輻射科学研究会資料

不均一な速度で運動する媒質中における電磁界方程式とその応用

塩　沢　俊　之
(大阪大学・工学部)

1972年4月28日

1. まえがき

宇宙工学，プラズマ工学あるいは電子ビーム理論などの基礎となる運動媒質の電磁界理論は，特殊相対性理論を基礎として，1908年，Minkowskiによって確立された[1] Minkowskiの理論では[2],[3]，等速度運動を行なう媒質しか取り扱われていないが，この理論は，一般に空間的ならびに時間的に不均一な任意の速度で運動する媒質にもそのまま適用することができるだろうか．この問題は決して自明のことではなく，相対論的電磁界理論において検討すべき重要な課題の一つであると考えられる．そこで，本稿では，まず，不均一な速度で運動する媒質中における電磁界方程式について考察し，媒質の加速度運動に起因する慣性力が，媒質を構成する荷電粒子に働く電磁的な力に比べて無視できるときには，Minkowskiの理論が適用できることを示す．

つぎに，不均一な速度で運動する媒質中における電磁界方程式の応用として，特に一様な回転運動を行なう媒質中における電磁界について具体例をあげて検討する．まず，静電磁界の問題として，FaradayおよびWilsonの実験について考察する．さて，Faradayは一様な外部静磁界中に置かれた導体円盤を静磁界の方向に平行な軸のまわりに回転させると，導体円盤の半径方向に起電力が生じることを実験的に示した．上の実験における導体円盤は“Faradayの円盤”として歴史的に有名であり，その原理は直流発電機などに広く応用されている[4] また，Wilson[5]は，Faradayの実験の拡張として，導体円盤のかわりに中空の誘電体円柱を外部静磁界の方向に平行な軸のまわりに回転させ，半径方向に電界が生じることを示した．本稿では，これらの二つの実験について相対論の立場から考察を行ない，不均一な速度で運動する媒質中における電磁界方程式の実験的基礎を明らかにする．

つぎに，いま一つの応用として，回転運動を行なう媒質中における電磁波の伝搬について考察する．まず，幾何光学近似を用いて，回転運動を行なう

媒質中における電磁波の位相およびエネルギーの伝搬特性を詳しく検討する．つぎに，上で得られた結果を実験的に検証するための方法として，リング干渉計およびリングレーザと回転する光学ガラスの円盤を組合わせた二つの方法を提案する．

2. 不均一な速度で運動する媒質中における電磁界方程式

まず，等速度運動を行なう媒質に対するMinkowski の理論を簡単にふり返ってみよう．いま，観測者が静止している慣性系をIとし，Iに対して媒質が一定の速度で運動しているものとする．このとき，媒質の各点がすべての時刻にわたって同時に静止しているような慣性系I'が存在し，IおよびI'には特殊相対性理論を適用することができる．すなわち，Maxwell の方程式の共変性によって慣性系Iにおいても慣性系I'と同様にMaxwell の方程式が正しく成り立つ．また，I系における構成関係式は，I'系において現象論的に知られている関係式にLorentz 変換を適用することによって求められる．このようにして，I系における電磁界方程式は完全にきまる．以上がMinkowski の考え方の概略である．このように，Minkowski の理論の対象は等速度運動を行なう媒質に限られているが，一般に空間的ならびに時間的に不均一な任意の速度で運動する媒質にもMinkowski の理論は適用できるだろうか．もし適用できるとすれば，どのような条件のもとに適用できるのだろうか．以下では，この問題について考察する．

さて，観測者は慣性系Iに静止しており，時刻tにおける媒質の任意の点(x, y, z)のI系に対する速度を$\mathbf{v}(x, y, z, t)$とする．簡単のために，媒質は均質，等方かつ非分散とし，その誘電率をε，透磁率をμおよび導電

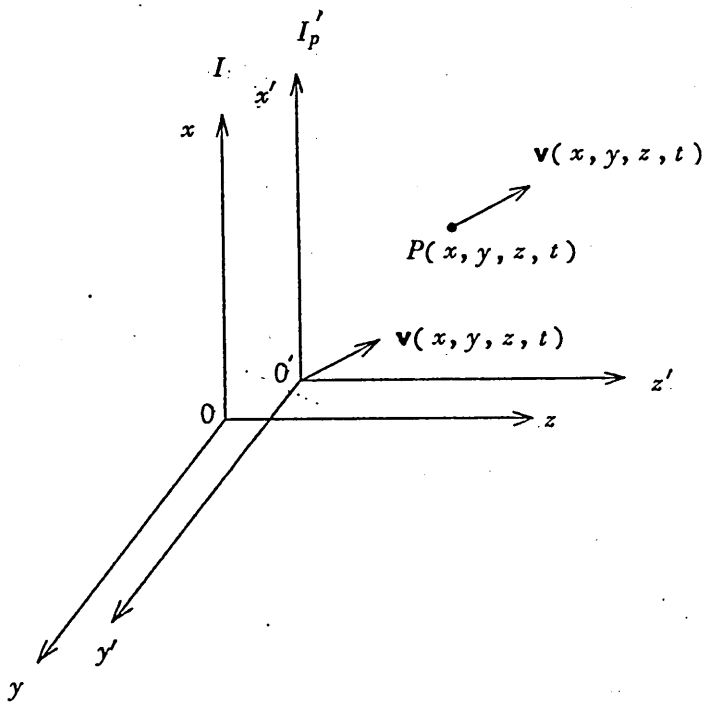


図１　慣性系 I と局所慣性系 I_p' との関係

率を σ とする．いま，図１に示すように，媒質の任意の一点 $P(x, y, z)$ に着目し，時刻 t における点 P の速度 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ で I 系に対して一様に運動している慣性系 I_p'（これを時刻 t，点 P における局所慣性系と呼ぶことにする）を導入する．ただし，I 系における時空座標 (x, y, z, t) に対応する I_p' 系における値を (x', y', z', t') とし，$t = t' = 0$ の瞬間には両座標系は一致するものとする．このとき，点 P は時刻 t の瞬間には慣性系 I_p' に静止していることは明らかである．しかしながら，I_p' 系に移っても，媒質の速度が空間的ならびに時間的に変動する場合，すなわち媒質が加速度運動を行なう場合には，媒質は一般に加速度によって変形され，その物理的性質が変化するものと考えられる．たとえば，媒質が一様な回転運動を行な

う場合には，よく知られているように，遠心力およびCoriolisの力などの慣性力の影響を受ける．以下では，簡単のために，媒質の加速度が小さく，したがって加速度によって媒質の物理的性質が変化しないものと仮定する．すなわち，媒質を構成する電荷に働く電磁的な力に比べて媒質の加速度運動に起因する慣性力が無視できるものとする．このような仮定の妥当性については，後に具体例によって検討する．

以上のような仮定を行なうと，I_p' 系においては，点Pに対して通常の静止媒質に対するMaxwellの方程式が成立する．基準系IおよびI_p'はともに慣性系であるから，I系の時刻t，点Pにおける電磁界方程式は，I_p' 系における電磁界方程式にLorentz変換を適用することによって求められる．すなわち，I系においても，時刻t，点Pに対して，Maxwell の方程式

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

が成立する．

また，I系における構成関係式は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E} &= \mu\left[\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}\right] \\ \mathbf{D} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{H} &= \varepsilon\left[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right] \\ \mathbf{J} - \rho\mathbf{v} &= \gamma\sigma\left[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c}\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ただし，

$$r = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c} \tag{3}$$

であり，c は真空中の光速度を表わす．

以上のようにして，各時刻において，運動媒質の各点に局所慣性系を導入し，この局所慣性系と観測者の静止している慣性系 I との間に次々にLorentz 変換を適用することによって，不均一な速度で運動する媒質の各点および各時刻における電磁界方程式を求めることができる．以上の議論からわかるように，媒質の加速度運動に伴う慣性力が無視できるときには，Minkowski の理論を用いてもよいことがわかる．しかしながら，等速度運動を行なう媒質の場合には媒質の静止系としてただ一つの慣性系を考えればよかったが，不均一な速度で運動する媒質の場合には，媒質の各点がすべての時刻にわたって同時に静止しているような慣性系は一般には存在し得ないので，媒質の各点，各時刻に固有の慣性系，すなわち局所慣性系を導入しなければならない．

以上，不均一な速度で運動する媒質中における電磁界方程式について考察したが，このような媒質中におけるエネルギー運動量テンソルはどうなるだろうか．上と同様の議論から，媒質が不均一な速度で運動していても，媒質の慣性力が無視できる場合には，Minkowski のエネルギー運動量テンソルをそのまま用いてもよいことがわかる．すなわち，電磁エネルギー密度，電磁エネルギー流密度および電磁運動量密度などに対して，通常の Minkowski の表示を用いることができる．

3. FaradayおよびWilsonの実験について

不均一な速度で運動する媒質に対する電磁界方程式の応用として，まず，

FaradayおよびWilson の実験について相対論の立場から考察を行ない，先に述べた理論の実験的基礎を明らかにする．

最初に，Faradayの実験について検討しよう．さて，Faradayは，図2に示すように，一様な磁束密度B_0 の静磁界中に置かれた導体円盤を B_0 に平行な軸のまわりに一定の角速度Ωで回転させると，AC間に

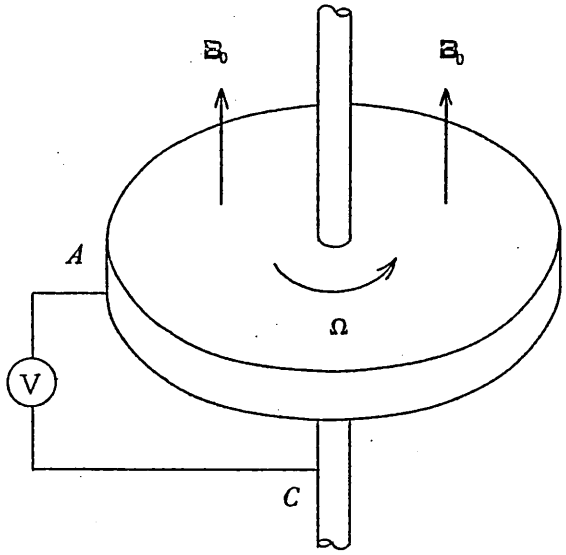


図2　Faradayの円盤

$$V = \frac{1}{2}\Omega(r_2^2 - r_1^2)B_0 \qquad (4)$$

なる大きさの起電力が生じることを実験的に示した．ただし，r_1 および r_2 は，それぞれ，円盤の内径および外径を表わす．式(4)は，Faraday の電磁誘導の法則を用いて，理論的に求めることもできる．本稿では，式(1)および(2)を用いて，上の問題を相対論の立場から考察する．

以下では，簡単のために，導体円盤のかわりに，無限長の完全導体円柱を

考える．いま，円柱の軸方向に z 軸を選ぶと，円柱の任意の点（x，y，z）の速度は次式で与えられる．

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\mathbf{i}_x \Omega y + \mathbf{i}_y \Omega x \tag{5}$$

ただし，$\boldsymbol{\Omega}$ は z 方向を向く角速度ベクトルであり，$\mathbf{r}$ は動径ベクトルを表わす．また，$\mathbf{i}_x$ および $\mathbf{i}_y$ は，それぞれ，x および y 方向の単位ベクトルを表わす．ここで注意すべきことは，媒質の速度は真空中の光速度 c を越えることができないので，$\Omega r < c$ なる条件が必要であるということである．

さて，対称性により，0でない電磁界成分は E_r，B_z，D_r および H_z であり，これらは r のみの関数となることがわかる．まず，式(2)から，導電電流が存在しないときには，次式が成立する．

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbb{B} \tag{6}$$

式(6)の物理的意味は，平衡状態においては，自由電子に働く Lorentz 力が0になるということである．

式(6)を式(2)の第一および第二式に用いると次式が得られる．

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{H}, \qquad \mathbb{B} = \mu \mathbf{H} \tag{7}$$

式(7)の関係と

$$\nabla \times \mathbf{H} = \rho \mathbf{v}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{8}$$

から，H_z が得られ，つぎのようになる．

$$H_z = \frac{H_{i0}}{1 - (\Omega / c)^2 r^2} \tag{9}$$

ただし，H_{i0}は定数であり，後に境界条件から決められる．Hが求まると，式(6)および(7)から導体内部の電磁界成分は完全に決まる．

式(9)，(7)および(8)から，導体円柱内部の自由電荷密度ρはつぎのようになる．

$$\rho = -\frac{2\Omega H_{i0}}{c^2}\frac{1}{[1-(\Omega/c)^2 r^2]^2} \tag{10}$$

式(10)から，導体円柱の軸方向の単位長当りに現われる全体積電荷Qは次式で与えられる．

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \rho \, dr = -\frac{2\pi\Omega H_{i0}}{c^2}\frac{r_2^2 - r_1^2}{[1-(\Omega/c)^2 r_1^2][1-(\Omega/c)^2 r_2^2]} \tag{11}$$

一方，$r = r_1$および$r = r_2$なる円筒面には，表面電荷密度η_1およびη_2が現われ，これらはQとともに電荷保存の法則

$$Q + 2\pi(r_1\eta_1 + r_2\eta_2) = 0 \tag{12}$$

を満たす．ただし，η_1およびη_2は，導体円柱外部では$\mathbf{D} = 0$となること，および境界条件[6]

$$\mathbf{i}_r \cdot (\mathbf{D}_{\mathrm{I}} - \mathbf{D}_{\mathrm{II}}) = \eta \tag{13}$$

から求まる．$\mathbf{i}_r$は半径方向の単位ベクトルであり，$\mathbf{D}_{\mathrm{I}}$および$\mathbf{D}_{\mathrm{II}}$は，それぞれ，円筒面の外側および内側の$\mathbf{D}$の値を表わす．

また，$r = r_1$および$r = r_2$なる円筒面には，表面電荷密度ηの運動によって，表面電流密度$\mathbf{K} = \eta\mathbf{v}$が生じる．したがって，これらの円筒面における磁界に対する境界条件はつぎのようになる[6]

$$\mathbf{i}_r \times (\mathbf{H}_{\mathrm{I}} - \mathbf{H}_{\mathrm{II}}) = \mathbf{K} \tag{14}$$

ただし，添字Ⅰ，Ⅱの意味は式(13)の場合と同じである．いま，$r > r_2$ なる領域におけるHの大きさを H_0 とすると，式(14)から，$H_{i0} = H_0$ が得られる．また，$r < r_1$ に対してもHの大きさは H_0 に等しくなる．

以上により，$r = r_1$ および $r = r_2$ なる円筒面の間に誘起される起電力 V はつぎのようになる．

$$V = \int_{r_1}^{r_2} -E_r \, dr = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\Omega} B_0 \, log \left[\frac{1 - (\Omega/c)^2 r_1^2}{1 - (\Omega/c)^2 r_2^2} \right] \tag{15}$$

ただし，$B_0 = \mu H_0$ である．式(15)において，$(\Omega/c) r_2 \ll 1$ とすると，V はFaradayによって得られた結果(4)に一致する．

上の議論では，導体の回転運動に伴う慣性力，すなわち遠心力の効果を無視したが，ここで，この効果について検討しよう．いま，電子の質量を m，電荷を $-e$ とし，遠心力の効果を考慮に入れると，電子に働く力の釣合いは次式で与えられる．

$$m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{16}$$

これから，導体内部の電界Eはつぎのようになる．

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} - (m/e) \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \tag{17}$$

式(17)の右辺の第2項は

$$\Omega \ll (e/m) B_z \tag{18}$$

なる条件が満たされる場合には第1項に比べて無視することができる．すなわち，式(18)の条件が満たされる場合には，電子に働く力としては電磁的な力，すなわち電気的な力 $-e\mathbf{E}$ と磁気的な力 $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ のみを考えればよく，遠心力はこれらの力に比べて無視することができる．Faraday の実験およ

びその原理を応用した単極機械では，式(18)の条件は十分な精度で満足されている．

つぎに，Wilsonの実験について考えよう．Wilsonは，Faradayの実験の拡張として，導体円盤のかわりに中空円筒状の誘電体を外部静磁界に平行な軸のまわりに回転させ，半径方向に

$$V = \frac{1}{2}\Omega\left(r_2^2 - r_1^2\right)B_0\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{19}$$

なる電位差が生じることを示した．ただし，$n = \sqrt{\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0}$ であり，ε_0 および μ_0 は，それぞれ，真空の誘電率および透磁率を表わす．

さて，以下では，誘電体円筒が無限に長いものとして，誘電体内部の電磁界を求めよう．まず，系の対称性により，E_r，B_z，D_r および H_z 以外の電磁界成分は0となる．また，誘電体の内部およびその表面には自由電荷が存在しないことから，$D_r = 0$，$H_z = H_0$（一定）となる．E_r および B_z は，構成関係式(2)から得られ，つぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\Omega r}{1 - (\Omega/c)^2 r^2}B_0 \\ B_z &= \frac{1 - (\Omega/nc)^2 r^2}{1 - (\Omega/c)^2 r^2}B_0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

式(20)から，$r = r_1$ および $r = r_2$ なる円筒面の間に生じる電位差は次式で与えられることがわかる．

$$V = \int_{r_1}^{r_2} -E_r\,dr = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\Omega}B_0\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\log\left[\frac{1 - (\Omega/c)^2 r_1^2}{1 - (\Omega/c)^2 r_2^2}\right] \tag{21}$$

$\Omega r_2/c \ll 1$ とすると，式(21)はWilsonの実験結果(19)に一致する．以

上，FaradayおよびWilson の実験について相対論の立場から考察を行ない，不均一な速度で運動する媒質中における電磁界方程式の実験的基礎を明らかにした．

4．回転運動を行なう媒質中における電磁波の伝搬

つぎに，一定の角速度Ωで z 軸のまわりに回転している媒質中における電磁波の伝搬について幾何光学近似を用いて考察する．簡単のために，媒質の導電率は0とし，$n\beta \ll 1$ なる条件が満たされるものとする．このとき，構成関係式は，式(2)および(5)から，つぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H} - \frac{n^2-1}{c^2}[(\Omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}] \\ \mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E} + \frac{n^2-1}{c^2}[(\Omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{H}] \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

いま，$x-y$ 平面内における伝搬を考えると，回転運動を行なう媒質中における電磁界は，式(1)および(22)から，(E_x, E_y, H_z) と (H_x, H_y, E_z) の二つの組に分離できることがわかる．以下では，前者すなわち H 波の伝搬について考える．

まず，H 波の場合には，式(1)，(22)および(5)から次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\Omega}{c^2\varepsilon}(n^2-1)\,xH_z \\ E_y &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\Omega}{c^2\varepsilon}(n^2-1)\,yH_z \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$H_z = -\frac{1}{j\omega\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)-\frac{\Omega}{c^2\mu}(n^2-1)(xE_x+yE_y)\Bigg]$$

式(23)からE_xおよびE_yを消去すると，つぎのようなH_zに関する波動方程式が得られる．

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}-2j\frac{\omega\Omega}{c^2}(n^2-1)\left(x\frac{\partial H_z}{\partial y}-y\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+\omega^2\varepsilon\mu H_z=0 \qquad (24)$$

式(24)を幾何光学近似[7]を用いて解くために，H_zの解をつぎのように仮定する．

$$H_z = H_{z0}\,e^{-jk_0\psi(x,y)} \qquad (25)$$

式(25)を式(24)に代入すると，H_{z0}は第一次近似のもとで一定とみなし得ることがわかる．また，アイコナール$\psi(x,y)$はつぎの方程式から得られる．

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\Omega}{c}(n^2-1)\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=n^2 \qquad (26)$$

式(26)は容易に解くことができ，ψは次式で与えられることがわかる．

$$\psi_{\pm} = \pm n(x\cos\theta+y\sin\theta)$$
$$-\frac{\Omega}{2c}(n^2-1)\left[(x^2-y^2)\sin 2\theta-2xy\cos 2\theta\right] \qquad (27)$$

ただし，θは原点における波動法線とx軸とのなす角を表わす．また，上式両辺の複号は同順であるとする．

式(23)，(25)および(27)から，H波の電磁界が求まり，つぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \mp \frac{P_\pm}{c\varepsilon} H_{z0}\, e^{-j k_0 \psi_\pm(x,y)} \\ E_y &= \pm \frac{Q_\pm}{c\varepsilon} H_{z0}\, e^{-j k_0 \psi_\pm(x,y)} \\ H_z &= H_{z0}\, e^{-j k_0 \psi_\pm(x,y)} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} P_\pm &= n \sin\theta \pm \frac{2\Omega}{c}(n^2-1)(x\cos\theta + y\sin\theta)\cos\theta \\ Q_\pm &= n \cos\theta \mp \frac{2\Omega}{c}(n^2-1)(x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

ここで，$P_\pm$ および $Q_\pm$ は $\psi_\pm$ に対応する量であり，式(28)および(29)における複号はすべて同順である．

まず，式(28)で与えられる電磁波の位相の伝搬について調べよう．いま，波動ベクトルを $\mathbf{k}$ とすると，$\mathbf{k}$ はアイコナール ψ の勾配によって与えられる．

$$\mathbf{k} = k_0 \nabla \psi \tag{30}$$

式(27)と(30)から次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \pm k_0 n \cos\theta + \frac{k_0 \Omega}{c}(n^2-1)(-x\sin 2\theta + y\cos 2\theta) \\ k_y &= \pm k_0 n \sin\theta + \frac{k_0 \Omega}{c}(n^2-1)(x\cos 2\theta + y\sin 2\theta) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

式(31)から，位相速度 u_p はつぎのようになる．

$$u_p = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \Omega (x \sin\theta - y \cos\theta) \tag{32}$$

つぎに，電磁エネルギーの伝搬について考える．いま，電磁エネルギー流密度および電磁エネルギー密度の時間平均値を$\mathbf{S}$およびWとすると，これらは次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} Re\,(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \pm \frac{|H_{z0}|^2}{2c\varepsilon} (\mathbf{i}_x Q_\pm + \mathbf{i}_y P_\pm) \\ W &= \frac{1}{4} Re\,(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^*) \\ &= \frac{1}{2} \mu |H_{z0}|^2 \left[1 \mp \frac{\Omega n}{c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)(x \sin\theta - y \cos\theta)\right] \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

電磁エネルギーの伝搬速度$\mathbf{u}_e$は，$\mathbf{S}$およびWを用いて，つぎのように定義される．

$$\mathbf{u}_e = \frac{\mathbf{S}}{W} \tag{34}$$

式(33)および(34)から，$\mathbf{u}_e$のx方向成分u_{ex}およびy方向成分u_{ey}は，それぞれ，つぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} u_{ex} &= \pm \frac{c}{n} \cos\theta - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \Omega y - \Omega \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sin\theta (x \cos\theta + y \sin\theta) \\ u_{ey} &= \pm \frac{c}{n} \sin\theta + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \Omega x + \Omega \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cos\theta (x \cos\theta + y \sin\theta) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

式(34)で定義されるエネルギーの伝搬速度は，式(27)および(30)を用いる

ことにより，群速度$\partial\omega/\partial k$に等しいことが容易に示される．

式(31)および(35)からわかるように，位相およびエネルギーの伝搬方向はたがいに異なる．このような性質は，等速度運動を行なう媒質中における平面電磁波の場合にはすでによく知られている[8],[9]

以上の結果を用いて，回転運動を行なう媒質中を電磁波が通過するときにどのような影響を受けるかを調べよう．さて，媒質が静止している場合の位

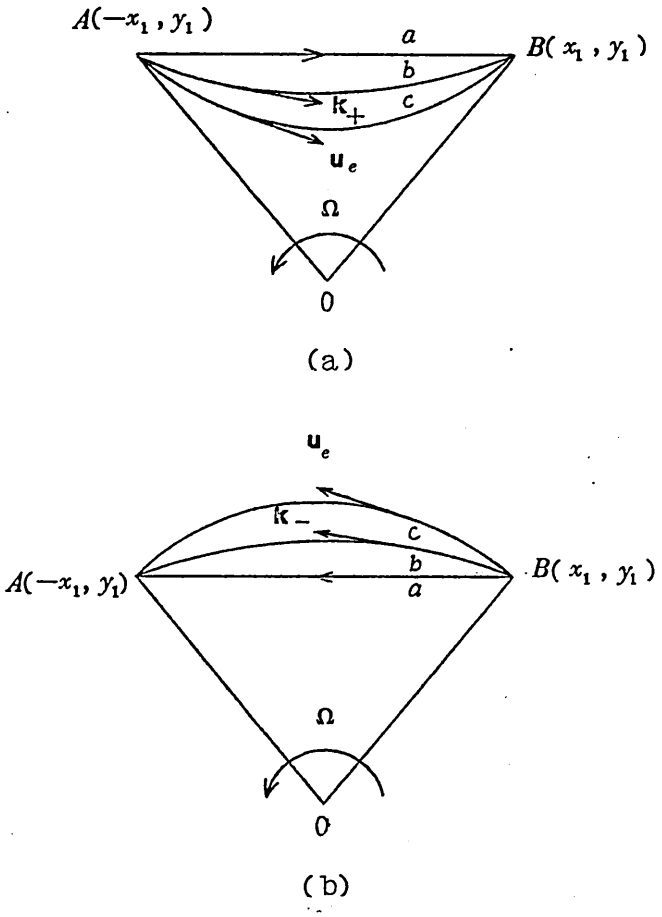


図3　位相およびエネルギーの伝搬路

相およびエネルギーの伝搬路が，回転の中心Oから等距離r_1にある二点A，Bを結ぶ直線aで与えられるものとする（図3参照）．このとき，媒質が回転すると，位相およびエネルギーの伝搬路は異なり，それぞれ，曲線bおよびcのようになる．図3（a）および（b）は，それぞれ，回転の方向に関して逆方向および順方向に進む波を表わしている．いま，簡単のために，$\overrightarrow{AB}$の方向をx軸の正方向に選び，波が点A，Bの間を通過するときに受ける位相の変化量を求めよう．

まず，波がAからBに伝搬するときに受ける位相の変化量$\Delta\Phi_1$は次式で与えられる．

$$\Delta\Phi_1 = \int_A^B \mathbf{k}_+ \cdot d\mathbf{l} = k_0\left[\psi_+(B) - \psi_+(A)\right] \tag{36}$$

ただし，$d\mathbf{l}$は位相の伝搬路に沿う線素を表わす．同様にして，波がBからAに伝搬するときに受ける位相の変化量$\Delta\Phi_2$はつぎのようになる．

$$\Delta\Phi_2 = \int_B^A \mathbf{k}_- \cdot d\mathbf{l} = k_0\left[\psi_-(A) - \psi_-(B)\right] \tag{37}$$

式(31)，(36)および(37)から，波がAからBに伝搬する場合とその逆の場合との相対的な位相の変化量$\Delta\Phi$は次式で与えられることがわかる．

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1 = -4k_0\frac{\Omega}{c}(n^2-1)\,x_1 y_1 \tag{38}$$

ただし，x_1およびy_1は，Oを原点とした場合の点Bの座標を表わす．

ここで，$\overline{OA} = \overline{OB} = r_1$，$\angle OBA = \angle OAB = \alpha$とすると，式(38)は

$$\Delta\Phi = -2k_0\frac{\Omega}{c}(n^2-1)\,r_1^2 \sin 2\alpha \tag{39}$$

となる．

5. 実験的検証の方法

等速度運動を行なう媒質中における光の速度は，１８５１年，Fizeauによって最初に測定された．Fizeauによって得られた結果はMinkowski の理論から得られる値に一致する．また，最近，Rosenthal[10]は，種々の光学測定を目的として，リング共振器とレーザを組合わせた方法を提案し，その応用の一つとして，等速度運動を行なう媒質中における光速度の測定について述べている．本稿では，Rosenthalの方法を拡張し，先に求めた式(39)を実験的に検証する方法を提案する．

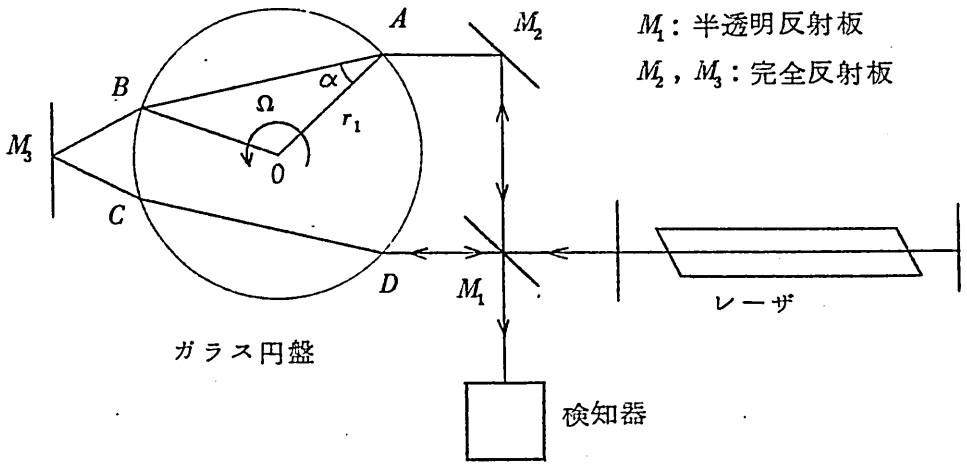


図４　リング干渉計とガラス円盤を組合わせた方法

まず，図４に示すように，回転運動を行なう媒質としては光学ガラスの円盤を考え，これとリング干渉計を組合わせた方法について述べる．図４にお

いて，ガラス円盤が静止しているときには，右まわりの光波と左まわりの光波の間には位相差は生じないが，ガラス円盤が回転すると，二つの光波の間に位相差が生じる．二つの光波が干渉計を一周するときに生じる位相差は，図4の光路AB，CDそれぞれについて式(39)で与えられる位相差が生じることから，つぎのようになる．

$$\Delta\Phi = -4k_0\frac{\Omega}{c}(n^2-1)r_1^2\sin 2\alpha \tag{40}$$

いま，光波がガラス円盤にBrewster角で入射するものとすると，次式が成立する．

$$\left.\begin{aligned} &tan\,\theta = n \\ &\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

ただし，θは入射角を表わす．

式(41)の関係を用いると，式(40)はつぎのようになる．

$$\Delta\Phi = -8\frac{\omega\Omega}{c^2}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)nr_1^2 \tag{42}$$

このようにして，図4の装置の検知器には，式(42)で与えられる位相差が観測されるはずである．

つぎに，図5に示すように，光学ガラスの円盤とリングレーザを組合わせた方法について考える．図5において，光学ガラスの円盤が静止しているときには，右まわりのモードと左まわりのモードは縮退しており，発振周波数は等しいが，光学ガラスの円盤が回転すると，縮退は解け，これら二つのモードはわずかに異なる発振周波数で同時に発振が可能となる．いま，右まわ

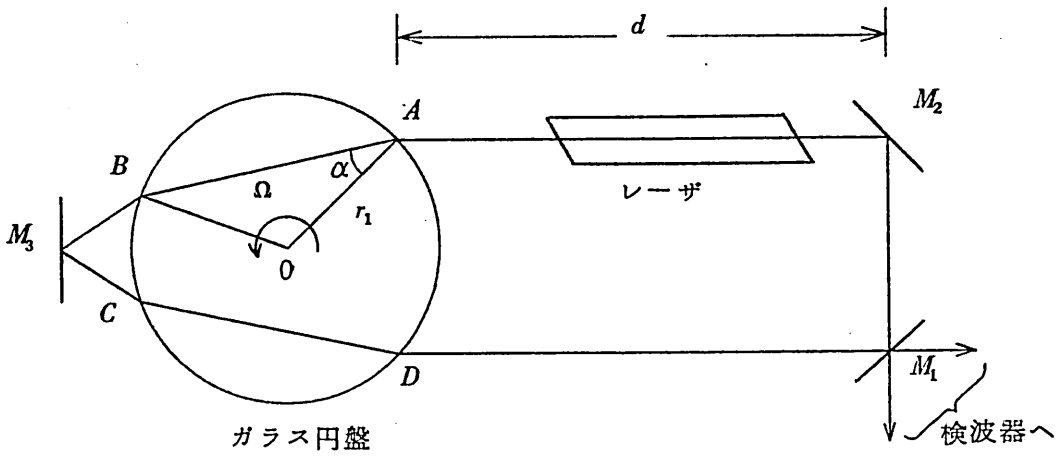


図5　リングレーザとガラス円盤を組合わせた方法

りおよび左まわりのモードの発振角周波数をω_1, ω_2とし，右まわりおよび左まわりのモードの波が閉回路を一周するのに要する時間をτ_1, τ_2とすると，持続的なレーザ発振が可能となるためには，閉回路に沿って測った両モードの波の数が等しくなければならない．このことから，

$$\omega_1 \tau_1 = \omega_2 \tau_2 \tag{43}$$

なる関係が成立しなければならないことがわかる．前節の議論から明らかなように，媒質の回転が右まわりおよび左まわりのモードに与える効果は大きさが等しく符号が異なるから，媒質が静止しているときの発振角周波数をω，閉回路を一周するのに要する時間をτとすると，ω_1, ω_2およびτ_1, τ_2は，それぞれ，つぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \omega \pm \frac{\Delta\omega}{2} \\ \tau_{1,2} &= \tau \pm \frac{\Delta\tau}{2} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

式(44)を式(43)に代入し，$\Delta\omega$，$\Delta\tau$の二次の微小量を無視すると，次式が得られる．

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta\tau}{\tau} \tag{45}$$

ここで，$\Delta\tau$は式(42)の$\Delta\Phi$とつぎの関係にある．

$$\omega\,\Delta\tau = -\Delta\Phi \tag{46}$$

また，τは次式で与えられる．

$$\tau = \frac{L}{c} = \frac{1}{c}\oint n_l\,dl \tag{47}$$

ただし，Lは閉回路の光路程であり，n_lは光路が通過する媒質の屈折率を表わす．

いま，光学ガラスの円盤の部分を除いて$n_l = 1$と仮定すると，式(45)はつぎのようになる．

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{8\Omega}{cL}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) n r_1^2 \tag{48}$$

ただし，

$$\frac{L}{2} = d + \frac{3 - 12n + 2n^2 + 12n^3 - n^4}{4(n^2-1)\sqrt{n^2+1}}\, r_1 \tag{49}$$

このようにして，図5の装置では，式(48)からきまるビート周波数$|\Delta\omega|$が観測されるはずである．

ここで，式(42)および(48)で与えられる$|\Delta\Phi|$および$|\Delta\omega|$の大きさを定

量的に知るために，一例として$He-Ne$ガスレーザ（発振波長6328Å）を考え，以下に数値例を示す．いま，

$$n = 1.5, \quad r_1 = 10\ \mathrm{cm}, \quad d = 10^2\ \mathrm{cm}$$

$$\Omega = 2\pi \times 10\ rad/sec, \quad \omega/2\pi = 4.74 \times 10^{14}\ Hz$$

とすると，$|\Delta\Phi|$および$|\Delta\omega|$の値はつぎのようになる．

$$|\Delta\Phi|/2\pi = 1.53 \times 10^{-2}$$

$$|\Delta\omega|/2\pi = 1.79 \times 10^{6}\ Hz$$

これらの値は，現在のレーザ技術で十分測定可能な値である．以上の議論からわかるように，本稿で提案した方法は，回転運動を行なう媒質中における光の速度を測定するのに有効な方法であると考えられる．

6. むすび

本稿では，まず，不均一な速度で運動する媒質中における電磁界方程式について考察し，媒質の加速度運動に起因する慣性力が媒質を構成する荷電粒子に働く電磁的な力に比べて無視できるときには，Minkowski の理論をそのまま用いてもよいことを示した．つぎに，FaradayおよびWilson の実験について相対論の立場から考察を行ない，不均一な速度で運動する媒質に対する電磁界方程式の実験的基礎を明らかにした．最後に，回転運動を行なう媒質中における電磁波の伝搬について幾何光学近似を用いて理論的に考察し，合わせてその理論を実験的に検証する方法を提案した．以上，本稿では，観測者が慣性系に静止しており，かつ媒質に働く加速度が小さい場合を取り扱ったが，さらに一般的な場合，すなわち，観測者の静止系が慣性系でない場合，あるいは媒質の加速度が大きくなる場合の電磁界方程式を求めることは，今後の課題として残されている．

謝　辞　終りに，日ごろ，ご指導いただく大阪大学工学部板倉清保教授，同熊谷信昭教授，ならびに常々ご討論いただく板倉研究室および熊谷研究室の方々に深謝する．

文　献

(1) H. Minkowski : "Die Grundgleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern", Göttinger Nachr., p. 53 (1908).

(2) W. Pauli : "Theory of relativity", p. 99, Pergamon Press (1958).

(3) A. Sommerfeld : "Electrodynamics", p. 281, Academic Press, New York (1952).

(4) H. H. ウッドソン，J. R. メルヒャー（大越，二宮訳）："電気力学 I," 産業図書（昭45）.

(5) H. A. Wilson : "On the electric effect of rotating a dielectric in a magnetic field", Phil. Trans. A, **204**, p. 121 (1904).

(6) R. C. Costen and D. Adamson : "Three-dimensional derivation of the electrodynamic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary", Proc. IEEE, **53**, 9, p. 1181 (Sept. 1965).

(7) M. Born and E. Wolf : "Principles of optics", p. 109, Pergamon Press (1964).

(8) 塩沢俊之，間　剛，熊谷信昭："静止媒質と運動媒質の境界面におけ

る平面波の反射および屈折”，信学誌，50，p. 1381（昭42-08）．

(9) 塩沢俊之，熊谷信昭：“静止媒質と運動媒質の境界面における反射と屈折（厳密解）”，信学会アンテナ伝播研資（1967-02）．

(10) A. H. Rosenthal：“Regenerative circulatory multiple-beam interferometry for the study of light-propagation effects”, J. Opt. Soc.Amer., 52, p. 1143 (Oct. 1962).

輻射科学研究会資料

異方性薄膜光導波系の結合モード解析とその応用

山本錠彦
小山田弥平
牧本利夫
(大阪大学基礎工学部)

昭和47年4月28日

1. まえがき

近年、光学回路系の集積化いわゆるIntegrated Opticsが注目を集めるにつれて、誘電体薄膜線路の研究が多く見られるようになってきた。[1] なかでもプリズムやグレーティング結合器によるモード励振の問題については詳細な検討がなされている。ところで薄膜光導波系の研究において、これまで主として取り扱われてきたのは、媒質が等方性の場合であったが、[2] そのかわりに異方性媒質を用いると、導波系の伝送特性に応用上興味深いいろいろな変化があらわれる。例えば、系中のパラメータの数が増すので、薄膜線路内で光波間にパラメトリック相互作用[3],[4]を行なわせる際に重要となる位相整合の問題においても、要求される条件を満たすモードの選択につきあらたな自由度を提供する可能性がある。また、適当な媒質を用いれば、印加電界あるいは磁界の強さを変えることによって、系のパラメータしたがって伝送特性を外部からコントロールすることもできるということも特徴のひとつとして挙げられる。そしてこれらの性質を利用

して、モード変換器、変調器、スウィッチ、ジャイレータ、アイソレータなどを始めとして、各種の相反ならびに非相反薄膜光学回路素子の構成が可能となり、[5]~[7] これらは将来の光集積回路の分野において重要な役割を果たすものと考えられる。

筆者らもこの種の導波系に以前から興味を抱き、検討を進めてきたが、本文ではかなり一般性の高い系を対象として、異方性薄膜光導波系を取り扱う際の基礎となる固有モードについての解析結果を述べるとともに、一例としてモード変換器への応用について考察する。

2 導波系の構造と解析のすすめ方

本文で取り上げる異方性薄膜導波系は、図1のように領域I（基板）、II（フィルム）、III（上部層）から成る3層構造の系である。フィルムの厚さをdとする。伝搬方向はz方向であり、構造はy方向には一様である。ま

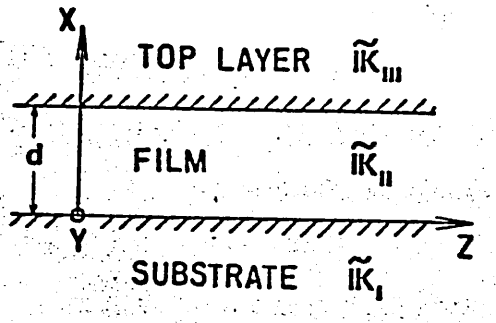


図1 異方性薄膜光導波系の構造

た系は無損失と仮定し、添字 I, II, III によって3領域を区別する。各領域の媒質はいずれもつぎの形のテンソル誘電率を持つものとする。

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 \tilde{K} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy}^* & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz}^* & K_{yz}^* & K_{zz} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ここに＊は複素共役をあらわす。また ε_0 は真空の誘電率である。なお透磁率は3領域とも等しく μ_0（真空の透磁率）とする。無損失系を考えているので誘電率テンソルはエルミート的である。以下ではこの $(\tilde{\varepsilon}, \mu_0)$ というパラメータによって、real anisotropic な媒質（$\tilde{K}$ の要素がすべて実数）と gyrotropic な媒質（K の対角要素が実数、非対角要素は一般には複素数）との両方を含めて取り扱うことにする。前者は、普通の異方性結晶の主軸を座標軸からずらせて配置したとか、あるいは電気光学効果を持つ媒質の場合であり、これに対し後者は、例えば磁気光学効果[8]を示す媒質の場合に相当する。実際にはフィルムだけ（あるいは基板だけ）を異方性に

SEKIREI 35 NO. 158

するか、またはせいぜい2領域を異方性とする場合が多いと思われるが、ここではいずれの場合も含めて一般性を持たせるために、3層とも異方性媒質と考えていくことにする。またこうしても結果の式がことさら複雑になるわけでもない。

つぎに本文の解析のすすめ方について簡単に述べておこう。図1の系の伝送モードはハイブリッド・モードであって、これに対しマクスウェルの方程式を適用すると、結局4階の微分方程式を解くことになり、計算は極めて繁雑になる。そこである程度解析的な議論もでき、系の伝送特性の物理的な意味を把握するにも都合のよい近似法を採用することにする。まず図1の系の3領域を、式(1)の非対角要素をすべて取り去り、対角項だけ残したつぎの形のテンソル誘電率

$$\varepsilon = \varepsilon_0 K = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

を持つ新しい媒質でそれぞれ置き換えて得られる導波系

を考え、これを基本系とし、図1の構造をこれからの摂動系（一般系）と考える。* 後に示すように、基本系の固有モードは比較的簡単に求められ、TE、TMモードに分離される。そして誘電率テンソルに非対角項があらわれると、それらによって最初は独立であったモード間に結合が生ずる。以下ではこういうふうに、摂動系の固有モードを基本系固有モードの結合としてとらえ、変分法を用いて解析を行なう。なお簡単のために本文では伝送モードについてのみ考察していくことにする。

3. 基本系の固有モード

本節では基本系固有モードを導くとともに、その特徴を等方性薄膜導波系の場合と比較しつつ述べる。

各領域について、マクスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\mu_0 \dot{\mathbb{H}} \tag{3a}$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = \varepsilon_0 \mathbb{K} \dot{\mathbb{E}} \tag{3b}$$

より、つぎの波動方程式が得られる。

---

* 実際、非対角要素が対角要素に較べて3桁程度小さくても、異方性の効果は充分あらわれる。

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\mu_0\varepsilon_0 K \ddot{\mathbf{E}} \qquad (4)$$

ここで電磁界はy方向に変化しないとし（$\partial/\partial y = 0$）、つぎのようにあらわす。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e(x)\\ h(x)\end{bmatrix} \exp\left[j(\omega t - \beta z)\right] \qquad (5)$$

ここにβはz方向の位相定数である。すると式(4)を成分に分けて書くとつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} \beta^2 - k_0^2 K_{xx} & 0 & -j\beta\, d/dx \\ 0 & \beta^2 - k_0^2 K_{yy} - d^2/dx^2 & 0 \\ -j\beta\, d/dx & 0 & -d^2/dx^2 - k_0^2 K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(x)\\ e_y(x)\\ e_z(x)\end{bmatrix} = 0 \qquad (6)$$

ただし $$k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \qquad (7)$$

式(6)より、E_y と（E_x, E_z）とは結合せず、したがって基本系の固有モードはTE、TMモードに分離されることが分る。結果はつぎのようにまとめられる。

(1) TEモード

$$e_y = \begin{cases} A\cos\phi \exp(P_I x) & (\text{I}: \quad x \leqq 0) \\ A\cos(h_{II} x + \phi) & (\text{II}: \quad 0 \leqq x \leqq d) \\ A\cos\psi \exp P_{III}(d - x) & (\text{III}: \quad x \geqq d) \end{cases}$$

$$h_x = -(\beta/\omega\mu_0)\, e_y$$

$$h_z = -(1/j\omega\mu_0)\, d e_y/dx$$

$$e_x = e_z = h_y = 0 \qquad (8)$$

ただし

$$P_i^2 = \beta^2 - k_0^2 K_{iyy} \qquad (i = \mathrm{I}, \mathrm{III})$$

$$h_{II}^2 = k_0^2 K_{IIyy} - \beta^2$$

$$\phi = \tan^{-1}(-P_I/h_{II})$$

$$\psi = \phi + h_{II} d \qquad (9)$$

そして β の決定方程式は

$$\tan^{-1}(P_I/h_{II}) + \tan^{-1}(P_{III}/h_{II}) + m\pi = h_{II} d$$

$$(m = 0, 1, 2 \cdots) \qquad (10)$$

(2) TMモード

$$h_y = \begin{cases} A\cos\phi \exp(P_I x) & (\mathrm{I}) \\ A\cos(h_{II} x + \phi) & (\mathrm{II}) \\ A\cos\psi \exp P_{III}(d-x) & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

$$e_x = (\beta/\omega\varepsilon_0 K_{ixx})\, h_y \qquad (i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$$

$$e_z = (1/j\omega\varepsilon_0 K_{izz})\, d h_y/dx \qquad (i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$$

$$e_y = h_x = h_z = 0 \qquad (11)$$

ただし

$$p_i^2 = (K_{izz}/K_{ixx})(\beta^2 - k_0^2 K_{ixx}) \qquad (i = \mathrm{I},\ \mathrm{III})$$

$$h_{II}^2 = (K_{IIzz}/K_{IIxx})(k_0^2 K_{IIxx} - \beta^2)$$

$$\phi = \tan^{-1}[-(p_I/K_{Izz})/(h_{II}/K_{IIzz})]$$

$$\psi = \phi + h_{II} d \qquad (12)$$

そして β の決定方程式は

$$\tan^{-1}[(p_I/K_{Izz})/(h_{II}/K_{IIzz})] + \tan^{-1}[(p_{III}/K_{IIIzz})/(h_{II}/K_{IIzz})] + m\pi = h_{II} d$$

$$(m = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \qquad (13)$$

図2には、3種類の基本系線路に対し、計算機によって伝搬定数の決定方程式を解いた結果を示している。図中のモード次数は式(10)、(13)の m に対応している。図2(a)は基板を異方性結晶（KDP）とし、他を等方性媒質（ガラス）とした場合、そして図2(b)はフィルムを等方性、基板と上部層を異方性（$LiNbO_3$）とした場合である。また図2(c)はフィルムを異方性（$LiNbO_3$）、他を等方性としたものである。なお異方性結晶の光学軸はすべてy座標軸方向である。

薄膜導波系の正規化位相定数（等価屈折率）β/k_0 の

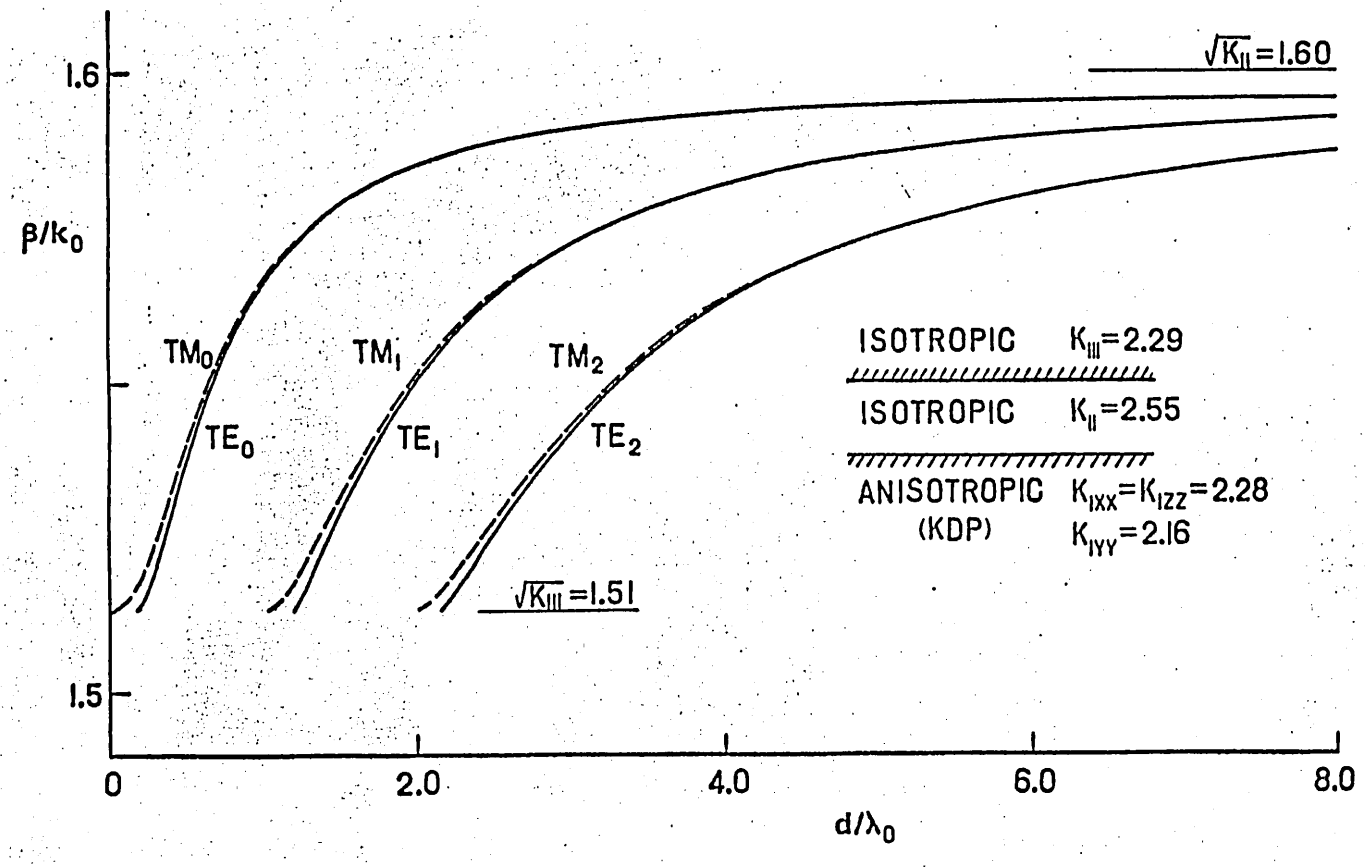


図2 (a) 3種の基本系における固有モードの位相定数と膜厚の関係
(結晶の比誘電率は $\lambda_0 \approx 5500\,\text{Å}$ における値)

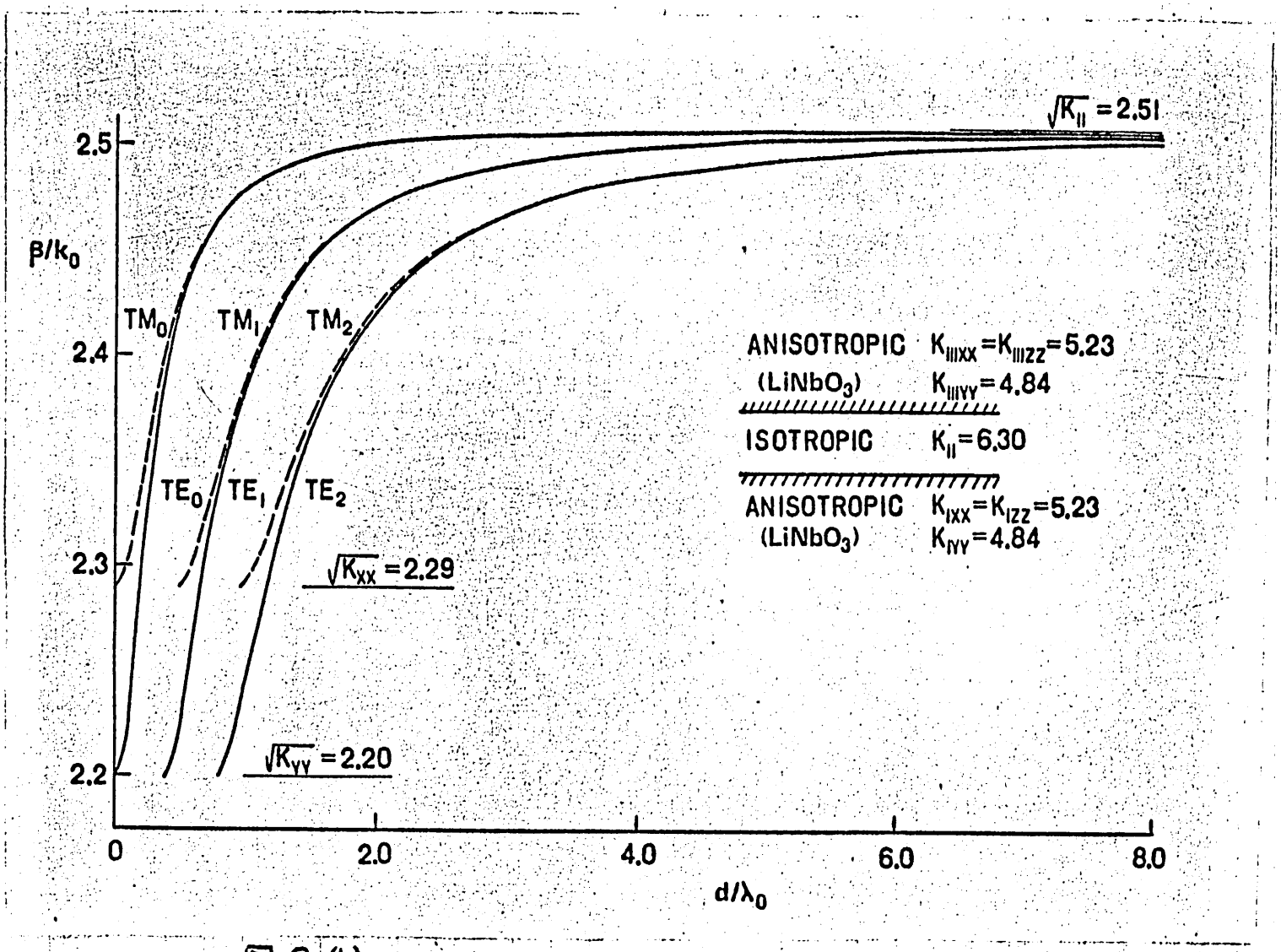

$\sqrt{K_{II}}$ = 2.51
2.5
2.4
2.3
2.2
β/k₀
TM₀
TM₁
TM₂
TE₀
TE₁
TE₂
ANISOTROPIC $K_{IIIXX}=K_{IIIZZ}=5.23$
(LiNbO₃) $K_{IIIYY}=4.84$
ISOTROPIC $K_{II}=6.30$
ANISOTROPIC $K_{IXX}=K_{IZZ}=5.23$
(LiNbO₃) $K_{IYY}=4.84$
$\sqrt{K_{XX}}$ = 2.29
$\sqrt{K_{YY}}$ = 2.20
0
2.0
4.0
6.0
8.0
d/λ₀

図 2 (b)

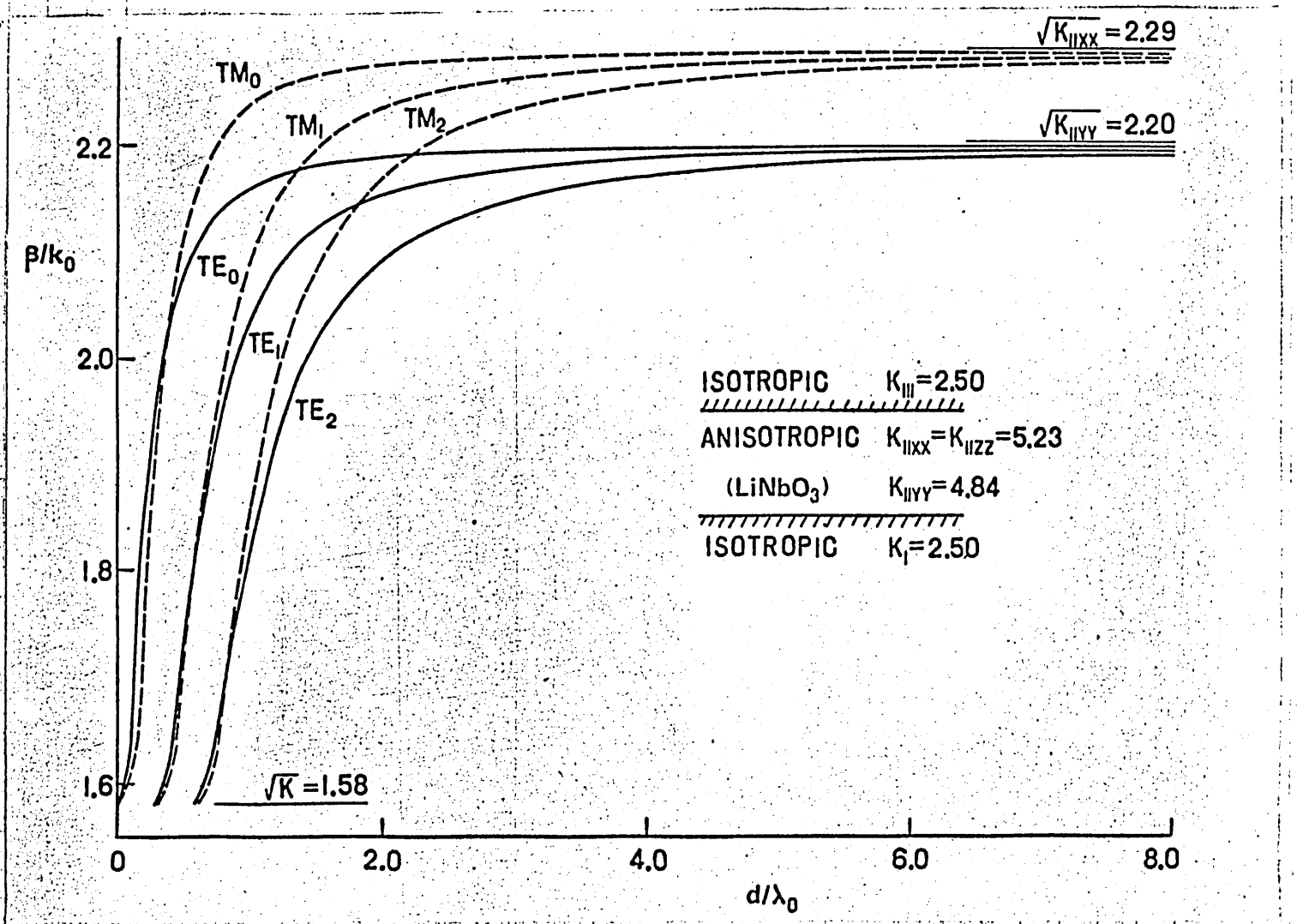

$\sqrt{K_{IIXX}}=2.29$
$\sqrt{K_{IIYY}}=2.20$
TM_0
TM_1
TM_2
TE_0
TE_1
TE_2
β/k_0
2.2
2.0
1.8
1.6
$\sqrt{K}=1.58$
ISOTROPIC $K_{III}=2.50$
ANISOTROPIC $K_{IIXX}=K_{IIZZ}=5.23$
($LiNbO_3$) $K_{IIYY}=4.84$
ISOTROPIC $K_I=2.50$
0
2.0
4.0
6.0
8.0
d/λ_0

図 2 (C)

上限はフィルムの誘電率（屈折率）によって、また下限は基板、上部層の誘電率のうちの大きいほうによって決まり、等方性の系においてはTE，TMモードの区別なく上下限ともそれぞれ1種類である。ところが異方性の系の場合には、一般に上下限ともTE，TMモードに対し異なった値をとることになる。例えば図2(b)では、フィルムが等方性なのでβ/k_0の上限は1つであるが、基板，上部層が異方性なので下限が2つに分離している。また図2(c)ではフィルムが異方性なのでβ/k_0の上限が分離しているが、他は等方性であるので下限は1つである。ただ図2(a)の場合は，基板が異方性であっても、たまたま等方性の上部層の誘電率が基板のテンソル成分のいずれよりも大きいので、下限も分離していないのである。このように、たとえ誘電率テンソルに非対角成分がない場合でも，異方性薄膜線路では等価屈折率曲線が等方性の場合に比較してかなり異なった様相を呈するようになる。

異方性の系のいまひとつの特徴は、適当な膜厚において固有モード向に縮退（位相整合）を生じさせ得ること

であり、図において曲線が交叉しているところがそれである。* この種の縮退モード群をもつ導波系に適当な摂動を加えてやると、モード間に強い結合が生じ、等方性の系に見られないような特異な伝送特性を示すようになる。異方性薄膜光学回路素子の多くはこのモード間結合の性質を利用して構成されることになる。もちろん、特定のモード対を縮退させるには、各層のパラメータを適当に選定する必要がある。

4 摂動系の解析

ここでは変分法を用いて、本文の主たる目的である図1の系の固有モードの伝搬定数ならびに電磁界分布について解析し、併せて摂動による基本系固有モード間の結合の模様を明らかにする。

＊図2(a)、(b)では分かりにくいが、同次数のモード間に縮退がみられる。(例えばTE$_0$−TM$_0$の縮退は、図2(a)では$d/\lambda_0 = 1.4$、図2(b)では$d/\lambda_0 = 0.79$で起こっている。)

4.1 伝搬定数の変分表示

本節の解析の基礎となるものは、無損失不均質異方性媒質を含む導波系の伝搬定数に関する変分表示式である。

電磁界を式(5)と同様に

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(x,y) \\ h(x,y) \end{bmatrix} \exp[j(\omega t - \beta z)] \qquad (14)$$

とあらわせば、これは次式であたえられる。[9]

$$\beta = \frac{\omega \int (e^* \cdot \varepsilon e + h^* \cdot \mu h)\, dS + j \int (e^* \cdot \nabla \times h - h^* \cdot \nabla \times e)\, dS}{\int (e \times h^* - h \times e^*) \cdot a_z\, dS} \qquad (15)$$

ここに a_z は z 方向の単位ベクトルであり、また面積分は系の断面全体について行なう。無損失系であるので、誘電率および透磁率テンソル ε, μ はエルミート的である。

なお式(15)はもともと、内部に境界がなく、周囲を完全導体壁で囲まれた導波系について導かれた式であるので、これを図1のような内部に境界を持つ開放形導波系に対して適用してもよいのかという問題が残るが、付録1に

示すように、この拡張はいまの場合可能である。

4.2 摂動系の固有モード

変分表示式(15)にRayleigh-Ritz法[10]を応用して、摂動系の固有モードを求めていこう。まず電磁界分布を基本系固有モードの界分布の一次結合として表示する。すなわち基本系において低次から順にN個のTEモードおよびM個のTMモードをとり、

$$\begin{bmatrix} \tilde{e}(x) \\ \tilde{h}(x) \end{bmatrix} \cong \sum_{i=1}^{N} m_i \begin{bmatrix} e_i^{(h)}(x) \\ h_i^{(h)}(x) \end{bmatrix} + \sum_{i=N+1}^{N+M} m_i \begin{bmatrix} e_i^{(e)}(x) \\ h_i^{(e)}(x) \end{bmatrix} \qquad (16)$$

とあらわす。添字h, eはそれぞれ基本系のTE, TMモードに対応している。また記号～は摂動系に関する量であることを明示するためにつけた。上記のm_iはいわゆる展開係数に相当するものであり、もっとも近似度がよくなるように定められるべきものである。式(16)を式(15)に代入すれば、次式が得られる。

$$\tilde{\beta}(m_1, m_2, \cdots m_{N+M}) = \sum_{i=1}^{N+M} \sum_{j=1}^{N+M} m_i m_j^* N_{ji} \Big/ \sum_{i=1}^{N+M} \sum_{j=1}^{N+M} m_i m_j^* D_{ji} \qquad (17)$$

ただし

$$N_{ji}=\int\left[\omega e_j^{*}\cdot\tilde{\varepsilon}e_i+\omega h_j^{*}\cdot\mu_0 h_i+j e_j^{*}\cdot\nabla\times h_i-j h_j^{*}\cdot\nabla\times e_i\right]dx \qquad (18a)$$

$$D_{ji}=\int\left[e_i\times h_j^{*}-h_i\times e_j^{*}\right]\cdot a_z\,dx \qquad (18b)$$

ここに

$$(e_i,\ h_i)=\begin{cases}(e_i^{(w)},\ h_i^{(w)}) & (1\leq i\leq N)\\ (e_i^{(e)},\ h_i^{(e)}) & (N+1\leq i\leq N+M)\end{cases} \qquad (19)$$

式(18b)より、D_{ii}は基本系のiモードのy方向単位幅当りの伝送電力に比例する量であることが分かる。そこで以後

$$D_{ii}=\int\left[e_i\times h_i^{*}-h_i\times e_i^{*}\right]\cdot a_z\,dx=1 \qquad (20)$$

となるように、式(8)、(11)の定数Aを規格化したものとしよう。（このようにして決めたAを付録2に示す。）この規格化条件と、基本系固有モード間の直交関係

$$\int e_i\times h_j^{*}\cdot a_z\,dx=\int e_j^{*}\times h_i\cdot a_z\,dx=0 \quad (i\neq j) \qquad (21)$$

を使うと、式(18)はつぎのように簡単になる。

$$N_{ii}=\beta_i+\omega\varepsilon_0\int e_i^{*}\cdot\Delta\mathbb{K}e_i\,dx \qquad (22a)$$

$$D_{ii}=1 \qquad (22b)$$

$$N_{ji} = \omega \varepsilon_0 \int e_j^* \cdot \Delta \mathbb{K}\, e_i \, dx \qquad (i \neq j) \qquad (23a)$$

$$D_{ji} = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (23b)$$

ただし $$\Delta \mathbb{K} = \tilde{\mathbb{K}} - \mathbb{K} \qquad (24)$$

つぎに摂動系固有モードの位相定数 $\tilde{\beta}$ が展開係数 m_i について停留値をとるように

$$\partial \tilde{\beta} / \partial m_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots N+M) \qquad (25)$$

とすれば、式(17)よりつぎの $(N+M)$ 元の連立1次方程式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{N+M} (N_{ji} - \tilde{\beta}\, \delta_{ji})\, m_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots N+M) \qquad (26)$$

ただし δ_{ji} はクロネッカーのデルタ記号である。行列表示すれば、

$$[\mathbb{N} - \tilde{\beta}\, \mathbb{I}]\, \mathbb{M} = 0 \qquad (27)$$

ここに $\mathbb{N}$ は $(N+M)$ 行 $(N+M)$ 列の正方行列でその要素は N_{ji}、$\mathbb{I}$ は単位行列、そして $\mathbb{M}$ は m_i を要素とする $(N+M)$ 次元ベクトルである。式(27)はひとつの固有値問題を構成する。すなわち永年方程式

$$\det [\mathbb{N} - \tilde{\beta}\, \mathbb{I}] = 0 \qquad (28)$$

の $(N+M)$ 個の根（固有値）が摂動系の固有モードの位相定数 $\widehat{\beta}_1$、$\widehat{\beta}_2$、…… $\widehat{\beta}_{N+M}$ をあたえ、各々の $\widehat{\beta}$ につき1組の固有ベクトル $(m_1, m_2, \cdots m_{N+M})$ が対応し、界分布が決定される。このように当面の問題は計算機解法に適したマトリクス固有値問題に帰着された。いまの場合、基本系のTEモードを N 個、TMモードを M 個とったので、$(N+M)$ 個の摂動系固有モードが得られる。採用する基本系のモード数を増せば、導かれる摂動系のモード数も多くなり、近似もよくなっていくと考えられる。

4.3 基本系固有モード間の結合

前節の一般論の物理的な意味をより明らかにするために、ここでは摂動によって基本系モード間にどのような結合が生ずるかについて考えよう。この模様は結合マトリクス N の性質を検討することによって分かる。N はつぎのように4つの小行列に分けられる。

$$N = \begin{bmatrix} \overbrace{A}^{N} & \overbrace{C}^{M} \\ C^{+} & B \end{bmatrix} \begin{matrix} \}N \\ \}M \end{matrix} \qquad (29)$$

ここに $\mathbb{A}$ は N 行 N 列の正方行列で、その非対角要素は基本系TEモード間の結合を、そして $\mathbb{B}$（M 行 M 列）の非対角要素は基本系TMモード間の結合を示す。また $\mathbb{C}$（N 行 M 列）はTE－TMモード間の結合をあらわす。なお $\mathbb{C}^+$ は $\mathbb{C}$ の転置、複素共役行列である。小行列 $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ の各要素は

$$a_{ii} = \beta_i^{(h)} \qquad (1 \leqq i \leqq N) \qquad (30a)$$

$$a_{ij\,(i \neq j)} = 0 \qquad (1 \leqq i, j \leqq N) \qquad (30b)$$

$$b_{ii} = \beta_i^{(e)} + \omega \varepsilon_0 \int \mathcal{E}_i^{(e)*} \cdot \Delta \mathbb{K} \mathcal{E}_i^{(e)} \, dx \qquad (N+1 \leqq i \leqq N+M) \qquad (31a)$$

$$b_{ij\,(i \neq j)} = \omega \varepsilon_0 \int \mathcal{E}_i^{(e)*} \cdot \Delta \mathbb{K} \mathcal{E}_j^{(e)} \, dx$$

$$= \omega \varepsilon_0 \int (K_{xz} e_{xi}^{(e)*} e_{zj}^{(e)} + K_{xz}^* e_{zi}^{(e)*} e_{xj}^{(e)}) \, dx$$

$$(N+1 \leqq i, j \leqq N+M) \qquad (31b)$$

$$c_{ij} = \omega \varepsilon_0 \int \mathcal{E}_i^{(h)*} \cdot \Delta \mathbb{K} \mathcal{E}_j^{(e)} \, dx$$

$$= \omega \varepsilon_0 \int (K_{xy}^* e_{yi}^{(h)*} e_{xj}^{(e)} + K_{yz} e_{yi}^{(h)*} e_{zj}^{(e)}) \, dx$$

$$(1 \leqq i \leqq N, \quad N+1 \leqq j \leqq M) \qquad (32)$$

上式から、誘電率テンソルの非対角要素のうち、K_{xz} はTMモード相互間の結合に寄与し、これに対し K_{xy} と K_{yz} はTE－TMモード間の結合に寄与しているこ

とが分かる。また非対角要素の導入によってはTEモード相互間の結合は生じないことも明らかである。(これを生ぜしめるには対角要素(K_{yy})に摂動を加えることが必要である。

以上の結果から、モード間の結合には(i)縮退、(ii)摂動、(iii)界分布 という3つの条件が関係してくることが分かる。これらが合致してはじめて注目するモード間に強い結合が生ずることになる。

5 モード変換 (2モード近似)

ここでは前節までの結果を使って、異方性薄膜導波系におけるTE-TMモード変換現象について詳しく考察する。S. Wang ら[6]は最近この種のモード変換器について、幾何光学と波動光学を併用した簡単な解析を行なったが*、本節の解析は同様の問題を別の観点から純波動光学的に取り扱ったものである。なお、前述のように、TE-TM結合を問題にする際には非対角項 K_{xz} は直接寄与しな

*水晶基板を用いた基礎実験の結果は文献[11]に報告されている。

いので、以下では $K_{xz}=0$ とする。

いま基本系のある一対のTEモード $[(\mathbb{e}^{(h)}, \mathbb{h}^{(h)}), \beta^{(h)}]$ とTMモード $[(\mathbb{e}^{(e)}, \mathbb{h}^{(e)}), \beta^{(e)}]$ が縮退あるいはそれに近い状態で、他のモードとこれらとの結合は無視できるとする。摂動によって、これらから2個の摂動系固有モードがつくられるが、4·2の取り扱いに従って、まず界分布をつぎのようにおく。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{e}} \\ \tilde{\mathbb{h}} \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} \mathbb{e}^{(h)} \\ \mathbb{h}^{(h)} \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} \mathbb{e}^{(e)} \\ \mathbb{h}^{(e)} \end{bmatrix} \tag{33}$$

すると式(27)に対応して次式が得られる。

$$(N_{11} - \tilde{\beta})\, m_1 + N_{12}\, m_2 = 0 \tag{34a}$$

$$N_{21}\, m_1 + (N_{22} - \tilde{\beta})\, m_2 = 0 \tag{34b}$$

ただし　$N_{11} = \beta^{(h)}$,　$N_{22} = \beta^{(e)}$

$$N_{12} = N_{21}^{*} = \omega \varepsilon_0 \int (K_{xy}^{*}\, e_y^{(h)*} e_x^{(e)} + K_{yz}\, e_y^{(h)*} e_z^{(e)})\, dx \tag{35}$$

式(34)が非自明解を持つための条件から、摂動系固有モードの位相定数がつぎのように求められる。

$$\tilde{\beta}_{\pm} = \beta_m \left[1 \pm K \sqrt{1 + (\delta/K)^2} \right] \tag{36}$$

ここに

$$\beta_m = (\beta^{(h)} + \beta^{(e)})/2 \tag{37a}$$

$$\delta = (\beta^{(h)} - \beta^{(e)})/(\beta^{(h)} + \beta^{(e)}) \tag{37b}$$

$$K = |N_{12}|/\beta_m \tag{37c}$$

そして式(36)の $\hat{\beta}$ のそれぞれについて、モード混成率 m_1/m_2 が決定される。

$$(m_1/m_2)_\pm = \alpha\left[(\delta/K) \pm \sqrt{1+(\delta/K)^2}\right] \tag{38}$$

ここに係数 α は次式であたえられる。

$$\alpha = N_{12}/|N_{12}| \tag{39}$$

とくに N_{12} が実数あるいは純虚数の場合には

$$\alpha = \begin{cases} \pm 1 & (N_{12} \gtrless 0) \qquad (40a) \\ \pm j & (N'_{12} \gtrless 0 \quad \text{ただし} \quad N_{12} = jN'_{12}) \qquad (40b) \end{cases}$$

となる。なお式(36)—(40)において複号は同順である。

4.3で述べた結合のための3条件のうち、縮退の度合は縮退係数 δ に、また摂動と界分布の効果は結合係数 K に含まれている。そして結局モード間の結合の模様はパラメータ δ/K によって記述され、その絶対値が小さいほど強い結合が生ずる。

つぎにモード変換の様子を調べてみよう。摂動系の固

有モードの界分布は

$$\tilde{\mathcal{E}}_+ = (m_1/m_2)_+ \mathcal{E}^{(h)} + \mathcal{E}^{(e)} \tag{41a}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_- = (m_1/m_2)_- \mathcal{E}^{(h)} + \mathcal{E}^{(e)} \tag{41b}$$

であらわされ、それぞれ $\hat{\beta}_+$, $\hat{\beta}_-$ なる位相定数で進行する。したがって合成界はこれらの一次結合として

$$\begin{aligned}\tilde{E}(z) &= \tilde{A}_+ \tilde{\mathcal{E}}_+ \exp(-j\hat{\beta}_+ z) + \tilde{A}_- \tilde{\mathcal{E}}_- \exp(-j\hat{\beta}_- z) \\ &= \left[\tilde{A}_+ (m_1/m_2)_+ \exp(-j\hat{\beta}_+ z) + \tilde{A}_- (m_1/m_2)_- \exp(-j\hat{\beta}_- z)\right]\mathcal{E}^{(h)} \\ &\quad + \left[\tilde{A}_+ \exp(-j\hat{\beta}_+ z) + \tilde{A}_- \exp(-j\hat{\beta}_- z)\right]\mathcal{E}^{(e)}\end{aligned} \tag{42}$$

$\hat{\beta}_+ \fallingdotseq \hat{\beta}_-$ なので、合成界においてはzの変化につれて、$\mathcal{E}^{(h)}$ が優勢になったり、$\mathcal{E}^{(e)}$ が優勢になったりする。これがモード変換現象に他ならない。

まずTE→TM変換の場合は、$z=0$ において $\mathcal{E}^{(e)}$ の係数が零になるように $\tilde{A}_+/\tilde{A}_-$ を求める。以下簡単な計算によって、つぎのよく知られた電力の関係式が導かれる

$$P^{(h)}(z)/P^{(h)}(0) = 1 - F\sin^2 Cz \tag{43a}$$

$$P^{(e)}(z)/P^{(h)}(0) = F\sin^2 Cz \tag{43b}$$

ここにFは電力変換効率である。

$$F = 1/[1 + (\delta/K)^2] \tag{44a}$$

SHIKEI B5 NO. 156

そして　$C = (\tilde{\beta}_+ - \tilde{\beta}_-)/2 = \beta_m K \sqrt{1+(\delta/K)^2}$　(44b)

また最大モード変換に達する最小距離は

$$L = (\pi/2)/C = (\pi/2)/\beta_m K\sqrt{1+(\delta/K)^2} \quad (45)$$

となる。縮退 ($\delta/K=0$) のときは，$L_0 = \pi/2\beta_m K$ において100％モード変換に達する。縮退からずれると ($\delta/K \neq 0$)，変換効率は $1/[1+(\delta/K)^2]$ なる割合で低下し，最大変換に達する距離は $1/\sqrt{1+(\delta/K)^2}$ なる割合で短縮される。したがって変換の様子は図3のようになる。$z=L_0$ までにおいて，非縮退時の変換曲線が縮退時のそれを越えることはないということに注意すべきである。TM－TE変換の場合も以上と全く同じ結果が得られる。

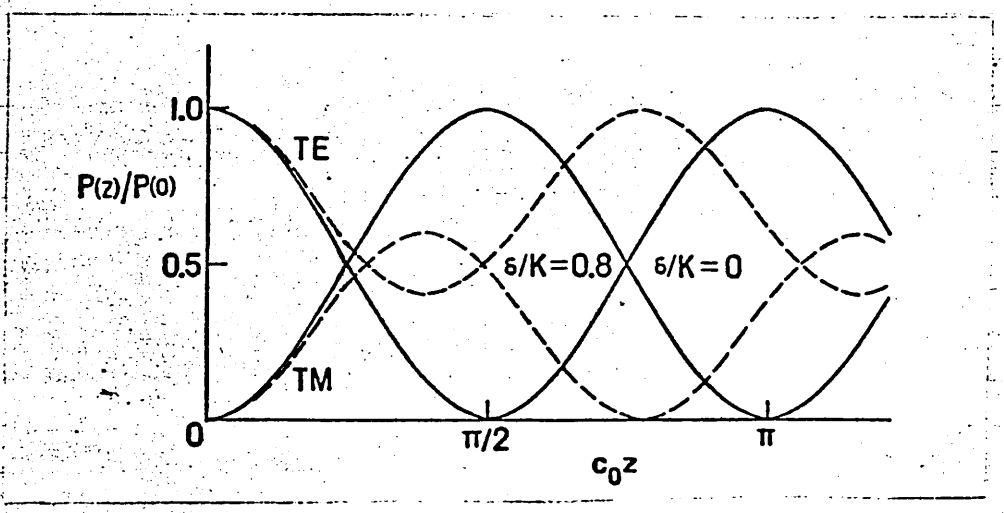


図3　モード変換における電力伝行の模様
($C_0 = \beta_m K$)

TE－TM変換に寄与するのは $\hat{K}$ の非対角要素のうち K_{xy} と K_{yz} であるが、以下ではまず K_{xy} のみある場合について考察する。

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & 0 \\ K_{xy}^{*} & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \tag{46}$$

real anisotropic な媒質では K_{xy} は実数、gyrotropic な媒質では K_{xy} は純虚数（z方向印加磁界）である。すると式(35)の N_{12} は次式であたえられる。

$$N_{12} = A^{(h)} A^{(e)} \beta^{(e)} \left[\frac{K_{I xy}^{*} \cos\phi^{(h)} \cos\phi^{(e)}}{K_{I xx} \left(P_I^{(h)} + P_I^{(e)} \right)} \right.$$

$$+ \frac{K_{II xy}^{*}}{2K_{II xx}} \left\{ \frac{\sin(\psi^{(h)} + \psi^{(e)}) - \sin(\phi^{(h)} + \phi^{(e)})}{h_{II}^{(h)} + h_{II}^{(e)}} + \frac{\sin(\psi^{(h)} - \psi^{(e)}) - \sin(\phi^{(h)} - \phi^{(e)})}{h_{II}^{(h)} - h_{II}^{(e)}} \right\}$$

$$\left. + \frac{K_{III xy}^{*} \cos\psi^{(h)} \cos\psi^{(e)}}{K_{III xx} \left(P_{III}^{(h)} + P_{III}^{(e)} \right)} \right] \tag{47}$$

この場合の摂動系固有モードについて考えてみよう。

$\delta/K = 0$ のとき、式(36)、(38)より

$$\tilde{\beta}_{\pm} = \beta_m (1 \pm K) \tag{48a}$$

$$(m_1/m_2)_{\pm} = \begin{cases} \pm 1 & (N_{12}: \text{実数}) \\ \pm j & (N_{12}: \text{純虚数}) \end{cases} \tag{48b}$$

となる。上式は基本系モードが縮退しているとき、real anisotropic の場合の摂動系固有モードが基本系モードの和（同相）、差（逆相）モードとなり、gyrotropic の場合は左右の回転モードになることを意味しており、これは直観的な予想と一致する結果である。

さて数値例を得るために、さきに挙げた図2の3種の系に摂動 K_{xy} をあたえた場合のモード変換の模様を検討してみよう。結果を表1にまとめてある。

表1

	a	b	c
Configuration	Fig.2(a)	Fig.2(b)	Fig.2(c)
Perturbation Region	Substrate $K_{Ixy}=2.09\times10^{-3}$	Substrate $K_{Ixy}=6.74\times10^{-3}$	Film $K_{IIxy}=6.74\times10^{-3}$
Coupling Modes	$TE_0 - TM_0$	$TE_0 - TM_0$	$TE_0 - TM_2$
Film Thickness for Mode Degeneracy	$d_0=1.4\lambda_0$	$d_0=0.79\lambda_0$	$d_0=2.2\lambda_0$
Minimum Distance for 100% Conversion	$L_0=1.3\times10^4\lambda_0$	$L_0=0.71\times10^4\lambda_0$	$L_0=0.53\times10^4\lambda_0$

誘電率テンソルに非対角項をもたせる最も簡単な方法は、異方性結晶の主軸を座標軸からずらせる方法である。したがって表1のいずれの場合も、注目する結晶の光学軸をx-y面内でy軸から1°回転して K_{xy} をあたえている。なおこの程度の摂動では対角項は変化しない。

この種のモード変換器を製作する際には、フィルムの厚みの許容範囲が重要となる。そこで図4に、表1の3つの場合について膜厚dが最適値 d_0 から Δd だけずれたときの変換効率Fを示している。

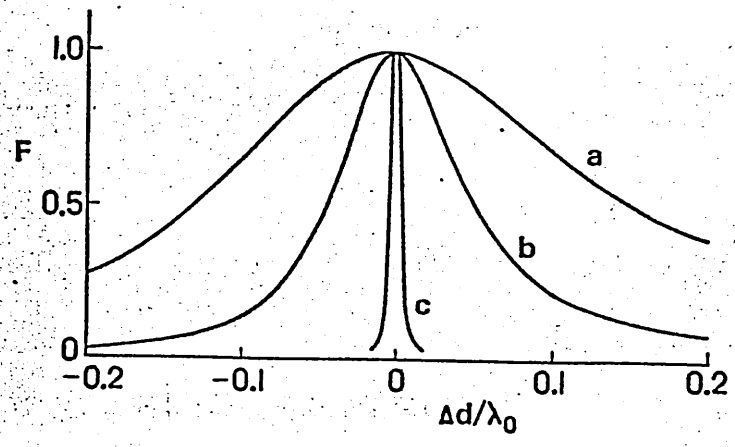


図4　膜厚による変換効率の変化

a, bに比較して、cの場合膜厚に対して極めてきびしい精度が要求されることが分かる。これは主として図2(c)

の等価屈折率曲線（TE_0とTM_2）がかなり大きな角度で交わっていることに依る。したがってモード変換器の設計にあたっては、単に注目するモードを縮退させるばかりでなく、β/k_0曲線の交叉角にも考慮を払う必要がある。なお図2(c)では、TE_0-TM_1, TE_1-TM_2など次数が1異なるモードも縮退しているが、これらはいずれも偶奇対称モード対なので、フィルムに摂動K_{xy}をあたえたのでは結合しない。※

つぎにK_{yz}による結合すなわち比誘電率テンソルが

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & K_{yz} \\ 0 & K_{yz}^{*} & K_{zz} \end{bmatrix} \tag{49}$$

の場合について考えよう。普通よく使われる低次モードにおいては、界のz成分は横方向成分に較べて小さいので、K_{yz}の効果もさきのK_{xy}の効果よりは一般に小さい。

※式(35)のN_{12}の積分が零になってしまうからである。これらを結合させるには、例えば導波系を非対称構造にするなどの方法をこうじてやる必要がある。

そこでこの場合は結合係数をあたえる N_{12} の表示式をあたえるにとどめておく。

$$N_{12} = jA^{(h)}A^{(e)}\left[-\frac{K_{Iyz}P_I^{(e)}\cos\phi^{(h)}\cos\phi^{(e)}}{K_{Izz}(P_I^{(h)}+P_I^{(e)})}\right.$$

$$+\frac{K_{IIyz}h_{II}^{(e)}}{2K_{IIzz}}\left\{\frac{-\cos(\psi^{(h)}+\psi^{(e)})+\cos(\phi^{(h)}+\phi^{(e)})}{h_{II}^{(h)}+h_{II}^{(e)}}+\frac{\cos(\psi^{(h)}-\psi^{(e)})-\cos(\phi^{(h)}-\phi^{(e)})}{h_{II}^{(h)}-h_{II}^{(e)}}\right\}$$

$$\left.+\frac{K_{IIIyz}P_{III}^{(e)}\cos\psi^{(h)}\cos\psi^{(e)}}{K_{IIIzz}(P_{III}^{(h)}+P_{III}^{(e)})}\right] \qquad (50)$$

6 むすび

異方性薄膜光導波系をとりあげ、その取り扱いの基礎となる固有伝送モードについて考察を行なった。基本系固有モードの一次結合を試験関数としてRayleigh-Ritzの変分法を適用することにより、問題はマトリックス固有値問題に帰着され、また誘電率テンソルの非対角成分による基本系モード間の結合の模様が明らかにされた。さらに、数学的な取り扱いが簡単で、しかも実用的にも重要な例として、2モード結合の場合をとりあげ、モード変換現象について論じた。今後光集積回路素子の開発がすすめば、それらと併用することによって、異方性薄膜

導波系の応用面もさらに広がっていくものと思われる。

なおここでは、注目する基本系モードを縮退させるために系のパラメータが満たすべき条件（縮退条件）[2]には、紙数の関係で触れることができなかった。これについては別の機会に報告したいと思っている。

文　献

(1)J.E.Goell and R.D.Standley:"Integrated optical circuits", Proc. IEEE, 58, 10, p.1504 (Oct. 1970)

(2)P.K.Tien:"Light waves in thin films and integrated optics", Appl. Opt., 10, 11, p.2395 (Nov. 1971)

(3)Y.Suematsu:"Tunable parametric oscillator using a guided wave structure", J.J.Appl. Phys., 9,7, p.798 (July 1970)

(4) 井筒，末田："薄膜導波系における光波パラメトリック相互作用について"，輻研資料，（昭46-04）

(5)D.F.Nelson and J.McKenna:"Electromagnetic modes of anisotropic dielectric waveguides at p-n junctions", J. Appl. Phys., 38, 10, p.4057 (Sept. 1967)

(6)S.Wang, J.D.Crow and M.Shah:"Thin-film optical waveguide mode converters using gyrotropic and anisotropic substrates", Appl. Phys. Lett., 19, 6, p.187 (15 Sept. 1971)

(7)——— :"Studies of magnetooptic effects for thin-film optical waveguide applications", IEEE Trans., MAG-7, 3, p.385 (Sept.1971)

(8)P.S.Pershan:"Magneto-optical effects", J. Appl. Phys., 38, 3, p.1482 (1 March 1967)

(9)G.J.Gabriel and M.E.Brodwin:"The solution of guided waves in inhomogeneous anisotropic media by perturbation and variational methods", IEEE Trans., MTT-13, 3, p.364(May 1965)

(10)S.S.Jha and G.S.Kino:"A variational technique for determinig the propagating modes of a finite plasma", J. Electron. Control, 14,2, p. 167 (Feb. 1963)

(11)M.Shah, J.D.Crow and S.Wang:"Optical-waveguide mode-conversion experiments", Appl. Phys. Lett., 20, 2, p.66 (15 Jan. 1972)

(12) 小山田 : 阪大基礎工修士論文 (昭和47-03)

(13) 松原, 熊谷 : "開放形伝送線路間の結合理論とその光回路への応用", 信学マイクロ波研資, MW 71-18 (昭和46-06)

付　録

1　変分表示式について

真の界を $(\mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0)$ とし、これが $(\mathcal{E}_0+\delta\mathcal{E}, \mathcal{H}_0+\delta\mathcal{H})$ に変化したとき、伝搬定数 β も真の値 β_0 から $\beta_0+\delta\beta$ に変ったとすると、2次元のガウスの定理を使って次式が得られる。

$$\delta\beta\left[\iint(\mathcal{E}_0\times\mathcal{H}_0^* - \mathcal{H}_0\times\mathcal{E}_0^*)\cdot a_z\,dS\right]$$
$$= j\int(\delta\mathcal{H}\times\mathcal{E}_0^* - \delta\mathcal{E}\times\mathcal{H}_0^*)\cdot n\,dl \qquad (A\cdot1)$$

上式右辺の線積分は、図5のように半径Rが無限大の円周 (L)、境界 (L')、カット (L'') について行なう。n は外向き単位法線ベクトルである。まず境界 L' については、右辺の被積分項をつぎのように変形する。

$$\mathcal{E}_0^*\cdot(n\times\delta\mathcal{H}) - \mathcal{H}_0^*\cdot(n\times\delta\mathcal{E}) \qquad (A\cdot2)$$

スカラ積にまいてくるの

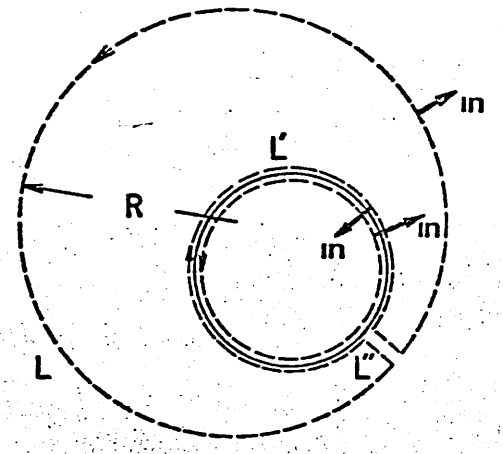


図5　積分領域

は $\mathcal{E}_0^*$, $\mathcal{H}_0^*$ の境界に平行な成分 $\mathcal{E}_{0,tan}^*$, $\mathcal{H}_{0,tan}^*$ だけであるので、(A·2) はさらに

$$\mathcal{E}_{0,tan}^* \cdot (n \times \delta\mathcal{H}) - \mathcal{H}_{0,tan}^* \cdot (n \times \delta\mathcal{E}) \qquad (A\cdot3)$$

と書きかえられる。積分には境界の両側における (A·3) の項の差が寄与する。ところが $\mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0$ は真の界であるので $\mathcal{E}_{0,tan}$, $\mathcal{H}_{0,tan}$ は境界で連続であり、したがって $n \times \delta\mathcal{E}$ と $n \times \delta\mathcal{H}$ が連続でさえあれば、L に関する線積分は零になる。これは結局境界で電磁界の接線成分が連続であるような試験関数を使うべきことを意味している。本文の場合、試験関数として基本系の真の界を採用しているので、この条件は自動的に満たされている。

つぎに L について考える。真の解 $\mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0$ は $R \to \infty$ に対し、第2種変形ベッセル関数の漸近形

$$R^{-\frac{1}{2}} \exp(-pR) \qquad (p>0) \qquad (A\cdot4)$$

の形で零になる[13]。したがって、例えば $\delta\mathcal{E}, \delta\mathcal{H}$ が $R \to \infty$ に対して有限であるような試験関数を使えば、L に関する線積分は零になる。本文で用いた試験関数は無限遠に対し指数関数的に零となるので、この条件も満足されて

いる。なおカット（L″）に関する線積分は相殺して零になる。

以上のことから、本文のような試験関数を採用する限り、内部に境界を持つ開放導波系に対しても、式(15)の停留性が保たれることが分かった。

2　規格化定数

TEモード：

$$A=\sqrt{\omega\mu_0/\beta}\left[\cos^2\phi/P_{\mathrm{I}}+(\sin 2\psi-\sin 2\phi)/2h_{\mathrm{II}}+d+\cos^2\psi/P_{\mathrm{III}}\right]^{-1/2} \quad (A\cdot5)$$

TMモード：

$$A=\sqrt{\omega\varepsilon_0/\beta}\left[\cos^2\phi/K_{\mathrm{I}xx}P_{\mathrm{I}}+(\sin 2\psi-\sin 2\phi)/2K_{\mathrm{II}xx}h_{\mathrm{II}}+d/K_{\mathrm{II}xx}+\cos^2\psi/K_{\mathrm{III}xx}P_{\mathrm{III}}\right]^{-1/2} \quad (A\cdot6)$$

輻射科学研究会資料

異方性誘電体スラブにおける電磁波モードの解析

里村　裕
松原正則
熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

1972年4月28日

1. まえがき

等方性媒質からなるスラブを伝播する電磁波モードの解析は，電磁波論の典形的な境界値問題としてすでに数多く行なわれている．特に，最近では光ＩＣ回路の開発と関連して実用的にも大いに関心がもたれている．しかしながら，異方性媒質からなる伝送系に関しては研究例は比較的少なく，しかもそのほとんどがフェライトなどの異方性透磁率をもつ媒質からなる伝送系に関しての研究例であって，光学結晶などの異方性誘電率をもつ媒質からなる伝送系の一般的な詳しい解析は，少なくとも著者等の知る限り見当らないように思われる．したがって，異方性の誘電率をもつ媒質からなる伝送系における電磁波モードを解析することは，guided wave の電磁波論的な研究課題として理論的にも充分に興味があるばかりでなく，このような異方性誘電率をもつ結晶材料を使用した線路は，光ＩＣ回路などにおいて変調器その他に適用される可能性もあり[1]，実用上，応用上の興味も大きい．

そこで本稿では，異方性誘電率をもつ誘電体結晶スラブを用いた伝送系における電磁波モードの解析を行ない，一般的な伝送電磁界の表示式および特性方程式を導き，数値計算例を用いてモードの特性，伝播定数，電磁界分布等の具体的な様子を示す．

2. 異方性誘電体中における電磁界

図１に示すように，厚さ d なる異方性誘電体スラブと，その両側に接する等方性誘電体ＩおよびＩＩの３層からなる導波系を考える．

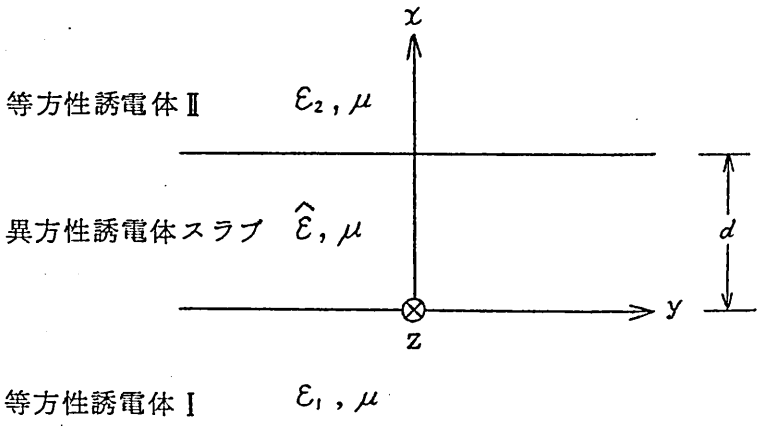


図　1

等方性誘電体ⅠおよびⅡの誘電率はそれぞれスカラー誘電率ε_1およびε_2で与えられ，異方性誘電体スラブの誘電率はテンソル誘電率$\hat{\varepsilon}$で表わされるものとする．ただし透磁率の値はすべての領域で同じであるとし，これをスカラー透磁率μで表わす．また，以下の解析では系の損失は無視する．また，上記の媒質定数はすべて実数であるとする．

図1に示すように，伝送方向をz軸とするような直角座標系を採用し，系はy方向には一様であるとして，まず異方性誘電体スラブにおける電磁界の一般的な解析を行なう．Maxwellの方程式より

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - rot\,\mathbf{H} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + rot\,\mathbf{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1)$$

である．また，テンソル誘電率をもつ異方性誘電体であるから，次のような構成関係式がなりたつ．

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

前述のように，電磁波モードの伝播方向を z 方向とし，その伝播定数を β_z とする． y 方向には系は一様であるから，電磁波モードは y には依存しない．したがって電磁波モードの電磁界成分は，

$$Field \propto f(x)\ e^{-j\beta_z z}\ e^{j\omega t} \quad \cdots\cdots (3)$$

なる形に書き表わされる．ここで，$f(x)$ は界分布の模様をあらわす x の実関数である．ω は角周波数，t は時間である．さて，一般に $f(x)$ はフーリエ展開で表現できることを考慮すれば，式(3)は次式に示すような平面波の和で表わされることがわかる．

$$Field \propto \left(\sum_{\beta_x} A e^{-j\beta_x x} \right) e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t} \quad \cdots\cdots (4)$$

したがって，伝送電磁波モードを構成するそれぞれの平面波成分 $e^{-j\beta_x x}\ e^{-j\beta_z z}\ e^{j\omega t}$ については，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= -j\beta_x \\ \frac{\partial}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} &= -j\beta_z \\ \frac{\partial}{\partial t} &= j\omega\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (5)$$

とおくことができる．以下の解析においては，電磁波モードを構成する平面波成分について考えていく．式(5)の関係をMaxwellの方程式(1)に適用するとつぎのようになる．

$$\begin{pmatrix} \omega\varepsilon_{xx} & \omega\varepsilon_{xy} & \omega\varepsilon_{xz} & 0 & -\beta_z & 0 \\ \omega\varepsilon_{yx} & \omega\varepsilon_{yy} & \omega\varepsilon_{yz} & \beta_z & 0 & -\beta_x \\ \omega\varepsilon_{zx} & \omega\varepsilon_{zy} & \omega\varepsilon_{zz} & 0 & \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_z & 0 & \omega\mu & 0 & 0 \\ -\beta_z & 0 & \beta_x & 0 & \omega\mu & 0 \\ 0 & -\beta_x & 0 & 0 & 0 & \omega\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$

この式は同次連立1次方程式であり，E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z がすべて0となる以外の解を持つための条件は，左辺第1項の正方行列の行列式が0になることである．この条件より次式で示される分散特性式が得られる．

$$\begin{aligned} &\{k_{xx}^2 k_{yy}^2 k_{zz}^2 + k_{xy}^2 k_{yz}^2 k_{zx}^2 + k_{yx}^2 k_{zy}^2 k_{xz}^2 \\ &\quad - k_{xx}^2 k_{yz}^2 k_{zy}^2 - k_{yy}^2 k_{zx}^2 k_{xz}^2 - k_{zz}^2 k_{xy}^2 k_{yx}^2\} \\ &-\{(k_{xx}^2 k_{yy}^2 + k_{xx}^2 k_{zz}^2 - k_{xy}^2 k_{yx}^2 - k_{xz}^2 k_{zx}^2)\beta_x^2 \\ &\quad + (k_{zz}^2 k_{xx}^2 + k_{zz}^2 k_{yy}^2 - k_{zx}^2 k_{xz}^2 - k_{zy}^2 k_{yz}^2)\beta_z^2 \\ &\quad + (k_{yy}^2 k_{zx}^2 + k_{yy}^2 k_{xz}^2 - k_{xy}^2 k_{yz}^2 - k_{yx}^2 k_{zy}^2)\beta_x\beta_z\} \\ &+\{k_{xx}^2\beta_x^4 + k_{zz}^2\beta_z^4 + (k_{xx}^2 + k_{zz}^2)\beta_x^2\beta_z^2 \\ &\quad + (k_{xz}^2 + k_{zx}^2)(\beta_x^2 + \beta_z^2)\beta_x\beta_z\} = 0 \quad \cdots\cdots (7) \end{aligned}$$

ただし，$k_{xx}^2 = \omega^2\varepsilon_{xx}\mu$, $k_{xy}^2 = \omega^2\varepsilon_{xy}\mu$ 等である．式(7)は4次方程式であるので β_z を1つ定めれば，β_x は4根求まることになる．それらの根を

β_{x_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) とあらわすことにすれば，式(4)であらわされる電磁界はつぎのようになる．

$$Field \propto \left(\sum_{i=1}^{4} A_i \, e^{-j\beta_{x_i} x} \right) e^{-j\beta_z z} \, e^{j\omega t}$$

ところで電磁界が z 方向に伝播するものであるためには，上式のカッコ内の量は実数でなければならない．そのためには（β_x, β_z）なる平面波成分が存在すれば，かならず（$-\beta_x^*$, β_z）なる平面波成分が存在しなければならない．ここで＊は複素共役をあらわす．すなわち，β_x が式（7）の解であれば $-\beta_x^*$ もまた式（7）の解でなければならない．この条件を式（7）に適用すると，次の条件式が得られる．

$$k_{xz}^2 + k_{zx}^2 = 0$$

$$k_{xy}^2 k_{yz}^2 + k_{yx}^2 k_{zy}^2 = 0$$

この条件式を誘電率で表わせば

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx} = 0 \\ &\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{yx}\varepsilon_{zy} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (8)$$

となる．ここで誘電率テンソルは対称テンソルであるので，

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0 \\ &\text{かつ} \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0 \quad \text{または} \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

となる．このように，式(9)の条件が満足されるときにのみ，z 方向に伝播する電磁波モードが存在することになる．いいかえれば，z 方向に伝播する

電磁波モードが存在し得るのは，つぎの3つの場合に限られる．

$$CASE\ \mathrm{I}\quad \begin{cases} \varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=0 \\ \varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=0 \\ \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}\neq 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots (10)$$

$$CASE\ \mathrm{II}\quad \begin{cases} \varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=0 \\ \varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}\neq 0 \\ \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots (11)$$

$$CASE\ \mathrm{III}\quad \begin{cases} \varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=0 \\ \varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=0 \\ \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots (12)$$

以下，これら3つの場合についてそれぞれ特性方程式を求めていく．

3. 特性方程式の導出

本節では，まず前節で示した3つの場合における異方性誘電体スラブ中の電磁界を求めることにする．たとえば，$CASE\ \mathrm{I}$の場合について考えると，Maxwellの方程式(6)は式(10)の関係を代入して次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \omega\varepsilon_{xx} & 0 & 0 & 0 & -\beta_z & 0 \\ 0 & \omega\varepsilon_{yy} & \omega\varepsilon_{yz} & \beta_z & 0 & -\beta_x \\ 0 & \omega\varepsilon_{yz} & \omega\varepsilon_{zz} & 0 & \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_z & 0 & \omega\mu & 0 & 0 \\ -\beta_z & 0 & \beta_x & 0 & \omega\mu & 0 \\ 0 & -\beta_x & 0 & 0 & 0 & \omega\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots (13)$$

また式(7)の分散特性式は，同様にしてつぎのようになる．

$$(k_{xx}^2 k_{zz}^2 - k_{xx}^2 \beta_x^2 - k_{zz}^2 \beta_z^2)(k_{yy}^2 - \beta_x^2 - \beta_z^2)$$

$$- k_{yz}^4 (k_{xx}^2 - \beta_z^2) = 0 \quad \cdots\cdots (14)$$

式(13)を構成する6個の同次一次方程式は，式(14)の条件を付加しているので1個は冗長である．したがって任意の1個を省いて，E_x，E_y，E_z，H_x，H_y を H_z で表わすと，たとえば次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \omega\varepsilon_{xx} & 0 & 0 & 0 & -\beta_z \\ 0 & \omega\varepsilon_{yy} & \omega\varepsilon_{yz} & \beta_z & 0 \\ 0 & \omega\varepsilon_{yz} & \omega\varepsilon_{zz} & 0 & \beta_x \\ 0 & \beta_z & 0 & \omega\mu & 0 \\ -\beta_z & 0 & \beta_x & 0 & \omega\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H_z \quad \cdots\cdots (15)$$

さて，式(14)から得られる β_x の4根，つまり，β_{x1}，$-\beta_{x1}$，β_{x2}，$-\beta_{x2}$ のそれぞれに対応する平面波成分の一次結合より，H_z を次のように表わすことができる．ただし，$e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t}$ は簡単のため以下省略する．

$$H_z = \sum_{n=1}^{2} \left[P_n e^{-j\beta_{x_n} x} + Q_n e^{j\beta_{x_n} x} \right] \quad \cdots\cdots (16)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} A_n &= P_n + Q_n \\ B_n &= j(-P_n + Q_n) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (17)$$

なる A_n，B_n を導入すれば，上式の H_z は次のようになる．

$$H_z = \sum_{n=1}^{2} \left[A_n \cos \beta_{x_n} x + B_n \sin \beta_{x_n} x \right] \quad \cdots\cdots (18)$$

ただし，A_n，B_n は境界条件より定まる定数である．

式(16)を式(15)に代入し，式(17)を考慮して他の電磁界成分を求めると次のようになる．

CASE I

$$\left.\begin{aligned} H_z &= \sum_{n=1}^{2} \left[A_n \cos \beta_{x_n} x + B_n \sin \beta_{x_n} x \right] \\ E_z &= \frac{\omega\mu}{\beta_z} \sum_{n=1}^{2} a_n \left[j A_n \sin \beta_{x_n} x - j B_n \cos \beta_{x_n} x \right] \\ H_y &= \sum_{n=1}^{2} b_n \left[A_n \cos \beta_{x_n} x + B_n \sin \beta_{x_n} x \right] \\ E_y &= -\frac{\omega\mu}{\beta_z} \sum_{n=1}^{2} c_n \left[j A_n \sin \beta_{x_n} x - j B_n \cos \beta_{x_n} x \right] \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

ただし

$$a_n = \frac{k_{yz}^2 (k_{xx}^2 - \beta_z^2)}{k_{xx}^2 k_{zz}^2 - k_{xx}^2 \beta_{x_n}^2 - k_{zz}^2 \beta_z^2} \cdot \frac{\beta_z}{\beta_{x_n}}$$

$$b_n = \frac{k_{yz}^2 k_{xx}^2}{k_{xx}^2 k_{zz}^2 - k_{xx}^2 \beta_{x_n}^2 - k_{zz}^2 \beta_z^2}$$

$$c_n = \frac{\beta_z}{\beta_{x_n}}$$

上式からわかるように，一般には $H_z \neq 0$，$E_z \neq 0$ である．すなわち電磁波モードはハイブリッドモードになっている．

CASE IIの場合も，全く同様にして計算すると分散特性式は次のようになる．

$$(k_{xx}^2 k_{zz}^2 - k_{xx}^2 \beta_x^2 - k_{zz}^2 \beta_z^2)(k_{yy}^2 - \beta_x^2 - \beta_z^2) - k_{xy}^4 (k_{zz}^2 - \beta_x^2) = 0 \quad \cdots\cdots (20)$$

また，電磁界成分は，

$$
\left.
\begin{aligned}
H_z &= \sum_{n=1}^{2} \left[A_n \cos \beta_{x_n} x + B_n \sin \beta_{x_n} x \right] \\
E_z &= \frac{\omega\mu}{\beta_z} \sum_{n=1}^{2} a_n \left[A_n \cos \beta_{x_n} x + B_n \sin \beta_{x_n} x \right] \\
H_y &= \sum_{n=1}^{2} b_n \left[j A_n \sin \beta_{x_n} x - j B_n \cos \beta_{x_n} x \right] \\
E_y &= -\frac{\omega\mu}{\beta_z} \sum_{n=1}^{2} c_n \left[j A_n \sin \beta_{x_n} x - j B_n \cos \beta_{x_n} x \right]
\end{aligned}
\right\} \quad (21)
$$

ただし

$$
a_n = \frac{k_{xy}^2 \beta_z^2}{k_{xx}^2 k_{zz}^2 - k_{xx}^2 \beta_{x_n}^2 - k_{zz}^2 \beta_z^2}
$$

$$
b_n = \frac{k_{xy}^2 k_{zz}^2}{k_{xx}^2 k_{zz}^2 - k_{xx}^2 \beta_{x_n}^2 - k_{zz}^2 \beta_z^2} \cdot \frac{\beta_z}{\beta_{x_n}}
$$

$$
c_n = \frac{\beta_z}{\beta_{x_n}}
$$

となる．

$CASE\,\mathrm{III}$ の場合には，さらにつぎのように２つの場合が得られる．その１つは，つぎのようになる．

$$
\beta_x^2 = k_{yy}^2 - \beta_z^2 \qquad \cdots\cdots (22)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
H_z &= A \cos \beta_x x + B \sin \beta_x x \\
E_z &= 0 \\
H_y &= 0
\end{aligned}
\right\} \quad (23)
$$

$$E_y = -\frac{\omega\mu}{\beta_z}\, c\left[\, jA \sin \beta_x x - jB \cos \beta_x x \,\right]$$

ただし

$$c = \frac{\beta_z}{\beta_x}$$

他の1つは，つぎのようになる．

$$\beta_x^{\,2} = k_{zz}^{\,2} - \frac{k_{zz}^{\,2}}{k_{xx}^{\,2}}\beta_z^{\,2} \qquad \cdots\cdots (24)$$

$$H_z = 0$$

$$E_z = \frac{\omega\mu}{\beta_z}\left[\, A \cos \beta_x x + B \sin \beta_x x \,\right]$$

$$H_y = b\left[\, jA \sin \beta_x x - jB \cos \beta_x x \,\right] \qquad \cdots\cdots (25)$$

$$E_y = 0$$

ただし

$$b = \frac{k_{zz}^{\,2}}{\beta_x \beta_z}$$

式(23)においては$E_z = 0$となっており，したがってこれはTEモードを表わしている．また，式(25)においては$H_z = 0$となっており，したがってこれはTMモードを表わしている．

さて，つぎに等方性誘電体Ⅰ中の電磁界は周知のように次式であたえられる[2]．

$$
\left.
\begin{aligned}
H_z &= C\ e^{\alpha_1 x} \\
E_z &= \frac{\omega\mu}{\beta_z} D\ e^{\alpha_1 x} \\
H_y &= p\ D\ e^{\alpha_1 x} \\
E_y &= -\frac{\omega\mu}{\beta_z} q\ C\ e^{\alpha_1 x}
\end{aligned}
\right\} \quad \cdots\cdots (26)
$$

ただし

$$p = \frac{k_1^2}{(-j\alpha_1)\beta_z}$$

$$q = \frac{\beta_z}{(-j\alpha_1)}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\beta_z^2 - k_1^2}$$

$$k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu$$

α_1 ：正の実数

ここで，C，Dは境界条件によって決定される定数である．また，等方性誘電体Ⅱ中における電磁界は次式で与えられる．

$$
\left.
\begin{aligned}
H_z &= E\ e^{-\alpha_2 x} \\
E_z &= \frac{\omega\mu}{\beta_z} F\ e^{-\alpha_2 x} \\
H_y &= -\ r\ F\ e^{-\alpha_2 x} \\
E_y &= \frac{\omega\mu}{\beta_z} s\ E\ e^{-\alpha_2 x}
\end{aligned}
\right\} \quad \cdots\cdots (27)
$$

ただし

$$r = \frac{k_2^2}{(-j\alpha_2)\beta_z}$$

$$s = \frac{\beta_z}{(-j\alpha_2)}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\beta_z^2 - k_2^2}$$

$$k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu$$

α_2 ：正の実数

ここで，E，Fは境界条件によって決定される定数である．

このようにして，異方性誘電体スラブ，等方性誘電体Ⅰ，Ⅱのそれぞれにおける電磁界表示を求めることができた．なお，電磁界のx方向成分はいずれの媒質中においても，電磁界のy方向成分から，次式によって求めることができる．

$$D_x = \frac{\beta_z}{\omega} H_y \qquad \cdots\cdots (28)$$

$$B_x = -\frac{\beta_z}{\omega} E_y \qquad \cdots\cdots (29)$$

さて，等方性誘電体Ⅱと異方性誘電体スラブとの境界面（$x = d$），および異方性誘電体スラブと等方性誘電体Ⅰとの境界面（$x = 0$）において，電磁界の接線成分が連続であるという境界条件を前述の電磁界表示の式に適用すると，特性方程式，および係数A_1，A_2，B_1，B_2，C，D，E，Fが決定される．$CASE$Ⅰおよび$CASE$Ⅱの場合には，特性方程式はかなり複雑になるのでここに記すことを省略し，第4節で数値例を示すことにする．$CASE$Ⅲの場合には，比較的簡単に次のようになる．

TEモードの場合

$$(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_x^2) \sin \beta_x d + (\alpha_1 + \alpha_2) \beta_x \cdot \cos \beta_x d = 0$$

TMモードの場合

$$\left(\alpha_1\alpha_2-\frac{k_1^2k_2^2}{k_{zz}^4}\beta_x^2\right)\sin\beta_x d+\left(\frac{k_2^2}{k_{zz}^2}\alpha_1+\frac{k_1^2}{k_{zz}^2}\alpha_2\right)\beta_x\cdot\cos\beta_x d=0$$

4. 数 値 計 算 例

前節までに解析した図1のような一般的な系の具体的な例として，図2に示すように誘電率ε_sなる等方性の基板上にdなる厚さの異方性結晶スラブを被覆した光IC線路を考えよう．

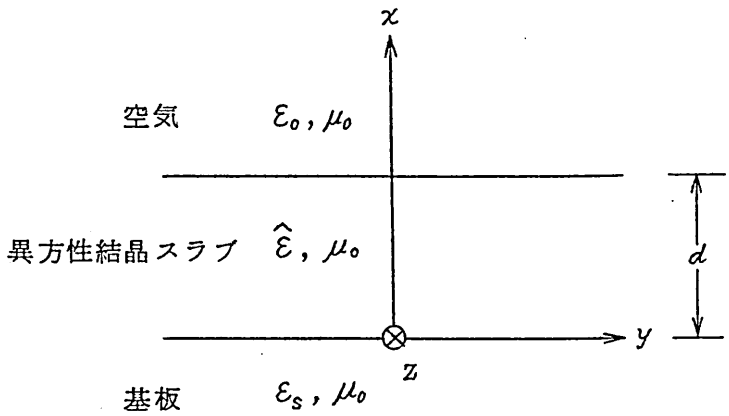


図 2

異方性結晶スラブの上側領域は誘電率ε_0なる空気とし，透磁率はすべての領域で真空の透磁率μ_0に等しいとする．前と同様に，線路の損失は省略する．第3節で得られた電磁界表示式および特性方程式をもとに，特に$CASE\ II$の場合について，電磁波モードの伝播定数および電磁界分布を求めることに

する．

まず結晶軸がξ，η，ζであり，次式で表現される誘電率をもつ誘電体結晶を考える．

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (30)$$

いま図３のように，ζ軸を中心にξ軸，η軸が角度θだけ回転した$x\ y\ z$座標系では誘電率は式(31)で表現され，これはちょうど$CASE\ \mathrm{II}$の場合に相当する．

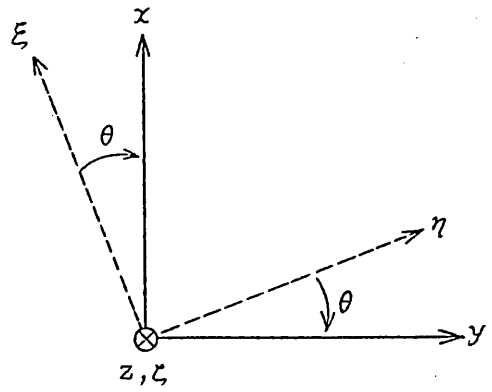


図　3

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (31)$$

ただし

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\xi\xi} \cos^2\theta + \varepsilon_{\eta\eta} \sin^2\theta$$

$$\varepsilon_{xy} = (\varepsilon_{\xi\xi} - \varepsilon_{\eta\eta})\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\eta\eta}\cos^2\theta + \varepsilon_{\xi\xi}\sin^2\theta$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\zeta\zeta}$$

具体的な１例として，異方性誘電体結晶スラブの誘電率 $\varepsilon_{\xi\xi}$，$\varepsilon_{\eta\eta}$，$\varepsilon_{\zeta\zeta}$，および基板の誘電率 ε_s が次に示すような値をとる場合について考える．

$$\frac{\varepsilon_{\xi\xi}}{\varepsilon_0} = (2.5)^2$$

$$\frac{\varepsilon_{\eta\eta}}{\varepsilon_0} = 2^2$$

$$\frac{\varepsilon_{\zeta\zeta}}{\varepsilon_0} = (2.25)^2$$

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_0} = (1.5)^2$$

このとき，$\theta = 0°$，$5°$，$22.5°$，$45°$，$90°$ のそれぞれの場合における自由空間伝播定数 k_0 $\left(=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)$ で規格化した伝播定数 β_z の値を，それぞれ図４～図８に示す．これらの図において，横軸は結晶スラブの厚さ d を自由空間波長 λ_0 で割った値 d/λ_0 である．ここで図４および図８の $\theta = 0°$ および $90°$ の場合は，テンソル誘電率は対角成分しか持たず，したがってこれは *CASE* Ⅲに相当する．図４からわかるように d/λ_0 が大きくなるにしたがって β_z/k_0 が 2.0 に近づく *TE* モード群と，2.5 に近づく *TM* モード群とが存在することがわかる．図８においては，β_z/k_0 が 2.0 に近づくのが *TM* モード群であり，2.5 に近づくのが *TE* モード群である．

図５～図７は $\theta \neq \frac{\pi}{2}n$ （ n；任意の整数）の場合における伝播定数の値の例である．これらの場合にはテンソル誘電率の非対角要素が零ではなくな

り，電磁波モードはハイブリッドモードとなる．そして，2つのハイブリッドモードが等しい伝播定数を持つような周波数においては，それらのモードは結合をおこすことになる．このような結合は，たとえば，図7のα付近（拡大した図を図9に示す）などにおいて顕著に見られる．もし結合がないとすれば図9の点線で示すような伝播定数の値をもつのであるが，結合が存在するために実線で示すような伝播定数の値をとるようになる．このことは図7のe点における電磁界分布（図14に示す）とf点における電磁界分布（図15に示す）とがよく似ており，g点における電磁界分布（図16に示す）とh点における電磁界分布（図17に示す）とがよく似ていることからも確められる．一方，図4，図8に示す$\theta=\frac{\pi}{2}\cdot n$の場合にも，$TE$モードと$TM$モードとの間で伝播定数が等しくなる場合があるけれども，TEモードはE_y，H_x，H_zの電磁界成分しかもたず，TMモードはE_x，E_z，H_yの電磁界成分しかもたないので，これらの2つのモードの間には，同じ方向の電磁界成分は存在せず，したがって結合はおこらない．

電磁界分布の様子を知るために，たとえば$\theta=5°$における図5のa，b点，および，$\theta=45°$における図7のc，d，e，f，g，h点の電磁界分布をそれぞれ図10～図17に示す．これらの図において，横軸には結晶スラブの厚さの方向，つまりx軸をとっている．$x=0$のところで結晶スラブが基板と接しており，$x=d$のところで空気と接している．縦軸は任意目盛で表わした電磁界の大きさを示す．これらの図より，電磁波モードは一般にハイブリッドモードであることが確められる．また，d/λ_0が大きくなるにしたがって空気中と基板中の電磁界は急速に弱くなり，その電磁界は結晶スラブのごく近傍に限られ，伝送エネルギーの大部分が結晶スラブ中に集中していくことがわかる．$\theta=5°$の場合の図10，図11からわかるように，a点における電磁界モードはTEモードに近く，b点ではTMモードに近いけれども，それぞれE_z，H_zが存在し，正確に言えばハイブリッドモードで

あるのはもちろんである．

以上は$CASE$ Ⅱの場合の数値計算例であるが，$CASE$ Ⅰについても同様である．$CASE$ Ⅰの場合は，誘電体結晶を$x\ y\ z$座標系に対して図１８に示すように配置した場合に得られる．$CASE$ Ⅰの場合，それぞれの媒質の誘電率の値を$CASE$ Ⅱの数値計算例の場合と同じとして$\theta = 45°$の場合の，k_0で規格化した伝送軸方向の伝播定数β_zの値を求めると図１９に示すようになる．この場合も$CASE$Ⅱの場合と同様にモードの間で結合が起こることがわかる．

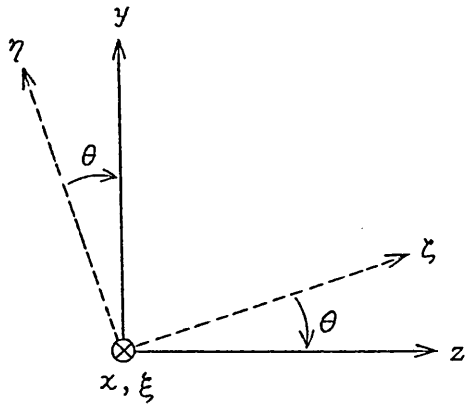


図１８

5. むすび

本稿では，異方性誘電体スラブを伝播する電磁波モードの解析を行ない，具体例として異方性誘電率をもつ結晶スラブが等方性の基板上に被覆された光ＩＣ線路の電磁波モードの伝播定数，および，電磁界分布の代表的数値計算例を示した．今後は，異方性結晶材料を基板とした系，および，このような線路を用いた応用装置，たとえば変調器などについて検討してゆくつもりである．

なお，数値計算は大阪大学大型計算機センターによったことを記し，謝意をあらわす．

文　　献

(1) 倉薗貞夫，岩崎敬一郎，熊谷信昭：分布結合線路を用いた新しい光変調方式，電子通信学会論文誌C，vol．55－c，No．1，p61（昭47－01）

(2) たとえば板倉清保：近代超高周波工学，第6章，電気書院（1969）

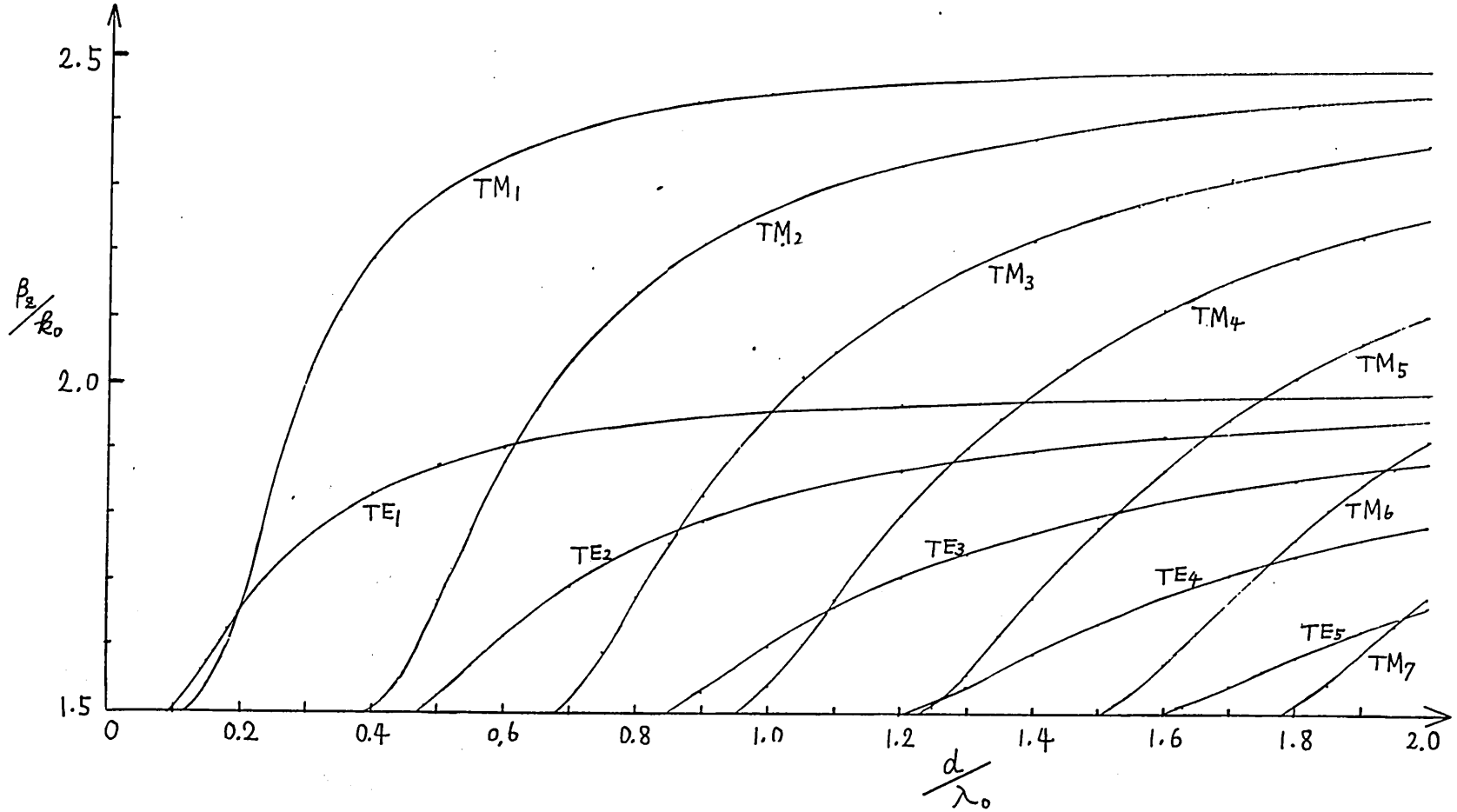


図 4. CASE II , $\theta = 0^\circ$ における 伝播定数 β_z

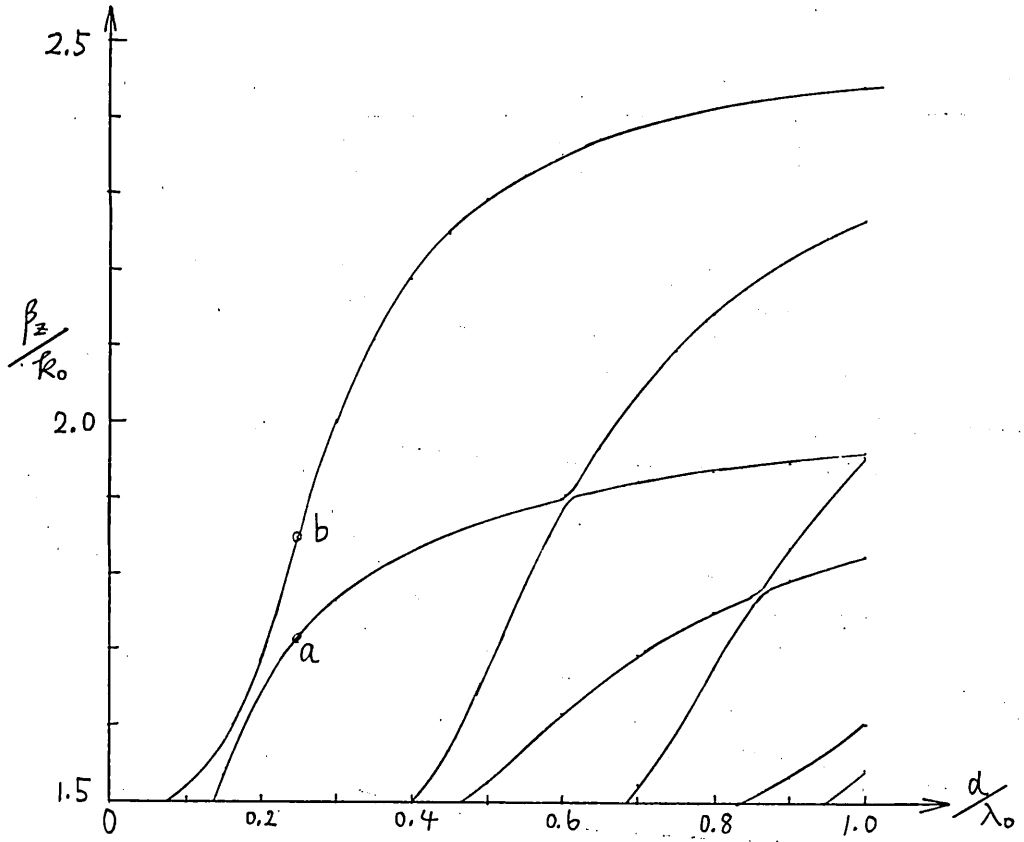


図 5.　$\theta = 5°$ における伝播定数 β_z

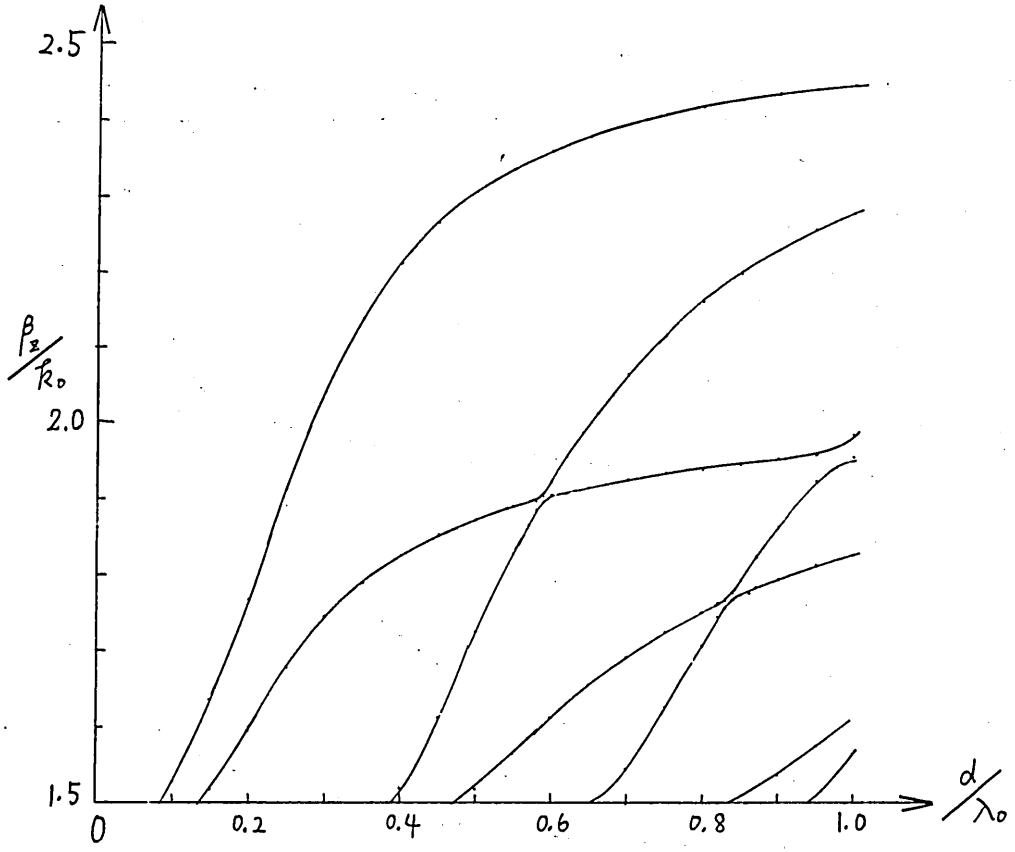


図 6. $\theta = 22.5°$ における伝播定数 β_z

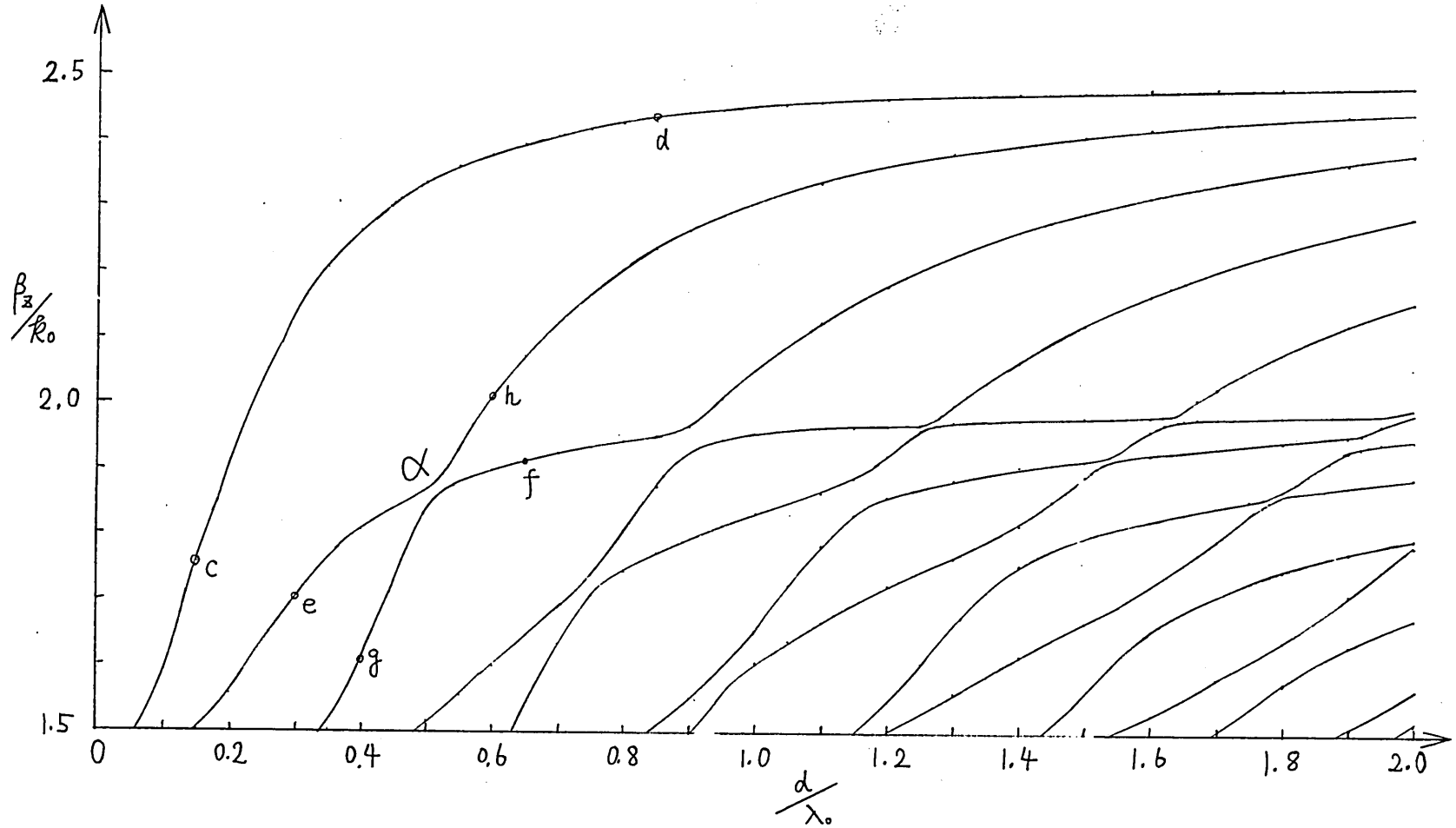


図 7.　　$\theta = 45°$ における 伝播定数 β_z

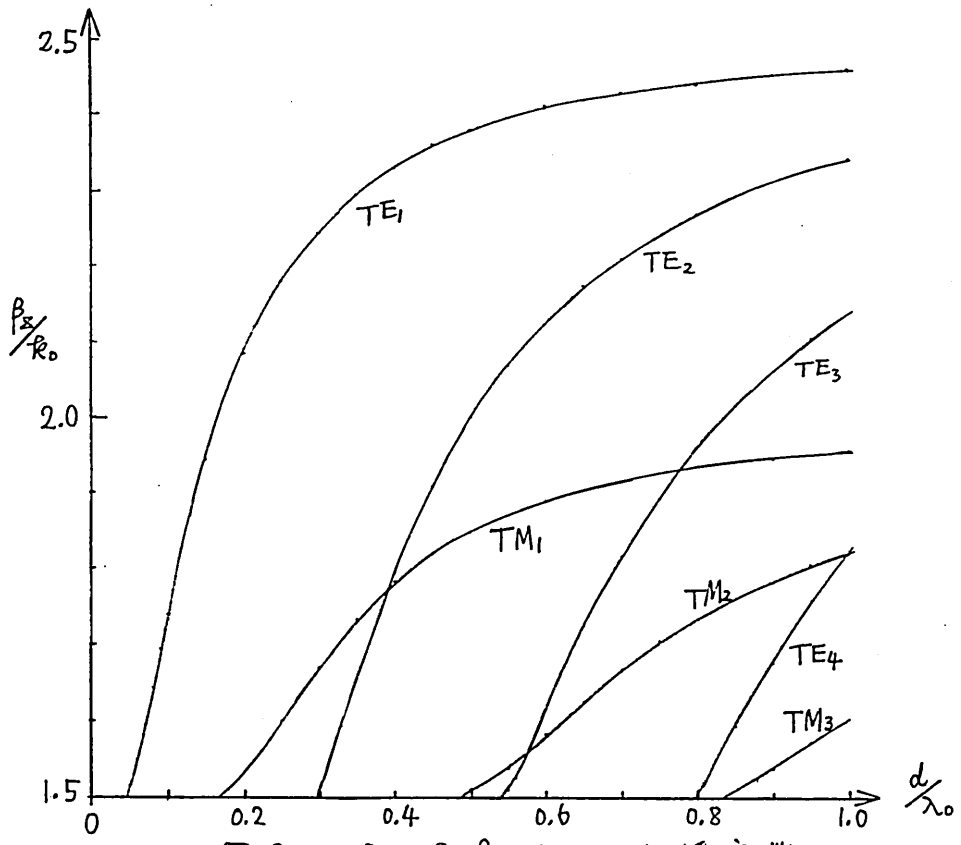


図 8. $\theta = 90°$ における伝播定数 β_z

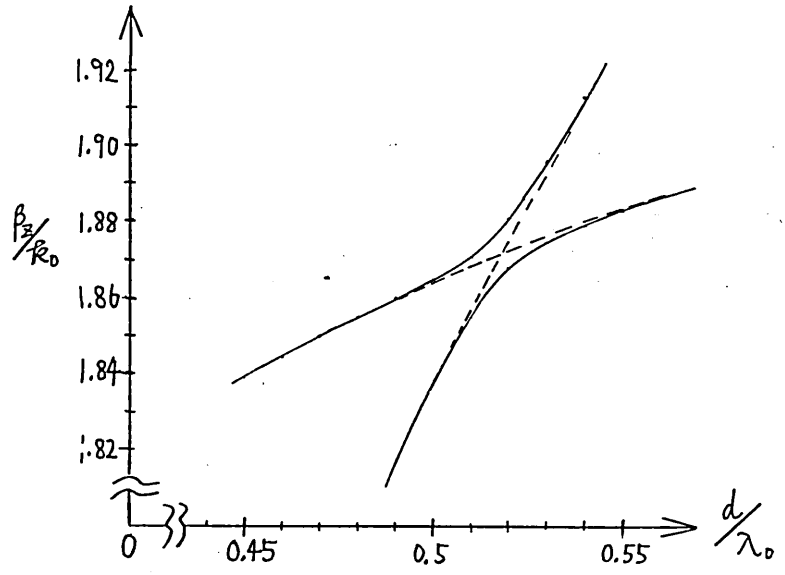


図 9. 図 7 の α 付近の拡大図

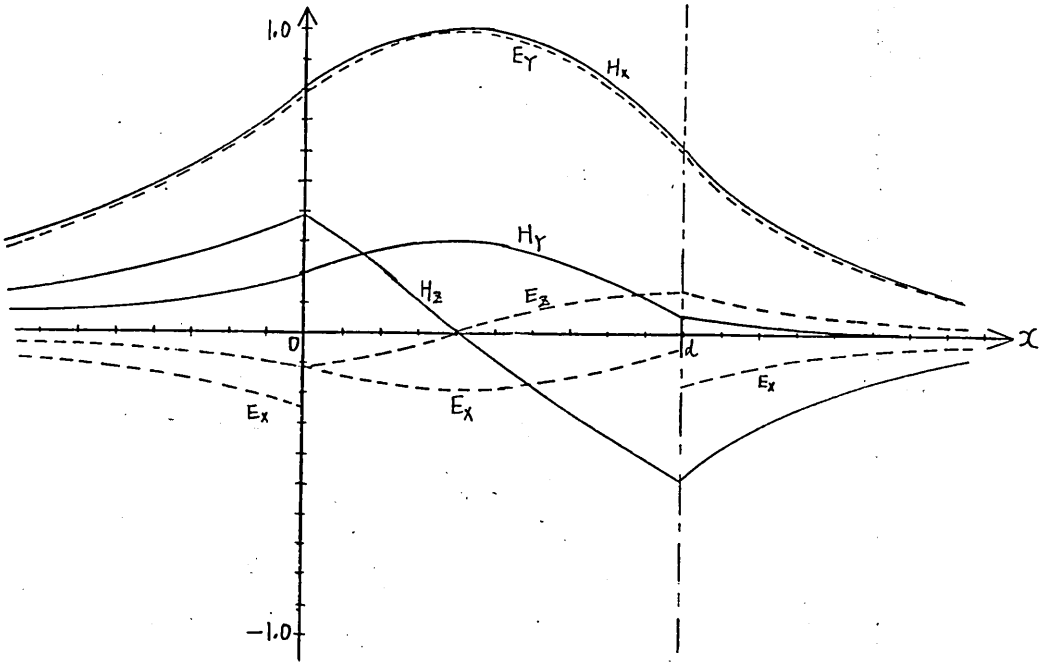


図10. a点における電磁界分布

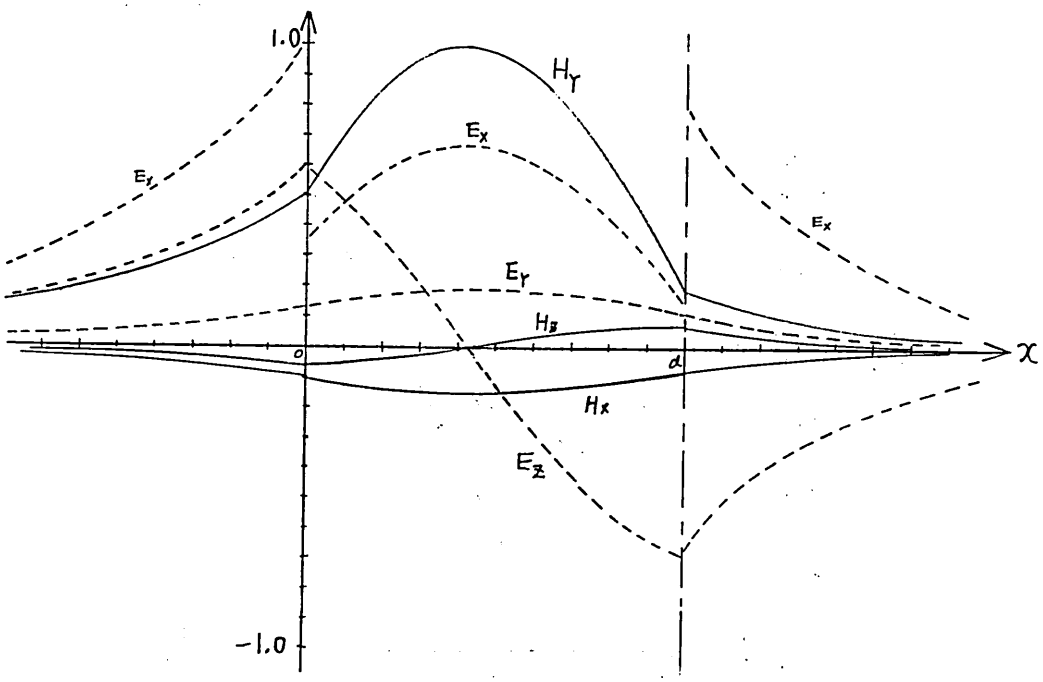


図11. b点における電磁界分布

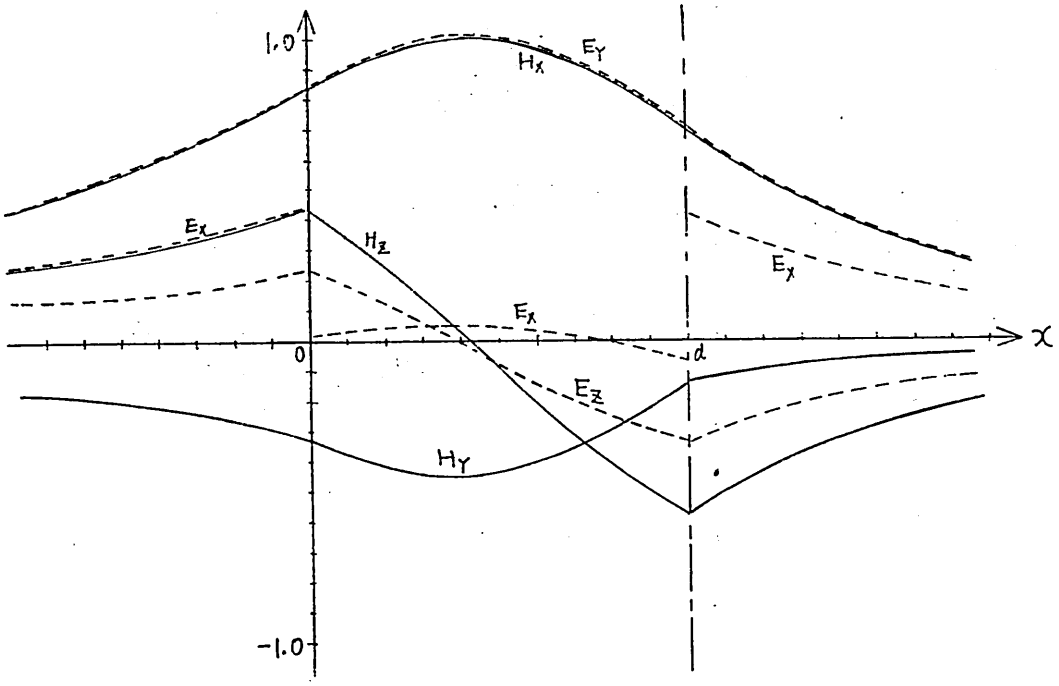


図 12.　C 点における電磁界分布

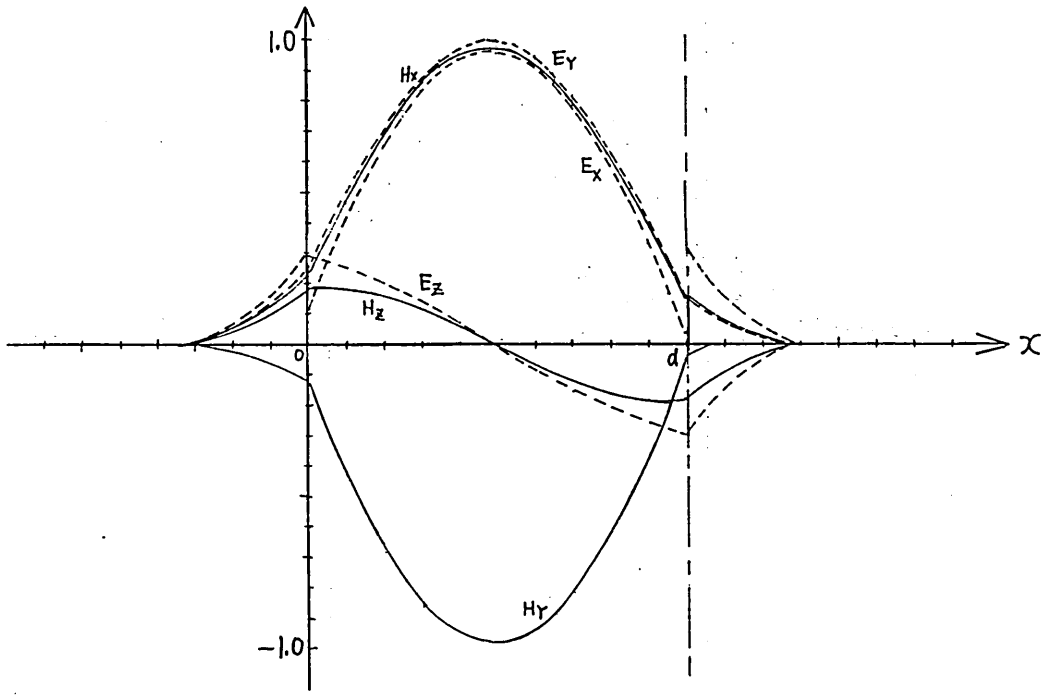


図 13.　d 点における電磁界分布

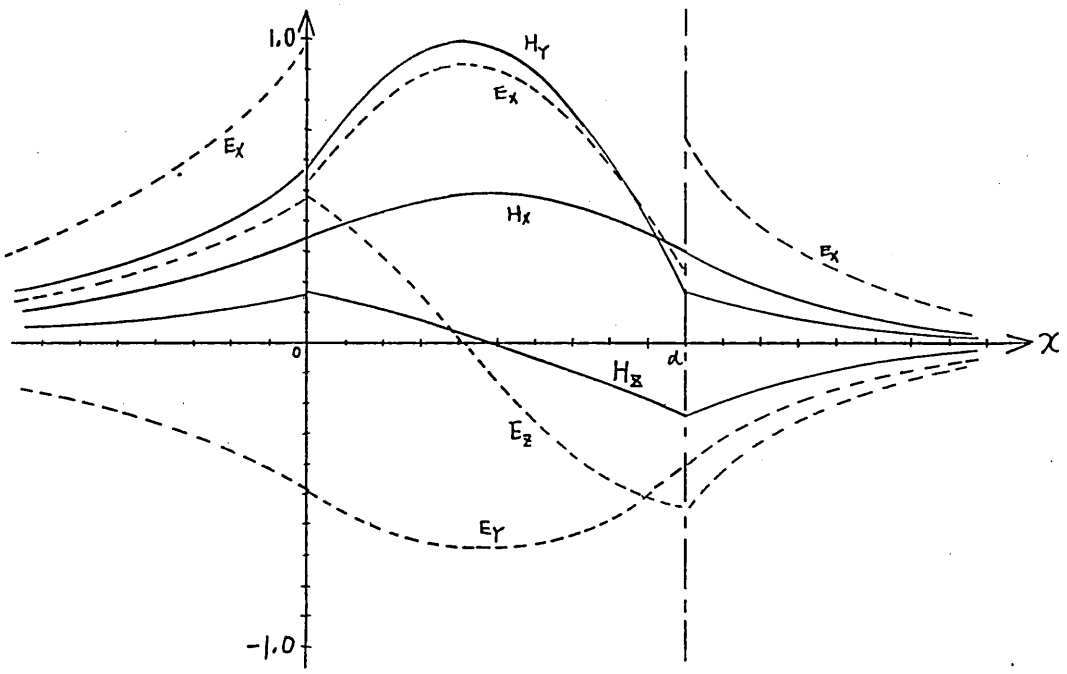


図 14.　e 点における電磁界分布

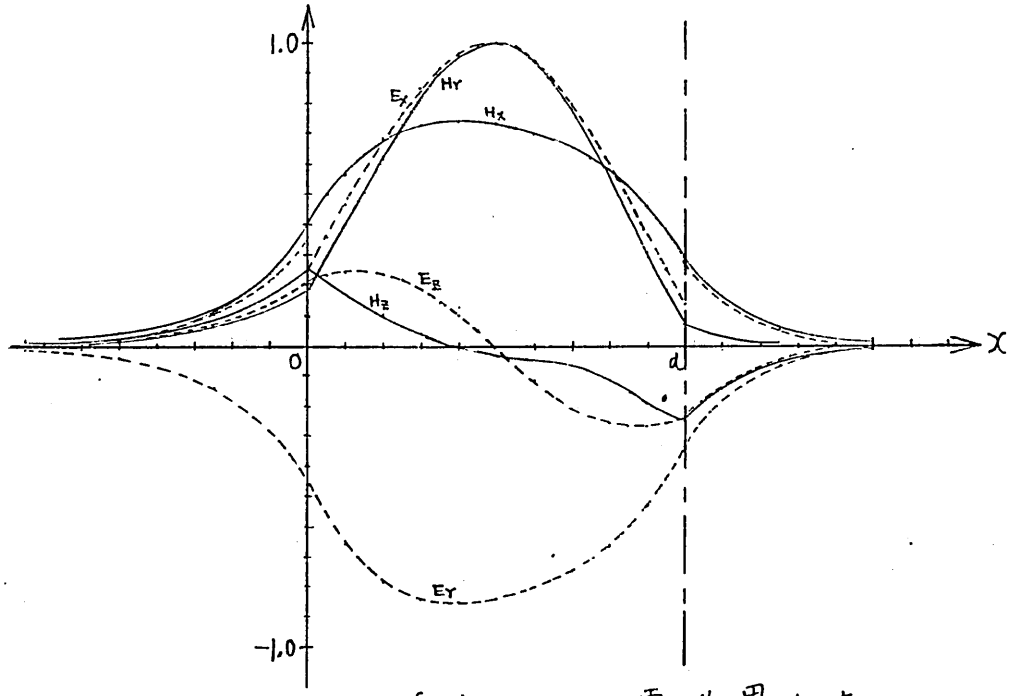


図 15.　f 点における電磁界分布

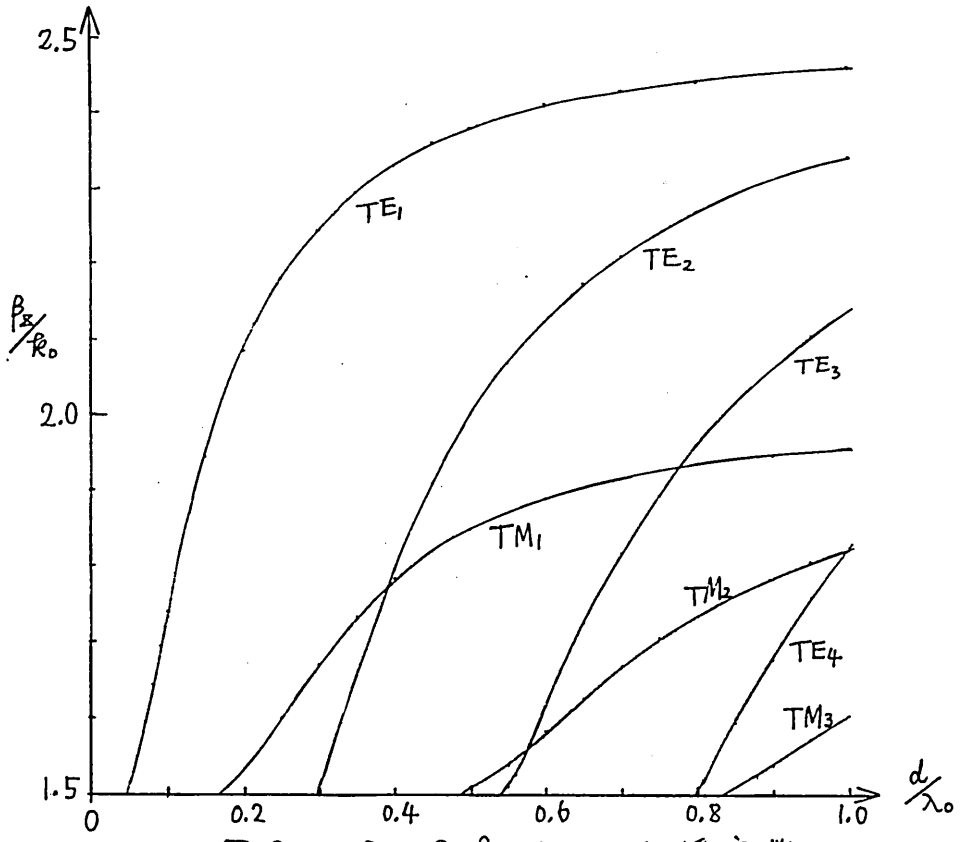


図 8.　θ = 90° における伝播定数 β_z

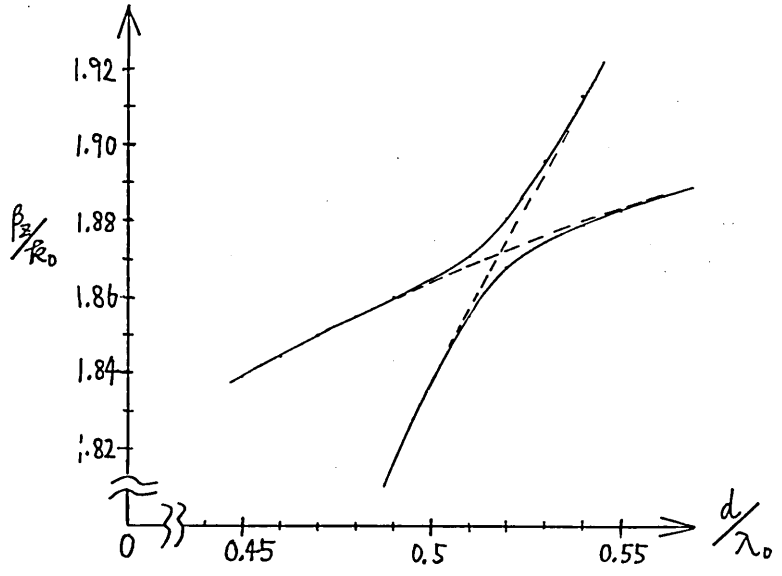


図 9.　図 7 の α 付近の拡大図

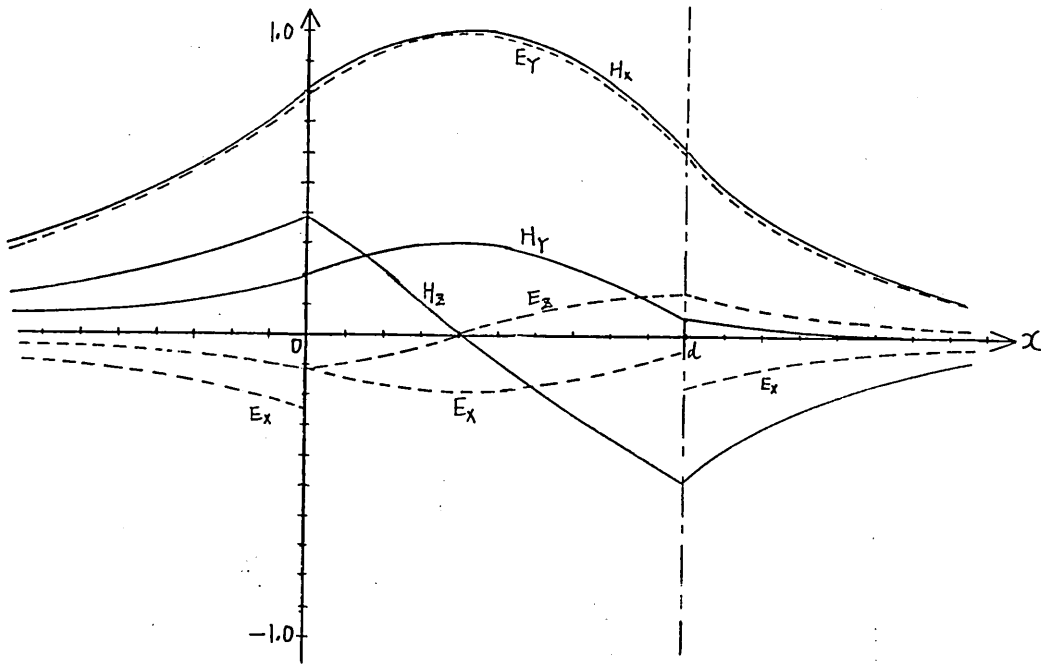


図10.　a 点における電磁界分布

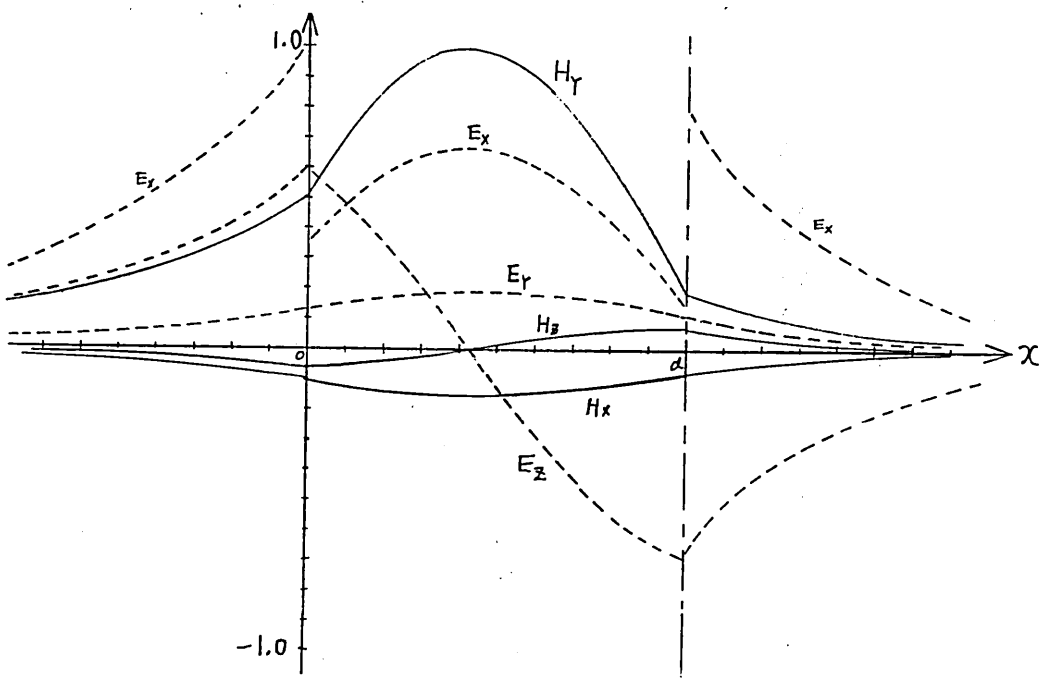


図11.　b 点における電磁界分布

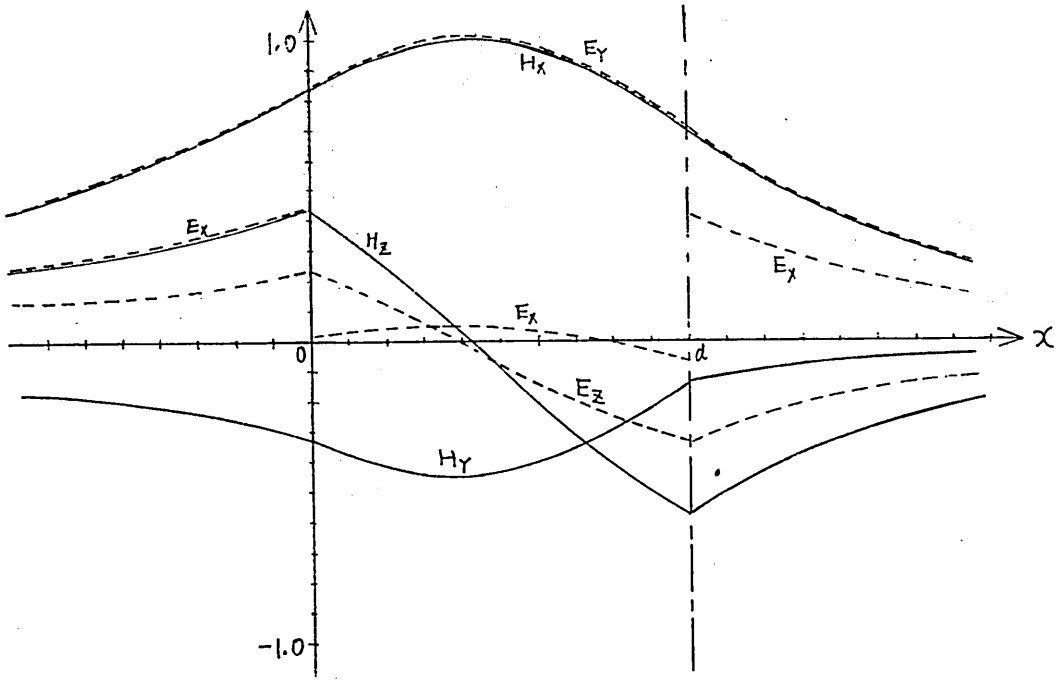


図 12.　C 点における電磁界分布

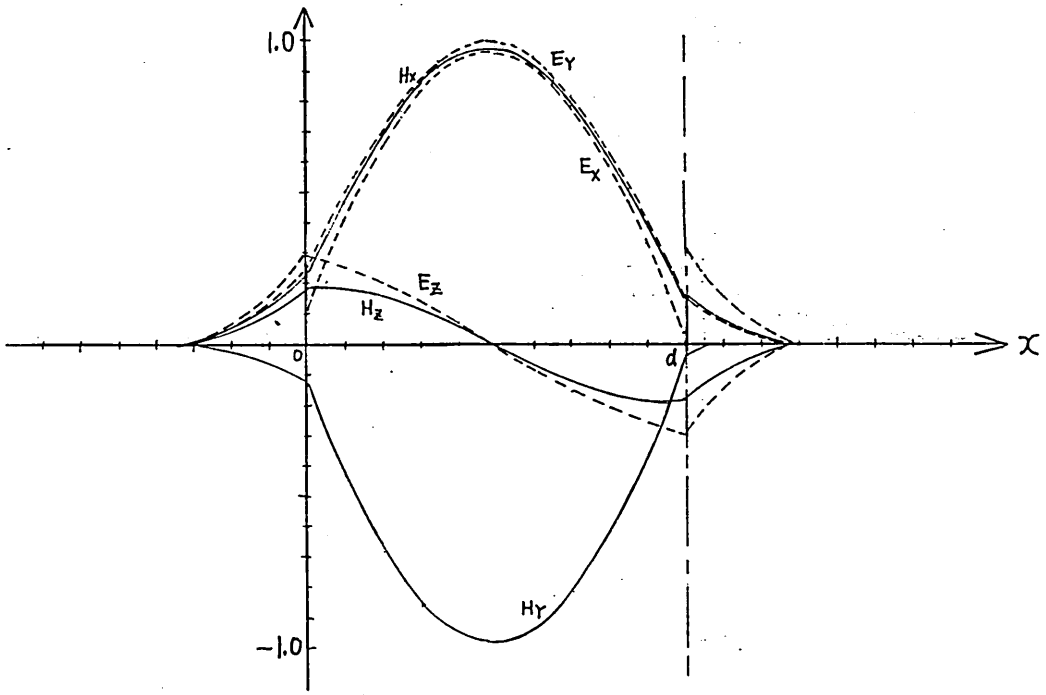


図 13.　d 点における電磁界分布

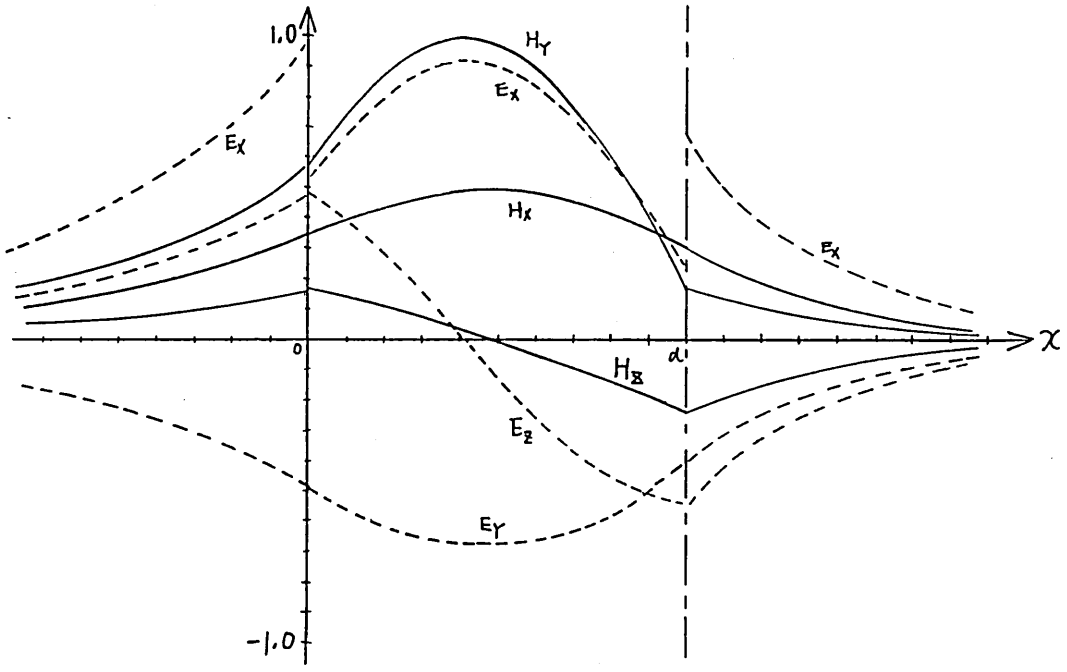


図 14.　e 点における電磁界分布

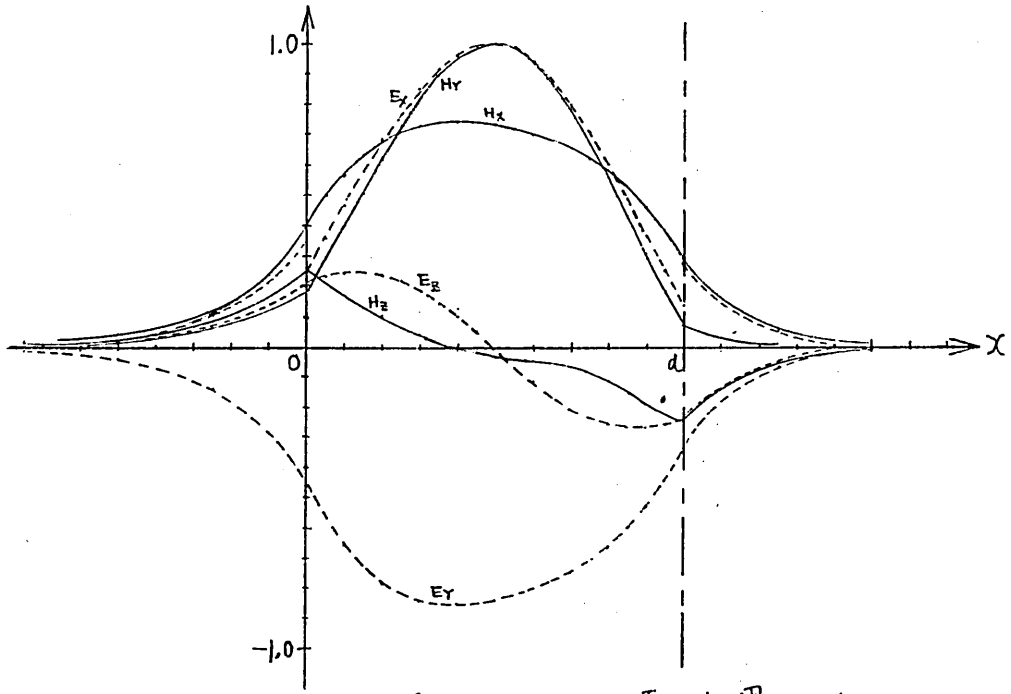


図 15.　f 点における電磁界分布

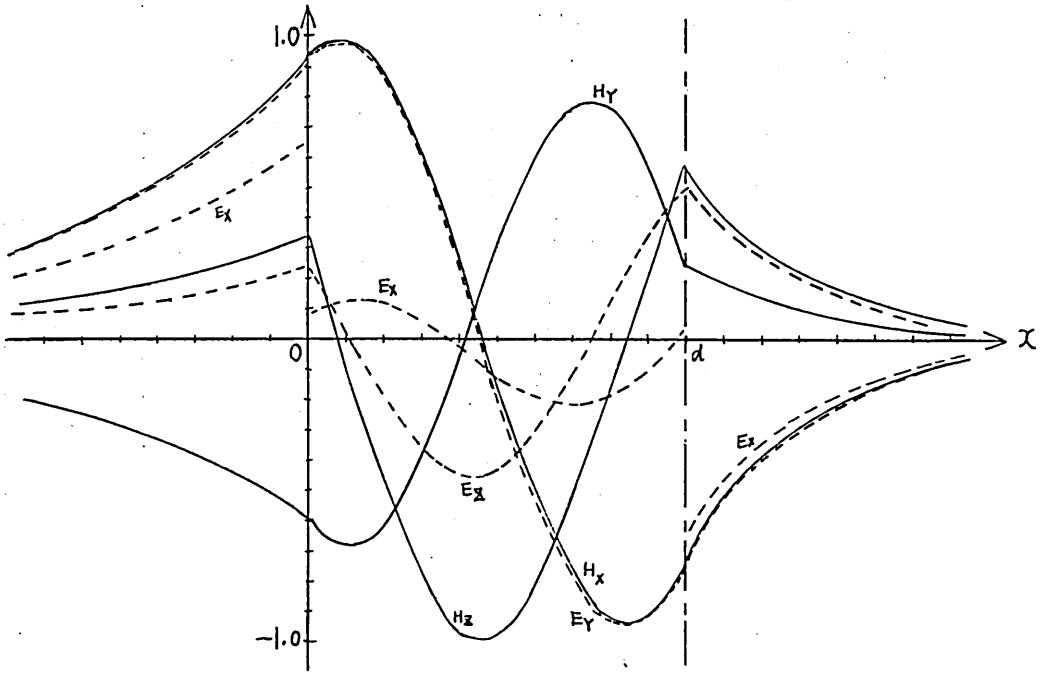


図16.　f点における電磁界分布

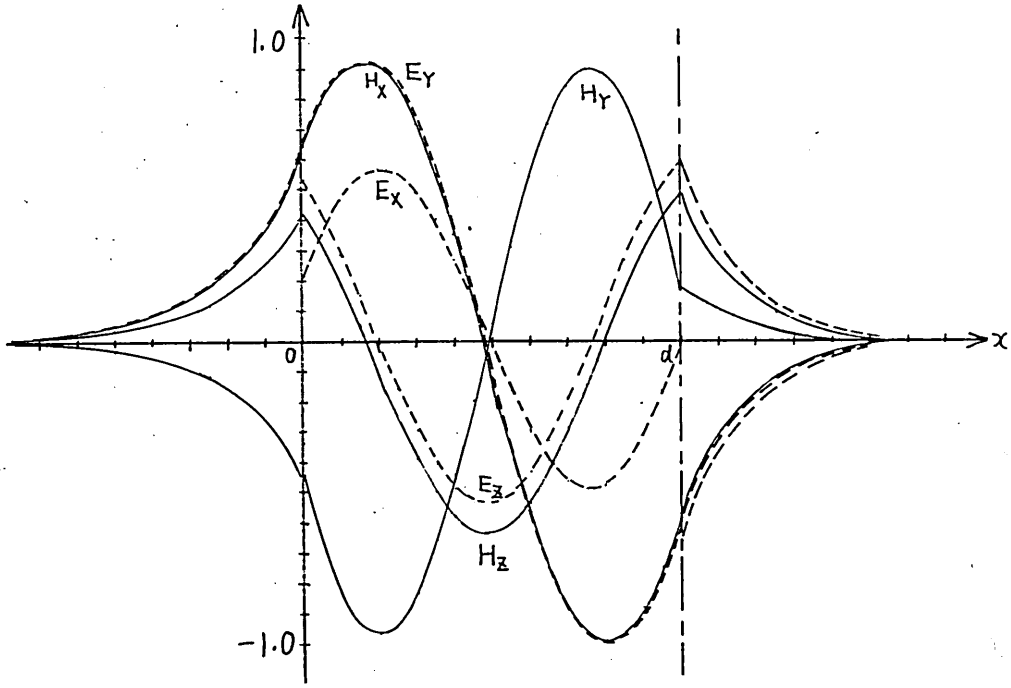


図17.　h点における電磁界分布

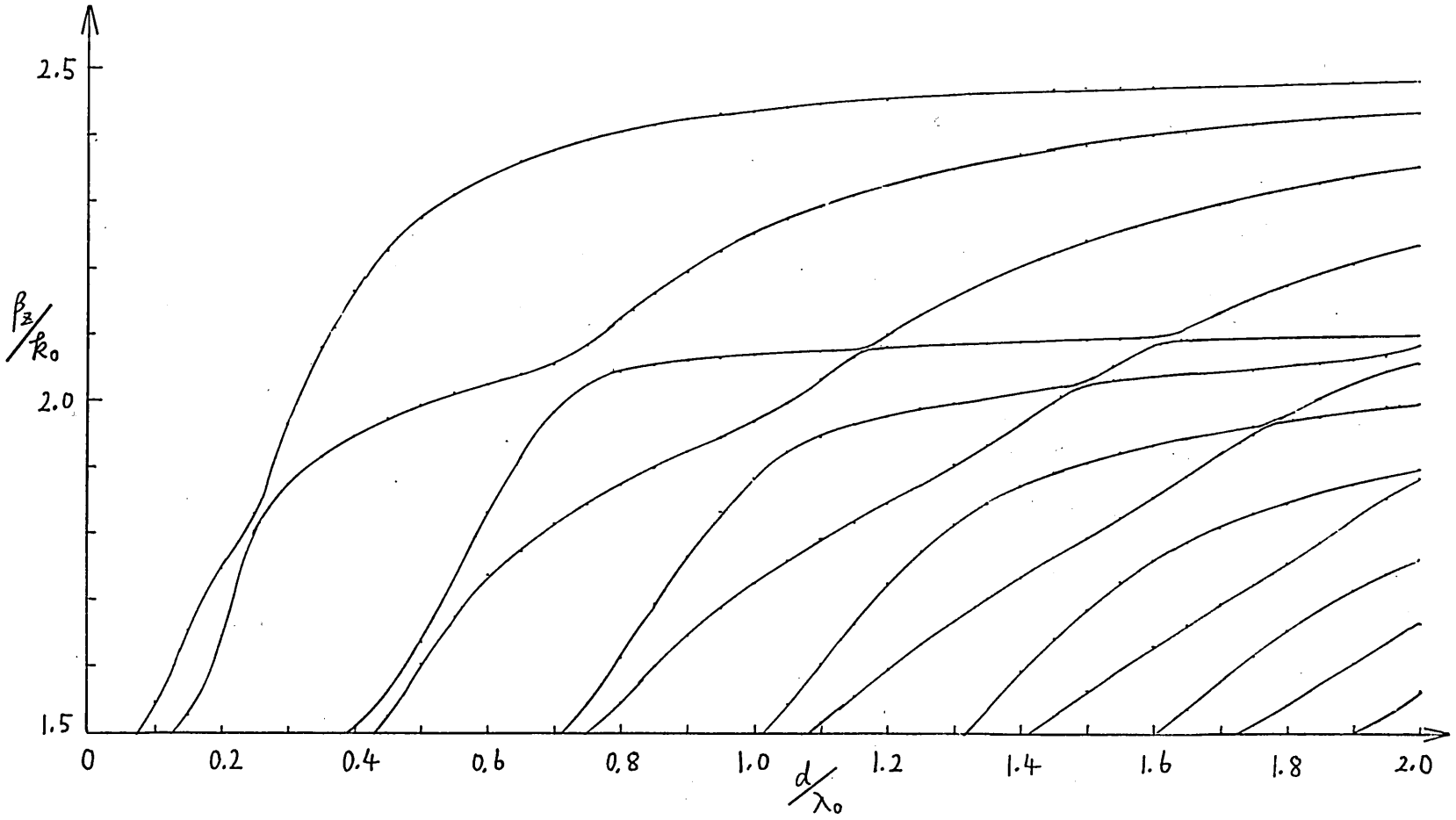


図 19. CASE I , $\theta = 45°$ における伝播定数 β_z

輻射科学研究会資料

レンズ状媒質線路における電磁波モードの解析

松　原　正　則
大　高　真　人
由　木　泰　紀
熊　谷　信　昭
（大阪大学・工学部）

１９７２年４月２８日

1. まえがき

ガラスを用いたレンズ状媒質光線路（いわゆるselfoc[1]は光伝送線路としてきわめて注目され，減衰量低減のための改善など続けられてすでに実用の域に近づいている．いっぽう，理論的検討に関しては，電磁波モードの厳密な解析が困難であるために，従来はもっぱらＴＥＭ波近似によって行なわれている[2]．さらに，この解析結果にもとづいてレンズ状媒質からなる線路の種々の性質の検討（たとえば蛇行波の検討など）が行なわれている．しかしながら，本報告で述べるように，ＴＥＭ波近似による解析は誘電率の勾配を省略するために正しい結果を導かないことがある．

最近，末松等[3]は摂動理論を用いてＴＥＭ波近似からの摂動としてレンズ状媒質線路のより正確な解析を試み，また，大高等[4]は変分法を用いて解析を行なっている．しかし，線路の中心軸に関して誘電率分布の軸対称性が充分に高い場合，すなわち縮退モードの場合には文献（3），（4）の解析はいずれも適用しがたい．

本報告は電磁界を直交関数展開（ここではエルミート・ガウス関数展開）で表示する方法を用いて，レンズ状媒質に沿う電磁波モードの厳密でかつ一般的な解析を行なっている．この手法を用いることにより連立偏微分方程式（ベクトル波動方程式）を連立１次方程式に帰着させることができる．これは代数的固有値問題であり解析ははるかに容易になる．

2. 電磁界のエルミート・ガウス関数による展開

誘電率 ε が位置に関係し透磁率 μ が位置に関係しない等方線形媒質中において，電界 $\mathbf{E}$ はつぎの波動方程式により与えられる[5]

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right) + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} = 0 \qquad (1)$$

ここでωは角周波数である．

線路の軸方向をz，横方向をx，yとする直角座標系を採用し，εはzには関係しない，すなわち$\partial \varepsilon / \partial z = 0$であるとし，また，波の$z$方向への伝ぱん定数が$\beta$である，すなわち$\partial \mathbf{E} / \partial z = -j\beta \mathbf{E}$であるとして，式(1)を各座標成分に分解するとつぎのようになる．

$$\nabla_t^2 E_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} E_x + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} E_y \right) + (\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2) E_x = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla_t^2 E_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} E_x + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} E_y \right) + (\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2) E_y = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla_t^2 E_z - j\beta \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} E_x + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} E_y \right) + (\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2) E_z = 0 \qquad (4)$$

ただし

$$\mathbf{E} = (\mathbf{i} E_x + \mathbf{j} E_y + \mathbf{k} E_z) e^{-j\beta z} \qquad (5)$$

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (6)$$

である．

式(2)，(3)はE_x，E_yに関して連立方程式になっている．これらよりE_x，E_yを求め，それを式(4)に代入すればE_zを知ることができる．

さて，誘電率εが次式で与えられるようなレンズ状媒質を考えることにする．

$$\varepsilon = \varepsilon(0)\{1 - k(0)^2(g_x^2 x^2 + g_y^2 y^2)$$

$$+ k(0)^4(H_{xx} g_x^4 x^4 + 2H_{xy} g_x^2 g_y^2 x^2 y^2 + H_{yy} g_y^4 y^4)\} \qquad (7)$$

ここで，$\varepsilon(0)$は線路の中心軸における誘電率であり，g_x，g_y，H_{xx}，H_{xy}，H_{yy}は誘電率分布の変化の程度をあらわす定数である．また，$k(0)^2 = \omega^2 \varepsilon(0)\mu$である．このようなレンズ状媒質に沿う電磁波モードのＴＥＭ波近似解がエルミート・ガウス関数で与えられることを考慮して，次式に示すように，E_x，E_y，E_zをエルミート・ガウス関数の和であらわすことにする．これはエルミート・ガウス関数が完全直交系であることにより保証される．

$$E_x = \sum_{pq} e_{xpq} U_{pq} \qquad (8)$$

$$E_y = \sum_{pq} e_{ypq} U_{pq} \qquad (9)$$

$$E_z = \sum_{pq} e_{zpq} U_{pq} \qquad (10)$$

ここで，U_{pq}は次式であらわされる正規化エルミート・ガウス関数であり，e_{xpq}，e_{ypq}，e_{zpq}は展開係数である．

$$U_{pq} = \frac{k(0)(g_x g_y)^{\frac{1}{4}}}{(\pi p! q!)^{\frac{1}{2}}} H_p\{(2g_x)^{\frac{1}{2}} k(0) x\} H_q\{(2g_y)^{\frac{1}{2}} k(0) y\}$$

$$\times \exp\{-\frac{k(0)^2}{2}(g_x x^2 + g_y y^2)\} \qquad (11)^*$$

---

* ここで

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \left\{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right\}$$

である

また，U_{pq} はつぎの漸化式を満足する．

$$(2g_x)^{\frac{1}{2}} k(0) x U_{pq} = \sqrt{p+1}\ \ U_{(p+1)q} + \sqrt{p}\ \ U_{(p-1)q} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{(2g_x)^{\frac{1}{2}} k(0)} \frac{\partial U_{pq}}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sqrt{p+1}\ \ U_{(p+1)q} + \frac{1}{2}\sqrt{p}\ U_{(p-1)q} \qquad (13)$$

式（２）に式（７），（８），（９）を代入し，式（１２），（１３）の関係を用いて整理し，U_{pq} にかかる係数を零とおいて次式が得られる．

$$\left(\left[\frac{\beta(0)_{pq}^{\ 2}}{k(0)^2} - \{g_x^{\ 2} - \frac{3}{4}(2p^2+2p+1)H_{xx}g_x^{\ 2} - \frac{1}{2}(2p+1)(2q+1)H_{xy}g_xg_y\right.\right.$$

$$-\frac{3}{4}(2q^2+2q+1)H_{yy}g_y^{\ 2}\} - \{\frac{3}{2}(2p+1)g_x^3 + \frac{1}{2}(2q+1)g_x^2g_y - 3(2p+1)H_{xx}g_x^3$$

$$\left.\left. -(2q+1)H_{xy}g_x^{\ 2}g_y\}\right] - \frac{\beta^2}{k(0)^2}\right) e_{xpq} - \sqrt{(p+1)(p+2)}\{g_x^{\ 2} - \frac{1}{2}(2p+3)H_{xx}g_x^{\ 2}$$

$$-\frac{1}{2}(2q+1)H_{xy}g_xg_y\}e_{x(p+2)q} + \sqrt{(p-1)p}\ \{g_x^{\ 2} + \frac{1}{2}(2p-1)H_{xx}g_x^{\ 2} + \frac{1}{2}(2q+1)$$

$$\times H_{xy}g_xg_y\}e_{x(p-2)q} + \sqrt{(q+1)(q+2)}\ \{\frac{1}{2}(2p+1)H_{xy}g_xg_y + \frac{1}{2}(2q+3)H_{yy}g_y^{\ 2}\}$$

$$\times e_{xp(q+2)} + \sqrt{(q-1)q}\ \{\frac{1}{2}(2p+1)H_{xy}g_xg_y + \frac{1}{2}(2q-1)H_{yy}g_y^{\ 2}\}e_{xp(q-2)}$$

$$+\sqrt{(p+1)(p+2)(q-1)q}\,\frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y e_{x(p+2)(q-2)} + \sqrt{(p-1)p(q+1)(q+2)}$$

$$\times\frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y\,e_{x(p-2)(q+2)}+\sqrt{(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)}\,\frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y\,e_{x(p+2)(q+2)}$$

$$+\sqrt{(p-1)p(q-1)q}\,\frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y\,e_{x(p-2)(q-2)}+\sqrt{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$$

$$\times\frac{1}{4}H_{xx}g_x{}^2e_{x(p+4)q}+\sqrt{(p-3)(p-2)(p-1)p}\,\frac{1}{4}H_{xx}g_x{}^2e_{x(p-4)q}$$

$$+\sqrt{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)}\,\frac{1}{4}H_{yy}g_y{}^2e_{xp(q+4)}+\sqrt{(q-3)(q-2)(q-1)q}$$

$$\times\frac{1}{4}H_{yy}g_y{}^2e_{xp(q-4)}-\sqrt{(p+1)(q+1)}\left(\frac{g_x}{g_y}\right)^{\frac{1}{2}}g_y{}^2e_{y(p+1)(q+1)}-\sqrt{(p+1)q}\left(\frac{g_x}{g_y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times g_y{}^2e_{y(p+1)(q-1)}+\sqrt{p(q+1)}\left(\frac{g_x}{g_y}\right)^{\frac{1}{2}}g_y{}^2e_{y(p-1)(q+1)}+\sqrt{pq}\left(\frac{g_x}{g_y}\right)^{\frac{1}{2}}g_y{}^2e_{y(p-1)(q-1)}$$

$$=\ 0 \qquad (14)$$

同様に式（３）より次式が得られる．

$$\left(\left[\frac{\beta(0)_{pq}{}^2}{k(0)^2}-\{g_y{}^2-\frac{3}{4}(2p^2+2p+1)H_{xx}g_x{}^2-\frac{1}{2}(2p+1)(2q+1)H_{xy}g_xg_y\right.\right.$$

$$-\frac{3}{4}(2q^2+2q+1)H_{yy}g_y{}^2\}-\{\frac{1}{2}(2p+1)g_xg_y{}^2+\frac{3}{2}(2q+1)g_y{}^3-(2p+1)H_{xy}g_xg_y{}^2$$

$$\left.\left.-3(2q+1)H_{yy}g_y{}^3\}\right]-\frac{\beta^2}{k(0)^2}\right)e_{ypq}-\sqrt{(q+1)(q+2)}\,\{g_y{}^2-\frac{1}{2}(2p+1)H_{xy}g_xg_y$$

$$-\frac{1}{2}(2q+3)H_{yy}g_y^{\,2}\}\,e_{yp(q+2)}+\sqrt{(q-1)\,q}\,\{g_y^{\,2}+\frac{1}{2}(2p+1)H_{xy}g_xg_y+\frac{1}{2}(2q-1)$$

$$\times H_{yy}g_y^{\,2}\}\,e_{yp(q-2)}+\sqrt{(p+1)(p+2)}\,\{\frac{1}{2}(2p+3)H_{xx}g_x^{\,2}+\frac{1}{2}(2q+1)H_{xy}g_xg_y\}$$

$$\times e_{y(p+2)q}+\sqrt{(p-1)\,p}\,\{\frac{1}{2}(2p-1)H_{xx}g_x^{\,2}+\frac{1}{2}(2q+1)H_{xy}g_xg_y\}\,e_{y(p-2)q}$$

$$+\sqrt{(p-1)\,p(q+1)(q+2)}\;\frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y\,e_{y(p-2)(q+2)}+\sqrt{(p+1)(p+2)(q-1)\,q}$$

$$\times\frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y\,e_{y(p+2)(q-2)}+\sqrt{(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)}\;\frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y\,e_{y(p+2)(q+2)}$$

$$+\sqrt{(p-1)\,p(q-1)\,q}\;\frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y\,e_{y(p-2)(q-2)}+\sqrt{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)}$$

$$\times\frac{1}{4}H_{yy}g_y^{\,2}e_{yp(q+4)}+\sqrt{(q-3)(q-2)(q-1)\,q}\;\frac{1}{4}H_{yy}g_y^{\,2}e_{yp(q-4)}$$

$$+\sqrt{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}\;\frac{1}{4}H_{xx}g_x^{\,2}e_{y(p+4)q}+\sqrt{(p-3)(p-2)(p-1)\,p}$$

$$\times\frac{1}{4}H_{xx}g_x^{\,2}e_{y(p-4)q}-\sqrt{(p+1)(q+1)}\;\left(\frac{g_y}{g_x}\right)^{\frac{1}{2}}g_x^{\,2}e_{x(p+1)(q+1)}-\sqrt{p(q+1)}\;\left(\frac{g_y}{g_x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times g_x^{\,2}e_{x(p-1)(q+1)}+\sqrt{(p+1)\,q}\left(\frac{g_y}{g_x}\right)^{\frac{1}{2}}g_x^{\,2}e_{x(p+1)(q-1)}+\sqrt{p\,q}\left(\frac{g_y}{g_x}\right)^{\frac{1}{2}}g_x^{\,2}e_{x(p-1)(q-1)}=0$$

(15)

ここで，p，qは零または正の任意の整数である．また

$$\beta(0)_{pq}{}^2=k(0)^2\{1-\{(2p+1)g_x+(2q+1)g_y\}\} \qquad (16)$$

である．これはＴＥＭ波近似で得られるpqモードの伝ぱん定数に相当する．式（１４），（１５）は展開係数e_{xpq}，e_{ypq}の間の関係を与える連立１次方程式であり，いわゆる固有方程式になっている*．この固有方程式を解くことにより固有値β^2および固有ベクトル（すなわち，e_{xpq}，e_{ypq}の値）を求めることができる．このように，直交関数展開（８），（９）により連立偏微分方程式（２），（３）を固有方程式（１４），（１５）に帰着させることができた．E_zは式（１０）および式（１４），（１５）の解を式（４）に代入することにより，容易に知ることができる．

３　固有方程式の解

式（１４），（１５）の固有方程式を一般的に解くことは困難である．本節においては，式（１４），（１５）から得られる無限個の固有値のうちで$\beta(0)_{mn}{}^2$にもっとも近い固有値β^2とその固有値に対応する固有ベクトルを求めることにする．

式（１６）より

$$\beta(0)_{pq}{}^2-\beta(0)_{mn}{}^2=2k(0)^2\{\{(m+n)-(p+q)\}g+\{(m-n)-(p-q)\}g\delta\} \qquad (17)$$

---

* 正しくは式（１４），（１５）から固有方程式が導かれるのであり，式（14），（１５）は固有方程式そのものではない．ここであつかう固有値問題は代数的固有値問題である．

となる．ここで

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{g_x + g_y}{2} \\ \delta &= \frac{g_x - g_y}{g_x + g_y} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

である．したがって，$p+q \neq m+n$ の場合には

$$|\beta(0)_{pq}{}^2 - \beta(0)_{mn}{}^2| > k(0)^2 g^2 \tag{19}$$

となる．この関係を考慮すると，式（１４），（１５）の固有方程式をつぎのように近似することができる．

$$\left[\frac{\beta(0)_{rs}{}^2}{k(0)^2} - \{g_x{}^2 - \frac{3}{4}(2r^2+2r+1)H_{xx}g_x{}^2 - \frac{1}{2}(2r+1)(2s+1)H_{xy}g_xg_y \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4}(2s^2+2s+1)H_{yy}g_y{}^2\} - \frac{\beta^2}{k(0)^2}\right] e_{xrs} - g_y{}^2\left(\frac{g_x}{g_y}\right)^{\frac{1}{2}} \{\sqrt{(r+1)s}\ e_{y(r+1)(s-1)}$$

$$- \sqrt{r(s+1)}\ e_{y(r-1)(s+1)}\} + \frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y\{\sqrt{(r+1)(r+2)(s-1)s}\ e_{x(r+2)(s-2)}$$

$$+ \sqrt{(r-1)r(s+1)(s+2)}\ e_{x(r-2)(s+2)}\} = 0 \tag{20}$$

$$\left[\frac{\beta(0)_{rs}{}^2}{k(0)^2} - \{g_y{}^2 - \frac{3}{4}(2r^2+2r+1)H_{xx}g_x{}^2 - \frac{1}{2}(2r+1)(2s+1)H_{xy}g_xg_y \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4}(2s^2+2s+1)H_{yy}g_y{}^2\} - \frac{\beta^2}{k(0)^2}\right] e_{yrs} - g_x{}^2\left(\frac{g_y}{g_x}\right)^{\frac{1}{2}} \{\sqrt{r(s+1)}\ e_{x(r-1)(s+1)}$$

$$-\sqrt{(r+1)s}\ e_{x(r+1)(s-1)}\}+\frac{1}{2}H_{xy}g_xg_y\{\sqrt{(r-1)r(s+1)(s+2)}\ e_{y(r-2)(s+2)}$$

$$+\sqrt{(r+1)(r+2)(s-1)s}\ e_{y(r+2)(s-2)}\}=0 \qquad (21)$$

ただし，r，sは $r+s=m+n$ を満足する零または正の任意の整数である．

$|\delta| \gg g$ または $|\delta| \ll g$ の場合には，以下に示すように式(20),(21)をさらに簡単にすることができるが，それ以外の場合には式（２０），（２１）をこれ以上簡単化することはできず，その解を解析的に簡単な形で表示することはできない．しかし，その場合でも式（２０），（２１）から数値計算により解を求めることは容易である．さらに精度のよい解を得るには式（１４），（１５）を用いればよいのはもちろんである．

３．１　$|\delta| \gg g$ の場合

この場合には式（１７）からわかるように，$r'+s'=m+n$ であるにもかかわらず

$$|\beta(0)_{r's'}{}^2-\beta(0)_{mn}{}^2| \gg k(0)^2g^2 \qquad (22)$$

となる．ただし，$r' \neq m$，$s' \neq n$ である．

したがって，式（２０），（２１）より固有値および固有ベクトルとして次の２つの場合が得られる．

$$\left.\begin{aligned}&\beta^2=\beta(0)_{mn}{}^2-k(0)^2\{g_x{}^2-\frac{3}{4}(2m^2+2m+1)H_{xx}g_x{}^2\\&-\frac{1}{2}(2m+1)(2n+1)H_{xy}g_xg_y-\frac{3}{4}(2n^2+2n+1)H_{yy}g_y{}^2\}\\&e_{xmn} \neq 0，\text{その他の展開係数はすべて零}\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

$$\beta^2=\beta(0)_{mn}{}^2-k(0)^2\{g_y{}^2-\frac{3}{4}(2m^2+2m+1)H_{xx}g_x{}^2$$

$$-\frac{1}{2}(2m+1)(2n+1)H_{xy}g_xg_y-\frac{3}{4}(2n^2+2n+1)H_{yy}g_y{}^2\}$$

$e_{ymn}\neq 0$，その他の展開係数はすべて零 (24)

式（２３），（２４）で与えられる解は，伝ぱん定数の精度が良くなった点を除けば，ＴＥＭ波近似で得られる従来の解と同じであり，ＴＥＭ波近似の解が近似的に正しいことがわかる．なお，$|\delta|\gg g$ の場合におけるより精度の高い解を第４節で示す．

３．２　$|\delta|\ll g$の場合

この場合には式（１７）より

$$|\beta(0)_{r's'}{}^2-\beta(0)_{mn}{}^2|\ll k(0)^2g^2 \tag{25}$$

となる．したがって，式（２０），（２１）の固有方程式をつぎのように近似することができる．

$$[\beta(0)_{(t)}{}^2-k(0)^2g^2\{1-\frac{3}{4}(2r^2+2r+1)H_{xx}-\frac{1}{2}(2r+1)(2s+1)H_{xy}$$

$$-\frac{3}{4}(2s^2+2s+1)H_{yy}\}-\beta^2]e_{xrs}-k(0)^2g^2[\{\sqrt{(r+1)s}\ e_{y(r+1)(s-1)}$$

$$-\sqrt{r(s+1)}\,e_{y(r-1)(s+1)}\}-\frac{1}{2}H_{xy}\{\sqrt{(r+1)(r+2)(s-1)s}\ e_{x(r+2)(s-2)}$$

$$+\sqrt{(r-1)r(s+1)(s+2)}\ e_{x(r-2)(s+2)}\}]=0 \tag{26}$$

$$\left[\beta(0)_{(t)}^{2}-k(0)^{2}g^{2}\left\{1-\frac{3}{4}(2r^{2}+2r+1)H_{xx}-\frac{1}{2}(2r+1)(2s+1)H_{xy}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3}{4}(2s^{2}+2s+1)H_{yy}\right\}-\beta^{2}\right]e_{yrs}-k(0)^{2}g^{2}\left[\left\{\sqrt{r(s+1)}\;e_{x(r-1)(s+1)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{(r+1)s}\;e_{x(r+1)(s-1)}\right\}-\frac{1}{2}H_{xy}\left\{\sqrt{(r-1)r(s+1)(s+2)}\;e_{y(r-2)(s+2)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{(r+1)(r+2)(s-1)s}\;e_{y(r+2)(s-2)}\right\}\right]=0 \qquad (27)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} &t=r+s\ (=m+n)\\ &\beta(0)_{(t)}^{2}=\beta(0)_{rs}^{2}\ (=\beta(0)_{mn}^{2}) \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

である．

式（２６），（２７）の固有方程式を解くことにより固有値および固有ベクトルを求めることができる．とくに，$H_{xx}=H_{yy}=H_{xy}=0$ の場合にはその解は簡単に求められ，固有値β^{2}はつぎのようになる．

$$\beta^{2}=\beta(0)_{(t)}^{2}-(t+3-2u)\,k(0)^{2}g^{2} \qquad (29)$$

ここで

$$u=1,2,3,\cdots\cdots,t,t+1$$

である．式（２９）で与えられる固有値β^{2}を式（２６），（２７）に代入し，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めることができる．

たとえば，$t=1$の場合には固有値および固有ベクトルとして次の４つの場合が得られる．

$$\left.\begin{aligned}&\beta^2=\beta(0)_{(1)}{}^2\\&e_{y10}=-e_{x01}\text{，その他の展開係数はすべて零}\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

$$\left.\begin{aligned}&\beta^2=\beta(0)_{(1)}{}^2\\&e_{x10}=e_{y01}\text{，その他の展開係数はすべて零}\end{aligned}\right\}\qquad(32)$$

$$\left.\begin{aligned}&\beta^2=\beta(0)_{(1)}{}^2-2k(0)^2g^2\\&e_{x01}=e_{y10}\text{，その他の展開係数はすべて零}\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

$$\left.\begin{aligned}&\beta^2=\beta(0)_{(1)}{}^2-2k(0)^2g^2\\&e_{y01}=-e_{x10}\text{，その他の展開係数はすべて零}\end{aligned}\right\}\qquad(34)$$

このようにレンズ状媒質からなる線路の固有モードは，$|\delta|\ll g$の場合，すなわち，線路の中心軸に関して誘電率分布の軸対称性が充分に高い場合には，同じ程度の大きさのxおよびy方向の電界成分を持ち，ＴＥＭ波近似の解析から得られるような直線偏波的な固有モードとはなっていないことを示しており，この意味において従来のＴＥＭ波近似の解析は正しくない．本節の結果はE_xとE_yとが式（１）であらわされるように$\nabla\varepsilon$を介して結合していることを考慮すれば充分に正当なものである．

4　$|\delta| \gg g$ の場合の精度の高い解

ここでは式（２３）で与えられるモードの場合について，より詳細な解を求めることにする．$p \neq m$，$q \neq n$ として，

$$\beta(0)_{pq}^{\ 2}-\beta^2 \cong \beta(0)_{pq}^{\ 2}-\beta(0)_{mn}^{\ 2}=2k(0)^2\{(m-p)g_x+(n-q)g_y\} \quad (35)$$

と近似することができるから，これを式（１４），（１５）に適用すると容易に次式に示す固有ベクトルおよび固有値を得ることができる．

$$e_{xmn} \neq 0$$

$$e_{x(m+2)n}=\frac{1}{4}\sqrt{(m+1)(m+2)}\ \{g_x+\frac{1}{2}(2m+3)H_{xx}g_x+\frac{1}{2}(2n+1)\times H_{xy}g_y\}\ e_{xmn}$$

$$e_{x(m-2)n}=\frac{1}{4}\sqrt{(m-1)m}\ \{g_x-\frac{1}{2}(2m-1)H_{xx}g_x-\frac{1}{2}(2n+1)H_{xy}g_y\}\times e_{xmn}$$

$$e_{xm(n+2)}=\frac{1}{4}\sqrt{(n+1)(n+2)}\ \{\frac{1}{2}(2m+1)H_{xy}g_x+\frac{1}{2}(2n+3)H_{yy}g_y\}\times e_{xmn}$$

$$e_{xm(n-2)}=-\frac{1}{4}\sqrt{(n-1)n}\{\frac{1}{2}(2m+1)H_{xy}g_x+\frac{1}{2}(2n-1)H_{yy}g_y\}e_{xmn}$$

$$e_{x(m+2)(n-2)}=\frac{1}{8}\sqrt{(m+1)(m+2)(n-1)n}\,\frac{H_{xy}g_y}{1-g_y/g_x}\,e_{xmn}$$

$$e_{x(m-2)(n+2)}=-\frac{1}{8}\sqrt{(m-1)m(n+1)(n+2)}\,\frac{H_{xy}g_y}{1-g_y/g_x}\,e_{xmn}$$

$$e_{x(m+2)(n+2)}=\frac{1}{8}\sqrt{(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)}\,\frac{H_{xy}g_y}{1+g_y/g_x}\,e_{xmn}$$

$$e_{x(m-2)(n-2)}=-\frac{1}{8}\sqrt{(m-1)m(n-1)n}\,\frac{H_{xy}g_y}{1+g_y/g_x}\,e_{xmn}$$ (36)

$$e_{x(m+4)n}=\frac{1}{32}\sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\,H_{xx}g_x e_{xmn}$$

$$e_{x(m-4)n}=-\frac{1}{32}\sqrt{(m-3)(m-2)(m-1)m}\,H_{xx}g_x e_{xmn}$$

$$e_{xm(n+4)}=\frac{1}{32}\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\,H_{yy}g_y e_{xmn}$$

$$e_{xm(n-4)}=-\frac{1}{32}\sqrt{(n-3)(n-2)(n-1)n}\,H_{yy}g_y e_{xmn}$$

$$e_{y(m+1)(n+1)}=\frac{1}{4}\sqrt{(m+1)(n+1)}\,\frac{2\sqrt{g_y/g_x}}{1+g_y/g_x}\,g_x e_{xmn}$$

$$e_{y(m+1)(n-1)}=-\frac{1}{4}\sqrt{(m+1)n}\,\frac{2\sqrt{g_y/g_x}}{1-g_y/g_x}\,g_x e_{xmn}$$

$$e_{y(m-1)(n+1)} = -\frac{1}{4}\sqrt{m(n+1)}\,\frac{2\sqrt{g_y/g_x}}{1-g_y/g_x}\,g_x\,e_{xmn}$$

$$e_{y(m-1)(n-1)} = \frac{1}{4}\sqrt{mn}\,\frac{2\sqrt{g_y/g_x}}{1+g_y/g_x}\,g_x\,e_{xmn}$$

その他の展開係数はすべて零

$$\beta^2=\beta(0)_{mn}{}^2-k(0)^2\left\{g_x{}^2-\frac{3}{4}(2m^2+2m+1)H_{xx}g_x{}^2-\frac{1}{2}(2m+1)(2n+1)H_{xy}g_xg_y\right.$$

$$\left.-\frac{3}{4}(2n^2+2n+1)H_{yy}g_y{}^2\right\}-k(0)^2\left\{2(2m+1)g_x{}^3+\frac{1}{2}(2n+1)g_x{}^2g_y\right.$$

$$+\frac{1}{2}(m+n+1)\frac{g_x{}^2g_y{}^2}{g_x+g_y}+\frac{1}{2}(m-n)\frac{g_x{}^2g_y{}^2}{g_x-g_y}-3(2m+1)H_{xx}g_x^3-(2n+1)H_{xy}g_x^2g_y$$

$$-\frac{1}{16}(34m^3+51m^2+59m+21)H_{xx}{}^2g_x{}^3-\frac{1}{16}(34n^3+51n^2+59n+21)H_{yy}{}^2g_y{}^3$$

$$-\frac{1}{8}\{6(2m^2+2m+1)H_{xx}+(2m+1)^2H_{xy}\}(2n+1)H_{xy}g_x{}^2g_y$$

$$-\frac{1}{8}\{6(2n^2+2n+1)H_{yy}+(2n+1)^2H_{xy}\}(2m+1)H_{xy}g_xg_y{}^2$$

$$-\frac{1}{16}\{(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)-(m-1)m(n-1)n\}H_{xy}{}^2\frac{g_x{}^2g_y{}^2}{g_x+g_y}$$

$$\left.-\frac{1}{16}\{(m+1)(m+2)(n-1)n-(m-1)m(n+1)(n+2)\}H_{xy}{}^2\frac{g_x{}^2g_y{}^2}{g_x-g_y}\right\}$$

(37)

また，E_z の展開係数は式（4）よりつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} e_{z(m+1)n} &= j\sqrt{\frac{g_x}{2}}\sqrt{m+1}\ e_{xmn} \\ e_{z(m-1)n} &= -j\sqrt{\frac{g_x}{2}}\sqrt{m}\ e_{xmn} \\ &\text{その他の展開係数はすべて零} \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

5 むすび

電磁界をエルミート・ガウス関数で展開する方法によりレンズ状媒質に関するベクトル波動方程式を厳密に解いた．その結果，誘電率分布が線路の中心軸にたいして軸対称分布に近い場合には，従来のＴＥＭ波近似の解析は正確でないことがわかった．

なお，本報告では誘電率分布が２乗分布からの“ずれ”としての４乗項を持つ場合をとりあつかったけれども，より一般的な“ずれ”を持った場合の解析も全く同様に行うことができる．

文　献

(1) T.Uchida, M.Furukawa, I.Kitano, K.Koizumi and M.Matsumura : “Optical Characteristics of a Light-Focusing Fiber Guide and Its Applications”, IEEE

Jour. Ouantum Electronics, **QE-6**, 10, p.606 (Oct. 1970)

(2) A.J.Marcatili : "Modes in a Sequence of Thick Astigmatic Lens-Like Focusers", Bell Syst. tech. J., **43**, 11, p.2887 (Nov. 1964)

(3) 末松安晴，古屋一仁 : "レンズ状媒質に沿うビーム波のベクトル解析"，信学論(B)，**54－B**，6，p.325 (昭46－06)

(4) 大高真人，松原正則，熊谷信昭 : "変分法を用いたレンズ状媒質線路の解析"，信学論(B) 技術談話室載録決定

(5) たとえば，J.A.Stratton : "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill, p.343 (1941)

輻射科学研究会資料

2次元電子ビームの写像理論

橋本正弘・喜多定・藤沢和男
（大阪大学　基礎工学部）

昭和47年4月28日
（於　三菱電機）

1. まえがき

電子は与えられた静電位分布に従って定まった軌道を動く。電子軌道が光学レンズに入射された光ビームの軌道と同一作用をなす場合を静電レンズと呼び古くから電子管，電子顕微鏡などに広く活用してきた(1,2)静電レンズを論ずるに欠かすことのできない大切な量である焦点距離，およびビーム軌道は，もともと軸近くを走行することから，近軸軌道として算出された微分方程式を解いて求められた(1,2,3)すなわち，電位分布を前以って与えた上で，それらの量が算出された．しかし，電子ビームの諸々の装置が広く用いられるにつれ，その設計の際にあらかじめ指定した電子軌道を走行させるためのレンズ系すなわち電極構造の実現が望まれるであろう．
したがって，本文での理論の展開は"電子ビームは期待すべき軌道に指定されている"ことから出発する．

特に電子ビームが2次元静電場を走行するとして、そのときの電位分布を解析的に表わし、これがある条件下で自由に選べることを示している。この任意性に適当な制限を加えると、指定した電子軌道の近傍をゆらぐ電子の振舞い(*)が、ちょうど直角座標での軸対称場における近軸電子軌道のゆらぎと同じになる — ここで、これを写像定理と呼ぶ — ことを示す。この定理は全ての軌道にではなく、ある限られた範囲の軌道に適用される。この範囲を示す写像関数が導出されている。

この写像定理の適用可能な電子軌道については、その近傍での電子のゆらぎの様子を、従来から良く知られている近軸電子ビームの理論から完全に記述できる利点がある。

2. ここで言う写像とは

地図を作成するとき，地球の表面を平面的に写しかえる操作を写像と言う．写像の原義は，ある原像を他の像に写し換えることを言う．最も典型的な例は人の顔を鏡ー これは凹面鏡であるかもしれないし凹面鏡であるかもしれないし，あるいは歪んだ鏡であるかもしれないー に写すことであろう．このとき写像と言う限り，写し出された顔は誰がみても人の顔でなければならない．正確に言えば，原像と写し出された像の各々の部分が一対一対応していなければならない．このように通常，写像と言えば一対一対応を暗に含む．ブラウン管上に写し出されたある入力信号をある増巾器を通して出力波形をみたとき，これまさしく写像である．写像は別の見方からして変換とも呼ばれることもある．増巾器がある関数形で与えられているとき，それは写像関数よりむしろ変換関数と呼ばれることが多い．このように写像は

あくまでも像の立場で使われる言葉である．われわれのなじみの深いものとして等角写像があるが，これは写像の特別な一例である．本文の後節で用いている等角写像と混乱を防ぐため特に等角変換と呼んでいる．さて，ここで言う写像とは下図に示すよう

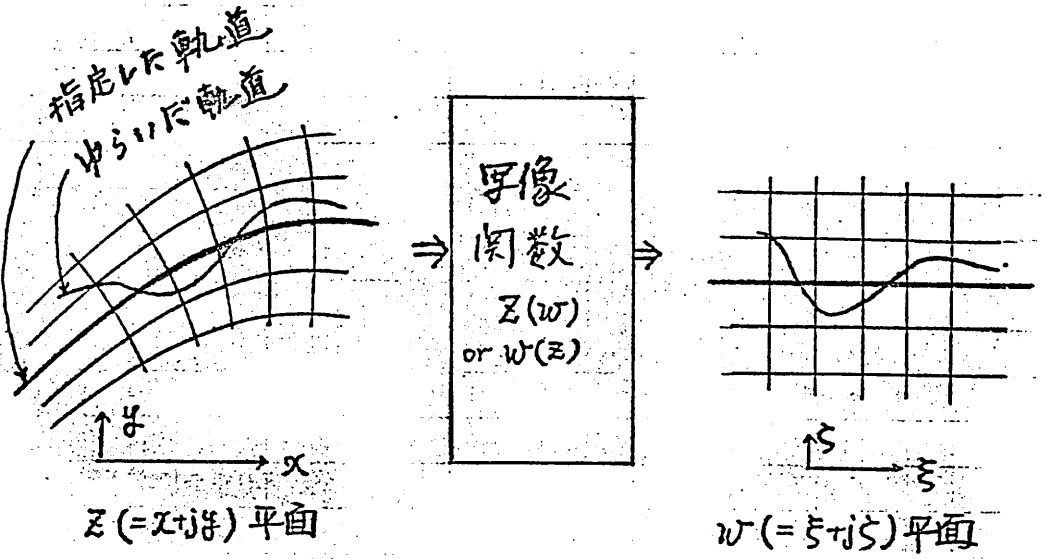


図1．電子ビームの軌道の写像

に指定した軌道付近をゆらぐ電子軌道を直角座標に写し換える操作を言い，その変換関数を写像関数と呼ぶ．通常の写像は原像と写像関数は無関係であるが，ここでの写像関数は原像の一部である指定した

軌道に強く依存する．逆に言うならば，ある制限内で自由に選べる写像関数によって指定すべき軌道の形が決まってしまう．この意味で，ここで与える写像関数は原像を写すばかりでなく，原像として選び得る像の集合をも決定する作用を有する．付記すべきこととして，写像関数 $\zeta(w)$ は等角変換であるがさらに条件のきびしい変換であることを載せておく．

3. 直交座標系における運動方程式

話を簡単にするため，空間電荷の効果は無視する．すなわち，一個の電子について運動を考える．
直角座標系では電子の運動が遠心力と電界の力との釣合いとして記述される．この釣合いの方程式を解けば軌道が得られる．
そこで軌道にそっての座標を s，これに直交する座標を ζ とする（図2）．(x,y) 座標と (s,ζ) 座標の変換は直交変換として，その数式の取り扱いは良く知ら

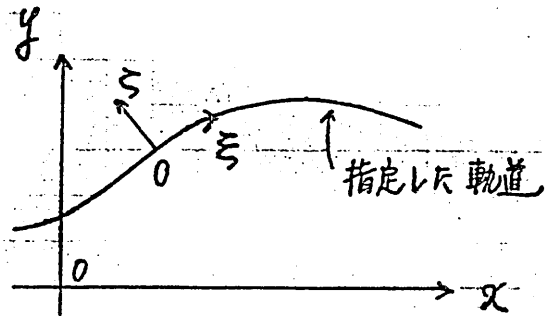


図2　直交座標

んでいる．　ここでは，直交変換の一つである等角変換[5]を採用する．すなわち複素変数

$$z = x + jy$$
$$w = \xi + j\zeta \qquad (1)$$

が，関数 $z(w)$ で変換される．もちろん，複素関数 $z(w)$ の変数 w が $w=\xi$ $(\zeta=0)$ となったとき $z(w)$ は z 平面で指定した軌道を描くとする．等角変換は (1) における変数 x, y, ξ, ζ 間に Cauchy Riemann の関係が成り立つが申え，数式の取り扱いが便利になるという利点を持つ．したがって従来電子ビームの解析に導入された直交変換より，遙かに簡単

になる。

今、等角変換を特性づける $z(w)$ の代りに次に示す更関数 $F(\xi,\zeta)$ および $G(\xi,\zeta)$ で話を進める。

$$\frac{z\dfrac{d^2z}{dw^2}}{\dfrac{dz}{dw}} \equiv F(\xi,\zeta)+jG(\xi,\zeta) \qquad (2)$$

これらの関数間にはり Cauchy Riemann の関係式が成立することは言うまでもなかろう。ここ，変換関数により，x, y は ξ, ζ の関数として表現できる。したがって，電位分布の二つの変数 x, y の代りに ξ, ζ で表わしても何ら支しさわりがない。それゆえ，以降では電位分布を $V(\xi,\zeta)$ と書く。これらの表現を使うと，ξ, ζ 座標系での運動方程式は

$$\frac{\partial V(\xi,0)}{\partial \zeta} = G(\xi,0)\,V(\xi,0) \qquad (3)$$

となる。左辺が電気的力，右辺が遠心力に対応する。従来の見方からすれば，式(3)から軌道を解くため，

軌道に対する微分方程式を導かねばならないが，ここではそうでなく，(3)から電位分布を決定する操作を行う．そのような見方から，(3)は界の二つの成分 — たとえば E_x と E_y，E_x と V，など — 間の関係を表わす式であると見做せるであろう．これは指定した軌道上で界の成分のうち一つは自由に選べることを示す．この意味で指定した軌道を走らせるための電位分布は無限に存在し得る．

この無限性を，解析実関数 $B(\xi)$ を自由に選べることで置き換えると，(3)をみたす静電位分布 $V(\xi,\zeta)$ は次のように表わせる．

$$V(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\left[\frac{B'(\xi+j\zeta)}{G(\xi+j\zeta,0)}+\frac{B'(\xi-j\zeta)}{G(\xi-j\zeta,0)}\right]$$

$$-j\frac{1}{2}\left[B(\xi+j\zeta)-B(\xi-j\zeta)\right] \qquad (4)$$

ここで B' は $dB(\xi)/d\xi$ を表わす．これが指定した

軌道を電子が走るための電位分布である。
現実の電子ビームの軌道は滑らか，すなわち解析曲線である。また軌道上には電位分布を励起させる源がない。このことから，少くとも $B(\xi)$ の選定には，特異点のまたない関数を選ばねばならない。

4. 写像定理

(4)で与えられる静電位場で，電子が指定した軌道からすこしずれて運動する時，座標系として (ξ, ζ) を利用すれば，電子の運動は次の微分方程式で保証される。

$$2\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \left[1+\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2\right]\cdot\left[\frac{\frac{\partial V(\xi,\zeta)}{\partial \zeta}}{V(\xi,\zeta)} - G(\xi,\zeta) - \left(\frac{\frac{\partial V(\xi,\zeta)}{\partial \xi}}{V(\xi,\zeta)} + F(\xi,\zeta)\right)\frac{d\zeta}{d\xi}\right] \qquad (5)$$

上式で関数 F, G を取り去ると x, y 座標系での運動方程式（軌道方程式）に一致する。

近軸軌道方程式を算出するのと同様の近似手法で，すなわち

$$|\xi| \ll 1, \quad |d\xi/d\zeta| \ll 1$$

の仮定の下でこれらの2次以上の項を無視すると，(5)は

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{T_\zeta(\zeta,0)}{T(\zeta,0)} + F(\zeta,0)\right]\frac{d\xi}{d\zeta} + \frac{1}{2}\left[\frac{T_{\zeta\zeta}(\zeta,0)}{T(\zeta,0)} + F_\zeta(\zeta,0) + \Phi^2(\zeta,0)\right]\xi = 0 \qquad (6)$$

と書き表わせる．ここで添字のζはζについての偏微分を示す．上式にみられる電位Tは，いうまでもなく(4)で与えられるが，実関数$B(\zeta)$は解析関数ならば何でもよいという自由度を含んでいる．$B(\zeta)$をどんなに選んでも，もともと指定した軌道を走行することに代りがないが，その付近をゆらぐ種々の軌道が色々に変わる．いま，$B(\zeta)$を，ある特定の目的に選ばれたゆらいだ軌道が近軸軌道と一致することを示

そう.

$B(\xi)$ がどんなものに選ばれるかは後に示すとして，これを含む $V(\xi,\zeta)$ が次式をみたすとする.

$$\frac{V_\zeta(\xi,0)}{V(\xi,0)} = \frac{G^2(\xi,0)-F^2(\xi,0)}{2F(\xi,0)} \qquad (7)$$

これと同時に，次式をみたす，$\zeta=0$ に対して対称な電位分布関数 $v(\xi,\zeta)$ を新らしく定義する.

$$\frac{v_\zeta(\xi,0)}{v(\xi,0)} = \frac{G^2(\xi,0)+F^2(\xi,0)}{2F(\xi,0)} \qquad (8)$$

この電位 $v(\xi,\zeta)$ の表現式がどんなであるかも，これより後で示すとして，(7) および (8) を (6) に代入すれば

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + \frac{v_\zeta(\xi,0)}{2v(\xi,0)}\frac{d\zeta}{d\xi} + \frac{v_{\zeta\zeta}(\xi,0)}{2v(\xi,0)}\zeta = 0 \qquad (9)$$

と書き換えることができる. ここで ζ を y, ξ を x

に置き換えて見ると，(9)は正しく $\psi(\xi,0)$ を軸上電位とする近軸軌道方程式であることがわかる．このことから，(7)をみたす静電場 $V(\xi,\zeta)$ における指定した軌道からづれた電子の運動の軌跡は軸対称静電場 $\psi(\xi,\zeta)$（ζ 軸が対称軸）における近軸電子軌道と同じであると言える。上のことは，初期値によって異るすべての軌道群について成り立っている．この意味で，上のことを写像定理と称する．

(7)(8) にみられるように，$V(\xi,\zeta)$, $\psi(\xi,\zeta)$ はもとめとの軌道を記述する変換関数を特性づける F, G で表わされる．すなわち，指定した軌道の形状によって $V(\xi,\zeta)$ および $\psi(\xi,\zeta)$ は一意的に決定されてしまう．具体的に $\psi(\xi,\zeta)$ を表わせば

$$\psi(\xi,\zeta)=\mathrm{Real}\ \exp\left[\frac{1}{2}\int^{w}\frac{G^2(\xi,0)+F^2(\xi,0)}{F(\xi,0)}d\xi\right] \tag{10}$$

と書ける．また $V(\xi,\zeta)$ を具体的に求めには $B(\xi)$ を与えるだけで十分である（(4)参照）．これは，

$$B(\xi)=\int_0^{\xi} dt\, G(t,0)\cdot \exp\left[\frac{1}{2}\int^{t}\frac{G^2(s,0)-F^2(s,0)}{F(s,0)}ds\right] \qquad (11)$$

で与えられる. (10) および (11) の積分の下限が書かれていないのは任意に取れることを意味する. この下限は単に結果式を定数倍するだけの作用しかなく結局は電位分布の値が定数倍だけ変わるだけで軌道の形状には何ら影響しない.

以上は, 指定した軌道に対する変換関数が既に得られたものとして話を進めてきた. しかし, その結果として得られた $V(\xi,0)$ および $U(\xi,0)$ が ξ のある所で特異点をもつなら, これは電位分布を励起する源が指定した軌道上にあることとなり実現不可能な電位分布となる. したがって, このようなことのないような軌道を前以って指定しなければならない. たとえば双曲線のように, われわれが直ぐ思いつくような曲線が, たとえ上の条件をみたしていなく

ても，それらの曲線に非常に似かよった曲線で上の条件を満足するものがいくらでもある．現実の要求として，このような曲線で十分であろう．

これらの曲線群を与える関数をここでは写像関数と呼んでいる．したがって写像関数は等角変換関数に先で述べた条件を付加したものであると解釈でき，それゆえ同一記号 $Z(w)$ で表現する．

先で述べた条件とは，数式的には，$V(\xi,0)$，$G(\xi,0)$ が滑らかな関数（解析関数）であることで代表される．したがって，これらの関数をパラメータに取り，(8) から $F(\xi,0)$ を求め (2) に代入すれば $Z(w)$ を求められる．すなわち写像関数 $Z(w)$ は

$$Z(w)=\int^{w} d\xi\cdot\exp\left[\frac{1}{2}\int^{\xi} dt\left\{\frac{V_t(t,0)}{V(t,0)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\pm\sqrt{\frac{V_t^2(t,0)}{V^2(t,0)}-G^2(t,0)}+jG(t,0)\right\}\right] \tag{12}$$

もちろん $V(\xi,0)$, $G(\xi,0)$ は滑らかな実関数であるが，

root 内が正となるように選ばれねばならない。
(12) で w を ξ におきかえると，$V(\xi,0)$, $G(\xi,0)$ の任意性に従い $Z(\xi)$ は Z 平面で無数の軌道群を与える。ここで言う写像定理が適用されるためには，このような軌道群の中から指定すべき軌道を選んでおかねばならない。

5. 写像定理の応用例

前節の定理は"小さなゆらぎ"という仮定のもとで得られた。ゆらぎが大きくなると，それを記述する微分方程式自体が (6) よりづれてくる。それと同時に直角座標系での近軸軌道方程式 (9) も正しくなくなる。したがって，ゆらぎが大きくなると，両式を比較して得られた写像定理が2重の誤差をかぶることになり，実際どの程度のゆらぎまで写像定理が成立するのか興味が引かれる。そこで，ここで偏向する電子の軌道について例証してみる。

二つの半無限導体板の端付近での等電位線は導体板間では，ほとんど直線で端点をすぎると広がっている．その一つは確かに偏向軌道とみなせる．いま，これを軌道として指定する．そのとき写像関数は

$$Z(w) = a\left(w + j\theta_0 + e^{w+j\theta_0}\right) \qquad (13)$$

である．ここで a は任意の正の定数，θ_0 は $0 \sim \pi$ 間の適当な値（これによって偏向角が変わる）である．(13) は x, y で

$$\begin{aligned} x &= a\left[\xi + e^{\xi}\cos(\zeta+\theta_0)\right] \\ y &= a\left[\zeta + \theta_0 + e^{\xi}\sin(\zeta+\theta_0)\right] \end{aligned} \qquad (14)$$

と同じである．言うまでもなく $\zeta = 0$ が指定した軌道を表わす．このとき F, G は

$$\begin{aligned} F(\xi,0) &= 2e^{\xi}\left(e^{\xi}+\cos\theta_0\right)\left(1+2e^{\xi}\cos\theta_0+e^{2\xi}\right)^{-1} \\ G(\xi,0) &= 2e^{\xi}\sin\theta_0\left(1+2e^{\xi}\cos\theta_0+e^{2\xi}\right)^{-1} \end{aligned} \qquad (15)$$

で与えられる．写像定理が適用し得る静電位 $V(\xi,\zeta)$

および，ゆらぎが等価となる近軸軌道に対する静電場$v(\xi,\zeta)$はこれらの関数で表現される．ここではその結果のみを示す．

$$V(\xi,\zeta)=(e^{\xi}\cos\zeta+\cos\theta_0)(1+2e^{\xi}\cos(\zeta+\theta_0)+e^{2\xi})^{-1}$$
$$v(\xi,\zeta)=e^{\xi}\cos\zeta+\cos\theta_0 \qquad (16)$$

この両者の電位分布は，たとえば$\zeta=0$とすれば片や指数関数的に減少し，片や指数関数的に増大するように，分布状態自体が大きく違っている．図3,4,5に(16)で与えられる$V(\xi,\zeta)$中の電子の軌道を数値的に求めて実線で描いてある．同時に$v(\xi,\zeta)$中の（軸近くを走行する）電子の動きをやはり数値的に求め重ねて点線で図示してある．このように数値的に求めた軌道は，計算機誤差および数値解析の近似の悪さによって多少異なり，図で示される実線と点線の曲線のづれは，この精度内に収まっている．したがって図示された程度のゆらぎならば十分適用可能であると言える．

參考文獻

[1] W. W. Harman, Fundamentals of Electronic Motion. New York: McGraw Hill, 1953.

[2] V. K. Zworykin, G. A. Morton, E. G. Ramberg, J. Hillier and A. W. Vance, Electron Optics and the Electron Microscope. New York: John Wiley & Sons, 1945.

[3] R. G. E. Hutter, "Electron beam deflection, part I — Small angle deflection theory," J. Appl. Phys., vol 18 pp. 740-758, August 1947.

[4] L. A. MacColl, "Trajectories of monoenergetic electrons, in an arbitrary static electromagnetic field, in the neighbourhood of a given trajectory," J. Math. Phys., Vol. 20, pp. 355-369, 1941.

[5] H. Kober, Dictionary of Conformal Representations. New York: Dover, 1957.

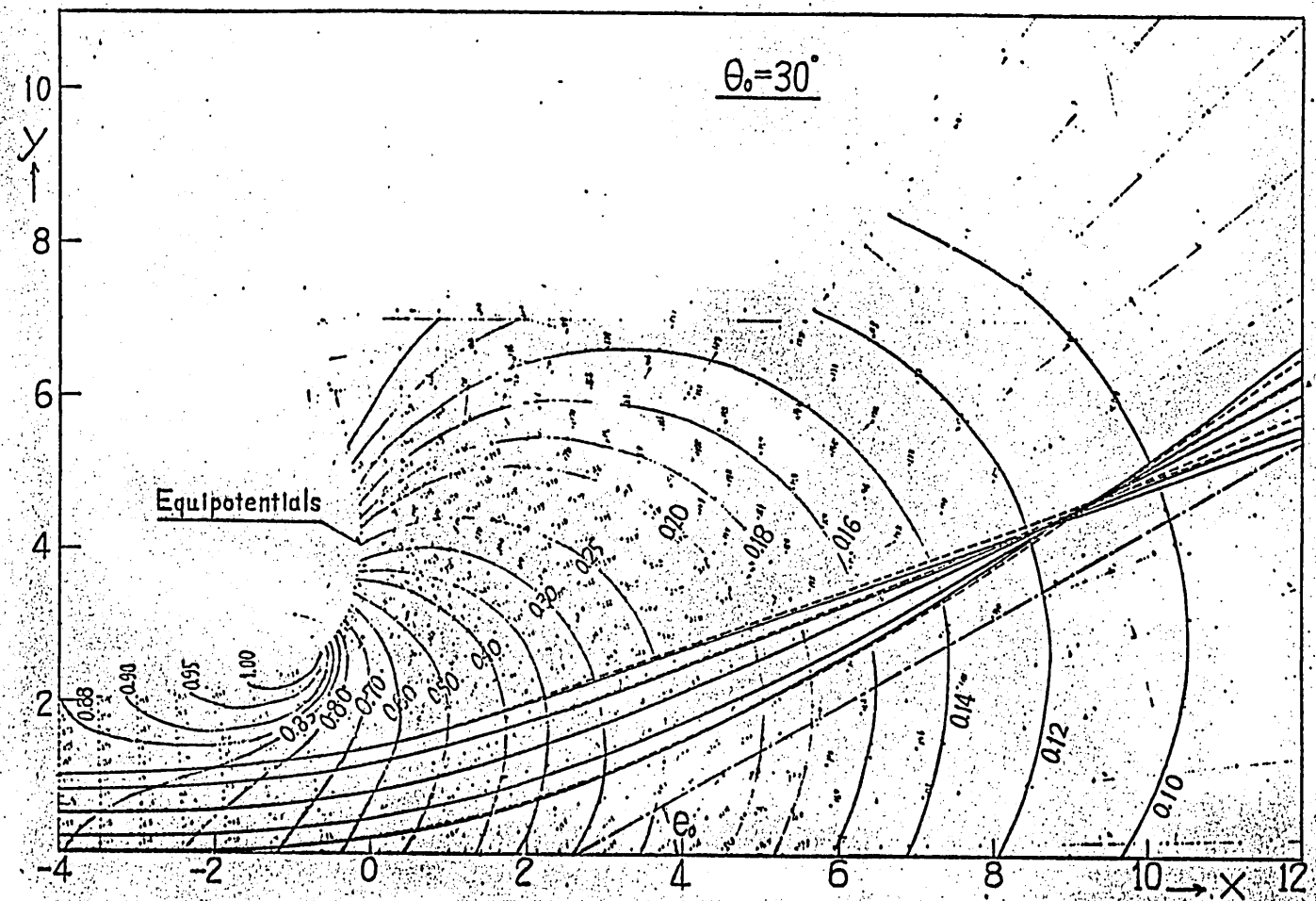


図3　写像定理の例：真の軌道（実線）と定理から得た軌道（点線）。

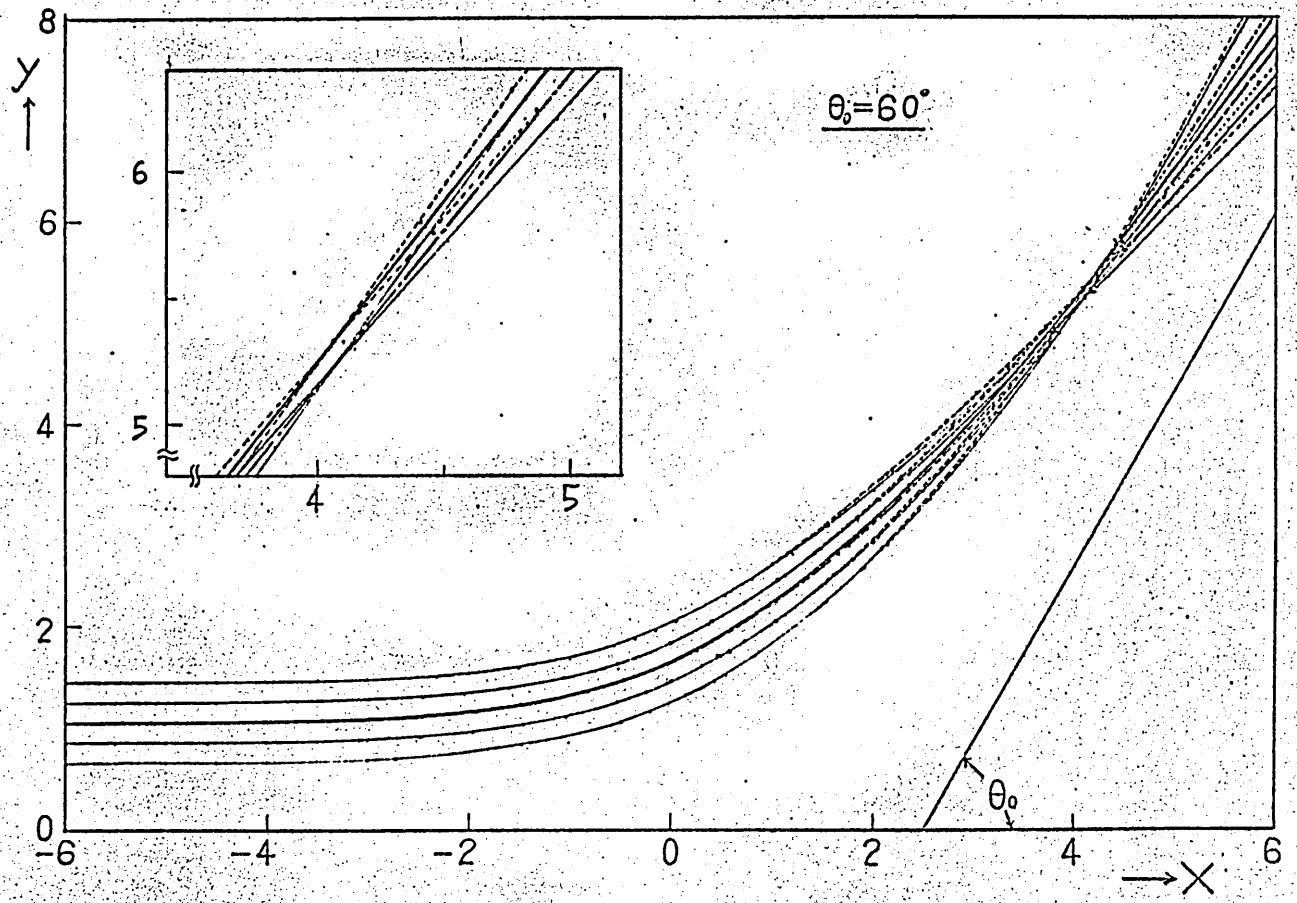


図 4　図3で $\theta_0 = 60°$ の場合．中心の太い実線が指定した軌道．これに対して数値的に得たもとの軌道を一点鎖線で示す．

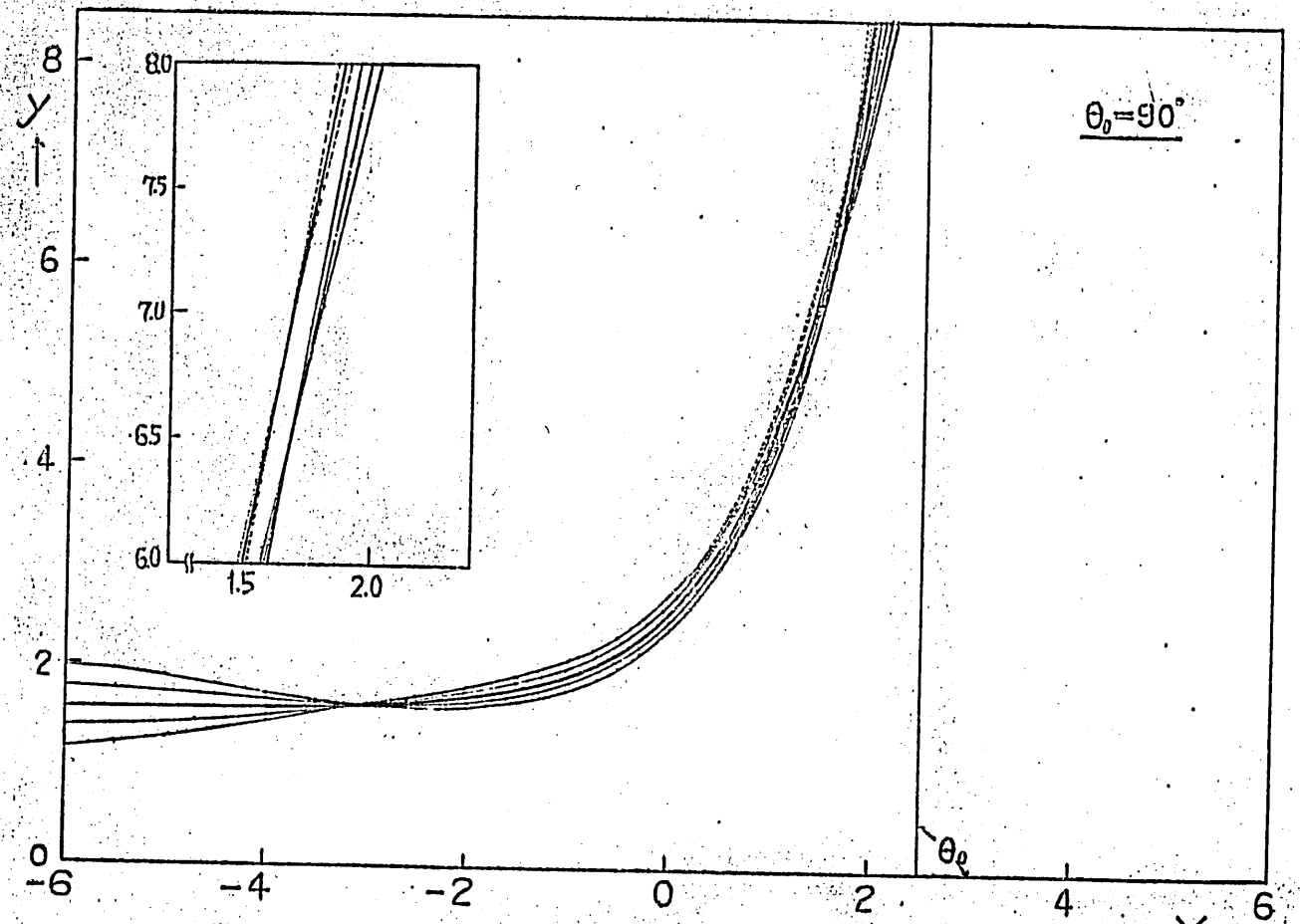


図 5　図3で $\theta_0 = 90°$ の場合、二ヶ所で交差している。

輻射科学研究会資料

導波管開口アレイの相互結合と素子間隔

杉尾嘉彦　牧本利夫
（大阪大学　基礎工学部）

昭和47年4月28日
（於　三菱）

導波管開口アレイの相互結合と素子間隔

杉尾嘉彦　　牧本利夫
（大阪大学　基礎工学部）

1. まえがき

導波管開口より成る大形平面状アレイアンテナの研究が盛んに行われているが,[1)~3)] その放射特性におよぼす相互結合効果と素子間隔との関係については未だ満足な解明がなされていない。このような平面状アレイにおける相互結合効果と素子間隔との関係を知るためには，比較的小形（素子数が50個程度まで）の直線状アレイの諸特性を明らかにしておくことが非常に重要となってくる。

本報告では，このような観点から数十個の導波管開口より成る直線状アレイについて散乱係数，位相走査時の反射係数，および放射特性などについて変分法[4),5)]により解析している。数値解析より求められた散乱係数（結合係数）は最小自乗法を利用すると比較的簡単な式で近似され，この近似式を用いると相互結合の効果がアレイの放射特性にどのように利いてくるかが直ちにわかる。アレイの合成放射特性の主放射方向におけるピーク値はアレイの中央の素子に関するエレメントパターンの値とほぼ一致するため，主ビームの有効走査範囲が素子間隔によって制限されていることも直ちに理解される。したがって，本解析法を用いると有効走査範囲を定めたとき

「それに対する素子間隔が決定されるため，アレイの設計が比較的容易になってくる．さらに，本解析法は直線状ダイポールアレイに対しても同様に適用できるものと思われる．

2. 導波管開口有限アレイの相互結合と放射特性

この章では，N個の開口が完全導体の基板面上に設けられている場合に，各導波管内を単一の伝搬可能モード（TE_{10}）が伝わる場合につき考察する．伝搬可能モードの数が複数になっても同様の方法で解析できる．開口形状は方形，円形などいずれでもよくかつ寸法も任意でよいが，本報告では等しい断面をもつ方形開口の場合（図1参照）につき散乱係数の定留表示式および放射特性式を与える．

2.1 散乱係数の定留表示式

各導波管内ではTE_{10}モードのみが伝搬可能で他のモードはすべて減衰モードとする．

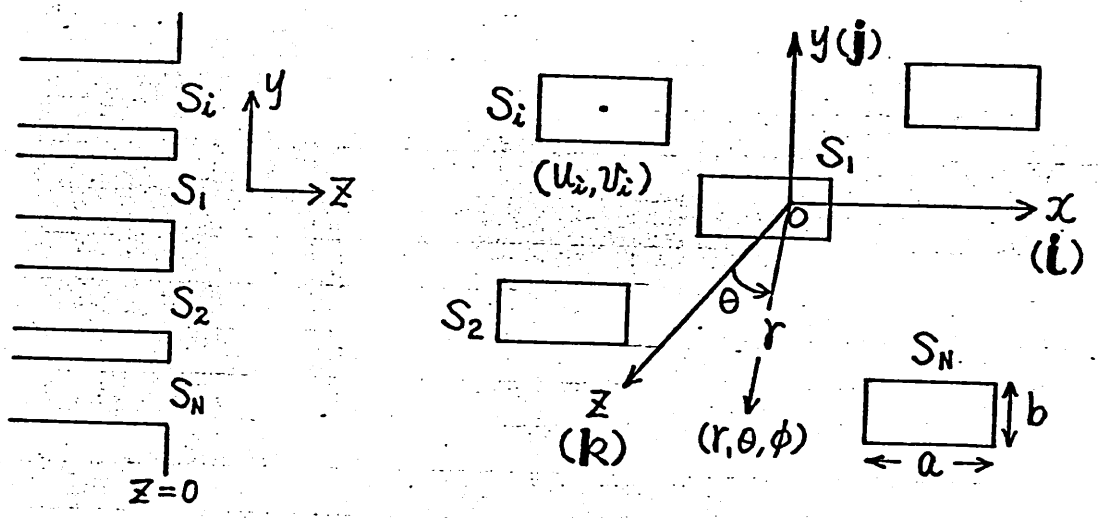


図1 導波管開口アレイ

「導波管内（$z \le 0$）および半無限自由空間（$z \ge 0$）」における電磁界は次のように表わされる。[6]

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{K}_\ell(\mathbf{r}_\ell) &= \sum_{mn} [V_{mn}^{\ell}(z)\mathbf{h}_{mn}^{\ell H}(\rho_\ell) + U_{mn}^{\ell}(z)\mathbf{h}_{mn}^{\ell E}(\rho_\ell)] \\ \mathbf{H}_\ell(\mathbf{r}_\ell) &= \sum_{mn} [I_{mn}^{\ell}(z)\mathbf{h}_{mn}^{\ell H}(\rho_\ell) + J_{mn}^{\ell}(z)\mathbf{h}_{mn}^{\ell E}(\rho_\ell)] \end{aligned}\right\} \text{(導波管}\ell\text{内)} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} V_{10}^{\ell}(z) &= E_{0\ell}e^{-j\beta z} + D_\ell e^{j\beta z}, \quad I_{10}^{\ell}(z) = Y_{10}^{H}(E_{0\ell}e^{-j\beta z} - D_\ell e^{j\beta z}) \\ V_{mn}^{\ell}(z) &= V_{mn}^{\ell}e^{\gamma_{mn}z}, \quad U_{mn}^{\ell}(z) = U_{mn}^{\ell}e^{\gamma_{mn}z} \\ I_{mn}^{\ell}(z) &= -Y_{mn}^{H}V_{mn}^{\ell}e^{\gamma_{mn}z}, \quad J_{mn}^{\ell}(z) = -Y_{mn}^{E}U_{mn}^{\ell}e^{\gamma_{mn}z} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\mathbf{h}_{mn}^{\ell H}(\rho_\ell) = -\nabla_t \phi_{mn}^{\ell}(\rho_\ell), \qquad \mathbf{h}_{mn}^{\ell E}(\rho_\ell) = -\mathbf{k}\times\nabla_t \psi_{mn}^{\ell}(\rho_\ell) \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_{mn}^{\ell}(\rho_\ell) &= \frac{-1}{k_c}\sqrt{\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}}\cos\frac{m\pi}{a}\left(x_\ell+\frac{a}{2}-u_\ell\right)\cos\frac{n\pi}{b}\left(y_\ell+\frac{b}{2}-v_\ell\right) \\ \psi_{mn}^{\ell}(\rho_\ell) &= \frac{1}{k_c}\sqrt{\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}}\sin\frac{m\pi}{a}\left(x_\ell+\frac{a}{2}-u_\ell\right)\sin\frac{n\pi}{b}\left(y_\ell+\frac{b}{2}-v_\ell\right) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} k_c &= \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad \beta = \sqrt{k^2-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \quad \gamma_{mn} = \sqrt{k_c^2-k^2} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad Y_{10}^{H} = \frac{\beta}{\omega\mu}, \quad Y_{mn}^{H} = \frac{\gamma_{mn}}{j\omega\mu}, \quad Y_{mn}^{E} = \frac{j\omega\varepsilon}{\gamma_{mn}} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi k^2}\nabla\times\sum_{\ell=1}^{N}\int_{S_\ell}\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_\ell)\cdot\mathbf{K}_\ell(\mathbf{r}_\ell)\,dS_\ell \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{j}{2\pi\omega\mu}\sum_{\ell=1}^{N}\int_{S_\ell}\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_\ell)\cdot\mathbf{K}_\ell(\mathbf{r}_\ell)\,dS_\ell \end{aligned}\right\} \quad (z \ge 0) \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_\ell) &= \nabla\nabla\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}_\ell) + \mathbf{i}k^2\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}_\ell) \\ \psi(\mathbf{r},\mathbf{r}_\ell) &= e^{-jkR_\ell}/R_\ell, \quad R_\ell^2 = (x-x_\ell)^2+(y-y_\ell)^2+(z-z_\ell)^2 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ここに，$\mathbf{K}_\ell(\mathbf{r}_\ell) = \mathbf{k}\times\mathbf{E}_\ell(\mathbf{r}_\ell)$，$S_\ell$は導波管$\ell$の開口断面，$\mathbf{r} = (x, y, z)$，$\rho_\ell = (x_\ell, y_\ell)$であり，さらに$\varepsilon_m$はNeumann factorである．$\lambda$は自由空間波長であり，$\mathbf{i} = \mathbf{i}i + \mathbf{j}j + \mathbf{k}k$である．

「いま導波管 i のみを $K_i^{\circ} = E_{oi} e^{-j\beta z} h_{10}^{iH}$ なる入射波で励振し，他の導波管はすべて $z<0$ の位置で整合負荷により終端した場合の電磁界には肩に［i］を付記して区別することにすると，開口面（$z=0$）における磁界の接線成分（$x-y$ 方向）の連続より次式を得る．

$$\frac{2Y_{10}^{H}}{\delta_{ji}+S_{ji}} U_i h_{10}^{iH} \int_{S_j} K_j^{[i]} \cdot h_{10}^{jH} dS_j = \frac{j}{2\pi\omega\mu} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} U_\ell \int_{S_k} \dot{G} \cdot K_k^{[i]} dS_k + \sum_{\ell=1}^{N} U_\ell \int_{S_\ell} \dot{G}_\ell \cdot K_\ell^{[i]} dS_\ell \qquad (8)$$

ここに，δ_{ji} は Kronecker's delta function，

$$\left.\begin{aligned} \dot{G}_\ell &= \sum_{mn} [Y_{mn}^{H} h_{mn}^{\ell H} h_{mn}^{iH} + Y_{mn}^{E} h_{mn}^{\ell E} h_{mn}^{\ell E}] \\ U_\ell &= \begin{cases} 1 : P_\ell \text{ が } S_\ell \text{ 上のとき} \\ 0 : P_\ell \text{ がその他の位置のとき} \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

であり，かつ

$$\left.\begin{aligned} V_{10}^{j[i]} &= E_{oi}\delta_{ji} + D_j^{[i]} = E_{oi}(\delta_{ji}+S_{ji}) = \int_{S_j} K_j^{[i]} \cdot h_{10}^{jH} dS_j \\ D_j^{[i]} &= E_{oi} S_{ji}, \quad V_{mn}^{\ell[i]} = \int_{S_\ell} K_\ell^{[i]} \cdot h_{mn}^{\ell H} dS_\ell, \quad U_{mn}^{\ell[i]} = \int_{S_\ell} K_\ell^{[i]} \cdot h_{mn}^{\ell E} dS_\ell \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

なる関係を用いている．式（10）で定義された S_{ji} が，導波管 i と j の主モードの間で定義された散乱係数となる．

式（8）の両辺に $\sum_{\ell=1}^{N} U_\ell K_\ell^{[j]}$ をスカラ積して $z=0$ の面上にわたって積分を実行すると

$$\frac{2}{\delta_{ji}+S_{ji}} = \frac{\dfrac{j}{2\pi\omega\mu Y_{10}^{H}} \sum_{\ell=1}^{N} \left[\sum_{k=1}^{N} \int_{S_\ell}\int_{S_k} K_\ell^{[j]} \cdot \dot{G} \cdot K_k^{[i]} dS_k dS_\ell + \int_{S_\ell}\int_{S_\ell} K_\ell^{[j]} \cdot \dot{G}_\ell \cdot K_\ell^{[i]} dS_\ell dS_\ell \right]}{Y_{10}^{H} \int_{S_j} K_j^{[i]} \cdot h_{10}^{jH} dS_j \int_{S_i} K_i^{[j]} \cdot h_{10}^{iH} dS_i} \qquad (11)$$

「なる式を得る．式（11）が散乱係数S_{ji}の定留表示式になっていることは容易に示すことができる．[5),7)] また，図1にLorentzの相反定理を適用すると$S_{ji}=S_{ij}$なる関係が簡単に導ける．

2.2 散乱係数の行列解，展開係数，反射係数

Ritzの方法により，電界関数$K_\ell^{[i]}$等を有限個の固有モード関数の展開式で近似して，各モードの展開係数で式（11）の両辺を偏微分すると次のような連立方程式が得られる．

$$\frac{2}{\delta_{ji}+S_{ji}}V_{10}^{j[i]}-\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left\{P_{mn}^{10}(\ell H,iH)V_{mn}^{\ell[i]}+P_{mn}^{10}(\ell E,iH)U_{mn}^{\ell[i]}\right\}=0 \quad (12a)$$

$$-\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left\{P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)V_{mn}^{\ell[i]}+P_{mn}^{rs}(\ell E,kH)U_{mn}^{\ell[i]}\right\}=0 \quad (12b)$$

$$-\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}\left\{P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)V_{mn}^{\ell[i]}+P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)U_{mn}^{\ell[i]}\right\}=0 \quad (12c)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)&=Q_{mn}^{rs}(\ell H,kH)+\frac{\delta_{\ell k}}{Y_{10}^{H}}\sum_{pq}Y_{pq}^{H}\delta_{pm}\delta_{pr}\delta_{qn}\delta_{qs}\\
P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)&=Q_{mn}^{rs}(\ell E,kE)+\frac{\delta_{\ell k}}{Y_{10}^{H}}\sum_{pq}Y_{pq}^{E}\delta_{pm}\delta_{pr}\delta_{qn}\delta_{qs}\\
P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)&=Q_{mn}^{rs}(\ell H,kE)=\frac{j}{2\pi\omega\mu Y_{10}^{H}}\int_{S_\ell}\int_{S_k}h_{mn}^{\ell H}\cdot\dot{G}\cdot h_{rs}^{kE}\,dS_k\,dS_\ell
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

であり；例えば$Q_{mn}^{rs}(\ell H,kE)$は導波管ℓのTE$_{mn}$モードと導波管kのTM$_{rs}$モードとの間の結合度を表わす．具体的な積分表示式は付録を参照されたい．

式（12）において，展開係数の少くとも一つが零でない解をもつためには行列式が零となることより，次式の」

「ようにSjiが求められる.

$$\frac{2}{\delta_{ji}+S_{ji}}=\frac{\begin{vmatrix}[P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)] & [P_{mn}^{rs}(\ell E,kH)]\\ [P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)] & [P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)]\end{vmatrix}}{\dfrac{\partial}{\partial P_{10}^{10}(jH,iH)}\begin{vmatrix}[P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)] & [P_{mn}^{rs}(\ell E,kH)]\\ [P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)] & [P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)]\end{vmatrix}} \qquad (14)$$

ここに，$[P_{mn}^{rs}]$ 等は行列を表わす.

式（14）より散乱係数が求まると，高次モードの各展開係数は式（12）を変形して次のような連立方程式より決定することができる.

$$\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}{}'\{P_{mn}^{rs}(\ell H,kH)V_{mn}^{\ell[i]}+P_{mn}^{rs}(\ell E,kH)U_{mn}^{\ell[i]}\}=-\sum_{\ell=1}^{N}P_{10}^{rs}(\ell H,kH)(\delta_{\ell i}+S_{\ell i})E_{oi}, \qquad (15a)$$

$$\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}{}'\{P_{mn}^{rs}(\ell H,kE)V_{mn}^{\ell[i]}+P_{mn}^{rs}(\ell E,kE)U_{mn}^{\ell[i]}\}=-\sum_{\ell=1}^{N}P_{10}^{rs}(\ell H,kE)(\delta_{\ell i}+S_{\ell i})E_{oi}. \qquad (15b)$$

ここで，Σ' は高次モードのみの和を表わす.

任意励振時の各開口における主モードより見た反射係数（Active Reflection Coefficient）Γ_i は散乱係数を用いて次式のように表示される.

$$\Gamma_i=\sum_{\ell=1}^{N}\frac{E_{o\ell}}{E_{oi}}S_{\ell i}e^{j(\psi_\ell-\psi_i)} \qquad (i=1,2,\cdots,N) \qquad (16)$$

ここに，ψ_ℓ はアレイのビームを振るために励振導波管 ℓ の電磁界に強制的に付加された位相である. $E_{o\ell}$ はその導波管の主モードの入射（励振）波振幅である.

2.3 放射特性式（遠方界）

開口から十分遠方（$kR \gg 1$）の電磁界は，式（6），（7）より球座標表示で次のように与えられる．

$$E(r,\theta,\phi)=\frac{2}{\pi^2}\sqrt{ab}\,(1+\Gamma_0)E_0N\frac{jke^{-jkr}}{r}\{i_\theta F_1(\theta,\phi)+i_\phi F_2(\theta,\phi)\}$$
$$H(r,\theta,\phi)=\frac{-2}{\pi^2}\sqrt{ab}\,(1+\Gamma_0)E_0N\frac{jnke^{-jkr}}{r}\{i_\theta F_2(\theta,\phi)-i_\phi F_1(\theta,\phi)\} \quad (17)$$

ここに，

$$F_1(\theta,\phi)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_1^{[i]}(\theta,\phi),\qquad F_2(\theta,\phi)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_2^{[i]}(\theta,\phi) \quad (18)$$

$$F_1^{[i]}(\theta,\phi)=-\frac{\pi}{4}\sum_{\ell=1}^{N}\frac{(\delta_{\ell i}+S_{\ell i})E_{oi}}{(1+\Gamma_0)E_0}\{S(X_1^+)+S(X_1^-)\}S(Y_0^+)\sin\phi \times e^{jk\sin\theta(u_\ell\cos\phi+v_\ell\sin\phi)-j\psi_i}$$
$$+\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}{}'\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\,e^{j(m+n-1)\pi/2}}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}}\Big[(\frac{n}{b}V_{mn}^{\ell[i]}-\frac{m}{a}U_{mn}^{\ell[i]})\{S(X_m^+)+(-1)^mS(X_m^-)\}$$
$$\times\{S(Y_n^+)-(-1)^nS(Y_n^-)\}\cos\phi-(\frac{m}{a}V_{mn}^{\ell[i]}+\frac{n}{b}U_{mn}^{\ell[i]})\{S(X_m^+)-(-1)^mS(X_m^-)\}$$
$$\times\{S(Y_n^+)+(-1)^nS(Y_n^-)\}\sin\phi\Big]e^{jk\sin\theta(u_\ell\cos\phi+v_\ell\sin\phi)} \quad (19)$$

$$F_2^{[i]}(\theta,\phi)=-\frac{\pi}{4}\sum_{\ell=1}^{N}\frac{(\delta_{\ell i}+S_{\ell i})E_{oi}}{(1+\Gamma_0)E_0}\{S(X_1^+)+S(X_1^-)\}S(Y_0^+)\cos\theta\sin\phi \times e^{jk\sin\theta(u_\ell\cos\phi+v_\ell\sin\phi)-j\psi_i}$$
$$-\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{mn}{}'\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}\,e^{j(m+n-1)\pi/2}}{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}\cos\theta\Big[(\frac{n}{b}V_{mn}^{\ell[i]}-\frac{m}{a}U_{mn}^{\ell[i]})\{S(X_m^+)+(-1)^mS(X_m^-)\}$$
$$\times\{S(Y_n^+)-(-1)^nS(Y_n^-)\}\sin\phi+(\frac{m}{a}V_{mn}^{\ell[i]}+\frac{n}{b}U_{mn}^{\ell[i]})\{S(X_m^+)-(-1)^mS(X_m^-)\}$$
$$\times\{S(Y_n^+)+(-1)^nS(Y_n^-)\}\cos\phi\Big]e^{jk\sin\theta(u_\ell\cos\phi+v_\ell\sin\phi)-j\psi_i} \quad (20)$$

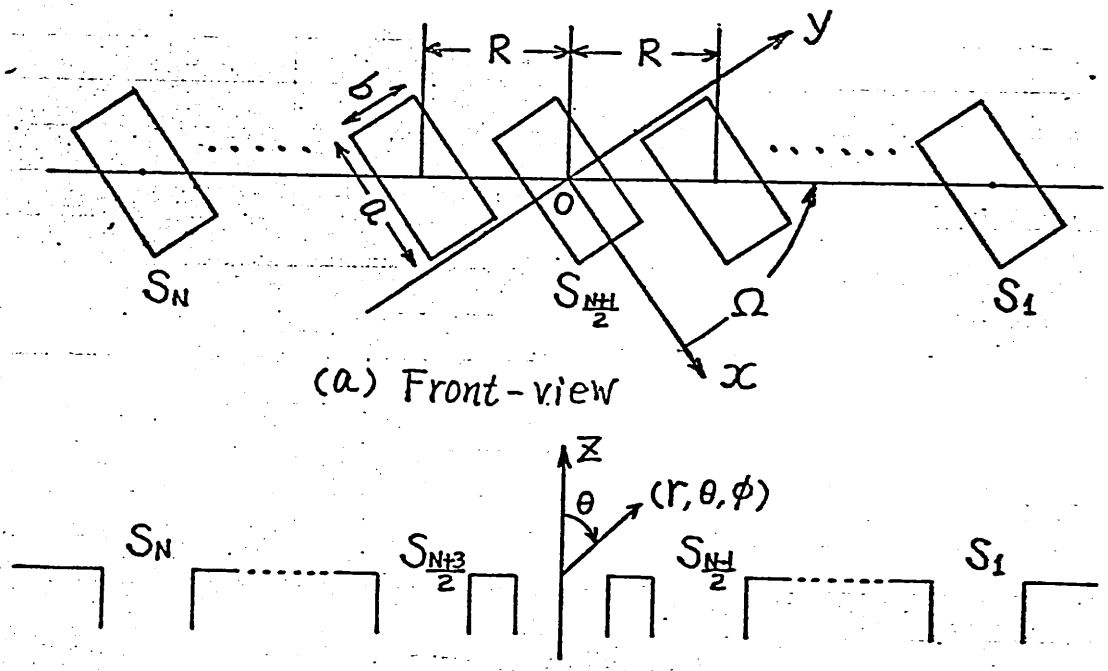
$$S(Z)=\sin Z/Z \quad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} X_m^{\pm} &= \frac{m\pi}{2} \pm \frac{ka}{2}\sin\theta\cos\phi \\ Y_n^{\pm} &= \frac{n\pi}{2} \pm \frac{kb}{2}\sin\theta\sin\phi \end{aligned}\right\} \quad (\text{複号同順}) \qquad (22)$$

さらに，$\eta = \sqrt{\varepsilon/\mu}$ である。E_0 および Γ_0 はそれぞれ，1個の開口が孤立していて相互結合のない場合の主モード入射波の振幅および反射係数である。$F_1^{[i]}$ および $F_2^{[i]}$ はともに element (array) pattern と呼ばれるものである。

3. 主モード近似

この章では，相互結合の効果が放射特性にどのように利いてくるかについて，簡単のため図2に示されるような直線状アレイを例にとって主モード近似により解析する。



(a) Front-view

(b) Side-view

Fig.2 Linearly distributed array.

図2 直線状アレイ

「以下簡単のため，等間隔配列で等振幅励振（$E_{oi}=E_o$）」の場合につき考察する。この場合の放射特性は式（18）～（22）より次のように表示される。

$$F_1^{[i]}(\theta,\phi)=T(\theta,\phi)\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\delta_{\ell i}+S_{\ell i}}{1+\Gamma_o}\sin\phi\, e^{jkR\sin\theta\cos(\Omega-\phi)(\frac{N+1}{2}-\ell)-j\psi_i} \tag{23}$$

$$F_2^{[i]}(\theta,\phi)=T(\theta,\phi)\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\delta_{\ell i}+S_{\ell i}}{1+\Gamma_o}\cos\theta\cos\phi\, e^{jkR\sin\theta\cos(\Omega-\phi)(\frac{N+1}{2}-\ell)-j\psi_i} \tag{24}$$

ここに，

$$T(\theta,\phi)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\cos(\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\phi)}{(\frac{\pi}{2})^2-(\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\phi)^2}\frac{\sin(\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\phi)}{\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\phi} \tag{25}$$

また，power patten に相当する element（power）pattern を次のように定義する。

$$F^{[i]}(\theta,\phi)=\sqrt{|F_1^{[i]}|^2+|F_2^{[i]}|^2}$$

$$=F_o(\theta,\phi)\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\delta_{\ell i}+S_{\ell i}}{1+\Gamma_o}e^{jkR(\frac{N+1}{2}-\ell)\sin\theta\cos(\Omega-\phi)-j\psi_i} \tag{26}$$

ここに，

$$F_o(\theta,\phi)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}\,\frac{\cos(\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\phi)}{(\frac{\pi}{2})^2-(\frac{ka}{2}\sin\theta\cos\phi)^2}\frac{\sin(\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\phi)}{\frac{kb}{2}\sin\theta\sin\phi} \tag{27}$$

であり，この $F_o(\theta,\phi)$ は孤立単独開口の element pattern である。$|F^{[i]}|^2$ が element power pattern となる。

合成の放射特性は式（18），（26）および（27）より次式のように与えられる。

$$F(\theta,\phi)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F^{[i]}(\theta,\phi)$$

$$=\frac{1}{N}F_o(\theta,\phi)\sum_{i=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N}\frac{\delta_{\ell i}+S_{\ell i}}{1+\Gamma_o}e^{jkR(\frac{N+1}{2}-\ell)\sin\theta\cos(\Omega-\phi)-j\psi_i} \tag{28}$$

「励振の位相 ψ_i は次のように与えられる。

$$\psi_i = kR\left(\frac{N+1}{2} - i\right)\sin\theta_0\cos(\Omega-\phi_0) \qquad (29)$$

ここに，(θ_0, ϕ_0) は主放射方向である。

式（29）を式（28）に代入すると，主放射方向における合成の放射特性の値は次式のように表わされる。

$$F(\theta_0,\phi_0) = F^{[\frac{N}{2}]}(\theta_0;\phi_0) + \frac{1}{N}\frac{F_0(\theta_0,\phi_0)}{1+\Gamma_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left\{(\delta_{li}+S_{li})e^{jkR(i-l)\sin\theta_0\cos(\Omega-\phi_0)} - (\delta_{l\frac{N}{2}}+S_{l\frac{N}{2}})e^{jkR(\frac{N}{2}-l)\sin\theta_0\cos(\Omega-\phi_0)}\right. \qquad (30)$$

式（30）の第2項は $N\to\infty$ になるに従って零に近づく。したがって，$N \gg 1$ なる十分大きなアレイにおいては，合成の放射特性の主放射方向の値はアレイの中心の開口に関する element pattern とほぼ同じ軌跡を描くことが期待される。

3.1 散乱係数の近似式

この節では，放射特性について議論する前に散乱係数に対する近似式を与える。散乱係数の絶対値は開口間隔 R_{ij} のあるべき乗に比例して減少し，位相は R_{ij} に比例して減少することがわかっている。[7,8] したがって，我々は散乱係数を次式のように近似する。

$$S_{ij} = AR_{ij}^{-B}e^{j(\alpha_0 - 2\pi CR_{ij}/\lambda)} = AR_0^{-B}|i-j|^{-B}e^{j\{\alpha_0 - 2\pi R_0 C|i-j|\}} \qquad (i\neq j)$$

$$\left(\frac{R_{ij}}{\lambda} = R_0|i-j| \text{ のとき}\right) \qquad (31)$$

ここに，$R_0 = R/\lambda$ であり A，B および α_0 は開口形状およびアレイの構造（配置）により決る定数である。C はほ」

ほ1に等しい値をとる。

式(14)より数値解析して求めた値を用いて，最小自乗法によってA，B，Cおよびα₀を定めれば式(31)の形で散乱係数を表わすことができる。その一例を表1に示す。

表1 (Table 1)

N=31 Ω=90° a/λ=0.7 b/λ=0.311790393

R_0	A	B	C	α_0 (Dégrees)
0.4	0.08824	1.1818		
0.5	0.06443	1.1493		
0.6	0.08263	1.1256	1.01118	-127.612
0.7	0.09881	1.0846	1.00946	-124.945
0.8			1.00877	-127.727

式(14)と(31)より求めた$|S_{i,j}|$の値の比較例を表2に示す。

表2 $|S_{i,16}|$ (Table 2 $|S_{i,16}|$)

N=31 Ω=90° a/λ=0.7 b/λ=0.311790393

R_0	0.4		0.5		0.6		0.7	
	式(14)	式(31)	式(14)	式(31)	式(14)	式(31)	式(14)	式(31)
$S_{15,16}$	0.2395	0.2606	0.1500	0.1543	0.1448	0.1468	0.1430	0.1455
$S_{14,16}$	0.1208	0.1148	0.06635	0.06443	0.0681	0.06729	0.06917	0.06856
$S_{13,16}$	0.0748	0.07113	0.03937	0.03865	0.04294	0.04264	0.04467	0.04419
$S_{11,16}$	0.03986	0.03889	0.02027	0.02031	0.02405	0.02399	0.02553	0.02531
$S_{6,16}$	0.01639	0.01714	0.00852	0.00848	0.01098	0.01099	0.01182	0.01197

「表2より式(31)の近似は妥当であると言える。」

「図3に配置角度Ωに関するα₀の変化を示している。」

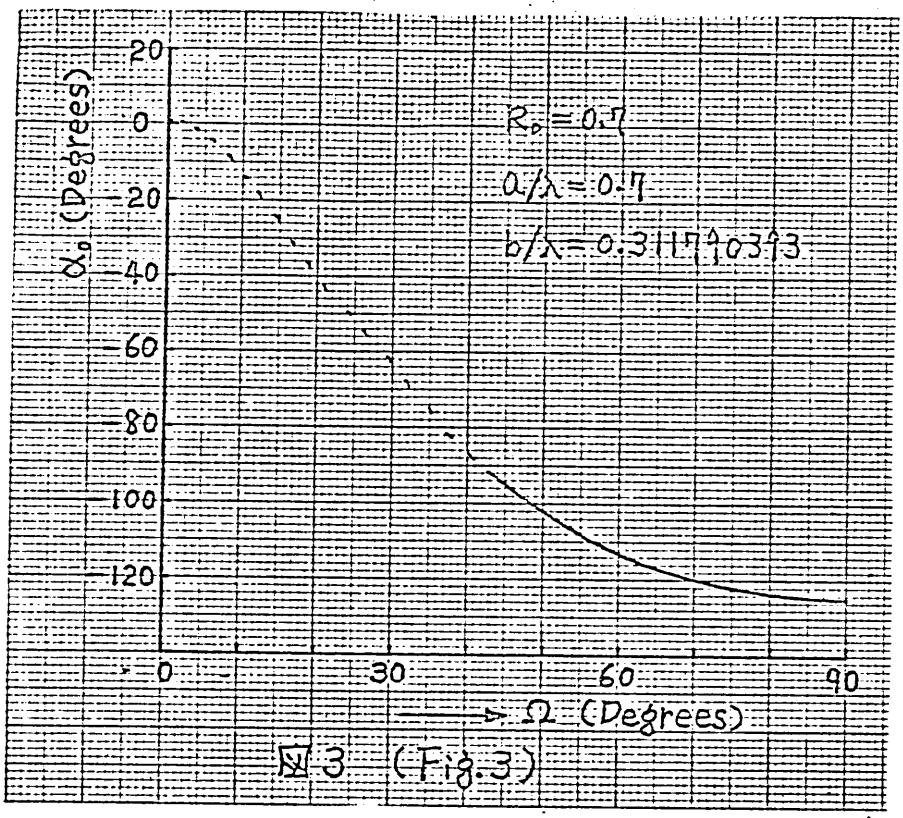


図3 (Fig.3)

このα₀は，後で議論するアレイのpatternにおける切れ込み(deep notch)位置を判定する際に重要な役割を演じる。

図4，5および6に散乱係数の絶対値と位相を示す。図3～6より，α₀は開口間隔R₀にはあまり依存せず位置角度Ωによって主に変化することがわかり，また散乱係数の絶対値$|S_{ij}|$ ($i \neq j$)は励振開口のいかんによらずほぼ一定の曲線上に分布することがわかる。さらに，$|S_{ii}|$はアレイの両端の開口を除くとほぼ一定の値をとる。α₀は散乱係数の位相の近似直線が$R_{ij} = 0$の軸に交わる点の位相として与えられる。

「位相走査時の反射係数を図7～12に示す。」

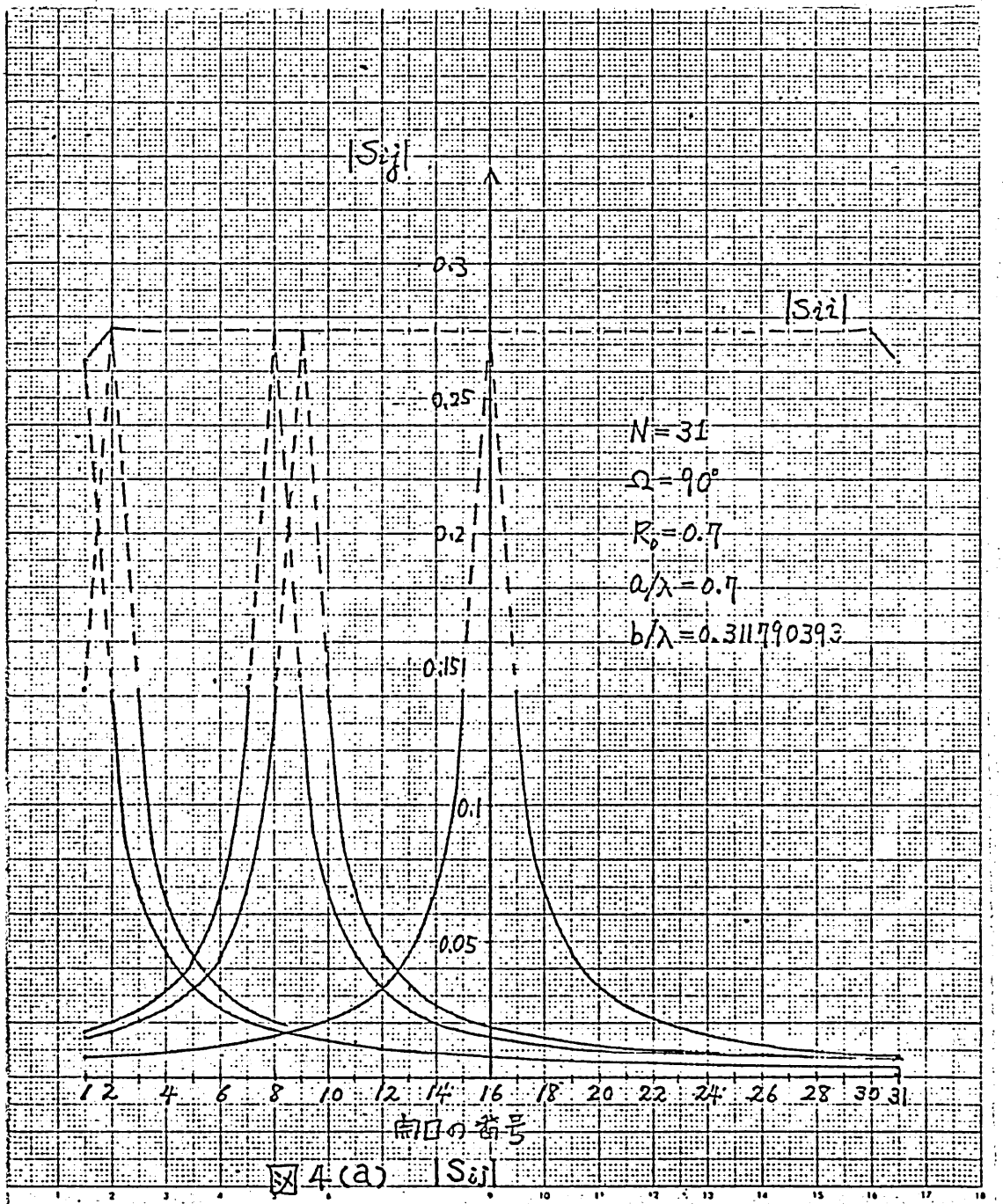


図4(a) |Sij|

JIS-A4 1mm(250×180) コクヨ

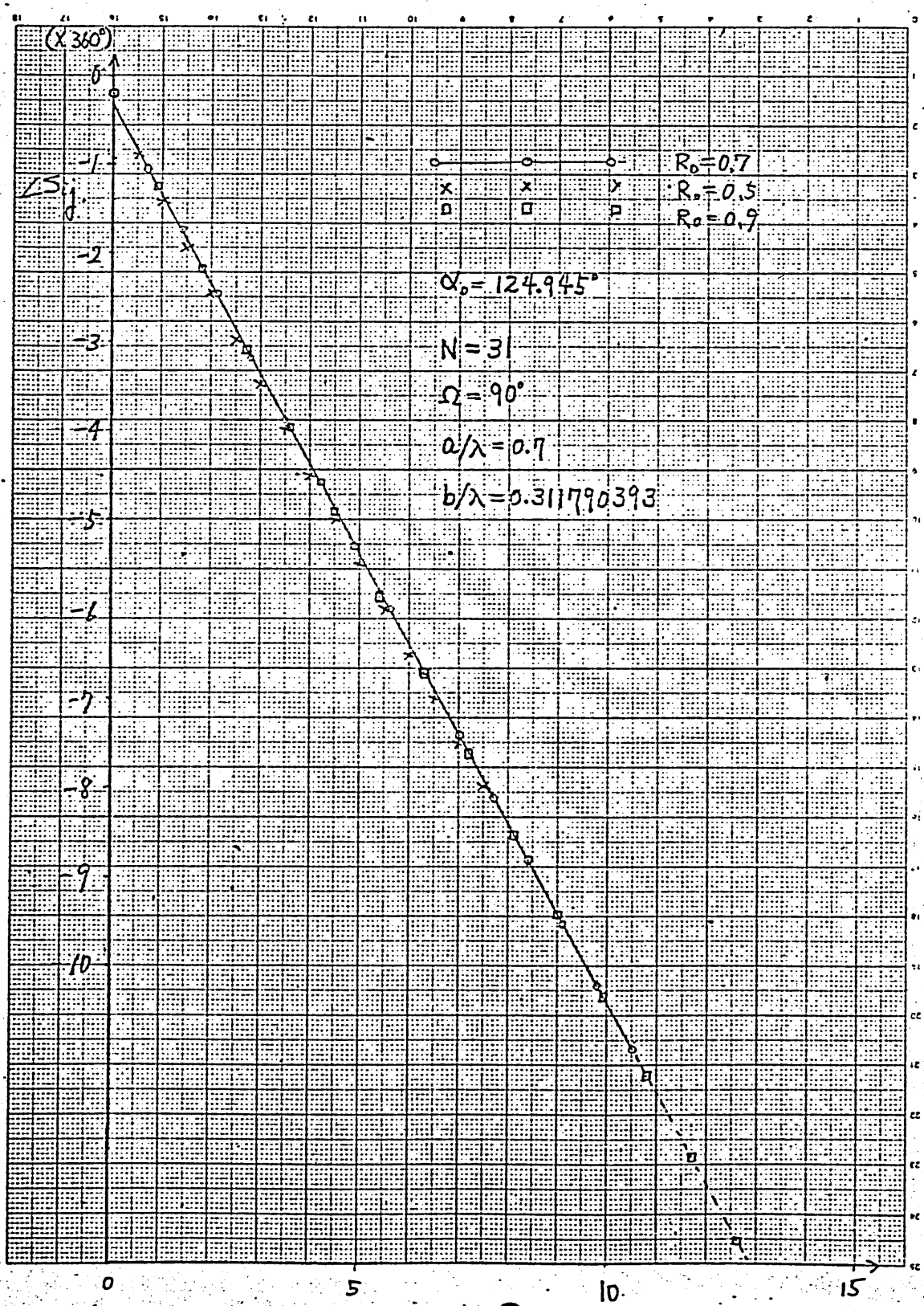


図4 (b) $\angle S_{i,16}$

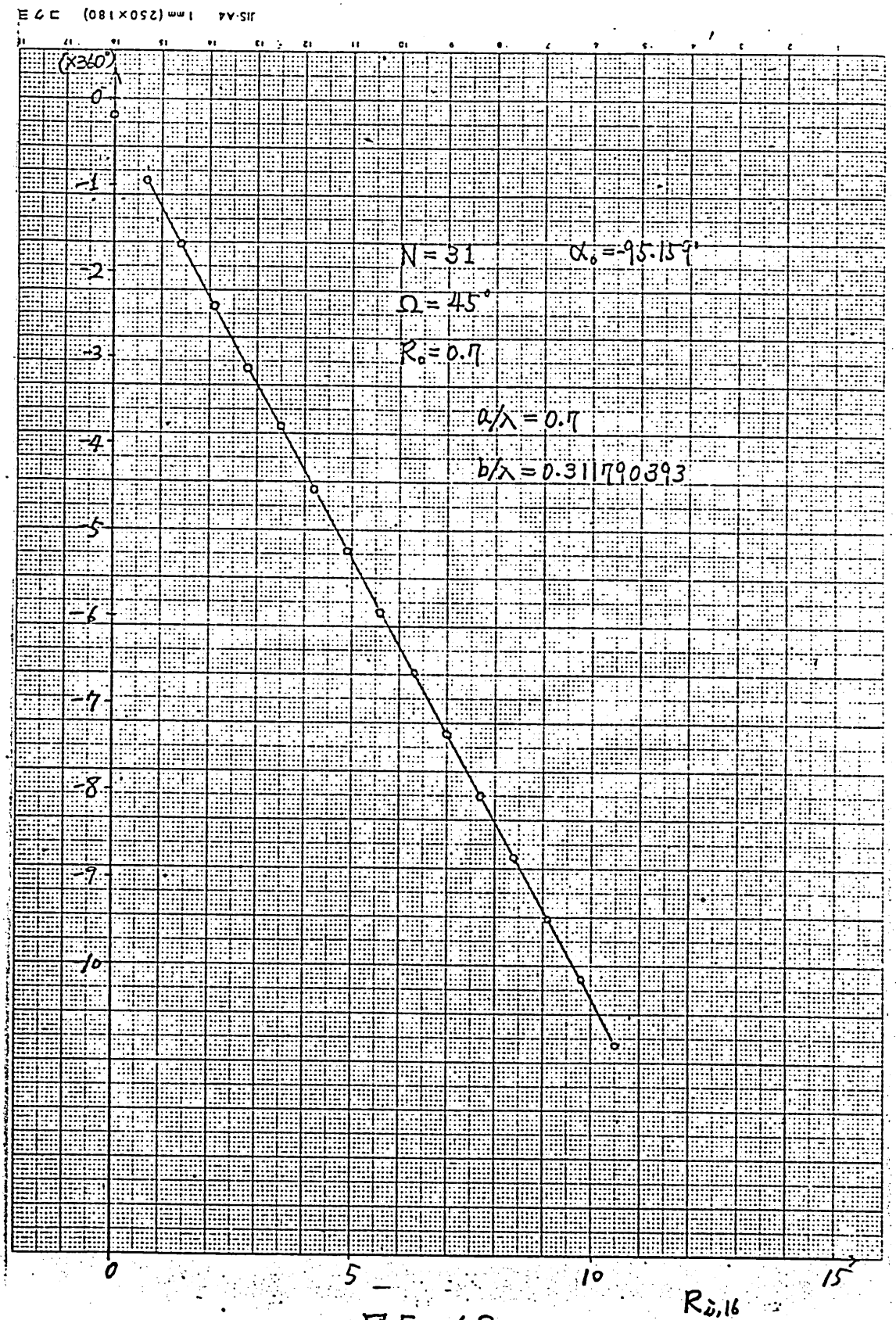

(×360°)
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
N = 31
α₀ = -95.15°
Ω = 45°
R₀ = 0.π
a/λ = 0.π
b/λ = 0.311790393
0
5
10
15
Rλ,16

図5 ∠Sλ,16

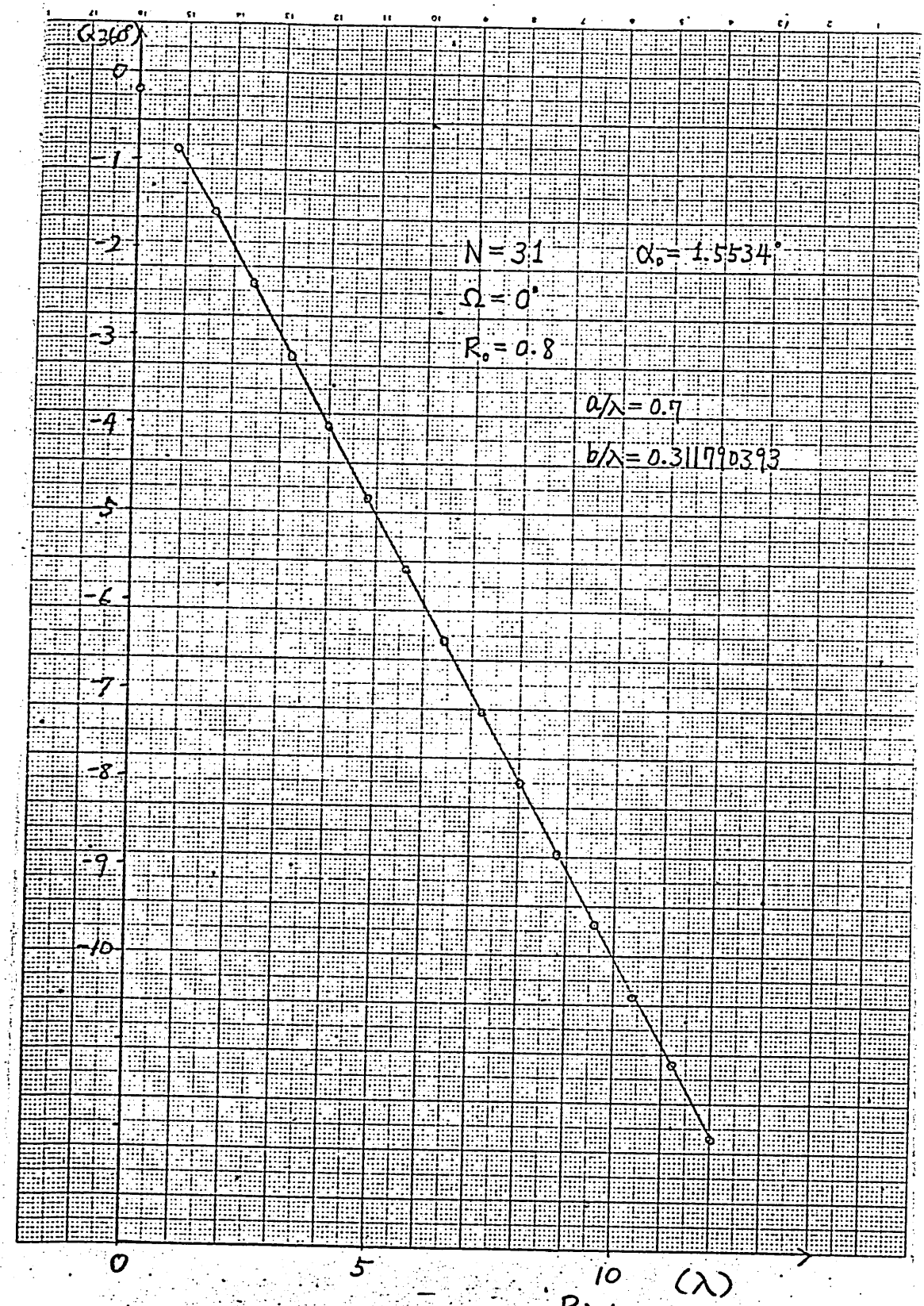


図6 $\angle S_{i,16}$

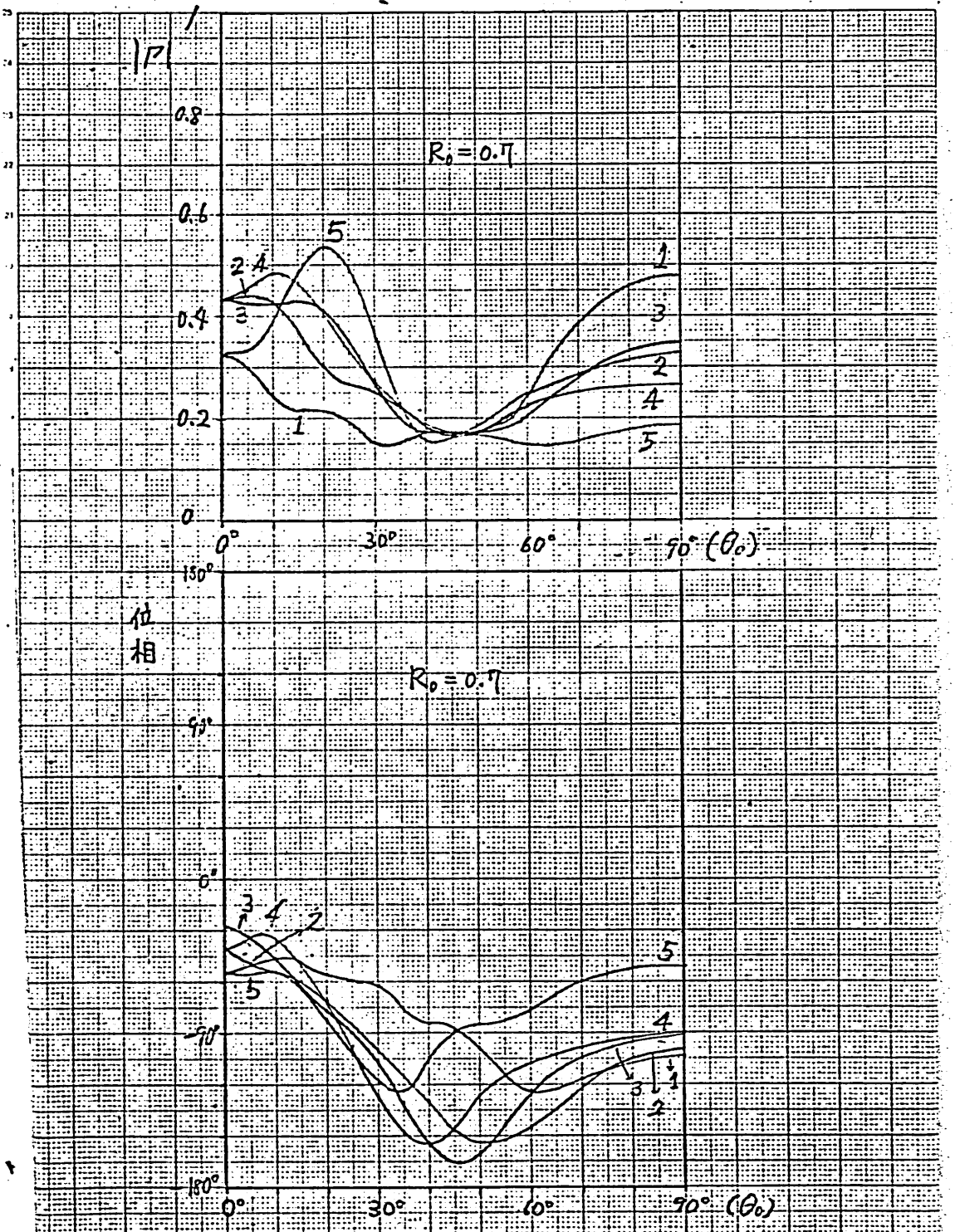


図7 位相走査時の反射係数 (N=5)

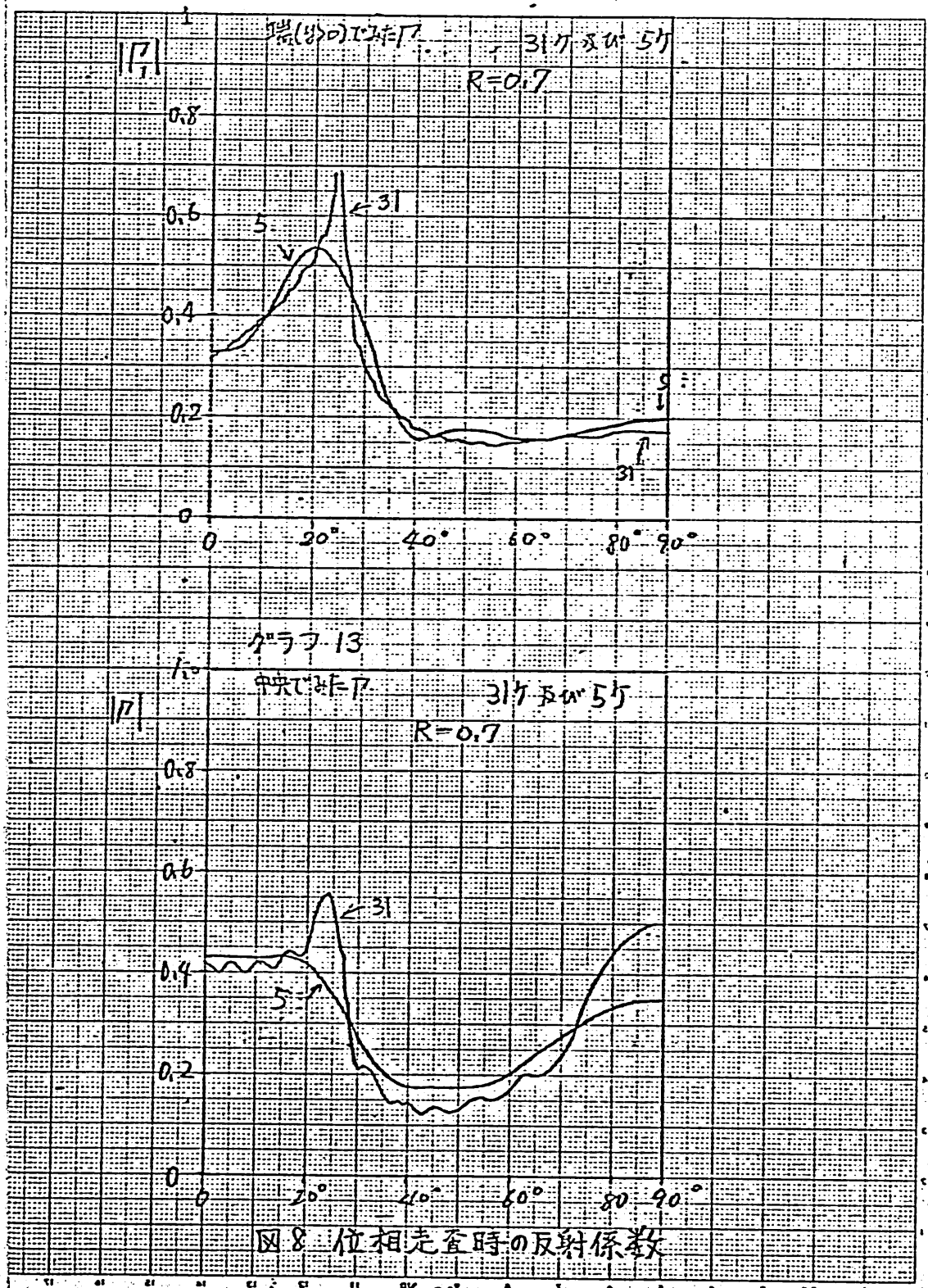


図8 位相走査時の反射係数

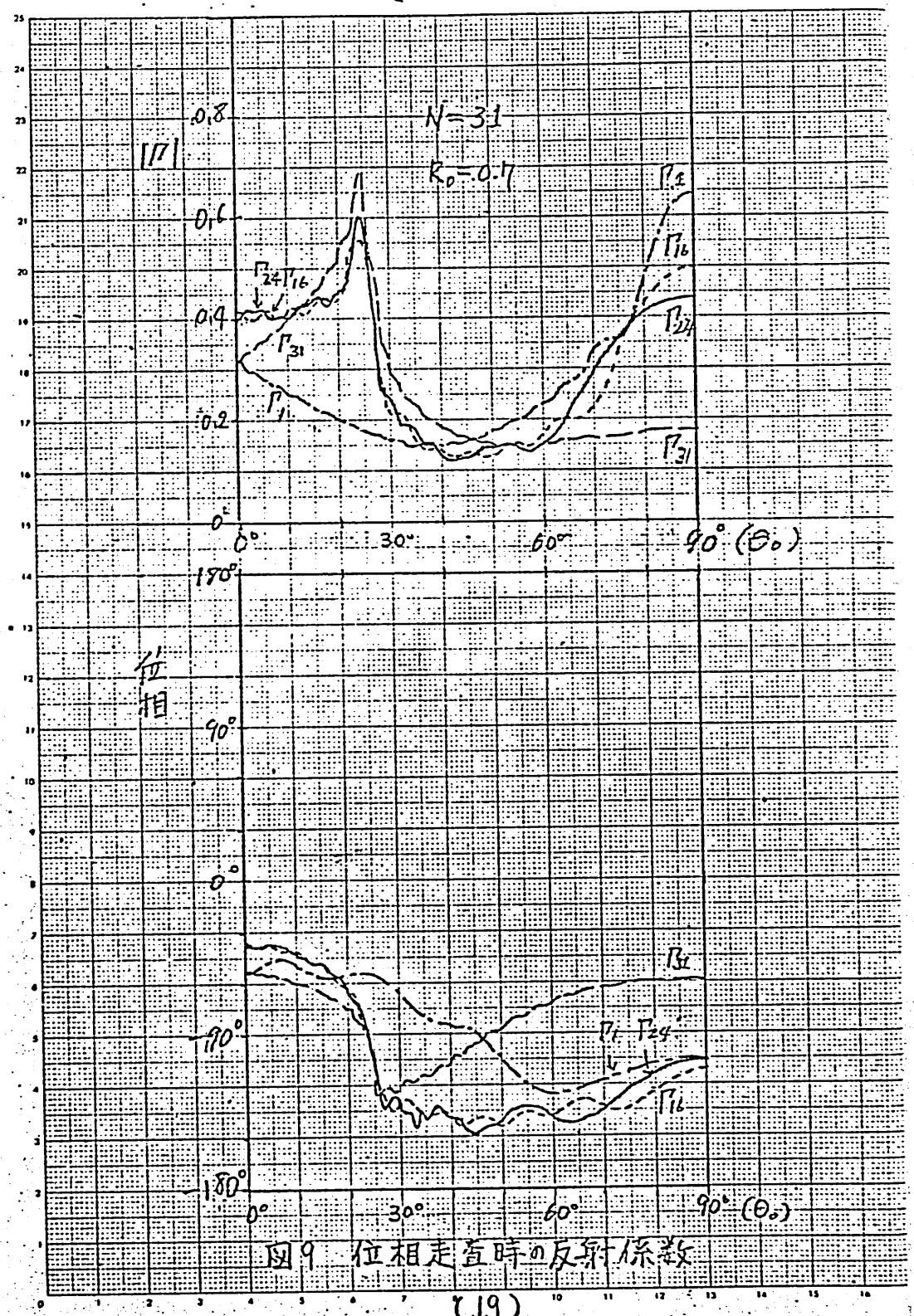


図9 位相走査時の反射係数

JIS-A4 1mm (250×180)

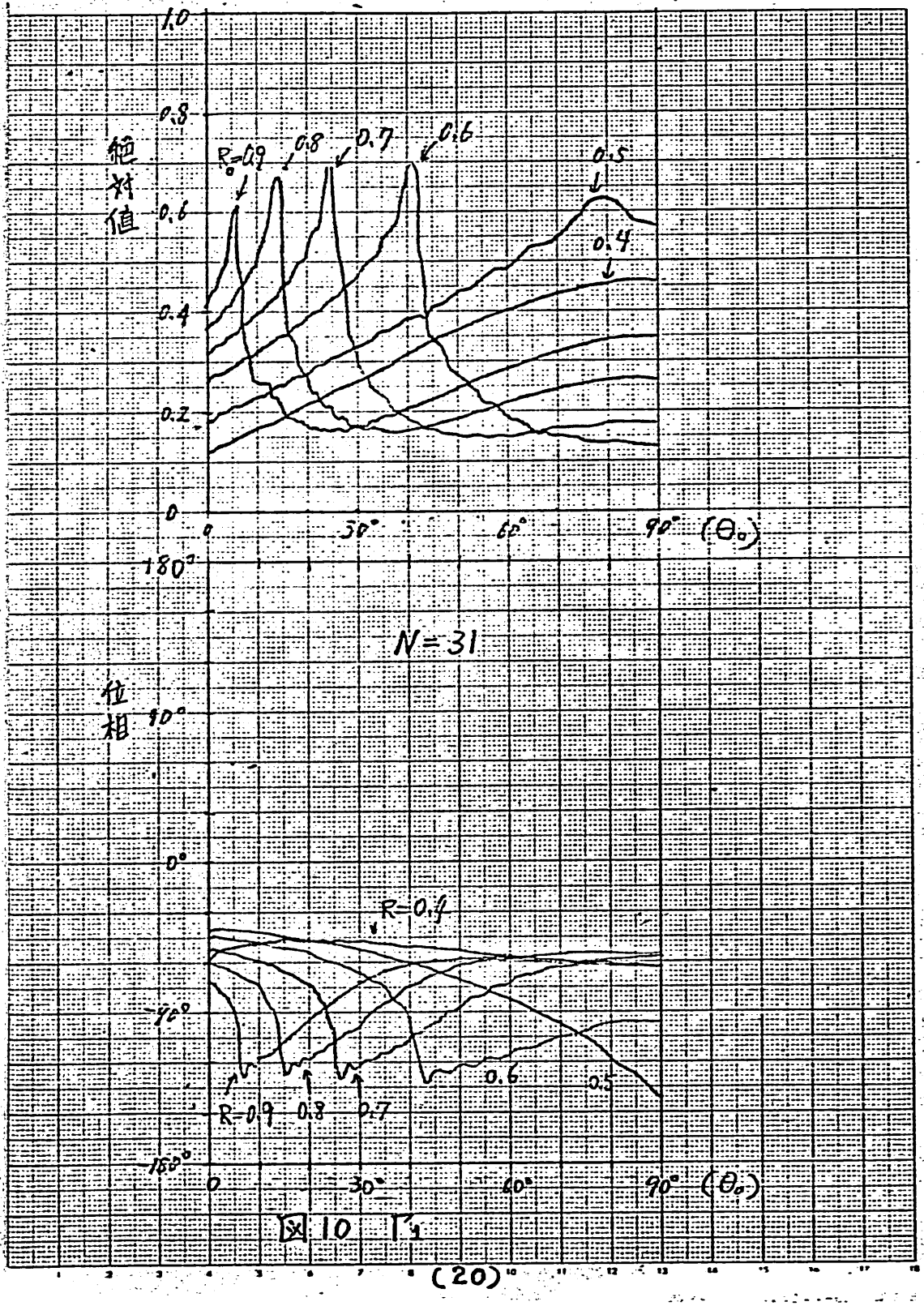

絶対値
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
R=0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0
30°
60°
90° (θ₀)
N=31
位相
90°
0°
-90°
-180°
R=0.1
R=0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0
30°
60°
90° (θ₀)

図 10

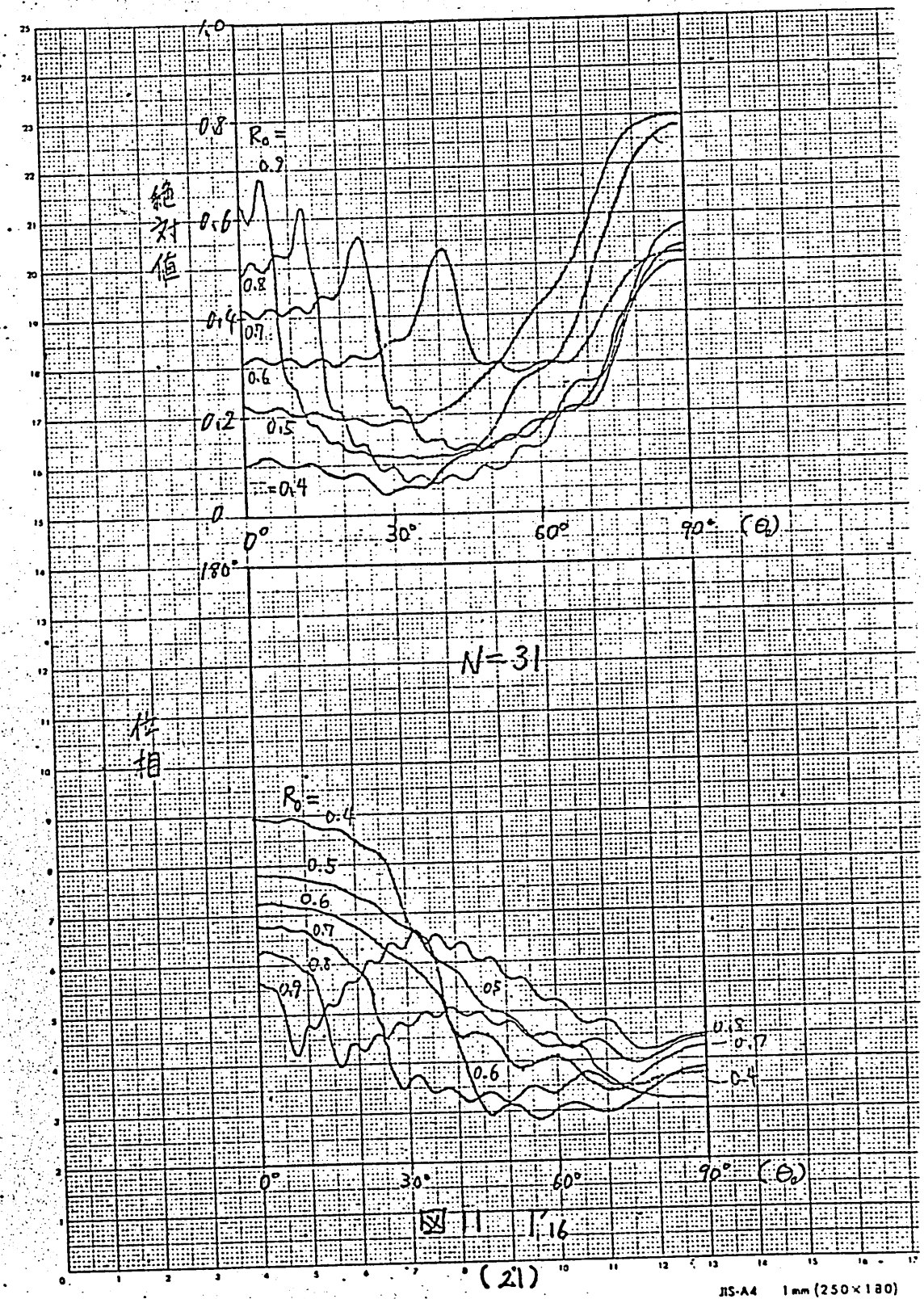


図 11 1.16

JIS-A4 1mm (250×180)

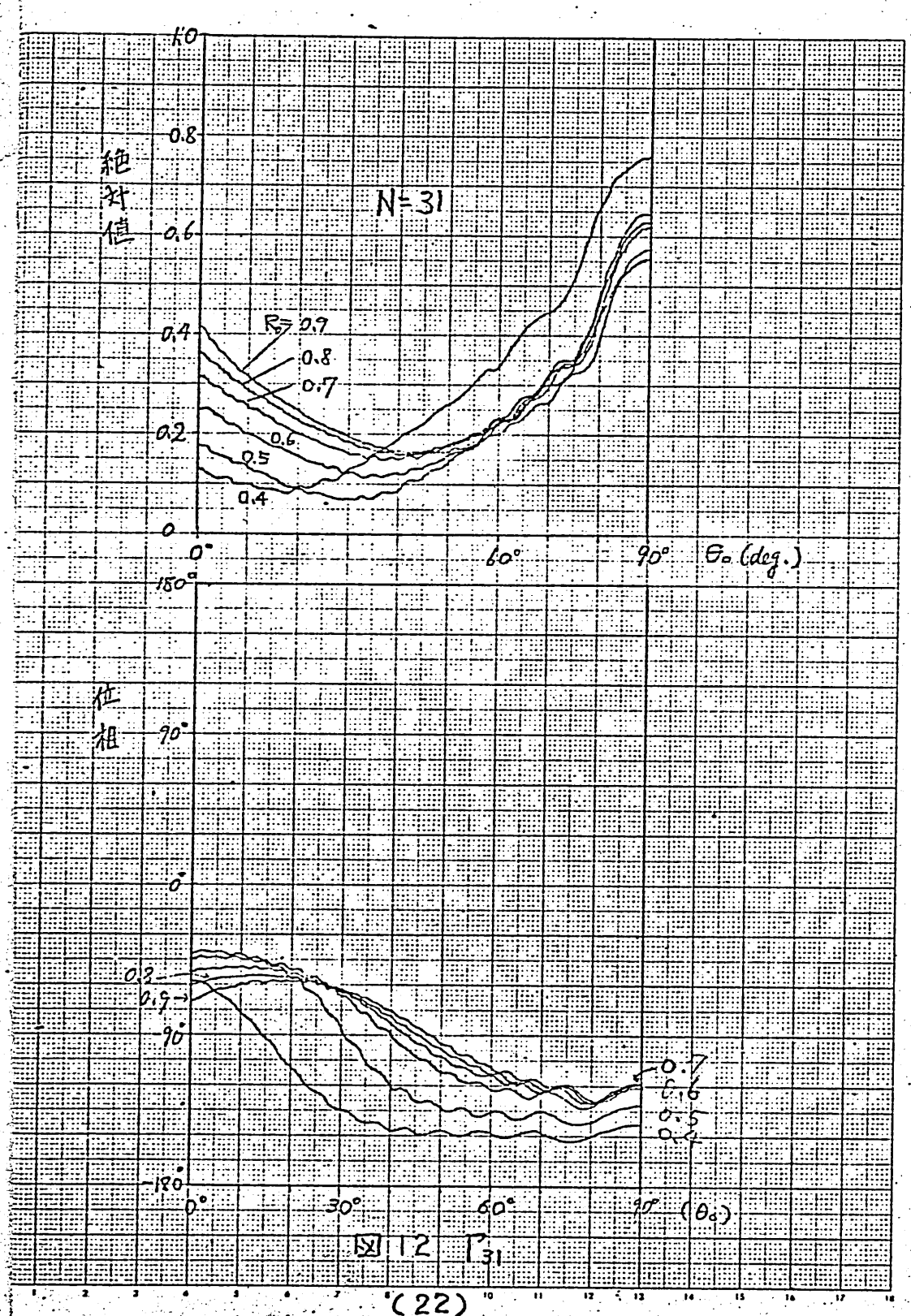


図 12 [31]

JIS-A4 1mm (250×180) コクヨ

「これらの反射係数（Active Reflection Coefficient）は各開口間隔R_0により異なった走査角度θ_0で極大値を取ることがわかる。この極大点の位置θ_0とR_0および開口数Nとの間の関係については次節で詳しく論じる。」

3.2 patternの切れ込み位置と開口間隔および開口数との関係

アレイの合成放射特性は，element array patternがわかれば直ちに知ることができるので，この節では主にelement patternについて考察する。

式（26）および（29）より

$$F^{[i]}(\theta,\phi)=\frac{F_0(\theta,\phi)}{1+\Gamma_0}\left[e^{j2\pi R_0(\frac{N+1}{2}-i)\{\sin\theta\cos(\Omega-\phi)-\sin\theta_0\cos(\Omega-\phi_0)\}}+\Gamma_i(\theta,\phi)\right] \tag{32}$$

ここに，$\Gamma_i(\theta,\phi)$は式（16）で与えられる反射係数で

$$\Gamma_i(\theta,\phi)=\sum_{l=1}^{N}S_{li}\,e^{j2\pi R_0\{(\frac{N+1}{2}-l)\sin\theta\cos(\Omega-\phi)-(\frac{N+1}{2}-i)\sin\theta_0\cos(\Omega-\phi_0)\}} \tag{33}$$

となる。これらを書き直すと次のようになる。

$$F^{[i]}(\theta,\phi)=\frac{F_0(\theta,\phi)}{1+\Gamma_0}e^{j2\pi R_0(\frac{N+1}{2}-i)\{\sin\theta\cos(\Omega-\phi)-\sin\theta_0\cos(\Omega-\phi_0)\}}\times\left[1+S_{ii}+\sum_{l\neq i}^{N}S_{li}\,e^{j2\pi R_0(i-l)\sin\theta\cos(\Omega-\phi)}\right] \tag{34}$$

$$\Gamma_i(\theta,\phi)=e^{j2\pi R_0(\frac{N+1}{2}-i)\{\sin\theta\cos(\Omega-\phi)-\sin\theta_0\cos(\Omega-\phi_0)\}}\times\left[S_{ii}+\sum_{l\neq i}^{N}S_{li}\,e^{j2\pi R_0(i-l)\sin\theta\cos(\Omega-\phi)}\right] \tag{35}$$

したがって，$F^{[i]}$およびΓ_iの性質を決めるのは

$$G_i(\theta,\phi)=\sum_{l\neq i}^{N}S_{li}\,e^{j2\pi R_0(i-l)\sin\theta\cos(\Omega-\phi)} \tag{36}$$

「であることがわかる。そこでG_iの特性について考察する。」

式（36）に散乱係数の近似式（31）を代入すると

$$G_i(\theta,\phi) = AR_0^{-B} e^{j\alpha_0} \sum_{\ell\neq i}^{N} \frac{1}{|i-\ell|^B} e^{-j2\pi R_0\{(i-\ell)\sin\theta\cos(\Omega-\phi)-C|i-\ell|\}} \quad (37)$$

いま，$i=1$ とすると

$$G_1(\theta,\phi) = AR_0^{-B} e^{j\alpha_0} \sum_{\ell=1}^{N-1} \frac{1}{\ell^B} e^{-j2\pi R_0\ell\{C+\sin\theta\cos(\Omega-\phi)\}} \quad (38)$$

となる。

element pattern に切れ込み現象が起るとすれば，G_1 の実数部が極大となり式（34）の第1項の1から差し引かれる形になっていることが期待される。したがって，そのような条件を求めれば切れ込み位置がわかる。なおこのとき Γ_1 は極大値を取る。

（i） $90°<\alpha_0<270°$ または $-270°<\alpha_0<-90°$ のとき

このときには，式（38）の和における位相項は

$$2\pi R_0\{C+\sin\theta\cos(\Omega-\phi)\} = 2\pi m, \quad (m=1,2,\cdots)$$

i.e.,
$$\sin\theta\cos(\Omega-\phi) = \frac{m}{R_0} - C \quad (39)$$

なる関係を満足しなければならない。R_0 および Ω が決まれば，切れ込み（deep notch）位置 (θ,ϕ) は式（39）より決る。例えば $\Omega=\phi=90°$，$R_0=0.7$，$m=1$ としたとき，表1より $C=1.00946$ であるから式（39）よりこのときの θ は（図3の $\alpha_0=-127.73°$ に着目して）

$$\theta = 24.8°$$

となり，数値計算した反射係数（図9または10，N=31）の極大位置 $\theta=24.5°$ とよく一致する。したがって，element pattern もこの位置付近で deep notch が生じ

ることが期待される。

(ii) $-90° < \alpha_0 < 90°$ のとき

このときには，次の関係が成り立つ．

$$2\pi R_0\{C+\sin\theta\cos(\Omega-\phi)\} = (2m-1)\pi, \quad (m=1,2,\cdots)$$

$$i.e., \quad \sin\theta\cos(\Omega-\phi) = \frac{m-\frac{1}{2}}{R_0} - C \tag{40}$$

次に，式（37）において $i=N$ とすると

$$G_N(\theta,\phi) = AR_0^{-B} e^{j\alpha_0} \sum_{\ell=1}^{N-1} \frac{1}{\ell^B} e^{-j2\pi R_0 \ell\{C-\sin\theta\cos(\Omega-\phi)\}} \tag{41}$$

となる．

(iii) $90° < \alpha_0 < 270°$ または $-270° < \alpha_0 < -90°$ のとき

このとき，式（41）の和における位相項は

$$2\pi R_0\{C-\sin\theta\cos(\Omega-\phi)\} = 2m\pi, \quad (m=1,2,\cdots)$$

$$i.e., \quad -\sin\theta\cos(\Omega-\phi) = \frac{m}{R_0} - C \tag{42}$$

なる関係を満足する位置 (θ,ϕ) に deep notch を生じる．

(iv) $-90° < \alpha_0 < 90°$ のとき

このときには，次の関係式を得る。

$$2\pi R_0\{C-\sin\theta\cos(\Omega-\phi)\} = (2m-1)\pi, \quad (m=1,2,\cdots)$$

$$i.e., \quad -\sin\theta\cos(\Omega-\phi) = \frac{m-\frac{1}{2}}{R_0} - C \tag{43}$$

さらに，$i = (N+1)/2$ とおくと

$$G_{\frac{N+1}{2}}(\theta,\phi) = AR_0^{-B} e^{j\alpha_0} \sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{\ell^B} \left[e^{-j2\pi R_0 \ell\{C+\sin\theta\cos(\Omega-\phi)\}} + e^{-j2\pi R_0 \ell\{C-\sin\theta\cos(\Omega-\phi)\}} \right] \tag{44}$$

となる．この場合には

(V) $90° < \alpha_0 < 270°$ または $-270° < \alpha_0 < -90°$ のとき

$$\pm \sin\theta\cos(\Omega-\phi) = \frac{m}{R_0} - C \quad (m=1,2,\cdots) \quad (45)$$

を満足する二つの位置に deep notch を生じ

(Vi) $-90° < \alpha_0 < 90°$ のとき

$$\pm \sin\theta\cos(\Omega-\phi) = \frac{m-\frac{1}{2}}{R_0} - C \quad (m=1,2,\cdots) \quad (46)$$

なる二つの位置に deep notch を生じるものと予想される。

$1 < i < N$ の $G_i(\theta,\phi)$ では上述の中間の性質を持つであろう。

以上をまとめると，deep notch の生じる位置と開口間隔との間の関係は，$C \fallingdotseq 1$ として図13および14のように描くことができる。

これまでの議論の正当性を示すため，$N=51$ までの直線状アレイの pattern を図15～25に示している。$N=21$ 以上であれば deep notch の位置は図13および14の近似結果とほぼ一致している。

なお，deep notch の位置のアレイ個数 N に対する依存度は，

$90° < \alpha_0 < 270°$ または $-270° < \alpha_0 < -90°$ のとき

$$\pm \sin\theta\cos(\Omega-\phi) = \frac{m}{R_0} - \left(C - \frac{1}{N}\right), \quad (m=1,2,\cdots) \quad (47)$$

$-90° < \alpha_0 < 90°$ のとき

$$\pm \sin\theta\cos(\Omega-\phi) = \frac{m-\frac{1}{2}}{R_0} - \left(C - \frac{1}{N}\right), \quad (m=1,2,\cdots) \quad (48)$$

として考慮できる。

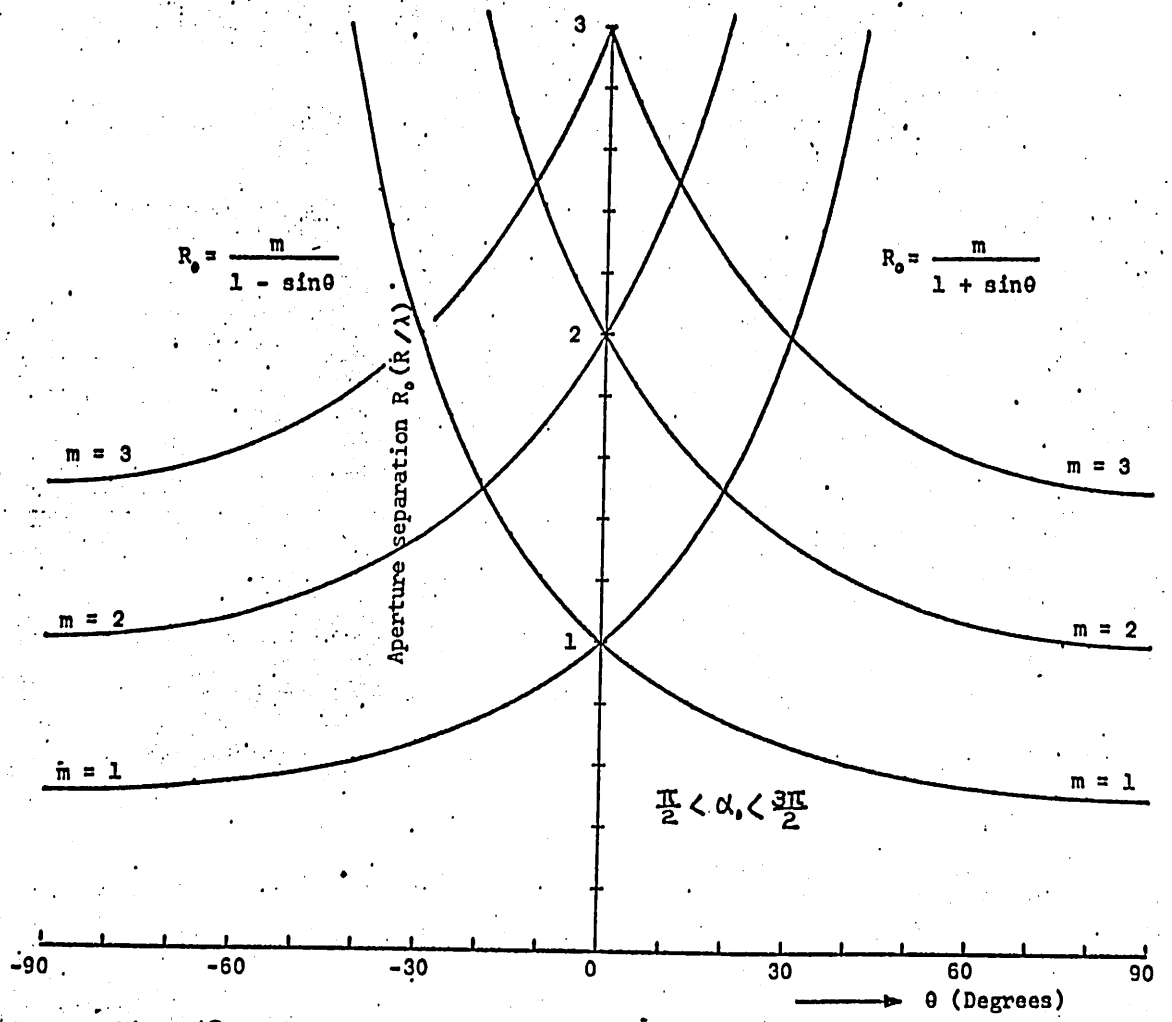


Fig. 13 The aperture separation R_0 versus break down or up angle θ in element array patterns of a finite waveguide array in E-plane.

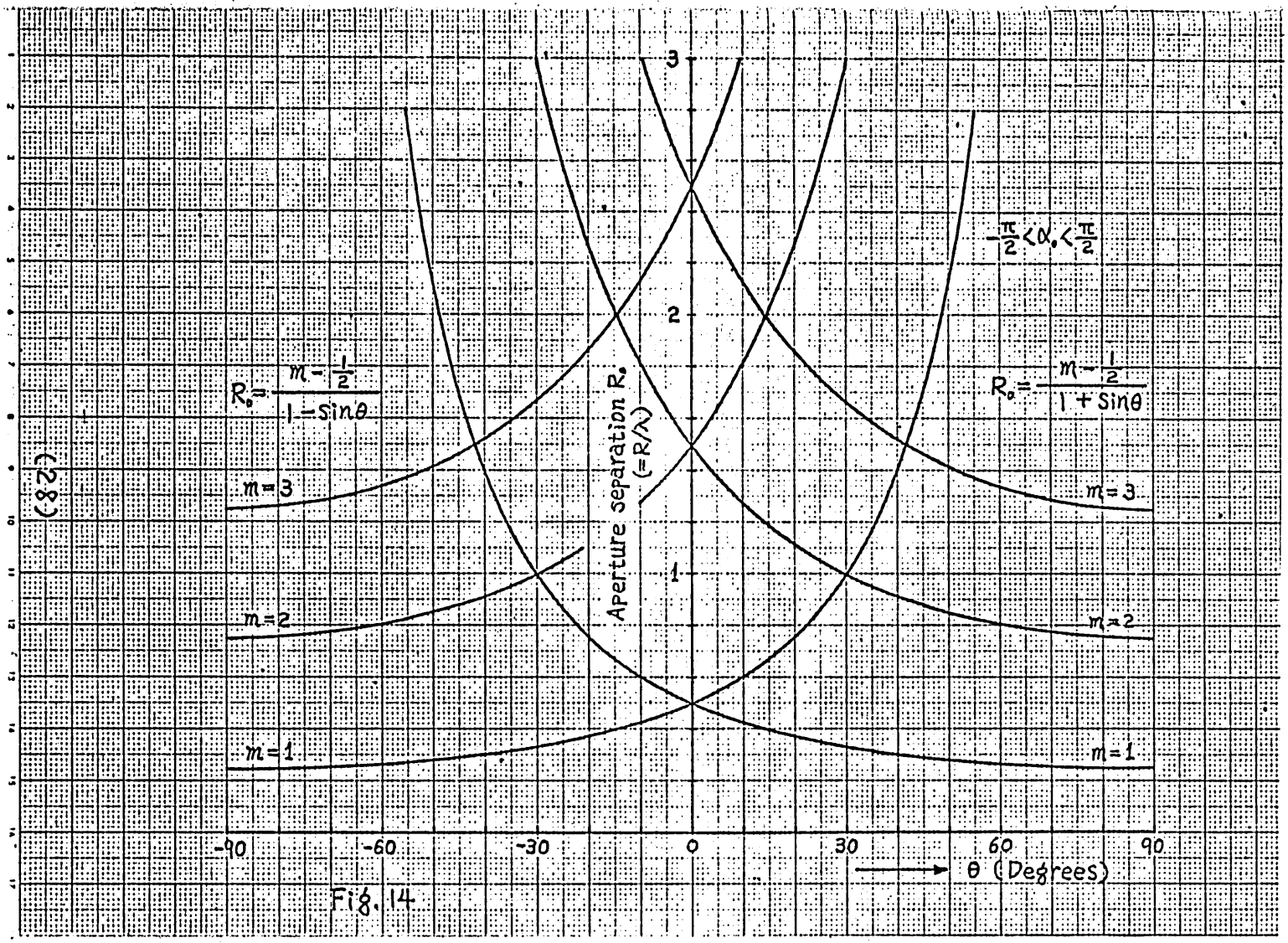

$-\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$
$R_0 = \frac{m-\frac{1}{2}}{1+\sin\theta}$
$R_0 \approx \frac{m-\frac{1}{2}}{1-\sin\theta}$
(2.8)
Aperture separation R_0 (=R/λ)
m=3
m=2
m=1
3
2
1
-90
-60
-30
0
30
60
90
θ (Degrees)

Fig. 14

式(30)のところで期待したように，数十個の開口より成るアレイでは，合成放射特性の主放射方向の値はアレイの中心の開口に関するelement patternによく追随していることが図15～22よりわかる。

4. むすび

導波管開口より成る平面状有限アレイにおける散乱係数に対する定留表示式を導き，これをもとにして散乱係数を求め，これらの値を最小自乗法によって処理することにより散乱係数の近似式を求めた。この近似式を用いることにより，直線状アレイの放射特性における切れ込み(deep notch)現象を解明しその位置と開口間隔および開口数との間の関係式を導いた。その結果，この関係式は理論的に計算した放射特性の切れ込み位置を正確に与えることがわかった。

今後の問題点として，ここで行った計算が主モード近似であるため(直線状アレイの場合には本方法の主モード近似でも十分と思われるが)，高次のモードを考慮した場合および面状アレイになった場合に本方法がどこまで有効であるか，を検討することが残されている。

謝辞

終りに当り，有益なる御討論を戴いた大阪大学基礎工学部電気工学科牧本研究室の西村貞秀助手，数値解析をして戴いた学部学生藤本博俊君，および日頃御討論戴く牧本研究室の皆様に深く感謝する。

「文 献

1) V. Galindo & C. P. Wu: "Numerical Solutions for an Infinite Phased Array of Rectangular Waveguides with Thick Walls," IEEE, Trans., AP-14, 2, P.149 (March 1966)

———————: "Properties of a Phased Array of Rectangular Waveguides with Thin Walls," IEEE, Trans., AP-14, 2, P.163 (March 1966)

2) G. F. Farrell et al: "Mutual Coupling in Infinite Planar Arrays of Rectangular Waveguide Horns," IEEE, Trans., AP-16, 4, P.405 (July 1968)

3) G. V. Borgiotti: "Modal Analysis of Periodic Planar Phased Array of Apertures," IEEE, Proc., 56, 11, P.1881 (November 1968)

4) Y. Sugio & T. Makimoto: "Mutual Coupling Between Open-Ended Waveguides Constituting a Finite Planar Array," 1971 ISAP in Japan, 2-I D1, P.51

5) 杉尾, 牧本: "導波管開口平面状有限アレイにおける散乱係数の定留表示式," 信学論(B) 技術談話室 (掲載予定)

6) 杉尾, 牧本: "平面状有限アレイを構成する導波管開口間の相互結合," 信学論(B), 55-B 3, P.33 (昭47-03)

7) Y. Sugio & T. Makimoto: "Stationary Expressions for Scattering Coefficients of Rectangular-Waveguides with Dielectric Plugs Constituting a Finite Planar Array," IEEE, Trans., AP (to be published)

「8) 杉尾，牧本：“有限導波管開口アレイの相互結合，”
信学会アンテナ・伝播研資，A·P70-44 (1970-10)

付　録

$$Q_{mn}^{rs}(\ell H,iH)=\frac{j}{4}\frac{\lambda_a\lambda_b}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n\varepsilon_r\varepsilon_s}}{k_{mn}k_{rs}}\left[4\left\{\frac{m\lambda}{a}\frac{r\lambda}{a}A_{mn}^{rs}(\ell,i)+\frac{n\lambda}{b}\frac{s\lambda}{b}B_{mn}^{rs}(\ell,i)\right\}\right.$$
$$\left.-k_{mn}^2k_{rs}^2C_{mn}^{rs}(\ell,i)\right] \qquad (A\cdot1)$$

$$Q_{mn}^{rs}(\ell H,iE)=2j\frac{(\lambda_a\lambda_b)^2}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}\frac{\sqrt{\varepsilon_m\varepsilon_n}}{k_{mn}k_{rs}}\left[\frac{m\lambda}{a}\frac{s\lambda}{b}A_{mn}^{rs}(\ell,i)-\frac{r\lambda}{a}\frac{n\lambda}{b}B_{mn}^{rs}(\ell,i)\right] \qquad (A\cdot2)$$

$$Q_{mn}^{rs}(\ell E,iE)=4j\frac{\lambda_a\lambda_b}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}\frac{1}{k_{mn}k_{rs}}\left[\frac{n\lambda}{b}\frac{s\lambda}{b}A_{mn}^{rs}(\ell,i)+\frac{m\lambda}{a}\frac{r\lambda}{a}B_{mn}^{rs}(\ell,i)\right] \qquad (A\cdot3)$$

ここに，$k_{mn}=\sqrt{(\frac{m\lambda}{a})^2+(\frac{n\lambda}{b})^2}$ であり，さらに

$$A_{mn}^{rs}(\ell,i)=\int_{V_i^-}^{V_i^+}\int_{U_i^-}^{U_i^+}\int_{V_\ell^-}^{V_\ell^+}\int_{U_\ell^-}^{U_\ell^+}\phi(x_\ell,y_\ell;x_i,y_i)\sin\frac{m\pi\lambda}{a}(x_\ell-U_\ell^-)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}(y_\ell-V_\ell^-)$$
$$\times\sin\frac{r\pi\lambda}{a}(x_i-U_i^-)\cos\frac{s\pi\lambda}{b}(y_i-V_i^-)\,dx_\ell dy_\ell dx_i dy_i, \qquad (A\cdot4)$$

$$B_{mn}^{rs}(\ell,i)=\int_{V_i^-}^{V_i^+}\int_{U_i^-}^{U_i^+}\int_{V_\ell^-}^{V_\ell^+}\int_{U_\ell^-}^{U_\ell^+}\phi(x_\ell,y_\ell;x_i,y_i)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}(x_\ell-U_\ell^-)\sin\frac{n\pi\lambda}{b}(y_\ell-V_\ell^-)$$
$$\times\cos\frac{r\pi\lambda}{a}(x_i-U_i^-)\sin\frac{s\pi\lambda}{b}(y_i-V_i^-)\,dx_\ell dy_\ell dx_i dy_i, \qquad (A\cdot5)$$

$$C_{mn}^{rs}(\ell,i)=\int_{V_i^-}^{V_i^+}\int_{U_i^-}^{U_i^+}\int_{V_\ell^-}^{V_\ell^+}\int_{U_\ell^-}^{U_\ell^+}\phi(x_\ell,y_\ell;x_i,y_i)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}(x_\ell-U_\ell^-)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}(y_\ell-V_\ell^-)$$
$$\times\cos\frac{r\pi\lambda}{a}(x_i-U_i^-)\cos\frac{s\pi\lambda}{b}(y_i-V_i^-)\,dx_\ell dy_\ell dx_i dy_i, \qquad (A\cdot6)$$

$$\phi(x_\ell,y_\ell;x_i,y_i)=e^{-j2\pi R_{\ell i}}/R_{\ell i},\quad R_{\ell i}^2=(x_\ell-x_i)^2+(y_\ell-y_i)^2, \qquad (A\cdot7)$$

$$U_i^\pm=(u_i\pm\tfrac{a}{2})/\lambda,\quad V_i^\pm=(v_i\pm\tfrac{b}{2})/\lambda \quad (\text{複号同順}) \qquad (A\cdot8)$$

これらの4重積分は積分変数を

$$\left.\begin{aligned}\tau&=x_\ell-x_i-(u_\ell-u_i)/\lambda,\quad \sigma=y_\ell-y_i-(v_\ell-v_i)/\lambda\\ \mu&=x_\ell+x_i-(u_\ell+u_i)/\lambda,\quad \nu=y_\ell+y_i-(v_\ell+v_i)/\lambda\end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot9)$$

「と変換して

$$\phi(\tau,\sigma)=\frac{e^{-j2\pi\sqrt{\{\tau+(u_1-u_2)/\lambda\}^2+\{\sigma+(v_1-v_2)/\lambda\}^2}}}{\sqrt{\{\tau+(u_1-u_2)/\lambda\}^2+\{\sigma+(v_1-v_2)/\lambda\}^2}} \quad (A\cdot10)$$

とおくことにより次のような2重積分にもどすことができる。

(i) $m\neq r,\ n\neq s$

$$\left.\begin{matrix}A_{mn}^{rs}\\ B_{mn}^{rs}\\ C_{mn}^{rs}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi^2}\frac{a}{\lambda}\frac{b}{\lambda}\frac{1}{(m^2-r^2)(n^2-s^2)}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}\{\phi(\tau,\sigma)+(-1)^{m+r}\phi(-\tau,\sigma)+(-1)^{n+s}\phi(\tau,-\sigma)+(-1)^{m+r+n+s}\phi(-\tau,-\sigma)\}$$

$$\times\left\{\begin{matrix}[(-1)^{m+r}m\sin\frac{r\pi\lambda}{a}\tau-r\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau][(-1)^{n+s}s\sin\frac{s\pi\lambda}{b}\sigma-n\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma]\\ [(-1)^{m+r}r\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau-m\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau][(-1)^{n+s}n\sin\frac{s\pi\lambda}{b}\sigma-s\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma]\\ [(-1)^{m+r}r\sin\frac{r\pi\lambda}{a}\tau-m\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau][(-1)^{n+s}s\sin\frac{s\pi\lambda}{b}\sigma-n\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma]\end{matrix}\right\}d\tau d\sigma$$

(ii) $m=r\neq0,\ n=s\neq0$

$$\left.\begin{matrix}A_{mn}^{mn}\\ B_{mn}^{mn}\\ C_{mn}^{mn}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}\{\phi(\tau,\sigma)+\phi(-\tau,\sigma)+\phi(\tau,-\sigma)+\phi(-\tau,-\sigma)\}$$

$$\times\left\{\begin{matrix}[(\frac{a}{\lambda}-\tau)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}\tau+\frac{a}{m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau][(\frac{b}{\lambda}-\sigma)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma-\frac{b}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma]\\ [(\frac{a}{\lambda}-\tau)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}\tau-\frac{a}{m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau][(\frac{b}{\lambda}-\sigma)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma+\frac{b}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma]\\ [(\frac{a}{\lambda}-\tau)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}\tau-\frac{a}{m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau][(\frac{b}{\lambda}-\sigma)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma-\frac{b}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma]\end{matrix}\right\}d\tau d\sigma$$

(iii) $m=r\neq0,\ n\neq s$

$$\left.\begin{matrix}A_{mn}^{ms}\\ B_{mn}^{ms}\\ C_{mn}^{ms}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\pi}\frac{b}{\lambda}\frac{1}{n^2-s^2}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}[\phi(\tau,\sigma)+\phi(-\tau,\sigma)+(-1)^{n+s}\{\phi(\tau,-\sigma)+\phi(-\tau,-\sigma)\}]$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{a}{\lambda}-\tau\right)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}\tau+\frac{a}{m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau\right]\left[(-1)^{n+s}s\sin\frac{s\pi\lambda}{b}\sigma-n\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma\right]\\ \left[\left(\frac{a}{\lambda}-\tau\right)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}\tau-\frac{a}{m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau\right]\left[(-1)^{n+s}n\sin\frac{s\pi\lambda}{b}\sigma-s\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma\right]\\ \left[\left(\frac{a}{\lambda}-\tau\right)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}\tau-\frac{a}{m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau\right]\left[(-1)^{n+s}s\sin\frac{s\pi\lambda}{b}\sigma-n\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma\right]\end{array}\right\}d\tau d\sigma$$

(iv) $m\neq r,\quad n=s\neq 0$

$$\left.\begin{array}{l}A_{mn}^{rn}\\ B_{mn}^{rn}\\ C_{mn}^{rn}\end{array}\right\}=\frac{\frac{1}{2\pi}\frac{a}{\lambda}}{m^2-r^2}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}\left[\phi(\tau,\sigma)+\phi(\tau,-\sigma)+(-1)^{m+r}\{\phi(-\tau,\sigma)+\phi(-\tau,-\sigma)\}\right]$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[(-1)^{m+r}m\sin\frac{r\pi\lambda}{a}\tau-r\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau\right]\left[\left(\frac{b}{\lambda}-\sigma\right)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma-\frac{b}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma\right]\\ \left[(-1)^{m+r}r\sin\frac{r\pi\lambda}{a}\tau-m\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau\right]\left[\left(\frac{b}{\lambda}-\sigma\right)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma+\frac{b}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma\right]\\ \left[(-1)^{m+r}r\sin\frac{r\pi\lambda}{a}\tau-m\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau\right]\left[\left(\frac{b}{\lambda}-\sigma\right)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma-\frac{b}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma\right]\end{array}\right\}d\tau d\sigma$$

(v) $m\neq r,\quad n=s=0$

$$\left.\begin{array}{l}A_{m0}^{r0}\\ C_{m0}^{r0}\end{array}\right\}=\frac{\frac{1}{\pi}\frac{a}{\lambda}}{m^2-r^2}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}\left[\phi(\tau,\sigma)+\phi(\tau,-\sigma)+(-1)^{m+r}\{\phi(-\tau,\sigma)+\phi(-\tau,-\sigma)\}\right]$$

$$\times\left(\frac{b}{\lambda}-\sigma\right)\left\{\begin{array}{l}(-1)^{m+r}m\sin\frac{r\pi\lambda}{a}\tau-r\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau\\ (-1)^{m+r}r\sin\frac{r\pi\lambda}{a}\tau-m\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau\end{array}\right\}d\tau d\sigma$$

(vi) $m=r=0,\quad n\neq s$

$$\left.\begin{array}{l}B_{0n}^{0s}\\ C_{0n}^{0s}\end{array}\right\}=\frac{\frac{1}{\pi}\frac{b}{\lambda}}{n^2-s^2}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}}\left[\phi(\tau,\sigma)+\phi(-\tau,\sigma)+(-1)^{n+s}\{\phi(\tau,-\sigma)+\phi(-\tau,-\sigma)\}\right]$$

$$\times\left(\frac{a}{\lambda}-\tau\right)\left\{\begin{array}{l}(-1)^{n+s}n\sin\frac{s\pi\lambda}{b}\sigma-s\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma\\ (-1)^{n+s}s\sin\frac{s\pi\lambda}{b}\sigma-n\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma\end{array}\right\}d\tau d\sigma$$

(vii) $m=r\neq 0,\quad n=s=0$

$$\left.\begin{matrix} A_{m0}^{m0} \\ C_{m0}^{m0} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}} \{\phi(\tau,\sigma)+\phi(-\tau,\sigma)+\phi(\tau,-\sigma)+\phi(-\tau,-\sigma)\}$$
$$\times\left(\frac{b}{\lambda}-\sigma\right)\left\{\begin{matrix} \left(\frac{a}{\lambda}-\tau\right)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}\tau+\frac{a}{m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau \\ \left(\frac{a}{\lambda}-\tau\right)\cos\frac{m\pi\lambda}{a}\tau-\frac{a}{m\pi\lambda}\sin\frac{m\pi\lambda}{a}\tau \end{matrix}\right\} d\tau d\sigma$$

(viii) $m=r=0,\quad n=s\neq 0$

$$\left.\begin{matrix} B_{on}^{on} \\ C_{on}^{on} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{b}{\lambda}}\int_0^{\frac{a}{\lambda}} \{\phi(\tau,\sigma)+\phi(-\tau,\sigma)+\phi(\tau,-\sigma)+\phi(-\tau,-\sigma)\}$$
$$\times\left(\frac{a}{\lambda}-\tau\right)\left\{\begin{matrix} \left(\frac{b}{\lambda}-\sigma\right)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma+\frac{b}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma \\ \left(\frac{b}{\lambda}-\sigma\right)\cos\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma-\frac{b}{n\pi\lambda}\sin\frac{n\pi\lambda}{b}\sigma \end{matrix}\right\} d\tau d\sigma$$

Fig. 15 Radiation Patterns in E-plane of the 31 Element Array.

Fig. 16 Radiation Patterns in E-plane of the 31 Element Array.

(36)

Fig. 17 Radiation Patterns in E-plane of the 31 Element Array.

(37)

Fig. 18 Radiation Patterns in E-plane of the 31 Element Array.

Fig. 19 Radiation Patterns in E-plane of the 31 Element Array.

Fig. 20 Radiation Patterns in E-plane of the 31 Element Array.

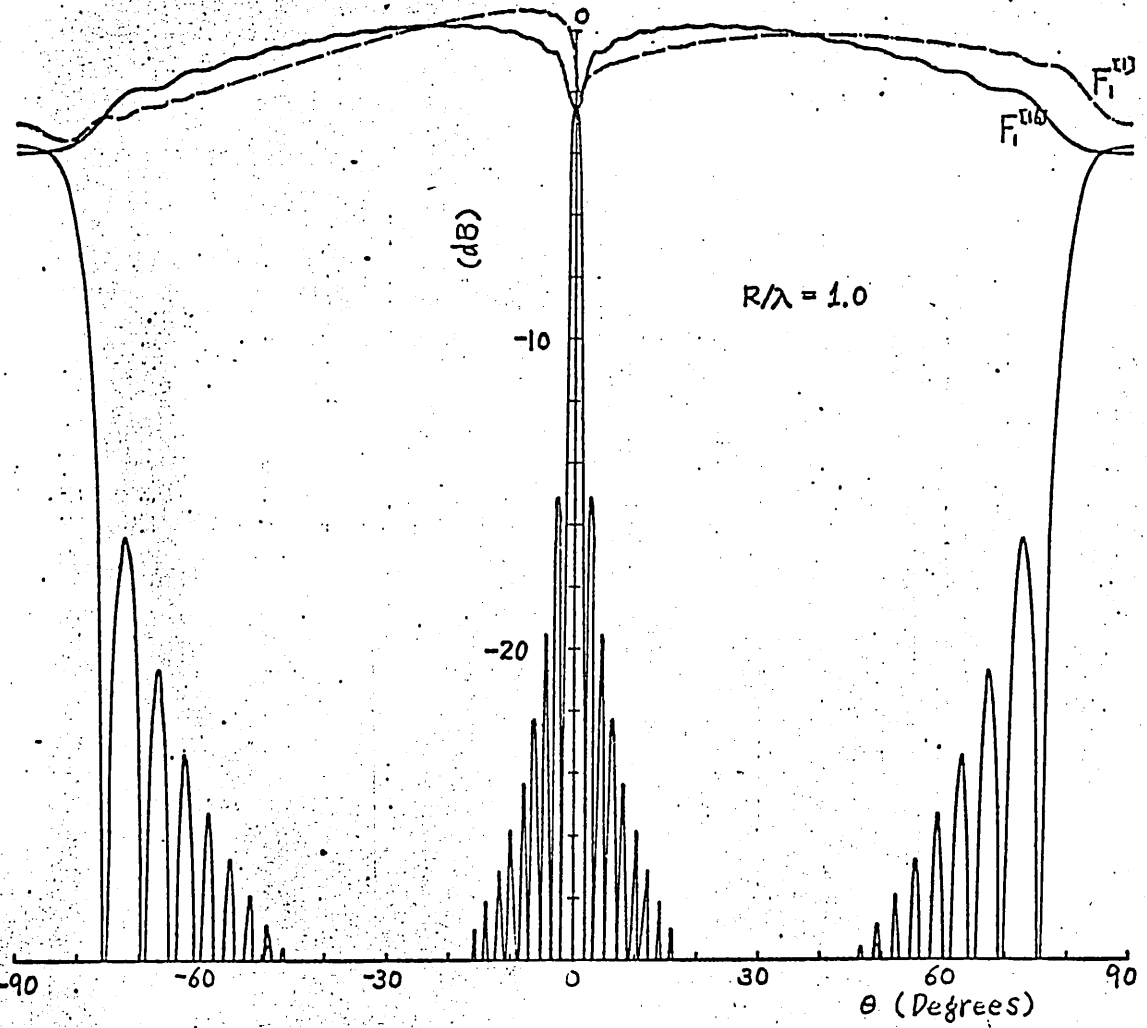


Fig. 21

Fig.22 Center Element Patterns in E-plane (R_0=0.7).

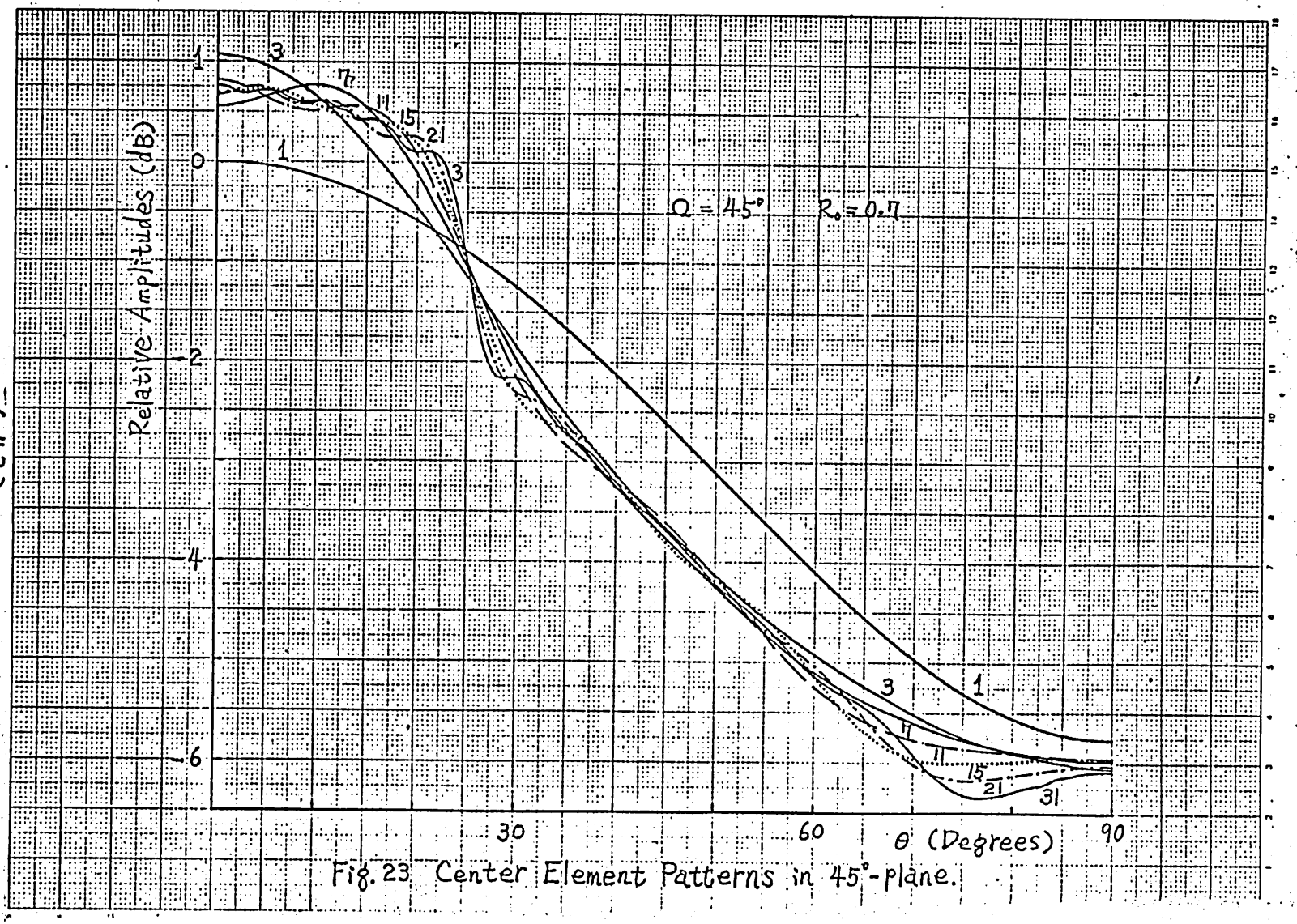


Fig. 23 Center Element Patterns in 45°-plane.

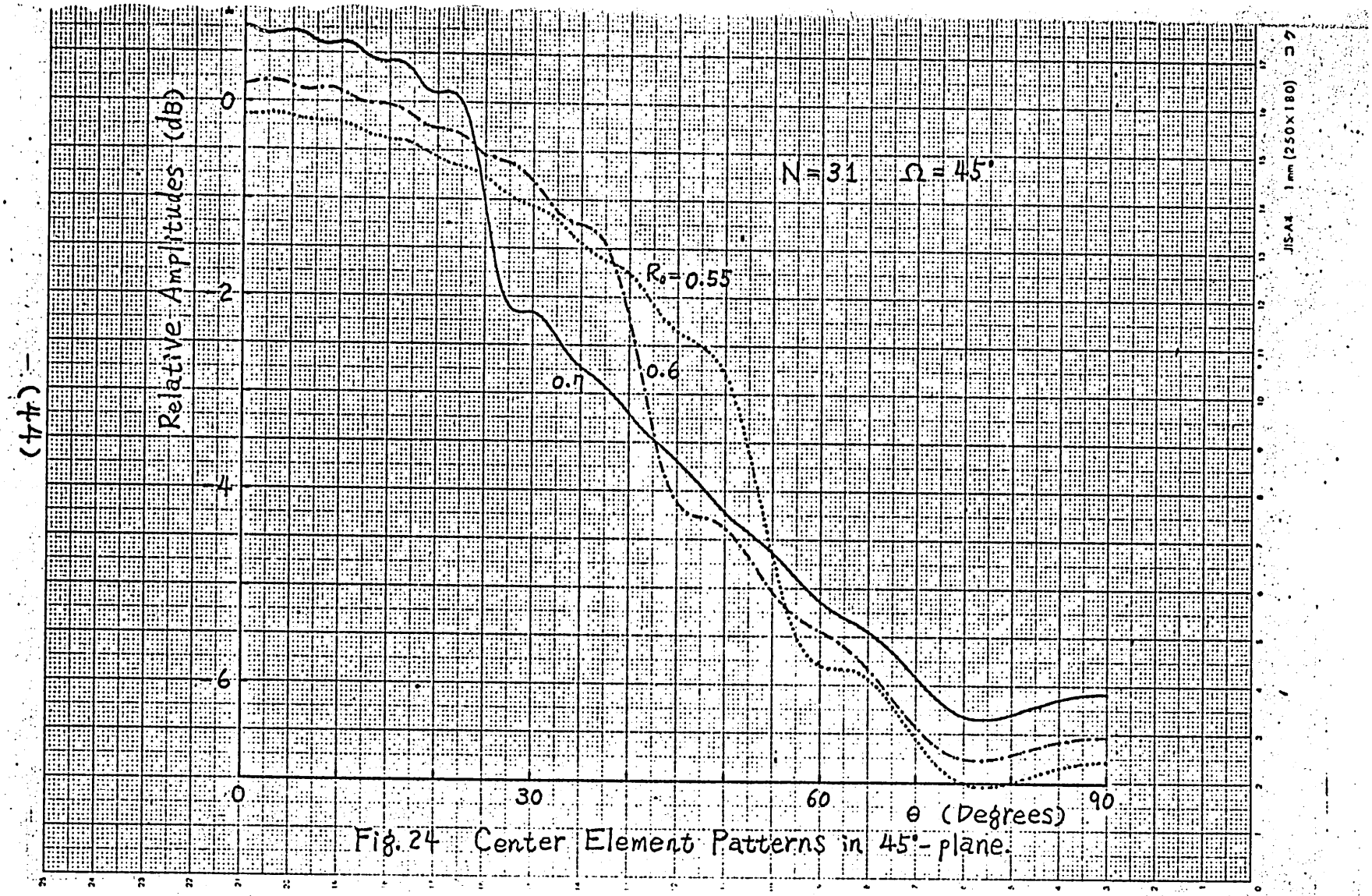


Fig. 24 Center Element Patterns in 45°-plane.

Fig. 25 Center Element Patterns in H-plane.

輻射科学研究会資料

テーパ状分布結合線路間のモード結合理論とその光回路への応用

岩　崎　敬一郎

倉　薗　貞　夫

（大阪大学・工学部）

1972年6月30日

1. まえがき

たがいに線路定数が等しく，軸方向に一様な結合のある二つの線路間の分布結合現象については，S. E. Millerの研究[1]があり，広く知られている．また，最近，結合した二つの線路の伝搬定数が異なる場合について，結合度を軸方向に周期的に変化させると，完全な電力の移行が行なわれることが理論的に明らかにされ[2],[3]，モード励振器，方向性結合器などの広帯域化等をねらいとしてこれに関連する研究があいついで報告された[4],[5],[6]．

本論文では，さらに一般化されたモデルとして，二つの開放形単一モード誘電体線路が並行しておかれ，その間の距離が伝送方向にゆるやかに変化しているようなテーパ状分布結合線路をとりあげ，その結合について考察する．まず，ここで対象とする，軸方向に伝搬定数ならびに結合係数がゆるやかに変化する場合のモード結合方程式を導び き，摂動法による近似解を求める．ついで，二三のテーパ状分布結合線路について計算を行ない，数値例を示して詳しく検討する．

なお，ここで述べるテーパ状分布結合理論は，最近活発に研究がなされているＩＣ化した光回路[7],[8] の解析や設計にさいして有効な手段を与えるものであると考えられる．

2. モード結合方程式

図１に示すように，$x-z$ 面内でそれぞれゆるやかな曲線 $x_1=f_1(z)$ および $x_2=f_2(z)$ に沿っておかれた誘電体線路１および２を伝搬する光波の振幅をそれぞれ E_1 および E_2 とすると，モード結合方程式は次のように表わされる．

$$\left.\begin{aligned}\frac{dE_1}{dz}&=-\gamma_1 E_1+kE_2\\ \frac{dE_2}{dz}&=-\gamma_2 E_2+kE_1\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

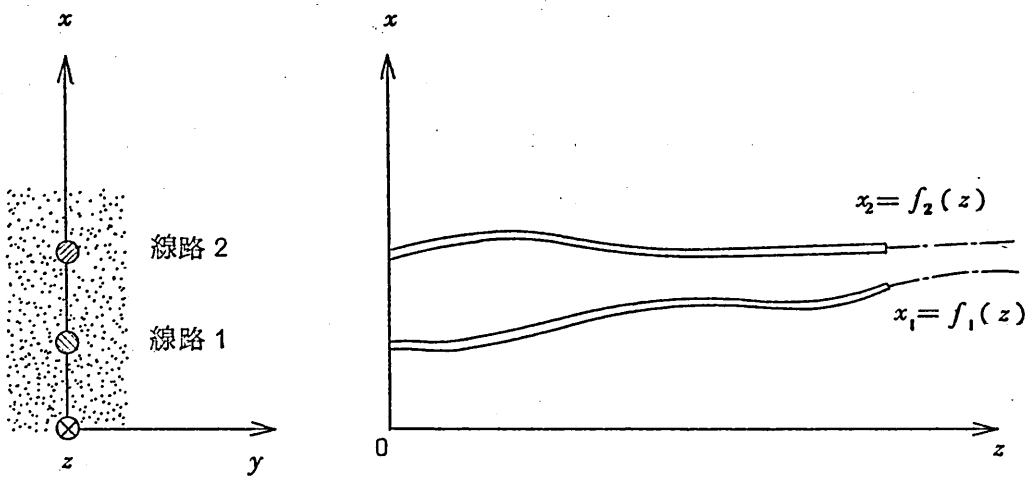


図１　ゆるやかな曲線に沿う分布結合線路

ただし

γ_1, γ_2 ： 結合系における線路１および２の z 軸に沿う伝搬定数

k ： 線路１および２の間の結合係数

誘電体線路の曲りは十分なめらかであって，線路上の反射およびモード変換は無視し得るものと仮定する．式(1)において，γ_1, γ_2 および k はこの場合 z の函数となる．いま二つの誘電体線路は無損失であり，結合はリアクティブであるとする．また，線路１および２が曲っていない場合のおのおのの線路に沿う方向の位相定数は互いに β_0 であるとすると，それらは近似的に次のように表わされる．

$$\gamma_1 = j\beta_0\sqrt{1+f_1'^2} \tag{2}$$

$$\gamma_2 = j\beta_0\sqrt{1+f_2'^2} \tag{3}$$

$$k = jC_0 e^{-\phi|f_1-f_2|} \tag{4}$$

ただし

$$|f_1'(z)| \ll 1 \quad \text{かつ} \quad |f_2'(z)| \ll 1. \tag{5}$$

ここにC_0およびϕ（$\phi > 0$）は線路構造によってきまる定数である．以上の諸式よりこの場合のモード結合方程式はつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE_1}{dz} &= -j\beta_0\sqrt{1+f_1'^2}E_1 + jC_0e^{-\phi|f_1-f_2|}E_2 \\ \frac{dE_2}{dz} &= -j\beta_0\sqrt{1+f_2'^2}E_2 + jC_0e^{-\phi|f_1-f_2|}E_1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

いま入力端$z=0$において線路1に単位振幅の光波を加えるものとする．すなわち初期条件を

$$\left.\begin{aligned} E_1(0) &= 1 \\ E_2(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

とする．連立微分方程式(6)を初期条件式(7)のもとに解くわけであるが，

$$\beta_0\sqrt{1+f_1'^2} \fallingdotseq \beta_0\sqrt{1+f_2'^2} \tag{8}$$

を仮定するかぎり，すなわち二つの線路が互いに平行な曲り方あるいは対称な曲り方をしていないかぎり，一般に厳密には解くことができない．

そこでモード結合方程式(6)を近似的に解いて，任意の点zにおける線路の振幅を求めるには，次の二つの方法が考えられる．一つは線路の振幅が入力端における値から少しずつ変化していくとして初期値にわずかずつの補正項を加えていく方法である．もう一つは伝搬定数および結合係数が一定であるときのよく知られている振幅変化に，伝搬定数および結合係数が場所によって変化することによる補正を加える方法である．

前者はH. E. Roweが行なったPicard法による解法[9], [10]である．この方法は結合がきわめて弱い場合には有効な方法であるが，一方の線路の電力の大部分が他方の線路へ移りうるような強い結合の場合にはきわめて多くの

補正項を加えなければならず，実際上計算が不可能に近い（付録(A)参照）．これに対してここで述べる後者の方法は大部分の電力が移行するような強い結合の場合にも有効である．

さて，モード結合方程式(6)において

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \tilde{E}_1\, e^{-j\beta_0\int_o^z \sqrt{1+f_1'^2}\,dz} \\ E_2 &= \tilde{E}_2\, e^{-j\beta_0\int_o^z \sqrt{1+f_2'^2}\,dz} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tilde{E}_1}{dz} &= jC_0 e^{-\phi|f_1-f_2|}\, e^{j\beta_0\int_o^z(\sqrt{1+f_1'^2}-\sqrt{1+f_2'^2})dz}\,\tilde{E}_2 \\ \frac{d\tilde{E}_2}{dz} &= jC_0 e^{-\phi|f_1-f_2|}\, e^{-j\beta_0\int_o^z(\sqrt{1+f_1'^2}-\sqrt{1+f_2'^2})dz}\,\tilde{E}_1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

となる．ここで線路の曲り方が十分ゆるやかであって

$$e^{j\beta_0\int_o^z(\sqrt{1+f_1'^2}-\sqrt{1+f_2'^2})dz}$$

$$\simeq \quad 1 + j\,\frac{\beta_0}{2}\int_o^z (f_1'^2 - f_2'^2)\,dz \tag{11}$$

と近似できるとき，式(10)および式(11)より

$$\frac{d^2\tilde{E}_1}{dz^2} - \frac{\{C(z)(1+\Delta(z))\}'}{C(z)(1+\Delta(z))}\frac{d\tilde{E}_1}{dz} + C^2(z)(1-\Delta^2(z))\,\tilde{E}_1 = 0 \tag{12·1}$$

および

$$\frac{d^2\tilde{E}_2}{dz^2} - \frac{\{C(z)(1-\Delta(z))\}'}{C(z)(1-\Delta(z))}\frac{d\tilde{E}_2}{dz} + C^2(z)(1-\Delta^2(z))\,\tilde{E}_2 = 0 \tag{12·2}$$

を得る．

ただし

$$C(z) \equiv C_0 e^{-\phi|f_1 - f_2|} \tag{13}$$

$$\Delta(z) \equiv j \frac{\beta_0}{2} \int_0^z (f_1'^2 - f_2'^2) dz \tag{14}$$

$$|\Delta(z)| \ll 1 \tag{15}$$

である．

式(12·1)および式(12.2)をそれぞれ初期条件

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{E}_1(0) &= 1 \\ \frac{d}{dz}\widetilde{E}_1(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{16·1}$$

および

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{E}_2(0) &= 0 \\ \frac{d}{dz}\widetilde{E}_2(0) &= j C_0 e^{-\phi|f_1 - f_2|}\Big|_{z=0} \end{aligned}\right\} \tag{16·2}$$

の下で解く．そこで式(12·1)および式(12·2)をそれぞれ

$$\frac{d^2\widetilde{E}_1}{dz^2} - \frac{\{C(z)(1+\Delta(z))\}'}{C(z)(1+\Delta(z))} \frac{d\widetilde{E}_1}{dz} + \{C(z)(1+\Delta(z))\}^2 \widetilde{E}_1 = 2C^2(z)\Delta(z)(1+\Delta(z))\widetilde{E}_1 \tag{17·1}$$

および

$$\frac{d^2\widetilde{E}_2}{dz^2} - \frac{\{C(z)(1-\Delta(z))\}'}{C(z)(1-\Delta(z))} \frac{d\widetilde{E}_2}{dz} + \{C(z)(1-\Delta(z))\}^2 \widetilde{E}_2 = -2C^2(z)\Delta(z)(1-\Delta(z))\widetilde{E}_2 \tag{17·2}$$

と変形し，以下に示す摂動法を用いて近似解を求める．

二階線形微分方程式(17·1)において，実用上問題となっているzの範囲に

対して前述のとおり $|\Delta(z)| \ll 1$ であるので，式(17·1)の右辺の係数 $|2C^2(z)\Delta(z)(1+\Delta(z))|$ が左辺第三項の係数 $|\{C(z)(1+\Delta(z))\}^2|$ にくらべて十分小さい．したがって，式(17·1)の右辺を零とおいた同次方程式

$$\frac{d^2\widetilde{E}_1}{dz^2} - \frac{\{C(z)(1+\Delta(z))\}'}{C(z)(1+\Delta(z))}\frac{d\widetilde{E}_1}{dz} + \{C(z)(1+\Delta(z))\}^2\widetilde{E}_1 = 0 \tag{18}$$

の解に微少の補正項を加えたもので式(17·1)の解を近似することができる[11],[12]．すなわち，同次方程式(18)の解のうち初期条件式(16·1)を満足するものは

$$\widetilde{E}_{1,0}(z) = \cos\left\{\int_0^z C(\eta)(1+\Delta(\eta))\,d\eta\right\} \tag{19}$$

となる．第一摂動項として

$$\widetilde{E}_{1,1}(z) = \int_0^z \left\{2C^2(\xi)\Delta(\xi)(1+\Delta(\xi))\widetilde{E}_{1,0}(\xi)G_1(z,\xi)\right\}d\xi \tag{20}$$

を考えると，式(17·1)の第一近似として

$$\widetilde{E}_1(z) = \widetilde{E}_{1,0}(z) + \widetilde{E}_{1,1}(z) \tag{21}$$

を得る．

ただし，$G_1(z,\xi)$ は同次方程式(18)に対するGreen函数であって

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)}\quad G_1(\xi,\xi) = 0\\
&\text{(ii)}\quad \left.\frac{\partial G_1(z,\xi)}{\partial z}\right|_{z=\xi} = 1\\
&\text{(iii)}\quad \frac{\partial^2 G_1(z,\xi)}{\partial z^2} - \frac{\{C(z)(1+\Delta(z))\}'}{C(z)(1+\Delta(z))}\frac{\partial G_1(z,\xi)}{\partial z} + \{C(z)(1+\Delta(z))\}^2 G_1(z,\xi) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

なる三つの性質をもっている．いまの場合

$$G_1(z,\xi) = \frac{1}{C(0)}\sin\left\{\int_0^{z-\xi} C(\eta)(1+\Delta(\eta))\,d\eta\right\} \tag{23}$$

である．ただし

$$C(0) = C_0\, e^{-\phi |f_1 - f_2|}\Big|_{z=0}. \tag{24}$$

次に，$\widetilde{E}_{1,1}(z)$ に対しても全く同様に第二摂動項を

$$\widetilde{E}_{1,2}(z) = \int_o^z \{ 2C^2(\xi)\, \Delta(\xi)(1+\Delta(\xi))\, \widetilde{E}_{1,1}(\xi)\, G_1(z,\xi) \}\, d\xi \tag{25}$$

と表わすと，第二近似として

$$\widetilde{E}_1(z) = \widetilde{E}_{1,0}(z) + \widetilde{E}_{1,1}(z) + \widetilde{E}_{1,2}(z) \tag{26}$$

を得る．以下このような過程をくり返して

$$\widetilde{E}_1(z) = \widetilde{E}_{1,0}(z) + \widetilde{E}_{1,1}(z) + \cdots + \widetilde{E}_{1,n}(z) + \cdots \tag{27}$$

となり逐次近似度をあげることができる．

ただし

$$\widetilde{E}_{1,i}(z) = \int_o^z \{ 2C^2(\xi)\, \Delta(\xi)(1+\Delta(\xi))\, \widetilde{E}_{1,i-1}(\xi)\, G_1(z,\xi) \}\, d\xi \tag{28}$$

である．　　$i = 1, 2, 3, \cdots$

線路 2 の振幅 $\widetilde{E}_2$ についてもまったく同様にして計算することができ，その結果は，初期条件式(16-2) を考慮して，

$$\widetilde{E}_{2,0}(z) = j \cdot \sin \{ \int_o^z C(\eta)(1 - \Delta(\eta))\, d\eta \} \tag{29}$$

$$G_2(z,\xi) = \frac{1}{C(0)} \sin \{ \int_o^{z-\xi} C(\eta)(1 - \Delta(\eta)) d\eta \} \tag{30}$$

となり

$$\widetilde{E}_2(z) = \widetilde{E}_{2,0}(z) + \widetilde{E}_{2,1}(z) + \cdots + \widetilde{E}_{2,n}(z) + \cdots \tag{31}$$

と表わせる．

ただし

$$\widetilde{E}_{2,j}(z)=\int_o^z\{-2C^2(\xi)\,\Delta(\xi)(1-\Delta(\xi))\,\widetilde{E}_{2,j-1}(\xi)\,G_2(z,\xi)\}\,d\xi \qquad (32)$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

である．

3．テーパ状結合線路

3・1　直線テーパ状分布結合線路

図2に示すように，伝搬定数の相等しい二つの無損失線路1および2が直線テーパ状に分布結合している場合，すなわち，結合区間を $z=0$ から $z=l$ までとして，$f_1(z)$ および $f_2(z)$ がそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} &f_1(z)=0\\ &f_2(z)=d+az\\ &d,\ a>0,\quad \frac{al}{d}\ll 1 \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

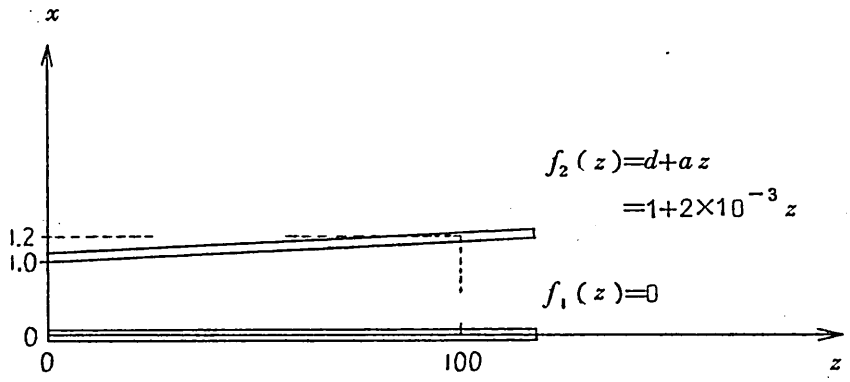


図2　直線テーパ状分布結合線路

なる場合の，モード結合方程式は次のように表わされる．

$$\left.\begin{aligned}\frac{dE_1}{dz}&=-j\beta E_1+jC_0\,e^{-\phi(d+az)}E_2\\ \frac{dE_2}{dz}&=-j\beta\left(1+\frac{a^2}{2}\right)E_2+jC_0\,e^{-\phi(d+az)}E_1\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

ただし，βは線路に沿う方向の位相定数であり，C_0およびϕは線路構造によってきまる定数である．式(34)を初期条件式(7)のもとで前述の方法に従がって解くために

$$\left.\begin{aligned}E_1&=\tilde{E}_1\,e^{-j\beta z}\\ E_2&=\tilde{E}_2\,e^{-j\beta\left(1+\frac{a^2}{2}\right)z}\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

とおくと，線路1の振幅の零次近似として次式を得る．

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{1,0}=&\cos\left\{\frac{c_1}{a\phi}(1-e^{-a\phi z})\right\}\cosh\left[\frac{\beta c_1}{2\phi^2}\left\{1-(1+a\phi z)\,e^{-a\phi z}\right\}\right]\\ &+j\sin\left\{\frac{c_1}{a\phi}(1-e^{-a\phi z})\right\}\sinh\left[\frac{\beta c_1}{2\phi^2}\left\{1-(1+a\phi z)\,e^{-a\phi z}\right\}\right]\end{aligned}\tag{36}$$

ただし

$$c_1=c_0\,e^{-\phi d}\tag{37}$$

である．第一摂動項は

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{1,1}=j\beta a^2c_1\Big(&\frac{1}{4c_1^2}\sin c_1z-\frac{z}{4c_1}\cos c_1z-\frac{z^2}{4}\sin c_1z\\ &+\frac{a\phi z^2}{2c_1^2}\cos c_1z+\frac{a\phi z^3}{3}\sin c_1z-\frac{a\phi z}{2c_1^2}\sin c_1z\Big)\end{aligned}\tag{38}$$

と求められ，第一近似として

$$E_1 = (\tilde{E}_{1,0} + \tilde{E}_{1,1})\, e^{-j\beta z} \tag{39}$$

を得る．

3・2　二乗テーパ状分布結合線路

まっすぐな線路と放物線に沿った線路間の結合について考える．すなわち，$f_1(z)$ および $f_2(z)$ がそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} &f_1(z) = 0 \\ &f_2(z) = d + az^2 \\ &d,\ a > 0,\quad \frac{al^2}{d} \ll 1 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

なる場合について前述の方法を適用すると，線路1の振幅の零次近似解は

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1,0} = &\cos\left(c_1 \int_0^z e^{-\phi a z^2} dz\right) \cosh\left[\frac{\beta c_1}{3\phi^2}\left\{1 - e^{-\phi a z^2}(1 + \phi a z^2)\right\}\right] \\ &- j \sin\left(c_1 \int_0^z e^{-\phi a z^2} dz\right) \sinh\left[\frac{\beta c_1}{3\phi^2}\left\{1 - e^{-\phi a z^2}(1 + \phi a z^2)\right\}\right] \end{aligned} \tag{41}$$

となる．ただし

$$c_1 = c_0\, e^{-\phi d}$$

である．第一摂動項は

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1,1} = -j\frac{4\beta a^2}{3c_1^3}\Big[&\frac{c_1^4 z^4}{8}\sin c_1 z + \frac{c_1^3 z^3}{2}\cos^3 c_1 z - \frac{3c_1^2 z^2}{8}\sin c_1 z \\ &- \frac{3c_1^2 z^2}{8}\cos c_1 z \sin 2c_1 z - \frac{3c_1 z}{4}\cos^3 c_1 z \\ &+ \frac{3}{16}\cos c_1 z \sin 2c_1 z\Big] \end{aligned} \tag{42}$$

となり，第一近似として

$$E_1 = (\tilde{E}_{1,0} + \tilde{E}_{1,1})\, e^{-j\beta z} \tag{43}$$

を得る．

3・3　数値計算例

直線テーパ状に分布結合した例として，$f_1(z) = 0$ および $f_2(z) = 1 + 2 \times 10^{-3} z$ とえらんだ場合の，結合長 z と線路1の振幅 E_1 との関係を図3に実線にて示す．この場合，$z = 0$ および $z = 100$ の点における二つの線路の間隔はそれぞれ1および1.2である．

ところで，式(4)における係数 ϕ は誘電体線路の横方向電磁界が線路の外部で指数関数的に減少する割合を示す量である．図3において，パラメータ $\frac{\beta}{\phi}$ を大きくすることは，具体的には誘電体線路の内部および周囲の屈折率を一定に保った状態で線路の径を大きくすることに相当する．

図中，一点鎖線および二点鎖線は，比較のために二つの線路の間隔がそれぞれ1および1.2の一定値で曲っていない一様な結合の場合の線路1の振幅の変化を示したもので，それぞれ $z = 100$ および $z = 122$ で完全結合が起っている．

一方，位相定数が相等しく一定で，結合係数が場所によって変化する場合は，式(12·1)で $\Delta(z) = 0$ とおくことにより

$$E_1 = \cos\left(\int_0^z C(\eta)\, d\eta\right) e^{-j\beta z} \tag{44}$$

となる．テーパ状結合線路において，位相定数の変化を無視し結合係数のみが場所によって変化すると考えたときの，式(44)による結果を示したのが図3の点線である．

また，位相定数がたがいに異なる定数で，結合係数が一定の場合は，S.

E·Millerによって求められており

$$E_1=\left[\cos\left\{\sqrt{\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{4C^2}+1}\ Cz\right\}-j\frac{\beta_1-\beta_2}{2C}\left\{\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{4C^2}+1\right\}^{-\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.\cdot\sin\left\{\sqrt{\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{4C^2}+1}\ Cz\right\}\right]e^{-j\frac{(\beta_1+\beta_2)z}{2}} \qquad (45)$$

と表わされる[1]．ただし，β_1およびβ_2は線路1および2の位相定数である．直線テーパ状に結合した場合は

$$\beta_1-\beta_2=\beta\sqrt{1+f_1'^2}-\beta\sqrt{1+f_2'^2}=-\frac{1}{2}\beta a^2 \qquad (46)$$

となる．結合係数の変化を無視し位相定数の変化だけを考慮して式(45)および式(46)より得られた結果を図3の破線で示す．

図3から，直線テーパ状分布結合線路においてはもはや完全な電力の移行が行なわれないことがわかる．また，パラメータ$\frac{\beta}{\phi}$が大きいほど線路2へ移行しうる電力が少なくなる．これは$\frac{\beta}{\phi}$が大きくなると二つの線路の位相定数の差が増加するためである．

また，実線および破線を比較すると，$\frac{\beta}{\phi}$が等しい場合には両曲線の最小値がほぼ一致している．さらに，実線の最小値を与えるzの値は，破線の場合のそれに，一点鎖線および点線間のz方向変位量を加えたものにほぼ等しい．これらのことから，ゆるやかな直線テーパ状分布結合線路における最大電力移行量に対しては位相定数の変化による影響が支配的であること，また，電力の移行が最大となる位置は結合係数の変化によってより大きく影響を受けることがわかる．

図4は二乗テーパ状分布結合線路の例として，$f_1(z)=0$および$f_2(z)=1+2\times10^{-5}z^2$とえらんだ場合の線路1の振幅の変化の様子を示している．

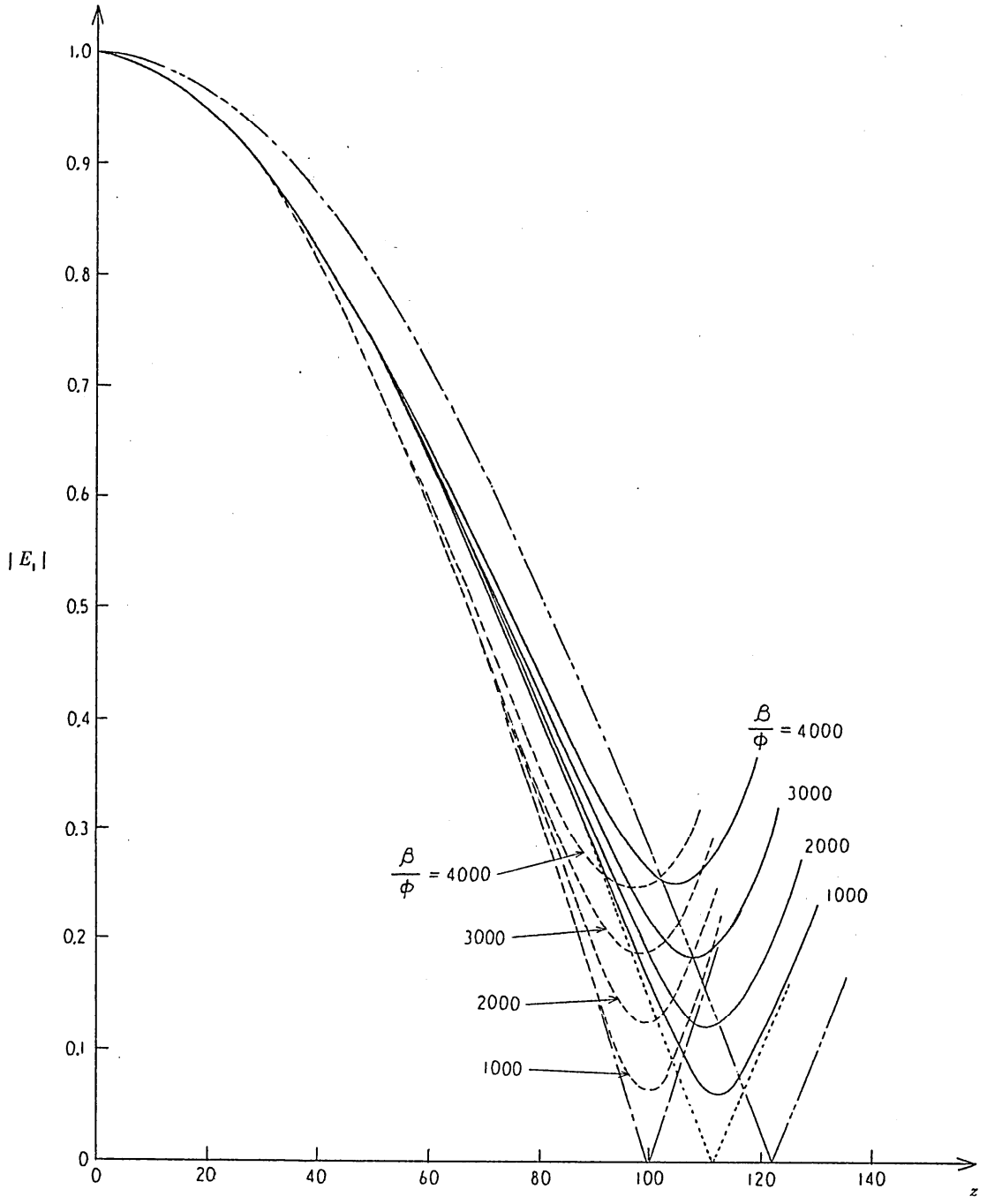


図３　直線テーパ状分布結合線路における線路１の振幅変化（実線）

－－－－　βだけが変化すると仮定した場合，

……　Cだけが変化すると仮定した場合．

（—・—　線路の間隔が１で一様な結合の場合，

—‥—　線路の間隔が1.2で一様な結合の場合．）

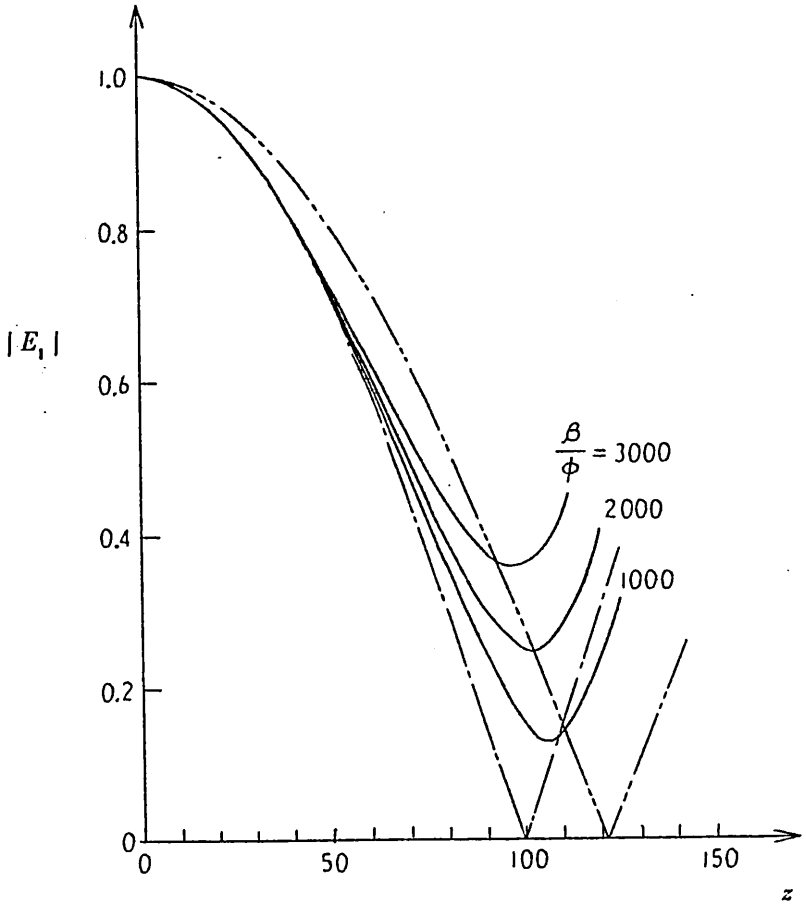


図 4　二乗テーパ状分布結合線路における
線路 1 の振幅変化（実線）．

（—・— 線路の間隔が 1 で一様な結合の場合，
—‥— 線路の間隔が 1．2 で一様な結合の場合．）

最大電力移行量が直線テーパ状の場合にくらべて小さいのは，曲っていることによる二つの線路の位相定数の差が z の比較的大きな値のところでかなり大きくなるためである．

以上，本節では具体的な適用例として直線テーパ状分布結合線路および二

乗テーパ状分布結合線路の結合の問題を取扱ったが，本文で述べた解析方法は更に一般的なテーパについても適用可能である．

従来マイクロ波帯等では材料や寸法等の制約のために実現不可能であった種々の構成の素子が，光波帯においては実現できるようになる．二つの誘電体線路からなる光ＩＣ結合器はその基本的に重要な例であって，広範囲な利用が考えられる[13],[14]．ところで，主線路を励振しそのエネルギーの全部あるいは一部を側線路から取り出す結合器においては，入出力端の構造が重要な問題となる．図５(a)に示すように急激に曲げたのでは反射波が発生し，ま

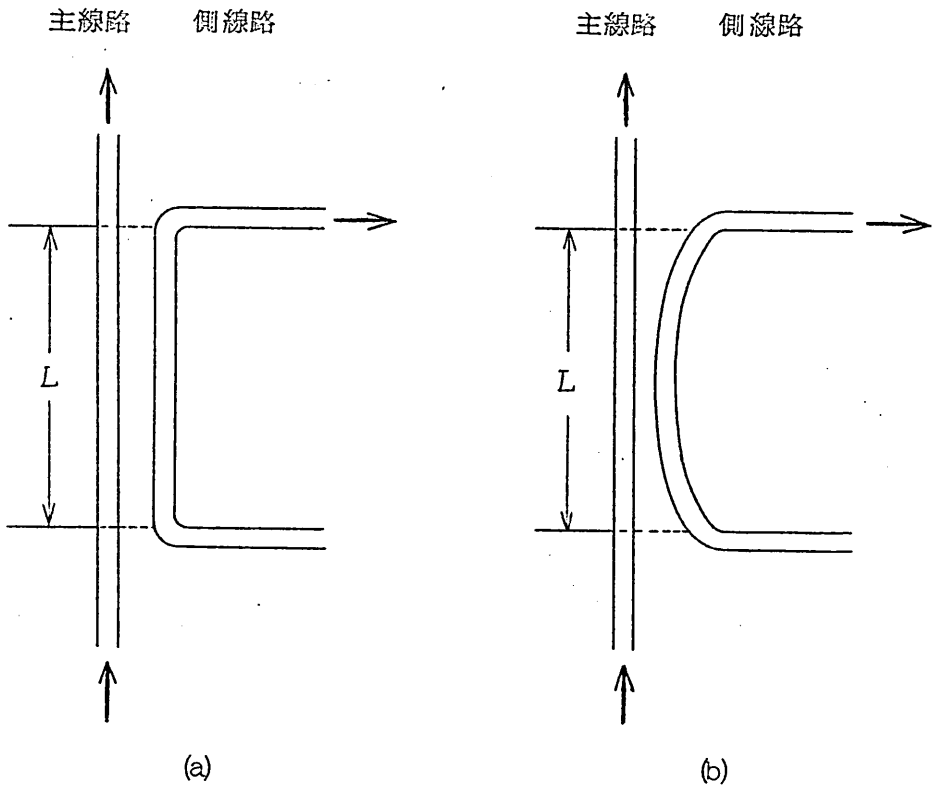


図５　光集積回路における結合器．(a)一様分布結合器
(b)二乗テーパ状分布結合器

た放射損失がきわめて大きくなる．そこで図5(b)に示すように両端部をゆるやかなテーパ状に構成し[8]，線路間の結合が弱くなったところでゆるやかに曲げることによってこれらの問題を解決する必要があり，このような光回路の設計に当って本文中に示した解析方法は有効な手段を与える．

4．むすび

ゆるやかに曲っている二つの開放形伝送線路間の結合について，位相定数および結合度がともに変化するとした場合のモード結合方程式を導びき，その近似解の求め方を示した．従来のPicard法による解法が弱い結合の場合にしか適用できないのに対し，本文中に示した摂動法による解法は，一方の線路の電力の大部分が他方の線路へ移りうるような強い結合の場合にも有効である．

例として，位相定数の相等しい二つの誘電体線路が，直線テーパ状および二乗テーパ状に分布結合している場合について，その線路の振幅の変化を示した．その結果，テーパ状に結合している線路間においてはもはや完全な電力の移行が行なわれないこと，最大電力移行量に対しては位相定数の変化による影響が支配的であること，さらに電力の移行が最大となる位置は結合係数の変化によってより大きく影響を受けること，などがわかった．

本文中に示した方法は光集積回路の解析や設計，とくに結合器の入出力部における曲りの影響を考察するさいに有効な手段を与えるものであると考えられる．

謝　辞　　日頃御指導ごべんたつをいただいている本学工学部板倉清保教授ならびに熊谷信昭教授に深く感謝する．

文　　献

(1) S.E.Miller : "Coupled Wave Theory and Waveguide Applications", Bell Syst. tech. J., vol. 33, 3, p.661 (May 1954).

(2) S.E.Miller : "On Solutions for Two Waves with Periodic Coupling", Bell Syst. tech. J., vol. 47, 8, p. 1801 (Oct.1968).

(3) S.E.Miller : "Some Theory and Applications of Periodic Coupled Waves", Bell Syst. tech. J., vol. 48, 7, p. 2189 (Sept.1969).

(4) A.L.Cullen and O.J.Davies : "New Principle for Wideband Mode Coupling", Elect. lett., vol. 5, 5, p. 90 (March 1969).

(5) A.W.Snyder : "Asymptotic Solution of Coupled Mode Equations for Sinusoidal Coupling", Proc. IEEE(lett), vol. 58, 1, p. 168 (Jan.1970).

(6) J.B.Knorr : "A Note on Log Periodically Coupled Modes of Propagation", Proc. IEEE (lett), vol. 59, 11, p. 1624 (Nov.1971).

(7) J.E.Goell and R.D.Standly : "Integrated Optical circuits", Proc. IEEE, vol. 58, 10, p. 1504 (Oct.1970).

(8) S.E.Miller : "A Survey of Integrated Optics", IEEE J. of Quant. Elect., vol. QE-8, 2, p. 199 (Feb.1972).

(9) H.E.Rowe : "Approximate Solutions for the Coupled Line Equations", Bell Syst.tech. J., vol. 41, 5, p. 1011 (May 1962).

(10) H. E. Rowe and E. D. Waters :“ Transmission in Multi-mode Waveguide with Random Imperfections”, Bell Syst. tech. J., vol. 41, 5, p. 1031 (May 1962).

(11) P. M. Morse and H. Feshbach :“ Methods of Theoretical Physics”, Chap. 9, McGraw-Hill, New York (1953).

(12) 森田 清：“電磁波概論”，第4章，金原出版（昭42）.

(13) 倉茵，岩崎，熊谷：“分布結合線路を用いた新しい光変調方式”，信学論（c），55-C，1，p. 61（昭47-01）.

(14) 岩崎，倉茵：“可変位相器を用いた光 IC 変調器”，信学論（c），55-C，3，p. 183（昭47-03）.

(15) 吉田耕作：“積分方程式論”，第1章，岩波書店（昭36）.

付　　録

(A)　Picard 法による解法[15]

モード結合方程式(1)において，γ_1，γ_2 および k をそれぞれ z の函数と考え，入力端 $z=0$ から線路 1 および 2 にそれぞれ $E_1(0)$ および $E_2(0)$ なる大きさの光波を加えたときの，任意の点での光波の振幅を求める．すなわち，式(1)において

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \hat{E}_1\, e^{-\int_o^z \gamma_1 dz} \\ E_2 &= \hat{E}_2\, e^{-\int_o^z \gamma_2 dz} \end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 1)$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\hat{E}_1}{dz} &= k\, e^{-\int_o^z (\gamma_1-\gamma_2) dz}\, \hat{E}_2 \\ \frac{d\hat{E}_2}{dz} &= k\, e^{-\int_o^z (\gamma_1-\gamma_2) dz}\, \hat{E}_1 \end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 2)$$

となる．$\hat{E}_1$ および $\hat{E}_2$ の第 n 近似をそれぞれ $\hat{E}_{1,n}$ および $\hat{E}_{2,n}$ とし，Picard 法を用いて逐次近似解を求める．すなわち，

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1,0}(z) &= \hat{E}_1(0) \\ \hat{E}_{2,0}(z) &= \hat{E}_2(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1,1}(z) &= \hat{E}_1(0) + \int_o^z \left\{ k(\xi)\, e^{\int_o^\xi (\gamma_1-\gamma_2) d\xi}\, \hat{E}_{2,0}(\xi) \right\} d\xi \\ \hat{E}_{2,1}(z) &= \hat{E}_2(0) + \int_o^z \left\{ k(\xi)\, e^{-\int_o^\xi (\gamma_1-\gamma_2) d\xi}\, \hat{E}_{1,0}(\xi) \right\} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1,2}(z) &= \hat{E}_1(0) + \int_o^z \left\{ k(\xi)\, e^{\int_o^z (\gamma_1-\gamma_2) d\xi}\, \hat{E}_{2,1}(\xi) \right\} d\xi \\ \hat{E}_{2,2}(z) &= \hat{E}_2(0) + \int_o^z \left\{ k(\xi)\, e^{-\int_o^z (\gamma_1-\gamma_2) d\xi}\, \hat{E}_{1,1}(\xi) \right\} d\xi \end{aligned} \qquad (A\cdot 3)$$

$$\hat{E}_{1,n}(z) = \hat{E}_1(0) + \int_o^z \{ k(\xi)\, e^{\int_o^z (\gamma_1 - \gamma_2)\, d\xi}\, \hat{E}_{2,n-1}(\xi) \}\, d\xi$$

$$\hat{E}_{2,n}(z) = \hat{E}_2(0) + \int_o^z \{ k(\xi)\, e^{-\int_o^z (\gamma_1 - \gamma_2)\, d\xi}\, \hat{E}_{1,n-1}(\xi) \}\, d\xi$$

こうして得られる $\hat{E}_{1,n}$ および $\hat{E}_{2,n}$ が一様収束すれば

$$\left.\begin{aligned} \hat{E}_1(z) &= \lim_{n\to\infty} \hat{E}_{1,n}(z) \\ \hat{E}_2(z) &= \lim_{n\to\infty} \hat{E}_{2,n}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 4)$$

により近似解を得る．ここでさらに

$$\left.\begin{aligned} \hat{\hat{E}}_{1,0} &= \hat{E}_{1,0} \\ \hat{\hat{E}}_{2,0} &= \hat{E}_{2,0} \\ \hat{\hat{E}}_{1,n} &= \hat{E}_{1,n} - \hat{E}_{1,n-1} \\ \hat{\hat{E}}_{2,n} &= \hat{E}_{2,n} - \hat{E}_{2,n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 5)$$

とおくと解が級数で表わせる．すなわち

$$\left.\begin{aligned} \hat{E}_1(z) &= \sum_{n=o}^{\infty} \hat{\hat{E}}_{1,n}(z) \\ \hat{E}_2(z) &= \sum_{n=o}^{\infty} \hat{\hat{E}}_{2,n}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 6)$$

さて，位相定数が互いに等しく β であり，一様に結合している線路間において，線路 1 から単位振幅の光波を入射したときの振幅変化は，よく知られているように

$$\left.\begin{aligned} E_1(z) &= \cos\ (Cz)\, e^{-j\beta z} \\ E_2(z) &= j\sin(Cz)\, e^{-j\beta z} \end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 7)$$

と表わされる．一方この場合の結合の問題を上のPicard法を用いて解くと

$$\left.\begin{aligned} E_1(z) &= \left(1-\frac{c^2z^2}{2!}+\frac{c^4z^4}{4!}-\frac{c^6z^6}{6!}+\cdots\right) e^{-j\beta z} \\ E_2(z) &= j\left(Cz-\frac{c^3z^3}{3!}+\frac{c^5z^5}{5!}-\frac{c^7z^7}{7!}+\cdots\right) e^{-j\beta z} \end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 8)$$

となり，式(A・7)を入力端 $z=0$ の近傍でTaylor 展開したものに相当する．すなわちPicard法は漏話現象等のきわめて弱い結合の場合には有効であるが，大部分の電力が他方の線路へ移行するような場合，すなわち側線路の励振などを考える際には非常に多くの項を考慮しなければ十分な近似はえられない．

輻射科学研究会

結合モード理論による

光変調器およびパラメトリック結合器の解析

井筒雅之、末田　正、

大阪大学基礎工学部

昭和47年6月30日

1. まえがき

近年、光集積回路[1]が注目を集め、多くの研究が見られる様になってきた。なかでも、モードの励振、伝搬特性、モード変換[2,3]等については詳細な検討もなされている。光集積回路の能動素子としては、光波パラメトリック相互作用について幾つかの解析[4,5,6,7]が見られ、また、実験[8,9,10]も報告されている。光変調器については、平行光伝送路間の結合変調[11]、あるいは、フランツーケルディッシュ効果の利用による光変調[12]等が提案されている。しかし、従来から行なわれてきた、結晶のポッケルス効果による位相変調や強度変調の導波系内での実現、あるいは、光波ー超音波結合素子等、回路の構成に当って重要と考えられるこれらの基本的な能動素子については、解析、実験共にあまり見うけられない様に思われる。

導波系における光変調は、光集積回路への応用が期待されるだけでなく、ガウスビームの場合に重要な回折限界（相互作用長とビームの広がり（ひいては電極間隔）の関係）が存在せず、低電圧で高い電界強度が得られる

と同時に，相互作用長も作製上可能な限りに大きとれ，従来より高感度な変調器を実現できる可能性も期待できる．また，超音波フィルター，表面波による光変調器，磁気光学効果の利用による光変調器等についての検討も重要である．

この様な導波系を利用した光波結合を検討する場合，モードによって光波の偏波方向が規定されるため，従来からなされてきた様に偏波方向を結晶軸方向成分に分けて考えることは難かしい．光波は導波系の固有モードの和として表わされるものと考え，同時にその種方向成分を考慮して，結合方程式を導びく事が必要である．

本文では，まず，光変調器を解析する上で従来からの方法として用いられてきた結合モード理論による記述法[13]を，導波系におけるモード結合に適用する事によって，光変調を検討し，次にこの解析を利用して，任意の非等方，不均質媒質中を伝搬する光波に，外部からの摂動が加わった場合について，無摂動の伝搬モードが既知であるものとして，モード結合の方程式を導びく．

2. 誘電体平板導波系における光変調

この節では、外部電界によって誘電体平板導波系の誘電率が微少変化する場合に、導波系中を伝搬する光波のふるまいを検討する。

ここで考える誘電体導波系は、図1に示す様に誘電率の異なる3層の誘電体からなる平板形導波系である。誘電体基板（媒質II）上に、厚さ t の誘電体平板（媒質I）があり、その上部（媒質III）は自由空間あるいは他の媒質である。

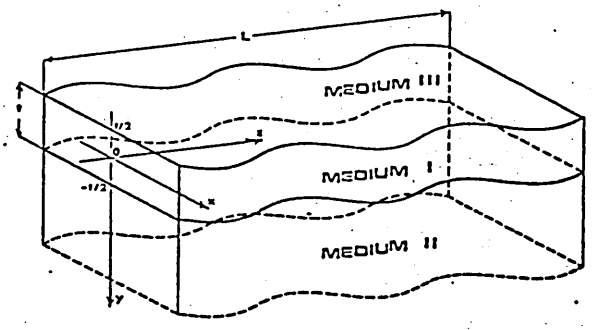


図1 誘電体導波系

光波は周波数 ω で z 方向に進行するものとする。この場合、マックスウェルの方程式より得られる波動方程式は、電界 E に関して

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\ \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \hat{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E} = 0 \qquad (1)$$

となる。ここで、ε_0, μ_0 は自由空間の誘電率および導磁率、$\hat{\varepsilon}$ は比誘電率で2階のテンソルで与えられる。電界の各方向成分 E_j ($j = x, y, z$) は次式で与え

られるものとする．

$$E_j = \frac{1}{2} A F_j(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} + c.c. \qquad (2)$$

ここで，A は電界の複素振幅，$F_j(x, y)$ は j 方向の振幅分布，β は伝搬定数，c.c. は複素共役項を示す．導波系は，x 方向に一様で，電磁界分布もそれに従って x に関して変化が十分小さく，y 方向の変化に比べて無視できるものとし，また，各媒質（I，II，III）において誘電率テンソルの軸と座標軸とが一致し，誘電率テンソルの非対角項はすべて 0 であるものとすると，波動方程式，式(1)，の行列表示によって，

$$\begin{bmatrix} k_{xx}^2 - \beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy}^2 - \beta^2 & j\beta\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & j\beta\frac{\partial}{\partial y} & k_{zz}^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \qquad (3)$$

と表わされる．ただし，

$$k_{ij}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \qquad (4)$$

で，ε_{ij} は誘電率テンソル $\hat{\varepsilon}$ の i, j 成分である．

式(2)より，E_x と（E_y，E_z）とは互いに結合せず，したがって，この場合，電界が x 方向成分のみの TE

モードと，y および z 方向成分からなるTMモードとに分離される．どちらの場合も y 方向の電界振幅分布は平板中で正弦，平板外部で指数分布である．実際上の見地から，x 方向の振幅分布はガウシアンであるものとする．ただし，先に記した様にその変化は十分にゆるやかで，y 方向の変化に比べて無視できるものとする．電界の横方向振幅分布 $F_j(x,z)$ の具体的な関数形は他にも示されているのでここでは省略する．

次に，誘電率が周波数 ω_0 で微少な摂動を受ける場合を検討する．外部電界 E_0 の印加により誘電率が，

$$\tilde{\varepsilon} \longrightarrow \tilde{\varepsilon} + \tilde{\delta\varepsilon}$$

の変化を受けるものとする．屈折率楕円体，すなわち，$(\tilde{\varepsilon})^{-1}$ の微少変化 $\tilde{\delta\varepsilon^{-1}}$ が外部電界 E_0 に比例するポッケル入効果の場合，$\tilde{\delta\varepsilon}$ は電気光学係数 r を用いて

$$\tilde{\delta\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}^{-1} + rE_0)^{-1} - \tilde{\varepsilon} \qquad (5)$$

で与えられる．$\tilde{\varepsilon}^{-1}$ に比べて rE_0 が十分小さい場合，$\tilde{\delta\varepsilon}$ は一次近似により E_0 に比例する事となる．ここでは $\tilde{\delta\varepsilon}$ の各成分 $(\tilde{\delta\varepsilon})_{ij}$ は次式で表わされるものと

すう．

$$(\widetilde{\delta\varepsilon})_{ij} = \frac{1}{2}\delta\varepsilon_{ij} A_0 e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} + c.c. \qquad (6)$$

この様な誘電率の微少変化 $\widetilde{\delta\varepsilon}$ を考慮すれば，式(1)は

$$curl\ curl\ \vec{E} + \varepsilon_0\mu_0\tilde{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0\widetilde{\delta\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \qquad (7)$$

また，式(3)は

$$\begin{bmatrix} b_{xx}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{yy}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & b_{zz}^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = -k_0^2 \widetilde{\delta\varepsilon} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \qquad (8)$$

となる．$\widetilde{\delta\varepsilon}$ は周波数 ω_0 で変動している．そこで電界として，式(2)は次式の様に変化されるものとする．

$$E_j = \frac{1}{2}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l(z) e^{jl(\omega_0 t - \Delta\beta z)}\right] F_j(x,y) e^{j(\omega t - \beta z)} + c.c. \qquad (9)$$

すなわち，無限動の場合の固有モードが $\widetilde{\delta\varepsilon}$ の周波数 ω_0 づつずれた無限個のモードに分散される．ただし，その各々の横方向振幅分布 $F_j(x,y)$ は振動のない場合と同一で変化せず，また，伝搬定数 β は分散が無視できて ω_0 の変化に対するずれは一定値 $\Delta\beta$ であるものとする．式(8)に式(9)を代入して $A_l(z)$ をもめれば，この場合の光波の状態を知ることができる．

光波の結合は，$\delta\varepsilon$ の成分により次の3種に分類することができる．

A. $\delta\varepsilon_{xx}$ TEモードの結合

B. $\delta\varepsilon_{yy}$, $\delta\varepsilon_{zz}$, $\delta\varepsilon_{yz}$, $(\delta\varepsilon_{zy})$ TMモードの結合

C. $\delta\varepsilon_{xy}$, $\delta\varepsilon_{xz}$; $(\delta\varepsilon_{yx})$, $(\delta\varepsilon_{zx})$ TE－TMモード間の結合

Aおよび Bの場合は，それぞれTE，TMモードの伝搬定数の変化する位相変調，また Cの場合は，TE，TMモード間の結合の変化する強度変調とみなすことができる．以下に，この各々の場合について検討する．

A. TEモードの位相変調

$\delta\varepsilon$ が $\delta\varepsilon_{xx}$ 成分のみの場合，TEモードの位相変調を行なうことができる．式(8)より E_x に関して

$$\left(k_{xx}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_x = -k_0^2\,\delta\varepsilon_{xx}\,E_x \qquad (10)$$

が得られる．この式に式(9)を代入すれば，TEモードのモード振幅 A_e について，同波数 $\omega+l\omega_0$ に関して

$$2j\beta F_x\frac{dA_{el}}{dz}-k_0^2\,\delta\varepsilon_{xx}F_x\left[A_{e\,l-1}A_0\,e^{-j(\beta_0-\Delta\beta z)}+A_{e\,l+1}A_0^*\,e^{j(\beta_0-\Delta\beta z)}\right] \qquad (11)$$

となる．ただし，振幅 A_{el} の変化は波長に比べて十分ゆるやかで，A_{el} の2階微分は無視できるものとした．

$\delta\varepsilon_{xx}$ は誘電体平板（媒質1）の中にあるものと仮定し，両辺に F_x^*/η を掛けて xy 面で積分すれば式(11)は

$$\frac{dA_{el}}{dz} = j\Gamma\left[A_{el-1}A_0 e^{-j(\beta_0-\Delta\beta)z} + A_{el+1}A_0^* e^{j(\beta_0-\Delta\beta)z}\right] \quad (12)$$

と変形される．ただし η は特性インピーダンス，また，

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{\beta}\delta\varepsilon_{xx}\int_{-t/2}^{t/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta}F_x F_x^* dx dy \Big/ \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta}F_x F_x^* dx dy \quad (13)$$

である．初期条件を $A_{el}(0) = \delta_{l0}A_{e0}(0)$ とすれば

$$A_{el}(z) = A_{e0}(0)e^{-jl\frac{\pi}{2}}J_l\left(j\Gamma A_0 e^{-j(\beta_0-\Delta\beta)z/2}\,\mathrm{sinc}\frac{(\beta_0-\Delta\beta)z}{2}\right) \quad (14)$$

光波の振幅 $A_e(z)$ は，式(9)より次の様になる．

$$A_e(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}A_{el}(z)e^{jl(\omega_0 t-\beta z)}$$

$$= A_{e0}(0)e^{j\varphi} \quad (15)$$

$$\varphi = \Gamma A_0 z\,\mathrm{sinc}\frac{(\beta_0-\Delta\beta)z}{2}\cos(\omega_0 t - \frac{\beta_0+\Delta\beta}{2}z) \quad (16)$$

B. TMモードの位相変調

$\tilde{\delta\varepsilon}$ に $\delta\varepsilon_{yy}$, $\delta\varepsilon_{zz}$, $\delta\varepsilon_{yz}$, $\delta\varepsilon_{zy}$ の4つの成分がある場合，式(8)は

$$\begin{aligned}(k_{yy}^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2})E_y - \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}E_z &= -k_0^2\{\delta\varepsilon_{yy}E_y + \delta\varepsilon_{yz}E_z\}\\ -\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}E_y + (k_{zz}^2-\frac{\partial^2}{\partial y^2})E_z &= -k_0^2\{\delta\varepsilon_{zy}E_y + \delta\varepsilon_{zz}E_z\}\end{aligned} \quad (17)$$

となる．この式に式(9)を代入すれば，TMモードのモード振幅 A_m の $\omega + l\omega_0$ 成分に対して

$$\left\{-2j\beta\bar{F}_y - \frac{\partial}{\partial y}\bar{F}_z\right\}\frac{dA_{ml}}{dz} = -k_0^2\left\{\delta\varepsilon_{yy}\bar{F}_y + \delta\varepsilon_{yz}\bar{F}_z\right\} \times\left[A_{m,l-1}A_0 e^{-j(\beta_0-\Delta\beta)z} + A_{m,l+1}A_0^* e^{j(\beta_0-\Delta\beta)z}\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\bar{F}_y\frac{dA_{ml}}{dz} = -k_0^2\left\{\delta\varepsilon_{zy}\bar{F}_y + \delta\varepsilon_{zz}\bar{F}_z\right\} \times\left[A_{m,l-1}A_0 e^{-j(\beta_0-\Delta\beta)z} + A_{m,l+1}A_0^* e^{j(\beta_0-\Delta\beta)z}\right] \tag{18}$$

となる．ここで $\partial\bar{F}_z/\partial y$，$\partial\bar{F}_y/\partial y$ を $\bar{F}_y$，$\bar{F}_z$ で表示し，両辺に $\bar{F}_y^*/\eta$，$\bar{F}_z^*/\eta$ を掛けて xy 面で積分し，式(18)の2式を加えれば

$$\frac{dA_{ml}}{dz} = j\Gamma\left[A_{m,l-1}A_0 e^{-j(\beta_0-\Delta\beta)z} + A_{m,l+1}A_0^* e^{j(\beta_0-\Delta\beta)z}\right] \tag{19}$$

ただし

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\frac{k_0^2}{\beta}\left[\delta\varepsilon_{yy}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-t/2}^{t/2}\frac{1}{\eta}\bar{F}_y\bar{F}_y^*\,dx\,dy + \delta\varepsilon_{yz}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-t/2}^{t/2}\frac{1}{\eta}\bar{F}_z\bar{F}_y^*\,dx\,dy\right.$$
$$\left.\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\frac{\beta^2}{k^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{1}{\eta}\bar{F}_y\bar{F}_y^*\,dx\,dy\right.$$
$$\left.+\delta\varepsilon_{zy}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-t/2}^{t/2}\frac{1}{\eta}\bar{F}_y\bar{F}_z^*\,dx\,dy + \delta\varepsilon_{zz}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-t/2}^{t/2}\frac{1}{\eta}\bar{F}_z\bar{F}_z^*\,dx\,dy\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{1}{\eta}\bar{F}_z\bar{F}_z^*\,dx\,dy\right] \tag{20}$$

となる．ただし Γ は誘電体平板（媒質I）中の横方向（y 方向）伝搬定数である．これより，光波の振幅 A_m

は，先と同様に，

$$A_m(z) = A_{m0}(0)\, e^{j\varphi} \tag{21}$$

$$\varphi = \Gamma A_0 z \, \mathrm{sinc}\frac{(\beta_0 - \Delta\beta)z}{2} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\beta_0 + \Delta\beta}{2} z\right) \tag{22}$$

と表わされる．

C．TE－TMモード間結合（偏度変調）

$\delta\varepsilon$ に $\delta\varepsilon_{xy}$，$\delta\varepsilon_{xz}$，$\delta\varepsilon_{yx}$，$\delta\varepsilon_{zx}$ の4つの成分がある場合，TEモードとTMモードとのモード変換が起り，偏度変調となる．この場合，式(8)に式(9)を代入すれば，TE，TMそれぞれのモード振幅 A_e，A_m の $\omega + l\omega_0$ 成分に対して，先の式(11)，(17)と同様に

$$\begin{aligned}
2j\beta_e F_x \frac{dA_{el}}{dz} &= k_0^2 \{\delta\varepsilon_{xy} F_y + \delta\varepsilon_{xz} F_z\} e^{j\{\beta_e - \beta_m + l(\Delta\beta_e - \Delta\beta_m)\}z} \\
&\quad \times [A_{ml-1} A_0 e^{-j(\beta_0 - \Delta\beta_m)z} + A_{ml+1} A_0^* e^{j(\beta_0 - \Delta\beta_m)z}] \\
\left\{2j\beta_m F_y + \frac{\partial}{\partial y} F_z\right\} \frac{dA_{ml}}{dz} &= k_0^2 \delta\varepsilon_{yx} F_x \, e^{-j\{\beta_e - \beta_0 + l(\Delta\beta_e - \Delta\beta_m)\}z} \\
&\quad \times [A_{el-1} A_0 e^{-j(\beta_0 - \Delta\beta_e)z} + A_{el+1} A_0^* e^{j(\beta_0 - \Delta\beta_e)z}] \\
\frac{\partial}{\partial y} F_y \frac{dA_{ml}}{dz} &= k_0^2 \delta\varepsilon_{zx} F_z \, e^{-j\{\beta_e - \beta_m + l(\Delta\beta_e - \Delta\beta_m)\}z} \\
&\quad \times [A_{el-1} A_0 e^{-j(\beta_0 - \Delta\beta_e)z} + A_{el+1} A_0^* e^{j(\beta_0 - \Delta\beta_e)z}]
\end{aligned} \tag{23}$$

の3つの式が得られる．ただし，β_e，β_m および $\Delta\beta_e$，$\Delta\beta_m$ は各々TE，TMモードの伝搬定数および，周波数 ω_0

の変化に対する β_e, β_m の変化分である．$\partial F_z/\partial y$, $\partial F_y/\partial y$ を F_y, F_z で表わし，各式に F_z^*/η_e, F_y^*/η_m, F_z^*/η_m を掛けて xy 面上で積分し，ガユおよびガ式を加えれば，

$$\frac{dA_{el}}{dz} = -\frac{1}{2}jK_e e^{j\{(\beta_e-\beta_m)+l(\Delta\beta_e-\Delta\beta_m)\}z} \times [A_{ml-1}A_0 e^{-j(\beta_0-\Delta\beta_m)z} + A_{ml+1}A_0^* e^{j(\beta_0-\Delta\beta_m)z}]$$

$$\frac{dA_{ml}}{dz} = -\frac{1}{2}jK_m e^{-j\{(\beta_e-\beta_m)+l(\Delta\beta_e-\Delta\beta_m)\}z} \times [A_{el-1}A_0 e^{-j(\beta_0-\Delta\beta_e)z} + A_{el+1}A_0^* e^{j(\beta_0-\Delta\beta_e)z}] \quad (24)$$

となる．ここに

$$K_e = \frac{b_0^2}{\beta_e}\left\{\delta\varepsilon_{xy}\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_e}F_x^*F_y\,dxdy + \delta\varepsilon_{zz}\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_e}F_x^*F_z\,dxdy\right\} \Big/ \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_e}F_zF_z^*\,dxdy$$

$$K_m = \frac{b_0^2}{\beta_m}\left\{\delta\varepsilon_{yx}\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_m}F_z\overline{F_y}^*\,dxdy \Big/ \left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\frac{f_n^2}{\beta_n^2}\right)\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_m}F_yF_y^*\,dx\,dy + \delta\varepsilon_{zx}\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_m}\overline{F_x}F_z^*\,dxdy \Big/ \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{yy}}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta_m}F_zF_z^*\,dxdy\right\} \quad (25)$$

である．

TEモードとTMモードとが縮退して，$\beta_e=\beta_m=\beta$，$\Delta\beta_e=\Delta\beta_m=\Delta\beta$ となっている場合，初期条件として

$$A_{el}(0)=\delta_{ol}A_{e0}(0),\quad A_{ml}(0)=\delta_{ol}A_{m0}(0)$$

とすれば，

$$
\begin{aligned}
A_{e2l}(z) &= (-1)^l A_{e0}(0) J_{2l}(f(z)) \\
A_{e2l+1}(z) &= j(-1)^l \sqrt{\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_m}} A_{m0}(0) J_{2l+1}(f(z)) \\
A_{m2l}(z) &= (-1)^l A_{m0}(0) J_{2l}(f(z)) \\
A_{m2l+1}(z) &= j(-1)^l \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_e}} A_{e0}(0) J_{2l+1}(f(z))
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

ここに

$$
f(z) = \sqrt{\varepsilon_e \varepsilon_m}\, A_0 z\, e^{j(\beta_0 - \Delta\beta)z/2}\, \mathrm{sinc}\frac{(\beta_0 - \Delta\beta)z}{2} \qquad (27)
$$

となる．これより TE，TM モードの振幅 $A_e(z)$，$A_m(z)$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
A_e(z) &= A_{e0}(0)\cos(\mathrm{Re}\, g(z)) + j\sqrt{\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_m}} A_{m0}(0)\sin(\mathrm{Re}\, g(z)) \\
A_m(z) &= A_{m0}(0)\cos(\mathrm{Re}\, g(z)) + j\sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_e}} A_{e0}(0)\sin(\mathrm{Re}\, g(z))
\end{aligned}
\qquad (28)
$$

ここに

$$
g(z) = \sqrt{\varepsilon_e \varepsilon_m}\, A_0 z\, \mathrm{sinc}\frac{(\beta_0 - \Delta\beta)z}{2}\, e^{j\{\omega_0 t - (\beta_0 + \Delta\beta)z/2\}} \qquad (29)
$$

が得られる．

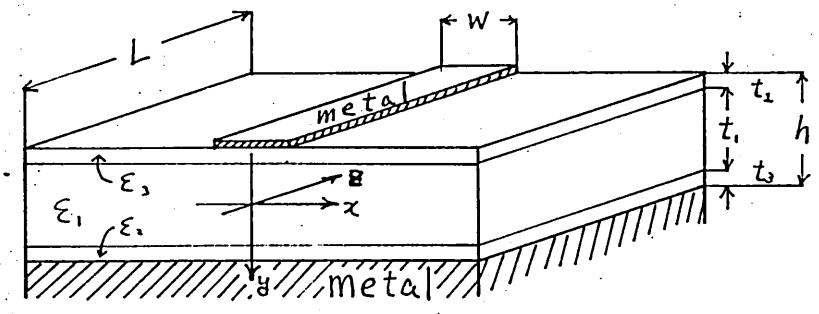


図2．光変調器

具体的な変調器の例として，図2に示すマイクロストリップ線路と，三層誘電体光導波系の組合わせを考える．ストリップ線路を伝搬する変調電力を P_m とすれば，誘電体平板（ε_1）中における変調電界 E_m は，y 方向に

$$E_m = \frac{\varepsilon_{eff.}}{\varepsilon_1}\sqrt{\frac{2\eta_0 P_m}{wh\, n_{eff.}}}\, e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \qquad (20)$$

で与えられる．ただし，$\varepsilon_{eff.}$ は三層誘電体の等価誘電率，$n_{eff.}$ はストリップ線路の実効屈折率である．

誘電体平板を GaAs とし，CO_2 レーザ光（10.6μ）の変調を例にとる．結晶軸方向により位相，強度両変調が可能である．以下に $h = 50\mu$，$W = 100\mu$ として計算例を示す．

例1．位相変調

結晶軸を図3の様に選べば

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 r_{41} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 r_{41} E \end{pmatrix}$$

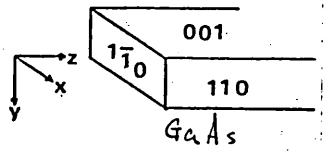


図3．結晶軸配置（位相変調）

となる．TE モードの位相変調では，式 (16) および (20) より

$$\varphi \simeq 2.7\sqrt{P_m(W)}\, L(cm)\, \mathrm{sinc}\frac{(\beta_0 - \Delta\beta)z}{2} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\beta_0 + \Delta\beta}{2} z\right)$$

位相の非整合を無視すれば．$L = 1\,cm$ において半波長電力 $P_{m1/2}$ は約 1.4 W となる．

例2．強度変調

結晶軸を図4の様に選ぶ．

この場合

$$\tilde{\delta\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^2 rE & 0 \\ \varepsilon^2 rE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

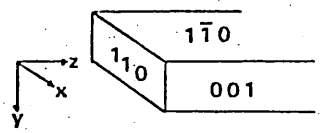


図4．結晶軸配置
（強度変調）

となる．式(29)および(30)より $L = 1\,cm$ において，半波長電力 $P_{m1/2}$ は約 0.4 W となる．

3．光波パラメトリック結合器

前節では，誘電体平板導波系中を進行する光波に，外部電界の印加による誘電率の微少変化が加わった場合を解析した．この節ではこれをより一般化し，任意の導波系における，外部からの摂動による光波の結合を取り扱かう．先と同様に，無摂動の場合の固有モードが既知であるものとして，摂動の加わった場合について結合モード理論を用いて解析する．また，非等方，不均質な光波導波系における光変調器，光波パラメトリック相互作用

，光波－超音波結合器等に適用可能な，基本的な光波結合の方程式を導びく．

マックスウェルの方程式より得られる，非等方，下均質な媒質中における波動方程式

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbb{E} + \varepsilon_0\mu_0\tilde{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E} = 0 \qquad (31)$$

において，比誘電率 $\tilde{\varepsilon}$（あるいは，波数ベクトル $\tilde{k}^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\tilde{\varepsilon}$）が時間的，空間的に微少変化する場合を検討する．電界 $\mathbb{E}$ の t-dependence を $e^{j\omega t}$ とすれば式(31)は直交座標系の行列表示によって

$$\begin{bmatrix} k_{xx}^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} & k_{xy}^2-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & k_{xz}^2-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} \\ k_{yx}^2-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} & k_{yy}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2} & k_{yz}^2-\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} \\ k_{zx}^2-\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} & k_{zy}^2-\frac{\partial^2}{\partial z\partial y} & k_{zz}^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \qquad (32)$$

と変形される．ここで

$$k_{ij}^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \qquad (33)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x,y) & \varepsilon_{xy}(x,y) & \varepsilon_{xz}(x,y) \\ \varepsilon_{yx}(x,y) & \varepsilon_{yy}(x,y) & \varepsilon_{yz}(x,y) \\ \varepsilon_{zx}(x,y) & \varepsilon_{zy}(x,y) & \varepsilon_{zz}(x,y) \end{bmatrix} \qquad (34)$$

である．

周波数 ω における第 m 番目の固有モードとして，z 方向に伝搬定数 β_m で進行するものが次式で与えられているものとする．

$$\begin{bmatrix} E_{xm} \\ E_{ym} \\ E_{zm} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A_m \begin{bmatrix} F_{xm}(x,y) \\ F_{ym}(x,y) \\ F_{zm}(x,y) \end{bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} + c.c. \qquad (35)$$

ここで E_{jm} は第 m モード電界振幅の j 方向成分，A_m は複素振幅，$F_{jm}(x,y)$ は電界の j 方向成分の横方向振幅分布である．モードが平面波とならない場合，これは複素変数として与えられる．以上の様に，式 (35) で与えられる電界は，波動方程式，式 (31) の解となっているものと仮定する．

この様に，モード，伝搬定数等が既知の導波系において，外部からの力によって波数ベクトルが

$$\hat{k}^2 \longrightarrow \hat{k}^2 + \widehat{\delta k^2} \cdot \delta$$

だけ変化した場合を考える．ただし，

$$\widehat{\delta k^2} = \begin{bmatrix} \delta k_{xx}^2(x,y) & \delta k_{xy}^2(x,y) & \delta k_{xz}^2(x,y) \\ \delta k_{yx}^2(x,y) & \delta k_{yy}^2(x,y) & \delta k_{yz}^2(x,y) \\ \delta k_{zx}^2(x,y) & \delta k_{zy}^2(x,y) & \delta k_{zz}^2(x,y) \end{bmatrix} \qquad (36)$$

$$\delta = \frac{1}{2} A_0 e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} + c.c. \qquad (37)$$

で与えられるものとする．この場合，式(31)および式(32)はそれぞれ

$$curl\ curl\ \boldsymbol{E} - \tilde{k}^2 \boldsymbol{E} = \widetilde{\delta k^2}\,\delta \boldsymbol{E} \tag{38}$$

$$\left[\tilde{k}^2 + \nabla^2 U - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z} \right)\right] \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = -\widetilde{\delta k^2}\,\delta \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{39}$$

と変形される．右辺に強制項を持つ，非斉次波動方程式である．この様な波数ベクトルの振動によって，第m番目のモード電界，式(35)は次式の様に変化されるものとする．

$$\begin{bmatrix} E_{xm} \\ E_{ym} \\ E_{zm} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{ml}(z)\, e^{j(l\omega_0 t - \Delta\beta_{ml} z)} \right\} \begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} + c.c. \tag{40}$$

すなわち第m番目のモードは，微少変化 δ の同波数 ω_0 だけずれた無限個のモードの和として表わされる様にする．ただし，その各々の横方向振幅分布は，摂動のない場合と同一で変化せず，また，伝搬定数 $\Delta\beta$ は，$\Delta\beta_{ml}$ (たとえば，$\Delta\beta_{ml} = l \frac{d\beta_m}{d\omega} \omega_0$) の変化を示すものとする．

一般に，周波数 ω_1 における第 m 番目のモードと，周波数 ω_2 における第 n 番目のモードとの結合を考える．

周波数関係として

$$\omega_1 + p\omega_0 = \omega_2 + q\omega_0 \quad (p, q\ ;\ 整数) \tag{41}$$

がある場合，この周波数における結合の方程式は，第 m および第 n モードの電界，式 (40) を式 (39) に代入することによって，次式の様に得られる．

$$-2j(\beta_m + \Delta\beta_{mp}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} \frac{dA_{mp}}{dz} e^{-j(\beta_m + \Delta\beta_{mp})z}$$

$$-2j(\beta_n + \Delta\beta_{nq}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix} \frac{dA_{nq}}{dz} e^{-j(\beta_n + \Delta\beta_{nq})z} \tag{42}$$

$$= \left[A_{mp-1} A_0 \widetilde{\delta k}\, e^{-j\{\beta_0 - (\Delta\beta_{mp} - \Delta\beta_{mp-1})\}z} + A_{mp+1} A_0^* \widetilde{\delta k}^*\, e^{j\{\beta_0 - \Delta\beta_{mp+1} - \Delta\beta_{mp})\}z} \right]$$

$$\times \begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} e^{-j(\beta_m + \Delta\beta_{mp})z}$$

$$+ \left[A_{nq-1} A_0 \widetilde{\delta k}\, e^{-j\{\beta_0 - (\Delta\beta_{nq} - \Delta\beta_{nq-1})\}z} + A_{nq+1} A_0^* \widetilde{\delta k}^*\, e^{j\{\beta_0 - (\Delta\beta_{nq+1} - \Delta\beta_{nq})\}z} \right]$$

$$\times \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix} e^{-j(\beta_n + \Delta\beta_{nq})}$$

ただし，振幅の変化は波長に比べて十分ゆるやかで，振幅変化の2次の項は無視できるものとした．

前節で検討した光変調器の場合には，振動の同波数 ω_0 が光波の同波数 ω_1，ω_2 に比べて十分小さく，光波の分散が無視できるもの．とし，

$$\Delta\beta_{mp} = p\Delta\beta_m = p\frac{d\beta_m}{d\omega}\omega_0 \ll \beta_m$$
$$\Delta\beta_{ng} = g\Delta\beta_n = g\frac{d\beta_n}{d\omega}\omega_0 \ll \beta_n \qquad (43)$$

を仮定する．このとき，式(42)は次式の様に変形される．

$$-2j\beta_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} \frac{dA_{mp}}{dz} e^{-j(\beta_m + p\Delta\beta_m)z}$$

$$-2j\beta_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix} \frac{dA_{ng}}{dz} e^{-j(\beta_n + g\Delta\beta_n)z} \qquad (44)$$

$$= [A_{mp-1}A_0\widehat{\delta\varepsilon}^2 e^{-j(\beta_0-\Delta\beta_m)z} + A_{mp+1}A_0^*\widehat{\delta\varepsilon}^{2*} e^{j(\beta_0-\Delta\beta_m)z}] \begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} \times e^{-j(\beta_m + p\Delta\beta_m)z}$$

$$+ [A_{ng-1}A_0\widehat{\delta\varepsilon}^2 e^{-j(\beta_0-\Delta\beta_n)z} + A_{ng+1}A_0^*\widehat{\delta\varepsilon}^{2*} e^{j(\beta_0-\Delta\beta_n)z}] \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix} \times e^{-j(\beta_n + g\Delta\beta_n)z}$$

さらに $|\beta_m - \beta_n| \gg 0$ で，位相整合によるコヒーレント長が導波系の長さ（相互作用長）に比べて十分小さい場合には，ω_1 のすべてのモードと ω_2 のすべてのモードとの結合は無視でき，式(44)は2つのモードに関して分離できて，すべてのモードに関する部分は，

$$-2j\beta_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} \frac{dA_{mp}}{dz}$$

$$= \left[A_{mp-1} A_0 \hat{\delta}_k^2 e^{-j(\beta_0 - \Delta\beta_m)z} + A_{mp+1} A_0^* \hat{\delta}_k^{2*} e^{j(\beta_0 - \Delta\beta_m)z} \right] \begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} \tag{45}$$

となる．この式は，前節に示したTEおよびTMモードの位相変調の場合の，式(11)あるいは式(18)の一般化となっている．また特に，ω_1 と ω_2 とが一致し，各々のモードが縮退（$\beta_m = \beta_n = \beta$）している場合には，式(44)は

$$-2j\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} \frac{dA_{nl}}{dz} + \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix} \frac{dA_{nl}}{dz} \right\}$$

$$= \left[A_{nl-1} A_0 \hat{\delta}_k^2 e^{-j(\beta_0 - \Delta\beta)z} + A_{nl+1} A_0^* \hat{\delta}_k^{2*} e^{j(\beta_0 - \Delta\beta)z} \right] \begin{bmatrix} F_{xm} \\ F_{ym} \\ F_{zm} \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$+ \left[A_{nl-1} A_0 \hat{\delta}_k^2 e^{-j(\beta_0 - \Delta\beta)z} + A_{nl+1} A_0^* \hat{\delta}_k^{2*} e^{j(\beta_0 - \Delta\beta)z} \right] \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix}$$

となり，前節で示した強度変調の場合の式(23)の一般化された形式となる．

$\omega_0 + \omega_1 = \omega_2$の関係のある場合のパラメトリック結合方程式は，式(42)において$p = q+1$とおくことによって導びかれる．特に，位相整合条件として$\beta_n - \beta_m \triangleq \beta_0$のみが成立し，$p \neq 0$，$q \neq 0$の場合に限されていない場合には，$A_{no}$と$A_{mo}$との結合のみを考慮することにより，式(42)は，

$$-2j\beta_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_{xm} \\ \bar{H}_{ym} \\ \bar{H}_{zm} \end{bmatrix} \frac{dA_{mo}}{dz} = A_{no} A_0^* \hat{\delta}\varepsilon^* e^{-j\delta\beta z} \begin{bmatrix} \bar{H}_{xn} \\ \bar{H}_{yn} \\ \bar{H}_{zn} \end{bmatrix}$$

$$-2j\beta_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_{xn} \\ \bar{H}_{yn} \\ \bar{H}_{zn} \end{bmatrix} \frac{dA_{no}}{dz} = A_{mo} A_0 \hat{\delta}\varepsilon e^{j\delta\beta z} \begin{bmatrix} \bar{H}_{xm} \\ \bar{H}_{ym} \\ \bar{H}_{zm} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\delta\beta = \beta_n - \beta_m - \beta_0 \quad (48)$$

となる．すなわち，ポンピングの十分強力な場合の光波パラメトリック相互作用，あるいわ，光波－超音波相互作用の基本方程式となっている．

以上，この節で示した式を利用すれば，前節で検討した光変調器（3層平板形導波系）において，電界の不均

一性を考慮することができるほか，スロット線路形光伝送路における光変調，あるいは，平行光伝送路間の結合変調等にも適用できる．また，非等方性誘電体導波系における光波パラメトリック相互作用，マイクロ波表面波伝送路における光変調，導波系における光波－超音波結合等，一般に光波の複素屈折率が変調される場合，あるいは，不均一な変動が加わった場合の結合方程式となっている．

4．むすび

本文では，誘電体平板導波系における光変調を解析しその可能性を検討するとともに，より一般的に，導波系において摂動が加わった場合の光波のふるまいを記述する，結合の方程式を導びいた．

誘電体平板導波系に，外部電界が加わった場合における誘電率の変動によって，伝搬定数が変化すれば位相変調に，TE－TMモード間の結合が起れば強度変調となるが，まず，これらを結合モード理論により解析した．これを利用して，GaAs 導波系における 10.6μ 光の変調を例として，概算により，従来より高感度と考えられ

る変調器の実現が可能であることを示した。

さらに，光波パラメトリック結合について，非等方，不均質な媒質中を光波が伝搬している場合，外部からの摂動によってうける光波の変化を記述する，基本的な方程式を導出した。また，これにより，適用可能範囲のより広いと考えられる，変調およびパラメトリック相互作用の方程式を示した。

今後は，変調器に関してより具体的，詳細な検討を加えると共に，実験を考慮することも重要であると思われる。また同時に，導波系における光波－超音波，光波－表面波結合等についても，具体的な検討を行なうことが必要と考えられる。さらに，モードの励振等，実際上の問題点の検討も必要である。

参考文献

1. S.E. Miller, "Integrated optics; an introduction," Bell Syst. Tech. J., 7, 2059, (1969)

2. 山本錠彦，小山田保平，牧本利夫"異方性薄膜光導波系の結合モード解析とその応用"輻研資料 47年4月

3. 里村裕, 松原正則, 熊谷信昭 "異方性誘電体スラブ" における電磁波モードの解析" 輻研資料, 47年 4月

4. D. B. Anderson et al. 4-th Intn'l Q E Conf. Phoenix, April 1966

5. Y. Suematsu, Japanese J. Appl. Phys., 9, 798, (1970)

6. 井筒雅之, 末田 正 "薄膜導波系における光波パラメトリック相互作用について" 輻研資料, 46年 4月

7. 井筒雅之, 末田 正 "誘電体導波系における光波パラメトリック相互作用" 量エレ研資 47年 6月

8. D. B. Anderson et al., Appl. Phys. Letters, 19, 266 (1971)

9. P. K. Tien et al., Phys. Rev. Letters., 17, 447 (1970)

10. 末松 他 "薄膜の光パラメトリック相互作用と水晶基板ガラス薄膜導波系による第2高調波発生" 量エレ研資, 46年 5月

11. 石崎敬一郎, 倉薗貞夫, 熊谷信昭 "分布結合線路を用いた新しい光変調方式" 輻研資料, 46年 7月.

12 本田正典, 藤森正敏, 中村正, 西村保郎 "CdS 薄膜による光波変調" 量エレ研資, 47年 6月

13 T. Kobayashi, Y. Cho, Y. Matsuo, "General Treatment of light modulations using coupled mode concept" Mem. Inst. Sci. & Ind. Res., Osaka Univ., 25, 43 (1968)

輻射科学研究会資料

相互結合を考慮した多素子アンテナの解析

小南　昌信
森　啓真
六島　克
（大阪府立大学工学部）

1972年6月30日

まえがき

異なった寸法のアンテナ素子より構成される結合多素子アンテナの問題はアンテナアレーの解析や指向性合成の基礎理論としてきわめて興味がある。

従来多素子アンテナの問題は，起電力法によって計算された自己および相互インピーダンスを用いて回路論的に取り扱われることが多かった。[1] しかし一般の多素子アンテナにおいては自己インピーダンスも厳密には給電点で開放された他の素子からの影響を受け，また相互インピーダンスにおいては考えている2素子以外の素子による影響もあるはずであるが，通常の起電力法では正弦波電流分布の形が仮定されるのでそのような影響はでてこない。

各素子の長さが半波長あるいはその整数倍の場合には変分法[2]あるいはpoint matching法[3]により適当な試験関数の一次結合で電流分布を仮定し，その係数を決めることにより相互結合も考慮して解析されている。しかし素子長が任意の場合にこれらの方法を適用することには困難がある。

任意長の素子よりなるアンテナの場合には電磁界の境界条件から得られる電流に関する積分方程式を直接数値的に解く方法[4]も考えられている。しかしこの場合解の精度は分割点の数できまるため，必要な精度を得るには必然的に計算時間が長くなる。また解が数値的にしか得られないことから指向性等を求めることには適しないように思われる。

そこで本文では以上の点を考慮して結合多素子アンテナの問題をHallénの逐次近似法[5]の考え方を拡張適用することにより，統一的に解析し比較的精度良く電流分布，自己アドミタンスおよび相互アドミタンスを求めることができたのでその結果につき述べる。

2. 基本式の誘導

任意の長さおよび直径をもつ素子よりなる総数Nのダイポールアンテナ列の形態およびその座標を図1に示す。各素子はそれぞれ独立した電源により励振されているものとする。また以下の解析で各素子は完全導体であり，長さはその直径にくらべて十分大きく電流は軸方向にのみ流れているものとしている。

素子 i 表面上の点 Z_i におけるベクトルポテンシャルは軸方向成分のみでありつぎのように表わされる。

$$A_i(Z_j) = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}(Z_i) \tag{1}$$

ここで $A_{ij}(Z_i)$ は素子 j 上の電流により素子 i 上に生じるベクトルポテンシャルで素子 j の点 Z_j における全電流 $I_j(Z_j)$ を用いて

$$A_{ij}(Z_i) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h_j}^{h_j} I_j(Z_j') \Psi_{ij}(Z_i, Z_j') \, dZ_j' \tag{2}$$

と表わされる。ただし

$$\Psi_{ij}(Z_i, Z_j') = \frac{e^{-j\beta R_{ij}(Z_i, Z_j')}}{R_{ij}(Z_i, Z_j')} \tag{3}$$

$$R_{ij}(Z_i, Z_j') = \sqrt{(Z_i - Z_j')^2 + d^2} \tag{4}$$

$$d = \begin{cases} d_{ij} & (i \neq j) \\ a & (i = j) \end{cases}$$

であり，h_i，a_i はそれぞれ素子 i の長さおよび半径，d_{ij} は素子 i と j の間の距離を表わしている。また中央の給電点でのギャップは十分小さいものとする。

素子 i 表面上での点 Z_i における電界の軸方向成分はベクトルポテンシャル $A_i(Z_i)$ によって

$$E_i(Z_i) = -j\frac{w}{\beta^2}\left\{\frac{\partial^2 A_i(Z_i)}{\partial Z_i^2} + \beta^2 A_i(Z_i)\right\} \tag{5}$$

と表わされる。

アンテナ素子は完全導体と仮定しているから，その表面上では給電点を除いて電界の接線成分は零であるが，中央部には電圧 $\pm\frac{V_i}{2}$ が印加されているのでそれを δ 関数で表わすと式(5)はつぎのようになる。

$$E_i(Z_i) = -j\frac{w}{\beta^2}\left\{\frac{\partial^2 A_i(Z_i)}{\partial Z_i^2} + \beta^2 A_i(Z_i)\right\} = E_{io}\,\delta(Z_i - 0) \tag{6}$$

ここに E_{io} は $Z_i \to 0$ の付近で

$$\int_o^{o+\varepsilon} E_{io}\cdot\delta(Z_i - 0)\,dZ_i = \frac{V_i}{2}$$

なるパルス関数により表わされる供給電界である。

その構造が $Z_i = 0$ に対して対称であることを考慮して式(6)を $A_i(Z_i)$ について解くと

$$A_i(Z_i) = -\frac{j}{C}\left(P_i \cos\beta Z_i + \frac{V_i}{2}\sin\beta|Z_i|\right) \tag{7}$$

となる。ここで C は光速，P_i は任意定数である。

式(2)の $A_{ii}(Z_i)$ を Hallen が一本のダイポールアンテナの電流分布を求める際におこなったのと同様にして，つぎのように変形する

$$A_{ii}\ (Z_i)=\frac{\mu}{4\pi}I_i\ (Z_i)\left\{\Omega_i+\log\left(1-\frac{a_i^2}{h_i^2}\right)+\delta_i\right\}$$

$$+\frac{\mu}{4\pi}\int_{-hi}^{hi}\frac{I_i\ (Z_i')\ e^{-j\beta R_{ii}\ (Z_i,\ Z_i')}-I_i\ (Z_i)}{R_{ii}\ (Z_i,\ Z_i')}dZ_i' \quad (8)$$

$$\Omega_i=2\log\left(\frac{2h_i}{a_i}\right) \quad (9)$$

$$\delta_i=\log\left[\frac{1}{4}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{a_i}{h_i-Z_i}\right)^2}+1\right\}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{a_i}{h_i+Z_i}\right)^2}+1\right\}\right]$$

また式(1)の $A_i\ (Z_i)$ は2つの部分に分けて

$$A_i\ (Z_i)=A_{ii}\ (Z_i)+\sum_{j(\neq i)}A_{ij}\ (Z_i) \quad (10)$$

と書き表わし式(8)との関係から $I_i\ (Z_i)$ について解くと

$$I_i\ (Z_i)=-\frac{j}{30\Omega_i}\left(P_i\cos\beta\ Z_i+\frac{V_i}{2}\sin\beta\ |Z_i|\right)$$

$$-\frac{1}{\Omega_i}I_i\ (Z_i)\left\{\log\left(1-\frac{Z_i^2}{h_i^2}\right)+\delta_i\right\}$$

$$-\frac{1}{\Omega_i}\int_{-hi}^{hi}\frac{I_i\ (Z_i')\ e^{-j\beta R_{ii}\ (Z_i,\ Z_i')}-I_i\ (Z_i)}{R_{ii}\ (Z_i,\ Z_i')}dZ_i'$$

$$-\frac{1}{\Omega_i}\sum_{j(\neq i)}\int_{-hj}^{hj}I_j\ (Z_j')\ \Psi_{ij}\ (Z_i,\ Z_j')\ dZ_j' \quad (11)$$

なる関係が得られる。

なお素子端では $I_i\ (h_i)=0$ なので式(11)より

$$\frac{j}{30\Omega_i}\left(P_i \cos \beta h_i + \frac{V_i}{2} \sin \beta h_i\right)$$

$$+ \frac{1}{\Omega_i} \int_{-h_i}^{h_i} I_i\ (z_i')\, \Psi_{ii}\ (h_i,\ z_i')\ dz_i'$$

$$+ \frac{1}{\Omega_{i(j \neq i)}} \sum \int_{-hj}^{hj} I_j\ (z_j')\, \Psi_{ij}\ (h_i,\ z_j')\, dz_j' = 0 \qquad (12)$$

となる。

式(11)から式(12)を相引くことにより，N本のダイポール素子中の任意の素子 i 上の電流分布を表わすつぎの基本式が得られる。

$$I_i\ (z_i) = {}_oI_i\ (z_i) + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\Omega_i} H_{ij}\ (I_j) \qquad (13)$$

$${}_oI_i\ (z_i) = -\frac{j}{30\Omega_i}\left\{P_i\ (\cos\beta z_i - \cos\beta h_i) + \frac{V_i}{2}(\sin\beta |z_i| - \sin\beta h_i)\right\} \qquad (14)$$

$$H_{ij}\ (I_j) = \delta_{ij}\Omega_j I_j\ (z_j) - \int_{-h_j}^{h_j} I_j\ (z_j')\left\{\Psi_{ij}\ (z_i,\ z_j') - \Psi_{ij}\ (h_i,\ z_j')\right\} dz_j' \qquad (15)$$

ここで δ_{ij} はKronecker の $delta$ 記号である。

3. 電流分布の行列表示

式(13)において第一項 ${}_oI_i\ (Z_i)$ を電流分布 $I_i\ (Z_i)$ の基本解とする。この基本解を第二項 $H_{ij}(I_j)$ に代入して近似度の高い解（第一次近似解）を求め，その結果をさらに同式に代入してより高次の解を求めるという逐次近似を続けると最後に正しい電流分布が得られる。

その結果はつぎのようになる。

$$I_i\ (Z_i)=\sum_{j=1}^{N}\left\{\ S_{ij}\ (Z_i)-S_{ij}\ (h_i)\ \right\}P_j+\sum_{j=1}^{N}\left\{R_{ij}\ (Z_i)\right.$$

$$\left.-R_{ij}\ (h_i)\right\}\ V_j \tag{16}$$

ここに Sij，Rij は次式で与えられる。

$$S_{ij}\ (Z_i)=-\ \frac{j}{30\Omega_i}\left[\ \delta_{ij}\,{}_oF_i\ (Z_i)+\frac{1}{\Omega_j}{}_1F_{ij}\ (Z_i)\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{\Omega_j\Omega_l}{}_2F_{ilj}(Z_i)+\ \cdots\cdots\ \right] \tag{17}$$

$$R_{ij}\ (Z_i)=-\ \frac{j}{60\Omega_i}\left[\ \delta_{ij}\,{}_oG_i\ (Z_i)+\ \frac{1}{\Omega_j}{}_1G_{ij}\ (Z_i)\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{\Omega_j\Omega_l}{}_2G_{ilj}(\ Z_i\ )+\cdots\cdots\right] \tag{18}$$

$${}_oF_i\ (Z_i)=\cos\beta Z_i$$

$${}_oG_i\ (Z_i)=\sin\beta\,|\,Z_i\,|$$

$$
{}_1F_{ij}\ (Z_i)=\delta_{ij}\,\Omega_i\cos\beta Z_i-C d_{ij}\ (h_j,\ Z_i)+\cos\beta h_i\,E d_{ij}\ (h_j,\ Z_i)
$$

$$
{}_1G_{ij}\ (Z_i)=\delta_{ij}\,\Omega_i\sin\beta|Z_i|-S_{dij}\ (h_j,\ Z_i)+\sin\beta h_i E_{dij}\ (h_j,\ Z_i)
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2F_{ilj}\ (Z_i)=&\delta_{il}\,\delta_{lj}\,\Omega_i^2\cos\beta Z_i-(\delta_{il}\,\Omega_i+\delta_{jl}\,\Omega_j)\{C_{dij}\ (h_j,\ Z_i)\\
&-\cos\beta h_j\,E_{dij}\ (h_j,\ Z_i)\}\\
&+\int_{-h_l}^{h_l}\int_{-h_j}^{h_j}(\cos\beta Z_j'-\cos\beta h_j)\{\Psi_{lj}\ (Z_l',\ Z_j')-\Psi_{lj}\\
&\cdot(h_l,\ Z_j')\}\,\Psi_{il}(Z_i,\ Z_l')\,dZ_j'dZ_l'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2\Theta_{ilj}\ (Z_i)=&\delta_{il}\,\delta_{ij}\,\Omega_i^2\sin\beta|Z_i|-(\delta_{il}\,\Omega_i+\delta_{jl}\,\Omega_j)\{S_{dij}\ (h_j,\ Z_i)\\
&-\sin\beta h_j E_{dij}\ (h_j,\ Z_i)\}\\
&+\int_{-h_l}^{h_l}\int_{-h_l}^{h_l}(\sin\beta|Z_j|-\sin\beta h_j)\{\Psi_{lj}\ (Z_l',\ Z_j')\\
&-\Psi_{lj}\ (h_l,\ Z_j')\}\,\Psi_{il}\ (Z_i,\ Z_l')\,dZ_j'dZ_l'\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

なお上式にはつぎの関数を使用した。

$$
C_a\ (h,\ Z)=\int_{-h}^{h}\cos\beta Z'\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,dZ'
$$

$$
S_a\ (h,\ Z)=\int_{-h}^{h}\sin\beta|Z'|\,\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,dZ'
$$

$$Ea(h, Z)=\int_{-h}^{h} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dZ'$$

$$R=\sqrt{(Z-Z')^2+a^2}$$

また未知定数 P_i ($i=1.2.\cdots N$) は式(12)の関係より決定される。
式(12)に式(16)を代入することにより

$$\sum_{j=1}^{N} Q_{ij}(h_i) P_j + \sum_{j=1}^{N} T_{ij}(h_i) V_j = 0 \tag{19}$$

となる。ここに Q_{ij} および T_{ij} は次式で与えられる。

$$Q_{ij}(h_i)=-\frac{j}{30\Omega_i}\left[\delta_{ijo} {}_0F'_i(h_i)+\frac{1}{\Omega_j} {}_1F'_{ij}(h_i)\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{\Omega_j\Omega_i} {}_2F'_{ilj}(h_i)+\cdots\cdots\right] \tag{20}$$

$$T_{ij}(h_l)=-\frac{j}{60\Omega_i}\left[\delta_{ij} {}_0G'_i(h_i)+\frac{1}{\Omega_j} {}_1G'_{ij}(h_l)\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{\Omega_j\Omega_l} {}_2G'_{il}(h_i)+\cdots\cdots\right] \tag{21}$$

$${}_0F'_i(h_i)=\cos\beta h_i$$

$${}_0G'_i(h_i)=\sin\beta h_i$$

$${}_1F'_{ij}(h_i)=-C_{dij}(h_j, h_i)+\cos\beta h_j E_{dij}(h_j, h_i)$$

$$ {}_1G'_{ij}(h_i) = -S_{dij}(h_j, h_i) + \sin\beta h_j E_{dij}(h_j, h_i) $$

$$ {}_2F'_{ilj}(h_i) = -\delta_{lj}\Omega_j\{C_{dij}(h_j, h_i) - \cos\beta h_j E_{dij}(h_j, h_i)\} $$

$$ + \int_{-h_l}^{h_l}\int_{-h_j}^{h_j}(\cos\beta Z'_j - \cos\beta h_j)\{\Psi_{lj}(Z'_l, Z'_j) $$

$$ - \Psi_{lj}(h_l Z'_j)\}\Psi_{il}(h_i Z'_l)\, dZ'_j\, dZ'_l $$

$$ {}_2G'_{ilj}(h_i) = -\delta_{lj}\Omega_j\{S_{dij}(h_j, h_i) - \sin\beta h_j E_{dij}(h_j, h_i)\} $$

$$ + \int_{-h_l}^{h_l}\int_{-h_j}^{h_j}(\sin\beta|Z'_j| - \sin\beta h_j)\{\Psi_{jl}(Z'_l, Z'_j) $$

$$ - \Psi_{jl}(h_i, Z'_j)\}\Psi_{il}(h_i, Z'_l)\, dZ'_j dZ'_l $$

$$ \vdots $$

式(19)の関係から未知定数P_iを端子電圧V_i（$i=1.2.\cdots\cdots N$）の関数として求めるのであるが，これは行列を用いると簡単になる。すなわち$I_i(Z_i)$，P_iおよびV_i（$i=1.2.\cdots\cdots N$）の作る列ベクトルおよびS_{ij}，R_{ij}，Q_{ij}およびT_{ij}（$i=1.2.\cdots\cdots N$）の作る正方行列を用いると，式(16)および式(19)は，

$$ [I_i(Z_i)] = \{[S_{ij}(Z_i)] - [S_{ij}(h_i)]\}[P_j] + \{[R_{ij}(Z_i)] - [R_{ij}(h_i)]\}[V_j] \quad (22) $$

$$ [0] = [Q_{ij}(h_i)][P_j] + [T_{ij}(h_i)][V_j] \quad (23) $$

とかける。

この両式より未知定数P_iの作るベクトル$[P_j]$を消去すると

$$ [I_i(Z_i)] = [Y_{ij}(Z_i)][V_j] \quad (24) $$

$$ [Y_{ij}(Z_i)] = \{[R_{ij}(Z_i)] - [R_{ij}(h_i)]\} $$

$$-\{[S_{ij}(Z_i)]-[S_{ij}(h_i)]\}[Q_{ij}(h_i)]^{-1}[T_{ij}(h_i)] \quad (25)$$

となる。

以上により電流分布は各素子上の位置 Z_i および各素子の給電電圧 V_i の関数として表わすことができた。

4. 結果および検討

前節までの解析により任意長の素子よりなる総数Nの相互に結合したダイポールアンテナの電流分布は，各素子での給電点励振条件が定まれば，式(24)より求めることができる。その場合任意の素子 i 上の電流分布は

$$I_i(Z) = \sum_{j=1}^{N} Y_{ij}(Z_i) V_j \quad (i = 1.2.\cdots\cdots N) \quad (26)$$

の形で各素子からの効果の和として得られることになる。

なお式(25)で $Z_i = 0$ ($i = 1.2.$, ……N) とおくと，行列 $[Y_{ij}(0)]$ は総数Nの多素子アンテナの各給電点でのアドミタンス行列となる。すなわち行列 $[Yij(0)]$ の対角要素はすべてのエレメントからの相互結合を考慮した各アンテナ素子の自己アドミタンスであり，その非対角要素はそれぞれのアンテナ素子間の相互アドミタンスである。またこの系の自己および相互インピーダンスは式(25)の逆行列を作ることにより容易に得ることができる。

なお逐次近似を行なう際の第一近似式は任意の二本の素子間の直接の効果（一次の効果）を表わし，第二近似式は第3の素子を介しての効果の和（二次の効果）と考えることもできる。

例えばN＝2で両素子の長さが半波長の場合に式(25)からこの系の相互インピーダンスを第一次近似式で求めて，$1/\Omega_i$ の2次以上の項は無視すると，

$$R_{ij} = 30\{2C_i(\beta d) - C_i\{\beta(\sqrt{d^2+L^2}+L)\} - C_i\{\beta(\sqrt{d^2+L^2}-L)\}\} \quad (27)$$

$$X_{ij} = -30\{2S_i(\beta d) - S_i\{\beta(\sqrt{d^2+L^2}+L)\} - S_i\{\beta\sqrt{d^2+L^2}-L)\}\} \quad (28)$$

$$d = \begin{cases} d_{ij} & (i \neq j) \\ a_i & (i = j) \end{cases}$$

$$L = h_1 = h_2 = \lambda/2$$

$$i,\ j = 1.\ 2.$$

となる。これは2素子アレーアンテナのインピーダンスを起電力法で求めた結果と全く一致している。したがって起電力法は本解析法の第一近似式であるということができる。

つぎに前節までに解析した一般的な系の具体的な例として，ここでは長さの異なる2素子アレーについて各素子上での電流分布，自己アドミタンスおよび相互アドミタンスの計算結果を示す。

図2と図3は半径が $a_1 = a_2 = 0.007022\lambda$，長さが $h_2 = 0.5\lambda$ および $h_1 = 0.25\lambda$ のダイポールアンテナを $d_{12} = 0.15\lambda$ の間隔で配列したときの電流分布を $V_1 \neq 0$，$V_2 = 0$ および $V_1 = 0$，$V_2 \neq 0$ の2つの給電状態で示したものである。以下の図で実測値はCheongとKing[3]のデータを用いている。また理論値の計算は，式(17)，(18)の S_{ij} および R_{ij} については第一近似式を，式(21)，(22)の Q_{ij}，T_{ij} については第二近似式を用いている。

図4は同じアンテナアレーの間隔を $d_{12} = 0.05\ \lambda$ から $d_{12} = 0.50\ \lambda$ の間で変化させた場合の両素子の自己アドミタンスの理論値と実測値を示したもので，図5は相互アドミタンスについて示したものである。

図6から図9は同じアンテナアレーの間隔を $d_{12} = 0.05\lambda$ から $d_{12} = 0.50\lambda$ の間で変化させた時の，両素子上での電流分布の状態を $V_1 \neq 0$，$V_2 = 0$ および $V_1 = 0$，$V_2 \neq 0$ の2つの給電状態で示したものである。

5. むすび

本稿では任意長の多素子アンテナの問題を，各素子相互間の結合の影響も考慮して，Hallen'の逐次近似法の考え方を拡張適用することにより行列計算から比較的容易に，統一的に解析できることを示した。

具体的な例として，長さの異なる2素子ダイポールアレーについて電流分布およびアドミタンスの値の計算例を示し，第一次近似式によっても一応の一致が得られることを示した。

本方法を使用することにより，従来の変分法による解析の任意長アンテナアレーへの拡張の困難さや，積分方程式を直接数値計算によって解く方法では電流分布の関数形が得られないという点を改善できると思う。

今後は直線状多素子アンテナを基本形とするアンテナアレーの問題，例えば対数周期広帯域アンテナ等への応用[6]を検討してゆくつもりである。

謝　辞　終わりに当りご指導いただきました大阪府立大学滝猪一名誉教授（現近畿大学教授），数値計算にご協力いただいた学生吉田敏孝君に深く感謝します。なお計算は大阪府立大学計算センターTOSBAC－3400を使用した。

文　献

(1) 内田英成，他：“超短波空中線”　コロナ社（1955）

(2) N. Inagaki：“An Improved Circuit Theory of Multielement Autenna” IEEE Trans. vol. AP－17, No. 2 (March 1969)

(3) W. M. Cheong and R. W. King：“Arrays of Unequal and Unequally Spaced Dipoles” Radio Science, Vol. 2 (New Series) No. 11, P1303 (Nov. 1967)

(4) C. D. Taylor et al.：“Theory of Coupled Monopoles” IEEE Trans. vol. AP－18, No. 3, P360, (May 1970)

(5) R. W. P. King : "The theory of linear antennas" Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1956)

(6) J. Wolter : "Solution of Maxwell's Equations for Log-Periodic Dipole Antennas" IEEE Trans. vol. AP-18, No. 6, P734 (Nov. 1970)

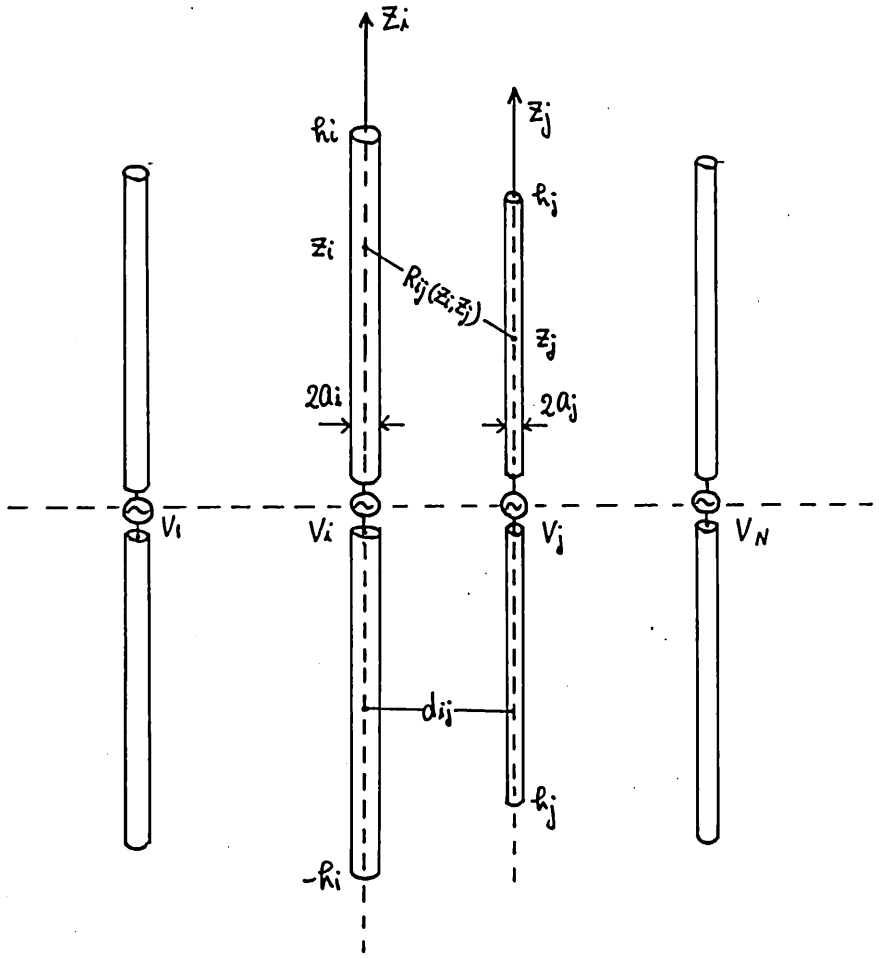


図1　ダイポールアンテナ列

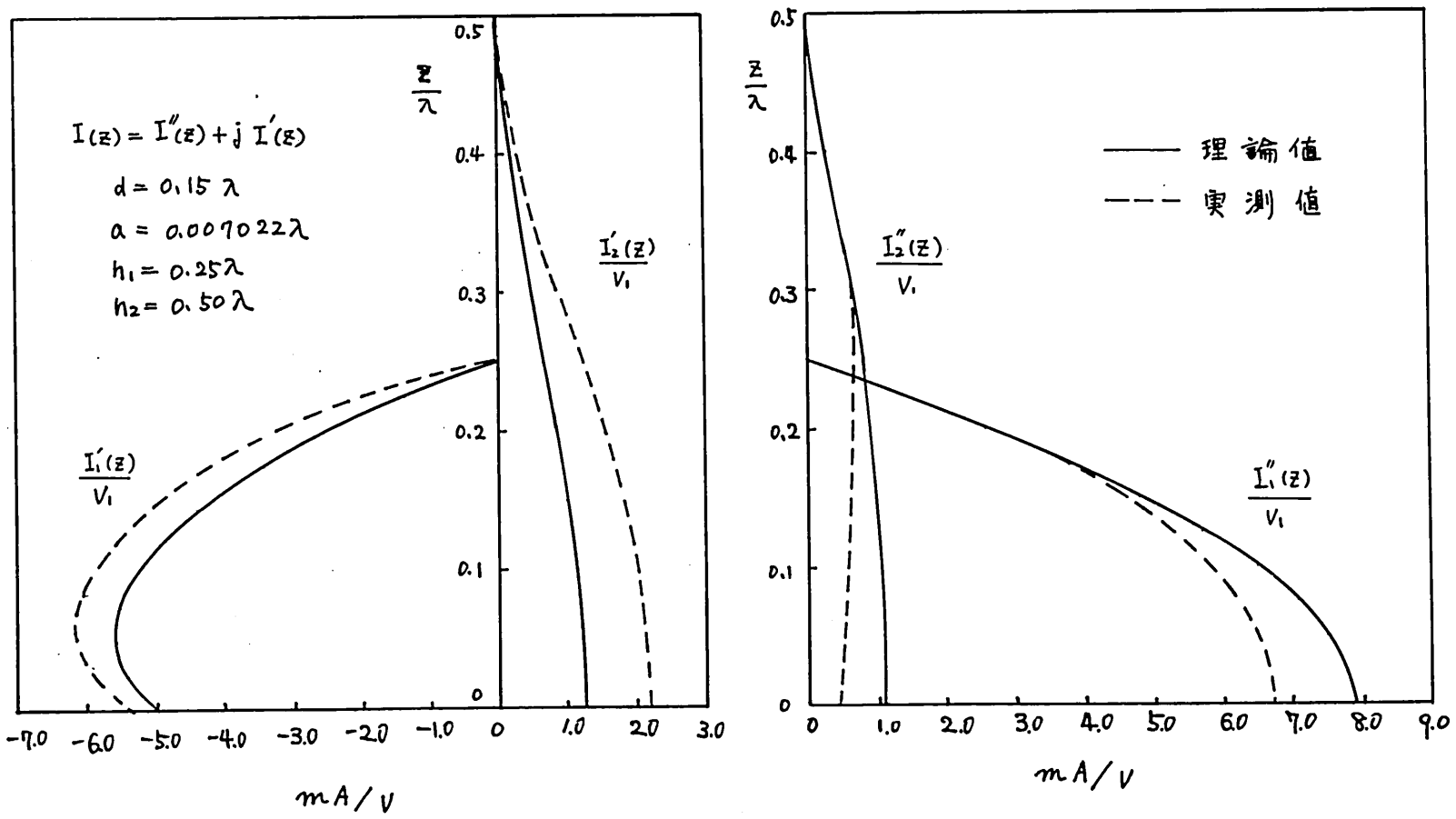


図 2　結合した 2 素子アンテナの電流分布　$V_1 = 1, V_2 = 0$

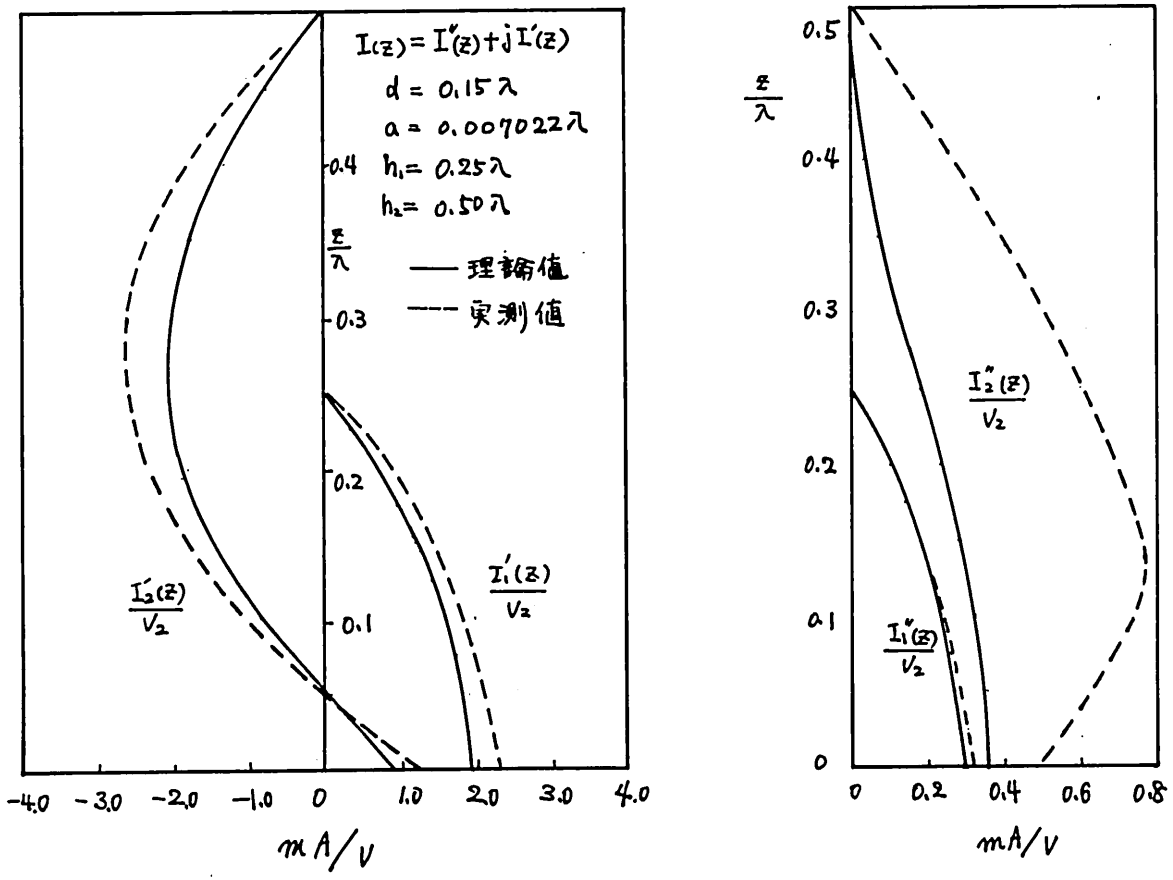
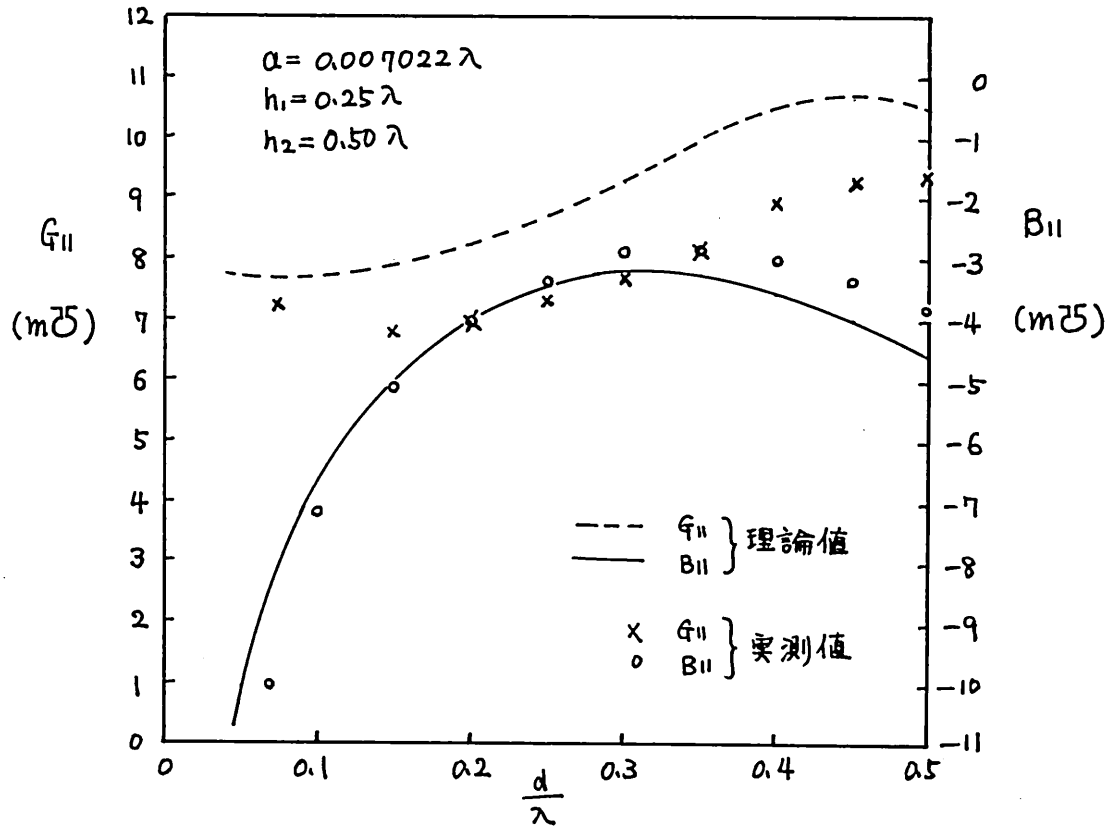


図3　結合した2素子アンテナの電流分布　$V_1=0$, $V_2=1$



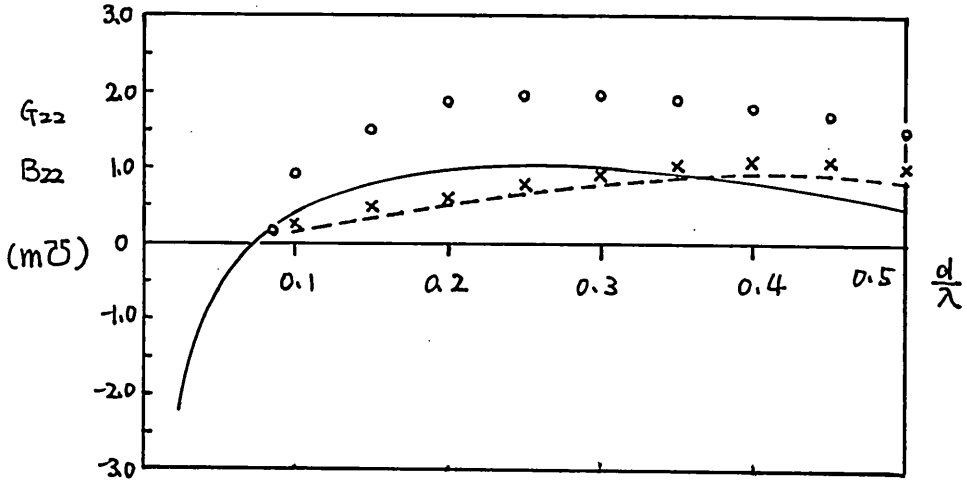


図4　自己アドミタンス　$Y_{ii} = G_{ii} + jB_{ii}$

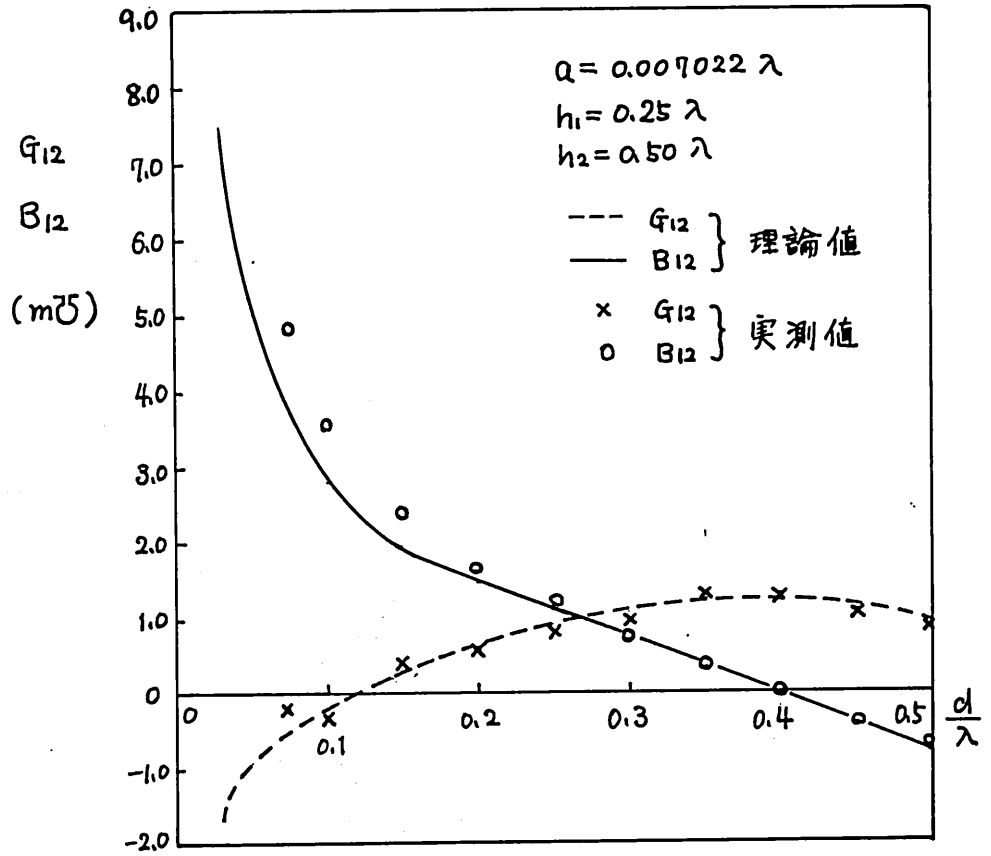


図 5　相互アドミタンス　$Y_{12} = G_{12} + jB_{12}$

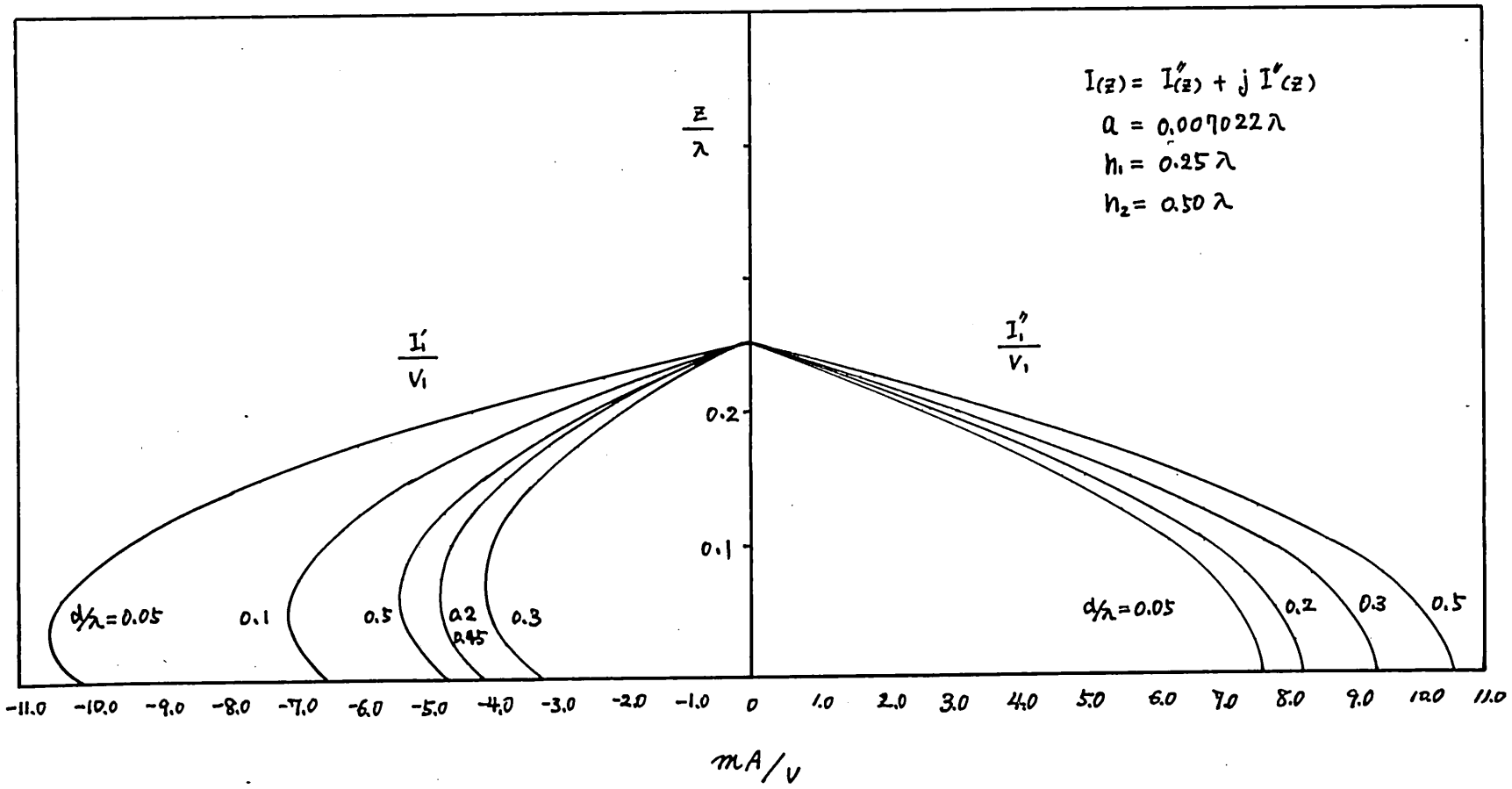


図6　結合した2素子アンテナの電流分布

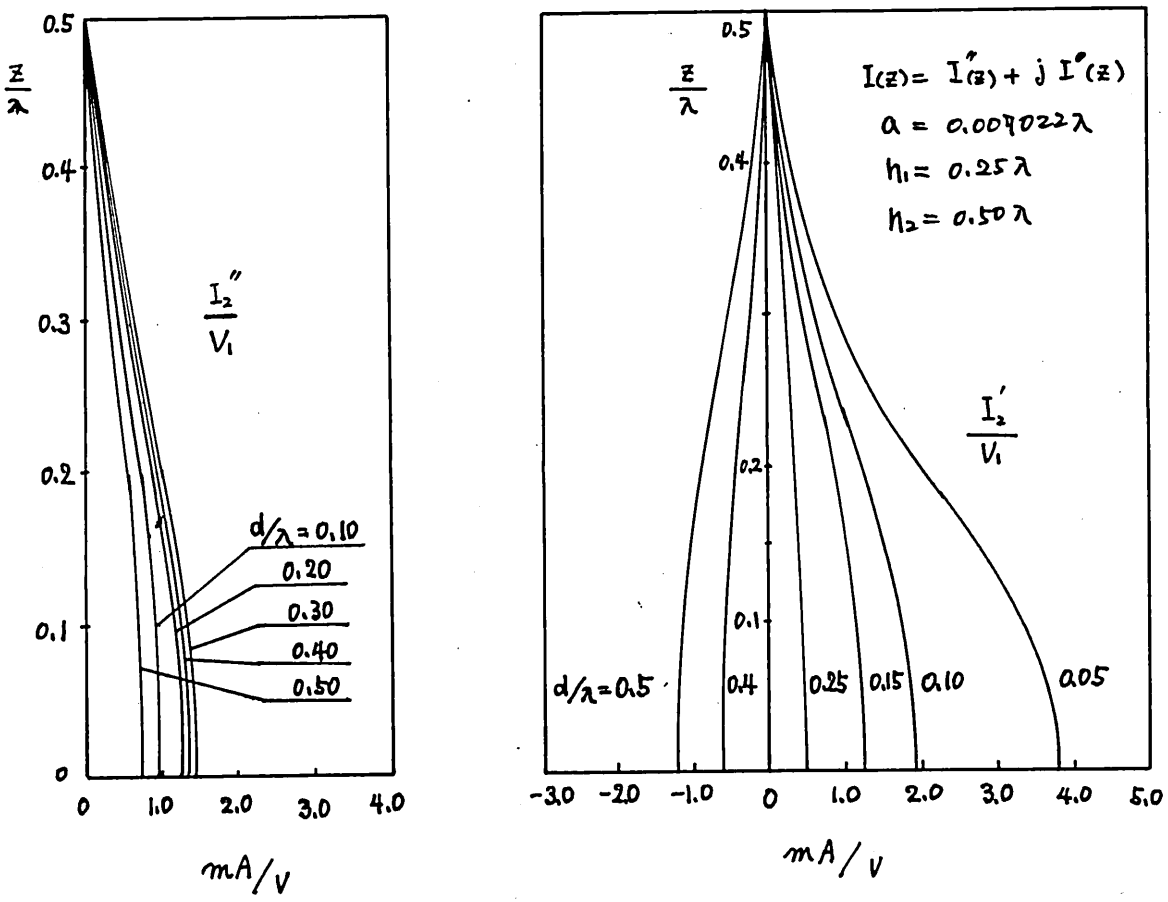


図7　結合した2素子アンテナの電流分布

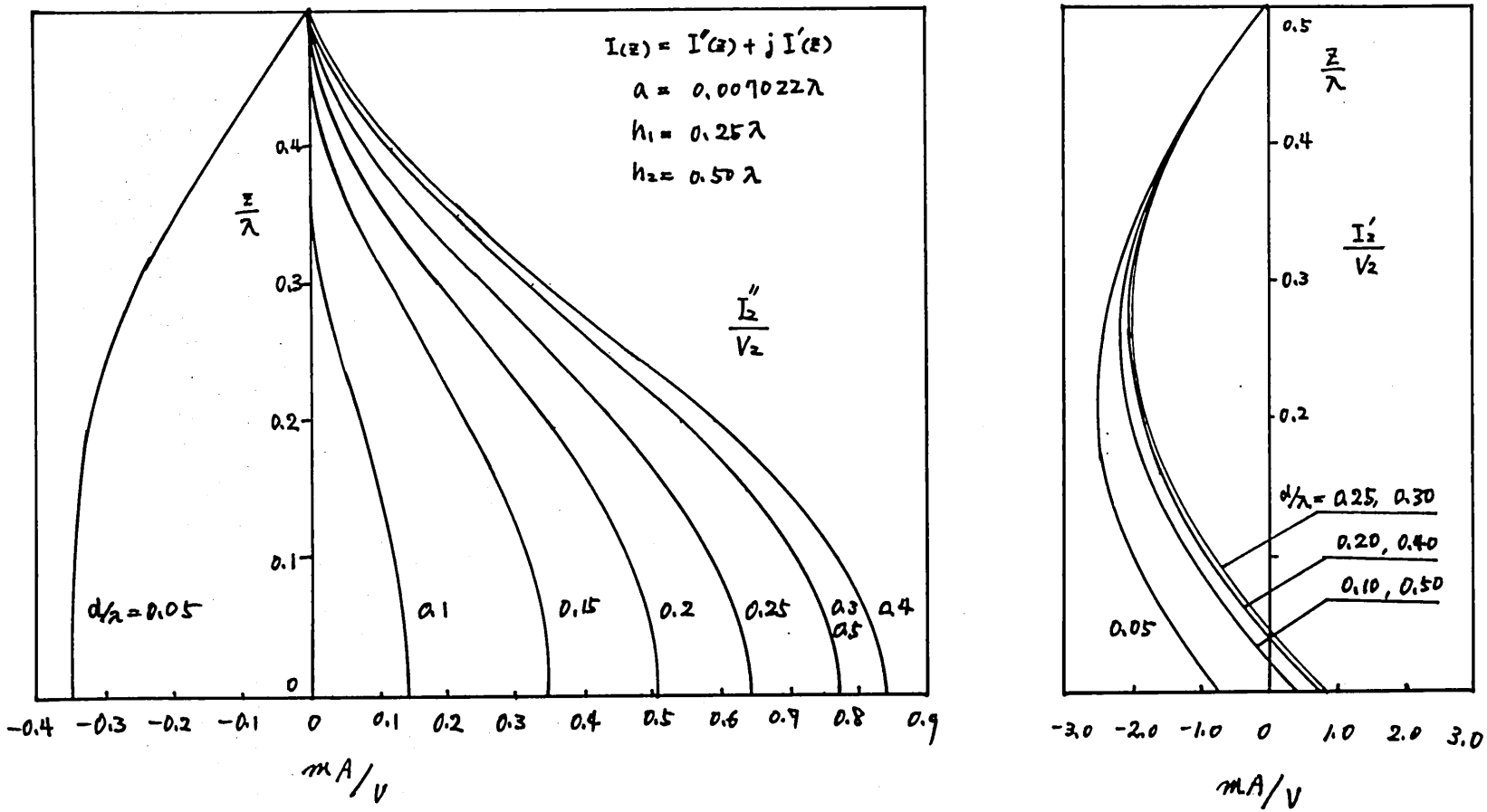


図8　結合した2素子アンテナの電流分布

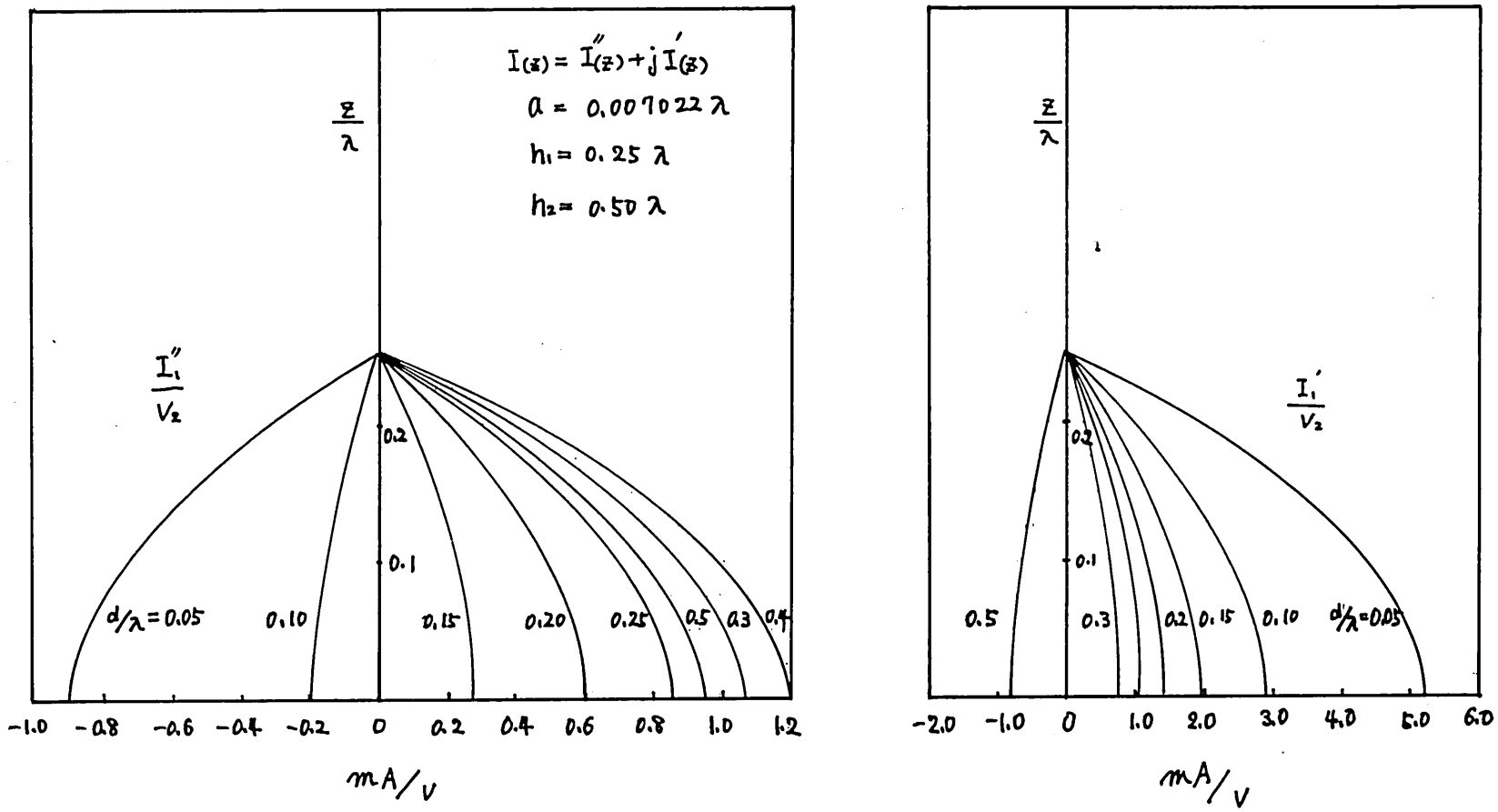


図9　結合した2素子アンテナの電流分布

輻射科学研究会資料

熱陰極放電型大阪管によるマイクロ波検波特性

宮脇沢美・上田洋征・森田正信
(中部工業大学)　(関西大学工学部)

昭和47年6月30日

(於　大阪大学工学部)

I 序論

マイクロ波・ミリ波の素子としての研究および開発の方向は固体化を目ざしている。このような状況にあってプラズマおよび放電現象をマイクロ波電子装置（マイクロ波回路素子，検波器，発振器，増幅器，逓倍器等）に応用する研究も地味ながら続けられている。[1-4] したがって特殊な部門において実用される可能性がのこっていると考えられる。検波器としては気体プラズマを利用したL.Gould[5]によるプラズマの非直線性を利用したミリ波帯の検波器とか，R.L.Taylorら[6]による"after-glow quenching"と呼ぶ現象を利用したプラズマから出る光を利用した検波器がある。これらは半導体検波器に比べて大電力により破壊されないとか，検波感度が良いとかの点で優れている。欠点としては装置が大きくなり電源を必要とするなどがあげられる。これらプラズマの検波器への応用の研究および理論的研究は1950年代に集中しているようである。[7-13]

著者らがガスを封入した基本装置は古く岡部金治郎博士によって発明された大阪管[14]であるが，マイクロ波検波器として動作させ放電の電気的特性，マイクロ波検波出力特性，プラズマ特性を中心に物理学的に研究を進めてきたもので，実用という観

点に立てばL.Gouldらの装置と同じく半導体検波器よりも感度が高く大電力に対しての破壊性がない点が優れていると考えられるが，装置の簡素化という点で欠点をもつ。

ここで報告することは，検波器として応用するということよりもこの装置におけるマイクロ波検波の現象論的特性の検討を通じてプラズマエレクトロニクスへの一般的な応用への可能性をも考慮したものである。

II 実験方法

2.1 電極構造

使用される放電管は平板形式放物型大阪管で電極構造は次式によって示される。陽極A_1, A_2に対しては

$$y^2-x^2=\frac{1-\alpha}{\alpha}l_x^2 \qquad \alpha=l_x^2/(l_x^2-l_y^2) \qquad (2\cdot1)$$

ここでl_xは作用空間の中心からコレクタ(集電極B_2, E_n)までの距離，l_yは作用空間の中心から陽極までの距離である。ただしαは空間電荷を無視できる場合は次式を満足する。

$$\alpha=\frac{V_0}{V_A} \qquad V_0：原点の電位，\ V_A：陽極電圧$$

コレクタに対しては

$$x^2-y^2=l_x^2 \qquad (2\cdot2)$$

なお空間電荷が無視される時には，電位分布は次式を満足する。

$$V = V_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{l_x}\right)^2 \right\} \qquad (2\cdot3)$$

電極構造図と真空における静的な場合の軸上電位分布を図1に，電極寸法，フィラメントの位置，プローブの位置および形状，使用ガス等について一括して表1に示す。

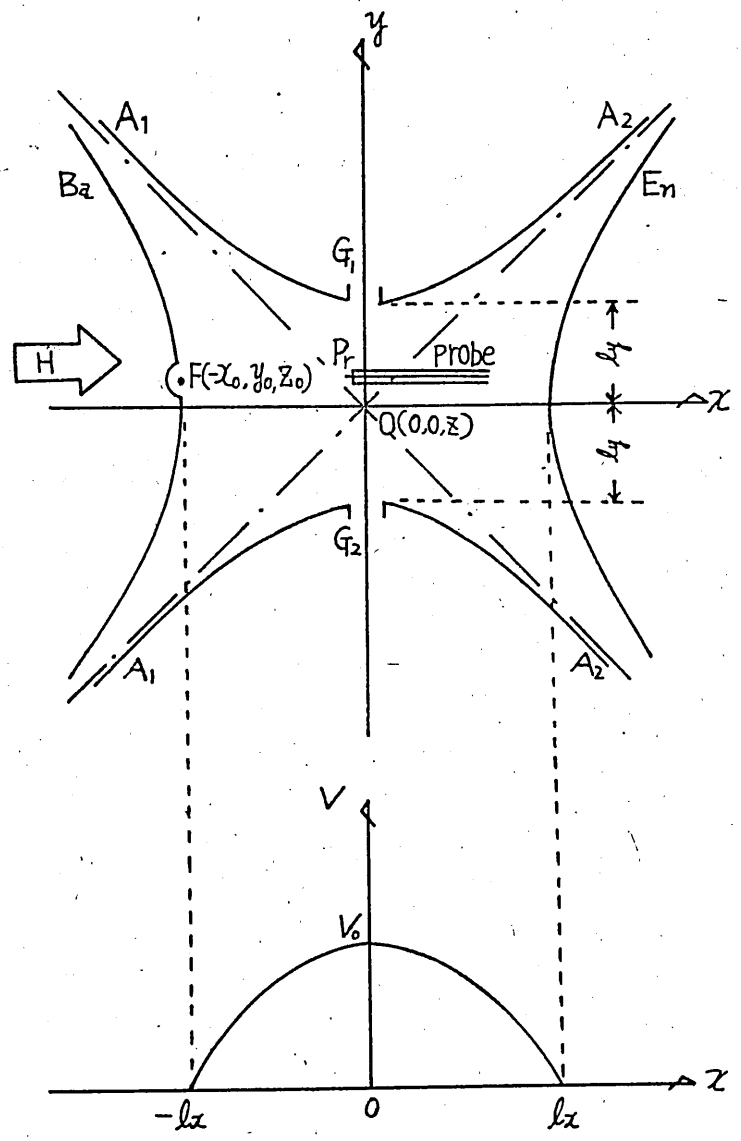
この電極構造の大阪管を真空度10^{-6}～10^{-7} Torr以上にした後，稀ガスおよびN_2ガスを10^{-4}～200 Torrまで封入し動作させ，マイクロ波検波特性より作用空間内の荷電粒子の運動および動作条件を決定する。

2.2 測定方法と装置

測定に用いた装置を図2に示す。この装置の放電特性，マイクロ波検波出力特性，プラズマ特性は以下に述べる測定方法に従った。

(1)放電特性はV_Aおよび磁界Hに対する陽極電流I_A，集電極電流I_cを測定し考察する。

(2)マイクロ波検波出力特性は，集電極に接続された検波抵抗R_cの両端に生ずる信号電圧をシンクロスコープで測定する。R_cは10Ω～∞まで変化させたが，1MΩ程度が最適であったのでこ



A_1, A_2 ：陽極，　B_a：背電極，　E_n：端電極

G_1, G_2 ：超高周波間隙，F：フィラメント，

P_r：プローブ位置，H：磁界

図1　電極構造と真空における静的な場合の軸上電位分布

試作管	電極寸法					プローブ					ガス	ガス圧力 P (Torr)
	l_x	l_y	l_z	y_0	α	材質	直径	絶縁	断面積 S_0 (mm^2)	位置 P_r		
1	1.5	0.8	5.0	0	0.85						He, Ne, Ar, N_2	$10^{-7} \sim 100$
2	7.0	3.5	10.0	0	0.8	W	0.1	ガラス	7.9×10^{-3}	$(0, 0, \frac{l_z}{2})$	Ne	10^{-5}, 2
3	3.5	2.0	10.0	0	0.8	W	0.1	ガラス	7.9×10^{-3}	$(\frac{l_x}{2}, 0, \frac{l_z}{2})$	Ne, He	$1 \sim 200$

$x_0 \approx l_x$

単位：mm

電極材料 Mo板，フィラメント W線 (0.1mmφ) 使用

表1　電極寸法・プローブ形状および封入ガス

の値に設定した。

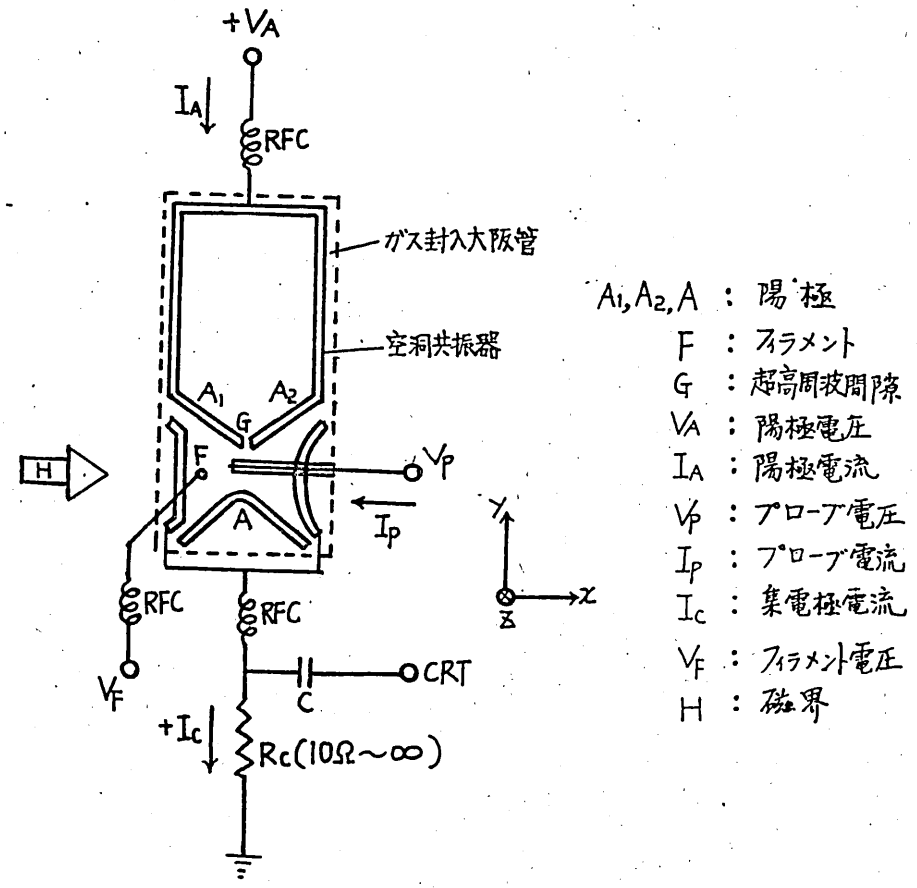


図 2　実験装置

(3)プラズマ電子温度，電子密度の測定はラングミュアプローブ法を用いて行った。電子の電荷 $-e$，ボルツマン定数 k，飽和電圧 V_s，飽和電流 I_{es}，電子温度 T_e とした場合プローブ電圧が V_P ($V_P \leq V_s$) の時プローブを流れる電子電流 I_e は

$$I_e = I_{es} \exp\left\{\frac{e(V_p - V_s)}{k T_e}\right\} \qquad (2\cdot4)$$

で示されるから $\ln I_e - V_p$ 曲線をえがいてその傾斜から T_e を求める。電子密度 n_e はプローブ特性の傾斜から T_e を求め

$$n_e = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{2\pi m}{k}}\ \frac{I_{es}}{S_0\sqrt{T_e}}$$

$$= 4.02 \times 10^{15}\ \frac{I_{es}}{S_0\sqrt{T_e}} \qquad (2\cdot5)$$

の式より求める。ここで m は電子の静止質量，S_0 はプローブの断面積，T_e は電子温度(°K)である。なおいずれもＭＫＳＡ単位系を使用している。

Ⅲ 実験結果と考察

3.1 放電特性

放電型大阪管の V_A に対する I_c および H に対する I_c の電気的特性について述べる。H，フィラメント電流 I_F を一定とし，ガス圧力 P をパラメータとした V_A - I_c 特性において高真空のときの I_c は電子電流で V_A が高くなるにつれ零に無限に近づく。しかしガスを封入し V_A を高くしていけばやがて I_c は電子電流からイオン電流の方向に変わるが，ガス圧力が高くなる(およそ 10^{-2} Torr 位から 10^{-1} Torr)になるにつれ電子電流からイオン電流に変わる

V_Aは低くなる。$P \geq$ 約0.6 Torr (Ar) (ガスの種類により多少異なる)では電子電流に変わるV_Aはガスの電離電圧V_iとなる。例として図3に示す。

V_A, I_Fを一定とし, Pをパラメータとした H - I_c特性において高真空のときのI_cはHの増加と共に細かい変化をしながら増加していく。ガス封入においてはイオン電流から電子電流に変わる磁界が存在しPが増加するにつれその磁界は高くなる。この例として図4(a)に示す。

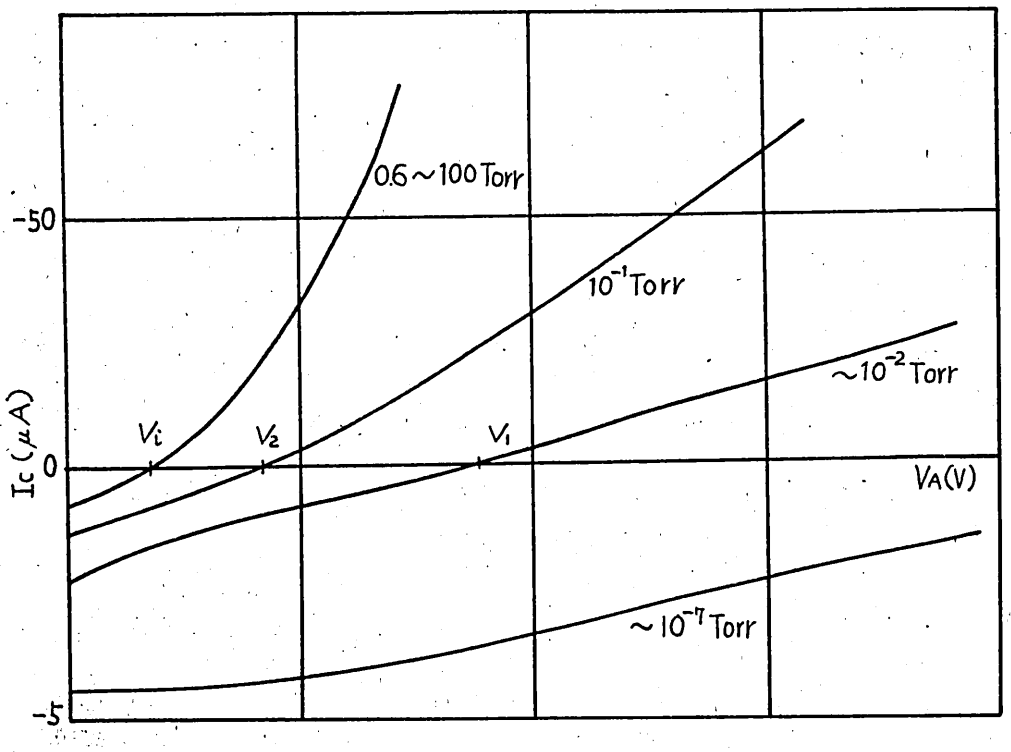


図3 HおよびI_F一定のときのV_A - I_c特性 (Gas: Ar, Ne, He, N_2)

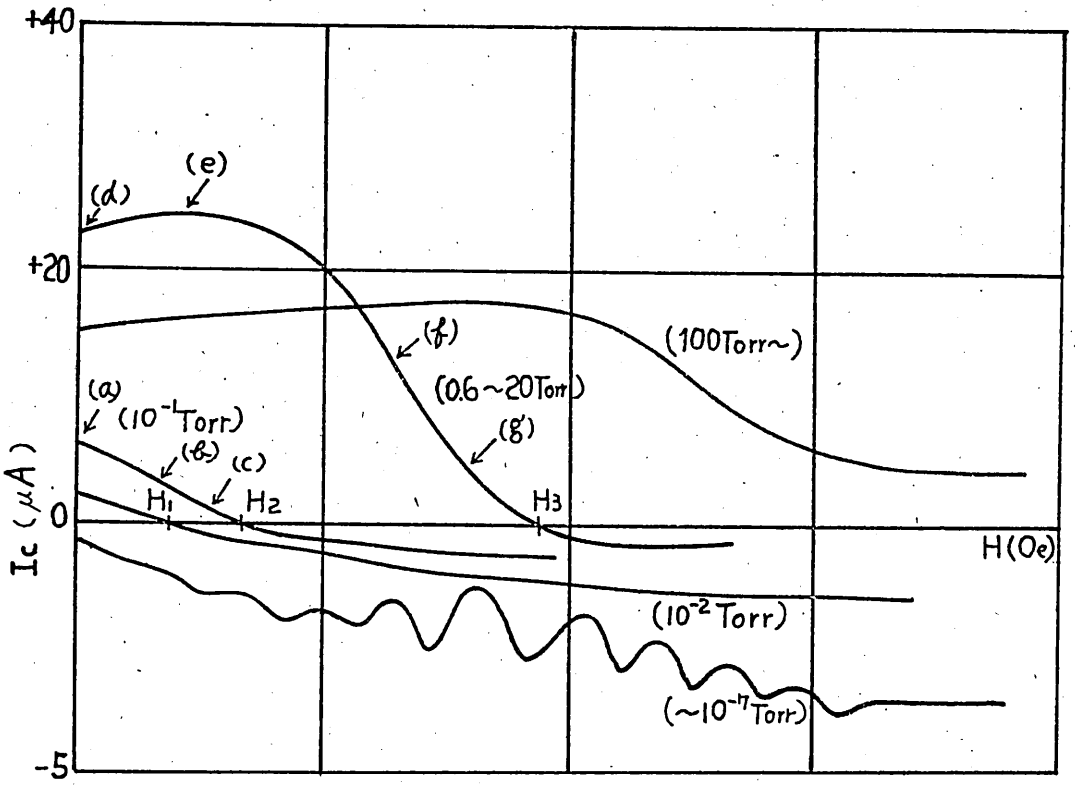


図4(a)　V_AおよびI_F一定のときのH-I_C特性(Gas: Ar, Ne, He, N_2)

Pが約10^{-1}Torr, Pが約0.6～20 Torrにおける作用空間内のプラズマの状態は図4(b),(c)に示すようにPが約10^{-1}Torrにおいては H＝0 の時はフィラメント近傍のみで発生しているが，磁界が強くなるにつれプラズマが端電極にまで達し集束され，Icが電子電流に変わる磁界でプラズマは消滅する。Pが約0.6～20 Torrにおいては H＝0 で検波動作しているときの電離している部分の色は比較的鮮明で陰極，背電極附近で濃く陽極の近くで薄いほぼ球状の形をしている。電離していても H＝0 で，検波動作し

ないときは不鮮明で背電極，陽極に広く一様にひろがった状態であった。磁界が強くなるにつれクサビ形に集束され，その先端は超高周波間隙の近くまで達するが，端電極には達せずIcが電子電流に変わる磁界になるとプラズマは消滅する。なお作用空間内のプラズマの電離状態は，ガスの種類によって変わることはなかった。またプラズマの発光色はガスの種類により異なりArにおいては青紫，Heは薄緑，Neは赤紫，N_2は紫を示した。そして図4(a)の(a),(b),(c),(d),(e),(f),(g)と図4(b),(c)の記号が対応する。

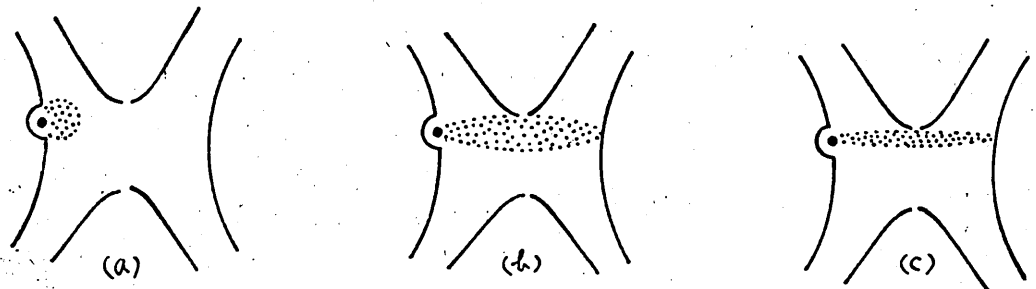


図4(b)　$P=10^{-1}$ Torrにおけるプラズマの状態

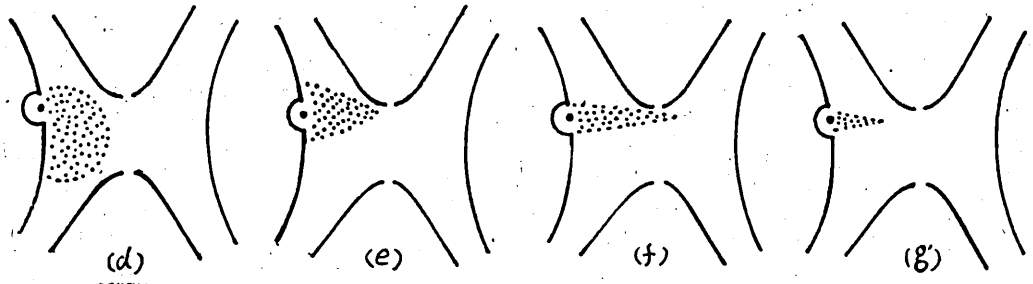


図4(c)　P=0.6～20 Torrにおけるプラズマの状態

P, I_Fを一定とし, V_AをパラメータとしたH-Ic特性においてV_Aが高くなるにつれてイオン電流から電子電流に変わるときの磁界は高くなる。この例として図5に示したH_1, H_2がそのことを示している。またP, V_Aを一定としてI_FをパラメータとしたH-Ic特性においても同様にI_Fが大きくなるにつれて電子電流に変わるときの磁界は大きくなる。

Hに対するIc特性においてイオン電流から電子電流に反転するまでの様子は図6, 図7, 図8に示す。図6はI_FをパラメータとしたときのHに対するIcおよびI_Aの特性であるが, H増加と共にIcは増加しある磁界以上になると減少し始める。その特性の屈曲点の磁界の値はI_Fが大きくなるにつれ低い値となる。図に示すようにI_F=1.47A以上になるとIcは磁界と共に増加することなく減少する一方となる。次にV_AをパラメータとしたときのHに対するIc特性はH=0のときのIcの値が低いときV_Aが高くなるにつれて屈曲点の磁界は大きくなる(図7)。しかしながらH=0のときのIcの値が大きいとき屈曲点の磁界の値はV_Aの増加と共に低くなる(図8)。ある磁界までIcが増加する現象は, 電子がサイクロトロン運動をするため平均自由行程が短くなり電離が促進されると考えられる。次にHの増加と共にIcが減少する現象は, 次のように説明できる。磁界のあるときのイオ

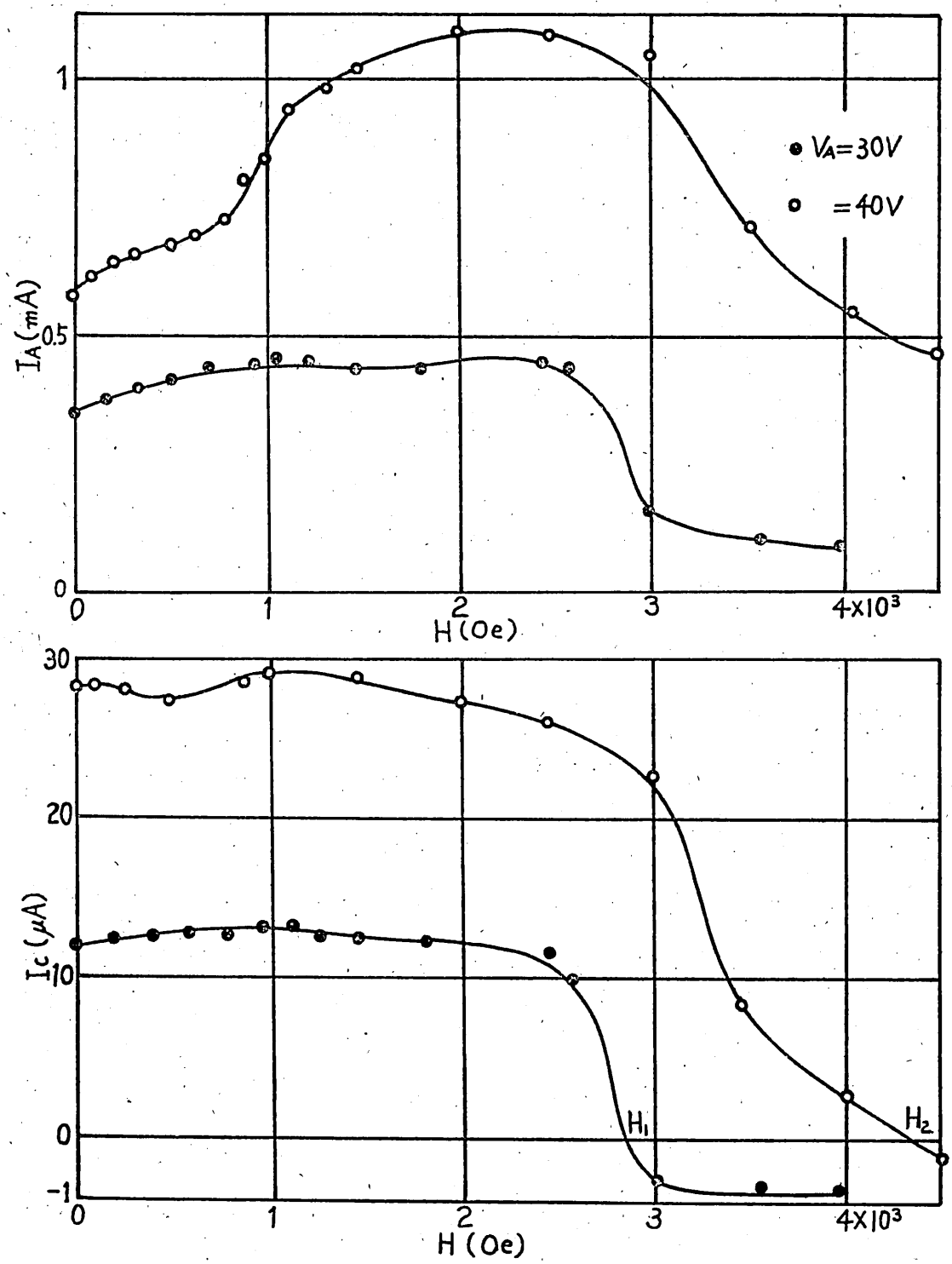


図5　V_AをパラメータとしたときのH-I_A, I_C特性（試作管1, f=3.1GHz, I_F=1.12A, Gas:N_2, P=1.3Torr）

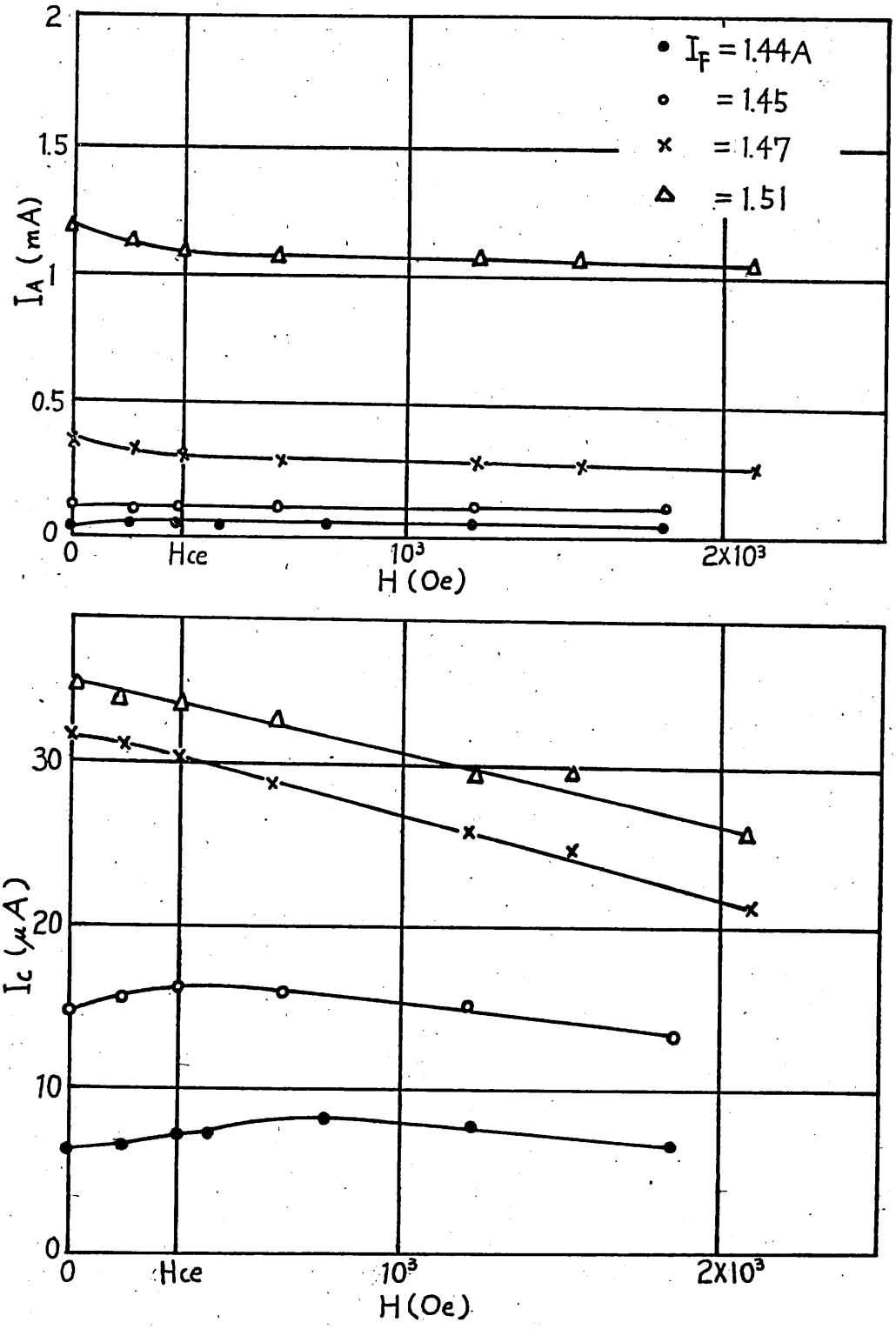


図6 I_FをパラメータとしたときのH-I_A,I_c特性(試作管3, f=870MHz, V_A=50V, Gas: He, P=40Torr)

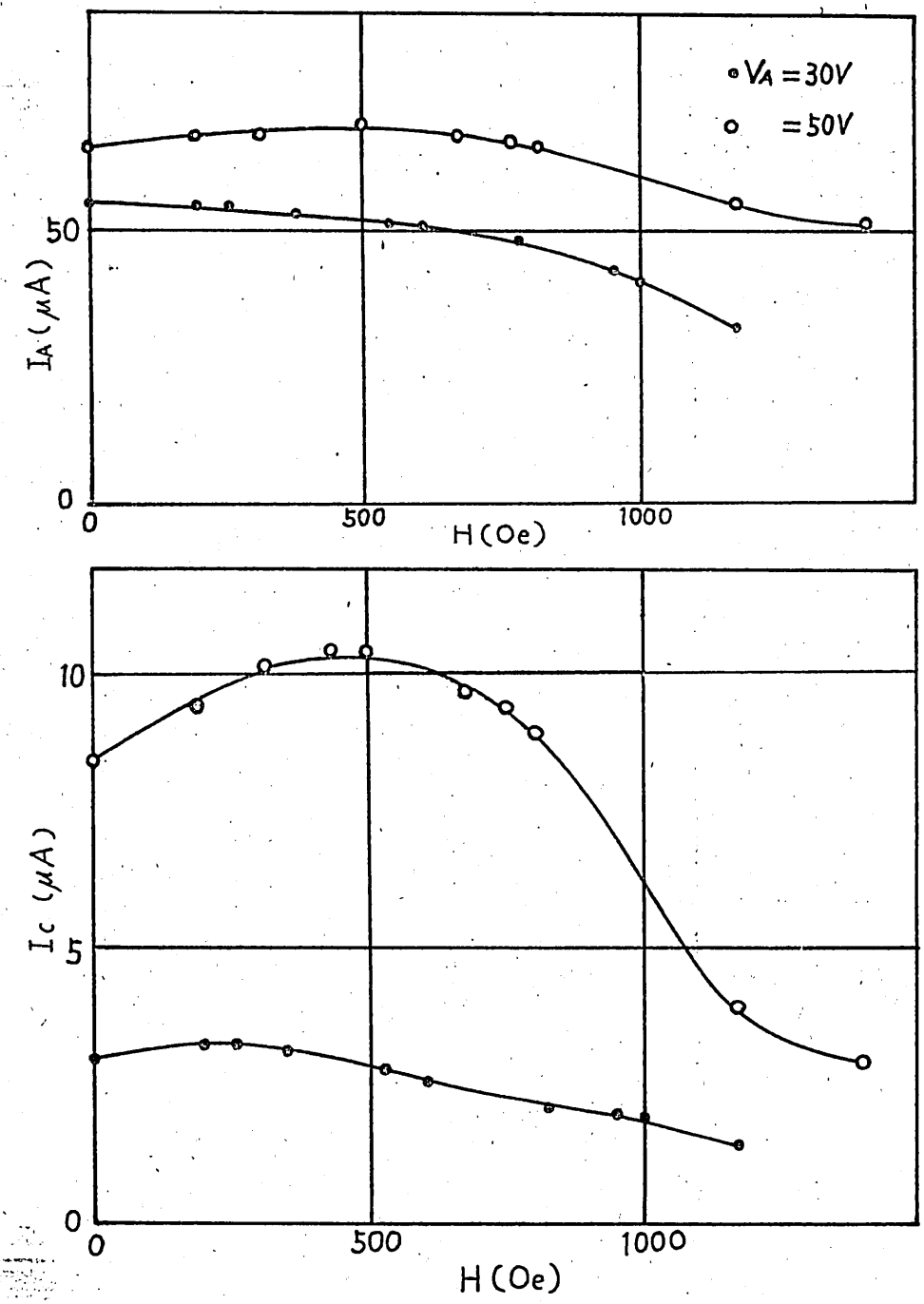


図7　V_AをパラメータとしたときのH-I_A, I_C特性（試作管2, f=450MHz, I_F=1.50A, Gas:Ne, P=2.0Torr）

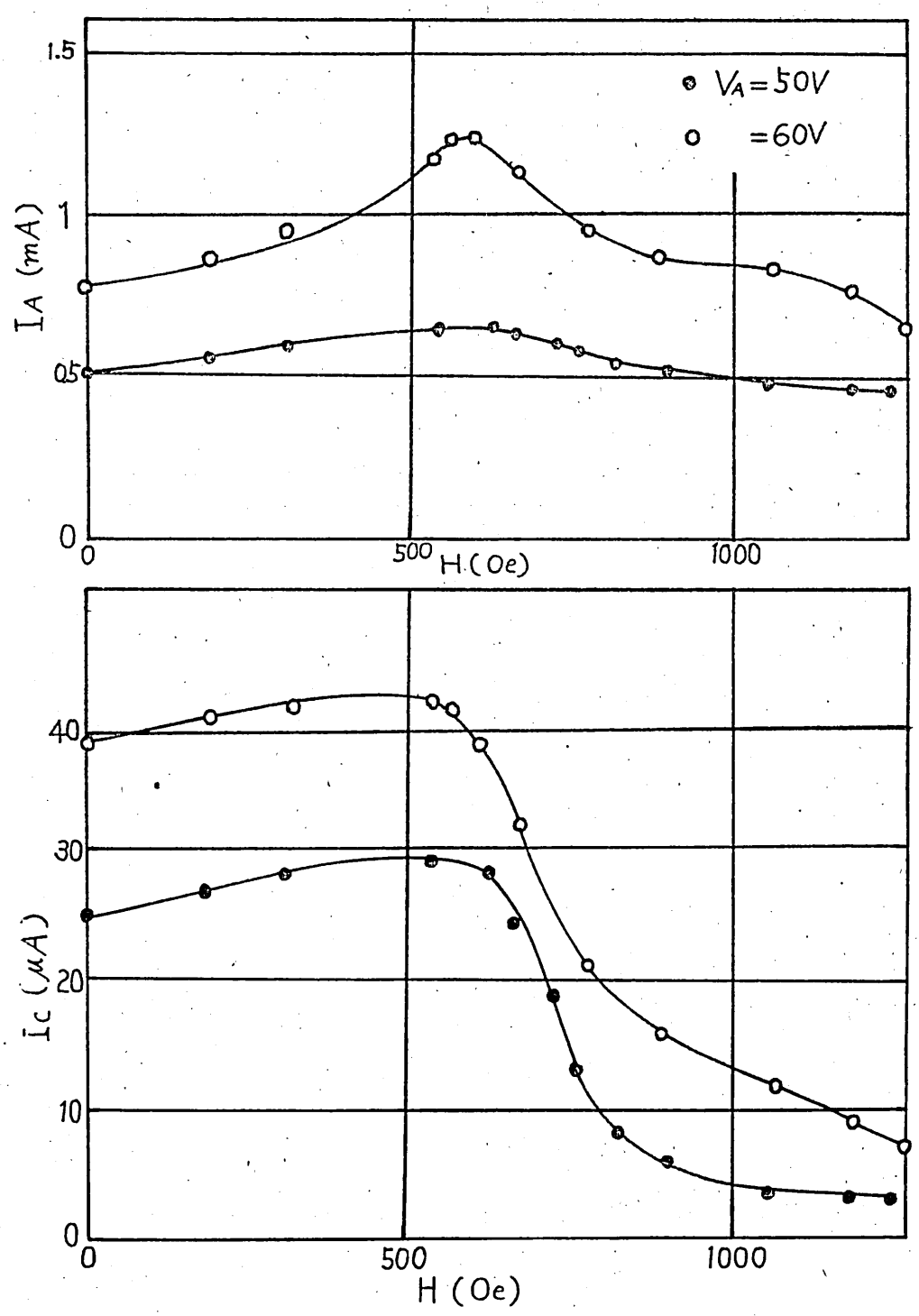


図8　V_AをパラメータとしたときのH-I_A, I_C特性（試作管2, f=450MHz, I_F=1.55A, Gas:Ne, P=2.0 Torr）

ンの移動度 μ_{+H} は

$$\mu_{+H} = \frac{\mu_{+0}}{1+\left(\frac{\omega_{c+}}{\nu_+}\right)^2} \qquad (3\cdot1)$$

(ここで μ_{+0} は磁界のないときのイオンの移動度, ω_{c+} はイオンのサイクロトロン角周波数, ν_+ はイオンの衝突周波数である.)

より磁界と μ_{+H} の関係は

$$\mu_{+H} \propto 1/H^2 \qquad (3\cdot2)$$

また強い磁界では両極性拡散係数Dは

$$D \propto 1/H^2 \qquad (3\cdot3)$$

となるので以上のことが説明できる。なお I_A の様子も I_c の傾向と類似している。ある磁界以上 (I_c が反転するところの磁界以上) ではほぼ一定となる。

3.2 検波特性

3.2.1 モードIにおける特性[18)]

このモードにおけるPはおよそ 10^{-2} Torr 近傍で, 検波特性は高真空における検波理論を満足する。高真空のときとの違いは動作陽極電圧が低電圧領域に限られることである。検波出力が極大になる磁界 H_p は次式を満足する。

$$H_p = \frac{\omega_e}{\mu_0\beta}\sqrt{1+\gamma\omega^2} \qquad (H_p = H_{ce} \text{ を含む}) \qquad (3\cdot4)$$

ここで w_e は x 方向の電子の角周波数，μ_0 は電子の比電荷，r_w は磁界指数(電子の y 方向の角周波数 w_m と w_e の比)，H_{ce} は電子のサイクロトロン角周波数 w_{ce} に相当する磁界である。

次に倭小波次数 n (入来波の角周波数 w と w_e の比である) と r_w の間には

$$r_w^2 + 1 = n^2 \left(\frac{w_{ce}}{w}\right)^2 \qquad (3\cdot5)$$

の関係にあるが，低電圧領域すなわち高次の n では

$$r_w \approx n \frac{w_{ce}}{w} \qquad (3\cdot6)$$

となる。(3·4)式において $H_p = H_{ce}$ のときは $w = w_{ce}$ であるから (3·6) 式より

$$r_w \approx n \qquad (3\cdot7)$$

となる。

なお検波出力が極大値となる V_A は次式を満足する。

$$n\lambda = \frac{3.18 \times 10^3 \ lx}{\sqrt{\alpha V_A}} \qquad (3\cdot8)$$

ここで λ は入来波の波長である。例として試作管1による $P = 2.7 \times 10^{-2}$ Torr (He)，入来波周波数 $f = 9.56$ GHz の場合の H 特性を図9に示す。図中検波出力 S の極大点の数値は磁界指数 r_w を (3·4) 式より計算し挿入したもので，α は設計値 0.85 を用いた。10^{-2} Torr における H 特性から S の極大値はほぼ r_w の整数値で得られる。なお V_A が数 V のとき H_{ce} でのみ S の極大値が得られ (3.4)

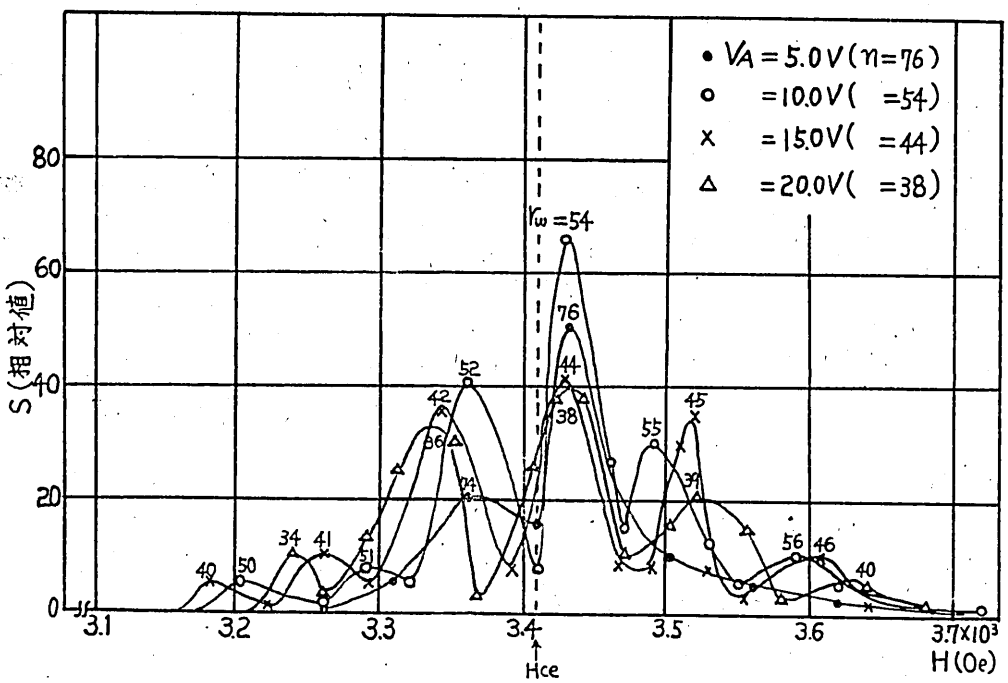


図9　V_AをパラメータとしたときのH-S特性（モードI）（試作管1, f=9.56GHz, I_F=1.49A, Gas:He, P=2.7×10^{-2} Torr）

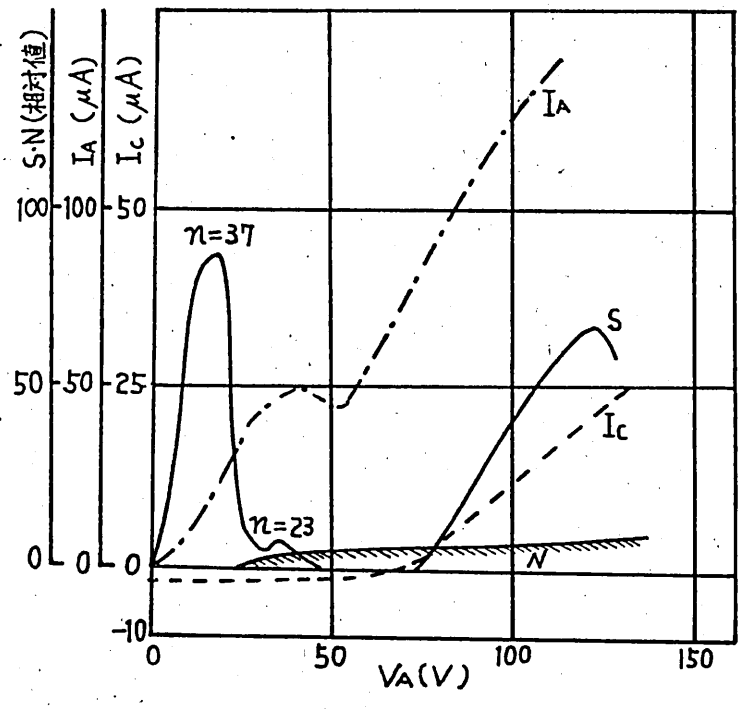


図10　V_A - I_A, I_c, S·N特性（モードI）（試作管1, f=9.3GHz, I_F=1.49A, H=3.32×10³Oe=Hce, Gas:Ar, P=6.0×10^{-2}Torr）

式，(3·7)式を満足した。

$P=6.0\times10^{-2}$ Torr (Ar), $f=9.3$ GHz, $H=3.3\times10^{3}$ Oe (=Hce) の場合の典型的なV_A特性を図10に示す。I_cが電子電流領域でSの極大値が2ヶ所得られているが，このときのnを(3.8)式より計算すれば$V_A=18V$のとき$n=37$, $V_A=47V$のとき$n=23$で得られている。なおr_wは18Vのとき37，47Vのとき23となる。I_cがイオン電流になって得られる検波出力は，後で述べるモードⅢの特性と類似のものである。V_Aがおよそ130Vになるとアーク放電に移る。

3.2.2 モードⅡにおける特性

このモードにおけるPはおよそ10^{-1} Torr近傍で検波特性においてI_cが電子電流の領域は，モードⅠのときよりもさらにV_Aは低い電圧領域に限られ，次式を満足する磁界のとき検波出力が極大値となる。

$$H_p = H_{ce} \qquad (3\cdot9)$$

例として$P=1.9\times10^{-1}$ Torr (He), $f=9.56$ GHzの場合のH特性を図11に，$P=2.0\times10^{-1}$ Torr (Ar), $f=9.3$ GHz, $H=3.3\times10^{3}$ Oe(=Hce)の場合のV_A特性を図12に示す。図11においてSの極大値は(3·9)を満足する。なおSの極大点の数値は(3.4)式より計算したr_wで$V_A=5.0$, 10.0, 15.0, 20.0Vのときそれぞれ$r_w=76$, 54, 44, 38とな

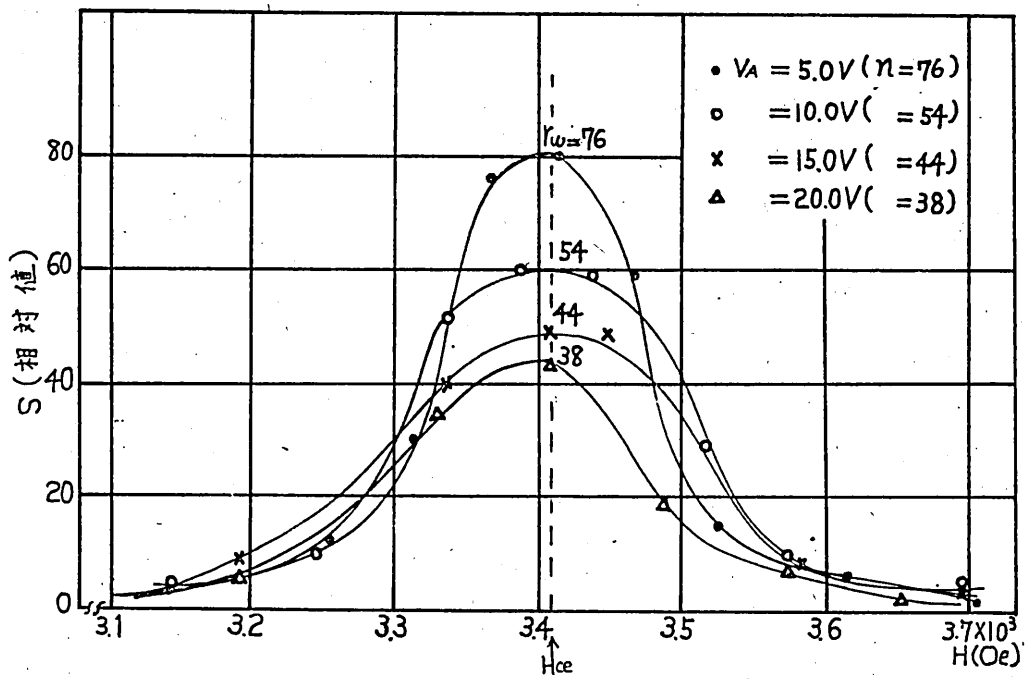


図11 V_AをパラメータとしたときのH-S特性(モードII)(試作管1, f=9.56GHz, I_F=1.52A, Gas: He, P=1.9X10^{-1} Torr)

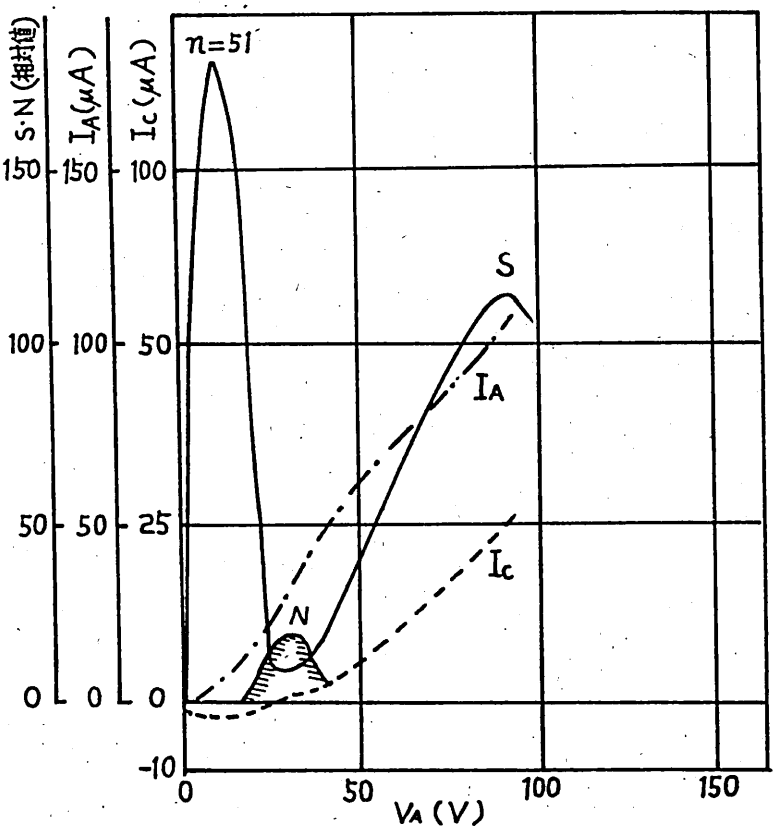


図12 V_A-I_A, I_c, S·N特性(モードII)(試作管1, f=9.3GHz, I_F=1.19A, H=3.32X10³Oe=Hce, Gas: Ar, P=2.0X10^{-1}Torr)

る。図12のV_A特性ではI_cが電子電流のときのSの極大値は(3.8)式を用いて計算すると$n=51$で得られている。なおこのときr_wも51となる。I_cがイオン電流になってからの検波出力は，モードIで述べたと同様にモードIIIの特性と類似のものであり，V_Aがおよそ100V以上になるとアーク放電領域に移る。

3.2.3 モードIIIにおける特性[17,19]

このモードにおけるPはおよそ0.6 Torr以上（ガスの種類，V_A，H，電極構造等によって多少異なる）で検波特性は印加磁界を使用せずに検波ができることおよびV_Aが電離電圧以上でI_cはイオン電流であることが大きな特徴である。Sの極大値はH＝0の他にH_{ce}およびH_{ce}の整数倍の値で得られることが多い。すなわち次式を満足するときである。[17]

$$H_p = MH_{ce} \qquad M=0,1,2,3,\cdots\cdots, \tag{3.10}$$

例として P＝1.3 Torr（N_2），$f=3.1$ GHzの場合のH特性を図13に示す。これはH＝0，H_{ce}で極大値となる例である。次に図14にH＝0，H_{ce}，$2H_{ce}$で極大値になる例を示す。このときのP＝25 Torr（Ne），$f=9.56$ GHzである。実験で得られた$2H_{ce}$は計算値よりも約400 Oe低い磁界となっている。一般に$2H_{ce}$以上の検波出力が極大値となる磁界の値は，実験値と計算値が数1000e異なることが多

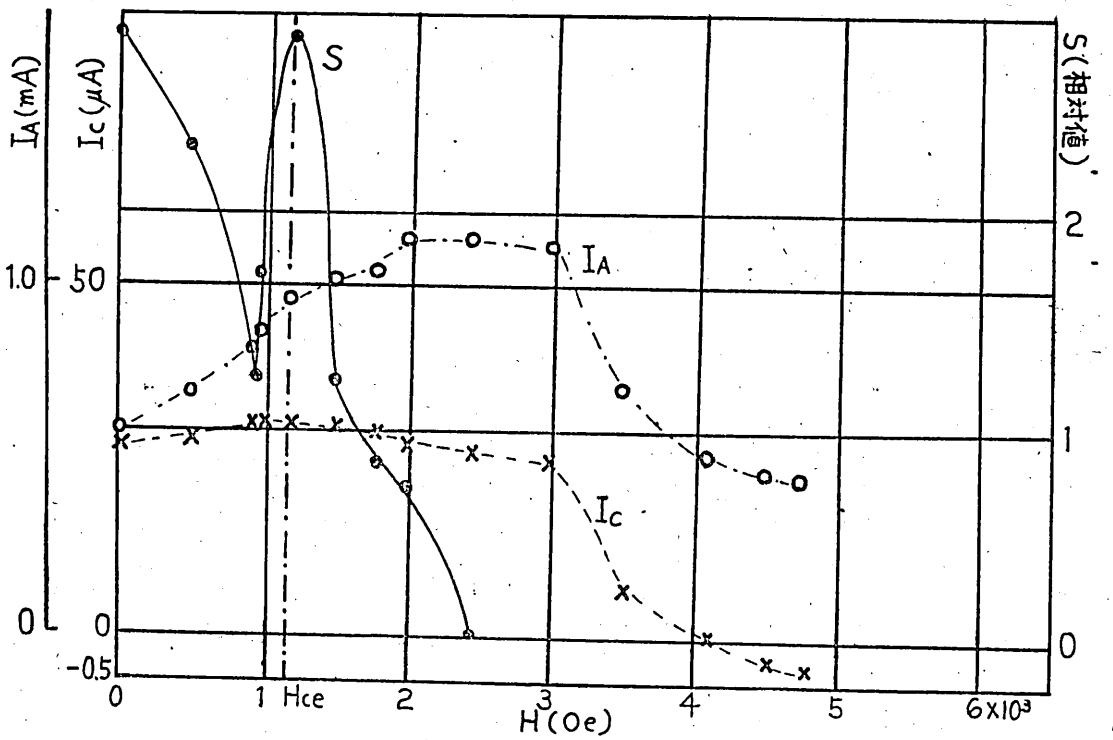


図13 H-I_A, I_c, S特性(モードⅢ) (試作管1, f=3.1GHz, V_A=40V, I_F=1.12A, Gas:N_2, P=1.3Torr)

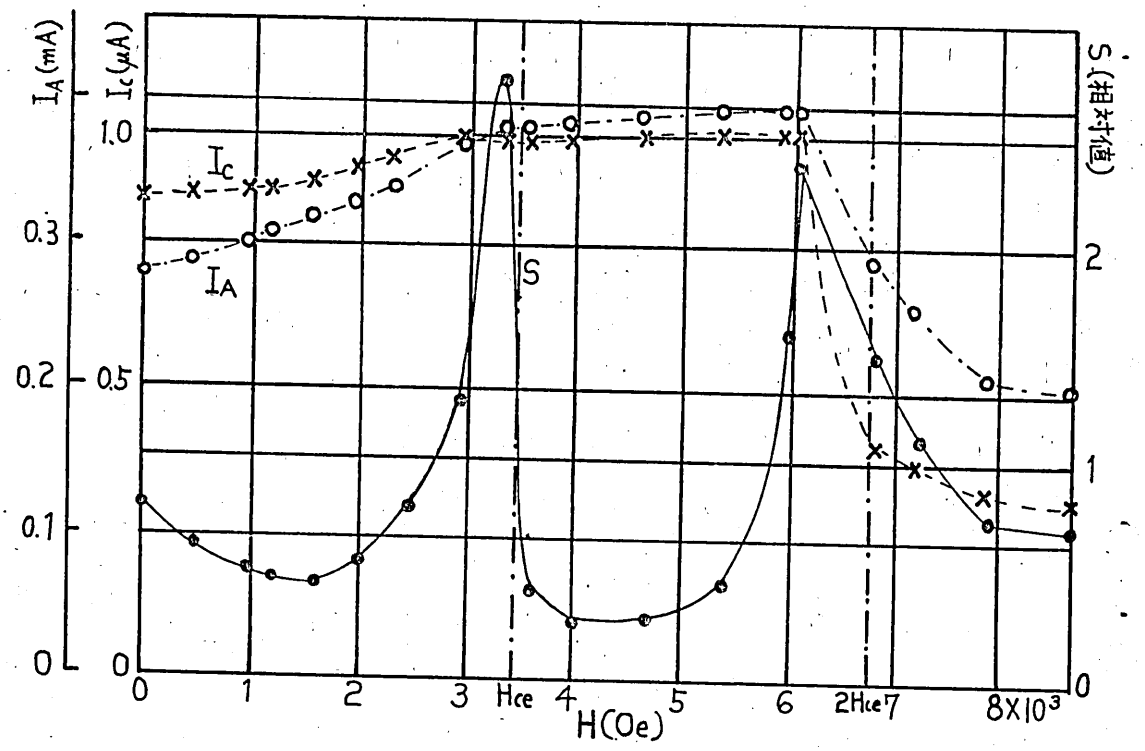


図14 H-I_A, I_c, S特性(モードⅢ) (試作管1, f=9.56GHz, V_A=50V, I_F=0.96A, Gas:Ne, P=25Torr)

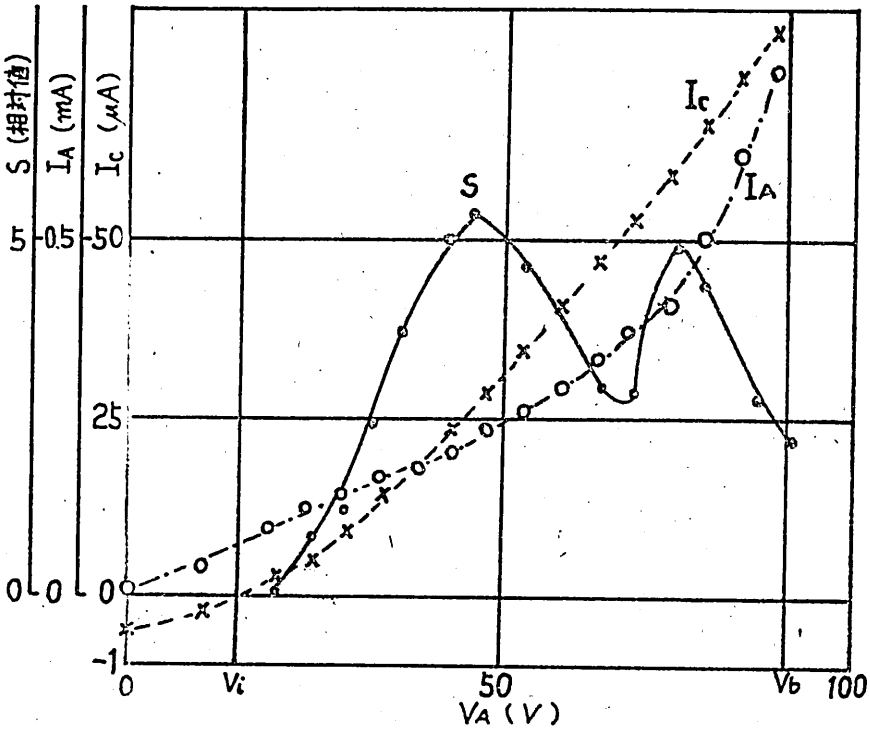


図15(a) H=0におけるVA-IA,Ic,S特性(モードⅢ)(試作管1, f=3.1GHz, IF=1.12A, Gas:N2, P=1.3Torr)

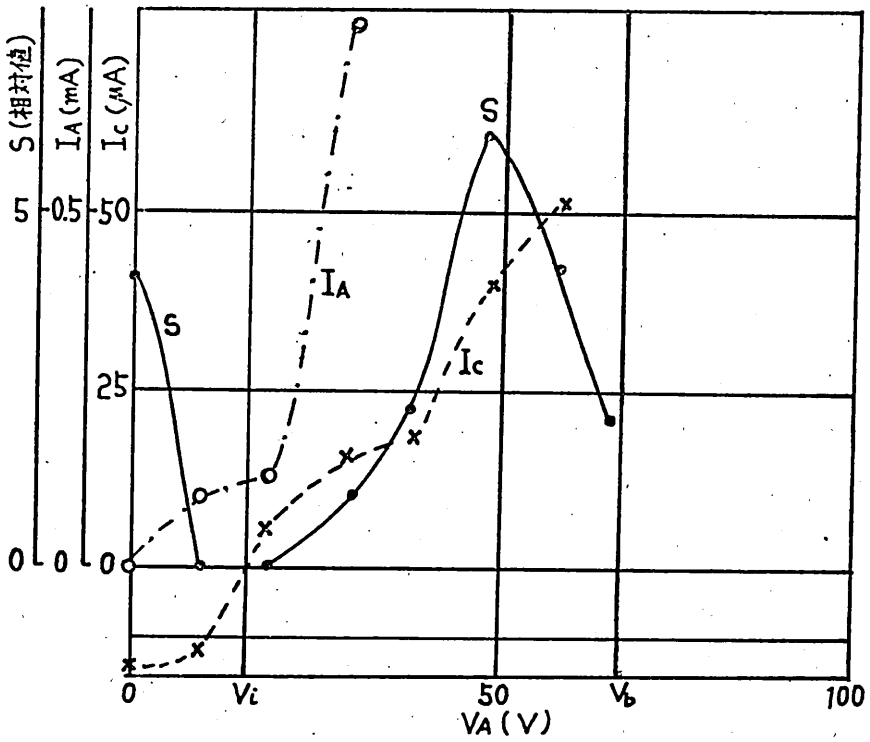


図15(b) H=HceにおけるVA-IA,Ic,S特性(モードⅢ)(試作管1, f=3.1GHz, IF=1.12A, Gas:N2, P=1.3Torr)

い。なお2Hce以上で得られるSの極大値はI_A, I_cが減少し始めるところで得られる。そしてI_cが0に近づくに従い雑音領域となる。

このモードにおける典型的なH=0およびH=HceにおけるV_A特性を図15(a),(b)に示す。H=0のときは電離電圧V_iからアーク放電開始電圧V_bの間でSが得られる。HceのときはV_iとV_bの間の他にV_iと0の間でもSが得られる。これはI_cが電子電流の領域であるモードI,IIで述べた検波機構で説明できる。ここで図15(a),(b)はP=1.3 Torr (N_2), f=3.1GHz, I_F=1.12Aである。

3.3 モードIIIにおける電子温度・電子密度と動作との関係[20,21]

3.3.1 H=0およびHceにおけるfをパラメータとした時のI_Fに対するS, 電子温度・電子密度について

入来波の周波数が高くなるにつれてSが極大となるI_Fの値はH=0, Hceの両方において高くなり電子密度neも高くなる。電子温度TeはI_Fの増加と共に減少する。このことがV_A=50Vの場合について図16に示している。

3.3.2 I_Fおよびfをパラメータとした時のHに対するne・Teについて

図17にV_A=50V, f=870MHz (Hce=3100e)とし, I_Fをパ

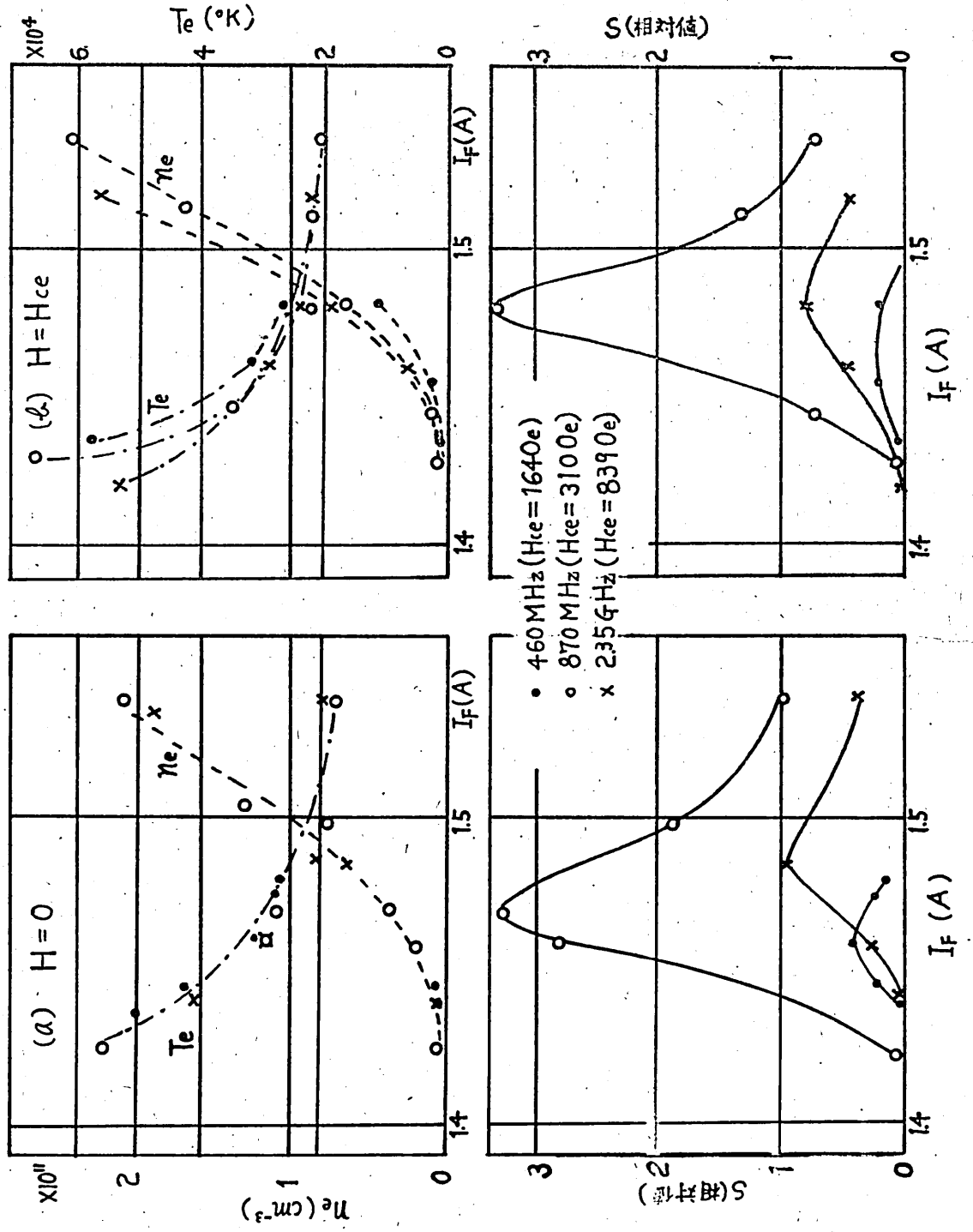


図16 I_F - S, n_e, T_e 特性(モードⅢ) (試作管3, V_A=50V, Gas: He, P=40Torr)

ラメータとしたH－n_e, T_e, I_A, I_c特性を示す。このときはSが極大値となる磁界の値はI_Fの低い値（1.44A, 1.45A）のときはHceで，I_Fがそれより高い値（1.47A, 1.51A）ではHceよりも低い磁界（この場合はおよそHce/2）となる。HceでSが最大となるI_F=1.47AではH－S特性においてHceで極大値とはならない。n_eの値はI_F=1.44A, 1.45A, 1.47Aにおいてはほぼ Hceで極大値となる。I_F=1.51Aにおいてn_eはHの増加とともにほぼ比例して増加する。

図17に示すごとくTeはHに対してI_Fの小さな値（1.44A, 1.45A）の時は，H＝0からある磁界までは減少の傾向を示し，それ以上の磁界では再び増加の傾向を示す。I_Fがそれより大きな値（1.47A, 1.51A）になるときはH＝0からある磁界まで増加の傾向を示す。この傾向は種々の条件で行ったが，I_cが電子電流に変わる磁界附近まではほぼこの傾向を示した。なおTeが高いときに一般に雑音が発生する。

3.3.3 Hceにおけるn_eの増大について

図18にfをパラメータとしたH－n_e, Te, I_c特性を示す（I_F=1.44A, V_A=50V）。HceでSが極大値になる条件は，V_A一定の時はI_Fが低いときにあらわれる。この条件に設定して，まずf＝0

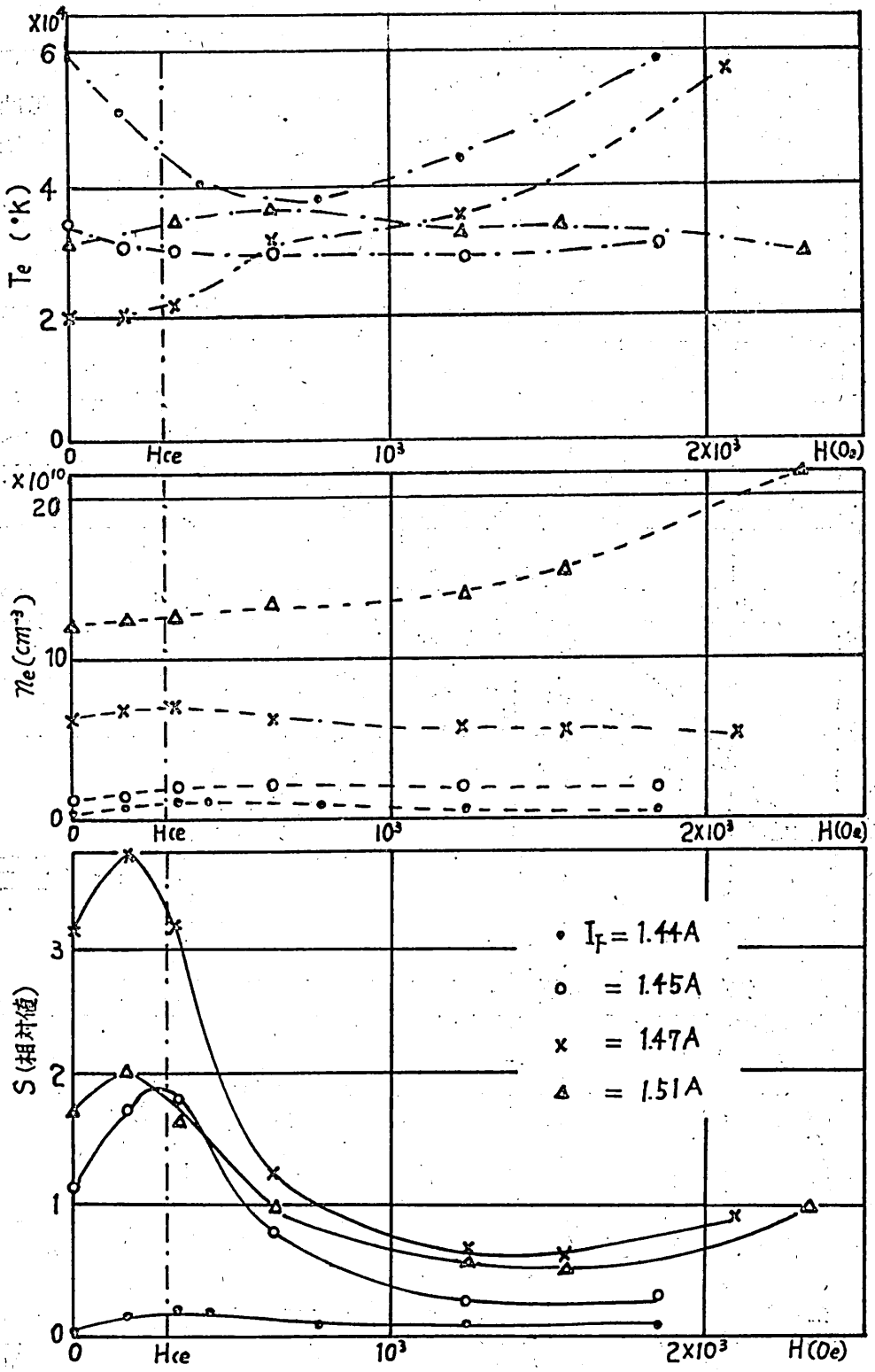


図17 H-S, Ne, Te 特性(モードⅢ) (試作管3, f=870MHz, V_A=50V, Gas:He, P=40Torr)

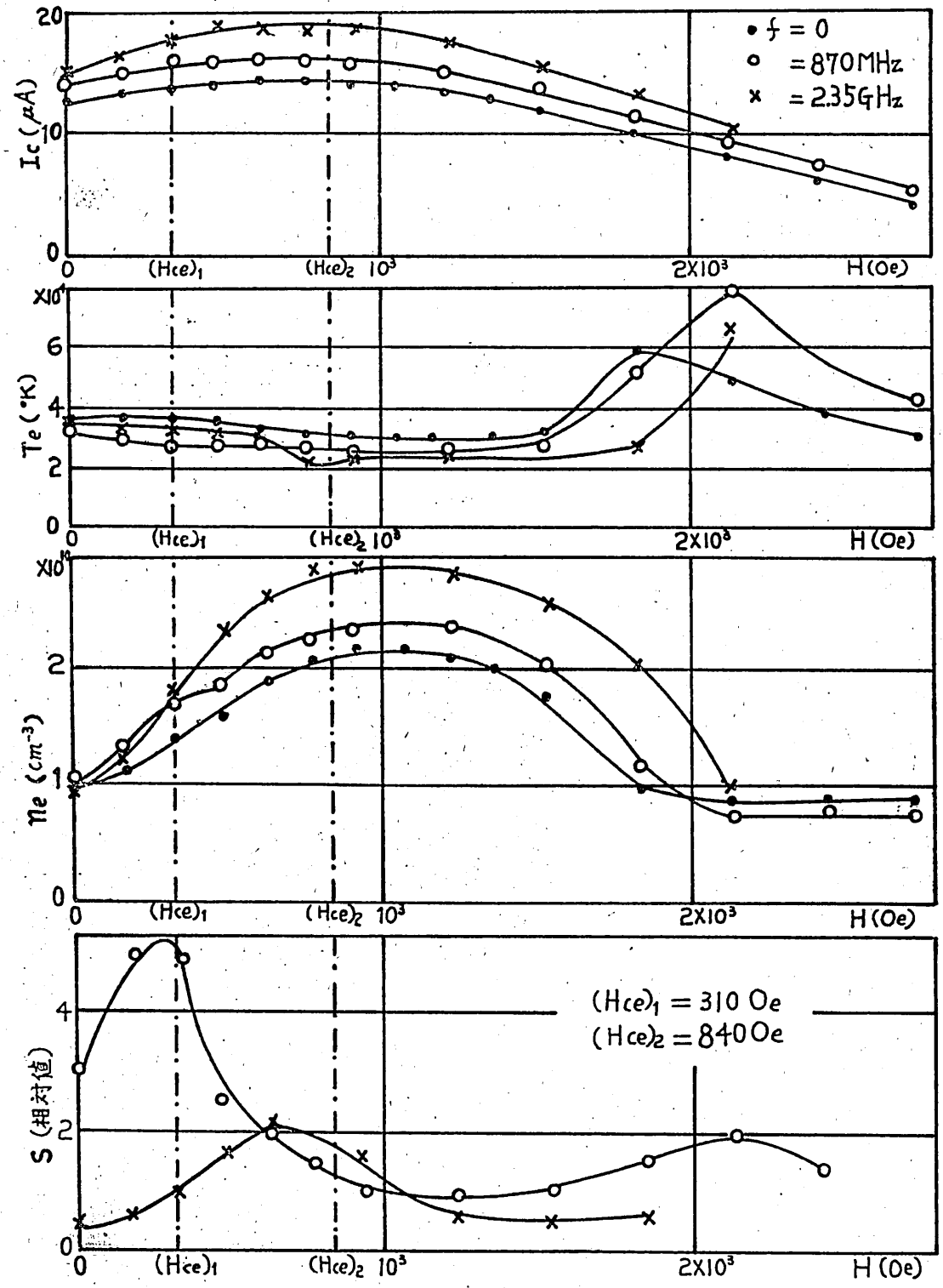


図18 H-S, n_e, Te, I_C 特性(モードⅢ)(試作管3, V_A=50V, I_F=1.44A, Gas:He, P=40Torr)

のときのH特性をとり，その後870MHzと2.35GHzのH特性を調べた。$f=2.35$GHzのときHce(840Oe)でn_eの増大とT_eの減少が観測された。870MHzのときもHce(310Oe)でわずかにn_eの増大が観測されたが顕著でない。これは870MHzのときは$I_F=1.44$Aが高すぎるためと考えられる。H特性でSが極大値になるHce以上の磁界でのn_eの増大はほとんど観測されていない。Hceにおけるn_eの増加はサイクロトロン共振によるマイクロ波エネルギーの吸収が起ったと考えられる。なおH-S特性で1800Oe附近から雑音が多くなり始める。T_eの変化は図18において強い磁界になったとき再び減少の傾向を示すのは，磁界によるプローブ測定法の誤差とか，プラズマの磁界による集束のためプローブと位置がずれるなどの影響がでていると考えられる。

Ⅳ 結 論

検波のメカニズムはまだはっきりした結論に達していないが実験により次のことがらが明らかとなった。集電極電流が電子電流の状態のときは，真空大阪管における動作理論が適用できる。すなわち検波出力の極大値は，磁界Hおよび陽極電圧V_Aに対して次式を満足するときである。

$$H_p=\frac{\omega_e}{\mu_0\beta}\sqrt{1+k\omega^2}\qquad(H_p=H_{ce}\text{を含む})$$

$$n\lambda = \frac{3.18 \times 10^3 l_x}{\sqrt{\alpha V_A}}$$

次に集電極電流がイオン電流のときの動作特性においては，検波出力が極大値となる磁界はほぼ次式を満足する。

$$H_p = MH_{ce} \quad (M=0, 1, 2, 3, \cdots,)$$

ただし，Mが2以上は得られにくく整数値からずれることがある。入来波周波数が高くなれば，電子密度を高くせねばならない。また入来波周波数一定のとき，電子密度に対する検波出力特性において検波出力が極大値となる最適な電子密度が存在する。またサイクロトロン磁界においてマイクロ波エネルギー吸収によるn_eの増大が観測された。電子温度が高くなると雑音の発生が大きくなることが認められた。

謝辞

ご討論いただいた関西大学工学部大東延久講師に感謝します。またこの研究に対しご助言を賜わった中部工業大学徳広龍男教授に深謝します。

参　考　文　献

1) F.W.Crawford, "Microwave Plasma Devices - Promise and Progress", Proc. IEEE, Vol.59, No.1, Jan., 1971.

2) V.YA.Kislov, E.V.Bogdanov, "Physical Faundation of Plasma Applications for Generation and Amplification of Microwaves", Advances in Electronics and Electron Physics 21, P287. 1965.

3) R.E.McIntosh, "Millimeter-wave generation with Plasma Devices: The State of the Art". Proc.IEEE (Letters), Vol.56, PP1210-1212. July, 1968.

4) J.R. Baird and Paul D. Coleman, "High Power Gas Discharge Frequency Multiplier", Millimeter waves, P289. 1959.

5) L.Gould, "Microwave Detection by a dc Gaseous Discharge", Signal Corps Engrg. Labs., Belmar.N.J., Tech. Memo. No. M-1836; 1956.

6) R.L.Taylor, S.B.Herskovitz, "A Plasma Microwave Energy Detector", Proc. IRE, Vol. 49, 1901, 1961.

7) D. H. White, "Microwave Detection with Gas Tubes", Fed. Telecommun. Labs., Nutley, N.J., Contract DA-36-039-SC-15512, Final Rept.; 1953.

8) H.Farber, "Study of Microwave Detection in Gaseous Discharge Tubes", Polytech. Inst. Brooklyn, N.Y., Contract DA-36-039-SC-5670, Final Rept; 1955.

9) M. Mentzoni, "The Detection of Microwaves by Glow Discharges", Polytechnic Institule of Brooklyn, Brooklyn, N.Y., Contract AF30(602)-1448; 1957.

10) H. Farber and M. Mentzoni, "The Long Rise Times Associated with Gaseous Detection of Microwaves", Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn, N.Y., Contract AF19(604)-4143; 1959.

11) R.K.Salaman, "Microwave Delection in Gas Discharge Tubes", Thesis for the Degree of Master of Electrical Engineering at the Polytechnic Instiute of Brooklyn, June., 1956

12) J.M. Anderson, "Microwave Detection and Harmonic Generation by Langmuir - Type Probes in Plasma, Proc. IRE, 1662. 1960.

13) B.J. Udelson, "Effect of Microwave Signals Incident upon Different Regions of a dc Hydorogen Glow Discharge," J. Appl. Phys., Vol. 28, 380-381, 1957.

14) K. OKabe, Nature Vol. 138, 685. 1938.

15) 田・西川：昭和32年電気通信学会全国大会181

16) 大東・上田・森田：昭和42年電気四学会連合大会1650

17) 宮脇・上田・森田：昭和43年電気四学会連合大会1470

18) 宮脇・上田・森田：昭和45年電気四学会連合大会134

19) 宮脇・上田・森田：昭和45年電気関係学会関西支部連合大会G8-9

20) 宮脇・上田・森田：昭和46年電気関係学会関西支部連合大会G9-9

21) 宮脇・上田・森田：昭和47年度電子通信学会全国大会856

輻射科学研究会資料

近軸電子ビームの性質を保存する弯曲構造の静電レンズ

橋本正弘・喜多定・藤沢和男
（大阪大学　基礎工学部）

昭和47年6日30日
（於 阪大工学部）

1. まえがき

現在，種々の静電レンズが考案され，広く用いられている．静電レンズのおおよその特性は幾何光学レンズの諸定数で説明される．しかし，さらに詳しく知るには電子ビームの軌道方程式を解かねばならないが，一般にそれは容易なことでない．それゆえ，代表的な静電レンズ（以下では代表的静電レンズと呼ぶ）についてはそれぞれについての軌道方程式が解かれ，詳しい資料が与えられている[1]．しかし，新らたにレンズを考案．試作し，特性を詳しく調べるには従来の代表的静電レンズでの場合と同様に多大な労力を費さねばならないだろう．しかし，著者が先に報告した結果[2]を利用すればそのような労力を幾分なりとも軽減できる．これが本資料の目的である．

ある種の（2次元）電位分布中を走行する電子ビームの中心軌道からの"ゆらぎ"がこれとは全く別種の近軸電子ビームの"ゆらぎ"と同じになる，そのような電位分布が存在し得ることおよびそのための条件を先に報告した[2]．一般に，ほとんどの代表的静電レンズが近軸電子ビームで形成されていることから，前報告での電子ビームのゆらぎをこれらの代表的静電レンズでの電子ビームのゆらぎに置き換えると，これより導びかれる結果はゆらぎ具合が代表的静電レンズでのそれと同じである種々の静電レンズの集合である．言い換えると，従来の代表的静電レンズと同一特性をもつ静電レンズを無数にあめ，これらを分類できる．このように分類された静電レンズには，構造の上で一見して代表的静電レンズと類似しているとわかるものから全く異っているものまで数多くある．

(1) たとえば A. Septier, Focusing of Charged Particles. New York: Academic press, 1967.

(2) 橋本，喜多，藤沢，"2次元電子ビームの写像理論"．研研資料．昭和47年4月．

もし，新らたに設計しようとする静電レンズがこの分類のいづれかに属しているなら，そのレンズの特性は代表的静電レンズで記述され得る利点がある．この前半部でその理論について述べ，後半部でいくつかの具体例を示す．

2. 軌道方程式

われわれが究極的に求めるのは，代表的静電レンズに分類される湾曲構造の静電レンズ，すなわちこのレンズ系の電位分布 V である．しかし理論の展開を円滑にするため，最初このような静電レンズ系を，すなわち電位分布 V

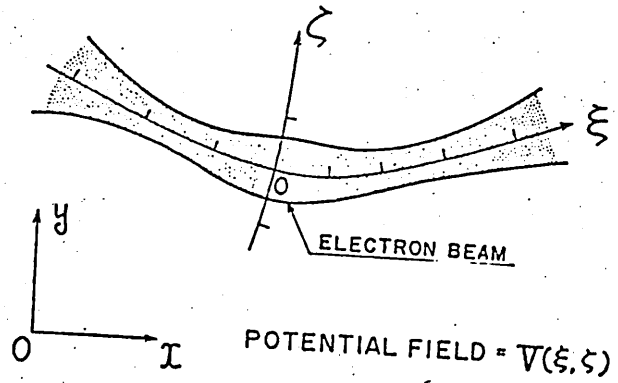


図1
湾曲構造の静電レンズ系における電子ビーム

およびそこで湾曲しながら走行する細い2次元電子ビームを仮定する(図1)．電子ビームの密度は空間電荷効果を無視できるほど希薄であるとする．そして，これを観測する直角座標を (x, y) とする．電子は運動方程式で特性づけられる．

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \eta \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \eta \frac{\partial V}{\partial y} \qquad (1)$$

ただし，t は時間，$\eta = e/m$．(1) を便宜上，虚数単位 j で結びつけた複素表現式にする．

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-jy) = \eta\left(\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y}\right)V \tag{2}$$

ここで2つの複素数 z およびその共役 $\bar{z}$

$$z = x+jy\ ,\quad \bar{z} = x-jy \tag{3}$$

を導入し，変数 x, y の代りに これらを用いる．このとき微分の関係式

$$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y}\ ,\quad 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} \tag{4}$$

を使えば (2) を複素表示の運動方程式

$$\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = 2\eta\frac{\partial V}{\partial z} \tag{5}$$

に書き直せる．(5) は形としては一つであるが，実部と虚部の両式からなり (1) と全く同じである．ここでは (1) の代りに (5) をお出発点とする．
(5) を時間 t について解き，x と y とで t を消去すれば軌道曲線を得る．前節で述べたように，われわれの課題は軌道曲線を調べることであり，したがって 時間 t には何ら興味を持たない．それゆえ，t が別の測度 τ の関数

$$t = t(\tau) \tag{6}$$

であるとして，τ について運動を論じても軌道を調べるという点では全く同じである．(5) を τ の微分で表わせば

$$t'^{-2}\frac{d^2\bar{z}}{d\tau^2} - t''t'^{-3}\frac{d\bar{z}}{d\tau} = 2\eta\frac{\partial V}{\partial z} \tag{7}$$

となる．ここで t', t'' は ξ に関する積分を表わす．

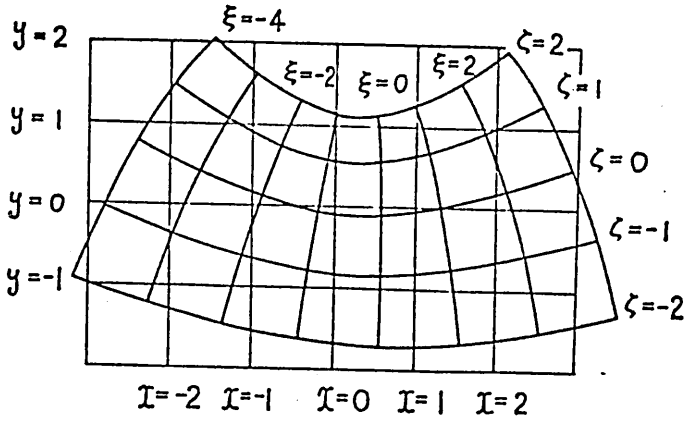


図2．等角変換．
$\zeta=0$ が中心軌道．
周辺の座標 $z=x+jy$, $w=\xi+j\zeta$ は複素解析関数 $z=z(w)$ で等角に変換される．

又て，電子ビームの，中心軌道からのゆらぎを議論するには中心軌道を ξ 軸，これに直交する軸を ζ 軸（図1）とする直交座標を使うと便利である．直角座標 (x,y) と直交座標 (ξ,ζ) 間の変換は

$$w=\xi+j\zeta \tag{8}$$

なる複素変数の（複素）関数

$$z=x+jy=z(w) \tag{9}$$

による等角変換であるとする．等角変換（図2）は直交変換の中の一つであるが，Cauchy Riemann の関係をみたすため，良く知られているように，この変換によって Laplace 方程式の形は保たれる．

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}=0 \tag{10}$$

したがって，ここでは V を ξ と ζ の関数として $V(\xi,\zeta)$ で表わす．もちろん，点 (ξ,ζ) に対応する点 (x,y) は (9) より定まっている．

この変換により，$\bar{z}$におけるτの微分およびVのzについての偏微分は次の公式でw, $\bar{w}$（共役）の表現に直せる．

$$\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{dz}{dw}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial w}, \quad \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \overline{\left(\frac{dz}{dw}\right)}\frac{d\bar{w}}{d\tau}$$

$$\frac{d^2\bar{z}}{d\tau^2} = \overline{\left(\frac{dz}{dw}\right)}\frac{d^2\bar{w}}{d\tau^2} + \overline{\left(\frac{d^2z}{dw^2}\right)}\left(\frac{d\bar{w}}{d\tau}\right)^2$$

ここで over bar は複素共役を示す．したがって(7)を

$$\frac{d^2\bar{w}}{d\tau^2} + \left(\frac{\overline{\frac{d^2z}{dw^2}}}{\frac{dz}{dw}}\right)\cdot\left(\frac{d\bar{w}}{d\tau}\right)^2 - \frac{t''}{t'}\frac{d\bar{w}}{d\tau} = 2\eta\frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{\left|\frac{dz}{dw}\right|^2}t'^2 \qquad (11)$$

と変形できる．またエネルギー保存式

$$2\eta V = \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 = \left|\frac{dz}{dw}\right|^2\cdot\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2\cdot t'^{-2} \qquad (12)$$

より，(11)の右辺を次のように表わせる．

$$\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2\cdot\frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V}$$

したがって(11)はさらに

$$\frac{\frac{d^2\bar{w}}{d\tau^2}}{\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2} - \left(\frac{\overline{\frac{d^2z}{dw^2}}}{\frac{dz}{dw}}\right)\cdot\frac{\frac{d\bar{w}}{d\tau}}{\frac{dw}{d\tau}} - \frac{t''}{t'}\cdot\frac{1}{\frac{dw}{d\tau}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V} \qquad (13)$$

と表わせる．tはτの如何なる関数でもよいが，ここでは便宜上，次の関数であるとする．

$$t = \int_0^{\tau} \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 d\tau \tag{14}$$

このとき

$$t' = \left|\frac{dz}{dw}\right|^2$$

$$t'' = \left(\frac{d^2z}{dw^2}\right)\left(\overline{\frac{dz}{dw}}\right)\frac{dw}{d\tau} + \left(\overline{\frac{d^2z}{dw^2}}\right)\left(\frac{dz}{dw}\right)\frac{d\bar{w}}{d\tau}$$

を(13)に代入すると さらに簡単な運動方程式に導びける. すなわち

$$\frac{\frac{d^2\bar{w}}{d\tau^2}}{\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2} = \frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V} + \frac{\frac{d^2z}{dw^2}}{\frac{dz}{dw}} \tag{15}$$

上式を解き，τを消去すればW平面での軌道が得られる. W平面での軌道とは (ξ,ζ) の直角座標で ζ 軸付近をゆらぎながら進む電子の軌跡と言い，これはちょうど直角座標で論じられる近軸電子ビームであるかのように見えるであろう.

3. 写像の概念

(15)を解いて得られるW平面での軌道が，ちょうど (ξ,ζ) を直角観測座標とする系で電位 $V(\xi,\zeta)$ ― ただし ζ に関して偶対称 $V(\xi,-\zeta) = V(\xi,\zeta)$ ― 中を ζ 軸に沿って進む いわゆる近軸電子ビームの振舞いと同じになるとき(図3)，Z平面，電位V中の電子ビームがW平面，電位V中の近軸電子ビームに写像された，あるいは逆に，近軸電子ビームがZ平面の電子ビームに写像されたと言う[2]. もし，このような近

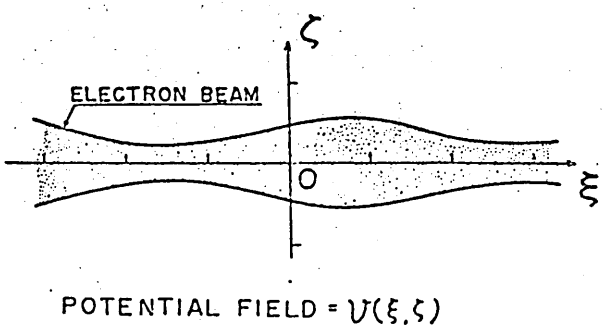


図3. 写像される近軸電子ビーム

軸電子ビームの電子の運動を時間τで記すなら，(15)の導出と同様にして

$$\frac{\frac{d^2\bar{w}}{d\tau^2}}{\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial w}}{U} \tag{16}$$

を導びける．これは，ちょうど運動方程式

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \eta\frac{\partial U}{\partial \xi}\ ,\ \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \eta\frac{\partial U}{\partial \zeta} \tag{17}$$

と同じことを表わしている．写像が可能となる条件は，(15)と(16)を比較して，

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial w}}{U} = \frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V} + \frac{\frac{d^2z}{dw^2}}{\frac{dz}{dw}} \tag{18}$$

が成り立つ場合であると言える．しかし上式の左辺および右辺第1項がwとその共役$\bar{w}$を含む関数であるのに対して右辺第2項はwのみの複

素(解析)関数であるため，すべての ξ, ζ について一般にこの等式が成立しない．しかし，われわれは近軸電子ビームを取り扱っているため，ζ が十分小さい範囲でみたされれば十分である．この条件の下で，(18) を満足する $\Sigma(w)$, $V(\xi,\zeta)$ を求めてみよう．ただし本報告の目的に従い，ζ を代表的静電レンズの電位分布とするため既知量として取り扱う．

周知のように，w のみの(解析)関数は Laplace 方程式 (10) をみたす．ζ 軸に対称な電位 $U(\xi,\zeta)$ は 軸上電位 $U_0(\xi)$ (もちろん実関数) の ξ の代りに w を代入した複素関数 $U_0(w)$ の実数部で表わされる．他方，$V(\xi,\zeta)$ は ζ に関して対称とは限らないため $\zeta=0$ での電位 $V_0(\xi)$ $(=V(\xi,0))$ の他に非対称項を表わす実数関数 $V_1(\xi)$ が必要となる．

$$U(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\left[U_0(w)+U_0(\bar{w})\right]$$
$$V(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\left[\Phi(w)+\overline{\Phi(w)}\right] \qquad (19)$$

ただし

$$\Phi(w)=V_0(w)+jV_1(w) \qquad (20)$$

さて，ζ が十分小さいとして次の微小量を定義する．

$$\delta \equiv \bar{w}-w=-j2\zeta \qquad (21)$$

これを含む関数は δ の一次の項までで近似される．たとえば

$$U_0(\bar{w})=U_0(w+\delta)=U_0(w)+U_0'(w)\,\delta$$
$$\overline{\Phi(w)}=V_0(\bar{w})-jV_1(\bar{w})$$
$$=V_0(w)-jV_1(w)+\left[V_0'(w)-jV_1'(w)\right]\delta \qquad (22)$$

これを用いると (19) は次のように近似される．

$$\frac{\frac{d^2z}{dw^2}}{\frac{dz}{dw}} = \frac{V_0'(w)}{2V_0(w)} - \frac{V_0'(w)+jV_1'(w)}{2V_0(w)}$$

$$-\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\right)^2 - \frac{(V_0'(w))^2+(V_1'(w))^2}{(V_0(w))^2}\right\}\delta \qquad (23)$$

ただし $'$ は微分を示す. (23)で $\bar{w}$ を含むのは δ だけである. その他はすべて w のみの関数であるため等式が成立するには { } 内が消えねばならない. すなわち次式をみたさねばならない.

$$\frac{V_0'(w)}{V_0(w)} = \mp\frac{U_0'(w)}{U_0(w)}\sqrt{1-g^2(w)} \qquad (24)$$

ただし

$$g(w) \equiv -\frac{U_0(w)}{U_0'(w)}\cdot\frac{V_1'(w)}{V_0(w)} \qquad (25)$$

(24)(25)で $w=\xi$ としたとき $V_0(\xi), V_0'(\xi), V_1'(\xi), U_0(\xi), U_0'(\xi)$ がすべて実数量であることから, ただちに, $g(\xi)$ は

$$|g(\xi)| \leq 1 \qquad (26)$$

をみたす(解析)実関数でなければならない. (24)(25)を(23)に代入すると

$$\frac{\frac{d^2z}{dw^2}}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\cdot\left[1 \pm \sqrt{1-g^2(w)} + j\,g(w)\right] \qquad (27)$$

を得る．(24)および(27)の左辺は対数関数の微分の形をしているため，$V_0(w)$, $z(w)$ は容易に積分できまる．また $V_1(w)$ も (25) から積分形として求められる．

$$V_0(w) = \exp\left[\mp \int_0^w \frac{V_0'(\zeta)}{V_0(\zeta)} \cdot \sqrt{1-g^2(\zeta)}\, d\zeta\right]$$

$$\Phi(w) = V_0(w) - j\int_0^w \frac{V_0'(\zeta)}{V_0(\zeta)} \cdot g(\zeta) \cdot V_0(\zeta)\, d\zeta$$

$$z(w) = \int_0^w dt \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t d\zeta \frac{V_0'(\zeta)}{V_0(\zeta)}\left(1 \pm \sqrt{1-g^2(\zeta)} + j g(\zeta)\right)\right] \tag{28}$$

ここで複号は同順である．$g(\zeta)$ は (26) の条件の下で自由に選び得る（解析）関数であり，これを与えると $V(\zeta, \zeta)$, $z(w)$ が決まる．特に上式で与えられる $z(w)$ を写像関数と呼ぶ（通常この名は等角写像で電極あるいは電位分布を写像するときの変換関数に使われているが，ここでは写像自体の意味が異なり本節の始めに述べた意味で使われ，したがってこの呼名は先のものとは性質を異にする）．

(28) は，別の論議で導びいた光の報告[2]の結果の形を変えたものとなっている．特に，複号の選び方で写像自体の性格が大きく変わることに注意しなければならない．

4. 軌道方程式の精度

前節で述べたように，(18) が写像出来るための条件である．(18) がどれほどの精度で，すなわちどれくらいの近似でみたされているかによって写像の精度も異ってくる．これを調べてみよう．

ζ，すなわちζの1次の近似の下で得た(28)と(15)の右辺に代入し，さらにζの2次項まで求めると次のようになる（付録参照）．

$$\frac{\dfrac{d^2\bar{w}}{d\bar{z}^2}}{\left|\dfrac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right|^2}=\frac{\dfrac{\partial V(\xi,\zeta)}{\partial w}}{V(\xi,\zeta)}\cdot\left[1-j\frac{V_0'(\xi)}{V_0(\xi)}\left(\frac{V_0'(\xi)}{V_0(\xi)}\cdot g(\xi)\pm\frac{g'(\xi)}{\sqrt{1-g^2(\xi)}}\right)\zeta^2\right] \tag{29}$$

ここで複号は(28)におけるgと同順である．$g(\xi)$にさらに制限を加えて上式の（ ）内を零にするように選ぶと写像の精度はさらに高くなる．

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi)\sqrt{1-g^2(\xi)}}=\mp\frac{V_0'(\xi)}{V_0(\xi)} \tag{30}$$

上式をみたす$g(\xi)$は複号に従ってそれぞれ

$$g(\xi)=\begin{cases}\dfrac{2CV_0(\xi)}{V_0^2(\xi)+C^2} & \left(V_0(\xi)\geq|C|\right),\\[2ex] \dfrac{2CV_0(\xi)}{V_0^2(\xi)+C^2} & \left(V_0(\xi)\leq|C|\right)\end{cases} \tag{31}$$

である．ここでCは任意の実数定数である．

陰多ビームの特性，特に収差などの非線形特性は軌道方程式の精度にかかわり，これについてはかなり詳しく調べられている[1][3]．したがって(29)の近似の精度が陰多ビームの特性にどのように影響するのかを調べる代りに，軌道方程の精度にどのように効くのかを調べると十分な結論を導びける．

まず(29)の［ ］を$1+j0(\zeta^2)$と略記する．さらに

$$\frac{\partial v}{\partial w}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}-j\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right),\quad \frac{d\bar{w}}{dz}=\frac{d\xi}{dz}\left(1-j\frac{d\zeta}{d\xi}\right)$$

$$\frac{d^2\bar{w}}{dz^2}=-j\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+\frac{d^2\xi}{dz^2}\cdot\left(1-j\frac{d\zeta}{d\xi}\right)$$

と代入し，さらに両辺に $1+j\,d\zeta/d\xi$ を掛けると

$$-j\frac{\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}}{1+\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2}+\frac{\frac{d\zeta}{d\xi}\cdot\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}}{1+\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2}+\frac{\frac{d^2\xi}{dz^2}}{\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2}$$

$$=j\,\frac{\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\left(1+jO(\zeta^2)\right)}{2v}\cdot\frac{d\zeta}{d\xi}-j\,\frac{\frac{\partial v}{\partial \zeta}\left(1+jO(\zeta^2)\right)}{2v}$$

$$+\frac{1}{2v}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\xi}\right)\left(1+jO(\zeta^2)\right)\qquad(32)$$

を得る．$jO(\zeta^2)$ が純虚数であることに注意して，虚部を取り去れば軌道方程式を得る．

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+\left[\frac{\frac{\partial v}{\partial \xi}}{2v}\cdot\frac{d\zeta}{d\xi}-\frac{\frac{\partial v}{\partial \zeta}}{2v}\right]\cdot\left[1+\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2\right]=\varepsilon$$

$$\varepsilon=-\frac{1}{2v}\cdot\left[\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\xi}\right]\cdot\left[1+\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2\right]\cdot O(\zeta^2)\qquad(33)$$

ただし ε は ζ の2次の微小量である．上式で $d^2\zeta/d\xi^2$，$d\zeta/d\xi$ が ζ の1次の量であること，および $v(\xi,\zeta)$ を次のように展開できること

$$V(\xi,\zeta)=V_0(\zeta)-\frac{1}{2}V_0''(\zeta)\zeta^2+\frac{1}{24}V_0''''(\zeta)\zeta^4\cdots \qquad (34)$$

を考慮して 2次以上の微小量を無視すれば，同知の近軸軌道方程式

$$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}+\frac{V_0'(\zeta)}{2V_0(\zeta)}\cdot\frac{d\zeta}{d\xi}+\frac{V_0''(\zeta)}{2V_0(\zeta)}\zeta=0 \qquad (35)$$

に行る．このように $O(\zeta^2)$ を無視した場合，近軸軌道方程式に導びける．これは，$\rho(\zeta)$ が (31) をみたさない限り，(28) で行われる写像が近軸電子ビームにしか適用できないことを意味している．

次に $\rho(\zeta)$ が (31) で与えられる場合を考える．このとき電位分布関数および写像関数はさらに具体的な形で表わせる．(31) の上下両式をそれぞれ (28) に複号に従って代入すると，両式に対して同一表現式に導びかれる．その形は，6節式(53)に示されている．それより直ちに

$$\frac{\partial V}{\partial w}\Big/V=-\frac{V_0'(w)}{V_0(w)+V_0(\bar{w})}\cdot\frac{V_0(\bar{w})+jC}{V_0(w)-jC}$$

$$\frac{d^2z}{dw^2}\Big/\frac{dz}{dw}=\frac{V_0'(w)}{V_0(w)-jC}$$

を確められる．したがって (15) は

$$\frac{d^2\bar{w}}{dz^2}\Big/\left|\frac{dw}{dz}\right|^2=\frac{V_0'(w)}{V_0(w)+V_0(\bar{w})}=\frac{\partial V(\xi,\zeta)}{\partial w}\Big/V(\xi,\zeta) \qquad (36)$$

となり，完全な精度で (16) をみたしている．それゆえ，(53) で与えられる電位 V 中を進む電子ビームの軌道は z 軸付近以外もすべて含んだ空間で，電

位 V の与えられた直角座標系における電子ビームの軌道として解析できる．この意味で，(53) は収差[3]をも含めた完全な写像である．

5. $g(\xi)$ が定数の場合

実際上，(26) の条件の下で自由に選び得る実関数 $g(\xi)$ を適当に与えて写像を行う．その最も簡単な例として $g(\xi)$ が（実数）定数の場合を考える．記号として単に g と書くことにする．（$|g| \leq 1$）．このとき (28) は容易に計算できて次のように表わせる．

$$V(\xi,\zeta) = \mathrm{Real}\left\{\left(1+j\frac{g}{\sqrt{1-g^2}}\right)\cdot\left[\frac{V_0(w)}{V_0(0)}\right]^{\sqrt{1-g^2}}\right\}$$

$$Z(w) = \int_0^w \left[\frac{V_0(\xi)}{V_0(0)}\right]^{\frac{1+\sqrt{1-g^2}}{2}} \cdot e^{j\frac{g}{2}\log\left[\frac{V_0(\xi)}{V_0(0)}\right]} \cdot d\xi \qquad (37)$$

および

$$V(\xi,\zeta) = \mathrm{Real}\left\{\left(1-j\frac{g}{\sqrt{1-g^2}}\right)\cdot\left[\frac{V_0(w)}{V_0(0)}\right]^{\sqrt{1-g^2}}\right\}$$

$$Z(w) = \int_0^w \left[\frac{V_0(\xi)}{V_0(0)}\right]^{\frac{1-\sqrt{1-g^2}}{2}} \cdot e^{j\frac{g}{2}\log\left[\frac{V_0(\xi)}{V_0(0)}\right]} \cdot d\xi \qquad (38)$$

(37)(38) は (28) での複号にそれぞれ従っている．両式で $Z(w)$ の w を ξ にすれば $Z(\xi)$ は Z 平面に写像された電子ビームの中心軌道を描く．また両式の $Z(w)$ には，g が零でないかぎり，位相項 $\exp\left[j\frac{g}{2}\log V_0(\xi)/V_0(0)\right]$ を含んでいるため，中心軌道は湾曲している．中心軌道付近をゆらぐ電子の軌道は本節の結論より，近軸軌道の精度で写像されている．(37)(38) で特に $g=1$ の時

(3) V.K. Zworykin, G.A. Morton, E.G. Ramberg, J. Hillier and A.W. Vance, Electron Optics and the Electron Microscope. New York: John Wiley and Sons, 1945.

$$V(\xi,\zeta) = 1 + \Phi_{mag}\log U_0(w)$$

$$Z(w) = \int_0^w \sqrt{\frac{U_0(\xi)}{U_0(0)}}\cdot e^{j\frac{1}{2}\log\left[\frac{U_0(\xi)}{U_0(0)}\right]}\cdot d\xi \qquad (39)$$

となり，やはり中心軌道は湾曲している．また，その上で電位Vは1なる一定値をとる（電位の値を定数倍しても軌道の形には何ら影響ないため，規格化されていると考えてよい）．これは中心軌道上では電子が等速運動しながら電気力線に沿って並んでいることを示している．

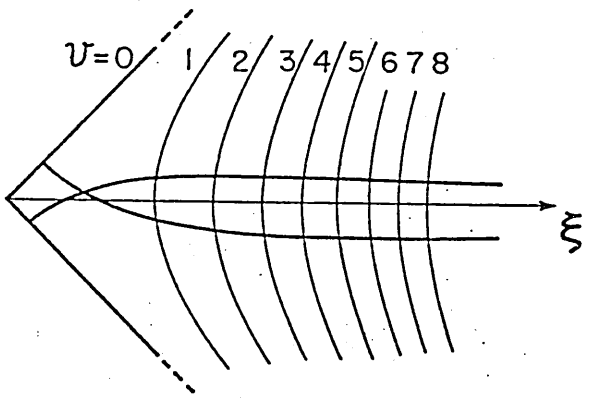


図4．直角電極と零速度で出発する電子軌道

いま，(38)の例として

$$U_0(\xi) = (\xi+1)^2 \qquad (40)$$

とおく．これはV(ξ,ζ)の等電位面が図4のようになることを示し，この場における軌道は解析的に求められる(4)．これも同時に図中に描いてある．

(4) W. W. Harman, Fundamentals of Electronic Motion. New York: McGraw Hill, P.37, 1953.

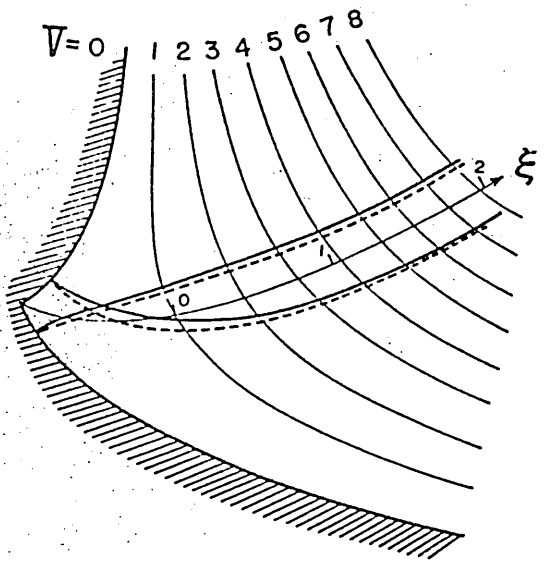


図5.

図4の電子ビームの写像. 中心軌道はξ軸. ξ軸とV=0の上側の電極および下側の電極とは同じ曲線構造になっている. ここでは$g=0.3$に選ばれているため, ξ軸に対する上側下側の電極はそれぞれ63.76°, 43.05°だけ開いている. 実線は真の軌道, 破線は図4の軌道をそのまま写し描いたものである(座標変換を通じて).

(40)と(38)に代入して, 新らたに座標

$$Z \equiv R e^{j\Theta} = (2-\sqrt{1-g^2}+jg)Z+1 \qquad (41)$$

を定義すれば(Zは$\mathcal{Z}$の拡大, 回転, 平行移動で得られ, したがって$\mathcal{Z}$平面での軌道, 等電位線の形状はZ平面でも変らない), 中心軌道は

$$\Theta = \frac{g}{2-\sqrt{1-g^2}} \log R \qquad (42)$$

で与えられる. このとき$\mathcal{V}$は

$$\mathcal{V} = e^{\sigma \log R + \tau\Theta} \cdot \left\{ \cos\left(\sigma\Theta - \tau \log R\right) + \frac{g}{\sqrt{1-g^2}} \sin\left(\sigma\Theta - \tau \log R\right) \right\} \qquad (43)$$

となる．ただし

$$\sigma = \frac{4\sqrt{1-g^2}-2+2g^2}{5-4\sqrt{1-g^2}}, \quad \tau = \frac{2g\sqrt{1-g^2}}{5-4\sqrt{1-g^2}} \tag{44}$$

また，座標の変換は次式で行われる．

$$Z = Re^{j\Theta} = e^{(x-\sqrt{1-g^2}+jg)\log(w+1)} \tag{45}$$

図5で，写像でおめた軌道（破線）と真の軌道（実線）との間にみられる多少のづれは，$\eta=0$の電極から出発する電子の方向（速度の方向）が，その付近で大きく，近軸近似（$|d\xi/d\eta|\ll 1$）をみたさないことに因るものであろう．

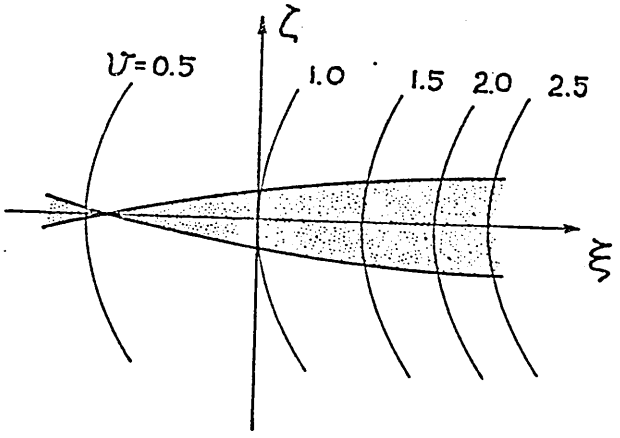


図6
軸上電位がe^{ξ}の場合の電位分布と電子ビーム

次に，(39)の写像例を与える．いま

$$v_0(\xi) = e^{\xi} \tag{46}$$

とする．そのとき近軸軌道方程式（(35)をみよ）の解は次式で与えられる．(5)

(5) J. R. Pierce, Theory and Design of Electron Beams. New York: Van Nostrand Co., p. 91, 1954.

$$\zeta(\xi) = \zeta(\xi_0)\, e^{-\frac{1}{4}(\xi-\xi_0)} \cdot \cos\frac{\sqrt{7}}{4}(\xi-\xi_0) + \left[\frac{4\sqrt{7}}{7}\zeta'(\xi_0) + \frac{\sqrt{7}}{7}\zeta(\xi_0)\right] \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi-\xi_0)} \cdot \sin\frac{\sqrt{7}}{4}(\xi-\xi_0) \qquad (47)$$

この例を図6に示す. (46)を(37)に代入すると,

$$Z \equiv Re^{j\Theta} = \frac{1+j}{2} \cdot Z + 1 \qquad (48)$$

の座標を使って中心軌道を次のように表わせる.

$$R = e^{\Theta} \qquad (49)$$

したがって, 電子ビームはかたつむり状にうず巻いている. 電位Vは,

$$V = 1 + Re^{\Theta} \cdot \sin(\Theta - \log R) \qquad (50)$$

で表わされ, 座標の変換は次式で行われる.

$$Z = Re^{j\Theta} = e^{\frac{1+j}{2}W} \qquad (51)$$

(50)で表わされる電極構造の一例を図7に示す.

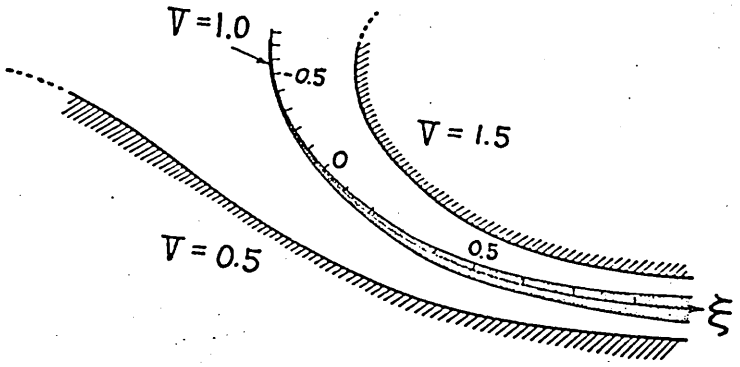


図7.
図6の電子ビームの写像. 中心軌道上の電子は等速運動をして電気力線に沿って進んでいる.

6. $g(\xi)$ が定数でない場合

(28)において実関数 $g(\xi)$ が次式で与えられる場合を考える.

$$g(\xi)=\frac{2C\,U_0(\xi)}{U_0^2(\xi)+C^2} \tag{52}$$

ここで C は任意の実数定数とする. このとき, さほどの面倒もなく, (27)と計算でき, 次式を得る.

$$V(\xi,\zeta)=\frac{U_0^2(0)+C^2}{U_0(0)}\cdot \mathrm{Real}\,\frac{1}{U_0(w)-jC}$$

$$Z(w)=\frac{1}{U_0(0)-jC}\int_0^w\{U_0(\xi)-jC\}\,d\xi \tag{53}$$

および

$$V(\xi,\zeta)=\frac{U_0(0)}{U_0^2(0)+C^2}\cdot \mathrm{Real}\left\{U_0(w)+\frac{C^2}{U_0(w)}-j2C\log U_0(w)\right\}$$

$$Z(w)=\left(1+j\frac{C}{U_0(0)}\right)\cdot\left(w-j\int_0^w\frac{C}{U_0(\xi)+jC}\,d\xi\right) \tag{54}$$

(53)は今迄で述べたように, 完全な写像(収差を含む)の出来る場合である. 一方, (54)は, $g(\xi)$ の形こそ(31)と同じであるが任意定数 C の条件が異る(不等号の向きが逆)場合の写像である. したがって, これは近軸軌道にしか適用できない. 一般に, (53)(54)で写像された電子ビームの中心軌道は $C\neq 0$ のとき湾曲している.

(53)で $C=0$ の場合, すなわち写像される中心軌道が直線でかつ完全な写像が行われる場合の例を与える. $U_0(\xi)$ を図8に示すスリットレンズの軸上電位[5]とする.

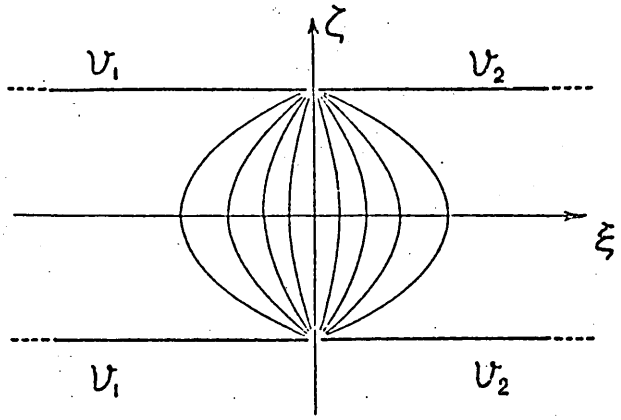


図8

4枚の半無限導体板からなるスリットレンズ，およびその等電位線．

$$V_0(\xi) = 1 + \frac{\alpha}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sinh\xi}\right) \qquad (55)$$

ただし，このとき平行導体板の間隔は π であり，右側の電極電位 V_2 は 1，左側のそれ V_1 は $1+\alpha$ である．また中心点の電位は $V_0(0) = 1+\alpha/2$ である．(55) を使って (53) を数値計算した例を図9に示す．図8では減速電極

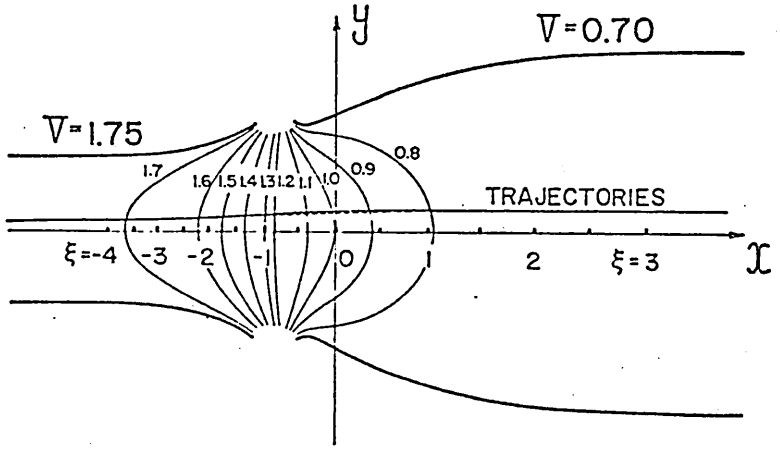


図9．スリットレンズの完全な写像．($C=0$)．スリットレンズの軌道の写像を破線，真の軌道を実線で示す(理論的には一致しなければならない．これは数値計算の誤差を含む)．(57)で $\alpha=-0.6$ とする．このレンズでは収差も含めて写像されている．

であったものが図9では加速電極となる.

次に再びスリットレンズを(54)で写像してみよう. (54)の $Z(w)$ の w を ξ におきかえ ξ を十分大きいとすると直線に漸近する.

$$Z \longrightarrow \begin{cases} \left(1+\dfrac{jc}{1+\alpha/2}\right)\cdot\dfrac{1}{1+jc}\cdot\xi & (\xi\to+\infty) \\ \left(1+\dfrac{jc}{1+\alpha/2}\right)\cdot\dfrac{1+\alpha}{1+\alpha+jc}\cdot\xi & (\xi\to-\infty) \end{cases} \tag{56}$$

Z 平面で両者の直線は向きが異なる. すなわち中心軌道は湾曲し, ほぼ双曲線のように偏向している. その偏向角 θ_D は (56) を複素面に描けば容易に算出される.

$$\theta_D = \tan^{-1}\left(\frac{|\alpha c|}{1+\alpha+c^2}\right) \tag{57}$$

一般にスリットレンズを写像するとき, θ_D を大きくとると写像後の電極に中心軌道が突き当るため, 実際上 C を大きく選べない. 物理的には, スリット構造のレンズでは大きく軌道を曲げられないことを言う. そこで,

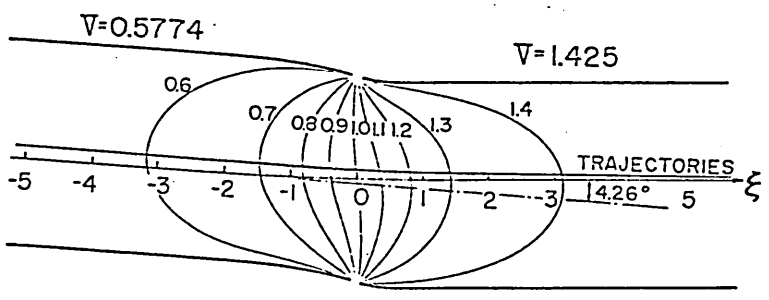


図10. スリットレンズの写像. 中心軌道および電極の偏向角度 $\theta_D = 14.26°$

$\alpha=-0.6$, $C=0.05$ として数値的に求めた湾曲構造のスリットレンズを図10に示す．真の軌道を実線，これに対して図8のレンズにおける軌道の写像を破線で示す．この例では(29)におけるξの2次の量は極めて小さくしたがって写像の精度も高い．

7. 焦点距離

(x,y)座標系で観測される電子ビームの焦点距離は湾曲した中心軌道に沿って測られるべきであろう．この定義による焦点距離は近軸電子ビームのものとは異っている．なぜなら，中心軌道に沿う測度ξ — 実は，これで測れば近軸電子ビームの焦点距離になっている — は，われわれが実測する測度とは違っているからである．中心軌道に沿うΔlの実測長と$\Delta\xi$の間は次式で関係づけられている．

$$\Delta l = \left| dz(\xi)/d\xi \right| \Delta\xi \tag{58}$$

レンズ効果の弱い静電レンズなら，焦点距離はレンズの中心から測ってよいため，写像で得られたレンズの焦点距離Fは近軸電子ビームの焦点距離fを使って

$$F = \int_0^f \left| dz(\xi)/d\xi \right| d\xi \tag{59}$$

と表わせる．さらに具体的には(28)より

$$F = \int_0^f \sqrt{\frac{U_0(\xi)}{U_0(0)}} \cdot \exp\left[\pm \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \frac{U_0'(t)}{U_0(t)} \sqrt{1-g^2(t)}\, dt \right] d\xi \tag{60}$$

となる．一般にレンズの左右では焦点距離は異るが，いづれについても(60)を適用し得る．

付録　(29)の導出

(29)の右辺は(18)の右辺を近似展開して得られる．(18)の右辺に(28)と代入する．まず第1項は

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V}=\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)+\overline{\Phi(w)}}=\frac{V_0'(w)-j\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\cdot g(w)\cdot V_0(w)}{V_0(w)+V_0(\bar{w})-j\int_{\bar{w}}^{w}\frac{V_0'(\xi)}{V_0(\xi)}\cdot g(\xi)\cdot V_0(\xi)d\xi}$$

ところに

$$V_0'(w)=\mp\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\cdot\sqrt{1-g^2(w)}\cdot V_0(w)$$

の関係を利用すると

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V}=\frac{\left[\mp\sqrt{1-g^2(w)}-jg(w)\right]\cdot\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\cdot V_0(w)}{V_0(w)+V_0(\bar{w})-j\int_{\bar{w}}^{w}\frac{V_0'(\xi)}{V_0(\xi)}\cdot g(\xi)\cdot V_0(\xi)\cdot d\xi}\qquad(A\text{-}1)$$

を得る．これと(27)を用いると

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V}+\frac{\frac{d^2z}{dw^2}}{\frac{dz}{dw}}=\frac{V_0'(w)}{zV_0(w)}\cdot\left\{1-\left[\pm\sqrt{1-g^2(w)}+jg(w)\right]\right.$$
$$\left.\cdot\left[\frac{V_0(w)-V_0(\bar{w})+j\int_{\bar{w}}^{w}\frac{V_0'(\xi)}{V_0(\xi)}\cdot g(\xi)\cdot V_0(\xi)d\xi}{V_0(w)+V_0(\bar{w})-j\int_{\bar{w}}^{w}\frac{V_0'(\xi)}{V_0(\xi)}\cdot g(\xi)\cdot V_0(\xi)d\xi}\right]\right\}\qquad(A\text{-}2)$$

次に $\bar{w} = w + \delta$ を使って δ についてTaylor展開する.

$$\frac{V_0'(w)}{2V_0(w)} = \frac{V_0'(w)}{V_0(w)+V_0(\bar{w})} \cdot \left[1 - \frac{V_0(w)-V_0(\bar{w})}{2V_0(w)}\right]$$

$$= \frac{V_0'(w)}{V_0(w)+V_0(\bar{w})} \cdot \left[1 - \frac{V_0(w)-V_0(w)-V_0'(w)\delta - \frac{1}{2}V_0''(w)\delta^2}{2V_0(w)}\right]$$

$$= \frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\right)\delta + \frac{1}{4}\left(\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\right)^2\delta^2\right] \qquad (A-3)$$

$$V_0(w)+V_0(\bar{w}) - j\int_{\bar{w}}^{w} \frac{V_0'(\xi)}{V_0(\xi)} \cdot g(\xi) \cdot V_0(\xi)\, d\xi$$

$$= 2V_0(w) + V_0'(w)\delta + j\frac{V_0'(w)}{V_0(w)} g(w) \cdot V_0(w)$$

$$= 2V_0(w) \cdot \left[1 - \frac{V_0'(w)}{2V_0(w)}\left(\pm\sqrt{1-g^2(w)} - jg(w)\right)\delta\right] \qquad (A-4)$$

$$V_0(w) - V_0(\bar{w}) + j\int_{\bar{w}}^{w} \frac{V_0'(\xi)}{V_0(\xi)} \cdot g(\xi) \cdot V_0(\xi)\, d\xi$$

$$= -V_0'(w)\delta - \frac{1}{2}V_0''(w)\delta^2 - j\frac{V_0'(w)}{V_0(w)} \cdot g(w) \cdot V_0(w)\delta$$

$$-j\frac{1}{2}\frac{d}{dw}\left[\frac{V_0'(w)}{V_0(w)} \cdot g(w) \cdot V_0(w)\right]\delta^2$$

さらに V_0', V_0'' を (24) より求め代入し, 整理すれば

$$= V_0(w) \cdot \left[\pm\sqrt{1-g^2(w)} - jg(w)\right] \cdot \left[\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\delta + \frac{1}{2}\left\{\frac{V_0''(w)}{V_0(w)} - \left(\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. \mp j\frac{V_0'(w)}{V_0(w)} \cdot \frac{g'(w)}{\sqrt{1-g^2(w)}} \mp \left(\frac{V_0'(w)}{V_0(w)}\right)^2 \cdot \sqrt{1-g^2(w)}\right\}\delta^2\right] \qquad (A-5)$$

と書き改められる．(A-3)(A-4)(A-5)を(A-2)に代入し，δについて2次の項まで取ると

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V}+\frac{\frac{d^2z}{dw^2}}{\frac{dz}{dw}}$$

$$=\frac{\frac{\partial V}{\partial w}}{V}\cdot\left[1+j\frac{1}{4}\cdot\frac{U_0'(w)}{U_0(w)}\cdot\left(\frac{U_0'(w)}{U_0(w)}\cdot g(w)\pm\frac{g'(w)}{\sqrt{1-g^2(w)}}\right)\delta^2\right] \qquad (A\text{-}6)$$

を得る．$\delta=-j2\zeta$であること，およびδの2次項のwはzで置き換えてもその誤差は3次以上の項に影響し，2次項には何らの寸し狂わりがないことより，直ちに(A-6)を(29)に書き直せる．

輻射科学研究会資料

運動する不均質磁化プラズマスラブによる平面電磁波の反射と透過

青海恵之
田中克彦
塩沢俊之
（大阪大学・工学部）

1972年9月29日

1. まえがき

運動媒質による平面電磁波の反射と透過の問題は，電磁波論における基本的な問題であり，とりわけ，運動プラズマによる反射と透過に関しては，プラズマの測定あるいは宇宙工学への応用が考えられることから，これまでに種々の観点から調べられてきた[1]特に，媒質が不均質な場合についても最近いくつか報告され，これらの報告では，不均質媒質として誘電体ならびに非磁化および無限大磁化プラズマが取り扱われている[2]~[7] 著者らは，先に，境界面に平行に運動する不均質な誘電体および非磁化プラズマからなるスラブによる平面電磁波の反射と透過[4]ならびに軸方向に運動する不均質な磁化プラズマ円柱による平面電磁波の散乱の問題[8][9]について考察した．解析方法としては，与えられた不均質媒質を多数の薄い層に分割し，それらの各層は近似的に均質であるとして，一つの不均質な媒質を多数の均質な層からなる媒質の問題に変換するという方法[10]を用いた．また，最近，Kong[6]ならびに風間[7]らも，著者らとは独立に，上記の解析方法によって不均質な無限大磁化および非磁化プラズマからなるスラブによる平面電磁波の反射と透過について考察している．本稿では，著者らの先の報告の拡張として，境界面および入射面に平行に運動している不均質な有限磁化プラズマスラブによる平面電磁波の反射と透過について報告する．

2. 運動不均質プラズマ中における電磁界

相対論的な速度で運動している不均質磁化プラズマスラブによる平面電磁波の反射と透過について考察するために，図1のように座標系を定める．媒質ⅠおよびⅡは静止しており，プラズマスラブ（厚さ d ）は境界面および入

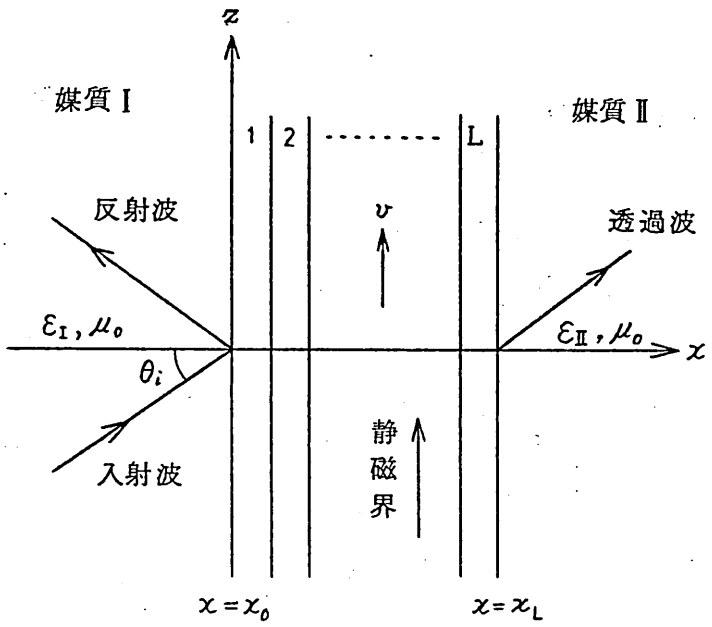


図1　座標系

射面に平行に一定の速度 v で z 方向に運動しているものとする．媒質ⅠおよびⅡはともに誘電体とし，それらの誘電率を，それぞれ，ε_I および ε_{II}，透磁率を μ_0 とする．また，プラズマには z 方向に一様な静磁界が印加されており，電子密度は x の関数であるとする．いま，媒質Ⅰからプラズマへ一様な平面波が入射角 θ_i で入射するものとし，入射面を $x-z$ 平面に選ぶ．

まず，準備として，運動している不均質プラズマ中における電磁界を求める．そのために，与えられた不均質プラズマを境界面に平行な平面によって L 個の薄い層に分割し，媒質Ⅰの側から順次番号（1～L）をつける．各層は近似的に均質であると仮定して，第 l 層の誘電率テンソルを $\hat{\varepsilon}_l$ とする．以下では第 l 層に関する量であることを明示する場合には添字 l をつけることにする．さて，各層は，それぞれ均質と仮定しているので各層内では，先

の報告で求められた均質な媒質に対するMaxwell-Minkowski の方程式が成立する。[1] いま，入射電磁界が時間的に $e^{j\omega t}$ なる変化をするものとすると，$\hat{\varepsilon}_l$ は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_l &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & -j\varepsilon_{xy} & 0 \\ j\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \\
\varepsilon_{xx} &= 1 - \frac{X_l'}{1 - Y'^2} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{X_l' \, Y'}{1 - Y'^2} \\
\varepsilon_{zz} &= 1 - X_l'
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
X_l' &= \frac{\omega_{pl}^2}{\omega'^2} \qquad Y' = \frac{\omega_c}{\omega'} \\
\omega' &= \gamma (1 - n_{\mathrm{I}} \beta \sin \theta_i) \omega \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \quad , \quad n_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{I}}}{\varepsilon_0}}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ω'，ω_c および ω_{pl} は，それぞれ，プラズマの静止系で測った入射波の角周波数，サイクロトロン角周波数および第 l 層に関するプラズマ角周波数である．また，n_{I} および ε_0 は媒質Ⅰの屈折率および真空の誘電率を表わす．さて，プラズマスラブ内部の電磁界が z 方向に $exp(-jk_{pz}z)$ なる変化をするものとすると第 l 層内における電界および磁界の z 方向成分 E_z および H_z はつぎの波動方程式から得られる．

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_t^2 E_z + k_0^2 (p_l E_z + j g_l H_z) = 0 \\ &\nabla_t^2 H_z + k_0^2 (q_l H_z + j h_l E_z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} p_l &= \varepsilon_{zz} (K_1 R_{xx} - K_2 R_{xy}) / K_3 \\ q_l &= (K_1 L_{xx} - K_2 L_{xy}) / K_3 \\ g_l &= (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2} (K_2 n_z' - K_1 N_{xx}) / K_3 \\ h_l &= - (\varepsilon_0 / \mu_0)^{1/2} \varepsilon_{zz} (K_2 n_z' - K_1 N_{xx}) / K_3 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= n_z'^2 - L_{xx} R_{xx} \\ K_2 &= 2 n_z' N_{xx} - (L_{xx} R_{xy} + L_{xy} R_{xx}) \\ K_3 &= N_{xx}^2 - L_{xx} R_{xx} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} n_z' &= n_z + N_{xy} \quad , \qquad n_z = k_{pz} / k_0 \\ k_0 &= \omega / c \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} R_{xx} &= (1 - \beta^2) (1 - \beta^2 \varepsilon_{xx}) / D \\ R_{xy} &= \beta^2 (1 - \beta^2) \varepsilon_{xy} / D \\ L_{xx} &= (1 - \beta^2) [\varepsilon_{xx} - \beta^2 (\varepsilon_{xx}^2 - \varepsilon_{xy}^2)] / D \\ L_{xy} &= (1 - \beta^2) \varepsilon_{xy} / D \\ N_{xx} &= \beta (1 - \beta^2) \varepsilon_{xy} / D \\ N_{xy} &= \beta [(1 - \beta^2 \varepsilon_{xx}) (\varepsilon_{xx} - 1) + \beta^2 \varepsilon_{xy}^2] / D \\ D &= (1 - \beta^2 \varepsilon_{xx})^2 - \beta^4 \varepsilon_{xy}^2 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

式(3)の解は，x方向の伝搬定数が$\pm k_{l1}$および$\pm k_{l2}$で与えられる4つの波の一次結合によって表わされる．

$$\left.\begin{aligned} E_{lz} &= A_l\, k_{l1}^2\, \varphi_1^+ + B_l\, k_{l1}^2\, \varphi_1^- \\ &\quad + C_l\, k_{l2}^2 \varphi_2^+ + D_l\, k_{l2}^2 \varphi_2^- \\ H_{lz} &= A_l\, \xi_{l1}\, k_{l1}^2\, \varphi_1^+ + B_l\, \xi_{l1}\, k_{l1}^2\, \varphi_1^- \\ &\quad + C_l\, \xi_{l2}\, k_{l2}^2\, \varphi_2^+ + D_l\, \xi_{l2}\, k_{l2}^2\, \varphi_2^- \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i^{\pm} &= exp\left[-j\left(k_{pz}\, z \pm k_{li}\, x\right)\right] \quad (i=1,\ 2) \\ k_{li} &= \sqrt{s_{li}}\ \ k_0 \quad (i=1,\ 2) \\ \xi_{li} &= -j\left(s_{li} - p_l\right) / g_l \quad (i=1,\ 2) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ただし$s_{li}(i=1,\ 2)$は

$$s^2 - \left(p_l + q_l\right) s + p_l\, q_l + g_l\, h_l = 0 \qquad (10)$$

の2根を表わす．また，A_l, B_l, C_l, D_lは定数である．第l層内の電磁界の他の成分はMaxwell-Minkowski の方程式から求めることができる．そこで第l層内の，境界面に平行な面内における成分を行列を用いてまとめるとつぎのようになる．

$$F_l\left(k_{l1}x,\ k_{l2}x\right) = G_l\left(k_{l1}x,\ k_{l2}x\right) K_l \qquad (11)$$

ただし

$$F_l(k_{l1}x,\ k_{l2}x)=\begin{bmatrix}E_{ly}\\ E_{lz}\\ H_{ly}\\ H_{lz}\end{bmatrix},\qquad K_l=\begin{bmatrix}A_l\\ B_l\\ C_l\\ D_l\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$G_l=\begin{bmatrix}\omega\mu_0 k_{l1}\xi_{l1}\varphi_1^+ & -\omega\mu_0 k_{l1}\xi_{l1}\varphi_1^- & \omega\mu_0 k_{l2}\xi_{l2}\varphi_2^+ & -\omega\mu_0 k_{l2}\xi_{l2}\varphi_2^-\\ k_{l1}^2\varphi_1^+ & k_{l1}^2\varphi_1^- & k_{l2}^2\varphi_2^+ & k_{l2}^2\varphi_2^-\\ -\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz}k_{l1}\varphi_1^+ & \omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz}k_{l1}\varphi_1^- & -\omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz}k_{l2}\varphi_2^+ & \omega\varepsilon_0\varepsilon_{zz}k_{l2}\varphi_2^-\\ k_{l1}^2\xi_{l1}\varphi_1^+ & k_{l1}^2\xi_{l1}\varphi_1^- & k_{l2}^2\xi_{l2}\varphi_2^+ & k_{l2}^2\xi_{l2}\varphi_2^-\end{bmatrix} \tag{13}$$

なお，以下では簡単のために$F_l(k_{l1}x,\ k_{l2}x)$および$G_l(k_{l1}x,\ k_{l2}x)$を$F_l(k_lx)$，$G_l(k_lx)$と書くことにする．

式(11)から

$$G_l^{-1}(k_lx)F_l(k_lx)=K_l \tag{14}$$

なる関係が得られるが，K_lは第l層内では一定の値をとるから層の両端すなわち$x=x_l$および$x=x_{l-1}$においても同じ値をもつ．したがって次式が成立する．

$$G_l^{-1}(k_lx_l)F_l(k_lx_l)=G_l^{-1}(k_lx_{l-1})F_l(k_lx_{l-1}) \tag{15}$$

あるいは，

$$\begin{aligned}F_l(k_lx_{l-1})&=G_l(k_lx_{l-1})\,G_l^{-1}(k_lx_l)\,F_l(k_lx_l)\\&=M_l(k_lx_{l-1},\ k_lx_l)\,F_l(k_lx_l)\end{aligned} \tag{16}$$

ただし

$$M_l(k_l x_{l-1}, k_l x_l) = G_l(k_l x_{l-1}) G_l^{-1}(k_l x_l) \tag{17}$$

式(16)は第 l 層の両端の電磁界の接線成分の間の関係を表わす．

さて，F_l は境界条件により，各層の境界面上で連続，すなわち，$F_\nu(k_\nu x_\nu) = F_{\nu+1}(k_{\nu+1} x_\nu)$ ($\nu = 0, 1 \cdots L$) でなければならないこと，および式(15)の関係をくり返し用いることにより，境界面 $x = x_{l-1}$ および $x = x_m$ (ただし $x_{l-1} < x_m$) における電界および磁界の接線成分の間にはつぎの関係が成り立つことがわかる．

$$F_l(k_l x_{l-1}) = M(k_l x_{l-1}, k_m x_m) F_m(k_m x_m) \tag{18}$$

ここで

$$M(k_l x_{l-1}, k_m x_m) = \prod_{\nu=l}^{m} M_\nu(k_\nu x_{\nu-1}, k_\nu x_\nu) \tag{19}$$

特に，式(18)において，$l = 1$，$m = L$ とおくと次式が得られる．

$$F_1(k_1 x_0) = M(k_1 x_0, k_L x_L) F_L(k_L x_L) \tag{20}$$

式(20)はスラブの両端における電界および磁界の接線成分の間の関係を表わしている．

3．反射波および透過波

反射波および透過波を求めるために，まず，入射波をつぎのように仮定する．

$$\left.\begin{aligned} E_{iy} &= E_{io}\, exp\{-j(k_{Ix}x + k_{Iz}z)\} \\ H_{iy} &= H_{io}\, exp\{-j(k_{Ix}x + k_{Iz}z)\} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} k_{Ix} &= k_I \sin\theta_i \ , \quad k_{Iz} = k_I \cos\theta_i \\ k_I &= \omega\sqrt{\varepsilon_I \mu_o} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

E_{io} および H_{io} は一定の振幅を表わす．

また，反射波はつぎのように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned} E_{ry} &= E_{ro}\, exp\{-j(-k_{Ix}x + k_{Iz}z)\} \\ H_{ry} &= H_{ro}\, exp\{-j(-k_{Ix}x + k_{Iz}z)\} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

さらに，透過波も同様につぎのように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned} E_{ty} &= E_{to}\, exp\{-j(k_{\Pi x}x + k_{\Pi z}z)\} \\ H_{ty} &= H_{to}\, exp\{-j(k_{\Pi x}x + k_{\Pi z}z)\} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

ここで，$k_{\Pi x}$ および $k_{\Pi z}$ は透過波の x 方向および z 方向の伝搬定数を表わし，これらはつぎの関係を満足する．

$$k_{\Pi z} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_\Pi \mu_o - k_{\Pi x}^2} \quad (25)$$

式 (23) における E_{ro}，H_{ro}，および式 (24) における E_{to}，H_{to} は未定定数であり，後に境界条件から決定される．また，式 (21)，(23) および (24) では電磁界の z 方向成分のみを示したが，他の成分はMaxwell の方程式から得られる．

境界条件を適用するために，式 (21)，(23) および (24) を用いて，媒質Ⅰおよび媒質Ⅱにおける電磁界の y 方向成分および z 方向成分を式 (11) の形に

まとめるとつぎのようになる．

$$F_{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}x}x)=\begin{bmatrix} E_{io}e^{-jk_{\mathrm{I}x}x}+E_{ro}e^{jk_{\mathrm{I}x}x} \\ -\dfrac{k_{\mathrm{I}x}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{I}}}H_{io}e^{-jk_{\mathrm{I}x}x}+\dfrac{k_{\mathrm{I}x}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{I}}}H_{ro}e^{jk_{\mathrm{I}x}x} \\ H_{io}e^{-jk_{\mathrm{I}x}x}+H_{ro}e^{jk_{\mathrm{I}x}x} \\ \dfrac{k_{\mathrm{I}x}}{\omega\mu_0}E_{io}e^{-jk_{\mathrm{I}x}x}-\dfrac{k_{\mathrm{I}x}}{\omega\mu_0}E_{ro}e^{jk_{\mathrm{I}x}x} \end{bmatrix} e^{-jk_{\mathrm{I}z}z} \tag{26}$$

$$F_{\mathrm{II}}(k_{\mathrm{II}x}x)=\begin{bmatrix} E_{to}e^{-jk_{\mathrm{II}x}x} \\ -\dfrac{k_{\mathrm{II}x}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{II}}}H_{to}e^{-jk_{\mathrm{II}x}x} \\ H_{to}e^{-jk_{\mathrm{II}x}x} \\ \dfrac{k_{\mathrm{II}x}}{\omega\mu_0}E_{to}e^{-jk_{\mathrm{II}x}x} \end{bmatrix} e^{-jk_{\mathrm{II}z}z} \tag{27}$$

さて，式 (23) および (24) における未定定数 E_{ro}，H_{ro}，および E_{to}，H_{to} は，先にも述べたように，境界面 $x=x_0$ および $x=x_L$ において電界および磁界の接線成分が連続でなければならないという境界条件から決定される．まず，上の境界条件が満足されるためには，媒質Ⅰ，Ⅱおよびプラズマ中における z 方向の伝搬定数はすべて等しくならなければならない．すなわち，

$$k_{\mathrm{I}z}=k_{\mathrm{II}z}=k_{pz} \tag{28}$$

つぎに，$x=x_0$ において電界および磁界の接線成分が連続になるべきことから

$$F_{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}x}\,x_0) = F_{\mathrm{I}}(k_{1x}\,x_0) \tag{29}$$

が成立する．同様にして，$x = x_L$ において次式が成りたつ．

$$F_{\mathrm{II}}(k_{\mathrm{II}x}\,x_L) = F_L(k_{Lx}\,x_L) \tag{30}$$

式 (29) および (30) を式 (20) に代入すると次式が得られる．

$$F_{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}x}\,x_0) = M(k_{1x}\,x_0,\ k_{Lx}\,x_L)F_{\mathrm{II}}(k_{\mathrm{II}x}\,x_L) \tag{31}$$

式 (31) は，4 個の未知数 E_{ro}, H_{ro}, E_{to}, H_{to} に関する 4 元連立 1 次方程式を表わしており，その解はつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned}
E_{ro} &= -\frac{e^{-j2k_{\mathrm{I}x}x_0}}{U}\Big[\{(\zeta_{\mathrm{I}}Q_3 - Q_2)(P_4 - \eta_{\mathrm{I}}P_1) - (\zeta_{\mathrm{I}}P_3 - P_2)(Q_4 - \eta_{\mathrm{I}}Q_1)\}E_{io} \\
&\qquad + 2\zeta_{\mathrm{I}}(P_1Q_4 - Q_1P_4)H_{io}\Big] \\
E_{to} &= \frac{2e^{-j(k_{\mathrm{I}x}x_0 - k_{\mathrm{II}x}x_L)}}{U}\big[\eta_{\mathrm{I}}(\zeta_{\mathrm{I}}Q_3 - Q_2)E_{io} - \zeta_{\mathrm{I}}(Q_4 + \eta_{\mathrm{I}}Q_1)H_{io}\big] \\
H_{ro} &= \frac{e^{-j2k_{\mathrm{I}x}x_0}}{U}\Big[2\eta_{\mathrm{I}}(P_2Q_3 - Q_2P_3)E_{io} \\
&\qquad + \{(P_4 + \eta_{\mathrm{I}}P_1)(Q_2 + \zeta_{\mathrm{I}}Q_3) - (Q_4 + \eta_{\mathrm{I}}Q_1)(P_2 + \zeta_{\mathrm{I}}P_3)\}H_{io}\Big] \\
H_{to} &= \frac{2e^{-j(k_{\mathrm{I}x}x_0 - k_{\mathrm{II}x}x_L)}}{U}\big[\eta_{\mathrm{I}}(P_2 - \zeta_{\mathrm{I}}P_3)E_{io} + \zeta_{\mathrm{I}}(P_4 + \eta_{\mathrm{I}}P_1)H_{io}\big]
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
P_i &= (m_{i1} + \eta_{\mathrm{II}}m_{i4}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \\
Q_i &= (m_{i3} - \zeta_{\mathrm{II}}m_{i2}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \\
U &= (\zeta_{\mathrm{I}}Q_3 - Q_2)(P_4 + \eta_{\mathrm{I}}P_1) - (\zeta_{\mathrm{I}}P_3 - P_2)(Q_4 + \eta_{\mathrm{I}}Q_1)
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{\mathrm{I}} &= \frac{k_{\mathrm{I}x}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{I}}} \quad , \qquad \zeta_{\mathrm{II}} = \frac{k_{\mathrm{II}x}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{II}}} \\ \eta_{\mathrm{I}} &= \frac{k_{\mathrm{I}x}}{\omega\mu_0} \quad , \qquad \eta_{\mathrm{II}} = \frac{k_{\mathrm{II}x}}{\omega\mu_0} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

m_{ij} は $M(k_{1x}\, x_0,\ k_{Lx}\, x_L)$ の要素を表わす．

なお，不均質プラズマ中の電磁界は，式(18)において $m = L$ とおき，上に求めた E_{t0} および H_{t0} を用いることによって得られる．

4．検　　討

ここで，不均質プラズマの一例として，電子密度が2乗分布および直線状分布で与えられる場合を考え，その反射特性を数値的に検討する．ただし，電力反射係数 R は次式で与えられる．

$$R=\left[|E_{r0}|^2+(\mu_0/\varepsilon_{\mathrm{I}})|H_{r0}|^2\right]/\left[|E_{i0}|^2+(\mu_0/\varepsilon_{\mathrm{I}})|H_{i0}|^2\right] \tag{35}$$

また，電子密度分布 N は，2乗分布の場合には

$$N=N_0\left[1-\alpha\left(\frac{2x}{d}-1\right)^2\right]/\left(1-\frac{\alpha}{3}\right) \quad (0 \leqq x \leqq d) \tag{36}$$

で与えられ，直線状分布の場合には

$$N = N_0\left[1+\alpha\left(\frac{2x}{d}-1\right)\right] \quad (0 \leqq x \leqq d) \tag{37}$$

で与えられる．式(36)および(37)において，α は不均質の度合を表わすパラメータであり，N_0 はプラズマスラブ全体にわたる電子密度の平均値である．したがって，各々のスラブの単位長当りに含まれる電子数はプラズマが均質

（$\alpha=0$）な場合のN_0に等しい．

電子密度分布が式(36)ならびに(37)で与えられるとき不均質プラズマスラブのプラズマ周波数はつぎのようになる．

$$\omega_p^2(x)=\omega_{p0}^2 f(x) \tag{38}$$

ただし

$$\omega_{p0}^2=\frac{N_0 e^2}{\tau m_0 \varepsilon_0}\quad,\qquad f(x)=\frac{N}{N_0} \tag{39}$$

ここで，m_0およびeは，それぞれ，電子の静止質量および電荷を表わす．またω_{p0}はN_0に対応するプラズマ周波数であり，プラズマの速度に依存しない不変量である．なお，数値計算では，ω_{pl}として$\omega_p(x_l)$を用いることにする．

さて，以下では，ω/ω_{p0}，ω_c/ω_{p0}の値を固定して，垂直入射の場合についてスラブの反射特性が，プラズマの速度β，プラズマの不均質さα，およびプラズマスラブの厚さd/λ（λは入射波の波長）によってどのように変化するかを定量的に調べる．ただし，簡単のために，媒質Ⅰ，Ⅱはともに真空とし，入射波はH波（$E_{i0}=0$）とする． ここで数値計算に先立って分割数Lについて簡単に検討しておく．分割数Lは，実際に数値計算を行い，相対誤差が適当な限度内におさまるように決定される．分割数と精度の関係は一様でなく，種々のパラメータの値によって大きく変化することが確かめられるが，ここでは簡単のため$L=200$とする．以下の数値例では，この分割数によって最大誤差は0.7％以下におさえられている．まず電力反射係数とプラズマの速度との関係をαの種々の値について示すと図2のようになる．αが大きくなるにつれ，2乗分布および直線状分布の何れの場合にも反射係数は大きくなるが，その変化は一様であって，曲線の形は変化しない．つぎ

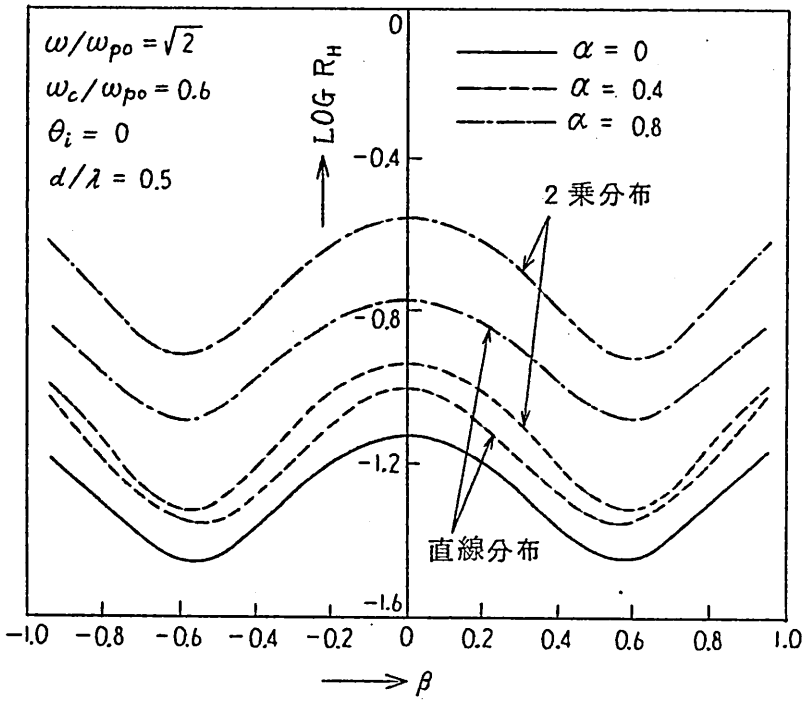


図２　電力反射係数とプラズマの速度との関係

に，電力反射係数と，プラズマスラブの厚さとの関係をαをパラメータにして示すと図３のようになる．図からわかるように，何れの分布の場合にもαが大きくなると反射係数が１に近づく．図４は図３と同じ関係をβをパラメータとして示したものである．図４（c）には参考のために均質プラズマスラブの反射特性を示した．

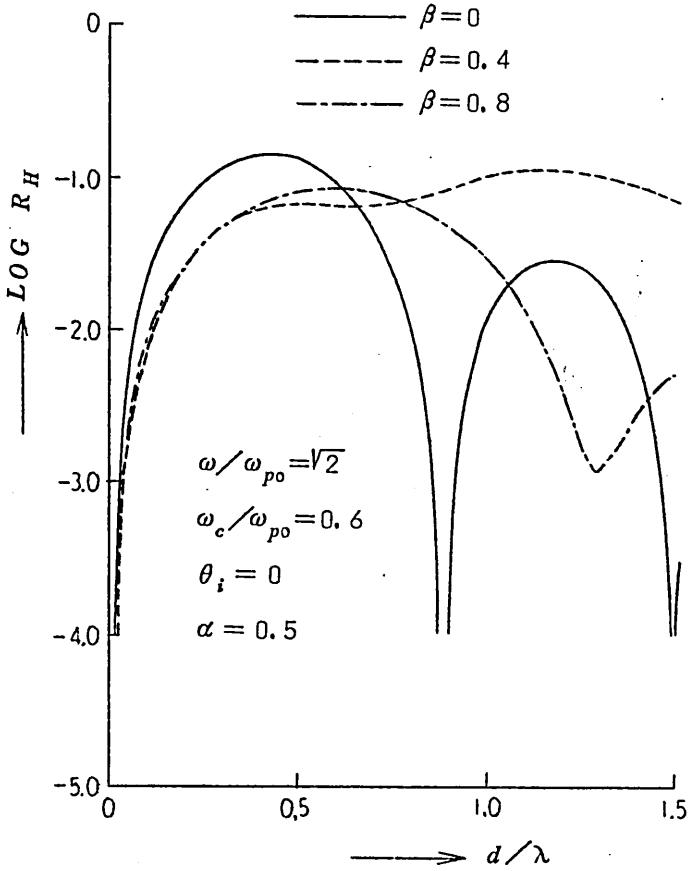


図４（a）　電力反射係数とスラブの厚さとの関係
（２乗分布）

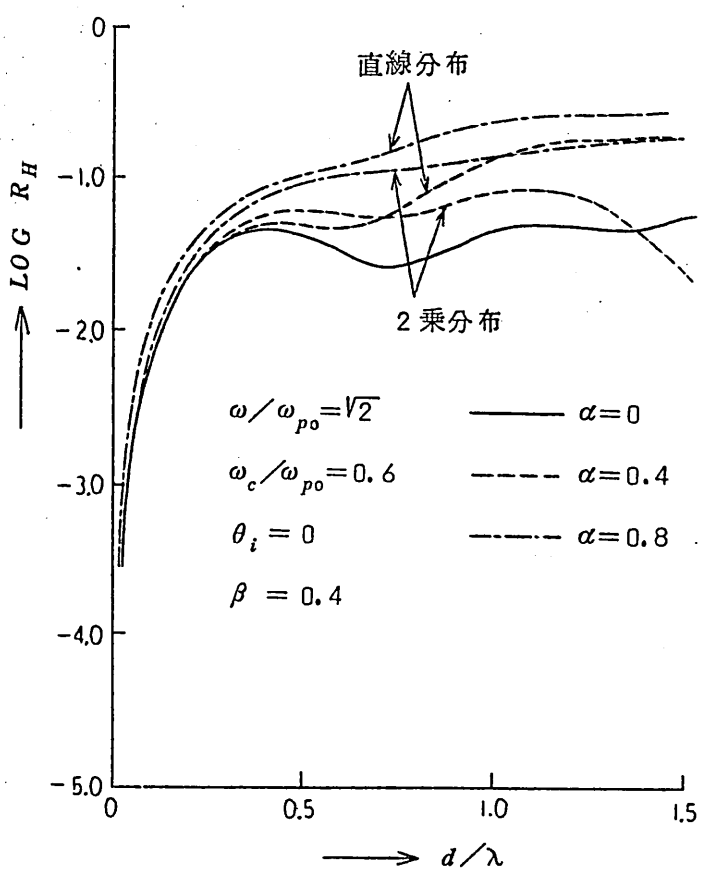


図３　電力反射係数とスラブの厚さとの関係

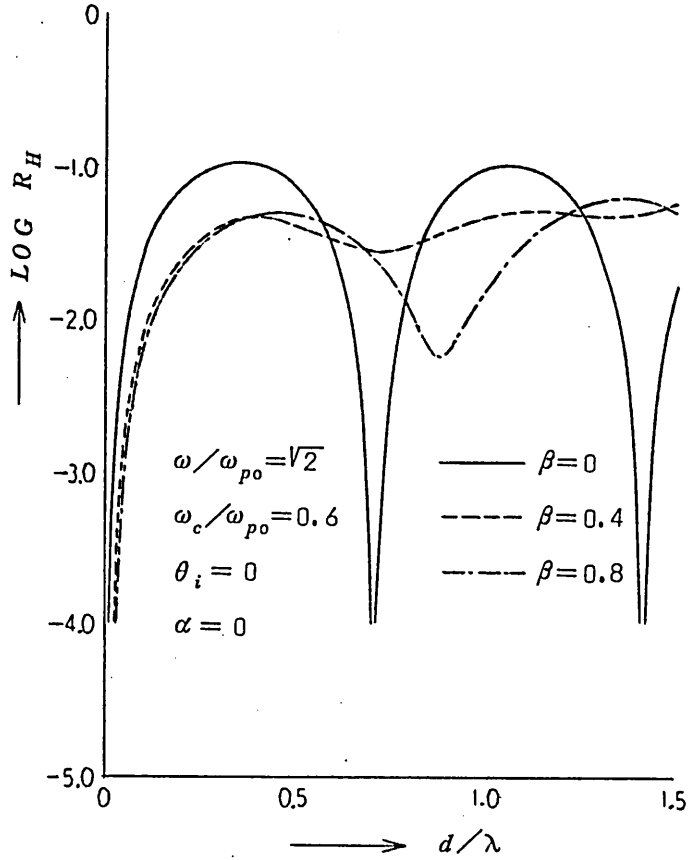


図 4 (c)　電力反射係数とスラブの厚さとの関係
（均質プラズマ）

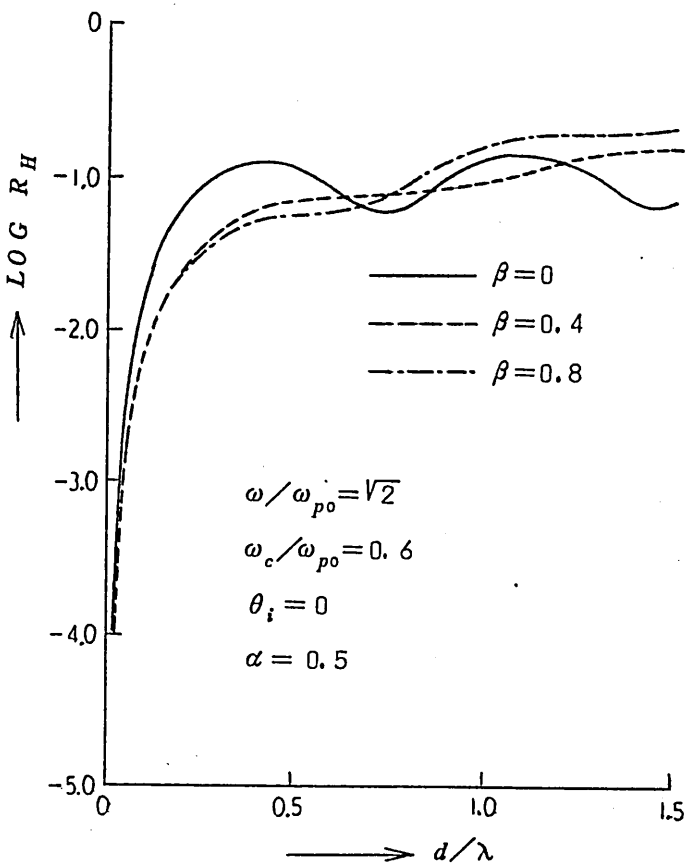


図 4 (b)　電力反射係数とスラブの厚さとの関係
（直線分布）

5. むすび

本論文では境界面ならびに入射面に平行に運動している不均質磁化プラズマスラブによる平面電磁波の反射と透過について，Maxwell-Minkowski の方程式を用いて考察した．不均質プラズマに対する解析方法としては，プラズマスラブを境界面に平行な面によって多数の薄い層に分割し，各層内では媒質定数が近似的に一定であるとして，不均質なプラズマスラブの問題を媒質定数がわずかづつ異なる多数の層からなるスラブの問題に変換するという方法を用いた．具体例としては，電子密度の分布が2乗分布ならびに直線状分布で与えられる場合について電力反射係数を数値的に検討した．その結果，スラブ全体にわたる電子密度の平均値が同じでも分布のしかたによって反射特性が大きく変化すること等が明らかになった．

終りに，日ごろご指導いただいている大阪大学工学部板倉清保教授，同熊谷信昭教授，ならびに常々ご討論いただく本学通信工学教室電磁界理論研究グループの方々に深謝する．

文　献

(1) たとえば，T. Shiozawa and K. Hazama : "General solution to the problem of reflection and transmission by a moving dielectric medium," Radio Sci., 3 (New Series), p. 569 (June 1968).

(2) H. N. Kritikos, K. S. H. Lee and C. H. Papas : "Electromagnetic reflectivity of nonuniform jet streams,"

Radio Sci., 2 (New Series), p. 991 (Sept. 1967).

(3) 風間，深井，鈴木：“速度に分布をもって運動する損失のあるプラズマスラブの反射係数について,”
信学論(B)（技術談話室），54-B，p. 280（昭46-05）.

(4) 塩沢，田中：“運動不均質媒質スラブによる平面電磁波の反射と透過,”
輻射科学研資(1971-07).

(5) 田中，間：“運動不均質媒質による平面電磁波の反射と透過,”
信学会アンテナ伝播研資AP72-4（1972-04）.

(6) J. A. Kong：“Reflection and transmission of electromagnetic waves by stratified moving media,” Canadian J. Phys., 49, p. 2785 (Nov. 1971)

(7) 風間，深井，鈴木：“運動する不均質プラズマスラブによる反射,”
信学会アンテナ伝播研資 AP72-16（1972-06）.

(8) 塩沢，青海：“軸方向に運動している不均質プラズマ円柱による平面電磁波の散乱,” 信学論(B)，55-B，p. 158（昭47-04）.

(9) T. Shiozawa and S. Seikai：“Scattering of electromagnetic waves from an inhomogeneous magnetoplasma column moving in the axial direction,”
IEEE Trans., AP-20, p. 455 (July 1972).

(10) M. Born and E. Wolf：“Principles of optics,” p. 51, Pergamon Press (1964).

(11) 塩沢，河野：“軸方向に運動している異方性プラズマ円柱による平面電磁波の散乱,” 信学会アンテナ伝撥研資，AP 70-63 (1971-02).

輻射科学研究会資料

運動媒質の境界面における ビーム波の全反射現象

安川交二
小川英一
藤岡弘
（大阪大学・工学部）

1972年9月29日

1. 序　　言

最近，運動媒質と電磁波との相互作用の問題は多くの研究者によって考察され，全反射領域における平面波と運動媒質の問題についても興味ある結果が報告されている[1][2]．また，全反射波によって誘電体線路に波を励振する問題も，その光学回路素子への利用の試みと共に種々報告されている[3]～[5]．このような全反射の問題にともなって，入射波が平面波ではなく，ビーム波を取り扱う問題については，その実験結果とともに古くから議論され，種々の報告がなされている[6]～[8]．この場合には興味ある現象としてGoos-Hänchen効果，すなわち境界面にビーム波が入射し，その境界面において全反射が起こる場合には，反射波が側方に変位を受けるという現象が現われることが知られている．

著者らは先に，平面波がスリットを通ることによって形成されたbounded beamが，運動している誘電体媒質の境界面に入射する問題を取り扱ったが[9]，本文ではガウスビームが運動誘電体媒質の境界面に入射する問題を取り扱い，運動媒質の境界面におけるGoos-Hänchen 効果を含む全反射現象について考察する．特に，ビーム波の電磁エネルギー流，および全反射の臨界角近傍における反射波の様子を数値計算例をあげて詳しく検討する．

2. 運動境界面におけるガウスビームの全反射

本章においては，ガウスビームが運動している誘電体媒質に入射するときの反射波の性質について考察する．

図1において，$z>0$の領域は（ε_1, μ_0）なる完全誘電体（媒質Ⅰ），$z<0$の領域は（ε_2, μ_0）なる完全誘電体（媒質Ⅱ）によって満たされている

ものとし，媒質Ⅱは媒質Ⅰに対して x 方向に速度 v で一様に運動しているものとする．また入射波および反射波を記述するために図１のように $x-z$ 平面内に新たに（x_i，z_i）座標および（x_r，z_r）座標を定める．このとき次の変換式が成立している．

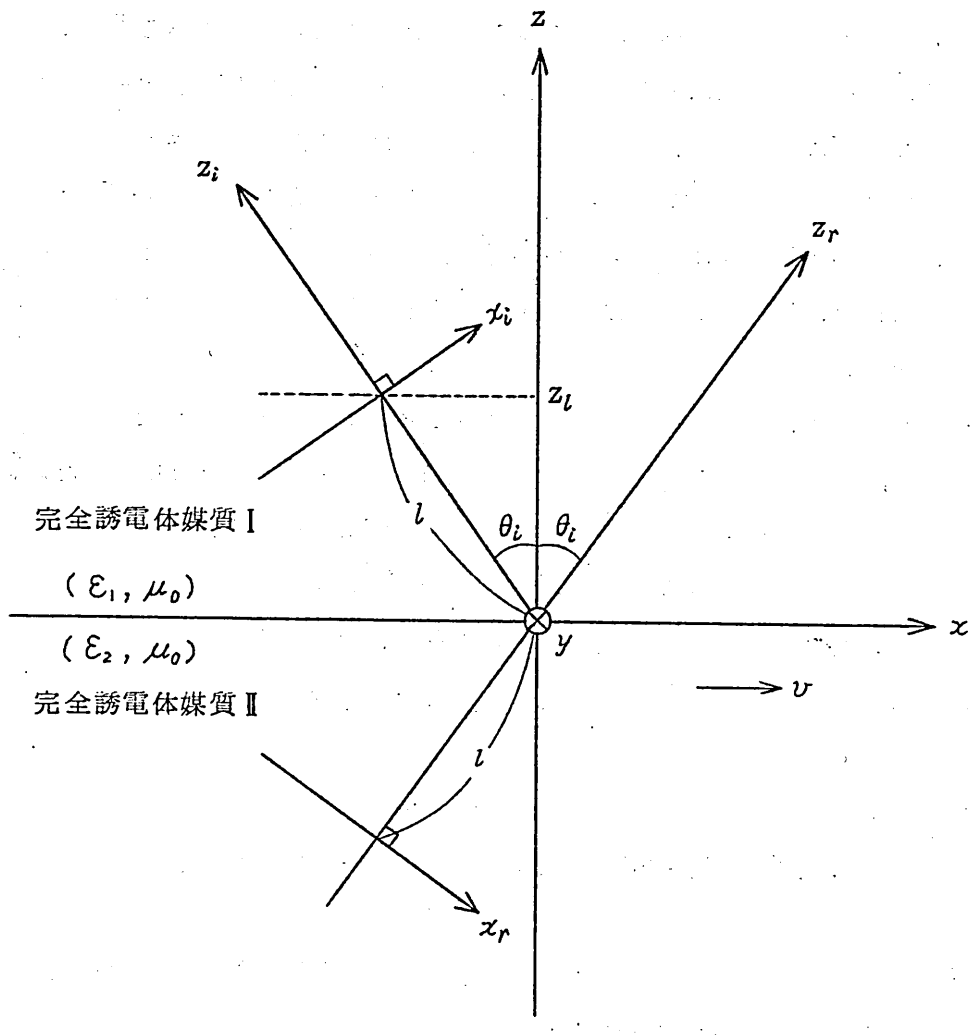


図１　座　標　系

$$\begin{bmatrix} x_i \\ z_i + l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i, & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i, & \cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} x_r \\ z_r - l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i, & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i, & \cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \tag{2}$$

さて，いま z の正の側から y 方向に一様で，z_i ＝ const なる平面上でガウス分布をなす次のようなスカラー波 $\psi(x_i, z_i)$ が入射するものとする．

$$\psi(x_i, z_i) = A\, e^{-\left(\frac{x_i}{w_0}\right)^2} e^{j(\omega t + k x_i)} \tag{3}$$

ここで，A は振幅を表わす定数であり，w_0 はスポットサイズを表わし，k は次式で与えられる伝搬定数である．

$$k = n_1 k_0 \tag{4}$$

ただし，

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 / \varepsilon_0} \quad , \quad k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c} \tag{5}$$

式(3)で与えられる $\psi(x_i, z_i)$ の $z = z_l$ ($= l \cos\theta_i$) なる面上における電磁界を Fourier 積分によって平面波の和として表示する．以後 $e^{j\omega t}$ は省略するものとすると，

$$\psi(x, z_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x)\, e^{-j k_x x}\, dk_x \tag{6}$$

ただし，$\Phi(k_x)$ は次式で与えられる．

$$\Phi(k_x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\,z_l)\,e^{jk_x x}\,dx$$

$$=A\frac{w_0}{2\sqrt{\pi}\cos\theta_i}\exp\left\{-\left(\frac{w_0}{2\cos\theta_i}\right)^2(k_x-k_{1x})^2-jk_x l\sin\theta_i\right\}\quad(7)$$

ここで，$k_{1x}=k\sin\theta_i$ であり，入射角 θ_i なる平面波の x 方向伝搬定数と考えることができる．

したがって，$0<z<z_l$ なる領域で入射ガウスビームは次式のように表わされる．

$$\psi_i(x,\,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x+k_z(z-z_l)\}}\,dk_x\qquad(8)$$

ただし；

$$k_z=-\sqrt{k^2-k_x^2}\qquad(9)$$

ここで次のように仮定する．

$$k w_0\gg 1\qquad(10)$$

式(10)は，波長に比してスポットサイズが十分に大きいことを意味しており，ビームの中心近くではビームが含む伝搬定数 k_x は k_{1x} の付近に集中しているものと考えることができる．すなわち

$$\delta=k_x-k_{1x}\qquad(11)$$

とすると，

$$|\delta|\ll 1\qquad(12)$$

式(12)の条件によって式(9)で表わされる k_z を $\delta=0$ の回りにTaylor

展開し，３次以上の項を無視して，

$$k_z \simeq -k\cos\theta_i + \delta\tan\theta_i + \frac{\delta^2}{2k\cos^3\theta_i} \tag{13}$$

となる．

式(7)，(13)を式(8)に代入して，$dk_x = d\delta$ を用いると

$$\psi_i(x,z) = A\frac{w_0}{2\sqrt{\pi}\cos\theta_i} e^{jkx_i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{w_i^2}{4\cos^2\theta_i}\delta^2 - j\frac{x_i}{\cos\theta_i}\delta\right] d\delta \tag{14}$$

ここで w_i^2 は次式で定義される．

$$w_i^2 = w_0^2\left\{1 + j\frac{2(z-z_l)}{w_0^2 k\cos\theta_i}\right\} \tag{15}$$

式(14)に含まれる積分はすぐに計算することができ（付録参照），結局

$$\psi_i(x,z) = A\frac{w_0}{w_i}\exp\left[-\left(\frac{x_i}{w_i}\right)^2 + jkz_i\right] \tag{16}$$

式(16)は波動方程式を満足し，$z = z_l$ 上においては $I_m[w_i] = 0$ となり仮定された電磁界に一致する．また $0 < z < z_l$ においては $I_m[w_i] \neq 0$ となりこれはビームの拡がりを表わしている．

静止媒質Ⅰと運動媒質Ⅱの境界面に式(8)で式わされるビーム波が入射するとき，反射波 $\psi_r(x,z)$ は反射素波の和として次式で表わされる．

$$\psi_r(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(k_x)\,\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x - k_z(z+z_l)\}}\,dk_x \tag{17}$$

ここで $R(k_x)$ は図１の運動境界面に平面波が入射した場合の入射波と反

射波の振幅比を表わし，さらに伝搬定数 k_x を持つ素波は入射角が θ なる平面波と考えれば

$$k_x = k \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin\theta \tag{18}$$

なる関係が成立する．そこで，振幅比 $R(k_x)$ を入射角 θ を用いて書き表わすと，媒質が静止している場合と同様に，入射波が E 波（電界が入射面に垂直な波）もしくは H 波（磁界が入射面に垂直な波）の各場合について一般に次式で与えられる[2][10]．

$$R(\theta) = \begin{cases} \dfrac{k_z^{(1)} - k_z^{(2)}}{k_z^{(1)} + k_z^{(2)}} & (E\text{波の場合}) \quad (19a) \\ \dfrac{n_2^2 k_z^{(1)} - n_1^2 k_z^{(2)}}{n_2^2 k_z^{(1)} + n_1^2 k_z^{(2)}} & (H\text{波の場合}) \quad (19b) \end{cases}$$

ただし，$k_z^{(1)}$ および $k_z^{(2)}$ はそれぞれ媒質Ⅰおよび媒質Ⅱ中を伝搬する波の伝搬定数の z 方向成分を表わし，$n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_0}$ である．$k_z^{(1)}$ は平面波の入射角 θ および媒質の構成定数によって次のように表わされる．

$$k_z^{(1)} = -k \cos\theta \tag{20}$$

さて，静止媒質Ⅰと運動媒質Ⅱとの境界面で入射平面波が全反射を起こすときには，

$$P = \gamma^2 \{ n_2^2 (1 - n_1 \beta \sin\theta)^2 - (n_1 \sin\theta - \beta)^2 \} \tag{21}$$

とおくとき，

$$P < 0 \tag{22}$$

となり，$n_2^2 \beta^2 \fallingdotseq 1$ とすると式 (22) は次式のようになる．

$$(n_2^2\beta^2-1)(\sin\theta-\theta_1)(\sin\theta-\theta_2)<0 \tag{23}$$

ただし，

$$\beta=\frac{v}{c}\ ,\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24}$$

$$\theta_1=\frac{n_2+\beta}{n_1(n_2\beta+1)}\qquad \theta_2=\frac{n_2-\beta}{n_1(n_2\beta-1)} \tag{25}$$

このとき $k_z^{(2)}$ は式 (23) を用いて

$$k_z^{(2)}=j\gamma k_0\sqrt{(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta-\theta_1)(\sin\theta-\theta_2)} \tag{26}$$

で与えられる．従って式 (19)，(20)，(26) を式 (17) に代入することによって全反射ビーム波の表式を得る．しかしながらこの積分を直接実行することは困難であるので，式 (12) の仮定を用いて $R(k_x)$ を δ について Taylor 展開することによって $\psi_r(x,z)$ を求める．すなわち

$$R(k_x)=r_0(k_{1x})+\sum_{n=1}^{\infty}r_n(k_{1x})\delta^n \tag{27}$$

ここで，

$$r_0(k_{1x})=R(k_{1x}) \tag{28}$$

$$r_n(k_{1x})=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^nR(k_x)}{dk_x^n}\right)_{k_x=k_{1x}} \tag{29}$$

とおくとき，$\psi_r(x,z)$ は次式で与えられる．

$$\psi_r(x,z)=\psi_r^{(0)}+\psi_r^{(1)} \tag{30}$$

ただし，

$$\psi_r^{(0)}=r_0(k_{1x})\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x-k_z(z+z_l)\}}\,dk_x \tag{31}$$

$$\psi_r^{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}r_n(k_{1x})\int_{-\infty}^{\infty}\delta^n\,\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x-k_z(z+z_l)\}}\,dk_x \tag{32}$$

$\psi_r^{(0)}$はいわゆる幾何光学的反射波を表わし，式（7）および式（13）を用いて，

$$\psi_r^{(0)}=r_0(k_{1x})\cdot A\cdot\frac{w_0}{2\sqrt{\pi}\cos\theta_i}e^{-jkz_r}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{w_r^2}{4\cos^2\theta_i}\delta^2-j\frac{x_r}{\cos\theta_i}\delta\right]d\delta \tag{33}$$

となる．ここで

$$w_r^2=w_0^2\left\{1-j\frac{2(z+z_l)}{w_0^2 k\cos\theta_i}\right\} \tag{34}$$

式（33）の積分は入射波の場合と同様にして（付録参照），求めることができ，結局$\psi_r^{(0)}$は次式で表わされる．

$$\psi_r^{(0)}=r_0(k_{1x})\cdot A\cdot\frac{w_0}{w_r}\exp\left[-\left(\frac{x_r}{w_r}\right)^2-jkz_r\right] \tag{35}$$

次に，$\psi_r^{(1)}$は式（7），（13）を用いて，

$$\psi_r^{(1)}=A\frac{w_0}{2\sqrt{\pi}\cos\theta_i}e^{-jkz_r}\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}r_n(k_{1x})\int_{-\infty}^{\infty}\delta^n\exp\left\{-\frac{w_r^2}{4\cos^2\theta_i}\delta^2-j\frac{x_r}{\cos\theta_i}\delta\right\}d\delta\right] \tag{36}$$

式（36）はWeberの関数$D_n(z)$を用いて（付録参照）

$$\psi_r^{(1)}=A\cdot\frac{w_0}{w_r}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} r_n(k_{1x})\,e^{-j\frac{n}{2}\pi}\,2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\cos\theta_i}{w_r}\right)^n D_n\left(\frac{\sqrt{2}\,x_r}{w_r}\right)\right\}$$

$$\times\exp\left[-\frac{x_r^2}{2w_r^2}-jkz_r\right] \tag{37}$$

となる．$D_n(z)$ は母函数を用いて

$$D_n(z)=(-1)^n e^{\frac{z^2}{4}}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{1}{2}z^2}\right) \tag{38}$$

と表わされるので，反射波 $\psi_r(x, z)$ は次式のように与えられる．

$$\psi_r(x,z)=A\cdot\frac{w_0}{w_r}\cdot\left\{r_0(k_{1x})-j\frac{2x_r\cos\theta_i}{w_r^2}r_1(k_{1x})+\frac{2\cos^2\theta_i}{w_r^2}\left(1-\frac{2x_r^2}{w_r^2}\right)r_2(k_{1x})\right.$$

$$\left.-j\frac{4x_r\cos^3\theta_i}{w_r^4}\left(3-\frac{2x_r^2}{w_r^2}\right)r_3(k_{1x})+\cdots\right\}\exp\left[-\left(\frac{x_r}{w_r}\right)^2-jkz_r\right] \tag{39}$$

3. 電磁エネルギー流

前章においては，スカラーのガウスビームを考え，入射波および反射波の表式を求めた．ここでは，前章の結果を用いて入射波が E 波および H 波の場合の入射波および反射波の電磁エネルギー流について考察する．

3．1　入射波の電磁エネルギー流

入射波が E 波の場合にはその電界成分を，H 波の場合にはその磁界成分を式 (16) のスカラー波によって表わすと，入射波の各電磁界成分はつぎのように表わされる．ただし { } 内の上段および下段はそれぞれ E 波および H 波

に関する量である．

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(i)} \\ H_y^{(i)} \end{Bmatrix} = \psi_i = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x + k_z (z - z_l)\}}\, dk_x \tag{40}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x^{(i)} \\ E_x^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -K \\ K \end{Bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} k_z\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x + k_z (z - z_l)\}}\, dk_x \tag{41}$$

$$\begin{Bmatrix} H_z^{(i)} \\ E_z^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K \\ -K \end{Bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} k_x\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x + k_z (z - z_l)\}}\, dk_x \tag{42}$$

ただし，上の諸式に含まれるKは次式で定義される量である．

$$K = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega \mu_0} & (E\text{波の場合}) \\ \dfrac{1}{\omega \varepsilon_1} & (H\text{波の場合}) \end{cases} \tag{43}$$

また$\Phi(k_x)$に含まれるスカラー波の振幅Aは次のようにおきかえるものとする．

$$A = \begin{cases} E_0 & (E\text{波の場合}) \\ H_0 & (H\text{波の場合}) \end{cases}$$

式(41)，(42)で表わされる電界，磁界のx方向成分およびz方向成分に含まれる積分を次式のように表わす．

$$I_x^{(i)} = \int_{-\infty}^{\infty} k_z\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x + k_z (z - z_l)\}}\, dk_x \tag{44}$$

$$I_z^{(i)} = \int_{-\infty}^{\infty} k_x\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x + k_z (z - z_l)\}}\, dk_x \tag{45}$$

まず，式(11)の仮定を用いて，式(9)で表わされる k_z を $k_x=k_{1x}$ の回りにTaylor展開して，

$$k_z=\sum_{n=0}^{\infty} k_n(k_{1x})\,\delta^n \tag{46}$$

ただし，

$$k_n(k_{1x})=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n k_z}{dk_x^n}\right)_{k_x=k_{1x}} \tag{47}$$

とおくと，$I_x^{(i)}$ は次式で表わされる．

$$I_x^{(i)}=A\frac{w_0}{2\sqrt{\pi}\cos\theta_i}e^{jkz_i}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}k_n\int_{-\infty}^{\infty}\delta^n\exp\left\{-\frac{w_i^2}{4\cos^2\theta_i}\delta^2-j\frac{x_i}{\cos\theta_i}\delta\right\}d\delta\right] \tag{50}$$

式(50)は式(36)と同様にして次のように求められる．

$$I_x^{(i)}=A\frac{w_0}{w_i}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}k_n(k_{1x})\,e^{-j\frac{n}{2}\pi}\,2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\cos\theta_i}{w_i}\right)^n D_n\left(\frac{\sqrt{2}\,x_i}{w_i}\right)\right\}$$
$$\times\exp\left[-\frac{x_i^2}{2w_i^2}+jkz_i\right] \tag{51}$$

つぎに $I_z^{(i)}$ は式(11)を用いて，

$$I_z^{(i)}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x+k_z(z-z_l)\}}\,dk_x$$
$$+k_{1x}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x+k_z(z-z_l)\}}\,dk_x \tag{52}$$

となり，第2の積分はすでに式(16)によって与えられており第1の積分は

次式のようになる．

$$\text{第1の積分} = A\cdot\frac{w_0}{2\sqrt{\pi}\cos\theta_i}e^{jkz_i}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\exp\left[-\frac{w_i^2}{4\cos^2\theta_i}\delta^2 - j\frac{x_i}{\cos\theta_i}\delta\right]d\delta \tag{53}$$

従って，$I_z^{(i)}$は

$$I_z^{(i)} = A\frac{w_0}{w_i}\left\{k_{1x} - j\frac{2x_i\cos\theta_i}{w_i^2}\right\}\exp\left\{-\left(\frac{x_i}{w_i}\right)^2 + jkz_i\right\} \tag{54}$$

で与えられる．

入射波の電磁エネルギー流はポインティングベクトル**S**の時間平均値で与えられ，式(40)～(42)で与えられる入射波に対してはx方向成分およびz方向成分が存在し，E波，H波各々の場合について，

$$\begin{cases} <S_x^{(i)}> = \dfrac{1}{2}R_e\left[E_y^{(i)}\times H_z^{(i)*}\right] \\ <S_z^{(i)}> = -\dfrac{1}{2}R_e\left[E_y^{(i)}\times H_x^{(i)*}\right] \end{cases} \quad (E\text{波の場合}) \tag{55}$$

$$\begin{cases} <S_x^{(i)}> = -\dfrac{1}{2}R_e\left[E_z^{(i)}\times H_y^{(i)*}\right] \\ <S_z^{(i)}> = \dfrac{1}{2}R_e\left[E_x^{(i)}\times H_y^{(i)*}\right] \end{cases} \quad (H\text{波の場合}) \tag{56}$$

で与えられる．ただし，＜　＞は時間平均値を表わし，*は複素共役を表わしている．式(40)～(42)および式(44)，(45)を用いて，式(55)，(56)は

$$\begin{cases} <S_x^{(i)}> = \dfrac{1}{2\omega\mu_0}R_e\left[\psi_i\times I_z^{(i)*}\right] \\ <S_z^{(i)}> = \dfrac{1}{2\omega\mu_0}R_e\left[\psi_i\times I_x^{(i)*}\right] \end{cases} \quad (E\text{波の場合}) \tag{57}$$

$$\begin{cases} \langle S_x^{(i)} \rangle = \dfrac{1}{2\omega\varepsilon_1} R_e \left[I_z^{(i)} \times \psi_i^* \right] \\ \langle S_z^{(i)} \rangle = \dfrac{1}{2\omega\varepsilon_1} R_e \left[I_x^{(i)} \times \psi_i^* \right] \end{cases} \qquad (H\text{波の場合}) \tag{58}$$

で表わされ，上式によって各点（x, z）における電磁エネルギー流の大きさ $S^{(i)}$，および方向 $\theta^{(i)}$は（図２参照），

$$S^{(i)} = \sqrt{\langle S_x^{(i)} \rangle^2 + \langle S_z^{(i)} \rangle^2} \tag{59}$$

$$\theta^{(i)} = \tan^{-1} \frac{\langle S_x^{(i)} \rangle}{\langle S_z^{(i)} \rangle} \tag{60}$$

を計算することによって求めることができる．

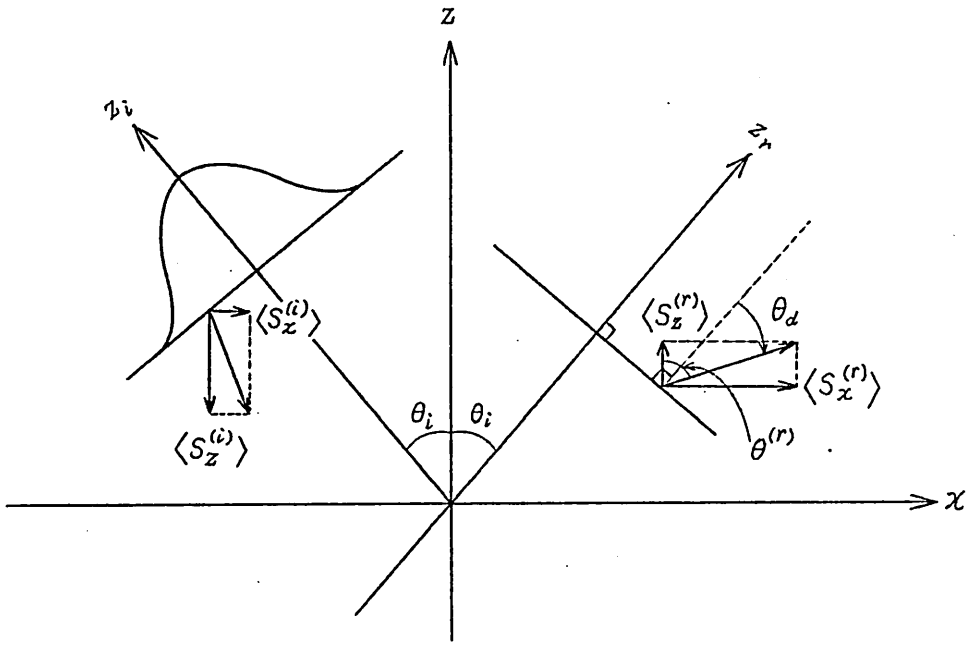


図２　ポインティングベクトル

3．2　反射波の電磁エネルギー流

入射波の場合と同様に各電磁界成分はつぎのように表わされる．

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(r)} \\ H_y^{(r)} \end{Bmatrix} = \psi_r = \int_{-\infty}^{\infty} R(k_x)\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x - k_z (z+z_l)\}}\, dk_x \tag{70}$$

$$\begin{Bmatrix} H_x^{(r)} \\ E_x^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K \\ -K \end{Bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} k_z R(k_x)\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x - k_z (z+z_l)\}}\, dk_x \tag{71}$$

$$\begin{Bmatrix} H_z^{(r)} \\ E_z^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K \\ -K \end{Bmatrix} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} k_x R(k_x)\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x - k_z (z+z_l)\}}\, dk_x \tag{72}$$

式(71)，(72)で表わされる反射波の電磁界成分に含まれる積分を次のように表わす．

$$I_x^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} k_z R(k_x)\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x - k_z (z+z_l)\}}\, dk_x \tag{73}$$

$$I_z^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} k_x R(k_x)\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x - k_z (z+z_l)\}}\, dk_x \tag{74}$$

$I_x^{(r)}$を式(27)および式(46)を用いて次のように表わす．

$$I_x^{(r)} = I_x^{(0)} + I_x^{(1)} \tag{75}$$

ここで，$I_x^{(0)}$，$I_x^{(1)}$は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} I_x^{(0)} &= r_0(k_{1x}) \int_{-\infty}^{\infty} k_z\, \Phi(k_x)\, e^{-j\{k_x x - k_z (z+z_l)\}}\, dk_x \\ &= r_0(k_{1x})\, A \frac{w_0}{w_r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} k_n(k_{1x})\, e^{-j\frac{n}{2}\pi}\, 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\cos\theta_i}{w_r}\right)^n D_n\left(\frac{\sqrt{2}\,x_r}{w_r}\right) \right\} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{x_r^2}{2\omega_r^2} - jkz_r\right] \end{aligned} \tag{76}$$

$$I_x^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty} k_z\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r_n(k_{1x})\,\delta^n\Big)\,\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x-k_z(z+z_l)\}}\,dk_x$$

$$=A\frac{w_0}{w_r}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n(k_{1x})\,e^{-j\frac{n}{2}\pi}\,2^{\frac{n}{2}}\Big(\frac{\cos\theta_i}{w_r}\Big)^n D_n\Big(\frac{\sqrt{2}\,x_r}{w_r}\Big)\Big\}$$

$$\times\exp\Big[-\frac{x_r^2}{2w_r^2}-jkz_r\Big] \tag{77}$$

ここで，$c_n(k_{1x})$は次式により求めることができる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(k_{1x})\,\delta^n=\Big(\sum_{i=0}^{\infty} k_i(k_{1x})\,\delta^i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} r_j(k_{1x})\,\delta^j\Big) \tag{78}$$

次に$I_z^{(r)}$を次式のようにおくと，

$$I_z^{(r)}=I_z^{(0)}+I_z^{(1)} \tag{79}$$

$I_z^{(0)}$，$I_z^{(1)}$は次のように与えられる．

$$I_z^{(0)}=r_0(k_{1x})\int_{-\infty}^{\infty} k_x\,\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x-k_z(z+z_l)\}}\,dk_x$$

$$=r_0(k_{1x})\cdot A\frac{w_0}{w_r}\Big\{k_{1x}-j\,\frac{2x_r\cos\theta_i}{w_r^2}\Big\}$$

$$\times\exp\Big[-\Big(\frac{x_r}{w_r}\Big)^2-jkz_r\Big] \tag{80}$$

$$I_z^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty} k_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r_n(k_{1x})\,\delta^n\Big)\,\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x-k_z(z+z_l)\}}\,dk_x$$

$$=A\frac{w_0}{w_r}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} r_n(k_{1x})\,e^{-j\frac{n}{2}\pi}\,2^{\frac{n}{2}}\Big(\frac{\cos\theta_i}{w_r}\Big)^n\Big\{k_{1x}\,D_n\Big(\frac{\sqrt{2}\,x_r}{w_r}\Big)$$

$$-j\frac{\sqrt{2}\cos\theta_i}{w_r}\,D_{n+1}\Big(\frac{\sqrt{2}\,x_r}{w_r}\Big)\Big\}\Big]\cdot\exp\Big[-\frac{x_r^2}{2w_r^2}-jkz_r\Big] \tag{81}$$

さて，反射波の電磁エネルギー流についても入射波の場合と同様に x，z 方向成分が存在し次式で与えられる．

$$\begin{cases} <S_x^{(r)}> = \dfrac{1}{2} R_e \left[E_y^{(r)} \times H_z^{(r)*} \right] \\ <S_z^{(r)}> = -\dfrac{1}{2} R_e \left[E_y^{(r)} \times H_x^{(r)*} \right] \end{cases} \quad (E\text{波の場合}) \tag{82}$$

$$\begin{cases} <S_x^{(r)}> = -\dfrac{1}{2} R_e \left[E_z^{(r)} \times H_y^{(r)*} \right] \\ <S_z^{(r)}> = \dfrac{1}{2} R_e \left[E_x^{(r)} \times H_y^{(r)*} \right] \end{cases} \quad (H\text{波の場合}) \tag{83}$$

式 (70) ～ (72) および式 (73)，(74) を用いると，式 (82)，(83) は

$$\begin{cases} <S_x^{(r)}> = \dfrac{1}{2\omega\mu_0} R_e \left[\psi_r \times I_z^{(r)*} \right] \\ <S_z^{(r)}> = -\dfrac{1}{2\omega\mu_0} R_e \left[\psi_r \times I_x^{(r)*} \right] \end{cases} \quad (E\text{波の場合}) \tag{84}$$

$$\begin{cases} <S_x^{(r)}> = \dfrac{1}{2\omega\varepsilon_1} R_e \left[I_z^{(r)} \times \psi_r^{*} \right] \\ <S_z^{(r)}> = -\dfrac{1}{2\omega\varepsilon_1} R_e \left[I_x^{(r)} \times \psi_r^{*} \right] \end{cases} \quad (H\text{波の場合}) \tag{85}$$

によって表わされる．このとき反射波の電磁エネルギー流の大きさ $S^{(r)}$ および方向 $\theta^{(r)}$ は E 波および H 波の場合の各式を用いて次式により求めることができる．

$$S^{(r)} = \sqrt{<S_x^{(r)}>^2 + <S_z^{(r)}>^2} \tag{86}$$

$$\theta^{(r)} = \tan^{-1} \frac{<S_x^{(r)}>}{<S_z^{(r)}>} \tag{87}$$

4. 臨界角近傍の入射角に対する反射波

ビーム波が運動境界面で全反射を起こすとき，反射波はGoos-Hänchen効果によって側方に変位を受け，その変位量は臨界角近傍の入射角に対して特に大きくなる．そこで，本章では入射角が臨界角に非常に近い場合を取り扱い，このときの反射波は振幅比$R(k_x)$を適当な近似式でおきかえることによって求めることができる.[7]

さて，平面波が入射角θで運動媒質の境界面に入射するとき，全反射を起こすための条件は式(23)で与えられ，この条件はβの値によって次のように表わすことができる.[10]

- $-1<\beta\leq-\dfrac{1}{n_2}$　　全反射は起こらない．
- $-\dfrac{1}{n_2}<\beta\leq\dfrac{1}{n_2}$
  - $\theta_1>1$　　全反射は起こらない
  - $0<\theta_1\leq1$　　$\theta_1\leq\sin\theta<1$の範囲で全反射　(i)
- $\dfrac{1}{n_2}<\beta<1$
  - $\theta_1>1$　　全反射は起こらない
  - $\theta_1\leq1<\theta_2$　　$\theta_1\leq\sin\theta\leq1$の範囲で全反射　(ii)
  - $\theta_2\leq1$　　$\theta_1\leq\sin\theta\leq\theta_2$の範囲で全反射　(iii)

(i)および(ii)の場合にはθ_{c1}，(iii)の場合にはθ_{c1}，θ_{c2}なる臨界角が存在し，次式で与えられる．

$$\theta_{c1}=\sin^{-1}\theta_1=\sin^{-1}\frac{n_2+\beta}{n_1(n_2\beta+1)} \tag{88}$$

$$\theta_{c2}=\sin^{-1}\theta_2=\sin^{-1}\frac{n_2-\beta}{n_1(n_2\beta-1)} \tag{89}$$

従って，ビーム波の入射角 θ_i が $\theta_i \approx \theta_{c1}$ を満たす場合，および $\theta_i \approx \theta_{c2}$ を満たす場合について反射波を考える必要がある．

(a) $\theta_i \approx \theta_{c1}$ の場合

式(11)，(13)を用いて k_x，k_z を次のように表わす．

$$k_x = (\tau_1 - \sigma_1) + k_{1x} \tag{90}$$

$$k_z = -k\cos\theta_i + (\tau_1 - \sigma_1)\tan\theta_i + \frac{(\tau_1-\sigma_1)^2}{2k\cos^3\theta_i} \tag{91}$$

ここで，τ_1，σ_1 は次式で定義される量である．

$$\tau_1 = k_x - k_{c1} \tag{92}$$

$$\sigma_1 = k_{1x} - k_{c1} \tag{93}$$

ただし，

$$k_{c1} = k\sin\theta_{c1} = \frac{2\pi}{\lambda_1}\frac{n_2+\beta}{n_1(n_2\beta+1)} \tag{94}$$

式(19)で表わされる $R(\theta)$ を式(18)，(90)を用いて τ_1 の関数として書き改めると，

$$R(\tau_1) = \frac{\left\{k_{1z}^2 - 2k_{1x}(\tau_1-\sigma_1) - (\tau_1-\sigma_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + jn_{12}\gamma\left\{(1-n_2^2\beta^2)(\tau_1+k_{c1}-k_{c2})\tau_1\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{k_{1z}^2 - 2k_{1x}(\tau_1-\sigma_1) - (\tau_1-\sigma_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}} - jn_{12}\gamma\left\{(1-n_2^2\beta^2)(\tau_1+k_{c1}-k_{c2})\tau_1\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{95}$$

ただし n_{12} は次式で定義される．

$$n_{12} = \begin{cases} 1 & (E\text{波の場合}) \\ n_1^2/n_2^2 & (H\text{波の場合}) \end{cases} \tag{96}$$

さて，次の条件が成立しているものとする．

$$\theta_{c1} \ll \theta_{c2} \tag{97}$$

このとき，式(95)からも明らかなように $k_z^{(2)} = j k_0 \sqrt{p}$ は，ビーム波の入射角が臨界角に近いとき $\tau_1^{\frac{1}{2}}$ の形で変化するものと考えることができる．そこで，式(95)で表わされる $R(\tau)$ を $\zeta = \tau_1^{\frac{1}{2}}$ の関数として表わし，$\zeta = \sigma_1^{\frac{1}{2}}$ すなわち $k_x = k_{1x}$ の回りにTaylor展開すると，

$$R(\zeta) = R\left(\sigma_1^{\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{dR(\zeta)}{d\zeta}\right)_{\zeta=\sigma_1^{\frac{1}{2}}} \left(\zeta - \sigma_1^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2R(\zeta)}{d\zeta^2}\right)_{\zeta=\sigma_1^{\frac{1}{2}}} \left(\zeta - \sigma_1^{\frac{1}{2}}\right)^2 \tag{98}$$

となる．式(12)の仮定によって2次以上の項を無視すると，

$$R(\zeta) \simeq R\left(\sigma_1^{\frac{1}{2}}\right) + C\left(\zeta - \sigma_1^{\frac{1}{2}}\right) \tag{99}$$

ここで，$R\left(\sigma_1^{\frac{1}{2}}\right)$，$C$ は次式で与えられる．

$$R\left(\sigma_1^{\frac{1}{2}}\right) = r_0\left(k_{1x}\right)$$

$$C = \frac{2 j r n_{12}\left(1 - n_2^2\beta^2\right) \cdot k^{-\frac{1}{2}}}{\left\{\cos\theta_i - j n_{12} r \sqrt{\left(1 - n_2^2\beta^2\right)\left(\sin\theta_i - \theta_1\right)\left(\sin\theta_i - \theta_2\right)}\right\}^2} \times \frac{\left\{\left(2\sin\theta_i - \theta_1 - \theta_2\right)\cos\theta_i + 2\left(\sin\theta_i - \theta_1\right)\left(\sin\theta_i - \theta_2\right)\tan\theta_i\right\}}{\sqrt{\left(1 - n_2^2\beta^2\right)\left(\sin\theta_i - \theta_2\right)}} \tag{100}$$

式(17)および式(99)を用いて，このときの反射波 $\psi_c(x, z)$ は次のように表わすことができる．

$$\psi_c(x, z) = \psi_c^{(0)} + \psi_c^{(1)} \tag{101}$$

ここで，

$$\psi_c^{(0)}=r_0(k_{1x})\cdot A\cdot\frac{w_0}{w_r}\exp\left[-\left(\frac{x_r}{w_r}\right)^2-jkz_r\right] \tag{102}$$

$$\psi_c^{(1)}=C\int_{-\infty}^{\infty}(\tau_1^{\frac{1}{2}}-\sigma_1^{\frac{1}{2}})\,\Phi(k_x)\,e^{-j\{k_x x-k_z(z+z_l)\}}\,dk_x \tag{103}$$

$\psi_c^{(0)}$は幾何光学的な反射波を表わし，$\psi_c^{(1)}$ は反射ビーム波の歪みを表わしている．式(103)はさらに，

$$\psi_c^{(1)}=C\cdot A\cdot\frac{w_0}{2\sqrt{\pi}\cos\theta_i}e^{-jkz_r}I_1-C\sigma_1^{\frac{1}{2}}\cdot A\cdot\frac{w_0}{w_r}\exp\left[-\left(\frac{x_r}{w_r}\right)^2-jkz_r\right] \tag{104}$$

と表わすことができ，I_1は次の積分を表わしている．

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\tau_1^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{w_r^2}{4\cos^2\theta_i}\delta^2-j\frac{x_r}{\cos\theta_i}\delta\right]d\delta \tag{105}$$

I_1を求めることによって（付録参照），結局$\psi_c^{(1)}$は次のように求まる．

$$\psi_c^{(1)}=C\cdot A\cdot\frac{w_0}{w_r}\left\{e^{j\frac{\pi}{4}}2^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\cos\theta_i}{w_r}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{u_1^2}{4}\right)D_{\frac{1}{2}}(u_1)-\sigma_1^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\times\exp\left[-\left(\frac{x_r}{w_r}\right)^2-jkz_r\right] \tag{106}$$

ただし，

$$u_1=-\sqrt{2}\left(\frac{j\sigma_1 w_r}{2\cos\theta_i}+\frac{x_r}{w_r}\right) \tag{107}$$

(b) $\theta_i \approx \theta_{c2}$ の場合

この場合には，k_x，k_z を次のように表わす．

$$k_x = (\sigma_2 - \tau_2) + k_{1x} \tag{108}$$

$$k_z = -k\cos\theta_i + (\sigma_2 - \tau_2)\tan\theta_i + \frac{(\sigma_2 - \tau_2)^2}{2k\cos^3\theta_i} \tag{109}$$

ここで，τ_2，σ_2 は次式で定義される．

$$\tau_2 = k_{c2} - k_x \tag{110}$$

$$\sigma_2 = k_{c2} - k_{1x} \tag{111}$$

ただし，

$$k_{c2} = k\sin\theta_{c2} = \frac{2\pi}{\lambda_1}\frac{n_2 - \beta}{n_1(n_2\beta - 1)} \tag{112}$$

式(108)を用いて，式(97)の条件のもとに振幅比$R(k_x)$を$\xi = \tau_2^{\frac{1}{2}}$の関数として表わし，$k_x = k_{1x}$ の回りに展開すると，

$$R(\xi) \simeq R(\sigma_2^{\frac{1}{2}}) + D(\xi - \sigma_2^{\frac{1}{2}}) \tag{113}$$

が得られる．ここで，

$$R(\sigma_2^{\frac{1}{2}}) = r_0(k_{1x}) \tag{114}$$

$$D = -\left(\frac{dR(\xi)}{d\xi}\right)_{\xi=\sigma_2^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-2j\gamma n_{12}(1 - n_2^2\beta^2)k^{-\frac{1}{2}}}{\left\{\cos\theta_i - jn_{12}\gamma\sqrt{(1-n_2^2\beta^2)(\sin\theta_i - \Theta_1)(\sin\theta_i - \Theta_2)}\right\}^2}$$

$$\times \frac{\{(\Theta_1+\Theta_2-2\sin\theta_i)\cos\theta_i - 2(\sin\theta_i-\Theta_1)(\sin\theta_i-\Theta_2)\tan\theta_i\}}{\sqrt{(n_2^2\beta^2-1)(\sin\theta_i-\Theta_1)}} \quad (115)$$

(a)の場合と同様にして反射波は次式で与えられる．

$$\psi_c(x, z) = \psi_c^{(0)} + \psi_c^{(1)} \quad (116)$$

ここで$\psi_c^{(0)}$は式(102)で与えられ，$\psi_c^{(1)}$は次のように求められる．

$$\psi_c^{(1)} = D\cdot A\cdot \frac{w_0}{w_r}\left\{\sigma^{\frac{1}{2}} - e^{j\frac{\pi}{4}} 2^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\cos\theta_i}{w_r}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{u_2^2}{4}\right) D_{\frac{1}{2}}(u_2)\right\}$$

$$\times \exp\left[-\left(\frac{x_r}{w_r}\right)^2 - j\,k\,z_r\right] \quad (117)$$

ただし，u_2は

$$u_2 = -\sqrt{2}\left(\frac{j\,\sigma_2 w_r}{2\cos\theta_i} - \frac{x_r}{w_r}\right) \quad (118)$$

で与えられる．

5．数値計算例および検討

図3～図6はいずれも入射波がE波の場合の数値計算例である．図3は媒質Ⅱの速度βをパラメータとする，$|\psi_r|^2$を平面波の振幅Aで規格化した値$|\psi_{rN}|^2$を表わしている．反射波は，幾何光学的な反射波をほぼ平行移動した形になっており，その変位量は運動境界面における Goos-Hänchen 効果の表式より得られる値とよく一致していることがわかる．[9] 図4はビーム波の入射角θ_iをパラメータとして，x_iおよびx_rに対してそれぞれ$|\psi_i|^2$，

$|\psi_{rN}|^2$ を表わしたものである．また図５はβをパラメータとして，反射ビーム波の電磁エネルギー流の大きさ$S^{(r)}$を平面波の電磁エネルギー流で規格化した値$S_N^{(r)}$，および幾何光学的な反射軸からの電磁エネルギー流の方向のずれθ_d（図２参照）を表わしている．図６は入射角θ_iと臨界角との差θ_σをパラメータとして，$|\psi_c|^2$を示したものである．

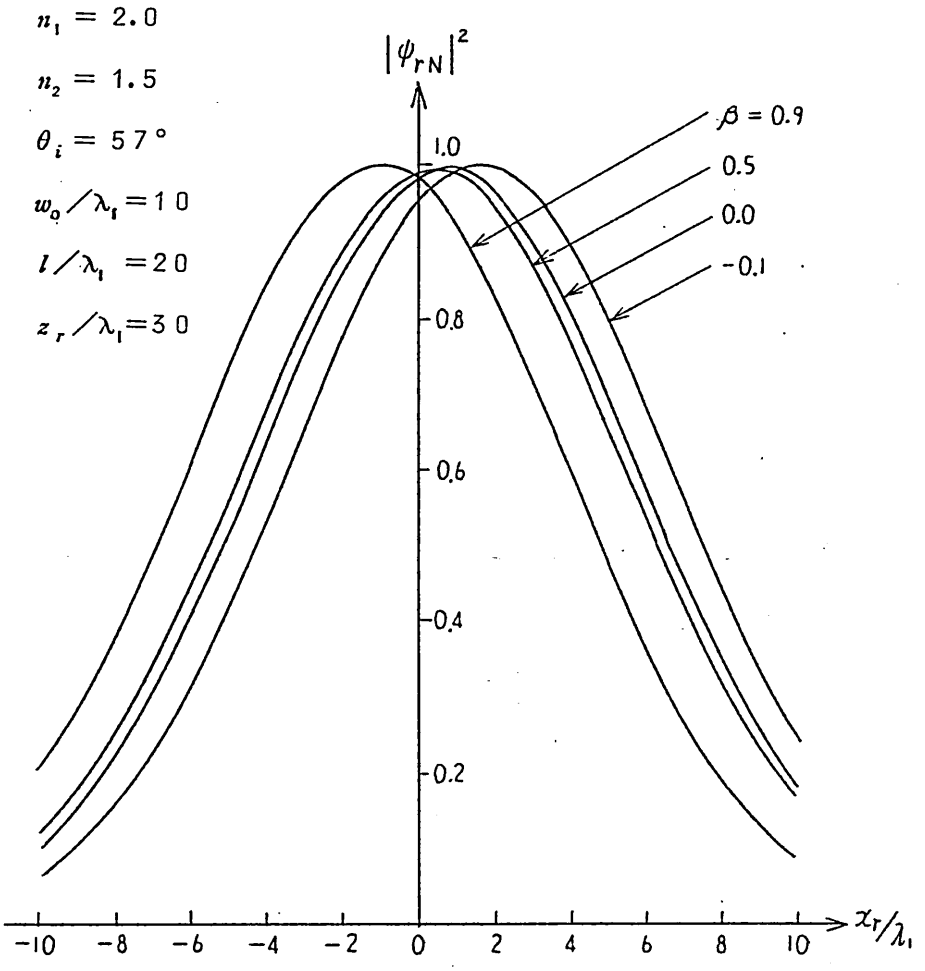


図３　$|\psi_{rN}|^2$のx_r/λ_1に対する変化

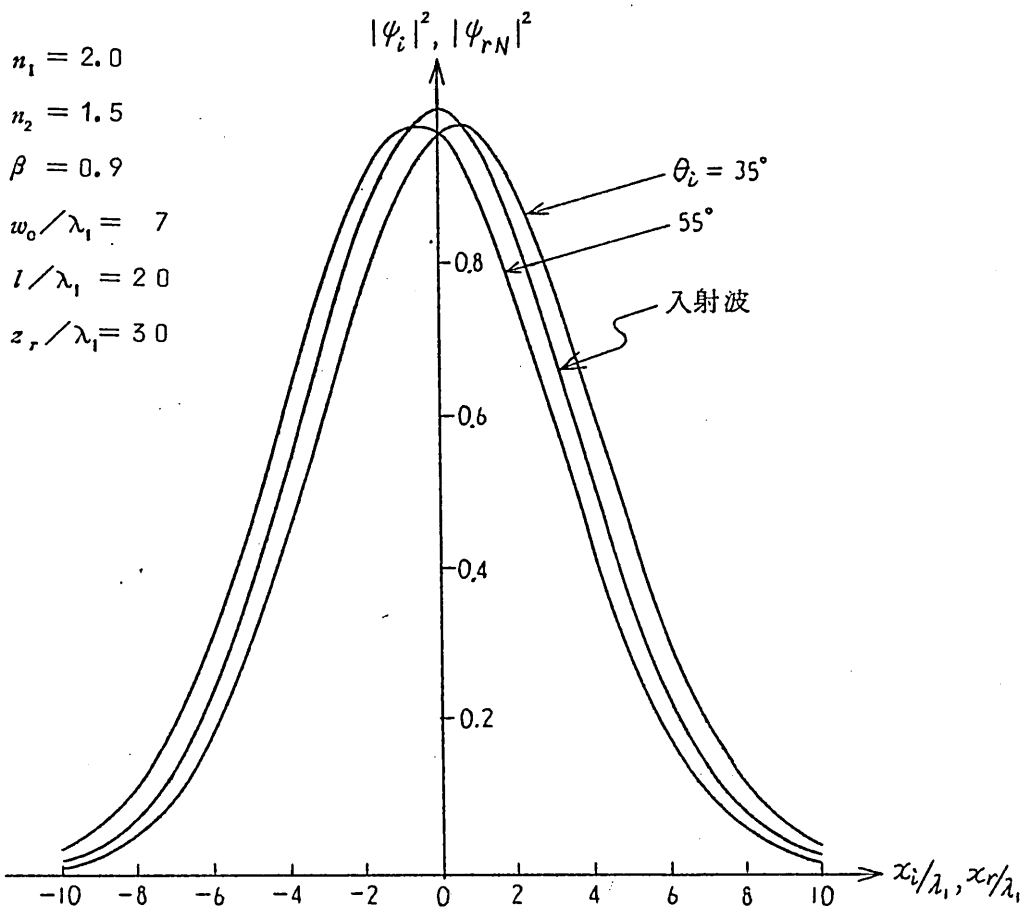


図 4　$|\psi_i|^2$および$|\psi_{rN}|^2$のx_i/λ_1, x_r/λ_1に対する変化

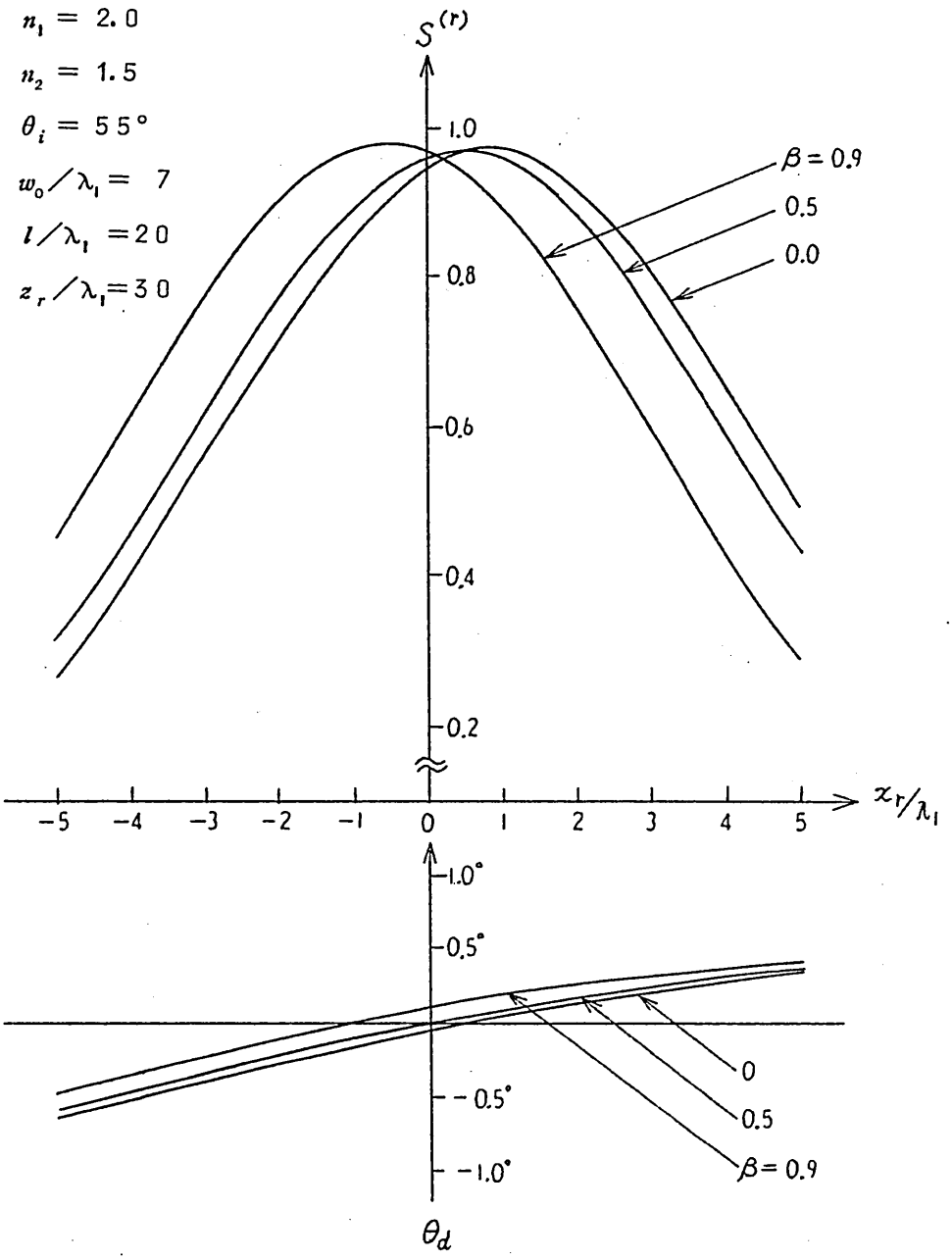


図5　$S^{(r)}$, θ_d の x_r/λ_1 に対する変化

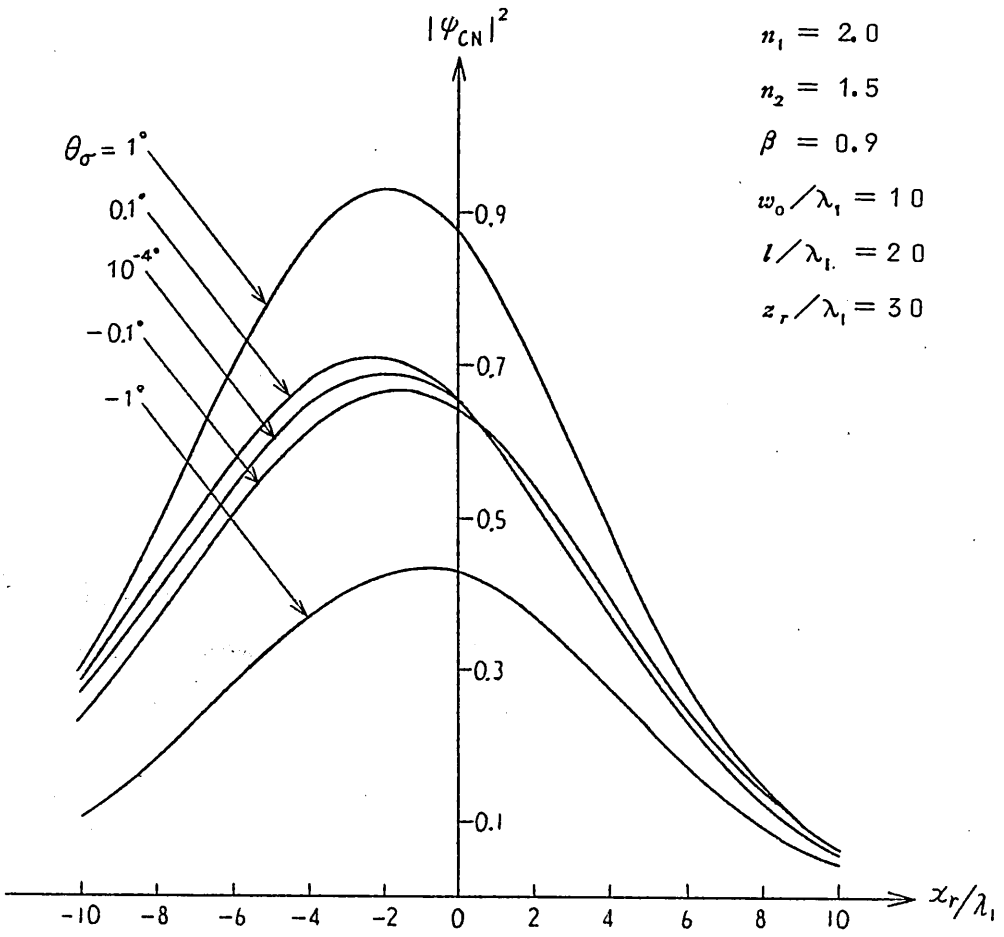


図６　$|\psi_{cN}|^2$のx_r/λ_1に対する変化（臨界角；５８．９９７３°）

6. 結　　言

運動誘電体媒質の境界面にガウスビームが入射した場合についてGoos-Hänchen 効果を含む全反射現象について考察を行った．特に，電磁エネルギー流，臨界角近傍における反射波の様子について数値計算例をあげて詳しく検討した．

謝　　辞

日頃御指導ごべんたついただいている本学工学部熊谷信昭教授および裏克巳教授に深謝する．

また，常々御討論いただく熊谷研究室の諸氏に深謝する．

文　　献

(1) 小川英一，鈴木俊雄，藤岡　弘；“Evanescent Wave と運動媒質との相互作用,” 信学論(B)，55-B，5，p. 264.

(2) T. Shiozawa and N. Kumagai；“Total reflection at the interface between relatively moving media,” Proc. IEEE (Letters)，55，p. 1243 (July).

(3) 末田　正，熊谷信昭，倉薗貞夫；“広帯域準光学プリズム回路素子,” 信学誌，49，p. 457 (昭41-03).

(4) 藤岡　弘，小川英一，安川交二，熊谷信昭；“平面電磁波の全反射現象を利用した誘電体媒質への励振,” 信学論(B)，55-B，3，p.73

(5) R. Ulrich;"Theory of the prism-film coupler by plane-wave analysis," J. Opt. Soc. Am., Vol. 60, No. 10, p. 1337 (1970).

(6) F. Goos und H. Hänchen;"Ein neur fundamentaler Versuch zur Totalreflexion," Ann. d. Phys., (6), 1, p. 333 (1947).

(7) B. R. Horowitz and T. Tamir;"Lateral Displacement of a Light Beam at a Dielectric Interface," J. Opt. Soc. Am., Vol. 61, No. 5, p. 586 (1971).

(8) 根本承次郎，牧本利夫；"誘電体境界面における二次元ガウスビームの反射と透過," 信学論(B), 54-B, No. 11, p. 714 (昭46-11).

(9) 小川英一，安川交二，藤岡 弘；"運動媒質の境界面における Goos-Hänchen効果," 輻研資(昭46-10).

(10) 熊谷信昭，藤岡 弘；相対論的電磁界理論序説(コロナ社)

(付 録)

(1) 入射波および反射波の導出

入射波および反射波に含まれる積分は，フーリエ変換を用いて一般に次式で与えられる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp\left[-\alpha^2 x^2 - jxy\right] dx = j^{-n} \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} \alpha^{-n-1} e^{-\frac{y^2}{8\alpha^2}} D_n\left(2^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-1} y\right) \tag{a1}$$

$$\begin{cases} n : 0 \text{または正の整数} \\ R_e[\alpha] > 0 \end{cases}$$

入射波は上式において，

$$\alpha=\frac{w_i}{2\cos\theta_i}\ ,\quad y=\frac{x_i}{\cos\theta_i}\ ,\quad n=0 \tag{a 2}$$

とおくと，$D_0(z)=e^{-\frac{z^2}{4}}$ を用いて直ちに，次式のように求まる．

$$\psi_i(x,z)=A\frac{w_0}{w_i}\exp\left[-\left(\frac{x_i}{w_i}\right)^2+jkz_i\right] \tag{a 3}$$

また $\psi_r^{(1)}$ の第 n 項も同様に，式 (a 1) において

$$\alpha=\frac{w_r}{2\cos\theta_i}\ ,\quad y=\frac{x_r}{\cos\theta_i} \tag{a 4}$$

とおくと，

$$A\frac{w_0}{w_r}r_n(k_{1x})e^{-j\frac{n}{2}\pi}2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\cos\theta_i}{w_r}\right)^n\cdot D_n\left(\frac{\sqrt{2}x_r}{w_r}\right)\exp\left[-\frac{x_r^2}{2w_r^2}-jkz_r\right] \tag{a 5}$$

で与えられることがわかる．

(2) I_1 の導出

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\tau_1^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{w_r^2}{4\cos^2\theta_i}\delta^2-j\frac{x_r}{\cos\theta_i}\delta\right]d\delta \tag{a 6}$$

$\delta=\tau_1-\sigma_1$ を用いて上式は次のように表わされる．

$$I_1=\exp\left[-\left(\frac{\sigma_1 w_r}{2\cos\theta_i}\right)^2+j\frac{x_r}{\cos\theta_i}\sigma_1\right]\cdot I_\tau \tag{a 7}$$

ここで，

$$I_\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\tau_1^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\alpha^2\tau_1^2-js\tau_1\right]d\tau_1 \tag{a 8}$$

ただし，

$$\alpha=\frac{w_r}{2\cos\theta_i}\quad,\qquad s=\frac{j\sigma_1 w_r^2}{2\cos^2\theta_i}+\frac{w_r}{\cos\theta_i}\qquad(a9)$$

式(a8)はさらに次のように表わされる．

$$I_\tau=\int_o^\infty \tau_1^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\alpha^2\tau_1^2-js\tau_1\right]d\tau_1+\int_{-\infty}^{o}\tau_1^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\alpha^2\tau_1^2-js\tau_1\right]d\tau_1 \qquad(a10)$$

媒質Ⅱにおける伝搬定数$k_z^{(2)}$の虚数部が正（放射条件）すなわち$I_m\left[\tau_1^{\frac{-1}{2}}\right]>0$を用いて，$I_\tau$は次のようになる．

$$I_\tau=\int_o^\infty \tau_1^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\alpha^2\tau_1^2-js\tau_1\right]d\tau_1+e^{j\frac{\pi}{2}}\int_o^\infty \tau_1^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\alpha^2\tau_1^2+js\tau_1\right]d\tau_1$$

$$=e^{-j\frac{\pi}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}(j\tau_1)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\alpha^2\tau_1^2-js\tau_1\right]d\tau_1 \qquad(a11)$$

ただし，　　$arg(j\tau_1)=\frac{3}{2}\pi\quad(\tau_1<0)$

式(a11)の積分はWeberの関数を用いて表わすことができ，I_τは結局次式で表わされる．

$$I_\tau=e^{j\frac{\pi}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{4}}\alpha^{-\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{s^2}{8\alpha^2}\right]\cdot D_{\frac{1}{2}}(-2^{-\frac{1}{2}}\alpha^{-1}s) \qquad(a12)$$

式(a9)，(a12)を式(a7)に代入すると，I_1は

$$I_1=e^{j\frac{\pi}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{5}{4}}\left(\frac{w_r}{\cos\theta_i}\right)^{-\frac{3}{2}}e^{-\left(\frac{x_r}{w_r}\right)^2}\exp\left(\frac{u_1^2}{4}\right)D_{\frac{1}{2}}(u_1) \qquad(a13)$$

で与えられることがわかる．ただし，u_1は

$$u_1=-\sqrt{2}\left(\frac{j\sigma_1 w_r}{2\cos\theta_i}+\frac{x_r}{w_r}\right) \qquad(a14)$$

で定義される．

輻射科学研究会資料

表面静磁波のビームスティアリング

京都大学　工学部
岩本卓史　栗井郁雄　池上淳一

1972年　9月29日

1. まえがき

表面静磁波は波数ベクトルについて一般に異方的であるから，群速度ベクトルと波数ベクトルの向きは一致しない。このことは，YIG薄膜を伝搬する表面静磁波のビームを処理する場合，重要である。薄膜中の磁場が場所に対して変化している時は，ビームの収束，発散の効果がおこり幾何光学的にビームの軌跡を考えなければならないが，薄膜においては内部磁場は一様であるとみなしてもよいので，このようなビームの収束，発散効果はおこらないとする。そしてここではビームディフレクションのみを考える。

磁場の大きさや周波数を変える事により，群速度ベクトルと波数ベクトルのなす角，即ちスティアリングアングルを変える事が可能であるから，フィルターや可変遅延線等，いろいろな応用が考えられる。薄膜のみの場合は，F.A. Pizzarello[1]らによって，波数一定の場合のスティアリングアングルが求められている。ここでは金属面上に薄膜を成長させた形状におけるスティアリングアングルを分散方程式から計算した。一方YIGスラブ中の電界をマックスウェルの方程式の一つを用いて近似的に計算し，それからポインティングベクトルの向き（即ち群速度ベクトルの向き）を求めて，分散方程式から求めたスティアリングアングルと比較してみるためにYIGスラブ中の電界を算出した。又電界がわかれば，エネルギー密度等を知ることができ，色々有用な点が多い。

2. 分散関係

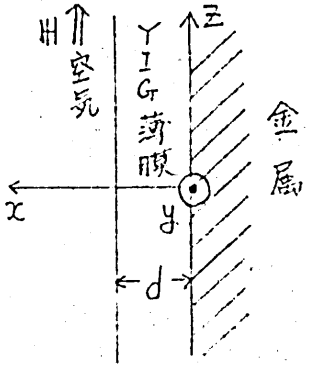


図1

図1の様に金属の上にYIG薄膜を重ねた配置において任意方向に伝播する表面静磁波の分散関係を求める。座標系は図1の様にとり，薄膜の厚さをdとする。外部磁場をz軸に平行にかける。内部磁場は薄膜の場合，殆んど一様となりHiで表わす。

静磁近似した場合のマックスウェルの方程式は高周波磁界をhとすると

$$\mathrm{not}\ h = 0 \quad (1)$$

また

$$\mathrm{div}\ b = 0 \quad (2)$$

(1)より磁気的ポテンシャルが存在し，それをψとおく。

$$h = \mathrm{grad}\,\psi \quad (3)$$

一方，磁束密度と磁場の間には

$$b = h + 4\pi m \quad (4)$$

なる関係が存在する。
外部磁場をz軸方向にかけているから

$$H = H_i \vec{i}_z + h e^{i\omega t}$$
$$M = M_0 \vec{i}_z + m e^{i\omega t} \qquad (5)$$

ここで H_i, M_0 は直流磁場，及び直流磁化

また磁化の運動方程式は

$$\frac{dM}{dt} = \gamma (M \times H) \qquad (6)$$

(5)を(6)へ代入すると，磁化率テンソルが求まって，磁化と磁場の関係は

$$4\pi m_x = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\nu \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$4\pi m_y = i\nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (7)$$

ここで $\kappa = \dfrac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}$, $\nu = \dfrac{\omega_m \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$\omega_m = 4\pi\gamma M_S$, $\omega_0 = \gamma H_i$

以上の式より，YIG薄膜中でのポテンシャル方程式は

$$(1+\kappa)\left(\frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial z^2} = 0 \qquad (8)$$

空気中でのポテンシャル方程式は

$$\nabla^2 \psi^e = 0 \qquad (9)$$

内部および外部でのポテンシャルは次の形をもっている。

$$\psi^i = (A e^{k_x^i x} + B e^{-k_x^i x}) e^{\pm i(k_y y + k_z z)} e^{i\omega t} \qquad (10)$$

$$\psi^e = C e^{-k_x^e x} e^{\pm i(k_y y + k_z z)} e^{i\omega t} \qquad (11)$$

k_x^i, k_x^e はそれぞれ薄膜の内部と外部におけるx方向の波数である。
波数の間の関係式は (10), (11) を (8), (9) へ代入する事より

$$(1+\kappa)(k_x^{i2} - k_y^2) - k_z^2 = 0 \qquad (12)$$

$$k_x^{e2} - (k_y^2 + k_z^2) = 0 \qquad (13)$$

境界条件としては

(i) 金属と薄膜の境界面 ($x=0$) における B の法線成分の連続性
$B_x = 0$ より

$$(1+\kappa)\left.\frac{\partial \psi^i}{\partial x}\right|_{x=0} - i\nu \left.\frac{\partial \psi^i}{\partial y}\right|_{x=0} = 0$$

(ii) 薄膜と空気の境界面 ($x=d$) における，ポテンシャル及び B の法線成分の連続性より

$$(1+K)\left.\frac{\partial \psi^i}{\partial x}\right|_{x=d} - \epsilon\nu \left.\frac{\partial \psi^i}{\partial y}\right|_{x=d} = \left.\frac{\partial \psi^e}{\partial x}\right|_{x=d}$$

$$\left.\psi^i\right|_{x=d} = \left.\psi^e\right|_{x=d}$$

以上のことから分散関係式を求めると，任意方向に伝搬する表面静磁波に対しては

$$F = (1+K)^2 - \nu^2 - \epsilon\nu\sec\theta + (1+K)(\tan^2\theta + S)\coth(Sdk\cos\theta) = 0 \quad (12)$$

ここで $\tan\theta = \frac{k_x}{k_y}$, $S = \sqrt{\frac{K+\sec\theta}{1+K}}$

θ は伝搬方向と y 軸とのなす角である。

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{前進波 (Ferrite-Air Mode)} \\ -1 & \text{後進波 (Ferrite-Metal Mode)} \end{cases} \quad (3)$$

$\theta = 0$ の場合即ち y 軸方向に伝搬する時は S. R. Seshadri の求めた分散方程式と一致し

$$\exp(-2k_y d) = -\frac{\{(1+K)-\epsilon\nu\}\{1+(1+K)+\epsilon\nu\}}{\{(1+K)+\epsilon\nu\}\{1-(1+K)+\epsilon\nu\}}$$

となる。

3 波数ベクトルと群速度ベクトルのスティアリングアングル

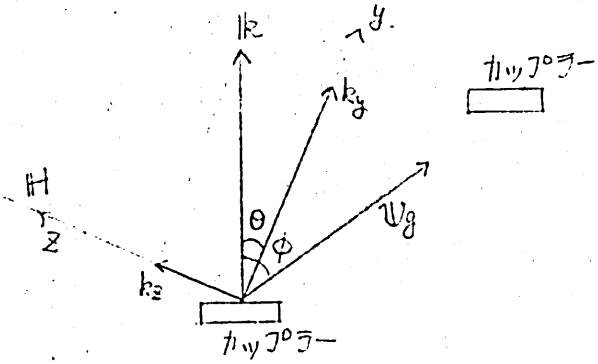


図2.

磁場の方向を z 軸として，波数ベクトル k と群速度ベクトル v_g の向きの関係を図2に図示した。
この図では k ベクトルの向きは一定にして磁場の方向をかえて θ（伝搬方向と y 軸のなす角）を変えるようにしている。

二次元の場合の群速度ベクトルは分散方程式を $F(k, \theta, H, \omega) = 0$ とすると

$$v_g = \nabla_k \omega = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} i_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} i_z = -\frac{\nabla_k F}{\frac{\partial F}{\partial \omega}} \quad (14)$$

で表わされる。(4)

波数ベクトルと群速度ベクトルのなす角を ϕ とすれば

$$\tan\phi = \frac{\partial\omega/\partial\theta}{k\,\partial\omega/\partial k} = -\frac{\partial F/\partial\theta}{k\,\partial F/\partial k} \quad (15)$$

(12)式を(15)式へ代入してスティアリングアングル ϕ を求めると

$$\tan\phi = -(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5)/G_6 \quad (16)$$

$$G_1 = -(\epsilon\nu)\sec\theta\tan\theta$$
$$G_2 = 2(1+K)\tan\theta\sec^2\theta\coth(Sdk\cos\theta)$$
$$G_3 = \sec^2\theta\tan\theta\coth(Sdk\cos\theta)/S$$
$$G_4 = -dk(\tan^2\theta+S)\sec^2\theta\sin\theta\,\mathrm{cosech}^2(Sdk\cos\theta)/S$$
$$G_5 = Sdk(1+K)(\tan^2\theta+S)\sin\theta\,\mathrm{cosech}^2(Sdk\cos\theta)$$
$$G_6 = -Sdk(1+K)(\tan^2\theta+S)\cos\theta\,\mathrm{cosech}^2(Sdk\cos\theta)$$

図3と図4は伝搬方向とy軸とのなす角θをパラメータとして分散曲線をFerrite-Air Mode及びFerrite-Metal Modeに対して図示した。

θ=0においてFerrite-Air Modeがとりうる周波数範囲は

$$\gamma\sqrt{BH_i}/2\pi \leqq f \leqq \gamma(H_i+2\pi M)/2\pi$$

で $H_i=200$ Oe, $4\pi M_s=1750$ Oeに対しては $\gamma=1.76\times10^7$ Oe^{-1}sec^{-1}として

$$1.75\,GHz \leqq f \leqq 3.05\,GHz$$

θ=0においてFerrite-Metal Modeがとりうる周波数範囲は

$$\gamma\sqrt{BH_i}/2\pi \leqq f \leqq \gamma(H_i+4\pi M)/2\pi$$

今の場合に対しては

$$1.75\,GHz \leqq f \leqq 5.46\,GHz$$

図5と図6は周波数を一定として，k空間で分散関係を表示したもの。つまり，周波数，k_y，k_z空間で表わされた分散曲面と周波数一定の平面との交線を表わしている。

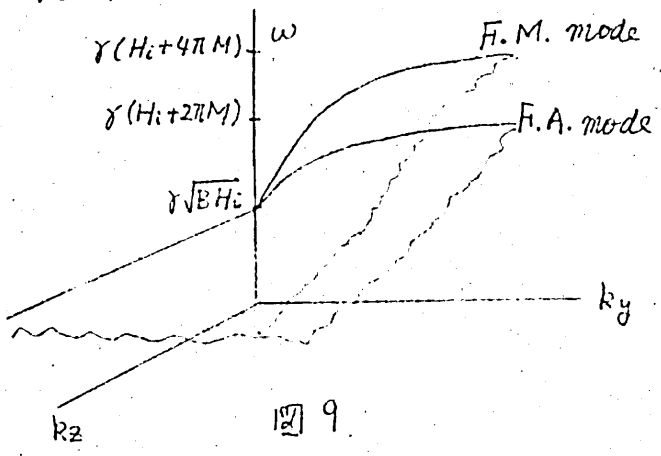


図9

ω, k_y, k_z空間で示された分散関係の略図

図7と図8は，周波数を一定とした場合のFerrite-Air Mode及びFerrite-Metal Modeに対する，θとスティアリングアングルφとの関係を図示したもの。これを比較してみると，Ferrite-Air Modeの方がθが同じ場合はFerrite-Metal Modeより，スティアリングアングルが大分大きいことがわかる。Ferrite-Air Modeについて考えれば，θを30°ぐらいに固定しておくと0.2 GHzの周波数変化に対してスティアリングアングルは6°～10°変わることがわかる。

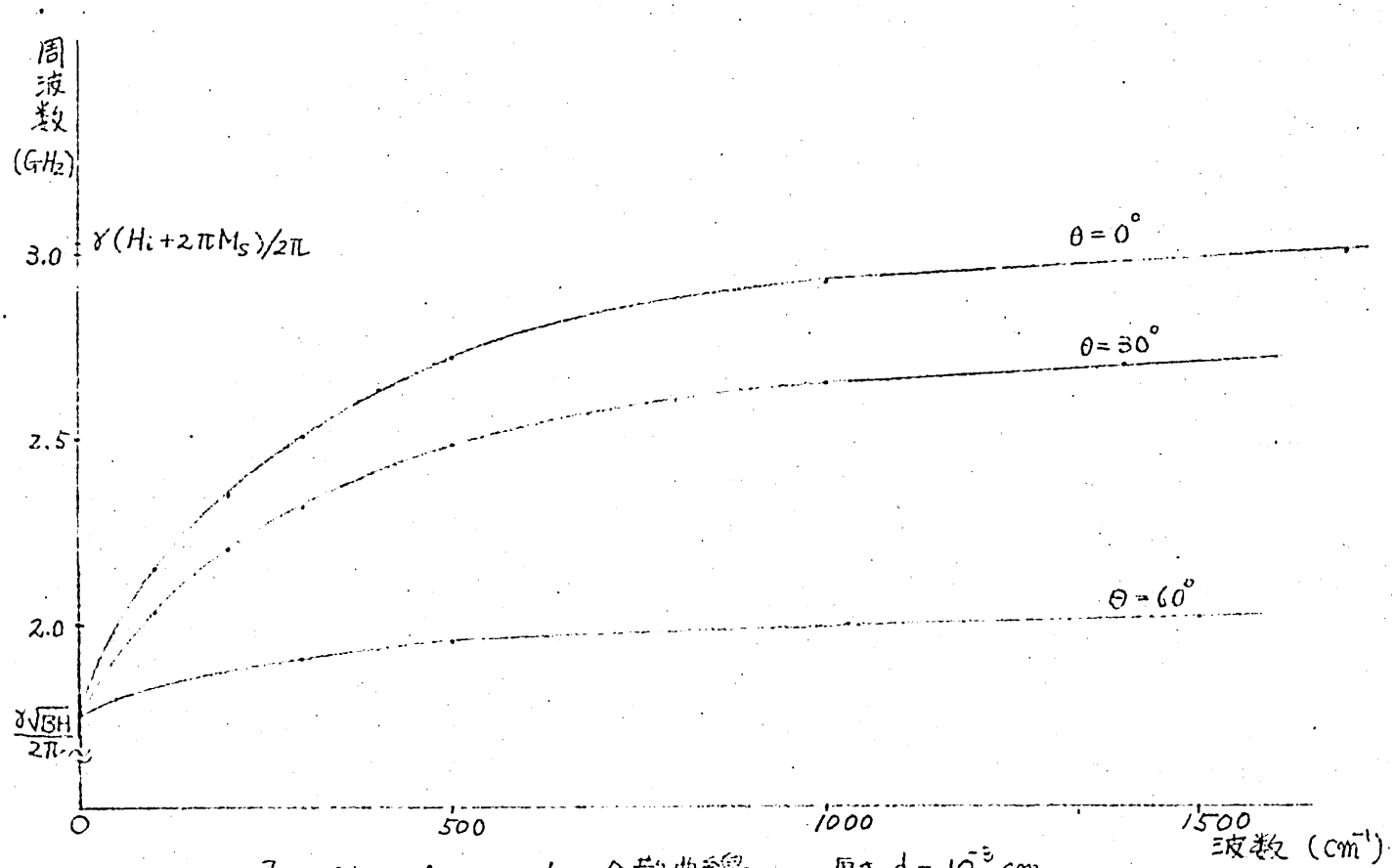


図3　Ferrite - Air mode の分散曲線　　厚さ d = 10^{-3} cm
θは伝播方向とy軸とのなす角　　M_s = 140 Oe
H = 200 Oe

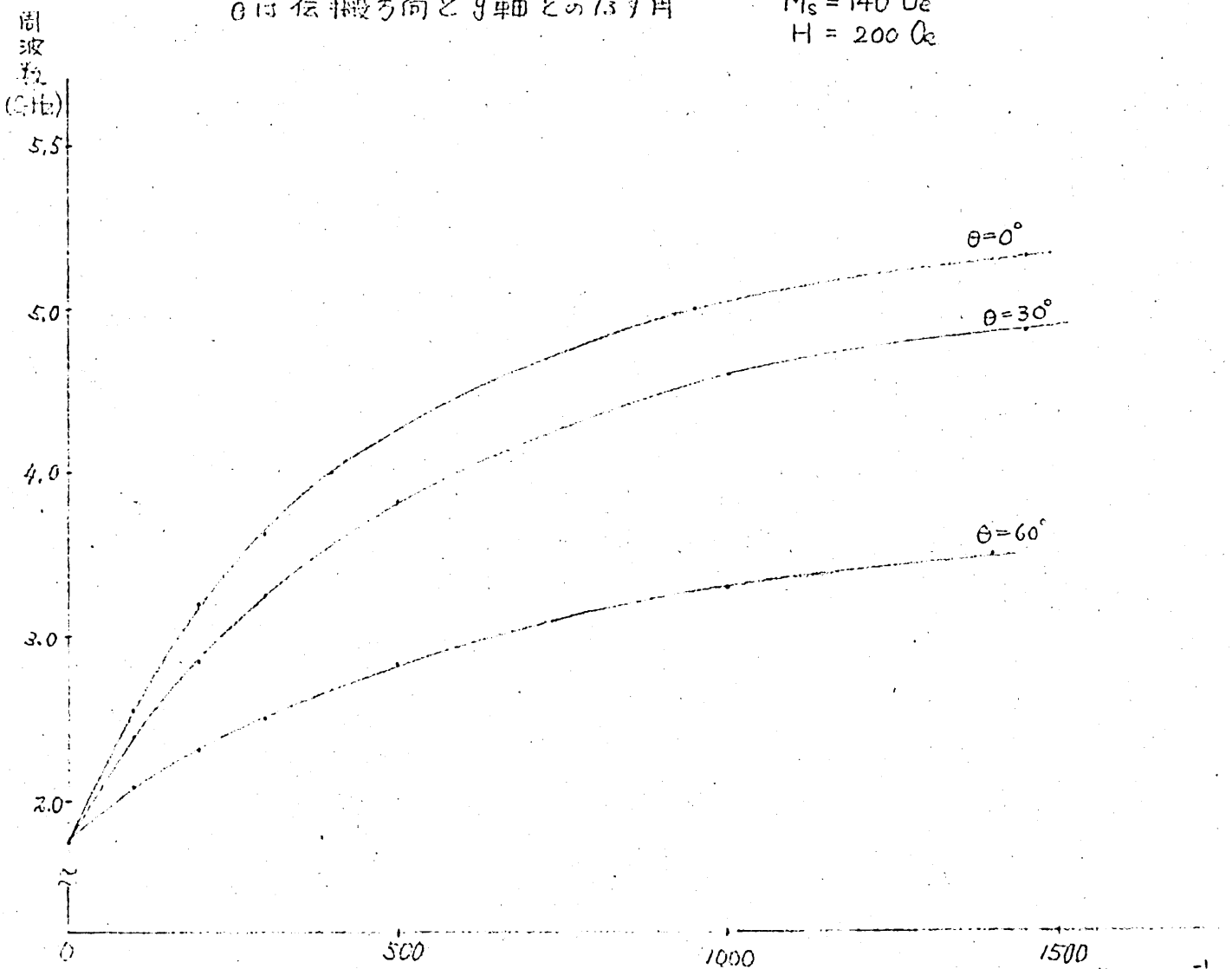


図4　Ferrite - Metal mode の分散曲線　　厚さ d = 10^{-3} cm
θは伝播方向とy軸とのなす角　　M_s = 1400e
H = 2000e

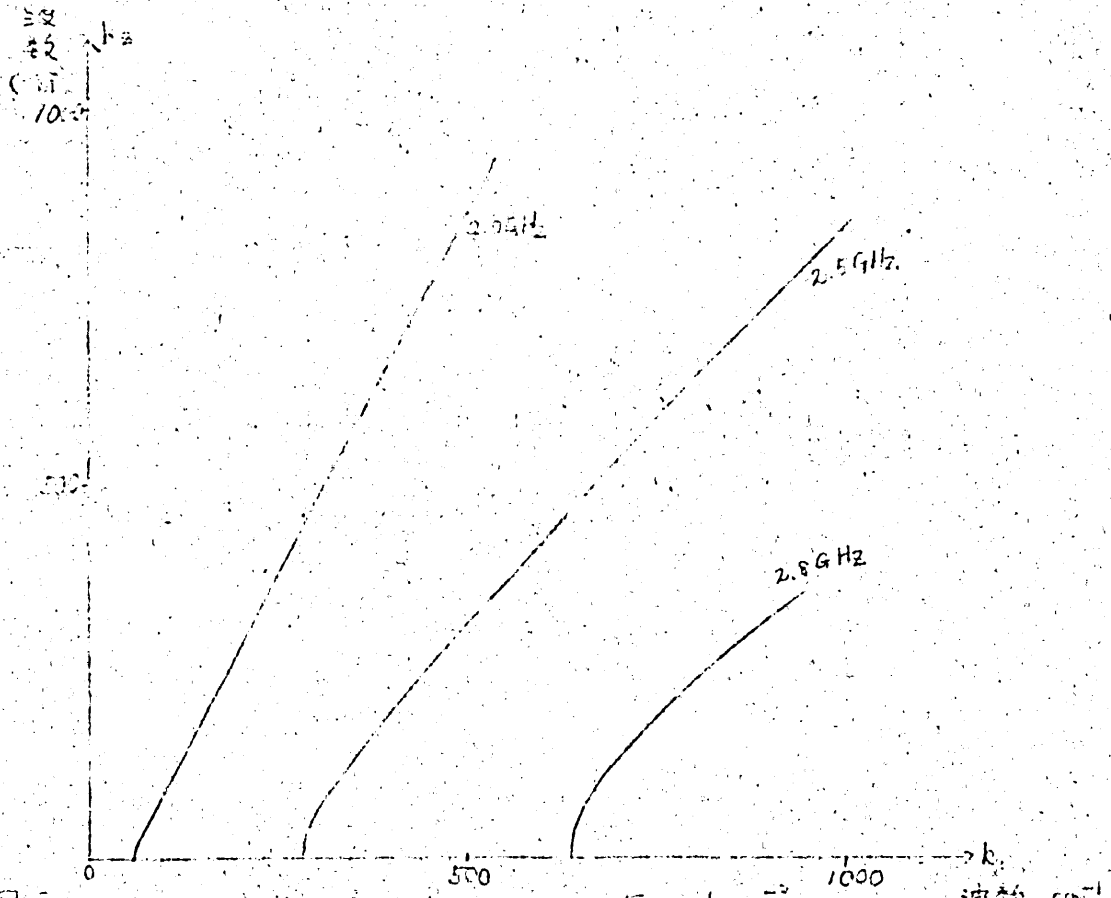


図5 k空間で表示した分散関係 厚さ $d = 10^{-3}$ cm
(Ferrite - Air Mode) $M_s = 1400$ Oe
磁場は z 軸方向にかけている。 $H_i = 200$ Oe

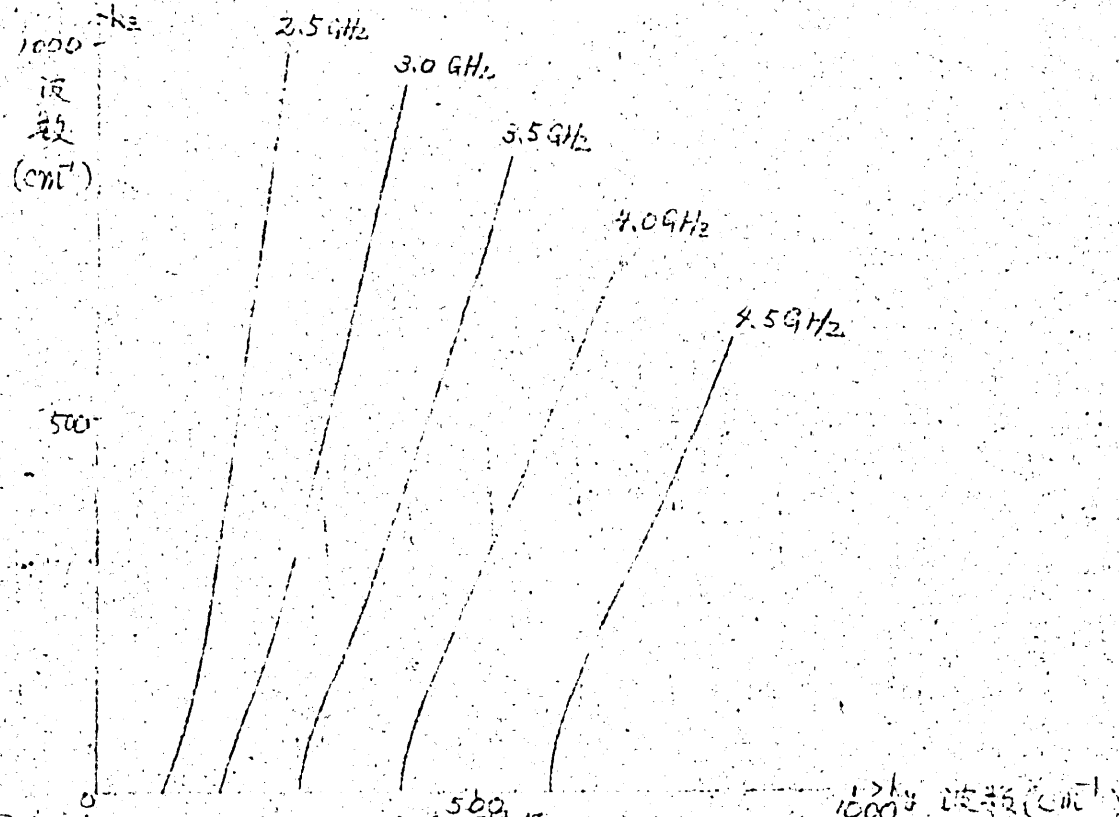


図6 k空間で表示した分散関係 厚さ $d = 10^{-3}$ cm
(Ferrite - Metal Mode) $M_s = 1400$ Oe
磁場は z 軸方向にかけている。 $H_i = 2000$ Oe

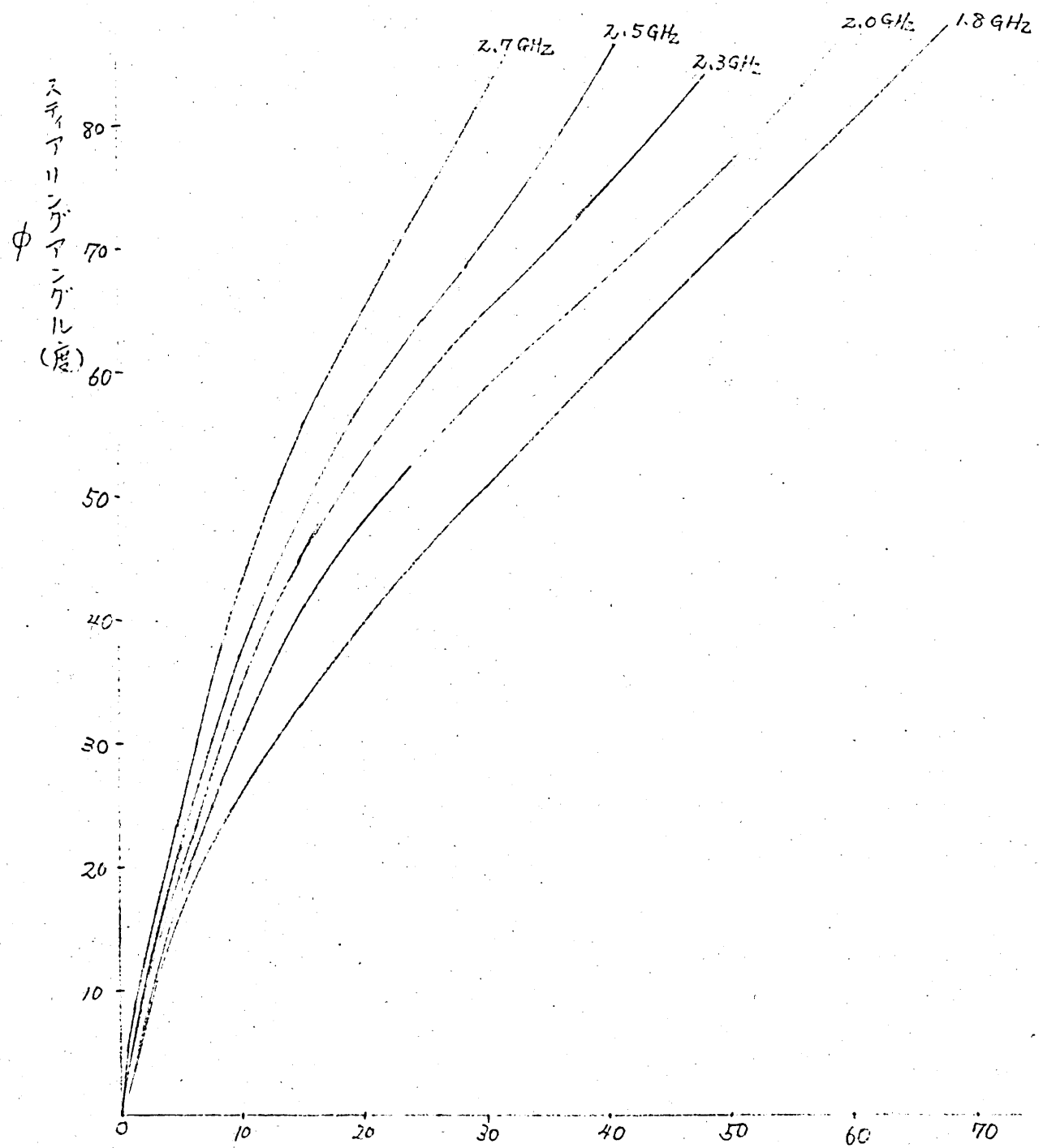


図7
Ferrite - Air Mode の伝搬方向と
スティアリングアングルの関係
厚さ $d = 10^{-3}$ cm
$M_S = 1400$ Oe
$H_c = 200$ Oe
(周波数が一定の場合)

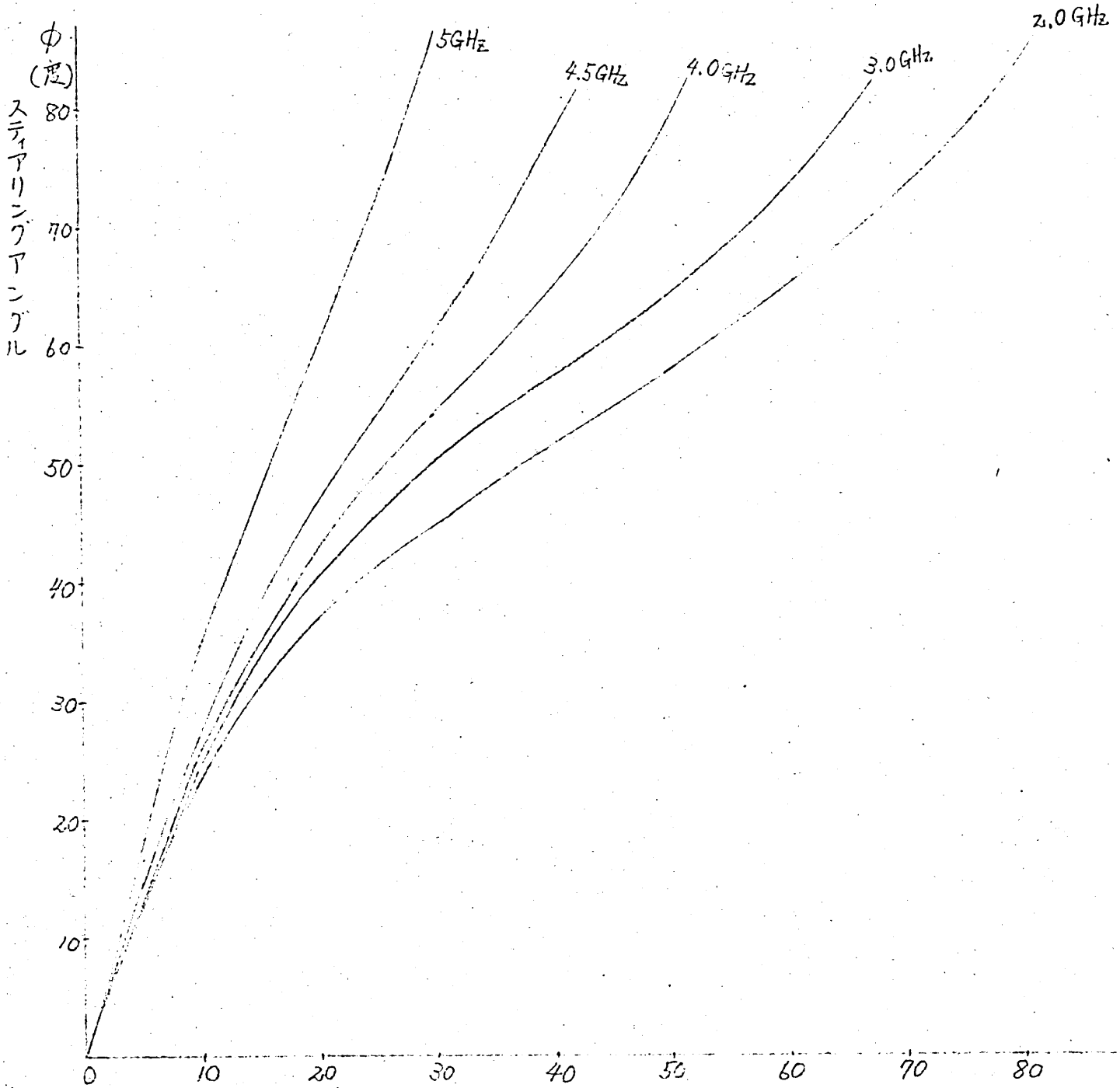


図8
Ferrite-Metal Mode
厚さ $d = 10^{-3}$ cm
$M_s = 1400$ e
$H = 2000$ e
伝搬方向とスティアリングアングルの関係

以上図3～図8においては，内部磁場は 200 Oe 一定として計算したものであるが，周波数を一定として，磁場の大きさを変えてスティアリングアングルを変える事もできる。この様にすれば，マイクロ波集積回路におけるスイッチング素子として使うことも可能である。又周波数によってスティアリングアングルが異なることからフィルターへの応用や，受信側に静磁エネルギーから電磁エネルギーに変換するカップラーを複数個並べることにより，分波回路への応用等も考えられるが，薄膜の端で反射してくる静磁波をとり除かなければならず，また弾性波と結合して表面磁気弾性波となるので，いろいろ困難な問題も多い。

4 YIG スラブ中の電界

YIG スラブ中の電界を厳密に求めるためには，静磁近似を用いず，マックスウェルの方程式を解かねばならないが，フェライト中においては透磁率はテンソルの形となるため，これを解くことは非常に困難である。そこで静磁近似を用いて解かれた磁場を用いて，マックスウェルの方程式の一つ

$$\mathrm{not}\, e = -\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (17)$$

から電界を近似的に求めた。

(17)式の回転をとり，ベクトル公式と静磁条件を考慮すると

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, e) - \nabla^2 e = -i\omega\, \mathrm{not}\, h \qquad (18)$$

$$\mathrm{div}\, e = 0 \quad , \quad \mathrm{not}\, h = 0$$

であるから

$$\nabla^2 e = i\omega\, \mathrm{not}(4\pi m) \qquad (19)$$

m を磁気ポテンシャルを用いて表わし，(19)式を各成分について書くと

$$\nabla^2 e_x = -i\omega\left(i\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y}\right)$$

$$\nabla^2 e_y = i\omega\left(\kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} - i\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y}\right) \qquad (20)$$

$$\nabla^2 e_z = -\omega\nu\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)$$

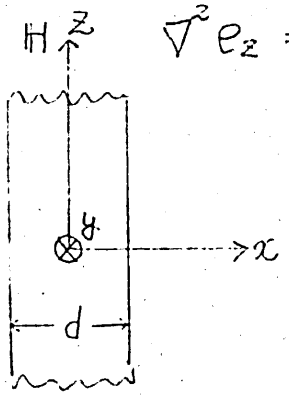


図 10

図10の様な無限平板における，磁気的ポテンシャルは，座標系を図の様にとれば，次の様に表わすことができる。

$$\psi = \{a \sin(k_x x) + b \cos(k_x x)\}\, e^{i(k_y y + k_z z)}$$

この磁気的ポテンシャルを(20)式へ代入して電界を求めると，
その各成分は

$$e_x = -\frac{i\omega(1+\kappa)}{k_z\kappa}\{(-\nu k_x' b + \kappa k_y a)\sin k_x' x + (\nu k_x' a + \kappa k_y b)\cos k_x' x\} \times \exp(ik_y y)\exp(ik_z z)$$

$$e_y = \frac{\omega(1+\kappa)}{k_z\kappa}\{(-\kappa k_x' b + \nu k_y a)\sin k_x' x + (\kappa k_x' a + \nu k_y b)\cos k_x' x\} \times \exp(ik_y y)\exp(ik_z z)$$

$$e_z = \frac{\omega\nu}{\kappa}(a\sin k_x' x + b\cos k_x' x)\exp(ik_y y)\exp(ik_z z)$$

磁界の各成分は既に求まっているψを使って

$$h_x = k_x'^2(a\cos k_x' x - b\sin k_x' x)\exp(ik_y y + ik_z z)$$
$$h_y = ik_y(a\sin k_x' x + b\cos k_x' x)\exp(ik_y y + ik_z z)$$
$$h_z = ik_z(a\sin k_x' x + b\cos k_x' x)\exp(ik_y y + ik_z z)$$

表面波に対しては，$k_x' = ik_y S$（Sは前と同じ意味）だから，上の電磁界から複素ポインチングベクトルを計算すると，その向きは表面に平行になるが，y方向伝搬に対して，予盾する点があるので再検討を必要とすることがわかった。

参考文献

1) F.A. Pizarello, J.H. Collins and L.E. Coerwer
"Magnetic Steering of Magnetostatic Waves in Epitaxial YIG Films" J.A.P. vol. 41 p. 1016~1017 (March 1970)

2) R.W. Damon and J.R. Eshbach
"Magnetostatic Modes of A Ferromagnet Slab"
J. Phys. Chem. Solids vol. 19 p. 308 ~ p320 1961

3) S.R. Seshadri
"Surface Magnetostatic Modes of a Ferrite Slab"
Proceed. of the I.E.E.E. p506 ~ p507 (March 1970)

4) R.C. Addison, B.A. Auld, and J.H. Wilkinson
"Electrically Controlled Acoustic Beam Deflection"
Proc. I.E.E.E. vol 55 p68 ~ p77 (Jan. 1967)

輻射科学研究会資料

レンズ列光ビーム導波系の円形曲り部の一構成法

沢 新之輔　　小野 和雄
(愛媛大学　　工学部)
熊谷 信昭
(大阪大学 工学部)

昭和47年9月29日
(於 新住友ビル)

1. まえがき

長距離光通信線路の1つとして低損失の特性を有するレンズ列光ビーム導波系が考えられている。長距離光通信を行う場合、直線伝送路（直線部）のみでは実際上不便であり、曲り伝送路（曲り部）も必要と思われる。2つの直線部Ⅰおよび Ⅱの間に円形曲り部が存在する場合、直線部Ⅰの軸上を平行に伝搬してきた光ビームが曲り部を通過し、直線部Ⅱに向うとき、円形曲り部および直線部Ⅱにおいて、一般に、光ビームの中心の軌跡（ビーム行路）はレンズの中心をずれ脈動する。ここで「脈動する」とは、ビーム行路がレンズの中心を結んだ線に沿って伝搬しないことをいう。脈動現象が顕著に生ずると、レンズの口径が有限であるために生じる回折損失が増大したり、信号歪を生じたりして、通信の品質を低下させるおそれがある。したがって、従来から、このような現象を除去するように、曲り部を構成する2、

3の方法が提案されている[1]。本稿では、レンズ列光ビーム導波系の円形曲り部の影響を除去するための、従来の方法とは異なった、有効な新しい方法を提案する。本方法は、筆者等が、先にSELFOCやがスレンズ等のようなレンズ状媒質からなる光導波系に対して適用したのと類似の方法であり[2][3][4]、任意の入射条件の光ビームに対して曲り部の影響を除去することが可能である。

2、円形曲り部の影響

ビーム行路のふるまいを調べるには、幾何光学的に、レンズの中心から光ビームの中心までの距離（軸ずれ量）rと各レンズについて求めれば充分である。出射角θ_nは図1に示すように、rとn+1番目のレンズの中心を結ぶ線と光ビームのなす角である。等間隔Lで配列されたレンズ列光ビーム導波系を伝搬する光ビームの軸ずれ量rと、出射角θの関係は、

近軸近似の範囲で次のように表わすことができる。[1]

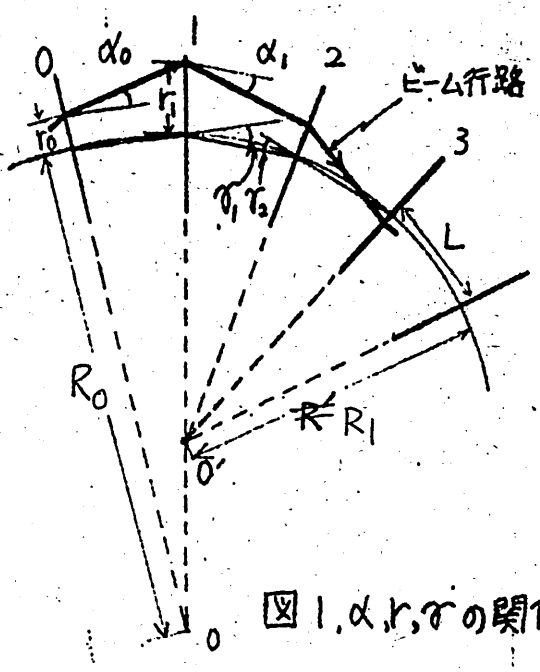


図1. α, r, γの関係

$$r_{n+1} = r_n + L\alpha_n \quad \cdots (1)$$

$$Cr_{n+1} = \gamma_{n+1} + \alpha_n - \alpha_{n+1} \quad \cdots (2)$$

$$\gamma_n = \frac{L}{R_n} \quad \cdots (3)$$

ここで、Cはレンズの倍率であり、焦点距離fと$C = \frac{1}{f}$の関係がある。γ_nはn番目のレンズの中心を結ぶ2直線のなす角であり、特に円形曲り部の場合は、レンズの曲り角を表わす。また、$\frac{1}{R_n}$は各レンズの中心をなめらかな曲線で結んだとき、その曲線とn番目のレンズの中心との交点における曲率を表わし、したがってR_nはその点の曲率半径である。式(1)および(2)からrを消去すると、αについて次の2階差分方程式を得る。

$$\alpha_{n+2} - (2 - LC)\alpha_{n+1} + \alpha_n = \gamma_{n+2} - \gamma_{n+1} \quad \cdots (4)$$

曲率一定の場合、すなわち、円形曲り部の場合には、

γ_nは一定となるから、式(4)は2階同次差分方程式となる。したがって、円形曲り部に対する式(4)の解α_nは次のような形に書くことができる。

$$\alpha_n = A\cos n\theta + B\sin n\theta \qquad \text{--(5)}$$

ただし、AおよびBは、入射条件によって定まる定数であり、また

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= 1 - \frac{LC}{2} \\ \sin\theta &= \sqrt{LC}\sqrt{1-\frac{LC}{4}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{--(6)}$$

である。

図1に示すような曲率$1/R_0$の円形曲り部から曲率$1/R_1$の円形曲り部へ光ビームが入射する場合、光ビームの入射条件として、~~入~~出射角α_0および入射軸ずれ量r_0を与えると、式(1)および(2)から、α_1とα_2が計算され、未定定数AおよびBがそれぞれ決定される。その結果、α_nは$n\geq 1$に対して次のように表わされる。

$$\alpha_n = \left[\alpha_0 + \frac{L}{2}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_1}\right)\right]\cos n\theta + \frac{1}{\sin\theta}\left[-\frac{2r_0}{L}(1-\cos\theta)\right.$$
$$\left.+\left(\alpha_0+\frac{L}{2R_0}\right)(1-\cos\theta)+\frac{L}{2R_1}(1+\cos\theta)\right]\sin n\theta \qquad \text{--(7)}$$

ここで、$\gamma_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}\right)$ なる関係を用いた。

式(6)および(1),(2)式を用いて r_{m+1} を求めると次のようになる。

$$r_{m+1} = r_1\left[\cos n\theta - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sin n\theta\right] + \frac{\alpha_0 L}{\sin\theta}\sin n\theta$$
$$+\frac{L^2}{2R_1}\frac{1}{1-\cos\theta}\left[1-\cos n\theta\right] + \frac{L^2}{2R_0}\frac{1}{\sin\theta}\sin n\theta \quad \cdots(8)$$

ただし、$n \geq 1$ である。

式(8)で、$R_0 = R_1 = \infty$ とおくと、軸ずれ量 r_1、入射角 α_0 の入射条件で直線部へ入射した場合の軸ずれ量、

$$r_{m+1} = r_1\left[\cos n\theta - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sin n\theta\right] + \frac{\alpha_0 L}{\sin\theta}\sin n\theta \quad \cdots(9)$$

が得られる。また、式(8)において $R_0 = \infty$ および $\alpha_0 = r_1 = 0$ とおくと、直線部をレンズの軸上に軸と平行に伝搬してきて円形曲り部へ入射した光ビームの円形曲り部における軸ずれ量

$$r_{m+1} = \frac{L^2}{2R_1}\frac{1}{1-\cos\theta}\left[1-\cos n\theta\right] \quad \cdots(10)$$

が求められる。

式(8),(9)および(10)を比較すると、曲り部の影響は、直線部を伝搬したときのビーム行路に、新たに脈動

分を加えることが分る。

3、円形曲り部の影響を除去する新しい設計法

レンズ列光ビーム導波系を用いて、光通信を行う場合、回折損失をできるだけ小さくし、かつ、信号歪を生じるおそれのないように、直線部分ではレンズの軸に平行に光ビームを伝搬させるのが普通であると考えられる。したがって、曲り部を用いる必要がある場合でも、上記のような光ビームに対して(1)「曲り部を通過後の直線部においてビーム行路の脈動を生じないよう」に、また、(2)「曲り部においてもビーム行路の脈動をできるだけ生じないよう」に、曲り部を構成しなければならない。Marcuseは、直線部と円形曲り部(曲率半径R)の軸を $1/2R$ だけかたむけ、曲率半径の中心点の側へ曲り部全体を $1/2R$ だけずらせることにより、任意の入射条件の光ビームに対して、円形曲り部の影響を除去する方法を提案し

ている[1]。また、この場合、直線部を軸に平行に伝搬している光ビームに対しては、上記(ロ)の条件を充分に満足している。本稿では、直線部と曲り部の軸を一致させたままで、任意の入射条件の光ビームに対して円形曲り部の影響を除去し、かつ、(ロ)の条件を充分に満足する方法を提案する。本方法は、SELFOCやガスレンズ等のレンズ状媒質において提案されたものと類似の方法で、円形曲り部と直線部の間に、補助的な曲り部分をそう入する方法である。この補助的な曲り部分は、波動光学的に考察すると、直線部の正規モードを、円形曲り部の正規モードに変換する部分であると考えられるので、以下では、この部分をモード変換部とよぶことにする。モード変換部として、(i)曲率を階段状に変化させる円形曲り部、(ii)曲率を零から所要の円形曲り部の曲率まで直線的に変化させるテーパ曲り部、の2つの場合をとりあつかう。

3.1 モード変換部として円形曲り部を用いる方法

図2に示すように、円形曲り部IIと直線部IおよびIIの間に、モード変換部として円形曲り部IおよびIIIをそう入する。曲り部IおよびIIIのレンズの個数をそれぞれkおよびmとし、曲率を図3に示すように、曲率の変化する境界のレンズ（1, k+1等）を除いて、それぞれ$1/R_1$および$1/R_3$とする。さらに、円形曲り部IIのレンズの個数をlとし、その曲

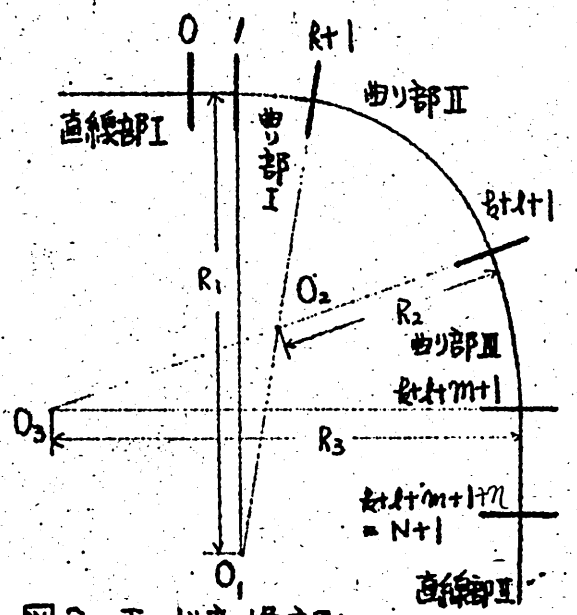


図2. モード変換部に円形曲り部を用いた場合の曲り部の構成

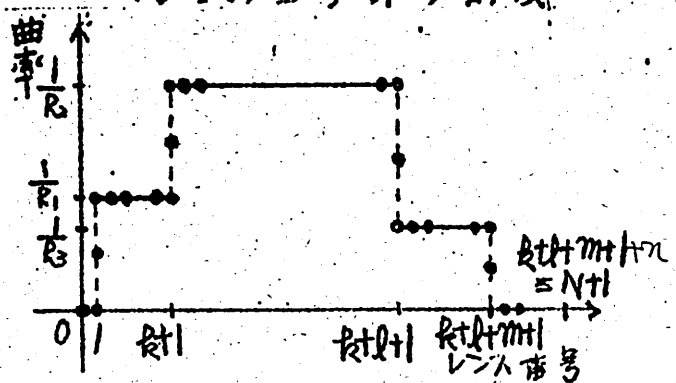


図3. モード変換部に円形曲り部を用いた場合のレンズ番号に対する曲率の変化

率を $1/R_2$ とする。

曲率一定の場合の出射角と軸ずれ量の式(7)および(8)に、それぞれの円形曲り部の出射角，軸ずれ量および曲率を代入すると、曲り部Ⅰ、Ⅱ、Ⅲおよび直線部Ⅱにおける出射角と軸ずれ量は、曲り部Ⅰへの入射条件，すなわち、α_0 および r_1 を用いて表わすことができる。曲り部Ⅱの $k+m+1$ 番目のレンズにおける軸ずれ量は次のようになる。

$$r_{k+m+1} = r_1\left[\cos(k+m)\theta - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sin(k+m)\theta\right] + \frac{\alpha_0 L}{\sin\theta}\sin(k+m)\theta$$
$$+ \frac{L^2}{2R_1}\frac{1}{1-\cos\theta}\left[\cos n\theta - \cos(k+m)\theta\right] + \frac{L^2}{2R_2}\frac{1}{1-\cos\theta}\left[1-\cos n\theta\right] \quad \cdots (11)$$

また、直線部Ⅱの $N+1\ (\equiv k+l+m+n+1)$ 番目のレンズにおける軸ずれ量は次のようになる。

$$r_{N+1} = r_1\left[\cos N\theta - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sin N\theta\right] + \frac{\alpha_0 L}{\sin\theta}\sin N\theta$$
$$+ \frac{L^2}{2}\frac{1}{1-\cos\theta}\left[\left\{K_1\cos l\theta + K_2\sin l\theta + K_3\right\}\cos n\theta\right.$$
$$\left. + \left\{K_1'\cos l\theta + K_2'\sin l\theta + K_3'\right\}\sin n\theta\right] \quad \cdots (12)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= \left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\cos m\theta - \frac{1}{R_1}\cos(k+m)\theta \\
k_2 &= \left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\sin m\theta + \frac{1}{R_1}\sin(k+m)\theta \\
k_3 &= \left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)\cos m\theta + \frac{1}{R_3} \\
k_1' &= \left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\sin m\theta + \frac{1}{R_1}\sin(k+m)\theta \\
k_2' &= \left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\cos m\theta + \frac{1}{R_1}\cos(k+m)\theta \\
k_3' &= \left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right)\sin m\theta
\end{aligned}\right\} \cdots (13)$$

である。

式(12)と(9)を比較して、両者が円形曲り部のレンズの個数 l および直線部Ⅱにおけるレンズの個数 n に関係なく恒等的に等しくなるためには、すなわち、曲り部の影響がなくなるためには、$k_1 = k_2 = k_3 = 0$ かつ、$k_1' = k_2' = k_3' = 0$ であればよい。これから、つぎの2通りの条件が得られる。

$$(A)\quad \begin{cases} k\theta = \pi + 2p\pi\,,\ m\theta = k\theta + 2q\pi \\ R_1 = R_3 = 2R_2 \end{cases} \cdots (14)$$

$$(B)\quad \begin{cases} k\theta = 2p\pi, \quad m\theta = k\theta + 2q\pi \\ R_2 = \infty \end{cases} \qquad -(15)$$

ここで、pおよびqは、$k\theta$および$m\theta$を正とするような整数である。

条件(B)は、レンズの個数が任意である円形曲り部Ⅱが結局直線部となるため、曲り部を構成するには不便である。一方条件(A)のもとでは、モード変換部のレンズの個数は制限されるが、円形曲り部Ⅱにおけるレンズの個数および曲率半径R_2を任意にえらべるため、円形曲り部Ⅱの全体の曲り角が、レンズ1個当りの曲り角$\angle\theta_2 (\equiv \gamma_{II})$の任意の整数倍となるような曲り部を構成することができる。したがって、条件(A)および(B)のうち、実際上有効なのは、(A)のみであるといえる。直線部Ⅰの軸上を軸と平行に伝搬してきて曲り部へ入射した光ビーム（以下では、このような入射条件の光ビームを、曲り部へ軸上入射した光ビームとよぶことにする。）は、条件(A)のもと

では、曲り部Ⅱにおいて次式の最大軸ずれ量 r_{max} をとる。

$$r_{max} = \frac{L^2}{2R_2}\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{\gamma_{II} L}{2}\frac{1}{1-\cos\theta} \quad \cdots(16)$$

3.2 モード変換部としてテーパ曲り部を用いる方法

図4に示すように、円形曲り部Ⅱと直線部ⅠおよびⅡの間に、モード変換部として、テーパ曲り部ⅠおよびⅢをそう入する。テーパ曲り部ⅠおよびⅢは対称的であるとし、レンズの個数を、ともにkとする。テーパ曲り部ⅠとⅢを合わせた全長は $2kL\ (\equiv D)$ であり、その曲り角を δ とする。曲率のレン

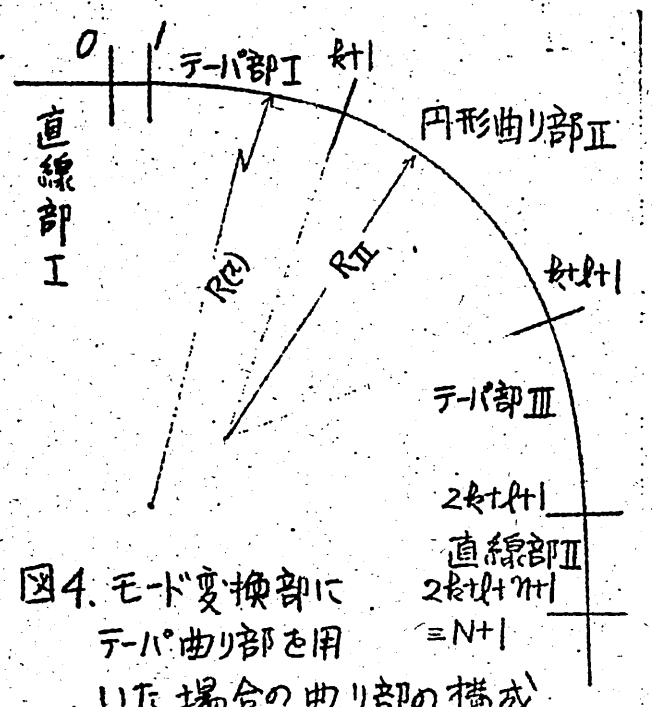


図4. モード変換部にテーパ曲り部を用いた場合の曲り部の構成

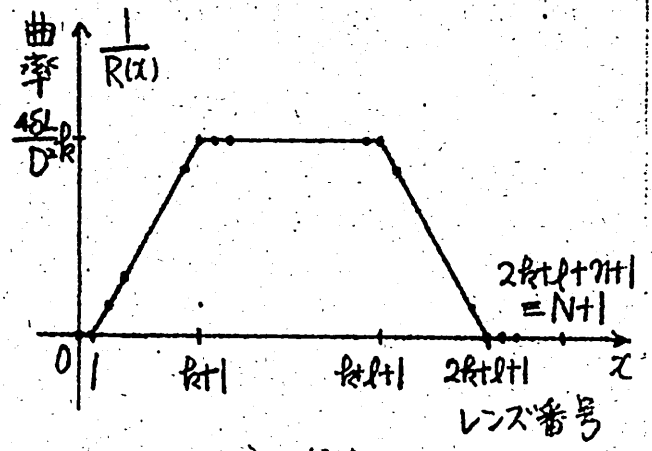


図5、モード変換部にテーパ曲り部を用いた場合のレンズ番号xに対する曲率の変化

ズ番号に対する変化を図5に示す。また、レンズ番号xに対し、たとえば曲率をつぎのような直線状テーパで与える[1]。

$$\frac{1}{R(x)}=\begin{cases}0 & x\le 1\\ \frac{4\delta L}{D^2}(x-1) & 1\le x\le k_1+1\\ \frac{4\delta L}{D^2}k_1\left(\equiv\frac{1}{R_{II}}\right) & k_1+1\le x\le k_1+l_1+1\\ \frac{4\delta L}{D^2}(2k_1+l_1+1-x) & k_1+l_1+1\le x\le 2k_1+l_1+1\\ 0 & 2k_1+l_1+1\le x\end{cases}\quad\cdots(17)$$

$1/R_{II}$は曲り部IIにおける曲率である。

曲率の変化が充分ゆるやかである場合の軸ずれ量は次式で与えられている[1]。

$$r_n=A\cos n\theta+B\sin n\theta+\frac{L^2}{2\sin^2\theta}\left\{\frac{\cos(n-1)\theta-\cos n\theta}{R_1}+\frac{1-\cos\theta}{R_{n-1}}+2\theta\int_1^{n-1}\frac{\sin\theta(n-x)}{R(x)}dx\right\}\quad\cdots(18)$$

曲り部Ⅰへの入射条件として、入射角α_0および入射軸ずれ量r_0を与えると、式(18)の第1項と第2項は、r_1とα_0でまとめると、

$$A\cos n\theta + B\sin n\theta$$
$$= r_1\left[\cos(n-1)\theta - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n-1)\theta\right] + \frac{\alpha_0 L}{\sin\theta}\sin(n-1)\theta \quad \cdots (19)$$

となる。直線部Ⅰから Ⅱまでの曲率の変化が充分ゆるやかであると仮定すると、曲り部Ⅱおよび直線部Ⅱにおける軸ずれ量は、式(19)に式(18)の最終項の積分の結果を加えたものになり、それぞれ次のように表わされる。すなわち、円形曲り部Ⅱの$k+n+1$番目のレンズにおける軸ずれ量は、

$$r_{k+n+1} = r_1\left[\cos(k+n)\theta - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sin(k+n)\theta\right] + \frac{\alpha_0 L}{\sin\theta}\sin(k+n)\theta$$
$$+ \frac{2\delta L^3}{D^2\sin^2\theta}\left[k(1+\cos\theta) + \frac{2}{\theta}\left\{(1-\cos k\theta)\sin n\theta - \sin k\theta\cos n\theta\right\}\right] \quad \cdots (20)$$

となり、直線部Ⅱの$N+1$番目のレンズにおける軸ずれ量は

$$r_{N+1} = r_1\left[\cos N\theta - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sin N\theta\right] + \frac{\alpha_0 L}{\sin\theta}\sin N\theta$$

$$+\frac{1}{\theta}\frac{48L^3}{D^2\sin^2\theta}\left[\{K_1\cos l\theta + K_2\sin l\theta + K_3\}\cos n\theta\right.$$
$$\left.+\{K_1'\cos l\theta + K_2'\sin l\theta + K_3'\}\sin n\theta\right] \quad \cdots(21)$$

となる。ここで、

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \sin k\theta - \sin 2k\theta \\ K_2 &= \cos k\theta - \cos 2k\theta \\ K_3 &= \sin k\theta \\ K_1' &= \sin 2k\theta - \sin k\theta \\ K_2' &= \cos k\theta - \cos 2k\theta \\ K_3' &= \cos k\theta - 1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots(22)$$

である。

式(20)と(9)を比較して、両者が円形曲り部のレンズの個数 l および直線部におけるレンズの個数 n に関係なく恒等的に等しくなるためには、すなわち、曲り部の影響がなくなるためには、$K_1 = K_2 = K_3 = 0$、かつ、$K_1' = K_2' = K_3' = 0$ であればよい。その条件は、

$$k\theta = 2P\pi \quad (P;\text{正の整数}) \quad \cdots(23)$$

となる。

この条件が満たされているとき、曲り部へ軸上入射した光ビームは、次式で示される最大軸ずれ量を保って曲り部IIを、脈動することなく伝搬する。

$$r_{max} = \frac{2\delta L^3}{D^2 \sin^2\theta}\, k(1+\cos\theta) = \frac{L^2}{2R_{II}} \frac{1}{1-\cos\theta} \quad \cdots (24)$$

3.3 曲り部の設計例

(1) モード変換部に円形曲り部を用いた場合

図2で曲り部IとIIIのレンズの個数が等しいような構成の~~曲り~~モード変換部を用いて、光ビームを角度θだけ曲げる場合の設計法を示す。

曲り部のレンズの総数をNとし、レンズ間隔をLとする。モード変換部のレンズの個数kは、条件式(14)より、

$$k = \frac{\pi + 2P\pi}{\theta} = \text{正の整数} \quad (P: 0, 1, 2 \cdots) \quad (25)$$

となる。kをできるだけ小さくするためには、θを決めて設計するのが便利である。θが決まれば、焦点距離fとLの比は、式(6)より次のように決まる。

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\cos\theta} \quad \cdots (26)$$

したがって、実際上、焦点距離とレンズ間隔の比は任意にえらぶことができず、ある特定の値とする必要がある。

モード変換部の曲り角は、曲り部IIにおけるレンズ1個当りの曲り角 γ_{II} ($=L/R_2$) を用いて表わすことができる。モード変換部のレンズ1個当りの曲り角 γ_I ($=L/R_1$) は、$R_1 = 2R_2$ を考慮すると、

$$\gamma_I = \frac{1}{2}\gamma_{II} \qquad \cdots (27)$$

となる。したがって、γ_{II} は N, k および Φ を用いて次のような値に選ばなければならない。

$$\gamma_{II} = \frac{\Phi}{N-k} \qquad \cdots (28)$$

円形曲り部IIにおける曲率半径 R_2 および、曲り部へ軸上入射した光ビームの曲り部IIにおける最大軸ずれ量 r_{max} は L で規格化すると、θ と γ_{II} を用いそれぞれ次のようになる。

$$\frac{R_2}{L} = \frac{1}{\gamma_{II}} \qquad \cdots (29)$$

$$\frac{r_{max}}{L} = \frac{\gamma_{II}}{2}\frac{1}{1-\cos\theta} \qquad \cdots (30)$$

一例として、90°曲り（$\phi = \frac{\pi}{2}$）の場合に対する数値設計例を表1～4に示す。この例では $\theta \left(= \cos^{-1}\left(1 - \frac{L_c}{2}\right)\right)$ の値をそれぞれ $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ および $\frac{3\pi}{4}$ とえらび、それぞれの θ に対し、モード変換部に必要なレンズの個数を最小となるように設計してある。

表1、モード変換部として円形曲り部を用いた場合の数値設計例 1

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき

$\begin{cases} k = 2 \\ f = 0.5L \end{cases}$

レンズの総数 N	10^2	10^3	10^4
レンズ1個当りの曲り角 γ_{II}	1.603×10^{-2}	1.574×10^{-3}	1.571×10^{-4}
規格化曲率半径 $\frac{R_2}{L}$	6.238×10	6.353×10^{2}	6.365×10^{3}
規格化最大軸ずれ量 $\frac{r_{max}}{L}$	0.8014×10^{-2}	0.7870×10^{-3}	0.7856×10^{-4}

表2、モード変換部として円形曲り部を用いた場合の数値設計例 2

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき

$\begin{cases} k = 3 \\ f = L \end{cases}$

レンズの総数 N	10^2	10^3	10^4
レンズ1個当りの曲り角 γ_{II}	1.619×10^{-2}	1.576×10^{-3}	1.571×10^{-4}
規格化曲率半径 $\frac{R_2}{L}$	6.177×10	6.345×10^{2}	6.365×10^{3}
規格化最大軸ずれ量 $\frac{r_{max}}{L}$	1.619×10^{-2}	1.576×10^{-3}	1.571×10^{-4}

表3、モード変換部として円形曲り部を用いた場合の数値設計例 3.

$\theta=\frac{\pi}{6}$のとき

レンズの総数 N	10^2	10^3	10^4
レンズ1個当りの曲り角 γ_{II}	1.671×10^{-2}	1.580×10^{-3}	1.572×10^{-4}
規格化曲率半径 $\frac{R_2}{L}$	5.984×10	6.329×10^{2}	6.361×10^{3}
規格化最大軸ずれ量 $\frac{r_{max}}{L}$	6.235×10^{-2}	5.896×10^{-3}	5.866×10^{-4}

$k=6$
$f=3.731L$

表4、モード変換部として円形曲り部を用いた場合の数値設計例 4

$\theta=\frac{3}{4}\pi$のとき

レンズの総数 N	10^2	10^3	10^4
レンズ1個当りの曲り角 γ_{II}	1.636×10^{-2}	1.577×10^{-3}	1.571×10^{-4}
規格化曲率半径 $\frac{R_2}{L}$	6.112×10	6.341×10^{2}	6.365×10^{3}
規格化最大軸ずれ量 $\frac{r_{max}}{L}$	0.4792×10^{-2}	0.4619×10^{-3}	0.4603×10^{-4}

$k=4$
$f=0.2929L$

表1～4の例では、まずθを決めて、Nをパラメータにとったときの曲り部IIの曲率半径R_2および最大軸ずれ量r_{max}を、それぞれ、Lで規格化して表わしたが、式(26)から分るように、焦点距離fで規格化して表わすこともできる。また、他の表わし方も可

能であって、ϕのみが与えられた場合には、kが正の整数となるようにθを定めると、L（またはf）、R_2およびγ_{II}（またはN）のうち2つを自由に選ぶことによって、他の量を決めることもできる。

表5は、表1～4をもとにして、東海道新幹線の最小曲率半径[5]（約3km程度）を仮定して、曲り部を構成した場合の、さらに具体的な数値設計例を示したものである。表5では、$\phi = \frac{\pi}{2}$, $N = 10^3$ および $L = 5m$ と選んである。

表5、モード変換部として円形曲り部を用いた場合の具体的な数値設計例

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3}{4}\pi$
モード変換部のレンズ個数 k	2	3	6	4
焦点距離 f (m)	2.5	5	18.66	1.465
曲り部IIのレンズ1個当りの曲り角 γ_{II} (rad)	1.574×10^{-3}	1.576×10^{-3}	1.580×10^{-3}	1.577×10^{-3}
円形曲り部IIの曲率半径 R_2 (km)	3.177	3.173	3.165	3.171
モード変換部の曲率半径 R_1 (km)	6.354	6.346	6.330	6.342
最大軸ずれ量 r_{max} (mm)	3.935	7.880	29.48	2.310

(2) モード変換部にテーパ曲り部を用いた場合

図4に示されるような、対称的な構成の曲り部を用いて、光ビームを角度Ψだけ曲げる場合の設計法を示す。

曲り部のレンズの総数をNとし、レンズ間隔をLとする。モード変換部のレンズの個数を(1)の場合と同様に、できるだけ少なくするためには、まずθを決めるのが便利である。そのとき、kは条件式(23)から、

$$k = \frac{2P\pi}{\theta} \qquad (P_i \text{ 正の整数}) \qquad \cdots(31)$$

となる。また、焦点距離fとLの比は式(26)で与えられる。

モード変換部の曲り角δは、円形曲り部Ⅱにおけるレンズ1個当りの曲り角γ_{II}を用いて、式(17)から、次のように表わすことができる。

$$\delta = k\gamma_{\mathrm{II}} \qquad \cdots(32)$$

これより、γ_{II}はN、kおよびΨを用いて、

$$\gamma_{II} = \frac{\Psi}{N-k} \qquad \cdots (33)$$

なる値にえらばなければならない。

円形曲り部IIの曲率半径R_{II}および曲り部へ軸上入射した光ビームは、(1)の場合と同様に、Lで規格化すると、次のように表わされる。

$$\frac{R_{II}}{L} = \frac{1}{\gamma_{II}} \qquad \cdots (34)$$

$$\frac{r_{max}}{L} = \frac{\gamma_{II}}{2} \frac{1}{1-\cos\theta} \qquad \cdots (35)$$

（r_{max}：の最大軸ずれ量）

一例として、90°曲り（$\Psi = \frac{\pi}{2}$）の場合に対する設計例を、表6～9に示す。この例では$\theta\left(= \cos^{-1}\left(1-\frac{L}{2}\right)\right)$の値をそれぞれ$\frac{\pi}{2}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{6}$および$\frac{2}{3}\pi$とえらび、それぞれのθの値に対してモード変換部に必要なレンズの個数kを最小となるように設計してある。

この場合も、(1)のときと同様に、Ψのみが与えられているときには、他の表わし方も可能であって、kが正の整数となるようにθを決めると、L（またはγ）、R_{II}およびγ_{II}（またはNからδのいずれか）のうちいずれか2つを自由に選ぶことにより、他の量を決

めることもできる。

表6．モード変換部として直線状テーパ曲り部を用いた場合の数値設計例 1

$\theta=\frac{\pi}{2}$のとき

レンズの総数 N	10^2	10^3	10^4
レンズ1個当りの曲り角 γ_{II}	1.636×10^{-2}	1.577×10^{-3}	1.571×10^{-4}
規格化曲率半径 $\frac{R_{II}}{L}$	6.112×10	6.341×10^{2}	6.365×10^{3}
規格化最大軸ずれ量 $\frac{r_{max}}{L}$	0.8181×10^{-2}	0.7886×10^{-3}	0.7857×10^{-5}

$k=4$
$f=0.5L$

表7．モード変換部として直線状テーパ曲り部を用いた場合の数値設計例 2

$\theta=\frac{\pi}{3}$のとき

レンズの総数 N	10^2	10^3	10^4
レンズ1個当りの曲り角 γ_{II}	1.671×10^{-2}	1.580×10^{-3}	1.572×10^{-4}
規格化曲率半径 $\frac{R_{II}}{L}$	5.984×10	6.329×10^{2}	6.361×10^{3}
規格化最大軸ずれ量 $\frac{r_{max}}{L}$	1.671×10^{-2}	1.580×10^{-3}	1.572×10^{-4}

$k=6$
$f=L$

表8．モード変換部として直線状テーパ曲り部を用いた場合の数値設計例 3

$\theta=\frac{\pi}{6}$のとき

レンズの総数 N	10^2	10^3	10^4
レンズ1個当りの曲り角 γ_{II}	1.785×10^{-2}	1.590×10^{-3}	1.573×10^{-4}
規格化曲率半径 $\frac{R_{II}}{L}$	5.602×10	6.289×10^{2}	6.357×10^{3}
規格化最大軸ずれ量 $\frac{r_{max}}{L}$	6.660×10^{-2}	5.932×10^{-3}	5.868×10^{-4}

$k=12$
$f=3.731L$

表9、モード変換部として直線状テーパ曲り部を用いた場合の数値設計例 4

レンズの総数 N	10^2	10^3	10^4
レンズ1個当りの曲り角 γ_{II}	1.619×10^{-2}	1.576×10^{-3}	1.571×10^{-4}
規格化曲率半径 $\frac{R_{II}}{L}$	6.177×10	6.345×10^{2}	6.365×10^{3}
規格化最大軸ずれ量 $\frac{r_{max}}{L}$	0.5398×10^{-2}	0.5252×10^{-3}	0.5238×10^{-4}

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき
$k_2=3$
$f=0.3333L$

(1)の場合と同じ条件、すなわち、$\psi=\frac{\pi}{2}$, $N=10^3$ および $L=5m$ なる条件のもとに、東海道新幹線の最小曲率半径程度の曲り部を構成した場合の、さらに表10、モード変換部として直線状テーパ曲り部を用いた場合の具体的な数値設計例

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2}{3}\pi$
モード変換部のレンズ個数 k_2	4	6	12	3
焦点距離 $f(m)$	2.5	5	18.66	1.667
曲り部IIのレンズ1個当りの曲り角 $\gamma_{II}(rad)$	1.577×10^{-3}	1.580×10^{-3}	1.590×10^{-3}	1.576×10^{-3}
円形曲り部IIの曲率半径 $R_{II}(km)$	3.171	3.165	3.145	3.173
最大軸ずれ量 $r_{max}(mm)$	3.943	7.900	29.66	2.626

具体的な数値設計例を表10に示す。

4、レンズ状媒質との対応

レンズ列光ビーム導波系は、焦点距離fとレンズ間隔Lとの積fLを一定に保ちつつ、レンズ間隔Lを無限に小さくした極限では、レンズ状媒質からなる光導波系に移行すると考えられる。すなわち、レンズ列光ビーム導波系において、$L \to 0$とすると、式(6)より、

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta \leftrightarrow \sqrt{LC} \qquad \cdots (36)$$

となる[1]。また、この極限では、レンズ番号nとレンズ間隔Lの積nLが、レンズ番号1を規準にとったときの距離zに対応し、

$$nL \leftrightarrow z \qquad \cdots (37)$$

と考えられる。したがって、レンズ状媒質における誘電率の変化率を定める定数gと距離zとの積gzが、レンズ列光ビーム導波系における$n\theta$に対応す

る。すなわち、

$$gz \longleftrightarrow \theta n \qquad \cdots(38)$$

となる。それゆえ、式(36)～(38)の対応関係から、

$$\frac{\theta}{L} \longleftrightarrow g \qquad \cdots(39)$$

となる。この対応関係から明らかなように、レンズ列光ビーム導波系は、レンズ状媒質からなる光導波系を特別な場合として含むものであるといえる。

事実、本稿で導いたすべての理論式において、$nL \Rightarrow z$ および $\frac{\theta}{L} \Rightarrow g$ とおきかえた結果は、筆者等が先にレンズ状媒質からなる光導波系の円形曲り部の設計法に関して導いた結果と完全に対応することが容易に確かめられる。

以上の結果、レンズ状媒質で提案された曲り部の構成法は、さらに広い適用範囲を持つことがわかる。

5、あとがき

近軸近似の範囲で、幾何光学的に、レンズ列光ビ

ーム導波系の円形曲り部を伝搬する光ビームのふるまいを検討した結果、直線部ⅠおよびⅡと円形曲り部Ⅱの間に、比較的簡単なモード変換部をそう入することにより、曲り部と直線部のレンズの軸を合わせたままで、任意の入射条件の光ビームに対して、円形曲り部の影響を除去できることがわかった。さらに、この方法は直線部の軸上を軸と平行に伝搬する光ビームに対して、円形曲り部Ⅱにおけるビーム行路の脈動を除去する条件ともなっていることが、知られた。

なお、本方法は、ガスレンズや集束性光ファイバ（SELFOC）のようなレンズ状媒質からなる光導波系の円形曲り部に対して、筆者等が先に考案した方法を、レンズ列光ビーム導波系の場合に拡張適用したものである。レンズ状媒質からなる光導波系は、伝送光ビーム波に対し、連続的な集束効果を与える、いわゆる連続的集束系であるのに対して、レンズ列

光ビーム導波系は、離散的な集束効果を与える、離散的集束系である。一般に、離散的集束系は、連続的集束系をその特別の場合として含むと考えられるから、レンズ列光ビーム導波系は、レンズ状媒質からなる光導波系を、連続的集束系から離散的集束系に一般化したものであるとみなすことができる。したがって、本文で検討した曲り部の構成法は、連続的集束系から離散的集束系への一種の拡張であり、本文で取り扱ったレンズ列光ビーム導波系以外の他の離散的集束系、たとえば、反射鏡列光導波系の場合に対しても、同様に適用し得る可能性が、考えられる。

6、文献

(1) D. Marcuse: "Propagation of Light Rays throgh a Lens-Waveguide with Curved Axis", Bell Syst. Tech. J., 43 P741 (1964)

(2) 沢新之輔，熊谷信昭："レンズ状媒質からなる曲り導波系の設計方法に関する一提案"，信学論(B)（技術談話室）52-B，11，P718（昭44-11）

(3) 沢新之輔，熊谷信昭："レンズ状媒質からなる光導波系の円形曲り部の設計理論"，信学論(B) 54-B，9，P550（昭46-09）

(4) 沢新之輔："レンズ状媒質からなる光ビーム導波系のテーパ曲りに関する波動光学的考察"，信学論(B) 55-B，1，P1（昭47-01）

(5) 長嶋秀世，米沢宣義，末松安晴，"東京－大阪間光導波系のシミュレーション"，昭46，電気学会全国大会，187.

輻射科学研究会資料

非等速運動を行なっている媒質中の電磁界について

田中嘉津夫
(大阪大学工学部)

昭和47年 12月 1日

1. まえがき

運動媒質中の電磁界に関する研究については，プラズマ工学，電波天文学等の発達とあいまって，多くの研究者によって論議され，種々の興味ある結果が得られている。(1)～(3) しかしながら，そのほとんどは，媒質，または観測者が等速運動をしている場合，すなわち慣性系に存在する場合を取り扱ったものである。したがって，その場合には特殊相対論を考慮すれば十分であった。これに対して観測者が非等速度運動をしている場合，すなわち非慣性系に存在する場合には，いわゆる一般相対論的な考慮が必要となる。このような問題に関しては，最近 Andersonおよび Ryon (4),(5)が非慣性系中に媒質，または観測者が存在する場合の電波伝搬について考察し，とくに位相速度についてくわしく論じている。また，M_0 (6),(7)は，観測量という観点から出発して，前者とはちがった定式化を試み，理論を具体的な問題に適用している。さらに，工学的応用として，回転運動を行なっているリングレーザー中での光波のビート周波数が，一般相対論を考慮した電磁界理論から導かれることも示されている。(8)

しかし，これらの諸論文は，いずれも条件が限られた場合のものや，近似解を用いたもので，厳密解を用いた詳しい議論や，等価な重力場の電波伝搬に対する影響等のくわしい議論はまだなされてないようである。本報告では，Møllerの変換で与えられるような，加速度運動を行なっている媒質中での電磁界について，初等関数で表わしうる厳密解を求め，その性質について等速運動の場合と関連づけて詳しく論じている。そして，観測者が非慣性系にいるときは，その解が最も簡単な型の計量をもつ非永久重力場におかれた媒質中での解になっており，等価重力場による光線のわん曲，および，Doppler-shift がすべてエネルギー関係式から導かれること，観測者が慣性系にいる場合は，よく知られたエネルギー速度および位相速度の加法則が得られること，等を示している。

2. 基礎理論

一般相対性理論によれば，計量テンソルが $g_{\mu\nu}$ で与えられる Riemann 空間における Maxwell の方程式は，計量テンソルを含まない型式で次式のように与えられる。†(9)

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} = 0 \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \qquad (\mu, \nu, \sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{1b}$$

ここで，x^{ν} は座標成分

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct \tag{2}$$

を表わし，c は真空中における光速度を表わす。また $F_{\mu\nu}$ は2階反対称共変テンソル，$\mathcal{H}^{\mu\nu}$ は2階反対称反変テンソル密度を表わし，任意の座標変換

$$x^{\mu} = x^{\mu}(x'^{\nu}) \tag{3}$$

に対して，それぞれ

$$F_{\mu'\nu'} = A^{\rho}_{\mu'} A^{\sigma}_{\nu'} F_{\rho\sigma} \tag{4a}$$

$$|A^{\lambda'}_{\kappa}| \mathcal{H}^{\mu'\nu'} = A^{\mu'}_{\rho} A^{\nu'}_{\sigma} \mathcal{H}^{\rho\sigma} \tag{4b}$$

のように変換される。ここで，

$$A^{\rho}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}}, \qquad A^{\mu'}_{\rho} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \tag{5}$$

であり，$|A^{\lambda'}_{\kappa}|$ は $\det(A^{\lambda'}_{\kappa})$ の絶対値である。したがって，Maxwell の方程式(1)は任意の座標変換(3)に対し，共変となることがわかる。

また，$F_{\mu\nu}$，$\mathcal{H}^{\mu\nu}$ をそれぞれ

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & E_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & E_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{bmatrix} \tag{6a}$$

$$\mathcal{H}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -cD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -cD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -cD_z \\ cD_x & cD_y & cD_z & 0 \end{bmatrix} \tag{6b}$$

---

†) テンソルの指標で，上方についた指標は反変成分，下方についた指標は共変成分を表わし，指標で同じものが二つ現われたときは，それに関して和をとるものとする。指標およびテンソル演算に関する詳しい規則は文献(9)および(10)を参照されたい。

に対応させれば式(1)は，それぞれよく知られた通常のベクトル型式の Maxwell方程式

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}\,, \qquad \mathrm{div}.\,\mathbb{B} = 0 \tag{7a}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{H} = \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}\,, \qquad \mathrm{div}.\,\mathbb{D} = 0 \tag{7b}$$

となる。計量テンソル g_{ij} で与えられる Riemann 空間中に静止している媒質に対する構成関係式は，局所慣性系(9)でよく知られた Minkowski の関係式

$$\mathbb{D} = \varepsilon_0 \varepsilon^* \mathbb{E}\,, \quad \mathbb{B} = \mu_0 \mu^* \mathbb{H} \tag{8}$$

が成立するという仮定のもとに，上式を Riemann 空間に一般化することにより，次式のように与えられる。(4)(5) ここで ε^*, μ^* は，それぞれ，媒質の比誘電率および比透磁率である。

$$\mu^* H^{\rho\sigma} = \eta\, g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} F_{\alpha\beta} \tag{9a}$$

$$\varepsilon^* \sqrt{-g}\,\eta F_{\rho t} = g_{\rho\alpha}\, g_{t\beta} H^{\alpha\beta} \tag{9b}$$

ただし，$g = \det.(g_{ij})$，$\eta = \sqrt{\varepsilon_0}$，$(\alpha, \beta, \rho, \sigma = 1, 2, 3)$

上記のような構成関係式は，加速度運動にともなう慣性力が媒質を構成している分子間の力に比べて十分小さく，加速度運動が媒質固有の性質に影響をおよぼさないという仮定のもとに導かれるものであって，Minkowski 型式の最も単純な拡張と考えられる。

(3) 波動方程式

慣性系 K系(X, Y, Z, CT)に対し，加速度運動している媒質の静止L系(x, y, z, ct)を考え，K系とL系との変換則は次式のような，いわゆる Møller の変換で与えられるものとする。†(10)

$$X = \frac{c^2}{g}(\cosh\theta - 1) + x\cosh\theta \tag{10a}$$

$$Y = y\,, \qquad Z = z \tag{10b}$$

† 慣性系から加速系への変換については，まだ問題が残されており，必ずしも一意的に式(10)で与えられるわけではない。本報告では，この問題には言及しないが，式(10)に対しては，Maxwell の方程式の厳密解が得られ，種々の結果をその解から導き出すことができる。変換(10)に関するくわしい議論は文献(10)を参照されたい。

$$T=\frac{c}{g}\sinh\theta-\frac{x}{c}\sinh\theta \qquad (10c)$$

ただし，$\theta=\frac{g}{c}t$であり，gは後に述べる局所慣性系から見た媒質の加速度で，K系から見れば$x=0$という面の加速度である。(10)

式(10)は，$gt/c\ll 1$の場合は，よく知られているNewtonの変換則

$$X=x+\frac{1}{2}gt^2,\quad Y=y,\quad Z=z,\quad T=t$$

に一致することがわかる。式(10)から変数tを消去すれば，媒質の各点のK系での軌跡が得られる。すなわち

$$X=\frac{c^2}{g}\left[\left\{\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2+g^2T^2/c^2\right\}^{1/2}-1\right] \qquad (11a)$$

$$Y=y,\qquad Z=z \qquad (11b)$$

となり，媒質の各点は，K系に対し，$T=0$で$X=x$, $Y=y$, $Z=z$なる点を速度0で出発し，X軸方向に双曲線運動していくことがわかる(10)。ただし，媒質の各点のK系での速度は式(10)から

$$v=\left.\frac{dX}{dT}\right|_{x=\text{const.}}=c\tanh\theta \qquad (12)$$

で与えられ，tのみの関数で表わされるが，K系から見れば媒質は，Lorentz収縮のために変形してゆくように見える。加速系L系での線素は，式(10)から

$$ds^2=g_{ij}dx^i dx^j=dx^2+dy^2+dz^2-c^2\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2dt^2 \qquad (13)$$

で与えられ，したがって，L系は重力スカラーポテンシャル

$$G=-\frac{c^2}{2}(g_{44}+1)=gx\left(1+\frac{gx}{2c^2}\right) \qquad (14)$$

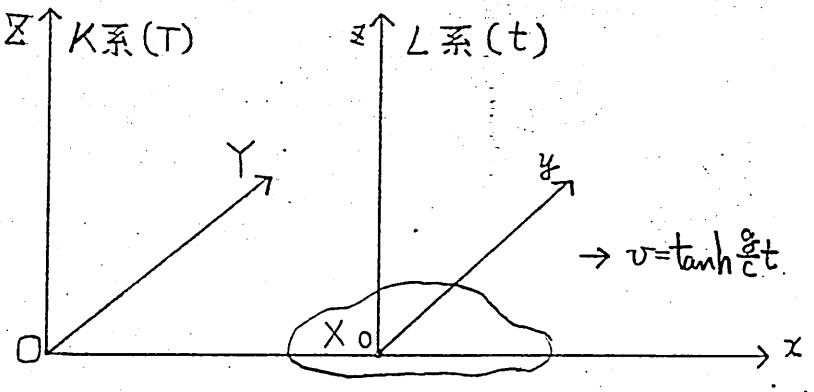


図1．慣性系K系(X,Y,Z,T)および加速系(x,y,z,t)

で与えられる非永久重力場と等価である。[10]ただし，この式(13)の計量で与えられるL系においては，$x=-c^2/g$ において特異面が現われることに注意しなければならない。しかし，原点付近，すなわち $gx \ll c^2$ では，重力場は一定と考えることができ，また，物理的に意味があるのは原点付近であると考えられる。

さて，いま，K系において，真空中のX，Z面に入射面をもつ2次元平面波を考えよう。ただし，電界Eが入射面に垂直な場合すなわちY軸成分のみをもつ場合(TE波)を考える。TH波の場合にも全く同様に議論を進めることができる。さて，TE波の場合，式(6)は

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0, & \sin\zeta, & 0, & 0 \\ -\sin\zeta, & 0, & -\cos\zeta, & 1 \\ 0, & \cos\zeta, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \end{bmatrix} E_0 f\left(\frac{X\sin\zeta+Z\cos\zeta}{c}-T\right) \tag{15a}$$

$$\mathcal{H}^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0, & \sin\zeta, & 0, & 0 \\ -\sin\zeta, & 0, & -\cos\zeta, & -1 \\ 0, & \cos\zeta, & 0, & 0 \\ 0, & 1 & 0, & 0 \end{bmatrix} \eta E_0 f\left(\frac{X\sin\zeta+Z\cos\zeta}{c}-T\right) \tag{15b}$$

と書ける。ただし，E_0 は一定の振巾，ζ は波の進行方向とX軸とのなす角であり，f は適当な条件を満たす任意関数である。式(15)は，もちろんMaxwellの方程式およびK系における真空中での構成関係式を満足している。式(15)の解をもとにして，L系に比誘電率 ε^*，比透磁率 μ^* の媒質が静止している場合を考えよう。式(13)を式(9)に代入して得られる構成関係式は

$$\mu^* H = \eta\left(1+\frac{gx}{c^2}\right) C B \tag{16a}$$

$$\varepsilon^* E = \frac{1}{\eta}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right) C D \tag{16b}$$

となり，計量テンソル g_{44} 成分はあたかも媒質が不均質になったように影響する。したがって，L系に静止している媒質中での電波伝搬は，構成関係式が式(16)で与えられる不均質媒質中でのそれと形式的に全く同じになる。式(16)および(1)より，Dyに関する波動方程式を求めると

$$(1+\frac{gx}{c^2})\frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2}+(1+\frac{gx}{c^2})^2\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2}+\frac{3g}{c^2}(1+\frac{gx}{c^2})\frac{\partial D_y}{\partial x}+\frac{g^2}{c^4}D_y=\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} \quad (17)$$

が得られる。ただし $n=(\mu^*\varepsilon^*)^{1/2}$ である。波動方程式(17)は，計量が

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-\frac{c^2}{n^2}(1+\frac{gx}{c^2})^2dt^2 \quad (18)$$

で与えられる Riemann 空間中での，真空中の波動方程式と同じであり，[11] また，計量(18)は，座標変換(10)において $t\to t/n$ とすれば，Minkowski 空間から得られる。したがって，Maxwell の方程式の共変性から，波動方程式の解は，式(15)の電磁界を，$t\to t/n$ とした座標変換(10)にしたがって変換すれば得られることがわかる。すなわち，計量(13)で与えられる空間中に静止している媒質中での電磁界は，演算(4)を実行して，次のように得られる。

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0, & \sin\zeta\cosh\psi-\sinh\psi, & 0, & 0, \\ \sinh\psi-\sin\zeta\cosh\psi, & 0, & -\cos\zeta, & \frac{1}{n}(1+\frac{gx}{c^2})(\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi) \\ 0, & \cos\zeta, & 0, & 0, \\ 0, & \frac{1}{n}(1+\frac{gx}{c^2})(\sin\zeta\sinh\psi-\cosh\psi), & 0, & 0, \end{bmatrix}$$
$$\cdot E_0 f(\phi) \quad (19a)$$

$$\mathcal{H}^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0, & \frac{1}{\mu^*}(1+\frac{gx}{c^2})(\sin\zeta\cosh\psi-\sinh\psi), & 0, & 0, \\ \frac{1}{\mu^*}(1+\frac{gx}{c^2})(\sinh\psi-\sin\zeta\cosh\psi), & 0, & -\frac{1}{\mu^*}(1+\frac{gx}{c^2})\cos\zeta, & \frac{\mu^*}{n}(\sin\zeta\sinh\psi-\cosh\psi) \\ 0, & \frac{1}{\mu^*}(1+\frac{gx}{c^2})\cos\zeta, & 0, & 0, \\ 0, & \frac{\mu^*}{n}(\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi), & 0, & 0, \end{bmatrix}$$
$$\cdot\eta E_0 f(\phi) \quad (19b)$$

ここで ϕ は位相を表わし，$t\to t/n$ とおいた式(10)を式(15)に代入することにより，次のように与えられる。

$$\phi=\frac{c}{g}(1+\frac{gx}{c^2})(\sin\zeta\cosh\psi-\sinh\psi)+\frac{z}{c}\cos\zeta-\frac{c}{g}\sin\zeta \quad (20)$$

ただし $\psi=gt/nc$ である。

式(19)がMaxwellの方程式の解であることは，その共変性から明らかである。また式(19)は，$g_t \to 0$のとき

$$B_z = \frac{1}{c} E_0 f\left(\frac{x\cos\zeta - y\sin\zeta}{c} - \frac{t}{n}\right)$$

に対応する波動である。したがって，ζは初期条件 $t=T=0$ における等位相面とx軸とのなす角度である。

4. エネルギー速度および位相速度

まず，以上求めた解がL系でのエネルギー，運動量保存則を満たすことを示そう。計量テンソルが g_{ij} で与えられるRiemann空間中でのエネルギー，運動量保存則は，

$$\frac{\partial m_\nu^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} m^{\rho\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} = 0 \qquad (21)$$

で与えられる。[9] ここで m_ν^μ はエネルギー・運動量テンソルで

$$m_\nu^\mu = -F_{\nu\sigma} H^{\mu\sigma} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \qquad (22)$$

で与えられる。ただし

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & : \mu = \nu \\ 0 & : \mu \neq \nu \end{cases}$$

式(22)は，式(6)を代入すればわかるように，形式的には，よく知られた慣性系でのそれと同じ形になり

$$m_4^4 = w = \frac{1}{2} c (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) \qquad (23a)$$

$$m_4^i = s^i = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})^i \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (23b)$$

$$m_j^i = T_j^i = \frac{1}{2} c (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) \delta_j^i - c(E_i D_j + H_i B_j)$$

$$i, j = 1, 2, 3 \qquad (23c)$$

$$m_j^4 = g_j = c^2 (\mathbf{D}\times\mathbf{B}) \qquad (23d)$$

で与えられ，それぞれ，電磁界のエネルギー密度，Poyntingベクトル，応力テンソル，運動量密度を表わしている。式(21)において，$\nu=4$ はエネルギー保存則を表わし，今の問題では，g_{44}が時間に依存しないので

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\, \mathcal{S} = 0 \qquad (24)$$

と書くことができる。式(19)を式(23)に代入すると，L系でのエネルギー密度 w，および Pynting ベクトル $\mathcal{S}$ は

$$w = \frac{\varepsilon_0}{\mu^*}\left(1+\frac{g_x}{c^2}\right)(\cosh\psi - \sin\zeta \sinh\psi)^2 E_0^2 f^2(\phi) \qquad (25a)$$

$$S_x = \frac{\eta}{n\mu^*}\left(1+\frac{g_x}{c^2}\right)^2(\cosh\psi - \sin\zeta\sinh\psi)(\cosh\psi\sin\zeta - \sinh\psi)E_0^2 f^2(\phi) \qquad (25b)$$

$$S_z = \frac{\eta}{n\mu^*}\left(1+\frac{g_x}{c^2}\right)^2 \cos\zeta\,(\cosh\psi - \sin\zeta\sinh\psi)E_0^2 f^2(\phi) \qquad (25c)$$

となり，明らかに式(24)を満足している。$\nu = 1 \sim 3$ は運動量保存則を表わし，この場合は，g_{44} が x に依存するので，$\nu = 1$ の場合，重力場の影響が現われる。このことは式(21)に式(19)を代入することによっても確められる。

次に，エネルギー速度 u_e を次式で定義すると†

$$u_e = \frac{\mathcal{S}}{w} \qquad (26)$$

式(25)からその成分は

$$u_{ex} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{g_x}{c^2}\right)\frac{\sin\zeta\cosh\psi - \sinh\psi}{\cosh\psi - \sin\zeta\sinh\psi} \qquad (27a)$$

$$u_{ez} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{g_x}{c^2}\right)\frac{\cos\zeta}{\cosh\psi - \sin\zeta\sinh\psi} \qquad (27b)$$

で与えられるから，その合成は

$$u_e^2 = u_{ex}^2 + u_{ez}^2 = \frac{c^2}{n^2}\left(1+\frac{g_x}{c^2}\right) \qquad (28)$$

で与えられ，$n=1$ の場合，すなわち真空の場合は，線素(13)で $d\sigma^2 = 0$ とおいて得られる光速

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = c\left(1+\frac{g_x}{c^2}\right) \qquad (29)$$

に等しくなる。式(20)で与えられる位相 Φ が一定であるような面の速度を位相速度 u_p と定義すると，その成分は(付録参照)

$$u_{px} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{g_x}{c^2}\right)\frac{\cosh\psi - \sin\zeta\sinh\psi}{\sin\zeta\cosh\psi - \sinh\psi} \qquad (30a)$$

---

†)以後 g_{44} 以外は，添字はテンソルの指標を表わさない。

$$u_{pz} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\frac{\cosh\psi - \sin\zeta \sinh\psi}{\cos\zeta} \qquad (30b)$$

で与えられ，その合成は

$$\frac{1}{u_p^2} = \frac{1}{u_{px}^2} + \frac{1}{u_{pz}^2} = \frac{c^2}{n^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2} \qquad (31)$$

となり，エネルギー速度に一致する。また式(27)，(30)から次の関係

$$\sqrt{u_p u_e} = \sqrt{u_{px} u_{ex}} = \sqrt{u_{pz} u_{ez}} = \frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right) \qquad (32)$$

が成り立つこともわかる。Poyntingベクトルの方向とx軸との作す角度 χ_1 は

$$\tan\chi_1 = \frac{S_z}{S_x} = \frac{u_{ez}}{u_{ex}} = \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta\cosh\psi - \sinh\psi} \qquad (33)$$

で与えられ，また等位相面とx軸との作す角 χ_2 は

$$\tan\chi_2 = \frac{u_{pz}}{u_{px}} = -\frac{\sin\zeta\cosh\psi - \sinh\psi}{\cos\zeta} \qquad (34)$$

で与えられるから，Poyntingベクトルと等位相面とは互いに直交していることがわかる。したがって，ζをパラメータとする直線群，すなわち $\psi = \text{const.}$ なる等位相面に直交する曲線群は，L系における光線の軌跡（ray-path）を表わすと考えられる。この曲線群は，簡単に求めることができて

$$\left(x+\frac{c^2}{g}\right)^2 + (z-\xi)^2 = \lambda \qquad (35)$$

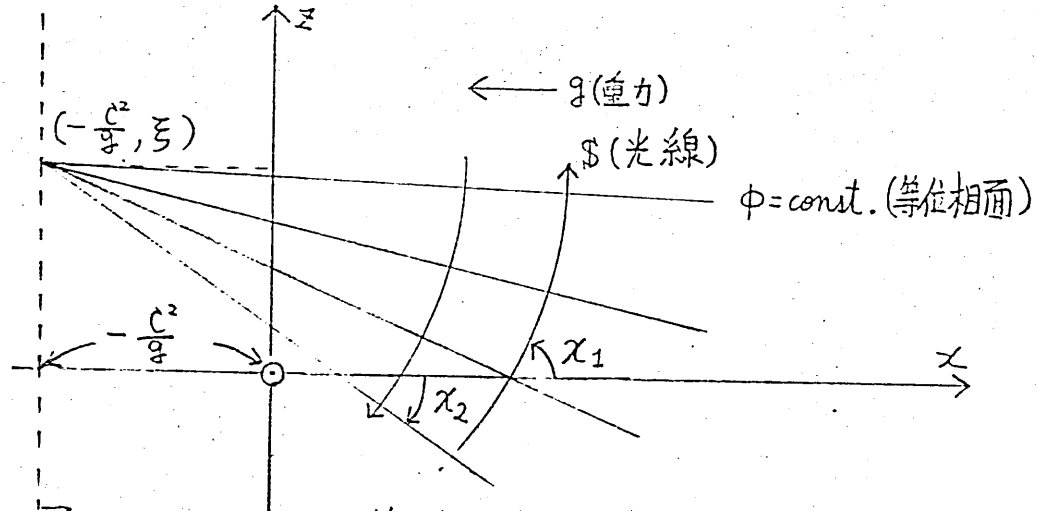


図2. L系における等位相面および Poyntingベクトルの方向

で与えられる。ただし

$$\xi = (\mathrm{const.} + \frac{\zeta}{g}\sin\zeta)/\cos\zeta \qquad (36)$$

α：任意定数

すなわち，式(35)は，特異面上の座標$(-c^2/g\,;\,\xi)$を中心とする円群を表わしている。$g=0$のときこれらは直線となることを考慮すると，これは加速度運動にともなう非永久重力場式(14)によって光線が わん曲されることを表わしていると考えられ，またその ray-path は円弧で与えられることがわかる。(図2)さらに屈折率nが式(35)に現われないことから，線素(13)で与えられる非永久重力場による光のわん曲は媒質に無関係であることがわかる。また曲線群(35)は，静的重力場中における Fermat の原理(12)

$$\delta\int \frac{dl}{\sqrt{-g_{44}}} = 0 \qquad (37)$$

を満足することを示すこともできる。

4. 逆変換

L系で求めた以上の電磁界は，慣性系K系から見てどのように表わされるかを調べてみよう。そのためには式(10)の逆変換

$$x = \frac{c^2}{g}\left\{\frac{g}{c^2}\left(X+\frac{c^2}{g}\right)^2 - \left(\frac{gT}{c^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{c^2}{g} \qquad (38a)$$

$$y = Y, \qquad z = Z \qquad (38b)$$

$$t = \frac{c}{g}\tanh^{-1}\frac{cT}{X+c^2/g} \qquad (38c)$$

にしたがって，演算(4)を実行すればよい。式(10)および$v = c\tanh\theta$.であることを考慮し，結果のみを示すと

$$E_Y = \frac{1}{n}\gamma(1+n\beta\sin\rho)(\cosh\psi - \sin\zeta\sinh\psi)E_0 f(\phi) \qquad (39a)$$

$$B_X = \frac{1}{c}\cos\zeta\, E_0 f(\phi) \qquad (39b)$$

$$B_Z = \frac{1}{cn}\gamma(n\sin\rho+\beta)(\cosh\psi - \sin\zeta\sinh\psi)E_0 f(\phi) \qquad (39c)$$

$$H_Z = \frac{\eta}{\mu^*}\gamma(\sin\rho+n\beta)(\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi)E_0 f(\phi) \quad (39d)$$

$$H_X = \frac{\eta}{\mu^*}\cos\zeta\, E_0 f(\phi) \quad (39e)$$

$$D_Y = \frac{\eta}{c\mu^*}(n+\beta\sin\rho)(\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi)E_0 f(\phi) \quad (39f)$$

ただし

$$\sin\rho = \frac{\sin\zeta\cosh\psi-\sinh\psi}{\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi}$$

$$\gamma(t) = 1/\sqrt{1-\beta^2(t)} = \cosh\theta, \quad \beta = v(t)/c \quad (40)$$

である。式(39)で $n=1$ とおけば真空の場合であるから式(15)に一致する。式(39)からわかるように K での電磁界は，よく知られた運動媒質の構成関係式(9)

$$\mathbb{D} + \frac{1}{c^2}\{v(t)\times\mathbb{H}\} = \varepsilon_0\varepsilon^*\{\mathbb{E}+v(t)\times\mathbb{B}\} \quad (41a)$$

$$\mathbb{B} - \frac{1}{c^2}\{v(t)\times\mathbb{E}\} = \mu_0\mu^*\{\mathbb{H}-v(t)\times\mathbb{D}\} \quad (41b)$$

を満足している。式(39)の電磁界がK系でのMaxwellの方程式を満足していることは，その共変性から明らかである。K系でのエネルギー密度 W および Poynting ベクトル S を求めると

$$\overline{W} = \frac{\eta}{c\mu^* n}\gamma^2(1+n\beta\sin\rho)(n+\beta\sin\rho)(\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi)^2 E_0^2 f^2(\phi) \quad (42a)$$

$$S_Z = \frac{\eta}{n\mu^*}\gamma(1+n\beta\sin\rho)\cos\zeta(\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi)E_0^2 f^2(\phi) \quad (42b)$$

$$S_X = \frac{\eta}{n\mu^*}\gamma^2(1+n\beta\sin\rho)(n\beta+\sin\rho)(\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi)^2 E_0^2 f^2(\phi) \quad (42c)$$

で与えられ，したがってエネルギー速度 U_e は

$$U_{eX} = \frac{S_X}{W} = c\,\frac{n\beta+\sin\rho}{n+\beta\sin\rho} \quad (43a)$$

$$U_{eZ} = \frac{S_X}{W} = c\,\frac{\cos\rho}{\gamma(n+\beta\sin\rho)} \quad (43b)$$

で与えられる。ただし

$$\cos\rho = (1-\sin^2\rho)^{\frac{1}{2}} = \frac{\cos\zeta}{\cosh\psi - \sin\zeta\sinh\psi} \qquad (44)$$

である。この式は，後に述べるように，よく知られたエネルギ速度の加法則を表わしている。また K 系での位相速度 U_P は，式(38)を式(20)に代入することによって得ることができ(付録)，次式のように与えられる。

$$U_{PX} = c\,\frac{1+n\beta(t)\sin\rho}{n\sin\rho+\beta(t)} \qquad (45a)$$

$$U_{PZ} = c\,\frac{\gamma(t)\{1+n\beta(t)\sin\rho\}}{n\cos\rho} \qquad (45b)$$

これは，同じく示すように，位相速度の加法則を表わしている。

5. Doppler-shift および観測量

加速系L系は，非永久重力場と等価であることから，いわゆる光の伝搬において，前述の光線の わん曲の外に，重力場による Doppler shift または，重力赤方(青方)変位がおこるはずである。前節までに求めた電磁界からこの現象がどのように記述されるか述べてみよう。

5.1 Pound-Rebka の実験

いま，Doppler-shift の実験のモデルとして Pound-Rebka の実験[13]を考えよう。(図3)

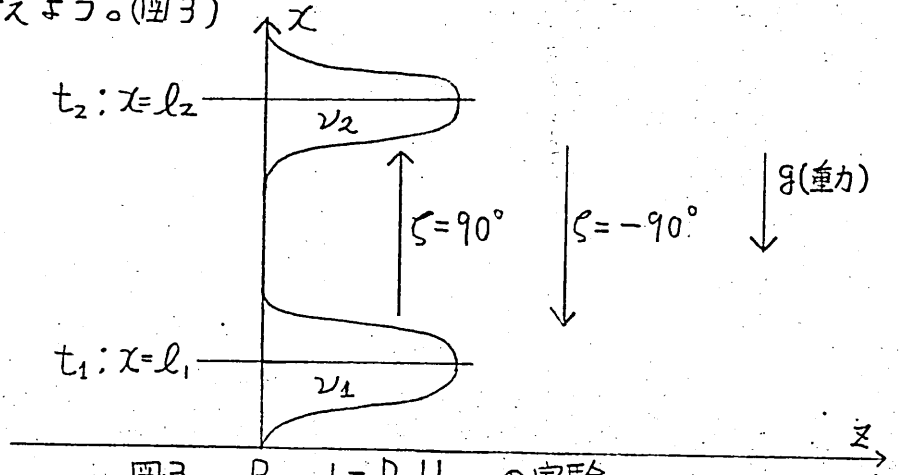


図3. Pound-Rebka の実験

すなわち座標時間 $t=t_1$ に $x=l_1$ か振動数 ν_1，したがってエネルギー $E_1=h\nu_1$ の光子を x 方向に発射し，つぎに座標時間 t_2 に $x=l_2$ においてその光子を観測する。観測される光子の振動数 ν_2 は，よく知られているように(10)

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{\sqrt{-g_{44}(l_2)}}{\sqrt{-g_{44}(l_1)}}=\frac{1+\frac{gl_2}{c^2}}{1+\frac{gl_1}{c^2}} \tag{46}$$

で与えられ，またそのエネルギーは $E_2=h\nu_2$ で与えられる。(9) ここで h はプランクの定数である。この現象を，電磁エネルギーを用いて説明するために，任意関数 $f(\Phi)$ として次のようなパルス波形を考え(14)，先に述べた1個の光子のエネルギー $E=h\nu$ を，そのパルス波の y,z 方向単位巾に存在するエネルギーに対応させる。すなわち

$$f(\Phi)=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\Phi^2} \tag{47}$$

とする。(図 4)

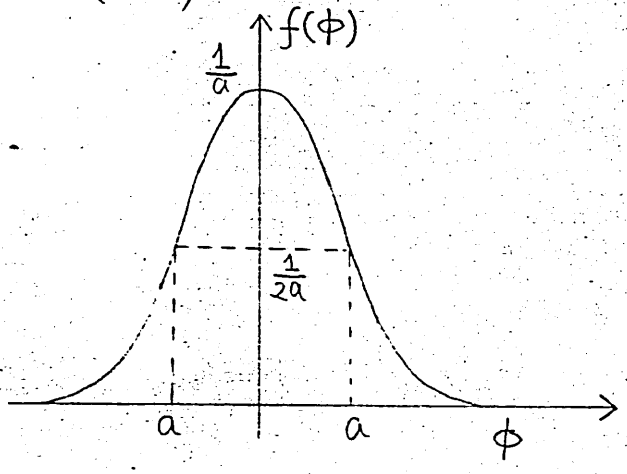


図 4. パルス波形

ここで，a はパルス波形を決定するパラメータであり a を十分小さくすれば $f(\Phi)$ は十分するどいパルス波形となり，光子はほとんど $\Phi=0$ 付近に存在すると考えてよい。また簡単のために，$\zeta=\pm 90°$，すなわち波動が x 軸に平行に進行する場合を取りあつかう。ここで $\zeta=90°$ のときは波動が x 軸の正方向，すなわち重力場の方向に進行する場合，$\zeta=-90°$ のときは波動が重力場と反対方向に進行する場合に対応する。(図3) このパルスのエネルギー密度は，式(25a)で与えられるから，時間 $t=t_1$ における y,z 方向単位巾に存在するエネルギー E は次式で与えられる。

$$E(t_1)=\frac{\varepsilon_0}{\mu^*}E_0^2\,e^{\pm 2\psi_1}\int_0^l\int_0^l\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)f^2(\Phi)\,dy\,dz\,dx \tag{48}$$

ただし

$$\phi = \frac{1}{c} e^{\pm \psi_1} x, \quad \psi_1 = \frac{g}{nc} t_1 \tag{49}$$

である。式(47)を上式に代入すると，積分は留数定理により簡単に計算できて(15)

$$E(t_1) = \frac{\varepsilon_0}{M^*} E_0^2 \tag{50}$$

となる。すなわちエネルギーは一定となって，$\nu = E/h$ で与えられる振動数 ν も一定となり，式(46)で与えられるような Doppler-shift を説明することができない。これは式(25)で表わされているエネルギーが，古典論的にいえば，重力場のポテンシャルエネルギーも含んでいるからである。したがって，式(19)で与えられるL系における電磁界も，実際にL系の各点において観測できる量に対応していないことがわかる。このことは，t が固有時間を表わしていないことからも明らかである。

5.2 局所慣性系

一般相対論によれば，Minkowski 空間でない一般 Riemann 空間での観測可能量(物理量)というものは，局所的なものしか意味がなく；観測者に設置された局所慣性系での量であることが知られている。(9) 今の問題では，$t = t_0$ という座標時刻では，媒質が $v_0 = \tanh\theta_0$ という速度で x 方向に運動していることを考慮すると，$t = t_0$ におけるL系に静止している観測者の局所慣性系として，K系に対して，速度 v_0 で等速運動している座標系 $\bar{K}$ 系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \overline{ct})$ を用いることができる。したがって，$t = t_0$ という座標時間に，L系に静止している観測者が測定できる物理量は，$\bar{K}$ 系での量で与えられる。K系と $\bar{K}$ 系との座標変換は，特殊 Lorentz 変換で与えられる。すなわち

$$X = \cosh\theta_0 \cdot \bar{x} + c \sinh\theta_0 \bar{t} \tag{51a}$$

$$Y = \bar{y}, \qquad Z = \bar{z} \tag{51b}$$

$$T = \frac{1}{c} \sinh\theta_0 \bar{x} + \cosh\theta_0 \bar{t} \tag{51c}$$

ただし

$$\theta_0 = \frac{g}{c} t_0$$

$\bar{K}$ 系における電磁界量は，式(51)にしたがってK系での電磁界量(39)を変換すればよい。変換(51)に対する変換係数は

$$A^{\mu}_{\nu}=\begin{bmatrix}\cosh\theta_0, & 0, & 0, & \sinh\theta_0, \\ 0, & 1, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & 0, \\ \sinh\theta_0, & 0, & 0, & \cosh\theta_0\end{bmatrix} \tag{52}$$

となるから，演算（4）を実行すると，$t=t_0$ における L 系に静止している観測者の観測量，すなわち K系の電磁系として，次式が得られる。

$$E_{\bar{y}} = \frac{1}{n}(\cosh\psi_0 - \sin\zeta\sinh\psi_0)E_0 f(\phi_0) \tag{53a}$$

$$B_{\bar{z}} = \frac{1}{c}\cos\zeta E_0 f(\phi_0) \tag{53b}$$

$$B_{\bar{z}} = \frac{1}{c}(\sin\zeta\cosh\psi_0 - \sinh\psi_0)E_0 f(\phi_0) \tag{53c}$$

$$D_{\bar{y}} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon^*}{n}(\cosh\psi_0 - \sin\zeta\sinh\psi_0)E_0 f(\phi_0) \tag{53d}$$

$$H_{\bar{x}} = \frac{\eta}{\mu^*}\cos\zeta E_0 f(\phi_0) \tag{54e}$$

$$H_{\bar{z}} = \frac{\eta}{\mu^*}(\sin\zeta\cosh\psi_0 - \sinh\psi_0)E_0 f(\phi_0) \tag{54f}$$

ただし

$$\phi_0 = \phi|_{t=t_0}$$

上式からもわかるように，K系での構成関係式は，第一節で仮定したとおり

$$\mathbb{D} = \varepsilon_0\varepsilon^*\mathbb{E}, \quad \mathbb{B} = \mu_0\mu^*\mathbb{H} \tag{55}$$

となっていることがわかる。また エネルギー密度 $\overline{w}$ および Poynting ベクトル $\overline{\mathbb{S}}$ は

$$\overline{w} = \frac{\varepsilon_0}{\mu^*}(\cosh\psi_0 - \sin\zeta\sin\psi_0)^2 E_0^2 f^2(\phi_0) \tag{56a}$$

$$\overline{S}_{\bar{x}} = \frac{\eta}{n\mu^*}(\sin\zeta\cosh\psi_0 - \sinh\psi_0)(\cosh\psi_0 - \sin\zeta\sinh\psi_0)E_0^2 f^2(\phi_0) \tag{56b}$$

$$\overline{S}_{\bar{z}} = \frac{\eta}{n\mu^*}\cos\zeta(\cosh\psi_0 - \sin\zeta\sinh\psi_0)E_0^2 f^2(\phi_0) \tag{56c}$$

で与えられるから，エネルギー速度 $\overline{u}_e$ は

$$\overline{u}_{e\bar{x}} = \frac{\overline{\Delta x}}{\overline{\omega}} = \frac{c}{n}\,\frac{\sin\zeta\cosh\psi_0 - \sinh\psi_0}{\cosh\psi_0 - \sin\zeta\sinh\psi_0} = \frac{c}{n}\sin\rho_0 \qquad (57a)$$

$$\overline{u}_{e\bar{z}} = \frac{\overline{\Delta z}}{\overline{\omega}} = \frac{c}{n}\,\frac{\cos\zeta}{\cosh\psi_0 - \sin\zeta\sinh\psi_0} = \frac{c}{n}\cos\rho_0 \qquad (57b)$$

で与えられる。したがって $t=t_0$ において L 系で観測できる波動のエネルギー速度は，

$$\overline{u}_e^2 = \overline{u}_{e\bar{x}}^2 + \overline{u}_{e\bar{z}}^2 = \frac{c^2}{n^2} \qquad (58)$$

で与えられる。また前節の式(43)を式(57)を用いて書き直すと

$$U_{eX} = \frac{\overline{u}_{e\bar{x}} + v(t)}{1 + v(t)\cdot\overline{u}_{e\bar{x}}/c^2} \qquad (59a)$$

$$U_{eZ} = \frac{\overline{u}_{e\bar{z}}}{\gamma(t)\{1 + v(t)\,\overline{u}_{e\bar{x}}/c^2\}} \qquad (59b)$$

となって，これは，よく知られたエネルギー速度の加法則[10]を表わしている。また K 系での位相速度も，式(51)を式(20)に代入することによって，θ_0 および ψ_0 が定数になることを考慮することによって，次のように求められる。(付録)

$$\overline{u}_{p\bar{x}} = \frac{c}{n}\,\frac{\sin\zeta\sinh\psi_0 - \cosh\psi_0}{\sinh\psi_0 - \sin\zeta\cosh\psi_0} = \frac{c}{n\sin\rho_0} \qquad (60a)$$

$$\overline{u}_{p\bar{z}} = \frac{c}{n}\,\frac{\sin\zeta\sinh\psi_0 - \cosh\psi_0}{\cos\zeta} = \frac{c}{n\cos\rho_0} \qquad (60b)$$

したがって，$t=t_0$ において L 系で観測できる波動の位相速度は，

$$\frac{1}{\overline{u}_p^2} = \frac{1}{\overline{u}_{p\bar{x}}^2} + \frac{1}{\overline{u}_{p\bar{z}}^2} = \frac{n^2}{c^2} \qquad (61)$$

となり，エネルギー速度に一致する。また前節の式(45)を式(60)を用いて書き直すと

$$U_{PX} = \frac{\bar{u}_{e\bar{x}} + v(t)}{1 + v(t)\,\bar{u}_{p\bar{x}}/c^2} \tag{62a}$$

$$U_{PZ} = \gamma(t)\left\{\bar{u}_{p\bar{z}} + v(t)\,\bar{u}_{p\bar{z}}/u_{p\bar{x}}\right\} \tag{62b}$$

となり，これも，よく知られた位相速度の加法則[10]を表わしている。

5.3 Doppler-shift

以上の $t=t_0$ という時刻での観測量，すなわち $\bar{x}$ 系での量を使えば前述の Doppler-shift は次のように矛盾なく説明できる。すなわち $t=t_1$ において観測できるエネルギー密度 $\bar{w}$ が式(56a)のように与えられるから，$t=t_1$ における前述のパルスにともなうエネルギー $\bar{E}(t_1)$ は，$\sin\zeta = \pm 1$ とおいて，次のように求められる。

$$\bar{E}(t_1) = \frac{\varepsilon_0}{\mu^*} E_0^2 e^{\pm 2\phi_1} \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\phi_1)\, d\bar{x}\, d\eta\, d\bar{x} \tag{63}$$

ただし，　$\phi_1 = \phi|_{t=t_1}$

この積分も，前述の場合と同様にして留数定理により簡単に計算でき

$$\bar{E}(t_1) = \frac{\varepsilon_0}{\mu^*} E_0^2\, e^{\pm\psi_1} \tag{64}$$

となる。ここで複号は，＋が $\zeta = 90°$ に，－が $\zeta = -90°$ に対応する。同様に，$t=t_2$ における観測量は

$$\bar{E}(t_2) = \frac{\varepsilon_0}{\mu^*} E_0^2\, e^{\pm\psi_2} \tag{65}$$

ただし

$$\psi_2 = \frac{\omega}{nc} t_2 \tag{66}$$

となる。また，このパルス波が $x=\ell_1$ から $x=\ell_2$ まで進行するのに要する時間 $(t_2 - t_1)$ は，エネルギー速度が式(31)で与えられるから，$\zeta = 90°$ および $\zeta = -90°$ の場合について

$$t_2 - t_1 = \frac{n}{c}\int_{\ell_1 \text{ or } \ell_2}^{\ell_2 \text{ or } \ell_1} \frac{1}{1+\frac{gx}{c^2}}\,dx = \frac{c}{ng}\ln\left|1+\frac{gx}{c^2}\right|\Bigg|_{x=\ell_1 \text{ or } \ell_2}^{x=\ell_2 \text{ or } \ell_1} \qquad (67)$$

で与えられる。したがって $\bar{\nu}_1 = \bar{E}(t_1)/h$, $\bar{\nu}_2 = \bar{E}(t_2)/h$ で定義される光子の振動数の比は

$$\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{\nu}_2} = \frac{\bar{E}(t_1)}{\bar{E}(t_2)} = e^{\pm\frac{g}{nc}(t_1-t_2)} = \frac{1+\frac{g\ell_2}{c^2}}{1+\frac{g\ell_1}{c^2}} \qquad (68)$$

となり式(46)に一致する。 $g\ell_1/c^2 \ll 1$, $g\ell_2/c^2 \ll 1$ のNewton近似では

$$\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{\nu}_1} = 1 - \frac{g}{c^2}(\ell_2 - \ell_1) \qquad (69)$$

となり，Pound－Rebkaが使用した式になる。また，式(68)の右辺が屈折率 n を含まないことから，線素(13)で与えられる非永久重力場中でのDoppler－shiftは，媒質の影響を受けないこともわかる。以上の結果は幾何光学的近似[11]とも矛盾しない。

6. むすび

Møllerの変換で与えられるような，加速度運動をしている媒質中での電磁界について，一般座標変換を用いて，Maxwell方程式の解を求め，その性質についてくわしく論じた。観測者が非慣性系中にいるときは，その解から，等価重力場による光線のわん曲，および，Doppler－shiftが得られ，またそれらは媒質の影響を受けないことを示した。また，観測者が慣性系にいるときは，よく知られたエネルギー速度の加法則および，位相速度の加法則が得られることも示した。媒質が分散性の場合や，他の加速度運動，たとえば，回転運動の場合等についての解析は，別の機会に報告する予定である。

謝辞，終りに，日頃ご指導いただく大阪大学工学部熊谷信昭教授に深謝する。また，常々ご討論いただく熊谷研究室ならびに板倉研究室の諸氏に感謝する。

文 献

(1) C. Yeh; "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medium", J.Appl.Phys., 36, 11, p.3513(Nov.1965).

(2) K.S.H.Lee and C.H.Papas;"Antenna radiation in a moving dispersive medium", IEEE Trans., AP-13, p.799(Sept.1965).

(3) T.Shiozawa and N.Kumagai;"Total reflection at the interface between relatively moving media", Pro.IEEE(Letters), 55, 7, p.1243(July 1967).

(4) J.L.Anderson and J.W.Ryon;"Electromagnetic radiation in accelerated systems", Phys.Rev., 181, 5 ,p.1765(may 1969).

(5) J.W.Ryon and J.L.Anderson;"Electromagnetic wave propagation in a linearly accelerating relativistic dielectric", Phys.Rev.,D, 2, 12, p.2745(Dec.1970).

(6) T.C.Mo;"Theory of electrodynamics in media in noninertial frames and applications", J.Math.Phys., 11, 8, p.2589(Aug. 1970).

(7) T.C.Mo:"Electromagnetic wave propagation in a uniformly accelerated simple medium", Radio Science, 6, 6, p.673(Jun. 1971).

(8) E.J.Post;"Sagnac effect", Rev.Mod.Phys., 39, 2,p.475(Apr. 1967).

(9) T.Yamanouchi,R.Utiyama and T.Nakano;"Theory of general relativity and gravitation", Syokabo, Tokyo(1967).

(10) C.Møller;"The theory of relativity", Oxford Univ.Press, London(1952).

(11) J.L.Synge;"Relativity, The general theory", p.376 North-Holland Publishing Co.,Amsterdam(1960).

(12) ランダウ，リフシッツ；"場の古典論"，東京図書(1966).

(13) R.V.Pound and G.A.Rebka,Jr.;"Apparent weight of photons", Phys.Rev.Letters 4, 337(1960).

(14) L.M.Brekhovski;"Waves in layered media", p.122, Academic Press(1960).

[15] 小川英一，鈴木俊雄，藤岡弘；"パルス波と運動誘電体媒との相互作用"，輻研資(昭47－01).

付　録

L系（x，y，z，t），K系（X，Y，Z，T）系および下系（ξ，η，ζ，τ）における位相速度は次のように求められる。

（L系）
位相項は

$$\phi = \frac{c}{g}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)(\sin\zeta\cosh\psi+\sinh\psi)+\frac{z}{c}\cos\zeta-\frac{c^2}{g} \quad (A-1)$$

で与えられるから，$\phi = const.$ として x，z，および t に関する微分を行なうと，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot dt=0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot dz+\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot dt=0 \quad (A-2)$$

式（A－1）から

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{c}(\sin\zeta\cosh\psi-\sinh\psi) \quad (A-3a)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\cos\zeta\ ,\ \frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)(\sin\zeta\sinh\psi-\cosh\psi)\qquad(A-3b)$$

したがって位相速度 u_{px}, u_{pz} は

$$u_{px}=\frac{dx}{dt}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\frac{1}{\sin\rho}\qquad(A-4a)$$

$$u_{pz}=\frac{dz}{dt}=\frac{c}{n}\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\frac{1}{\cos\rho}\qquad(A-4b)$$

ただし

$$\sin\rho=\frac{\sin\zeta\cosh\psi-\sinh\psi}{\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi}\ ,\quad\cos\rho=\frac{\cos\zeta}{\cosh\psi-\sin\zeta\sinh\psi}\qquad(A-5)$$

（K系）

同様に $\phi=$ const. として X および T に関する微分を行なうと

$$\frac{\partial\phi}{\partial X}dX+\frac{\partial\phi}{\partial T}dT=0\ ,\ \frac{\partial\phi}{\partial Z}dZ+\frac{\partial\phi}{\partial T}dT=0\qquad(A-6)$$

また

$$\frac{\partial\phi}{\partial X}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial X}\qquad(A-7a)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial T}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial T}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial T}\qquad(A-7b)$$

また式（43）から

$$\frac{\partial x}{\partial X}=\cosh\theta\ ,\ \frac{\partial t}{\partial X}=-\frac{\sinh\theta}{c\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)}\qquad(A-8a)$$

$$\frac{\partial t}{\partial T}=\frac{\cosh\theta}{\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)}\ ,\quad\frac{\partial x}{\partial T}=-c\sinh\theta\qquad(A-8b)$$

式（A－8）および式（A－7）を式（A－6）に代入すると位相速度 U_{px}, U_{pz} は

$$U_{pX} = \frac{dX}{dT} = c\,\frac{1 + n\beta(t)\sin\rho}{n\sin\rho + \beta(t)} \qquad (A\text{-}9a)$$

$$U_{pZ} = \frac{dZ}{dT} = c\,\frac{\gamma(t)\{1 + n\beta(t)\sin\rho\}}{n\cos\rho} \qquad (A\text{-}9b)$$

（$\bar{K}$系）
同様に $\phi = \text{const.}$ として $\bar{x}$ および $\bar{t}$ に関する微分を行なうと

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}}d\bar{x} + \frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}d\bar{t} = 0\ ,\quad \frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}d\bar{z} + \frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}}d\bar{t} = 0 \qquad (A\text{-}10)$$

また

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}} = \frac{\partial\phi}{\partial X}\bigg|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial X}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\phi}{\partial T}\bigg|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial T}{\partial\bar{x}} \qquad (A\text{-}11a)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial\phi}{\partial Z}\bigg|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial Z}{\partial\bar{z}}\ ,\quad \frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}} = \frac{\partial\phi}{\partial X}\bigg|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial X}{\partial\bar{t}} + \frac{\partial\phi}{\partial T}\bigg|_{t=t_0}\cdot\frac{\partial T}{\partial\bar{t}} \qquad (A\text{-}11b)$$

また式（55）から

$$\frac{\partial X}{\partial\bar{x}} = \cosh\theta_0\ ,\quad \frac{\partial T}{\partial\bar{x}} = \frac{1}{c}\sinh\theta_0\ ,\quad \frac{\partial T}{\partial\bar{t}} = \cosh\theta_0 \qquad (A\text{-}12a)$$

$$\frac{\partial X}{\partial\bar{t}} = c\sinh\theta_0\ , \qquad (A\text{-}12b)$$

式（A－12），（A－11）および（A－7）を（A－10）に代入すると
$\bar{K}$系における位相速度 $u_{p\bar{x}}$，$u_{p\bar{z}}$ は

$$\bar{u}_{p\bar{x}} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{1}{n\sin\rho_0} \qquad (A\text{-}13a)$$

$$\bar{u}_{p\bar{z}} = \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \frac{1}{n\cos\rho_0} \qquad (A\text{-}13b)$$

ただし

$$\sin\rho_0 = \sin\rho\Big|_{t=t_0} \qquad \text{(A-14a)}$$

$$\cos\rho_0 = \cos\rho\Big|_{t=t_0} \qquad \text{(A-14b)}$$

輻射科学研究会資料

導波管開口からの放射に及ぼす運動磁化プラズマ層の影響

内海三郎
小嶋敏孝
板倉清保
(大阪大学・工学部)

1972年12月1日

1. まえがき

プラズマで囲まれた波源からの放射問題は、宇宙空間プラズマ内の飛しょう体からの電磁波によるプラズマの測定、あるいはプラズマ中の波動の伝搬特性の測定等にかかわる重要な問題として種々の観点から解析された結果が報告されてきた。このような問題のうちでスラブあるいはシースのような境界面で囲まれた磁化プラズマ層内のスロットアンテナからの放射に関しては、スロットと静磁界が平行の場合をHodaraら[1]が、垂直の場合をShoreら[2]が、また、静磁界が二次元開口面に垂直の場合をHodara[3]が解析している。

さらに、最近の宇宙開発の進展にともない、将来の問題として、プラズマが相対論的速度で運動している場合にまで拡張された研究結果が数多く発表されている。運動する等方、あるいは無限大磁化プラズマシースでおおわれた無限長スロットからの放射に関しては、いくつかの研究結果が報告されており[4]~[8]、それらをより一般化した場合の解析もなされている[9]。

本稿では、以上の問題をさらに一般化したモデルで取り扱ったものである。波源としては、いままで無限長のスロットを仮定してきたが、ここでは方形導波管開口を、基本モードTE$_{10}$で励振する場合を考えた。また、静止プラズマに対する解析もいまだなされていないので、この場合も含めて、プラズマパラメータと速度パラメータの変化による放射パターンの変化を三次元的に解析することにより、新しい興味ある結果を得たのでここに報告する。

2 運動磁化プラズマ層内の電磁界

考察する問題の構成図を図1に示す。x-z面は完全導体面で、媒質Ⅰは磁化プラズマで媒質Ⅱは自由空間である。また、プラズマ層は厚さがdで静磁界B_0と平行な方向(z方向)に相対論的な速度vで進行するものとする。静磁界の方向にz軸をとり、完全導体面上にサイズがa×bの方形導波管開口を設け、z軸方向にのみ電界成分を有するTE$_{10}$モードで励振するものとする。また波源の時間変化を$\exp(j\omega t)$とする。なお以下の解析にあたって、開口面での電界の分布はプラズマの存在によって変化をうけないものと仮定する。

媒質Ⅰのプラズマは平均化された巨視的な誘電率テンソルで記述されるものとし、いまそれをプラズマの静止系(k'系)で次式のように表わす。

$$\bar{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1' & -j\varepsilon' & 0 \\ j\varepsilon' & \varepsilon_1' & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3' \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ただし、

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\Omega_p'^2}{1-\Omega_c'^2}\right) \qquad (2.1)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_0\left(\frac{\Omega_c'\,\Omega_p'^2}{1-\Omega_c'^2}\right) \qquad (2.2)$$

$$\varepsilon_3' = \varepsilon_0\left(1-\Omega_p'^2\right) \qquad (2.3)$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega_p' &= \frac{\omega_p'}{\omega'} \\ \Omega_c' &= \frac{\omega_c'}{\omega'} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

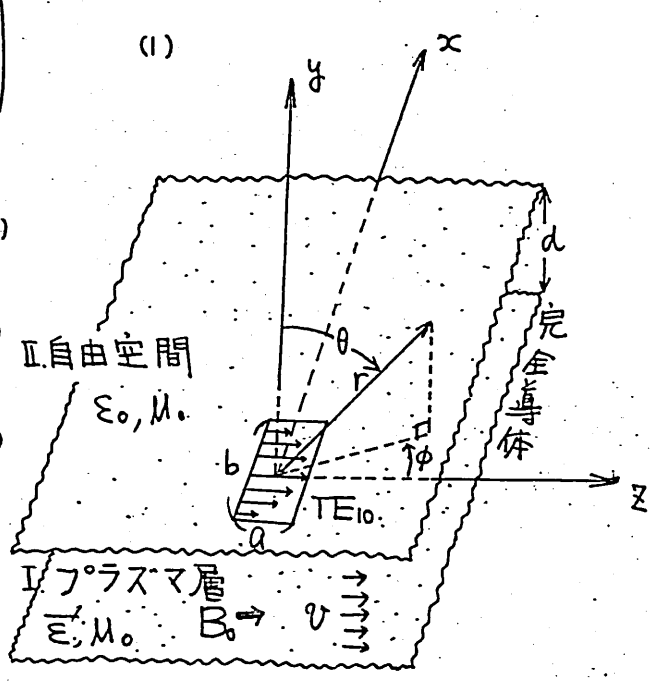


図1. 構成図

′は媒質Ⅰの静止系（K′系）の量であることを示している。つまり、ω_p', ω_c', ω'はK′系に関するプラズマ角周波数，サイクロトロン角周波数，信号角周波数であり、ε_0は自由空間の誘電率である。またプラズマの透磁率は自由空間の透磁率（μ_0）と等しいものとする。

プラズマのK′系における巨視的構成関係式 $D_1'=\varepsilon' E_1'$, $B_1'=\mu_0 H_1'$ の電磁界ベクトルに対してLorentz変換を施せば波源の静止系（K系）における構成式を得ることができる。[11] K系におけるMaxwellの式と構成式から領域Ⅰ内の波動方程式が得られるが、いま全ての電磁界を、

$$\begin{Bmatrix} E \\ H \end{Bmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{H} \end{Bmatrix} e^{-jk_x x - jk_z z}\, dk_x dk_z \qquad (4)$$

なるフーリエ積分で表示すれば、異動磁化プラズマ中で $\tilde{E}_{1z}$, $\tilde{H}_{1z}$ に対して次のような結合波動方程式が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_e^2\right)\tilde{E}_{1z} = -j\omega\mu_0 f_0 \tilde{H}_{1z} \qquad (5.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_h^2\right)\tilde{H}_{1z} = j\omega\varepsilon_3' f_0 \tilde{E}_{1z} \qquad (5.2)$$

ただし

$$k_e^2 = k_3^2 e - k_x^2 \quad , \quad k_h^2 = k_0^2 h - k_x^2 \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
k_0^2 &= \varepsilon_0\mu_0\omega^2 \quad , \quad k_3^2 = \varepsilon_3'\mu_0\omega^2 \\
e &= \delta(Q^2-Q_0^2)(\chi_0^2-\chi^2)^2/a \\
h &= \varphi(Q^2-Q_0^2)(\chi_0^2-\chi^2)^2/a \\
a &= S_0^2(\chi_0^2-\chi^2)^2 - k_0^2\delta\varphi \\
\delta &= (\chi_0\tau_0+\chi\tau)(\chi_0 Q_0+\chi Q)+(\chi_0 Q+\chi Q_0)(\chi_0\tau+\chi\tau_0) \\
\varphi &= (\chi_0 d_0+\chi d)(\chi_0 Q_0+\chi Q)+(\chi_0 Q+\chi Q_0)(\chi_0 d+\chi d_0) \\
f_0 &= S_0(Q^2-Q_0^2)(\chi_0^2-\chi^2)^3/a
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$S_0 = (Q\chi_0 + Q_0\chi)$$

$$Q_0 = \frac{k_0^2}{(\chi_0^2-\chi^2)^2}\left\{(\chi_0\tau+\chi\tau_0)(\chi_0\alpha+\chi\alpha_0)+(\chi_0\tau_0+\chi\tau)(\chi_0\alpha_0+\chi\alpha)\right\}$$

$$Q = 1-\frac{k_0^2}{(\chi_0^2-\chi^2)^2}\left\{(\chi_0\tau+\chi\tau_0)(\chi_0\alpha_0+\chi\alpha)+(\chi_0\tau_0+\chi\tau)(\chi_0\alpha+\chi\alpha_0)\right\}$$

また．

$$\begin{pmatrix}\chi\\ \chi_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_z+k_0\Omega\\ k_0\Omega_0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha_0\end{pmatrix} = \frac{1-\beta^2}{(1-n^2\beta^2)^2-n_0^4\beta^4}\begin{pmatrix}n^2(1-n^2\beta^2)+n_0^4\beta^2\\ n_0^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\tau\\ \tau_0\end{pmatrix} = \frac{1-\beta^2}{(1-n^2\beta^2)^2-n_0^4\beta^4}\begin{pmatrix}1-n^2\beta^2\\ n_0^2\beta^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Omega\\ \Omega_0\end{pmatrix} = \frac{\beta}{(1-n^2\beta^2)^2-n_0^4\beta^4}\begin{pmatrix}(n^2-1)(1-n^2\beta^2)+n_0^4\beta^2\\ -n_0^2(1-\beta^2)\end{pmatrix} \qquad (8)$$

$$\beta = v/c,\quad n^2 = c^2\mu_0\varepsilon_1',\quad n_0^2 = c^2\mu_0\varepsilon',\quad n_3^2 = c^2\mu_0\varepsilon_3' \qquad (9)$$

であり、cは自由空間中の光速である。

式(5)はスカラー関数 $\Psi_i = \tilde{\tilde{E}}_{1z} + j\sigma_i\tilde{\tilde{H}}_{1z}$ $(i=1,2)$ を導入することにより、Ψ_1, Ψ_2 について独立な二つの偏微分方程式に還元することができ、それを解くと次式のように $\tilde{\tilde{E}}_{1z}$, $\tilde{\tilde{H}}_{1z}$ が求まる。

$$\tilde{\tilde{E}}_{1z} = \frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\left\{\sigma_2(A_1e^{-j\beta_1(y-d)}+A_2e^{+j\beta_1(y-d)})-\sigma_1(B_1e^{-j\beta_2(y-d)}+B_2e^{+j\beta_2(y-d)})\right\} \qquad (10.1)$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{1z} = \frac{j}{\sigma_2-\sigma_1}\left\{(A_1e^{-j\beta_1(y-d)}+A_2e^{+j\beta_1(y-d)})-(B_1e^{-j\beta_2(y-d)}+B_2e^{+j\beta_2(y-d)})\right\} \qquad (10.2)$$

ただし、σ_i $(i=1,2)$ は式(11)の根であり、β_i は式(12)で与えられる。

$$\omega\varepsilon_3'f_0\sigma_i^2 - (k_x^2-k_e^2)\sigma_i - \omega\mu_0f_0 = 0 \qquad (11)$$

$$\gamma_i^2 = k_e^2 + \sigma_i \omega \varepsilon_3 \mu_0 = k_R^2 + \frac{\omega \mu_0 \sigma_0}{\sigma_i} \qquad (12)$$

$\tilde{E}_{1x}$, $\tilde{E}_{1y}$, $\tilde{H}_{1x}$, $\tilde{H}_{1y}$ は式(10)を用いて Maxwell の式から求まる。一方自由空間中での電磁界は、プラズマ内の場合と同様に、x, z についての二重のフーリエ変換を行って求めると、

$$\tilde{\tilde{E}}_{2z} = C e^{-jp(y-d)} \qquad (13.1)$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{2z} = D e^{-jp(y-d)} \qquad (13.2)$$

ただし、

$$p^2 = k_0^2 - k_z^2 - k_x^2 \qquad (14)$$

であり、他の成分 $\tilde{\tilde{E}}_{2x}$, $\tilde{\tilde{E}}_{2y}$, $\tilde{\tilde{H}}_{2x}$, $\tilde{\tilde{H}}_{2y}$ は式(13)と Maxwell の式から求まる。さらにここに用いた A_1, A_2, B_1, B_2, C, D なる未定係数は境界条件より定まる。

つぎに境界条件について述べる。
最初の仮定から、$y=0$ の開口部分においては

$$\begin{aligned} E_{1x} &= 0 \\ E_{1z} &= \frac{V_0}{a} \cos\frac{\pi}{b}x \qquad |x| \leqq \frac{b}{2} \\ &= 0 \qquad |x| > \frac{b}{2} \end{aligned} \qquad (15)$$

であり、V_0 は開口のモード電圧の最大値である。また自由空間とプラズマ層の境界面では、電磁界の接線成分は連続でなければならない。式(4)にもとづいて、電磁界のフーリエ変換を行うと以上の境界条件は結局次のようになる。

$y=0$ で $\tilde{\tilde{E}}_{1x} = 0$

$$\tilde{\tilde{E}}_{1z} = b \cdot 2\pi \cdot V_0 \frac{\sin k_z a/2}{k_z a/2} \frac{\cos k_x b/2}{\pi^2 - (k_x b)^2} \qquad (16)$$

$y=d$ で

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{E}}_{1x} &= \tilde{\tilde{E}}_{2x} \quad , \quad \tilde{\tilde{E}}_{1z} = \tilde{\tilde{E}}_{2z} \\ \tilde{\tilde{H}}_{1x} &= \tilde{\tilde{H}}_{2x} \quad , \quad \tilde{\tilde{H}}_{1z} = \tilde{\tilde{H}}_{2z} \end{aligned} \tag{17}$$

以上の条件より、A_1, A_2, B_1, B_2, C, D は決定でき、電磁界を完全に記述することができる。

3. 放射電磁界

自由空間中の放射界 E_{2z}, H_{2z} は前節の各領域での電磁界に境界条件を用いると、次式の積分で表示される。

$$\begin{Bmatrix} E_{2z} \\ H_{2z} \end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} g_e(k_x, k_z) \\ g_h(k_x, k_z) \end{Bmatrix} e^{-j(k_x x + k_z z + py)} dk_x dk_z \tag{18}$$

ただし、g_e, g_h は境界条件から求まる係数で、式(2)，v，k_x および k_z の非常に煩雑な関数になるので、その具体的な形は省略する。

式(18)の積分は二次元問題と同様に、停留位相の方法を二度連続に適用することにより近似計算できる。そこで、つぎのような変数変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \\ \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \sin\xi \\ \cos\xi \end{pmatrix} \tag{20}$$

を施し、γ-ξ 平面上での積分に書きかえる。また、式(2)に含まれる ω' は

$$\omega' = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} (\omega - k_z v) \tag{21}$$

であることに注意して、$k_0 r \gg 1$ なる条件のもとで式(18)を計算すると、結局つぎのようになる。

$$\begin{Bmatrix} E_{2z} \\ H_{2z} \end{Bmatrix} = \frac{-j}{2\pi} \frac{k_0 \cos\theta}{r} e^{-jk_0 r} \begin{Bmatrix} g_e(\eta_s, \xi_s) \\ g_h(\eta_s, \xi_s) \end{Bmatrix} \tag{22}$$

ただし (η_s, ξ_s) は停留点を表わし

$$\eta_s = -k_0 \sin\theta \quad , \quad \xi_s = \phi + \pi \tag{23}$$

で与えられる。したがって、これに対する k_{xs}, k_{zs} はつぎのようになる。

$$k_{xs} = k_0 \sin\theta \sin\phi \quad , \quad k_{zs} = k_0 \sin\theta \cos\phi \tag{24}$$

式(22)に求めた電磁界成分を球座標で表わすとポインティングベクトル S は r 方向成分のみとなり、その時間平均 $\bar{S}_r$ は次式で与えられる。

$$\bar{S}_r = \frac{k_0^2}{8\pi r^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} \frac{\cos^2\theta}{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi} \left[|g_e|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} |g_h|^2 \right] \tag{25}$$

式(25)のうち角度に依存する項を $G(\theta, \phi)$ とすれば、$G(\theta, \phi)$ は規格化された放射電力密度を表わし、つぎのようになる。

$$G(\theta, \phi) = \frac{\cos^2\theta}{1 - \sin^2\theta \cos^2\phi} \left[|g_e|^2 + \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} |g_h|^2 \right] \tag{26}$$

4. 放射パターンと検討

本節では $G(\theta,\phi)$ の数値計算例をいくつか示し、その検討を行う。まず波源については、開口部分の長さが半波長のせまいスロットと考える。つまり式(16)において $k_0 a/2 \ll 1$, $b=\lambda_0/2$ (λ_0 は自由空間波長) であるとする。

プラズマパラメータと運動速度による放射パターンの変化を三次元的に表わすために、$\phi=0°$ のyz平面, $\phi=90°$ のzx平面, および $\phi=45°$ の平面での $G(\theta,\phi)$ の計算結果を図2, 図3, および図4に示す。計算に際しては、プラズマ層の厚さ $k_0 d$ を一定にしておいて、正規化プラズマ角周波数 $\Omega_p=\omega_p/\omega$, 正規化サイクロトロン角周波数 $\Omega_c=\omega_c/\omega$ および運動速度 β を適当に選んだ。

図2は $\phi=0°$ の面での放射パターンで Ω_p を一定 ($\Omega_p=0.8$) にしておいて、Ω_c を変えた場合の結果である。図2(a)は静止の場合で $\Omega_c=0.1$, 0.5 のパターンの形と、$\Omega_c=0.7\sim1.5$ の形はかなり異なっている。この原因は、

$$\Omega_p^2+\Omega_c^2=1 \qquad (27)$$

なる条件によって与えられる高部ハイブリッド共鳴[10]が、$\Omega_p=0.8$, $\Omega_c=0.6$ でおこっているためである。また、$\theta=0°$ 方向への放射は Ω_c の変化に対して一定であることも示されている。(Ω_c を一定にして Ω_p を変えた場合の結果は省略する。) 図2(b)は $\beta=0.2$ の場合で、他のパラメータは、図2(a)の場合と同じに選んである。両者を比較すると $\Omega_c=0.1$ では放射パターンの形はプラズマの運動によってわずかしか変わらないが、$\Omega_c=0.5$, 0.7, 0.9 ではかなり変形しており、ある角度で $G(\theta,\phi)$ が急激に減少する零点が生じ、その後激しい振動があることがわかる。一方 $\Omega_c=1.5$ ではこのような零点や振動はおこらず、パターンは運動方向によっている。

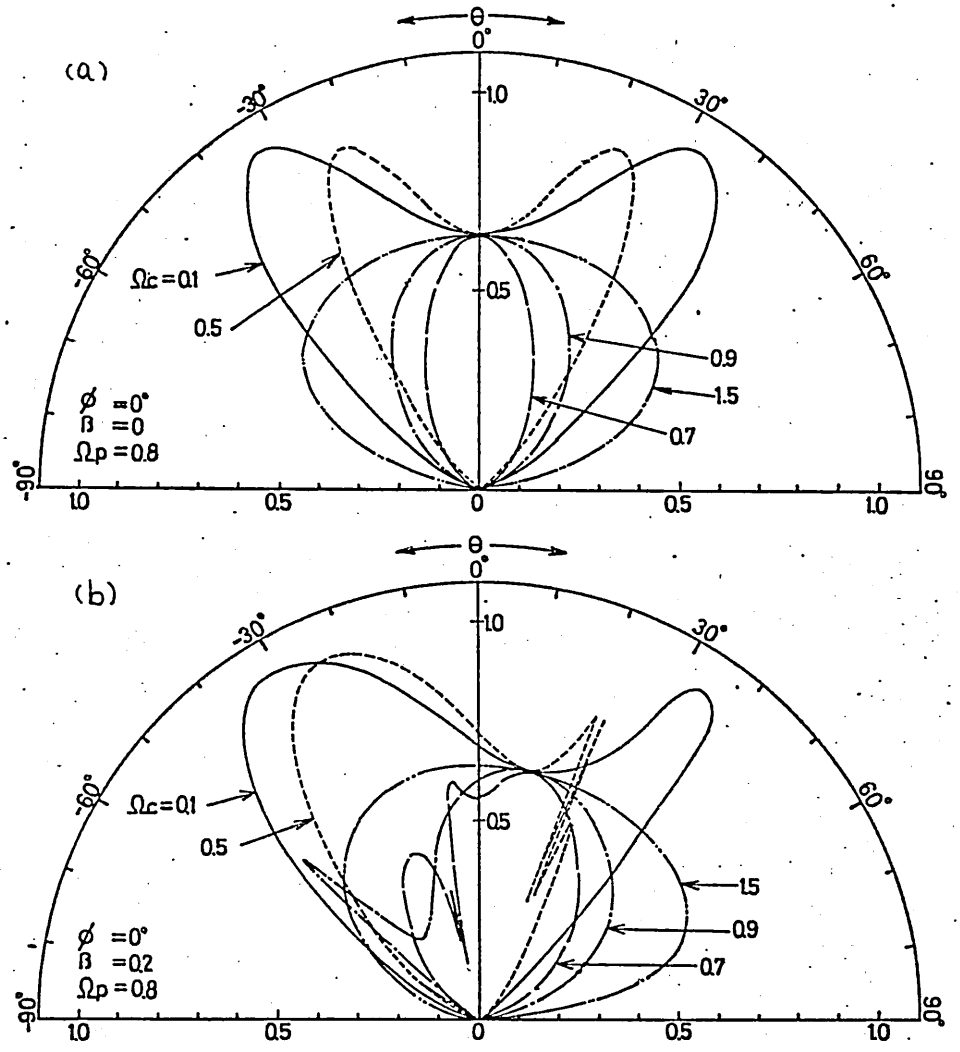


図2. 放射パターン（$\phi = 0°$ の場合）

このような零点や振動はプラズマが運動している場合、$\phi = 45°$ の面でのパターンにも現われており、静止の場合にはみられない特異なもので、これについてはあとでのべる。

つぎに $\phi = 90°$ の面での放射パターンは図3のようになる。図3(a)では媒質が等方性（$\Omega_c = 0$）の場合の運動速度によるパターンの変化を示してある。パターンは対称形をなしており、速度の増大とともにパターンは単に拡がっているだけである。また特に、静止の場合（$\beta = 0$）は、Ω_c がどんな値をとっても、パターンの形、

および大きさはここに示したものと同じになり．したがって．静磁界B_0の存在によって特徴づけられる異方性の影響は現われない．しかし$\beta=0.2, 0.4$になると．図3(b)．図3(c)に示すようにΩ_cの値により異方性の影響が顕著に現われてくる．この影響は速度とともに増大する．また速度が一定の場合．Ω_cがある値のとき（例えば．図3(c)の$\beta=0.4, \Omega_c=0.7$の場合）パターンが大きく変形する．しかし、この場合は零点や振動は生じない．この原因についてもあとで述べる．

つぎに$\phi=45°$の面での放射パターンは図4のようになる。図4(a)は$\beta=0$の場合の計算例であるが．$\phi=0°$および$\phi=90°$の場合と異なり．放射パターンの非対称性が顕著に現われており．異方性の影響が示されている．また$\phi=0°$の場合と同様に．$\beta=0$では式(7)を満たすΩ_c（$\Omega_p=0.8, \Omega_c=0.6$）をさかいに．パターンの形はかわり、零点や振動は生じないが、$\beta=0.2, 0.4$では．パターンが変形すると同時に．ある角度で零点を生び．その点から運動方向に向った小さな角度範囲で激しい振動がおこる。零点を生じる角度をθ_hとして．その近傍で角度を細分して計算すると．激しく振動しており．また．振動の周期はθ_hに近いところほど小さいことが確められる。このことはθ_hの近傍でのy方向の伝搬定数β_iのθに対する振舞からも理解できるがこの数値計算例は省略する。このような零点と振動はプラズマが静止している場合には生じない特異なものであり、プラズマが運動することにより何らかの共振がおきているものと思われる．そこでこれらの原因について検討してみる。

式(2.1)で与えられたε'は．$\beta=0$のときはθ, ϕに無関係であるが．$\beta\neq0$の場合には．θ, ϕに対して変化し．またΩ_pおよびΩ_cの値によって$\varepsilon'=0$をみたす角度θ_hが存

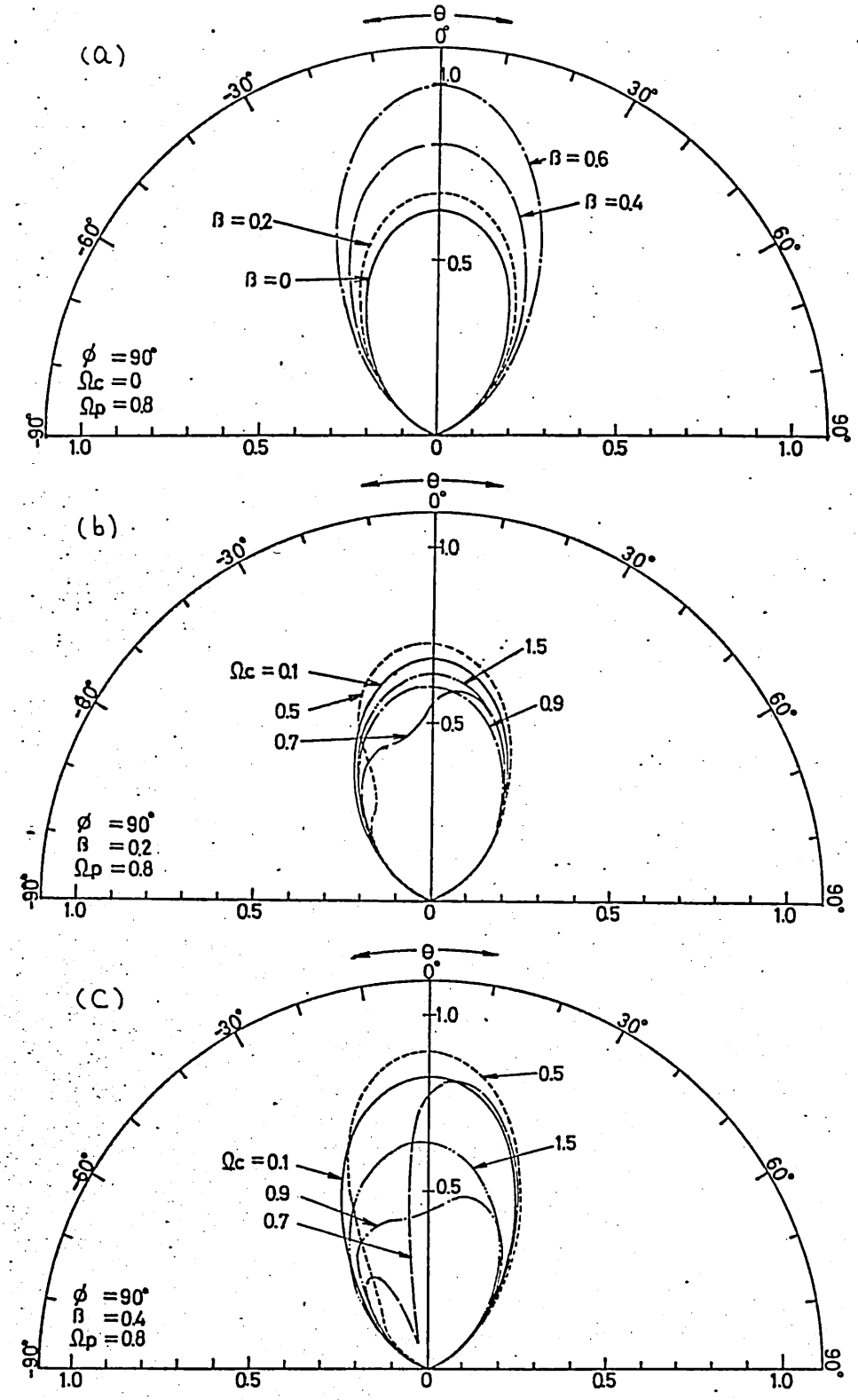


図3. 放射パターン（Φ＝90°の場合）

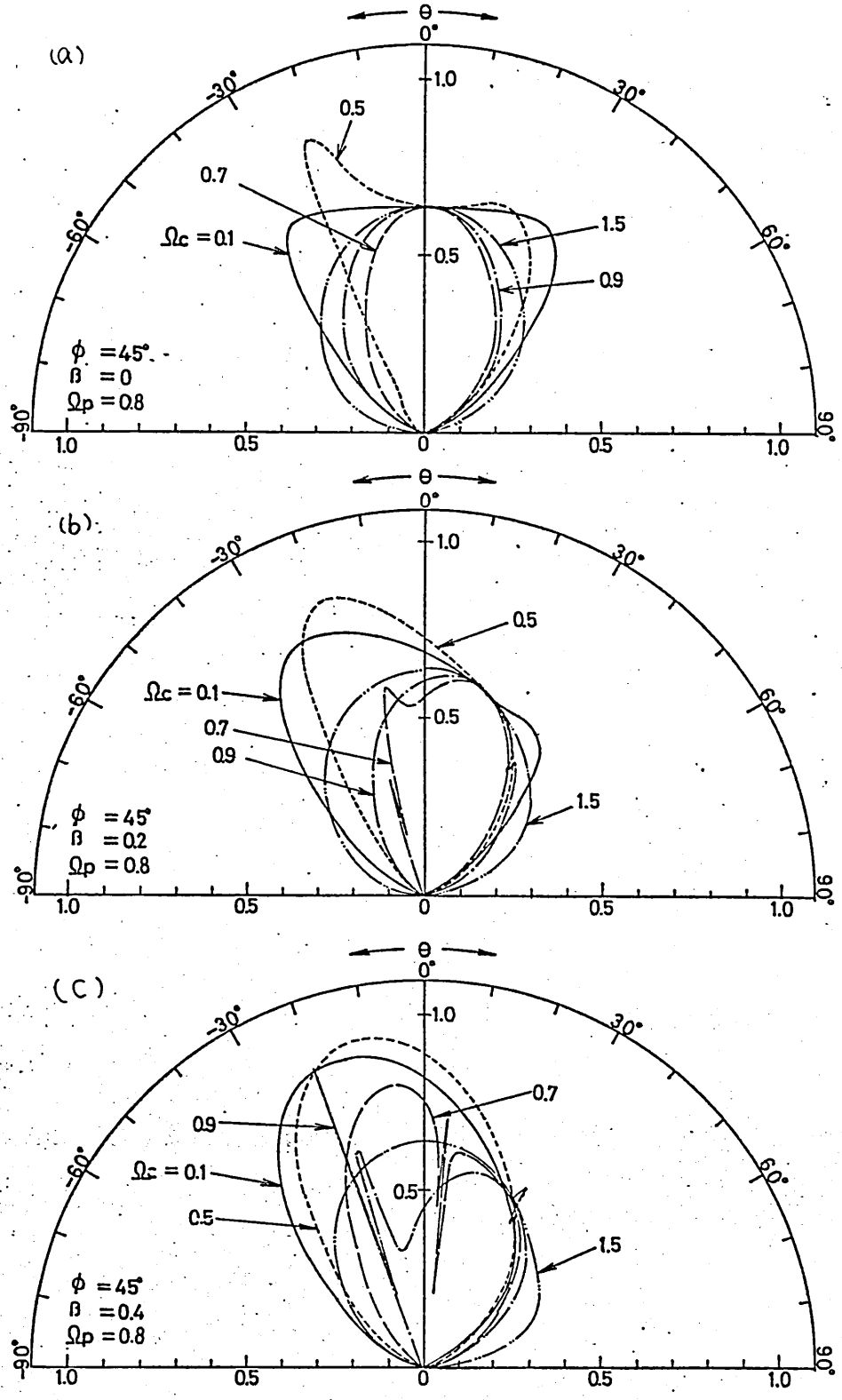


図4．放射パターン（Φ＝45°の場合）

在する。すなわち θ_h において、

$$\Omega_p'^2 + \Omega_c'^2 = 1 \qquad (28)$$

なる関係がなりたっており、これはK'系における式(27)に相当するものである。いま式(21)と式(24)を考慮して、$-90° < \phi < 90°$ の範囲で式(28)を θ について解くと、

$$\theta_h = \sin^{-1}\left[\frac{1}{\beta\cos\phi}\left\{1-(1-\beta^2)^{1/2}(\Omega_p^2+\Omega_c^2)^{1/2}\right\}\right] \qquad (29)$$

となる。上式の θ_h が存在するためには、

$$\frac{1-\beta\cos\phi}{(1-\beta^2)^{1/2}} < (\Omega_p^2+\Omega_c^2)^{1/2} < \frac{1+\beta\cos\phi}{(1-\beta^2)^{1/2}} \qquad (30)$$

がなりたたねばならない。したがって、ある定まった $\Omega_p, \Omega_c, \beta$ および ϕ が式(30)を満たしているかぎり、θ_h で $\epsilon_1' = 0$ になり放射パターンに零点が現われこの方向への放射は遮断される。いま $\phi = 45°$ の場合に、Ω_p, Ω_c をパラメータにとり、θ_h の β に対する変化を計算したものを図5に示す。図4(b),(c)の零点が現われる β と θ の値は図5の β と θ_h に対応している。また、$\phi = 90°$ の場合はこのような θ_h は存在せず零点も生じない。

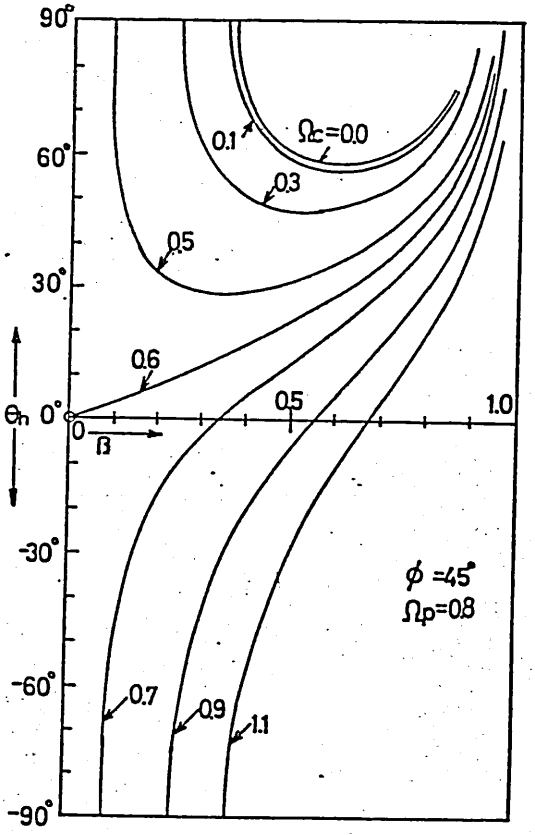


図5. β-θ_h 曲線 ($\phi = 45°$ の場合)

しかし、角度θには無関係にある定まったΩp, Ωcのときのみ、式(28)を満たす。例えばβ=0.4ではΩp=0.8, Ωc≒0.74のときに式(28)を満たしており、その近傍のΩc=0.7ではパターンが大きく変形している。(図3(c))これは図1(a)の高部ハイブリッド共鳴によるパターンの変化と同じものと思われる。

さらに、φ=0°, φ=45°の面でのθhの近傍における振動の原因について検討する。z方向の伝搬定数β1, β2は、θhの点で、その絶対値が無限大に発散し、θhよりわずか大きい角度範囲では、β1は非常に大きな実数値をとるので、θの微少変化に対し、G(θ,φ)に含まれる三角関数 sin(β1d) と cos(β1d) の項が周期変動を示し、パターンの振動として反映される。

5. むすび

静磁界と平行に運動しているプラズマ層でおおわれた方形導波管開口からの三次元的放射に関して、つぎのような結果が得られた。

(1) プラズマが運動することによるドプラー効果のため、高部ハイブリッド共鳴周波数は速度と角度の関数になり、この共鳴条件を満たす角度で放射パターンに零点が生じる。

(2) 零点近傍のある角度範囲で放射パターンに急激な振動が現われる。

(3) 静磁界と垂直な面内(φ=90°)の指向性は、静止の場合にはなんら異方性の影響を受けないが、運動していると異方性の影響が現われ、放射パターンは非対称になる。

終りに，日ごろ，ごべんたついただく熊谷信昭教授，中西義郎教授をはじめ，ご討論いただく通信工学教室の電磁界理論研究グループの方々に深謝する。

[文献]

(1) H. Hodara and G.I. Cohn: "Radiation from a gyroplasma coated magnetic line source", IRE Trans., AP-10, P.581 (Sept. 1962).

(2) R. Shore and G. Meltz: "Anisotropic plasma-coated magnetic line source", IRE Trans., AP-10, P.2 (Jan. 1962).

(3) H. Hodara: "Radiation from gyro-plasma sheathed aperture", IEEE Trans., AP-11 (Jan. 1963).

(4) K.F. Casey and C. Yeh: "Radiation from an aperture in a conducting cylinder coated with a moving plasma sheath", IEEE Trans., AP-17, P.757 (Nov. 1969).

(5) 小嶋，板倉，東："運動するプラズマシースでおおわれた線状磁流源からの放射"，信学論(B)，53-B，P.192 (昭45-04).

(6) K.F. Casey: "Radiation from a slot antenna in a grounded plane coated with a moving plasma sheath", IEEE Trans., AP-19, P.401 (May 1971).

(7) T. Kojima, K. Itakura, and T. Higashi: "Radiation from a magnetic line source covered with a moving sheath", Radio Science, 6, P.1099 (Dec. 1971).

(8) T. Kojima, T. Higashi, and K. Itakura: "The effects of a moving anisotropic grounded layer on radiation from a line source", IEEE Trans., AP-20 (Commun.), P.224 (Mar. 1972).

(9) 小嶋，東，板倉："運動磁化プラズマ層でおおわれたスロットアンテナからの放射"，アンテナ・伝播研資，AP 72-36 (1972-07).

(10) T.H. Stix: "The theory of plasma waves", McGraw-Hill, New York, P.30 (1962).

(11) J.A. Kong and D.K. Cheng: "On guided waves in a moving anisotropic media", IEEE Trans., MTT-16, P.99 (1968).

輻射科学研究会資料

圧縮性プラズマ円柱による平面電磁波の散乱

昭和47年12月1日

シャープ株式会社

成田紘一（奈良高専）

阿座上孝（名工大）

目　次

1. まえがき　1.

2. プラズマ内の電磁界　2.

3. 散乱電磁界　5.

4. 散乱断面積と反射係数　9.

5. 計算結果と検討　11.

6. おわりに　12.

7. 文献　13.

圧縮性プラズマ円柱による平面電磁波の散乱

1. まえがき

電磁波とプラズマとの干渉は種々の興味ある問題を含んでおり，これまでにプラズマ診断，電離層，宇宙通信，熱核融合等の分野でさかんに研究されてきている。[1]

特に，プラズマ円柱による電磁波の散乱問題はプラズマ診断への応用を目的として Herlofson[2] (1951) Keitel[3] (1955) Platzman, Ozaki[4] (1960) Shibata[5] (1966) Gal[6] (1968)[7] 等により理論的に研究されてきた。これらの研究においてプラズマはその有限電子温度を無視したコールドプラズマ近似でもって取り扱われている。

一方，プラズマ円柱による電磁波の散乱実験では上記で述べたコールドプラズマ近似による理論では説明できない各種の現象が存在することがわかっている。それらの実験の詳細な結果については，Wort, Moore[8] (1969) の論文に示されている。それらの現象のうちで，Tonks – Dattner 共鳴と呼ばれる共鳴現象の説明にはプラズマの有限電子温度を考慮に入れた準静的な圧縮性プラズマ近似がよく使われる。[9] しかし準静近似では任意の半径を持ったプラズマ円柱による電磁波の散乱問題を取り扱うことはできない。

圧縮性プラズマ理論については Waite の著書[10] (1968) に詳しく述べられており，特に自由空間中におかれた圧縮性プラズマスラブによる反射および透過の問題は Hessel, Marcuvitz, Shmoys[11] (1962),

大久保[12] (1970), Swift, Crounfield[13] (1971) 等によって研究されてきた。しかしながらここで取り扱うような圧縮性プラズマ円柱による電磁波の散乱に関する論文はないようである。

筆者らはすでに圧縮性プラズマにおける Maxwell の方程式を境界を持ったプラズマに適用できるように形式化した。[14] 本論文ではそれらの式を用いることにより、電子温度を分布に入れたプラズマ円柱による平面電磁波の散乱問題を理論的に解析した。

2. プラズマ内の電磁界

まずこの節ではプラズマ内の電磁界について考えてみることにする。半径 a のプラズマ円柱が自由空間中に図1のごとく z 軸に平行におかれており、そして平面波はプラズマ軸に対して θ なる角度で入射するものと考える。このとき、Waite 等は圧縮性プラズマに対して以下の方程式が成立することを示した。[10]

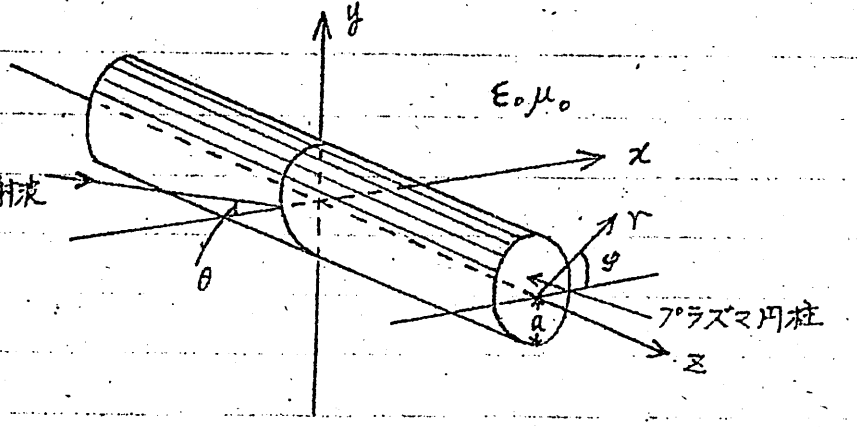


図 1.

$$u^2 m N \nabla \cdot V = -j\omega p \quad (1)$$

$$j\omega m N V = -NeE - \nabla p \quad (2)$$

$$\nabla \times E = -j\omega \mu_0 H \quad (3)$$

$$\nabla \times H = j\omega \varepsilon_0 E - NeV \quad (4)$$

ここで V は電子の速度ベクトル，p は電子の圧力変動分，m および e はそれぞれ電子質量と電子電荷．$u = (\gamma k T/m)^{1/2}$，γ は比熱比，k は Boltzmann 定数，T は電子温度である。また，イオンの運動と電子の衝突を無視した。

上記の式から圧縮性プラズマ内において次式のような拡張された Maxwell の方程式が成立する。[14]

$$\nabla \times E = -j\omega \mu_0 H \quad (5)$$

$$\nabla \times H = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_p E + j\frac{u^2 \varepsilon_0}{\omega} \nabla(\nabla \cdot E) \quad (6)$$

また プラズマ中の電子の速度は

$$V = j\frac{e}{m\omega}\left\{E - \frac{u^2}{\omega_p^2}\nabla(\nabla \cdot E)\right\}$$

で示される。ここで $\varepsilon_p = 1 - (\omega_p/\omega)^2$ であり，ω_p はプラズマ角周波数である。

いま全てのベクトルを z 方向とそれに垂直な成分とに分離すると式 (5) (6) から E_z, H_z に対して次の波動方程式が得られる。

$$\left\{\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{u}\right)^2 \varepsilon_p\right\}\left\{\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_p\right\} E_z = 0 \quad (7)$$

$$\left\{\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_p\right\} H_z = 0 \quad (8)$$

式(7)を円筒座標で解き，中心で有界とすれば E_z は次式で与えられる。

$$E_z = E_z^{(p)} + E_z^{(e)} \tag{9}$$

$$E_z^{(p)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(p)} J_m(k_p r) e^{-jm\varphi - j\beta z}$$

$$E_z^{(e)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(e)} J_m(k_e r) e^{-jm\varphi - j\beta z}$$

ただし，

$$k_p^2 = \left(\frac{\omega}{u}\right)^2 \varepsilon_p - \beta^2, \quad k_e^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_p - \beta^2$$

であり，J_m は m 次 Bessel 関数である。これらの式から $E_z^{(p)}$ が音波 Mode を $E_z^{(e)}$ が電磁波 Mode を表わしていることがわかる。また，H_z は式(8)より，

$$H_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^{(e)} J_m(k_e r) e^{-jm\varphi - j\beta z} \tag{10}$$

で与えられる。ここで $A_m^{(p)}$, $A_m^{(e)}$, $B_m^{(e)}$ は任意定数であり後で述べる境界条件によって定められる。他の電磁界成分は式(9), (10)を以下の式に代入して得られる。

$$k_e^2 E_\perp = -j\beta \nabla_\perp E_z^{(e)} + j\frac{k_e^2}{\beta} \nabla_\perp E_z^{(p)} + j\omega\mu_0 \hat{i}_z \times \nabla_\perp H_z \tag{11}$$

$$k_e^2 H_\perp = -j\beta \nabla_\perp H_z - j\omega\varepsilon_0\varepsilon_p \hat{i}_z \times \nabla_\perp E_z^{(e)} \tag{12}$$

ただし $\hat{i}_z$ は z 方向の unit vector である。次に速度の各成分を E_z, H_z で表わすと次のようになる。

$$V_\perp = \frac{e}{m\omega}\left\{\frac{\beta}{k_e^2}\nabla_\perp E_z^{(e)} - \frac{1}{\beta}(\omega/\omega_p)^2 \nabla_\perp E_z^{(p)} - \frac{\omega\mu_0}{k_e^2} i_z \times \nabla_\perp H_z\right\} \quad (13)$$

$$V_{z\perp} = j\frac{e}{m\omega}\left\{E_z^{(e)} + (\omega/\omega_p)^2 E_z^{(p)}\right\} \quad (14)$$

以上で圧縮性プラズマ中の電磁界と電子速度が求められたので、次の節ではこれらの式を使って散乱波を求めてみることにする。

3. 散乱電磁界

入射平面波は図1に示すように入射したと考える。この時入射平面波の波動ベクトルは $x-z$ 平面内にあるものとすれば、入射平面波は次のような円筒波の形に書き換えることができる。

$$E_z^{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(i)} J_m(kr) e^{-jm\varphi - j\beta z} \quad (15)$$

$$H_z^{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^{(i)} J_m(kr) e^{-jm\varphi - j\beta z} \quad (16)$$

$$k^2 E_\perp^{(i)} = -j\beta \nabla_\perp E_z^{(i)} + j\omega\mu_0 i_z \times \nabla_\perp H_z^{(i)} \quad (17)$$

$$k^2 H_\perp^{(i)} = -j\beta \nabla_\perp H_z^{(i)} - j\omega\varepsilon_0 i_z \times \nabla_\perp E_z^{(i)} \quad (18)$$

ただし、

$$k = k_0 \cos\theta$$

$$\beta = k_0 \sin\theta$$

$$k_0 = (\omega/u) = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

であり，$A_m^{(i)}$, $B_m^{(i)}$は入射平面波の振幅の大きさと偏波によって決定される定数である。

一方，散乱波は次のように書き表わすことができる。

$$E_z^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(s)} H_m^{(2)}(kr) e^{-jm\varphi - j\beta z} \quad (19)$$

$$H_z^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^{(s)} H_m^{(2)}(kr) e^{-jm\varphi - j\beta z} \quad (20)$$

$$k^2 E_\perp^{(s)} = -j\beta \nabla_\perp E_z^{(s)} + j\omega\mu_0 i_z \times \nabla_\perp H_z^{(s)} \quad (21)$$

$$k^2 H_\perp^{(s)} = -j\beta \nabla_\perp H_z^{(s)} - j\omega\varepsilon_0 i_z \times \nabla_\perp E_z^{(s)} \quad (22)$$

ただし$H_m^{(2)}$はm次第2種のHankel関数を表わし，$A_m^{(s)}$, $B_m^{(s)}$は散乱波の複素振幅定数を示している。

以上の式からプラズマ円柱表面において電界，磁界の接線成分が連続であるという境界条件と電子の径方向速度成分が零であるという剛体の境界条件から$A_m^{(p)}$, $A_m^{(e)}$, $A_m^{(s)}$, $B_m^{(e)}$, $B_m^{(s)}$を入射波の振幅偏波定数$A_m^{(i)}$, $B_m^{(i)}$でもって表わすことができる。

これからの議論を進めるにあたって，入射波をTE Mode およびTM Modeの二つのモードの場合に分けて考えてみることにする。

まず，位相条件から式(9)(10)，(15)(16)，(19)(20)に表われているm，βは全て等しいことを知る。本論文では散乱波のみに注目しているので散乱波の定数$A_m^{(s)}$, $B_m^{(s)}$のみを示しておく。

TE Mode　この場合入射波の定数$A_m^{(i)}$, $B_m^{(i)}$は以下のようになる。

$$A_m^{(i)} = 0 \qquad B_m^{(i)} = (-j)^m H_0 \cos\theta \quad (23)$$

ここで H_0 は入射平面波の一定振幅を表わす。この時散乱波の定数 $A_m^{(s)}$, $B_m^{(s)}$ は上記の境界条件を使って次のようになる。

$$A_m^{(s)} = \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta} B_m^{(i)} \qquad (24)$$

$$B_m^{(s)} = \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta} B_m^{(i)} \qquad (25)$$

TM Mode　その場合 $A_m^{(i)}$, $B_m^{(i)}$ は

$$A_m^{(i)} = -(-j)^m E_0 \cos\theta \qquad B_m^{(i)} = 0 \qquad (26)$$

とする。ここで E_0 は入射平面波の電界の一定振幅を表わす。したがって、$A_m^{(s)}$, $B_m^{(s)}$ は次のようにする。

$$A_m^{(s)} = \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} \cdot \frac{\Delta_{21}}{\Delta} A_m^{(i)} \qquad (27)$$

$$B_m^{(s)} = \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} \cdot \frac{\Delta_{22}}{\Delta} A_m^{(i)} \qquad (28)$$

ただし、

$$\Delta = -k_0^2 \left\{ QF_2 + \frac{1}{k_e^2 k_p} \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 R_2 \right\} \cdot G_2 + \left\{ \frac{k_0^2}{k_e} \varepsilon_p \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)} F_2 - \left(\frac{m}{a}\right)^2 S R_2 \right\} \cdot X$$

$$\Delta_{11} = j\omega\mu_0 \left(\frac{\beta}{k}\right)\left(\frac{m}{a}\right) Z \cdot Y$$

$$\Delta_{12} = k_0^2 \left\{ Q F_1 + \frac{1}{k_e^2 k_p} \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 R_2 \right\} G_2 + \left\{ \frac{k_0^2}{k_e} \varepsilon_p \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)} F_1 - \left(\frac{m}{a}\right)^2 S R_2 \right\} \cdot X$$

$$\Delta_{21} = k_0^2 \left\{ Q F_2 + \frac{1}{k_e^2 k_p} \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 R_2 \right\} G_1 - \left\{ \frac{k_0^2}{k_e} \varepsilon_p \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)} F_2 - \left(\frac{m}{a}\right)^2 S R_2 \right\} \cdot X$$

$$\Delta_{22} = j\omega \varepsilon_0 \left(\frac{\beta}{k_e}\right)\left(\frac{m}{a}\right) Z \cdot Y$$

$$G_1 = \frac{1}{k} \frac{J_m'(ka)}{J_m(ka)} - \frac{\varepsilon_p}{k_e} \frac{R_1}{R_2} \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)}$$

$$G_2 = \frac{1}{k} \frac{H_m^{(2)\prime}(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} - \frac{\varepsilon_p}{k_e} \frac{R_1}{R_2} \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)}$$

$$F_1 = \frac{1}{k} \frac{J_m'(ka)}{J_m(ka)} - \frac{1}{k_e} \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)}$$

$$F_2 = \frac{1}{k} \frac{H_m^{(2)\prime}(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} - \frac{1}{k_e} \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)}$$

$$X = \frac{J_m'(k_p a)}{J_m(k_p a)} - \frac{R_1}{R_2} Q$$

$$Y = S \frac{J_m'(k_p a)}{J_m(k_p a)} + \frac{1}{k_e k_p} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 R_1 \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)}$$

$$Z = \frac{J_m'(ka)}{J_m(ka)} - \frac{H_m^{(2)\prime}(ka)}{H_m^{(2)}(ka)}$$

$$Q = \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)} + \frac{\beta^2}{k_p k_e} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{J_m'(k_e a)}{J_m(k_e a)}$$

$$R_1 = \left\{ \frac{\beta^2}{k^2} + 1 \right\} \qquad R_2 = \left\{ \frac{\beta^2}{k\varepsilon^2} + 1 \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k\varepsilon^2} \right\}$$

である。以上の結果より入射波が TE Mode あるいは TM Mode であっても散乱波は TE Mode, TM Mode に分離できないことがわかる。

4. 散乱断面積と反射係数

前節ではプラズマ柱に oblique 入射した平面波の散乱について調べたが、この節では $\theta = 0°$ すなわち平面波がプラズマ円柱に垂直に入射した場合についてより詳しく調べてみることにする。
この場合は $\beta = 0$ より

TE Mode

$$A_m^{(s)} = 0 \tag{29}$$

$$B_m^{(s)} = -\frac{J_m'(\beta y)\left\{\sqrt{\varepsilon_p} J_m'(x) J_m(y) - J_m'(y) J_m(x)\right\} + \frac{1}{\beta y^2}\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 J_m(x) J_m(y) J_m(\beta y)}{J_m'(\beta y)\left\{\sqrt{\varepsilon_p} H_m^{(2)\prime}(x) J_m(y) - J_m'(y) H_m^{(2)}(x)\right\} + \frac{1}{\beta y^2}\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 H_m^{(2)}(x) J_m(y) J_m(\beta y)} \cdot (-j)^m H_0 \tag{30}$$

TM Mode

$$A_m^{(s)} = \frac{J_m'(x) J_m(y) - \sqrt{\varepsilon_p} J_m'(y) J_m(x)}{H_m^{(2)\prime}(x) J_m(y) - \sqrt{\varepsilon_p} J_m'(y) H_m^{(2)}(x)} \cdot (-j)^m E_0 \tag{31}$$

$$B_m^{(s)} = 0 \tag{32}$$

のごとく簡単となる。ここで $x = k_0 a$, $y = \sqrt{\varepsilon_p}\, x$, $\beta = (c/\mu)$ である。以上の結果より垂直入射の場合は散乱波も TE, TM Mode に分離可能となることがわかる。そして TM Mode の場合はすでに実験で知られているごとく散乱波はコールドプラズマ近似の場合と一致することがわかる。[8] したがって，以下では TE Mode の場合のみ考えることにする。

散乱断面積は次式のごとくプラズマ円柱の単位長あたりに散乱される半径方向の全電力を入射波のプラズマ軸に対して直角な電力成分で割ったもので与えられる。

$$C_{sca} = \lim_{r\to\infty} \frac{\int_0^{2\pi} \{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbb{E}^{(s)} \times \mathbb{H}^{(s)*}\}\cdot \mathring{i}_r\}\, r\, d\varphi}{\{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbb{E}^{(i)} \times \mathbb{H}^{(i)*}\}\cdot \mathring{i}_x\}} \tag{33}$$

ここで $\mathring{i}_r$, $\mathring{i}_x$ はそれぞれ r 方向と x 方向の unit vector である。また反射係数を次のごとく定義する。

$$6(\varphi)\, d\varphi = \lim_{r\to\infty} \frac{\{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbb{E}^{(s)} \times \mathbb{H}^{(s)*}\}\mathring{i}_r\}\, r\, d\varphi}{\{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbb{E}^{(i)} \times \mathbb{H}^{(i)*}\}\mathring{i}_x\}} \tag{34}$$

上式を使って散乱断面積と反射係数を求めると，それぞれ次のようになる。

$$C_{sca} = \frac{4}{k_0 H_0^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m^{(s)}|^2 \tag{35}$$

$$6(\varphi) = \frac{2}{\pi k_0 H_0^2} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^{(s)} \exp(-jm\varphi) \right|^2 \tag{36}$$

5. 計算結果と検討

この節では実際に式(35)(36)を計算した結果について検討してみることにする。まず，プラズマ円柱の半径が波長に比べて非常に小さいものとして $m=0$, $m=\pm 1$, について計算した。図2にコールドプラズマ理論と圧縮性プラズマ理論との両方から計算された散乱断面積が示されている。この図から圧縮性プラズマ理論から計算された散乱断面積の値には多くの共鳴が表われるが，コールドプラズマ理論から計算された散乱断面積の値にはその共鳴が表われないことがわかる。また，圧縮性プラズマ理論とコールドプラズマ理論に表われる大きな共鳴（主共鳴）点での $(\omega_p/\omega)^2$ の値が温度により明らかに異なることもわかる。図3に $k_0a=0.1,\ 0.2$, $(u/c)=10^{-2},\ 5\times10^{-3}$ の時の散乱断面積の値が $(\omega_p/\omega)^2$ を関数として示されている。いずれの図にも Tonks－Dattner 共鳴と呼ばれる多くの共鳴が表われることが示されている。そしてその共鳴の数はプラズマ柱の半径が大きく，かつ温度が低くなるにしたがって増すことがわかる。この事は以下のように解せられる。すなわちこの共鳴はプラズマ電子音波の縦共鳴であるので，この波の位相定数が電子温度の低下にしたがって大きくなれば，その径方向の定在波の数が多くなり，それにともなって共鳴数が増すものと考えられる。また，図4に $(\omega_p/\omega)^2=0.9$ の時の k_0a と後方散乱波の反射係数との関係が示されている。この図にも多くの共鳴が表われている。そして，その共鳴のするどさは k_0a が大きくなるにつれて小さくなることがわかる。したがって k_0a がさらに大きくなれば，すでに実験で知られているごとくその共鳴は無くなるだろうと思われる。

以上の結果から，圧縮性プラズマ理論を使って計算された

プラズマ円柱による散乱波はコールドプラズマ理論では表われなかった Tonks－Dattner 共鳴を表わすことがわかった。そして，その共鳴点を除きコールドプラズマ理論による結果と圧縮性プラズマ理論による結果はよく一致した。しかしながら Tonks－Dattner 共鳴における $(\omega_p/\omega)^2$ の値はすでに得られている実験値と一致していない。それはこの共鳴がプラズマの径方向密度こう配に大きく作用されている[9]といわれているにもかかわらず，本論文においてはこのこう配を無視し均一なプラズマ円柱として取り扱ったためであると思われる。

6. おわりに

本論文においては，圧縮性プラズマ理論に従って平面波のプラズマ円柱による散乱を考察した。まずはじめに入射波が TE または TM モードで斜め入射した時の散乱波を求めた。その結果，入射波が TE あるいは TM モードであっても，入射波が垂直入射以外は散乱波は TE モードと TM モードに分離できないことがわかった。さらに入射波が垂直入射の場合，TE モードの時は散乱波は電子音波に関係するが，TM モードの時は関係せず，コールドプラズマ理論による結果と一致することがわかった。次に，平面波が TE モードで垂直入射した時の散乱断面積と反射係数を求めた。その結果，Tonks－Dattner 共鳴と呼ばれる多くの共鳴が表われることがわかった。しかしながら，その共鳴点における $(\omega_p/\omega)^2$ の値はすでに得られている実験の値と一致しない。そのことは今後プラズマの径方向密度こう配を考慮することにより説明されると思われる。

7. 文献

(1). T. H. Stix : "The Theory of Plasma Waves" Mc-Graw-Hill (1962)

(2). N. Herlofson : "Plasma Resonance in Ionospheric irregularities" Arkiv Fysik Vol. 3 p. 247 (1951)

(3) G. H. Keitel : "Certain Mode Solutions of Forward Scattering by Meteor Trails." Proc. IRE Vol. 43 p. 1481 (1955)

(4) P. M. Platzman and H. T. Ozaki : "Scattering of electromagnetic waves from an infinitely long magnetized cylindrical plasma". J. Appl. Phys. Vol. 31 p. 1597 (1960)

(5) S. Shiobara : "Electro density Measurement by Microwave scattering from underdense Cylindrical plasma". J. Phys. Soc. of Japan Vol. 21 p. 1380 (1966)

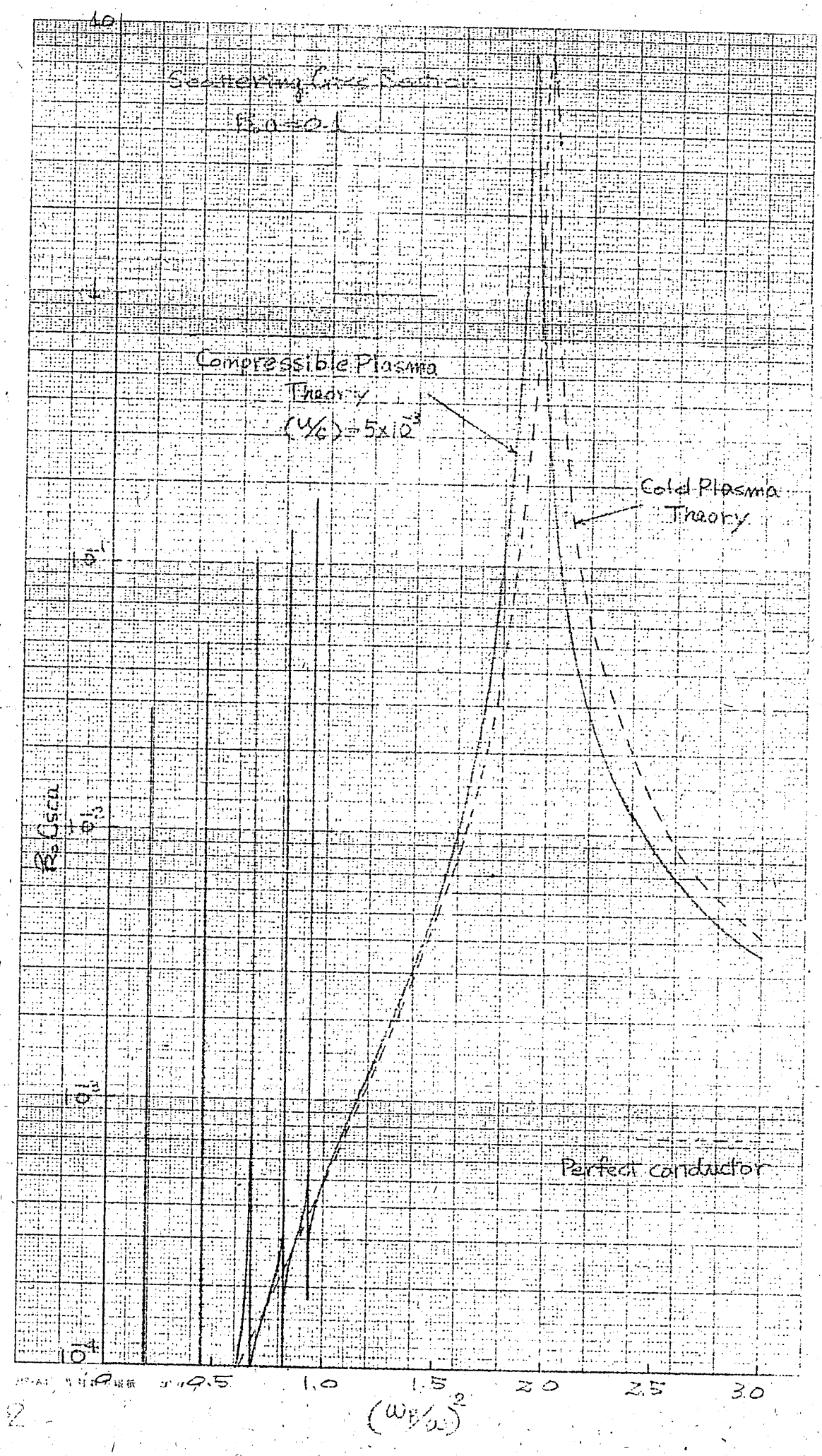
(6) G. Gal and W. E. Gibson "Interaction of Electromagnetic waves with Cylindrical plasma". IEEE AP-16 Vol. 4 p. 467 (July 1968)

(7) M. Nozaka. G. Sato and K. Takaku : "Scattering of Electromagnetic waves by a Cylindrical inhomogeneous plasma" J. Phys. Soci. of Japan Vol. 24 No. 1 p. 172 (Jan. 1968)

(8) J. E. Butterworth and R. L. Moore : "Experimental study of Scattering from a Plasma Column." J. Appl. Phys. Vol. 40. No. 13. p. 5076 (Dec. 1969)

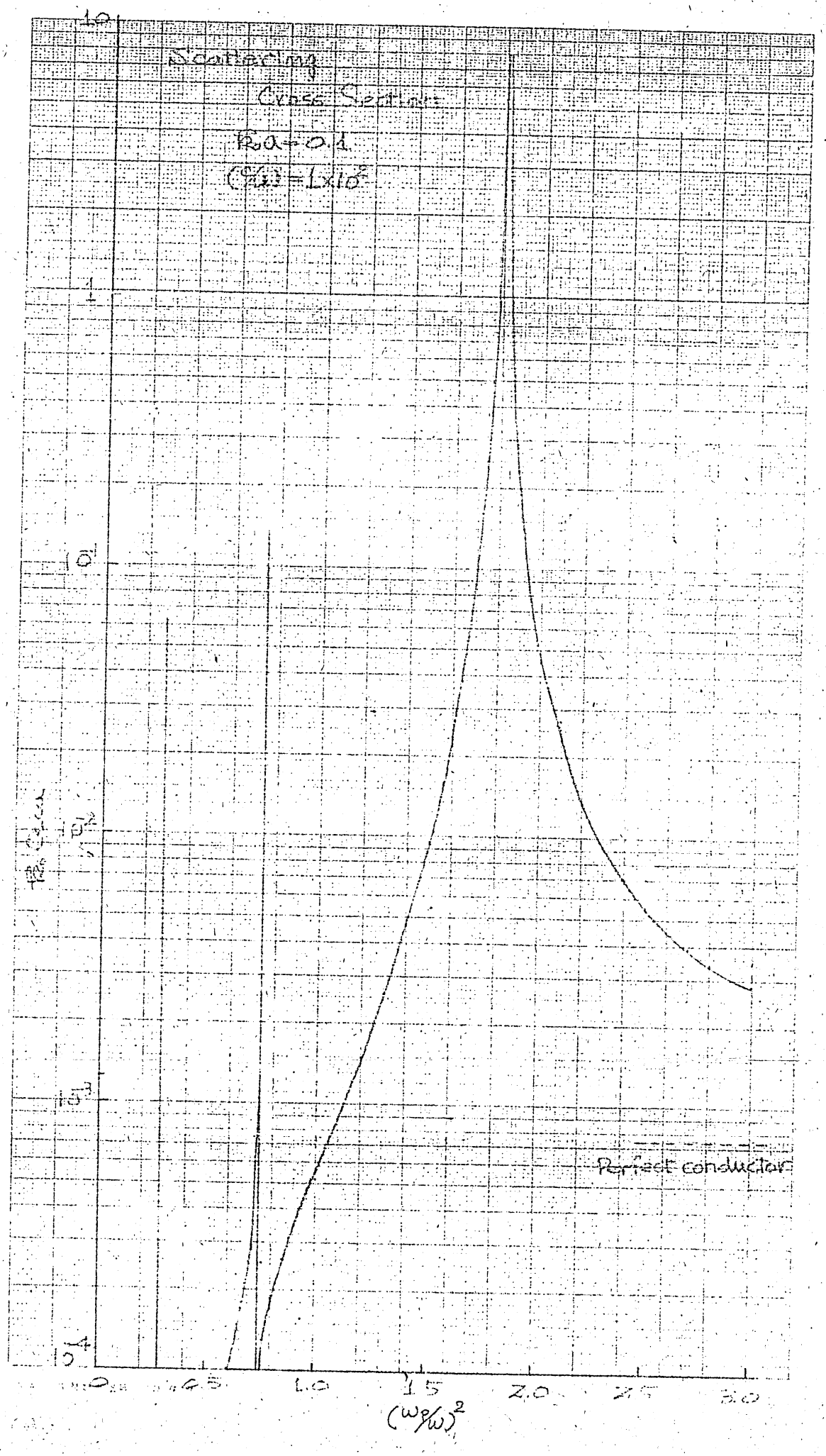
(9) J. V. Parker. J. C. Nickel and R. W. Gould : "Resonance oscillations in a hot nonuniform plasma."

Phys. Fluids Vol. 7. No. 9 p. 1489 (Sep. 1964)
(10) J. R. Waite: "Electromagnetics and Plasmas". Holt. Rinehart and Winston Inc. (1968)
(11) A. Hessel. N. Marcuvitz and J. Shmoys "Scattering and guided waves at an interface between air and a compressible plasma." IRE. Trans. Ap-10. No. 1 p. 48 (Jan. 1962)
(12) 大久保元昌: "半無限圧縮性異方性プラズマの境界面からの電磁波の反射と透過" 信学論 (B) Vol. 52-B No. 1 p36. (昭和44-01)
(13) C. T. Swift and F. R. Crownfield Jr: "Kinetic Theory of Electromagnetic Waves Obliquely Incident upon a Plasma Slab". IEEE Trans. Ap-19 No. 1 p. 81 (Jan. 1971)
(14) 成田弦一, 阿座上孝: "ドリフトプラズマの表面波伝ぱん" 電気四学会東海支部連合大会 17P-F-2, (昭和47-10)



Scattering Cross Section
Compressible Plasma Theory
$(u/c) = 5\times10^{-3}$
Cold Plasma Theory
Perfect conductor
$R_0 C_{sca}$
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
$(\omega_p/\omega)^2$

Fig 2



Scattering
Cross Section
$k_0 a = 0.1$
$(c/a) = 1 \times 10^2$
Perfect conductor
$k_0 C_{sca}$
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
$(\omega_p/\omega)^2$

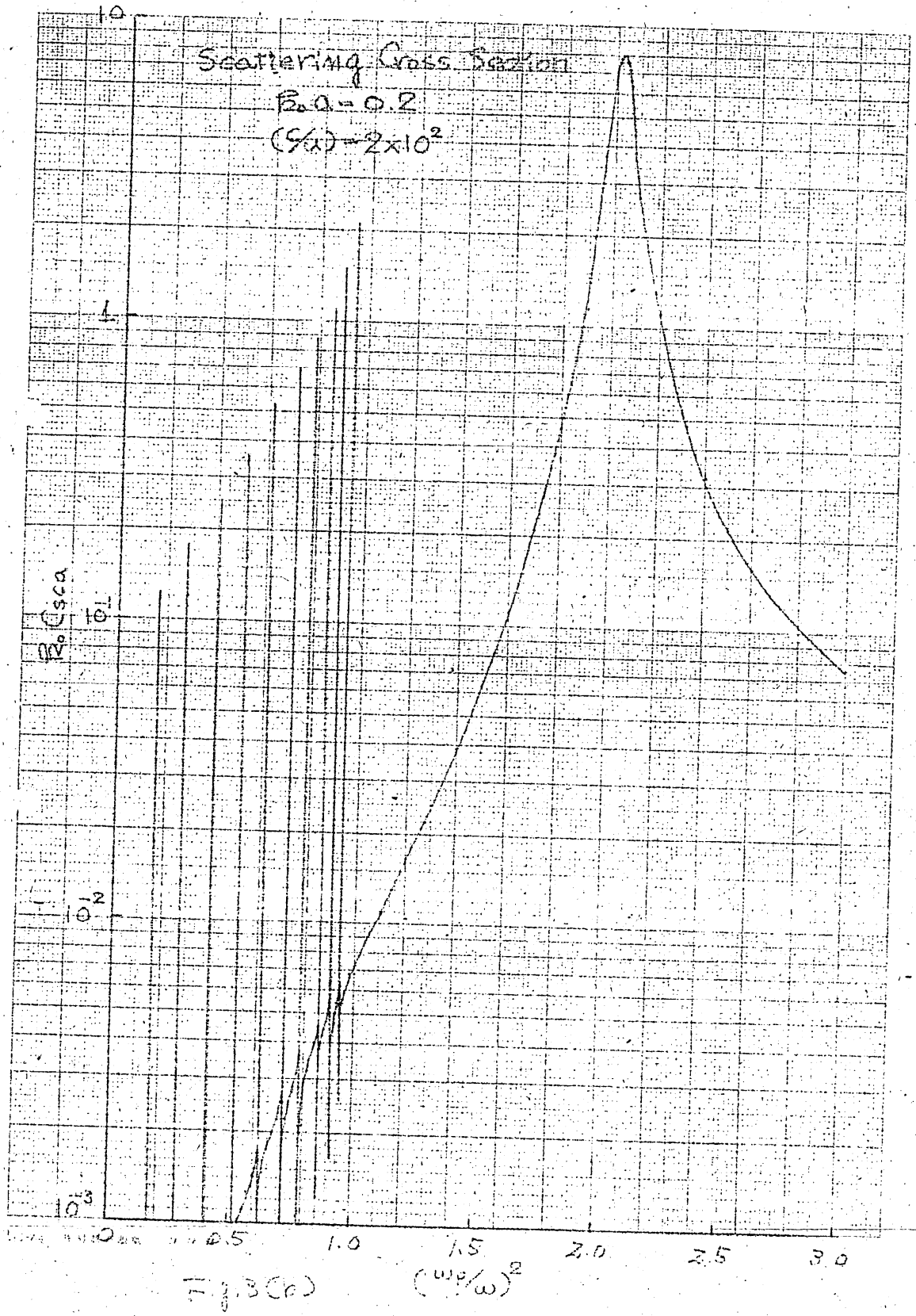

Scattering Cross Section
k₀a = 0.2
(δ/a) = 2×10⁻²
10
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
σ_sca/πa²
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
(ω_p/ω)²

Fig 3(c)

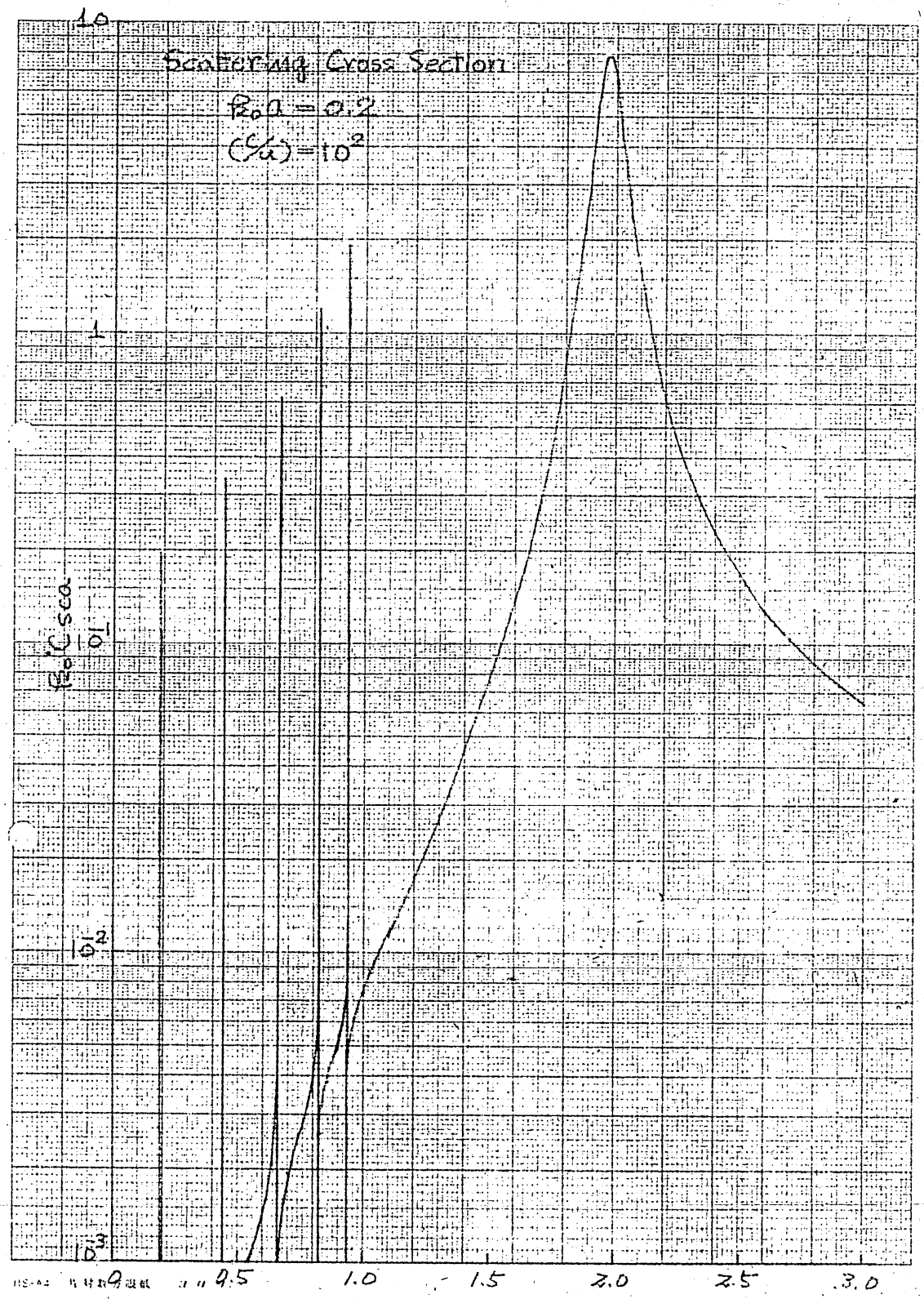

Scattering Cross Section
$\Gamma_0 \Omega = 0.2$
$(\gamma/\omega) = 10^{-2}$
10
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
$\Gamma_0 \cdot \sigma_{sca}$
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
$(\omega_p/\omega)^2$

Fig. 3 (c)

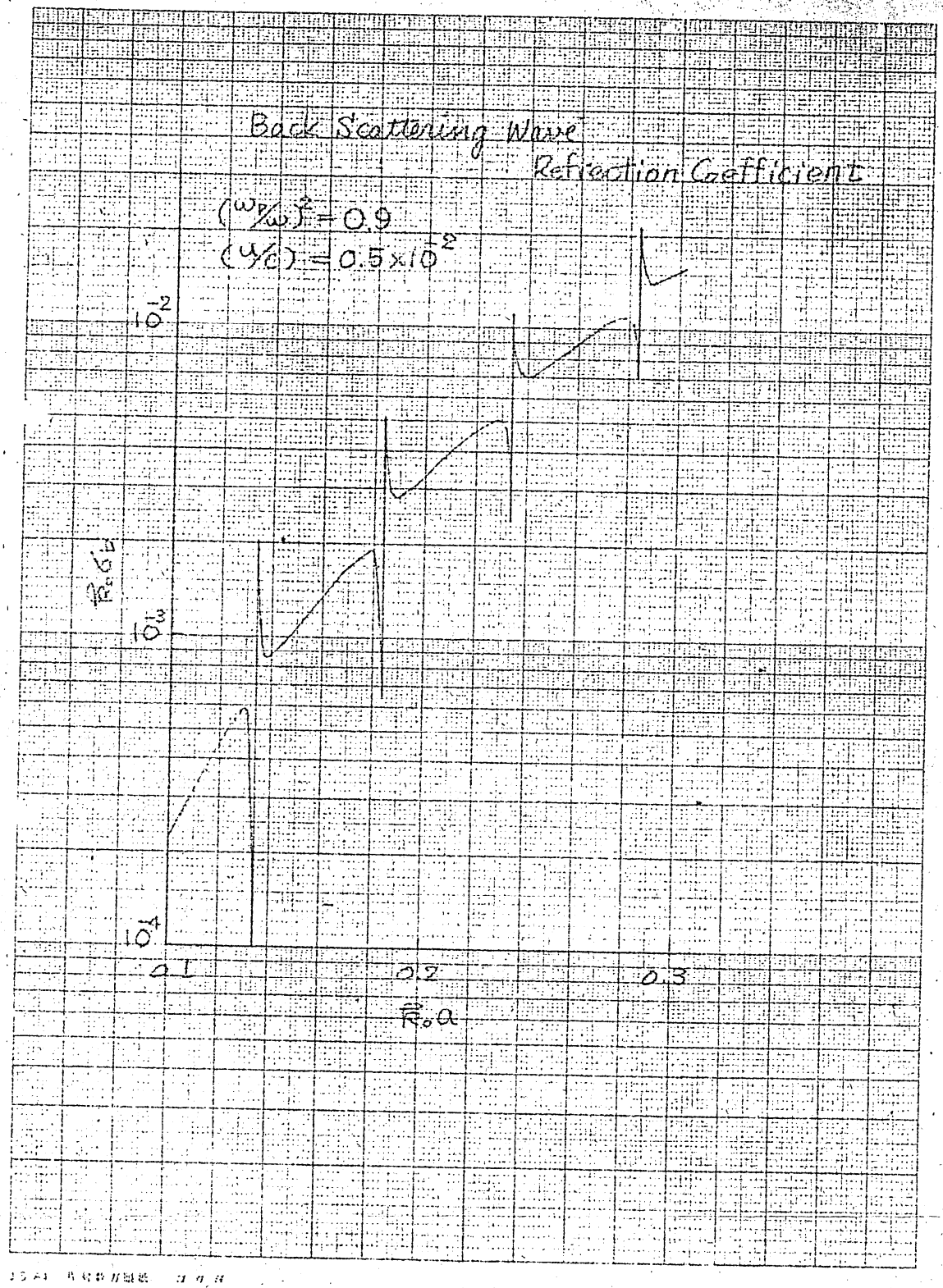

Back Scattering Wave
Reflection Coefficient
$(\omega_p/\omega)^2 = 0.9$
$(\Delta/a) = 0.5\times10^{-2}$
10^{-2}
$|R_0/a|$
10^{-3}
10^{-4}
0.1
0.2
0.3
R_0/a

Fig. 4

輻射科学研究会資料

多層誘電体媒質によるパルス波の反射現象

鈴木 俊雄
小川 英一
藤岡 弘
(大阪大学・工学部)

1972年 12月 1日

1. 序　　言

多層誘電体による電磁波の反射・透過の問題は電波伝搬の基本的問題として古くから議論され，また，誘電体表面波線路としての応用の面からも多くの研究がなされてきた．一方，近年のレーザー通信工学の進歩により，このような誘電体層からなる系を光学伝送路および光学回路素子として利用する問題も活発に研究され，種々の結果が報告されている。しかし，このような誘電体層に入射する電磁波が平面波ではなく，パルス波（またはビーム波）である場合には，その取り扱いが複雑なことから，まだ十分な検討がなされていないように思われる．なお，媒質が誘電体ではなく，半無限のプラズマ媒質またはプラズマスラブにパルス波が入射する問題については種々報告されているが[1]~[3]，全反射現象を含む多層誘電体によるパルス波の反射の問題は報告されていないようである。

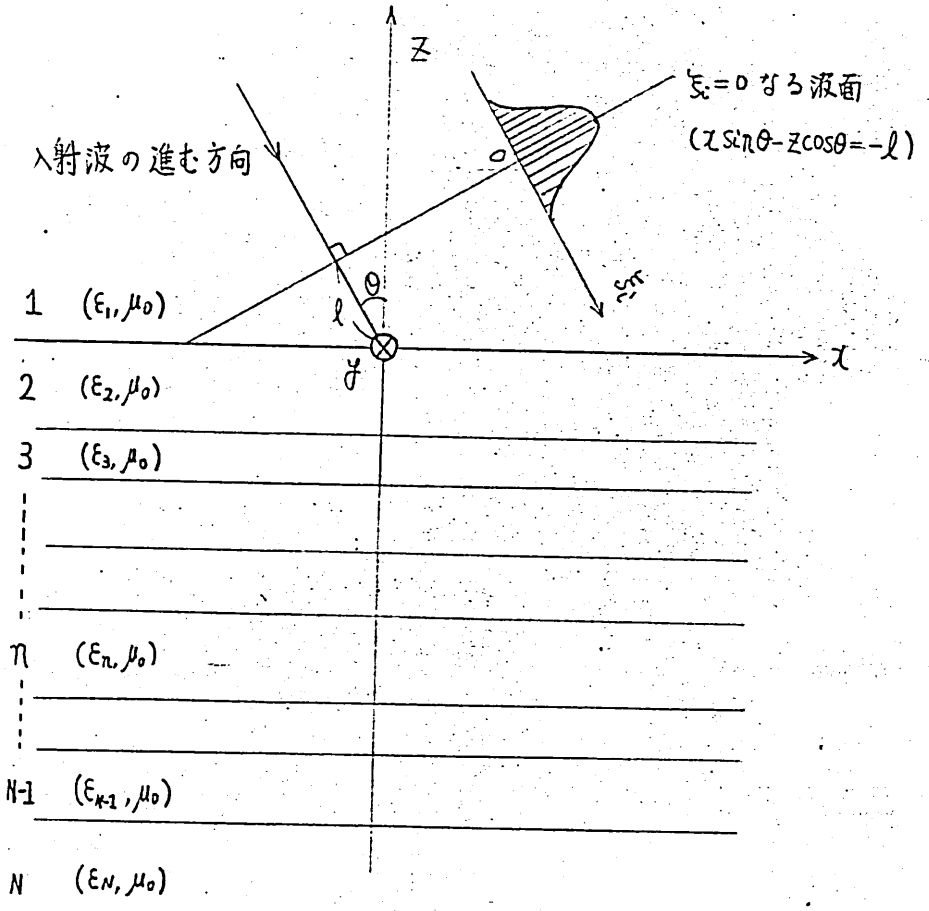
そこで，本資料では，多層誘電体からなる系にパルス波が入射した場合の反射現象の問題を取り扱う．ここでは，多層誘電体の境界面における平面波の反射係数を級数展開することによって，反射パルス波を求める．しかし，誘電体層の内部において全反射が起こるときには，このような方法を適用できない場合も生じるが，本資料では反射係数が級数展開可能な場合のみについて，全反射の場合も含めて考察する。

2. 入射パルス波および反射パルス波

図1に示すように，$z>0$ の領域は (ε_1, μ_0) なる半無限誘電（媒質I），$z<0$ の領域は (ε_n, μ_0)，厚さ d_n $(n=2,3,\cdots,N-1)$ なる誘電体および (ε_N, μ_0) なる半無限誘電体からなるN層誘電体において，z の正の側から式(2·1)および(2·2)で表わされるような，入射角 θ をもつベル形あるいはガウス形の平面スカラパルス波 $F_i(\xi_i)$ が入射するものとする。

$$F_i(\xi_i) = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \xi_i^2} \qquad (\text{ベル形}) \qquad (2\cdot1)$$

$$F_i(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}W} e^{-\frac{\xi_i^2}{W^2}} \qquad (\text{ガウス形}) \qquad (2\cdot2)$$



時刻 $t=-\frac{l}{c}(<0)$ のパルス波の位置

(l は原点から波面までの距離)

図1. 座標系

ただし,

$$\xi_c = \frac{x\sin\theta - z\cos\theta}{c} - t \qquad (2\cdot3)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}}$$

ここで, ϵ および w は入射パルス波の波形を特徴づけるパラメータであ

り，Cは媒質I中を伝搬する波の位相速度を表わす。図1は $t=-\ell/c$ のときのパルス波形を表わしているが，$t=0$ の瞬間には入射パルス波の最大振幅の波面（$\xi_c=0$）は座標原点を通過することになる。

さて，入射パルス波 $F_c(\xi_c)$ をつぎのようにFourier積分によって平面波の和として表示する。

$$F_c(\xi_c) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega)\, e^{-j\omega\xi_c}\, d\omega$$

$$= R_e \int_0^{\infty} \underline{F}(\omega)\, e^{-j\omega\xi_c}\, d\omega \qquad (2\cdot4)$$

ただし，

$$\underline{F}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_c(\xi_c)\, e^{j\omega\xi_c}\, d\xi_c \qquad (2\cdot5)$$

は入射パルス波の周波数スペクトルであり，式(2·1)および(2·2)で与えられるベル形およびガウス形パルス波の場合には，それらのスペクトルは次のようになる。

$$\underline{F}(\omega) = e^{-\epsilon|\omega|} \qquad (\text{ベル形}) \qquad (2\cdot6)$$

$$\underline{F}(\omega) = e^{-\left(\frac{\omega}{W}\right)^2} \qquad (\text{ガウス形}) \qquad (2\cdot7)$$

ここで，式(2·6)および(2·7)から明らかなように，

$$\underline{F}^*(\omega) = \underline{F}(-\omega)$$

なる関係が成り立つ。

いま，入射波が平面波である場合の，入射波に対する反射波の振幅比を $R(\omega)$ とすると，式(2·4)で与えられる入射パルス波に対して，反射パルス波 $F_r(\xi_r)$ はつぎのように表わされる†

---

† 後に示すように，$R(\omega)$ については $\underline{F}(\omega)$ と同様に，$R^*(\omega)=R(-\omega)$ なる関係が成立し，$F_r(\xi_r)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)\underline{F}(\omega)\, e^{j\omega\xi_r}\, d\omega = R_e\int_0^{\infty} R(\omega)\underline{F}(\omega)\, e^{j\omega\xi_r}\, d\omega$ となる。

$$F_r(\xi_r) = R_e \int_0^\infty R(\omega)\Phi(\omega)\, e^{-j\omega\xi_r}\, d\omega \qquad (2\cdot8)$$

ただし，

$$\xi_r = \frac{x\sin\theta + z\cos\theta}{c} - t \qquad (2\cdot9)$$

したがって，多層誘電体媒質の境界面（$z=0$）における反射係数 $R(\omega)$ が求められれば，反射パルス波 $F_r(\xi_r)$ が得られる。

3．N層誘電体の反射係数

3.1 反射係数 $R(\omega)$

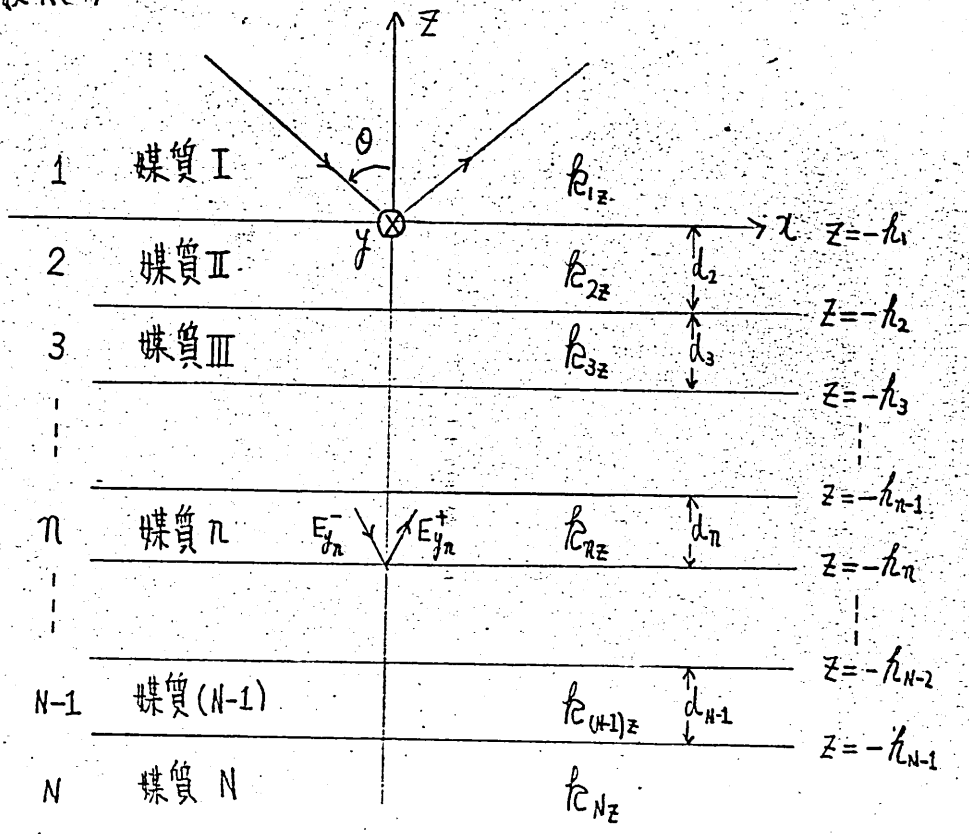


図2．N層誘電体の反射係数

つぎに，図2に示すようなN層誘電体の境界面による平面波の反射係数R(ω)を求める．いま，入射平面波としてE波（電界が入射面に垂直な波）を考えたとき，n番目の誘電体層中の電界成分は，一般に次式のように表わすことができる．

$$E_{yn}^{-} = E_{on}^{-} e^{j(\omega t - k_x x - k_{nz} z)} \tag{3·1a}$$

$$E_{yn}^{+} = E_{on}^{+} e^{j(\omega t - k_x x + k_{nz} z)} \tag{3·1b}$$

ここで，上部の添字－および＋はそれぞれn番目の誘電体層中をzの負および正の方向に伝搬する波を表わしている．このとき，n番目と(n+1)番目の誘電体層の境界面（$z=-h_n$）における振幅反射係数$R_{n,n+1}(\omega)$を

$$R_{n,n+1}(\omega) = \frac{E_{on}^{+}}{E_{on}^{-}}$$

で定義すれば，$z=-h_n$ における境界条件から，$R_{n,n+1}(\omega)$は次式のように表わされる．

$$R_{n,n+1}(\omega) = \frac{r_{n,n+1} + R_{n+1,n+2} e^{-2jk_{n+1,z}h_n}}{1 + r_{n,n+1} R_{n+1,n+2} e^{-2jk_{n+1,z}h_n}} \tag{3·2a}$$

$$(n = 1, 2, \cdots, N-1)$$

$$R_{N,N+1} = 0 \tag{3·2b}$$

したがって，N層誘電体の$z=0$の境界面における反射係数R(ω)は次式で示される．

$$R(\omega) = R_{1,2}(\omega) \tag{3·3}$$

ここで，

$$R_{n,n+1}(\omega) = R_{n,n+1}(\omega) e^{-2jk_{nz}h_n} \tag{3·4}$$

とおけば，

$$h_1 = 0, \qquad d_{n+1} = h_n - h_{n+1}$$

を用いて．

$$R(\omega) = R_{1,2}(\omega) = R_{1,2}(\omega) \tag{3.5}$$

$$R_{n,n+1}(\omega) = \frac{r_{n,n+1} + R_{n+1,n+2}(\omega)\, e^{2j k_{n+1z} d_{n+1}}}{1 + r_{n,n+1} \cdot R_{n+1,n+2}(\omega)\, e^{2j k_{n+1z} d_{n+1}}} \tag{3.6a}$$

$$(n = 1, 2, \cdots, N-1)$$

$$R_{N,N+1}(\omega) = 0 \tag{3.6b}$$

が成り立つ。ここで，$r_{n,n+1}$ は (ε_n, μ_0) なる半無限誘電体と $(\varepsilon_{n+1}, \mu_0)$ なる半無限誘電体とが $z=0$ の境界面において接している場合の振幅反射係数であり，次式で表わされる。

$$r_{n,n+1} = \frac{k_{nz} - k_{n+1z}}{k_{nz} + k_{n+1z}} \tag{3.7}$$

また，後の計算のために，この境界面における振幅透過係数を $t_{n,n+1}$ とすれば，次式で表わされる。

$$t_{n,n+1} = \frac{2k_{nz}}{k_{nz} + k_{n+1z}} \tag{3.8}$$

ただし，k_{nz} は式(3.1a)および(3.1b)で示されるように，n 番目の誘電体層中を伝搬する平面波の伝搬定数の z 方向成分を表わし，入射角 θ，屈折率 n_1, n_n に応じて次のように実数(部分反射)または純虚数(全反射)となる。

$$k_{nz} = \begin{cases} -k_0 \alpha_n, & (n_n^2 - n_1^2 \sin^2\theta > 0) \\ j k_0 \beta_n, & (n_n^2 - n_1^2 \sin^2\theta < 0) \end{cases} \tag{3.9a, 3.9b}$$

$$\alpha_n = \sqrt{n_n^2 - n_1^2 \sin^2\theta} \tag{3.10a}$$

$$\beta_n = \pm \sqrt{n_1^2 \sin^2\theta - n_n^2} \quad \begin{pmatrix} \omega > 0 \\ \omega < 0 \end{pmatrix} \tag{3.10b}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{C_0} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

式(3·9a)および(3·9b)より，式(3·7)および(3·8)で表わされる $\Gamma_{n,n+1}$, $t_{n,n+1}$ は周波数ωに無関係な定数となる。ところで，式(3·9b)で表わされる β_n の複号は，$z=-\infty$ における遠方放射条件によって $\omega>0$ の場合には＋符号，$\omega<0$ の場合には－符号をとるべきことを意味している。伝搬定数 k_{nz} をこのように決定すれば，式(3·5)および(3·6a)から部分反射および全反射のそれぞれの場合について，$R^*(\omega)=R(-\omega)$ なる関係が満足され，反射パルス波 $F_r(\xi_r)$ は(2·8)で示されるように実函数となる。

以上で多層誘電体の $z=0$ の境界面における反射係数 $R(\omega)$ が求められたわけであるが，このままでは式(2·8)の積分が実行できないので，$R(\omega)$ を級数展開することを考える。

3.2 部分反射

いま，全ての境界面において部分反射しか起らない場合，すなわち k_{nz} が全て実数の場合，式(3·6a)は次のように表わすことができる。

$$R_{n,n+1}(\omega) = \frac{\Gamma_{n,n+1} + R_{n+1,n+2}(\omega)\, e^{-j\omega\tau_{n+1}}}{1 + \Gamma_{n,n+1}\cdot R_{n+1,n+2}(\omega)\, e^{-j\omega\tau_{n+1}}} \tag{3·11}$$

$$\tau_n = \frac{2d_n}{|v_{pzn}|} \tag{3·12}$$

$$v_{pzn} = \frac{\omega}{k_{nz}} = -\frac{C_0}{d_n} \tag{3·13}$$

(3·12)および(3·13)より，τ_n はn番目の誘電体層を伝搬する平面波のz方向の位相速度を v_{pzn} とすると，位相がこの誘電体層を往復するのに要する時間を表わしていることがわかる。

つぎに，式(3·11)を級数展開で表示する。式(3·11)の右辺のTaylor展開が収束する条件は，

$$|\Gamma_{n,n+1}\cdot R_{n+1,n+2}(\omega)\, e^{-j\omega\tau_{n+1}}| < 1$$

であり，この条件は最下層での境界面について，すなわち $n=N-1$ のときに

$$|R_{N-1,N}(\omega)| = |r_{N-1,N}| < 1$$

となることから，すべての n ($n=1,2,\cdots,N-1$) について

$$|R_{n,n+1}(\omega)| < 1$$

が成立し，一般に $R_{n,n+1}(\omega)$ の分母は次式のように級数展開することができる．

$$\frac{1}{1+r_{n,n+1}\cdot R_{n+1,n+2}(\omega)e^{-j\omega\tau_{n+1}}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot r_{n,n+1}^k\cdot R_{n+1,n+2}^k(\omega)e^{-jk\omega\tau_{n+1}} \quad (3\cdot14)$$

これを用いて $R_{n,n+1}(\omega)$ の級数展開は，結局次式のように求められる．

$$R_{n,n+1}(\omega) = R_{n,n+1}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{n,n+1}^{(k)} \quad (3\cdot15)$$

ただし．

$$R_{n,n+1}^{(0)} = r_{n,n+1} \quad (3\cdot16a)$$

$$R_{n,n+1}^{(k)} = t_{n,n+1}\cdot t_{n+1,n}\cdot (r_{n+1,n})^{k-1}\cdot \left(R_{n+1,n+2}(\omega)\right)^k e^{-jk\omega\tau_{n+1}} \quad (3\cdot16b)$$

ここで，式(3·7)および(3·8)から

$$r_{n,n+1} = -r_{n+1,n} \quad (3\cdot17a)$$

$$1-r_{n,n+1}^2 = t_{n,n+1}\cdot t_{n+1,n} \quad (3\cdot17b)$$

なる関係を用いた。式(3·15)の物理的意味は次のように考えることができる。すなわち，図3に示すように $R_{n,n+1}^{(0)}$ は n 番目と $(n+1)$ 番目の誘電体層の境界面において反射された波を表わし，$R_{n,n+1}^{(k)}$ は $(n+1)$ 番目の誘電体層中を k 回往復した波を表わしている。式(3·15)，(3·16a)および(3·16b)より，反射係数 $R(\omega)$ は形式的には次のように表わすことができる。

$$R(\omega) = r_{12} + \sum_{k=1}^{\infty} t_{12}t_{21}r_{21}^{k-1}e^{-jk\omega\tau_2}\left[r_{23}+\sum_{\ell=1}^{\infty}t_{23}t_{32}r_{32}^{\ell-1}e^{-j\ell\omega\tau_3}\left\{r_{34}+\sum_{m=0}^{\infty}t_{34}t_{43}\cdots\right\}^{\ell}\right]^k \quad (3\cdot18)$$

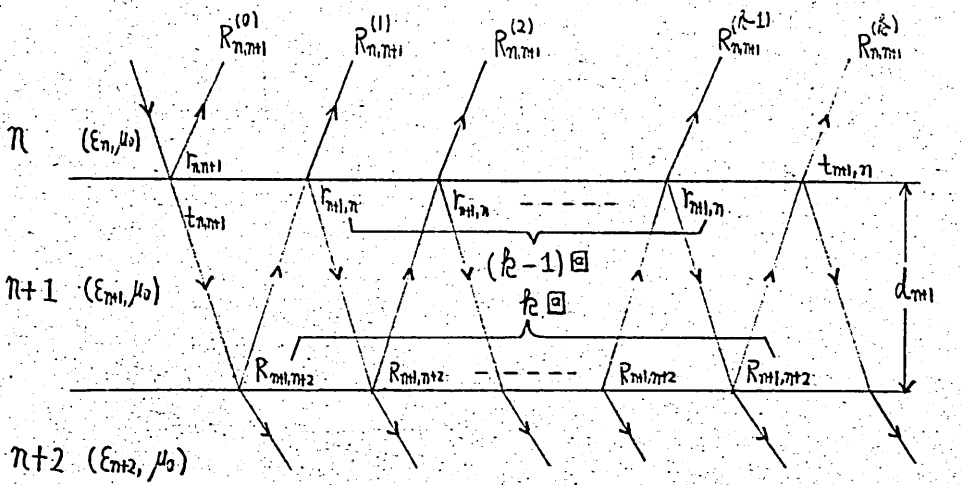


図3. 式(3·15)の物理的様子

3.3 全反射

つぎに，任意の誘電体層の境界面において全反射が起こる場合について考察する。いま，媒質 n と媒質 $(n+1)$ との境界面 $(z=-h_n)$ において全反射が起っているとすると，媒質 $(n+1)$ 内の波は evanescent wave (全反射波) となり，k_{n+1z} は式(3·9b)で与えられるように純虚数となる。この場合には，反射係数 $R_{n,n+1}(\omega)$ は次式のようになる。

$$R_{n,n+1}(\omega) = \frac{r_{n,n+1} + R_{n+1,n+2}(\omega)\, e^{-2k_0 \beta_{n+1} d_{n+1}}}{1 + r_{n,n+1} \cdot R_{n+1,n+2}(\omega)\, e^{-2k_0 \beta_{n+1} d_{n+1}}} \tag{3·19}$$

ただし，この場合 $r_{n,n+1}$ は複素数となり，次式で与えられる。

$$r_{n,n+1} = e^{-j\phi_{n,n+1}} \tag{3·20a}$$

$$\phi_{n,n+1} = \tan^{-1} \frac{-2\alpha_n \beta_{n+1}}{\alpha_n^2 - \beta_{n+1}^2} \tag{3·20b}$$

ところで，全反射が起る場合には前節で述べた部分反射の場合とは異なり，式(3.19)で表わされる反射係数 $R_{n,n+1}(\omega)$ の分母の Taylor 展開の収束条件

$$\left| \Gamma_{n,n+1} \cdot R_{n+1,n+2}(\omega)\, e^{-2jk_0\beta_{n+1}d_{n+1}} \right| < 1$$

が一般には成立しないので，このような場合反射係数 $R_{n,n+1}(\omega)$ は級数展開による方法で求めることができない。すなわち，反射係数 $R(\omega)$ を式(3.18)のような形で表わすことができないことになる。ただ，$(N-1)$ 番目の誘電体層中の波が全反射波である場合には，

$$|R_{n,n+1}(\omega)| < 1 \quad (n=1,2,\cdots,N-2)$$

$$|R_{N-1,N}(\omega)| = 1$$

が成り立ち，また N 番目の誘電体層（最下層）中の波が全反射波である場合，あるいは $(N-1)$ 番目および N 番目の誘電体層中の波がともに全反射波である場合には，

$$|R_{n,n+1}(\omega)| = 1 \quad (n=1,2,\cdots,N-1)$$

が成り立つので，反射係数 $R(\omega)$ は級数展開により求めることができる。そこで，ここでは反射係数 $R(\omega)$ を級数展開の方法により求めることのできる場合だけを取り扱い，その他の場合については別に検討することにする。

以下の章においては，例として誘電体スラブおよび四層誘電体にパルス波が入射した場合の反射パルス波を実際に求め，全反射現象が起る場合についてはこれらの章において詳しく検討することにする。

4. 誘電体スラブによる反射パルス波

4.1 部分反射

図4に示すような誘電体スラブ (ε_2, μ_0) に，半無限誘電体媒質I (ε_1, μ_0) からパルス波が入射した場合の反射パルス波を求める。いま，$z=-h_1$

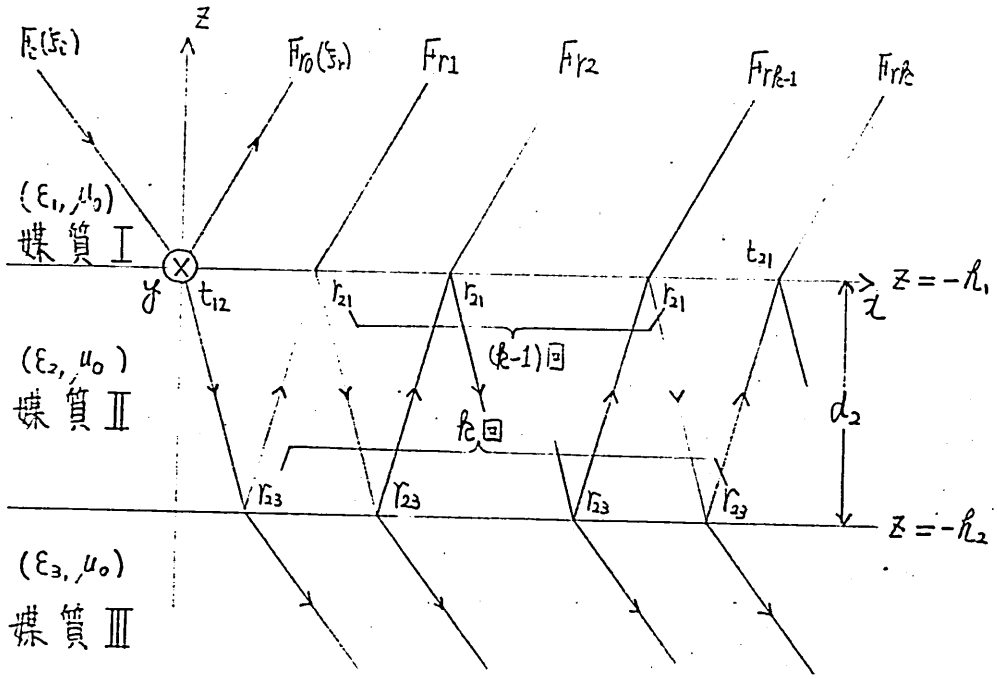


図4. 誘電体スラブによる反射波

および $z=-h_2$ のいずれの境界面においても部分反射が起る場合には，反射係数 $R(\omega)$ は式 (3·15), (3·16a) および (3·16b) から次のように表わせる。

$$R(\omega) = R_{12}(\omega) = R_{12}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{12}^{(k)} \tag{4·1}$$

$$R_{12}^{(0)} = r_{12} \tag{4·2a}$$

$$R_{12}^{(k)} = t_{12} t_{21} r_{23} \left[r_{21} r_{23} \right]^{k-1} e^{-jk\omega\tau_2} \tag{4·2b}$$

ただし，

$$r_{12} = \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}, \quad r_{21} = -r_{12}, \quad t_{12} = \frac{2d_1}{d_1 + d_2}, \quad t_{21} = \frac{2d_2}{d_1 + d_2}$$

$$r_{23} = \frac{d_2 - d_3}{d_2 + d_3}, \quad \tau_2 = \frac{2d_2 h_2}{c_0}$$

式(4·1),(4·2a)および(4·2b)で表わされる反射係数$R(\beta)$を式(2·5)に代入すれば，式(2·1)および(2·2)で示されるベル形およびガウス形入射パルス波のそれぞれの場合について，反射パルス波は次式のように求められる。

$$F_r(\xi_r) = F_{r0}(\xi_r) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{rk}(\xi_r) \tag{4·3}$$

$$\begin{cases} F_{r0}(\xi_r) = \Gamma_{12} \dfrac{\epsilon}{\epsilon^2 + \xi_r^2} & (4·4a) \\ F_{rk}(\xi_r) = t_{12} t_{21} \Gamma_{21}^{k-1} \Gamma_{23}^{k} \dfrac{\epsilon}{\epsilon^2 + (\xi_r + k\tau_2)^2} & (4·4b) \end{cases} \quad (\text{ベル形})$$

$$\begin{cases} F_{r0}(\xi_r) = \Gamma_{12} \dfrac{1}{\sqrt{\pi} w} e^{-\frac{\xi_r^2}{w^2}} & (4·5a) \\ F_{rk}(\xi_r) = t_{12} t_{21} \Gamma_{21}^{k-1} \Gamma_{23}^{k} \dfrac{1}{\sqrt{\pi} w} e^{-\frac{(\xi_r + k\tau_2)^2}{w^2}} & (4·5b) \end{cases} \quad (\text{ガウス形})$$

上式より，$F_{r0}(\xi_r)$および$F_{rk}(\xi_r)$は入射パルス波に相似形で　それぞれ$\xi_r = 0$および$\xi_r = -k\tau_2$においてピークを持つ．すなわち，入射パルス波は$\xi_r = 0$の時刻に原点に到達するのであるから，図に示すように，$F_{r0}(\xi_r)$は原点において反射された反射パルス波を表わし，$F_{rk}(\xi_r)$は媒質Ⅱ中をk回往復し，$F_{r0}(\xi_r)$にくらべて時間的に$k\tau_2$遅れて媒質Ⅰに反射パルス波として現われることがわかる．したがって，媒質Ⅰのある点で反射パルス波を観測すると，図5に示すように，入射パルス波に相似でそのピークの大きさが一番目のは入射パルス波のΓ_{12}倍，以下のは$t_{12}t_{21}\Gamma_{21}^{k-1}\Gamma_{23}^{k}$倍に減少し，各々のピークが時間$\tau_2$づつずれたパルス波を重ね合わせた波形が観測されるわけである．

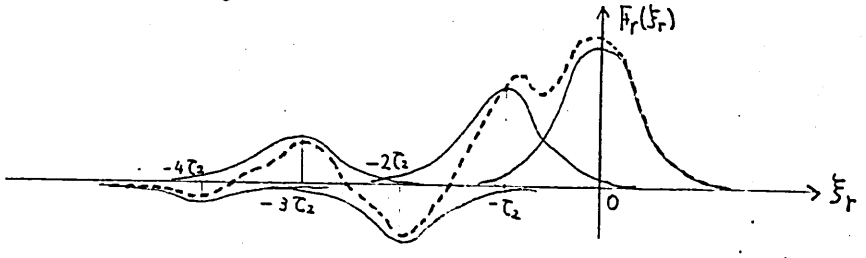


図5．誘電体スラブによる反射パルス波（部分反射）

4.2 全反射

つぎに，誘電体スラブ中の波が全反射波であるときの反射パルス波を求める。この場合には反射係数 $R(\omega)$ は式(3·19)よりつぎのように表わされる。

$$R(\omega) = \frac{r_{12} + R_{23}(\omega)\, e^{-2jk_0\beta_2 d_2}}{1 + r_{12} R_{23}(\omega)\, e^{-2jk_0\beta_2 d_2}} \tag{4·6}$$

ここで，$r_{12}, R_{23}(\omega)$ は次式で与えられる。

$$r_{12} = e^{-j\phi_{12}} \tag{4·7a}$$

$$\phi_{12} = \tan^{-1} \frac{-2\alpha_1\beta_2}{\alpha_1^2 - \beta_2^2} \tag{4·7b}$$

$$R_{23}(\omega) = r_{23} = e^{-j\phi_{23}} \tag{4·8a}$$

$$\phi_{23} = \tan^{-1} \frac{2\beta_2\alpha_3}{\beta_2^2 - \alpha_3^2} \tag{4·8b}$$

したがって，

$$\left| r_{12} R_{23}(\omega)\, e^{-2jk_0\beta_2 d_2} \right| = \left| e^{-j(\phi_{12}+\phi_{23})}\, e^{-2jk_0\beta_2 d_2} \right| < 1$$

が成り立つ。この場合には，部分反射のときと同様に，反射係数 $R(\omega)$ は次のように表わされる。すなわち，

$$R(\omega) = R_{12}(\omega) = R_{12}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{12}^{(k)} \tag{4·9}$$

$$R_{12}^{(0)} = r_{12} = e^{-j\phi_{12}} \tag{4.10a}$$

$$R_{12}^{(k)} = t_{12}t_{21}r_{21}^{k-1}r_{23}^{k}e^{-2k\beta_0\beta_2 d_2} \tag{4.10b}$$

ただし，

$$r_{21} = -r_{12}$$

$$t_{12} = \frac{2\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_2^2}}e^{-j\psi_{12}}, \quad \psi_{12} = \tan^{-1}\frac{-\beta_2}{\alpha_1}$$

$$t_{21} = \frac{2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_2^2}}e^{-j\psi_{21}}, \quad \psi_{21} = \tan^{-1}\frac{\alpha_1}{\beta_2}$$

式(4.9)，(4.10a)および(4.10b)で与えられた反射係数 $R(\omega)$ を用いて，ベル形およびガウス形入射パルス波のそれぞれの場合について，反射パルス波は次式のように与えられる。

$$F_r(\xi_r) = F_{r0}(\xi_r) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{rk}(\xi_r) \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} F_{r0}(\xi_r) = \cos\phi_{12}\dfrac{\epsilon}{\epsilon^2+\xi_r^2} - \sin\phi_{12}\dfrac{\xi_r}{\epsilon^2+\xi_r^2} & (4.12a) \\ F_{rk}(\xi_r) = 2(-1)^{k-1}\sin\phi_{12}\dfrac{(\epsilon+k\frac{2\beta_2 d_2}{c_0})\sin k(\phi_{12}+\phi_{23}) + \xi_r\cos k(\phi_{12}+\phi_{23})}{(\epsilon+k\frac{2\beta_2 d_2}{c_0})^2+\xi_r^2} & (4.12b) \end{cases}$$

（ベル形）

$$\begin{cases} F_{r0}(\xi_r) = \cos\phi_{12}\frac{1}{\sqrt{\pi}W}e^{-(\frac{\xi_r}{W})^2} - \sin\phi_{12}\frac{2}{\pi W}e^{-(\frac{\xi_r}{W})^2}\int_0^{\frac{\xi_r}{W}} e^{t^2}dt & (4\cdot13a) \\ F_{rk}(\xi_r) = \frac{4(-1)^{k-1}\alpha_1\beta_2}{\pi(\alpha_1^2+\beta_2^2)}\int_0^\infty \exp\left\{-(\frac{W\omega}{2})^2 - k\frac{\beta_2 d_2}{C_0}\omega\right\}\left[\cos\{\psi_{12}+\psi_{21}+(k-1)\phi_{12}+k\phi_{23}\}\right. & \\ \left.\cos\xi_r\omega - \sin\{\psi_{12}+\psi_{21}+(k-1)\phi_{12}+k\phi_{23}\}\sin\xi_r\omega\right]d\omega & (4\cdot13b) \end{cases}$$

（ガウス形）

部分反射のときと同様，$F_{r0}(\xi_r)$は$z=0$の境界面で反射された波を表わし，$F_{rk}(\xi_r)$は媒質Ⅱ中をk回往復した波を表わしているが，境界面で反射・透過をするときに位相の変化を受ける．したがって，波形が崩れ，入射パルス波と相似ではなくなる。また，全反射の場合にはスラブにおけるz方向の伝搬定数は0となるため，z方向の位相速度が無限大となり，スラブを往復するための時間遅れが現われない．すなわち，式(4.10b)における指数部分はスラブをk回往復する間に振幅の受ける減衰を示している。

なお，媒質Ⅲ中の波だけが全反射波の場合，および媒質Ⅱ，Ⅲ中の波がともに全反射波となる場合にも，同様に取り扱うことができる。

4.3 数値計算例

図6(a)および(b)に，誘電体スラブの場合のベル形入射パルス波に対する反射パルス波の波形を示す。ただし，縦軸は$\epsilon F_r(\xi_r)$とし，横軸はξ_rをパルス波の幅を定めるパラメータϵで規格化した値，すなわちξ_r/ϵとする。したがって，これらの図は入射パルス波，あるいは反射パルス波をある一定の波面で観測したときの，その振幅の時間的経過を示していることになる。図(a)は各媒質の屈折率がそれぞれ，$n_1=1.5$, $n_2=1.0$, $n_3=1.5$であり，規格化されたスラブの厚さが$2n_2d_2/\epsilon C_0=2.0$の場合である。また，図(b)は$n_1=1.5$, $n_2=1.0$, $n_3=2.0$, $2n_2d_2/\epsilon C_0=4.0$の場合である．いずれの場合も，入射角θをパラメータとして描かれており，入射角θが0°および30°の場合は部分反射の場合であり，θが45°, 60°および75°の場合はスラブ内の波が全反射波となる場合である。なお，両図において参考のため，ξ_r/ϵに対する入射パルス波の波形$\epsilon F_i(\xi_i)$も同時に示されている。

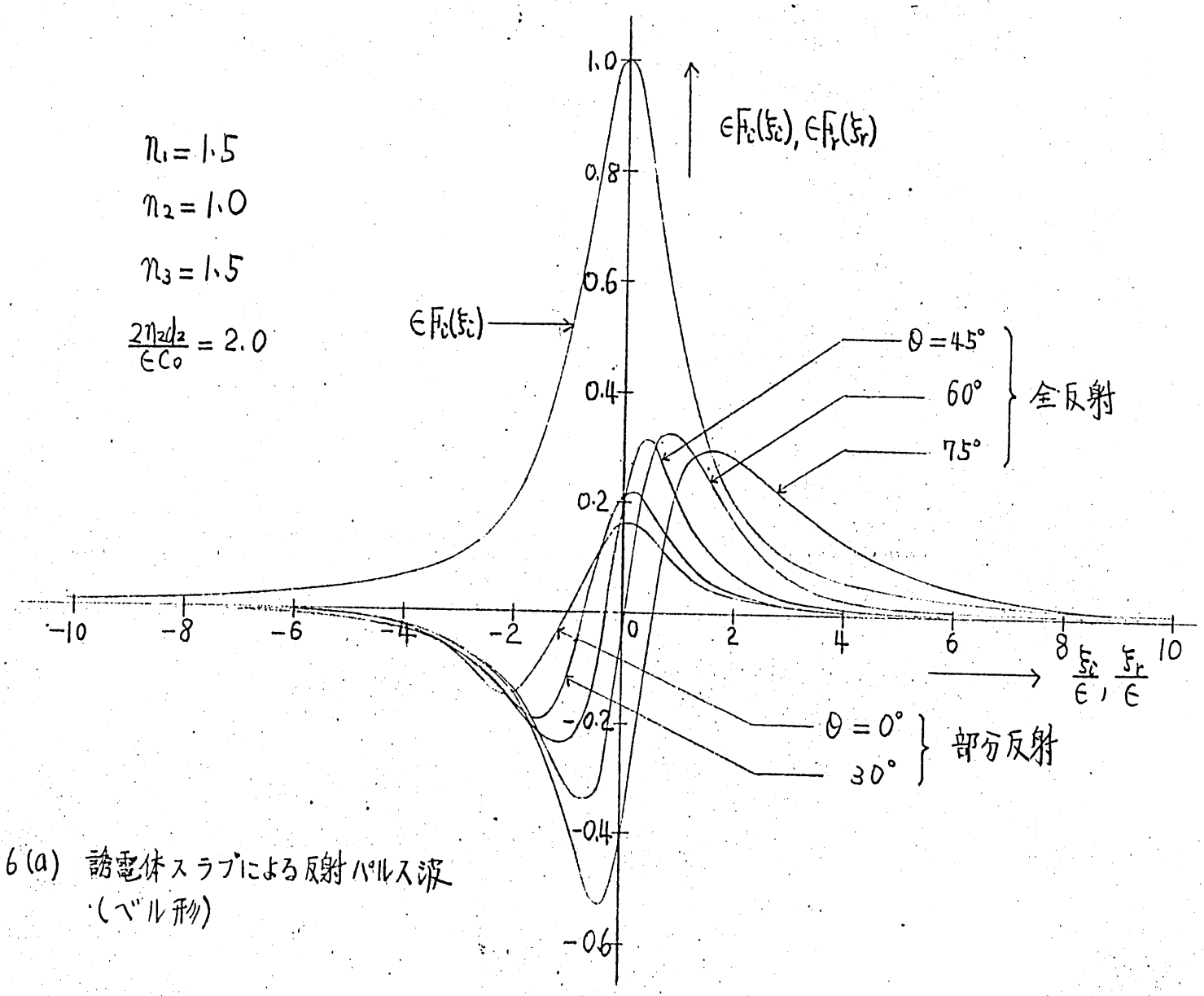


図6(a) 誘電体スラブによる反射パルス波
(ベル形)

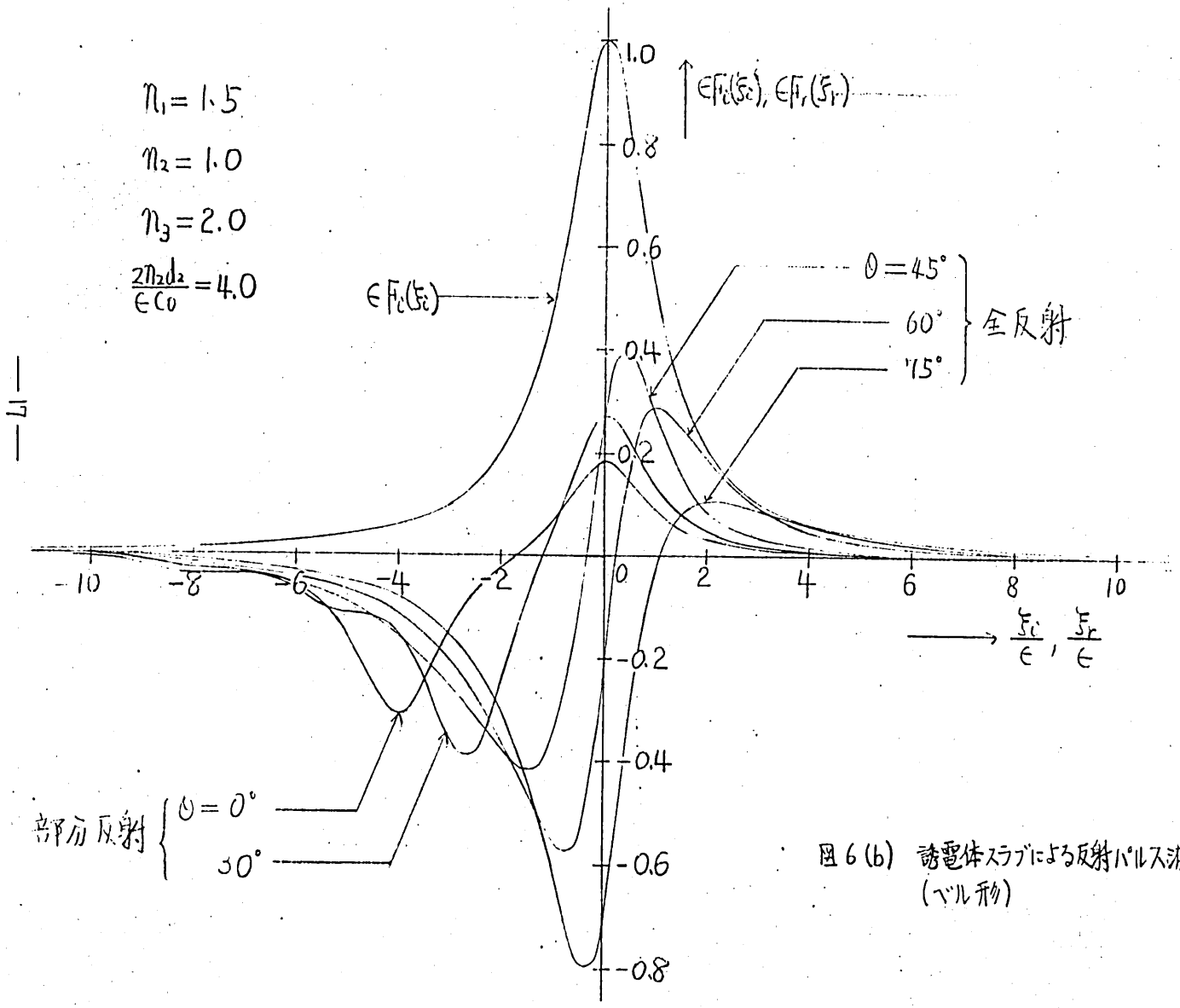


図6(b) 誘電体スラブによる反射パルス波
(ベル形)

5. 四層誘電体による反射パルス波

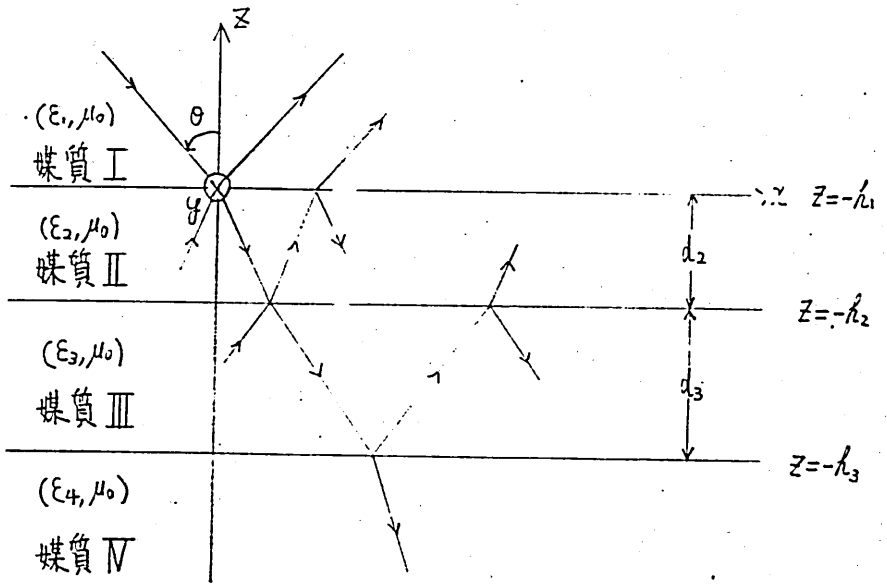


図 7. 四層誘電体による反射波

5.1 部分反射の場合

図7に示すような四層誘電体の反射係数 $R(\omega)$ は，どの境界面においても部分反射が起る場合には，式(3·11)より次式のように表わされる。

$$R(\omega) = R_{12}(\omega) = \frac{r_{12} + R_{23}(\omega)\, e^{-j\omega\tau_2}}{1 + r_{12} \cdot R_{23}(\omega)\, e^{-j\omega\tau_2}} \qquad (5\cdot1)$$

$$R_{23}(\omega) = \frac{r_{23} + r_{34}\, e^{-j\omega\tau_3}}{1 + r_{23} \cdot r_{34}\, e^{-j\omega\tau_3}} \qquad (5\cdot2)$$

r_{12}, r_{23}, r_{34} は式(3·7)および(3·9a)よりえられ，τ_2，τ_3は式(3·12)および(3·13)より与えられる。ここで，$R(\omega)$および$R_{23}(\omega)$は式(3·15)，(3·16a)および(3·16b)を用いて，それぞれ次のように表わせる。

$$R(\omega) = R_{12}(\omega) = R_{12}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{12}^{(k)} \tag{5·3}$$

$$R_{12}^{(0)} = r_{12} \tag{5·4a}$$

$$R_{12}^{(k)} = t_{12} t_{21} r_{21}^{k-1} R_{23}^{k}(\omega)\, e^{-jk\omega\tau_2} \tag{5·4b}$$

$$R_{23}(\omega) = R_{23}^{(0)} + \sum_{l=1}^{\infty} R_{23}^{(l)} \tag{5·5}$$

$$R_{23}^{(0)} = r_{23} \tag{5·6a}$$

$$R_{23}^{(l)} = t_{23} t_{32} r_{32}^{l-1} r_{34}^{l}\, e^{-jl\omega\tau_3} \tag{5·6b}$$

ただし，r_{21}, t_{12}, t_{21} および r_{32}, t_{23}, t_{32} は式(3·7)および(3·9a)よりえられる。

式(5·4a)および(5·4b)より $R_{12}^{(0)}$ は $z=0$ の境界面で部分反射された波を表わし，$R_{12}^{(k)}$ は媒質Ⅱ中を k 回往復した反射波を表わしている。同様にして，$R_{23}^{(0)}$ は $z=-h_2$ の境界面において部分反射された波を表わし，$R_{23}^{(l)}$ は媒質Ⅲ中を l 回往復した波を表わしている。すなわち，$R_{23}(\omega)$ は媒質Ⅱから Ⅲへ透過した1つの波に対して，媒質Ⅲから Ⅱへもどる波の集合を表わしている。

さて，式(5·3)および(5·5)で表わされる$R(\omega)$および$R_{23}(\omega)$をさらに次のように表わす。

$$R(\omega) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[R_{23}(\omega) \right]^n e^{-jn\omega\tau_2} \tag{5·7}$$

$$a_0 = r_{12} \tag{5·8a}$$

$$a_n = t_{12} t_{21} r_{21}^{n-1} \tag{5·8b}$$

$$R_{23}(\omega) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-jm\omega\tau_3} \tag{5·9}$$

$$b_0 = \Gamma_{23} \tag{5·10a}$$

$$b_m = t_{23} t_{32} \Gamma_{32}^{m-1} \Gamma_{34}^{n} \tag{5·10b}$$

ここで,

$$\left[R_{23}(\omega) \right]^n = \left[b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-jm\omega\tau_3} \right]^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-jk\omega\tau_3} \tag{5·11}$$

とすると, 多項定理より k 次の項の係数は次式で表わされる。

$$C_k = \sum^{*} \frac{n!}{P_0! P_1! P_2! \cdots P_k!} b_0^{P_0} b_1^{P_1} b_2^{P_2} \cdots b_k^{P_k} \tag{5·12}$$

ただし, $\sum^{*}$ は

$$\begin{cases} P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_k = n & (5·13a) \\ P_1 + 2P_2 + \cdots + kP_k = k & (5·13b) \end{cases}$$

を満足する $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_k$ の組み合わせについて和をとることを示している。式(5·7)および(5·11)から, $R(\omega)$ は形式的に次式のように表わされる。

$$R(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n C_k e^{-j\omega(n\tau_2 + k\tau_3)} \tag{5·14}$$

係数 C_k は実際には無限級数であるが，係数 b_m が $m\to\infty$ で収束するので有限項の和を考慮すればよく，係数 a_n も $n\to\infty$ で収束するので n についても有限項の和を考えればよい。式(5·14)で表わされる反射係数 $R(\omega)$ を用いて反射波を求めると，次式のように表わされる。

$$F_r(\xi_r)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_n C_k \frac{\epsilon}{\epsilon^2+(\xi_r+n\tau_2+k\tau_3)^2} \qquad (\text{ベル形}) \quad (5·15)$$

$$F_r(\xi_r)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_n C_k \frac{1}{\sqrt{\pi}W} e^{-\frac{(\xi_r+n\tau_2+k\tau_3)^2}{W^2}} \qquad (\text{ガウス形}) \quad (5·16)$$

さて，式(5·14)あるいは(5·15)および(5·16)における係数 a_n, C_k の表わす意味は次のように説明できる。まず，$F_r(\xi_r)$ は式(5·15)および(5·16)から明らかなように，媒質IIおよびIIIをそれぞれ n 回および k 回往復した反射波の集合を表わしているが，ある任意の n と k の値に対して，以下に示すように幾通りかの経路が考えられる。しかしながら，そのいずれの経路を通過した波も $z=0$ の境界面において同時刻，同一箇所において入射パルス波に相似でピークの値が $a_n C_k$ であるような反射パルス波として観測される。たとえば，$n=3$, $k=3$ の場合には式(5·8b)より係数 a_n は

$$a_3 = t_{12}t_{21}r_{21}^2 \qquad (5·17)$$

となるが，これは明らかに波が媒質III中を3回往復することを示している。また式(5·13a)および(5·13b)より P_k は次式を満足しなければならない。

$$\begin{cases} P_0+P_1+P_2+P_3=3 & (5·18a)\\ P_1+2P_2+3P_3=3 & (5·18b)\\ P_4=P_5=\cdots=P_k=0 & (5·18c)\end{cases}$$

したがって，式(5·12)より C_k は次式で与えられる。

$$C_3=\sum^{*}\frac{3!}{P_0!P_1!P_2!P_3!}r_{23}^{P_0}(t_{23}t_{32}r_{34})^{P_1}(t_{23}t_{32}r_{32}r_{34})^{P_2}(t_{23}t_{32}r_{32}^2r_{34}^3)^{P_3} \qquad (5·19)$$

ここで，$\sum$は(5·18a)および(5·18b)を満たすP_0, P_1, P_2, P_3の値の組み合わせについて和をとることを示しており，$3!/P_0!P_1!P_2!P_3!$は一つの組み合わせに対して存在し得る波の経路の数の和を示している。そしてP_0, P_1, P_2, P_3の一つの組み合わせに対しては，$n!/P_0!P_1!P_2!P_3!$通りの経路を通った波はいずれもパルスのピークの大きさは等しいが，他の組み合わせに対グループとはピークの大きさを異にする。いま，式(5·18a)および(5·18b)を満たすP_0, P_1, P_2, P_3の組み合わせは次の三通りが考えられるが，その一つについて以上の事柄を説明しよう。

(i) $P_0=2$, $P_1=P_2=0$, $P_3=1$

(ii) $P_0=P_1=P_2=1$, $P_3=0$

(iii) $P_0=P_2=P_3=0$, $P_1=1$

(i)の場合について示すと，

$$\frac{3!}{P_0!P_1!P_2!P_3!}=3$$

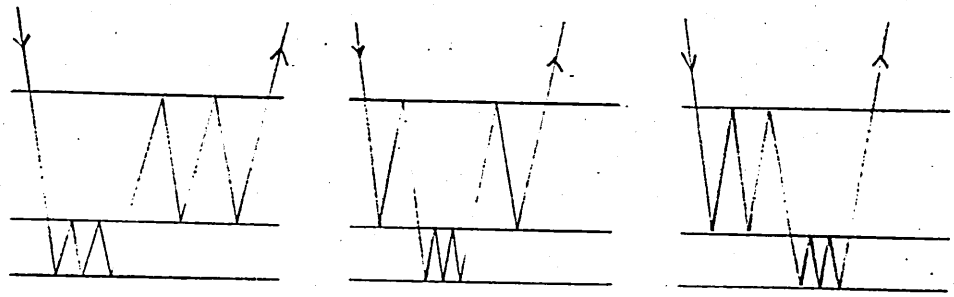
より，この組み合わせに対しては三通りの経路が考えられるが，どの経路を通った波もピークの大きさは式(5·17)および(5·19)より

$$a_3C_3=t_{12}t_{21}r_{21}^2t_{23}r_{23}^2r_{34}^3t_{32}$$

となる。図8の(a), (b), (c)は以上の三通りの経路を示している。

以上を要約すると，まずnとℓは媒質IIおよびIIIをn回およびℓ回往復し，そのために$z=0$の境界面で反射されたパルス波にくらべピークが時間的に$(n\tau_2+\ell\tau_3)$遅れたパルス波の集合を表わしている。つぎに，あるnとℓの値に対して$P_0, P_1, \cdots, P_\ell$の値の組み合わせが幾通りか考えられるが，その各々は媒質Iにおいて同一時刻，同一箇所で入射パルス波に相似なパルス波として観測されるが，ピークの大きさだけが異なるようなパルス波の集合を表わしている。

そして，$P_0, P_1, \cdots, P_3$ の一つの組み合わせについても $n!/P_0!P_1!\cdots P_3!$ 通りの経路が考えられ，これは媒質Ⅰにおいて同一時刻，同一箇所で入射パルス波に相似な反射パルス波として観測され，いずれのパルス波のピークも大きさが等しいようなパルス波の集合を表わしている。



(a)　　(b)　　(c)

図8.　$P_0=2, P_1=P_2=0, P_3=1$ に対する波の経路

5.2 全反射

3.2で述べたように，四層誘電体において全反射現象が起った場合，反射係数 $R(\omega)$ を級数展開による方法で求めることができるのは，媒質Ⅲまたは Ⅳ の波が全反射波である場合，あるいは媒質Ⅲ および Ⅳ のいずれの波も全反射波である場合である。媒質Ⅲの波が全反射波である場合および媒質Ⅲおよび Ⅳ の波がともに全反射波である場合は，4.2で扱った場合の単なる拡張に過ぎない。したがって，ここでは媒質Ⅳの波が全反射波である場合の反射パルス波について考察する。

この場合，$r_{12}, r_{21}, t_{12}, t_{21}, r_{23}, r_{32}, t_{23}, t_{32}$ はすべて5.1の場合と等しく実数でよえられ，反射係数 $R(\omega)$ および $R_{23}(\omega)$ は式(5·1)および(5·2)で表わされる．ただし，r_{34} だけは次式に示すように複素数となる。

$$r_{34} = e^{-j\phi_{34}}, \quad \phi_{34} = \tan^{-1}\frac{-2\alpha_3\beta_4}{\alpha_3^2-\beta_4^2} \qquad (5\cdot20)$$

しかしながら，式(5·2)で与えられる $R_{23}(\omega)$ において

$$|\Gamma_{23}\Gamma_{34}e^{-j\omega\tau_3}| = |\Gamma_{23}e^{-j\phi_{34}}e^{-j\omega\tau_3}| < 1$$

$$|R_{23}(\omega)| = 1$$

が成り立つ。したがって，$R_{23}(\omega)$ および $R(\omega)$ は部分反射のときと同様に級数展開で求めることができ，$R(\omega)$ はやはり式(5·14)で与えられる。すなわち，反射波 $F_r(\xi_r)$ もやはり式(5·15)および(5·16)のような形で与えられる。ただし，この場合には C_k が複素数となるので，式(2·8)より $F_r(\xi_r)$ はベル形およびガウス形入射パルス波に対してそれぞれ次式で与えられる。

$$F_r(\xi_r) = R_e\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n C_k \frac{\epsilon}{\epsilon^2+(\xi_r+\eta_2+k\tau_3)^2}\right] \quad (\text{ベル形}) \quad (5·21)$$

$$F_r(\xi_r) = R_e\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n C_k \frac{1}{\sqrt{\pi}W} e^{-\frac{(\xi_r+\eta_2+k\tau_3)^2}{W^2}}\right] \quad (\text{ガウス形}) \quad (5·22)$$

係数 a_n, C_k の表わす意味も5·1の場合と同様に考えられるが，ただ Γ_{34} が式(5·20)で与えられることから，$z=-h_3$ の境界面において反射した波は位相の変化を受け，その結果波形が歪むことになる。

5.3 数値計算例

図9および図10に四層誘電体による反射パルス波の波形を示す。図9は，入射パルス波がガウス形で，部分反射の場合である。一方，図10は入射パルス波がベル形で，媒質Ⅳの波が全反射波の場合である。縦軸および横軸は誘電体スラブの場合と同様に $F_r(\xi_r)$ および ξ_r/ϵ とし，入射角 θ をパラメータに描かれている。図9においては，各媒質の屈折率はそれぞれ，$n_1=2.5$, $n_2=4.0$, $n_3=2.5$, $n_4=4.0$ に，また媒質ⅡおよびⅢの規格化されたスラブの厚さはそれぞれ，$2n_2d_2/\epsilon C_0=5.0$, $2n_3d_3/\epsilon C_0=2.0$

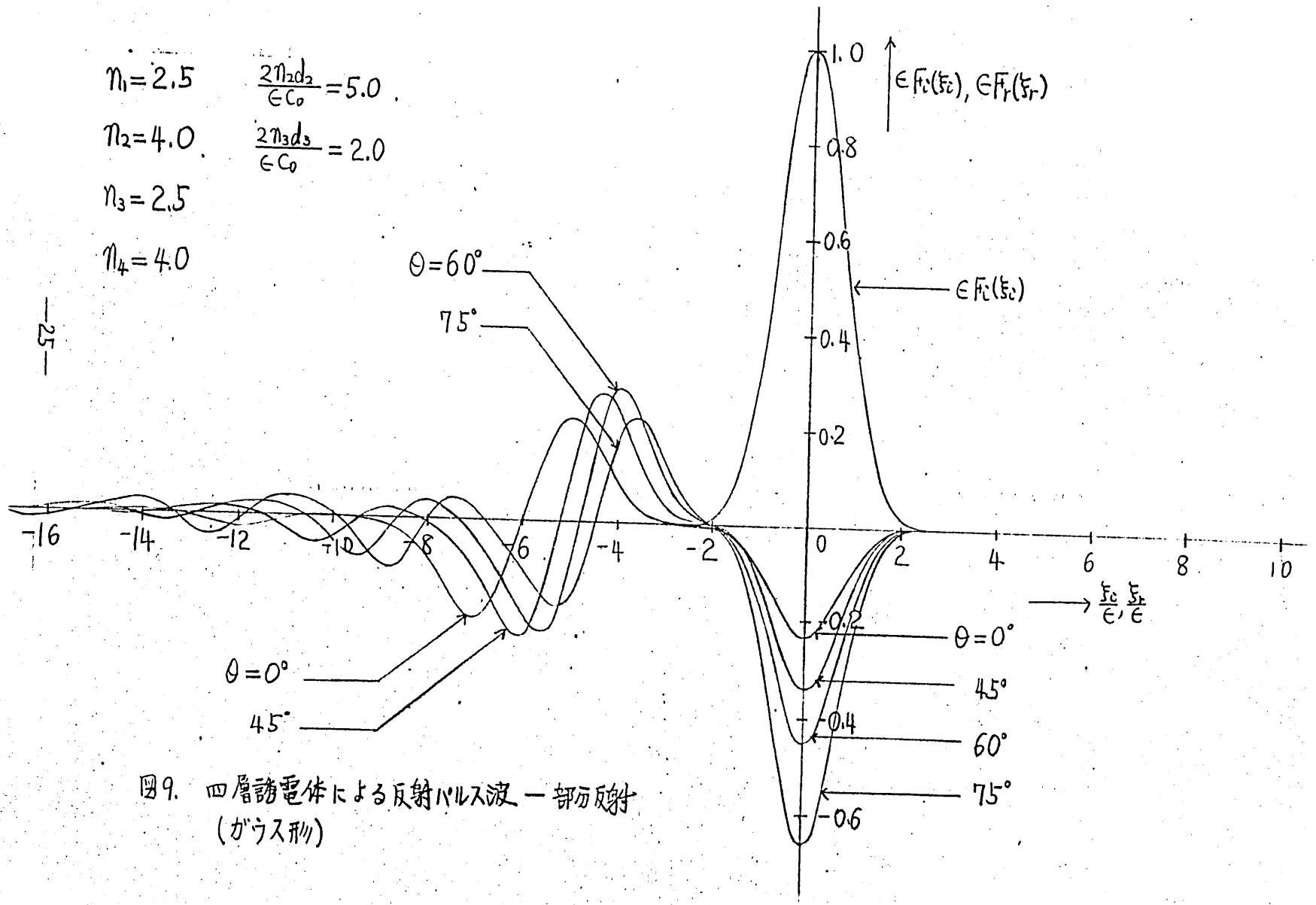


図9. 四層誘電体による反射パルス波 — 部分反射
(ガウス形)

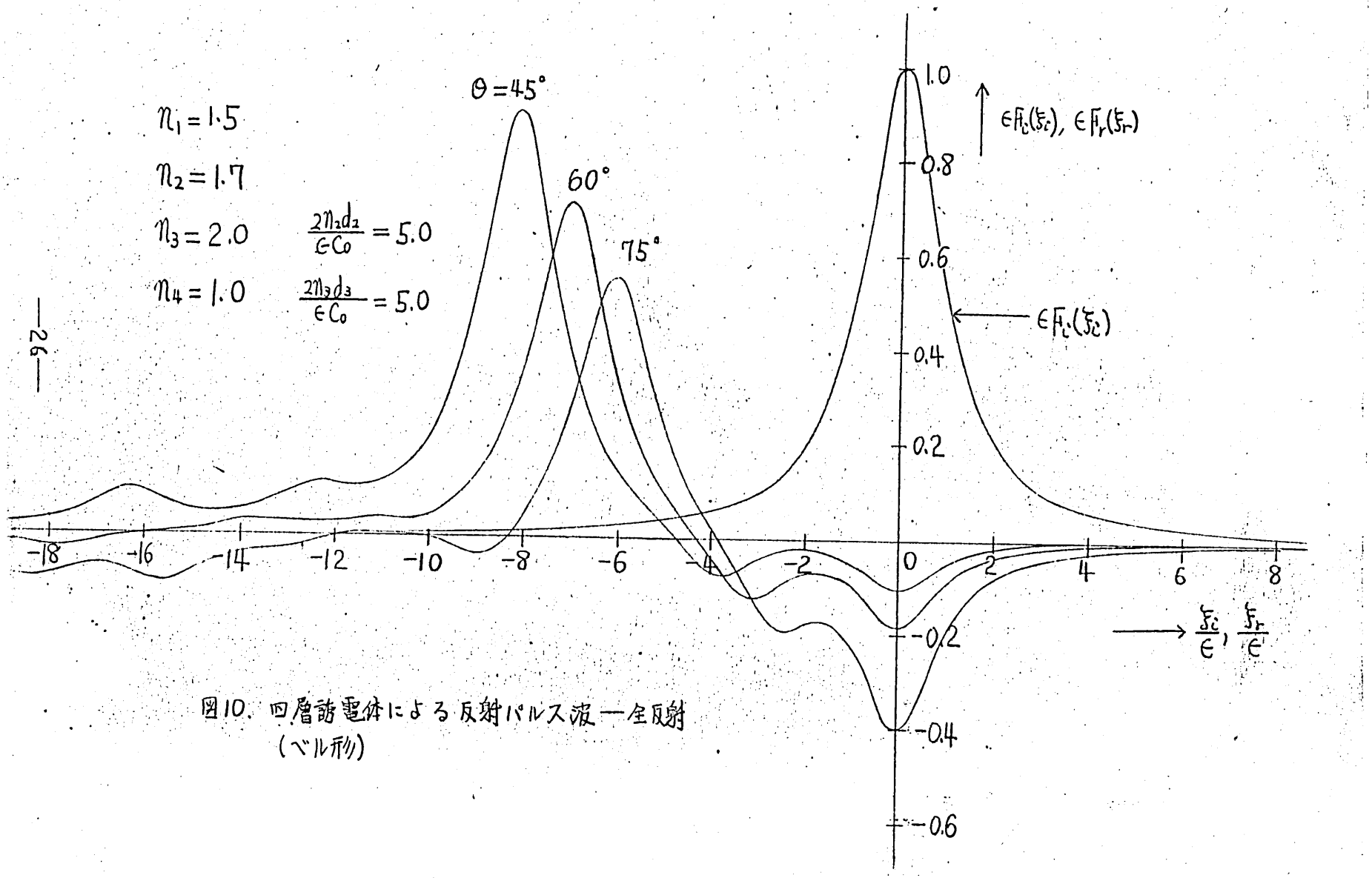


図10. 四層誘電体による反射パルス波—全反射
(ベル形)

に選ばれている。また図10では，屈折率は $n_1=1.5$, $n_2=1.7$, $n_3=2.0$, $n_4=1.0$ に，スラブの厚さは $2n_2d_2/c_0=5.0$, $2n_3d_3/c_0=5.0$ に選ばれている。なお，両図においても参考のため誘電体スラブの場合と同様に，入射パルス波の波形 $f(t)$ が同時に示されている。

6. 結　言

多層誘電体媒質の境界面にパルス波が入射した場合の反射波形を，多層誘電体の境界面における平面波の反射係数を級数展開することによって解析的に求めた。誘電体層内において全反射が起こらない場合には，この方法によって一般的に反射波を求めることができるが，全反射が起こる場合には，反射係数を級数展開することができない場合も生じることが明らかとなった。しかし，全反射が起こる場合についても，最下層の誘電体スラブ，または下の半無限誘電体媒質内だけに全反射波が存在する場合には，このような方法によって反射パルス波形を求めることができる。また，スラブの波が通常の波（部分反射）である場合には，反射パルス波は入射パルス波形に相似な波が時間遅れをともなって表われてくるが，全反射波となる場合には反射波は時間遅れがなく，歪んだ波が重ね合わされて観測されることが明らかとなった。

ここでは，多層誘電体の例として，三層誘電体および四層誘電体にパルス波が入射した場合を取り扱い，全反射が起こる場合を含めて数値例をあげて検討した。

謝　辞

日頃ご指導いただく本学工学部熊谷信昭教授および裏　克己教授に深謝する。

また，常々ご討論いただく熊谷研究室の諸氏に深謝する。

文　献

(1) J. R. Wait: "Reflection of a plane transient electromagnetic wave from a cold lossless plasma slab" Radio Sci, 4(4) PP. 401–405 (1969)

(2) D.M. Chabries and D.M. Bolle: "Impulse reflection with arbitrary angle of incidence and polarization from isotropic plasma slabs" Radio Sci, 6(12) PP. 1143–1149 (1971)

(3) 藤間 健一, 深井 一郎, 福岡 醇一: "プラズマスラブによる平面電磁波の過渡応答について" アンテナ・電播研資 (昭47-06)

輻射科学研究会資料

ダイナミック形光電子増倍大阪管
（その2）

大東延久・倉田 昇・森田正信
（関西大学 工学部）

1972年12月1日

ダイナミック形光電子増倍大阪管（その2）

I. まえがき

図1のような構造をもつダイナミック形光電子増倍大阪管の初速度を無視した場合の動作を先ず第1段階として先に発表したが[1]、今回、これの初速度を考慮した場合について種々計算したので、この結果とその特徴について述べる。

II. 解析

図1の動作概略図において、通常の大阪管のBacking-plate（Ba極）とEnd plate（En極）の間に高周波電界を印加してZ方向の電子振動を毎回加速させ適当な衝突エネルギを与えて、Ba極またはEn極上で二次電子を次々と増倍し、Z方向の推移に伴い適当な増倍段数の後集電子極Cより出力を取り出そうとするもので、その際、高い周波数まで動作出来るようにする為パラメータの選択により到着電子の位相に集束性を与えて、印加高周波電界と同期した量子化された信号出力とするものである。

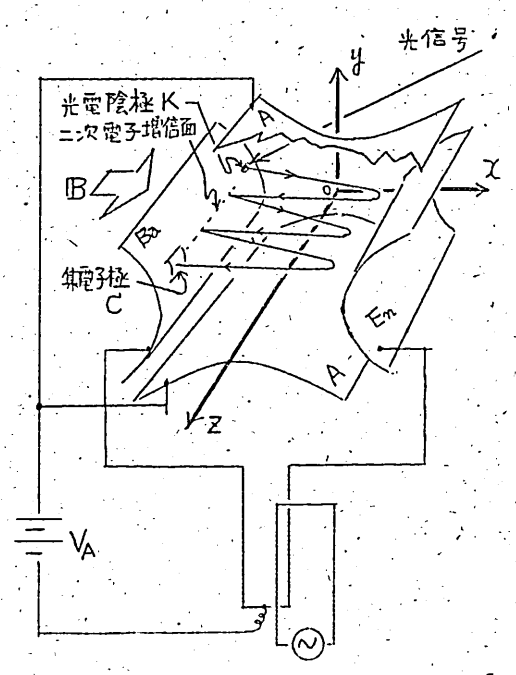


図 1

管内の電位分布は図2(b)に示す通り、DC電位分布は陽極電圧V_Aを加える事による電極の中心電圧V_0 ($=\alpha V_A$)を頂点とする放物線電位分布である。これに重畳してHF電位分布が加わり、この振幅関数を$V(x,y)$とすれば合成電位分布は次のようになる。

$$V(x,y,t) = V_0\left\{1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right\} + V(x,y)\cos\omega t \qquad (1)$$

磁界がある程度強くなればy方向の軌道振幅は小さくなり、$y=y_0$近傍の運動と考えられるので、HFの等電位線は図2(c)のように等間隔で平行に近いときは$V(x,y)$は$V(x)$と考えられ、これを次式で表わされる線形電位分布と仮定する。

$$V(x) = -\frac{V_m}{x_0}x \qquad (2)$$

また、(1)式右辺第1項のDC電位分布を実現する電極の式は

Ba, Em柱の式　$x^2 - y^2 = l_x^2$　(3)

A柱の式　$y^2 - x^2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} l_x^2$　(4)

$$\alpha = \frac{V_0}{V_A} \quad (5)$$

で表わされ，これを図2(a)に示す。

$\hat{i}$ をx軸方向の単位ベクトルとすると，加える磁界は

$$B = B\hat{i} \quad (6)$$

であり，これらの関係から，電子（電荷 $-e$，質量 m）の運動方程式の各成分は

$$\ddot{x} = -\omega_e^2 x - \eta \frac{V_m}{x_0} \cos\omega t \quad (7)$$

$$\ddot{y} = \omega_e^2 y - \omega_c \dot{z} \quad (8)$$

$$\ddot{z} = \omega_c \dot{y} \quad (9)$$

となる。ただし，$\cdot$ は時間 t に関する微分を示し，また

$$\eta = e/m, \quad \omega_e^2 = 2\eta V_0 / l_x^2, \quad \omega_c = \eta B \quad (10)$$

である。

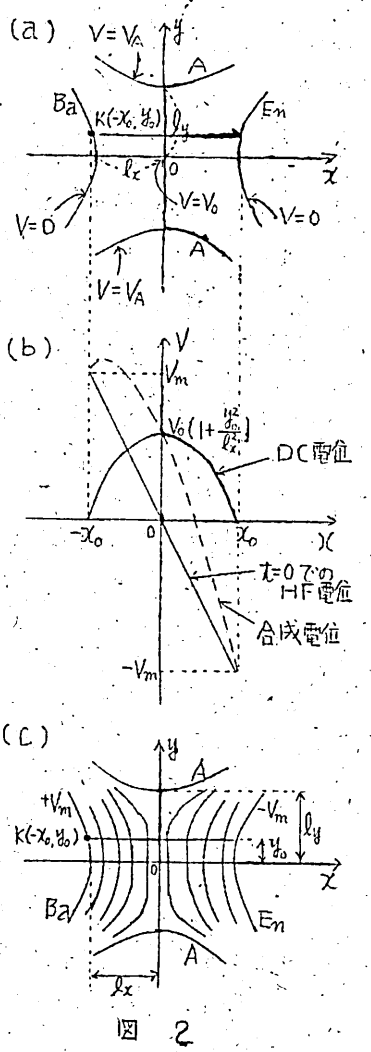


図 2

〔1〕電子の運動方程式の解

1) x成分

(7)式の一般解は

$$x = A\cos\omega_e t + B\sin\omega_e t + \frac{\eta V_m}{x_0(\omega^2 - \omega_e^2)}\cos\omega t \quad (11)$$

となるが，初期条件として電子の出発時間 $t = t_0$ で $x = -x_0$，$\dot{x} = v_{0x}$ を入れると

$$x = -x_0 \cos\frac{\omega}{\alpha}(t-t_0) + \frac{\alpha v_{0x}}{\omega_e}\sin\frac{\omega}{\alpha}(t-t_0) - \frac{\beta l_x^2}{2x_0(\alpha^2-1)}\left\{\cos\omega t_0 \cos\frac{\omega}{\alpha}(t-t_0) - \cos\omega t - \alpha\sin\omega t_0 \sin\frac{\omega}{\alpha}(t-t_0)\right\} \quad (12)$$

となり，ここで

$$\alpha = \omega/\omega_e, \quad \beta = V_m/V_0 \quad (13)$$

である。さらに

$$\omega t = \varphi \,,\quad \omega t_0 = \varphi_0 \tag{14}$$

とおいて

$$x/x_0 = -\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{a} + \frac{a v_{0x}}{x_0\omega}\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{a}$$
$$-\frac{\beta l_x^2}{2x_0^2(a^2-1)}\left\{\cos\varphi_0\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{a} + \cos\varphi - a\sin\varphi_0\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{a}\right\} \tag{15}$$

を得る。ここで規格化速さ S_{0x} を

$$S_{0x} \equiv v_{0x} / u_0 \,,\quad u_0 = \sqrt{2\eta V_0} \tag{16}$$

と定義し、さらに

$$x_{00} \equiv x_0 / l_x \tag{17}$$

とおくと、(10), (13)式の関係を用いて (15)式は次のように表現出来る。

$$x/x_0 = -\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{a} + \frac{S_{0x}}{x_{00}}\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{a}$$
$$-\frac{\beta}{2x_{00}^2(a^2-1)}\left\{\cos\varphi_0\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{a} - \cos\varphi - a\sin\varphi_0\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{a}\right\} \tag{18}$$

これは、印加高周波電界の位相 φ_0 で出発した電子の、任意の位相 φ における規格化された x 位置を示す式である。

$a=1$ の場合は、$x=\infty$ となって共振状態を示すので、$a\to 1$ のときの (18)式の極限移行を行うことによって

$$x/x_0 = -\cos(\varphi-\varphi_0) + \frac{S_{0x}}{x_{00}}\sin(\varphi-\varphi_0)$$
$$+\frac{\beta}{4x_{00}^2}\left\{-(\varphi-\varphi_0)\sin\varphi + \sin\varphi_0\sin(\varphi-\varphi_0)\right\} \tag{19}$$

となる。

(18), (19) 式とも、右辺第1項は静的な電子振動 ($\varphi/a = \varphi_e$, $\varphi_e = \omega_e t$)、第2項は初速度の影響、第3項は印加高周波電界の影響、をそれぞれ表わしている。

2) y, z 成分

(8), (9)式を初期条件 $t=t_0$ で $y=y_0$, $\dot{y}=v_{0y}$; $z=0$, $\dot{z}=v_{0z}$ として解くと

$$y = \frac{\omega_e^2 y_0 - \omega_c v_{0z}}{\omega_m^2}\left\{1-\cos\omega_m(t-t_0)\right\} + y_0 + \frac{v_{0y}}{\omega_m}\sin\omega_m(t-t_0) \tag{20}$$

$$z = -\frac{\omega_c}{\omega_m^3}(\omega_e^2 y_0 - \omega_c v_{0z})\sin\omega_m(t-t_0)$$
$$+\frac{\omega_c}{\omega_m^2}v_{0y}\left\{1-\cos\omega_m(t-t_0)\right\} + \frac{\omega_e^2}{\omega_m^2}(\omega_c y_0 - v_{0z})(t-t_0) \tag{21}$$

ただし

$$\omega_m^2 = \omega_c^2 - \omega_e^2 \tag{22}$$

である。さらに磁界指数

$$r_\omega = \omega_m / \omega_e \tag{23}$$

と、さらに(16)式と同様 y, z 方向の規格化速さを

$$S_{oy} \equiv v_{oy}/u_o, \quad S_{oz} \equiv v_{oz}/u_o \tag{24}$$

と定義することにより、(20), (21)式は次のように表現出来る。

$$y/\chi_o = \frac{\sqrt{\chi_{oo}^2-1}}{\chi_{oo}} \left[\frac{1}{r_\omega^2}\left\{1-\cos\frac{r_\omega}{a}(\varphi-\varphi_o)\right\}+1 \right] + \frac{1}{r_\omega \chi_{oo}} \left[S_{oy}\sin\frac{r_\omega}{a}(\varphi-\varphi_o) - \frac{\sqrt{1+r_\omega^2}}{r_\omega} S_{oz}\left\{1-\cos\frac{r_\omega}{a}(\varphi-\varphi_o)\right\} \right] \tag{25}$$

$$z/\chi_o = \frac{\sqrt{\chi_{oo}^2-1}}{\chi_{oo}} \frac{\sqrt{1+r_\omega^2}}{r_\omega^3} \left\{ \frac{r_\omega}{a}(\varphi-\varphi_o) - \sin\frac{r_\omega}{a}(\varphi-\varphi_o) \right\} + S_{oy}\frac{\sqrt{1+r_\omega^2}}{\chi_{oo} r_\omega^2}\left\{1-\cos\frac{r_\omega}{a}(\varphi-\varphi_o)\right\} + S_{oz}\left\{ \frac{1}{\chi_{oo}} \frac{1+r_\omega^2}{r_\omega^3} \sin\frac{r_\omega}{a}(\varphi-\varphi_o) - \frac{\varphi-\varphi_o}{a r_\omega^2 \chi_{oo}} \right\} \tag{26}$$

(25), (26)式で表わされる yz 面内の電子運動を調べるため、それぞれ次のように変形する。

$$y/\chi_o \equiv \frac{y_L}{\chi_o} - \frac{y_A}{\chi_o}\cos\left\{ r_\omega(\varphi_e-\varphi_{eo}) + \varepsilon \right\} \tag{27}$$

$$z/\chi_o = -\frac{z_A}{\chi_o}\sin\left\{ r_\omega(\varphi_e-\varphi_{eo}) + \varepsilon \right\} + r_c q + w_{zo}\cdot r_\omega(\varphi_e-\varphi_{eo}) \tag{28}$$

ただし

$$y_A/\chi_o = \sqrt{p^2+q^2} \tag{29}$$

$$z_A/\chi_o = r_c\sqrt{p^2+q^2} = r_c\, y_A/\chi_o, \quad r_c \equiv \frac{\sqrt{1+r_\omega^2}}{r_\omega} \tag{30}$$

$$p \equiv \frac{\sqrt{\chi_{oo}^2-1} - S_{oz}\sqrt{1+r_\omega^2}}{r_\omega^2 \chi_{oo}} \tag{31}$$

$$q \equiv \frac{S_{oy}}{r_\omega \chi_{oo}} \tag{32}$$

$$\varepsilon = \tan^{-1}\frac{q}{p} \tag{33}$$

$$y_L/\chi_o = p + \frac{y_o}{\chi_o} = \frac{\sqrt{1+r_\omega^2}}{r_\omega^2 \chi_{oo}}\left(\sqrt{(\chi_{oo}^2-1)(1+r_\omega^2)} - S_{oz} \right), \quad \frac{y_o}{\chi_o} = \frac{\sqrt{\chi_{oo}^2-1}}{\chi_{oo}} \tag{34}$$

$$w_{zo} = \frac{1}{r_\omega\sqrt{1+r_\omega^2}}\frac{y_L}{\chi_o}, \quad v_{zo} = w_{zo}\,\omega_m \tag{35}$$

である。(27)式より y 方向には Center Level y_L/χ_o を中心に振幅 y_A/χ_o で、角周波数 $r_\omega\omega_e = \omega_m$ で振動して居り、また(28)式より z 方向には、中心が $v_{zo}(= w_{zo} r_\omega \omega_e = w_{zo}\omega_m)$ で z 方向に推移しながら、その上に、振幅 z_A/χ_o, 角周波数 ω_m の正弦振動が重畳して居ることになる。これらを合成して yz 面の運動にすると図3のように、一般に楕円の周を ω_m で回転しながらその中心が v_{zo} で z 方向に推移する運動となる。磁界が強くなると(30)式の r_c の値が1に近ずき円運動の推移: trochoid軌道に近ずく。しかし r_ω の増大と共に円軌道の半径も推移速度も0に近ずく。

初期速さ S_{oy}, S_{oz} の軌道に及ぼす影響は前者は q に、後者は p に関係して居り、p は y_L/χ_o ($\to w_{zo} \to v_{zo}$) に関係するので結局 S_{oz} は z 方向の推移速度 v_{zo} に影響を及ぼし、

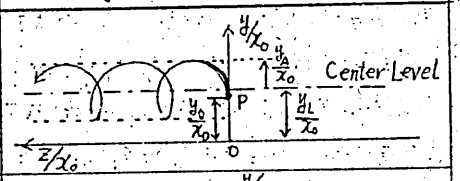
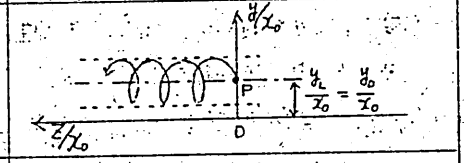
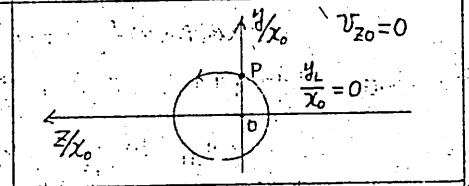
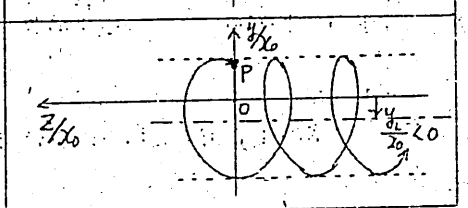
State	S_{oz}	Q_p	y_L/x_0	yz面軌道
A	↑負 0 ↓正	$\frac{1}{r_\omega^2}\frac{y_0}{x_0}$		
B	$\sqrt{\frac{x_{00}^2-1}{r_\omega^2+1}}$	↑正 0 ↓負	y_0/x_0	
C	$\sqrt{(x_{00}^2-1)(r_\omega^2+1)}$	$-y_0/x_0$	↑正 0 ↓負	
D				

図 3

S_{oz}が正に大きくなるほどv_{z0}は小さくなる。これは図4に示す通り$+S_{oz}$で出た電子ほどy_L/x_0が下るので(35)式からv_{z0}が下るという事が理解出来る。これに対してq, したがってS_{oy}は、S_{oz}と共に軌道振幅とω_m回転の初期位相εに関係している。図3はS_{oy}=一定とした場合のS_{oz}によるyz面軌道の変化を示している。

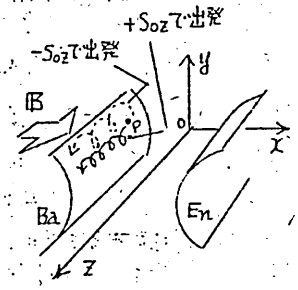


図 4

なお、瞬間の推移の速さv_zは(28)をtで微分して得られ

$$v_z = v_{z0}\left[1-\frac{y_A}{y_L}(1+r_\omega^2)\cos\{r_\omega(\varphi_e-\varphi_{e0})+\varepsilon\}\right] \tag{36}$$

で与えられる。それ故、電子のz方向推移が逆行しない条件は$v_z \geq 0$より

$$\frac{y_A}{y_L}(1+r_\omega^2) \leq 1 \qquad \therefore\ y_A \leq \frac{y_L}{1+r_\omega^2} \tag{37}$$

となって、y方向の振幅がCenter Levelの$\frac{1}{1+r_\omega^2}$以下であればよい事がわかる。

〔2〕 出発，到着の位相関係式

この管で電子増倍を行う場合、Ba極だけで増倍する片側増倍（one-side multi. OSMと略記）と、Ba, En両極で行う両側増倍（both-side multi. BSMと略記）とが考えられる。それぞれの場合の到着位相を考えるには(18)または(19)式で、OSMのときは $\chi=-\chi_0$，BSMのときは $\chi=+\chi_0$ とおけば、そのときの $\varphi\equiv\varphi_1$ が到着位相を表わすことになり、それが出発位相 φ_0 によってどう影響されるかを調べると、位相の集束性を考えることが出来る。このようにして(18)または(19)式から得られた位相関係式は次の通りである。

$a\neq1$ の場合

$$\frac{2\chi_{00}^2(a^2-1)}{\beta}\left\{\pm1-\cos\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}+\frac{S_{0x}}{\chi_{00}}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}\right\}$$
$$-\cos\varphi_0\cos\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}+\cos\varphi_1+a\sin\varphi_0\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}=0 \qquad (38)$$

$a=1$ の場合

$$\frac{4\chi_{00}^2}{\beta}\left\{\pm1-\cos\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}+\frac{S_{0x}}{\chi_{00}}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}\right\}$$
$$+\sin\frac{\varphi_0}{a}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}-\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}\sin\frac{\varphi_1}{a}=0 \qquad (39)$$

ただし，式中 ±1 の「+」はOSM，「−」はBSMの場合にとる符号である。

〔3〕 衝突エネルギーの式

(18), (19)式を t で微分して任意位相での規格化速さ $S_x(=\dot{x}/u_0,\ u_0=\sqrt{2\eta V_0})$ を得、次のようになる。

$a\neq1$ の場合

$$S_x=\chi_{00}\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{a}+S_{0x}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{a}$$
$$+\frac{\beta}{2\chi_{00}(a^2-1)}\left\{\cos\varphi_0\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{a}-a\sin\varphi+a\sin\varphi_0\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{a}\right\} \qquad (40)$$

$a=1$ の場合

$$S_x=\chi_{00}\sin(\varphi-\varphi_0)+S_{0x}\cos(\varphi-\varphi_0)$$
$$-\frac{\beta}{4\chi_{00}}\left\{\sin\varphi+(\varphi-\varphi_0)\cos\varphi-\sin\varphi_0\cos(\varphi-\varphi_0)\right\} \qquad (41)$$

電子の速さ $\dot{x}$ に対応するエネルギー Ψ_x [eV] は、

$$\Psi_x=\frac{1}{2\eta}\dot{x}^2 \qquad (42)$$

で与えられるが、この Ψ_x を中心電圧 V_0 で規格化したエネルギーを ζ_x とおくと

$$\zeta_x=\Psi_x/V_0=\frac{1}{V_0}\frac{1}{2\eta}\dot{x}^2=(\dot{x}/u_0)^2=S_x^2,\quad u_0=\sqrt{2\eta V_0} \qquad (43)$$

となる。これらのことから規格化衝突エネルギー $\zeta_{1x}\ [=(\zeta_x)_{\varphi=\varphi_1}]$ は次のようになる。

$a\neq1$ の場合

$$\zeta_{1x}=\left\{\chi_{00}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}+S_{0x}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}\right.$$
$$\left.+\frac{\beta}{2\chi_{00}(a^2-1)}\left\{\cos\varphi_0\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}-a\sin\varphi_1+a\sin\varphi_0\cos\frac{\varphi_1-\varphi_0}{a}\right\}\right]^2 \qquad (44)$$

$\alpha=1$ の場合

$$\varphi_{1x}=\{x_{00}\sin(\varphi_1-\varphi_0)+S_{0x}\cos(\varphi_1-\varphi_0)-\frac{\beta}{4x_{00}}\{\sin\varphi_1+(\varphi_1-\varphi_0)\cos\varphi_1-\sin\varphi_0\cos(\varphi_1-\varphi_0)\}\}^2 \quad (45)$$

Ⅲ. 数値計算

〔1〕 基礎数値の与え方

1) 初速度について

二次電子放出に伴う初速度のうち、その大きさ、すなわち放出エネルギの分布は例えば図5* に示されるように 3〔eV〕位に最確放出エネルギをもち、大抵の場合 1～5〔eV〕の値をとるといわれている。[6] それ故我々は二次電子の放出エネルギ Ψ_{00} をその最確値 5〔eV〕として以下の計算に使う事にした。すなわち

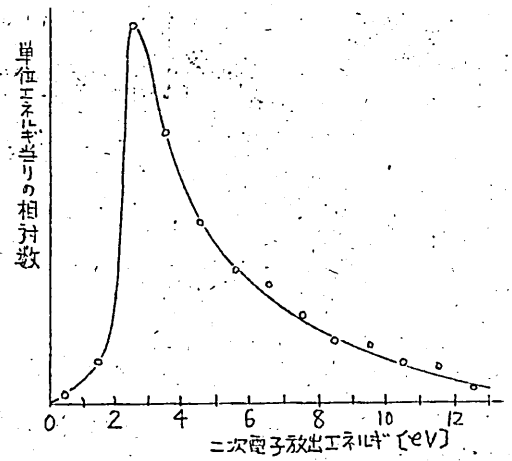


図 5

$$\Psi_{00}=5\ [eV] \quad (46)$$

であり、これの中に電圧 V_0 で規格化したエネルギ ε_{00} は、次項2)で述べるように $V_0=50$〔V〕の値を使って

$$\varepsilon_{00}=\frac{\Psi_{00}}{V_0}=0.1 \quad (47)$$

となる。したがって規格化初期速さ S_{00} は (43)式と同様にして次のようになる。

$$S_{00}=\sqrt{0.1}=0.3162 \quad (48)$$

また二次電子放出の角度分布については、真の二次電子について、一次電子の衝突角度、衝突エネルギに無関係に、単位立体角当りの確率密度が、ほとんど

$$P_0(\Theta)=\cos\Theta$$

で分布している。[3] ただし Θ は二次電子面の法線に対する角度である。したがって方位角を Ξ ととすると Θ と $\Theta+d\Theta$, Ξ と $\Xi+d\Xi$ の間に放出される確率は

$$P(\Theta,\Xi)\,d\Theta\,d\Xi=\frac{1}{2\pi}\cos\Theta\sin\Theta\,d\Theta\,d\Xi \quad (49)$$

で表わされる。

---

*) 図5は二次電子面によく使われる BeO から放出される真の二次電子の観測された分布を示したものである。[2]

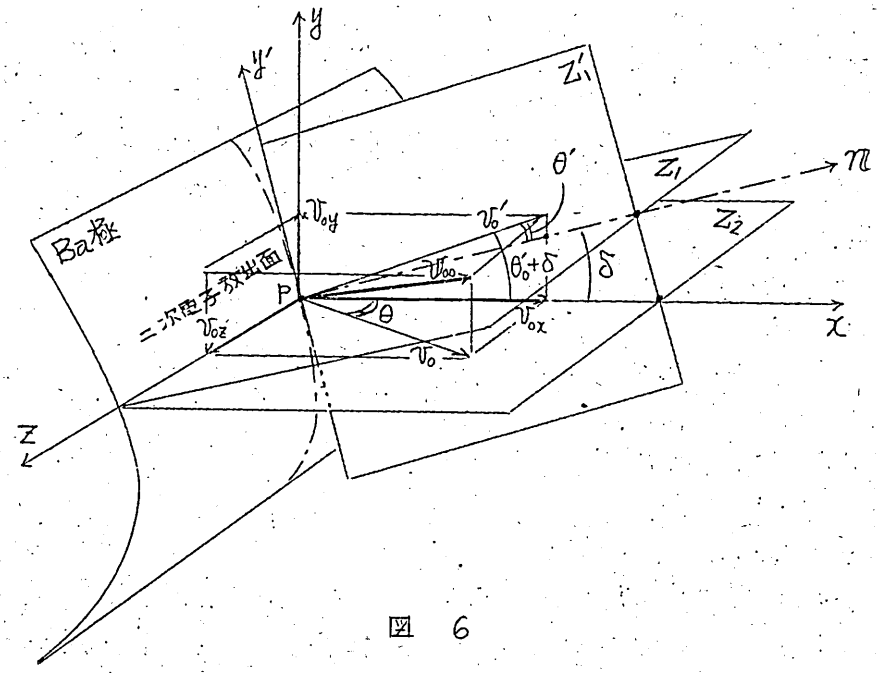


図 6

ところで、図6にてBa極上二次電子面のP点から$|v_{oo}| = v_{oo}$で出た電子について

$$v_{oo}^2 = v_{ox}^2 + v_{oy}^2 + v_{oz}^2 \tag{50}$$

の関係で表わすとき

$$\left.\begin{aligned} v_{ox}^2 + v_{oz}^2 &= v_o^2 \\ v_{ox} &= v_o \cos\theta \\ v_{oz} &= v_o \sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

のθはZ_2面上の角度であり、また

$$\left.\begin{aligned} v_{ox}^2 + v_{oy}^2 &= v_o'^2 \\ v_{oy} &= v_o' \sin(\theta'+\delta) \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

のθ'はZ_1'面上の角度である。それ故二次電子放出の角度分布で法線方向nからδ傾いたZ_2面に成分をもつθ分布とそのSpecial Caseと考えられるδ=0のZ_1'面(したがってZ_1面)に成分をもつθ'分布とがわかればv_{ox}, v_{oz}はv_oとθで、またv_{oy}はv_o'とθ'でそれぞれ表現出来、その規格化速さ($S_o = v_o/u_o$, $S_{ox} = v_{ox}/u_o$, ……$u_o = \sqrt{2\eta V_o}$)は次のようになる。

$$S_{ox} = S_o \cos\theta = S_{oo} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\tan^2(\theta'+\delta)\cos^2\theta + 1}} \tag{53}$$

$$S_{0z} = S_0 \sin\theta = S_{00} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\tan^2(\theta'+\delta)\cos^2\theta + 1}} \qquad (54)$$

$$S_{0y} = S_0' \sin\theta' = S_{0x} \tan(\theta'+\delta) \qquad (55)$$

θ'分布はGraddyがダイナミック形直交電磁界二次電子増倍管(DCFP)に使うために計算しているが[4]、Graddyのやり方をそのまま踏襲して、δ傾いた面のθ分布(一般的な面の分布)を計算すると、その面内に成分をもつ方向確率密度関数は次のようになる。

$$W(\theta) = \pm \frac{1}{2\pi k^2} \left[\sqrt{k^2 - \sin^2\delta} \left[\{F(k, \tfrac{\pi}{2}) + F(k, \varphi=\beta)\} - \{E(k, \tfrac{\pi}{2}) + E(k, \varphi=\beta)\} \right] \pm \sin\delta \left\{ 1 - \frac{1-k^2}{\cos\delta} \right\} \right]$$

$$k^2 = 1 - \sin^2\theta \cos^2\delta$$

$$\beta = \cot^{-1}(\tan\theta \sin\delta) \qquad (56)$$

この式中、$F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$はそれぞれ第1種、第2種の楕円積分であり、また複号$\pm$の「+」は$0<\theta<\frac{\pi}{2}$、「−」は$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$の場合にとる符号である。

われわれの場合、$\delta = 13.38°$(59式参照)であるので、これと$\delta = 0°$の場合について(56)式を計算すると図7の様になり、それぞれ$W(\theta)$, $W(\theta')$が得られる。図は0～180°までしか書いていないが0～−180°についても同様、W軸に対して対称な曲線を得る。これよりθ_1からθ_2までの間に放出される二次電子の全体に対する割合Fは

$$F = \int_{\theta_1}^{\theta_2} W(\theta)\, d\theta \qquad (57)$$

で求まる。$\theta_1 = -45°$, $\theta_2 = 45°$ならば、$\delta = 0°$でも13.38°でも$F \fallingdotseq 0.83$となる。それ故$\theta = \pm 45°$, $\theta' = \pm 45°$で囲まれる角錐内には全電子の約70%($0.83^2 \fallingdotseq 0.69$)が含まれていることになる。

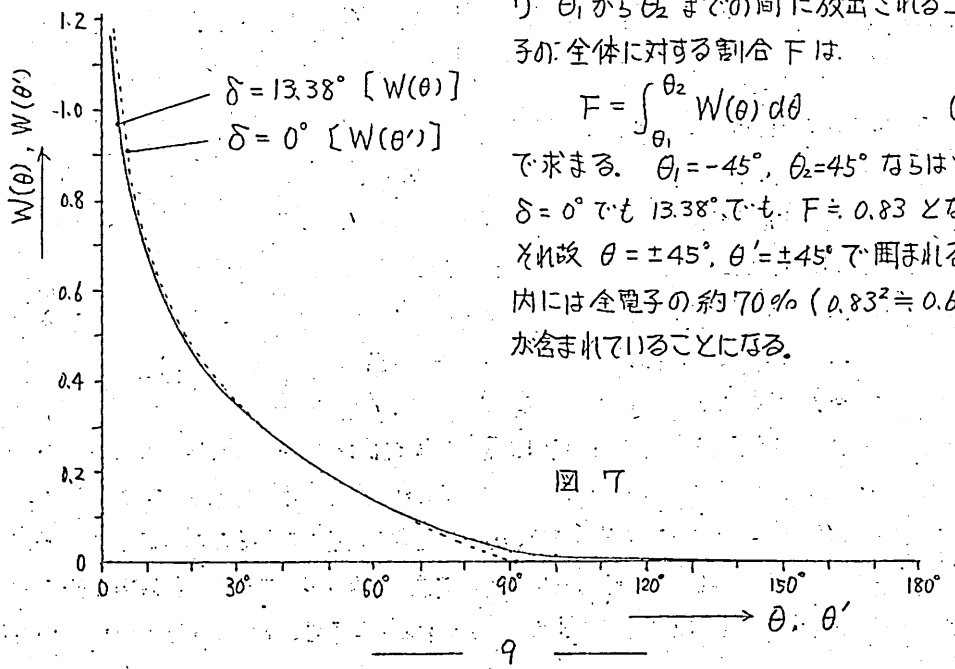
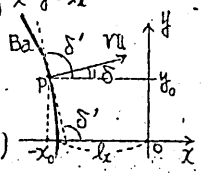


図 7

今、この角錐体の領域の四隅および z 軸方向の場合を図8に示すように Case I, II, III, IV, V と表現すると、その各場合の規格化速さ S_{ox}, S_{oy}, S_{oz} が、(53), (54), (55)式より求まり、これを表1に示す。

なお δ の値は Ba 極の式(3)の P 点 ($x=-x_0$) での微分から求められ（図9）、

$$\delta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x_{oo}^2-1}}{x_{oo}} \quad (58)$$



となり、下記 $x_{oo}^2 = 1.06$ の値を使って

$$\delta = 13.38^\circ \quad (59)$$

となる。

図9

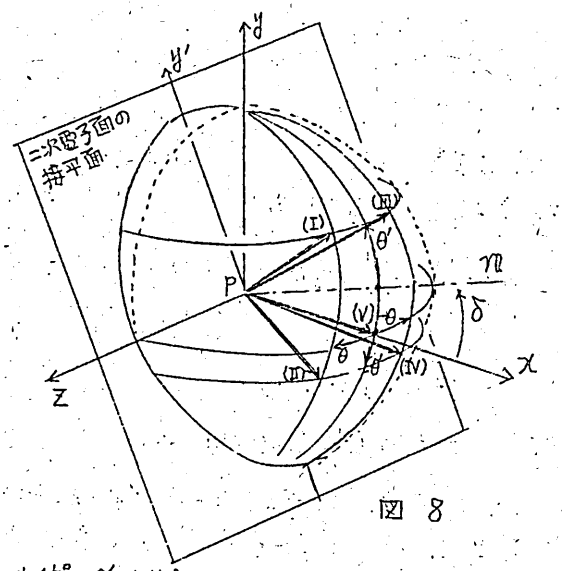


図8

表1　$S_{oo} = 0.3162$　$\delta = 13.38^\circ$　$\theta = \pm 45^\circ$　$\theta' = \pm 45^\circ$

	Case I	Case II	Case III	Case IV	Case V
θ	45.0°	45.0°	−45.0°	−45.0°	0°
$\theta' + \delta$	58.38°	−31.62°	58.38°	−31.62°	0°
S_{ox}	0.1468	0.2050	0.1468	0.2050	0.3162
S_{oy}	0.2385	−0.1262	0.2385	−0.1262	0
S_{oz}	0.1468	0.2050	−0.1468	−0.2050	0

2) その他の基礎数値について

(i) 光電陰極位置　$x_{oo}\ (=x_o/l_x) = \sqrt{1.060} = 1.030$

(ii) 中心電圧比　$\alpha\ (=V_o/V_A) = 0.4$

(iii) 同期比　$a\ (=w/w_e) = 1$

(iv) 増倍機構　OSM

(v) 直流・高周波電圧比　$\beta\ (=V_m/V_o) = 2$

(vi) 磁界指数　$r_w\ (=w_m/w_e) = 10$

(i), (ii) は計算の基礎となった高周波電圧の振幅関数 $V(x)$ の線形性（→(2)式）を実現するための数値で、図2で $\alpha = 0.4$, $y_o/l_y = 0.2$ を仮定した。すると (3), (4)式より $x_{oo}\ (=x_o/l_x) = 1.030$ を得る。(iii) は電子振動の毎回ごとに高周波電界で加速させる最も有効な値である。(iv), (v) については、詳しくは前発表[1]に述べた通りであるが、なるべく簡潔な動作で、電極の前面到着、前面出発を繰り返すことが出来、しかも位相の集束性のよいβの値（後述位相曲線図

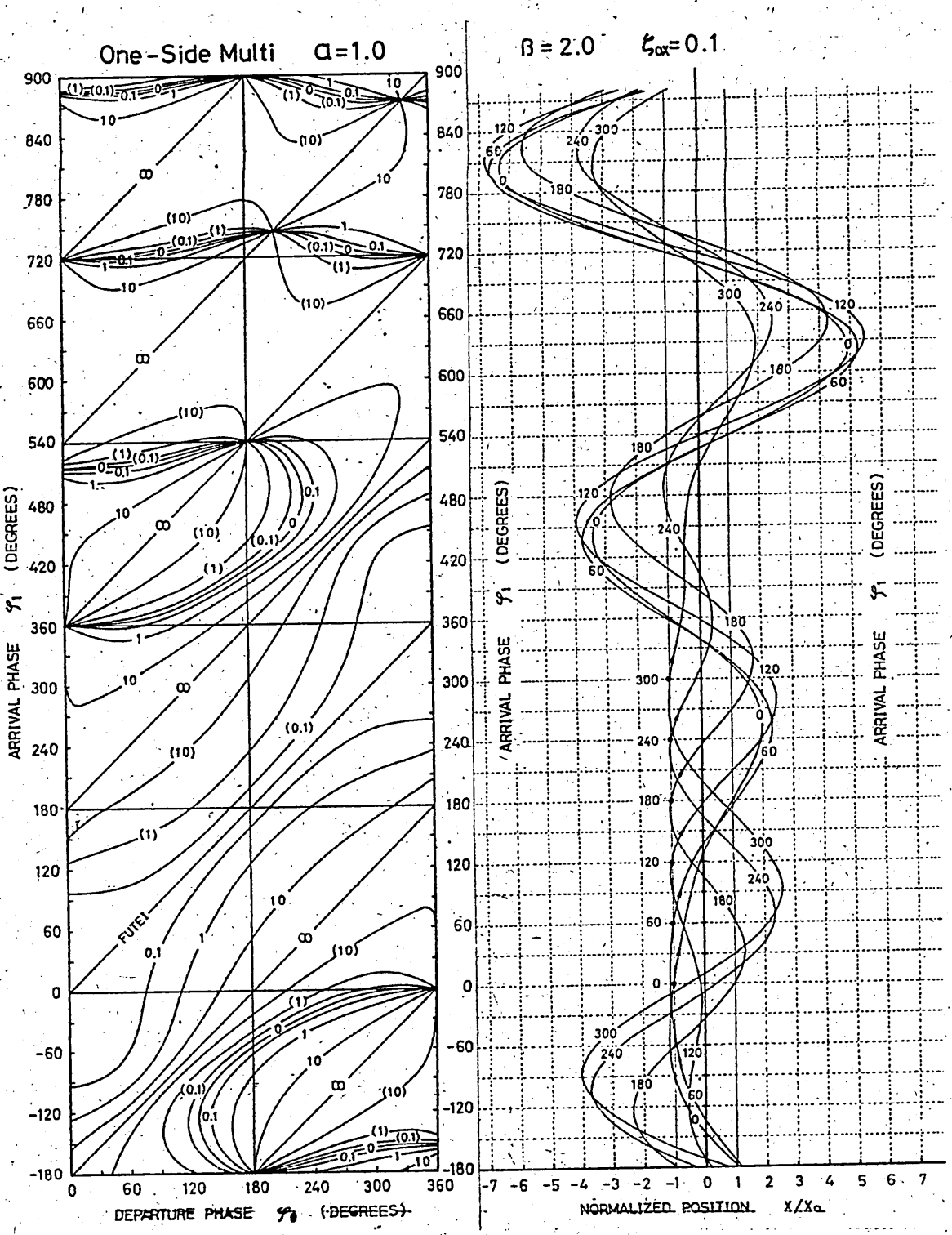

One-Side Multi α=1.0
β = 2.0 ζαx=0.1
ARRIVAL PHASE φ1 (DEGREES)
DEPARTURE PHASE φθ (DEGREES)
NORMALIZED POSITION X/Xa
FUTEI

図 10

参照のこと）という事で $\beta=2$ を採用した。 (vi)は、位相集束後には増倍各段の毎回同じ引位置に到着するために整数をとる。 k_0 が大きいほど電子軌道の引変位は少く、この管の動作に都合であるが、あまり大きいと Z方向推移のピッチが小さくなりすぎて不適当である。ここでは $k_0=10$ を採ることにした。

〔2〕基本的な関係曲線

1) 位相関係曲線

(39)式で、χ_{00}, β の値を前述の値にとって、出発位相 φ_0 と到着位相 φ_1 の関係を図示すると図10.左のようになる。 図には S_{0x} が 0, 0.1, 1, 10 (S_{0x} は 0, 0.3162, 1, 3.162) の場合について描かれ、( )を施したものは $S_{0x}<0$ すなわち x の負側に x のエネルギーで出発した場合を示している。 図の意味を明らかにするために $S_{0x}=0.1$ の場合の (19)式から計算した x/x_0 の時間依存曲線が同図右に示してある。 この $S_{0x}=0.1$, 0 の場合の説明図が図11で、実線の曲線は $S_{0x}=0.1$, 点線の曲線は $S_{0x}=0$ の場合で、前者は $S_{00}=0.3162$ の Case V のとき、後者は Case 0 (初速度0)のときとみてもよい。 それで $S_{00}=0.3162$ 以内で $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のあらゆる方向に出た電子はこの図の斜線部内に入ることになる。

この図で FA-1, FA-2 は再び Ba極に戻ったときに、前面(xの正側)から到着する Forward Arriving を示し、BA-1, BA-2 は後面到着の Backward Arriving を示している。また、原点から引いた傾斜1の線ABは時間的な出発線であらゆる S_{0x} の値がとれる。右図は $\varphi_0=0°, 120°, 240°$ の出発位相の電子の φ による x/x_0 が示されている。丁度 $x/x_0=-1$ に戻ったときの φ が φ_1 で左の図に対応する。この位相関係曲線は傾斜がゆるやかなので位相の集束性があり、$S_{0x}=0$ の場合は $\varphi_0=0\sim234°$ の電子は $\varphi_1=360°\sim486°$ (位相差126°), $\varphi_0=234°\sim360°$ の電子は $720°\sim744°$ (位相差24°)に集束され、$S_{0x}=0.1$ の場合はこれにほぼ準じて集束されることがわかる。 なお $S_{0x}=0$ の場合は $\varphi_0=234°$, $S_{0x}=0.1$ の場合は $\varphi_0=246°$ を越える出発位相で出た電子は Ba極に戻ってまるとき その手前で引返し、もう一往復した後、はじめて Ba極に到着出来、段数が一つ減ることになる。 また右の図は、その傾斜が速さを示しているので、その出発時は、初速度0の実線は $x/x_0=-1$ の直線に接しているが、初速度をもつ実線は矢印で示したように $x/x_0=-1$ と交わる。 すなわち Ba極の裏側より、或る速さで進んできたのと等価であり、それ以前に Ba極の表側から裏側へ通過していたと考える事も出来、それが左図の出発線ABの下側斜線部を示している。

多段に亘る集束性は III.〔3〕で述べるが、今の位相関係曲線からも大体の事がわかる。 $n=0$ を光電面, $n=1,2,3,\cdots$ を二次電子面の各段とし、光電子の初速度を無視、二次電子だけ初

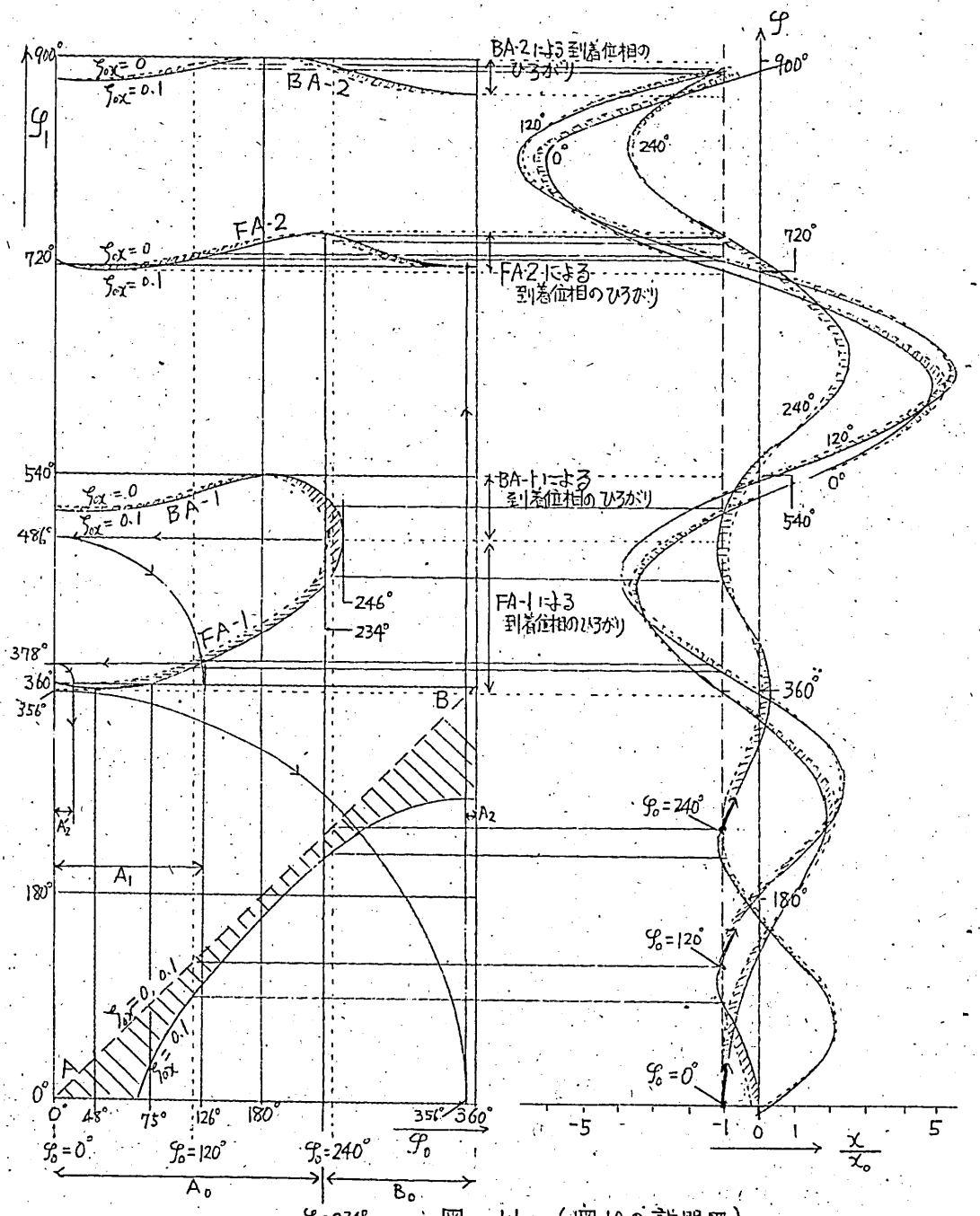

φ
φ1
900°
720°
540°
486°
378°
360°
356°
180°
0°
φ0x=0
φ0x=0.1
BA-2
FA-2
BA-1
FA-1
BA-2による到着位相のひろがり
FA-2による到着位相のひろがり
BA-1による到着位相のひろがり
FA-1による到着位相のひろがり
246°
234°
A1
A2
A
B
A0
B0
φ0=0°
φ0=120°
φ0=240°
φ0=234°
0°
48°
75°
126°
180°
351°
360°
-5
-1
0
1
5
x/x0

図 11 (図10の説明図)

速度を考えると，$n=0\to1$ では図11左図の実線曲線，$n=1\to2\to3,\cdots$ 以後は実線の曲線を使うことになる。最初の出発位相は $\varphi_0=234°$ を境にして図中に書きこんだA，Bに別れ，それぞれ各段により $A_0, A_1, \cdots$，$B_0, B_1, \cdots$ と変化して行く。これで求まる集束の様子を図示すると図12のようになる。数段のうちに位相差は僅かとなり，これを△で示している。そして

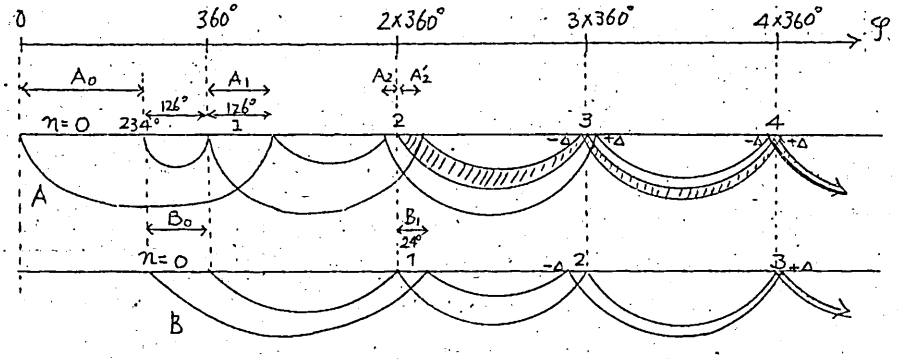


図 12

+Δ のばらつきは次段では −Δ のばらつきになる事を示しているので，或る1つの電子について各段間で僅か早くなったり，遅くなったりしながら位相集束されて行く（等周期化されて行く）事を意味している。

2）衝突エネルギの分布曲線

$S_{0x}=0.3162$ のときに，φ_0-φ_1 面上の各点各点の β の値を (39)式により求めて，それを(45)式の β に使って，各点各点の衝突エネルギ ξ_{1x} を求め，その分布を描いたのが図13である。この図中の数字が ξ_{1x} で，$V_0=50$ [V] なら $\xi_{1x}=1, 10$ はそれぞれ $\Psi_{1x}=50, 500$ [eV] を意味する。また（ここでは）（）を施していない数字が $S_{1x}<0$ すなわち x の負方向に向うエネルギで到着の場合はこの（）印を施していない数字が有意義である。またこの図には $S_{0x}=0.3162$，$\beta=2$ の位相関係曲線も書きこんであるので，この $\beta=2$ の曲線上の ξ_{1x} が実際に使われる事となる。FA-1 と FA-2 の境である $\varphi_0=246°$ では $\xi_{1x}=0$ となり，Ba極の表前スレスレに電子は引返すことを意味している。それ故 φ_0 が ~~180°~~ 200° 位からこの246°までは衝突エネルギは不足，でこの位相間隔は増倍に寄与しなくなる。実際は $n=0$ 段は光電子のため $S_{0x}=0$ の時でその時の $\xi_{1x}=0$ になる位相は 234° である。しかし直ぐに集束されて次段からは，この部分に電子が来る事はない。位相の集束点 $\varphi_0=0°$，$\varphi_1=360°$ ではすべての ξ_{1x} の値の曲線が集って来ているが，この点では(45)式に直接この位相を入れて

$$\xi_{1x}=\frac{1}{x_{00}^2}\left(\frac{\pi\beta}{2}-S_{0x}x_{00}\right)^2 \qquad (60)$$

を得るが、そのとき採用するβの値によりφ_{1x}が決まることとなる。$\beta=2$, $S_{ox}=0.3162$ の場合は $\varphi_{1x}=7.48$ となる。$V_b=50$[V] なら これは $\Psi_{1x}=374$[eV] となり、適当な衝突エネルギとなる。

〔3〕各段に亘る計算

1) 計算の手順

図10に示すように光電子の出発段を $n=0$, 二次電子の各出発段を $n=1, 2, 3, \cdots$ として各 Step No.を求める。光電子の初速度の大きさは二次電子のそれに比べて小さいので、$n=0$ では $S_{00}=0$ (初速度0 --- これを Case 0 とする), $n=1$ 以後はその大きさは最確値 $S_{00}=0.3162$ をもつとして、或るφ_0の値毎に Case I, II, III, IV, V 別に各段での位相、位置、エネルギを計算したが、そのプログラムの大要は次の通りである。

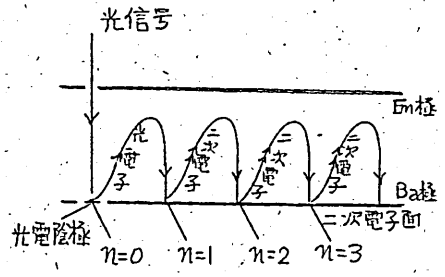


図 14

先ず、$n=0$ (Case 0) において 刻々の位相φにおける位置 (x/χ_0: (19)式, y/χ_0: (25)式, z/χ_0: (26)式) と エネルギ φ_x ((43), (41)式) を計算して行き、x/χ_0 の計算値が再び -1 に戻ったとき[*1]の各値が $n=1$ への 到着位相 φ_1; 到着位置 y_1/χ_0, z_1/χ_0; 衝突エネルギ φ_{1x} の 各値を示し、このときの φ_1 ($=360m+\varphi_1'$, $m=0, 1, 2, \cdots$) の φ_1' を次の $n=1$ での出発位相 φ_0, また 先の y_1/χ_0 を 今の段の y_0/χ_0 とし、これより 新しい χ_{00} の値が決まる。[*2] これにより $n=1\to 2$ への電子運動に関する計算に進み、Case I, II, ..., V 別に 今の計算を繰り返す。たゞし 求まった z/χ_0 は順次累計をとって行く。この様にして、各段での 到着位相, 位置, エネルギ の実際の値が求まる。以下この結果について述べる。

2) 到着位相の集束性

図15に示す通り、数段で位相が集束されることがわかる。各φ_0により各段での到着位相の、Case I (=III), Case II (=IV), Case V による影響はほとんどなく、この図には現われない。$\varphi_0=240°$ 以後は段数が1つ減っているのは、前述の通り $\varphi_0>234°$ では戻って来たときに Ba極の手前で引返し、更に1往復して始めて到着する ($n=1$) のに対して $\varphi_0<234°$ の電子はこのとき既に $n=2$ の到着になるからである。

---

*1) 到着の条件は $x/\chi_0=-1$ としているが、位相の集束していない間は戻って来たときに前の出発時のy位置が僅か異るので正確には -1 と違うが、この違いは多くて 0.5% 位である。

*2) $y_0/\chi_0=\sqrt{\chi_{00}^2-1}/\chi_{00}$

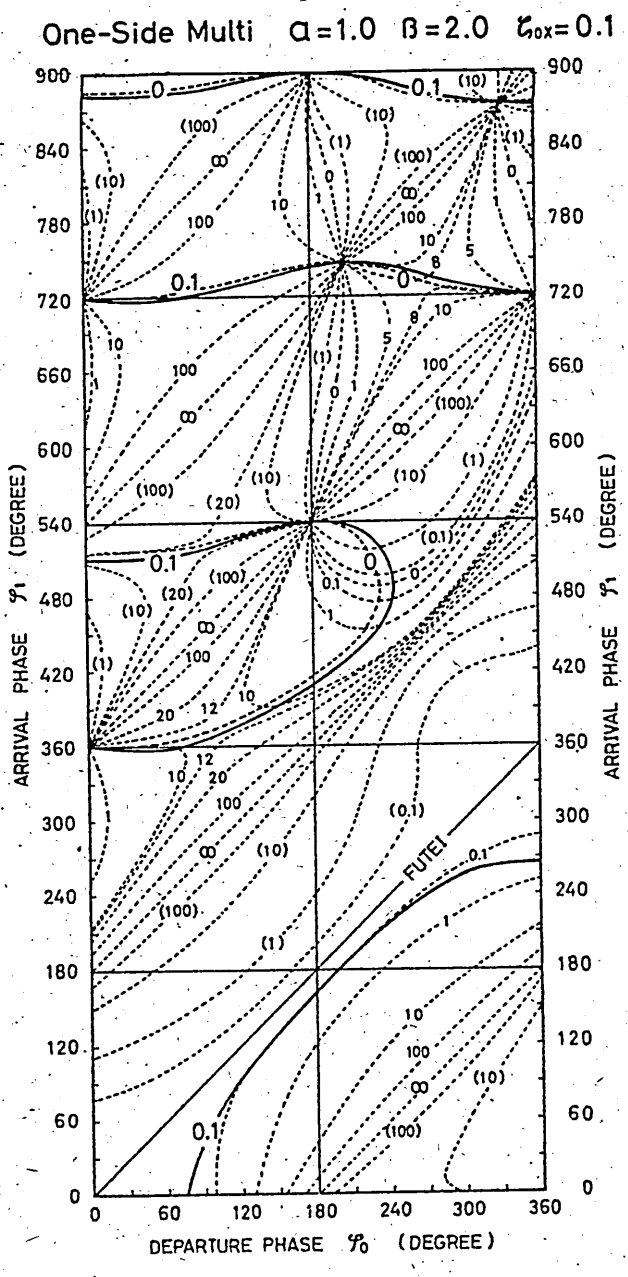

One-Side Multi α=1.0 β=2.0 τ0x=0.1
ARRIVAL PHASE φ1 (DEGREE)
DEPARTURE PHASE φ0 (DEGREE)
FUTEI
0
60
120
180
240
300
360
420
480
540
600
660
720
780
840
900

図 13

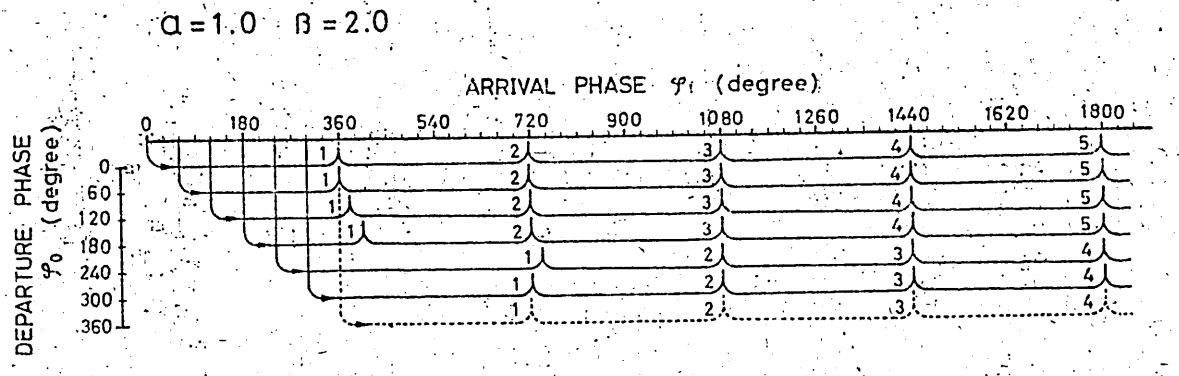

α = 1.0 β = 2.0
ARRIVAL PHASE φi (degree)
0
180
360
540
720
900
1080
1260
1440
1620
1800
DEPARTURE PHASE φo (degree)
0
60
120
180
240
300
360

図 15

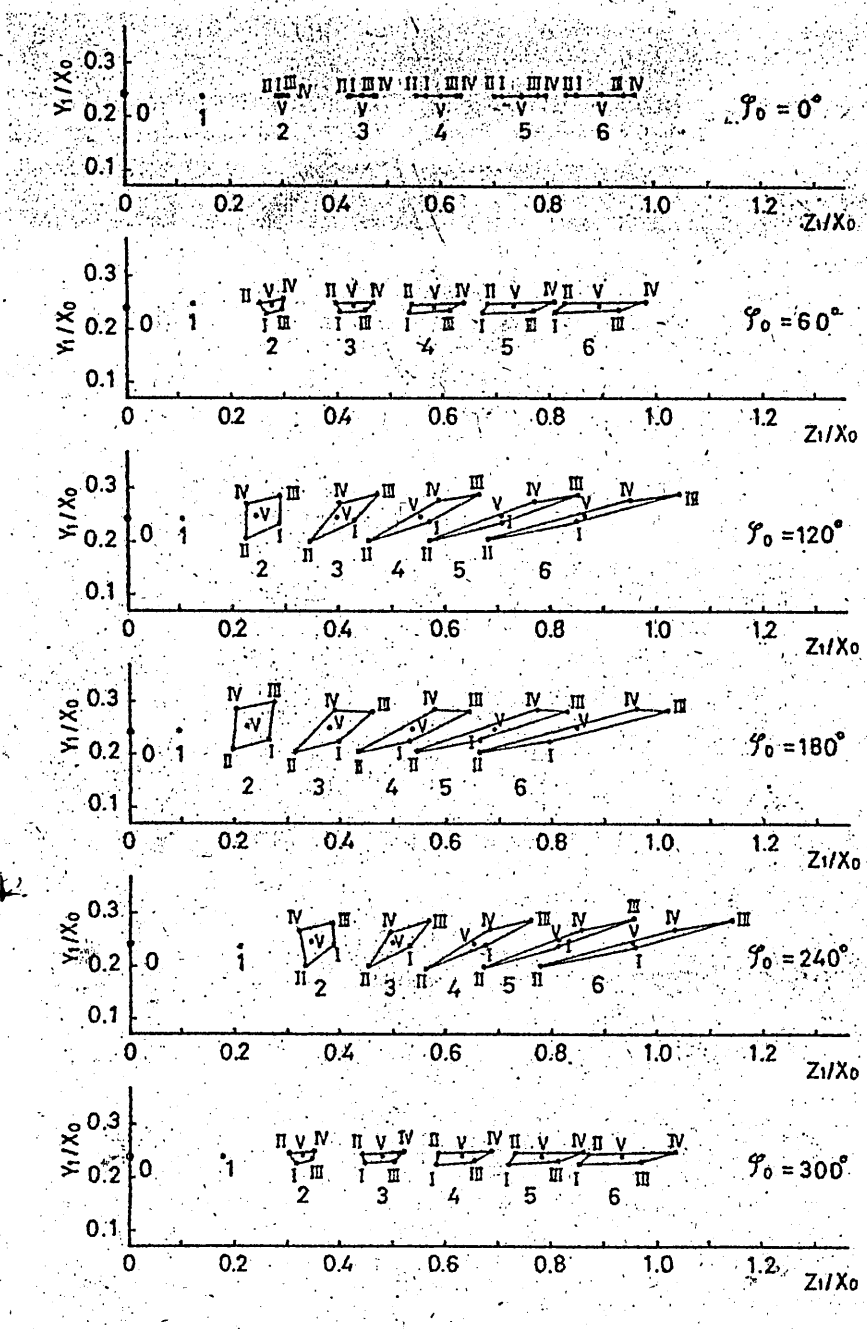


図 16

3) 到着位置のひろがり

φ_0 の 60°毎の Ba極への到着位置の初速度 (Case I, II, ---, V) によるひろがりを図16に示す。光電子の初速度を無視しているので、どの φ_0 でも $n=1$ は1点で示され、それ以後の段で2次電子の初速度効果によるひろがりが現われている。

$\varphi_0=0°$ では y方向には一定で、z方向にのみひろがっている。これは位相関係図10で $\varphi_0=0°$ なら $\varphi_1=360°$ となるため、Γ_m の整数である事と共に、(27)式から説明出来る事で、yz面上での ω_m の回転の位相が出発時と到着時と等しくなるためである。またz方向のばらつきが、II, I, V, III, IV の順に並んでいるのは、図8でわかるように、S_{oz} が II, I, V, III, IV の順に小さくなっているので平均推移速度 v_{z0} が、この順に早くなるために起る現象である。

これに対して図16の $\varphi_0=180°$ のあたりになると y方向のひろがりが大きくなるのは、位相集束されない $n=1\to2$ の段あたりで起り、集束された後は一定のy位置となる。これは、$n=1$ を出るときは $\varphi_0=180°$ であるのに対して $n=2$ に到着してきたときの位相は集束作用により φ_1 は 360° に近づく。それでこの間の位相差は $\varphi_1-\varphi_0\fallingdotseq180°$ に近いと考えて、ω_m の半整数回転で Ba極に戻る事になり、大きなy変位を生ずる事となる。位相が集束されてくると、ω_m の整数回転で Ba極に戻るためにy変位はなくなる。またz方向推移によるピッチ z_p も位相集束と共に一定となるので、z方向の等距離に到着を繰り返すが、その z_p は y が大きいほど大きくなるので、n が増すと次第に右斜めに寝てくる。

4) 衝突エネルギー

最初の光電子による $n=0\to1$ への衝突エネルギーは図17 (Ψ_{1x} は $V_0=50$ V としたときの値である) のように変化し、φ_0 が 200°位から 234°までの位相の電子は増倍に寄与しないことがわかる。しかし次段からは ($n=1\to2\to3$, ---) 位相の集束性により、このような事は起らず、$\varphi_{1x}=5\sim11$ の間にあり位相が集束され $\varphi_0=0°$, $\varphi_1=360°$ に落ち着くと、前述の通り $\varphi_{1x}=7.48$ となり、$V_0=50$ V なら $\Psi_{1x}=374$ [eV] となる。

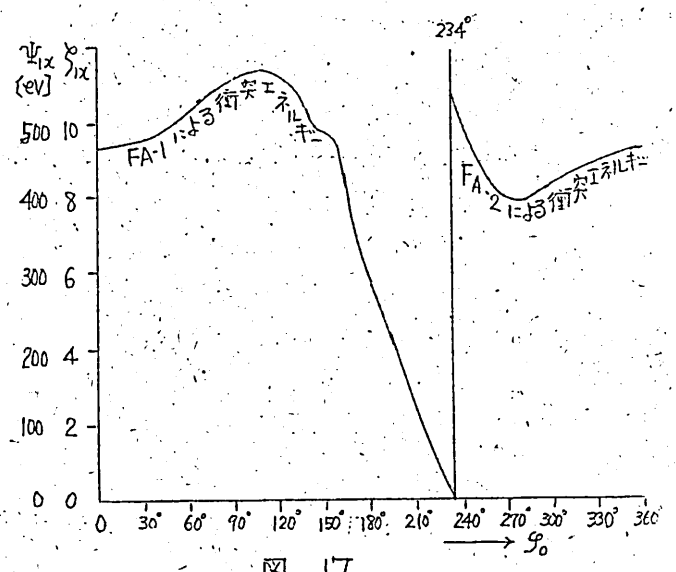


図 17

Ⅳ. この管の実用化への方向

以上述べたことから、この管は初速度を考慮しても、非常に集束性のよいことがわかった。この事を利用して、高い周波数の変調を受けた光信号の検出器を考える事になるが、その場合加える高周波の全位相を増倍する方向と、Gate 特性をもたして特定位相の電子だけを増倍しPCM 光通信に利用する方向、とが考えられる。

前者の場合、図15の同じ到着位相になる各 Step No. n の関係にしたがって図16の到着図形を各段列に合わせて、その輪郭をとる事によって図18を得る。図中◎の位置は光電陰極位

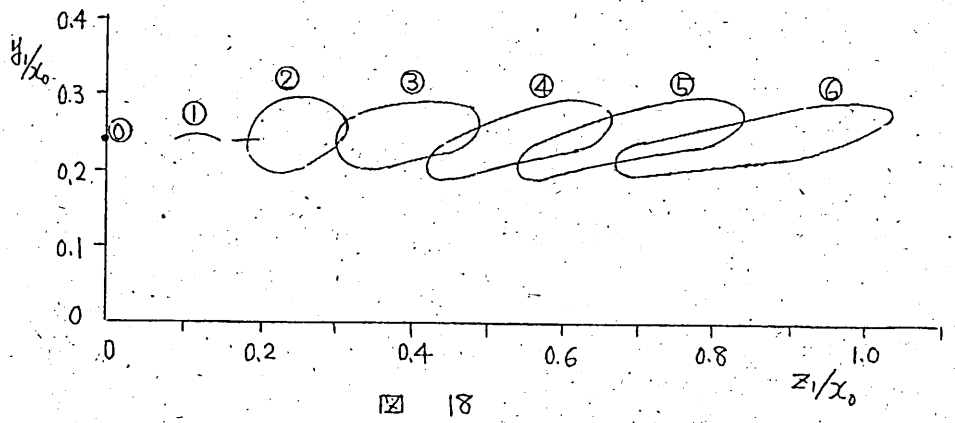


図 18

置で、この光電子の到着位置が①の線状部で、これには $\varphi_0 < 234°$ の電子が含まれて居り、234°以上の電子は ここに到着せず その手前で引返して もう一度一往復した後 ②領域後部の線状部に到着する。以後、各段には 234°以上の電子が追いついて来て居り、○印の数字を n とみるならば、その位相部分の電子については $n-1$ 段を意味している。位相が集束すると各図形の領域内には各電子が同時刻に到着する事になるから、○印の数字は $\varphi_1 = 360°m$ ($m = 0, 1, 2, \cdots$) の m を指している事になる。このようにして得られる出力の取り出しは段数が増えるほど次段または前段と重って来て有効な動作をしなくなる。またこの管は図17に示すように最初の光電子の増倍のところで増倍に寄与しない φ_0 があり、全位相の集束の目的から外れる。

次に後者の特定位相だけの増倍を考える。D. J. Leverenz 等が DCFP に Sampling Angle の存在する事を利用した subnanosecond の Gate 特性を報告している。[5] 今の光電子増倍大阪管では最初の光電子の出発位相の 200°~234° の間は増倍に寄与しないので、この管の Sapling Angle はこの 200°~234° を除いた位相角に相当し、この Angle は非常に大きい。そこでこの管では図17に示すように $\varphi_0 = 234°$ を境にして それより小な位相では衝突エネルギー

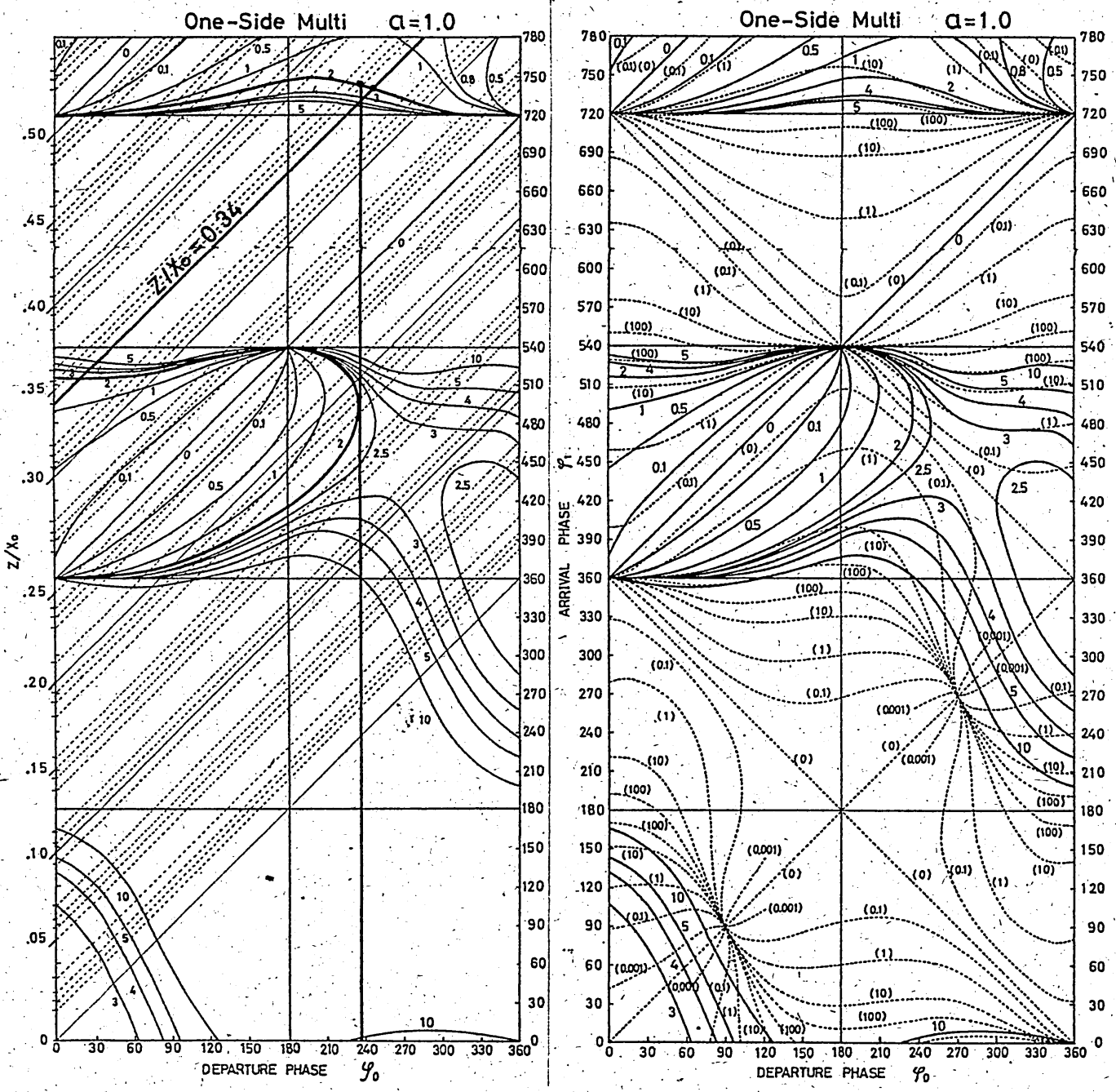

One-Side Multi α=1.0
Z/λo=0.34
Z/λo
DEPARTURE PHASE φo
ARRIVAL PHASE φ1
One-Side Multi α=1.0
DEPARTURE PHASE φo

図 19

が0であるのに対して、それより大なる位相角では十分な衝突エネルギーを有し、そしてこの部分はFA-2の位相曲線を利用するためにFA-1のものよりも遠い z 位置に到達出来、同じFA-2曲線を使う中でも φ_0 が 234° に近づくほど最も遠い z 位置に到着する事に着目し、この φ_0 = 234° と 234°+$\Delta\varphi$ の間の位相の電子を Gate する事が出来る。

光電子 ($\gamma_{00}=0$) の場合の位相関係曲線と等 Z_1/χ_0 の直線群および等 γ_{1x} 曲線を図19(左,右)に示すが、その必要な部分を図20に示す。ただし、この図は $\Gamma_\omega=6$ の場合でその他の基礎数値は前述したのと同じである。図20で等 Z_1/χ_0 直線群の数値の所に ( ) を充した値は、$\chi_0=5.15$ mm としたときの Z_1 [mm] を示している。

そこで、二次電子面を $Z_1=1.75$ mm の z 位置から設けることにすると FA-2 曲線の AB 部の 10° 間隔を Gate して増倍する事が出来、以後は二次電子面の続く限り、この 10° 間隔の電子だけを増倍する事が出来る。この 10° 間隔はまた磁界 (Γ_ω) を多少 control して、僅か変化させる事も出来る。動作周波数を 134[MHz] とすると この周期は 7.46 [ns] であり、位相の 10° 間隔は $7.46\times\frac{1}{36}=0.207$ [ns] の Gate 間隔となる。このAB間の衝突エネルギーは γ_{1x} が 10 に近く、$V_0=50$ [V] なら Ψ_{1x} は 500 [eV] 近くの値となる。

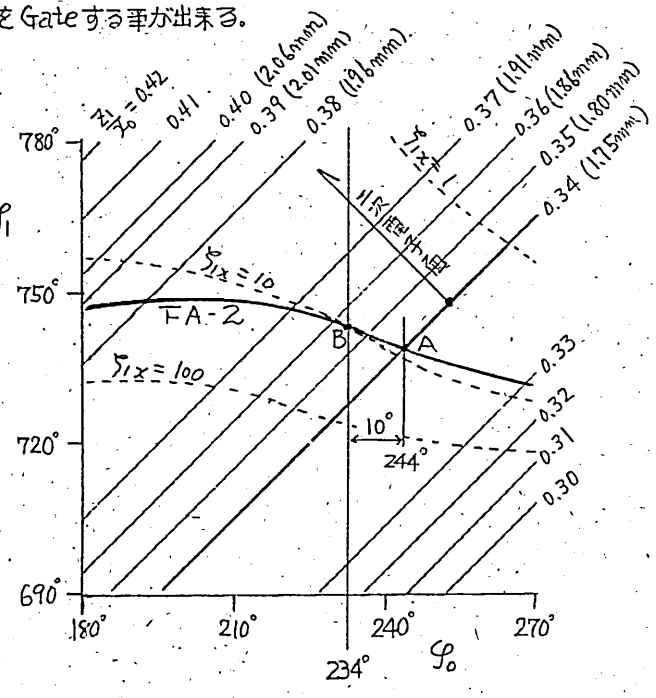


図 20

このための皆の設計は次のようになる。$\gamma_{1x}=5\sim11$ の規格化衝突エネルギーに対して実際の衝突エネルギー Ψ_{1x} が数100 [eV] になるように、$V_0=50$ [V] と決める。すると陽極電圧 V_A は

$$V_A=\frac{V_0}{a}=\frac{50}{0.4}=125\ [V]$$

また加える高周波電界の角周波数 ω は電子振動の それ (ω_e) に等しく ($\because a=1$)

$$\omega=\omega_e=\frac{1}{l_x}\sqrt{2\eta V_0}\quad より\quad f=\frac{1}{2\pi l_x}\sqrt{2\eta\cdot 50}=\frac{0.668\times10^6}{l_x}\ [Hz]$$

となる。ここで $l_x=5$ [mm] とすると $f=134$ [MHz] を得る。

高周波電圧の最大値は　$V_m = \beta V_0 = 2 \times 50 = 100$ [V]

印加磁界は　$B = \frac{1}{\ell_x}\sqrt{\frac{2V_0}{\eta}(K_0^2+1)} = 290$ [Gauss]

光電陰極位置 (x_0, y_0) は、$x_0 = x_{00}\ell_x = 1.03 \times 5 = 5.15$ [mm]

$y_0 = \sqrt{x_0^2 - \ell_x^2} = 1.23$ [mm]

電極構造は図21に示す通りで x/x_0 の最大値が2～2.5位である事から原点からx軸上でBa極までの距離を ℓ_x、En極までの距離を $3\ell_x$ にとった。管内の静的な電位分布は(1)式右辺第1項を満足しなければならないから

Ba極の式　$x^2 - y^2 = \ell_x^2$

En極の式　$x^2 - y^2 = (3\ell_x)^2$

A極の式　$y^2 - x^2 = \frac{1-d}{d}\ell_x^2$

$\ell_x = 5.0$ mm, $d = 0.4$

そしてそれぞれの電極電位は

$V_{Ba} = 0$

$V_{En} = -400$ [V]

$V_A = 125$ [V]

である。高周波電圧の最大値 $V_m = 100$ [V] の意味は、通常のx軸上で $x = \pm\ell_x$ の位置を通るBa, En極の場合の話であるから図21の非対称電極では高周波の

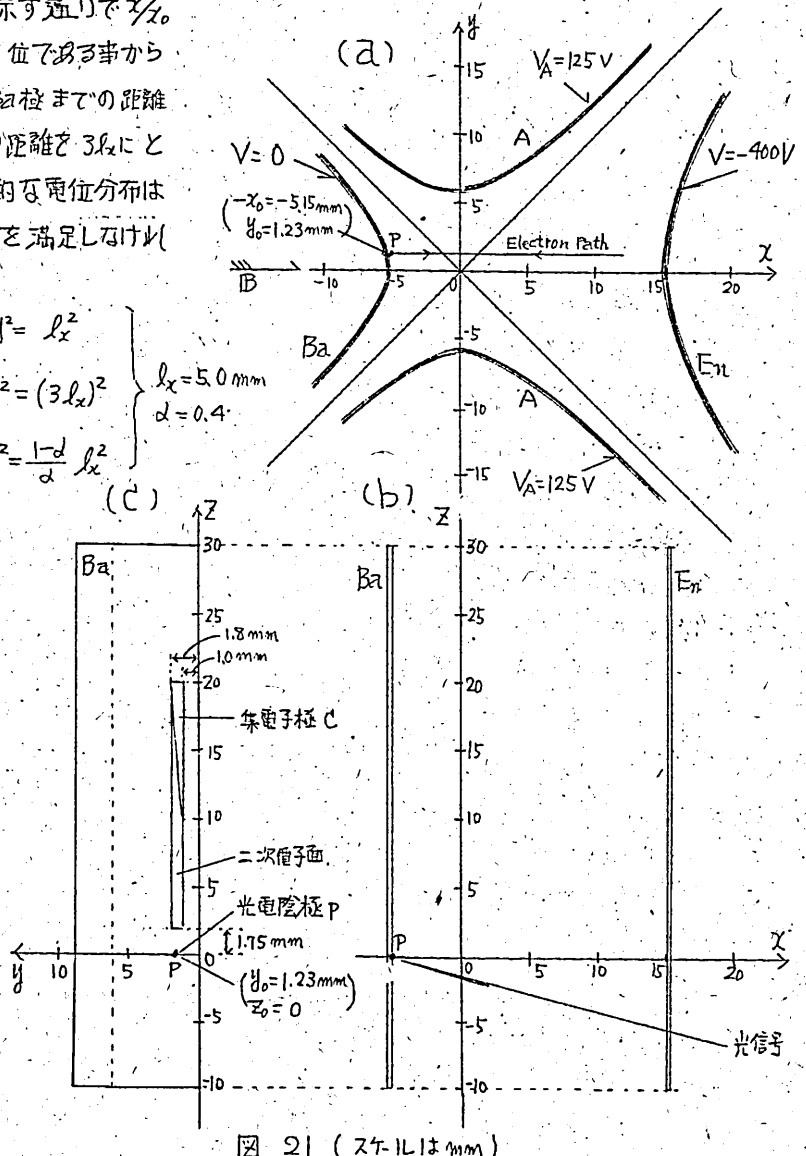


図 21 (スケールはmm)

電位分布が原点に関して対称になるような加え方にしなければならない。 z方向の電極長と集電子極Cの形は、この $f_\omega = 6$ の場合の、図16の $\theta_0 = 240°$ の到着位置の計算結果から決り（図16は $f_\omega = 10$）、増倍段数 $n = 9$ とし、10段目で出力を取り出す場合には図21(c)の三角形状の集電子極Cとなる。 z方向の全電極長は、内部の電界の乱れをなくすために実際の動作領域よりも、両端それぞれ10mmずつ長くして、40 mm となる。

V. あとがき

以上述べたことは、この管の基本的な動作理論とその諸式を使った数値計算結果から考えられる応用についてであった。 その結果、初速度を考慮しても時間的集束は良好で、静的な場合の電子振動の一周期間に出た電子は、数段のうちに位相集束されてその周波数を繰り返し周波数とするパルス化された出力が得られる事がわかった。

しかし、増倍段数が多くなると到着位置のひろがりのため出力の取り出しが難かしくなる。それでむしろ、特定位相の電子だけを取り出すように Gate 特性をもたした方が有利で、本文で述べた場合、sub nano second の Gate 特性の得られる事がわかった。

終りに、本研究に対し御懇篤な御助言を賜りました大阪大学基礎工学部末田 正教授に深謝致します とともに、色々御討論頂いた当研究室 石川正臣 氏に感謝します。

文 献

1) 大東、倉田、森田：大阪管式ダイナミック形光電子増倍管，輻研資料，1971.11.26.
2) Miller & Wittwer : Secondary-Emission Amplification at Microwave Frequencies, IEEE Jour. QE, April 1965, PP.49-59
3) J.L.H. Jonker : The Angular Distribution of the Secondary Electrons of Nickel, Philips Res. Rep. 6, 1951, PP. 372-387
4) O. L. Graddy : Microwave Crossed-Field Secondary Emission Photomultiplication, Ph.D. dissertation, Univ. of Illinois, Urbana ; 1962.
5) Leverenz & Graddy : Subnanosecond Grating Properties of the Dynamic Cross-Field Photomultiplier, Proc. IEEE 58 1487
6) H. Bruining : Physics and Applications of Secondary Electron Emission, Pergamon Press, 1954.

輻射科学研究会資料

トロント大学における
ホログラフィック・レーダーの研究

京大　工学部，電子工学科
小倉久直

昭和47年12月1日

SEKIREI A4 NO. 151

§1 まえおき 概論

これは 1970年より1972年にかけて、トロント大学電気工学教室で飯塚およびYeh教授と共同して行なったホログラフの原理を応用した氷厚測定用のレーダーの研究の試作の紹介である。研究の方は未だ進行中であるので、原理的な説明、装置の概要、実験の状況などの紹介にとどめる。　この研究報告に関しては次の三点に注目していただきたいと思う。一つは、この研究が提起している新しいホログラフの方法、即ち、ホログラム・マトリクスの概念である。これは電磁波動場の多次元的な観測が、コンピューターとの併用による多量のデータの測定と情報処理によって可能になるものであり、ホログラフィのみならず一般の電波の観測通信にも新しい分野を開く可能性があると考えられる。次は、おとでのべるレーダのように電波の波動性、あるいはホログラフの考え方を積極的に利用するものと、エコーの時間を測定する通常のレーダーとの差である。　ホログラフの考えを積極的に用いて成功したものにおとでのべるアンテナ口径を合成する(Aperture Synthesis)レーダーがある。次の点は、ここにのべる氷層観測用の特殊目的レーダーを、光、電波を用いた遠隔探索(Remote Sensing)の他の分野との実用的な関連にたってみることである。遠隔探索の対象は、工業用、鉱業用、農業用、林業用、地理学上、軍事用等の広範囲にわたり、目的に応じ光波、電波光波領域にわたって異なったさまざまの技術が用いられている。これは主として、地表上を移動する方法が不向きな広範な地域の航空機によるSensingが多い。特に氷層観測に問題を限れば、これは船舶航行、氷上交通、運送、特に氷上の鉱業用ボーリング、地理学上の目的、軍事上の目的などの実用目的がある。

氷の厚さの測定にレーダーを用いる場合、グリンランドの氷河や南極をおおっている1Km以上もある場合には通常のエコーレーダーが使用できるが、数米以下の厚さになるとエコー反射の実測は困難であり、伝播速度を利用するよりも、電波の波動性を利用する方法によらねばならない。比較的表面のなめらかな、損失の少ない氷に対しては、共振法、導波管モード法、周波数変調法などが考えられるが、ここではホログラフの考えにもとずいた方法で研究を行なった。

レーダにホログラフの原理がつまり波動性が積極的に用いられて見事に成功した例には SLAR (Side Looking Airborn Radar) とよばれる Synthetic Aperture Radar がある。これは地上構造物のマイクロ波写真ともいうべきものを撮影する軍事的目的から開発されたものであるが、現在では各種の平和目的に利用されている。これはかんたんに説明すれば以下のようである。通常のエコーレーダーでは電波の進行方向に関する解像度が与えられても、進行方向に直角な方向、つまり波面のひろがりの方向に関しては原理的に解像度が十分与えられない。そのためにはアンテナの口径を増大させる必要があるが、航空機に搭載することはもとより地上でも大へん大きいものになる。SLARでは、飛行機が横方向にレーダー波(マイクロ波)を発射して通常レーダーのかきこさせると同時に、それに直角な飛行機の進行方向に対しては、アンテナ口径を拡げるかわりに反射波の位相を適当な飛行距離にわたって記録して、あとで合成することにより等価的にアンテナ口径を大きくしたのと同様な効果をえようとするものである(aperture synthesis)。そのために、飛行中経路変化、振動によるゆらぎを制御あるいは、記録補正する装置が必要であって非常に精巧で高価なものになる。そのために最近は長い口径のアンテナを用いた。解像度はおちるが安価な real aperture radar も制作され実用されている。上の aperture synthesis は、散乱波の位相を記録する点で holography の原理の一つの応用であり、像は適当にフィルム上に記録され、再生はふつうの hologram のように optical processing により行われている。最近は holography の原理を応用したマイクロ波レーダーの研究がさかんになりつつある。

しかしながら、上の様な aperture synthesis は、解像度を得る方向が異なるため、氷の厚さの測定には利用できないので、異なった holography の応用の仕方をする必要がある。よくしられているように hologram は、対象物による散乱波と参照波との干渉場の intensity mapping であり、再生のプロセスは同様な参照波を照射して、hologram による散乱波を結像させることにより実像または虚像をうるものである。光学の領域では写真乾板を用いて簡単に行いうるが、マイクロ波、ラジオ波では、このような方法は

困難で、hologramを得るために種々の工夫がなされている。一つは、tempreraturesensitiveな乾板またはLiquid Crystalを用いて電波のエネルギーによって生じた温度差を光学的な濃淡あるいは色彩に変換して、それを光学的に処理する方法である。
これには大電力が必要であること、加熱にムラが生じ、hologramに雑音が多いこと、加熱に時間がかかること、hologramの大きさが制限されるため、使用波長がセンチ波以下になること、したがってLaboratory experimentの域を出ないこと、などの欠点がある。したがってマイクロ波、ラジオ波では一つのprobeを機械的にscanする方法がとられる。
これは、微小電力も増巾により容易に検出できることと、また、phase comparatorにより上のようなintensity mappingでなく直接に散乱波の振巾、位相または実部、虚部が記録できること、また再生は光学的に記録して再生することも可能であるが、コンピューターを用いてディジタル的に記録、処理することができる、などの長所がある。
上の様なComplex hologramが記録できれば、参照波の位相を任意にえらんでreal hologramを作ることができる。欠点はprobeのscanningが機械的であり、記録に長時間を要すること、電気的に特性のよいscanningの機械的機構を製作することが困難なことなどである。

氷の測定のような特殊な目的に対して通常のhologramをとることは実際に困難であり、かりにhologramが記録され再生されても氷の場合には、地上構造物のような明確な形をもたないから、それから厚さを求めることは不可能である。したがって氷の様な特殊な目的にはhologramをそのまま応用することは出来ない。

レーダーがairbornであることから、測定は、かなりのspeedで測定される必要があるので、機械的なscanningが不可能である。したがってこのレーダーではアレイ・アンテナを電気的にswitchingすることによりhologramを記録する。したがってhologramはsampled hologramとして記録される。一般に散乱波の位相波長は必ず自由波長より長いので、標本化定理により半波長間隔のアレイ・アンテナで原理的に十分hologramが記録できる。散乱物と観測点の距離を考慮す

ると実際にはこの標本間隔は更に長くとることができる。アンテナの個数 アレイの長さは測定精度、雑音などによってきめられる。標本化ホログラムはメモリーにディジタル的に記録され、ホログラムの処理、又は情報処理は、コンピューターで行なう。したがって必要な数値を計算するためのプロセシングは簡単であることがのぞましい。計算値はリアルタイムでディスプレイに表示する。アンテナの高速度スイッチングはコンピューターの指令で行われ、その様な論理回路を簡単化するために アンテナの個数は 2^n ($n=5$) にえらばれている。また アンテナの個数を半減させるために、phase discriminatorを用いて、散乱場の実部と虚部すなわち複素ホログラムを同時に測定する。さらに各々アンテナのチャンネルの位相長、減衰の補正はコンピューターのメモリーに入れておくことによって、プロセシングのさいにとり入れることができるので、現実に個々のアンテナを調整する必要がなく、その様な補正のさいに生じる種々の困難も回避できるのが、コンピューター処理の大きな特長である。

さらに このレーダーのホログラムの作成は、目標物を照射する送信波のモードも自由に変化できるように、送信アンテナも アレイ・アンテナになっている。測定は各送信アンテナに対応するサンプル・ホログラムを受信アンテナが記録し、全体として 送信アレイ、受信アレイに関する複素ホログラムのマトリクスを測定することになる。これを ホログラム・マトリクスと呼ぶことにする。これは通常のホログラムよりも要素的なものであってはるかに多くの情報を含んでいる。通常のホログラムを得るには送信アンテナに関し適当に位相 重み分布を与えて合成すればよく、任意の送信モード(平面波 球面波など)に対するホログラムを合成することが可能である。また 受信ホログラムを処理することは あるいは再生することは 受信アンテナに関し適当に位相、重みの分布を与えて合成することに対応する。したがって多量の情報を含むホログラム・マトリクスを二つの添字に関し数学的に処理することにより必要な情報(たとえば 氷の厚さ)を求めることができ、必要とあれば他の情報も、処理公式を変えることにより得ることができるのである。次とでのべるように氷の厚さの測定の場合、処理公式は マトリクスの二つの添字に関する二重有限フーリエ変換であり、処理のためのコンピューターは

いわゆるFFT machineとして設計されている。

上でホログラム・マトリクスは要素的なホログラムであるとのべたが、これは実は送受信アンテナーアレイに関するSマトリクス(の一部)に他ならない。したがって、ここにのべた方法は、Sマトリクスを数学的に処理することにより、Targetの情報をおめるという一つの原理的な提案であり、上記の氷測定用のホログラフィック・レーダーはその一つの応用分野である。一般に散乱波に関する多量の観測データをコンピューターによる科学的処理によって必要な情報をおめるということはコンピューターによって可能になった一つの分野であり、遠隔探索以外に電波伝播に関する観測、宇宙通信、長距離干渉法による電波天文学などもこのような分野が開けつつあるものと思われる。

§2. HISS (Holographic Ice Surveying System Radar) のあらまし

レーダーの設計は種々の条件により制約をうける。価格、ヘリコプターの搭載能力、氷面の状態、氷の電波減衰率、測定精度等々。ここでは、氷の厚さ、数米以内、表面粗さ10cm以内で減衰率は十分小さいものとし、アンテナ・アレイは10m以下、飛行高度は10m以下、飛行速度は遅く10km/h、ぐらいの数値を想定した。使用周波数は上の条件できまるが、3GHz、波長10cmとしている。

実ホログラム

ここではまずHISSの原型によってレーダーの原理をのべる図のようにアンテナアレイはデータ処理を簡単にするために二乗等間隔に配置され、送信アンテナは高度hから細いビームで真下を照射するものとする。深度yよりの複素散乱振巾を

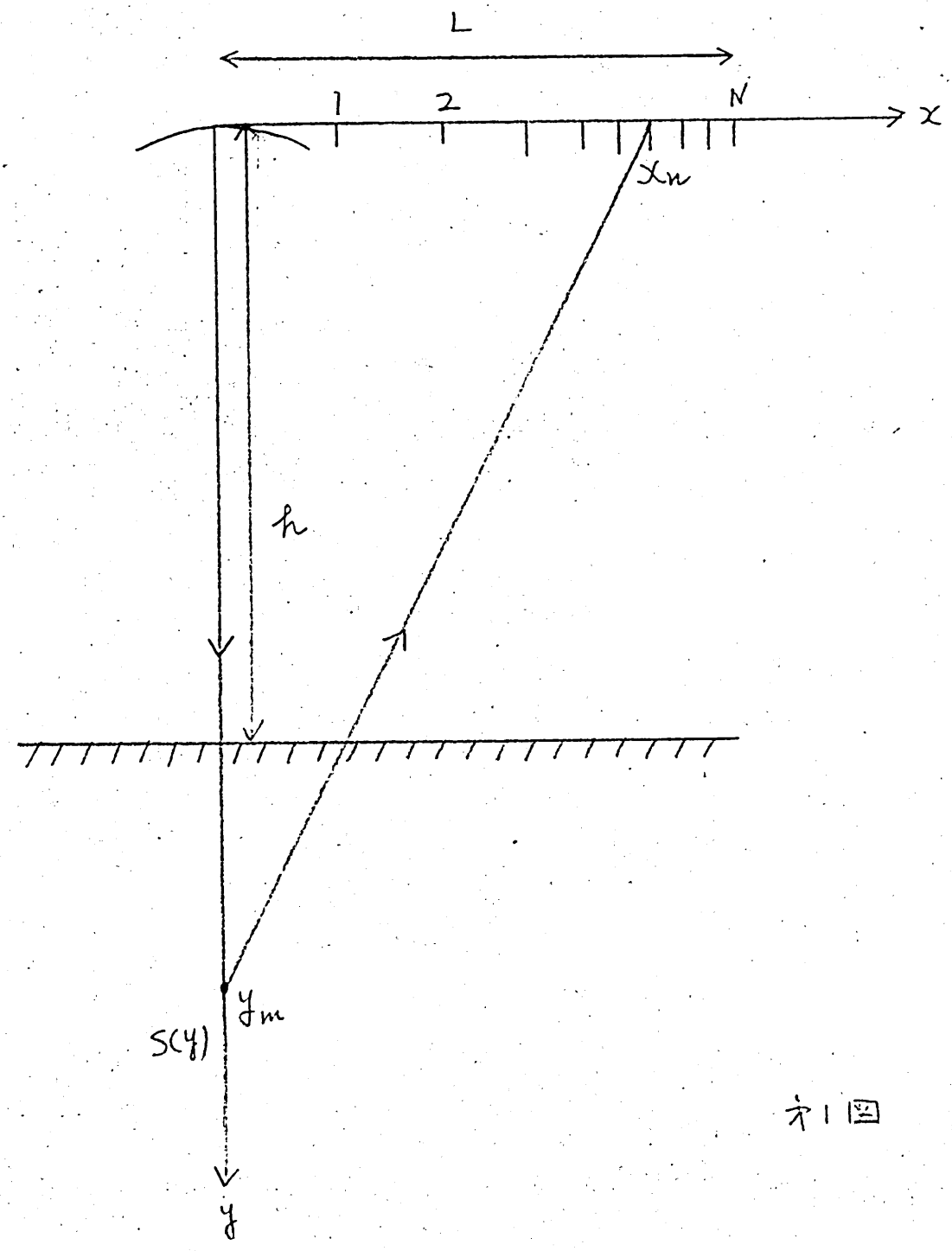
$$S(y) = |S(y)|e^{i\varphi(y)} \qquad (1)$$

とする。ここではまず通常の実ホログラムによって説明する。

S(y)による xでの ホログラムは

$$\left| 1 + S(y)\, e^{2ikr + i\frac{k}{2y}x^2} \right|^2$$

$$\cong 1 + 2|S(y)| \left\{ \cos(2ky + \phi(y)) \cos\frac{k}{2y}x^2 - \sin(2ky + \phi(y)) \sin\frac{k}{2y}x^2 \right\} \quad (2)$$



第1図

であるから $\left(\frac{x}{y}\right)^2 << 1$ として、氷による散乱波のホログラムは一般的に

$$H'(x) = \int_h^\infty \left\{ A'(y) \cos \frac{k}{2y} x^2 + B'(y) \sin \frac{k}{2y} x^2 \right\} dy \qquad (3)$$

但し

$$|S(y)|^2 \propto |A'(y)|^2 + |B'(y)|^2 \qquad (4)$$

新しい変数

$$X = x^2 \qquad Y = \frac{1}{2\lambda y} \qquad W = \frac{1}{2\lambda h} \qquad (5)$$

を用いて(3)は

$$H(X) = \int_0^W [A(Y) \cos(2\pi Y X) + B(Y) \sin(2\pi Y X)] dY \qquad (6)$$

であり、散乱強度は

$$|S(y)|^2 \propto |A(Y)|^2 + |B(Y)|^2 \qquad (7)$$

但し

$$A(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} H(X) \cos(2\pi Y X) dX$$

$$B(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} H(X) \sin(2\pi Y X) dX \qquad (8)$$

は、ホログラムの cos および sin 変換である。

ホログラム(6)がバンド中 W の帯域制限波形であることに注目して、標本化定理を適用して (5) (7) (8) をホログラムの標本値

$$H_n = H(X_n) \qquad X_n = n\Delta \qquad (9)$$

$$\Delta = \frac{1}{2W} = \lambda h \qquad (10)$$

でおらわせば

$$|S_m|^2 \equiv |S(y_m)|^2 \propto |A_m|^2 + |B_m|^2 \tag{11}$$

$$y_m = \frac{L^2}{2\lambda_m} \qquad m = 0,\ 1,\ 2 \cdots\cdots N' \tag{12}$$

N：アンテナ数　　$N' = \frac{N}{2} - 1$ （N偶）

L：アレイ長　　$N' = \frac{N-1}{2}$ （N奇）

$$A_m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} H_n \cos\left(2\pi \frac{nm}{N}\right) \tag{13}$$

$$B_m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} H_n \sin\left(2\pi \frac{nm}{N}\right)$$

$y_0 = \infty$，$y_{N'} \cong h$ であり，Nケの標本化ホログラムより

$N\ (\sim N/2)$ 個の散乱強度 $|S_m|^2$ をうる。

複素ホログラム

はじめにのべたように，90° hybridを用いたphase discriminatorを用いてNケのアンテナでNケの複素ホログラムを測定することが出来る。上の関係を複素ホログラムの場合に書き直すと次のようになる。

2つの実ホログラムを

$$H'_n = \sum_{m=0}^{N-1} A_m \cos\left(2\pi \frac{nm}{N}\right) + \sum_{m=0}^{N-1} B_m \sin\left(2\pi \frac{nm}{N}\right) \tag{14}$$

$$H''_n = -\sum_{m=0}^{N-1} B_m \cos\left(2\pi \frac{nm}{N}\right) + \sum_{m=0}^{N-1} A_m \sin\left(2\pi \frac{nm}{N}\right)$$

と書く，指数形では

$$H_n = \sum_{m=0}^{N-1} C_m\, e^{2\pi i \frac{nm}{N}} \tag{15}$$

$$H_n \equiv H'_n + iH''_n \tag{16}$$

$$C_m = A_m - iB_m \tag{17}$$

散乱強度は

$$|S_m|^2 \propto |C_m|^2$$

$$C_m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} H_n e^{-j2\pi \frac{nm}{N}i} \qquad (18)$$

但し　mは深さ

$$y_m = \frac{L^2}{2\lambda m} \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ N-1 \qquad (20)$$

に対応する。　したがって　スペクトルをあらわす点の数は N ケであり (12) の場合の N' のほぼ2倍である。 (13) あるいは (19) のフーリエ変換は、T度受信アレイアンテナを点 y_m に focus したことに対応している。

アンテナの数を増やすことの利点は、標本化定理を用いる場合の aliasing effect を減らすことができることである。いいかえると、ホログラム中の種々の原因で生じた高い空間周波数成分を標本点を増すことによって減らすことが出来る。つまりスペクトルの歪みはアンテナ数を増すことによってとりのぞくことが出来るのである。

ホログラム・マトリクス

上のレーダーの原型は X band で Laboratory Simulation を行なった。その結果ビームが十分細くないかぎりスペクトルに歪が生ずることが判かった。このためには beam を focus する必要があるが、そのような大きいパラボラをヘリコプターに搭載することは不可能なので、以下にのべるように送信アレイを用いて focus する。　すなわち送信アレイが深さ y_m に focus している間に受信アレイで標本化ホログラム $\{H_n\}$ $y=y_m$ を記録し、コンピューターが m フーリエ成分を計算して、$|S_m|^2$ を求める。即ち受信アレイが送信アレイと同じ点 y_m に focus したことになる。送信アレイの焦点をコントロールする高速度電子制御位相器は市販されているが非常に高価であるので、ここでは　はじめにのべた Hologram Matrix の方法を考案した。

この方法では、受信アレイの位相制御のみならず送信アレイの位相制御もデータ処理の段階でコンピューターにより行うことができる。即ち送信アレイの一つのアンテナが電波をだしている間に、受信アレイが順次電子的にswitchingされて複素ホログラムを記録する。これを、送信アレイの各アンテナが順次switchされていく毎にくりかえし、送信アンテナが全部scanされた時にホログラム測定の一つのサイクルが終了する。したがって、記録されたホログラムは $N \times N$ マトリクス $\{H_{mn}\}$ $m, n = 1, 2, \cdots, N$ の形になる。これを Hologram Matrix とよぶ。即ち前にのべた (15)-(18) に対応して

$$H_{mn} = \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{m\ell} e^{-2\pi i \frac{n\ell}{N}} \qquad m, n = 1, 2 \cdots N \tag{21}$$

$$H_{mn} = H'_{mn} + i H''_{mn} \qquad \ell = 0, 1 \cdots, N-1 \tag{22}$$

$$C_{m\ell} = A_{m\ell} - i B_{m\ell} \tag{23}$$

となる。送信側の添字に関するフーリエ変換

$$\sum_{m=1}^{N} H_{mn} e^{-2\pi i \frac{m\ell}{N}} \tag{24}$$

は、送信アレイが深さ y_ℓ に focus されているときの受信ホログラムであり、したがって散乱強度は (24) の ℓ 番目のフーリエスペクトル

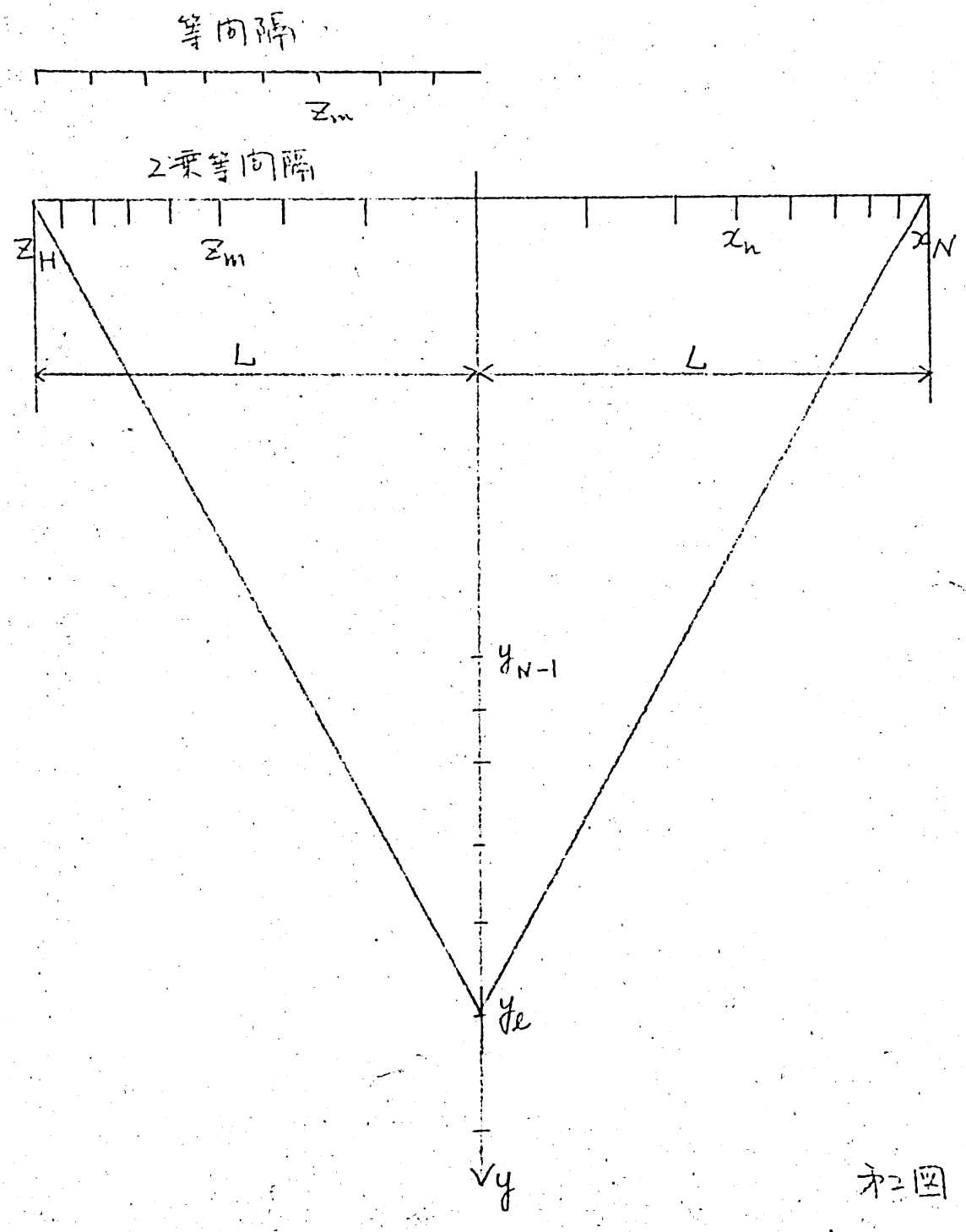
$$|S_\ell|^2 \propto \left| \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} e^{-2\pi i \frac{m\ell}{N}} \cdot e^{-2\pi i \frac{n\ell}{N}} H_{mn} \right|^2 \tag{25}$$

$\ell = 0, 1, 2 \cdots, N-1$

で与えられる。つまりこれは H_{mn} の二重フーリエ変換の対角要素である。

以上は送信アレイが受信アレイと同じく二乗等間隔に配置されている場合である。アレイを設計するためのコンピューターシミュレーションの結果、送信アレイは等間隔配置のほうがよい焦点がえられることがわかったので、

送信 アレイ　　受信 アレイ



第二図

実際には送信側のアレイは等間隔 受信側は2乗等間隔になるように設計された。 ホログラム・マトリクスのデータ処理のための最終的な processing formula は

$$|S_\ell|^2 \propto \left| \sum_{m=1}^{N} W_m e^{-i\left(2\pi\ell \frac{m^2}{N} + \beta_m\right)} \sum_{n=1}^{N} H_{mn} V_n e^{-i\left(2\pi \frac{\ell n}{N} + \alpha_n\right)} \right|^2 \tag{26}$$

但しここに

	n番目の受信アンテナ	m番目の送信アンテナ
位相補正	α_n	β_m
振巾補正 (合重み関数)	V_n	W_m

前にのべたように，各アンテナ・チャンネルの位相ならびに減衰の補正は，データ処理の段階で(26)に従って行うことができ，各アンテナを逐一調整する必要がないのが この方法の特長である。重み関数は，ビーム又は焦点が最良になるようにえらぶ。 ここでは，重み関数は簡単のために Lorentz 型

$$\frac{w^2}{(m-c)^2+w^2}\,\frac{1}{m}, \quad m=1, 2 \cdots, N \qquad \text{2乗等間隔アレイ}$$

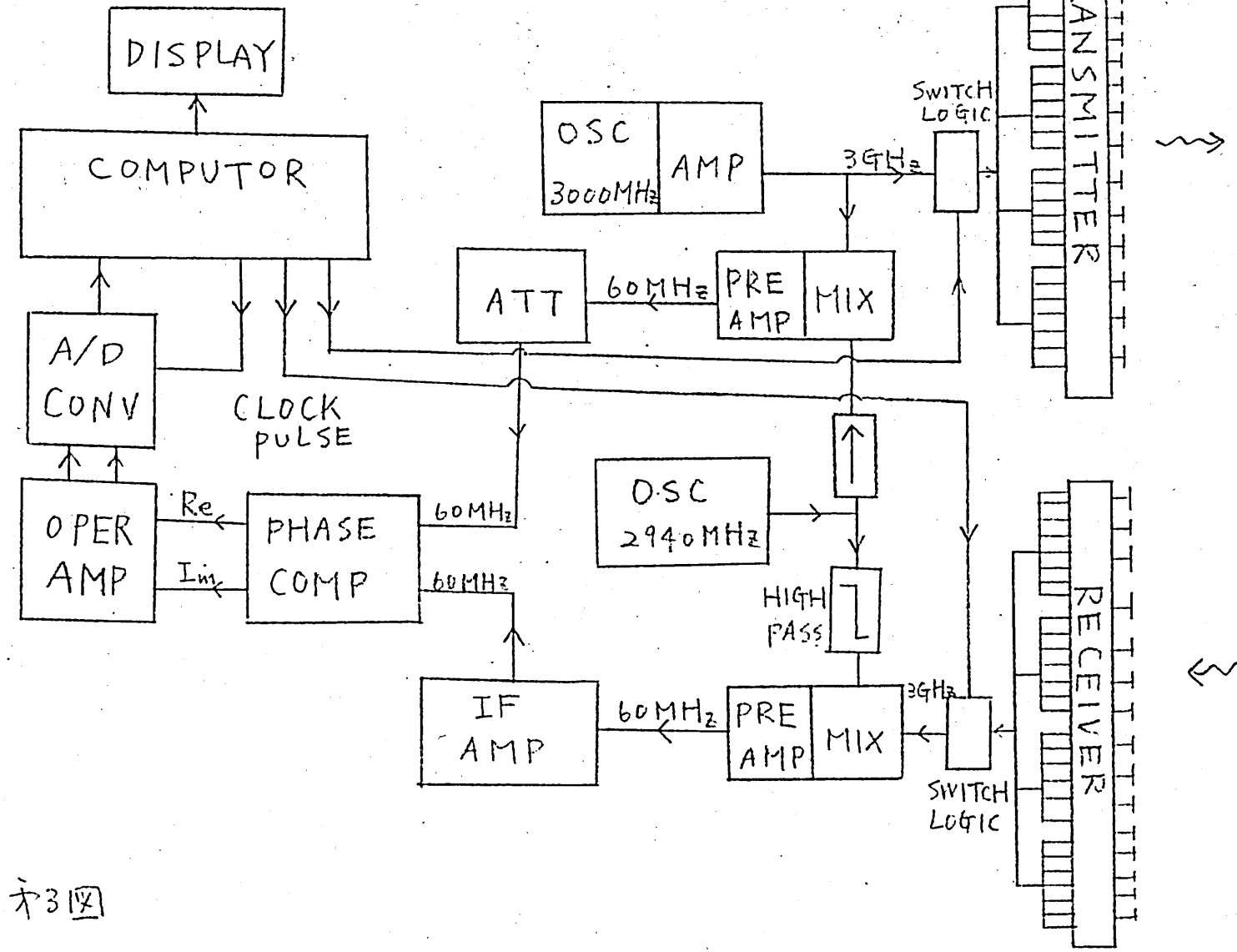
$$\frac{w^2}{(m-c)^2+w^2}, \quad m=1, 2 \cdots, N \qquad \text{等間隔アレイ}$$

にとって，コンピューター・シュミレーションで最適な，c, w, を定めた。ここで c は重みの中心，w はその巾である。

アンテナの個数 N は，シミュレーションによって，最も経済的なるように選び，その結果 $N=32 (=2^5)$，アンテナ長，$L=4m$ (全長 $8m$) を採った。 また 実際の 3 GHz の HISS を製作する前に，コンピューター・シュミレーションでえられないデータ たとえば

氷面の粗さ底面での反射、等をうるために、実験室内でK bandのモデルシュミレーションを行う準備を進めたが、時間の関係で準備未了のまま、3GHzのHISSの製作し、屋外実験を行なった。
レーダーの回路のブロックダイヤグラムは次の図のとおりである。

SEKIREI A4 NO. 151



第3図

輻射科学研究会資料

異方性薄膜光学回路素子の位相補償

長沢隆士・山本錠彦・牧本利夫

（大阪大学基礎工学部）

昭和48年2月2日

1. まえがき

近年、光集積回路が注目を集めるにつれて、誘電体薄膜線路について活発な研究がなされ、特に等方性媒質に関しては、数多くの報告[1]が見られる。また最近になって異方性媒質を用いた薄膜線路の研究[2],[3]も進められており、各種のガーネット系薄膜線路[4]が作成され、これらを用いた磁気光学スイッチや変調の実験[5]が報告されている。このように異方性媒質を導入することは、回路構成にあたっての自由度を増すという点で重要である。

そこで筆者らはさきの報告[6]において、この種の異方性導波系を取り扱う際に有用な回路論的方法をあたえ、これに基づいて各種の相反ならびに非相反薄膜光学回路素子の構成例を示した。これらの素子の多くは、異方性薄膜伝送路におけるある一対のTEモードとTMモード間の結合現象[7]を利用したものであるが、設計に際しては簡単のためにこれら両モードが縮退動作を行なっているものとした。しかしこのためには膜厚の厳密な調整が要求され、縮退条件がくずれると素子の特性は当然劣化す

る。そこで本文では、このような製作にあたっての難点を克服するために、非縮退時の系においても素子の完全動作を可能にする設計法について報告する。注目すべき点は、非縮退系を用いるとかえって回路構成に多様性が生ずるということである。すなわち本文の方法によると、単に縮退系で設計した各回路素子の特性を補償し得るばかりでなく、縮退系では採り得なかった回路構成においても所要の特性を実現できる場合がある。この意味において、本文の設計法はさきの方法の拡張であると言うことができる。

2. 導波系の構造の解析の基礎

本文で取り扱う回路系において基本となる系は、図1に示すような2次元（$\partial/\partial y = 0$）3層の薄膜伝送路である。媒質は無損失で、伝搬方向をz方向とする。各領域の媒質はいずれもつぎの形の対角テンソル比誘電率を持つものとする。（なお透磁率は

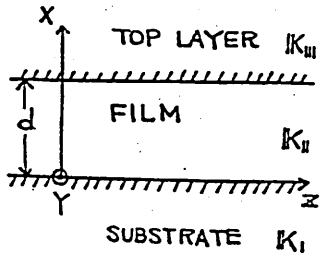


図1. 基本導波系の構造

ずれも μ_0 とする。）

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

つぎに回路合成にあたっての規準素子として、表1に示す6種類の系（摂動系）を採用する。摂動はいずれも、基本系テンソル $\mathbb{K}$ における微小な非対角要素の導入としてあたえられる。

表1. 摂動系

	Longitudinal (L)	Polar (P)	Equatorial (E)
非対角要素	K_{xy} $(=K_{yx}^*)$	K_{yz} $(=K_{zy}^*)$	K_{xz} $(=K_{zx}^*)$
Real Anisotropic (A)	(AL) 実数	(AP) 実数	(AE) 実数
Gyrotropic (G)	(GL) 純虚数	(GP) 純虚数	(GE) 純虚数

i) A摂動系（結晶軸回転、電気光学効果）：相反
ii) G摂動系（磁気光学効果）：非相反

そこで基本系において縮退あるいはそれに近い状態にある一対のTEモードとTMモードに注目し、このモー

対のふるまいが所要の特性に合致するように、摂動系を適当に接続していこうというのが、設計の基本的な考え方であるが、この種の構成問題において重要な役割を果たすのが、文献(6)であたえたモード伝達行列である。その定義は、

$$\begin{bmatrix} a^{(h)}(l) \\ a^{(e)}(l) \end{bmatrix} = e^{-j\Psi} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(h)}(0) \\ a^{(e)}(0) \end{bmatrix} \tag{2}$$

上式は全長 l の摂動系の入出力端におけるTEモード（添字 h）とTMモード（添字 e）の前進波の正規化複素振幅の関係をあらわしている。式(2)のABCD行列がモード伝達行列 $\mathbb{T}$ である。なお Ψ は平均物相量 $(\beta^{(h)}+\beta^{(e)})\cdot l/2$ をあらわしている。以下の解析のために、ここで基本系および摂動系の前進波についての行列表示をあたえておく。

i) 基本系 (B)

$$\mathbb{T}_0 = \begin{bmatrix} e^{-j\phi} & 0 \\ 0 & e^{+j\phi} \end{bmatrix} \tag{3}$$

ただし　$\phi = (\beta^{(h)} - \beta^{(e)})\ell / 2$　　(4)

ii) L, P 摂動系

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta - jP\sin\theta & jQ\sin\theta \\ jQ^*\sin\theta & \cos\theta + jP\sin\theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここにθは主として系の長さに関係し、またP（$P^2 \leqq 1$）は縮退の度合をあらわすパラメータである。（縮退時においては$P=0$）これに対しQは対象とする摂動系のタイプに依存するパラメータで、AL, GP系においては実数、GL, AP系においては純虚数となる。

iii) GE 摂動系

$$T = \begin{bmatrix} e^{-j\phi} & 0 \\ 0 & e^{\mp j(\phi-\gamma)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここにγはTMモードに対する摂動物相量である。なおAE摂動系に対するTは基本系のT_0と一致する。

後退波についての行列表示は前進波の表示からつぎの規約により求められる。

i) L, B　：　前進波の場合と同形。

ii) P　：　非対角要素B, Cの符号を反転する。

iii) GE ： Dの中のγの符号を反転する。

パラメータの定義式等の詳細は文献(6)を参照のこと。

3. 位相補償法（非縮退系を用いた設計）

式(3)をみれば、非縮退時の基本系（無摂動）区間が、純相差回路として動作することが分かる。そこで本文で述べる設計法においては、これを位相補償器として、図2のように同種または異種のL，P摂動系の間に挿入した3素子接続区間が基本となる。ただし、場合によっては中央の基本系区間（B）の代りに、GE摂動系を位相補償器として利用する場合もある。

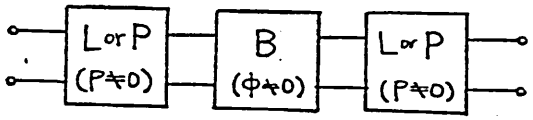
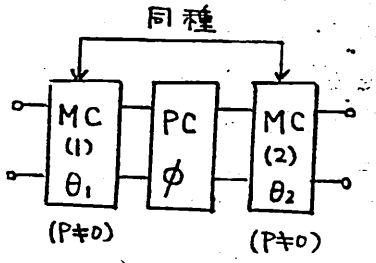


図2. 位相補償法における規準区間

3.1 モード変換器[8]

縮退時（P=0）においては、4種のL，P摂動系はθ=π/2と選べば、すべてTE↔TMモード変換器として動作するが、非縮退系（P≠0）においては、100％モード変換がおこらず、素子の特性が劣化する。この場合は対象とするモード変換器を2分割し、基本系区間を挿入

することにより完全動作が得られる。（これは図2において、両側の摂動系が同種の場合に相当する。）この位相補償の原理は図3を参考にすれば分かりやすい。図3の左側は考えているモード変換器のTE→TM変換における電力移行状況を、そして右側は同じ素子のTM→TE変換の模様を示している。（ただし図は$|P|<1/\sqrt{2}$の場合）いま図中のaとa′のように、両図においてTE，TMモードの振幅がそれぞれ等しくなる点に注目する。ただしa、a′において両モードの位相関係は異なっている。したがってモード変換器（MC）(1)の出力



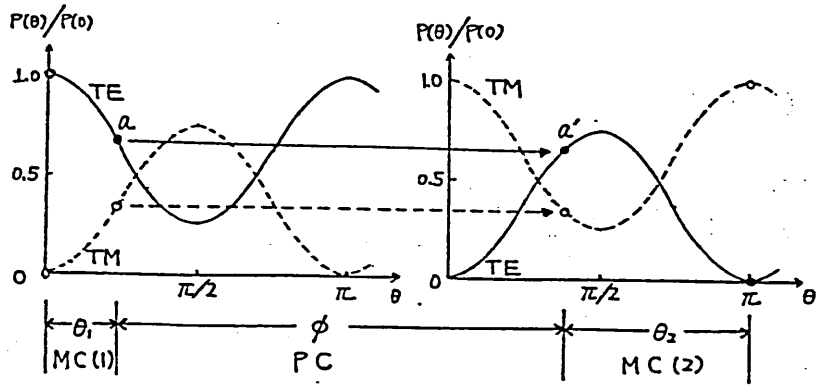


図3　モード変換器の位相補償の原理

端 (a) における両モードの位相関係を、適当な長さの基本系区間から成る位相補償器 (PC) によって a′ における位相関係に変換し、MC(2) の入力とすれば、MC(2) における変換曲線は右側の図に沿うことになり、100 % 変換が達成されることになる。

設計条件としては、MC(1)－PC－MC(2) の縦続区間全体のモード伝達行列において次式が成立することが要求される。

$$A = 0 \quad , \quad D = 0 \qquad (7)$$

上式の2つの条件は実は同じもので、一方が満足されれば他方は自動的に満たされる。* したがってこの場合決定すべきパラメータ θ_1, θ_2, Φ に対し条件式は2つである。ここではつぎの3種の場合の解を求めた。(図4参照)

a) $\theta_1 = \theta_2$

i) 図4 $B \to C'$

---

* GE 系の場合を除いて、モード伝達行列の要素の間には $A = D^*$, $B = -C^*$ なる関係が成立する。

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P^2}} \\ \phi = \dfrac{|P|}{2P}\left(2\pi - \mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1-3P^2}{1-P^2}\right) \end{cases} \quad (8)$$

ii) 図4　C → B′

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \pi - \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P^2}} \\ \phi = \dfrac{|P|}{2P}\,\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1-3P^2}{1-P^2} \end{cases} \quad (9)$$

b)　$\theta_1 = \pi/2$

i) 図4　A → A′

$$\begin{cases} \theta_2 = \pi - \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{|P|}{\sqrt{1-2P^2}} \\ \phi = \dfrac{|P|}{2P}\,\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{P^2}{P^2-1} \end{cases} \quad (10)$$

ii) 図4　A → A″

$$\begin{cases} \theta_2 = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{|P|}{\sqrt{1-2P^2}} \\ \phi = \dfrac{|P|}{2P}\left(2\pi - \mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{P^2}{P^2-1}\right) \end{cases} \quad (11)$$

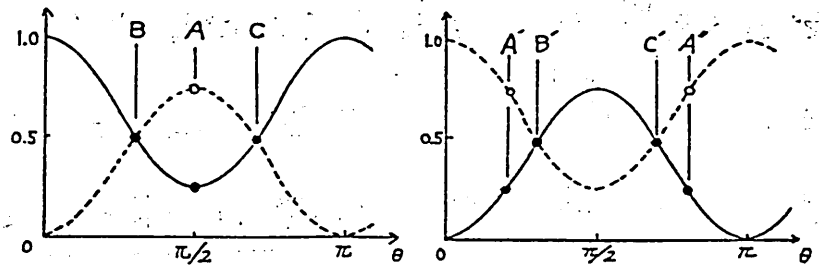


図4.　モード変換器の位相補償における解の組み合わせ

c) $\theta_1 + \theta_2 = \pi$

i) 図4　B → B′

$$\begin{cases} \theta_1 = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P^2}} \\ \phi = \dfrac{|P|}{2P}\pi \end{cases} \tag{12}$$

ii) 図4　C → C′

$$\begin{cases} \theta_1 = \pi - \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P^2}} \\ \phi = \dfrac{|P|}{2P}\pi \end{cases} \tag{13}$$

上記の設計公式は相反、非相反を問わずAL, GL, AP, GPの4種のモード変換器に対して同様に適用できる。ただし適用範囲にはつぎの制限がある。

$$0 < P^2 \leqq 1/2 \tag{14}$$

すなわち、対象とするモード変換器の補償前の変換効率が50%以上であることが要求される。* モード変換器の具体例と本方法による補償可能範囲を図5に挙げておく。さらに、設計に際して便利なように式(8)—(13)を図表化した結果を図6に示す。（図中のPとφは同一符号をとる。）

---

*原理図（図3）において、TE↔TM、TM→TE変換曲線が交叉することを意味する。

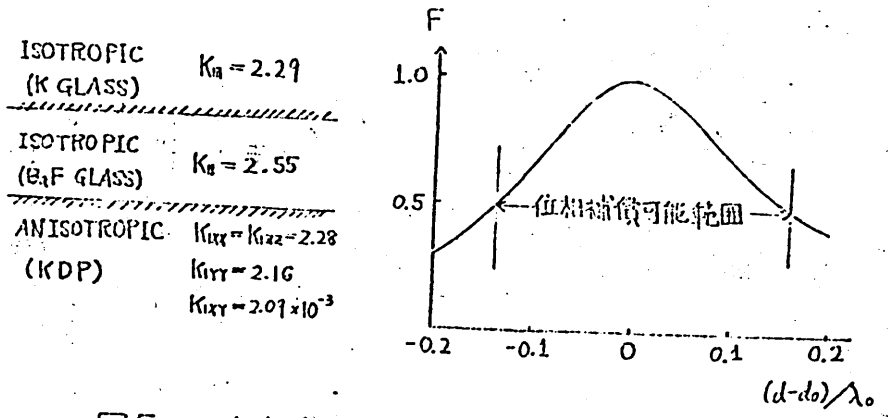


図5. モード変換器(AL形)の一例とその補償可能範囲

(結合モード：TE_0-TM_0
縮退時の膜厚：$d_0=1.4\lambda_0$，　$\lambda_0=5500\text{Å}$)

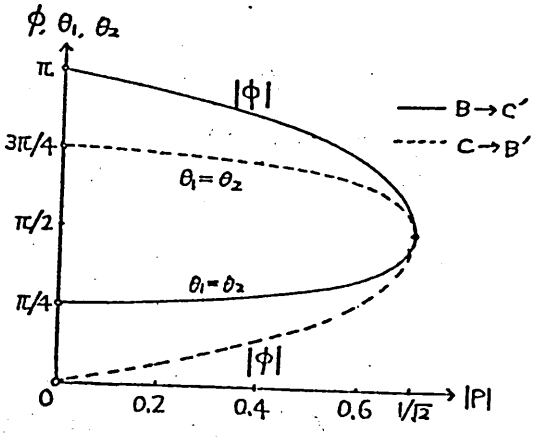


図6 (a)

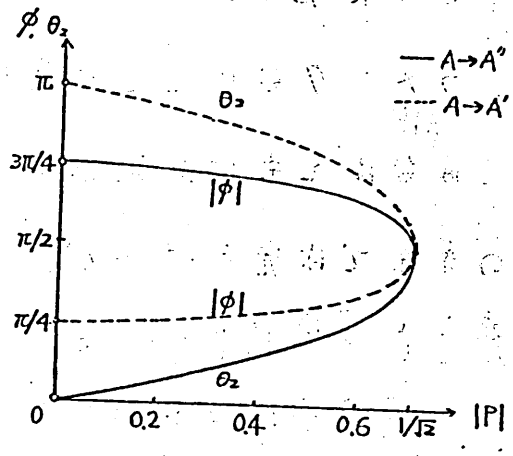


図6 (b)

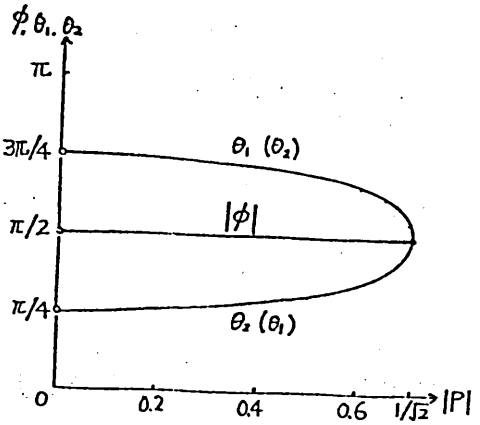


図6 (c)

図6　位相補償形モード変換器の設計図表

(a)　$\theta_1=\theta_2$　(b)　$\theta_1=\pi/2$

(c)　$\theta_1+\theta_2=\pi$

3.2 一方向性モード変換器

これはある方向については 100 % モード変換を生じ、逆方向については無変換特性を示す素子で、薄膜アイソレータやサーキュレータ等を構成する際の基本要素となる。縮退時の2区間構成では、AL—GP および AP—GL（ただし長さはすべて $\theta = \pi/4$）の組み合わせで、この素子が実現される。さきの組においては、マトリクス・パラメータQはともに実数、これに対しあとの組においてはQはともに純虚数である。非縮退時においては、このままでは完全動作が得られないので、中間に位相補償器として基本系区間を挿入することになる。したがってこの場合は図2において、両側の摂動系の種類が異なる場合に対応する。

一方向性モード変換器の位相補償の原理を図7に示す。図7(a)は前進波に対する電力移行状況を、そして同図(b)は後退波に対する電力移行状況を示している。この場合は3.1で述べた単なるモード変換器の場合と異なり、変換曲線の交点から交点への移行に対してしか解が存在し

ない。すなわち、A→D, B→C, A→C, B→Dの4種類である。解析の詳細は省略し、設計公式のみを挙げるとつぎのようになる。

a) 図7 A→D

$$\begin{cases} \theta_i = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P^2}} & (i=1,2) \\ \phi = \dfrac{|P_1|}{2P_1}(2\pi - \mathrm{Cos}^{-1}\alpha) \end{cases} \tag{15}$$

ただし $\alpha = \left[\sqrt{1-2P_1^2}\sqrt{1-2P_2^2} - P_1P_2\right] / g_1 \cdot g_2$

$$g_i = \begin{cases} Q_{iF} & (AL-B-GP) \\ Q_{iF}/j & (AP-B-GL) \end{cases} \quad (i=1,2) \tag{16}$$

ここにFは前進波をあらわす。

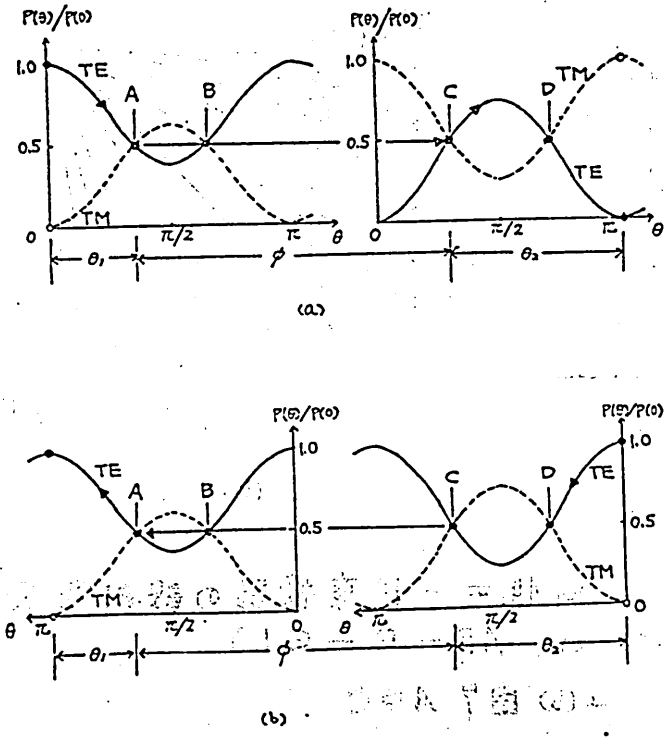


図7. 一方向性モード変換器の位相補償の原理

(a) 前進波
(b) 後退波

(b) 図7 A → C

$$\begin{cases} \theta_1 = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P_1^2}}, \quad \theta_2 = \pi - \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P_2^2}} \\ \phi = \begin{cases} \dfrac{|P_1|}{2P_1}\cos^{-1}\beta & (|P_1| \geq |P_2|) \\ \dfrac{|P_1|}{2P_1}(2\pi - \cos^{-1}\beta) & (|P_1| < |P_2|) \end{cases} \end{cases} \tag{17}$$

ただし $$\beta = -\left[\sqrt{1-2P_1^2}\sqrt{1-2P_2^2} + P_1P_2\right]/g_1 \cdot g_2 \tag{18}$$

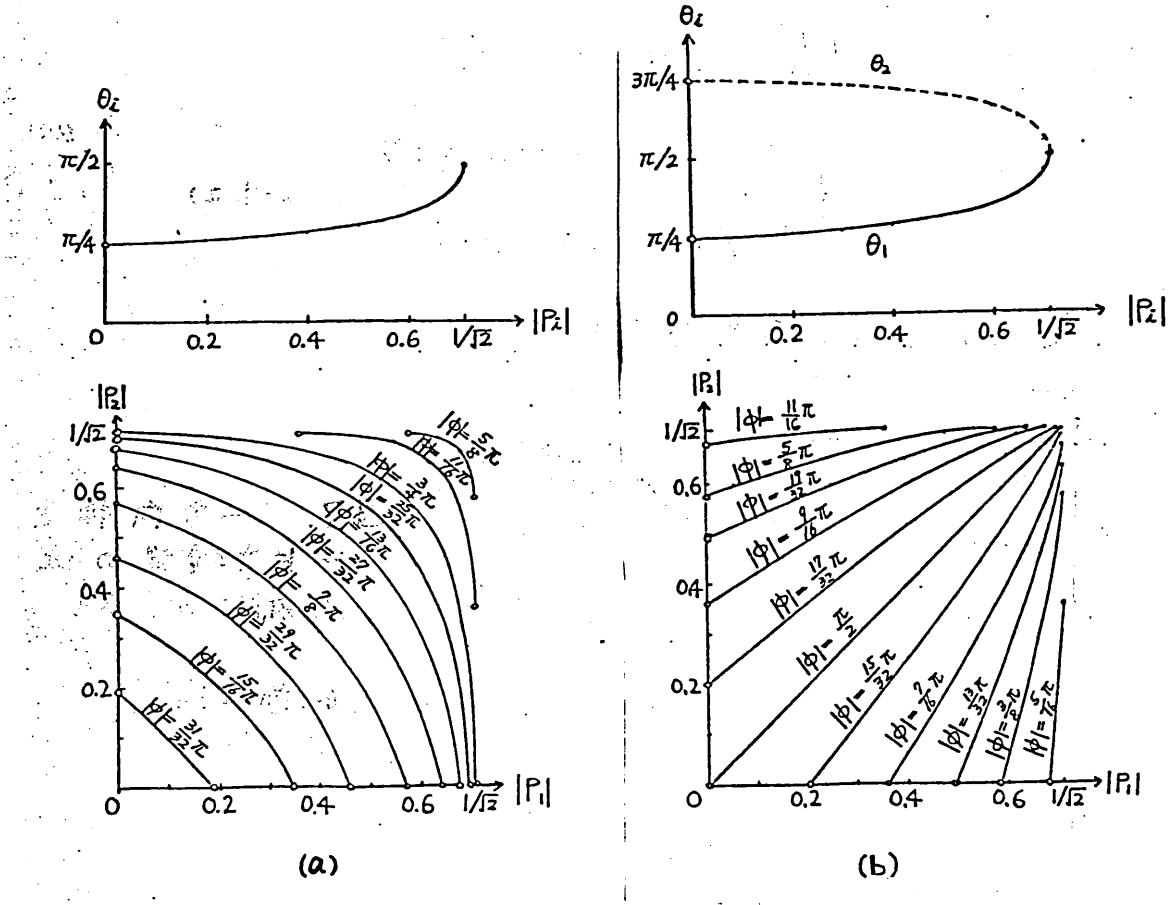


図8 位相補償形一方向性モード変換器の設計図表
(AL－B－GP or AP－B－GL)

(a) 図7 A→D　　(b) 図7 A→C

上式を設計図表の形にまとめたのが図8(a), (b)である。位相補償器の両側の接動系のタイプが異なるので、パラメータPの値も一般に異なるとしている。なお図7 B→C, B→Dに対応する設計公式および図表は紙数の関係で省略する。

ところで、前述のように縮退系を用いた場合には、AL－GP, AP－GLの組み合わせにおいてしか一方向性モード変換器が構成されなかったのであるが、非縮退系においては基本系を挿入することにより、他のAL－GL, AP－GPの組み合わせの場合に於てもこの素子を実現することができる。

新しい組み合わせのうち、AL－B－GL接続に対する設計公式はつぎのようになる。

a) 図7 A→D

$$\begin{cases} \theta_i = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P_i^2}} & (i=1,2) \\ \phi = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{|P_1|}{2P_1}\left(\dfrac{3}{2}\pi - \mathrm{Sin}^{-1}\alpha\right) \end{cases} \tag{19}$$

ただし $$\alpha = \left[P_1P_2 - \sqrt{1-2P_1^2}\sqrt{1-2P_2^2}\right] / g_1 g_2 \tag{20}$$

$$g_1 = Q_{1F}, \quad g_2 = Q_{2F}/j \tag{21}$$

(b) 図7　$A \to C$

$$\begin{cases} \theta_1 = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P_1^2}}, \quad \theta_2 = \pi - \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P_2^2}} \\ \phi = \begin{cases} \dfrac{|P_1|}{P_1}\pi + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\beta & (P_1 \geqq P_2) \\ \dfrac{|P_1|}{2P_1}\pi - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\beta & (P_1 < P_2) \end{cases} \end{cases} \tag{22}$$

ただし　$\beta = \left[P_1P_2 + \sqrt{1-2P_1^2}\sqrt{1-2P_2^2}\right] / g_1 \cdot g_2$ (23)

この場合の設計図表を図9 (a), (b) に示す。図中の ϕ の値

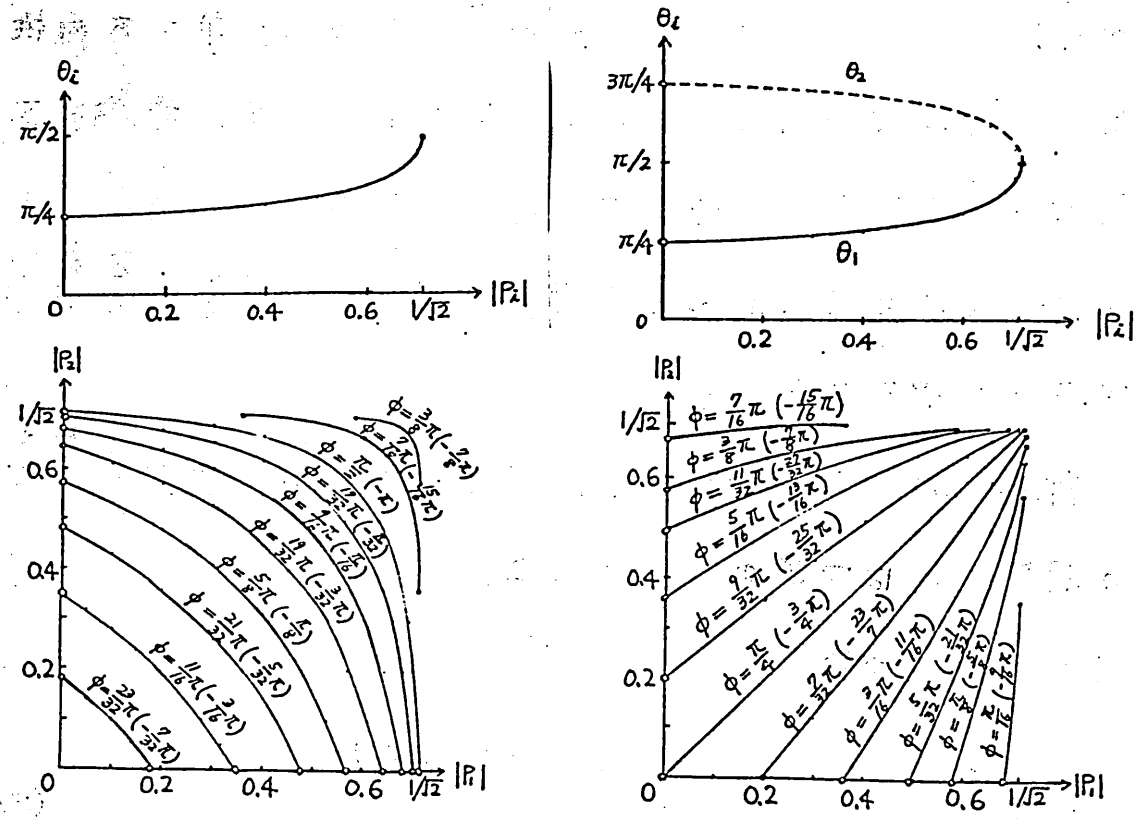


図9　位相補償形一方向性モード変換器の設計図表
(AL－B－GL)

(a) 図7 $A \to D$,　(b) 図7 $A \to C$

でかっこ内の値は $P_2<0$ の場合に対応する*。なおAP－B－GP接続の場合の設計公式は式(19), (22)で α, β の符号を反転した式になる。したがって設計図表も少し異なってくるが、省略する。以上で、非縮退系を用いると、すべてのA(L or P)－G(L or P)の組み合わせが基本系区間の挿入により一方向性モード変換器として動作することが分かった。なお、これらの設計公式の適用範囲は、やはり式(14)であたえられる。

つぎに3区間構成の一方向性モード変換器について考えてみよう。縮退系を用いた場合には、AL－GE($\gamma=\pi/2$)－AP, GL－GE($\gamma=\pi/2$)－GP (ただしL, P系の長さはすべて $\theta=\pi/4$)の組み合わせで構成される。ところが、非縮退系を用いるとこの場合も構成範囲は広くなり、一般のA(L or P)－GE($\gamma=\pi/2$)－A(L or P)およびG(L or P)－GE($\gamma=\pi/2$)－G(L or P)の組み合わせが可能になる。簡単のために両側のL, P摂動系が同種であるとした場合の設計公式を挙げておく。

---

* P_1, P_2 は定義より常に同符号である。

(異種の場合は省略する。)

a) 図7　A → D

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P^2}} \\ \phi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{|P|}{2P}\left(\dfrac{3}{2}\pi + \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1-3P^2}{1-P^2}\right) \\ \gamma = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{24}$$

b) 図7　B → C

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \pi - \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P^2}} \\ \phi = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{|P|}{2P}\left(\dfrac{3}{2}\pi - \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1-3P^2}{1-P^2}\right) \\ \gamma = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{25}$$

c) 図7　A → C　(B → D)

$$\begin{cases} \theta_1\,(\theta_2) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P^2}}\ ,\quad \theta_2\,(\theta_1) = \pi - \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-2P^2}} \\ \phi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{|P|}{2P}\pi \\ \gamma = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{26}$$

上式を設計図表の形にまとめて図10に挙げておく。この場合の補償法の難点は、両側のL, P振動系における縮退の度合をあらわすパラメータPがあたえられると、位相補償器であるGE区間のパラメータϕしたがってその

長さℓが決まってしまい、一方このGE区間のいま一つのパラメータγはπ/2とすでに決まっていることである。したがってこれら2つの条件を同時に満足させるには、両側のL, P系あるいは中央のGE系における振動の大きさを調節してやる必要がある。したがってこの補償法を実際に適用することは難しいと思われる*。

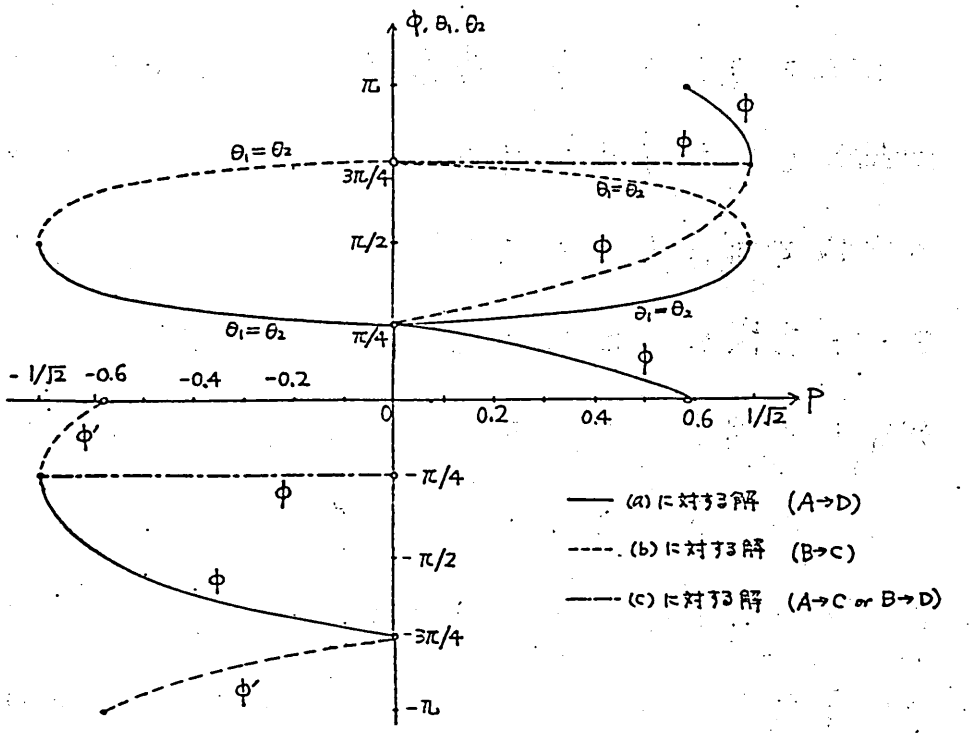


図10　GE系を挿入する一方向性モード変換器の設計図表
(AL(P)−GE−AL(P) or GL(P)−GE−GL(P))

---

*これは回路中に自由度が少ないことから生じた問題であるので基本系をもう一区間挿入してやれば解決されるはずである。

3.3 ジャイレータ

TE, TM両モードで動作するジャイレータは、縮退系を用いた場合相反および非相反モード変換器の2区間構成すなわち、AL－GL, AP－GP, AP－GL, AL－GP（ただし長さは全て$\theta = \pi/2$）の組み合わせで実現される。この種の素子の補償は条件式が多いので、これまでのように単に基本系あるいはGE系区間を中間に挿入しただけでは達成されない。そこで各要素を図2の構成で補償する方法を採用する。まず3・1であたえたモード変換器の位相補償において、両側の摂動系の長さが等しい場合（$\theta_1 = \theta_2$：図4 B→C', C→B'に対応）を考えてみよう。このとき3区間全体のモード伝達行列において、行列要素A, Dはともに0である。そこで残る行列要素B, Cについて調べてみると、この場合図11のような等価関係が成立していることが分かる。すなわち、図11の両系のモード伝達行列は非対角要素B, Cの符号が逆転していることを除けば完全に一致する。この関係は、AL, GL, AP, GPの4種のモード変換器に対

して同様に成立する。

結局、非縮退時における不完全TE、TMジャイレータは、各構成素子を等分割し、そこに基本系区間を挿入することにより補償される。そして補償後の各構成素子においては伝達行列の非対角要素の符号が縮退系の場合に対し反転しているが、2区間接続によりその符号反転は相殺され、全体としては縮退時の完全ジャイレータと全く同一の特性を持つことになる。もちろん、この場合の設計図表としては、図5(a)を用いることになる。

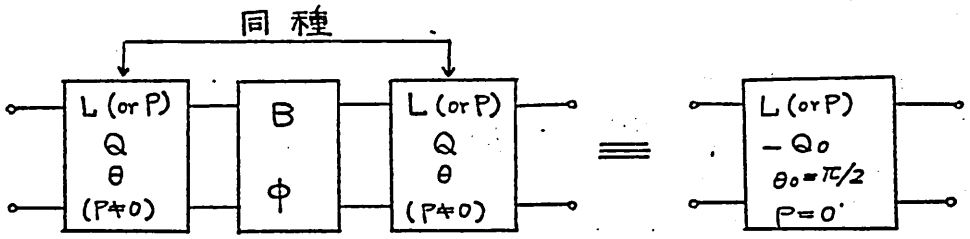


図11. モード変換器の等価関係
(θ, φ は、式(8)あるいは(9)であたえられる)
(Q_0 は縮退時のQ)

4. むすび

異方性媒質を利用した薄膜光学回路素子の位相補償について考察し、素子製作にあたっての大きな問題である

膜厚の作成条件がかなり緩和されることを示した。この方法を用いると、膜厚は一応縮退時の値に厳密に調整することは必要なく、一様性の問題にだけ注意すればよいことになる。なおこの補償法の適用範囲は、補償前のL,P摂動系のモード変換効率が 50 % 以上である場合に制限されるが、分割数を増して多段構成にすることにより、この制限は除かれる。ただし依然として、進行方向の長さは正確に指定値通りにつくらねばならないが、分布定数回路であるいじょうこの条件を取り除くことは無理であろう。

文　献

(1) 例えば P.K.Tien:"Light waves in thin films and integrated optics", Appl.Opt.,10,11,p.2395 (Nov.1971)

(2) S.Wang,J.D.Crow and M.Shah:"Studies of magnetooptic effects for thin film optical waveguide applications",IEEE Trans.,MAG-7,3,p.385 (Sept. 1971)

(3) 里村，松原，熊谷："異方性誘電体スラブにおける電磁波モードの解析" 信学マイクロ波研資 MW 72-35 (1972-06)

(4) P.K.Tien etal.:"Optical waveguides of single-crystal garnet films", Appl.Phys.Lett.,21,5,p.207 (1 Sept.1972)

(5) P.K.Tien etal.:"Switching and modulation of light in magnetic waveguides of garnet films",Appl.Phys.Lett.,21,8,p.394 (15 Oct.1972)

(6) 山本、牧本："異方性薄膜導波系の回路論的取り扱いとその応用" 信学マイクロ波研資 MW 72-103 (1972-11)

(7) 山本、小山田、牧本："異方性薄膜光導波系の固有モード解析とその応用" 信学論(c) 55-C，10，(昭47-10)

(8) 山本、長沢、牧本："薄膜光導波系モード変換器の位相補償" 電気関係学会関西支部連合大会．G10-46 (昭47-10)

輻射科学研究会資料

結合モード理論による斜交光波回パラメトリック結合の解析

井筒雅之　　末田　正

大阪大学　基礎工学部

昭和48年2月2日

結合モード理論による
斜交光波間パラメトリック結合の解析

井筒雅之　　末田　正
大阪大学　基礎工学部

まえがき

光変調器，非線形光学素子，超音波光偏向素子等光波回路系の様々な能動素子を解析・検討する有力な手段として，結合モード理論の利用がある．本文では，先に示した結合モード理論による光変調器，および，パラメトリック結合器の解析[1,2,3]を，斜交光波間のパラメトリック結合に拡張した結果を示す．また，これを用いて，近年広く注目を集めている光集積回路の能動素子，その内でも特に光波に斜交する超音波等によるブラッグ反射を利用したモード結合器の可能性を検討する．

誘電体平板導波系におけるこの種の素子について

は，これまでに，表面弾性波による導波光の回折の実験[4]が示されており，また，光波とコリニアーに進行する表面弾性波を用いたモード変換の実験[5]，最近には後者の解析[6]も示されている．

斜交モード間の結合モード方程式

この節では，媒質中を周波数 ω_1，伝搬定数 β_1 で伝搬する光波Ⅰと，同じく ω_2，β_2 の光波Ⅱとが媒質の微少な摂動（誘電率の微少変化，周波数 Ω，伝搬定数 K）により相互に結合する場合を考える．

誘電率（導磁率）の微少変化する媒質中における波動方程式は，電界 E に関して，

$$curl\ curl\ E + \varepsilon_0\mu_0\tilde{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\tilde{\varepsilon}E \qquad (1)$$

となる．$\tilde{\varepsilon}$，$\delta\tilde{\varepsilon}$ は比誘電率の無摂動および摂動分で，2階のテンソルで与えられる．式(1)を直交

座標系の行列表示に直せば次式が得られる.

$$\begin{bmatrix} k_{xx}^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, & k_{xy}^2-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, & k_{xz}^2-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} \\ k_{yx}^2-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}, & k_{yy}^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}, & k_{yz}^2-\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} \\ k_{zx}^2-\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}, & k_{zy}^2-\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}, & k_{zz}^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = -k_0^2 \tilde{\delta\varepsilon} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし

$$k_0^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad , \quad k_{ij}^2 = \varepsilon_{ij} k_0^2 \quad (i,j = x,y,z)$$

である. 式 (1) あるいは (2) において右辺の強制項を 0 とおいた斉次方程式は, 無損動の場合に媒質中を伝搬するモードを与える波動方程式である.

無損動の場合, 周波数 ω_i, 伝搬定数 β_i で伝搬する光波モードは, 次式で与えられるものとする.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A_i \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix} e^{j(\omega_i t - \vec{\beta}_i \cdot \vec{r})} + c.c. \quad (3)$$

$(i = 1, 2)$

ただし, A_i は振幅, F_{ij} $(j = x, y, z)$ は横方向

振幅分布，c.c. は複素共役を示し，また，

$$\vec{\beta_i}\cdot\vec{r} = \beta_{ix}x + \beta_{iy}y + \beta_{iz}z \qquad (4)$$

である．先に仮定した様に，式 (3) は式 (2) において右辺を 0 とおいた有次な波動方程式を満足するものとする．一方，誘電率の微少変化 $\widetilde{\delta\varepsilon}$ は，周波数 Ω，伝搬定数 $\vec{K}$ で伝搬し，

$$\widetilde{\delta\varepsilon} = \frac{1}{2} A_0 \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{xx} & \delta\varepsilon_{xy} & \delta\varepsilon_{xz} \\ \delta\varepsilon_{yx} & \delta\varepsilon_{yy} & \delta\varepsilon_{yz} \\ \delta\varepsilon_{zx} & \delta\varepsilon_{zy} & \delta\varepsilon_{zz} \end{bmatrix} e^{j(\Omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})} + c.c. \qquad (5)$$

ただし A_0 は振幅，また

$$\vec{K}\cdot\vec{r} = K_x x + K_y y + K_z z \qquad (6)$$

で与えられるものとする．

ここで，周波数 ω_1，伝搬定数 $\vec{\beta_1}$ の光波 I と同じく，ω_2，$\vec{\beta_2}$ の光波 II との結合を考える．ただし，

$$\omega_2 - \omega_1 = \Omega \qquad (7)$$

の関係が成り立つものとする．式(3)において振幅 A_i はzに関してゆるやかに変化すると仮定し，式(3)，および(4)を式(2)に代入すれば，ω_1，ω_2 に関して次の連立方程式が得られる．

$$2\frac{dA_1(z)}{dz}\begin{bmatrix} \partial/\partial z & 0 & -\frac{1}{2}\partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & -\frac{1}{2}\partial/\partial y \\ -\frac{1}{2}\partial/\partial x & -\frac{1}{2}\partial/\partial y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \\ \bar{F}_{1z} \end{bmatrix} e^{-j\vec{\beta}_1\vec{r}}$$

$$= \omega_1^2\varepsilon_0\mu_0 A_0^* \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{xx}^* & \delta\varepsilon_{xy}^* & \delta\varepsilon_{xz}^* \\ \delta\varepsilon_{yx}^* & \delta\varepsilon_{yy}^* & \delta\varepsilon_{yz}^* \\ \delta\varepsilon_{zx}^* & \delta\varepsilon_{zy}^* & \delta\varepsilon_{zz}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2y} \\ \bar{F}_{2z} \end{bmatrix} A_2(z) e^{-j(\vec{\beta}_2-\vec{K})\vec{r}} \qquad (8-a)$$

$$2\frac{dA_2(z)}{dz}\begin{bmatrix} \partial/\partial z & 0 & -\frac{1}{2}\partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & -\frac{1}{2}\partial/\partial y \\ -\frac{1}{2}\partial/\partial x & -\frac{1}{2}\partial/\partial y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2y} \\ \bar{F}_{2z} \end{bmatrix} e^{-j\vec{\beta}_2\vec{r}}$$

$$= \omega_2^2\varepsilon_0\mu_0 A_0 \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{xx} & \delta\varepsilon_{xy} & \delta\varepsilon_{xz} \\ \delta\varepsilon_{yx} & \delta\varepsilon_{yy} & \delta\varepsilon_{yz} \\ \delta\varepsilon_{zx} & \delta\varepsilon_{zy} & \delta\varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \\ \bar{F}_{1z} \end{bmatrix} A_1(z) e^{-j(\vec{\beta}_1+\vec{K})\vec{r}} \qquad (8-b)$$

式 (8-a), (8-b) にそれぞれ

$$[\bar{F}_{1x}^{*}\ \bar{F}_{1y}^{*}\ \bar{F}_{1z}^{*}]\,e^{j\vec{\beta}_1\vec{r}},\quad [\bar{F}_{2x}^{*}\ \bar{F}_{2y}^{*}\ \bar{F}_{2z}^{*}]\,e^{j\vec{\beta}_2\vec{r}}$$

を左から掛け，xy 面で積分すれば，式 (8-a), (8-b) は，

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = \omega_1^2\varepsilon_0\mu_0 A_0^{*} J_{12}^{*}/S_1 \cdot A_2(z)\,e^{-j\Delta\beta_z\cdot z} \qquad (9\text{-}a)$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = \omega_2^2\varepsilon_0\mu_0 A_0 J_{21}/S_2 \cdot A_1(z)\,e^{j\Delta\beta_z\cdot z} \qquad (9\text{-}b)$$

となる．ただし，

$$S_i = 2\iint_{-\infty}^{\infty} e^{j\vec{\beta}_i\vec{r}}\,|\,[\bar{F}_{ix}^{*}\ \bar{F}_{iy}^{*}\ \bar{F}_{iz}^{*}]$$

$$\times\begin{bmatrix} \partial/\partial z & 0 & -\frac{1}{2}\partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & -\frac{1}{2}\partial/\partial y \\ -\frac{1}{2}\partial/\partial x & -\frac{1}{2}\partial/\partial y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix}\,|\,e^{-j\vec{\beta}_i\vec{r}}\,dx\,dy \qquad (10)$$

$$(i = 1, 2)$$

$$J_{12} = \iint_{-\infty}^{\infty}\sum_{i,j}^{x,y,z}\varepsilon_{ij}F_{1i}F_{2j}^{*}\,e^{j(\Delta\beta_x x+\Delta\beta_y y)}\,dx\,dy \qquad (11\text{-}a)$$

$$J_{21} = \iint_{-\infty}^{\infty}\sum_{i,j}^{x,y,z}\varepsilon_{ji}F_{1i}F_{2j}^{*}\,e^{j(\Delta\beta_x x+\Delta\beta_y y)}\,dx\,dy \qquad (11\text{-}b)$$

$$(i, j = x, y, z)$$

$$\Delta\vec{\beta}\cdot\vec{r} = \Delta\beta_x x + \Delta\beta_y y + \Delta\beta_z z$$

$$= (\vec{\beta}_2 - \vec{\beta}_1 - \vec{K})\cdot\vec{r} \qquad (12)$$

である．式（9－a），（9－b）が斜交光波モード間の一般的な結合モード方程式である．

三層平板形誘電体導波系における結合

この節では，前節で導びいた一般的な斜交光波間の結合モード方程式を，三層平板形誘電体導波系における斜交光波モード間の結合に適用する．

誘電体導波系は，誘電率が y 方向に3層（$|y| < t/2$ で ε_1，$y > t/2$ で ε_2，$y < -t/2$ で ε_3）を成し，各領域で媒質は等方，また xy 面内では一様で変化がないものと仮定する．

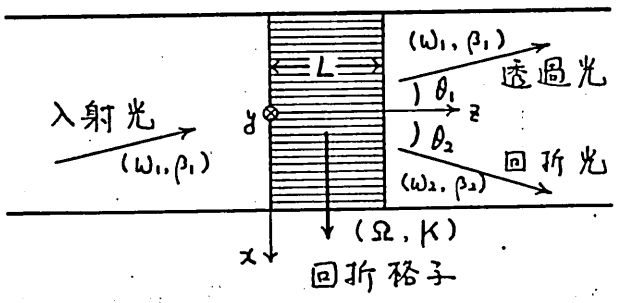


図1
誘電体導波系における光波モード結合

図1の様に，幅 L の回折格子（表面弾性波等による誘電率の微少変化）が x 方向に周波数 Ω，伝搬定数 K で進行している．この回折格子によって，周波数 ω_1，伝搬定数 β_1 で θ_1 方向に伝搬する光波モード I と，同じく ω_2，β_2，θ_2 で伝搬する光波モード II とが結合する場合を考える．

この様な誘電体導波系を伝搬する光波モードは，TE および TM モードの2種に分類することができる．各々に対して光波電界は次式で与えられる．

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2}A \begin{bmatrix} D_x \cos\theta \\ 0 \\ -D_x \sin\theta \end{bmatrix} e^{j(\omega t - \beta x \sin\theta - \beta z \cos\theta)} + c.c. & (\text{TE モード}) \\ \frac{1}{2}A \begin{bmatrix} D_z \sin\theta \\ D_y \\ D_z \cos\theta \end{bmatrix} e^{j(\omega t - \beta x \sin\theta - \beta z \cos\theta)} + c.c. & (\text{TM モード}) \end{cases} \tag{13}$$

ただし，D_x，D_y，D_z は $\theta = 0$ の場合の光波

電界の分布関数，β は伝搬定数である（付録参照）．

ここで

$$S_i = -j\omega_i \mu_0 \cos\theta_i \quad (i = 1, 2) \tag{14}$$

とおけば，$A_i A_i^* / 2$ が同波数 ω_i の光波モードの平均伝送電力の z 成分を示すことになる．

$$\begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \cos\theta \\ 0 \\ -D_x \sin\theta \end{bmatrix}_{(\text{TEモード})}, \quad \begin{bmatrix} D_z \sin\theta \\ D_y \\ D_z \cos\theta \end{bmatrix}_{(\text{TMモード})} \tag{15}$$

$$\vec{\beta_i} \cdot \vec{r} = \beta_{ix} \sin\theta_i + \beta_{iz} \cos\theta_i \quad (i = 1, 2) \tag{16}$$

とおいて式 (15) および (16) を式 (11) および (12) に代入し，また，$S\varepsilon_{ij}$ $(i, j = x, y, z)$ は $0 \le z \le L$ では x，y，z に無関係な定数，それ以外では 0 と仮定すれば，J_{12}，J_{21} すなわち結合係数を求めることができる．

式 (11) より，

$$J_{12} = \sum_{i,j} \delta\varepsilon_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} F_{1i} F_{2j}^{*} \, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Delta\beta_z x} \, dx \qquad (17-a)$$

$$J_{21} = \sum_{i,j} \delta\varepsilon_{ji} \int_{-\infty}^{\infty} F_{1i} F_{2j}^{*} \, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Delta\beta_z x} \, dx \qquad (17-b)$$

$$(i, j = x, y, z)$$

このとき，式(9)は式(14)を利用することにより，

$$\frac{dA_1(z)}{dz} = -j\omega_1 \varepsilon_0 A_0^{*} J_{12}^{*} A_2(z) e^{-j\Delta\beta_z z} \qquad (18-a)$$

$$\frac{dA_2(z)}{dz} = -j\omega_2 \varepsilon_0 A_0 J_{21} A_1(z) e^{j\Delta\beta_z z} \qquad (18-b)$$

となる．

TE モードには y 成分がない．それ故，入射，回折光のモードの組合わせによって，結合に関与する $\delta\hat{\varepsilon}$ の成分は

A. TE-TE結合　xx, xz, zx, zz 成分

B. TE-TM結合　yy 以外の成分

C. TM-TM結合　全成分

となる．特に θ が小さくモードの次数が一致している場合には，

A. xx 成分, B. xy, yx 成分, C. yy, zz 成分による結合が主となる.

実際にこのモード結合器を考える場合には, 上に述べた

(1) $\delta\varepsilon$ の成分, モードの組合わせ

の他に

(2) 位相整合条件(ブラッグの条件)

(3) 結合長(モードの組合わせによって100%エネルギー変換される距離が異なる事)

等を同時に考慮することが重要である.

また, 回折格子を作る方式としては

(a) 電気光学効果(外部電界), 磁気光学効果

(b) 超音波, 表面弾性波

(c) 導波系の周期構造

等の利用が考えられる.

具体例として, 10.6 μ 光モードの結合を考えるものとすると, 結合長 1 cm 以下で 100 %

変換となる為には，$\tilde{\delta\varepsilon} \simeq 2 \sim 5 \times 10^{-4}$（可視光では $\tilde{\delta\varepsilon} \propto 10^{-5}$）程度以上が必要である．この値は電気光学効果を利用する場合，実現できる限界に近い値であり，媒質として GaAs を考えれば結合長が 1cm では数 10% の変換が限度と思われる．また，導波系の周期構造（平板の厚みを周期的に変化させる事等）を用いる場合，特に低次モードではその導波系の厚み変化をかなり大きくしなければ，充分な等価誘電率変化を得ることはできない．
一方，10.6μ 光の場合では，回折格子の周期が，20～50μ で 2～5° の分離が可能と思われる．

むすび

本文では斜交光波間の結合モード方程式を示し，これに誘電体導波系モードを適用することによって斜交光波モード結合利用の可能性を簡単に検討した．ここに示した方程式は $\tilde{\delta\varepsilon}$ を具体的に与えること

たるもの，ポンプ光の充分強力な場合の非線形光結合器，電気光学（磁気光学）効果，超音波等による光スイッチ，偏向器，モードあるいは周波数成分分離等各種フィルター；等斜交モード間結合を含めて導波系におけるモード結合に広く適用できるものと思われる．

今後は，これらについてより詳しい解析を加えるとともに，実験を含めてさらに具体的詳細に実用の可能性を検討することが重要である．また，ここにふれた結合モード方程式の，多モード（多くの周波数成分）間の結合を考慮する必要のある光変調器への適用を試みることも興味深い．

謝辞　有益な御討論を頂だいた本学の山本錠彦助教授，並びにレーザ研究室の諸兄に感謝する

参考文献

(1) 井筒雅之，末田正“結合モード理論による光変

調器およびパラメトリック結合器の解析" 輸研資料 1972, 6月

(2) 井筒雅之, 末田正 "誘電体導波系における光変調" 電気関係学会関西支部連合大会. 1972, 10月

(3) 井筒雅之, 末田正 "誘電体導波系におけるブラッグ反射形フィルター" 電子通信学会全国大会 1973, 3月 (予定)

(4) L. Kuhn, M. L. Dakss, P. F. Heidrich and B. A. Scott, "Deflection of an optical guided wave by a surface acoustic wave", Appl. Phys. Letters, 17, 6, 265 (Sep. 1970)

(5) L. Kuhn, P. F. Heidrich and E. G. Lean, "Optical guided wave mode conversion by an acoustic surface wave", Appl. Phys. Letters, 19, 10, 428 (Nov. 1971)

(6) 大町賛即, 内田直也, 青藤昇一 "薄膜中での超音波光回折" 第33回応用物理学会学術講演会, 1972 9月

付録

誘電体導波系モード

誘電体導波系は，誘電率が y 方向に3層を成し

媒質 I： $|y| < t/2$ ，誘電率 ε_1

媒質 II： $y > t/2$ ，誘電率 ε_2

媒質 III： $y < -t/2$ ，誘電率 ε_3

各領域で媒質は等方，また xy 面内では一様で変化がないものとする．光波は周波数 ω で z 方向に伝搬定数 β で進行する．モードは TE（E_z 成分）および TM（E_y, E_z 成分）の2種に分類される．各電界成分の積方向分布関数は

$$D_z = \begin{cases} N\cos(\delta y - m\pi/2 + \varphi) & \text{in I} \\ N\cos(\delta t/2 - m\pi/2 + \varphi)\, e^{-\xi(y - t/2)} & \text{in II} \\ N\cos(\delta t/2 + m\pi/2 - \varphi)\, e^{\xi(y + t/2)} & \text{in III} \end{cases} \qquad (a\cdot 1)$$

$$D_y = \begin{cases} N\cos(\delta y - m\pi/2 + \varphi) & \text{in I} \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} N\cos(\delta t/2 - m\pi/2 + \varphi)\, e^{-\xi(y - t/2)} & \text{in II} \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} N\cos(\delta t/2 + m\pi/2 - \varphi)\, e^{\xi(y + t/2)} & \text{in III} \end{cases} \qquad (a\cdot 2)$$

$$D_2 = \begin{cases} j\frac{\beta}{\rho} N \sin(\gamma y - m\pi/2 + \varphi) & \text{in I} \\ j\frac{\beta}{\rho} N \sin(\gamma t/2 - m\pi/2 + \varphi)\, e^{-\xi(y-t/2)} & \text{in II} \\ -j\frac{\beta}{\rho} N \sin(\gamma t/2 + m\pi/2 - \varphi)\, e^{\zeta(y+t/2)} & \text{in III} \end{cases} \quad (a.3)$$

ただし，γ, ξ, ζ は媒質 I, II, III 中における横方向伝搬定数で

$$\beta^2 = k_1^2 - \gamma^2 = k_2^2 + \xi^2 = k_3^2 + \zeta^2 \quad (a.4)$$

$$k_i^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (a.5)$$

で与えられる．m はモード次数，φ は電界分布のずれを示す因子，また N は正規化定数で

$$N^2 = \eta / \left(\frac{p}{\xi} \frac{\gamma^2+\xi^2}{\gamma^2+p^2\xi^2} + \frac{q}{\zeta} \frac{\gamma^2+\zeta^2}{\gamma^2+q^2\zeta^2} + \tau \right) \quad (a.6)$$

$$p = \begin{cases} 1 & (\text{TE モード}) \\ \varepsilon_1/\varepsilon_2 & (\text{TM モード}) \end{cases}, \quad q = \begin{cases} 1 & (\text{TE モード}) \\ \varepsilon_1/\varepsilon_3 & (\text{TM モード}) \end{cases} \quad (a.7)$$

η は特性インピーダンスで TE では $\omega\mu_0/\beta$, TM では $\beta/\omega\varepsilon_0\varepsilon_1$ で与えられる．また，横方向伝搬定数には次の関係がある．

$$\gamma t - m\pi = \tan^{-1} p \frac{\sqrt{k_1^2 - k_2^2 - \gamma^2}}{\gamma} + \tan^{-1} q \frac{\sqrt{k_1^2 - k_3^2 - \gamma^2}}{\gamma} \quad (a.8)$$

モード同期時における
共振器内部高調波発生

花光 清　張 吉夫　松尾幸人

大阪大学 産業科学研究所

昭和48年 2月 2日

輻射科学研究会

モード同期時における共振器内部高調波発生

大阪大学産業科学研究所

花光　清　　張吉夫　　松尾幸人

§　はじめに

逓倍用の非線形光学結晶をレーザ共振器の内部におく、いわゆる共振器内部高調波発生（Intracavity SHG）は最近とくに興味をもたれている。これは、YAGレーザやガスレーザのように低利得のレーザでは、外部にとり出せる出力に比べて、共振器の内部にたくわえられるパワーがきわめて大きいことに着目して、逓倍出力の増大をはかろうとしたものである。

Intracavity SHGの研究は、連続[1]、Qスイッチ[2]、モード同期[3]の各動作についてなされてきているが、特にモード同期動作は、基本波を高ピークパワーをもつパルスにすることになり、更に変換効率の向上をはかることができる。また、幅の狭い逓倍光の用途も広い。

共振器内部におかれた非線形光学結晶は、レーザシステムにおいて非線形な損失源としてふるまうが、入射基本波がパルスになると、パルスの中心で最大の損失をうけることになり、基本波パルスのbroadeningが生じ

る。[4] また、2倍波への変換効率に著しい影響を与える、基本波と2倍波の間の屈折率整合が、短光パルスの逓倍の場合、結晶の屈折率の分散のためパルスのスペクトル全体に亘っては満足されなくなる。その結果、変換効率の低下や pulse broadening が生じる。

一方、幅の狭い、高ピークパワーの光パルスの発生が可能になってから、レーザのモード同期現象それ自体も見直されてきている。従来のモード結合という周波数軸上で取り扱いされなくなった固体レーザのモード同期(短光パルス発生)現象を、レーザ媒質中のパルスの伝播(くり返し)としてみることにより、レーザ媒質の非線形性を十分考慮した理論が確立されつつある。[5]

ここでは、モード同期現象の時間軸上での取り扱いを用い、上にのべた短光パルスの逓倍に付随する問題点を考慮しながら、モード同期時における共振器内部高調波発生現象の計算機シミュレーションを行ったので報告する。

§　共振器構成と基本式

図1に示すように、レーザ共振器は、リング状共振器とアイソレータから成る進行波形共振器とする。モード同期は、損失変調により行うと考える。レーザ光の進行路に沿ってz軸をとり、z=0の位置に損失

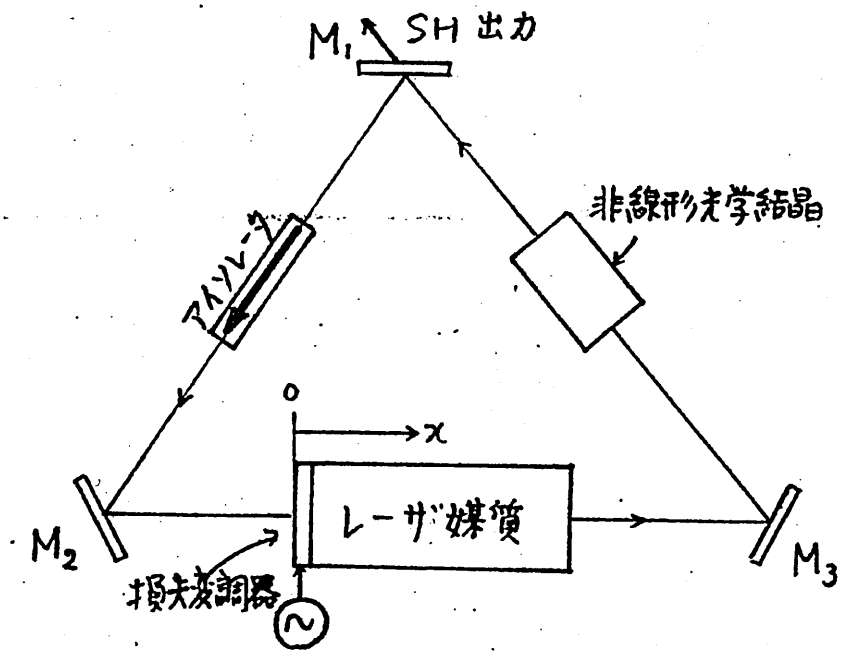


図1　Intracavity SHGの配置図

変調器（厚さは無限小と考える）が配置されており、レーザ媒質をその右側に、非線形光学結晶を $x=x_n$ の位置におく。共振器を構成している3枚の反射鏡のうち、反射鏡 M_1 は基本波において高反射で、2倍波においては完全透過とする。つまり2倍波のフィードバックはないものとする。[注1]

(注1)

Intracavity SHGのモード同期動作の実験はF-P共振器構成で Nd:YAG, Nd:$YAlO_3$ と $LiNbO_3$ や $Ba_2NaNb_5O_{15}$ と組みあわせて成されている。[3],[4],[5] そこでは逓倍用結晶を

同時に位相変調器として用いて、FMモード同期を行っている。一つの結晶で逓倍と位相変調を兼ねることは、挿入ロスの軽減やモードの複雑化を防ぐ意味から有利である。

---

a) レーザ媒質

以前に強制モード同期レーザの非線形なふるまいを解析する際に用いられた手法[7]をここでも適用する。定式化の詳細はその文献にゆずるとして、簡単に基本式を導くことにする。

レーザ媒質は2準位系で均一な拡がりをもつものとし単位体積当りの分極、反転分布を P_0, S_0 とすると光電界 E との間に次の媒質方程式が成りたつ。

$$\ddot{P}_0 + 2\gamma_\perp \dot{P}_0 + \omega_0^2 P_0 = -\frac{2}{3}\left(\frac{|M|^2}{\hbar}\right)\omega_0 E_0 S_0 \quad (1)$$

$$\dot{S}_0 = \gamma_\parallel (d_0 - S_0) + \left(\frac{2}{\hbar\omega_0}\right) P_0 \cdot E_0 \quad (2)$$

ここで ドットは時間微分を表わす。また、

$\gamma_\perp, \gamma_\parallel$ ： 分極、反転分布の緩和定数

M ： dipole matrix element

d_0 ： 光電界がなくポンピングのみがあり他と熱平衡状態にあるときの反転分布密度

ω_0 ： 遷移周波数

一方. 媒質中の光電界の伝播を記述する伝播方程式は. マックスウェルの方程式より. 次のように与えられる. (但し. 電界を直線偏波で平面波とし E. P をスカラーで表示した. 伝播方向を x とする)

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2}\ddot{E}_0 - \left(\frac{2\kappa}{c^2}\right)\dot{E}_0 = \mu \ddot{P}_0 \qquad (3)$$

ここで

μ : 媒質の透磁率

κ : 媒質の遷移以外の原因による損失

c : $= 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ で 媒質中の光速度

光電界を $+x$ に伝播する進行波とすると E, P, S の解を次のようにおくことができる.

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= \tilde{E}(x,t)\cos\left[\omega_0\left(\frac{x}{c}-t\right)\right] \\ P_0 &= \tilde{P}(x,t)\sin\left[\omega_0\left(\frac{x}{c}-t\right)\right] \\ S_0 &= \tilde{S}(x,t) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

但し. ここで かんたんのため 共振器モードの1つが遷移周波数 ω_0 に一致しているとして ω_0 での電界を仮定した。(4)を (1). (2). (3) に代入して. Slowly varying 近似を

適用すると $\tilde{E}, \tilde{P}, \tilde{S}$ について次式を得る.

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\tilde{P}} + \gamma_\perp \tilde{P} = (1/3)\left(\frac{|M|^2}{\hbar}\right)\tilde{E}\tilde{S} \\ &\dot{\tilde{S}} = \gamma_\parallel (d_0 - \tilde{S}) + \frac{1}{\hbar}\tilde{E}\tilde{P} \\ &c(\partial\tilde{E}/\partial x) + \dot{\tilde{E}} + \kappa\tilde{E} = (\omega_0/2\varepsilon)\tilde{P} \end{aligned}\right\} (5)$$

(5)において x, t に independent な解 即ち, cw 単一モード発振に相当する解 をもとめて次式を得る.

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{S}_{cw} = 6\varepsilon\hbar\gamma_\perp/\omega_0|M|^2 \\ &\tilde{E}_{cw} = \left[(\gamma_\parallel\hbar\omega_0/2\kappa\varepsilon)(d_0 - \tilde{S}_{cw})\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\tilde{P}_{cw} = (2\varepsilon\kappa/\omega_0)\tilde{E}_{cw} \end{aligned}\right\} (6)$$

各変数を それぞれの定常値で規格化する. 即ち

$$E = \tilde{E}/\tilde{E}_{cw}, \quad P = \tilde{P}/\tilde{P}_{cw}, \quad S = \tilde{S}/\tilde{S}_{cw}$$

とおくと (5) は 次のようになる.

$$\left.\begin{aligned} &\dot{P} + \gamma_\perp P = \gamma_\perp E S \\ &\dot{S} + \gamma_\parallel S = \gamma_\parallel(\lambda + 1 - \lambda E P) \\ &c\partial E/\partial x + \dot{E} + \kappa E = \kappa P \end{aligned}\right\} (7)$$

ここで λ は $\lambda = (d_0 - S_{cw})/S_{cw}$ で与えられポンピングパラメータである。更に x, t の代りに

$$z = (\gamma_\perp/c)x$$

$$\tau = \gamma_\perp(t - x/c)$$

を用いると (7) は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \dot{P} + P &= SE \\ \dot{S} + PS &= P(1+\lambda-\lambda EP) \\ \partial E/\partial z &= K(P-E) \end{aligned}\right\} (8)$$

(8) において $\Gamma = \gamma_\parallel/\gamma_\perp$, $K = \alpha/\gamma_\perp$ で与えられ. ドットは τ についての微分を表わす. (8) がレーザ媒質での基本式である。

b) 非線形結晶.

SHG の効率はたくさんの因子により決定されるが. 重要なものは. 入射基本波のパワー, 結晶の非線形定数 結晶長. 基本波ビームの focusing の程度 等である。 double refraction や beam divergence の効果を含めた optical SHG の研究は多くの人たちによって成されている[8]。詳細はそれらの文献にゆずるとして. ここでは

短光パルスを逓倍する際に問題となるパルスのスペクトル全体に亘る位相整合を考慮して、SHGの定式化を行う。

non-magnetic, non-dissipative な媒質中の電磁波の伝播は次式で与えられる。(9)

$$\mathrm{rot\,rot}\ \underline{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{D} = 0 \qquad (9)$$

ここで $\underline{E}$ は電界，$\underline{D}$ は電束密度で、2次の非線形感受率 $\hat{\chi}$（テンソル）をもつ媒質中では次のようになる

$$\underline{D} = \int_0^\infty \hat{\varepsilon}(t_1)\underline{E}(t-t_1)\,dt_1 + \underline{P}^{nl} \qquad (10)$$

(10)において $\hat{\varepsilon}$ は誘電率テンソルで右辺第一項は急速に変動する電磁波に対する媒質の一次の応答を表現したもので、ここでいわゆる周波数軸とでいう $\hat{\varepsilon}$（又は屈折率）の分散を考慮している。また第二項は

$$\underline{P}^{nl} = 2\varepsilon_0 \hat{\chi}_2 \underline{E}\cdot\underline{E} \qquad (11)$$

で与えられ媒質の2次の分極項を表わす。ここで $\hat{\chi}_2$ は 2nd order の非線形感受率テンソルで $\hat{\chi}_2$ の分散は考えていない。伝播方向 z 軸とし、直線偏向の平面波とすると (9) は次のようにスカラー表示ができる。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} D = 0 \qquad (12)$$

Eq. (12) の解を求めるために電界 E を次のように仮定する。

$$E(z,t) = A_1(\mu z, \mu t)\, e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + A_2(\mu z, \mu t)\, e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + c.c \qquad (13)$$

(13) において μ ($\ll 1$) は振幅 A_1, A_2 の変化の程度をあらわすパラメータ。 $\omega_2 = 2\omega_1$ は 2 倍波の角周波数である。 波数 k_1, k_2 は次式で与えられる。

$$k_1^2 = \left(\frac{\omega_1^2}{c^2}\right)\varepsilon(\omega_1), \quad k_2^2 = \left(\frac{\omega_2^2}{c^2}\right)\varepsilon(\omega_2) \qquad (14)$$

(10) の右辺第一項を求めるため 振幅 A_m ($m=1,2$) を次のように Taylor 展開する。

$$A_m(\mu z, \mu(t-t_1)) = A_m(\mu z, \mu t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-t_1)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(A_m(\mu z, \mu t)\right) \qquad (15)$$

(15) を (10) に代入して積分を評価する。結果は次式で与えられる。

$$ID = \sum_{m=1}^{2}\left[\left\{\varepsilon(\omega_m)A_m(\mu z, \mu t) + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \frac{\partial^n \varepsilon(\omega)}{\partial \omega}\bigg|_{\omega_m} \frac{\partial^n A_m}{\partial t^n}\right\} \times e^{i(\omega_m t - k_m z)}\right] + c.c + \mathbb{P}^{nl} \qquad (16)$$

ここで

$$\mathcal{E}(\omega_m) = \int_0^\infty \mathcal{E}(t_1)\, e^{-i\omega_m t_1}\, dt_1 \qquad (17)$$

(16)をスカラー表示した後(12)に代入する。このとき $\Delta\omega_m \ll \omega_m$ ($\Delta\omega_m$は波のスペクトル幅)と仮定し μ の一次の order の項のみを考慮する。ω_1, ω_2 の周波数成分についてわけてかくと次のように振幅に関する微分方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A_1(z,t) + \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial t} A_1(z,t) &= -i\beta_1 e^{i\Delta k z} A_2 \cdot A_1^* \\ \frac{\partial}{\partial z} A_2(z,t) + \frac{1}{u_2}\frac{\partial}{\partial z} A_2(z,t) &= -i\beta_2 e^{-i\Delta k z} A_1^2 \end{aligned}\right\} \quad (18$$

ここで

$$u_1 = \left\{ \frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega}\bigg|_{\omega_1} \right\}^{-1}, \quad u_2 = \left\{ \frac{\partial k(\omega)}{\partial \omega}\bigg|_{\omega_2} \right\}^{-1} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{2\omega_1^2}{k_1 c^2}\chi_2 \\ \beta_2 &= \frac{\omega_2^2}{k_2 c^2}\chi_2 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

で与えられ、また

$$\Delta k = 2k(\omega_1) - k(\omega_2) \qquad (21)$$

(18)～(21)が2次の非線形感受率をもつ媒質中の基本波と2倍波の相互作用を記述する方程式である。更に今後の計算の都合上次のように変数変換を行うと(18)は

$$\left.\begin{aligned} \tau &= t - z/u_1 \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} \partial/\partial z\, A_1(z,\tau) &= -i\beta_1 e^{i\Delta k z} A_2(z,\tau) A_1^*(z,\tau) \\ (\partial/\partial z + v\,\partial/\partial \tau) A_2(z,\tau) &= -i\beta_2 e^{-i\Delta k z} A_1^2(z,\tau) \end{aligned}\right\} (23)$$

ここで

$$v = u_2^{-1} - u_1^{-1} \qquad (24)$$

更に後での計算で用いた条件 即ち $\Delta k = 0$ の完全位相整合条件が満足されているときには(23)は次のように実振幅の微分方程式で表わされかんたんになる。

$$\left.\begin{aligned} \partial/\partial z\, \bar{E}_1(z,\tau) &= -\beta_0 \bar{E}_1(z,\tau)\bar{E}_2(z,\tau) \\ (\partial/\partial z + v\,\partial/\partial \tau)\bar{E}_2(z,\tau) &= \beta_0 \bar{E}_1^2(z,\tau) \end{aligned}\right\} (25)$$

ここで $\bar{E}_1(z,\tau)$, $\bar{E}_2(z,\tau)$ は Fundamental wave A_1, Second harmonic wave A_2 の実振幅であり、β_0 は

(20)より $\beta_0=\beta_1=\beta_2$ で与えられる。更にレーザ媒質での場合と同様に、数値計算上、$\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ を無名数とするため、(6)の $\tilde{E}_{cw}$ で規格化して

$$\left.\begin{aligned}\partial/\partial z\, E_1(z,\tau) &= -\beta E_1(z,\tau)E_2(z,\tau)\\ (\partial/\partial z+i\partial/\partial\tau)E_2(z,\tau) &= \beta E_1^2(z,\tau)\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

を得る。ここで

$$E_1=\bar{E}_1/E_{cw},\quad E_2=\bar{E}_2/E_{cw},\quad \beta=\beta_0 E_{cw} \quad (27)$$

(26), (27)が今後、非線形光学結晶中のパルスのSHGを記述する基本式である。

(c) 損失変調器

図1において $x=0$ に配置された損失変調器の効果は、(8)の微分方程式をとく際の境界条件の変調として表わされ、次のような境界透過係数を考えることができる。

$$M(\tau)=1-\alpha(1+\cos\Omega_m\tau) \quad (28)$$

ここで α は変調の深さを表わし、Ω_m は規格化された変調周波数で、モード間隔にtuningされているとして $\Omega_m=2\pi/L_0$ (L_0 はキャビティ長)で表わされる。

(28)より光電界の境界条件は次のようになる。

$$E^{(i)}_{(1)}(0,\tau) = M(\tau)\cdot E^{(i-1)}_{(1-1)}(L_0,\tau) \qquad (29)$$

ここで i は field のキャビティ周回数をあらわす。

§ 共振器内部高調波発生のモード同期の数値解

前節で導いた基本式 (8),(26) と境界条件(29)をもとに共振器内をレーザ光が周回するごとに逐次積分して数値解を求めた。

(8)式は階差方程式になおし、数値積分には predictor-corrector 法を用いた。[7]

一方(26)式は差分方程式になおすとき、z-τ 平面を間隔 Δz, $\Delta\tau$ の格子にわけ、格子点 (m, n) での各々の微係数を求めるのに格子点 (m, n) で Taylor 展開して近似式を求めた。stable な解を得るため $\Delta\tau = v\Delta z$ にえらび[5]、打ち切り誤差を $(\Delta\tau)^2$ のオーダ以下になるようにした。

計算の順序は、系が SHG のない定常状態、即ち境界条件として

$$E_1(0,\tau) = 1, \quad E_2(0,\tau) = 0 \quad (0 \leqq z \leqq L_0)$$

初期条件として

$E_1(z,0)=1$, $P(z,0)=1$ $S(z,0)=1$ $(0 \leqq z \leqq L)$

$E_1(z,0)=1$, $P(z,0)=0$ $S(z,0)=0$ $(L \leqq z \leqq L_0)$

$E_2(z,0)=0$ $(0 \leqq z \leqq L_0)$

ここで L_0：共振器長 L：媒質長

にあったとき，$t=0$ で 2倍波への変換をスタートする。（温度や角度の調節によって）cw SHG の定常状態に達した後，変調を開始して，モードロックパルスの形成を追跡し定常状態に達するまで周回させた。なお非線形結晶での計算の際の境界条件は，

$$E_1(x_n,t)=E_1(L_0,t)$$

$$E_2(x_n,t)=0$$

（非線形結晶は $x=x_n \sim x=x_n+L_N$ に配置されている）で与えられる。

計算に用いたパラメータは以下の通りである。

$\Gamma=0.01$； $K=0.1$， $\lambda=4$， $\alpha=0.1$

$L_0=40$， $L=5$，

$$v=\frac{0.436}{c}\ ^{(*)},\quad L_N=4\cdot\left(\frac{L_0}{200cm}\right)^{(**)}$$

注 (*) $LiNbO_3$ の屈折率のデータ[10]より

(**) 例えば $L_{00}=100\,cm$ とすると $L_N=4.6\,cm$

§ 共振器内部高調波発生のモード同期動作

(27)で与えられる β (ここでは変換係数と呼ぶことにする)を変化させていったとき β の値において得られる定常パルスを求めた。
図2は種々の β の値において得られた基本波パルスの波形を示したものである。β の増大とともにパルスのピーク値の低下とパルスの broadening が生じていることがわかる。
この broadening は、SHG により導入される損失によるものである。SH への変換は基本波にとっては、非線形損失となり、それは、基本波のパワーと β の2乗に比例する。従ってパルスのピークで最大の損失をうけ、その結果パルスの

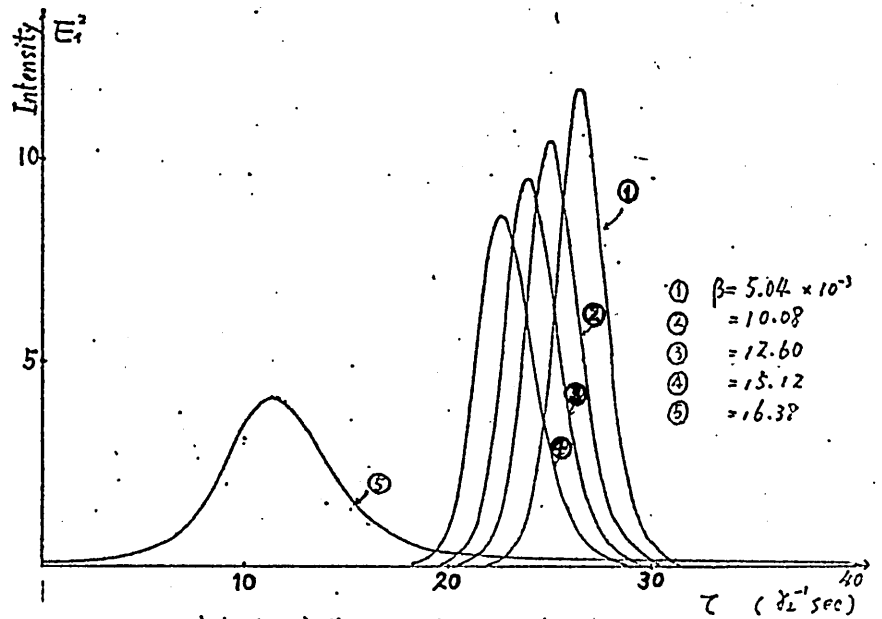


図2　基本波の定常モード同期パルス波形

ピーク値を低下させ、broadeningが生じる。[11]

図3の実線はあるβの値に対してcw SHG状態からスタートして、定常モード同期状態に達したときの基本波のパルスのピーク値をプロットしたものである。図3において(a)に示されるβの値以上では定常パルスは急にbroadになりピーク値が低下する。(図2において④と⑤のパルス波形がその様子を示す)。図3は変換係数βにおいて基本波パルスのピーク値をプロットしたものである。実線はcwSHGから出発して得られるパルスのピーク値を示す。図中の

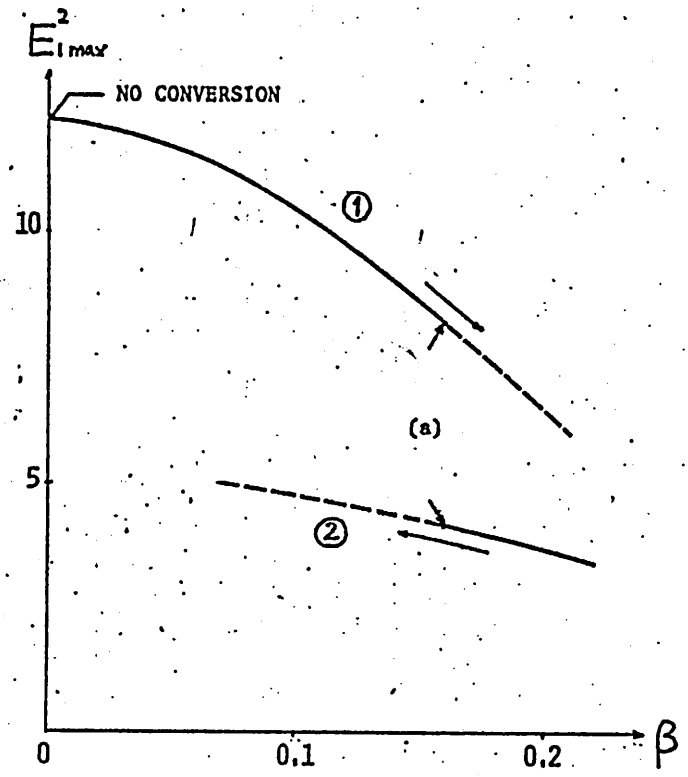


図3

(a)は図2の説明でのべたピーク値の急な低下点である。

一方、破線で示すのは、あるβの値で定常パルス状態に達した後、βの値を少し変化させて得られるピーク値である。(矢印はβの変化の方向を示す) βをわずかずつ連続的に変化させると、ピーク値は連続的に低下してゆく。このようにあるβの値に対して、初期状態により異る定常解が存在する[12]。この2重解は、レーザ媒質非線形結晶のもつ非線形性から生じるものと考えられる。文献(7)における強制モード同期の計算では、ここで用いたパラメータでは、初期状態のいかんにかかわらず唯一つの定常解が得られていることから、この2重解は非線形損失源を含むモード同期現象として興味深いものである。

パルスが共振器内をくり返し伝播する際、外部への結合(出力)や端面での反射等のlinearな損失以外に、損失変調によるpower independentな(時間の関数ではあるが)損失と、SHGによるpower dependentな損失をこうむる。損失変調による損失はパルス幅が広いほど、また逆にSHGのためうける損失は、パルス幅が狭くピーク値が大きくなるほど大きくなる。

βの値が大きくなり、cw状態からパルスが形成されていく過程で、この損失関係が定常解を決めることになると想像される。一方定常状態に達した後、βを

わずかに変化させたときには別の解に移ることなく連続的に変化するのである。

図4は上記2種類の初期状態から出発したときの周回数に対して、基本波のピーク値をプロットしたものである。CW状態から出発したときは約400回の周回で定常状態に達する。定常パルス状態からβをわずかに変化させた場合には数10周回でほとんど定常値に達する。図5にそのとき得られた基本波の定常パルス波形を示す。

図6は変換係数βに対して、2倍波パルスのピーク値を示したものである。図中の①、②はそれぞれ図3で示した2種類の安定な基本波パルスにより生じる2倍波パルスのピークパワーに相当している。

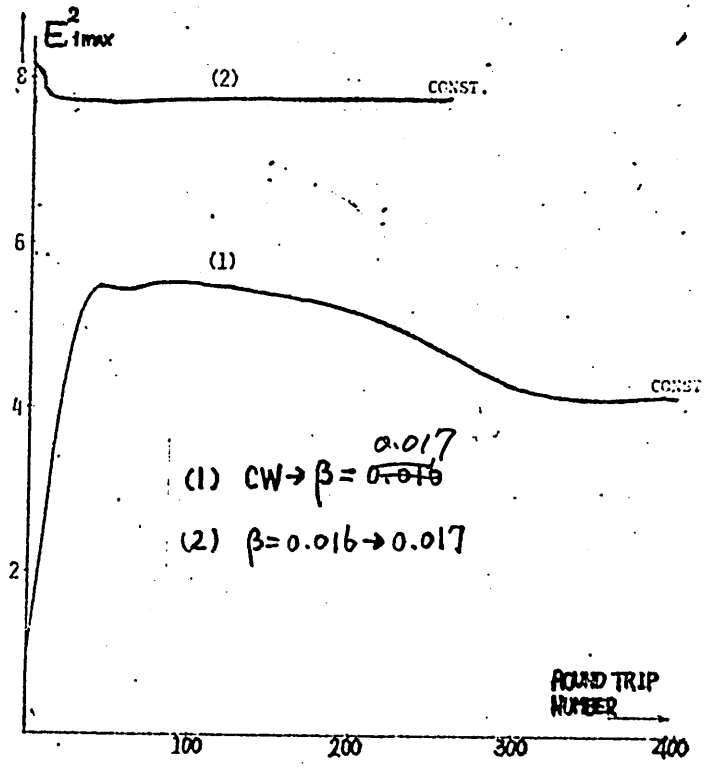


図4

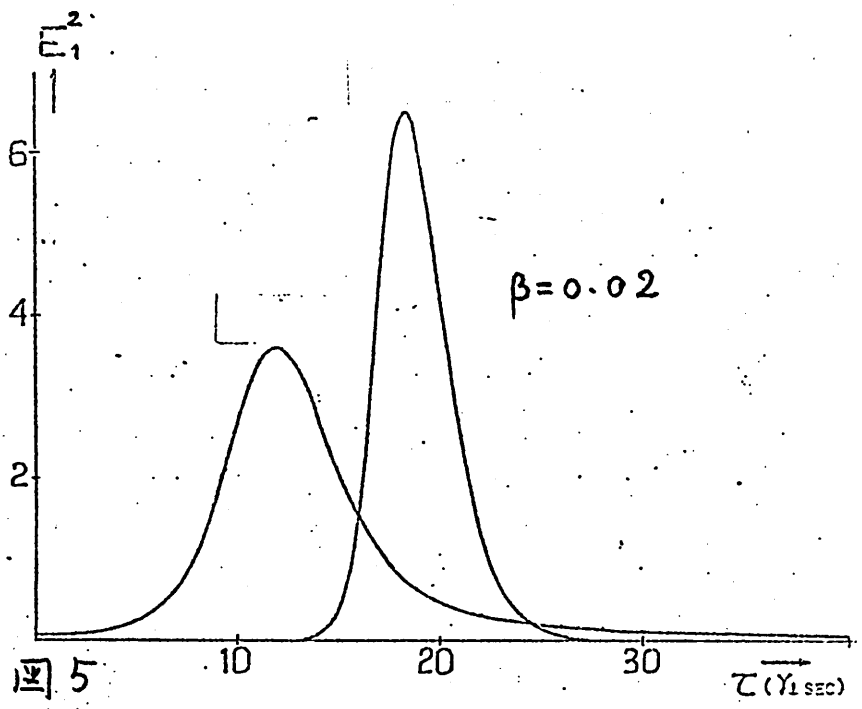

E_1^2
6
4
2
β=0.02
10
20
30
τ (γ₁ sec)

図 5

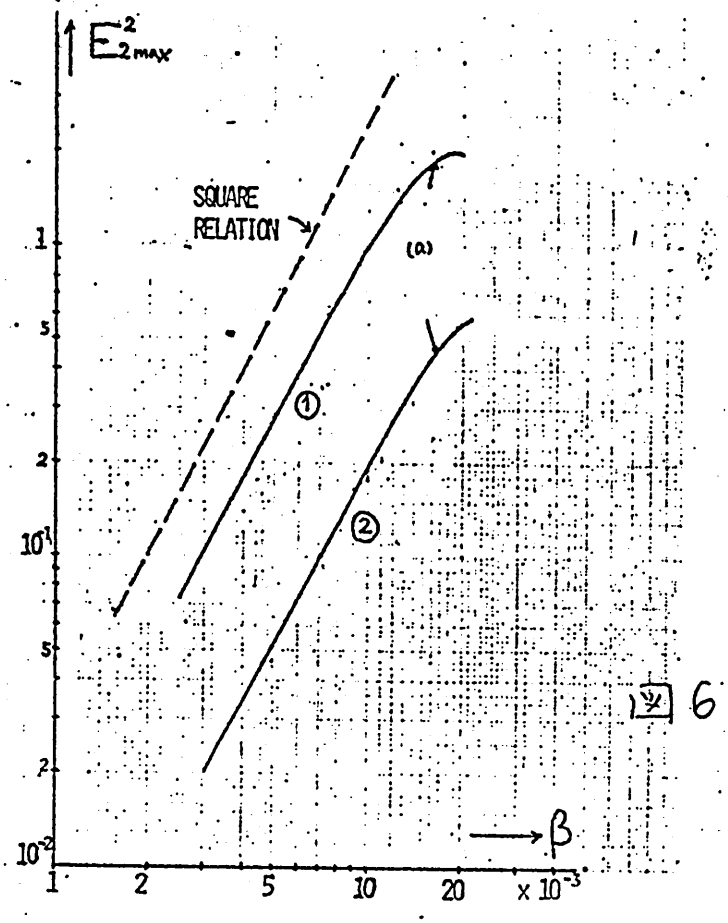

E_{2max}^2
SQUARE RELATION
(a)
①
②
1
5
2
10^{-1}
5
2
10^{-2}
1
2
5
10
20
x 10^{-3}
β

図 6

発生する2倍波パワーは，結晶の定数を一定とすると，入射基本波パワーの2乗に比例するが，図3に示すように，βの増加が基本波パルスのピーク値の低下をもたらし，2乗関係からのずれを示す。さらにβを増加してゆくと，①では遂に2倍波出のピーク値が減少する。(図中の破線はβに対するE_{2max}^2の2乗関係を示したものである。また(a)は図3と同様ジャンプ点に相当する) 従って高ピークパワーの2倍波を得ためには①の定常解を得るように最適なβで動作させる必要がある。

§ あとがき

これまで モード同期時における発振器内部高調波発生現象を時間軸上で取り扱ってきた。既報の実験[3],[4],[6]で強調している高効率SHGという点から問題となる最適変換係数，変換効率については今後に残された問題である。

ここでは発振器内部高調波発生のモード同期を，発振器内にnonlinearな(power dependentな)loss係数をもつ損失源を含む場合のモード同期現象としてみることにより定常モード同期状態に2重解が存在することを示した。

内部SHGの問題をレーザ媒質のもつ利得とnonlinearな損失を含む損失関係から取り扱った従来の方法[13]では扱えないモード同期時のSHGに対して有効な取扱

いであると考える。実験との具体的な対応も今後の課題である。

参考文献

(1) R.G. Smith, K. Nassau and M.F. Galvin
Appl. Phys. Lett I, 10, P256

(2) R.B. Chesler M.A. Karr and J.E. Geusic
Proc. IEEE 58, 12 p1899

(3) T.R. Gurski
Appl. Phys. Lett 15, 1, P5

(4) C.B. Hitz and L.M. Osterink
Appl. Phys. Lett 18, 9, P378

(5) H. Risken and K. Nummedal
J. Appl. Phys. 39, 10, P4662

(6) R.R. Rice and G.H. Burkhart
Appl. Phys. Lett 19, 7. P225

(7) 張、松尾
量エレ研演 QE74-57

(8) 例えば G.D. Boyd and D.A. Kleinman
J. Appl. Phys. 39, 8, P3597

(9) S.A. Akhmanov, A.P. Sukhorukov and A.S. Chirkin Soviet Phys. JETP 28, 4, P748

(10) G. D. Boyd, R. C. Miller etal
Appl. Phys. Lett. 5, 11, p235
(11) 花之. 張. 松尾
S.47 電気関係 関西支部連大 G270
(12) 花之 張 松尾
S.48. 春季応物関係連合講演会（発表予定）
(13) R. G. Smith
IEEE J. Quan. Elec. QE-6. 4. p215

輻射科学研究会資料

回転運動を行なう媒質中における電磁界方程式について

塩沢俊之
（大阪大学・工学部）

1973年2月2日

1．まえがき

運動媒質の電磁界理論の基礎は，特殊相対性理論を用いて，１９０８年，Minkowski によって確立された。[1] Minkowski の理論[2]については，この理論が発表されて以来最近に至るまで種々の議論がなされてきたが，現在では，この理論は，数々の批判にも耐え，巨視的電磁界理論の基礎を与えるものと考えられている。[3] しかしながら，Minkowski の理論は，慣性系における電磁現象のみしか取り扱えない，すなわち，媒質および観測者がともに慣性系に静止している場合にしか適用できないという点でまだ不完全なものである．最近，Minkowski の理論を媒質および観測者が加速度運動（たとえば回転運動など）を行なう場合に拡張する試みが，Heer[4], Yildiz および Tang[5], Anderson および Ryon[6], ならびに Mo[7] 等によってなされた．これらの報告では，一般相対性理論における数学的方法，すなわち４次元 Riemann 空間におけるテンソル解析[2],[8],[9] を用いて，慣性系における電磁界方程式から加速系における電磁界方程式が求められている．このように，加速系における物理現象を記述するには，テンソル解析が有効な数学的手段として広く用いられているが，加速系における電磁界方程式は，慣性系における電磁界方程式，すなわち Maxwell-Minkowski の方程式を求める場合[10] と同様に，テンソル解析を用いることなく，通常の三次元的な方法によっても求めることができる．本稿では，代表的な加速度運動であり，かつ応用上も重要な回転運動を取り上げ，媒質あるいは観測者が回転運動を行なう場合の電磁界方程式について，三次元的な方法を用いて詳しく検討する．

以下では二つの異なった観点（現象論的および電子論的観点と呼ぶことにする）から考察を行なう．ここで，現象論的観点というのは，媒質の電磁気的効果を，媒質の内部構造には立ち入ることなく，あらかじめ与えられた三つのパラメータ，すなわち誘電率 ε，透磁率 μ，および導電率 σ によって記

述するという立場である．上にあげた文献(4)～(7)では，すべて，このような意味において現象論的な立場に立っている．一方，電子論的観点[11]というのは，媒質は負の電荷をもった電子と正の電荷をもった原子核の集合体であるとみなし，これら正負の電荷の集合体と電磁界との相互作用を考えることによって媒質の電磁気的効果を記述するものである．一般に，媒質が加速度運動を行なう場合には，加速度によって媒質の巨視的性質が変化するものと考えられるが，このような加速度の効果を考慮に入れるためには電子論的な取り扱いが必要であり，加速度による媒質の巨視的性質の変化が無視できるときに限って現象論的な取り扱いが可能となる．以下では，まず，誘電率ε，透磁率μおよび導電率σの媒質が慣性系に対して任意の加速度運動を行なうものとし，この媒質を慣性系および回転系から観測する場合の電磁界方程式について，現象論的な立場から考察する．つぎに，回転運動を行なう媒質中における電磁界方程式について，電子論の立場から考察を行ない，回転運動にともなう慣性力，すなわち遠心力およびCoriolisの力が媒質の電磁気的性質に与える影響について検討する．

2．現象論的考察

2．1　慣性系における電磁界方程式[12]

いま，一つの慣性系Iを設定し，Iに対して，誘電率ε，透磁率μ，および導電率σの均質，等方の媒質が，空間的および時間的に不均一な速度$\mathbf{V}_m(x,y,z,t)$で加速度運動を行なっているものとする．ただし，加速度が小さく，したがって，加速度による媒質の巨視的性質の変化が無視できる，すなわち，ε，μおよびσの値が加速度に関係なく一定であると仮定する．このとき，I系における電磁界方程式は，つぎのようにして求められる．す

なわち，いま，ある時刻における媒質の任意の一点の速度$\mathbf{V}_m$でI系に対して一様に運動している慣性系L（これを局所慣性系と呼ぶ）を導入すると，媒質のその点はその時刻において瞬間的にL系に静止していることになる．したがって，L系では，その点において，Maxwell の方程式および静止媒質に対する構成関係式

$$\mathbf{B}_L=\mu\mathbf{H}_L,\ \mathbf{D}_L=\varepsilon\mathbf{E}_L,\ \mathbf{J}_L=\sigma\mathbf{E}_L \tag{1}$$

が成立する．I系およびL系はともに慣性系であるから，I系における電磁界方程式は，L系における方程式にLorentz 変換を適用することによって求めることができる．以上のようにして，各時刻において運動媒質の各点に局所慣性系を導入し，この局所慣性系と慣性系Iとの間に次々にLorentz 変換を適用することにより，加速度運動を行なう媒質の各点および各時刻における電磁界方程式が得られる．

このようにして得られたI系における電磁界基本方程式は次式で与えられる．

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J},\quad \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho. \tag{2}$$

また，構成関係式は，つぎのようになる．

$$\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{E}=\mu\left(\mathbf{H}-\mathbf{V}_m\times\mathbf{D}\right)$$

$$\mathbf{D}+\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{H}=\varepsilon\left(\mathbf{E}+\mathbf{V}_m\times\mathbf{B}\right)$$

$$\mathbf{J}-\rho\mathbf{V}_m=\gamma\sigma\left[\mathbf{E}+\mathbf{V}_m\times\mathbf{B}-\frac{\mathbf{V}_m}{c}\left(\frac{\mathbf{V}_m}{c}\cdot\mathbf{E}\right)\right] \tag{3}$$

ただし，

$$\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}\ ,\quad \beta=V_m/c \tag{4}$$

であり，cは真空中の光速度を表わす．

特に，媒質が角速度$\boldsymbol{\Omega}_m$で回転運動を行なう場合には，式(3)における$\mathbf{V}_m$として

$$\mathbf{V}_m=\boldsymbol{\Omega}_m\times\mathbf{R} \tag{5}$$

を用いればよいことがわかる．ただし，$\mathbf{R}$は位置ベクトルを表わす．式(3)からわかるように，加速度による媒質の巨視的性質の変化が無視できるときには，加速度運動を行なう媒質に対しても，Minkowski の理論をそのまま適用することができる．

2．2　回転系における電磁界方程式

つぎに，慣性系Iに対して一定の角速度$\boldsymbol{\Omega}_c$で回転している座標系Kを考え，一般相対性原理[8]および回転系への座標変換を用いて，I系における電磁界方程式(2)および(3)から回転系Kにおける電磁界方程式を求める．ただし，ここでは，テンソル解析は用いず，通常の三次元的な方法によって考察を行なう．さて，慣性系Iから回転系Kへの座標変換は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
x&=x'\cos\Omega_c t'+y'\sin\Omega_c t'\\
y&=-x'\sin\Omega_c t'+y'\cos\Omega_c t'\\
z&=z'\\
t&=t'
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，(x', y', z', t')および(x, y, z, t)は，それぞれ，慣性系および回転系における時空座標を表わす．また，Ω_cはz方向を向くものと仮定している．式(6)で与えられる変換は，Galilei 変換と同様に，絶対時間$t = t'$が保持されているところから，Galilei 型の回転と呼ばれる．文献(4)〜(7)では，すべて，このGalilei 型の回転に対する変換式が用いられている．また，式(6)の変換式は，$\Omega_c x/c$ および$\Omega_c y/c$ の一次のオーダに関する限り，物理的に妥当であることが実験的に確かめられている．[13] したがって，以下で得られる結果が物理的に意味をもつのは，$\Omega_c x/c$ および$\Omega_c y/c$ の一次のオーダまでであると考えられる．

さて，一般相対性原理によると，すべての自然法則は，慣性系のみならず，あらゆる座標系において同じ形になることが要求される．すなわち，すべての自然法則は，Lorentz 変換のみならず，任意の座標変換に対して共変的でなければならない．したがって，この原理に従うと，回転系Kにおいても，慣性系Iで成立するMaxwell の方程式(2)と同じ形の法則が成り立つ．すなわち，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{7}$$

式(7)は，このままでは不定形であり，構成関係式が与えられてはじめて完全な電磁界方程式となる．そこで，I系における構成関係式(5)からK系における構成関係式を得るために，これらの座標系における電磁界ベクトル，電荷密度および電流密度に対する変換法則を求めよう．以下では，議論を明確にするために，I系における物理量にはプライムを付けてK系における量と区別する．したがって，I系における電磁界方程式としては，式(2)および(3)に

おいて物理量および微分演算子にプライムを付けたものを用いる．

まず，式(6)の変換によって空間微分および時間微分の演算子がどのように変換されるかを調べる．式(6)から容易にわかるように，ベクトル演算子∇は変換(6)のもとに不変である．すなわち，

$$\nabla' = \nabla \tag{8}$$

したがって，I系における任意のベクトル関数を$\mathbf{F}'$とすると，次式が成り立つ．

$$\nabla' \times \mathbf{F}' = \nabla \times \mathbf{F}'$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{F}' = \nabla \cdot \mathbf{F}' \tag{9}$$

つぎに，時間微分の演算子の変換について考える．式(6)からわかるように，I系およびK系における$\mathbf{F}'$の時間に関する全微分の間にはつぎの関係が成立する．

$$\frac{d\mathbf{F}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{F}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{F}' \tag{10}$$

一方，慣性系Iに対して速度$\mathbf{V}_m$で運動する点に関しては，式(10)の両辺の時間に関する全微分は，つぎのように，偏微分によって表わすことができる．

$$\frac{d\mathbf{F}'}{dt'} = \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial t'} + (\mathbf{V}_m \cdot \nabla')\mathbf{F}'$$

$$\frac{d\mathbf{F}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial t} + [(\mathbf{V}_m - \mathbf{V}_c) \cdot \nabla]\mathbf{F}' \tag{11}$$

ただし，

$$\mathbf{V}_c = \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{R}' \tag{12}$$

$\mathbf{R}$および$\mathbf{R}'$は，それぞれ，K系およびI系における位置ベクトルを表わす，式(10),(11)および(8)から，I系およびK系における時間に関する偏微分の演算の間にはつぎの関係が成り立つことがわかる．

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial t'} = \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial t} - (\mathbf{V}_c \cdot \nabla)\mathbf{F}' + \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{F}' \tag{13}$$

式(9)および(13)の関係を用いて，I系における電磁界基本方程式を書き直すと，つぎのようになる．

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} + (\mathbf{V}_c \cdot \nabla)\mathbf{B}' - \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{B}' \\
&\nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \\
&\nabla \times \mathbf{H}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} - (\mathbf{V}_c \cdot \nabla)\mathbf{D}' + \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{D}' + \mathbf{J}' \\
&\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho'
\end{aligned} \tag{14}$$

式(14)を若干変形すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\nabla \times (\mathbf{E}' + \mathbf{V}_c \times \mathbf{B}') = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \\
&\nabla \times (\mathbf{H}' - \mathbf{V}_c \times \mathbf{D}') = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \mathbf{J}' - \rho' \mathbf{V}_c \\
&\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho'
\end{aligned} \tag{15}$$

式（15）が式(7)に一致すべきことから，電磁界ベクトル，電荷密度および電流密度に対する変換法則として次式が得られる．

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}'+\mathbf{V}_c\times\mathbf{B}'\ ,\ \mathbf{B}=\mathbf{B}'$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}'-\mathbf{V}_c\times\mathbf{D}'\ ,\ \mathbf{D}=\mathbf{D}'$$

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}'-\rho'\mathbf{V}_c\ \ ,\ \rho=\rho' \qquad (16)$$

式（16）は，テンソル解析から得られる結果に一致することがわかる．[12]

K系における構成関係式は，式(3)にプライムを付けた式と式（16）とから得られ，次式で与えられる．

$$\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times(\mathbf{E}-\mathbf{V}_c\times\mathbf{B})$$

$$=\mu\left[\mathbf{H}-(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{D}\right]$$

$$\mathbf{D}+\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times(\mathbf{H}+\mathbf{V}_c\times\mathbf{D})$$

$$=\varepsilon\left[\mathbf{E}+(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{B}\right]$$

$$\mathbf{J}-\rho(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)$$

$$=\gamma\sigma\left[\mathbf{E}+(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{B}\right]$$

$$-\gamma\sigma\frac{\mathbf{V}_m}{c}\left(\frac{\mathbf{V}_m}{c}\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{V}_c\times\mathbf{B})\right) \qquad (17)$$

$V_m/c\ll1$ および $V_c/c\ll1$ とすると，式（17）はつぎのようになる．

$$\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{E}=\mu\left[\mathbf{H}-(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{D}\right]$$

$$\mathbf{D}+\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{H}=\varepsilon\left[\mathbf{E}+(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{B}\right]$$

$$\mathbf{J}-\rho(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)=\sigma\left[\mathbf{E}+(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{B}\right] \qquad (18)$$

いままでは，慣性系Iから回転系Kへの変換を考えたが，つぎに，媒質が瞬間的に静止している局所慣性系Lから回転系Kへの変換を考える．そのために，まずI系からL系への変換を考えると，I系およびL系はともに慣性系であるから，これらの系はLorentz 変換によって結ばれている．したがって，$V_m/c\ll 1$ とすると，I系からL系への電磁界ベクトル，電荷密度および電流密度の変換式は次式で与えられる．(2)

$$\mathbf{E}_L=\mathbf{E}'+\mathbf{V}_m\times\mathbf{B}'$$

$$\mathbf{B}_L=\mathbf{B}'-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{E}'$$

$$\mathbf{D}_L=\mathbf{D}'+\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{H}'$$

$$\mathbf{H}_L=\mathbf{H}'-\mathbf{V}_m\times\mathbf{D}'$$

$$\mathbf{J}_L=\mathbf{J}'-\rho'\mathbf{V}$$

$$\rho_L=\rho'-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\cdot\mathbf{J}' \qquad (19)$$

式(16)および(19)から，局所慣性系Lと回転系Kの間の変換式はつぎのようになる．

$$\mathbf{E}_L=\mathbf{E}+(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}_L=\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{E}$$

$$\mathbf{D}_L=\mathbf{D}+\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{H}$$

$$\mathbf{H}_L=\mathbf{H}-(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{D}$$

$$\mathbf{J}_L=\mathbf{J}-\rho(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)$$

$$\rho_L=\rho-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\cdot\mathbf{J} \qquad (20)$$

ただし，式(20)では，$V_c/c \ll 1$と仮定した．式(18)で与えられる構成関係式は，式(1)と(20)からもただちに得られることがわかる．

3．電子論的考察

3．1　慣性系における電磁界方程式

いま，慣性系Iに対して，媒質が一定の角速度$\boldsymbol{\Omega}_m$で回転しているものとし，この媒質中における電磁界方程式を電子論の立場から求める．簡単のために，媒質は，多数の$-e$なる電荷をもつ電子と正味$+e$の電荷をもつ一種類の原子核から成り立っており，電子は原子核に弾性的に束縛されているものとする．ただし，媒質は無損失の誘電体であるとする．また，このような媒質に電磁界が印加されたとき，原子核は静止しており，電子が原子核に対して相対的に変位するものとする．このような媒質中における個々の電子および原子核は，微視的電磁界方程式の源となる．これに対応する巨視的電磁界方程式は，原子的なスケールに比べれば十分大きいが，巨視的なスケールからは無限小とみなせる空間および時間領域にわたって，微視的電磁界方程式を平均化することによって得られる．このようにして得られる巨視的電磁界方程式は次式で与えられる[11]

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\quad,\quad\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{21}$$

ただし，ε_0およびμ_0は，それぞれ，真空の誘電率および透磁率を表わす．式（21）において，媒質の電磁気的効果は$\mathbf{J}$およびρによって表わされており，これらはつぎの連続の方程式を満たす．

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{22}$$

いま，電子および原子核の平均密度をN_0とし，※ 電磁界による電子密度の変動分をN_1とすると，ρはつぎのようになる．

$$\rho = N_0 e - (N_0 + N_1)\, e = -N_1 e \tag{23}$$

また，原子核の速度を$\mathbf{V}_+$，電子の速度を$\mathbf{V}_-$とすると，$\mathbf{J}$は次式で与えられる．

$$\mathbf{J} = N_0 e \mathbf{V}_+ - (N_0 + N_1)\, e \mathbf{V}_- \tag{24}$$

位置ベクトル$\mathbf{R}_p$で与えられる点について考えると，$\mathbf{R}_p$は，電磁界が存在しないときに電子が占めていた位置$\mathbf{R}$と電磁界による$\mathbf{R}$からの微小変位$\mathbf{s}$の和，すなわち

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R} + \mathbf{s} \tag{25}$$

によって与えられ，$\mathbf{R}_p$における電子の速度$\mathbf{V}_-$は，$\mathbf{R}$における原子核の速

※ 媒質が回転運動を行なう場合には，電子密度は，後に示すように，遠心力によってN_0から変化するが，この変化はΩ_mの二次のオーダとなり，非常に小さいので，ここでは無視する．

度$\Omega_m \times \mathbf{R}$ と s の時間変化の和によって与えられる．すなわち

$$\mathbf{V}_- = \Omega_m \times \mathbf{R} + \frac{d\mathbf{s}}{dt} \tag{26}$$

一方，点$\mathbf{R}_p$ における原子核の速度$\mathbf{V}_+$ はつぎのようになる．

$$\mathbf{V}_+ = \Omega_m \times \mathbf{R}_p = \Omega_m \times (\mathbf{R} + \mathbf{s}) \tag{27}$$

式（26）および（27）を式（24）に代入し，非線形の項を無視すると，次式が得られる．

$$\mathbf{J} = -N_0 e \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} - \Omega_m \times \mathbf{s} \right) - N_1 e \Omega_m \times \mathbf{R} \tag{28}$$

ここで，s は電子の運動方程式から得られる．また，N_1は，式（23）および（28）を式（22）に代入することによって得られる式，すなわち次式から決定される．

$$\frac{dN_1}{dt} = -N_0 \left[\frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{s}) - \nabla \cdot (\Omega_m \times \mathbf{s}) \right] \tag{29}$$

ただし，

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\Omega_m \times \mathbf{R}) \cdot \nabla \tag{30}$$

巨視的電磁界方程式としては，式（21）を用いてもよいが，ここでは，式（21）をこれに等価な別の形，すなわち式(2)の形に書き換えることを考える．ただし，ここでは，導電電流は考えないことにする．さて，式（21）を書き換えるために，次式で定義される分極Pおよび磁化Mを導入しよう．

$$\mathbf{P} = -N_0 e \mathbf{s}$$

$$\mathbf{M} = -(\boldsymbol{\Omega}_m \times \mathbf{R}) \times \mathbf{P} = -\mathbf{V}_m \times \mathbf{P} \tag{31}$$

式(31)のPおよびMの定義は，Minkowski の理論におけるPおよびMの定義と同じである．

式(23)および(28)によって与えられるρおよび$\mathbf{J}$は，式(31)のPおよびMを用いて，つぎのように表わされることがわかる．

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \tag{32}$$

式(32)を式(21)に代入し，さらに，

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{M} \tag{33}$$

によってDおよびHを定義すると，式(21)は最終的につぎのようになる．

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{34}$$

式(34)は，まだ，不定形であるが，DおよびHとEおよびBとの関係，すなわち構成関係式は，電子の運動方程式と式(31)および(33)から得られる．

さて，つぎに，運動方程式をもとにして，回転運動による媒質の巨視的性質の変化，ならびに回転運動を行なう媒質の構成関係式について考察する．

ただし，簡単のために，回転運動によって，原子核は影響を受けず，電子の分布の状態のみが変化するものとする．いま，$V_m/c \ll 1$ とすると，電子に対する運動方程式は次式で与えられる．

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} + \omega_0^2\mathbf{s} = -\frac{e}{m}(\mathbf{E}+\mathbf{V}_-\times\mathbf{B}) - \boldsymbol{\Omega}_m\times(\boldsymbol{\Omega}_m\times\mathbf{R}) \qquad (35)$$

ただし，mは電子の静止質量であり，ω_0は電子の固有振動数を表わす．また，式(35)の右辺第3項は遠心力を表わしている．

まず，外部電磁界が存在しない場合について考えよう．この場合には，式(35)はつぎのようになる．

$$\omega_0^2\mathbf{s} = -\frac{e}{m}[\mathbf{E}+\mathbf{V}_m\times\mathbf{B}] - \boldsymbol{\Omega}_m\times(\boldsymbol{\Omega}_m\times\mathbf{R}) \qquad (36)$$

ここで，$\mathbf{E}$，$\mathbf{B}$および$\mathbf{s}$は，遠心力によって生じた電磁界および電子の変位を表わす．一方，Maxwell の方程式から次式が成立する．

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\rho\mathbf{V}_m \quad , \quad \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (37)$$

$\mathbf{V}_m$ の一次の項までを考えると，式(36)および(37)から，式(56)の右辺第2項は無視できることがわかる．そこで，式(36)の両辺の発散をとると，次式が得られる．

$$\omega_0^2\nabla\cdot\mathbf{s} = -\frac{e}{m}\nabla\cdot\mathbf{E} + 2\Omega_m^2 \qquad (38)$$

また，式(31)および(32)から次式が成り立つ

$$\mathbf{P} = -N_0 e\,\mathbf{s} \quad , \quad \nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho \qquad (39)$$

式(37)および(39)の関係を用いて，式(38)からρを求めると，次式が得られる．

$$\rho = \frac{2\Omega_m^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2} N_0 e \tag{40}$$

ただし，

$$\omega_p^2 = \frac{N_0 e^2}{m \varepsilon_0} \tag{41}$$

ω_p は電子密度N_0に対応するプラズマ周波数を表わす．

遠心力によって，電子密度がN_0からN_- に変化し，原子核の密度は変化しないものとすると，

$$\rho = (N_0 - N_-) e \tag{42}$$

が成り立つ．したがって，N_- は，式(40)および(42)から，つぎのようになる．

$$N_- = N_0 \left(1 - \frac{2\Omega_m^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2} \right) \tag{43}$$

一方，遠心力によって生じた$\mathbf{E}$および$\mathbf{B}$は，それぞれ，つぎのようになる．

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \mu_0 \rho \, r^2 \Omega_m \tag{44}$$

ただし，rは，位置ベクトル$\mathbf{R}$のΩ_m に垂直な成分を表わす．電子の変位$\mathbf{s}$は，式(36)および(44)から

$$\mathbf{s} = \frac{\Omega_m^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2} \mathbf{r} \tag{45}$$

また，分極Pおよび磁化Mは式(31)から

$$\mathbf{P}=-\frac{1}{2}\rho\mathbf{r}\quad,\quad \mathbf{M}=-\frac{1}{2}\rho r^2\Omega_m \tag{46}$$

となる．式(44)および(46)を式(33)に用いると

$$\mathbf{D}=\mathbf{H}=0 \tag{47}$$

が得られる．

式(40)ならびに式(43)～(46)からわかるように，

$$\Omega_m^2 \ll \omega_0^2+\omega_p^2 \tag{48}$$

なる条件が成り立つ場合には，遠心力の効果は無視することができる．以下では，式(48)の条件が成り立つものとして，回転運動を行なう媒質の構成関係式を求める．遠心力の効果ならびに非線形の項を無視すると，式(35)の電子に対する運動方程式は，つぎのようになる．

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}+\omega_0^2\mathbf{s}=-\frac{e}{m}(\mathbf{E}+\mathbf{V}_m\times\mathbf{B}) \tag{49}$$

まず，幾何光学近似を用いて，構成関係式を求める．いま，電磁界の任意の成分の一つをFとすると，幾何光学近似が成り立つ場合には，Fは，つぎのような形に表わすことができる．

$$F=F_0\exp\left\{j\left(\omega t-\frac{\omega}{c}\psi\right)\right\} \tag{50}$$

ただし，

$$\frac{|\nabla F_0|}{F_0} \ll \frac{\omega}{c} |\nabla\psi| \tag{51}$$

式(49)に式(50)および(51)の関係を用いると,

$$(\omega'^2-\omega_0^2)\,\mathbf{s} = \frac{e}{m}(\mathbf{E}+\mathbf{V}_m\times\mathbf{B}) \tag{52}$$

ただし,

$$\omega' = \omega - \mathbf{V}_m\cdot\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\nabla\psi \tag{53}$$

kは波動ベクトルであり, ω'は局所慣性系における周波数を表わす.

式(52)のsを式(31)に用いると, 分極Pおよび磁化Mは, つぎのようになる.

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega'^2}(\mathbf{E}+\mathbf{V}_m\times\mathbf{B})$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{V}_m\times\mathbf{P} \tag{54}$$

式(33)および(54)から, 幾何光学近似における構成関係式は次式で与えられることがわかる.

$$\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{E} = \mu_0[\mathbf{H}-\mathbf{V}_m\times\mathbf{D}]$$

$$\mathbf{D}+\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{H} = \varepsilon[\mathbf{E}+\mathbf{V}_m\times\mathbf{B}] \tag{55}$$

ただし,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega'^2} \right) \tag{56}$$

ε は，局所慣性系における誘電率を表わす．

つぎに，円筒座標表示における構式関係式を求める．この場合には，電磁界の任意の成分は，つぎのように書ける．

$$F = F(r, z) \exp[j(\omega t - n\theta)] \tag{57}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

このとき，

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_m \cdot \nabla) = j(\omega - n\Omega_m) \tag{58}$$

が成り立つ．したがって，円筒座標表示における構成関係式は，幾何光学近似のもとで得られた式における ω' のかわりに

$$\omega' = \omega - n\Omega_m \tag{59}$$

を用いればよいことがわかる．式（55）で与えられる構成関係式は，現象論的な立場から得られた式(3)に一致することがわかる．したがって，遠心力の効果が無視できるときには，回転運動を行なう媒質に対してもMinkowskiの理論をそのまま適用することができる．

3．2　回転系における電磁界方程式

式（34）の形の電磁界基本方程式は，一般相対性原理によって，回転系 K においても成立する．そこで，残された問題は，K 系における構成関係式を求めることである．電子論の立場から構成関係式を求めるために，まず，K 系における分極Pおよび磁化Mの性質について調べよう．さて，慣性系 I では，よく知られた関係式

$$\mathbf{B}' = \mu_0 (\mathbf{H}' + \mathbf{M}')$$

$$\mathbf{D}' = \varepsilon_0 \mathbf{E}' + \mathbf{P}' \qquad (60)$$

が成立する．回転系Kにおいても，形式的には，式（60）と同じ関係が成り立つ．すなわち，

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad (61)$$

しかしながら，K系における$\mathbf{P}$および$\mathbf{M}$は，慣性系とは異なった物理的意味をもつことに注意しなければならない．すなわち，慣性系では，媒質の電磁気的効果は$\mathbf{P}'$および$\mathbf{M}'$によって表わされるが，加速系では，一般に，$\mathbf{P}$および$\mathbf{M}$は，媒質の電磁気的効果のみを表わすのではなく，座標系が設置されている時空の構造によってきまる付加項を含んでいる．以下では，この点について考察する．

いま，$V_c/c \ll 1$ とすると，式（60）と式（16）から，つぎの関係が得られる．

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_c \times \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{M}_m$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_c \times \mathbf{H} + \mathbf{P}_m \qquad (62)$$

ただし，

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{M}' + \mathbf{V}_c \times \mathbf{P}'$$

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{P}' - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_c \times \mathbf{M}' \qquad (63)$$

ここで，$\mathbf{P}_m$ および$\mathbf{M}_m$ は，K系における$\mathbf{P}$および$\mathbf{M}$のうち，媒質による寄与を表わしている．また，式（62）の右辺第2項は，K系が慣性系でないことによる付加項を表わしている．このように，加速系では，真空中においても，もはや

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E} \qquad (64)$$

なる関係は成り立たなくなる．回転系において，構成関係式に式（62）の右辺第2項の付加項が現われることは，リングレーザあるいはリング干渉計を用いることによって実験的に検証されている．[13] 式（62）の右辺第2項は，座標変換(6)をもとにして得られたものであるから，上の実験は，間接的に，式(6)の変換の妥当性を証明したことになる．

さて，以下では，誘電体のみを考えることにすると，$\mathbf{M}'$としては，式(31)にプライムを付けたものを用いることができ，式（63）はつぎのようになる．

$$\mathbf{M}_m=-(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{P}'$$

$$\mathbf{P}_m=\mathbf{P}'=-N_0 e\,\mathbf{s}' \qquad (65)$$

ここで，式(6)から，$\mathbf{s}=\mathbf{s}'$が成り立つことに注意すると，式（65）は

$$\mathbf{M}_m=-(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{P}_m$$

$$\mathbf{P}_m=-N_0 e\,\mathbf{s} \qquad (66)$$

となる．ただし，$\mathbf{s}$は，K系における電子に対する運動方程式を解くことによって得られる．以上により，K系における構成関係式は，式（62）および式（66）から求められることがわかる．

回転系Kにおける電子に対する運動方程式は，慣性系Iにおける運動方程式（49）をK系に変換することによって得られ，次式で与えられる．

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega}_c \times \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{s} = -\frac{e}{m}\{\mathbf{E} + (\mathbf{V}_m - \mathbf{V}_c) \times \mathbf{B}\} \tag{67}$$

ただし，上式では，遠心力の効果および非線形の項は無視されている．式（67）の左辺第２項は，Coriolis の加速度を表わしている．

波源がK系に静止しているものとして，式（67）からsを求めると，次式が得られる．

$$\mathbf{s} = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega'^2)}\hat{a}\{\mathbf{E} + (\mathbf{V}_m - \mathbf{V}_c) \times \mathbf{B}\} \tag{68}$$

ここで，

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & ja_{12} & 0 \\ -ja_{12} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{(\omega_0^2 - \omega'^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega'^2 + 2\Omega_c\omega')(\omega_0^2 - \omega'^2 - 2\Omega_c\omega')}$$

$$a_{12} = \frac{2\Omega_c\omega'(\omega_0^2 - \omega'^2)}{(\omega_0^2 - \omega'^2 + 2\Omega_c\omega')(\omega_0^2 - \omega'^2 - 2\Omega_c\omega')} \tag{69}$$

ただし，ω'は，幾何光学近似および円筒座標表示の場合について，それぞれ，次式で与えられる．

$$\omega' = \begin{cases} \omega - (\mathbf{V}_m - \mathbf{V}_c)\cdot k & (\text{幾何光学近似}) \\ \omega - n(\Omega_m - \Omega_c) & (\text{円筒座標表示}) \end{cases} \tag{70}$$

ここで，$\boldsymbol{\Omega}_m$ および$\boldsymbol{\Omega}_c$ は，ともに，z方向を向くものとしている．

分極$\mathbf{P}_m$は，式(68)を用いて，つぎのように表わされる．

$$\mathbf{P}_m=(\hat{\varepsilon}-\varepsilon_0\hat{I})\,[\mathbf{E}+(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{B}] \tag{71}$$

ただし，Iは単位テンソルを表わし，εは次式で与えられる．

$$\hat{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & j\varepsilon_{12} & 0 \\ -j\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_0\left(1+a_{11}\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega'^2}\right)$$

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_0 a_{12}\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega'^2}$$

$$\varepsilon_{33}=\varepsilon_0\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega'^2}\right) \tag{73}$$

$\hat{\varepsilon}$は，媒質が瞬間的に静止している局所慣性系における誘電率テンソルを表わす．

回転系Kにおける構成関係式は，式(62),(66)および(71)から得られ，若干の変形を行なうと，つぎのようになる．

$$\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{E}=\mu_0[\mathbf{H}-(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{D}]$$

$$\mathbf{D}+\frac{1}{c^2}\mathbf{V}_m\times\mathbf{H}=\hat{\varepsilon}\,[\mathbf{E}+(\mathbf{V}_m-\mathbf{V}_c)\times\mathbf{B}] \tag{73}$$

式(72)からわかるように，波源がK系に静止している場合には，Coriolis

の加速度の影響によって，局所慣性系における誘電率は異方性を呈する．Coriolis の加速度の影響が無視できるための条件は，式（69）から，

$$2\Omega_c\omega' \ll |\omega_0^2-\omega'^2| \tag{74}$$

で与えられることがわかる．式（74）の条件が成り立つ場合には，$\hat{\varepsilon}$は

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{33}\hat{I} \tag{75}$$

となり，式（73）は，現象論的な観点から得られた構成関係式（18）に一致することがわかる．

4．むすび

本稿では，加速系における電磁界理論の基本的な問題として，媒質および観測者が回転運動を行なう場合の電磁界方程式について，通常の三次元的な方法を用いて，現象論的ならびに電子論的な観点から考察を行なった．まず，誘電率ε，透磁率μおよび導電率σの媒質が慣性系に対して任意の加速度運動を行なうものとし，この媒質を慣性系および回転系から観測する場合の電磁界方程式を，現象論的な立場から求めた．つぎに，回転運動を行なう媒質中における電磁界方程式について，電子論の立場から考察を行ない，回転運動にともなう慣性力，すなわち遠心力およびCoriolis の力が媒質の電磁気的性質に及ぼす影響について検討した．

なお，本研究は，昭和４７年度文部省科学研究費補助金の援助によって行なわれたものである．

謝　辞　終りに，日ごろ，ご指導いただく大阪大学工学部板倉清保教授，

熊谷信昭教授，ならびに常々ご討論いただく本学通信工学教室電磁界理論研究グループの諸氏に深謝する。

文　　献

(1) H.Minkowski:"Die Grundgleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern", Göttinger Nachr., p.53(1908).

(2) W.Pauli:"Theory of relativity", Pergamon Press (1958).

(3) C.T.Tai:"A study of electrodynamics of moving media", Proc. IEEE, **52**, p.685(June 1964).

(4) C.V.Heer:"Resonant frequencies of an electromagnetic cavity in an accelerated system of reference", Phys. Rev., **134**, A799 (May 1964).

(5) A.Yildiz and C.H.Tang:"Electromagnetic cavity resonances in accelerated systems", Phys. Rev., **146**, p.947 (June 1966).

(6) J.L.Anderson and J.W.Ryon:"Electromagnetic radiation in accelerated systems",Phys. Rev., **181**, p.1765 (May 1969).

(7) T.C.Mo:"Theory of electrodynamics in media in non-inertial frames and applications", J.Math.Phys., **11**, p.2589 (Aug.1970).

(8) A.Einstein:"Die Grundlage der allgemeinen Relativi-

tätstheorie", Ann. Phys., ser.4, **49**, p.769(1916).

(9) H.Weyl:"Space-Time-Matter",Dover Publication, Inc., New York (1951).

(10) 砂川重信：“理論電磁気学”,紀伊国屋書店, p.309(1965).

(11) L.Rosenfeld:"Theory of electrons",Dover Publications, Inc., New York (1965).

(12) 塩沢俊之：“加速度運動を行なう媒質中における電磁界方程式について”, 電気学会電磁界理論研資, EMT-72-41(1972-10).

(13) E.J.Post:"Sagnac effect",Rev.Mod.Phys., **39**, p.475 (April 1967).

輻射科学研究会資料

圧電性弾性体導波線路の振動系に於ける伝搬特性の近似解法

杉本光範　牧本利夫

大阪大学基礎工学部

昭和 48年 2月 2日

圧電性弾性体導波線路の摂動系に於ける伝搬特性の近似解析

ANALYSIS OF MODECOUPLING IN PIEZOELECTRIC WAVEGUIDES

圧電性弾性導波結合器への一提案

A Suggestion of Modecoupler for Piezoelectric Waves

杉本光範・牧本利夫
Mitsunori SUGIMOTO　Toshio MAKIMOTO
大阪大学基礎工学部
Faculty of Engineering Sience Osaka University

1. はじめに.

圧電性弾性導波系の問題は多くの人々により研究されているが、その大部分は単一波の伝搬を論じたものであり、弾性波同志の結合を扱っているものは少ない[1]。マイクロ波デバイスの重要なものの多くは、二つ以上の波の結合を利用したものである。例えば、方向性結合器やパラメトリック増幅器などがある。圧電性弾性波の分野に於ても同様なことになるであろう。本論文は以上の理由から、圧電性弾性波の相互結合を論じたものである。

圧電性弾性波、あるいは一般に、異方性媒質中の波動を扱う時、座標系の設定は重要な問題である。これは異方性媒質を特徴づける物質定数が、一般に、高階のテンソル量として現れるからであり、従がって座標系の設定に応じ、出現の様子が異なるからである。

今、適当に座標系の位置を定め、一つの導波系を決定し、これを基本系と呼ぶ。基本系に於ける座標系の位置を微小変化させることにより、導波系を特徴づけるテンソルのエレメントに摂動を加える。こうして出来た導波系を、基本系からわずかにずれた導波系という意味で、摂動系と呼ぶ。基本系に於て独立に伝搬し得た波（固有モード）は、摂動系ではもはや独立ではなく、相互に結合しつつ伝搬する。本論文は、圧電性弾性体の物質定数がテンソル量であることに着目し、座標系の微小回転により摂動系を作り、その部分で基本系の固有モードを結合させ、この結合を利用した新しいデバイスを作るための基礎となるべき理論である。摂動系の固有モードを基本系の固有モードでモード展開することにより、弾性波同志の結合機構、結合による伝送電力の移行などを明確に説明し、さらに、電気回路論的立場より、モード伝達行列なるものを定義し、近い将来問題になるであろう、弾性波導波系の構成（Synthsis）に便利な形にまとめた。

2. 一般論（定式化）

ある基本系に対する摂動系の構成法は色々ある。上述した、座標回転を利用するのも一つの方法である。この章では、何らかの方法で摂動系が得られた時、その部分での圧電性弾性波の結合現象を定式化してみる。

2.1 固有値問題への帰着[2]

圧電性弾性体中の波動伝搬は、マックスウェルの方程式と、ニュートンの運動方程式とで記述される。これ等二つの微分方程式をある境界条件のもとで同時に解けば求める固有モードが得られるが、本論文は、基本系の固有モードで、摂動系の固有モードをモード展開することを骨子とする。この要請に応じるため、上述した境界値問題を、伝搬定数βを固有値とし、固有モードの断面関数($e^{j(\beta z-\omega t)}$を省略したもの)を固有ベクトルとする固有値問題に帰着させる。

マックスウェルの方程式は、

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{1}$$

ニュートンの運動方程式は[3]

$$\nabla\cdot\tilde{T}=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t},\quad \nabla_s\vec{V}=\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t} \tag{2}$$

構成式は[3]

$$\vec{D}=\tilde{\varepsilon}^T\cdot\vec{E}+\tilde{d}:\tilde{T},\quad \tilde{S}=\tilde{s}^E:\tilde{T}+\tilde{d}\cdot\vec{E} \tag{3}$$

波動の伝搬因子を$e^{j(\beta z-\omega t)}$としたので、(1)、(2)、(3)より、

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\tilde{T}=-j\omega\rho\vec{V},\quad \nabla_s\vec{V}=-j\omega(\tilde{s}^E:\tilde{T}+\tilde{d}\cdot\vec{E})\\&\nabla\times\vec{E}=j\omega\tilde{\mu}\cdot\vec{H},\quad \nabla\times\vec{H}=-j\omega(\tilde{\varepsilon}^T\cdot\vec{E}+\tilde{d}:\tilde{T})\end{aligned} \tag{4}$$

を得る。さらに、演算子を断面座標に関する部分と伝搬方向に関する部分に分け、それぞれt, nの添字をつけ書き直せば、

$$\begin{aligned}&\nabla_t\cdot\tilde{T}+\omega\rho j\vec{V}=-\beta j\nabla_n\cdot\tilde{T},\quad \nabla_{st}\vec{V}+j\omega\tilde{s}^E:\tilde{T}+j\omega\tilde{d}\cdot\vec{E}=-\beta j\nabla_{sn}\vec{V}\\&\nabla_t\times\vec{E}-\omega\tilde{\mu}\cdot j\vec{H}=-\beta j\nabla_n\times\vec{E},\quad \nabla_t\times\vec{H}+j\omega\tilde{\varepsilon}^T\cdot\vec{E}+j\omega\tilde{d}:\tilde{T}=-\beta j\nabla_n\times\vec{H}\end{aligned} \tag{5}$$

となる。これ等を行列表示すれば次式となる。

$$\left\{\begin{bmatrix}\omega\tilde{s}^E: & -\nabla_{st} & \omega\tilde{d}\cdot & 0\\ -\nabla_t\cdot & -\omega\rho & 0 & 0\\ \omega\tilde{d}: & 0 & \omega\tilde{\varepsilon}^T & -\nabla_t\times\\ 0 & 0 & -\nabla_t\times & \omega\tilde{\mu}\cdot\end{bmatrix}-\beta\begin{bmatrix}0 & j\nabla_{sn} & 0 & 0\\ j\nabla_n\cdot & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & j\nabla_n\times\\ 0 & 0 & j\nabla_n\times & 0\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}\tilde{T}\\ j\vec{V}\\ \vec{E}\\ j\vec{H}\end{Bmatrix}=0 \tag{6}$$

(6)は、形式的に、次の様に簡潔に表示できる。

$$(\mathcal{L}-\beta\Gamma)\Psi=0 \tag{7}$$

但し、$\mathcal{L}$、Γ、Ψはそれぞれ、(6)の対応する行列を示す。(7)は、βを固有値、Ψを固有ベクトルとする固有値問題となっている。

以上にて、$\tilde{T}$、$\tilde{S}$は各々、圧電性弾性体中を波動が伝搬することにより生じる

応力テンソル．歪テンソル．$\vec{P}$．$\vec{v}$は弾性体に固定された質点の運動量ベクトル，速度ベクトル．ρは質量密度．$\tilde{S}^E$．$\tilde{d}$は各々圧電弾性体の特徴を示す、弾性定数テンソル．圧電定数テンソルである．$\vec{E}$，$\vec{H}$，$\tilde{\varepsilon}^T$．$\tilde{\mu}$は、電界密度ベクトル．磁界密度ベクトル．誘電率テンソル．透磁率テンソルである．これ等を行列表示すれば[4]下の様になる．

$$\tilde{S}^E := \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & \cdots & S_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ S_{16} & S_{26} & & S_{66} \end{bmatrix} = \tilde{S}^{E^T},\quad \tilde{d} := \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} \end{bmatrix} = \tilde{d}^T,\quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_6 \end{bmatrix},\quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_6 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\varepsilon}^T := \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix},\quad \tilde{\mu} := \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{13} & \mu_{23} & \mu_{33} \end{bmatrix},\quad \vec{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix},\quad \vec{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix},\quad \vec{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

さらに演算子を行列表示すれば[3]

$$\nabla_{3c} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} = \nabla_{3c}^T,\quad \nabla_{6n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \nabla_{6n}^T$$

$$\nabla_t x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix},\quad \nabla_n x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

となる．添字Tは転置行列を示す．

2.2. 摂動系の固有解

ρ．$\tilde{S}^E$．$\tilde{d}$、$\tilde{\varepsilon}^T$、$\tilde{\mu}$で特徴づけられる導波系を基本系と呼び、$\rho+\Delta\rho$、$\cdots$ $\tilde{\mu}+\Delta\mu$で特徴づけられる導波系を摂動系と呼ぶ．図1に示す導波系を考える．

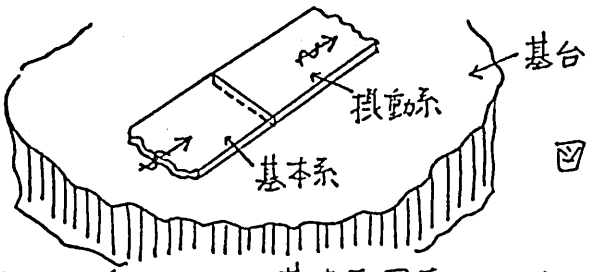


図1　圧電性弾性波導波系の一部分

基本系を独立に伝搬してきた基本系固有モードは、摂動系に入射し、結合し合う．$\Delta\rho$，$\Delta\tilde{S}^E$、$\Delta\tilde{d}$、$\Delta\tilde{\varepsilon}^T$、$\Delta\tilde{\mu}$などが、$\rho$．$\tilde{S}^E$、$\cdots$ $\tilde{\mu}$と比べ十分小さいとすれば（摂動量）摂動系の固有モードは基本系の固有モードの線型結合で表わされる．

今、基本系に二つの独立なモードセットが存在し、それぞれのセットは、pケ、qケの伝搬波から成るとする。摂動系の固有モードΨ'（'で摂動系の諸量を示す）は、次式で表わされる。

$$\Psi' = \sum_{i=1}^{p} m_i \Psi_i^{I} + \sum_{j=p+1}^{p+q} m_j \Psi_j^{II} \tag{10}$$

I, IIはモードセットにつけた添字で、i, jはモード番号である。(10)より、m_iを決定すれば、摂動系の固有モードが決定する。

微分方程式のスペクトル理論[1]によれば、(7)の随伴方程式（adjoint eq.）の解をΨ^+とすると、βの変分表示は次の様になる。[2]

$$\beta = \frac{(\Psi^+, \mathcal{L}\Psi)}{(\Psi^+, \Gamma\Psi)} \tag{11}$$

直交条件は、N_iをi番目のモードの正規化定数とすれば、

$$(\Psi_i^+, \Gamma\Psi_j) = N_i \delta_{ij} \tag{12}$$

である。(a, b)は、aとbとのスカラー積を取り、導波系の断面に於て面積積分することを示す演算記号である。

全てのモードが正規化されているとする。(10)を(11)に代入し、リッツの方法$(\partial\beta/\partial m_i = 0)$を用いれば、次式が得られる。

$$(N - \beta' I) M = 0 \tag{13}$$

但し、

$$N = \begin{bmatrix} \overbrace{\quad}^{p} & \overbrace{\quad}^{q} \\ \left.\begin{matrix} N^{II} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} N^{III} \end{matrix}\right. \\ \left.\begin{matrix} N^{III} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} N^{II} \end{matrix}\right. \end{bmatrix}^{p}_{q}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{p+q} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_{ij} = \beta_i \delta_{ij} + \omega \int_{\text{導波系断面}} \left(\tilde{T}_i^{+} : \Delta\tilde{S}^{E} : \tilde{T}_j + \vec{V}_i^{+} \cdot \Delta\rho \vec{V}_j + \tilde{T}_i^{+} : \Delta\tilde{J} \cdot \vec{E}_j + \vec{E}_i^{+} \cdot \Delta\tilde{J} : \tilde{T}_j \right. \tag{14}$$
$$\left. + \vec{E}_i^{+} \cdot \Delta\tilde{\varepsilon}^{T} \cdot \vec{E}_j - \vec{H}_i^{+} \cdot \Delta\tilde{\mu} \cdot \vec{H}_j \right) dS$$

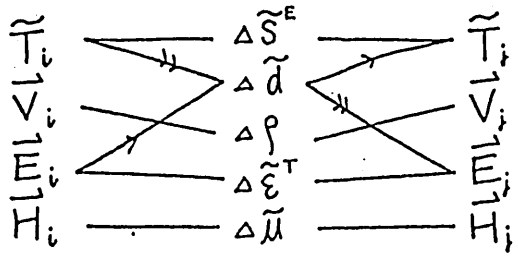
である。Nは$p+q$次の正方行列で、その要素N_{ij}は、基本系で独立に伝搬していたi番目とj番目の固有モードの、摂動系での結合度を示す量である。Mは求めるべき振幅係数m_iからなる$p+q$次元ベクトルである。(13)は再び固有値問題となっている。(13)を解けば、$p+q$ケの固有ベクトルMが求まり、(10)に代入することにより、摂動系の固有モードが決定される。

2.3. 結合機構.

(14)は、どの摂動量を介し、何と何が、導波系断面のどの部分で結合するかを明確に説明する。

電磁波の場合、結合を制御するパラメータは$\Delta\tilde{\varepsilon}^T$と$\Delta\tilde{\mu}$のみであるが、圧電性弾性波の場合は、$\Delta\tilde{S}^E$、$\Delta\tilde{d}$、$\Delta\rho$によっても、その結合が制御される。制御パラメータの数が多いということは、導波系を構成する時、その構成法に多様性を持たせ、さらには新しいデバイスの創造にも帰与するであろう。

(14)を図式化すれば下の様になる。



(結合量)　(媒介量)　(結合量)

この定式化では、磁歪を無視している。これを考慮すればさらに制御量が増え、また、非可逆素子の構成も可能になるであろう。なお、注意すべきことは、例えば、$\Delta\tilde{S}^E$が受け持つ結合量は$\tilde{T}$のみであるが、これは、数式上の表現であり、実際の物理現象に於ては、$\Delta\tilde{S}^E$の存在により二つの波が結合するのであり、従がって全ての量($\tilde{T}$, $\vec{V}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$)が相互に結合しているのである。

3. 座標系の回転による摂動系の構成

簡単のため、以後の議論では、純弾性波のみを考える。最近、良好な圧電膜が得られ、性能のよいトランスジューサーが開発されており、非圧電体を用いた種々の弾性表面波素子の開発が望まれている。それゆえ、この簡単化は、実際的な要求に大きな制約を加えるものではない。

2で述べた一般論に於ては、摂動系の構成法については何もふれなかった。ここで、座標系の回転による摂動系の構成法を提案する。1で述べたように、弾性体は一般に、弾性定数をテンソル量として持つ。従がって、まず、このテンソルの成分が最も簡単な形で現れるよう座標系を設定し、基本系を作る。次に、この座標系を、原点を固定し微小回転することにより$\Delta\tilde{S}$を得、摂動系を得る。例として、mmm結晶系について基本系と摂動系を求めると次の様になる。基本系は[4]

$$\tilde{S}=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & & 0 & \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & & & \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & S_{55} & 0 \\ & & & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \tag{15}$$

と表示され、摂動系は、X軸、Y軸、Z軸の回りに微小回転(回転角をθ rad. とし $\sin\theta\simeq\theta$, $\cos\theta\simeq 1$ とする)することにより、次の三つが得られる。これ等をX摂動系、Y摂動系、Z摂動系と呼ぶ。以下で、摂動項の算出の際、二次以上の微小量は無視してある。

$$\Delta\tilde{S} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & S'_{14} & 0 \\ & S'_{24} & \\ & S'_{34} & \\ \hline S'_{14}\ S'_{24}\ S'_{34} & 0\ 0\ 0 & \\ & 0\ 0\ S'_{56} & \\ 0 & 0\ S'_{56}\ 0 & \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & S'_{15} \\ & 0\ S'_{25}\ 0 & \\ & S'_{35} & \\ \hline 0 & 0\ 0\ S'_{46} & \\ S'_{15}\ S'_{25}\ S'_{35} & 0\ 0\ 0 & \\ 0 & S'_{46}\ 0\ 0 & \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & S'_{16} \\ & & S'_{26} \\ & & S'_{36} \\ \hline 0 & 0\ S'_{45}\ 0 & \\ & S'_{45}\ 0\ 0 & \\ S'_{16}\ S'_{26}\ S'_{36} & 0\ 0\ 0 & \end{array}\right] \qquad (16)$$

(X 摂動系)　　(Y摂動系)　　(Z摂動系)

但し.

$$S'_{14} \simeq (S_{13} - S_{12})\cdot 2\theta \qquad S'_{15} \simeq -(S_{13} + \tfrac{1}{2}S_{55})\cdot 2\theta + S_{14}\cdot 2\theta \qquad S'_{16} \simeq (S_{12} + \tfrac{1}{2}S_{66})\cdot 2\theta - S_{14}\cdot 2\theta$$

$$S'_{24} \simeq (S_{23} + \tfrac{1}{2}S_{44})\cdot 2\theta - S_{22}\cdot 2\theta \qquad S'_{25} \simeq (S_{12} - S_{23})\cdot 2\theta \qquad S'_{26} \simeq -(S_{12} + \tfrac{1}{2}S_{66})\cdot 2\theta + S_{22}\cdot 2\theta$$

$$S'_{34} \simeq -(S_{23} + \tfrac{1}{2}S_{44})\cdot 2\theta + S_{22}\cdot 2\theta \qquad S'_{35} \simeq (S_{13} + \tfrac{1}{2}S_{55})\cdot 2\theta - S_{23}\cdot 2\theta \qquad S'_{36} \simeq (S_{23} - S_{13})\cdot 2\theta \qquad (17)$$

$$S'_{56} \simeq (S_{55} - S_{66})\cdot\theta \qquad S'_{44} \simeq (S_{44} - S_{44})\cdot\theta \qquad S'_{45} \simeq (S_{44} - S_{55})\cdot\theta$$

である. m3. 432. m3m結晶系の場合には. さらに簡単になり、まとめて書けば次の様になる.

$$\tilde{S} = \left[\begin{array}{ccc|cc} S_{11} & S_{12} & S_{12} & & \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & & \\ \hline & & & S_{44} & 0 \\ 0 & & & & S_{44} \\ & & & 0 & S_{44} \end{array}\right], \quad \Delta\tilde{S} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & 0 & & 0 & -\Delta & \Delta \\ & & & \Delta & 0 & -\Delta \\ & & & -\Delta & \Delta & 0 \\ \hline 0 & \Delta & -\Delta & \leftarrow X & \uparrow Y & \uparrow Z \\ -\Delta & 0 & \Delta & \leftarrow Y & 0 & \\ \Delta & -\Delta & 0 & \leftarrow Z & & \end{array}\right] \qquad (18)$$

但し. $\Delta = (2S_{12} + S_{44} - 2S_{11})\cdot\theta$.

4.. 基本系の固有モード

弾性体導波系の固有モードを求めることは. 非常にむつかしい. 方形断面を持つような場合には不可能に近い.[6] そこで. 解析解が比較的容易に求まる無限平板を考える. 波長に比べ十分大きな寸法を幅にもつ導波系を解析する時には、この無限平板近似は有効である. 図2に座標系と導波系を示す.

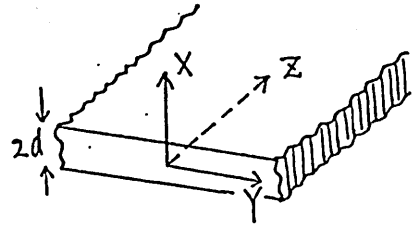


図2. 無限平板導波系(伝搬方向:Z)

運動方程式より $\vec{T}$ を消去すれば下式を得る.

$$\nabla\cdot\tilde{C} : \nabla_s \vec{V} + \rho\omega^2 \vec{V} = 0 \qquad (19)$$

但し. $\tilde{C}$ は $\tilde{S}$ の逆行列である.[3] (19)を行列表示すれば(20)となる. (20)は V_1, V_3 と V_2 が独立であることを示している. この等を2.2に従がい. モードセットI(V_2)、モードセットII(V_1, V_3)とする.

$$\begin{bmatrix} C_{11}\frac{d^2}{dx^2}-C_{55}\beta^2 & 0 & (C_{13}+C_{55})j\beta\frac{d}{dx} \\ 0 & C_{66}\frac{d^2}{dx^2}-C_{44}\beta^2 & 0 \\ (C_{13}+C_{55})j\beta\frac{d}{dx} & 0 & C_{55}\frac{d^2}{dx^2}-C_{33}\beta^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}+\rho\omega^2\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}=0 \quad (20)$$

$x=\pm d$ で $\vec{T}\cdot\vec{n}_x=0$ なる境界条件で(20)を解けば固有解が得られ、次の様になる。

$$\Psi_i^{I}=\begin{Bmatrix} 0\\0\\0\\T_{4i}\\0\\T_{6i}\\0\\V_{2i}\\0 \end{Bmatrix},\quad \Psi_i^{I\dagger}=\begin{Bmatrix} 0\\0\\0\\T_{4i}\\0\\-T_{6i}\\0\\V_{2i}\\0 \end{Bmatrix};\quad \Psi_i^{II}=\begin{Bmatrix} T_{1i}\\T_{2i}\\T_{3i}\\0\\T_{5i}\\0\\V_{1i}\\0\\V_{3i} \end{Bmatrix},\quad \Psi_i^{II\dagger}=\begin{Bmatrix} -T_{1i}\\-T_{2i}\\-T_{3i}\\0\\T_{5i}\\0\\V_{1i}\\0\\-V_{3i} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

但し、

$$T_{4i}=C_{44}j\beta_i\begin{Bmatrix}\cos\xi_i x\\ \sin\xi_i x\end{Bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\text{対称モード}\\ \leftarrow\text{反対称モード}\end{matrix}$$

$$T_{6i}=-C_{44}\xi_i\begin{Bmatrix}\sin\xi_i x\\ -\cos\xi_i x\end{Bmatrix}$$

$$V_{2i}=\omega\begin{Bmatrix}\cos\xi_i x\\ \sin\xi_i x\end{Bmatrix}$$

$$V_{1i}=A_1\begin{Bmatrix}\cos\Omega_1\xi_i x\\ \sin\Omega_1\xi_i x\end{Bmatrix}+A_2\begin{Bmatrix}\cos\Omega_2\xi_i x\\ \sin\Omega_2\xi_i x\end{Bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\text{対称モード}\\ \leftarrow\text{反対称モード}\end{matrix}$$

$$V_{3i}=A_1 f(V_i)\begin{Bmatrix}\sin\Omega_1\xi_i x\\ -\cos\Omega_1\xi_i x\end{Bmatrix}+A_2 g(V_i)\begin{Bmatrix}\sin\Omega_2\xi_i x\\ -\cos\Omega_2\xi_i x\end{Bmatrix}$$

$$\tilde{T}_i=\tilde{C}^E:\nabla_s\vec{V}_i \quad (22)$$

$$f(V_i)=\frac{C_{11}\Omega_1^2+C_{44}-\rho V_i^2}{(C_{13}+C_{44})j\Omega_1},\quad g(V_i)=\frac{C_{11}\Omega_2^2+C_{44}-\rho V_i^2}{(C_{13}+C_{44})j\Omega_2}$$

$\Omega_{1,2}$; $C_{11}C_{44}\Omega^4+[(C_{11}+C_{44})h(V_i)-(C_{13}+C_{44})^2]\Omega^2-\rho V_i^2 h(V_i)+C_{11}C_{44}=0$ の独立な2根

である。図3に各モードの分散曲線を示す。

$$h(V_i)=C_{11}+C_{44}-\rho V_i^2$$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{(C_{11}\Omega_1^2-C_{11}\rho V_i^2)}{(C_{11}\Omega_2^2-C_{12}-\rho V_i^2)}\times\frac{\cos\Omega_1\xi_i d}{\cos\Omega_2\xi_i d}$$

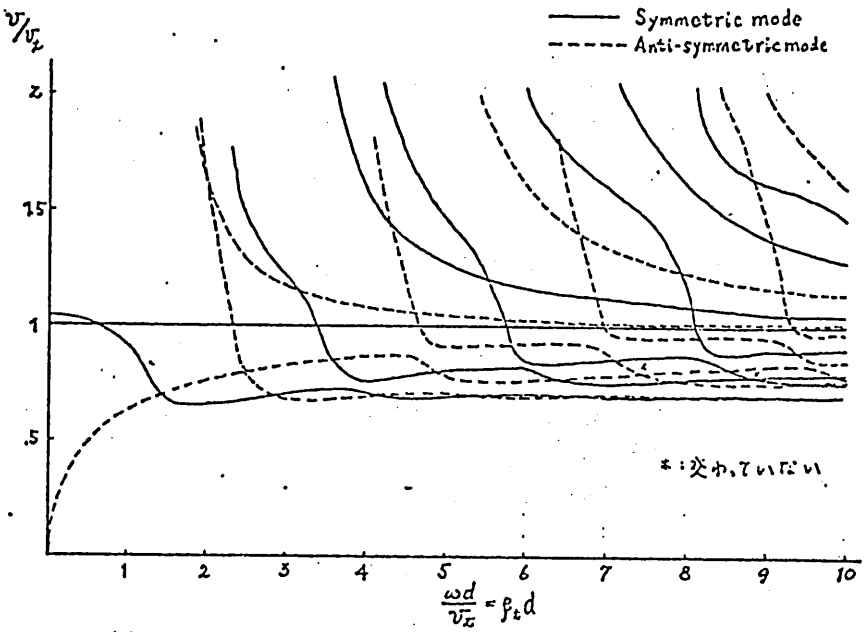


図3. 無限平板(斜;等軸晶系)に於ける固有モードの分散曲線

5. 結合系数

図4の導波系を考える。3,4で得られた $\Delta\tilde{S}$、$\tilde{T}_i^-$、$\tilde{T}_j^+$ を(14)に代入すれば、純弾性体を考えているから、結合系数は次の様になる。

$$N_{ij} = \beta_i \delta_{ij} + \omega \int_{\text{cross section}} (\tilde{T}_i^- : \Delta\tilde{S} : \tilde{T}_j^+)\, dS \tag{23}$$

但し

$$\Delta\tilde{S} = \Delta \begin{bmatrix} & & & 0 & -1 & 1 \\ & 0 & & 1 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \leftarrow X & Y & Z \\ -1 & 0 & 1 & \leftarrow Y & 0 & \\ 1 & -1 & 0 & \leftarrow Z & & \end{bmatrix} \tag{24}$$

である。無限平板近似をし(23)の解析解を求めれば下の様になる。

$$N = \begin{bmatrix} \beta_1^X & & 0 & & \\ & \ddots & & & N_{ij} \\ 0 & & \beta_p^X & & \\ \hline & & & \beta_1^{II} & \\ N_{ji} = -N_{ij} & & & & \ddots \\ & & & & & \beta_q^X \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} \beta_1^X & & 0 & & \\ & \ddots & & & 0 \\ 0 & & \beta_p^X & & \\ \hline & & & \beta_1^{II} & N_{ij} \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & N_{ji} = -N_{ij} & & \beta_q^X \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} \beta_1^X & & & & \\ & \ddots & & & N_{ij} \\ & & \beta_p^X & & \\ \hline & & & \beta_1^{II} & \\ N_{ji} = N_{ij} & & & & \ddots \\ & & & & & \beta_q^{II} \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$N_{ij} = \omega\Delta \int_{-d}^{d} T_{4i}^X (T_{2j}^{II} - T_{3j}^X)\, dx, = \omega\Delta \int_{-d}^{d} \{T_{5i}^{II}(T_{1j}^{II} - T_{3j}^X) - T_{5j}^{II}(T_{1i}^X - T_{3i}^X)\}\, dx, = \omega\Delta \int_{-d}^{d} T_{1i}^X (T_{2j}^{II} - T_{1j}^{II})\, dx$$

↑ X摂動系　　↑ Y摂動系　　↑ Z摂動系

(25)から次のことがわかる。すなわち、Y摂動の場合には、IIのモード間でのみ結合が生じ、XとZ摂動の場合には、IとIIとのモード間でのみ結合が生じる。このことは、結合を制御する一つの方法を示唆している。

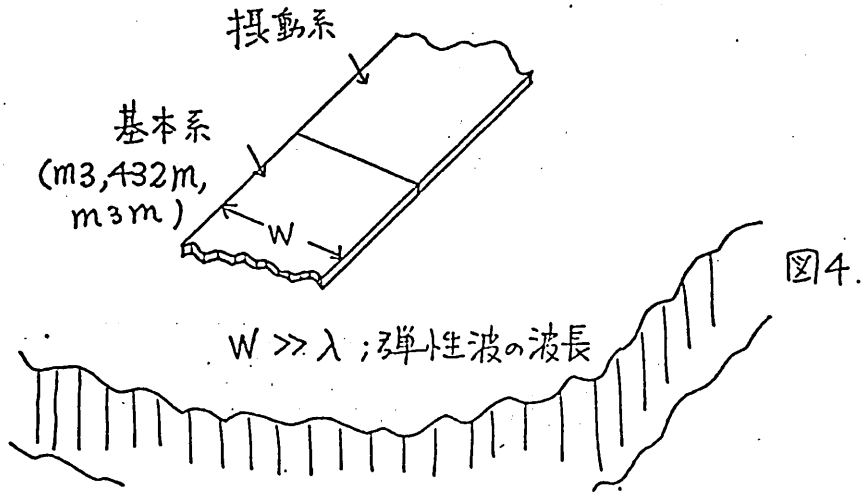


図4.

6. 摂動系の解析（二モード近似）

以下では、これまでの結果を用い、X摂動系とZ摂動系に於ける、一対の波の結合を論じる。すなわち、これ等二つのモードのみが、縮退（位相定数が整合している状態）、あるいはそれに近い状態にあり、その他のものは結合に関与しない場合を考える。分散曲線より、この様な状態は容易に設定できる。

2.2 での扱いに従がい、摂動系の固有モードを次の様に置く。

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}' \\ j\vec{V}' \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} \tilde{T}^{I} \\ j\vec{V}^{I} \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} \tilde{T}^{II} \\ j\vec{V}^{II} \end{bmatrix} \tag{26}$$

これより、(13)に対応し、

$$\begin{aligned} (N_{11}-\beta')\cdot m_1 + N_{12} m_2 &= 0 \\ N_{21} m_1 + (N_{22}-\beta') m_2 &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

が得られる。但し、(22)、(25)より、例として結合系数を示せば、

$$\begin{aligned} &N_{11} = \beta^{I}, \quad N_{22} = \beta^{II}_{d} \\ &N_{12} = -N_{21} = \omega\Delta \int_{-d}^{} T_4^{I}(T_2^{II} - T_3^{II})\,dx \qquad (X\text{摂動系}) \\ &N_{12} = N_{21} = \omega\Delta \int_{-d}^{d} T_4^{II}(T_2^{I} - T_1^{II})\,dx \qquad (Z\text{摂動系}) \end{aligned} \tag{28}$$

である。(27)を解けば

$$\begin{aligned} &\beta_{\pm}' = \beta_m\left(1 \pm K\sqrt{1+(\delta/K)^2}\right) \\ &(m_1/m_2)_{\pm} = \alpha\left(\delta/K \pm \sqrt{1+(\delta/K)^2}\right) \qquad : \text{モード混成率} \end{aligned} \tag{29}$$

を得る。但し、

$$\begin{aligned} &\beta_m = (\beta^{I}+\beta^{II})/2 \\ &\delta = (\beta^{I}-\beta^{II})/(\beta^{I}+\beta^{II}) \qquad : \text{縮退係数} \\ &K = \sqrt{N_{12}N_{21}}/\beta_m \qquad : \text{結合係数} \\ &\alpha = \sqrt{N_{12}/N_{21}} \end{aligned} \tag{30}$$

と定義した。(29)を(26)に代入し、摂動系の固有モードを得る。

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}' \\ j\vec{V}' \end{bmatrix}_{\pm} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_{\pm} \begin{bmatrix} \tilde{T}^{I} \\ j\vec{V}^{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{T}^{II} \\ j\vec{V}^{II} \end{bmatrix} \tag{31}$$

一般解は、これ等の線型結合で、次の様になる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}' \\ j\vec{V}' \end{bmatrix} = A_+' \begin{bmatrix} \tilde{T}' \\ j\vec{V}' \end{bmatrix}_+ + A_-' \begin{bmatrix} \tilde{T}' \\ j\vec{V}' \end{bmatrix}_- \tag{32}$$

(32)の$\vec{V}'$に目をつけ、結合の様子を調べる。(32)より、

$$\vec{V}'(3) = A_+' \vec{V}_+' e^{j\beta_+' 3} + A_-' \vec{V}_-' e^{j\beta_-' 3} \tag{33}$$

となり、(31)を代入すれば

$$\begin{aligned} \vec{V}'(3) = &\left\{ A_+' \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_+ e^{j\beta_+' 3} + A_-' \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_- e^{j\beta_-' 3} \right\} \vec{V}^{\mathrm{I}} \\ &+ \left\{ A_+' e^{j\beta_+' 3} + A_-' e^{j\beta_-' 3} \right\} \vec{V}^{\mathrm{II}} \end{aligned} \tag{34}$$

を得る。$\beta_+' \neq \beta_-'$より、(34)は、$\vec{V}^{\mathrm{I}}$が優勢になったり、$\vec{V}^{\mathrm{II}}$が優勢になったりすることを示す。二本が結合であり、モード変換現象である。結合による伝送電力の移行は、初期条件とし、$P^{\mathrm{II}}(0)=0$を用いれば、簡単な計算により次式で表わされる。

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{II}}(3) / P^{\mathrm{I}}(0) &= F \sin^2 C3 \\ P^{\mathrm{I}}(3) / P^{\mathrm{I}}(0) &= 1 - F \sin^2 C3 \end{aligned} \tag{35}$$

但し、P^{I}、P^{II}は各々、$\vec{V}^{\mathrm{I}}$, $\vec{V}^{\mathrm{II}}$が伝送する電力であり、F, Cは次式で示されるものである。

$$\begin{aligned} F &= 1 / 1 + (\delta/K)^2 \\ C &= (\beta_+' - \beta_-')/2 \end{aligned} \tag{36}$$

(35)を図示すれば、よく知られた、伝送電力の変換の様子を示す図となる。

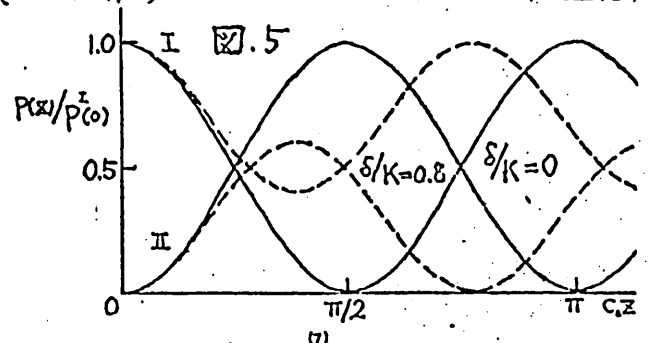


図.5

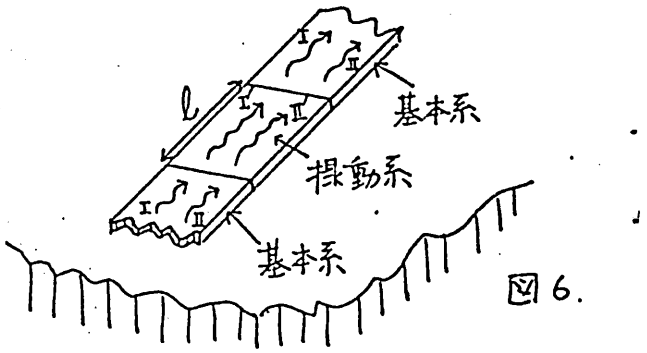


図6.

7. モード伝達行列[7]

以上の議論で、モード変換のメカニズムが明らかとなった。この節では、摂動系を暗箱と考え、電気回路論の立場より、以上の議論をまとめてみる。すなわち、この暗箱を、弾性波導波系に於ける、基本的な、一回路素子と考え(モード変換器と呼び得るであろう)、その働らきを、二行二列の行列で表示する。

図6を念頭に置き、まず、次の様に仮定する。

$$\begin{bmatrix} a^{I}(l) \\ a^{II}(l) \end{bmatrix} = e^{j\phi} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{I}(0) \\ a^{II}(0) \end{bmatrix} \tag{37}$$

但し、$|a^{I}(3)|^2$, $|a^{II}(3)|^2$ が伝送電力となるよう、$a^{I}(3)$、$a^{II}(3)$ を定める。(34)式から、$a^{I}(0)=0$、$a^{II}(0)=1$ とすることにより、

$$A = \cos\theta + jP\sin\theta \qquad P = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_+ + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_-}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_+ - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_-}$$

$$C = jR\sin\theta \qquad R = \frac{2}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_+ - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_-} \tag{38}$$

$$\phi = \beta_m \cdot l \qquad \theta = (\beta_+' - \beta_-') \cdot l / 2$$

$a^{I}(0)=1$、$a^{II}(0)=0$ とすることにより、

$$B = -jQ\sin\theta \qquad Q = \frac{2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_+ \cdot \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_-}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_+ - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_-} \tag{39}$$

$$D = \cos\theta - jP\sin\theta$$

となる。(38)、(39)をδ、K、αを用い書き改めれば

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta + jP\sin\theta, & -jQ\sin\theta \\ jR\sin\theta, & \cos\theta - jP\sin\theta \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$P = (\delta/K)/\sqrt{1+(\delta/K)^2},\quad Q = -\alpha/\sqrt{1+(\delta/K)^2},\quad R = 1/\alpha\cdot\sqrt{1+(\delta/K)^2}$$

となる。以上の結果を表にしてまとめる。

$\begin{bmatrix} \cos\theta + jP\sin\theta, & -jQ\sin\theta \\ jQ\sin\theta, & \cos\theta - jP\sin\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{j\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\theta + jP\sin\theta, & -jQ\sin\theta \\ -jQ\sin\theta, & \cos\theta - jP\sin\theta \end{bmatrix}$
$Q = -j/\sqrt{1+(\delta/K)^2}$ $R = \pm jQ$	$\varphi = \frac{(\beta^{I} - \beta^{II})l}{2}$	$Q = -1/\sqrt{1+(\delta/K)^2}$ $R = -Q$
X摂動系	Y摂動系	Z摂動系

8. むすび

弾性体の弾性定数がテンソルであることに着目し、基本系と摂動系とを定義した。摂動系の固有モードを基本系の固有モードで展開し、βの変分表示に代入し、リッツの方法を用いることにより、弾性波間の結合機構を明らかにした。さらに回路論の立場より、弾性波導波系の構成（Synthesis）を念頭におき、摂動部をモード変換器と名づけ、その働らきを行列表示した。本論文では、基本系と摂動系との境界での反射を無視して理論を展開したが、厳密には正しくない。しかし、摂動量が小さいゆえ、反射を無視することは妥当であろう。

終りに、日ごろ、ご討論いただく牧本研究室の諸氏に深謝する。

文献

(1) H.F. Tiersten: "Elastic surface waves guided by thin films", J. appl. Phys., 40, 2, p770 (Feb. 1969)

(2) G.J. Gabriel and M.E. Brodwin: "The solution of guided waves in inhomogeneous anisotropic media by perterbation and variational methods", IEEE Trans., MTT-13, 3, p364 (May 1965)

(3) B.A. Auld: "Application of microwave concepts to the theory of accoustic fields and waves in solids", IEEE Trans., MTT-17, 11, p800 (Nov. 1969)

(4) J.F. Nye: "Physical propaties of crystals", Clarendon Press, Oxford (1967)

(5) B. Friedman: "Principles and Techniques of applied mathematics", John Wiley & Sons (1956)

(6) R.A. Waldron: "The mode spectrum of a microsound waveguide consisting of an isotropic rectangular overlay on a perfectry rigid substrate", IEEE Trans., SU-18, 1, p8 (Jan. 1971)

(7) 山本、小山田、牧本："異方性薄膜光導波系の結合モード解析とその応用"，輻研資料（昭47-04）

発振していないガンダイオードの計算機シミュレーション

不均一ドナー分布をもつ場合

岡崎　芳・張　年錫・松尾幸人

大阪大学産業科学研究所

昭和48年2月　2日

輻射科学研究会

発振していないガン・ダイオードの計算機シミュレーション
―不均一ドナ分布をもつ場合―

岡崎 芳・張 年錫・松尾幸人

（大阪大学産業科学研究所）

1. 緒言

近年，電子遷移効果にもとずく負性微分移動度（NDM）特性を持つ半導体（GaAs, InP等）をマイクロ波帯の固体化増巾器として用いる研究が進められている。増巾器への応用の一方法としてNDM特性による空間電荷波の増大を利用した負性抵抗反射形増巾器の構成がある。反射形増巾器を構成する場合，素子自体安定な，すなわち発振していない状態を用いる方法[1]と，通常ガン発振をするオーバクリティカル・ドープ（ドナ密度×素子の長さ＞$10^{12}(m^{-2})$）のダイオードを，深いバイアス点で，回路により安定化したとき生ずる負性抵抗を用いる方法[2]がある。前者に相当する素子は，通常サブクリティカル・ドープ・ダイオードと呼ばれている。サブクリティカル・ドープ・ダイオードをNDMの閾値以上にバイアスすると，カソードから多量のキャリヤが，注入されるため，カソード近傍の電界は，NDMの閾値電界以下となり，損失抵抗として働くことになり，非能率的である。従来，この低電界領域を除くため，Schottky電極を用いる方法[3]が，提案されているが，このような境界条件という観点ではなく，われわれは，素子内のドナ分布という観点から検討を行なう。すなわち不均一なドナ分布を持つ場合の直流電界分布，インピーダンス，拡散ノ

イズなどを調べ，不均一ドナ分布が，増巾素子としてのサブクリティカル・ドープ・ダイオードに，どのような影響を，およぼすかを究明した。オーバクリティカル・ドープ・ダイオードでも，ドナ密度が十分に大きくなると，ドメインがアノードに到達しても消滅することなく定常的に存在し続け，通常のガン発振が生じない場合がある。われわれは，このようなアノードにおけるドメインのトラップと不均一ドナ分布との関連を明らかにする。

回路により安定化されたオーバクリティカル・ドープ・ダイオードが，ドメイン・トラップという形態をとるのか，サブクリティカル・ドープ・ダイオードの内部電界に近い形態をとるのか，著者の知るかぎりでは，未だ明らかにされてないし，また解析も困難である。しかし，サブクリティカル・ドープ・ダイオードおよびドメイン・トラップの生じるダイオード，すなわち発振していないダイオードの特性を，不均一ドナ分布等の諸条件について調べることは，回路により安定化されたダイオードの特性を知る上で重要である。われわれは，不均一ドナ分布という観点から，増巾素子としてのガン・ダイオードの安定性について，若干考察を行なう。

2. 解析

2·1 基本方程式とシミュレーション・モデル

本論文におけるシミュレーションでは，次の一次元諸方程式を用い，それらを差分方程式に書きなおして，数値計算を実行した。

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon}[n - n_d(x)] \qquad (1)$$

$$J_c = e n v(E) - eD\frac{\partial n}{\partial x} \qquad (2)$$

$$J = J_c + \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (3)$$

J_c は伝導電流密度，J は全電流密度である。なお，拡散定数 D は電界に依存しないものとし，$D = 200\ cm^2/s$ とした。また電子速度と電界の関係式として，次式を用いた。[6]

$$v(E) = \frac{\mu_0 E + v_s (E/E_0)^K}{1 + (E/E_0)^K} \qquad (4)$$

上式中，$\mu_0 = 8000\ cm^2/V \cdot s$，$v_s = 8.5 \times 10^6\ cm/s$，$E_0 = 4000\ V/cm$，$K = 4$ を用いた。

素子の動作層の長さとして $16\mu m$ を仮定し，両端に $10\ n_{d0}$ の高ドナ密度領域をオーム性接触として持っている。不均一ドナ分布として(5)式のように直線的に変化するものを仮定した。

$$n_d(x) = \frac{2n_{d0}}{r+1}\left[(r-1)\frac{x}{L} + 1\right] \qquad (5)$$

ここで，r は動作層のカソード側におけるドナ密度 n_{dK} とアノード側におけるドナ密度 n_{da} との比 n_{da}/n_{dK} であり，L は動作層の長さである。

直流電圧印加時における定常電界分布は，(3)式中の変位電流が零，すなわち 全電流密度 J が伝導電流密度 $(1/L)\int_0^L J_c dx$ に等しくなる時点で得られる。

シミュレーションにおける空間メッシュは $\Delta x = 0.2\mu m$，時間メッシュは $\Delta t = 0.1ps$ である。なおシミュレーションには，京大システムIII（FACOM 270-30）を用いた。

2.2 小信号インピーダンス

小信号インピーダンスは，(1)，(2)，(3) において直流分に重畳した微小交流信号を仮定することにより得られ，微小交流信号電界に対する微分方程式は，(6)式のように書ける。

$$D\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - v_0\frac{\partial E_1}{\partial x} - (\omega_c + j\omega)E_1 = -\frac{J_1}{\varepsilon} \qquad (6)$$

$$\omega_c = \frac{en_0}{\varepsilon}\frac{\partial v_0}{\partial E_0}$$

J_1：付全電流

(6)式中，v_0, ω_cは，場所xの関数である。(6)式を解く場合，ルンゲ・クッタ法を用いて解くことも出来るが，ここでは，インピーダンス分割法[7]と呼ばれる方法を用いる。すなわち，ダイオードを，長さがhのN個のセグメント・ダイオードの直列接続と考え，かつそのセグメント・ダイオード内では，v_0, ω_cは，ほゞ一定であると考える。さらに変数xを$x_i = [x-(i-1)h]/h$に変換すると第i番目のセグメント・ダイオードのカソード側で$x_i=0$，アノード側で$x_i=1$となる。(6)式は，(7)式のように書ける。

$$D\frac{\partial^2 E_{1i}}{\partial x_i^2} - v_i h\frac{\partial E_{1i}}{\partial x_i} - h^2[\omega_{ci} + j\omega]E_{1i} = -\frac{h^2}{\varepsilon}J_1 \qquad (7)$$

$\partial v_0/\partial E_0 < 0$で増大波に対応し，かつ$E_{1i}(x_{1i}=0) = 0$を満足する(7)式の解は

$$E_{1i} = \frac{J_1}{\varepsilon D P_i}[1-\exp -S_i x_i] + E_{i-1}(x_{i-1}=1)\exp -S_i x_i$$

$$= \frac{J_1}{\varepsilon D}\left[\frac{1-\exp -S_i x_i}{P_i} + \exp -S_i x_i \sum_{j=1}^{i-1}\frac{1-\exp -S_j}{P_j}\exp\sum_{m=j+1}^{i-1}(-S_m)\right] \qquad (8)$$

$$P_i = [\omega_{ci} + j\omega]/D$$

$$S_i = \frac{v_i h}{2D}\left[\sqrt{1+4P_i/(v_i/D)^2}-1\right]$$

と書ける。したがって，セグメント・ダイオードのインピーダンス Z_i は，$(h/J_1)\int_0^{x_i} E_i dx_i$ から

$$Z_i = \frac{h}{eD}\left[\frac{S_i+\exp -S_i-1}{P_i S_i} - \frac{\exp -S_i-1}{S_i}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1-\exp -S_j}{P_j}\exp\sum_{m=j+1}^{i-1}(-S_m)\right] \quad (9)$$

これから ダイオードのインピーダンスは

$$Z = \sum_{i=1}^{N} Z_i \quad (10)$$

で得られる。

拡散を含まない場合は，(7)式で $D=0$ とおけばよい。同様な計算により，セグメント・ダイオードのインピーダンスは，(11)式のように得られる。

$$Z_i = \frac{h}{e}\left[\frac{S_i+\exp -S_i-1}{P_i v_i S_i} - \frac{\exp -S_i-1}{S_i}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1-\exp -S_j}{P_j v_j}\exp\sum_{m=j+1}^{i-1}(-S_m)\right] \quad (11)$$

$$P_i = [\omega_{ci}+j\omega]/v_i$$

$$S_i = h P_i$$

実際の計算には，$h=0.2\,\mu m$ を用いた。

3. サブクリティカル・ドープ・ダイオードのシミュレーションの結果

この節では，ドーピング・レベルが，サブクリティカル・ドープ（$n_d L < 5\times10^{11}\,cm^{-2}$）の場合における不均一ドナ分布の直流電

界分布およびインピーダンスにおよぼす影響を調べる。さらに各々のドナ分布の場合の拡散ノイズについて若干ふれる。

平均ドナ密度は $1\times10^{14}cm^{-3}$ で，直流バイアス 20v, 18v, 16v の場合について，r=0.5, 1, 2, 5 のドナ分布について述べる。

3-1 直流電界分布

直流バイアス 18v における直流電界分布および速度電界特性を図1に，r=2における直流電界分布のバイアス電圧による変化を図2に示す。図1にみられるように，rを大きく，すなわちアノードに向ってドナ密度を増加させることにより，直流電界分布はなだらかになり，NDM領域，すなわち $E>E_{th}$ (3.5 kV/cm) の領域がカソードに向って延び，負性微分移動度により負性抵抗という観点から，rが大きい素子が，より能率的に動作することが期待できる。rが1より小さい素子では，当然アノードにおける高電界が強調され，それだけ $E>E_{th}$ の領域が，減少し素子全体が有効に動作し得ない。しかし，それだけ素子は，安定になると考えられる。

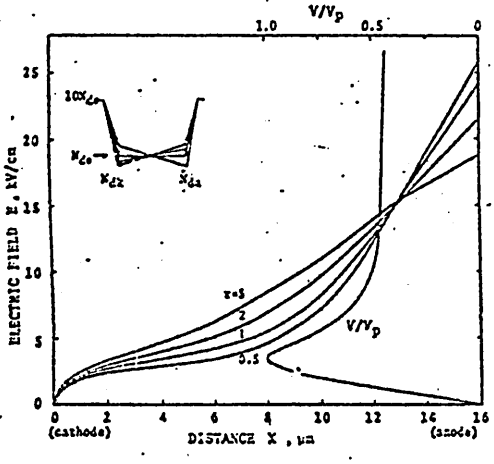


図1 18vにおける直流電界分布

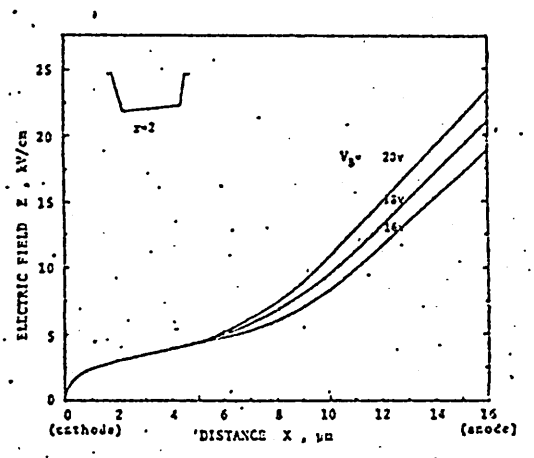


図2. r=2における直流電界分布の変化

また，図2にみられるように，空間電荷制限領域では，バイアス電圧を上げても，カソード側の電界は，上がらず，アノード側の電界が大きくなる傾向にある。

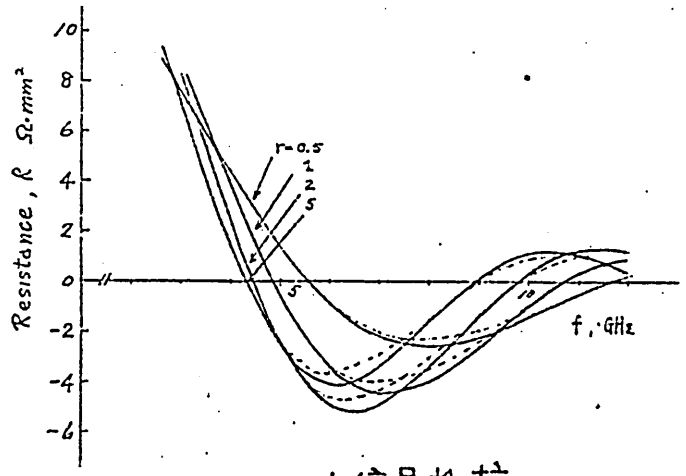
3·2 小信号インピーダンス

各傾斜のドナ分布を持つ素子の小信号インピーダンスを(10)(11)式を用いて，拡散を含まない場合について数値計算したものを図3に示す。

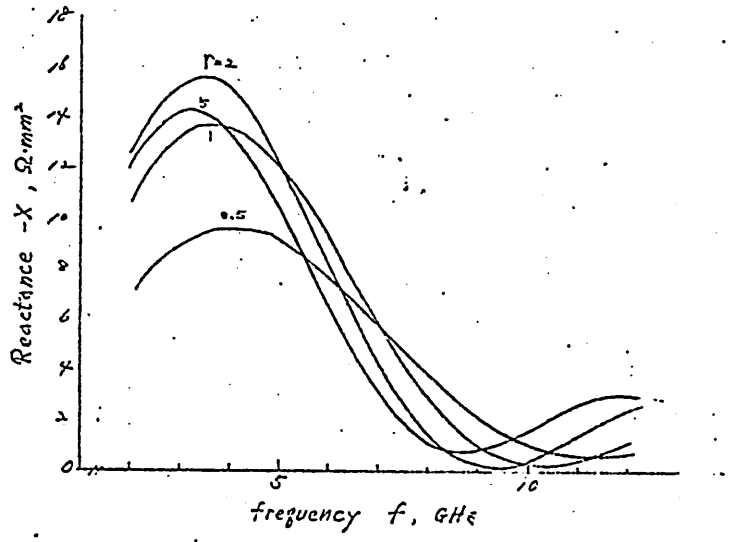
図3(a)からわかるように，$\Gamma<1$の減少分布に対しては，直流電界分布から予想されるように，小信号負性抵抗は，大巾に減少する。しかし，Γの大きい，すなわち，増加ドナ分布の場合，Γを大きくしても，必ずしも小信号負性抵抗は大きくならず，$\Gamma=2$の近傍でピークを持ち，さらにΓを大きくすると，逆に小信号負性抵抗は，減少してくる。これは，このようなΓの値では，カソード前面の低ドナ密度領域が，いわゆる高抵抗制御層として働き一定バイアス電圧の条件下では，直流電流が，減少するためである。すなわち，図1にみられるように，動作層内のキャリヤ電子数が，減少し，それだけ負性微分移動度効果が，$\omega_c \propto n_0$ なる関係から減少することになる。他方，Γが大きくなると，$E>E_{th}$の領域が，増加することにより，負性微分移動度効果は，増大する。この2つの直流特性のため，Γのある値において，小信号負性抵抗が，ピークを持つものと考えられる。

一定バイアス条件下で，各ドナ分布における最大負性抵抗を示す周波数は，Γを大きくすると，低い周波数に移動する。これは，Γを大きくするとE_{th}より大きい電界領域が，増加するためキャリヤ電子の速度が，小さくなり，したがって，キャリヤ電子の走行時間の逆数である周波数が低くなるからである。

小信号負性抵抗の大きさは，平均の負微分移動度の大きさ，したがって，直流バイアス電圧に依存する。16V, 20Vの直流バイ



(a) 小信号抵抗



(b) 小信号リアクタンス

図3 拡散を含まない場合の小信号インピーダンス
バイアス電圧 1Bτ
(a)図中点線は拡散を考慮した場合

アスにおいても，上記の小信号負性抵抗の振舞は，保たれる。図4は，τに対する最大小信号負性抵抗の大きさ，およびそれを与

える周波数の変化を，3つの直流バイアスについて示したものである。

小信号負性抵抗のこれらの振舞は，他のドナ・レベルに対しても得られる。たとえば，$n_{do}=5\times10^{13}cm^{-3}$ の場合にも，$\gamma=2$ で最大小信号負性抵抗が，得られた。

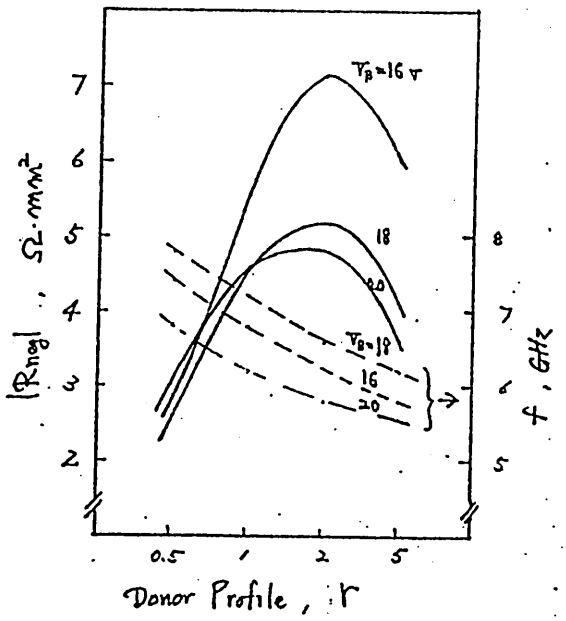


図4 小信号負性抵抗，周波数の γ による変化（拡散を考慮しない時）
— |Rneg|, --- f

以上のインピーダンスの計算においては，キャリヤの拡散効果が，含まれていない。(9), (10)式を用いて，拡散効果を考慮して，小信号負性抵抗を計算したものを，図3(a)に，点線で示す。

従来，報告されている研究結果と同じように，拡散は，小信号負性抵抗を減少させるほうに働く。また，小信号負性抵抗でみるかぎりでは，拡散効果は，ドナ分布が変っても，その影響に差違はないといえる。すなわち，拡散を考慮しても，$\gamma=2$ で，ピーク小信号負性抵抗が得られる。また図3から得られるQ値（X/R; $Z=R+jX$）も5～0.1のオーダで，$\gamma=2$ で小さい値を示す。

ここで，大信号インピーダンスについて，若干検討しておく。大信号アドミタンスは，定常電界分布が得られた後，直流バイアスに，交流を重畳したときの電流応答の基本波成分から得られる。得られたアドミタンス の逆数から大信号インピーダンスを計算した。直流バイアス 18V，周波数 $f=6.2$GHz, 8.0GHz における

r=2, 1 の大信号負性抵抗とQ値を示したのが，図5である。大信号解析でも，小信号解析にみられた負性抵抗の振舞がみられる。

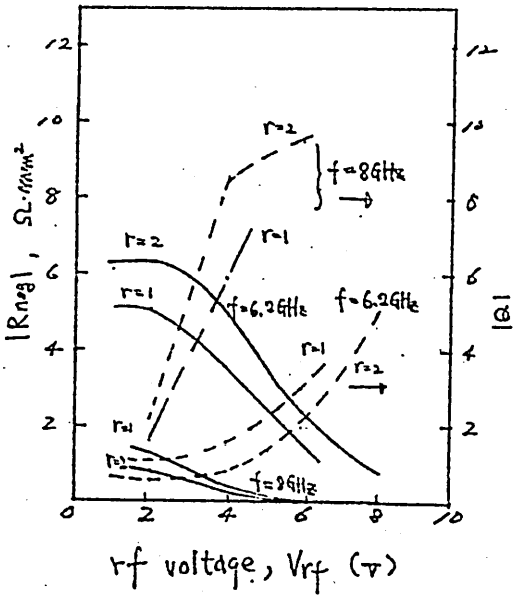


図5 r=1,2における大信号負性抵抗とQ値
— 負性抵抗
--- Q値

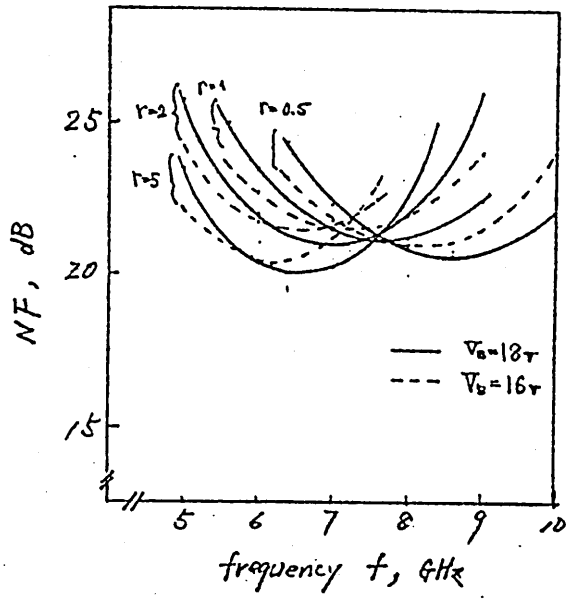


図6 各ドナ分布における拡散ノイズ

3·3 拡散ノイズ

オーミック接触を持った負性抵抗素子を用いた反射形増巾器の雑音指数の評価法として，拡散ノイズを計算する方法がある。すなわち，素子中に熱的に発生した擾乱によって素子の両端にあらわれる開放雑音電圧を計算する方法で次式による。[8]

$$NF = 1 + \frac{\langle \delta V_n^2 \rangle}{\Delta f} \frac{1}{4k_B T|R|} \qquad (12)$$

$$\frac{\langle \delta V_n^2 \rangle}{\Delta f} = \int_{vol} |\nabla Z_{Tk}|^2 4e^2 n D \cdot d(vol) \qquad (13)$$

ここで ∇Z_{TX} として E_1/J_1 を用いて計算した。但し E_1 の計算には，拡散を無視した式を用いた。計算結果を図6に示す。THIM[8]によると，均一な直流電界分布を持つものほど，雑音指数NFは低くなると報告されているが，図6は，必ずしもこの傾向を示していない。THIM や CHARLTON[9]らが，先に示唆した理論とは，必ずしも一致しない実験結果が報告[10]されており，ここでの計算結果を考え合せると，ドナ分布の形にも影響されるものと考えられる。すなわち，直流電界分布が，一様になっても，それがどの様な方法によるものかに依存する。しかし，どの様なドナ分布が，雑音指数に関して最適であるかは，現在のところ明らかでない。

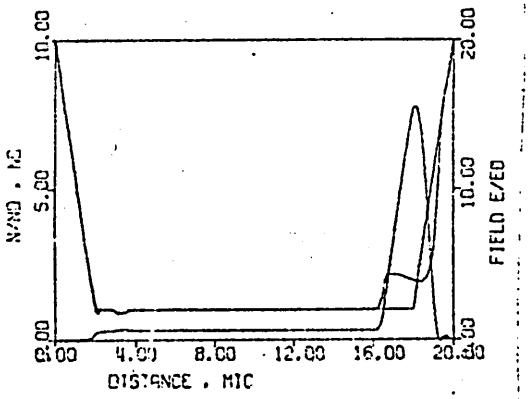
4. 高ドナ密度下における計算機シミュレーションの結果と素子の安定性

前節では，$n_{do}L < 5\times10^{11}\,cm^{-2}$ の場合を取扱ったが，ここでは，$n_{do}L > 5\times10^{11}\,cm^{-2}$ のオーバクリティカル・ドープの場合について調べ，さらに，サブクリティカル・ドープの場合も含めて，素子の安定性について若干検討する。

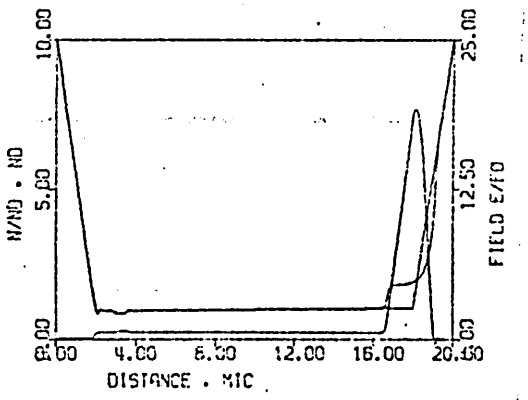
4-1 ドメイン・トラップと不均一ドナ分布

均一なドナ分布を持つ場合，$n_{do}L > 10^{12}\,cm^{-2}$ の素子では，通常のガン・ドメイン・モードの発振が起る。しかし，n_{do} が，$2\times10^{15}\,cm^{-3}$ 以上になると，カソードで発生したドメインが，アノードに到達したあと，消滅しないで，アノード高電界層として，安定状態に達する場合があり，通常ドメイン・トラップと呼ばれている。このアノードにおけるドメイン・トラップの現象は，オーバクリティカル・ドープ・ガンダイオードを増中器として用いる場合の安定化の一形態である。

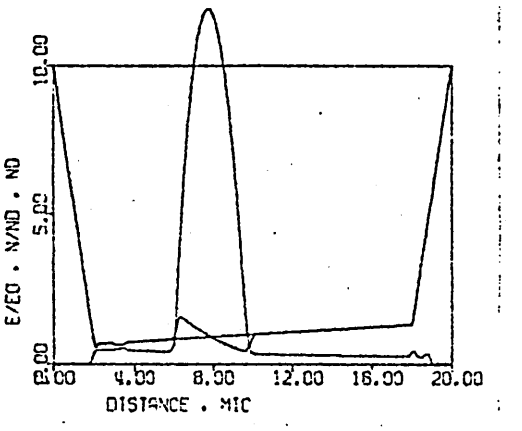
直流バイアス 12V における各ドナ分布に対するドメインの様子を示したのが，図7である。



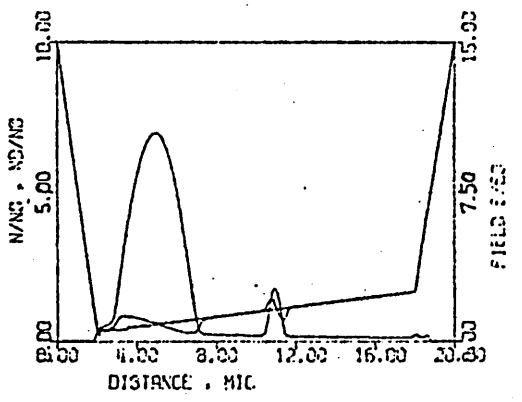
(a) $r=1$, $n_{do}=2\times10^{15}cm^{-3}$
"trap"



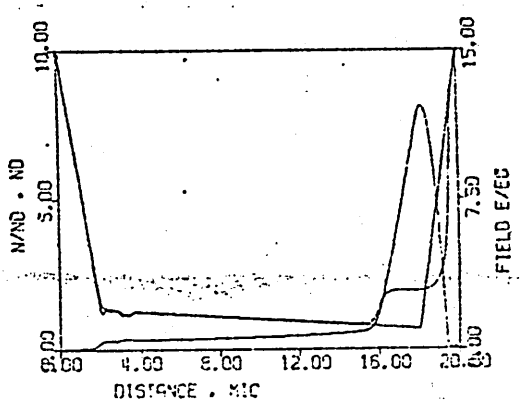
(b) $r=1.1$, $n_{do}=4\times10^{15}cm^{-3}$
"trap"



(c) $r=2$, $n_{do}=4\times10^{15}cm^{-3}$
"traveling"



(d) $r=5$, $n_{do}=4\times10^{15}cm^{-3}$
"traveling"



(e) $r=0.5$, $n_{do}=1\times10^{15}cm^{-3}$
"trap"

図7 オーバクリティカル・ドープの場合におけるドメインの様子
バイアス電圧 12V
カソードバッチは 10% 減少のドナ密度で 0.6 μm 中

$r=1$ の均一分布では，ドナ密度が，$2\times10^{15}cm^{-3}$ あたりから，ドメインのアノード・トラップが起る。すなわち，カソードで発生したドメインが，アノードに到達後，図7(a)に示される電界分布で定常に達する。$r=2$ のドナ分布では，ドナ密度が $4\times10^{15}cm^{-3}$ でもアノードにおけるドメイン・トラップが起らず，ドメインの周期的な走行がみられる。発振周波数は，6.5 GHz である。7図(d)は，$r=5$ の場合を示しており，この場合もドメイン・トラップは生じない。また，直流電界が，アノード側でかなり小さくなるため，ドメインは，ほゞ素子の中央で消滅し，新しいドメインがカソードに発生している。発振周波数は，11.4 GHz である。[13] 図7(c)，(d)にみられるように，このような高ドナ密度においては，拡散効果が大きく，ドメインの蓄積層が大きくならない。

$r=0.5$ の分布では，ドメイン・トラップの生じるドナ密度は $r=1$ の場合よりさらに小さい値となる。$r=0.5$ の場合，$r=1$ と異なって，カソードにおけるドメインの発生，走行はなく，アノードにおける高電界が，時間と共に増大する。[4] このように，ドメイン・トラップによるオーバクリティカル・ドープ・ダイオードの安定化は，多分にドナ分布に左右される。なおドメイン・トラップ時においては，小信号負性抵抗は得られない（図8）が，大信号負性抵抗は，得られることが報告されている。[11]

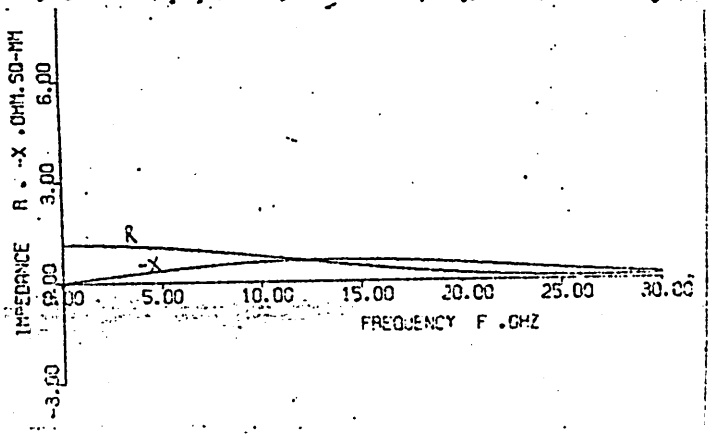
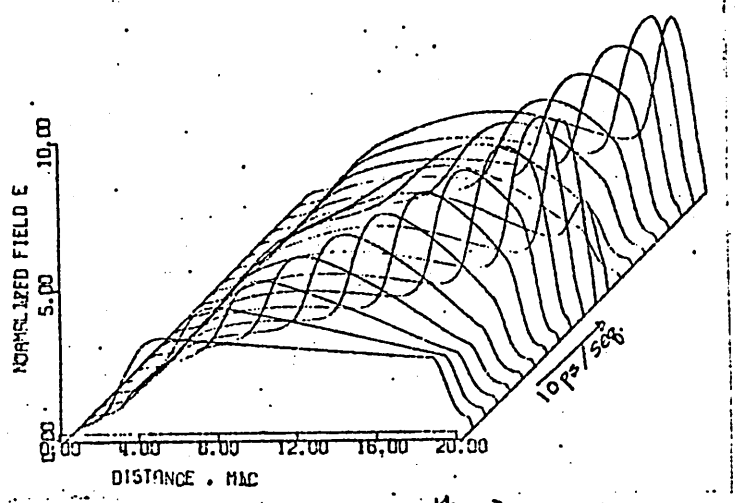


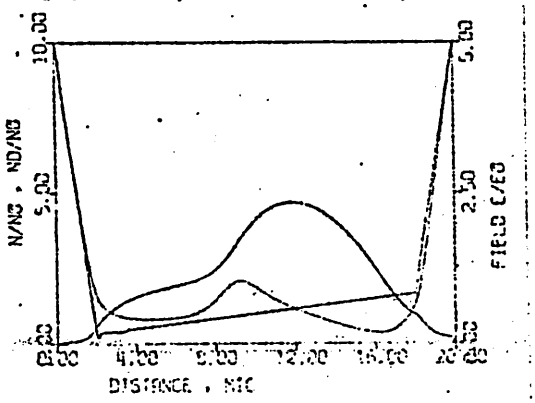
図8 ドメイン・トラップ時の小信号インピーダンス（図7(e)の場合）

4-2 素子の安定性[12]

4-1で述べたように，オーバクリティカル・ドープ・ダイオードの場合，アノードに向って減少するドナ分布にすることにより，ドメイン・トラップという形で素子は安定になり易い。逆に増加するドナ分布により，ドメイン・モードの発振に移り易いことがわかる。一方，サブクリティカル・ドープ・ダイオードで，$N_{do}L$が大きいものでは，増加ドナ分布の場合，閾値電圧の1.5倍付近では，蓄積層モード，あるいはマルチ・ドメインモードでの不安定性が生ずる。図9は，これらの不安定性を示している。



(a) $r=2$, $N_{do}=1\times10^{14}cm^{-3}$, $V_B=8V$



(b) $r=5$, $N_{do}=1\times10^{14}cm^{-3}$, $V_B=8V$ (電圧印加後150ps)

図9 サブクリティカル・ドープ増加分布における不安定性

$n_{do}=1\times10^{16}cm^{-3}$, $\gamma=2$の素子で，バイアス点を，負微分移動度が大きくなるほうに下げてゆくと，はじめ小信号インピーダンスは，oscillating function（負性抵抗領域でリアクタンスが，符号をかえる）となり，さらに蓄積層モード，マルチ・ドメイン・モードへと不安定性が増大する。逆のドナ分布$\gamma=0.5$では，アノード高電界層が強調される。すなわち，ドメイン・トラップ状態に近い分布となる。

これらのことから，オーバクリティカル・ドープにおける比較的均一な素子内部の電界分布は，蓄積層あるいは，ドメインの発生・消滅という微小な不安定性を伴い易いと考えられる。また，この場合さらに安定化されるためには，特殊なカソード境界条件，およびランダム・ドナ分布を要する。[15] これらの負荷を含まないシミュレーション結果を，そのまま実際のガン・ダイオードを用いた増巾器に適用することは出来ない。しかし，以上の結果から，通常の安定化されたオーバクリティカル・ドープ・ガンダイオード増巾器の内部電界は，アノード高電界層という，サブクリティカル・ドープ・ダイオードよりさらに不均一な分布を持つものと考えられる。このような安定化には，アノードにおける高抵抗層が重要な役割を果す。

5. 結言

サブクリティカル・ドープ・ダイオードに直線的に変化するドナ分布を導入し，その直流電界分布，インピーダンス，および拡散ノイズなどを調べ，その増巾素子としての特性を検討した。その結果，アノードに向って減少するドナ分布では，負性抵抗は大巾に減少し，Q値も大きくなること，逆に増加するドナ分布の場合，内部直流電界はなだらかになり，負性抵抗も増加し，Q値も小さくなることが明らかにされた。しかし，アノードに向っての増加の割合を大きくしても，必ずしも負性抵抗は大きくならず，

カソードとアノードのドナ密度比が2より大きくなると，負性抵抗は減少してくる。雑音指数は，必ずしも，均一な定界分布下のほうが低いのではなく，ドナ分布にもよると考えられる。

オーバクリティカル・ドープ・ダイオードにおけるドメイントラップと不均一ドナ分布との関連を明らかにし，オーバクリティカル・ドープ・ダイオードにおける安定化が，カソード条件だけでなく，アノードにおける高抵抗層も重要な役割を果すことを示唆した。

6．参考文献

1) McCumber,D.E. and Chynoweth,A.G.,"Theory of negative conductance amplification and of Gunn instabilities in 'two-valley' semiconductors," IEEE Trans.,vol. ED-13, pp.4-21, 1966

2) Perlman,B.S.,Upadhyayula,C.L. and Marx,R.E.,"Wide-band reflection-type transferred electron amplifiers," IEEE Trans., vol. MTT-18, pp.911-921, 1970

3) Atalla,M.M. and Moll,J.L.,"Emitter-controlled negative resistance in GaAs," Solid-State Electron. Lett., vol.12, pp.611-629, 1969

4) Gueret,P.," Convective and absolute instabilities in semiconductors exhibiting negative differential mobility," Phys. Rev. Lett., vol.27, pp.256-259, 1971

5) Thim,H.,"Experimental verification of bistable switching with Gunn diodes," Electronics Letters, vol.7, pp.246-247, 1971

6) Thim,H.W.,"Computor study of bulk GaAs devices with random and one dimensional doping fluctuations," J.Appl. Phys., vol.39, pp.3898, 1968

7) 塚田 俊久,浜崎 襄二「発振していないバルク形 GaAs ダイオードの微小信号アドミタンス」電子通信学会 論文 昭44-364 [B-145]

8) Thim,H.W.,"Noise reduction in bulk negative-resistance amplifiers," Electronics Letters, vol.7, pp.106-108, 1971

9) Charlton,R., Freeman,K.R. and Hobson,G.S.,"Stabilization mechanism for 'supercritical' transferred-electron amplifiers," Electronics Letters, vol.7, pp.576-578, 1971

10) Baskaran,S. and Robson,P.N.,"Gain and nois figure of GaAs transferred-electron amplifiers at 34 GHz," Electronics Letters, vol.8, pp.109-110, 1972

11) Jeppsson,P. and Jeppsson,B.,"The influence of diffusion on the stability of the supercritical transferred electron amplifier," Proc. IEEE, vol.60, pp.452-454, 1970

12) Kromer,H.,"The Gunn effect under imperfect cathode boundary conditions," IEEE Trans. vol. ED-15, pp.819-837, 1968

13) Suga,M. and Sekido,K.,"Effects of doping profile upon electrical characteristics of Gunn diodes," IEEE Trans. vol. ED-17, pp.275-281, 1970