^{(\beta_c + j\beta_e)(r-b)}}{r^2} \cdot dr \qquad (19)$$

ただしv_0, n_0は一定としている。

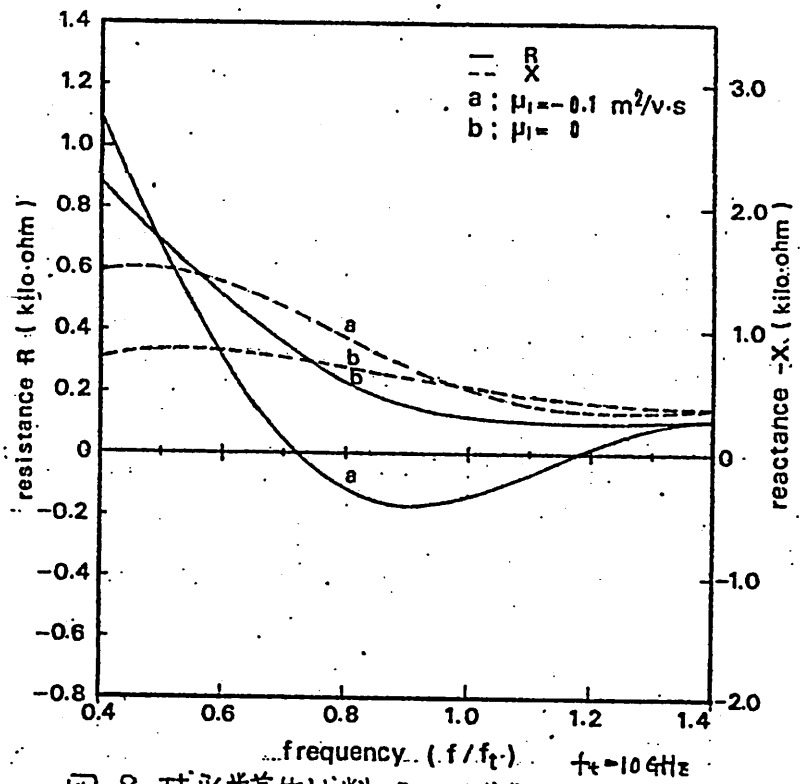
速度飽和条件下における小信号電界E_1はtype Bに対して

$$Re\{E_1\} = \frac{1}{4\pi V_0 \varepsilon \beta e} \cdot \frac{\sin \beta e (b-r)}{r^2} \qquad (20)$$

である。球形の試料に対し，円筒形の場合と同じパラメータで計算した場合の小信号インピーダンスを図7，8に示す。これらの図にみるように，形状効果が大きいため，極性による負性抵抗の大きさは，円筒形の場合より，さらに大きく変化する。



図·7 球形半導体試料における小信号インピーダンス (TYPE-B)
f_t = 10 GHz



図・8 球形半導体試料における小信号インピーダンス (TYPE-A)

§5 結び

我々は GaAs のように負性微分移動度を持つ円筒形半導体における小信号インピーダンスを計算した。

その結果，キャリヤの流れる方向によりその負性抵抗の大きさが著しく異なることを示し，それが形状効果によるものであることを明らかにした。すなわち，キャリヤが外側電極から，内側の電極に向って流れるとき，大きな負性抵抗を持ち，さらに

Si, Ge などの速度飽和特性を示す結晶でも，円筒形（convergent な形状）にすることにより，負性抵抗を持つことを見い出した。

以上の計算は，電子密度分布，速度が，場所 r によらず，一定としたが，実際のデバイスを考える場合，これらの場所 r 依存性を導入しなければならない。

参考文献

1) McCumber D.E. and Chynoweth A.G.: IEEE Trans. on Electron Devices, vol. ED-13, pp. 4 (1966)

2) McWhorter A.L. and Foyt A.G.: Appl. Phys. Letters vol. 9, pp. 300 (1966)

3) Hariu T., Ono S. and Shibata Y.: Electronics Letters, vol. 6, pp. 666 (1970)

4) 速水・張・松尾 「電圧同調形ガン・ダイオードの実験」 昭和46年 電通学会全国大会 579

5) Shockley W.: Bell Syst. Tech. J., vol. 33, pp. 799 (1954)

6) Lündström I. and Wierich R.L.: Electronics Lettres, vol. 7, pp. 209 (1971)