輻射科学研究会資料

大阪管におけるクエンチング動作

―― 実験結果とその解析 ――

大東延久　（関西大学工学部）
蔵本博光　（大阪松貿エンジニアリング）
森田正信　（関西大学工学部）

1974年 4月 26日

1. はじめに

一般に、再生方式受信器の感度の限界は、正帰還が回路の発振する動作値まで増加したときであるが，超再生方式では回路を間欠的に発振させること（クエンチング動作）により，回路の発振実の動作上限をさらに拡大し，飛躍的な感度の増大をはかったものである.[1),2)]

大阪管検波においては，減速電子による増幅作用をともなって共振器にエネルギを戻すので，一種の再生検波器（あるいは同期検波器）と考えられる．それ故，これにクエンチング動作を与えることにより検波感度を増大させることが考えられ，われわれはこの観点から標題に関する種々の実験を行って来た．現段階では，感度の飛躍的な向上は得られていないが，これら実験面から得られた種々の典形的な特性が，個々の条件を考慮して，その動作機構には触れずに，外から見た実験事実によるブラック・ボックス的な考えから導いた理論式によるものと定性的によく一致する結果を得たので，これについて報告する.

2. クエンチング動作時の諸特性

2・1 試作管および実験回路

実験に使用した大阪管は図1に示す線状フィラメント双曲線電極大阪管である．実験回路は図2に示すように，クエンチング電圧を陽極にかけ，検波出力は端電極より取

F：フィラメント
A, A_0：陽極
Ba：背電極
En：端電極
$l_x = 6\ mm$
$l_y = 2\ mm$
$l_z = 15\ mm$
$y_0 = 0.5\ mm$

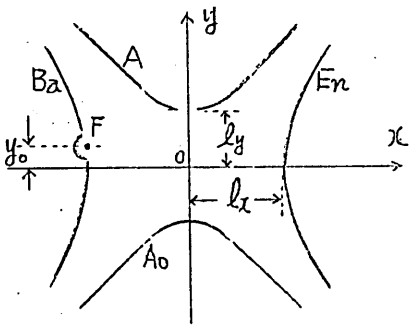


図 1

り出している．入来波電圧 V_{in} は基準電圧に対する dB で表わし，必要に応じて 1 kHz の正弦波振幅変調を加えている．

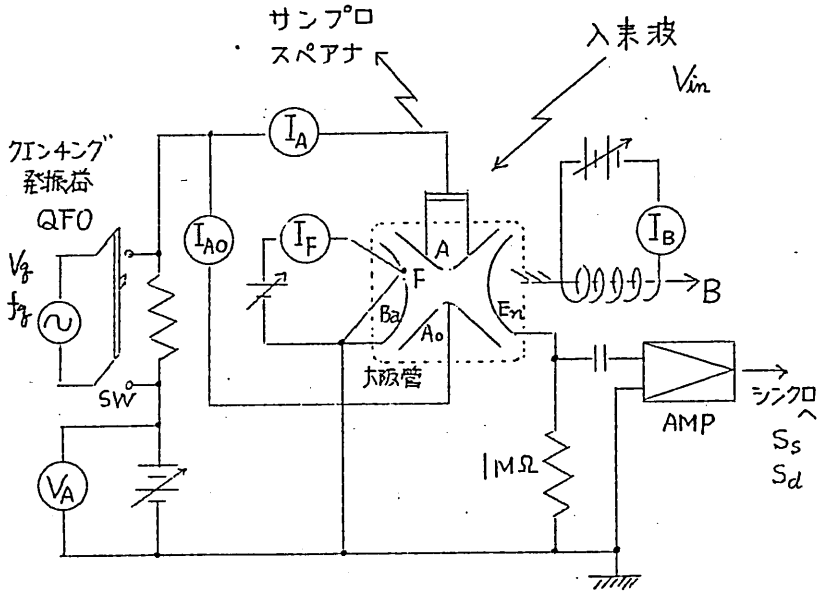


図　2

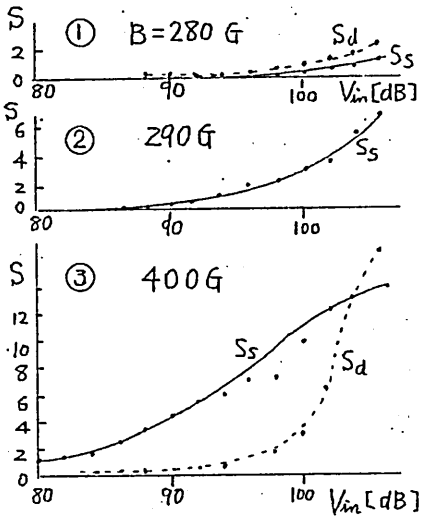
2・2　入来波電圧に対する特性

つぎの 4 つの典形的な特性が得られる．（シンクロ面上の振幅測定による超再生検波出力 S_s，直接検波出力 S_d に関して）．

① 磁界の低いときによく見られる特性で，S_s と S_d は相似的な変化をするが，常に $S_s < S_d$ である．

② S_d は得られずに，S_s のみである．

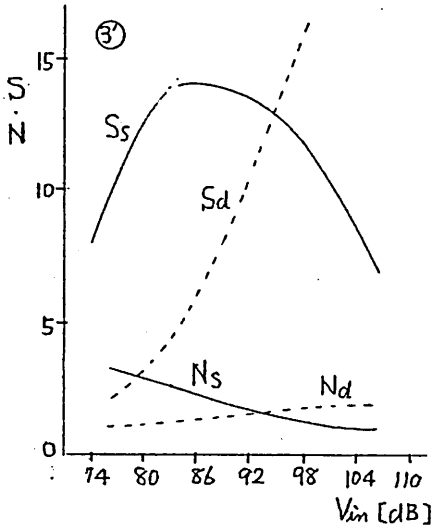
③ V_{in} の小さい間は $S_s > S_d$，大きくなると $S_s < S_d$，さらに大きくなると S_s は頭うちして下がることがある．この場合の典形的な特性を



V_A = 203 V　　f_g = 2 MHz
I_F = 1.21 A　　V_g = 11 V*

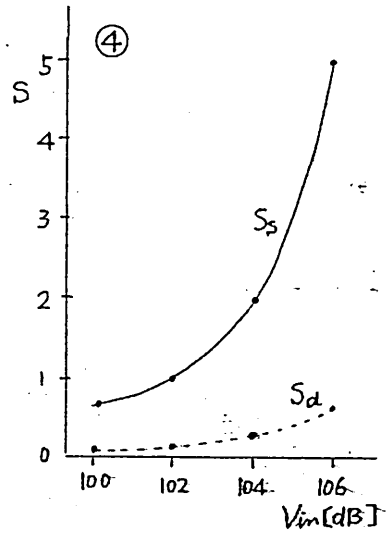
図　3

* V_g は すべて 振幅値を示す．



$V_A = 222\,V$　$f_g = 2\,MHz$
$B = 300\,G$　$V_g = 2.05\,V$
$I_F = 1.30\,A$

図　4



$V_A = 220\,V$　$f_g = 2\,MHz$
$B = 420\,G$　$V_g = 11\,V$
$I_F = 1.19\,A$

図　5

図4の③に示す.

④ S_s と S_d の変化が相似しているが，その間の大小関係にきまりがない.（図5）.

2・3　クエンチング電圧に対する特性

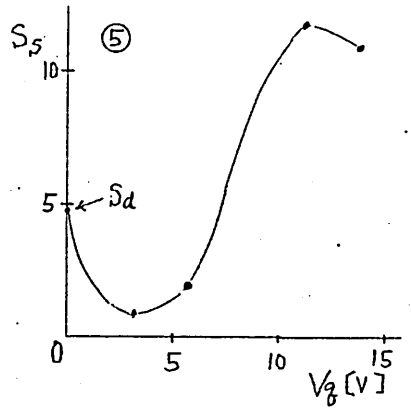
これに関しては，つぎの2つに分類することが出来る（図6，7）.

⑤ S_d が存在し，V_g の増加とともに S_s は減少し，0に近い最小値を経て，ふたたび S_s が増大し，最大点をもつ.

⑥ S_d は存在せず，ある値以上の V_g から S_s が現われ，最大点をもつ.

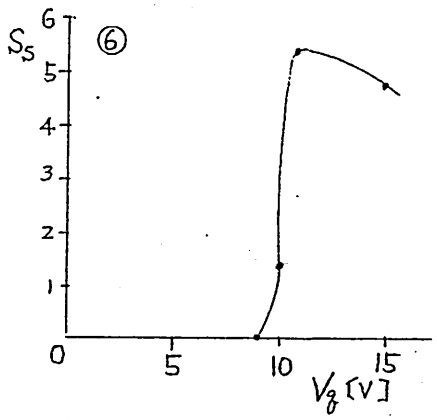
2・4　多重発振スペクトルに対する特性

一般に，超再生検波において内部発振（周波数 f_{os}）を行っているところへ，クエンチング電圧（周波数 f_g）を加えると図8(a)の様な f_{os} を中心



V_A=209 V　f_g= 2 MHz
B = 722 G　V_{in}= 100 dB
I_F=1.20 A

図　6



V_A= 108 V　f_g=1.39 MHz
B= 150 G　V_{in}=100 dB
I_F= 1.20 A

図　7

とした多重発振スペクトルが得られるが,[1] それ以外に (b) の様な入来波周波数 f_{in} を中心とした多重発振スペクトルも観測される. この f_{in} 中心の場合は, f_g を入れない最初は実線の位置に f_{os} のスペクトルが現われているが, f_g を加えることによって f_{os} は消滅し, そして f_{in} を加えることによって f_{in} 中心の多重発振となる.

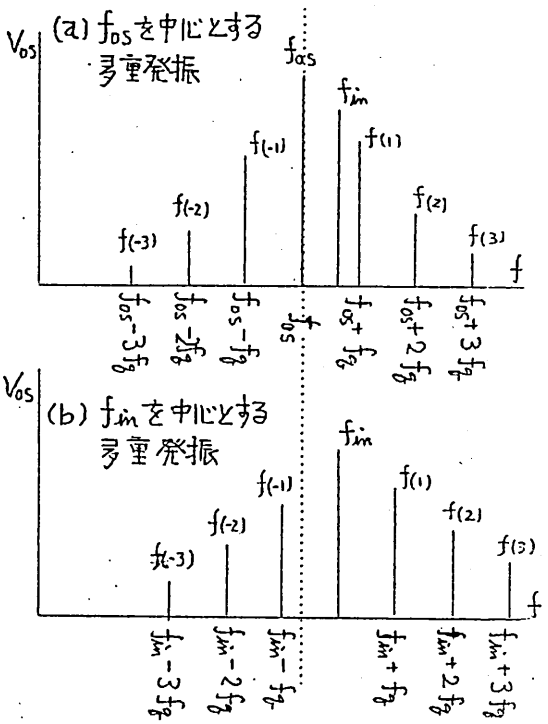


図　8

f_{os} 中心, f_{in} 中心のそれぞれの場合に対する, 入来波電圧 V_{in}

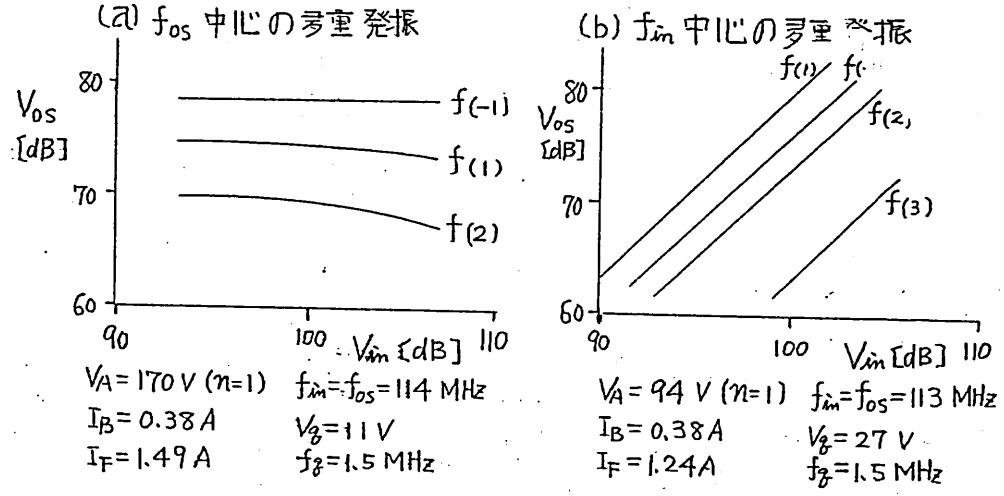


図 9　入来波電圧 V_{in} に対する 内部発振電圧 V_{os} の関係

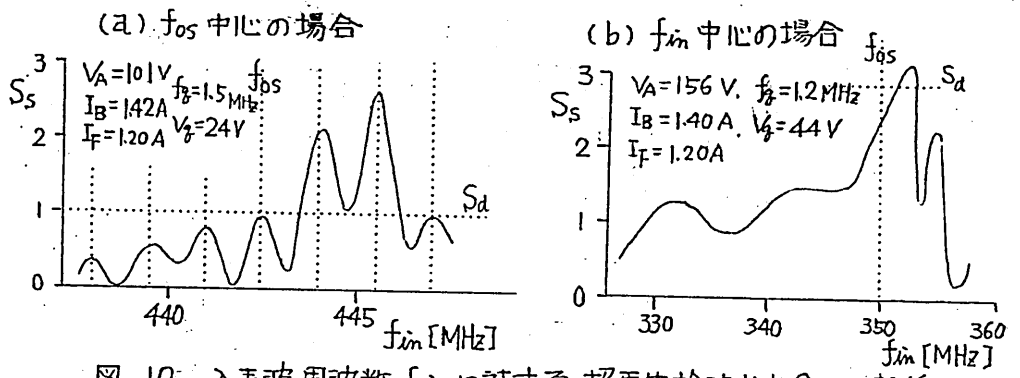


図 10　入来波周波数 f_{in} に対する 超再生検波出力 S_s の関係

と内部発振電圧 V_{os} の関係が図9に，入来波周波数 f_{in} と超再生検波出力 S_s の関係が図10に，示されている．図9から V_{os} は，f_{os} 中心の場合にはあまり V_{in} に影響されず，むしろ負の傾斜をもっているのに対して，f_{in} 中心の場合には V_{os} が V_{in} に比例して影響されていることがわかる．また図10(a)で実線は多重発振スペクトルの位置を示して居り，したがって f_{os} 中心の場合には入来波と多重発振スペクトルが一致したときに S_s が増大している．それに対して f_{in} 中心では多重発振スペクトルに無関

係に S_s が得られる．また検波出来る周波数幅は，f_{os} 中心で 10 MHz 程度であるのに対して，f_{in} 中心では 30 MHz 位に広くなる．

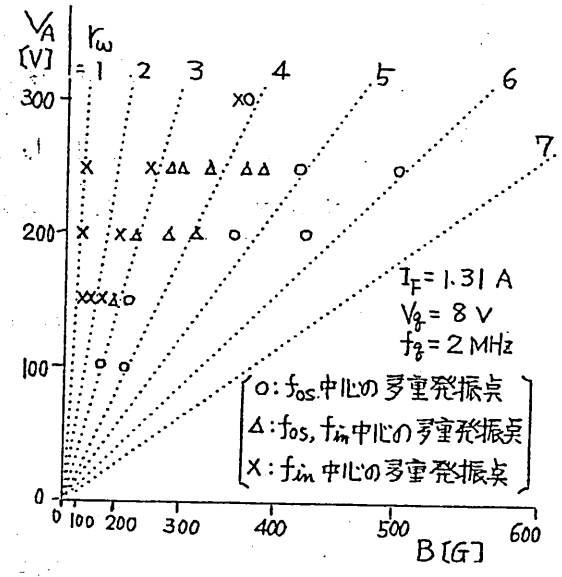


図 11 f_{os}, f_{in} を中心とする多重発振の分布

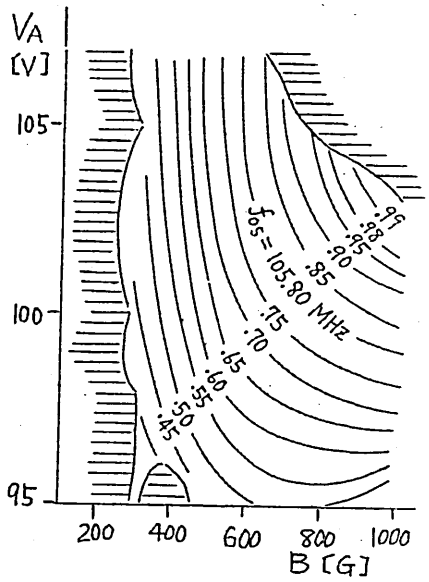


図 12 等 f_{os} 曲線

f_{os} 中心，f_{in} 中心 のそれぞれの動作をする V_A-B 面での分布を調べると図 11のようになり，それらは

f_{os} 中心：高磁界，低陽極電圧域（r_ω 大）

f_{in} 中心：低磁界，高陽極電圧域（r_ω 小）

の領域で分布していることがわかる．ここで r_ω は，図13 に示すように電子振動の x方向の振動数 ω_e に対するy方向の振動数 ω_m の比で，$r_\omega = \omega_m/\omega_e = \sqrt{\frac{\eta l_z^2 B^2}{2V_0} - 1}$ で表わされ，η は電子の比電荷，$V_0 = 0.9\,V_A$ である．そして r_ω が大きくなるほど電子のy振幅は小さくなり，陽極間隙 G から軌道が遠ざかる．また同じ

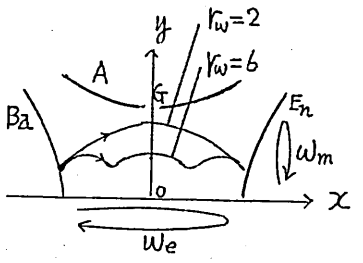


図 13 r_ω による電子軌道の違い

V_A-B面に等内部発振周波数曲線を描くと図12のようになる．高周波の影響を考えない，静的な大阪管本来の発振周波数は磁界に無関係で，陽極電圧のみで決るので（l_xは一定として），図12の右下部（f_w大の領域）がその特性を示して居り，左上部（f_w小の領域）はそうでない高周波の影響を大きく受けている領域と考えられる．このことは図13の電子軌道が，f_wが小さくなるほど陽極間隙Gに近ずいて高周波の影響をうけやすいことからも納得のいくことである．結局．

- 低磁界高陽極電圧域では，運動電子に対して静電界よりも高周波電界の影響が大きいので，入来波電圧が加わるとf_w中心の多重発振が起る．（入来波によって内部発振が励振される．図9(b)参照）．
- 高磁界低陽極電圧域では，運動電子に対して高周波電界よりも静電界の影響が大きいので，入来波電圧が加ってもf_{os}中心の多重発振となる．（入来波によって内部発振が影響されにくい．図9(a)参照）．

と考えられる．

2・5 内部発振特性と発振包絡線

静的な場合の内部発振のV_A特性を図14に示す．この発振領域外（V_A=205V）と発振領域内（V_A=228V）に動作点を設定して，V_gを与えた場合のサンプロで観測される発振包絡線を図15，16に示す．各図の下の波形はV_gの波形を表わしている．

図15ではV_gが増大すると，次第に発振領域に入っている期間が長くなるが，最初はそれが短いため発振の成長の途上で非発振領域に出てしまい発振包絡線は線形に近い．V_gがある程度大きくなると十分発振が成長するので包絡線は対数形となる．さらにV_gが増大すると発振域をつきぬけ，

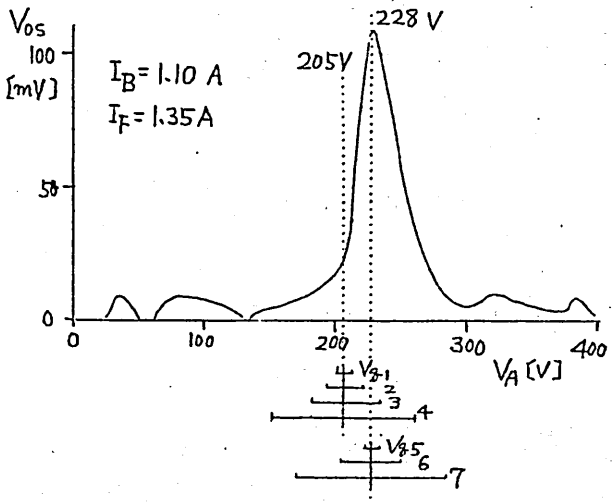
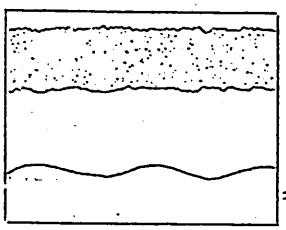
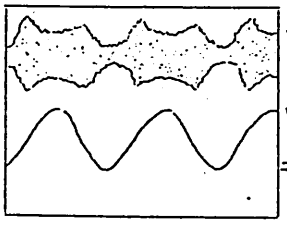
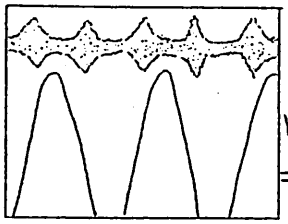


図14 内部発振電圧特性と加えるV_gとの関係





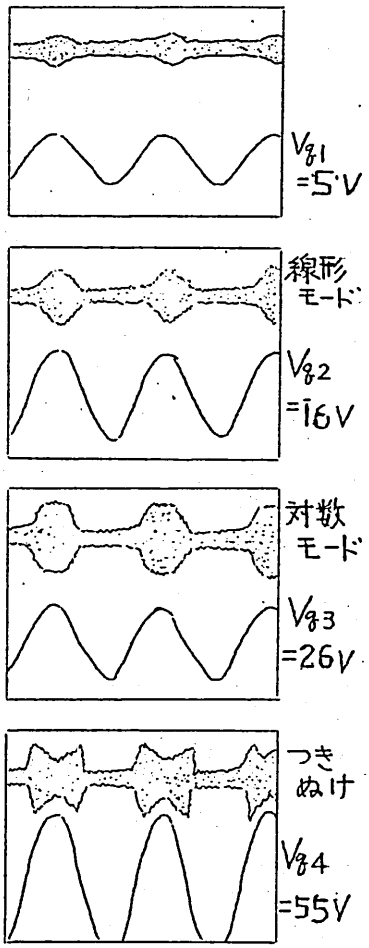


V_A=228V, f_g= 500 KHz

図 16

包絡線は2つにわれた形となる。

図16では動作点が発振領域の中心近くにあるので、V_gの最初は発振領域から出られず、内部発振のピークがそのまま現われ、直接検波と同じ状態となる。V_gが増大すると両側の発振領域外へ出るので、つきぬけ現象が現われる。内部発振特性の形が対称性を欠いているので、領域の右左で減衰度の違いのあることがわかる(V_{g6})。



V_A=205V, f_g=500 KHz

図 15

3　実験結果の解析

3・1　解析に対する基本的な考え方

以上の実験を通じて，一般に大阪管の検波では常に内部発振をともなっているという事が言え，その内部発振電圧 V_{os} は入来波電圧 V_{in} によって影響をうける．そこで，この V_{os} と V_{in} を関係づけるパラメータとして

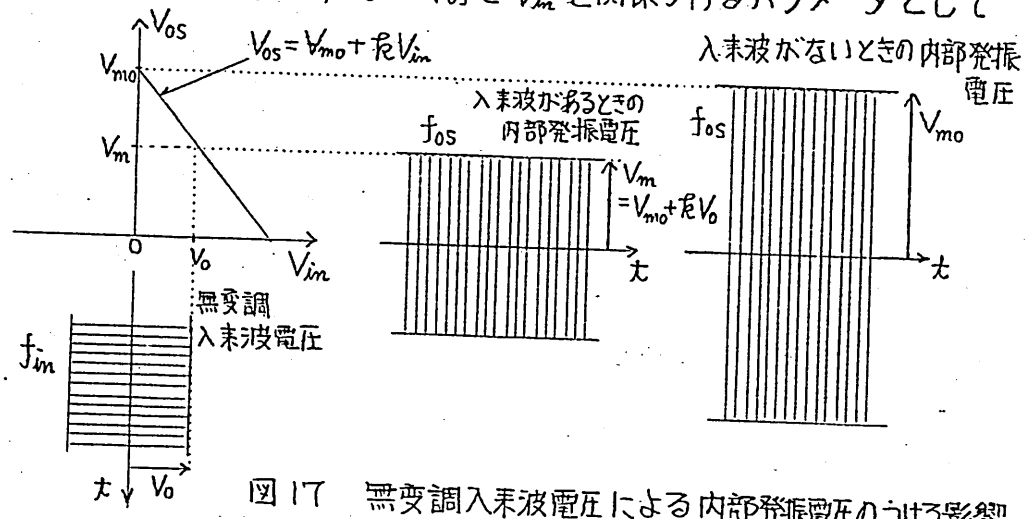


図 17　無変調入来波電圧による内部発振電圧のうける影響

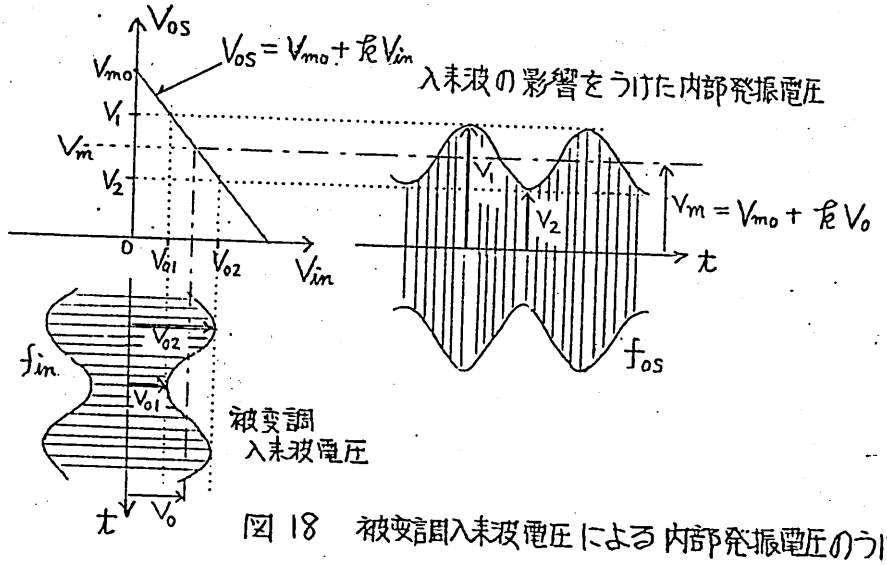


図 18　被変調入来波電圧による内部発振電圧のうける影響

$$k_f = \frac{\Delta V_{OS}}{\Delta V_{in}} \qquad (1)$$

を定義し、これを（微分）増幅度とよぶことにする。実験結果の図9(a)は $k_f \leq 0$，図9（b）は $k_f > 0$ の場合であることを表わしている。ここでは，この関係が線形の場合を取り扱うことにする。$k_f < 0$ の場合について，これらの関係を示すと，入来波に変調がのっていないときは図17，変調がのっているときは図18 のように表現出来る。図18の記号を使うと

$$k_f = \frac{V_2 - V_1}{V_{02} - V_{01}} \qquad (2)$$

で k_f が表わされるが，この $k_f < 0$ の場合には変調信号の入出力の位相関係が逆になる。

そこで，V_{01}, V_{02} が発振成長の種と考えて，$V_{01} \rightarrow V_1$，$V_{02} \rightarrow V_2$ のそれぞれの発振成長が図19(b)のようになり，飽和，減衰過程も考慮して，発振の包絡線が得られる。V_{01} と V_{02} の差の刻々の時間平均値 $\bar{V}_S$ が超再生検波出力 S_S に対応した量となる。曲線ABCD下の面積と曲線EFGH下の面積との差を ΔA とすると

$$\bar{V}_S = \frac{\Delta A}{T_g} = f_g \Delta A \qquad (3)$$

となる。これに対して，発振が

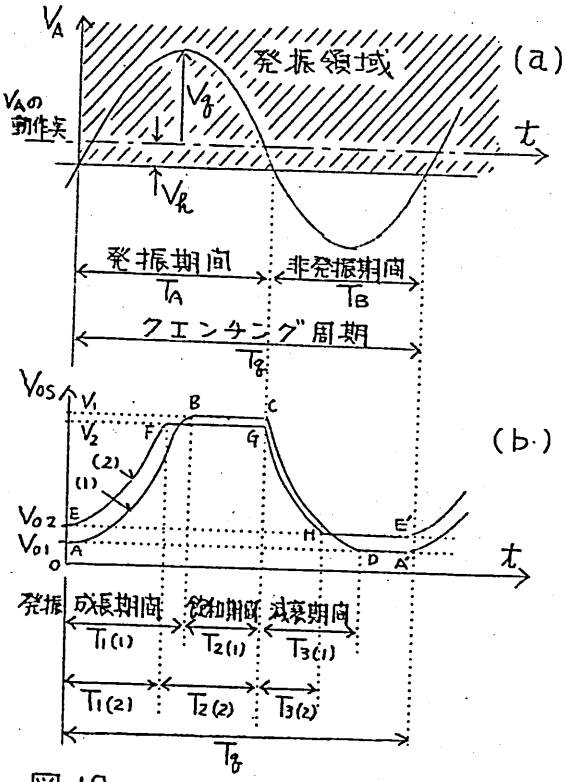


図19 クエンチング電圧と発振の包絡線

成長しきったときの差 $V_d = V_2 - V_1$ が、大阪管の場合の直接検波出力 S_d に対応する量と考えられる。

$$V_d = V_2 - V_1 = k(V_{02} - V_{01}) \qquad (4)$$

それ故、大阪管において、超再生検波が直接検波に対して意味のあるのは、k が小さい場合である。一般に述べられている超再生の理論[2]は、$k=0$ の場合であり、ここで述べる解析は、それのより一般化した場合と言える。なお図19に記した発振の振 V_{01}, V_{02} は、実際は雑音電圧 V_n を含み、それぞれ $V_{01}+V_n$, $V_{02}+V_n$ を意味している。また、以下の解析では、つぎの仮定を基にしている。

1. V_{OS} は V_{in} に対して図17, 18 のように影響し、k は線形（一定）である。
2. 内部発振強度は V_A 変化に対して方形分布をする。
3. クェンチング電圧は正弦波で変化する。

3・2 一般式の導出

超再生検波器のタンク回路は図20のように表わされ、ここで R は電気抵抗、R_n は発振作用（帰還および増幅）を表わす負性抵抗である。SW が OFF で図19の発振期間 T_A の開始、ON で非発振期間 T_B の開始を示す。回路の一般式は

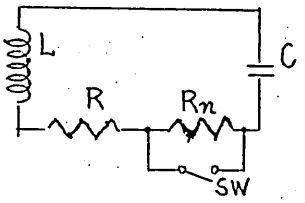


図 20

$$L\frac{di}{dt} + R_T i + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0 \qquad (5)$$

$$R_T = R + R_n \qquad (6)$$

である。これより、コンデンサ C の両端の発振出力電圧 v_{OS} は

$$v_{OS} = V_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \theta) \qquad (7)$$

$$\alpha = \frac{R_T}{2L}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_T^2}{4L^2}} \qquad (8)$$

で表わされる. T_A期間(SW: OFF)では $|R_n| > R$ となり, $\alpha < 0$ になるため発振は成長し, その包絡線は(7)式から

$$V_{os1} = V_0 e^{|\alpha_1| t}, \quad \alpha_1 = \frac{R_T}{2L} < 0 \qquad (9)$$

となる. V_0は発振の種になる電圧で, 入来波のないときは雑音電圧 V_n が, また入来波 V_{01} のあるときは $V_{01} + V_n$ が, これを示す. T_1 の後, 発振は飽和に達し($|R_n|$が減少して $R_T = 0$ になったとき),

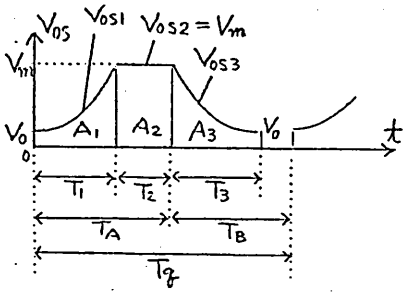


図 21

$$V_{os2} = V_m \left(= V_0 e^{|\alpha_1| T_1}\right) \qquad (10)$$

$$T_1 = \frac{1}{|\alpha_1|} \ln \frac{V_m}{V_0} \qquad (11)$$

となり, V_m の一定振幅を保つ. $T_1 + T_2$ の後, T_B期間(SW: ON)に入り, $R_T > 0$ $\therefore \alpha > 0$ となり(7)式の発振は減衰し, その包絡線は

$$V_{os3} = V_m e^{-\alpha_3 t}, \quad \alpha_3 = \frac{R}{2L} > 0 \qquad (12)$$

となり, これらの様子を図21に示す. なお減衰期間 T_3 は, もとの種 V_0 までの減衰期間で

$$T_3 = \frac{1}{\alpha_3} \ln \frac{V_m}{V_0} \qquad (13)$$

により表わされる. 図21の包絡線の各面積は, つぎの様になる.

$$A_1 = \int_0^{T_1} V_0 e^{-\alpha_1 t} dt = \frac{1}{|\alpha_1|}(V_m - V_0) \qquad (14)$$

$$A_2 = V_m T_2 \qquad (15)$$

$$A_3 = \int_0^{T_3} V_m e^{-\alpha_3 t} dt = \frac{1}{\alpha_3}(V_m - V_0) \qquad (16)$$

そこで, 図19(b)の2信号 V_{01}, V_{02} による発振の包絡線の面積差 ΔA と, 成長期間, 飽和期間, 減衰期間, それにつぎの周期に入る

までの4期間にわけて求める．　まず (14)，(16)式により，

$$\Delta A_1 = \frac{(V_2-V_1)-(V_{02}-V_{01})}{|\alpha_1|} = \frac{(k-1)(V_{02}-V_{01})}{|\alpha_1|} \qquad (17)$$

$$\Delta A_3 = \frac{(V_2-V_1)-(V_{02}-V_{01})}{\alpha_3} = \frac{(k-1)(V_{02}-V_{01})}{\alpha_3} \qquad (18)$$

また，

$$\Delta A_2 = (T_{1(1)} - T_{1(2)})V_2 - (V_1 - V_2)T_{2(1)}$$

$$= (T_{1(1)} - T_{1(2)})V_2 + k(V_{02}-V_{01})T_{2(1)} \qquad (19)$$

$$\Delta A_4 = (T_B - T_{3(2)})V_{02} - (T_B - T_{3(1)})V_{01} \qquad (20)$$

となる．　ΔA_4は，種の電圧V_{01}，V_{02}のオーダで，他の面積に比べて無視出来るので，全面積変化ΔAはつぎのようになる．

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3$$

$$= (T_{1(1)} - T_{1(2)})V_2 + k(V_{02}-V_{01})T_{2(1)} + (k-1)(V_{02}-V_{01})\left(\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{\alpha_3}\right)$$

したがって，(3)式より，六阪管の超再生検波出力に対する一般式は

$$\bar{V}_S = f_g\left[(T_{1(1)} - T_{1(2)})V_2 + k(V_{02}-V_{01})T_{2(1)} + (k-1)(V_{02}-V_{01})\left(\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{\alpha_3}\right)\right] \qquad (21)$$

$$= f_g\left[\frac{V_2}{|\alpha_1|}\ln\frac{V_{02}V_1}{V_{01}V_2} + k(V_{02}-V_{01})T_{2(1)} + (k-1)(V_{02}-V_{01})\left(\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{\alpha_3}\right)\right] \qquad (22)$$

となる．

なお，図19(a)に示した発振期間T_A，非発振期間T_Bは，クエンチング電圧（振幅V_g，周期T_g，動作点V_h）とつぎの関係にある．

$$\left.\begin{aligned} T_A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{180}\sin^{-1}\frac{V_h}{V_g}\right)T_g \\ T_B &= T_g - T_A \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

ただし，$0^\circ \leq \sin^{-1}\frac{V_h}{V_g} \leq 90^\circ$ である．

3・3　各場合に対する考察

3・3・1　一般式とその意味

（21）式，あるいは（22）式において，第1項は信号比 V_{02}/V_{01} に関する対数項，第2，3項は大阪管特有の，信号差 $V_{02}-V_{01}$ に比例する直接検波的な線形項を表わしている．一般に述べられている超再生検波は $f_c=0$ の場合で，対数項だけで表現され，その利得は，V_2（数V）に関係し，入来信号電圧 $V_{02}-V_{01}$ が雑音電圧レベル程度（数μV）として 10^6 位になることを表わしている．しかし，f_c の値が大きくなると第1項の対数項よりも第2，3項の線形項の影響の方が大きくなり，大阪管の直接検波的なものに近かづき，超再生検波の意味がなくなってまる．

$f_c \leqq 0$ の場合は，先の実験結果で示した f_{os} 中心の場合がこれにあたり，大阪管の内部発振電圧 V_{os} の入来波電圧の影響は，図18に示したように

$$V_{os} = V_{mo} + f_c V_{in} \qquad (24)$$

で表わされるが，この f_c くの場合は（21）式の第1項による検波出力を第2，3項による出力によって減少させ，あるいは第2，3項の方が大きいときは負の検波出力となる．それ故，クエンチング電圧の加え方によって $\bar{V}_s$ は種々変化し，第1項と第2，3項の大小関係によって，正，負とその値は変化する，オシロでの観測は，その大きさを見ているので，この $|\bar{V}_s|$ を観測していることになる．

$f_c > 0$ の場合は，実験結果で示した f_{in} 中心の場合がこれにあたり，このときは，クエンチング電圧を加えることにより本来の $V_{os}(f_{os})$ は消え，そこへ $V_{in}(f_{in})$ を加えることにより，その周波数に等しい内部発振電圧 V_{os} が励振され．

$$V_{os} = f_c + V_{in} \qquad (25)$$

の比例関係が存在する．したがって，この場合は最初から（22）式の対数項は0になって居り，準線形動作をする．

以上は，発振包絡線の全成長期間 T_{1P} 以上に発振期間 T_A が与えられた場合，あるいは全減衰期間 T_{3P} 以上に非発振期間 T_B が与えられた場合であった．実際には成長期間 T_1 が T_A で制限され $T_1 (= T_A) < T_{1P}$ ，または減衰期間 T_3 が T_B で制限され $T_3 (= T_B) < T_{3P}$ の場合があり，これを線形モードの動作，それに対して各期間が十分与えられるものを対数モードの動作とよぶことにする．

対数モード（成長，減衰期間が十分な場合）　$T_1 = T_{1P} < T_A$，$T_3 = T_{3P} < T_B$

線形モード（成長，減衰期間が不十分な場合）　$T_1 (= T_A) < T_{1P}$，$T_3 (= T_B) < T_{3P}$　(26)

線形モードの場合は

$$T_{1(1)} = T_{1(2)} \ , \quad T_{3(1)} = T_{3(2)} \qquad (27)$$

の条件が成り立ち，(21)式の第1項は消え，線形項で出力が表わされる．

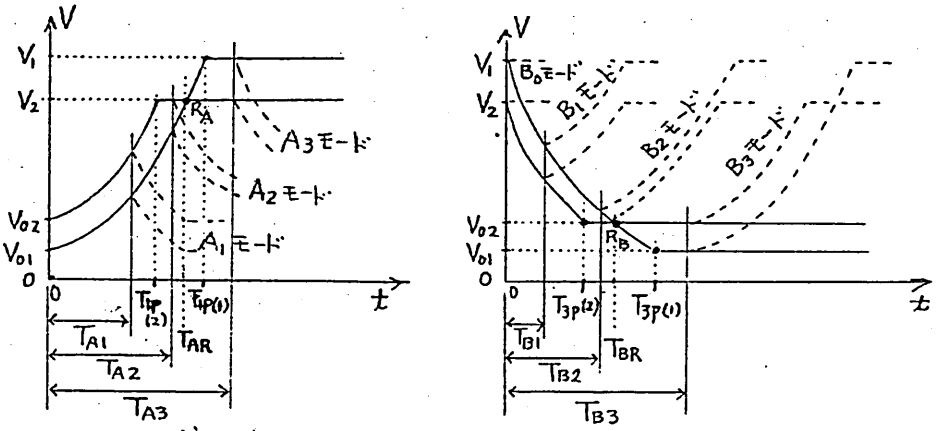
3・3・2 種々の動作モード

いま，図19に示した発振包絡線の成長，減衰に対して，発振期間 T_A，非発振期間 T_B が十分与えられずに制限された場合に生ずる各種モードを考えると，図22に示すようになる．

発振の成長時には，完全な発振の成長期間

$$T_{1P(2)} = \frac{1}{|\alpha_1|} \ln \frac{V_2}{V_{02}} \ , \quad T_{1P(1)} = \frac{1}{|\alpha_1|} \ln \frac{V_1}{V_{01}} \qquad (28)$$

の到達時間を境にして，T_A が，$T_{1P(2)}$ 以下では線形モード，$T_{1P(2)}$ と $T_{1P(1)}$ の間では線形と対数の混在モード，$T_{1P(1)}$ 以上では対数モードを得，それぞれ A_1，A_2，A_3 モードとよぶことにする．同様に，発振の減衰時においては，完全な減衰期間



（a） 成長時　　（b） 減衰時

図 22　発振期間 T_A, 非発振期間 T_B の与え方により生ずる各種のモード

$$T_{3P(2)}=\frac{1}{\alpha_3}\ln\frac{V_2}{V_{02}}\ ,\quad T_{3P(1)}=\frac{1}{\alpha_3}\ln\frac{V_1}{V_{01}} \qquad (29)$$

の到達時間を境にして，線形，混在，対数の各モードを得．それぞれ B_1, B_2, B_3 モードとよぶことにする．特に $T_B=0$，すなわち減衰の全然ないときは発振のし放しで直接検波と同じ出力を得．これを B_0 モードとよぶことにする．　また対数モードは，上述の A_3, B_3 の両条件を満足してはじめて得られ，これを C モードとする．

A_1, B_1 モードでは線形モードのため (27) 式によって，$\bar{V}_S$ [(21) または (22) 式] の $\ln$ 項は 0 であり，また ~~AB~~ C モードでも $k>0$ の場合は (25) 式によって $\ln$ 項は 0 になる．

図 22 (a) あるいは (b) で曲線の逆転する実 R_A, R_B が $T_{1P(2)}\sim T_{1P(1)}$ 間，$T_{3P(2)}\sim T_{3P(1)}$ 間にあるが，それを境にして ~~$\bar{V}_S=0$~~ 面積変化が正負にわかれる．その正，負の大きさが等しくて $\bar{V}_S=0$ になる T_B の値は T_{BR} (R_B 実の時間) 以後にあり (普通は $T_{BR}\sim T_{3P(1)}$ 間)，T_B を変えた場合，この実を境にして $\bar{V}_S$ の符号が変わる．

以上の各モードをまとめると表1となる.

表 1

モード	説明		条件		$\bar{V}_S$の一般式での特徴
B_0	直接検波		$T_B=0$	———	第1,3項=0
B_1	減衰線形モード		$T_B < T_{3P(2)}$	$T_{3(1)}=T_{3(2)}=T_B$	第1項=0
B_2	混在モード		$T_{3P(2)}<T_B<T_{3P(1)}$	$T_{3(1)}=T_B$ $T_{3(2)}=T_{3P(2)}$	
C	対数モード	$f_c<0$	$T_B > T_{3P(1)}$ かつ $T_A > T_{1P(1)}$	$T_{1(1)}=T_{1P(1)}$ $T_{3(2)}=T_{3P(2)}$	…… 第2,3項=0 …… 第1項=0
		$f_c=0$			
		$f_c>0$			
A_2	混在モード		$T_{1P(2)}<T_A<T_{1P(1)}$	$T_{1(1)}=T_A$ $T_{1(2)}=T_{1P(2)}$	第2項=0
A_1	成長線形モード		$T_A < T_{1P(2)}$	$T_{1(1)}=T_{1(2)}=T_A$	第1項=0

3・3・3 各モードにおける $\bar{V}_S$ の式

$\bar{V}_S$ の一般式〔(21)式または(22)式〕から各モードでの $\bar{V}_S$ の式を求めると，つぎのようになる.

(B_0 モード)

$T_{1(1)}=T_{1(2)}=0$, $T_{2(1)}=T_g$, $1/|\alpha_1|=1/\alpha_3=0$

$\therefore\ \bar{V}_S = f_c(V_{02}-V_{01})$ (30)

これは(4)式により，直接検波出力 V_d と同じになる.

(B_1 モード)

図23に示すように V_1, V_2 が主体となって，これにより V_{01}', V_{02}' が決り，また，この関係から等価的な f_c' が決る．それ故(21)式を，V_1, V_2 で表わした(31)式から出発する方が，

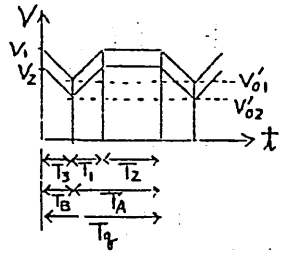


図 23

一般にBモードでは妥当である.

$$\bar{V}_S = f_g\left[(T_{I(1)}-T_{I(2)})V_2 + (V_2-V_1)T_{2(1)} + (1-\frac{1}{k})(V_2-V_1)\left(\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{\alpha_3}\right)\right] \quad (31)$$

いまの場合, $T_{I(1)}=T_{I(2)}$ であり, また

$V_{02}' = V_2 e^{-\alpha_3 T_B}$, $V_{01}' = V_1 e^{-\alpha_3 T_B}$, $\therefore k' = e^{\alpha_3 T_B}$

が, (31)式の V_{01}, V_{02}, k にあたるので, 次式を得る.

$$\bar{V}_S = f_g(V_2-V_1)\left\{(T_A-T_I)+\left(\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{\alpha_3}\right)(1-e^{-\alpha_3 T_B})\right\}$$

$$= f_g(V_2-V_1)\left\{\left(T_A-\frac{\alpha_3}{|\alpha_1|}T_B\right)+\left(\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{\alpha_3}\right)(1-e^{-\alpha_3 T_B})\right\} \quad (32)$$

$$= C_1(V_2-V_1) \quad (33)$$

ただし, V_g, f_g が一定の場合

(B_2 モード)

図24より, $V_{01}' = V_1 e^{-\alpha_3 T_B}$, したがって

$k' = \dfrac{V_2-V_1}{V_2 e^{-\alpha_3 T_{3P(2)}} - V_1 e^{-\alpha_3 T_B}}$ となり, また $T_{I(1)}-T_{I(2)} = (\alpha_3/|\alpha_1|)(T_B-T_{3P(2)})$, $T_{2(1)} = T_A-(\alpha_3/|\alpha_1|)T_B$ の関係を (31) 式に入れることにより, 次式を得る.

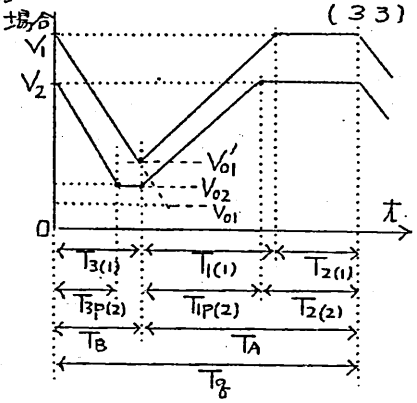


図 24

$$\bar{V}_S = f_g\left[\frac{\alpha_3}{|\alpha_1|}(T_B-T_{3P(2)})V_2 + (V_2-V_1)\left(T_A-\frac{\alpha_3}{|\alpha_1|}T_B\right) + \left\{V_2(1-e^{-\alpha_3 T_{3P(2)}}) - V_1(1-e^{-\alpha_3 T_B})\right\}\left(\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{\alpha_3}\right)\right]$$

(Cモード) (34)

◦ $k<0$ (22)式の一般式そのもの.

◦ $k=0$ (22)式で, $V_1=V_2$, $k=0$, 故に次式を得る.

$$\bar{V}_S = f_g\left[\frac{V_2}{|\alpha_1|}\ln\frac{V_{02}}{V_{01}} - (V_{02}-V_{01})\left(\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{\alpha_3}\right)\right]$$

$$\fallingdotseq f_g\frac{V_2}{|\alpha_1|}\ln\frac{V_{02}}{V_{01}} \quad (35)$$

◦ $k>0$ この場合は(25)式により, (22)式の $\ln$ の中は1となるので, 第1項は消え. また $T_{2(1)} = T_A - T_{IP(1)} = T_A - \frac{1}{|\alpha_1|}\ln k_+$ となるので

$$\bar{V}_S = f_g\left[k_+(V_{02}-V_{01})\left(T_A-\frac{1}{|\alpha_1|}\ln k_+\right) + (k_+-1)(V_{02}-V_{01})\left(\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{\alpha_3}\right)\right] \quad (36)$$

となる. $k_+ \gg 1$ の場合は $\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{T_{1P}+T_{3P}}{\ln k_+} \fallingdotseq 0$ とみなせるので

$$\bar{V}_S = f_g k_+ (V_{02}-V_{01})\left(T_A - \frac{1}{|\alpha_1|}\ln k_+\right) \quad (37)$$

$$= C_2 (V_{02}-V_{01}) \quad \text{ただし } V_g, f_g \text{ が一定の場合} \quad (38)$$

を得る. この場合の直接検波出力は

$$V_d = k_+ (V_{02}-V_{01}) \quad (39)$$

であるので, (37)式と(39)式の比より

$$\bar{V}_S / V_d = T_2 / T_g < 1 \quad (40)$$

を得, 実験結果の図30が説明出来る. この結果は, 超再生検波出力の向上のためには, このモードはよくないという意味ではない. それは図19(b)の面積変化を考えてもわかるように, k_+ では面積の符号変化がなくなり, 一方的に加算されるので, 一般に

$$\bar{V}_{S(k_+)} / \bar{V}_{S(k_-)} > 1 \quad (41)$$

が成り立つからである.

(A_2 モード)

この場合は, 図25から $T_{2(1)}=0$

(21)式の第2項は0となる. また

$T_{1(1)} = T_A$, $T_{1(2)} = \frac{1}{|\alpha_1|}\ln\frac{V_2}{V_{02}}$,

$V_1' = V_{01} e^{|\alpha_1| T_A}$

$k' = \frac{V_{02} e^{|\alpha_1| T_{1P(2)}} - V_{01} e^{|\alpha_1| T_A}}{V_{02}-V_{01}}$

となるので(21)式から次式を得る.

$$\bar{V}_S = f_g\left[\left(T_A - \frac{1}{|\alpha_1|}\ln\frac{V_2}{V_{01}}\right)V_2 + \left\{V_{02}\left(e^{|\alpha_1| T_{1P(2)}}-1\right) - V_{01}\left(e^{|\alpha_1| T_A}-1\right)\right\}\left(\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{\alpha_3}\right)\right] \quad (42)$$

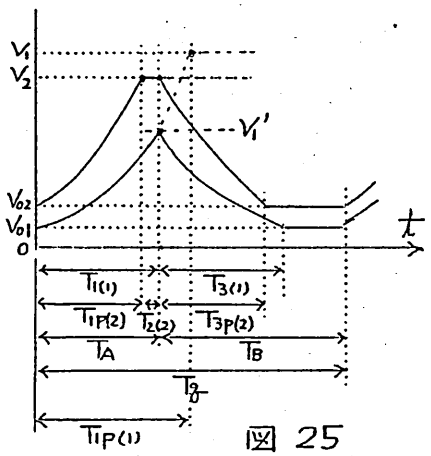


図 25

(A_1 モード)

この場合は $T_{1(1)}=T_{1(2)}$, $T_{2(1)}=T_{2(2)}=0$
により (21)式の 第1, 2項は 0 となる.
$V_1'=V_{01}e^{|\alpha_1|T_A}$, $V_2'=V_{02}e^{|\alpha_1|T_A}$ により
$e'=e^{|\alpha_1|T_A}$ となり, これらを (21)式に入れて, 次式を得る.

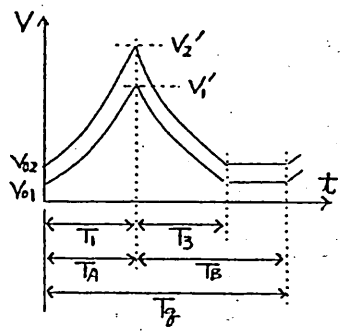


図 26

$$\bar{V}_S=f_g(e^{|\alpha_1|T_A}-1)(V_{02}-V_{01})\left(\frac{1}{|\alpha_1|}+\frac{1}{\alpha_3}\right) \quad (43)$$
$$=C_3(V_{02}-V_{01}) \quad \text{ただし } V_g, f_g \text{ が一定の場合} \quad (44)$$

3・4 つきぬけ現象

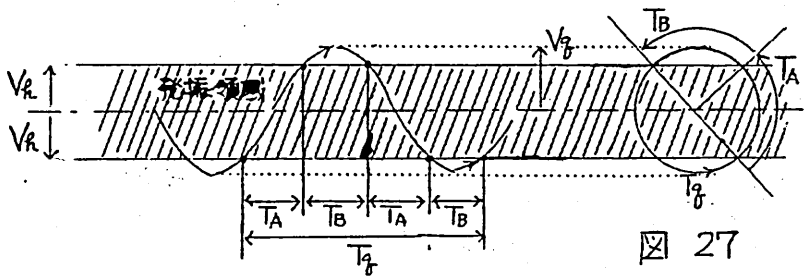


図 27

実際の大阪管の発振領域は, 図14にも示したように狭く, したがってクエンチング電圧はそれをつきぬける場合が多い. 図19(a)はつきぬけない場合で, その発振期間 T_A と非発振期間 T_B は(23)式で与えられている. つきぬけの場合は, 図27に示すように, V_g の動作点が発振領域 $2V_R$ の中央にあり, 振幅 V_g のクエンチング電圧が, 周期 T_g で両側につきぬける場合を考えると, その右に示した回転図でわかるように半周期毎に T_A, T_B が繰り返されるので, いままでの検波出力に現われた f_g を $2f_g$ にして計算すればよいことになる. しかし, これは出力が倍になった意味ではなく, つきぬけない場合と比較したものは同じになる.

3・5 計算例

実験結果に対応する各場合について、3・3 で導出した式による計算結果をここに示すが、その各図に示した、与えた数値は実験結果から見て妥当と考えられる一例である。計算の要領は、まず、その与えた数値によって (23), (28), (29) 式から各期間を求め、表1に示した条件により動作モードを決定する。つぎに、その動作モードの各場合の $\bar{V}_S$ の式により検波出力を求めた。

3・5・1 V_{in} 変化に対する計算結果

(Cモード, $f_c < 0$ の場合)

図28がそれで、横軸は発振の種になる2つの入来波信号 V_{01}, V_{02} の平均電圧 V_0 を示し、(図18参照)、これが入来波電圧 V_{in} に対応する量である。この特性は図3③あるいは典形的な実験結果の図4③に同じである。これと同じ数値で、それぞれ f_c, V_m, V_{mo} の値だけをパラメータとして与えた場合を図29, 30, 31に示す。

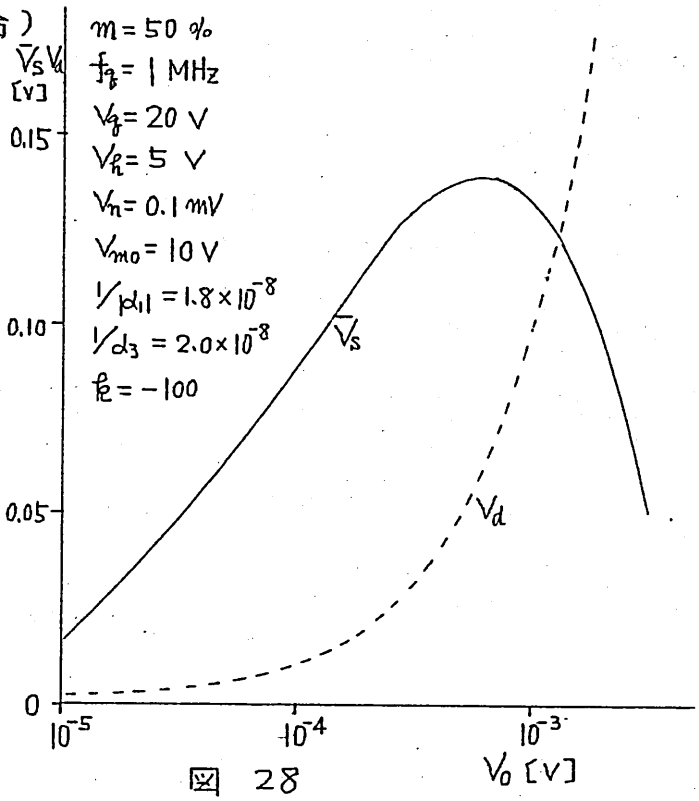


図 28

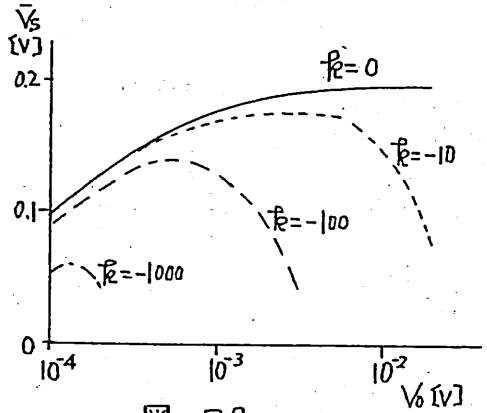


図 29

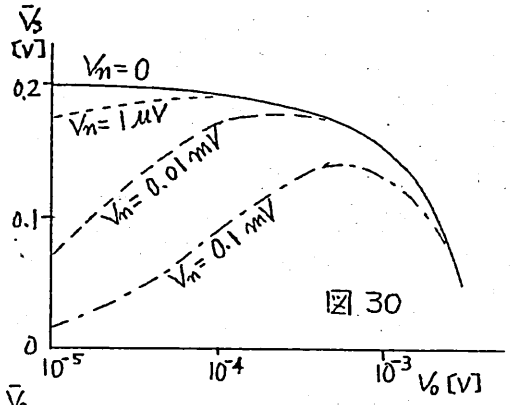


図 30

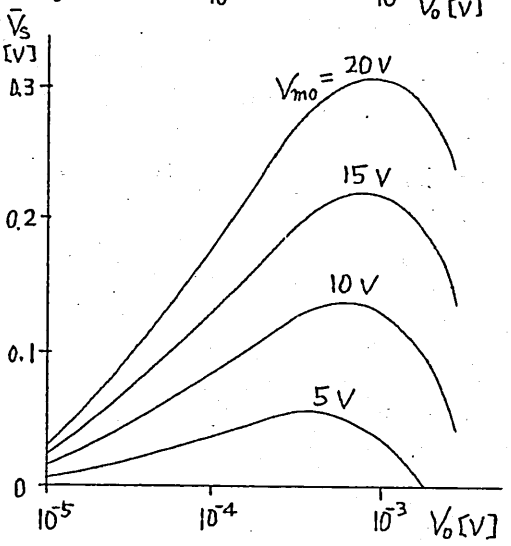


図 31

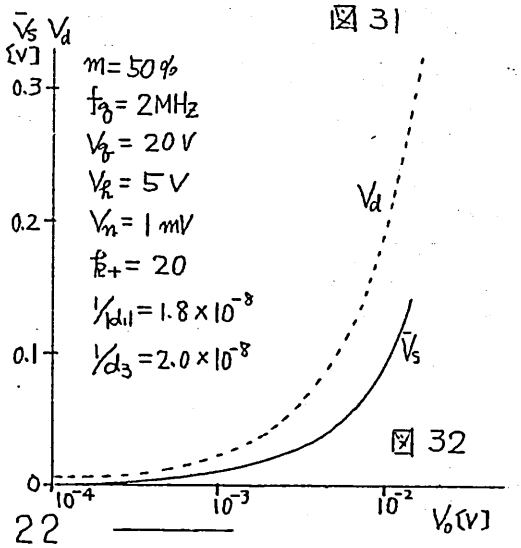


図 32

〔 C モード; $f_R=0$ の場合〕

図 29 の実線が, これを表わし, 図3②がこれに対応する.

〔 C モード, $f_R>0$ の場合〕

図 32 がこれで, 図3① がこれに対応し. $\bar{V}_S$ と V_d の大小関係は. (40)式を示している.

〔 A_1 モードの場合〕

(44)式により

$$\bar{V}_S = C_3 (V_{02} - V_{01})$$

また

$$V_d = f_R (V_{02} - V_{01})$$

であるので

$$\bar{V}_S / V_d = C_3 / f_R$$

となって. この場合 $\bar{V}_S$ と V_d は比例するが, その大小関係は f_R 等

によって変化する．図33はこれを示し，図5④の実験結果と同じ特性を示している．

3・5・2 V_g 変化に対する計算結果

いま，3・4で述べたつきぬけの場合を考え，図34のように V_g を0から次第に増加させると，$V_g > V_k$ では T_B が次第に増し，T_A は減少するので，V_g を変えることにより，表1に示した各モードが現われることになる．図35は $r_k<0$ の場合，図36は $r_k=0$ の場合での計算結果で，それ

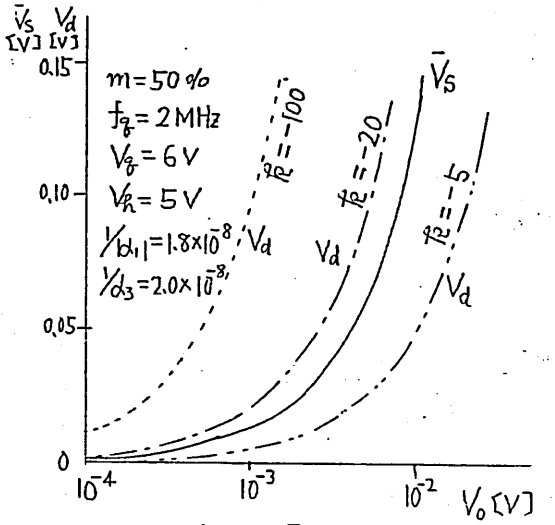


図 33

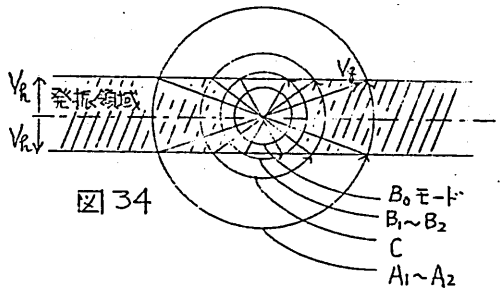


図34

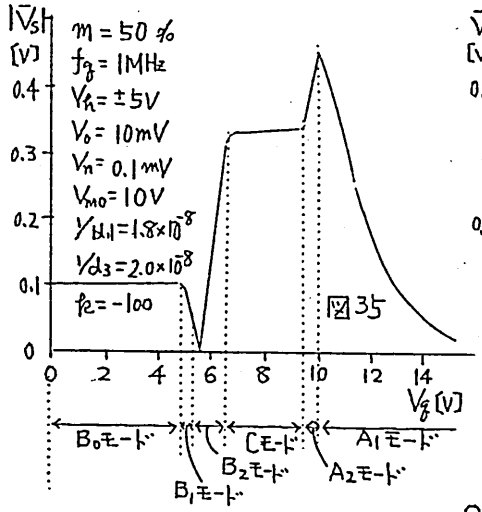


図35

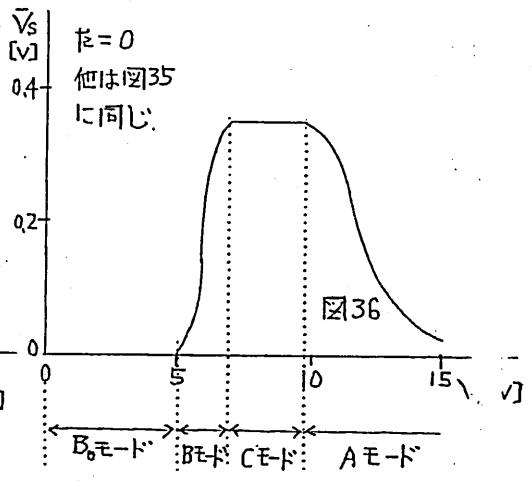


図36

それし、図6⑤、図7⑥の実験結果と同じ特性が得られる。

4. まとめ

大阪管検波では常に内部発振をともない、それが入来波により影響を受ける。そこで、その関係を線形で近似し、パラメータ f_e を導入して大阪管の超再生検波出力の式を求めた。一般に述べられている超再生検波出力の式は $f_e=0$ の場合であり、大阪管の方がより一般化したものと言え、各種の動作モードの存在することがわかった。

実験的に妥当な数値を選んだ計算結果は、実験結果と定性的に一致し、実験結果を説明することが出来た。その典形的な場合についてまとめると表2のようになる。

この理論は、第1近似的なものであり、多くの仮定を置いているので、

表 2

解析上の分類			対応する実験特性
対数モード	f_{os} 中心	$f_e<0$	③ S_s, S_d / ⑤ S_s
		$f_e=0$	② S_s / ⑥ S_s
	f_{in} 中心	$f_e>0$	① S_d, S_s
線形モード			④ S_d, S_s

今後、より詳しいものにもって行くべきだと考える。

終わりに、本研究に対して種々協力された本学院生飯田孝雄、大橋永嗣両君に感謝します。

参考文献

1) H. Ataka : On Superregeneration of an Ultra-short-wave Receiver, Proc. IRE 23, 841.

2) G. O. Hall : Superregenerative Receivers, MIT Rad. Lab. Series 23, 545.

外部帰還形進行波管発振器の二重発振とモード遷移特性の解析

鷲野翔一　鷹岡昭夫　裏　克己

（大阪大学　工学部）

1974. 4. 26.

輻射科学研究会

外部帰還形進行波管発振器の二重発振とモード遷移特性の解析

鷲野翔一　鷹岡昭夫　裏　克己

（大阪大学　工学部）

§1　まえがき

超電導線形加速器のように、超電導化した高Qの空胴共振器にマイクロ波を給電する一方式として、その空胴共振器を発振ループ内に含む進行波管発振器を構成するやり方がある[1]。共振器が、多空胴で相互結合して、さらにそれらの共振周波数が接近しているときには、二つ以上の周波数で同時に発振する多重発振現象と、発振モードを選択し、発振周波数が突然ジャンプするモード遷移現象などが新たに現われる。これらの現象は、ライナック加速管のように、多数の共振周波数が接近して存在するときには厄介な問題となる。

一般に非線形振動系では、多モードの振動が観測されるが、これらに関しては、これまでに多数の研究がなされてきた[2)~6)]。しかしこれらの解析と実験は、系自体の安定モードや、

系に外部信号が加わった場合のモードスイッチに関するものであり、我々のように、帰還回路中の受動素子（ここでは減衰器、移相器）をパラメータとして変化させた場合の系に見られるモード間の遷択現象や、多重発振については、著者の知る限りでは触れられていない。

帰還回路の空胴が単一の場合、その発振の動作点の決定および立ち上がり特性の図的解析法は、すでに報告した。[1] すなわち、利得（減衰）―位相平面上に、進行波管の伝達特性を表わすデバイス線と、空胴の特性を表わす負荷線を書き込み、動作点をそれらの交点から決定する方法である。

本論文では、問題の本質を理解しよくするため、多空胴共振器として二空胴共振器をとりあげ、二空胴に対する負荷線と、二信号デバイス線をかきこんだD－L線図を用いて、モード遷移現象と二重発振現象の発生条件を明きらかにする。さらに、このD－L線図より予想される系の発振特性は、実験とよく一致することを示す。

このことから、系を望む動作点で動作させるためのパラメータの値を設定することが可能となる。

このモード遷移と二重発振の発生条件は、三つ以上の多空胴の場合にもそのまま適用できる。

§2 D-L線図による発振動作点の決定

進行波管発振器の機能上からのモデル化を行うと、図1に示すように、非線形増幅器からなる能動増幅素子と、共振器、減衰器、移相器、線路などからなる受動素子に分けられる。

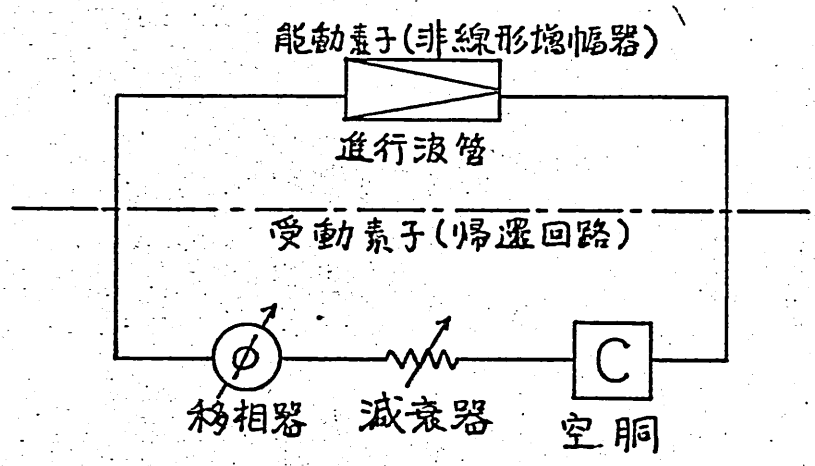


図1 外部帰還形進行波管発振器の構成

ここで外部帰還回路として、単一共振器を用いた進行波管発振器の場合には、各素子に

ついての伝達関数 $Ge^{i\phi}$ に関して一般性を失うことなく次の仮定をおくことができる。

$$\left.\begin{aligned} G_A &= G_A(P) & \phi_A &= \phi_A(P) \\ G_P &= G_P(f) & \phi_P &= \phi_P(f) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

式(1)の物理的意味は、進行波管の周波数特性が、帰還回路の周波数帯域に比べて十分広く、帰還回路の共振器を始めとする受動素子の特性が、取り扱うマイクロ波電力の大きさには無関係であるということである。このとき発振条件は、次式のように書ける。

$$\left.\begin{aligned} G_A(P) \times G_P(f) &= 1 \\ \phi_A(P) + \phi_P(f) &= 2n\pi \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ここで n は、発振ループの電気的波数に等しい。

進行波管の伝達特性は、入力電力 P をパラメータにとり、横軸に $10\log_{10} G_A(P)$、縦軸に位相変化 $\phi_A(P) - \phi_A(0)$ (AM-PM変換特性) をプロットしたもので表わせる。これをデバイス線と呼ぶ(図2)。

同様にして、受動素子の伝達特性を周波数 f をパラメータにして、横軸に $-10\log_{10} G_P(f)$、

縦軸に位相変化 $2n\pi - \phi_P(f)$ をとってプロットしたもので表わせる。これを負荷線といい、単一空胴のときは、図2のようになる。

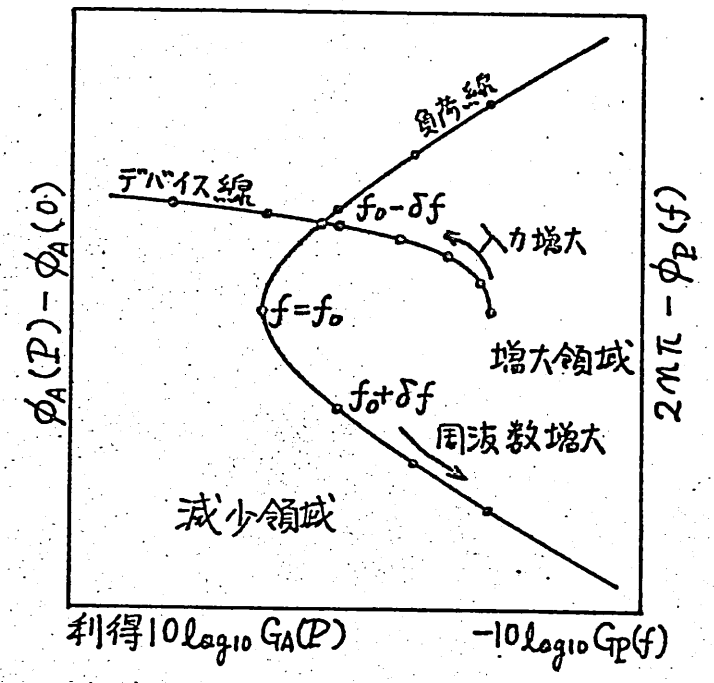


図2 デバイス線と単一空胴の負荷線

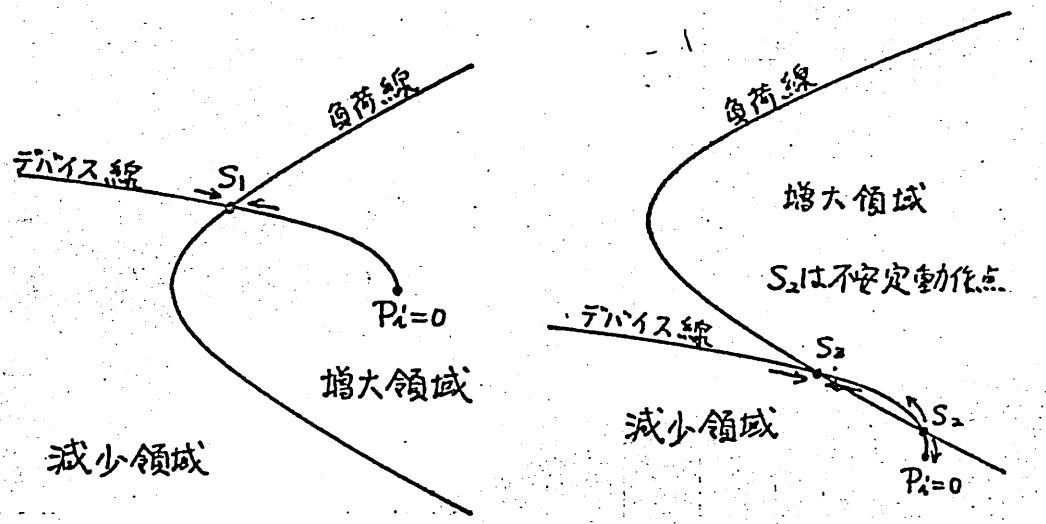
式(2)の発振条件を書きなおすと次式になる。

$$\left.\begin{aligned} 10\log_{10}G_A(P) &= -10\log_{10}G_P(f) \\ \phi_A(P) &= 2n\pi - \phi_P(f) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

式(3)によれば、図2に示されたデバイス線と負荷線の交点が、式(2)の解であって発

振動作点をよえる。つまりこの交点におけるデバイス線の出力電力（入力電力）が発振出力を、負荷線のfが発振周波数をよえる。

また負荷線の右側の領域は増大領域，左側は減少領域であり、このことから発振の立ち上がり特性とヒステリシス現象を正しく説明できる（図3）。



a)発振が立ち上がる場合　b)立ち上がらない場合

図3　ドール線図

§3 結合多空胴の負荷線

外部帰還形進行波管発振器では、図1に示したように空胴を2端子対（2開口）として用いている。2空胴共振器のときの等価回路は、図4のように表わすことができる。この等価回路について解くと、次の式(5)(6)が得られる。

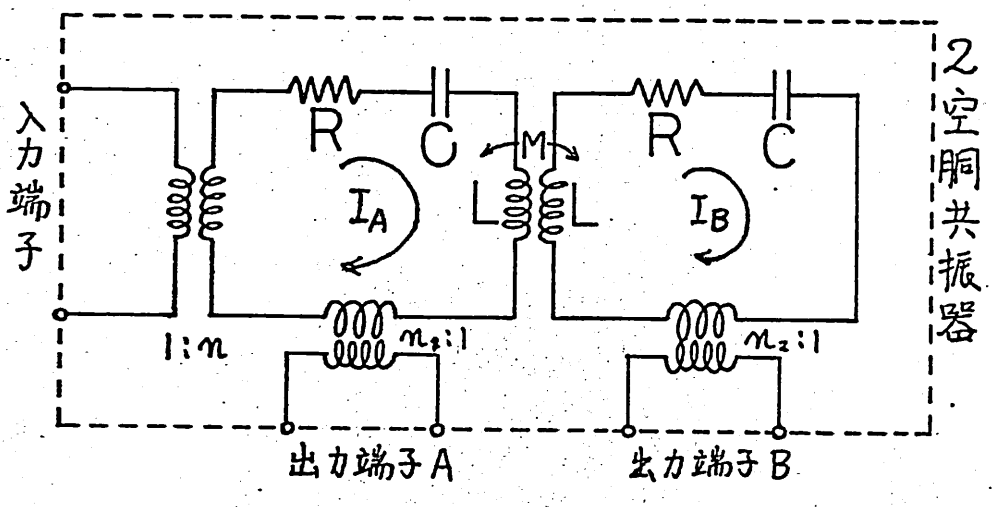


図4 結合二空胴の等価回路

$\omega \sim \omega_+$のとき

$$I_A = \frac{E}{j\omega L}\frac{\xi}{\xi+k}\frac{1}{\left(\xi-k-j\frac{1}{Q_0}\frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{E}{2R}\frac{1}{1+jQ_+\chi_+}$$

$$I_B = \frac{E}{j\omega L}\frac{k}{\xi+k}\frac{1}{\left(\xi-k-j\frac{1}{Q_0}\frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{E}{2R}\frac{1}{1+jQ_+\chi_+} \qquad (5)$$

$\omega \sim \omega_-$のとき

$$\left.\begin{aligned} I_A &= \frac{E}{j\omega L}\frac{\xi}{\xi-k}\cdot\frac{1}{(\xi+k-j\frac{1}{Q_0}\frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{E}{2R}\frac{1}{1+jQ_-\chi_-} \\ I_B &= \frac{E}{j\omega L}\frac{k}{\xi-k}\cdot\frac{1}{(\xi+k-j\frac{1}{Q_0}\frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{E}{2R}\frac{-1}{1+jQ_-\chi_-} \end{aligned}\right\} (6)$$

ただし

$$\omega_\pm = \frac{\omega_0}{\sqrt{1\mp k}} \qquad Q_\pm = \frac{\omega_\pm L}{R} \qquad \chi_\pm = \left(\frac{\omega_0}{\omega_\pm} - \frac{\omega_\pm}{\omega_0}\right)$$

$$\frac{1}{Q_0}\frac{\omega_0}{\omega} \ll k$$

式(5)(6)の右辺は、単一共振器の場合と同じ形をしており、横軸にω、縦軸にI_AとI_Bの振幅と位相をとって図示したものが図5である。ように、これを負荷線として書けば図6(a)(b)のようになる。ここで(a)は、出力端子Aから出力をとり出した場合の負荷線であり、(b)は、出力端子Bからと力をとり出した場合のそれである。なお二つの空胴が電界結合の場合も、共振周波数近傍では、$\omega L \sim 1/\omega C$とおけば、式(5)(6)と同様の表式が得られ、負荷線は図6と同様になる。

図7は、三空胴共振器の1番目の空胴から出力をとりだした場合の負荷線の実測値である。

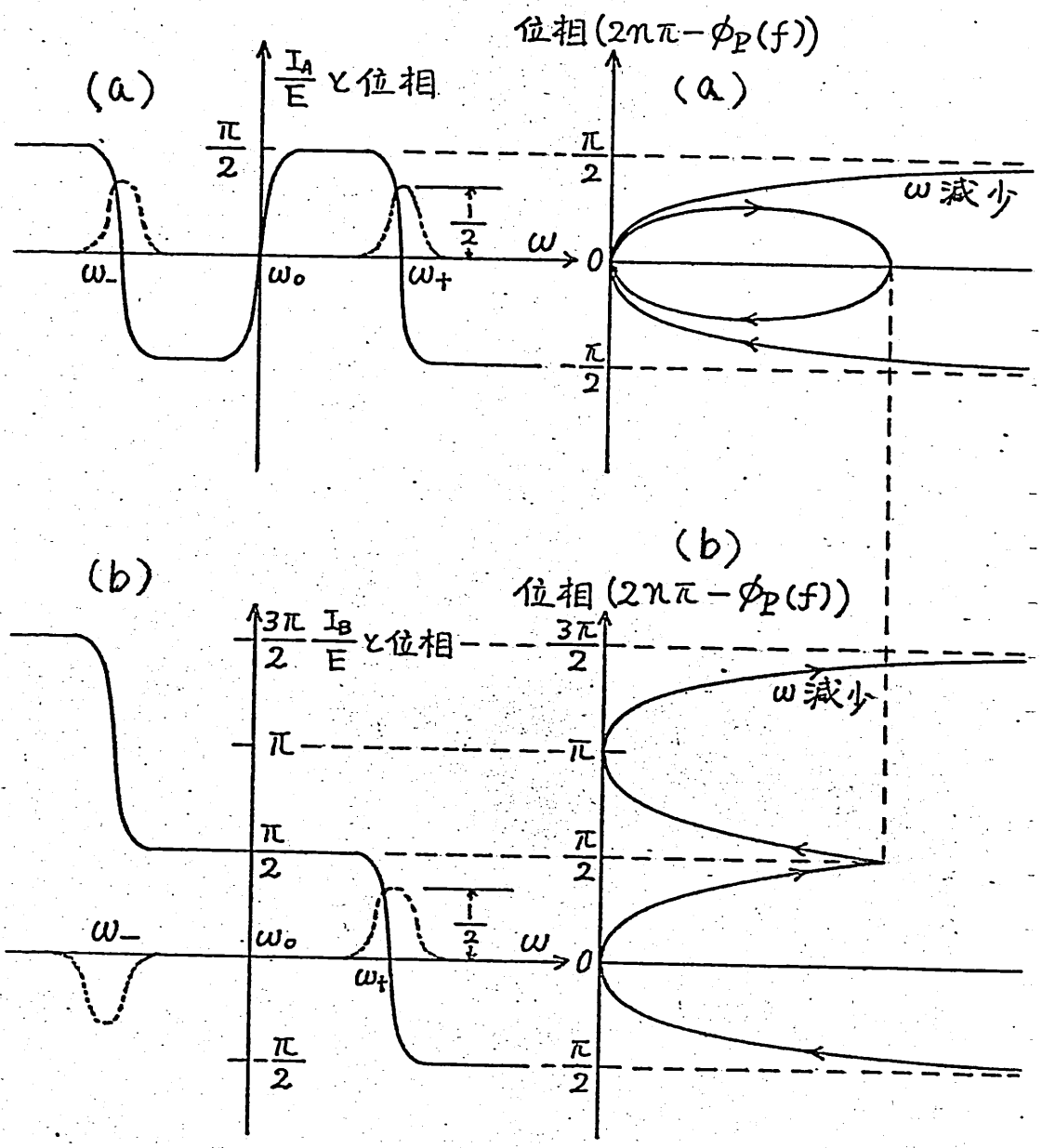


図5 電流の振幅と位相の周波数に対する関係

図6 結合二空胴の負荷線

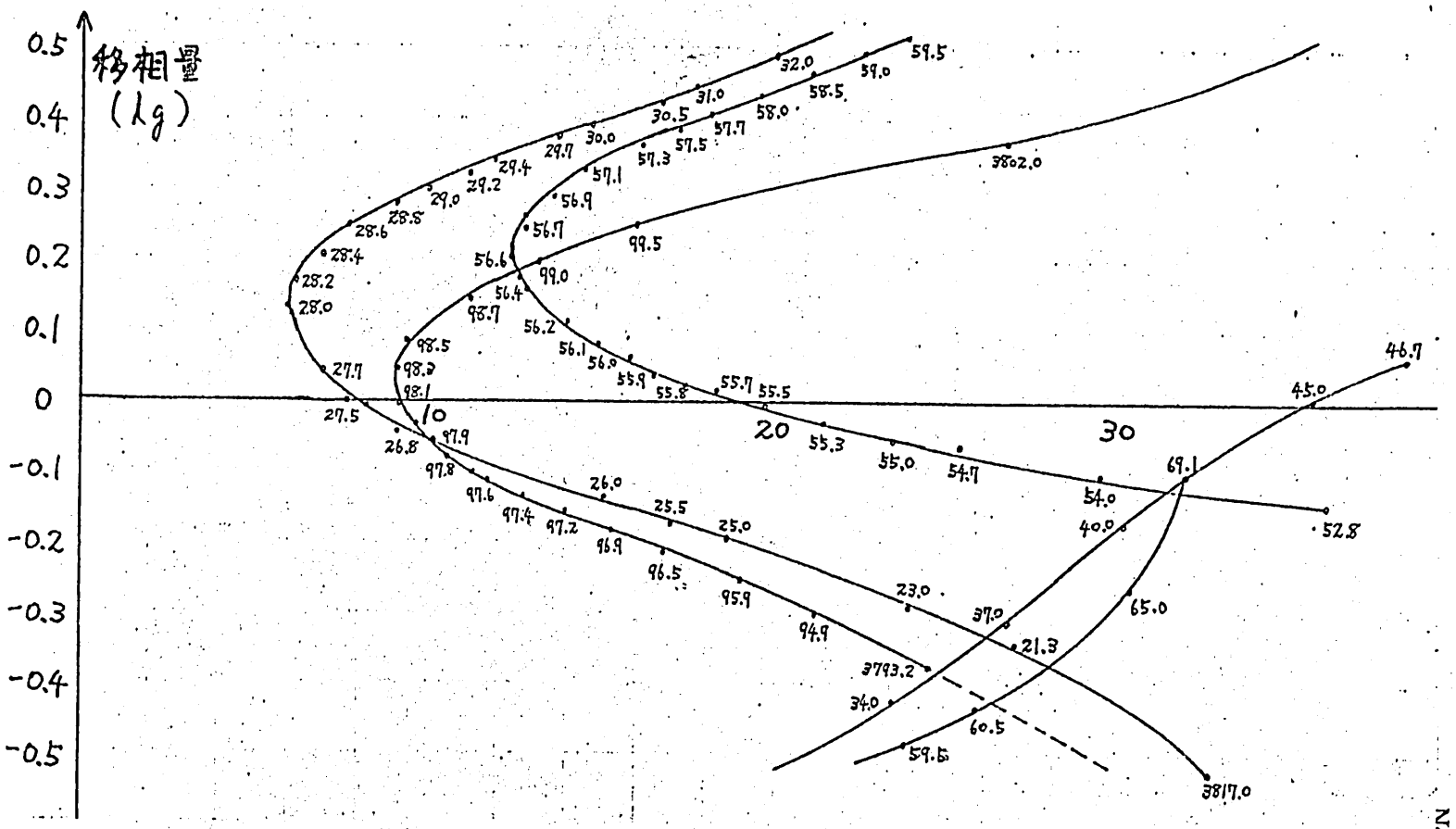


図 7　三空胴の一番目より出力をとりだした場合の負荷線（長線効果を含む）

§4 二空胴帰還回路の発振特性

帰還回路が、ライナック加速管のように、結合多空胴列のときには、その発振特性は複雑である。しかし結合二空胴のときの発振特性が正しく理解できれば、一般の多空胴の場合に拡張して考えることは容易であろう。そこで前者の場合について調べることにする。

この時の負荷線は、§3で述べた図6(a)(b)で示されるように、負荷線相互の位置関係は相対的に固定されており、一方結合多空胴のときのそれは図7に示すように、負荷線は重なり合うようになる。したがってこの状態をシミュレートする必要がある。そこで図8に示すように、帰還回路に単一空胴を二つ並列に入れた外部帰還形進行波管発振器を構成し、主信号に対する移相器1と減衰器1を固定し、副信号に対する減衰器2をパラメータとして、移相器2を動かすことにより、それぞれの負荷線の位置を相対的に自由に動かせるようにした。この状況が図9に示されている。減衰器2を動かすことは、負荷線L_1を左右に平行移動することに相当し、移相器2を動かすことは、L_1を上下に平行移動することに相当する。ここで主信号と副信号の空胴の

共振周波数とQoは、それぞれ3847.2MHz、3882.9 MHz, 7200、7300である。

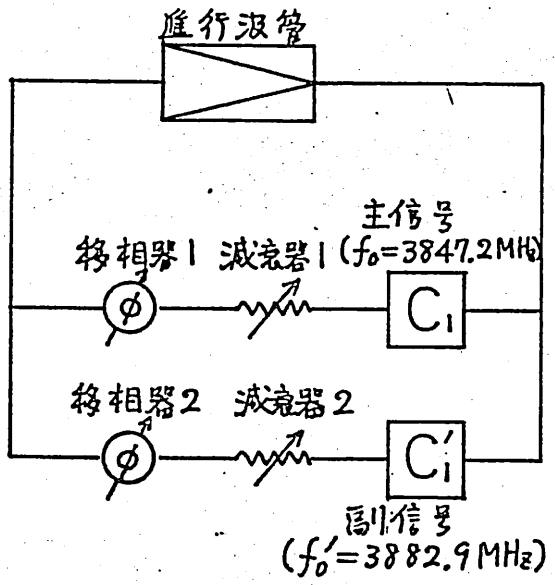


図8　二空胴のシミュレーション

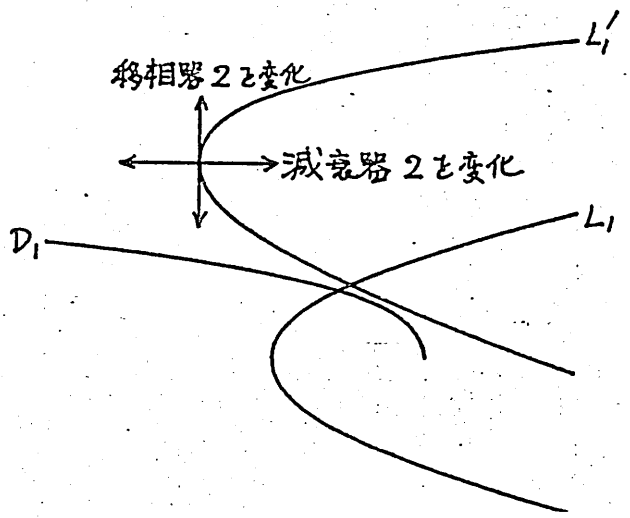


図9　負荷線の移動

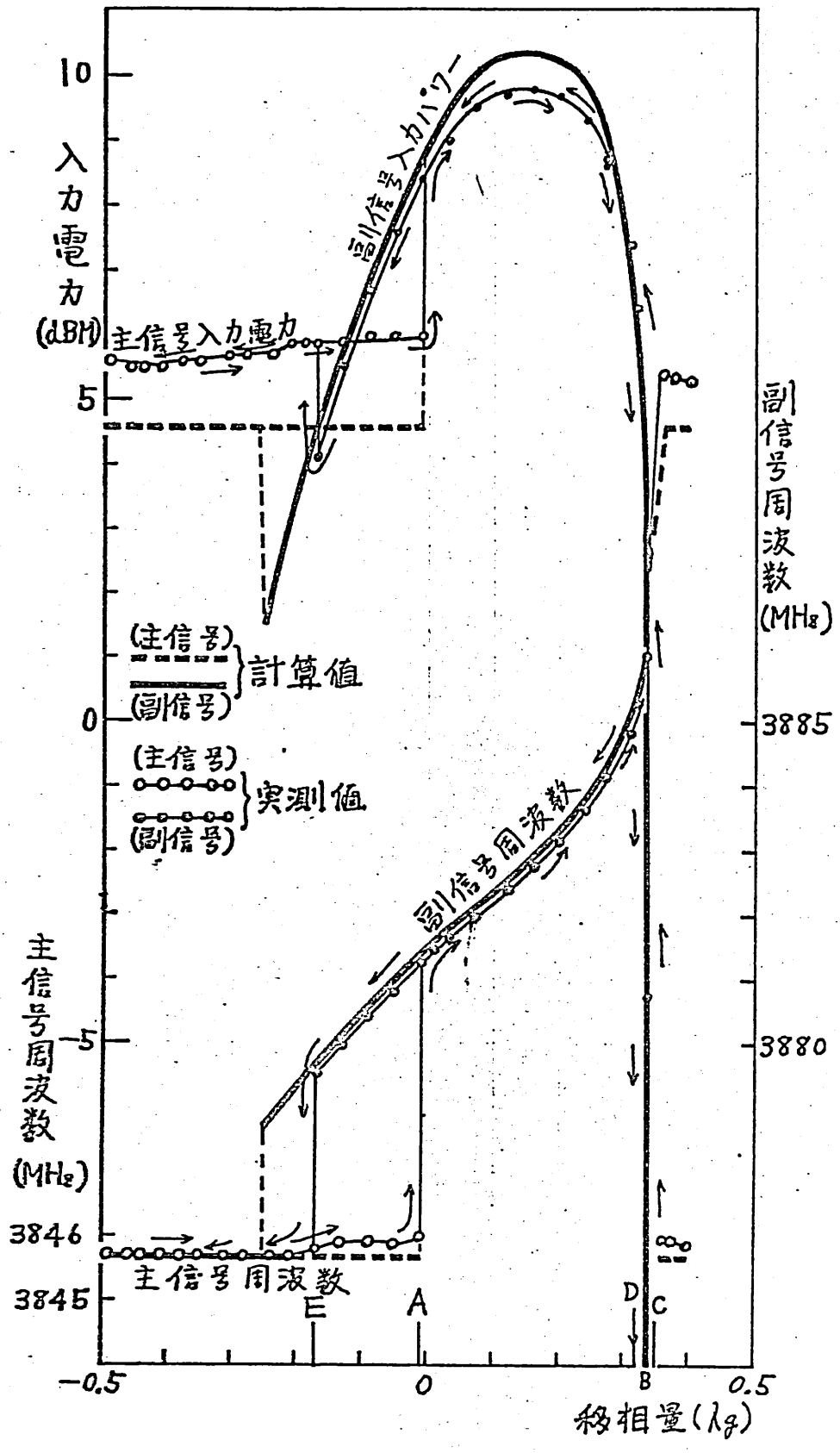
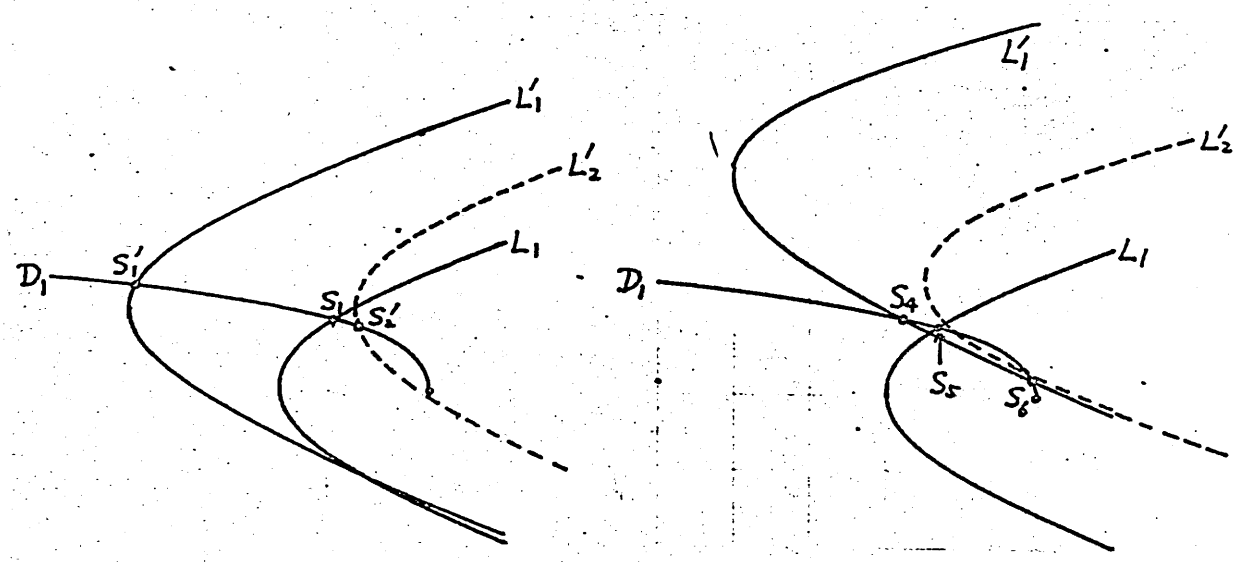

10
入力電力
(dBM)
5
0
−5
主信号入力電力
副信号入力パワー
(主信号)
(副信号)
計算値
(主信号)
(副信号)
実測値
副信号周波数
主信号周波数
副信号周波数
(MHz)
3885
3880
主信号周波数
(MHz)
3846
3845
E
A
D
C
B
−0.5
0
0.5
移相量(λg)

図10に、横軸に移相量をとり、縦軸に進行波管の入力電力（すなわち空胴からの出力）と周波数をプロットした。図10で移相量を−0.5kgから増大させていくと、始め主信号の単独発振であるが、E点を通過してA点に達すると、発振周波数がジャンプし副信号の単独発振となる。さらに移相量を増やすと、B点で突然二重発振が始まり、発振周波数が二つ観測される。さらにC点に達すると二重発振が終り、主信号の単独発振となる。逆に移相量を0.4kgから減少させていくと、まずC点で二重発振が始まる。B点を通過してD点で二重発振が停止して副信号の単独発振となる。さらに移相量を減らしていくと、A点においては周波数のジャンプは起こらず、E点で発振周波数のジャンプが起こり、後は主信号の単独発振となる。すなわち、点AとEで発振モードの遷移がおこり、A－E間はヒステリシスを示す。また点C－B間、点C－D間で二重発振が起こりB－D間でヒステリシスを示す。

この様な実験結果を、D－L線図を用いて整理すると、モード遷移が起こる条件と、二重発振の起こるそれとは、ほぼ図11のようにまとめられる。ここで、一方のモード（主信号）に対する負荷線をL1とし、他のモード（副信号）

に対するそれを L_1' と表わしている。



(a) モード遷移　　(b) 二重発振

図11　モード遷移と二重発振のD－L線図

この図に示すように、モード遷移と二重発振は、デバイス線と負荷線の交点が二つ以上存在する時に起っている。たとえば図11(a)では、$P_i=0$の点が、両方の負荷線の内部にある。従って文献(7)の解析法によると、S_1、S_1'のどちらも発振動作点になりうる。しかし、どちらが一方で発振するのか、あるいは同時にS_1とS_1'で発振するのかは、これだけでは判定できない。また同様に、図11(b)では、S_4とS_5で同時に発振するのか、あるいはどちらか一方で発振するのかは、これだけでは判定

できない。

先の実験によると、デバイス線と負荷線が図11(a)のような交わり方の場合は、発振はS_1'で起こる。たとえS_1で発振していても、そこは安定でなく、発振はS_1'に移行し、発振周波数は1つだけ観測される。また同図において、主信号が動作点S_1で発振している時、副信号に対する負荷線L_1'がL_2'のようにL_1よりも右側に寄ると、もはやS_1からS_1'へのモード遷移をおこさない。

これに対して、図11(b)に示されるように、たとえば副信号の負荷線L_1'が、デバイス線に接するように交わる時には、2つの周波数(S_4とS_5に近い周波数)で同時に発振する。しかし同じように接する交わり方でも、主信号がS_5の動作点で発振している時、たとえばL_1'がL_2'になりL_1よりも右側にくると、モード遷移の場合と同様にもはや二重発振は起こさない。また二重発振状態では、一方の信号の発振出力が大きくなると、それと共に他の信号の発振出力は小さくなる。

しかし何故に、図11(a)あるいは(b)のD-L線図のときに、発振モード遷移または二重発振が起こるかについての説明は、この図だけからは判らない。

進行波管は非線形素子であるから、二信号が存在するときのデバイス線は、一信号の時のそれとは異なる可能性がある。次節では、これについて説明する。

§5 進行波管の二信号デバイス線

一般に、進行波管のような非線形素子では、入力信号が一つの場合の入出力特性は、入力信号が二つ以上存在する場合のそれとでは、大きく異なることが予想される。入出力特性が変化すると、それを表わしたデバイス線は変化する。そこで次には、入力信号が二つ存在する場合のデバイス線（二信号デバイス線）を測定する。

図12にその測定回路を示す。ここで使用された抵抗減衰器と移相器については、すべて較正し、さらに減衰器については、その移相特性も較正した。測定原理と手順は次の通りである。

主信号（3849.1MHz）の電力は、減衰器1を通じてマヂックTee1で等しく分枝3と4に分けられる。分枝3の主信号はマヂックTeeで、減衰器3を通った副信号（3801.3MHz）と混合さ

れ、進行波管への入力となる。進行波管の出力は、減衰器0と2を通して、マヂック Tee 3で、分枝4の主信号と合成され空胴（フィルターとして使用しており、主信号の周波数に同調されている。）を通して検波出力を真空管電圧計で測定する。

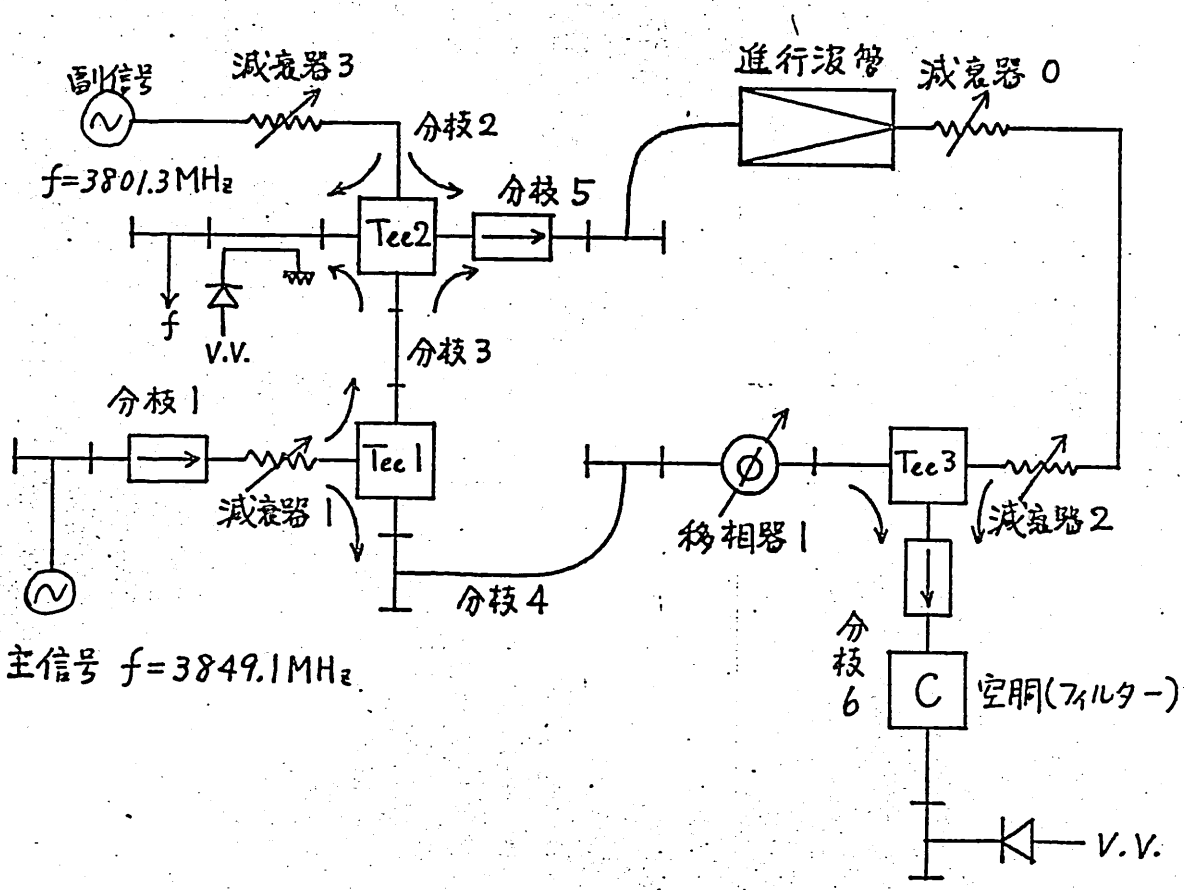


図12　二信号デバイス線測定回路

測定は零位法で行った。すなわち、減衰器

0と2の総減衰量が進行波管の利得に、また移相器1の移相量が進行波管の移相量に等しくなると、分枝6の出力は零になる。これより移相器1と減衰器2（この場合減衰器0は固定した。）を読めば、進行波管の移相量（AM-PM変換特性）と利得がわかる。

測定は、まず減衰器3をある値に設定し、減衰器1をパラメータとして変化させる。移相器1と減衰器2を調整し、減衰器1の各値に対して、分枝6の出力が零になる時の移相器1と減衰器2の値を読んでいく。同じことを減衰器3の別の値に対してくり返えす。

図13には、副信号の入力電力をパラメータとした、主信号に対するデバイス線を示した。これは、図12の測定回路から得られた利得とAM-PM変換特性からひき直したもので、これを二信号デバイス線と呼ぶ。この図は、副信号の入力電力が大きくなるほど、主信号に対する進行波管の利得が低下するという、進行波管の一般的特性に対応している。

この二信号デバイス線は、次のことを示している。すなわち、副信号の入力電力が小さい時の（この場合では-10dBM以下）主信号に対するデバイス線は、一信号に対するデバイス線と同じであり、これをD_1で表わす。副信

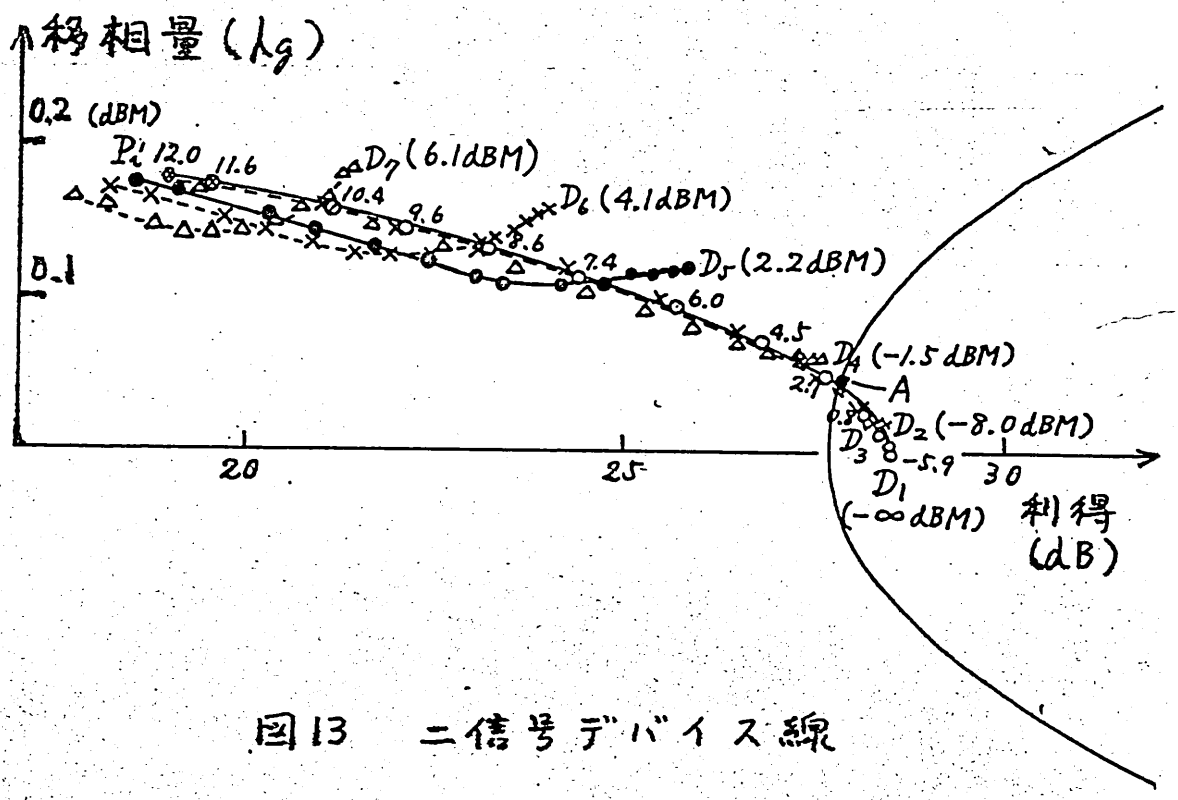


図13　二信号デバイス線

号の入力電力が増大すると共に、主信号に対するデバイス線は、(D_1)から(D_2)—(D_3)—(D_4)—(D_5)—(D_6)—(D_7)へと移行する。たとえば、今L_1の負荷線が図13のA点で交わり、主信号が(この場合、進行波管の入力電力にして2.2dBMで)発振しているとする。この時、副信号に対するデバイス線は、(D_5)で表わされる。このように主信号の進行波管への入力電力レベルによって、副信号に対するデバイス線が変化するところが、一信号デバイス線と大きく異なる点である。

§7 発振モード遷移と二重発振の条件

§4で示したように、モード遷移と二重発振は、D-L線図がそれぞれ図11(a)(b)で示される時に起こるが、ここでは、二信号デバイス線を用いて、その証明を行う。

まずモード遷移を図14で証明する。

図14(a)：同図で、最初に主信号がS_1で発振しているとする。この時、副信号に対するデバイス線はD_1'であり、これと負荷線L_1'とが交点S_1'をもてば、発振が立ち上がり、副信号の電力が増大し動作点S_1'で発振する。

図14(b)：動作点S_1'に相当する副信号の電力に対応して、この図のように、主信号に対するデバイス線はD_2に移り、主信号の動作点はS_2になる。その結果、主信号の電力は減少する(発振電力は、デバイス線が負荷線と深く交わると大きく、浅く交わる時小さい。)。これに対応して副信号に対するデバイス線はD_1'からD_2'に変わり、動作点はS_1'からS_2'に移る。

図14(c)：S_2'は、S_1'に比べてL_1'と深く交わっているので、S_2'での副信号の電力は、S_1'に比べて大きくなる。この電力レベルに相当する主信号のデバイス線は、D_2からD_3へと移行し、動作点はS_3に移動するので主信号の電力

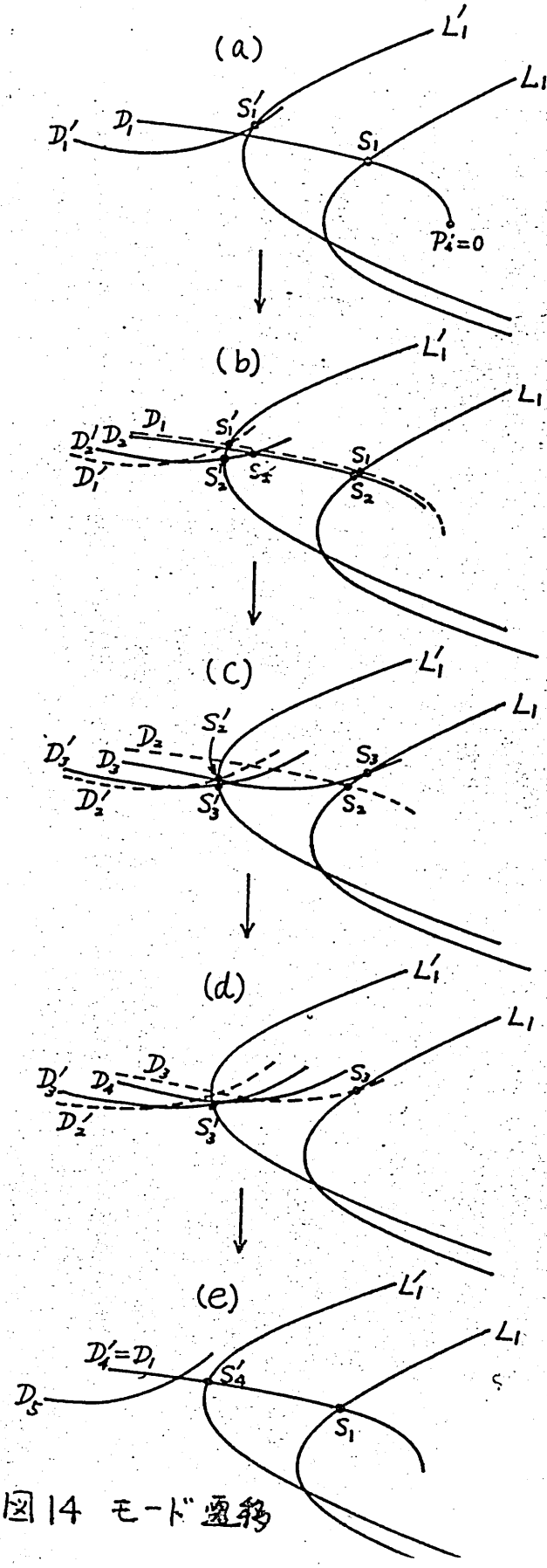


図14 モード遷移

はさらに減少する。これに対応して、副信号に対するデバイス線はD_2'からD_3'に移る。そして動作点はS_3'に移動し、さらに副信号の電力は増大する。

図14(d)：この過程が順々にくり返えされる。

図14(e)：ついには、主信号のデバイス線と負荷線は交点をもたなくなり、主信号は発振を停止する。したがって副信号に対するデバイス線は、もとの主信号に対するデバイス線$D_1(=D_4')$

と入れ替り、主信号に対するデバイス線はD_5となる。このことは、最初の主信号の発振（動作点S_1、したがって発振周波数f_1）が、副信号の発振（動作点S_4'、したがって発振周波数f_4'）に遷移し、発振周波数がf_1からf_4'へジャンプすることを意味する。

上の議論から、モード遷移の発生条件は、次のようにまとめられる。

1）まず、副信号に対するデバイス線D_1'と負荷線L_1'とが交点S_1'をもつこと。そのためには、負荷線L_1'は、主信号の負荷線L_1よりも必ず左側になければならない。右側にあると図15のように交点をもたない。

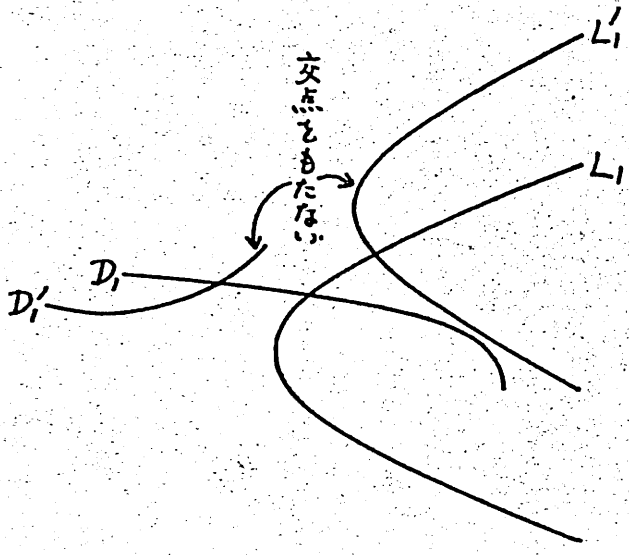


図15　モード遷移を起こさないD-L線図

2）次に、その交点S_1'において、副信号の電力が増大したとき、主信号の電力は減少するが、これによって副信号の電力がさらに増大するようになっていることである。

この条件を満足するのは図11(a)の場合である。　次に、二重発振を図16で説明する。

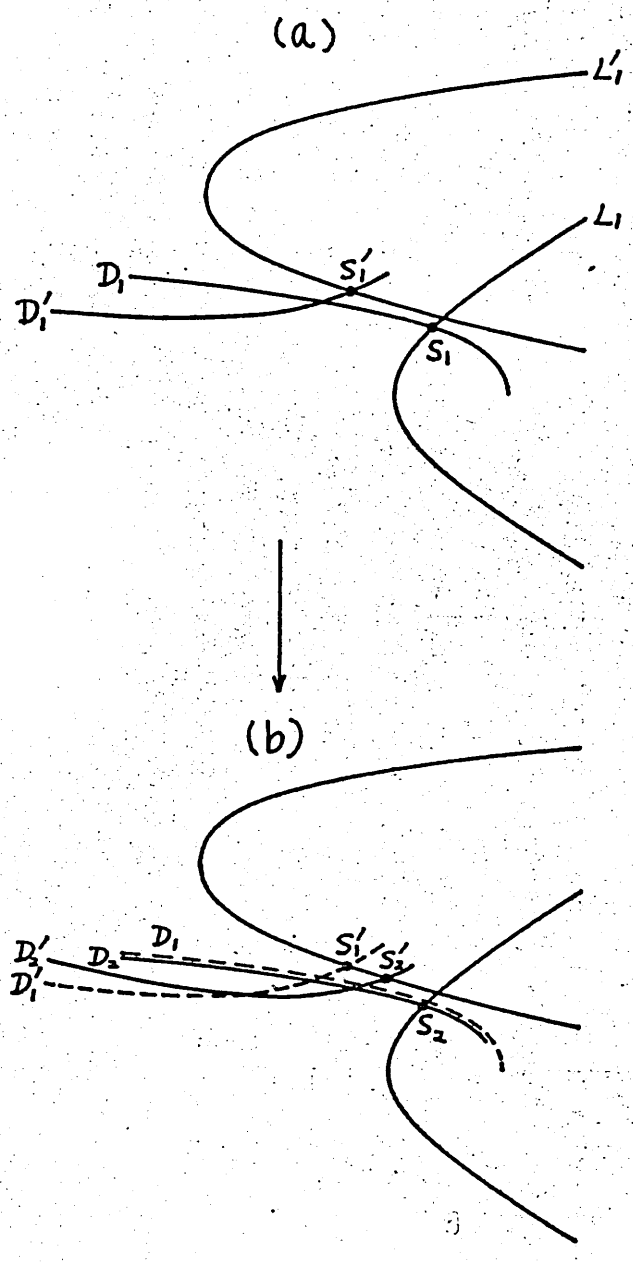


図16　二重発振の説明

二重発振は、モード遷移の途中で安定な状態になったものと考えられる。

図16(a)：同図で、まず主信号が動作点S_1で発振しているとする。図14と同様に、副信号が動作点S'_1で発振を始めたとする。

図16(b)：動作点S'_1に相当する副信号の発振電力に対する主信号のデバイス線はD_1からD_2に移り、交点はS_1からS_2に移る。するとS_2ではS_1に比べて主信号

の電力は減少する。したがって副信号に対するデバイス線は、D_1'からD_2'に移る。この時S_2'では、S_1'に比べて副信号の電力は、図14(b)のモード遷移の場合とは逆に減少する(モード遷移の図14(b)、(c)では、S_2'はS_1'の左側にあり、S_1'に比べてデバイス線と負荷線が深く交わっている。したがって副信号の電力は増大したが、図16(b)では、S_2'はS_1'の右側にあり、S_1'に比べてデバイス線と負荷線は浅く交わっている。したがって副信号の電力が減少するのである。)。したがって、モード遷移の場合のようなくり返し過程が進行せずこの時点でとまり、たとえば、主信号と副信号のデバイス線がそれぞれD_2とD_2'で安定となり、交点S_2とS_2'で同時に発振し、発振周波数が二つ観測される。これが二重発振である。

上の議論から、二重発振の発生条件は、次のようにまとめられる。

1)まず、モード遷移の場合と同様に、副信号のデバイス線D_1'と負荷線L_1'が、交点S_1'をもたなければならない。したがって、L_1'がL_1の右側にある時は二重発振をおこさない。

2)次に、その交点S_1'において、副信号の電力が増大した時、主信号の電力が減少するが、これによって副信号の電力が減少するよ

うになり復元作用が働らくことである。この条件を満足するのは、一方の負荷線がデバイス線に接するような形で交わる図11(b)のような場合のみである。

以上述べた議論によって、先に述べた図11(a)、(b)が説明された。

次に図8の測定条件を表わす(二信号デバイス線を書きこんだ)D-L線図を用いると、発振特性を作図することができる。

D-L線図から、発振特性を作図するには次のようにすればよい。デバイス線と負荷線の交点(動作点)のデバイス線より発振出力、負荷線のfより発振周波数がきまる。したがって図17で主信号がS_1で発振している時、副信号の負荷線をL_1'からL_7'まで上下した時の動作点S_1とS_i'を追跡すれば、図8の測定条件下での発振特性が得られる。こうして求めたものが、図10の計算値である。同図は実測値と計算値が良く一致していることを示している。

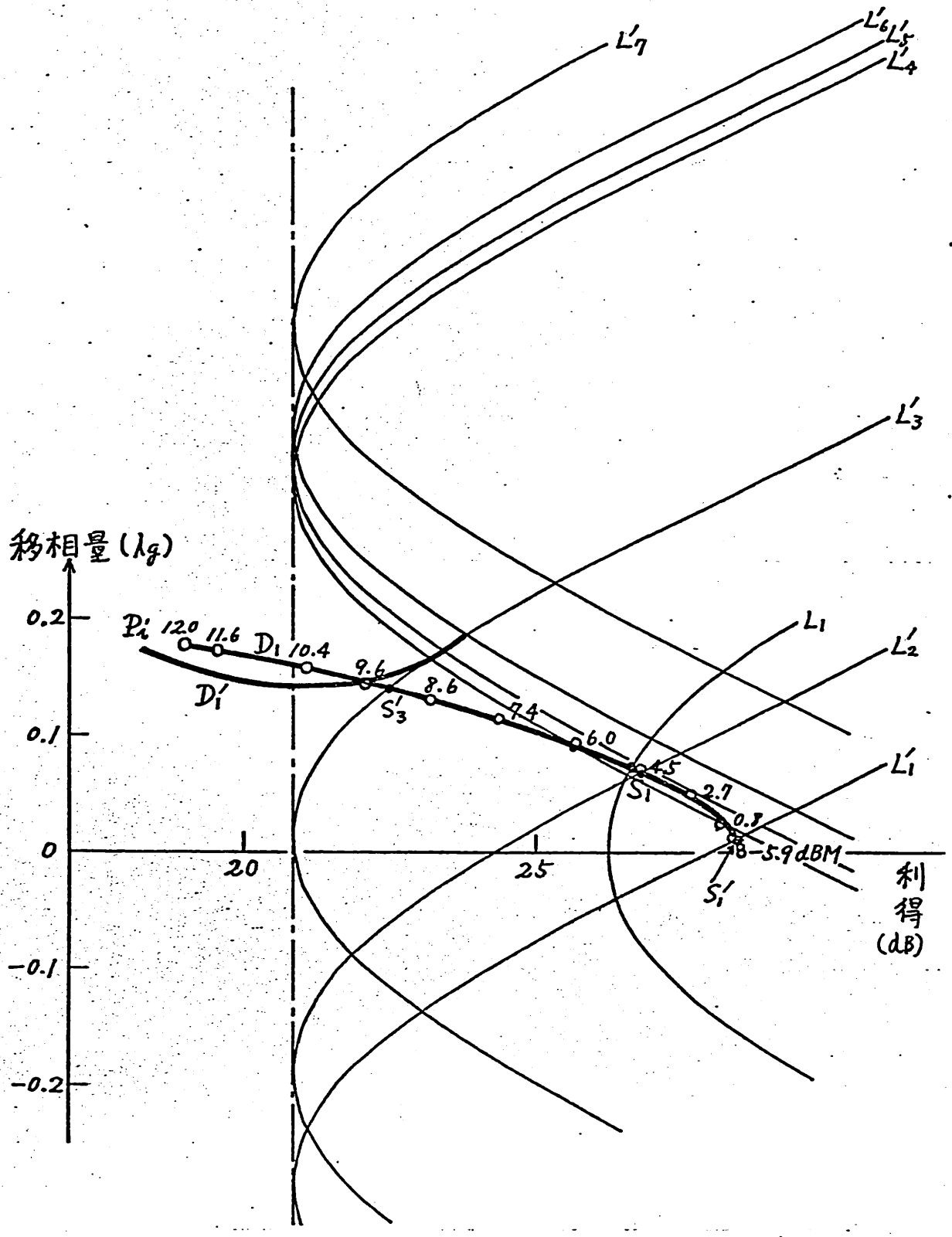


図17 D-L線図から発振特性を求める過程

§7 むすび

発振ループ内に多空胴共振器を含む外部帰還形進行波管発振器で見られるモード遷移現象と、多重発振現象の本質を明きらかにするため、二空胴の場合について解析と実験を行った。二信号デバイス線と、二空胴に対する負荷線を書きこんだD-L線図を用いることによって、モード遷移と二重発振の発生条件がよく説明できることを示した。さらに実際の発振特性と予想される発振特性とがよく一致することを示した。

このD-L線図を用いる方法は、多空胴の場合にもそのまま適用できる。

謝　辞

本研究を行うにあたり、卒業研究として協力下さった山村春夫（住友電工）、小西茂寿（川崎重工）に感謝します。

文　献

1) 鷹岡昭夫、恵克己　信学会電子装置研資
ED71-16 (1971)

2)鈴木敬三、滑川敏彦　信学論(A)54-A 522 1971

3)鈴木敬三、滑川敏彦　信学論(A)54-A 218 1971

4)中川正雄、高橋進一　信学論(B)55-B 8 1972

5)V. Met　Proc. I.R.E　45 1119 1957

6)松原正一　電学誌　80 271 1960

7)鷹岡昭夫、川村静治、裏克己　信学論(B)
55-B 602 1972

輻射科学研究会資料

異方性媒質を含む誘電体スラブ線路における電磁波モードの解析

里村　裕
熊取賢治
松原正則
熊谷信昭
（大阪大学・工学部）

昭和49年4月26日

1. まえがき

レーザの発明以来，光を媒介とした光通信システムが脚光をあびている。したがって，レーザ光を目的に応じて誘導したり制御したりするための各種の光回路を開発することが必要となってきている。そのために，目的にかなった適当な光伝送路や，種々の光回路素子を考案・開発することが将来の伝送技術において重要な課題となってきており，この光伝送路や光回路素子に関する研究は，現在急速に進められている。とりわけ誘電体薄膜線路は，小形で安定な光伝送路として光集積回路に不可欠なものであり，また材料面の豊富さなどから現在，特に注目されている。

ところで誘電体薄膜線路の研究において従来から主として行なわれてきたのは誘電体が等方性の場合であり，これは境界値問題としてすでに数多く取り扱われている[1]。しかしながら誘電体が異方性の場合には，等方性の場合に比べて伝送モードの特性に数々の興味深い現象が見られ，このことが回路素子へ適用される可能性を示している。つまり異方性媒質を用いると回路構成上のパラメータが増え，種々の回路素子が考えだされる。ところが異方性の媒質からなる伝送系に関する研究例は非常に数少なく，しかもそのほとんどがフェライトなどの異方性透磁率からなる伝送系に関しての研究例であり，異方性誘電率をもつ媒質からなる伝送系に関する電磁波モードの詳しい解析は最近にいたるまでほとんど見当らなかった。

一方，最近の光集積回路の開発に関連して，異方性誘電率をもつ媒質を用いた回路素子もいくつか検討されはじめている。たとえばTEモード－TMモード間のモード変換器に異方性媒質を用いる提案[2]や，非相反回路素子の設計のための回路論的取り扱い[3][4]や，変分法の手法を用いたモード結合に関する考察[5]などが報告されている。しかしながら，異方性誘電率をもつ媒質からなる伝送系についての波動論的な解析はまだ十分には行なわれておらず，したがって異方性誘電体からなる伝送系の電磁波モードを詳しく解析することは，理論的にも，また回路素子への応用上にお

いても興味深い。

筆者らは先に誘電体スラブ線路において，スラブが異方性の誘電率をもつ伝送系における電磁波モードの解析を行なった[6][7]が，本稿では基板が異方性の誘電率をもつ伝送系の場合，さらにスラブと基板の両方が異方性誘電体である伝送系における電磁波モードの解析を行ない，各領域における電磁界表示式および特性方程式を導出し伝搬定数と電磁界分布の数値計算例を示す。

2. 異方性媒質中における電磁界

誘電率および透磁率がそれぞれテンソル誘電率 $\hat{\varepsilon}$，およびテンソル透磁率 $\hat{\mu}$ で表わされる一般的な異方性媒質中を伝搬する電磁波モードについて考える。ここで異方性媒質は無損失であるとすれば，$\hat{\varepsilon}$ および $\hat{\mu}$ はどちらもエルミート的である。

伝搬方向を z 軸とするような直角座標系を採用し，まず電磁界の一般的な解析を行なう。Maxwell の方程式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbb{H} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbb{E} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

である。ここでベクトル $\mathbb{D}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{E}$ はそれぞれ電束密度，磁界，磁束密度，電界である。また一般的な異方性媒質を考えているので次式で表わされるような構成関係式がなりたつ。

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}^* \\ \varepsilon_{xy}^* & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz}^* & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz}^* \\ \mu_{xy}^* & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{xz} & \mu_{yz}^* & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{3}$$

ただし * 印は複素共役を表わす。式(1)は定数係数の線形微分方程式であるので，電磁波モードの電磁界は次式に示すように平面波の和で表わされる。

$$Field \propto \left[\sum_{\beta_x} \sum_{\beta_y} A(\beta_x, \beta_y)\, e^{-j(\beta_x x + \beta_y y)} \right] e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t} \qquad (4)$$

ここで β_z, ω, t はそれぞれ z 方向の伝搬定数，角周波数，時間である。したがって伝送電磁波モードを構成するそれぞれの平面波成分 $e^{-j(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z - \omega t)}$ については，

$$\frac{\partial}{\partial x} = -j\beta_x \ , \quad \frac{\partial}{\partial y} = -j\beta_y \ , \quad \frac{\partial}{\partial z} = -j\beta_z \ , \quad \frac{\partial}{\partial t} = j\omega \qquad (5)$$

とおくことができる。以下の解析においては電磁波モードを構成する平面波成分について考えることにする。式(5)および式(2), (3)を式(1)に適用すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \omega\varepsilon_{xx} & \omega\varepsilon_{xy} & \omega\varepsilon_{xz}^{*} & 0 & -\beta_z & \beta_y \\ \omega\varepsilon_{xy}^{*} & \omega\varepsilon_{yy} & \omega\varepsilon_{yz} & \beta_z & 0 & -\beta_x \\ \omega\varepsilon_{xz} & \omega\varepsilon_{yz}^{*} & \omega\varepsilon_{zz} & -\beta_y & \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_z & -\beta_y & \omega\mu_{xx} & \omega\mu_{xy} & \omega\mu_{xz}^{*} \\ -\beta_z & 0 & \beta_x & \omega\mu_{xy}^{*} & \omega\mu_{yy} & \omega\mu_{yz} \\ \beta_y & -\beta_x & 0 & \omega\mu_{xz} & \omega\mu_{yz}^{*} & \omega\mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \qquad (6)$$

上式は同次連立一次方程式であり，非自明な解をもつための条件は左辺の正方行列の行列式が0になることである。この条件より次式に示される β_x, β_y に関する分散関係式が得られる。

$$\begin{aligned} &\{ (a_1\beta_x^4 + a_2\beta_x^3\beta_y + a_3\beta_x^2\beta_y^2 + a_4\beta_x\beta_y^3 + a_5\beta_y^4) \\ &\quad + (a_6\beta_x^2 + a_7\beta_x\beta_y + a_8\beta_y^2) + a_9 \} \\ &+ \{ (b_1\beta_x^3 + b_2\beta_x^2\beta_y + b_3\beta_x\beta_y^2 + b_4\beta_y^3) \\ &\quad + (b_5\beta_x + b_6\beta_y) \} = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

ここで係数 a_i, b_i は媒質定数 $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ と β_z, ω とで表わされる定数であり，付録1に示す。

さて，式(4)で表わされる電磁界が z 方向に伝送されるためには式(4)における［　　］が実関数でなければならない。ただし，ここでいう z 方向へ伝送される波とはその位相速度が

z方向を向いており，かつz方向に減衰のない波のことである。そのためには $Ae^{-j(\beta_x x+\beta_y y)}$ の項について，この複素共役項 $\{Ae^{-j(\beta_x x+\beta_y y)}\}^*$ が存在すればよい。ところが

$$\{Ae^{-j(\beta_x x+\beta_y y)}\}^* = A^* e^{-j\{(-\beta_x^*)x+(-\beta_y^*)y\}}$$

から，(β_x, β_y) が分散関係式(7)の解であれば $(-\beta_x^*, -\beta_y^*)$ もまた式(7)の解でなければならない。さらに式(7)が実係数の4次方程式であることから，上記の2つの根の共役複素根もそれぞれ式(7)の解でなければならない。以上のことにより，$a_1 = \omega^2 \varepsilon_{xx}\mu_{xx} \neq 0$ を考慮して式(7)の奇数次項が0であるという条件が得られ，これより波がz方向に伝搬するための媒質定数 ε，μ に関する次の条件式が得られる。

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = \mu_{yz} = \mu_{xz} = 0 \qquad (8)$$

または

$$Re(\varepsilon_{yz}) = Re(\varepsilon_{xz}) = Im(\varepsilon_{xy})$$
$$= Re(\mu_{yz}) = Re(\mu_{xz}) = Im(\mu_{xy}) = 0 \qquad (9)$$

すなわち，式(8)または式(9)が満足されるときにのみ，z方向に伝送される電磁波モードが存在することになる。

3. 基板に異方性誘電体を用いた誘電体スラブ線路における電磁波モードの解析

3.1 電磁界表示式と特性方程式

伝送線路の具体例として図1に示す厚さdなる等方性誘電体スラブIと，その両側に接する異方性誘電体基板II，等方性誘電体上部層IIIの3層構造の伝送系を考える。等方性誘電体スラブIおよび等方性誘電体上部層IIIの誘電率はそれぞれスカラーの誘電率 ε_I および ε_{III} で与えられ，異方性誘電体基板IIの誘電率はテンソルの誘電率 $\underline{\varepsilon}_{II}$ で表わされるものとする。また透磁率はすべての領域で同じスカラーの透磁率 μ とする。そして上記の

媒質定数は すべて実数であるとし，伝送系は無損失とする。

まず異方性誘電体基板Ⅱにおける電磁界を求める。このとき誘電率 $\hat{\varepsilon}_{\mathrm{II}}$ は式(8),(9)の条件を考慮すれば次のようでなければならない。※

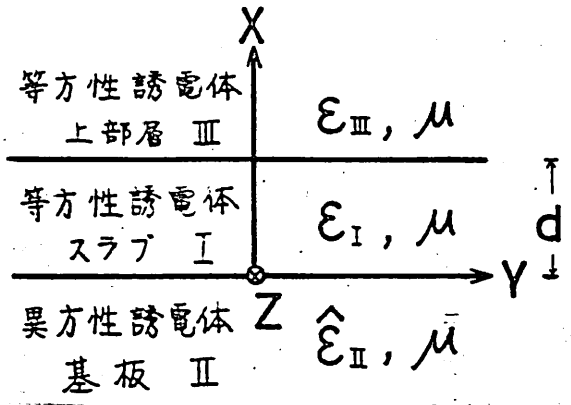


図1. 誘電体スラブ線路

$$\hat{\varepsilon}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx\mathrm{II}} & \varepsilon_{xy\mathrm{II}} & 0 \\ \varepsilon_{xy\mathrm{II}} & \varepsilon_{yy\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz\mathrm{II}} \end{bmatrix} \tag{10}$$

さらに図1において伝送系はy方向にはほぼ一様であり，電磁界はyには依存しないので $\beta_y = 0$ となる。

したがって式(6)は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \omega\varepsilon_{xx\mathrm{II}} & \omega\varepsilon_{xy\mathrm{II}} & 0 & 0 & -\beta_z & 0 \\ \omega\varepsilon_{xy\mathrm{II}} & \omega\varepsilon_{yy\mathrm{II}} & 0 & \beta_z & 0 & -\beta_x \\ 0 & 0 & \omega\varepsilon_{zz\mathrm{II}} & 0 & \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_z & 0 & \omega\mu & 0 & 0 \\ -\beta_z & 0 & \beta_x & 0 & \omega\mu & 0 \\ 0 & -\beta_x & 0 & 0 & 0 & \omega\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \tag{11}$$

また分散関係式(7)は

$$\left(k_{xx\mathrm{II}}^2 k_{zz\mathrm{II}}^2 - k_{xx\mathrm{II}}^2\beta_x^2 - k_{zz\mathrm{II}}^2\beta_z^2\right)\left(k_{yy\mathrm{II}}^2 - \beta_x^2 - \beta_z^2\right) - k_{xy\mathrm{II}}^2\left(k_{zz\mathrm{II}}^2 - \beta_x^2\right) = 0 \tag{12}$$

※ 式(10)の特別な形として

$$\hat{\varepsilon}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx\mathrm{II}} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy\mathrm{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

がある。この場合については付録2で述べる。

となる。ただし，$k_{xx\mathrm{II}}^2=\omega^2\varepsilon_{xx\mathrm{II}}\mu$ ，$k_{xy\mathrm{II}}^2=\omega^2\varepsilon_{xy\mathrm{II}}\mu$ 等である。式(11)は分散関係式(12)の条件を付加しているので1個は冗長である。したがって任意の1個を省き，H_z を用いて他の5つの成分を次のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \omega\varepsilon_{xx\mathrm{II}} & \omega\varepsilon_{xy\mathrm{II}} & 0 & 0 & -\beta_z \\ \omega\varepsilon_{xy\mathrm{II}} & \omega\varepsilon_{yy\mathrm{II}} & 0 & \beta_z & 0 \\ 0 & 0 & \omega\varepsilon_{zz\mathrm{II}} & 0 & \beta_x \\ 0 & \beta_z & 0 & \omega\mu & 0 \\ -\beta_z & 0 & \beta_x & 0 & \omega\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H_z \qquad (13)$$

さて式(12)から得られる β_x の4根，β_{x1}，$-\beta_{x1}$，β_{x2}，$-\beta_{x2}$ のそれぞれに対応する平面波成分の一次結合により電磁界は次のように表わすことができる。

$$Field \propto \left[\sum_{i=1}^{2}\left(A_i e^{-j\beta_{xi}x}+B_i e^{j\beta_{xi}x}\right)\right] e^{-j\beta_z z} e^{j\omega t}$$

ところで基板中においては電磁界が $x=-\infty$ で0にならねばならないので β_x は純虚数でなければならない。つまり，

$$\beta_{xi}=j\alpha_{xi} \qquad (\alpha_{xi}>0)$$

である。そこで H_z は次のように表わすことができる。ただし $e^{-j\beta_z z}e^{j\omega t}$ は以下省略する。

$$H_z=\sum_{n=1}^{2} A_n e^{\alpha_{xn}x} \qquad (14)$$

ここで係数 A_n は境界条件によって決定される定数である。
この H_z を式(13)に考慮し，他の電磁界成分を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} H_z &= \sum_{n=1}^{2} A_n e^{\alpha_{xn}x} \\ E_z &= \frac{\omega\mu}{\beta_z}\sum_{n=1}^{2} a_n A_n e^{\alpha_{xn}x} \\ H_y &= j\sum_{n=1}^{2} b_n A_n e^{\alpha_{xn}x} \\ E_y &= -j\frac{\omega\mu}{\beta_z}\sum_{n=1}^{2} c_n A_n e^{\alpha_{xn}x} \end{aligned} \qquad (15)$$

ただし，

$$a_n = \frac{k_{xy_{II}}^2 \cdot \beta_z^2}{k_{xx_{II}}^2 \cdot k_{zz_{II}}^2 + k_{xx_{II}}^2 \cdot \alpha_{x_n}^2 - k_{zz_{II}}^2 \cdot \beta_z^2}$$

$$b_n = \frac{k_{xy_{II}}^2 \cdot k_{zz_{II}}^2}{k_{xx_{II}}^2 \cdot k_{zz_{II}}^2 + k_{xx_{II}}^2 \cdot \alpha_{x_n}^2 - k_{zz_{II}}^2 \cdot \beta_z^2} \cdot \frac{\beta_z}{\alpha_{x_n}}$$

$$c_n = \frac{\beta_z}{\alpha_{x_n}}$$

上式からわかるように，一般には $H_z \neq 0$，$E_z \neq 0$ であり電磁波モードはハイブリッドモードであることがわかる。

次に等方性誘電体上部層Ⅲおよび等方性誘電体スラブⅠにおける電磁界を求める。等方性誘電体上部層Ⅲ中の電磁界は周知のように次式で与えられる[8]。

$$\begin{aligned} H_z &= B e^{-\alpha x} \\ E_z &= \frac{\omega\mu}{\beta_z} C e^{-\alpha x} \\ H_y &= -j r C e^{-\alpha x} \\ E_y &= j \frac{\omega\mu}{\beta_z} u B e^{-\alpha x} \end{aligned} \qquad (16)$$

ただし $r = \dfrac{k_{III}^2}{\alpha \cdot \beta_z}$，$u = \dfrac{\beta_z}{\alpha}$，$\alpha = \sqrt{\beta_z^2 - k_{III}^2} > 0$，$k_{III}^2 = \omega^2 \varepsilon_{III} \mu$

また等方性誘電体スラブⅠ中での電磁界は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H_z &= D \cos sx + E \sin sx \\ E_z &= \frac{\omega\mu}{\beta_z} (F \cos sx + G \sin sx) \\ H_y &= j p (F \sin sx - G \cos sx) \\ E_y &= -j \frac{\omega\mu}{\beta_z} q (D \sin sx - E \cos sx) \end{aligned} \qquad (17)$$

ただし，$p = \dfrac{k_I^2}{s \cdot \beta_z}$，$q = \dfrac{\beta_z}{s}$，$s = \sqrt{k_I^2 - \beta_z^2} > 0$，$k_I^2 = \omega^2 \varepsilon_I \mu$

ここで係数 B, C, D, E, F, G は境界条件によって決定される定数である。

このようにして異方性誘電体基板Ⅱ，等方性誘電体上部層Ⅲ，等方性誘電体スラブⅠのそれぞれの領域における電磁界表示式を求めることができた。なお，電磁界のx方向成分はいずれの媒質においてもy方向成分から次式により求められる。

$$D_x = \frac{\beta_z}{\omega} H_y \quad , \quad B_x = -\frac{\beta_z}{\omega} E_y \tag{18}$$

さて，境界面 $x=0$ および $x=d$ において電磁界の接線成分が連続であるという境界条件を前述の電磁界表示式に適用すると，特性方程式および電磁界表示式における各係数が定められる。特性方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\left[p(p\beta-\gamma u)(a_1c_2-a_2c_1)-(pu+\gamma\beta)(b_1c_2-b_2c_1)\right.\\
&\left.+\beta\{p(pu+\gamma\beta)(a_1-a_2)+(p\beta-\gamma u)(b_1-b_2)\}\right]\sin sd\cdot\cos sd\\
&+\left[\beta^2\{p^2(a_1-a_2)-\gamma(b_1-b_2)\}-u\{p^2(a_1c_2-a_2c_1)-\gamma(b_1c_2-b_2c_1)\}\right]\sin^2 sd\\
&+\left[p\beta\{\gamma(a_1c_2-a_2c_1)+(b_1c_2-b_2c_1)\}+p\beta u\{\gamma(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\}\right]\cos^2 sd\\
&=0
\end{aligned} \tag{19}$$

3.2 数値計算例

この節では，前節で得られた電磁界表示式と特性方程式を用いて数値計算を行ない，伝搬定数および電磁界分布を求める。電気的主軸がξ，η，ζであり，次式で表わされる誘電率テンソルをもつ誘電体を考える。

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \tag{20}$$

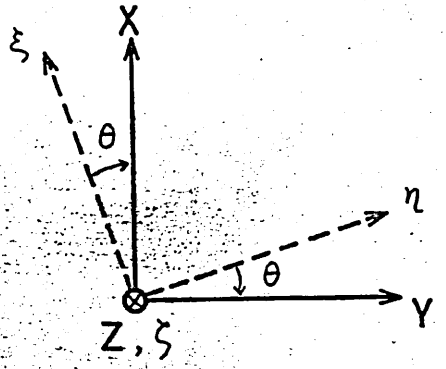


図2. 座標系

ここで図2のようにξ軸を中心にξ軸，η軸が角度θだけ回転したxyz座標系においては，誘電率は式(21)のようになる。

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{\xi\xi}\cos^2\theta + \varepsilon_{\eta\eta}\sin^2\theta \\ \varepsilon_{xy} &= (\varepsilon_{\xi\xi} - \varepsilon_{\eta\eta})\sin\theta\cdot\cos\theta \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{\eta\eta}\cos^2\theta + \varepsilon_{\xi\xi}\sin^2\theta \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{aligned} \qquad (21)$$

具体的な伝送路として，異方性誘電体基板上に，厚さdの誘電率ε_Iなる等方性誘電体スラブが被覆された伝送系を例にとり，次のような数値例の場合について数値計算を行なう。

$$\varepsilon_{\xi\xi}/\varepsilon_0 = (2.0)^2\ ,\quad \varepsilon_{\eta\eta}/\varepsilon_0 = (1.5)^2\ ,\quad \varepsilon_{\zeta\zeta}/\varepsilon_0 = (1.75)^2$$

$$\varepsilon_I/\varepsilon_0 = (2.5)^2\ ,\quad \varepsilon_{III}/\varepsilon_0 = 1\ ,\quad \mu = \mu_0$$

ここでε_0, μ_0はそれぞれ真空の誘電率および透磁率である。

このとき$\theta = 0°$および$45°$における，自由空間伝搬定数k_0($k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2\pi/\lambda_0$)で規格化した伝搬定数$\beta_z$の値をそれぞれ図3，図4に示す。これらの図において横軸は誘電体スラブの厚さdを自由空間波長λ_0で割った値d/λ_0である。$\theta = 0°$の場合には誘電率テンソルは対角成分のみからなり，β_z/k_0の上限値は2.5であるが，1.5の下限値をもつTEモード群と2.0の下限値をもつTMモード群とに分離している。一方，図4は$\theta \neq \frac{\pi}{2}\cdot n$(nは任意の整数)の場合における伝搬定数の値の例である。この場合は誘電率テンソルの非対角成分は0ではなくなり，電磁波モードはハイブリッドモードとなる。そしてβ_z/k_0の下限値は2.0であり，d/λ_0の増加につれて2.5に漸近してゆくのがわかる。

次に$\theta = 45°$のa, b, cの各点での電磁界分布をそれぞれ図5，図6，図7に示す。これらの図においては横軸に誘電体スラブの厚さの方向，すなわちz軸をとっている。$z=0$でスラブが基板と接しており，$z=d$で空気と接している。また縦軸は任意目盛で表わした電磁界の大きさを示している。図からわかるように$E_z \neq 0$, $H_z \neq 0$のハイブリッドモードであることが確かめられ，d/λ_0の増加につれて伝送エネルギーの大部分がスラブに集中することがわかる。

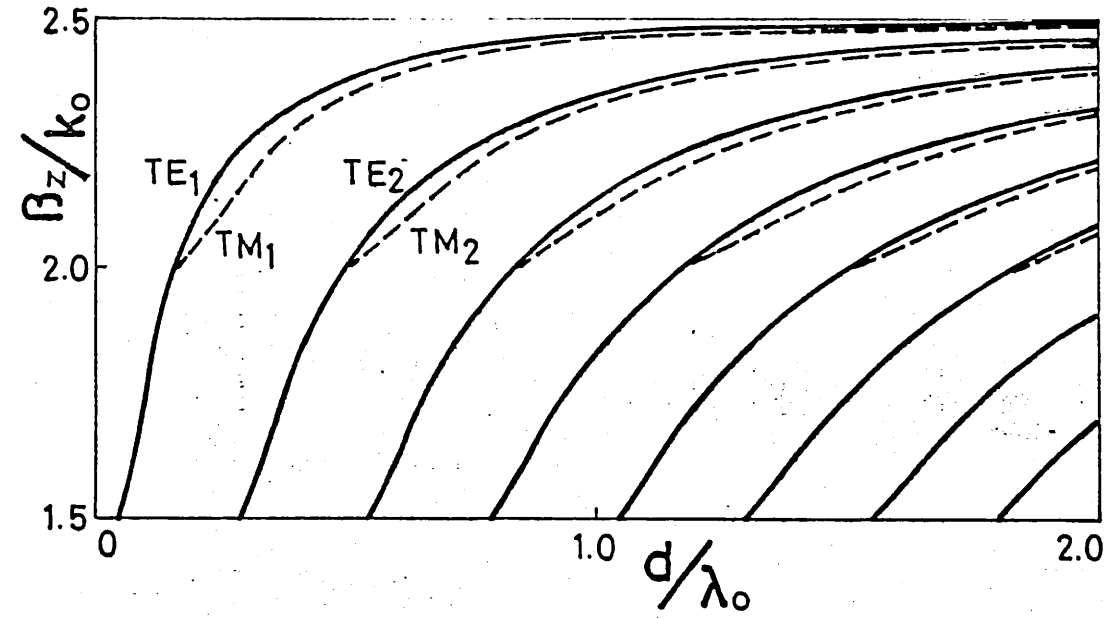


図3. $\theta = 0°$ における伝搬定数 β_z

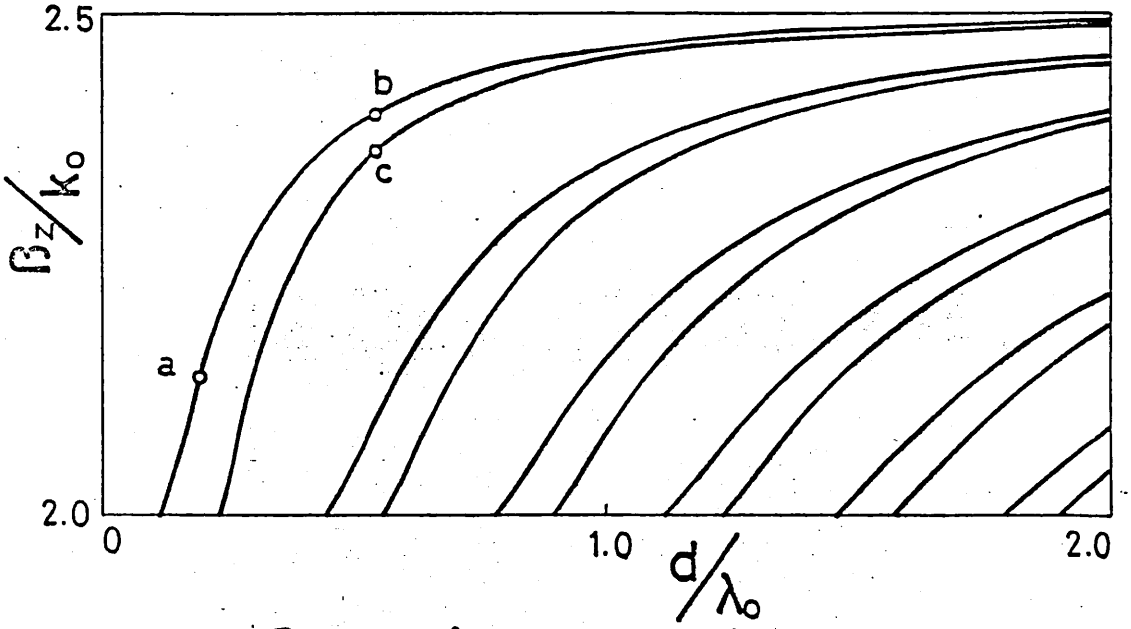


図4. $\theta = 45°$ における伝搬定数 β_z

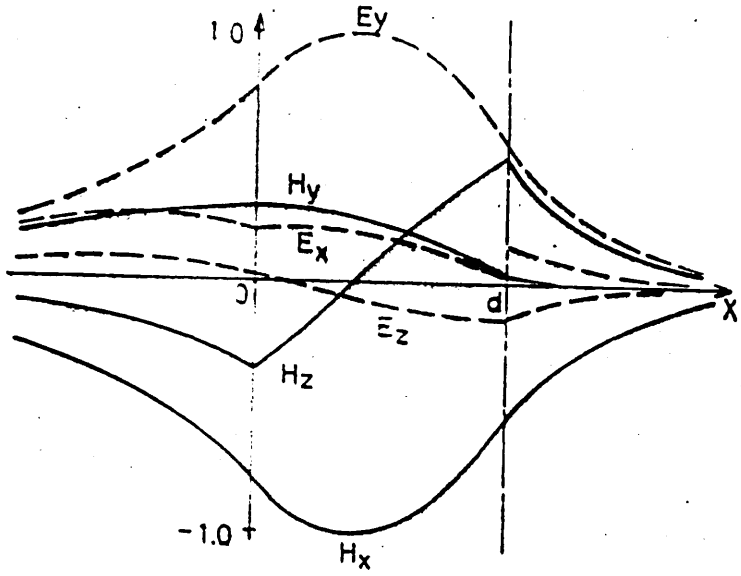


図5. a点における電磁界分布

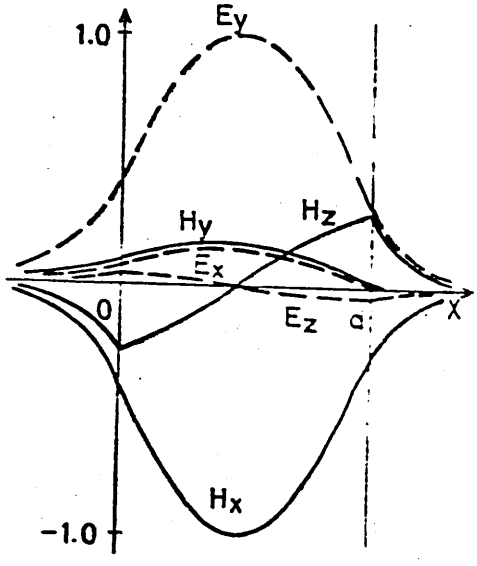


図6. b点における電磁界分布

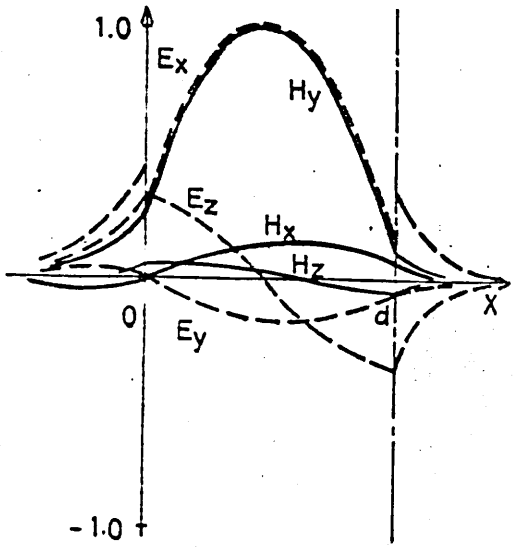


図7. C点における電磁界分布

4. スラブと基板の両方に異方性誘電体を用いた誘電体スラブ線路における電磁波モードの解析

4.1 電磁界表示式と特性方程式

この章ではスラブと基板の両方に異方性誘電体を用いた誘電体スラブ線路における電磁波モードの解析を行なう。伝送線路の具体例として，図8に示す厚さdなる異方性誘電体スラブIとその両側に接する異方性誘電体基板II，等方性誘電体上部層IIIの3層構造の伝送系を考える。等方性誘電体上部層IIIの誘電率はスカラーの誘電率ε_{III}とし，異方性誘電体スラブIと異方性誘電体基板IIの誘電率はそれぞれテンソルの誘電率$\hat{\varepsilon}_I$，$\hat{\varepsilon}_{II}$で与えられているものとする。また透磁率はすべての領域で同じスカラーの透磁率μとする。そして上記の媒質定数はすべて実数であるとし，伝送系は無損失とする。

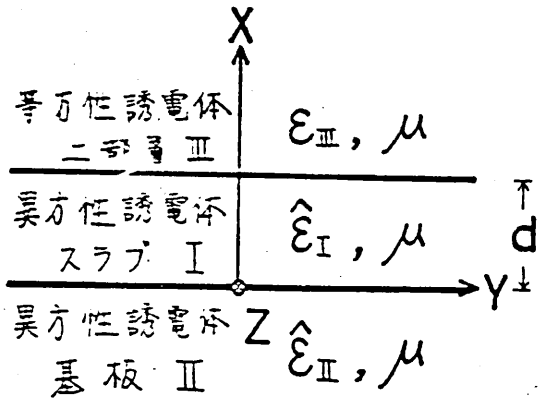


図8. 誘電体スラブ線路

まず異方性誘電体スラブIにおける電磁界を求める。このとき誘電率$\hat{\varepsilon}_I$は式(8),(9)の条件を考慮すれば次のようになる。※※

$$\hat{\varepsilon}_I = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xxI} & \varepsilon_{xyI} & 0 \\ \varepsilon_{xyI} & \varepsilon_{yyI} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zzI} \end{bmatrix} \tag{22}$$

さらに図8において伝送系はy方向に一様であるとすれば，第3章で用いた手法より異方性誘電体スラブI中の電磁界は，次の

※※式(22)の特別な形として$\hat{\varepsilon}_I = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xxI} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yyI} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zzI} \end{bmatrix}$がある。

この場合については付録3で述べる。

ように表わすことができる。[6][7]

$$H_z = \sum_{n=1}^{2} (A_{nI} \cos\beta_{x_n} x + B_{nI} \sin\beta_{x_n} x)$$

$$E_z = \frac{\omega\mu}{\beta_z} \sum_{n=1}^{2} a_{nI} (A_{nI} \cos\beta_{x_n} x + B_{nI} \sin\beta_{x_n} x)$$

$$H_y = j \sum_{n=1}^{2} b_{nI} (A_{nI} \sin\beta_{x_n} x - B_{nI} \cos\beta_{x_n} x)$$

$$E_y = -j \frac{\omega\mu}{\beta_z} \sum_{n=1}^{2} c_{nI} (A_{nI} \sin\beta_{x_n} x - B_{nI} \cos\beta_{x_n} x) \qquad (23)$$

ただし

$$a_{nI} = \frac{k_{xy_I}^2 \cdot \beta_z^2}{k_{xx_I}^2 k_{zz_I}^2 - k_{xx_I}^2 \beta_{x_n}^2 - k_{zz_I}^2 \beta_z^2}$$

$$b_{nI} = \frac{k_{xy_I}^2 k_{zz_I}^2}{k_{xx_I}^2 k_{zz_I}^2 - k_{xx_I}^2 \beta_{x_n}^2 - k_{zz_I}^2 \beta_z^2} \cdot \frac{\beta_z}{\beta_{x_n}}$$

$$c_{nI} = \frac{\beta_z}{\beta_{x_n}}$$

ここで分散関係式は

$$(k_{xx_I}^2 k_{zz_I}^2 - k_{xx_I}^2 \beta_x^2 - k_{zz_I}^2 \beta_z^2)(k_{yy_I}^2 - \beta_x^2 - \beta_z^2) - k_{xy_I}^4 (k_{zz_I}^2 - \beta_x^2) = 0 \qquad (24)$$

で表わされている。

また，異方性誘電体基板Ⅱおよび等方性誘電体上部層Ⅲにおける電磁界表示式は，それぞれ第3章と同様に以下のように表わすことができる。

異方性誘電体基板Ⅱ中の電磁界

$$H_z = \sum_{n=1}^{2} A_{nII} e^{\alpha_{x_n} x}$$

$$E_z = \frac{\omega\mu}{\beta_z} \sum_{n=1}^{2} a_{nII} A_{nII} e^{\alpha_{x_n} x}$$

$$H_y = j \sum_{n=1}^{2} b_{nII} A_{nII} e^{\alpha_{x_n} x}$$

$$E_y = -j \frac{\omega\mu}{\beta_z} \sum_{n=1}^{2} c_{nII} A_{nII} e^{\alpha_{x_n} x} \qquad (25)$$

ただし，

$$a_{n\mathrm{II}} = \frac{k_{xy\mathrm{II}}^2 \beta_z^2}{k_{xx\mathrm{II}}^2 k_{zz\mathrm{II}}^2 + k_{xz\mathrm{II}}^2 \alpha_{x_n}^2 - k_{zz\mathrm{II}}^2 \beta_z^2}$$

$$b_{n\mathrm{II}} = \frac{k_{xy\mathrm{II}}^2 \cdot k_{zz\mathrm{II}}^2}{k_{xx\mathrm{II}}^2 k_{zz\mathrm{II}}^2 + k_{xz\mathrm{II}}^2 \alpha_{x_n}^2 - k_{zz\mathrm{II}}^2 \beta_z^2} \cdot \frac{\beta_z}{\alpha_{x_n}}$$

$$c_{n\mathrm{II}} = \frac{\beta_z}{\alpha_{x_n}}$$

等方性誘電体上部層III中の電磁界

$$H_z = E e^{-\alpha x}$$
$$E_z = \frac{\omega\mu}{\beta_z} F e^{-\alpha x}$$
$$H_y = -j r F e^{-\alpha x}$$
$$E_y = j \frac{\omega\mu}{\beta_z} s E e^{-\alpha x} \qquad (26)$$

ただし $r = \frac{k_{\mathrm{III}}^2}{\alpha \cdot \beta_z}$, $s = \frac{\beta_z}{\alpha}$, $\alpha = \sqrt{\beta_z^2 - k_{\mathrm{III}}^2} > 0$, $k_{\mathrm{III}}^2 = \omega^2 \varepsilon_{\mathrm{III}} \mu$

ここで係数 $A_{1\mathrm{I}}$, $A_{2\mathrm{I}}$, $B_{1\mathrm{I}}$, $B_{2\mathrm{I}}$, $A_{1\mathrm{II}}$, $A_{2\mathrm{II}}$, E, Fは境界条件によって決定される定数である。

以上のように各領域における電磁界表示式がすべて得られた。なお電磁界のz方向成分はいずれの領域においても式(18)により求めることができる。

ここで電磁界表示式に，境界面 $x=0$, $x=d$ において電磁界の接線成分が連続であるという境界条件を適用することにより，特性方程式および電磁界表示式の各係数が定められる。スラブ，基板の誘電率テンソルの型の組合せにはそれぞれ非対角成分を含むときと含まないときの合計4つの場合があり，その各々の場合の特性方程式を以下に示す。

(イ) スラブIと基板IIのどちらも対角成分のみの場合

この場合，電磁界はTEモードとTMモードに分離される。

TEモード

$$C_{\mathrm{I}}(S + C_{\mathrm{II}}) \cdot \cos\beta_{x_1} d + (C_{\mathrm{I}}^2 - S \cdot C_{\mathrm{II}}) \sin\beta_{x_1} d = 0 \qquad (27)$$

TMモード

$$b_I(r+b_{II})\cdot\cos\beta_{x_2}d+(b_I^2-r\cdot b_{II})\sin\beta_{x_2}d=0 \qquad (28)$$

(ロ) スラブIが対角成分のみで，基板IIが非対角成分(ε_{xy})を含む場合

$$\begin{aligned}
&b_I\cdot c_I[(s+c_{1I})(r\cdot a_{2II}+b_{2II})-(s+c_{2II})(r\cdot a_{1II}+b_{1II})]\cos\beta_{x_1}d\cdot\cos\beta_{x_2}d\\
&+c_I[(s+c_{1II})(b_I^2\cdot a_{2II}-r\,b_{2II})-(s+c_{2II})(b_I^2\cdot a_{1II}-r\cdot b_{1II})]\cos\beta_{x_1}d\cdot\sin\beta_{x_2}d\\
&+b_I[(c_I^2-s\cdot c_{1II})(r\cdot a_{2II}+b_{2II})-(c_I^2-s\cdot c_{2II})(r\cdot a_{1II}+b_{1II})]\sin\beta_{x_1}d\cdot\cos\beta_{x_2}d\\
&+[(c_I^2-s\cdot c_{1II})(b_I^2\cdot a_{2II}-r\cdot b_{2II})-(c_I^2-s\,c_{2II})(b_I^2\cdot a_{1II}-r\cdot b_{1II})]\sin\beta_{x_1}d\cdot\sin\beta_{x_2}d\\
&\qquad=0
\end{aligned} \qquad (29)$$

(ハ) スラブIが非対角成分(ε_{xy})を含み，基板IIが対角成分のみの場合

$$\begin{aligned}
&b(r\cdot c_{1I}\cdot a_{1I}-s\cdot b_{1I})(\cos^2\beta_{x_1}d+\sin^2\beta_{x_1}d)+c(s\cdot b_{2I}-r\cdot c_{2I}\cdot a_{2I})(\cos^2\beta_{x_2}d+\sin^2\beta_{x_2}d)\\
&+[-(b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I})(a\cdot e-b\cdot c)-(r\cdot c_{1I}\cdot a_{2I}-s\cdot b_{1I})a\\
&\quad-(s\cdot b_{2I}-r\cdot c_{2I}\cdot a_{1I})e+r\cdot s(a_{2I}-a_{1I})]\cos\beta_{x_1}d\cdot\cos\beta_{x_2}d\\
&+[(s\cdot b_{1I}-r\cdot c_{1I}\cdot a_{2I})(ae-bc)+(b_{1I}\cdot c_{2I}-b_{2I}\cdot c_{2I})a\\
&\quad+r\cdot s(a_{2I}-a_{1I})e+(s\cdot b_{2I}-r\cdot a_{1I}\cdot c_{2I})]\cos\beta_{x_1}d\cdot\sin\beta_{x_2}d\\
&+[-(s\cdot b_{2I}-r\cdot c_{2I}\cdot a_{1I})(ae-bc)+r\cdot s(a_{2I}-a_{1I})a\\
&\quad+(b_{1I}\cdot c_{2I}-b_{2I}\cdot c_{1I})e+(r\cdot c_{1I}\cdot a_{2I}-s\cdot b_{1I})]\sin\beta_{x_1}d\cdot\cos\beta_{x_2}d\\
&+[r\cdot s(a_{2I}-a_{1I})(ae-bc)+(s\cdot b_{2I}-r\cdot c_{2I}\cdot a_{1I})a\\
&\quad+(r\cdot c_{1I}\cdot a_{2I}-s\cdot b_{1I})e-(b_{1I}\cdot c_{2I}-b_{2I}\cdot c_{1I})]\sin\beta_{x_1}d\cdot\sin\beta_{x_2}d\\
&\qquad=0
\end{aligned} \qquad (30)$$

ただし，

$$a=\frac{c_{II}b_{2I}-b_{II}c_{2I}a_{1I}}{b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I}} \qquad b=\frac{c_{II}b_{2I}-b_{II}c_{2I}a_{2I}}{b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I}}$$

$$c=\frac{b_{II}c_{1I}a_{1I}-c_{II}b_{1I}}{b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I}} \qquad e=\frac{b_{II}c_{1I}a_{2I}-c_{II}b_{1I}}{b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I}}$$

(ニ) スラブIと基板IIのどちらもが非対角成分(ε_{xy})を含む場合

$$
\begin{aligned}
&(r\cdot c_{1I}\cdot a_{1I}-s\cdot b_{1I})(al-bk)(\cos^2\beta_{x_1}d+\sin^2\beta_{x_1}d)+(r\cdot c_{2I}\cdot a_{2I}-s\cdot b_{2I})(cn-em)\\
&\times(\cos^2\beta_{x_2}d+\sin^2\beta_{x_2}d)+\left[r\cdot s(a_{2I}-a_{1I})(ae-bc)-(b_{1I}\cdot c_{2I}-b_{2I}c_{1I})(kn-lm)\right.\\
&\left.+(r\cdot c_{2I}\cdot a_{1I}-s\cdot b_{2I})(an-bm)+(r\cdot c_{1I}\cdot a_{2I}-s\cdot b_{1I})(cl-ek)\right]\cos\beta_{x_1}d\cdot\cos\beta_{x_2}d\\
&+\left[r\cdot s(a_{2I}-a_{1I})(an-bm)-(b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I})(cl-ek)\right.\\
&\left.-(r\cdot c_{2I}\cdot a_{1I}-s\cdot b_{2I})(ae-bc)-(r\cdot c_{1I}a_{2I}-s\cdot b_{1I})(kn-lm)\right]\cos\beta_{x_1}d\cdot\sin\beta_{x_2}d\\
&+\left[-r\cdot s(a_{2I}-a_{1I})(cl-ek)+(b_{1I}\cdot c_{2I}-b_{2I}\cdot c_{1I})(an-bm)\right.\\
&\left.+(r\cdot c_{2I}\cdot a_{1I}-s\cdot b_{2I})(kn-lm)+(r\cdot c_{1I}\cdot a_{2I}-s\cdot b_{1I})(ae-bc)\right]\sin\beta_{x_1}d\cdot\cos\beta_{x_2}d\\
&+\left[r\cdot s(a_{2I}-a_{1I})(kn-lm)-(b_{1I}c_{2I}-b_{2I}\cdot c_{1I})(ae-bc)\right.\\
&\left.+(r\cdot c_{2I}\cdot a_{1I}-s\cdot b_{2I})(cl-ek)+(r\cdot c_{1I}\cdot a_{2I}-s\cdot b_{1I})(an-bm)\right]\sin\beta_{x_1}d\cdot\sin\beta_{x_2}d\\
&\qquad=0 \qquad (31)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$a=\frac{a_{2I}-a_{1I}}{a_{2I}-a_{1I}},\quad b=\frac{a_{2I}-a_{2II}}{a_{2I}-a_{1I}},\quad c=\frac{a_{1II}-a_{1I}}{a_{2I}-a_{1I}},\quad e=\frac{a_{2II}-a_{1I}}{a_{2I}-a_{1I}}$$

$$k=\frac{b_{2I}c_{1II}-b_{1II}c_{2I}}{b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I}},\qquad l=\frac{b_{2I}c_{2II}-b_{2II}c_{2I}}{b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I}}$$

$$m=\frac{b_{1II}c_{1I}-b_{1I}c_{1II}}{b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I}},\qquad n=\frac{b_{2II}c_{1I}-b_{1I}c_{2II}}{b_{1I}c_{2I}-b_{2I}c_{1I}}$$

4.2 数値計算例

第3章と同様に,前節で得られた電磁界表示式および特性方程式をもとに数値計算を行ない,伝搬定数および電磁界分布を求める。

具体的な伝送線路の1例として,式(20)の誘電率テンソルが,異方性誘電体スラブIでは,

$$\varepsilon_{\xi\xi I}/\varepsilon_0 = (2.5)^2 \quad , \quad \varepsilon_{\eta\eta I}/\varepsilon_0 = (2.25)^2$$
$$\varepsilon_{\zeta\zeta I}/\varepsilon_0 = (2.0)^2 \quad , \quad \theta = \theta_I$$

異方性誘電体基板IIでは，

$$\varepsilon_{\xi\xi II}/\varepsilon_0 = (1.75)^2 \quad , \quad \varepsilon_{\eta\eta II}/\varepsilon_0 = (1.5)^2$$
$$\varepsilon_{\zeta\zeta II}/\varepsilon_0 = (2.0)^2 \quad , \quad \theta = \theta_{II}$$

で与えられる誘電体を考える。一方，等方性誘電体上部層IIIは空気とし，したがって誘電率はε_0である。また各領域における透磁率はいずれもμ_0とする。

いま，回転角θとして $0°$と$45°$を選ぶと

(イ) $\theta_I = 0°$, $\theta_{II} = 0°$

(ロ) $\theta_I = 0°$, $\theta_{II} = 45°$

(ハ) $\theta_I = 45°$, $\theta_{II} = 0°$

(ニ) $\theta_I = 45°$, $\theta_{II} = 45°$

の4つの場合が考えられる。(イ)(ロ)(ハ)(ニ)の各場合における伝搬定数β_zの値をそれぞれ図9，図10，図11，図12に示す。図9はスラブ，基板ともに誘電率テンソルが非対角成分をもたない場合であるが，β_z/k_0が1.5の下限値と2.25の上限値をもつTEモード群と，1.75の下限値と2.5の上限値をもつTMモード群に分離している。TEモード群のβ_z/k_0の下限値は基板の比誘電率の平方根，すなわち屈折率に対応する値$\sqrt{\varepsilon_{\eta\eta I}/\varepsilon_0}$と上部層の屈折率の大きい方で決まり，上限値はスラブの屈折率$\sqrt{\varepsilon_{\eta\eta I}/\varepsilon_0}$で決まる。またTMモード群の下限値は基板の屈折率$\sqrt{\varepsilon_{\xi\xi II}/\varepsilon_0}$と上部層の屈折率の大きい方で決まり，上限値はスラブの屈折率$\sqrt{\varepsilon_{\xi\xi I}/\varepsilon_0}$で決まる。このように$\beta_z/k_0$の範囲がTEモード群とTMモード群において独立に異なった値をとる特性は従来の等方性誘電体を用いた場合には見られないものである。

図10，図11，図12より少なくともスラブまたは基板のいずれかが非対角成分をもつ場合には，β_z/k_0の下限値はθ_I，θ_{II}に無関係に基板の屈折率$\sqrt{\varepsilon_{\xi\xi II}/\varepsilon_0}$，$\sqrt{\varepsilon_{\eta\eta II}/\varepsilon_0}$および上部層の屈折率のうち最も大きいものによって決まる。また電磁波モードはハイブリッドモードになっていて，2つ

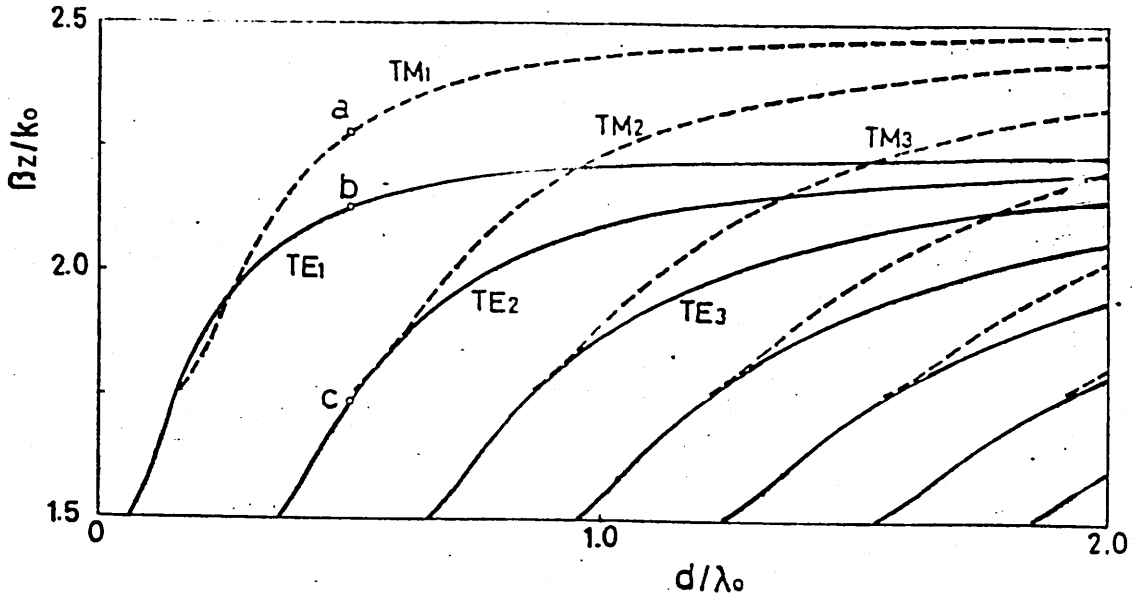


図9. $\theta_I = 0°$, $\theta_{II} = 0°$ における伝搬定数 β_z

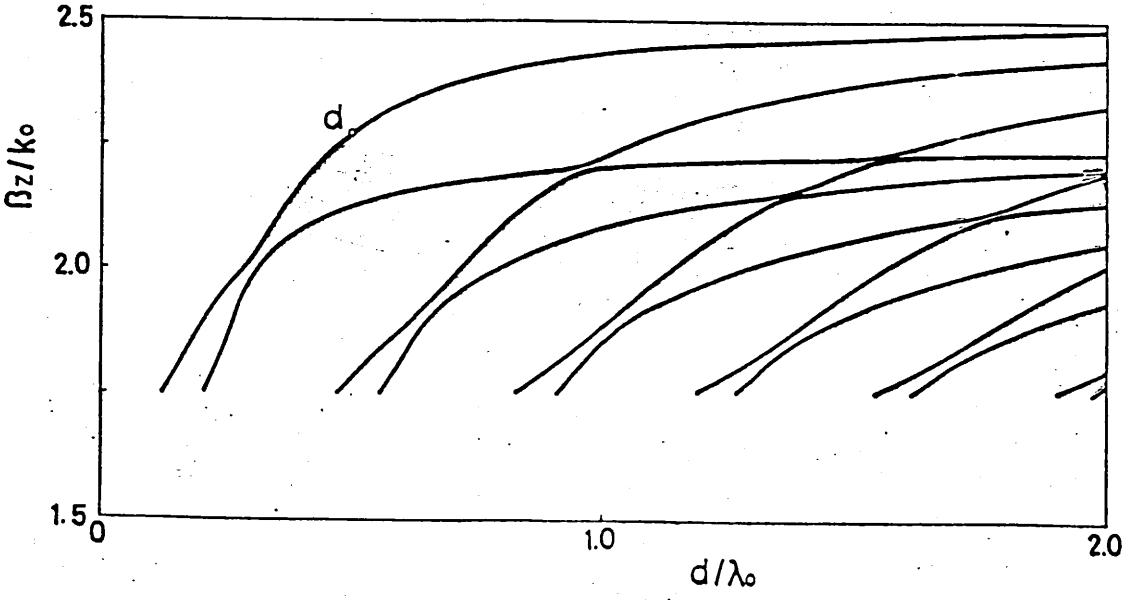


図10. $\theta_I = 0°$, $\theta_{II} = 45°$ における伝搬定数 β_z

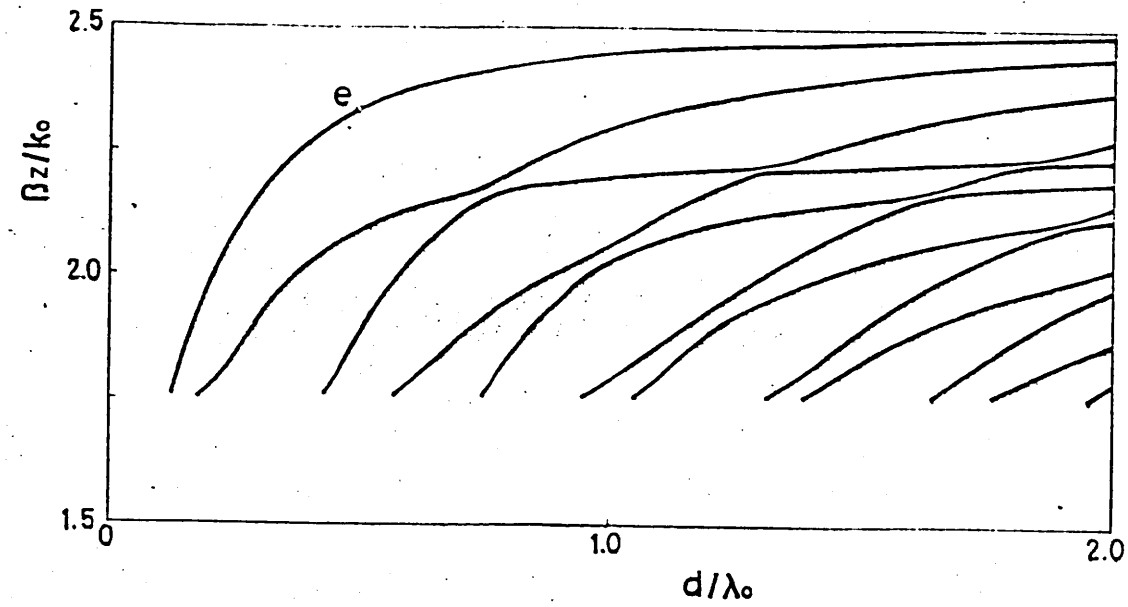


図11. $\theta_I = 45°$, $\theta_{II} = 0°$ における伝搬定数 β_z

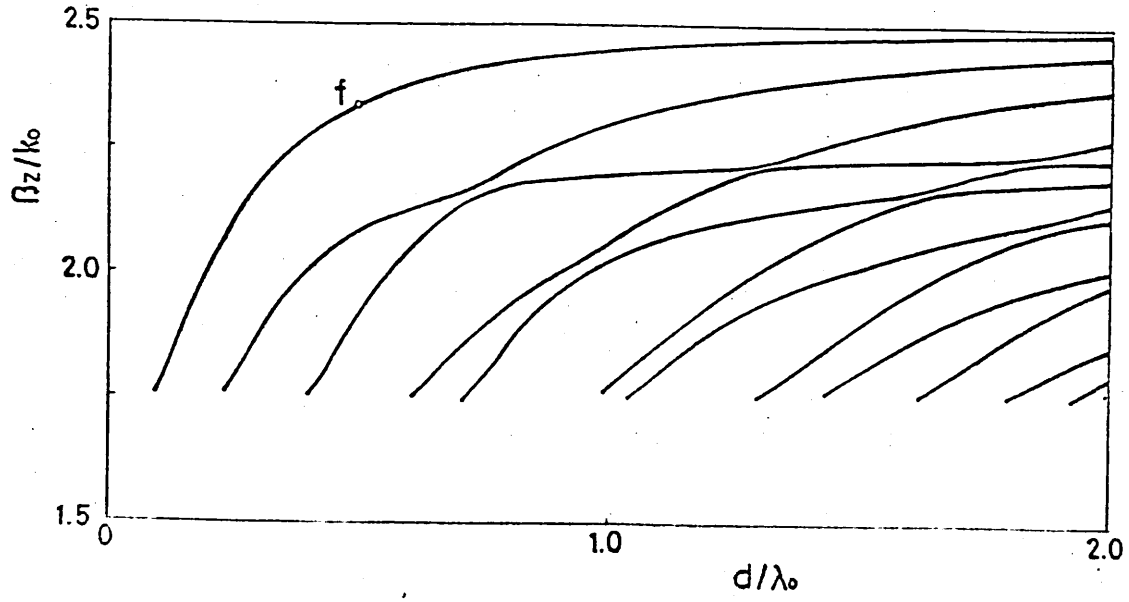


図12. $\theta_I = 45°$, $\theta_{II} = 45°$ における伝搬定数 β_z

のハイブリッドモードが等しい伝搬定数をもつような周波数またはスラブの厚さでは，それらは結合をおこすことがみられる．

次に図9～図12において a，b，c，d，e，f の記号で示した各点における電磁界分布を図13～図18に示した．図13～図15から，図9の破線で表わした $\beta z/k_0$ 曲線はTMモードを示し，実線で表わした $\beta z/k_0$ 曲線はTEモードを示すことが確認され，また図16～図18により少なくともスラブか基板のいずれかに誘電率テンソルの非対角成分がある場合はハイブリッドモードになることが確認された．

図13では E_x, E_z, H_y 成分のみもつTMモードの電磁界分布である．一方図16では図13と比べて E_x, E_z, H_y の分布はほぼ同じであるが，その他に E_y, H_x, H_z 成分が現われ，ハイブリッドモードになっている．また，図17と図18より スラブに非対角成分がある場合は基板に非対角成分があるなしにかかわらず電磁界分布は非常によく似た分布となっていることがわかる．

次に，異方性誘電体スラブIと異方性誘電体基板IIがそれぞれ以下に示す誘電率をもつ誘電体導波路における伝搬定数を計算すると図19のようになる．

$$\varepsilon_{xxI}/\varepsilon_0 = (2.5)^2 \qquad \varepsilon_{xxII}/\varepsilon_0 = (2.0)^2$$
$$\varepsilon_{yyI}/\varepsilon_0 = (2.0)^2 \qquad \varepsilon_{yyII}/\varepsilon_0 = (1.5)^2$$
$$\varepsilon_{zzI}/\varepsilon_0 = (1.75)^2 \qquad \varepsilon_{zzII}/\varepsilon_0 = (1.75)^2$$
$$\theta_I = 0^\circ \qquad \theta_{II} = 0^\circ$$

この図からわかるように，誘電率テンソルの値を適当に選ぶことによりTEモードあるいはTMモードのいずれかだけを伝送することが可能となり，モード分離の手段として有効であることがわかる．図19におけるg，h，iの各点における電磁界分布をそれぞれ図20～図22に示す．これよりg，h点はTMの1次モード，i点はTMの2次モードであることが確認される．さらに d/λ_0 が大きくなるほど基板中および二部層中において電磁界は急速に弱くなり，その電磁界は誘電体スラブに集中することがわかる．

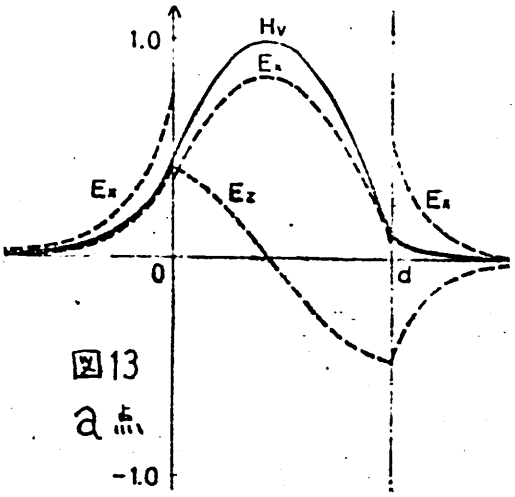


図13
a点

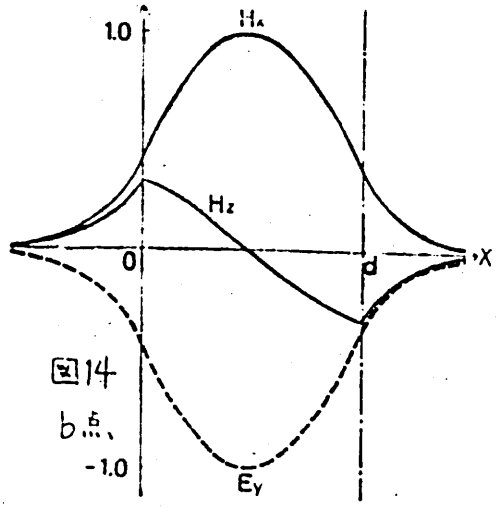


図14
b点

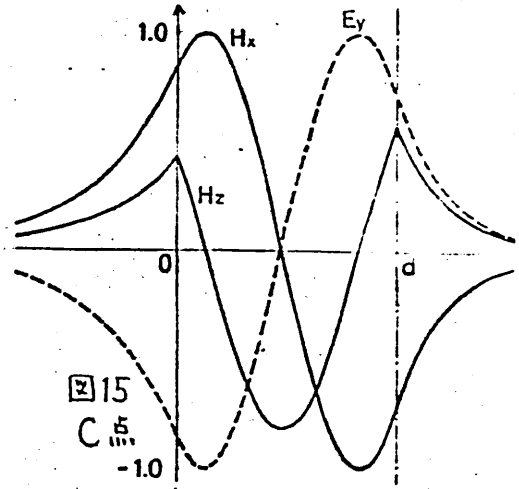


図15
C点

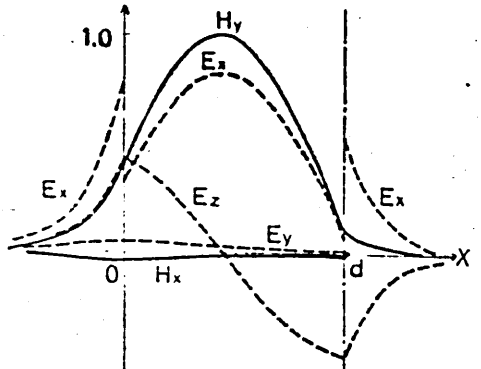


図16
d点

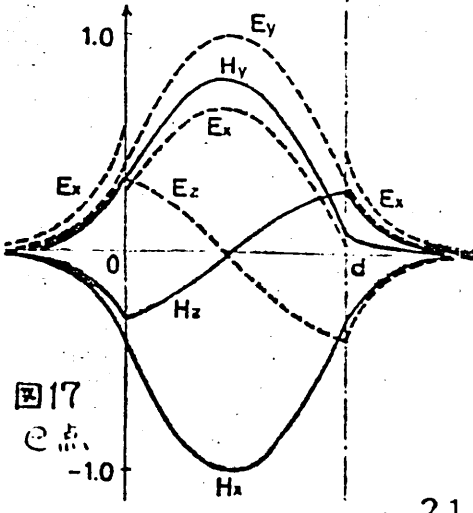


図17
e点

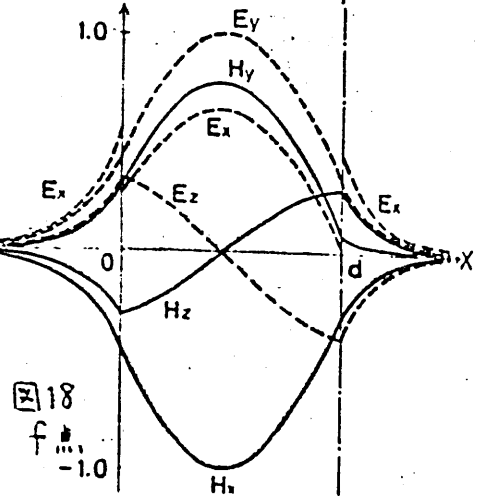


図18
f点

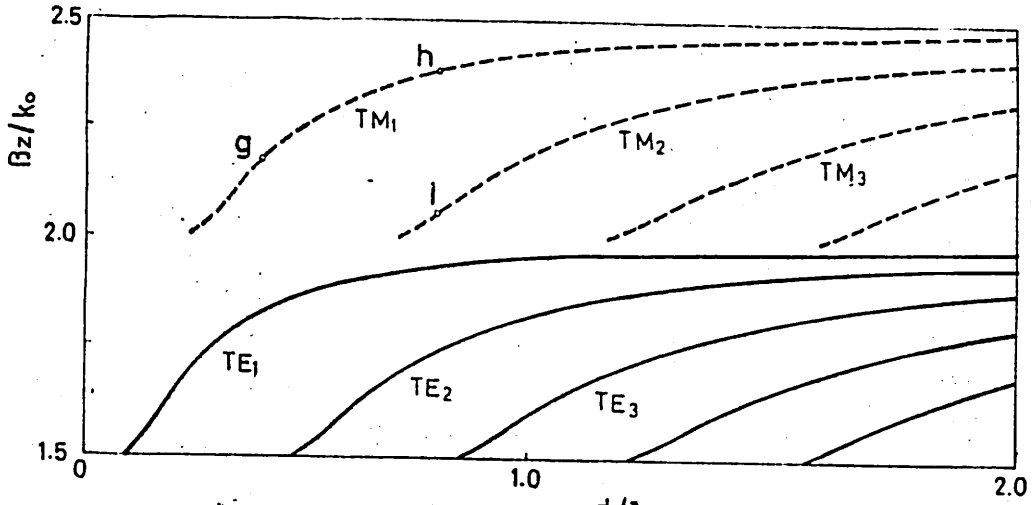


図19. $\theta_I = 0°$, $\theta_{II} = 0°$ における伝搬定数

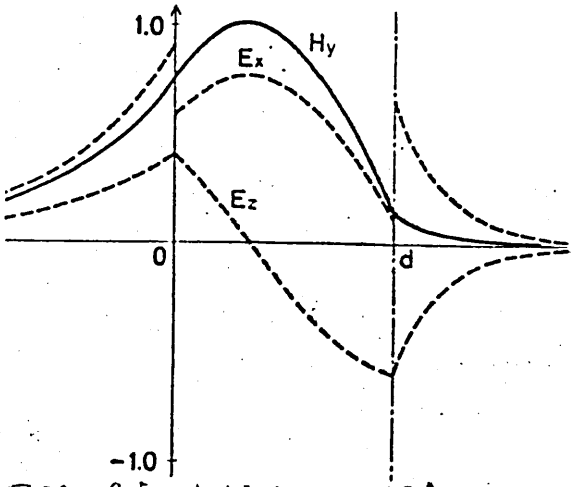


図20. g点における電磁界分布

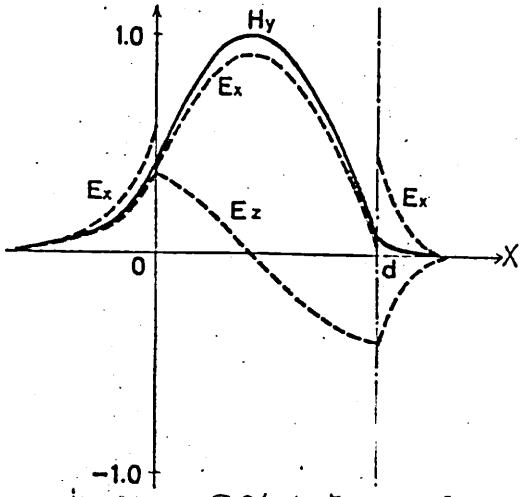


図21. h点における電磁界分布

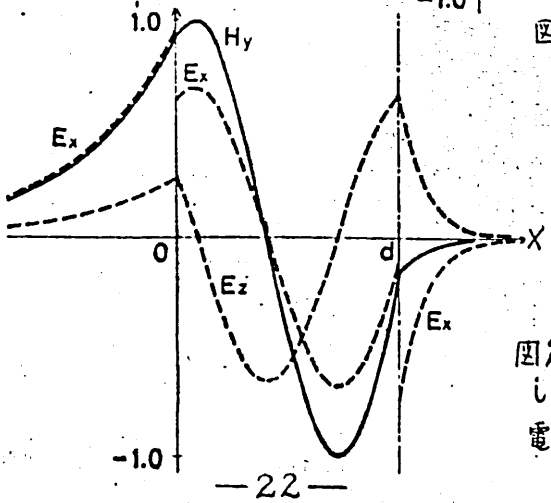


図22. i点における電磁界分布

5. むすび

本稿では異方性媒質を含む誘電体スラブ線路における電磁波モードの解析を行ない，その伝搬条件を求めた。そして線路の具体例として基板に異方性誘電体を用いた伝送系の場合と，スラブと基板の両方が異方性誘電体である伝送系の場合のそれぞれにおける電磁波モードの解析を行ない，各領域における電磁界表示式および特性方程式を導出し，伝搬定数と電磁界分布の数値計算例を示した。その結果，異方性誘電体のような異方性の媒質を利用した場合，等方性の媒質の場合と比較して数々の新しいモード特性が得られることがわかり，このことが光集積回路などにおいて種々の適用法を与えることが確かめられた。

最後に，本研究を進める際，計算に多大の御協力をいただいた，当時学部学生の田中正夫君（現在．藤倉電線）に深謝する。なお数値計算は大阪大学大型計算機センターによったことを付記し，謝意を表わす。

文　献

[1] たとえば P.K. Tien : "Light waves in thin films and integrated optics", Appl. Opt., vol. 10, NO.11, P.2395 (Nov. 1971).

[2] S. Wang, M. Shah and J.D. Crow : "Wave propagation in thin-film optical waveguides using gyrotropic and anisotropic materials as substrates", IEEE Journal, vol. QE-8, No.2, P.212 (Feb. 1972).

[3] 山本鋹彦，牧本利夫："異方性薄膜光導波系の回路論的取り扱いと非相反素子設計への応用"，信学論(C)，vol.56-C, No.3, P.187 (昭48-3)

[4] 山本鋹彦，長沢陸士，岡村康行，牧本利夫："異方性薄膜光学回路素子の位相補償"．マイクロ波研資料 MW 73-103 (1973-11).

[5] 山本錠彦，小山田栃平，牧本利夫："異方性薄膜光導波系の固有モード解析とその応用"，信学論(C)，55-C，No. 10，P. 550 (昭47-10).

[6] 里村裕，松原正則，熊谷信昭："異方性誘電体スラブにおける電磁波モードの解析"，マイクロ波研資料 MW 72-34 (1972-06).

[7] Y. Satomura, M. Matsuhara and N. Kumagai: "Analysis of electromagnetic-wave modes in anisotropic slab wave guide", IEEE Trans., vol. MTT-22, No. 2, P. 86 (Feb. 1974).

[8] たとえば 板倉清保："近代超高周波工学"，第6章，電気書院 (1969).

付　録　1.

分散関係式(7)の各係数 a_i，b_i はそれぞれ以下で表わされる。

$$a_1 = \omega^2 \varepsilon_{xx} \mu_{xx}$$

$$a_2 = \omega^2 \{ \varepsilon_{xx} (\mu_{xy} + \mu_{xy}^*) + \mu_{xx} (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xy}^*) \}$$

$$a_3 = \omega^2 \{ (\varepsilon_{xx} \mu_{yy} + \varepsilon_{yy} \mu_{xx}) + (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xy}^*)(\mu_{xy} + \mu_{xy}^*) \}$$

$$a_4 = \omega^2 \{ \varepsilon_{yy} (\mu_{xy} + \mu_{xy}^*) + \mu_{yy} (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xy}^*) \}$$

$$a_5 = \omega^2 \varepsilon_{yy} \mu_{yy}$$

$$\begin{aligned} a_6 = {} & \beta_z^2 \omega^2 \{ (\varepsilon_{xx} \mu_{zz} + \varepsilon_{zz} \mu_{xx}) + (\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{xz}^*)(\mu_{xz} + \mu_{xz}^*) \} \\ & + \omega^4 \{ -\varepsilon_{xx} \mu_{xx} (\varepsilon_{yy} \mu_{zz} + \varepsilon_{zz} \mu_{yy}) + \varepsilon_{xx} \mu_{xx} (\varepsilon_{yz} \mu_{yz} + \varepsilon_{yz}^* \mu_{yz}^*) \\ & + \varepsilon_{xx} (\varepsilon_{yy} \mu_{xz} \mu_{xz}^* + \varepsilon_{zz} \mu_{xy} \mu_{xy}^*) + \mu_{xx} (\mu_{yy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xz}^* + \mu_{zz} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xy}^*) \\ & - \varepsilon_{xx} (\varepsilon_{yz}^* \mu_{xz} \mu_{xy} + \varepsilon_{yz} \mu_{xz}^* \mu_{xy}^*) - \mu_{xx} (\varepsilon_{xz} \varepsilon_{xy} \mu_{yz}^* + \varepsilon_{xz}^* \varepsilon_{xy}^* \mu_{yz}) \\ & + (\varepsilon_{xz} \varepsilon_{xy} \mu_{xz} \mu_{xy} + \varepsilon_{xz}^* \varepsilon_{xy}^* \mu_{xz}^* \mu_{xy}^*) - (\varepsilon_{xy} \varepsilon_{xy}^* \mu_{xz} \mu_{xz}^* + \varepsilon_{xz} \varepsilon_{xz}^* \mu_{xy} \mu_{xy}^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 = {} & \beta_z^2 \omega^2 \{ \varepsilon_{zz} (\mu_{xy} + \mu_{xy}^*) + \mu_{zz} (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xy}^*) \\ & + (\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{yz}^*)(\mu_{xz} + \mu_{xz}^*) + (\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{xz}^*)(\mu_{yz} + \mu_{yz}^*) \} \\ & + \omega^4 \{ -\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \mu_{zz} (\mu_{xy} + \mu_{xy}^*) - \varepsilon_{zz} \mu_{xx} \mu_{yy} (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xy}^*) \\ & + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} (\mu_{yz} \mu_{xz} + \mu_{yz}^* \mu_{xz}^*) + \mu_{xx} \mu_{yy} (\varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz} + \varepsilon_{yz}^* \varepsilon_{xz}^*) \\ & - \varepsilon_{xx} \mu_{yy} (\varepsilon_{yz} \mu_{xz}^* + \varepsilon_{yz}^* \mu_{xz}) - \varepsilon_{yy} \mu_{xx} (\varepsilon_{xz} \mu_{yz}^* + \varepsilon_{xz}^* \mu_{yz}) \\ & + \varepsilon_{zz} \mu_{xy} \mu_{xy}^* (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xy}^*) + \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xy}^* \mu_{zz} (\mu_{xy} + \mu_{xy}^*) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\varepsilon_{xx}(\varepsilon_{yz}\mu_{yz}\mu_{xy}+\varepsilon_{yz}^{*}\mu_{yz}^{*}\mu_{xy}^{*})+\mu_{xx}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xy}\mu_{yz}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{yz}^{*})\\
&+\varepsilon_{yy}(\varepsilon_{xz}\mu_{xz}\mu_{zy}+\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{xz}^{*}\mu_{zy}^{*})+\mu_{yy}(\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xy}\mu_{xz}+\varepsilon_{xz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{xz}^{*})\\
&-\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xy}^{*}(\mu_{yz}\mu_{xz}+\mu_{yz}^{*}\mu_{xz}^{*})-\mu_{xy}\mu_{xy}^{*}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xz}^{*})\\
&-(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xy}\mu_{xz}^{*}\mu_{zy}^{*}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{xz}\mu_{zy})-(\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xy}\mu_{yz}^{*}\mu_{xy}^{*}+\varepsilon_{xz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{yz}\mu_{xy})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_8=&\beta_z^{2}\omega^{2}\{(\varepsilon_{yy}\mu_{zz}+\varepsilon_{zz}\mu_{yy})+(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_{yz}^{*})(\mu_{yz}+\mu_{yz}^{*})\}\\
&+\omega^{4}\{-\varepsilon_{yy}\mu_{yy}(\varepsilon_{xx}\mu_{zz}+\varepsilon_{zz}\mu_{xx})+\varepsilon_{yy}\mu_{yy}(\varepsilon_{xz}\mu_{xz}+\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{xz}^{*})\\
&+\varepsilon_{yy}(\varepsilon_{xx}\mu_{yz}\mu_{yz}^{*}+\varepsilon_{zz}\mu_{xy}\mu_{xy}^{*})+\mu_{yy}(\mu_{xx}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{yz}^{*}+\mu_{zz}\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xy}^{*})\\
&-\varepsilon_{yy}(\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{yz}\mu_{xy}+\varepsilon_{xz}\mu_{yz}^{*}\mu_{xy}^{*})-\mu_{yy}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xy}\mu_{xz}^{*}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{xz})\\
&+(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xy}\mu_{yz}\mu_{xy}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{yz}^{*}\mu_{xy}^{*})-(\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{yz}\mu_{yz}^{*}+\varepsilon_{yz}\varepsilon_{yz}^{*}\mu_{xy}\mu_{xy}^{*})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_9=&\beta_z^{4}\omega^{2}\varepsilon_{zz}\mu_{zz}\\
&+\beta_z^{2}\omega^{4}\{-\varepsilon_{zz}\mu_{zz}(\varepsilon_{xx}\mu_{yy}+\varepsilon_{yy}\mu_{xx})+\varepsilon_{zz}\mu_{zz}(\varepsilon_{xy}\mu_{xy}+\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{xy}^{*})\\
&+\varepsilon_{zz}(\varepsilon_{xx}\mu_{yz}\mu_{yz}^{*}+\varepsilon_{yy}\mu_{xz}\mu_{xz}^{*})+\mu_{zz}(\mu_{xx}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{yz}^{*}+\mu_{yy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xz}^{*})\\
&-\varepsilon_{zz}(\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{yz}\mu_{xz}+\varepsilon_{xy}\mu_{yz}^{*}\mu_{xz}^{*})-\mu_{zz}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}\mu_{xy}^{*}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{xy})\\
&-(\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{yz}\mu_{yz}^{*}+\varepsilon_{yz}\varepsilon_{yz}^{*}\mu_{xz}\mu_{xz}^{*})+(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}\mu_{yz}\mu_{xz}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{yz}^{*}\mu_{xz}^{*})\}\\
&+\omega^{6}\{\det(\hat{\varepsilon})\cdot\det(\hat{\mu})\}
\end{aligned}
$$

$$
b_1=\beta_z\omega^{3}\{\varepsilon_{xx}(\mu_{xz}+\mu_{xz}^{*})+\mu_{xx}(\varepsilon_{xz}+\varepsilon_{xz}^{*})\}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2=\beta_z\omega^{3}\{&\varepsilon_{xx}(\mu_{yz}+\mu_{yz}^{*})+\mu_{xx}(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_{yz}^{*})\\
&+(\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{xy}^{*})(\mu_{xz}+\mu_{xz}^{*})+(\varepsilon_{xz}+\varepsilon_{xz}^{*})(\mu_{xy}+\mu_{xy}^{*})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_3=\beta_z\omega^{2}\{&\varepsilon_{yy}(\mu_{xz}+\mu_{xz}^{*})+\mu_{yy}(\varepsilon_{xz}+\varepsilon_{xz}^{*})\\
&+(\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{xy}^{*})(\mu_{yz}+\mu_{yz}^{*})+(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_{yz}^{*})(\mu_{xy}+\mu_{xy}^{*})\}
\end{aligned}
$$

$$
b_4=\beta_z\omega^{2}\{\varepsilon_{yy}(\mu_{yz}+\mu_{yz}^{*})+\mu_{yy}(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_{yz}^{*})\}
$$

$$
\begin{aligned}
b_5=&\beta_z^{3}\omega^{2}\{\varepsilon_{zz}(\mu_{xz}+\mu_{xz}^{*})+\mu_{zz}(\varepsilon_{xz}+\varepsilon_{xz}^{*})\}\\
&+\beta_z\omega^{4}\{-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}\mu_{yy}(\mu_{xz}+\mu_{xz}^{*})-\varepsilon_{yy}\mu_{xx}\mu_{zz}(\varepsilon_{xz}+\varepsilon_{xz}^{*})\\
&+\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(\mu_{yz}\mu_{xy}+\mu_{yz}^{*}\mu_{xy}^{*})+\mu_{xx}\mu_{zz}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*})\\
&-\varepsilon_{xx}\mu_{zz}(\varepsilon_{yz}\mu_{xy}^{*}+\varepsilon_{yz}^{*}\mu_{xy})-\varepsilon_{zz}\mu_{xx}(\varepsilon_{xy}\mu_{yz}^{*}+\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{yz})\\
&+\varepsilon_{yy}(\varepsilon_{xz}+\varepsilon_{xz}^{*})\mu_{xz}\mu_{xz}^{*}+\mu_{yy}(\mu_{xz}+\mu_{xz}^{*})\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xz}^{*}\\
&+\varepsilon_{xx}(\varepsilon_{yz}\mu_{yz}\mu_{xz}+\varepsilon_{yz}^{*}\mu_{yz}^{*}\mu_{xz}^{*})+\varepsilon_{zz}(\varepsilon_{xy}\mu_{xz}\mu_{xy}+\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{xz}^{*}\mu_{xy}^{*})\\
&+\mu_{xx}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}\mu_{yz}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{yz}^{*})+\mu_{zz}(\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xy}\mu_{xy}+\varepsilon_{xz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{xy}^{*})\\
&-(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*})\mu_{xz}\mu_{xz}^{*}-(\mu_{yz}\mu_{xy}+\mu_{yz}^{*}\mu_{xy}^{*})\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xz}^{*}\\
&-(\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xy}\mu_{yz}^{*}\mu_{xz}^{*}+\varepsilon_{xz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{yz}\mu_{xz})\\
&-(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}\mu_{xz}^{*}\mu_{xy}^{*}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{xz}\mu_{xy})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_6=&\beta_z^{3}\omega^{2}\{\varepsilon_{zz}(\mu_{yz}+\mu_{yz}^{*})+\mu_{zz}(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_{yz}^{*})\}\\
&+\beta_z\omega^{4}\{-\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}\mu_{xx}(\mu_{yz}+\mu_{yz}^{*})-\varepsilon_{xx}\mu_{yy}\mu_{zz}(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_{yz}^{*})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}(\mu_{xz}\mu_{xy}+\mu_{xz}^{*}\mu_{xy}^{*})+\mu_{yy}\mu_{zz}(\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{xz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*})\\
&-\varepsilon_{yy}\mu_{zz}(\varepsilon_{xz}\mu_{xy}^{*}+\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{xy})-\varepsilon_{zz}\mu_{yy}(\varepsilon_{xy}\mu_{xz}^{*}+\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{xz})\\
&+\varepsilon_{xx}(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_{yz}^{*})\mu_{yz}\mu_{yz}^{*}+\mu_{xx}(\mu_{yz}+\mu_{yz}^{*})\varepsilon_{yz}\varepsilon_{yz}^{*}\\
&+\varepsilon_{yy}(\varepsilon_{xz}\mu_{yz}\mu_{xz}+\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{yz}^{*}\mu_{xz}^{*})+\varepsilon_{zz}(\varepsilon_{xy}\mu_{yz}\mu_{xy}+\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{yz}^{*}\mu_{xy}^{*})\\
&+\mu_{yy}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}\mu_{xz}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{xz}^{*})+\mu_{zz}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xy}\mu_{xy}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{xy}^{*})\\
&-(\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{xz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*})\mu_{yz}\mu_{yz}^{*}-(\mu_{xz}\mu_{xy}+\mu_{xz}^{*}\mu_{xy}^{*})\varepsilon_{yz}\varepsilon_{yz}^{*}\\
&-(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xy}\mu_{yz}^{*}\mu_{xz}^{*}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xy}^{*}\mu_{yz}\mu_{xz})\\
&-(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}\mu_{yz}^{*}\mu_{xy}^{*}+\varepsilon_{yz}^{*}\varepsilon_{xz}^{*}\mu_{yz}\mu_{xy})\}
\end{aligned}
$$

付　　録　2

誘電率テンソルが対角成分だけのとき，すなわち

$$
\hat{\varepsilon}_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx\mathrm{II}} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{yy\mathrm{II}} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz\mathrm{II}}\end{bmatrix} \qquad (A2\text{-}1)
$$

で表わされる場合，異方性誘電体基板Ⅱ中の電磁波モードはTEモード群とTMモード群の2つに分離される。

(1) TEモード

$$
\begin{aligned}
H_z &= A_{1\mathrm{II}}\, e^{\alpha_{x_1}x}\\
E_z &= 0\\
H_y &= 0\\
E_y &= -j\frac{\omega\mu}{\beta_z}c_{\mathrm{II}}A_{1\mathrm{II}}\,e^{\alpha_{x_1}x} \qquad (A2\text{-}2)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
c_{\mathrm{II}}=\frac{\beta_z}{\alpha_{x_1}}\quad,\quad \alpha_{x_1}^{2}=\beta_z^{2}-k_{yy\mathrm{II}}^{2}\quad,\quad \alpha_{x_1}>0
$$

(2) TMモード

$$
\begin{aligned}
H_z &= 0\\
E_z &= \frac{\omega\mu}{\beta_z}A_{2\mathrm{II}}\,e^{\alpha_{x_2}x}\\
H_y &= j\,b_{\mathrm{II}}A_{2\mathrm{II}}\,e^{\alpha_{x_2}x}
\end{aligned}
$$

$$E_y = 0 \qquad (A2-3)$$

ただし，

$$b_{II} = \frac{\hat{k}_{zzII}^2}{\alpha_{x_2} \cdot \beta_z} \quad , \quad \alpha_{x_2}^2 = \frac{\hat{k}_{zzII}^2}{\hat{k}_{xxII}^2} \cdot \beta_z^2 - \hat{k}_{xxII}^2 \quad , \quad \alpha_{x_2} > 0$$

なお，第3章における TEモード，TMモードのそれぞれの特性方程式は 以下のようになる。

TEモードの場合

$$(q^2 - uc) \sin sd + q(c+u) \cos sd = 0 \qquad (A2-4)$$

TMモード

$$(p^2 - rb) \sin sd + p(b+r) \cos sd = 0 \qquad (A2-5)$$

付　　録　3

誘電率テンソルが 対角成分のとき，すなわち

$$\hat{\varepsilon}_I = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xxI} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yyI} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zzI} \end{bmatrix} \qquad (A3-1)$$

で表わされる場合，異方性誘電体スラブI中の電磁波モードは TEモード群とTMモード群の2つに分離される。

(1) TEモード

$$H_z = A_{1I} \cos \beta_{x_1} x + B_{1I} \sin \beta_{x_1} x$$

$$E_z = 0$$

$$H_y = 0$$

$$E_y = -j \frac{\omega \mu}{\beta_z} c_I (A_{1I} \sin \beta_{x_1} x - B_{1I} \cos \beta_{x_1} x) \qquad (A3-2)$$

ただし，

$$c_I = \frac{\beta_z}{\beta_{x_1}} \quad , \quad \beta_{x_1}^2 = k_{yyI}^2 - \beta_z^2$$

(2) TMモード

$$H_z = 0$$
$$E_z = \frac{\omega\mu}{\beta_z}\left(A_{2I}\cos\beta_{x_2}x + B_{2I}\sin\beta_{x_2}x\right)$$
$$H_y = j\,b_I\left(A_{2I}\sin\beta_{x_2}x - B_{2I}\cos\beta_{x_2}x\right)$$
$$E_y = 0 \qquad (A3\text{-}3)$$

ただし,

$$b_I = \frac{k_{zzI}^{\,2}}{\beta_{x_2}\cdot\beta_z} \quad , \quad \beta_{x_2}^{\,2} = k_{zzI}^{\,2} - \frac{k_{zzI}^{\,2}}{k_{xxI}^{\,2}}\beta_z^{\,2}$$

中間赤外域における背景雑音の統計的性質

板倉安正
（京都工芸繊維大学）

昭和49年5月14日

1. まえがき

中間赤外域における背景雑音の統計的性質の波長特性について述べる。ここで背景雑音とは、目標以外の赤外線放射の空間分布の不規則な変動のことであって、種々の自然物からの自己放射（熱放射）および太陽の散乱反射光がその主な放射源である。背景は地上に設置した装置より見た天空、山林および市街地である。市街地は人工的な背景であるが、かなり遠方より見た市街地背景は天空および山林などの天然の背景と同じような統計的性質を有していることが後に示される。

この種の背景雑音の統計的性質に関しては、高木および堤[1]、D. R. Robinson[2]、J. L. Free[3]、H. G. Eldering[4]およびG. W Carmichal[5]によって解析が試みられ、背景雑音に対する数学的モデルも導出されているが、これらの解析は広い波長帯域（例えば、2-9 μm[1]）を対象にしていて、背景雑音の統計的性質の波長依存性については明らかにされていない。

一般に、赤外線探知系の動作波長域は大気の吸収の少ない大気の窓と呼ばれる波長帯域が選ばれている。一方、目標の温度を常温から摂氏数百度であるとすると、目標からの放射束の大部分は中間赤外域（2—14 μm）に集中している。したがって、ここでいう背景雑音の波長特性とは、中間赤外域に属する大気の窓を対象として、これらの大気の窓毎の背景雑音の統計的性質を意味している。京都地方の年平均気象条件（14.6[℃]、74[%]）および光路長2[Km]を基準として、大気の

分光透過率をR. D. Hudson[6]の表より図示してみると図1のようになる。同図より、2－14 μm の中間赤外域には、2－3 μm 帯域（2.00－2.45 μm）、3－4 μm 帯域（3.35－4.16 μm）、4－5 μm 帯域（4.46－4.80 μm）および 8－14 μm 帯域（8.0－13.3 μm）の4つの大気の窓がある。括弧内の数値は各窓の透過波長帯域を示していて、最高透過率の 50 % に減衰する波長間隔である。これの4つの大気の窓の内、4 μm 以下の波長域は太陽光の影響によって統計的性質が左右され易く、一方 4 μm 以上ではほとんど太陽光の影響を受けない[8]。本章では特にこのような太陽光の影響による統計的性質の変化を詳しく検討し、最後に全中間赤外域（2－14 μm）に共通した統一的な数学的モデルを導出する。[8][9]

2 従来の数学的モデル

後の議論の助けとするために、高木および堤[11]によって、2－9 μm 波長帯域の背景雑音に対して導出された数学的モデルを簡単に紹介しておく。

赤外線放射の不規則な空間変動はガウス分布に従う振幅と指数分布に従うパルス幅とを持つ2次元パルスの不規則集合として取扱い得る。すなわち、振幅分布特性は

$$P(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (1)$$

であり、パルス幅分布特性は

$$P(r)=\alpha\exp(-\alpha r) \qquad (2)$$

であるとする。

ここで

n：xy 平面上のある点の放射輝度

$\bar{n}$：n の平均値

σ^2：n の分散

r：xy 平面上の異なる2点間の距離

α：平均パルス幅の逆数

振幅 n およびパルス幅 γ が無相関であるとすると，2次元自己相関関数は次のようになる．

$$R(\Delta) = \overline{n^2} P(\Delta) + \overline{n}^2 [1 - P(\Delta)]$$
$$= \sigma^2 \exp(-\alpha\Delta) + \overline{n}^2 \qquad (3)$$

ここで，$P(\Delta)$ は距離が Δ である x-y 平面上の2点が同一パルス内に含まれる確率であって，式 (2) より

$$P(\Delta) = \int_{\Delta}^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta}{r}\right) p(r)\, dr = \exp(-\alpha\Delta) \qquad (4)$$

と表わされる．次いで $\overline{n} = 0$ として，$R(\Delta)$ をフーリエ変換すると2次元ウィーナスペクトル $W(w_x, w_y)$ が得られる．

$$W(w_x, w_y) = \frac{2\pi\alpha\sigma^2}{(\alpha^2 + w_x^2 + w_y^2)^{3/2}} \qquad (5)$$

となる．ここで，w_x，w_y はそれぞれ空間周波数の x および y 成分である．

実際には直線走査式放射計を用いて背景雑音を測定するから，得られたウィーナスペクトルはその走査線に沿った空間座標軸方向に1次元化された量となる．式 (5) より1次元化ウィーナスペクトル密度は次式で与えられる．

$$W(w) = \frac{4\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + w^2} \qquad (6)$$

上式よりウィーナスペクトル特性は空間周波数 w の2乗に逆比例し，パルス幅平均の逆数 α に依存する．

ここでウィーナスペクトルに限らず他のすべての統計量を1次元走査による測定から求めているが，これは2次元背景雑音を等方性であると仮定しているからである．また実際の解析にあたっては背景雑音はエルゴード性を満たすと仮定している．これらの

仮定は上に述べた3つの背景のそれぞれの境界領域を除いては成立するものと考えられる。

3 背景雑音の測定および解析

3-1 測定および解析要領

測定に使用した直線走査式放射計の仕様を表1に示す。1つの検出器で全波長域(2－14μm)を覆うことができなかったので、8－14μm帯域の測定はGe:Hg検出器(Liq.－He冷却)を用い、他の波長域にはGe:Au検出器(Liq.－N2冷却)を用いた。

図1に示した4つの大気の窓の波長帯域のそれぞれを通して赤外線放射束を得るために光学干渉フィルタ(OCLI Co. Ltd. 製)が用いられた。表1に示したこれら4つの光学フィルタの透過波長帯域は図1の大気の窓の帯域とは必ずしも一致していないが、上の4つの光学フィルタによって得られた結果は各大気の窓の統計的性質を代表するものであると考えた。(8)

測定は京都工芸繊維大学電気工学教室屋上において1965年から1973年の約10年間に亘って行なわれた。走査範囲2〔rad〕に亘って走査して得られた波形はペンレコーダに記録される。解析は記録波形を3〔mrad〕毎に標本化し振幅のピーク値を20単位目盛で量子化して電子計算機で行なわれた。統計量としては、分散、振幅分布特性、パルス幅分布特性およびラグスペクトルが求められた。測定および解析の系統をまとめると図2のようになる。

3-2 分散

背景雑音の分散は背景波長帯域および天候状態によって異なる。分散の大きさから天候状態は晴天、所々曇および曇天に分けることができる。このような分類にしたがって分散の値をまとめると表2のようになる。同表で特徴的なことは2－3μm帯域では天候状態によって分散の値が大きく変化するが、

8－14μm帯域では殆んど変化しないことである。

このことを理解するために、天空背景の太陽散乱光の放射輝度と天空背景の自己放射の放射輝度をJ.A. Jamison[10]の結果を参考にまとめて表に示すと表3のようになる。同表の第2欄は天空背景の自己放射の放射輝度を常温の黒体に近いものとして推定したものであり、第3欄は太陽の散乱光の放射輝度は太陽光（6000 Kの黒体）の約10^{-5}倍であるという結果[10]から推定したものである。同表より、大気の窓は太陽の散乱反射光が支配的である2～3μm帯域と自己放射が支配的である8－14μm帯域および両者が略同程度である3－5μm帯域に分けることができる。そして、そのことから2－3μm帯域では天候状態によって分散の値が大きく変ることが理解される。なお、▨印の箇所は背景放射が小さく、検出器のような系雑音が支配的となるため、背景雑音が支配的である（background limited）という前提から外れるので考察の対象から除外することにした。

3－3 振幅分布特性

振幅分布特性も分散と同じく太陽光の影響によって左右され波長域および背景によって異なる。自己放射が支配的な波長域では図3(a)に示すように、振幅分布はガウス分布に従う。一方、太陽の散乱・反射光が支配的になってくると、図3(b)に示すように、振幅分布はポアソン分布的な傾向を呈するようになり、太陽光が強くなる程その傾向が強くなる。したがってすべての大気の窓の帯域、すべての天候状態およびすべての背景に対して振幅分布を画一的に式(1)のようなガウス分布とみなすことはできない。ただし、山林背景に対してのみすべての状態に対して振幅分布はガウス分布であるとみなすことができる。このことに関しては4で述べる。

3-4 パルス幅分布特性

図4は パルス幅分布特性を示している。縦軸はある幅を有するパルスの頻度数を対数で示し、横軸はその幅を示している。すべての背景波長域および天候状態に対して パルスの頻度数はパルス幅に対して直線で表わされ、したがって、式(2)で示された指数分布に従っていることが判る。図4の直線の傾きは式(2)のαに等しく、これはパルス幅平均の逆数を表わしていることになる。このαの値は赤外線探知系の設計上重要なパラメータであるので、そのばらつきをも含めて、表4にまとめて示した。

3-5 ウィーナ・スペクトル

1次元化ウィーナスペクトル密度の解析結果を図5に示す。(a)は天空背景、(b)は山林背景および(c)は市街地背景に対する結果である。いずれの場合もウィーナスペクトル密度は空間周波数の2乗に逆比例している様子がよくわかる。また、ウィーナスペクトル密度のレベルの相異は式(6)より分散の値に比例していて、表2の分散の値と比べてみると両者がよく対応していることが了解される。

したがって、ウィーナスペクトル密度は式(6)によって極めてよく表わされていて、背景雑音が大略高木・堤のモデル[4]によって取扱い得ることが判る。しかしながら、すでに3-3で述べたように、このモデルは太陽光の影響を受けた状態の振幅分布特性については充分に表現し得ていないので、次にこの点を検討する。

4 背景雑音に対する統一的な数学的モデル[8][9]

測定によって得られた振幅分布がガウス分布に従うかどうか調べるために χ^2-適合検定[11][12] (the chi-square goodness of fit test) を行なった。その結果を表5に示す。表中のパーセントは実測した振幅分布がガウス分布に従うと判定された割合を示す。例えば、市街地背景の白中晴天時では、8-14μm帯域の測定データの7%がガウス分布に従うが

2〜3 μm 帯域ではガウス分布に従うと判定されたものは僅か10%であるということを意味している。同表より、天空および市街地背景の日中晴天時の2〜3 μm 波長域に対して振幅分布はガウス分布に従っているとは言い難い。

そこで、このような波長域の振幅分布に対して別の分布形を導入する必要があり、ここではポアソン的な分布を仮定する。この仮定は次のような事実に基づいている。(1) 2〜3 μm 帯域の天空および市街地背景の波形中には少数の振幅の大きいインパルス性パルスが含まれている。これらは雲端や建造物での太陽の反射に起因するものと考えられる。(2) 統計的に少数のインパルス性のパルスを含むときには、その振幅分布はポアソン分布に従うことが知られている。(3) 事実、図3(b)に示されたこのような状態における実測結果から振幅分布がポアソン分布的な傾向を呈し、とくに太陽光が強い程、その傾向の強いことが伺い知れる。

この種のポアソン的な分布は次式で表わされるものとする。

$$P(n) = \frac{1}{C_p} \exp\left(-\frac{n}{C_p}\right) \qquad (n \geq 0) \qquad (7)$$

上式によれば、この分布の平均値は C_p、分散は C_p^2 である。今、日中晴天時の天空背景の2〜3 μm 波長域を考えると、表3より、この波長域の背景放射の平均放射輝度は 5×10^{-4} [W/cm² − sr] であって、これを平均値 C_p とすると、分散 C_p^2 は約 2×10^{-7} [(W/cm² − sr)²] となる。一方、表2より、この波長域の分散の実測値は 10^{-7} [(W/cm² − sr)²] であって、$C^2 = 2 \times 10^{-7}$ と可成りよく一致している。このことから、太陽光が支配的な天空背景に対する振幅分布は式(7)で示されるポアソン的な分布に従うものと考えられる。また、日中晴天時の市街地背景に対しても測定波形の類似性から同様に考えられる。しかしながら、山林背景に対しては、表5より、すべての状態に対して振幅分布はガウス分布に従うものとみなすことができる。これは、

山林背景では、天空や市街地で見られたようなインパルス性のパルスを含まないからである。

上に述べたように、背景雑音の振幅分布は太陽の散乱反射光が支配的なときはポアソン分布に、自己放射が支配的なときにはガウス分布に従うことが明らかにされた。そこで両放射源を含む中間赤外域の全波長域(2—14μm帯域)に対する振幅分布の統一的なモデルの導出を試みる。ポアソン分布およびガウス分布のそれぞれに従う背景雑音は互いに統計的に独立であるとすると、全波長域に対する背景放射の振幅 n_u はそれぞれの背景放射の和であると考えられる。

$$n_u = n_g + n_p \tag{8}$$

ここで

n_g: ガウス分布に従う背景雑音の振幅(放射光量度)

n_p: ポアソン分布に従う背景雑音の振幅(放射輝度)

確率の理論より、n_u の確率密度関数は n_g および n_p の確率密度関数のたたみ込み積分で与えられる。式(1)および式(7)より、

$$P_u(n_u) = \int_0^\infty P_p(n)\, P_g(n_u - n)\, dn$$

$$= \frac{1}{c_p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{n}{c_p}\right) \exp\left\{-\frac{(n_u - n - \bar{n})^2}{2\sigma^2}\right\} dn$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\, c_p} \exp\left(\frac{\sigma^2}{2c_p^2}\right) \exp\left(-\frac{n_u - \bar{n}}{c_p}\right)$$

$$\cdot \mathrm{Erfc}\left[\frac{\sigma}{\sqrt{2}\, c_p} - \frac{(n_u - \bar{n})}{\sqrt{2}\, c_p \sigma}\right] \tag{9}$$

となる。

ここで

$$\mathrm{Erfc}(x) = \int_x^\infty \exp(-t^2)\, dt$$

P_g: 自己放射が支配的な波長域のガウス確率密度関数

p_p：太陽の散乱反射光が支配的な波長域のポアソン確率密度関数

p_u：全中間赤外域に対する統一的なモデルの確率密度関数

図6はいろいろな c_p, α および $\bar{n}$ の値に対する $p_u(n)$ を式(9)によって計算した結果を示している。実線は $c_p = 5$, $\alpha = 0.05$, $\bar{n} = 0$ 点線は $c_p = 0.3$ $\alpha = 0.3$ $\bar{n} = 0.3$, 破線は $c_p = 0.2$ $\alpha = 0.3$ $\bar{n} = 1.0$ の計算結果である。また ○, ●, □ および △ 印はそれぞれ, 2−3 μm 帯域, 3−4 μm 帯域, 4−5 μm 帯域, および 8−14 μm 帯域の実測による代表的な振幅分布を示している。2−3 μm 帯域の結果は実線 ($c_p \gg \alpha$) と 3−4 μm 帯域および 4−5 μm 帯域の結果は点線 ($c_p \sim \alpha$) とで, 8−14 μm 帯域の結果は破線 ($c_p \ll \alpha$) とよく一致している。すなわち式(9)は c_p, α および $\bar{n}$ の値を表2及表3に従って選定することによって各大気の窓の帯域の実験結果と極めてよく一致し, 式(9)が中間赤外域 (2−14 μm) に対する振幅分布を統一的に表現しているものと考えることができる。

5 あとがき

以上に述べたように背景雑音の統計的性質の波長特性（中間赤外域の4つの大気の窓の波長帯域に対する背景雑音特性）が明確にされた。それらをまとめると次のようである。

(1) 背景雑音の放射源として考えられるものは自己放射（熱放射）と太陽の散乱反射光であり, これらは背景雑音としての統計的性質を異にする。

(2) 背景雑音はある特定の統計量に従う振幅特性およびパルス幅特性を有する2次元パルスの不規則な集合として取扱い得る。

(3) パルス幅特性は背景放射源に関係なく指数分布に従う。ただし, パルス幅平均は異なる。この結果として1次元化

ウィーナ スペクトル密度も背景放射源に関係なく逆二乗特性を有する。

(4) 振幅特性は自己放射が支配的な波長域ではガウス分布に従うが 太陽の散乱反射光が支配的な波長域ではポアソン分布に従う。特に，天空および市街地背景の日中晴天時の2－3 μm 波長域では振幅分布がポアソン分布に従う傾向が強い。ただし山林背景ではすべての状態に対して振幅分布はガウス分布で表わされる。

(5) 背景雑音は自己放射と太陽の散乱反射の両雑音の強さの和として表わされ，両者は統計的に独立である。したがって両者を含む中間赤外域の全波長帯域（2－14 μm）に亘る振幅分布は式（9）で表わされる。

(6) 両放射源の強さの割合は利用する波長域によって異なってくるから，この種の背景雑音は大気の窓毎に可成りの独立性を有しているものと推察される。

文献

(1) 高木 堤：「天空および山林背景の輝き空間分布の統計的性質」信学誌，51－C，2，P51（昭43－02）

(2) D. Z. Robinson: "Methods of Background Description and their Utility" Proc IRE, 47, 9, P1554 (1959)

(3) J. L. Free: "Background Noise Measurements at Sea Horizon" J. O. S. A., 49, 10, P1007 (1959)

(4) H. G Eldering: "Method for the Complete Description of Infrared Sky Backgrounds" J O S A, 51, 12, P1424 (1961)

(5) G. W. Carmichael: "The Transformation of Infrared Background Modulation Noise into Equivalent Detector Noise" Infrared physics, 7, P111 (1967)

(6) R.D Hudson: "Infrared Syotem Engineering" P144
Jhon wileg (1969)

(7) 板倉、堤、高木:「大気放射域と散乱光域の輝き空間分布の統計的性質」昭43 関支連大, No 15-3 (昭和43.11)

(8) Itakura, Tsutsumi & Takagi: "Statistical Properties of the Background Noise for the Ateospheric windows in the Intermediate Infard Region", Infrared physics, 14 (印刷中)

(9) 板倉、堤:「中間赤外域における天空、山林及市街地背景輝度の統一的解釈の試み」昭48 電気全国大 No 192 (昭48.4)

(10) J. A Jamieson: "Infrared physics and Engineering" P.103, McGrawhill (1963)

(11) J.S. Bendat and A.G. piersal: "Measurment and Analysis of Random Date" John Wiley (1966)

(12) C.A. Williams Jr: "On the choice of the Number and width of Classes for the chi-Square Test of Goodness of fit" American Statistical Association Journal p 77 (Mar 1950)

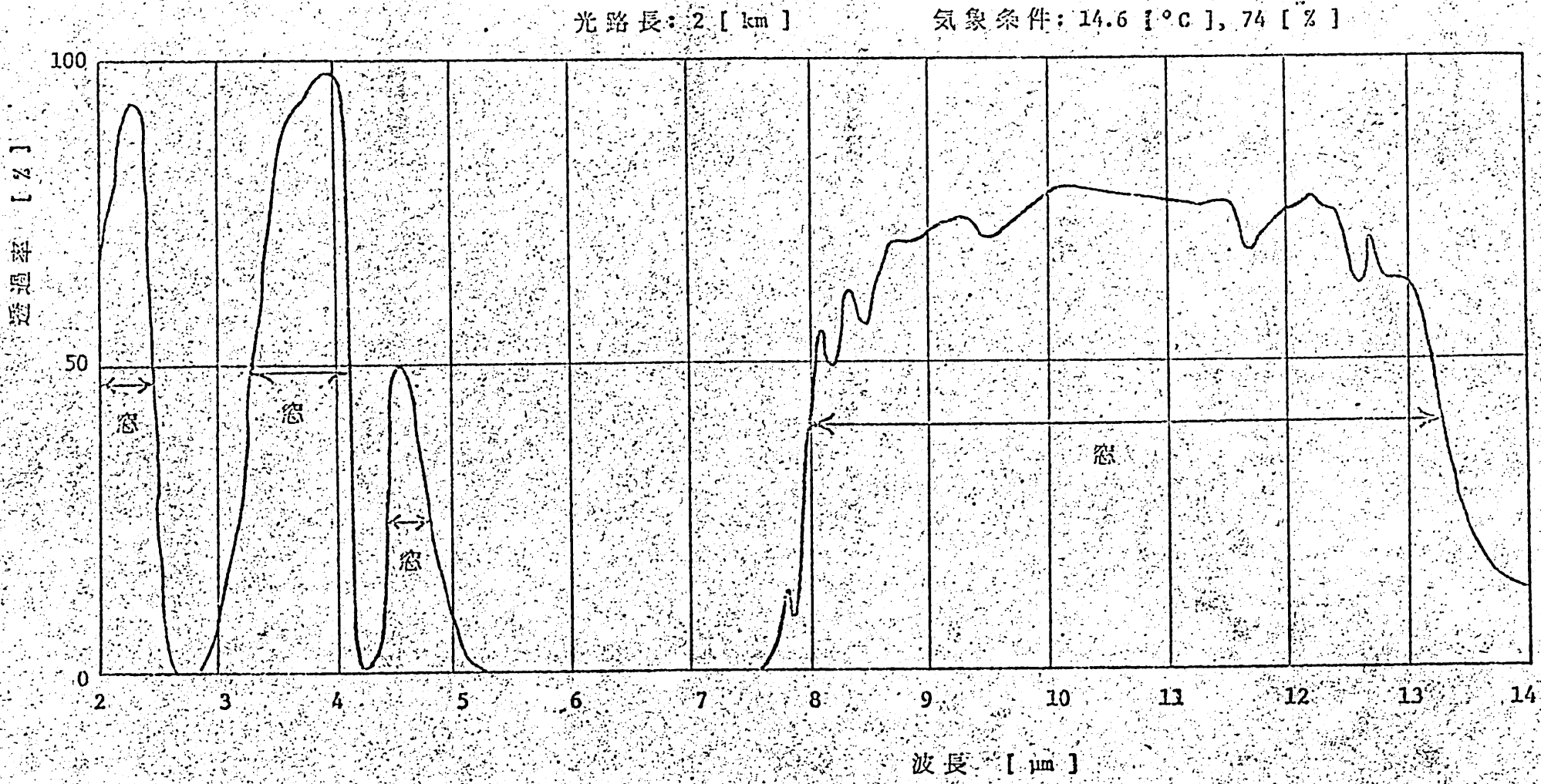


図 1　大気の分光透過率 (6)

表1　走査式放射計の仕様

光学系	:	撰カセグレン方式
1次鏡	:	球面鏡，直径400$^{\phi}$[mm]，F／1.5
2次鏡	:	平面鏡，直径240$^{\phi}$[mm]
検出器	:	(1) Ge：Au 素子，2×2 [mm]，77 [K] 冷却；感光波長域 2—9 [μm]
		(2) Ge：Hg 素子，2×2 [mm]，77 [K] 冷却，感光波長域 3 - 14 [μm]
光学干渉フィルタ	:	(1) 2.0—3.0 [μm] (2) 3.1—4.0 [μm]
	:	(3) 4.6—4.9 [μm] (4) 7.6—14.0 [μm]
		(最高透過率の50%に減衰する波長間隔)
瞬時視野	:	5 [mrad]
走査速度	:	0.05 [rad／sec]，水平方向

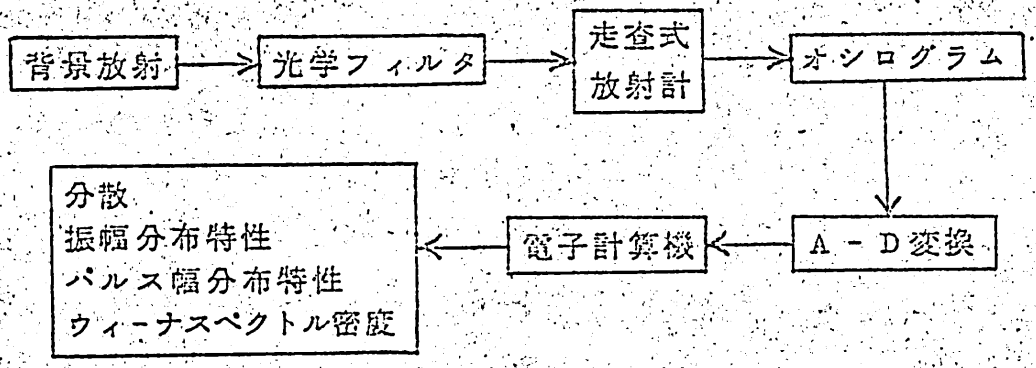
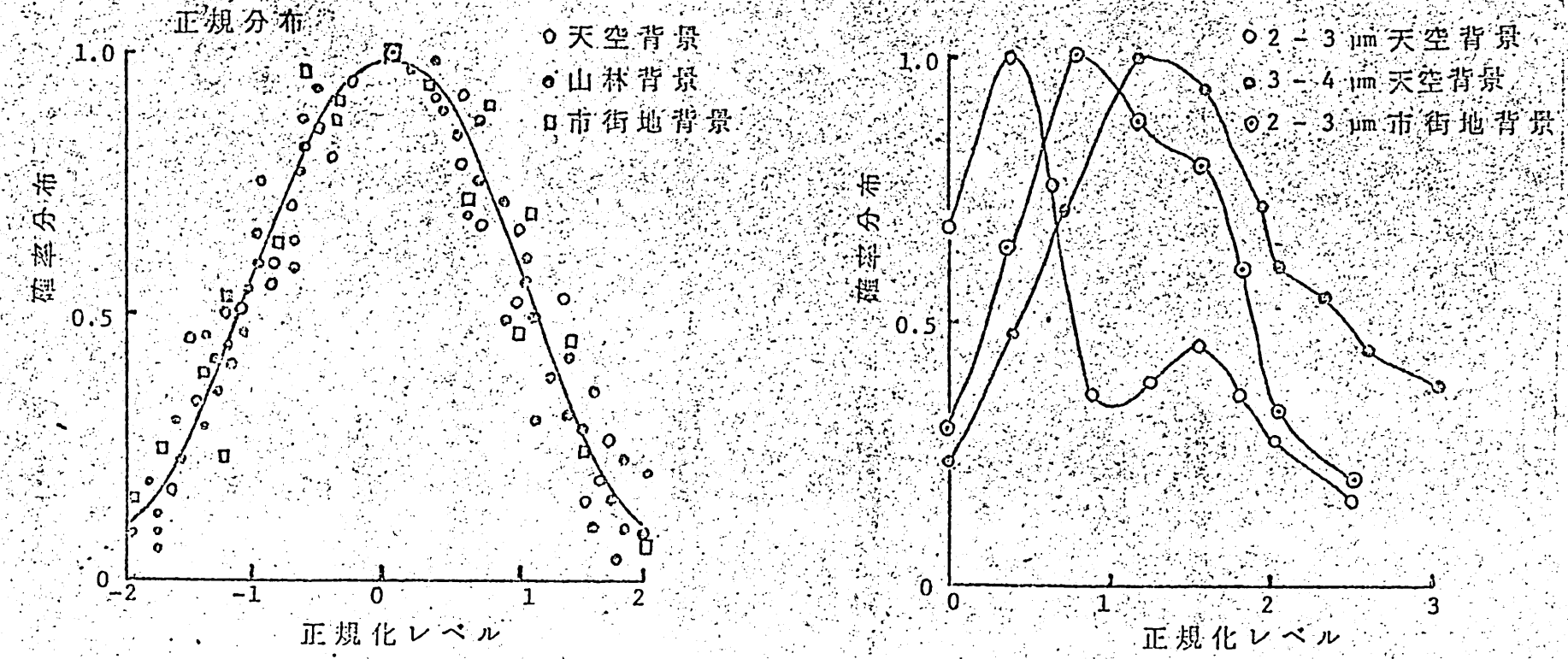


図2　背景雑音の測定および解析系統図

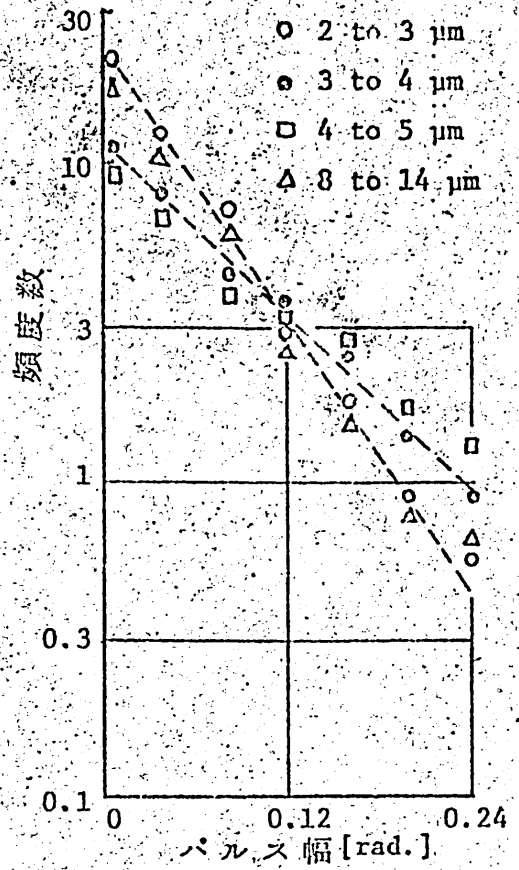
表 2　分散の平均値

単位：$[(\mu W/cm^2\text{-}s.r.)^2]$

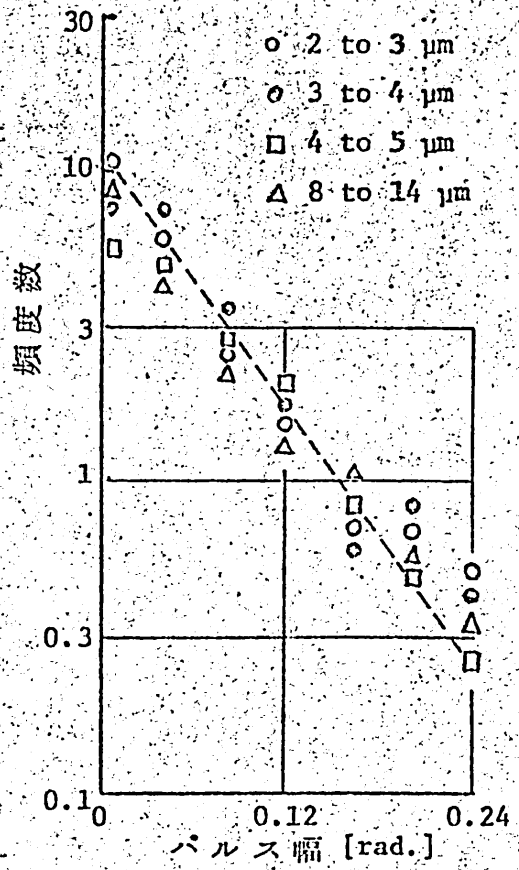
波長域	山林背景			天空背景			市街地背景		
	日中晴天	日中曇天	夜	雲点在昼	雲点在夜	夜	日中晴天	日中曇天	夜
2 to 3 μm	1.7×10^3	1.6×10^2		1.0×10^5			1.4×10^4	1.0×10^2	1.0×10
3 to 4 μm	6.6×10^2	2.9×10^2	2.6×10	1.0×10^3			3.1×10^3	4.0×10^2	2.5×10
4 to 5 μm	2.5×10	2.5×10	2.3×10	3.1×10^2	3.1×10^2	8.0×10	1.1×10^3	1.0×10^3	1.0×10^2
8 to 14 μm	5.3×10^3	5.3×10^3	5.3×10^3	3.7×10^6	3.7×10^6	2.0×10^3	1.8×10^5	7.0×10^4	6.5×10^3



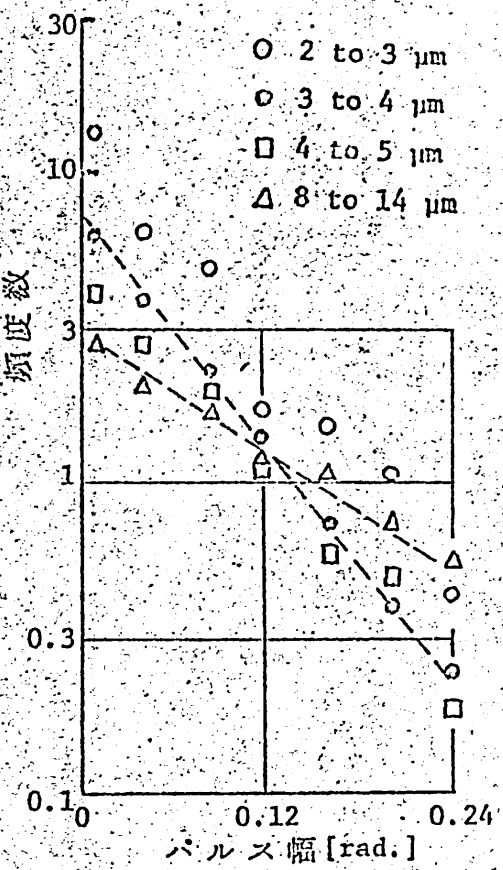
（a）ガウス分布　　図 3　振幅分布特性　　（b）非ガウス分布



(a) 天空背景



(b) 山林背景



(c) 市街地背景

図4　パルス幅分布特性

表4　パルス幅平均の逆数

波長域	天空背景		山林背景		市街地背景	
	日中晴天	日中曇天	日中晴天	日中曇天	日中晴天	日中曇天
2 - 3 μm	8 - 50 (20)		14 - 50 (25)	18 - 40 (25)	5 - 100 (20)	10 - 50 (20)
3 - 4 μm	6 - 25 (12)		18 - 40 (25)	18 - 40 (25)	10 - 60 (20)	12 - 40 (20)
4 - 5 μm	6 - 25 (12)	10 - 20 (12)	18 - 40 (25)	20 - 40 (25)	10 - 45 (20)	12 - 40 (20)
8 - 14 μm	14 - 30 (18)	16 - 30 (20)	16 - 50 (25)	16 - 50 (25)	4 - 20 (10)	4 - 20 (10)

単位　[1 / rad.]

(　　)は平均値を示す。

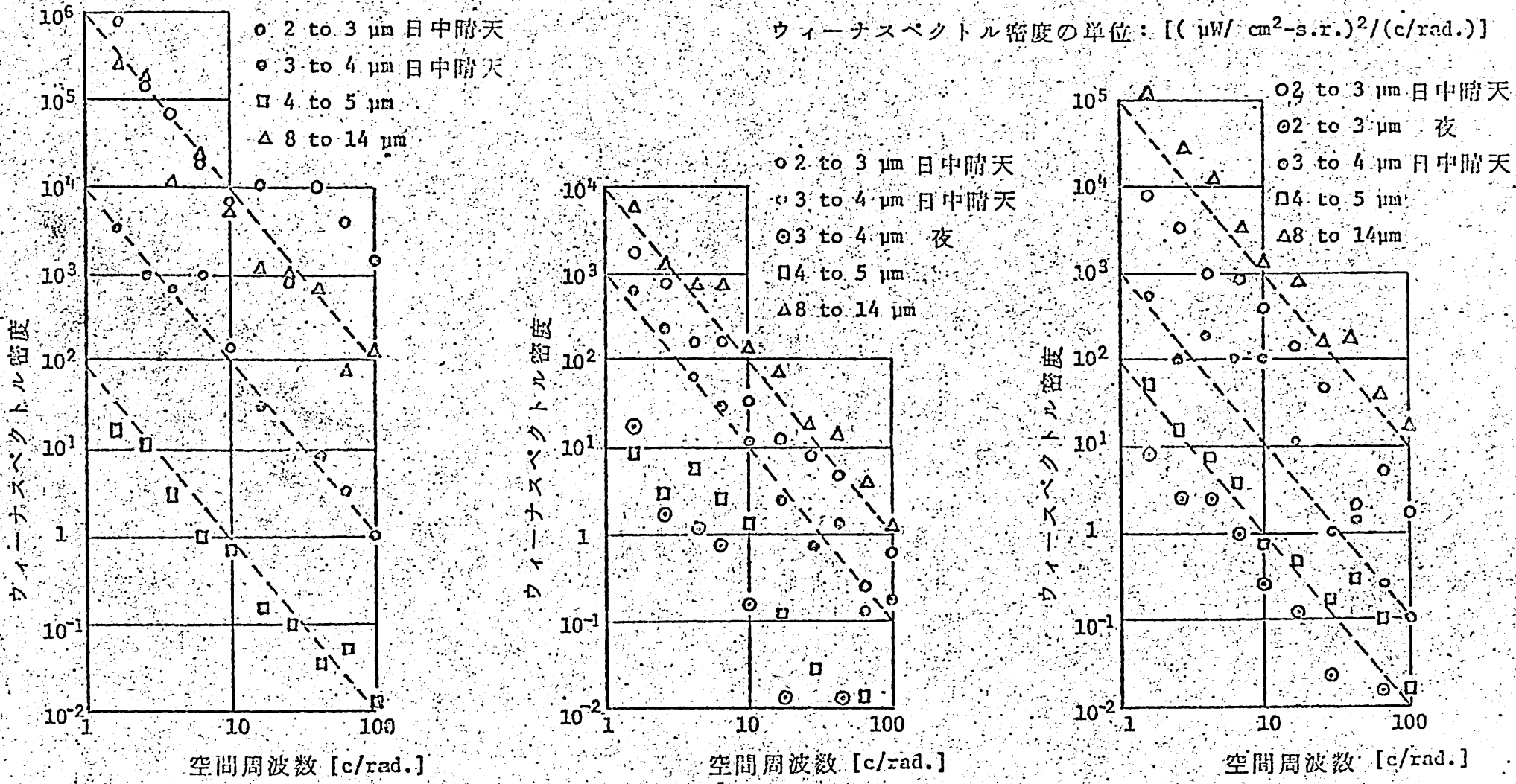


図 5　一次元化ウィーナスペクトル密度

表5　カイ二乗適合検定

波長域	山林背景			市街地背景			天空背景	
	日中晴天	日中曇天	夜	日中晴天	日中曇天	夜	雲点在昼	夜
2 to 3 μm	75%	90 %		10 %	50 %	60 %	10 %	
3 to 4 μm	80 %	90 %	80 %	30 %	30 %	50 %	20 %	
4 to 5 μm	90 %	70 %	70 %	40 %	50 %	50 %	40 %	60 %
8 to 14 μm	90 %	90 %	90 %	70 %	70 %	70 %	60 %	60 %

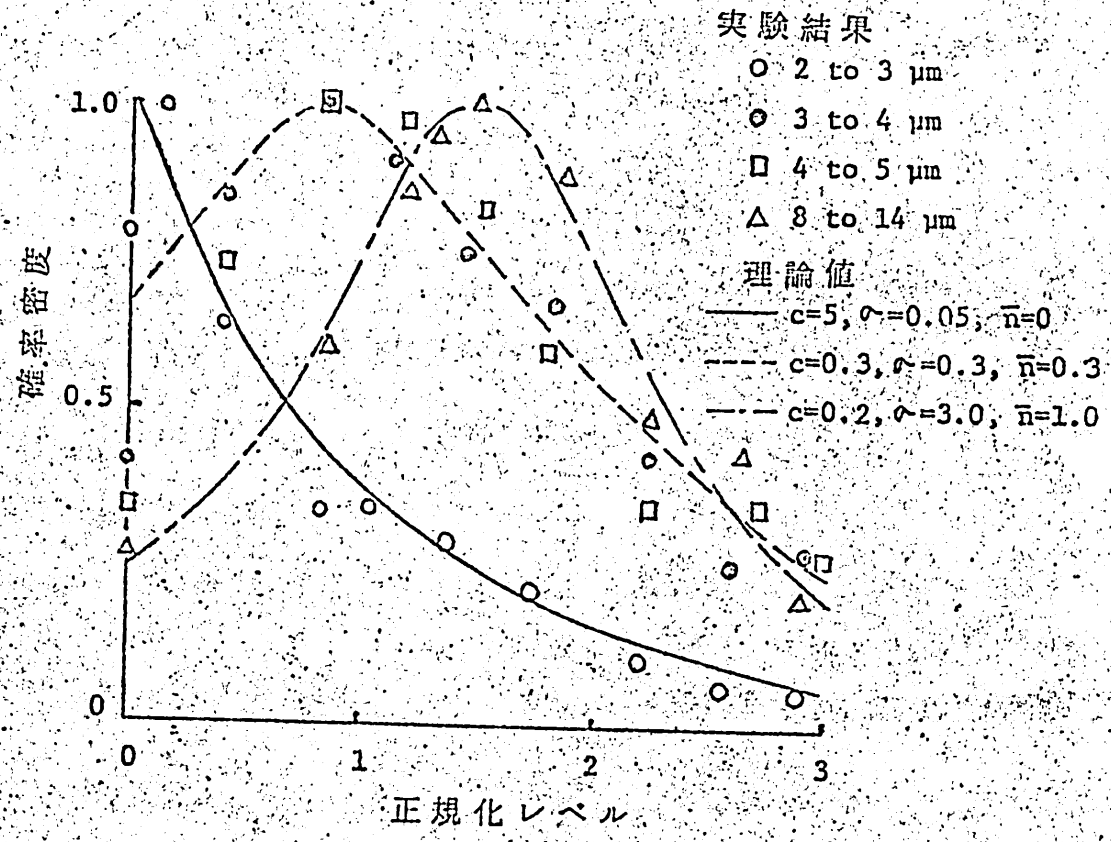


図 6　全中間赤外域に対する確率密度関数

表 3　自己放射と太陽の散乱光の放射輝度の比較

波長域	自己放射 [W / cm^2-s.r.]	散乱光 [W / cm^2-s.r.]
2 to 3 μm	5×10^{-8}	5×10^{-4}
3 to 4 μm	3×10^{-5}	1×10^{-4}
4 to 5 μm	6×10^{-5}	2×10^{-5}
8 to 14 μm	4×10^{-3}	2×10^{-5}

輻射科学研究会資料

電子振動を利用したマイクロ波の直流変換特性
ーフィラメント電力を必要としない直流変換ー

石川正臣，森田正信
（関西大学工学部）

昭和49年6月28日

1. まえがき

マイクロ波を通信の手段だけでなく、その電力応用[1]についても最近注目を集めている。電力応用の主なものは加熱であるが、別な用途として、エネルギー伝送（輸送）の手段としても考えられている。これには太陽エネルギーを人工衛星上で電気エネルギーに変換して、地上にマイクロウエーブで伝送し、整流して電気エネルギーとして利用するSSPSシステム[2]の計画がある。一方地上では電力需要が年々増加してきており、それに伴なってケーブルも超高圧ケーブルになりつつある。しかし高圧になるにつれて、コスト高となり、そのためある距離の範囲では導波管によるエネルギーの輸送も経済的に採算が合うという報告[3]もある。

マイクロ波を電気エネルギーに変換する方法としては2つある。第1番目に熱エネルギーに変換してタービンを回し、発電機を回転させる方法と、第2番目に直接整流[4]して直流（または交流）に変換するものである。現在主に考られているのは後者で、半導体のショトキーバリアダイオードと1/2波長ダイポールを組み合せたrectennaと呼ばれる装置で大電力を整流するには多くのrectennaを並直列に組み合せることで70(%)程度の変換効率を得ている。一方電子管は半導体に比べて効率は劣るが出力が大きいという特徴をもち、今までに2極管、クライストロンそしてマグネトロン等が研究され効率が50(%)程度である。

半導体と電子管を比較すると、あらゆる面で半導体がすぐれている。しかし、電子管は出力以外に高圧に耐えることが出来るという利点を持ち、一方欠点として別に直流入力（フイラメント電力、陽極直流入力）を必要とする。ここでは高圧であるという利点とそして欠点を出来るだけ取り除いた管を試作した。

ここで報告するのは電子振動を利用して、超高周波を高圧直流に変換する同期荷電管[5]でエネルギー変換の立場から再考するために、まず双曲線型電極で高圧直流発生機構と比較的弱い入来波電力（2W以下）の変換効率、出力を示し、後で電極形状を変形した管で比較的強い入来波電力（10W程度）における動作で直流入力、特にフイラメント電力を必要とせず、双曲線型電極に比べて非常に効率が高く、最高で40(%)程度を得る管について、それぞれ実験結果を報告する。

2.高圧発生過程

電子振動管で往復運動している電子の周期T_eと超高周波周期Tとの比を後小波次数nとよぶ。nが整数のときすなわち$n=1$が基本波、その他の場合n次の後小波と同期しているという。

$$T_e = nT \qquad (1)$$

同期荷電管の原理図をFig.1に示す。磁界Hは電子が直接陽極に取られるのを防ぐためにZ方向にかけられ、フィラメントは原点に張られている。破線は電子振動の状態を示し、A_1, A_2極の間隙にのみ超高周波電界があり、加速されてC極の高抵抗に負の電位を発生する。

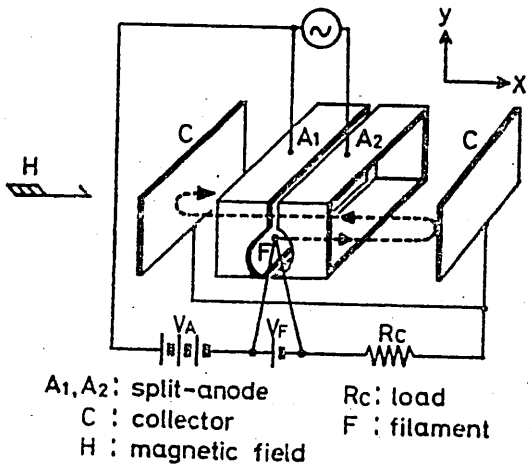


Fig.1 同期荷電管の原理図

C極の負電位が低い時は、ただちにとびこむが、高くなると何回か往復運動をした後にとびこむ。多重走行させるために電位分布がパラボリック電位を保つ必要があり、そのため発生する負電圧$-V_c$は次式で与えられる。

$$V_c \fallingdotseq 10\left(l_x/n\lambda\right)^2 \qquad (2)$$

ただし、λは波長(m)、l_xはX方向の長さ(mm)(Fig.3参照)である。これよりV_cは$n=1$でl_xは長く、λは短いほど高圧を発生する。

今までわかっている事項をまとめると次の様になる。

まとめ(A) $n=1,3$の場合のV_cが発生しやすい。

まとめ(B) Hをy軸のまわりに回転させると、次第にV_cが高

くなり、電極をはずれるまで続く。（これは l_x の長さが等価的に長くなるためである。）

まとめ（C）Hの強さをある程度以上強くしてもVcがほとんど変化しない。

以上の事から陽極電圧がいかなる値でも超高周波をくわえると（2）式を満足するVcが発生出来ると思えるが、実際には何んらかのきっかけが必要であることが実験からわかった。それとDC出力を取り出すためには高抵抗（実験では100(MΩ)使用）にしないと高圧を発生しないが、Powerを取るには（2）式よりVcがRcに関係なく一定であるためにどの程度へらすことが出来るかによってDC出力が決められる。

3. 実験装置

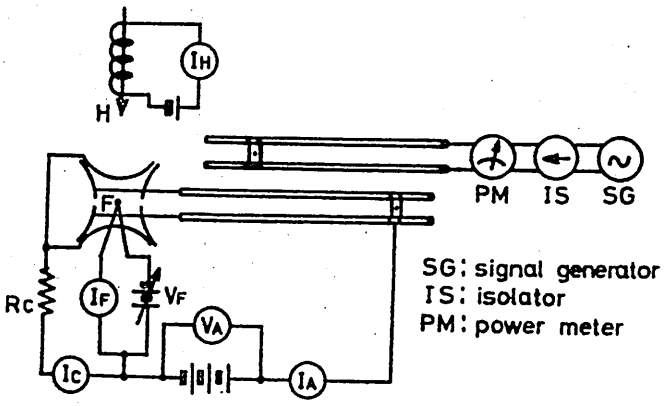


Fig.2 実験装置

Fig.2は実験装置である。負荷抵抗Rcは0から100(MΩ)まで可変し、Rcに流れるコレクター電流Ic(<0)との積で発生電圧 $-V_c$ を与える。送受信はレッヘル線ーレッヘル線結合で行なう。

一方のレッヘル線には0.4～1.0(GHz)の信号発振器からアイソレーターを通って通過型電力計に接続する。他方は管の陽極(A_1, A_2)につなぐ。内部発振周波数の測定には入来波がないときにスペクトルアナライザーまたは周波数カウンターで測定する。

4. 平板双曲線型電極

2でのべた事項を特にまとめ(A)(C)に関して調べるのが目的である。電極構造はFig.3に示す。各電極は空間電荷を無視して、次式により設計した。

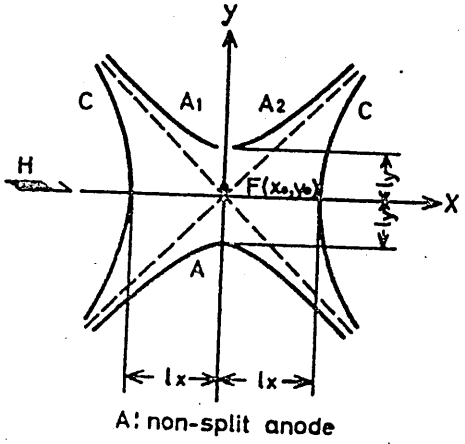


Fig.3 双曲線型電極構造

陽極　：$y^2 - x^2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} l_x^2$　(3)

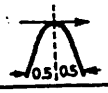
集電子極：$x^2 - y^2 = l_x^2$　(4)

$$\alpha = \frac{V_C}{V_A + V_C} \quad (5)$$

ただし、V_A, $-V_C$はそれぞれ定常状態に達したときの陽極および発生電圧である。管の寸法は$l_x = 6$(mm), $l_y = 2$(mm), $l_z = 20$(mm), $\alpha = 0.9$で設計し、そのフィラメント位置をTable 1に示す。電極にはモリブデン、フィラメントには0.1mmφのタングステンを用いる。線状フィラメントは(x_0, y_0)でZ方向に張り、点状フィラメントはTable 1に示すように半径0.5

(mm)程度おりまげ電極のメッシュ面でZ方向の一端より (x_0, y_0) 位置で作用空間に約1.5~2.0(mm)入れたもので、実際にはx, y方向に幅をもち、(x_0, y_0) には中央のみを示している。

Table 1 フィラメント位置

Tube No.	1	2	3	4
filament position (x_0, y_0) unit ; mm	(0,1)	(0,0)	(0,1)	F_1(0,0) F_2(0,0)
notes	one filament	a point filament 		two filament

4.1 実験結果および考察

4.1.1 陽極電圧特性 (Tube 1,2)

Fig. 4, 5 は入来波が存在する場合の V_c と存在しない場合の V_c' そして内部発振周波数 f_0 を示す。V_c は陽極電圧 V_A を増加させると ⓐ点で build up し、その後次第に減少させると V_A=100~40(V)で定常状態 [(2)式の $n=1$ の時に発生する V_c を言う。各れに対する V_c を Table 2 に示す。] に達し、さらに減少させると急激に減少する。つまり V_A に対して V_c がヒステリシスカーブを描く。ここでこのようなカーブを描くきっかけとして build up するⓐ点が重要となる。Fig. 4(b) から各 V_A に対して多くの周波数成分が存在し、ⓐ点での f_0 はこの内 $f_0 \fallingdotseq f_i$ の関係にあるもののみが寄与している。つまり f_0 の内、入来波マイクロ波周波数 f_i に同期した電子のみが加速され V_A を減少させても同期状態が保持され、パラボリックな電位

分布が形成されてゆく。Fig.5 において線状フィラメント(Tube2)で定常値を発生させるためには入来波電力(この場合発振器の入力 P_s で表示)が線状フィラメント(Tube 1)に比べて弱い電力で発生し、かつ ヒステリシスカーブは build up 点Ⓐですでに定常値を発生している。これは f_0 が各 V_A に対して発振周波数が1つであるために弱い入来波で build up 出来る。また入来波を強くすると $|f_0 - f_i| \fallingdotseq 50$(MHz) でも引き込み同期して build up することが出来る。

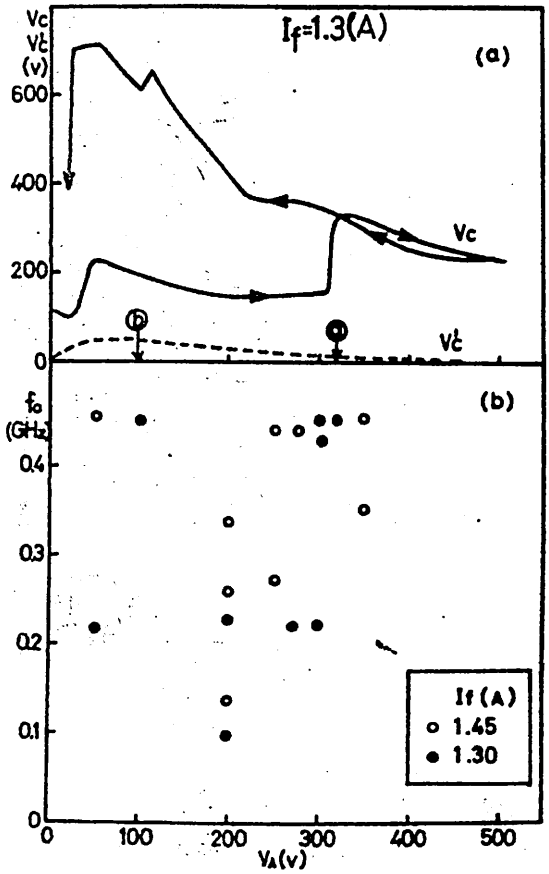


Fig.4 Tube 1 の V_A 特性
[f_i=450(MHz), P_s=28(W)]

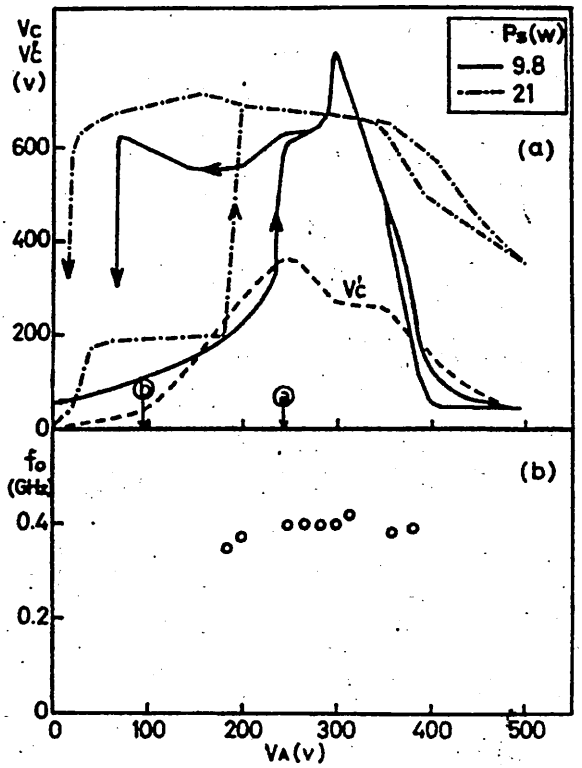


Fig.5 Tube 2 の V_A 特性
[f_i=400(MHz), I_f=1.82(A)]

ここでヒステリシスの様子が2つあることがわかった。

傾向(1) build upと同時にほぼ定常値を発生し、V_Aを下げても一定である。

傾向(2) build upしてV_Aを下げることにより定常値となる。

線状フィラメントでは傾向(2)のみしか示さなかったが、I_fを増加することで傾向(1)もあらわれる。一方卓状フィラメントでは傾向(1)が実験の結果から多い。この相異をV_c'で比較すると、傾向(1)では極値を持ち、傾向(2)は変化がほとんどなく小さいときにそれぞれの傾向があらわれる。

Table 2 発生電圧

f_i(MHz) / n	400	450	650
1	622	818	1706
2	156	204	426
3	69	91	190

build upと同時に加速電子の一部によって逆加熱が生じフィラメントが白熱し、定常状態がくずれるまで持続する。しかし逆加熱を起した時にフィラメント電流I_fを下げると定常状態が保持できない。しかし後で述べるようにこの現象を積極的に利用したものが示される。

以上の結果は高抵抗つまり$R_c=100$(MΩ), $n=1$の場合であるが$R_c=10, 5$(MΩ)でも同様なヒステリシスを生じるが、一般に⓪卓のV_A, 定常値を発生するV_Aが次第に高くなる傾向を示す。

これまでは定常値の発生($n=1$に対するV_c)のみを示した

が高次のれに対する動作は陽極電圧特性で定常値となる f_i に対しては高次のれに対する V_c は発生出来ず、むしろ漸渡的に $n=2$ を経て定常値となる。$f_i=650$(MHz)で実験した場合 $n=2$ に相当する電圧 $V_c=426$(V) を発生する。ただこの様に f_i が高くなると入来波電力を大きくする必要があり、かつ build up する電圧, f_0 と f_i の関係が不規則で DC出力比も悪るく $n=1$ が有効である。

4.1.2 磁界特性 (Tube 2)

Fig. 6, 7 は $f_i=400$(MHz)において、build up する@点の電圧 $V_A=270$(V)と定常値を発生する $V_A=90$(V)での V_c 変化である。$V_A=270$(V) では V_A 特性と同様なヒステリシスを示し、H を下げると $f_i \fallingdotseq f_0$ を境として V_c が降下し始め $f_0 \fallingdotseq 335$(MHz) つまり H=1500(Oe)で急激に落る。一方 H を上げてゆくと H=2700(Oe) で build up し、その時の f_0 が 440(MHz) である。一般に build up するには $f_i \leq f_0$ の関係がある方が良いことが実験から

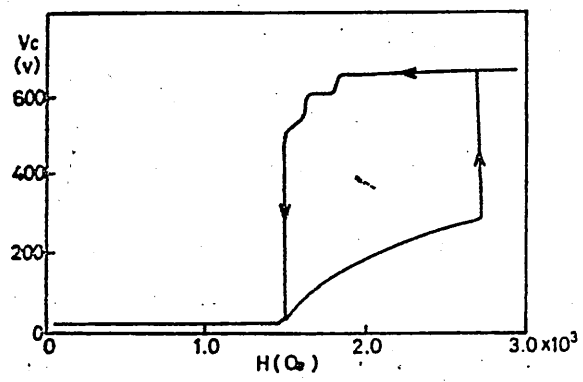


Fig.6 $V_A=270$(V)での H特性
[$I_f=1.82$(A), $f_i=400$(MHz)]

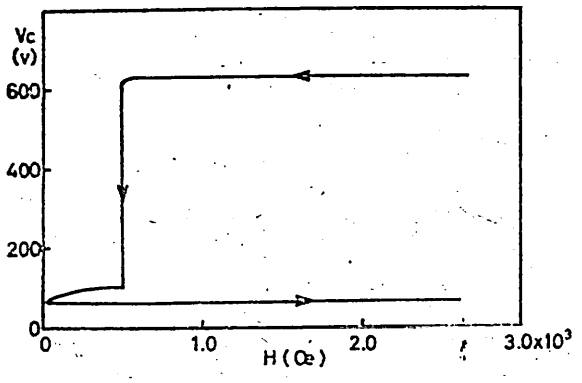


Fig.7 $V_A=90$(V)での H特性
[$I_f=1.82$(A), $f_i=400$(MHz)]

わかった。$V_A=90$(V) は(5)式を満足する電圧でHを下げるとある値まではVcが一定値を保つが一度定常状態がくずれるとHを上げても build up せずにもう一度V_Aを変化させてヒステリシスを描く必要がある。このように2のまとめ(C)のことが確認された。実際には磁界をある程度強くして一定にしておくためにV_Aのヒステリシスの方が重要である。

4.1.3 電力、効率特性 (Tube 1,3)

マイクロ波入力は電力計を送信側に挿入しているために実際にどの程度試作管に入っているかわからないが、下記の結果は悪い状態での特性と考えられる。効率を計算する場合にはフィラメント電力を無視している。またDC出力を取る場合(つまりP_0)一度$R_c=100$(MΩ)で定常値にして後にR_cを下げて行った場合に定常値が保てる最低の負荷抵抗とコレクター電流の2通の種である。

$$P_0 = I_c^2 R_c \quad , \quad P_0' = P_0 - P_{dc}$$
$$\eta = P_0/P \times 100 \quad \eta' = P_0'/P \times 100$$

ただし P_0, P_0' : 変換直流出力　　P_{dc} : 直流陽極入力
η, η' : 効率　　P : 電力計指示

Fig. 8, 9 は $f_0 \fallingdotseq 400$(MHz) における特性である。Tube 3 をえらんだのは、フィラメントの背面に backing plate を置くことで Tube 2 では $I_f=1.82$(A) 必要であったのが 0.89(A) まで減少でき、直流入力の大部分を占めるフィラメント電力を少なく出来、

かつ特性的には同様であった。(5)式が成立する V_A において Tube 3 では $P=0.25 \rightarrow 4.75$(W) では $P_o=0.1 \rightarrow 0.5$(W), $\eta=35 \rightarrow 10$(%) まで変化し、P が増加すると P_o の出力ののびが悪く、η の差が小さくなり 10(%)程となる。一方 Tube 1 では $P=2.5 \rightarrow 6.5$(W) では $P_o=0.12 \rightarrow 0.6$(W), $\eta=5 \rightarrow 10$(%) と Tube 3 に比べて悪い。$V_A=150$(V) では Tube 3 は $P=0.5 \rightarrow 2$(W) の間では P_o の増加が大きく $\eta=20$(%) と変化がなくなるが、$P \fallingdotseq 2.5$(W)以上では $\eta=20 \rightarrow 10$(%) と減少する。Tube 1 では P_{dc} の方が P_o より大きくなり η は数%となる。しかし、両方の管とも P の増加によ

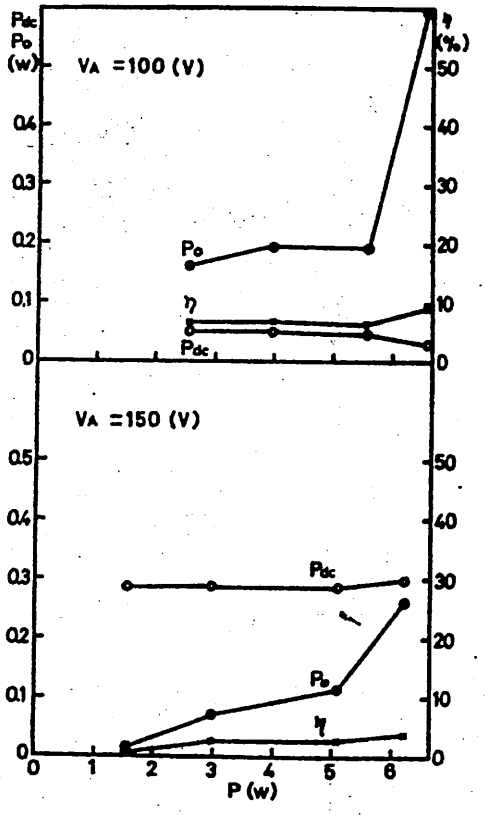


Fig.8 Tube1の電力,効率特性

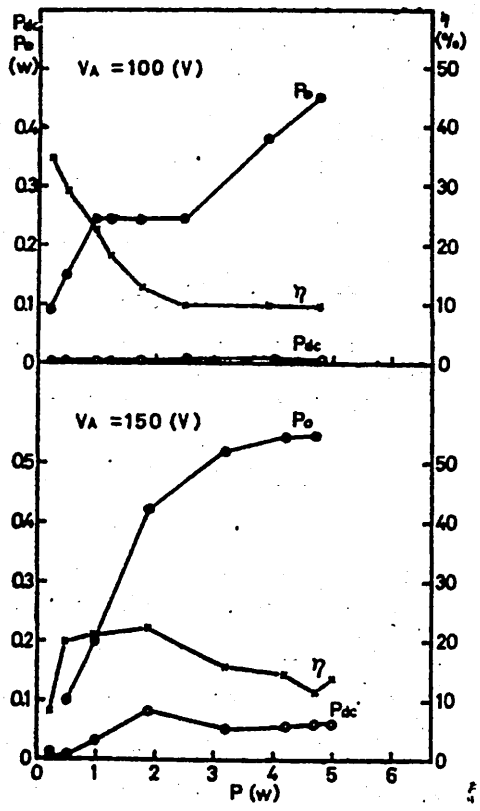


Fig.9 Tube3の電力,効率特性

って P_o が飽和の傾向を示す。このように卓状フィラメントに比べて線状フィラメントが特性的に劣っている理由として Tube 1 のフィラメント位置が理想的な (0,0) 位置よりずれており、かつ入来波電力を大きくしないと build up せず $P=6$ (w) 以下では瞬間的に大きな RF 入力を加えて、定常状態にした後に P を下げた場合の P_o, η であるために特性的に劣っている。一方 Tube 3 では、フィラメント位置は x, y 方向に幅を持ったために Tube 1 と同様な結果となると思えるが、作用空間全体の電界が乱されずかつ入来波電力が弱くても build up することが出来るためである。陽極特性が傾向(1)の場合、V_A が高くなるに従って大きな入来波電力に対して多くの P_o を取り出すことが出来、全体としてその低下が少ない。一方傾向(2)は(5)式を満足する V_A 以外は特性的に悪くなる。
高次の n に対して Tube 1 では $n=2$ で $f_c=645$ (MHz), $P_s=21$ (w) で $P_o=0.037$ (w) となり $n=1$ に比べてはるかに劣る。
ここでは線状フィラメントの悪い特性であったが、理想位置にフィラメントを置き、かつ傾向(1)のヒステリシスを示すなら卓状フィラメントと同様な特性が得られることを次に示す。

4.1.4 2線状フィラメント (Tube 4)

入来波電力の増加により P_o が比例関係になくむしろ飽和的な傾向を示した。そこで P_o を増すために2フィラメント管について実験を行なった。今までの結果から各フィラメント単独動作で取り出せる P_o の合計として出力があらわれず、

むしろ単独動作の方が多くの P_o を得ることを経験してきた。今までの管ではフィラメント位置の変化は主にy軸上であったが、これは電界を乱すために悪い結果であった。そこでフィラメント位置を $F_1(0,0)$, $F_2(1,1)$ に置くと定常状態において電位分布がパラボリックになった状態の場合、理想的な位置である。しかし $(1,1)$, $(-1,1)$ の場合はフィラメントが対向するため悪い結果となった。陽極電圧特性は $P=1(W)$ で傾向(1)を示し、線状フィラメントでも弱い入来波電力で定常値にすることが出来るのはフィラメント位置におおいに関係することが示された。F_1, F_2 に対して $V_A=80(V)$, $f_i=420(MHz)$ で $V_c=750(V)$ を発生し、(2)式より $V_c=706(V)$ となり 45(V)程度高いが R_c を下げてゆくと最大出力を得る R_c でほぼ理論値に一致する。定常状態を保つ場合 P_{dc} は数(mW)程度で P_o に比べて無視出来るが定常状態がくずれると F_2 では陽極電流 I_A が $10\rightarrow 450(\mu A)$, $P_{dc}=36(mW)$ となり F_1 は $80(\mu A)$ $P_{dc}=6.4(mW)$ となる。単独動作ではアンバランスがあり最大の P_o は F_1 で $R_c=20(M\Omega)$ の時 28(mW). F_2 で $5(M\Omega)$ 97(mW)である。同時に動作させると Fig.10 となり $R_c=4(M\Omega)$ $P_o=124(mW)$ を得る。これから最大の P_o を得る時に次の関係が

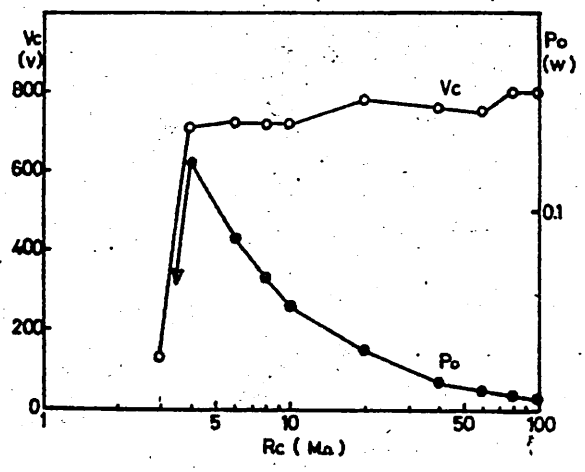


Fig.10 Tube 4の Rc特性
[$V_A=80(V)$, $P=1.0(W)$]

成立することを見い出した。発生電圧 V_c が一定であるために

$$R_c = \frac{1}{1/R_{c1} + 1/R_{c2}} \qquad (6)$$

が成立する。ただし、R_{c1}, R_{c2} は F_1, F_2 の最小負荷抵抗である。(6)式は $V_A=100$(V)でも同様な結果を得ることが Table 3 からわかる。この関係は(5)式が満足する V_A 附近でのみ成立し、それ以外は単独動作の方が良い結果となった。上述の関係を起すには同時に F_1, F_2 を点火してヒステリシスを起させる必要がなく、どちらか一方のフィラメントで定常値を保って後、他方を点火しても(6)式が成立する。

Table 3　Tube 4 の測定した出力

V_A (V)	80			100		
	R_c (MΩ)	I_c (μA)	P_o (mW)	R_c (MΩ)	I_c (μA)	P_o (mW)
F_1	20	37	28	4	173	120
F_2	5	139	97	3	236	167
F_1+F_2	4	176	124	1.7	420	300

Fig.11 は F_1, F_2 共に $I_f=1.5$(A) として $V_A=80, 100, 120, 140$ (V)に対する P_o', η' の特性である。V_A が高いほど P_o' が大で $P=1.7$(W), $V_A=140$(V) で 0.6 (W) となるが F_1 単独の場合よりも 0.1 (W) 多いだけで 2 フィラメントの効果はあまりない。同様なことが $V_A=120$(V) でも言える。$V_A=100, 80$(V) では P_o', η' 共に効果があらわれ $\eta'=35\sim20$(%) となる。単独動作では一般に $(P_o')_{F_2} > (P_o')_{F_1}$ で陽極ギャップに近いほど高周波との結合が密になりエネルギが多く取り出せる。F_1, F_2 共に $P=1\sim2$(W) で $V_A=140, 120$ (V) で $\eta'=35\sim25$(%) を得る。

このように棒状フィラメントと同様な特性がフィラメント位置によって得られることがわかり、またP=2~3(W)までであれば初期の目的であるη'の増加が期待出来る。

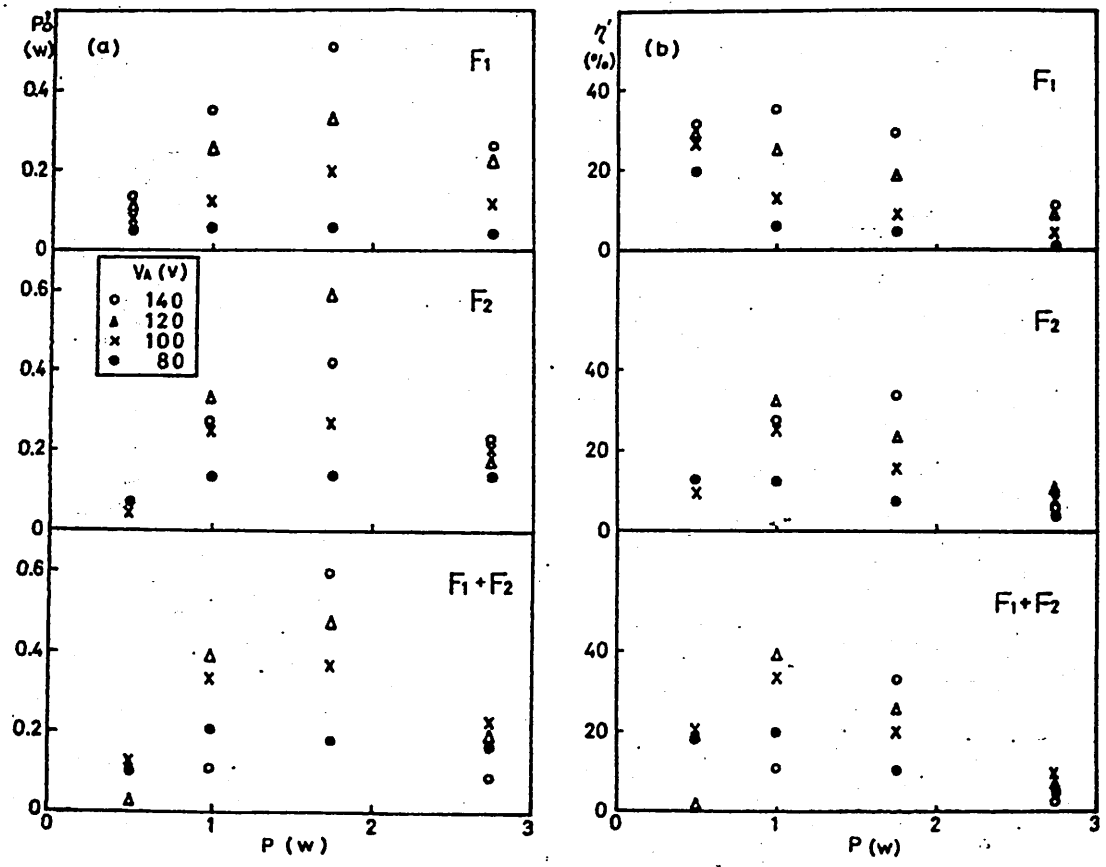


Fig.11. Tube 4の電力、効率特性

5.変形電極による特性

双曲線電極による各フィラメント形状の実験結果から発生電圧は理論値にほぼ一致することが分かった。しかしDC出力電力に関しては入来マイクロ波電力の増加に伴って出力が飽和の傾向を示すために効率が減少する。フィラメント電力を含めた直流入力を無視するとP=2(W)以下で最大30～40(%)であるがそれ以上の入来波電力に対しては数パーセントといちじるしく低下する結果となった。実際にはマイクロ波の直流変換という立場からは直流入力も考慮し、出来ればマイクロ波電力によって供給する方法が最良である。実験室で行なっている10数ワットのマイクロ波電力では、直流入力で特にフィラメント電力が大きな要素となる。そこで前述で一部ふれたように電子のback heatingを積極的に利用することで直流入力を低下することが可能である。ここでは従来の双曲線型電極構造を変形した場合の諸特性と、特に始動時のみフィラメントを点火し、動作時にはフィラメント電力を全く必要としない管の特性を示す。

電極の特徴は双曲線型に比べ製作が簡単で、かつ陽極はコレクターを囲むようにしている。Fig. 12は双曲線型と変形した電極とを比較したものである。Tube 5, 6, 7はA_1, A_2極の一部を漸近線と"ひれの部分"Cとで双曲線電極に近似したもので、またコレクターは平板で近似している。

Tube 8 は"ひれの部分"がなく漸近線のみで近似している。
Fig. 13 は普通型電極を変形したものである (Tube 9)。
Tube 8 を除いて陽極ギャップは 0.5 mm 程度が back heating を引き起こしやすい。なお各電極の寸法は Table 4 に示す。

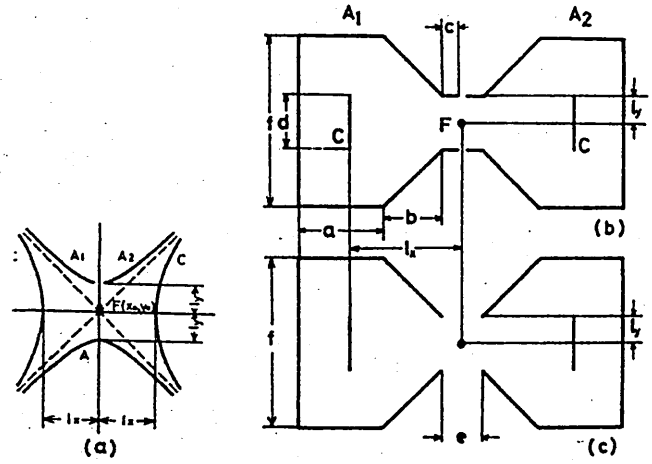


Fig.12 双曲線型と変形電極

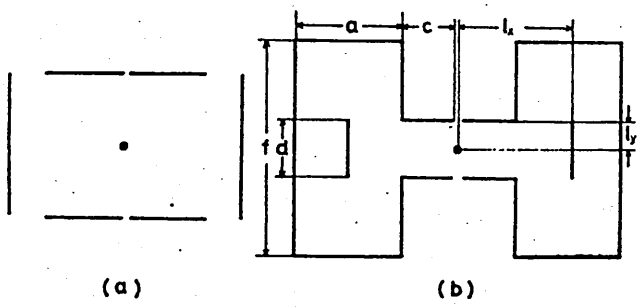


Fig.13 普通型と変形電極

Tube No.	a	b	c	d	e	f	l_x	l_y	l_z
5	6	4	2	3		11	8	1.5	10,20
6	6	4	1	3		11	8	1.5	15
7	6	4	1	3		11	8,9	1.5	15
8	6	4		3	3	11	8	1.5	15
9	6		3	3		13	6	1.5	10

Table 4 試作管の寸法

5.1 実験結果および考察

一般特性はどの試作管も同様な特性であるために Tube5 で主な特性を示す。

5.1.1 定常値電圧の発生過程

双曲線型で高圧を発生させるためには一度 V_A に対して V_c のヒステリシスを描かせる操作が必要で build up 点（ⓐ点 V_A=250～300(V) Fig.4,5 参照）と動作点（ⓑ点 V_A=100～80(V)）と作用させる電圧が異るのは実用上から不便である。そこでⓐ,ⓑ点を一致させて V_A=100(V), f_c=420(MHz) で P を変化させて定常値が発生する過程を Fig.14 に示す。P の増加によって V_c は 350(V) から P=6(W) で 600(V) を経て、P=7(W) 1300(V) を得る。これは (2)式より定常値 V_c=1250(V) で、ほぼ理論値に近い値である。定常値に達すると同時に back heating を引き起こし、I_f=1.53(A) から 1.30(A) まで減少する。一度 back heating が起れば P を減少させても 2(W) 程度まで定常値を持続する。

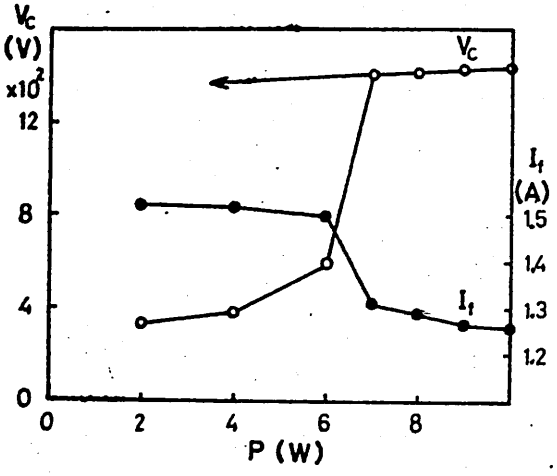


Fig.14 P変化による定常値発生過程
[V_A=100(V), f_c=420(MHz), R_c=100(MΩ)]

5.1.2 陽極電圧特性

Fig.15 は V_A=80(V) で back heating を起し、定常値を発生し、V_A=200(V) まで変

化させても定常値が続く。これは傾向(1)と同様な傾向である。I_fに対してもヒステリシスを生じ80(V)以下で0.2〜0.3(A)の低下が見られる。back heatingによるフイラメントの白熱状態は双曲線型に比べて極端である。内部発振に関してはV_A=80〜100(V)では非常に微弱であるが420(MHz)を検出した。このようにback heatingが積極的に起るのは次の理由によるものと思われる。つまり超高周波との結合が強い。双曲線型ではl_y=3(mm)であったが1.5(mm)となり(3)式を適用するとα=0.9→0.96とαが上昇した。一方電極自身がコレクターを囲むような一種の空胴となっているためである。

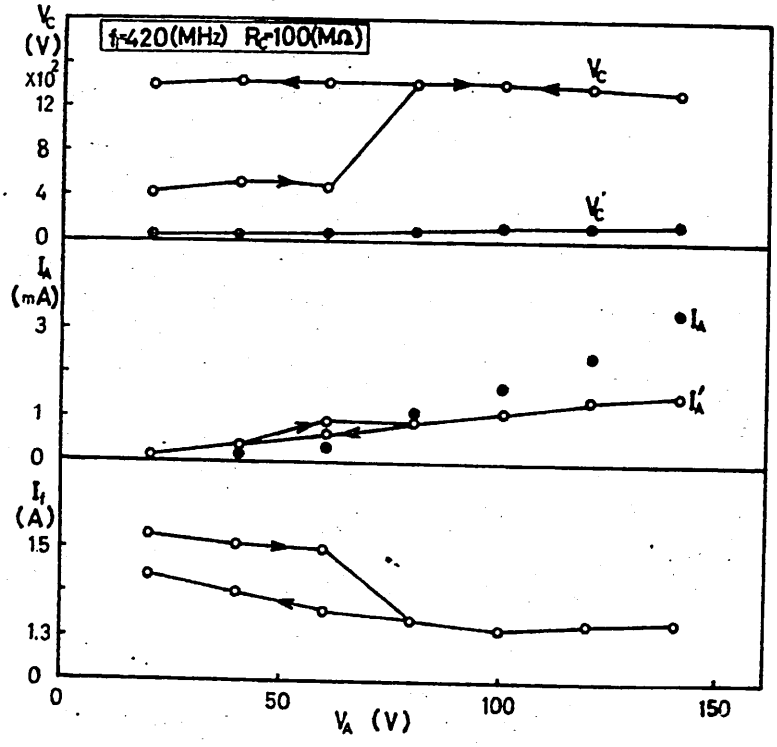


Fig.15 Tube 5のV_A特性

この形の電極でもPが小さい時には双曲線型と同様にヒステリシススをV_Aに対してV_cに起こし、build up, back heatingでV_Aを下げて定常値にする方法も可能である。ⓐ,ⓑ点が一致出来るのはf_iの電力増加によりf_0の発振

強度が少なくてすみ②栄の電圧が低くて良いために移動したと考えられる。

5.1.3 フイラメント特性

V_A=100(V) で back heating を起させるためには I_f=1.55(A)が必要で、その後 I_f を減少させて 1.12(A) まで定常値が保持されることを Fig. 16 からわかる。I_A に対しては定常値が保持されている間ほとんど変化がなく、定常状態がくずれると R_c が高抵抗の場合、ここでは R_c=100(MΩ) の時に増加するが最適な負荷（最大の P_o を取り出すことの出来る R_c）ではほとんど流れない。P を変化させてフイラメント電力がどこまで低下出来るかを Tube 9 での値を Table 5 に示す。back heating を起すためには 3.45(W) であったが P を増加させるとフイラメント電力が 2.26→1.88(W) に減少出来る。また一度 back heating が起れば、P を減少させても持続することから始動時のフイラメント電力と動作時のフイラメント電力の差が入来波によ

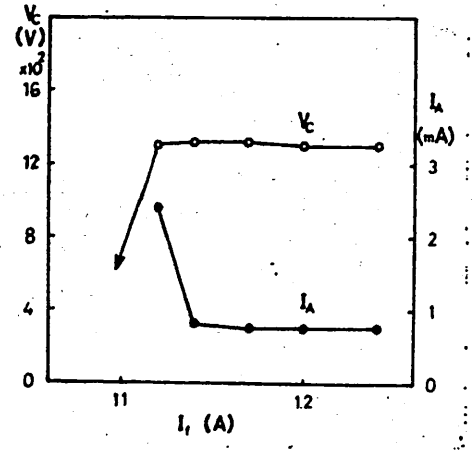


Fig.16 フイラメント特性

Table 5 Tube 9 の入力電力に対する出力とフイラメント電力

P(W)	始動時のフイラメント電力 P_{f1}(W)	動作時のフイラメント電力 P_{f2}(W)	P_o(W)
7.3	3.45	1.88	1.44
5.0		1.91	1.04
3.0		2.04	0.74

って与えられた電力である。またマイクロ波電力の利用率を次式のように定義する。

$$\text{利用率} = \frac{P_0 + (P_{f1} - P_{f2})}{P} \times 100\ (\%) \qquad (7)$$

これからTable5の値よりPが小さいほど高くP=3(w)で72(%)となる。

5.1.4 効率、電力特性

Tube 5,9の特性をFig.17に示す。Tube 5はl_z=20(mm)でP≒7(w)において back heating をさせた後にPを下げた場合であり、P=4~9(w)においてη', P_0は22~27(%) 0.8~2.6(w)を得る。一方Tube 9ではP=4(w)において back heating が起り、P=4~8(w)において、18~22(%), 0.8~1.8(w)を得るがη'はPの増加と共に低下する。η'は back heating が起る入来波電力の最小値つまりP=7.4(w)で最大効率を得る。また同様なマイクロ波入力でありながら出力P_0に差がでてきたのは比較的小さな入力Pである場合は差が少ないがPが大きくなるにつれてl_zの長さが関係してくると思われる。これはTube 5のl_z=10(mm)の実験結果から飽和特性を示し、η'は15(%)と低下する。

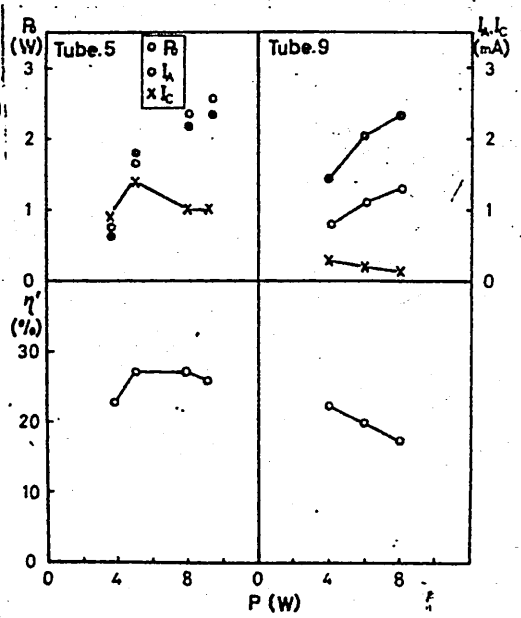


Fig.17 効率、電力特性
, [V_A=100(V), f_i=420(MHz)].

これより、双曲線型ではPが大きくなるにつれてη'が極端に低下し数(%)となったが、この形状では20(%)以上の効率を得ることが出来た。

5.1.5 定在波比

Fig. 14, 15の場合におけるSWRをFig.18に示す。これよりback heatingと同時にSWRが1.2程度まで低下する。この特性はR_c=100(MΩ)であるが最適負荷にした場合、反射電力がほとんど測定出来ずSWRが1近くになる。V_A=110~140(V)程度が動作させるときに最適であると言える。

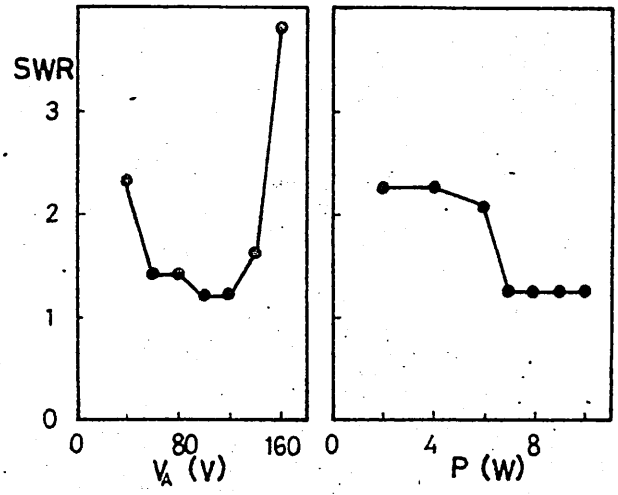


Fig 18 Tube5のV_A, Pに対するSWR

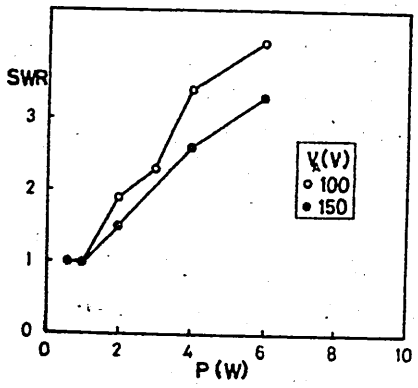


Fig.19 Tube3のSWR

Fig.19は双曲線型のTube3のSWRを測定したもので1(W)以下ではSWRは1近くでそれ以上のPに対してはSWRが大きくなる。このことから双曲線型で出力が取り出せないことがわかる。

6. フィラメント電力を必要としない変形電極の特性

前述の管ではフィラメント電力のみを無視したが入来波電力の増加によっても低下せず20(%)以上の効率を得た。しかし実際にはフィラメント電力 P_f をも含めて次式のように効率を定義する。

$$\eta'' = \frac{P_o - (P_{dc} + P_f)}{P} \times 100 \qquad (8)$$

(8)より Tube 5, 9 でさえ η'' は負または良くて数パーセントである。Tube 6 はフィラメントのタングステンを 0.1 mmφ を用いた時の特性を Fig. 20 に示す。$V_A = 130$ (V) $P = 12.5$ (W) で P_f を zero にすることが出来る。η'' は $P_f = 0 \sim 0.2$ (W) 位までは 25(%) で η とほぼ同じで、それ以上の P_f では影響がでてきて η'' の低下がみられる。P_o は $P_f = 0.5 \sim 1$ (W) までは 3.3 → 3.7 (W) と 0.4 (W) の増加しかみられなかった。P_f を上げることにより当然 P_o の増加が期待出来るが白熱状態が極端であるために切れることが多い。I_4 は I_f を変化させてもほぼ一定である。$V_A = 130$ (V) より以下の電圧では I_f をある程度流す必

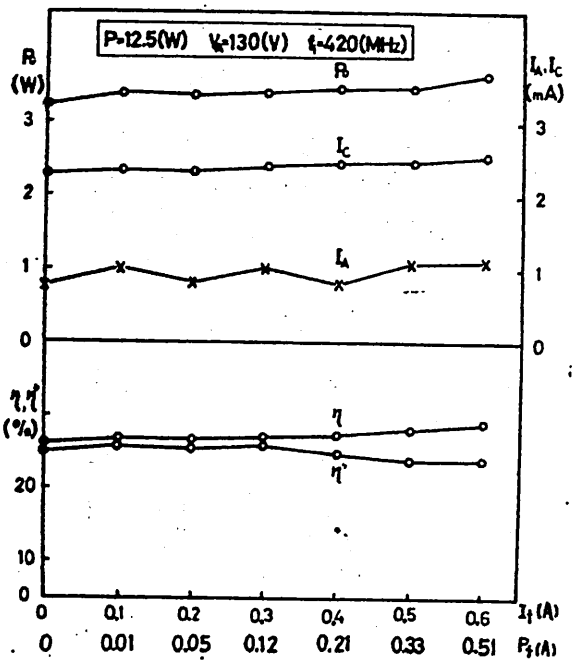


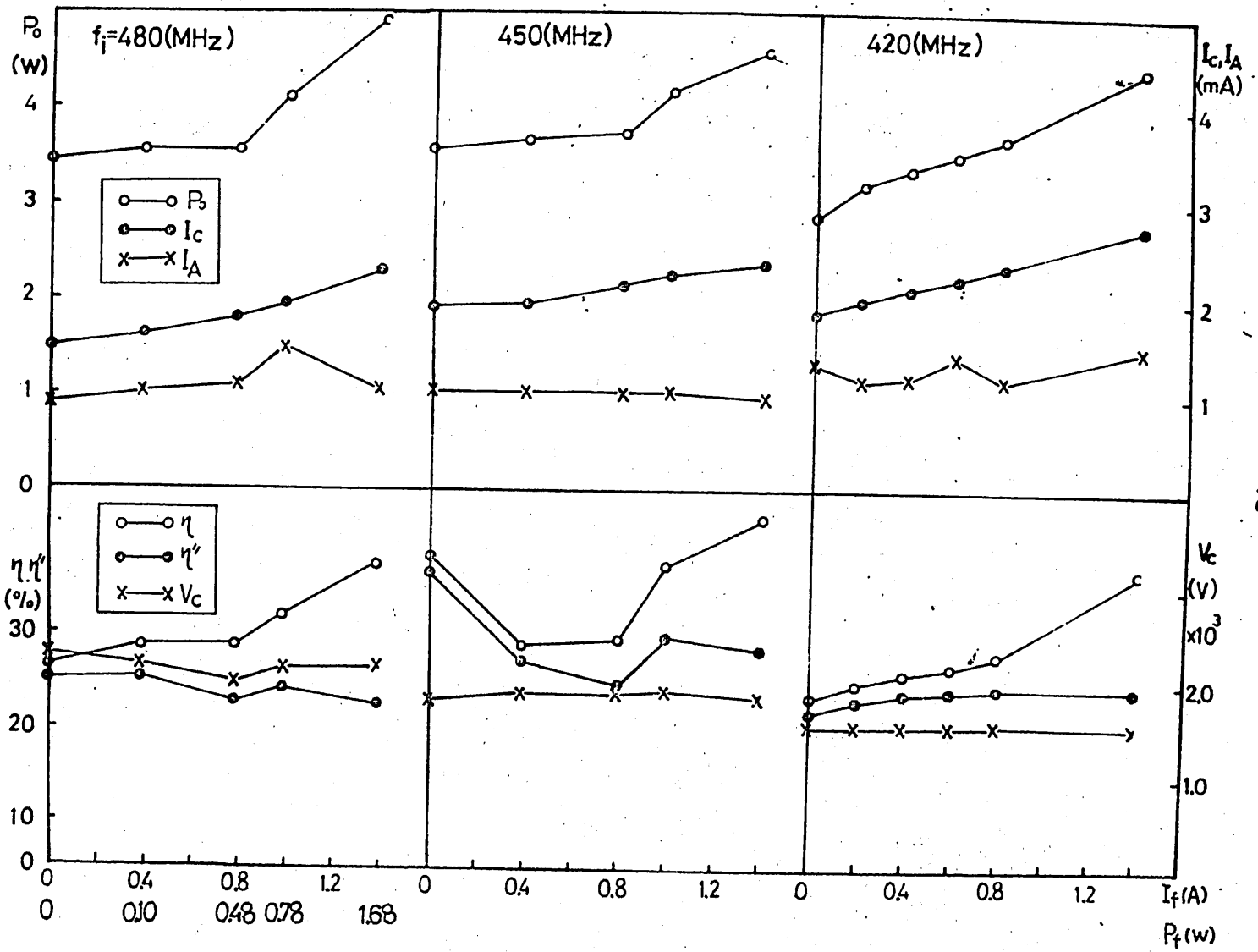
Fig. 20 Tube 6 のフィラメント特性

要がありまた 130(V) 以上では I_A が極端に多くなり I_c とほぼ同じかそれ以上となった。

Fig.21 は Tube 7 の f_d=420, 450, 480 (MHz) での各特性である。フイラメントに 0.13 mmφ を使用した。この管の特徴は l_x の長さを左右 1 mm ずつ異なり 8, 9 mm である。(2)ぎより l_x=8 mm では定常値の V_c は 1254, 1440, 1640 (V), 一方 l_x=9 mm では 1590, 1820, 2070 (V) となる。結果は 1550, 1850, 2000 (V) で l_x=9 mm の理論値と一致する。f_d=420, 450 (MHz) では V_c が I_f 変化で一定であるが 480 (MHz) では 2250～2000(V) まで変化する。I_f の変化による I_A の変化は少なく全周波数範囲にわたって 1.5 ～ 1.0 (mA) の範囲である。η は 420 (MHz) では I_f の増加により 22 → 24.5 (%) と 2.5 (%) だけ増加するが、その他の周波数では P_f が zero の時が良く 480 (MHz) で 25 (%), 450 (MHz) で 36 (%) となり P_f の増加で η は減少する。コレクター電流 I_c は f_d の増加にともなって多少減少するがその時は最大で 0.5 (mA) 程度であり、P_o は $V_c I_c$ の積で与えられるから逆に f_d が増すほど増加する。P_f=0 で P_o ≒ 3.5 (W) と各周波数でほぼ同じであるが P_f=1.68 (W) では 4.5, 4.5, 5 (W) となり、P_f=0 の時の P_o と各 P_f の時の P_o の差がフイラメント電力となっている。

ここでは V_A=140 (V) のみしか示さなかったが 120～160 (V) の範囲では η が少し低下するが P_f=0 での動作が可能である。しかし f_d が高くなると V_A の下限が高くなる。一方これ以外の電圧では P_f を zero にすることは出来なかった。

Fig.21 420,450,480(MHz)でのフィラメント電流変化による効率,電力特性



V_A=100(V)附近では P_f を zero にすることが出来ず 0.7(W) 以上で P_o を取り出すことが出来結果は f_d=420(MHz) で η''=16~12(%), P_o=3~2.6(W) I_c=1.2~1.4(mA) I_A=0.5(mA) であった。back heating で P_f を zero にするには P=12(W)以上が必要であった。
また back heating をスタートさせるためには P_f≒6(W)が必要で P_f=0での利用率(式(7))は80(%)以上となった。
2のまとめ(B)の事項は f_d=480(MHz) で H を回転させると最大3000(V)を P=13(W)で発生したが P_o=1(W)で磁界の回転による P_o の増加は望めない。l_2=10(mm)では P_f=0 のときの出力 P_o は15(mm)の場合と変りないが I_f の増加で短い方が飽和の傾向となる。Fig. 22は V_A=140(V), f_d=420(MHz). I_f=1.4(A)での H 特性である。H=3960(Oe)以上でないと I_f=1.4(A)以下の P_f では P_o を取り出すことが出来ない。この傾向からわかるように P_o, η'' は H の増加と共に増し、また f_d が増すと H も上げる必要がある。
Tube 8 での特性を Fig.23 に示す。V_A=190(V)と高く I_A≒I_c であっ I_f の増加による P_o の増加がなく η'' は15~13(%)であった。

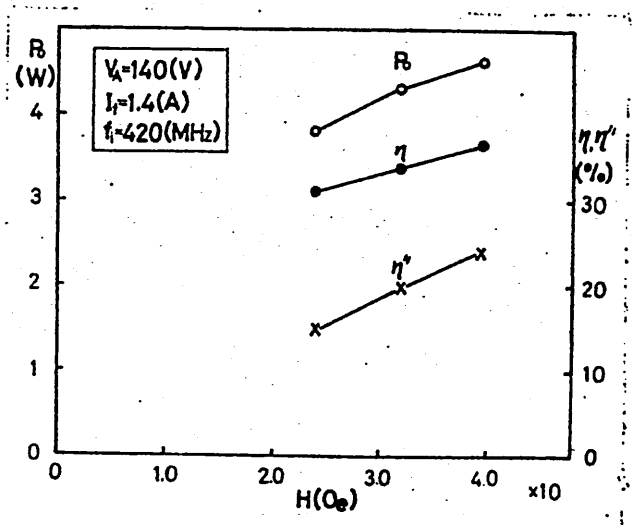


Fig.22 H特性

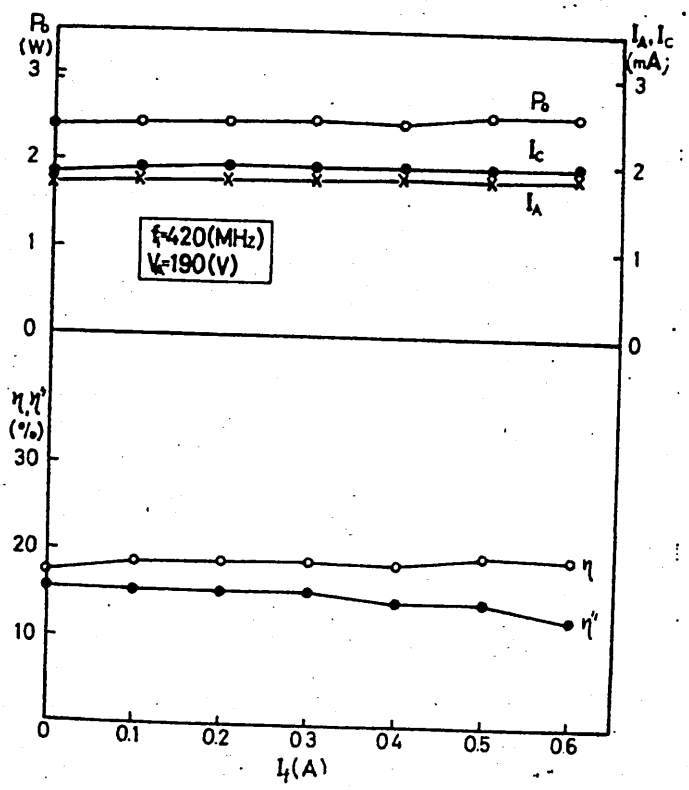


Fig.23 Tube 8のフィラメント特性

7. 結論

双曲線型で高圧発生の原因が内部発振周波数と入来波周波数がほぼ一致した時にbuild upし、陽極電圧に対してVcがヒステリシスを示す。このヒステリシスには2種類ある。

(1) build upと同時に定常値を示す。

(2) build upしてVAを下げるに従って定常値となる。

この電極では変換出力が飽和値を示すために2フィラメントで各単独動作での出力の重畳効果をみつけ出した。

入来波電力が2(W)以下では直流入力を無視すると効率は30(%)位に達するが、それ以上では数パーセントであった。
そこで双曲線型を改良して電極形状を変形することで双曲線型の欠点をすべて取り除いた。つまり陽極電圧に対するVcのヒステリシスなしでVA=100～140(V)で定常値を発生し、直流入力の大部分を占めるフイラメント電力を始動時のみ必要で、その後動作時において電子の陰極へのback heatingを積極的に利用してフイラメント電力を全く必要としない。また実質の直流入力を考慮した効率は40(%)程度得られ、入来マイクロ波の利用率は80(%)以上であった。

終りに有益な御助言をいただいた本学大東延文専任講師と、実験にあたっては本学大学院 竿田純功、岩井治夫両君に感謝します。

参考文献

1) 特集「マイクロ波電力技術」信学会マイクロ波研究会 (S49-9, S48-2)
2) W.C. Brown : IEEE Spectrum vol.10, No.3, P.38
3) H. Paul : Electronics and Power 16 (1970) p171
4) E.C. Okress : Microwave Power Engineering, vol 1,2, Academic Press
5) 岡部金治郎：超高周波電子管 (修教社)

2次元ガンダイオードの小信号理論解析

増田正光・安東泰博・小山次郎
（大阪大学 工学部 電子工学科）

昭和49年6月

輻射科学研究会

2次元ガンダイオードの小信号理論解析

増田正光　安東泰博　小山次郎

（大阪大学 工学部 電子工学科）

1. あらまし

ガン効果は二谷構造の伝導体をもつGaAs単結晶の特性そのものに基因するものであり，これを用いた発振器[1]，増幅器[2]の基本的動作は一次元モデルで説明することができる。しかし，実際のガンダイオードは3次元的広がりを持っており，内部の増大空間電荷波や走行ドメインは境界条件や形状の変化を敏感に反映する。そして，バルク効果半導体素子の2次元的効果から種々の興味ある研究成果が得られている。

まず，ガンモード発振では縦方向のnol積だけでなく，横方向の発振条件も同時に満足されねばならないことが2次元小信号理論により示され[3][4]さらに，ダイオードの側面に高い誘電率をもつ媒質や[5]，磁性体[6]を装荷した場合の動作特性が明らかにされた。また，最近エピタキシャルGaAsを用いた固体進行波増幅器の連続動作に関する報告が成されている。[7]

このような従来の2次元効果の理論的検討は概して，非常に薄いガンダイオードに限られており，2次元ガンダイオードにおける現象をすべて正確に説明しているとは云い難い。また，拡散効果を含めたもの[8]や2次元小信号インピーダンスについての報告[9]も見受けられるが十分なものではない。

以上のような状況の下に，本論文では，有限の厚みをもつときのガンダイオードの諸特性を小信号理論により詳細に検討し，従来のこれに関する研究を補足説明すると共に，ダイオード内の増大波の振舞を明らかにし，さらに

2次元小信号インピーダンスおよび系の不安定性、拡散効果などについて考察する。第2章では、分散関係式を導出し、横モードの厚み依存性も考慮して増大波の振舞について論ずる。第3章では、2次元小信号インピーダンスを求め、その厚みによる変化について述べる。系の不安定性をも含めて拡散効果については第4章で検討する。

2. 2次元ガンダイオード中の増大波の性質

本章では系の分散関係式を導出し、有限の厚みをもつガンダイオード中での増大空間電荷波の伝播特性について論ずる。また、2次元構造において生ずる高次の横モードの厚み依存性についても言及する。

§2-1 分散関係式

図1のモデルにおいて、ガンダイオードの厚みは$d(=2a)$、試料長はlであり、直流バイアスはz方向に印加されている。また、ダイオード中のドナー密度分布および直流電界分布は共に空間的に一様であると仮定する。

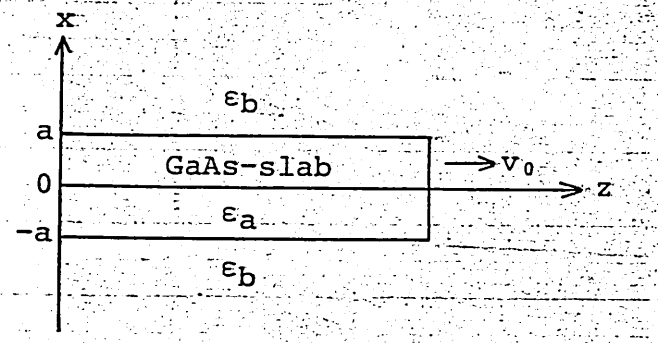


図1. 解析のモデル

なお、交流成分はすべて$X(x)\exp j(\omega t-\beta z)$の形で変化するものとする。

このとき、波動の振舞を規定する諸式は次のとおりである。

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (1)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-j\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \overline{\varepsilon} E = \rho/\varepsilon \qquad (3)$$

$$J = \varepsilon \overline{\omega_c} \overline{\varepsilon} E + \rho U_0 - \overline{D} \nabla \rho \qquad (4)$$

上式において，半導体中では $\varepsilon = \varepsilon_a$，外部誘電体中では $\varepsilon = \varepsilon_b$，$J = 0$，$\rho = 0$ と置けばよい。臨界値以上の高電界の下では GaAs は異方性を示し誘電緩和周波数はテンソルで表わされることになる。また，拡散係数も方向によって異なる値をとるのが一般的である[11]。

$$\overline{\omega_c} = \begin{vmatrix} \omega_{cz} & 0 \\ 0 & \omega_{cz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho_0 \mu_z/\varepsilon_a & \\ 0 & \rho_0 \mu_z/\varepsilon_a \end{vmatrix} \qquad (5)$$

$$\mu_z = U_0/E_0 \quad , \quad \mu_z = \partial U/\partial E$$

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} D_z & 0 \\ 0 & D_z \end{vmatrix} \qquad (6)$$

ここで U_0 は電子のドリフト速度である。

2次元解析の下では（$\partial/\partial y = 0$），半導体中の波動を TE と TM の両モードに分離することが可能であり，発振および増幅現象に関与するのは E_z, E_x, H_y の電磁界成分によって構成される TM モードである。一方，TE モードは一種の表面波と考えられ，半導体の軸方向に直流磁界を印加する場合以外は縦方向の空間電荷波に何ら影響するものではない。

(1)～(6)式より，半導体中の TM 波に関して次式を得る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma_1^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_2^2\right) E_z = 0 \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = -\beta_{Dz}\left\{ j(\beta_0 - \beta) + \beta_{cz} + \left(\dfrac{1}{\beta_{Dz}} + \dfrac{1}{\beta_{Dx}}\right)\beta^2 - \dfrac{k a^2}{\beta_0 \beta_{Dz}}(\beta_0 - j\beta_{cz}) \right\} \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \beta_{Dz}\left\{ \beta^2 - k a^2 \left(1 - j\dfrac{\beta_{cz}}{\beta_0}\right) \right\} \left\{ j(\beta_0 - \beta) + \beta_{cz} + \dfrac{\beta^2}{\beta_{Dx}} \right\} \end{cases} \qquad (8)$$

$$E_z = e_1 \frac{\partial E_z}{\partial z} + e_2 \frac{\partial^3 E_z}{\partial z^3} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} e_1 = j \dfrac{\dfrac{k a^4}{\beta_{Dz}} \left\{ j(\beta_0 - \beta) + \beta_{cz} + \dfrac{\beta^2}{\beta_{Dz}} \right\} + \beta_0^2 \left(\beta - j k a^2 \dfrac{\beta}{\beta_0 \beta_{Dz}} \right) \left\{ \beta - \dfrac{k a^2}{\beta_0} \left(1 + j \dfrac{\beta}{\beta_{Dz}} \right) \right\}}{\beta_0^2 \left\{ \beta^2 - k a^2 \left(1 - j \dfrac{\beta_{cz}}{\beta_0} \right) \right\} \left\{ \beta - \dfrac{k a^2}{\beta_0} \left(1 + j \dfrac{\beta}{\beta_{Dz}} \right) \right\}} \\ e_2 = - \dfrac{k a^2}{\beta_{Dz} \beta_0 \left\{ \beta^2 - k a^2 \left(1 - j \dfrac{\beta_{cz}}{\beta_0} \right) \right\} \left\{ \beta - \dfrac{k a^2}{\beta} \left(1 + j \dfrac{\beta}{\beta_{Dz}} \right) \right\}} \end{cases} \qquad (10)$$

ここで, $\beta_0 = \omega / v_0$, $\beta_{cz} = \omega_{cz} / v_0$, $\beta_{cz} = \omega_{cz} / v_0$, $\beta_{Dz} = v_0 / D_z$,

$\beta_{Dz} = v_0 / D_z$, $k a^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_0$

(7)式において, 空間電荷波の偶対称解をとると

$$E_z = A_1 \cos \gamma_1 z + A_2 \cos \gamma_2 z \qquad (11)$$

γ_1, γ_2 は共に横方向の波数であるが, β_{Dz} が有限値をとるために, 2種の波動が混在し, 取り扱いを困難にする。次章で示す如く, 拡散効果はガンダイオードの動作に高周波限界を与えるが, このような高い周波数領域を除けば, 一般にデバイ長に比べて空間電荷波の波長は十分に長く, 拡散効果は非常に小さいと考えても差し支えない。

$|\beta_{Dz}| \gg 1$ のとき, (8)式は次のように近似される。

$$\gamma_1^2 \simeq - \frac{\left\{ \beta^2 - k a^2 \left(1 - j \dfrac{\beta_{cz}}{\beta_0} \right) \right\} \left\{ j(\beta_0 - \beta) + \beta_{cz} + \dfrac{\beta^2}{\beta_{Dz}} \right\}}{j(\beta_0 - \beta) + \beta_{cz} + \left(\dfrac{1}{\beta_{Dz}} + \dfrac{1}{\beta_{Dz}} \right) \beta^2 - \dfrac{k a^2}{\beta_0 \beta_{Dz}} (\beta_0 - j \beta_{cz})} \qquad (12)$$

$$\gamma_2^2 \simeq - \beta_{Dz} \left\{ j(\beta_0 - \beta) + \beta_{cz} + \left(\frac{1}{\beta_{Dz}} + \frac{1}{\beta_{Dz}} \right) \beta^2 - \frac{k a^2}{\beta_0 \beta_{Dz}} (\beta_0 - j \beta_{cz}) \right\} \qquad (13)$$

拡散の影響が小さく，$|\beta_{Dz}| \gg |\beta|$ のとき，上式より，$|\gamma_1| \ll |\alpha_1|$ となり，波数 α_1 に関係する波は，横方向に非常に速く減衰して行く。これに対して，所望の空間電荷波の振舞を決定するのは，主に(12)式の γ_2 であり，これ以後は γ_2 の効果を無視して論ずることにする。

このとき，(11)式は

$$E_z = A_3 \cos \gamma_2 x \tag{14}$$

ここで γ は次式を満足する。

$$\frac{1}{\beta_{Dx}}\gamma^4 + \left\{ j(\beta_0 - \beta) + \beta_{Cx} + \left(\frac{1}{\beta_{Dx}} + \frac{1}{\beta_{Dz}}\right)\beta^2 - \frac{ka^2}{\beta_0 \beta_{Dx}}(\beta_0 - j\beta_{Cz}) \right\}\gamma^2$$

$$+ \left\{ \beta^2 - ka^2\left(1 - j\frac{\beta_{Cx}}{\beta_0}\right) \right\}\left\{ j(\beta_0 - \beta) + \beta_{Cz} + \frac{\beta^2}{\beta_{Dz}} \right\} = 0 \tag{15}$$

$x \geqq a$ では

$$E_z = A_4 e^{-\gamma_b x} \tag{16}$$

$$E_x = j\frac{\beta}{\gamma_b^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{17}$$

$\because \gamma_b^2 = \beta^2 - k_b^2 \quad ; \quad k_b^2 = \omega^2 \varepsilon_b \mu_0$

次に境界条件を導入する。$x = a$ の界面上における表面電荷を $\rho_s = \rho_{os} + \rho_{1s} \exp j(\omega t - \beta z)$ とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J_{zs}}{\partial z} - J_{zs} + j\omega \rho_{1s} = 0 & (18) \\ \varepsilon_b E_{xb} - \varepsilon_a E_{xa} = \rho_{1s} & (19) \end{cases}$$

ここで

$$\begin{cases} J_{xs} = \rho_0 v_x - D_x \dfrac{\partial \rho}{\partial x} \\ J_{zs} = \rho_{os} v_z + \rho_{1s} v_0 - D_z \dfrac{\partial \rho_{1s}}{\partial z} \end{cases} \tag{20}$$

但し、添字 a, b, s は各々半導体中，誘電体中，境界面での諸量を表わす。
上式より

$$\rho_{1s}=\frac{\varepsilon_a W_{cz} E_{za}+j\beta\rho_{os}\mu_z E_{za}-\varepsilon_a D_z\left(\frac{\partial^2 E_{za}}{\partial x^2}-j\beta\frac{\partial E_{za}}{\partial x}\right)}{j(\beta_0-\beta)v_0+\beta^2 D_z} \quad (21)$$

ホール効果を対象にする場合は，ρ_{os} は直流印加磁界に依存し，電荷波の振舞を決定する因子となるが，図1に示される理想的なモデルを考える際には $\rho_{os}=0$ とする方が妥当である。結局，$x=a$ 面に垂直な電界成分は次式を満足する。

$$\varepsilon_b E_{zb}=\varepsilon_a\left\{\frac{\beta_{cz}E_{za}-\frac{1}{\beta_{Dz}}\left(\frac{\partial^2 E_{za}}{\partial x^2}-j\beta\frac{\partial E_{za}}{\partial x}\right)}{j(\beta_0-\beta)+\frac{\beta^2}{\beta_{Dz}}}+E_{za}\right\} \quad (22)$$

さらに，接線成分については

$$E_{zb}=E_{za} \quad (23)$$

(22), (23) 式に，(9), (14), (16), および (17) 式を代入して

$$\gamma\tan\gamma a=j\varepsilon_r\frac{1}{\gamma_b}\frac{\beta\left\{j(\beta_0-\beta)+\frac{\beta^2}{\beta_{Dz}}\right\}}{(e_1-e_2\gamma^2)\left\{\beta_{cz}+\frac{1}{\beta_{Dz}}\left(\gamma^2+j\frac{\beta}{e_1-e_2\gamma^2}\right)+j(\beta_0-\beta)+\frac{\beta^2}{\beta_{Dz}}\right\}} \quad (24)$$

ここで，$\varepsilon_r=\varepsilon_b/\varepsilon_a$ である。上式の解以外に，$\beta=0$ も解として存在し，この波はダイオードに電圧を印加した場合に生ずる forced wave に対応するものである。

半導体中の空間電荷波においては $|\beta^2|\gg k^2 a,b$ が満足されており，したがって (24) 式は次式のように近似できる。

$$\gamma \tan \gamma a \simeq \varepsilon_r \frac{\beta\left\{j(\beta_0-\beta)+\frac{\beta^2}{\beta_{Dz}}\right\}}{\beta_{cz}+j(\beta_0-\beta)+\frac{\beta^2}{\beta_{Dz}}+\frac{1}{\beta_{Dx}}(\gamma^2+\beta^2)} \qquad (25)$$

このとき

$$\gamma^2 \simeq -\frac{\beta^2\left\{j(\beta_0-\beta)+\beta_{cz}+\frac{\beta^2}{\beta_{Dz}}\right\}}{j(\beta_0-\beta)+\beta_{cx}+\left(\frac{1}{\beta_{Dx}}+\frac{1}{\beta_{Dz}}\right)\beta^2} \qquad (26)$$

本節においてはできるだけ忠実に基本式から分散関係式を導いたが，この数値解については次節以下で述べる。

§2-2. 増大波の伝搬特性.

有限の厚みをもつ半導体中の縦方向の空間電荷波は，無数の横モード（lateral modes）によって構成されている。厳密には，すべての横モードを考慮して増大波の振舞を決定すべきであるが，これは非常に困難であり，従来，横方向のガンモード発振抑制効果を取り扱う場合には，横モードの基本波だけを対象にして解析が行なわれてきた[3]。そして，この理論は非常に薄いガンダイオードに限定される。

本研究の目的の一つは，一次元から非常に薄いダイオードに至るまでの，増大波の厚み依存性を明らかにすることにある。本節では，分散関係式の数値解から，横モードの影響も含めて，厚みによる増大波の伝搬特性の変化について論ずる。

ここでは，$\beta_{ox}, \beta_{Dz} \to \infty$, $|\beta^2| \gg k^2 a, b$ のときの分散関係式について検討するが，拡散効果に関しては改めて述べる。

$$\gamma \tan \gamma a = \varepsilon_r \frac{j\beta(\beta_0-\beta)}{\beta_{cz}+j(\beta_0-\beta)} \qquad (27)$$

$$\gamma^2 = -\beta^2 \frac{\beta_{cz} + j(\beta_0 - \beta)}{\beta_{cz} + j(\beta_0 - \beta)} \qquad (28)$$

等方性の半導体においては，$\beta_{cz} = \beta_{cx}$ であり，有限の厚みにおいても $\beta = \beta_0 - j\beta_{cz}$ なるバルク波と，$\gamma^2 = -\beta^2$ と境界条件で決まる表面電荷波とに分離して，取り扱いが容易となる。しかし，閾値以上の電圧が印加されたときの GaAs は異方性を示し，(2-28)式のごとく，バルク中の増大波と表面波が結合する。今，我々が対象にしている増大波においては，厚みの減少と共に，そのマイクロ波エネルギーの半導体の外部への浸透率が大きくなり，波の増大率は減少する。したがって，任意の厚みに対する増大波の波数は

$$\beta = \beta_0 + \delta\beta_0 - j\beta_i \quad (|\beta_i| \leq |\beta_{cz}|) \qquad (29)$$

ここで $\delta\beta_0$ は一次元の場合からの波数変化を示し，実数である。(29)式において β_i に適当な値を与え，(27)，(28)式にこれを代入し，$\delta\beta_0$ と厚み a を変数として解けば良い。(27)～(29)式により

$$\gamma a = \tan^{-1} Z(\delta\beta_0) + n\pi \qquad (30)$$

$$Z(\delta\beta_0) = -\frac{\varepsilon_r}{\gamma} \frac{(\beta_0 + \delta\beta_0 - j\beta_i)(\beta_i + j\delta\beta_0)}{(\beta_{cx} - \beta_i) - j\delta\beta_0} \qquad (31)$$

ここで，n は整数であり，横方向のモード次数を与える。(30)式から，厚み a は実数でなければならないことから，$\delta\beta_0$ に関する実変数の方程式を得る。

$$\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{j}{2}\log\left(\frac{1-jZ}{1+jZ}\right) + n\pi\right\}\right] = 0 \qquad (32)$$

β_0，β_i および n を与えて，(32)式から $\delta\beta_0$ を求め，これを(30)式に代入して対応する厚み a の値が得られる。このような方法は，厚みに対するバルク増大波

の変化を正しく把握でき，好都合である．

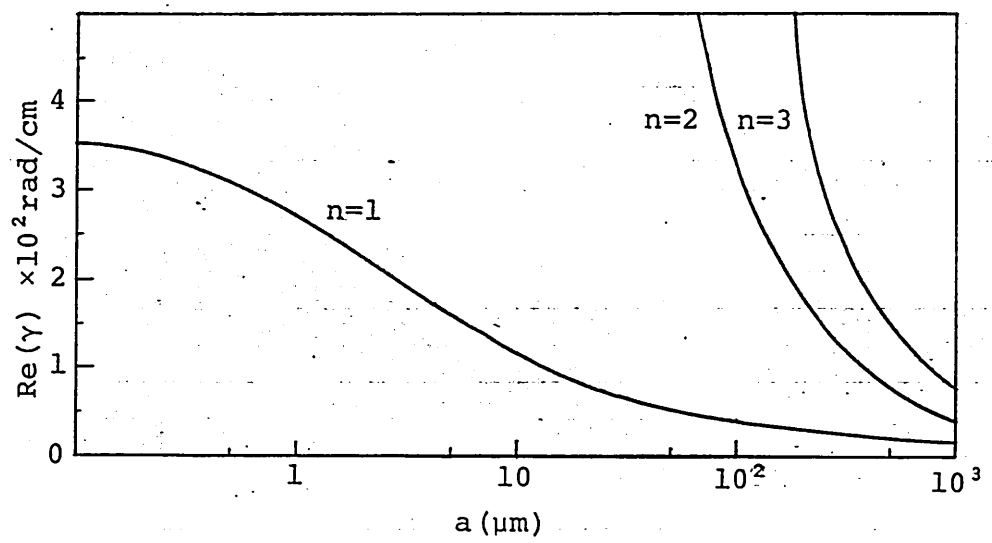
図2はドナー密度 $n_0 = 10^{13}cm^{-3}$, $v_0 = 2\times10^7 cm/s$, $\mu_z = 4800\ cm^2/V.s$. $\mu_z = -1600 cm^2/V.s$, $\varepsilon_r = 0.08$, 動作周波数2GHzの場合の分散関係式(27).(28)の増大波に関する解を示してある。図2-aで，$n=1$モードに対する $Re(\gamma)$ は $a\to 0$ で一定値 $(\beta_0/\sqrt{|\frac{\mu_z}{\mu_z}|})$ に漸近する。これは非常に薄いガンダイオードでは波動の増大率が極めて小さくなり，$\beta \simeq \beta_0$ となるためである。また $a \simeq 1\mu$ 近傍で $Im(\gamma)$ が大きな値をとることは，薄いダイオードにおいて，空間電荷波のエネルギー集中が表面付近で顕著になることを示すものである。

図2-bからn=1モードの場合，厚みの減少と共に $Im(\beta)$ が小さくなっていくのがわかる。これは前にも述べたように，薄くなるにつれて，半導体外部へのマイクロ波電磁界のもれが大きくなることによるものである。$n=2,3$ の高次の横モードは200μ前後で減衰波となり，これ以下の厚みでは，もはや系内を伝播することはできない。したがって，通常の絶縁基板上のエピタキシャルGaAsを対象にするときには，$n=1$ の基本モードのみに着目すれば良い。$a \simeq 20\mu$ で $Re(\beta)$ に凹みが見られるが，これ以外では，ほとんど一定になる．しかし，ドナー密度を増加すると，これはさらに顕著になる。

図3は断面における界分布を示したものである。断面での界分布は，導波管などと異なり，半導体の場合には境界条件が複雑なために，一義的に決定できない．そこで(28)式において，$\varepsilon_r \to 0$, $\varepsilon_r \to \infty$ なる極限での解を求めると

$$\varepsilon_r \to 0 \text{ では } \quad \gamma a \to n\pi$$
$$\varepsilon_r \to \infty \text{ では } \quad \gamma a \to \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi \qquad (33)$$

ここで $\varepsilon_r \to 0$ は外部の媒質の誘電率が小さい場合に，$\varepsilon_r \to \infty$ は



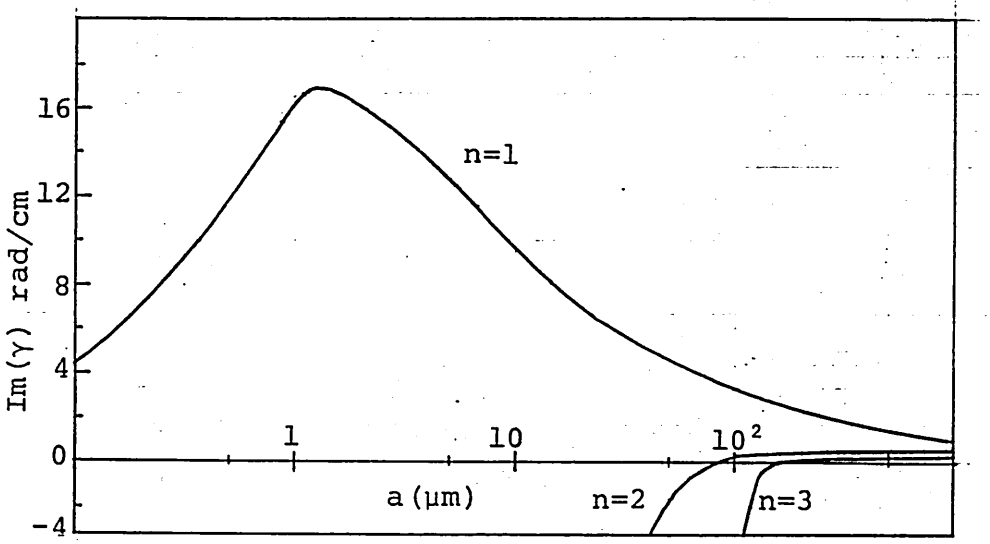


図2-a 増大波の伝搬特性(γ)

$n_0 = 10^{13} cm^{-3}$, $\mu_z = 4800 cm^2/V.S$, $\mu_z = -1600 cm^2/V.S$,

$V_0 = 2 \times 10^7 cm/s$, $\varepsilon_r = 0.08$, $D_z = D_z = 0$, $f = 2GHz$

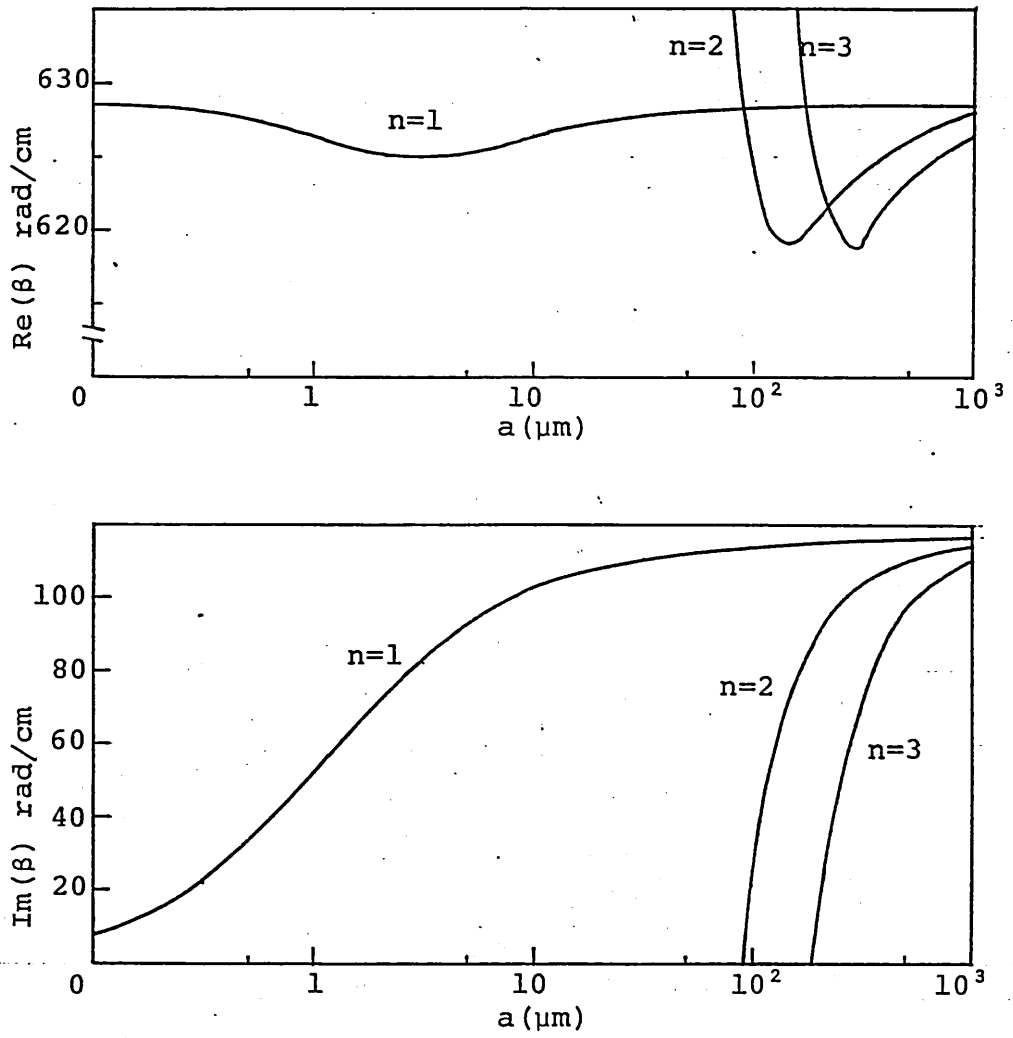


図2-b. 増大波の伝搬特性(β)

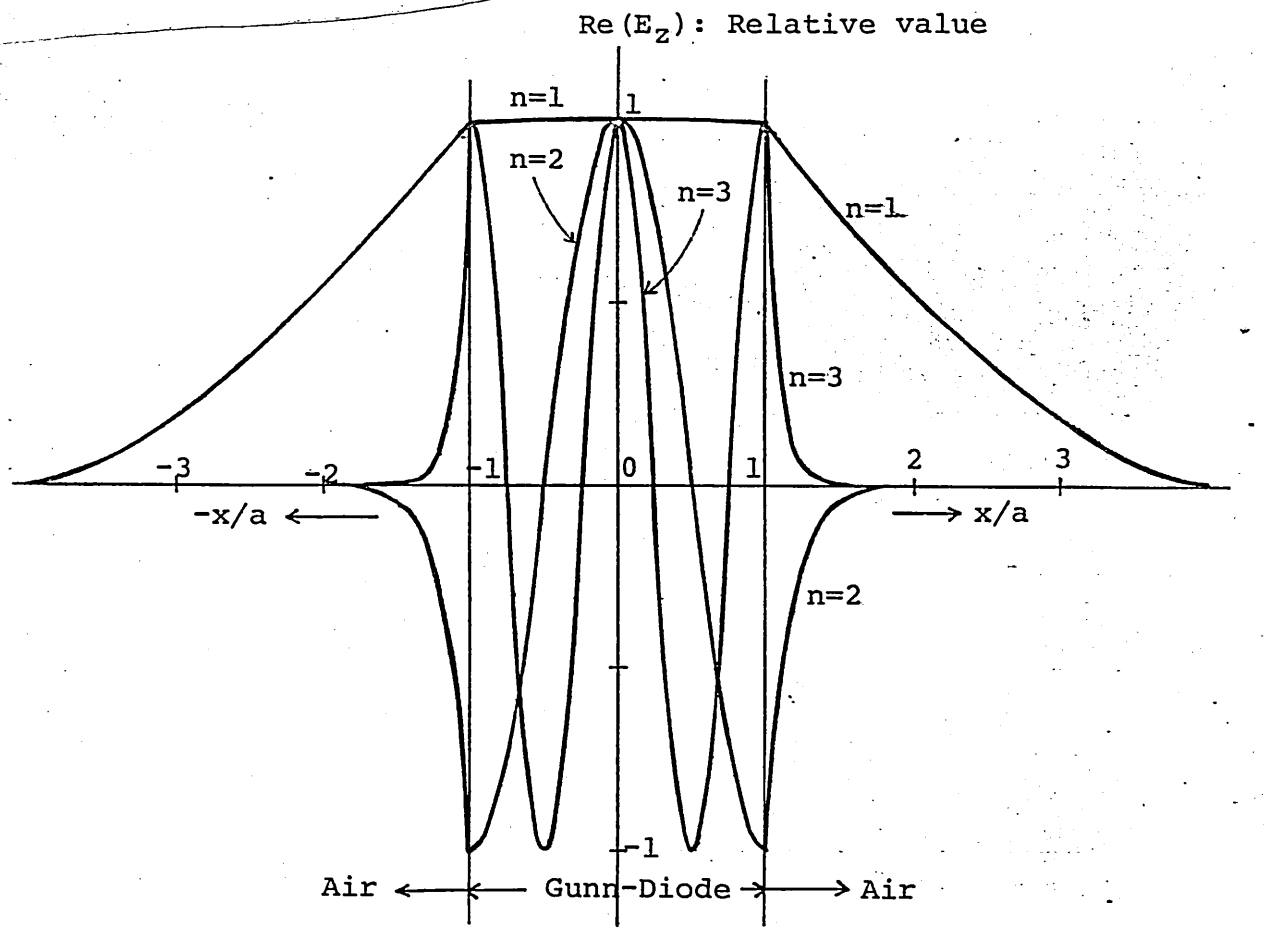


図3. 横モードの電界分布

$n=1$ では $a=10\mu$,
$n=2$ では $a=100\mu$,
$n=3$ では $a=200\mu$.

いわゆる heavy Surface loading にそれぞれ対応し，一般的には横モードの界分布はこれらの中間の状態となる。

図3は自由空間中に置かれたガンダイオードを対象にしたものであり，($\varepsilon_b=\varepsilon_0$, $\varepsilon_a=12.5\varepsilon_0$, $\varepsilon_r=0.08$,) $Re(\gamma a)\sim n\pi$ となっている。$n=1$ で $a=10\mu$

の場合，電界はバルク全体にほぼ一様に分布している。先の図2-bと図3の結果は、薄いガンダイオードに対して，基本波のみに注目して $|\alpha a| \ll 1$ なる平面波近似をすることが妥当であることを示唆している。 $n=2$，3ではそれぞれ $a=100, 200\mu$ であるが，この場合には電界は誘電体領域で急速に減衰する。

3. 2次元小信号インピーダンス

本章では，先に述べた有限の厚みにおける増大波の振舞を考慮して，定電圧動作を行なったときのダイオードの2次元小信号インピーダンスの表示式を求め，その厚み依存性について検討する。

§3-1. 小信号インピーダンスの導出

前章で明らかにしたように，かなり厚い場合（$d \geq 100\,\mu$）を例外として，増大波に関しては横モードの基本波のみを対象にすれば十分である。また、電荷の拡散作用によって生ずるもう一つの横モード（γ_2）は、不安定性が消滅する程の高い周波数領域を除いて、顕著な効果は示されない。したがって、小信号インピーダンスは主に $n=1$ の空間電荷波と定電圧動作時での全電流に関係する forced wave によって決定される。

$$\tilde{E}_z = E_{z0} + E_{z1} e^{-j\beta z} \qquad (34)$$

ここで，E_{z0} は forced wave による電界，E_{z1} はバルク中の増大波によるものを表わす。(8)式に $\beta=0$ を代入して，γ_1 を求めれば E_{z0} の断面での分布が得られる。

$$\begin{cases} E_{z0} = C_1 \cos\left(ka\sqrt{1-j\dfrac{\beta_c z}{\beta_0}}\right) x \\ E_{z1} = C_2 \cos \gamma_1 x \end{cases} \qquad (35)$$

有限の長さの半導体の両端に、オーム性電極がある場合には、半導体と金属の接触面付近での電磁界の振舞は複雑である。しかし、電極近傍でもなお (34)式で与えられるマイクロ波電界が支配的である。したがって、ここでは陰極上の境界条件として、$z=0$で$\tilde{E}_z(0)=0$を与える。

(34), (35)式より

$$C_1 + C_2 = 0 \qquad (36)$$

$$\tilde{E}_z = C_1\left\{\cos\left(ka\sqrt{1-j\frac{\beta_{cz}}{\beta_0}}\right)z - \cos\gamma z\cdot e^{-j\beta z}\right\} \qquad (37)$$

ダイオード全体にかかるマイクロ波電圧V_1は、$z=0$上で定義するのが好都合である。

$$V_1 = \int_0^l \tilde{E}_z\Big]_{z=0} dz \qquad (38)$$

(37), (38)式より 係数C_1, C_2が決まり

$$C_1 = -C_2 = -\frac{j\beta V_1}{j\beta L + e^{j\beta L} - 1} \qquad (39)$$

電流のz方向成分は、空間電荷波と、forced waveとによるものの和で与えられる。

$$\tilde{J}_z = J_{z0} + J_{z1} \qquad (40)$$

$$\begin{cases} J_{z1} = \varepsilon(\omega_{cz}+j\omega)E_{z1} + \varepsilon(v_0+j\beta D_z)\left(\varepsilon_1\dfrac{\partial^2 E_{z1}}{\partial z^2} + \varepsilon_2\dfrac{\partial^4 E_{z1}}{\partial z^4} - j\beta E_{z1}\right) \\ J_{z0} = J_{z1}\Big]_{\beta=0} \end{cases}$$

上式に (10), (14)式を代入して

$$\tilde{J}_z = j\varepsilon v_0(\beta_0 - j\beta_{cz})E_{z0} + j\varepsilon v_0\left\{(\beta_0 - j\beta_{cz}) - (1+j\frac{\beta}{\beta_{Dz}})\frac{\gamma^2+\beta^2-ka^2(1-j\frac{\beta_{cz}}{\beta_0})}{\beta-\frac{ka}{\beta_0}(1+j\frac{\beta}{\beta_{Dz}})}\right\}E_{z1}e^{-j\beta z} \qquad (41)$$

陰極前面 ($z=0$) における x 方向の電流成分は，z 方向成分に比較して，無視し得るので，ダイオードのマイクロ波端子電流 I_1 は次式で与えられる。

$$I_1 = -2\int_0^a \tilde{J}_z|_{z=0}\, dx \qquad (42)$$

(39)式を用いて，(35)式を(41)式に代入し，さらに(42)式の積分を実行することにより，所望の小信号インピーダンスが導かれる。

$$Z(\omega, d) = V_1/I_1$$

$$= \beta Z_0(\omega) \frac{1}{(\beta_0 - j\beta_{cz})\dfrac{\sin\left(ka\sqrt{1-j\frac{\beta_{cz}}{\beta}}\right)}{ka\sqrt{1-j\frac{\beta_{cz}}{\beta}}a} - \left\{(\beta_0 - j\beta_{cz}) - (1+j\frac{\beta}{\beta_{0z}})\frac{\gamma^2+\beta^2-ka^2(1-j\frac{\beta_{cz}}{\beta_0})}{\beta - \frac{ka^2}{\beta_0}(1+j\frac{\beta}{\beta_{0z}})}\right\}\frac{\sin\gamma a}{\gamma a}} \qquad (43)$$

ここで，$Z_0(\omega)$ は一次元の場合の小信号インピーダンスに対応し，

$$Z_0(\omega) = -\frac{j\beta l + e^{-j\beta l} - 1}{2a\varepsilon v_0 \beta^2} \qquad (44)$$

(43)式に $|\beta^2| \gg ka^2$ なる遅波条件を入れると

$$Z(\omega, d) \simeq \beta Z_0(\omega) \frac{1}{(\beta_0 - j\beta_{cz}) - \left\{(\beta_0 - j\beta_{cz}) - (1+j\frac{\beta}{\beta_{0z}})(\frac{\gamma^2+\beta^2}{\beta})\right\}\frac{\sin\gamma a}{\gamma a}} \qquad (45)$$

(45)式で，$|\beta_{0z}| \gg \beta$，$\gamma \to 0$ とすると $Z(\omega, d) \to Z_0(\omega)$ となり，(43)式が2次元小信号インピーダンス表示が妥当であることがわかる。また(43)および(45)式は任意の厚みに対して成立する。

§3-2. 厚みによるインピーダンスの変化

試料長が発振条件を十分に満足していても，厚みが臨界値以下で

あれば、ガン発振は得られない。このように、厚みに対して、ガンダイオードのマイクロ波特性は非常に敏感である。しかしながら、従来の研究は主に非常に薄いダイオードを取り扱ってあり[3][9]、任意の厚みに対するガンダイオードの特性は未だ明らかにされていない。本節では前に導出した2次元小信号インピーダンスの数値解の一例を示し、その厚み依存性について論ずる。なお分散関係式の数値解は §2-2 で述べた方法と従来の Newton-Raphson 法を併用して求めた。

図4 は $n_0 = 5\times10^{13}\,cm^{-3}$, $v_0 = 2\times10^{7}\,cm/s$, $\mu_x = 4800\,cm^2/V.S$, $\mu_z = -1600\,cm^2/V.S$, 試料長 $l = 200\mu$, $\varepsilon_r = 1$ の場合の厚みによるインピーダンスの変化を示している。但し、$D_x = D_z = 0$ であり、$Z(\omega, d)$ は $R_0 (= \frac{1}{e n_0 \mu_x d})$ で規格化している。このとき $n_0 l = 10^{12}\,cm^{-2}$ となり、一次元における発振条件は十分に満足されている。$d = 20\mu$ では、走行時間周波数 f_T の付近の $Re(z) < 0$ なる周波数範囲で、$Im(z) = 0$ なる点が存在し、ダイオードは発振する。これは定電圧動作における素子自体の直列共振によるものである。さらに、このとき f_T の整数倍の周波数近傍でも、リアクタンス零の点がある。$d = 10\mu$ になると、基本周波数での発振は停止し、高調波によるものだけが残る。この厚みではガンモード動作は得られず、ダイオードは共振器モードで発振する。$d = 5\mu$ では すべての周波数に対してダイオードは容量性を示し、共振点は見られず、ダイオードは完全に安定となる。しかしながら、$Re(z) < 0$ の領域は存在し、信号増幅は可能である。また、このとき $n_0 d = 2.5\times10^{10}\,cm^{-2}$ である。この値は Kino と Robson[3] の近似解によるものより小さいが、これは諸定数の差異もさることながら、問題の取り扱いの相違に基因しているものと思われる。

厚み d の変化は外部誘電体の誘電率の変化と等価であり、$d = 15\mu$ で $\varepsilon_r = 1$ のときは発振であるが、$\varepsilon_r \geq 20$ では系は安定になる。ε_r と共に負性抵抗が得られる周波数帯域は若干高周波側へ移動する。

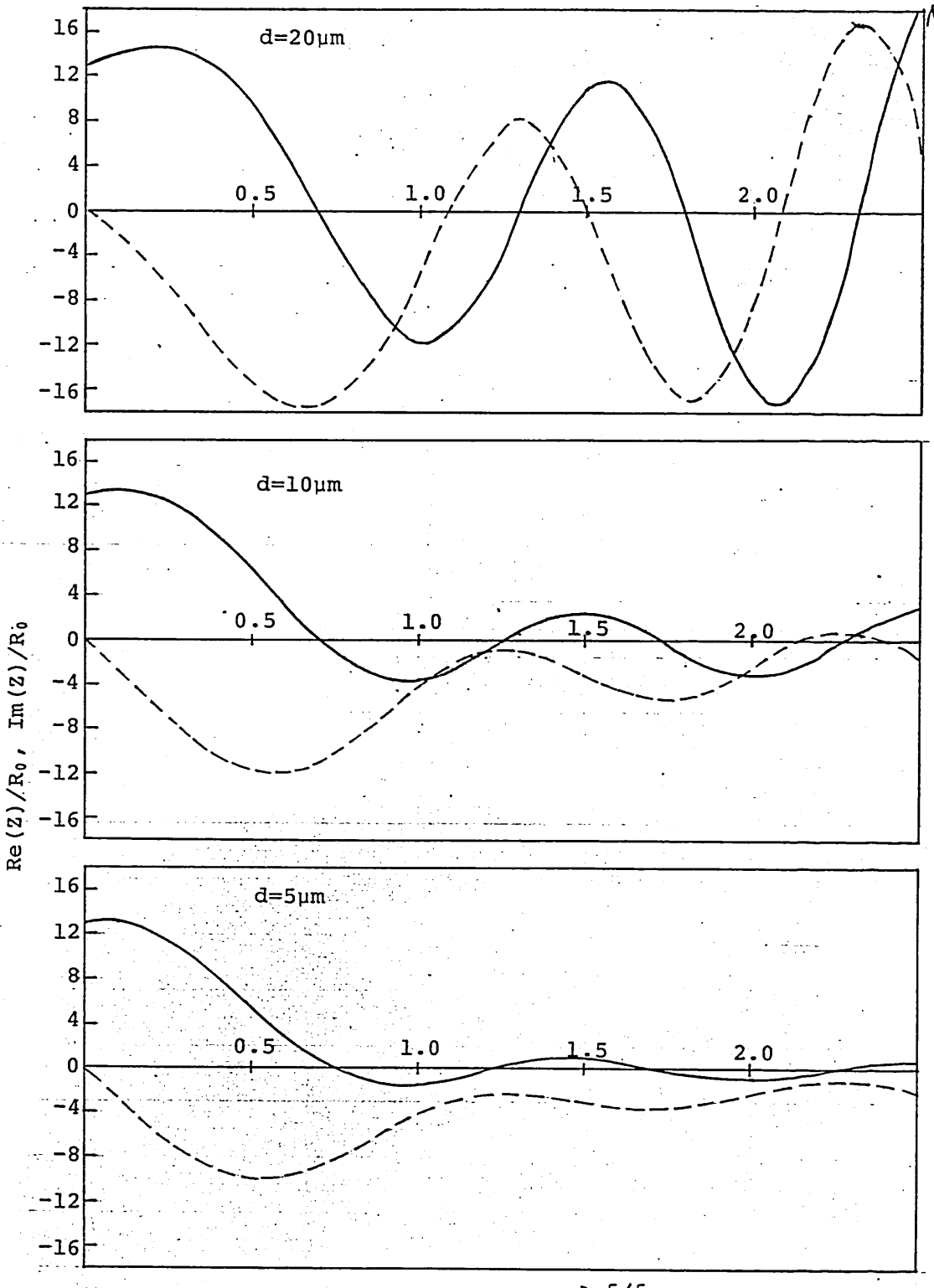


図4. 2次元小信号インピーダンスの厚み依存性

実線 $Re(Z)/R_0$, 破線 $Im(Z)/R_0$, $R_0 = 1/en_0\mu_z d$,
$n_0 = 5\times10^{13}cm^{-3}$, $\mu_z = 4800\,cm^2/V.S$, $\mu_z = -1600\,cm^2/V.S$
$v_0 = 2\times10^7 cm/s$, $\ell = 200\mu$, $\varepsilon_r = 1.0$, $D_z = D_z = 0$

また $d \geq 50\mu$ の場合には，インピーダンスの周波数特性は一次元のそれとほとんど同じであることが認められた。

4. 拡散効果

一般に電荷の拡散は急激な現象の変化を柔らげる方向に作用し，主に3章，3章で論じたような比較的低い周波数範囲内では，増大波に顕著な変化をもたらさない。しかし，波長がデバイ長と同程度になる高い周波数では，もはや $D_z, \alpha \to 0$ とすることはできない。本章では系の不安定性を論じ，2次元ガンダイオード中の増大波およびインピーダンスに及ぼす拡散効果について述べる。

§4-1. 電荷の拡散を含む系の不安定性

小信号理論において，系の不安定性を論ずるには分散関係式で実波数 β に対する ω の複素数解を求め，この虚数部が負になるか否かを調べれば良い。この場合の不安定性は進行波増幅に関する Convective Instability ばかりでなく，Absolute Instability も同時に含むものである。最近，後者に関連して，ガンダイオードの陽極部における走行ドメイントラップ現象が検討されている[10]。

一次元の場合の解は，(15)式において $\gamma = 0$ とすることにより得られ，

$$\omega = \omega_r + j\omega_i = v_0\beta + j(v_0\beta_{c2} + D_z\beta^2) \qquad (16)$$

ここで，$\omega_i = 0$ とすると

$$\omega_{rl} = v_0/\lambda_{Dz} \quad ; \quad \lambda_{Dz} = \left(\frac{\varepsilon_s D_z}{e n_0 |\mu_z|}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (17)$$

上式で与えられる周波数は，一次元のガンダイオードで不安定性が得られる

最大の周波数に対応する。$n_0 = 5 \times 10^{13} cm^{-3}$, $\mu_z = -1600\ cm^2/V.s$, $v_0 = 2 \times 10^7 cm/s$, $D_z = 200 cm^2/s$ のとき，不安定性に関する限界周波数 f_l は 24.2 GHz となる。

さて，2次元の場合には，さらに厚み効果も同時に考慮しなければならないが β を実数として，(15)式と(25)式を連立させて解くことにより，ω の複素数解を得る。厚み d をパラメーターとしたときの ω_r と ω_i の関係を図5に示す。ここで，$D_x = D_z = 200 cm^2/s$ としている。厚みの減少と共に負性抵抗が現われる周波数帯域幅は狭くなり、$-\omega_i$ が最大となる ω_r の値は高周波数側へ移動する。図6は $\omega_i = 0$ で与えられる限界周波数 f_l の厚み依存性を表わしている。実線の下方では系が不安定となり，上方では安定となる。$d \geq 50\mu$ では f_l は一次元の場合と大差は無いが，$d \leq 20\mu$ では f_l は d と共に直線的に減少する。このように拡散効果を含む厚みの減少はダイオードの高周波動作を厳しく制限する。

§4-2. 増大波に及ぼす影響

2-2節では $\beta D_{x,z} \gg |\beta|$ の近似の下での増大空間電荷波の厚み依存性について述べた。これは周波数が比較的低い場合では有効であるが，動作周波数が増加すると，拡散効果はしだいに顕著に現われ始める。今節では，拡散を含む分散関係式 (15), (25)式において，ω を実数としたときの β に関する正確な複素数解の一例を示し，先に求めた結果と比較する。

$D_{x,z} \sim 0$ で平面波近似が成り立つときの増大波の近似解は(27), (28)式より

$$\beta \simeq \beta_0 - j\beta_{c2} \frac{\beta_0 a}{\varepsilon_r + \beta_0 a} \qquad (48)$$

ここで，周波数を増加すると，$\mathrm{Im}(\beta)$ は単調に増加し，$-\beta_{c2}$ に漸近する

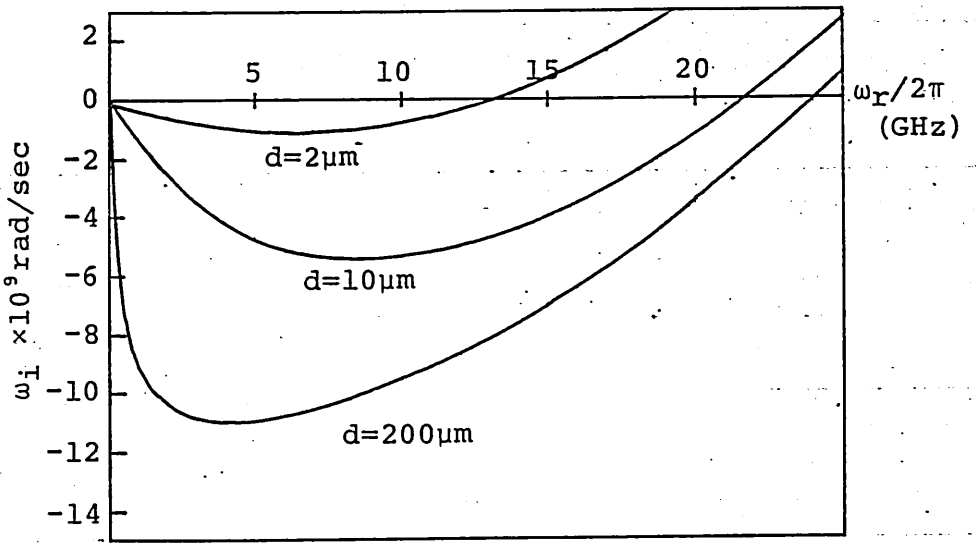


図5. $\omega_r - \omega_i$ ダイヤグラム

$n_0 = 5\times10^{13}cm^{-3}$, $\mu_x = 4800 cm^2$, $\mu_z = -1600 cm^2/V.S$

$v_0 = 2\times10^7 cm/s$, $\varepsilon_r = 1.0$, $D_x = D_z = 200 cm^2/V.S$

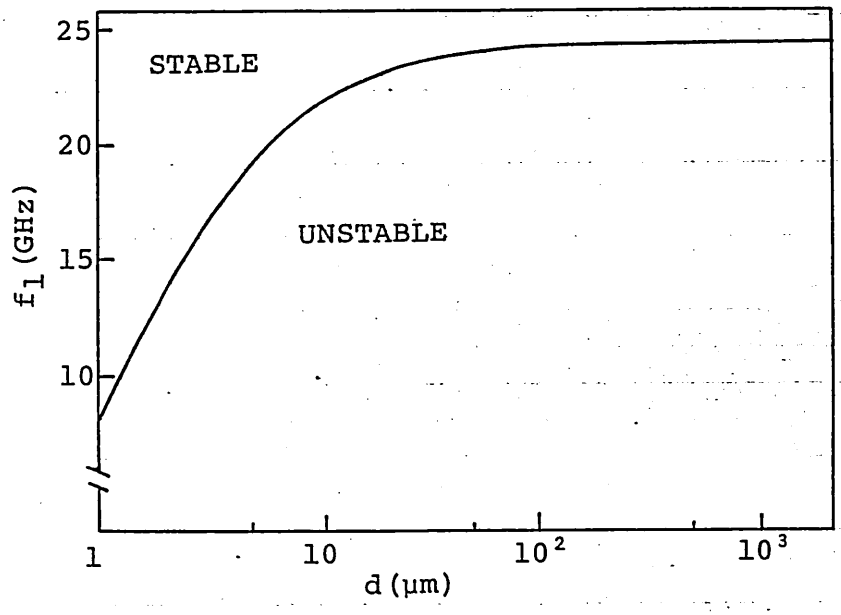


図6 拡散による高周波限界の厚み依存性

$D_x = D_z = 200 cm^2/V.S$

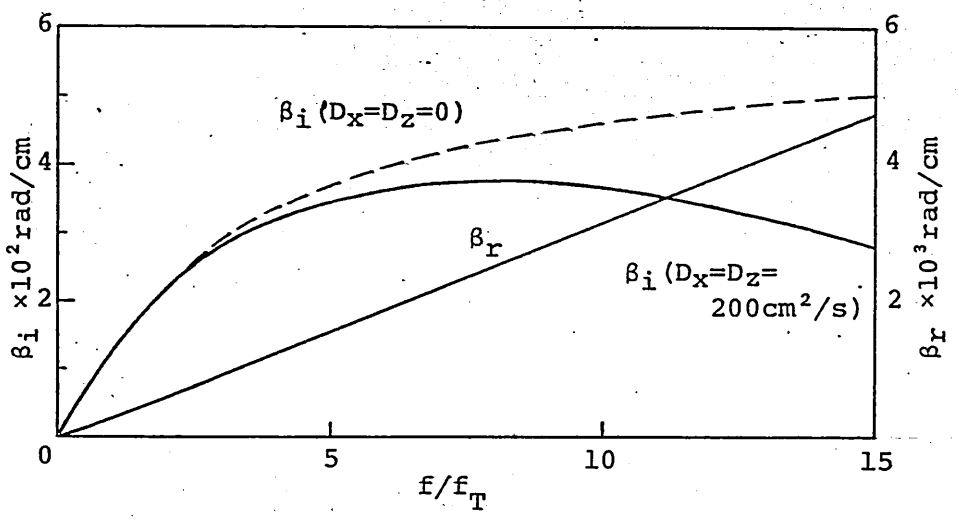
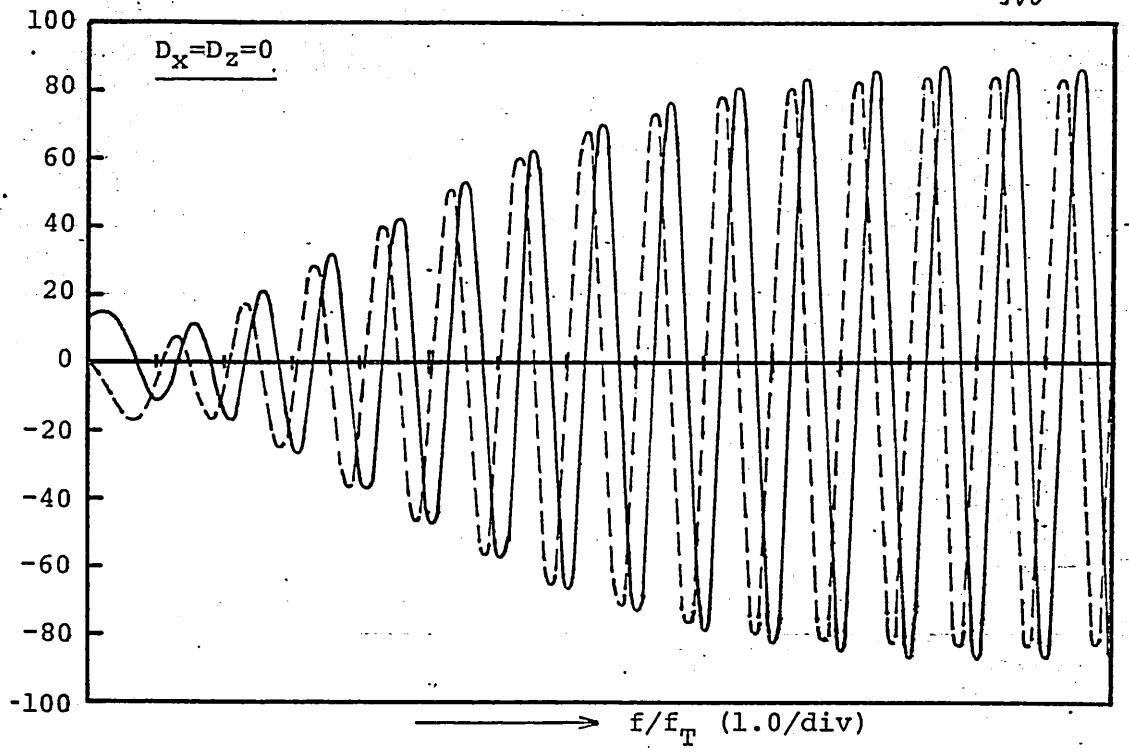


図7. 拡散による伝搬特性の変化

ことがわかる。しかしながら、電荷の拡散を考慮すると、空間電荷波に最大の増大率を与える周波数が存在する。図7は $n_0=5\times10^{13}cm^{-3}$, $\mu_z=4800cm^2/V.s$ $\mu_z=-1600cm^2/V.s$, $\varepsilon_r=1$, $d=20\mu$ のとき、拡散を考慮したとき($D_x=D_z=200\,cm^2/s$)としない場合の周波数に対するβの変化を示したものである。図より、$\ell m(\beta)$が最大となる周波数 f_m は8.2 GHzである。このf_mはドナー密度の増加にともなって大きくなり、逆にdの減少につれて小さくなる。$D_x, D_z \neq 0$の場合の$\ell m(\beta)$の周波数変化はそのまま固体進行波増幅器のinternal gainの周波数応答特性に対応し、増幅器設計の際には与えられた信号周波数に対して、最適のドナー密度、試料の厚みを決定する必要があろう。

§4-3. 拡散によるインピーダンスの変化

3-2節では、導出した2次元小信号インピーダンスの数値解の一例として、厚み依存性に注目し、拡散効果を無視した場合について述べた。厚みによる



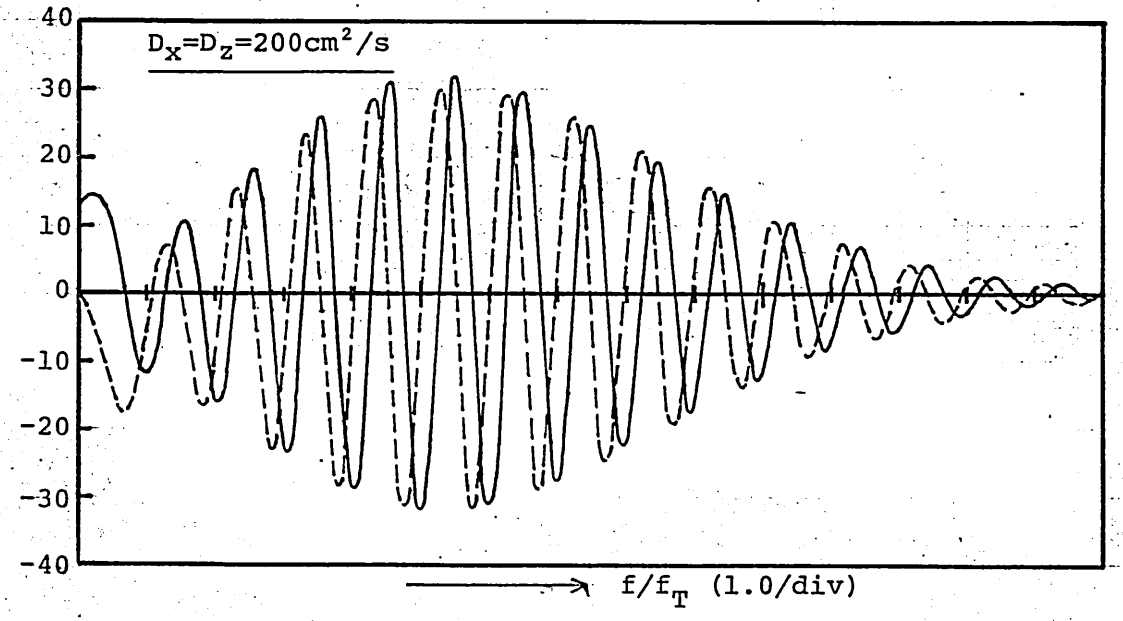


図8　拡散による2次元ド信号インピーダンスの変化

がンモード発振の有無を検討するときには、$|\beta D_z \alpha| \gg |\beta|$ の近似は十分に成立する。しかし、走行時間周波数の数倍の高い周波数でのインピーダンスは拡散効果を含めて論ずる必要がある。

図8は、図7に示した結果をもとに、(45)式を用いて計算することにより、得られたものである。拡散の影響が3fT付近から、しだいに顕著になってゆくのがわかる。当然のことながら、これは図7での拡散の有無によるβの周波数変化の差異に対応している。$D_z = D_x = 0$ では $|Re(Z)|$ が最大となるのは 1.3fT近傍であるのに対して、$D_z = D_x = 200\,cm^2/s$ では 5.5fT で $|Re(Z)|$ は最大となり、その後減少する。このように、拡散効果はダイオードの高周波動作を抑制する。また、一次元の場合の小信号インピーダンスは、$f=0$ で $|Re(Z)|$ が最も大きく、周波数の増加と共にこれはしだいに小さくなる。しかし有限の厚みの場合には、図8に示されるように、かなり高い周波数で負性抵抗が大きくなる。この効果は、薄いがンダイオードを用いた増幅器の広帯域化に利用できよう。

5、むすび

以上、我々は小信号理論を用いて、有限の厚みをもつがンダイオードの諸特性について統一的に究明してきたが、この過程で得られた結果は次のとおりである。

まず、第2章では基本式に忠実に分散関係式を導出し、その数値解を求めることにより、すべての厚みに対しての増大波の振舞および $d \leq 200\mu$ では高次の横モードの影響が無視できることを明らかにした。

第3章では、2次元小信号インピーダンスの表示式を求め、その厚み依存性を検討することにより、この式の妥当性を確認した。ここで得られたがンモード発振に関する n.d 積の臨界値は約 $5\times10^{6}\,cm^{-2}$ である。

第4章では、拡散効果を含めて系の不安定性を論じ、その高周波

限界について明らかにした。さらに，拡散による増大波やインピーダンスの変化を定量的に検討した。

ここでは，2次元ガンダイオード中の増大波に着目して論究したが，この結果をもとに，2つの波動を考慮することにより2次元でのAbsolute Instabilityについて論ずる必要があろう。

なお，本研究での数値計算には大阪大学大型計算機を使用した。

参考文献

1). D.E. McCumber & A.G. Chynoweth; IEEE Trans. Electron Devices, ED-13, P.4 (1966)
2) 小山，大原；通研成果報告 No3123号 (1967)
3) G.S. Kino & P.M. Robson; Proc. IEEE (Letters), 56, P.2056 (1968)
4) K. Kumabe; Proc. IEEE (Letters), 56, p.2172 (1968)
5) S. Kataoka et al.; Electronics Letters, 5, p.48 (1969)
6) 増田他；電子通信学会論文誌(C), 56-C, p.521 (1973)
7) R.H. Deen & R.J. Matarese; Proc. IEEE, 60, p.1486 (1972)
8) W. Heinle; Electronics Letters, 7, p.245 (1971)
9) P. Gueret; Electronics Letters, 6, p.213 (1970)
10) J. Magarshack & A. Mircea; MOGA Dig., p.16 (1970)
11) W. Fawcett & H.D. Rees; Phys. Letters, 29A, p.578 (1969)

輻射科学研究会資料

光IC線路における導波モードの理論的解析

大高眞人
松原正則
熊谷信昭
（大阪大学工学部）

昭和49年6月28日

光IC線路における導波モードの理論的解析

大高真人，松原正則，熊谷信昭
大阪大学工学部

1．まえがき

光通信に用いられる中継器あるいは光情報処理系の構成部分として光集積回路（光IC回路）が注目を浴びている。この光集積回路で用いられる光導波路の一つとして三次元的に構成された誘電体光線路が有効なものであると思われる。

誘電体中において，レーザー光を三次元的に導波するためには周囲に比べて誘電率の高い部分を三次元的に作り上げる必要がある。このために，従来から，誘電体内部に誘電率分布の不連続部を作った線路（たとえば，Clad Optical Fiber）や線路の中心から誘電率が連続的に減少していくような線路（たとえばSelfoc Fiber[1]）などが考えられ，すでに実用されているものもある。しかし，これらの誘電体光線路は，製作上特に誘電率の不連続面の滑らかさや，誘電率分布の正確さに対する要求が厳しく，さらに光集積回路として製造しようとすれば，その形状から，長距離伝送路として製造される場合より要求される精度はより厳しいものとなる。

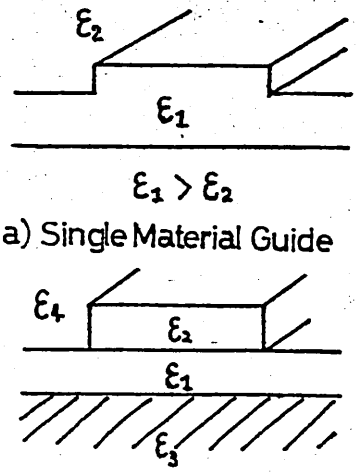


Fig.1 Slab-Coupled Waveguides

これらの形式の線路とは別に，著者らは，ミリ波導波路として

二次元的な線路である誘電体薄膜線路に等価的に高い誘電率を持った部分を作ることにより，三次元的な導波特性を持たせうることをすでに報告した。[2]

最近，古田らは[3]誘電体薄膜線路上に有限幅の低誘電率層を作ることにより（Optical Strip Line），またKaiserらは[4]誘電体薄膜線路を有限幅だけ厚くすることによって（Single Material Guide），実際に誘電率分布に不連続を作るかわりに，等価的な不連続部を作り，三次元的な線路を構成することを提案した。Goellら[5]のいうRib Waveguideも同様なものであり，Marcatili[6]はこれらの線路をSlab Coupled Waveguideと総称することを提案している。このような線路は，導波路として興味あるばかりでなく，光集積回路中での回路素子の構成を考えるとき，基板，誘電体薄膜等を素子に応じて別々のもので構成するのではなく一定の基板，誘電体薄膜上に各種の形状および特性を持った媒質を付着させることにより，各種の回路素子を構成するという試みの基礎となる線路であると思われる。

誘電体線路の解析は古くから行なわれているが，ここで問題としているような三次元的構造を有する線路の解析は，誘電体平板線路（たとえば，薄膜線路）あるいは誘電体円柱線路（たとえばCladed Optical Fiber）等の解析に比べてその取扱いがきわめて困難となる。

Schlossen[7]およびGoell[8]は誘電体矩形線路の計算機による数値解析を行った。古田ら[9]はOptical Strip Lineに対して，またMarcatiliはSlab Coupled Waveguide一般に対して，等価誘電率を用いた解析的近似解を求めている。しかし，これらの解析はいづれも不十分なものであると思われる。

著者らは，レンズ状媒質線路を摂動法[10]および変分法[11][12]を用いて解析し，また不均質誘電体線路の解析に変分法を用いた計算機解法[13]が有効であることをすでに報告している。

本報告では，変分表現式としてベクトル変分表現式を用いて，主にSingle Material GuideおよびOptical Strip Lineの解析を行った。

第2節では分散曲線および電磁界の強度分布をもとめるために用いた，伝搬定数に関するベクトル波動方程式の変分表現を示して

いる。第3節では，前節で示した変分表現式に変分法における Rayleigh-Ritz 法を適用するための試行関数(trial function)および各変数に対する停留性について述べている。第4節では，もっとも単純な誘電体矩形線路の解析結果を示し，Goell5の結果と比較している。第5節では，Single Material Guide について，定性的な考察，特に誘電体薄膜線路との関連を述べ，解析結果を検討している。第6節では，Optical Strip Line について解析結果を示し，Single Material Guide との関連を明らかにする。第7節はむすびであって本報告のまとめを述べる。

2. 変分表現式

伝送方向に一様な閉放形線路の磁界 H は，次式のように表わすことができる。

$$\mathrm{H} = (\mathrm{h}_t + i_z h_z)\exp[j(\omega t - \beta z)] \qquad (1)$$

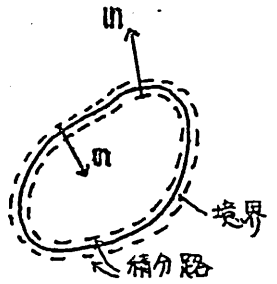


Fig.2 線積分の積分路

ここで，h_t および h_z はそれぞれ磁界の横断面成分および伝搬方向成分である。i_z は，伝搬方向(z軸)を向く単位ベクトルである。また，β は z軸方向への伝搬定数である。

損失のない伝送線路の z軸方向への伝搬定数 β の変分表現式は次式のように表わされる。

$$\beta^2 = N / D \qquad (2)$$

$$N = \iint \left[\varepsilon(\omega^2\mu\mathrm{h}_t - \nabla\times\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathrm{h}_t)^2 - \omega^2\frac{1}{\mu}(\nabla\cdot\mu\mathrm{h}_t)^2\right] dS$$

$$+2\int\left[\left(\frac{1}{\mu}\nabla\cdot\mu\mathrm{h}_t\right)\left\{\mathrm{n}\cdot(\omega^2\mu\mathrm{h}_t - \nabla\times\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathrm{h}_t)\right\}\right] dl \qquad (3)$$

$$\Phi = \iint \left[\omega^2 \mu |h_t|^2 - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times h_t)^2 \right] dS$$

$$+ 2 \int \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times h_t \right) \cdot (m \times h_t) \right] dl \qquad (4)$$

面積分は全横断面にわたって行なう，また線積分は Fig. 2 に示すように，媒質の物質定数が不連続に変化する境界の両側の閉曲線にそって計算されねばならない。 m は境界面に垂直な単位ベクトルであり その向きは Fig. 2 に示す方向である。 このとき試行関数 h_t として 媒質の物質定数の不連続境界において $(1/\mu)\nabla \cdot \mu h_t$ および $i_z \cdot (m \times h_t)$ が連続な適当な関数を用いればよい。

式(2)は，黒川[13]が導出した変分表現式を，著者の一人である松原が誘電体線路の解析に適するように[15]改良したものである。 また，式(2)をさらに，一部の非等方性媒質を含む線路の解析に用いるための改良も，すでに森下によって[16]行なわれている。

3. Rayleigh-Ritz 法による解析

変分表現式(2)に適当な試行関数 h_t を代入し，Rayleigh-Ritz 法を適用すれば，固有値 β^2 および固有関数 h_t を求めることができる。

放物柱関数が $(-\infty, \infty)$ における完備な直交関数であることを考慮すれば，次式のように $h_t(x, y)$ を放物柱関数の和で表わすことが可能であり，かつ適切であると思われる。

$$h_t = h_x i_x + h_y i_y \qquad (5)$$

$$\begin{cases} h_x = \sum_{ij} a_{xij} \Phi_{ij} \\ h_y = \sum_{ij} a_{yij} \Phi_{ij} \end{cases} \qquad (6)$$

ここで

$$\Phi_{ij} = \left\{2\pi\xi\eta\, i!\, j!\right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot D_i(x/\xi)\, D_j(y/\eta) \qquad (7)$$

$$D_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{4}} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$$

$D_m(z)$は 放物柱関数(Parabolic Cylinder Function)であり, a_{xij}. a_{yij}, ξ および η は 定数であって Rayleigh-Ritz 法における停留条件より決定される。

式(5)を,式(2)に代入して 次式を得る。

$$\beta^2 = \frac{\sum_{pq}\sum_{ij}\sum_{kl} N_{pqijkl} \cdot a_{pij} \cdot a_{qkl}}{\sum_{pq}\sum_{ij}\sum_{kl} D_{pqijkl} \cdot a_{pij} \cdot a_{qkl}} \qquad (8)$$

ここで,

$$\begin{aligned} N_{pqijkl} = \int\Big[& \varepsilon\left(\omega^2\mu\Phi_{ij}\mathring{\mathbb{L}}_p - \nabla\times\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\Phi_{ij}\mathring{\mathbb{L}}_p\right) \\ & \cdot\left(\omega^2\mu\Phi_{kl}\mathring{\mathbb{L}}_q - \nabla\times\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\Phi_{kl}\mathring{\mathbb{L}}_q\right) \\ & - \omega^2\frac{1}{\mu}\left(\nabla\cdot\mu\Phi_{ij}\mathring{\mathbb{L}}_p\right)\left(\nabla\cdot\mu\Phi_{kl}\mathring{\mathbb{L}}_q\right)\Big] dS \\ + \int\Big[& \left(\frac{1}{\mu}\nabla\cdot\mu\Phi_{ij}\mathring{\mathbb{L}}_p\right) \\ & \cdot\left\{m\cdot\left(\omega^2\mu\Phi_{kl}\mathring{\mathbb{L}}_q - \nabla\times\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\Phi_{kl}\mathring{\mathbb{L}}_q\right)\right\} \\ & + \left(\frac{1}{\mu}\nabla\cdot\mu\Phi_{kl}\mathring{\mathbb{L}}_q\right) \\ & \cdot\left\{m\cdot\left(\omega^2\mu\Phi_{ij}\mathring{\mathbb{L}}_p - \nabla\times\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\Phi_{ij}\mathring{\mathbb{L}}_p\right)\right\}\Big] dl \end{aligned} \qquad (9)$$

$$D_{pqijkl} = \int \left[\omega^2 \mu (\Phi_{ij} i_p) \cdot (\Phi_{kl} i_q) - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \Phi_{ij} i_p) \cdot (\nabla \times \Phi_{kl} i_q) \right] dS$$

$$+ \int \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \Phi_{ij} i_p \right) \cdot (n \times \Phi_{kl} i_q) + \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \Phi_{kl} i_q \right) \cdot (n \times \Phi_{ij} i_p) \right] dl \qquad (10)$$

a_{qkl} に対する停留条件

$$\partial \beta^2 / \partial a_{qkl} = 0 \qquad (11)$$

を式(8)に適用して次式を得る。

$$\sum_p \sum_{ij} \left(N_{pqijkl} - \beta^2 D_{pqijkl} \right) a_{pij} = 0 \qquad (12)$$

~~を得る~~。式(12)を解いて，$\beta^2(\xi, \eta)$ および $a_{pij}(\xi, \eta)$ を求めることが出来る。さらに ξ, η に関する停留条件

$$\partial \beta^2(\xi, \eta) / \partial \xi = 0$$
$$\partial \beta^2(\xi, \eta) / \partial \eta = 0 \qquad (14)$$

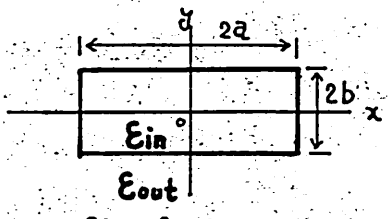
から，停留性を満たす ξ, η が求められ，したがって停留条件を満足する解 β^2, h が求められる。

これらの計算は電子計算機を用いることにより処理できる。次節以下に示す分散曲線，電磁界の強度分布は上述の

手続きに従って求められたものである。

4 誘電体矩形線路

線路の形状，誘電率分布は Fig.3 に示されている。Fig.4 は $\Delta\varepsilon=0.01$，$a=2b$ のときの分散曲線である。$hp(m,n)$ モードとは式(5)の展開係数のうち最大のものが a_{pmn} であるような固有モードである。d および B はおのおの規格化伝搬定数および規格化周波数であって次式で示される。



$\varepsilon_{in}=\varepsilon(0)$
$\varepsilon_{out}=\varepsilon(0)(1-\Delta\varepsilon)$

Fig.3 誘電体矩形線路

$$d=\{k(0)^2-\beta^2\}/\{k(0)^2\Delta\varepsilon\} \qquad (15)$$

$$B=\Delta\varepsilon^{\frac{1}{2}}a/\lambda \qquad (16)$$

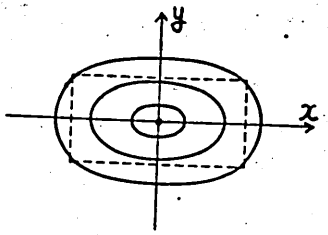


Fig.5 磁界分布
$h_y(0,0)$, $B=1$

ここにおいて

$$k(0)^2=\omega^2\varepsilon(0)\mu$$

$$\lambda=2\pi/k(0)$$

であり，$\varepsilon(0)$ は線路の横断面内における誘電率分布の最大値である。Fig.4 の結果は著者5のスカラー変分法による結果および Goell 5の結果と良く一致している。Fig.5 は

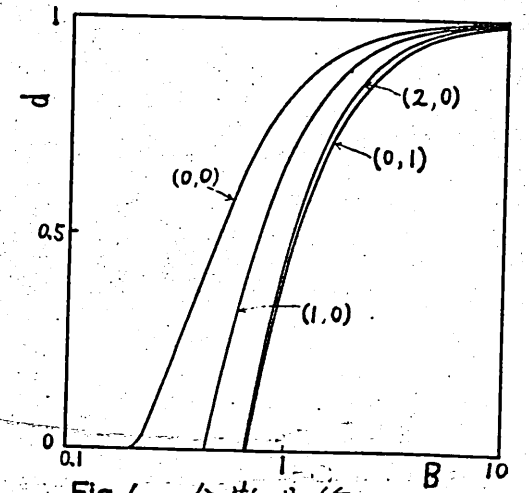
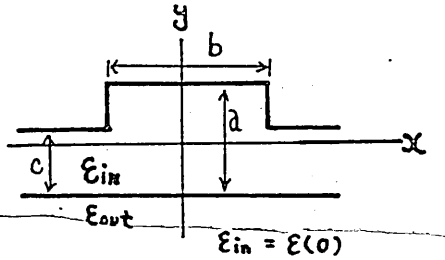


Fig.4 分散曲線
$\Delta\varepsilon=0.01$ $a=2b$

磁界分布を表わし最大値を1に規格化している。

5. Single Material Guide

線路は Fig. 6 に示すような形状，誘電率分布をしているとする。このような線路の伝搬特性は b/a，c/a の値に大きく依存すると思われるが，本報告では $b/a=2$ と仮定し c/a に対する検討を行った。$c/a \to 0$ の場合の伝搬特性は，前節で述べた誘電体矩形線路を，同じ媒質のごくうすい膜で支持したものと考えられ，誘電体矩形線路の伝搬特性に酷似していると思われる。$c/a \to 1$ のときは，逆にスラブ状の誘電体線路上に同じ媒質の有限幅の誘電体薄膜をのせたものと考えられ，伝搬特性は誘電体薄膜線路（スラブガイド）の伝搬特性と密接に関係してくる。Fig. 7 は $\Delta\varepsilon=0.01$，$a=0.5b$，$c/a=0.1$ の場合の分散曲線を表わし，前節の Fig. 4 と区別出来ないほど良く一致している。これは $c/a=0.1$ と外側のスラブ状の誘電体膜が十分に薄いため伝搬特性にほとんど影響しないためである。一方，Fig 8 は $a=0.5b$，$c/a=0.8$ の場合である。スラブ状の部分の厚さ c が大きくなるにつれて (m,n) 次の固有モードの伝搬定数に対して，厚さ c を持つスラブ状誘電体線路の (n) 次モードの伝搬定数が無視出来ない大きさとなり，その結果同一のモード次数 m を持つ固有モードは1つの群をなす。すなわち，Fig 8 の場合では，各 "m" 次モード群の伝搬定数の上限は厚さ a のスラブ状誘電体線路の (n) 次モードの伝搬定数であり，下限は厚さ $0.8a(=c)$ のスラブ状誘電体線路の (m) 次の伝搬定数である。このことから Fig. 8 において $h_z(1,0)$，$h_y(1,0)$ モードが $k_0=0$ であるのに cut-off になっているのが理解出来る。Fig. 9 は，磁界分布を表わし膜厚の厚い部分の存在によって x 軸方向の収束が起っていることが良くわかる。特に Fig. 9-(c) は cut-off に近く磁界の最大値を持つ部分が膜の厚い部分の両端に近づいている。Fig. 10 は $\Delta\varepsilon=0.01$，$a=0.5b$，$c/a=0.1$（0の場合とほとんど一致），0.4，0.8，1.0 の各々の $h_y(0,0)$ モードの分散曲線を示したもので誘電体矩形線路の特性からスラブ状誘電体線路の特性への遷移を示している。



$\varepsilon_{in} = \varepsilon(0)$

$\varepsilon_{out} = \varepsilon(0)(1-\Delta\varepsilon)$

Fig. 6 Single Material Guide

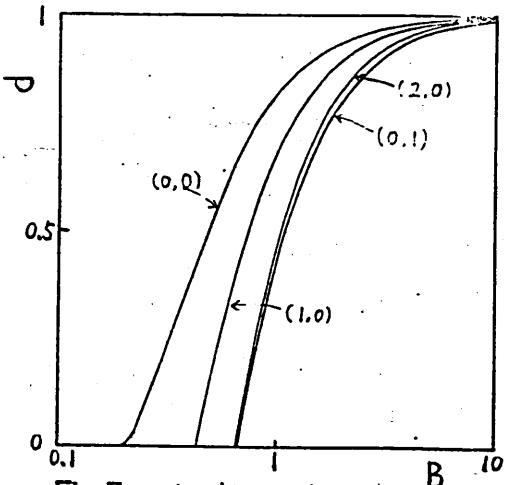


Fig.7 分散曲線

$\Delta\varepsilon = 0.01$, $b/a = 2$, $c/a = 0.1$

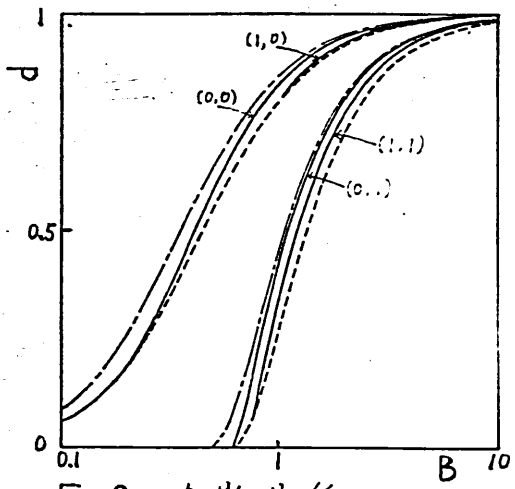


Fig.8 分散曲線

$\Delta\varepsilon = 0.01$, $b/a = 2$, $c/a = 0.8$

——は厚さaのスラブ状誘電体線路

- - - - - は厚さcのスラブ状誘電体線路

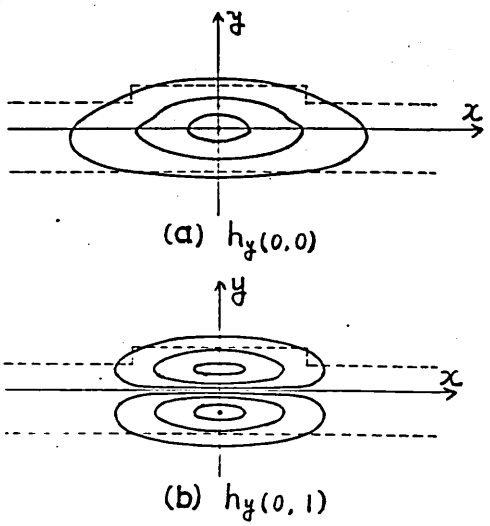


Fig. 9-1 磁界分布

$B = 2.51$

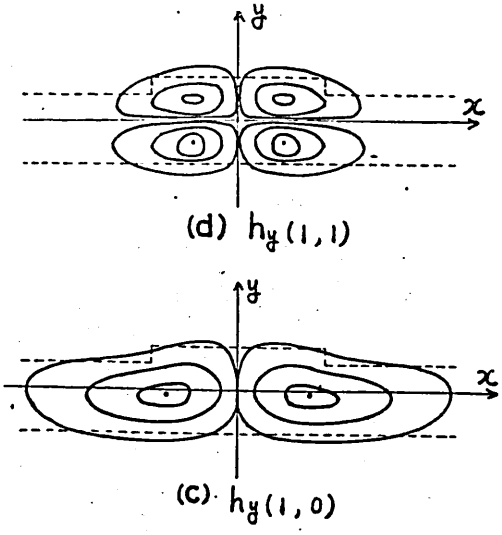


Fig. 9-2 磁界分布
B = 2.51

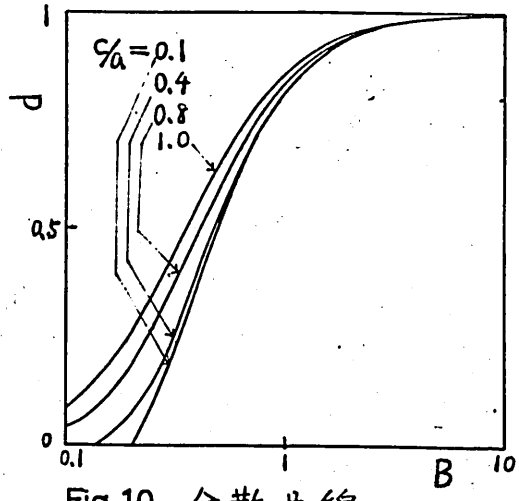


Fig.10 分散曲線
$\Delta\varepsilon = 0.01$, $b/a = 2$

6. Optical Strip Line

線路は Fig 11-(a) に示すような形状および誘電率分布をしているとしよう。

前節と同様な考察により，この線路の伝搬特性は Fig 11-(b) および Fig.11-(c) に示す二つの誘電体薄膜線路と密接に関連していることは明らかである。すなわち，この線路の分散曲線も群を成し，その上限，下限は Fig 11-(b) および Fig 11-(c) に示す誘電体薄膜線路の分散曲線となる。また，b/a , c/a の変化によって前節と同様に線路の伝搬特性に変化があるものと思われるが，本報告では $c/a=1$ と仮定し，b/a の変化について検討する。Fig 12 および Fig 13 は $a=c$, $b/a=8$, $\Delta\varepsilon_1=\Delta\varepsilon_2=0.01$, $\Delta\varepsilon_3=0.1$ の場合の分散曲線および磁界の強度分布を表わす。分散曲線が群をなすことがわかり，また b/a が大きいために磁界もよく収束されている。Fig. 14 および Fig. 15 は b/a だけを 2 と小さくした場合の分散曲線および磁界の強度分布を表わす。b/a が小さいために

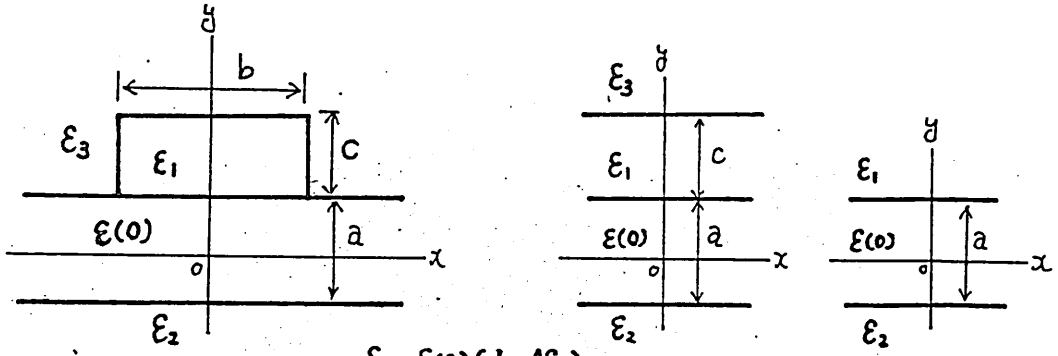


Fig. 11 Optical Strip Line および
関係の深いスラブ状誘電体線路

Fig. 14 に示した B/a の範囲では分散曲線の各群中の基本となるモードである (0, n) モードしか存在しない。また収束も弱いことがわかる。

この線路においては，前節で述べた Single Material Guide と異って，上部誘電体薄膜が異種の誘電体であるために，$y = 0.5a$ の境界面 ($-b < x < b$) でも全反射がおこり，y 軸方向の収束は良いが，x 軸方向の収束は悪い。

7. むすび

本報告では，変分法を用いて三次元的に構成された誘電体光線路を解析し，誘電体矩形線路，Single Material Guide および Optical Strip Line の分散曲線，強度分布を示した。この手法は本報告で対象としたような線路の解析には特に有効なものであると思われる。

数値計算は，大阪大学大型計算機センターおよび京都大学大型計算機センターによった。

謝辞

本報告をまとめるにあたり，多大の御援助をいただいた M2 下代雅哲君に深謝する。

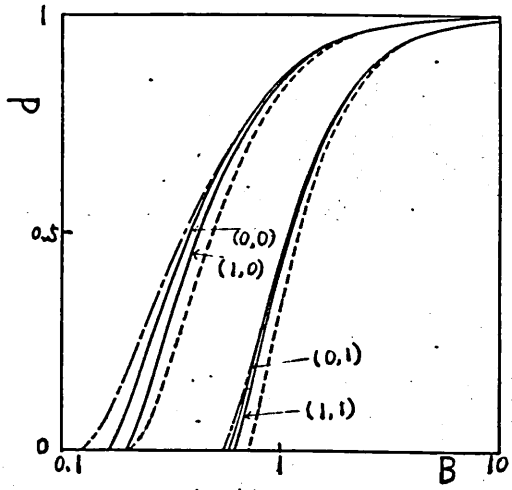


Fig.12 分散曲線 $b/a=8$, $c/a=1$

—·— はスラブ 1

------ はスラブ 2

$B=\Delta\epsilon_1^{\frac{1}{2}}\frac{a}{\lambda}$

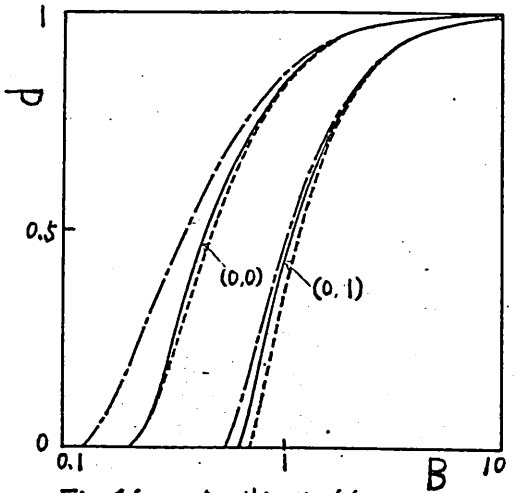
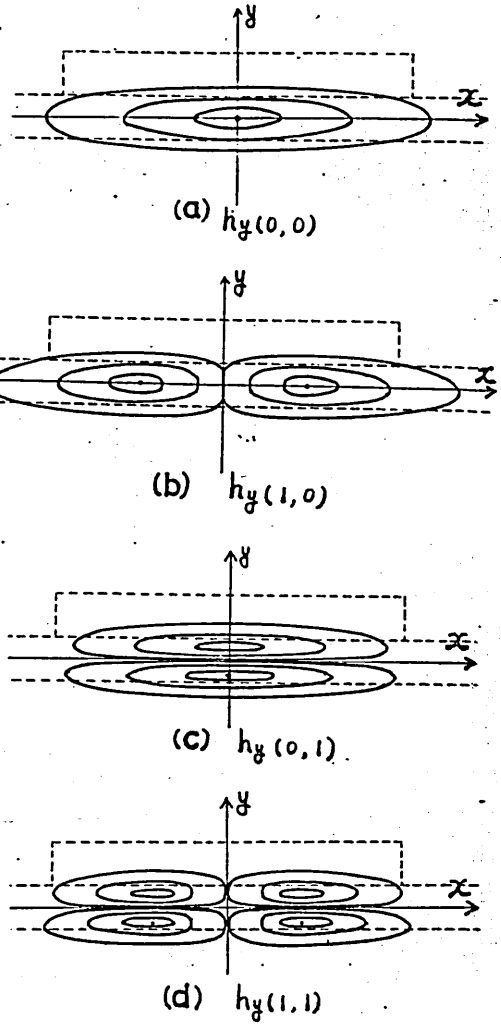


Fig.14 分散曲線

$b/a=2$, $c/a=1$

—·— はスラブ 1

------ はスラブ 2



(a) $h_y(0,0)$

(b) $h_y(1,0)$

(c) $h_y(0,1)$

(d) $h_y(1,1)$

Fig. 13 磁界分布

$b/a=8$ $B=1$

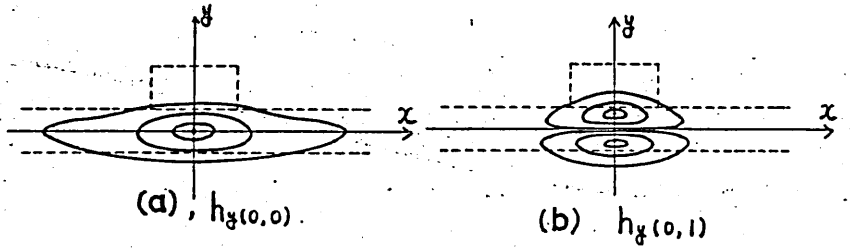


Fig. 15 磁界分布 $b/a=2$ $B=1$.

参考文献

(1) M. Uchida, M. Furukawa, I. Kitano, K. Koizumi, and H. Matsumura: "Optical Characteristics of a Light-Focusing Fiber Guide and Its Applications", IEEE J. Quantum Electron., QE-6, 10, pp606 (Oct. 1970).

(2) 熊谷, 倉園, 沢, 吉川: "不均一誘電体薄膜表面波線路", 信学論 (B), 51-B, 3, pp82 (昭43-03)

(3) H. Noda, H. Furuta, and A. Ihaya: "A Novel Optical Waveguide for Integrated Optics", 1973 IEEE/OSA CLEA, Washington, D.C., May 30-June 1, 1973.

(4) P. Kaiser, E.A.J. Marcatili, and S.E. Miller: "A new optical fiber", B.S.T.J., 52, pp 265 (Feb. 1973).

(5) J. E. Goell: "Rib Waveguides for Integrated Optical Circuits", J. Appl. Optics, (Letter), 12, pp 2797 (Dec. 1973).

(6) E.A.J. Marcatili: "Slab-Coupled Waveguides for Integrated Optics", OSA/IEEE 1974 Topical Meeting on Integrated Optics, (Dijest of Technical Papers), Louisiana, Jan. 21-24, 1974.

(7) W. Schlosser and H.G. Unger; "Partilly Filled Waveguides and Surface Waveguides of Rectangular Cross-Section", Advances in Microwaves, New York, Academic Press, 1966, pp 319-387.

(8) J.E. Goell: "A Circular-Harmonic Computer Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides", B.S.T.J, 48, pp 2133 (Sept. 1969)

(9) 古田, 野田, 井早: "光ストリップ線路" 信学会光量エレ研資 OQE 73-24 (1973-07)

(10) M. Matsuhara: "Analysis of electro-magnetic-wave modes in Lens-like media", J.O.S.A, 63, pp135 (Feb. 1973).
(11) 大高, 松原, 熊谷: "変分法を用いたレンズ状媒質線路の解析", 信学論(B), (技術談話室), 55-B, pp332 (昭47-06)
(12) M. Geshiro, M. Octaka, M. Matsuhara, and N. Kumagai, "Analysis of Wavemodes in Slab Waveguides with Truncated Parabolic Index", IEEE J. Quantum Electron. (Corresp) to be published.
(13) M. Matsuhara: "Analysis of TEM modes in dielectric waveguides by a variational method", J.O.S.A., 63, pp1514 (Dec. 1973)
(14) K. Korokawa: "Electro-magnetic Waves in Waveguides with Wall Impedance", IRE Trans. on MTT, MTT-10, pp 314 (Sept. 1962)
(15) M. Matsuhara and N. Kumagai: "Theory of Coupled Open Transmission Lines and Its Application", IEEE Trans. on MTT, MTT-22, pp378 (Apr. 1974)
(16) 森下: "電磁界の解析における変分表現式の導出について", 昭49信学全大 (発表予定)

輻射科学研究会資料

光IC線路における導波モードの理論的解析

大高眞人
松原正則
熊谷信昭
（大阪大学工学部）

昭和49年6月28日

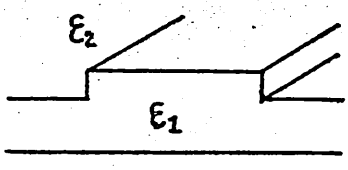
光IC線路における導波モードの理論的解析

大高眞人，松原正則，熊谷信昭
大阪大学工学部

1. まえがき

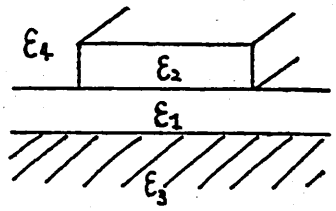
光通信に用いられる中継器あるいは光情報処理系の構成部分として光集積回路(光IC回路)が注目を浴びている。この光集積回路で用いられる光導波路の一つとして三次元的に構成された誘電体光線路が有効なものであると思われる。

誘電体中において，レーザー光を三次元的に導波するためには周囲に比べて誘電率の高い部分を三次元的に作り上げる必要がある。このために，従来から，誘電体内部に誘電率分布の不連続部を作った線路(たとえば，Clad Optical Fiber)や線路の中心から誘電率が連続的に減少していくような線路(たとえばSelfoc Fiber[1])などが考えられ，すでに実用されているものもある。しかし，これらの誘電体光線路は，製作上特に誘電率の不連続面の滑らかさや，誘電率分布の正確さに対する要求が厳しく，さらに光集積回路として製造しようとすれば，その形状から，長距離伝送路として製造される場合より要求される精度はより厳しいものとなる。



$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

(a) Single Material Guide



$\varepsilon_1 > (\varepsilon_2, \varepsilon_3) > \varepsilon_4$

(b) Optical Strip Line

Fig.1 Slab-Coupled Waveguides

これらの形式の線路とは別に，著者らは，ミリ波導波路として

二次元的な線路である誘電体薄膜線路に等価的に高い誘電率を持った部分を作ることにより，三次元的な導波特性を持たせうることをすでに報告した。[2]

最近，古田らは[3]誘電体薄膜線路上に有限幅の低誘電率層を作ることにより（Optical Strip Line），またKaiser らは[4]誘電体薄膜線路を有限幅だけ厚くすることによって（Single Material Guide），実際に誘電率分布に不連続を作るかわりに，等価的な不連続部を作り，三次元的な線路を構成することを提案した。Goell ら[5]のいうRib Waveguideも同様なものであり，Marcatili[6]はこれらの線路をSlab Coupled Waveguideと総称することを提案している。このような線路は，導波路として興味あるばかりでなく，光集積回路中での回路素子の構成を考えるとき，基板，誘電体薄膜等を素子に応じて別々のもので構成するのではなく一定の基板，誘電体薄膜上に各種の形状および特性を持った媒質を付着させることにより，各種の回路素子を構成するという試みの基礎となる線路であると思われる。

誘電体線路の解析は古くから行なわれているが，ここで問題としているような三次元的構造を有する線路の解析は，誘電体平板線路（たとえば，薄膜線路）あるいは誘電体円柱線路（たとえばCladed Optical Fiber）等の解析に比べてその取扱いがきわめて困難となる。

Schlossen[7]およびGoell[8]は誘電体矩形線路の計算機による数値解析を行った。古田ら[9]はOptical Strip Lineに対して，またMarcatiliはSlab Coupled Waveguide一般に対して，等価誘電率を用いた解析的近似解を求めている。しかし，これらの解析はいづれも不十分なものであると思われる。

著者らは，レンズ状媒質線路を摂動法[10]および変分法[11][12]を用いて解析し，また不均質誘電体線路の解析に変分法を用いた計算機解法[13]が有効であることをすでに報告している。

本報告では，変分表現式としてベクトル変分表現式を用いて，主にSingle Material GuideおよびOptical Strip Lineの解析を行った。

第2節では分散曲線および電磁界の強度分布を求めるために用いた，伝搬定数に関するベクトル波動方程式の変分表現を示して

いる。第3節では，前節で示した変分表現式に変分法における Rayleigh-Ritz 法を適用するための試行関数(trial function)および各変数に対する停留性について述べている。第4節では，もっとも単純な誘電体矩形線路の解析結果を示し，Goell らの結果と比較している。第5節では，Single Material Guide について，定性的な考察，特に誘電体薄膜線路との関連を述べ，解析結果を検討している。第6節では，Optical Strip Line について解析結果を示し，Single Material Guide との関連を明らかにする。第7節はむすびであって本報告のまとめを述べる。

2. 変分表現式

伝送方向に一様な閉放形線路の磁界 H は，次式のように表わすことができる。

$$H=(h_t+i_z h_z)\exp[j(\omega t-\beta z)] \qquad (1)$$

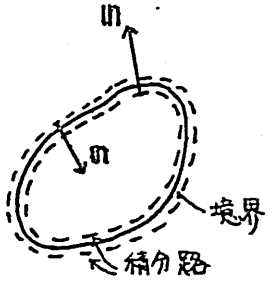


Fig.2 線積分の積分路

ここで，h_t および h_z はそれぞれ磁界の横断面成分および伝搬方向成分である。i_z は，伝搬方向(z軸)を向く単位ベクトルである。また，β は z軸方向への伝搬定数である。

損失のない伝送線路の z軸方向への伝搬定数 β の変分表現式は次式のように表わされる。

$$\beta^2=N/D \qquad (2)$$

$$N=\iint\left[\varepsilon(\omega^2\mu h_t-\nabla\times\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times h_t)^2-\omega^2\frac{1}{\mu}(\nabla\cdot\mu h_t)^2\right]dS$$
$$+2\int\left[\left(\frac{1}{\mu}\nabla\cdot\mu h_t\right)\{n\cdot(\omega^2\mu h_t-\nabla\times\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times h_t)\}\right]dl \qquad (3)$$

$$\Phi = \iint \left[\omega^2 \mu |h_t|^2 - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times h_t)^2 \right] dS$$

$$+ 2 \int \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times h_t \right) \cdot \left(m \times h_t \right) \right] dl \qquad (4)$$

面積分は全横断面にわたって行なう，また線積分は Fig. 2 に示すように，媒質の物質定数が不連続に変化する境界の両側の閉曲線にそって計算されねばならない。 m は境界面に垂直な単位ベクトルであり その向きは Fig. 2 に示す方向である。 このとき試行関数 h_t として 媒質の物質定数の不連続境界において $(1/\mu)\nabla \cdot \mu h_t$ および $i_z \cdot (m \times h_t)$ が連続な適当な関数を用いればよい。

式(2)は，黒川[14]が導出した変分表現式を，著者の一人である松原が誘電体線路の解析に適するように[15]改良したものである。 また，式(2)をさらに，一部の非等方性媒質を含む線路の解析に用いるための改良も，すでに森下によって[16]行なわれている。

3. Rayleigh-Ritz 法による解析

変分表現式(2)に適当な試行関数 h_t を代入し，Rayleigh-Ritz 法を適用すれば，固有値 β^2 および固有関数 h_t を求めることができる。

放物柱関数が $(-\infty, \infty)$ における完備な直交関数であることを考慮すれば，次式のように $h_t(x, y)$ を放物柱関数の和で表わすことが可能であり，かつ適切であると思われる。

$$h_t = h_x i_x + h_y i_y \qquad (5)$$

$$\begin{cases} h_x = \sum_{ij} a_{xij} \Phi_{ij} \\ h_y = \sum_{ij} a_{yij} \Phi_{ij} \end{cases} \qquad (6)$$

ここで

$$\Phi_{ij} = \{2\pi\xi\eta\, i!\, j!\}^{-\frac{1}{2}} \cdot D_i(x/\xi) D_j(y/\eta) \quad (7)$$

$$D_m(z) = (-1)^m e^{\frac{z^2}{4}} \frac{d^m}{dz^m}\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$$

$D_m(z)$は 放物柱関数(Parabolic Cylinder Function)であり, a_{xij}. a_{yij}, ξ および η は 定数であって Rayleigh-Ritz 法における停留条件より決定される。

式(5)を,式(2)に代入して 次式を得る。

$$\beta^2 = \frac{\sum_{pq}\sum_{ij}\sum_{kl} N_{pqijkl} \cdot a_{pij} \cdot a_{qkl}}{\sum_{pq}\sum_{ij}\sum_{kl} D_{pqijkl} \cdot a_{pij} \cdot a_{qkl}} \quad (8)$$

ここで,

$$\begin{aligned} N_{pqijkl} = \int\Big[& \varepsilon\left(\omega^2\mu\Phi_{ij}\mathring{i}_p - \nabla\times\tfrac{1}{\varepsilon}\nabla\times\Phi_{ij}\mathring{i}_p\right) \\ & \cdot\left(\omega^2\mu\Phi_{kl}\mathring{i}_q - \nabla\times\tfrac{1}{\varepsilon}\nabla\times\Phi_{kl}\mathring{i}_q\right) \\ & - \omega^2\tfrac{1}{\mu}(\nabla\cdot\mu\Phi_{ij}\mathring{i}_p)(\nabla\cdot\mu\Phi_{kl}\mathring{i}_q)\Big]\, dS \\ + \int\Big[& \left(\tfrac{1}{\mu}\nabla\cdot\mu\Phi_{ij}\mathring{i}_p\right) \\ & \cdot\left\{m\cdot\left(\omega^2\mu\Phi_{kl}\mathring{i}_q - \nabla\times\tfrac{1}{\varepsilon}\nabla\times\Phi_{kl}\mathring{i}_q\right)\right\} \\ & + \left(\tfrac{1}{\mu}\nabla\cdot\mu\Phi_{kl}\mathring{i}_q\right) \\ & \cdot\left\{m\cdot\left(\omega^2\mu\Phi_{ij}\mathring{i}_p - \nabla\times\tfrac{1}{\varepsilon}\nabla\times\Phi_{ij}\mathring{i}_p\right)\right\}\Big]\, dl \end{aligned} \quad (9)$$

$$D_{pqijkl} = \int \left[\omega^2 \mu (\bar{\Phi}_{ij} i_p) \cdot (\bar{\Phi}_{kl} i_q) - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \bar{\Phi}_{ij} i_p) \cdot (\nabla \times \bar{\Phi}_{kl} i_q) \right] dS$$

$$+ \int \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \bar{\Phi}_{ij} i_p \right) \cdot (n \times \bar{\Phi}_{kl} i_q) + \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \bar{\Phi}_{kl} i_q \right) \cdot (n \times \bar{\Phi}_{ij} i_p) \right] dl \quad (10)$$

a_{qkl} に対する停留条件

$$\partial \beta^2 / \partial a_{qkl} = 0 \quad (11)$$

を式(8)に適用して次式を得る。

$$\sum_p \sum_{ij} \left(N_{pqijkl} - \beta^2 D_{pqijkl} \right) a_{pij} = 0 \quad (12)$$

~~を得る~~。式~~(13)~~(12)を解いて，$\beta^2(\xi, \eta)$ および $a_{pij}(\xi, \eta)$ を求めることが出来る。さらに，ξ, η に関する停留条件

$$\partial \beta^2(\xi, \eta) / \partial \xi = 0$$
$$\partial \beta^2(\xi, \eta) / \partial \eta = 0 \quad (14)$$

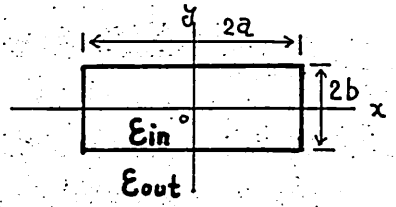
から，停留性を満たす ξ, η が求められ，したがって停留条件を満足する解 β^2, $\ln t$ が求められる。

これらの計算は電子計算機を用いることにより処理できる。次節以下に示す分散曲線，電磁界の強度分布は上述の

手続きに従って求められたものである。

4 誘電体矩形線路

線路の形状，誘電率分布は Fig.3 に示されている。Fig.4 は $\Delta\varepsilon=0.01$，$a=2b$ のときの分散曲線である。$hp(m,n)$ モードとは式(5)の展開係数のうち最大のものが a_{pmn} であるような固有モードである。d, B はおのおの規格化伝搬定数および規格化周波数であって次式で示される。



$\varepsilon_{IN}=\varepsilon(0)$
$\varepsilon_{out}=\varepsilon(0)(1-\Delta\varepsilon)$

Fig.3 誘電体矩形線路

$$d=\{k(0)^2-\beta^2\}/\{k(0)^2\Delta\varepsilon\} \qquad (15)$$

$$B=\Delta\varepsilon^{\frac{1}{2}}a/\lambda \qquad (16)$$

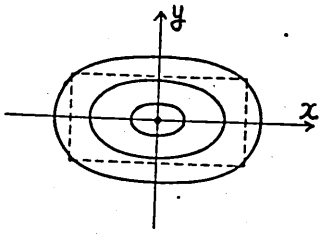


Fig.5 磁界分布
$h_y(0,0)$, $B=1$

ここにおいて

$$k(0)^2=\omega^2\varepsilon(0)\mu$$

$$\lambda=2\pi/k(0)$$

であり，$\varepsilon(0)$ は線路の横断面内における誘電率分布の最大値である。Fig.4 の結果は著者らのスカラー変分法による結果および Goell らの結果と良く一致している。Fig.5 は

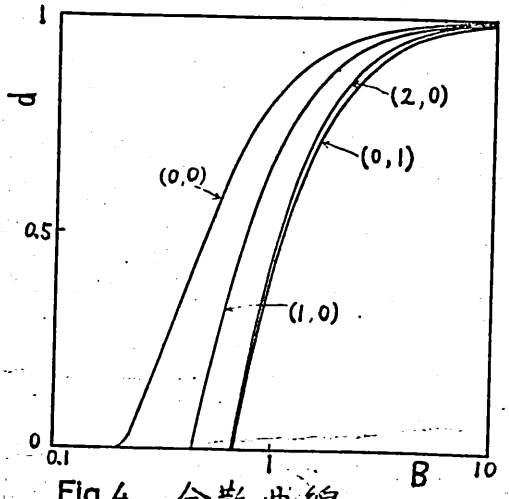
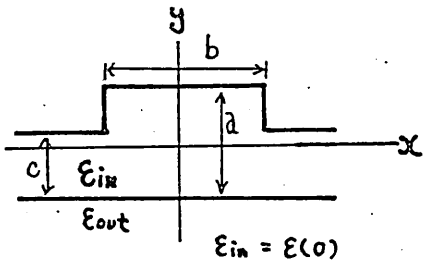


Fig.4 分散曲線
$\Delta\varepsilon=0.01$ $a=2b$

磁界分布を表わし最大値を1に規格化している。

5. Single Material Guide

線路は Fig. 6 に示すような形状，誘電率分布をしているとする。このような線路の伝搬特性は b/a, c/a の値に大きく依存すると思われるが，本報告では $b/a=2$ と仮定し c/a に対する検討を行った。$c/a \to 0$ の場合の伝搬特性は，前節で述べた誘電体矩形線路を，同じ媒質のごくうすい膜で支持したものと考えられ，誘電体矩形線路の伝搬特性に酷似していると思われる。$c/a \to 1$ のときは，逆にスラブ状の誘電体線路上に同じ媒質の有限幅の誘電体薄膜をのせたものと考えられ，伝搬特性は誘電体薄膜線路（スラブガイド）の伝搬特性と密接に関係してくる。Fig. 7 は $\Delta\varepsilon=0.01$, $a=0.5b$, $c/a=0.1$ の場合の分散曲線を表わし，前節の Fig. 4 と区別出来ないほど良く一致している。これは $c/a=0.1$ と外側のスラブ状の誘電体膜が十分に薄いため伝搬特性にほとんど影響しないためである。一方，Fig 8 は $a=0.5b$, $c/a=0.8$ の場合である。スラブ状の部分の厚さ C が大きくなるにつれて (m,n) 次の固有モードの伝搬定数に対して，厚さ C を持つスラブ状誘電体線路の (n) 次モードの伝搬定数が無視出来ない大きさとなり，その結果同一のモード次数 ν を持つ固有モードは1つの群をなす。すなわち，Fig 8 の場合では，各 ν 次モード群の伝搬定数の上限は厚さ a のスラブ状誘電体線路の (n) 次モードの伝搬定数であり，下限は厚さ $0.8a(=c)$ のスラブ状誘電体線路の (m) 次の伝搬定数である。このことから Fig. 8 において $h_z(1,0)$, $h_y(1,0)$ モードが $k_0=0$ であるのに cut-off になっているのが理解出来る。Fig. 9 は，磁界分布を表わし膜厚の厚い部分の存在によって x 軸方向の収束が起っていることが良くわかる。特に Fig. 9-(c) は cut-off に近く磁界の最大値を持つ部分が膜の厚い部分の両端に近づいている。Fig. 10 は $\Delta\varepsilon=0.01$, $a=0.5b$, $c/a=0.1$（0の場合とほとんど一致），0.4, 0.8, 1.0 の各々の $h_y(0,0)$ モードの分散曲線を示したもので誘電体矩形線路の特性からスラブ状誘電体線路の特性への遷移を示している。



$\varepsilon_{in} = \varepsilon(0)$

$\varepsilon_{out} = \varepsilon(0)(1-\Delta\varepsilon)$

Fig.6 Single Material Guide

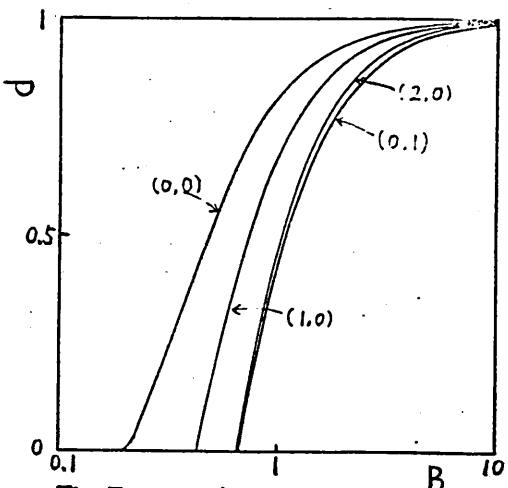


Fig.7 分散曲線

$\Delta\varepsilon = 0.01$, $b/a = 2$, $c/a = 0.1$

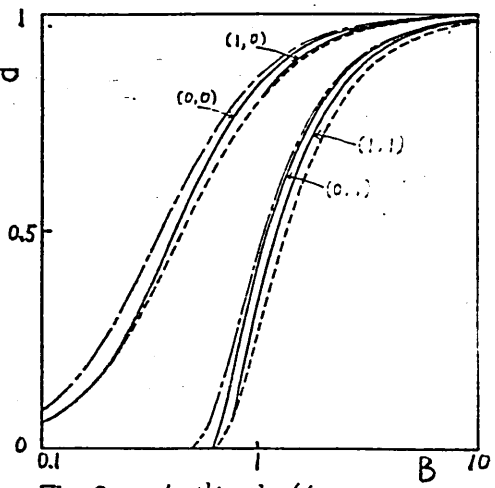


Fig.8 分散曲線

$\Delta\varepsilon = 0.01$, $b/a = 2$, $c/a = 0.8$

—— は厚さ a のスラブ状誘電体線路

----- は厚さ c のスラブ状誘電体線路

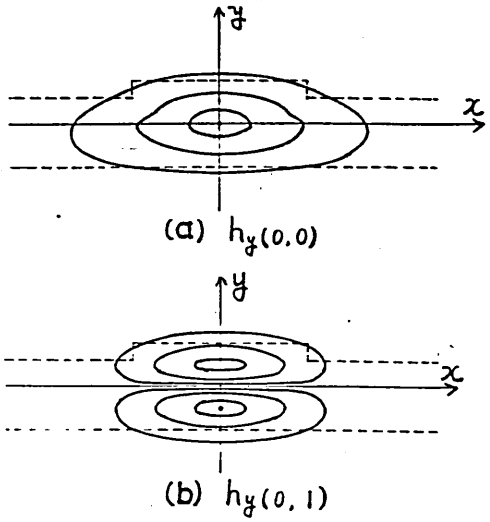


Fig.9-1 磁界分布

$B = 2.51$

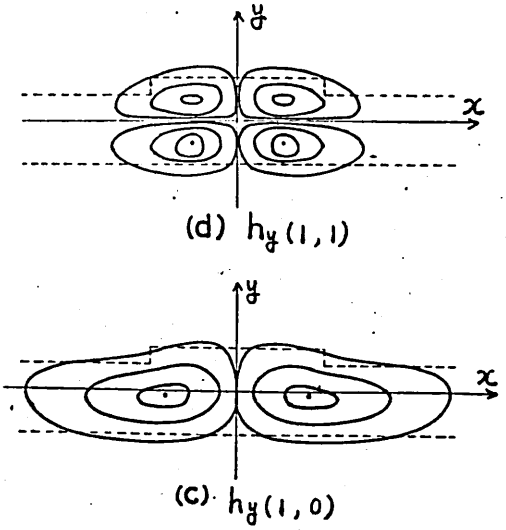


Fig. 9-2 磁界分布
B = 2.51

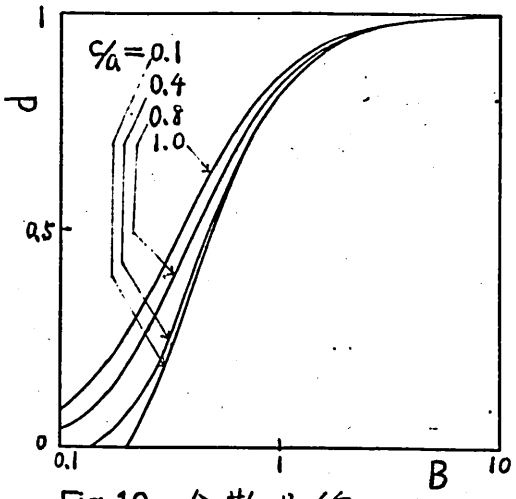


Fig.10 分散曲線
$\Delta\varepsilon = 0.01$, $b/a = 2$

6. Optical Strip Line

線路は Fig 11-(a) に示すような形状および誘電率分布をしているとしよう。

前節と同様な考察により，この線路の伝搬特性は Fig 11-(b) および Fig.11-(c) に示す二つの誘電体薄膜線路と密接に関連していることは明らかである。すなわち，この線路の分散曲線も群を成し，その上限，下限は Fig 11-(b) および Fig 11-(c) に示す誘電体薄膜線路の分散曲線となる。また，b/a, c/a の変化によって前節と同様に線路の伝搬特性に変化があるものと思われるが，本報告では $c/a=1$ と仮定し，b/a の変化について検討する。Fig 12 および Fig 13 は $a=C$, $b/a=8$, $\Delta\varepsilon_1=\Delta\varepsilon_2=0.01$, $\Delta\varepsilon_3=0.1$ の場合の分散曲線および磁界の強度分布を表わす。分散曲線が群をなすことがわかり，また b/a が大きいために磁界もよく収束されている。Fig. 14 および Fig. 15 は b/a だけを 2 と小さくした場合の分散曲線および磁界の強度分布を表わす。b/a が小さいために

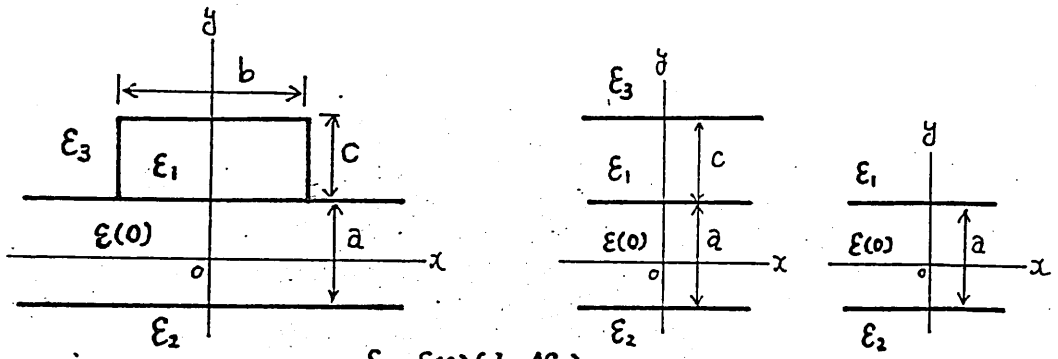


Fig. 11 Optical Strip Line および
関係の深いスラブ状誘電体線路

Fig. 14 に示した $\frac{B}{\lambda}$ の範囲では分散曲線の各群中の基本となるモードである (0, n) モードしか存在しない。また収束も弱いことがわかる。

この線路においては，前節で述べた Single Material Guide と異って，上部誘電体薄膜が異種の誘電体であるために，$y = 0.5a$ の境界面 ($-b < x < b$) でも全反射がおこり，y 軸方向の収束は良いが，x 軸方向の収束は悪い。

7. むすび

本報告では，変分法を用いて三次元的に構成された誘電体光線路を解析し，誘電体矩形線路，Single Material Guide および Optical Strip Line の分散曲線，強度分布を示した。この手法は本報告で対象としたような線路の解析には特に有効なものであると思われる。

数値計算は，大阪大学大型計算機センターおよび京都大学大型計算機センターによった。

謝辞

本報告をまとめるにあたり，多大の御援助をいただいた M2 下代雅浩君に深謝する。

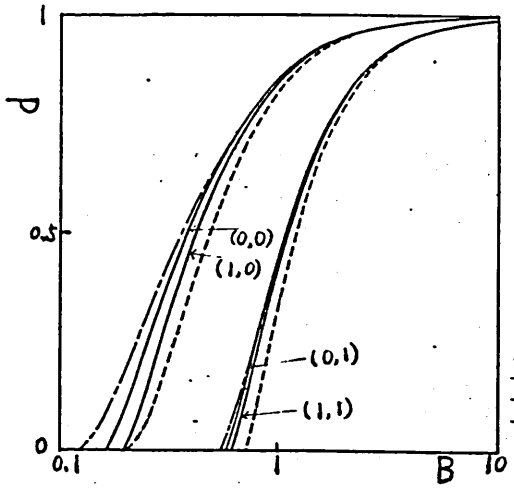


Fig.12　分散曲線 $b/a=8$, $c/a=1$

—·— はスラブ 1

------ はスラブ 2

$B=\Delta\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\frac{a}{\lambda}$

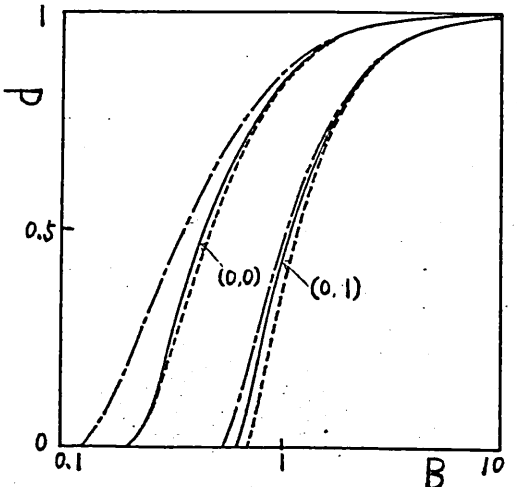
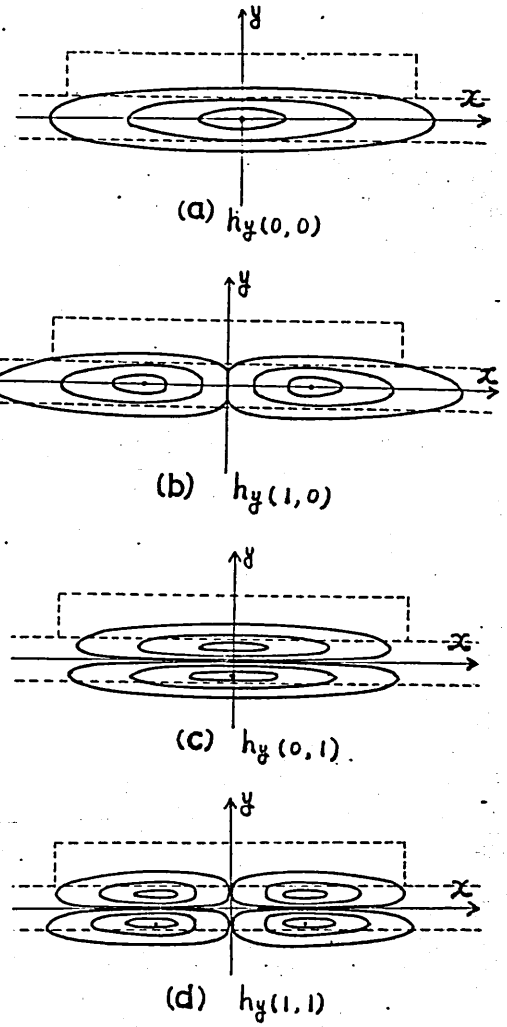


Fig.14　分散曲線

$b/a=2$, $c/a=1$

—·— はスラブ 1

------ はスラブ 2



(a) $h_y(0,0)$

(b) $h_y(1,0)$

(c) $h_y(0,1)$

(d) $h_y(1,1)$

Fig. 13　磁界分布

$b/a=8$　$B=1$

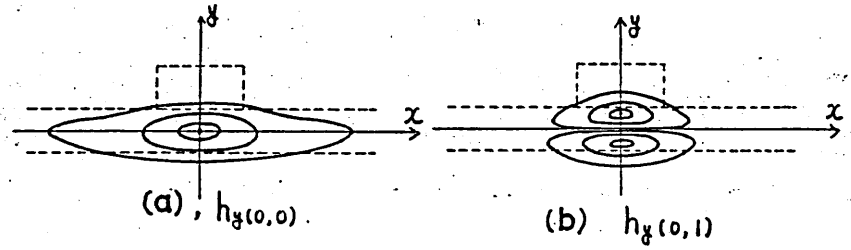


Fig. 15 磁界分布 $b/a=2$. $B=1$.

参考文献

(1) M. Uchida, M. Furukawa, I. Kitano, K. Koizumi, and H. Matsumura: "Optical Characteristics of a Light-Focusing Fiber Guide and Its Applications", IEEE J. Quantum Electron., QE-6, 10, pp606 (Oct. 1970).

(2) 熊谷, 倉園, 沢, 吉川: "不均一誘電体薄膜表面波線路", 信学論(B), 51-B, 3, pp82 (昭43-03)

(3) H. Noda, H. Furuta, and A. Ihaya: "A Novel Optical Waveguide for Integrated Optics", 1973 IEEE/OSA CLEA, Washington, D.C., May 30-June 1, 1973.

(4) P. Kaiser, E.A.J. Marcatili, and S.E. Miller: "A new optical fiber", B.S.T.J., 52, pp 265 (Feb. 1973).

(5) J.E. Goell: "Rib Waveguides for Integrated Optical Circuits", J. Appl. Optics, (Letter), 12, pp 2797 (Dec. 1973).

(6) E.A.J. Marcatili: "Slab-Coupled Waveguides for Integrated Optics", OSA/IEEE 1974 Topical Meeting on Integrated Optics, (Digest of Technical Papers), Louisiana, Jan. 21-24, 1974.

(7) W. Schlosser and H.G. Unger: "Partilly Filled Waveguides and Surface Waveguides of Rectangular Cross-Section", Advances in Microwaves, New York, Academic Press, 1966, pp 319-387.

(8) J.E. Goell: "A Circular-Harmonic Computer Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides", B.S.T.J, 48, pp 2133 (Sept. 1969)

(9) 古田, 野田, 井早: "光ストリップ線路" 信学会光量エレ研資, QE 73-24 (1973-07)

(10) M. Matsuhara: "Analysis of electromagnetic-wave modes in Lens-like media", J.O.S.A, 63, pp135 (Feb. 1973).
(11) 大高, 松原, 熊谷: "変分法を用いたレンズ状媒質線路の解析", 信学論(B), (技術談話室), 55-B, pp332 (昭47-06)
(12) M. Geshiro, M. Ootaka, M. Matsuhara, and N. Kumagai, "Analysis of Wavemodes in Slab Waveguides with Truncated Parabolic Index", IEEE J. Quantum Electron. (Corresp) to be published.
(13) M. Matsuhara: "Analysis of TEM modes in dielectric waveguides by a variational method", J.O.S.A., 63, pp1514 (Dec. 1973)
(14) K. Korokawa: "Electromagnetic Waves in Waveguides with Wall Impedance", IRE Trans. on MTT, MTT-10, pp314 (Sept. 1962)
(15) M. Matsuhara and N. Kumagai: "Theory of Coupled Open Transmission Lines and Its Application", IEEE Trans. on MTT, MTT-22, pp378 (Apr. 1974)
(16) 森下: "電磁界の解析における変分表現式の導出について", 昭49信学全大 (発表予定)

輻射科学研究会資料

誘電体三スラブ線路間の

モード結合理論

岩崎敬一郎
倉薗貞夫
板倉清保
(大阪大学・工学部)

1974年6月28日

1. まえがき

モード間結合の問題はミリ波や光波領域における多重モード伝送系のモード変換現象を一般的に取扱う上に非常に重要であり，応用面においても方向性結合器，モード励振器その他の各種回路素子などの設計上きわめて重要な問題である。そのためこれまでにも多くの研究が報告され，なかでも軸方向に一様な結合のある二つの線路間の分布結合現象に関するMillerの研究[1]はよく知られている。

結合している伝送線路の軸方向の振幅変化はモード結合方程式を解くことによって知ることができるが，この場合に結合係数の値を知ることが必要となる。たとえば誘電体線路間の結合係数を求めるには，(i)特性方程式を解く方法[2),(3)]，(ii)摂動理論を用いる方法[4),(5)]，(iii)変分原理を用いる方法[6),(7)]，などがあげられる。

ところで，従来結合の問題はほとんど二線路間の場合が取扱かわれており，三線路以上の結合に関してはほとんど報告されていなかった。しかし

最近，Snyder はリング状に配置した複数個の誘電体円柱線路間の結合問題を，モード結合方程式を用いて検討を行なっている[8],[9]．また一次配列した無限個の線路間に結合があるとき，伝送軸方向の振幅は Bessel 関数形の変化をすることが指摘されていたが[10]，Somekh 等は実際に GaAs 基板上に光導波路を製作し，その実験結果を報告している[11]。

本論文は，多モード結合の問題をより一般的に取扱うための一つのステップとして，三線路間の結合の問題を取扱ったものである．まずモード結合方程式を用いて線路の局部モードから結合系の正規モードへの変換について述べ，それぞれの線路の間の電力授受について考察する．ついで，もっとも基本的な誘電体三スラブ線路間の結合について，厳密な特性方程式を導びき，結合係数を求める。そしてこの伝送系の三つの正規モードについてその特徴を詳しく検討する。最後に具体的な数値計算例を示し若干の検討を行なう。

2. モード結合方程式

2.1 多モード間の結合

伝搬定数が接近していて互いに直交するN個のモード間に結合がある場合，次のモード結合方程式が成り立つことが知られている。

$$\frac{d}{dz}[E]+[\Gamma][E]=[K][E] \tag{1}$$

ここに$[E]$はN個の要素E_νからなる列行列であって，E_νがν番目のモードの振幅を表わし，$E_\nu \cdot E_\nu^*$がz軸方向へ伝送される電力を表わす。$[\Gamma]$は伝搬定数を表わす対角要素γ_νだけを有するN×Nの対角行列，$[K]$は結合係数を表わすN×Nの行列である。

結合伝送系が無損失のとき，次のエネルギ保存則が成り立つ．

$$\frac{d}{dz}\sum_{\nu=1}^{N}|E_\nu|^2=0 \tag{2}$$

式(1)と式(2)より，$|E_\nu|^2=E_\nu\cdot E_\nu^*$であることを用いると

$$k_{\nu\mu}=-k_{\mu\nu}^* \tag{3}$$

となる。これより，[K] の対角要素は純虚数でなければならない。

さて，式(1)を変形すると

$$\frac{d}{dz}[E] = [-\Gamma + K][E] \tag{4}$$

となる。ここで

$$\det[-\Gamma + K - pI] = 0 \tag{5}$$

なる p に関するN次代数方程式の根を P_ν とする。ただし [I] は単位行列である。P_ν を要素とするN×Nの対角行列 [P] を用いると，式(4)は

$$\frac{d}{dz}[W] = [P][W] \tag{6}$$

なる形に書きなおすことができる。ここで [P] は対角行列であるから，列行列 [W] の各要素 W_ν は相互に結合がないことになる。このように，[P] なる行列によって，相互に結合のある線路の局部モード (local mode) E_ν から，互いに独立に伝搬する新たな正規モード (normal mode) W_μ へ変換される。

2·2 正規モードの求め方

2·1で述べたような行列演算によってモード結合方程式を解き，その正規モードを求めて，これらの一次結合でそれぞれの線路のモードを求めることができる。これと同じことであるが，本節では微分演算子による解法を示す。

第ν番目のモードの伝搬定数を$\gamma_\nu = j\beta_\nu$とする。また単位長当りの結合は十分小さく，互いに結合することによる伝搬定数のじょう乱は無視できるものとして$\gamma_\nu - k_{\nu\nu} \fallingdotseq j\beta_\nu$とする。

たとえば，三モード間の結合の場合，式(1)および式(3)より

$$\frac{d}{dz}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\beta_1 & k_{12} & k_{13} \\ -k_{12}^* & -j\beta_2 & k_{23} \\ -k_{13}^* & -k_{23}^* & -j\beta_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。ここで微分演算子Dを

$$D \equiv \frac{d}{dz} \quad (8)$$

で定義すると，式(7)は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}(D+j\beta_1)E_1 \quad - k_{12}E_2 \quad - k_{13}E_3 &= 0\\ k_{12}^{*}E_1 + (D+j\beta_2)E_2 \quad - k_{23}E_3 &= 0\\ k_{13}^{*}E_1 \quad + k_{23}^{*}E_2 + (D+j\beta_3)E_3 &= 0\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

これより D に関する次の決定方程式を得る.

$$\begin{vmatrix} D+j\beta_1 & -k_{12} & -k_{13} \\ k_{12}^{*} & D+j\beta_2 & -k_{23} \\ k_{13}^{*} & k_{23}^{*} & D+j\beta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

したがって

$$D^3 + p_1 D^2 + p_2 D + p_3 = 0 \quad (11)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= j(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\\ p_2 &= |k_{12}|^2 + |k_{23}|^2 + |k_{13}|^2 - (\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1)\\ p_3 &= (k_{12}k_{23}k_{13}^{*} - k_{12}^{*}k_{23}^{*}k_{13})\\ &\quad + j(\beta_1 k_{23}k_{23}^{*} + \beta_2 k_{13}k_{13}^{*} + \beta_3 k_{12}k_{12}^{*} - \beta_1\beta_2\beta_3)\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

ここで平均位相項 $j(\beta_1+\beta_2+\beta_3)/3$ を抽出するために

$$\tilde{D} = D + \frac{p_1}{3} \quad (13)$$

なるおきかえをおこなうと，式(11)は次のようになる。

$$\tilde{D}^3 + 3q_1\tilde{D} + q_2 = 0 \quad (14)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= -\frac{1}{9}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2 \\ q_2 &= \frac{2}{27}p_1^3 - \frac{1}{3}p_1p_2 + p_3 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

$\tilde{\Phi}$に関する3次方程式(14)は，Cardanの方法を用いて代数的に完全に解くことができる[12]。この解として，ξ, η, ζが得られたとすると，結局

$$\left\{\tilde{\Phi}-\left(\xi-\frac{p_1}{3}\right)\right\}\left\{\tilde{\Phi}-\left(\eta-\frac{p_1}{3}\right)\right\}\left\{\tilde{\Phi}-\left(\zeta-\frac{p_1}{3}\right)\right\}E_\nu = 0$$

$$\nu = 1, 2, 3 \qquad (16)$$

となる。これより三つの正規モードの和としてE_νは次のように表わされる。

$$E_\nu(z) = \left(P_\nu e^{\xi z} + Q_\nu e^{\eta z} + R_\nu e^{\zeta z}\right) e^{-j\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{3}z}$$

$$\nu = 1, 2, 3 \qquad (17)$$

ただしP_ν, Q_ν, R_νは初期条件より定まる定数である。ところで式(17)は$\tilde{\Phi}$の3根とも異なる場合であるが，たとえば$\xi = \eta \neq \zeta$のように二つの正規モードが縮退している場合には，式(17)で$P_\nu = 0$とおけばよいことが，演算子法の解およびE_νの

性質からわかる。

一例として，位相定数が互いに等しく β_0 である誘電体円柱線路が三個互いに結合しているとする。いま三線路間の結合はすべてリアクティブであるとし，線路1と線路2の間の結合係数を $k_{12}=jC_{12}$ と表わす。以下同様に C_{23}，C_{31} を定めるものとする。このとき式(14)は次のようになる。

$$\tilde{D}^3+(C_{12}^2+C_{23}^2+C_{31}^2)\tilde{D}+j2C_{12}C_{23}C_{31}=0 \tag{18}$$

この解として

$$\left.\begin{aligned}\xi&=j2\bar{C}\cdot\cos\frac{\theta}{3}\\ \eta&=-j2\bar{C}\cdot\cos\left(\frac{\pi-\theta}{3}\right)\\ \zeta&=-j2\bar{C}\cdot\cos\left(\frac{\pi+\theta}{3}\right)\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

を得る。ただし

$$\left.\begin{aligned}\bar{C}&=\sqrt{(C_{12}^2+C_{23}^2+C_{31}^2)/3}\\ \cos\theta&=\frac{C_{12}C_{23}C_{31}}{\bar{C}^3},\qquad 0\le\theta\le\pi\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

したがってこの場合，$\exp\{-(j\beta_0+\xi)z\}$，$\exp\{-(j\beta_0+\eta)z\}$ および $\exp\{-(j\beta_0+\zeta)z\}$ なる三つの

正規モードが存在し，それぞれ独立に電力を伝送する．特に $C_{12}=C_{23}=C_{31}(=C_0)$ のときに二つの正規モードが縮退し，$\xi=j2C_0$，$\eta=\zeta=-jC_0$ となる．しかし式(19)より三つの正規モードがすべて縮退することはありえないことがわかる．

2·3 一次配列した三線路間の結合

図1に示すような一次配列した三個の誘電体線路間の結合を考える．ここでおのおのの導波路の位相定数はすべて等しく β_0 であるとし，また導波路2と3の結合はないものとして

$$C_{12}=C_1,\quad C_{13}=C_2,\quad C_{23}=0 \qquad (21)$$

とする．このとき，それぞれの線路の振幅 E_ν の

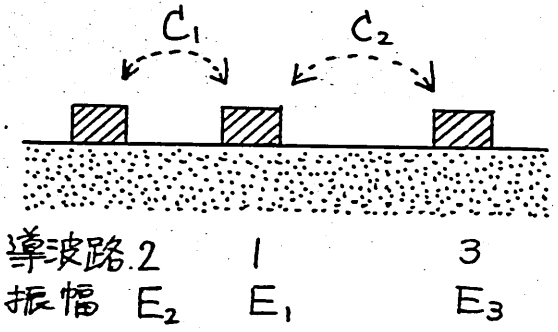


図1　一次配列した三誘電体線路間の分布結合

間に次のモード結合方程式が成り立つ。

$$\frac{d}{dz}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\beta_0 & jC_1 & jC_2 \\ jC_1 & -j\beta_0 & 0 \\ jC_2 & 0 & -j\beta_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

この方程式の解は，式(20)で $C_{23}=0$ とおくことにより次のように求まる。

$$E_\nu(z) = \left\{ P_\nu e^{j\hat{C}z} + Q_\nu e^{-j\hat{C}z} + R_\nu \right\} e^{-j\beta_0 z} \qquad \nu = 1,2,3 \tag{23}$$

ただし

$$\hat{C} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \tag{24}$$

である。

ところで式(22)において

$$\left.\begin{aligned} \hat{E} &= (C_1 E_2 + C_2 E_3)/\hat{C} \\ \hat{\hat{E}} &= (C_2 E_2 - C_1 E_3)/\hat{C} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

なるおきかえをおこなうと

$$\frac{d}{dz}\begin{bmatrix} E_1 \\ \hat{E} \\ \hat{\hat{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\beta_0 & j\hat{C} & 0 \\ j\hat{C} & -j\beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & -j\beta_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ \hat{E} \\ \hat{\hat{E}} \end{bmatrix} \tag{26}$$

となる。すなわち新たに疑似的な局部モード $\hat{E}$ および $\hat{\hat{E}}$ を考えると，E_1 と $\hat{E}$ が等価的な結合係数 $\hat{C}$ で結合しており，その他にこれらと結合がない $\hat{\hat{E}}$ があることと同じである。この様子をモデル的に示したのが図2である。

これを拡張して，一個のモードに他のN個のモードがそれぞれ結合係数 C_ν ($\nu=1,2,\cdots,N$) で結合している場合を考える。重ね合せの原理によりつぎつぎと合成すると，結局伝送軸方向の周期的な

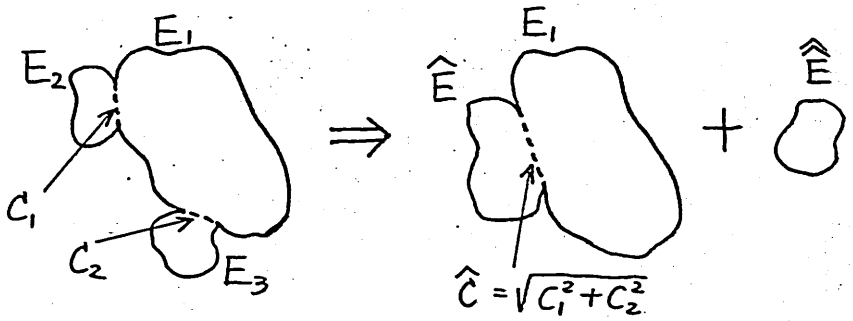


図2　等価的な結合係数 $\hat{C}$

変化を規定するのが

$$\hat{C} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{N} C_\nu^2} \qquad (27)$$

なる結合係数である。

式(27)の説明例として，図3に示すように中央の円形導波管の周囲にN孔列のスロットをもうけた場合を考える。ν番目のスロット列による円形および方形導波管の振幅反射係数をそれぞれ$C_{\nu\nu}$, $C'_{\nu\nu}$とするとこのスロット列による結合係数は$C_\nu = \sqrt{C_{\nu\nu} C'_{\nu\nu}}$である。さて，中央の円形導波管を$C_1^2, C_2^2, \cdots, C_N^2$の比に応じてN分割すると，$\nu$番目の扇形導波管の面積は円形の面積の

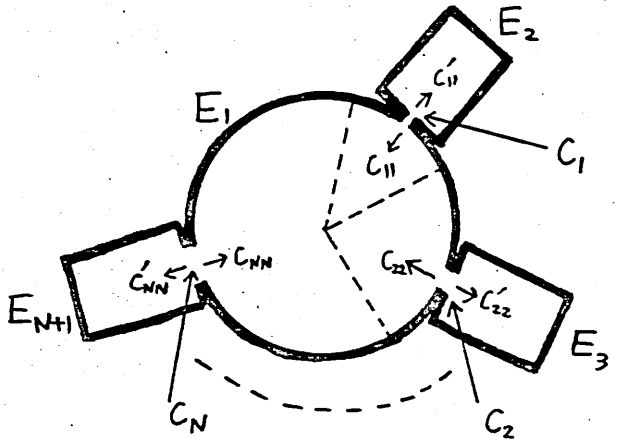


図3　多孔列壁面結合形円形導波管

$C_\nu^2/(C_1^2+C_2^2+\cdots+C_N^2)$ 倍にする。いま円形および扇形導波管にそれぞれ単位電力を入射した場合，扇形導波管の電力密度は円形の場合の $(C_1^2+C_2^2+\cdots C_N^2)/C_\nu^2$ 倍にする。ここで振幅反射係数がその位置における電力密度に比例するという Bethe の理論を用いると，$C_{\nu\nu}$ は $C_{\nu\nu}\cdot(C_1^2+C_2^2+\cdots+C_N^2)/C_\nu^2$ とする。結局，結合係数は $\hat{C}=\sqrt{\{C_{\nu\nu}\cdot(C_1^2+\cdots+C_N^2)/C_\nu^2\}^*\cdot C'_{\nu\nu}}^*=\sqrt{C_1^2+C_2^2+\cdots+C_N^2}$ とおり式(27)が導びかれる。たとえば C_ν がすべて等しい場合には[13] $\hat{C}=\sqrt{N}\,C_1$ とする。

2·4 一次配列した三線路間の電力授受

図1のように結合した三線路の結合方程式の一般解は式(23)で表わされた。いま入力端 $z=0$ におけるそれぞれの線路の初期値(複素振幅)を $E_1(0)$, $E_2(0)$ および $E_3(0)$ とすると，式(23)の係数 P_ν, Q_ν, R_ν は次のように表わされる。

$$
\left.
\begin{aligned}
P_1 &= \left\{ \hat{C}\, E_1(0) + C_1 E_2(0) + C_2 E_3(0) \right\} / 2\hat{C} \\
P_2 &= C_1 P_1 / \hat{C} \\
P_3 &= C_2 P_1 / \hat{C} \\
Q_1 &= \left\{ \hat{C}\, E_1(0) - C_1 E_2(0) - C_2 E_3(0) \right\} / 2\hat{C} \\
Q_2 &= -C_1 Q_1 / \hat{C} \\
Q_3 &= -C_2 Q_1 / \hat{C} \\
R_1 &= 0 \\
R_2 &= \left\{ C_2^2 E_2(0) - C_1 C_2 E_3(0) \right\} / \hat{C}^2 \\
R_3 &= -C_1 R_2 / C_2
\end{aligned}
\right\} \qquad (28)
$$

ところで式(28)より，$R_1 = 0$ だから E_1 中には $\exp(-j\beta_0 z)$ なる波は存在しない。逆に入力端で E_1 のみを励振するとこの結合伝送系には $\exp(-j\beta_0 z)$ なる正規モードは伝搬しないことになる．さて，正規モードの一つ $\exp(-j\beta_0 z)$ だけが伝搬するための励振条件は，式(28)で $P_\nu = Q_\nu = 0$ とおけばよい。同様に正規モード $\exp\{-j(\beta_0 - \hat{C})z\}$ または $\exp\{-j(\beta_0 + \hat{C})z\}$ だけが伝搬するための励振条件は，それぞれ $Q_\nu = R_\nu = 0$ および $P_\nu = R_\nu = 0$ とおくことによって求められる。その結果をまとめて次式に示す。

(i) $e^{-j\beta_0 z}$ だけが伝搬：

$$E_1(0)=0, \quad \frac{E_2(0)}{C_2}=-\frac{E_3(0)}{C_1} \tag{29·1}$$

(ii) $e^{-j(\beta_0-\hat{C})z}$ だけが伝搬：

$$\frac{E_1(0)}{\hat{C}}=\frac{E_2(0)}{C_1}=\frac{E_3(0)}{C_2} \tag{29·2}$$

(iii) $e^{-j(\beta_0+\hat{C})z}$ だけが伝搬：

$$\frac{E_1(0)}{\hat{C}}=-\frac{E_2(0)}{C_1}=-\frac{E_3(0)}{C_2} \tag{29·3}$$

これらの関係が満されるとき，それぞれの線路上を入射時の値のままで伝搬していき，みかけ上まったく結合がないことになる．ただ式(29·2)および式(29·3)の関係式の場合は，結合による影響が伝搬定数の変化 $j(\beta_0\mp\hat{C})$ となって現われる．一方，式(29)の三つの励振条件は，逆にそれぞれ β_0，$\beta_0-\hat{C}$ および $\beta_0+\hat{C}$ なる位相定数をもつ三つの正規モードの，三つの線路における相対的な振幅比を表わしている．

さて，この結合系を三つの正規モードが独立に電力を伝送し，これらのモードの位相差によって

三つの線路間で軸方向に周期的な電力の授受がおこる。ここで特定の二つの正規モードだけが伝搬する場合，および三つの正規モードがすべて伝搬する場合について，二三の興味ある例を示す．

(例1) $e^{-j(\beta_0-\hat{c})z}$ と $e^{-j(\beta_0+\hat{c})z}$ だけが伝搬する場合:

この場合の励振条件は式(28)で $R_V=0$ とおくことにより

$$\frac{E_2(0)}{C_1}=\frac{E_3(0)}{C_2}\ ,\quad E_1(0)は任意 \qquad (30)$$

となる．また伝送軸方向の振幅変化は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} E_1(z)&=\left\{E_1(0)\cos(\hat{c}z)-j\frac{\hat{c}}{C_1}E_2(0)\sin(\hat{c}z)\right\}\\ E_2(z)&=\left\{E_2(0)\cos(\hat{c}z)-j\frac{C_1}{\hat{c}}E_1(0)\sin(\hat{c}z)\right\}\\ E_3(z)&=\left\{E_3(0)\cos(\hat{c}z)-j\frac{C_2}{\hat{c}}E_1(0)\sin(\hat{c}z)\right\}\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

ただし $\exp(-j\beta_0 z)$ の項は省略してある．たとえば，$E_2(0)=E_3(0)\overset{=0}{\checkmark}$ とすると，導波路1に入射された電力は $z=(2m+1)\pi/2\hat{c}$ $(m=0,1,2,\cdots)$ の位置において導波路2および3に C_1^2 対 C_2^2 の電力比で完全に分配される．逆に，$E_1(0)=0$

とすると，やはり上に示した位置において，導波路2および3に入射された電力が完全に導波路1に変換され，側線路から主線路への電力の合成が可能となる．

(例2) $e^{-j(\beta_0-\hat{C})z}$ と $e^{-j\beta_0 z}$，または $e^{-j(\beta_0+\hat{C})z}$ と $e^{-j\beta_0 z}$ が伝搬する場合：

$e^{-j(\beta_0\mp\hat{C})z}$ と $e^{-j\beta_0 z}$ が伝搬する条件は，式(28)より，以下複号同順として，

$$\hat{C}E_1(0) = \pm\left\{C_1 E_2(0) + C_2 E_3(0)\right\} \qquad (32)$$

となる．この二組の正規モードの相互作用を利用した特別の場合として

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = C_2 \\ &\frac{E_1(0)}{E_2(0)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad E_3(0)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

なる場合を考える．このときの伝送軸方向の振幅変化は次式で与えられる．

$$\left.E_1(z) = E_1(0)\, e^{-j(\beta_0\mp\hat{C})z}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} E_2(z) &= \frac{E_2(0)}{2}\left\{e^{\pm j\hat{C}z}+1\right\}e^{-j\beta_0 z} \\ E_3(z) &= \frac{E_2(0)}{2}\left\{e^{\pm j\hat{C}z}-1\right\}e^{-j\beta_0 z} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

これより，$z=(2m+1)\pi/\sqrt{2}\,C_1$ $(m=0,1,2,\cdots)$ なる位置において

$$\left.\begin{aligned} &\text{導波路1}: && E_1(0) \longrightarrow |E_1(0)| \\ &\text{導波路2}: && E_2(0) \longrightarrow 0 \\ &\text{導波路3}: && 0 \longrightarrow |E_2(0)| \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

という電力移行がおこる。すなわち式(33)の関係で各線路を励振したとき，中央の導波路1の振幅に影響を与えることなく，導波路2から導波路3への完全な電力移行がおこる。これは従来の回路構成ではみられない興味深い現象である。

(例3) 三つの正規モードがすべて伝搬する場合：

たとえば

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = C_2 \\ &E_2(0)\neq 0,\ E_1(0)=E_3(0)=0 \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

なる場合を考える。このとき例2の場合と同じ結合長において

$$E_1(z) = E_2(z) = 0, \quad E_3(z) = E_2(0) \qquad (37)$$

となり，導波路2から導波路3への完全な電力移行がおこる。

以上示したいくつかの例からわかるように，三つの導波路間の結合を利用することによって，従来の二導波路間の結合の場合とはちがった各種の回路素子が実現でき，光集積回路等の分野で重要な役割をはたすものと思われる。

3. 誘電体スラブ間の結合

前章で述べた事柄を具体的にスラブ伝送線路間の結合の問題として取扱かい，その正規モードを明らかにして，結合係数を求める。

3·1 単独スラブの場合

比誘電率 ε_{r2} の媒質中におかれた，厚さ $2t$，比誘電率 ε_{r1} ($\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$) の誘電体スラブを考える。この導波路の伝搬モードは完全にTEモードとTM

モードに分離されるが，TMモードについても同様に取扱うことができるので，以下ではTEモードだけを考える。このとき，特性方程式はよく知られているように

$$\left.\begin{array}{l} k_{x1}\tan(k_{x1}t) \\ -k_{x1}\cot(k_{x1}t) \end{array}\right\} = k_{x2} \qquad (38)$$

と表わされる[14]。式(38)の上下二組の超越方程式はそれぞれスラブを伝搬する偶モード群および奇モード群に対応している。k_{x1}, k_{x2}はそれぞれスラブ中および周囲の媒質中のx方向の波数であって，次の波数関係式が成立つ。

$$\left.\begin{array}{l} k_{x1}^2 + \beta^2 = k_0^2 \varepsilon_{r1} \\ -k_{x2}^2 + \beta^2 = k_0^2 \varepsilon_{r2} \\ k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda}, \quad k_{x1}, k_{x2}, \beta \text{は正の実数} \end{array}\right\} \qquad (39)$$

式(38)と式(39)を連立させて解くことにより，単独のスラブ中を伝搬する波の位相定数が求められる。以下これをβ_0と表わす。

3・2 二スラブ間の結合

3·1と同じスラブが二個，間隔dだけへだてて分布結合している場合を考える．この結合導波系をいわゆる対称モードと非対称モードが伝搬し，これらのモードは二スラブ間の中央にそれぞれ磁気壁および電気壁を仮定することによって得られる[2]。ここで，二つの導波路を同相等振幅で励振したときに結合系を伝搬する正規モードを同相モード（in phase mode, 添字ip），逆相等振幅で励振した場合のそれを逆相モード（opposite phase mode, 添字op）と約束する（図4参照）

この結合系の特性方程式は，偶モードどうしおよび奇モードどうしの結合の場合，ともに次式で与えられる。

$$\frac{\{k_{x1}+k_{x2}\tan(k_{x1}t)\}\{k_{x2}-k_{x1}\tan(k_{x1}t)\}}{(k_{x1}^2+k_{x2}^2)\tan(k_{x1}t)} = \pm e^{-k_{x2}d} \qquad (40)$$

式(40)の右辺の正負の符号はそれぞれ同相モードおよび逆相モードに対応している。式(39)の波数関係式と式(40)を連立させて解くことにより，二つのモードの位相定数β_{ip}およびβ_{op}が求まる。この二つのモードの位相定数の差によって，二つの導波路間で伝送軸方向に

周期的な電力の授受がおこなわれる。この相互作用の度合として，結合係数を次のように定義する。

$$C_{12} \equiv \frac{\beta_{op} - \beta_{ip}}{2} \tag{41}$$

このとき，一方の線路に入射された電力は $|C_{12}z| = \frac{\pi}{2}$ なる結合長において完全に他方の線路へ移行する。

さて，式(40)を $\exp(-k_{x2}d)$ が十分小さい（結合が十分弱い）として近似的に解くと，結合係数は結局次のようになる。

$$C_{12} = \mp \frac{k_{x1}^2 k_{x2}^2}{(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}) k_0^2 (1 + k_{x2} t) \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{r2} + k_{x2}^2}} e^{-k_{x2} d} \tag{42}$$

ただし，式(42)中の k_{x1}，k_{x2} は単独スラブの場合の値を代用するものとする。また，偶モードどうしの結合の場合は負の符号を，奇モードどうしの結合の場合は正の符号を採るものとする。

従来，結合係数の符号にはまったく注意がはらわれておらず，暗黙のうちに正の値とされていた。式(42)でその符号を考慮したのはモード結合方程式と関連づけるためであって，次の理由による。一般に伝搬

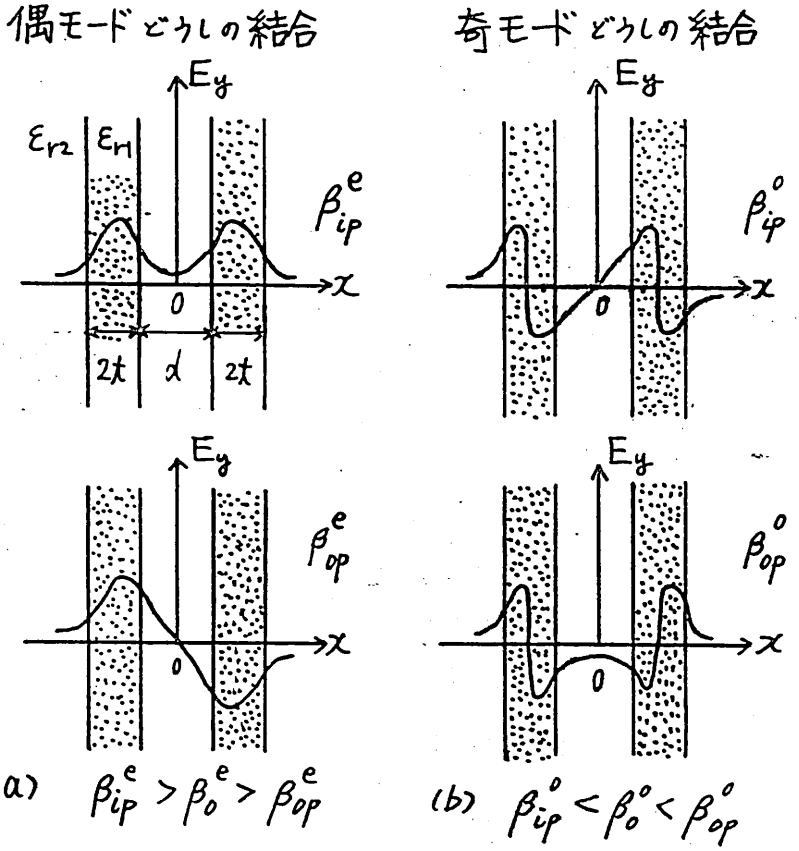


図4　偶モードどうしおよび奇モードどうしの結合の様子.
ただし β_0^e, β_0^o はそれぞれ単独スラブの場合の偶モードと奇モードの位相定数.

定数が相等しい二線路が軸方向に一様に結合している場合，その伝送軸方向の振幅変化はよく知られているように次式で表わされる[15]。

$$\left.\begin{aligned} E_1(z) &= \frac{E_1(0)+E_2(0)}{2} e^{-j(\beta-C)z} + \frac{E_1(0)-E_2(0)}{2} e^{-j(\beta+C)z} \\ E_2(z) &= \frac{E_1(0)+E_2(0)}{2} e^{-j(\beta-C)z} - \frac{E_1(0)-E_2(0)}{2} e^{-j(\beta+C)z} \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

ここに$E_1(0)$, $E_2(0)$はそれぞれの線路の初期値である。これより位相定数が$(\beta-C)$あるいは$(\beta+C)$なる波だけが伝搬するための励振条件は，それぞれ$E_1(0)=E_2(0)$あるいは$E_1(0)=-E_2(0)$となり，これらをそれぞれ同相モード，逆相モードと呼んだ。一方，図4からわかるように偶モードの場合は$\beta_{ip}>\beta_{op}$，奇モードの場合は$\beta_{ip}<\beta_{op}$である。したがって偶モードの場合は$C<0$に選び，奇モードの場合は$C>0$に選べばよいことになる。このことから，結合がリアクティブであるとき，すなわち$k=jC$のとき，偶モードどうしの結合は容量的な結合であり奇モードどうしの結合は誘導的な結合であって，それぞれ電気エネルギーおよび磁気エネルギーを介した結合であるといえる。なお以上のことがらはスラブ中を伝搬する高次の偶および奇モードについても同様であり，また管内波どうしの結合や，二つのモードの位相定数が相異なる場合も同様であることが示される。

3·3 対称構造三スラブ間の結合

3·3·1 特性方程式

次に図5に示すように同じスラブが三個，間隔dで

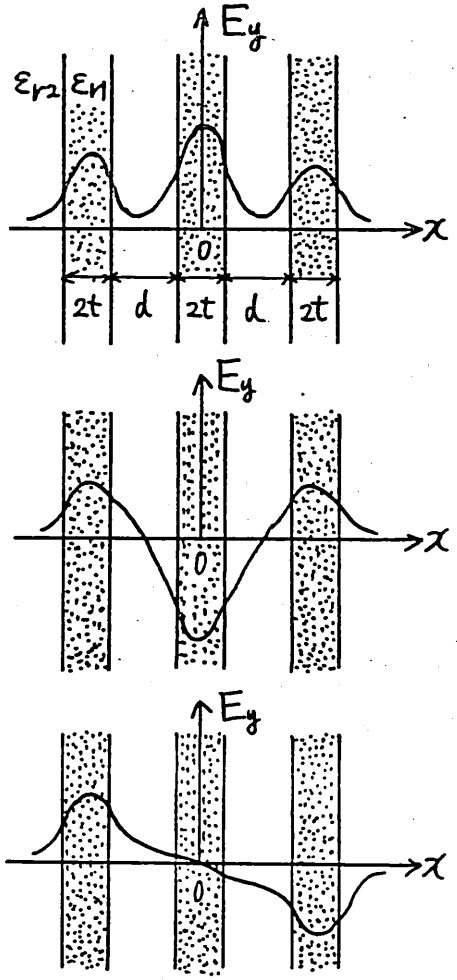


図5 対称構造三スラブ系における三つの
正規モードとその電界分布.

対称構造に分布結合しているとする。この結合導波系は $x=0$ に関して左右対称であるから，右半分のみ考えれば十分である。まず各領域での波動関数を次のように選ぶ。

$$
\left.
\begin{aligned}
E_y(x) &= \begin{cases} M_1 \cos(k_{x1}x) & 0 \le x \le t \\ M_2 e^{k_{x2}x} + M_3 e^{-k_{x2}x} & t \le x \le d+t \\ M_4 \cos\{k_{x1}(x-d-2t)+\phi\} & d+t \le x \le d+3t \\ M_5 e^{-k_{x2}(x-d-3t)} & d+3t \le x \end{cases} \\
H_x(x) &= -\frac{j}{\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z} \\
H_z(x) &= \frac{j}{\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}
\end{aligned}
\right\} \quad (44)
$$

ここに ϕ は界の偏在を示す量であり，またその値によっては偶奇いずれのモードも表わされる．なお時間 t および z 軸に関する変化

$$e^{j(\omega t - \beta z)} \qquad (45)$$

の項は省略してある．ここでそれぞれのスラブの境界面において接線成分（E_y および H_z）が連続であることを用いて計算を行なうと，結局次の特性方程式を得る．

$$
\frac{k_{x2} - k_{x1}\tan(k_{x1}t)}{\sqrt{k_{x1}^2 + k_{x2}^2}} \sqrt{\frac{k_{x1} + k_{x2}\tan(k_{x1}t)}{\tan(k_{x1}t)\{k_{x2} + k_{x1}\tan(k_{x1}t)\}}}
$$

$$
= \begin{cases} +e^{-k_{x2}d} & (46\cdot1) \\ -e^{-k_{x2}d} & (46\cdot2) \end{cases}
$$

これと波数関係式 (29) を連立させて解くことにより，三

スラブ系を伝搬するモードの位相定数が求まる。

次に各領域での波動関数を

$$E_y(x)=\begin{cases} N_1 \sin(k_{x1}x) & 0\leqq x\leqq t \\ N_2 e^{k_{x2}x}+N_3 e^{-k_{x2}x} & t\leqq x\leqq d+t \\ N_4 \cos\{k_{x1}(x-d-2t)+\psi\} & d+t\leqq x\leqq d+3t \\ N_5 e^{-k_{x2}(x-d-3t)} & d+3t\leqq x \end{cases} \tag{47}$$

と選ぶ。前と同様に境界面において接線成分が連続であることを用いると次の特性方程式を得る。

$$\frac{k_{x1}+k_{x2}\tan(k_{x1}t)}{\sqrt{k_{x1}^2+k_{x2}^2}}\sqrt{\frac{k_{x2}-k_{x1}\tan(k_{x1}t)}{\tan(k_{x1}t)\{k_{x2}\tan(k_{x1}t)-k_{x1}\}}}$$

$$=\begin{cases} +e^{-k_{x2}d} & (48\cdot1) \\ -e^{-k_{x2}d} & (48\cdot2) \end{cases}$$

以上で特性方程式がすべて求まった。

さて，3·1でも述べたように，スラブ中の界は偶モード群と奇モード群とに分離され，それぞれ $\tan(k_{x1}t)>0$ および $\tan(k_{x1}t)<0$ の場合に対応している。このことより，偶モードどうしの結合の場合式(48)の左辺は負になることはない。一方，奇モードどうしの結合の場合

には式(46)の左辺は負になることはない。したがって偶モードどうしの結合の場合の特性方程式は，式(46·1)，(46·2)および(48·1)で与えられ，それぞれ図5(a)，(b)および(c)に示される界分布をもつモードに対応している。また奇モードどうしの結合の場合の特性方程式は，式(48·1)，(48·2)および(46·1)で与えられ，その界分布は後に示す図6(a)，(b)および(c)に対応している。

ここで，三つのスラブ上をすべて同相で伝搬する正規モードをAモード，中央のスラブ上とその両端のスラブ上で互いに逆相で伝搬する正規モードをBモード，および両端のスラブ上を互いに逆相で伝搬する正規モードをCモードと約束する。そしてこの位相定数をそれぞれβ_A，β_Bおよびβ_Cと表わすこととする。

3·3·2 結合係数

さて，A，B，C三つの正規モードがそれぞれ位相定数β_A，β_B，β_Cで独立に伝搬していく。そこでこれらの値の，式(38)で与えられる単独スラブの場合の位相定数β_0からのずれを求める。ここで

$$\left.\begin{aligned}\delta\beta_A &= \beta_0 - \beta_A \\ \delta\beta_B &= \beta_0 - \beta_B \\ \delta\beta_C &= \beta_0 - \beta_C\end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

とおき，それぞれの特性方程式において，右辺の $\exp(-k_{x2}d)$ が十分小さいとして近似的に解くと次のようになる。

$$\delta\beta_A = -\delta\beta_B$$

$$= \mp \frac{\sqrt{2}\, k_{x1}^2 k_{x2}^2}{(\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2}) k_0^2 (1+k_{x2}t)\sqrt{k_0^2\varepsilon_{r2}+k_{x2}^2}} e^{-k_{x2}d} \qquad (50)$$

$$\delta\beta_C = \mp \frac{k_{x1}^2 k_{x2}^2 (k_{x2}^2 - k_{x1}^2)}{(\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2})^2 k_0^4 (1+k_{x2}t)\sqrt{k_0^2\varepsilon_{r2}+k_{x2}^2}} e^{-2k_{x2}d} \qquad (51)$$

式(50)および式(51)の右辺の負および正の符号は，それぞれ偶モードどうしの結合の場合および奇モードどうしの結合の場合に対応している。これからわかるように，偶モードと奇モードで特性方程式が異なるにもかかわらず，位相定数のずれが符号をのぞいて同じ形に表わされるのは興味がある。

ここで特にAモードとBモードとの位相定数の差で，

三スラブ系における結合係数を次のように定義する。

$$C_{AB} \equiv \frac{\beta_B - \beta_A}{2} \tag{52}$$

このとき，式(47)から明らかなように C_{AB} は式(50)にほかならない。したがって，三スラブ系の場合も二スラブ系の場合と同様に，偶モードどうしの結合の場合は $C_{AB}<0$，奇モードどうしの結合の場合は $C_{AB}>0$ である。さらに式(42)と比較すると

$$C_{AB} = \sqrt{2}\, C_{12} \tag{53}$$

である。すなわち対称構造三スラブ結合系の結合係数は，二スラブ結合系のそれの $\sqrt{2}$ 倍に等しいことがわかる。

一方，式(51)で表わされる C モードの位相定数のずれ $\delta\beta_c$ は，$(h_{x2}^2 - h_{x1}^2)$ に比例し，またスラブの間隔 d に関して $\exp(-h_{x2}d)$ の2乗で変化することから，C_{AB} にくらべてきわめて小さくほとんど0であることがわかる。特に

$$h_{x1} = h_{x2} \tag{54}$$

なるとき，$\beta_c = \beta_0$ となり完全に単独スラブの場合の位相定数に一致する。この場合の界分布は，

たとえば偶モードの場合

$$E_y(x)=\begin{cases} N e^{-k_{x1}d}\sin(k_{x1}x) & 0\leqq x\leqq t \\ \frac{N}{\sqrt{2}}\, e^{k_{x1}(x-d-t)} & t\leqq x\leqq d+t \\ N\cos\{k_{x1}(x-d-2t)\} & d+t\leqq x\leqq d+3t \\ \frac{N}{\sqrt{2}}\, e^{-k_{x1}(x-d-3t)} & d+3t\leqq x \end{cases} \tag{55}$$

と与える。式(47)と式(55)を比較すると，$t\leqq x\leqq d+t$ の領域において $N_3\exp(-k_{x2}x)$ をいわゆる反射波を表わす項がなくなっている。また $x=d+2t$ において電界が最大であって界の偏在もなく，完全に対称な界分布になっている。一方，式(54)，(38)および(39)より，この場合のスラブの厚さは

$$\frac{2t}{\lambda}=\begin{cases} \dfrac{4m+1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2}}} & (\text{偶モード}) \\ \dfrac{4m+3}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2}}} & (\text{奇モード}) \end{cases} \tag{56}$$

$$m=0,1,2,\cdots$$

で与えられる。また

$$\beta_o=\beta_c=k_o\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}}{2}} \tag{57}$$

であって，このときCモードの位相定数はスラブの間隔 d に無関係となる。これはニスラブ結合の場合にはみられ

ない大きさを特徴である。

ところで，図5(c)あるいは後の図6(c)に示される Cモードの界分布は興味深い．中央のスラブ中の界分布をみると，その両端 $z=\pm d$ から遠ざかるにつれて増大するエバネッセント波となっている．すなわち中央のスラブ中の電磁界は，その両端のスラブ中のモードより一つ高次のモードであって，それがカットオフの状態であることがわかる．一方，AおよびBモードの場合は三つのスラブ中の界はすべて安定な導波モードの状態であって，大きな違いとなっている。

3·4 非対称構造三スラブ間の結合

3·3で対称構造の場合を取扱ったが，次に非対称構造三スラブ間の分布結合を考える。そこで前と同様に各領域で適当な波動関数を選び，境界面での接線成分の連続性より特性方程式を導びけばよい。しかしそのためには十数個の連立方程式を解かねばならず実際上不可能に近い．

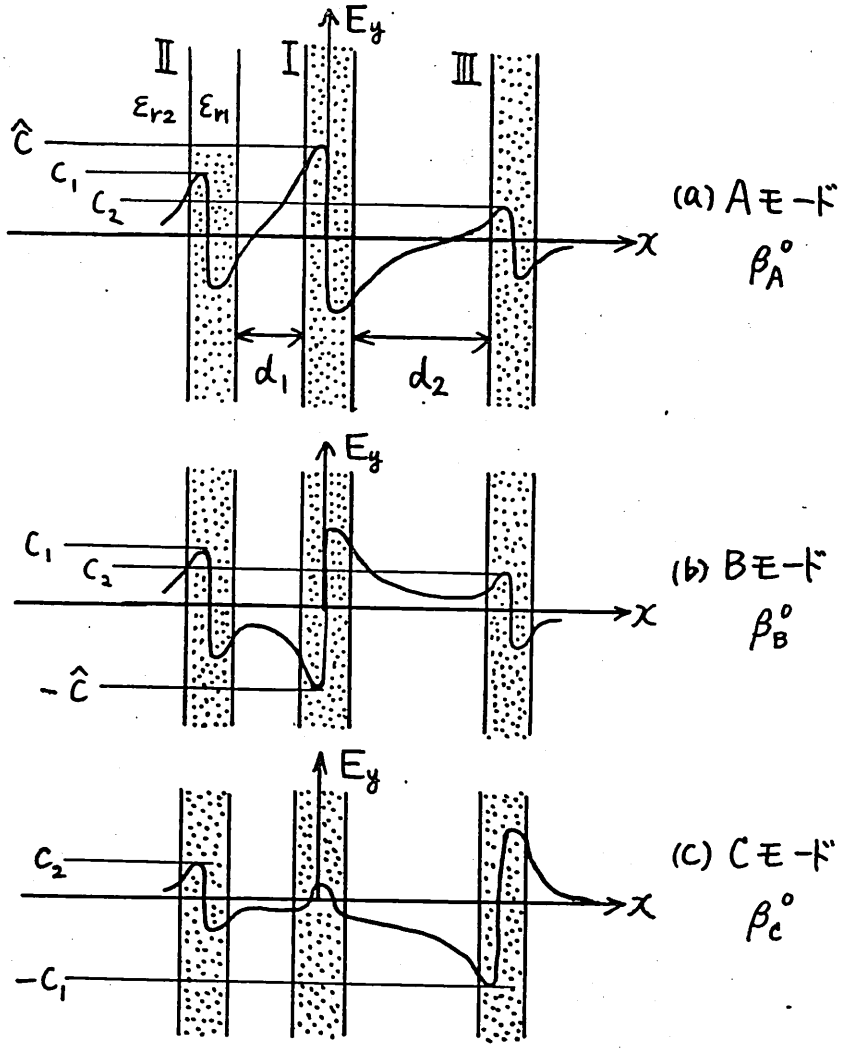


図6　非対称構造三スラブ系における三つの正規モードの電界の相対振幅．ただし c_1, c_2 $\hat{c}$ はすべて正の値．

ところで2章の結果より，三線路間の結合係数は二線路間のそれを用いて表わすことができた．すなわち図6に示すように，スラブⅠとⅡ，ⅠとⅢの間隔をそれぞれ d_1, d_2 と

とする。そしてこれらの二組のスラブがそれぞれ独立に結合している場合の結合係数をそれぞれ C_1, C_2 とする。このとき，式(24)と式(42)より

$$C_{AB}' = \mp\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$= \mp \frac{\sqrt{2}\, k_{x1}^2 k_{x2}^2}{(\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2})\, k_0^2 (1+k_{x2}t)\sqrt{k_0^2\varepsilon_{r2}+k_{x2}^2}}\, e^{-k_{x2}\hat{d}} \qquad (58)$$

となる。ここに負および正の符号はそれぞれ偶モードどうしの結合の場合および奇モードどうしの結合の場合に対応している。また $\hat{d}$ は対称構造三スラブ系の場合の間隔 d に等価な間隔であって，次式で与えられる。

$$\hat{d} = \frac{1}{k_{x2}} \ln\left\{\sqrt{\frac{2}{e^{-2k_{x2}d_1} + e^{-2k_{x2}d_2}}}\right\} \qquad (59)$$

$d_1 = d_2$ のときはもちろん式(53)が成り立つ。したがって結合係数 C_{AB}' は Aモードと Bモードの位相定数の，単独スラブの場合の位相定数 β_0 からのずれを表わしている。Cモードについては，その位相定数のずれは対称構造の場合と同様にほとんど0である。

ところで，2章では結合係数の符号をまったく考慮

しなかった。ここでは，3·2および3·3で示したようにその符号を考慮することとし，式(29)の C_1, C_2 および $\hat{C}$ を偶モードどうしの結合の場合はすべて負に，奇モードどうしの結合の場合はすべて正に選ぶこととする。このとき，モード結合方程式から得られたところの三つの正規モードの励振条件式(29)は，三つのスラブ中の電磁界の相対振幅に対応する。この様子を奇モードどうしの結合の場合について表わしたのが図6(a), (b), (c)である。

4. 数値計算例

スラブ結合の具体例として，$\varepsilon_{r1}=2.56$（ポリスチレン），$\varepsilon_{r2}=1.00$（空気）とし，スラブの厚さを $2t/\lambda=1/4$ に選んだ場合の数値例を示す。このときスラブに沿って最低次のモードのみ伝搬可能である。

図7にこの最低次 TE_0 モードの位相定数の，スラブの間隔 d に対する変化を示す。図中，点線，破線および実線はそれぞれ単独スラブ，二スラブ結合

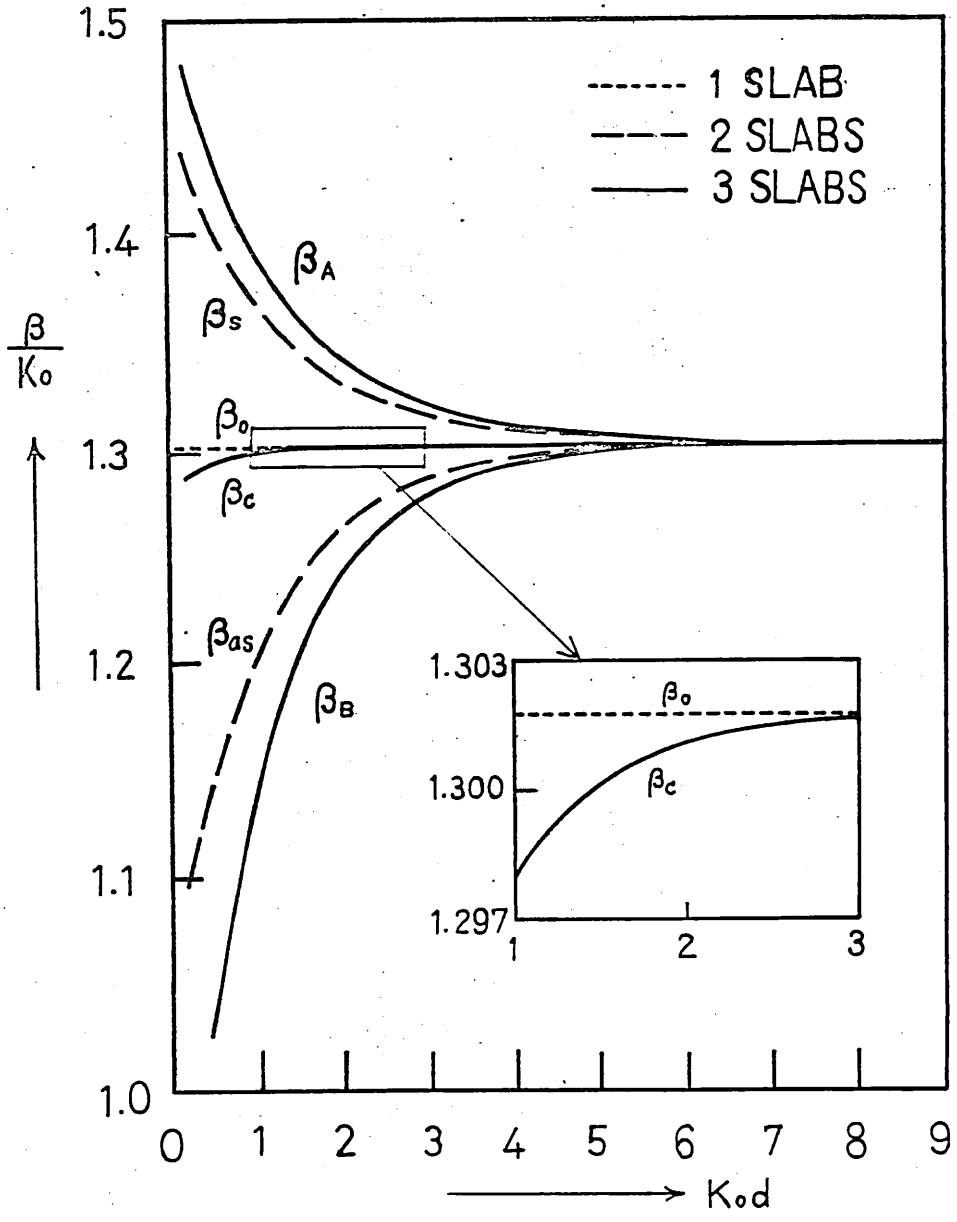


図7 スラブ間隔dに対する伝搬定数の変化.

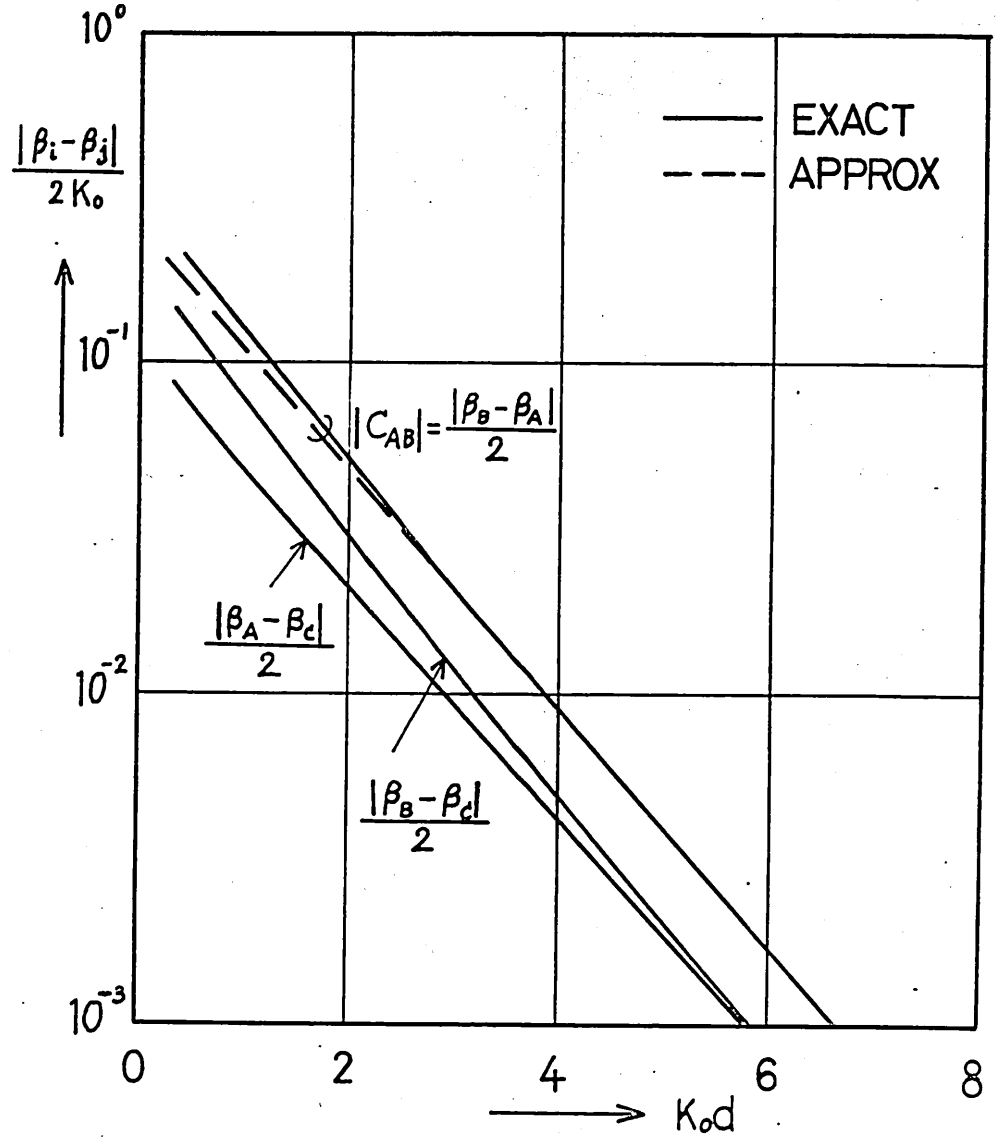


図8　三スラブ系における三つの正規モードの位相定数の差.

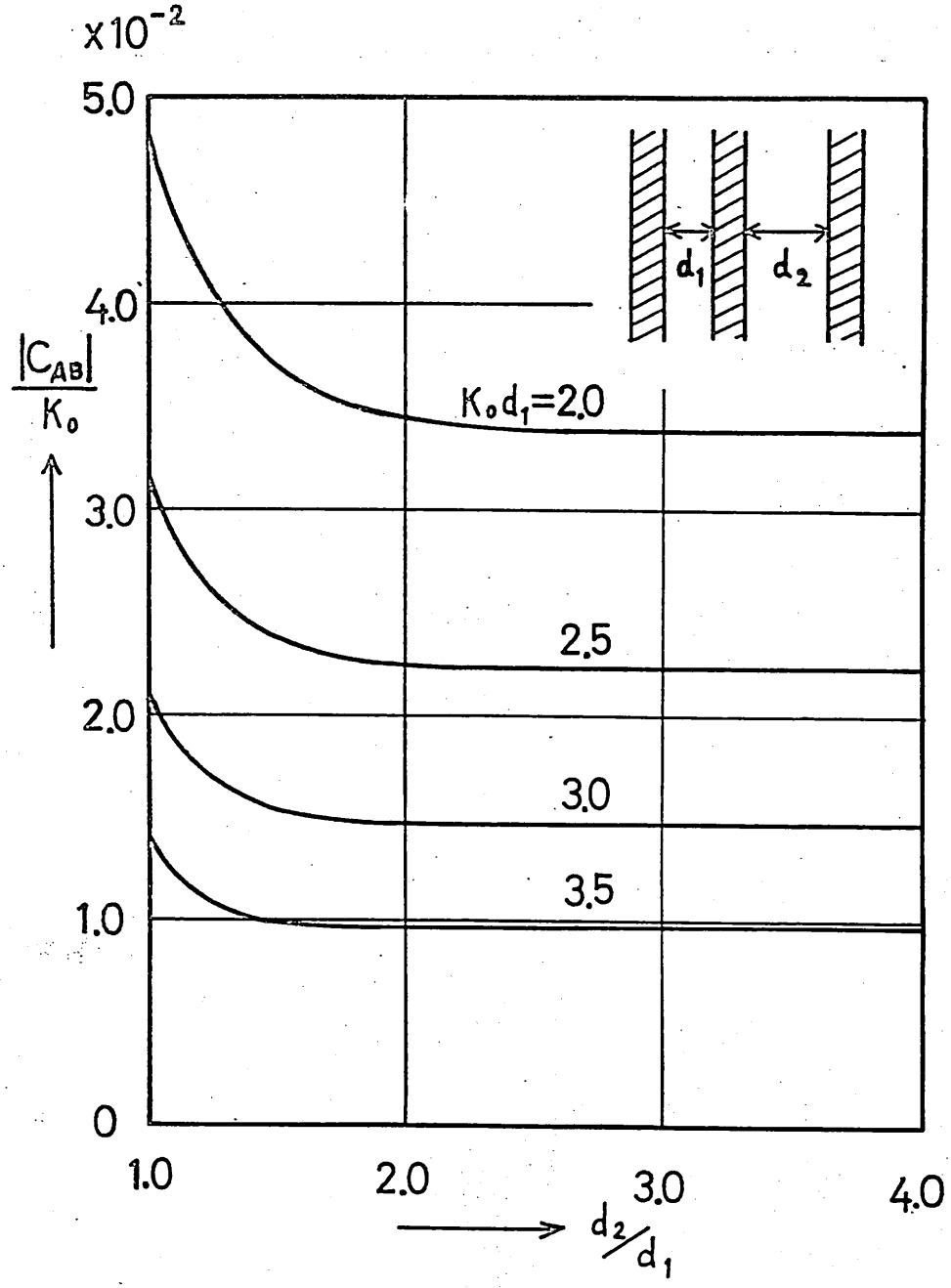


図9　非対称構造三スラブ系の結合係数.

および対称構造三スラブ結合の場合を示している。これより β_c の変化は β_A や β_B の変化にくらべて約50分の1であり，ほとんど $\beta_c = \beta_0$ であることがわかる。

次に，三スラブ結合の場合の三つの位相定数 β_A，β_B および β_c の差を図8に示す。図中，実線は特性方程式による厳密解を，破線は式(50)による近似解をそれぞれ示している。$k_0 d > 2$ すなわち $d/\lambda > 0.3$ のとき，厳密解と近似解はかなりよく一致している。

また図9は，$d_1 \neq d_2$ なる非対称構造三スラブ結合の場合について，式(58)を用いた C'_{AB} の変化を示したものである。これよりスラブ間隔 d_1，d_2 の，結合係数 C'_{AB} に与える影響を知ることができる。

5. むすび

伝送軸方向に一様な結合のある三線路間の結合の問題を考察した。

まずモード結合方程式を直接解くことによって，一次配列した三線路の場合，位相定数が β，$\beta+C$ および

$\beta - \hat{C}$ で与えられる三つの正規モードが存在することを示した。ここに $\hat{C} = (C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}$ である。そして特定の二つの正規モードだけが伝搬するような励振条件のとき，三線路間で興味ある電力授受が行なわれることを示した。

ついで具体的な三スラブ結合の問題を取扱い，波動論的立場からスラブに沿って伝搬する波の厳密解を導びいた。特性方程式はAモード，Bモードおよび Cモードの場合にわかれる。また偶モードの場合と奇モードの場合で異なり，二スラブ系の場合との相異点となっている。さらに特性方程式より，結合が十分弱いとした場合の近似解を求め，結合係数を明確な数式で表現した。この結合係数は，偶モードと奇モードで特性方程式が異なるにもかかわらず，同じ表現式となる。また対称構造三スラブ系の結合係数は，二スラブ系の結合係数の $\sqrt{2}$ 倍に等しいことが確かめられた。

また特にCモードの場合，中央のスラブ中の電磁界が単独ではカットオフであるような一つ高次のモード分布をしていること，結合による β_c の変化は $\exp(-h_{x2}d)$ の2乗に比例し，ほとんど0であることなどが明らかとなった。さらにスラブの厚さが特定の値のとき，β_c はスラ

ブの間隔 d に依存しない．これはニスラブ結合の場合にはみられない大きな特徴である．

さらに，ニスラブ結合，三スラブ結合いずれの場合にも，偶モードどうしの結合の場合は結合係数の値を負に，奇モードどうしの結合の場合はその値を正に選ぶこと，およびこのときモード結合方程式の解とスラブ中の界分布がうまく対応することを指摘した．

謝辞

日頃ごべんたつをいただいている本学工学部熊谷信昭教授，ならびに板倉研究室の方々に深謝する。

文献

(1) Miller:"Coupled wave theory and waveguide applications", BSTJ,p.661,May 1954.

(2) Bracey *et al.*:"Surface-wave research in Sheffield", IRE Trans.AP,p.s219,Dec.1959.

(3) Marcatili:"Dielectric rectangular waveguide and directional coupler for integrated optics",BSTJ,p.2071,Sept. 1969.

(4) Marcuse:"The coupling of degenerate modes in two pararell dielectric waveguides",BSTJ,p.1971,July 1971.

(5) Arnaud:"Transverse coupling in fiber optics,Part 1",BSTJ, p.217,Feb.1974.

(6) 松原,熊谷:"開放形伝送線路間の結合理論とその光回路への応用", 信学論(C), p.2071, 1972年4月.

(7) 沢:"誘電体光線路の間のモード結合方程式", 信学論(C) 技術談話室, p.604, 1971年9月.

(8) Snyder;"Coupled-mode theory for optical fibers",JOSA,p.1267, Nov.1972.

(9) McIntyre & Snyder:"Power transfer between optical fibers", JOSA,p.1518,Dec.1973.

(10) Jones [redacted]:"Coupling of optical fibers and scattering in fibers",JOSA,p.261,March 1965.

(11) Somekh *et al.*:"Cannel optical waveguide directional couplers", APL,p.46,Jan.1973.

(12) 森肇:"高等代数学", 三省堂, 昭17

(13) 橋本他:"分布結合形 TE_{02} モードフィルタ" 研実報, p.2227, 1972年12月.

(14) Collin:"Field theory of guided waves",McGraw-Hill,1960.

(15) 小口:"マイクロ波およびミリ波回路", 丸善, 昭39.

輻射科学研究会資料

2光子励起InSbレーザ

吉田多見夫・宮崎和彦・藤澤和男
（大阪大学　基礎工学部）

昭和49年10月4日.

§1. まえがき

現在までに半導体レーザの励起方法として種々の方法が考えられている. そのうち 2光子励起によれば半導体の表面のみならず内部にまで高密度の励起状態を作りだすことができる. また 半導体としてInSbを用いると InSbはその禁制帯幅がせまく(~5μm). かつ 電子の有効質量が小さいので(0.013m_0) 磁界を印加することにより発振波長を5μm付近で変化させ得る. ゆえに 2光子励起InSbレーザは赤外域における同調可能な光源となる可能性をもっている.

InSbに大出力CO_2レーザ光を照射することにより. 高密度の電子-正孔対を生成したという幾つかの報告がある.[1-4] また その時の再結合発光も観測されている.[2,4] 最近 ManliefとPalikによって誘導放出さえ観測されている.[5] しかし 彼らはTEA CO_2レーザの雑音のため自然放出は観測できていない. そして その2光子励起InSbレーザの特性や機構は詳しくは調べられていない.

著者らは TECO_2レーザ光で励起されたn-InSbから自然放出及び誘導放出の両方を観測し. それらの諸特性を調べた. 特に 発光強度と光導電度の励起波長依存性及び励起強度依存性を調べることにより. これらの発光が確かに2光子励起によるものである事を確認した. また 種々の担体濃度の試料

を用い その発振波長の変化を調べた. さらに 磁界を印加することによる同調特性も調べた. そしてある試料で 今まで InSb レーザで見られなかった長波長側への変化を観測した.

§2. 実験.

用いた試料は n-InSb 単結晶で その特性を表1に示す. 試料の形は矩形の板状である. その二面は共振器を形成するため鏡面仕上げをした.

実験装置の配置を図1に示す. 試料の励起には TE CO_2 レーザを用いた. TE CO_2 レーザは雑音を少なくするためラインタイプ・パルス発生器によって励起されている. レーザの共振器はガップリングホールを有した金蒸着凹面鏡と回折格子とから成っている.

Table I. Physical properties of samples.

Sample no.	Carrier density (77K) (cm^{-3})	Mobility (77K) (cm^2/Vsec)	Size (mm^3)
no. 1-1	4.47×10^{14}	6.86×10^5	5.0 x 5.0 x 1.48
no. 1-2	4.47×10^{14}	6.86×10^5	4.0 x 5.0 x 0.64
no. 1-3	4.47×10^{14}	6.86×10^5	4.0 x 2.5 x 0.45
no. 2	$1\text{-}3 \times 10^{15}$	$2.2\text{-}3.0 \times 10^5$	6.0 x 4.5 x 1.28
no. 3	6.7×10^{13}	2.2×10^5	3.5 x 4.5 x 0.88
no. 4	1.70×10^{16}	1.1×10^5	5.0 x 5.0 x 0.65

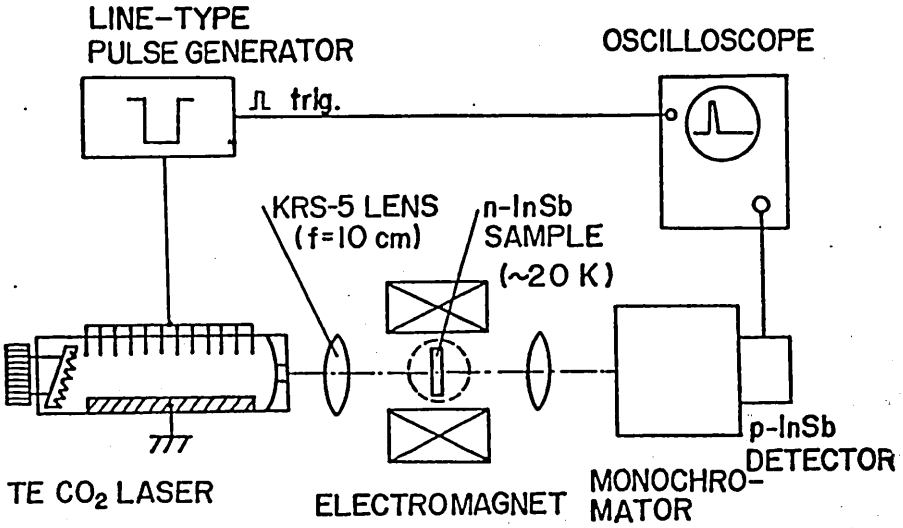


図1　実験装置の配置

TE CO_2 レーザからの選ばれた波長の光は、KRS-5のレンズ（f=10cm）で試料上に集光される。試料は閉サイクル冷凍機によって20Kまで冷却される。CO_2 レーザ光は試料の光共振器の軸と平行に照射された。発光はライトパイプまたはKRS-5レンズで集光され、分光器に導かれ Au:Geまたはp-InSb検出器で検出した。検出信号は直接オシロスコープ上に示される。

励起レーザ光強度は試料前面にポリエチレンの板を挿入することによって変えた。

磁界は直流電磁石を用い CO_2 レーザ光と垂直に最高約13KGまで印加した。

光導電度は定電流条件下で試料端の電圧をモニターすることにより測定した。

§3 実験結果及び検討

3.1 発振の概要

図2にCO_2レーザ光9.3μmで励起した時のInSbからのレーザ発振波形の1例を示す．発振のピーク出力はパルスごとに異った．図3に最高発光強度を励起レーザ光強度の関数として示す．励起レーザ光強度は最大約1MW/cm²である．誘導放出のしきい値以下では自然放出が観測され，その発光強度は励起レーザ光強度の2乗に比例する．しきい値以上で発光強度は急激に大きくなった．また発光強度

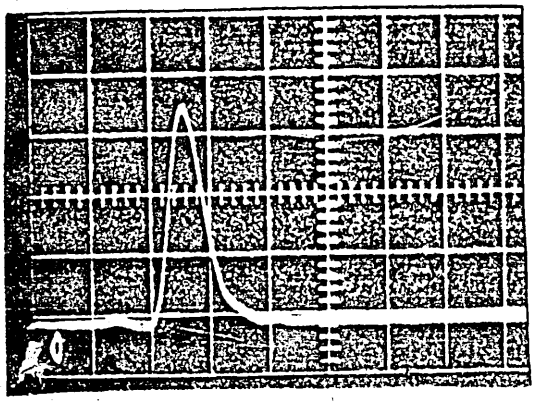


図2 レーザ発振波形
(5.3μm).
励起レーザ波長λ_p=9.3μm
試料: no.1-1 , T=20K
横軸: 1μsec/div.

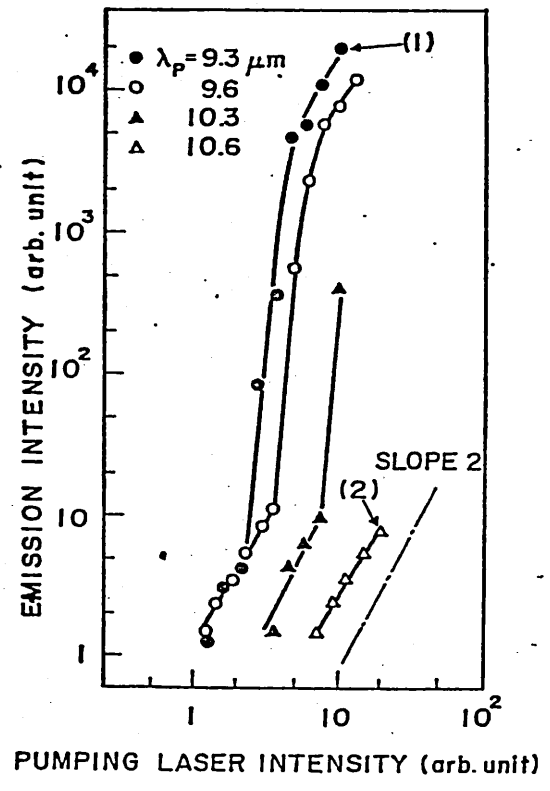


図3. 発光強度の励起光強度依存性

には励起レーザ光~~強度~~波長依存性がみられるが この事については§3.2で議論する.

図3の(1)(2)点で示される誘導放出及び自然放出のスペクトルを図4に示す. 自然,誘導放出の半値巾はそれぞれ~1000Å(~32cm^{-1}), ~90Å(3cm^{-1})であった. この自然放出の巾(32cm^{-1})はGaAsレーザで励起されたInSbからの発光のそれとよく一致している.[6] 誘導放出の巾(3cm^{-1})はManliefらの報告(~6cm^{-1})よりわずかに狭い.[5]

励起CO_2レーザ光強度~0.5MW/cm^{2}のときのレーザ発振(誘導放出)の温度依存性を図5に示す. 20Kから30Kまではゆるやかに減少しその後急激に小さくなってゆき ~40Kまで観測された. 自然放出は~20Kから~60Kまでほぼ指数関数的に減少しその後 微弱ではあるが約150Kまで観測された.

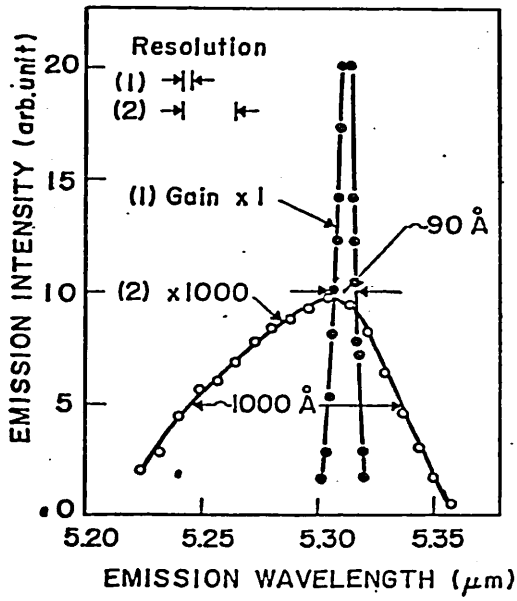


図4 誘導放出(1)及び自然放出(2)のスペクトル
(1) λ_p=9.3μm (2) λ_p=10.6μm, スペクトル(1)(2)は図3の点(1)(2)で測定. 試料: no.1-1, T=20K

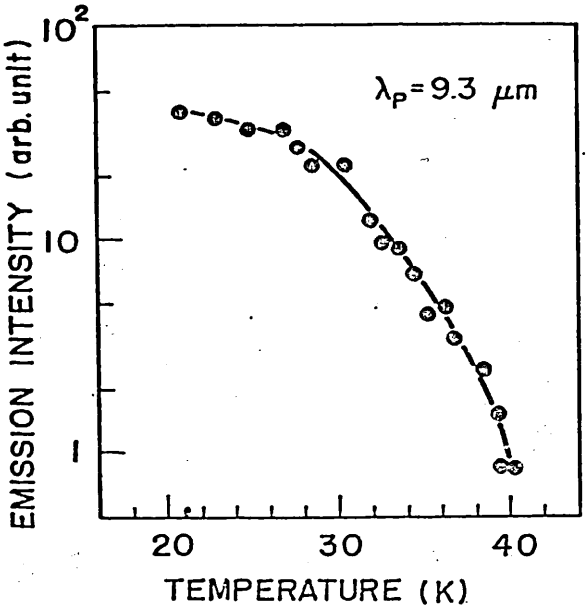


図5　レーザ発光(誘導放出)の温度依存性
励起波長 $\lambda_p = 9.3\ \mu m$
試料：no. 1-2

3.2　発光の励起レーザ波長依存性

図3に示したように、誘導放出のしきい励起レーザ光強度は励起レーザ波長に大きく依存している。即ちしきい値は励起波長が長くなるにつれ大きくなる。10.6 μm 光で励起した場合は誘導放出は観測されなかった。しきい値以下の励起光強度では、すべての励起波長において自然放出が観測され、その発光強度は励起光強度の2乗に比例した。これらの励起レーザ波長依存性はそれぞれの場合の2光子遷移確率の差異によるものと思われる。

2光子遷移の確率 W_2 は理論的には次式で与えられる。[7-9]

$$W_2 \propto \frac{(2\hbar\omega - E_g)^{\frac{3}{2}}}{\omega^6} \qquad (1)$$

ここで $\hbar\omega$ は励起レーザ光の光子エネルギー，E_g は半導体の禁制帯幅である．ゆえに 前記の発光の励起波長依存性はこの遷移確率の違いにより説明がつく．更に この遷移確率の違いは光導電度の測定によって確められると考え実験を行った．以下その結果を示す．図6に励起レーザ波長 $\lambda_p = 9.3\,\mu m$, $\lambda_p = 10.6\,\mu m$ の場合の 光導電度の変化 ΔG $((G_p - G_d)/G_d)$ を励起レーザ光強度の関数として示す．発光が観測された励起光強度の領域では．$\lambda_p = 9.3\,\mu m$ の場合 ΔG は励起光強度に比例し，$\lambda_p = 10.6\,\mu m$ の場合は 1/2 乗に比例した．これらの1乗及び1/2乗特性はそれぞれ，2光子励起，1光子励起が支配的である事を示していると考えられる．同様の実験結果が H.J. Fossum et al.[4] によって 2K で観測されている．またどちらの場合も（2光子励起又は1光子励起が支配的な場合）発光強度は励起光強度の2乗に比例

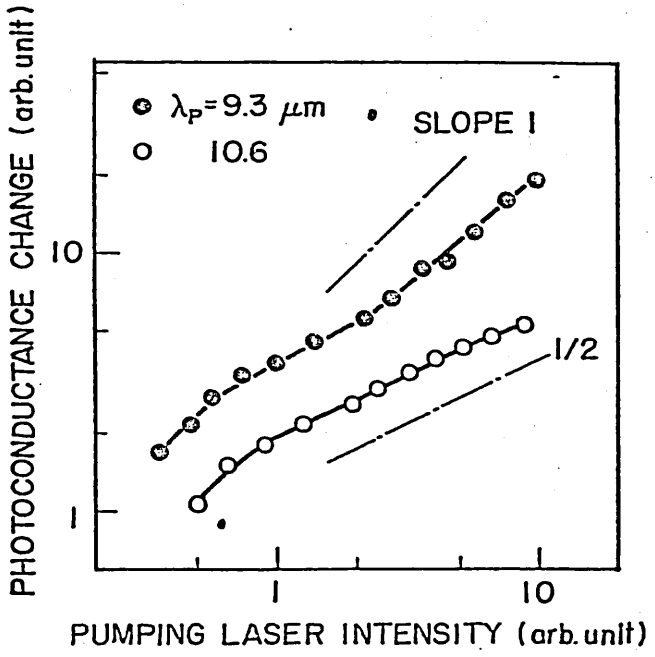


図6 光導電度の変化 ΔG の励起レーザ光強度依存性
試料：no. 1-3 ， T = 20 K.

する事が示され図3に示した実験結果と一致する.（付録参照）以上の考察から観測された発光は2光子励起に基づくものであることが確認された.

3.3 同調特性.

種々の担体濃度の試料からの発光波長を図7に示す. 担体濃度 $n=10^{14}\sim10^{15}\ cm^{-3}$ の試料からの発光波長はほぼ一定であった（5.31 μm）. $n=10^{16}\ cm^{-3}$ の試料では発光波長は短波長側へずれた（5.24 μm）. $n=7\sim8\times10^{17}\ cm^{-3}$ の試料からは自然及び誘導のどちらの発光も観測されなかった. これらの現象はそれぞれの試料における Fermi レベルの違いに原因があると思われる.

次に $n=4.47\times10^{14}$ 及び $1.70\times10^{16}\ cm^{-3}$ の試料について磁界による同調特性の実験結果を図8に示す. $n=4.47\times10^{14}\ cm^{-3}$ の試料の波長変化は約18 Å/kG であった. この変化割合は以前の報告[57]より小さい. しかし InSb ダイオード

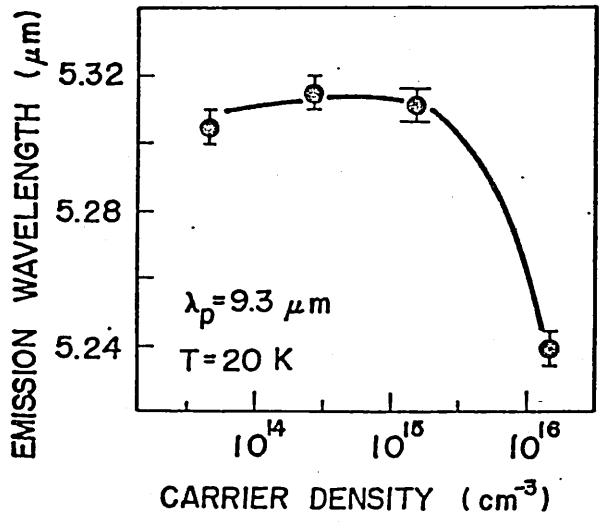


図7 種々の担体濃度の試料からの発光波長.

レーザ[10]においてほぼ同じ割合の変化が観測されている。この変化は磁界による屈折率の変化によるものとされている。[10] 図8に示すように $n=1.70\times10^{16}cm^{-3}$ の試料において、長波長側への変化が観測された。この現象は著者らによってはじめて観測されたものであるがまだその機構は明らかでない。現在この変化の機構を解明のため、スピン・フリップ・ラマン散乱の可能性をも考慮にいれ実験検討中である。

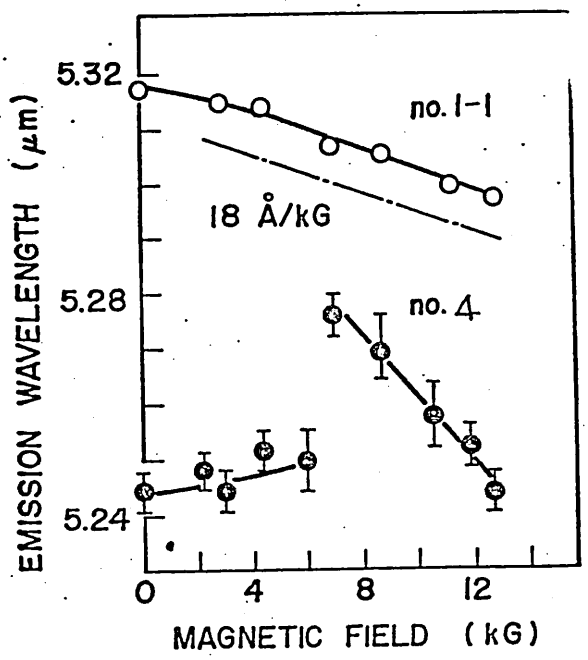


図8 発光波長の磁界強度依存性。
励起波長 $\lambda_p=9.3\mu m$
$T=20K$
試料: no. 1-1 ($n=4.47\times10^{14}cm^{-3}$), no. 4 ($n=1.70\times10^{16}cm^{-3}$)

§4 まとめ

TE CO_2 レーザ光で励起された n-InSb からの自然及び誘導放出の両方を観測した。それらの発光の線幅

は それぞれ 1000 Å (32 cm^{-1}), 90 Å (3 cm^{-1}) であった. 誘導放出は20Kから約40Kまで観測された. 一方 自然放出は約150Kまで観測された. 発光特性及び光導電度の励起レーザ光波長依存性の測定から これらの発光が2光子励起に基づくものである事を確認した. また. 担体濃度の異った試料をもちい その発光波長の変化を観測した. 更に磁界による同調特性をも測定した. 特に ある試料では今までみられなかった長波長側への変化を観測した.

付録 光導電度及び発光の励起レーザ光強度依存性

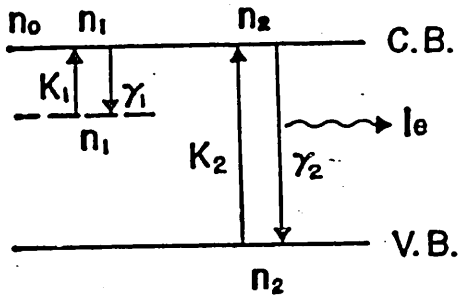
CO_2 レーザ光で励起されたInSbにおける過剰担体の生成及び消滅は次式で表わされる.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = K_1 I + K_2 I^2 - \gamma_1 n n_1 - \gamma_2 n n_2 , \quad (A.1)$$

$$n = n_0 + n_1 + n_2 . \quad (A.2)$$

ここで記号は図A-1に示す通りである. 即ち.
n_0：熱平衡状態の担体濃度, n_1, n_2：1光子励起及び2光子励起による過剰担体濃度, K_1, K_2：1光子及び2光子過程による生成係数, I：励起

CO_2レーザ光強度，γ_1：伝導帯と図A-1で示される禁制帯中の準位間の直接再結合係数，γ_2：伝導帯と価電子帯間の直接再結合係数．



図A-1 担体の生成及び消滅

以下(A-1)(A-2)を基にして 2つの場合について 光導電度の変化ΔGと発光強度I_eの励起光強度依存性について考察する．

a) 2光子励起が支配的な場合．

この場合 次の条件が満足される．

$$n_2 > n_0 + n_1 \quad , \quad \kappa_2 I^2 > \kappa_1 I \quad .$$

よって(A-1)は次のように書ける

$$\frac{\partial n}{\partial t} \simeq \kappa_2 I^2 - \gamma_2 n_2^2 \quad . \qquad (A\text{-}3)$$

定常状態を考えると 過剰担体濃度n_2は次式で与えられる．

$$n_2 \simeq \sqrt{\frac{\kappa_2}{\gamma_2}} I \quad . \qquad (A\text{-}4)$$

光導電度の変化ΔGは過剰担体濃度に比例するのでΔGは

$$\Delta G \propto (n_1 + n_2) \propto n_2 \propto I, \qquad (A\text{-}5)$$

となる．

他方　発光強度 I_e は次のように励起レーザ光強度の2乗に比例する.

$$I_e \propto (n_0+n_1+n_2)n_2 \propto n_2^2 \propto I^2. \qquad (A\text{-}6)$$

b)　1光子励起が支配的な場合.

この場合　次の条件が満足される.

$$n_1 > n_0 + n_2 \ , \quad \kappa_1 I > \kappa_2 I^2.$$

ゆえに　(A-1) は次のように書ける.

$$\frac{\partial n}{\partial t} \simeq \kappa_1 I - \gamma_1 n_1^2 , \qquad (A\text{-}7)$$

定常状態を考えると　n_1 は

$$n_1 \simeq \sqrt{\frac{\kappa_1}{\gamma_1}}\, I^{\frac{1}{2}}. \qquad (A\text{-}8)$$

となる. これより　ΔG および I_e は次式で与えられる.

$$\Delta G \propto (n_1+n_2) \propto n_1 \propto I^{\frac{1}{2}}, \qquad (A\text{-}9)$$

$$I_e \propto (n_0+n_1+n_2)\cdot n_2 \propto n_1 \cdot n_2 . \qquad (A\text{-}10)$$

ここで　$n_0 < n_1+n_2$,　$n_1 = (\kappa_1/\gamma_1)^{\frac{1}{2}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$ なる条件の基で (A-1) から n_2 を求めると

$$n_2 = \frac{1}{\gamma_1+\gamma_2}\sqrt{\frac{\gamma_1}{\kappa_1}}\, I^{\frac{3}{2}}. \qquad (A\text{-}11)$$

となる.

ゆえに (A-10) と (A-11) から 発光強度 I_e は次のように励起光強度 I の2乗に比例することが示される.

$$I_e \propto n_1 \cdot n_2 \propto I^{\frac{1}{2}} \cdot I^{\frac{3}{2}} \propto I^2 \qquad (A\text{-}12)$$

References

1) A.M.Danishevskii, A.A.Patrin, S.M.Ryvkin and I.D.Yaroshetskii Zh. eksp. teor. Fiz. 56 (1969) 1457. translation: Soviet Physics-JETP 29 (1969) 781.

2) R.E.Slusher, W.Giriat and S.R.J.Brueck: Phys. Rev. 183 (1969) 758.

3) S.Hongo, S.Panyakeow, J.Shirafuji and Y.Inuishi: Japan. J. appl. Phys. 10 (1971) 717.

4) H.J.Fossum, W.S.Chen and B.Ancker-Johnson: Phys. Rev. B8 (1973) 2857.

5) S.K.Manlief and E.D.Palik: Appl. Phys. Letters 22 (1973) 443.

6) R.J.Phelan,Jr. and R.H.Rediker: Appl. Phys. Letters 6 (1965) 70.

7) N.G.Basov, A.Z.Grasyuk, I.G.Zubarev, V.A.Katulin and O.N.Krokhin: Zh. eksp. teor. Fiz. 50 (1966) 551. translation: Soviet Physics-JETP 23 (1966) 366.

8) W.Schneider, K.Hübner, G.Decker and H.Röhr: Phys. Letter 41A (1972) 383.

9) H.J.Fossum and D.B.Chang: Phys. Rev. B8 (1973) 2842.

10) R.J.Phelan,Jr. and R.H.Rediker: Proc. IEEE 52 (1964) 91.

輻射科学研究会資料

チャープパルスを用いた光ファイバ通信方式

鈴木俊雄
福本照道
(大阪大学・工学部)

1974年10月4日

1. まえがき

近年，低損失な種々の光ファイバが実現され，光ファイバを用いた伝送システムに関する研究が活発に行われている。ところで，光ファイバ通信においてはシステムが本質的に分散性を有するために，パルスの分散によりパルスレイトが制限を受けることになる。したがって，パルスレイトを向上させる方法として，ファイバの分散性をできるだけ小さくすることが考えられる。この方法の一つとして，低屈折率層を内部に有する多層誘電体線路が提案されている。[1] この線路はここで述べられている様に，基本モードにカットオフが生じること，単一モード域で物質固有の分散を打ち消すような構造分散をもたすことができる広帯域伝送路であること等の種々の望ましい特性を有している。しかしながら，多層構造にすることは必然的に製造技術の複雑さおよびそれに伴う価格の上昇をもたらし，単一モード伝送路が本来高速，長距離伝送に適している[2]点から考えて，問題点も残しているように思われる。

一方，筆者らはファイバの分散性によるパルスレイトの制限を緩和するいま一つの方法として，チャープレーダに用いられている方法を光ファイバ通信に応用することにより，望ましい結果が得られた。すなわち，この方法は入力パルスをあらかじめパルス内で周波数変調し（通常，この様なパルスはチャープパルスと呼ばれている。），ファイバの分散性を利用して伝送中にパルスを圧縮しようとするものである。その結果，パルスレイトは事実上パルスの分散による制限を受けることがなくなり，従来のコア・クラッド型二層ファイバによっても，パルスレイトを十分高めることが可能であること，受信の際の信号対雑音比を大きくでき，したがって，単一モードファイバにおいて最も問題となる損失[2]に対しても良好な特性を期待できるなどの点が明らかとなった。

本報告では，定性的な説明に重点を置くために，スラブ構造について解析を行っている。

2. 光ファイバによるパルス圧縮

レーザ光パルスを位相変調（周波数変調）して強制的にchirping（パルス内での周波数単調変化）させ，適当な分散性媒質を用いてパルスの時間次元での前部を遅らせ後部を早めることにより，パルスが圧縮され鋭いパルスを得ることができる．チャープレーダで用いられている技術[3]を応用したこの方法は，極めて鋭い光パルスを発生させる一方法として，これまでに種々の報告がなされている。[4]~[7]我々は，このパルス圧縮の技術を図1に示す様に光ファイバ通信に応用し，パルスレイトの向上に利用する。

ここでは，レーザ光パルスをchirpingする方法としては，図1にも示す様に，光周波数移相器（Optical frequency shifter）[7]~[10]を用いる。すなわち，$LiNbO_3$の結晶の屈折率が式(1)に示す様に角周波数ωの外部電界で変調を受けているものとする。

$$n = n_0 - \Delta n \cos \omega t \qquad (1)$$

ただし，n_0，Δnは定数であり，Δnは屈折率nの変調振幅である。また，ωはレーザ光パルスの繰り返し周波数$C/2L$（Lは共振器の長さ，Cは光速度）に同期されている。結晶の屈折率が式(1)の様に変化することにより，結晶の光路長が時間的に変化し，結晶を通過した光は次式で表わされる周波数遷移を受ける。

$$S(t) = -S \sin \omega t \qquad (2)$$

$$S = 2 f_0 \frac{\Delta n}{n} \sin \omega T \qquad (3)$$

ただし，f_0はレーザ光パルスの中心周波数であり，Tはパルスが結晶の半分を通過するに要する時間である。いま，レーザー光パルスが外部電界の周期に比べて非常に短かく，またm番目のパルスが$\omega t = 2\pi m$の時刻に結晶の中央を通過するものとすると，$\sin \omega t \simeq \omega t$とみなせるので，瞬時の周波数

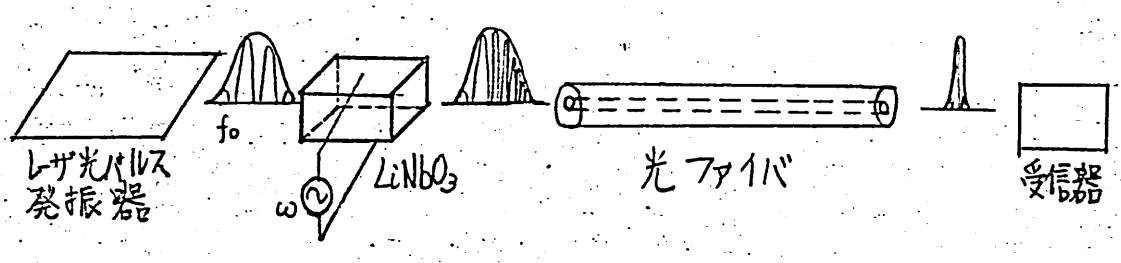


図1. 光ファイバによるパルス圧縮の構成図

遅物は次式で示す様に，パルスの幅にわたって直線的に変化する．

$$S(t) = -S\omega t \tag{4}$$

したがって，結晶を通過したパルスは式(5)で示す位相推物を受けることになる．

$$\phi = 2\pi\left(f_0 t - \frac{S\omega}{2}t^2\right) \tag{5}$$

簡単のために，結晶の中央を時刻 $t=0$ に通過するパルスについて考える．レーザ光パルスの包絡線を $E(t)$ とし，Klauderらの表式に従うと，直線的に周波数遅物を受けたレーザ光パルス $e_i(t)$ は次式の様に表わせる．

$$e_i(t) = E(t)\, e^{2\pi j\left(f_0 t - \frac{K}{2}t^2\right)} \tag{6}$$

ただし，

$$K = S\omega \tag{7}$$

であり，Kは周波数遅物の大きさを表わす．

さて，式(6)で表わされるパルスがファイバを伝搬したときの出力パルスは以下の様にして求められる．いま，ファイバの吸収係数を $\alpha(f)$，位相定数を $\beta(f)$ とすると，ファイバ中を距離 ℓ だけ伝搬したとき，伝送線路の伝達関数 $\Psi(f)$ は次式

で与えられる。

$$\widetilde{\Gamma}(f) = e^{-(\alpha+j\beta)L} \tag{8}$$

入力パルスの周波数スペクトルを $\widetilde{E_i}(f)$, 出力パルスの周波数スペクトルを $\widetilde{E_0}(f)$ とすると, $\widetilde{E_0}(f)$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}\widetilde{E_0}(f) &= \widetilde{E_i}(f)\widetilde{\Gamma}(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(\tau) e^{2\pi j(f_0\tau - \frac{k}{2}\tau^2)} e^{-(\alpha+j\beta)L} e^{-2\pi j f\tau} d\tau \end{aligned} \tag{9}$$

出力パルス $E_0(t)$ は式(9)を逆変換することにより求まる。すなわち,

$$E_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} E(\tau) e^{2\pi j(f_0\tau - \frac{k}{2}\tau^2)} e^{-(\alpha+j\beta)L} e^{-2\pi j f\tau} d\tau\right] e^{2\pi j f t} df \tag{10}$$

ここで, レーザ光パルスの包絡線 $E(t)$ として, 式(11)で示されるようなガウス形包絡線選ぶと, 周波数スペクトルの広がりは中心周波数 f_0 に比べて十分狭いとみなすことができる。

$$E(t) = (a\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-t^2/2a^2} \qquad a \gg f_0^{-1} \tag{11}$$

したがって, 伝達関数 $\widetilde{\Gamma}(f)$ を f_0 の周りに Taylor 展開すると, $(f-f_0)^3$ 以上の項は無視することができる。すなわち,

$$\widetilde{\Gamma}(f) \approx \exp\left[-(\alpha_0+j\beta_0)L - (\alpha_0'+j\beta_0')L(f-f_0) - \frac{1}{2}(\alpha_0''+j\beta_0'')L(f-f_0)^2\right] \tag{12}$$

ただし, α_0', β_0' および α_0'', β_0'' は f_0 における周波数 f に関する微

微分を表わしている。式(12)を(10)式に代入すると，出力パルス$E_0(t)$は次式で与えられる。

$$E_0(t) = (a\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2}\pi p^{-\frac{1}{4}} e^{u+2\pi j(v-\theta/8\pi^2)} \tag{13}$$

ただし，

$$u = -\alpha_0 L + \frac{(\alpha_0' L)^2}{2}\frac{q^2+r^2}{pq} - 2\pi^2\frac{q}{p}\left(t - \frac{\beta_0' L}{2\pi} + \frac{r}{2\pi q}\alpha_0' L\right)^2$$

$$v = f_0 t + \pi\frac{r}{p}\left(t - \frac{\beta_0' L}{2\pi} - \frac{q}{r}\alpha_0' L\right)^2 - \beta_0 L - \frac{q^2+r^2}{2pr}(\alpha_0' L)^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\beta_0'' L + 2\pi a^2 K\alpha_0'' L}{2a^2(\pi K\beta_0'' L - 2\pi^2) - \alpha_0'' L}$$

また，

$$p = (\pi K\beta_0'' L - \frac{\alpha_0'' L}{2a^2} - 2\pi^2)^2 + (\frac{\beta_0'' L}{2a^2} + \pi K\alpha_0'' L)^2$$

$$q = \pi^2 K^2\alpha_0'' L + \frac{\alpha_0'' L}{4a^4} + \frac{\pi^2}{a^2}$$

$$r = \pi^2 K^2\beta_0'' L - 2\pi^3 K + \frac{\beta_0'' L}{4a^4}$$

したがって，出力パルスの包絡線$|E_0(t)|^2$は次式のようになる。

$$|E_0(t)|^2 = \frac{2\pi^2}{a\sqrt{\pi}} p^{-\frac{1}{2}} e^{-2\alpha_0 L + \frac{q^2+r^2}{pq}(\alpha_0' L)^2} e^{-4\pi^2\frac{q}{p}\left(t - \frac{\beta_0' L}{2\pi} + \frac{r}{2\pi q}\alpha_0' L\right)^2} \tag{14}$$

ここで，入力パルスの包絡線$|E_i(t)|^2$と出力パルスの包絡線$|E_0(t)|^2$を比較すると図2のようになる。ただし，振幅の大きさがピーク値の$1/e$になる幅をパルス幅とする。いま，パルス圧縮率Dを次のように定義する。

$$D \equiv \frac{\text{入力パルス幅}}{\text{出力パルス幅}}$$

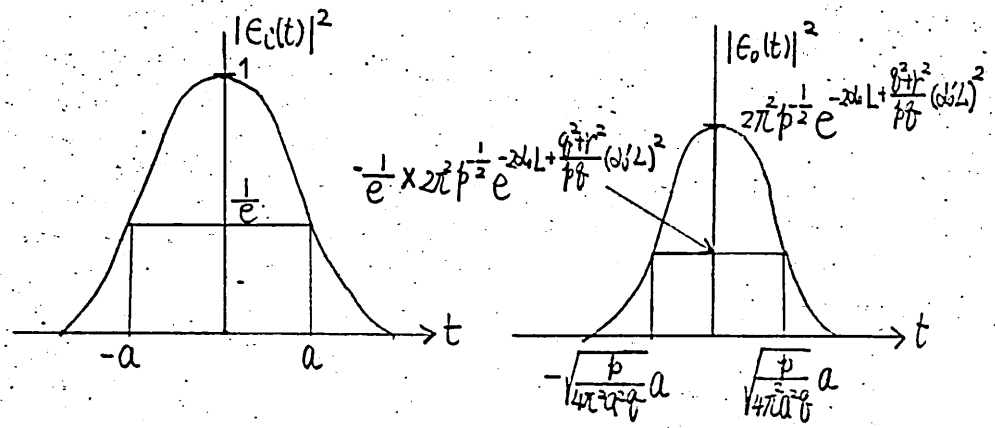


図2. 入力パルスと出力パルスの包絡線

図2より明らかなように，Dは次式で与えられる。

$$D = \sqrt{\frac{4\pi^2\alpha^2\beta}{p}}$$

$$= 2\pi\alpha \sqrt{\frac{\pi^2 K^2 \alpha_0'' L + \alpha_0'' L/4\alpha^4 + \pi^2/\alpha^2}{(\pi K \beta_0'' L - \alpha_0'' L/2\alpha^2 - 2\pi^2)^2 + (\beta_0'' L/2\alpha^2 + \pi K \alpha_0'' L)^2}} \qquad (15)$$

さて，式(15)で与えられる圧縮率Dは，パルスの伝搬距離Lを一定としたときには入力パルスの周波数変調の大きさを表わすKの値が

$$K = \frac{2\pi}{\beta_0'' L} + \frac{1}{2\pi\alpha^2} \frac{d\beta'}{\beta_0''} \qquad (16)$$

のとき最大となり，その値をD_{max}とするとD_{max}は次式のようになる。

$$D_{max} = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{(\beta_0'' L)^2/(\alpha_0'' L + 4\pi^2\alpha^2) + \alpha_0'' L}} \qquad (17)$$

また，このような条件が成り立つときの出力パルスの包絡線のピーク値 $|E_0|_p^2$ およびパルス幅 b は次式のようになる。

$$|E_0|_p^2 = 4\pi\sqrt{\pi}\,a\,\frac{\beta_0''L}{(\beta_0''L)^2+\alpha_0'L(\alpha_0''L+4\pi^2a^2)} \times \exp\left[-2\alpha_0 L+(\alpha_0'L)^2\frac{(\beta_0''L)^2+(\alpha_0''L+4\pi^2a^2)^2}{\{(\beta_0''L)^2+\alpha_0'''L(\alpha_0''L+4\pi^2a^2)\}(\alpha_0''L+4\pi^2a^2)}\right] \tag{18}$$

$$b=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\alpha_0''L+\frac{(\beta_0''L)^2}{\alpha_0''L+4\pi^2a^2}} \tag{19}$$

ところで，K が式(16)で与えられる値をとるとき，圧縮率 D は最大となるが，この最大圧縮率が1より大きくなるための条件，すなわち，出力パルスのパルス幅が入力パルスのパルス幅よりも狭くなる条件を求めると，

$$D_{max}=\frac{2\pi a}{\sqrt{(\beta_0''L)^2/(\alpha_0''L+4\pi^2a^2)+\alpha_0''L}}\geqq 1$$

より，

$$a\geqq\frac{\{(\alpha_0''L)^2+(\beta_0''L)^2\}^{\frac{1}{4}}}{2\pi} \tag{20}$$

となる。したがって，入力パルスのパルス幅が式(20)の右辺の値よりも広くないとパルス圧縮が起らないことになる。逆に入力パルス幅が式(20)を満たすような値であれば，パルスはファイバを伝搬することにより圧縮され，入力パルスより広がることがない。すなわち，このような場合には，パルスの分散によってパルスレイトが制限を受けることがなくなる。

また，入力パルス幅 a が式(20)の右辺に等しいときは，出力パルス幅は入力パルス幅に等しく，しかも入力パルス幅を最も狭くすることができる。したがって，入力パルスの重なりが許されない場合には，この条件が最大のパルスレイトを与えることになる。

3. パルスレイト

前章の結果より，光ファイバの入力パルスとしてチャープパルスを用いた場合の出力パルスが求められ，最大圧縮率を与える K の値，およびその時の出力パルスのパルス幅，最大振幅などが明らかとなった。ここでは，その結果を用いて，光ファイバの入力パルスとしてレーザ光パルスをそのまま用いた場合と，チャープパルスを用いた場合のそれぞれの場合についてパルスレイトを求め，チャープパルスを用いた場合にはパルスレイトを向上させることが可能であることを明らかにする。また，数値計算例においては，基本モード域で光ファイバの分散を極めて小さくできるとして提案されている，低屈折率層を内部に有する多層誘電体線路についてもパルスレイトを求め，比較検討を行っている。

まず，入力パルスとしてレーザ光パルスをそのまま用いた場合のパルスレイトは Kapron らにより[11]以下のように与えられる。すなわち，入力パルス $E_i(t)$ を

$$E_i(t) = (a\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{2\pi j f_0 t} \tag{21}$$

と仮定したとき，式(12)で与えられる伝達関数 $\Gamma(f)$ を用いて出力パルスの包絡線 $|E_0(t)|^2$ は次式で与えられる。

$$|E_0(t)|^2 = (b\sqrt{\pi})^{-1}\left(1+\frac{\alpha_2''L}{4\pi^2a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-2\alpha_0 L + \frac{(\alpha_1'L)^2}{2(\alpha_2''L+4\pi^2a^2)}\right] \times \exp\left[-(t-w)^2/b^2\right] \tag{22}$$

ただし，

$$b=\left[a^2+\frac{\alpha_0''L}{4\pi^2}+\frac{(\beta_0'L)^2}{4\pi^2(\alpha_0''L+4\pi^2a^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

$$w=\frac{\beta_0'L}{2\pi}-\frac{\alpha_0L^2\cdot\beta_0''}{\pi(\alpha_0''L+4\pi^2a^2)}$$

したがって，出力パルス幅はaからbに広がり，隣接する出力パルスが重なる可能性がある。いま，この重なりが図3に示すように最大振幅のδ倍（$0<\delta<1$）まで許されるとしたとき，出力パルス幅bを最小とする最適の入力パルス幅が存在し，このパルス幅の入力パルスを用いたとき，パルスレイトが最大となる。最適の入力パルス幅をa_m，最小の出力パルス幅をb_{min}，最大パルスレイトをN_{max}（bits/sec）とすると，それぞれは次のように与えられる。ただし，吸収による分散を$\alpha_0''=0$と仮定する。

$$a_m=\frac{\sqrt{\beta_0''L}}{2\pi} \tag{24}$$

$$b_{min}=\sqrt{2}\,a_m \tag{25}$$

$$N_{max}=\frac{\pi}{\sqrt{2\beta_0''L\,|\log_e\delta|}}\quad \text{bits/sec} \tag{26}$$

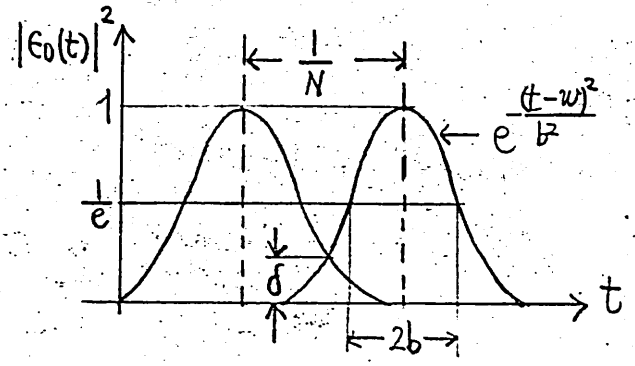


図3．出力パルスの重なりδとパルスレイトの関係

一方，入力パルスとしてチャープパルスを用いた場合，出力パルス幅は式(19)で与えられ，入力パルス幅aが式(20)を満たす場合には出力パルス幅は常に入力パルス幅より狭くなる。また，式(19)から明らかなように，出力パルス幅bは入力パルス幅aが大きいほど小さくなる。したがって，入力パルスの重なりが許される場合には，入力パルス幅を大きくするほどパルスレイトが向上する。実際には，レーザ光パルスの繰り返し周波数とパルス幅の積が1より十分小さくなければ，直線的な周波数変調が行えないことにより，入力パルス幅もその条件を満足する範囲内でなければならない。もし，入力パルスの重なりが許されない場合には，前章で述べたように，入力パルス幅が式(20)の右辺の値に等しいとき，パルスレイトは最大になる。ここでは，入力パルスとしてレーザ光パルスをそのまま用いた場合のパルスレイトと比較するために，入力パルスの重なりが許されているものとする。入力パルス幅が式(20)の右辺に等しいとき，すなわち

$$a=\frac{\{(\alpha_0''L)^2+(\beta_0''L)^2\}^{\frac{1}{4}}}{2\pi} \tag{27}$$

のとき，パルスレイトは次式で与えられる。

$$N=\frac{\pi}{\sqrt{(\alpha_0''^2+\beta_0''^2)^{\frac{1}{2}}L\,|\log_e\delta|}} \tag{28}$$

もし，$\alpha_0''=0$と仮定すると，入力パルス幅と出力パルス幅が等しくなる場合の入力パルス幅a_c，パルスレイトN_cは次式のようになる。

$$a_c=\frac{\sqrt{\beta_0''L}}{2\pi} \tag{29}$$

$$N_C = \frac{\pi}{\sqrt{\beta_0'' L |\log_e \delta|}} \quad \text{bits/sec} \qquad (30)$$

また，最大圧縮率を与えるKの値は式(16)より次式で与えられる。

$$K = \frac{2\pi}{\beta_0'' L} \qquad (31)$$

なお，$\beta_0'' = 0$と仮定したとき，最大圧縮の条件が満たされている場合の出力パルス幅bは，式(19)より次のようになる。

$$b = \frac{\beta_0'' L}{4\pi^2 a} \qquad (32)$$

さて，入力パルス幅aを式(27)あるいは(29)の値よりも大きくすれば，すでに述べたように，パルスレイトを式(28)あるいは(30)の値よりも大きくできる。例えば，aの値をa_cのm倍にすれば，パルスレイトはN_cのm倍になる。ところで，式(24)および(29)より明らかなように，チャープパルスを用いる場合に，圧縮率が1になるように入力パルス幅を定めると，これはa_mに等しくなり，入力パルス幅が一致することになる。一方，式(26)および(29)よりN_cはN_{max}の$\sqrt{2}$倍になっている。すなわち，チャープパルスとレーザ光パルスのパルス幅が等しくしても，チャープパルスを用いた場合のパルスレイトは，レーザ光パルスをそのまゝ用いた場合の最大パルスレイトよりも，少くとも$\sqrt{2}$倍になる。もし，チャープパルスの入力パルス幅をa_cのm倍にすれば，パルスレイトはN_{max}の$\sqrt{2}m$倍になる。また，式(29)で与えられるパルス幅a_cの$\sqrt{2}m^2$倍のパルス幅をもったチャープパルスを用いて，$2m^2L$の距離を伝送させるとき，パルスレイトNは式(26)で与えられるN_{max}に等しくなる。したがって，このようなパルス幅をもったチャープパルスを用いれば，レーザ光パルスをそのまゝ用いた場合の最大パルスレイトと等しいパルスレイ

トで伝送できる距離は $2m^2$ 倍に延ばすことができる。$m=1$ の場合は，出力パルス幅が入力パルス幅に等しくなる場合であり，この場合は N_{max} に等しいパルスレイトで伝送できる距離は，レーザ光パルスをそのまゝ用いる場合の2倍になる。

〔数値計算例〕

これまでに明らかとなった事柄を具体的に明らかにするために，ここでは，$\alpha_0''=0$ と仮定したときのパルスレイト N_{max} および N_c を数値計算により実際に求め，チャープパルスを用いた場合にパルスレイトが改善されることを示す。なお，分散が極めて小さいファイバとして提案されている低屈折率層を内部に有する3層誘電体スラブ線路[1]についても式(26)で表わされる最大パルスレイトを求め，コア・クラッド型二層ファイバの場合およびコア・クラッド型二層ファイバの入力パルスとしてチャープパルスを用いた場合と比較検討する。なお，伝送線路は図4に示すように，スラブ構造とする。

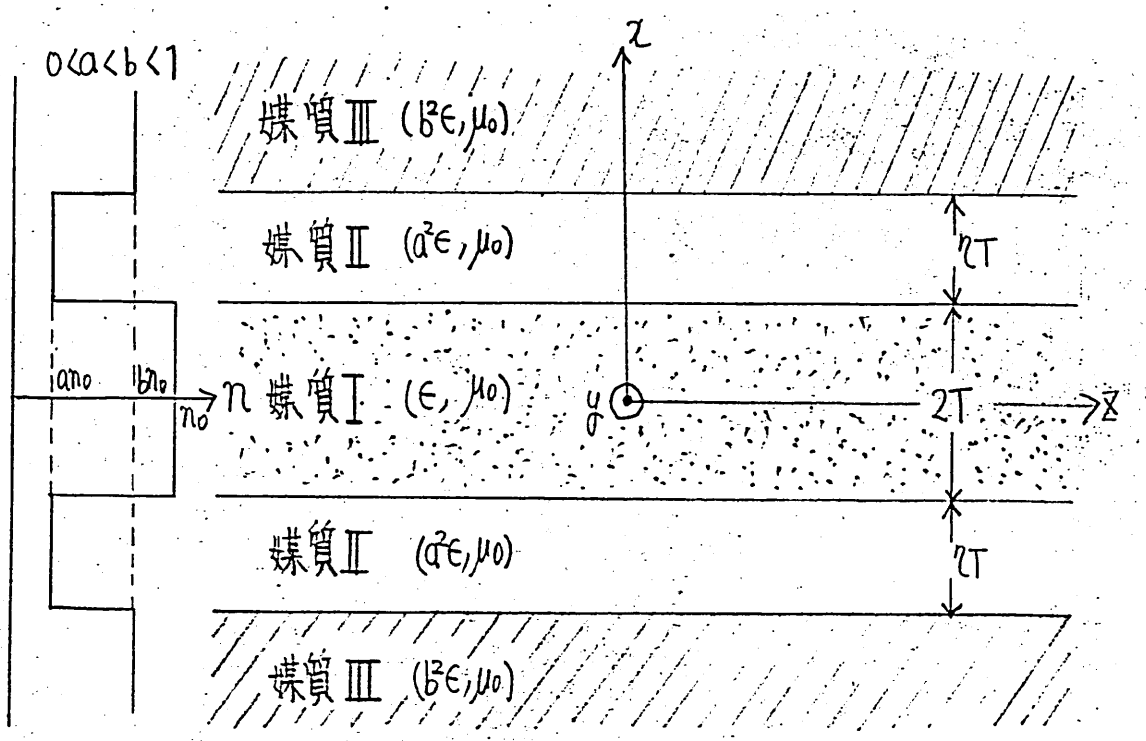


図4. W型スラブ伝送路

z方向の伝搬定数を $j\beta$, x方向の各層の伝搬定数を媒質1から順に jk, γ, ρ とすると，次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\beta^2-\rho^2 &= b^2 n_0^2 k_0^2 \\ \beta^2-\gamma^2 &= a^2 n_0^2 k_0^2 \\ \beta^2+k^2 &= n_0^2 k_0^2\end{aligned} \tag{33}$$

ただし，

$$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

ここで，

$$u = kT, \quad w = \rho T \tag{34}$$

$$v = \sqrt{1-b^2}\, n_0 k_0 T \tag{35}$$

とすると，式(33)より

$$u^2+w^2=v^2 \tag{36}$$

が成り立つ。また，TMの偶モードに対しては，次の特性方程式が成り立つ。

$$u\tan u = \frac{1}{a^2}\sqrt{Bu^2+Cw^2}\,\frac{a^2 w + b^2\sqrt{Bu^2+Cw^2}\tanh\eta\sqrt{Bu^2+Cw^2}}{b^2\sqrt{Bu^2+Cw^2}+a^2 w\tanh\eta\sqrt{Bu^2+Cw^2}} \tag{37}$$

ただし，

$$B=\frac{b^2-a^2}{1-b^2}, \quad C=\frac{1-a^2}{1-b^2}$$

式(36)および(37)より，vのある値に対してu, wが求まり式(33)に代入することによりβが求まる。式(35)より明らかなように，vは角周波数ωに比例するから，結局，ωに対す

るβの値が求まり，分散曲線が得られる。β_0', β_0''はこのようにして求めた分散曲線を数値微分することにより求まる。なお，コア・クラッド型二層ファイバに対応する対称三層スラブについては，式(37)において$\eta=0$とおけばよい。また，βの固有値を求めるにあたって，各媒質の比誘電率の周波数依存性が同じ程度であり，モードのパワーも十分コア域内に閉じこめられているものとする。図6および7に対称三層スラブおよび低屈折率層を内部に有する多層誘電体スラブ線路（以後，これを提案者に従ってW型伝送路と呼ぶ）について式(26)で与えられる最大パルスレイトN_{max}を，対称三層スラブの入力パルスとしてチャープパルスを用い，出力パルス幅が入力パルス幅に等しい場合のパルスレイトN_c（式(26)で与えられる）を示す。図6は伝送距離Lが5kmの場合であり，図7はLが10kmの場合である。両図から明らかなように，スラブの厚さを大きくした場合には，対称三層スラブでは基本モード域が狭くなり，パルスレイトも低いのに対し，W型では基本モード域が広帯域であり，この領域で分散がきわめて小さくなりパルスレイトも大きくなるなどの望ましい特性が見られる。なお，図に示されている記号Δは$\Delta=-10\log_{10}\delta$の意味である。図7および8は，対称三層スラブ線路においてスラブの厚さを図5および6の場合の半分にした場合のN_{max}およびN_cを示している。図7は$L=5$km，図8は$L=10$kmの場合である。また，図9は図7および8の場合に，最大圧縮を与えるKの値を示している。図9の実線には左側の座標が，破線には右側の座標が対応している。図10は，W型スラブ線路の最大パルスレイトN_{max}を示している。図7，8および10より，対称三層スラブにおいて，スラブの厚さを小さくすれば基本モード域の周波数帯域も広くなり，その範囲内でW型線路の最大パルスレイトを上まわるパルスレイトも存在することがわかる。また，チャープパルスを用いた場合のパルスレイトN_cは常に対称三層スラブのN_{max}の$\sqrt{2}$倍になっていることが明らかである。つぎに，図11および12は，ある周波数において，最大パルスレイトN_{max}およびN_cと伝送距

離Lとの関係を示している。図11はレーザ光の波長が1.35μ，図12は0.94μの場合である。両図より，チャープパルスを用いた場合には，対称三層スラブの最大パルスレイトNmaxと同じパルスレイトを伝送できる距離は，レーザ光パルスをそのまま入力パルスとして用いる場合の2倍の距離になることが確められる。また，図11においては，W型スラブ線路にレーザ光パルスをそのまゝ用いた場合が最もパルスレイトが低くなっており，ファイバのコアの太さを大きくできるものの，パルスレイトについては常に最良であるとは言えないことがわかる。

4. 出力パルスの比較

前章では，伝送路のパルスレイトについて考察し，チャープパルスを用いる通信方式がパルスレイトに関してすぐれていることが明らかとなった。ここでは，入力パルスとしてチャープパルスを用いた場合と，レーザ光パルスをそのまま用いた場合の出力パルスを比較し，チャープパルスを用いる通信方式の有利な点をさらに明らかにする。まず，光ファイバを伝搬してきたパルスを受信装置で検出する際，受信装置の雑音による誤り発生に関して問題となるのは，パルスの電力のピーク値である。そこで，入力パルスとしてチャープパルスを用いた場合と，レーザ光パルスをそのまゝ用いた場合の出力パルスの電力のピーク値を比較し，受信装置の雑音に対する強さを比較する。いま，チャープパルスに対する出力パルスの電力のピーク値をS_C，レーザ光パルスをそのまま用いたときの出力パルスのピーク値をS_0とすると，ファイバの吸収損失がないと仮定したときには，式(18)および(22)よりS_CおよびS_0は次式で与えられる。

$$S_C = \frac{4\pi\sqrt{\pi a}}{\beta''L} \tag{35}$$

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4\pi^2 a}{\sqrt{(\beta''_0 L)^2 + 16\pi^4 a^4}} \qquad (39)$$

入力パルス幅として，式(24)または(29)で与えられる値を用いると，出力パルスの電力のピーク値の比は次のようになる。

$$\frac{S_c}{S_0} = \sqrt{2} \qquad (40)$$

したがって，入力パルスとしてチャープパルスを用いると，出力パルスのピーク電力はレーザ光パルスをそのまま用いる場合の$\sqrt{2}$倍となり，受信装置における信号対雑音比も$\sqrt{2}$倍になる。また，この場合，パルスレイトもチャープパルスを用いる場合の方が$\sqrt{2}$倍になる。さらに，チャープパルスのパルス幅を式(29)で与えられる値のm倍にすると，出力パルスのピーク電力はチャープパルスを用いる場合の方がレーザ光パルスをそのまま用いる場合の$\sqrt{2m}$倍となり，パルスレイトは$\sqrt{2m}$倍になる。結局，チャープパルスを用いると，受信装置における信号対雑音比も大きくなり，パルスレイトも増大する。実際には，光ファイバの吸収損失による影響があるが，この場合でも，チャープパルスを用いる場合は，出力パルスのエネルギーの集中度はレーザー光パルスをそのまま用いる場合よりずっと高いので，受信装置における信号対雑音比もチャープパルスを用いる方が大きくなると期待できる。

最後に，チャープパルスを用いた場合には，入力パルスが重なっていても，パルス圧縮により出力パルスの重なりを避けることができる。しかしレーザ光パルスをそのまま用いる場合にはそのようなことは不可能である。仮に，入力パルスの重なりが許されない場合でも，チャープパルスを用いる場合には，入力パルスが重ならない限り出力パルスも重なることがない。したがって，受信の際に波形等化をする必要がなく，出力パルスの重なりによる信号検出の際の誤りの発生も事実上なくなる。

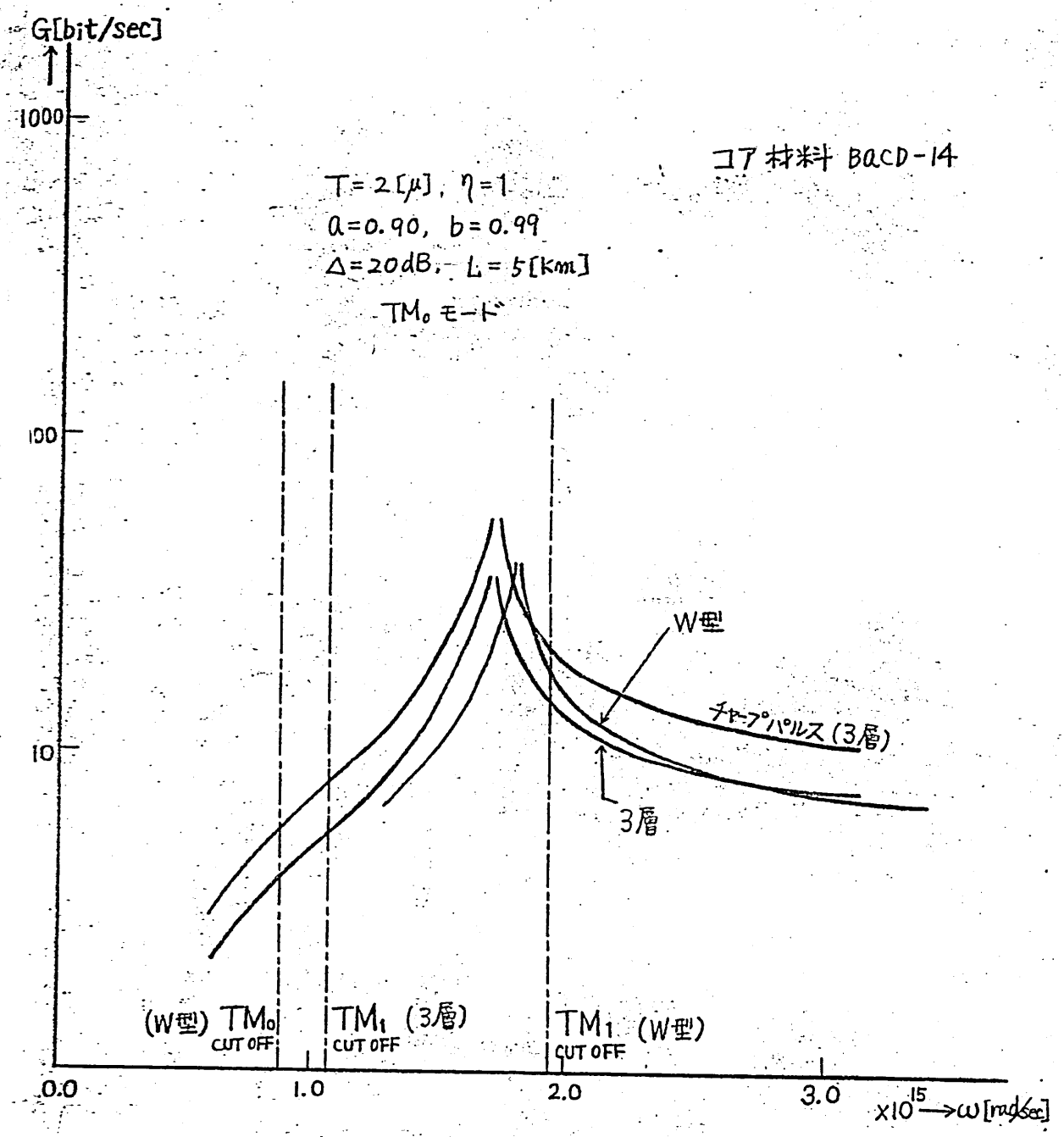


図5．対称三層スラブ線路およびW型線路の最大パルスレイトおよび対称三層スラブにチャープパルスを用い圧縮率を1としたときのパルスレイト(L=5kmの場合)

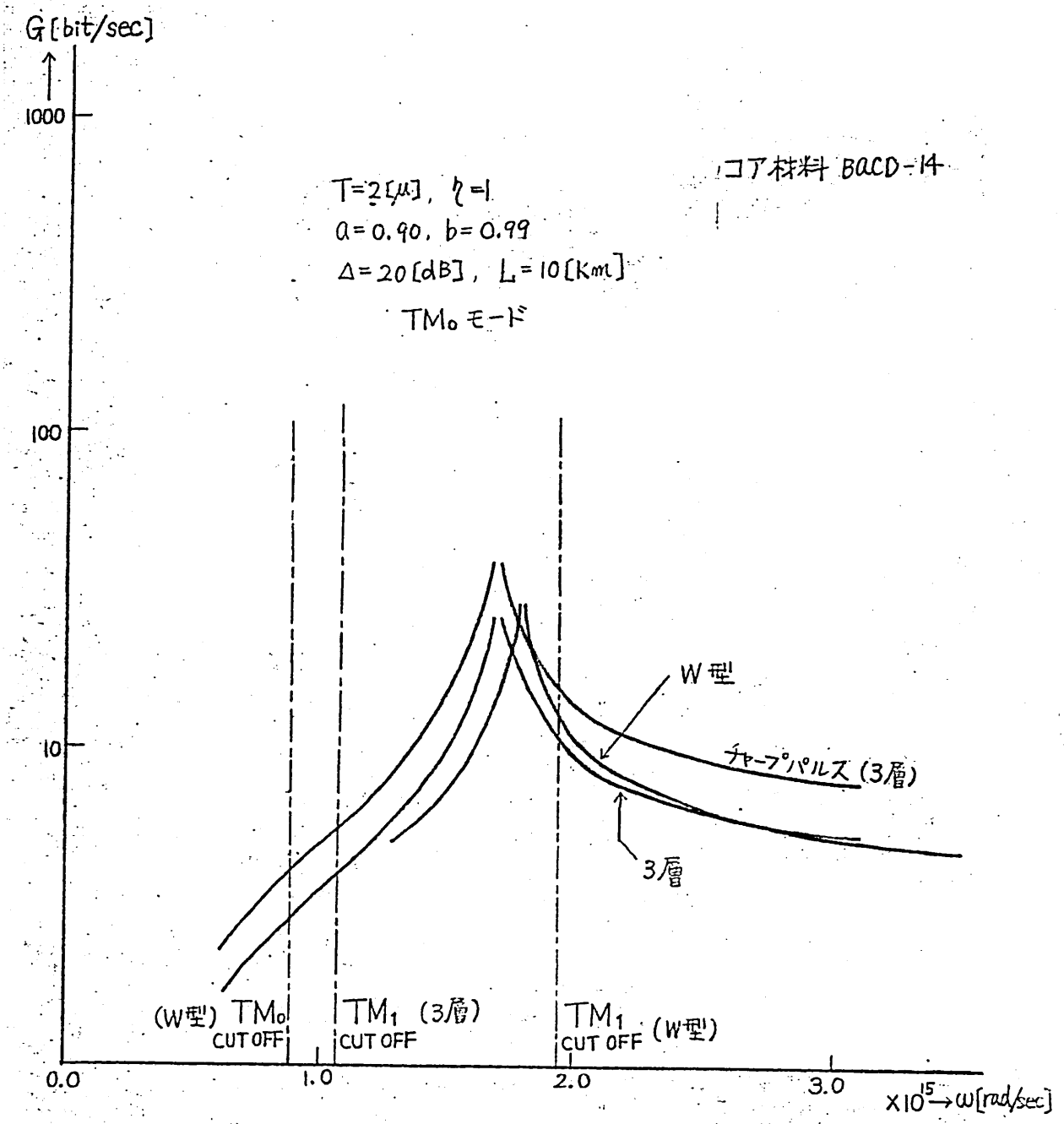


図6. 対称三層スラブ線路およびW型線路の最大パルスレイトおよび,対称三層スラブにチャープパルスを用い圧縮率を1としたときのパルスレイト (L=10kmの場合)

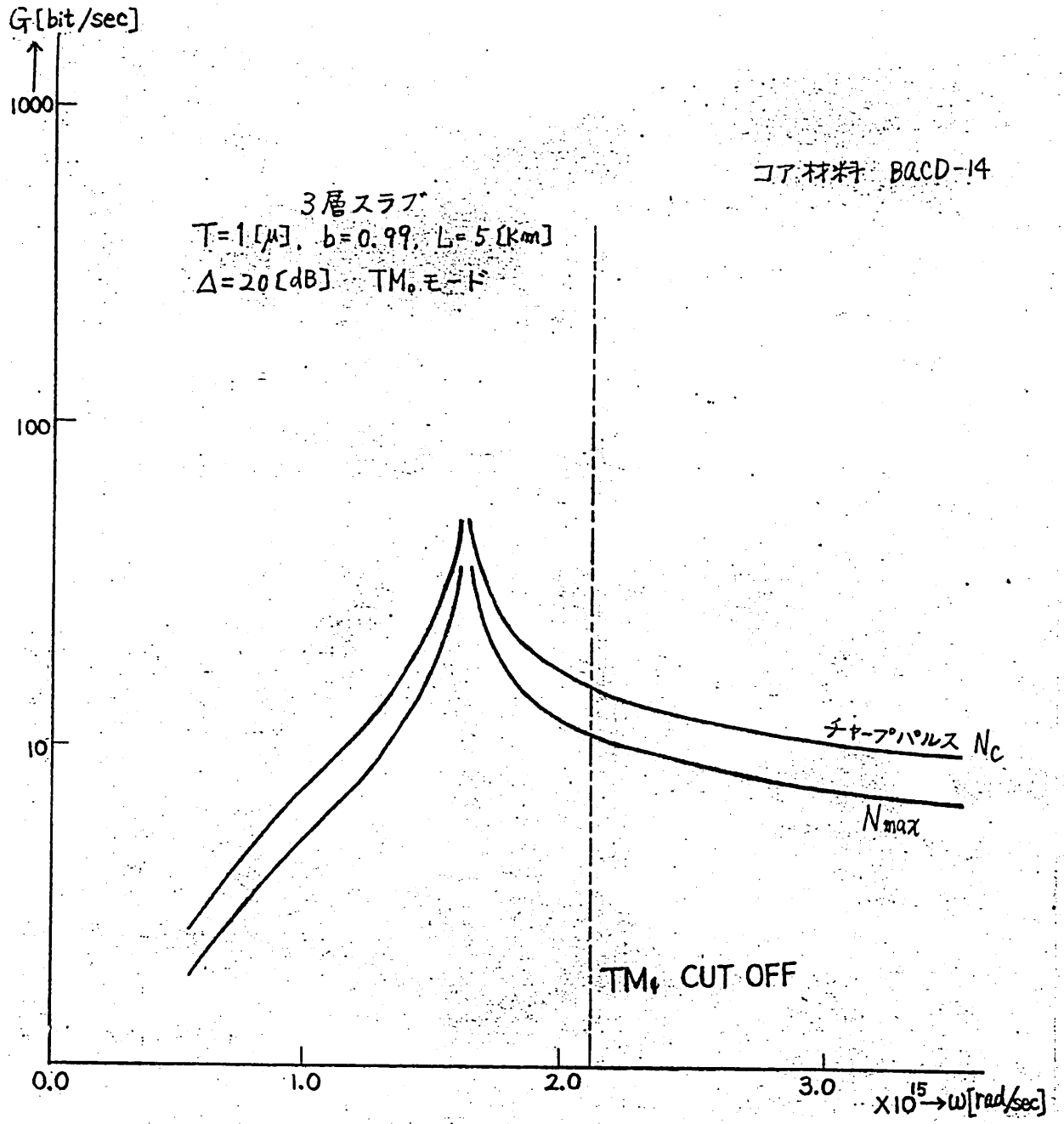


図7. 対称三層スラブにおける最大パルスレイト N_{max}
および チャープパルスを用いた場合のパルスレイト N_C
($L=5$ km)

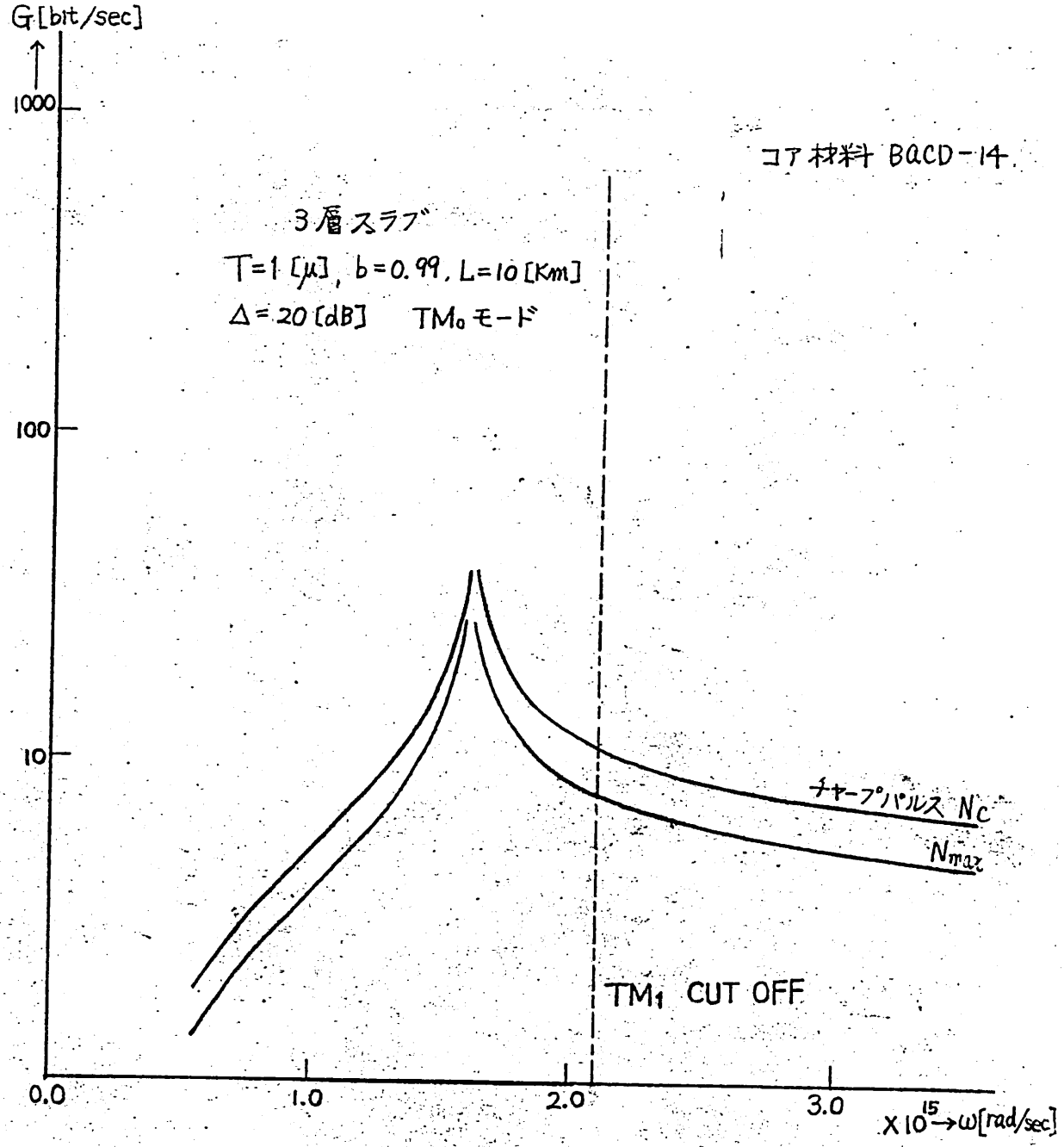


図8. 対称三層スラブにおける最大パルスレイト Nmax および チャープパルスを用いた場合のパルスレイト Nc (L=10Km).

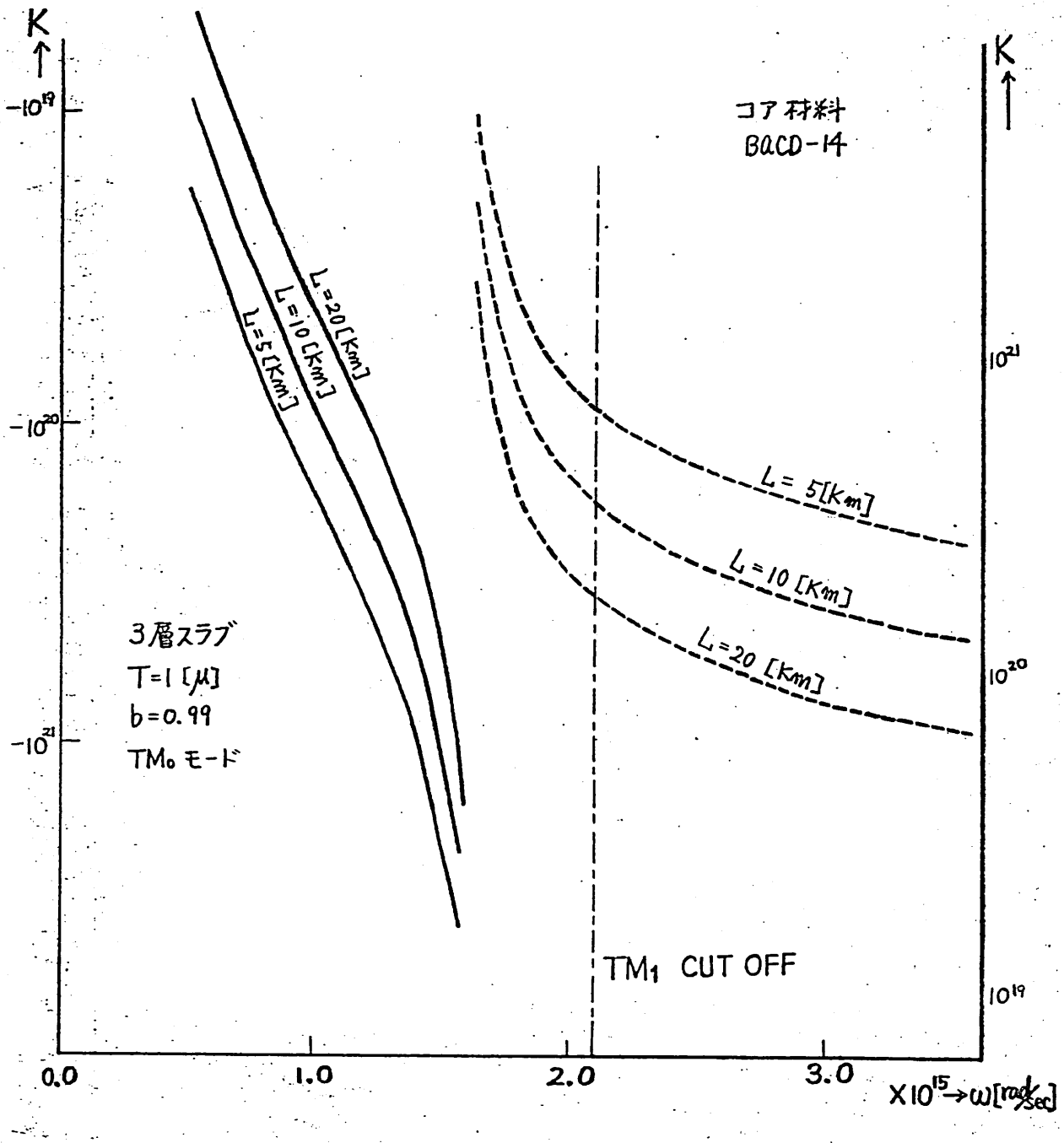


図9. 最大のパルス圧縮を与えるKの値
(左側の縦座標は図の実線に,右側の縦座標は図の破線に対応する。)

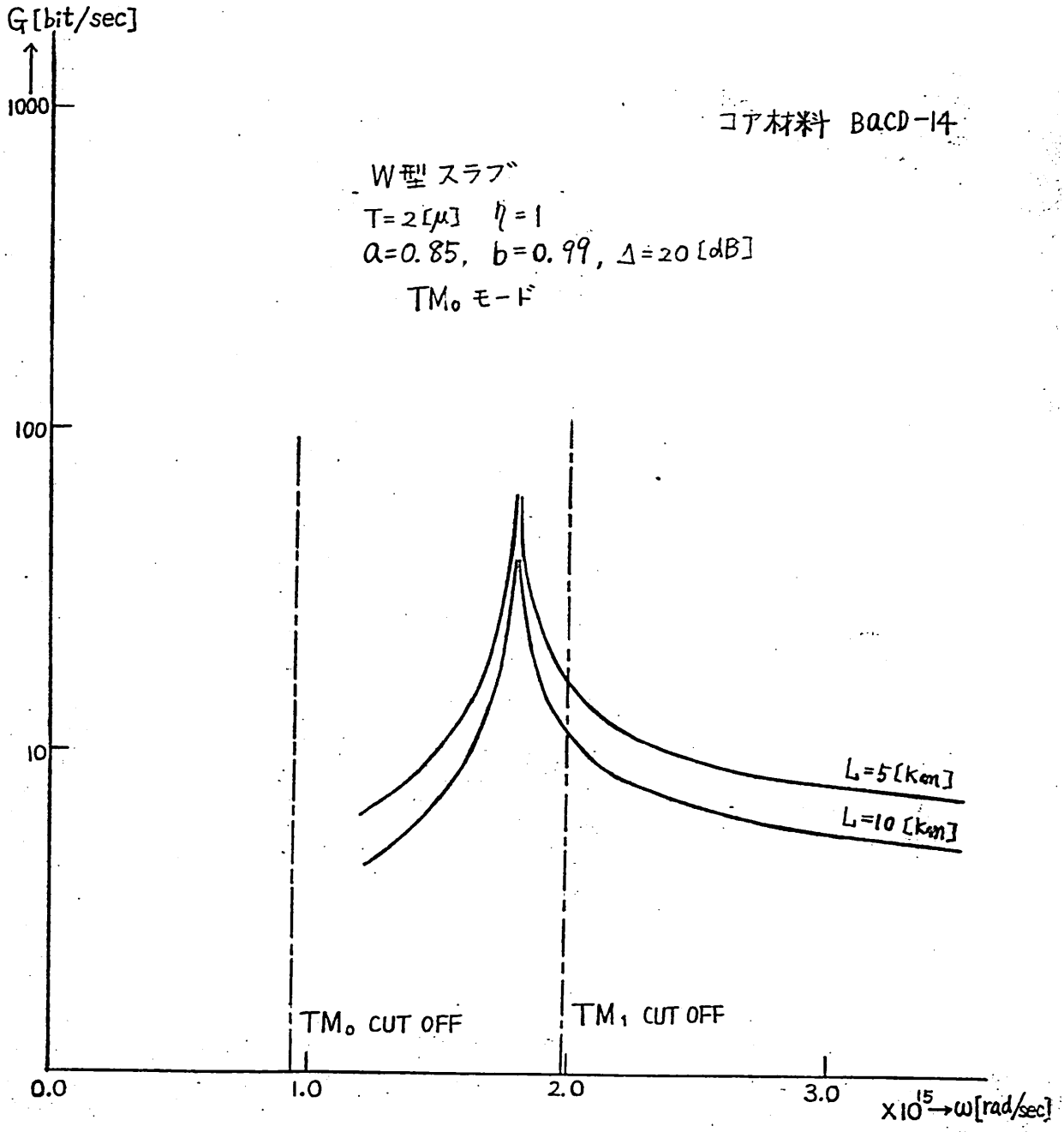


図10. W型スラブ線路による最大パルスレイト Nmax

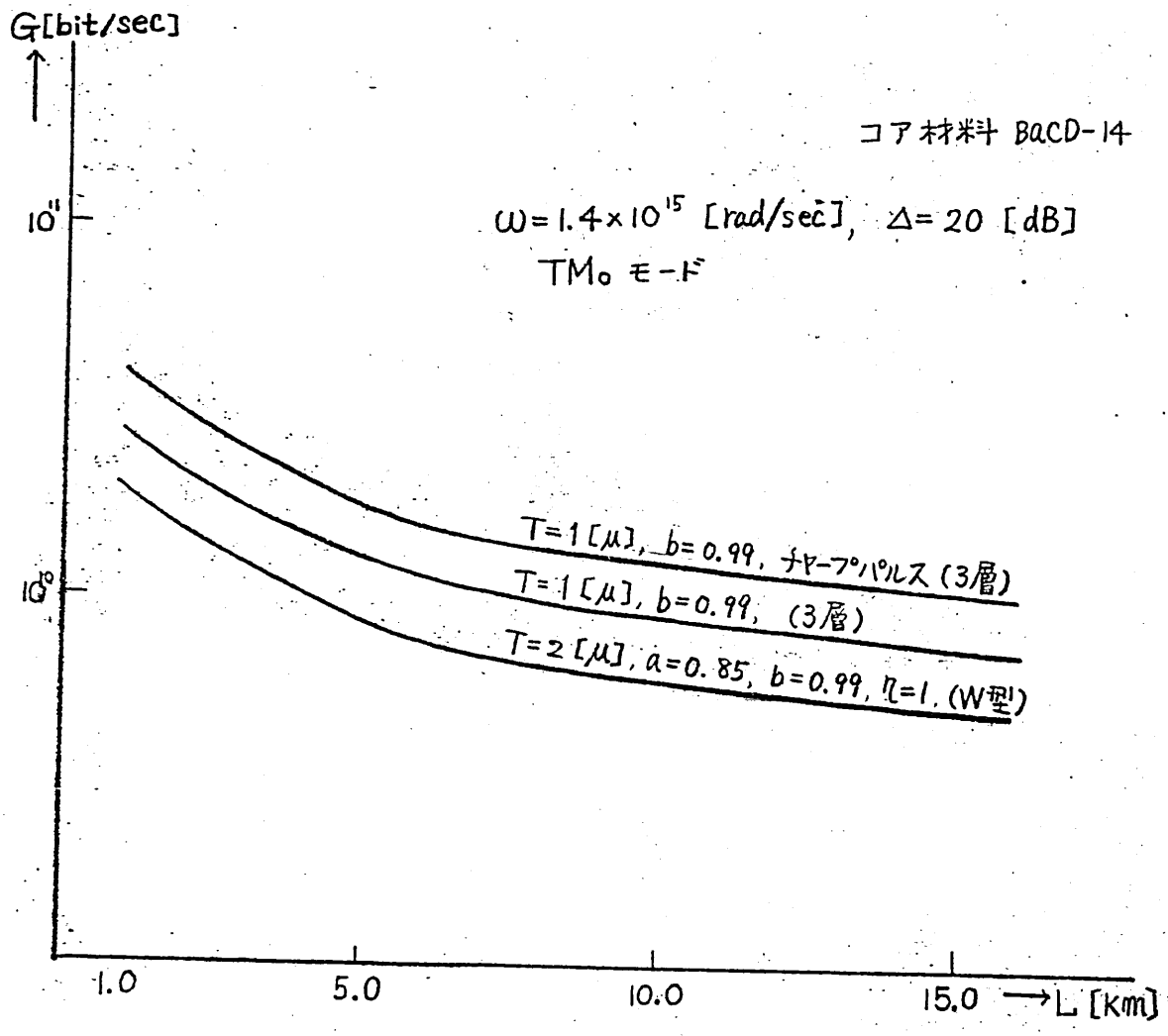


図11. 最大パルスレイト N_{max} および チャープパルスを用いた場合のパルスレイト N_C と伝送距離 L との関係 ($\lambda = 1.35\mu$ の場合)

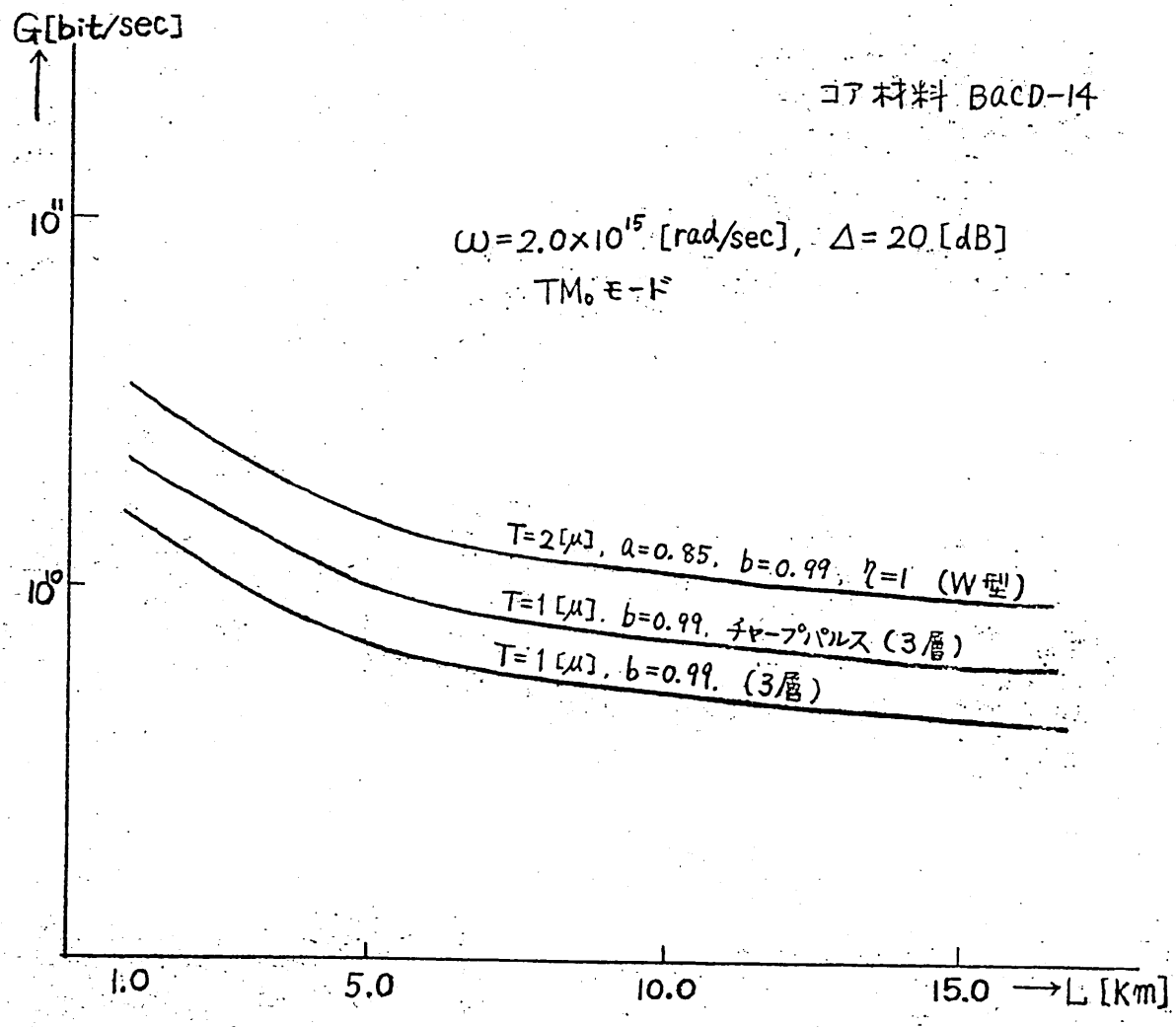


図12. 最大パルスレイト N_{max} およびチャープパルスを用いた場合のパルスレイト N_c と伝送距離 L との関係 ($\lambda = 0.94\mu$ の場合)

5. むすび

チャープパルスを光ファイバ通信に用いることにより，光ファイバの分散性を利用してパルス圧縮を行い，パルスレイトが大幅に改善されるなど，種々の望ましい結果が得られた。これをいま一度整理すると，次のようになる。1. 光ファイバの分散性によるパルスレイトの制限を大幅に緩和できる。2. パルスレイトを落さずに出力パルスの重なりをなくすことができるため，受信の際に波形等化を行う必要がなく，受信装置の構造を簡単化でき，価格の面で有利である。また，出力パルスの重なりによる信号検出時の誤り発生もなくなる。3. ファイバの損失による影響についても，パルス圧縮により出力パルスのエネルギーの集中度を高くでき，受信装置の雑音に対しても強くできる。4. パルスレイトを下げることなく伝送距離を長くすることができ，無中継の長距離伝送に有利である。以上の様にチャープパルスを光ファイバ通信に用いることは種々の利点があり，コア・クラッド型シングルモードファイバの製作技術，接続時の軸合せ等の問題が解決されれば，有望と思われる。

謝辞

日頃ご指導いただく大阪大学工学部熊谷信昭教授に深謝する。また，本研究を行うにあたって有意義な御助言をいただいた堤 誠講師および常々ご討論いただく熊谷研究室の諸氏に深謝する。なお，本研究においてファイバのコア材の光学特性に関する資料は，東北大学電気通信研究所の大高洋一氏に提供していただいた。ここに，心より感謝する次第である。

文　献

(1) 大高洋一，川上彰二郎，西田茂穂；"低屈折率層を内部に有する多層誘電体スラブ光線路の伝送特性"，信学誌 Vol.57-C, NO.6, PP187～194, June, 1974.

(2) 小山正樹，R.L. Gallawa；"光ファイバ伝送方式の経済性モデルについて"，光量子エレクトロニクス研資 (1974-05).

(3) J.R. Klauder, A.C. Price, S. Darlington, and W.J. Albersheim, "The theory and design of chirp radars," Bell Sys. Tech. J., Vol. 39, P.745, 1960.

(4) E.B. Treacy, "Compresscon of picosend light pulses," Physics Letters, Vol. 28A, No.1, Oct. 1968

(5) E.B. Treacy, "Optical Pulse Compresscon with diffracticon gratings," IEEE Trans. QE, Vol QE-5, No.9, Sept., 1969.

(6) M.A. Duguay, and J.W. Hansen, "Compresscon of pulses from a mode-locked He-Ne laser," Appl. Phys. Lett. Vol.14, No.1 Jan., 1969.

(7) J.A. Gcordmacne, M.A. Duguay, and J.W. Hansen, "Compresscon of optical pulses," IEEE Trans. QE, Vol.QE-4, No.5, May, 1968.

(8) M.A. Duguay, and J.W. Hansen, "Optical frequency of a mode-locked laser beam," IEEE Trans. QE, Vol. QE-4, No.8 Aug. 1968.

(9) C.G.B. Garrett, and M.A. Duguay, "Theory of the optical frequency translator", Appl. Phys. Lett. Vol.9, No.10, Nov. 1966.

(10) C.F. Buhrer, D. Baird, and E.M. Conwell, "Optical frequency shifting by electro-optic effect," Appl. Phys. Lett. Vol.1, No.2, Oct, 1962.

(11) F.P. Kapron, and D.B. Keck, "Pulse transmission through a dielectric optical waveguide", Appl. Optics, Vol.10, No.7, July, 1971.

(12) HOYA OPTICAL GLASS (株)保谷硝子 製品の光学特性資料

輻射科学研究会資料

多層誘電体線路の回路論的一解析法

岸岡　清
小南　昌信
森　静雄
六島　克
(大阪府立大学・工学部)

1974年10月4日

まえがき

近年 光線路や光IC回路の開発に関連して誘電体光線路の研究が数多く行なわれている。この場合通常の等方性単一誘電体線路の代りにその誘電体を多層構造にすることにより特性を改善したり，従来の構造では得られない特性を持った線路の構成が考えられている。例えば，線路の内部に横方向にリアクティブに減衰する領域を設けることにより伝搬特性を改善したり，[1] クラッド形円形線路の代りに同軸円筒状線路を用いるとその直径を大きくなし得て接続の問題に有利なこと等が述べられている。[2] また三線路以上の結合の問題においては二線路の場合には見られない結合特性が表われること等も報告されている。[3] 他方線路に異方性媒質を用いるときは，そのモード特性に興味ある現象が現われ種々の回路素子の構成が可能なことから，この線路の電磁波モードの詳細な解析もなされている。[4]

何れにしても 等方性，異方性を問わず多層構造を用いればそれだけパラメータの数が増しえることから回路構成上自由度が増すが解析は必然的に複雑になってくる。

そこで本報告では境界面内に平行な方向に光軸を持つ平板および円形の一軸異方性媒質よりなる多層線路の一解析法について述べる。この場合，伝送方向に垂直な方向（横方向）の伝搬に対応した等価伝送線路表示を導いている。多層の場合は各層の等価回路の縦続接続の問題として簡単な回路計算で取扱うことができ，回路全体の横方向の共振条件より特性方程式を導き，等方性の場合も含めて伝搬定数および電磁界分布の数値計数結果を示す。

[I] 多層平板誘電体線路 (5)

1. 電磁界の導出

(図1)に示すように光軸が境界面に平行である多層構造の一軸異方性誘電体線路について解析する。

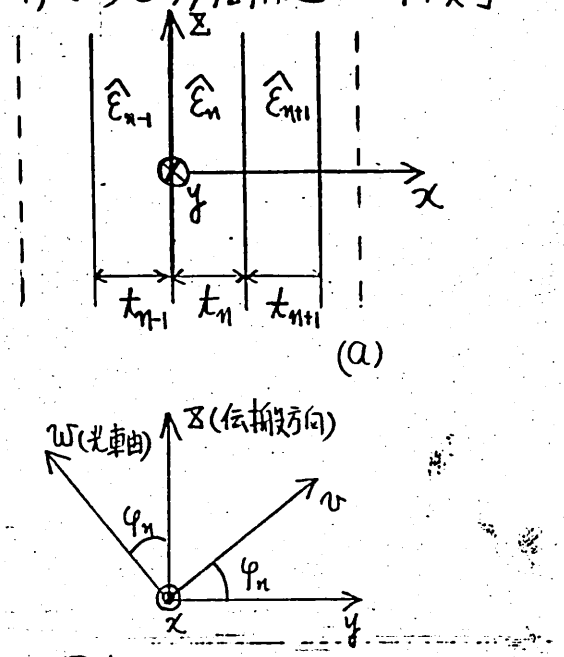


図1

各層において光軸をw軸にとり，光軸と伝搬方向z軸とのなす角をφ_nとする。各層の誘電テンソルは，光軸を含む直角座標系x-y-wで対角化されていて，次の式で表わせる。

$$\hat{\varepsilon}_n = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \kappa_{2n} & 0 & \\ 0 & \kappa_{2n} & \\ & & \kappa_m \end{bmatrix} \qquad (1-1)$$

一般に一軸性誘電体内の電磁界は光軸方向に電界成分を持たない常波と光軸方向にも電界成分をもつ異常波に分離できる。常波は，光軸方向にのみ成分をもつ磁気型ヘルツ・ベクトル，$\Pi_h = \Pi_h a_w$で，異常波は光軸方向のみに成分をもつ電気型ヘルツ・ベクトル，$\Pi_e = \Pi_e a_w$で次のように表わされる。(6)

常波成分

$$\mathbf{E}_h = -j\omega\mu_0 \nabla \times \Pi_h$$
$$\mathbf{H}_h = \nabla \times \nabla \times \Pi_h \qquad (1-2a)$$

異常波成分

$$\mathbf{E}_e = k_0^2 \Pi_e + k_z^{-1} \nabla \nabla \cdot \Pi_e$$
$$\mathbf{H}_e = j\omega\varepsilon_0 \nabla \times \Pi_e \qquad (1-2b)$$

ここに，$\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_e$等はそれぞれ常波及び異常波成分を示し，Π_h,

Π_eは次の微分方程式を満たしている。

$$\nabla^2 \Pi_h + k_z^2 \Pi_h = 0 \qquad (1-3)$$

$$k_z^2 = \chi_z \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \chi_z k_0^2$$

$$\nabla^2 \Pi_e + k_1^2 + \frac{\chi_1 - \chi_z}{\chi_z} \frac{\partial \Pi_e}{\partial w} = 0 \qquad (1-4)$$

$$k_1^2 = \chi_1 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \chi_1 k_0^2$$

今 v—w面内での位相定数がβ_v, β_wで表わされるとき,

$$\Pi_h = A e^{-j(\beta_v v + \beta_w w)} \cdot f_h(x)$$

$$\Pi_e = B e^{-j(\beta_v v + \beta_w w)} \cdot f_e(x) \qquad (1-5)$$

なる形の電磁界について考える。$\partial/\partial y = 0$ 即ち一様な電磁界がz方向へ伝搬しているときは、z方向の位相定数β_zとβ_w, β_v, の間には式(1−6)の関係がある。

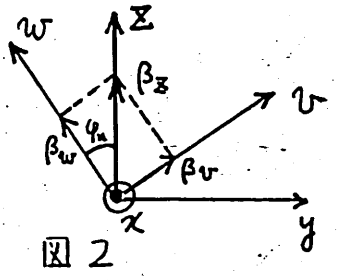


図 2

$$\beta_v = \beta_z \sin\varphi_n, \quad \beta_w = \beta_z \cos\varphi_n$$

$\partial/\partial v = -j\beta_v$, $\partial/\partial w = -j\beta_w$ を考慮して式(1−2)(1−3), 及び(1−5)より常波, 異常波に属する電磁界を求めると以下のようになる。

常波成分

$$H_{hw} = \chi_h^2 \Pi_h$$

$$E_{hx} = -\frac{\omega \mu_0 \beta_v}{\chi_h^2} H_{hw} \qquad H_{hx} = -\frac{j\beta_w}{\chi_h^2} \frac{\partial H_{hw}}{\partial x} \qquad (1-6a)$$

$$E_{hv} = j \frac{\omega \mu_0}{\chi_h^2} \frac{\partial H_{hw}}{\partial x} \qquad H_{hv} = -\frac{\beta_w \beta_v}{\chi_h^2} H_{hw}$$

ただしH_{hw}は

$$\frac{\partial^2 H_{hw}}{\partial x^2} + \beta_{hx}^2 H_{hw} = 0 \qquad (1-6b)$$

の解であり $k_z^2 = \chi_h^2 + \beta_w^2$, $\chi_h^2 = \beta_{hx}^2 + \beta_v^2$ (1−6c)

χ_hは常波のx-v面内の位相定数である。

同様に異常波成分は、

$$E_{ew}=\frac{\chi_e^2}{k_1}\Pi_e$$

$$E_{ex}=-\frac{k_1}{k_2}\frac{\beta_w}{\chi_e^2}\frac{\partial E_{ew}}{\partial x} \qquad H_{ex}=\frac{\chi_1\varepsilon_0\omega\beta_v}{\chi_e^2}E_{ew}$$

$$E_{ev}=-\frac{\chi_1}{k_2}\frac{\beta_v\beta_w}{\chi_e^2}E_{ew} \qquad H_{ev}=-j\frac{\chi_1\varepsilon_0\omega}{\chi_e^2}\frac{\partial E_{ew}}{\partial x} \qquad (1-7a)$$

$$\frac{\partial^2 E_{ew}}{\partial x^2}+\beta_{ex}^2 E_{ew}=0 \qquad (1-7b)$$

$$k_1^2=\chi_e^2+\frac{k_1^2}{k_2^2}\beta_w^2 \quad , \chi_e^2=\beta_{ex}^2+\beta_v^2=\frac{\chi_1}{\chi_2}\chi_k^2 \qquad (1-7c)$$

ここでχ_eは異常波のx-v面の位相定数である。

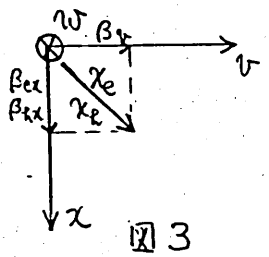


図3

異常波はフレネルの式より伝搬方向によってその位相定数β_eが異なり次の関係がある。

$$\beta_e^2=\beta_{ex}^2+\beta_v^2+\beta_w^2=k_1^2+\beta_w^2\left(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)\beta_w^2 \qquad (1-8)$$

この様子を位相速度面により図4に示す。ここに示すのは$\beta_v=0$の場合で、伝搬方向はx-w面にありβ_wの大きさによりβ_eの大きさが変わる。

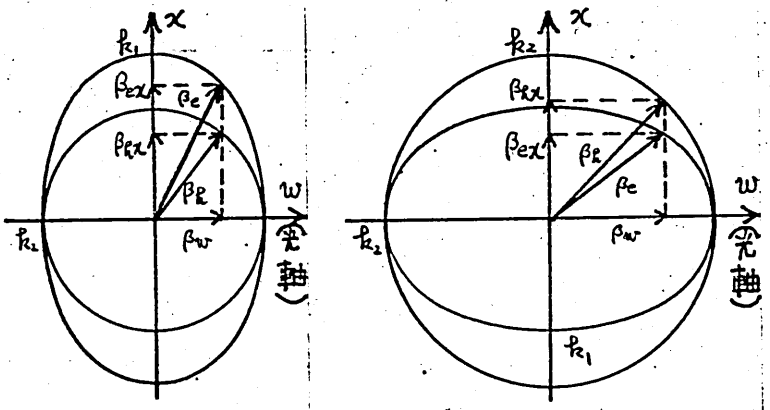


図4

これに対して常波は常に一定で$\beta_x=k_2$である。

電磁界成分に対して、常波成分は$E_{kw}=0$、異常波成分は$H_{ew}=0$であるので光軸方向(w軸)に対して、常波はTE波であり、

異常波はTM波に対応する。

2. 等価伝送線路表示

式(1−6a)において、境界面に垂直なx方向(横方向)の伝搬に着目して、

$$H_{hw}=I_h,\quad E_{hv}=V_h \qquad (1-9)$$

なる等価電圧、電流を導入すると(1−6a)より

$$\frac{\partial V_h}{\partial x}=-j\beta_{hx}Z_h I_h$$
$$\frac{\partial I_h}{\partial x}=-j\beta_{hx}Y_h V_h \qquad (1-10)$$

を得る。ここに $Z_h=Y_h^{-1}=\frac{k_0\beta_{hx}}{\chi_h^2}Z_0$, $Z_0=\sqrt{\mu_w/\varepsilon_0}=Y_0^{-1}$

式(1−10)は図5に示すように特性インピダンス Z_h、位相定数 β_{hx} なる等価伝送線路方程式を示している。

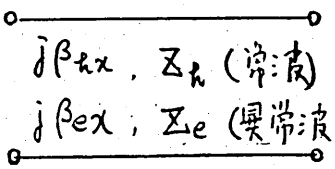


図5

同様に(1−7a)においても

$$E_{ew}=V_e,\quad H_{ev}=-I_e \qquad (1-11)$$

なる等価電圧、電流により式(1−12)の関係を得る。

$$\frac{\partial V_e}{\partial x}=-j\beta_{ex}Z_e I_e$$
$$\frac{\partial I_e}{\partial x}=-j\beta_{ex}Y_e V_e \qquad (1-12)$$

式(1−12)は図5の伝送線路の方程式である。

等価電圧、電流で電磁界を表わすと式(1-13)となる。

$$E_{hx}=-\frac{\beta_{hx}}{\beta_w}Z_h I_h$$
$$E_{hv}=V_h$$
$$H_{hv}=\alpha I_h$$
$$H_{hw}=I_h \qquad (1-13a)$$

ここで $Z_h=\frac{k_0\beta_{hx}Z_0}{\chi_h^2}$, $\alpha=\frac{\beta_v\beta_w}{\chi_h^2}$

$$E_{ex} = -\frac{\beta_w}{\chi_2 k_0} Z_0 I_e$$
$$E_{ev} = -\alpha V_e$$
$$E_{ew} = V_e \qquad (1\text{-}13b)$$
$$H_{ex} = \frac{\beta_v}{\beta_{ex}} Y_e V_e$$
$$H_{ev} = -I_e$$

ここで
$$Z_e = Y_e^{-1} = \frac{\chi_e^2 Z_0}{\chi_1 k_0 \beta_{ex}}$$

従がって全電磁界は式(1-14)となる。

$$E_x = E_{hx} + E_{ex} = -\frac{\beta_{hx}}{\beta_v} Z_h I_h - \frac{\beta_w}{\chi_2 k_0} Z_0 I_e$$
$$E_v = E_{hv} + E_{ev} = V_h - \alpha V_e$$
$$E_w = V_e$$
$$H_x = -\frac{\beta_w}{\beta_v} Z_0 I_h + \frac{\beta_v}{\beta_{ex}} Y_e V_e \qquad (1\text{-}14)$$
$$H_v = -\alpha I_h + I_e$$
$$H_w = I_h$$

さろにx方向の伝送電力は,

$$P_x = E_v H_w^* - E_v H_v^* = V_h I_h^* + V_e I_e^* \qquad (1\text{-}15)$$

となり、常波,異常波が分離して電力を伝搬することになる。即ち,層内のx方向の伝搬に関しては,常波,異常波の二つの独立した分布定数線路と考えることができる。

第$n-1$層と第n層の境界面上では境界条件を満足しなければならない。今w_n-v_n座標とw_{n-1}-v_{n-1}座標間の関係は座標回転のテンソルを用いて次の関係にある。

$$\begin{bmatrix} w_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_n) & -\sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n) \\ \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n) & \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \\ v_n \end{bmatrix}$$
$$\equiv [R_{n-1\,n}] \begin{bmatrix} w_n \\ v_n \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}16)$$

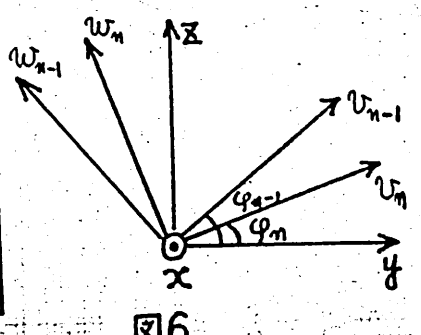


図6

また，電磁界の接線成分と，等価電圧，電流の関係は式(1−14)より式(1−17)となる。

$$\begin{bmatrix} E_{wn} \\ E_{vn} \\ H_{wn} \\ H_{vn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_n & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{en} \\ I_{en} \\ V_{hn} \\ I_{hn} \end{bmatrix} \equiv [A_n] \begin{bmatrix} V_{en} \\ I_{en} \\ V_{hn} \\ I_{hn} \end{bmatrix} \qquad (1-17)$$

境界面上で接線成分が等しいとおくことにより第$n-1$層と第n層の等価電圧，電流で表わした境界条件が式(1−18)である。

$$[A_{n-1}] \begin{bmatrix} V_{en-1z} \\ I_{en-1z} \\ V_{hn-1z} \\ I_{hn-1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{n-1n}] & 0 \\ 0 & [R_{n-1n}] \end{bmatrix} [A_n] \begin{bmatrix} V_{en1} \\ I_{en1} \\ V_{hn1} \\ I_{hn1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} V_{en-1z} \\ I_{en-1z} \\ V_{hn-1z} \\ I_{hn-1z} \end{bmatrix} = [A_{n-1}]^{-1} \begin{bmatrix} [R_{n-1n}] & 0 \\ 0 & [R_{n-1n}] \end{bmatrix} [A_n] \begin{bmatrix} V_{en1} \\ I_{en1} \\ V_{hn1} \\ I_{hn1} \end{bmatrix}$$

$$\equiv [N_{n-1n}] \begin{bmatrix} V_{en1} \\ I_{en1} \\ V_{hn1} \\ I_{hn1} \end{bmatrix} \qquad (1-18)$$

ここで

$$[N_{n-1n}] = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} \\ -N_{24} & 0 & N_{22} & 0 \\ 0 & -N_{13} & 0 & N_{11} \end{bmatrix} \qquad (1-19)$$

$$N_{11} = \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + \alpha_n \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n)$$
$$N_{13} = -\sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n)$$
$$N_{22} = \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_n) - \alpha_{n-1} \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n)$$
$$N_{24} = -\left[(1 + \alpha_{n-1}\alpha_n)\sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\cos(\varphi_{n-1} - \varphi_n)\right]$$

但し，電圧，電流の符合は図7に示した方向を正とする。
以上の考察により上方向の伝搬に対する等価回路は，等価電圧，電流に対して各層内では常波，異常波に対する二つの独立した分布定数線路として表現され境界面で境界条件を満たす様に二つの線路が結合したものとなる。この様子を図8に示す。

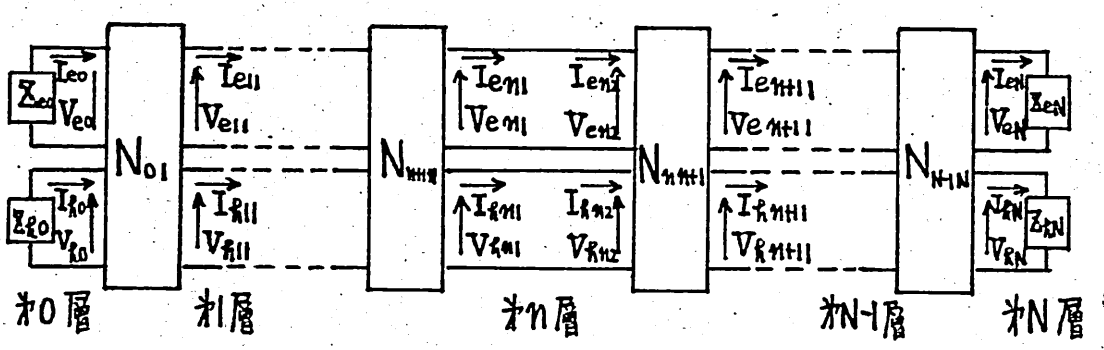


図7

ここで層の両端の電圧，電流の関係は分布定数線路の伝送マトリックス[T]で関係づけられて次式となる。

$$\begin{bmatrix} V_{en1} \\ I_{en1} \\ V_{hn1} \\ I_{hn1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & B_e & 0 & \\ C_e & D_e & & \\ & & A_h & B_h \\ 0 & & C_h & D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{en2} \\ I_{en2} \\ V_{hn2} \\ I_{hn2} \end{bmatrix} \qquad (1-20)$$

$A_e = \cosh\theta_{en}$　　$A_h = \cosh\theta_{hn}$
$B_e = Z_{en}\sinh\theta_{en}$　　$B_h = Z_{hn}\sinh\theta_{hn}$
$C_e = \frac{1}{Z_{en}}\sinh\theta_{en}$　　$C_h = \frac{1}{Z_{hn}}\sinh\theta_{hn}$
$D_e = \cosh\theta_{en}$　　$D_h = \cosh\theta_{hn}$

ここで
$\theta_{en} = j\beta_{en}t_n$
$\theta_{hn} = j\beta_{hn}t_n$
t_n；層の厚さ

次に特性方程式を導くために図7の両端の電圧，電流の関係を求める。それには境界面の結合のマトリックス[N]と層内の伝送のマトリックス[T]を順次かけ合わせることにより得ることが出来て式(1-21)となる。

$$\begin{bmatrix} V_{e0} \\ I_{e0} \\ V_{h0} \\ I_{h0} \end{bmatrix} = [N_{01}][T_1][N_{12}][T_2]\cdots[N_{n-1n}][T_n]\cdots[N_{N-1N}]\begin{bmatrix} V_{eN} \\ I_{eN} \\ V_{hN} \\ I_{hN} \end{bmatrix}$$

$$\equiv [F]\begin{bmatrix} V_{eN} \\ I_{eN} \\ V_{hN} \\ I_{hN} \end{bmatrix} \qquad (1-21)$$

両端の層が0層と第N層は半無限空間としているので電圧，電流の間には次の式(1−22)の関係があり，式(1−21)と式(1−22)より式(1−23)を得ることができる。

$$\begin{cases} V_{e0} = -Z_{e0} I_{e0} \\ V_{h0} = -Z_{h0} I_{h0} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{eN} = Z_{eN} I_{eN} \\ V_{hN} = Z_{hN} I_{hN} \end{cases} \qquad (1-22)$$

$$\begin{bmatrix} (F_{11}+Z_{e0}F_{21})Z_{eN}+(F_{12}+Z_{e0}F_{22}) & (F_{13}+Z_{e0}F_{23})Z_{hN}+(F_{14}+Z_{e0}F_{24}) \\ (F_{31}+Z_{h0}F_{41})Z_{eN}+(F_{32}+Z_{h0}F_{42}) & (F_{33}+Z_{h0}F_{43})Z_{hN}+(F_{34}+Z_{h0}F_{44}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{eN} \\ I_{hN} \end{bmatrix} = 0 \qquad (1-23)$$

これにより特性方程式として，係数行列式が零なる式(1−24)を得る。

$$\begin{vmatrix} (F_{11}+Z_{e0}F_{21})Z_{eN}+(F_{12}+Z_{e0}F_{22}) & (F_{13}+Z_{e0}F_{23})Z_{hN}+(F_{14}+Z_{e0}F_{24}) \\ (F_{31}+Z_{e0}F_{41})Z_{eN}+(F_{32}+Z_{h0}F_{42}) & (F_{33}+Z_{h0}F_{43})Z_{hN}+(F_{34}+Z_{h0}F_{44}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-24)$$

以上の取扱いで，x方向に構造が対称である場合は対称面に電気壁又は，磁気壁をおくことにより解析を容易にすることができる。

特性方程式より I_{eN} と I_{hN} の比が式(1−25)の様に決まるので線路上の各点の電圧，電流の相対値は回路計算により決定することが

できる式(1-14)より電磁界成分を求め得る。

$$\frac{I_{eN}}{I_{eN}} = -\frac{(F_{13}+Z_{e0}F_{23})Z_{eN}+(F_{14}+Z_{e0}F_{34})}{(F_{11}+Z_{e0}F_{21})Z_{eN}+(F_{12}+Z_{e0}F_{22})} \quad (1-25)$$

特別の場合として全ての層で $\varphi=0$ 又は $\frac{\pi}{2}$ の場合は，Z 軸は y 又は y 軸と一致し $\beta_v=0$ 又は $\beta_w=0$ となるので $\alpha=0$ となり結合の行列 [N] は単位行列となるので，異常波と常波或いは，TM波と TE波は結合せず単独に存在しうる。この場合の TE波または TM波に対して特性インピダンス及び電気角を Z_m, θ_m とし，各境界面から z 方向を見た入力インピダンスを Z_{in} で表わすと図8の等価回路で表わされる。

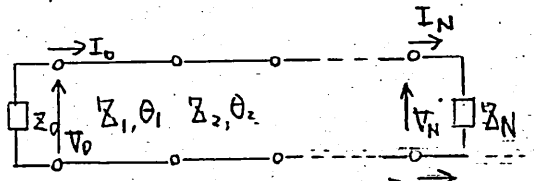


図8

この場合は

$[F]=[T_1][T_2]\cdots[T_{N-1}]$ でよえられるので式(1-24)の特性方程式は

$$Z_0+\frac{F_{11}Z_N+F_{12}}{F_{21}Z_N+F_{22}}=0 \quad (1-26)$$

即ち $Z_0+Z_{i1}=0$ (1-27) となりこの回路全体の共振条件を表わしている。Z_{i1} はまた図8において

$$Z_{i1}=Z_1\left(\tanh\left(\theta_1+\tanh^{-1}\frac{Z_2}{Z_1}\tanh\theta_2+\cdots\cdots\tanh^{-1}\frac{Z_N}{Z_{N-1}}\right)\cdots\right) \quad (1-28)$$

として与えられる。等方性媒質の場合もこの場合に属し，TE波と TM波の伝搬定数は相等しい。式(1-27)と式(1-28)の特性方程式は4層の複合線路に対して与えられている式(7)の一般化されたものである。

[III] 多層円柱誘電体線路

1. 電磁界の導出

図9に示す様な多層構造の円柱誘電体線路において、光軸が各層とも z 方向にある場合について解析する。座標系を r－φ－z にとり [I] の平板の時と同様にして光軸方向の磁気型及び電気型ヘルツ・ベクトル $\Pi_{hz}=\Pi_h a_z$, $\Pi_{ez}=\Pi_e a_z$ を用いると

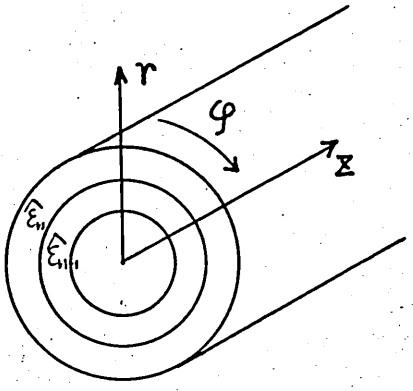


図9

TE波（常波）

$$E_h=-j\omega\mu_0\nabla\times\Pi_{hz}$$
$$H_h=\nabla\times\nabla\times\Pi_{hz} \qquad (2\text{-}1a)$$

TM波（異常波）

$$E_e=k_0^2\Pi_e+k_e^{-1}\nabla\nabla\cdot\Pi_e$$
$$H_e=j\omega\varepsilon_0\nabla\times\Pi_e \qquad (2\text{-}1b)$$

と表わされる。電磁界は $e^{-j(\beta z+m\varphi)}\cdot f(r)$ の形のものを考えると [I] の時と同様にして電磁界成分は式 (2-2) となる。

$$H_{hz}=\chi_h^2\Pi_h$$
$$E_{h\varphi}=j\frac{\omega\mu_0}{\chi_h^2}\frac{\partial H_{hz}}{\partial r}$$
$$E_{hr}=-\omega\mu_0\frac{m}{\chi_h^2}\frac{H_{hz}}{r} \qquad (2\text{-}2a)$$
$$H_{h\varphi}=-\frac{m\beta}{\chi_h^2}\frac{H_{hz}}{r}$$
$$H_{hr}=-j\frac{\beta}{\chi_h^2}\frac{\partial H_{hz}}{\partial r}$$

$$E_{ez}=\chi_e^2\Pi_e$$
$$E_{e\varphi}=-\frac{m\beta}{\chi_h^2}\frac{E_{ez}}{r}$$
$$E_{er}=-j\frac{\beta}{\chi_h^2}\frac{\partial E_{ez}}{\partial r} \qquad (2\text{-}2b)$$
$$H_{e\varphi}=-j\frac{\omega\varepsilon_z}{\chi_h^2}\frac{\partial E_{ez}}{\partial r}$$
$$H_{er}=\frac{\omega\varepsilon_z m}{\chi_h^2}\frac{E_{ez}}{r}$$

ここにH_{kz}とE_{ez}は式(2-3)の微分方程式の解である。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_{kz}}{\partial r}\right)+\chi_{km}^2 H_{kz}=0 \qquad (2-3a)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_{ez}}{\partial r}\right)+\chi_{em}^2 E_{ez}=0 \qquad (2-3b)$$

但し $\chi_{km}^2=\chi_k^2-\left(\frac{m}{r}\right)^2$ $\chi_k^2=k_2^2-\beta^2$

$\chi_{em}^2=\chi_e^2-\left(\frac{m}{r}\right)^2$ $\chi_e^2=k_1^2-\frac{\chi_1}{\chi_1}\beta^2$ $\chi_2\chi_e^2=\chi_1\chi_k^2$

であり，χ_k, χ_eは$r-\varphi$面内の位相定数であり，χ_{km}, χ_{em}はr方向の位相定数を示す。

2. 等価伝送線線表示

平板の場合と同様に等価電圧と電流として

$$1\cdot V_k=rE_{k\varphi},\quad I_k=H_{kz} \qquad (2-4a)$$

$$V_e=E_{ez},\quad 1\cdot I_e=-rH_{e\varphi} \qquad (2-4b)$$

を導入する。ここに1は単位長を示す。この場合の異常波のr方向の伝送線路方程式は式(2-3a)と式(2-2a)より

$$\frac{\partial I_k}{\partial r}=-j\chi_{km}Y_{k0}V_k$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial r}=-j\chi_{km}Z_{k0}I_k \qquad (2-5a)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial I_k}{\partial r}\right)+\chi_{km}^2 I_k=0$$

ここで $Y_{k0}=\frac{1}{Z_{k0}}=\frac{\chi_k^2}{\omega\mu_0\chi_{km}r}$

となり特性インピダンスZ_{k0}，位相定数χ_{km}なる不均一伝送線路の方程式を表わしている。

同様に異常波についても

$$\frac{\partial V_e}{\partial r} = -j\chi_{em} Z_{eo} I_e$$
$$\frac{\partial I_e}{\partial r} = -j\chi_{em} Y_{eo} V_e \qquad (2\text{-}5b)$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_e}{\partial r}\right) + \chi_{em}^2 V_e = 0$$

ここに $Z_{eo} = \frac{1}{Y_{eo}} = \frac{\chi_e^2}{\omega\kappa_1\varepsilon_0\chi_{em}r}$

となり特性インピダンス Z_{eo}，位相定数 χ_{em} の不均一伝送線路の方程式を表わしている。

上の等価電圧，電流で電磁界成分を表現すると次式となる。

$$E_{h\varphi} = \frac{1}{r}V_h \qquad E_{e\varphi} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\frac{m\beta}{\chi_e^2 r}V_e$$
$$E_{hr} = -\frac{k_0 m Z_0}{r\chi_h^2}I_h \qquad E_{er} = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\frac{\beta}{\omega\varepsilon_1 r}I_e$$
$$H_{h\varphi} = -\frac{m\beta}{r\chi_h^2}I_h \qquad (2\text{-}6a) \qquad E_{ez} = V_e \qquad (2\text{-}6b)$$
$$H_{hr} = -\frac{\beta Y_0}{k_0 r}V_h \qquad H_{e\varphi} = -\frac{1}{r}I_e$$
$$H_{hz} = I_h \qquad H_{er} = -\frac{m\omega\varepsilon_1}{\chi_e^2 r}V_e$$

r 方向の電力の伝搬を表わす P_r は

$$P_r = E_\varphi H_z^* - E_z H_\varphi^* = \frac{1}{r}V_h I_h^* + \frac{1}{r}V_e I_e^* \qquad (2\text{-}7)$$

となり TE 波に対する線路と TM 波に対する線路は層内では独立して r 方向に電力を伝送することになり r 方向の伝搬は式 (2-5) で示された独立した線路で表現できる。

式 (2-5a) の解 I_h は第1種，第2種ベセル関数及び変形ベセル関数を用いて次の様に表わせる。

$\chi_h^2 > 0$

$$I_h = AJ_m(\chi_h r) + BN_m(\chi_h r) \qquad (2\text{-}8a)$$

$\chi_h^2 = -\chi_h'^2 < 0$

$$I_h = A'I_m(\chi_h' r) + B'K_m(\chi_h' r) \qquad (2\text{-}8b)$$

これを用いて図10の2点 r, r_0 の間の電圧, 電流は次式となる。

$$\begin{bmatrix} V_k(r) \\ I_k(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k(r_0) \\ I_k(r_0) \end{bmatrix} \qquad (2-9)$$

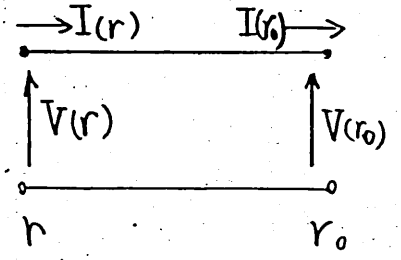


図10

ここに A_k, B_k, C_k, D_k は次に示すものである。

$\chi_k^2 > 0$

$$A_k = \frac{r}{r_0} csm(P, \xi) \quad B_k = j Z_k(r) Snm(P, \xi)$$

$$C_k = j \frac{Anm(P, \xi)}{Z_k(r_0)} \quad D_k = Csm(P, \xi) \qquad (2-10a)$$

$\chi_k^2 < 0$

$$A_k = \frac{r}{r_0} csh_m(P', \xi') \quad B_k = Z'_k(r) Snh_m(P', \xi')$$

$$C_k = \frac{Anh_m(P', \xi')}{Z'_k(r_0)} \quad D_k = Csh_m(P', \xi') \qquad (2-10b)$$

但し $Z_k(r) = Y_k^{-1}(r) = \frac{k_0 r}{\chi_k} Z_0$, $Z'_k(r) = Y'^{-1}_k(r) = j \frac{k_0 r Z_0}{\chi'_k}$

$$P = \chi_k r, \quad \xi = \chi_k r_0, \quad P' = \chi'_k r, \quad \xi' = \chi'_k r_0$$

$Csm(P, \xi)$, $Csh_m(P', \xi')$ 等の関数は

$$\begin{cases} Csm(P, \xi) = \frac{\pi}{2} \xi (N'_m(\xi) J_m(P) - J'_m(\xi) N_m(P)) \\ Anm(P, \xi) = \frac{\pi}{2} \xi (N_m(\xi) J_m(P) - J_m(\xi) N_m(P)) \\ Snm(P, \xi) = \frac{\pi}{2} \xi (N'_m(\xi) J'_m(P) - J'_m(\xi) N'_m(P)) \\ csm(P, \xi) = -\frac{\pi}{2} \xi (N_m(\xi) J'_m(P) - J_m(\xi) N'_m(P)) \end{cases} \qquad (2-10c)$$

$$\begin{cases} Csh_m(P';\xi') = -\xi'(K_m'(\xi')I_m(P') - I_m'(\xi')K_m(P')) \\ Snh_m(P';\xi') = -\xi'(K_m(\xi')I_m(P') - I_m(\xi')K_m(P')) \\ Snh_m(P';\xi') = \xi'(K_m'(\xi')I_m'(P') - I_m'(\xi')K_m'(P')) \\ Csh_m(P';\xi') = \xi'(K_m(\xi')I_m'(P') - I_m(\xi')K_m'(P')) \end{cases} \quad (2\text{-}10d)$$

と与えられる。ここに $J_m'(P)$ 等は微分を示す。

同様に式(2-5b)の解 V_e は次式となる。

$\chi_e^2 > 0$

$$V_e = AJ_m(\chi_e r) + BN_m(\chi_e r) \quad (2\text{-}11a)$$

$\chi_e^2 = -\chi_e'^2 < 0$

$$V_e = A'I_m(\chi_e' r) + B'K_m(\chi_e' r) \quad (2\text{-}11b)$$

回路の2点 r, r_0 の電圧, 電流の関係は次式となる。

$$\begin{bmatrix} V_e(r) \\ I_e(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & B_e \\ C_e & D_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e(r_0) \\ I_e(r_0) \end{bmatrix}$$

ここに

$\chi_e^2 > 0$

$$A_e = Csm(s,t) \qquad B_e = j\,Z_e(r_0)\,Snm(s,t)$$
$$C_e = j\frac{Snm(s,t)}{Z_e(r)} \qquad D_e = \frac{r}{r_0}Csm(s,t) \quad (2\text{-}12a)$$

$\chi_e^2 < 0$

$$A_e = Csh_m(s',t') \qquad B_e = Z_e'(r_0)\,Snh_m(s',t')$$
$$C_e = \frac{Snh_m(s',t')}{Z_e'(r)} \qquad D_e = \frac{r}{r_0}Csh_m(s',t') \quad (2\text{-}12b)$$

$$Z_e(r) = Y_e^{-1}(r) = \frac{\chi_e}{\chi_1 k_0 r}Z_0 \qquad s = \chi_e r, \quad t = \chi_e r_0$$
$$Z_e'(r) = Y_e'^{-1}(r) = -j\frac{\chi_e'}{\chi_1 k_0 r}Z_0 \qquad s' = \chi_e' r, \quad t' = \chi_e' r_0$$

$r=0$を含む領域では界は$r=0$で有限でなければならないので式(2-8)式(2-11)において$B=0$, $B'=0$となる。従ってTE波およびTM波はこの領域では次の様に表わされる。

$\chi_k^2 > 0$

$$I_k(r) = \frac{J_m(p)}{J_m(\beta)} I_k(r_0) \qquad V_k(r) = \frac{r J_m'(p)}{r_0 J_m'(\beta)} V_k(r_0)$$

よって$r=0$の方を見たインピーダンスは

$$\overleftarrow{Z}_{in_k}(r) = -\frac{V_k(r)}{I_k(r)} = -j Z_k \cdot \frac{J_m(p)}{J_m(\beta)} \qquad (2-13a)$$

となる。

$\chi_k^2 < 0$

$$I_k(r) = \frac{I_m(p')}{I_m(\beta')} I_k(r_0) \qquad V_k(r) = \frac{r}{r_0} \frac{I_m'(p')}{I_m'(\beta')} V_k(r_0)$$

$$\overleftarrow{Z}_{in_k}(r) = Z_k'(r) \frac{I_m'(p')}{I_m(p')} \qquad (2-13b)$$

$\chi_{e1}^2 > 0$

$$V_e(r) = \frac{J_m(s)}{J_m(t)} V_e(r_0) \qquad I_e(r) = \frac{r}{r_0} \frac{J_m'(s)}{J_m'(t)} I_e(r_0)$$

$$\overleftarrow{Z}_{ine} = j Z_e(r) \frac{J_m(s)}{J_m'(t)} \qquad (2-14a)$$

$\chi_e^2 < 0$

$$V_e(r) = \frac{I_m(s')}{I_m(t')} V_e(r_0) \qquad I_e(r) = \frac{r}{r_0} \frac{I_m(s')}{I_m'(t')}$$

$$\overleftarrow{Z}_{ine}(r) = Z_e'(r) \frac{I_m(s')}{I_m'(s')} \qquad (2-14b)$$

また$r=\infty$を含む領域ではリアクティブに減衰する界の み導波モードとして存在し得るので, $\chi_k^2 < 0$, $\chi_e^2 < 0$となり式(2-8), 式(2-11)において$A'=0$となる。従ってこの領域では次の様に表わせる。

TE波

$$I_h(r_0)=\frac{K_m(\rho')}{K_m(\rho')}I_h(r) \qquad V_h(r_0)=\frac{r_0 K_m(\rho')}{r K_m'(\rho')}V_h(r)$$

よって $r=\infty$ を見たインピーダンスは

$$\overrightarrow{Z}_{out\,h}=\frac{V_h(r_0)}{I_h(r_0)}=-Z_h'(r_0)\frac{K_m'(\rho')}{K_m(\rho')} \qquad (2\text{-}15)$$

TM波

$$V_e(r_0)=\frac{K_m(t')}{K_m(s')}V_e(r) \qquad I_e(r_0)=\frac{r_0}{r}\frac{K_m'(t')}{K_m'(s')}V_e(r_0)$$

$$\overrightarrow{Z}_{out\,e}=\frac{V_e(r_0)}{I_e(r_0)}=-Z_e'(r_0)\frac{K_m(t')}{K_m'(t')} \qquad (2\text{-}16)$$

となる。

境界条件を次に導く。図10に示す様に第 n 層と第 $n+1$ 層の境界条件を導くために式(2-6)で接線成分が $r=r_n$ で等しいとおいて、等価電圧、電流で表わされた境界条件を得る。

但し記号は図11に示してあるものとする。

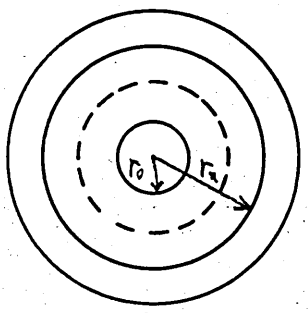


図10

$$\begin{bmatrix} V_{en} \\ I_{en} \\ V_{hn} \\ I_{hn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -N_n \\ N_n & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{en+1} \\ I_{en+1} \\ V_{hn+1} \\ I_{hn+1} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}17)$$

$$N_n=\pi\beta\left(\frac{1}{\chi_{hn}^2}-\frac{1}{\chi_{hn+1}^2}\right)$$

ここで

$$\begin{cases}\chi_{hn}^2=\kappa_{zn}k_0^2-\beta^2 \\ \chi_{hn+1}^2=\kappa_{zn+1}k_0^2-\beta^2\end{cases}$$

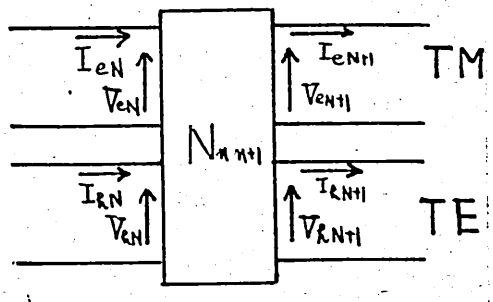


図11

以上の考察により横方向(r方向)の伝搬に対する等価回路は図12に示すように、層内では独立したTE波、TM波に対する二本の線路であり、境界面で式(2-17)に表わされた巻線比 $1:N_n$

でトランス結合したものとして表すことができる。

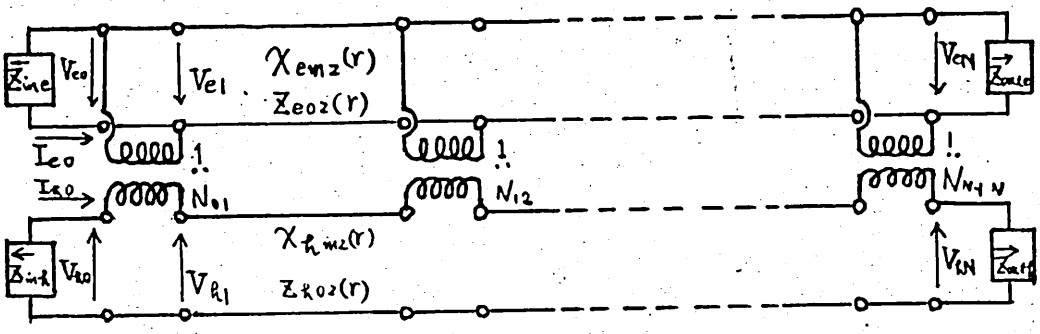


図12

特性方程式を導くために等価回路の両端の電圧電流の関係は次式となる。

$$\begin{bmatrix} V_{eo} \\ I_{eo} \\ V_{ho} \\ I_{ho} \end{bmatrix} = [N_{01}][T_1][N_{12}] \cdots [N_{N-1N}] \begin{bmatrix} V_{eN} \\ I_{eN} \\ V_{hN} \\ I_{hN} \end{bmatrix} \equiv [F] \begin{bmatrix} V_{eN} \\ I_{eN} \\ V_{hN} \\ I_{hN} \end{bmatrix} \qquad (2-18)$$

ここで

$$[T_n] = \begin{bmatrix} A_{en} & B_{en} & 0 & \\ C_{en} & D_{en} & & \\ & 0 & A_{hn} & B_{hn} \\ & & C_{hn} & D_{hn} \end{bmatrix}$$

又 $V_{eo} = -\overleftarrow{Z}_{ine} I_{eo}$, $V_{eN} = \overrightarrow{Z}_{outE} I_{eN}$

$V_{ho} = -\overleftarrow{Z}_{inh} I_{ho}$ $V_{hN} = \overrightarrow{Z}_{outh} I_{hN}$ なる関係があるので

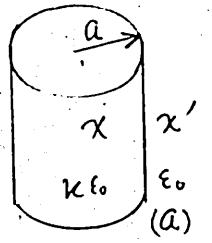
平板の時と同様に

$$\begin{vmatrix} \{(F_{11}+\overleftarrow{Z}_{ine}F_{21})\overrightarrow{Z}_{outE}+(F_{12}+\overleftarrow{Z}_{ine}F_{22})\} & \{(F_{13}+\overleftarrow{Z}_{inh}F_{23})\overrightarrow{Z}_{outh}+(F_{14}+\overleftarrow{Z}_{inh}F_{24})\} \\ \{(F_{31}+\overleftarrow{Z}_{ine}F_{41})\overrightarrow{Z}_{outE}+(F_{32}+\overleftarrow{Z}_{ine}F_{42})\} & \{(F_{33}+\overleftarrow{Z}_{inh}F_{43})\overrightarrow{Z}_{outh}+(F_{34}+\overleftarrow{Z}_{inh}F_{44})\} \end{vmatrix} = 0$$

なる特性方程式を求めることが出来る。 (2-19)

$m=0$ のときは $N_m=0$ となるので TE波(常波)と TM波(異常波)とは分離して存在しうる。

以上の特別な場合として図13(a)の通常の単一等方性円形線路の場合の特価回路は図13(b)或いは，図13(c)の様になる。



(a)

ここに

$$\chi_h=\chi_e=\chi$$

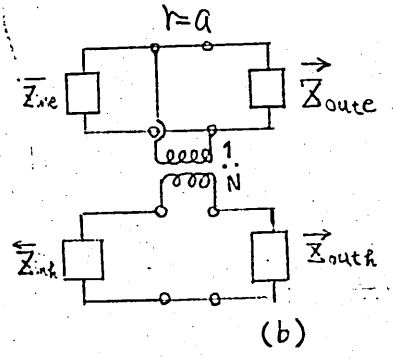
$$\overleftarrow{Z}_{inh}=-jZ_0\frac{k_0a}{\chi}\frac{J_m'(\chi a)}{J_m(\chi a)}$$

$$\overrightarrow{Z}_{outh}=-jZ_0\frac{k_0a}{\chi'}\frac{k_m'(\chi' a)}{k_m(\chi' a)}$$

$$\overleftarrow{Z}_{ine}=jZ_0\frac{\chi}{\varepsilon k_0a}\frac{J_m(\chi a)}{J_m'(\chi a)}$$

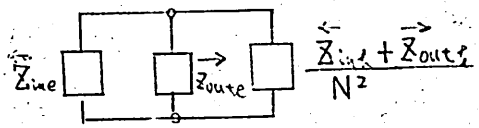
$$\overrightarrow{Z}_{oute}=jZ_0\frac{\chi'}{k_0a}\frac{k_m(\chi' a)}{k_m'(\chi' a)}$$

(2—20)



(b)

この場合の特性方程式は回路の共振条件より．



(C)

$$\left(\frac{1}{\overleftarrow{Z}_{ine}}+\frac{1}{\overleftarrow{Z}_{oute}}\right)\left(\overleftarrow{Z}_{inh}+\overrightarrow{Z}_{outh}\right)=-N^2$$

図13

(2-21)

となり変成器を介して両モードが結合していることが示され式(2-20)の関係を入れると普通に与えられている特性方程式と一致することが分かる。

〔III〕 数値計算例

1. 図14の示す4層の等方性平板を非対称にした構造の線路の場合のz方向の位相定数βとk_0の関係を図17に又$k_0t=1.8$の場合の電磁界分布(E_z)を図18に示す。

図17においては全体を一つの線路と考えた場合の各モードを表わしていると同時に4本の独立した線路が結合していると考えた場合はこの結合線路のノルマルモードを表わしている。

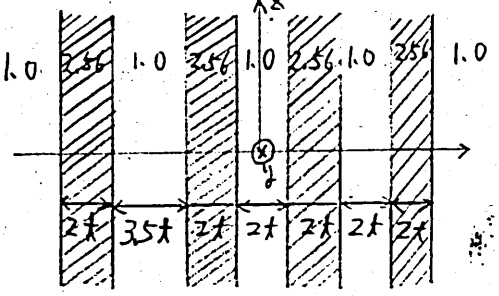


図14

k_0tが小さい場合は相互間の結合が大きくて界分布は全体に広がっているがk_0tが大きくなるとそれに界は誘電率の大きい部分に集中し、最後は一本の独立線路の場合と同一となることを示している。

又図17は$k_0t=0.8$の高次の4つのモード群のものである。

2. 一軸性媒質の平板の例として図15に示す4層の対称構造線路を考える。z方向の位相定数とk_0tの関係を図19に示し又界分布を絶対値で図20に示す。

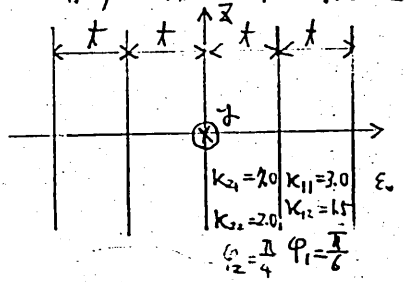


図15

この例では各層において常波異常波かしゃ断域でありβの範囲は次の様に定まる。

第1項 $k_0<\beta<\dfrac{k_1k_2}{\sqrt{k_{12}^2\sin^2\varphi_1+k_{11}^2\cos^2\varphi_1}}\fallingdotseq 1.31k_0$ (異常波)

$k_0<\beta<k_{12}=\sqrt{1.5}\,k_0$ (常波)

第2項

$$k_0 < \beta < \frac{k_1 k_2}{\sqrt{k_{22}^2 k_1^2 \varphi_2 + k_{21}^2 \cos^2 \varphi_1}} = 1.76 k_0 \quad (\text{異常波})$$

$$k_0 < \beta < k_{22} = \sqrt{2}\, k_0 \quad (\text{常波})$$

モードとしては少なくてもどちらかの項で常波，異常波のどちらかが しゃ断域でない状態でなければならないので結局線路全体の β の範囲は $1 < \beta/k_0 < 1.76$ となる。

又図18の曲線のゆがみは，常波がしゃ断しない上限である$\sqrt{2}$に一致することがわかる。

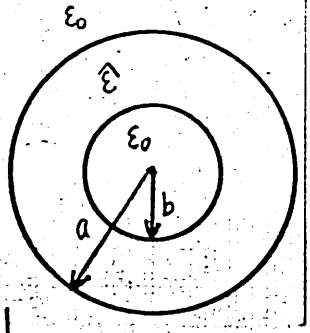
3. 図13に示した様な等方性($\kappa = 2.0$)の円柱の線路において $m=0$ のTE，TMモード及び $m=1$ のハイブリットモードの場合を図21と図22に示す。

4. 上の例で媒質を $K_1 = 2.0$，$K_2 = 2.0$ とした異方性の場合の $m=0$ の場合と $m=1$ のハイブリッドの場合を図23と図24に示す。

$m=0$ の場合等方性の場合と比べると，TE及びTMのモードの立ち始める $k_0 a$ の値が異なることがわかる。

$m=1$ の場合は等方性の場合の第1と第2のモードの間や第3，第4のモード間等にもう一つモードがみとめられる。

5. 多層の異方性の円柱線路の例として図16示す構造の同軸形のものを考える。各方向の位相定数と $k_0 a$ の関係を図25に又界分布を図26に示す。



$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2.56 & 0 \\ 0 & 2.56 \\ & & 7.0 \end{bmatrix} \varepsilon_0$$

$$\frac{a}{b} = 2$$

$a - b = t$

図16

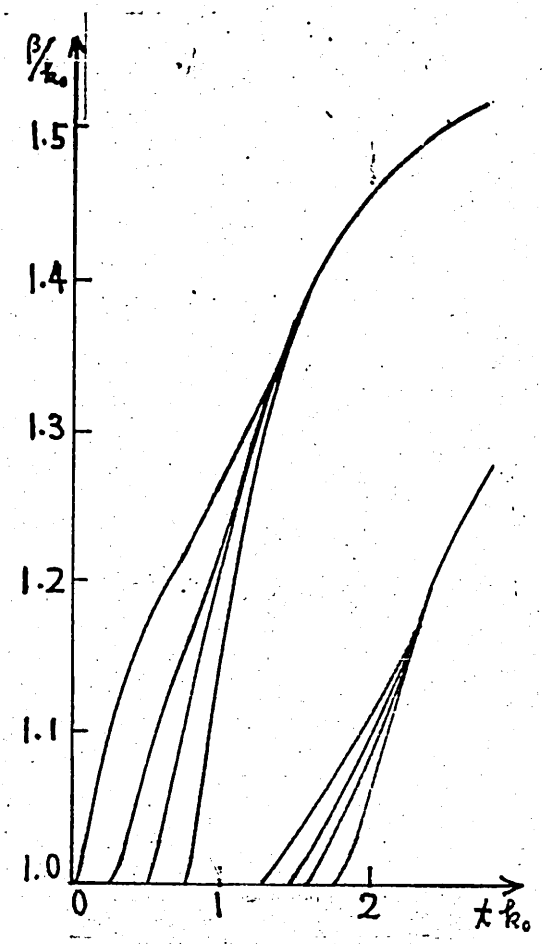


図17 非対称4層平板

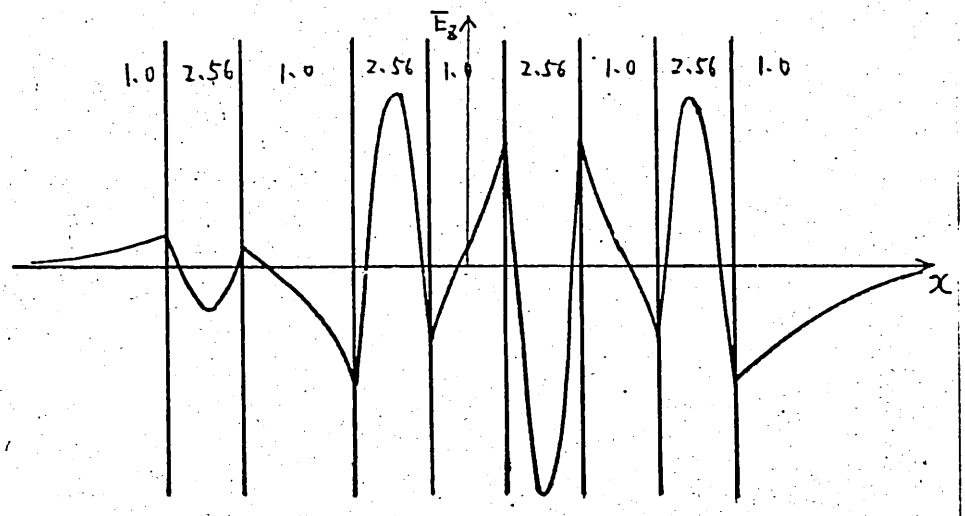


図18-a

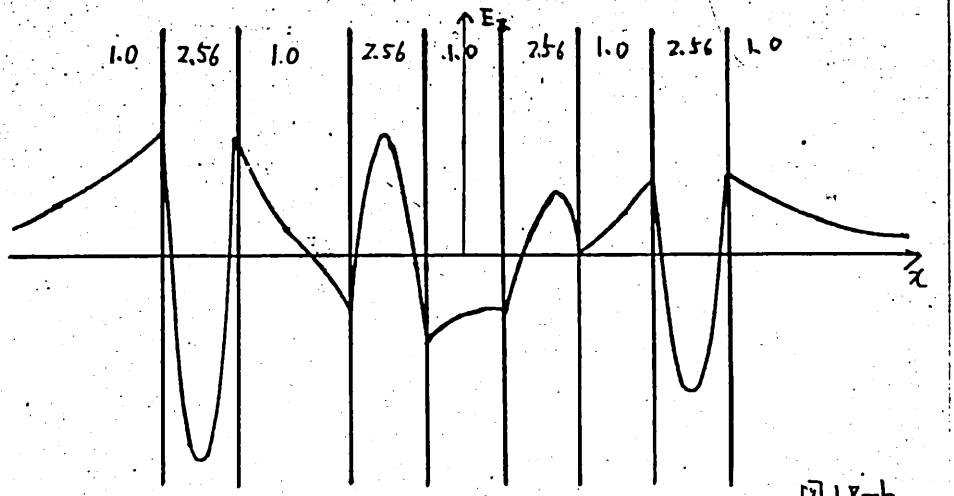


图18-b

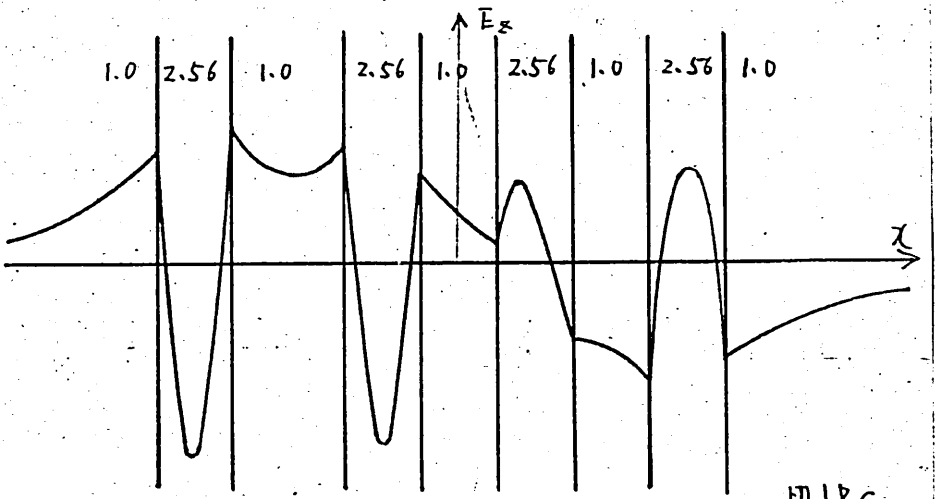


图18C

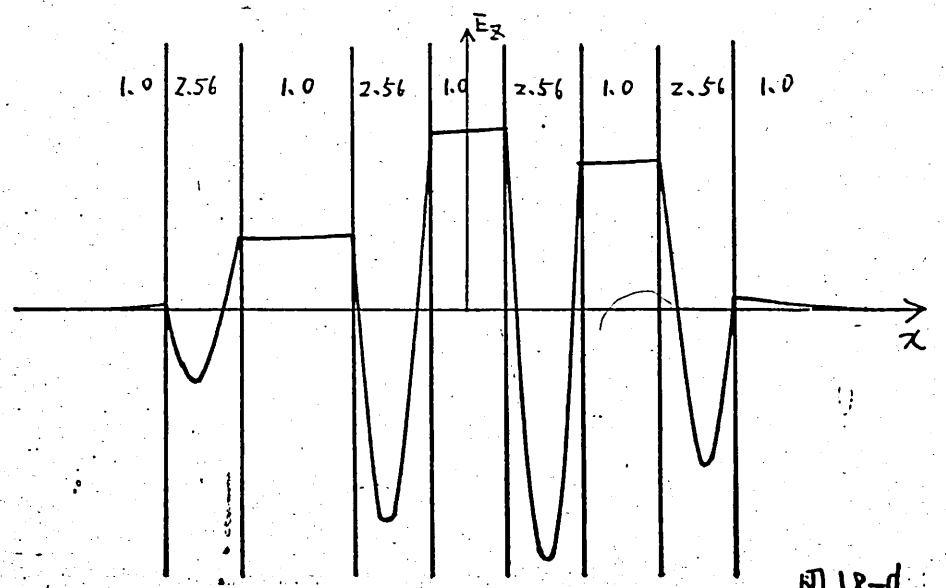
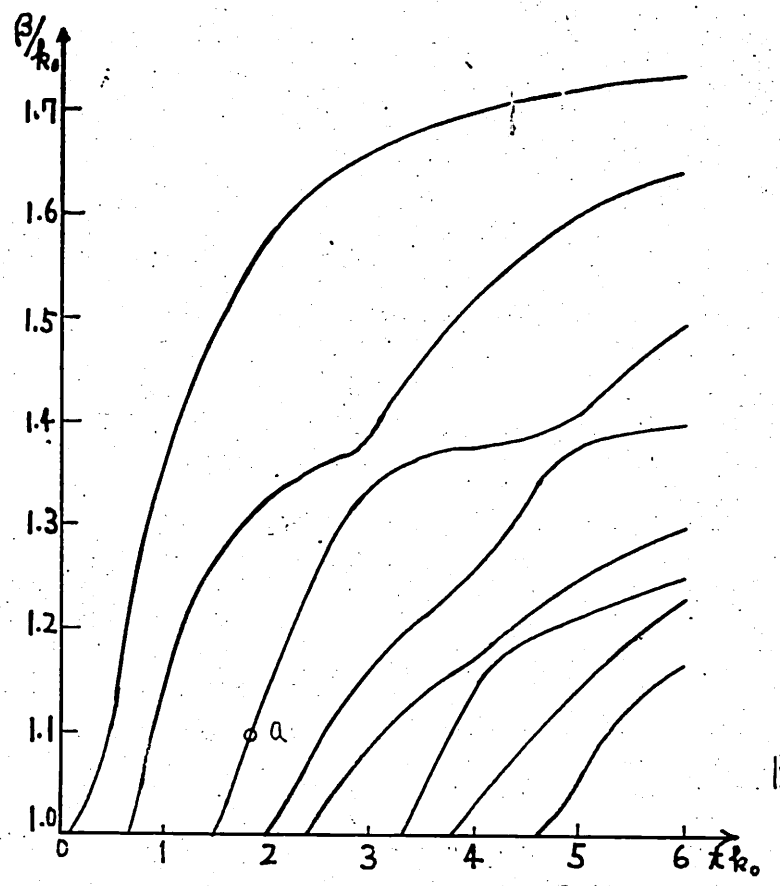


图18-d



$K_{12}=1.5$, $K_{11}=3.0$, $\varphi_1=\frac{\pi}{6}$

$K_{22}=2.0$ $K_{21}=7.0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$

図19 対称4層一軸性平板

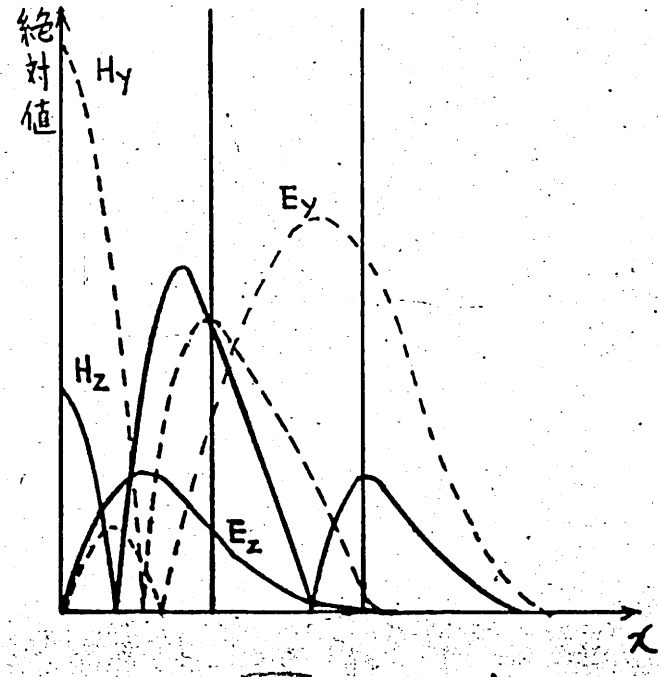


図20 a集の界分布

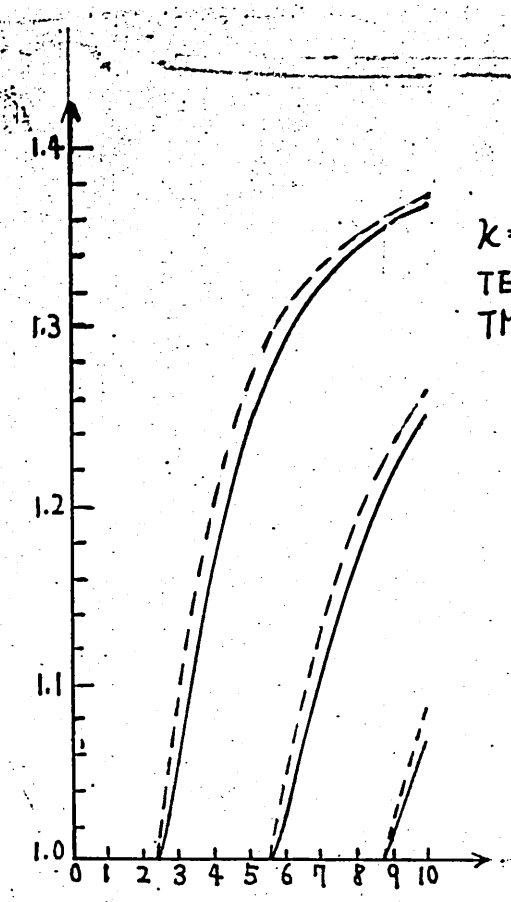


图 21

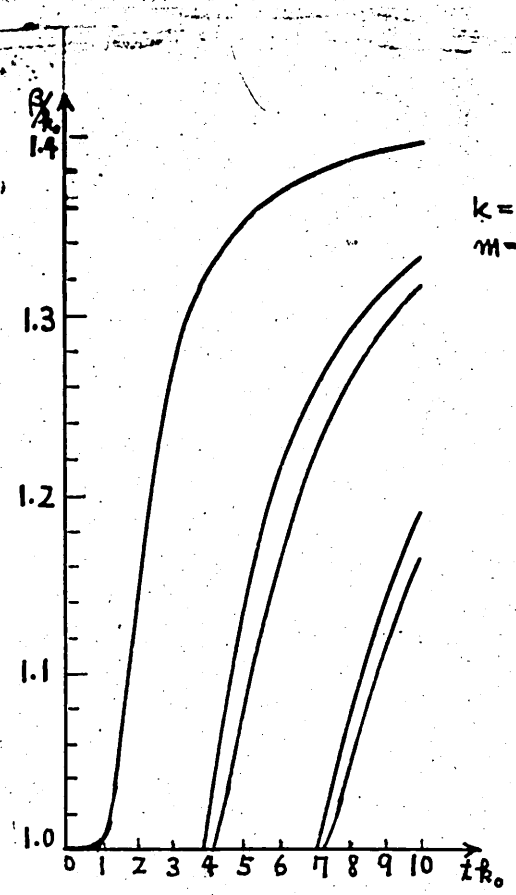


图 22

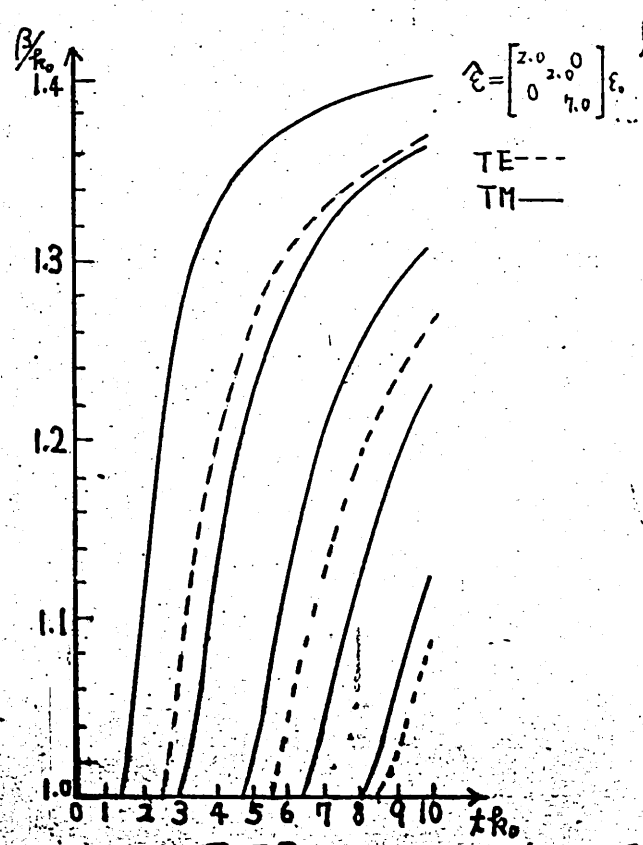


图 23

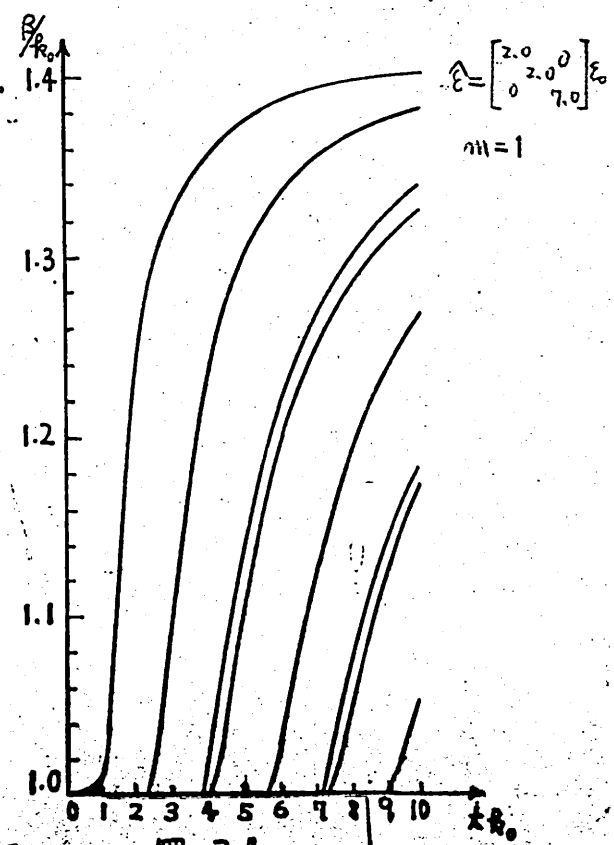
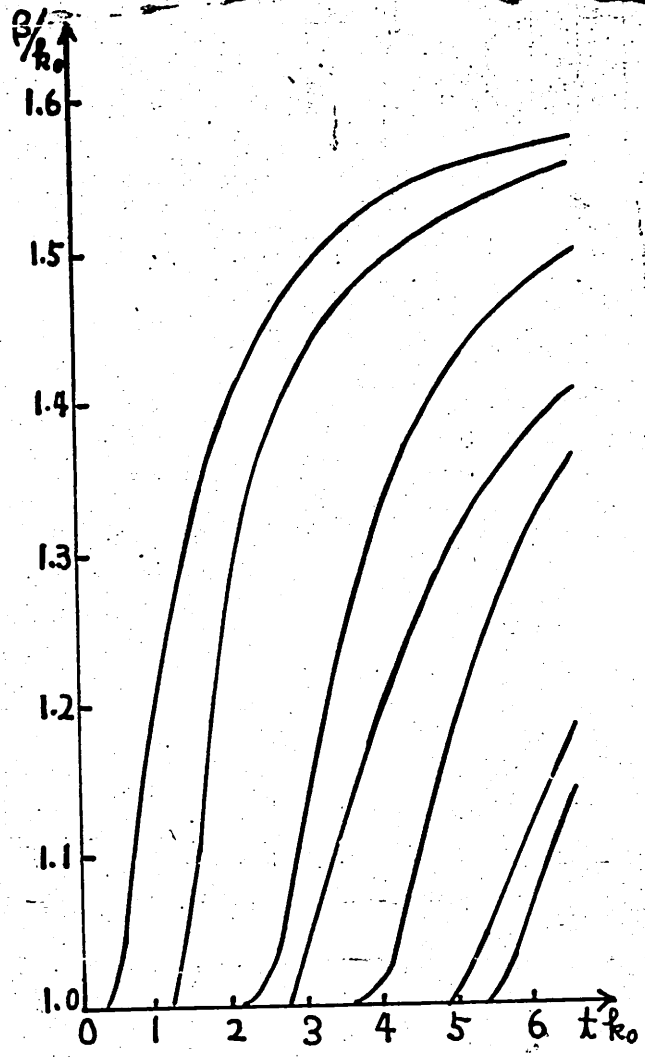


图 24



$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2.56 & 0 \\ 0 & 2.56 \\ & & 7.0 \end{bmatrix} \varepsilon_0$$

図 25 異方性同軸線路

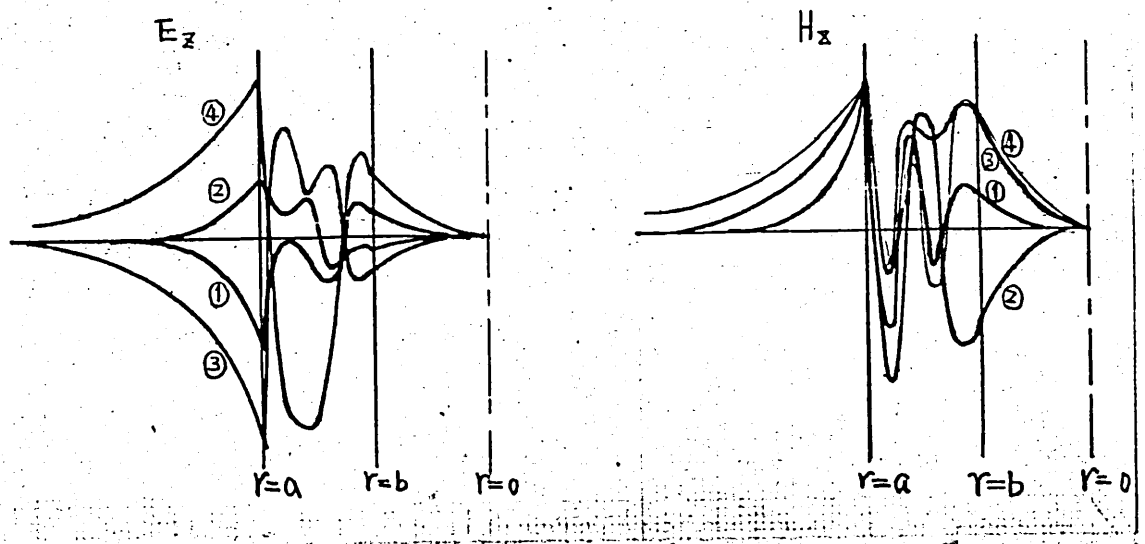


図 26

むすび

本報告においては境界面内に光軸をもつ一軸異方性媒質よりなる平板および円筒状多層誘電体線路の電磁界問題を，横method の伝搬に対応する等価電圧電流を用いて回路論的に解析する一方法を定式化した。そして二三の場合についてその数値計算例を示した。勿論この方法が適用できる問題は電磁界を直接解くことによっても解を求めることができる。しかし，この方法によれば常波，異常波に対応した等価回路表示により媒質内の伝搬の模様が物理的に明るかになり，また任意の多層構造においてその中に伝搬あるいはリアクティブに減衰する領域が含まれていても，単なる繰返し計算により自動的に解を求め得る利点があるのではないかと思われる。また媒質に損失がある場合でも誘電率を複素化することによって，そのまま適用できると思われるが，この点については現在検討中である。

文献

(1) 大高, 川上, 西田：〝低屈折率層を内部に有する多層誘電体スラブ〟, 信学論(C), Vol. 57-C, No. 6, P 187 (1974-6)

(2) D. Marcuse and W.L. Mammel：〝Tube wave guide for optical transmission〟, Bell Syst. Tech. J., Vol 52, No. 3, P 423 (March 1973)

(3) 岩崎, 倉薗, 板倉：〝誘電体三スラブ間のモード結合理論〟, 電波射研資類 (1974-6)

(4) 里村, 熊取, 松原, 熊谷：〝異方性媒質を含む誘電体スラブ線路における電磁波モードの解析〟, 電波射研究資類(1974-6)

(5) 六島, 岸岡, 清水, 森：〝多層異方性誘電体線路の回路論的解析〟, 信学会全国大会, 1151(1974-7)

(6) R.E. Collin：〝Field theory of guided waves〟, McGraw-Hill, (1960)

(7) P.K. Tien, R.J. Martin, and G. Smolinsky, 〝Formation of light-guided interconnection in an integrated optical circuit by compsite tapered film coupling〟, J. Appl. Optics. Vol 12, no.8 (Aug. 1973)

輻射科学研究会資料

モード結合理論による磁気弾性波非可逆素子の解析

杉本光範　牧本利夫
(大阪大学 基礎工学部)

昭和49年12月6日

1. まえがき

弾性表面波は、その固有の速度（同周波数の電磁波の速度の約10^{-5}倍）と分散性（特に層状構造媒質を伝搬するRayleigh波は強い分散性を持つ）とより、主にDeley LineやPulse Compression Filterなどへ応用され、最近では製品化されつつある。さらに、弾性表面波は、その伝送エネルギーの大部分（90%以上）を物質表面に集中し伝搬する。従がって、基盤面上で波の伝搬特性を容易に制御でき、最近の半導体集積回路技術を取り入れ、さらに広範囲なデバイスに目が向けられ、活発な研究が行なわれている。

Interdigital Transducerの開発により、弾性表面波は、もっぱら、圧電性を持つ物質の表面に励振され、処理されている。一般に、圧電性結晶は電気的に安定で、得られたデバイスの種々の特性を電子的に可変制御することはむつかしい。例えば、可変遅延時間を持つDeley Lineや、帯域可変Filterなどの報告は見うけられない。さらに圧電弾性波は、超音波工学における周波数帯（数十MH_z～数GH_z）では、可逆性を持ち、単独では非可逆素子を望むことはできない。

磁性体表面を伝搬する弾性表面波は、適当なマイクロ波帯（$\lesssim 2GH_z$）において、磁性体中のスピン系（スピン波）と結合しており、磁気弾性表面波と呼ばれる。スピン波は、外部磁界により容易に制御で

き、従がって磁気弾性波を電子的に制御でき、圧電弾性波では不可能な種々の新らしい素子が実現される可能性がある。例えば、可変遅延時間を持つDeley Line、帯域可変Filterなど、さらに、Accoustic Faraday Rotationなどを利用した種々の非可逆素子などが上げられる。このような理由で、磁気表面弾性波を利用しようとする動きが、最近見うけられる。

本論文は、磁気弾性表面波同志の結合を利用した非可逆素子制作の基礎となるべき理論を展開したものである。2章では、磁気弾性波の伝搬定数βの変分表示を出発点とし、磁気弾性波同志の結合方程式を導く。3章では、前章で得た、一般的な結合方程式に、二モード近似を適用し、二つの磁気弾性波間の結合機構を解析し、さらにモード伝達行列なるものを定義し、この行列を調べることにより、導波系の非可逆性を知る。4章では、実際的な解析例を上げ、YIGを薄膜とする三層構造表面波導波系を考え、その系を伝搬する磁気弾性波の分散特性、および界分布などを求めている。さらに、この例で可能な、種々の非可逆素子をまとめてある。

2. 一般論

磁気弾性波導波系を伝搬する弾性波は、機械変位の運動を記述するNewtonの方程式と、電磁界を記述するMaxwellの方程式とで示されるが、Micro Accousticにおいては、弾性波の波長が、同周波数の電磁波のそれに比べ、非常に短かいので、電磁界に準静磁近似[1] ($\nabla \times \vec{H} \simeq 0$) が可能となる。その結果、磁気弾性波は次の方程式で表わされる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{T} &= \rho \partial \vec{v} / \partial t \\ \nabla_s \vec{v} &= \partial \tilde{S} / \partial t \\ \nabla \varphi &= -\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

磁気弾性体の構成式[2]は次の様になる。

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \tilde{s} : \tilde{T} + \tilde{g} \cdot \vec{B} \\ \vec{H} &= -\tilde{g} : \tilde{T} + \tilde{\eta} \cdot \vec{B} \end{aligned} \qquad (2)$$

(1), (2)は、いづれもAuld[3]の記法に従がった。(2)は圧電弾性体の構成式[3]において、$\vec{E}$および$\vec{D}$を$\vec{H}$および$\vec{B}$にかえただけのものであるが、またそれ程ポピュラーではない。本論文では、解析の都合上、(2)の表現を用いた。

2.1. β の変分表示式

(1), (2) で示されるように、磁気弾性波の界は多くの要素 ($\tilde{T}, \vec{V}, \varphi, \vec{B}$) を持ち、解析を難かしくしている。問題の見通しをよくするため、この章ではある導波系を想定し、それを伝搬する磁気弾性波の固有モード、および伝搬定数を、それぞれ固有ベクトル、および固有値とする固有値方程式を、(1), (2) より導く。

(1) の空間微分演算子を伝搬方向と、横方向とに分離し、(2) を用いれば (波動因子を $e^{j(\beta z-\omega t)}$ とした)、

$$
\begin{aligned}
\omega\rho(j\vec{V}) + \nabla_t\cdot\tilde{T} &= \beta(-j\vec{n})\cdot\tilde{T} \\
-\nabla_{st}(j\vec{V}) + \omega\tilde{S}:\tilde{T} + \omega\tilde{q}\cdot\vec{B} &= \beta(j\vec{n})j\vec{V} \\
\omega\tilde{q}:\tilde{T} - \omega\tilde{\gamma}\cdot\vec{B} - \omega\nabla_t\varphi &= \beta(j\omega\vec{n})\varphi \\
\omega\nabla_t\cdot\vec{B} &= \beta(-j\omega\vec{n})\cdot\vec{B} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となり、これを行列表示すれば、求めるべき固有値方程式を得る。

$$
\left\{\omega\begin{bmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & \tilde{S}: & \tilde{q}\cdot & 0\\ 0 & \tilde{q}: & -\tilde{\gamma}\cdot & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \nabla_t\cdot & 0 & 0\\ -\nabla_{st} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & j\omega\vec{n}\\ 0 & 0 & -j\omega\vec{n}\cdot & 0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}j\vec{V}\\ \tilde{T}\\ \vec{B}\\ \varphi\end{bmatrix}
$$

$$
= \beta\begin{bmatrix}0 & -j\vec{n}\cdot & 0 & 0\\ j\vec{n} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & j\omega\vec{n}\\ 0 & 0 & -j\omega\vec{n}\cdot & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j\vec{V}\\ \tilde{T}\\ \vec{B}\\ \varphi\end{bmatrix} \qquad (4)
$$

以上に於いて、$\nabla_{\cdot t}$, ∇_{st} は横方向の微分演算子であり、$\vec{n}$ は、伝搬方向の単位ベクトルである。

(4)を Operator 表示すれば、

$$(\mathcal{L} - \beta \Gamma_n)\Psi = 0 \tag{5}$$

となる。但し、$\mathcal{L}$, Γ_n, Ψ は(4)の対応する諸量を示し、下の様に定義される。

$$\mathcal{L} = \omega W + \Gamma_t = \omega \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{\cdot} & \tilde{g}_{\cdot} & 0 \\ 0 & \tilde{g}_{\cdot} & -\tilde{\gamma}_{\cdot} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \nabla_{t\cdot} & 0 & 0 \\ -\nabla_{st} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega\nabla_t \\ 0 & 0 & \omega\nabla_{t\cdot} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} 0 & -j\vec{n}\cdot & 0 & 0 \\ j\vec{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega\vec{n} \\ 0 & 0 & -j\omega\vec{n}\cdot & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} j\vec{V} \\ \tilde{T} \\ \vec{B} \\ \varphi \end{bmatrix} \tag{6}$$

固有ベクトル Ψ を上記の様に定義すると、非常に都合のよいことに、Ψ^* は $-\beta$ を伝搬定数に持つ後退波のモード関数となり、固有モードが伝送する Power も非常にコンパクトな形で表現される。このように、(5), (6)は、問題の見通しを明るくするばかりでなく、基本的な物理量にも簡易な表現形式を与え、記述の複雑な弾性波にとって有効な表示式となる。

(5)は Self Adjoint であることが証明される[A]ので、β の変分表示式[5]がただちに得られ、次の様になる。

$$\beta=(\Psi,\mathcal{L}\Psi)/(\Psi,\Gamma_n\Psi)$$

$$=\frac{\int_{c.s}\left[\left\{\omega\rho\vec{V}^*\cdot\vec{V}+\omega\tilde{T}^*:(\tilde{S}:\tilde{T}+\tilde{q}\cdot\vec{B})+\omega\vec{B}^*\cdot(\tilde{q}:\tilde{T}-\tilde{\gamma}\cdot\vec{B})\right\}\right.}{\left.+\left\{-j\vec{V}^*\cdot\nabla_t\cdot\tilde{T}-j\tilde{T}^*:\nabla_{st}\vec{V}-\omega\vec{B}^*\cdot\nabla_t\varphi+\omega\varphi^*\nabla_t\cdot\vec{B}\right\}\right]ds}$$

$$\int_{cs}\left\{-\vec{V}^*\cdot\tilde{T}-\vec{V}\cdot\tilde{T}^*+\varphi(-j\omega\vec{B})^*+\varphi^*(-j\omega\vec{B})\right\}ds \qquad (7)$$

次の節では、この変分表示式に基づいた、磁気弾性波間のモード結合理論を展開する。

2.2. 結合モード方程式.

YIGやFerriteなどの磁性体は、その物質定数を外部磁界により容易に制御できる。今、そのような物質で一つの導波系を定め、これを基本系と呼ぶ。さらに、基本系に外部磁界を印加することにより、基本系とは性質の少し異なる導波系を定めることができ、これを摂動系と呼ぶ。基本系の固有モードは、摂動系では独立に伝搬し得ず、相互に結合を起こすが、ここでは、この結合のMechanismを解析する。

摂動系の諸量を、基本系のものと区別するため、右肩に1をつけて示す。外部磁界のため、基本系の物質定数が次の様に変化したとする。

$$
\begin{aligned}
\rho &\rightarrow \rho' = \rho + \Delta\rho \\
\tilde{S}_i &\rightarrow \tilde{S}_i' = \tilde{S}_i + \Delta\tilde{S}_i \\
\tilde{q}_\cdot &\rightarrow \tilde{q}_\cdot' = \tilde{q}_\cdot' + \Delta\tilde{q}_\cdot \\
\tilde{q}_i &\rightarrow \tilde{q}_i' = \tilde{q}_i + \Delta\tilde{q}_i \\
\tilde{\pi}_\cdot &\rightarrow \tilde{\pi}_\cdot' = \tilde{\pi}_\cdot + \Delta\tilde{\pi}_\cdot
\end{aligned}
\tag{8}
$$

これ等を(6)で示した行列の形でまとめれば

$$
W' = W + \Delta W = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_i & \tilde{q}_\cdot & 0 \\ 0 & \tilde{q}_i & \tilde{\pi}_\cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\tilde{S}_i & \Delta\tilde{q}_\cdot & 0 \\ 0 & \Delta\tilde{q}_i & \Delta\tilde{\pi}_\cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{9}
$$

となる。他の量も同様、ΨがΨ'に、βがβ'に変化する。(7)と同様、摂動系における伝搬定数β'の変分表示式は、

$$
\beta_F' = (\Psi_F', \mathcal{L}'\Psi_F') / (\Psi_F', \Gamma_n \Psi_F')
\tag{10}
$$

となる。ただし、右下の添字Fは、前進波に対する諸量を示す(後に、Bで後退波に対する諸量を示す)。基本系にN ケの固有モードΨ_{Fi} $(i=1\sim N)$が存在したとすれば、摂動系の固有モードΨ_F'は、それ等の一次結合で示され、

$$
\Psi_F' = \sum_{i=1}^{N} f_i \Psi_{Fi}
\tag{11}
$$

となる。但し基本系の固有モードは正規化されており、次式で示される関係を満たす。

$$(\Psi_{Fi}, \Gamma_n \Psi_{Fj}) = \delta_{ij} \tag{12}$$

(12)を考慮し、(11)を(12)に代入し、Reighleigh-Ritz 法（$\partial \beta_F / \partial f_i = 0$, $i=1\sim N$）を利用すれば、

$$\left\{ \begin{bmatrix} \beta_{F1} & & 0 \\ & \beta_{F2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \beta_{FN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ F_{N1} & F_{N2} & \cdots & F_{NN} \end{bmatrix} - \beta_F' \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

を得る。但し、無損失な系を考えて（$W^+ = W$ [6]）、

$$F_{ij} = F_{ji}^* = (\Psi_{Fi}, \omega \Delta W \Psi_{Fj})$$

$$= \omega \int_{CS.} \{ \vec{V}_i^* \cdot \Delta\rho \vec{V}_j + \tilde{T}_i^* : (\Delta \tilde{S} : \tilde{T}_j + \Delta \tilde{q} \cdot \vec{B}_j) + \vec{B}_i^* \cdot (\Delta \tilde{q} : \tilde{T}_j - \Delta \tilde{\tau} \cdot \vec{B}_j) \} dS \tag{14}$$

である。(13)は摂動系において基本系の固有モードがどの様に結合するかを示す式で、いわゆる結合モード方程式であり、(14)は、定性的には結合機構を示し、定量的には結合の程度を示すもので、結合係数に対応するものである。

3. ニモード近似

実際問題においては、互に強く結合し合うモード数は、位相整合条件により限られ、それ程多くはない。例えば、マイクロ波素子の一つである方向性結合器などは、二つの波動の結合によっている。この章では、摂動系で、二つの基本系固有モードが強く結合していると仮定し、前章で得た一般論に、ニモード近似を適応し、ニモード間の結合を明らかにする。

3.1. 摂動系の固有モード、伝搬定数および伝送電力

i番目とj番目の基本系固有モードが、摂動系で強く結合するとする。(14)より、結合方程式は、

$$\begin{aligned}(\beta_{Fi}+F_{ii}-\beta_F')f_i+F_{ij}f_j&=0\\ F_{ij}^{*}f_i+(\beta_{Fj}+F_{jj}-\beta_F')f_j&=0\end{aligned}\qquad(15)$$

となる。(15)のf_i, f_jが非自明解を持つことより、対応する二つの摂動系固有モード、および伝搬定数が定まり、

$$\begin{aligned}\Psi_{F\pm}'&=(f_i/f_j)_{\pm}\Psi_{Fi}+\Psi_{Fj}\\ \beta_{F\pm}'&=\beta_{mF}\left\{1+\sqrt{1+(\delta_F/k_F)^2}\right\}\end{aligned}\qquad(16)$$

となる。但し、モードの混成の度合を示す$(f_i/f_j)_{\pm}$,

位相整合の程度を示す δ_F，その他の β_{mF}，K_F は次の様に定義される。

$$(f_i/f_j)_\pm = \alpha_F \left\{ \delta_F/K_F \pm \sqrt{1+(\delta_F/K_F)^2} \right\}$$

$$\beta_{mF} = \left\{ (\beta_{Fi}+F_{ii}) + (\beta_{Fj}+F_{jj}) \right\}/2$$

$$\delta_F = \left\{ (\beta_{Fi}+F_{ii}) - (\beta_{Fj}+F_{jj}) \right\} \Big/ \left\{ (\beta_{Fi}+F_{ii}) + (\beta_{Fj}+F_{jj}) \right\}$$

$$K_F = |F_{ij}|/\beta_{mF}$$

$$\alpha_F = F_{ij}/|F_{ij}| \qquad (17)$$

以上より摂動系の界は次式で示される。

$$\Psi'_F(x,y,z) = A'_{F+}\Psi'_{F+}e^{j\beta'_{F+}z} + A'_{F-}\Psi'_{F-}e^{j\beta'_{F-}z}$$

$$= \left\{ A'_{F+}(f_i/f_j)_+ e^{j\beta'_{F+}z} + A'_{F-}(f_i/f_j)_- e^{j\beta'_{F-}z} \right\}\Psi_{Fi}$$

$$+ \left\{ A'_{F+}e^{j\beta'_{F+}z} + A'_{F-}e^{j\beta'_{F-}z} \right\}\Psi_{Fj} \qquad (18)$$

但し．A'_{FI} は初期条件で決まる任意定数である。伝送電力は．Ψ_F の正規直交性を考慮すれば．

$$(\Psi'_F(x,y,z), \Gamma_n\Psi'_F(x,y,z)) = \left| A'_{F+}(f_i/f_j)_+ e^{j\beta'_{F+}z} + A'_{F-}(f_i/f_j)_- e^{j\beta'_{F-}z} \right|^2$$

$$+ \left| A'_{F+}e^{j\beta'_{F+}z} + A'_{F-}e^{j\beta'_{F-}z} \right|^2 \qquad (19)$$

となり．第一項は i 番目の，第二項は j 番目のモード

が伝送する電力となっている。それ等を $P_{Fi}(z)$, $P_{Fj}(z)$ とすれば.

$$P_{Fi}(z) = \left| A'_{F+}(f_i/f_j)_+ e^{j\beta'_{F+}z} + A_{F-}(f_i/f_j)_- e^{j\beta'_{F-}z} \right|^2$$

$$P_{Fj}(z) = \left| A'_{F+} e^{j\beta'_{F+}z} + A'_{F-} e^{j\beta'_{F-}z} \right|^2 \qquad (20)$$

と書くことができる。$z=0$ で $P_{Fj}(0)=0$ とすれば A'_{Fz} の比が定まり、電力移項を示す式が導びかれ

$$P_{Fi}(z)/P_{Fi}(0) = 1 - F\sin^2 Cz$$

$$P_{Fj}(z)/P_{Fi}(0) = F\sin^2 Cz \qquad (21)$$

となる。但し、F および C は.

$$F = 1/\{1+(\delta_F/k_F)^2\}$$

$$C = \beta_{mF} k_F \sqrt{1+(\delta_F/k_F)^2} = (\beta'_{F+} - \beta'_{F-})/2 \qquad (22)$$

である。位相整合している場合には $\delta_F=0$ となり、$F=1$ となるから、(21)よりわかるように電力の完全移項が起こる。図1に電力移項模様を示した。

3.2 モード伝達行列

ここでは、前節の議論を回路論的な場より まとめてみる。図2の様な、摂動系を基本系ではさんだ導波系を考える。摂動部で起こっているモード結合現

象を二行二列の行列式で表示し、これをモード伝達行列と呼ぼう。この様な回路論的な定式化は導波システムの構成を考える場合には便利な形であり、表面弾性波を利用したマイクロ波IC.をめざす弾性波工学にとっても、近い将来有用になるであろう。

i番目とj番目のモードに対し、$|f_i(z)|^2=P_i(z)$, $|f_j(z)|^2=P_j(z)$ となるような、複素振幅 $f_i(z)$, $f_j(z)$ を定義する。それ等の入力端、および出力端での関係を次の様に示す。

$$\begin{bmatrix} f_i(l) \\ f_j(l) \end{bmatrix} = e^{j\theta_F} \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i(0) \\ f_j(0) \end{bmatrix} \tag{23}$$

ここで、A_F, B_F, C_F, D_F を要素とする二行二列の行列をモード伝達行列といい、T_F で表わす。入力端で適当な初期条件を与えれば、(19)の $A'_{F\pm}$ が決定され、従って、θ_F、および T_F が定まり次の様になる。

$$\begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_F + jP_F\sin\varphi_F, & jQ_F\sin\varphi_F \\ jQ_F^*\sin\varphi_F, & \cos\varphi_F - jP_F\sin\varphi_F \end{bmatrix}$$

$$\theta_F = \beta_{mF} l \tag{24}$$

但し、

$$\varphi_F = (\beta'_{F+} - \beta'_{F-})\,l/2 = \beta_{mF} K_F \sqrt{1+(\delta_F/K_F)^2}$$
$$P_F = (\delta_F/K_F)/\sqrt{1+(\delta_F/K_F)^2}$$
$$Q_F = \alpha_F/\sqrt{1+(\delta_F/K_F)^2} \tag{25}$$

(10)以降、モードにかかる振幅定数にf_i，モード関数にΨ_{Fi}と、文字F，Fを使用したが、これは前進波を念頭においた解析であることを示すための文字であった。導波系の可逆性を調べるため、次の節では後退波に対するモード伝達行列T_Bを求めるのであるが、この場合には、文字b，Bを種々の所につかうことにする。

3.3. 後退波に対するモード伝達行列と可逆性

前進波の場合と同様に伝搬定数の変分表示を出発点とするわけであるが、波動項は$\exp\{j(\beta z+\omega t)\}$とした。以下に結果だけをまとめて記す。

図2を参照し、後退波の伝達行列を次の様に定義する。

$$\begin{bmatrix} b_i(0) \\ b_j(0) \end{bmatrix} = e^{-j\theta_B} \begin{bmatrix} A_B & B_B \\ C_B & D_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i(l) \\ b_j(l) \end{bmatrix}$$

但し、$b_i(z)$，$b_j(z)$は$f_i(z)$，$f_j(z)$に対応する量である。以下、前進波に対応する諸量を記せば、

$$\begin{aligned} A_B &= \cos\varphi_B + jP_B \sin\varphi_B \\ B_B &= jQ_B \sin\varphi_B \\ C_B &= jQ_B^* \sin\varphi_B \\ D_B &= \cos\varphi_B - jP_B \sin\varphi_B \end{aligned} \qquad (26)$$

$$\theta_B = -\beta_{mB}\ell$$

$$\varphi_B = \beta_{mB} K_B \sqrt{1+(\delta_B/K_B)^2}$$

$$P_B = (\delta_B/K_B)/\sqrt{1+(\delta_B/K_B)^2}$$

$$Q_B = \alpha_B/\sqrt{1+(\delta_B/K_B)^2}$$

$$\beta_{mB} = \{(\beta_{Bi}+B_{ii})+(\beta_{Bj}+B_{jj})\}/2$$

$$\delta_B = \{(\beta_{Bi}+B_{ii})-(\beta_{Bj}+B_{jj})\}/\{(\beta_{Bi}+B_{ii})+(\beta_{Bj}+B_{jj})\}$$

$$K_B = |B_{ij}|/\beta_{mB}$$

$$\alpha_B = B_{ij}/|B_{ij}| \qquad (26)$$

但し.

$$B_{ij} = (\Psi_{Bi}, \omega\Delta W\, \Psi_{Bj}) = B_{ji}^*$$

$$= \begin{cases} F_{ij}^* & (\Delta W = \Delta W) \\ -F_{ij}^* & (\Delta W = -\Delta W) \end{cases} \qquad (27)$$

(27)は. 2.1で述べたように. 固有モード Ψ を(6)の様に定義することにより, $\Psi_{Bi} = \Psi_{Fi}^*$ なる関係が導出されるが. この関係より導びかれたものである。また基本系においては $\beta_{Bi} = \beta_{Fi}$ となるものとする。

(27) より . $\Delta W^* = \Delta W$ の場合には.

$$T_B = \begin{bmatrix} \cos\varphi_B + jP_B\sin\varphi_B & jQ_B\sin\varphi_B \\ jQ_B^*\sin\varphi_B & \cos\varphi_B - jP_B\sin\varphi_B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi_F + jP_F\sin\varphi_F & jQ_F^*\sin\varphi_F \\ jQ_F\sin\varphi_F & \cos\varphi_F - jP_F\sin\varphi_F \end{bmatrix} = T_F^T \qquad (2P)$$

なることがわかり、可逆性を有することがわかる。この場合には、物質定数の摂動が実対称行列で表示され、結晶軸の回転[4]により、摂動項ΔWを得る場合などに相当する。$\Delta W = -\Delta W^*$の関係は、ΔWの要素が純虚数で、反対称となる場合に成立し、磁界を印加することにより、摂動系を得る場合に相当する。一般に$T_B \neq T_F^T$であり、非可逆性を有する。

次章では、YIGに磁界を印加することで、実際$\Delta W = -\Delta W^*$となることに基づき、等方体基盤上にYIG薄膜をそなえた、三層構造の二次元導波系を考え、その場合のT_F, T_Bを示し、種々の非可逆素子が可能であることを説明する。

4. YIG薄膜導波系におけるモード結合とそれを利用した非可逆素子

前章のおわりで述べたように、この章では、実際的な具体例を上げ、前章までに展開してきた理論をあてはめてみる。

4.1. 基本系の固有モード

図3で示すような、三層構造の薄膜導波系を考え

る。YIGは、基本系(磁界を印加しないとき)ではCubic結晶系に属すが、$2C_{44} \simeq C_{11} - C_{12}$ より、弾性的には等方体近似[8]が可能であり、本論文でもこの近似を利用して、基本系の固有モードを求める。図3の様な構造では、Rayleigh波[9]とLove波[9]とが存在し、それぞれの固有モードは

$$\Psi_F = \begin{bmatrix} j\vec{V} \\ \tilde{T} \\ \vec{B} \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\vec{V} \\ \tilde{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\vec{U} \\ \tilde{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

となり、Rayleigh波の場合には、

$$\vec{U}^{(R)} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} U_{3i} \begin{bmatrix} 0 \\ K_i \\ 1 \end{bmatrix} e^{jb_i\beta z} \quad (0 \le z \le d)$$

$$= \sum_{i=5}^{6} U_{3i} \begin{bmatrix} 0 \\ K_i \\ 1 \end{bmatrix} e^{jb_i\beta z} \quad (z \le 0) \tag{29}$$

である。但し、

$$b_{\frac{1}{2}} = \mp j\left(1 - \rho v^2 / c_{11}\right)^{1/2} \qquad b_5 = -j\left(1 - \rho v^2 / c_{11}'\right)^{1/2}$$

$$b_{\frac{3}{4}} = \mp j\left(1 - \rho v^2 / c_{44}\right)^{1/2} \qquad b_6 = -j\left(1 - \rho v^2 / c_{44}'\right)^{1/2}$$

$$K_i = -\frac{c_{11} b_i^2 + (c_{44} - \rho v^2)}{(c_{12} + c_{44}) b_i} \qquad K_i = -\frac{c_{11}' b_i^2 + (c_{44}' - \rho' v^2)}{(c_{12}' + c_{44}') b_i} \tag{30}$$

$(i = 1 \sim 4)$ $(i = 5, 6)$

である。$\tilde{T}^{(R)}$ は $\vec{U}^{(R)}$ からただちにわかるから、ここ

ではふれない。次にLove波の場合にも $\vec{U}$ のみ示せば、

$$\vec{U}^{(1)} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2} U_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{j a_i \beta z} \qquad (0 \le z \le d)$$

$$= U_{13} e^{j a_3 \beta z} \qquad (z \le 0) \qquad (31)$$

となる。但し、

$$a_{\frac{1}{2}} = \mp j (1 - \rho v^2 / c_{44})^{1/2} \quad , \quad a_3 = -j (1 - \rho' v^2 / c'_{44})^{1/2} \qquad (32)$$

である。

Rayleigh 波の満たす分散方程式は、

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & -R_{15} & -R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & -R_{25} & -R_{26} \\ R_{11} e^{j b_1 \beta d} & R_{12} e^{j b_2 \beta d} & R_{13} e^{j b_3 \beta d} & R_{14} e^{j b_4 \beta d} & 0 & 0 \\ R_{21} e^{j b_1 \beta d} & R_{22} e^{j b_2 \beta d} & R_{23} e^{j b_3 \beta d} & R_{24} e^{j b_4 \beta d} & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & -K_5 & -K_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (33)$$

となる。但し、

$$R_{1i} = C_{12} K_i + C_{11} b_i \qquad R_{1i} = C'_{12} K_i + C'_{11} b_i$$

$$R_{2i} = b_i K_i + 1 \qquad R_{2i} = b_i K_i + 1 \qquad (34)$$

$$(i = 1 \sim 4) \qquad (i = 5, 6)$$

であり、Love 波の場合には、分散方程式は、

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 e^{j a_1 \beta d} & a_2 e^{j b_2 \beta d} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (35)$$

となる。(33), (35)を解いた結果を図4に示す。分散曲線の交点は、位相整合が起きていることを意味し、それ等のモードは結合する可能性を持つ。しかし、結合係数は(14)で示されるように、導波系断面における積分で表わされるから、位相整合がとれても、積分が零となり、結合しない場合がある[4]。

4.2 磁界による摂動項とモード伝達行列

磁界印加による摂動のかけかたはたくさんあるがここでは、図5に示す三つの場合を考える。但し、結晶軸と座標軸とを一致させた。図5に示すように、z軸方向に磁界を印加した場合、物質定数は次の様な摂動を受ける。

$$[\Delta\tilde{S}:]=\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & 0 & \\ \hline & 0 & \Delta_1 & 0 \\ 0 & -\Delta_1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\quad [\Delta\tilde{g}\cdot]=\left[\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \hline \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\quad [\Delta\tilde{\gamma}\cdot]=\begin{bmatrix} 0 & \Delta_3 & 0 \\ -\Delta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

但し、$\mu=\mu_0\left\{1+\dfrac{(\gamma\mu_0)^2MH_i}{(\gamma\mu_0H_i)^2-\omega^2}\right\}$, $K=\dfrac{\omega\gamma\mu_0^2M}{(\gamma\mu_0H_i)^2-\omega^2}$ とすれば

$$\Delta_1=j\,(b/MC_{44})^2\cdot K/(\mu^2-K^2)$$

$$\Delta_2=-j\,(b/MC_{44})\cdot K/(\mu^2-K^2)$$

$$\Delta_3=j\,K/(\mu^2-K^2) \tag{37}$$

である。(29), (31), (36)を(14)に代入すれば結合係数が決定され、摂動部に於ける界分布，モード伝達行

列などがわかり．それ等の結果を表1に示した。

磁界を結晶のcut面に垂直にかけた場合[10]と、伝搬方向に平行にかけた場合[11]には、Rayleigh波とLove波間とでのみ結合が起こり、モード伝達行列T_FおよびT_Bを見れば、モード変換が非可逆に起こっていることがわかる。磁界をcut面に平行、伝搬方向に垂直にかけた場合[12]には、Love波間のみで結合が起こる。文献[12]によれば、この場合には、摂動部において、Love波は、Magnetoelastic Love Waveと呼ばれる波になっており、伝搬定数が方向によって異なることがわかっている。本論文における解析もこの現象をよく示している。また、本解析における非可逆性の原因はΔ_1の存在であり、これはAuldがその著書[13]で提案した、$S_{45}=jS_{45}$および$S_{54}=-jS_{45}$の導入と一致している。

磁気ポテンシャルφは、基本系固有モード（φを持たない）の一次結合として得た純弾性界を、摂動系に於ける真の波動方程式に代入することにより、近似的に得たものである。

4.3. 種々の非可逆素子.

以上述べた非可逆性を利用して、種々の非可逆素子が可能となるが、その際、可逆素子（結晶軸の回転などによる摂動を利用した回路要素）が必要となるので、本解析ではふれなかったが、3軸の回りの

結晶軸の回転による摂動で得た可逆要素のモード伝達行列を、非可逆要素のものとまとめて、表2に示した。これ等の要素を接続すれば、Gylator[14]、一方向性モード変換器[14]、さらに、この二つを利用して、Isolator[14]、Circulator[14]などができるわけであるが、それ等を図6，図7，および表3，表4に、文献(14)を参照し、示した。

5. まとめ

磁気弾性波の非可逆性を、モード結合の立場より考察し、その非可逆性を明解した。まず、基本系と摂動系とを定義し、摂動系のモードを基本系の固有モードで展開し、βの変分表示式に代入し、Rayleigh-Ritz法を用いることにより、磁気弾性波間の結合機構を記述する結合モード方程式を得た。さらに、二モード近似を適用し、二つの磁気弾性波の結合を調べ、モード変換が非可逆的に起こっていることがわかった。次に回路論的立場より、弾性波導波系の構成を念頭におき、摂動部を一回路要素と考え、その働らきを二行二列の行列表示した。最後に、以上の議論を、実際的な、YIG薄膜導波系に応用し、種々の非可逆素子が可能であることを示した。

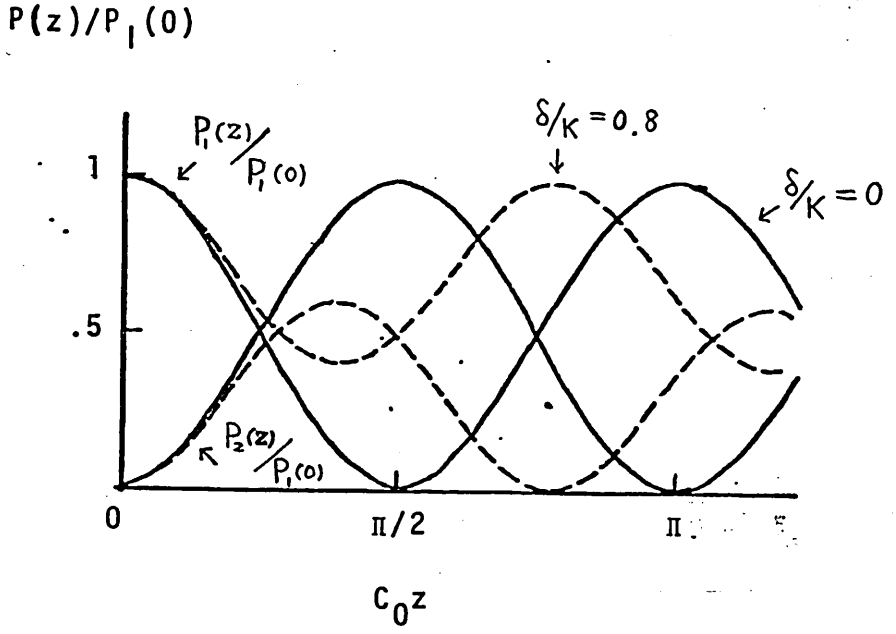


図1. 電力移項

$C_0 = C|_{\delta=0}$ (縮退時)

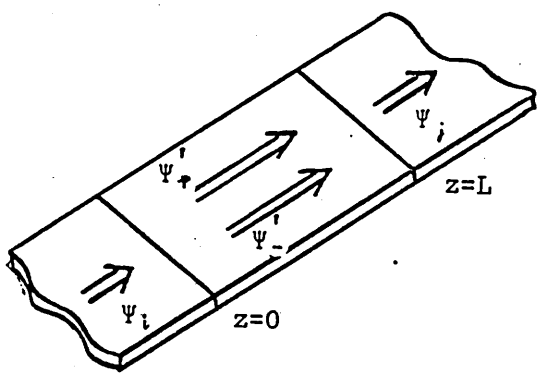


図2. モード変換

$\beta_{Fi} = \beta_{Fj}$, $C_0 L = \pi/2$

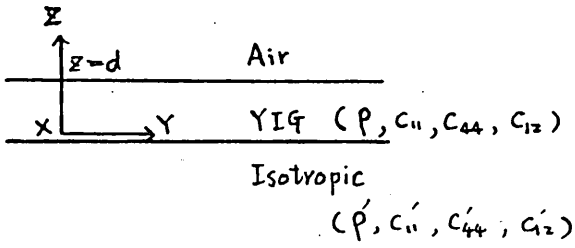


図3. 三層構造導波系

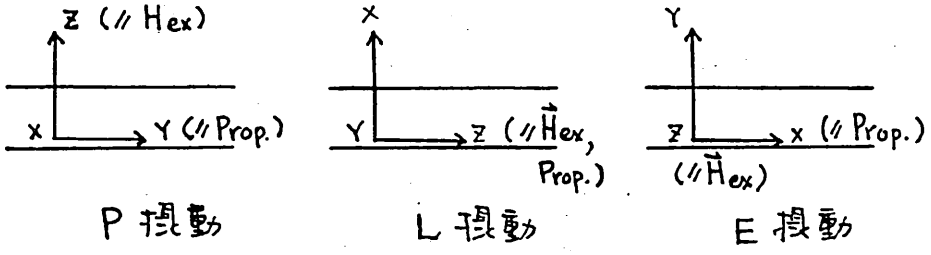


図5. 磁界印加による
三種類の摂動系

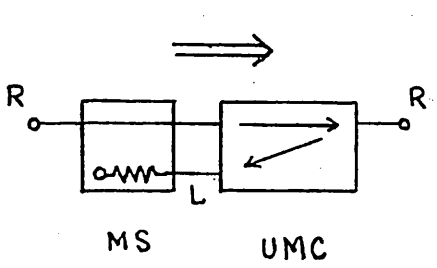


図6. Isolator

MS; mode selector

UMC; Unidirectional mode converter

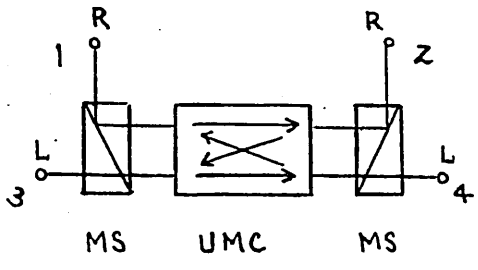


図7. Circulator

MS; mode Selector

UMC; Unidirectional mode Converter

構造	$\vec{H}_{ex}\perp$ cut面, prop., (P)	$\vec{H}_{ex}\parallel$ cut面, prop., (L)	$\vec{H}_{ex}\parallel$ cut面, $\perp$ prop., (E)
結合pair	R − L	R − L	L − L
F_{ij}	$-\int_0^d \Delta_1 T_4^* T_5^* dz$	$\int_0^d \Delta_1 T_4 T_5^* dx$	$2\,Re\left[\int_0^d \Delta_1 T_4^* T_5\, dy\right]$
T_4	$C_{44}\left(\frac{dU_2}{dz}+j\beta U_3\right)$	$C_{44}\, j\beta\, U_2$	$C_{44}\frac{dU_3}{dy}$
T_5	$C_{44}\frac{dU_1}{dz}$	$C_{44}\left(j\beta U_1+\frac{dU_3}{dx}\right)$	$C_{44}\, j\beta\, U_3$
φ	$\frac{1}{e_{15}\beta^2}\left[\left\{C_{45}\frac{\partial U_1}{\partial z}+(C_{12}+C_{44})\frac{\partial U_2}{\partial z}\right\}\times j\beta+\left\{C_{11}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-(C_{44}\beta^2-\omega^2\rho)\right\}U_3\right]$	$\frac{-1}{\mu_{33}\beta^2}\cdot\frac{\mu_{11}}{e_{15}}\left[\left[\left\{(C_{12}+C_{44})+\frac{e_{15}^2}{\mu_{11}}\right\}\times\frac{\partial U_1}{\partial x}-(C_{45}+\frac{e_{14}e_{15}}{\mu_{11}})\frac{\partial U_2}{\partial x}\right]j\beta+\left\{(C_{44}+\frac{e_{15}^2}{\mu_{11}})\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(C_{11}\beta^2-\omega^2\rho)\right\}\times U_3\right]$	$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\beta^2\right)\left(\frac{C_{44}}{e_{15}}U_3-\varphi\right)=0$
T_{FO}	$\begin{bmatrix}\cos\varphi_{FO} & j\sin\varphi_{FO}\\ j\sin\varphi_{FO} & \cos\varphi_{FO}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\cos\varphi_{FO} & -\sin\varphi_{FO}\\ \sin\varphi_{FO} & \cos\varphi_{FO}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{j\gamma_F}\end{bmatrix}$
T_{BO}	$\begin{bmatrix}\cos\varphi_{FO} & -j\sin\varphi_{FO}\\ -j\sin\varphi_{FO} & \cos\varphi_{FO}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\cos\varphi_{FO} & -\sin\varphi_{FO}\\ \sin\varphi_{FO} & \cos\varphi_{FO}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-j\gamma_F}\end{bmatrix}$
Ψ'_{FI}	$\pm\Psi_{Fi}+\Psi_{Fj}$	$\pm j\Psi_{Fi}+\Psi_{Fj}$	Ψ_{Fi}, Ψ_{Fj}
Ψ'_{BI}	Ψ'^{*}_{FI}	Ψ'^{*}_{FI}	Ψ^{*}_{Fi}, Ψ^{*}_{Fj}
β'_{FI}	$\beta_{mF}(1\pm K_F)$	$\beta_{mF}(1\pm K_F)$	β_{Fi}, $\beta_{Fj}+\gamma_F$
$\beta'_{B\pm}$	$\beta_{mF}(1\pm K_F)$	$\beta_{mF}(1\pm K_F)$	β_{Fi}, $\beta_{Fj}-\gamma_F$
変位の位相関係	U_1, U_3 ; 実 U_2 ; 純虚	$U_1, U_2, U_3 \to U_2, U_3, U_1$	$U_1, U_2, U_3 \to U_3, U_1, U_2$

表 1

様式	$\Delta W^* = -\Delta W$ (磁界印加)			$\Delta W^* = \Delta W$ (結晶軸回転)		
構成	$\vec{H}_{ex} \perp$ cut面, prop. (GP)	$\vec{H}_{ex} \parallel$ cut面, prop. (GL)	$\vec{H}_{ex} \parallel$ cut面, $\perp$ prop. (GE)	軸$\perp$cut面, prop. (AP)	軸$\parallel$cut面, prop. (AL)	軸$\parallel$cut面, $\perp$ prop. (AE)
T_{Fo} $\pi/2$	$\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
T_{Bo} $\pi/2$	$\begin{bmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
T_{Fo} $\pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{j} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{j} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
T_{Bo} $\pi/4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-j} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{j} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

表2. 行列の種類

	CIRCUIT CONFIGURATION	OPERATING MODE	TRANSFER MATRIX T_F	TRANSFER MATRIX T_B
a	GE $\pi/2$	R	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$
b	AL $\pi/2$ — GE $-\pi/2$ — AP $\pi/2$	L	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +j \end{bmatrix}$
c	GP $\pi/2$ — AL $\pi/2$	R L	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
d	GL $\pi/2$ — AL $\pi/2$	R L	$\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$
e	AP $\pi/2$ — GL $\pi/2$	R L	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
f	AP $\pi/2$ — GP $\pi/2$	R L	$\begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$

表3 Gylator

	CIRCUIT CONFIGURATION	TRANSFER MATRIX T_F	TRANSFER MATRIX T_B
a	GP $\pi/4$ — AL $\pi/4$	$\begin{bmatrix} 0 & +j \\ +j & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
b	GL $\pi/4$ — AP $\pi/4$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
c	AL $\pi/4$ — GE $-\pi/2$ — AP $\pi/4$	$\begin{bmatrix} 0 & j \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$
d	GL $\pi/4$ — GE $\pi/2$ — GP $\pi/4$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ j & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$

表4. Unidirectional mode Converter

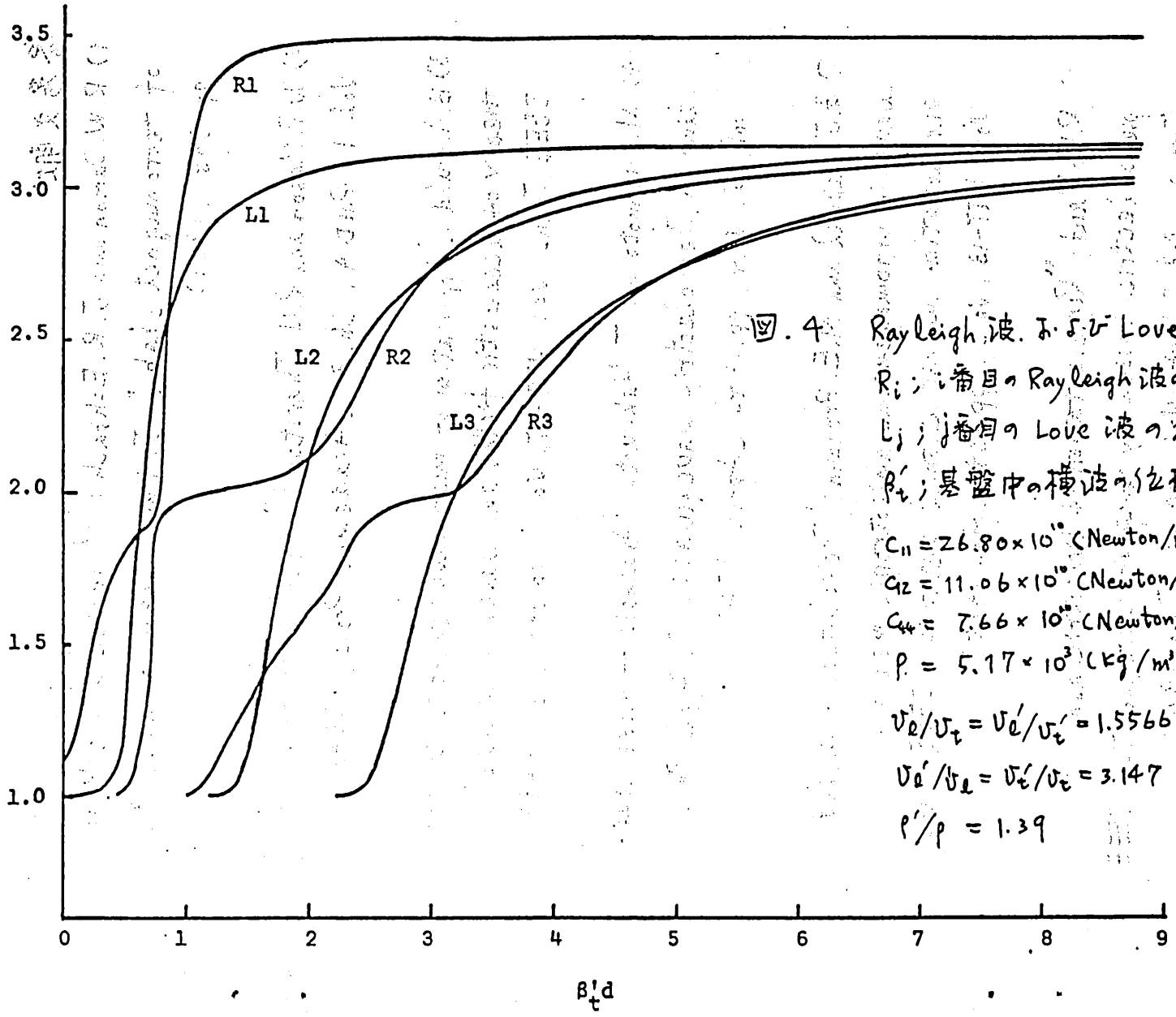


図. 4 Rayleigh 波 および Love 波 の分散曲線

R_i ; i番目の Rayleigh 波の分散曲線

L_j ; j番目の Love 波の分散曲線

β_t' ; 基盤中の横波の位相定数

$C_{11} = 26.80 \times 10^{10}$ (Newton/m²)

$C_{12} = 11.06 \times 10^{10}$ (Newton/m²)

$C_{44} = 7.66 \times 10^{10}$ (Newton/m²)

$\rho = 5.17 \times 10^{3}$ (kg/m³)

$v_l/v_t = v_l'/v_t' = 1.5566$

$v_l'/v_l = v_t'/v_t = 3.147$

$\rho'/\rho = 1.39$

参考文献

1) R.W. Damon and J.R. Eshbach; "Magnetoelastic Modes of ferromagnet slab," J. Phys. Chem. Solids, 19, pp. 308 (1961)

2) W.P. Mason and R.N. Thurston; "Physical Accoustics" Vol. 1, Part A, Ch. 3 (Academic Press, 1964)

3) B.A. Auld; "Application of microwave concepts to the theory of accoustic fields and waves in solids", IEEE Trans. Vol. MTT-17, No. 11, pp. 800 (Nov. 1969)

4) M. Sugimoto and T. Makimoto; "Analysis of mode coupling in Piezoelectric waveguides", J. Appl. Phys. Vol. 45, No. 4, pp. 1643 (April 1974)

5) G.J. Gabriel and M.E. Brodwin; "The solution of guided waves in inhomogeneous anisotropic media by perturbation and variational methods," IEEE Trans., Vol. MTT-13, No. 3, pp 364 (May 1965)

6) R. Holland; "Representation of dielectric, and piezoelectric losses by complex coefficients", IEEE Trans., Vol. SU-14, No. 1, pp. 18 (Jan. 1967)

7) 例えば，水晶の物質定数が電界に依存する場合には，
$\Delta W' = \Delta W$ となる．
K. Hruška and A. Khogali: "Poralizing effect with alpha-Quartz rods and the electroelastic tensor," IEEE Trans., Vol. SU-18, No. 3, pp. 171 (July 1971)

8) W. Strauss; "Elastic and Magnetoelastic waves in Yttrium Iron Garnet," Proc. IEEE, Vol. 53, No. 10, pp 1485 (Oct. 1965)

9) Ewing, Jadetsky and Press; Elastic Waves in Layered Media, (McGraw Hill 1957)

10) J. P. Parekh; "Magnetoelastic Rayleigh waves on a YIG substrate magnetized normal to its surface," J. Appl. Phys., Vol. 45, No. 4, pp. 1860 April 1974)

11) ..; "Magnetoelastic Rayleigh waves propagating along a tangential bias field on a YIG substrate," J. Appl. Phys., Vol. 40, No. 1, pp. 434 (Jan. 1974)

12) H. Matthews and H. van de Vaart; "Magnetoelastic Love waves," Appl. Phys. Letters, Vol. 15, No. 11, pp-373 (Dec. 1969)

13) B.A. Auld; Acoustic Fields and Waves in Solids Vol. I, pp 255 ~256 (John Willey and Sons, 1973)

14) S. Yamamoto and T. Makimoto: "Circuit theory for a class of anisotropic and gyrotropic thin-film optical waveguides and design of nonreciprocal devices for integrated optics", J. Appl. Phys. Vol. 45, No. 2, pp 882 (Feb. 1974)

輻射科学研究会資料

大阪管の電子アドミッタンスの計算

飯田幸雄・森田正信・田 雅郎
（関西大学 工学部）（大阪工業大学）

1974年12月6日

大阪管の電子アドミッタンスの計算

1. まえがき

大阪管は作用空間内で電子を振動させ、加速位相で振動する電子を早期に作用空間より取除くこと（選択作用）により、負性コンダクタンスを得る電子振動管であるが、いろいろの運動状態の電子が同時に反復して回路と作用するために解析が困難で今でもその理論は確立されていないように思われる。

大阪管の電子アドミッタンスは、植え原氏により計算されているが[1]、1回の電子振動の場合に限られている。ここでは、大阪管の電子運動を詳細に調べ多重走行をなす場合の電子アドミッタンスを計算した。

2. 計算の準備

(1). 静電界中の電子運動[2]

図1において、電位分布は

$$V=V_0\{1-(x/l_x)^2+(y/l_x)^2\}$$

で表わされ、初期位置 $F(-x_0, y_0, 0)$ から初速度0で $t=0$ に出発する電子は次の運動をする。

$$x=-x_0\cos\omega_e t$$

$$y=y_0\left\{1+\frac{1}{r_\omega^2}(1-\cos\omega_m t)\right\}$$

$$z=\frac{\sqrt{r_\omega^2+1}}{r_\omega^3}y_0(r_\omega\cdot\omega_e t-\sin\omega_m t)$$

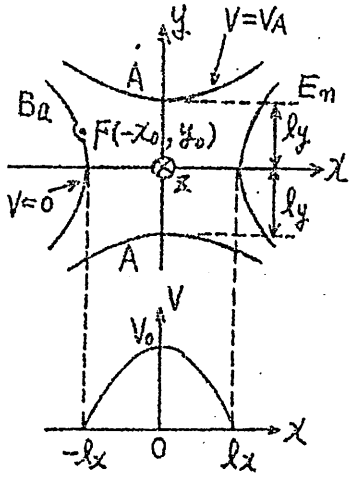


図1. 平板型大阪管の電極断面図とx軸上の電位分布

ここで、 $\omega_e^2 = 2\eta \frac{V_0}{l_x^2}$ $(\eta = e/m > 0)$, $\omega_m^2 = \omega_c^2 - \omega_e^2$

$\omega_c = \eta B$, $r_\omega = \omega_m / \omega_e$

磁界指数 r_ω がある程度大きいと（例えば、$r_\omega \geqq 4$）、y, x 座標は次の様に近似できる。

$$y \fallingdotseq y_0 \quad , \quad x \fallingdotseq \frac{y_0}{r_\omega} \omega_e t$$

従って、基本的には1回の電子振動につき、$2\pi y_0 / r_\omega$ だけ x 方向に推移する $y = y_0$ における x-z 面内の運動と考えることができる。

ここで無視する y-z 面内の運動による影響は特に検波実験によってかなり詳しく調べられており[2]、r_ω がかなり大きいところでも、比較的内部発振が弱い領域では大阪管の動作にかなりの影響を与えることがわかっている。基本的な大阪管の動作を調べるために上述のような近似をしたのである。

(2) 高周波電位分布

共振器は普通図2のようにA極を左右に分割して取付けられるが、一般に B_a 極と E_m 極間は高周波的に短絡されていないので、A_1 と B_a 極および A_2 と E_m 極は静電容量のために高周波的にほぼ同電位になっているものと考える。

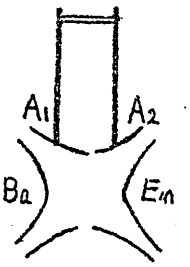


図2

電位分布の $l_x = 2l_y$ の電極構造における数値計算例を図3に示す。多少の高次成分を

含んではいるが、今はこの影響を考えないことにして、高周波電位分布として直線を仮定する。

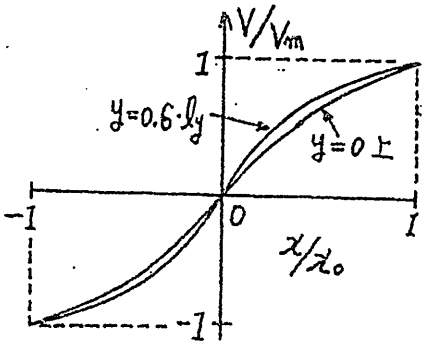


図3

3. 電子運動の解析

電位分布を

$$V=V_0\{1-(x/x_0)^2\}+V_m(x/x_0)\sin\omega t$$

とすると、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_e^2 x=\eta\frac{V_m}{x_0}\sin\omega t$$

ここで、
$\omega_e^2=\eta\frac{2V_0}{x_0^2}$, $\eta=e/m$ (>0)

$\tau=\omega t$ とおくと、

$$\frac{dX}{d\tau^2}+\left(\frac{1}{a}\right)^2X=\mu\sin\tau \qquad (1)$$

ここで、$X\equiv\frac{x}{x_0}$, $a\equiv\frac{\omega}{\omega_e}$, $\mu\equiv\frac{V_m}{2V_0}\left(\frac{1}{a}\right)^2=\frac{\beta}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^2$, $\beta\equiv\frac{V_m}{V_0}$

ω および ω_e はそれぞれ高周波電界、電子振動の角周波数であり、V_0 は作用空間中央における直流電位、V_m は高周波電圧の振幅である。

(1)式は $a=1$ のときに次の解をもつ。

$$X=C_1\cos\tau+C_2\sin\tau-\frac{\tau}{2}\mu\cos\tau$$

初期条件 $\tau=\tau_0$ のとき $X=-1$, $dX/d\tau=0$ によって、

$$X=-\left(1+\frac{\mu}{2}\tau_t\cos\tau_0\right)\cos\tau_t+\frac{\mu}{2}(\cos\tau_0+\tau_t\sin\tau_0)\sin\tau_t \qquad (2)$$

ここで、$\tau_t=\tau-\tau_0$ で電子の走行角。

$a \neq 1$ のとき (1) 式は次の解をもつ。

$$X = C_1 \cos\frac{\tau}{a} + C_2 \sin\frac{\tau}{a} - \frac{\mu}{S}\sin\tau$$

ここで、$S = (a^2-1)/a^2$ であり、高周波電界に対する電子振動周波数の離調度を表わす。初期条件によって、

$$X = -\left\{1 + 2\mu P \cos\left(\tau_0 + \frac{\gamma}{2}\tau_t\right)\right\}\cos\frac{\tau_t}{a} + \mu\{S\cos\tau_0 + Q\sin\tau_0\}\sin\frac{\tau_t}{a} \qquad (3)$$

ここで、

$$\gamma = 1 - \frac{1}{a},\ P = \frac{1}{S}\sin\frac{\gamma}{2}\tau_t,\ Q = \frac{1}{S}\sin\gamma\tau_t,$$
$$S = \frac{1}{S}(a - \cos\gamma\tau_t) \qquad (4)$$

$a \Rightarrow 1$ の極限において、$P \Rightarrow \tau_t/4$, $Q \Rightarrow \tau_t/2$, $S \Rightarrow 1/2$ となり、(3) 式は (2) 式に一致する。

電子運動の様子を調べるために、(2) 式を

$$X = -A\cos(\tau - \varphi) \qquad (5)$$

の形に表わすと、

$$A^2 = 1 + \frac{\mu^2}{4}\tau_t^2 + \mu\tau_t\cos\tau_0 + \frac{\mu^2}{4}(\cos^2\tau_0 + 2\tau_t\sin\tau_0\cos\tau_0) \qquad (6)$$

$$\varphi = \tau_0 - \tan^{-1}\left\{\frac{\cos\tau_0 + \tau_t\sin\tau_0}{\frac{2}{\mu} + \tau_t\cos\tau_0}\right\} \qquad (7)$$

振幅 A の2乗（エネルギーに対応する量）と位相 φ の走行角 τ_t に対する変化をそれぞれ図4, 5 に示す。ここで、加速位相 $0 \leqq \tau \leqq \pi/2$ および $3\pi/2 \leqq \tau < 2\pi$ に出発する電子を加速電子、$\pi/2 \leqq \tau \leqq 3\pi/2$ の減速位相に出る電子を減速電子と

呼ぶことにする。加速電子は第一回目の走行で E_m 極に飛び込み捕獲される。減速電子は次第に振動の振幅を減少するが、位相 φ が 0 又は 2π の方に向って移っていくので、やがて加速位相に入り振幅は増加し始める。この様子を図6に示す。$\tau_0=\pi$ の電子は最も減速され零振幅に達するが、その他の減速位相に出た電子は零振幅に達しないうちに増加を始める。従って、このまま放置するとすべての電子は再び初期の振幅にまで増加し、B_a 極又は E_m 極に飛び込むことになる。このときの τ_t は図4に $|X|=1$ の曲線として示されている。適当に電子は作用空間から取り除かれる必要がある。そこで、走行角 τ_{tb} の後にコレクターによって取り除かれるとする。

このように、すべての電子は加速位相に集群されていくのであるが、大阪管はこの過渡状態を利用していることになる。

最小振幅を与える走行角 τ_t は(6)式から、

$$\tau_t=-\left(\frac{4}{\beta}+\sin\tau_0\right)\cos\tau_0$$

となり、ある程度小さい β に対して、

$$\tau_t\fallingdotseq-\frac{4}{\beta}\cos\tau_0 \qquad (8)$$

と近似してよい。$\tau_0=\pi$ のときの電子が最小振幅をとる走行角を τ_{t0} とすると、

$$\tau_{t0}=\frac{4}{\beta}=\frac{1.27}{\beta}\pi \qquad (9)$$

電子振動回数 N は近似的に次式で定義できる。

$$N=\frac{\tau_{tb}}{2\pi a} \qquad (10)$$

同様に、 $a \neq 1$ の場合は (3) 式から、

$$X = -A\cos\left(\frac{\tau}{a} - \varphi\right) \tag{11}$$

の形に表わすと、

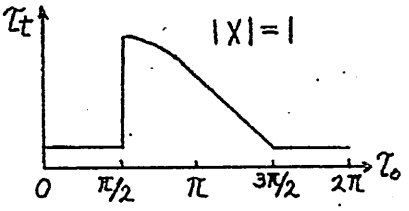
$$A^2 = 1 + 4\mu P\cos\left(\tau_0 + \frac{\gamma}{2}\tau_t\right) + \mu^2\left\{4P^2\cos^2\left(\tau_0 + \frac{\gamma}{2}\tau_t\right) + (Q\sin\tau_0 + S\cos\tau_0)^2\right\} \tag{12}$$

$$\varphi = \frac{\tau_0}{a} - \tan^{-1}\left\{\frac{S\cos\tau_0 + Q\sin\tau_0}{\frac{1}{\mu} + 2P\cos\left(\tau_0 + \frac{\gamma}{2}\tau_t\right)}\right\} \tag{13}$$

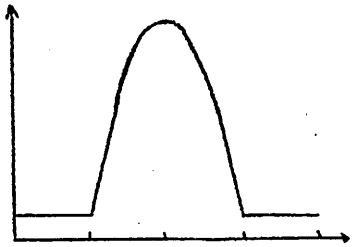
となり、 $\tau_t = 2\pi/\gamma$ の周期をもつ周期関数である。 $a \Rightarrow 1$ ($\delta \Rightarrow 0$) なる極限において (12), (13) 式はそれぞれ (6), (7) 式に一致し、周期は ∞ となる。 $\beta = 0.1$, $\delta = 0.1$ に対する (12), (13) 式の計算結果を図7に示す。この例では $\tau_0 = \pi/2$ の電子が最も減速されている。

位相特性の図中の破線は $\pi/2$ と $3\pi/2$ の高周波電界の位相に対する高周波電界の影響を受けないときの電子振動の位相変化を表わしており、加速位相と減速位相の境界線を意味している。

以上の考察から、陰極を出た電子が再び陰極と同電位の Ba 極又は Em 極に飛び込むまでの走行角は図8の $|X|=1$ の曲線で与えられる。



(a) $\delta > 0$


(b) $\delta = 0$

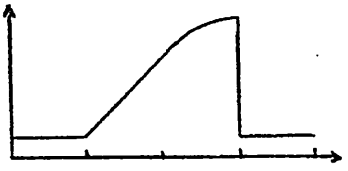


図8 (c) $\delta < 0$

4. 電子アドミッタンスの計算

i_0 を陰極の放出電流として、誘導電流 i は[3]、

$$i/i_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{\tau-\tau_{k2}}^{\tau-\tau_{k1}}\frac{dX}{d\tau}d\tau_0 \qquad (14)$$

となる（付録参照）。この式は Ramo-Shockley の定理を用いて、作用空間に存在する全電子にわたって総和をとったものであり、τ において作用空間に存在する電子は $(\tau-\tau_{k2})$ から $(\tau-\tau_{k1})$ までに陰極を出発した電子であるとしている。

(2) 式より、

$$\frac{dX}{d\tau}=\left(1+\frac{\mu}{2}\tau_t\cos\tau_0+\frac{\mu}{2}\sin\tau_0\right)\sin\tau_t +\frac{\mu}{2}\tau_t\sin\tau_0\cos\tau_t \qquad (15)$$

(3)式より、

$$\frac{dX}{d\tau}=\left(\frac{1}{a}-\mu S'\sin\tau_0+\mu Q\cos\tau_0\right)\sin\frac{\tau_t}{a} +2\mu P\sin\left(\tau_0+\frac{\gamma}{2}\tau_t\right)\cos\frac{\tau_t}{a} \qquad (16)$$

ここで、$S'=\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{a}-\cos\gamma\tau_t\right)$ であり、$a\Rightarrow 1$ なる極限において $S'\Rightarrow -1/2$ となり、(16)式は(15)式に一致する。

(14), (15)式から、$a=1$ のとき

$$i/i_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{l-1}\left\{\cos\tau_{kl}+\frac{\mu}{4}\left(\cos^2\tau_{kl}-\tau_{kl}^2\right)\sin\tau -\frac{\mu}{4}\left(\sin\tau_{kl}\cos\tau_{kl}-\tau_{kl}\right)\cos\tau\right\} \qquad (17)$$

(14), (16)式より、$a\neq 1$ のとき、

$$i/i_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{\tau_{k1}}{a}-\cos\frac{\tau_{k2}}{a}\right.$$
$$+\mu\left\{\left(\frac{a}{a+1}\right)^2\left(\cos\frac{\tau_{k1}}{a}\cos\tau_{k1}-\cos\frac{\tau_{k2}}{a}\cos\tau_{k2}\right)+U\right\}\sin\tau$$
$$\left.-\mu\left\{\left(\frac{a}{a+1}\right)^2\left(\cos\frac{\tau_{k1}}{a}\sin\tau_{k1}-\cos\frac{\tau_{k2}}{a}\sin\tau_{k2}\right)+W\right\}\cos\tau\right] \quad (18)$$

ここで、 $U=\frac{2}{a\delta^2}\left(\cos\gamma\tau_{k1}-\cos\gamma\tau_{k2}\right)$

$$W=\frac{2}{a\delta^2}\left(\sin\gamma\tau_{k1}-\sin\gamma\tau_{k2}\right)-\frac{1}{\delta}\left(\tau_{k1}-\tau_{k2}\right)$$

$a\Rightarrow 1$ なる極限において、$U\Rightarrow-(\tau_{k1}^2-\tau_{k2}^2)/4$, $W\Rightarrow-(\tau_{k1}-\tau_{k2})/4$ となり、(18) 式は (17) 式に一致する。

従って、電子アドミッタンスを $Y=G+jB$ とすると、

$$\left.\begin{aligned} G/G_0&=\frac{1}{2\beta\pi}\int_0^{2\pi}(i/i_0)\sin\tau\,d\tau \\ B/G_0&=\frac{1}{2\beta\pi}\int_0^{2\pi}(i/i_0)\cos\tau\,d\tau \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

ここで、$G_0=i_0/V_0$ である。

5. 計算結果

全般的な特性を把握するためにまず、$\delta=0$ の場合の電子アドミッタンスと電子能率を調べる。

$a=1$ に対する電子アドミッタンスを (2), (17), (19) 式から数値計算した結果を図9, 10 に示す。図9はコレクターまでの走行角 τ_{k1} に対する規格化コンダクタンスの特性である。負性コンダクタンス G は (9) 式で与えられる τ_{k0} よりも少し

小さいところで最大値をとる。図10にβに対するコンダクタンスを示す。βの小さいところでコンダクタンスはβに逆比例して増加している。

この物理的意味を明白にするために、$\beta \Rightarrow 0$ なる極限を考える。このような状態においても選択作用が顕在であるとするならば加速電子は第一回目の走行において E_m 極に捕獲される。(2)式から、

$$X = -\cos\tau_t$$

第一回目の走行において減速位相の電子と加速位相の電子の流す誘導電流は打ち消すので、τ_0, と平面での電子の出発線を $\tau = \tau_0$ でなくて、$\tau = \tau_0 + \pi$ であるとし、簡単のために、

$$\tau_{tb} = (2m+1)\pi \qquad (m = 0, 1, 2\cdots)$$

とすると(14)式は、

$$\lambda'/\lambda_0 = \frac{1}{2} m \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin\tau_t \, d\tau_0 = -m \sin\tau \qquad (20)$$

となり、βに独立な定数となる。従って、コンダクタンスは、

$$G = -\frac{m}{2\beta} G_0 \qquad (21)$$

となる。

βがかなり小さいときには、電子振動の振幅及び位相の変化は少ないので、mのあまり大きくないときには(20),(21)式が適用できる。βが大きくなると電子振動の位相、振幅変化のために、かえって誘導電流は減少する。また、βがあまり

小さくなると、選択作用が十分に行われなくなるので負性コンダクタンスの値には限界がある。

コンダクタンスGは図9のようにθ_{tb}に対して滑らかに変化するのではなくて、θ_{tb}の2πに対して2回の割合で小さい振動がある。例えば、$\beta=0.1$で$\theta_{tb}=10\pi$のときに約2～3%の振幅を有する。しかし、βがより小さくなると無視できるほどになるので省略した。

電子サセプタンスBは$a=1$($\delta=0$)のときにはほぼ零となる。

電子能率は

$$\eta_e=\frac{P}{\sigma\cdot P_0}\times 100\ [\%]$$

で与えられる。ここで、$P=2GV_m^2$, $P_0=i_0'V_0$, $\sigma=i_c'/i_0'$で、i_c'はコレクター電流である。

この特性を図11に示す。η_eはθ_{tb}が(9)式で与えられるθ_{to}にほぼ等しいところで最大値をとる。あまり大きい電子振動回数を期待できないので、$N=10$として$\eta_e\fallingdotseq 57\%$, $N=5$として$\eta_e\fallingdotseq 47\%$程度である。$\beta$が大きくなると、加速電子又は減速電子のうちで$B_a$又は$E_m$極に飛び込む電子が大きなエネルギーを失うので$\eta_e$は減少している。

ここに示した電子能率は相互作用を終えた電子を電位V_0のコレクターによって集めるとしたときの値である。電子運動の解析のところで述べたように、電子はさまざまのエネルギ

(0eVから5 V0eV)をもって飛び込むので、ここでの損失もかなりあると思われる。

次に(3),(18),(19)式からの結果を以下に述べる。Sに対する電子アドミッタンスをθ_{tb}をパラメータに図12に示す。負性コンダクタンスとなるSの範囲はθ_{tb}が大きくなるに従って狭くなっている。

(19)式において、コンダクタンスGおよびサセプタンスBは$G_0(=i_0/V_0)$によって規格化されているが、直流電圧V_0を変化させる都合上、$G_{00}(=i_0/V_{00})$によって規格化する。$\theta_{tb}=2\pi$における規格化電子アドミッタンスをアドミッタンス面上に表わすと、V_0をV_{00}のまわりに変えてa(xはS)を変化させたときに図13となる。ここで、a(xはS)は、

$$\frac{1}{a^2}=1-S=\frac{\omega_e^2}{\omega^2}=\frac{V_0}{V_{00}}$$

ω:高周波電界の角周波数
ω_e:電子振動の角周波数

によって定義されており、高周波電界に対する電子振動1回当りの走行角θは、

$$\theta=\omega\frac{2\pi}{\omega_e}=2\pi a$$

で表わされる。また、θ_{tb}を変えたときの様子は図12からわかるが、一例として図14に$\theta_{tb}=8\pi$のものを示す。

(9)式から、

$$\theta_{t0}=1.27\pi/\beta$$

であるので、θ_{tb}がこのθ_{t0}のときに電子能率は最大となり、θ_{t0}より大きくても小さくても能率は低下するが、大きいと

きには複雑な電子アドミッタンスを示すので、ここでは、$\tau_{tb} \leqq \tau_{to}$（既ち、$\beta \leqq 1.27\pi/\tau_{tb}$）の範囲を取扱うことにする。図12～14はこの範囲のものである。例えば、図14においてより小さいβに対する曲線は全く同じ傾向をもつが、βが0.15より大きくなると図15に示すようになる。

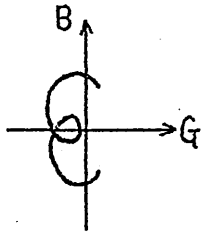


図15

これまでに計算された電子アドミッタンス軌跡（例えば文献1）はアドミッタンス面の原点を中心とする円となっており、最大の負性コンダクタンスを示す走行角の±90°の範囲で負性コンダクタンスを示しているが、ここに計算した結果では正コンダクタンスの値はあまり大きくならず、また、負性コンダクタンスを示す走行角の範囲はより狭くなっている。これは、減速位相で出発しても加速位相に変わり作用空間から取除かれる電子があることなど、電子運動を正確に取扱っていることと、多重走行を考慮しているからである。

6. 動作特性

図16の等価回路によって動作特性を調べる。回路アドミッタンスYcは、

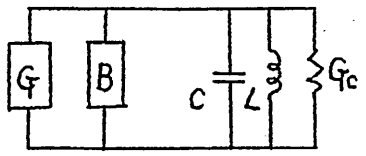


図16

$$Y_c = G_c + j\omega_0 C\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \fallingdotseq G_c\left(1 + 2jQ_l\frac{\Delta f}{f}\right)$$

ここで、$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\Delta f = (\omega_0 - \omega)/2\pi$, $Q_\ell = \omega_0 C / G_c$ で、回路の負荷時のQである。定常状態において、

$$G = -G_c \tag{22}$$

$$\frac{B}{G} = -2Q_\ell \frac{\Delta f}{f} \tag{23}$$

アドミッタンス面上、$G=-G_c$ の直線の左側で発振できるので、G_c が非常に大きくても弱いが発振することになる。

(23)式により、$|B/G| = k$ (一定) とおくと、$|\Delta f/f|$ は Q_ℓ に逆比例するので電子同調範囲は Q_ℓ が小さいほど大となる。$-k \leqq B/G \leqq k$ を与えるαの範囲は G_b が大きくなると小さくなるので、図17に示すようにαに対する周波数変化は大となる。

7. むすび

多重走行をなす場合の電子アドミッタンスを計算した結果次の事がわかった。

(1) 選択作用を利用して、多重走行をさせることにより、非常に大きい負性コンダクタンスを得ることができる。

(2) 間隙電圧の小さいとき負性コンダクタンスは間隙電圧に逆比例して大きくなるので、容易に発振できる。

(3) 間隙電圧が大きくなると選択作用に基づく損失が大きくなり電子能率は低下するので、負荷コンダクタンスを大き

くとり、小さい間隙電圧で動作させることが望ましい。

(4) 電子振動回数を大きくすると、V_0 に対する周波数変化(電子同調感度)は大きくなる。また、負荷コンダクタンスを大きくできるので電子同調範囲は広い。

(5) 大阪管では、コレクターは設けられていなくて陽極がコレクターの役割をはたしているが、電子振動回数は重要なパラメータとなっているので、不安定動作の原因となっているように思われる。

上記の他、種々の特性を明らかにした。

終りに、本研究に対し色々御討論頂いた関西大学工学部大東延久専任講師に感謝します。

文献

1) M. Uenohara : The Ohio State University Reserch Fundation, (1956)

2) 例えば、大東・石川・森田・田：大阪管の検波特性，輻射科学研究会資料 (Jun. 1969)

3) C.K. Jen : On The Induced Current and Energy Balance in Electronics, Proc. IRE, 29 345

〔付録〕 (14)式の導出

i_0を陰極の放出電流とすると、時間 dt_0 の間に $i_0 dt_0$ の電荷が放出される。高周波電位分布は

$$V = V_m (x/x_0) \sin \omega t$$

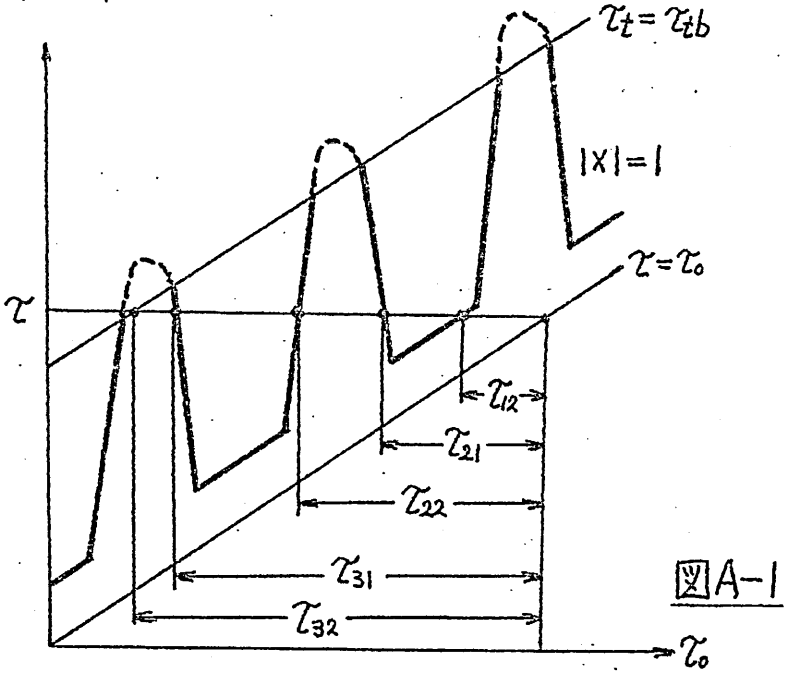
だから、Ramo-Shockley の定理によって誘導電流は、

$$I = -\frac{-V_m (1/x_0) \sin \omega t}{2 V_m \sin \omega t} \left(\frac{dx}{dt}\right) i_0 dt_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{x_0} \left(\frac{dx}{dt}\right) i_0 dt_0$$

$X = x/x_0$, $\tau = \omega t$, $\tau_0 = \omega t_0$ によって、

$$I = \frac{1}{2} i_0 \left(\frac{dX}{d\tau}\right) d\tau_0$$

ここで、電子は $\tau = \tau_0$ に陰極を出発する。時刻 τ において作用空間に存在するすべての電子にわたって総和をとれば、τ における瞬時電流が与えられる。



図A-1

図A-1は横軸に出発位相角τ_0，縦軸に位相角τをとり、$|X|=1$の曲線を描いたものである。即ち、$\tau=\tau_0$において、陰極を出発した電子が作用空間を走行した後にBa極又はEm極の位置に到達する位相τとτ_0の関係である。また、$\tau=\tau_0$の直線は電子の出発位相を表わしており、$\tau_t=\tau_{tb}$の直線は走行角τ_tがτ_{tb}に等しくなるときに、電子がコレクターによって捕獲されることを表わしている。すべての電子が陰極を出発してτ_{tb}の後にコレクターに捕獲されるのではなく、かなり多くの電子はそれ以前にBa極又はEm極によって捕獲される。図の太い実線がこの部分を表わしており、直線$\tau=\tau_0$上から出発した電子が太い実線に突き当る場合にはBa極又はEm極に入り、$\tau_t=\tau_{tb}$の直線に突き当る場合にはコレクターに入ることを意味している。

τにおいて、相互作用空間にある電子は出発位相が$(\tau-\tau_{k2})$から$(\tau-\tau_{k1})$までの電子からなる。ここで、$\tau_{11}=0$で、$k=1, 2, \cdots, m$であり、図A-1の場合には$n=3$である。

従って、

$$i=\frac{1}{2}i_0\sum_{k=1}^{m}\int_{\tau-\tau_{k2}}^{\tau-\tau_{k1}}\frac{dX}{d\tau}\,d\tau_0$$

となり、(14)式が得られる。

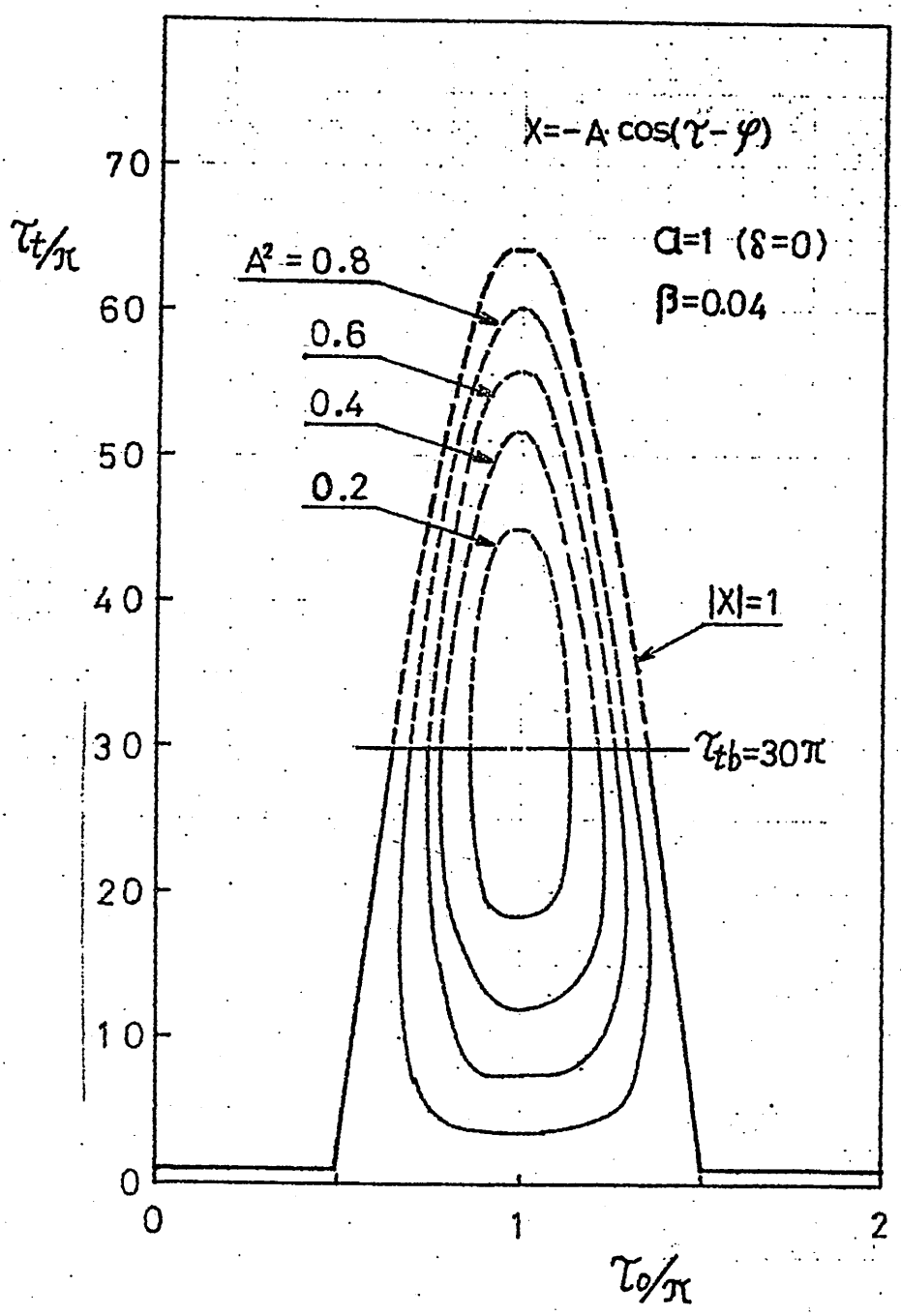


図4 電子振動の振幅の変化

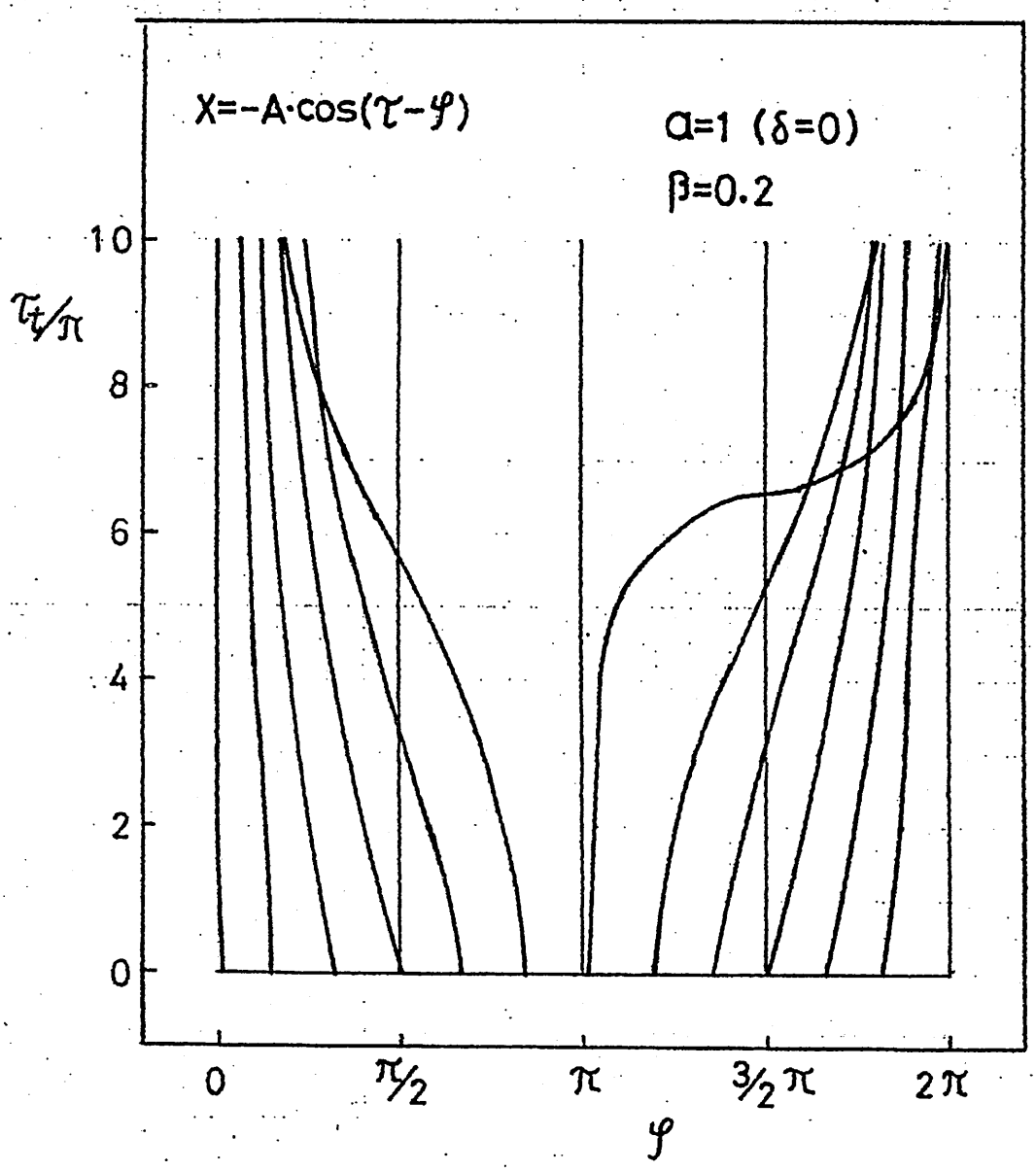


図5 電子振動の位相の変化

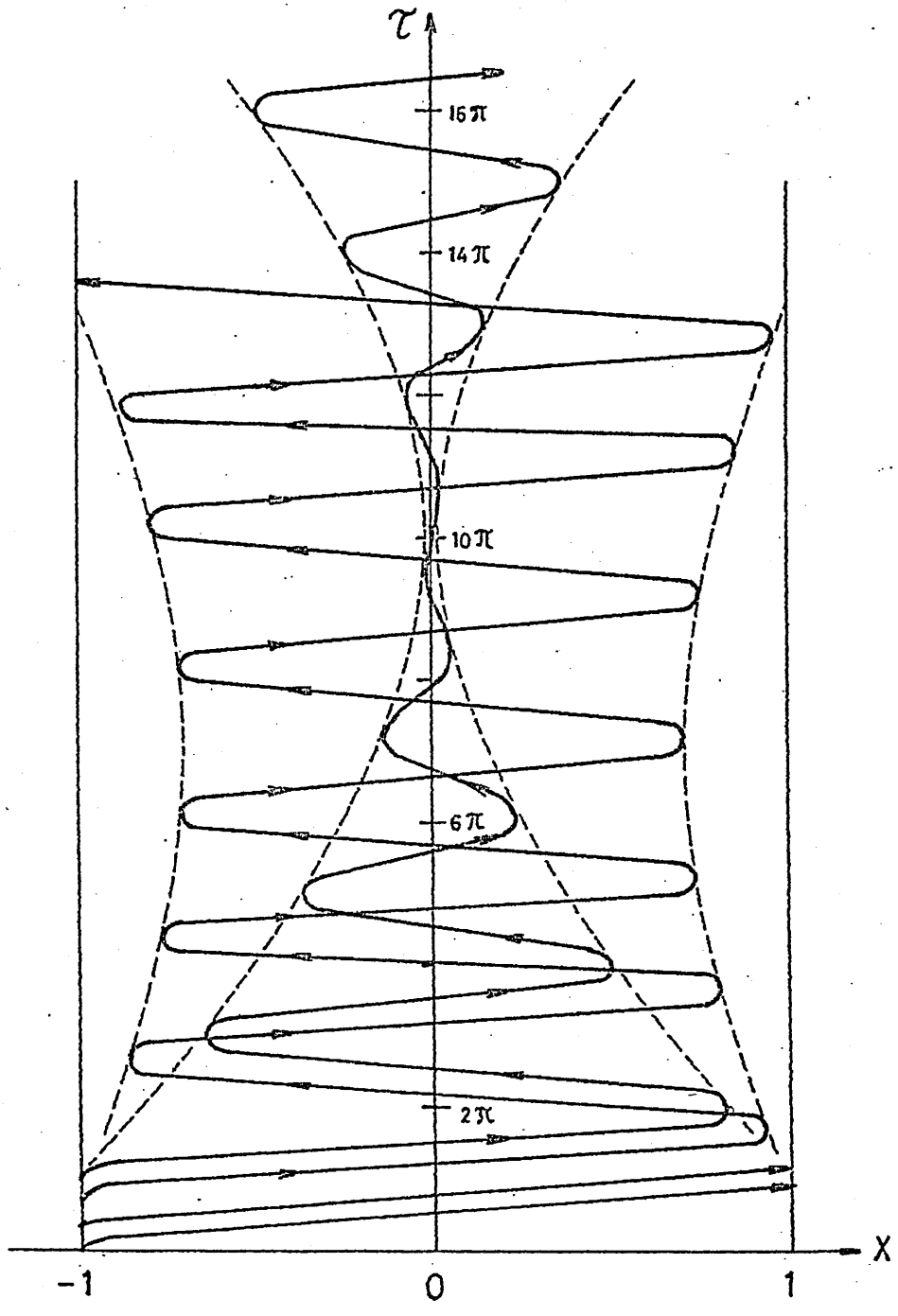


図6 電子振動の様子

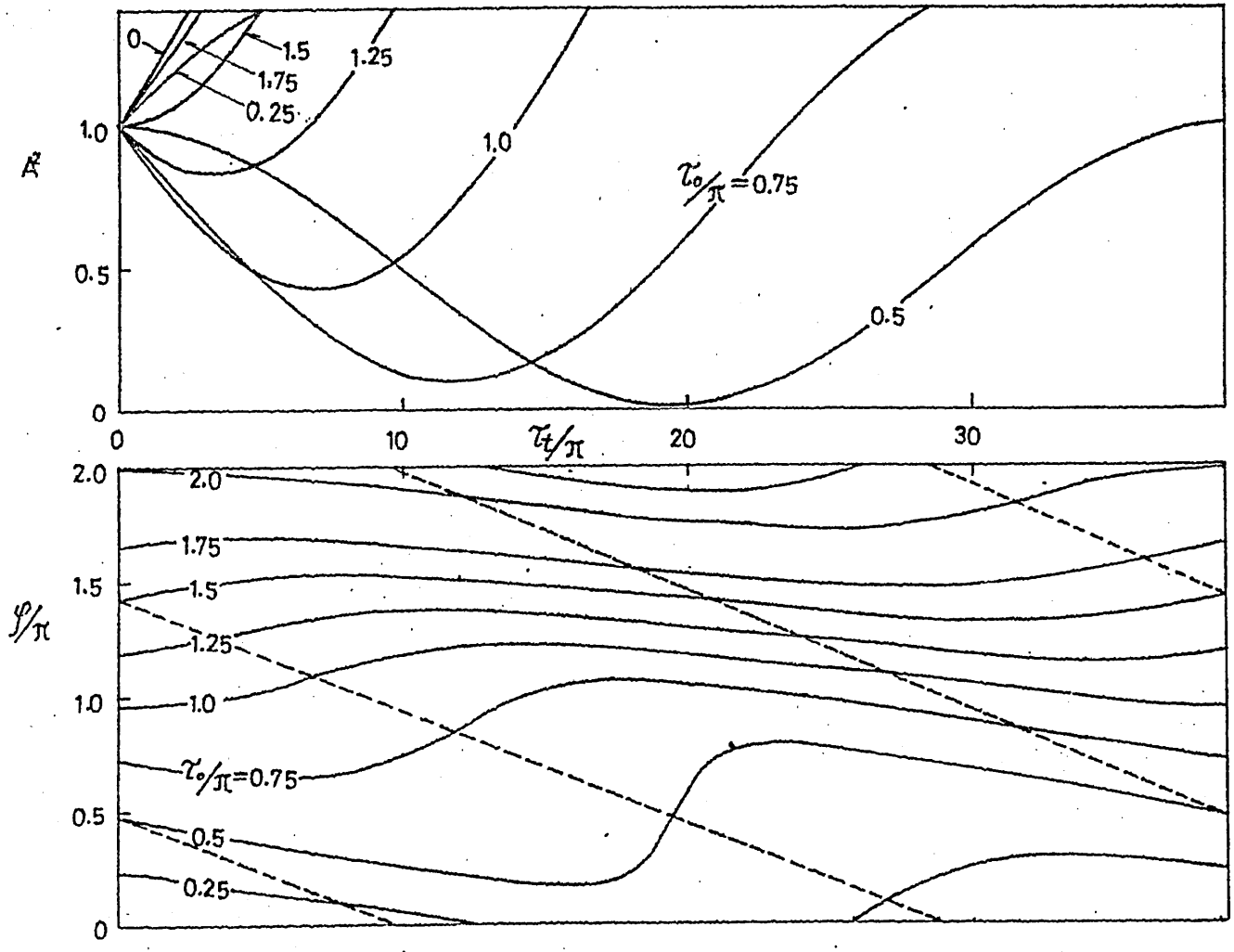


図7 電子振動の振幅・位相の変化

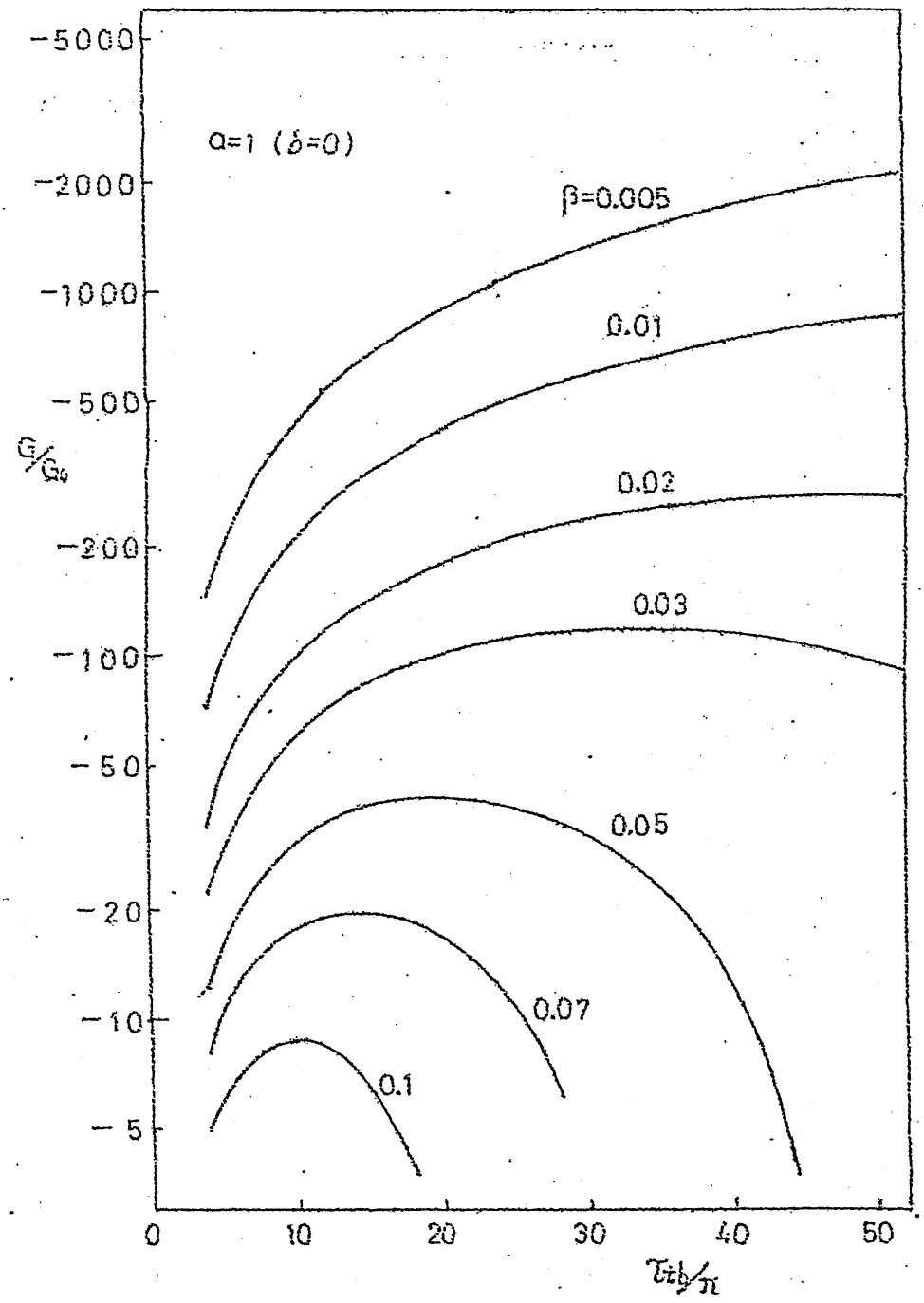


図9 電子振動回数に対する電子コンダクタンスの変化

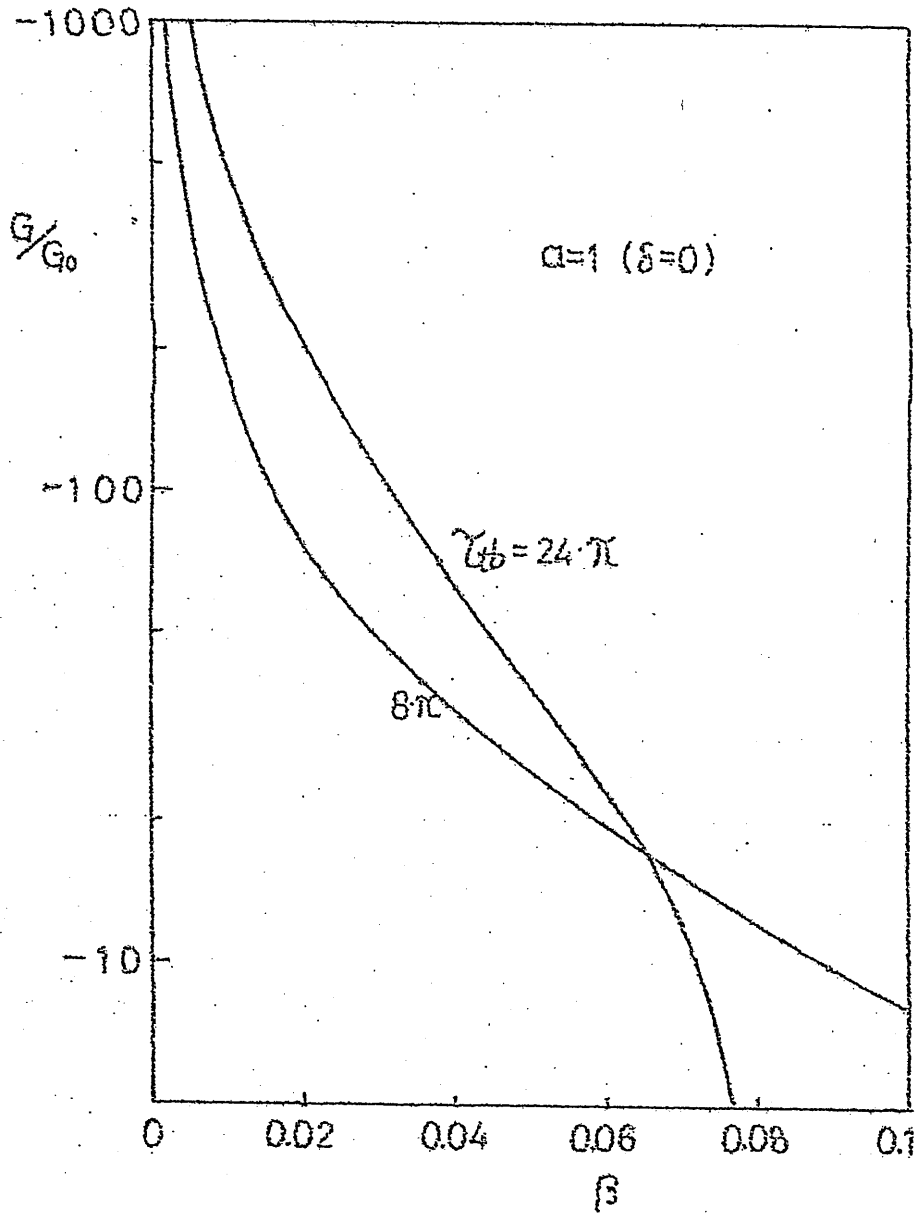


図10 間隙電圧に対する電子コンダクタンスの変化

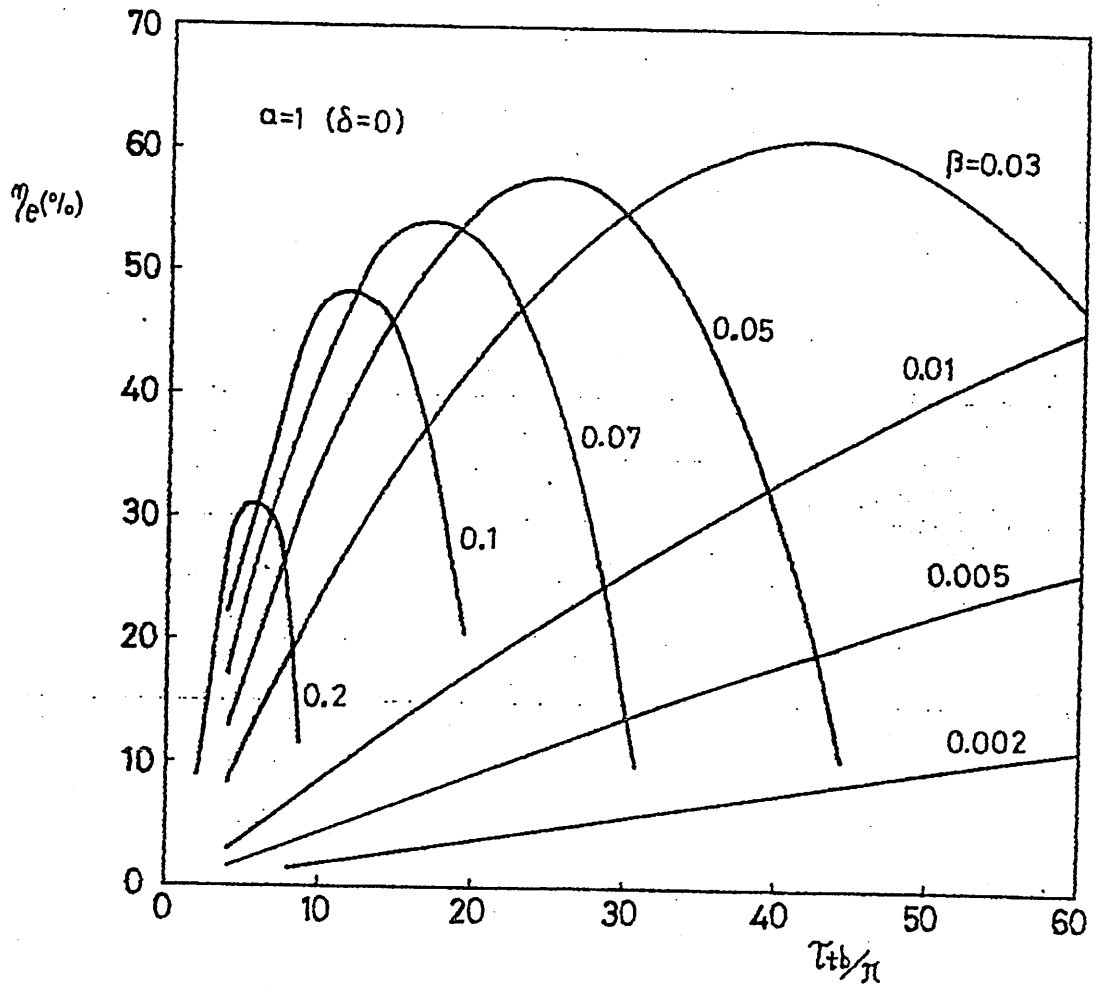

70
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60
α=1 (δ=0)
β=0.03
0.05
0.01
0.07
0.1
0.2
0.005
0.002
ηe(%)
τtb/π

図11 電子能率

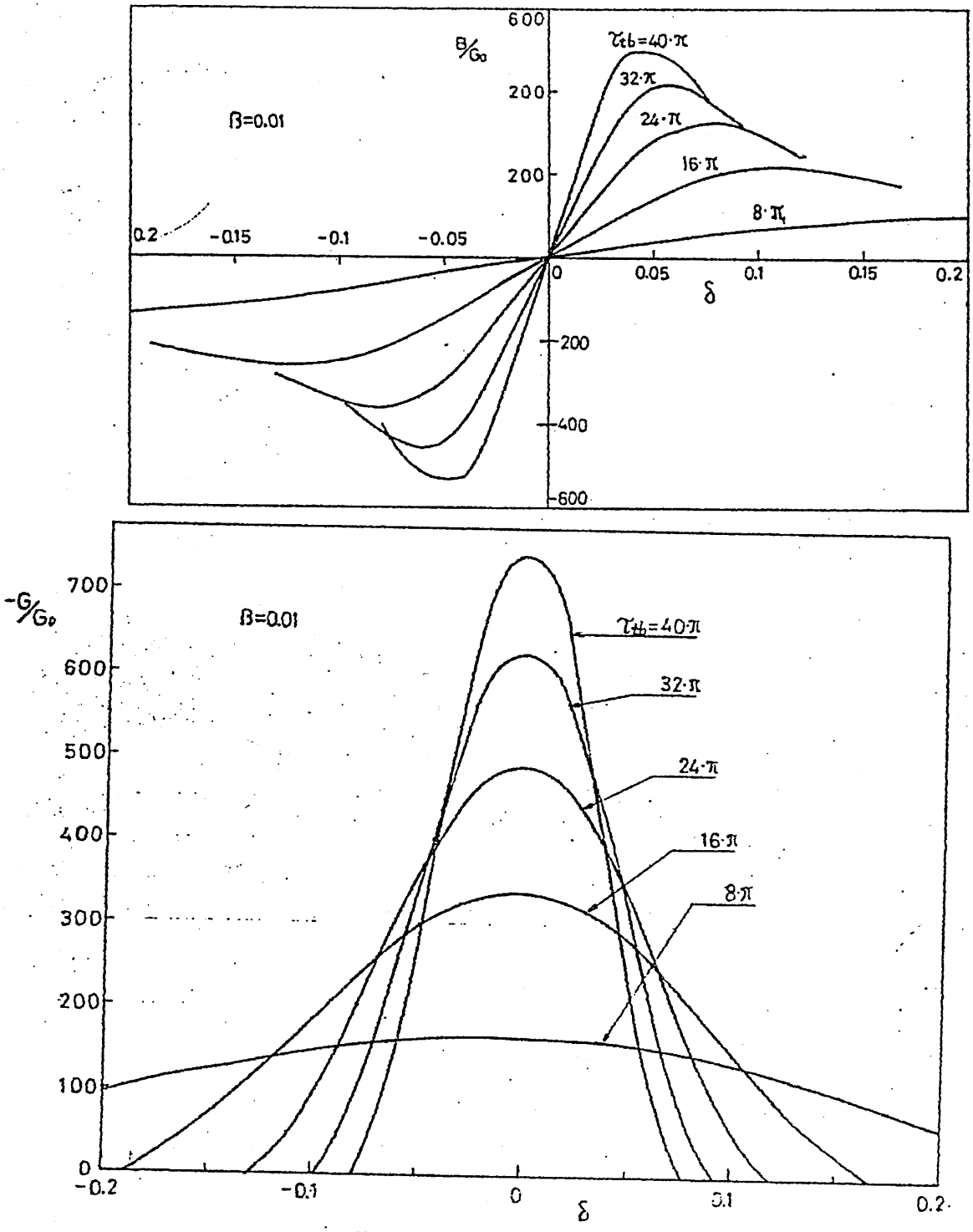


図12 電子振動回数に対する電子アドミッタンス

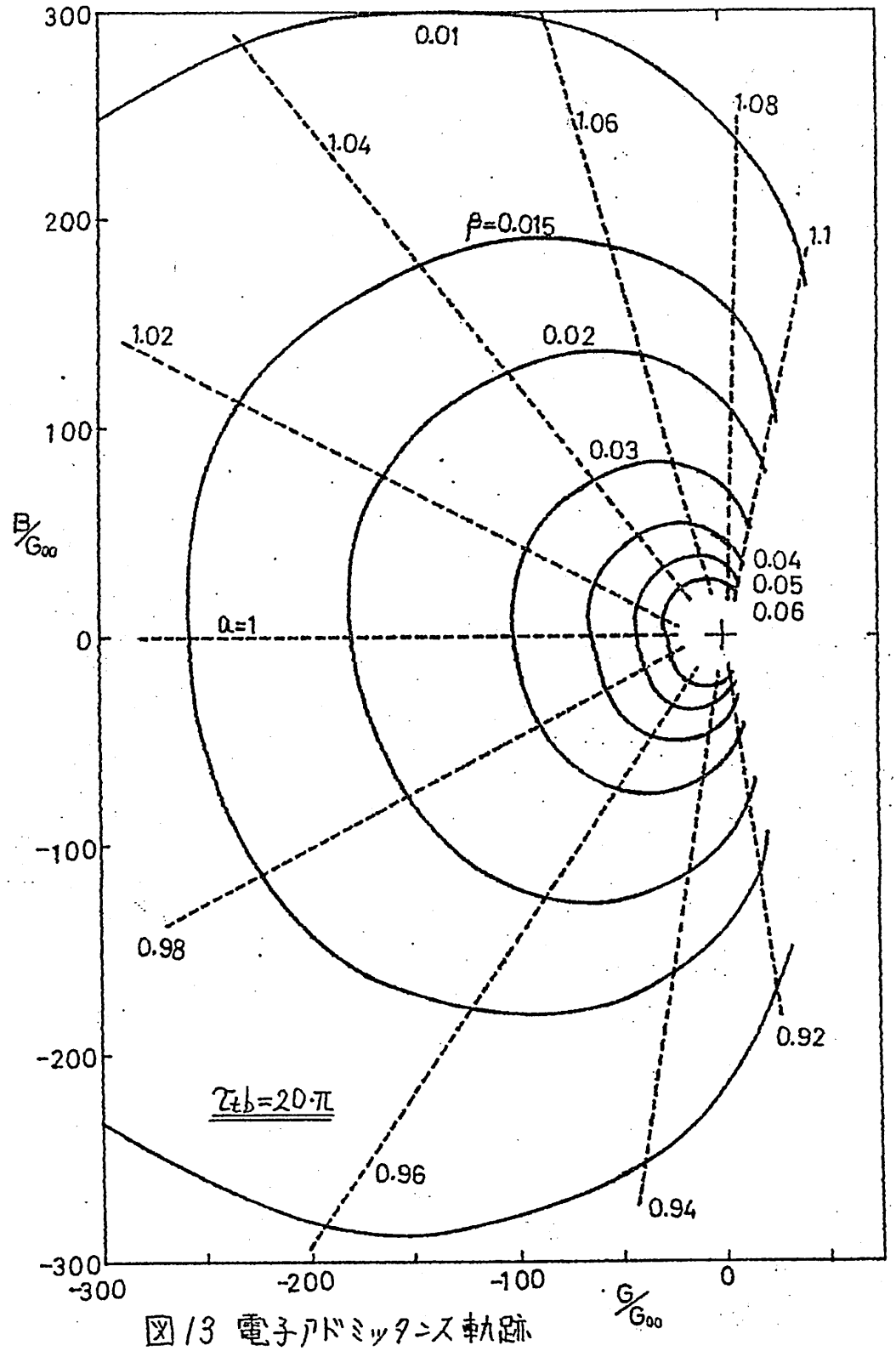


図13 電子アドミッタンス軌跡

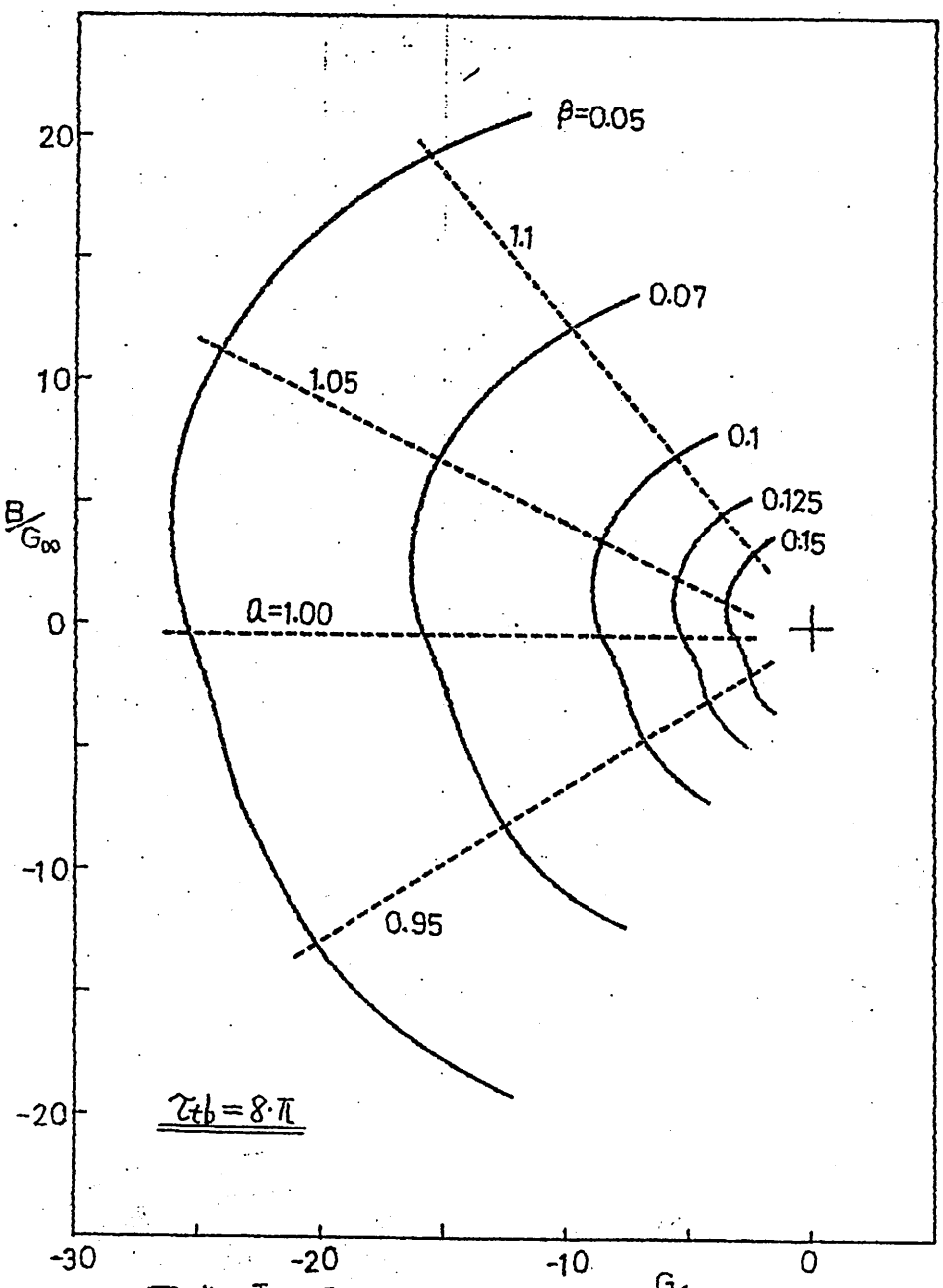


図14 電子アドミッタンス軌跡

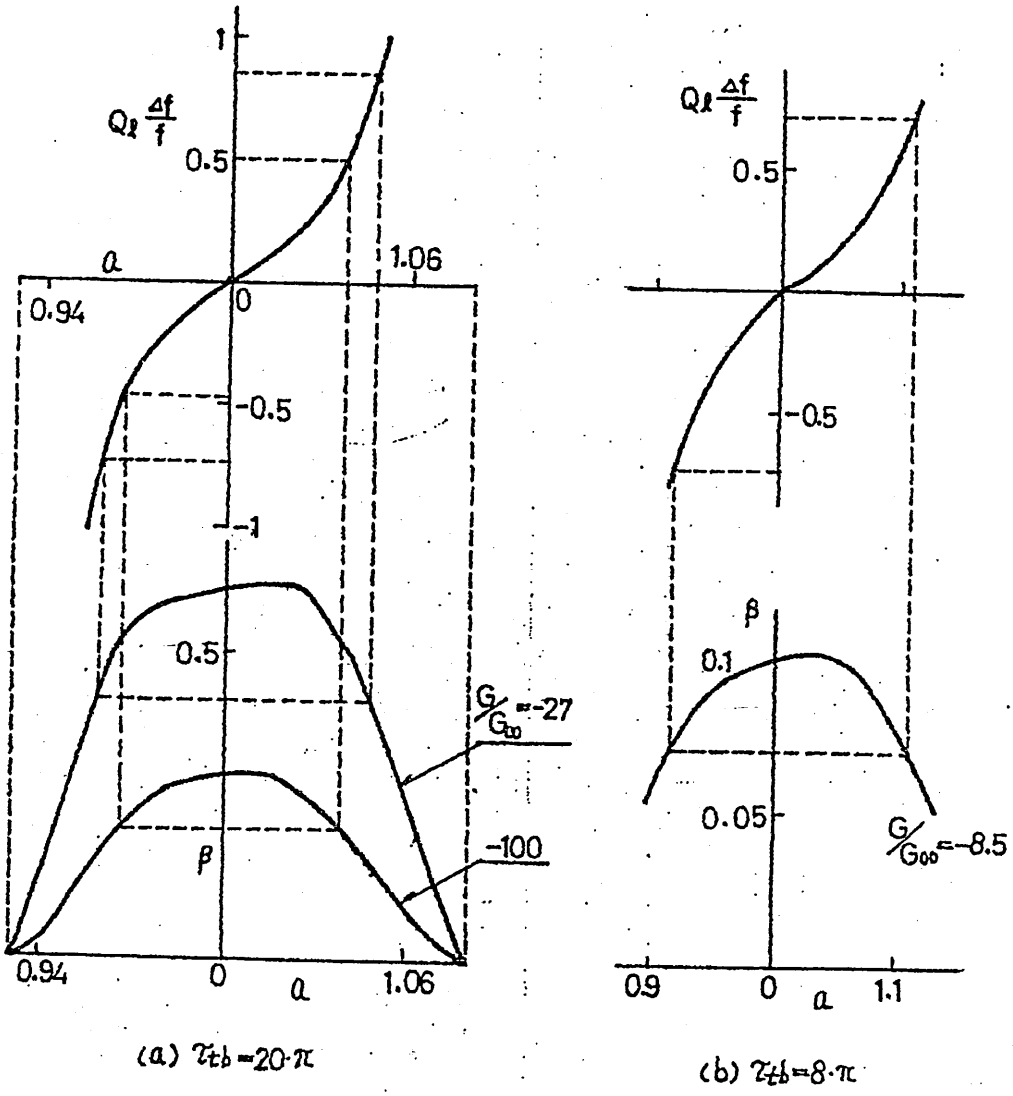

1
$Q_\ell \frac{\Delta f}{f}$
0.5
a
1.06
0.94
0
-0.5
-1
0.5
$\frac{G}{G_{00}}$=-27
-100
β
0.94
0
a
1.06
(a) $\gamma_{tb}=20\cdot\pi$
$Q_\ell \frac{\Delta f}{f}$
0.5
-0.5
β
0.1
0.05
$\frac{G}{G_{00}}$=-8.5
0.9
0
a
1.1
(b) $\gamma_{tb}=8\cdot\pi$

図17 動作特性

輻射科学研究会資料

二つの非共鳴円偏光による光周波数変化と不均一な拡がりの消失

塚田紀昭

（三菱電機・中研）

1974年12月6日

1. まえがき

多粒子よりなる2準位系媒質と電磁界とのコヒーレントな相互作用に基づく非線形光学効果[1]が，種々研究されてきている。それらは光エコー(Photon echo)[2]，自己誘導透過(Self-induced transparency, SIT)[3]，光章動(Optical nutation)[4]，超放射(Superradiance)[5]，自由誘導緩和(Optical free induction decay)[6]等である。これらの非線形光学効果はMaxwell方程式と媒質の運動方程式または光学的ブロッホ方程式をself-consistentに結合して解析されている。

本論文では2つの非共鳴円偏光を用いて光周波数，言い換えれば2準位原子のエネルギー間隔，及び不均一な緩和時間を変化させることが可能であることを示す。すでに，磁気共鳴の分野において，直線振動をしている非共鳴高周波磁場 $H_1(t) = H_1 \cos \omega t$ が静磁場 H_0 に垂直な面内に加えられたとき自由原子のLandé factor (g因子)，g_F，が

$$\bar{g}_F = g_F J_0 (\gamma_F H_1 / \omega) \qquad (1)$$

になることが知られている。ここで $\gamma_F = g_F \mu_B$，J_0 は零次のベッセル関数，μ_B はボーア磁子である。(1)式は ω が原

子の静磁場中でのラーモア周波数 $\omega_0 = \gamma_n H_0$ に比べて大きい場合，すなわち $\omega \gg \omega_0$ のときに成り立つ。(1)式の結果は Cohen-Tannoudji 等[7]によって最初に，高周波磁場を量子化した γ 光子フォトンによる原子系の "dressing" の一形態として導かれた。その後，半古典的[8]及び古典的なブロッホ方程式[9]からも同様な結果が導かれることが報告されている。

磁気共鳴におけるこの様な効果を光の周波数領域にまで適用できることを示すことが本論文の主な目的である。

一般に，非線形コヒーレント効果は $\gamma_e \mathcal{E}/\omega_0$ の級数できいてくる。ここで $\gamma_e = 2p/\hbar$，p は原子の双極子モーメント，ω_0 は原子の固有周波数，$\mathcal{E}$ は外場の強さである。従って非線形効果を顕著にするためには外場の強さ $\mathcal{E}$ を大きくすることが考えられる。しかし光領域においては $\omega_0 = 10^{14} \sim 10^{15}$ と非常に大きいため，外場 $\mathcal{E}$ を非常に大きくする必要がある。例えば，$\gamma_e \mathcal{E}/\omega_0 \approx 1$ となるためには $\mathcal{E} \approx 10^8$ V/cm であり，この様に強い電場は，電力密度にして 10^{15} W/cm^2 に対応する。これだけの強度の光はレーザによって始めて達成できる。しかし条件 $\gamma_e \mathcal{E}/\omega_0 \approx 1$ を満足するほど強い外場は，

原理的に共鳴実験に使用できない。　これは，原子の低い準位間の電気双極子遷移が，イオン化エネルギーと同程度の遷移エネルギーをもつためである。　明らかに，そのような外場の存在のもとでは原子の存在が疑わしくなる。

以上のことは，光学共鳴において関心のあるすべての場合に，関係 $\gamma_e \ll \omega_0$ が十分満足されていなければならないということである。　非線形効果を顕著にするもう一つの方法は ω_0 を小さくすることである。　ω_0 を変えることは，一見，不可能と思われるかもしれない。　しかし，(1)式を光周波数領域に適用する場合，次のような，よく知られている事実が思い起される。　すなわち，ω' の回転系においては原子の固有周波数が実効的に $\omega_0 - \omega'$ になる[10]ということである。　この考え方を利用することによって，比較的弱い外場にたいしても，大きな非線形効果が期待できる。

2. 回転系での光学的ブロッホ方程式

原子の実効的な固有周波数を小さくするために，2つの等強度，異周波数の円偏光を外場として作用させる[11]（第1図参）。問題を簡単にするために，媒質は光学的に薄く，サンプル中の原子全てが同一の光の場（外場）を見るものと仮定する。この様な取扱いによって，輻射の方向性は議論できなくなるが輻射振幅，周波数等の輻射特性については実験と比較できる結果を与える。この光学的に薄い媒質の理論（thin-medium perturbation theory）の近似のもとで，媒質中の全ての原子は同一の2つの円偏光（z方向に進行する）の場

$$E(t)=\frac{\varepsilon}{2}\{(\hat{x}\cos\omega_a t+\hat{y}\sin\omega_a t)+(\hat{x}\cos\omega_b t+\hat{y}\sin\omega_b t)\} \quad (2)$$

を見ることになる。ここで（$\varepsilon/2$）は円偏光の強さである。同一方向に進行する，同一強度（$\varepsilon/2$）の2つの円偏光，(2)式，は2つの周波数の和の平均 $\bar{\omega}=(\omega_a+\omega_b)/2$ で $\hat{z}$ 軸のまわりを回転する，振動数 $\tilde{\omega}=(\omega_a-\omega_b)/2$ の直線偏光となる。従って $\hat{z}$ 軸のまわりを $\bar{\omega}$ で回転する系では，外場は一つの直線偏光 $\tilde{E}=\varepsilon\cos\tilde{\omega}t$ となる。外場の影響を受けている媒質の振舞いは巨視的な振動する擬電気双極子モーメント

$\mathbb{P}$によって記述される。　先ず，単一原子にたいする擬電気双極子モーメント$\mathbb{S}=(S_1, S_2, S_3)$の外場$\mathbb{E}(t)$の中での振舞を解析する。擬電気双極子モーメント$\mathbb{S}$の外場$\mathbb{E}$の中での振舞いは，

$$\frac{d}{dt}\mathbb{S} = \gamma_e \mathbb{E} \times \mathbb{S} \qquad (3)$$

なる式で記述される。　$\mathbb{S}$の成分$S_1(t)$と$S_2(t)$は両方とも，原子の双極子モーメント演算子を表現しており，$S_3(t)$は原子の内部エネルギー($\hbar\omega_0 S_3(t)$)に関係するもので，普通，分布反転と呼ばれる。　(3)式は外部磁場$\mathbb{H}$中での磁化$\mathbb{M}$の運動を記述するブロッホ方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbb{M} = \gamma_M \mathbb{H} \times \mathbb{M}, \qquad (3')$$

と同一形であるため，光学的ブロッホ方程式と呼ばれる。

$\hat{z}$軸のまわりを$\bar{\omega}$で回転する座標系で，光学的ブロッホ方程式は，この座標系での擬電気双極子モーメントを$\mathbb{P}(u, v, w)$として[12, 13, 14]

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -(\omega_0 - \bar{\omega})v, \\ \dot{v} &= (\omega_0 - \bar{\omega})u + \gamma_e \mathcal{E} \cos\bar{\omega}t, \qquad (4) \\ \dot{w} &= -\gamma_e \mathcal{E} \cos\bar{\omega}t, \end{aligned}$$

となる。 (4)式は，一般には，解析的に解くことはできないが，$\omega_0 - \bar{\omega} \ll \tilde{\omega}$ なる条件のもとでの解析が，既に磁気共鳴の分野でなされている。[7-9;15] 初期条件として，$t=0$ で $u=1$, $V=W=0$ (この初期条件は2つの非共鳴円偏光を媒質に照射する直前に，$\pi/2$ パルスを照射すれば得られる) の場合の解は，$\tilde{\omega}$ の高調波成分を無視して

$$u = \cos\{J_0(\alpha)(\omega_0 - \bar{\omega})t\},$$
$$V = J_0(\alpha)\sin\{J_0(\alpha)(\omega_0 - \bar{\omega})t\}, \tag{5}$$

となる。 ここで $\alpha \equiv \gamma_e \varepsilon / \tilde{\omega}$ である。 ここで，複素電気双極子モーメント $\rho_+ \equiv u + iV$ を導入すると，

$$\rho_+(t) = \frac{1 + J_0(\alpha)}{2} \exp\{iJ_0(\alpha)(\omega_0 - \bar{\omega})t\}$$
$$+ \frac{1 - J_0(\alpha)}{2} \exp\{-iJ_0(\alpha)(\omega_0 - \bar{\omega})t\}, \tag{6}$$

なる表現を得る。 (6)式は $\rho_+(t)$ が角周波数 $J_0(\alpha)(\omega_0 - \bar{\omega})$ で，互に反対方向に回転する，大きさがそれぞれ $\{1+J_0(\alpha)\}/2$ と $\{1-J_0(\alpha)\}/2$ の2つの回転成分を含むことを示している。[15]

3. 不均一な拡がりの導入

(3)式は，原子の遷移の単一周波数ω_0にたいする振舞いを記述するものであったが，実際には原子の遷移周波数には拡がりがある。　励起された双極子能率の有限な寿命，あるいは，衝突による寿命の短縮のために生ずる拡がりは，あらゆる双極子に対して同じなので，普通スペクトル線の均一幅と呼ばれる。　一方，ドップラー効果のために，異なった速度をもつ気体の原子は，たとえ同じであっても，異なった実効的な遷移周波数をもつ。　固体においても，同様の効果が現われる。　転位や不純物や歪みの場などによる，各原子が置かれるいくらか異った環境は，異った場所に位置する原子に対して，異った実効的な遷移周波数を与える。　このために生ずるスペクトル線の拡がりは，同一の振動子が異った実効周波数をもつ原因になるところの，環境の不均一性に関連しているので，不均一な拡がりと呼ばれる。

不均一な拡がりを考慮するためには，一般に不均一な形状を表わす，規格化された関数$G(\omega_0)$を導入すればよい。

$G(\omega_0)d\omega_0$ は，同波数 ω_0 のまわりの，$d\omega_0$ の部分に共鳴する双極子の割合となる．　規格化の式は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_0)\,d\omega_0 = 1 \qquad (7)$$

によって与えられる。　この不均一な形状因子 $G(\omega_0)$ から不均一な緩和時間 T_2^* が定義される。　$G(\omega_0)$ の半値幅が T_2^{*-1} となるものとする（これは $G(\omega_0)$ がローレンツ型の場合に厳密に成立つ）。

原子からの輻射を記述するにはマクスウェル方程式を使用する。　一般に平面波近似でマクスウェル方程式は，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] E(t,z) = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(t,z) \qquad (8)$$

で与えられる。　ここで，$E(t,z)$ は媒質中を進行する電気双極子輻射の電界で，$P(t,z)$ は分極密度である。　ここで，光学的に薄い媒質の近似[16]と，ゆっくりと変化する振幅の仮定[13]を用いれば，分極密度 $P(t)$ により媒質から放射される電界 $E_0(t)$ は，分極密度 $P(t)$ に比例する：[16]

$$E_0(t) \cong (2\pi i\omega_0/c)\,P(t) \qquad (9)$$

N個の原子に付随する分極密度 $P(t)$ は，均一な緩和時間を

てとして，次式で与えられる：

$$P(t) = N_P \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_0)\, e^{-t/\tau}\, \mathrm{Re}\{(U+iV)\, e^{i\bar{\omega}t}\}\, d\omega_0 . \quad (10)$$

5(式)を(10)式に代入して

$$P(t) = N_P \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_0)\, e^{-t/\tau} \cdot \times \left[\frac{1+J_0(\alpha)}{2} \cos\{\bar{\omega} + J_0(\alpha)(\omega_0 - \bar{\omega})\}t \right.$$

$$\left. + \frac{1-J_0(\alpha)}{2} \cos\{\bar{\omega} - J_0(\alpha)(\omega_0 - \bar{\omega})\}t \right] d\omega_0, \quad (11)$$

を得る。　外場がないとき，すなわち $J_0(\alpha)=1$ のとき(10)式は

$$P(t) = N_P\, e^{-t/\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega_0) \cos\omega_0 t \; d\omega_0, \quad (12)$$

となり，媒質からの輻射スペクトルは，不均一な形状を表わす関数 $G(\omega_0)$ によって決まるものとなる。　しかし，外場の存在，$J_0(\alpha) \neq 1$，のもとでは $G(\omega_0')$ が周波数 $\bar{\omega} \pm J_0(\alpha)(\omega_0' - \bar{\omega})$ に $\{1+J_0(\alpha)\}/\{1-J_0(\alpha)\}$ の比で分配される。　このことは，外場の強さを，あるいは周波数 $\tilde{\omega}$（すなわち α）の値を変化させることによりスペクトルの分布を変えることが可能であることを示している。　特に，$J_0(\alpha) = 0$ のときには(10)式は

$$P(t) = N_P e^{-t/\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_0) \cos\bar{\omega}t \; d\omega_0$$

$$= N_P\, e^{-t/\tau} \cos\bar{\omega}t \quad (13)$$

となる。　ここで，式の変形に(7)式が使われた。　(12)式は零次のベッセル関数がゼロになるαの値にたいして，全ての電気双極子モーメントが単一の周波数ωをもつことを意味し，このとき媒質から放射される輻射スペクトルも単色になることを示している。　$J_0(\alpha)$のいろいろな値にたいするスペクトル変化を第2図に示す。

$p(t)$の減少は遷移双極子のdephasingによってひきおこされる。　すなわち個々の双極子は互に，わずかに異なった周波数をもつため，時間の経過とともに位相差が増してくる。　個々の双極子の周波数の差は$J_0(\alpha)$の値をゼロに近づけるに従って減少してきて，$J_0(\alpha)=0$で全ての双極子は周波数ωとなる。　このことはまた，光の周波数を$G(\omega_0)$からωまで変化させ得ることを示す。

以上の効果を観測するには次の条件が満足される必要がある：

$$\hat{\omega} \gg \frac{1}{T_2^*}, |\omega_0 - \bar{\omega}|, \frac{1}{\tau}. \qquad (14)$$

もし，$\tau^{-1} \sim 10^8$秒$^{-1}$，$T_2^{*-1} \sim 10^{10}$秒$^{-1}$，$\omega_0 \sim 10^{14}$秒$^{-1}$とすれば$\hat{\omega} > 10^{11}$秒$^{-1}$でなければならない。　第3図に示すように，

$\bar{\omega}$の回転系での$\pi/2$パルス後の自己誘導緩和を観測するとき，非共鳴の2つの円偏光の照射によって，自己誘導緩和として放射される光の周波数が変化するであろう。同時に，不均一な拡がりが縮少されるために，自己誘導緩和の継続時間も長くなるのが観測できるであろう。また，$\bar{\omega}$の回転系での$90-180°$パルス後，非共鳴円偏光を照射することによって，光エコー周波数とその継続時間の変化を観測できるであろう。自己誘導緩和及び光エコーの継続時間は，普通T_2^*であるが，非共鳴円偏光の照射によって$T_2^*/J_0(\alpha)$となる。

次に光領域におけるブロッホ・ジーガートシフト[17]の観測可能性について検討する。照射される2つの円偏光のうちの一つが共鳴するとき，すなわち$\omega_a=\omega_0$（あるいは$\omega_b=\omega_0$）のとき，もう一方の円偏光は共鳴周波数を変化させる。このシフトは$\bar{\omega}$の回転系において，ブロッホ・ジーガートシフトと同様に取り扱うことができる。ブロッホ・ジーガートシフト$\delta\omega_{B-S}$は，一般に

$$\delta\omega_{B-S}=\frac{1}{16}\frac{(\gamma_e E)^2}{\omega_0} \qquad (15)$$

で与えられる。　2つの円偏光にたいするブロッホ・ジーガートシフトは(14)式の ω_0 を $\omega_0 - \bar{\omega}$ (ないし $\tilde{\omega}$) で置き換えたものになる。　このため，$\delta\omega_{B\text{-}S}$ の大きさは普通のブロッホ・ジーガートシフトに比べて $10^{3\sim4}$ 倍大きくなる。　これまで光領域におけるブロッホ・ジーガートシフトはまだ観測されていないが，このシフトは観測可能であろう。

4. むすび

本稿では，2つの等強度，異周波の2つの非共鳴円偏光を用いて光領域の周波数を変化させ得ることを示した．またスペクトルに不均一な拡がりを導入した解析を行った結果，非共鳴円偏光の強度あるいは周波数の適当な値にたいして，この不均一な拡がりを消失させ得ることがわかった．これらの効果は光自己誘導緩和，光エコーの光周波数変化として観測できると期待される．また超放射現象にたいしてもこの効果が期待されるであろう．

最後に，2つの円偏光の一つが共鳴するとき，他の一つの円偏光がこの共鳴周波数をシフトさせることを示した．このシフトは光領域におけるブロッホ・ジーガートシフトと考えられるが，普通のブロッホ・ジーガートシフトの$10^{3\sim4}$倍大きくできるため実験的な検出も可能と思われる．

謝辞　終わりに，日ごろご指導いただく中研光グループリーダー冨島一成氏と，本稿を書くにあたって論議して下さった研究員の樋口隆一氏に感謝致します．

参考文献

1) 高辻正基：応用物理，40，1050 (1971).

2) I. D. Abella, N. A. Kurnit, and S. R. Hartmann: Phys. Rev. 141, 391 (1966).

3) S. L. McCall and E. L. Hahn: Phys. Rev. 183, 457 (1969).

4) G. B. Hocker and C. L. Tang: Phys. Rev. 184, 356 (1969).

5) R. H. Dicke: Phys. Rev. 93, 99 (1954).

6) R. G. Brewer and R. L. Shoemaker: Phys. Rev. A 6, 2001 (1972)

7) C. Cohen-Tannoudji and S. Haroche: J. Phys. Radium 30, 125 (1969); 30, 153 (1969).

8) D. T. Pegg and G. W. Series: J. Phys. B 3, L33 (1970).

9) T. Yabuzaki, N. Tsukada and T. Ogawa: J. Phys. Soc. Japan 32, 1069 (1972).

10) R. P. Feynman, F. L. Vernon, and R. W. Hellwarth: J. Appl. Phys. 28, 49 (1957).

11) N. Tsukada: Phys. Letters, 47A, 265 (1974).

12) J. H. Shirley: Phys. Rev. 138, B979 (1965).

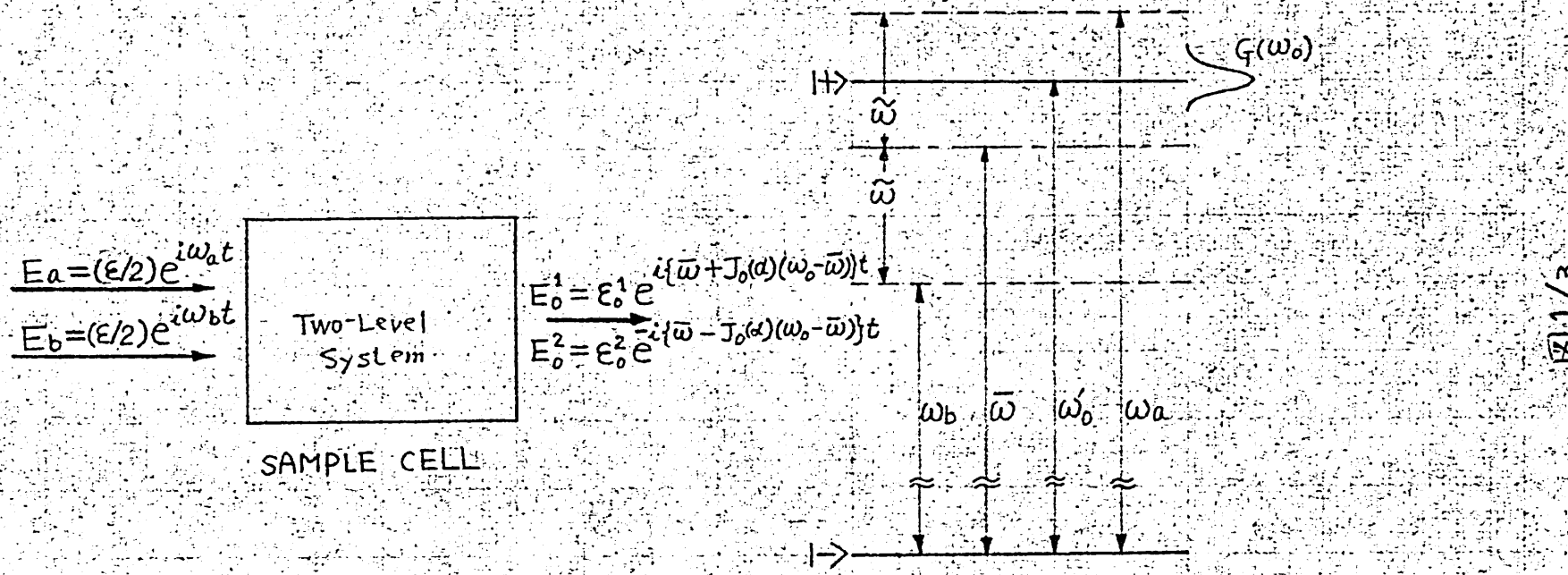
13) S. Stenholm: J. Phys. B, 5, 878 (1972).

14) N. Tsukada and T. Ogawa : J. Phys. B 6, 1643 (1973);
S. Stenholm and C-G. Aminoff : J. Phys. B 6, 2390 (1973).

15) C. Landre, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and S. Haroche:
J. Phys. Radium 31, 971 (1970).

16) H. Hopf and M. Scully : Phys. Rev. 179, 399 (1969);
H. Hopf, F. Shea, and M. Scully : Phys. Rev. A 7, 2105 (1973).

17) F. Bloch and A. Siegert : Phys. Rev. 57, 522 (1940).



a) 解析される系　　b) 原子のエネルギーレベルと2つの非共鳴円偏光

第1図

図1/3

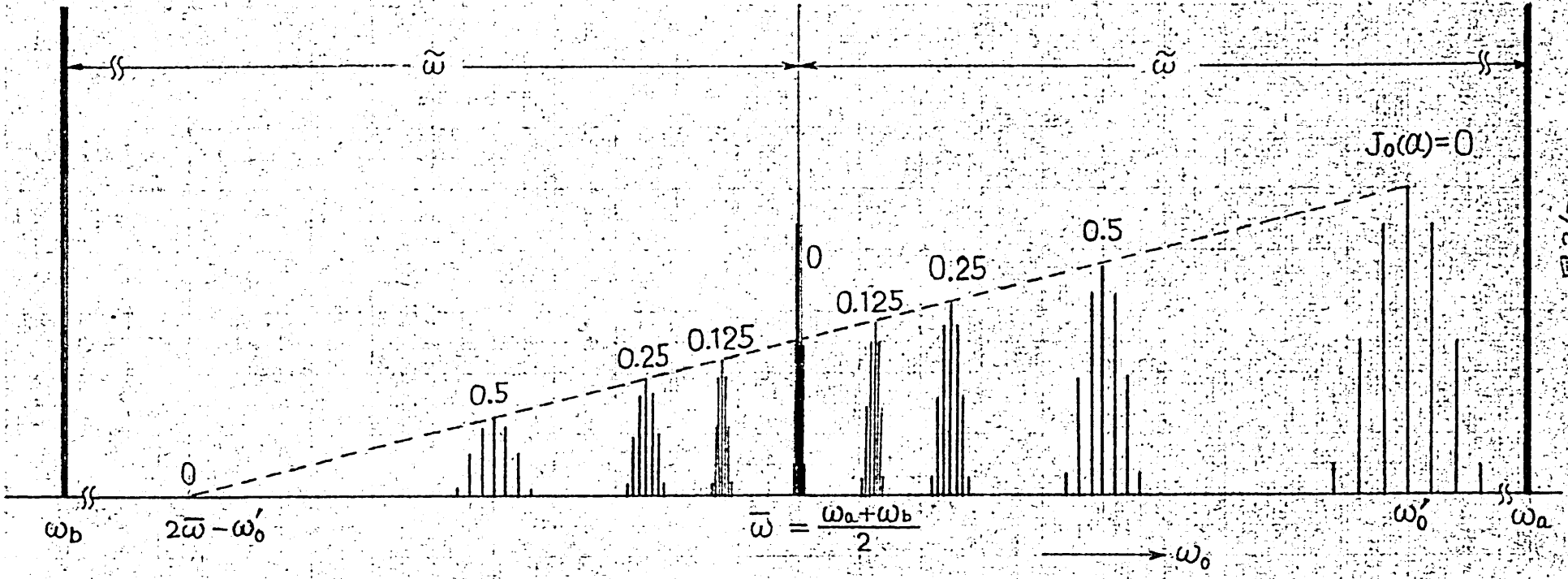
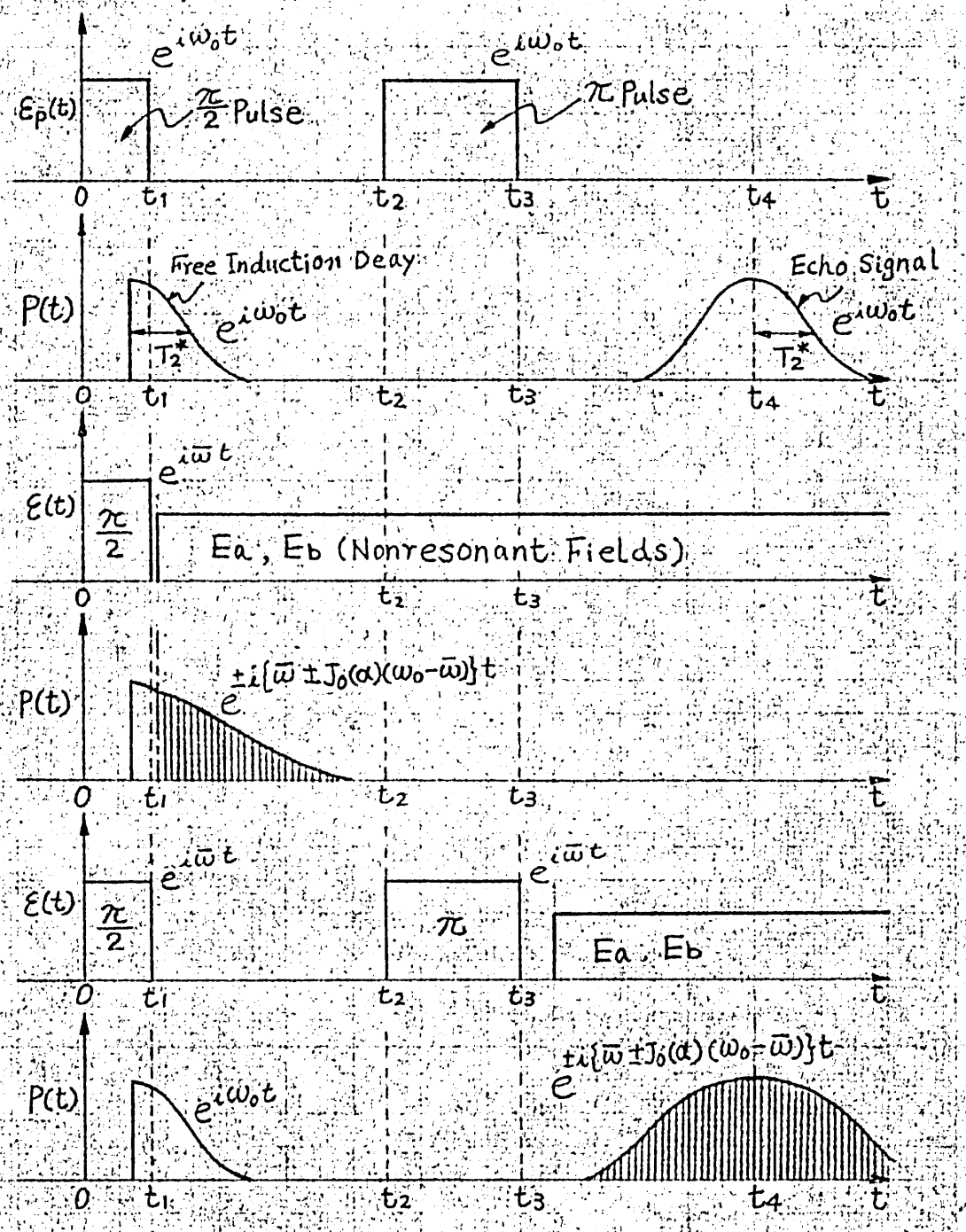


図 2/3

第2図　周波数スペクトルの変化
（不均一な拡がりの消失）



第3図　周波数変化，不均一な拡がりの変化の観測方法

ホログラム再生のための
ファイバ出射光の解析

栖原敏明・西原 浩・小山次郎
（大阪大学 工学部 電子工学科）

昭和49年12月

輻射科学研究会

ホログラム再生のためのファイバ出射光の解析

栖原敏明　　西原浩　　小山次郎
（大阪大学　工学部　電子工学科）

1. まえがき

光ファイバは最近のオプトエレクトロニクスの著しい進歩によって光通信のための低損失伝送媒体として有用視されるに至っているが、光回路や画像処理の分野にも新しい応用を展開できるものと思われる。その例として筆者らは高密度性，冗長性をもったホログラムの記録・再生への応用を提案する。[1)]

光ファイバによって導かれた後，ファイバ端面より出射する光をホログラムの記録時参照光または再生時照明光として用いることができれば、自由空間を伝搬する光ビームを用いる場合に必要なミラー，レンズ等の部品が不要となり光学系の簡略化と安定性改善が期待される。また微小ホログラム列の選択再生を行なう場合にも自由空間の光ビームの偏向系を用いずに，ファイバ端の移動による簡便な選択が可能となる。

このような応用のためにはファイバ出射光を解析してその波面の形状，界分布を明らかにすることが必須である。この解析はまたファイバ出射光のホログラムによる波面変換[2),3)]やファイバ出射光のモード別検出補償による広帯域化[4)]あるいはファイバとレンズや光電素子との組合せなどファイバ出射光の利用を解析する場合，常に必要となるものである。しかしながら従

来のファイバ出射光の解析[5),6)]は光波長に比べて極めて太いファイバに関する幾何光学的取扱いに限られていたように思われる。

そこで本稿ではファイバ出射光を波動論的に解析してファイバ内伝搬モードに対応する出射光のモード像を明らかにし，次にこれを用いてホログラムの記録・再生に関する諸問題，特に回折効率について検討を行なう。さらにファイバ光でホログラム再生の可能なことを確認した実験結果について述べる。

2. ファイバ出射光の遠視野像

この節ではファイバ出射光の遠視野像を求めるために最も適当であるLP$_{\ell m}$モードをファイバ内に考え，これに対応する遠視野像を解析的に求めてその数値計算例を示し，これより明らかとなる一般的性質について述べる。

2.1 ファイバ内の光電磁界

図1に示すようにコア径2aでコアとクラッドの屈折率がそれぞれn_c, nのクラッド光ファイバを考え．クラッドは無限大の外径をもつものとする。このときコアとクラッドの屈折率の差が小さければ，すなわち，

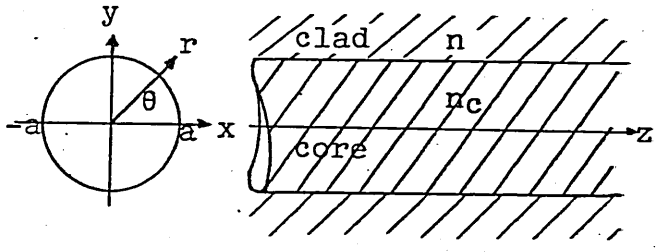


図1　クラッド光ファイバ

$$\Delta \equiv (n_c - n)/n \ll 1 \tag{1}$$

であればファイバ内の伝搬モードはLP$_{\ell m}$モード（Linearly Polarized Modes）[7]で与えられ、その電磁界の主要成分は

$$E_y = H_x \begin{Bmatrix} z_0/n_c \\ z_0/n \end{Bmatrix} = E_\ell \begin{Bmatrix} J_\ell(ur/a)/J_\ell(u) \\ K_\ell(wr/a)/K_\ell(w) \end{Bmatrix} \cos\ell\theta, \quad \begin{matrix} a \geq r \geq 0 \\ r > a \end{matrix} \tag{2}$$

で表される。他の界成分は(2)式より導かれるがその大きさは(2)式の成分の$\Delta^{\frac{1}{2}}$倍程度であるので小さく、このような成分の遠視野像の強度分布への寄与は小さい。一般のΔが必ずしも十分小さくない場合には電磁界の縦成分（z方向成分）も必ずしも十分小さいとはいえず、これらを表現するにはLP$_{\ell m}$モードが分裂してできるHE$_{\ell+1,m}$モードおよびEH$_{\ell-1,m}$（TE$_m$, TM$_m$）モードを用いる必要がある。[8),9)] しかし一般に光伝搬方向に平行に向けられた界成分は主としてこれと垂直な方向への放射に寄与し遠視野像への寄与は小さいのでこれを考える必要はない。したがって遠視野像の強度分布のみを考える場合にはLP$_{\ell m}$モードの電界主要成分E_yのみを考え、これがスカラー波動方程式を満たすときの回折像を求めれば十分である。またこのようにファイバ内の電磁界を直線偏光として扱うことによってスカラー波回折理論により容易に遠視野像を求め得ることになる。

なお(2)式のパラメータu, wは特性方程式

$$\frac{uJ_{\ell-1}(u)}{J_\ell(u)} = -\frac{wK_{\ell-1}(w)}{K_\ell(w)} \tag{3}$$

を満足し、規格化周波数

$$v = ak(n_c^2 - n^2)^{1/2} \fallingdotseq ak n_c \sqrt{2\Delta} \tag{4}$$

と

$$v^2 = u^2 + w^2 \tag{5}$$

なる関係で結ばれる。ここに $k=2\pi/\lambda$ は自由空間での波数である。

2.2 回折積分の計算

図2のようにファイバの端面(xy面)とこれに対向する観測面(XY面)を考える。端面を出射直後の電界は，電界の連続性により(2)式の E_y で与えられる。一般に波動を境界値によって決定しようとする場合には双曲型偏微分方程式の性質により，境界での値のみでなく，境界面に垂直な方向の微分の値も与えられる必要があるが，今の場合のように境界が無限平面の場合は境界での値のみしか必要としないGreen関数を見出すことができる。すなわち観測点P(X,Y)における電界(のy方向成分) E_{em} は(2)式を境界値とするRayleigh-Sommerfeld積分により

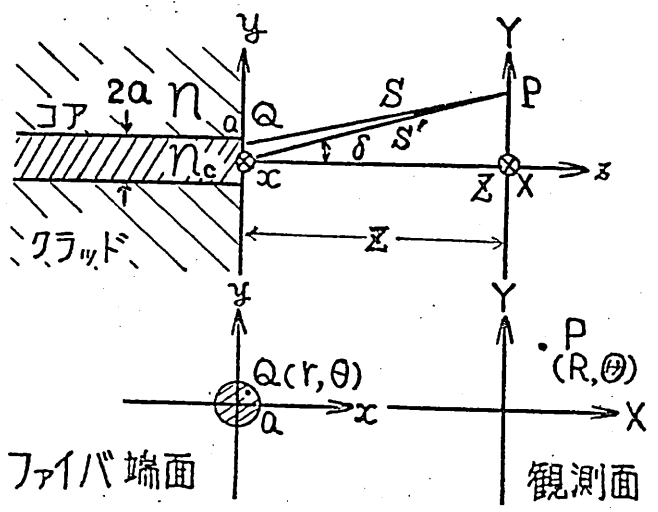


図2　ファイバ端面と観測面

$$E_{em}(X,Y)=-\frac{ik}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iks}}{s}\cos\delta\times E_y\,dxdy \qquad (6)$$

で表される。ここでSは観測点Pとファイバ端面上の点Qとの距離，δはファイバ端面中心と点Pを結ぶ直線のファイバ軸となす角であり，ファイバ内の界の広がりDはコア径2aと同程度であって，観測面のファイバ端面からの距離Zは $Z\gg a$ であるとした。

点Pが、S'をファイバ端面中心からの距離として

$$S' >> 2a^2/\lambda \quad (\sim 数mm程度) \tag{7}$$

を満たす位置にあれば回折はFraunhofer回折となる。このとき

$$S \cong S' - \frac{Xx+Yy}{S'} + \cdots\cdots\cdots\cdots \tag{8}$$

を右辺第2項まで用いれば(6)式は、

$$E_{\ell m}(X,Y) = -\frac{ik}{2\pi}\cos\delta\frac{e^{ikS'}}{S'}\iint_{-\infty}^{\infty} E_y \cdot e^{-ik\left(\frac{X}{S'}x+\frac{Y}{S'}y\right)}dxdy \tag{9}$$

となり境界面，観測面で極座標 (r,θ)，(R,Θ) を用いれば

$$E_{\ell m}(R,\Theta) = -\frac{ik\cos\delta}{2\pi}\cdot\frac{e^{ikS'}}{S'}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} E_y(r,\theta)e^{-ik\frac{R}{S'}r\cos(\theta-\Theta)}rdrd\theta$$

$$= -\frac{ik\cos\delta}{2\pi}\cdot\frac{e^{ikS'}}{S'}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} E_y(r,\theta+\Theta)\,e^{-ik\frac{R}{S'}r\cos\theta}rdrd\theta \tag{10}$$

となる。ところで(2)式より

$$E_y(r,\theta+\Theta) \propto \cos\ell\theta\cos\ell\Theta - \sin\ell\theta\sin\ell\Theta \tag{11}$$

であるが、右辺第2項は(10)式に入れてθについて積分すると0になるので $E_{\ell m}$ は

$$E_{\ell m}(R,\Theta) = -\frac{ikE_\ell\cos\delta}{2\pi}\frac{e^{ikS'}}{S'}\cos\ell\Theta$$

$$\times\int_0^{\infty}\left\{\begin{matrix} J_\ell(ur/a)/J_\ell(u) \\ K_\ell(wr/a)/K_\ell(w)\end{matrix}\right\}rdr\int_0^{2\pi}\cos\ell\theta\, e^{-ik\frac{R}{S'}r\cos\theta}d\theta \tag{12}$$

となる。θに関する積分はベッセル関数Jnの積分表示より

$$\int_0^{2\pi}\cos\ell\theta\, e^{-ik\frac{R}{S'}r\cos\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi}\cos\ell\theta\, e^{-ik\frac{R}{S'}r\cos\theta}d\theta$$

$$= 2\pi i^\ell J_\ell\left(-k\frac{R}{S'}r\right) = 2\pi(-i)^\ell J_\ell\left(k\frac{R}{S'}r\right) \tag{13}$$

であるから (12)式は

$$E_{\ell m}(R,\Theta) = -\frac{ikE_\ell \cos\delta}{i^\ell}\frac{e^{ikS'}}{S'}\cos\ell\Theta$$

$$\times \int_0^\infty J_\ell\left(k\frac{R}{S'}r\right)\left\{\begin{matrix} J_\ell(ur/a)/J_\ell(u) \\ K_\ell(wr/a)/K_\ell(w)\end{matrix}\right\} r\,dr \qquad (14)$$

となる。ここで上式右辺に含まれる積分をIとすれば

$$I = \frac{1}{J_\ell(u)}\int_0^a r J_\ell\left(k\frac{R}{S'}r\right)J_\ell\left(\frac{u}{a}r\right)dr + \frac{1}{K_\ell(w)}\int_a^\infty r J_\ell\left(k\frac{R}{S'}r\right)K_\ell\left(\frac{w}{a}r\right)dr \qquad (15)$$

であるが，積分公式

$$\int x J_\ell(ax)J_\ell(bx)\,dx = \frac{x}{a^2-b^2}\left[aJ_{\ell+1}(ax)J_\ell(bx) - bJ_\ell(ax)J_{\ell+1}(bx)\right]$$

$$\int x J_\ell(ax)K_\ell(bx)\,dx = \frac{x}{a^2+b^2}\left[aJ_{\ell+1}(ax)K_\ell(bx) - bJ_\ell(ax)K_{\ell+1}(bx)\right]$$

を用いれば

$$I = \frac{a}{(k\frac{R}{S'})^2-(\frac{u}{a})^2}\left[k\frac{R}{S'}J_{\ell+1}(k\frac{R}{S'}a) - J_\ell(k\frac{R}{S'}a)\frac{uJ_{\ell+1}(u)}{aJ_\ell(u)}\right]$$

$$-\frac{a}{(k\frac{R}{S'})^2+(\frac{w}{a})^2}\left[k\frac{R}{S'}J_{\ell+1}(k\frac{R}{S'}a) - J_\ell(k\frac{R}{S'}a)\frac{wK_{\ell+1}(w)}{aK_\ell(w)}\right] \qquad (16)$$

を得るが，ベッセル関数の漸化式

$$J_{\ell-1}(x) + J_{\ell+1}(x) = 2\ell x^{-1}J_\ell(x)$$

$$K_{\ell-1}(x) - K_{\ell+1}(x) = -2\ell x^{-1}K_\ell(x)$$

より

$$\frac{uJ_{\ell+1}(u)}{J_\ell(u)} = -\frac{uJ_{\ell-1}(u)}{J_\ell(u)} + 2\ell \qquad (17a)$$

$$\frac{wK_{\ell+1}(w)}{K_\ell(w)} = \frac{wK_{\ell-1}(w)}{K_\ell(w)} + 2\ell \qquad (17b)$$

であるから特性方程式

$$\frac{u J_{\ell-1}(u)}{J_\ell(u)} = -\frac{w K_{\ell-1}(w)}{K_\ell(w)} \tag{3}$$

が成立するときの(17)の2式は同じ値となる。したがって(16)式は

$$I = \left[\frac{a}{(k\frac{R}{S'})^2-(\frac{u}{a})^2} - \frac{a}{(k\frac{R}{S'})^2+(\frac{w}{a})^2}\right] \times \left[k\frac{R}{S'}J_{\ell+1}(k\frac{R}{S'}a) - J_\ell(k\frac{R}{S'}a)\frac{uJ_{\ell+1}(u)}{aJ_\ell(u)}\right] \tag{18}$$

の形で書かれる。そこでRに関する規格化を行うために変数

$$\Gamma = ka\frac{R}{S'} \tag{19}$$

を導入すれば (14)(18)(19) 式より $E_{\ell m}$ の極座標による表現

$$E_{\ell m}(R,\Theta) = A_{\ell m}\cdot\frac{e^{iks'}}{S'}\cdot\cos\delta\cdot\Phi_{\ell m}(R,\Theta) \tag{20}$$

$$A_{\ell m} = \frac{E_\ell k a^2}{i^{\ell+1}} \tag{21}$$

$$\Phi_{\ell m}(R,\Theta) = \cos\ell\Theta\cdot M_{\ell m}(\Gamma) \tag{22}$$

$$M_{\ell m}(\Gamma) = \left\{\frac{1}{\Gamma^2-u^2}-\frac{1}{\Gamma^2+w^2}\right\}\left\{\Gamma J_{\ell+1}(\Gamma) - J_{\ell+1}(\Gamma)\frac{uJ_{\ell+1}(u)}{J_\ell(u)}\right\} \tag{23}$$

を得る。(22)式の $\Phi_{\ell m}$ は遠視野での各モードの界分布を表すものであり、(23)式の $M_{\ell m}$ は $\Phi_{\ell m}$ の動径依存部分であるので、これらを各々"遠視野モード関数","遠視野モード動径関数"と呼ぶことにする。

2.3 遠視野像

前小節で求めた(20)~(23)式は $LP_{\ell m}$ モード出射光の遠視野での複素振幅が，ファイバ端面中心を発散中心とする球面波

$$E = \frac{e^{iks'}}{s'} \qquad (24)$$

が観測点からみて端面の傾斜している効果 $\cos\delta$ と，各々の伝搬モードによる効果である遠視野モード関数 $\Psi_{\ell m}(R,\Theta)$ によって変調されたものであることを示している。(23)式の遠視野モード動径関数 $M_{\ell m}(r)$ については，2,3の例について数値計算を行って特性方程式(3)を解き u, w を求め，この u, w を用いて $M_{\ell m}(r)$ の変化の様子を計算した。図3は規格化周波数 $V=2.0$ の単1モードファイバの場合，図4は規格化周波数 $V=5.00$ の多モードファイバの場合についてであり後者のファイバは $\ell=0$ のモードは図に示された LP_{01}, LP_{02} モードのみが伝送可能である。また図5には規格化周波数 $V=27.25$ の多モードファイバについての計算例を示した。各々の $M_{\ell m}(r)$ は最大値が1となるよう規格化されている。なお図6にはファイバ内のモードパターンとこれに対応する遠視野像の例を模式的に示した。

これらの結果より次の事柄が明らかとなる。

(1) 遠視野モード関数 $\Psi_{\ell m}$ は実数値関数であるのでファイバ光の遠視野での波面はファイバ端面中心を中心とする球面波のそれに等しい。

(2) 遠視野モード関数の偏角依存部分は，ファイバ内モードのそれと同形であるので $E_{\ell m}(R,\Theta)$ の Θ 方向の変化はファイバ内の θ 方向の変化をそのまま反映する。

(3) 遠視野モード動径関数 $M_{\ell m}(r)$ については，$LP_{\ell m}$ モードのパ

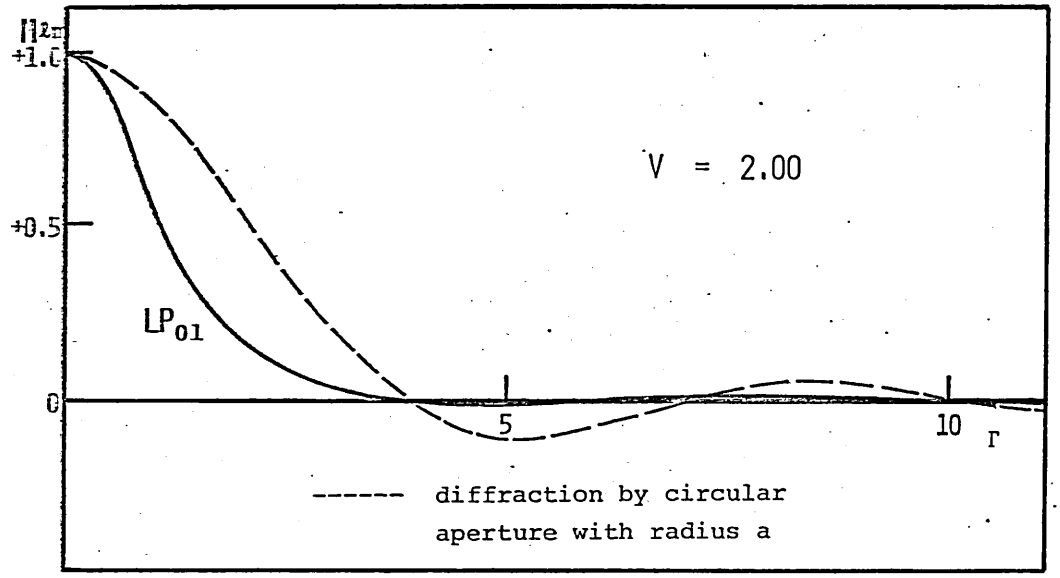


図3 遠視野モード動径関数$M_{01}(r)$, $V=2.00$ (単1モード)

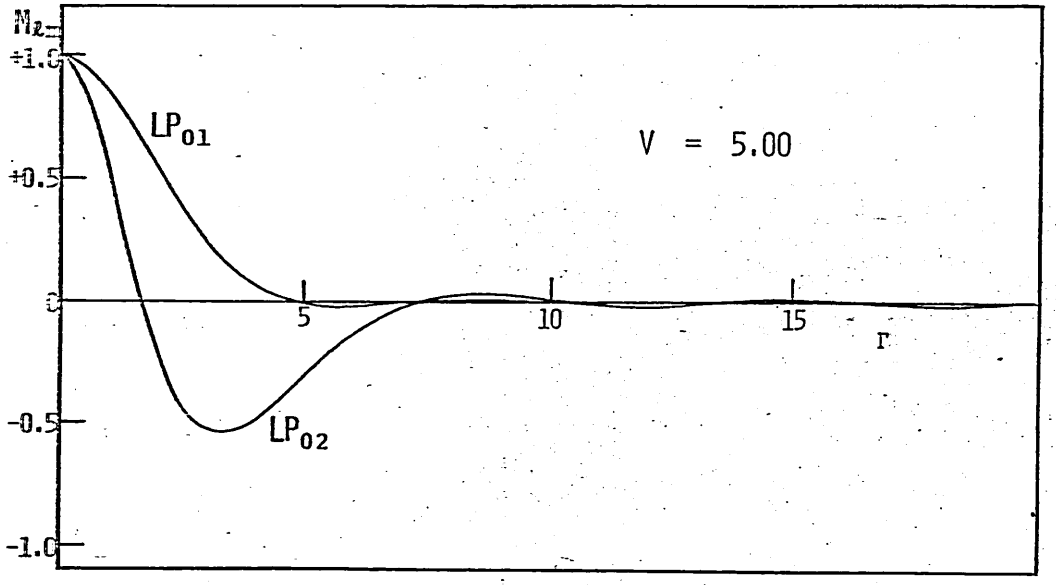
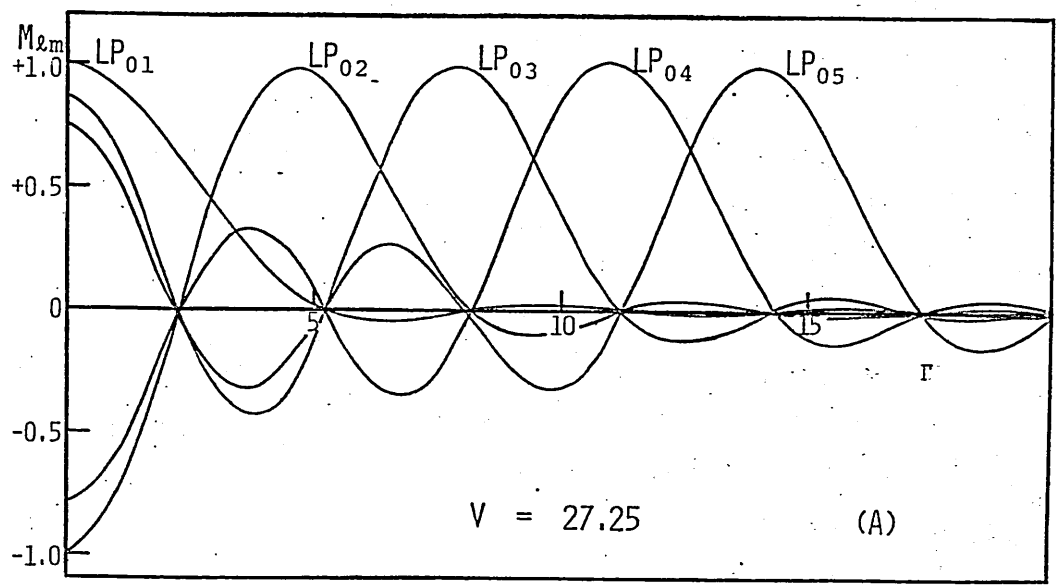


図4 遠視野モード動径関数$M_{lm}(r)$, $V=5.00$ (多モード)


Mℓm
+1.0
+0.5
0
-0.5
-1.0
LP01
LP02
LP03
LP04
LP05
5
10
15
r
V = 27.25
(A)

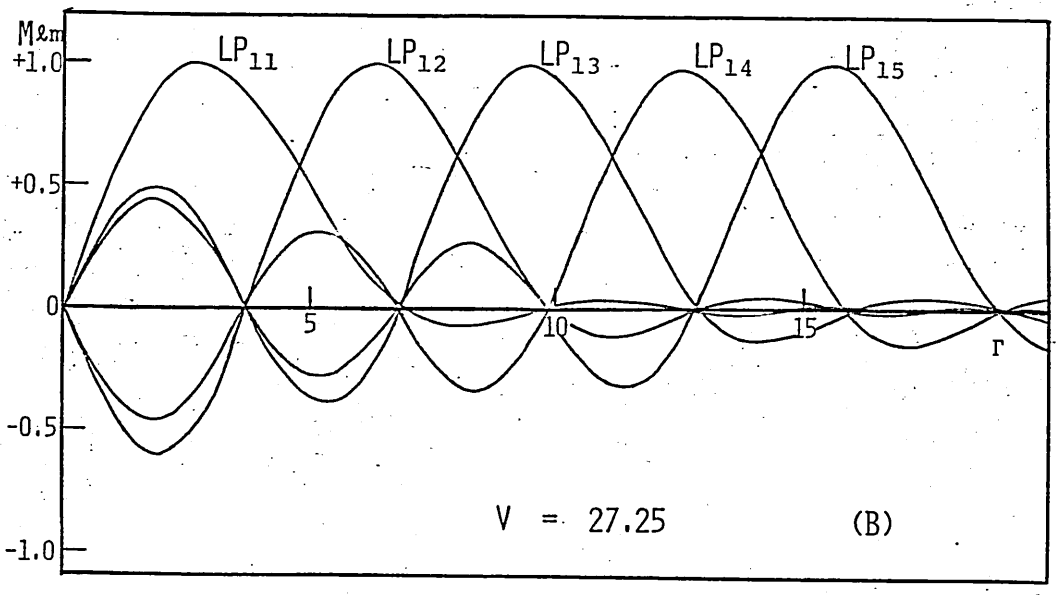
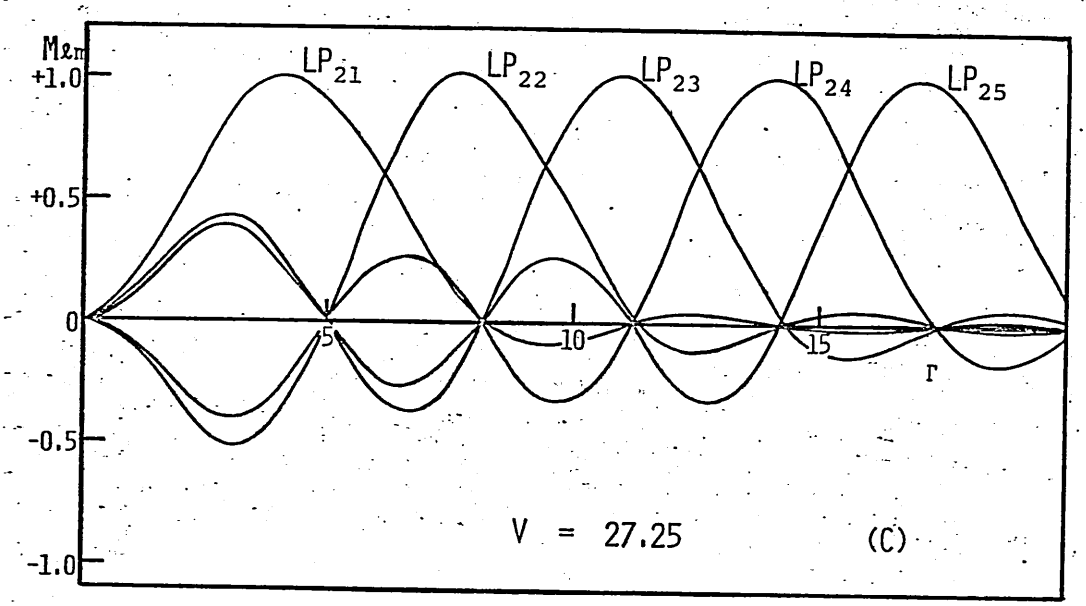

Mℓm
+1.0
+0.5
0
-0.5
-1.0
LP11
LP12
LP13
LP14
LP15
5
10
15
r
V = 27.25
(B)

図5 (A), (B)


Mℓm
+1.0
+0.5
0
-0.5
-1.0
LP21
LP22
LP23
LP24
LP25
5
10
15
r
V = 27.25
(C)

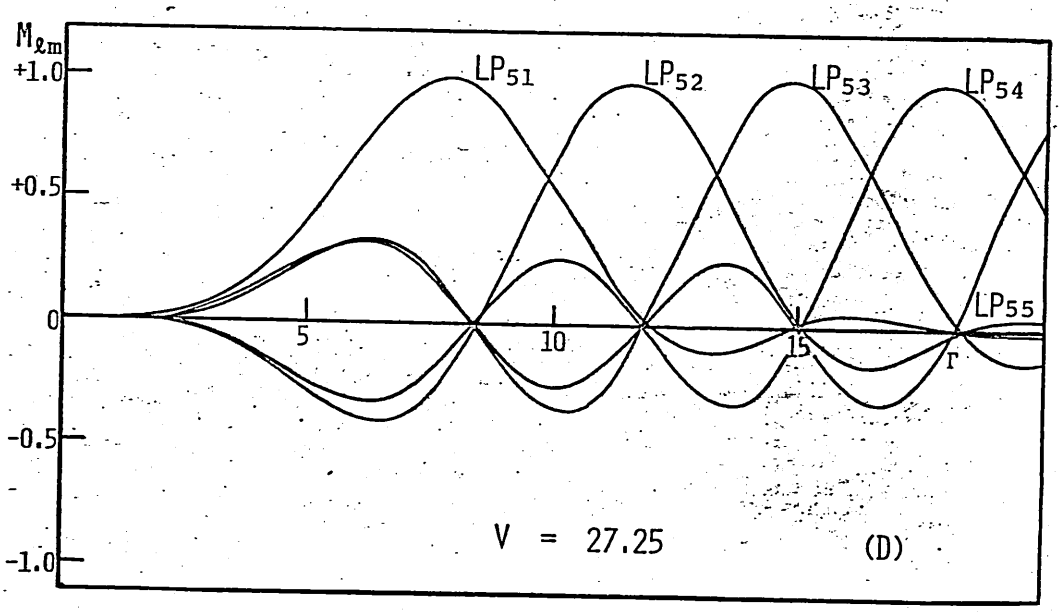

Mℓm
+1.0
+0.5
0
-0.5
-1.0
LP51
LP52
LP53
LP54
LP55
5
10
15
r
V = 27.25
(D)

図5 (C), (D)

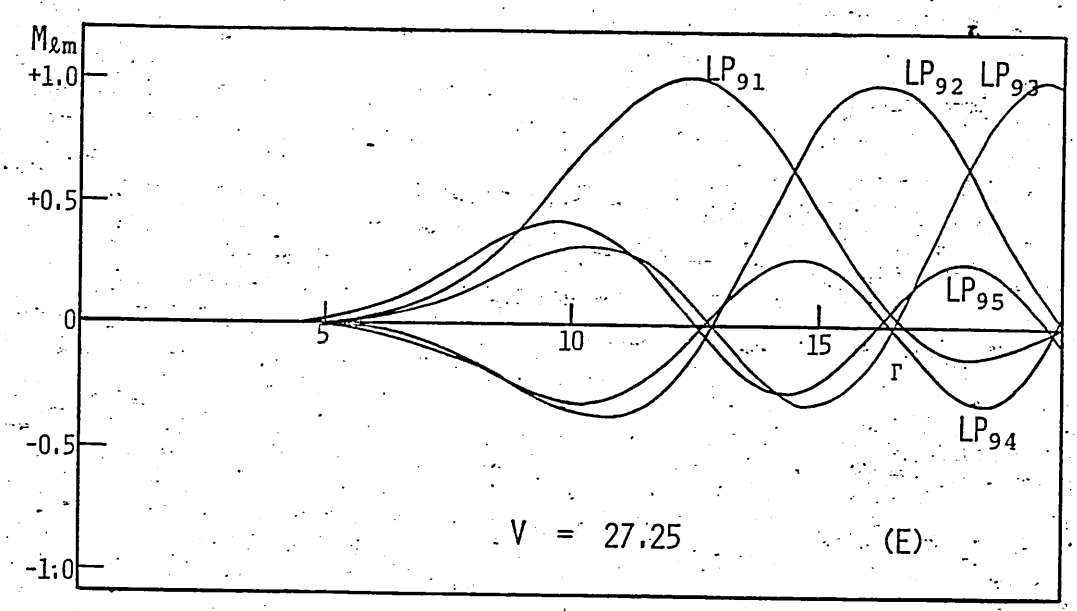


図5 (A)~(E) 遠視野モード動径関数 $M_{\ell m}(r)$, V=27.25(多モード)

MODE	IN FIBER	FAR FIELD
LP_{01}		
LP_{03}		
LP_{11}		

図6 ファイバ内と遠視野でのモードパターンの例

ラメータ u が $J_{\ell-1}$ と J_ℓ の第 m 番目の零点の間の値であることとベッセル関数の性質により $M_{\ell m}(r)$ の変化は m 番目の極値が絶対値最大の極値となり，それ以後は振動を伴い急速に小さな値となる。このことは図3～5に示された計算結果からも明らかである。

次に遠視野像の広がりについて，やや詳細に考察する。④方向一様モードすなわち $\ell = 0$ のモードについて考えると遠視野モード動作関数は(23)式より

$$M_{om}(r) = \left[\frac{1}{r^2-u^2} - \frac{1}{r^2+w^2}\right]\left[rJ_1(r) - J_0(r)\frac{uJ_1(u)}{J_0(u)}\right] \qquad (25)$$

となる。このうち最低次の LP_{01} モードを考え，このモードがカットオフに近い場合すなわち $u \sim 0$ の場合を考えると

$$M_{01}(r) = \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2+w^2}\right]\left[rJ_1(r)\right] \qquad (26)$$

$$w^2 = v^2 = a^2k^2(n_c^2 - n^2)$$

となり，さらに規格化周波数 $v \to \infty$ の極限を考えると $w \to \infty$ で

$$M_{01}(r) = \frac{J_1(r)}{r} \qquad (27)$$

を得る。このような極限操作はコア内で電磁界が一様の振幅で分布しクラッド内では界はほとんど存在しない状態，すなわちコアと同径の円形開口からの光出射を考えることになるが，得られた(27)式の $M_{01}(r)$ はこのような円形開口からの回折像であるAiryパターンに対するものに一致している。(27)式の $M_{01}(r)$ は比較のため図3中に破線で示したが，$r \fallingdotseq 3.83$ で第1番目の零点となりこれが界の広がりを表す。以上のような極限操作を行なわない場合でも最低次 LP_{01} モードの遠視野像の広がりは

上と同程度となることが図3～5より明らかとなった。
次に⑩方向一様で最大の広がりをもつ最高次モードについて考える。この広がりは動径関数$M_{0m}(P)$の最大(m番目)の極値を与えるPの値で示されるが，この極値は(23)式が不定形となるP=Uで実現される。ところでℓ=0の最高次モードはカットオフに近く，パラメータUは

$$U_c^2 < V^2 + 1 \qquad (28)$$

を満たす最大の$J_{\ell-1}(U)$の零点U_cに近い)。したがってVが大きいときU≃Vであり，号の広がりも

$$P \simeq V \qquad (29)$$

となる。実際，図5に計算例を示したV=27.25の場合には，LP_{09}モードがℓ=0の最高次モードで，$M_{09}(P)$はP=26.0で9番目の極値となり(29)式が成立している。

コア径が光波長に比べて十分大きい場合にはファイバ出射光の最大広がりを幾何光学的考察によって評価することができる。図7のようにファイバ軸を通る光線(meridional光)を考えると出射光の最大開き角ϕ_{max}はファイバ内コアとクラッドの境界での全反射条件

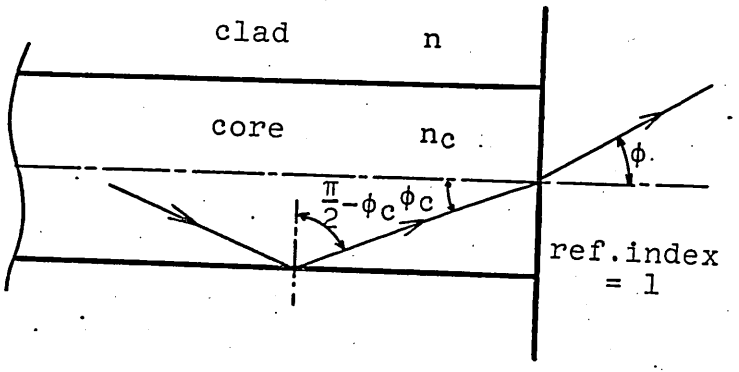


図7　Meridional光の光路

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi_c\right) \geq n/n_c$$

とファイバ端面でのSnellの法則

$$\sin\phi = n_c \sin\phi_c$$

によって

$$\phi_{max} = \sin^{-1}\sqrt{n_c^2 - n^2}$$
$$\simeq \sqrt{n_c^2 - n^2} = V/ak \qquad (30)$$

となる。例えば $V=30$ で $a=50\mu$ の多モードファイバを $\lambda=0.63\mu$ に対して用いるときは $\phi_{max} = 0.06[rad] = 3.4°$ となり，回折による広がりはこれに比べて十分小さい。(30)式を P に換算すると

$$P = ka\frac{R}{S'} = ka\phi_{max} = V \qquad (31)$$

となるので，先の解析で波動論より得られた広がりの式(29)は幾何光学的考察の結果とほぼ一致する。すなわち遠視野像の広がりについて次の事が明らかになった。

(4)遠視野像の広がりは最低次の LP_{01} モードではコアと同径の円形開口による回折像と同程度，最高次伝送モードではファイバ内の臨界角によって決る広がりと同程度である。

また上のような幾何光学的考察ではモードごとにファイバからの出射角度が異なり，高次モードの出射像は円環になることになる。ところが実際は図3~5で明らかなように，各モードで界が最も強い位置は異なっているが高次モードでも遠視野の中心付近にかなりの大きさの界が分布している。したがって

(5)各モードが遠視野において空間的分離されるのではなく，相当に重なり合っている

ことが明らかになった。

なお(19)式の P には S' が現れるが，近似的にはこれを π (=const.)に置き換えることができる。(29)式で示される界の広

がり範囲内では

$$S'/z \lesssim \sqrt{1+(v/ak)^2} \cong 1+n_c^2\Delta \qquad (32)$$

であるのでこの近似による誤差はΔの程度であり，通常は1%以下である。

2.4 モード間直交性

遠視野モード関数$\Phi_{\ell m}$は異なるモード間で直交することを示すことができる。このことは(22),(23)式より直接証明も可能なはずであるが、ここではファイバ内の電界の直交性を示してこれより証明する。

先ずファイバ内電界の直交性を次のようにして導いておく。(2)式より

$$\iint_{-\infty}^{\infty} E_y^{(\ell' m')*} E_y^{(\ell m)}\, dS = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} E_y^{(\ell' m')*} E_y^{(\ell m)}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= E_{\ell'}^* E_\ell \int_0^{2\pi} \cos\ell'\theta \cos\ell\theta\, d\theta \int_0^{\infty} r \begin{Bmatrix} J_{\ell'}(u'r/a)/J_{\ell'}(u') \\ K_{\ell'}(w'r/a)/K_{\ell'}(w') \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_\ell(ur/a)/J_\ell(u) \\ K_\ell(wr/a)/K_\ell(w) \end{Bmatrix} dr \qquad (33)$$

であるが、θに関する積分は$\delta_{\ell\ell'}$をKroneckerのδとして

$$\int_0^{2\pi} \cos\ell'\theta \cos\ell\theta\, d\theta = \pi\delta_{\ell\ell'} \qquad (34)$$

であり，rに関する積分は$\ell=\ell'$，$m\neq m'$のとき

$$\frac{1}{J_\ell(u')J_\ell(u)}\int_0^a r J_\ell(r\tfrac{u}{a})J_\ell(r\tfrac{u'}{a})dr + \frac{1}{K_\ell(w')K_\ell(w)}\int_a^{\infty} r K_\ell(r\tfrac{w}{a})K_\ell(r\tfrac{w'}{a})dr$$

$$= \frac{a^2}{u^2-u'^2}\left[\frac{u J_{\ell+1}(u)}{J_\ell(u)} - \frac{u' J_{\ell+1}(u')}{J_\ell(u')}\right] + \frac{a^2}{w^2-w'^2}\left[\frac{w K_{\ell}(w)}{K_\ell(w)} - \frac{w' K_{\ell+1}(w')}{K_\ell(w')}\right] \qquad (35)$$

となるが，$u^2+w^2=u'^2+w'^2=v^2$が成立し，m,m'モードで各々特性方程式(3)が成立することを用いれば

$$=0 \quad (m \neq m') \tag{35}$$

となる。 $m=m'$ の場合には、積分公式

$$\int x\{J_\ell(ax)\}^2 dx = \frac{x^2}{2}\left[J_\ell^2(ax) - J_{\ell-1}(ax)J_{\ell+1}(ax)\right]$$

$$\int x\{K_\ell(ax)\}^2 dx = \frac{x^2}{2}\left[K_\ell^2(ax) - K_{\ell-1}(ax)K_{\ell+1}(ax)\right]$$

を用いて

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{K_{\ell-1}(w)K_{\ell+1}(w)}{K_\ell^2(w)} - \frac{J_{\ell-1}(u)J_{\ell+1}(u)}{J_\ell^2(u)}\right] \tag{36}$$

を得るが特性方程式(3)の成立することを用いれば

$$= \frac{a^2}{2}\frac{v^2}{u^2}\frac{K_{\ell-1}(w)K_{\ell+1}(w)}{K^2_\ell(w)} \tag{36'}$$

となる。故に(33)式は

$$\iint_{-\infty}^{\infty} E_y^{*(\ell m')} E_y^{(\ell m)}\, dS = \frac{\pi a^2}{2}\frac{v^2}{u^2}E_\ell^2\frac{K_{\ell-1}(w)K_{\ell+1}(w)}{K_\ell^2(w)} \times \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{37}$$

となり $\{E_y^{(\ell m)}\}$ の直交性が示されたが、E_ℓ を規格化乗数

$$E_\ell = N_{\ell m} = \left\{\frac{\pi a^2}{2}\frac{v^2}{u^2}\frac{K_{\ell-1}(w)K_{\ell+1}(w)}{K_\ell^2(w)}\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{38}$$

とすれば $\{E_y^{(\ell m)}\}$ は正規直交関数系となる。すなわち、

$$\iint_{-\infty}^{\infty} E_y^{(\ell m')*} E_y^{(\ell m)}\, dS = \delta_{\ell\ell'}\cdot\delta_{mm'} \tag{39}$$

が成り立つ。

次に(39)式を用いて遠視野モード関数 $\Phi_{\ell m}$ の直交性を証明する。(9), (20)式より

$$A_{\ell m}\Phi_{\ell m} = -\frac{ik}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} E_y^{(\ell m)} e^{-ik\left(\frac{X}{S}x + \frac{Y}{S}y\right)} dx\,dy \tag{40}$$

であるが、いま

$$k\frac{X}{S'} = \xi \quad , \quad k\frac{Y}{S'} = \eta \tag{41}$$

とおけば遠視野モード関数の積分は

$$\iint_{-\infty}^{\infty} (A_{\ell m'} \Phi_{\ell' m'})^* (A_{\ell m} \Phi_{\ell m}) \, d\xi \, d\eta$$

$$= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint d\xi d\eta \left\{ \iint E_y^{(\ell' m')} e^{-ik(\xi x' + \eta y')} dx'dy' \right\}^* \left\{ \iint E_y^{(\ell m)} e^{-ik(\xi x + \eta y)} dxdy \right\}$$

$$= \frac{k^2}{4\pi^2} \iiiint E_{y}^{*(\ell' m')} E_y^{(\ell m)} \, dxdydx'dy' \cdot \iint e^{-i\{\xi(x-x') + \eta(y-y')\}} d\xi d\eta$$

$$= \frac{k^2}{4\pi^2} \iiiint E_y^{(\ell' m')*} E_y^{(\ell m)} \, dxdy \, dx'dy' \cdot 4\pi^2 \delta(x-x') \delta(y-y')$$

$$= k^2 \iint E_y^{(\ell' m')*} E_y^{(\ell m)} \, dxdy \tag{42}$$

となって ファイバ内モード関数の積分に置きかえられ、(39)式より

$$\iint_{-\infty}^{\infty} (A_{\ell' m'} \Phi_{\ell' m'})^* (A_{\ell m} \Phi_{\ell m}) d\xi d\eta = k^2 \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \tag{43}$$

となり $\{\Phi_{\ell m}\}$ は直交関数系となる。

さらに遠視野の電界複素振幅 $E_{\ell m}$ は

$$E_{\ell m} = \frac{e^{ikS'}}{S'} \cdot \cos\delta \cdot A_{\ell m} \Phi_{\ell m} \tag{44}$$

であり、前小節の最後に示したように十分な近似度で

$$S' \sim Z = \text{const.} \quad , \quad \cos\delta \fallingdotseq 1$$

$$\xi = k\frac{X}{S'} \sim \frac{k}{Z} X \quad , \quad \eta = k\frac{Y}{S'} \sim \frac{k}{Z} Y$$

と置き換えることができるから、(43)式より

$$\iint_{-\infty}^{\infty} E^{*}_{\ell m'} E_{\ell m}\, dX dY = \frac{1}{k^2}\iint_{-\infty}^{\infty} \{A_{\ell m'}\Phi_{\ell m'}\}^{*}\{A_{\ell m}\Phi_{\ell m}\}\, dX dY$$

$$= \frac{1}{k^2}\iint_{-\infty}^{\infty} \{A_{\ell m'}\Phi_{\ell m'}\}^{*}\{A_{\ell m}\Phi_{\ell m}\}\, d\xi d\eta$$

$$= \delta_{\ell\ell'}\cdot\delta_{mm'} \qquad (45)$$

となり $\{E_{\ell m}\}$ も直交関数系をなす。すなわち極座標では

$$\iint_{-\infty}^{\infty} E^{*}_{\ell m'} E_{\ell m}\, dX dY = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} E^{*}_{\ell m'} E_{\ell m}\, R dR d\theta = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \qquad (46)$$

となる。 $\{E_y^{(\ell m)}\}$ を正規化しておけば $\{E_{\ell m}\}$ も自動的に正規化されるのは，放射された界のエネルギーの保存を意味し，当然なことである。

3. ファイバ出射光によるホログラム記録・再生

この節では前節の結果を用いて先ずホログラム記録・再生について一般的考察を行い、次に回折効率について種々の条件下で検討を行う。さらに若干の実験結果について述べる。

3.1 ファイバ出射光による波面記録・再生

図8のようにホログラム記録時の参照光又は再生時の照明光としてファイバからの光を用いることを考える。一般に記録時の信号光，参照光をそれぞれ最大値が1となるよう規格化して E_s, E_r とすれば，記録時の露光量は γ を定数として

$$|E_s+\gamma E_r|^2 = |E_s|^2+\gamma^2|E_r|^2+\gamma E_s^{*}E_r+\gamma E_s E_r^{*} \qquad (47)$$

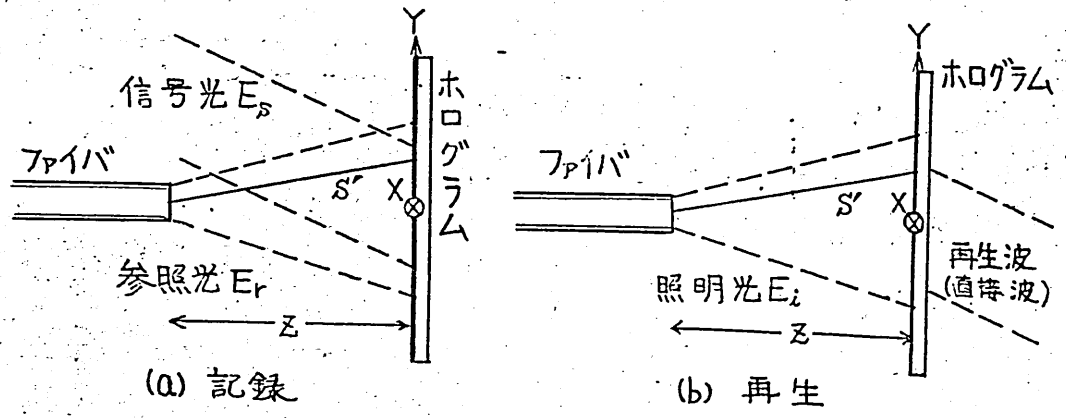


図8 ホログラムの記録・再生

に比例し，このうち右辺第4項が直接波の再生に寄与する。線形な記録が行なわれた後，照明光 E_i によって再生される直接波は

$$E = \alpha E_i E_r^* E_s \qquad (48)$$

である。ここに比例定数 α は記録が線形である範囲内で最も高効率となるような条件下で行なわれれば記録材料とホログラムの型（吸収型か位相型かの別，平面型か体積型かの別）のみで決る。

さて忠実な波面再生のためには (48) 式で $E_i E_r^*$ がホログラム面上で速い変化をしないことが必要であるが、参照光 E_r，照明光としてファイバ出射光 E_{sm} を用いる場合にはファイバ光はいかなるモードも同一の波面を有するので、ファイバ端面がホログラム面に余り近くないときはこの要求をほぼ満たすことができる。すなわち原理的にはファイバが単1モードでも多モードでもこれから出射する光により，ホログラムを記録し再生することができる。また必ずしも記録，再生時で同一モードである必要はない。しかしながら多モードファイバを記録時参照光として用いることは実際上問題が多いと思われる。なぜなら出射光が様

々なモード成分からなっていてこれらが相互に干渉し、しかもその成分間の振幅比・位相関係がファイバの屈曲，振動等によって著しく変化するのでホログラム面上で安定な信号光との干渉縞を記録することが困難であったり，またファイバ内での光路長がモードごとに異なるので信号光とのコヒーレント条件を全てのモードに対して満足させることができなくなることがあるからである。 ファイバが単1モードでも，多モードでも，出射光の波面は球面波のそれに等しいことから例えば球面波の参照光によって記録されたホログラムをファイバ光で再生することが可能である。

(48)式から，これらの場合にホログラムがFourier変換型であれば $E_i E_r^*$ は信号に対するFilter関数となり、$E_i E_r^*$ のFourier変換は再生像面での Point Spread Function となりこれにより再生像の分解能が決まる。したがって分解能の点からは $E_i E_r^*$ が平坦となるよう、単1モードファイバの出射光を端面より離れて十分広がった位置で用いることが好ましい。

3.2 回折効率

ファイバ出射光によるホログラム記録・再生における効率について考察するために最も簡単なモデルとして信号光を平面波

$$E_s = e^{ikY} \tag{49}$$

と考える。 このとき(48)式より回折効率 η は

$$\eta = \frac{\int |\alpha E_i E_r^* E_s|^2 dS}{\int |E_i|^2 dS} = \frac{\int |\alpha E_i E_r^*|^2 dS}{\int |E_i|^2 dS} = |\alpha|^2 C \tag{50}$$

$$C = \frac{\int |E_i E_r^*|^2 dS}{\int |E_i|^2 dS} \tag{51}$$

となる。ここに積分はホログラム全面で行う。(51)式のCはE_r, E_iが共に平面波のとき $C=1$となり、平面波でなければ$0<C\leq 1$の値をとるから参照光又は照明光に平面波以外の波を用いたことによる回折効率の低減係数であると考えることができ、この値はホログラムの型，記録材料にはよらない。以下この回折効率低減係数Cを用いて2,3の条件下での効率について述べる。

(1)参照光，再生光共にファイバ出射光を用いる場合

E_r, E_iが共にLP$_{em}$モードのファイバ出射光であるとき

$$E_i = E_r = E_{em} = A'_{em} e^{ikS'\frac{\cos l\theta}{1+\rho^2}} \cdot M_{em}\left(ka\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)$$

$$\rho = R/Z$$

であるので低減係数Cは

$$C = \frac{\int |E_{em}|^4 \rho d\rho d\theta}{\int |E_{em}|^2 \rho d\rho d\theta}$$

$$= \varepsilon \cdot \frac{\int |A'_{em}(1+\rho^2)^{-1} \cdot M_{em}(ka\rho/\sqrt{1+\rho^2})|^4 \rho d\rho}{\int |A'_{em}(1+\rho^2)^{-1} \cdot M_{em}(ka\rho/\sqrt{1+\rho^2})|^2 \rho d\rho} \tag{52}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & (l=0) \\ 3/4 & (l\geq 1) \end{cases}$$

となる。上式を $V = 27.25$, $ka = 496$ のファイバについて数値積分して得られたいくつかのモードに対するCの値を表1に示したが、Cは0.4～0.7の範囲にありこれはホログラムの周辺部でファイバ光が弱いので有効な干渉縞を記録できないことによる低減を示している。

ℓ \ m	1	2	3	4	5
0	0.528	0.687	0.686	0.676	0.670
1	0.532	0.518	0.508	0.504	0.499
2	0.538	0.513	0.507	0.502	0.496
5	0.540	0.510	0.504	0.499	0.490
9	0.538	0.508			0.473
V = 27.25 , ka = 496					

表1. 参照光・照明光共にファイバ出射光$E_{\ell m}$のときの効率低減係数C

(2)参照光に球面波，照明光にファイバ出射光を用いる場合

E_rが球面波

$$E_r = z\frac{e^{ikS'}}{S'} = \frac{e^{ikS'}}{\sqrt{1+\rho^2}} \quad , \rho = \frac{R}{z} \tag{53}$$

でありE_iがファイバ出射光$E_{\ell m}$であるとき低減係数Cは

$$C = \frac{\iint |E_r^* E_{\ell m}|^2 \rho d\rho d\theta}{\iint |E_{\ell m}|^2 \rho d\rho d\theta} = \frac{\int |(1+\rho^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot M_{\ell m}(ka\rho/\sqrt{1+\rho^2})|^2 \rho d\rho}{\int |(1+\rho^2)^{-1} \cdot M_{\ell m}(ka\rho/\sqrt{1+\rho^2})|^2 \rho d\rho} \tag{54}$$

となり，この値はV = 27.25，ka = 496 に対して表2に示したように1に極めて近い値となる。これは再生光の広がりで決るホログラム有効面積内で球面波の強度はほぼ一定であるので全面にわたってほぼ一様に有効な干渉縞を記録できるからである。すなわち回折効率は平面波の参照光，照明光を用いる場合とほとんど変らない。

またこのようにホログラムの有効面積内で球面波の強度が一定であると近似できる場合には，ファイバが多モードファイバで

ℓ \ m	1	2	3	4	5
0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
1	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
2	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
5	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998
9	0.999	0.999			0.997
V = 27.25 , ka = 496					

表2 参照光が球面波，照明光がファイバ光 $E_{\ell m}$ のときの効率低減係数 C

照明光が同時に多くのモードの界を含んでいる場合でも，透視野モード関数 $\mathbf{e}_{\ell m}$ の直交性により照明光・再生波のエネルギーは各々のモード成分のエネルギーの和で表され，全体の低減係数 C もほとんど1となる。すなわち $e_{\ell m}$ を E_i のモードによる展開係数として ($E_i = \sum_{\ell m} e_{\ell m} E_{\ell m}$)

$$C = \frac{\int |E_r^* E_i|^2 \, dS}{\int |E_i|^2 \, dS}$$

$$\cong \frac{\int |E_i|^2 \, dS}{\int |E_i|^2 \, dS} = \frac{\sum |e_{\ell m}|^2}{\sum |e_{\ell m}|^2} = 1 \qquad (55)$$

となる。このことは多モードファイバ出射光で効率低下なしのホログラム再生が可能なことを示している。

3.3 実験結果

ファイバ出射光によるホログラム再生の例として，球面波参照光を用いて記録したホログラムをファイバ出射光で再生する実験を行った。ホログラムは Fourier 変換型で Agfa 10E75 乾板に記録し，漂白処理を行った。参照光は 40X 顕微鏡

対物レンズの焦点より発散する光を焦点より60mmの距離で用いた。再生時に用いたファイバはV=27.25の多モードファイバであり、この時の再生像を図9に示す。

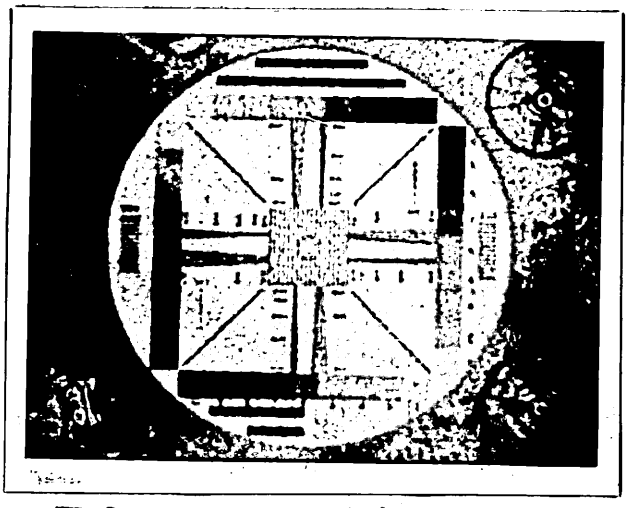


図9　ファイバ出射光による再生像

次に信号光を平面波として球面波参照光により記録したホログラムを再生時に照明光として球面波を用いる場合と多モードファイバ出射光を用いた場合で回折効率の比較を行い，前者に対する後者の比として0.72の値を得た。ファイバ端面は実際には完全に平面ではなく，そのため出射光の波面には乱れがあることと球面波とファイバ光の広がりが同一でないことを考えに入れれば、これは前小節(2)の結論である照明光に多モードファイバ光を用いたときに効率の低下はほとんどないことが実験誤差の範囲内で確認されたと考えられる。

4. むすび

ファイバ出射光のホログラム記録・再生への応用を提案し，第2節ではこの応用のためにファイバ出射光を解析してLP_{lm}モードの遠視野像を求め，ファイバ出射光はどのモードも球面

波の波面をもち、モードによる変調項すなわち遠視野モード関数は直交性を有することを明かにした。この結果は一般にファイバ出射光の利用に関する解析を行う場合に有用なものである。

続く第3節では第2節の解析結果を用いてファイバ出射光によるホログラムの記録・再生について検討を行い、さらに実験によっても多モードファイバ出射光をほとんど効率低下なしにホログラム再生に用いられることを示した。

以上を基礎としてホログラム記録・再生に関して分解能等のより詳細な解析を行うこと、ホログラムをモード変換器やモード選択器として用いるための解析を行うこと、また応用の具体化を検討することが今後の課題である。

謝辞　解析結果を検討いただき，また実験に協力いただいた小山研究室大学院生猪原静夫君に深く感謝する。　図表作成，資料印刷に協力頂いた同研究室の方々に感謝する。

文　献

1) 栖原敏明，西原浩，小山次郎："ファイバ出力光の遠視野像およびホログラフィへの応用"，昭50信学会全大．

2) 西原浩，栖原敏明，猪原静夫，小山次郎："光伝送路用ホロカップラー"，昭49 連合大関西支大，G-10-15．

3) 西原浩，猪原静夫，栖原敏明，小山次郎："新しい光回路結合器ホロカップラー"，昭50信学会全大．

4) 末松安晴，古屋一仁："多姿態誘電体光導波路の屈折率分布

と群遅延特性", 信学論(C), 57-C, 9, p289, (昭49-9).
5)猿渡健郎, 佐柳和男: "ガラスロッドの透過率角度特性および射出光のパターン", 応用物理, 34, 3, p214, (1965).
6)M.P.Lisitsa, L.I.Berezhinskii and M.Y.Valakh :"Fiber optics", Israel Program for Scientific Translations, (1972), pp81-83.
7)D.Gloge :"Weakly Guided Fibers", Appl. Opt.,vol.10, p.2252, (1971).
8)E.Snitzer :"Cylindrical Dielectric Waveguide Modes", J. Opt. Soc. Amer., 51, 5, p.491, (1961).
9)A.W.Snyder :"Asymptotic Expressions for Eigenfunctions and Eigenvalues of a Dielectric or Optical Waveguide". IEEE Trans. Microwave Theory Techniques, MTT-17, p.1130 (1969).

輻射科学研究会資料

レーザ回折パターンによる金属細線表面欠陥の検出

三菱電機生産技術研究所
稲荷隆彦
亀井光仁

1. まえがき

金属細線に対し、その長手方向に対し傾斜した方向よりレーザ光を照射した場合、細線をとりかこむ形でリング状に拡がった回折パターンが観測される、さらに細線の長手方向に対し直角方向にレーザ光を走査すれば、細線の径が十分小さい場合には、リング状回折パターンは、細線を回転軸として回転し、近似的に自身の描くリングの上を回転することになる。

走査されたレーザ光が金属細線の表面にある欠陥部分を通過する際、表面状態の乱れから、上にのべた回折パターンに乱れが発生する。この乱れを光電検出することにより、表面の欠陥を検出することができる。

この方式によれば、走行中の金属細線の欠陥を検出することが可能であり、生産中の細線の自動検査に応用できる。このような機能をもつ装置は従来なかったものであり、検査の自動化の観点からその効果が期待される。

本論文ではリング状の回折パターン形成の理論についてのべ、さらに細線表面検査装置の原理と構成についてのべる。

2. リング状回折パターンの形成

図1に概念的に示したように、細い金属線に線の長手方向に対し傾斜角をもってレーザ光を照射した場合、レーザ光をそのまゝ直進させた方向と、正反射の方向を結んだ形のリング状の回折パターンが得られる。

この現象は　金属細線以外でも、たとえば一定方向に溝をきった回折格子や、一定の方向性をもった圧延傷を有する金属板表面においても、その表面構造の長手方向を、上記の細線の長手方向と一致するようにおいた場合、類似のリング状回折パターンが観測される。図2（a）に金属細線から得られた回折パターンを、図3（a）に、ステンレス板に格子状に穴を設けた

スリットからの回折パターンを示す。

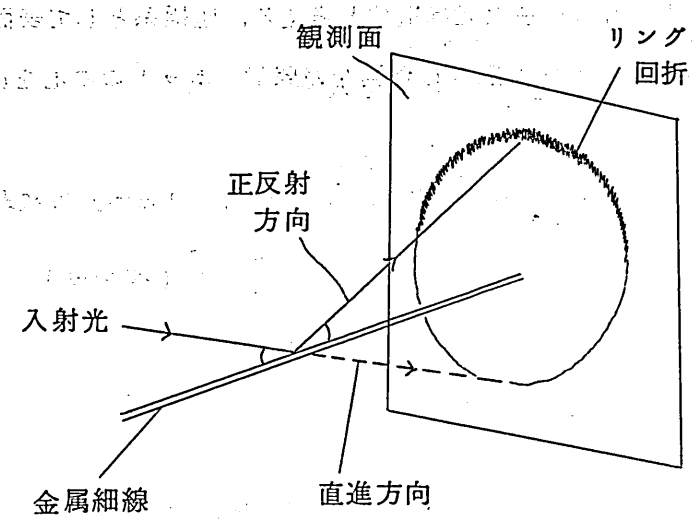


図１　金属細線からのリング状
回折パターンの形成

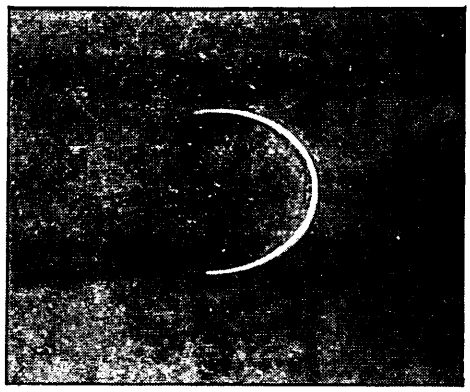
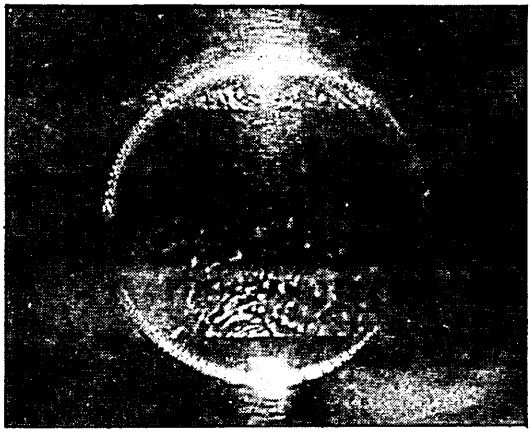


図２（a）　金属細線からのリング状
回折パターン（斜め上方）

図３（b)は上記格子状スリットの長手方向に直角方向から傾斜角をもって照射した場合であって、この場合にはリング状回折パターンの形成は見られない。



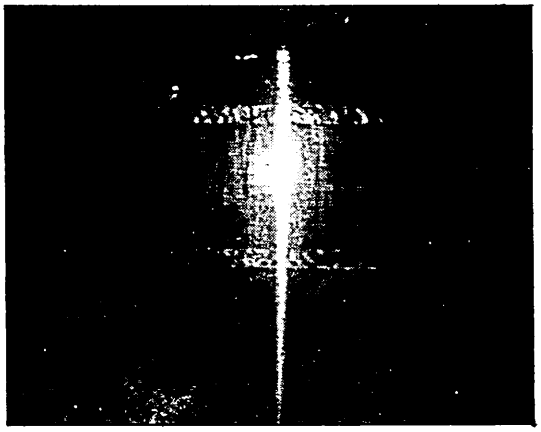


図３.　格子状スリットからの回折パターン

(a)：長手方向から傾斜角をもって照射した場合

(b)：長手方向に直角の方向から傾斜角をもって照射した場合

次に　リング状の回折パターンの形成の原理についてのべる。

いま　物体表面を、表面粗さによる構造をもった三次元構造体と考える。座標系として表面粗さの平均値からなる平面をｘ，ｙ平面とし、光線を照射した場合の照射スポットの中心を原点０とする系を設定する。（図４参照）

コヒーレントな平行光束を表面に照射した場合、観測点$\vec{R}$において観測される光波は次式で与えられる。[1)]

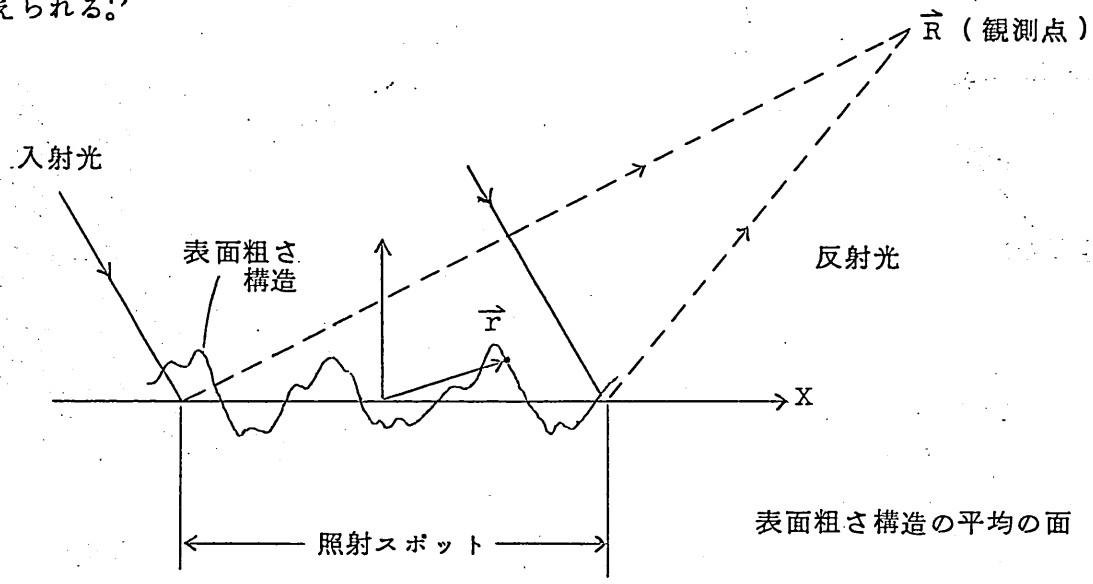


図４　座標系の設定

$$\overline{\Psi}(\vec{R}) = \iint K(\vec{R};x,y)\ U(\vec{r})\,dx\,dy \qquad (1)$$

ここで　$U(\vec{r})$；散乱点$(\vec{r})$における反射光波の複素振巾

$K(\vec{R};x,y)$；座標（ｘ，ｙ）と観測点$(\vec{R})$により決る光波の伝達関数

実際に観測される回折パターンは、光の強度分布であるから

$$I(\vec{R}) = |\Psi(\vec{R})|^2 = \left|\iint K(\vec{R};x,y)\ U(\vec{r})\,dx\,dy\right|^2 \qquad (2)$$

すなわち回折パターンは、表面の照射スポット内にあるすべての散乱点より発して、観測点$(\vec{R})$に達する光波を、散乱点に関してｘ方向、ならびにｙ方向に重ね合せて形成されている。

いま　図５の系で、零次回折光の軌跡を考える。入射光の中心はｙＺ平面内を進み、ｙ軸と傾斜角θでもって表面に照射されるとする。

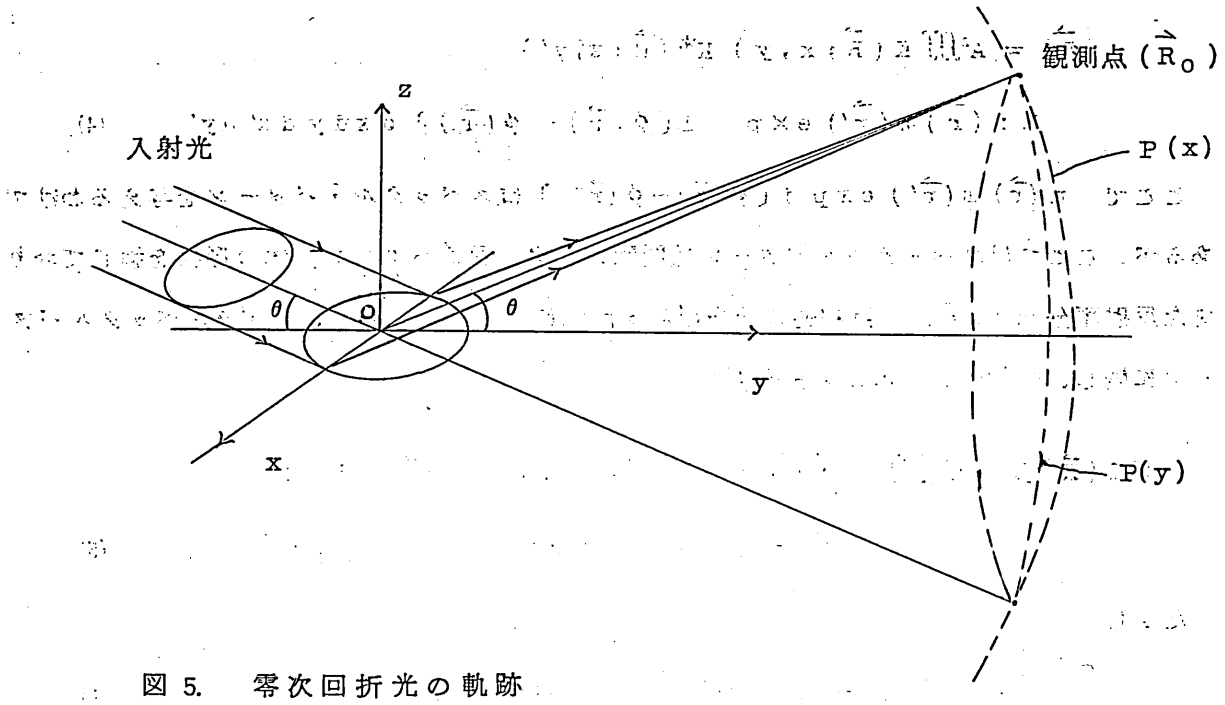


図 5.　零次回折光の軌跡

まず表面のx方向の構造に関する零次回折光を考える。この零次回折光の方向は　やはりyz平面内にあり、かつ(1)式での伝達関数K（$\vec{R}_0$; x,y ）が x方向に積分されるすべての$\vec{r}$に関し不変となるような$\vec{R}_0$ の方向に一致する。このような方向は　図5のP(x)で示す　x軸を中心としyz平面内にある円となることは明らかである。

同様に　表面のy方向の構造に関する零次回折光の軌跡は図5のP（y）で示したxz平面内にあり、y軸を中心とした円となることは明らかである。

まったく同様にして各高次回折光の方向の軌跡も求めることができる。K（$\vec{R}_n$; x , y ） を一定にする軌跡を求めればよいわけで、たとえば　y方向の構造による高次回折光は　y軸を中心とした、零次回折光と同軸の円錐上に分布することがわかる。

次に図6（a）のように入射光が表面に対し、垂直に入射している場合、散乱点（$\vec{r}$） からの反射光波U（$\vec{r}$）は

$$U(\vec{r}) = A\,m(\vec{r})\,\exp\left[\,i\,\phi(\vec{r})\,\right] \qquad (3)$$

ここで　m（$\vec{r}$） は表面の反射率分布で、勾配の効果もこれに含めて考える。Aは入射光の振巾の絶対値で、この場合照射スポット内で一定と考える。$\phi(\vec{r})$ は反射光波の位相である。

(2)式に代入すると　光の強度は次式で与えられる。

$$I(\vec{R}) = A^2 \iiint K(\vec{R};x,y)\, K^*(\vec{R};x',y') \times m(\vec{r})\, m(\vec{r}')\, \exp i\{\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}')\}\, dx\,dy\,dx'\,dy' \qquad (4)$$

ここで $m(\vec{r})\, m(\vec{r}')\, \exp i\{\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}')\}$ はスペックル・パターンを与えるわけであるが、ここではスペックル・パターンは問題にせず、回折パターン全体の形状を論じており、また反射率分布 $m(\vec{r})$ も巨視的な分布のみを問題にすると考えると、(4)式をスペックルパターンに関し、平均化した形に書き直すと

$$\langle I(\vec{R}) \rangle = A^2 \iiiint K(\vec{R};x,y)\, K^*(\vec{R},x',y')\, m(\vec{r})\, m(\vec{r}') \times \rho(\vec{r},\vec{r}')\, dx\,dy\,dx'\,dy' \qquad (5)$$

ただし

$$\rho(\vec{r},\vec{r}') = \langle \exp i\{\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}')\} \rangle \qquad (6)$$

いま図6(b)のように入射光に傾斜角 θ をもたせた場合、図6(a)の場合に比べて入射光の位相が 表面の各部分に対し、y方向に関して変化する。この入射光の位相差は (6)式の $\phi(\vec{r})$ の中に含めてしまい。$m(\vec{r})$ の勾配分布が入射角により変化する部分もスペックル・パターンに影響を及ぼす程度であるから、平均化の中に含めてしまうと、表面の $\overline{S_1 S_2}$ の部分を $\overline{T S_2}$ に圧縮したと考えた表面構造に関し、図6(a)と同じ回折現象を見出すことができる。

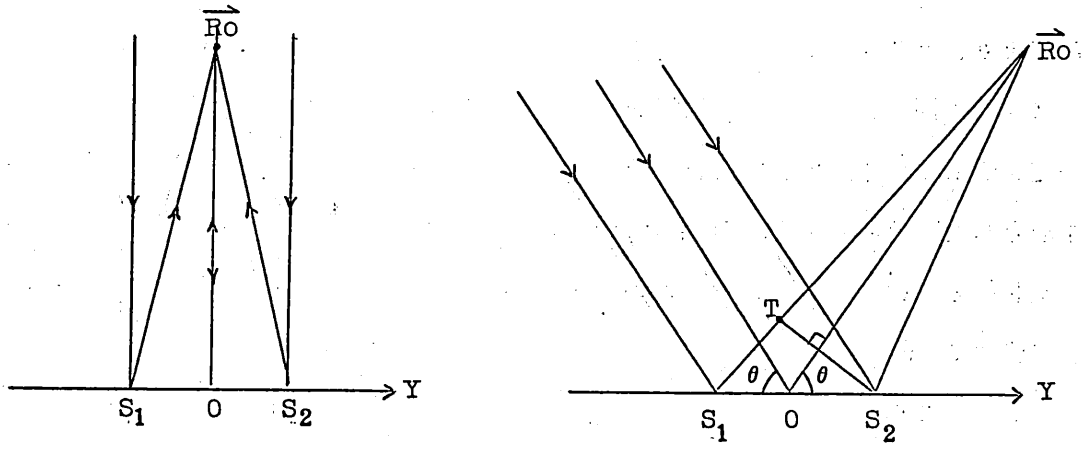


図6 (a) 垂直入射 (b) 傾斜角(θ)をもった入射

回折パターンの詳細な形状は、(5)式により与えられる。これは回折に寄与する表面構造が、観測距離($\vec{R}$)に比べ十分小さい場合にはFraunhofer 回折で近似できる。[2] いま格子状スリットの長手方向をy軸に一致させて照射したとすると、y方向には表面はほぼ一定であるか

ら、y方向の構造による回折パターンはδ関数で与えられ、ほゞ零次回折光の近傍（P(y)）に集まる。x方向は多数の周期構造を重畳した構造があるため、高次回折光が現われ、結果的にはP（y）に沿って帯状に拡がる回折パターンを与えることになる。

このことから、一定の方向性をもつ圧延傷のある金属板や、細線の場合においても、ほゞ類似したリング状回折パターンが形成されるのは明らかである。

参考のために、半導体素子の表面からの回折パターンの例を図7に示す。この場合、入射角が素子表面に対しやゝ傾斜していたために、横方向に拡がった回折パターンが曲っているのが観察される。

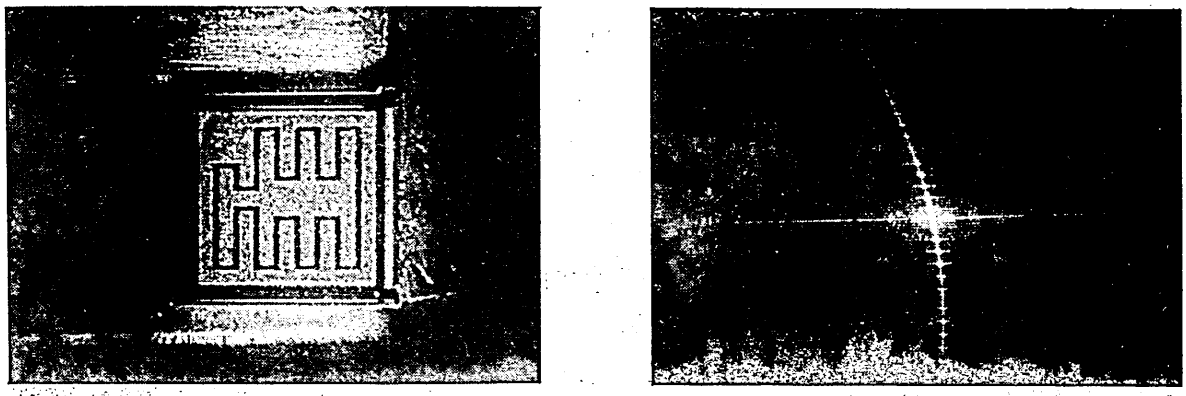


図7 (a) 半導体素子　　(b) 半導体素子からの回折パターン

3. 細線表面欠陥検出の原理

図1に示したような光学系により細線からのリング状回折パターンが観測されることについては前節でのべた。いまレーザ光の照射されている部分の表面に異常な構造（欠陥）がある場合、前節(5)式で与えられる回折パターンは正規のものとは異った形状を示す。この形状の著しい変化を検知すれば、表面欠陥の検出を自動的におこなうことができる。

照射スポットを小さくする程、表面欠陥の大きさに対する感度は向上することは明らかであるが、そのためには円柱状である線表面を照射スポットが走査される必要がある。また生産工程上の細線はどうしても走行中に位置変動があり、これを補うためにも、照射スポットを走査する必要がある。この走査により、正規の反射光の位置が大きく変動すると、検出することが不可能になる。

線径が十分細い場合には図8に示すように、リング状の回折パターンは走査により、自身

の描くリングの上を、細線を軸にして回転することになる。それは走査により照射位置が変り、座標系が回転したことになり、零次回折光の方向が回転することを考えれば、当然のことである。つまり走査により回折パターンの中心（x，y 方向の零次回折光の交点、パターンの最強点）がリング状パターンの上を回転することになる。正常表面に対し走査中の回折パターンを図9(a)に示す。

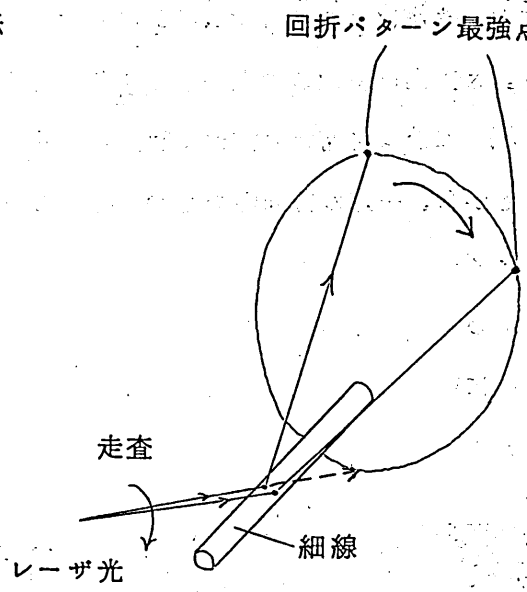


図8. 光線走査による回折パターンの回転

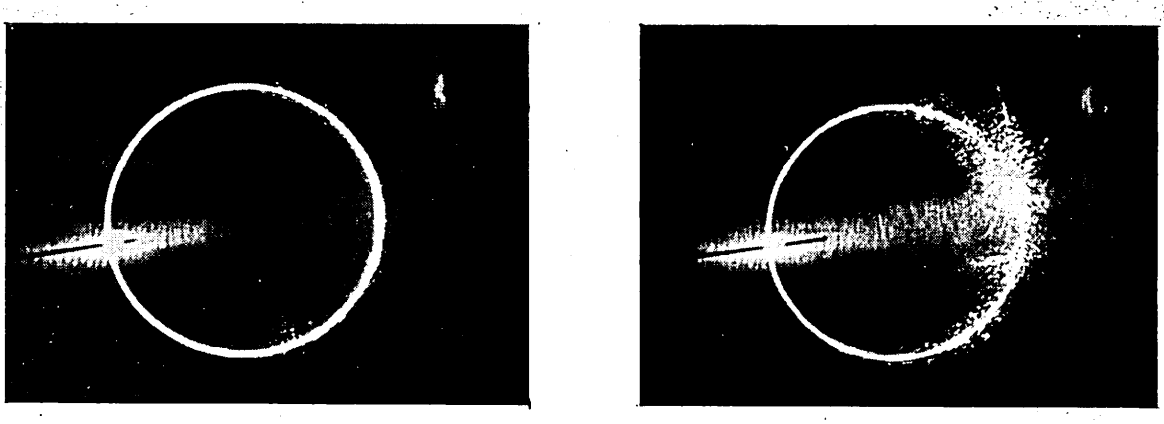


図9　金属細線からの回折パターン（走査中）

(a) 正常表面　　(b) 欠陥のある場合

図9(b)には欠陥のある場合の回折パターンを示す。もし、この正規のリング状回折パターンの部分のみを透過するフィルターを通して光電検出器で反射光を受光していれば、照射スポットが表面欠陥部分を通過した際、光電検出器出力が小さくなることは明らかである。この信号をとらえることにより、走行中の細線の欠陥の自動検出ができることになる。図10に欠陥の顕微鏡写真と、それに対応する回折パターンの例を示す。

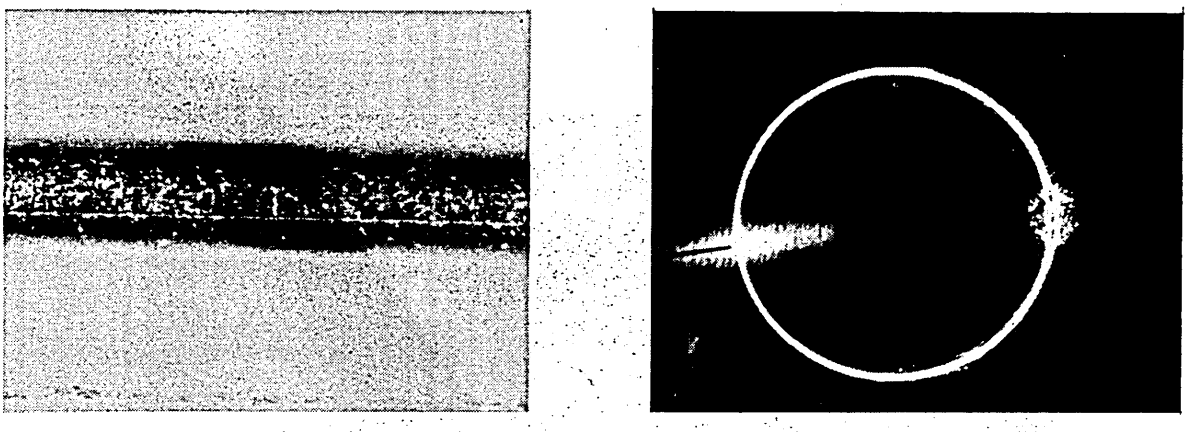


図１０　欠陥検出例　　(a) 欠陥の顕微鏡写真　　(b) 回折パターン

4. 金属細線表面欠陥検出装置

装置の基本的な構成を図１１を示す。リング状回折パターンは細線を中心にした円錐状に出るため、細線を通す孔を設けたレンズ、ならびに反射鏡により光路を変更し、正規の回折パターンのみを通すフィルターを通して、光電子増倍管で受光している。

図１２は検出の実験のための装置の外観である。

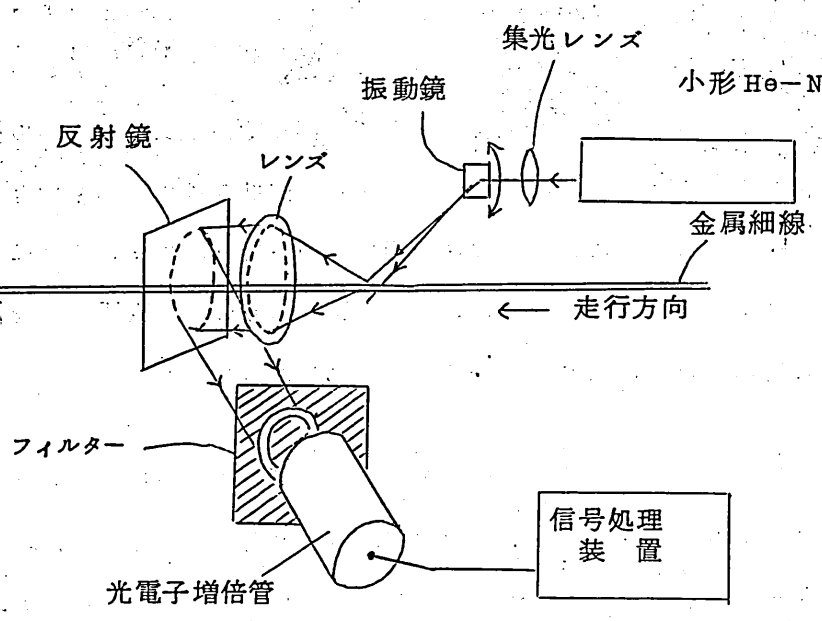


図１１　金属細線欠陥自動検出装置の基本構成

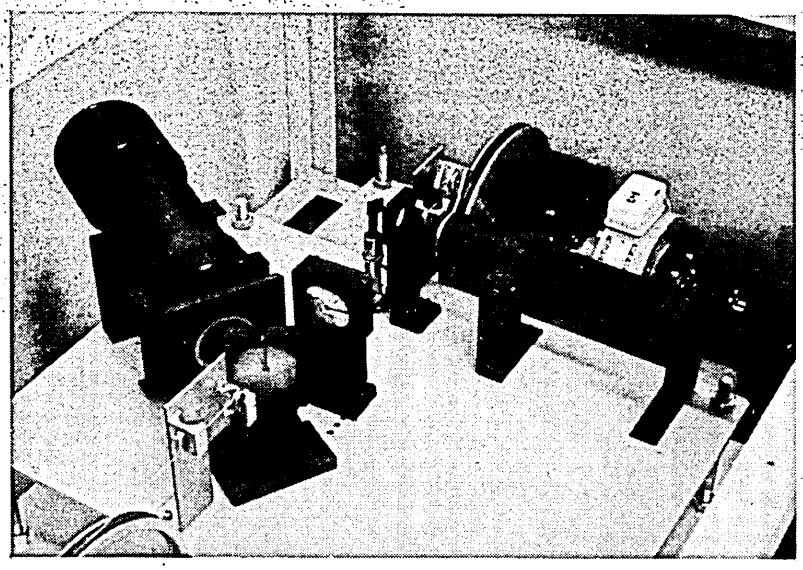


図12　　実験用装置の外観

5. あとがき

細線にレーザ光を傾斜させて照射した場合に形成されるリング状回折パターンの理論と、それを利用した細線表面欠陥の自動検出法についてのべた。

表面欠陥の検査は従来生産工程中では目視に頼るほかなく、検出の自動化の要求は強い。細線の場合は渦電流探傷器がほとんど唯一のものであり、内部欠陥の検出もできることもあり、よく使用されている。たゞしこの場合には材料面に制約があり、またあまりにも表面に近い欠陥は検出できない欠点をもっている。このレーザ光によるものは、表面のみを検出する目的では現在では唯一のものであり、これによる検査の自動化が期待されている。

参考文献

1)　山口；　光学　3〔2〕（1974）　76

2)　R.B.Crane ；　J.Opt.Soc.Amer. 60 （1970） 1658

輻射科学研究会資料

半漏洩構造の異方性薄膜光導波系の固有モード解析

岡村康行
平井一
山本鎌彦
牧本利夫

（大阪大学基礎工学部）

昭和50年2月7日

1. まえがき

最近，異方性材料を含む薄膜導波系の光集積回路への応用が注目を集め，多くの報告がみられるようになってきた．これは主として，異方性材料の導入によっていろいろな回路素子を構成するにあたっての自由度が増し，実現し得る素子の種類も豊富になるということと，結晶成長技術の発達によって，この種の伝送路が以前より比較的容易に製作できるようになったということに起因している．

ところで，これまでに報告されている異方性薄膜光学回路素子に共通の特徴は，対象とする導波系が基本となるTE，TM直交偏波モードのいずれに対しても導波構造となっていることである[1]．しかし異方性の系においては，材料および結晶軸の配置の選び方により，これら両モードのうちの一方については導波構造，他方については漏洩構造にすることもできる．このいわゆる半漏洩構造の系は，系内に存在する直交偏波モード対の伝送特性を記述するパラメータすなわち比誘電率の値が，モードによって異なるという異方性の系の性質が極端にあらわ

れた場合であるが，こうすることによってまた新たな興味深い特性が得られ，従来みられなかった新しい種類の回路素子が構成される可能性がある．

本文は，この半漏洩構造の異方性薄膜光導波系を取扱う際の基礎となる固有モードを導くとともに，モード選択素子への応用を念頭において，このような導波系における漏洩偏波モードの伝搬および外部放射特性について，数値例とともに詳しく考察する．

2 導波系の構造

本文で取扱う導波系は，図1に示すような2次元（$\partial/\partial y = 0$）3層の薄膜伝送路であり，基板，フィルム，上部層から成っている．媒質は無損失で，伝搬方向をz方向とする．

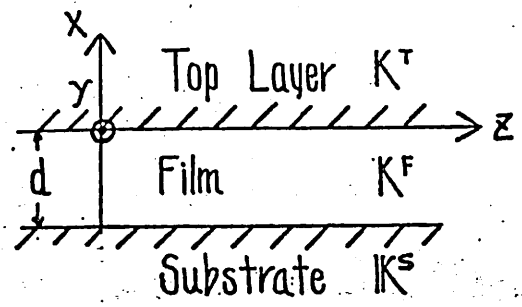


図1 半漏洩構造薄膜導波系

一般的には，3領域とも異方性の場合が考えられるが，ここでは基板にのみ異方性材料を用いることにし，その比誘電率が次式のような対角テンソルであたえられる

ものとする、

$$\|K^S = \begin{bmatrix} K^S_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K^S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K^S_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

なお，透磁率は3領域ともμ₀（真空の透磁率）である、この種の対角テンソルで記述される異方性の系の固有モードは，通常の等方性の系の場合と同じく，E_y，H_x，H_zよりなるTEモードとH_y，E_x，E_zよりなるTMモードに分離されるが，比誘電率の値をつぎのように選ぶことにより，2種類の半漏洩構造が構成される、

i) $K^S_{xx} > K^F > K^S_{yy}, K^T$ (2)

（TE 導波，TM 漏洩）

ii) $K^S_{yy} > K^F > K^S_{xx}, K^T$ (3)

（TM 導波，TE 漏洩）

式(2)の場合，導波条件すなわちフィルムの比誘電率（屈折率）が基板，上部層の比誘電率（屈折率）のいずれよりも大きいという条件は，TE波に対しては満足されているが，TM波に対してはそうではない、これに対し

式(3)の場合は，この関係が逆転する．単軸結晶を例にとると，Z-cut 正結晶，X（あるいはY）-cut 負結晶を用いた場合には式(2)の構造となり，X（あるいはY）-cut正結晶，Z-cut 負結晶を用いた場合には式(3)の構造となる．いずれにしても，このような導波系は通常の導波構造と漏洩構造の等方性伝送路を組み合せたような性質を持ち，これが半漏洩構造と名付けた理由である．

以下，本文では式(3)のTM導波・TE漏洩タイプの半漏洩構造の系のみを対象として解析を行なう．しかし式(2)の場合も，これとほぼ同様に取扱うことができる．

3. 半漏洩構造の系における固有モード

3.1 漏洩偏波に対する固有モード

本節では式(3)の半漏洩構造における漏洩偏波すなわちTE波に対する固有モードを導く．この場合の唯一の電界成分 E_y を変数分離して，

$$E_y(x, z) = \mathcal{E}_y(x; s)\, e^{-j\beta z} \tag{4}$$

とおく．ここに β は z 方向の位相定数，s は基板内における x 方向の波数で，β とは後掲の式(5)で結ばれる．なお時間因子を $e^{j\omega t}$ とする．式(4)の $\mathcal{E}_y(x; s)$

は次の固有値方程式を満足する。

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{E}_y(x;s)+\left[K(x)k_0^2-\beta^2\right]\mathcal{E}_y(x;s)=0 \qquad (5)$$

$$(+\infty > x > -\infty)$$

ただし，　$k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

$$K(x)=\begin{cases} K^T & (x>0) \\ K^F & (0>x>-d) \\ K_{yy}^S & (-d>x) \end{cases} \qquad (6)$$

いまの場合，$K_{yy}^S > K^F > K^T$ で導波条件が満足されていないので，離散的な固有値を持つ導波モードは存在せず，固有モードは実数および純虚数の連続固有値を持つ放射モードのみから成るが，β の値の範囲（したがって s の範囲）によって界分布の模様が異なる。この様子をあらわしたのが図2，図3である。

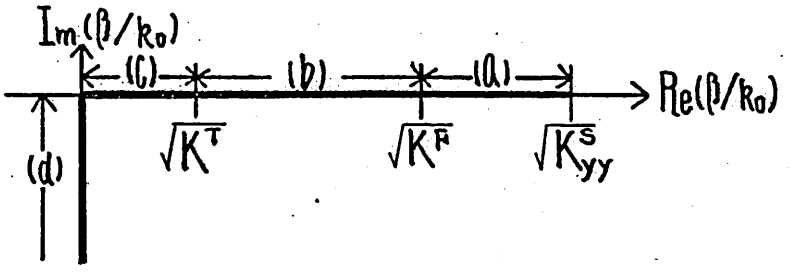


図2　漏洩偏波に対する放射固有モードの位相定数の分布

(a) サブストレート モード
(b) サブストレート・フィルム モード
(c) エア モード
(d) エヴァネッセント モード

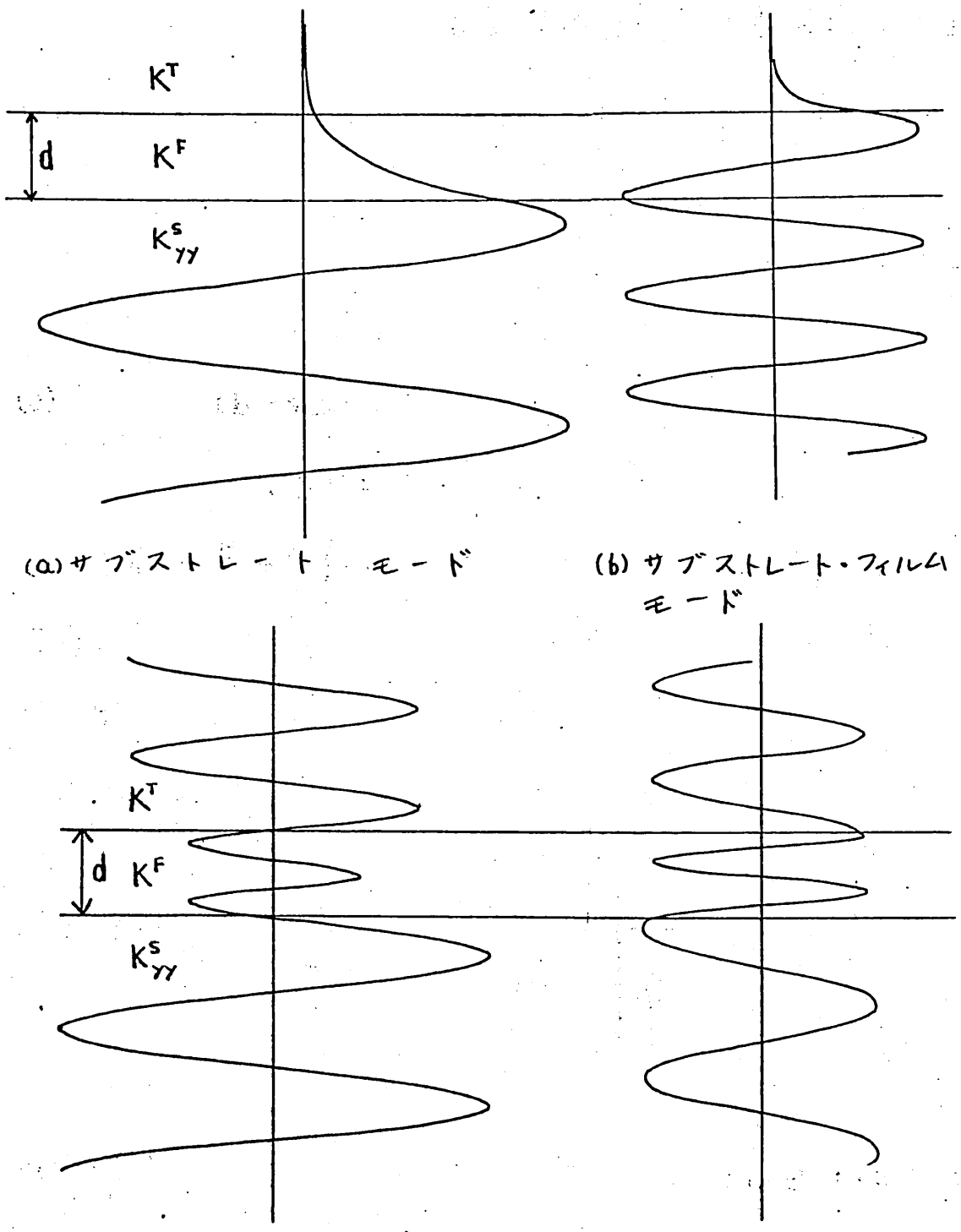


図3 放射固有モードの界分布の概略 (E_y)

具体的には各放射モードの界分布関数は次式であたえられる。なお，記号等は Marcuse[2] に従う。

i) サブストレート モード：

$$\sqrt{K_{yy}^{S}} > \beta/k_0 > \sqrt{K^{F}} \quad \left(0 < \varsigma/k_0 < \sqrt{K_{yy}^{S} - K^{F}} \right)$$

$$E_y^{(i)}(x;\varsigma) = \begin{cases} N_{(\varsigma)}^{(i)} \exp(-\Delta x) & (x > 0) \\ N_{(\varsigma)}^{(i)} (\cosh \sigma x - \Delta/\sigma \cdot \sinh \sigma x) & (0 > x > -d) \\ N_{(\varsigma)}^{(i)} \left[(\cosh \sigma d + \Delta/\sigma \cdot \sinh \sigma d) \cos \varsigma (x+d) \right. & \\ \left. -(\sigma/\varsigma)(\sinh \sigma d + \Delta/\sigma \cdot \cosh \sigma d) \sin \varsigma (x+d) \right] & \\ & (-d > x) \end{cases} \tag{7}$$

ただし，

$$\Delta = (\beta^2 - K^{T} k_0^2)^{1/2} \tag{8-1}$$

$$\sigma = (\beta^2 - K^{F} k_0^2)^{1/2} \tag{8-2}$$

$$\varsigma = (K_{yy}^{S} k_0^2 - \beta^2)^{1/2} \tag{8-3}$$

振中係数 $N_{(\varsigma)}^{(i)}$ は後掲の式(18)の規格化直交条件より決定され，つぎのようになる。

$$N_{(\varsigma)}^{(i)} = \left(\frac{4\omega\mu_0 P}{\pi \beta} \right)^{1/2} \left[(\cosh \sigma d + \Delta/\sigma \cdot \sinh \sigma d)^2 \right.$$
$$\left. + (\sigma/\varsigma \cdot \sinh \sigma d + \Delta/\varsigma \cdot \cosh \sigma d)^2 \right]^{-1/2} \tag{9}$$

この領域のモードは漏洩構造に特有のものである。

ii) サブストレート・フィルム モード*:

$$\sqrt{K^F} > \beta/k_0 > \sqrt{K^T} \quad \left(\sqrt{K_{yy}^S - K^F} < \varsigma/k_0 < \sqrt{K_{yy}^S - K^T}\right)$$

$$\mathcal{E}_y^{(2)}(x;\varsigma) = \begin{cases} N_{(\varsigma)}^{(2)} \exp(-\Delta x) & (x > 0) \\ N_{(\varsigma)}^{(2)} (\cos\alpha' x - \Delta/\alpha' \cdot \sin\alpha' x) & (0 > x > -d) \\ N_{(\varsigma)}^{(2)} \left[(\cos\alpha' d + \Delta/\alpha' \cdot \sin\alpha' d) \cos\varsigma(x+d) \right. \\ \left. + (\alpha'/\varsigma)(\sin\alpha' d - \Delta/\alpha' \cdot \cos\alpha' d) \sin\varsigma(x+d) \right] \\ \qquad (-d > x) \end{cases} \tag{10}$$

ここに,

$$\alpha' = (K^F k_0^2 - \beta^2)^{1/2} \tag{11}$$

また Δ, ς はそれぞれ式(8-1), 式(8-3)であたえられる。さらに振巾係数 $N_{(\varsigma)}^{(2)}$ は

$$N_{(\varsigma)}^{(2)} = \left(\frac{4\omega\mu_0 P}{\pi\beta}\right)^{1/2} \left[(\cos\alpha' d + \Delta/\alpha' \cdot \sin\alpha' d)^2 \right.$$
$$\left. + (\alpha'/\varsigma \cdot \sin\alpha' d - \Delta/\varsigma \cdot \cos\alpha' d)^2 \right]^{-1/2} \tag{12}$$

となる。

iii) エア モード:

$$\sqrt{K^T} > \beta/k_0 > 0 \quad \left(\sqrt{K_{yy}^S - K^T} < \varsigma/k_0 < \sqrt{K_{yy}^S}\right)$$

---

* Tien[3] らはこのモードをサブストレート モードと呼んでいる。

このタイプの放射モードは2重に縮退しており，それらを添字3，4によって区別すると，界分布関数はつぎのようになる．

$$E_y^{(i)}(x;\beta)=\begin{cases} N_{(\beta)}^{(i)}(\cos\Delta' x+\alpha'/\Delta'\cdot F_i\cdot\sin\Delta' x) & (x>0)\\ N_{(\beta)}^{(i)}(\cos\alpha' x+F_i\cdot\sin\alpha' x) & (0>x>-d)\\ N_{(\beta)}^{(i)}\{(\cos\alpha' d-F_i\cdot\sin\alpha' d)\cos\beta(x+d)\\ \quad+(\alpha'/\beta)(\sin\alpha' d+F_i\cdot\cos\alpha' d)\sin\beta(x+d)\} & (-d>x)\end{cases}\qquad(i=3,4) \tag{13}$$

ここに

$$\Delta'=(K^T k_0^2-\beta^2)^{1/2} \tag{14}$$

また α'，β はそれぞれ式(11)，式(8-3)であたえられる．係数 F_i の決定には自由度があるが，これはこの種の放射モードを励振する際の2つの平面波の位相関係に任意性があるためである．ここではこれら2種類のモードが直交するとともに，$K^T=K^F$ とした場合の界分布がこの2層構造の系における偶および奇の放射モードに移行するように F_i を決定した[2]、結果は次式であたえられる．

$$F_i = \left[(\alpha'^2 - \beta^2) \sin 2\alpha' d \right]^{-1} \left\{ (\alpha'^2 - \beta^2) \cos 2\alpha' d \right.$$
$$+ \beta/\Delta' \cdot (\alpha'^2 - \Delta'^2) \pm \left[(\alpha'^2 - \beta^2)^2 + 2\beta/\Delta' \cdot (\alpha'^2 - \Delta'^2) \right.$$
$$\left. \left. \cdot (\alpha'^2 - \beta^2) \cos 2\alpha' d + \beta^2/\Delta'^2 \cdot (\alpha'^2 - \Delta'^2)^2 \right]^{1/2} \right\} \qquad (15)$$

$(i = 3, 4)$

ただし、$i=3$ の場合、複号の＋を、$i=4$ の場合、－をとる、なお、F_3 と F_4 の間には

$$F_3 \cdot F_4 = -1 \qquad (16)$$

なる関係がある；さらに、振中係数 $N^{(i)}(\beta)$ $(i=3,4)$ は

$$N^{(i)}(\beta) = \left(\frac{4\omega\mu_0 P}{\pi\beta} \right)^{1/2} \left[(\cos\alpha' d - F_i \cdot \sin\alpha' d)^2 \right.$$
$$\left. + \alpha'^2/\beta^2 \cdot (\sin\alpha' d + F_i \cos\alpha' d)^2 + \Delta'/\beta \cdot (1 + \alpha'^2/\Delta'^2 \cdot F_i^2) \right]^{-1/2}$$

$(i = 3, 4)$ $\qquad (17)$

となる、

iv) エヴァネッセント モード：

$$j0 > \beta > -j\infty \qquad (\sqrt{K_{yy}^s} < \beta/k_0 < \infty)$$

この領域のモードは、β が純虚数で、z 方向に減衰するので、放射現象を取扱う際には重要ではない、ただし2重縮退であるという点を始めとして、前述のエアモードと似た性質を持ち、実際界分布関数や係数等も、

β の違いを考慮すれば，式 (13) − (17) と全く同じ式であたえられる．

上記の放射モードのセットは完全直交系をなしており，任意の界分布をこれらによって展開することができる．なお，振巾係数 $N^{(i)}(s)$ に関する規格化直交条件はDiracのδ関数を用いて，次式であらわされる．[2]

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y^{(i)}(x;s)\,\mathcal{H}_x^{(k)*}(x;s')\,dx$$

$$=\frac{\beta^*}{2\omega\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y^{(i)}(x;s)\,\mathcal{E}_y^{(k)*}(x;s')\,dx = P\,\delta(s-s')\,\delta_{ik}$$

$$(i,k=1,2,3,4) \qquad (18)$$

ここに * は複素共役をあらわす．

3.2 導波偏波に対する固有モード

式(3)の構造の導波偏波すなわちTM波に対する固有モードは，導波モードと放射モードから成り，大略の性質は通常の薄膜導波系の場合と類似しているが，厳密には基板の異方性の効果を考慮しなければならないので，等方性の系と比べるとやや複雑になる．例えば導波モードの特性方程式は次式であたえられる．

$$\tan \kappa d = \frac{K^F \kappa \left[K^S_{zz} \delta + K^T (K^S_{zz}/K^S_{xx})^{1/2} \gamma \right]}{K^T K^S_{zz} \kappa^2 - K^{F2} (K^S_{zz}/K^S_{xx})^{1/2} \delta \gamma} \qquad (19)$$

ここに

$$\delta = (\beta^2 - K^T k_0^2)^{1/2} \qquad (20-1)$$

$$\kappa = (K^F k_0^2 - \beta^2)^{1/2} \qquad (20-2)$$

$$\gamma = (\beta^2 - K^S_{xx} k_0^2)^{1/2} \qquad (20-3)$$

図4はこの場合の固有モードをβの範囲によって分類したものである、図2と比較すれば分かるように，導波モードのβの領域は漏洩偏波のサブストレート・フィルム モードのそれに含まれている、また漏洩偏波のサブストレート モードのβの領域には対応する導波偏波の固有モードは存在しない、なお，導波偏波の放射固有モードの性質は漏洩偏波の場合とよく似ており，界分布（ただしこ

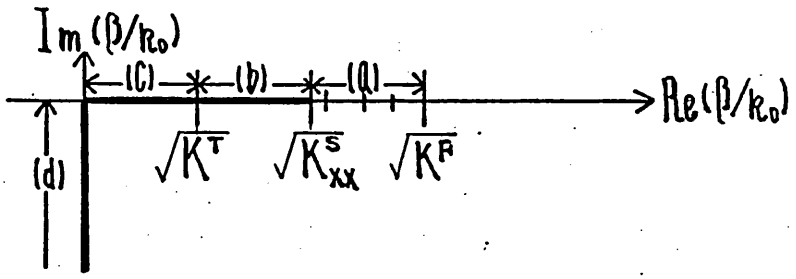


図4　導波偏波に対する固有モードの位相定数の分布

(a) 導波モード
(b) サブストレート・フィルム モード
(c) エア モード
(d) エヴァネッセント モード

の場合は横方向の磁界 H_y ）の模様も図3のサブストレート・フィルム モード以下とほぼ同様である。

4. 漏洩偏波の伝搬の固有モード展開による取扱い

前節に示した固有モードのセットを用いると，半漏洩構造に関する各種の問題を統一的に論ずることができる。本節ではひとつの応用例を示す。

2.で述べた半漏洩構造の性質は，そのまま光集積回路におけるモード選択素子（モード・フィルタ）に応用することができ，これに関するいくつかの実験結果がこれまでに報告されている。例えば Sosnowski[4] は方解石基板を用いた半漏洩構造系のプリズム結合器による励振特性について検討した。また筆者ら[5]はこの種の系の伝送特性における偏波依存性を調べるとともに，導波および漏洩偏波間に興味深いモード結合現象が生ずることを示した。さらに Bjorkholm ら[6]は半漏洩構造を利用して DFB 形の薄膜レーザを構成し，完全な単一モード発振を得た。

ここでは上記の素子の設計に際しての基礎的なデータを得るために，半漏洩構造系における漏洩偏波の伝搬ならびに外部放射特性について考察する。いま図5に示す

ように，通常の導波構造と半漏洩構造の系を $z=0$ の面で接続した複合系を考える．そして，この構成において，$z<0$ の部分から漏洩偏波（いまの場合TE波）の導波モードが入射したとき，このモードが $z>0$ の半漏洩構造の部分においてどのような形で伝搬してゆくかを解析する．なお，図5においては，フィルムおよび上部層の比誘電率は接続面の両側で共通とし，また $z<0$ の導波構造部の基板は等方性材料で，比誘電率を K^S_{zz} に選んでおく．こうすることにより，モードフィルタ区間を何の影響も受けないで通過すべき導波偏波（いまの場合TM波）に対する不連続をさけることができる．*(次頁)

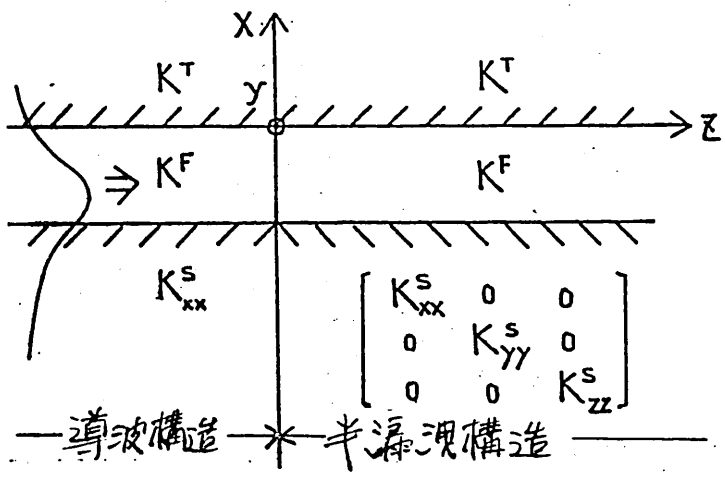


図5　導波構造と半漏洩構造との接続

$(K^S_{yy} > K^F > K^S_{zz}, K^T)$

こういった誘電体系の接続問題の固有モードによる取扱いとしては，最近では Marcuse[7] によって2層構造系の平面波による励振問題が，また古屋，末松[8]によって3層－5層スラブ形伝送路の接続問題が報告されている。

TE漏洩タイプの半漏洩構造における，TE波の伝搬の模様は，一般に次式のように放射固有モードの重ね合せとして記述することができる。

$$E_y(x,z) = \int_0^{\nu_1} L_1(s)\, \mathcal{E}_y^{(1)}(x;s)\, e^{-j\beta z}\, ds + \int_{\nu_1}^{\nu_2} L_2(s)\, \mathcal{E}_y^{(2)}(x;s)\, e^{-j\beta z}\, ds + \int_{\nu_2}^{\infty} \left[L_3(s)\, \mathcal{E}_y^{(3)}(x;s) + L_4(s)\, \mathcal{E}_y^{(4)}(x;s) \right] e^{-j\beta z}\, ds \quad (21$$

＊単軸結晶を用いた場合，2.で述べたように4種のモード・フィルタが構成されるが，それらのうち通過偏波に対して不連続がおこるのは負結晶を用いてTMモード選択素子を構成する場合だけであり，しかもこの不連続は通常は無視してさしつかえない程度に小さい。他の3つの場合は，少なくとも材料的には通過偏波に対する不連続は全く生じない。

ここに

$$V_1 = (K_{yy}^S - K^F)^{1/2} k_0 \qquad (22-1)$$

と

$$V_2 = (K_{yy}^S - K^T)^{1/2} k_0 \qquad (22-2)$$

展開係数 $L_{i(S)}$ は接続面における境界条件より決定される。この場合，厳密には E_y と H_x の連続性が満足されねばならないが，半導波構造部に用いた異方性結晶の複屈折が小さく，接続面での反射が無視できるならば，E_y の連続性だけを考えればよい。

そこで図5のz<0の部分からつぎのような界分布を持つ導波TEモードが入射したとする。

$$E_{in,y}(x,z) = \begin{cases} N\exp(-\delta x)e^{-j\beta z} & (x>0) \\ N(\cos\kappa x - \delta/\kappa \cdot \sin\kappa x)e^{-j\beta z} & (0>x>-d) \\ N(\cos\kappa d + \delta/\kappa \cdot \sin\kappa d)\exp[\gamma(x+d)]e^{-j\beta z} & (-d>x) \end{cases} \qquad (23)$$

ただし，δ, κ, γ は式(20)であたえられる。

また振巾係数は

$$N = \left\{ \frac{4\kappa^2 \omega\mu_0 P}{\beta[d+(1/\gamma)+(1/\delta)](\kappa^2+\delta^2)} \right\}^{1/2} \qquad (24)$$

となる。

すると上述の近似が許されるならば，展開係数は次式により求められる．

$$L_k(s) = \frac{\beta^*}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y^{(k)*}(x;s)\, E_{in,y}(x,0)\, dx \qquad (25)$$

$(k = 1, 2, 3, 4)$

計算の結果，次式が得られる．

i) サブストレート モード

$$L_1(s) = \frac{N\beta}{2\omega\mu_0}\left\{\frac{1}{\delta+\Delta} - \frac{1}{\sigma^2+\kappa^2}\left[(\Delta-\delta)(1-\cosh\sigma d \cdot\cos\kappa d) + (-\sigma^2+\delta\Delta)/\sigma\cdot\sinh\sigma d\cdot\cos\kappa d - (\kappa^2+\delta\Delta)/\kappa \cdot\cosh\sigma d\cdot\sin\kappa d - (\delta\sigma/\kappa+\Delta\kappa/\sigma)\cdot\sinh\sigma d\cdot\sin\kappa d\right] + (\cos\kappa d + \delta/\kappa\cdot\sin\kappa d)/(s^2+\gamma^2)\cdot\left[(\gamma+\Delta)\cdot\cosh\sigma d + (\gamma\Delta/\sigma+\sigma)\cdot\sinh\sigma d\right]\right\} \qquad (26)$$

ii) サブストレート・フィルム モード

$$L_2(s) = \frac{N\beta}{2\omega\mu_0}\left\{\frac{1}{\delta+\Delta} + \frac{1}{\sigma'^2-\kappa^2}\left[(\Delta-\delta)(1-\cos\sigma' d \cdot\cos\kappa d) + (\sigma'^2+\delta\Delta)/\sigma'\cdot\sin\sigma' d\cdot\cos\kappa d - (\kappa^2+\delta\Delta)/\kappa\cdot\cos\sigma d\cdot\sin\kappa d + (\delta\sigma'/\kappa-\Delta\kappa/\sigma')\cdot\sin\sigma' d\cdot\sin\kappa d\right] + (\cos\kappa d + \delta/\kappa\cdot\sin\kappa d)/(s^2+\gamma^2)\cdot\left[(\gamma+\Delta)\cdot\cos\sigma' d + (\gamma\Delta/\sigma'-\sigma')\sin\sigma' d\right]\right\} \qquad (27)$$

iii) エア モードおよびエヴァネッセント モード

$$L_i(\varsigma)=\frac{N\beta}{2\omega\mu_0}\left\{\frac{\delta+\alpha' F_i}{\Delta'^2+\delta^2}+\frac{1}{\alpha'^2-\kappa^2}\left[(\alpha' F_i+\delta)\right.\right.$$

$$\cdot(\cos\alpha' d\cdot\cos\kappa d-1)+(\alpha'-\delta F_i)\cdot\sin\alpha' d\cdot\cos\kappa d$$

$$+(-\kappa^2+\delta\alpha' F_i)/\kappa\cdot\cos\alpha' d\cdot\sin\kappa d+(\kappa F_i+\delta\alpha'/\kappa)$$

$$\left.\cdot\sin\alpha d\cdot\sin\kappa d\right]+(\cos\kappa d+\delta/\kappa\cdot\sin\kappa d)/(\varsigma^2+\gamma^2)$$

$$\left.\cdot\left[(\gamma-\alpha' F_i)\cdot\cos\alpha' d-(\gamma F_i+\alpha')\cdot\sin\alpha' d\right]\right\} \qquad (28)$$

$$(i=3,4)$$

これらの展開係数と前節の固有モードを式(21)に代入し，積分を行なえば，漏洩偏波の伝搬特性が判明する．ただし，被積分関数が複雑であるので，計算機による数値積分を行なった．

5. 数値計算例

さきの実験[5]の構成と同じく，基板が$Z-cut$の方解石（$n_e=1.486$, $n_o=1.656$, C軸//z軸），フィルムがポリウレタン（$n=1.555$），上部層が空気（$n=1.0$）から成る半漏洩構造を考える．このときの導波TMモードに対する等価屈折率（β/k_0）と規格化膜厚（d/λ）（$\lambda=0.63\mu m$）との関係を図6に示す．この図より単

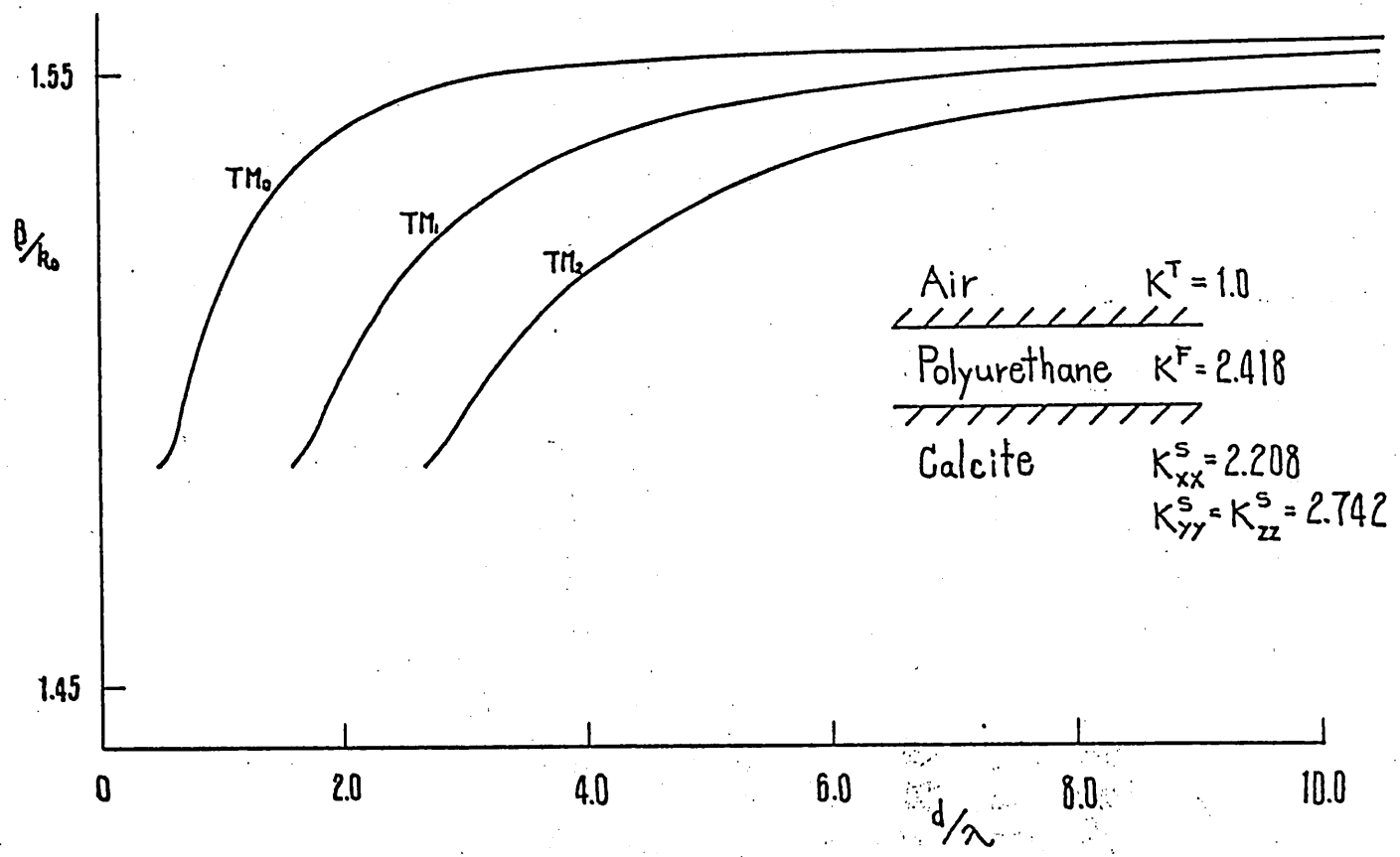


図6　導波TMモードに対する等価屈折率と規格化膜厚との関係
（結晶の比誘電率はλ＝0.63μmにおける値）

一モード伝送可能な膜厚が 0.5λ - 1.5λ の範囲にあることがわかる。つぎに膜厚が 1λ のときの漏洩偏波（いまの場合TE波）に対する振巾係数 N と位相定数 β との関係を図7に示す。ただしエヴァネッセントモードについては省略している。

この半漏洩構造系へ図5の左側の部分に相当する導波構造系*のTE。モードが入射した場合の伝搬波形（$|E_y|$）について数値計算を行なった結果を図8に示す。入射面より侵入するにつれて，フィルム内の界は減衰し，界のピークは基板内へスライドしてゆくが，これは放射モード間の干渉に起因するものである。また基板内の等位相面の傾きは幾何光学的（Zig-zag Ray）取扱いの際の放射角度に対応する。さらに図8における膜内の界のピーク値をプロットしたのが図9で，これより減衰定数を求めると，1.2×10^{-4} dB/cm という値が得られ，鋭いモード選択効果があることが数値的に確かめられた。

---

*基板の材料として，屈折率が方解石の n_e（=1.486）と等しい等方体を仮定している。実際にはFK5ガラス等がこれに極めて近い屈折率を持つ。

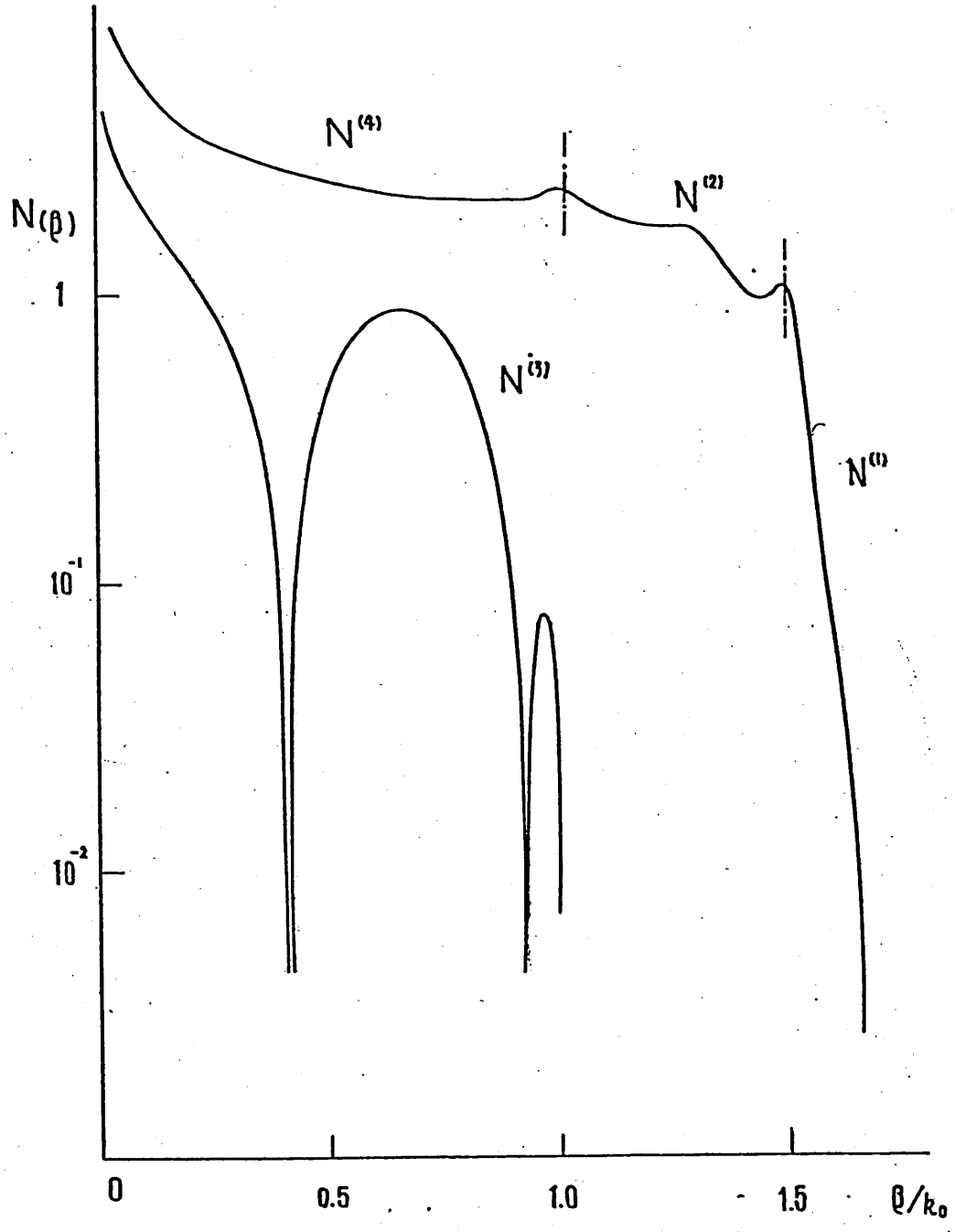


図7　漏洩偏波に対する振巾係数と位相定数との関係（d＝1λの場合）

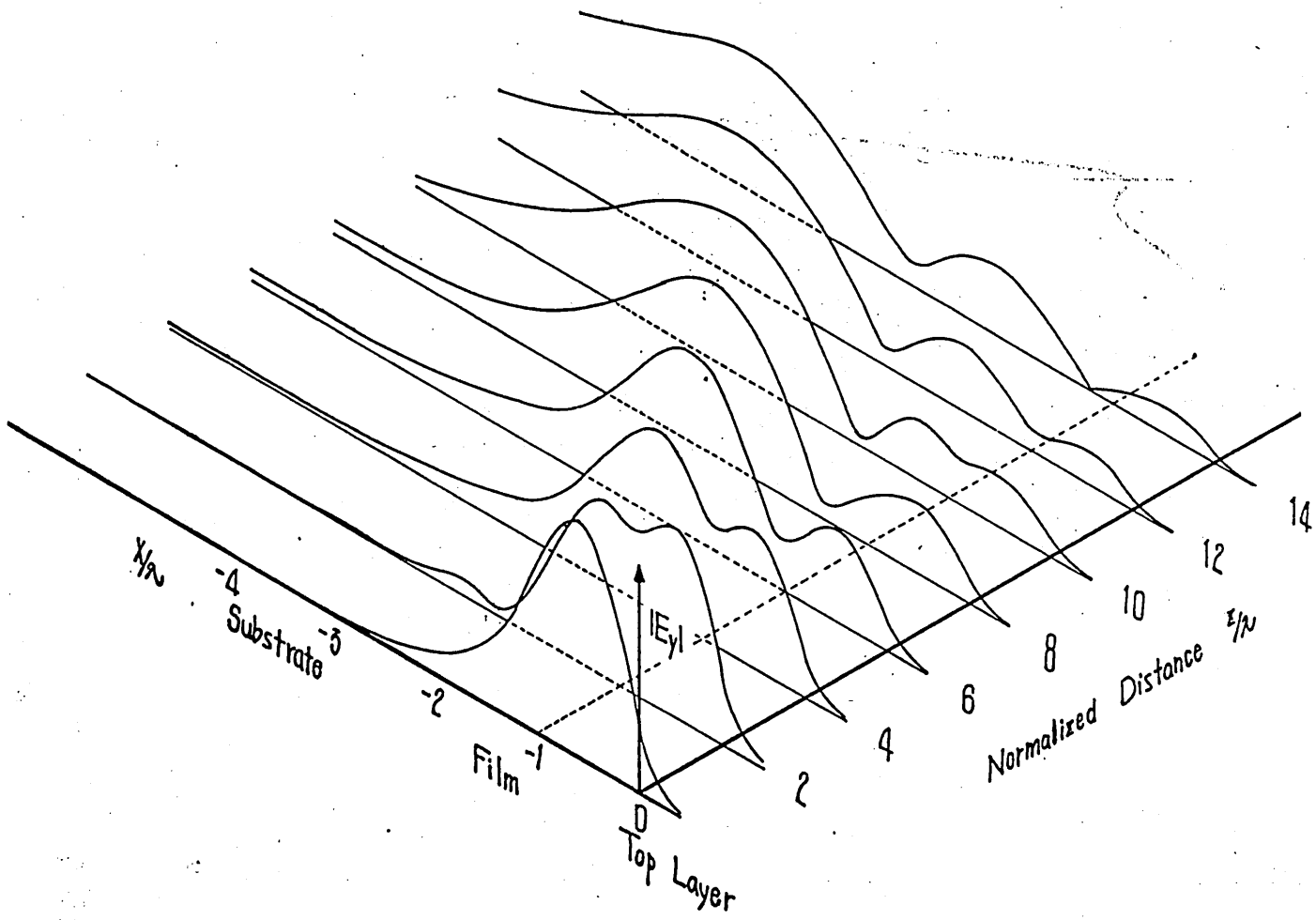


図８　導波ＴＥ₀モードが入射した場合の伝搬波形の様子
（ｄ＝１λの場合）

さらに膜厚が2λの場合の導波TE₀モード，TE₁モードがそれぞれ入射した場合の伝搬波形（$|E_y|$）を図10，図11に示す．この場合のTE₀モードの減衰定数をさきと同様の方法で求めると 2.1×10^3 dB/cm となった．

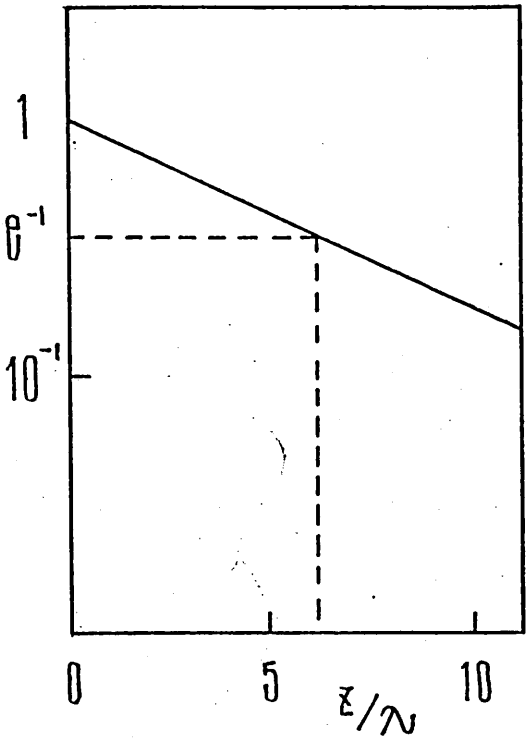


図9　伝搬距離に対する膜内の界のピーク値

上記の例では，除去モードに対する減衰定数として非常に大きな値が得られているが，これは膜厚が薄いことと，方解石の複屈折が大きいということに依る．とくに膜厚に対する依存性は極めて強く，上の例では膜厚を2倍にすると減衰定数は1桁程度小さくなっている．この結果は，直接の比較の対象とはならないが，Hall[9]やUlrich[10]によって報告されている漏洩モード（複素波）の減衰定数が膜厚の3乗に逆比例して小さくなるという結果と定性的には一致している．

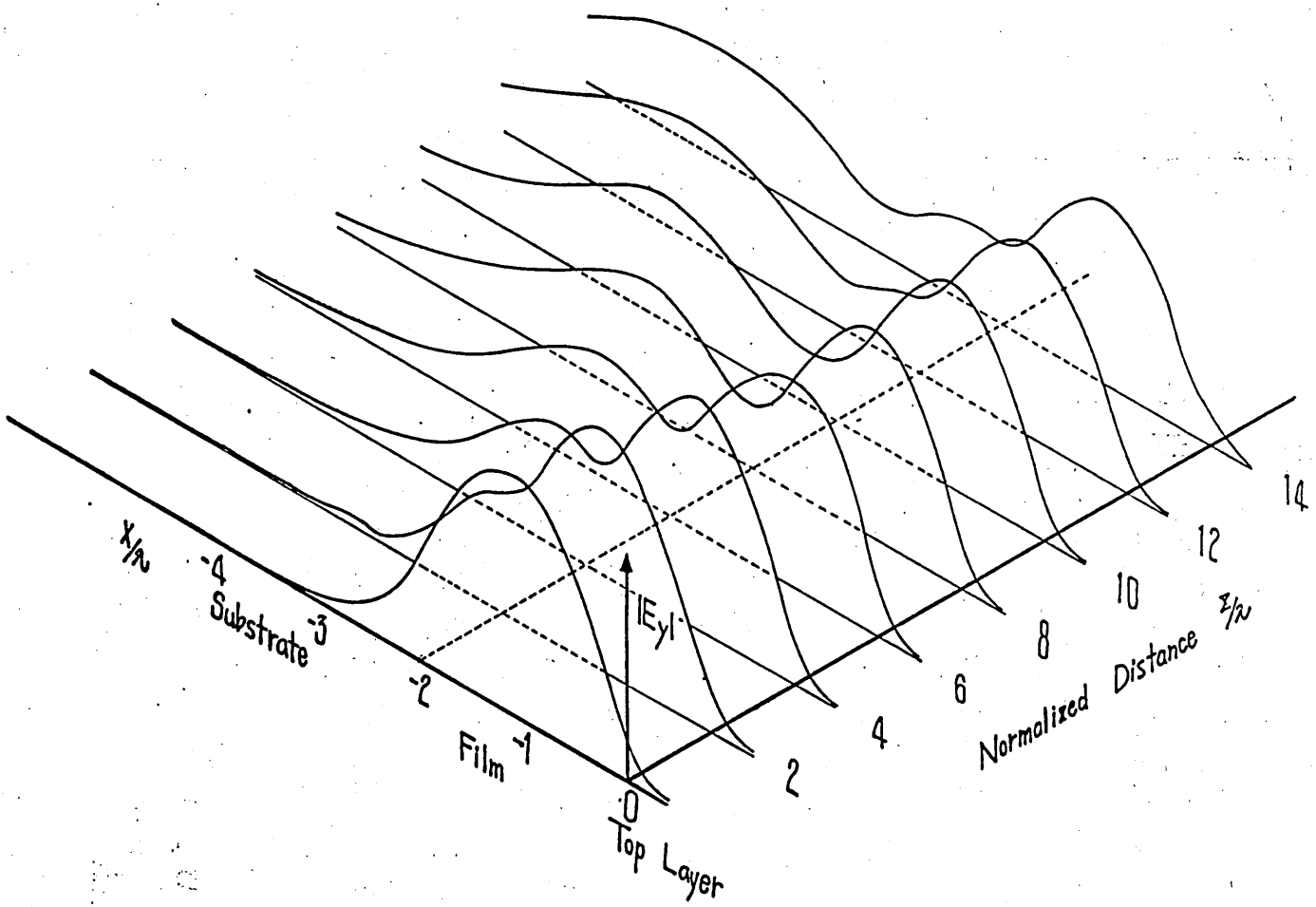


図10 導波TE₀モードが入射した場合の伝搬波形の様子
（d＝2λの場合）

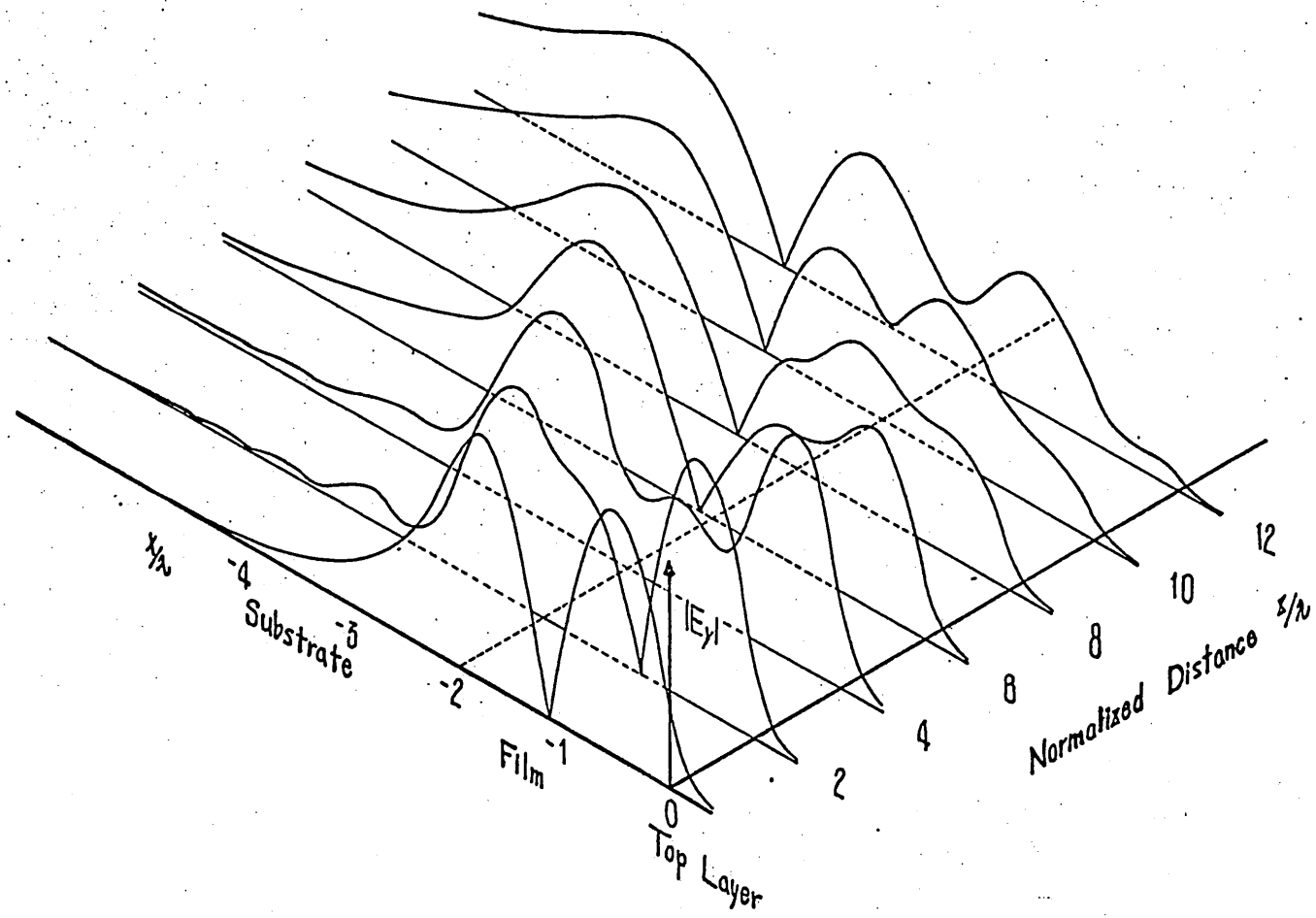


図11　導波TE$_1$モードが入射した場合の伝搬波形の様子
（d＝2λの場合）

なお，ここではTM漏洩タイプの系については触れなかったが，図8の場合と同じ構成で，方解石のC軸をy軸方向に配置し，導波TM_0モードが入射した場合の減衰定数は，数値計算の結果 1.5×10^{4} dB/cm となり，対応するTE$_0$モードの場合より大きくなる、またいずれのタイプについても，膜厚が同じであれば高次モード入射の場合ほど減衰定数が大きくなることも計算によって確かめられた。

6. むすび

本文では異方性材料を用いた半漏洩構造の薄膜光導波系の固有モードの解析を行ない，伝送特性に著しい偏波依存性があることを示した。とくに，漏洩偏波に対しては鋭い除去効果（単一モード伝送時で 10^{4} dB/cm のオーダの減衰）を有することが分かった。この性質を利用すれば，光集積回路用のモード・フィルタが構成されるが，この場合，TEモード選択のフィルタのみならず，これまでに報告されている金属薄膜蒸着形[11]や多層誘電体薄膜形[8],[12]のフィルタでは原理的に得られなかったTMモード選択形の素子が容易に構成できるという点が興味深

い。

なお，ここでは異方性結晶の比誘電率テンソルが対角形の場合のみを取扱ったが，例えば結晶軸回転や電気あるいは磁気光学効果によってテンソルに非対角項をあたえると，導波モードと放射モード間に結合を生ぜしめることができ，従来の導波モード間の結合のみを利用した素子とはまた異なった種類の光集積回路素子が構成される可能性がある。この問題については，現在検討を進めている段階である。

文　献

(1) S.Yamamoto and T.Makimoto :"Circuit theory for a class of anisotropic and gyrotropic thin-film optical waveguides and design of nonreciprocal devices for integrated optics",J.Appl.Phys.,45,2, p.882 (Feb. 1974).

(2) D.Marcuse :"Theory of Dielectric Optical Waveguides",Chap.1, Academic Press, New York (1974).

(3) P.K.Tien :"Light waves in thin films and integrated optics", Appl. Opt., 10,11,p.2395 (Nov. 1971).

(4) T.P.Sosnowski :"Polarization mode filters for integrated optics", Opt.Commun., 4,6,p.408 (Feb./March 1972).

(5) 岡村．平井，山本，牧本："半導波構造の異方性薄膜光導波系のモード選択およびモード結合特性について"，信学全国大会．1208（昭49－07）

(6) J.E.Bjorkholm,T.P.Sosnowski and C.V.Shank :"Distributed-feedback lasers in optical waveguide deposited on anisotropic substrates", Appl.Phys.Lett.,22,p.132 (15 Feb. 1973).

(7) D.Marcuse :" Wave propagation along a dielectric interface", J.Opt.Soc.Amer., 64,6,p.794 (June 1974).

(8) 古屋，末松："外部高屈折率層付誘電体導波路の放射損"，信学論（C），57-C，11，P.411（昭49-11）．

(9) D.B.Hall and C.Yeh :"Leaky waves in a heteroeptaxial film", J.Appl.Phys., 44,5,p.2271 (May 1973).

(10) R.Ulrich and W.Prettl :"Planar leaky light-guides and couplers", Appl.Phys., 1,p.55 (1973).

(11) Y.Suematsu et al. :"Fundametal transverse electric field (TE_0) mode filter for thin-film asymmetric light guides", Appl.Phys. Lett., 21,6,p.291 (15 Sept. 1972).

(12) 川上，西田：" 低屈折率中間層を持つ対称五層スラブ光線路におけるカットオフモードの諸特性，信学論（C），57-C，9，p.364（昭49-09）

電気光学結晶上における金属装荷光導波路の特性

増田正光　　安東泰博　　小山次郎
（大阪大学　工学部　電子工学科）

昭和50年2月

輻射科学研究会

電気光学結晶上における金属装荷光導波路の特性

Properties of the optical waveguide with metal-surface loading on electro-optic crystal

増田正光　安東泰博　小山次郎
大阪大学　工学部　電子工学科

1. まえがき

近年、光変調素子として使用される $LiNbO_3$, $LiTaO_3$ 等の強誘電体上に光導波路を作成し、その電気光学効果を利用して、機能的な光IC回路を構成しようとする試みが成されている。導波路作成法としては結晶を真空中で加熱して表面に高屈折率層を設けるout-diffusion法[1]、各種金属を蒸着して、これを熱拡散するin-diffusion法[2]さらに $LiTaO_3$ あるいはガラス基板状に $LiNbO_3$ の薄膜層を形成する方法[3]などがある。最近 Ar雰囲気中でNiを熱拡散[4]あるいはCuを電界拡散[5]して数μの厚さの光導波路を作成したという報告がある。

このような電気光学結晶上の光線路に変調等の機能性を付与するためには、結晶の光軸と光の偏波方向とを考慮して、表面にプレーナ構造の電極を適当に配置してやらねばならない。例えば我々が提案している線路の曲り効果を利用した光強度変調の際には[6]、c軸を結晶面に垂直に選び、光の偏波方向も面に垂直な E^y モード(TM波)を利用するのが有利である。これに適した電極配置は図1に示すようなものが考えられる。図1bは、y方向の印加電界強度を示したものであるが、このようなプレーナ3電極構造で効率良くc軸方向に電圧を印加し得ることがわかる。[7]

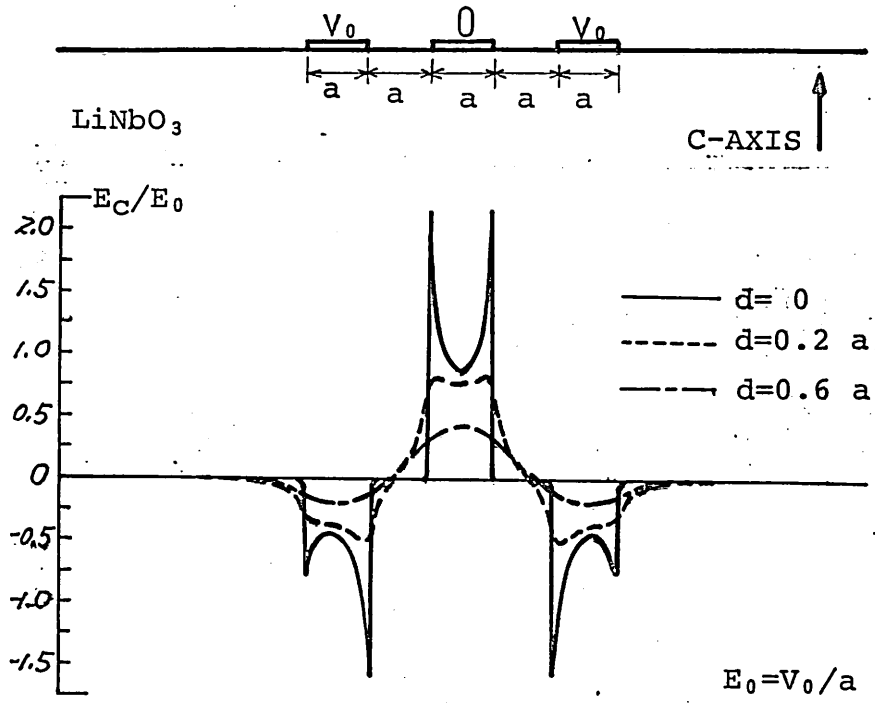


図1　3電極構造の光導波路

ここで問題になるのは、表面に金属を装荷した電気光学結晶上の光導波路の特性である。現在までに光線路に及ぼす金属の効果を対象にした報告はあるが[8][9]、いづれも我々の要求に十分に答え得るものではない。高野、浜崎は金属クラッド誘電体板線路について検討しているが、これは対象構造のものを想定してあり、今ここで必要としている機能線路に対しては適当ではない。

本稿では電気光学結晶上に作られた一様な屈折率分布をもつ平板状の光導波路を想定し、これに金属を装荷した場合の特性について述べる。まずこの種の線路中の光波の分散関係を明らかにし、金属装荷によって生ずる波動の損失を評価する。次に、この損失軽減法について検討する。数値計算に際しては光源として He-Ne レーザ ($\lambda = 0.6328\mu$)

を考え金属はアルミニウム，結晶は$LiNbO_3$を対象としている。
また，本研究の目的の一つはMarcatili等によって取り扱われた通常の誘電体板線路中の導波モードが一側面に金属を装荷することによって，いかに変化するかを明らかにすることにある。それ故，論文中の変数表示，及びモード次数の決定などはできるだけ文献(9)に従っている。

2. 光波長領域における金属の性質[8),10),11)]

周知の如く，いかなる金属も有限の導電率を持っており，その性質を正しく把握するためには，通常の誘電体同様，内部における自由電荷の移動を考慮する必要がある。金属の実効的な複素誘電率ε_{eff}は，等方性媒質内の電荷の運動方程式から容易に得られ，

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\omega_\tau^2}\right)-j\varepsilon_0\frac{\omega_\tau\omega_p^2}{\omega(\omega^2+\omega_\tau^2)} \qquad (1)$$

ここで，$\omega_p^2 = e^2 n_0/m\varepsilon_0$，$\omega_\tau = 1/\tau$，$\tau$は衝突緩和時間，$n_0$，$\varepsilon_0$は各々電荷密度，真空誘電率である。
金属のプラズマ周波数は光の波長領域にあり，またτは$10^{-13}\sim10^{-14}$secである。したがってマイクロ波周波数領域では$\omega \ll \omega_\tau$となって，電荷の慣性効果は無視され，$\varepsilon_{eff} = \varepsilon - j\sigma/\omega$（$\sigma$：導電率）となる。一方，光波長領域では(1)式に示されている如く，$\omega_p^2 > \omega^2+\omega_\tau^2$の範囲で$\varepsilon_{eff}$の実部は負となる。このように一般に金属は可視光以上の波長領域では誘電率が負の比較的損失の多い誘電体として振舞う。

3. 分散関係式の導出

金属拡散法などによって作られた結晶表面近くの光線路は，実際には

断面における屈折率分布の不均一性や形状が複雑で厳密に取り扱うことは極めて困難である。言うまでもなく、金属装荷の効果は電気光学結晶と金属の界面付近の状態に左右され、この点に注目する限り、図2のような平板状の光導波路を想定しても、本質を見失うものではない。

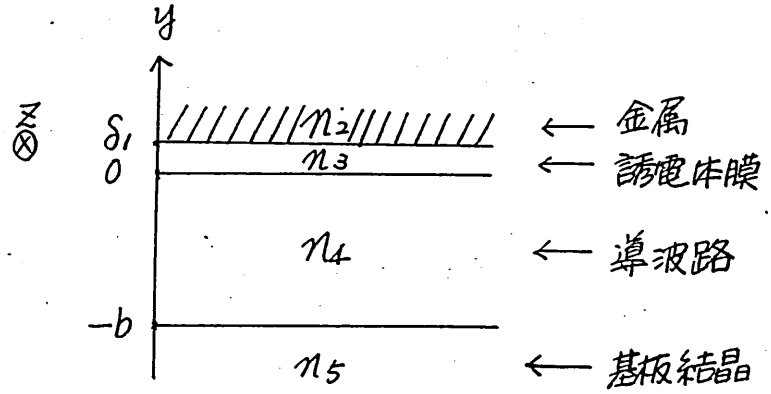


図2. 金属装荷光導波路

ここで結晶と金属の間に挿入されている厚さ δ_1 の媒質は導波モードの損失を軽減するための誘電体薄膜である。この効果については第6章で述べる。また、$y<0$ の領域が電気光学結晶に対応し、

$$n_4/n_5 = 1+\Delta \quad : \Delta \ll 1 \qquad (2)$$

n_5 の値は光の偏波方向によって異なり、

$$n_5 = \begin{cases} n_e : E^y \text{モード} \quad (\text{TM波}) \\ n_o : E^x \text{モード} \quad (\text{TE波}) \end{cases}$$

波動は $e^{j(\omega t - k_z z)}$ で変化するとし、さらに $\partial/\partial x = 0$ なる2次元解析を行うと、基本式から (H_x, E_y, E_z) なる界成分をもった E^y モード(TM波)と (E_x, H_y, H_z) なる界成分をもつ E^x モード(TE波)が容易に分離して次式を得る。

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + (\omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 - k_z^2) F_x = 0 \qquad (3)$$

但し $F_x = \begin{cases} H_x : E^y モードに対して \\ E_x : E^x モードに対して \end{cases}$

他の界成分は

E^y モードでは $E_y = -\frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} H_x$, $E_z = -\frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\partial H_x}{\partial y}$ (4)

E^x モードでは $H_y = \frac{k_z}{\omega\mu_0} E_x$, $H_z = \frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial y}$ (5)

(3)式より各領域における電磁界が与えられて,

$y \geq \delta$, $\gamma_2^2 = k_z^2 - k_2^2$, $F_x = C_1 e^{-\gamma_2 y}$

$0 \leq y \leq \delta_1$ $\gamma_3^2 = k_z^2 - k_3^2$, $F_x = C_2 e^{-\gamma_3 y} + C_3 e^{\gamma_3 y}$

$-b \leq y \leq 0$ $k_y^2 = k_4^2 - k_z^2$, $F_x = C_4 \cos k_y y + C_5 \sin k_y y$ (6)

$y \leq -b$ $\gamma_5^2 = k_z^2 - k_5^2$, $F_x = C_6 e^{\gamma_5 y}$

但し

$$k_\nu = \omega\sqrt{\varepsilon_\nu \varepsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda} n_\nu \quad : \quad \nu = 2, 3, 4, 5$$

次に, 各境界面で電界および磁界の接線成分が連続, すなわち

$\begin{cases} E^y モードに対しては \quad H_x, E_z が連続 \\ E^x モードに対しては \quad E_x, H_z が連続 \end{cases}$

(6)式と上の境界条件を用いて, 系の分散関係式を得る。

$$\tan k_y b = \frac{g_2 + (K_4^{-1}\frac{\gamma_5}{k_y}) g_1}{g_1 - (K_4^{-1}\frac{\gamma_5}{k_y}) g_2} \quad (7)$$

$$\begin{cases} g_1 = \cosh\gamma_3\delta_1 + K_2\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\sinh\gamma_3\delta_1 \\ g_2 = K_3\frac{\gamma_3}{k_y}(\sinh\gamma_3\delta_1 + K_2\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\cosh\gamma_3\delta_1) \end{cases} \quad (8)$$

$$K_\nu = \begin{cases} \varepsilon_{\nu+1}/\varepsilon_\nu = (n_{\nu+1}/n_\nu)^2 & \text{但し } \nu = 2,3,4 : E^y \text{モードに対して} \\ 1 : E^x \text{モードに対して} \end{cases}$$

(7)式を変形して

$$k_y b = q\pi - \tan^{-1}\left(\frac{g_1}{g_2}\right) - \tan^{-1}\left(K_4 \frac{k_y}{\gamma_5}\right) \qquad (9)$$

q は光導波路内 $(-b \le y \le 0)$ における界分布の極値の数に対応し，これがモード次数を表わす。 $q = 1, 2, 3 \cdots$。
ここで横方向の波数を変形して，A_ν なる要素を導入する[9]。

$$\gamma_\nu^2 = (k_4^2 - k_\nu^2) - k_y^2 = (\pi/A_\nu)^2 - k_y^2 \qquad (10)$$

$$A_\nu = \frac{\lambda}{2\sqrt{n_4^2 - n_\nu^2}} \quad : \quad \nu = 1,2,3,5$$

A_ν は導波モードの実効的な幅に対応する。
また各領域での界分布は

$$\begin{aligned} y \ge \delta_1 \qquad & F_x = C_0 e^{-\gamma_2(y-\delta_1)} \\ 0 \le y \le \delta_1 \qquad & F_x = C_0\left\{\cosh\gamma_3(y-\delta_1) - K_2\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\sinh\gamma_3(y-\delta_1)\right\} \\ -b \le y \le 0 \qquad & F_x = C_0(g_1\cos k_y y - g_2 \sin k_y y) \\ y \le -b \qquad & F_x = C_0(g_1\cos k_y b + g_2 \sin k_y b)e^{\gamma_5(y+b)} \end{aligned} \qquad (11)$$

任意定数 $C_0 = C_1 e^{-\gamma_2\delta_1}$ である。
以上，各領域での屈折率，線路幅，動作波長を与え，(8)，(9)，(10)式を解くことにより，この系内を伝搬する導波モードの分散関係を得る。

4. 金属装荷光導波路の特性

本章では、まず近似解を求め、これにより導波モードの損失およびカットオフの状態を評価する。次に分散関係式の一例を示し、比較検討する。

4.1 損失の評価

ここでは無損失線路の場合の近似[9]を適用して、E^x, E^y 両モードの損失を評価する。

カットオフから十分離れたところでは、次の近似が成り立つ。

$$|\pi/A_\nu| \gg k_y \ , \quad \gamma_\nu \simeq \pi/A_\nu \qquad (12)$$

したがって、(8)式より

$$\frac{g_1}{g_2} \simeq (K_2K_3)^{-1} k_y \left(\frac{A_2}{\pi}\right) \cdot f(\delta_1) \qquad (13)$$

$$f(\delta_1) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{A_3}\right)\delta_1 + K_2\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\sinh\left(\frac{\pi}{A_3}\right)\delta_1}{K_2^{-1}\left(\frac{A_2}{A_3}\right)\sinh\left(\frac{\pi}{A_3}\right)\delta_1 + \cosh\left(\frac{\pi}{A_3}\right)\delta_1} \qquad (14)$$

さらに

$$K_4 \left|k_y/\gamma_5\right| \simeq K_4 |k_y| (A_5/\pi) \ll 1 \qquad (15)$$

(14)式の $f(\delta_1)$ は誘電体膜が十分に薄いと

$$f(\delta_1) \simeq 1 + K_2\left(\frac{\pi}{A_2}\right)\left\{1 - K_2^{-2}\left(\frac{A_2}{A_3}\right)^2\right\}\delta_1 \qquad (16)$$

したがって、(13)式の $|g_1/g_2| \ll 1$ と置くことができる。結局 分散関係式(9)は次式で近似される。

$$k_y b \simeq q\pi - (K_2K_3)^{-1} k_y \left(\frac{A_2}{\pi}\right) f(\delta_1) - K_4 k_y \left(\frac{A_5}{\pi}\right)$$

$$\therefore\ k_y \simeq \frac{8\pi}{b}\left[1+K_4\left(\frac{A_5}{b\pi}\right)+(K_2K_3)^{-1}\left(\frac{A_2}{b\pi}\right)f(\delta_1)\right]^{-1} \qquad (17)$$

導波モードの損失に寄与するのは，(17)式右辺の括弧内第3項であるが，煩雑さを避けるために，$\delta_1=0$ すなわち $f(\delta_1)=1$ の場合について検討する。

第2章で述べたように，金属の誘電率 ε_2 は複素数となり

$$\varepsilon_2 = n_2^2 = \varepsilon_r + j\varepsilon_i,\quad \varepsilon_r<0,\quad \varepsilon_i<0 \qquad (18)$$

したがって，(17)式の右辺の括弧内第3項は

$$(K_2K_3)^{-1}\left(\frac{A_2}{b\pi}\right)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_r}{\varepsilon_4}\left(1+j\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right)\eta\dfrac{A_0}{b\pi} & : E^y\text{モード}\\ \eta\dfrac{A_0}{b\pi} & : E^x\text{モード}\end{cases} \qquad (19)$$

ここで

$$\eta = 1\Big/\sqrt{1+j\frac{\varepsilon_i/\varepsilon_r}{1-\varepsilon_4/\varepsilon_r}} = \eta_r + j\eta_i \qquad (20)$$

$$A_0 = \lambda/2\sqrt{\varepsilon_4-\varepsilon_r} \qquad (21)$$

η，A_0 は ε_r，ε_i，および ε_4 で決まる既知の量である。

$k_y=k_{yr}+jk_{yi}$ とすると，興味の対象となる光伝送系においては，$k_{yr}\gg k_{yi}$ と考えて良く，(17)式より

E^y モードに対して

$$k_{yr} \simeq \frac{8\pi}{b}\left[1+K_4\left(\frac{A_5}{b\pi}\right)+\left(\frac{A_0}{b\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_4}\right)\left(\eta_r-\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\eta_i\right)\right]^{-1} \qquad (22)$$

$$k_{yi} \simeq -\frac{8\pi}{b}\left[1+K_4\left(\frac{A_5}{b\pi}\right)+\left(\frac{A_0}{b\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_4}\right)\left(\eta_r-\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right)\right]^{-2}\left(\frac{A_0}{b\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_4}\right)\left(\eta_i+\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\eta_r\right) \qquad (23)$$

E^zモードに対して

$$k_{gr} \simeq \frac{g\pi}{b}\left[1+K_4\left(\frac{A_5}{b\pi}\right)+\left(\frac{A_0}{b\pi}\right)\eta_r\right]^{-1} \quad (24)$$

$$k_{gi} \simeq -\frac{gA_0}{b^2}\left[1+K_4\left(\frac{A_5}{b\pi}\right)+\left(\frac{A_0}{b\pi}\right)\eta_r\right]^{-2}\eta_i \quad (25)$$

所望の縦方向の伝搬定数を $k_z = k_{zr} + j k_{zi}$ とすると

$$k_{zr} \simeq \sqrt{k_4^2 - k_{gr}^2} \quad (26)$$

$$k_{zi} \simeq -\frac{k_{gr}k_{gi}}{\sqrt{k_4^2 - k_{gr}^2}} \quad (27)$$

減衰定数 α ($=-k_{zi}$)は (22)~(27)式より

E^yモードに対して

$$\alpha \simeq -\frac{1}{k_{zr}} \times \frac{g^2A_0\pi}{b^3}\left[1+K_4\left(\frac{A_5}{b\pi}\right)+\left(\frac{A_0}{b\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_4}\right)\left(\eta_r - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\eta_i\right)\right]^{-3}\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_4}\right)\left(\eta_i + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\eta_r\right)$$

$$\simeq -\frac{1}{k_{zr}} \times \frac{g^2A_0\pi}{b^3}\left[1-3K_4\left(\frac{A_5}{b\pi}\right)-3\left(\frac{A_0}{b\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_4}\right)\left(\eta_r - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\eta_i\right)\right]\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_4}\right)\left(\eta_i + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\eta_r\right) \quad (28)$$

E^xモードに対して

$$\alpha \simeq -\frac{1}{k_{zr}} \times \frac{g^2A_0\pi}{b^3}\left[1+K_4\left(\frac{A_5}{b\pi}\right)+\left(\frac{A_0}{b\pi}\right)\eta_r\right]^{-3}\eta_i$$

$$\simeq -\frac{1}{k_{zr}} \times \frac{g^2A_0\pi}{b^3}\left[1-3K_4\left(\frac{A_5}{b\pi}\right)-3\left(\frac{A_0}{b\pi}\right)\eta_r\right]\eta_i \quad (29)$$

但し、上式の第2近似式は $A_5/b\pi$, $A_0/b\pi \ll 1$ のとき有効である。

さて、金属装荷光導波路中の光波の減衰量を決定する主要素は、(28)および(29)式中に含まれている $\varepsilon_r/\varepsilon_4$, $\varepsilon_i/\varepsilon_r$ とこれに所属した η_r, η_i なる諸量である。$\varepsilon_r, \varepsilon_i, \varepsilon_4$ が与えられたとき、(20)式を満足する η の値は2つ存在する。ここで $\varepsilon_r<0$, $\varepsilon_i<0$, $\varepsilon_4>0$ さらに $\alpha \geq 0$ を考慮すると

一方は切り捨てることができ，結局 η_r, η_i は次式で与えられることになる。

$$\eta_r = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{t}+t)} \quad > 0$$

$$\eta_i = -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{t}-t)} \quad \leq 0 \qquad (30)$$

ここで

$$t = \frac{(1-\varepsilon_4/\varepsilon_r)^2}{(1-\varepsilon_4/\varepsilon_r)^2+(\varepsilon_i/\varepsilon_r)^2} \qquad (31)$$

また，このとき

$$\varepsilon_4/\varepsilon_r < 0, \quad \varepsilon_i/\varepsilon_r \geq 0 \quad \therefore \eta_i + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right)\eta_r \geq 0 \qquad (32)$$

(30)式において，$\varepsilon_i=0$ のとき $\eta_r=1$, $\eta_i=0$ となり，同時に $\alpha=0$ となる。
図3に，$\varepsilon_r/\varepsilon_4=-5$ のときの $\varepsilon_i/\varepsilon_r$ に対する η_r, η_i および $(\varepsilon_r/\varepsilon_4)\{\eta_i+(\varepsilon_i/\varepsilon_r)\eta_r\}$ の変化を示す（(28), (29)式参照）。

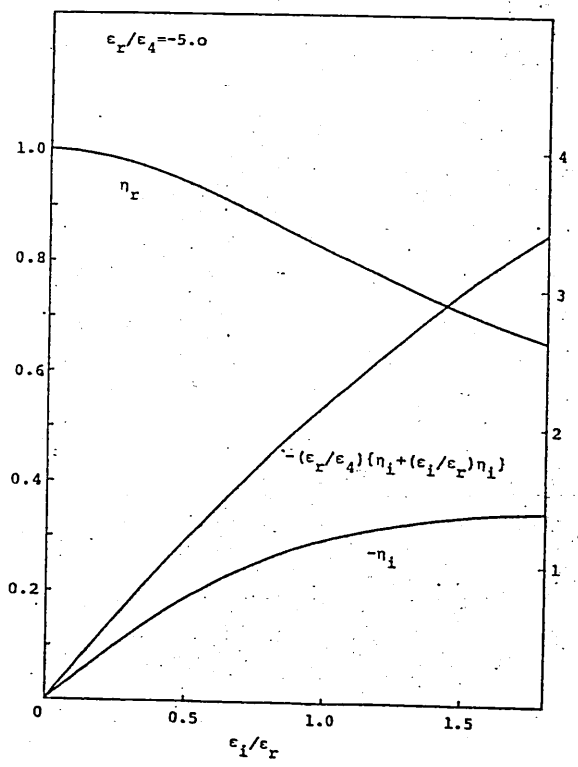


図3
金属の特性量
~~(アルミニウムの場合)~~

これから ε_i の増加にともなって α は単調に増大し，また常に E^y_{0g} モードの減衰量が E^x_{0g} モードのそれよりも大きく，この減衰量の差は ε_i が大なる程顕著になることがわかる。これは E^y モードの方がより金属の影響を受けやすいことを示すものである。

さらに，導波モードの減衰量は ε_r, ε_i の値そのもので決定するのではなく，ε_4 も含めた $\varepsilon_r/\varepsilon_4$, $\varepsilon_i/\varepsilon_r$ なる誘電率の比によって決まることに注意する必要がある。

次に，すべての領域の屈折率が与えられたとき，(28), (29)式からわかるとおり，E^x, E^y のいづれのモードにおいても，導波モードの減衰定数 α はほぼモード次数 g の2乗，および動作波長 λ の2乗に比例し，線路中幅 b の3乗に逆比例する。すなわち，

$$\alpha \propto \frac{(g\lambda)^2}{b^3} \quad : n_\mu \text{ が与えられたとき} \qquad (33)$$

ここで，分散関係式の数値解の一例を示し，減衰定数 α に対する近似式の妥当性について考えてみる。

数値計算にあたり，光源には He-Ne レーザ，金属としてアルミニウムを想定し，n_2 の値として次のものを使用した。[10]

$$n_2 = 1.62 - j5.44 \quad : \lambda = 0.6328\mu \qquad (34)$$

さらに，電気光学結晶として $LiNbO_3$ を考え[11]，

$$n_5 = \begin{cases} n_e = 2.200 & : E^y \text{モード} \\ n_o = 2.286 & : E^x \text{モード} \end{cases} \qquad (35)$$

分散関係式(9)は Newton-Raphson 法を用いて解いたが，この結果の一例を図4に示す。破線は近似式(28)から得たものである。光導波路と基板結晶との屈折率差 Δ によって直接変化する量は A_5 であり，

$$A_5 \simeq \frac{\lambda}{2n_5\sqrt{2\Delta}} \qquad (36)$$

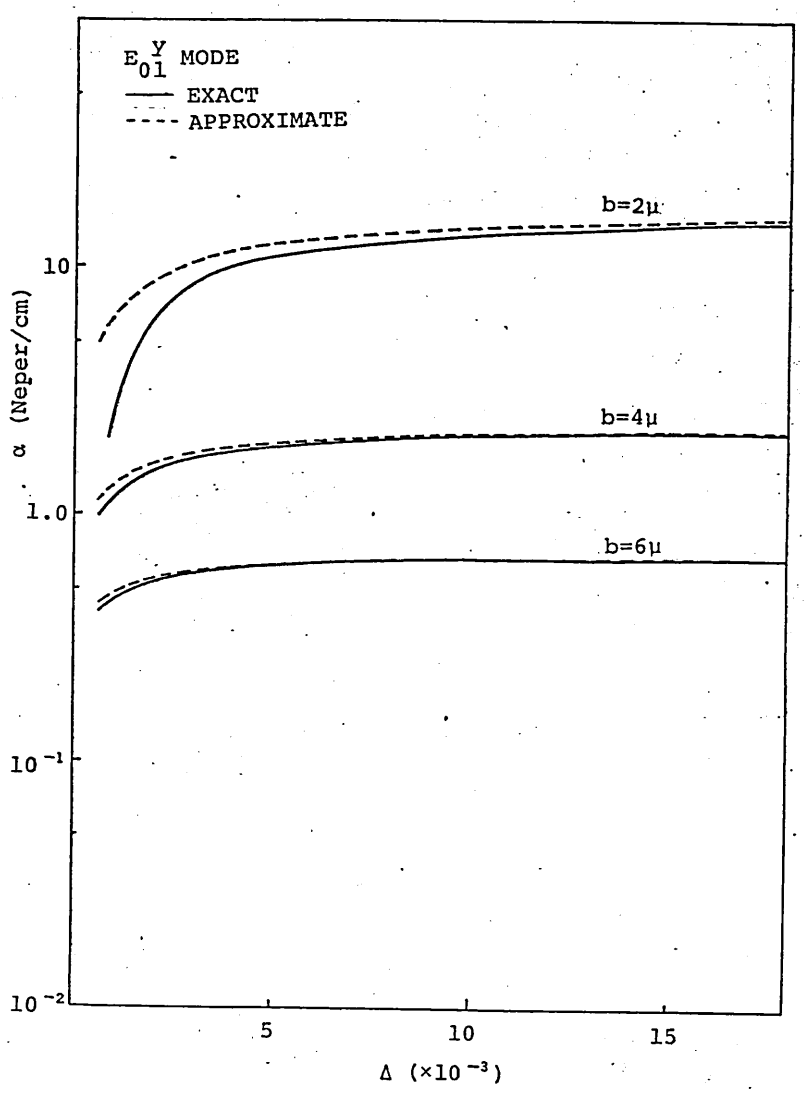


図4　近似解の妥当性　$\delta_1=0$

Δが小さくなり、$|k_y|$とπ/A_5が同程度になると、近似度は極めて悪くなるが、先に求めたαに対する近似式(28)はb/A_5が2の範囲で有効である。これはMarcatiliが述べている基本波の"well-guided mode"が保持される範囲と大体一致する。

E^xモードおよび高次モードにおいても同様に近似式の妥当性が確められる。

4.2. 導波モードのカットオフ

前に述べたように、今対象としている金属装荷光導波路においては、一般に $k_{yr} \gg k_{yi}$, $k_{zr} \gg \alpha$ であり、この線路のカットオフを取り扱う場合に、伝搬定数 k_y, k_z を実数としても本質を見失うことはないと考えられる。
さらに、図4でわかるように、導波モードの損失はカットオフに近づくにつれて急激に減少する。これはカットオフ近傍では導波路内における光波の電磁界集中が緩慢になり、それだけ導波モードに対する金属の影響が少なくなるためと考えられる。したがって、カットオフにおいてこの線路を擬似無損失線路と見なし、(18)式で $\varepsilon_i \simeq 0$, $\varepsilon_2 \simeq \varepsilon_r$ とおく。
カットオフとは導波モードがいわゆる "substrate mode" に移行する点であり、

$$k_z \simeq k_5 = \frac{2\pi}{\lambda} n_5 \qquad (37)$$

このとき、(6)式より

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\simeq k_5 \sqrt{1 - \varepsilon_r/\varepsilon_5} \\ \gamma_5 &\simeq 0 \\ k_y &= k_5 \sqrt{(\varepsilon_4/\varepsilon_5) - 1} \simeq k_5 \sqrt{2\Delta} \end{aligned} \qquad (38)$$

さらに、分散関係式(9)は

$$k_y b \simeq g\pi - \tan^{-1} K_r \frac{k_y}{\gamma_5} - \frac{\pi}{2} \qquad (39)$$

ここで

$$K_r = \begin{cases} \varepsilon_r/\varepsilon_4 \simeq \varepsilon_r/\varepsilon_5 & : E^y \text{モード} \\ 1 & : E^z \text{モード} \end{cases} \qquad (40)$$

$K_r (k_y/\gamma_5) \ll 1$ を考慮して、(38)式を(39)式に代入し、カットオフにおける導波路の屈折率差を Δ_c とおくと次式を得る。

$$\Delta_c \simeq \frac{1}{2} \left[\frac{(g - \frac{1}{2})\pi}{(K_r/\sqrt{1 - \varepsilon_r/\varepsilon_5}) + k_5 b} \right]^2 \qquad (41)$$

$b/A_5 \simeq (b/\pi) k_5 \sqrt{2\Delta}$ なる関係を用いて，カットオフを規格化した線路幅で表現すると，

$$\left(\frac{b}{A_5}\right)_c \simeq \frac{(q-\frac{1}{2})}{1+\left(\frac{1}{k_5 b}\right)\frac{K_r}{\sqrt{1-\varepsilon_r/\varepsilon_5}}} \qquad (42)$$

(40), (42)式からわかるように，通常の非対称誘電体板線路では $\varepsilon_r > 0$ であるが，金属では $\varepsilon_r < 0$ となり，E^y, E^x 両モードに対する $(b/A_5)_c$ の値の差は大きくなる。しかしながら，一般に (42)式の分母第2項は1より相当小さな値しかとり得ず，この差異はわずかである。
下の表は $b = 4\mu$ の導波路にアルミニウムを装荷した場合の導波モードのカットオフを示したものである。

	q	1	2	3
$\left(\frac{b}{A_5}\right)_c$	E^y	0.513	1.538	2.564
	E^x	0.498	1.493	2.489
Δ_c	E^y	1.701×10^{-4}	1.529×10^{-3}	4.248×10^{-3}
	E^x	1.603×10^{-4}	1.440×10^{-3}	4.003×10^{-3}

5. 数値解による検討

前章においては，分散関係式の近似解を求めることにより，金属装荷光導波路内を伝搬する光波の損失，カットオフについて検討してきたが，本章において，計算機による数値解を示し，その振舞をさらに明らかにする。

5.1 分散関係

ここでは、前章で用いた数値をそのまま使用する((34), (35)式参照)。
Newton-Raphson 法による分散関係式(9)(但し、誘電体膜厚 $\delta_1 = 0$ の場合)の数値解を図5、6に示す。文献(9)との比較のために、図5の座標軸はこれにしたがった。また、導波モードの損失は次式から計算される。

$$Loss = 20 \log_{10} e^{\alpha} \simeq 8.686 \times \alpha \quad (dB/cm) \quad (43)$$

図5の分散関係には通常の誘電体板線路との顕著な差異は見受けられない。図6が示すごとく、E^x_{01} モードは損失が最小のモードであり、光波長領域における金属の誘電体的性質を考慮すれば、金属を装荷することによって、E^x_{01} モードの損失が増大し、このモードが事実上消滅することはない。また、図5の分散関係を見る限り、E^x_{0g}, E^y_{0g} モードの縮退は完全に解けないが、高次モードになる程、モードは分離する傾向にある。これは前章で得た近似式(22), (24), (26)からも予測されることであり、また、(42)式で示される両モードのカットオフの差異が g の増加と共に大きくなることも対応している。
図6は各モードの損失を示したものであるが、いづれの場合もカットオフに近づくにつれて損失は急激に減少する。これは前にも触れたが、カットオフ近傍では基板(ギャップ-b)方向への電磁界の浸透率が大きくなり、導波モードに対する金属の影響が実効的に小さくなることに帰因している。このような損失の急激な減少のために、カットオフのごく近傍では隣接する高次モードの損失の方が小さくなるという現象が生ずるが、この部分を除けば、高次モードの損失の方がはるかに大きい。すなわち、各領域の屈折率を慎重に吟味した特殊な線路でない限り、基本モードの損失が最小であり、前章で示したように、高次モードの損失はほぼ g^2 倍になる。

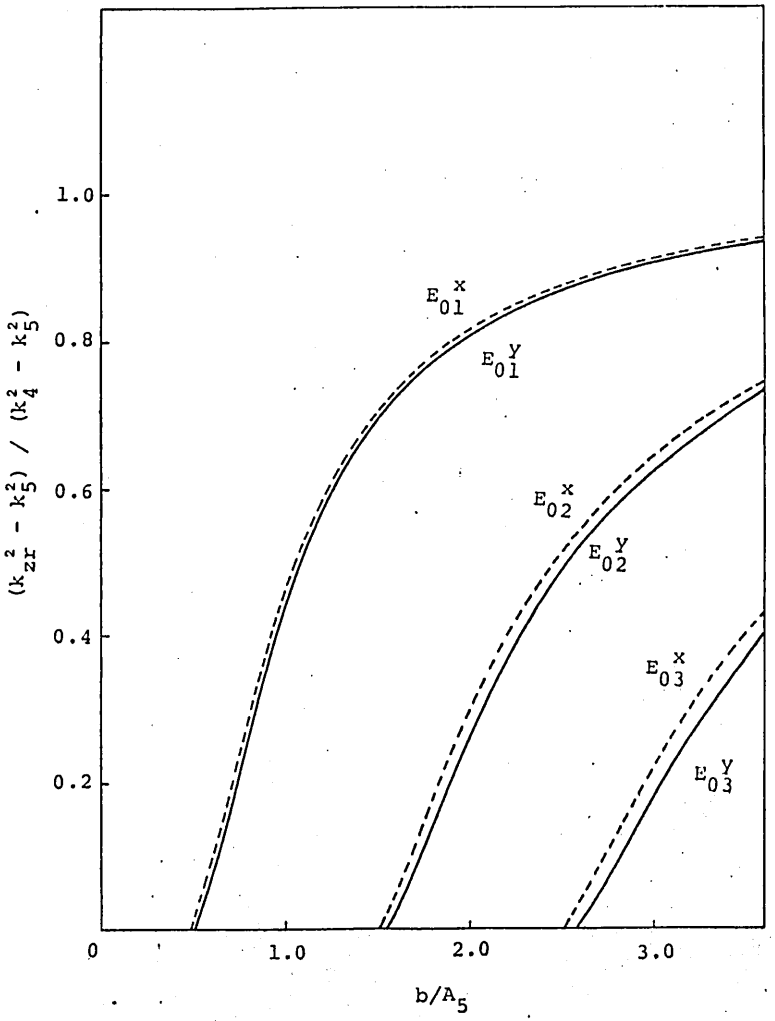


図5　伝搬特性

$b = 4\mu$

$\delta_1 = 0$

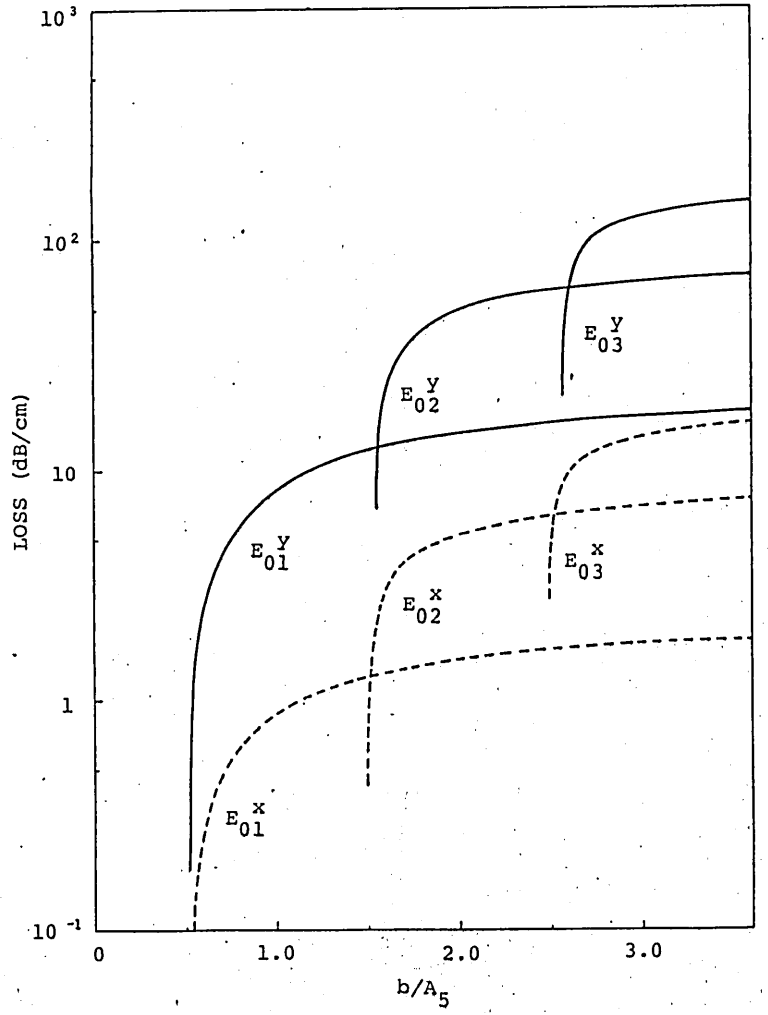


図6　各モードの損失

$b = 4\mu$

$\delta_1 = 0$

この数値例では、E_{01}^{x} が最低損失モードであり、他のモードはこれより 5 dB/cm 以上 減衰が大きい。このような効果を利用して ある光線路に適当な金属を装荷し、意識的に導波モードに損失を与えることによって、単一モード伝送線路を構成することができよう。

5.2. 導波モードの界分布

図7は導波路の断面における各モードの界分布を示したものである。縦軸は $\mathrm{Re}(E_x)$ の相対値であり、(11式参照)、横軸の $y=0$ が金属と電気光学結晶との境界面を表わす。全体的に見てモードパターンは通常の非対称誘電体板線路のものと大差はない。

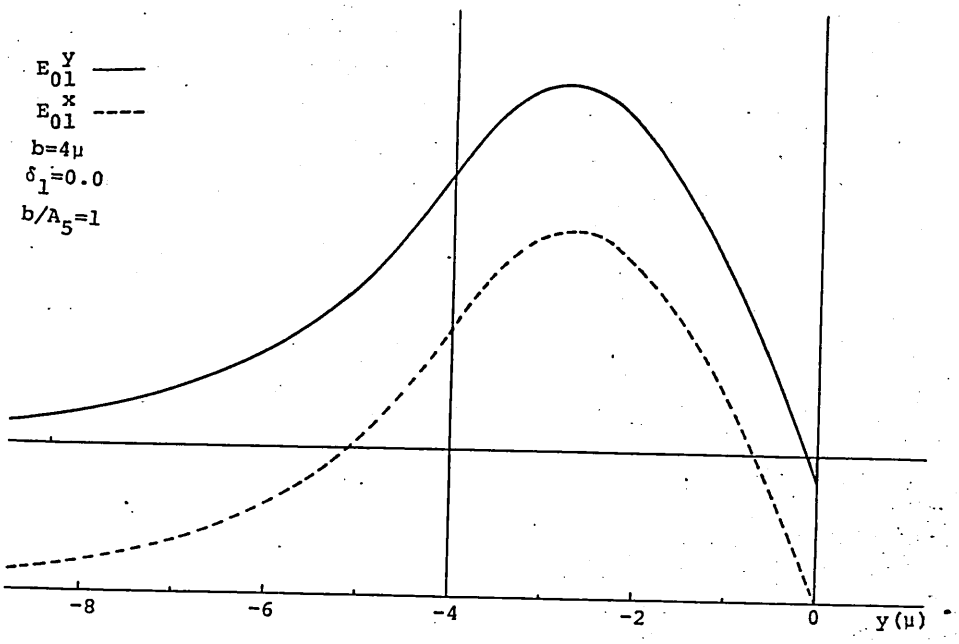
ここで注目すべきは E_{0}^{y} モードの界分布において、$y=0$ 面近傍で位相反転が生じ、その尖点が金属境界面にある点である。これは高次モードになる程 顕著に現われる。このような界分布の位相反転は高野、浜崎も指摘しているが、彼等は対称構造をもつ金属クラッド誘電体板線路を取り扱い、また、モードの定義が異なるために、位相反転が生ずるのは TM2 モードになっている。

ここでは、導波路中に沿って伝搬する比較的低損失の導波モードを対象にしているため、金属との境界面に電磁界が集中する表面波的なモードは存在しない。このような表面波的モードは金属の影響をより受け易く、それだけ損失も大きいことが予想される。

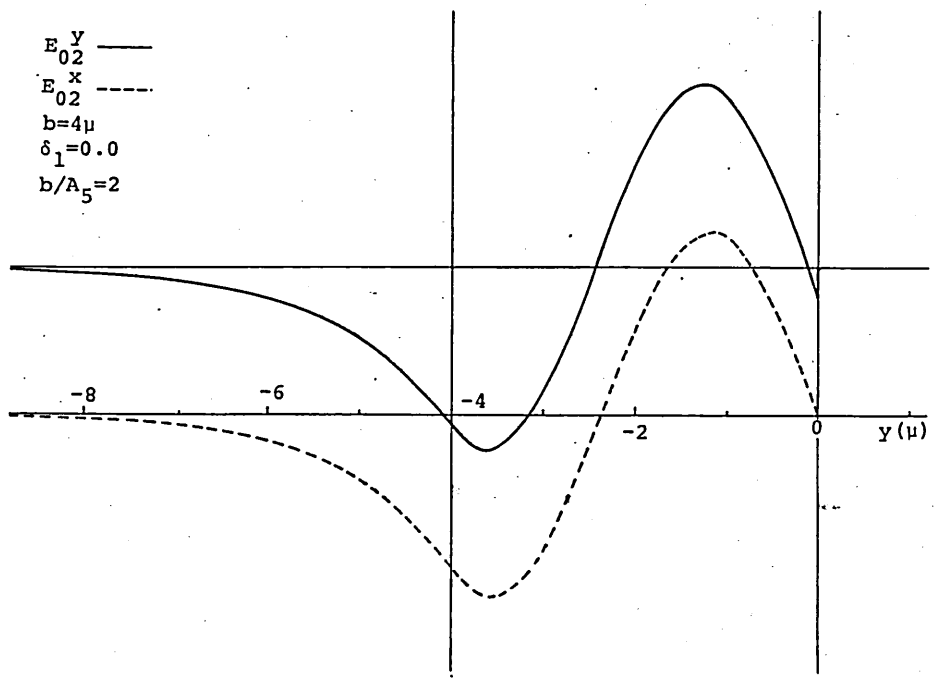
5.3. 金属膜に対する検討

図7において、金属界面での電磁界振幅が $1/e$ になる点は界面より 70 Å の付近である。この値はマイクロ波領域での表皮厚から計算されるものより ($\delta=\sqrt{2/\omega\mu\sigma} \simeq 340$ Å) かなり小さい。すなわち 金属に対する導波モードの電磁界浸透率は極めて小さいことがわかる。

(a)


E_{01}^{y}
E_{01}^{x}
b=4μ
δ_1=0.0
b/A_5=1
-8
-6
-4
-2
0
y(μ)

(b)


E_{02}^{y}
E_{02}^{x}
b=4μ
δ_1=0.0
b/A_5=2
-8
-6
-4
-2
0
y(μ)

(c)

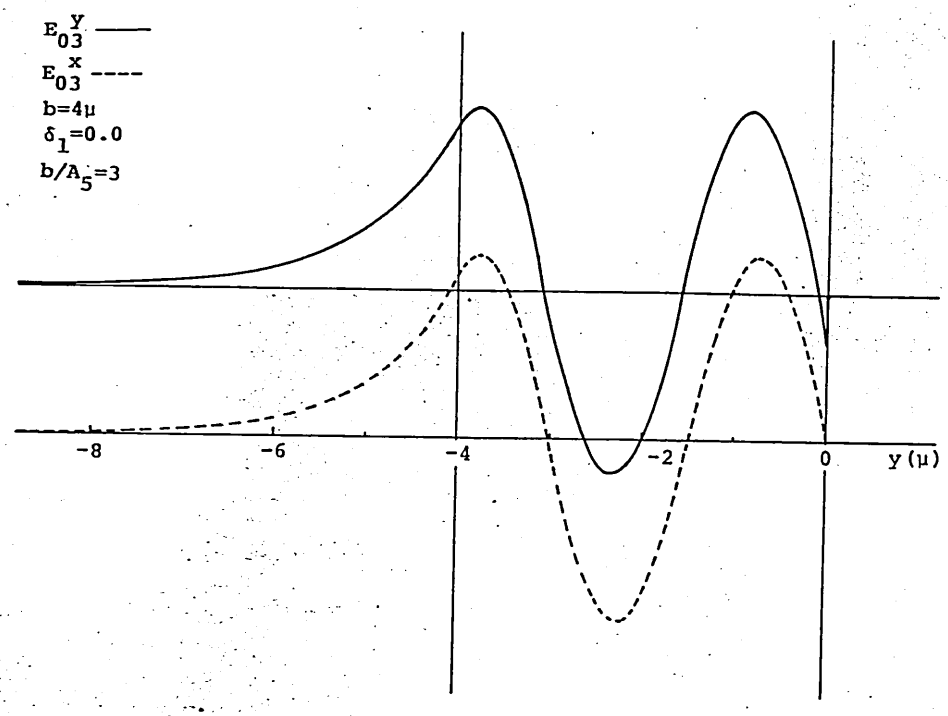


図7. 断面における界分布

実際の光機能線路においては、電極は金属を蒸着して作られる。したがって、金属膜の厚さが導波モードの特性にどの程度の影響を及ぼすものであるかを知っておく必要がある。しかしながら、前述の計算からわかるように、金属内部への電磁界浸透率が小さいため、金属膜の厚さがある一定値以上であれば、ほとんどこの効果は無視できるであろう。

図8は金属の膜厚を δ_2 とし、その上に屈折率 n_1 の半無限の誘電体を置いた場合の計算結果である。$n_1=1.0$(空気)の場合、$\delta_2=0.04\mu$以下でわずかに損失が大きくなる程度で顕著な変化はない。さらに、$n_1=1.5$, $\delta_2=0.04\mu$ とすると損失は増加する。このように、数千Åの金属蒸着膜であれば、導波モードの電磁界は完全に遮蔽される。

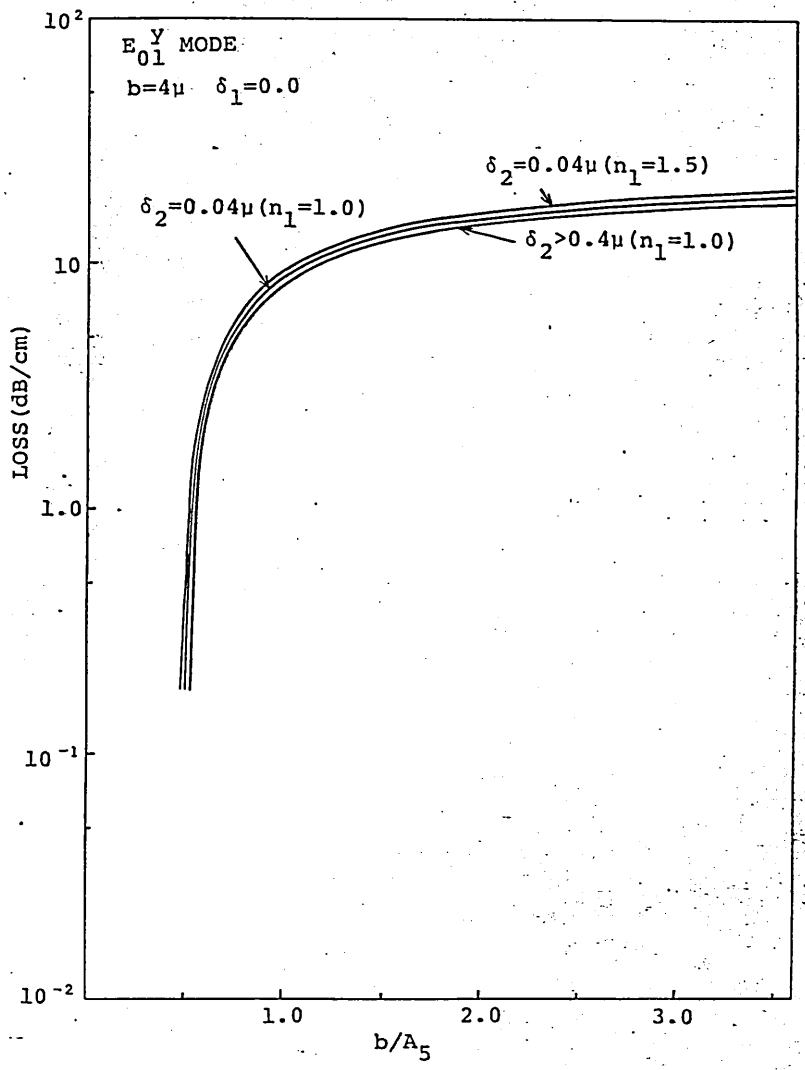


図 8　　金属の膜厚の効果

6. 損失の軽減法

最初にも述べたように、曲り効果なども含めて光機能線路を構成するとき、結晶のC軸を面に垂直に選び、光の偏波方向も面に垂直な

E_{01}^{y}モードを利用するのが有利と考えられる。しかしながら，前章の数値計算の結果から明らかなように(図6参照)，アルミニウムを装荷した厚さ4μの導波路中のE_{01}^{y}モードでさえも，10dB/cm以上の損失をもっており，これをそのまま利用することはできない。

したがって，何らかの方法でこの損失を軽減してやらねばならない。この損失軽減法の一案は既に図2に示してあるように導波路と金属の間に異種誘電体膜を挿入して，これでもって導波モードに対する金属の直接的な影響を緩和し，その損失を軽減しようとするものである。このような異種誘電体膜の挿入は，上述の損失軽減ばかりでなく，実際に電圧を印加した場合の端効果の緩和および電気光学結晶の保護膜としての役割を同時に果すことが予想され，好都合である。異種誘電体膜の効果は第4章の(17)式を処理すれば良いが，これはかなり煩雑であり，別稿にゆずるとして，ここでは数値計算の結果のみについて述べる。改めて言うまでもないが，計算に用いた数値は，第5章と全く同様である。

6.1. 膜厚の効果

まず，異種誘電体としてのSiO_2を想定し($n_3=1.5$)，その膜厚(S_1)によって基本波の損失がいかに変化するかを見た(図9)，E_{01}^{y}モードで見れば，わずか0.08μのSiO_2膜を挿入することによって，その損失は10.6dB/cmから，0.48dB/cmに減少し(但し，$\Delta=10^{-3}$のとき)，誘電体挿入の効果が極めて顕著であることがわかる。また，膜厚に対する損失減少率はE_{01}^{y}モードの方がはるかに大きく，$S_1=0.12\mu$ではE_{01}^{y}モードが0.11dB/cm，E_{01}^{z}モードが0.06dB/cm($\Delta=10^{-3}$)となり，その差は小さくなる。

さらに，S_1を変えてもモードの分散性には全く影響がなく，先に示した図5のようになり，新たに示す必要はない。これは常に$R_{st}\gg\lambda$が満足

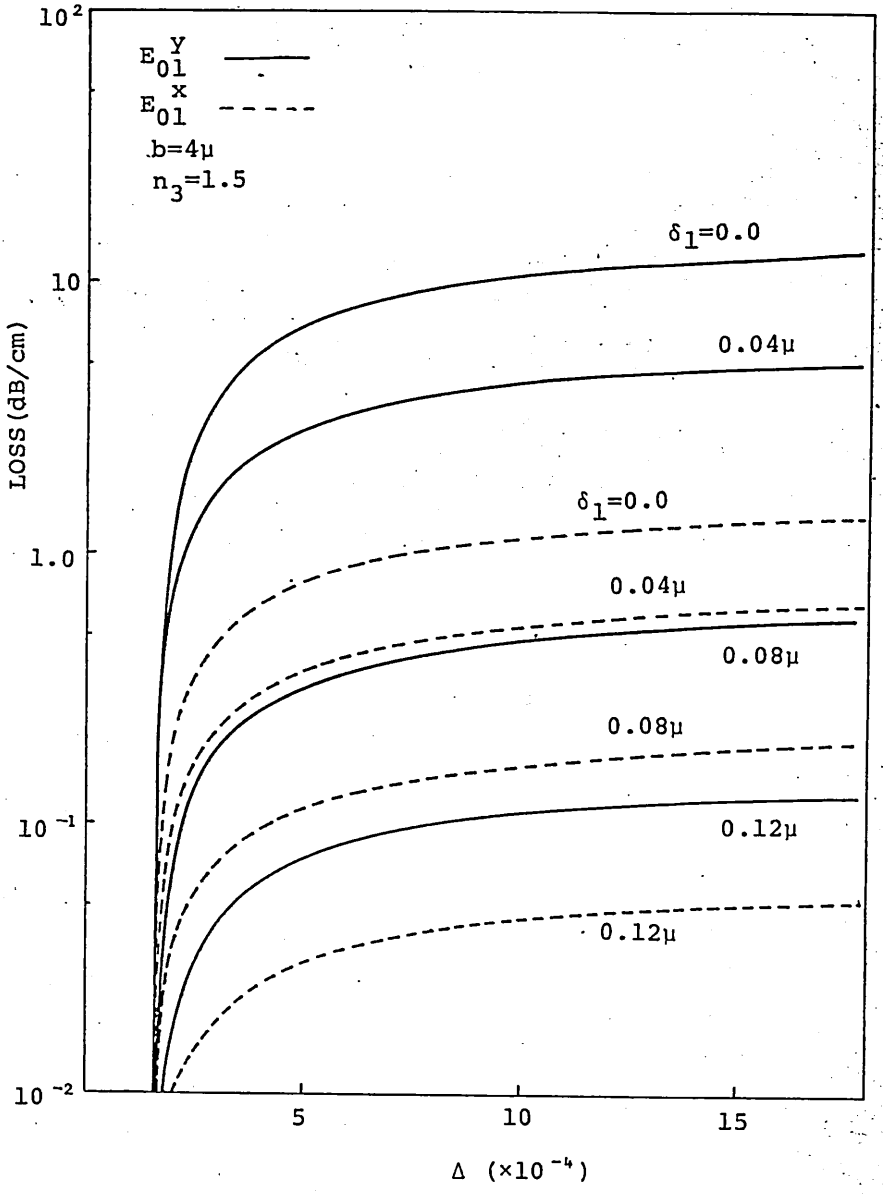


図9　誘電体膜の効果（膜厚の変化）

されていることからみて、当然の結果である。

6.2. 屈折率の変化による効果

導波モードの損失が δ_1 の変化に非常に敏感であることからみて、これはまた誘電体膜の屈折率変化にも左右されるであろうことは容易に推測できる。図10は膜厚を一定にしたときの（$\delta_1 = 0.08\,\mu$）、屈折率 n_3 に対する基本波の損失の変化を示したものである。図10(a)の E_{01}^{x} モードでは、n_3 と共に損失は徐々に増加し、$n_3 = 1.9$ では $\delta_1 = 0$ の場合の損失より大きくなっているのが注目される。これは n_3 の増加につれて、電気光学結晶と金属とがなじみやすくなり、金属との界面における導波モードの電磁界集中度が増すためと考えられる。このことから、誘電体膜の屈折率の増加は、これに隣接する異種媒質同志の"屈折率整合"を助長する効果があると解釈して良い。

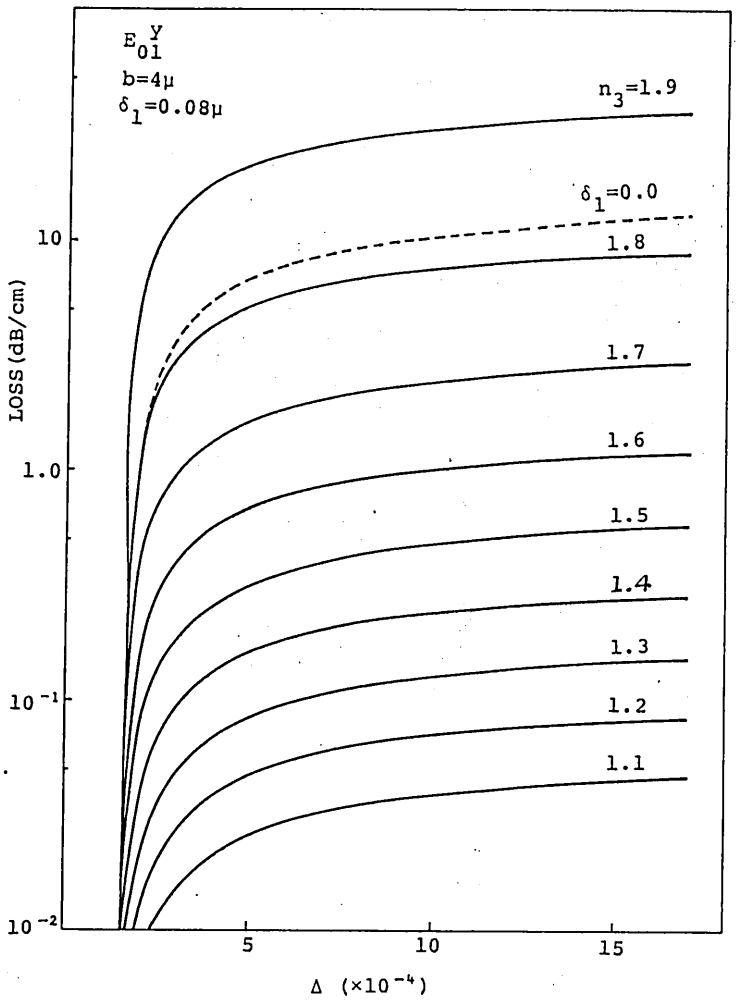
図9と図10を比較すると、δ_1 の増加と n_3 の減少は共に損失に対して同様の効果を及ぼすことがわかる。n_3 の効果を δ_1 に換算するとどの程度になるのかは興味ある問題であるが、これにはさらに詳細な解析とデータが必要である。

図10(b)の E_{01}^{x} モードでは、$n_3 = 1.9$ のときの損失でさえも、$\delta_1 = 0$ の場合のそれと比較してかなり小さい。これは E_{01}^{x} モードがいかに境界面の変化に鈍感であるかを示すものである。

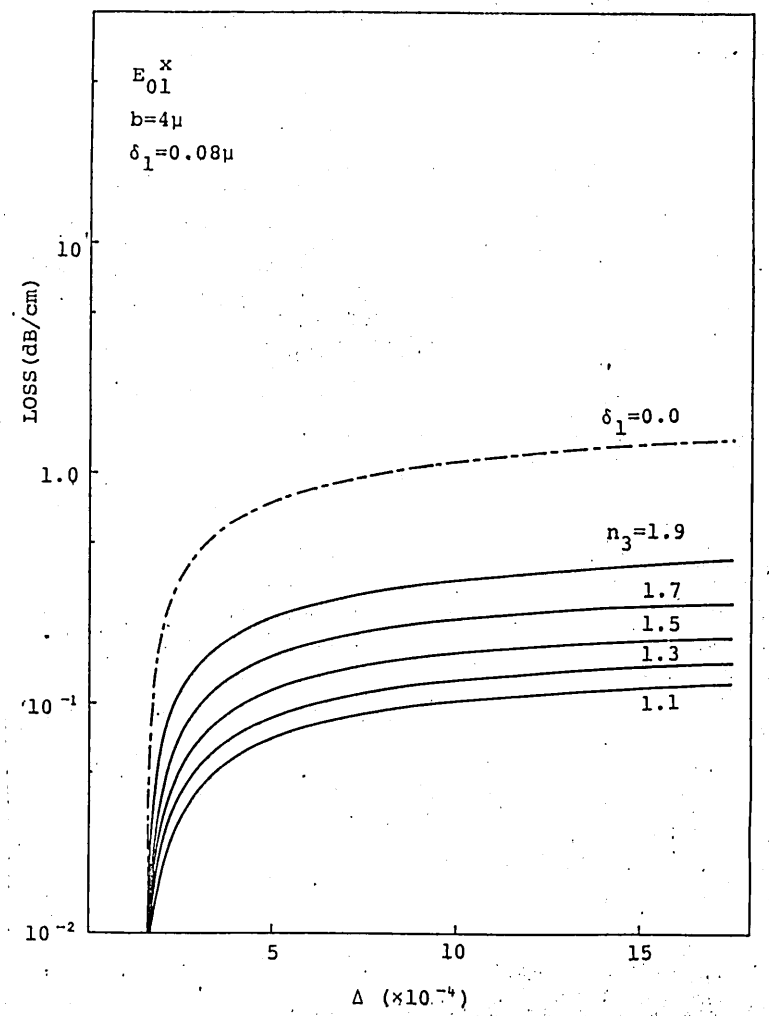
7. むすび

以上のように金属装荷光導波路の特性、とくに導波モードの損失を中心として議論してきたが、これまでに得られた結果は次のとおりである。

まず、金属を装荷した場合の光導波路の基本的特性について、近似解析



(a) E_{oi}^{y} モード



(b) E_{oi}^{x} モード

図 10　誘電体膜の効果（誘電率の変化）

により検討し、さらに、$LiNbO_3$ 単結晶、金属としてのアルミニウム光源は He-Ne レーザ（$\lambda = 0.6328\,\mu$）を想定して数値計算を行ったが、この結果を要約すると

(1) 導波モードの損失の評価式(28), (29)は"well-guided mode"に対して有効である。

(2) 光波の減衰定数は各種金属の誘電体的性質によって異なるのはもちろんであるが、一般に、モード次数および波長の2乗に比例し、線路幅の3乗に逆比例する。

(3) E_{0g}^{y} モードは境界条件の変化に敏感であり、その損失は E_{0g}^{z} モードより大である。

(4) 各モードの損失はカットオフに近づくにつれて急激に減少し、このためにカットオフのごく近くで、隣接する高次モードの損失の方が小さくなることがある。

(5) E_{0g}^{y} モードの界分布では金属との境界面で必ず位相反転が生ずる。また、E_{0g}^{z} のモードパターンは通常の誘電体板線路のものと酷似している。

(6) 金属に対する導波モードの電磁界浸透率は非常に小さく、その伝搬特性は金属の膜厚（数千Å以上）に依存しない。

さらに、金属を装荷したことによって生ずる導波モードの損失を軽減するものとして、導波路と金属の間に異種誘電体膜を挿入する方法を考え、これについて検討した結果

(7) 線路幅に対して十分薄い誘電体膜を挿入することによって極めて効果的に損失を軽減できることが明らかになった。アルミニウムを装荷した幅4μの光線路のとき（$\Delta = 10^{-3}$）、わずか0.08μの厚さの SiO_2 膜（$n_3 = 1.5$）を挿入することによって、E_{0g}^{y} モードの損失を10.6 dB/cmから0.48 dB/cmに減少させることができる。

(8) この誘電体の膜厚を一定にして、屈折率 n_3 を変えても導波モードの損失を制御できる。

なお、各種金属に対する損失の評価、および表面波モードの伝搬特性については、現在検討中である。

謝辞：本研究にあたり有益な御助言を戴いた当研究室西原助教授、論文作成にあたり御協力下さった佐藤嬢に深謝の意を表する。
本研究の数値計算には阪大大型計算機を使用した。

参考文献

1) I. P. Kaminow and J.R. carruthers: APL, 22, 7, P.326 (1973)
2) 野田他：第21回応物講演会予稿集 P.26 (1973)
3) S. Miyazawa: APL, 23, 4, P.198 (1973)
4) R. V. Schmidt and I.P. Kaminow: APL, 25, 8, P.458 (1974)
5) J. Noda et al: APL, 25, 5, P.308 (1974)
6) 増田他：昭和50年度電子通信学会全国大会 予稿 C-905
7) 安東他：昭和50年度電子通信学会全国大会 予稿 C-906
8) 高野、浜崎：信学論(C), 56-C, 4, P.214 (1972)
9) E.A.J. Macratili: BSTJ, 48, 9, P.2071 (1969)
10) 飯田他「物理定数表」朝倉書店 P.118
11) 長谷川 他「レーザハンドブック」ch. 9, 朝倉書店 P.521

輻射科学研究会資料

回転運動を行う電子プラズマ円柱に沿う空間電荷波の伝搬

塩沢俊之
徳田健
(大阪大学・工学部)
青海恵之
(現在電々公社 茨城通研)

1975年2月7日

1. まえがき

空間電荷波の理論は電子ビーム理論の基礎をなすものであり，工学的にはクライストロン，進行波管等のマイクロ波電子管の分野で重要な役割を果している．１９３９年，Hahn[1]およびRamo[2]によって，電子ビーム，すなわち軸方向にドリフトしている電子プラズマ円柱に沿って空間電荷波が伝搬することが明らかにされた．また，TrivelpieceとGould[3]は，静止している中性のプラズマ円柱に沿っても空間電荷波の伝搬が可能であることを示した．さらに，RigrodおよびLewis は[4],[5]軸方向に一定の速度でドリフトしながら，Larmor 周波数に等しい回転速度で回転している電子プラズマ円柱，すなわちBrillouin 流に沿う空間電荷波の伝搬について準静的近似を用いて考察し，電子プラズマの誘電率をεとすると，$\varepsilon<-1$ の領域に空間電荷波のモードが存在することを示した．ところで，回転運動を行う媒質中では，一般に，軸方向の電界と磁界は互いに結合するが，Rigrod 等はこの結合を完全に無視している．しかしながら，電界と磁界の軸方向成分の結合係数はεに逆比例するので，$\varepsilon=0$の近傍では，これらの結合は無視できなくなる．本論文では，さきに著者等の一人によって定式化された回転運動を行う媒質中における電磁界方程式[6],[7]を用いて，Brillouin 流に沿う空間電荷波の伝搬について考察し，軸方向の電界と磁界の結合の効果を調べる．以下では，まず，波動方程式を厳密に解くことによって，空間電荷波の分散関係式および電磁界分布を求める．つぎに，準静的近似を用いて，分散関係式と電磁界分布の近似式を求める．最後に，空間電荷波の伝搬特性を数値的に詳しく検討し，$\varepsilon<-1$の領域のみならず，$\varepsilon=0$の近傍の$\varepsilon>0$の領域にも空間電荷波のモードが存在することを示す．

2. 基 礎 理 論

まず，以下での解析の準備として，Larmor 周波数に等しい回転速度で回転しながら，軸方向に一定の速度でドリフトしている電子プラズマ円柱内部の電磁界基礎方程式について述べる．いま，電子のみから構成される均質な電子プラズマ円柱を考え，この電子プラズマには軸方向に一様な静磁界 $\mathbf{B}_0$ が印加されているものとする．ただし，電子の速度は光速度に比べて十分小さいものとし，また観測者は慣性系に静止しているものとする．さて，電子プラズマのプラズマ周波数およびサイクロトロン周波数を，それぞれ，ω_p および ω_c とすると，

$$\omega_c^2 = 2\omega_p^2 \tag{1}$$

なる条件が満たされるとき，電子プラズマ円柱は，それ自身の作る静電界と外部静磁界との作用によって，Larmor 周波数に等しい回転速度 $\Omega = \omega_c/2$ で全体として中心軸のまわりに回転する．以下では，電子プラズマは角速度 Ω で z 軸のまわりに回転しながら，非相対論的な一定の速度 $\mathbf{v}_z = \mathbf{i}_z v_z$ で z 方向にドリフトしているものとする．すなわち，小信号電磁界による摂動がない場合の電子の速度 $\mathbf{v}$ は次式で与えられるものとする．

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_z + \mathbf{v}_\varphi = \mathbf{i}_z v_z + \Omega \times \mathbf{r} \tag{2}$$

ただし，

$$\Omega = \mathbf{i}_z \frac{\omega_c}{2} \tag{3}$$

であり，$\mathbf{r}$ は動径ベクトルを表わす．

さて，回転運動を行う媒質中における電磁界方程式については，すでに文献(6)および(7)において詳しく考察されている．いま，小信号近似が成り

立つものとすると，まず，式(2)で与えられる速度vで運動する電子プラズマ中を伝搬する小信号電磁界は，Maxwellの方程式[7]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{4}$$

を満足する．また，電磁界の任意の成分が$f(r)\,exp\{j(\omega t - n\varphi - k_z z)\}$なる形で与えられる円筒波の伝搬を考えると，電磁界ベクトルE，B，Dおよびの間の構成関係式は次式で与えられる[7]

$$\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E} = \mu_0\{\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}\}$$

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\} \tag{5}$$

ただし，ε_0，μ_0およびcは，それぞれ，真空の誘電率，透磁率および光速度を表わす．また，εは電子プラズマの任意の一点が瞬間的に静止している座標系，すなわち局所慣性系における電子プラズマの誘電率を表わし，次式で与えられる．

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega'^2}$$

$$\omega' = \omega - n\Omega - k_z v_z \tag{6}$$

Brillouin流では，外部静磁界の効果がCoriolisの力による効果によってちょうど打ち消されて，誘電率は等方性を呈する．式(4)および(5)からわかるように，回転運動を行う電子プラズマは，小信号電磁界に関する限り，

運動する分散性誘電体に等価である．いま，$v/c \ll 1$とすると，式(5)の構成関係式は，つぎのように書き換えられる．

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2}(\varepsilon - 1)\mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} + \frac{1}{c^2}(\varepsilon - 1)\mathbf{v} \times \mathbf{H} \qquad (7)$$

以下では，式(4)および(7)を用いて，回転運動を行う電子プラズマ円柱に沿って伝搬する空間電荷波について考察する．

3. 波動方程式による解

本節では，波動方程式を厳密に解くことによって，回転運動を行う電子プラズマ円柱に沿って伝搬する空間電荷波の電磁界分布ならびに分散関係式を求める．いま，図1に示すように，回転運動を行う電子プラズマ円柱(半径

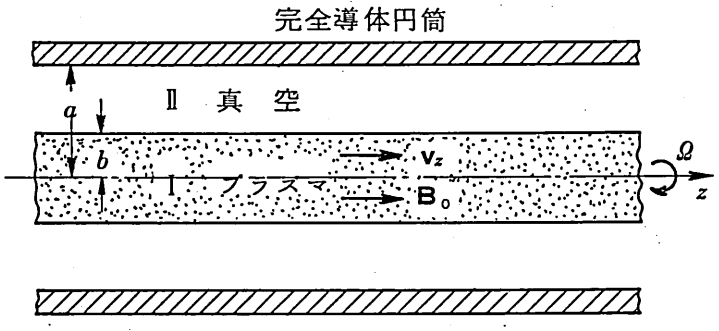


図1　完全導体円筒内で回転運動を行う電子プラズマ円柱

b ）は完全導体円筒（半径 a ）によって取り囲まれており，$b < r < a$ の領域は真空とする．まず，電子プラズマ内部の電磁界の一般式を求めるために，式（4）および（7）から，電磁界の横方向成分 $\mathbf{E}_t$ および $\mathbf{H}_t$ をそれらの z 方向成分 E_z および H_z によって表わすと，つぎのようになる[8]

$$\mathbf{E}_t = T_1\left(\mathbf{i}_z \times \nabla_t H_z + j\omega \frac{\varepsilon - 1}{c^2} H_z \mathbf{v}_\varphi \times \mathbf{i}_z\right)$$

$$+ T_3\left(-\nabla_t E_z + j\omega \frac{\varepsilon - 1}{c^2} E_z \mathbf{v}_\varphi\right)$$

$$\mathbf{H}_t = T_2\left(\mathbf{i}_z \times \nabla_t E_z + j\omega \frac{\varepsilon - 1}{c^2} E_z \mathbf{v}_\varphi \times \mathbf{i}_z\right)$$

$$+ T_3\left(-\nabla_t H_z + j\omega \frac{\varepsilon - 1}{c^2} H_z \mathbf{v}_\varphi\right) \qquad (8)$$

ただし，

$$T_1 = -j\omega\mu_0 / [k_0^2(q_z^2 - \varepsilon)]$$

$$T_2 = j\omega\varepsilon_0\varepsilon / [k_0^2(q_z^2 - \varepsilon)]$$

$$T_3 = -j q_z / [k_0(q_z^2 - \varepsilon)]$$

$$q_z = k_z / k_0 + \beta_z(\varepsilon - 1), \quad k_0 = \omega / c, \quad \beta_z = v_z / c$$

$$\nabla_t = \nabla - \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (9)$$

一方，E_z および H_z は，つぎのような結合波動方程式から決定される[8]

$$\nabla_t^2 E_z + k_0^2(p E_z + j g H_z) = 0$$

$$\nabla_t^2 H_z + k_0^2(p H_z + j h E_z) = 0 \qquad (10)$$

ただし，

$$p = -q_z^2 + \varepsilon - 2n\frac{\Omega}{\omega}(\varepsilon - 1)$$

$$g = -\eta_0 \frac{2\Omega}{\omega} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q_z$$

$$h = \frac{1}{\eta_0} \frac{2\Omega}{\omega} (\varepsilon - 1) q_z$$

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \tag{11}$$

式(10)の波動方程式の解は，つぎのように表わされる[8]

$$E_z = \left[A_n J_n(k_1 r) + B_n J_n(k_2 r) \right] f_n$$

$$H_z = \left[A_n \xi_1 J_n(k_1 r) + B_n \xi_2 J_n(k_2 r) \right] f_n \tag{12}$$

ただし，

$$k_i = k_0 \zeta_i \qquad (i = 1, 2)$$

$$\zeta_i^2 = p + \delta_i \frac{2\Omega}{\omega} \frac{\varepsilon - 1}{\sqrt{\varepsilon}} q_z \qquad (i = 1, 2)$$

$$\xi_i = \delta_i j \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\eta_0} \qquad (i = 1, 2)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & (i = 1) \\ -1 & (i = 2) \end{cases}$$

$$f_n = exp\left[j(\omega t - n\varphi - k_z z) \right] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \tag{13}$$

また，A_n および B_n は未定定数であり，J_n は n 次Bessel関数を表わす．

式(8)および(12)から，電子プラズマ中における電界および磁界の φ 方向成分 E_φ および H_φ は，つぎのようになる．

$$E_\varphi = \left[A_n M_n(k_1 r) + B_n N_n(k_2 r) \right] f_n$$

$$H_\varphi = \left[A_n \xi_1 M_n(k_1 r) + B_n \xi_2 N_n(k_2 r) \right] f_n \tag{14}$$

ここで，

$$M_n(k_1 r) = \left[q_z\, q_r\, J_n(k_1 r) + \zeta_1 \sqrt{\varepsilon}\, J_n'(k_1 r) \right] / (q_z^2 - \varepsilon)$$

$$N_n(k_2 r) = \left[q_z\, q_r\, J_n(k_2 r) - \zeta_2 \sqrt{\varepsilon}\, J_n'(k_2 r) \right] / (q_z^2 - \varepsilon)$$

$$q_r = \frac{n}{k_0 r} + k_0 r \frac{\Omega}{\omega}(\varepsilon - 1) \tag{15}$$

ただし，$J_n'(k_1 r)$ および $J_n'(k_2 r)$ はBessel 関数の $k_1 r$ および $k_2 r$ による一階微分を表わす．

つぎに，領域Ⅱ（$b < r < a$）における電界および磁界の z 方向成分および φ 方向成分は，Maxwell の方程式から，それぞれ，つぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} E_z &= \left[C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr) \right] f_n \\ H_z &= \left[E_n I_n(kr) + F_n K_n(kr) \right] f_n \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{k_z n}{k^2 r} \left[C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr) \right] f_n \\ &\quad - j \eta_0 \frac{k_0}{k} \left[E_n I_n'(kr) + F_n K_n'(kr) \right] f_n \\ H_\varphi &= \frac{k_z n}{k^2 r} \left[E_n I_n(kr) + F_n K_n(kr) \right] f_n \\ &\quad + j \frac{1}{\eta_0} \frac{k_0}{k} \left[C_n I_n'(kr) + D_n K_n'(kr) \right] f_n \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ただし

$$k^2 = k_z^2 - k_0^2 \tag{18}$$

C_n, D_n, E_n および F_n は未定定数であり，I_n および K_n は第一種および第二種変形Bessel関数を表わす．また，I_n' および K_n' は，それぞれ，I_n および K_n の一階微分を表わす．

さて，図1に示すような回転運動を行う電子プラズマ円柱に沿って伝搬する空間電荷波の分散関係式は，$r = a$ および $r = b$ における境界条件から決定される．$r = a$ における境界条件は電界の接線成分が零になることであり，$r = b$ における境界条件は電界および磁界の接線成分が連続となることである[9]．すなわち，これらの条件は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} E_z^{\mathrm{I}} &= E_z^{\mathrm{II}} \ , \quad H_z^{\mathrm{I}} = H_z^{\mathrm{II}} \\ E_\varphi^{\mathrm{I}} &= E_\varphi^{\mathrm{II}} \ , \quad H_\varphi^{\mathrm{I}} = H_\varphi^{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\} \quad (r = b)$$

$$E_z^{\mathrm{II}} = E_\varphi^{\mathrm{II}} = 0 \qquad (r = a) \tag{19}$$

ただし，添字ⅠおよびⅡは，それぞれ，領域ⅠおよびⅡの電磁界成分を表わす．

式(12)，(14)，(16)および(17)に式(19)の境界条件を適用すると，次式が得られる．

$$A_n J_n(k_1 b) + B_n J_n(k_2 b) = C_n I_n(kb) + D_n K_n(kb)$$

$$A_n \xi_1 J_n(k_1 b) + B_n \xi_2 J_n(k_2 b) = E_n I_n(kb) + F_n K_n(kb)$$

$$A_n M_n(k_1 b) + B_n N_n(k_2 b) = \frac{k_z n}{k^2 b}\left[C_n I_n(kb) + D_n K_n(kb)\right]$$

$$- j\eta_0 \frac{k_0}{k}\left[E_n I_n'(kb) + F_n K_n'(kb)\right]$$

$$A_n \xi_1 M_n(k_1 b) + B_n \xi_2 N_n(k_2 b) = \frac{k_z n}{k^2 b}\left[E_n I_n(kb) + F_n K_n(kb)\right]$$

$$+ j\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0}{k}\left[C_n I_n'(kb) + D_n K_n'(kb)\right]$$

$$C_n I_n(ka) + D_n K_n(ka) = 0$$

$$E_n I_n'(ka) + F_n K_n'(ka) = 0 \qquad (20)$$

式(20)は，A_n，B_n，C_n，D_n，E_nおよびF_nに関する六元連立一次方程式を表わす．これらの方程式が恒等的に零でない解をもつためには，A_n，B_n…等の係数によって作られる行列式が零にならなければならない．これから，つぎのような回転電子プラズマ円柱に沿って伝搬する空間電荷波に対する分散関係式が得られる．

$$\begin{vmatrix}
J_n(k_1b), & J_n(k_2b), & -I_n(kb), & -K_n(kb), & 0, & 0 \\
\xi_1 J_n(k_1b), & \xi_2 J_n(k_2b), & 0, & 0, & -I_n(kb), & -K_n(kb) \\
M_n(k_1b), & N_n(k_2b), & -\frac{k_z n}{k^2 b} I_n(kb), & -\frac{k_z n}{k^2 b} K_n(kb), & j\eta_0 \frac{k_0}{k} I_n'(kb), & j\eta_0 \frac{k_0}{k} K_n'(kb) \\
\xi_1 M_n(k_1b), & \xi_2 N_n(k_2b), & -j\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0}{k} I_n'(kb), & -j\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0}{k} K_n'(kb), & -\frac{k_z n}{k^2 b} I_n(kb), & -\frac{k_z n}{k^2 b} K_n(kb) \\
0, & 0, & I_n(ka), & K_n(ka), & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & I_n'(ka), & K_n'(ka)
\end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

特別の場合として，$a \to \infty$の場合には，式(21)の行列式は，$I_n(ka)$および$I_n'(ka)$を含む行および列を除いた小行列式によって置き換えられる．また，$a = b$の場合の分散関係式は，式(19)の第二式から得られ，次式で与えられる．

$$k_1 J_n'(k_1 b) J_n(k_2 b) + k_2 J_n'(k_2 b) J_n(k_1 b) = 0 \qquad (22)$$

ここで注意すべきことは，式(13)および(11)からわかるように，$k_i (i=1,2)$

は，$\varepsilon > 0$ の場合には実数あるいは純虚数になり，$\varepsilon < 0$ の場合には複素数になることである．したがって，k_i が純虚数あるいは複素数になる場合には，式(21)および(22)に現われる $J_n(k_i r)$ は第一種変形Bessel 関数あるいは複素Bessel関数によって置き換えるものとする．式(21)および(22)から分散関係が求まると，式(20)から A_n，B_n … の比がきまり，空間電荷波の電磁界分布を求めることができる．

4. 準静的近似による解

空間電荷波の伝搬速度が光速度に比べて十分小さい場合には，準静的近似を用いることができる．すなわち，$k_z \gg k_0$ なる条件が成り立つ場合には，式(4)のMaxwellの方程式は次式によって近似することができる．

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{23}$$

式(23)の第一式および第三式から，$\mathbf{E}$ および $\mathbf{H}$ は，それぞれポテンシャル Φ_e および Φ_m によって表わすことができる．

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi_e$$
$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m \tag{24}$$

ここで，ポテンシャル Φ_e および Φ_m をつぎのように仮定する．

$$\Phi_e = \phi_e(r) \exp\left[j(\omega t - n\varphi - k_z z) \right]$$
$$\Phi_m = \phi_m(r) \exp\left[j(\omega t - n\varphi - k_z z) \right] \tag{25}$$

式(7)および式(23)の第二式および第四式に式(24)および(25)を用いると，つぎのようなΦ_eおよびΦ_mに関する結合方程式が得られる．

$$\nabla_t^2 \Phi_e + k_0^2 (s \Phi_e + j u \Phi_m) = 0$$
$$\nabla_t^2 \Phi_m + k_0^2 (s \Phi_m + j w \Phi_e) = 0 \tag{26}$$

ただし，

$$s = - \frac{k_z^2}{k_0^2}$$

$$u = - \eta_0 \frac{k_z}{k_0} \frac{2\Omega}{\omega} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

$$w = \frac{1}{\eta_0} \frac{k_z}{k_0} \frac{2\Omega}{\omega} (\varepsilon - 1) \tag{27}$$

式(26)の結合方程式の解は，つぎのように表わされる．

$$\Phi_e = \left[A_n J_n (k_{10} r) + B_n J_n (k_{20} r) \right] f_n$$
$$\Phi_m = \left[A_n \xi_1 J_n (k_{10} r) + B_n \xi_2 J_n (k_{20} r) \right] f_n \tag{28}$$

ただし，

$$k_{i0} = k_0 \zeta_{i0} \qquad (i = 1, 2)$$
$$\zeta_{i0}^2 = - \frac{k_z^2}{k_0^2} + 2 \delta_i \frac{k_z}{k_0} \frac{\Omega}{\omega} \frac{\varepsilon - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{29}$$

ここで，後の解析のために，B_rおよびD_rをΦ_eおよびΦ_mによって表わすと，つぎのようになる．

$$B_r = - \mu_0 \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} - j \frac{\varepsilon - 1}{c^2} \left(k_z \Omega r - \frac{n}{r} v_z \right) \Phi_e$$

$$D_r = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \Phi_e}{\partial r} + j \frac{\varepsilon - 1}{c^2} \left(k_z \Omega r - \frac{n}{r} v_z \right) \Phi_m \tag{30}$$

一方，領域Ⅱ（$b < r < a$）における電磁界は，つぎのようなポテンシャルから求められる．

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \left[C_n I_n(k_z r) + D_n K_n(k_z r) \right] f_n \\ \Phi_m &= \left[E_n I_n(k_z r) + F_n K_n(k_z r) \right] f_n \end{aligned} \tag{31}$$

さて，準静的近似を用いる場合の境界条件は，式(19)の条件とは異なり，$r = b$ において E_z, H_z（あるいは E_φ, H_φ）および D_r, B_r が連続となること，ならびに $r = a$ において E_z（あるいは E_φ）$= 0$, $B_r = 0$ となることである．すなわち，

$$\begin{aligned} &E_z^{\mathrm{I}} = E_z^{\mathrm{II}} \ , \quad D_r^{\mathrm{I}} = D_r^{\mathrm{II}} \\ &H_z^{\mathrm{I}} = H_z^{\mathrm{II}} \ , \quad B_r^{\mathrm{I}} = B_r^{\mathrm{II}} \qquad (r = b) \\ &E_z^{\mathrm{II}} = 0 \ , \quad B_r^{\mathrm{II}} = 0 \qquad (r = a) \end{aligned} \tag{32}$$

準静的近似を用いる場合には，E_z および H_z に対する条件と E_φ および H_φ に対する条件が独立でなくなるために，式(32)のように B_r および D_r に対する条件を用いなければならない．準静的近似のもとにおける分散関係式は式(32)から得られ，つぎのように表わされる．

$$\begin{vmatrix} J_n(k_{1_0}b), & J_n(k_{2_0}b), & -I_n(k_z b), & -K_n(k_z b), & 0, & 0 \\ \xi_1 J_n(k_{1_0}b), & \xi_2 J_n(k_{2_0}b), & 0, & 0, & -I_n(k_z b), & -K_n(k_z b) \\ -\varepsilon U_1, & -\varepsilon U_2, & I_n'(k_z b), & K_n'(k_z b), & 0, & 0 \\ -\xi_1 U_1, & -\xi_2 U_2, & 0, & 0, & I_n'(k_z b), & K_n'(k_z b) \\ 0, & 0, & I_n(k_z a), & K_n(k_z a), & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_n'(k_z a), & K_n'(k_z a) \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

ただし，

$$U_i = \delta_i \, l \, J_n(k_{i0}b) + \frac{k_{i0}}{k_z} J_n'(k_{i0}b) \qquad (i = 1, 2)$$

$$l = \frac{\varepsilon - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\Omega b}{c} - \frac{n \beta_z}{k_z b} \right) \tag{34}$$

電子プラズマの速度および空間電荷波の伝搬速度が光速度に比べて十分小さい場合，すなわち $v/c \ll 1$ ならびに $k_0 \ll k_z$ なる条件が成り立つ場合には，準静的近似を用いて得られた結果が，波動方程式から得られた結果に一致することは容易に確かめられる．

5. 検　　討

つぎに，回転運動を行う電子プラズマ円柱に沿って伝搬する空間電荷波の

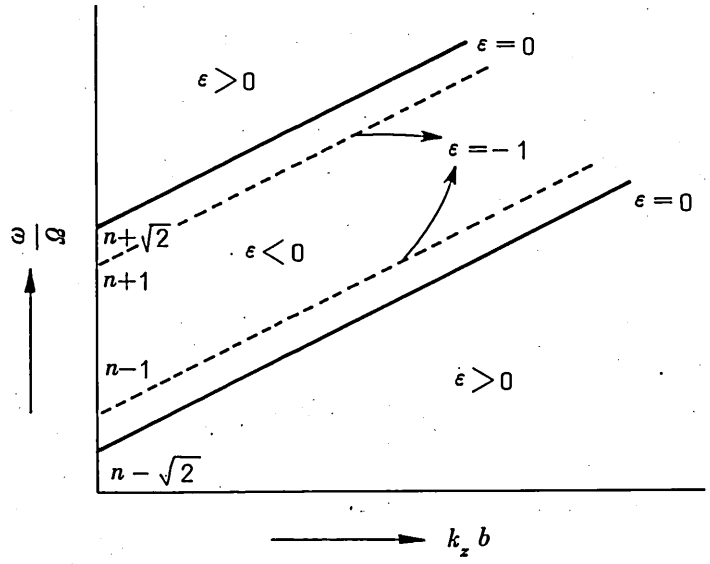


図 2　$\omega - k_z$ 平面上における空間電荷波の存在領域

分散関係式ならびに電磁界分布について数値例を上げて検討する．まず，分散関係式の一般的性質を知るために，Ω，b，v_z 等の値が与えられたものとして，ω と k_z の関係を調べよう．いま，図2に示すように，ω/Ω を縦軸に，$k_z b$ を横軸に選ぶと，$\omega - k_z$ 平面は二本の直線によって $\varepsilon > 0$ の領域と $\varepsilon < 0$ の領域に分けられる．式(6)から，$\varepsilon = 0$ に対応する直線は次式で与えられることがわかる．

$$\frac{\omega}{\Omega} - \alpha k_z b = n \pm \sqrt{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \tag{35}$$

ただし，

$$\alpha = \frac{\beta_z}{(\Omega b / c)} \tag{36}$$

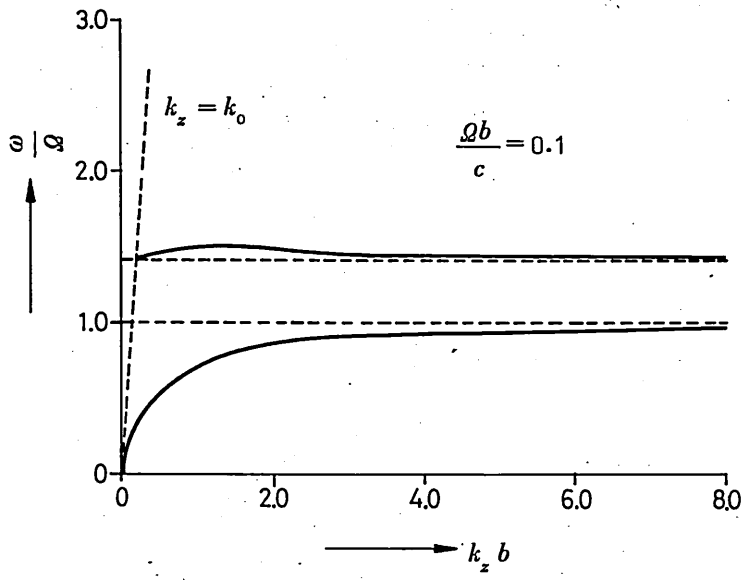
数値計算結果の検討から，各 n の値に対して，$\varepsilon < 0$ の領域および $\varepsilon > 0$ の領域に，それぞれ一対の空間電荷波のモードが存在することがわかった．$\varepsilon < 0$ の領域のモードの一般的性質としては，これらのモードの半径方向の波数 k_i ($i = 1, 2$) はともに複素数であり，たがいに複素共やくをなすこと，また $k_z b$ の値が大きくなると，これらのモードの分散曲線は，$\varepsilon = -1$ に対応する直線，すなわち

$$\frac{\omega}{\Omega} - \alpha k_z b = n \pm 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{37}$$

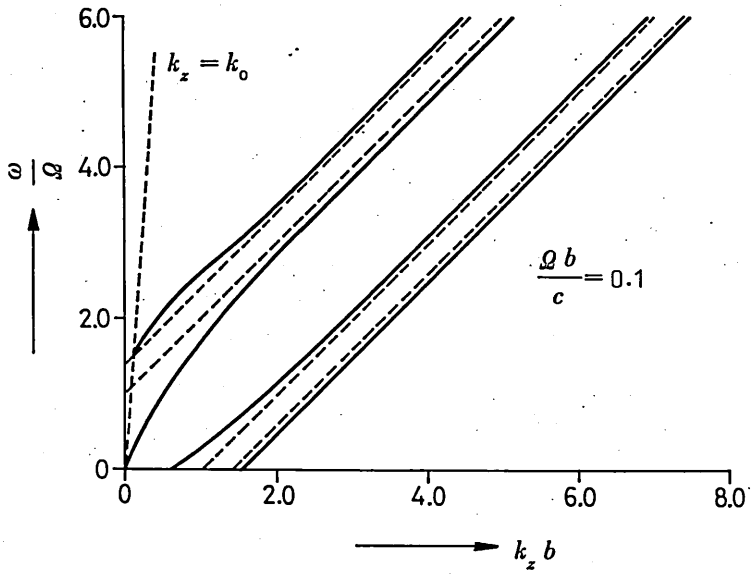
なる直線に漸近すること等があげられる．一方，$\varepsilon > 0$ の領域のモードでは，k_i ($i = 1, 2$) の一方は実数，他方は純虚数となり，これらのモードの分散曲線は $\varepsilon = 0$ の直線に沿う曲線となる．$\varepsilon > 0$ の領域のモードは回転のない，一方向にドリフトする無限に広がった電子プラズマ中に存在する電子プラズマ波が変形されたものであると考えられる．一方向にドリフトする回転のな

い無限プラズス中では，分散関係が $\varepsilon = 0$ によってきまる縦振動（電子プラズマ波）が伝搬することはすでによく知られている[10]が，プラズマが回転運動を行う場合には，$\varepsilon = 0$ によってきまる縦振動のモードは存在しなくなる．なぜなら，プラズマが一定の角速度で回転する場合には，プラズマの周辺速度は特殊相対論によって $\Omega r < c$ なる制限を受け，したがってプラズマは無限に広がることができないからである．その結果として，回転運動を行う電子プラズマ中では，$\varepsilon = 0$ のモードが修正を受けて，$\varepsilon = 0$ に接近した $\varepsilon > 0$ の領域に伝搬可能な空間電荷波のモードが存在するようになるものと考えられる．式 (10) および (26) からわかるように，回転運動を行う電子プラズマ中では，軸方向の電界と磁界はたがいに結合する．そして，式 (11) および (27) に与えられている結合係数 g および u は ε に逆比例する．空間電荷波では，一般に，$|\mathbf{E}| \gg \eta_0 |\mathbf{H}|$ なる関係が成り立つので，$k_z \gg k_0$ なる関係が成立し，$|\varepsilon|$ の値が余り小さくない場合には，式 (10) および (26) において，それぞれ，$|pE_z| \gg |gH_z|$ および $|s\Phi_e| \gg |u\Phi_m|$ となり，E_z と H_z との結合は無視することができる．Rigrod 等[4],[5] は Brillouin 流の $\varepsilon < 0$ に相当する領域に空間電荷波のモードが存在することを示したが，彼等が取り扱ったのは上のような場合にあたる．一方，$\varepsilon \simeq 0$ の場合には，結合係数 g および u は大きくなり，E_z と H_z との結合は無視できなくなる．先に述べた $\varepsilon > 0$ の領域に存在する空間電荷波のモードは，このような E_z と H_z との結合によって生じたものである．

ここで，具体例として，$n = 0$ のモードに対する分散関係式の数値例を図3および図4に示す．図3および図4は，それぞれ，$a \to \infty$ および $a = b$ の場合の分散関係式を示しており，これらは式 (21) および (22) から計算したものである．まず，$a \to \infty$ の場合には，位相速度が光速度に等しくなる点，すなわち $k_z = k_0$ となる点において明確なカットオフが現われる．したがって，この場合には，分散曲線上のすべての点において空間電荷波はその位相速度

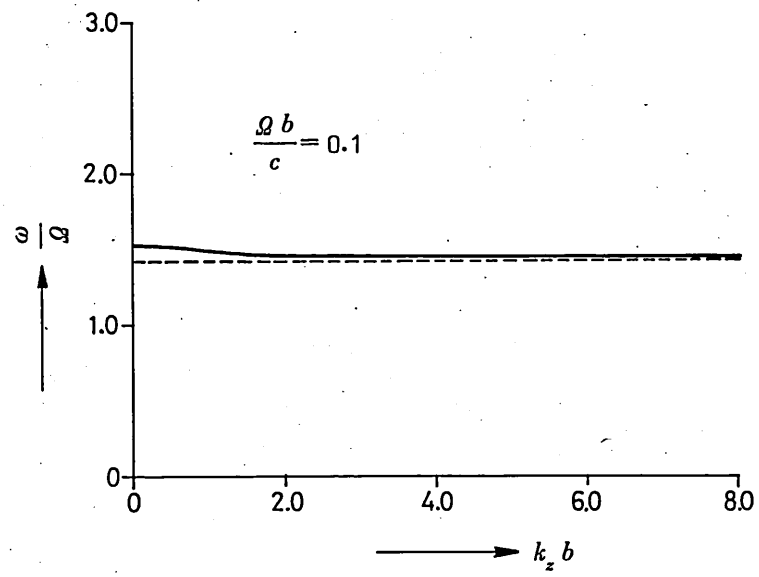


(a)　$\beta_z = 0$ の場合

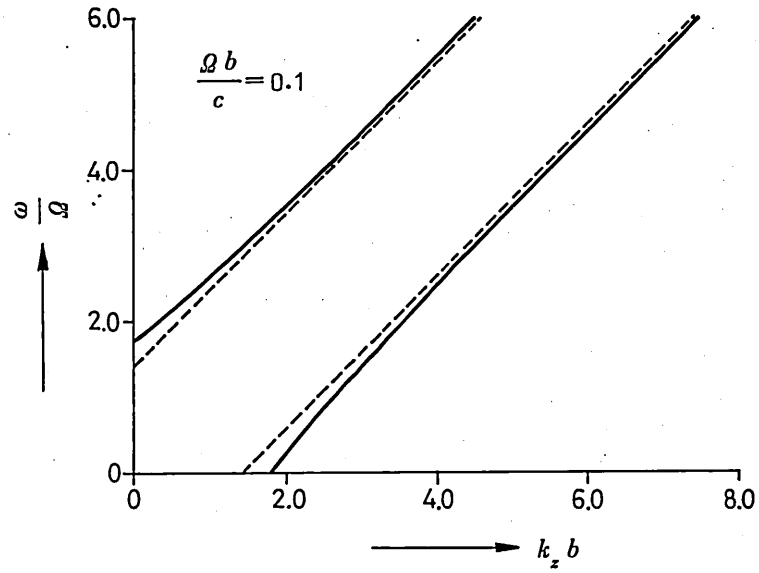


(b)　$\beta_z = 0.1$ の場合

図 3　$n = 0$ のモードの分散関係（$a = \infty$）



(a)　$\beta_z = 0$ の場合

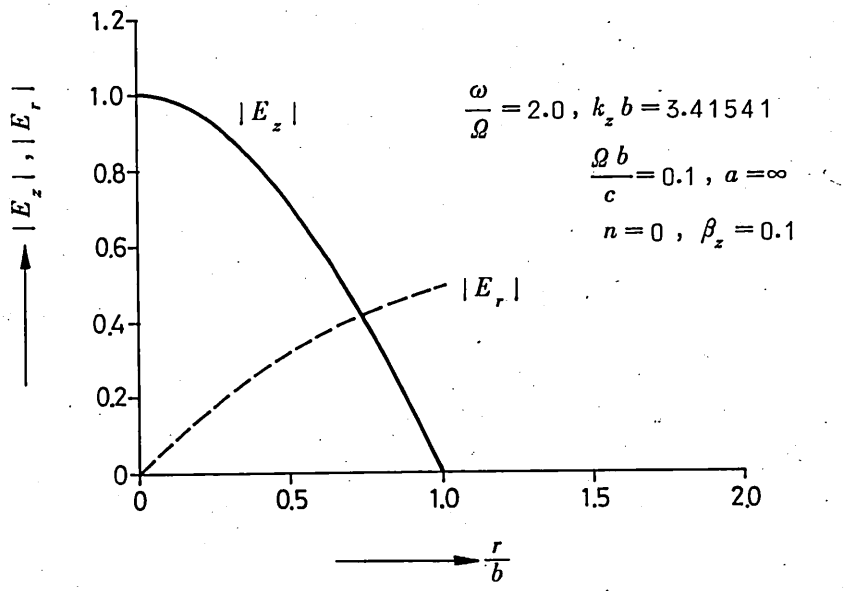


(b)　$\beta_z = 0.1$ の場合

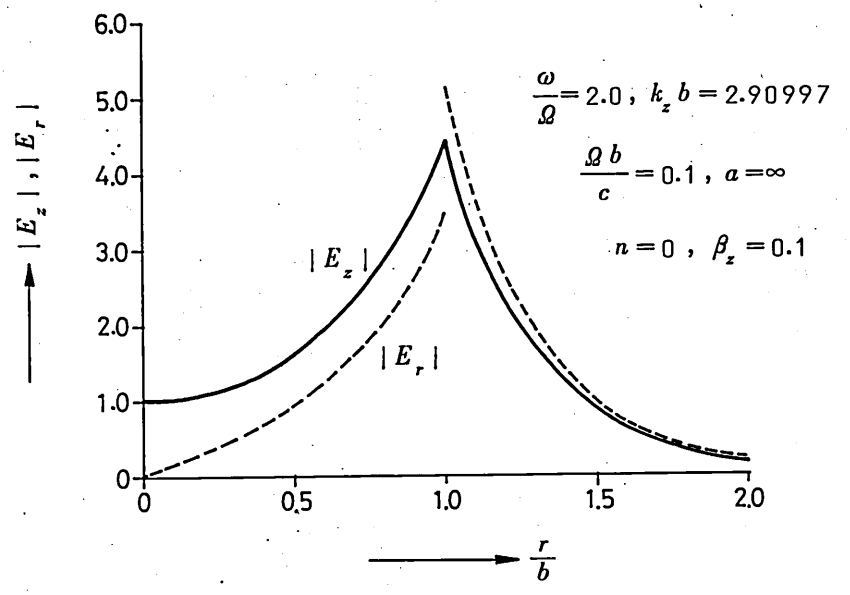
図 4　$n = 0$ のモードの分散関係（$a = b$）

が光速度より小さい遅波となる．以上のことは，$n \neq 0$ のモードについても成り立つ．また，$n = 0$ の場合には，$\varepsilon < 0$ の領域における分散曲線は，Rigrod 等の求めた分散関係式から得られる曲線とほぼ一致するが，$n \neq 0$ の一般の場合には，k_z が k_0 に近づくに従ってこれらの曲線の一致は悪くなる．一方，$a = b$ の場合には，$\varepsilon < 0$ の領域には空間電荷波のモードは存在しなくなる．また，$\varepsilon > 0$ の領域の分散曲線には，位相速度が光速度を越える速波の部分が存在することがわかる．さらに，図3および図4から，ω/Ω あるいは $k_z b$ が大きくなると，空間電荷波の群速度 $d\omega/dk_z$ は電子プラズマの軸方向速度 v_z に等しくなることがわかる．

つぎに，空間電荷波の電磁界分布について検討する．具体例として，図3(b)（$n = 0$，$a \to \infty$，$\beta_z = 0.1$）の場合について，$\varepsilon > 0$ および $\varepsilon < 0$ の領域における空間電荷波の電界分布を示すと，図5のようになる．図5の電界分布は，式(20)の関係を用いて式(12)および(16)から計算したものである．ただし，比較のために，$|E_r|$ および $|E_z|$ の値は $r = 0$ における $|E_z|$ の値によって規格化されている．図5では，E_z および E_r の分布のみを示したが，電界および磁界の他の成分はこれらに比べて十分小さくなるので省略した．図5からわかるように，E_z の分布は，$\varepsilon > 0$ のモードではプラズマ円柱の中央に集中し，$\varepsilon < 0$ のモードでは表面に集中している．一方，E_r の分布は，$\varepsilon > 0$ および $\varepsilon < 0$ のいずれの場合にも，プラズマ円柱の表面で大きくなり，また，E_r は境界面において不連続になっている．ここで注意すべきことは，$\varepsilon > 0$ のモードでは，プラズマ円柱外部の電界分布は内部の電界分布に比べて十分小さくなるということである．図5に示した電界分布は，ω/Ω および $k_z b$ の特別の値に対するものであるが，数値計算結果の検討から，一般の場合にも図5と同様の傾向が認められることがわかった．さて，図4において，$a = b$ の場合には $\varepsilon < 0$ の領域には空間電荷波のモードが存在しないことを示したが，このことは，図5の電界分布から理解することができる．すなわ



(a)　$\varepsilon > 0$ の場合



(b)　$\varepsilon < 0$ の場合

図 5　$n = 0$ のモードの電界分布（$a = \infty$）

ち，$a = b$ の場合には，境界条件により境界面において $E_z = 0$ となることが要求されるが，この条件は，図5からわかるように，$\varepsilon < 0$ のモードでは満足されない．したがって，$a = b$ の場合には，$\varepsilon < 0$ のモードは存在できなくなり，プラズマ円柱の中央で E_z の分布が大きくなる $\varepsilon > 0$ のモードのみが存在可能となる．この場合の $\varepsilon > 0$ のモードの電界分布も図5の場合と同じ傾向を示すことがわかる．

最後に，回転運動を行うプラズマ円柱に沿って伝搬する空間電荷波の運ぶエネルギーについて簡単に述べる．さて，一般に，回転運動を行う媒質中では，

$$\omega - n\Omega - k_z v_z = 0 \tag{38}$$

あるいは

$$\frac{\omega}{\Omega} - \alpha k_z b = n \tag{39}$$

なる直線を境にして正エネルギー波の領域と負エネルギー波の領域が現われる[11]（図6参照）．式(39)で与えられる直線上では，式(6)の ε は $-\infty$ となる．さて，図2において，各 n の値に対して，$\varepsilon > 0$ および $\varepsilon < 0$ の領域にそれぞれ一対の空間電荷波のモードが存在することを示したが，図6から，これらの一対のモードのうちの一方は正エネルギー波であり，他方は

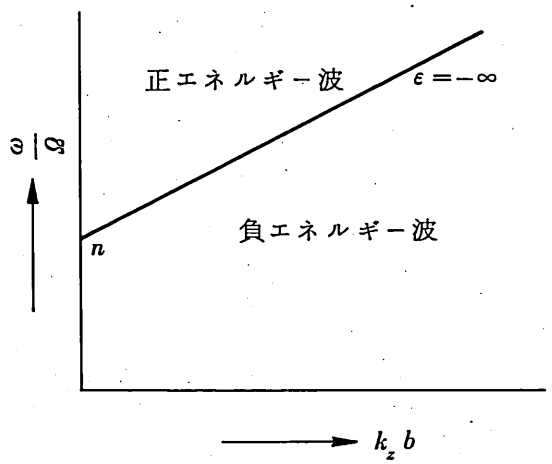


図6　正エネルギー波と負エネルギー波

負エネルギー波であることがわかる．すなわち，$\varepsilon > 0$ および $\varepsilon < 0$ のそれぞれの場合について，位相速度の大きい方の波が正エネルギー波であり，位相速度の小さい方の波が負エネルギー波であることがわかる．

6. むすび

本稿では，Larmor 周波数に等しい回転速度で中心軸のまわりに回転しながら，軸方向に非相対論的な一定の速度でドリフトしている電子プラズマ円柱，すなわちBrillouin流に沿う空間電荷波の伝搬について，電子プラズマを分散性の誘電体とみなす立場から，理論的に考察した．まず，波動方程式を厳密に解くことによって，回転運動を行う電子プラズマ円柱に沿って伝搬する空間電荷波の分散関係式ならびに電磁界分布を求めた．つぎに，準静的近似を用いて解析を行い，得られた結果は，空間電荷波の位相速度および電子プラズマの速度が光速度に比べて十分小さい場合には，前者の方法から得られた解に一致することを示した．最後に，数値例を用いて，空間電荷波の特性について詳しく検討し，従来知られていなかった新しい空間電荷波のモードが存在することを明らかにした．

なお，本研究は，昭和４９年度文部省科学研究費補助金の援助によって行われたものである．

謝　辞　終りに，日頃ご指導頂く大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに数値計算にご協力頂いた大阪大学工学部学生宗　泰一氏に深謝する．

文　　献

(1) W. C. Hahn : "Small signal theory of velocity-modulated electron beams," Gen. Elec. Rev., **42**, p. 258 (June 1939).

(2) S. Ramo : "Space charge and field waves in an electron beam," Phys. Rev., **56**, p. 276 (Aug. 1939).

(3) A. W. Trivelpiece and R. W. Gould : "Space charge waves in cylindrical plasma columns," J. appl. Phys., **30**, p. 1784 (Nov. 1959).

(4) W. W. Rigrod and J. A. Lewis : "Wave propagation along a magnetically-focused cylindrical electron beam," Bell Syst. tech. J., **33**, p. 399 (Mar. 1954).

(5) W. W. Rigrod : "Space-charge wave harmonics and noise propagation in rotating electron beams," Bell Syst. tech. J., **38**, p. 119 (Jan. 1959).

(6) T. Shiozawa : "Phenomenological and electron-theoretical study of the electrodynamics of rotating systems," Proc. IEEE, **61**, p. 1694 (Dec. 1973).

(7) T. Shiozawa : "Constitutive relations for a rotating electron plasma," Proc. IEEE (Letters), **62**, p. 1283 (Sept. 1974).

(8) S. Seikai and T. Shiozawa : "Scattering of electromagnetic waves by a rotating electron-plasma column," IEEE Trans. Antennas Propagat., to be published in the January 1975 issue.

(9) R. C. Costen and D. Adamson : "Three-dimensional deri-

vation of the electrodynamic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary," Proc. IEEE, **53**, p. 1181 (Sept. 1965).

(10) N. A. Krall and A. W. Trivelpiece : "Principles of plasma physics," p. 136, McGraw Hill, New York (1973).

(11) R. J. Briggs : "Transformation of small-signal energy and momentum of waves," J. appl. Phys., **35**, p. 3268 (Nov. 1964).

400MHz～800MHz帯共用広帯域形 大口径漏洩同軸ケーブルの開発

日本国有鉄道・鉄道技術研究所　岸本利彦
住友電気工業株式会社　永井康允・佐々木　徹
宮本善勇・森　健介

1　まえがき

将来の超高速鉄道における対列車との情報通信システムを考えていく場合，取扱う情報伝送量の大容量化および伝送方式の信頼性の向上の問題は最も重要であろう。本論文は，これら諸問題を技術的に検討するために，このたび新しく開発したところの，新形漏洩同軸ケーブルに関するものである。本ケーブルの最大の特徴は，①情報伝送量の大容量化を計るため，400～800MHz帯共用の広帯域にわたる電波放射特性を実現したこと，②中継器間隔を極力大きくするため，ケーブルを大口径化（外径：72㎜）してケーブルの基本伝送損失を軽減したことである。本論文では，本ケーブルの基本設計および電気的諸特性を明らかにすると共に，これに付随するケーブルコネクタや800MHz 帯用列車アンテナに関しても述べている。

2　ケーブル基本設計

2.1　ケーブル構造

図1はこのたび新しく開発した大口径漏洩同軸ケーブルの断面構造を示している。中心導体は平均径27.5㎜の銅コルゲート管とすることによって，伝送損失の軽減をはかる一方，ケーブル可とう性の点を考慮した。絶縁体構造は従来どおりポリエチレンひものコルデル巻付としたが，大口径化したことおよび巻付作業性の点からくし歯ポリエチレンひもを採用し，かつコルデル巻付の上にプラスチックテープを重ね巻きする構造とした。外部導体はラミネート加工した軟アルミテープ（広帯域スロット付）をしわ付縦添したもので，その平均径は65㎜である。ケーブルシース（黒色ポリエチレン）は架設工法との関連から丸形とし，かつスロット位置を示す突起（マーカ）を設けた。

表1　ケーブル構造・寸法の比較

	従来ＬＣＸ　（50φ）	大口径ＬＣＸ　（72φ）
中心導体	17.3φアルミパイプ	27.5φ　銅コルゲート管
絶縁体構造	ＰＥ角ひもコルデルにＰＥパイプチューピング構造	くし歯付ＰＥ角ひもコルデルにプラスチックテープの重ね巻構造
外部導体	ラミネート加工アルミテープしわ付縦添　（平均径）43φ	同　左 （平均径）65φ
外部シース	黒色ＰＥシース	同　左
ケーブル仕上径	50φ	72φ
ケーブル重量	約1.4kg／m　（注）	約1.7kg／m

（注）メッセンジャワイヤ（7本／2.6φ）付

表1は従来の漏洩同軸ケーブル（50φ）と大口径漏洩同軸ケーブル（72φ）とを，ケーブル構造および寸法の観点から比較対照したものである。また図2は，これら2本のケーブルの外観写真を示したものである。

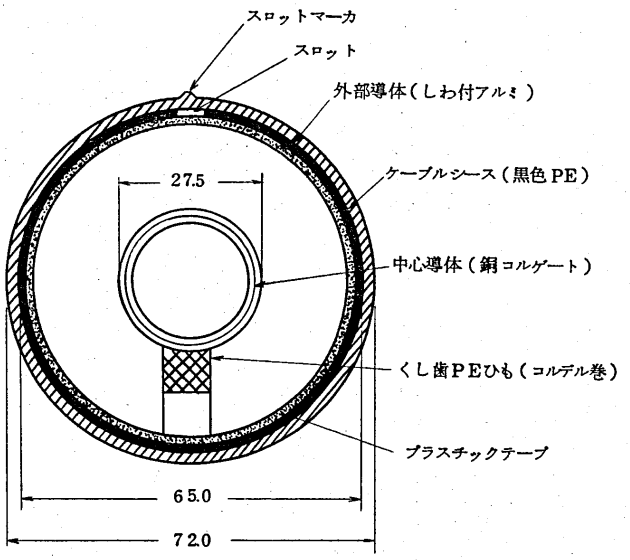


図1　大口径漏洩同軸ケーブルの断面構造

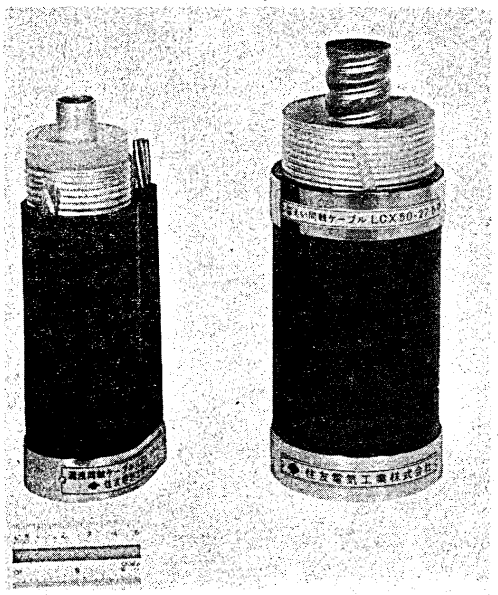


図2　大口径漏洩同軸ケーブル外観
（左は従来50φ漏洩同軸ケーブル）

2.2　スロット配列

大口径漏洩同軸ケーブルに採用したスロット配列の例を図3に示した。これらは筆者らが広帯用途のために開発した2重周期スロット配列の設計法に依ったもので，本配列法に関する理論的考察および実験的実証についてはすでに(1)(2)等に発表しており，また参考文献(3)～(5)等にも詳細報告している。本配列法の特徴はケーブル軸に沿った各スロットの波源強度を正弦波状に変化せしめたことにある。すなわち通常のジグザグスロット(6)等の単一周期配列において安定な電波放射帯域を限定していた不要空間高調波成分の発生を広帯域にわたり抑制する結果，安定な単一ビームの放射帯域を広げたわけである。

図4は図3に示した2重周期スロット配列における空間高調波の放射領域を図解したもので，単一ビームの放射領域が非常に大きくとれることがわかる。大口径漏洩同軸ケーブルのスロット設計の場合，上述した安定な電波放射帯域は実際運用面から見ても300MHzから1200MHzに及び，当初目的の400MHz帯および800MHz帯の両移動無線帯域を充分にカバーし得るものである。

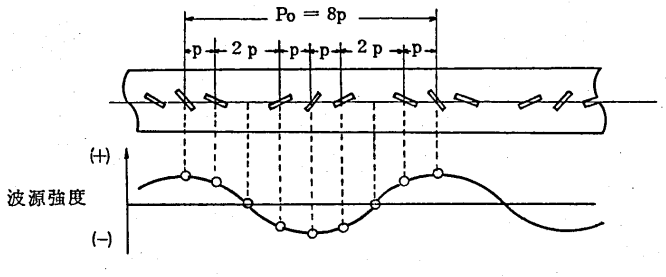


図3　二重周期スロット配列

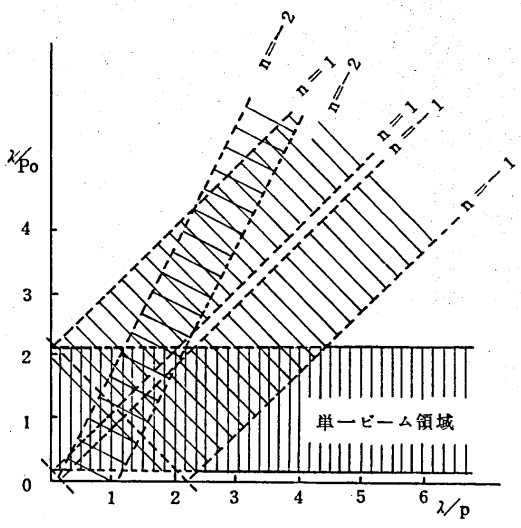


図4　二重周期構造スロットの放射領域

3　試作ケーブルの基本特性例

前章に述べたケーブル基本設計にもとづいて，電波の漏洩量が異なる４種類の大口径漏洩同軸ケーブルを試作した。以下にはこれら試作ケーブルの基本的特性を中心に述べる。

３.１　主要電気特性

図５は標準結合損失が各々　８５ｄＢ，８０ｄＢ，７５ｄＢおよび５５ｄＢ の４種類のケーブルについて測定した結合損失の周波数特性を示している。本測定では各試験ケーブルをコンクリート大地上に密着展張し，かつ受信用アンテナは半波長標準ダイポールアンテナを用いて，ケーブル・アンテナ間の距離を1.５ｍに設定して行なった。図６は実際の測定データの一列を示したものである。以上の結果，本ケーブルは４００MHz ～８００MHz 帯にわたって非常に良好な電波結合特性を有していることを確認した。

なお上述の各標準結合損失値の設定は，５ｄＢ ステップのグレイディング構成[5]を前提としたものであり，従来の１０ｄＢ ステップ方式よりも一層結合受信レベルを平担化することを考慮したものである。

図７は前記各ケーブルの伝送損失の周波数特性を示している。試験ケーブルは前述したとおり大地上密着展張状態で，通常の挿入法により測定した。大口径化したことにより，ケーブル基本伝送損失が従来ケーブルに比べて相当軽減できたことがわかる。なお図８はこれらの結合損失と伝送損失間の実験的関係を示したものである。

図９は本ケーブルのＶＳＷＲ特性の一例を示している。ＶＳＷＲ特性に関してはいずれも，４００MHz 帯～８００MHz 帯の両移動無線帯域において1.３以下と良好な結果が得られており，問題はなかった。

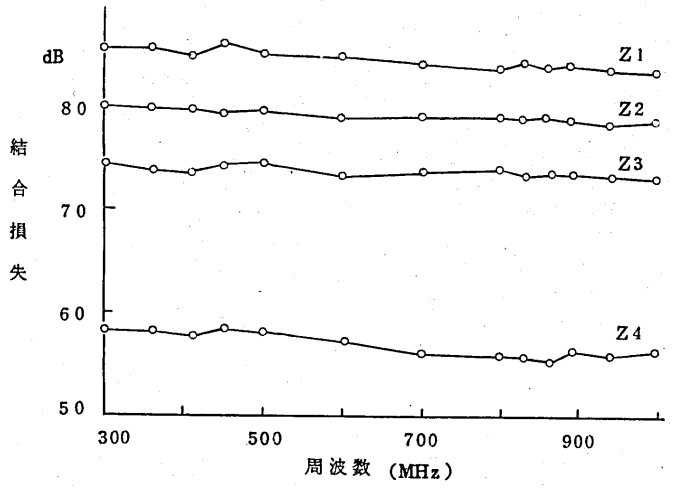


図５　結合損失周波数特性

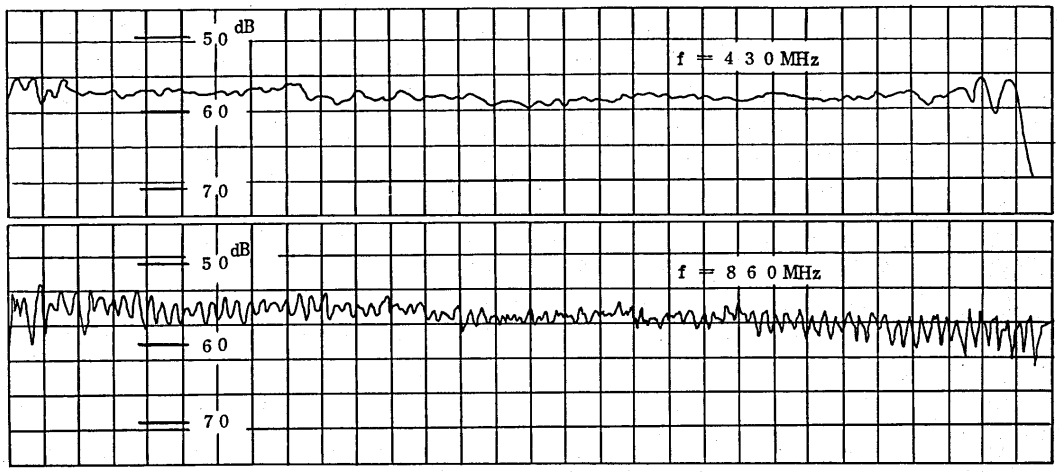


図6　結合損失測定データの一例

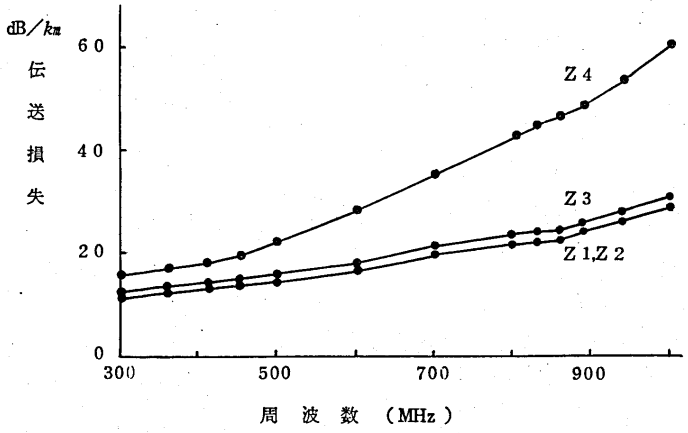


図7　伝送損失周波数特性

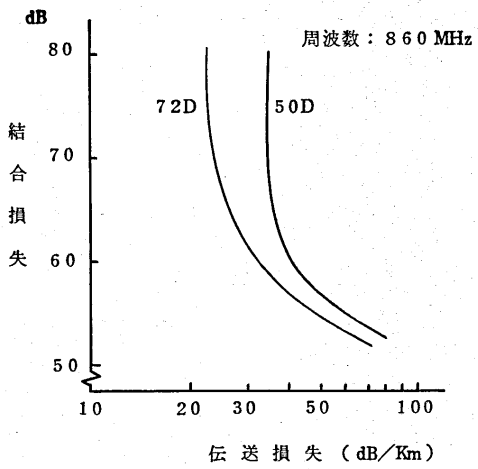


図8　結合損失と伝送損失の関係

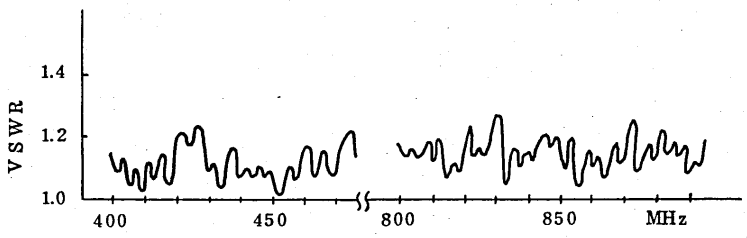


図9　ＶＳＷＲ特性例

3.2　コネクタ

ケーブルのサイズアップに伴なって，大口径漏洩同軸ケーブル用のコネクタを新たに開発した。図１０は新形コネクタの外観図を示す。本コネクタの諸元および主要性能は表２に示したとおりである。なお3.１項に示した各種の電気特性試験には，この新形コネクタを用いたことは言うまでもない。

	72φLCXコネクタ諸元
外径寸法	MAX 100φ×154(長)
変換部	S 形
VSWR	300～1000MHzにて1.1以下
絶縁抵抗	1KMΩ以上
重量	約 3.6 kg

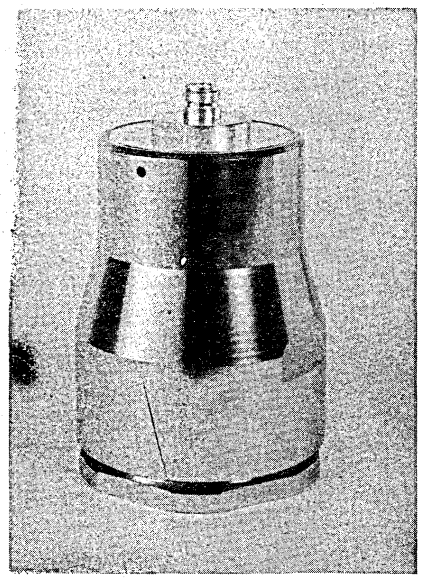


図10 大口径漏洩同軸用コネクタ外観

4 システム構成

以上の各種検討の結果，外径72㎜の大口径でかつ400MHz～800MHz 帯の両移動無線帯域をカバーする広帯用大口径漏洩同軸ケーブルは，基本設計およびケーブル製作の両面から，充分実用化に耐える優れたものであることがわかった。本章では以上の電気特性のデータを基にして，大口径漏洩同軸ケーブルを用いた場合のシステム構成例を中心に述べる。

4.1 グレイディング設計例

大口径漏洩同軸ケーブルを用いて，5dB ステップのグレイディング設計を行なった場合のシステム構成例を図11～図12に示す。図11，図12はそれぞれ，400MHz 帯中心および800MHz 帯中心で設計したものである。この結果，400MHz 帯では約2.4㎞，800MHz 帯では約1.3㎞の中継器間隔で良いことがわかる。一方，従来の外径50㎜のケーブルでは，その標準結合損失が75，65，55および50 dBの4種類で構成した場合，400MHz 帯で約1.4㎞，800MHz 帯で約0.8㎞の中継距離になると考えられる。これより基本ロスの差だけ確実に中継距離をのばし得たことがわかる。

4.2 列車用アンテナの開発

上述の5 dB ステップのグレイディング構成の趣旨が対列車の受信結合レベルの平担化によるレベル余裕の確保，すなわち列車通信の高品質化にある以上，列車用アンテナはさらに受信レレベルの向上およびレベル変化の抑制の点で重要である。図13は本ケーブルの電波の放射指向性に合わせて開発製作した800MHz 帯用列車アンテナの外観図を示している。本列車アンテナの諸元および主要電気性能は表3に示したとおりである。

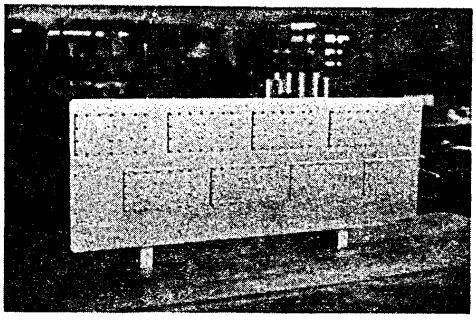


図１３　８００MHz帯用ＬＣＸ列車用アンテナ外観
（正面図）

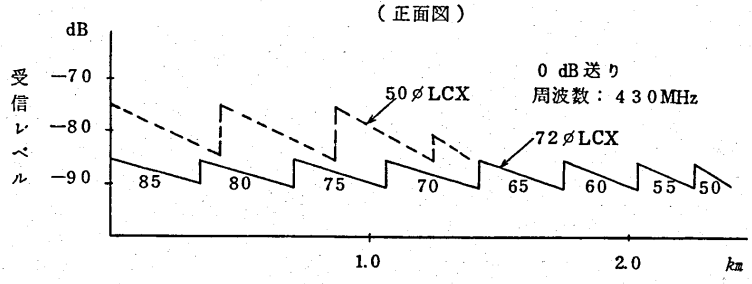


図１１　４００MHz帯グレイディング設計例（推定値に基く）

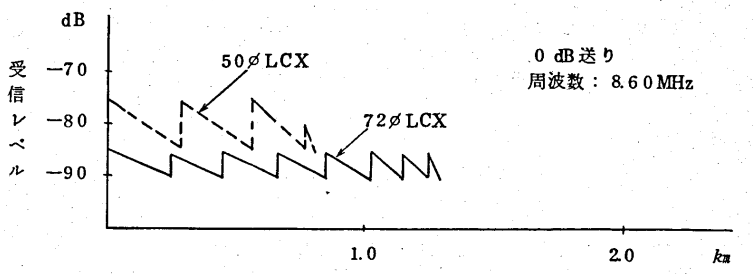


図１２　８００MHz帯グレイディング設計例（推定値に基く）

表３　列車アンテナの仕様及び諸元

	アンテナ仕様及び諸元
形　　式	分配給電・８面スロットアンテナ
使用周波数	７７０～９２０MHz
特性インピーダンス	５０Ω
偏　　波	垂　　直
利　　得	１０dB 以上（絶対利得）
ＶＳＷＲ	2.0以下
寸　　法（注）	$H_{460} \times W_{1300} \times D_{80}$
概算重量（注）	約２０kg

5 まとめ

以上本論文では，４００MHz 帯～８００MHz帯をカバーする広帯域用の大口径漏洩同軸ケーブルに関して，その基本設計および主要電気性能等を明らかにすると共に，システム構成の検討を通じて本ケーブルの諸特性を論じた。

本ケーブルの特徴をまとめれば，

① 電波放射帯域を４００MHz 帯から８００MHz 帯まで拡大し移動通信における情報伝送量を大きくしたこと。

② 大口径化したことにより低損失伝送が可能となつたこと。

であろう。特に②項の特徴は放射帯域のみならず，電波の漏れない低周波帯域での多目的通信の低損失伝送の可能性を提供したわけであり，将来の数多くの応用利用が考えられる所である。

なお，この広帯域用大口径漏洩同軸ケーブルは列車アンテナと共に，今年３月末鉄道技術研究所へ納入された。現在研究所では，本ケーブルを用いた応用システム技術の開発や将来の超高速鉄道における列車通信形態の在り方に関して研究が進められており，その成果が期待されるものである。図１４は同研究所構内に布設された大口径漏洩同軸ケーブルと列車アンテナの模様を示したものである。

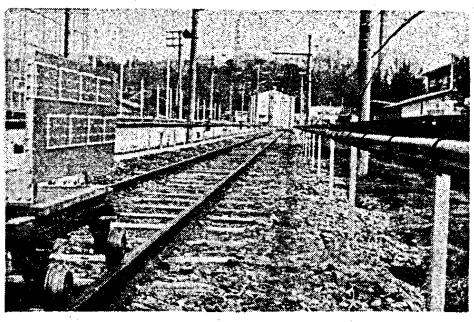


図１４　大口径漏洩同軸ケーブルと列車アンテナ
（鉄道技術研究所内構内）

参　考　文　献

(1) 倉内ほか：“広帯域漏れ同軸ケーブル”電子通信学会論文誌Vol.54−BNo.10. 昭46年10月.

(2) 倉内ほか：“広帯域漏洩同軸ケーブル”電子通信学会マイクロ波研究会資料NW70−75. 昭46年2月.

(3) 夜久ほか：“漏洩同軸ケーブル回線の構成法”鉄道におけるサイバネティクス利用国内シンポジウム第7回，PP.348〜355，昭45年12月.

(4) 夜久ほか：“複合形広帯域漏洩同軸ケーブル”同シンポジウム第8回，PP.401〜407，昭46年9月

(5) 吉田：“漏れ同軸ケーブルを用いた各種の新しい通信システムについて”電子通信学会誌 Vol.55−No.5（昭47年5月）

(6) 中原ほか：“漏洩同軸ケーブル”住友電気第100号（昭44年7月）

輻射科学研究会
'75.02.07

偏波面効果を利用したゴースト除去方式

住友電気工業株式会社　今野隆一、芝野儀三、加藤修二

1. まえがき

最近、大都市における高層建造物の増加に伴い、TV電波の反射によるゴースト現象が生じ、大きな社会問題となっている。この問題に対する従来の対応策は大きく3つに分類することができる。#1は希望波のみが受信できて、妨害波を受信しないようなシステムで、具体的には、妨害波の到来方向の受信感度を零になるよう、受信アンテナの指向性を合成する方法である。#2は、適当に配列した複数個のアンテナ出力を希望波に関して、すべてが同位相になるように加え合わせ、S/N を大きくする方法である。#3は遅延回路を利用して、受信信号を合成して、妨害波信号を除去する方法である。

本論文は、以上の考えに対し、全く別な新しいゴースト除去方式について提案する。

2. 新しいゴースト除去方式

ここで提案する方式は、反射波の偏波回転効果を利用するものである。一般に、放送波は水平偏波あるいは垂直偏波と偏波面が定められている。送信アンテナから放射された電波が建造物により反射を受けて受信アンテナに到達すると、反射波は建造物の形状、構造により異なるが一般にもとの偏波と直交した偏波成分を含むようになったり、楕円偏波化したりする。そこで直接波の偏波面と直交した偏波成分を受信するアンテナを設けると、その受信出力は偏波回転を受けた波、すなわち反射波信号のみが含まれる。この信号を、直接受信波に含まれている反射波信号と振幅が等しく、位相が逆になるように合成することにより、希望波のみが得られることになる。

以上が本文で提案する新しいゴースト除去方式で、この方式の特長は

① 反射波の到来方向はシステムの原理に影響しないこと。

② 受信波同志の打消しを行っているので、遅延時間調整装置を必要としないこと。

③ 異なった方向から多数の妨害波が到来しても、反射波がすべて同じ偏波回転するとした場合、それらは単一信号と考えられ、一度に消去されること。

等があげられる。

3. 本方式の解析

(1) 妨害波が直線偏波化した場合

図1に示すように、直接波 E_w は x 軸方向に偏波し、妨害波 E_u は x 軸に対しθだけ傾いた方向に偏波している場合を考える。受信アンテナに x 軸方向および y 軸方向に偏波したふたつのアンテナ

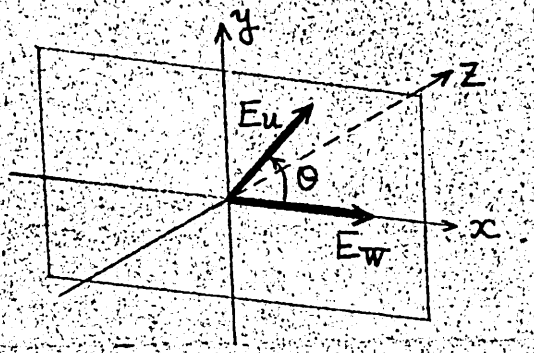


図1. 直接波 E_w と妨害波 E_u の偏波面の関係

を考えると、x 軸方向および y 軸方向の偏波アンテナの出力 e_x, e_y は比例定数を省略して

$$e_x = E_w + E_u \cos\theta \quad (1)$$

$$e_y = E_u \sin\theta \quad (2)$$

と与えられる。合成出力 e_o は

$$e_o = e_x + a e_y \quad (3)$$

$$= E_w + (\cos\theta + a\sin\theta) E_u$$

となる。ここで、

$$a = -\cot\theta \quad (4)$$

となるように合成することにより、妨害波成分が除去される。実際には、a は y 軸方向偏波アンテナの振幅及び位相のみを調整することにより得られるもので、妨害波の入射方向、周波数、位相、遅延時間等には無関係である。

議論の範囲を少し拡げて、アンテナAは x 軸に対して角度 θ_A だけ傾いて偏波しており、アンテナBは角度 θ_B だけ傾いて偏波している場合を考える。

このとき、アンテナAの出力 e_A は

$$e_A = E_w \cos\theta_A + E_u \cos(\theta - \theta_A) \quad (5)$$

であり、アンテナBの出力 e_B は

$$e_B = E_w \cos\theta_B + E_u \cos(\theta - \theta_B) \quad (6)$$

と与えられる。このときの合成出力 e_0 は

$$e_0 = e_A + a e_B$$
$$= (\cos\theta_A + a\cos\theta_B) E_w + \{\cos(\theta - \theta_A) + a\cos(\theta - \theta_B)\} E_u \quad (7)$$

となる。したがって、

$$a = -\frac{\cos(\theta - \theta_A)}{\cos(\theta - \theta_B)} \quad (8)$$

が成立すると、妨害波は消去され、合成出力は

$$e_0 = \frac{\sin\theta \sin(\theta_B - \theta_A)}{\cos(\theta - \theta_B)} E_w \quad (9)$$

となる。(9)式で $\theta \neq 0$ は初めに仮定しているので、

$$\theta_A \neq \theta_B \quad (10)$$

でありさえすれば、前の場合と同様に直接波のみをとり出すことができるのがわかる。

(2) 妨害波が楕円偏波化した場合

直接波は図1と同じとし、反射波が楕円偏波化した場合を考える。図2.に示したように、妨害波をx軸偏波成分およびy軸偏波成分に分解して、x軸成分を E_{ux} とする。妨害波はひとつの信号波であるから、y軸成分とx軸成分には100%の相関があるものと考えられるので、y軸成分の振幅はx軸成分の振幅に比例し、bを定数と考えると bE_{ux} と表すことができる。また、y軸成分のx軸成分に対する位相角を ψ とすると、アンテナAの出力 e_A は

$$e_A = \cos\theta_A E_w + (\cos\theta_A + b e^{j\psi} \sin\theta_A) E_{ux} \quad (11)$$

となり、アンテナBの出力 e_B は

$$e_B = \cos\theta_B E_w + (\cos\theta_B + b e^{j\psi} \sin\theta_B) E_{ux} \quad (12)$$

であるから、合成出力 e_0 は

$$e_0 = (\cos\theta_A + a\cos\theta_B) E_w$$
$$+ \{(\cos\theta_A + b e^{j\psi} \sin\theta_A) + a(\cos\theta_B + b e^{j\psi} \sin\theta_B)\} E_{ux} \quad (13)$$

となる。したがって、

$$a = -\frac{\cos\theta_A + be^{j\psi}\sin\theta_A}{\cos\theta_B + be^{j\psi}\sin\theta_B} \quad (14)$$

を満足させれば、妨害波を消去でき、合成出力は

$$e_0 = \frac{be^{j\psi}\sin(\theta_B - \theta_A)}{\cos\theta_B + be^{j\psi}\sin\theta_B} E_W \quad (15)$$

となって この場合も (10)式が成り立つかぎり、前の場合と同様に、妨害波除去が達成されることが保証される。

以上の議論より、妨害波の偏波回転あるいは楕円偏波化がある場合は、空間内の任意の角度をなすふたつの方向の偏波成分を受信して、それらの受信出力を適当に合成することにより、妨害波を消去することが常に可能であることが確認された。

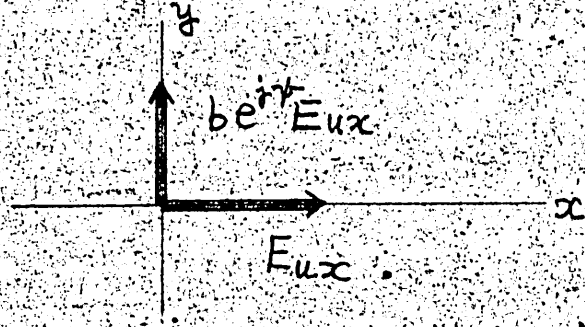


図2. 楕円偏波化した妨害波の成分

(3) 妨害波が多数存在する場合

最も一般的な場合として、妨害波が楕円偏波化している場合を考える。x軸成分が

$$E_{ux} = \sum_i E_{uxi} \quad (16)$$

y軸成分が

$$E_{uy} = \sum_i b_i e^{j\psi_i} E_{uxi} \quad (17)$$

と与えられるものとする。但し、b_i および ψ_i が常に一定であるとそれらはまとめて単一の信号と考えられるため、前に述べた手法により一度に消去されることになる。したがって、ここでは b_i あるいは ψ_i の少なくともいずれかが変化するものとする。アンテナAおよびアンテナBの受信出力はそれぞれ

$$e_A = \cos\theta_A E_W + \sum_i (\cos\theta_A + b_i e^{j\psi_i}\sin\theta_A) E_{uxi} \quad (18)$$

$$e_B = \cos\theta_B E_W + \sum_i (\cos\theta_B + b_i e^{j\psi_i}\sin\theta_B) E_{uxi} \quad (19)$$

と表わされ、合成出力は

$$e_0 = (\cos\theta_A + a\cos\theta_B)E_W + \sum_i \{(\cos\theta_A + b_i e^{j\psi_i}\sin\theta_A) + a(\cos\theta_B + b_i e^{j\psi_i}\sin\theta_B)\}E_{uxi} \quad (20)$$

となる。ここで $i=1$ なる妨害波を消去するものとすれば

$$a = -\frac{\cos\theta_A + b_1 e^{j\psi_1}\sin\theta_A}{\cos\theta_B + b_1 e^{j\psi_1}\sin\theta_B} \quad (21)$$

とすればよく、このとき合成出力は

$$e = \frac{b_1 e^{j\psi_1}\sin(\theta_B - \theta_A)}{\cos\theta_B + b_1 e^{j\psi_1}\sin\theta_B} E_W + \sum_{i=2}^{n} \frac{(b_1 e^{j\psi_1} - b_i e^{j\psi_i})\sin(\theta_B - \theta_A)}{\cos\theta_B + b_1 e^{j\psi_1}\sin\theta_B} E_{uxi} \quad (22)$$

となる。

直接波偏波面方向に偏波した受信アンテナで受信したとき、直接波と妨害波との比は E_{uxi}/E_W $(i=1,2,3,\cdots)$ であるのに対し、本方式の場合は

$$\left[\frac{U}{D}\right]_i = \frac{|b_1 - b_i e^{j(\psi_i - \psi_1)}|}{b_1} \cdot \frac{E_{uxi}}{E_W} \quad (i=1,2,3,\cdots) \quad (23)$$

であるから、妨害波の改善率 η は

$$\eta_i = \frac{|b_1 - b_i e^{j(\psi_i - \psi_1)}|}{b_1} \quad (i=1,2,3,\cdots) \quad (24)$$

と与えられる。(24)式により、第1妨害波を消去したとき、他の妨害波の改善度 η_i が $\eta_i < 1$ であれば D/U 比が向上することになる。図3に $\eta_i < 1$ が成立する領域をベクトル図で示した。すなわち、

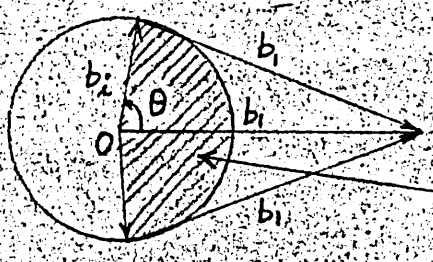


図3. D/U 比改善領域

D/U 比が改善される領域は

$$-\cos^{-1}\left(\frac{b_i}{2b_1}\right) \leq \psi_i - \psi_1 \leq \cos^{-1}\left(\frac{b_i}{2b_1}\right) \quad (25)$$

でかつ、

$$\frac{b_i}{2b_1} \leq 1 \qquad (26)$$

である。この領域の外部では、かえって妨害波は強調される。(25)式をみると、$b_i/2b_1$ が小であればある程、改善領域が広くなり、$b_i/2b_1 \to 0$ の極限で

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi_i - \psi_1 \leq \frac{\pi}{2} \qquad (27)$$

となる。b_i のうち最大のものを b_1 に選ぶようにするのが他の妨害波の強調を招かないという点で最適であろう。

(4) 仮想妨害波消去の考え方

複数個の妨害波がほぼ同じレベルで到来し、どの波に対しても、できるだけ大きな改善度を得たい場合を考える。この場合、b_1, ψ_1 としては、実際に到来する妨害波の中から選ばずに、到来する波の性質をよく調べ、b_1, ψ_1 にはそれぞれ b_i, ψ_i の平均値あるいは中央値を選んで回路を設計すると最も多くの波に対して改善を得ることができる。

(5) 空間位相差の導入

妨害波が多数存在する場合、ひとつの妨害波を消去すると、他の妨害波が強調される領域が存在することがわかった。この現象はふたつのレベルの高い妨害波がそれぞれ D/U の改善領域の内側および外側にある場合に生じ、両者の中間に仮想到来波を考えても、それによる改善領域にも含まれない場合がありうる。このような時には、ひとつの妨害波を抑圧すると他の妨害波は必ず強調されることになる。

ところが、ふたつの妨害波の到来方向が異なっていると、アンテナAとアンテナBの位相中心をある間隔だけ離すことにより、必ず同じ改善領域内に入れることができる。すなわち、図4に示すように、アンテナ

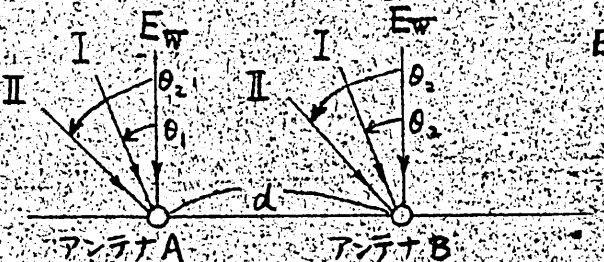


図4. ふたつのアンテナ配置と到来波の関係

AとアンテナBを間隔dだけ離して配置した場合、アンテナBによって受信される妨害波Ⅰ,Ⅱの位相とアンテナAによって受信される妨害波Ⅰ,Ⅱの位相の差ψ_{1s}, ψ_{2s}は

$$\psi_{1s} = k_1 d \sin\theta_1 \qquad k_1 = 2\pi/\lambda_1 \tag{28}$$

$$\psi_{2s} = k_2 d \sin\theta_2 \qquad k_2 = 2\pi/\lambda_2 \tag{29}$$

と与えられる。ここでは妨害波Ⅰ,Ⅱの波長をλ_1, λ_2としたが、$\lambda_1 = \lambda_2$であってもよく、要はθ_1とθ_2が異なることによりψ_{1s}とψ_{2s}に差が出ることが重要である。

ここで、入射波がz軸と平行としたとき、アンテナAはx軸方向に偏波面を向け、アンテナBはy軸方向に偏波面を向けるものとすると、アンテナAの受信出力e_Aは

$$e_A = E_W + \sum_{i=1}^{2} E_{uxi} \tag{30}$$

アンテナBの受信出力e_Bは

$$e_B = \sum_{i=1}^{2} b_i e^{j(\psi_i + \psi_{is})} E_{uxi} \tag{31}$$

と与えられる。したがって合成出力は

$$e_o = E_W + \sum_{i=1}^{2} \left\{ 1 + a b_i e^{j(\psi_i + \psi_{is})} \right\} E_{uxi} \tag{32}$$

である。ここで妨害波Ⅰを消去するものとして

$$a = -\frac{1}{b_1} e^{-j(\psi_1 + \psi_{1s})} \tag{33}$$

とすると、(32)式は

$$e_o = E_W + \left[1 - \frac{b_2}{b_1} e^{j\{(\psi_2 - \psi_1) + (\psi_{2s} - \psi_{1s})\}} \right] E_{ux2} \tag{34}$$

となる。これより

$$\psi_{2s} - \psi_{1s} = -(\psi_2 - \psi_1) \tag{35}$$

を満足するように、アンテナの空間配置を決めてやれば、総合受信出力は

$$e_o = E_W + \left(1 - \frac{b_2}{b_1}\right) E_{ux2} \tag{36}$$

となり、たとえψ_2, ψ_1の関係が互いに改善領域外にあっても、

$b_2 \leqq 2b_1$ (b_iで大きい方をb_1とおくことにより常に成立する)

が成立するかぎり、妨害波は抑圧され、改善率は

$$\eta_2 = 1 - b_2/b_1 \tag{37}$$

となる。$b_1 = b_2$のとき妨害波Ⅱも完全に消去することができる。また、

(28), (29), (35)式より d を求めると

$$d = \frac{\psi_2 - \psi_1}{k_2 \sin\theta_2 - k_1 \sin\theta_1}$$

となる。

(6) アンテナの立体交叉配置による改善

これまでの検討では 2本の受信アンテナを直接波の入射方向に直交する平面内で交叉させて配置することにより、完全に消去し得る波の数は1波だけであった。

これに対し、直接波の入射方向をZ軸とした場合、3本のアンテナをX軸、Y軸、Z軸方向に偏波面を向け、立体的に交叉させることにより同時に2波まで完全に消去することができる。また3本のアンテナの立体交叉配置についても妨害波の改善領域等の検討すべきこともあるが、ここでは省略する。

4. 本方式の応用について

(1) 従来の技術との組合せ

本論文で提案した方式をダイバーシティ受信と組み合わせることにより、さらに多くの妨害波を消去することができる。すなわち、2本のアンテナの交叉配置によって、妨害波を1波消去し、このようなアンテナ2組を適当に配列して、もう1波の妨害波の到来方向の受信感度が零となるようにすることができ、同時に2波の消去が行える。立体交叉アンテナ2組を用いれば、同時に3波の妨害波を消去することができる。

このように、従来の技術と互いに補完しあって、その適用範囲をより拡げることが可能である。

(2) 一度に多チャンネルを受信する場合

入射到来波の周波数が異なる場合、受信アンテナの出力端に適当な分波器を入れ、周波数を分離し、各波の振幅及び位相をそれぞれ独立に調整して、再度合成することにより、入射波を同時に消去することが可能である。

この方法は、ひとつの地点で多数のチャンネルを受信するような時に有効であろう。

(3) 円偏波放送におけるゴースト除去

放送波が円偏波で行われると、反射、散乱波の偏波の回転方向の反転が必ず行われるので、円偏波放送に対しては、本方式は非常に有効であると考えられる。この場合は、受信アンテナに右廻りと左廻りの円偏波アンテナを組合わせて用いることになる。理論的な考察はこれまでに述べた事項と1:1に対応して行うことができる。

5. あとがき

本論文では、従来のゴースト除去方法に対して、全く別な見地からゴースト信号除去の方式についての提案を述べたが、最後に本方式の特長をまとめると次のようになる。

① アンテナ自体の指向性には無関係であるため、どんなアンテナでも使用できる。

② アンテナの偏波面に多少のずれがあっても (5)~(10)式よりわかるように大きな特性劣化とはならない。

③ 妨害波が多数あっても、偏波回転がすべて同一であれば、単一信号として一度に消去できる。

④ (3)式, (9)式, (15)式で $\theta_A=0$, $\theta_B=\frac{\pi}{2}$ とすると $e_o=E_w$ となり大きな受信感度の低下とはならない。

⑤ 入射波の到来角度には無関係であるため、直接波と妨害波の到来角度がほぼ同じ方向でも有効である。

⑥ ゴースト信号の遅延時間の大きさには無関係である。

最近の大都市におけるゴースト障害は発生原因が非常に複雑で、本方式は必ずしもゴースト障害対策として万能とは言えないが、従来の技術との組み合わせとともに、総合的な解決策の確立と実施が必要と思われる。