磁性体と半導体の複合系における表面静磁波の伝搬特性

張　年錫・山田省二・松尾幸人

大阪大学産業科学研究所

昭和50年　4月25日

輻射科学研究会

磁性体と半導体の複合系における表面静磁波の伝搬特性

張 年錫・山田省二・松尾幸人
(大阪大学産業科学研究所)

1. まえがき

磁性体中を伝搬する静磁波は本質的に分散的であり，磁気同調性を有する．特に2，3GHz以上の周波数において弾性表面波よりも低損失[1]である点などが注目され，多方面への応用が考えられている[2]．磁性体と半導体を複合した系における体積静磁波の伝搬特性が検討されているが，表面静磁波(MSSW)との結合についても多くの報告[3~5]があり，その中でMSSWの増幅に関する解析[6]を行なっている．増幅の実験は始めて，Vashkovskii[6]らによって行われ，YIGとGeと組合せたものである．結合系における増幅機構についてはSchömann[7]が報告している．

本論文ではMSSWと半導体中を漂流するキャリアとの結合によるマイクロ波増幅特性を調べたものである．系のいろいろな構造に対して適用できる分散関係式を導出した．系は金属板，誘電体，半導体とYIGスラブからなる多層構造[8]のもので，これについて二次元解析を行なった．導出された分散式からはDE，FMや後進波モードの表現が容易に結論される．複素超越方程式の分散式はDown-hill法を用い計算機で求

めている.

増幅特性が得られる条件を解析的[9]に検討するために，FMモード（$s=+1$）の場合について，半導体とYIGスラブが共に十分に薄く，半導体中の波動に対して，静電近似を適用して求めた．複素伝搬定数の減衰定数αが正（増幅）になるのはキャリアの漂流速度v_0がMSW位相速度v_pより大きい場合である．半導体とYIGスラブ間の空隙(d_3)効果を調べ，この値が5 μmのとき，$d_3=0$に比べて45%もαが減少することを見出した．

後進波モードが励起されるFMモードの伝搬特性は興味があり，前進波モード領域でYIGと金属板間の距離d_5をいろいろ変化させたときのαを計算した．d_5が小さい程増幅可能な周波数幅は広くなるが，利得は減少する．後進波モードが存在するFMモードではMSWの位相定数βがωの二価関数となり複雑である．現在のところ，この群速度が負の領域でのαは計算されていない．

この結合系の増幅機構について，若干検討を行い，スピン系とキャリア系との結合で$\alpha>0$が$v_0>v_p$で得られ，v_0が大きい程αが大きくなることを定性的に説明した．

実験は4GHz帯で，磁性体としてYIG板（厚さ，100 μm, 500 μm，吸収半値巾$\Delta H=0.5$ oe），半導体はInSb（厚さ100 μm，$\mu_g=22\times10^4$ cm^2/V.s，77K）を用いて実験を行なっているが，現在のところ利得は得ていない．これらの内容について以下で報告する．

2 解析（分散方程式の導出）

図1のような厚状構造の系について二次元解析を行う．静磁界H_0をz軸に平行に印加する．MSSWとキャリアの流れはy方向と一致する．すべての量はy方向に$\exp j(\omega t - ky)$で変化するとし，z方向に依存性のない（$\partial/\partial z = 0$）ゆ場合である．1，3，4と5の領域では静磁近似が適用され，領域2の電子に対してcollisionが支配的で，拡散効果を無視する．1，3，4と5の領域での磁気ポテンシャルは

$$\phi_i = -(a_i e^{-fx} + b_i e^{fx}) \exp j(\omega t - ky) \qquad (1)$$

$$i = 1, 3, 4, 5 \quad f = ks, \quad s = \pm 1$$

a_iとb_iは任意定数，kは伝搬定数で，$k = \beta + j\alpha$．sの＋，－の符号は波動の正，負方向の伝搬に対応する．各領域の磁束密度のx成分と磁界のy成分は1，3と5の領域に対して

$$B_{zdj} = \mu_0 f(-a_j e^{-fx} + b_j e^{fx})$$

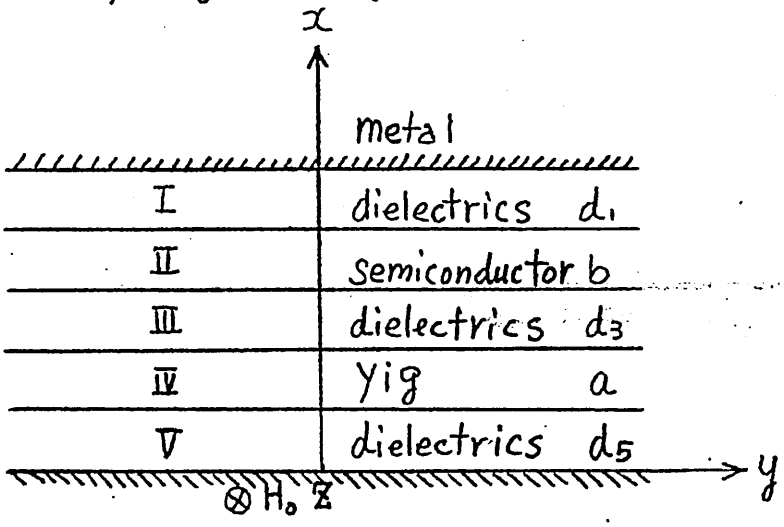


Fig. 1

$$H_{\varepsilon dj} = -jk(a_j e^{-fx} + b_j e^{fx}) \qquad (2)$$
$$j = 1.3.5$$

簡単のために $\exp j(\omega t - ky)$ を略した．半導体の領域では

$$B_{sx} = \frac{k}{\omega}(a_2 e^{-\gamma_s x} + b_2 e^{\gamma_s x}) \qquad (3)$$
$$H_{sy} = \frac{j\gamma_s}{\omega\mu_0}(a_2 e^{-\gamma_s x} - b_2 e^{\gamma_s x})$$

γ_s は半導体で x 方向の波数[9]で(4)で与えられる．

$$\gamma_s^2 = k^2 - k_s^2\left\{1 - \frac{j\beta_{cy}}{\beta_0}\left(1 - \frac{k}{\beta_0}\right)\right\} \qquad (4)$$

$k_s^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_s$，$\varepsilon_s = \varepsilon_0\varepsilon_r$，$\beta_{cy} = \mu_y n e/v_0\varepsilon_s$，$\beta_0 = \omega/v_0$

ε_r は半導体の比誘電率，μ_0 は空気の透磁率，μ_y は半導体のキャリアの移動度，β_0 はキャリア波の波数である．

YIG領域では

$$B_{fx} = \mu_0 f\{-a_4(\mu_1 - \mu_2 s)e^{-fx} + b_4(\mu_1 + \mu_2 s)e^{fx}\} \qquad (5)$$
$$H_{fy} = -jk(a_4 e^{-fx} + b_4 e^{fx})$$

$$\mu_1 = 1 + (\omega_r\omega_m)/(\omega_r^2 - \omega^2), \quad \mu_2 = \omega_m\omega/(\omega_r^2 - \omega^2)$$
$$\omega_r = \gamma H_i, \quad \omega_m = 4\pi M_0$$

H_i は内部磁場，γ は磁気回転比，$4\pi M_0$ はYIGの飽和磁化である．境界条件としては各領域の境界における磁束密度の x 成分と磁界の y 成分が連続であるという条件を用いる．(2)～(5)中の任意定数（10個）a_i，b_i（$i = 1 \sim 5$）を消去すれば，系の分散方程式が求まる．

$$e^{2fa} = \frac{A\{(B\zeta - 1)\tanh fd_3 + (B - \zeta)\} + \tanh fd_5\{(\zeta - B) + (1 - B\zeta)\tanh fd_3\}}{B\{(A\zeta + 1)\tanh fd_3 + (A + \zeta)\} + \tanh fd_5\{(\zeta + A) + (1 + A\zeta)\tanh fd_3\}} \qquad (6)$$

$$\zeta = \frac{1}{\gamma_s'} \frac{\gamma_s' \tanh fd_1 + \tanh \gamma_s b}{\gamma_s' \tanh fd_1 \tanh \gamma_s b + 1}$$

$$\gamma_s' = \frac{\gamma_s}{f}, \quad A = \mu_1 + \mu_2 S, \quad B = \mu_1 - \mu_2 S$$

3. 分散方程式の検討

まず始めに，分散式の特別の場合について評価しよう．

3.1 $d_3 = d_5 = \infty$ の関係を(6)に代入し，$b = d = 0$ とすると，

$$e^{2fa} = \frac{(\mu_1 + \mu_2 S - 1)(\mu_1 - \mu_2 S - 1)}{(\mu_1 + \mu_2 S + 1)(\mu_1 - \mu_2 S + 1)} \qquad (7)$$

(7)は Damon と Eshbach[10] が求めた $S = \pm 1$ の波動が縮退したDEモードの式になる．

3.2 $d_3 = \infty$, $d_5 = 0$ のときは(6)からFMモード[11]の結果をうる．

$$e^{2fa} = \frac{(\mu_1 + \mu_2 S)(\mu_1 - \mu_2 S - 1)}{(\mu_1 - \mu_2 S)(\mu_1 + \mu_2 S + 1)} \qquad (8)$$

3.3 $d_3 = \infty$, $d_5 \neq 0$ の関係を(6)に代入すると，Van De Vaart[12] によって報告された後進波モードを含む式をうる．

$$e^{2fa} = \frac{(\mu_1 - \mu_2 S - 1)(\mu_1 + \mu_2 S - \tanh fd_5)}{(\mu_1 + \mu_2 S + 1)(\mu_1 - \mu_2 S + \tanh fd_5)} \qquad (9)$$

(8)と比較すると $\tanh fd_5$ の項が付加されたのみであることがわかる．以上は(6)の評価として従来報告されたフェライトスラブに付随したモードが(6)の特別の場合として得られることを示した．半導体を含む系の分散

特性を以下で考察するが，簡単のために(6)の2，3の場合に限って検討しよう．

3.4　$d_1=\infty$，$d_3\neq 0$，$d_5=0$ の場合

上の関係を(6)に代入すれば，つぎの式を得る．

$$e^{2fa}=\frac{A}{B}\frac{(\gamma_s'+\tanh f\gamma_s b)(B\tanh fd_3-1)+\gamma_s'(B-\tanh fd_3)(\gamma_s'\tanh f\gamma_s+1)}{(\gamma_s'+\tanh f\gamma_s b)(A\tanh fd_3+1)+\gamma_s'(A+\tanh fd_3)(\gamma_s'\tanh f\gamma_s+1)} \quad (10)$$

(10)を計算すればよいのであるが，この式から波動の伝搬特性を推測することは非常に困難である．そこで(10)を近似的に計算してみよう．$|\gamma_s b|\ll 1$，$|fd_3|\ll 1$，$|fa|\ll 1$ のように半導体とYIGは薄膜のように薄いとし，それらの間の空隙も十分小さいとする．また，$\alpha\ll\beta$ の仮定を行う．さらに，(4)のかわりに静電近似を用いた(11)を利用し，$S=+1$ の場合に限って計算を行なう．

$$\gamma_s'^2\doteqdot 1+\frac{\mu_0\sigma}{\beta^2}\alpha(2v_p-v_0)+j\frac{\mu_0\sigma}{\beta}(v_p-v_0) \quad (11)$$

$$\beta=\omega/v_p,\quad \sigma=\mu_y\rho=\mu_y n e$$

μ_y と n はキャリアの移動度と濃度で，e は電子の電荷である．上の近似条件と(11)を(10)に代入してαを求めると，

$$\alpha=\frac{\mu_0\sigma(v_0-v_p)\{B'e^{2\beta a}(A'+\beta d)-A'(B'-\beta d_3)\}}{B'(A'+1)e^{2\beta a}[2a(\beta a+1)b+d_3\{2\beta b(\beta a+1)+2\beta a+1\}]-A'(B'-1)\{b+d_3(\beta b+1)\}}$$

$$A'=\mu_1+\mu_2,\quad B'=\mu_1-\mu_2 \quad (12)$$

$v_0>v_p$ ならば通常の動作試料条件で(12)の分母子は正で $\alpha>0$ の関係が存在する．すなわち，キャリアの漂流速度がMSSWの位相速度より大きいときに波動の増大がおこる．一方 $d_3=0$ とすると(12)は簡単になる．

$$\alpha = \frac{\mu_0 \sigma (v_0 - v_p) A'B'(e^{2\beta a} - 1)}{B'(A'+1)e^{2\beta a}\{(\beta b+1)2a+b\} - A'b(B'-1)} \qquad (13)$$

つぎに半導体とYIG間の空隙効果を調べる．(12), (13)の比をα_Rとすれば(14)が求まる．

$$\alpha_R = \frac{\{B'e^{2\beta a}(A'+\beta d) - A'(B'+\beta d)\}[B'(A'+1)e^{2\beta a}\{2a(\beta b+1)+b\} - A'(B'-1)b]}{A'B'(e^{2\beta a}-1)[B'(A'+1)e^{2\beta a}\{2a(\beta b+1)+b+d_3(2\beta b(\beta a+1)+2a+1)\} - A'(B'-1)\{b+d_5(2\beta b+1)\}]} \qquad (14)$$

数値計算を行う場合に問題になるのは，実験の可能性のある試料の設定ができるかどうかである．$v_0 - v_p > 0$の関係は増幅器の基本条件であり，v_0の値は半導体の本質的な特性によって決まる．動作周波数が与えられたとき，YIGスラブの厚さが薄い程MSSWの通過帯域(PB)の上限に達しない領域でv_pの小さい値をうることができ，v_0に対する制限が緩和される．(12)からわかるようにαはaに比例するからキャリア濃度の大きいものが望まれるが，試料抵抗の低下によるバイアス電圧が問題になる．MSSWのx方向への減衰も考慮すれば，薄い試料が有利であることがわかる．磁性薄膜の結晶生成はLPE法によって進められていて，かなり良質のものが得られるようになった．これらの点を考慮して以下の計算ではYIGは$a = 10\mu m$,[14] $4\pi M_0 = 1750 Gs$, $H_i = 600 oe$，半導体はInSbを仮定し，$b = 1\mu m$, $n = 10^{21}/m^3$, $\mu_y = 22 m^2/V\cdot s$ (at 77°K), $\varepsilon_s = 18.7$, $v_0 = 10^6 m/s$, $5\times10^5 m/s$とする．また誘電体の部分は真空とする．(10)の厳密な計算はDown-Hill法を用い，初期値はFMモードの値を採用している．図2

は周波数ωに対して，βと|α|を示したものである．計算機解はS＝±1のモードについて求めていて，$v_0=10^6$，5×10^5 m/sをパラメータにしている．|α|について破線で示したのが減衰領域を表わす．一点鎖線は(13)を数値計算したもので，このときβは半導体を含まないときのFMモードの値を用いているが，きわめてよい一致を示している．図からわかるように，α≧0の周波数は$\omega=v_0\beta$で与えられる．v_0が大きいほどα＝0の周波数は低くなり，利得の存在する帯域が広くなることがわかる．S＝−1モードの場合はS＝＋1に比べて利得の絶体値はかなり小さいが，動作帯域は広くなる．利得が小さくなるのは物理的に容易に推察できる．PBの上限，$\Omega_{\beta=\infty}=\Omega_H+1$，($\Omega=\omega/\omega_m$，$\Omega_H=\omega_r/\omega_m$)付近で利得が非常に大きくなる．この理由については後続の章で考察されるが，損失を無視したとき$\beta\to\infty$($v_g=0$)になるためである．しかし，この近傍はPBの上限に近いので波動自体が遮断特性によって大きく減衰する．

つぎに半導体を付加しないときの，v_0とω-βの関係(式7，図3)を若干検討しよう．YIGの厚さaを厚くすると$\partial\omega/\partial\beta$の大きい値の部分がβの小さい方に移動する．同じ図の中にキャリアのv_0で決まるω-βの関係を$v_0=10^6$，5×10^5 m/sの2つの場合についてプロットしている．(13)からわかるように，MSSWの曲線との交点の右方でαが正になる．また図からわかることはaが大きくなるほど，v_0に対してα＞0の条件が得にくいことを示している．たとえばa＝500μmの場合，α＞0はMSSWのPBの上限であり利得は期待できない．

図2の計算ではYIGの損失を無視しているが，損失によってαがとのように影響されるかを調べたのが図4である．S=+1モードに限定し，$U_0=10^6$m/s，他の定数は図2と同じものを用いた．図からわかる如く，YIGの共鳴吸収半値巾ΔHを0.5oeとすると，α=0を与える周波数はΔH=0に比べて100MHzも高い方に移動し，増幅可能な帯域巾$f_{AB\Delta H}$が狭くなる．ΔHを1oeとすると，$f_{AB\Delta H=1}/f_{AB\Delta H=0}\fallingdotseq 0.58$となり，損失効果が非常に大きいことを示す．

半導体とYIG間の空隙効果を(10)，(14)を計算することによって明らかにした．図5は$U_0=10^6$m/s，f=3.9GHz，その他の定数は図2と同じ値を用いて得た結果である．計算機解と近似計算結果とはよく一致している．$d_5=5\,\mu$mのときα_Rは0.55になり，$d_3=0$に比べてαがほぼ半分に減少することを示している．このような複合系では，その接合面での空隙の厚みをかなり慎重におさえる必要性のあることを示唆している．しかし半導体にYIGを密着した場合にU_0の減少が考えられるので，これによるαの低下とd_3の増大によるαの低下が相補的に調整されて始めてその適値が見出せるだろう．

3.5 $d_1=\infty$，$d_3=0$，$d_5\neq 0$の場合

今まではDE，FMモードについて考察してきた．ここでは$d_5\neq 0$のとき，S=−1で後進波モードを含む場合を検討しよう．YIGと金属板を組合した系として図1で$d_3=\infty$，$d_5\neq 0$についてVan De Vaart[12]，WamesとWolfram[13]，Bongianni[14]その他の人達が議論していて，S=−1でMSSWのPBがYIGと金属板間の空

障やd_5の部分の誘電率を変化させることによって変わることを示した．Masuda ら[5]は$d_3=0$，$b=\infty$，$d_5=\infty$のモデルについて，$v_0=0$でηを変化させたとき，β real, ω complex の条件の下で波動の伝搬特性を研究し，ηによってMSSWのPBが変化することを見出した．ここでは，v_0が存在するときに，波動の増幅特性をd_5をパラメータとして調べること，提案として，図1で半導体をd_5の領域に挿入してYIGに密着させたモデルにおいてd_5-bを一定にし，印加電界によってS=−1モードのPBを電気的に自由に制御し，高い周波数でMICされた信号処理素子の可能性を定性的に考察しようというものである．

前者の場合，(6)は(15)となる．

$$e^{2fa}=\frac{\zeta(\tanh fd_5-A)+B(A-\tanh fd_5)}{\zeta(\tanh fd_5+B)+B(A+\tanh fd_5)} \qquad (15)$$

$$\zeta=\frac{1}{\gamma_s'}\,\frac{\gamma_s'+\tanh\gamma_s b}{\gamma_s'\tanh\gamma_s b+1}$$

(15)を前節と同様にDown-hill法を用い，第2図と同じ定数で計算した結果を図6に示す．d_5が大きくなるに従い$\alpha>0$の領域は狭くなるが，利得は大きくなる．さらにd_5が増加するとPBはその極限において$S=+1$モードに収斂する．d_5のおのおのに対してPBの上限周波数でMSSWの群速度v_gが零になり，それより大きいβの領域では$v_g<0$の後進波モードに変わる．図2でも説明されたようにβの大きい所でαが大きくなることは認められるから各d_5で$v_g\sim 0$の点まではβと共にαは増加する．$v_g<0$でのαはどうなるか？$\beta\rightarrow$

∞ではFMモードの Ω_H+1 から $\Omega_H+\frac{1}{2}$ の周波数に近ずく．この周波数はS＝+1モードのPBの上限周波数と一致するから，α は大きくなることが予想される．これはまた別の角度からでも推測できる．すなわち，d_5 が十分大きくなればFMモードは存在せずDEモードに縮退することから容易に理解されよう．目下計算中であるが，現在のところ計算機による後進波モード領域での α の値は求まっていない．しかし，上で述べた理由により，$v_g=0$ の2点間の $v_g<0$ の領域では一点鎖線のような，fに対する α を期待してよいだろう．この事実から後進波モードの励起される領域を利用すれば，PBの上限付近で動作させた場合のような大きい損失を伴うことがないと考えられるし，$2\omega \doteqdot \omega_m$ の全周波数に亘って動作できる可能性があり，ω_m の大きいYIGの利用は大きいメリットの1つになる．さらに1つの利点はS＝-1モード（$d_5=0$）に比べて，v_p を小さくできるので v_0 に対する制限がかなり緩和できる可能性がある．

上で提案した構造について検討しよう．この場合は半導体の位置が図1と異なっているので，これを考慮すると，(6)でA→B，B→Aとすれば(6)はそのまま適用できる．S＝-1モードに対して

$$e^{2fa}=\frac{(A-1)\{B\gamma_s'(\gamma_s'\tanh fd_5\tanh\gamma_s b+1)-(\gamma_s'\tanh fd_5+\tanh\gamma_s b)\}}{(B+1)\{A\gamma_s'(\gamma_s'\tanh fd_5\tanh\gamma_s b+1)+(\gamma_s'\tanh fd_5+\tanh\gamma_s b)\}} \quad (16)$$

(16)の計算機解析は目下進行中である．さて，(16)で半導体を誘電体とし，それを d_5 に含めた場合，ω-β の関係を $a=10\mu m$，$500\mu m$，H_i は前者が6000e，後者は

1800 oe とし，YIG の $4\pi M_0$ は前と同じ 1750 Gs として，いろいろな d_5 に対して図示したのが図7である．図7(a)は d_5 を 0.5～15 μm まで変化させたときの ω-β の特性で，$v_0=10^6, 5\times10^5$ m/s に対するキャリア波の ω-β 曲線も同時に示しているが，$v_0=v_p$ の点は d_5 によって変化し，10^6 m/s ではすべて $v_g>0$ の範囲，すなわち前進波モードのみで得られるが，$v_0=5\times10^5$ m/s では d_5 のある値では後進波モードでこの点が存在することを知る．d_5 を与えて，v_g が零になる点における周波数と波数の関係をグラフにしたのが図8である．d_5 が小さい間の $\partial f/\partial d_5$，$\partial\beta/\partial d_5$ の変化は大きい．d_5 が 15 μm より大きくなると，FM モードは DE モードに近ずく．つぎに図7(b)を見よう．厚い試料で X バンドでの動作を期待して H_i を 1800 oe と大きくすると，Ω_H+1 の値は 10 GHz に達する．この場合も前と同様に d_5 をパラメータとして，ω-β の特性と，$v_0=10^6, 5\times10^5, 2\times10^5$ m/s に対するキャリア波の ω-β の関係を図示している．前図と異なり $v_g=0$ の点の β の値は非常に小さくなっている．したがって前進波モードでの v_p は非常に大きくなり，$v_0=v_p$ の条件はこの範囲では存在しない．d_5 に対する ω-β の模様も(a)図とは異なり，$d_5=500$ μm 以上でもかなり明白な後進波領域が存在する．このように d_5 の大きい値の存在は金属板と YIG の間に適当な寸法の半導体の挿入が可能だという点で意味がある．さらに簡単化された系での MSSW の振舞いを見るために，$b=\infty$，$d_5=\infty$ とすれば(16)から次式を得る．

$$e^{2ka}=(A-1)(B\gamma_s-k)/(B+1)(A\gamma_s+k)$$

この式のγ_sを変化させて，ω-βの興味ある特性を得ようというのが目的である．(11)は近似的に$\gamma_s^{1/2} \fallingdotseq 1+\mu_0\sigma v_p/\beta^2 + j\mu_0\sigma(v_p-v_0)/\beta$と表現して$v_0=0$のとき，Masudaらが$j\mu_0\sigma v_p/\beta$の$\sigma$を変化させて後進波を含むPBの可変特性を得ているのに対して，$\mu_0\sigma(v_p-v_0)/\beta$で$\sigma$を与えて$(v_p-\mu E_0)$によりPBを制御するところに眼目があり，$E_0$は高速に変化できるからPBが電界によって制御されることになる．詳しい結果については次の機会に報告する予定である．勿論，σを光その他で自由に制御できれば，それによってもPBが可変できるのは容易に理解されるだろう．

4. 増幅器の動作機構

増幅機構を説明する場合にMSSWに関してはYIGスラブの厚みは任意でよいが，半導体の厚みについてみると，MSSWは半導体中で一波長程度で減衰すると考えられるから，おのずと制限が生ずる．一般には薄い方が望ましい．図9でZ軸に直流磁界を印加すると，MSSWはy方向に伝搬する．一方半導体中のキャリアはy方向に漂流するとし，便宜上キャリアは本ールとする．磁性体のスピンの歳差運動の模様をMSSWの$\lambda/2$の間隔点A，Bに対して示している．xy平面での磁化成分M_Tについて調べる．A点でM_Tがx方向と一致するとき，$B=\mu_0(H+M)$の関係からM_Tと同方向をもつB成分（境界条件ではB_xの連続条件を利用）が存在する．特に両媒質の境界近傍ではV_{osA}とB_xとで大きいローレンツ力が生じ，キャリアは一方向に動かされ，支配的なホール起電力を発生し，電

流 i_{hA} が一定方向に流れる．これによる磁界 H_{hA} は M_T と垂直でy方向と一致する．磁化運動は $\dot{M} = |\gamma|(M \times H)$ で表わされ，MからHへと右手系をなす．もしMSSWを励起する磁界(H_{is})の位相を含めて H_{hA} が相加的であれば（$v_0 = v_p$ なるば $H_{hA} = 0$），歳差運動は助長するように働くであろう．A点からMSSWの半波長 $\lambda/2$ だけ離れた点Bでの様子を見よう．A点は近で磁化運動によって擾乱を受けたキャリアがB点において，もし $v_0 > v_p$ の関係があれば，同じ理由によって i_{hB} が一定方向に流れ，H_{hB} を発生させ，MとHhBの位相関係から歳差角が大きくなるように働くだろう．一方 $v_0 < v_p$ の

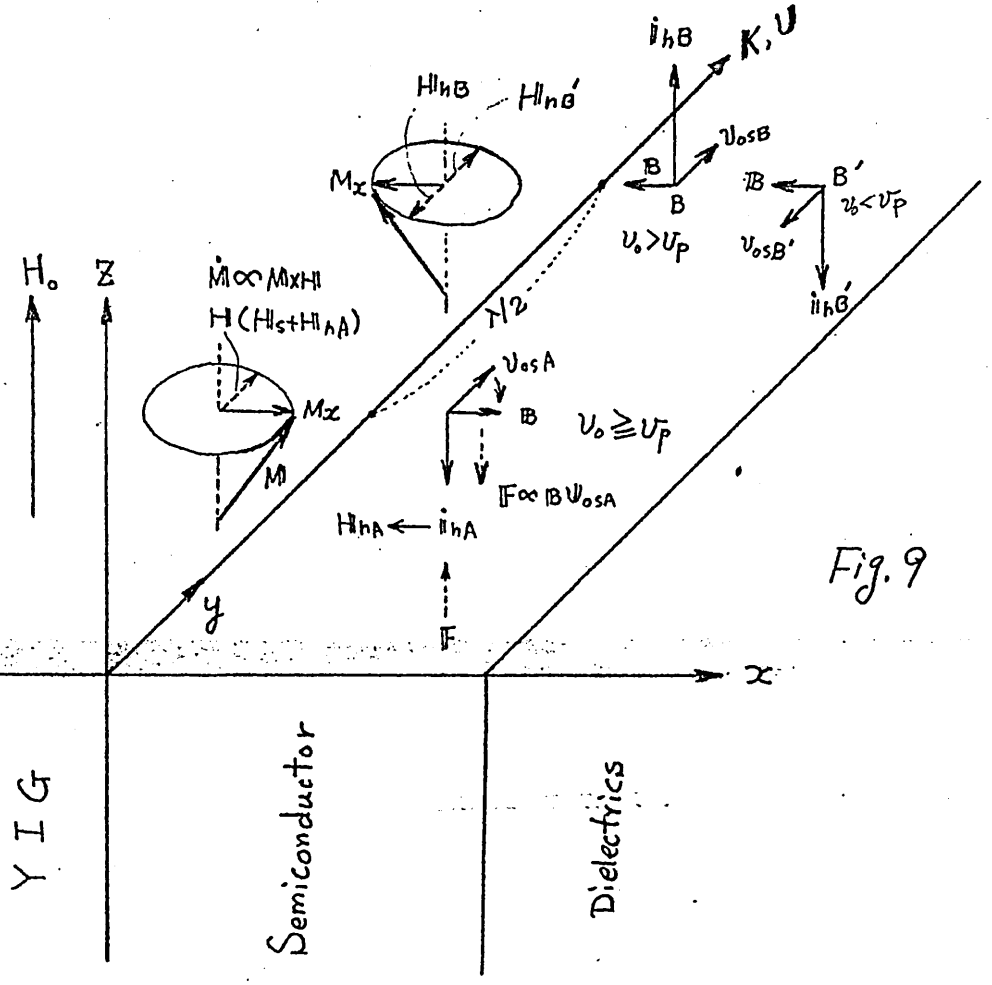


Fig. 9

場合B'点では，A点付近の擾乱を受けたキャリアはB'点の手前にあるので，等価的に$v_{osB'}$は$-y$軸方向に，$i_{nB'}$は$-z$軸方向に流れるので，これによる$H_{inB'}$は磁化角を減少させるようなトルクをMに与える．このような考えで$v_0 > v_p$の関係が必要であることが定性的に説明できる．もし，A点で$v_0 = v_p$のような同相条件を仮定し，B点で$v_0 > v_p$の関係があると，$(v_0 - v_p) \times B$が実質的な零点になる．

$v_0 - v_p$が大きい程利得が大きくなる理由は，(12)から容易に理解できる．別の角度から眺めてみると，Mの大きさが$|M \times H|$に比例し，Hはi_n，すなわち，$v_0 B$に比例するからである．また，v_0が大きい程キャリアの運動エネルギが増大することに起因すると見ることができよう．

MSSWの波数βが大きくなる程利得が増加するのは単位長さあたりに得るエネルギが大きくなるのためである．これらの内容は図6からかなり良く理解することができる．たとえば$d_5 = 3\mu m$の場合についてみると，v_0を与えて，$v_0 > v_p$で$\alpha > 0$となり，β，ωが共に増大する前進波領域ではω/βの変化割合が大きくないので，αの変化も大きくない．$v_g \sim 0$に近ずくに従い$v_0 - v_p$の差では説明できないαの増大がある．しかし，同じ$v_g \sim 0$でも，$S=+1$モードのPBの上限近傍でαがさらに大きくなっているのは，ωが$\Omega_H + \frac{1}{2}$でβが非常に大きくなり，逆にv_pが減少し，$v_0 - v_p$の等号が大きくなるためと考えられる．いずれにしてもPBの上限という点では考慮する必要がある．このように$v_0 > v_p$なるばスピン系は常に粒子系から正のエネルギ

を受取れると考えてよい

上のような結合系の波動増幅機構については運動する非線形媒質中の波動のエネルギや電力流および媒質に吸収されるエネルギの相互関係から明解に説明できることをMusha[15,16]が報告している.

目下，実験を行なっているが，上で見たように，YIGは薄膜(LPE)であることが望まれるにもかかわらず，$a=100$，$500\mu m$の試料であり，半導体はInSbを用いているが十分薄く(現在$100\mu m$)できない点など隘路が多い．既に述べた如く(12)から明らかなように，αはσに比例するし，ηを大きくすれば高い利得が得られるから，μの大きい薄膜状の半導体が仕様のものとなる．

5 おわりに

本論文では金属板，誘電体，半導体とYIGスラブで組合された方形構造に対して，二次元解析により分散関係式を求め，それを検討したものである．以下でその内容を要約する．

1. 導出された分散方程式はかなり広い適応性(一般性)があることを示した．
2. MSSWの増幅は$v_0>v_p$で得られることを分散方程式の近似計算によって示した．
3. 半導体とYIG間の空隙効果は顕著で，たとえば，$d_5=5\mu m$のとき，~~$d_5=0$のとき~~，$d_5=0$に比べてαが45%も減少する．
4. 後進波モードが励起される状態でd_5を適当に調

整すれば，高利得，広帯域特性が期待できる．

5. YIGの損失を導入した計算によると，ΔHはαを減少さすのは勿論であるが，この値が1oeで増幅可能な帯域がΔH=0oeに比べて，42%も小さくなることを見いだした．

さらに，われわれのモデルを詳細に検討することが残っている．また，LPE法などによる試料の薄膜化が一般的になれば，かなり高いマイクロ波領域においてMICされたMSSW磁気同調形増幅器が構成されるだけでなく，信号処理という点でも非常に興味がある．

最後に，本研究で信号処理と関連した内容について討論して載いた増田正光博士に感謝の意を表わす．

文献

1. Sethares, J. C., and Stiglitz, M. R.: "propagation loss and MSSW Delay lines. IEEE MAG 10, 3, PP. 787, 1974

2. Chang, N. S., and Matsuo, Y.: "possibility of utilizing the coupling between a backward wave in YIG and waves associated with drift carrier stream in Semiconductor," IEEE 56, pp. 765. 1968, "磁性体と半導体の複合系における電磁波の伝搬特性", IEEE 57-8-7, pp. 474, 1974, 張松尾，増田，車両研資料 S-48, 10, 5.

3. 大槻，栗井，池上 "磁性体－半導体系における電磁波の伝搬特性" IECE, MW 73-114 (02-1974)

4. Kawasaki, K., Takagi, H., and Umeno, M.: "The interaction of surface magnetostatic wave with drifting carriers in Semiconductors",

IEEE MTT-22, PP. 918, 1974.

5. Masada, M., Chang, N.S., and Matsuo, Y.: "Magnetostatic surface waves in ferrite slab adjacent to semiconductors," IEEE MTT-22 pp.132, 1974

6. Vashkovskii et al, "Interaction of surface magnetostatic waves on a ferrite-semiconductor interface", JETP. 16, pp 4, 1972

7. Schlömann, E.; "Amplification of magnetostatic surface waves by interaction with drifting charge carriers in crossed electric and magnetic fields JAP 40, 3, PP. 1422, 1969

8. Chang, N.S., S. Yamada, and Matsuo, Y.: Characteristics of MSSW propagation in a layered structure consisting of metals, dielectrics, a semiconductor and YIG", Electronics letter Vol. 11, 4, 1975

9. 張, 松尾, "磁性体と半導体の複合系における表面静磁波の伝搬特性" IECE 58-B, 6 (to be published)

10. Damon, R.W., and Eshbach, J.R. J. phys. Chem. solid 118, pp. 308, 1960

11. Seshadri, S.R. IEEE 58, PP. 506, 1970

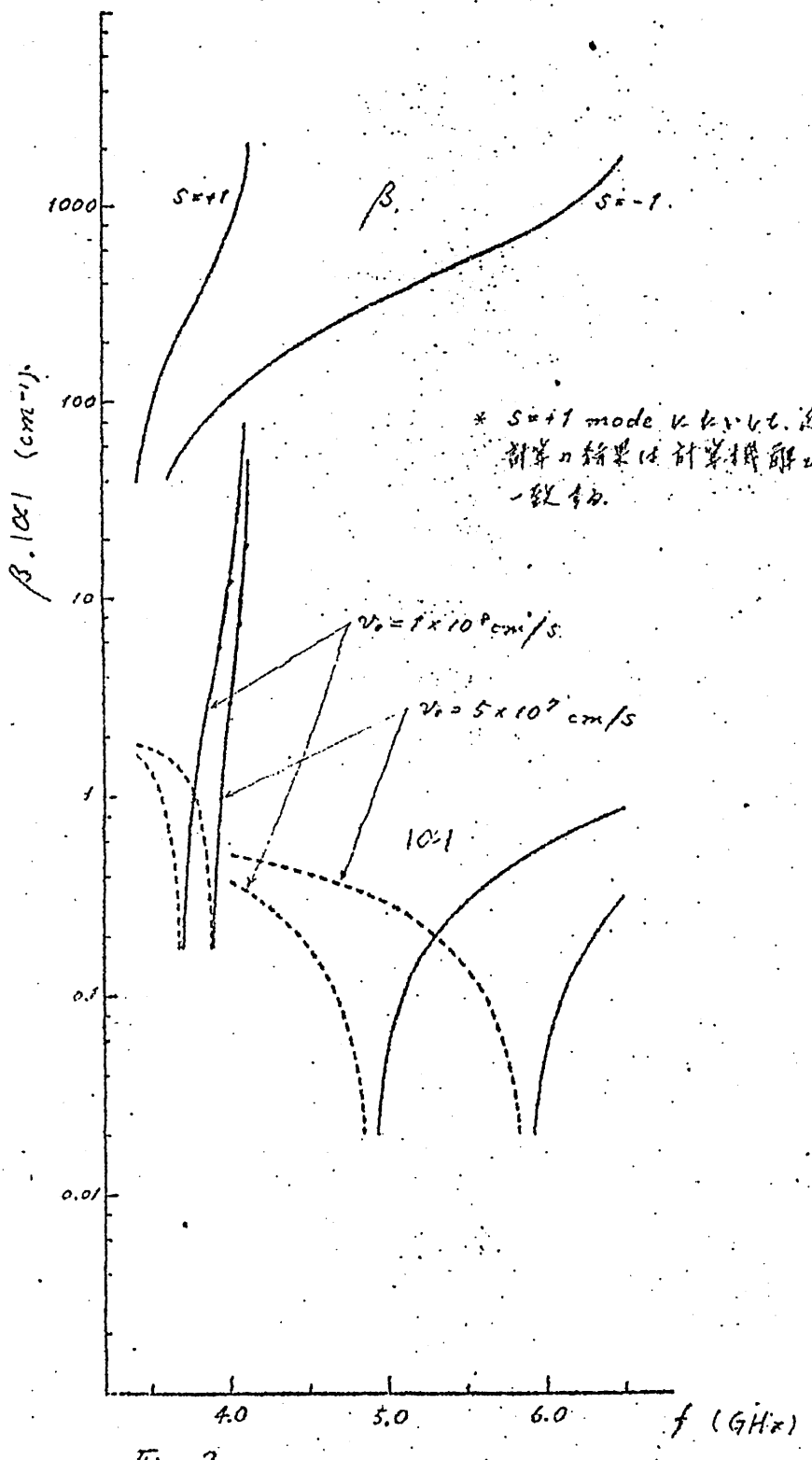
12. Van De Varrt, H. Electron. Lett. 6, PP. 601, 1970

13. DE Wames, R.E. and Wolfram, T. J. Appl. phys. 41, 13, PP. 5243, 1970

14. Bongianni, W. L. J. Appl. phys. 43, 6, pp. 2541, 1972

15. Musha, T. IECE 51, 6, PP. 760, 1968

16. Musha, T. and Agu. M, J. phys. Soc. Japan, 26, pp. 541, 1969



1000
100
10
1
0.1
0.01
β.|α| (cm⁻¹)
S=+1
β.
S=-1
* S=+1 mode にたいして、近似計算の結果は計算機解とほぼ一致する。
v₀ = 1×10⁸ cm/s
v₀ = 5×10⁷ cm/s
|α|
4.0
5.0
6.0
f (GHz)

Fig. 2

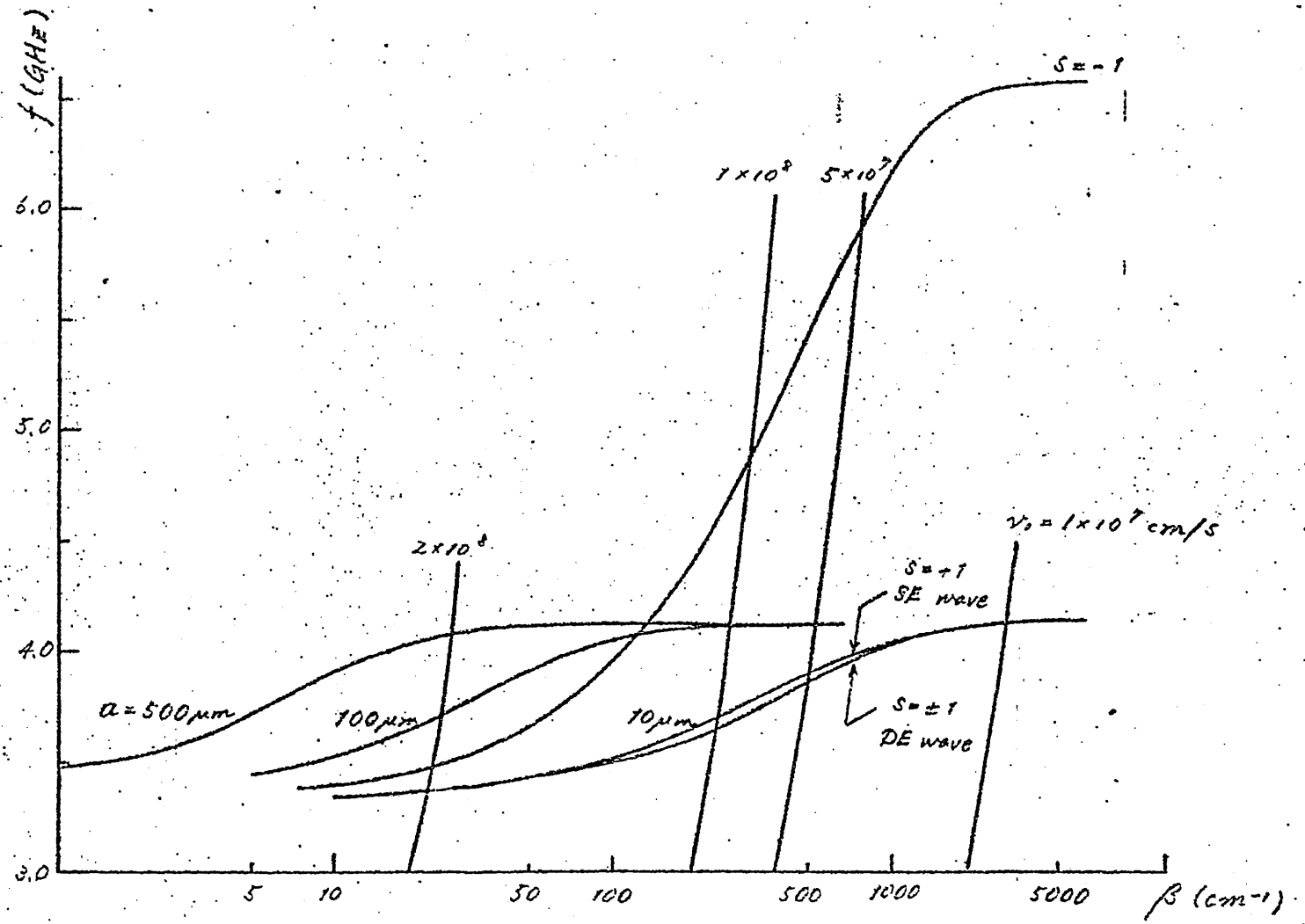

f (GHz)
6.0
5.0
4.0
3.0
5
10
50
100
500
1000
5000
β (cm⁻¹)
S = -1
1×10⁸
5×10⁷
2×10⁸
V₀ = 1×10⁷ cm/s
S = +1
SE wave
S = ±1
DE wave
a = 500 μm
100 μm
10 μm

Fig. 3

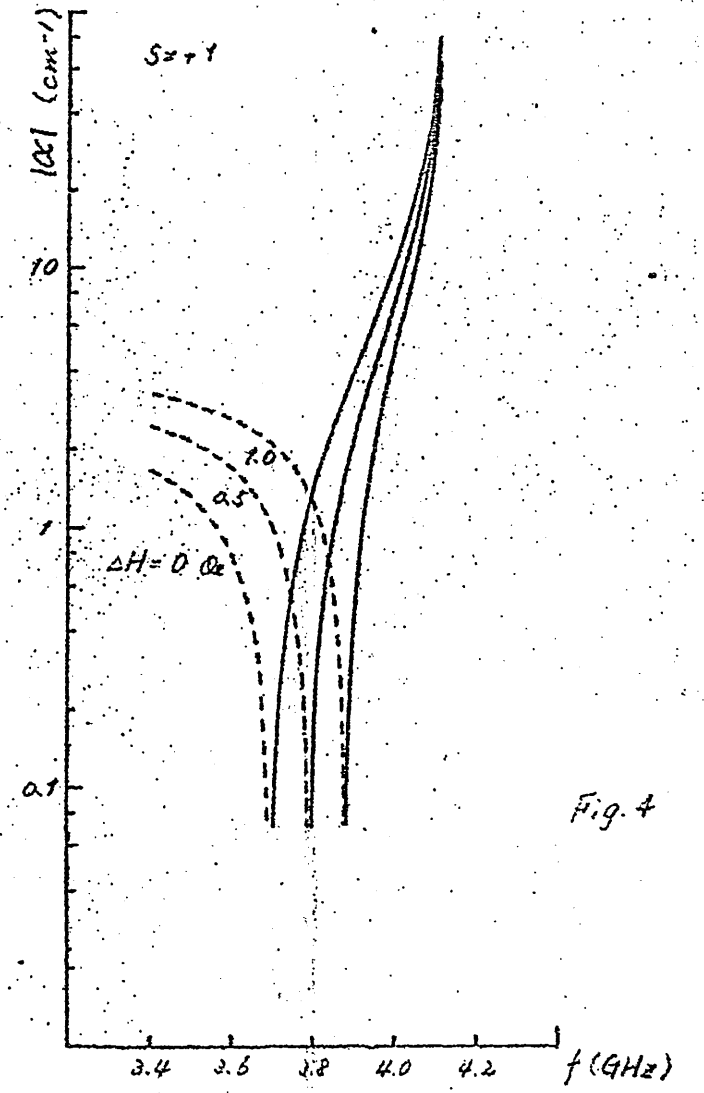

Sz=1
|α| (cm⁻¹)
10
1
0.1
1.0
0.5
ΔH=0 Oe
3.4
3.6
3.8
4.0
4.2
f (GHz)

Fig. 4

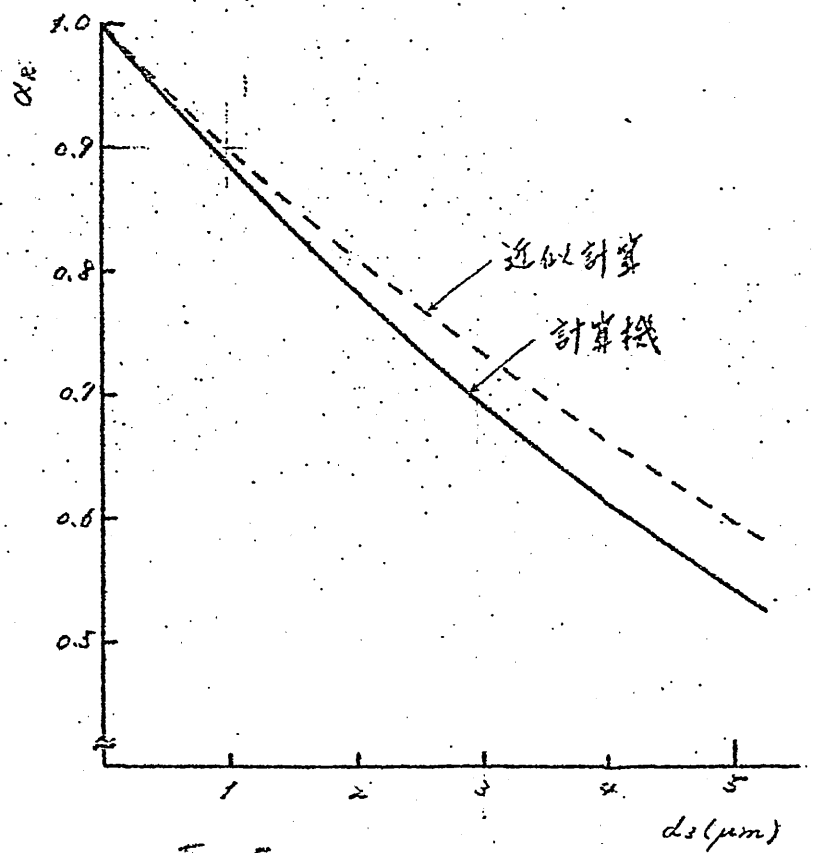

1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
αR
近似計算
計算機
1
2
3
4
5
d₂ (μm)

Fig. 5

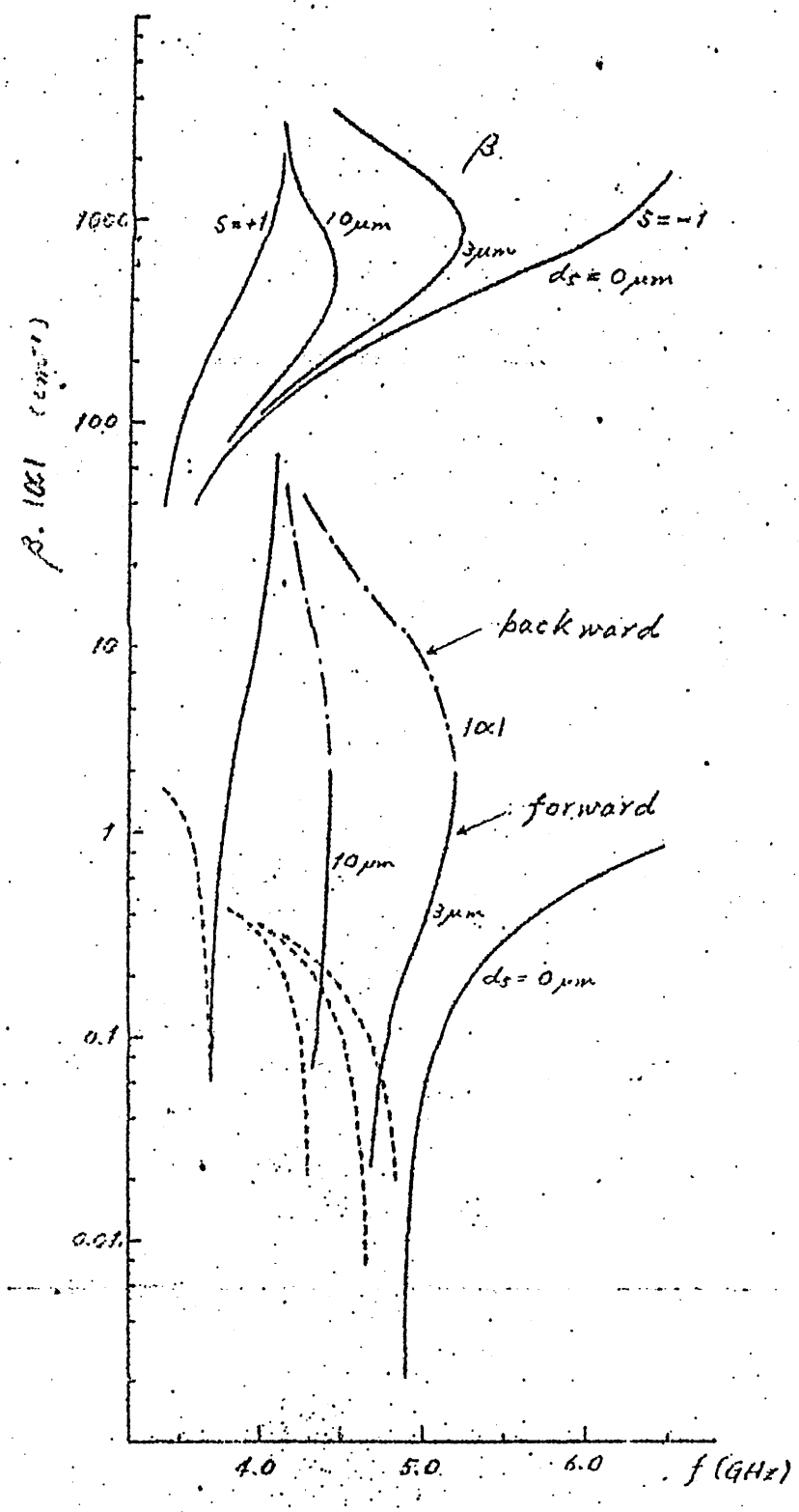

β
S=+1
10μm
3μm
S=-1
d_S = 0μm
1000
100
10
1
0.1
0.01
β, |α| (cm⁻¹)
backward
|α|
forward
10μm
3μm
d_S = 0μm
4.0
5.0
6.0
f (GHz)

Fig. 6

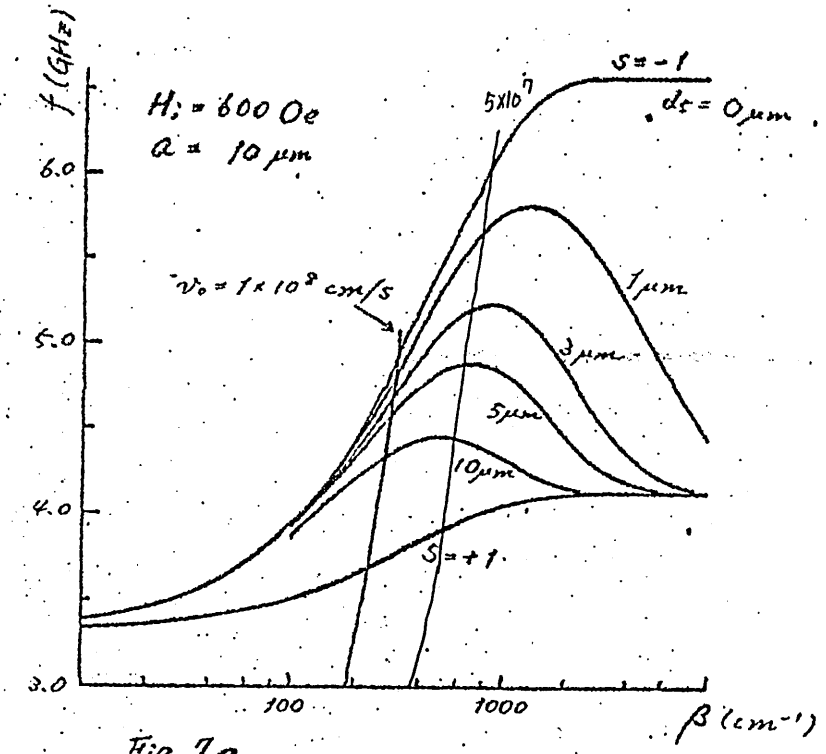

f (GHz)
H_i = 600 Oe
a = 10 μm
5×10^7
S = -1
d_s = 0 μm
$v_0 = 1\times10^8$ cm/s
1 μm
3 μm
5 μm
10 μm
S = +1
6.0
5.0
4.0
3.0
100
1000
β (cm⁻¹)

Fig. 7a

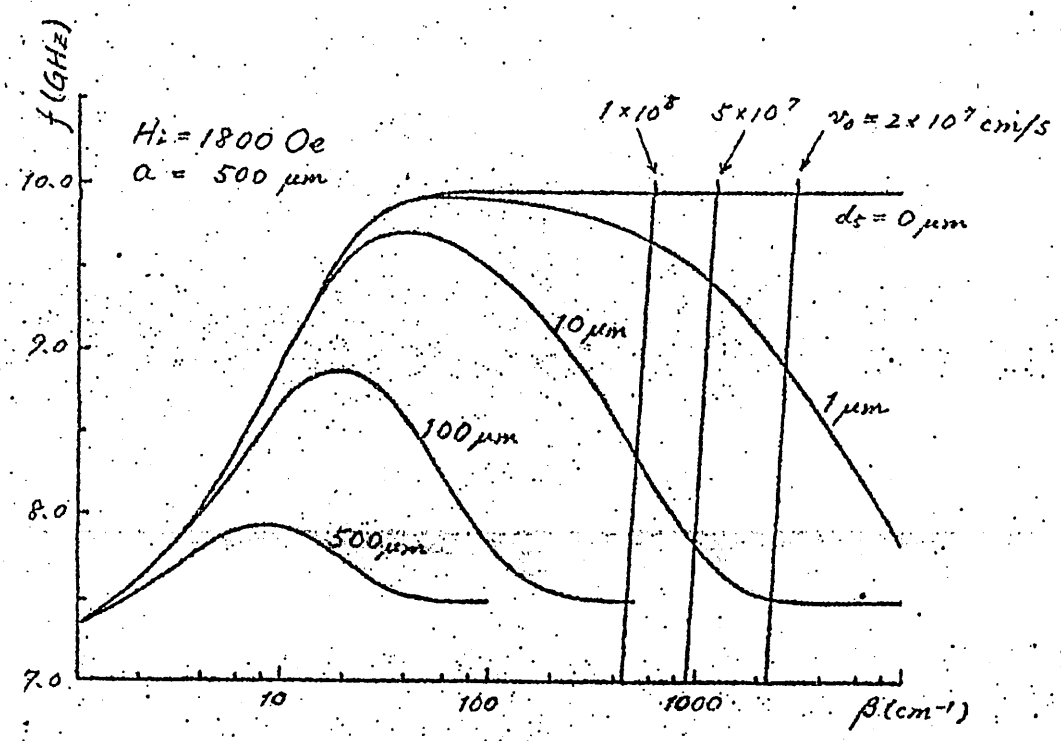

f (GHz)
H_i = 1800 Oe
a = 500 μm
1×10^8
5×10^7
$v_0 = 2\times10^7$ cm/s
d_s = 0 μm
10 μm
1 μm
100 μm
500 μm
10.0
9.0
8.0
7.0
10
100
1000
β (cm⁻¹)

Fig. 7b

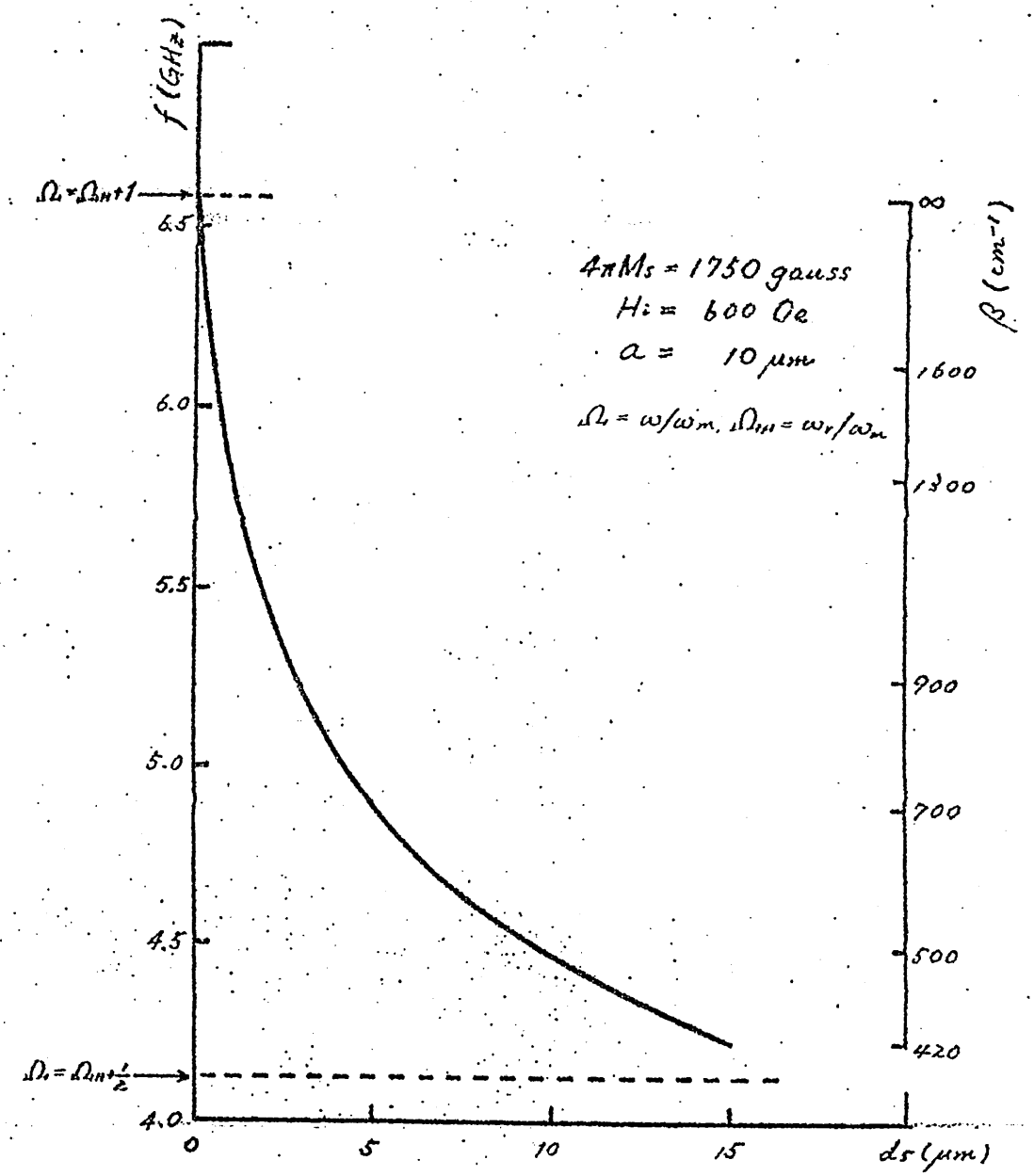

f (GHz)
$\Omega_1 = \Omega_{m1} + 1$
6.5
6.0
5.5
5.0
4.5
$\Omega_1 = \Omega_{m1} + \frac{1}{2}$
4.0
0
5
10
15
d_s (μm)
$4\pi M_s$ = 1750 gauss
H_i = 600 Oe
a = 10 μm
$\Omega = \omega/\omega_m$, $\Omega_{m1} = \omega_r/\omega_m$
β (cm⁻¹)
∞
1600
1300
900
700
500
420

Fig. 8

輻射科学研究会資料

レンズ状媒質のモード分散効果について

橋本正弘

（三菱電機株式会社）

昭和50年4月25日
（於 阪大産研）

電波科学研究会資料

レンズ状媒質のモード分散効果について

橋本正弘
（三菱電機株式会社）

1. 主な記号

x = 横方向座標
y = 〃 （この方向には界は一様）
z = 伝搬方向座標 （$z=0$ がガイドの入口, $z=L$ が出口）
n_0 = $x=0$ 上の屈折率
g = 媒質定数
k_0 = 自由空間の波数 ($=\omega/c_0$)
k = $k_0 n_0$
S_0 = 媒質の特性スポット ($=1/\sqrt{kg}$)
S_1 = ロンチング スポットサイズ（$z=0$ において）
ξ = x/S_0 規格化座標
ξ_1 = x_1/S_0, x_1 = ロンチング点
Ω = gz
Ω_L = gL
σ = $g^2 z/2k$
ϕ = y方向電界 E_y から e^{-jkz} を除いた量 $=\phi(\xi,\Omega,\sigma)$
ϕ_0 = 準幾何光学界 $=\phi(\xi,\Omega,0)$
ρ,θ = $(x=0, z=L)$ を原点とする円座標系
ω_0 = 光のキャリア角周波数
t_r = 遅延時間 ($\equiv t-z/v_g$; v_g= 均質媒質 n_0 の群速度)
α = $k_0 S_0 \sin\theta \sim k_0 S_0 \theta$

2. まえがき

屈折率がゆるやかに変化している（放物形屈折率）光ガイドの伝搬モードの位相速度はそれぞれ異っているが，エネルギを伝える群速度はほとんど等しい．このような光ガイドを伝搬する光ビームは，各モードの位相速度差によって，等価的に単振動の軌跡を描き，群速度が等しいことから，ビーム形状が周期的に変化する．このようなWeakly guideにおける伝搬ビームの振舞はSchrödinger方程式で記述されるため，等価的に調和振動子の理論に帰着できる．[1,2] あるいはまたこれと一対一に対応するray technique[3]を用いてビームを解析できる．これが準幾何光学である．

一般に，ガイドの媒質条件に合致した入射ビームでロンチングを行えば，ガイドには基本モードのみが伝搬する．しかし，そのロンチング精度は1μm以内でなければならない．通常，現度のロンチングでは，10数モード以上励起され，したがって伝搬するビームは上でえた不整合ビームと考えられる．
調和振動子理論もしくはray techniqueの物理概念が広く定着しているにもかかわらず，これらが適用できるガイド長はせいぜい数Cm程度である．伝搬距離が10cm（単振動回数～50，位相～10^6radian）と仮定すると各モードのわずかな群速度の差の効果が表われ，これによってビームの形状がくずれ始める．これが，次で取り上げるモード分散効果である．
モード分散効果を仮りに，調和振動子モデルでたとえるならば，振動子自体が，その初期形状に依存して時間的に変形する効果であり，Schrödinger方程式からは生じない概念である．

北野等[4]はモード展開理論を用いて特殊な条件の下で数値

解析を行い，Selfoc lenses で予想したモード分散効果を観測した．本来，これは，信号伝送の立場では，それほど問題とならないかもしれない（高々数10モードであるから，一般的に言われているマルチモード伝送ほど高次モードが伝送されないので），レーザ光源として使用する空間的ビーム伝送の上で無視できないであろう．

本文では，ビームから準幾何光学的諸量を除去してモード分散効果のみを単独に取り扱えることを示し，モード分散効果によるビーム形状の変形が，等価入力ビーム波形で励起された（モード分散効果のない）理想レンズガイドを伝搬するビームとして簡単に解析できることを示す．また逆に，この効果を入力側あるいは出力側で等化するシステムの可能性についても言及する．
本方法を拡張すれば，媒質の分散を含めた，時間的信号波形の分散にも適用できる．特にパルス信号に対して具体例を与えている．

3. 準幾何光導波

伝搬方向を z，これに直交する横方向座標を x とする．y 方向には物質および界は一様であると仮定する．$z=0$ をガイドの始点，$z=L$ を終点とする．x 方向の屈折率分布が

$$n(x)=n_0\sqrt{1-(gx)^2} \qquad (1)$$

である放物形のガイドの伝搬モードはエルミート・ガウシャン形で表わされ，その伝搬定数 β_n ($n=0,1,2,\cdots$) は次式で与えられる．

$$\beta_n=k\sqrt{1-\frac{2g}{k}\left(n+\frac{1}{2}\right)} \qquad (2)$$

通常，媒質定数 g は $3\,mm^{-1}$，k は $1.6\times10^{4}\,mm^{-1}$ (HeNe) 程度であるため，伝搬定数はほとんど屈折率が n_0 である一様媒質の伝搬定数に等しく，したがって平面波に近い (locally plane wave) 波動が伝搬する．β_n の n に依存するわずかな違いがモードの性質を特徴づけている．高次モードは近軸を蛇行しながら進む局所的平面波であると解釈される．特に基本モード ($n=0$) は

$$S_0=1/\sqrt{kg} \qquad (3)$$

のスポットサイズのまま蛇行しないビームである．この意味で，S_0 は媒質の特性スポットサイズと呼ばれている．

今，$z=0$ のガイドの始点において スポットサイズ S_1 の入射ガウスビームで $x=x_1$ の所にコンテングを行うとする．

$$\varphi_{input} = \sqrt{\frac{S_0}{S_1\sqrt{\pi}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-x_1)^2}{S_1^2}} \qquad (4)$$

もし, $S_1 = S_0$, $x_1 = 0$ のとき基本モードのみが伝送される. しかし, $S_1 = S_0$ $x_1 = 2S_0$ のとき, 約 10 モード程度励起される. S_0 は約 4μm であるから, この程度のモード数は通常のエンチング精度で起り得る数である. しかし, モード展開理論では, この程度のモード数でさえ, 物理的イメージが曖昧となり, 解析においても計算機を用い

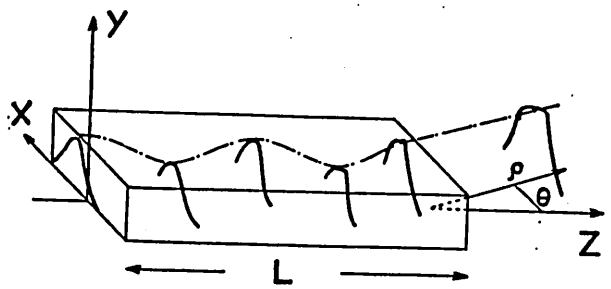


図1. ガイドを伝搬する不整合ビームの強度分布の変化

た数値解析を行わねばならない. しかし, Weakly guide として ray technique を用いると このような不整合ビームは簡単な形で表現され, その物理的イメージも明確となる. 本節では, まず, このような準幾何光学界の方程式 (Schrödinger 方程式) とモードの伝搬定数と波動方程式から導き出, その一般解を与える公式を紹介する.

Δ_0 で規格化した横方向座標 ξ を用いる.

$$\xi = x/\Delta_0 , \quad \xi_1 = x_1/\Delta_0$$

これを, 波動方程式は次のように書き表わせる.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \xi^2\right) F_y + \Delta_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) F_y = 0 \qquad (5)$$

さて, β_n を Weakly guide (Δ が十分小さい) と仮定すると

$$\beta_n z \sim kz - (n+\tfrac{1}{2})\Omega \qquad (6)$$

と近似できる. モードの伝搬を $\exp[-j\beta_n z]$ とするとモード数に無関係に位相項 $\exp[-jkz]$ が係数として表われる. したがって

$$F_y = \phi e^{-jkz} \qquad (7)$$

とおく. Ω と z とは独立な変数とすると n モードに対して次のような式の変形を行える. すなわち F_y は $e^{j(n+\frac{1}{2})\Omega}$ なる Ω 依存性があるから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\Omega} F_y &= j(n+\tfrac{1}{2}) F_y \\
&= j\tfrac{1}{2}\Delta_0^2 (k^2 - \beta_n^2) F_y \\
&= j\tfrac{1}{2}\Delta_0^2 \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F_y \\
&= j\tfrac{1}{2}\left(\xi^2 - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right) F_y \\
&= j(n+\tfrac{1}{2}) F_y
\end{aligned} \qquad (8)$$

となる. ただし

$$n = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \xi^2 + 1\right) \tag{9}$$

この段階で，E_y は n に無関係としてよい．さらに $\exp[-jkz]$ を除くと，ϕ に対する Schrödinger タイプの方程式を得る．

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi + j\frac{\partial}{\partial\Omega}\phi = 0 \tag{10}$$

これが準幾何光学界の基本方程式である．この方程式の解を特に ϕ_0 とすると，任意の点の界 $\phi_0(\xi,\Omega)$ と $z=0$ における界 $\phi_0(\xi,0)$ の間に次式の関係を見い出せる．(5)

$$\phi_0(\xi,\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\xi',0)\,\Phi_0(\xi,\Omega;\xi')\,d\xi'$$

$$\phi_0(\xi,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\xi,\Omega)\,\Phi_0^*(\xi',\Omega;\xi)\,d\xi' \tag{11}$$

ただし $*$ は複素共役，Φ_0 は

$$\Phi_0(\xi,\Omega;\xi') = \sqrt{\frac{j}{2\pi\sin\Omega}}\; e^{-j\frac{1}{2}(\xi^2+\xi'^2)\cot\Omega} \cdot e^{j\xi\xi'\operatorname{cosec}\Omega} \tag{12}$$

である．式(12)から，準幾何光学界の振幅は入射条件にかかわらず $\Omega=2\pi$ ($z=2\pi/g$) で元にもどり，以下周期的にくり返す．
式(4)で与えられる入射条件を式(11)に代入すると

$$\phi_0(\xi,\Omega)=\sqrt{\frac{S_1}{S_0\sqrt{\pi}}}\cdot\sqrt{\frac{\Gamma}{\xi_1}}\cdot e^{-\frac{1}{2}A\xi^2+\Gamma\xi-\frac{1}{2}\Gamma\xi_1\cos\Omega}$$

$$A=(S_0^2\cos\Omega-jS_1^2\sin\Omega)/(S_1^2\cos\Omega-jS_0^2\sin\Omega)$$
$$\Gamma=S_0^2\xi_1/(S_1^2\cos\Omega-jS_0^2\sin\Omega) \qquad (13)$$

を得る. 式(13)は, ray technigueを拡張した, Felsenの漸近展開法で求めた結果と一致する. 式(13)で $S_1=S_0$ とすると ϕ_0 のスポットサイズはつねに S_0 となり, その中心軌道はSnellの法則で得た近軸軌道 $x=x_1\cos\Omega$ に一致する. このときの波面は中心軌道に垂直である. 半周期 ($\Omega=\pi$ または $z=\pi/g$) でx方向に対して一回の反射があると考えると, この反射で位相が $\pi/2$ 進む. これを考慮すると, 中心軌道上の位相は全く幾何光学で求められる. S_1 で入射されたビームは S_0 のビームの和として表わせる. したがって式(13)は上記の方法によらず, 幾何光学のみで導出できる.

式(11)は ようど フーリエ変換の形をしている. この積分表示に対して式(10)から直接, 微分表示式を導びける.

$$\phi_0(\xi,\Omega)=e^{j\Omega(n+\frac{1}{2})}\phi_0(\xi,0)$$
$$\phi_0(\xi,0)=e^{-j\Omega(n+\frac{1}{2})}\phi_0(\xi,\Omega) \qquad (14)$$

ただし $e^{j\Omega(n+\frac{1}{2})}\equiv 1+j\Omega(n+\frac{1}{2})/1!+(j\Omega)^2(n+\frac{1}{2})^2/2!+\cdots$

$\phi_0(\xi,0)e^{-jkz}$ は入射ビームの形を保ちながら直進するビームを表わす. したがって横方向演算子 $\exp[j\Omega(n+\frac{1}{2})]$ によって蛇行の特性が生じる. もしガイド長Lが十分小さいとすると出力ビームは次のように近似できる.

$$\phi_0(\xi,\Omega_L) \sim \phi_{10}(\xi,0) - j\Omega_L(n+\tfrac{1}{2})\phi_{10}(\xi,0) - \tfrac{1}{2}\Omega_L^2(n+\tfrac{1}{2})^2\phi_{10}(\xi,0) \qquad (15)$$

右辺第2項がこのレンズを通過することによって生じる位相歪，第3項が振幅歪を表わしている．これらの項は単に横方向の微分演算によってよく知られるため，解析する上で便利であろう．

さて，通常カメラはガイドの後ろの遠方で観測される．ガイド長Lを通過した準幾何光学界の遠方界は2次元のKirchoff-Huygens積分で与えられる．

$$\varphi_0^{far}(\alpha,\Omega_L) = \sqrt{\frac{k_0 S_0}{2\pi\rho}}\, e^{-jk_0\rho + j\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi';\Omega_L)\, e^{j\alpha\xi'} d\xi' \qquad (16)$$

ただし $\alpha \equiv k_0 S_0 \sin\theta \sim k_0 S_0 \theta$ である（図1参照）．
式(11)および式(12)を上式に代入すると

$$\varphi_0^{far}(\alpha,\Omega_L) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\xi',0)\, \Phi_0^{far}(\alpha,\Omega_L;\xi')\, d\xi'$$

$$\Phi_0^{far}(\alpha,\Omega_L;\xi') = \sqrt{\frac{k_0 S_0}{\rho}}\, e^{-jk_0\rho}\, \Phi_0(\alpha,\Omega_L+\tfrac{\pi}{2};\xi') \qquad (17)$$

を得る．さらに式(11)と比較すれば次式の関係を見いだせる．

$$\phi_0^{far}(\alpha,\Omega_L) = \sqrt{\frac{k_0 S_0}{\rho}}\, e^{-jk_0\rho}\, \phi_0(\alpha,\Omega_L+\tfrac{\pi}{2}) \qquad (18)$$

これは，遠方界とガイド出力端面の界がフーリエ変換の関係にあることおよび，ガイド長 $\pi/2g$ ($\Omega=\pi/2$) はレンズ効果によりやはりフーリエ変換の作用があること，から 遠方界パターンが $L+\pi/2g$ 長さのガイドの出力パターンに等しいことを意味している．
したがって式(18)より，式(13)で与えられる界の遠方界は次のように書ける．

$$\varphi_0^{far}(d,\Omega_L)=\sqrt{\frac{k_0 S_0^2}{\rho}}\,e^{-jk_0\rho+j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{S_1}{S_0}}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\Gamma}{A\xi_1}}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{d^2}{A}+j\frac{\Gamma}{A}d+j\frac{1}{2}\frac{\Gamma}{A}\xi_1\sin\Omega_L} \tag{19}$$

以上に述べた準幾何光学界に対する解析は，従来からよく知られている ray technique，調和振動子理論 (Hamilton theory)，あるいは流体力学モデル[6]等のいづれを用いても導出でき，また各々違った物理イメージで説明づけられる．

4. モード分散効果

入射ビームがガウス形であるなら，準幾何光学界の遠方界も入射位置によらずやはりガウス形である．図2に，$L=94.5$mm のSelfocファイバを通過したビームの遠方強度パターンの実測値を示す．入射条件は $S_1\sim S_0=4.5\mu$m，$\chi_1\sim 0$ であるが，いづれも約5μm以内の誤差を含んでいる．このような界分布のみだれは準幾何光学では説明できない．この程度のガイド長でかつ，標準的な機械精度の誤差でモード分散効果が現われる．

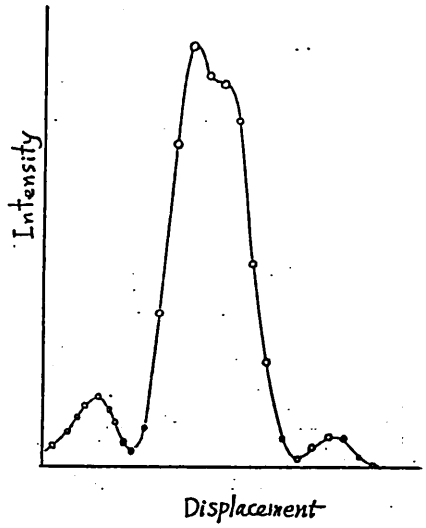


図2. モード分散効果による遠方強度分布の変形. 理想レンズガイドではガウス分布となる. 横軸はAPD受光素子の位置の変位量である. (藤田暁氏, 三菱電機, 提供)

せいぜい数Cmの光コンポーネント間をこの種のガイドでビームを導く時でさえ, この望ましくない効果が現われる可能性がある. しかし, これは媒質の性質およびガイドの長さに帰因するものであるから, 何らかの方法で除去できるかもしれない. そこで, まず, ここではモード分散効果のみを取りあげて議論する.

式(6)で与えた伝搬定数β_nの近似精度をさらに高めると

$$\beta_n \simeq k - (n+\tfrac{1}{2})\Omega - (n+\tfrac{1}{2})\sigma \qquad (20)$$

と書ける．次で $\sigma = g^2 z / 2k$ である．式(20)の右辺は k, z, g の3つのパラメータが含まれている．その意味で，kz, Ω, σ と全く独立な3変数とみなせる．ϕ をモード n の界とすると Ω および σ の依存性が $\exp[j(n+\frac{1}{2})\Omega + j(n+\frac{1}{2})^2\sigma]$ であることより

$$\frac{\partial^2}{\partial\Omega^2}\phi - j\frac{\partial}{\partial\sigma}\phi = 0 \qquad (21)$$

を得る．次で ϕ は一般界としてよい．式(10)に示すように $n+\frac{1}{2} = -j\partial/\partial\Omega$ であるから，上式と次のように書き改められる．

$$D_\xi \phi + j\frac{\partial}{\partial\sigma}\phi = 0 \qquad (22)$$

ただし

$$D_\xi \equiv (n+\tfrac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} - \frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{4}(\xi^4 - 2) \qquad (23)$$

次で，$\phi(\xi, \Omega, 0) = \phi_0(\xi, \Omega)$ である．したがって式(22)の解の初期値は前節で求めた準幾何光学界である．モード合成を含む界 ϕ は形式的に横方向演算子と準幾何光学界との積の形で与えられる．

$$\phi(\xi, \Omega, \sigma) = e^{j\sigma D_\xi}\phi_0(\xi, \Omega) \qquad (24)$$

また逆に

$$\phi_0(\xi,\Omega) = e^{-j\sigma D_\xi}\phi(\xi,\Omega,\sigma) \qquad (25)$$

である。特に D_ξ が n で構成されているため n と D_ξ の交換法則が成立する（$nD_\xi = D_\xi n$）。したがって式(14)と式(24)より以下に示すような式の変形をできる。

$$\begin{aligned}\phi(\xi,\Omega,\sigma) &= e^{j\sigma D_\xi}\cdot e^{j\Omega(n+\frac{1}{2})}\phi_0(\xi,0)\\ &= e^{j\Omega(n+\frac{1}{2})}\cdot e^{j\sigma D_\xi}\phi_0(\xi,0)\\ &= e^{j\Omega(n+\frac{1}{2})}\phi(\xi,0,\sigma)\end{aligned} \qquad (26)$$

ただし $\phi(\xi,0,\sigma) = e^{j\sigma D_\xi}\phi_0(\xi,0)$ である。上式は，モード分散効果が等価的に $\phi(\xi,0,\sigma)$ の入射ビームで励起された理想レンズガイドを伝搬するビームであることを意味している。この逆についても同じことが言える。図ろにこれを示す。
遠方界についても同様である。式(24)に対応して

$$\phi^{far}(\alpha,\Omega_L,\sigma) = e^{j\sigma D_\alpha}\phi_0^{far}(\alpha,\Omega_L) \qquad (27)$$

なる関係を導びけ，したがって上記の等価性を積分表現すれば

$$\begin{aligned}\phi(\xi,\Omega,\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi_0(\xi',0,\sigma)\Phi_0(\xi,\Omega;\xi')d\xi'\\ \phi^{far}(\alpha,\Omega_L,\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi_0(\xi',0,\sigma)\Phi_0^{far}(\alpha,\Omega_L;\xi')d\xi'\end{aligned} \qquad (28)$$

となる。次で D_α は $\xi\to\alpha$ の違いだけで D_ξ と全く同じ演算子である。

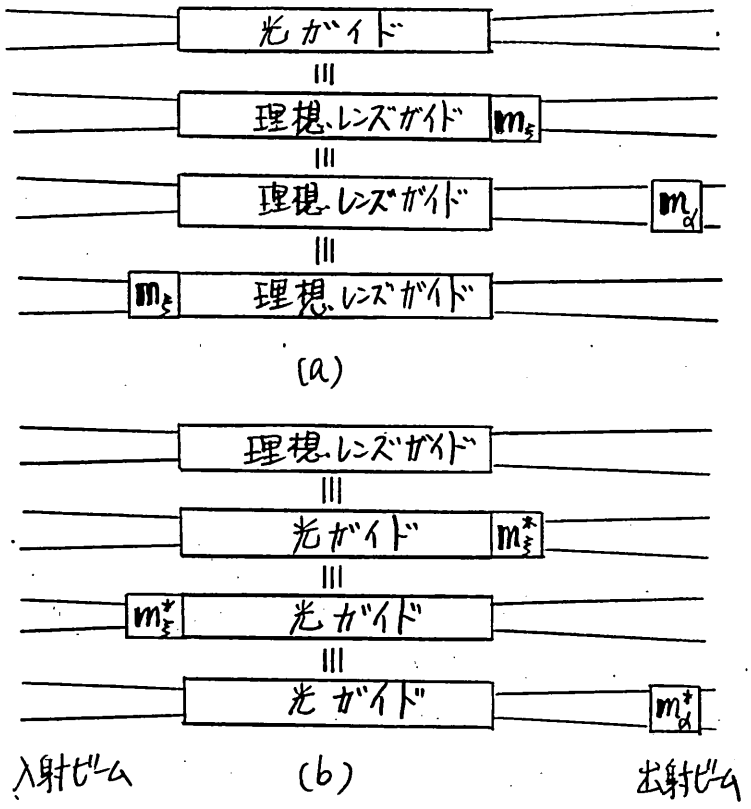


図3. モード分散特性の等価性

$$m_{\xi\alpha} \equiv e^{j\omega D_{\xi\alpha}},\quad m^{*}_{\xi\alpha} \equiv e^{-j\omega D_{\xi\alpha}}$$

(a) モード分散効果は理想レンズガイドと切り離して考えられる. 効果を考慮する位置はガイドの中, 入力端, 出力端, 遠方のいづれでもよい.

(b) 理想レンズガイドと光ガイドからモード分散効果を除去して考える. 除去する位置は(a)と同じくいづれでもよい.

界 $\phi(\xi,\Omega,\sigma)$ も準幾何光学界と同様に積分の形で表わせる.

$$\phi(\xi,\Omega,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_0(\xi,\Omega+\Omega')\sqrt{\frac{j}{4\pi\sigma}}e^{-j\frac{\Omega'^2}{4\sigma}}d\Omega'$$

$$\phi_0(\xi,\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi,\Omega+\Omega',\sigma)\sqrt{\frac{j}{4\pi\sigma}}e^{j\frac{\Omega'^2}{4\sigma}}d\Omega' \qquad (29)$$

準幾何光学界が Snell の法則に基づいた幾何光学軌道を進むのに対し、モード合散効果を含む界は、その軌道から少しはがれて進む(媒質定数 ε を少し異った値に感じて進む)準幾何光学ビームのあつまりで表わされている. 距離が短かいと、これらのビームのあつ位相の干渉で幾何光学軌道を進むビームしか観測されないが、距離が長くなるにつれ、はがれたビームの影響が現われ始める. これがモード合散効果であると解釈できる.

式(29)は $\xi\to\alpha$, $\Omega\to\Omega_L$, $\phi\to\phi^{far}$, $\phi_0\to\phi_0^{far}$ の変換で遠方界にも適用される. したがって式(18)の関係が ϕ にも成り立つ.

$$\phi^{far}(\alpha,\Omega_L,\sigma)=\sqrt{\frac{k_0S_0^2}{\rho}}e^{-jk_0\rho+j\frac{\pi}{4}}\phi(\alpha,\Omega_L+\frac{\pi}{2},\sigma) \qquad (30)$$

この関係を利用すると、式(29)の代りに横方向座標に関する積分表現を得る.

$$\phi(\xi,\Omega,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_0(\xi',\Omega-\frac{\pi}{2})\Pi_1(\xi,\sigma;\xi')d\xi'$$

$$\phi_0(\xi,\Omega-\frac{\pi}{2})=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi',\Omega,\sigma)\Pi_1^*(\xi',\sigma;\xi)d\xi' \qquad (31)$$

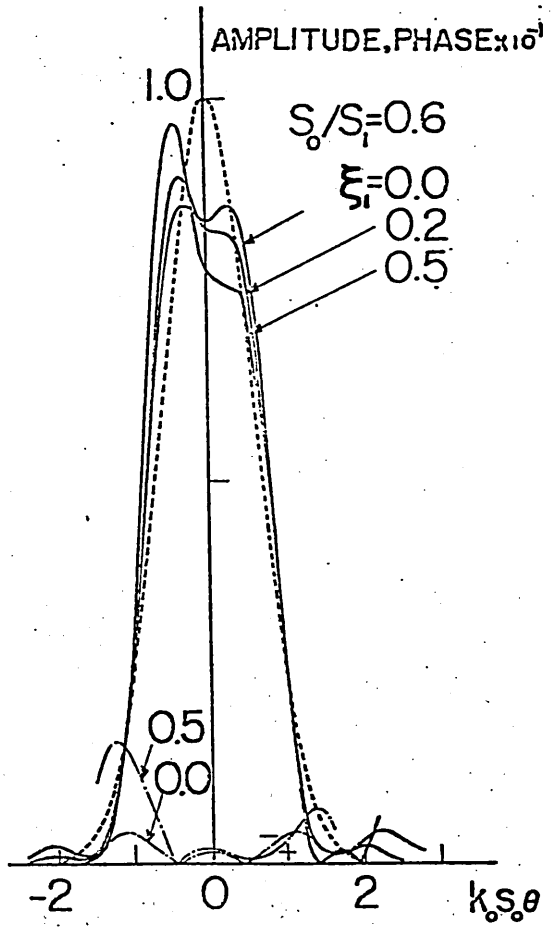


図4. モード分散効果の計算例
(遠方パターン；破線は位相，点線は
準幾何光学パターン，L=95.68 mm)
$\varphi^{far}(\alpha, \Omega_L, \sigma) \sim (1 + j\sigma D_\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 D_\alpha^2)\phi_0^{far}(\alpha, \Omega_L)$
を用いて計算した．

$$\phi^{far}(\alpha,\Omega_L,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{i0}^{far}(\alpha',\Omega_L-\tfrac{\pi}{2})\,\underline{T}_i(\alpha,\sigma;\alpha')\,d\alpha'$$

$$\phi_{i0}^{far}(\alpha,\Omega_L-\tfrac{\pi}{2})=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_i(\alpha',\Omega_L,\sigma)\,\underline{T}_i^{*}(\alpha',\sigma;\alpha)\,d\alpha' \qquad (32)$$

ただし $*$ は複素共役を示し，関数 $\underline{T}_i$ は次式で定義される．

$$\underline{T}_i(\xi,\sigma;\xi')=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\,e^{j\frac{\sigma}{4}(\xi^2+\xi'^2)+\sigma\xi\xi'-j\frac{\sigma}{2}j\xi\xi'} \qquad (33)$$

式(32)の第2式からわかるように，伝達関数が $\underline{T}_i^{*}$ なる光学システムが存在するなら，この系によってモード分散効果が等化されることになる．

5. モード分散による信号時間波形歪

ビームの中心周波数を ω_0 とする．先に述べたように $e^{j\omega_0 t-jkz}$ の位相項は除いて考える．n_0 の均質媒質の物質分散まで含めた伝達速度（group velocity）を v_g とし，この伝達遅延を考えた時間 t_r を定義する．

$$t_r\equiv t-\frac{z}{v_g} \qquad (34)$$

通常，この時間遅れは $L=500m$ で約 $3\mu sec$ である．そのうち，物質分散による遅れはほぼ $0.1\mu sec$ 程度である．モード分散効果に含まれる物質分散の影響はほぼ9%程度であるため，ここ

では無視する．また単一モードの分散も Km当り 10^{-6} nsec 程度であるから(7) やはり無視する．
この仮定のもとで 時間歪を受ける界 $\phi(t,\xi,\Omega,\sigma)$ は

$$\phi(t,\xi,\Omega,\sigma)=e^{j\sigma D_\xi-[\sigma D_\xi-\beta(n+\frac{1}{2})]\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}}\cdot\phi_0(t_r,\xi,\Omega) \tag{35}$$

と書ける（付録I）．指数演算子の肩にある第1項が先に求めたモード分散効果を表わし，第2項が時間信号に寄与する項を表わす．第1項に比べると 10^{-3} 程度の影響を及ぼす（500GHz信号に対して）．すなわち 時間波形歪より 横方向界分布の空間歪の方が1000倍も大きい．しかし出力ビームの総電力には，この空間歪が消え，時間歪のみが表われる．

式(35)の界が信号エネルギーを一定に保存しながら伝送している．このことは 次式の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\phi_B\,e^{j\sigma D_\xi-[\sigma D_\xi-\beta(n+\frac{1}{2})]\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}}\phi_A=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\phi_A\,e^{j\sigma D_\xi+[\sigma D_\xi-\beta(n+\frac{1}{2})]\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}}\phi_B \tag{36}$$

を用いると，直ちに証明される．

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,|\phi(t,\xi,\Omega,\sigma)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,|\phi_0(t,\xi,\sigma)|^2 \tag{37}$$

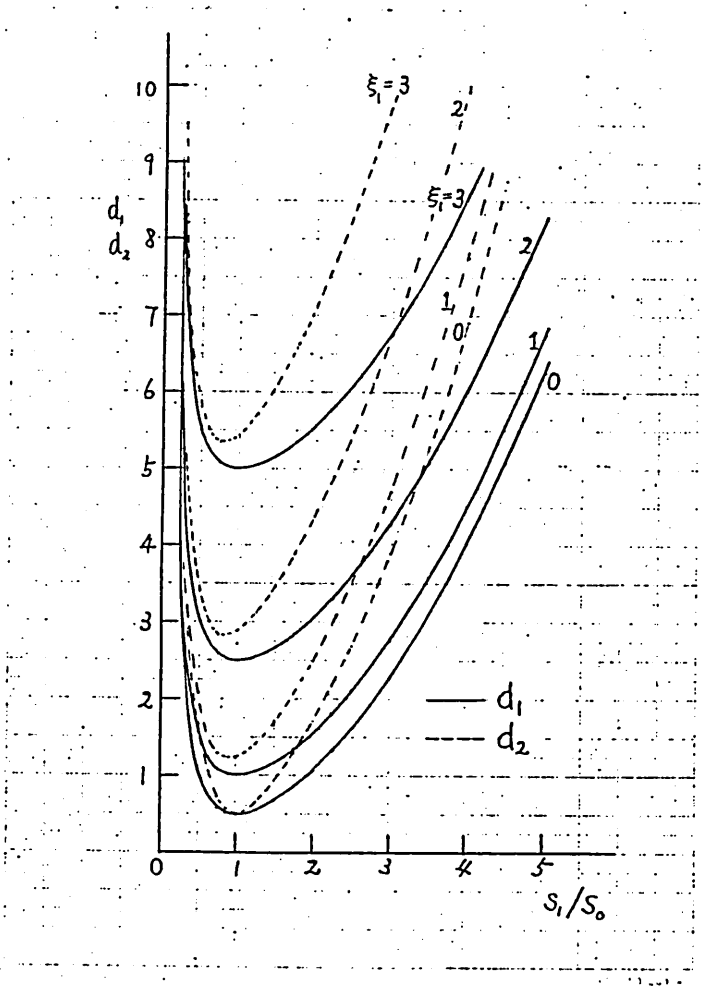


図5　d_1, d_2 の値

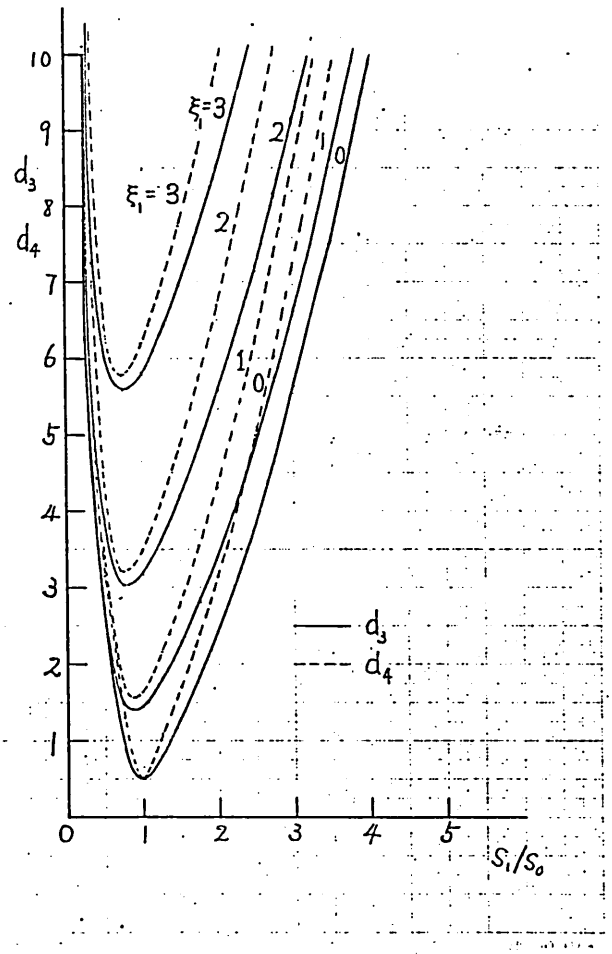


図6. d_3, d_4 の値

今，信号を振幅変調と仮定する．準幾何光学界はこの信号波形をそのままの形で伝送する．

$$\phi(t,\xi,0,0)=S_m(t)\phi(\xi,0,0)$$
$$\phi_0(t,\xi,\Omega)=S_m(t_r)\phi_0(\xi,\Omega) \qquad (38)$$

そこで強度変調信号を $I_m(t)$ とする．

$$I_m(t)\equiv|S_m(t)|^2 \qquad (39)$$

式(38)を式(35)に代入して全電力を求めると（付録II）

$$I_m(t_d)+\frac{1}{2!}\langle t_d^2\rangle I_m''(t_d)+\frac{1}{3!}\langle t_d^3\rangle I_m'''(t_d)+\cdots \qquad (40)$$

となる．ただし

$$t_d\equiv t_r-\frac{1}{\omega_0}(\sigma d_2^2-\beta d_1)$$

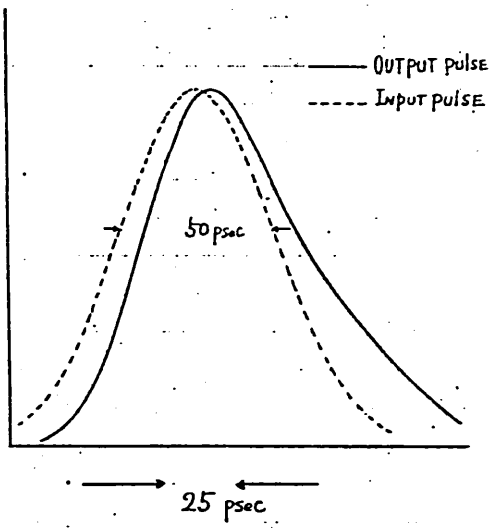
$$\langle t_d^2\rangle=\frac{1}{\omega_0^2}[\sigma^2(d_4^4-d_2^4)-2\sigma\beta(d_3^3-d_2^2d_1)+\beta^2(d_2^2-d_1^2)]$$

$$\langle t_d^3\rangle\sim\frac{1}{\omega_0^3}[\beta^3(d_3^3-3d_2^2d_1+4d_1^3)-3\sigma\beta^2(d_4^4-d_2^4-2d_3^3d_1+4d_2^2d_1^2)]$$

$$\beta\equiv\frac{g'(\omega_0)}{g(\omega_0)}\omega_0\Omega$$

$$d_m^m\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\phi_0^*(n+\tfrac{1}{2})^m\phi_0\,d\xi \qquad (41)$$
$$(m=1,2,\cdots\cdots)$$

式(40)は一般の信号に対して成立する．特に I_m を幅Tのガウス



Pulse broadning 6.4 psec at 500m
(including material dispersion)
$\tau_1 = 1.2 S_0$, $S_1 = 1.2 S_0$

図7. 50psec パルスのモード分散効果による拡がり

パルス

$$I_m(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi T^2}}\,e^{-\frac{2t^2}{T^2}} \tag{42}$$

とすると，元だけ進行したパルスの幅は式(40)と時間拡がりの分布関数と考えると $\sqrt{\langle (t_r-\langle t_r\rangle)^2\rangle}$ で求められる．結果は次のようになる．

$$T\sqrt{1+\left(\frac{z}{\omega_0 T}\right)^2\left[\sigma^2(d_4^4-d_2^4)-2\sigma\gamma(d_3^3-d_2^2d_1)+\gamma^2(d_2^2-d_1^2)\right]} \tag{43}$$

$d_1\sim d_4$ の値は図5および図6に示されている．1例として，50psecパルスの500m後の形状を図7に示す．上式で求めたパルス拡がりは6.4psecである．

6. 適用範囲

この理論の適用範囲は β_m の z の高次項が十分小さいとして，0〜の項までで近似できる所である．0〜の次の高次項を十分小さいとし，かつ $n+\frac{1}{2}$ を平均値 d_1 で評価すると

$$z\ll\frac{k_0^2n_0^2}{\gamma^3}\frac{1}{d_1^3} \tag{44}$$

でなければならない．$k_0=10^4\,mm^{-1}$，$n_0=1.6$，$\gamma=3\,mm^{-1}$ とすると $z\ll 9.5/d_1^3$ (km) となり，ロンチング条件を $s_1=2$，$s_1=2s_0\sim 0.5s_0$ としても $z\ll 560\,m$ であれば適用可能である．

参考文献

1. G. Eichmann, "Quasi-geometric optics of media with inhomogeneous index of refraction", J. Opt. Soc. Am., Vol 61 No. 2, pp. 161–168, Feb. 1971.
2. 浜崎, 前田, "矩波長の波動の取り扱い", 電子通信学会 電磁界理論研究会資料 EMT-74-30, 10月, 1974.
3. S. Choudhary, L. B. Felsen, "Analysis of Gaussian beam propagation and diffraction by inhomogeneous wave tracking", Proc. IEEE, Vol. 62, No. 11, pp. 1530-1541, Nov. 1974
4. T. Kitano, etal, "Measarement of fourth-order aberration in a lens-like medium", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-9, No. 10, pp. 967–971, Oct. 1973.
5. J. A. Arnaud, Hamilton Theory of beam mode propagation, in "Progress in Optics" edited by E. Wolf, vol XI, 1973, North-Holland Pub. Company - London.
6. M. Hashimoto, "Hydrodynamic model on Gaussian light-beam propagation", Int. J. Electron. vol. 35, No. 5, pp. 717–719, May 1973.
7. W. A. Cambling, H. Matsumura, "Pulse dispersion in a lens-like medium", Opto-electronics, vol. 5, pp. 429–437, 1973.

付録 I

$\omega = \omega_0 + \omega_m$ とする．ω_m による Ω, σ の変化分を $\Delta\Omega, \Delta\sigma$ とする．
このとき

$$\begin{aligned}\phi(\xi, \Omega+\Delta\Omega, \sigma+\Delta\sigma) &= e^{j\sigma D_\xi + j\Omega(n+\frac{1}{2})} \\ &\quad \cdot e^{j\Delta\sigma D_\xi + j\Delta\Omega(n+\frac{1}{2})} \phi_0(\xi, 0) \\ &= e^{j\sigma D_\xi + j\Delta\sigma D_\xi + j\Delta\Omega(n+\frac{1}{2})} \phi_0(\xi, \Omega)\end{aligned} \tag{A-1}$$

ここで $j\Delta\Omega = \left(\frac{g'}{g}\omega_0\Omega\right)\left(\frac{j\omega_m}{\omega_0}\right) = \left(\frac{g'}{g}\omega_0\Omega\right)\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}$

$$j\Delta\sigma = -\sigma\left(\frac{j\omega_m}{\omega_0}\right) = -\sigma\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}$$

である．これらを (A-1) に代入すると式 (35) が得られる．

付録 II

$$\begin{aligned}I_{m\,out}(t_r) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left| e^{-(\sigma D_\xi - g(n+\frac{1}{2}))\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}} S_m(t_r)\phi_0(\xi, \Omega) \right|^2 \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+r}}{(l+r)!}\frac{1}{\omega_0^{l+r}}\binom{l+r}{l} \langle (\sigma D_\xi - g(n+\tfrac{1}{2}))^{l+r} \rangle S_m^{(l)}(t_r) S_m^{*(r)}(t_r) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{\omega_0^p} \langle (\sigma D_\xi - g(n+\tfrac{1}{2}))^p \rangle I_m^{(p)}(t_r) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(-1)^r \langle t_d^r \rangle I_m^{(r)}\left(t_r - \frac{1}{\omega_0}\langle \sigma D_\xi - g(n+\tfrac{1}{2}) \rangle\right)\end{aligned} \tag{A-2}$$

ここで

$$\langle t_d^l \rangle \equiv (-1)^l \left\langle \left(\frac{\sigma D_\xi - g(n+\frac{1}{2}) - \langle \sigma D_\xi - g(n+\frac{1}{2}) \rangle}{\omega_0} \right)^l \right\rangle \tag{A-3}$$

光回路結合器ホロカップラの変換効率

猪原静夫　　西原浩　　小山次郎

（大阪大学　工学部　電子工学科）

昭和50年4月

輻射科学研究会

光回路結合器ホロカップラの変換効率

猪原静夫　西原浩　小山次郎
（大阪大学　工学部　電子工学科）

1. まえがき

近年、低損失の光ファイバ、LED(発光ダイオード)、半導体レーザなどの著しい進歩により光通信の実現性が高まるにて、それらの素子間の結合が重要な問題になってきた。われわれは、先にホログラフィの原理に基づく波面変換機能をもったカップラという意味で"ホロカップラ"と名づけた新しい形式の光回路結合器を提案した。[1] このホロカップラは、従来の結合器にはみられない種々の興味ある特徴をもつと考えられるので、現在基礎的な問題を検討しているが、本報告はそのなかで最も重要な問題の一つである変換効率に関する検討結果を述べたものである。

本報告では、図1に示すような最も構成の簡単なホロカップラを検討の対象としてとり上げた。すなわちこのホロカップラは点光源Rからの発散球面波を点Sに収束する球面波に波面変換するものであり、また点Rと点Sがホロカップラの同一法線上にある、いわば in-line 形のホログラムである。ホログラムの変換(回折)効率については、すでに Kogelnik によって2つの平面波によるホログラムについて詳しく理論解析がなされており、[2] これによると位相形体積ホログラムが最高の回折効率をもちえて、

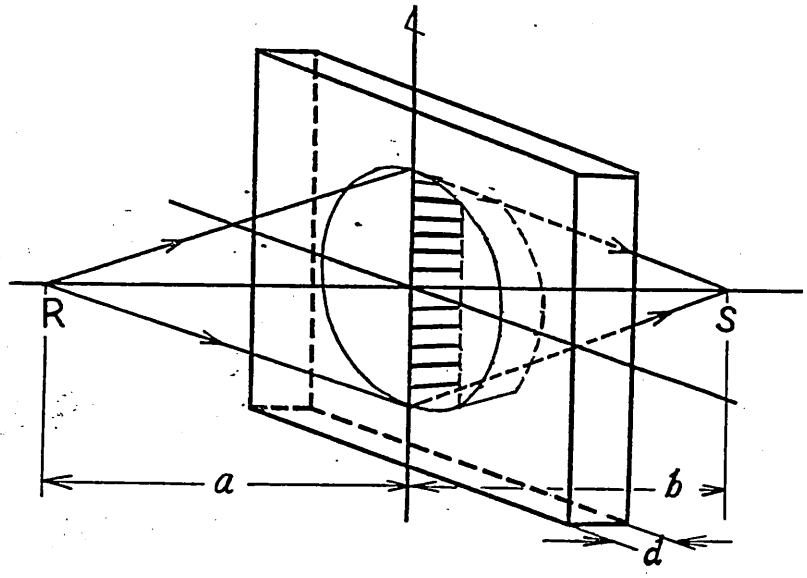


図 1　ホロカップラ

その理論値は 100 % であることが判っている。従って最大変換効率を与えるホロカップラのタイプとして位相、体積形を対象とすることは妥当であろう。

図 1 のようなホロカップラの変換効率の計算を行なうに際し、Kogelnik による乙平面波のホログラムに対する解析と比較して、考慮すべき点は次のようである。

i) 球面波であること。

ii) ホロカップラ上で干渉縞間隔が一定でない、すなわち外縁部から軸に近づくにつれてしだいに大きくなっている。このため体積化（干渉縞間隔に対する記録材料の膜厚の比）の程度が外縁部では強く、軸近傍では弱くなること。

iii) 入射波と出射波の偏光方向のなす角がホロカップラ面上で一定でないこと。

である。

すず乙章では、最も簡単な乙平面波による位相形体積ホログラムを

用いて、体積性を表わすパラメータQを説明する。3章以下、図1に示すようなホロカップラについて体積化されているとみなせる外縁部分の範囲において、各微小部分の結合波方程式をKogelnikの手法にならって解くことで変換効率を計算し、これを積分することによりホロカップラ全体の変換効率を求める。

2. 体積化パラメータQ

ホログラムが体積化されている程度を表わすのに、次式で定義されるパラメータQがある。

$$Q = \frac{2\pi\lambda d}{n\Lambda^2} \qquad (1)$$

ここで
- λ：真空中における平面波の波長
- d：記録材料の膜厚
- n：記録材料の屈折率
- Λ：回折格子間隔

パラメータQは、物理的には、記録材料の膜厚dの回折格子間隔Λに対する比を表わす量であり、通常

$Q \geqq 10$ ：体積化領域

$Q \leqq 1$ ：平面領域

という判別が使われている。

さて、1章で述べたようにホロカップラは球面波どうしの干渉であるため、面上でΛの値が変化していて、そのためQの値も変化する。実際、球面波干渉によって生じる回折格子は、図1の点R、点S

を2焦点とする楕円体群 $((r+s)\beta = 2n\pi)$ と記録材料との交わりとなる。従って回折格子は軸を通る平面においては、楕円の一部となり直線ではない。しかし記録材料の膜厚 d は、a, b に比較して十分小さい ($d \ll a, b$) ので格子の曲がりは、無視でき直線状にできているとみなしてよい。故に、格子間隔 Λ は次のように Ω_R, Ω_S で表わせる。(図2参照)

$$\Lambda = \frac{\lambda/n}{\sin\Omega_R + \sin\Omega_S} \cdot \cos\phi$$

$$= \frac{\lambda}{n(\sin\Omega_R + \sin\Omega_S)} \cdot \cos\left(\frac{\Omega_R - \Omega_S}{2}\right) \qquad (2)$$

(1)式に(2)式を代入すると

$$Q = \frac{2n\pi d(\sin\Omega_R + \sin\Omega_S)^2}{\lambda \cos^2\left(\frac{\Omega_R - \Omega_S}{2}\right)}$$

となる。ここで $a/b = m$ とすると、$\Omega_S = \tan^{-1}(m\tan\Omega_R)$ と表わせ、パラメータ Q は

$$Q = \frac{2n\pi d}{\lambda}\left[\frac{\sin\Omega_R + \sin\{\tan^{-1}(m\tan\Omega_R)\}}{\cos\left\{\frac{\Omega_R - \tan^{-1}(m\tan\Omega_R)}{2}\right\}}\right]^2 \qquad (3)$$

となる。

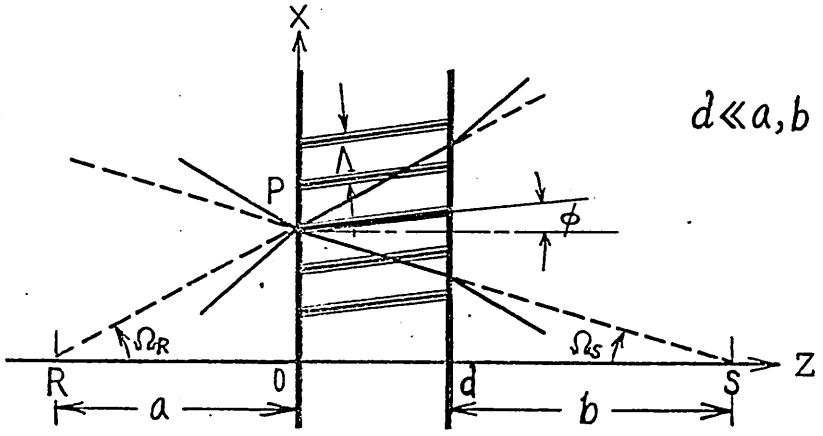


図2 ホロカップラの回折格子

ここで、記録材料に Kodak 649-F 乾板 ($d=15\mu m$, $n=1.5$)、波長 6328Å の He-Ne レーザ光を使用した場合、$m=10, 1, 1/10$ について(3)式を表わしたのが図3である。

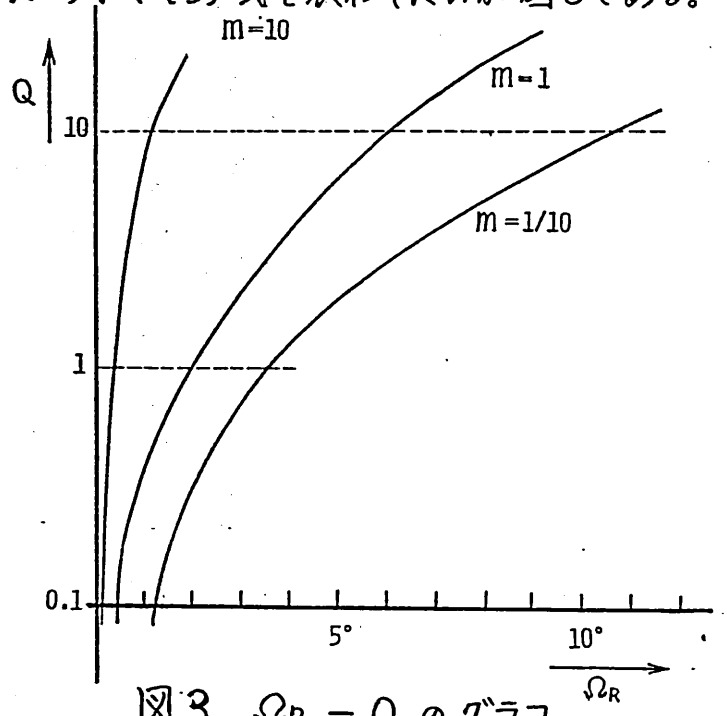


図3 $\Omega_R - Q$ のグラフ

たとえば、$m=1$ を例にとると、$\Omega_R \geqq 6°$ で体積化領域、$\Omega_R \leqq 2°$ で平面領域と、1つのホロカップラにおいて2つの性質の異なる領域をもつわけである。

3. ホロカップラの回折格子の形成(記録)

解析に用いたホロカップラのモデルを図4(a),(b)に示す。
ホロカップラ面の法線をZ軸とし、図のようにx, y座標をとる。Z軸の2点 R^0, S^0 に図4(b)に示すように、それぞれ発散点光源、収束点光源をおく。R^0 点からの光は、ホロカップラ面で屈折して P 点に達っ

し、S°点への収束する光と干渉を起こし回折格子ができる。しかし、ここでは、R°, S°点のしめる空間もホロカップラと同じ媒質で満たされているものと考えホロカップラの境界の問題は考えない。

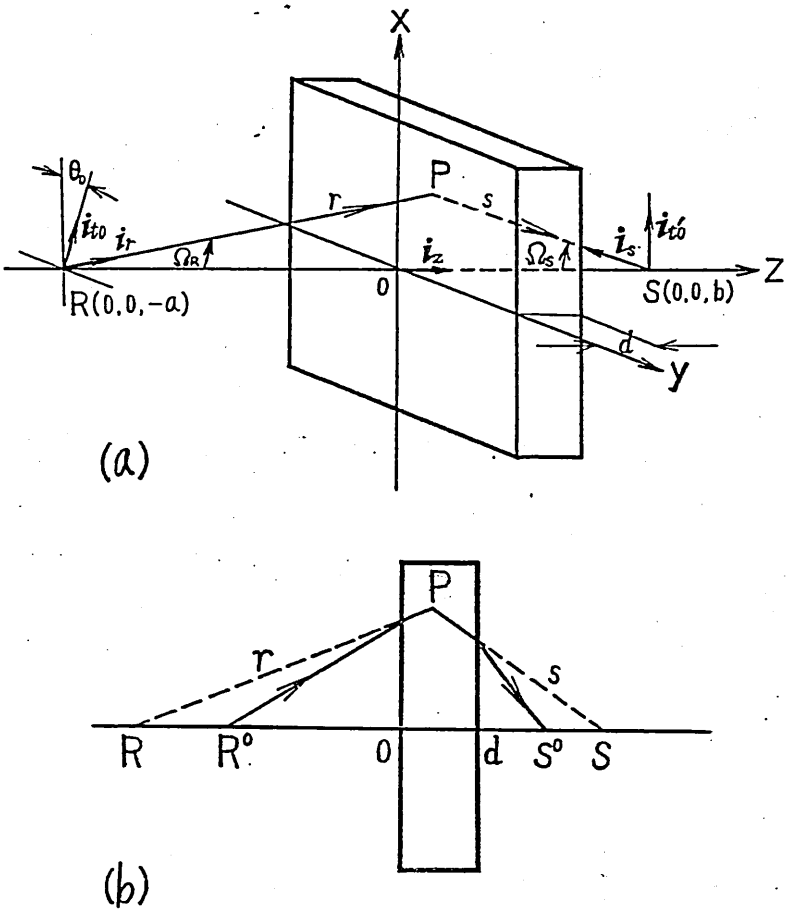


図4. ホロカップラのモデル

図4(a)のようにホロカップラの厚さをdとし、Q_R[watt]の発散点光源R, Q_S[watt]の収束点光源Sをそれぞれ(0.0,-a), (0.0,b)におく。
$\overline{RP}=r$, $\overline{SP}=s$ とすると、P点において、点光源Rによる強度 $I_R(r)$ は

$$I_R(r)=Q_R/4\pi r^2 \qquad (4)$$

となる。また電界を $\mathbf{e}_t$ とすると

$$I_R(r) = \frac{1}{2Z_w}|\mathbf{e}_t|^2 \tag{5}$$

となる。Z_w は波動インピーダンスである。(4)式と(5)式より

$$e_t = \sqrt{\frac{Q_R Z_w}{2\pi}} \cdot \frac{1}{r} \tag{6}$$

である。故にP点では、Rによる発散球面波の複素振幅 $\mathbf{R}(r)$ が、次式のように表わされる。

$$\mathbf{R}(r) = A\frac{e^{-j\beta r}}{r}\mathbf{i}_t \tag{7}$$

ここで
$$\begin{cases} A = \sqrt{\dfrac{Q_R Z_w}{2\pi}} \\ \beta : \text{位相定数} \\ \mathbf{i}_t : \text{P点における偏光ベクトル} \end{cases}$$

同様にSによる収束球面波の複素振幅 $\mathbf{S}(s)$ とすると、

$$\mathbf{S}(s) = B\frac{e^{j\beta s}}{s}\mathbf{i}_t' \tag{8}$$

と表わせる。

ここで
$$\begin{cases} B = \sqrt{\dfrac{Q_s Z_w}{2\pi}} \\ \mathbf{i}_t' : \text{P点における偏光ベクトル} \end{cases}$$

記録材料には、$\mathbf{R}$ と $\mathbf{S}$ による干渉によって強度分布Iが生じる。すなわち

$$I = \frac{1}{2Z_w}\left|\mathbf{R}(r) + \mathbf{S}(s)\right|^2$$

$$= \frac{Q_R}{4\pi r^2} + \frac{Q_s}{4\pi s^2} + \sqrt{\frac{Q_R Q_s}{2\pi}}\frac{\cos\beta(r+s)}{r \cdot s}(\mathbf{i}_t \cdot \mathbf{i}_t') \tag{9}$$

となる。位相形の場合、記録媒質の誘電率εは、露光量に比例した変化を受けて干渉縞を形成する。露光前の媒質の平均誘電率をε_0、露光後の誘電率変化分をε_1'とすると、

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1' \\ &= \varepsilon_0 + \chi_e t I \\ &= \varepsilon_0 + \chi_e t\left[\frac{Q_R}{4\pi r^2} + \frac{Q_S}{4\pi S^2} + \frac{\sqrt{Q_R Q_S}}{2\pi}\frac{\cos\beta(r+S)}{r\cdot S}(\dot{x}_t \cdot \dot{x}_t')\right] \end{aligned} \quad (10)$$

となる。　t：露光時間　χ_e：比例定数である。
(10)式の［　］内の第1項，第2項は第3項に比較して変化が小さく直流増加分と考えられ、ε_0に比較して小さいと考えられるので無視すると、媒質の誘電率εは

$$\varepsilon(r.S) \simeq \varepsilon_0 + \varepsilon_1(r.S)\cos\beta(r+S) \quad (11)$$

$$\varepsilon_1(r,S) = \chi_e t\frac{\sqrt{Q_R Q_S}}{2\pi}\frac{\dot{x}_t \cdot \dot{x}_t'}{r\cdot S} \quad (12)$$

となる。

このように誘電率変化分ε_1が強度分布に比例して変化していて、Kogelnikの解析した平面波ホログラムの誘電率変化分が場所によらず一定であるということと大きな違いがある。

4. 回折格子中のベクトル波動方程式の解

以上のように作成したホログラムに、記録時と同じ位置$(0,0,-a)$から、同じ偏光方向をもった発散球面波を照射する。そしてホログラムへの入射波の回折格子中の波動伝搬を解析する。格子中の電界は、次式のベクトル波動方程式を満足せねばならない。

$$\nabla^2 \mathbb{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbb{E}) + k^2 \mathbb{E} = 0 \tag{13}$$

ここで $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon$ (14)

$\begin{cases} c : \text{真空中の光速度} \\ \omega : \text{角周波数} \end{cases}$

である。(14)式に(11)式を代入すると、

$$k^2 = \beta^2 + 2\kappa\beta\left(e^{j\beta(r+s)} + e^{-j\beta(r+s)}\right)$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{2\pi}{\lambda}(\varepsilon_0)^{1/2} \\ \kappa = \frac{\pi}{\lambda}\frac{\varepsilon_1}{2(\varepsilon_0)^{1/2}} \end{cases} \tag{15}$$

となり、λ は真空中の波長を示す。ここで記録媒質の平均屈折率を n_0、屈折率変化分を n_1 とすると、屈折率 n は(11)式と同様に、

$$n = n_0 + n_1 \cos\beta(r+s)$$

と表わせ、$n^2 = \varepsilon$ なる関係から、$n_0 \gg n_1$ という仮定のもとで

$$n_0 = (\varepsilon_0)^{1/2}$$

$$n_1(r,s) = \frac{\varepsilon_1}{2(\varepsilon_0)^{1/2}}$$

となる。上記の関係より(15)式は

$$\begin{cases} \beta = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 \\ \kappa = \frac{\pi}{\lambda} n_1(r,s) \end{cases} \tag{16}$$

と表わせる。

このように結合係数 κ が r, s の関数になっていてホログラムの各点において違っている。

さて、(13)式のベクトル波動方程式を解くわけであるが、ここで次の仮定をもうける。

(i) Bragg 条件を満足する角度で入射する波に対してのみ考える。

(ii) 回折格子中では、Bragg条件を満足する入射波と1次回折波の2つの波動の伝搬を考える。

この仮定に基くと回折格子中の電界 $\mathbf{E}$ は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}(z)\frac{e^{-j\beta r}}{r} + \mathbf{S}(z)\frac{e^{j\beta s}}{s} \tag{17}$$

のように入射波と1次回折波の重ね合わせで表わすことができるであろう。入射波と回折波の振幅は z のみの函数であると考える。(17)式を(13)式に代入して計算すると、次式の方程式がえられる。

$$\begin{cases} C_R R'(z) + j\kappa_p \dfrac{r}{s} S(z) = 0 \\ C_S S'(z) + j\kappa_p \dfrac{s}{r} R(z) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

ここで、

$$\begin{cases} C_R = \cos\Omega_R \quad , \quad C_S = \cos\Omega_S \\ \kappa_p = \kappa\cdot(\dot{\imath}_t \cdot \dot{\imath}_t') \end{cases} \tag{19}$$

である。

上式の導出に際し、$R(z)$, $S(z)$ は変化がゆるやかで $R''(z)$, $S''(z)$ は無視する。Bragg条件を満足する入射波と1次回折波の位相をもった項だけについて考えている。詳しくは付録1を参照されたし。

ところで微小部分P点近傍においては、r, s を一定とみなせるので C_R, C_S, κ_p も一定とみなせ、(18)式の方程式の解は、次式で表わすことができる。

$$\begin{cases} R(Z) = r_1 \exp(\gamma_1 Z) + r_2 \exp(\gamma_2 Z) \\ S(Z) = s_1 \exp(\gamma_1 Z) + s_2 \exp(\gamma_2 Z) \end{cases} \tag{20}$$

ここで、 $\gamma_{1,2} = \pm \frac{\kappa_p}{(C_R \cdot C_S)^{1/2}}$

係数 $r_i, s_i (i=1,2)$ は、境界条件より求めることができ、次のように境界条件を考える。図4(a)に示すように透過形であるので $Z=0$ において、入射波の振幅 R を 1 と規格化し、回折波の振幅 S は 0 となる。つまり

$$\begin{cases} R(0) = r_1 + r_2 = 1 \\ S(0) = s_1 + s_2 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

また(20)式を(18)式に代入し、$\exp(\gamma_1 Z)$, $\exp(\gamma_2 Z)$ についてまとめると、

$$\begin{cases} (C_R r_1 \gamma_1 + j\kappa_p \frac{r}{s} s_1) \exp(\gamma_1 Z) + (C_R r_2 \gamma_2 + j\kappa_p \frac{r}{s} s_2) \exp(\gamma_2 Z) = 0 \\ (C_S s_2 \gamma_1 + j\kappa_p \frac{s}{r} r_1) \exp(\gamma_1 Z) + (C_S s_2 \gamma_2 + j\kappa_p \frac{s}{r} r_2) \exp(\gamma_2 Z) = 0 \end{cases}$$

となり上式が恒等的に成立するのは、

$$\begin{cases} C_R r_i \gamma_i + j\kappa_p \frac{r}{s} s_i = 0 \\ C_S s_i \gamma_i + j\kappa_p \frac{s}{r} r_i = 0 \end{cases} \tag{22}$$

の時である。

(21)式と(22)式より

$$\begin{cases} r_1 = r_2 = \frac{1}{2} \\ s_1 = -s_2 = -\frac{1}{2} \frac{s}{r} \left(\frac{C_R}{C_S}\right)^{1/2} \end{cases}$$

と求まり、これを(20)式に代入すると、

$$R(Z) = \frac{1}{2}\left[\exp(\gamma_1 Z) + \exp(\gamma_2 Z)\right]$$
$$= \cos\left[\frac{\kappa_p}{(C_R C_S)^{1/2}} \cdot Z\right] \quad (23)$$

$$S(Z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{r}\left(\frac{C_R}{C_S}\right)^{1/2}\left[\exp(\gamma_1 Z) - \exp(\gamma_2 Z)\right]$$
$$= -j\frac{S}{r}\left(\frac{C_R}{C_S}\right)^{1/2} \sin\left[\frac{\kappa_p}{(C_R C_S)^{1/2}} \cdot Z\right] \quad (24)$$

以上の結果より、微小部分P近傍の回折格子中の電界は、

$$\mathbb{E} = R(Z)\frac{e^{-j\beta r}}{r}\dot{a}_t + S(Z)\frac{e^{j\beta s}}{s}\dot{a}_t'$$

と表わせる。
ここで $\dot{a}_t$, $\dot{a}_t'$ はP点における入射波と回折波の偏光ベクトルで格子中においても偏光方向は変わらないとした。

5. 変換効率を与える式の導出

微小部分P近傍の変換効率 $\eta(P)$ は、Z方向のパワー・フローを考えることで、

$$\eta(P) = \frac{\cos\Omega_S |S(d)|^2/s^2}{\cos\Omega_R |R(0)|^2/r^2}$$
$$= \sin^2\left[\frac{\kappa_p}{(C_R \cdot C_S)^{1/2}} \cdot d\right] \quad (25)$$

と表わせる。
ここで κ_p は、(19)式に(16)式,(12)式を代入して

$$\kappa_p = \kappa(\dot{a}_t \cdot \dot{a}_t')$$
$$= \kappa_0 (C_R C_S)(\dot{a}_t \cdot \dot{a}_t')^2$$

となる。

ここで　　$\kappa_0 = \frac{\pi}{\lambda} n_1(a,b)$

で、原点における結合係数を表わしている。

故に、(25)式は

$$\eta(P) = \sin^2\left[\kappa_0 (C_R \cdot C_S)^{1/2} (\vec{\iota}_t \cdot \vec{\iota}_t')^2 \cdot d\right] \qquad (27)$$

となる。[ ]内の変形は、付録-2を参照されたし。

上式でわかるように、外縁部へいくに従って $C_R \cdot C_S$, $\vec{\iota}_t \cdot \vec{\iota}_t'$ の値が小さくなり、結合係数が減少し、$\eta(P)$ が減少するのがわかる。ホロカップラ全体の変換効率 $\overline{\eta}$ は、

$$\overline{\eta} = \frac{\int I_R(r)\,\eta(P)\,ds}{\int I_R(r)\,ds} = \frac{\int_{\Omega_T}^{\Omega_2}\int_0^{2\pi} \tan\Omega_R \sin^2\left[\kappa_0 (C_R C_S)^{1/2} (\vec{\iota}_t \cdot \vec{\iota}_t') d\right] d\theta\, d\Omega_R}{2\pi \int_{\Omega_T}^{\Omega_2} \tan\Omega_R\, d\Omega_R} \qquad (28)$$

ところで　　Ω_2 ：発散球面波Rの広き角

Ω_T ：体積化されるとみなされる角

θ ：$\angle XOP$

である。

6. 変換効率を与える式の近似度

6.1 結合波方程式の解法の妥当性

結合波方程式(18)式を解く際、回折格子中では1次回折波のみが存在すると仮定したので、その解は、体積化が充分な

れているところ、すなわちホロカップラの外縁部のQが大きい部分で厳密なものである。しかし、ホロカップラの軸近傍のQが小さい部分では、解の精度がわるくなる。そこでこの解法の精度の目安をえるため、2つの平面波によって作成した回折格子において1次回折波と2次回折波の振幅[3]の比($|S_2|/|S_1|$)がQの値によってどのように変化するかを調べてみた。図5は$|S_2|/|S_1|$及び$|S_2|^2/|S_1|^2$を描いたものである。

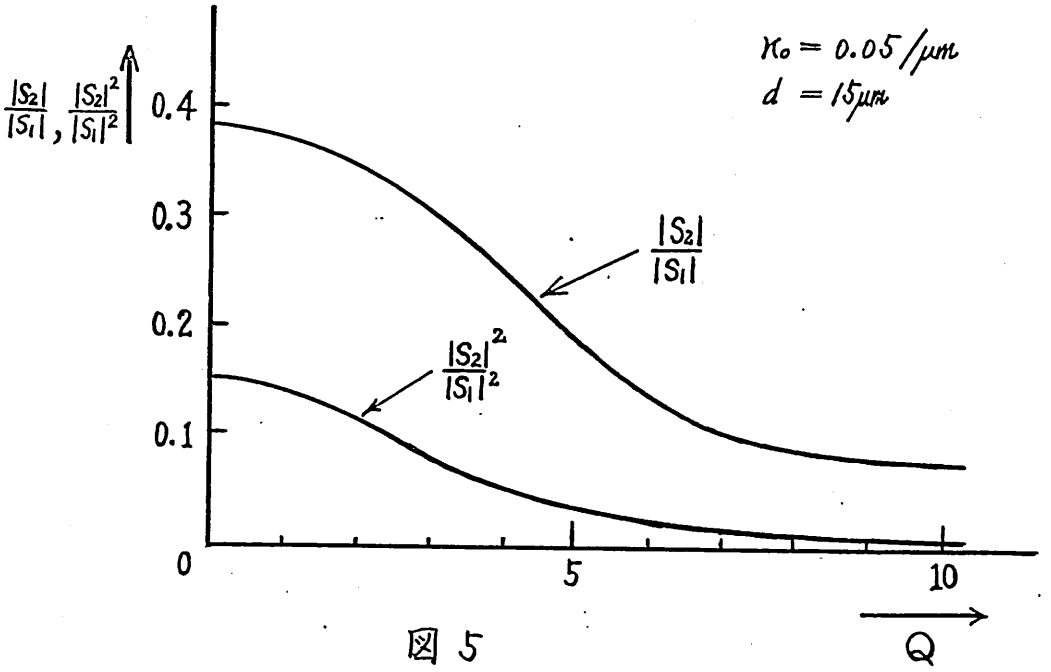


図5

Qが10よりも小さくなるにつれて、振幅及び強度比が増加するのがわかる。強度比$|S_2|^2/|S_1|^2$が10%程度になるのは、Q≃2程度であり、変換効率の値として10%の誤差を許容するならば、結合方程式の解はQ≃2程度まで拡張して適用できるものと考えられる。

6.2 変換効率の実用的な式 及び その近似度

そこで体積性がよいとして導出した変換効率の式 (27) を用いてホロカップラ上での半径方向の変化を計算した。半径方向は、図6に示すように (I) θ=0° (x軸), (II) θ=90° (y軸) についてで、図7に計算結果を示す。計算に使用したパラメータは、実際上、典型的な値を選んだ。

※ 横軸は、Ω_R であり、$d=15\mu m$ に選んだ時の Q の値を合わせて記しておく。(図3を参照されたし)

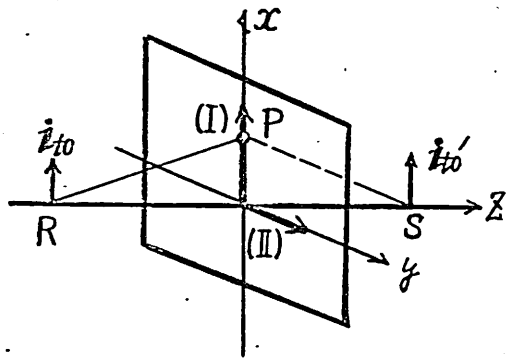


図 6.

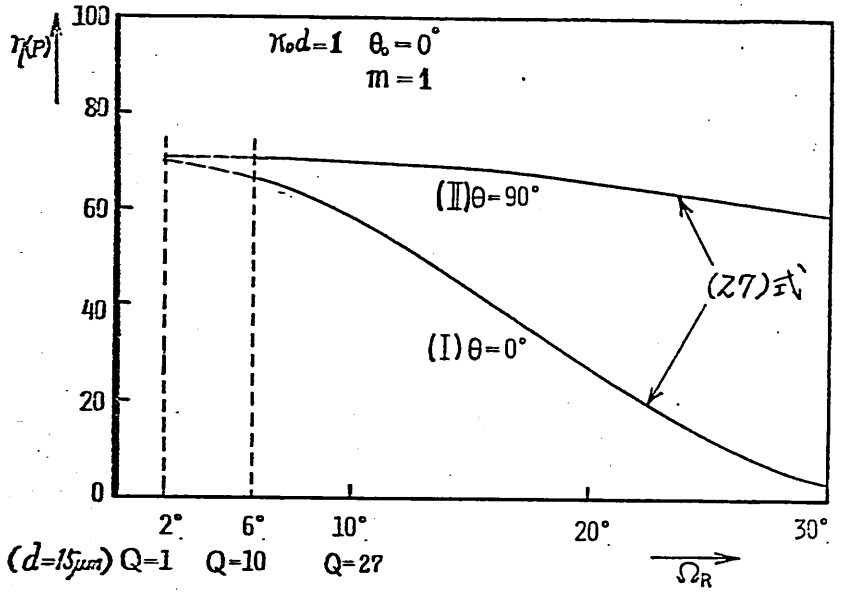


図7
$\Omega_R - \eta(P)$
のグラフ

さて、図7に示すように、$\eta_T(P)$ は Ω_R の減少と共に、変化がゆるやかになり、ある値に漸近する傾向がみられる。したがって $\eta_T(P)$ は、Ω_R の小さなところまで適用できそうである。(28)式の積分範囲 Ω_T が種々のパラメータ対して異なる値をもつので、その繁雑さをさけるために、(28)式に比較して、より実用的な式として $\Omega_T = 0$ なる次のようなホロカップラの変換効率の式を考察してみる。

$$\bar{\eta} = \frac{\int_0^{\Omega_2}\int_0^{2\pi} \tan\Omega_R \sin^2\left[k_0 (c_R c_S)^{1/2} (\vec{x}_t \cdot \vec{x}_t') d\right] d\theta\, d\Omega_R}{2\pi \int_0^{\Omega_2} \tan\Omega_R\, d\Omega_R} \quad (29)$$

ここで、この式の近似度を比較的近似度の悪いと思われる具体例として $\Omega_2 = 10^\circ$ の場合について以下検討してみる。

(29)式の分子を領域に分割してみると、

$$\text{分子} = \int_{0^\circ}^{2^\circ} I_R(r)\,\eta_T(P)\, d\Omega_R + \int_{2^\circ}^{6^\circ} d\Omega_R + \int_{6^\circ}^{10^\circ} d\Omega_R \quad (30)$$

(i) $0^\circ \sim 2^\circ$ の領域：この領域は実際上充分な数の回接格子が形成されていない領域であるので変換効率はきわめて小さく、(27)式の $\eta(P)$ を適用した場合、その量だけ誤差になると考えてみる。

(ii) $2^\circ \sim 6^\circ$ の領域：この領域は $2 < Q < 10$ の領域で(27)式の $\eta(P)$ は 6.1 で述べたように 10% 程度の誤差が含まれている。この誤差を $\Delta\eta$ とする。

(iii) $6^\circ \sim 10^\circ$ の領域：$Q > 10$ の領域であるから(27)式の $\eta(P)$ が正確に適用される。

これら(i),(ii),の誤差の第3項に対する比を近似的に計算してみる。

(i)の場合

$$\frac{\int_{0°}^{2°} I_R(r)\eta_r(P)dA}{\int_{6°}^{10°} I_R(r)\eta_r(P)dA} < \frac{I_R(a)\cdot S_1}{I_R\left(\frac{a}{\cos 10°}\right)\cdot S_3} \sim 0.05$$

(ii)の場合

$$\frac{\int_{2°}^{6°} I_R(r)\Delta\eta_t\, dA}{\int_{6°}^{10°} I_R(r)\eta_r(P)dA} < \frac{I_R\left(\frac{a}{\cos 2°}\right)S_2}{I_R\left(\frac{a}{\cos 10°}\right)\cdot S_3}\cdot 0.1 \sim 0.05$$

ただし、

$$S_1 = \pi a^2 \tan^2 2° = 0.001\,\pi a^2$$
$$S_2 = \pi a^2(\tan^2 6° - \tan^2 2°) = 0.098\,\pi a^2$$
$$S_3 = \pi a^2(\tan^2 10° - \tan^2 10°) = 0.02\,\pi a^2$$

である。

このように誤差を10%まで許容するなら(29)式は実用的な式であると考えられる。実際 積分範囲を[0°, 10°], [6°, 10°]とし積分を実行したが誤差は2~3%程度であり上述の妥当性が確かめられた。この計算結果は、次章に述べる。

7. 変換効率の計算結果

(29)式の計算を次のパラメータのもとに行なう。

(i) m : 点光源R,Sの距離の比 $m = a/b$

(ii) Ω_2 : 点光源Rの広がり角

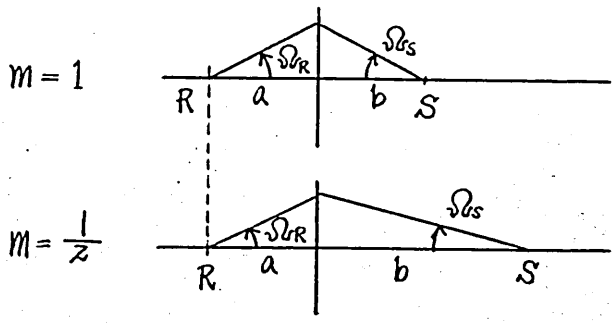
(iii) θ_0：点光源の位置における R, S の偏光差.

なお. 積分範囲は. 6.2 より $[0, \Omega_2]$ とする。横軸に $\kappa_0 d$ とり結果を表わした。図8がそのグラフである。ただし. 図8-(a)は積分範囲が $[6°, \Omega_2]$ のもので、図8-(b)と比較のために、かかげた。

これらの計算結果より次の事柄がわかった。

i) 点光源Rの広き角 Ω_2 が大きくなるにつれて、ピーク値がさがり、変換効率が小さくなる。
これは. 球面波であるため. 軸から遠ざかるにつれて振幅が減小し. 結合係数が減小するからである。

ii) m の値が小さくなるにつれて変換効率は高くなる。
つまり m が小さいということは 同じ a に対して b が大きいということで S に収束する角が小さくなり 結合係数が大きくなる。



iii) 偏光差 θ_0 が大きくなるにつれて変換効率が小さくなる.
これは偏光ベクトルの $(\vec{e_t} \cdot \vec{e_r})^2$ の値が減小することによる。

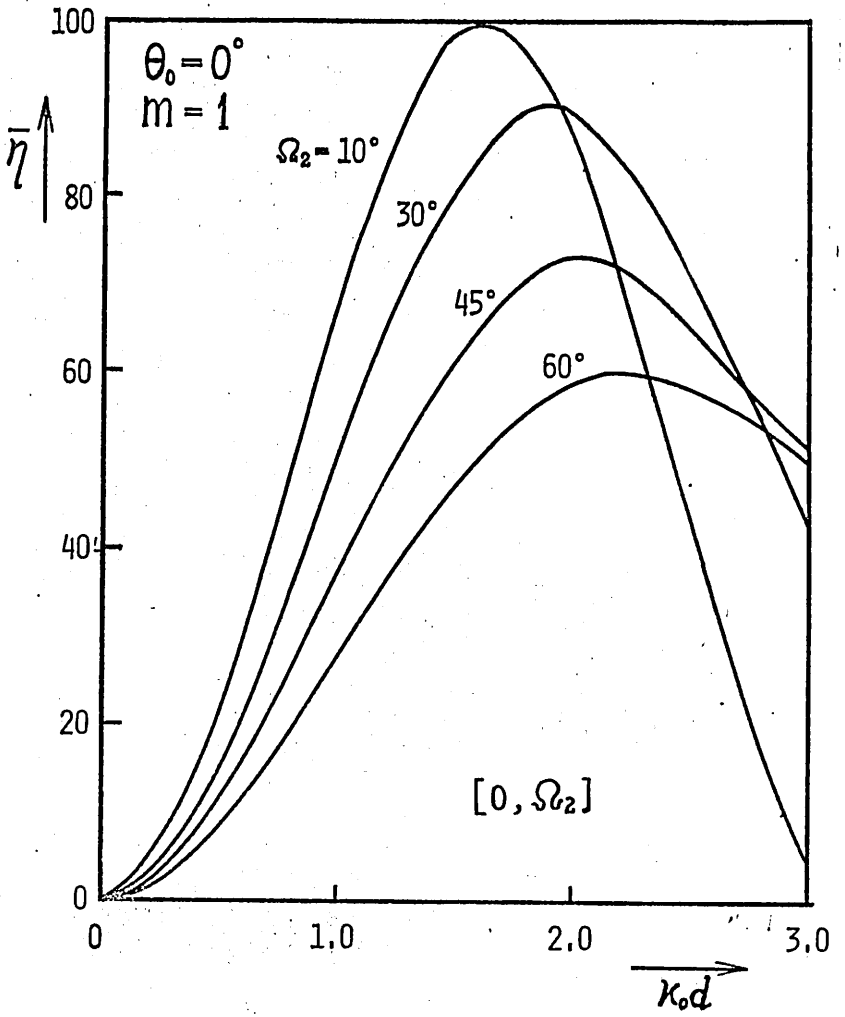


図 8-(b)

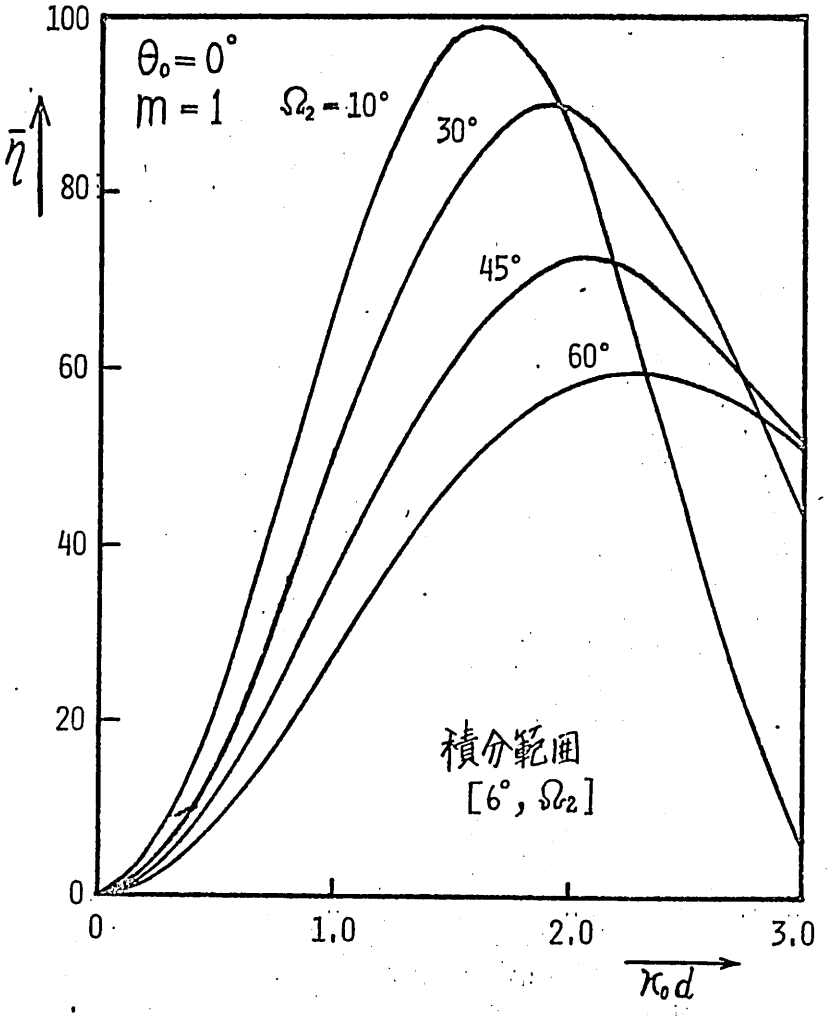


図 8-(a)

図 8. $\kappa_0 d - \bar{\eta}$

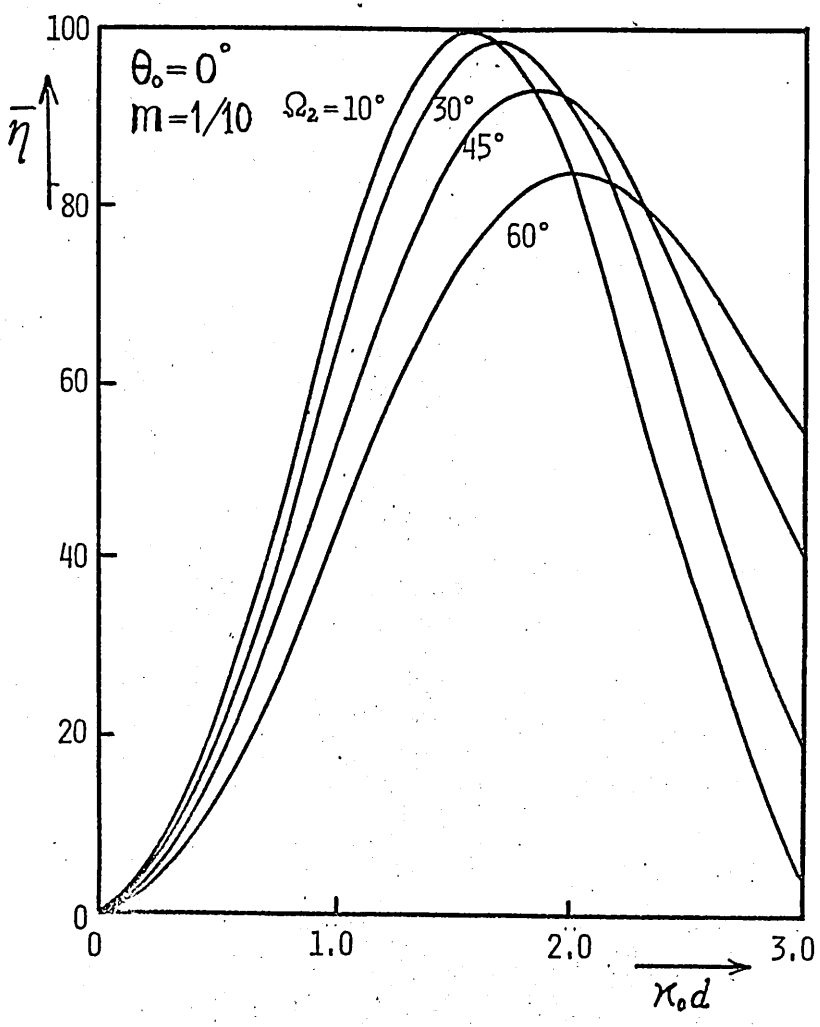

100
80
60
40
20
0
$\bar{\eta}$
$\theta_0 = 0^\circ$
$m = 1/10$
$\Omega_2 = 10^\circ$
30°
45°
60°
0
1.0
2.0
3.0
$\kappa_0 d$

図 8-(d)

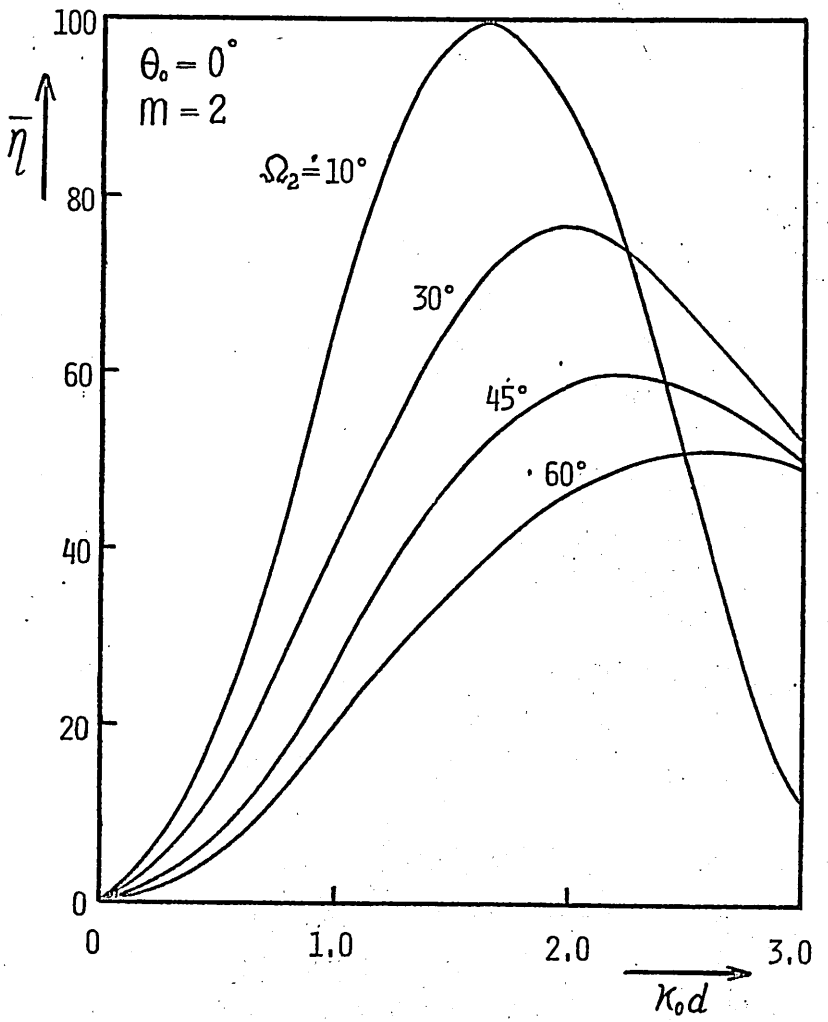

100
80
60
40
20
0
$\bar{\eta}$
$\theta_0 = 0^\circ$
$m = 2$
$\Omega_2 = 10^\circ$
30°
45°
60°
0
1.0
2.0
3.0
$\kappa_0 d$

図 8-(c)

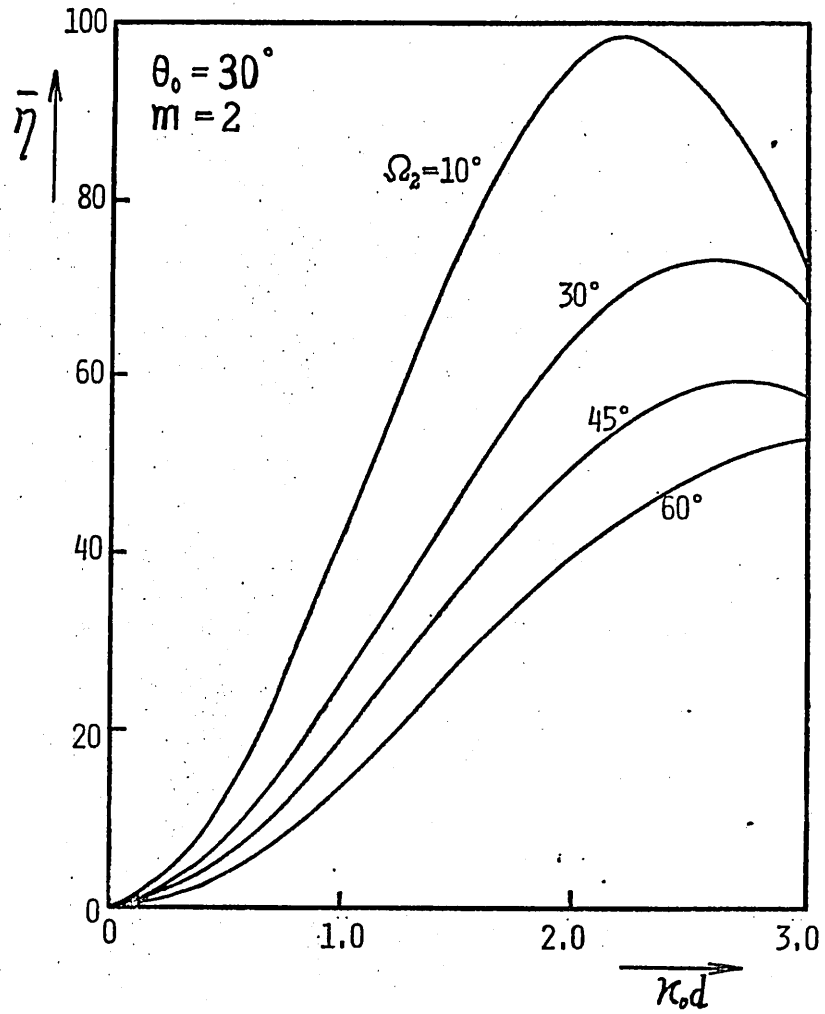

100
80
60
40
20
0
$\bar{\eta}$
$\theta_0 = 30^\circ$
$m = 2$
Ω_2=10°
30°
45°
60°
0
1.0
2.0
3.0
$\kappa_0 d$

図 8-(f)

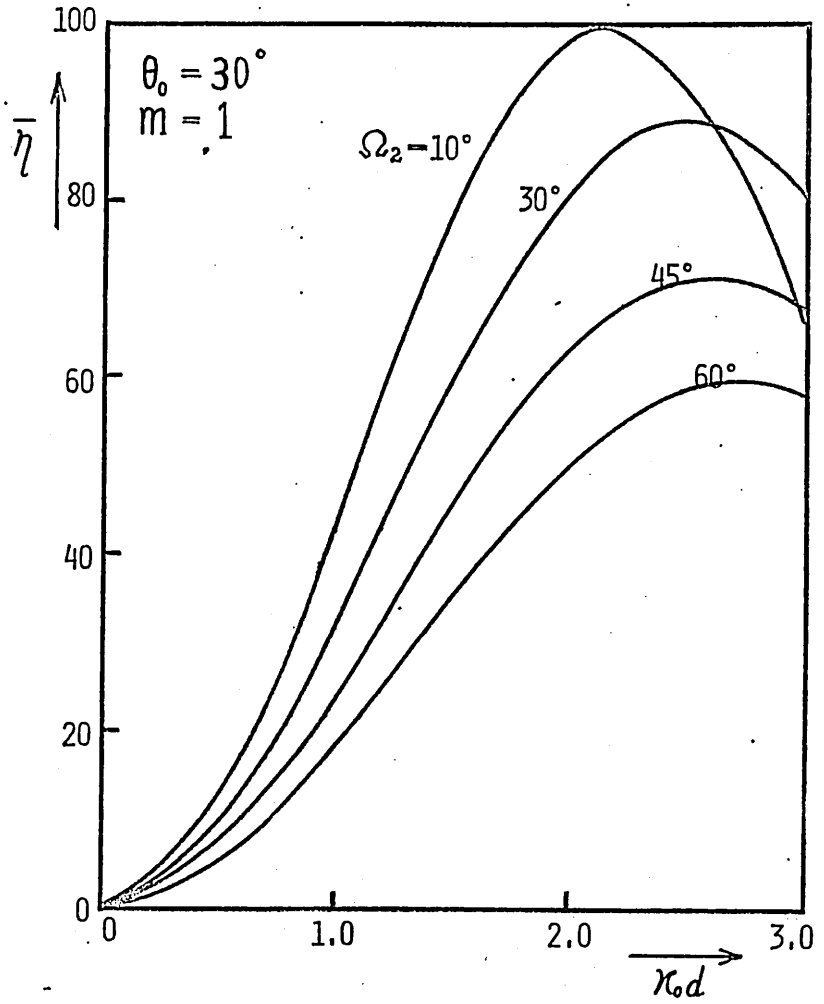
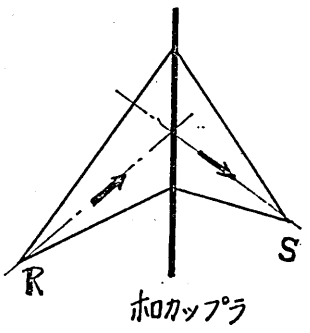

100
80
60
40
20
0
$\bar{\eta}$
$\theta_0 = 30^\circ$
$m = 1$
Ω_2=10°
30°
45°
60°
0
1.0
2.0
3.0
$\kappa_0 d$

図 8-(e)

8. むすび

以上のように in-line のホロカップラの変換効率は、条件を適当に選ぶことで高い値を得ることがわかった。in-line 光学系である限り、6章で検討したように変換効率を与える式( )は、誤差10%以内の精度である。しかし、この誤差は、ホロカップラの全領域で体積化されればいいわけで下図のような off-axis 光学系にするもの1つの方法である。



今日、ファイバ間の結合では、直接結合で非常に高い変換効率を得ることができる。そのため、ホロカップラは、LEDとファイバ，半導体レーザとファイバといった結合[4]に適用すべきであると思われる。半導体レーザ，LEDを考える時、第1に、発光面積が有限で点光源でない。第2に、波長に広がりをもつ。等の重要な問題がある。本解析は、これらの問題解決への基礎的な検討を行なったもので、例へば、発光面の大きさは点光源Rの位置ずれ，又波長の広がりは、位相定数βの広がりに考えることで本解析と同じ手法で解析できると思われ、目下検討中である。

謝辞：本報告にあたり、なにかと有益な御助言を戴いた佃承敏明氏、ならびに御協力いただいた宮川敏夫君、研究室の方々に感謝する。

参考文献

1) 西原浩，栖原敏明，猪原静夫，小山次郎："光伝送路用ホロカップラ"，昭49 連合大関西支大，G-10-15
西原浩，猪原静夫，栖原敏明，小山次郎："新しい光回路結合器ホロカップラ"，昭50 信学会全大，S-15-1
H. Nishihara, S. Inohara, T. Suhara, J. Koyama : " Holocoupler : A Novel Coupler for Optical Circuits " IEEE Journal of Q.E.

2) H. Kogelnik : " Coupled Wave Theory for Thick Hologram Gratings " B.S.T.J., Vol.48 Nov. 9 (1969) P2909 ~ P2947
R.J. Collier, C.B. Burckhardt, L.H. Lin : " Optical Holography " ACADEMIC PRESS New York and London, P223 ~ P264

3) Naoy Uchida : " Caluculation of diffraction efficiency in hologram gratings attenuated along the direction perpendicular to the grating vector " J. Opt. Soc. Am., Vol.63 Nov. 3 (1973) P280 ~ P287

4) 栖原敏明，西原浩，小山次郎："ホログラム再生のためのファイバ出射光の解析" 昭49 輻射科学研究会
栖原敏明，西原浩，小山次郎："ファイバ出力光の遠視野像及びホログラフィへの応用" 昭50 信学会全大 S-15-2

付録・1　ベクトル波動方程式の解法

ベクトル波動方程式

$$\nabla^2\mathbb{E} - \nabla(\nabla\cdot\mathbb{E}) + k^2\mathbb{E} = 0$$

に $\mathbb{E} = \mathbb{R}(Z)\frac{e^{-j\beta r}}{r} + \mathbb{S}(Z)\frac{e^{j\beta s}}{s}$ を代入する。

(I) $\nabla^2\mathbb{E}$ の項

$$\nabla^2\left[\mathbb{R}(Z)\frac{e^{-j\beta r}}{r} + \mathbb{S}(Z)\frac{e^{j\beta s}}{s}\right]$$

$$= \frac{e^{-j\beta r}}{r}\mathbb{R}''(Z) + 2\mathbb{R}'(Z)\frac{(-j\beta r-1)e^{-j\beta r}}{r^2}(\dot{z}_Z\cdot\dot{z}_r) - \beta^2\frac{e^{-j\beta r}}{r}\mathbb{R}(Z)$$

$$+ \frac{e^{j\beta s}}{s}\mathbb{S}''(Z) + 2\mathbb{S}'(Z)\frac{(j\beta s-1)e^{j\beta s}}{s^2}(\dot{z}_Z\cdot\dot{z}_s) - \beta^2\frac{e^{j\beta s}}{s}\mathbb{S}(Z) \quad (付.1)$$

ここで

$'$ は $\frac{d}{dZ}$ のことである。

- $\dot{z}_Z$ ： Z 軸の単位ベクトル
- $\dot{z}_r$ ： $\overrightarrow{RP}$ 方向の単位ベクトル
- $\dot{z}_s$ ： $\overrightarrow{SP}$ 方向の単位ベクトル

(II) $\nabla(\nabla\cdot\mathbb{E})$ の項

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = \nabla\cdot\left[\mathbb{R}(Z)\frac{e^{-j\beta r}}{r} + \mathbb{S}(Z)\frac{e^{j\beta s}}{s}\right]$$

$$= \frac{e^{-j\beta r}}{r}\nabla\cdot\mathbb{R}(Z) + \mathbb{R}(Z)\cdot\nabla\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)$$

$$+ \frac{e^{j\beta s}}{s}\nabla\cdot\mathbb{S}(Z) + \mathbb{S}(Z)\cdot\nabla\frac{e^{j\beta s}}{s} \quad (付.2)$$

ところで $\mathbb{R}(Z)\nabla\frac{e^{-j\beta r}}{r} = \mathbb{R}(Z)\frac{(-j\beta r-1)e^{-j\beta r}}{r^2}\dot{z}_r = 0$

$$\mathbb{S}(Z)\nabla\frac{e^{j\beta s}}{s} - \mathbb{S}(Z)\frac{(j\beta s-1)e^{j\beta s}}{s^2}\dot{z}_s = 0$$

であるから（付・）は

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{e^{-j\beta r}}{r} R_z'(z) + \frac{e^{j\beta s}}{s} S_z'(z)$$

となる。

$$\therefore\ \nabla(\nabla\cdot\mathbb{E}) = \frac{e^{-j\beta r}}{r} R_z''(z)\,\boldsymbol{i}_z + R_z'(z)\frac{(-j\beta r-1)e^{-j\beta r}}{r^2}\boldsymbol{i}_r + \frac{e^{j\beta s}}{s} S_z''(z)\,\boldsymbol{i}_z + S_z'(z)\frac{(j\beta s-1)e^{j\beta s}}{s^2}\boldsymbol{i}_s \qquad (付,3)$$

(III) $k^2\mathbb{E}$ の項

$$k^2\mathbb{E} = \left\{\beta^2 + 2\kappa\beta\left(e^{j\beta(r+s)} + e^{-j\beta(r+s)}\right)\right\}\cdot\left[\mathbb{R}(z)\frac{e^{-j\beta r}}{r} + \mathbb{S}(z)\frac{e^{j\beta s}}{s}\right]$$

$$= \beta^2\left[\mathbb{R}(z)\frac{e^{-j\beta r}}{r} + \mathbb{S}(z)\frac{e^{j\beta s}}{s}\right] + 2\kappa\beta\left[\mathbb{R}(z)\frac{e^{j\beta s}}{r} + \mathbb{R}(z)\frac{e^{-j\beta(2r+s)}}{r} + \mathbb{S}(z)\frac{e^{j\beta(r+2s)}}{s} + \mathbb{S}(z)\frac{e^{-j\beta r}}{s}\right]$$

ここで $e^{-j\beta(2r+s)}$, $e^{+j\beta(r+2s)}$ は、Bragg 条件を満足しないので無視する。よって $k^2\mathbb{E}$ は、

$$k^2\mathbb{E} \cong \beta^2\left[\mathbb{R}(z)\frac{e^{-j\beta r}}{r} + \mathbb{S}(z)\frac{e^{j\beta s}}{s}\right] + 2\kappa\beta\left[\mathbb{R}(z)\frac{e^{j\beta s}}{r} + \mathbb{S}(z)\frac{e^{-j\beta r}}{s}\right] \qquad (付,4)$$

以上より

$$\nabla^2\mathbb{E} - \nabla(\nabla\cdot\mathbb{E}) + k^2\mathbb{E}$$

$$\simeq \frac{e^{-j\beta r}}{r}\left[\mathbb{R}''(z) - R_z''(z)\,\boldsymbol{i}_z + 2\mathbb{R}'(z)\frac{-j\beta r-1}{r}(\boldsymbol{i}_z\cdot\boldsymbol{i}_r) - R_z'(z)\frac{-j\beta r-1}{r}\boldsymbol{i}_r + 2\kappa\beta\frac{r}{s}\mathbb{S}(z)\right]$$

$$+ \frac{e^{j\beta s}}{s}\left[\mathbb{S}''(z) - S_z''(z)\,\boldsymbol{i}_z + 2\mathbb{S}'(z)\frac{j\beta s-1}{s}(\boldsymbol{i}_z\cdot\boldsymbol{i}_s)\right.$$

$$-S_Z'(Z)\frac{j\beta s-1}{s}\dot{\imath}_s+z\kappa\beta\frac{s}{r}R(Z)\Big]=0 \qquad (付.5)$$

ここで P点近傍を考えると r, s は一定とみなせるので、上式が成立するには、$e^{-j\beta r}/r$, $e^{j\beta s}/s$ の係数をそれぞれ0であればよい。

$$\therefore\begin{cases} R''(Z)-R_Z''(Z)\dot{\imath}_Z+zR'(Z)\frac{-j\beta r-1}{r}(\dot{\imath}_Z\cdot\dot{\imath}_r)-R_Z'(Z)\frac{-j\beta r-1}{r}\dot{\imath}_r+z\kappa\beta\frac{r}{s}S(Z)=0 \\ S''(Z)-S_Z''(Z)\dot{\imath}_Z+zS'(Z)\frac{j\beta s-1}{s}(\dot{\imath}_Z\cdot\dot{\imath}_s)-S_Z'(Z)\frac{j\beta s-1}{s}\dot{\imath}_s+z\kappa\beta\frac{s}{r}R(Z)=0 \end{cases} \qquad (付.6)$$

が成立する。ここで $R(Z), S(Z)$ は変化がゆるやかで $R''(Z), S''(Z)$ の Z の2階微分項は無視できると仮定する。そして $\cdot\dot{\imath}_t$, $\cdot\dot{\imath}_t'$ をかけることで

$$\begin{aligned} &R'(Z)\frac{-j\beta r-1}{r}(\dot{\imath}_Z\cdot\dot{\imath}_r)+\kappa\beta\frac{r}{s}S(Z)(\dot{\imath}_t\cdot\dot{\imath}_t')=0 \\ &S'(Z)\frac{j\beta s-1}{s}(\dot{\imath}_Z\cdot\dot{\imath}_s)+\kappa\beta\frac{s}{r}R(Z)(\dot{\imath}_t\cdot\dot{\imath}_t')=0 \end{aligned} \qquad (付.7)$$

をえる。

ここで $\mathbb{R}(Z)=R(Z)\dot{\imath}_t$ $\quad \mathbb{S}(Z)=S(Z)\dot{\imath}_t'$

$(\dot{\imath}_t\cdot\dot{\imath}_r)=0$ $\quad (\dot{\imath}_t'\cdot\dot{\imath}_s)=0$

である。

$$\frac{-j\beta r-1}{r}\simeq -j\beta \qquad \frac{j\beta s-1}{s}\simeq j\beta$$

の近似をし、

$$(\dot{\imath}_Z\cdot\dot{\imath}_r)=\cos\Omega_R=C_R$$
$$(\dot{\imath}_Z\cdot\dot{\imath}_s)=-\cos\Omega_S=-C_S$$
$$\kappa(\dot{\imath}_t\cdot\dot{\imath}_t')=\kappa_p$$

とおくと (付.7) 式は次式のように表わせる。

$$\begin{cases} c_R R'(z) + j\kappa_p \dfrac{r}{s} S(z) = 0 \\ c_S S'(z) + j\kappa_p \dfrac{s}{r} R(z) = 0 \end{cases} \qquad (付.8)$$

上式のように方程式がそられるわけである。

付録・2　結合係数の導出

結合係数 κ は、(16)式より

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\pi}{\lambda} n_1(r,s) \\ &= \frac{\pi}{\lambda} \frac{\varepsilon_1(r,s)}{2n_0} \\ &= \frac{\pi}{\lambda} \frac{\chi_{et}}{n_0} \frac{\sqrt{Q_R \cdot Q_S}}{4\pi \cdot r \cdot s} (\dot{\imath}_t \cdot \dot{\imath}_t') \\ &= \frac{\pi \chi_{et}}{\lambda \cdot n_0} \frac{\sqrt{Q_R \cdot Q_S}}{4\pi \cdot r_0 \cdot s_0} \frac{c_R \cdot c_S}{c_{R0} \cdot c_{S0}} (\dot{\imath}_t \cdot \dot{\imath}_t') \\ &= \overline{\kappa_0} \frac{c_R c_S}{c_{R0} \cdot c_{S0}} (\dot{\imath}_t \cdot \dot{\imath}_t') \end{aligned} \qquad (付.9)$$

ここで、$\overline{\kappa_0}$ は P_0 点における結合係数である。図9に示すように、

$$\begin{cases} c_{R0} = \cos\Omega_{R0} \\ c_{S0} = \cos\Omega_{S0} \\ \overline{RP_0} = r_0 \\ \overline{SP_0} = s_0 \end{cases}$$

である。(付.9)式より P_0 点を原点にとると、

$$\kappa = \kappa_0 c_R c_S (\dot{\imath}_t \cdot \dot{\imath}_t')$$

ここで、

$$\kappa_0 = \frac{\pi \chi_{et}}{\lambda n_0} \frac{\sqrt{Q_R Q_S}}{4\pi ab}$$

となり (27) 式が得られる。

又 P点における偏光ベクトル $\dot{i}_t$, $\dot{i}_t'$ を以下に示しておく。

$$\dot{i}_t = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \sqrt{1-(\sin\Omega_R \cos\theta)^2} \\ (-\cos\theta_0 \sin^2\Omega_R \cos\theta \sin\theta + \sin\theta_0 \cos\Omega_R) / \sqrt{1-(\sin\Omega_R \cos\theta)^2} \\ (-\cos\theta_0 \sin\Omega_R \cos\Omega_R \cos\theta - \sin\theta_0 \sin\Omega_R \sin\theta) / \sqrt{1-(\sin\Omega_R \cos\theta)^2} \end{pmatrix}$$

$$\dot{i}_t' = \begin{pmatrix} \sqrt{1-(\sin\Omega_S \cos\theta)^2} \\ -\sin^2\Omega_S \sin\theta\cos\theta / \sqrt{1-(\sin\Omega_S \cos\theta)^2} \\ \sin\Omega_S \cos\Omega_S \cos\theta / \sqrt{1-(\sin\Omega_S \cos\theta)^2} \end{pmatrix}$$

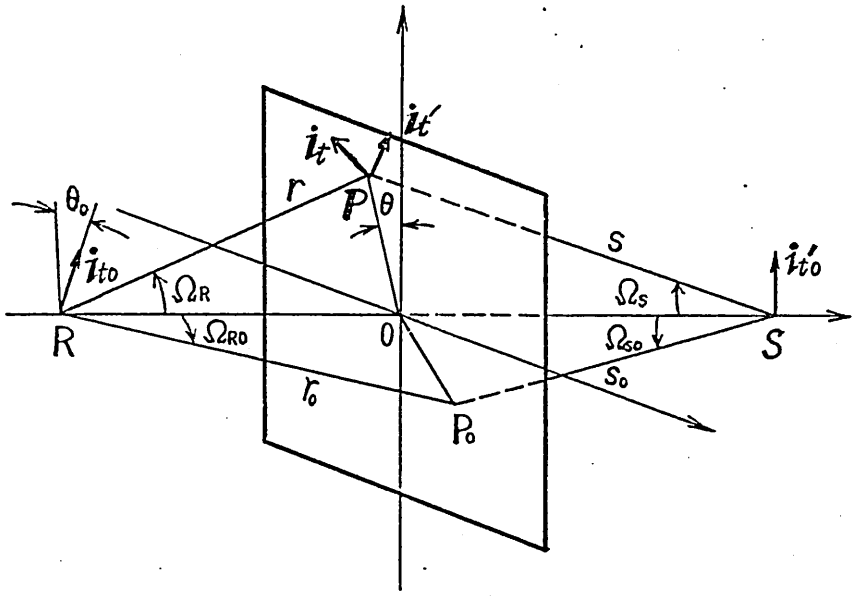


図 9.

輻射科学研究会資料

大阪層による超再生検波実験

大橋永嗣，飯田幸雄，森田正信
（関西大学工学部）

昭和50年4月25日

1. はじめに

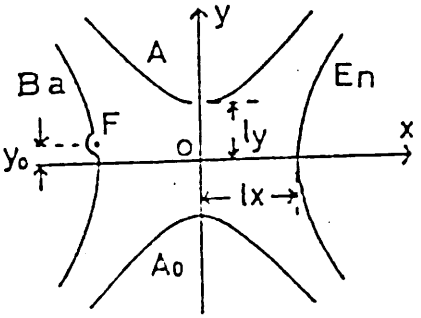
一般に超再生検波と呼ばれる方法，すなわちクエンチング電圧によって内部発振を断続させ，その発振の初期振幅が入来波電圧によって著しく変る事を利用して検波感度を増す方法がある。この研究はそれを大阪管に導入し，直接検波よりも優れた検波感度を得る事を目的として行なったものである。

クエンチング信号として正弦波及び矩形波を用い，陽極電圧に重畳して実験を行なった。いずれの場合も，低磁界においては微弱入力に対して，クエンチング電圧の与える陽極電圧の範囲において，直接検波では小さな検波出力しか得られないが，超再生検波では大きな検波出力が得られるといった現象，いわゆる超再生現象がみられたので，ここにその種々の実験結果を報告する。

2. 試作管及び実験回路

実験に使用した大阪管は，断面を図1に示す線状フィラメント双曲線電極大阪管である。

図2に実験回路を示す。出力は端電極より



F：フィラメント
A, A_0：陽極
Ba：背電極
En：端電極

lx = 6 mm
ly = 2 mm
lz = 15 mm
y_0 = 0.5 mm

図1

取り出している。入来波電圧Vinは50Ω負荷に対する搬送波のピークピーク値を用い，1KHzの正弦波振幅変調を加えている。また，断わらない限り60%変調で実験を行なっている。

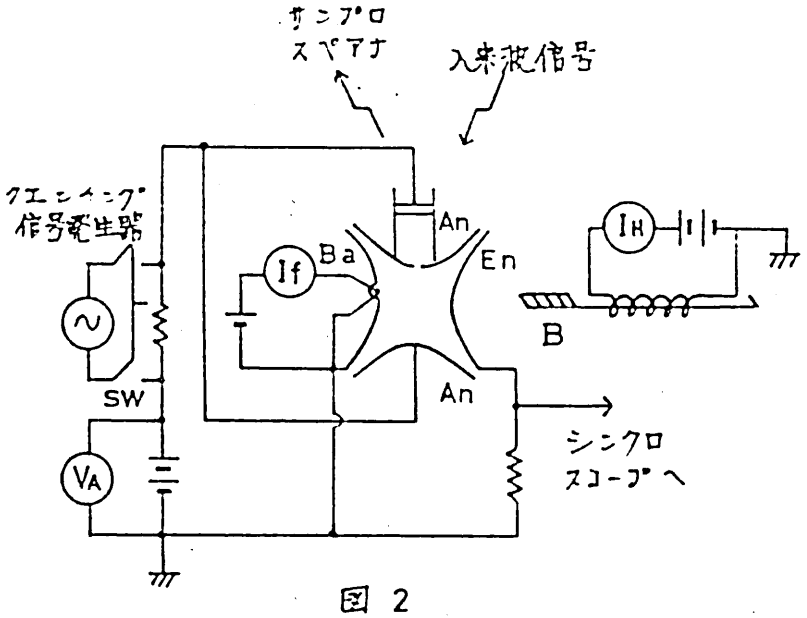


図 2

3. 正弦波クエンチングの場合

3.1 スペクトルについて

図3のように内部発振を断続させ，このときみられる発振周波数にほぼ等しい周波数の入来波信号を加えた際生じるスペクトルの型を表1のように分類できる。

f_0は大阪産の内部発振周波数を，f_{in}は入来波周波数を示す。

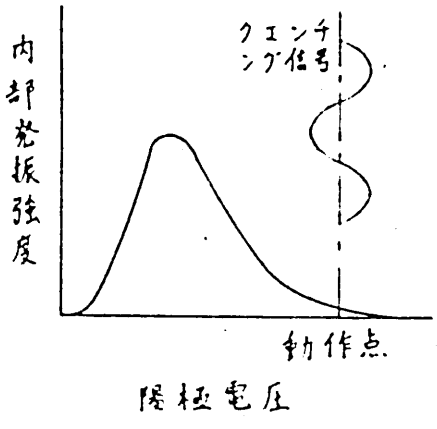


図 3

$\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_{in}$はそれぞれf_0, f_{in}を含むスペクトル群を示す。また，表1の分類は図4に対応する。

表1

分類	V_{in}を加える以前	V_{in}を加えた後	超再生現象	磁界
Ⅰ	$\tilde{f}_0$	$\tilde{f}_{in}$	起こる	低磁界 150~400G
Ⅱ	0	$\tilde{f}_{in}$		
Ⅲ	$\tilde{f}_0$	$\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_{in}$	場合が起こる	
Ⅳ	$\tilde{f}_0$	$\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_{in}$	起こらない	全ての磁界

一般にV_{in}を加える以前，明確にf_sの間隔でスペクトルが生じているような場合に超再生現象がみられるが，そうでない場合の一列を(Ⅲ)について写真1に示

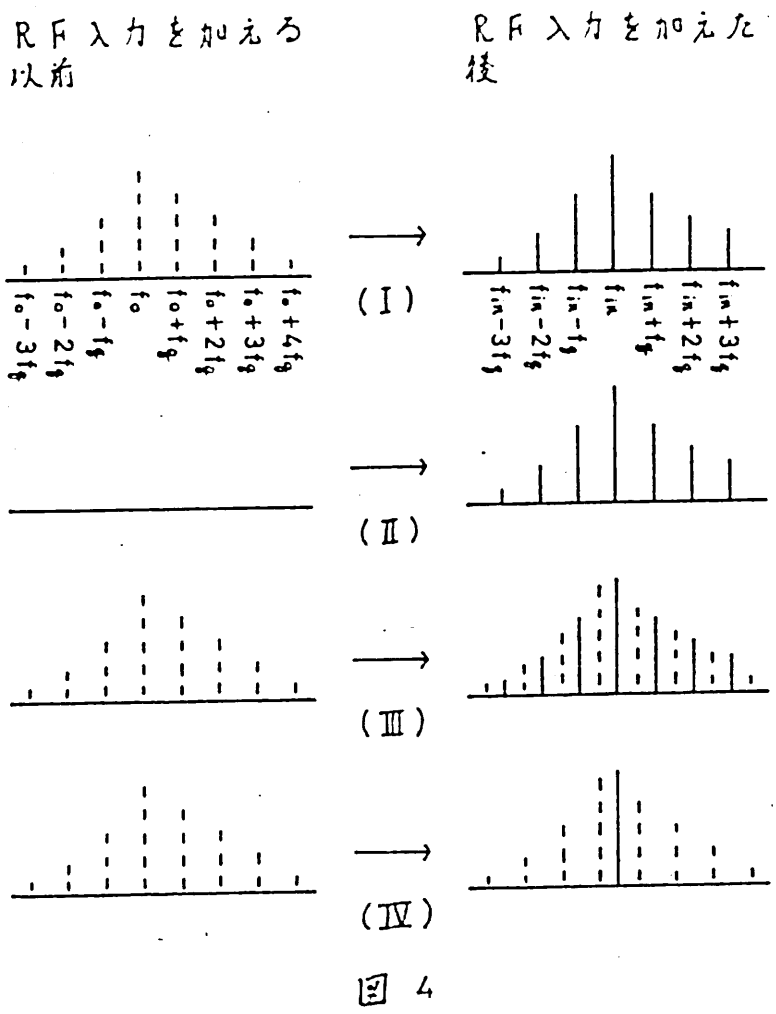


図4

す。

(I),(II),(III)いずれの場合も，V_{in}を大きくすれば大阪管自身の発振が助長され，前二者においてもf_{in}，f_0がともに存在するようになる事が多い。また，(IV)の場合の検波感度はあまり良くない。

次にスペクトルに関連した実験について述べる。

3.1.1　(I),(II)の型に関する結果

超再生現象がみられた際の検波出力の比較の例を図5に示す。これは$V_{in}=1.4\,mV_{p\text{-}p}$で超再生検波出力$V_S$が最大となるように陽極電圧，磁束密度等の外部条件を調整した結果である。直接検波出力V_dは動作点としての陽極電圧において測定した結果を示すが，この付近の陽極電圧における検波出力はほとんどこの値と差がなかった。

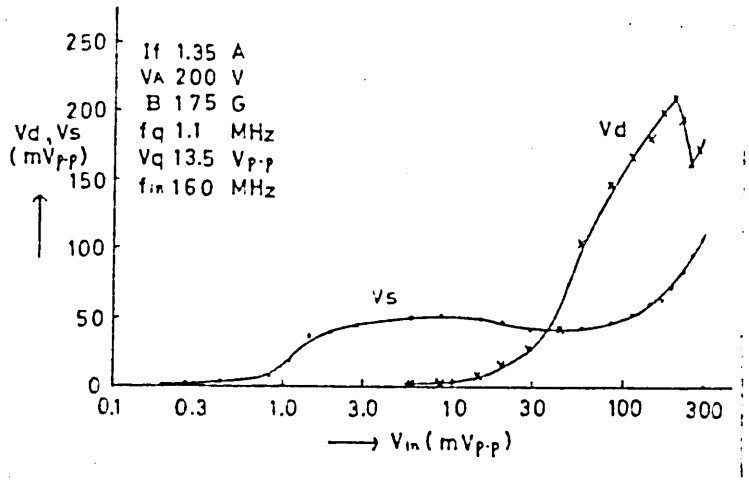


図 5

V_Sの特性曲線は異型的なものであり，超再生検波では

V_{in}を増すに従い一度ほぼ飽和に達した後若干下がり，再び検波出力が増すといった傾向が見られる。また，この実験の際$V_{in}=226\,mV_{p\text{-}p}$付近で入来波信号による同期から外れ，スペクトルの型は(Ⅲ)に移行した。V_{in}がこの程度よりも大きいときはf_{in}をf_0から数MHz離した方が検波出力は大きくなるが，やはりV_{in}の方が大きくなる方が一般的である。

(Ⅱ)の場合も検波出力に関しては(Ⅰ)の場合と同様である。しかし入力がない場合に内部発振が認められないゆえ，雑音に関しては(Ⅰ)の場合よりも優れているといえる。

3.1.2 (Ⅲ)の型に関する結果

$\tilde{f}_0$，$\tilde{f}_{in}$のスペクトルが尖鋭で$\tilde{f}_0$が$\tilde{f}_{in}$に同期されぎみのときは大きな検波出力が得られる（写真2(a)）。また，$\tilde{f}_{in}$が尖鋭でも$\tilde{f}_0$の各スペクトルが$\tilde{f}_{in}$よりも幅を持って広がっている場合には検波出力は小さい（写真2(b)）。

また，f_gが高い場合，$\tilde{f}_0$として写真3(a)のように2本の組になったスペクトルがf_gの間隔で生じる事が多く，このとき$\tilde{f}_{in}$が写真のようにそれぞれの間にあれば検波出力が得られ，外れていると検波しない。同写真(b),(c)はそれぞれ(a)の場合の検波波形，発振のモード波形を示す。

外部条件を変化させると検波出力の位相が反転する現象が生じる事がある。その際，f_g，V_g，V_{in}，I_f等いずれのパラメータを変化させても位相反転が生じる。

写真4にV_gを変化させた場合の例を示す。実線及び破線はそれぞれf_{in}，f_0の成分である事を示す。また，このときの条件は

$$V_A = 191\,(V),\quad V_{in} = 9.5\,(mV_{p\text{-}p})$$
$$H = 288\,(G),\quad f_{in} = 174\,(MHz)$$
$$f_g = 1.8\,(MHz),\quad I_f = 1.32\,(A)$$

である。

3.1.3 (IV)の型に関する結果

この場合，クエンチング電圧を加える事はV_Aを減少させる事になる。また，各スペクトルの大きさと検波出力の間に関係は認められない。例を図6に示す。この実験のように大きな入力の場合には，f_{in}かf_0のいずれかに一致していればスペクトルは安定しているが，f_0のいずれかと本の間にあるときには多くのスペク

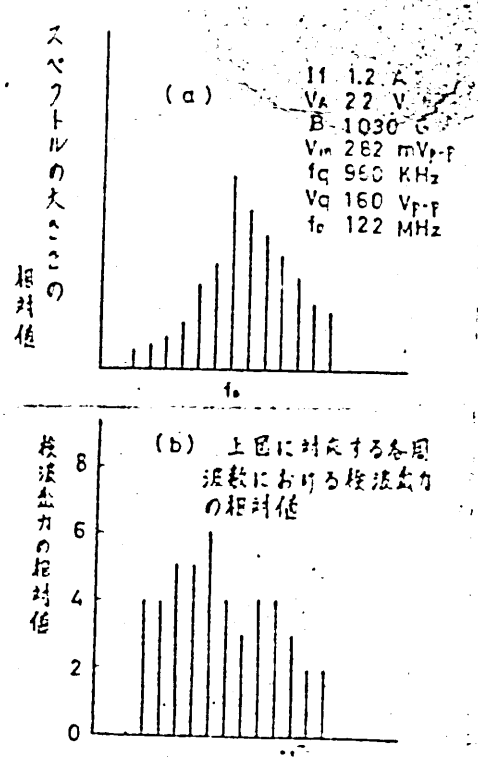


図 6

トルが発生し，検波波形のひずみが著しくなり検波出力を測定できなくなる事がある。図6はf_{in}とf_0の各スペクトルに一致させて測定した結果である。

3.1.4 f_{in}対V_S特性

(I),(II)の型ではV_{in}が小さいとき，特性は図7のように単調に変化し，V_{in}が大きくなるに従い平坦になる。この結果では半値幅は10MHzであるが，これは検波の状態によって異なり，1.4mVp-pの入力に対しては約10～15MHzである。

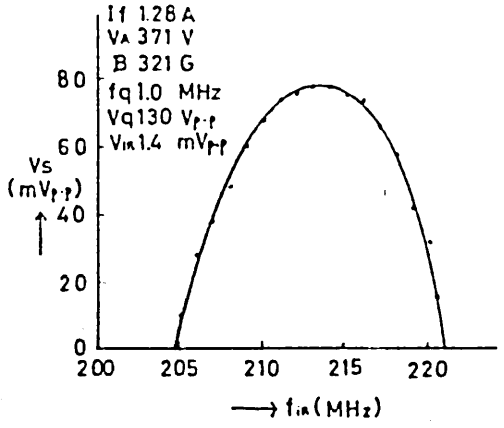


図 7

(III)の型の場合でも，f_0が低くて，かつf_{in}の発振強度に比較してf_0の発振強度が小さければ，同様に単調な特性が得られる。

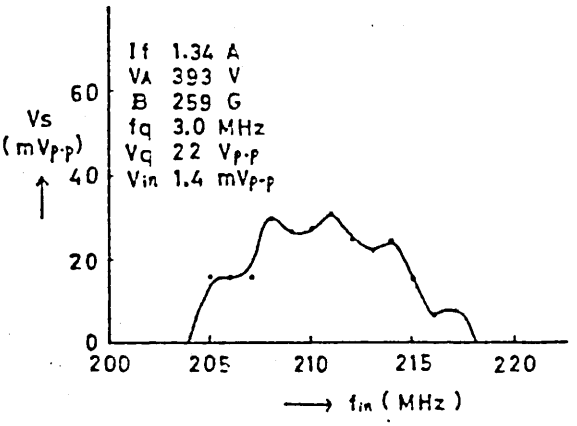


図 8

しかしfが高い(約7MHz以上)とき，f_{in}とf_0が一致している際には安定した大きな検波出力が得られるが，一致しないときには雑音が多くなり，検波出力が減少す

る。そしてf_qの間隔で極大，極小が生じ，図8のような特性が得られたり，また写真2のように$\tilde{f}_{in}$，$\tilde{f}_0$が$f_q/2$程度離れている場合には検波が不可能となり，間欠的な検波特性となったりする。

3.2　V_A対内部発振強度P_0と最適なf_q，V_qの関係

図9の曲線は，f_q＝1MHzで最大の検波出力が得られるよう調整した際のV_A対P_0の静特性を示し，各線分はV_A＝298Vでクエンチング電圧を重畳した際にf_qを変化させ，そのつど検波出力が極大となるようV_qを調整した場合のV_qの半分を示している。

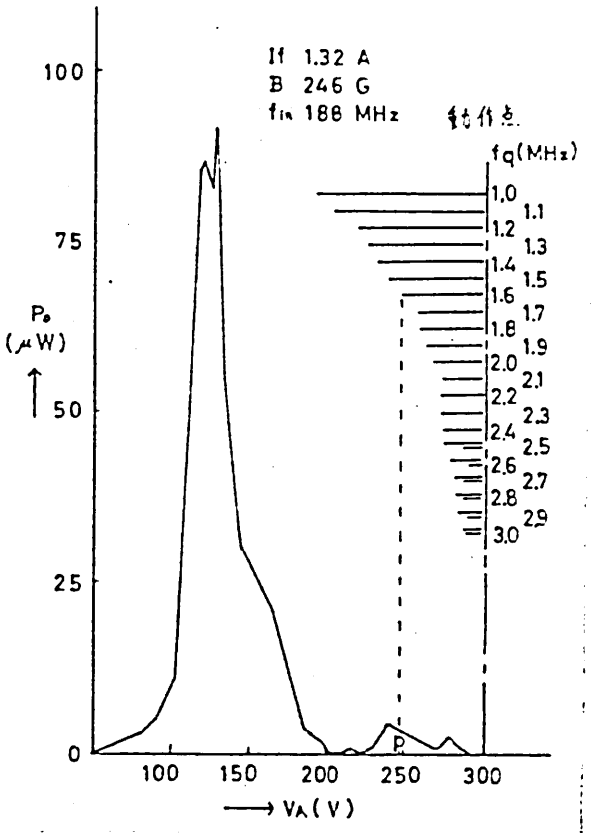


図 9

また，f_q＝2.5～3.0MHzに対し2本の線分が引いてあるのは，2か所で検波出力の極大が生じた事を示す。

このことは，実験によってはf_qの種々の値で生じるので

重要ではない。

f_qが低いときには，この図のような大きな内部発振の領域を越える事が多いが，f_qが約2.1MHz以上になると，V_qの到達するところの陽極電圧（例図9のP点の陽極電圧）での内部発振強度は概して減少する傾向がある。

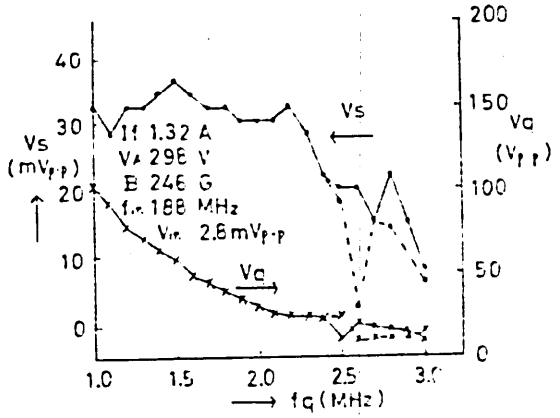


図 10

なお，V_A=130 V付近の内部発振を用いて超再生現象をみることはできなかった。一般に，このような大きな内部発振の領域をつき抜けるような大きなクエンチング電圧を加える方法を用いても直接検波よりも優れた検波感度を得ることはできない。

図10にこのときのf_q対V_q，V_s特性を示す。f_qを増すに従いV_sは減少する傾向がある。

3.3 その他の特性

図11は受調度対V_s特性を示す。同図(a)はV_{in}が小さい場合の結果であり，両者がほぼ比例関係にある事を示している。概して小入力においてはこのような関係にある。

超再生検波よりも直接検波の方が大きな検波出力が得

られるVinにおいては，クエンチング電圧によって検波出力の平均化が行なわれる結果，同図(a)のような特性曲線が得られるものと考えられる。また，いずれの場合に

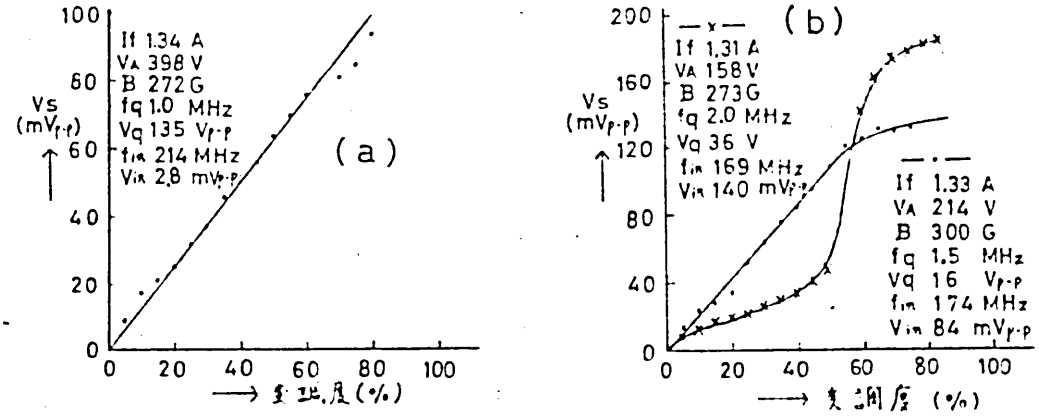


図 11

も，各変調度に対して最大の検波出力が得られる外部条件は若干異なる。

なお，変調度を増すに従い，陽極電流は次第に減少する傾向がある。(変調度0→80%で数μAの減少)。

図12は磁束密度B対Vq特性を示し，図13はVA対Vq特性を示す。この実験の場合にも種々の形状の特性曲線が得られ，入力が小さいときにはクリティカルな曲線が得られる事が多い。

また，Vinが5～6 mVp-pよりも大きくなると磁束密度を一定にしたとき，陽極電圧の近よった2つの値に対して Vq が同期される事があり，またこのとき逆に，磁束密

度の近よったこつの値に対して同期される事がある。入力が更に小さくなると，検波出力が極大となるこれらこつのうち，小さい方は読められなくなる。

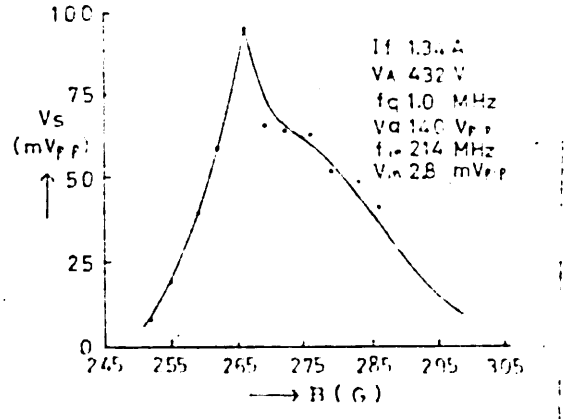


図 12

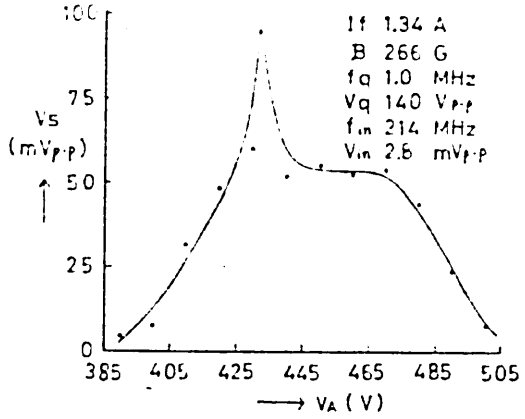


図 13

4. 矩形波クエンチングの場合

検波感度を増すには，正弦波クエンチングの場合と同様低磁界において，V_{A1} における内部発振周波数 f_0 を含むスペクトル群 $\tilde{f}_0$ が $\tilde{f}_m$ に同期されるか，もしくは f_0，$\tilde{f}_m$ がともに存在しなければならない（図14参照）。

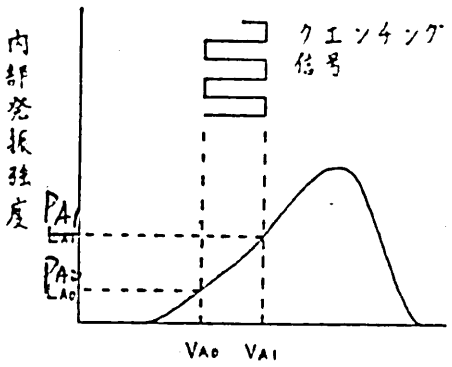


図 14

また，クエンチング電圧が大きいときには V_{A0}，V_{A1} における内部発振周波数が非常に異なるため，P_{A1} が零もし

くは P_{A1} より十分に小さければ検波の際問題はない。しかし入来波信号によって V_{A0} での発振が大きくなる事があり，実験の際考慮を要する。

次に，P_0 と V_S との関係について述べる。図15(a)の曲線は V_A 対 P_0 の静特性を示し，その上の各線分の左右の端はそれぞれ V_{A0}, V_{A1} を示す。また，同図(b)は各 V_{A1} における V_S を示す。

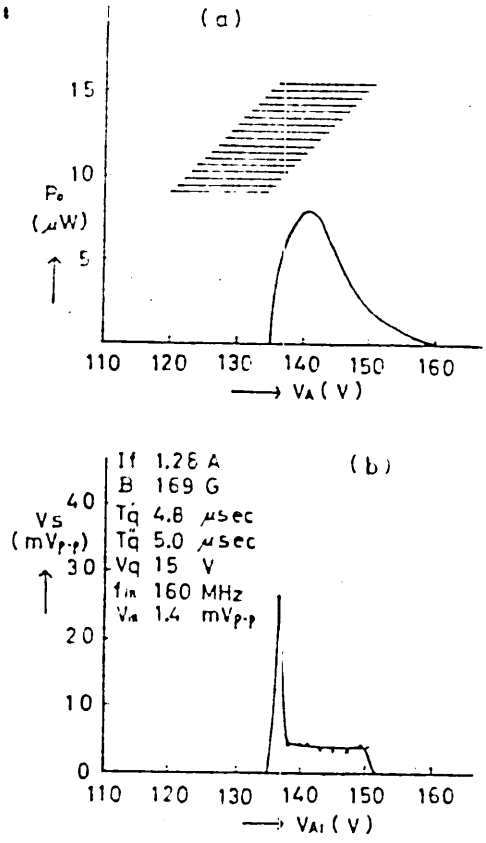


図 15

図では $V_{A1} = 136$ V のとき V_S は最大でそのときの P_0 は4μWである。しかし，このとき発振している V_A の範囲での周波数に問題はないにもかかわらず，同じく $P_0 = 4\mu W$ となる $V_A = 147$ V 付近における V_S は小さい。直接検波においても同様に，発振の静特性の立ち上がり部分では検波感度が増す。

このように超再生現象のみられる場所は正弦波クエンチングの場合よりも限定される。

また，超再生現象はP_0が10μW程度以下でみられている。

V_{in}を変化させたときI_{D0}が最大となるV_{A1}は変わらないという実験結果しか得られていない。

5. まとめ

低磁界では，電子振動のΔ振幅は大きいゆえ，陽極間隙から受ける入来波信号の影響は大きい。従って直接検波においても，小さなV_{in}に対し先の超再生現象がみられる場合の検波出力と同程度の検波出力が得られる事がある。

上記の場合にf_0，f_{in}が近い（数100KHz）ときには大きな検波出力が得られるが，一致すると検波出力が減少する。この現象は超再生現象の場合に外部条件を若干変化させる事によってみられる場合もあり，またみられない場合もあり，これらの2つの現象のいずれについても，いかなる外部条件を整えればみられる現象か分っていない。

超再生現象では，クエンチング電圧によって発振が立ち上がる際，低磁界であるがゆえに電子はΔ方向に適当な広がりを持って陽極間隙に近づき，直接検波の際よりも強く影響を受けるために大きな検波出力が得られるの

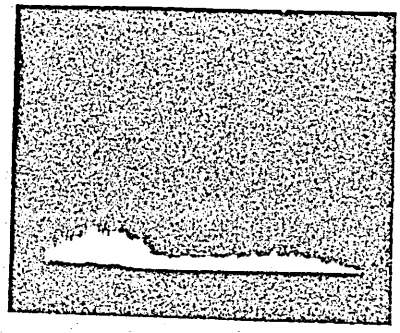
ではないかと考えられる。

そしてV_{in}が大きいほど発振は大きな初期振幅から立ち上がり，この包絡線の面積に対応して背電極，端電極の電流は変化する。すなわち検波が可能となる。

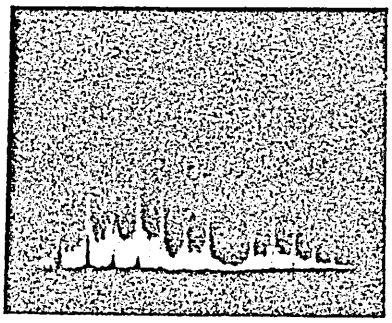
しかし，V_{in}が大きくなり対数モードになる場合，すなわち発振が早く定常状態に達する場合には振幅はそれだけ早く小さくなり，結局クエンチング電圧はV_dを減少させる事になる。これは先の図5に対応している。

今後の問題点は，いかなる外部条件を整えれば，先のスペクトルの4種の型のうちいずれの型が生じるかを見い出す事にある。

終りに当り，御討論をいただいた本学大東延久講師ならびに在学中終始熱心に実験を手伝っていただいた斎藤英治，佐々木周平，告野満彦各氏に対し深く感謝いたします。

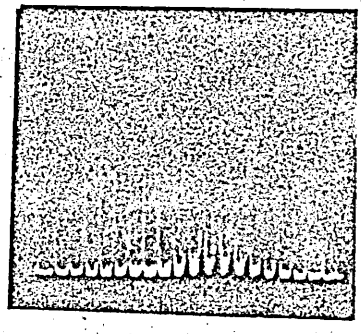


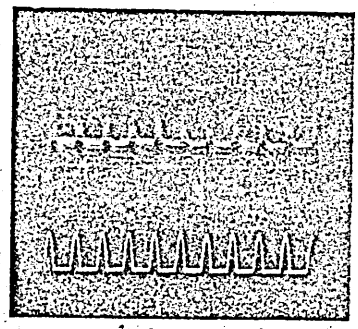
V_{in}を加える以前



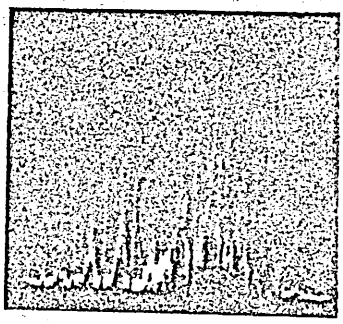
V_{in}を加えた後

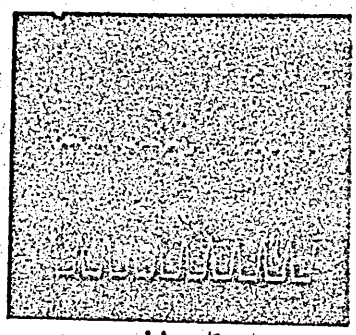
写真1





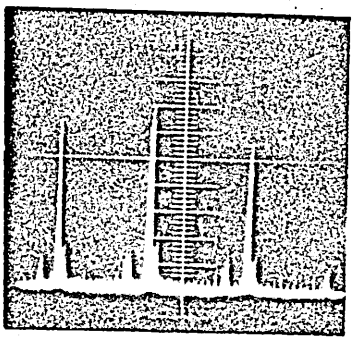
(a)　上：検波波形
　　下：変調波形

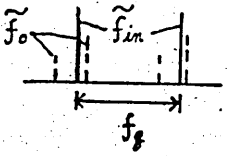


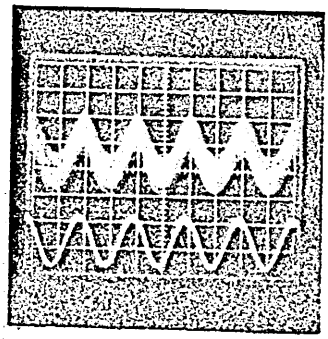


(b)　上：検波波形
　　下：変調波形

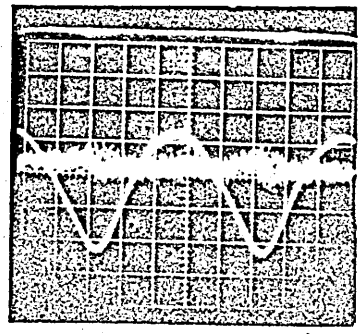
写真2





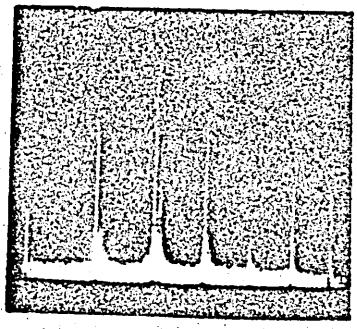


上：検波波形
下：変調波形

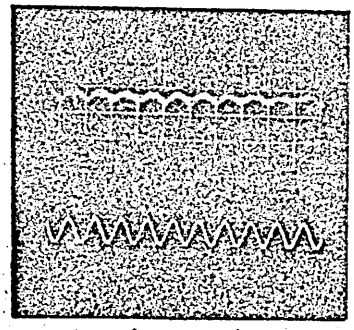


クエンチング波形(正弦波)
とモード波形

写真 3



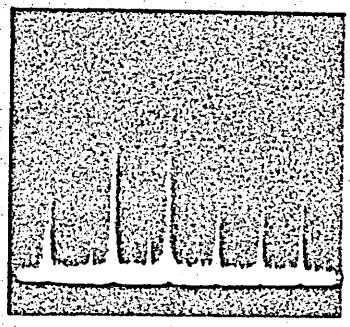
(a)



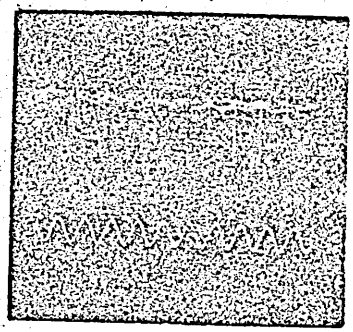
実線: $\tilde{f}_{in}$
破線: $\tilde{f}_0$

$V_g = 6.7 V_{p\text{-}p}$

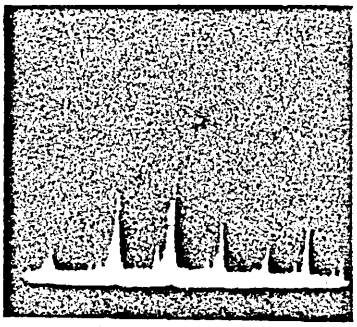
上：検波波形
下：変調波形

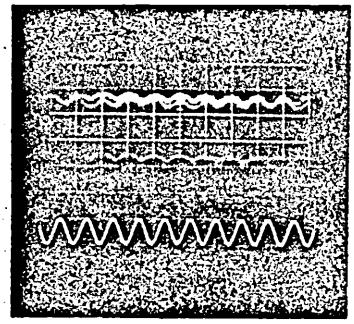


(b)

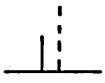


$V_g = 6.4 V_{p\text{-}p}$

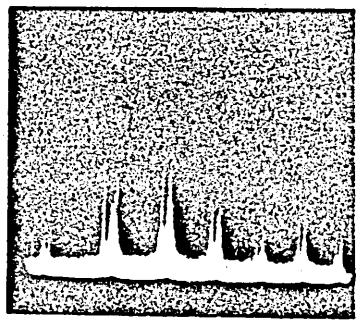


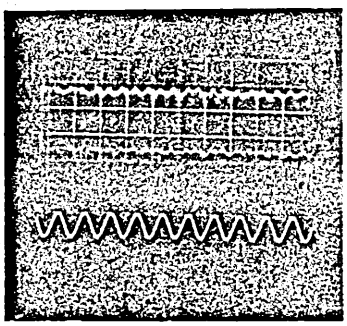


(C)



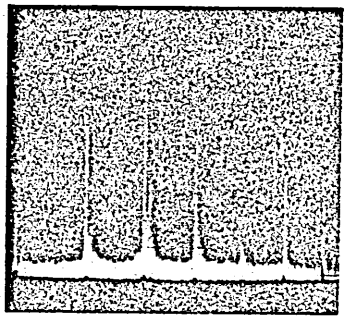
$V_{f} = 62\ V_{p\text{-}p}$

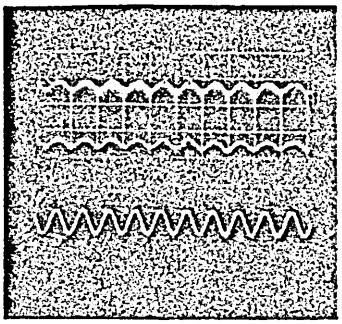




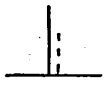
(d)

$V_{f} = 61\ V_{p\text{-}p}$

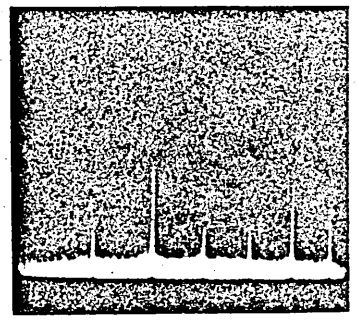




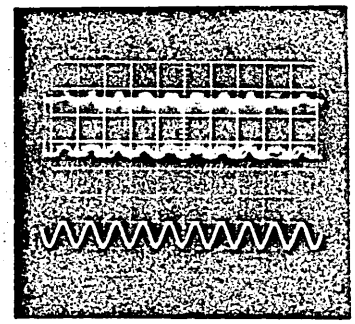
(e)



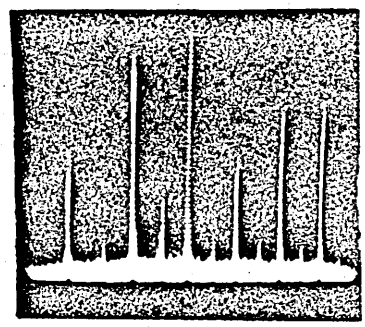
$V_{f} = 60\ V_{p\text{-}p}$



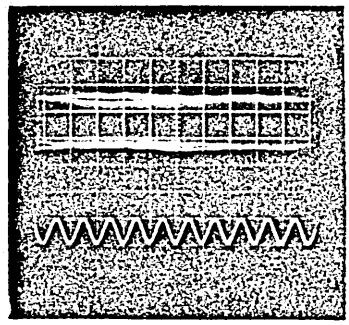
(f)



$V_g = 58\ V_{p-p}$



(g)



$V_g = 56\ V_{p-p}$

写真4

輻射科学研究会資料

損失のある半無限異方性プラズマによる平面パルス電磁波の反射過渡応答

神野 啓二郎
小嶋 敏孝
板倉 清保
(大阪大学・工学部)

1975年 7月4日

正	誤
式(19) $N(s)=[\qquad\qquad]^{\frac{1}{2}}$	$N(s)=[\qquad\qquad]$
図2. 縦軸の量として. (a) N^2 (b) χ (c) φ を入れる.	
P16 下から11行目 任意入射波	任意入力
7行目 入射波	入力波
6行目 任意入射波	任意入力
式(37) $=\int_0^{\omega_p t}\frac{e_z(s)}{\omega_p}\sin\frac{\omega_0}{\omega_p}(\omega_p t-s)\,ds$	$=\int_0^{t}\frac{e_z(\tau)}{\omega_p}\sin\frac{\omega_0}{\omega_p}(\omega_p t-s)\,ds$
P17 上から6行目 厳密解と数値解.	厳密解と数値
下から2行目 2.2	1.4
P18 下から7行目 反射波	反射
P23 下から7行目 (1) ……信号周波数が cut off 周波…… "cut off 周波数よりも高いときは、反射波は信号周波数と."	

1. まえがき

プラズマという名称がLangmuirによって才千の物質状態に使われて以来，それに関しての研究が活発におこなわれてきた。無線通信に重要な関連性をもつ電離層もプラズマの一形態であって，それをも含めてプラズマ一般の内部状態を知ることは意義あることである。プラズマ診断にパルスを使用することがSchmitt[1]，およびChen[2]によって提案されそしてその後の発展にともない，過渡応答についての理論的研究が活発におこなわれ，いくつかの興味ある結果が報告されている。例えば等方性で損失のないプラズマが半無限またはスラブ状に分布した場合について入射波がそれぞれインパルスあるいはステップ関数の場合をWaitら[3]が，また等方性プラズマに対して入射波がTuned on Sinusoid（つまり $u(t)\sin\omega t$）の場合をKnopら[4],[10]が解析している。磁化プラズマを対象とした解析もおこなわれているが，そのほとんどが外部磁界が境界面に垂直である。[5]さらに粒子衝突による損失を加味した解析もなされているが極めて少ない。[5]~[7]その理由は異方性ないしは損失を考慮すると過渡応答を求めるに際し必要となるラプラス逆変換を解析的にかつ厳密に実行することが困難になるためである。しかしながら，適当な近似の範囲，すなわち応答時間の極めて初期や，十分に経過をへた時間領域に限定して，過渡応答解を解析的に求めることは可能である。[8]ただし，この場合，時間応答の定性的な振舞の概略しか把握できない。一方電子計算機によって，適当な誤差の範囲内で数値積分を実行できれば，前記の近似解では求めることができない時間領域の応答を信頼できうる精度で求めることが可能である。[9]

本稿では，境界面に平行な外部静磁界が存在し，損失の

ある半無限プラズマによる平面電磁波パルスの過渡応答を調べるため，上記の近似による解析的な解と数値積分法による解を求め，異方性ならびに損失の時間応答に対する効果について考察する。

2. プラズマ内部の電磁界

外部静磁界は，直角座標系において，z方向を向いているものとし，プラズマ内の電束密度Dは電界Eと誘電率テンソル$\hat{\varepsilon}$によってつぎのように表わされるものとする。

$$D = \hat{\varepsilon} E \tag{1}$$

ただし

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -j\varepsilon_2 & 0 \\ j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ここで

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{j(\nu + j\omega)\omega_p^2/\omega}{\omega_c^2 + (\nu + j\omega)^2} \qquad \omega_p = (n_0 e^2 / m\varepsilon_0)^{1/2}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} = -\frac{\omega_c \omega_p^2/\omega}{\omega_c^2 + (\nu + j\omega)^2} \qquad \omega_c = -(e/m) B_0 \tag{3}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{j\omega_p^2}{(\nu + j\omega)\omega}$$

ν：衝突周波数
n_0：電子の平均密度

である。上記諸量は電子に関するものであってイオンの効果は無視する。そして時間変化は$e^{j\omega t}$であり，以下時間項は省くことにする。

プラズマ内部ではつぎのMaxwellの方程式が成立する。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}\ ,\quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{4}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D}\ ,\quad \mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E} \tag{5}$$

式(5)を便宜上つぎのように書きかえる。

$$(\hat{\varepsilon})^{-1}\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{E} \tag{6}$$

ここで，$(\hat{\varepsilon})^{-1}$をつぎのように書く。

$$\varepsilon_0(\hat{\varepsilon})^{-1} = \begin{pmatrix} M & -jk & 0 \\ jk & M & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \tag{7}$$

ただし，

$$M = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}\ ,\quad k = -\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}\ ;\quad P = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3} \tag{8}$$

界の変化は2次元的であって，z方向に対しては変化はないものとして，式(4)，(5)から界は(E_z, E_y, H_z)と(E_z, H_x, H_y)の二組に分離でき，それぞれに対してつぎのような微分方程式を得る。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k^2}{M}\right] H_z = 0 \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k^2\varepsilon_3}{\varepsilon_0}\right] E_z = 0 \tag{10}$$

ここで，$k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$. (11)

$H_z = 0$に対応する部分界は外部静磁界の影響を受けないので，$E_z = 0$に対応する部分界についてのみ考察する。

3. 反射係数

問題の構成図を図1に示す。均質なプラズマが $y>0$ に存在し，$y<0$ は真空とする。平面電磁波が $y<0$ の領域から入射角 θ で入射するものとする。

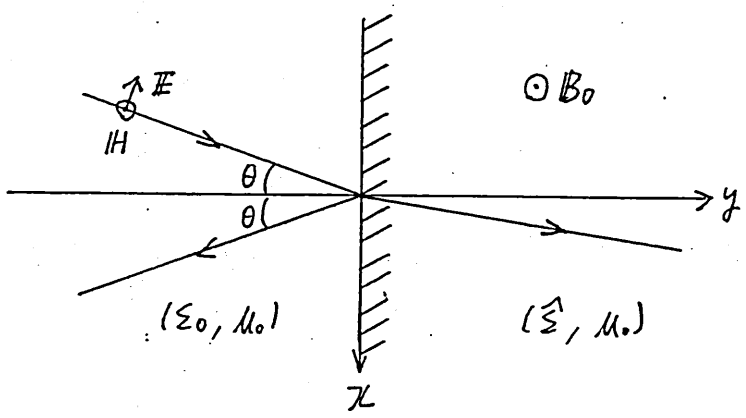


図1　問題の構成図

入射波，反射波を次式のようにおく。

$$H_z = A \exp[-jk(x\sin\theta + y\cos\theta)] \tag{12}$$

$$H_r = A R_h \exp[-jk(x\sin\theta - y\cos\theta)] \tag{13}$$

そして，透過波は式(9)を使って つぎのようにおく。

$$H_t = A T_h \exp[-jk(x\sin\theta + y[M^{-1} - \sin^2\theta]^{\frac{1}{2}})] \tag{14}$$

R_h, T_h は磁界反射係数および磁界透過係数であって，$y=0$ での境界条件より

$$R_h = \frac{\cos\theta - \Delta}{\cos\theta + \Delta}, \quad T_h = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + \Delta} \tag{15}$$

$$\Delta = M\left[M^{-1} - \sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} + jK\sin\theta \tag{16}$$

その時，電界反射係数 R_e は

$$R_e = \frac{(1/\cos\theta) - (1/\Delta)}{(1/\cos\theta) + (1/\Delta)} \tag{17}$$

となる。

4. 過渡応答

以下簡単のため式(17)で $\theta = 0$ つまり垂直入射の場合について考察する。

いま，式(17)で $s = j\omega$ と置き換えると，

$$R(s) = \frac{1 - N(s)}{1 + N(s)} \tag{18}$$

ただし，

$$N(s) = \left[1 + \frac{(\omega_p^2/s^2)\{1 + (\omega_p^2/s^2) + (\nu/s)\}}{\{1 + (\nu/s)\}\{1 + (\omega_p^2/s^2) + (\nu/s)\} + (\omega_c^2/s^2)}\right] \tag{19}$$

式(18)はプラズマを仮想的なブラックボックスとみなした場合の伝達関数ということができる。

入射波 $e_i(t)$ をラプラス変換したものを $E_I(s)$ とすると，反射波のラプラス変換されたもの $E_R(s)$ は

$$E_R(s) = R(s) \cdot E_I(s) \tag{20}$$

ここで

$$E_I(s) = \int_0^\infty e_i(t) e^{-st}\, dt \tag{21}$$

で与えられる。

時間領域での反射波$e_r(t)$は$E_R(s)$をラプラス逆変換することによって与えられ

$$e_r(t) = \mathcal{L}^{-1}[E_R(s)] \tag{22}$$

ここで,

$$\mathcal{L}^{-1}[E_R(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} R(s)\cdot E_I(s)\cdot e^{st}\,ds \tag{23}$$

cは$c \geq c_0$を満足する定数, c_0は増加指数である。

この反射波$e_r(t)$は$y=0$で観測されるものである。

第5節においては, 入射波がインパルスの場合における過渡応答を異方性と損失を考慮して求める。また第6節では入射波としてTurned on Sinusoidの場合における過渡応答を異方性を考慮して求める。

5. インパルスに対する応答

5.1 近似解

本節では, 実際に数値計算をおこなうに先立ち, 時間が小さい場合と大きい場合について異方性と損失を考慮した過渡応答を近似的に求める。そしてそれらの効果を定性的に調べる。(付録1)

表1(a)には異方性のみを考慮した場合の近似解, 表1(b)には損失を考慮した場合の近似解が与えられている。

表1(a)より異方性のために過渡応答は大きく変化することがわかる。また, 時間が小さい時は異方性のためと思われる項が相殺されている。

表1(b)から損失の効果は過渡応答を減少させるということがわかる。

表1. 過渡応答の近似解

(a) 異方性のみを考慮した場合

t	小	$\frac{e_\delta(\omega_p t)}{\omega_p} = -\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2\right\}^{3/2}}\sin\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2}\omega_p t - \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2}\omega_p t$	(24)
	大	$\frac{e_\delta(\omega_p t)}{\omega_p} = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2}}\exp\left(-\frac{\omega_p t}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2}}\right)$	(25)

(b) 損失を考慮した場合

t	小	$\frac{e_\delta(\omega_p t)}{\omega_p} = -\frac{1}{4}\frac{\omega_p}{\nu}\left(1-\exp\left[-\left(\frac{\nu}{\omega_p}\right)\omega_p t\right]\right)$, $\quad 1 \gg \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2$	(26)
		$\frac{e_\delta(\omega_p t)}{\omega_p} = -\frac{1}{4}\frac{\omega_p^3}{\omega_c^2}t - \frac{1}{4}\omega_p t + \frac{1}{4}\frac{\nu}{\omega_p}\frac{(\omega_p t)^2}{2}$, $\quad 1 \ll \left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2$	(27)
	大	$\frac{e_\delta(\omega_p t)}{\omega_p} = -2\frac{\omega_p}{\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\omega_p^2 t/\nu}} - \exp\left(\frac{\omega_p^2 t}{\nu}\right)\left\{1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\omega_p^2 t}{\nu}}\right)\right\}\right]$	(28)

($\mathrm{erf}(\cdot)$ は誤差関数である。)

5.2 数値積分解

入射波がインパルス ($e_i(t)=\delta(t)$) のとき，式(23)はつぎのようになる。

$$e_\delta(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} R(s)\, e^{st}\, ds \qquad (29)$$

ここで得られた $e_\delta(t)$ はインパルス応答と呼ばれるものである。

式(29)における $R(s)$ は実関数であるということより次式のように書き直すことができる。(付録2)

$$e_s(t)=\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty \chi(w)\sin wt\,dw \tag{30}$$

あるいは,

$$e_s(t)=\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty \varphi(w)\cos wt\,dw \tag{31}$$

ただし,

$$\chi(w)=-\mathrm{Im}[R(jw)] \tag{32}$$

$$\varphi(w)=\mathrm{Re}[R(jw)]$$

であって, Im は虚数部, Re は実数部を表わす。

式(30), (31)のどちらを用いても過渡応答を計算することができるが, どちらを選択すべきかは, $\chi(w)$, $\varphi(w)$ の w に対する振舞, および数値計算の時間, 精度等を考慮することによって決定されるべきである。

図2には異方性で無損失の場合に対する磁化プラズマの屈折率の2乗 N^2 とそれに対応する上記 $\chi(w)$, $\varphi(w)$ の w/w_p に対する変化のあらましを描いている。この図より明らかなように $\chi(w)$ を用いて計算すれば, 積分区間は有限になり, $\varphi(w)$ を用いるよりも精度よく計算できると思われる。図2は無損失の場合の $\chi(w)$, $\varphi(w)$ の変化のあらましを図示したものであるが, 損失を考慮した時には屈折率の2乗 N^2 は複素数になるため $\chi(w)$ と

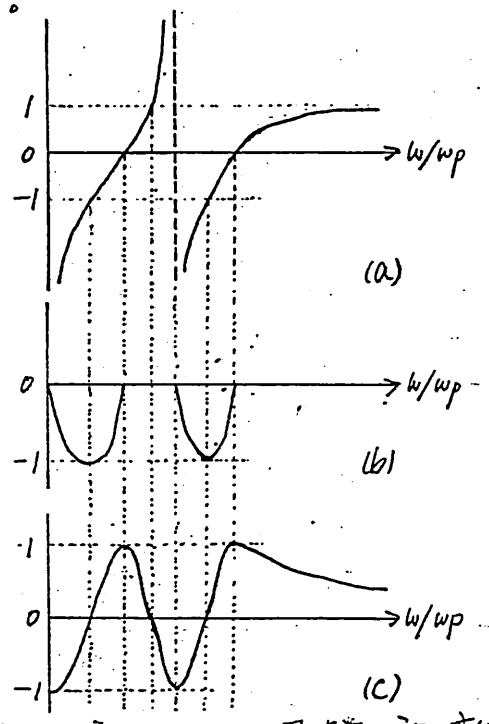


図2 N^2, $\chi(w)$, $\varphi(w)$ の周波数に対する変化

て $\varphi(w)$ は周波数が無限大のところまで拡がる。しかし $\chi(w)$ は $\varphi(w)$ に比べて早く0に収束する。

そこで実際の計算にあたっては式(30)を用い，その積分計算にはSimpsonの公式を用いておこなう。

Simpsonの公式を用いた積分解の精度等を評価するために厳密解がわかっている等方性かつ無損失の場合においてそれらの数値を比較する。

等方性かつ無損失の場合，$K(s)$ は次式のようになり．

$$K(s)=\frac{s-(s^2+w_p^2)^{1/2}}{s+(s^2+w_p^2)^{1/2}}$$

過渡応答は

$$e_s(t)=-(2/t)J_2(w_pt)\,u(t) \qquad (33)$$

ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である。

表2には式(30)による数値積分解と式(33)による厳密解とが比較されている。ここで，w_at らがおこなったように規格化された時間 w_pt，反射波をプラズマ角周波数 w_p で割った量 $e_s(w_pt)/w_p$ とによって表示されている。この表から数値積分解と厳密解はおおむね小数第4位まで一致しており，反射波を十分正確に表わしていることがわかる。

式(30)に基づいて異方性と損失を考慮した場合の数値例を図3ないし図6に示す。これらの図は縦軸として $e_s(w_pt)/w_p$，横軸としては w_pt がとられている。図3ないし図6において，w_c/w_p をそれぞれ0.0，0.5，1.0，1.5とし，それらの場合を通してパラメータ ν/w_p を $\nu/w_p=0.0$，0.1，0.3に選んでいる。

まず，損失の効果を調べてみると，当然予想される結果として，ν/w_p が大きい程，つまり粒子同志の衝突による損失が大きい程，反射波の振幅の絶対値は減少することが示されている。応答波の振動の周期は ν/w_p の変化によってそれ程大きく変化を受けないようである。

表2. 等方性の場合の厳密解と数値解の比較

	$e_s(\omega_p t)/\omega_p$			$e_s(\omega_p t)/\omega_p$	
$\omega_p t$	厳密解(式(33))	数値解(式(30))	$\omega_p t$	厳密解(式(33))	数値解(式(30))
1.0	−.2298	−.2298	11.0	$-.2528\times10^{-1}$	$-.2528\times10^{-1}$
2.0	−.3528	−.3528	12.0	$.1416\times10^{-1}$	$.1415\times10^{-1}$
3.0	−.3241	−.3241	13.0	$.3350\times10^{-1}$	$.3350\times10^{-1}$
4.0	−.1821	−.1821	14.0	$.2172\times10^{-1}$	$.2172\times10^{-1}$
5.0	$-.1863\times10^{-1}$	$-.1863\times10^{-1}$	15.0	$-.5543\times10^{-2}$	$-.5540\times10^{-2}$
6.0	$.8096\times10^{-1}$	$.8095\times10^{-1}$	16.0	$-.2327\times10^{-1}$	$-.2328\times10^{-1}$
7.0	$.8612\times10^{-1}$	$.8612\times10^{-1}$	17.0	$-.1863\times10^{-1}$	$-.1863\times10^{-1}$
8.0	$.2825\times10^{-1}$	$.2825\times10^{-1}$	18.0	$.8369\times10^{-3}$	$.8340\times10^{-3}$
9.0	$-.3219\times10^{-1}$	$-.3219\times10^{-1}$	19.0	$.1661\times10^{-1}$	$.1661\times10^{-1}$
10.0	$-.5093\times10^{-1}$	$-.5093\times10^{-1}$	20.0	$.1603\times10^{-1}$	$.1604\times10^{-1}$

つぎに，異方性の効果を調べるため，各図における $\nu/\omega_p=0$ なる無損失の場合の結果を比較すれば(図7)，ω_c/ω_p が大なる程，つまり外部静磁界が強くなる程，過渡応答波の振動の周期が短くなり，振幅の変動も激しくなっている。

これらの振動がプラズマのパラメータといかに関係しているかを調べるため，まず等方性プラズマの厳密解式(33)で $t\to\infty$ の漸近的なふるまいを求めると，

$$e_s(t)=\left(\frac{8}{\pi\omega_p t^3}\right)^{1/2}\cos\left(\omega_p t-\frac{\pi}{4}\right),\quad \omega_p t\gg1 \qquad (34)$$

となって，十分な時間が経過すれば，応答波の振動数は系の cut off 周波数 ω_p に近づくことがわかる。図3からも $\nu/\omega_p=0$ に対して $13\le\omega_p t\le20$ の一周期に注目すると $\omega_p t\simeq2\pi$ になっている。

他方，$\omega_c/\omega_p\neq0$ の場合の計算結果，とりわけ図5あるいは図6をみると，応答波の振動は二つの異なる振動数の波

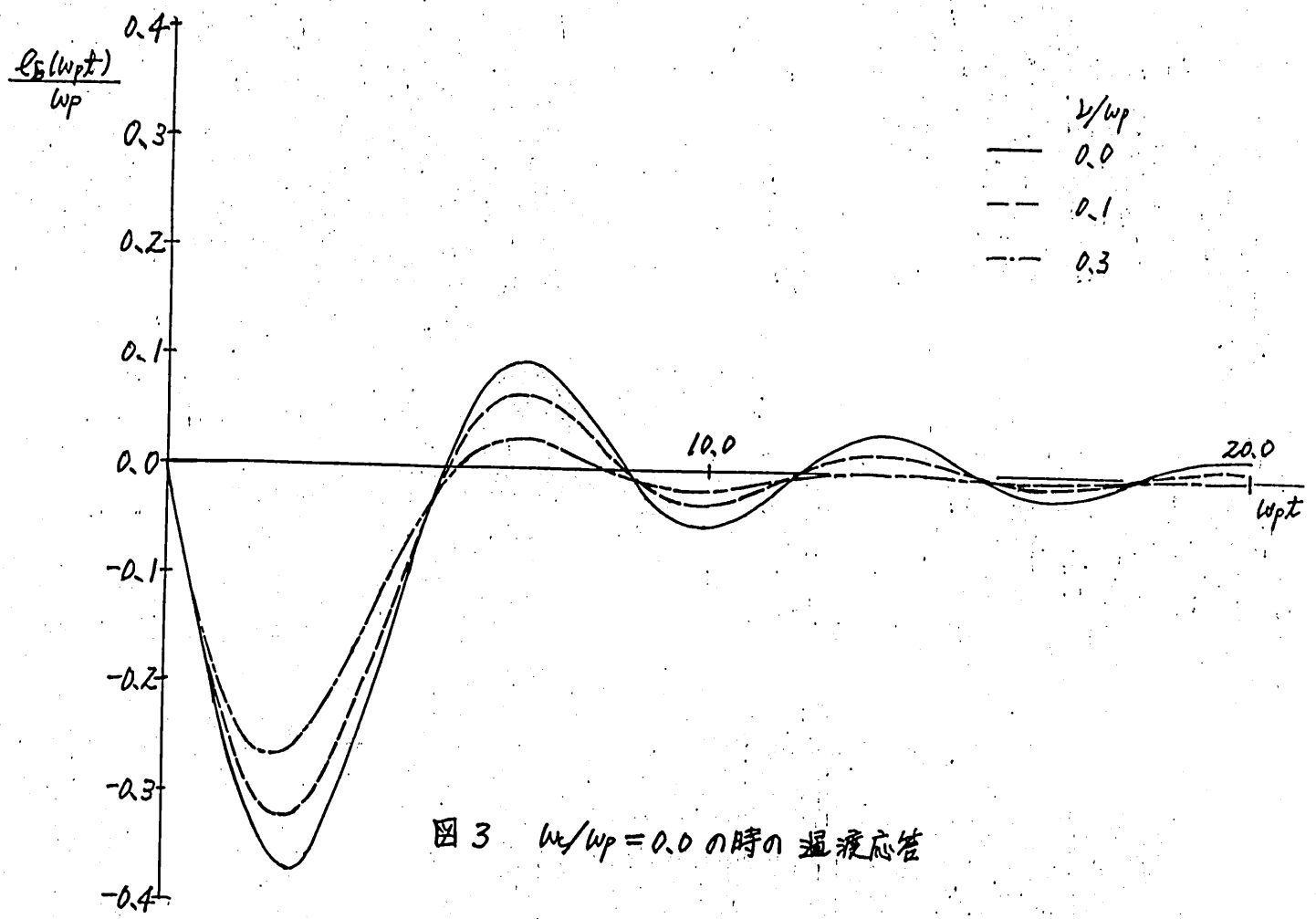


図3　$\omega_c/\omega_p = 0.0$ の時の過渡応答

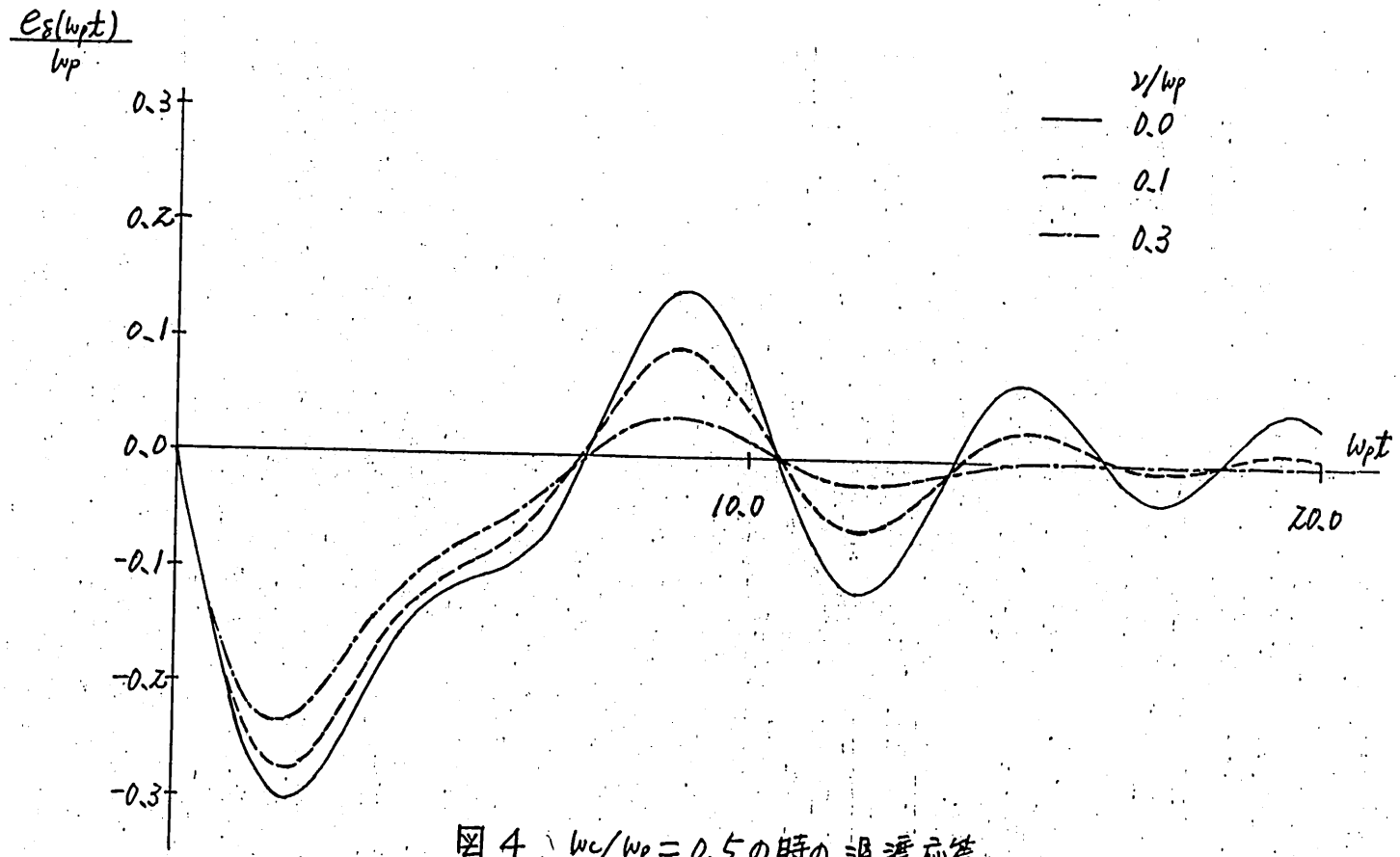


図4 $w_c/w_p = 0.5$ の時の過渡応答

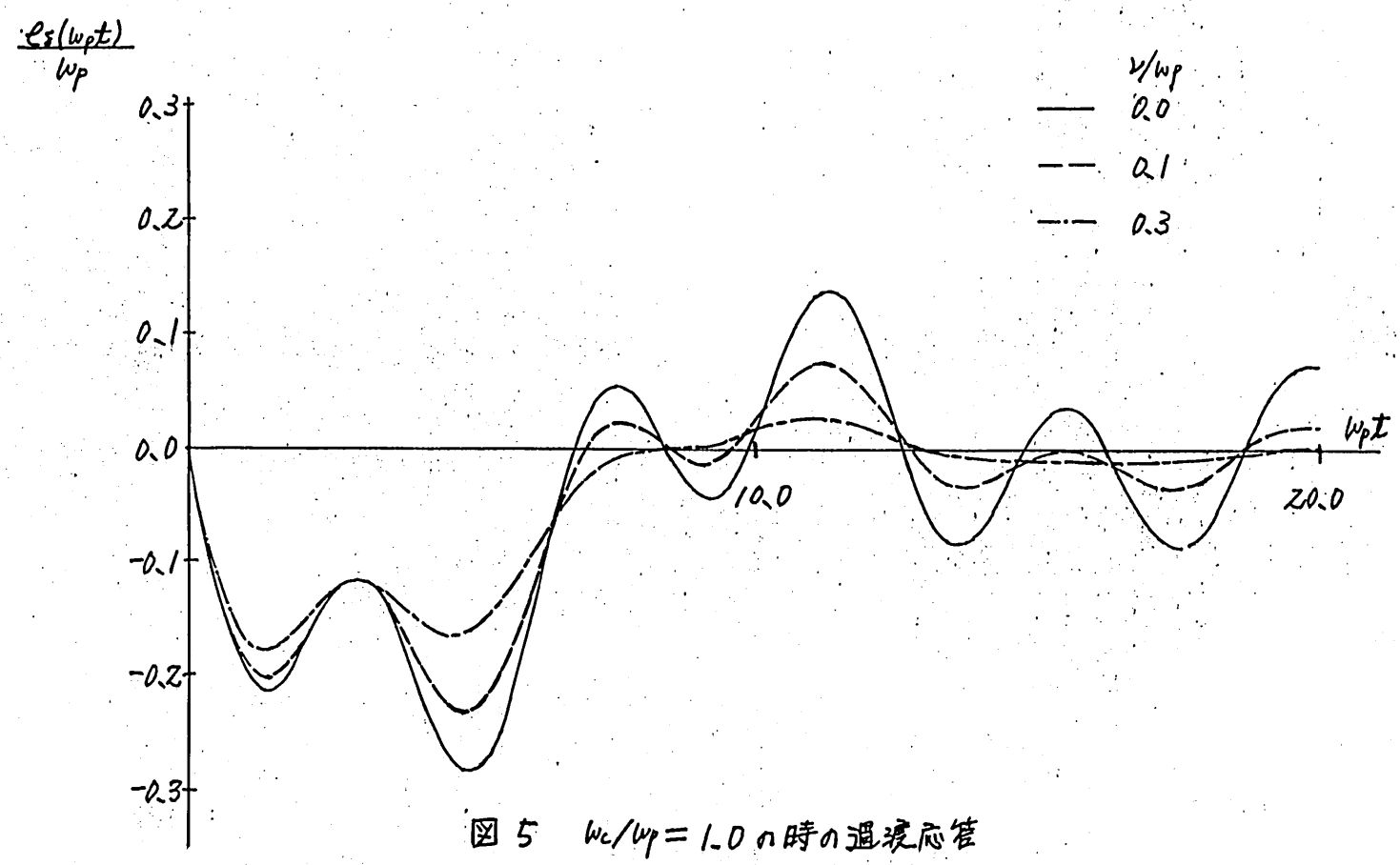


図 5　$\omega_c/\omega_p = 1.0$ の時の過渡応答

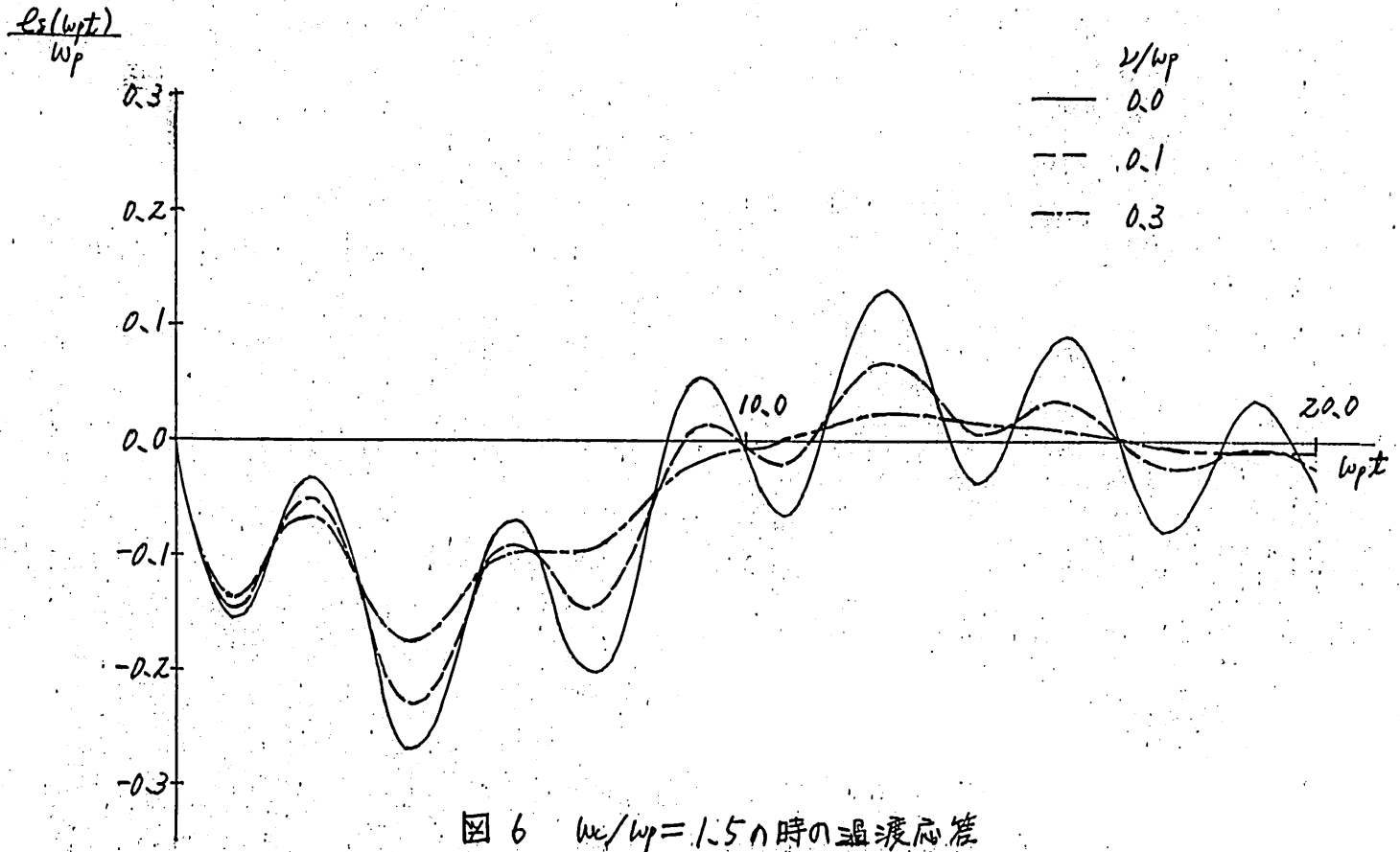


図 6　$\omega_c/\omega_p = 1.5$ の時の遅延応答

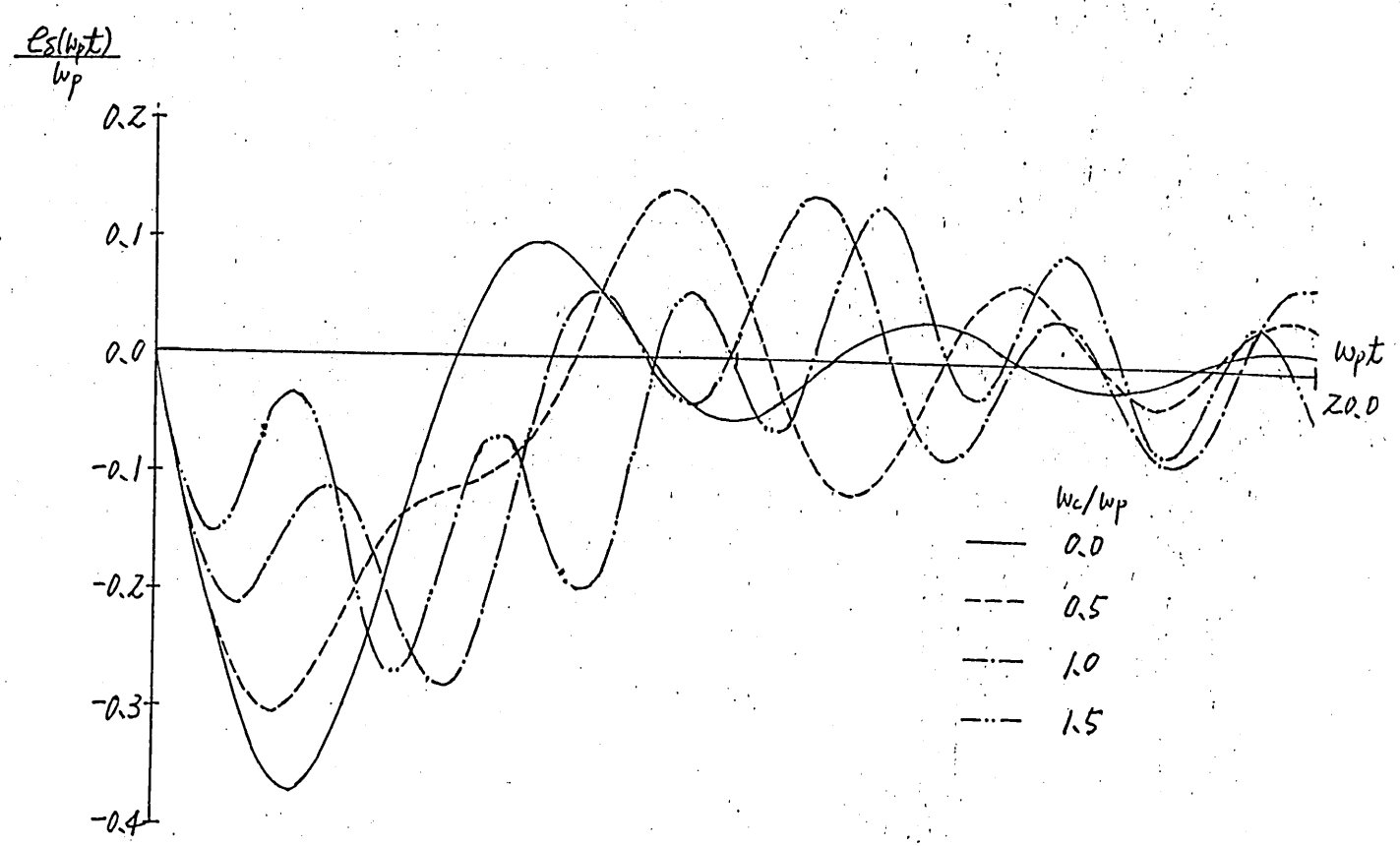


図 7　インパルス応答の異方性による効果

の重ねあわせになっていることが示されていて，これらの振動数は，等方性の場合の類推から，磁化プラズマ中の異常波の cut off 周波数

$$\omega_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{\omega_c}{\omega_p} + \sqrt{4+\left(\frac{\omega_c}{\omega_p}\right)^2}\right)\omega_p \qquad (35)$$

に相当することが予想されるが，事実 ω_c/ω_p の各値に対して計算してみると，その振動数は式(35)によく一致する。

以上のことより異方性は主に反射波に時間的な変化を与え，損失は反射波の振幅に影響を与えるということがわかる。

6. $e_i(t) = u(t)\sin\omega_0 t$ に対する応答

実際的な見地からインパルスあるいは直流パルスは実現できないものであり，実際に診断等に用いるのは不適当である。むしろ帯域が制限されている無線周波数のパルスの方が実際的であると考えられる。そこで，任意入力として $e_i(t) = u(t)\sin\omega_0 t$ (ただし，ω_0 は carrier 周波数である。)を考え，それに対する過渡応答を異方性を考慮した場合について求める。

任意の入力波 $e_i(t)$ に対する過渡応答はインパルス応答 $e_s(t)$ と任意入力とのたたみ込み積分で与えられる。

$$e_r(t) = \int_0^t e_s(\tau)e_i(t-\tau)\,d\tau \qquad (36)$$

ただし，$e_s(\cdot)$ は式(29)で与えられる

いまの場合，式(36)は

$$e_r(t) = \int_0^t e_s(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{e_s(\tau)}{\omega_p}\sin\frac{\omega_0}{\omega_p}(\omega_p t - s)\,ds \qquad (37)$$

となる。式(37)をそのままの形で数値計算するとすれば，2重の数値積分が必要となり，計算時間が長くなる。そこでそれに対処する方法として，式(37)の$e_s(\omega_p t)/\omega_p$を折線で近似し，sin関数とのたたみ込み積分を実行する。

この場合においても，その積分の妥当性の評価には等方性の場合における厳密解と数値との比較によっておこなった。

等方性の場合における式(37)の厳密解は次式で与えられる。[4]

$$e_r(\omega_p t) = -Z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n J_{2n+3}(\omega_p t)\, u(t) \qquad (38)$$

ただし，

$$a_n = \cos(2n+1)\theta, \text{ where } \cos\theta = \omega_0/\omega_p \quad (\omega_0 \le \omega_p)$$
$$a_n = \cosh(2n+1)\theta, \text{ where } \cosh\varphi = \omega_0/\omega_p \quad (\omega_0 \ge \omega_p) \qquad (39)$$

$\omega_0/\omega_p = 1.0$なる条件のもとに式(37)を数値積分したものと式(38)の計算結果を比較したのが表3である。ここで式(37)の$e_s(\omega_p t)/\omega_p$を折線近似する標本点として$\omega_p t$が0.05の倍数である点を選んだ。

表3からインパルス応答として標本点の間隔を適当にえらべば折線近似による値を用いてもよく，いまの場合少数点下3位までほぼ一致している。

式(37)におけるインパルス応答として異方性の場合におけるものを使って計算すれば，異方性を考慮した時の応答が得られることになる。

数値計算した結果を図示したのが図8ないし図11である。図8ないし図11において，ω_0/ω_pをそれぞれ0.0, 1.0, 1.4および1.4とし，同時にパラメータω_c/ω_pはそれらを通して0.0, 0.5, 1.0に選んでいる。

表3、等方性プラズマに対する式(37)の数値解と式(38)の厳密解との比較

	$e_r(\omega_p t)$			$e_r(\omega_p t)$	
$\omega_p t$	数値解(式(37))	厳密解(式(38))	$\omega_p t$	数値解(式(37))	厳密解(式(38))
1.0	−.3861 $\times 10^{-1}$	−.3863 $\times 10^{-1}$	11.0	−.6461	−.6464
2.0	−.2440	−.2442	12.0	−.8994 $\times 10^{-1}$	−.8968 $\times 10^{-1}$
3.0	−.5367	−.5370	13.0	.5600	.5608
4.0	−.6245	−.6247	14.0	.7233	.7239
5.0	−.3038	−.3038	15.0	.2403	.2401
6.0	.2736	.2740	16.0	−.4680	−.4687
7.0	.6659	.6663	17.0	−.7653	−.7661
8.0	.5199	.5201	18.0	−.3750	−.3751
9.0	−.7822 $\times 10^{-1}$	−.7844 $\times 10^{-1}$	19.0	.3602	.3612
10.0	−.6304	−.6310	20.0	.7784	.7785

$\omega_c/\omega_p = 0.0$ の等方性の場合はすでにCase[10]らによって解析されており，ω_0/ω_p の種々の値における数値計算例が示されている。$\omega_0/\omega_p < 1$ の時，反射波は初期には信号周波数よりも低い瞬時周波数で振動し，時間とともに信号周波数で振動するようになる。$\omega_0/\omega_p > 1$ の時，反射波は信号周波数とプラズマ周波数の2つの周波数の波が重ね合わされたような変化を示している。

異方性を考慮した時の過渡応答において $\omega_0/\omega_p = 0.6$ (図8)の場合には反射には信号周波数が支配的であり，また，反射波は大きな振巾を持っていて ω_0/ω_p の他のパラメータの場合に比べて，比較的単調な変化を示している。一方 $\omega_0/\omega_p = 1.0, 1.4, 2.2$ の各図においては反射波には信号周波数とcut-off周波数 ω_2 (式(35)の固有値に対応)が支配的であり，信号周波数の波にcut-off周波数 ω_2 の波が重ね合わされたような変化を示している。これらの場合において ω_2 が反射波に現われる

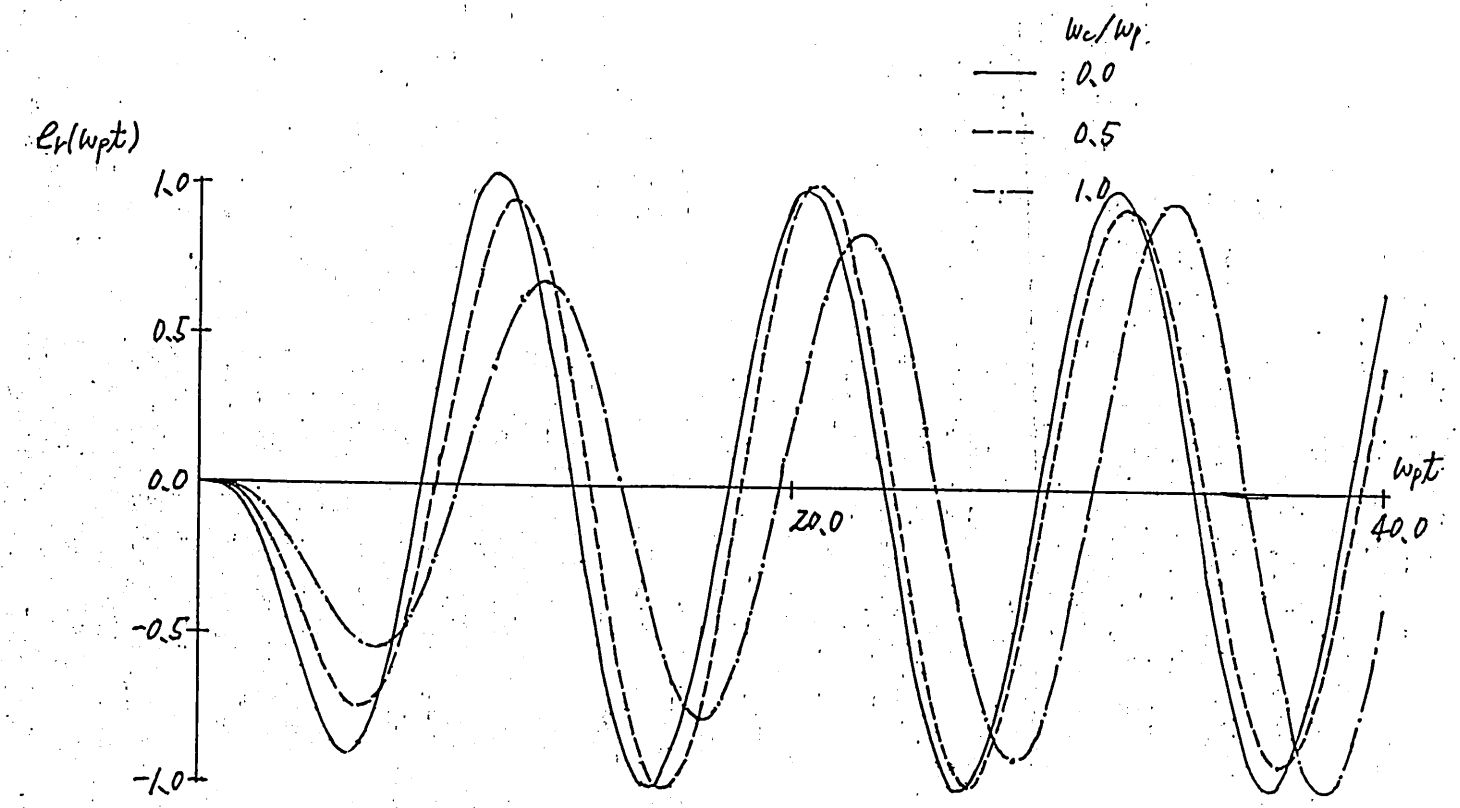


図 8　$\omega_0/\omega_p = 0.6$ の時の過渡応答

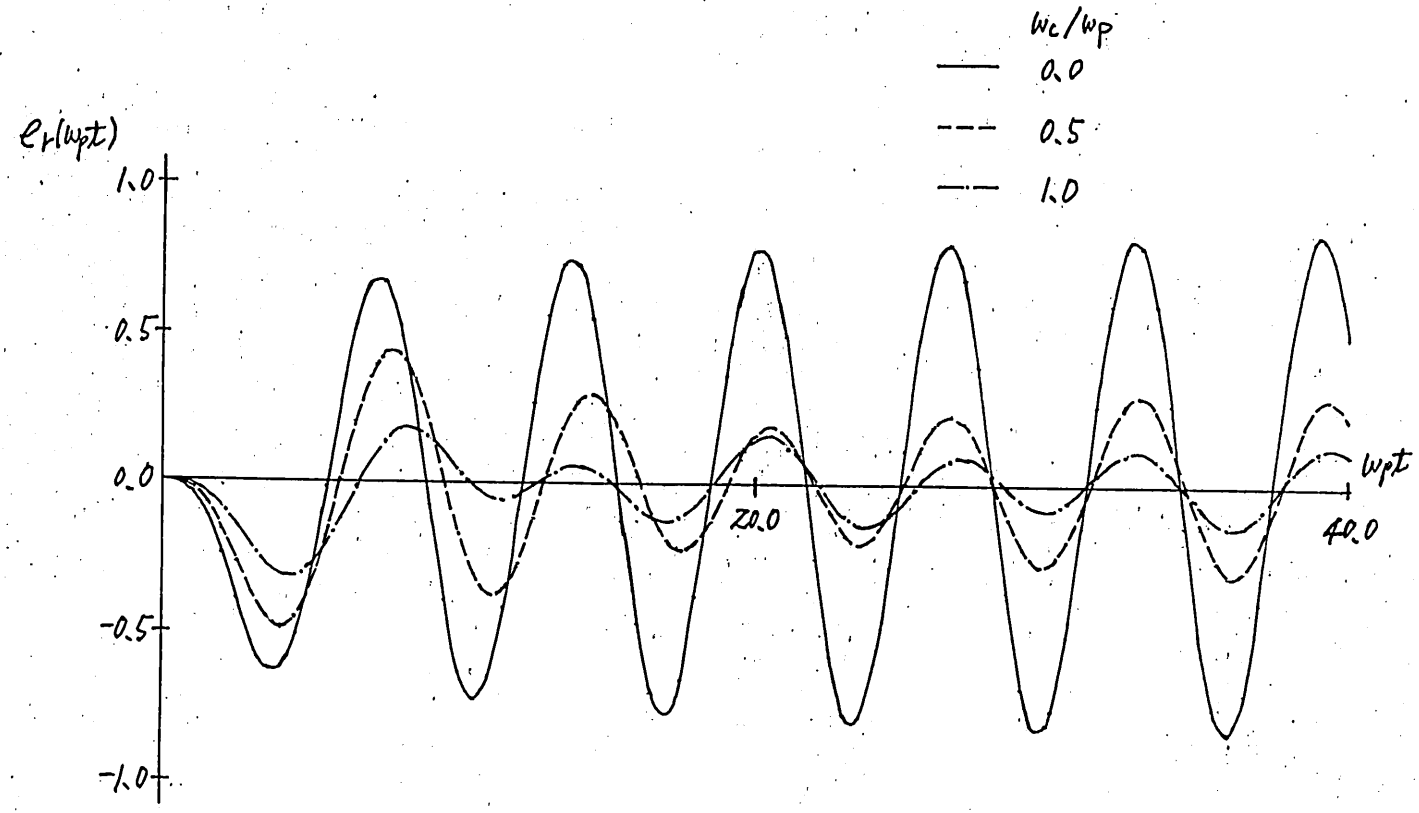


図 9 $w_0/w_p=1.0$ の時の過渡応答

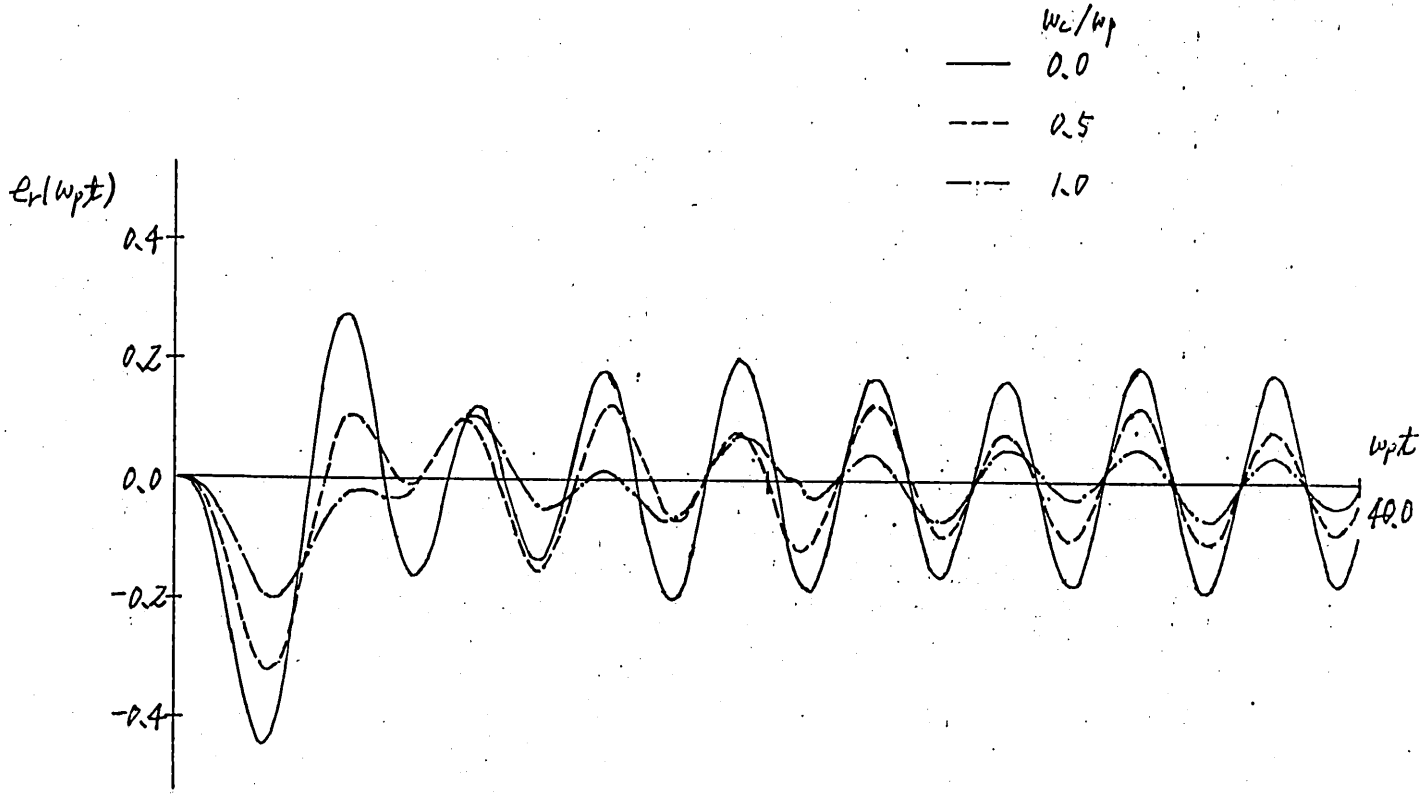


図 10　$w_0/w_p=1.4$ の時の過渡応答

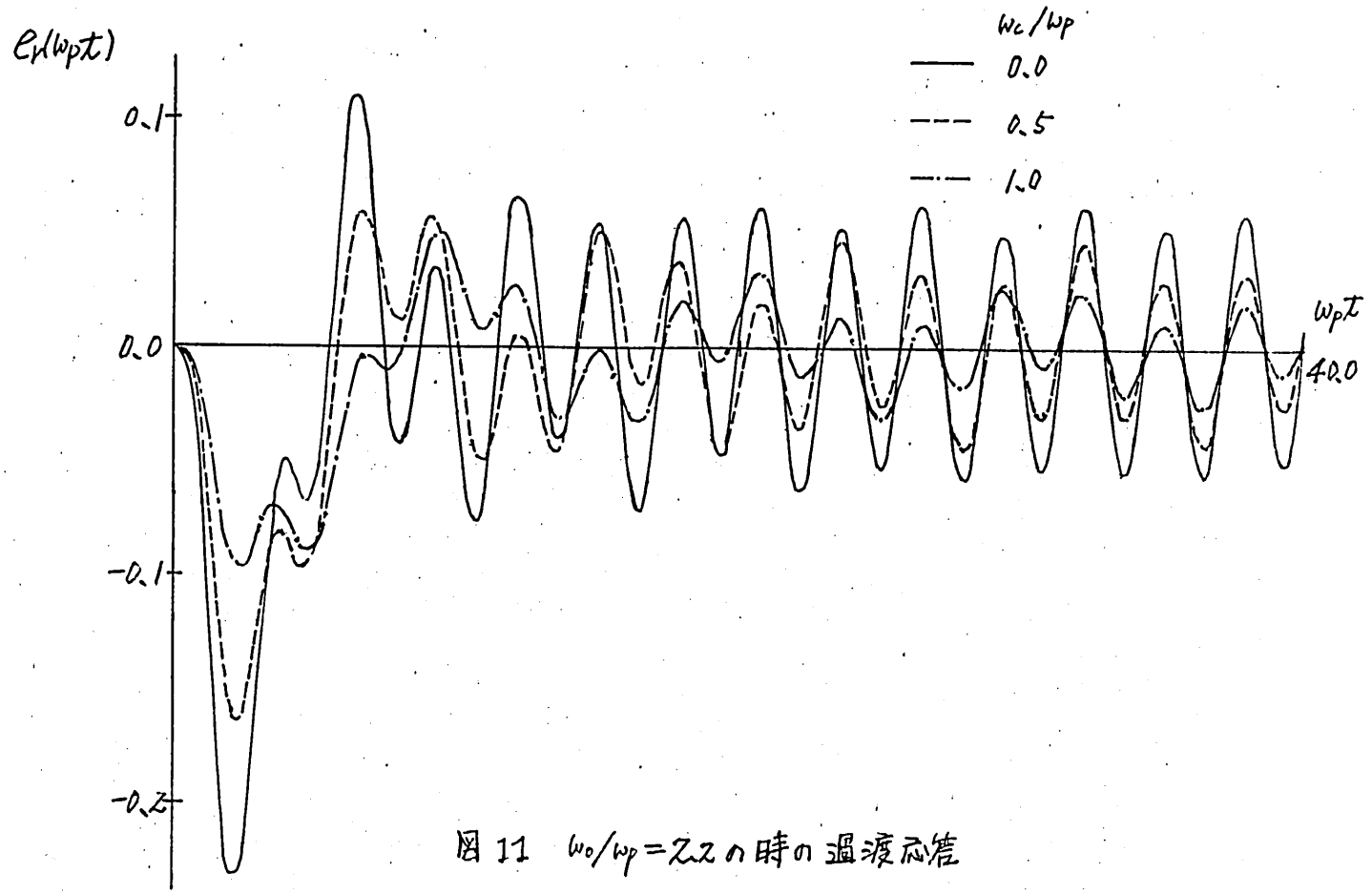


図 11　$\omega_0/\omega_p = 22$ の時の過渡応答

ことは前節のインパルス応答における異方性の効果と対応したものと考えられる。さらに異方性を考慮した場合，反射波の振巾は等方性の場合にくらべて減少しており，外部磁界が強くなる程，さらに一層振巾は減少していることが各図からわかる。

7. あとがき

異方性と損失を考慮した場合の反射過渡応答を入射波がインパルスの場合について数値計算し，それらの反射波に与える影響について検討した。そしてつぎのような結果を得た。

(1)外部静磁界の存在により反射波は，異常波に対するこつのcut off周波数に相当する周波数を持つ波の重ね合わせとして現われ，静磁界の変化によってその周波数も変化するため，反射波も大きく変動する。

(2)損失がある場合には損失分の増加にともない，反射過渡応答の振巾は減少するが振動の周期には大きな変化を与えない。

また実際的な応用面を持つと思われるTurned on Sinusoidに対しても異方性を考慮した場合について応答を求め，つぎのような結果を得た。

(1)信号周波数がcut off周波数よりも低いときは，反射波には信号周波数が支配的であるが，信号周波数がcut off周波数の波の重ね合わされたものとなる。

(2)外部静磁界が強くなるとともに反射波の振巾が減少する傾向がある。

以上得られたことをさらに確かなものとするためには反射波の厳密解を求めることが何よりも重要な課題である。またプラズマのパラメータを反射波から推定する具体的な

方法を確立することも今後の課題である。

終りに，日ごろ，ご討論いただく通信工学科電磁界理論研究グループの諸氏に深謝する。

〔文 献〕

(1) H.J.Schmitt;" Plasma diagnostics with short-electromagnetic pulses." IEEE. Trans. Nucl. Sci. 11.1 P125 (Jan 1964)
(2) S.N.C.Chen;" The transient phenomenon in an isotropic plasma without collision loss." Proc. IEEE. 51.7, P1045 (July 1963)
(3) J.R.Wait:" Reflection of a plane transient electromagnetic wave from a cold lossless plasma slab" Radio Sci. 4. 4. P401 (April 1969)
(4) C.M. Knop:" Further comments on 'The transient phenomenon in an isotropic plasma without collision loss'" Proc. IEEE. 53, 7. P751 (July 1965)
(5) B.V. Stanic and M.M. Skoric:" Collisional damping of an impulsive plane wave incident on an anisotropic plasma half-space." J. Phys. D: Appl. Phys. 6. pL115 (1973)
(6) 前田，深井，福岡:"プラズマスラブによる平面電磁波の反射過渡応答" 信学論(B). 55-B, 6, P324. (昭47-06)
(7) K.G. Gray:" Transient Retlection from a Plasma Half space when Losses are Considered." IEEE. Trans. AP-23. P298 (March 1975)
(8) D.A. Hill:" Propagation of electromagnetic Pulses in a Magneto-Ionic Medium." J. Appl. Phys. 43.3. P898 (March 1972)
(9) 深井，藤間:" 運動するプラズマスラブによる電磁波のインパルス応答" 信学論(B), 57-B, 4, P250 (昭49-04)

(10) C.T. Case : "On Transient Wave Propagation in a plasma."
Proc. IEEE. 53. 7. P 730 (July. 1965)

(付録1)

(a) 式(18), (19)で $\nu=0$ とおき，諸量を ω_p で規格化し，規格化された量にはプライムを付けて表示すると，

$$R(s')=\frac{1-N}{1+N} \tag{A1}$$

$$N=\left[1+\frac{1}{s'^2+1+\omega_c'^2}+\frac{1}{s'^2(s'^2+1+\omega_c'^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{A2}$$

式(A2)を式(A1)に代入して変形すると

$$R(s')=\frac{-\frac{1}{s'^2+1+\omega_c'^2}-\frac{1}{s'^2(s'^2+1+\omega_c'^2)}}{\left[1+\left\{1+\frac{1}{s'^2+1+\omega_c'^2}+\frac{1}{s'^2+1+\omega_c'^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^2} \tag{A3}$$

分母の $\{\ \}$ 内を s' が十分大きくて1で近似できるとすると，

$$R(s')=-\frac{1}{4}\frac{1}{s'^2+1+\omega_c'^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s'^2(s'^2+1+\omega_c'^2)} \tag{A4}$$

式(A4)をラプラス逆変換すれば式(24)が得られる。

式(A2)の N を s' が小さいとして次のように近似する。

$$N=\frac{1}{\sqrt{1+\omega_c'^2}}\frac{1}{s'} \tag{A5}$$

式(11)に代入して，ラプラス逆変換すれば式(25)が得られる。

(b) 式(18), 式(19)で s' が十分大きいとすると，$k(s')$ は

$$k(s')=-\frac{1}{4}\frac{1}{s'^2(1+1/s')+1+\omega_c'^2(1+1/s')^{-1}}-\frac{1}{4}\frac{1}{s'^2(1+1/s')\{s'^2(1+1/s')+1+\omega_c'^2(1+1/s')^{-1}\}} \tag{A6}$$

と近似できる。

(i) $1 \gg w_c'^2(1+\nu'/s')^{-1}$ の時

$$R(s') = -\frac{1}{4}\frac{1}{s'^2+s'\nu'} \qquad (A7)$$

式(A7)を逆変換すれば式(26).

(ii) $1 \ll w_c'^2(1+\nu'/s')^{-1}$ の時

$$R(s') = -\frac{1}{4}\frac{1}{s'^2 w_c'^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s'^2(1+\nu'/s') + w_c'^2(1+\nu'/s')^{-1}} \qquad (A8)$$

$1+\nu'/s' \simeq 1$ と近似し，式(A8)の2項目を$(s')^{-1}$のべきで展開し，3次の項までで近似すると

$$R(s') = -\frac{1}{4}\frac{1}{s'^2 w_c'^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s'^2} + \frac{1}{4}\frac{\nu}{s'^3} \qquad (A9)$$

式(A9)を逆変換すれば式(27)が得られる。

---

s'が小さいとして式(19)をつぎのように近似する。

$$N = \left[1 + \frac{1}{s'\nu'+1+w_c'^2 s'/\nu'}\frac{w_c'^2 s'/\nu'}{1+w_c'^2 s'/\nu'} + \frac{1}{1+w_c'^2 s'/\nu'}\frac{1}{s'\nu'}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (A10)$$

$1+w_c'^2 s'/\nu' \simeq 1$ と近似して，

$$N = \frac{1}{(\nu' s')^{1/2}} \qquad (A11)$$

式(A11)を式(A1)に代入して，逆変換すれば式(29)が得られる。

(付 録 2)

式(35)の$R(s)$の特異点が$\mathrm{Re}(s)<0$なる範囲にあるとすれば，$c=0$とおいてよく，

$$e_s(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} R(s)\, e^{st}\, ds \quad (s=j\omega) \qquad (A12)$$

となる。$R(s)$はsの実関数であるから

$$R(\bar{s}) = \overline{R(s)} \qquad (A13)$$

という関係が成立し，

$$\varphi(w) = Re[R(jw)], \quad \chi(w) = -Im[R(jw)]$$

とおくと，式(A13)は

$$\varphi(-w) - j\chi(-w) = \varphi(w) + j\chi(w) \qquad (A14)$$

それゆえ，$\varphi(w)$は偶関数，$\chi(w)$は奇関数であることがわかる。
その時，式(A12)は

$$e_s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(w)\cos wt\,dw + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(w)\sin wt\,dw. \quad t>0 \qquad (A15)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(w)\cos wt\,dw - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(w)\sin wt\,dw. \quad t<0. \qquad (A16)$$

式(A15)，(A16)の辺々を減ずれば式(25)，加えれば式(26)が得られる。

輻射科学研究会資料

変形同期荷電管の基礎特性とパルス波発生への応用

石川正臣．岩井治夫．森田正信
（関西大学　工学部）

昭和50年7月4日

1. まえがき

同期荷電管[1]は、単振動している電子に超高周波を加加し、電子の周期と超高周波の周期が同期関係にあるならば、電子は加速され、コレクター(C)の負荷に直流の高電圧を発生する素子である。

双曲線形電極を改良した変形電極[2]は、超高周波の印加で、フィラメント(F)に逆加熱を生じ、動作時にフィラメント電力が不要になるのみならず出力、変換効率等が向上する特徴をもっている。

同期荷電管の動作を調べるために、電子の振動方向において直流電位分布が放物線形電位、高周波電位分布が線形電位と仮定した場合について、一次元の解析を行なった。まず、電子の運動方程式を数値解析して、出発位相に対する振動方向への振幅の変化および電極Cでの到着位相の集束性を調べた。これらの結果から電極Cでの損失を求め、実験結果との検討を行なった。

この管で高電圧を発生させるとき、超高周波電力(P)が一定のもとで、陽極電圧(V_A)を変化させる(V_A変化)か、V_Aが一定のもとで、Pを変化させる(P変化)かにより、発生電圧(V_0)は、あるV_A，Pの値で跳躍し、再現性のあるヒステリシスを生じる[3]。この現象を用いて、上記の方法(P変化，V_A変化)で、duty factor が数パーセントから100パーセントまで変化出来る高電圧パルス波の発生が可能であ

ることがわかった。

2. 解析

図1は同期荷電管の概略図と電位分布を示す。

最初に、動作機構の概要を述べる。

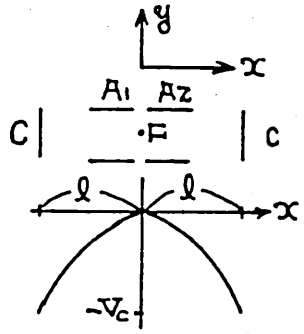


図1 同期荷電管の概略図

電極A1, A2間に超高周波電界を加えることにより、Fから出た電子の振動を助長させる。電子によって電極Cに平衡電圧Vcが発生すれば、電子は単振動しながら、超高周波電界からエネルギーを供給され、Vcを保持する。電子を単振動させるには、放物線形電位が必要である。

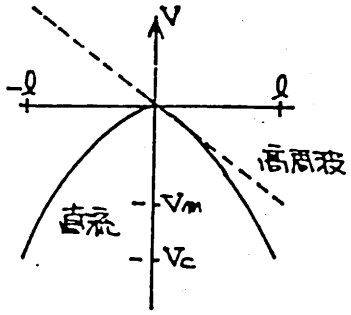


図2 直流,高周波電位分布

$$V = -(V_c/l^2)\cdot x^2 \quad \text{----------(1)}$$

運動方程式は、次式で与えられ、単振動を示す。

$$d^2x/dt^2 = -(2eV_c/ml^2)\cdot x = -\omega_e^2\cdot x \quad \text{----------(2)}$$

ただし $\omega_e^2 = 2\eta V_c/l^2$ ----------(3)

(ω_eは電子の単振動角周波数、ηは電子の質量に対する電荷の比である。)

ここで電子振動管は電子の周期T_eと、超高周波電界の周期Tとの関係は、次式で与えられる。

$$T_e = nT \quad \text{----------(4)}$$

ただしnは使う波次数(整数)を表わす。

式(3),(4)より

$$V_c = m\ell^2\omega^2 / 2en^2 \quad \text{---------- (5a)}$$

$$\fallingdotseq 10(\ell/n\lambda)^2 \quad \text{---------- (5b)}$$

となる。ただし式(5b)のℓは(mm),λは波長(m)を表わす。

上述の考えに対して、実際は超高周波電界も考慮する必要があり、その場合の電子軌道,位相関係および損失について以下に述べる。

解析は次の仮定に基づいて行なった。

(I) 空間電荷効果を考えない。

(II) 初速度を無視する。

(III) 電子振動の周期と超高周波電界の周期が完全に同期し、電子は軸方向(x方向)に単振動を行なう。

($\omega = \omega_e$ すなわち$n=1$の場合)

(IV) 電子を集束するためにx方向に十分大きな磁界をかける。そのため、電子のy方向への軌道振幅は小さくx軸付近のみに近似する。

(V) 2次電子放出を考えない。

2.1 運動方程式の解と位相の集束性

x軸において、電位分布は、図2のように円筒電極Pが$+V_c$電位,電極Cが、$-V_c$電位である放物線形直流電位分布と鋸形とみなす高周波電位分布の合成として仮定する。

$$V(x) = -V_c(x/l)^2 + (x/l)V_m \sin\omega t \quad \text{----------(6)}$$

ただし、V_mは高周波電圧の振幅，ωは超高周波の角周波数である。

これより、電子の運動は次式で示される。

$$d^2x/dt^2 = -\omega_e^2 x + \eta(V_m/l)\sin\omega t \quad \text{----------(7)}$$

仮定(IV)なら、$\omega = \omega_e$の場合を取扱うなら、式(7)の一般解は次のようになる。

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t - (t/2\omega)\cdot\eta\cdot(V_m/l)\cos\omega t \quad \text{-----(8)}$$

初期条件は$t = t_0$で $x = 0$，$dx/dt = 0$とすると、

$$x = (l/4)\cdot(V_m/V_c)\{\cos\omega t_0 \sin\omega(t-t_0) + \omega(t_0-t)\cos\omega t\} \quad \text{---- (9)}$$

となる。

ここで、$\beta = V_m/V_c$，$\phi_0 = \omega t_0$，$\phi = \omega t$，$\tilde{x} = x/l$を用いて式(9)を書き換えると、

$$\tilde{x} = (1/4)\cdot\beta\{\cos\phi_0 \sin(\phi-\phi_0) + (\phi_0-\phi)\cos\phi\} \quad \text{----------(10)}$$

となる。

これは、初期位相ϕ_0で出発した電子の、任意の位相ϕにおける規格化位置$\tilde{x}$を示す。

電子が電極Cに到着するとき、つまり$\tilde{x}$が1または-1になる場合のϕ_0に対する到着位相ϕ_eは次式で表現できる。

$$(1/4)\beta\{\cos\phi_0 \sin(\phi_e-\phi_0) + (\phi_0-\phi_e)\cos\phi_e\} = \pm 1 \quad \text{------(11)}$$

以上のことなら電子の軌道，出発位相ϕ_0と到着位相ϕ_eの関係がそれぞれ式(10)，(11)で求められた。

これらの式を数値解析した結果の一例として、$\beta = 0.4$に対する軌道と位相関係をそれぞれ図3,4に示す。

軌道計算の過程ではϕ_0を0.1π(rad)，Φを0.01π(rad)のきざみで数値計算を行なったが、図には$\phi_0 = 0$，0.6π，0.7π，1.0π，1.6π，1.7π，1.9π(rad)のみを示す。x方向の軌道振幅は走行時間が増すにつれて、大きくなる。また、βが大きくなるに従って走行時間が少なくて電極Cに到着する。

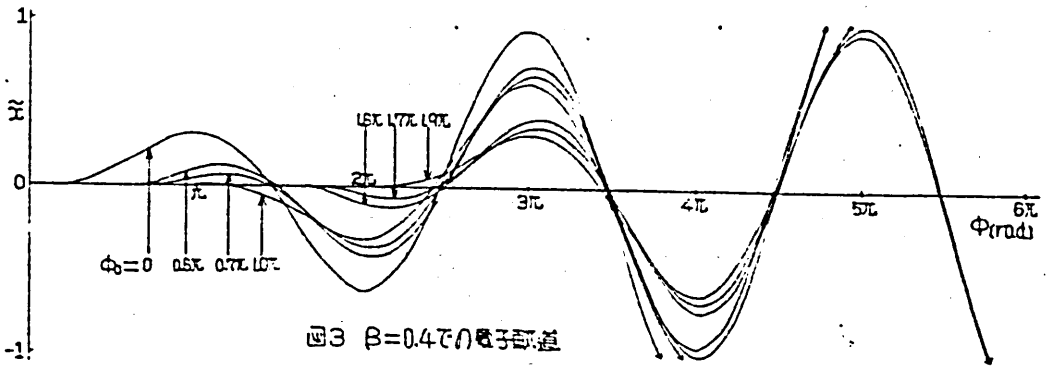


図3 β=0.4での電子軌道

到着位相と出発位相の関係を示す図4において、ϕ_0 = 0 ~ 0.67π, 0.68π ~ 1.67π, 1.68π ~ 2.00π (rad)に出発した電子は到着位相によりそれぞれ、ブロックⒶⒷⒸに分けられる。各ブロックの電子はχ = -1, 1, -1で電極Cにとびこむ。この曲線なら、電子は位相集束を受けることがわかり、Ⓑではϕ_0の π(rad)間隔が0.62(rad)に位相集束される。位相集束はβ'が大きくなるにつれて悪くなり、また後に出た電子が先に出た電子に追いつき、追い越す現象が顕著になる。

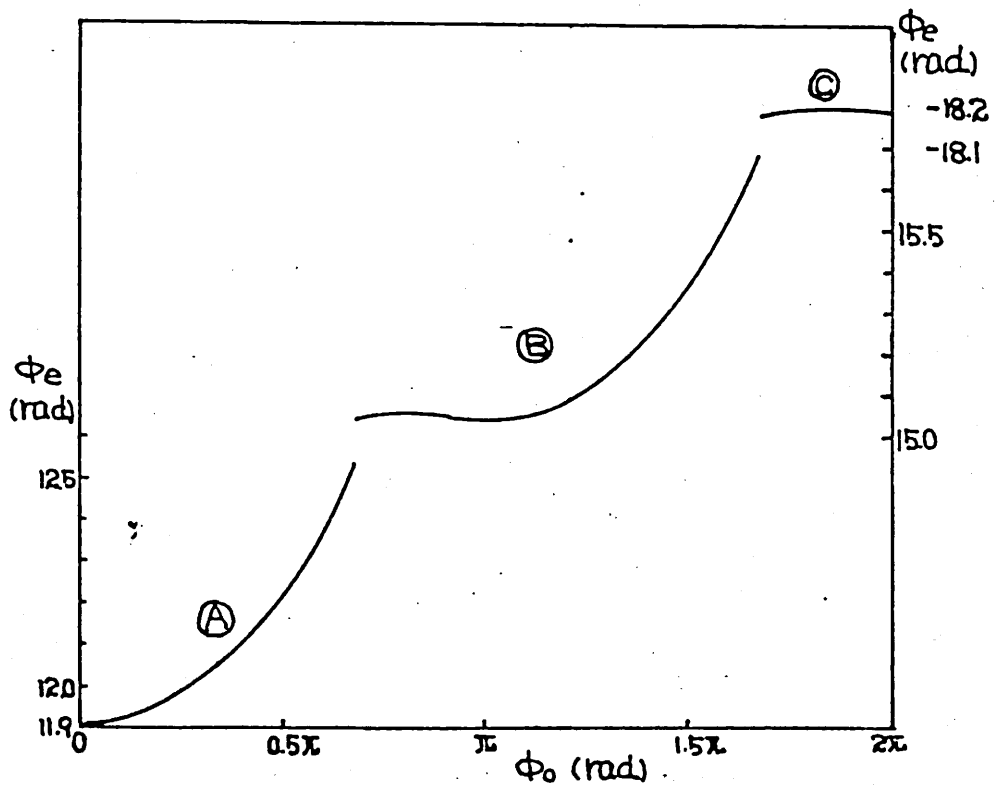


図4　出発位相ϕ_0と到着位相ϕ_eの関係

2.2 損失

電子は単振動しながら超高周波電界よりエネルギーを得て、振幅を増し、電極Cにとび込む。このときのエネルギー(損失)を考える。電子のエネルギーは$\frac{1}{2}mv^2$で与えられるなら、式(9)式を微分して、エネルギーをΦ_0, Φ_eで表わすと、

$$W=(1/16)\cdot e\beta^2 V_c\{\cos\Phi_0\cdot\cos(\Phi_e-\Phi_0)-\cos\Phi_e-(\Phi_0-\Phi_e)\sin\Phi_e\}^2$$

となる。 --------(12)

全周期、すなわち$\Phi_0=0$から2πの間に陰極を出た電子のすべてについて、平均すると、電極Cに入る1個当りの平均エネルギーを得る。

$$W_{av}=(1/2\pi)\cdot\int_{\Phi_0=0}^{\Phi_0=2\pi} W\,d\Phi_0 \quad ----------(13)$$

式(13)を計算するに当って次のように書き直す。

$$W_{av}=eV_cE \quad ----------(14a)$$

$$E=(1/16)\cdot\beta^2\cdot(1/2\pi)\cdot\int_{\Phi_0=0}^{\Phi_0=2\pi} Y\,d\Phi_0 \quad ----------(14b)$$

$$Y=\{\cos\Phi_0\cdot\cos(\Phi_e-\Phi_0)-\cos\Phi_e-(\Phi_0-\Phi_e)\sin\Phi_e\}^2 \quad --------(14c)$$

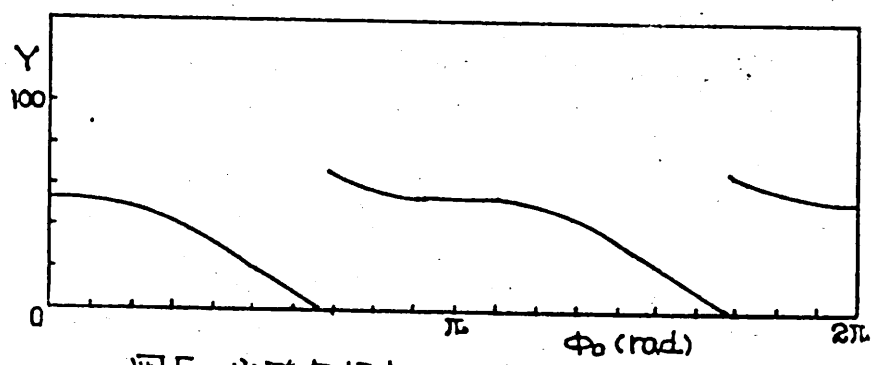


図5 出発位相Φ_0に対するYの関係

エネルギーを計算する手順として、任意のθ_0に対して電極Cに到着したときの速度を求め、それを2乗したものを積分すれば良いわけである。まずYを求めるために、式(11)を$\theta_0 = 0.01\pi$ (rad) きざみで$\chi = \pm 1.000$になる時の到着位相θ_eを求め、そのθ_0, θ_eを式(14C)に代入して、θ_0に対するYを示したのが図5である。Yを数値積分した結果、つまり(14b)をβに対して示したのが図6である。

ここで平均N個の電子が1秒間に陰極より放出されると仮定すれば、陰極より出る電流は$I_0 = eN$となる。(14a)は1個当りの電子に変換されるエネルギーであるなら、毎秒変換されるエネルギーは(14a)をN倍したものでこのエネルギーが電極Cの損失Ploss となる。

$$P_{loss} = V_c I_0 E \qquad \text{---------- (15)}$$

ここで、Eは損失係数と言うことにする。

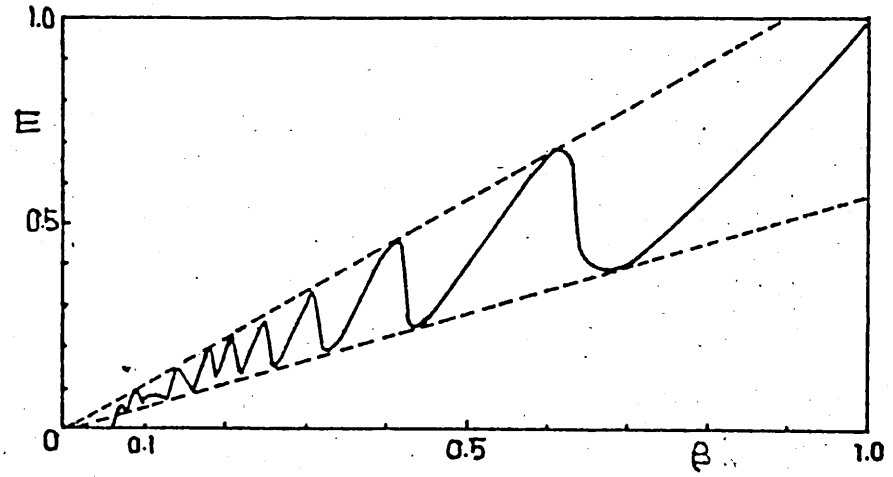


図6　βに対するEの関係

3. 損失に関する実験結果と検討

実験は420〔MHz〕で行ない、その回路および試作管の寸法は図7に示す。

式(15)のEを実験と対比させるのに、まずPlossを次式で求める。

$$P_{loss} = I_0 V_c E = P - P_{com} - P_0 \quad \cdots\cdots (16)$$

ただし　P_0：出力電力　P：印加する超高周波電力

P_{com}：逆加熱電力　V_c：$\eta=1$に対する発生電圧

I_0：ビーム電流

Plossがわかり、I_0，V_cが測定出来るとEが求められる。

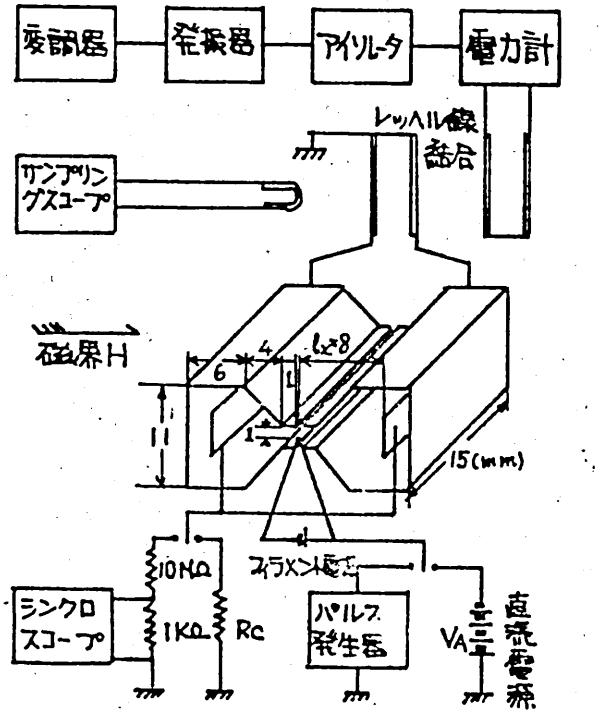


図7　実験回路

式(16)の第3項に、超高周波の輻射電力，陽極損失等を考慮しなければならないけれども、ここでは無視している。この内陽極損失は、測定結果から無視出来るほど小さな値であった。

この管では図8のように特有のヒステリシスを示し、動作の相異はGを境に、2つの領域に分けられることが実験よりわかった。2つの領域は自己で逆加熱を起こし、$\eta = 1$ に相当するVcを発生するB-range，ヒステリシスを用いて逆加熱を起こすA-rangeである。

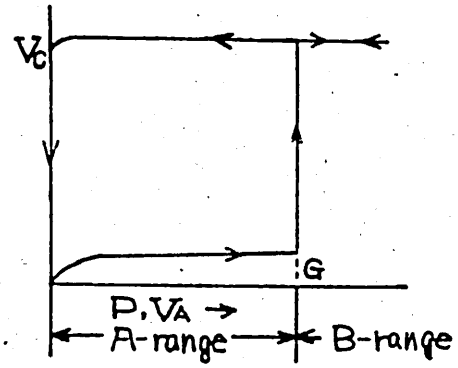


図8 高電圧発生人のヒステリシス

この実験ではGの値が4kV程度であった。

P_{BOM} の結果は図9(a)に示す。

P_{BOM} の測定にはCdSを用いて、光量の抵抗変化から算出した。ところでCdSを用いて P_{BOM} を求めた場合と光高温度計でフィラメント温度を測定し、P_{BOM} を求めた場合を比較すると、現段階では P_{BOM}/P は両方法ともほぼ同じ結果を得ている。P_{BOM}/P の値はB-rangeでは変化はなく、A-rangeでは大きい変化をする。したがってA-rangeではPの大部分が P_{BOM} に使用されていると思われる。

P_0 の結果は図9(b)に示す。

以上から P_{BOM} ，P_0 が測定され P_{loss} が求められた。

これよりEを求めたのが、図9(C)である。このEを考察するために図6の数値計算の結果をもう一度ながめると、βの増加でEは振動しながら大きくなり実線で囲まれた範囲にあると考えられるなら、Eの上限と下限の差が大きくなる。図9(C)と図6の横軸はそれぞれP，βであらわされるなら一致はしないが傾向を見ることが出来る。

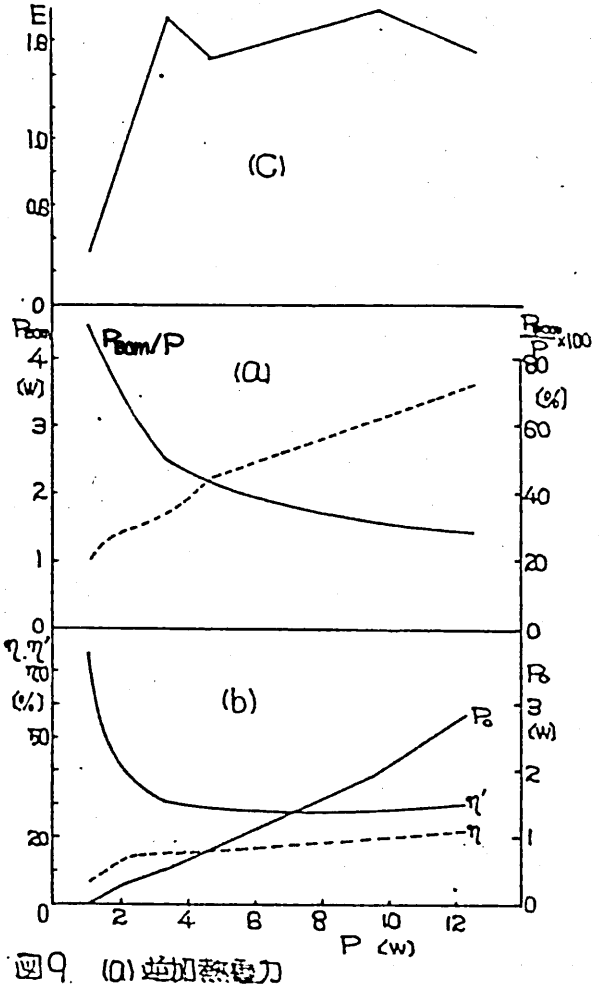


図9 (a)加熱電力
(b)効率，出力
(c)損失

Eの値はA-rangeにおいて、計算の傾向と似ているが、B-rangeにおいては、ほぼ一定の値になっている。この一定値になる原因として、Pの増加でPoも増えるが、効率ηはほぼ一定となっている。

このことなら、電極Cに流れる電流と超高周波の電流は比例関係にあると思われる。そのためVbmの大きな変化がなく、Eの変動も少ない。

しかしながら後述のようにPとVmの関係は、A-rangeのP=1(W)でVm≒400(V)と考えられる。

そのことならβ≒0.3(ただしVc≒1400(V)である)となり、計算値、実験値共E≒0.3とほぼ一致する。

効率は図9(b)に2つの場合つまりPo/P=η, Po/(P-Pbm)=η'について示す。ηはB-rangeで20パーセントとほぼ一定であるが、A-range'ではPの増加で増す。またη'はPの増加でA-rangeにおいて減少し、逆加熱を起さない従来の電極を用いた実験結果と同じとなる。

以上の結果からここで示した解析はA-rangeの範囲で適用出来ると思われる。

4. 高圧パルス波発生への応用

ヒステリシス現象を用いて、高圧パルス波を発生させる方法の概略を図10に示す。

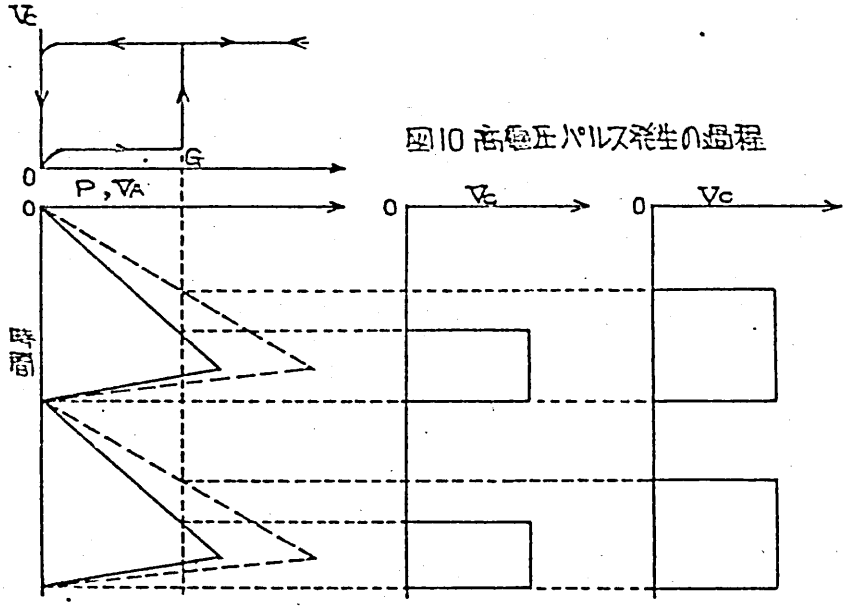
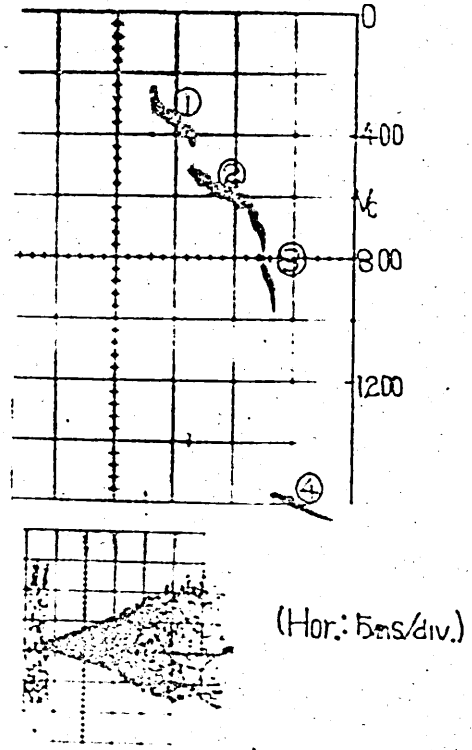


図10 高電圧パルス発生の過程

P，VAの変化範囲を適当にえらべば、duty factor が可変出来ることがわかる。実験は図7の回路で行なう。ここではまず発生電圧の時間現象を述べ、次にパルス波の発生方法を述べる。

4.1 電圧発生過程

三角波を振幅変調した超高周波(三角AM波)を用いた場合の電圧発生過程を図11に示す



(Hor.: 5ms/div.)

図11 三角AM波の変調包絡線と発生電圧

図中、①,②,④の電圧はそれぞれn=3,2,1に相当するVcで段階的に大きくなる。これは超高周波で加速された電子が電極にとび込み、バイアスが深くなり式(7)を満足する様に放物線形電位が形成されてゆくからである。このときPの連続的な増加は必ずしもVcの連続的な増加に結びつかず、あるP以上でないと、低次のnに対するVcに移行しないことがわかる。この現象を用いてパルス発生を行なう。

③の電圧は逆加熱を開始する電圧で、逆加熱と同時にn=1に対するVc(④)まで上昇する。

上述の方法では　　ヒステリシス現象を

明確に捕えることが出来ないので、V_Aに方形波を重畳し、V_Aを変化させた結果を図12に示す。この結果では図8のA-rangeの範囲のみしかあらわれないのは、方形波の重畳で、V_Aの立上りが急になったためである。図8のカーブを正確に求めるには正弦波、三角波等の比較的V_Aの立ち上りがおそい波形を用いれば、B-rangeもあらわれる(図16参照)。図12で、$V_A=0$の時に$V_c \fallingdotseq 400(V)$($n=2$に対する$V_0$)を示し、この$V_c$を保てるP以上であればFへの入力が不要である。このことから超高周波尾圧V_mが最低400(V)程度と推測される。

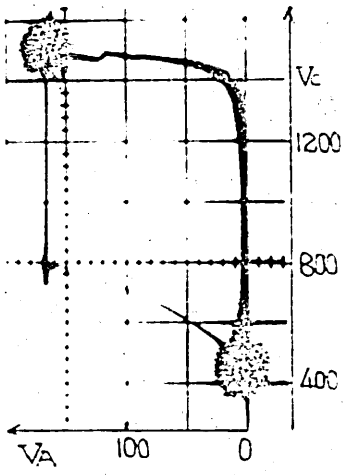
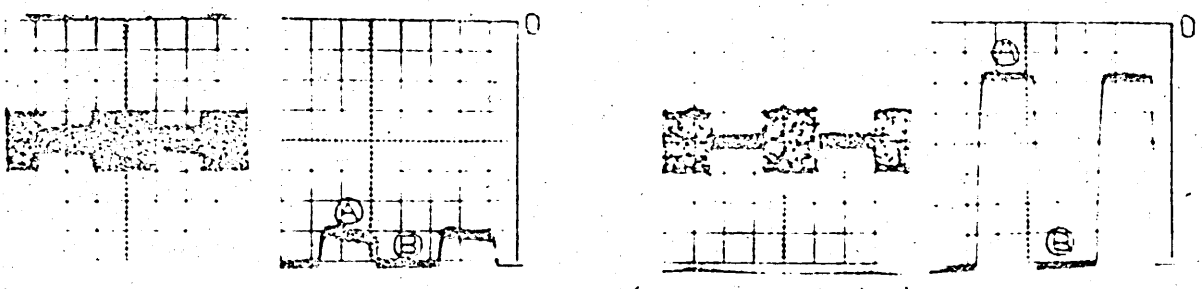


図12 V_A変化によるヒステリシスカーブ

4.2 P変化によるパルス発生

$V_A=180(V)$において方形波で振幅変調された超高周波(方形AM波)を用いた場合、変調度m変化による出力パルスと超高周波の変調包絡線を図13に示す。



(a) (Hor.: 0.5ms/div, Ver.: 100V/div) (b)

図13 方形AM波での変調度の相異によるパルス形出力

mを大きくするとパルスのⒷ電圧は－1600(V)であるがⒶ電圧は－1400(V)から－360(V)と振幅が大きくなる。mを100パーセントにするとⒶ電圧は－200(V)程度となる。Ⓐ電圧の調整出来る範囲は－200(V)へ－400(V)であるが、－400(V)以上になると、ただちにn＝1に相当するVcとなり直流の高電圧になる。m変化によるパルス波発生の過程を図解したのが図14である。

Pの変化範囲のちがいでヒステリシスの様子がかわり、パルスの出力電圧は変化する。

方形波ではパルス幅を変化出来ないので、三角AM波を用いた場合の結果を図15に示す。

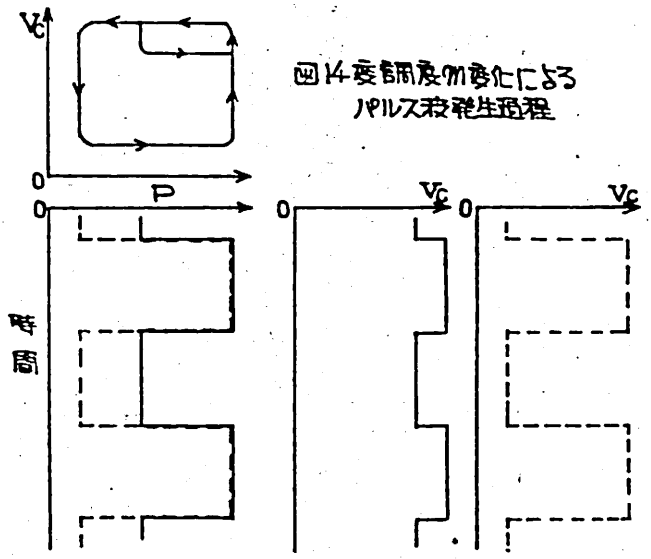


図14変調度m変化によるパルス波発生過程

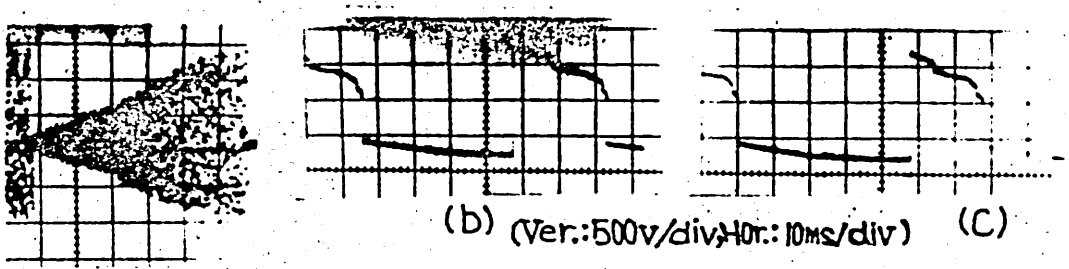

(a) 変調波形　(b) (Ver.:500V/div,Hor.:10ms/div)　(c)

図15 三角AM波によるパルス幅変化

くり返し周期一定のもとでPの最大値が大きいと、変調包絡線の傾斜が急になり高電圧を発生する時間が早く、その結果パルス幅が広くなる(図15(c))。またPの最大値が小さいと狭くなる(図15(b))。このことは図10からわかる。

4.3 V_A変化によるパルス発生

4.2の場合と同様な方法であるが入来波に無変調波を用いる。V_Aを変化させるために効率は良くない。V_A=100(V)に±100(V)の方形波を重畳させてパルス出力を得た場合、V_A=0(V)になるとⒶ電圧(図13参照)が−400(V)を保てないPであれば、並加熱を起こさず電圧を発生しない(図12参照)。そのためパルス電圧は−400(V)〜−1400(V)となる。一方、パルス幅を変化させるには方形波以外の波形を重畳すれば良い。パルス波の発生過程を図解したのが図16である。

図17はduty factor 8パーセントなら100パーセントまでのパルス波形と陽極電圧を示している。duty factorはPの直流入力を加えない場合は40パーセント以下にすることは難しい。しかしPへの直流入力を多少加えると図17(d)のように8パーセント程度まで可能であった。

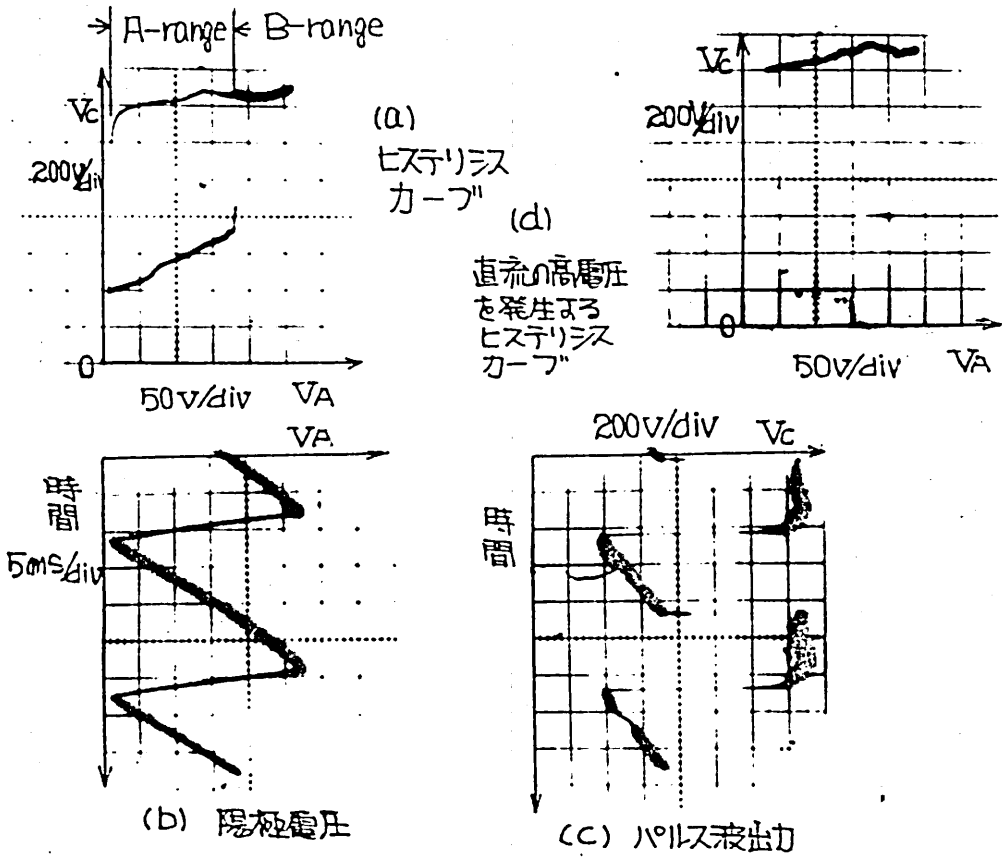


図16 VAにのこぎり波を重畳させたときのパルス液発生過程

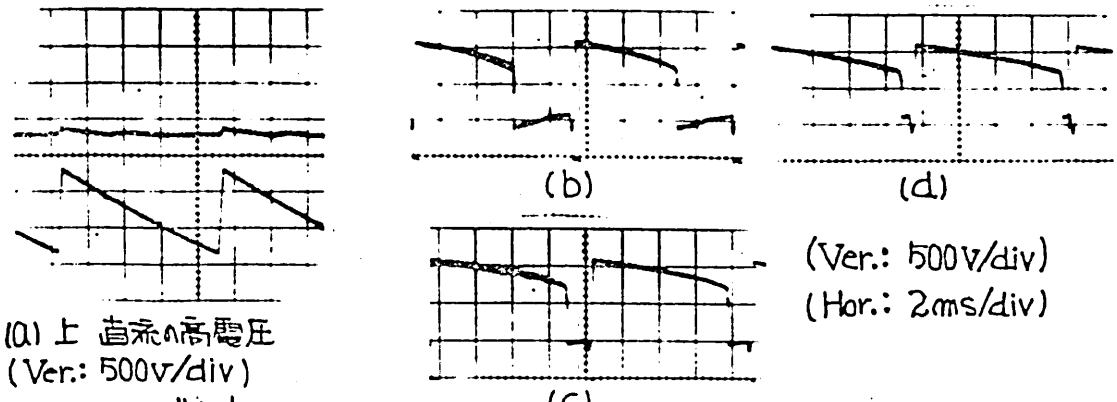


図17 VAにのこぎり波を重畳させたときのパルス幅変化

5. あとがき

コレクターでの損失係数Eを数値解析した結果と実験結果を対比させた。それによると、ヒステリシスを用いて逆加熱を起こすA-rangeでは解析結果と傾向が似ているが、自己で逆加熱を起こすB-rangeではEは一定の値となった。今後は2次電子の効率も含ませる様な解析が必要である。

応用として高電圧パルス波発生素子への可能性がわかり、現在、duty factorは8パーセントから100パーセントまで可変出来る結果を得た。

今後は、パルスの波形の改善が必要である。

終りに、有益な御助言をいただいた本学大東延久専任講師に感謝します。

文献

1) 岡部豊治郎：超高周波電子管(修教社)

2) 石川,森田：動作時にフィラメント電力を必要としないマイクロ波直流変換素子
(電通学会マイクロ波研資MW74-52)

3) 石川,森田：電子振動を利用したマイクロ波の直流変換特性
(電気科学研究会資料 S49,6,28)

平面ガン効果論理素子の基礎的検討
―― コンパレータ動作の解析と実験 ――

西田 稔　木村正利*　増田正光　小山次郎
（大阪大学 工学部 電子工学科 *富士通(株)）

昭和50年7月

輻射科学研究会

平面ガン効果論理素子の基礎的検討
—— コンパレータ動作の解析と実験 ——

西田 稔　木村正利*　増田正光　小山次郎
（大阪大学 工学部 電子工学科，*富士通（株））

1. まえがき

ガンダイオード中に高電界ドメインが存在するか否かによって，2つの異なる出力レベルが観測されることは，良く知られている。(1) 高電界ドメインの発生はある閾値電圧以上で起り，また，試料長を短くすることによって，極めて高速の動作が可能であるばかりでなく，ガンダイオードは本質的にパルス再生，増幅機能を有する。近年，結晶成長技術の進歩にともなって，良質のGaAs単結晶が供給されるに及んで，ガンダイオードの論理素子としての応用が有望になり，最近，半絶縁性基板上のエピタキシャルGaAs単結晶上に、ガン効果論理素子を集積化し，超高速論理回路を構成しようとする動きがある。(2),(3)

ガン効果論理素子は，ドメインの発生，走行，消滅をバイアス点の移動によって制御する，簡単な2値の閾値素子から始まり，(4) その後，トリガ感度，入出力特性の改善を目的として，Schottky電極を付加した3端子の論理素子にと発展してきた。(5) これらの論理素子は、ガンダイオードの両端に陰極，陽極が設けられ，高電界ドメインは陰極から陽極

に向かって直線的に走行する，いわば一次元的な論理素子である。

一方，半絶縁性基板上のエピタキシャルGaAs単結晶上におけるプレーナ形のガン効果論理素子（ここでは，これを平面ガン効果論理素子と称する）では，先に述べた一次元的動作はもちろんのこと，主にShoji[6]によって検討された二次元的なドメインの振舞を加味して，その機能性を増すことができる。例えば，ドメインの横方向の拡がり現象を利用した，高速桁上げ素子が提案されている。[7]

さて，演算回路の主役を占める加算器の基本素子の1つにコンパレータがある。今回，われわれは，陰極部を2つに分離した平面ガン効果論理素子のコンパレータ動作について検討し，半絶縁性基板上のエピタキシャルGaAs単結晶を用いて，このプレーナ素子を実現したが，本論文で，これに関する計算機解析及び実験結果について述べる。

なお，Hartnagel等は，以前，これと同種のコンパレータを提案しているが，彼等は，サンドイッチ形の素子で，一方の陰極を浮動にした場合と，両陰極を同電位とした場合の，両方の発振開始電圧の差異を検知しているにすぎず，[5],[9]，ここで述べるような論理動作については検討していない。

普通，コンパレータは2つの一次元素子を必要とするが，ここで述べるような二次元素子の場合には，1個でよく，また，この素子は，入力トリガーパルスの正負にしたがって，"Exclusive OR (Comparator)"と"Inclusive OR"の両動作を共に果すことが特長である。

2. 計算機シミュレーションによる動作解析

本章では，陰極を2つに分離した素子の論理動作に関する計算機シミュレーションの結果を述べ，エンパレータ動作の可能性を示唆するとともに，GaAs単結晶平面上におけるガンドメインの振舞についても検討する。

2.1 シミュレーションのモデル

図1に解析のモデルを示す。陰極面上をとおる線上でのドナー密度プロファイルは，図2のように仮定した。実際のオーム性電極付近のドナー密度プロファイルは，その製作法によって異なるが，図2に示すような仮定は十分な妥当性をもっている。動作領域でのドナー密度は，$10^{15}cm^{-3}$，電極上では，$3\times10^{15}cm^{-3}$で一定とし，電極前面では，n^+層と遷移領域が設けてある。

素子内の電荷の動き，電位分布は，次のポアソ

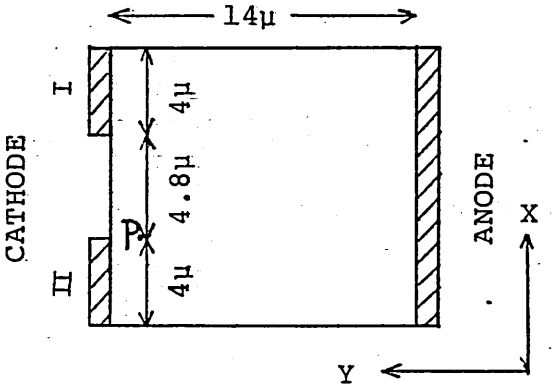


図1. 計算機解析のモデル

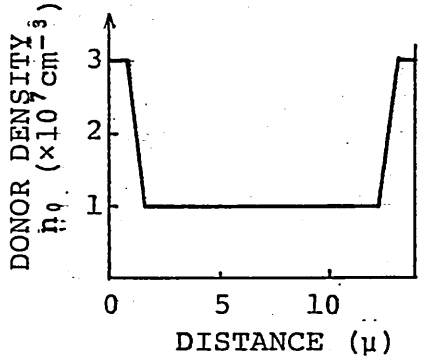


図2. x方向のドナー密度プロファイル

ンの式，電荷連続の式，電流の式，および電子の速度-電界特性[10]によって規定される。

$$\nabla^2 V = \frac{e}{\varepsilon}(n - n_0) \quad (1) \qquad \nabla \cdot J + e\frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$J = en\,v(E) - eD\nabla n \quad (3)$$

$$v(E) = \frac{\mu E + (E/E_c)^4 v_s}{1 + (E/E_c)^4} \quad (4)$$

ここで $\mu = 8000\ cm^2/V\cdot s$，$E_c = 4\ kV/cm$，$v_s = 8.5\times10^6\ cm/s$ とすると，閾値電界 $E_{th} = 3.5\ kV/cm$ となる。

数値計算は，(1)(2)(3)式を，差分方程式に変換し，逐次加速緩和法(SOR)を用いて行なわれ，[11] このときの正方形格子点の間隔は，$0.4\ \mu m$，時間間隔は $0.2\ ps$ とした。なお電極部以外では，境界面に垂直方向の電界成分がないとした。

2.2 コンパレータ動作

図1に示された素子内の電界を，閾値電界以下，ドメイン維持電界以上になるようにバイアス電圧を与える。陰極I，IIは入力ゲートで，入力信号"1"に対応してトリガー電圧が印加される。陽極電流はドメインが発生していなければ，バイアス電圧で決まるあるレベルをもち，試料内をドメインが走行するのにともない，負の出力電流パルスが現われて，出力信号"1"が得られる。

このシミュレーションでは，図3(a)に示すように，陰極I，IIを0 volts にして，陽極に3.6 volts のバイアス電圧を10psの立ち上がり時間をもたせて印加した。このときの平均バイ

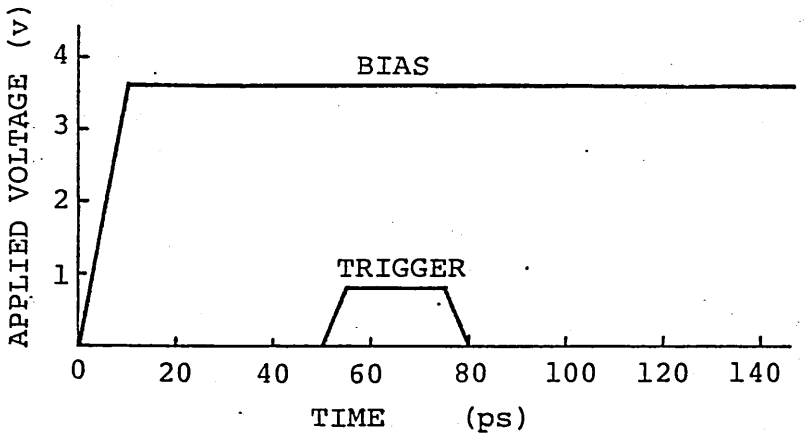


図3.(a) 印加電圧とトリガーパルス波形 ($V_{th} = 4.3$ volts, $V_s = 3.1$ volts)

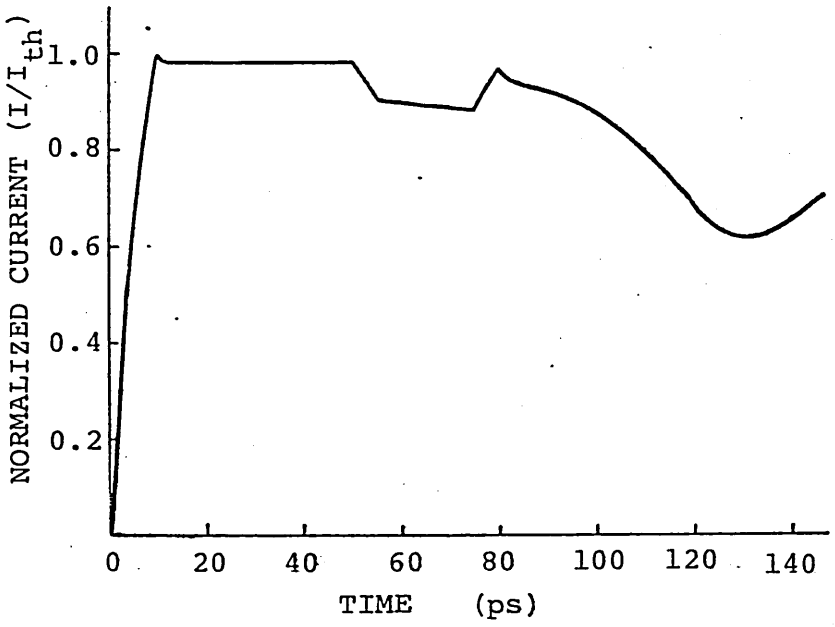


図3.(b) 陽極電流波形

アス電界は $E_0 = 2.9$ kV/cm である。

図3(b)は，図3(a)の印加電圧に対する陽極電流の変化を示す。 $t = 10 \sim 50$ ps では素子は安定であり，バイアス電圧に対応した一定レベルの陽極電流 $0.98 I_{th}$ ($I_{th} = e n_0 v_{th}$) が流れる。 次に，入力信号"1"に対応して，$t = 50 \sim 80$ ps で，大きさ 0.8 volts，パルス巾 20ps のトリガー電圧が陰極Iにのみ印加される。 このとき，陽極電流は，まずトリガー電圧にしたがって，わずかに電流が減少し，その後ドメインの成長とともに電流が減少する。

このあいだの素子内の電界分布の時間変化を図4に示す。 $t = 50$ ps までは，素子内の電界分布は一様であるが，トリガー電圧が印加されると，$t = 58$ ps で，図1に記されている点Pの付近でドメイン（ドメインは閾値電界 $E_{th} = 3.5$ kV/cm 以上の領域）が発生し，ほとんど同時に陰極IIの前面に拡がる。 しかしこのときの最大電界は高々 4 kV/cm にすぎず，動作層の他の部分の電界を押し下げるには至らず，出力電流はほとんど落ち込まない。 さらにトリガー電圧が印加されている間，陰極I前面のバイアス電界は元の状態より低く，平均電界が 2.3 kV/cm で，ドメイン維持電界（$l_0 = 14$ μm のとき，ドメイン維持電界 $E_s = 2.5$ kV/cm）以下になっていて，ドメインは陰極Iの前方には拡がってくることができない。 したがってドメインは，$t = 60 \sim 80$ ps では陰極IIの前方の領域のみを，成長しながら走行し，出力電流パルスの立ち上がりが遅れている。（図5参照）

$t = 80$ ps 以後はトリガー電圧がなくなって元のバイアス電界にもどるため，陰極Iの前方にもドメインが拡がり，それとともに陽極電流が顕著に減少し始める。 $t = 112$ ps でドメイン

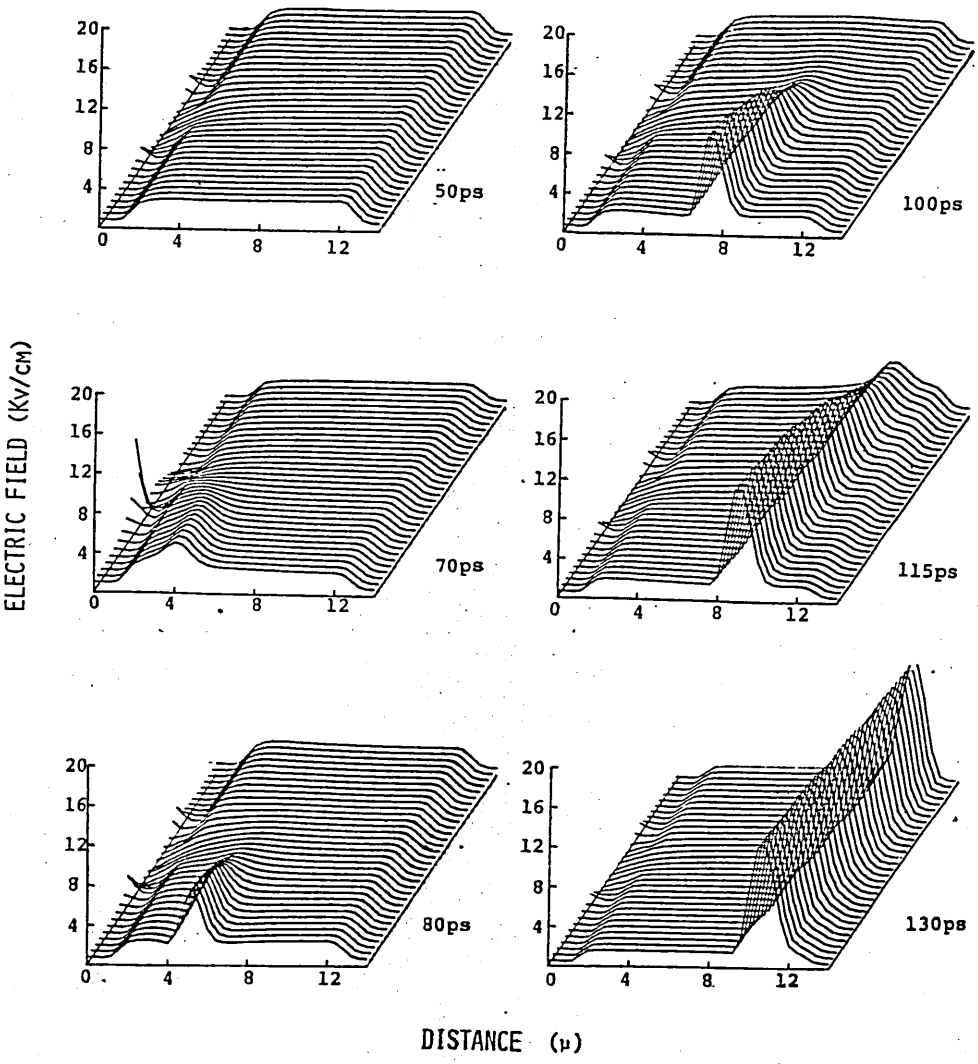


図4. 素子内の電界分布の時間的推移

(向こう側が陰極I，手前が陰極II
入力状態;(1,0))

は素子の側端まで拡がり，$t=130$psで電流の落ち込みがほぼ止まって，以後、陽極まで走行し吸収されていく。

陰極IとIIは対称構造になっているから，入力トリガー電圧が陰極IIのみに印加された場合も，同様の動作をすることは明らかである。

X	Y	X⊕Y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

EXCLUSIVE OR
(COMPARATOR)

表 1

陰極I，IIに同時にトリガー電圧が印加される場合には，素子全体にわたって一様にバイアス電界が低くなるだけで，ドメインは発生せず，陽極電流は、トリガー電圧に対応した小さな電流の落ち込みを示すことになる。

以上の計算機シミュレーションにより，陰極を2つに分離した3端子のプレーナ素子において，表1の真理値表に示されるようなコンパレータ動作の可能性が示された。

2.3 ドメインの横方向の拡がり

前節で述べたように，平面ガン効果素子は、2次元的な拡がりをもつために、一次元素子に比べて，スイッチング特性が悪くなる。図7は，この3端子素子と同じ長さ，および同じバイアス電界をもつ一次元素子をトリガー動作させた場合の，計算機シミュレーションの結果である。

一次元素子の場合には，トリガーパルスが印加されてからほとんど遅れ時間なしに，出力パルスが立ち上がり，その立ち上がり時間τ_rが約20psであるのに対して、二次元素子の場合（図3.(b)）には，トリガーされてから，ほぼ入力トリガーパルスと同じだけ、出力パルスの立ち上がりが遅れ，τ_rは約45

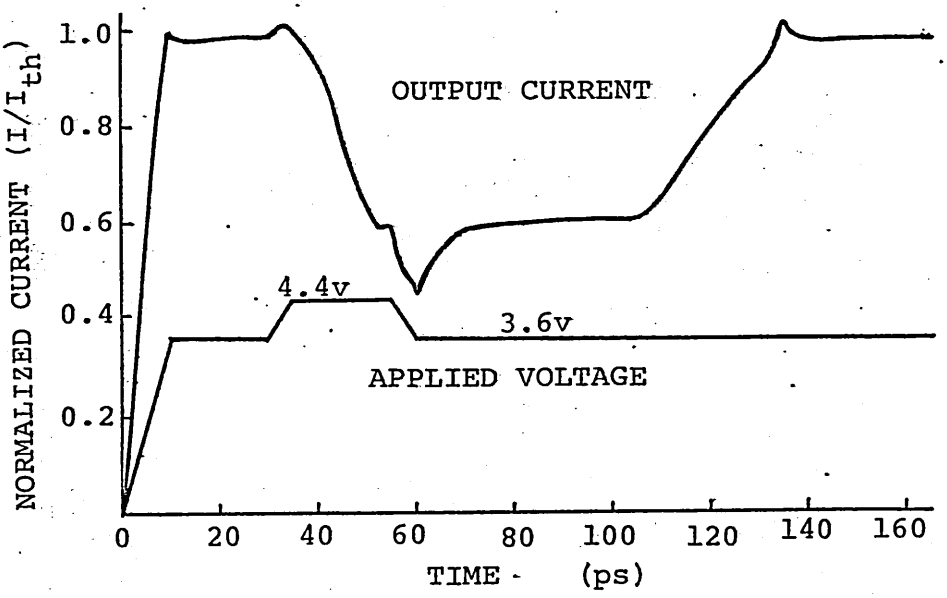


図5. 等価な一次元素子のトリガー動作
(ノッチ；陰極端より2μmの位置に、中1μmで5%ノッチ)

psである。この2の差異の原因は、図4からもわかるようにドメインの横方向への拡がりによるものである。一方，出力パルスの立ち上がりの遅れは、バイアス電圧に対して、逆の極性のトリガーパルスを印加しているためである。

図6はシミュレーションの結果より求めたドメインの横方向の拡がり速度の時間変化である。

$t=54$ psで，まず最初に陰極Ⅱの内側の電極端で，電界がE_{th}を越えるが，そのまわりの電界は低く，擾乱の大きさがデバイ長と同程度であるため，ドメイン発生の核にはなり得ない。[12] $t=57$ psで図1の点Pで示される付近の電界が，縦方向に1μ，横方向に約4μにわたってE_{th}以上になり、ドメインが発生し始めて、その後，図4に示すように横方向に拡がりながら成長していく。

横方向の拡がり速度 v_t は図1の x 方向にドメインの最先端が進行する速さである。v_t は、ドメインの漏れ電界とその周囲の電界によって与えられる。今、$-a \le x \le 0$ の範囲に中 W_0 のドメインが存在し、$x = x_p$ の位置をドメインの最先端と考えると、v_t は次式のようになる。(13)

$$v_t = \frac{v_p - v_s}{W_0} x_p \qquad (5)$$

$$E_d = \frac{e\gamma n_0}{\varepsilon} W_0 \qquad (6)$$

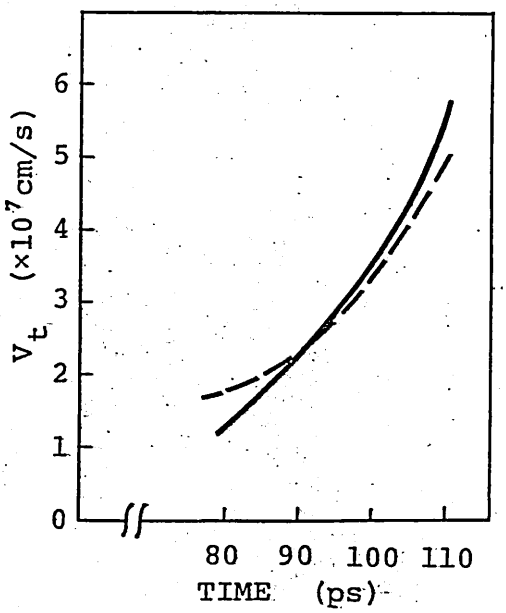


図6. 横方向拡がり速度
実線；計算機解析
破線；近似解

$$E_y = \frac{E_d}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{4(x_p+a)}{W_0} - \tan^{-1}\frac{4x_p}{W_0} + \frac{4W_0 x_p}{W_0^2 + 16x_p^2}\right) \qquad (7)$$

$$E_y + E_0 = E_{th} \quad (x = x_p) \qquad (8)$$

ここで、v_p, v_s はそれぞれ電子の最大ドリフト速度、飽和速度、E_d はドメイン電界、γ は電子欠乏率である。(14) E_0 はドメイン成長端 $x = x_p$ でのバイアス電界である。式(5)～(8)より得られた v_t の計算値を、図6に破線で示してある。素子の寸法が与えられているならば、できるだけ大きなバイアス電界の下で、v_t を大きくすることによって、2次元効果による応答速度の遅れは改善される。

3. 実験

図1の計算機解析モデルと類似の，3個のオーム性電極をもつ素子を試作し，その論理動作を確認したが，ここでは，その実験方法および結果について述べる。入力トリガーパルスの極性を変えることによって"Exclusive OR (Comparator)"と"Inclusive OR"動作が共に実現できた。

3.1 試作した論理素子

フォトエッチング法で試作した素子を図7に示す。用いた結晶は，半絶縁性基板上にエピタキシャル成長させたGaAs結晶で，その不純物密度 $n_0 = 2.64 \times 10^{15}\,cm^{-3}$，低電界移動度 $\mu = 6590\,cm^2/V\cdot s$ エピ層の厚さ $t \fallingdotseq 10.4\,\mu m$ である。オーム性電極は，Ni微小量を添加したAu-Ge (Ge: 12%) を蒸着した後，390～400°Cで数分間，真空中で合金化することによって作り，さらに，不要のエピ層はフォトレジスト塗布，露光，現像の後，過硫酸液を用いて深さ約15μmにわたって除去した。陰極，陽極間の距離は500μm，動作層の巾は650μm，両陰極の間隔は100μmで，

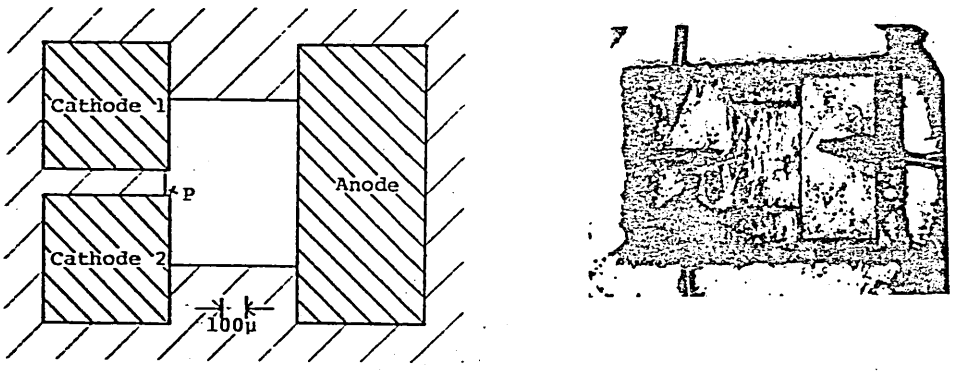


図7. 試作した平面ガン効果論理素子

両陰極の間では，20μm程度動作層が入り込んでいる。リード線は銀ペーストで付着し，3個のBNC端子をもつマウントに、素子を固定し実験を行なった。

論理動作の検証に先立ち，両陰極を同電位としたときの，パルス動作時における素子のV-I特性を測定したが，パルス中40ns，繰り返し30Hzに対して，発振開始電圧は180Vであった。

3.2 測定回路

測定回路の概略を図8に示す。熱的な問題をさけるために、素子はパルス動作で行なった。(パルス中40ns，繰り返し30Hz) 入力トリガーパルス発生用同軸線は、容量2pFを含む微分回路で構成し、これを適当な時間だけ，バイアスパルス

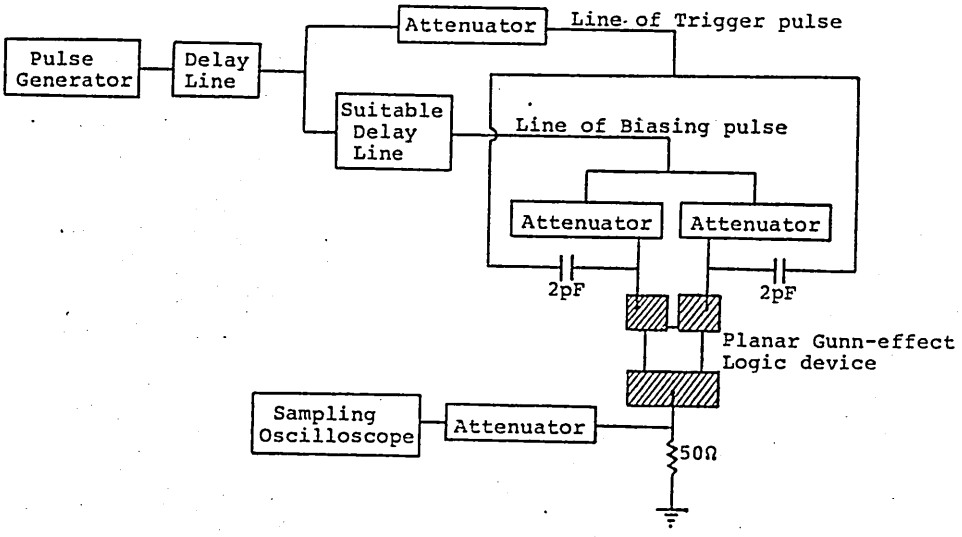


図8. 測定回路の概略図　(入力状態；(1，1)の場合)

に対して遅延するか、あるいはバイアスパルスを遅れさせて、正負いづれかの極性をもつ入力トリガーパルスを得、これを素子の陰極前面でバイアスパルスに重畳している。入力トリガーパルスの波高値および中は、途中に挿入されている減衰器の減衰量および容量の値を調整することによって、任意に設定することができる。

図8は入力状態(1,1)のときに対応するが、入力状態(1,0),(0,1)は、トリガーパルス発生用の同軸線の一方を陰極I、あるいは陰極IIにつなぎ、さらに回路の平衡状態を維持するために、他方を無反射終端につなぐことによって達成される。50Ωの陽極負荷を流れる出力電流はサンプリングオシロスコープで観測され、同時に両陰極の電圧波形は高インピーダンス同軸線を通して検知した。

3.3 OR動作

バイアス電圧に対して逆の極性のトリガーパルス(負トリガー)を、入力信号として用いた場合の、素子の論理動作の実例を図9に示す。このときのバイアス電圧は、閾値電圧よりわずかに低く176 voltsであり、両陰極は同電位である。バイアスパルスの開始時から23 ns後に、逆の極性をもつ負トリガーパルスが陰極Iにのみ印加されると、先の2.2節で述べたごとく素子内にドメインが発生し、これに呼応して矩形の出力電流パルスが得られる。(図9(a)) また陰極IIにのみ入力トリガーパルスが印加された場合も、図9(a)と全く同様な動作が観測された。さらに、入力トリガーパルスが陰極I, IIの両方に、同時に印加されると、出力電流にはトリガー電圧波形に対応した

小さなくぼみが現われるだけで，素子内にドメインは発生しない。(図9.(b))

これらの結果は，試作した素子が，バイアス電圧パルスに対して逆の極性をもつ入力トリガーパルスの下で，完全なコンパレータ動作を行なっていることを示している。

出力電流パルスの立ち上がり部分をみると，前章の計算機シミュレーションによる陽極電流の波形と同様に，まず，トリガー電圧に対応して小さな電流の落ち込みがあり，トリガーパルスが立ち下がるころにドメインが成長し始めて，電流が落ち出す。陰極Iに入力信号が印加されて後，このパルス波高値がある値に達すると，陰極IIの電極端でドメインが発生するが，このとき陰極Iの前面の電界は徐々に低くなりつつあり，電極端を除いて，時にはドメイン維持電界以下にもなるので，発生したドメインは陰極部付近全体の電界を押し下げるほどには急速に成長せず，出力電流にはわずかな落ち込みがみられるにすぎない。そして，トリガーパルスが下がり出すと，陰極前面の電界が元の状態に復帰し，ドメインが横方向にも拡がりながら成長して，出力電流パルスの立ち上がりが始まる。したがって入力トリガーパルスの巾だけ出力パルスの立ち上がりが遅れている。この実験では，入力トリガーパルスから約800 ps遅れて，出力パルスが立ち上がり，t_rは600 psであった。

バイアス電界を大きくとり，入力トリガーパルス巾およびその大きさを減少することによって，この立ち上がりの遅れと，t_rは改善できる。

次に，バイアス電圧パルスと同じ極性をもつトリガーパルス(正トリガー)を入力信号として陰極に印加すると，表2に示

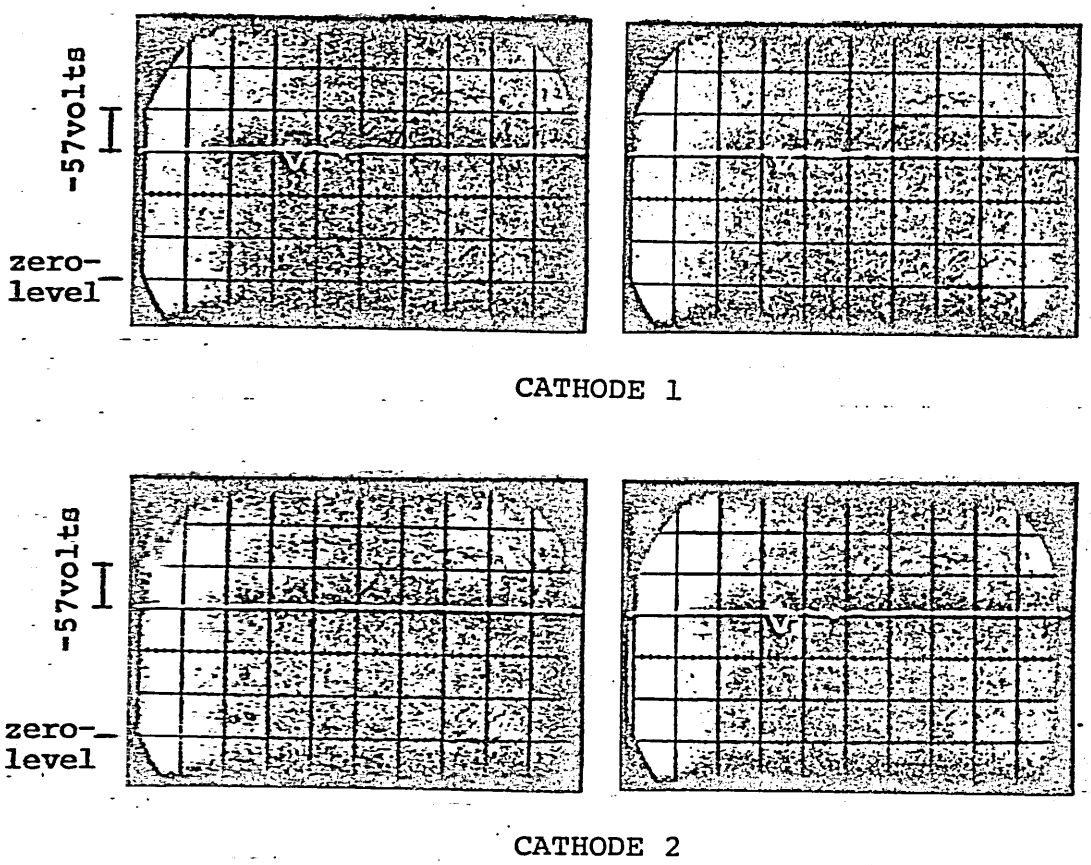


図.9 Exclusive OR (Comparator) 動作 (負トリガー)
(a) 入力状態：(1, 0), (b) 入力状態 (1, 1)

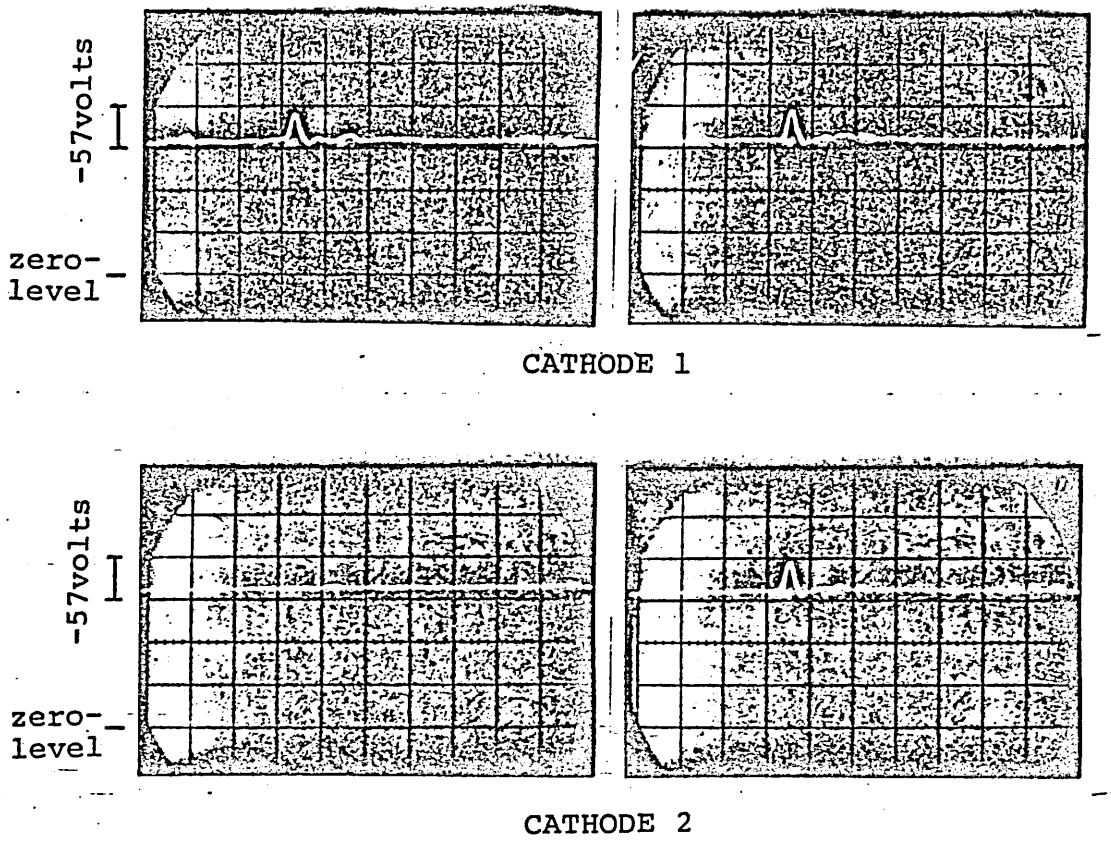


図.10 Inclusive OR 動作 (正トリガー)
(a) 入力状態;(1, 0) (b) 入力状態; (1, 1)

されるような"Inclusive OR"動作を行なう。図10(a)は、陰極Iにのみ入力信号"1"が入ったときの動作で、出力電流波形のTvは、負トリガーの場合よりも短く、約500psであった。また、立ち上がりまでの遅れ時間も負トリガーの場合より約600ps短くなっている。図11(b)は2つの陰極に同時に入力トリガーが入ったとき、ドメインが発生していることを示している。出力パルス中は、約5.5nSである。ドメインの発生の機構は、負トリガーの場合と異なり、陰極、陽極間の電界が閾値以上に上げられることに起因する。

X	Y	X+Y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

INCLUSIVE OR

表 2

このように、陰極部を2つに分離した1個のプレーナ素子において、バイアス電圧に対する入力トリガーパルスの極性を変えれば、"Exclusive OR (Comparator)"および"Inclusive OR"の両方とも実現されることが実証された。

なお、図9、図10において、ドメイン走行後の出力電流レベルが、走行前のレベルより低くなっているが、これについては次章で改めて考察する。

4. 検討

4.1 トリガー感度と素子の形状

トリガー感度は素子をトリガーオンするための最小入力電圧の大きさである。コンパレータ動作の場合のドメインの発生は、2.2節でも述べたように、バイアス電界と入力トリガー

電圧による合成電界が，局所的に閾値電界を越すことに起因するため，素子の形状，電極構造等が，トリガー感度に大きく影響する。

陰極を2つに分離した図1の素子において，入力トリガー電圧によってドメインが発生する場合の合成電界を，近似的に，バイアス電界E_0と，これに直角方向のトリガ電圧による電界の和として評価することにより，トリガー感度と素子の形状について検討を加える。

バイアス電界をE_0，トリガー電圧をV_{tr}，両陰極間の距離をl_gとすると，合成電界E_{tot}は，

$$E_{tot} = \sqrt{E_0^2 + \gamma^2 (V_{tr}/l_g)^2} \qquad (9)$$

となる。ここで，γは電極構造に基づく2次元効果の補正係数である。この合成電界E_{tot}が，閾値電界E_{th}に達したときドメインが発生してトリガーオンされる。

l_gは小さいほど，効率よくトリガーできることは，(9)式からも明らかであるが，素子内での熱雑音，回路上での電圧の揺らぎによって，l_gが制限される。今，素子中の熱的揺らぎによる電界変動をΔE_T，回路上の電圧の揺らぎをΔV_cとするとき，素子が安定な動作をするには，次の2つの不等式によって表わされるような制限が加わる。

まず，入力信号がないときに，素子が安定な状態であるためには，

$$\sqrt{E_0^2 + \gamma^2 \left(\frac{\Delta V_c}{l_g}\right)^2} + \Delta E_T < E_{th} \qquad (10)$$

でなければならない。次に，入力信号により素子が確実にト

子内をドメインが走行するといくらかの伝導帯電子がトラップ準位に捕えられ，走行後は電流レベルが減少する。これが，field-enhanced trapping effect [17] [18] であり，このときのトラップされた電子の緩和時間は，1 μs ～ 10 μs であり高速のスイッチング動作は望めない。

図12は試料長 l_0 = 50 μm のプレーナ2電極素子の場合に得られたトラッピング効果である。このとき，電圧パルスの最先端部に正トリガーがあり，ドメインが走行すると電流値は飽和レベルから12%減少する。ドメイン走行後の電流レベルは極めて安定である。しかし，パルスの途中に十分大きな負のトリガーパルスを印加しても電流レベルは元の状態に復帰せず，スイッチングオフ時間が極めて長いことがわかる。このような大きな電流の減少は，素子が薄い場合（数μm）に得られ，基板結晶との境界面におけるトラップ準位がこの現象に大きく寄与していることを示唆している。また，図12の現象を呈するダイオードはコヒーレントなガン発振を示さず，パルスの後部で発振波形は乱れてくる。

論理素子という観点から見れば，プレーナ素子における field-enhanced trapping effect は，見掛け上，電流スイッチング比を劣化させ，また，この効果をメモリー機能として利用するには，スイッチングオフ時間が大きすぎる。それ故

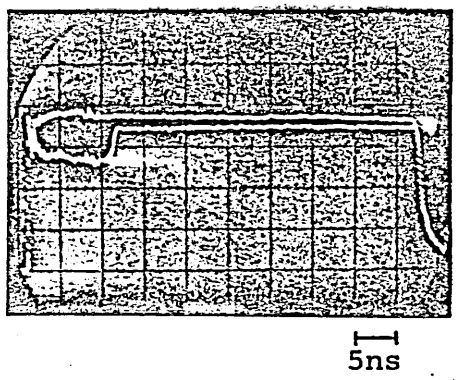


図12. プレーナ素子のトラッピング現象 l_0 = 50 μm
上; V_0 = 227 volts, 下; V_0 = 240 volts

結晶成長過程において，極力不純物の混入を避け，良質のエピタキシャル層を得ることが必要である。

5. まとめ

陰極部を2つに分離した平面ガン効果素子の論理動作について，まず計算機解析によりコンパレータ動作の可能性を示し，併せて，素子内でのドメインの発生、走行、とくにドメインの横方向の拡がり現象が，論理動作に及ぼす影響について検討した。

さらに，半絶縁性基板上のエピタキシャルGaAs単結晶を用いて，ホトエッチング技術により，この3端子のプレーナ素子を試作し，計算機シミュレーションで示されたのと全く同様の論理動作を検証した。同時に、入力トリガー信号の極性の正負にしたがって"Exclusive OR（コンパレータ）"および"Inclusive OR"動作を1つの素子で実現でき得ることが明らかになった。

本実験におけるプレーナ素子の試料長は500 μmであるが，現在のホトエッチング技術を用いれば、数10 μmの素子を製作することができ，そのような素子では1bitあたりの遅れ時間が数百psの超高速動作が可能である。さらに、プレーナ構造であるから，回路の集積化にも直接結びつく。

本研究の数値計算には，大阪大学大型計算機（NEAC 2200）を使用した。

参考文献

1. J. B. Gunn ; IBMJ. Res. Develop., 8, pp. 141-159, Apr., 1964.
2. K. Hause, H. Salow, A. Schlachtzki, K. H. Bachem, K. Heime ; Proc. 4th. Int. Conf. GaAs and Related Compounds, pp. 275-285, Sept., 1972.
3. S. Kataoka, N. Hashizume, M. Kawashima, Y. Komamiya ; Proc. 4th. Cornell Conf. on Microwave Semiconductor Devices, Circuits and Applications, pp. 225-234, 1973.
4. J. A. Copeland, T. Hayashi, M. Uenohara ; Proc. IEEE (Letters), 55, pp. 584-585, Apr., 1967
5. T. Sugeta, H. Yanai, K. Sekido ; Proc. IEEE (Letters), 59, pp. 1629-1630, Nov., 1971.
6. M. Shoji ; IEEE. Trans. Electron Devices, ED-16, pp. 748-758, Sep., 1969.
7. T. Isobe, T. Nakamura, G. Goto ; Proc. IEEE (Letters), 61, pp. 792-793, June, 1973.
8. S. H. Izadpanach, H. L. Hartnagel ; Proc. IEEE (Letters), 55, p. 1748, Oct., 1967.
9. S. H. Izadpanach, H. L. Hartnagel ; Radio Electron. Eng., 39, pp. 329-339, June, 1970.
10. P. N. Butcher, W. Fawcett ; Phys. Letters, 21, pp. 489-490, June, 1966.
11. H. W. Thim ; J. Appl. Phys., 39, pp. 3897-3904, July, 1968.
12. T. Ohmi, S. Hasuo ; IEEE. Trans. Electron Devices, ED-20, pp. 303-316, Mar., 1973.
13. 木村, 西田, 増田, 小山 ; 電子装置研資, ED 74-49
14. 生駒, 鳥塚, 柳井 ; 信学論(c), 51-C, pp. 565-572, Dec., 1968.

15. H. W. Thim; Proc. IEEE (Letters); 59, p. 1289, Aug. 1971.
16. H. W. Thim; Electron. Lett. 7, pp. 246-247, May., 1971.
17. M. Takeuchi, A. Higashisaka, K. Sekido; IEEE Trans. Electron Devices, ED-19, pp. 125-127, Jan., 1972.
18. J. L. Teszner, D. Boccon-Gibod; J. Appl. Phys., 44, pp. 2765-2774, June, 1973.

輻射科学研究会資料

非相反光ICモード変換器の解析

北山 研一，熊谷 信昭

大阪大学・工学部

昭和50年9月26日

1. まえがき

異方性媒質を含む光ICは、電磁波論的な興味に加えて応用上からも種々の機能をもった光IC系を構成し得る可能性が考えられるところから、最近多くの注目を集めている。例えば、異方性媒質を含む光ICの導波モードに関する理論的研究[1),(2)]が進められる一方、電気光学効果や磁気光学効果を有する異方性媒質を用いたモード変換器やアイソレータ、サーキュレータ等の非相反光IC素子の構成法等がいくつか提案されている[(5)~(8)]。

本文では、等方性の誘電体からなる2本の光導波路間に、電気光学効果あるいは磁気光学効果を有する異方性媒質をはさんだ構造の光IC結合系について考察する。このような構造の光IC結合系は、異方性媒質を含む光ICの最も基本的かつ典型的なものの一つであるにもかかわらず、今までのところ僅かに光変調器としての考察[(7)]がある程度で、筆者等の知る限りでは、このような結合系について電磁波論的に導波モードを解析したり、その非相反特性や応用等について詳しく検討したような文献は見当らない。そこでまず、本文では上記のような構造の光IC結合系の導波特性を理論的に詳しく解析する。ついでその解析結果をもとに、このような結合系によって非相反モード変換器が実現可能であることを明らかにし、その具体的な数値計算例を示す。また結合系における非相反モード変換作用を利用することに

よって、従来の提案[1),2),3),4),5)]にみられるようなモードフィルタやモード分離装置を必要とするアイソレータやサーキュレータと異なり、それらを用いずに極めて簡単な構造でアイソレータやサーキュレータが構成できることを示す。

2. 導波路の構成と解析手法

2.1 導波路の構成

簡単のため、導波系は図1に示すようにy方向に一様な2次元構造であるとし、z軸方向を伝搬方向とする2本の比誘電率K_fなる等方性媒質からなる誘電体導波路Ⅰ，Ⅱの間に、比誘電率テンソル$\hat{K}$なるgyrotropicな媒質あるいは異方性媒質をはさんだ構造とする。また領域A，Bはいずれも一般に比誘電率テンソルが、対角項のみを有するような異方性媒質であるとして、これらをそれぞれ、

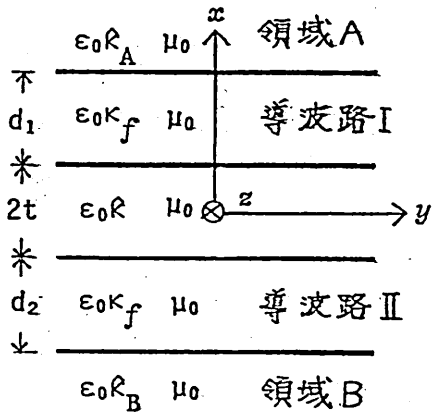


図1 導波系の構造

$$\hat{K}_A = \begin{bmatrix} K^A_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K^A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K^A_{zz} \end{bmatrix}, \quad \hat{K}_B = \begin{bmatrix} K^B_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K^B_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K^B_{zz} \end{bmatrix} \tag{1}$$

と表わす。透磁率はすべて真空の透磁率μ_0に等しいものとし、また以下の議論では系の損失はすべてこれを無視する。媒質が無損失の場合には、導波路Ⅰ，Ⅱの間にはさまれた異方性またはgyrotropicな媒質の比誘電率テンソル$\hat{K}$はエルミート的となり、一般に、

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy}^* & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz}^* & K_{yz}^* & K_{zz} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

と表わせる。ここで$*$は複素共役である。比誘電率テンソルの非対角項は、異方性媒質の電気的主軸を回転した場合、あるいは電気光学効果を有する媒質に電界を印加した場合には実数となり、磁気光学効果を有する媒質に磁界を印加した場合には純虚数となる。以下、本文では比誘電率テンソル$\hat{K}$の非対角項が実数となるような媒質を「異方性媒質」と呼び、純虚数となるような媒質を「gyrotropicな媒質」と呼んで区別することにする。また、比誘電率K_fと$\hat{K}$，$\hat{K}_A$および$\hat{K}_B$の各テンソル成分の間には次のような関係が成り立っているものと仮定する。

$$\begin{aligned} &K_{xx}^A > K_f > K_{yy}^A = K_{zz}^A > K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} \\ &K_{yy}^B > K_f > K_{xx}^B = K_{zz}^B > K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} \end{aligned} \qquad (3)$$

さて、電界および磁界の印加方向として図2のように3通りあり、(a)，(b)，(c)の3つの場合に応じて比誘電率テンソル$\hat{K}$の非対角項はそれぞれつぎのようになる。

(a) $K_{xy} \neq 0$, $K_{yz} = K_{zx} = 0$ (4)

(β) $K_{yz} \neq 0$, $K_{xy} = K_{zx} = 0$

(c) $K_{zx} \neq 0$, $K_{xy} = K_{yz} = 0$

したがって、図1の導波系の導波特性の解析は、(α)、(β)、(c)の場合についてそれぞれ零でない非対角項が実数の場合と純虚数の場合の計6通りについて行なえばよいことになる。

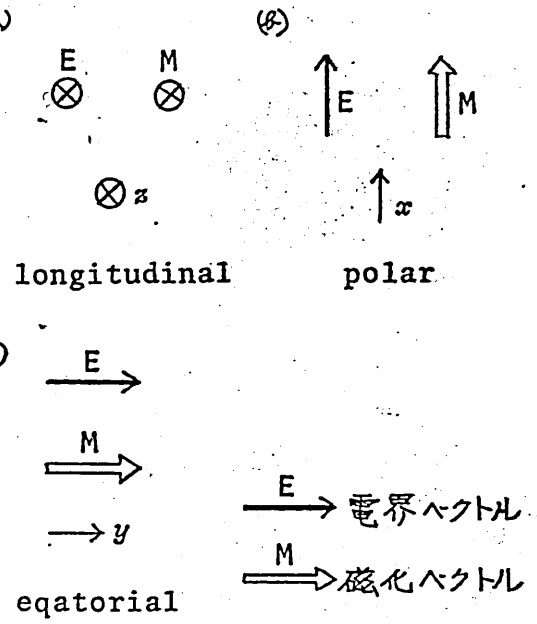


図2　電界，磁界の印加方向

2.2 解析手法

図1に示した導波系の導波特性を、前節で述べた6通りの場合について解析するのであるが、電気または磁気光学効果を有する媒質に電界または磁界を印加したことによって生ずる実際の媒質定数の変化は、一般に余り大きくない。そこで、このような僅かな媒質定数の変化によって生ずる物理的な現象を容易にかつ見通しよく把握するために、次に述べるような近似的な解析手法を用いることにする。すなわち、図1の導波系は図3に示すように、導波路Ⅰ，Ⅱ間に対角項のみを

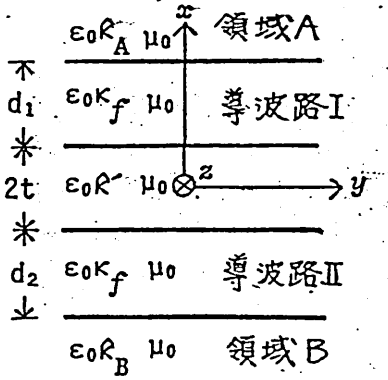
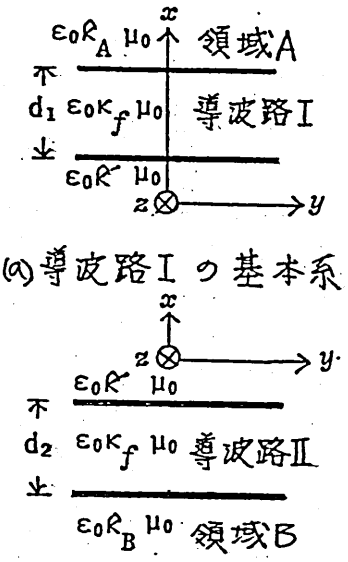


図3　無摂動の導波系

有する比誘電率テンソル

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

をもつような媒質がはさまれた結合導波系に、摂動として非対角項が加わった摂動系であるとみなす。図3のような導波系の固有モードの伝送電磁界は、図4(a), (b)に示すような、導波路ⅠおよびⅡがそれぞれ単独に存在する場合の基本系の固有モードの伝送電磁界の線形結合として表わすことができる。

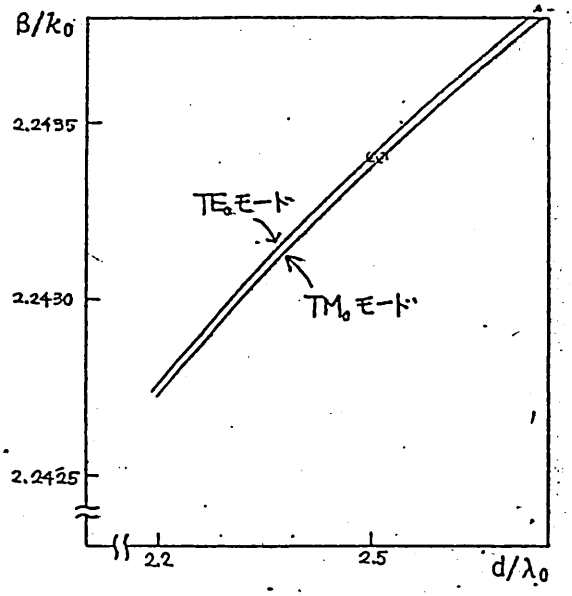


(a)導波路Ⅰの基本系

(b)導波路Ⅱの基本系

図4

2つの基本系図4(a)および(b)は、それぞれ図3に示した摂動が加わらない導波系において、導波路Ⅰの下部($x \leq 0$)および導波路Ⅱの上部($x \geq -d$)に、比誘電率がKであるような媒質が無限に広がっているとした導波系である。図4(a)および(b)の導波系の導波モードを、それぞれ導波路ⅠおよびⅡの基本系の固有モードとよぶことにする。したがって結局、図1の導波系の固有モードは、このようにして求めた図3のような導波系の固有モードに僅かな摂動が加わったものとして求めることができる。



$K_f = 5.05$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 4.963 & 0 & 0 \\ 0 & 4.963 & 0 \\ 0 & 0 & 4.963 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K}_A = \begin{bmatrix} 5.1 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K}_B = \begin{bmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

図5. 基本系の固有モードの分散曲線

図5は、導波路ⅠおよびⅡの基本系の固有モードの伝搬定数の数値計算例を示す。各領域の誘電率は図中に示してあるが、これらの値は式(3)の関係を満足している。横軸は導波路の膜厚dを自由空間波長λ₀で規格化した値を、縦軸は伝搬定数βを自由空間伝搬定数$k_0 = 2\pi/\lambda_0$で規格化した値を示している。導波路Ⅰの基本系ではTMモードの伝搬定数の下限は$\sqrt{5.1} = 2.258$となり、導波路の屈折率$\sqrt{5.05} = 2.247$より高いためTMモードは導波せず、TEモードのみが伝搬する。また導波路Ⅱの基本系ではTEモードの伝搬定数の下限が$\sqrt{5.1} = 2.258$となり、導波路の屈折率$\sqrt{5.05} = 2.247$より高いため導波モードはTMモードのみとなる。したがって、この例の場合、導波路Ⅰの基本系の固有モードはTEモードのみであり、導波路Ⅱの基本系の固有モードはTMモードのみである。また、導波路Ⅰ，Ⅱの膜厚を適当に選ぶことに

よって、TEモードとTMモードを縮退させることが可能であり、図5中の点はTE最低次モードとTM最低次モードとが縮退している点を示している。

この例からわかるように、図1に示した構造の導波系では、各領域の誘電率の値が式(5)に示した関係を満足している場合には、その基本系はTEモードあるいはTMモードのいずれか一方しか導波しない。しかし図1における領域A, Bがともに等方性の誘電体である場合には、その基本系はTEモードおよびTMモードをともに導波することが可能になる。このような構造の導波系の導波特性の解析結果およびその応用については付録でふれる。

3. 変分法を用いた結合系の解析[10]

3.1 結合系の正規モードの解析

任意の開放形導波路に沿う伝送電磁界E, Hは、伝搬方向(z方向)の伝搬定数をβとすれば、

$$\mathbb{E} = \mathbb{e}\, e^{j(\omega t-\beta z)}, \quad \mathbb{e} = \mathbb{i}_x e_x + \mathbb{i}_y e_y + \mathbb{i}_z e_z$$
$$\mathbb{H} = \mathbb{h}\, e^{j(\omega t-\beta z)}, \quad \mathbb{h} = \mathbb{i}_x h_x + \mathbb{i}_y h_y + \mathbb{i}_z h_z \qquad (5)$$

と表わされる。ただし$\mathbb{i}_x$, $\mathbb{i}_y$, $\mathbb{i}_z$はそれぞれx, yおよびz方向を向く単位ベクトル、ωは角周波数を表わす。ここで導波路が無損失でかつ伝搬方向に一様であるとすれば、3次元ベクトル$\mathbb{e}$, $\mathbb{h}$は伝搬方向に一様であり、この時の伝搬定数βに対する変分表現式は次のようになる[2]。

$$\beta=\frac{\omega\int(\mathbb{E}^*\cdot\epsilon\mathbb{E}+\mathbb{H}^*\cdot\mu\mathbb{H})dS+j\int(\mathbb{E}^*\cdot\nabla\times\mathbb{H}-\mathbb{H}^*\cdot\nabla\times\mathbb{E})dS}{\int(\mathbb{E}\times\mathbb{H}^*-\mathbb{H}\times\mathbb{E}^*)\cdot\mathbb{i}_z dS} \qquad (6)$$

ただしϵおよびμは導波系の各領域における誘電率および透磁率を表わす。また、面積分は伝搬方向に垂直な横断面全体にわたって行なうものとする。上式が真の伝搬定数βを与えるためには、試験関数として用いる$\mathbb{E}$, $\mathbb{H}$は無限遠方において零になり、媒質の不連続部においてその接線成分が連続となるものでなければならない。

さて、摂動によって生ずる比誘電率テンソルϵの非対角項が十分小さいことから、図1の結合系の正規モードの伝送電磁界は、図2のような導波系の伝送電磁界が摂動によって僅かに変化したものとみなして、変分表現式(6)にこのような無摂動導波系の伝送電磁界を試験関数として代入し、図1に示した誘電率分布を考慮して、Rayleigh-Ritz法を適用することによって十分精度よく求めることができる。いま、導波路Ⅰの基本系のTE最低次モードと導波路Ⅱの基本系のTM最低次モードとが縮退あるいはそれに近い状態にある場合を考えれば、高次モードとの結合は無視できるので、図1の導波系の伝送電磁界は、導波路ⅠのTE最低次モード，導波路ⅡのTM最低次モードそれぞれの伝送電磁界の線形結合として、

$$\mathbb{E}=m_1\mathbb{E}_1+m_2\mathbb{E}_2\ ,\ \mathbb{H}=m_1\mathbb{H}_1+m_2\mathbb{H}_2 \qquad (7)$$

と表わすことができる。ただし$\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$はそれぞれ導波路Ⅰ

、Ⅱの基本系の固有モード、すなわちTE最低次モード、TM最低次モードの伝送電界を、また$\mathbb{h}_1$, $\mathbb{h}_2$はそれぞれの伝送磁界を表わす。振幅係数m_1, m_2は式(7)を式(6)に代入したとき、その値が停留値をとるように定められるべき定数である。式(7)を式(6)に代入すると、

$$\beta=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}m_i^*m_jN_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}m_i^*m_jD_{ij} \tag{8}$$

ただし、

$$N_{ij}=\omega\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbb{e}_i^*\cdot\epsilon\mathbb{e}_j+\mu_0\mathbb{h}_i^*\cdot\mathbb{h}_j)dx+j\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbb{e}_i^*\cdot\nabla\times\mathbb{h}_j-\mathbb{h}_i^*\cdot\nabla\times\mathbb{e}_j)dx+\omega\epsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{e}_i^*\cdot\Delta\hat{K}\mathbb{e}_j\,dx \tag{9}$$

$$D_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbb{e}_i\times\mathbb{h}_j^*-\mathbb{h}_i\times\mathbb{e}_j^*)\cdot\mathbb{i}_z\,dx \tag{10}$$

となる。式(9)右辺第1項中のϵは、

$$\epsilon=\begin{cases}\epsilon_0\hat{K}_A, & (x\geq d_1+t)\\ \epsilon_0K_f, & (t\leq x\leq d_1+t,\ -d_2-t\leq x\leq -t)\\ \epsilon_0\hat{K}', & (-t\leq x\leq t)\\ \epsilon_0\hat{K}_B, & (x\leq -d_2-t)\end{cases}$$

なる値をもつ誘電率であり、式(7)右辺第3項中の$\Delta\hat{K}$は、加えられた摂動に応じて、$-t\leq x\leq t$においては次式に示すような3通りの誘電率テンソルを示し、他の領域では零なる値をもつものとする。

$$\Delta\hat{K}=\begin{cases}\begin{bmatrix}0 & K_{xy} & 0\\ K_{xy}^* & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, & (\text{L摂動}) \qquad (10-1)\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_{yz}\\ 0 & K_{yx}^* & 0\end{bmatrix}, & (\text{P摂動}) \qquad (10-2)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{zx}^{*} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{E摂動}) \tag{10-3}$$

上式のような各摂動をそれぞれ次のように名付ける。すなわち、誘電率テンソルの非対角項が純虚数(Gyrotropic)であるか実数(Anisotropic)であるかに従い、それぞれ式(10-1)ではLG摂動, LA摂動、式(10-2)ではFG摂動, PA摂動、式(10-3)ではEG摂動, EA摂動とよぶことにする。

結局、式(9)右辺第3項は摂動が加えられることによって、新たに生ずる摂動項とみなすことができるので、この摂動項によって結合の模様を考察することができる。以下に、それぞれの摂動に対する摂動項、

$$N'_{ij}=\omega\epsilon_0\int_{-\infty}^{\infty} e_i^{*}\cdot\Delta\hat{K}\,e_j\,d\chi \tag{11}$$

を示す。

(i) L摂動

$$N'_{12}=\omega\epsilon_0\int_{-t}^{t} K_{xy}^{*}e_{1y}^{*}e_{2x}\,d\chi\ ,\quad N_{12}=N'_{12} \tag{12}$$

となり、摂動項N'_{12}はK_{xy}が純虚数(LG摂動)ならば純虚数に、K_{xy}が実数(LA摂動)ならば実数になる。

(ii) P摂動

$$N'_{12}=\omega\epsilon_0\int_{-t}^{t} K_{yz}e_{1y}^{*}e_{2z}\,d\chi\ ,\quad N_{12}=N'_{12} \tag{13}$$

となり、摂動項N'_{12}はK_{yz}が純虚数(PG摂動)ならば実数に、K_{yz}

か実数(PA摂動)ならば純虚数になる。

(iii) E摂動

EG摂動では、

$$N'_{22}=2\omega\epsilon_0\int_t^{t'}\kappa_{xx}e^{*}_{xx}e_{zx}dx \qquad (14)$$

であり、κ_{xx}が純虚数であるから摂動項N'_{22}は実数になる。

EA摂動では、

$$N'_{22}=0 \qquad (15)$$

となり、摂動項N'_{22}は零である。

以上の結果から、摂動項がともに純虚数となるLG摂動とPA摂動の導波系の導波特性は類似しており、摂動項がともに実数となるLA摂動とPG摂動の導波系の導波特性は類似していることがわかる。また、EG摂動が加わる場合には、導波路Ⅱの基本系のTMモードに影響が生ずるが、EA摂動が加わっても基本系の固有モードに影響は生じない。このことから、以後E摂動はEG摂動のみを取り扱うことにする。

次に、式(8)における伝搬定数βが実数になるために、振幅係数に課せられるべき位相条件を明らかにする。LA, PGおよびEG摂動においては、摂動項が実数であるから振幅係数m_1, m_2はともに実数でなければならず、LGおよびPA摂動の場合には、摂動項が純虚数であるからTEモードの振幅係数m_1を実数とするならばTMモードの振幅係数m_2は純虚数でなければならない。そこで、N_{ii}およびm_iが純虚数となるとき、これらをそれぞれjN_{ii}, jm_i(ただし、N_{ii}, m_iは実数

とする)と書き換えることにしておけば、式(8)はいずれの摂動においても常に、

$$\beta=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}m_i m_j N_{ij}\Big/\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}m_i m_j D_{ij} \qquad (16)$$

と表わすことができる。式(16)が停留値をとる条件、$\partial\beta/\partial m_j=0$ より、

$$\sum_{i=1}^{2}(N_{ij}-\beta D_{ij})m_i=0\ ,\ (j=1,2) \qquad (17)$$

を得る。式(17)を解いてβおよび振幅係数m_1, m_2を得るが、ここで得られるβは結合系の正規モードの伝搬定数であり、振幅係数m_1, m_2は対応する固有ベクトルである。以下、これらを用いて結合系の正規モードの導波特性を解析する。

○L摂動およびP摂動

$$\beta=\left[N_{11}D_{22}+N_{22}D_{11}\pm\{(N_{11}D_{22}-N_{22}D_{11})^2+4D_{11}D_{22}N^2\}^{\frac{1}{2}}\right]\Big/2D_{11}D_{22} \qquad (18)$$

ただし、Nは摂動項を表わし実数である。ここで、β_1, β_2をそれぞれ導波路Ⅰ, Ⅱの基本系の固有モード、すなわちTEモード, TMモード, の伝搬定数とすれば、次の関係が近似的に成り立つ。

$$\beta_1=N_{11}/D_{11},\quad \beta_2=N_{22}/D_{22} \qquad (19)$$

また、基本系の固有モードの伝送電力が1になるように規格化すれば、

$$D_{11}=D_{22}=4 \qquad (20)$$

であり、これらを用いると式(18)は次のように書ける。

$$\beta = \beta_0 \pm C \tag{21}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (\beta_1+\beta_2)/2 \\ C &= \beta_0 F\{1+(\delta/F)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ \delta &= (\beta_1-\beta_2)/(\beta_1+\beta_2) \\ F &= (D_{11}D_{22})^{-\frac{1}{2}}N'/\beta_0 = N'/4\beta_0 \end{aligned} \tag{22}$$

であり、さらに振幅係数の比m_1/m_2は次のようになる。

$$m_2/m_1 = -(\delta/F) \pm \{1+(\delta/F)^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

結合系の正規モードを式(21)の符号の正，負に従ってそれぞれαモード，およびβモードと名付け、それぞれのモードの伝搬定数をβ_α, β_βと表わし、また対応する振幅係数の比m_2/m_1をそれぞれK_α, K_βとすると、正規モードの電界E_α, E_βは次のようになる。

$$\begin{aligned} E_\alpha &= A(\mathcal{E}_1 + K_\alpha \mathcal{E}_2)e^{j(\omega t-\beta_\alpha z)} \\ E_\beta &= B(\mathcal{E}_1 + K_\beta \mathcal{E}_2)e^{j(\omega t-\beta_\beta z)} \end{aligned} \tag{24}$$

ここで定係数A，Bは初期条件によって決定される。上式より導波路Ⅰの電界E_1，導波路Ⅱの電界E_2はそれぞれ次のように表わされる。

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathcal{E}_1(Ae^{-j\beta_\alpha z}+Be^{-j\beta_\beta z})e^{j\omega t} \\ E_2 &= \mathcal{E}_2(AK_\alpha e^{-j\beta_\alpha z}+BK_\beta e^{-j\beta_\beta z})e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{25}$$

次に、導波路Ⅰの基本系のＴＥモードおよび導波路Ⅱの基本系のＴＭモードの複素振幅をそれぞれ$a_1(z)$, $a_2(z)$とし、これらを用いて式(24)を表わすと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{bmatrix} \tag{26}$$

ただし、$a_1(0)$, $a_2(0)$ は $z=0$ における値であり、各モードから方向単位幅当り z 方向に伝送する電力は複素振幅を用いれば $|a(z)|^2$ で表わされる。また、行列 $[S]$ は各摂動に対してそれぞれ次のようになる。

$$[S]_{\substack{LA \\ PG}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$[S]_{\substack{LG \\ PA}} = \begin{bmatrix} S_{11} & jS_{12} \\ -jS_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \tag{28}$$

上式(27)および(28)に示した行列の各要素は次のようにして導かれる。まず、振幅係数の比 m_2/m_1 の値 K_a, K_s が実数であるLA摂動およびPG摂動の導波系における行列 $[S]_{\substack{LA \\ PG}}$ を導出する。式(24)中の定係数A, BをTEモード, TMモードの複素振幅の初期値 $a_1(0)$, $a_2(0)$ を用いて表わすと、

$$\begin{aligned} A &= \{K_s a_1(0) - a_2(0)\}/(K_s - K_a) \\ B &= -\{K_a a_1(0) - a_2(0)\}/(K_s - K_a) \end{aligned} \tag{29}$$

となり、上式を式(25)に代入すれば行列 $[S]_{\substack{LA \\ PG}}$ の各要素はそれぞれ次のように得られる。

$$\begin{aligned} S_{11} &= e^{-j\beta_0 z}(\cos Cz - j\Delta \sin Cz) \\ S_{12} &= S_{21} = -je^{-j\beta z}(1-\Delta^2)^{\frac{1}{2}} \sin Cz \\ S_{22} &= e^{-j\beta_0 z}(\cos Cz + j\Delta \sin Cz) \end{aligned} \tag{30}$$

ただし、

$$\Delta = (\delta/F)\{1+(\delta/F)^2\}^{-\frac{1}{2}} \tag{31}$$

である。また、LG摂動およびPA摂動の場合には、振幅係数の比K_a, K_bは純虚数となるので、これをjK_a, jK_b(ただし、K_a, K_bは実数)と書き換えることにすれば、この場合の行列$[S]_{\substack{LG \\ PA}}$は式(30)の$S_{12}$, S_{21}をそれぞれ、

$$S_{12} \longrightarrow jS_{12}\ ,\quad S_{21} \longrightarrow -jS_{12} \tag{32}$$

と変更するだけで得られる。

さて、行列[S]は一種の散乱行列であるとみなすことができるか、この場合の散乱行列とは系全体の性質を記述する散乱行列ではなく、$+z$方向へ進む波、すなわち前進波についての散乱行列と考えられる。通常の意味での散乱行列では、後進波のそれも考慮に入れなければならないが、これについては4.1節で述べる。式(27)および(28)に示すとおり、$S_{12}\neq 0$であるから、L摂動およびP摂動ではTEモードとTMモードとの間に結合が生じていることになる。また、LA摂動とLG摂動、およびPG摂動とPA摂動を比較すれば、TEモード入力に対するTMモード出力、およびTMモード入力に対するTEモード出力の位相がいずれも90°異なっていることがわかる。

○EG摂動

正規モードの伝搬定数は式(17)より、

$$\beta = \beta_1\ ,\ \beta_2 + \Delta\beta_2 \tag{33}$$

となる。ただし、$\Delta\beta_2 = N'_{22}/D_{22}$である。また散乱行列は、

$$[S]_{EG} = \begin{bmatrix} e^{-j\beta_1 z} & 0 \\ 0 & e^{-j(\beta_2+\Delta\beta_2)z} \end{bmatrix} \tag{34}$$

となる。上式より、TEモードとTMモードとの間に結合は生じないが、TMモードの位相は摂動が加わらない場合に比べて$\Delta\beta_2 z$だけ遅れを生ずることがわかる。

3.2 後進波の解析

導波系の導波特性、たとえば系の非相反性等を論ずるためには、後進波についても以上と同様の解析を行なって、結合系の正規モードの様子を明らかにし、その散乱行列が前進波の場合と比較して如何に変化するかを調べる必要がある。そこでまず、基本系の固有モードが後進波の場合どのように表わされるかを述べる。前進波の場合の基本系の固有モードの伝送電磁界を、

$$\mathbb{E}_F = \mathcal{E}_F e^{j(\omega t-\beta z)}, \quad \mathcal{E}_F = \mathring{i}_x e_x + \mathring{i}_y e_y + \mathring{i}_z e_z$$
$$\mathbb{H}_F = \mathcal{h}_F e^{j(\omega t-\beta z)}, \quad \mathcal{h}_F = \mathring{i}_x h_x + \mathring{i}_y h_y + \mathring{i}_z h_z \qquad (35)$$

と書く。以後、添字Fは前進波を表わし、後進波については添字Bを付けることにする。後進波の場合の伝送電磁界を、

$$\mathbb{E}_B = \mathcal{E}_B e^{j(\omega t+\beta z)}$$
$$\mathbb{H}_B = \mathcal{h}_B e^{j(\omega t+\beta z)} \qquad (36)$$

とするとき、これらが基本系の固有モードの伝送電磁界となるためには、$\mathcal{E}_B$, $\mathcal{h}_B$がそれぞれ、

$$\mathcal{E}_B = \mathring{i}_x e_x + \mathring{i}_y e_y - \mathring{i}_z e_z$$
$$\mathcal{h}_B = -\mathring{i}_x h_x - \mathring{i}_y h_y + \mathring{i}_z h_z \qquad (37)$$

でなければならない。[11] 後進波における導波路Ⅰ, Ⅱの基本

系の固有モードが式(30)から求まれば、後進波における結合系の正規モードの解析は3.1節に述べた前進波の場合と全く同様の手順で行なうことができ、その結果は、式(9)右辺第3項すなわち摂動項N_{ij}以外は前進波の場合と全く同一になる。従って、以下摂動項N'_{ij}のみに注目する。

(i) L摂動

$$N'_{12}=\omega\epsilon_0\int_{-t}^{t}K^*_{1\alpha}e^*_{1\beta}e_{2\alpha}\,dz \tag{38}$$

となり、前進波の場合の摂動項と同一である。

(ii) P摂動

$$N'_{12}=-\omega\epsilon_0\int_{-t}^{t}K_{yz}e^*_{1\beta}e_{2z}\,dz \tag{39}$$

となり、前進波の場合と比べ符号が反転している。

(iii) EG摂動

$$N'_{22}=-2\omega\epsilon_0\int_{-t}^{t}K_{xz}e^*_{2\alpha}e_{2\beta}\,dz \tag{40}$$

となり、前進波の場合と比べ符号が反転している。

以上の結果から、L摂動では後進波における結合系の正規モードの伝搬定数および固有ベクトルはともに前進波の場合のそれに等しく、そのためLG摂動, LA摂動における後進波の散乱行列は前進波のそれと全く同一になる。一方、P摂動では、摂動項N'の符号の反転に伴ない固有ベクトルK_α, K_βの符号が反転し、EG摂動では、摂動項N'の符号の反転に伴ない$\Delta\beta_z$の符号が反転する。従って散乱行列もこれに

応じて変化するが、図6のような座標変換を行なえば、以上用いてきた(x, y, z)座標系における後進波は(x', y', z')座標系における前進波とみなすことができるので、前進波の場合に求めた散乱行列をそのまま利用することができる。すなわち、後進波における散乱行列は前進波における散乱行列の各要素に含まれるzをz'と書き換えるだけで、あとは固有ベクトルK_a, K_bあるいは$\Delta\beta_2$の符号の変化を考慮に入れるだけでただちに得られる。

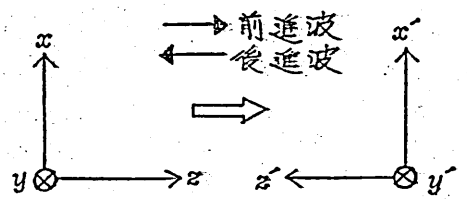


図6. 座標軸の変換

このようにして、後進波の散乱行列$[S]^B$を前進波の場合の散乱行列の要素を用いて表わすと、PG摂動およびPA摂動の散乱行列は、

$$[S]^B_{PG} = \begin{bmatrix} S_{11} & -S_{12} \\ -S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$[S]^B_{PA} = \begin{bmatrix} S_{11} & -jS_{12} \\ jS_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \tag{42}$$

となり、EG摂動の散乱行列は、

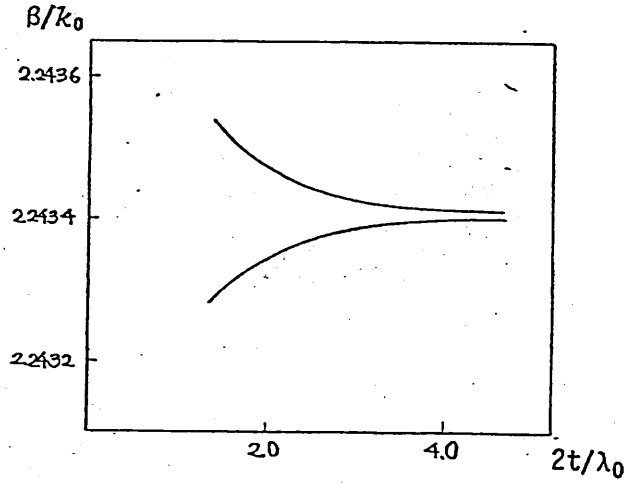
$$[S]^B_{EG} = \begin{bmatrix} e^{-j\beta_1 z'} & 0 \\ 0 & e^{-j(\beta_2 - \Delta\beta_2)z'} \end{bmatrix} \tag{43}$$

となる。以上に求めた後進波の散乱行列と、式(27), (28)および式(34)中の前進波の散乱行列とを比較することによって前進波と後進波の場合における系の導波特性の相違を明らかにすることができる。L摂動においては、前進波と後進波

の散乱行列が全く変化しないため系の入出力関係に方向性は現われないが、P摂動では、TEモード入力に対するTMモード出力、あるいはTMモード入力に対するTEモード出力の位相関係が、前進波と後進波では180°の差を生ずる。また、EG摂動ではTMモード入力に対するTMモード出力の位相が摂動が加わらない場合に比べ前進波では$\Delta\beta_2$だけ遅れるか、後進波では$\Delta\beta_2$だけ進む。

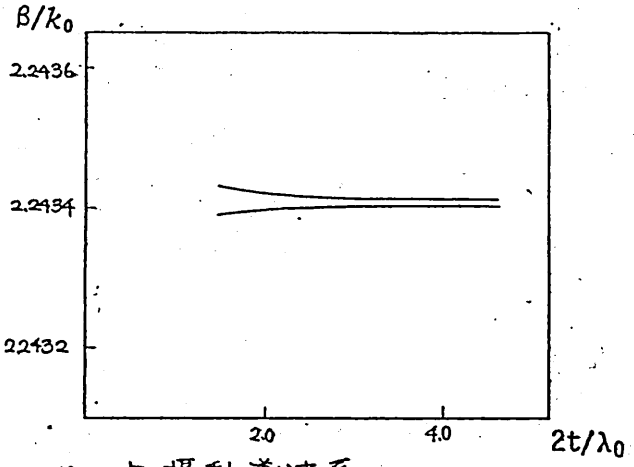
3.3. 数値計算例

図7はL摂動，P摂動およびEG摂動の場合について前進波における結合系の正規モードの伝搬定数の数値計算結果を示している。導波路Ⅰ，Ⅱの膜厚はそれぞれの基本系の固有モードが縮退する点、すなわち図5中の点で示した、$d_1/\lambda_0=2.5$，$d_2/\lambda_0=2.514$を選んでいる。



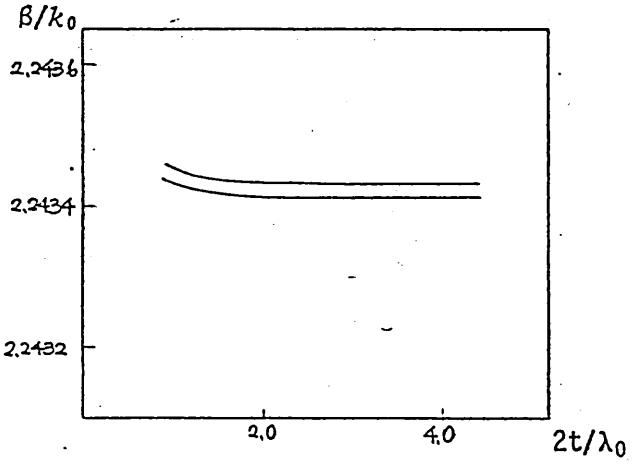
(a) L摂動導波系

$$\hat{R}=\begin{bmatrix} 4.963 & j0.04 & 0 \\ -j0.04 & 4.963 & 0 \\ 0 & 0 & 4.963 \end{bmatrix}$$



$$\hat{K}=\begin{bmatrix} 4.763 & 0 & 0 \\ 0 & 4.763 & j0.06 \\ 0 & -j0.06 & 4.763 \end{bmatrix}$$

(b) P摂動導波系



$$\hat{K}=\begin{bmatrix} 4.763 & 0 & j0.02 \\ 0 & 4.763 & 0 \\ -j0.02 & 0 & 4.763 \end{bmatrix}$$

図7 (c) EG摂動導波系

図7(a), (b)に示したL摂動, P摂動では、結合系の正規モードの伝搬定数の値は導波路I, IIの間隔2tが増すにつれて、基本系の固有モードの伝搬定数$\beta_1=\beta_2=2.2434$に接近している。また図7(c)に示すEG摂動では、導波路IIのTMモードの伝搬定数のみが変化し、導波路IのTEモードの伝搬定数は変化しない。

4. 散乱行列による導波系の取り扱い

4.1 系全体を表現する散乱行列

導波路を伝搬する1つのモードの前進波および後進波の入力端に対してそれぞれ1つの開口を対応させて考えれば図7のような導波系は図8のように表わすことができ、この系に対する散乱行列によって系の導波特性は全て論ずることができる。

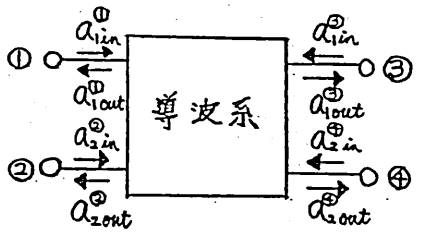


図8. 回路論的モデル

図8中の開口①は導波路Ⅰにおけるモードの前進波の入力端を、開口②は導波路Ⅱにおけるモードの前進波の入力端を、開口③は導波路Ⅰにおけるモードの後進波の入力端を、また開口④は導波路Ⅱにおけるモードの後進波の入力端をそれぞれ表わしている。また、TE, TMモードの複素振幅a_1, a_2には開口を示す番号および入力, 出力を表わす添字in, outを付けることにすれば、系全体を記述する散乱行列$[S]$は前章で求めた前進波および後進波についての散乱行列$[S]^F$, $[S]^B$を用いて次のように表わすことができる。

$$a_{out}=[S]\,a_{in}\ ,\quad [S]=\begin{bmatrix}0 & [S]^B\\ [S]^F & 0\end{bmatrix} \tag{44}$$

ここで、

$$a_{out}={}^t(a^{①}_{1out},\ a^{④}_{2out},\ a^{③}_{1out},\ a^{④}_{2out}) \tag{45}$$

$$a_{in} = {}^t(a^{①}_{1in}, a^{②}_{2in}, a^{③}_{1in}, a^{④}_{2in})$$

$$⓪ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、^{t}は転置行列を表わす。系は無損失であるから散乱行列$[S]$はユニタリ行列である。また、散乱行列が対称であれば、相反定理が成り立つので系は相反的であるといえる。このことから、系が非相反であるための条件は、式(44)より、

$$[S]^F \neq {}^t[S]^B \qquad (46)$$

となることである。そこで、式(46)をもとに各種の摂動を加えた場合の系の相反、非相反性を調べると次のようになる。

(i) L摂動：前進波における散乱行列と後進波におけるそれは全く同一であるから、LA摂動は式(27)より相反。LG摂動では式(28)より非相反。

(ii) P摂動：PA摂動は式(28), (42)より相反、PG摂動は式(27), (41)より非相反。

(iii) EG摂動：式(34), (43)より非相反である。

4.2 非相反モード変換器への応用

前節で述べた各摂動における導波系の性質から、LA摂動あるいはPA摂動が加わった導波系は相反的なモード変換作用を有し、LG摂動あるいはPG摂動が加わった導波系は非相反的なモード変換作用を有することが明らかになった。また、EG摂動が加わった導波系は非相反的な移相作用を呈す

ることがわかった。そこで、このような性質を有する導波系を応用した光IC素子の例として、非相反モード変換器を考える。具体的な構成例として、図9に示すように、LG摂動の導波系とPA摂動の導波系とを接続した場合を考える。

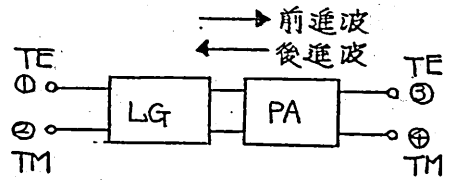


図9. 非相反モード変換器

この場合の導波特性は、各々の導波系の散乱行列を用いて比較的容易に知ることができる。いま、導波路ⅠのTEモードと導波路ⅡのTMモードが縮退している場合を考えれば、式(31)のΔは0となる。また式(30)中のcをLG摂動系の場合はC_{LG}、PA摂動系の場合はC_{PA}と書くことにし、LG摂動の導波系の長さを$C_{LG}z=\pi/4$, PA摂動の導波系の長さを$C_{PA}z=\pi/4$となるように選べば、前進波における散乱行列は式(28)より、

$$[S]^F=[S]^F_{PA}\times[S]^F_{LG}=e^{-j\pi\beta_0(1/C_{LG}+1/C_{PA})}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \qquad (47)$$

となる。また後進波における散乱行列は式(28), (42)より、

$$[S]^B=[S]^B_{LG}\times[S]^B_{PA}=e^{-j\pi\beta_0(1/C_{LG}+1/C_{PA})}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (48)$$

となり、この導波系は図10に示すようなサーキュレータの機能を有することがわかる。

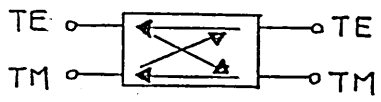
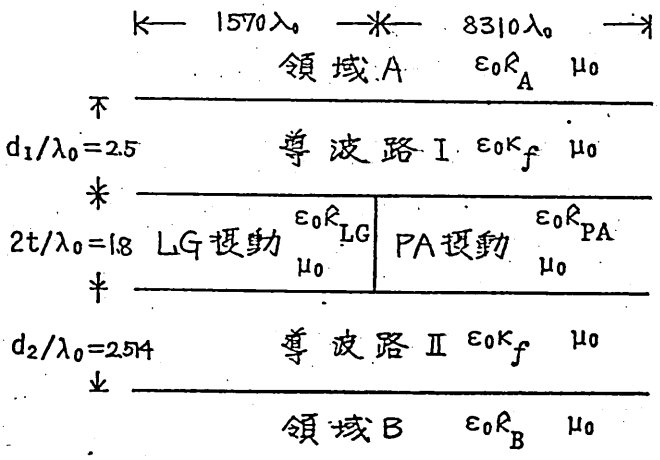


図10. サーキュレータ

図11にその具体的な数値設計例を示す。



$$\hat{K}_{LG}=\begin{bmatrix} 4.963 & j0.04 & 0 \\ -j0.04 & 4.963 & 0 \\ 0 & 0 & 4.963 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K}_{PA}=\begin{bmatrix} 4.763 & 0 & 0 \\ 0 & 4.763 & 0.06 \\ 0 & 0.06 & 4.763 \end{bmatrix}$$

$$K_f=5.05$$

$$\hat{K}_A=\begin{bmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K}_B=\begin{bmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

図11. 数値設計例

このサーキュレータは構造が極めて簡単で、入出力端にモード分離装置を必要としないという利点をもつ。また、導波路Ⅰ，Ⅱはそれぞれ入出力端にモードフィルタを必要としないTEモード，TMモードのアイソレータとして利用することもできる。

上に示した構成例以外にも、前章までに解析した各種の摂動を加えた導波系を用いて種々の機能を有する非相反モード変換器を構成することが可能である。

5. むすび

本文では、等方性の誘電体からなる2本の光導波路間にgyrotropicな媒質あるいは異方性媒質をはさんだ構造の光導波系の導波特性を理論的に詳細に解析した。その結果、LA摂動あるいはPA摂動を加えた導波系は相反的なモード変換

作用を有し、LG摂動あるいはEG摂動を加えた導波系は非相反的なモード変換作用を有することがわかった。またEG摂動を加えた導波系は非相反的な移相作用を呈することが明らかになった。また、これらの導波系の光IC素子への応用例として非相反モード変換器、特にサーキュレータの具体的な構成例を示した。このサーキュレータはその入出力端にモード分離装置を必要としないという利点をもち、さらに入出力端にモードフィルタを用いずにアイソレータとして利用することも可能である。

今後の問題としては、材料の開発と回路素子の製造技術の開発とが残されている。

謝辞

本研究を進めるにあたり、種々御討論をいただいた大阪大学工学部通信工学科松原正則助教授、博士課程森下克己氏に深謝する。また、適切な御助言をいただいた同学科の倉薗貞夫助教授、堤誠講師、近畿大学理工学部山口攻助手、ならびに熊谷研究室の諸兄に感謝する。

文献

(1)Y.Satomura,M.Matsuhara,and N.Kumagai,"Analysis of electromagnetic-wave modes in anisotropic slab waveguide",IEEE Trans.Microwave Theory Tech.,vol.MTT-22,p.86,February 1974.

(2)山本, 小山田, 牧本,"異方性薄膜導波系の固有モード解析とその応用", 信学論(C) 55-C p.552(昭47-10)

(3)S.Wang,M.Shah,and J.D.Crow,"Studies of use of gyrotropic and materials for mode conversion in thin-film optical-waveguide applications",J.Appl.Phys.,vol.43,p.1861,April 1972.

(4)J.Warner,"Faraday optical isolator/gyrator design in planar",IEEE Trans.Microwave Theory Tech.,vol.MTT-21,p.769 December 1973.

(5)J.Warner,"Nonreciprocal magnetooptic waveguides",IEEE Trans.Microwave Theory Tech.,vol.MTT-23,p.70,January 1975.

(6)F.Auracher,and H.H.Witte,"A new design for an integrated optical isolator",Optics Communications,vol.13,p.435,April 1975.

(7)S.Yamamoto,and T.makimoto,"Circuit theory for a class of anisotropic and gyrotropic thin-film optical waveguides and design of nonreciprocal devices for integrated optics",J.Appl.Phys.,vol.45,p.882, February 1974.

(8)山本，岡村，牧本，"複合形非相反薄膜光学回路素子の1区間設計"，信学論(C)，技術談話室，58-C p492 (昭和50-8)

(9)倉薗，岩崎，熊谷，"分布結合線路を用いた新しい変調方式"，信学論(C) 55-C p61 (昭和47-1)

(10)M.Matsuhara,and N.Kumagai,"Theory of coupled open transmission lines and its applications",IEEE Trans.Microwave Theory Tech.,vol. MTT-22,p.378,April 1974.

(11)R.F.Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Fields(McGraw-Hill, New York,1961),Chap.7 p.347.

(12)山口，熊谷，"多モード結合系における完全結合の条件とその応用"，信学論(B) 掲載予定

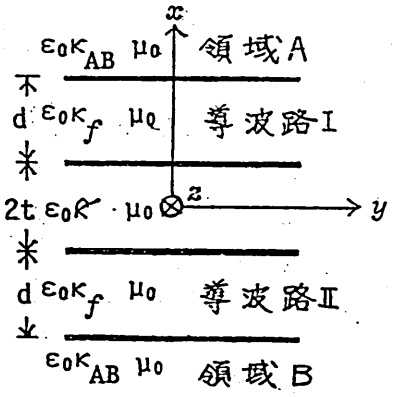
付 録

図1における領域A，Bの媒質を等方性媒質とし、その比誘電率をK_{AB}とする。摂動が加わらないときには図A1に示すように、この導波系はy軸に関して対称になるので、導波路Ⅰ，Ⅱの基本系は全く同一となり図A2のように表わせる。各領域における比誘電率の値を、たとえば、

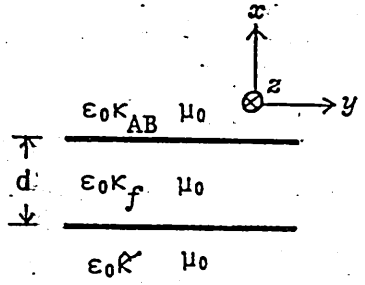
$K_f = 2.55$; $K_{AB} = 2.29$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 2.28 & 0 & 0 \\ 0 & 2.16 & 0 \\ 0 & 0 & 2.28 \end{bmatrix}$$

と選ぶと、この基本系はTEモード，TMモードをともに導波し、導波路Ⅰ，Ⅱの膜厚$d/\lambda_0 = 1.4$でTE最低次モードとTM最低次モードとは縮退する。図A1の導波系に式(10)に示すようなL摂動，P摂動およびEG摂動が加わることによって、同一導波路の基本系の固有モード間および導波路Ⅰ，Ⅱの基本系の固有モード間に結合が生ずるが、基本系のTE最低次モードとTM最低次モードが縮退している場合を考えれば、最低次モードと高次モードとの結合は無視できるから、結合系の正規モードの伝送電磁界は導波路Ⅰ，Ⅱ のTE最低次モードおよびTM最低次モードの計4個のモードの伝送電磁界の線形結合で表



図A1. 無摂動の導波系



図A2 導波路の基本系

わすことができ、3.1節で述べた解析法を用いることによって各摂動が加わった場合の結合系の正規モードの伝搬定数および固有ベクトルを求めることができる。この伝搬定数をβ_a, β_b, β_c, β_dとし、対応する固有ベクトルをu_1, u_2, u_3, u_4とすれば、散乱行列は次の式から得られる[12]。

$$[S]^F = T_F \exp[j\Lambda z] T_F^{*t} \tag{A1}$$

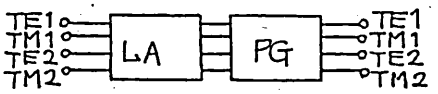
ここで、T_F, Λはそれぞれ、

$$T_F = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \beta_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_d \end{bmatrix} \tag{A2}$$

である。その結果、本文で述べた導波系と同様にLA摂動、PA摂動の導波系は相反的なモード変換作用を有し、LG摂動、PG摂動の導波系は非相反的なモード変換作用を有することがわかる。また、EG摂動の導波系は非相反的な移相作用を呈することがわかる。

これらの導波系の光IC素子への応用例として、本文の場合と同様、非相反モード変換器を考えると、この場合は本文の場合よりも取り扱いが複雑になる反面、さらに多様な機能を有する素子の構成を期待することができる。一例として図A3に示すようなLA摂動の導波系とPG摂動の導波系を接続した導波系を考える。図A3中のTE1, TM1は導波路Iの基本系固有モードを、TE2, TM2は導波路IIの基本系固



図A3. 非相反モード変換器

有モードを表わしている。この導波系において摂動として加わる導波路間の比誘電率テンソルの非対角項の具体的な数値を与えて、LA摂動の導波系およびPG摂動の導波系の長さ、およびそのときの変換効率を求めた結果を表1に示す。なお、表1中の変換効率は矢印方向のそれを表わし、isolationの程度を表わす逆方向への変換効率は高々1%程度である。

	LA摂動導波系		PG摂動導波系		2t/λ₀	変換機能	変換効率
	K_{xy}	系の長さ	K_{yx}	系の長さ			
1	0.02	1900λ₀	j0.02	9150λ₀	2.2	TM1 → TM1	81.0 %
						TE2 ← TM1	79.5 〃
2	0.02	1900λ₀	j0.02	9400λ₀	2.2	TE1 → TM2	79.5 〃
						TE2 ← TM1	79.9 〃
3	0.02	1900λ₀	j0.02	10075λ₀	2.2	TE1 → TM1	76.0 〃
						TM1 ← TE2	74.0 〃
4	0.02	4910λ₀	j0.04	11840λ₀	2.2	TE1 → TE1	83.6 〃
						TE2 ← TE2	83.5 〃

表1　数値計算結果

輻射科学研究会資料

変数摂動理論および光導波路への応用

橋本正弘

(三菱電機株式会社)

昭和50年9月26日
(於中央電気クラブ)

1. まえがき

1899年，2階微分方程式を漸近的に求める方法がHorn[1]によって発案され，後にJeffreys[2]が1次元のSchrödinger方程式に応用し，振動領域の解と減衰領域の解を接続する方法を示した．Wentzel[3]とBrillouin[4,5]は，独立に，やはり漸近展開法を与え，Kramers[6]によって綺麗な理論に仕上げられた．これが，現在広く用いられているWKB（JWKBもしくはWKBJ）方法である．Brillouinの流れは，現在もなお，物性の分野で，遷移確率の振動計算に見ることができる．また，Pauli[7]やArnaud[8]も指摘しているように，光伝播でモード分散を考えない限り光は量子論で片づけられる．準幾何光学の基礎方程式であるアイコナール方程式はまさしくBrillouinの漸近展開法の第1近似で導かれた結果に他ならない．またやはり準幾何光学の第2の基礎方程式である輸送方程式も第2近似で導かれる．このように，現在見られる光に対する漸近展開法はWKB法の焼直しと言っても過言ではなかろう．evanescent waveのray trackingに提案されたChoudharyとFelsen[9]の方法も，確かに目新らしいが，広義に解釈すれば，やはりWKB法に仕分けられる．

JeffreysやBrillouinの方法が1次元のSchrödinger方程式を対象にしているのに対し，McKelvey[10]は円筒座標系のSchrödinger方程式に適用で

る巧妙な手法を考案した．最近，Kurtz および Streifer[11] 等は，これを用いて光ファイバの伝搬モードを計算したが，やはりWKB法の枠を越えていない．WKB法にもとづく漸近展開法は任意の屈折率分布に応用でき，かつ軸外固有値分布の計算に，すなわち高次モードの解析に有効となる．この点が量子論における問題と導波路問題との違いである．

この欠点をさけるため，多くの人達は変分法を用いている．しかしながら，変分原理は，統計熱力学とならんで基本物理法則の一つであるため，その誤差評価は特定の場合[12-15]を除いて困難である．確かに，微小摂動には変分法は威力を発揮する．もちろん理論的には計算機を用いて強い摂動にも適用できるが，結果的には差分法や区分割法のような直接の計算法と変りがなくなる．仮りにこのようにしてまとめたとしても，図面の上で意味があるがNotationとしての意義が薄れてしまう可能性がある．

そこで本文では，強い摂動に適した摂動理論を示す．その基本概念はいたって簡単である．すなわち，非摂動系のモード関数の変数を一般関数に置き換え，これが摂動を受けるとする考えである．この考えは，現在あまり利用されていないようであるが古くはWentzelの論文に適用されているのがうかがえる．また，波動方程式を直接解かずに上で述べた"一般関数の従う方程式を解く"という方法は，最

近のソリトン解析の"逆散乱解法"[20]にもみられる.

一般に,"変数摂動"の概念は,それぞれのNotationのもつ物理的解釈ができないため——もともと物理的解釈はBrillouin流のHamiltonian, momentum等(phase, propagation constant)が陽に組み込まれた解析にしかできないかもしれないが——受け入れ難いかもしれない.しかし,これとは無関係に,製法上の問題として,[16]強く摂動を受けた導波路を用いる必要性が生じる.この意味で,上記概念の展開が光導波路の解析に役立つのではないかと思われる.

2. 非摂動系

話を簡単にするため,ここでは導波路の構造は2次元,かつ屈折率分布は次式の形で与えられる対称分布とする.

$$n(x)=n_0\sqrt{1-\chi_0(x)} \qquad (1)$$

もちろん$\chi_0(x)$はレンズ状媒質であることを特徴づける関数とする.また,$\chi_0(0)=0$を約束する.したがってn_0は軸(z軸)上の屈折率を示す.このような媒質では2つの"反射点"が存在し,これらによって光が閉込められている.(振子モデルでは振子の速度が零となる点が反射点である.)

これらの反射点の間で起る共振現象によって伝搬定数

$$\beta_{n0} = k\sqrt{1-b_{n0}} \qquad (2)$$

は不連続の値を取るようになる ($n=0,1,2,\cdots$). ただし k は z 軸上の波数である. このような物理的解釈をせずに, 単に数学的に, モード関数

$$\Xi_{n0}(x)\, e^{-j\beta_{n0}z} \qquad (3)$$

と1次元波動方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}\Xi_{n0}(x) + k^2[b_{n0} - \chi_0(x)]\Xi_{n0}(x) = 0 \qquad (4)$$

と, $x=\pm\infty$ で減衰する条件の下で解けば自動的に共振条件が満足される. 式(4)を厳密に解ける場合は数少いけれど, 解ける場合をここで非摂動系として取り扱う. したがって以下では $\chi_0(x)$ に対する $\Xi_{n0}(x)$ および b_{n0} は既にわかっているものとして話を進める.

3. 変数摂動

摂動系の屈折率分布 (図1参照) を以下のように仮定する.

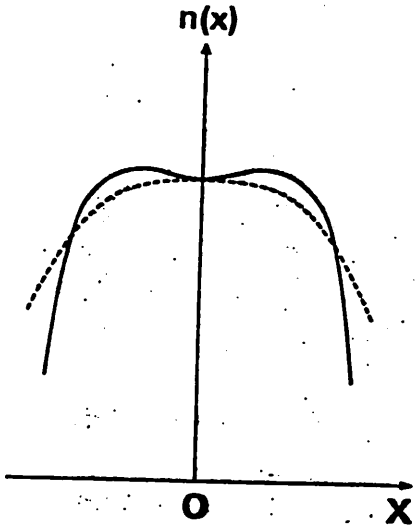


図 1 屈折率分布
------非摂動系, ——摂動系

$$n(x)=n_0\sqrt{1-\chi_1(x)} \tag{4}$$

$$\chi_1(x)=\chi_0(x)+\Delta\chi(x)$$

ただし $\Delta\chi(x)$ は $\Delta\chi(0)=0$ をみたす小さな偶関数とする.
$\Delta\chi(x)$ の増加によって"反射点"の位置が変り, 結局, 伝搬定数

$$\beta_{n_1}=k\sqrt{1-b_{n_1}} \tag{5}$$

は β_{n0} から変化する. すなわち

$$b_{m1} = b_{m0} + \Delta b_m \tag{6}$$

モード関数自体も $\Phi_{m0} e^{-j\beta_{m0}z}$ から変化する．今，それを次のように書き表わすことにする．

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{dy}{dx}}} \Phi_{m0}(y) e^{-j\beta_{m1}z} \tag{7}$$

ここで y は x の関数である．もし $\Delta\chi(x)$ が $\chi_0(x)$ に比較

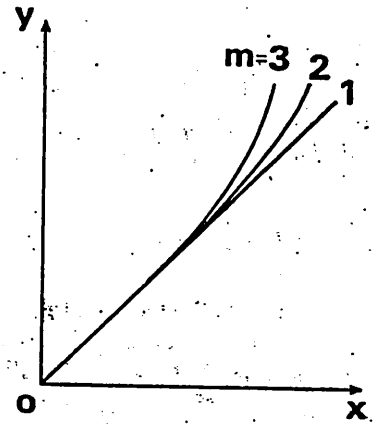


図2　変数摂動のスケッチ

して十分小さいなら，明らかに $y \simeq x$ である．次第に $\Delta\chi$ が大きくなると y は x からずれてくる．これが変数摂動である．

関数 χ が従う方程式をおめるため，まず $\partial^2/\partial x^2 = (1/\chi')^2 \partial^2/\partial y^2 - (\chi''/\chi'^3)\partial/\partial y$ を用いて波動方程式を y について表わす．$[\partial^2/\partial y^2 - (\chi''/\chi')\partial/\partial y - k^2\chi'^2(\chi_1 - b_{m1})]\phi = 0$. これに (7) の表現を代入すると

$$\Phi_{n0}''(y) + \left\{\frac{1}{2}\frac{\chi'''}{\chi'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\chi''}{\chi'}\right)^2 - k^2\chi'^2[\chi_1(x) - b_{n1}]\right\}\Phi_{n0}(y) = 0 \qquad (8)$$

を得る．ただし $'$ は y に関する微分を示す．また $\chi'''/2\chi' - 3(\chi''/\chi')^2/4$ は $-\sqrt{\chi'}(1/\sqrt{\chi'})''$ と書き直せる．そこで式 (8) を非摂動系の波動方程式 (4) と比較すれば直ちに次式を導びける．

$$k^2[b_{n0} - \chi_0(y)] = k^2\chi'^2[b_{n1} - \chi_1(x)] - \sqrt{\chi'}\left(\frac{1}{\sqrt{\chi'}}\right)'' \qquad (9)$$

あるいは

$$k^2[b_{n0} - \chi_0(y)]y'^2 = k^2[b_{n1} - \chi_1(x)] + \sqrt{y'}\left(\frac{1}{\sqrt{y'}}\right)'' \qquad (10)$$

式 (10) における $'$ は x に関する微分である．このように摂動系の波動方程式を解くことは式 (9) あるいは式 (10) の非線形方程式を解くことと等価である．式 (10) はさらに次式の積分形と同じである．

$$\int_0^y \sqrt{b_{n0} - \chi_0(y)}\,dy = \int_0^x \sqrt{b_{n1} - \chi_1(x) + \frac{1}{k^2}\sqrt{y'}\left(\frac{1}{\sqrt{y'}}\right)''}\,dx \qquad (11)$$

もし $\Delta\chi(x)$ が x の全領域でゆるやかに変化するとすれば，y は直線 $y=x$ の付近と単調増加するゆるやかな曲線であるとみなせる．このとき $\sqrt{y'}(1/\sqrt{y'})''/k^2$ は十分小さく，無視できる．この近似の下で式(11)を

$$\int_0^y \sqrt{b_{n0}-\chi_0(y)}\,dy = \int_0^x \sqrt{b_{n1}-\chi_1(x)}\,dx \tag{12}$$

と書ける．上式は，振動領域 $y<|y_T|$ $(x<|x_T|)$ および減衰領域 $y>|y_T|$ $(x>|x_T|)$ の双方で満足されねばならない（y_T, x_T は反射点，$b_{n0}=\chi_0(y_T)$，$b_{n1}=\chi_1(x_T)$ を示す）．減衰領域すべてで成立するには，上式の実数項（=定数）が相等しくなければならない．すなわち

$$\int_0^{y_T} \sqrt{b_{n0}-\chi_0(y)}\,dy = \int_0^{x_T} \sqrt{b_{n1}-\chi_1(x)}\,dx \tag{13}$$

左辺に，放物形屈折率分布の系を代入（$\chi_0=(gx)^2$, $b_{n0}=\frac{g}{k}(2n+1)$）すると

$$\frac{\pi}{4}(2n+1) = k\int_0^{x_T} \sqrt{b_{n1}-\chi_1(x)}\,dx \tag{14}$$

を得る．これは，伝搬定数を決定する Kramer[6] の公式に他ならない（WKB法）．しかし，本方法では，WKB法によるモード関数とは少し違った表現となる．ちなみに，上と同様，放物屈折率分布の系を非摂動系とすると，

モード関数は次のような形で与えられる.

$$\propto \sqrt{\frac{b_{n0}-\chi_0(y)}{b_{n1}-\chi_1(x)}}\, e^{-\frac{1}{2}kg y^2} H_n(\sqrt{2kg}\, y) e^{-j\beta_{n1} z} \qquad (15)$$

ここで H_n はエルミート多項式である. また, y と x の関係は式(12)で結びつけられている.

$$y = \sqrt{\frac{2n+1}{kg}}\, M^{-1}\left(\frac{k}{2n+1}\int_0^x \sqrt{b_{n1}-\chi_1(t)}\, dt\right) \qquad (16)$$

ただし $Y=M^{-1}(X)$ は $X \equiv M(Y) \equiv \int_0^Y \sqrt{1-t^2}\, dt$ の逆関数を意味している. 式(16)の y は振動領域および減衰領域のいづれでも実数である. (15)の表現で, $x=x_T$ のとき $y=y_T$ となるため $b_{n1}-\chi_1(x)=0$ の特異性は $b_{n0}-\chi_0(y)=0$ で相殺され, 結局, x の全領域で特異点のないことがわかる. WKB法で得られる漸近展開表現式(解)は $x=x_T$ で発散し, 振動領域に適用が限られる. したがって, この点で本方法はWKB法より優れている.

4. 第1次近似

式(10)の非線形方程式の厳密解はおめられない(これがおめられることは, 摂動系の波動方程式を厳密に解ける).

そこで $\Delta\chi(x)$ が十分滑らかな摂動系の比較的低次のモードの伝播に目を向けると，式(10)に半1近似を適用できるであろう．なんとなればこのとき次式で定義される摂動 Δy

$$y \equiv x + \Delta y \tag{17}$$

は，振動エネルギが集中している $x \simeq 0$ 付近で，十分小さいとみなせるからである．そこで Δ のついている全ての量について半1近似をほどこす．$\sqrt{y'}\,(1/\sqrt{y'})'' \simeq -\Delta y'''/2$，また $y'^2 \simeq 1 + 2\Delta y'$ である．これを式(10)に代入すると

$$\frac{1}{2k^2}\Delta y''' + 2[b_{n0} - \chi_0(x)]\Delta y' - \chi_0'(x)\Delta y + \Delta\chi(x) - \Delta b_n = 0 \tag{18}$$

を得る．$x=0$ で $\Delta y = 0$ となる上式の解は

$$\Delta y = \frac{1}{2\sqrt{b_{n0} - \chi_0(x)}} \int_0^x \frac{\Delta b_{n0} - \Delta\chi(t) - \Delta y'''/2k^2}{\sqrt{b_{n0} - \chi_0(t)}}\, dt \tag{19}$$

で与えられる．x が反射点 x_T を越えても Δy は実数でなければ物理的に意味がない．これを満す Δb_n の値は式(19)より容易に見い出される．

$$\Delta b_m = \frac{\int_0^{x_T} \frac{\Delta\chi(t) + \Delta y'''/2k^2}{\sqrt{b_{m0} - \chi_0(t)}}\, dt}{\int_0^{x_T} \frac{dt}{\sqrt{b_{m0} - \chi_0(t)}}} \qquad (20)$$

もし，$\Delta\chi(x)$が極めて(波長に比べて)滑らかであるとするなら先にも述べたように$\Delta y'''/2k^2$は無視できる．このようにして得た公式は 式(14)，式(16)の第1近似公式である．

しかしながら，これらの公式を幾つかの例に適用してみると基本モードに対して誤差が多いことがわかった．この理由は，界分布が最大となる$x \simeq 0$で$\Delta y'''/2k^2$が$\Delta\chi(x)$と同程度の役割を果し，したがって$\Delta y'''/2k^2$を無視できないからである．しかし，基本モードを除けば(導波路問題では重大欠陥である)比較的良い結果を与える．

5. 厳密なホーミュレーション

前節で与えた形式は簡単であるが，基本モードに対して欠点があった．これは，数十から数百モードを伝送するマルチモード伝送なら問題はさしてないであろうが，シングルモードあるいは準シングルモード伝送をもくろむ場合，不都合である．そこで本節では式(18)にロンスキアン法を適用して厳密解を求め，ΔyおよびΔb_mの，1次近似の範囲で，厳密な公式

を導びく.

まず, 式(18)の斉次方程式の3つの独立解を $f_{n1}(x), f_{n2}(x), f_{n3}(x)$ とする. これらを試行錯誤(数学の分野では, これらを見い出す適切な方法があるのかもしれない)で求めた結果を示すと

$$
\begin{aligned}
f_{n1}(x) &= \Phi_{n0}^{2}(x) \\
f_{n2}(x) &= f_{n1}(x)\left(\int_0^x \frac{dt}{f_{n1}(t)}\right) \\
f_{n3}(x) &= f_{n1}(x)\left(\int_0^x \frac{dt}{f_{n1}(t)}\right)^2
\end{aligned}
\tag{21}
$$

である. $f_{n1}(x)$ および $f_{n3}(x)$ が偶関数, $f_{n2}(x)$ が奇関数で, いづれも既知関数 $\Phi_{n0}(x)$ で関係づけられている. ロンスキアン解析(象知の事としてここでは触れない)に従って式(18)の解を次のように書く.

$$
\begin{aligned}
\Delta y = {} & A_1 f_{n1}(x) + A_2 f_{n2}(x) + A_3 f_{n3}(x) \\
& + \int_0^x G_n(x,t)\left[\Delta b_n - \Delta X(t)\right] dt
\end{aligned}
\tag{22}
$$

ここで A_1, A_2, A_3 は任意定数, G_n は次式で定義される"片側グリーン関数"である*.

* "One-sided Green's function"の訳. この命名は Miller[9] による. 彼の論文に G_n についてわかりやすく説明してある. $G_n(x,t)$ は $G_n(x,x)=0$, $\frac{\partial}{\partial x}G_n(x,t)\Big|_{x=t}=0$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_n(x,t)=2k^2$ をみたす式(18)の斉次方程式の解である.

$$G_m(x,t)=2k^2\frac{\begin{vmatrix} f_{n1}(x), & f_{n2}(x), & f_{n3}(x) \\ f_{n1}(t), & f_{n2}(t), & f_{n3}(t) \\ f_{n1}'(t), & f_{n2}'(t), & f_{n3}'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{n1}(t), & f_{n2}(t), & f_{n3}(t) \\ f_{n1}'(t), & f_{n2}'(t), & f_{n3}'(t) \\ f_{n1}''(t), & f_{n2}''(t), & f_{n3}''(t) \end{vmatrix}}$$

$$=k^2 f_{n1}(x)f_{n1}(t)\left(\int_t^x \frac{ds}{f_{n1}(s)}\right)^2 \qquad (23)$$

物理的に言って y すなわち Δy が奇関数でなければならない. したがって $A_1=A_3=0$ となる. この下で $\Delta y(0)=0$ となる. ここで依然として, A_2 の選択は自由である. これは, ちょうど, 振動方程式の解であるモード関数は任意の定数係数を掛けてもよいことに対応する. したがって A_2 もここでは"尺度因子"と呼ぶことにする. ただし, '尺度因子'は第1近似の範囲で成立することであって, 2次誤差に影響する. この点で, 大きな値を取ることができないであろう. 今, 式(22) ($A_1=A_3=0$) で $x\simeq 0$ とすると $\Delta y \simeq \pm A_2 x$ (付録の結果を引用すれば明らかである) となり, したがって $y\simeq(1\pm A_2)x$ となる. これより直ちに, 摂動系のモード関数は非摂動系のに対して定数倍ずれているため, A_2 の2次近似誤差を含んでいることがわかる. この誤差は x が大きくなるに従いやはり大きくなるであろう. これは特に高次モードに対して不都合である.

高次モードに対して満足すべき結果をもたらすようなA_2の設定として$A_2=0$を選ぶ.

$$\Delta y = \int_0^x G_m(x,t)[\Delta b_m - \Delta\chi(t)]dt \qquad (24)$$

上式で, Δb_mがある特定の値をとらない限り, Δyは$x\to\infty$で指数的に発散する. これは, 界が閉込められていない事を示す. したがって固有モードとなるにはΔb_mが, この特定の値でなければならない. この値は次のようにして求められる.
まず式(18)に$f_{m1}(x)$を掛け, 次に$[-\infty,\infty]$で積分する. このときf_{m1}が斉次方程式の解であることを考慮すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\Delta b_m - \Delta\chi(x)]f_{m1}(x)dx = \frac{1}{2k^2}\Big[f_{m1}\Delta y'' + f_{m1}''\Delta y - f_{m1}'\Delta y' + 4k^2(b_{m0}-\chi_0)f_{m1}\Delta y\Big]_{-\infty}^{\infty} = 0 \qquad (25)$$

したがって

$$\Delta b_m = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\chi(x)f_{m1}(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{m1}(x)dx} \qquad (26)$$

式(26)はまさしく変分原理にもとづく結果と一致している. この事は驚くに足る結果である. 式(20)と比較して, "摂動法は第1次近似の下で変分法の結果を与え, またyが滑らかとして

$\Delta\eta'''/2k^2$を無視するとWKB法の結果を与える"と結論される. 式(20)と式(26)を比べると面白い. 式(20)における$1/\sqrt{b_{n0}-\chi_0(t)}$は反射点で無限大となるいわば放物的な曲線であるのに対し, 式(24)の$f_{n1}(t)$はtが大きくなるにつれて振幅の小さくなる波状の曲線である. このような性質の全く異るものが一対一に対応している. しかも, その結果はほぼ同一値を示すのである. このようにWKB法は反射点付近の界の様子から全体の情報をつかみ出そうとする方法であり, 反対に, 変分法は原点付近の界の様子から全体の情報をつかむ方法であると言えよう. したがって高次モードの伝搬解析にはWKB法の方が有効となる.

変分法を用いると1次近似の伝搬定数が簡単に求まる反面, 界分布は2次近似の変分表示式を用いなければならない. 本方法では$\Delta\eta$を求めるだけで1次近似の界分布を知ることができる. 完璧, 式(24)から求められるが, 積分操作の上で次式の方が便利である. もちろん式(24)と等価である(付録).

$$\Delta\eta = 2k^2\int_0^x dt\,\frac{f_{n1}(x)}{f_{n1}(t)}\left\{\int_0^t [\Delta b_n - \Delta\chi(s)]\,f_{n1}(s)\,ds\right\}\left\{\int_t^x \frac{ds}{f_{n1}(s)}\right\} \tag{27}$$

$f_{n1}(x)$はn個の零点をもつ. したがって上式は, 一見, 特異積分のようにみえるが, 形式的に積分を実行すれば結果として, 何ら特異点のまたない解を得る. これは物理的にもそうならねばならない.

6. Δb_n の第2次近似公式

伝搬特性を知る上で，伝搬定数の精度は特に気をつけなければならない．誤差は，伝搬距離とともに増大する．特に位相誤差は相対誤差で論じても意味がないため伝搬定数を十分な精度でおめても，適用可能な伝搬距離はつねに限られてしまう．したがって，強い摂動系では，すくとも第2次近似の伝搬定数を知る必要がある．まえがきでも述べたように，変分法でこれをおめることのできる場合は限られている．しかし本方法では式(10)を iterative に近似を上げていくことによって，何次の近似公式も導びける．ここでは特に第2次近似公式を導出する．

まず，$\sqrt{y'}(1/\sqrt{y'})'' \simeq -\Delta y'''/2 + \Delta y'\Delta y'''/2 + 3(\Delta y'')^2/4$ および $y'^2 = 1 + 2\Delta y' + \Delta y'^2$ を式(10)に代入し，第2次近似項まで取ると

$$\frac{1}{2k^2}\Delta y''' + 2[b_{n0} - \chi_0(x)]\Delta y' - \chi_0'(x)\Delta y' + \Delta\chi(x) - \Delta b_n$$

$$= \frac{1}{2}\chi_0''(x)(\Delta y)^2 + 2\chi_0'(x)\Delta y\Delta y' - [b_{n0} - \chi_0(x)](\Delta y')^2 + \frac{1}{2k^2}\left(\Delta y'\Delta y''' + \frac{3}{2}\Delta y''^2\right) \qquad (28)$$

を得る．右辺の第2次項の Δy には先でおめた第1近似の解を代入できる．そこで式(18)を用いて，この $\Delta y'''$ を消去すると上式の右辺は

$$\frac{3}{4k^2}(\Delta y'')^2 + \frac{1}{2}\chi_0''(x)(\Delta y)^2 - 3[b_{n0} - \chi_0(x)](\Delta y')^2 + 3\chi_0'(x)\Delta y\Delta y' + [\Delta b_n - \Delta\chi(x)]\Delta y' \qquad (29)$$

と書き改められる．この右辺の項は，ちょうど等価的に$\Delta\chi(x)$のみかけ上の増加分として見なすことができる．したがってΔb_nの第1近似公式(26)に，この等価的な$\Delta\chi$を代入すると直ちに第2近似公式を導かれる．

$$\Delta b_m = \Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\chi(x) f_{m1}(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{3}{4k^2}(\Delta y'')^2 + \frac{1}{2}\chi_0''(x)(\Delta y)^2 - 3(b_{m0}-\chi_0)(\Delta y')^2 + 3\chi_0'(x)\Delta y \Delta y' + (\Delta b_n - \Delta\chi)\Delta y'^2 \Big] f_{m1}(x)dx \Big\} \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} f_{m1}(x)dx \qquad (30)$$

右辺のΔb_mは第1近似公式で定まる値である．

7. 具体例

例として，4次収差項のある放物屈折率分布を考える(図3参照)．

$$\chi_0(x) = (gx)^2$$
$$\Delta\chi(x) = \alpha(gx)^4$$

ただし，gは媒質定数，αは4次収差係数である．$\alpha=0$が非摂動系であるとする．このとき$\bar{x}_{n0}$, b_{n0}は次式で与えられる．

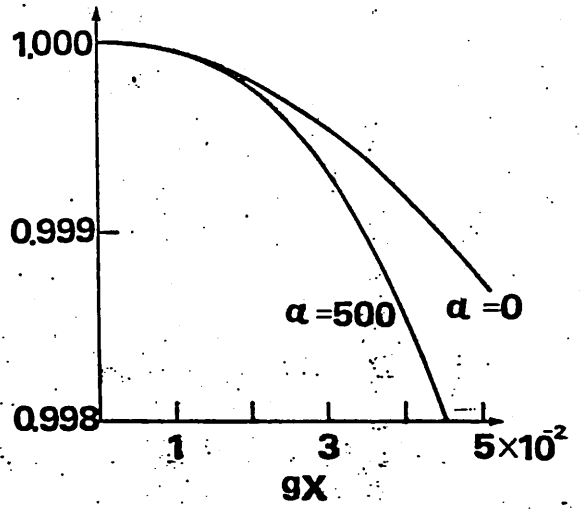


図3　4次収差のある放物反射
強分布(規格化されている)

$$\Phi_{m0}(x) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_m(\sqrt{2}\xi)$$
$$b_{m0} = \left(\frac{g}{k}\right)(2m+1) \qquad (31)$$

ここで $H_m(X)$ はエルミート多項式，ξ は規格化座標 $(= x/S_0$；S_0 = 固有スポットサイズ $= 1/\sqrt{kg})$ である．したがって

$$f_{01} = e^{-\xi^2}$$
$$f_{11} = 2\xi^2 e^{-\xi^2}$$
$$f_{21} = (2\xi^2-1)^2 e^{-\xi^2}$$
$$f_{31} = 2\xi^2(2\xi^2-3)^2 e^{-\xi^2} \qquad (32)$$
$$\vdots$$

Δb_nの第1次近似値は公式(26)より

$$\Delta b_n = \left(\frac{g}{k}\right)^2 \alpha \frac{3}{4}(2n^2+2n+1) \tag{33}$$

となる（これは差分法に基づく結果と一致）.

さて，次にΔyの代りに適当に規格化した$h_n(\xi)$を定義する.

$$h_n(\xi) \equiv \left(\frac{k}{g\alpha}\right)\sqrt{kg}\,\Delta y$$

$$= 2\int_0^{\xi} d\xi\, e^{-\xi^2+\xi^2}\left[\frac{H_n(\sqrt{2}\xi)}{H_n(\sqrt{2}\xi)}\right]^2 \cdot \left\{\int_0^{\xi}\left[\frac{3}{4}(2\eta^2+2n+1)\right.\right.$$

$$\left.\left. -\eta^4\right] H_n^2(\sqrt{2}\eta)e^{-\eta^2}d\eta\right\} \cdot \left\{\int_{\xi}^{\xi} \frac{e^{\eta^2}}{H_n^2(\sqrt{2}\eta)}d\eta\right\} \tag{34}$$

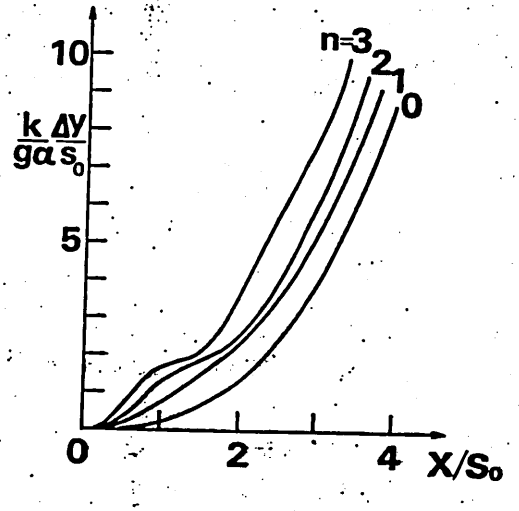


図4　$h_n(\xi)$の曲線

式(34)を計算するのは 随分な面倒である. しかし, 単なる部分積分の繰返しであるから, 労力だけの問題である. その結果は表1に示すように簡単な形で与えられる.

$h_0(\xi)$	$\frac{1}{8}\xi^3+\frac{3}{16}\xi-\frac{3}{16}F(\xi)$
$h_1(\xi)$	$\frac{1}{8}\xi^3+\frac{9}{8}\xi^2F(\xi)$
$h_2(\xi)$	$\frac{17}{16}\xi^3+\frac{15}{32}\xi-\frac{15}{32}(2\xi^2-1)^2F(\xi)$
$h_3(\xi)$	$-\frac{7}{8}\xi^3+\frac{37}{16}\xi^3+\frac{7}{16}\xi^2(2\xi^2-3)^2F(\xi)$
$h_4(\xi)$	$\frac{9}{16}\xi^7-\frac{99}{32}\xi^5+\frac{305}{64}\xi^3+\frac{81}{128}\xi-\frac{9}{128}(4\xi^4-12\xi^2+3)^2F(\xi)$
$h_5(\xi)$	$-\frac{11}{40}\xi^9+\frac{209}{80}\xi^7-\frac{1243}{160}\xi^5+\frac{481}{64}\xi^3+\frac{11}{320}\xi^2(4\xi^4-20\xi^2+15)^2F(\xi)$

$$F(\xi)=e^{-\xi^2}\int_0^\xi e^{t^2}dt=\xi-\frac{2}{3}\xi^3+\frac{2^2}{5\cdot3}\xi^5-\frac{2^3}{7\cdot5\cdot3}\xi^7\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{2\xi}+\frac{1}{4\xi^3}+\frac{3}{8\xi^5}+\frac{15}{16\xi^7}\cdots\cdots$$

Table 1. Function $h_n(\xi)$.

式(20)において $\Delta y'''/2k^2$ を省略し, かつ Δb_n に式(19)から定められた値を代入すれば" $h_n(\xi)=\xi^3/8+3(2n+1)\xi/16$ を得る. 表1の $h_n(\xi)$ (式(34)より導かれたもの)は $\xi\to\infty$ でこの値に漸近する. 他方, この漸近解はまた式(18)の一つの解であることを容易に確められる. この事は非常に利用価値のある結果である. すなわち, 式(22)で"尺度因子" A_2 を適当に選ぶとこの漸近解を得ることができる. したがって式(29)の右辺の2次項にこの漸近解を代入して η, その誤差は3次以上の項にしか現われない. そこで式(30)から導かれる Δb_n の2次近似公式

$$\Delta b_n=\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\alpha\frac{3}{4}(2n^2+2n+1)-\left(\frac{\alpha}{k}\right)^3\alpha^2\frac{1}{n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{3}{4}(h_n'')^2\right.$$

$$-3(2n+1-\xi^2)h_n'^2+6\xi h_n h_n'-(\xi^4-\frac{6n^2+6n+3}{4})h_n^2]f_{n1}d\xi \qquad (35)$$

の h_n の代りに $\xi^3/8+3(2n+1)\xi/16$ を代入しても何らさしつかえがない．結果は

$$\Delta b_n=(\frac{g}{k})^2\alpha\frac{3}{4}(2n^2+2n+1)-(\frac{g}{k})^3\alpha^2\left[\frac{17}{64}(2n+1)^3+\frac{67}{64}(2n+1)\right] \qquad (36)$$

である．第2次近似値は第1次近似値より第2項の分だけ小さい．これは，"式(26)の形で与えられる変分表示式は upper bound を与えるため，真値はそれより小さい"，ことから明らかである．
ちなみに，式(14)より WKB法による第2次近似公式を与えると

$$\Delta b_n(WKB)=(\frac{g}{k})^2\alpha\frac{3}{4}(2n^2+2n+\frac{1}{2})-(\frac{g}{k})^3\alpha^2\frac{17}{64}(2n+1)^3 \qquad (37)$$

となる．このように高次モード（nが大きい）ほど WKB法は正しくなることがわかる．

表2.に種々な方法で導かれる $K_n\equiv(k/g)^2\Delta b_n/\alpha$ の値が比較されている．また図5に本方法で求めた摂動系のモード関数を，$\alpha=500$, $g/k=2\times10^{-4}$ の場合について示す（実線）．点線は非摂動系（$\alpha=0$）の分布である．一点鎖線は，あらかじめ波動方程式の Δb_n に近似値を代入してべき級数で解を求めた結果である．特に，基本モードに対して，この近似値として変分法で求まる第1近似公式の Δb_n を用い，その他は

WKB法による値(式(14))を用いた.

n	0	1	2	3
2nd order (WKB)	0.3484	2.658	6.055	9.264
Exact (WKB)	0.3517	2.854	7.306	13.372
1st order (V.M)	0.7500	3.750	9.750	18.750
2nd order (Eq.(36))	0.6188	2.719	5.906	8.908

Table 2. Values of K_n for $\varepsilon d/k = 0.1$.

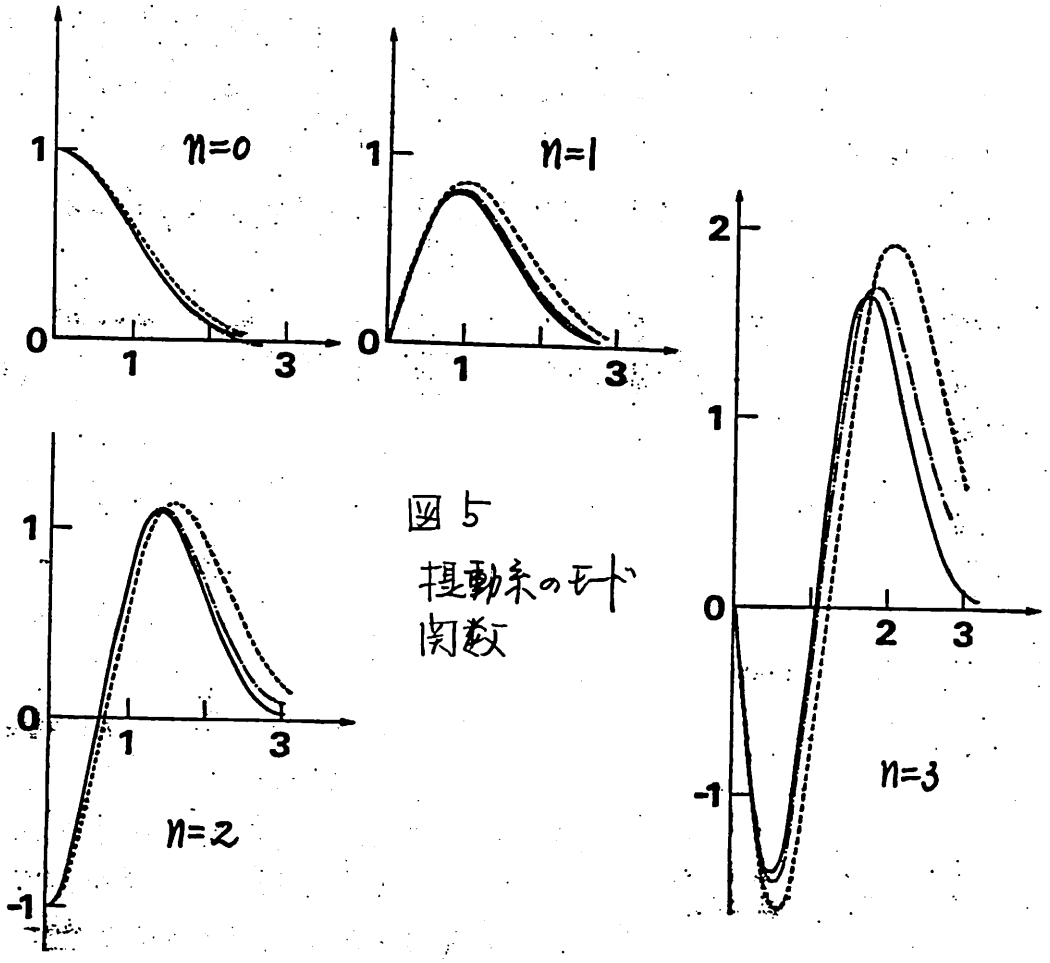


図5
摂動系の固有関数

付録　式(27)と式(24)が等価であることの証明

式(24)より；

$$\Delta y(0)=0$$

$$\Delta y'(0)=G_n(0,0)[\Delta b_n-\Delta\chi(0)]+\int_0^0 \frac{\partial}{\partial x}G_n(x,t)[\Delta b_n-\Delta\chi(t)]dt$$

$$=0$$

$\Delta y(x)=$ 式(18)の奇関数の解

式(27)より；

$$\Delta y(0)=0$$

$$\Delta y'(0)=2k^2\int_0^x \frac{dt}{f_{n1}(t)}\left\{\int_0^t[\Delta b_n-\Delta\chi(s)]f_{n1}(s)ds\right\}\Big|_{x\to 0}$$

$$+2k^2\int_0^x dt\frac{f_{n1}'(x)}{f_{n1}(t)}\left\{\int_0^t[\Delta b_n-\Delta\chi(s)]f_{n1}(s)ds\right\}\cdot\left\{\int_0^x\frac{ds}{f_{n1}(s)}\right\}\Big|_{x\to 0}$$

$$=0$$

$\Delta y(x)=$ 式(18)の奇関数の解

上で示した3つの条件をみたす式(18)の解は唯一である(§5参照)から，式(24)と式(27)は等価である．証明終り．

參考文献

1. J. Horn, Mathematische Annalen, vol. 52, p. 340, 1899
2. H. Jeffreys, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, vol. 23, p. 428 April 1924.
3. G. Wentzel, Z. Physik, vol. 38, p. 518, 1926.
4. M. L. Brillouin, Compt. Rend. L'Académie des Sciences, vol. 183, p. 24, Juillet 1926.
5. ———, J. Physique, vol. 7, Ser. 6, p. 353, Décembre 1926.
6. H. A. Kramers, Z. Physik, vol. 39, p. 828, 1926.
7. W. Pauli, Optics and Theory of Electrons. MIT press 1973.
8. J. A. Arnaud, J. Opt. Soc. Amer., vol. 65, p. 174, Feb. 1975.
9. S. Chouhary, L. B. Felsen, IEEE Trans. AP, vol. AP-21, p. 827, Nov. 1973.
10. R. McKelvey, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 91, p. 410, 1959.
11. C. N. Kurtz, W. Streifer, IEEE Trans. MTT, vol. MTT-17, p. 250, May 1969.
12. T. Kato, Prog. Theor. Physics, vol. 6, p. 295, 1951.
13. ———, Prog. Theor. Physics, vol. 6, p. 394, 1951.
14. J. Schwinger, D. S. Saxon, Discontinuities in Waveguides. Gordon-Breach Science, 1968.
15. R. E. Collin, Field Theory of Guided Waves. McGraw-Hill, 1960.
16. K. Koizumi, private communication.
17. M. O. Vassel, Opto-electronics, vol. 6, p. 271, 1974.
18. K. Furuya, Y. Suematsu, IECEJ, vol. 57-C, p. 289, Sept. 1974.
19. K. S. Miller, J. Appl. phys., vol. 22, p. 1059, August 1951.
20. C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, Phys. Rev. Lett., vol. 19, p. 1095, Nov. 1967.

輻射科学研究会資料

多モード分布結合系の理論とその応用

山口 孜
（近畿大学 理工学部）
熊谷信昭
（大阪大学 工学部）

昭和50年9月26日

1. まえがき

モード結合理論の応用分野は，主として，伝送方向に不整のある多重姿態伝送路の姿態変換を扱かうような，伝送路の特性解析に関する応用[1]と，異なった姿態あるいは伝送路間の結合を積極的に利用し特殊な機能をもたせようとする，回路素子の設計に関する応用[2]の2つに大別される．特に後者の応用に関しては，実際に取り扱かおうとする伝送路の構造や媒質が与えられて，モード間の結合係数を求める，いわば解析的な議論と同時に，特定の機能が実現されるための条件を求める，いわば合成論的な議論が必要となる．モード結合系の応用を合成論的に論ずるには，系の結合行列，すなわち結合方程式の係数行列，の要素間の関係を調べればよい．

このような，回路素子としての機能と系の結合行列との関係については，結合するモードの個数がただ2つの場合については結合方程式の解から詳しく調べられてきたが，結合するモードの個数が3個以上の多モード結合系については，いままで十分な検討が行なわれていなかったように思われる．最近にいたり，光ファイバの開発にともなって多モード（または多線路）間の結合に関する問題を取り扱った論文が報告されるようになったが[3][4]，それらはいずれも線路の配列や結合モード（または結合線路）の数に制限があるような特別の場合について解析的に考察しているに

すぎない。

著者らは，先に，伝送方向に一様で，かつ結合するモードの個数が一般にn個あるような多モード結合系について，系の特性が行列表示を用いて簡単に記述できることを示し，特定のモード間に電力の完全な移行がおこる，いわゆる完全結合の条件を示した。[5] 本文では，この取り扱いをさらに進め，一様な分布結合系について，入出力間の関係をあらわす伝達行列の一般的性質を明らかにし，系の回路的な特性を与える伝達行列から，結合系の構造を定める結合行列を決定する手法を示す。また，そのような手法を用いて電力等分配器の特性を考察し，具体的な設計式や数値計算例等を示す。

ここでいう電力等分配器とは，任意のモードの入力電力が，出力端で，結合に関与するn個のすべてのモードに等分されるような結合器のことをさす。このような結合器は，可変移相器と組み合わせて，希望するモード間に完全結合を起こさせるような選択的なモード変換器を構成することもでき，回路素子としても興味ぶかい。

本文で述べる手法によれば，多モード結合系の回路素子としての特性が伝達行列によって直接表現できるため，電力等分配器に限らず，他の多くの結合回路素子の設計にも広く利用できるものと思われる。

2. 結合行列と伝達行列

多モード分布結合系の結合行列と伝達行列についてはすでに文献(5)に詳しく述べられているので，本節では以下の議論に必要な結果のみを簡単にまとめておくことにする．

n個のモードが同一の伝送軸（z軸）に沿い，伝送方向に一様に分布結合している，無損失で可逆な結合系について考える．この系の結合方程式は，行列表示を用いて

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a} = j\mathbb{C}\mathbf{a} \qquad (1)$$

ただし

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} \beta_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & \beta_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

とあらわされる．ここでa_i $(i=1,2,\cdots,n)$はモード(i)の複素振幅であり，その複素共役との積$a_i a_i^*$が，モード(i)の伝送電力を与えるように規格化されている．また，行列$\mathbb{C}$は結合行列と呼ばれ，結合系の構造に密接に関係している．結合行列の対角要素β_i $(i=1,2,\cdots,n)$はモード(i)の位相定数を与え，非対角要素c_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$はモード(i)・(j)間の結合係数を与える．ここで扱う系については結合行列$\mathbb{C}$は実対称行列となる．

一方，伝達行列$\mathbb{A}$は，結合系の入，出力端における入力モードおよび出力モードの振幅をあらわすベクトルをそれぞれ$\mathbf{a}^{(i)}$，および$\mathbf{a}^{(o)}$とするとき

$$\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{A}\,\mathbf{a}^{(i)} \tag{2}$$

で定義され，系の特性はすべてこの伝達行列 $\mathbf{A}$ に含まれる．伝達行列は，式(1)の結合方程式の解から，

$$\mathbf{A} = \exp[j\mathbf{C}\ell] = \mathbf{T}\exp[j\boldsymbol{\Lambda}\ell]\,\mathbf{T}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

ただし

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \exp[j\boldsymbol{\Lambda}\ell] = \begin{pmatrix} e^{j\lambda_1\ell} & & 0 \\ & e^{j\lambda_2\ell} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{j\lambda_n\ell} \end{pmatrix}$$

とあらわすことができる．ここで行列 $\mathbf{T}$，$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ は，それぞれ直交行列とその転置行列* であり，

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{T}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

なる関係を満たしている．また ℓ は，系の結合部分の長さである．

式(3)の転置行列 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ および複素共役行列 $\mathbf{A}^{*}$ は，それぞれ

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \tag{5}$$

$$\mathbf{A}^{*} = \exp[-j\mathbf{C}\ell] = \mathbf{A}^{-1} \tag{6}$$

---

* ある行列の行と列とを入れ替えてできる行列をその行列の転置行列という．

となり，行列 $\mathbb{A}$ は対称なユニタリ行列であることがわかる。

3．結合行列の計算法

伝達行列 $\mathbb{A}$ を用いて結合行列 $\mathbb{C}$ を求めるには，式(3)の両辺の対数をとって得られる式

$$\mathbb{C}\ell = -j \ln \mathbb{A} \qquad (7)$$

を用いればよい．上式によれば結合行列 $\mathbb{C}$ の要素に系の結合部分の長さ ℓ をかけた値が求められる。

式(7)を実際に計算するには，次の2つの方法が考えられる．1つは，伝達行列 $\mathbb{A}$ を

$$\mathbb{M} = \mathbb{T}^{T} \mathbb{A}\, \mathbb{T} \qquad (8)$$

なる形に対角化するような対角行列 $\mathbb{M}$，および直交行列 $\mathbb{T}$ を求め，式(7)を

$$\mathbb{C}\ell = -j\, \mathbb{T} \ln \mathbb{M}\, \mathbb{T}^{T} \qquad (9)$$

ただし

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}, \quad \ln \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \ln\mu_1 & & 0 \\ & \ln\mu_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \ln\mu_n \end{pmatrix}$$

として求める方法である．行列 $\mathbb{A}$ の対角化は，$\mathbb{A}$ の固有値問題を解くことによってできる．[*1] この方法は，結合に関

与するモードの個数が多く，数値計算によって解を得ようとする場合に適している．

もう一つの方法は，行列 A の固有値 $\mu_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ を計算し，行列関数の計算公式である Lagrange-Sylvester の補間公式[6]から，式(7)を

$$\mathbb{C}\ell = -j\sum_{k=1}^{m} \frac{(A-\mu_1 E)\cdots(A-\mu_{k-1}E)(A-\mu_{k+1}E)}{(\mu_k-\mu_1)\cdots(\mu_k-\mu_{k-1})(\mu_k-\mu_{k+1})}$$

$$\cdots\cdots\frac{\cdots\cdots(A-\mu_m E)}{\cdots\cdots(\mu_k-\mu_m)}\ln\mu_k \qquad (10)$$

ただし　E；単位行列

として $\mathbb{C}\ell$ を求める方法である．[*2] この方法は，結合に関与するモードの個数が比較的少なく，A の固有値を解析的に求め得るような場合に，結合行列の各要素，すなわち位相定数および結合係数，に関する設計式を導くのに適している．

伝達行列 A はユニタリ行列であるから，その固有値 $\mu_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ は絶対値が1の複素数となる．[7] 式(9)，あるいは式(10)を計算する場合，固有値の対数 $\ln\mu_i$ が必要となるが，複素数の対数には常に 2π の整数倍の不定性がある．そこで，$\ln\mu_i$ を一意的に定めるため，$\ln\mu_i$ を次のよう

*1　対角行列 M の各要素は A の固有値に，直交行列 T の各列ベクトルは A の固有ベクトルに対応する．[7]

*2　式(10)は，固有値 $\mu_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ に縮退のない場合の式であり，縮退のある場合は別の式を用いなければならない．[6]

に表わすことにする。

$$\ln \mu_i = j(\lambda_i l + 2n_i\pi) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (11)$$

ただし $0 < \lambda_i l \leq 2\pi$ であり，また n_i $(i=1,2,\cdots,n)$ は零，あるいは正の整数である。式(11)で $\lambda_i l$ とおいたのは，式(3)と式(9)の対応関係を明確にするためである。

4. 電力等分配器とその伝達行列

本節以下では，前節までの議論の適用例として，電力等分配器をとりあげ，その伝達行列と結合行列との関係を求め，具体的な数値計算例等を示すことにする。

図1.に示すように，入力端で任意のモード(i)にのみ加えられた入力電力Pを，出力端で，n個のすべてのモードに等しく分配するような結合系を考え，このような結合系を以下，電力等分配器とよぶことにする。このような結合系においては，電力を加える入力モードを変えても，出力端の各モード出力の振幅は変化せず，ただ，それらの間の位相関係のみが異なってくる。

このような特性を用いれば，例えば，図2(a)に示すように，各モードに等振幅の入力を加え，各入力の位相を可変移相

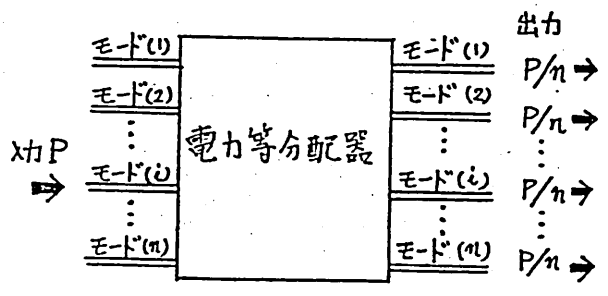


図1. 電力等分配器

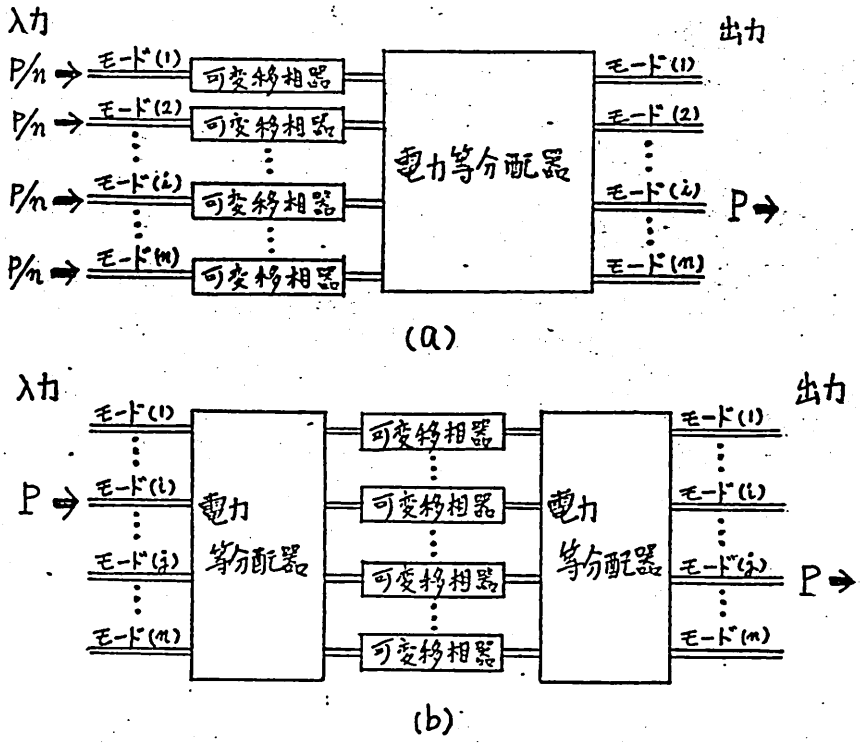


図2. 電力等分配器の応用例

器によって調整することにより，希望するモードにのみ出力を得ることのできるような，一種の偏向器を構成することができる．あるいはまた，図2(b)のように，2つの電力等分配器を可変移相器を介して接続し，移相量を変化させることによって希望する入出力モード間にのみ完全結合を起させるような，一種の可変方向性結合器を構成することもできる．

そこでまず，電力等分配器の伝達行列の一般的な特徴を調べる．いま，入力端における入力モードの振幅をあらわすベクトル $a^{(i)}$ と電力等分配器の伝達行列 A の各要素を，それぞれ

$$a^{(i)} = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \vdots \\ a_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とし，モード(i)にのみ単位振幅の入力を加えた場合，すなわち

$$a_i^{(i)} = 1 \ , \ a_j^{(i)} = 0 \quad (j \neq i \ , \ j = 1,2,\cdots,n)$$

なる場合を考える．式(2)に上の関係を代入すれば，出力端における出力モードの振幅をあらわすベクトルは

$$a^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

となり，各出力モードの振幅が等しいことから，次の関係がなりたつことになる．

$$|a_{1i}| = |a_{2i}| = \cdots\cdots = |a_{ni}| \qquad (12)$$

すべての i ($i=1,2,\cdots,n$) について式(12)の関係が成立し，しかも行列 A が対称でかつユニタリな行列であることを考慮すると，結局伝達行列 A の各要素の絶対値は

$$|a_{ij}| = 1/\sqrt{n} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n) \qquad (13)$$

で与えられることになる．すなわち，電力等分配器の伝達

行列は，対称かつユニタリで，しかもすべての要素の絶対値が $1/\sqrt{n}$ となるような行列である．

このような，対称かつユニタリで，しかもすべての要素の絶対値が等しいような行列については，付録1を参照されたい．

5. 電力等分配器の結合行列

モード数が2個または3個の場合には，電力等分配器の伝達行列の固有値は，2次または3次方程式の根の公式を用いて，解析的に導出できる．よって，この2つの場合を例にとって，電力等分配器の結合行列を計算し，その特徴を調べてみる．

5.1 2モードの場合

2モードの電力等分配器は，通常の3dB結合器と同じものとなる．この場合の伝達行列は，付録1の式(A.1)および式(A.5)より，次のようにあらわせる．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\phi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{j\phi_2} \end{pmatrix} \tag{14}$$

ここで，ϕ_1, ϕ_2 は任意の実数である．

節4で述べたように，一般に行列Aの第i列よりなるベクトルは，モード(i)にのみ入力を加えたときの，各出力モードの振幅と位相をあらわす．このことから，モード(i)(

$=1,2,\cdots,m$) にのみ入力を加えた場合の，任意の出力モード(j)と(k)との間の位相差

$$\Delta\psi_{jk} = \psi_k - \psi_j \qquad (15)$$

を，行列Aから求めることができる。ここで，ψ_j, ψ_k ($j, k=1,2,\cdots,m$) はそれぞれ任意の出力モード(j)および(k)の位相である。逆に，この位相関係を満たすような等振幅の入力を電力等分配器のすべての入力モードに加えれば，出力端でモード(1)にのみ出力が得られるから，これらの位相関係は，電力等分配器を図2(a)(b)に示すような用い方をする場合の可変移相器で調整すべき移相量に関連して，大きな意味をもってくる。

2モードの場合，式(14)を計算し，モード(1)の出力の位相を基準として，表1(a)の結果が得られる。ここで $\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \qquad (16)$$

である。表1(a)から分るように，入力を加えるモードを変えても，出力モード(1)，(2)の間の位相差は単に π 異なっているにすぎない。したがって，このような2モード結合系を用いて図2(a)，(b)に示したような結合器を構成する場合，可変移相器で2つのモード間に π の位相差を与えると，出力を得るモードを変え得ることが表1(a)よりわかる。

式(12)の伝達行列の固有値を計算し，その対数をとると，式(11)の $\lambda_i l$ ($i=1,2$) は次のようにあらわされる。

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 l &= \phi + \tan^{-1}\left(\sin\Delta\phi \Big/ \sqrt{2-\rho\sin^2\Delta\phi}\right)\\ \lambda_2 l &= \phi - \tan^{-1}\left(\sin\Delta\phi \Big/ \sqrt{2-\rho\sin^2\Delta\phi}\right)\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

ただし

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (18)$$

これらの値を，式(10)に代入して結合行列を計算すると，次の結果が得られる．

$$\left.\begin{aligned}\beta_1 l &= \phi + (n_1+n_2)\pi + F(\Delta\phi)\cos\Delta\phi\\ \beta_2 l &= \phi + (n_1+n_2)\pi - F(\Delta\phi)\cos\Delta\phi\\ C_{12} l &= F(\Delta\phi)\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

ただし

$$F(\Delta\phi) = \frac{1}{\sqrt{2-\rho\sin^2\Delta\phi}}\left\{\tan^{-1}\frac{\rho\sin\Delta\phi}{\sqrt{2-\rho\sin^2\Delta\phi}} + (n_1-n_2)\pi\right\} \quad (20)$$

ここで n_1, n_2 は，式(11)に示される零または正の整数である．式(19)からわかるように，2つのモードの位相定数 β_1, β_2 の値は，ϕ によって結合係数 C_{12} とは無関係に変えることができる．よって，電力等分配器の設計には，$\Delta\phi$ によって定まる，結合係数 C_{12} および位相定数の差（β_1

位相差 ＼ 入力モード	モード(1)	モード(2)
$\Delta\psi_{12}$	$-\Delta\phi$	$\pi-\Delta\phi$

(a) 2モードの場合

位相差 ＼ 入力モード	モード(1)	モード(2)	モード(3)
$\Delta\psi_{12}$	$-\Delta\phi_a$	$\frac{2}{3}\pi-\Delta\phi_a$	$\frac{4}{3}\pi-\Delta\phi_a$
$\Delta\psi_{13}$	$-\Delta\phi_b$	$\frac{4}{3}\pi-\Delta\phi_b$	$\frac{2}{3}\pi-\Delta\phi_b$

(b) 3モードの場合

表1 入力を加えるモードを変えた場合の各出力モード間の位相差

$-\beta_2)$ を与えておけばよい。

いま，$n_1=n_2$ として，$\Delta\phi$ と $(\beta_1-\beta_2)l$ および $C_{12}l$ との関係を図示すると，図3のようになる。ただし l は，系の結合部分の長さである。なお，ここでは結合係数が正となる範囲のみを示した。

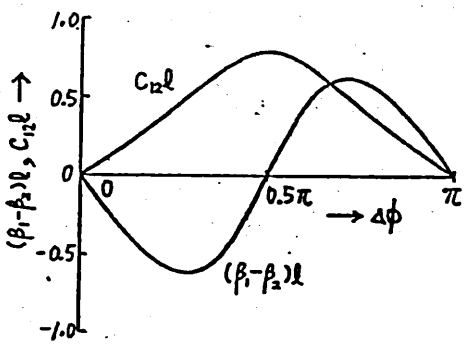


図3. 電力等分配器の位相定数と結合係数（2モード）

5.2 3モードの場合

3モードからなる電力等分配器を，付録1の式(A.1)および，(A.6)から与えられる伝達行列 A を用いて検討する。*

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 & \\ 0 & e^{j\phi_2} & \\ & & e^{j\phi_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 & \\ 0 & e^{j\phi_1} & \\ & & e^{j\phi_2}\end{pmatrix} \qquad (21)$$

ただし

$$\omega=(-1+j\sqrt{3})/2$$

ここで，ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3 は任意の実数である。

2モードの場合と同様に，入力を加えるモードを変化させた場合の各出力モード間の位相差は，式(21)を計算して，

---

* ここでは式(A.6)の左側の式を用いた。右側の式は左側の複素共役形であるから，右側の式を用いる場合には，ϕ_i $(i=1,2,\cdots n)$ の符号をかえて伝達行列全体を式(21)の複素共役形にしておけば，得られる結果（すなわち $\beta_i l$，$C_{ij}l$）の符号が変わるだけで，以下の議論はそのままなりたつ。

表1(b)のようになる．ただし，$\Delta\phi_a$，$\Delta\phi_b$ はそれぞれ，

$$\Delta\phi_a = \phi_2 - \phi_1 \quad , \quad \Delta\phi_b = \phi_3 - \phi_1 .$$

である．よって，この結合器を図2(a)，(b)のような用い方をする場合，出力を得るモードを変えるには，可変移相器で $\pm\frac{2}{3}\pi$ の位相変化を起させればよいことがわかる．

行列Aの固有値を求め（付録2参照），式(10)を用いて結合行列の各要素を計算すれば，各モードの位相定数 β_i $(i=1,2,3)$，および，モード間の結合係数 C_{ij} $(i<j\ ;\ i,j=1,2,3)$ はそれぞれ以下のようにあらわせる．

$$\begin{aligned}\beta_i l = {} & \frac{2}{3}\phi + \frac{2}{3}(n_1+n_2+n_3)\pi \\ & -j\frac{1}{6B}\Big[f(\theta_i,u,v)\Big\{\ln\kappa_1 + j\frac{2}{3}(2n_1-n_2-n_3)\pi\Big\} \\ & \quad + f(\theta_i,\omega u,\omega^2 v)\Big\{\ln\kappa_2 + j\frac{2}{3}(2n_2-n_1-n_3)\pi\Big\} \\ & \quad + f(\theta_i,\omega^2 u,\omega v)\Big\{\ln\kappa_3 + j\frac{2}{3}(2n_3-n_1-n_2)\pi\Big\}\Big] \end{aligned}$$

$$(i=1,2,3) \qquad (22)$$

$$\begin{aligned} C_{ij} l = {} & -j\frac{1}{6B}\Big[g(\theta_i,\theta_j,u,v)\Big\{\ln\kappa_1 + j\frac{2}{3}(2n_1-n_2-n_3)\pi\Big\} \\ & \quad + g(\theta_i,\theta_j,\omega u,\omega^2 v)\Big\{\ln\kappa_2 + j\frac{2}{3}(2n_2-n_1-n_3)\pi\Big\} \\ & \quad + g(\theta_i,\theta_j,\omega^2 u,\omega v)\Big\{\ln\kappa_3 + j\frac{2}{3}(2n_3-n_1-n_2)\pi\Big\}\Big] \end{aligned}$$

$$(i<j\ ;\ i,j=1,2,3) \qquad (23)$$

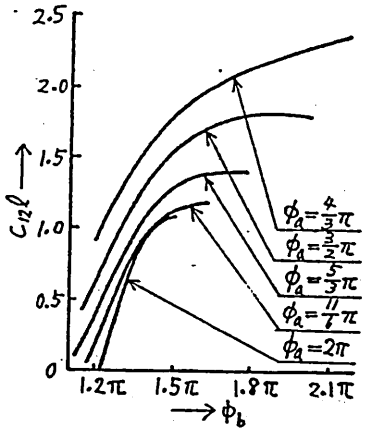
ただし

$$
\left.
\begin{aligned}
f(\theta,x,y) &= (x-y)\left[R^2 e^{j\frac{4}{3}\eta} + (3\omega-2)Re^{j\frac{2}{3}\eta}e^{j\theta}\right. \\
&\qquad \left. + (1-\omega)e^{j2\theta} - (Re^{j\frac{2}{3}\eta} - e^{j\theta})(x+y) + (x^2-xy+y^2)\right] \\
g(\theta_i,\theta_j,x,y) &= \omega^2(x-y)e^{j\frac{1}{2}(\theta_i+\theta_j)}\left[(3\omega^2-2)Re^{j\frac{2}{3}\eta}\right. \\
&\qquad \left. + (1-\omega^2)(e^{j\theta_1}+e^{j\theta_2}) + (x+y)\right]
\end{aligned}
\right\} \tag{24}
$$

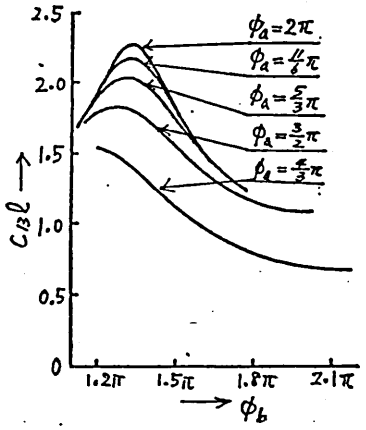
$$
\left.
\begin{aligned}
X_{\substack{1\\2\\3}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[Re^{j\frac{2}{3}\eta} + \begin{Bmatrix} u+v \\ \omega u+\omega^2 v \\ \omega^2 u+\omega v \end{Bmatrix}\right] \\
\theta_1 &= -\frac{2}{3}(\Delta\phi_a + \Delta\phi_b) \\
\theta_2 &= -\frac{2}{3}(-2\Delta\phi_a + \Delta\phi_b - 2\pi) \\
\theta_3 &= -\frac{2}{3}(\Delta\phi_a - 2\Delta\phi_b - 2\pi) \\
\phi &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3
\end{aligned}
\right\} \tag{25}
$$

であり，u, v, B, R, η などの値は，行列 A の固有値に関係し，それぞれ，付録2の式(A-12)(A-13)に示されている．

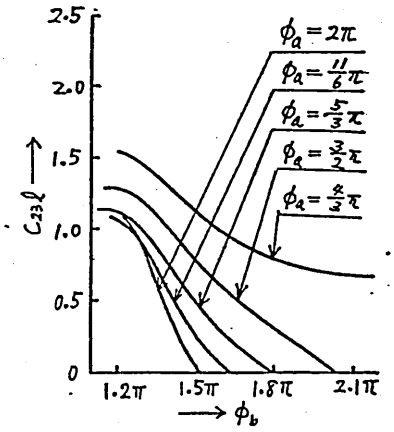
3モードの場合も2モードの場合と同様に，$\Delta\phi_a$，$\Delta\phi_b$ のみで，結合係数と位相定数の差とが定まる．いま，$n_1 = n_2 = n_3$ として，これらの関係を図示すると，図4，図5のようになる．



(a) $C_{12}\ell$



(b) $C_{13}\ell$



(c) $C_{23}\ell$

図4. 電力等分配器の結合係数（3モード）

式(23)～(25)，あるいは図4，5から明らかなように，

$\Delta\phi_a=\frac{4}{3}\pi$，($\theta_1=\theta_2$)の時

$$\beta_1=\beta_2\ ,\ C_{13}=C_{23}$$

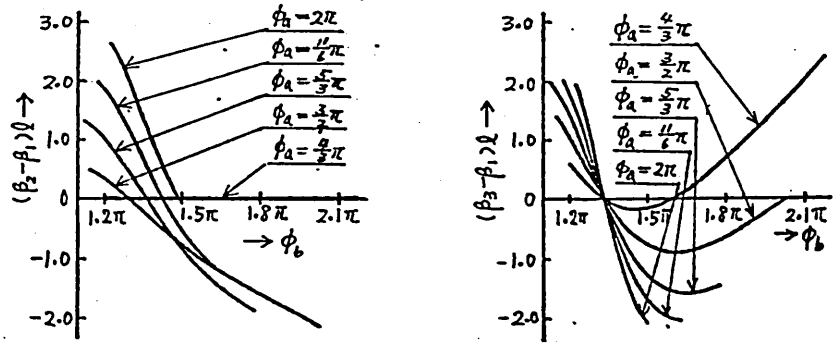
$\Delta\phi_b=\frac{4}{3}\pi$，($\theta_1=\theta_3$)の時

$$\beta_1=\beta_3\ ,\ C_{12}=C_{23}$$

$\Delta\phi_a=\Delta\phi_b$，($\theta_2=\theta_3$)の時

$$\beta_2=\beta_3\ ,\ C_{12}=C_{13}$$

なる関係があることがわかる．このような関係は，モード間の結合機構に対称性があるような結合系や，同じ値の位相定数をもつモードを用いるような結合系の設計に利用できる．



(a) $(\beta_2-\beta_1)\ell$　　(b) $(\beta_3-\beta_1)\ell$

図5. 電力等分配器の位相定数（3モード）

6. むすび

本文では，伝送方向に一様な分布結合機構をもつ多モードの結合系について，系の回路的な特性を与える伝達行列から，結合系の構造を定める結合行列を求める方法を明らかにした．また，その応用として，任意の入力モード電力を出力端で方べてのモードに均等に分配する，電力等分配器をとりあげ，その伝達行列の一般的な与え方，および，モードの個数を2あるいは3とした場合の結合行列の求め方を示し，その特性を明らかにした．

多数個のモードからなる一様な分布結合系は，例えば，最近さかんに研究されている誘電体導波路を用いて簡単に実現でき，本文で取り上げた電力等分配路は，光集積回路の回路素子などへの応用が期待できる．

本文で示した結合行列の導出法は，電力等分配器に限らず，種々の結合素子についても適用できる．今後の課題と

しては，さらに一般的な系，例えば，結合が伝送方向に一様でないような系なども取り扱えるように，この手法を一般化することが考えられる．

謝辞

本研究を行なうにあたり，数々のご助言をいただいた大阪大学工学部熊谷研究室の諸氏に感謝します．

参考文献

(1) W.H.Louisel : "Coupled mode and parametric electronics", John Wiley & Sons, Inc., New York (1960)

(2) D. Marcuse : "Theory of Dielectric Optical Waveguides", Academic Press, New York (1974)

(3) P.D. McIntyre & A.W. Snyder : "Power Transfer between Optical Fibers" J.O.S.A., 63, 12, P. 1518 (Dec. 1973)

(4) 岩崎，倉茵，坂倉："誘電体3スラブ線路間のモード結合理論"，信学論(C)，58-C，8，P. 443 (昭50-8)

(5) 山口，熊谷："多モード結合系における完全結合の条件とその応用" 信学論(B) 掲載予定

(6) F.R. Gantmacher : "The Theory of Matrices. vol. 1", Chap. 5, Chelsea Pub. Co., New York (1960)

(7) R. Bellman : "Introduction to Matrix Analysis", Chap. 3, McGraw-Hill Book Co. New York (1970)

(8) 日本数学会編 "数学辞典"，岩波書店 (1968)

付録 I

n 次の対称なユニタリ行列（一般の伝達行列）の自由度は $n(n+1)/2$ であるが，式(13)の条件を考慮すれば，求める

べき行列の自由度は n となる．以下では，この自由度を n 個の実数 ϕ_i $(i=1,2,\cdots n)$ であらわし，求めるべき伝達行列 A を，次式のようなユニタリ変換の形で表現する．

$$A = \exp[j\Phi]\, U\, \exp[j\Phi] \qquad (A\cdot1)$$

ただし

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & & 0 \\ & \phi_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \phi_n \end{pmatrix}, \quad \exp[j\Phi] = \begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & & 0 \\ & e^{j\phi_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{j\phi_n} \end{pmatrix}$$

ここで行列 U は，すべての要素の絶対値が等しいような，ある対称ユニタリ行列である．式(A·1)で，対角行列 $\exp[j\Phi]$ を U の両側からかけているのは，行列の対称性を維持し，かつ，行列の各要素の絶対値を変化させないためである*．

次に，1の n 乗根を用いて行列 U を求めることを考える．1の n 乗根の1つ $e^{j(2\pi/n)}$ をそとすれば，次の恒等式が成立する．

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=0 \qquad (A\cdot2)$$

いま，すべての要素の絶対値が等しいベクトルの1つとして

---

* この他にも，U の i 行と j 行および i 列と j 列とを入れ替える変換も考えられるが，このような変換は，単にモード番号 $(i),(j)$ を置き換えることに対応し，系の特性には変化を与えないので，ここでは省略した。

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \cdots, 1) \qquad (A\cdot3)$$

を考えると，e_1 との内積が式(A·2)を満たす正規化されたベクトル e_2 は

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots, x) \qquad (A\cdot4)$$

となる．次に，e_2 との内積が矛盾なく式(A·2)を満たすベクトル e_3 を定める．以下同様にして，順次得られる n 個の正規直交ベクトル $e_i\ (i=1,2,\cdots n)$ から，対称な行列 U を作ればよい．U の第1行には常に式(A·3)のベクトル e_1 を用いることにして，$n=2$ および $n=3$ の場合を示せば，以下のようになる．

$$U^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (A\cdot5)$$

$$U^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}, \text{および} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \qquad (A\cdot6)$$

ただし $\omega = (-1+\sqrt{3}i)/2$

特に $n=m^l$（m, l は2以上の整数）の場合には，上記以外に，1の m 乗根を用いて U を与えることができる．例えば $l=2$ の場合には，上記の方法で求められる m 次の行列 $U^{(m)}$ を用いて

$$\mathbb{U}^{(m^2)} = \begin{pmatrix} u_{11}^{(m)}\mathbb{U}^{(m)} & \cdots & u_{1m}^{(m)}\mathbb{U}^{(m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1}^{(m)}\mathbb{U}^{(m)} & \cdots & u_{mm}^{(m)}\mathbb{U}^{(m)} \end{pmatrix} \qquad (A\cdot 7)$$

が計算され，同じ手順を繰り返せば，l が 3 以上の場合も求めることができる．ここで，$u_{ij}^{(m)}$ は行列 $\mathbb{U}^{(m)}$ の i 行 j 列の要素をあらわす．例えば $n=4\,(=2^2)$ の場合を考えれば，1 の 4 乗根を用いて得られる行列

$$\mathbb{U}^{(4)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & -i \end{pmatrix} \qquad (A\cdot 8)$$

以外に，1 の 2 乗根を用いて

$$\mathbb{U}^{(4)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A\cdot 9)$$

が得られる．

筆者らが検討した限りでは，以上のようにして求められる $\mathbb{U}$ を用いれば，要素の絶対値がすべて等しい伝達行列は式(A·1)を用いて表現でき，これに反するような例を見出すことはできなかった．

付録 2

式(21)で示される行列 A の特性方程式は，変数を μ として

$$\left.\begin{aligned}
&\mu^3+P_1\mu^2+P_2\mu+P_3=0\\
&P_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{e^{j2\phi_1}+\omega^2 e^{j2\phi_2}+\omega^2 e^{j2\phi_3}\right\}\\
&P_2=-\frac{1}{3}(1-\omega^2)\left\{e^{j2(\phi_1+\phi_2)}+e^{j2(\phi_2+\phi_3)}+e^{j2(\phi_1+\phi_3)}\right\}\\
&P_3=-\frac{1}{\sqrt{3}}(\omega-\omega^2)e^{j2(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}
\end{aligned}\right\}\quad(A\cdot10)$$

となる．Cardano の公式[8]を用いて，式(A·10)の3根を求めると，結果は次のようになる．

$$\mu_{\substack{1\\2\\3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j\frac{2}{3}(\phi_1+\phi_2+\phi_3)}\left[Re^{j\frac{2}{3}\eta}+\begin{Bmatrix}u+v\\ \omega u+\omega^2 v\\ \omega^2 u+\omega v\end{Bmatrix}\right]\qquad(A\cdot11)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
&u=\sqrt[3]{A+B}\quad,\quad v=\sqrt[3]{A-B}\\
&A=R^3e^{j2\eta}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}(R^2-1)\\
&B=\sqrt{\frac{9}{4}(R^4+6R^2-3)-6\sqrt{3}R^3\sin2\eta}
\end{aligned}\right\}\quad(A\cdot12)$$

であり，また，R，η は実数で

$$Re^{j\frac{2}{3}\eta}=\frac{1}{3}\left\{e^{j\frac{2}{3}(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)}+\omega^2 e^{j\frac{2}{3}(2\phi_2-\phi_1-\phi_3)}+\omega^2 e^{j\frac{2}{3}(2\phi_3-\phi_1-\phi_2)}\right\}\qquad(A\cdot13)$$

なる関係を満たす．

以上

輻射科学研究会資料

同期範囲外での変調波注入による変調方式

石川正臣・岡島秀一・森田正信
(関西大学工学部)

昭和50年12月5日

1. まえがき

注入同期[1),2)]の研究は，近年，マイクロ波固体素子の出現で再び注目を集めてきている。というのは，固体素子は電子管に比べて多くの利点を持つ半面，安定性，雑音，発振出力等が十分満足される状態になく，それらを改善する手段として，注入同期が利用される。注入同期の他の応用には，AMリミッタ，周波数変換，FM復調器，周波数逓倍，位相シフト等がある。

一方，理論的研究も古くからなされ，特に，自励発振周波数と外部信号の位相差に着目して，理論的に導びいたのがAdlerである。彼が導びいた位相関係式をAdlerの式[3)]と呼び，ほとんどの注入同期現象の解析に用いられている。

注入同期の現象は，同期範囲内と同期範囲以外の現象に区別される。同期範囲内において，注入信号が無変調波に関しては，詳細に検討されているが，変調波に関しては，現象が複雑であるために，明らかにされていない部分が多い。変調波には，振幅変調波[4),5)](AM波)，周波数変調波，[6)]パルス的に変調された信号，[7)]を用いて，その同期範囲について検討されている。特に，AM波では，AM－FM(PM)変換[8)]への興味ある応用が示されている。

一方，同期範囲外の研究は，範囲内の研究に比べて少ない。注入信号が無変調波の場合，スペクトルは自励発

振周波数のまわりに，非対称サイドバンドを生じ，注入信号を除いて，サイドバンドは，すべて注入信号から自励発振周波数の反対側にある。この様なスペクトル過程に関しては，Stover等により理論解析[9),10)]されている。変調波の場合，あまり報告は見当らない。著者等は，以前，大阪管を用いてAM波注入による同期されるまでのスペクトルの様子を報告した。[11),12)]

この報告では，同期範囲外にAM波を注入した時の現象と解析を示した。まずAdlerの式を拡張してAM波注入による位相関係を求め，スペクトル解析を行なった。その結果．同期範囲外に無変調波注入で生じたスペクトル群は，AM波を注入することで，各スペクトルはFM変調され，浅いAM変調波で深いFM変調波が得られた。さらにFM変調度はAM変調度に対して直線性が良い結果を得た。

また，AM波注入により発振器のビート波形は周波数変調されたパルス波形になることがわかり，さらに出力スペクトルがサイドバンドを生じることから，同期範囲外にAM波を注入することでPFM-SS変調器と使用出来る。また，注入量を変えることでFM-SS変調されることを示した。

2 解析

2.1 発振器の位相関係式

注入信号と自励発振周波数の位相差αに関する微分方程式は、

$$\frac{d\alpha}{dt} = -B\sin\alpha + \Delta\omega_0 \qquad (1)$$

で示される。(Adlerの式) この式は瞬時角周波数と自励発振周波数の差(つまりビート角周波数)をあらわす。

ここで $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_1$, $B = \frac{E_1\omega_0}{2EQ}$

ω_0：自励発振器の搬送波角周波数

ω_1：注入信号の〃〃

Q：発振器の良好度

E_1：注入信号の電圧振幅

E：引き込まれる発振器に生じる電圧振幅

を示す。

(1)式の両辺にω_1を加えると,

$$\omega = -\frac{E_1\omega_0}{2EQ}\sin\alpha + \omega_0 \qquad (2)$$

ただし, ωは引き込まれる発振器の瞬時角周波数を示す。

この式は, 瞬時角周波数がある瞬間において, 外部信号と発振器との間に存在する位相角の$\sin$に比例した量だけ自励発振角周波数から変移することをあらわす。

いま, 注入するAM波が

$$E(t) = E_1(1 - m\cos pt) \qquad (3)$$

であると考える。ただし, mは変調度, Pは変調角周波数である。

E_1mがEに比べて小さいとして(1)式を適用すると,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -B(1 - m\cos pt)\sin\alpha + \Delta\omega_0 \qquad (4)$$

となる。

(4)式で $B_m \cos pt \sin\alpha \to 0$ として解くと，

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\left(\frac{B}{\Delta\omega_0}\right)^2}\tan\left\{\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{B}{\Delta\omega_0}\right)^2}(\Delta\omega_0 t + C)\right\} + \frac{B}{\Delta\omega_0} \qquad (5)$$

となる。ただし，Cは定数である。次に $B_m \cos pt \sin\alpha \neq 0$ 場合，Cを t の関数とみなし，この式を変数変換して，Cを未知関数とする方程式を考える。そのために，(5)式を微分して，(4)式を代入すると，

$$\frac{dC}{dt} = \frac{B_m}{1-\left(\frac{B}{\Delta\omega_0}\right)^2}\cos pt\left[\sqrt{1-\left(\frac{B}{\Delta\omega_0}\right)^2}\sin\left\{\sqrt{1-\left(\frac{B}{\Delta\omega_0}\right)^2}(\Delta\omega_0 t + C)\right\} + \frac{B}{\Delta\omega_0}\left\{1+\cos\sqrt{1-\left(\frac{B}{\Delta\omega_0}\right)^2}(\Delta\omega_0 t + C)\right\}\right] \qquad (6)$$

ここでCを周期関数とみなし，周期関数の振幅が非常に小さいとして，$\Delta\omega_0 \gg \frac{dC}{dt} + \frac{p}{\sqrt{1-\left(\frac{B}{\Delta\omega_0}\right)^2}}$ とすれば (6)式の解は，

$$C \fallingdotseq \frac{B_m}{1-\left(\frac{B}{\Delta\omega_0}\right)^2}\frac{B}{\Delta\omega_0}\frac{1}{p}\sin pt \qquad (6)'$$

になる。

一方，B が $B_0(1-m\cos pt)$ で変化するとすれば，

$$\sqrt{1-\left(\frac{B}{\Delta\omega_0}\right)^2}\Delta\omega_0 \fallingdotseq \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{B_0}{\Delta\omega_0}\right)^2(1-m\cos pt)^2\right]\Delta\omega_0 \fallingdotseq \left[\left(1-\frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\Delta\omega_0^2}\right)\Delta\omega_0 + \left(\frac{B_0}{\Delta\omega_0}\right)^2 m\Delta\omega_0\cos pt\right] \fallingdotseq \frac{d}{dt}\left[\sqrt{1-\left(\frac{B_0}{\Delta\omega_0}\right)^2}(\Delta\omega_0 t + C)\right]$$

となることから，$B = B_0(1-m\cos pt)$ と置いても良い。

結局 (5)式は

$$\tan\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{B_0}{\Delta\omega_0}\right)^2(1-m\cos pt)^2}\tan\left\{\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{B_0}{\Delta\omega_0}\right)^2}\Delta\omega_0 t + \frac{\left(\frac{B_0}{\Delta\omega_0}\right)^2}{2\sqrt{1-\left(\frac{B_0}{\Delta\omega_0}\right)^2}} \times \frac{\Delta\omega_0 m}{p}\sin pt\right\} + \frac{B_0}{\Delta\omega_0}(1-m\cos pt) \qquad (7)$$

となる。

また $\sin\alpha$ は次式となる。

$$\sin\alpha = \frac{1}{\delta'} - \left(\frac{1}{\delta'} - \delta'\right) \frac{1}{1 + \delta' \cos\left(\sqrt{1-\delta^2}\,\Delta\omega_0 t + \beta \sin pt - \psi\right)}$$

ただし、$\delta = \dfrac{B_0}{\Delta\omega_0}$ 初期離調度の逆数 (8)

$$\beta = \left[\frac{B_m}{P} \cdot \frac{B_0}{\Delta\omega_0} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{B_0}{\Delta\omega_0}\right)^2}\right] = \frac{\Delta\omega_0 m}{P} \cdot \frac{\delta^2}{\sqrt{1-\delta^2}}$$ FM変調度

$$\psi = \tan^{-1}\left(\sqrt{1-\delta'^2}/\delta'\right)$$

$$\sqrt{1-\delta^2}\,\Delta\omega_0 = \Delta\omega_0', \quad \delta' = (1 - m\cos pt)\delta$$

ここで $\psi = \pi$ として(9)式を無限等比級数に書き変えると、

$$\sin\alpha = \frac{1}{\delta'} - \left(\frac{1}{\delta'} - \delta'\right)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(\delta')^n \cos^n\left(\sqrt{1-\delta^2}\,\Delta\omega_0 t + \beta \sin pt\right)\}\right] \quad (9)$$

2.2 発振器の出力スペクトル。

出力 v を次式のようにとる。

$$v = \sin(\omega_1 t + \alpha) = \sin\left\{\omega_0 t - B\int_0^t (1 - m\cos pt)\sin\alpha\right\} dt \quad (10)$$

ただし、振幅を1とする。これは $B(1-m\cos pt)$ は P が小さいため ほぼ一定であるとすれば、位相 α は周波数変調された式となる。

そこで(5)、(6)'式を用いて $\sin\alpha$ を求めると、

$$\sin\alpha = \frac{1}{\delta} - \left(\frac{1}{\delta} - \delta\right) \frac{1}{1 + \delta\cos\left(\sqrt{1-\delta^2}\,\Delta\omega_0 t + \beta \sin pt - \psi\right)}$$

ただし、(8)の条件で $B \to B_0$ として、δ、β、ψ を用いた。

$\sin\alpha$ の無限等比級数も δ' のかわりに δ を用いた式と同じである。

ここで $B\int_0^t (1-m\cos pt)\sin\alpha\,dt$ を求めるために $m, \delta \ll 1$ として δ^3 まで考慮して大まかな計算を行なうと

$$B\int_0^t (1 - m\cos pt)\sin\alpha\,dt \fallingdotseq \Delta\omega_0\left\{\frac{1}{2}\delta^2\left(t - \frac{m}{p}\sin pt\right)\right\}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}(1 - m\cos pt)\left\{\left(\delta - \frac{1}{4}\delta^3\right)\sin\left(\Delta\omega_0' t + \beta \sin pt\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\delta^2 \sin\left(2\Delta\omega_0 t + 2\beta \sin pt\right) - \frac{1}{12}\delta^3 \sin\left(3\Delta\omega_0' t + 3\beta \sin pt\right)\right\} \quad (11)$$

これから発振出力 v を求めると.

$$v = -(1-m\cos pt)\left(\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{8}\delta^3\right)\sin\omega_1 t \quad ①$$

$$+\left(1-\frac{1}{4}\delta^2\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{mn}{2\beta}\right)J_n(\beta)\sin(\omega_1+\Delta\omega_0'+np)t\right\} \quad ②$$

$$+\frac{1}{2}\delta\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{mn}{2\beta}\right)J_n(2\beta)\sin(\omega_1+2\Delta\omega_0'+np)t\right\} \quad ③$$

$$+\frac{1}{4}\delta^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{mn}{2\beta}\right)J_n(3\beta)\sin(\omega_1+3\Delta\omega_0'+np)t\right\} \quad ④$$

$$+\frac{1}{8}\delta^3\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{5mn}{12}\right)J_n(4\beta)\sin(\omega_1+4\Delta\omega_0'+np)t\right\} \quad ⑤$$

$$+\frac{1}{8}m\delta^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{J_n(\beta)\sin(\omega_1-\Delta\omega_0'+np)t\right\} \quad ⑥$$

(12)*

ただし, $J_n(x)$ は第1種ベッセル関数である。

2.3 近似解の意味

*付録1参照.

同期範囲外に無変調波を注入すれば発振器出力は乱され,図1のようになる。A_0, A_i はそれぞれ自励発振, 注入信号の大きさを示している。注入量を変えることで, A_0 が A_2 まで引き込まれ, 多くのサイドバンド (A_3, A_4, A_5, A_6) を生じる。

次に(12)式に $m=0$ を代入して, 図1と比較すれば, $A_1, \cdots, A_6$

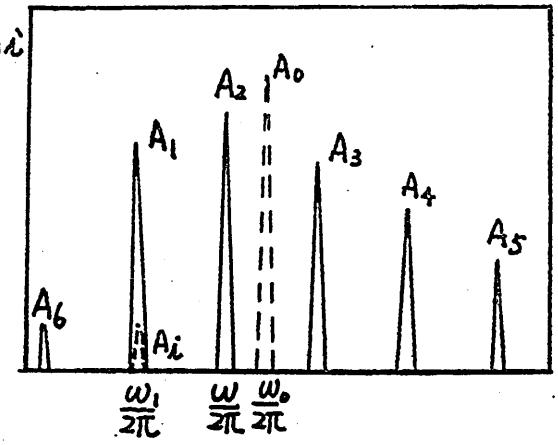


図1. 同期範囲外に無変調波を注入したときのスペクトル。

はそれぞれ式中の①,---,⑥に対応する。ω_0は$\omega=\omega_0+\frac{1}{2}\delta^2(\omega_1-\omega_0)$まで引きこまれ，$A_0$は$A_2$となる。出力スペクトルは，$\sqrt{1-\delta^2}\Delta\omega_0/2\pi$の周波数間隔をもち，注入信号の片側にのみ存在し，その大きさは$\delta/2$の公比をもって等比級数的に注入信号から遠ざかるに従って小さくなる。以上の結果は，Stover等の解析と一致する。

一方，AM波を注入した場合，A_1は注入信号と等しい成分をもつAM波で，増幅されている。無変調波の注入で生じるサイドバンドの各スペクトルはFM被調され，FM変調度は，A_2をβとすればA_3, A_4, A_5, と注入信号から遠ざかるに従って2β, 3β, 4βと深くなる。FMスペクトルは多少非対称でA_2とA_3 A_4, A_5では対称性が逆になる。

2.4 ビート波形

発振器のビート波形を考えることで，発振器の出力状態がわかる。そこで

$$g(t)=\sin(\alpha+\phi)$$

とする。ただし，振幅を1とし，ϕは任意の位相を示す。
ここで，(9)式を用いてϕを変えた場合を調べる。

(i) $\phi=0$

$$g(t)_1=\sin\alpha=\frac{1}{\delta'}-\left(\frac{1}{\delta'}-\delta'\right)\frac{1}{1+\delta'\cos(\sqrt{1-\delta^2}\Delta\omega_0 t+\beta\sin pt-4)} \tag{13}$$

(ii) $\phi=\pi/2$

$$g(t)_2=\frac{1+\cos(\sqrt{1-\delta^2}\Delta\omega_0 t+\beta\sin pt)}{1+\delta'\cos(\sqrt{1-\delta^2}\Delta\omega_0 t+\beta\sin pt-4)}-1 \tag{14}$$

(iii) $\phi=\pi$

$$g(t)_3=-\sin\alpha \tag{15}$$

特に(13)式の $\delta\ll 1$ では

$$g(t)_4=\frac{1}{\delta'}-\left(\frac{1}{\delta'}-\delta'\right)\left\{1-\delta'\cos\left(\sqrt{1-\delta^2}\,\Delta\omega_0 t+\beta\sin pt-4\right)\right. \tag{16}$$

これより(13), (16)式は, それぞれPFM, FM波形を示す。
(13), (15)式は極性が異なるPFM波形である。
(14)式は: のこぎり波となる。図2, 3は(13), (16)式の数値計算した結果の一例である。

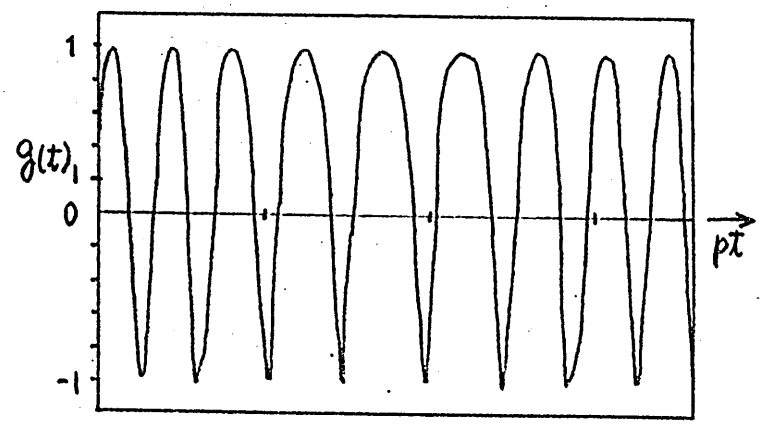


図2 PFM波形
$\delta=0.5$
$\frac{\Delta\omega_0}{p}=10$
$m=0.5$

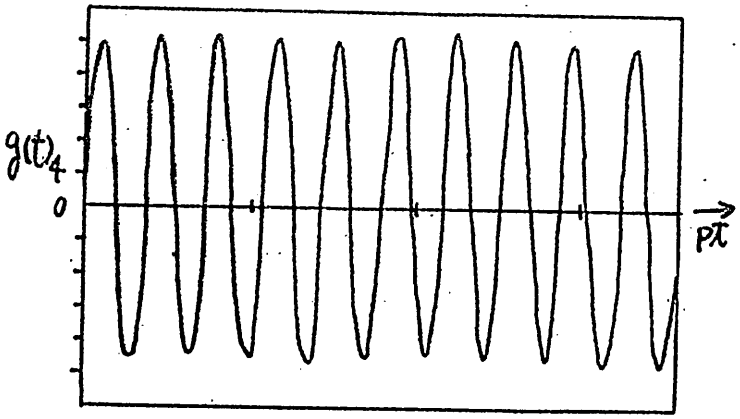


図3 FM波形
$\delta=0.05$
$\frac{\Delta\omega_0}{p}=10$
$m=0.5$

3. 実験結果および考察

3.1 発振器の出力スペクトル

図4は，自励発振，注入信号源にガン発振器を用いた測定回路を示す。実験方法は，ガン発振器①にAM変調をかけ，注入信号源とし，ガン発振器②に注入する。出力は，サーキュレーターを介して，スペクトルアナライザーで観測した。また，変調度，注入量は方向性結合器を通してスペクトルアナライザーで測定した。使用したガン発振器は，出力60mW, 10.2GHzであった。δの測定には，$\sqrt{P_{in}/P_L}$（P_{in}：注入電力，P_L：ロッキング境界での注入電力）の関係を用いた。

図5は $\frac{\Delta\omega_0}{2\pi}=5.0\mathrm{MHz}$, $\frac{P}{2\pi}=25\mathrm{KHz}$, $\delta=0.4$, $m=5\%$ におけるスペクトルで，$A_0,\cdots,A_6$ は図1のそれに対応する。(a),(b)は実験結果と計算結果を示し，良く一致していることがわかる。また各スペクトル間隔 $\frac{\Delta\omega'}{2\pi}$ は $\sqrt{1-\delta^2}\,\Delta\omega_0/2\pi$ の関係より4.6MHzで実験結果と一致した。

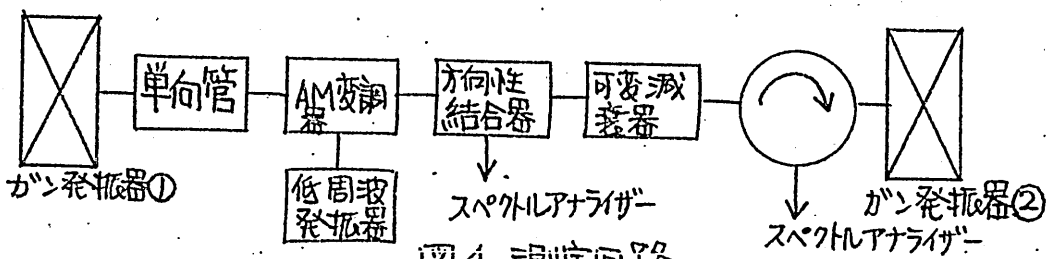


図4 測定回路

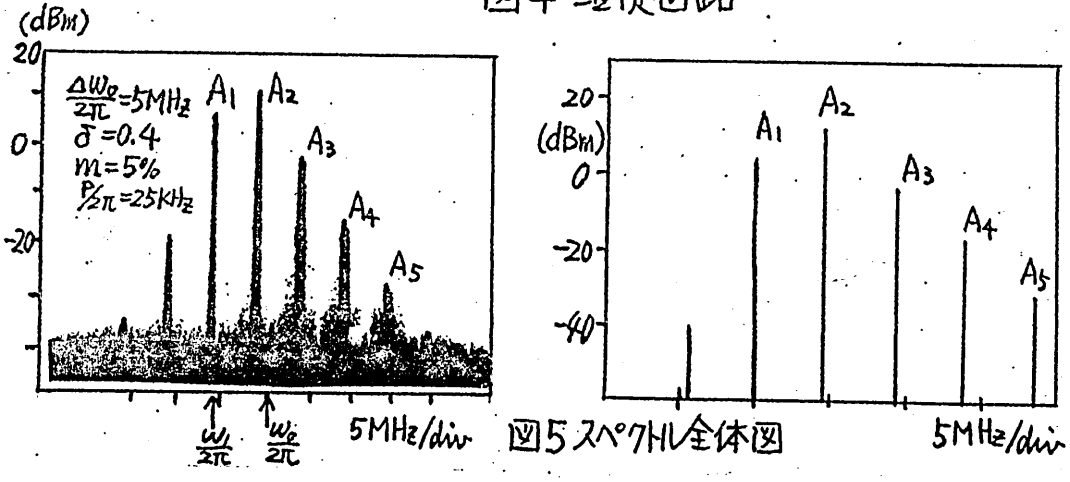


図5 スペクトル全体図

図6 (a),(b),(c)は,図5のA1, A2, A3スペクトルを拡大したもので,実験結果と計算結果を示す。同様に図7は$\frac{\Delta\omega}{2\pi}$=5MHz, δ=0.16 $\frac{F}{2\pi}$=50KHz, m=5%でのスペクトルの拡大図である。スペクトルの非対称性は,図7(b),(c)からわかる。A1スペクトルのAM変調度は変わらず,

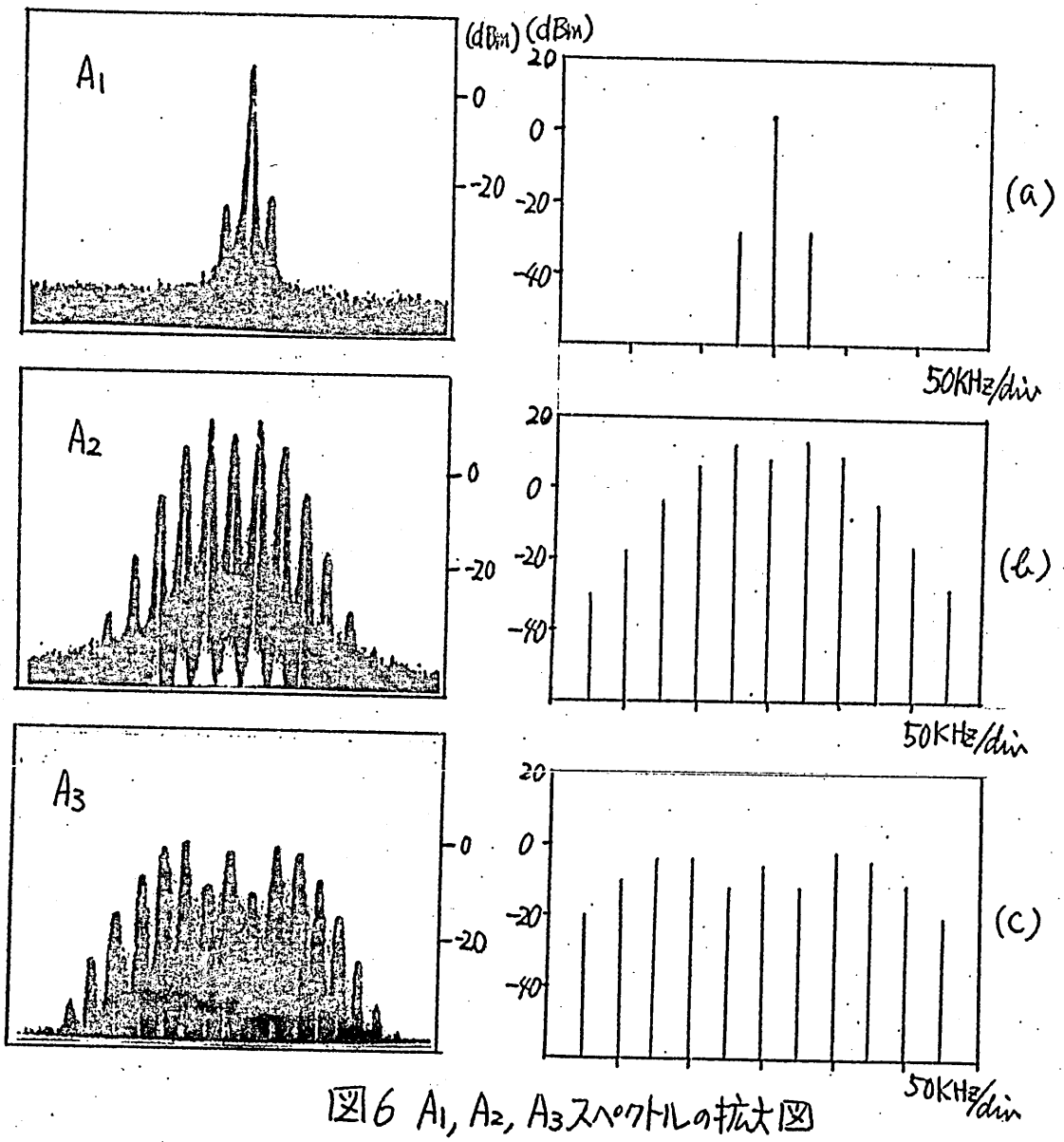


図6 A1, A2, A3スペクトルの拡大図

出力が増しており，注入信号が増幅されることがわかる。A_2, A_3スペクトルはFM変調され．A_2, A_3の順に深くなる。 次にA_2, A_3のFM変調

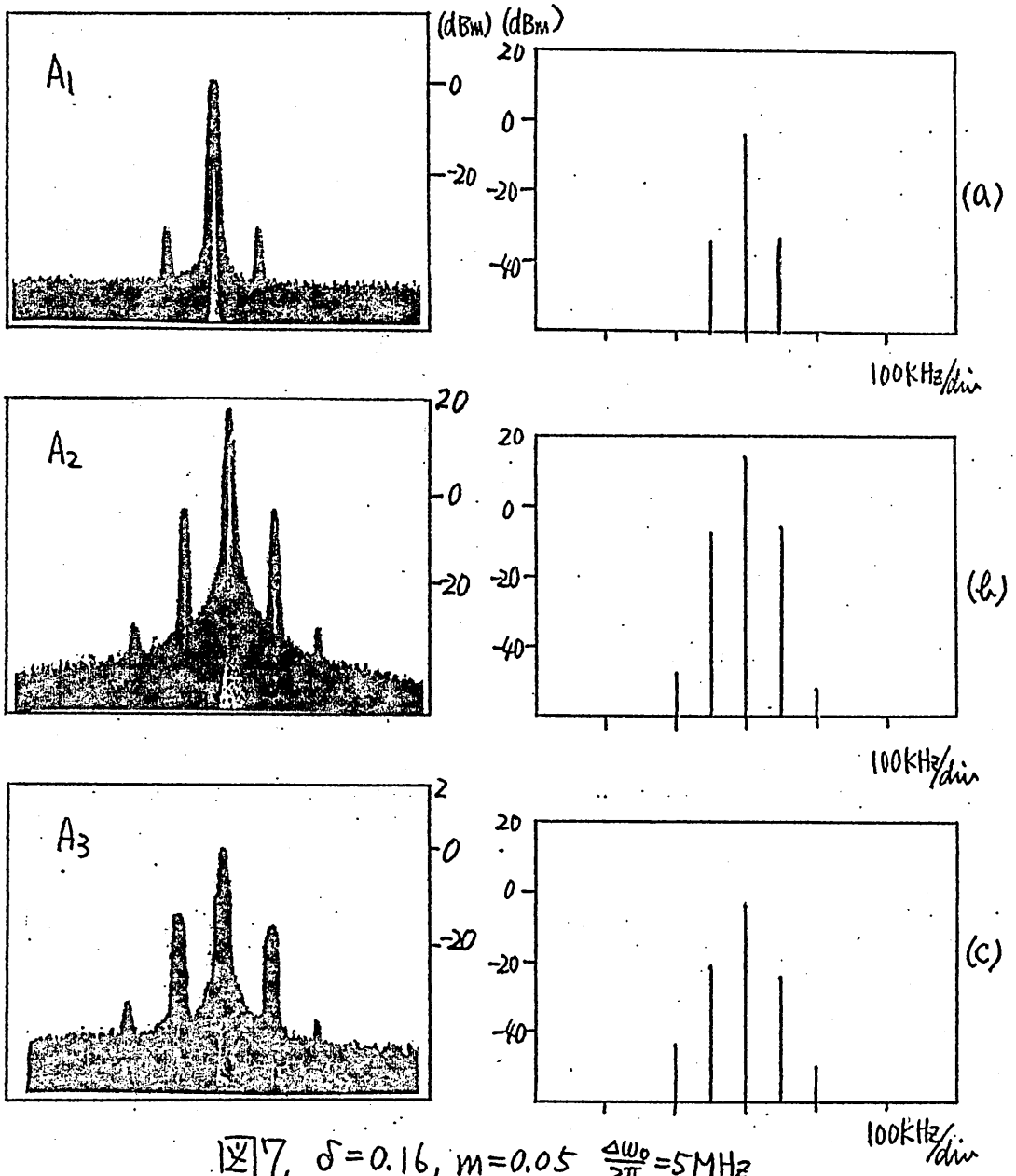


図7. $\delta=0.16$, $m=0.05$ $\frac{\Delta\omega_0}{2\pi}=5$MHz
$\frac{P}{2\pi}=50$kHz でのA1, A2, A3スペクトル

度を $\delta=0.43$, $\frac{P}{2\pi}=50\mathrm{KHz}$ での結果が図8である。A_3 のFM変調度は A_2 の2倍になっていることがわかる。別に A_4, A_5 のFM変調度についても確かめている。ただ,理論値と測定値の相異は,測定上の誤差と考えられる。A_2 のFM変調度を $\delta=0.42$ として,$\Delta\omega_0$ を2～6MHz変化させた場合を図9に,また $\Delta\omega_0 \fallingdotseq 3.9\mathrm{MHz}$ とし,δ 変化の場合を図10に示した。FM変調度 β は $\frac{\Delta\omega_0 m}{P}\cdot\frac{\delta^2}{\sqrt{1-\delta^2}}$ の関係より,β は $\Delta\omega_0$ に比例,Pに反比例する。実験結果から,FM変調度はAM変調度に関して良い比例関係にあることがわかった。

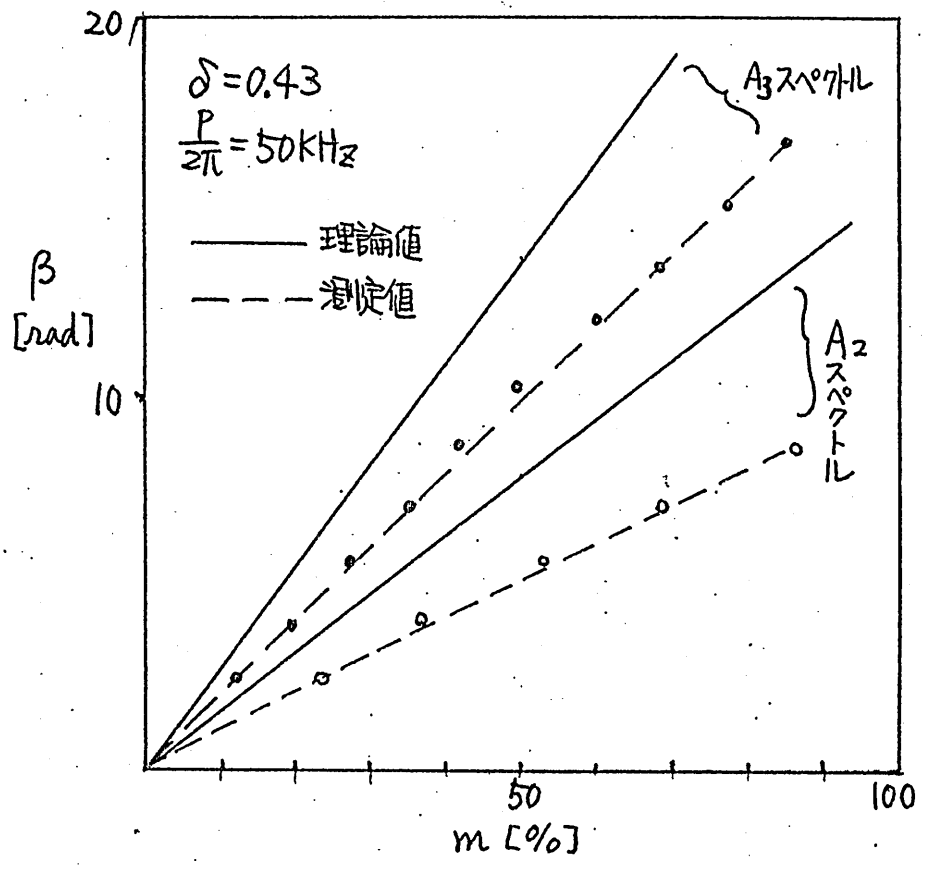


図8 A_2, A_3 スペクトルのFM変調度

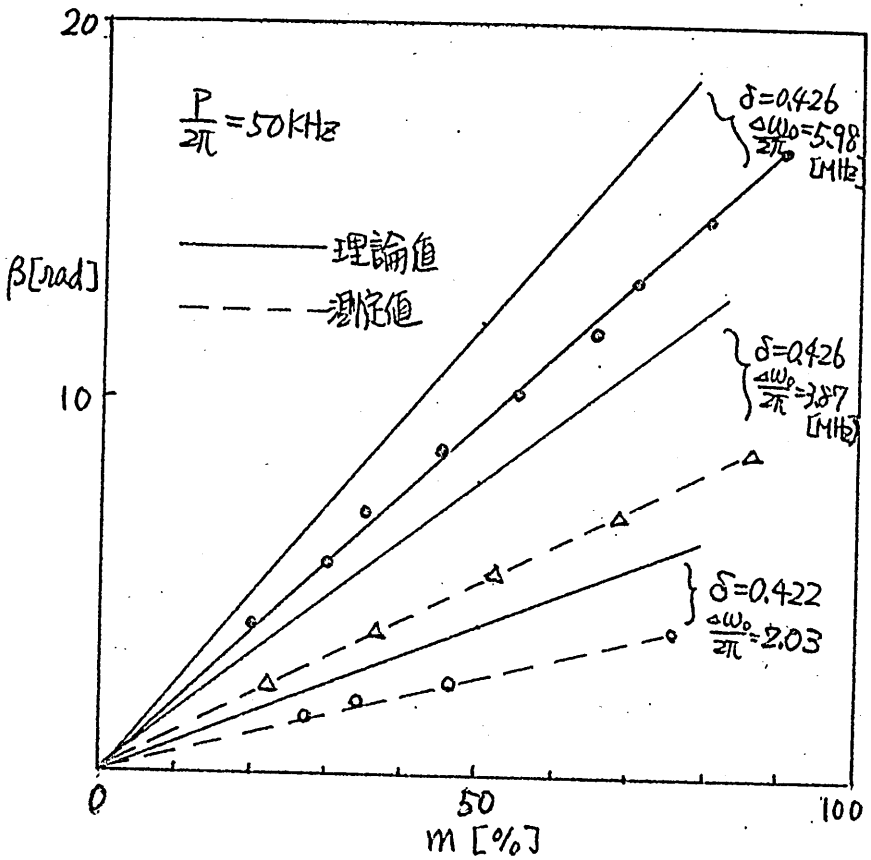


図9 δ一定, Δω₀変化によるβの変化

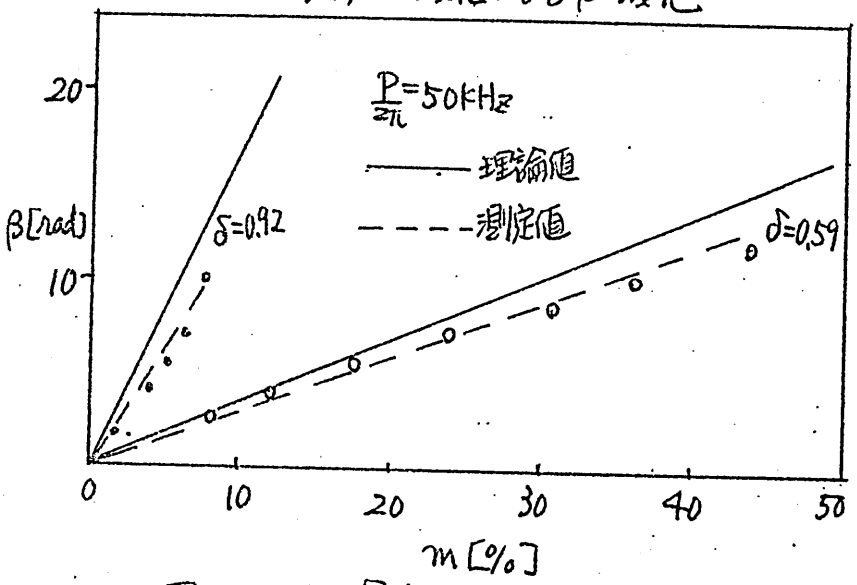


図10 注入量変化によるβの変化

3.2 PFM-SS, FM-SS変調方式

測定回路を図11に示す。10GHz帯のガン発振器を用いて、注入信号にAM変調をかける。AM変調された注入信号が自励発振器に導びかれ、サーキュレータを介して、その出力を注入信号の搬送波角周波数で同期検波し、復調器を通して低周波出力が得られる。

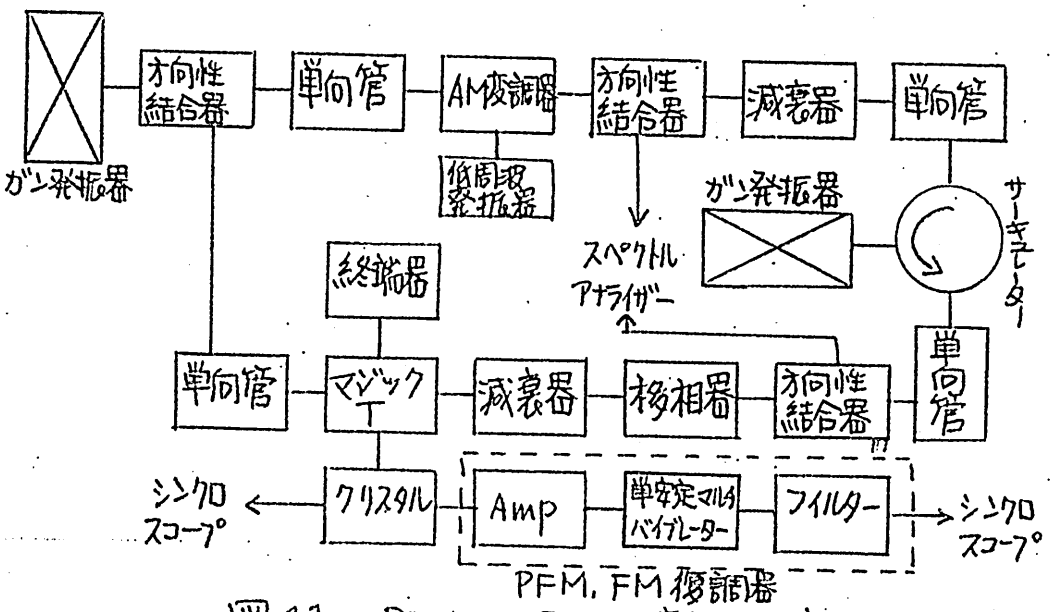


図11 PFM-SS, FM-SS変調 測定回路

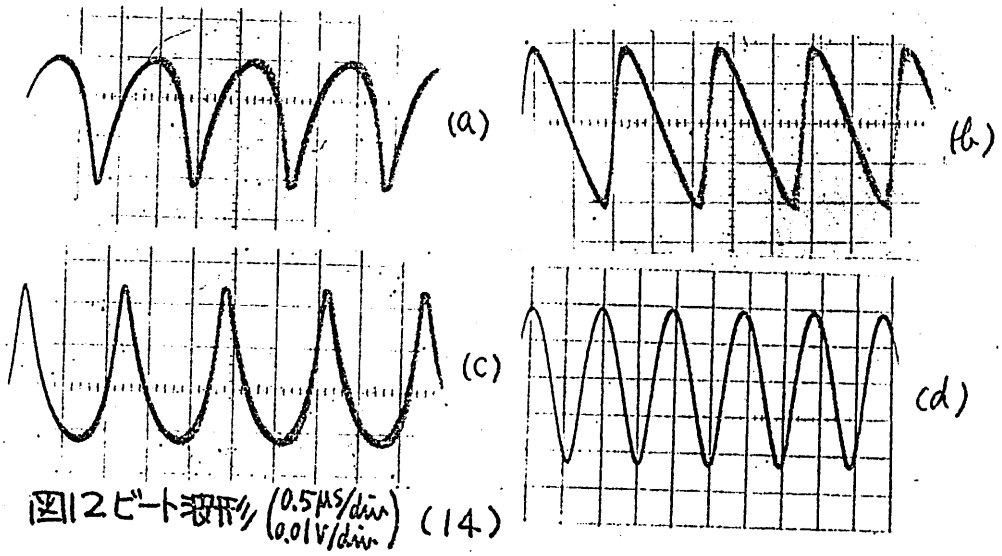
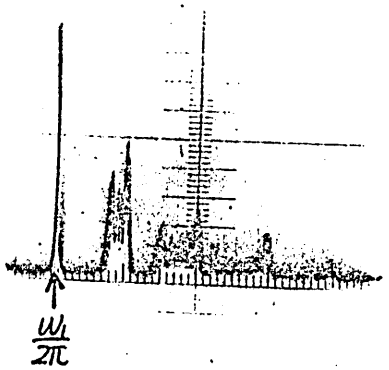
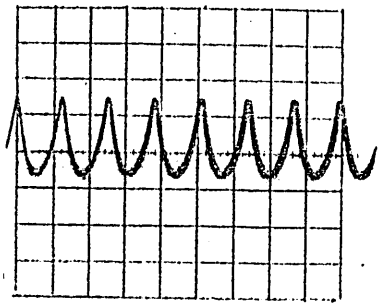


図12 ビート波形 (0.5μS/div 0.01V/div)

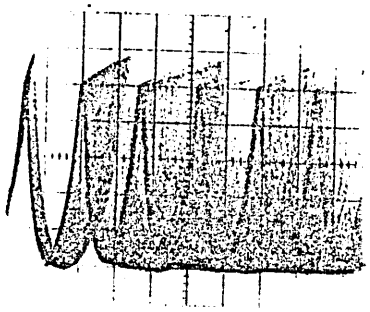
図12 (a)～(c)は $\delta=0.92$, (d)は $\delta=0.25$ で無変調波を注入したときのビート波形である。(a)～(d)はそれぞれ(13)～(16)式の $m=0$ での波形に対応する。(a)(c)と(d)の波形は，AM波を注入することで PFM, FM 波として使用される。

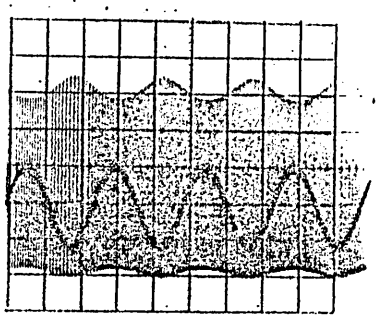
図13は $\delta=0.93$, $\frac{\Delta\omega_0}{2\pi}=1.67\text{MHz}$, $\frac{P}{2\pi}=20\text{KHz}$, $m=4\%$ で(a)は出力スペクトル(b)は同期検波波形で無変調とAM変調したときの波形，(c)は同期検波波形と低周波出力の関係を示す。低周波の周波数は変調周波数に等しい。スペクトルはサイドバンドのみを持つことから PFM-SS変調されていることがわかる。





(b)





(c)

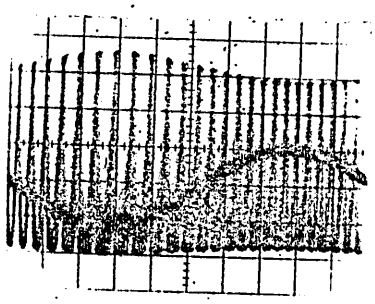


図13 PFM波形

歪に関しては定量的な測定は行なっていないが $\delta=0.97$, $\frac{\Delta\omega_e}{2\pi}=1.8$ MHz, $\frac{P}{2\pi}=20$kHz のもとで m を深くするに従って, 歪が生じる様子を図14に示す。A_3 スペクトルの端が A_2 スペクトルと重ならない状態では歪がない出力を得るが(図a), A_2 に重なると歪, あるいは雑音を生じる(図b), さらに A_2 スペクトルの端が, A_1 スペクトルに重なると脈流になる(図c)。

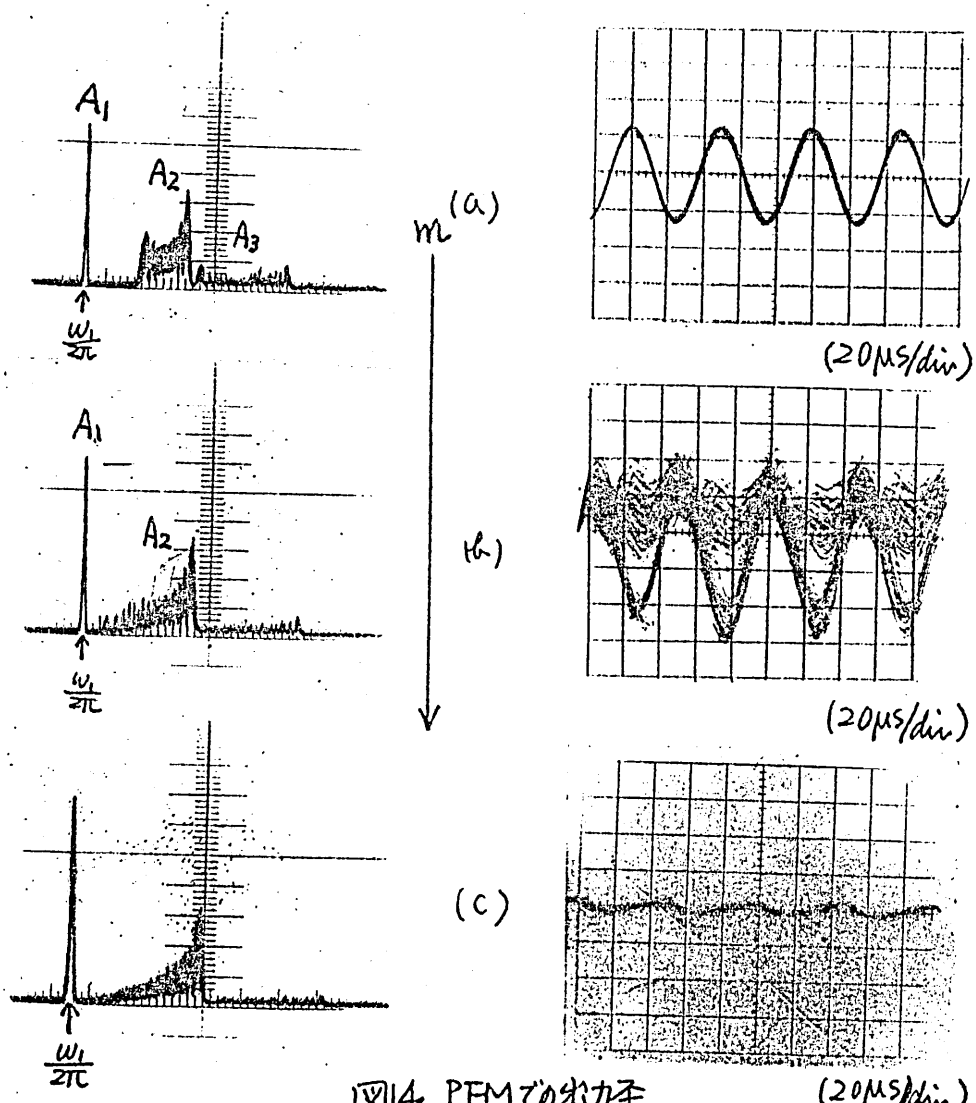


図14. PFMでの出力歪

一方，各スペクトルはFM変調されており，そのFM変調度が大きくなれば，変調周波数Pに無関係に 帯域幅Bは，ほぼ一定になることを A_2 スペクトルに関して示したのが図15である。図よりPを変化させても一定であることがわかる。なおこの時のFM変調度は P=100Hz, 1KHz, 20KHz で 2517, 2517, 12.6であった。

図16は $\delta=0.25$, $\frac{\Delta\omega_c}{2\pi}=1.67$MHz, $m=100\%$, $\frac{P}{2\pi}=20$kHz におけるスペクトルと同期検波と低周波出力波形を示す。

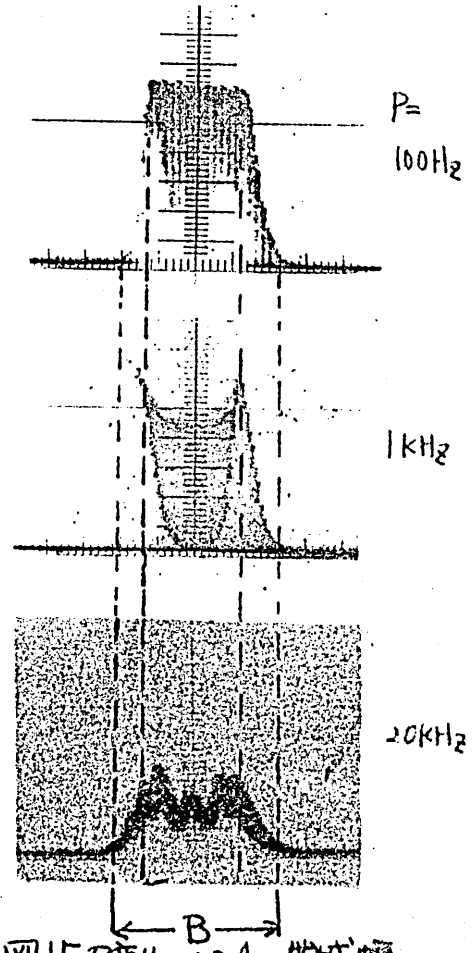


図15 P変化による A_2 の帯域幅

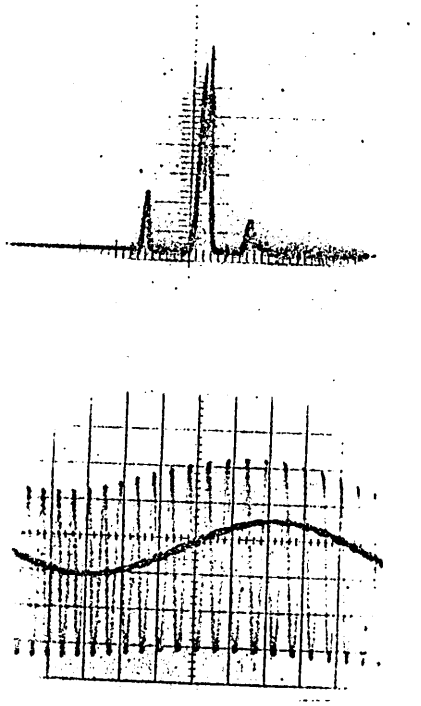


図16 FM波形 (10μS/div)

4. あとがき

発振器の同期範囲外から,少し離れた所に無変調波を注入すれば, サイドバンドを生じる。そして, サイドバンド内の各スペクトルは, AM波を注入した時にはFM変調される。FM変調されたスペクトルの様子は, 実験と解析が一致することがわかった。FM変調度は, δ が1に近いほど, また注入信号より離れたスペクトルほど深いFM変調度を示す。FM変調度はAM変調度に関して, 良い直線性を示す。この様に, 深いFM変調波が得られることから, 適当なフィルターを用いてスペクトルを選択すれば, 浅いAM変調度で深いFM変調度をもつFM波が得られる。

一方, 同期範囲外でAM波を注入することで, 発振器のビート波形がFM変調されたパルス波であることを示し, かつスペクトルはサイドバンドのみしか存在しないためPFM-SS変調が可能であることを示した。また注入量を変えればFM-SS変調が行なえる。簡単な回路を附加することでPPM-SS, FM-SS変調も可能である。この変調器の特色をまとめると, 次の事が考えられる。

1) SSBを作るためのフィルターを必要としない。
2) 構成が簡単であるため経済的である。
3) 注入信号周波数に等しい成分をもつSSBであるから容易に同期検波することが出来る。

4) 注入量を変えることで PPM-SS方式のパルス通信に，またFM-SS方式としてのファクシミリ等に使用出来る。

5) 注入信号周波数と自励発振周波数の差が正か負かによりパルスの極性が変化する。

同期範囲外での注入発振器の応用の一例を示したが，その他，多くの応用があると思われる。

今後は歪の定量測定を行なう必要があり，また他の変調波についても考慮してゆきたい。

おわりに有益な助言をいただいた関西大学，大東逸久専任講師に感謝します。実験の便宜をはかっていただいた，中部工業大学，宮脇沢美助教授に感謝します。

文 献

1) 池上，中島：信学会誌，54，P693，(1971-05).

2) 磯部：日経エレクトロニクス，P50(1971,10,25).

3) Adler, R.,: Proc. IRE, 34, P351, (Jun. 1946).

4) Khokhlov: Proc. IRE, CT-7, P398 (Dec. 1960).

5) 新沼，高木原野：信学会 非線型研資，NLP71-3，(1971-07).

6) 斎藤：信学論(B)，58-B，P472，(1975-09).

7) 斎藤：信学論(B), 58-B, P473, (1975-09).

8) 新沼,高林,真野：信学論(B), 55-B, P300, (1972-06)

9) T.J. Buchanan: Proc. IRE, 40, P958 (Aug. 1952).

10) Stover. H. L etc: Proc. IEEE, 54, P310, (Feb. 1966)

11) 石川,竹田,森田,嶋澤：輻射科学研究会 RB48.12.4.

12) 石川,竹田,竹田,森田：信学論(B), 58-B, P416, (1975-08).

付録

無変調波を発振器に注入すれば，出力はサイドバンドを生じることがわかっているから，ビート波形のスペクトルを求めることで出力スペクトルがわかる。つまり $g(t)=\sin\alpha$ を求めればよい。

(10)式で $m, \delta \ll 1$ とし，m の1次，δ の4次の項まで考慮して解くと．

$$g(t)=\sin\alpha \fallingdotseq \left(\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{8}\delta^3\right)(1-m\cos pt) \quad ①$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left\{1-\left(\frac{1}{4}\delta^2+\frac{1}{8}\delta^4\right)\left(1-\frac{2mn}{\beta}\right)\right\}J_n(\beta)\sin(\Delta\omega_0'+np)t\right] \quad ②$$

$$-\frac{1}{2}\delta\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{mn}{2\beta}\right)J_n(2\beta)\sin(2\Delta\omega_0'+np)t\right\} \quad ③$$

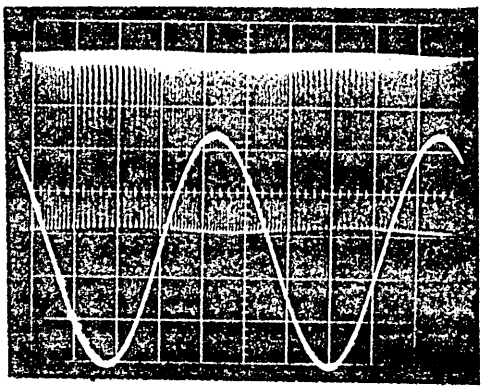
$$-\left(\frac{1}{4}\delta^2+\frac{1}{16}\delta^4\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{2mn}{2\beta}\right)J_n(3\beta)\sin(3\Delta\omega_0'+np)t\right\} \quad ④$$

$$-\frac{1}{8}\delta^3\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{3mn}{4\beta}\right)J_n(4\beta)\sin(4\Delta\omega_0'+np)t\right\} \quad ⑤$$

$$-\frac{1}{16}\delta^4\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{4mn}{5\beta}\right)J_n(5\beta)\sin(5\Delta\omega_0'+np)t\right\}$$

①, ②, ……, ⑤ は(12)式のそれに対応する。

付録2



PFM

同期検波出力

低周波出力

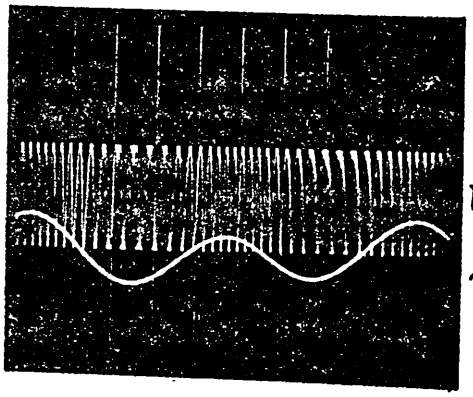
$\delta = 0.93$

$\frac{\Delta\omega_0}{2\pi} = 3\text{MHz}$

$\frac{P}{2\pi} = 20\text{kHz}$

$m = 0.17$

(10μs/div.)



FM

同期検波出力

低周波出力

$\frac{P}{2\pi} = 10\text{kHz}$

$m = 0.87$

拡散型光導波路における金属装荷の効果

安東泰博　丹治秋人　増田正光　小山次郎

（大阪大学　工学部　電子工学科）

昭和50年12月5日

輻射科学研究会

拡散型光導波路における金属装荷の効果

PROPERTIES OF MODES IN DIFFUSED OPTICAL WAVEGUIDES WITH METAL CLADDING

安東泰博　丹治秋人　増田正光　小山次郎
（大阪大学　工学部　電子工学科）

1. まえがき

$LiNbO_3$や$LiTaO_3$などの電気光学結晶を基板として，その上に各種の光学デバイスを集積化しようとする試みは，将来の光集積回路にとって興味ある問題である．このような電気光学結晶上の光導波路としてはプレーナ電極による電圧誘起型のもの[1]，そして近年，Out-diffusion[2]や金属及び酸化物のIn-diffusion[3][4]によるいわゆる拡散型のものが報告されている．

このような拡散型光導波路の伝搬特性について，解析的な厳密解が得られているのは指数関数的な分布[5]と直線的な分布[6]の場合のTEモードについてだけであり，他はWKB法などの近似的手法によって検討されている．

さて，光集積回路にこのような光導波路を利用する場合，電気光学結晶の能動的な機能を引き出したり，金属クラッドによる3次元光導波路[7]，モードフィルター[8]等の金属装荷による機能性を利用するためには，金属を装荷した時の拡散型光導波路の伝搬，損失特性の検

討が必要となる.

本論文では電気光学結晶上につくられた,このような金属装荷光導波路の特性を結晶のもつ異方性を考慮して一般的に検討する. まず直線型屈折率分布(Linear-Index-Distribution Waveguide; LIDW)をもった金属装荷導波路に関して,波動論的に取り扱い,層状誘電体板導波路(Step-Index-Distribution Waveguide; SIDW)の特性と対比して,拡散型における導波モードの伝搬損失を評価する. さらに,その物理的イメージを明らかにするために,光線近似[9]を用いた新たな取り扱い方法を示し,これに基づいた数値計算により,任意の屈折率分布をもった拡散型導波路に金属を装荷した場合の導波モードの伝搬,損失特性及び電磁界分布の拡がりについて検討する.

最後に,このような金属装荷拡散型光導波路の一例として,3電極プレーナ構造による電気光学効果光導波路[10]($LiNbO_3$ C板使用)に関する実験結果を示す.

2. 直線型屈折率分布をもつ金属装荷導波路の特性

任意の屈折率分布をもった拡散型光導波路について厳密な波動解析を行なうのはかなり困難で,従来のこれに関する報告は主にWKB法[6][11]などの近似的手法に頼っている. しかし,ここで対象としている金属装荷による導波モードの損失というようなさらに詳細な議論を必要とする場合には,できるだけ正確な波動方程式の解が

要求される．そこで比較的解析の容易なLIDWについて厳密解を求め，金属装荷拡散型導波路の特性を明らかにするとともにその伝搬損失の傾向を評価する．

2.1 SIDWの特性[12]

LIDWを考える前に，SIDWにおける金属装荷の効果を知る必要がある．図1において光波はz方向に伝搬し各領域の屈折率は次式で与えられる．

$$y \geq 0 \qquad n_m^2 = \varepsilon_m = \varepsilon_R + j\varepsilon_I$$

$$-b \leq y \leq 0 \qquad (n_{b\nu} + \Delta n_\nu)^2 \simeq \varepsilon_{b\nu} + \Delta\varepsilon_\nu$$

$$y \leq -b \qquad n_{b\nu}^2 = \varepsilon_{b\nu}$$

ただし $\nu = x, y, z$

光波長領域ではεR<0，εI<0であり，y≤0では結晶の異方性を考慮している．金属を装荷したときの導波モードのz方向の伝搬定数 k_z $(=\beta - j\alpha)$ はそのカットオフ近傍を除いて近似的に求めることができ，結局，減衰定数αsは次式で評価することができる．

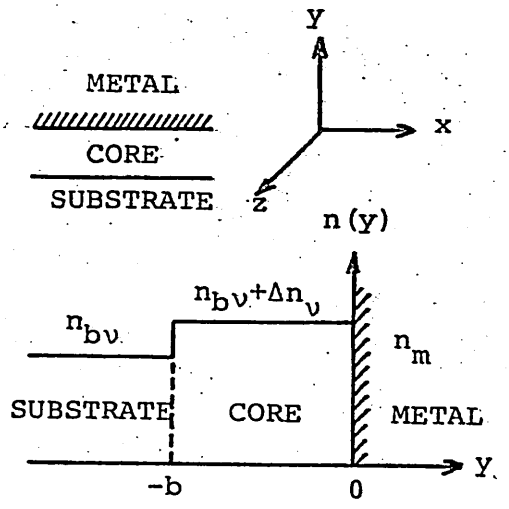


図1. 金属クラッドSIDW
(コアおよび基板は異方性媒質で，$\nu = x, y, z$)

$$\alpha_S \simeq -\frac{g^2 A_1 \pi}{b^3} \times \begin{cases} \frac{1}{\beta_{TE}} F_{TE}^{-3} \eta_I & \text{for TE modes} \\ \frac{1}{\beta_{TM}} F_{TM}^{-3} \left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_{bz}}\right)\left(1-\frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{bz}}\right)\left(\eta_I+\frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_R}\eta_R\right) & \text{for TM modes} \end{cases} \quad (1)$$

ここで $F_{TE} = 1 + \left(\frac{A_2}{b\pi}\right) + \left(\frac{A_1}{b\pi}\right)\eta_R$

$$F_{TM} = 1 + \left(1-\frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{bz}}\right)\left(\frac{A_2}{b\pi}\right) + \left(\frac{A_1}{b\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_{bz}}\right)\left(1-\frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{bz}}\right)\left(\eta_R - \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_R}\eta_I\right)$$

$$A_1 = \lambda/2\sqrt{(\varepsilon_{bv}+\Delta\varepsilon_v)-\varepsilon_R}\ , \quad A_2 = \lambda/2\sqrt{2\varepsilon_{bv}\Delta\varepsilon_v}$$

$$\eta = 1\Big/\sqrt{1+j\frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_R-(\varepsilon_{bv}+\Delta\varepsilon_v)}} = \eta_R + j\eta_I$$

$$\beta_{TE} = k_0 n_{eff.TE}\ , \quad \beta_{TM} = k_0 n_{eff.TM}\ , \quad k_0 = 2\pi/\lambda$$

TEモードに対しては $v = x$, TMモードでは $v = y$ である. λ は自由空間波長, η_R, η_I は金属の特性量を表わし ε_R, ε_I, ε_{bv}, $\Delta\varepsilon_v$ によって決定する. また n_{eff} は導波モードの実効屈折率であり, モード次数 g はコア内の電磁界の極値の数に対応し, $g = 1, 2, 3 \cdots\cdots$.

各種の金属に対して, TMモードの伝搬損失はTEモードのものより大きく, 例えば, C軸を y 方向に選んだ $LiNbO_3$ ($n_o = 2.286$, $n_e = 2.200$) で, 金属としてアルミニウム ($\varepsilon_R = -27.0$, $\varepsilon_I = -17.6$) を考え, $b = 4\mu m$, $\lambda = 0.6328\ \mu m$, $\Delta n_x = \Delta n_y = 3\times10^{-3}$ としたとき, TM_1 モードおよび TE_1 モードの伝搬損失は各々 9.5 dB/cm, 1.1 dB/cm となる.

式(1)より, 金属を装荷した SIDW 中の導波モードの減衰定数 α_S は

$$\alpha_S \propto (g\lambda)^2 / b^3 \qquad (2)$$

2.2 LIDWの特性

ここでは，導波路内の屈折率分布を図2に示すように直線で与え，波動論的に取り扱うことによって分散関係式を導出する．さらにその近似解から先に示したSIDWの結果（式(2)）と対比して，LIDWにおける導波モードの減衰定数α_Lを評価する．導波路の屈折率を次式のように仮定する．

$$n_\nu^2(y) = \varepsilon_\nu(y) = \varepsilon_{b\nu} + \Delta\varepsilon_\nu\left(1 + \frac{y}{d_\nu}\right) \qquad (3)$$

$\nu = x, y, z$

ここでd_νは拡散深さである．

TEモードは結晶の異方性に無関係であるが，TMモードは異方性の影響を受け，その取り扱いが複雑になる．C軸をy方向に選んだ結晶に金属をIn-diffusionしたとき，一般に$\Delta\varepsilon_z \neq \Delta\varepsilon_y$，$d_z \neq d_y$となるが，この場合のTMモードの分散関係式は付録にゆずる．ここでは煩雑さを避けるため，$d_y \neq d_z$の場合について考える．TMモードに対しては，$\varepsilon_z(y)$が slow varing function

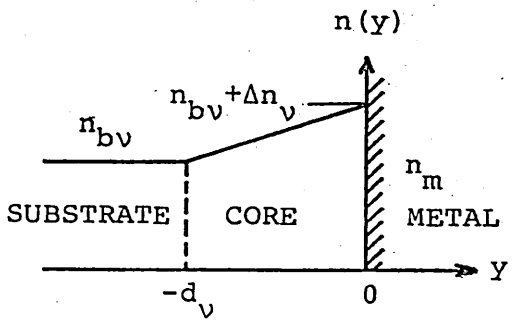


図2. 金属クラッドLIDW
$\nu = x, y, z$ ，Δn_ν；コア内の最大屈折率差
d_ν；拡散の深さ

と考え，さらに $\Delta\varepsilon_\nu \ll \varepsilon_{b\nu}$ を考慮して次式を得る．

$$\frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} + a^2(y+y_t)G_x = 0 \tag{4}$$

ここで

$$G_x = \begin{cases} E_x & ; \text{for TE modes} \\ H_x/\sqrt{\varepsilon_z(y)} & ; \text{for TM modes} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} a = \left(\frac{\Delta\varepsilon_\nu}{d_\nu}\right)^{\frac{1}{2}} k_0 \left[\frac{1}{1-\Delta K_z+\Delta K_y}\left\{K+(\Delta K_z-\Delta K_y)\frac{1}{\Delta\varepsilon_y}\left(\frac{k_y}{k_0}\right)^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \\ y_t = \left(\frac{k_y}{a}\right)^2 \\ k_y^2 = (\varepsilon_{b\nu}+\Delta\varepsilon_\nu)k_0^2 - K(1-\Delta K_y+\Delta K_z)k_z^2 \\ \gamma_m^2 = k_z^2 - \varepsilon_m k_0^2 \quad , \quad \gamma_b^2 = K(k_z^2 - \varepsilon_{b\nu}k_0^2) \end{cases} \tag{6}$$

さらに

$$\begin{aligned} &K=1,\ \Delta K_z=\Delta K_y,\ \nu=x && ;\text{for TE modes} \\ &K=\frac{\varepsilon_{bz}}{\varepsilon_{by}},\ \Delta K_y=\frac{\Delta\varepsilon_y}{\varepsilon_{by}},\ \Delta K_z=\frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{bz}},\ \nu=y && ;\text{for TM modes} \end{aligned} \tag{7}$$

y_t は転移点であり，この点を境にして G_x は振動型関数から指数関数的に減少する関数へ移行する．従って $\mathrm{Re}(y_t)$ が導波モードの実効導波路幅に対応し，$-d_\nu \le \mathrm{Re}(y_t) < 0$ となる．

$y=0,\ -d_\nu$ における電磁界の接線成分が連続として，次のようにベッセル関数 J_ν および変形ベッセル関数 I_ν を含む分散関係式を得る．

$$\frac{J_{\frac{2}{3}}(u_0)-g_1 J_{-\frac{1}{3}}(u_0)}{J_{-\frac{2}{3}}(u_0)+g_1 J_{\frac{1}{3}}(u_0)} = \frac{I_{\frac{2}{3}}(u_d)+g_2 I_{-\frac{1}{3}}(u_d)}{I_{-\frac{2}{3}}(u_d)+g_2 I_{\frac{1}{3}}(u_d)} \tag{8}$$

ここで

$$g_1 = \gamma_m / k_y \ , \ g_2 = 1 \qquad ; \text{for TE modes}$$

$$\begin{cases} g_1 = \left(\frac{\varepsilon_{bz}+\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_m}\right)\frac{\gamma_m}{k_y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{bz}+\Delta\varepsilon_z}\right)\frac{1}{k_y d_y} \\ g_2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{bz}}\right)\frac{1}{\gamma_b d_y} \qquad ; \text{for TM modes} \end{cases} \tag{9}$$

$$u_0 = \frac{2}{3} a \gamma_t^{3/2} \ , \ u_d = \frac{2}{3} a (d_\nu - \gamma_t)^{3/2} \tag{10}$$

式(8)右辺の関数値は $u_d \simeq 0$，すなわち $Re(\gamma_t) \simeq d_\nu$ なる導波モードのカットオフ近くで急激に零に近づくが，この点を除いては，その値が1としてさしつかえない．従って，Well-guided modes に対して，ベッセル関数の漸近展開式を用いて，式(8)の近似式は次のようになる．

$$\tan\left(u_0 - \frac{\pi}{4}\right) \simeq g_1 \tag{11}$$

$|\gamma_m / k_y| \gg 1$ であることから，実効導波路幅を示す $Re(\gamma_t)$ の近似解は

$$Re(\gamma_t) \simeq \left[\frac{3}{2}\left(q-\frac{1}{4}\right)\pi K^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{k_0}\sqrt{\frac{d_\nu}{\Delta\varepsilon_\nu}} \right]^{\frac{2}{3}} \tag{12}$$

ここで再び TEモードで $K=1$，$\nu = x$，TMモードでは $K = \varepsilon_{bz}/\varepsilon_{by}$，$\nu = y$．式(12)では既に金属の効果は失われているが，先の SIDW での結果と対比させることによって，LIDW に関する導波モードの減衰定数 α_L

を評価することができる. SIDWとLIDWの対応は,

$$R_e(\gamma_t) \longleftrightarrow b \quad , \quad \beta - \frac{1}{4} \longleftrightarrow \beta \qquad (13)$$

式(2)及び式(12)(13)より

$$\alpha_L \propto \frac{\Delta\varepsilon_\nu}{d_\nu} \quad , \nu = x, y \qquad (14)$$

式(12)から明らかなようにLISWではモード次数βの増加と共に実効導波路幅が大きくなり, SIDWの場合に見られるような, βによるαの増大が打ち消される. それゆえ, α_Lはβに無関係となる.

なお, カットオフでは$\beta_z^2 = \varepsilon_{b\nu} k_0^2$, $\gamma_t = d_\nu$ $(\nu = x, y)$となり, 式(8)の右辺は零となる. 従ってカットオフでの$\Delta\varepsilon_\nu$の値は$J_{-\frac{1}{3}}(u_0) = 0$の零点, を求めることによって得られる.

$$\Delta\varepsilon_\nu\Big|_{cut\,off} \simeq K^{-1}\left\{\frac{3}{4}\left(\beta - \frac{5}{12}\right)\frac{\lambda}{d_\nu}\right\}^2 , \nu = x, y \qquad (15)$$

2.3 数値計算

分散関係式(8)はNewton-Raphson法を用いて, 容易にその数値解を求めることができる. 結晶として$LiNbO_3$を考え, そのC軸をy方向に選び, さらに金属はアルミニウムを想定した. $\lambda = 0.6328\,\mu m$のHe-Neレーザ光に対して

$$\varepsilon_{bx} = \varepsilon_{bz} = 2.286^2 \quad , \quad \varepsilon_{by} = 2.200^2 \quad , \quad \varepsilon_m = -27.0 - j17.6$$

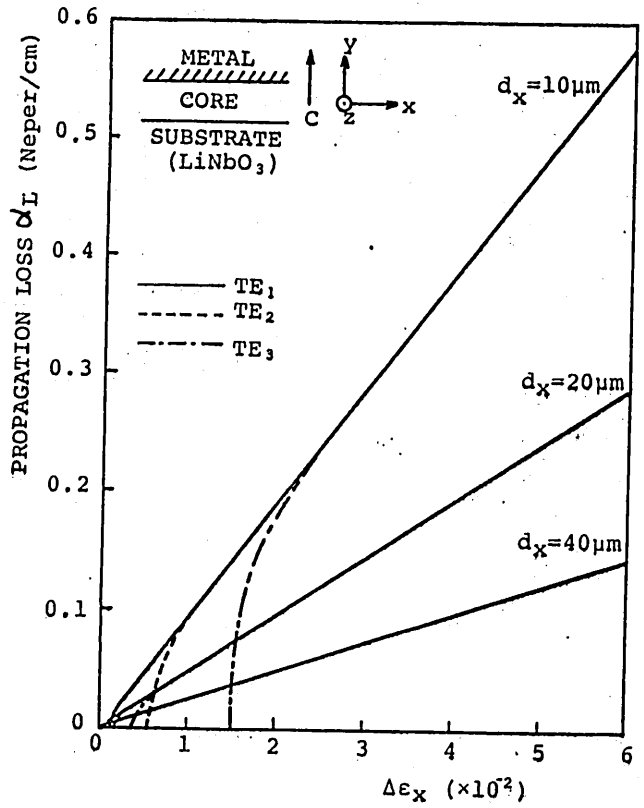
また, $\Delta\varepsilon_z = 1.05 \times 10^{-2}$, $d_z = d_y$である. 図3は拡散の深さd_νをパラメータとして, $\Delta\varepsilon_\nu$に対するα_Lの変化を示し

たものである．いずれの導波モードおよびd_yに対しても
カットオフ近傍を除いてα_Lは$\Delta\varepsilon_y$と共に直線的に増加
し，またその値はモード次数gにほとんど依存しない．
むしろgの増加と共にα_Lはわずかに減少する傾向にあり，
$d_y = 10\,\mu m$のTMモードに対して顕著に現われている．

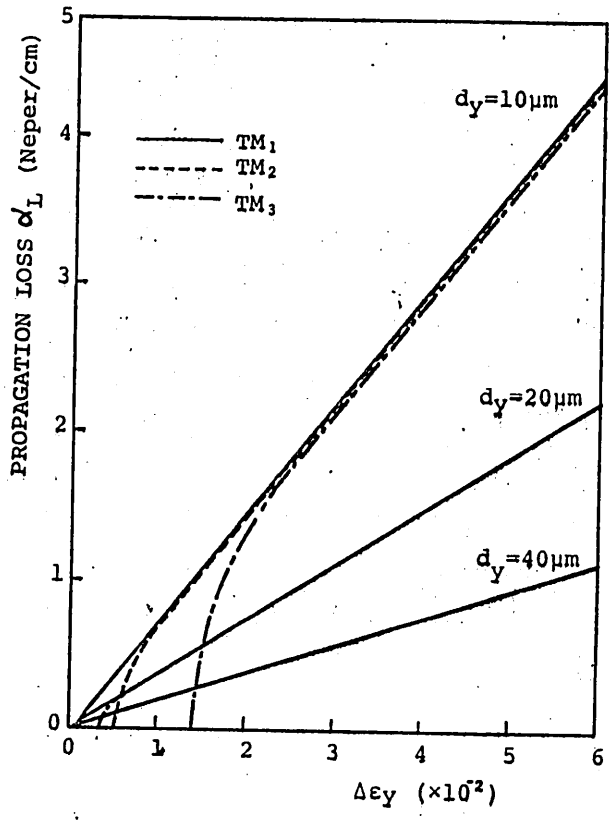
このような$\Delta\varepsilon_y$に対するα_Lの変化はLIDW独特のもの
であり，SIDWではα_Sの値はλ，導波路幅bおよびgモード
次数によって与えられ，$\Delta\varepsilon_y$に対しては一定である．[12]
カットオフ近傍において見られるα_Lの急激な減少は，
カットオフに近づくにつれて基板結晶への導波モードの電
磁界浸透率が大きくなり，その分だけ金属界面での電
磁界集中が緩和されるためである．

Well-guided modesにおいて$\Delta\varepsilon_x = \Delta\varepsilon_y$としたとき，TM
モードのα_Lの値はTEモードの約8.3倍となり，金属装荷
の効果はTMモードに対して顕著に現われる．これは厚み
方向の電磁界分布にも見られ，TMモードの$Re\{H_x(y)\}$
分布ではSIDWの場合に，すでに指摘されているが，[7]
LIDWにおいても，$y=0$の金属界面近くで位相反転が
生じる．(図4)　結晶の異方性はα_Lを決定する要因で
はないが，C軸をx方向に選んだ場合，TEモードのα_L
は2.4%減少し，TMモードでは逆に10.5%増加する．

なお，Out-diffusionで作られたC板$LiNbO_3$の薄膜導
波路を考えて，$\Delta\varepsilon_z = 0$，$d_z = 0$とした時の結果は図3(b)と
大差なく，α_Lの値でわずか数%変化するにすぎない．すな
わち，$d_y = d_z$として得られたこれまでの結果は，$d_y \neq d_z$
の場合にも十分保持される．



(a) TE モード



(b) TM モード

図3. 金属クラッドLIDWの伝搬損失

金属(アルミニウム) : $\varepsilon_m = -27.0 - j17.6$
結晶($LiNbO_3$) : $n_e = 2.200$, $n_o = 2.286$
$\lambda = 0.6328\,\mu m$ (He-Ne レーザ光)

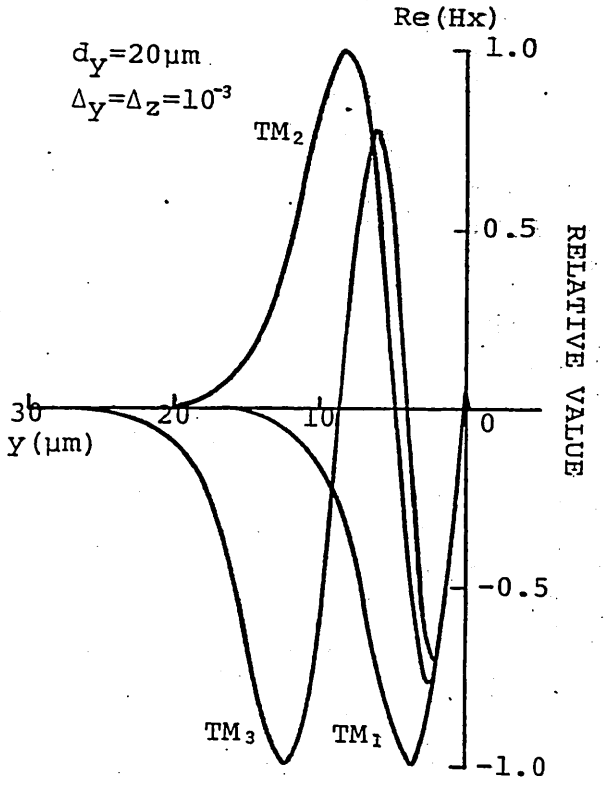


図4.
金属クラッドLIDWにおけるTMモードの界分布

$\varepsilon_m = -27.0 - j17.6$
$n_{by} = 2.200$
$n_{bz} = 2.286$
$\lambda = 0.6328\,\mu m$

2.4 結言

以上のように金属を装荷した電気光学結晶上の拡散型光導波路(LIDW)における導波モードの伝搬特性について検討してきたが，この結果，カットオフ近傍を除いて減衰定数α_Lはモード次数ℓに無関係に単に$\Delta\varepsilon_\nu/d_\nu$ ($\nu=x,y$)に比例することが明らかになった．ここで$\Delta\varepsilon_\nu = 2n_{b\nu}\Delta n_\nu$であり，$n_{b\nu}$, Δn_νは光波の偏光方向における基板結晶の屈折率及び導波路内の最大屈折率差，またd_νは拡散の深さである．このようなSIDWの場合とは異なるα_Lの依存性は一般的には拡散型導波路における実効導波路幅がモード次数によって変化することに帰因する．

任意の屈折率分布に関する伝搬損失については以下の章において取り扱うが，本章のLIDWの結果は補誤差関数的

屈折率分布をもつ場合のものと最もよく一致する.

3. 任意の屈折率分布をもつ拡散型導波路の解析

3.1 光線近似による数値計算法

本節では,異方性媒質中の任意の屈折率分布をもった金属装荷拡散型導波路を伝搬するモードの位相定数,損失,転移点を計算する新たな数値的解法について述べる.

異方性誘電体導波路は図5に示す座標系において,$y>0$の半空間を占めており,異方性の各主軸は導波路の座標軸と一致しているとすると,屈折率あるいは誘電率は対角テンソル$\overleftrightarrow{n}$あるいは$\overleftrightarrow{\varepsilon}$で表わされる.

$$\overleftrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \end{pmatrix} \tag{16}$$

光導波路の屈折率分布を次のように書き表わしておく.

$$n_\nu(y) = n_{b\nu} + \Delta n_\nu f_\nu(y/d_\nu) \quad (\nu = x, y, z) \tag{17}$$

ここで,$n_\nu(y)$の最大値は$n_{s\nu} = n_{b\nu} + \Delta n_\nu$で,$f(y/d_\nu)$は拡散による屈折率の変化を示し,0と1の間の値をとる.d_νは拡散深さである.

表面($y \leq 0$)に複素屈折率n_mをもつ金属が存在するため,この導波路を伝搬する導波モードは損失を受け,z方向の伝搬定数は一般に複素数となる.しかしこの問題を幾何光学的に考えた場合,導波路内を伝搬する波動は主に金属と

の界面でのみ損失を受け，$y>0$ なる結晶中では非減衰波として振舞うと考えるのが妥当である．従って，金属界面で導波モードの位相シフトが複素数であることを考慮して，$y>0$ では z 方向の伝搬定数を実数とする．また導波路を図5に示す如く微小区間に分割して，光線近似により光波の挙動を解析する．

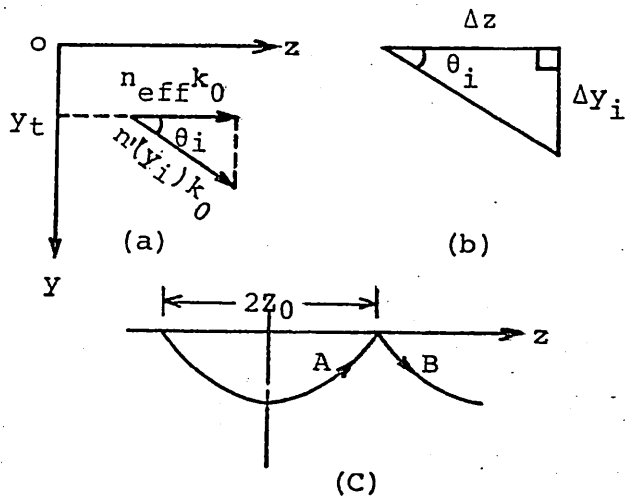


図5．光線近似による数値計算法の説明図

z 方向に位相定数 $\beta = n_{eff}k_0$ で伝搬する導波モードに対して，深さ y_i における光線は $n'(y_i)k_0$ の位相定数をもって z 軸と θ_i の角度を成して進行する．$n'(y_i)$ は各モードによって見られる異方性の等価屈折率で次式によって与えられる[13]．

$$\begin{cases} n'(y_i) = n_y(y_i)n_z(y_i)\{n_z^2(y_i)\cos^2\theta_i + n_y^2(y_i)\sin^2\theta_i\}^{-\frac{1}{2}} & ;\text{for TM modes} \\ n'(y_i) = n_x(y_i) & ;\text{for TE modes} \end{cases} \tag{18}$$

また，θ_i は図5(a)からもわかるように

$$\theta_i = \cos^{-1}\left\{\frac{n_{eff}}{n'(y_i)}\right\} \tag{19}$$

となる．TM モードに対しては $n'(y_i)$ は θ_i の関数となるので

式(19)を書き直すと次のようになる.

$$\theta_i = \cos^{-1}\left[\frac{n_{eff}}{n_z(y_i)}\left\{1+n_{eff}^2\left(n_z^{-2}(y_i)-n_y^{-2}(y_i)\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (20)$$

深さ y_i の点における光線の伝搬ベクトルの y 方向成分は $n'(y_i)k_0\sin\theta_i$ であり, z 方向に微小距離 Δz だけ光線が伝搬した時の y 方向への移動距離 Δy_i は図5(b)に示したように

$$\Delta y_i = \Delta z \tan\theta_i \quad (21)$$

となるので, 光波が微小距離 Δy_i の間に受ける y 方向の位相変化は次式で与えられる.

$$\phi_i = n'(y_i)k_0\sin\theta_i\,\Delta y_i \quad (22)$$

また金属との界面及び光線の引き戻し点, (転移点 y_t)において, 反射による位相シフトを受けることがよく知られているが, 金属との界面においては複素屈折率 n_m の影響によって, この位相シフトが複素数となる. 金属との界面における位相シフトは次のようになる.

$$2\Phi_i = 2\tan^{-1}\left[\frac{1}{K_s}\left(\frac{n_{sz}}{n_m}\right)^2\left(n_{eff}^2-n_m^2\right)^{1/2}/\left(n_{sy}^2-n_{eff}^2\right)^{1/2}\right] \quad \text{; for TM modes}$$

$$2\Phi_i = 2\tan^{-1}\left[\left(n_{eff}^2-n_m^2\right)^{1/2}/\left(n_{sx}^2-n_{eff}^2\right)^{1/2}\right] \quad \text{; for TE modes} \quad (23)$$

一方, 転移点における位相シフトは実数となり, (TE・TMモード共に)異方性を考慮しても Hocker ら[9]によって与えられたように.

$$2\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \tag{24}$$

となることが証明される.

図5(C)のように入射波A, 反射波Bを同時に考えた場合, 位相シフトφ_1の定義から この振幅比 B/A とφ_1は次式で関係づけられている.

$$B/A = e^{j2\varphi_1} = e^{-2\varphi_{1I}} \cdot e^{j2\varphi_{1R}} \tag{25}$$

ただし $\varphi_1 = \varphi_{1R} + j\varphi_{1I}$

式(25)においてφ_1の実部が反射によって受ける位相シフトであり, 虚部が振幅の減少を表わしている.

導波モードが構成されるためには, 光線が光導波路を一周期進む間の全横方向位相変化が2πの整数倍になることが必要である. 従ってモードの分散関係式として次の関係式が成立しなければならない.

$$\Sigma\Phi_i - 2\varphi_{1R} - 2\varphi_2 = 2m\pi \tag{26}$$

式(26)を満足する導波モードの実効屈折率n_{eff}は数値計算によって容易に求めることができる. なお, TEモードに関してはmは 0, 1, 2 …… なる整数であり, モード次数gとは, $g = m+1$ の関係になる. TMモードについては$m=0$のモードは, いわゆる表面波モードとなり, これは本解析では対象外であるので, $m = g = 1$ からの導波モードについてのみ検討する.

次にこの導波モードの伝搬損失についてであるが, これは以下のように考えることができる. 導波路内を伝搬する

光線は金属との界面における反射毎に $\exp(-2\pi_{IZ})$ だけの振幅の減少を受け，他の部分では損失はない．
従って，損失 α は

$$\alpha = \frac{2\pi_{IZ}}{2z_0} = \frac{\pi_{IZ}}{z_0} \quad (\text{Neper/cm}) \qquad (27)$$

で定義される．ここで $2z_0$ は光線が導波路内を一周期の間に進むz方向への距離で，$2z_0 = \sum_i \Delta z$ である．
より厳密には図6に示すように，一回の反射によって受ける振幅の減少を単位長さ当りに変換する時，界面による反射によって受ける Goos-Haenchen Shift[14] と呼ばれる位置のシフトを考慮しなければならない．この場合，損失の定義として式(28)が得られる．

$$\alpha = \frac{\pi_{IZ}}{z_0 + \delta_1 + \delta_2} \qquad (28)$$

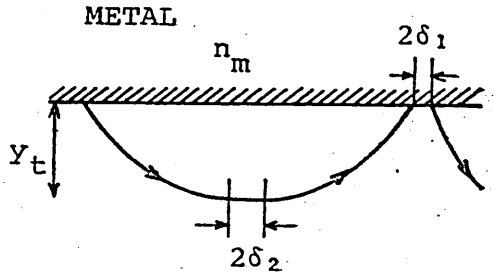


図6. Goos-Haenchen Shift

この Goos-Haenchen Shift δ_1, δ_2 は入射光線が臨界角に十分近いときのみ影響を及ぼすが，それ以外では非常に小さいことが知られている．
また，金属との界面においては任意の入射角において δ_1 は小さい．[14] δ_2 の正しい評価は目下のところ与えられていないが，少なくとも臨界角近傍以外では $\delta_2 \ll z_0$ として良い．それゆえ，伝搬損失の定義として我々は式(27)を使って，3.3節以下で述べる数値計算を実行した．

3.2 拡散型光導波路内の幾何光学

本節においては，簡単のために媒質は等方性であると仮定し，幾何光学的取り扱いにより光線の軌跡について議論する．さらにLIDWの場合について詳しく検討し，Well-guided modesに対する n_{eff}, y_t の近似式を導出する．

光線の軌跡を表わす位置ベクトル r は次の運動方程式を満足する[15]．

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dr}{ds}\right) = \text{grad}\, n \qquad (29)$$

ここで n は屈折率，ds は光線の軌跡の線要素である．式(29)を x-z 座標系で表わすと，

$$d\frac{n}{(1+\tan^2\theta)^{1/2}} = (1+\tan^2\theta)^{1/2}\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)dz \qquad (30.a)$$

$$d\frac{n\tan\theta}{(1+\tan^2\theta)^{1/2}} = (1+\tan^2\theta)^{1/2}\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)dz \qquad (30.b)$$

ここで $\tan\theta = dz/dy$ である．

スラブ形の拡散型光導波路の屈折率変化は y 方向についてだけであるので式(30)は実効屈折率 n_{eff} を使って

$$\frac{n(y)}{(1+\tan^2\theta)^{1/2}} = n_{eff} \qquad (31.a)$$

$$\frac{d(\tan\theta)}{(1+\tan^2\theta)^{1/2}} = \frac{1}{n_{eff}}\left(\frac{dn}{dy}\right)dz \qquad (31.b)$$

を表わされる．

LIDWの場合，屈折率分布が $n(y) = n_s - \frac{\Delta n}{d}y$ で表わされる．この時，式(31.b)を $z=0$ において $y=0$ という初期条件

のもとで積分すると，

$$\tan\theta = \frac{[\eta^2 \exp(-2\frac{\Delta n z}{n_{eff} d}) - 1]}{2\eta \exp(-\frac{\Delta n z}{n_{eff} d})} \tag{32.a}$$

$$y = \frac{d}{\Delta n}[n_s - n_{eff}(1+\tan^2\theta)^{1/2}]$$

$$= \frac{d}{\Delta n}\left[n_s - n_{eff}\frac{\eta^2 \exp(-2\frac{\Delta n z}{n_{eff} d}) + 1}{2\eta \exp(-\frac{\Delta n z}{n_{eff} d})}\right] \tag{32.b}$$

ここで $\eta = \frac{1}{n_{eff}}(n_s + \sqrt{n_s^2 - n_{eff}^2})$

転移点 y_t および $2z_0$ は $n_{eff} = n(y_t)$ すなわち $\theta = 0$ の条件から得られ，次式のようになる．

$$y_t = \frac{n_s - n_{eff}}{\Delta n / d} \tag{33}$$

$$2z_0 = 2\frac{n_{eff}}{n_s}\frac{d}{\Delta n}\ln(1/\eta) \tag{34}$$

式(26)の分散関係式において，Φ_i の級数項は $\Delta y_i \to 0$ とすると積分に置き換えられて，次のように表わすことができる．

$$2k_0\int_0^{y_t}(n(y)^2 - n_{eff}^2)^{1/2}dy - 2\Phi_{1R} - 2\Phi_2 = 2m\pi \tag{35}$$

ここで金属界面における位相シフト $2\Phi_{1R}$ は上部が空気の場合同様，Well-guided modes に関しては通常 π に十分近い値をとる[16]ので，いま $2\Phi_{1R} = \pi$，$2\Phi_2 = \pi/2$ として n_{eff} の近似式を求める．この場合，m は TE, TM モードとも $g-1$ となる．式(35)より

$$\int_0^{y_t}(n(y)^2 - n_{eff}^2)^{1/2}dy = \frac{1}{k_0}(g - \frac{1}{4})\pi \tag{36}$$

$\Delta n/n_b \ll 1$ とし $g_t = (n_s - n_{eff})/(\Delta n/d)$ を用いると LIDW について左辺の積分は実行でき，

$$n_{eff} = \left[n_s^2 - \left\{ \frac{3}{2} \frac{2\Delta n n_b}{d} \frac{1}{k_0} (g - \frac{1}{4})\pi \right\}^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (37)$$

ここで根号内の第2項は Well-guided modes に対しては n_s^2 に比べて十分に小さい値をとるので，

$$n_{eff} = n_s - \frac{1}{2n_s} \left[\frac{3}{2} \frac{2\Delta n n_b}{d} \frac{1}{k_0} (g - \frac{1}{4})\pi \right]^{\frac{2}{3}} \qquad (38)$$

結局，転移点 g_t は $2\Delta n n_b \simeq 2\Delta n n_s \simeq \Delta\varepsilon$ を考慮して，

$$g_t = \left[\frac{3}{2} (g - \frac{1}{4})\pi \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{d}{\Delta\varepsilon}} \right]^{\frac{2}{3}} \qquad (39)$$

となり，第2章で求めた近似式 (12) と異方性の効果を除いて一致する．同様に $2z_0$ は

$$\begin{aligned} 2z_0 &= \frac{2}{n_s} \ln(1/\eta) \left[\frac{d}{\Delta n} n_s - \left\{ \frac{3}{2} (g - \frac{1}{4})\pi \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{d}{\Delta\varepsilon}} \right\}^{\frac{2}{3}} \right] \\ &\simeq 2 \ln(1/\eta)\, d/\Delta n \quad \text{(for Well-guided modes)} \end{aligned} \qquad (40)$$

伝搬損失 α は $2\bar{z}_1 = 2\tan^{-1} N$, $N = X + jY$ とすると，

$$\alpha = \frac{\bar{z}_{1I}}{z_0} = \frac{1}{4} \frac{\Delta n}{d} \frac{\ln\left[\frac{X^2 + (Y+1)^2}{X^2 + (Y-1)^2}\right]}{\ln(1/\eta)} \qquad (41)$$

となる．式 (41) は $\bar{z}_{1I}$ および η の変化が $\Delta n/d$ の変化に比べて小さい時には LIDW の損失が $\Delta n/d$ に比例するという第2章から得られる結果と一致している．

4. 数値計算例

3.1節において任意の屈折率分布をもつ金属装荷拡散型光導波路の数値計算法を述べたが，本章ではこの方法を使って実際に数値計算を行なった結果を示す．拡散型導波路及び基板結晶としては，$LiNbO_3$ のC軸をy方向に選んだいわゆるC板結晶を考え，その表面付近に拡散型スラブ導波路が形成されているとする．

$$n_{bx} = n_{bz} = 2.286 \quad , \quad n_{by} = 2.200$$

また，表面には金属としてアルミニウム ($n_m = 1.62 - j5.44$) が装荷されており，光波は自由空間波長 $\lambda = 6328 Å$ の He-Ne レーザ光を想定している．

光線近似による計算法の有効性あるいは精度を確かめるために，直線型屈折率分布 (LIDW) についてまず検討し，これを第2章の厳密解と比較する．さらに，実際に即して，短時間での金属の In-diffusion あるいは Out-diffusion によって得られる補誤差関数分布 (Complementary error functional-Index-Distribution Waveguide; CIDW),[2][4] また長時間拡散に対応する Gauss 型屈折率分布 (Gaussian-Index-Distribution Waveguide; GIDW),[4] さらにプレーナ電極構造の光導波路に電圧を印加した時に得られる屈折率変化に応じた指数関数分布 (Exponential-Index-Distribution Waveguide; EIDW)[10] について数値計算を行なった．各分布はそれぞれ次式によって与えられている。

$$n_\nu(y) = n_{b\nu} + \Delta n_\nu f_\nu(y/d_\nu) \quad (\nu = x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
&\text{LIDW};\ f_\nu(Y/D_\nu) = 1 - Y/D_\nu && 0 \le Y \le D_\nu \\
&\qquad\qquad = 0 && Y > D_\nu \\
&\text{CIDW};\ f_\nu(Y/D_\nu) = \mathrm{erfc}(Y/D_\nu) \\
&\text{GIDW};\ f_\nu(Y/D_\nu) = \exp(-Y^2/D_\nu^2) \\
&\text{EIDW};\ f_\nu(Y/D_\nu) = \exp(-Y/D_\nu)
\end{aligned} \qquad (42)$$

ここで $D_\nu = d_\nu/\lambda$, $Y = y/\lambda$ で，それぞれ自由空間波長で規格化された拡散深さ，位置座標である．
式(42)の各分布を図7に示す．

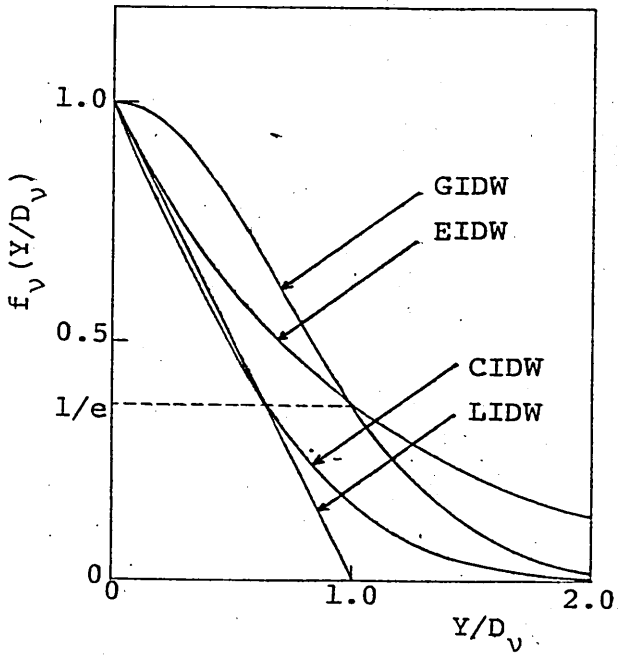


図7. 拡散型導波路の屈折率分布

数値計算はまず，式(26)の分散関係式を補間多項式として一次分数関数を使ったミューラー法によって解き，n_{eff}, g_t, z_0 を求め．その後，式(27)を用いて伝搬損失 α を計算した．光路の微小部分 Δz の分割数はモード次数 g，屈折率差 Δn 等によって変わるが，実際にはおよそ数百であった．

4.1 光線近似の妥当性

金属装荷拡散型光導波路を対象とした我々の光線近似の手法の妥当性及びその精度を検討するためにLIDWに関して数値計算を実行した．導波路，基板は等方性であるとし，$n_b = 2.200$, $d = 20\mu m$, $\lambda = 0.6328\mu m$ の条件で，金属はアルミニウムの $n_m = 1.62 - j5.44$ を使用した．表Iに $\Delta = \Delta n / n_b = 10^{-3}$ の場合における導波モードの実効屈折率 n_{eff} を同じ条件の厳密解(分散式(8)の数値解)と比較した結果を示す．n_{eff} においては誤差は 5×10^{-6} 以下であり，規格化された実効屈折率 $(n_{eff} - n_b)/\Delta n$ では1%以下となる．このように光線近似においても十分な精度で解が得られ，この方法は実際的な拡散型導波路 CIDW, GIDW, EIDW においても上述の誤差以内で解が得られると確信する．

伝搬損失 α_L を dB/cm の単位で表わした時の誤差は n_{eff} の場合より少し大きいが，導波モードのカットオフ近傍を除けば2~3%以内に抑えられている．カットオフ近くにおいては，その電磁界分布が金属界面から離れて拡がるために，損失が減少することをすでに示したが，光線近似の

方法でLIDWの場合について計算すると，この減少が現われない．この理由は実際に与えられた屈折率分布が式(42)であっても，カットオフ近傍の数値計算の過程では $y \geq 0$ なる全領域で $n(y) = n_b + \Delta n(1 - y/d)$ とした場合の解に収束し，結局カットオフにおける損失の減少は見失われてしまう．これは仮定された分布関数が $y = d$ で屈曲点を持ち，この付近における屈折率の急激な変化が，計算途上で好ましくない誤動作を招く原因となっている．第3章で述べた光線近似の手法は，厚み方向の滑らかな屈折率変化の下に成立するものであり，実際的なCIDW, EIDW, GIDWのいずれの場合にも，カットオフにおけるこのような不都合は生じない．すなわちLIDWに見られる厳密解と光線近似による数値解の差異は本質的なものではないことを明記しておく．

表I．LIDWにおける n_{eff} ($\Delta = 10^{-3}$, $d = 20\mu m$)

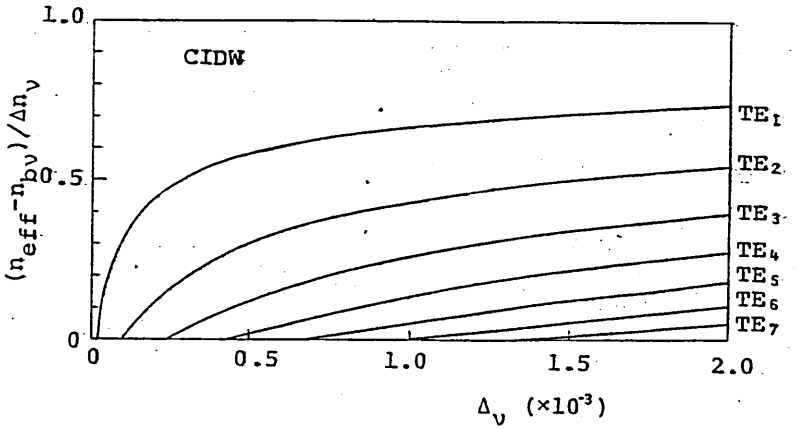
MODES	n_{eff} EXACT	n_{eff} APPROX.	ERROR (APPROX.-EXACT)/EXACT
TE_1	2.201491	2.201500	4.1×10^{-6}
TE_2	2.200957	2.200966	4.1×10^{-6}
TE_3	2.200524	2.200531	3.2×10^{-6}
TM_1	2.201481	2.201486	2.3×10^{-6}
TM_2	2.200947	2.200953	2.7×10^{-6}
TM_3	2.200514	2.200518	1.8×10^{-6}

4.2 実効屈折率 n_{eff} と転移点 y_t

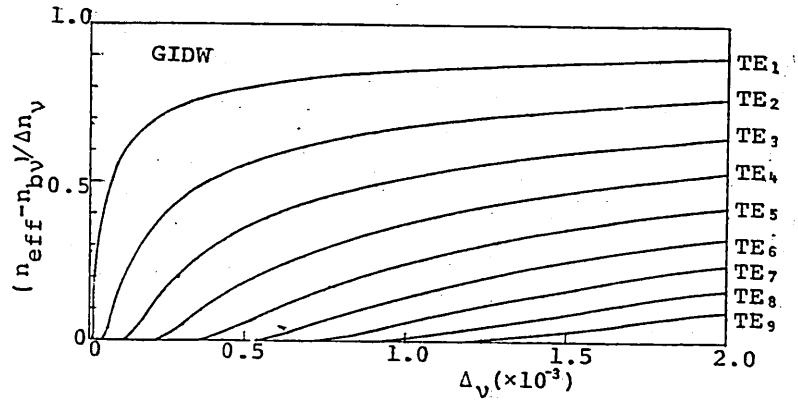
図8(a)(b)(c)に CIDW, GIDW, EIDW の実効屈折率 n_{eff} を示す. 導波路はやはり $LiNbO_3$ C板を想定し, 拡散深さ d_ν は ν によらず一定で, $d = 20\mu m$ として計算した. 横軸の Δ_ν は TE モードに対しては $\Delta_x = \Delta n_x / n_{bx}$ と考え, TM モードに対しては $\Delta_y = \Delta n_y / n_{by}$, $\Delta_z = \Delta n_z / n_{bz}$ で $\Delta_\nu = \Delta_y = \Delta_z$ が同じように変化するとした場合についての値である. このように異方性を考慮すると, TE・TM モードは, ほとんど縮退するので図8には TE モードのみを記した. TM モードの n_{eff} はカットオフから離れた所では TE モードの n_{eff} より若干小さいが, カットオフの近くで交錯し, カットオフでの Δ は TM モードの方が小さくなる. 屈折率分布と拡散深さが, 既にわかっている場合には, プリズムカプラなどによって測定される各モードの n_{eff} から導波路の表面屈折率を求めるのに, 図8を利用することができる.

図9に CIDW の光線の引き戻し点 y_t の変化を示す. この引き戻し点は第2章で波動論的に得られた電磁界分布の転移点に対応するもので, 図9から高次モードになる程, y_t すなわち実効導波路幅が大きくなるという拡散型導波路の特徴が明らかである. また, カットオフに近づくにつれて y_t は基板方向へ急激に拡がっていく. 図8及び図9を GIDW, EIDW についても比較すると, 屈折率分布が尾を引くほど同じ Δn, d に対して多くのモードが伝搬可能になり, EIDW・CIDW は GIDW・LIDW に比べてカットオフ近くで電磁界分布がより急激に拡がる傾向をもつことが明らかになった.

(a)



(b)



(c)

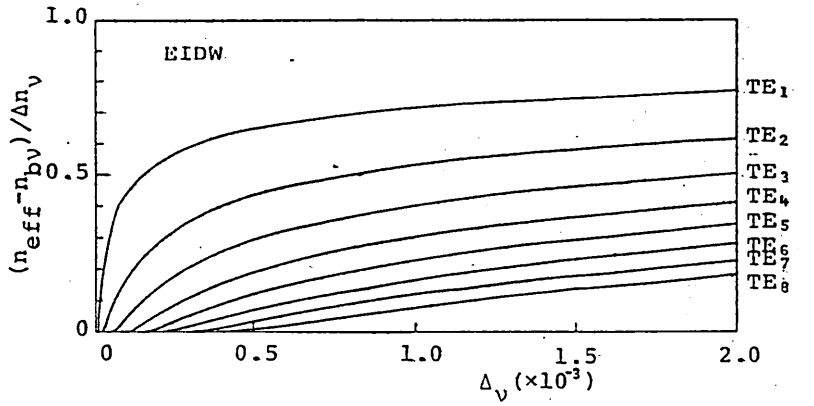


図8. 拡散型導波路における導波モードの実効屈折率

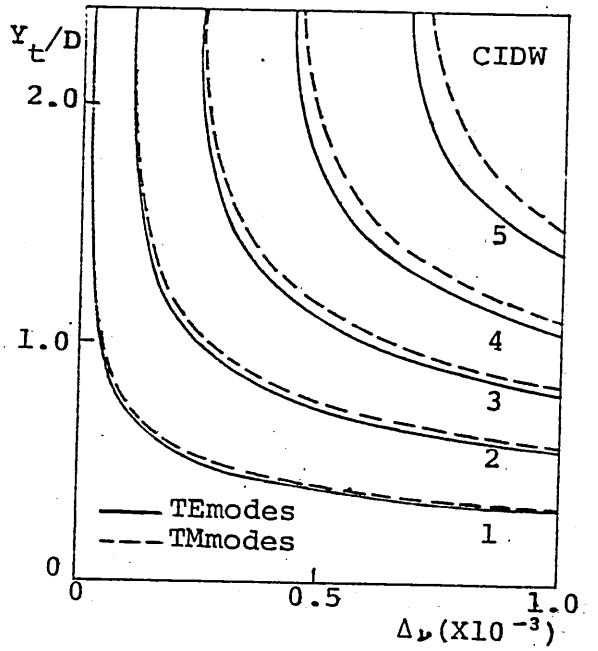
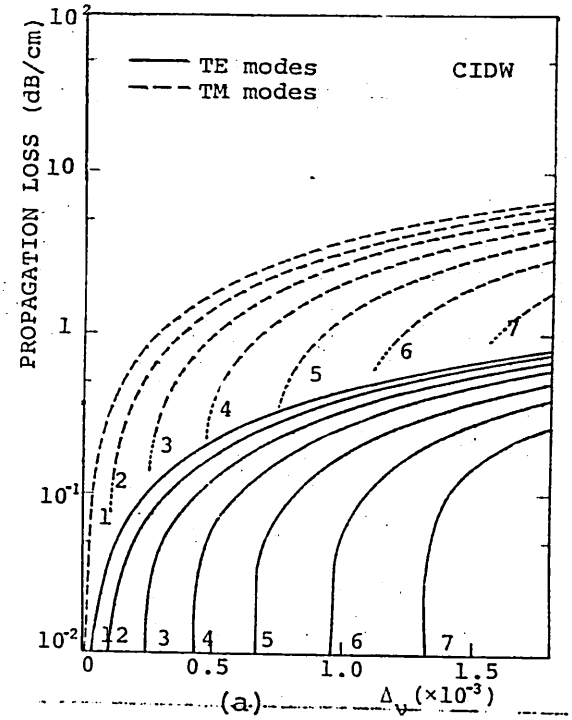


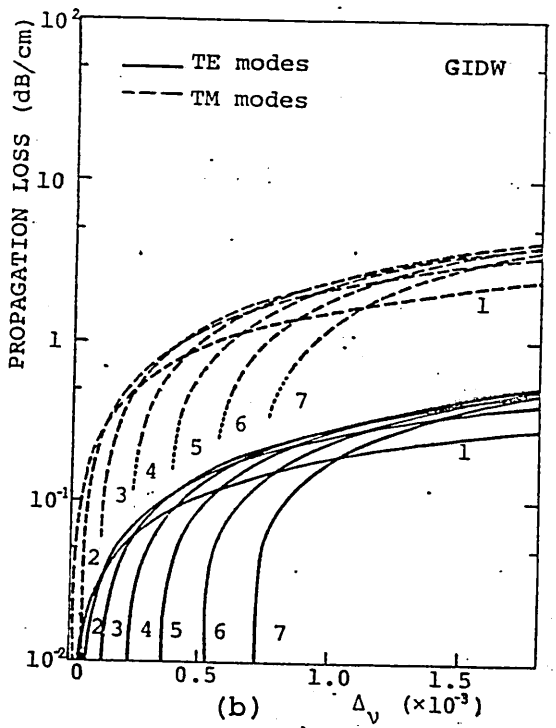
図9.
拡散型導波路における
実効導波路幅の変化

$LiNbO_3$ C板結晶
$n_m = 1.62 - j5.44$
$d = 20\mu m$

4.3 伝搬損失

前節4.2におけるのと同じ条件で計算した伝搬損失αを表面屈折率変化$\Delta_\nu = \Delta n_\nu / n_{b\nu}$（$\nu = x$; for TE, $\nu = y$; for TM）に関してプロットしたのが図10である．(a)(b)(c)の順にそれぞれCIDW, GIDW, EIDWを示し，パラメータはモード次数である．3つのグラフを比べると，損失αがn_{eff}に比べてより強く屈折率分布の影響を受けることがわかる．CIDWやEIDWではSIDWとは逆に高次モードになる程，αが小さくなり，GIDWではもっと複雑で最初の5~6モードでは高次モードになる程αは増加するが，それ以上のモードでは逆に減少するという傾向を持つ．LIDWにおいてはαがモード次数Nにほとんど依存しないことを考えると，このような損失の変化は屈折率分布の2階微係数す





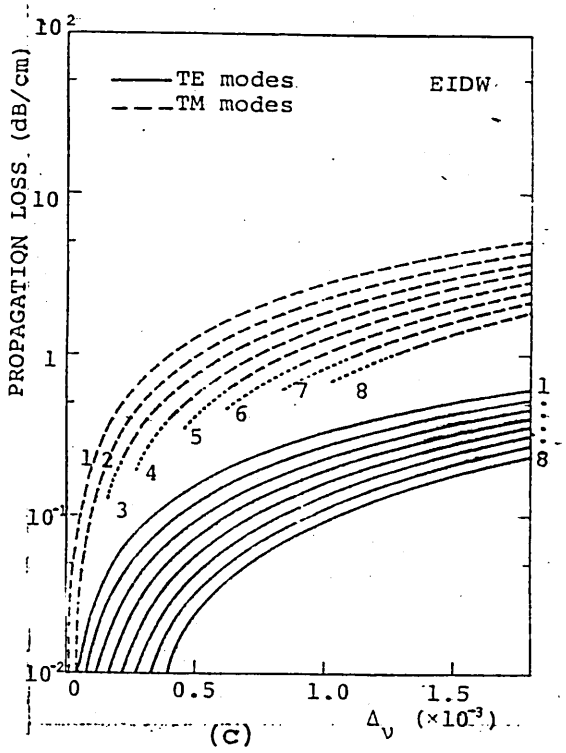


図10.
金属装荷拡散型導波路における伝搬損失特性

$LiNbO_3$ C板結晶
$n_m = 1.62 - j5.44$
$d = 20\,\mu m$

なわち曲率の正負と関係づけると説明がつく．SIDWに近い形の分布では，導波モードの実効導波路幅がほとんど一定であるために，高次モードになる程αは大きくなるが，GIDWでは低次モードは主に屈折率分布の曲率が正の領域に閉じ込められているためSIDWに近い傾向を示し，高次モードでは界分布が拡がりCIDWやEIDWのような曲率が負の領域の傾向を示すと考えられる．

d_ν, Δn_ν を一定とした場合には，損失はカットオフ近傍を除いてGIDWが最も小さくなり，CIDWが最大である．なお，CIDWとLIDWは図7の屈折率分布から見ても明らかなように基本モードのαも一番近い値をとり，第2章で考察したLIDWは拡散型導波路として最も一般的なCIDWのよい近似になっている．さらにαはTMモードの方がTEモードよりも常に大きくて，8.2～8.4倍になっている．

4.4 金属クラッド3次元導波路の検討

SIDWの上に金属を装荷することによって導波モードの実効屈折率 n_{eff} を，上部を空気とした場合より小さくすることができ，導波路部の両側に金属クラッドを付けることによって3次元導波路を形成することができる(7)．本節ではSIDWの代わりに拡散型導波路を利用した場合について検討した．結果は3つの屈折率分布の中ではGIDWが最も n_{eff} の差が大きく，その変化を図11に示した．媒質は等方性として $n_{00}=2.200$, $\Delta_\nu=10^{-2}$ $(\nu=x,y)$ である．横軸は拡散深さ d/λ で，縦軸に n_{eff} と Δn_{eff} の値を

GIDW
$n_{bv} = 2.200$
$\Delta_v = 10^{-2}$
金属はアルミニウム
$\lambda = 0.6328\,\mu m$

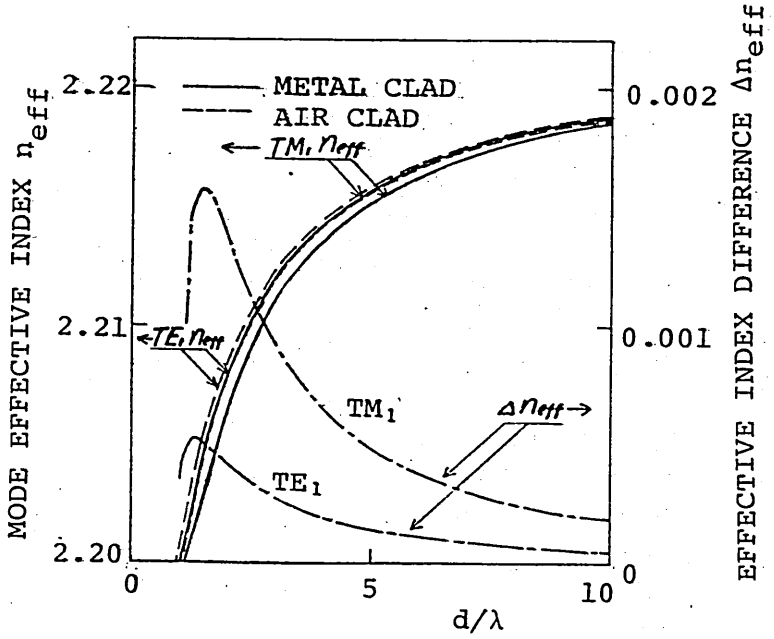


図11. 拡散型導波路による金属クラッド3次元導波路

プロットした. Δn_{eff} は上部が空気 ($n_m = 1$) の場合の n_{eff} と金属クラッドの場合の差である. Δn_{eff} の傾向はSIDWの場合と同じであるが, その値は小さく, 最大のときでもTMモードで $\Delta n_{eff}/\Delta n$ は7.2%, TEモードで2.4%である. これは Δn_{eff} が大きくなるカットオフ近くでは, 拡散型の場合, 基板へ電磁界が拡がり, 実効的に金属の影響が小さくなるためである. また実際に報告されている導波路の Δn もあまり大きくないことと考え合せると, 拡散型導波路を金属クラッド3次元導波路として利用することは好ましくないと思われる.

5. 電気光学効果光機能導波路[10](実験)

本章では、これまで検討してきた解析法を実際の拡散型導波路に適用する。実験例として、最近当研究室で作られたプレーナ3電極構造の電圧誘起型光導波路を取り上げる。電気光学結晶のC板に有効に電界を加える方法として3電極プレーナ構造[17]が考えられるが、これを用いて電圧制御形の光導波路を構成することができる。そこで$LiNbO_3$のC板結晶においてこの電気光学効果光導波路を実現し、その導波特性を観測した。この場合、導波路は拡散型となり、その表面に金属が装荷されているので、これまでに述べた我々の理論が適用でき、Near-field Patternから実測された実効導波路幅は理論値と良い一致を示す。

5.1 光導波路の構造

0.3μ-アルミナ研磨した$LiNbO_3$ C板結晶(10×2×1mm)の表面に電極となるAlを蒸着し、フォトエッチングによって電極幅Bと電極間隔Gを50umとした。電極の表面は放電防止と保護のため絶縁ワニス(TVB-2752)を塗布している。図12は製作した光導波路

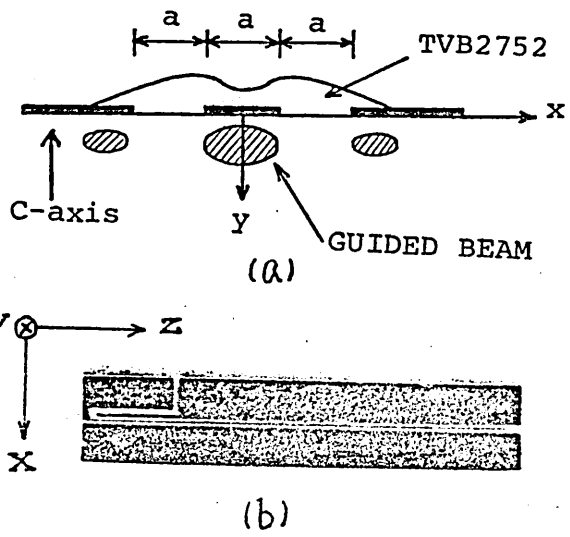


図12. 光導波路の構造

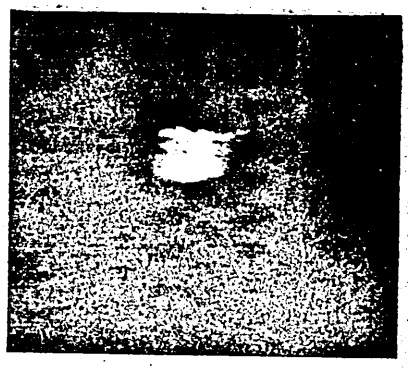
の構造を示す.

5.2 導波特性

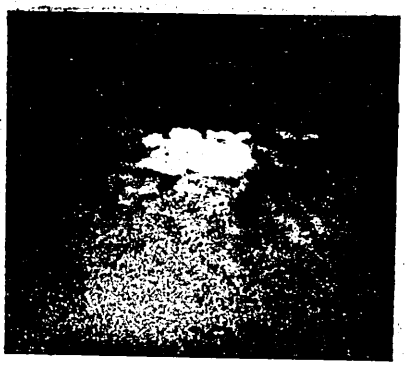
6328Å の He-Ne レーザ光を偏光板を通して，レンズで端面から入射し，印加電圧は屈折率の永久変化を防止するために 60Hz の交流で与えた．C軸方向に偏光した光（TMモード）は 20V 以下で導波が観測され，交流の半周期においては中央電極下の屈折率が増加し，次の半周期においては側電極下の屈折率

(a) 0V モードなし

(b) 55V TM低次モード



(C) 180V TM高次モード



(d) 220V TE高次モード

図13. Near-field Pattarn

が増加するために、出射面に3つのレーザ光の集束されたスポットが観測された。図13(a)(b)(c)にTMモードのNear-field Patternを示し、(d)にTEモードのNear-field Patternを示している。なお、TEモードの導波は50V程度から観測された。

電気光学効果によるプレーナ電極下の屈折率分布は近似的に指数関数で表わされる[17]ので電気光学効果導波路の伝搬特性を計算する際に導波路はx方向に変化がないとしてEIDWによる検討を行なった。拡散深さdはVによらず一定であり、$d=0.5a$とした[17]。金属の複素屈折率は$n_m=1.62-j5.44$ (Al)で、表面屈折率の増加は次式で表わされる。

$$\Delta n_y=\Delta n_e=\frac{1}{2}n_e^3 r_{33}V/a$$
$$\Delta n_{x,z}=\Delta n_o=\frac{1}{2}n_o^3 r_{13}V/a \qquad (43)$$

ここで、r_{13}, r_{33}はポッケルス係数で$r_{13}=8.6\times10^{-12}$m/V, $r_{33}=30.8\times10^{-12}$m/V, Vは印加電圧である。

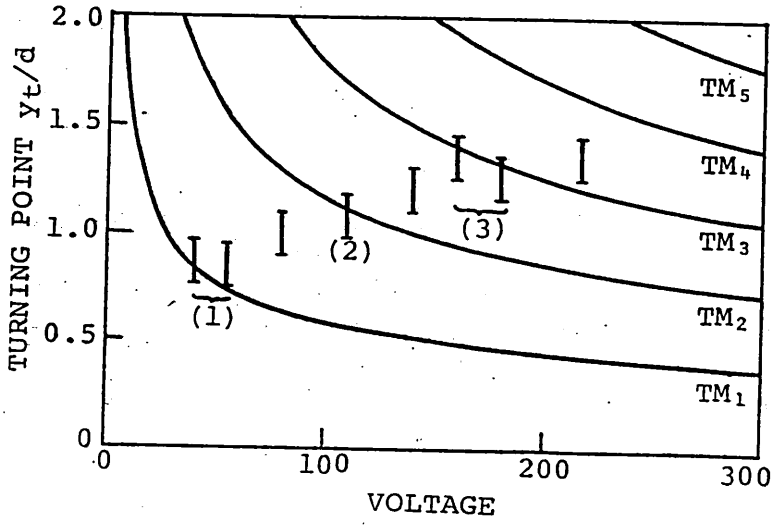


図14. 実効導波路巾の変化　( )内は観測されたlobe数を示す。

図14に印加電圧による各TMモードの実効導波路幅 y_t の変化と，実験による測定値を示した．導波路が高次モードを含むようになると電磁界のしみ込みが大きくなるという拡散型導波路の特徴を実験はよく一致している．なお計算によると表面電極による損失はTM1モードが最大で，300Vの印加電圧においても 1dB/cm 以下である．

C板結晶を用いた金属装荷光導波路は製作が簡単な上，曲げ損失変調[18]・分岐導波路等の新しい機能性を有すると考えられ，今回の3電極構造光導波路の実験でその機能性の基本が確かめられた．

6. むすび

表面に金属を装荷した異方性拡散型光導波路の特性について，特に，導波モードの損失を中心として検討してきた．まず波動論的取り扱いにより，この種の導波路の特徴を把握した．さらに，その物理的イメージを明らかにするために，金属の効果を含む新たな光線近似の手法を示し，これを用いて実際に即した屈折率分布をもつ拡散型導波路を対象として数値計算を実行した．これにより得られた結果を要約すると次のとおりである．

(1) 屈折率分布を直線で与えたLIDWについての波動論的解析により，導波モードの減衰定数 α_L は $d\varepsilon_\nu/dy$ ($\nu=x,z$) のみに比例することが明らかになった．これは Well-guided modes に対して有効である．

(2) 上記の結果と比較することにより，本論文で提示した光線近似の手法の妥当性を示し，導波モードの損失の依存性を

確認した．拡散型導波路における損失の特異な振舞は実効導波路幅がモード次数によって変化することに帰因する．

(3)金属の効果を含む光線近似を基にして，実際的な拡散型導波路について数値計算した結果，損失αは屈折率分布によっても影響されることが明らかになった．例えば，

① 屈折率分布が$erfc$関数型あるいはexp関数型では高次モードになる程，αが減少する．

② Gauss型では最初の5~6モードではモード次数と共にαは増加し，それ以上では減少する．

③ 屈折率分布関数の曲率の正負がαのモード次数依存性に反映する．

(4) $erfc$関数型は直線近似とよく一致し，TMモードの損失はTEモードの8.3倍程度となる．

(5) 金属クラッド3次元導波路に拡散型導波路は適さない．

最後に，C板$LiNbO_3$を用いたプレーナ3電極構造の電圧誘起型光導波路の実験例を示したが，この導波路の特性は本論文で述べた解析法によって十分説明することができる．

電気光学結晶上の拡散型光導波路は電極としての金属を装荷することにより，その機能性を発揮する．このとき，本論文で得られた結果を適用してその光導波特性を明らかにすることができる．

電気光学効果を積極的に利用した種々のタイプの光機能導波路を開発することが今後の課題である．

謝辞

本研究にあたり，有益な御討論をいただいた栖原敏明氏，実験において御協力下さった中桐悦博君，ならびに当研究室の諸氏に深く感謝する．

参考文献

(1) D.J.Channin,Appl.Phys.Lett.,Vol.19,No.5,p.128,(1971).

(2) I.P.Kaminow and J.R.Carruthers,Appl.Phys.Lett., Vol.22,No.7,p.326,(1973).

(3) J.Noda,T.Saku,and N.Uchida,Appl.Phys.Lett.,Vol.25, No.5,p.308,(1974).

(4) R.V.Schmidt and I.P.Kaminow,Appl.Phys.Lett.,Vol.25, No.8,p.458,(1974).

(5) E.M.Conwell,Appl.Phys.Lett.,Vol.23,No.6,p.328,(1973).

(6) D.Marcuse,IEEE J.Q.E.,Vol.QE-9,No.10,p.1000,(1973).

(7) J.Hamasaki and K.Nosu,IEEE J.Q.E.,Vol.QE-10,No.10, p.822,(1974).

(8) T.E.Bachman and S.C.Rashleigh,IEEE J.Q.E.,Vol.QE-8, No.11,p.848,(1972).

(9) G.B.Hocker and W.K.Burns,IEEE J.Q.E.,Vol.QE-11,No.6, p.270,(1975).

(10) 安東，増田，小山；信学会全国大会予稿 (1976).

(11) A.Gedeon,Opt.Comm.,Vol.12,No.3,p.329,(1974).

(12) 増田，安東，小山；電子通信学会光量エレ研究会，OQE75-21 (1975).

(13) M.Born and E.Wolf,Principles of Optics (Pergamon, London,1970),p.681.

(14) H.K.Lotsch,J.O.S.A.,Vol.58,No.4,p.551,(1968).

(15) 文献(13)のp.121.

(16) A.Reisinger,Appl.Opt.,Vol.12,No.5,p.1015,(1973).

(17) 安東,増田,小山;信学会全国大会予稿(906),1975.

(18) 増田,安東,小山;信学会全国大会予稿(905),1975.

付録　$d_y \neq d_z$ のときのTMモードの分散関係式 (LIDW)

C軸をy方向に選んだ電気光学結晶に金属イオンをIn-diffusionしたとき，$d_y \neq d_z$，$\Delta\varepsilon_y \neq \Delta\varepsilon_z$ である．このときTMモードのカットオフ時の転移点は $y=-d_y$ に存在し，$d_y \geq d_z$ と $d_y \leq d_z$ とに分けて考えねばならない．

まず $d_y \geq d_z$ の場合であるが，このとき，さらに実効導波路幅が d_z より大きいか否かによって取り扱いが異なってくる．実効導波路幅が d_z に等しい時の k_z の値を k_{z0} とすると，

$$k_{z0}^2 = \frac{k_0^2 \varepsilon_{by}}{1 - \frac{\Delta\varepsilon_y}{\varepsilon_{by}}\left(1 - \frac{d_z}{d_y}\right)} \geq k_0^2 \varepsilon_{by} \quad \text{for } d_y \geq d_z \qquad (付1)$$

結局，分散関係式は

$$\begin{cases} \dfrac{J_{\frac{2}{3}}(u_0) - g_3 J_{-\frac{1}{3}}(u_0)}{J_{-\frac{2}{3}}(u_0) - g_3 J_{\frac{1}{3}}(u_0)} = \dfrac{I_{\frac{2}{3}}(u_a) + F_1(y_b, y_c) I_{-\frac{1}{3}}(u_a)}{I_{-\frac{2}{3}}(u_a) + F_1(y_b, y_c) I_{\frac{1}{3}}(u_a)} & ; |k_z| \geq k_{z0} \\ \dfrac{J_{\frac{2}{3}}(u_b) - F_2(y_{01}, y_a) J_{-\frac{1}{3}}(u_b)}{J_{-\frac{2}{3}}(u_b) + F_2(y_{01}, y_a) J_{\frac{1}{3}}(u_b)} = \dfrac{I_{\frac{2}{3}}(u_c) + I_{-\frac{1}{3}}(u_c)}{I_{-\frac{2}{3}}(u_c) + I_{\frac{1}{3}}(u_c)} & ; k_0 \varepsilon_{by}^{\frac{1}{2}} \leq |k_z| \leq k_{z0} \end{cases} \qquad (付2)$$

ここで $g_3 = \left(\dfrac{\varepsilon_{bz} + \Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_m}\right)\left(\dfrac{\delta_m}{k_y}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{bz} + \Delta\varepsilon_z}\right)\left(\dfrac{1}{k_y d_z}\right)$

$$\begin{cases} F_1(y_b, y_c) = \dfrac{\left(\frac{\delta_b}{\delta_a}\right)\left(\frac{y_b}{y_c}\right)^{\frac{1}{2}} I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{bz}}\right)\left(\frac{1}{k_a d_z}\right)\left\{I\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) - I\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\} + I\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{I\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + I\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)} \\ F_2(y_{01}, y_a) = \dfrac{J\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - g_3 J\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varepsilon_z}{\varepsilon_{bz}}\right)\left(\frac{1}{k_a d_z}\right)\left\{J\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + g_3 J\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}}{J\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + g_3 J\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I(\nu_1,\nu_2) = I_{\nu_1}(u_b) I_{\nu_2}(u_c) - I_{-\nu_1}(u_b) I_{-\nu_2}(u_c) \\ J(\nu_1,\nu_2) = J_{\nu_1}(u_0) J_{\nu_2}(u_a) + S(\nu_1\nu_2) J_{-\nu_1}(u_0) J_{-\nu_2}(u_a) \end{cases}$$

$$S(\nu_1\nu_2) = \begin{cases} +1 & ; \ |\nu_1| \neq |\nu_2| \\ -1 & ; \ |\nu_1| = |\nu_2| \end{cases}$$

さらに $u_0 = \frac{2}{3} a_1 y_{01}^{3/2}$, $u_a = \frac{2}{3} a_1 y_a^{3/2}$, $u_b = \frac{2}{3} a_2 y_b^{3/2}$, $u_c = \frac{2}{3} a_2 y_c^{3/2}$

$$\begin{cases} a_1 = K^{\frac{1}{2}} \left\{ k_z^2 \frac{\Delta K_y}{d_y} + (k_0^2 \varepsilon_{by} - k_z^2) \frac{\Delta K_z}{d_z} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ a_2 = K^{\frac{1}{2}} k_z \left(\frac{\Delta K_y}{d_y} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{01} = \dfrac{(k_0^2 \varepsilon_{by} - k_z^2)(1+\Delta K_z) + k_z^2 \Delta K_y}{k_z^2 \frac{\Delta K_y}{d_y} + (k_0^2 \varepsilon_{by} - k_z^2) \frac{\Delta K_z}{d_z}} \\ y_{02} = \dfrac{k_0^2 \varepsilon_{by} - k_z^2 (1 - \Delta K_y)}{k_z^2 \Delta K_y} d_y \end{cases}$$

$$\gamma_a^2 = -k_a^2 = k_0^2 \varepsilon_{by} \left\{ \left(\frac{k_z}{k_{z0}} \right)^2 - 1 \right\}$$

$$\begin{cases} y_a = S(k_z - k_{z0})(d_z - y_{01}) \\ y_b = S(k_z - k_{z0})(d_z - y_{02}) \\ y_c = S(k_z - k_{z0})(d_y - y_{02}) \end{cases}$$

$$S(k_z - k_{z0}) = \begin{cases} +1 & ; \ |k_z| \geq k_{z0} \\ -1 & ; \ |k_z| < k_{z0} \end{cases}$$

$d_y \leq d_z$ では分散関係式は式(付.2)の第1式と同様の形になり、このとき y_a, y_b, y_c の表示式で $d_z \to d_y$. さらに

$$\begin{cases} a_2 = \{ \Delta K_z (k_0^2 \varepsilon_{by} - k_z^2) / d_z \}^{\frac{1}{2}} \\ y_{02} = d_z (1 + \Delta K_z) \end{cases}$$

輻射科学研究会資料

半漏洩構造薄膜光伝送路の結合モード解析と変調器および非相反素子への応用

山本錠彦
岡村康行
平井一
牧本利夫
（大阪大学　基礎工学部）

昭和50年12月5日

1. まえがき

異方性材料を含む薄膜光伝送路においては、各層の比誘電率の関係を適当に選ぶことにより、基本となるTEおよびTM偏波のうちの一方については導波構造、他方については漏洩構造とすることができる。このタイプの伝送路は半漏洩構造と呼ばれ、光IC用のモード・フィルタへの応用が考えられてきた。[1]-[3] 本報告は、この半漏洩構造の系における直交偏波の導波モードと放射モード間の結合現象とその光IC素子への応用について考察したものである。

誘電体伝送路におけるモード結合現象は回路応用上極めて興味深い現象であり、これを利用した受動ならびに能動光IC素子に関しては、非常に多くの報告がなされている。[4] しかしながら、これらの大部分は導波－導波モードの結合を利用したものであり、結合モード間に成立すべき位相整合条件によって、これらの素子の製作は一般的にいって非常に難しいものとなる。

これに対し、本文で取扱う半漏洩構造形の導波－放射モード結合素子の特徴は、位相整合条件が、グレーティング状の周期構造や表面弾性波等の他種の波動を導入することなく、また膜厚の精密な調整を必要とすることもなく、常に満足されていることである。さらに、いまひとつの特徴として、結合するモード対の一方が放射モードであるので、モード間の空間的な分離が自動的に行われるということが挙げられる。従って、これらの性質をうまく利用すれば、各種の光IC素子が製作容易な条件のもとで、しかも従来よりも簡単な構成で実現されることになる。なお、これまで導波－放射モード間の結合現象の回路素子への応用については、プリズム結合器やグレーティング結合器等のモード励振器の場合を除いては報告の数は少なく、僅かに水晶（あるいは $LiNbO_3$）基板上の表面弾性波を用いた偏向器[5]とごく最近の in-diffused $LiNbO_3$（あるいは $LiTaO_3$）薄膜ガイドを利用した電気光学変調器[6]の報告*がなされ

ている程度で、しかもこれら2種の素子にしても、効率は低いものであり、未だ実用性のある導波－放射モード結合形の素子に関する報告は見られないというのが現状である。しかし以下本文に述べるように、半漏洩構造においては、位相整合に寄与する領域（異方性材料を含む層）とモード結合に寄与する領域（等方性あるいはそれに近い材料から成る層）とを分けることによって効率を高めることができる。

2. 伝送路の構造と固有モードの特性

基本となる系は、図1.に示すような2次元（$\partial/\partial y = 0$）3層の薄膜伝送路である。ただし系は無損失で、伝搬方向をz方向とする。一般には3領域とも異方性の場合が考えられるが、ここでは簡単のために基板にのみ異方性材料を用いることにし、その比誘電率が次のような対角テンソルであたえられるものとする。

＊いずれの場合も、本文のような半漏洩構造ではなく、通常の導波構造が用いられている。

$$\mathbb{K}^s = \mathrm{diag}[K_{xx}^s,\ K_{yy}^s,\ K_{zz}^s] \qquad (1)$$

なお、透磁率は3領域とも μ_0（真空の透磁率）とし，膜厚を d とする．

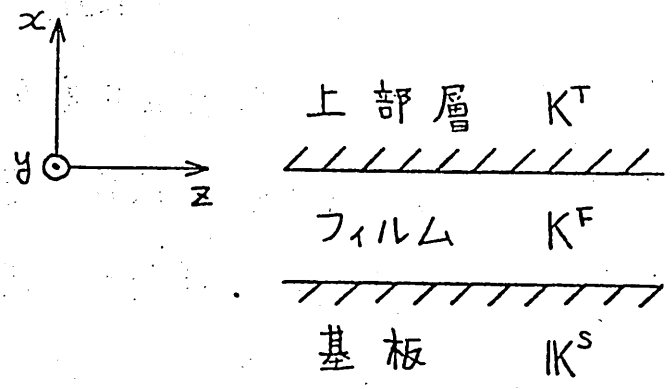


図1 半漏洩構造の異方性薄膜伝送路（基本系）

この基本系の固有モードは、等方性の伝送路の場合と同様に、TEおよびTMの直交偏波モードに分離されるが、比誘電率の関係をつぎのように選ぶことにより、2種類の半漏洩構造が得られる．

i) $K_{yy}^s > K^F > K_{xx}^s\ (>)\ K^T$

——— TE：漏洩，TM：導波 (2)

ii) $K_{xx}^s > K^F > K_{yy}^s\ (>)\ K^T$

——— TE：導波，TM：漏洩 (3)

ただし、上式のかっこ内の不等号は説明の便宜上つ

けたもので、半漏洩構造にとって本質的なものではなく、実際には$K^F > K^T$の関係さえ満たされていればよい。

以下の説明は、式(2)のタイプの半漏洩構造について行なう。この場合、TM偏波の固有モードは、通常の導波構造と同じく、離散的な固有値（z方向位相定数β）を持つ導波モードと連続固有値をもつ放射モードから成る。一方TE偏波の固有モードは放射モードのみから成る。図2はこの様子をあらわし

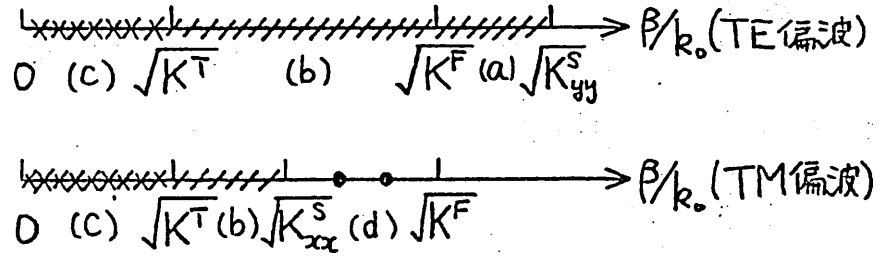


図2 固有モードの位相定数の分布
（式(2)の構造，ただし前進波）

(a) サブストレート モード　　(c) エア モード（二重縮退）
(b) サブストレート・フィルム モード　(d) 導波モード（●印）

ている。ただしこの図は前進波（界$\propto \exp j(\omega t - \beta z)$, $\beta > 0$）についてのみ示したものである。なお、各偏

波の固有モードには複素β面の虚軸上に存在するエヴァネッセント放射モードも含まれるが、このモードは重要ではないので、ここでは省略している。放射モードは、等価屈折率 β/k_0 ($k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$) の範囲によって断面内の界分布が異なる。ここで注目すべき点はTM偏波の導波モードの等価屈折率の存在範囲 $\sqrt{K^F} > \beta/k_0 > \sqrt{K_{xx}^S}$ がTE偏波のサブストレート・フィルム放射モード*の存在範囲 $\sqrt{K^F} > \beta/k_0 > \sqrt{K^{T'}}$ によって完全におおわれていることである。導波モードの個数および各次数のモードの位置は膜厚によって異なるが、放射モードの分布が連続であるので、これらの直交偏波モード間で位相整合が自動的にとれていることは変りがない。なお、各偏波の固有モードの界分布の表示式は、文献(2)に詳しく述べられている。

---

*このタイプのモードは、断面内において、上部層では±x方向に指数関数的に減衰し、フィルムおよび基板領域では、定在波形の界分布を有する。

3. 結合モード解析

基本系においては、TEおよびTM偏波の固有モードは独立であるが、こゝでたとえば結晶軸回転や電気磁気光学効果によつて、フィルムあるいは基板の比誘電率テンソルに微少な非対角成分$K_{xy}(=K_{yx}^*)$あるいは$K_{yz}(=K_{zy}^*)$を与えてやると、直交偏波の導波モード（いまの場合TM）と放射モード（TE）との間に結合が生ずる．文献(7)にならつて非対角テンソル成分を有する系を摂動系とし、K_{xy}成分を持つものをL系、K_{yx}成分をもつものをP系と呼ぶ。さらにそれぞれの非対角成分が実数の場合（結晶軸回転、電気光学効果）をA、純虚数の場合（磁気光学効果）をGという名称で区別する．

前進波の導波－放射モード間の結合の様子は、次のような結合モード方程式によつて記述される．

$$dA/dz = \int_{k_0\sqrt{K_T}}^{k_0\sqrt{K_{yy}^s}} \tilde{K}(\beta)\frac{\beta}{\rho}B\exp[-j(\beta-\beta_0)z]\,d\beta \quad (4)$$

$$dB/dz = -\tilde{K}(\beta)^*A\exp[+j(\beta-\beta_0)z] \quad (5)$$

ここにA、Bはそれぞれ TM導波モード（位相定数 β_0）および TE放射モードの規格化複素振幅である。また、ρ は TEモードに対する基板内での横方向（x方向）位相定数で、

$$\rho = \left[k_0^2 K_{yy}^s - \beta^2 \right]^{1/2} \qquad (6)$$

である。そして $\tilde{K}$ は次式であたえられる結合係数である。

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \tilde{K}_L + \tilde{K}_P \\ &= \frac{-j\omega\varepsilon_0}{4P} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{xy} e_x^{TM*} e_y^{TE} dx \right. \\ &\qquad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} K_{yz}^* e_z^{TM*} e_y^{TE} dx \right] \end{aligned} \qquad (7)$$

こゝに、$e_{x,y,z}$ は固有モードの断面内界分布関数で、P は規格化に用いた定数である。[2] $\tilde{K}_L$, $\tilde{K}_P$ はそれぞれ L摂動（AL, GL）および P摂動（AP, GP）に依る結合係数をあらわしている。なお、式(4)の右辺の積分範囲としては、サブストレート・フィルムモードおよびサブストレートモードの領域を考えている。エアモードは導波モードと位相定数が離れているので無視してさしつかえない。

式(4),(5)の連立微積分方程式を厳密に解くことは、結合係数Kのβ-依存性によって極めて難かしく、近似解法に頼らざるを得ない。最も簡単な近似法は、Marcuse[8]によって述べられている摂動解法で、以下ではこの方法による結果を示す。$z=0$において摂動系に入射した基本系のTM導波モードは、伝搬につれてTE放射モードへの結合によって減衰し、その電力変化は次式であらわされる。

$$P(z)=P(0)\exp(-2\alpha z) \qquad (8)$$

そして振幅減衰定数αは、

$$\alpha=\pi\left[|\tilde{K}(\beta)|^2\frac{\beta}{p}\right]_{\beta=\beta_0} \qquad (9)$$

で与えられる。結合によって生じたTE偏波の電力はz軸に対して$\phi\left[=\cos^{-1}(\beta_0/k_0\sqrt{K^s_{yy}})\right]$なる角度をもって、基板中に放射される。なお、ここでは式(2)の構造をのみ考えたが、式(3)の場合も殆んど並行して取扱うことができる。ただしこの場合は放射モード(TM偏波)に関して異方性の効果がはいってくるので、結果はやゝ複雑になる。

以上の解析で用いた摂動解法では、導波モードの位相定数 $\beta = \beta_0$ における結合係数 $\tilde{\kappa}$ の値のみが重要で、β_0 近傍の $\tilde{\kappa}$ の変化の様子は減衰定数に影響しない。そこで、付録においては、$\tilde{\kappa}$ の分布を考慮して結合モード方程式を解き，摂動法の妥当性を検討している。

4. 半漏洩構造の薄膜モード・フィルタにおける結合損失

基本系すなわち無摂動時での半漏洩構造は、まえがきにおいても述べたように薄膜モード・フィルタとして利用されるが、結晶軸が指定の方向からずれると、無損失でフィルタ区間を通過すべき偏波の導波モードが損失を受ける．本節では、導波－放射モード間の結合の一例として、この問題を取り上げる．対象とする系は、図3.に示す空気／ポリウレタン薄膜／方解石基板（C軸 // y軸）の構造のTMモード除去用のモード・フィルタ（式(3)の構造に対応）である[2]．動作波長は 0.63μm である．図4.はこの場合の

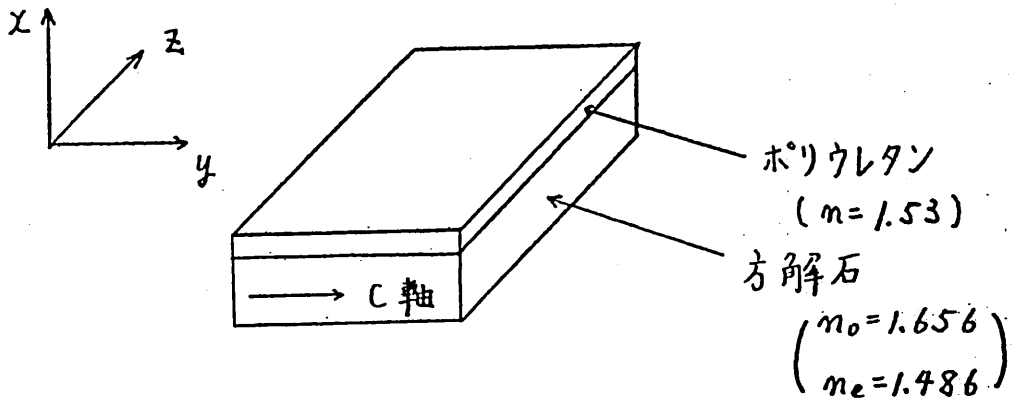


図3. TMモード除去フィルタ (λ=0.63μm)

通過偏波であるTE₀モードが方解石の結晶軸回転によるAP摂動によって受けるTM偏波の放射モードへの結合損失を、4種類の膜厚について計算した結果をプロットしたものである。なお図4.の縦軸は電力減衰定数2αで、横軸は方解石のC軸がy-z面内でy軸(指定方向)となす角度θである。図4.より回転角が数度程度でもかなりの放射損失が生ずることが分る。また図5.はθを一定(1度)とした場合の、膜厚に対する減衰定数の変化を4個のTE導波モードについて示したものである。減衰定数は特定の膜厚において最大となるが、これは結合領域である基

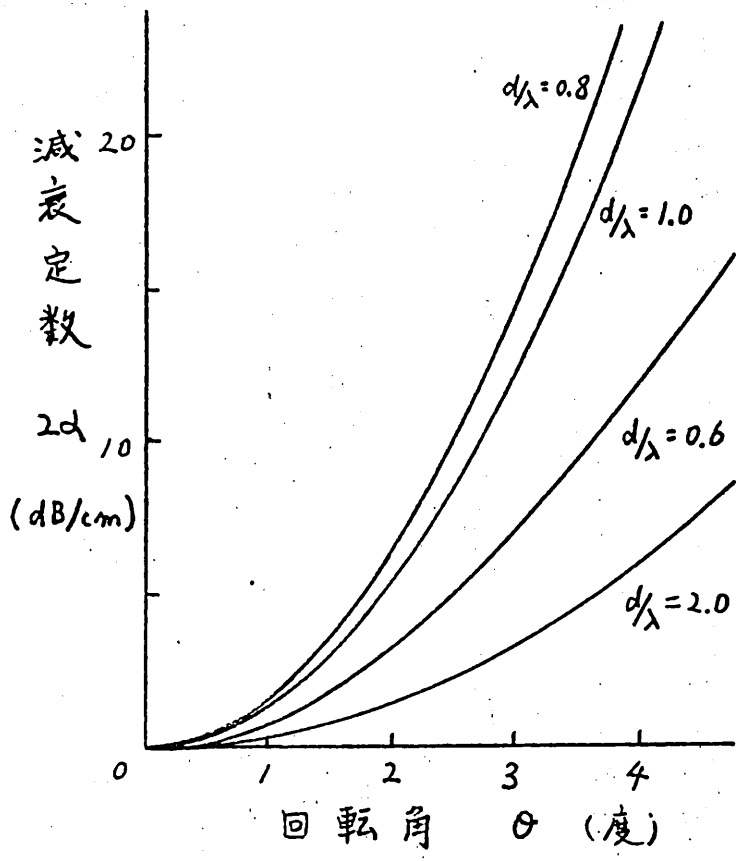


図4. 光学軸回転によるTE₀モードの放射損失

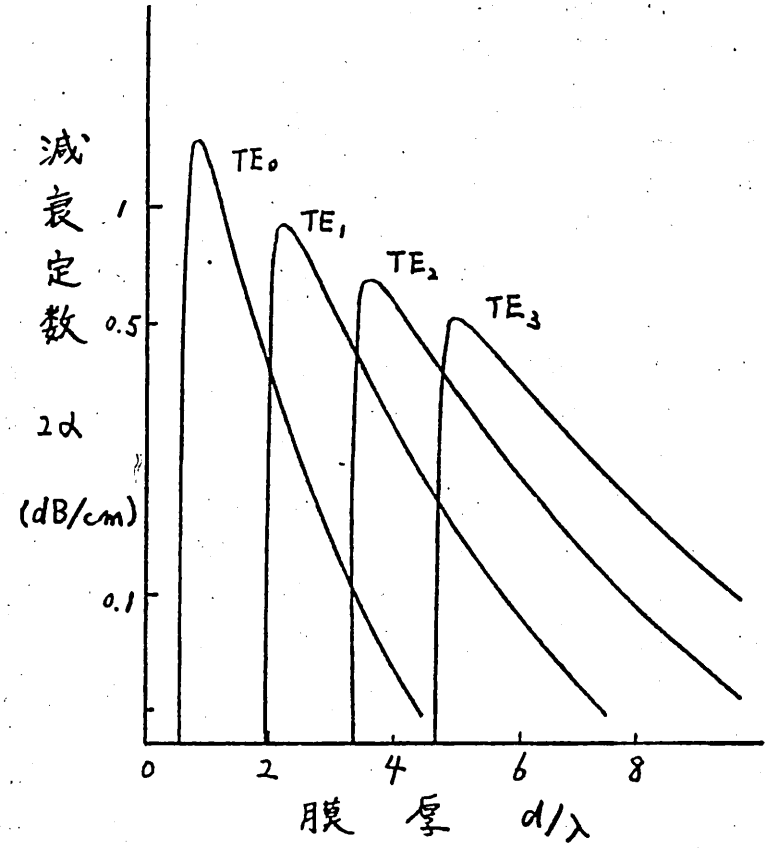


図5. 放射損失と正規化膜厚の関係 (θ=1度)

板内におけるTE導波モードの界分布の横方向（x方向）への減衰の程度とTMサブストレート・フイルムモードの横方向界分布の定在波の周期との関係によって、結合係数が増減するからである。

一般に導波－放射モードの結合は導波－導波モードの結合よりも弱いが、場合によってはかなりの結合量を与えることもあるということを、本節の結果は示している。なお、図3.のモード・フィルタにおける結合損失の実験による検討はすでに筆者らによって報告されている[9]

5. 変調器への応用

本節では、平滑波構造における導波－放射モード結合を利用した電気および磁気光学変調器について述べる。これらの変調器の特徴は、位相整合条件が自動的に満足されているために、一様電極でよいということと、いまひとつは強度変調をうけた出力光が直接得られるので、通常の位相差変調や導波－導波モード変換形の変調器にみられるような偏光子や

モード分離素子などの周辺素子が不要になるということである.

5.1 電気光学変調器

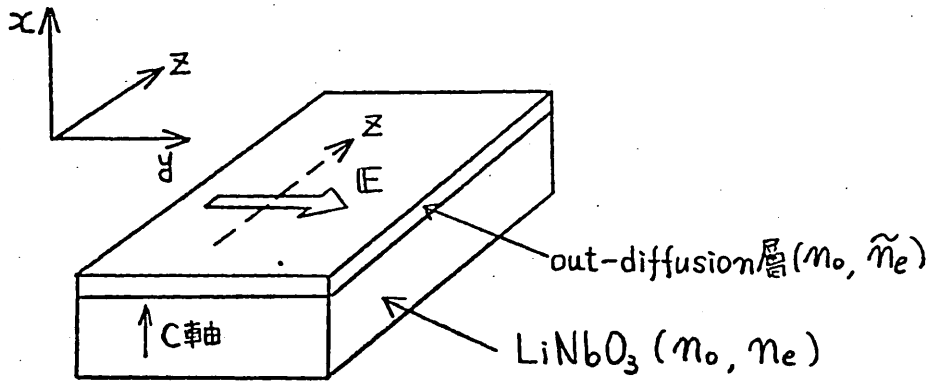


図6 Out-diffused $LiNbO_3$ 薄膜伝送路を用いた電気光学変調器
($n_o = 2.294$, $n_e = 2.214$: $\lambda = 0.63\,\mu m$)

図6.に示すようなC軸方向にout—diffusionしたZ-cut $LiNbO_3$ 板にcoplanar電極を付けた構造を考える. この構成は、Kaminow[10]らによって報告されているTEモード位相変調器と、C軸の方向および動作モードがTMモードであるということを除いては、全く同じである. Out-diffusion によって $LiNbO_3$ 板の表面層の n_e は僅かに増加するが、n_o は変

らない.[11],[12]従って図6.の構造はTM偏波に対しては屈折率の関係が $1.0/\tilde{n}_e/n_e$ なる3層導波構造となり、TE偏波に対しては $1.0/n_0$ の関係の2層漏洩構造となる. ただし $\tilde{n}_e$ は out-diffusion 層の n_e である.(最近斉藤[13]らは $LiNbO_3$ に MgO を in-diffusion すると、n_0 の減少と n_e の増加が同時に起ることを報告している. このような場合には、TE偏波に対して3層漏洩構造が得られる.)2層構造にはサブストレート・フィルムモードは存在しないので、いまの場合、結合はTM導波モード($\tilde{n}_e > \beta/k_0 > n_e$)とTEサブストレートモード($n_0 > \beta/k_0 > 1.0$)の間で起る. Coplanar電極によってy方向に変調電界をかけると、$LiNbO_3$ ではAL摂動($K_{xy} = K_{yx} = -n_o^2 n_e^2 \gamma_{42} E_y$)とAP摂動($K_{yz} = K_{zy} = +n_o^4 \gamma_{22} E_y$)が同時に生ずるが, γ_{42} が γ_{22} に較べて一桁大きいので、AL摂動のほうがはるかに優勢である.

数値計算にあたっては、簡単のために、out-diffusion層の屈折率 $\tilde{n}_e$ および変調電界 E_y の深さ方

向（－x方向）の分布を共に一様と仮定した．計算に使用したパラメータは次の通りである．

動作波長：$\lambda = 0.63\,\mu m$.

$LiNbO_3$：$n_o = 2.294$，$n_e = 2.214$，

$\tilde{n}_e = 2.254$，$\gamma_{42} = 28 \times 10^{-12}\ m/V$，

$\gamma_{22} = 3.4 \times 10^{-12}\ m/V$.

変調電界：$E_y = 10\ kV/cm$.

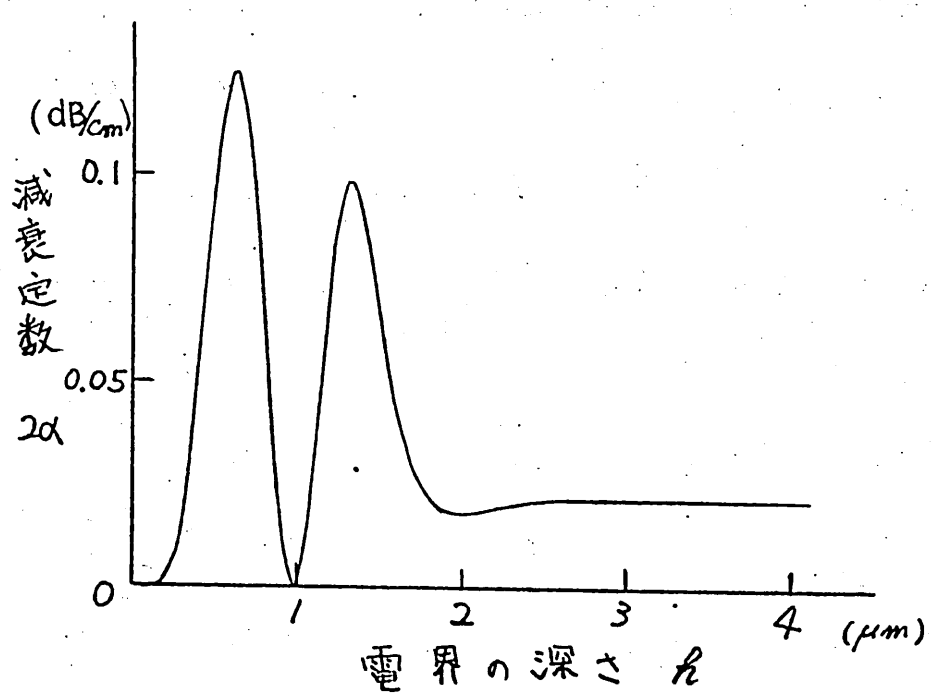


図7　TM_0モードの放射損失と電界の深さとの関係（$d = 1.5\,\mu m$）

図7は out-diffusion 層の厚さ d を一定（1.5μm）とし、電界の深さ h に対する TM₀モードの電力減衰定数 2α の変化をプロットしたものである。この図からわかるように、h が増すにつれて減衰定数は大きく変化するが、膜厚 d を越えると、以後 h を増しても殆んど特性は変りがない。また図8は、h を一定とした場合の、膜厚に対する減衰定数の変化を示したものである。10kV/cm 程度の電界では放射損

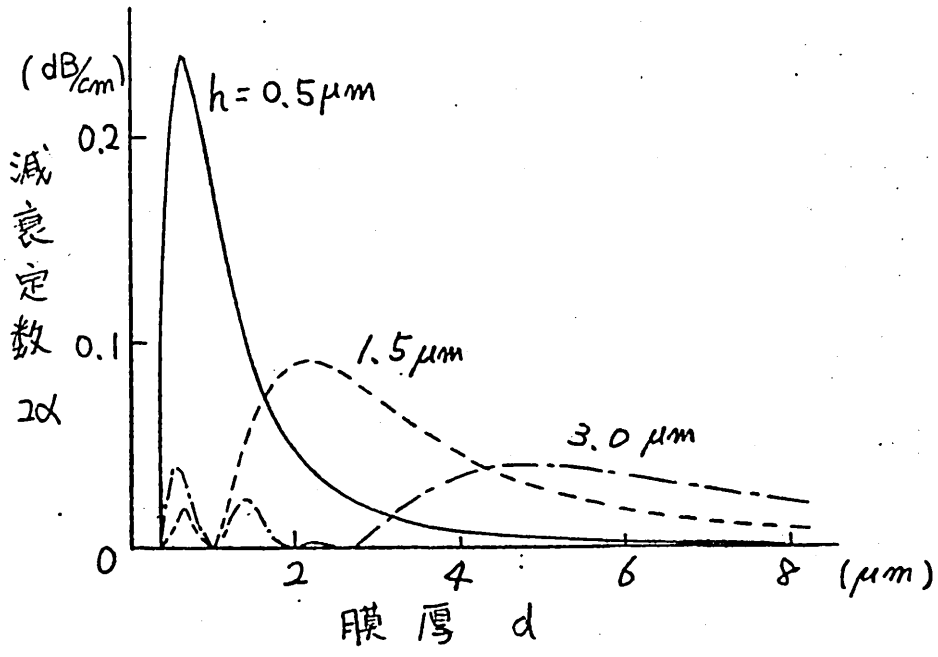


図8 TM₀モードの放射損失と膜厚との関係
（h = 0.5μm, 1.5μm, 3.0μm）

失はかなり小さい．なお、このタイプの変調器の特性曲線はガウス形の曲線となり、通常のコサイン2乗形の曲線とは様子が違ってくる．

以上の結果から、$LiNbO_3$を用いた導波－放射モード結合形の変調器では高効率動作は得られそうもないということが分かる．最近Marcuse[6]は、本文の場合とよく似た構成（ただし、半漏洩構造ではなく、$LiNbO_3$に金属イオンをin-diffusionした導波構造を利用している．）の電気光学変調器の解析結果を報告しているが、同様の理由で実用性については疑問であると述べている．これは結局使用した電気光学結晶（$LiNbO_3$）の異方性（複屈折）に起因するのであるが、このことについては以下で検討する．

導波－放射モード結合形の素子において、単位長あたりの結合量すなわち式(7)の結合係数の値を大きくするためには、結合のたねとなる摂動を大きくすることは、電気あるいは磁気光学効果や、弾性波の場合には限界があるので、結合モードの断面内の界

分布のオーヴァラップ積分を大きくすることに依らざるを得ないが、そのためには、界の横方向の位相定数が一致あるいは近接していなければならない。この結合モード間の横方向位相整合は、導波－導波モード結合形の素子においてももちろん考慮すべき条件であるが、導波－放射モード結合形の素子を手ごろな寸法で構成しようとする際には、とくに重要な問題である。なぜならば、導波－導波モード結合の場合は、結合電力が距離Lの2乗に比例するのに対し、導波－放射モード結合ではLに比例して[8]*、従って一般に結合が弱いからである。よって、半誘電構造形のモード結合素子において、基板領域に摂動をかけると、導波モードの横方向の位相定数が純虚数（界が－x方向に指数関数的に減衰する）であるのに対し、放射モード（サブストレート・フイルムモード）の方の横方向位相定数は実数（界が－x方

*これはもちろん結合量が小さい範囲でのことである。

向に定在波分布をなす）であるので、大きな結合係数を期待することはできない．（ただし、前節のモード・フィルタはこの場合に相当するが、このときには基板の方解石の複屈折が大きいので、C軸回転によって摂動そのものが大きくなり、オーヴァラップ積分の寄与を上回っているので、かなりの結合量が得られたのである．）そこで、フィルム内では両モードとも横位相定数が実数であるので、この領域に摂動をかけるとよいように思われる．確かに、等方性材料を薄膜部に使用すると、縦方向の位相整合によって自動的に横方向位相整合もとれて問題はないのであるが、異方性薄膜の場合には、縦方向が整合しても横方向の整合はとれない．現在入手し得る電気光学結晶は異方性の材料が多いので、丁度この場合に相当し、導波－放射モード結合形の素子への応用にはあまり適してない．（$LiNbO_3$よりも複屈折の小さい$LiTaO_3$にしても同様である．）本節で取扱った変調器が低効率であるというのも、結局はout-

diffusion 層に残留複屈折 ($n_o - \tilde{n}_e$) が存在するからである. この素子でかなりの放射損失を得るためには、out-diffusion 層の複屈折をこれ以上小さくすることは無理であるので、縦方向位相定数はちがっても、界分布の重なりの程度の大きい導波－放射モードを結合させるほかはないものと考えられる.

以上の考察により、半導波構造形モード結合素子において高効率動作を得るためには、基板あるいは上部層に異方性材料を用いて、まず縦方向の位相整合をとるとともに、薄膜部を等方性としてこの領域に摂動をかけ、結合係数を大きくするような構成にすることが望ましいことが結論される. このような構成例が次節以降で述べる磁気光学効果素子である.

5.2 磁気光学変調器

既存の磁気光学結晶には等方性材料が多いので、これらを用いれば効率の高い導波－放射モード結合形の素子が得られる可能性がある. 本節で取り扱うのは、図9.に示すような $LiNbO_3$/YIG/GGG 構

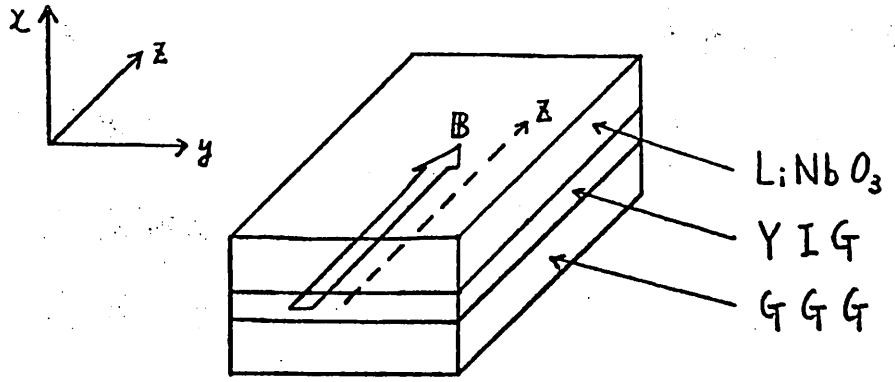


図9. $LiNbO_3$/YIG/GGG 構成の磁気光学変調器
($\lambda = 1.15\,\mu m$)

[$LiNbO_3$ のC軸 // x軸のとき　TM:導波, TE:漏洩
　　〃　　// y軸のとき　TE:導波, TM:漏洩]

成の半漏洩構造におけるYIGの磁気光学効果を利用した強度変調器である. 計算に用いたパラメータはつぎの通りである.

動作波長: $\lambda = 1.15\,\mu m$

$LiNbO_3$[14]: $n_o = 2.229$, $n_e = 2.150$

$(LaY)_3Ga_{.33}Fe_{4.67}O_{12}$ (YIG)[15]: $n = 2.178$

$Gd_3Ga_5O_{12}$ (GGG)[15]: $n = 1.945$

摂動はYIG薄膜部に一様にz方向に磁界をかけて得られるGL摂動を用いる. なお、摂動の大きさは

$K_{xy}^{F} = K_{yx}^{F*} = j\,3.4\times10^{-4}$ とする[15](この値は7アラデー回転280度/cmに相当している.) 図9の伝送路は、$LiNbO_3$のC軸//x軸のときにはTM導波路の半偏波構造となり、C軸//y軸のときにはTE導波形となる。図10はこれら2つの場合について、0次お

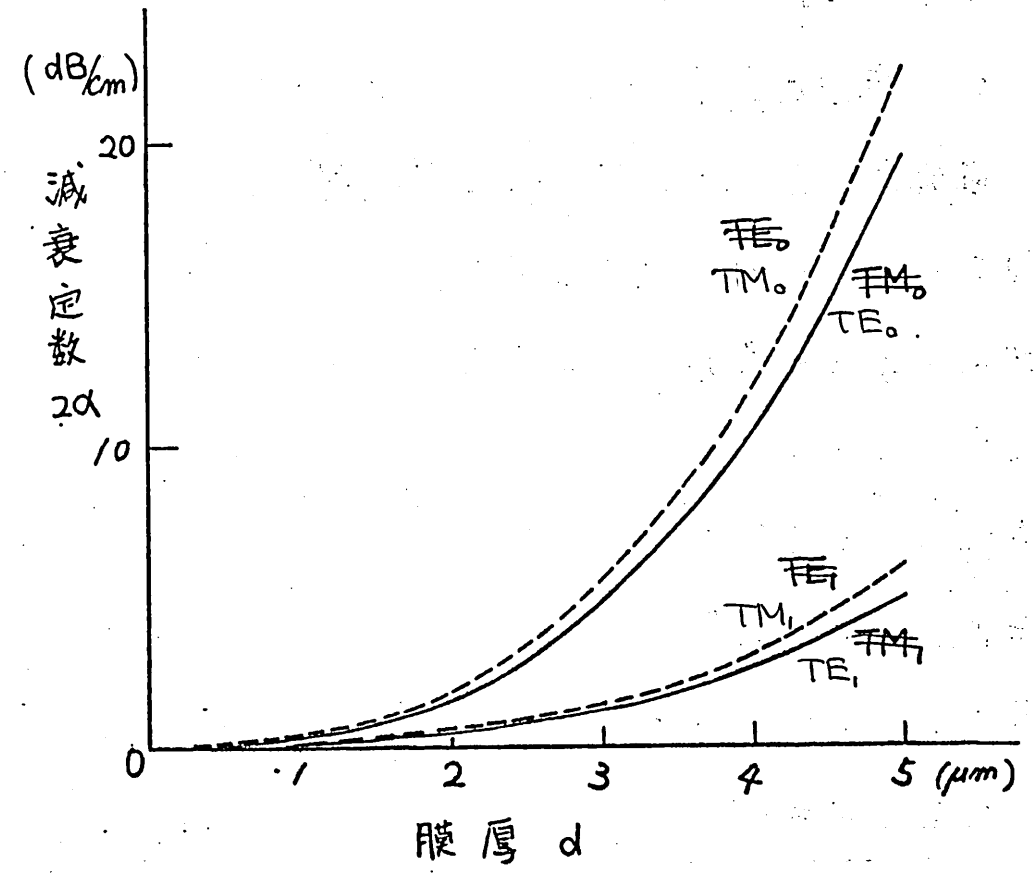


図10 導波モードの放射損失と膜厚との関係
(実線は$LiNbO_3$のC軸//x軸, 破線はC軸//y軸の場合)

よび1次の導波モードの電力減衰定数の膜厚に対する変化を示したものである。前節の電気光学変調器に比較して、2桁程度大きい結合量が期待できることがわかる。これはやはり、$LiNbO_3$の異方性によって縦方向の位相整合をとるとともに、等方性のYIGフイルムに摂動をかけた効果である。

6. 非相反素子への応用——アイソレータ

磁気光学効果から得られるG摂動による導波ー放射モード間の結合現象は非相反特性を示すので、非相反素子への応用が考えられる。これまでに光ICにおけるアイソレータとして、導波ー導波モード結合形の一方向性TE↔TM変換器を用いたものが報告されているが[17]、この場合には逆方向損失をあたえるためのモード・フイルタが必要であり、図11(a)のような2区間構成となる。*これに対し、半漏洩構造を

---

*また、この他に非相反移相器と3dB結合器を組みあわせた形式[16]や、多層構造の形式[17]も報告されている。

用いると、この構造は本来モード選択性を持っているので、同図(b)のような1区間構成となり、モード・フィルタが不要となる。さらに結合モード間の位相整合条件（縦方向）が自動的に満足されているので、製作条件も導波－導波モード結合形に比較して容易なものとなる。

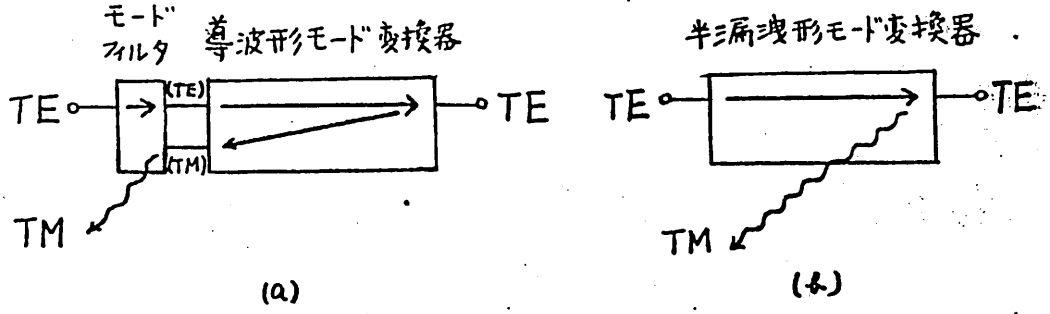


図11. TEモード・アイソレータの構成
(a) 導波－導波モード結合形
(b) 導波－放射モード結合形

対象とする構造は、前節で取上た磁気光学変調器と殆んど同じである。但しここではLiNbO3のC軸をy方向に配置した構造を基本系として考える。従ってこの場合は、TE：導波，TM：漏洩形の半漏洩構造となる。摂動としては、図12に示すようにYIG薄膜部にz方向磁界を印加してGL摂動を加える

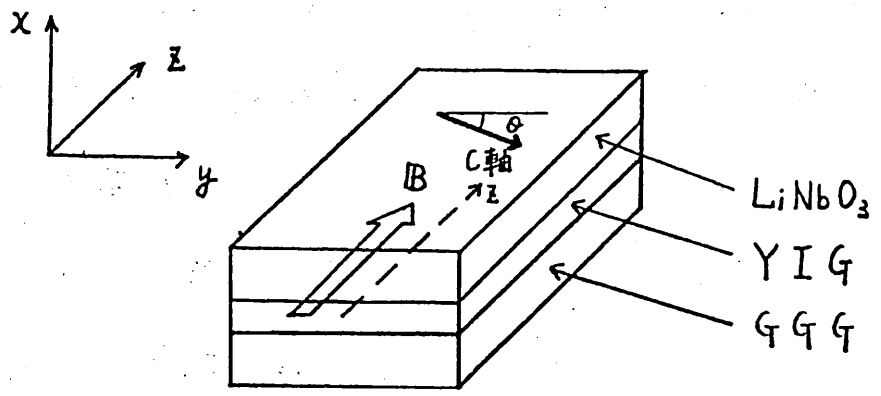


図12. 半漏洩形TEモード・アイソレータの構成
($\lambda = 1.15\,\mu m$)

と同時に、上部層（図1.の基板に対応）の$LiNbO_3$のC軸をy－z面内で回転してAP摂動をかける．するとTE導波モードとTM放射モード（いずれも前進波）との結合係数は次式で与えられる．

$$\tilde{K} = \tilde{K}_{GL} + \tilde{K}_{AP}$$

$$= \frac{-j\omega\varepsilon_0}{4P}\left[\int_{-d}^{0} K_{xy}^{F*}\, e_y^{TE*}\, e_x^{TM}\, dx + \int_{0}^{\infty} K_{yz}^{T}\, e_y^{TE*}\, e_z^{TM}\, dx\right] \quad (10)$$

上式と式(7)を比較した場合に、かつこ内のオーヴァラップ積分中の複素共役記号の位置が異なっているのは、式(7)がこの場合とは逆のTE：漏洩，TM：

導波形の場合を対象としているからである．ここで K_{xy}^{F} は純虚数で、K_{yz}^{T} が実数であるので、上式の $\hat{K}_{GL}$ と $\hat{K}_{AP}$ はともに実数となる．さらに注目すべきことは、後退波間の結合においては、$\hat{K}_{AP}$ の符号が反転するということである．[7] すると前進波に対して $\hat{K}_{GL}$ と $\hat{K}_{AP}$ が等振幅かつ異符号、従って後退波に関しては等振幅かつ同符号であるような構成にしてやれば、導波－放射モード間の結合による放射損失は後退波に対してのみ生ずることになる．すなわち図12.の回路は導波TEモードに関するアイソレータとして動作する．なお、Warner[15]は図12.と類似の $LiIO_3$／YIG／GGG構成(ただしこの場合はTE、TM両偏波に対して導波構造となる)を用いて、導波形TE⇔TMモード変換器の実験を行ったが、非相反特性は未だ観測されていない．

以下の計算においては、GL摂動は前節の磁気光学変調器の場合と同じとし（$K_{xy}^{F}=K_{yx}^{F*}=j3.4\times10^{-4}$）、$LiNbO_3$ のc軸の回転角 θ を変えて、両結合係数の

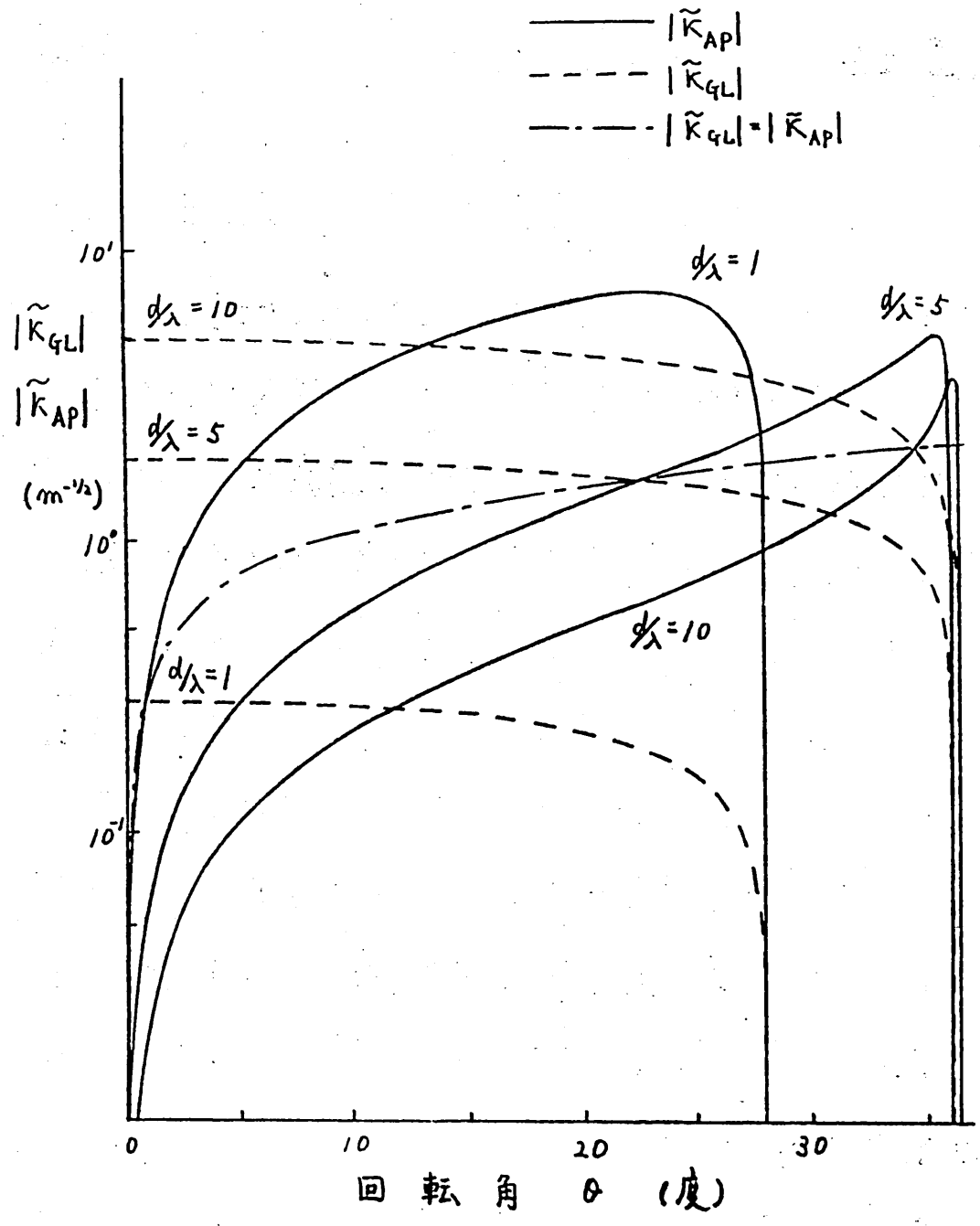


図 13. 結合係数 $\tilde{K}_{GL}, \tilde{K}_{AP}$ と $LiNbO_3$ の C 軸の回転角 θ との関係 ($\lambda = 1.15\mu m$)
(一点鎖線は $|\tilde{K}_{GL}| = |\tilde{K}_{AP}|$ なる点を結んだ曲線である。)

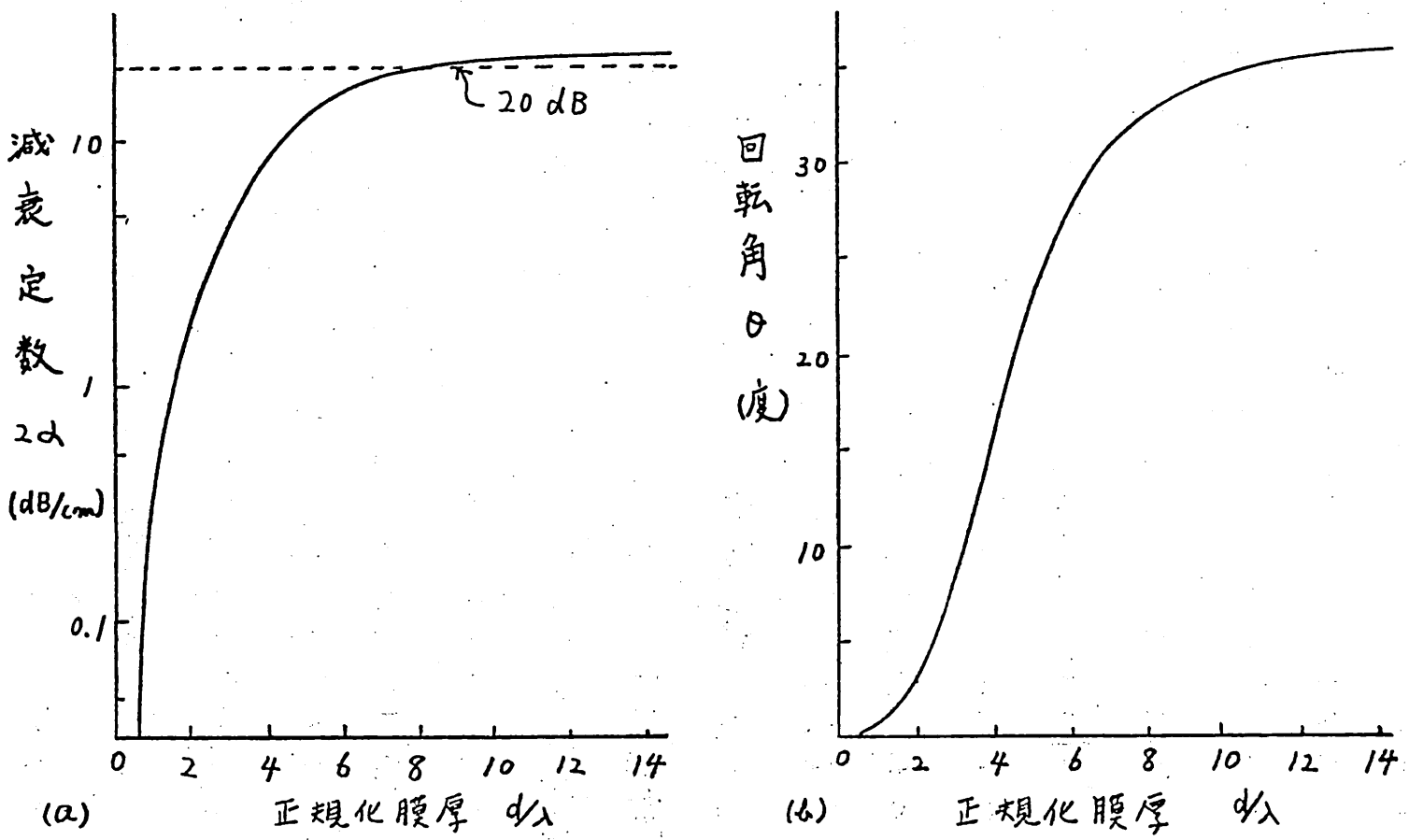


図14. アイソレータの設計図表 ($\lambda = 1.15\mu m$)

絶対値を等しくする．前述のように前進波（＋z方向伝搬）に対して、結合を相殺させるには、図12.に示すようにC軸を$y-z$面内で$-z$方向に回転すればよい．図13.は3種類の膜厚について、回転角θに対する$|\tilde{K}_{GL}|$と$|\tilde{K}_{AP}|$の変化を示したものである．C軸回転によって$LiNbO_3$の比誘電率テンソルの対角成分も変化するが、計算にあたってはこの点も考慮されている．θを大きくしていくと$|\tilde{K}_{GL}|$と$|\tilde{K}_{AP}|$がともに小さくなるのは、遮断領域に近づくので、導波モードの振幅係数が小さくなるからである．なお図中の一点鎖線は$|\tilde{K}_{GL}|=|\tilde{K}_{AP}|$なる条件を満足する点を結んだ曲線である．さらに図14.はアイソレータの設計図表である．設計にあたっては、まず図(a)によって、所望の逆方向（$-z$方向）損失により、膜厚dを求め，続いて図(b)により回転角θをきめればよい．この構造で1cm当り20dB程度の逆方向損失が得られる．

6. むすび

本文では、半漏洩構造の異方性薄膜光伝送路にお

ける直交偏波（ＴＥとＴＭ）の導波モードと放射モードの結合現象を解析するとともに、応用として変調器およびアイソレータの構成を示した。一般に導波－放射モード間の結合が導波－導波モード間の結合に比較して弱いために、この種の素子の設計にあたっては、結合モードの断面内の界分布のオーヴァラップが重要な問題となり、したがって薄膜部に等方性あるいはそれに近い材料を用いて、この領域に摂動をかけるという形式が、結合量を大きくし、素子寸法を手頃なものとする上で、最も適している。この点を考慮しておけば、半漏洩構造形の素子においては、周期構造や表面弾性波を用いずとも、また膜厚の精密な調整もなしに、位相整合条件が満足され、製作が容易になる。さらに結合モードの空間的な分離が自動的に行われるために、周辺素子が不要になり、したがって回路構成が簡単になる場合も多い。

文 献

(1) T.P.Sosnowski ,"Polarization mode filters for integrated optics," Opt.Commun.,4,6,p.408 (Feb./March 1972).

(2) 岡村，平井，山本，牧本，"半漏洩構造の異方性薄膜光導波系の固有モード解析，"輻研資料（昭50－02）.

(3) 上杉，上原，"異方性結晶を用いた導波形偏光子，"信学OQE研資，OQE 75－55 （昭50－07）.

(4) 例えばA.Yariv ,"Coupled mode theory for guided-wave optics," IEEE J. Quantum Electron., QE-9,9,p.919 (Sept. 1973).

(5) F.R.Gfeller ,"Acousto-optic scanner," Top.Meet. on Integrated Optics, New Orleans (Jan. 1974) , No.WA11-1.

(6) D.Marcuse ,"Electrooptic coupling between TE and TM modes in anisotropic slabs," IEEE J. Quantum Electron., QE-11,9,p.759 (Sept. 1975).

(7) 山本，牧本，"異方性薄膜光導波系の回路論的取扱いと非相反素子設計への応用，"信学論，56－C，3，p.187（昭48－03）.

(8) D.Marcuse , Theory of Dielectric Optical Waveguides, Academic Press , New York and London (1974).

(9) 岡村，平井，山本，牧本，"半漏洩構造の異方性薄膜光導波系のモード選択およびモード結合

特性について," 昭49信学全大, No. 1208 (昭49－07).

(10) I.P.Kaminow,J.R.Carrthers,EH.Turner and L.W.Stulz,"Thin-film $LiNbO_3$ electro-optic light modulator," Appl.Phys.Lett.,22,7, p.540 (15 May 1973).

(11) I.P.Kaminow and J.R.Carrthers ,"Optical waveguiding layers in $LiNbO_3$ and $LiTaO_3$," Appl.Phys.Lett.,22,7,p.326 (1 April 1973).

(12) J.Noda,N.Uchida and T.Saku ,"Electro-optic diffraction modulator using out-diffused waveguiding layer in $LiNbO_3$," Appl.Phys.Lett.,25,3,p.131 (1 Aug. 1974).

(13) 斉藤, 野田, 畜方, 佐久, " 拡散による光導波路の作成 (I) — 金属酸化物の $LiTaO_3$, $LiNbO_3$ への拡散 — ," 1975 応物春季連合講演会, 3a－K－4 (昭50－04).

(14) S.Wang,J.D.Crow and M.L.Shah ,"Studies of magnetooptic effects for thin-film optical-waveguide applications," IEEE Trans. Magnetics,MAG-7,3,p.385 (Sept. 1971).

(15) J.Warner ,"Nonreciprocal magnetooptic waveguides," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-23,1,p.70 (Jan. 1975).

(16) F.Auracher and H.H.Witte ,"A new design for an integrated optical isolator," Opt.Commun.,13,4,p.435 (April 1975).

(17) 北山, 熊谷, " 非相反光ICモード変換器の解析, " 輻研資料 (昭50－09).

付　録

ここでは結合係数$\tilde{K}$の導波モードの位相定数β_0近傍の分布を考慮して，結合モード方程式を解くことを試みる。摂動系に導波モード（いまの場合，TMモード）が入射した場合を考え，導波および放射モードの複素振幅$A(z)$，$B(z,\beta)$に対する入力端（$z=0$）における境界条件を，

$$A(0)=A_0,\quad B(0,\beta)=0 \qquad (A.1)$$

とする。式（5）より，上記の条件を考慮して，

$$B(z,\beta)=-\tilde{K}(\beta)^{*}\int_0^{z}A(z')\exp[j(\beta-\beta_0)z']\,dz' \qquad (A.2)$$

となるが，これを式（4）に代入し，積分の順序を変更すると，次式が得られる。

$$\frac{dA(z)}{dz}=-\int_0^{z}A(z')F(z-z')\,dz' \qquad (A.3)$$

ここに，

$$F(z)\triangleq\int_{k_0\sqrt{K^{T}}}^{k_0\sqrt{K_{yy}^{S}}}|\tilde{K}(\beta)|^{2}\frac{\beta}{p}\exp[-j(\beta-\beta_0)z]\,d\beta \qquad (A.4)$$

式（A．3）をラプラス変換することにより，

$$a(p)=\frac{A_0}{p+f(p)} \qquad (A.5)$$

が得られる。ただし，pはラプラス変数，a（p），f（p）はそれぞれA（z），F（z）のラプラス変換である。式（A．5）の逆変換よりA（z）が求められるのであるが，以下の例に示すように，F（z）をあたえる式（A．4）の右辺の$|\tilde{K}|^2(\beta/p)$が一般にβの変化に対し，零点とピークとを交互に持つ複雑な多峰分布を持つので，厳密に取り扱うことは極めて困難である。そこで$|\tilde{K}|^2(\beta/p)$に対し近似を行なうのであるが，$\beta=\beta_0$の近傍のみが重要なので，この付近の分布を解析的に取扱い易いローレンツ分布で置き換える。（ただし，β_0が$|\tilde{K}|^2(\beta/p)$のピークの近くにくるときには，その付近の変化をローレンツ分布1個で近似し，反対に零点の近くにくるときには，両側のピークをあたえる2個のローレンツ分布と，零点をあたえるための逆符号のロー

レンツ分布1個の計3個のローレンツ分布の合成で近似する。）さらに，式（A・4）の右辺の積分の上下限を±∞に拡張すると，F（z）はフーリエ変換の形となり取扱いが容易になる。

なお，以上の解析は直接にはTM導波形の半漏洩構造を対象としている。しかし，逆のTE導波形のときにも，放射偏波であるTMモードに対する媒質の異方性の効果によって$\sqrt{k_{zz}^s / k_{xx}^s}$という係数が付随してくることを考慮すれば，結果は殆んど同様である。

つぎに具体例として，3.で取り上げた方解石基板のモード・フィルタを考える。この例はTE導波形の半漏洩構造の場合であるが，単軸結晶である方解石のC軸が回転してもほぼy軸方向に沿っているので，係数$\sqrt{k_{zz}^s / k_{xx}^s} \cong 1$となり，TM導波形の場合の結果が全く同様にあてはまる。

図A・1は，図3において方解石のC軸の回転角θを1度そして膜厚dを1λとした場合の$|\tilde{V}|^2(\beta/P)$

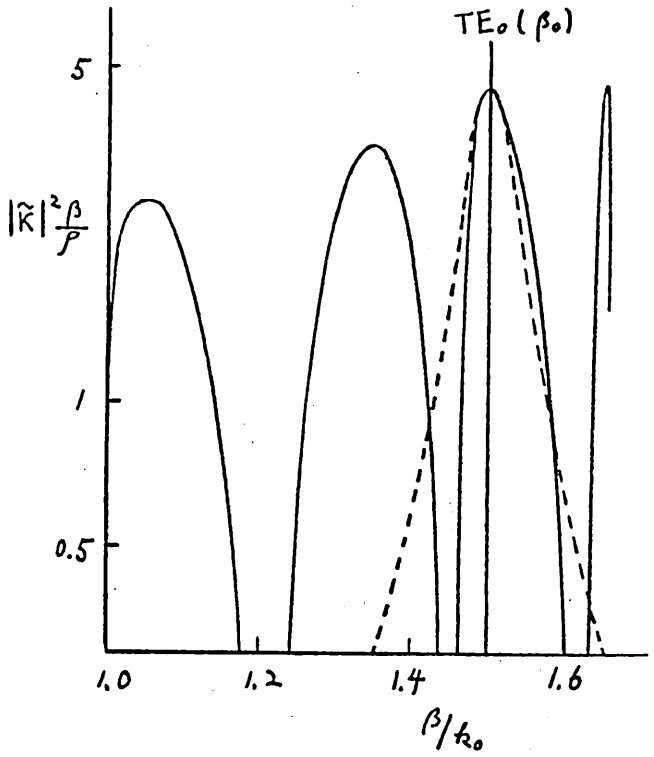


図 A.1. 図3.のモード・フィルタに結晶軸回転によるAP摂動をあたえた場合の $|\tilde{K}|^2(\beta/\rho)$ と等価屈折率 β/k_0 の関係（$\theta=1$度, $d/\lambda=1$）

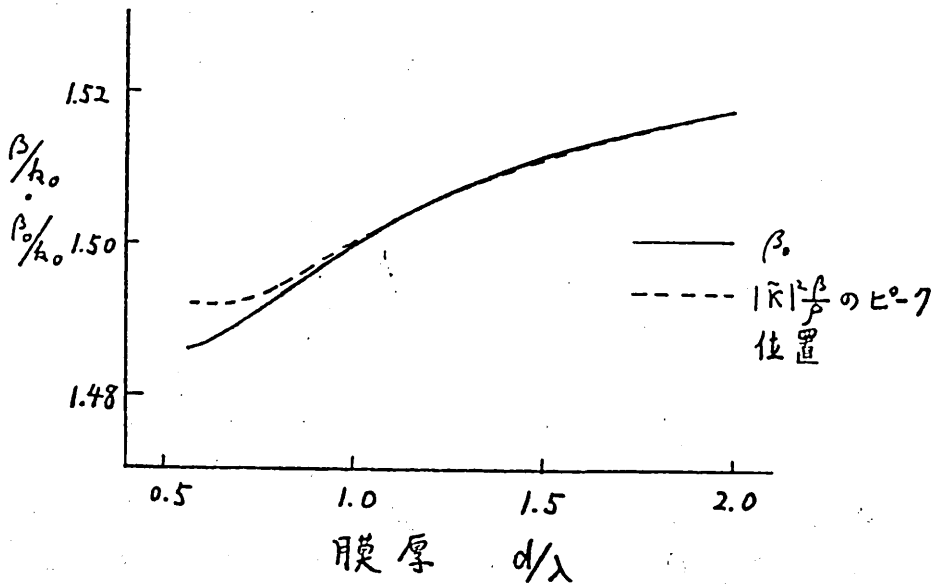


図 A.2. 膜厚に対するTE₀モードの位相定数 β_0 および，$|\tilde{K}|^2(\beta/\rho)$ の $\beta=\beta_0$ 近傍のピークの位置の変化（$\theta=1$度）

と等価屈折率 β/k_0 との関係を，サブストレート・フィルムおよびサブストレートモードの領域について示したものである。$\beta/k_0 = 1.50$ 付近の縦線は TE$_0$ モードをあらわしているが，その位置は $|\tilde{K}^2| \cdot (\beta/P)$ のピークの位置と殆んど一致している。なお，ここで興味深いことは，この性質が膜厚を変えた場合にもあてはまるということである。図 A・2 は，この様子を示したものである。膜厚が変わると，β_0 の値が変わるが，遮断膜厚の近傍を除いては，ピークの位置もそれに追随していくということが分かる。そこで，以降の解析においては，簡単のために，$|\tilde{K}|^2(\beta/P)$ が $\beta = \beta_0$ の位置にピークを持つとする。図 A．1 における破線は，$\beta = \beta_0$ 近傍の $|\tilde{K}|^2(\beta/P)$ の変化をつぎのようなローレンツ分布で近似したものである。

$$|\tilde{K}(\beta)|^2 \frac{\beta}{P} \cong \frac{a}{(\beta-\beta_0)^2 + b^2} \qquad (A \cdot 6)$$

パラメータ a，b は 2 つの曲線のピーク値と半値巾

が一致するように決定する。すると式（A・4）の F（z）は積分範囲を $-\infty < \beta < \infty$ とすれば，簡単に求められ，

$$F(z) = (\pi a / b) \exp(-bz) \qquad (A \cdot 7)$$

となる。上式より $f(p)$ を求め式（A・5）に代入すると，

$$a(p) = A_0 \frac{p+b}{p^2 + bp + \pi a / b} \qquad (A \cdot 8)$$

となり，逆変換をとると次式が得られる。

$$A(z) = A_0 \exp(-bz/2)[\cosh cz + (b/2c)\sinh cz] \qquad (A \cdot 9)$$

ただし

$$c = \sqrt{(b^3 - 4\pi a)/4b} \qquad (A \cdot 10)$$

いまの場合，$b^3 >> 4\pi a$ であるので，上式は，

$$A(z) \cong A_0 \exp[-\pi(a/b^2)z][1 + (\pi a/b^3)] \qquad (A \cdot 11)$$

と近似される。上式より，導波モードの電力変化を求めると，

$$P(z) \cong P(0) \exp[-2\pi(a/b^2)z][1 + (2\pi a/b^3)] \qquad (A \cdot 12)$$

となる。すると式（A・6）より

$$\pi(a/b^2)=\pi\left[|\hat{K}(\beta)|^2(\beta/P)\right]_{\beta=\beta_0} \quad (A\cdot 13)$$

となるので，式（9）と比較すると，式（A・12）の右辺第1項は摂動論による結果と一致することが分かる。右辺第2項はこれに対する補正項であるが，通常は無視してさしつかえない程小さい。この例では $\pi a/b^3 \sim 10^{-4}$ 程度である。なお，遮断膜厚付近では $|\hat{K}|^2(\beta/P)$ のピークと β_0 とが僅かにずれてくるが，この場合もF（x）を求める際にフーリエ変換の変位則を考慮すれば計算でき，減衰定数Dが $\beta=\beta_0$ における $|\hat{K}|^2(\beta/P)$ の値で決まるという摂動論と同様の結果が得られる。

上記は方解石のC軸をy－z面で回転してAP摂動をあたえた場合であるが，x－y面内で回転してAL摂動を加えたときには，上とは逆に β_0 の位置は，$|\hat{K}|^2(\beta/P)$ の零点に殆んど一致し，しかもこの性質も膜厚によらない。このときには，前述のように3個のローレンツ分布で $|\hat{K}|^2(\beta/P)$ 曲線を近似すれ

ば，解析的に取扱うことができ，やはり振動論の結果と良く一致した。

輻射科学研究会資料

誘電体導波路からなる分布結合系のモード結合理論に関する二,三の考察

勝田 正夫
(大阪大学工学部)
山口 攸
(近畿大学理工学部)
熊谷 信昭
(大阪大学工学部)

昭和50年12月5日

1. まえがき

モード結合理論は，伝送モード間に結合のある導波系の特性解析や，それを用いた回路素子の設計などに大きな役割を果たしている。

モード結合理論の一つの特徴は，さまざまな結合系の問題を，すべて，結合がない場合に存在する伝送モードの複素振幅に関する一階の連立微分方程式（結合方程式）におきかえて，統一的に取り扱い得るところにあると考えられる。また，例えば等方性媒質よりなる相反的な結合系では，一般に結合行列（結合方程式の係数行列）が対称となることなど，結合系の基本的な特性と結合方程式との一般的な関係等が知られており，その解についても詳細な検討が加えられている。

個々の具体的な結合系に関する結合方程式を実際に導出する場合には，取り扱う結合系に応じてさまざまの手法が用いられる。たとえば誘電体伝送路からなる結合系に関しては，Snyder[1]が等方性誘電体線路が伝送方向に不整をもつ場合や，複数個並列に配置されているような場合について，Maxwell の方程式から結合方程式を導出している。しかし，彼の導いた結合方程式では，結合系が複数個の誘電体線路からなる場合には結合行列が対称行列になるという前述の一般的な性質を満足する形には表現されていない。また，沢[2]は複数個の等方性誘電体線路からなる結合系について変

方法を用いて解析し，相反則を満たす形として対称な結合行列を導出しているが，その際，結合に関与するモードに対して適当な線形変換を行なっており，その物理的意味については明確に述べていない．非等方性の誘電体を含むような結合系に関しては，Marcuse[3]が単独の分重モード導波路内で生ずる伝送モード間の結合について，Snyder[1]と若干手続きは異なるものの，やはりMaxwellの方程式から結合方程式を導出している．

本文では，Snyderが省略した項を考慮に入れて，等方性誘電体伝送路よりなる結合系の一般的な結合方程式を導出し，相反的な結合系に対する結合行列が有すべき一般的性質との対応関係を明確にする．また，非等方性誘電体を含む結合系に対する結合方程式を，系が多数本の誘電体線路からなる場合を含めて導く．さらに，わずかな損失をもつ結合系の結合方程式の解を，無損失な結合系に関する結合方程式の解の摂動として求める近似解法を示す．

2. モード結合理論を用いた結合系の記述

本節では，一般的なモード結合理論を用いて，結合系の基本的特性と結合行列との関係を明らかにし；あわせて結合系が伝送方向に一様である場合の結合方程式の解について検討する．

モード結合理論では，結合系を伝搬する正規モードを，結合がない場合に存在する正規モードの線形結合として表

わす．すなわち，結合がない場合に存在する正規モード（本節では以下，単にモードとよぶ）の複素振幅の間になりたつ一階の連立微分方程式（結合方程式）によって結合系を記述する．いま，n個のモードが，同一の伝送方向（＋z方向）に，伝送方向に一様に結合しながら伝搬する結合系を考えると，各モードの複素振幅 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ を要素とする列ベクトルを $\mathbf{a}$ として，結合方程式は，

$$\frac{d}{dz}\mathbf{a} = j\mathbb{C}\mathbf{a} \tag{1}$$

と行列表示される．ここで係数行列 $\mathbb{C}$ はいわゆる結合行列とよばれるもので，n次の正方行列である．また，j は虚数単位を表わす．式(1)の解は

$$\mathbf{a}^{(0)} = \mathbb{A}\,\mathbf{a}^{(i)} \tag{2}$$

ただし

$$\mathbb{A} = \exp[j\mathbb{C}l] \tag{3}$$

で与えられる．ここで $\mathbf{a}^{(i)}$, $\mathbf{a}^{(0)}$ は，それぞれ結合系の入，出力端における各モードの複素振幅を表わすベクトルであり，l は結合部分の長さである．式(3)の行列 $\mathbb{A}$ は伝達行列とよばれている．

ここで，結合系の基本的な特徴と結合行列 $\mathbb{C}$ との関係について調べてみる．各モードの伝送電力 P_i $(i=1,2,\cdots,n)$ は，そのモードの規格化振幅 a_i とその複素共役 a_i^* との

積として

$$P_i = \frac{1}{2} a_i a_i^* \quad : (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

と表わされる．結合系は無損失であるとすれば

$$\frac{d}{dz} \sum_i P_i = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{da_i}{dz} a_i^* + a_i \frac{da_i^*}{dz} \right) = 0 \tag{5}$$

なる電力保存則がなりたつ．上式に式(1)を代入すると

$$\mathbb{C}^T = \mathbb{C}^* \tag{6}$$

なる関係が得られる．ここで^{T}は行列の転置を表わす．すなわち，無損失な結合系の結合行列はエルミート行列となる．

一方，通常の結合系においては，zの負方向に伝搬するn個のモード間にもやはり結合が生じている．そこで，zの正方向に伝搬するモードを前進波モード，負方向に伝搬するモードを後進波モードとよぶことにし，これらに関係する諸量をそれぞれ＋および－の添字をつけて区別することにすれば，後進波モードについても式(1)と同様の結合方程式

$$\frac{d}{dz} a_- = j \mathbb{C}_- a_- \tag{7}$$

が成立し，その解もやはり式(2)，(3)と同様に

$$a_-^{(0)} = \exp\left[j \mathbb{C}_- (-l) \right] a_-^{(l)} \tag{8}$$

となる†．このような結合系を，結合部分の両端にそれぞれn個の端子対をもつ2n端子対回路と考え，その散乱行列$\mathbb{S}$を

$$\begin{pmatrix} a_+^{(0)} \\ a_-^{(0)} \end{pmatrix} = \mathbb{S} \begin{pmatrix} a_-^{(\ell)} \\ a_+^{(\ell)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

で定義すれば，$\mathbb{S}$は式(2)，(3)および(8)より

$$\mathbb{S} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \exp[j\mathbb{C}_+ \ell] \\ \hline \exp[-j\mathbb{C}_- \ell] & 0 \end{array} \right) \tag{10}$$

となる．結合系が相反則を満たす系であれば，行列$\mathbb{S}$が対称となることから，

$$\left(\exp[j\mathbb{C}_+ \ell]\right)^T = \exp[-j\mathbb{C}_- \ell] \tag{11}$$

すなわち

$$\mathbb{C}_+^T = -\mathbb{C}_- \tag{12}$$

なる関係が得られる．

一方，結合系がその入出力端からみてまったく対称な構造をもつような場合（伝送方向に一様な結合系では，系を構成する媒質が等方性の媒質よりなる場合がこれに相等する．）には，前進波モードに関する伝達行列と後進波モー

† 厳密には，前進波モードと後進波モードの間にも結合が生じるが，その結合は充分小さいものと考え，ここでは無視する．

ドに関するそれとがまったく同じ形になることから

$$\mathbb{C}_- = -\mathbb{C}_+ \qquad (13)$$

なる関係が得られる．よって，たとえば結合系が無損失でかつ等方性の媒質よりなる場合には，式(6)，(12)および(13)より，結合行列$\mathbb{C}$は実対称行列となり，また損失をもつ等方性媒質よりなる場合には式(12)，(13)より複素対称な行列となることがわかる†．以上のことから，結合行列$\mathbb{C}$は系を構成する媒質に応じて表1のように分類することができる．

式(2)を実際に計算する場合には，しばしば結合行列$\mathbb{C}$を適当な行列$\mathbb{T}$とその逆行列$\mathbb{T}^{-1}$を用いて，

表1．結合系を構成する媒質と行列$\mathbb{C}$，$\mathbb{T}$との関係

結合系を構成する媒質	結合行列 $\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$を対角化する行列 $\mathbb{T}$
無損失・等方性媒質	実対称行列	直交行列 $\left(\mathbb{T}^{-1}=\mathbb{T}^{T}\right)$ $\mathbb{T}$；実行列
損失をもつ等方性媒質	複素対称行列	複素直交行列 $\left(\mathbb{T}^{-1}=\mathbb{T}^{T}\right)$
無損失・非等方性媒質（相反）	エルミート行列 (但し $\mathbb{C}_+^{T}=-\mathbb{C}_-$)	ユニタリ行列 $\left(\mathbb{T}^{-1}=\mathbb{T}^{*T}\right)$
無損失・非等方性媒質（非相反）	エルミート行列	

† 結合行列に関するこのような性質は，結合系が伝送方向に一様でない場合，すなわち$\mathbb{C}$がzの関数であるような場合についても成立する．

$$\mathbb{C} = \mathbb{T}\,\mathbb{\Lambda}\,\mathbb{T}^{-1} \tag{14}$$

$\mathbb{\Lambda}$ ； 対角行列

のように対角化し，式(3)の伝達行列 $\mathbb{A}$ を

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}\,\exp[j\mathbb{\Lambda}\ell]\,\mathbb{T}^{-1} \tag{15}$$

として計算する方法がとられる．特に，結合行列 $\mathbb{C}$ が特殊な行列である場合には，式(14)における行列 $\mathbb{T}$ がある性質を満足し，計算の手続きを簡単にする場合が多い．結合行列 $\mathbb{C}$ の性質に応じた行列 $\mathbb{T}$ の性質を表1に示す．

3. 等方性誘電体導波路からなる結合系に関する結合方程式の導出

誘電体導波系で，たとえば，その伝送方向に不整のあるような導波系や，あるいは多数本の誘電体線路が並列して配置されているような導波系は，伝送方向に一様な線路が単独に存在する場合の，各線路の正規モードが結合する結合系とみなすことができる．本節では，等方性誘電体線路からなるこのような結合系について，その結合方程式を導出し，従来得られている結合方程式と比較検討する．

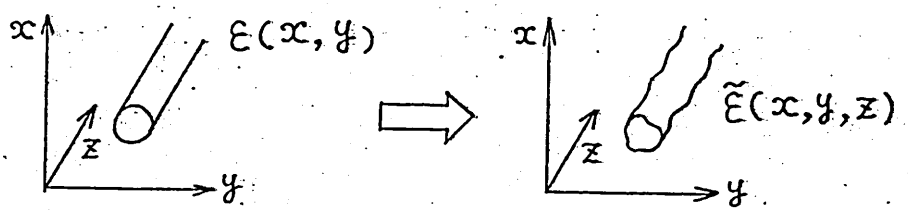
いま，結合系の電磁界をそれぞれ $\tilde{E}$, $\tilde{H}$ とすると，Maxwell の方程式

$$\nabla \times \tilde{\mathbb{E}} = -j\omega\mu\tilde{\mathbb{H}}$$
$$\nabla \times \tilde{\mathbb{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathbb{E}} \qquad (16)$$

が成立する．ここで，$\tilde{\varepsilon}$は結合系の誘電率を表わし，伝送方向をz方向とすると，一般にxおよびyの関数として与えられ，また，結合系が伝送方向に不整のある誘電体導波路よりなる場合には，zの関数ともなる．また，系が損失を含む場合には$\tilde{\varepsilon}$は複素数となるが，そのような場合については節5で近似解を求める方法を考察する．μは透磁率を表わし，ここでは定数と仮定しておく．一方，伝送方向に一様な線路が唯一つ単独に存在するような導波系（以下，結合系に対応させて，このような系を基本系とよぶことにする．）の正規モードを表わす電磁界$\mathbb{E}_i$, $\mathbb{H}_i$についても，もちろんMaxwellの方程式

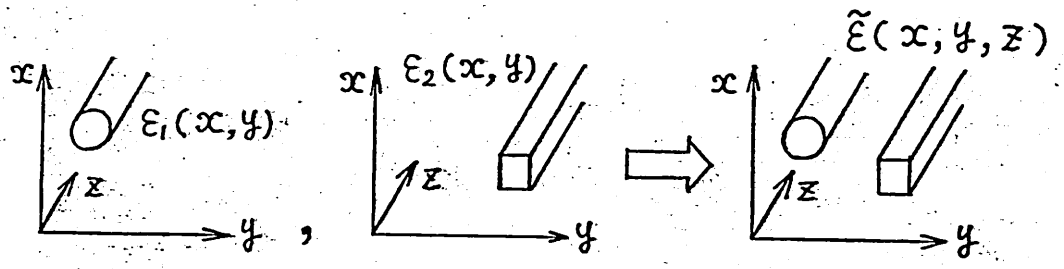
$$\nabla \times \mathbb{E}_i = -j\omega\mu\mathbb{H}_i$$
$$\nabla \times \mathbb{H}_i = j\omega\varepsilon_i\mathbb{E}_i \qquad (17)$$

が成立する．ただし，添字iは結合系を構成する各線路（基本系）の伝搬可能なモードを通し番号で表わしたモード番号である．誘電率ε_iは正規モード(i)（$\mathbb{E}_i$, $\mathbb{H}_i$で表わされるモード）が存在する基本系の誘電率であり，一般にxおよびyの関数である．以下の議論では，基本系を無損失と仮定し，ε_iは実数として取り扱うことにする．基本系の正規モード(i)の電磁界$\mathbb{E}_i$, $\mathbb{H}_i$は，伝送方向（z



基本系　　結合系

(a) 単独線路における結合



基本系　　結合系

(b) 多線路における結合

図 3.1　誘電体導波系における結合の例

方向）の位相定数を β_i として

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \mathcal{E}_i\, e^{-j\beta_i z} = (\mathcal{E}_{it} + \mathcal{E}_{iz})\, e^{-j\beta_i z} \\ \mathbf{H}_i &= \mathcal{H}_i\, e^{-j\beta_i z} = (\mathcal{H}_{it} + \mathcal{H}_{iz})\, e^{-j\beta_i z} \end{aligned} \tag{18}$$

と表わすことができる．ここで小文字で表わした電磁界 $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{H}_i$ 等はすべて横断面 x および y のみの関数となる．また，添字 t および z は，それぞれ電磁界の横断面成分および伝送方向（z 方向）成分を表わす．

ここで，結合系の電磁界の横断面成分の複素共役 $\tilde{\mathbf{E}}_t^*$, $\tilde{\mathbf{H}}_t^*$ を，基本系の電磁界の横断面成分の複素共役 $\mathcal{E}_{it}^*$, $\mathcal{H}_{it}^*$ の線形結合としてつぎのように表わす．

$$\tilde{E}_t^* = \sum_i a_i e_{it}^*$$
$$\tilde{H}_t^* = \sum_i a_i h_{it}^* \qquad (19)$$

係数 a_i は基本系の各正規モードの複素振幅を表わすことになる．このとき，結合系の電磁界の z 方向成分は式(16)より

$$\tilde{E}_z^* = \sum_i a_i \frac{\varepsilon_i}{\tilde{\varepsilon}^*} e_{iz}^*$$
$$\tilde{H}_z^* = \sum_i a_i h_{iz}^* \qquad (20)$$

として表わされる．

さて，図3.2に示すような，z 方向に微少な幅をもつ領域に Gauss の定理を適用することにより，任意のベクトル F に対して次の恒等式が成立する．

$$\int_S \nabla \cdot F \, dS = \frac{d}{dz} \int_S F \cdot i_z \, dS + \oint_{L_S} F \cdot n \, dl \qquad (21)$$

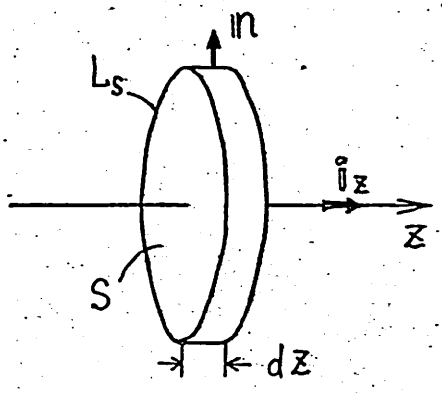


図3.2 式(21)の導出に使われる積分領域

ここで $\int_S$ は x, y 面内の面積 S にわたる積分を表わし，$\oint_{L_S}$ はその平面 S の外周についての線積分を表わす．i_z は z 方向の単位ベクトル，n は L_S に垂直な外向き単位ベクトルを表わす．いま，ベクトル F を

$$\mathbb{F} = \mathbb{E}_i \times \tilde{\mathbb{H}}^* + \tilde{\mathbb{E}}^* \times \mathbb{H}_i \tag{22}$$

と定義すると，その発散は式(16)，(17)を用いて

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = j\omega(\tilde{\varepsilon}^* - \varepsilon_i)\mathbb{E}_i \cdot \tilde{\mathbb{E}}^* \tag{23}$$

となる．式(22)，(23)の $\mathbb{E}_i$，$\mathbb{H}_i$ を式(18)を用いて e_i，h_i で表わし，式(21)へ代入すると，

$$\int_S j\omega(\tilde{\varepsilon}^* - \varepsilon_i) e_i \cdot \tilde{\mathbb{E}}^* \, dS$$

$$= \left(\frac{d}{dz} - j\beta_i\right) \int_S (e_i \times \tilde{\mathbb{H}}^* + \tilde{\mathbb{E}}^* \times h_i) \cdot i_z \, dS$$

$$+ \oint_{L_S} (e_i \times \tilde{\mathbb{H}}^* + \tilde{\mathbb{E}}^* \times h_i) \cdot n \, dl \tag{24}$$

となる．式(19)，(20)を上式の $\tilde{\mathbb{E}}^*$，$\tilde{\mathbb{H}}^*$ に代入し，面積分領域Sを無限平面に拡大すると，式(24)の右辺第2項の線積分は零となり，各モードの複素振幅 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に関する次の微分方程式が得られる．†

$$P \frac{d}{dz} a = j(BP + W) a \tag{25}$$

ここで行列P，Wはそれぞれ以下に示すような p_{ij}，ω_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を要素とするn次の正方行列であり，また行列Bは β_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を対角要素とするようなn次

† ここでは便宜上，n個の基本系モードが結合に関与しているものと考え，行列表示を用いる．

の対角行列である．

$$P_{ij} = \int_{S_\infty} \left(\mathcal{E}_{it} \times \mathcal{H}^*_{jt} + \mathcal{E}^*_{jt} \times \mathcal{H}_{it} \right) \cdot i_z \, dS \qquad (26)$$

$$\omega_{ij} = \int_{S_\infty} \omega \left(\hat{\varepsilon}^* - \varepsilon_i \right) \mathcal{E}_{it} \cdot \left(\mathcal{E}^*_{jt} + \frac{\varepsilon_j}{\hat{\varepsilon}^*} \mathcal{E}^*_{jz} \right) dS \qquad (27)$$

Snyder[1]は行列Pを単位行列とし，式(25)より

$$\frac{d}{dz} a = j (B + W) a \qquad (28)$$

なる結合方程式を導いた．行列Pの要素 P_{ij} は，式(26)より明らかなように基本系の(i)モードと(j)モードの電磁界によって伝送される電力を表わす項である．よって，結合系が単独線路よりなる場合（たとえば，図3.1(a)のような場合）には，モードの直交性により行列Pは単位行列となるが，結合系が多線路より構成される場合（図3.1(b)のような場合）にはモードの直交性が成立しないので行列Pの非対角要素 P_{ij} が値をもち，行列Pは厳密には単位行列とならない．このことより，Snyderが導いた結合方程式が正確に適用できるのは，結合系が単独線路よりなる場合に限られるのがわかる．

式(25)の行列Pを単位行列とする制限を付することなしに，基本系の各モードに関する結合方程式を導いてみる．行列P，BおよびWの間になりたつ関係式（付録I参照）

$$PB - BP = W - W^T \qquad (29)$$

を用いれば，式(25)はa_lに関する結合方程式として，

$$\frac{d}{dz} a_l = j\left(B + P^{-1} W^T\right) a_l \qquad (30)$$

なる形に変形できる．式(30)の右辺第1項は，結合がない場合の各モードの位相変化を表わし，第2項は各モード間の結合に起因する項である．この結合方程式（式(30)）は，非線路の場合にも正確に適用できるものである．

式(26)，(27)からわかるように，式(30)の結合方程式の結合行列（$B + P^{-1} W^T$）は，結合系が非線路より構成される場合には非対称行列となる．このことは，等方性誘電体線路からなる結合系の結合行列が対称でなければならないという節2の結果と矛盾するように思われるが，その原因は，基本系モードとして非直交モードも含まれていることに起因している．このことは，結合系の全伝送電力P_{total}が，節2の場合のように，

$$\frac{1}{2}\sum_i a_i^* a_i = \frac{1}{2} a_l^{*T} a_l \qquad (31)$$

なる形では表現されず

$$P_{total} = Re\left[\int_{S_\infty} \tilde{E}_t \times \tilde{H}_t^* \cdot i_z \, dS\right] = \frac{1}{2} a_l^{*T} P a_l \qquad (32)$$

となることからも明らかである．

いま，複素振幅を表わすベクトルとして，新らたに，

$$\bar{a}_l = P^{\frac{1}{2}} a_l \qquad (33)$$

を定義する．ここで $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$ は

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\mathbb{P}^{\frac{1}{2}} = \mathbb{P} \tag{34}$$

を満たすn次の正方行列であり，式(26)よりPがエルミート行列であることから，$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$ もまたエルミート行列となる（$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}*T} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$）．このとき，

$$\frac{1}{2}\bar{a}^{*T}\bar{a} = \frac{1}{2}a^{*T}\mathbb{P}a = P_{total} \tag{35}$$

となり，式(33)は，ベクトル $\bar{a}$ の各要素に対応する電磁界を直交させるような変換であることがわかる．また式(30)の結合方程式は，式(33)を用いて

$$\frac{d}{dz}\bar{a} = -j\mathbb{C}\bar{a} \tag{36}$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{B} + \mathbb{P}^{-1}\mathbb{W}^{T})\mathbb{P}^{-\frac{1}{2}} \tag{37}$$

と変形されるが，式(37)の行列 $\mathbb{C}$ は式(29)を用いて対称であることが確かめられる．結局，式(33)のベクトル $\bar{a}$ および式(37)の結合行列 $\mathbb{C}$ が，節2で述べた一般的な結合方程式の正規モードの振幅を表わすベクトルおよび結合行列に対応することになる．

先に述べたように，Snyderは行列Pを単位行列とおいて結合方程式を導出しているが，これは基本系の各モードをすべて直交モードと考えることに対応している．したがって，このような方法では，結合系が多線路よりなる場合

には式(28)の結合行列は非対称な形となってしまう．結局，行列Pを考慮に入れて始めて一般的なモード結合理論との対応関係が明らかになる．

淡[2]は，2線路より構成される等方性誘電体導波系を変分法を用いて解析し，相反則を満足させる形として対称な結合行列を導出した．しかし，その際得られた結合行列は，基本系の各モードの複素振幅を表わすベクトルに$\Pi^{\frac{1}{2}}$なる行列をかけて得られる新らたな振幅ベクトルについて得られたものである．行列Πの要素が本文の行列Pの要素と等価であることから明らかなように†，$\Pi^{\frac{1}{2}}$による変換は式(33)の変換とまったく同じであり，文献(2)で対称な結合行列が得られたのは，非直交な基本系のモードを互いに直交するようなモードに変換し，そのモード間の結合を考えているためであると考えられる．

結合係数というよび方は，通常，基本系の各モードに対して用いられるため，文献(2)あるいは式(37)で与えられる結合行列の要素を結合係数とよぶことは誤解をまねきやすい．しかし，式(36)のような，一般的な結合方程式とまったく対応する式を得ることは，節2に示した解法をそのまま用いることができるため，解の一般形を示したり，あ

---

† 行列Πのi行j列の要素は

$$\Pi_{ij} \equiv \int_S \left[\mu^{-1} (\nabla \times \mathcal{E}_{it}) \cdot (\nabla \times \mathcal{E}_{jt}) - \omega^2 \varepsilon \mathcal{E}_{it} \cdot \mathcal{E}_{jt} \right] dS$$

で与えられている．この式は，本文のP_{ij}と同様に，基本系の(i)モードと(j)モードの電磁界によって伝送される電力を表わしている．

るいは多数個のモードからなる結合系を解析する場合には便利な点が多い。

4. 非等方性誘電体導波路からなる結合系に関する結合方程式の導出

系を構成する媒質が非等方性の誘電体を含む場合についても，前節とまったく同じ手続きによって結合方程式を導くことができる。基本系としては，等方性の誘電体線路，非等方性の誘電体線路のいずれを用いてもよいが，ここでは一般の場合に適用できるように，基本系を非等方性の誘電体線路として扱うことにする。

結合系および基本系の誘電率テンソル $\tilde{\varepsilon}$，ε_i をそれぞれ次のように表わす。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{xx} & \tilde{\varepsilon}_{xy} & \tilde{\varepsilon}_{xz} \\ \tilde{\varepsilon}_{yx} & \tilde{\varepsilon}_{yy} & \tilde{\varepsilon}_{yz} \\ \tilde{\varepsilon}_{zx} & \tilde{\varepsilon}_{zy} & \tilde{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\varepsilon}_{tt} & \tilde{\varepsilon}_{tz} \\ \hline \tilde{\varepsilon}_{zt} & \tilde{\varepsilon}_{zz} \end{array}\right) \tag{38}$$

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} \varepsilon^i_{xx} & \varepsilon^i_{xy} & \varepsilon^i_{xz} \\ \varepsilon^i_{yx} & \varepsilon^i_{yy} & \varepsilon^i_{yz} \\ \varepsilon^i_{zx} & \varepsilon^i_{zy} & \varepsilon^i_{zz} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon^i_{tt} & \varepsilon^i_{tz} \\ \hline \varepsilon^i_{zt} & \varepsilon^i_{zz} \end{array}\right) \tag{39}$$

誘電率テンソルは系が無損失の場合にはエルミート行列で表わされ，特に相反的な系に対しては実対称行列となる。以下では簡単のため，基本系，結合系ともに無損失として議論をすすめる。また，式(38)，(39)の最右辺は，誘電率テ

ンソルを便宜上線路の横断面成分（t成分），伝送方向（z方向）成分およびその両方の成分を含む要素に分類して表示したものである．電界の横断面成分および z 方向成分をそれぞれ e_t および e_z とし，各成分が

$$\begin{aligned} e_t &= i_x e_x + i_y e_y \\ e_z &= i_z e_z \end{aligned} \tag{40}$$

で表わされるとき

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tt} \cdot e_t &= i_x (\varepsilon_{xx} e_x + \varepsilon_{xy} e_y) \\ &\quad + i_y (\varepsilon_{yx} e_x + \varepsilon_{yy} e_y) \\ \varepsilon_{tz} \cdot e_z &= i_x \varepsilon_{xz} e_z + i_y \varepsilon_{yz} e_z \\ \varepsilon_{zt} \cdot e_t &= i_z (\varepsilon_{zx} e_x + \varepsilon_{zy} e_y) \\ \varepsilon_{zz} \cdot e_z &= i_z \varepsilon_{zz} e_z \end{aligned} \tag{41}$$

と定義する．ここで，i_x, i_y, i_z はそれぞれ x, y および z 方向の単位ベクトルである．

節3と同様に，結合系の電磁界の横断面成分を基本系の電磁界の横断面成分の線形結合として表わした場合，結合系の電磁界の z 方向成分の複素実効は，式(41)の定義を用いて

$$\hat{E}_z^* = \sum_i a_i \left(\frac{\varepsilon_{zt}^i - \tilde{\varepsilon}_{zt}}{\hat{\varepsilon}_{zz}} \cdot e_{it} + \frac{\varepsilon_{zz}^i}{\hat{\varepsilon}_{zz}} e_{iz} \right)^* \tag{42}$$

$$\hat{H}_z^* = \sum_i a_i h_{iz}^* \tag{43}$$

と表わすことができる．

以下，節3とまったく同じ手順により，式(25)と同様の微分方程式

$$\mathbb{P}\frac{d}{dz}a\mathrm{I} = j(\mathbb{B}\mathbb{P}+\mathbb{W})a\mathrm{I} \tag{44}$$

が導出される．ただし

$$P_{ij} = \int_{S_\infty} (\mathcal{E}_{it}\times h^*_{jt} + \mathcal{E}^*_{jt}\times h_{it})\cdot i_z\, dS \tag{45}$$

$$\omega_{ij} = \int_{S_\infty} \omega\varepsilon_i\cdot(\tilde{\varepsilon}^*-\varepsilon^*_i)\cdot \left\{(1+\frac{\varepsilon^j_{zt}-\tilde{\varepsilon}_{zt}}{\tilde{\varepsilon}_{zz}})\cdot\mathcal{E}_{jt}+\frac{\varepsilon^j_{zz}}{\tilde{\varepsilon}_{zz}}\mathcal{E}_{jz}\right\}^* dS \tag{46}$$

系が単独の線路よりなる場合には，行列$\mathbb{P}$は対角行列となり，この場合，式(44)～(46)の表現はMarcuse[3]が単独の線路からなる結合系について得た結合方程式とまったく等価であることが確かめられる．

また，系が複数個の誘電体線路よりなるような場合には，節3と同様に行列$\mathbb{P}$が非対角要素に値をもつので，次式の関係（付録Ⅱ参照）

$$\mathbb{P}\mathbb{B}-\mathbb{B}\mathbb{P} = \mathbb{W}-\mathbb{W}^{*T} \tag{47}$$

を用いて

$$\frac{d}{dz}a\mathrm{I} = j(\mathbb{B}+\mathbb{P}^{-1}\mathbb{W}^{*T})a\mathrm{I} \tag{48}$$

が得られる．節3の場合と同様に，上式の右辺第2項が結合による影響を与える項である．

式(48)より得られる結合行列 $(\mathbb{B}+\mathbb{P}^{-1}\mathbb{W}^{*T})$ はエルミート行列とはならず，式(30)と同様一般的な結合方程式の結合行列に対応しない．この原因は，やはり前節で指摘したように，基本系モードとして非直交なモードも含まれていることに起因している．すなわち，節3と同様に

$$\bar{a} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}} a \tag{49}$$

と定義すれば，式(48)は $\bar{a}$ に関する結合方程式として

$$\frac{d}{dz}\bar{a} = j\mathbb{C}\bar{a} \tag{50}$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{B}+\mathbb{P}^{-1}\mathbb{W}^{*T})\mathbb{P}^{-\frac{1}{2}} \tag{51}$$

のように変形され，この行列 $\mathbb{C}$ は式(47)を用いてエルミート行列となることが示される．

5. わずかな損失をもつ誘電体線路からなる結合系の近似解法

5.1 一般的な取り扱い

伝送方向に一様な誘電体線路からなる結合系において，誘電体がわずかな損失をもつ場合を考える．このような結合系を解析するには，原理的には節2で触れた損失項を含めた結合方程式を直接解けばよいわけであるが，ここでは

無損失な系の解を用いてわずかな損失のある系の解を近似的に求める摂動的な解法について考える。本節で示す近似解法は，非等方性誘電体を含む系についても適用することができる。

結合方程式の解を求めるということは，第2の式(14)の対角行列Λと，結合行列を対角化するための行列Tを求めることに帰着される。ここで，損失を含む結合系の結合行列Cが，無損失な場合の結合行列C_0に損失項ΔCが付加された形

$$C = C_0 + \Delta C \tag{52}$$

で表わされるとする。また，行列C，C_0はそれぞれ

$$C = T \Lambda T^{-1}, \quad C_0 = T_0 \Lambda_0 T_0^{-1} \tag{53}$$

のように対角化され，

$$T_0 = (\mathcal{H}_{01}, \mathcal{H}_{02}, \cdots, \mathcal{H}_{0n}), \quad T = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \cdots, \mathcal{H}_n) \tag{54}$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_{01} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{0n} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{55}$$

で表わされるとする。ここで，$\mathcal{H}_{0i}$，$\mathcal{H}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$はそれぞれn次の列ベクトルである。第2の表1よりT_0はユニタリ行列であるから，ベクトル$\mathcal{H}_{0i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$の間には

$$\mathcal{H}_{oi}^{*T}\mathcal{H}_{oj} = \delta_{ij} \tag{56}$$

なる関係が成立する。ここで

$$\lambda_i = \lambda_{oi} + \Delta\lambda_i \tag{57}$$

$$\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{oi} + \sum_{j\neq i} m_j \mathcal{H}_{oj} \tag{58}$$

とおき，行列の固有値問題に関する近似解法[4]を適用して，$\Delta\lambda_i$，m_j を計算すれば，1次近似式，2次近似式として以下の式が得られる。（付録Ⅲ参照）

(i) 1次近似式

$$\Delta\lambda_i = \mathcal{H}_{oi}^{*T}\Delta\mathcal{C}\mathcal{H}_{oi} \tag{59}$$

$$m_j = 0 \tag{60}$$

(ii) 2次近似式

$$\Delta\lambda_i = \mathcal{H}_{oi}^{*T}\Delta\mathcal{C}\mathcal{H}_{oi} + \sum_{j\neq i}\frac{(\mathcal{H}_{oi}^{*T}\Delta\mathcal{C}\mathcal{H}_{oj})^2}{\lambda_{oi}-\lambda_{oj}} \tag{61}$$

$$m_j = \frac{\mathcal{H}_{oj}^{*T}\Delta\mathcal{C}\mathcal{H}_{oi}}{\lambda_{oi}-\lambda_{oj}} \tag{62}$$

$\mathcal{H}_{oi}$ や $\mathcal{H}_i$ の各要素は結合系正規モードを構成する結合がない場合の各モードの振幅の割合を表わすことが知られており，1次近似式は，わずかな損失の付加によってもその割合が変わらないとして，$\mathbb{T}$ と $\mathbb{T}_o$ が等しいと近似した場合の解を表わす。また，2次近似式は T，Λ ともに損失に

よる摂動をうける場合を表わす.

5.2 誘電体導波系への適用

誘電体導波系からなる結合系を考えるとき誘電体損失による結合行列の付加項 $\Delta\mathbb{C}$ は，結合系の誘電率 $\hat{\varepsilon}$ を損失項 $-j\Delta\tilde{\varepsilon}$ を含め $(\tilde{\varepsilon}-j\Delta\tilde{\varepsilon})$ として，式(27)あるいは式(46)の結合行列を計算することにより得られる．ここではその1つの適用例として，わずかな損失をもつ複数本の等方均質な誘電体線路が無損失媒質中に並列に配置されている結合系について，各基本系の正規モードが直交しているとみなせる場合（すなわち行列 $\mathbb{P}$ が単位行列とみなせる場合）を考える．このとき，基本系正規モード (i) が存在する線路の誘電率は損失項 $-j\tilde{\varepsilon}_i'$ を付け加えて $(\varepsilon_i-j\tilde{\varepsilon}_i')$ と表わされることになり，$\Delta\mathbb{C}$ は

$$\Delta\mathbb{C} = j\Delta\mathbb{W} = \frac{j}{2}\left(\mathbb{W}\mathbb{K}+\mathbb{K}\mathbb{W}\right) \tag{63}$$

ただし

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} k^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k^{(n)} \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$k^{(i)} = \frac{2\,\hat{\varepsilon}_i'}{\varepsilon_i-\varepsilon_0} \tag{65}$$

となる.† ここで，ε_0 は線路外部の誘電率を表わし，また，

† 非等方性誘電体を含むときには，$\tilde{\varepsilon}_i' \propto \varepsilon_i$ かつ $\varepsilon_0 \propto \varepsilon_i$ となるときまったく同じ取り扱いができる．そのとき $k^{(i)} = 2\,\tilde{\varepsilon}_{ixx}'/(\varepsilon_{ixx}-\varepsilon_{0xx})$ とすればよい．

ΔWの計算には結合係数を表わす式(27)の2方向電界の関係する積分の寄与が充分小さいという仮定を用いた。$k^{(i)}$は，基本系(i)モードの存在する線路の損失の大きさを示すパラメータで，均質な系を考えているから定数となる。式(63)をλ_i, $\mathcal{H}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$に対する2次近似式(式(61),(62))に代入し，$\mathbb{C}_0 = \mathbb{B} + \mathbb{W}$ なる関係を用いれば

$$\Delta\lambda_i = j\mathcal{H}_{0i}^{*T}(\lambda_{0i}\mathbb{I}-\mathbb{B})\mathbb{K}\mathcal{H}_{0i} + \sum_{j\neq i}\frac{1}{\lambda_{0j}-\lambda_{0i}}\left\{\mathcal{H}_{0j}^{*T}\left(\frac{\lambda_{0i}+\lambda_{0j}}{2}\mathbb{I}-\mathbb{B}\right)\mathbb{K}\mathcal{H}_{0i}\right\}^2 \quad (66)$$

$$m_j = \frac{j}{\lambda_{0i}-\lambda_{0j}}\mathcal{H}_{0j}^{*T}\left(\frac{\lambda_{0i}+\lambda_{0j}}{2}\mathbb{I}-\mathbb{B}\right)\mathbb{K}\mathcal{H}_{0i} \quad (67)$$

が得られる。ただし$\mathbb{I}$は単位行列である。

特別な場合として，もしすべての基本モードが同じ位相定数β_0で縮退している場合には，$\mathbb{B}=\beta_0\mathbb{I}$と表わされ，

$$\Delta\lambda_i = j(\lambda_{0i}-\beta_0)\mathcal{H}_{0i}^{*T}\mathbb{K}\mathcal{H}_{0i} + \sum_{j\neq i}\frac{1}{\lambda_{0j}-\lambda_{0i}}\left(\frac{\lambda_{0i}+\lambda_{0j}}{2}-\beta_0\right)^2\cdot\left(\mathcal{H}_{0j}^{*T}\mathbb{K}\mathcal{H}_{0i}\right)^2 \quad (68)$$

$$m_j = \frac{j}{\lambda_{0i}-\lambda_{0j}}\left(\frac{\lambda_{0i}+\lambda_{0j}}{2}-\beta_0\right)\cdot\mathcal{H}_{0j}^{*T}\mathbb{K}\mathcal{H}_{0i} \quad (69)$$

となる。また，線路の損失の大きさを表わすパラメータ$k^{(i)}$がすべての線路で等しい場合(または結合系が単独線路よりなる場合)には，$\mathbb{K}=k\mathbb{I}$とおけるので，

$$\Delta\lambda_i = jk(\lambda_{0i} - \mathbb{t}_{0i}^{*T}\mathbb{B}\,\mathbb{t}_{0i}) + k^2\sum_{j\neq i}\frac{(\mathbb{t}_{0i}^{*T}\mathbb{B}\,\mathbb{t}_{0j})^2}{\lambda_{0j}-\lambda_{0i}} \tag{70}$$

$$m_j = jk\frac{\mathbb{t}_{0j}^{*T}\mathbb{B}\,\mathbb{t}_{0i}}{\lambda_{0j}-\lambda_{0i}} \tag{71}$$

となり，さらにすべての基本モードが同じ位相定数 β_0 で縮退していて，各線路が同じ損失をもつとき（$\mathbb{B}=\beta_0\mathbb{I}$ かつ $\mathbb{K}=k\mathbb{I}$ であり，たとえば，まったく同じ線路が数本並んでいる場合）には，

$$\Delta\lambda_i = jk(\lambda_{0i}-\beta_0) \tag{72}$$

$$m_j = 0 \tag{73}$$

なる簡単な式で求められる。

6. むすび

本文では，多数本の等方性または非等方性誘電体線路からなる分布結合系の結合方程式をMaxwellの方程式からそれぞれ導出した。その際，従来の導出過程では省略されていた項を導入することにより，一般的なモード結合理論と対応づけられる形で結合方程式を導き得ることを示した。また，このような系を変分法を用いて解析した文献(2)において対称な結合行列が得られた理由は，結合に関与する直交していないモードを直交するように変換させたためであることが明らかとなった。さらに，わずかな損失をもつ結合系の結合方程式の解を無損失な結合系に関する結合方

程式の解の摂動として求める近似解法を示し，誘電体線路からなる分布結合系が誘電体損失をもつ場合に適用した．

謝辞

本研究を進めるにあたり，有益な御討論をいただいた大阪大学工学部松原正則助教授ならびに大阪大学熊谷研究室の諸氏に感謝します．

参考文献

(1) A. W. Snyder: "Coupled-Mode Theory for Optical Fibers", J. O. S. A., Vol. 62, No. 11, P. 1267, (November 1972)

(2) 沢 新之輔: "変分法による誘電体光線路間のモード結合理論", 信学論(C), Vol. 57-C, No. 8, P. 241, (昭49-8)

(3) D. Marcuse: "Coupled-Mode Theory for Anisotropic Optical Waveguides", B. S. T. J., Vol. 54, No. 6, P. 985, (July-August 1975)

(4) 黒川兼行: "マイクロ波回路入門", 丸善, (昭38)
または R. Bellman: "Introduction to Matrix Analysis", McGraw-Hill Book Co., New York (1970)

付録 I　式(29)の証明

ベクトル $\mathbb{F}$ を

$$\mathbb{F} = \mathbb{E}_i \times \mathbb{H}_j^* + \mathbb{E}_j^* \times \mathbb{H}_i \qquad (A\text{-}1)$$

とするとき，その発散は

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = j\omega(\varepsilon_j - \varepsilon_i)\mathbb{E}_i \cdot \mathbb{E}_j^* \qquad (A\text{-}2)$$

となる．式(A-1)，(A-2)を式(21)に代入し，式(18)を用いると，

$$(\beta_j - \beta_i)\int_{S_\infty} (\mathbb{e}_i \times \mathbb{h}_j^* + \mathbb{e}_j^* \times \mathbb{h}_i)\cdot \hat{\imath}_z \, dS$$

$$= \int_{S_\infty} \omega(\varepsilon_j - \varepsilon_i)\mathbb{e}_i \cdot \mathbb{e}_j^* \, dS \qquad (A\text{-}3)$$

が得られる．基本系が無損失であるので，基本系モードの電磁界の横断面成分と伝送方向成分の間には常に90°の位相のずれがあり，e_{it}，h_{it} を実数，e_{iz}，h_{iz} を純虚数と考えても一般性を失うことはない．そのとき式(27)で定められる ω_{ij} には

$$\omega_{ij} - \omega_{ji} = \int_{S_\infty} \omega(\varepsilon_j - \varepsilon_i)\mathbb{e}_i \cdot \mathbb{e}_j^* \, dS \qquad (A\text{-}4)$$

なる関係があるので，式(A-3)，(A-4)および(26)より

$$(\beta_j - \beta_i)P_{ij} = \omega_{ij} - \omega_{ji} \qquad (A\text{-}5)$$

となる．上式を行列表示すると，式(29)に示した関係

$$\mathbb{P}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{P} = \mathbb{W} - \mathbb{W}^{T} \qquad (A\text{-}6)$$

を得る．

付録Ⅱ　式(47)の証明

証明の手続きは付録Ⅰとまったく同じである．すなわち，式(A-1)を定めたときに式(A-2)，(A-3)はそれぞれ

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = j\omega \mathbb{E}_i \cdot (\mathcal{E}_j^* - \mathcal{E}_i^*) \cdot \mathbb{E}_j^* \qquad (A\text{-}7)$$

$$(\beta_j - \beta_i) \int_{S_\infty} (\mathcal{E}_i \times \mathcal{H}_j^* + \mathcal{E}_j^* \times \mathcal{H}_i) \cdot i_z \, dS$$

$$= \int_{S_\infty} \omega \mathcal{E}_i \cdot (\mathcal{E}_j^* - \mathcal{E}_i^*) \cdot \mathcal{E}_j^* \, dS \qquad (A\text{-}8)$$

となり，式(41)で定められるω_{ij}に対して

$$\omega_{ij} - \omega_{ji}^* = \int_{S_\infty} \omega \mathcal{E}_i \cdot (\mathcal{E}_j^* - \mathcal{E}_i^*) \cdot \mathcal{E}_j^* \, dS \qquad (A\text{-}9)$$

の関係があるので，式(A-5)に対応して

$$(\beta_j - \beta_i) P_{ij} = \omega_{ij} - \omega_{ji}^* \qquad (A\text{-}10)$$

が得られ，これを行列表示して式(47)に示した関係

$$\mathbb{P}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{P} = \mathbb{W} - \mathbb{W}^{*T} \qquad (A\text{-}11)$$

を得る．

付録Ⅲ　式(59)～(62)の証明

式(53)～(55)より，λ_{oi}, $\mathcal{H}_{oi}$ および λ_i, $\mathcal{H}_i$ に関してつぎの関係

$$\mathbb{C}_0 \mathcal{H}_{0i} = \lambda_{0i} \mathcal{H}_{0i} \qquad (A\text{-}12)$$

$$\mathbb{C} \mathcal{H}_i = \lambda_i \mathcal{H}_i \qquad (A\text{-}13)$$

が得られる．1次近似として，$\Delta\mathbb{C}$ の摂動によっても $\mathcal{H}_i$ が $\mathcal{H}_{0i}$ より変わらないものとすると，

$$\mathbb{C} \mathcal{H}_{0i} = \lambda_i \mathcal{H}_{0i} \qquad (A\text{-}14)$$

となる．上式に式(52)，(57)を代入して左から $\mathcal{H}_{0i}^{*T}$ をかけ，式(56)，(A-12)を用いると，式(59)に示した関係

$$\Delta\lambda_i = \mathcal{H}_{0i}^{*T} \Delta\mathbb{C} \mathcal{H}_{0i} \qquad (A\text{-}15)$$

が得られる．2次近似として，$\Delta\mathbb{C}$ の摂動により λ_i，$\mathcal{H}_i$ ともに変化をうけるものとすると，式(52)，(57)，(58)を式(A-13)に代入し，左から $\mathcal{H}_{0i}^{*T}$ ををかけて式(56)，(A-12)を用いることにより，式(61)に示した関係

$$\Delta\lambda_i = \mathcal{H}_{0i}^{*T} \Delta\mathbb{C} \mathcal{H}_{0i} + \sum_{j\neq i} \frac{(\mathcal{H}_{0i}^{*T} \Delta\mathbb{C} \mathcal{H}_{0j})^2}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} \qquad (A\text{-}16)$$

を得る．同様にして $\mathcal{H}_{0j}^{*T}$ を左からかけることにより，式(62)に示した関係

$$m_j = \frac{\mathcal{H}_{0j}^{*T} \Delta\mathbb{C} \mathcal{H}_{0i}}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} \qquad (A\text{-}17)$$

を得る．

訂 正

式(63) $\Delta \mathbb{C} = j\Delta \mathbb{W} = \frac{j}{2}(\mathbb{W}\mathbb{K} + \mathbb{K}\mathbb{W} + 2\mathbb{D})$

式(64)に追加 , $\mathbb{D} = (d_{ij})$

式(65)に追加 , $d_{ij} = \int \omega \sqrt{\hat{\varepsilon}_i' \hat{\varepsilon}_j'} (e_{it} e_{jt} - e_{iz} \cdot e_{jz}) dS$

式(66) $\Delta\lambda_i = j \phi_{oi}^{*T} (\lambda_{oi}\mathbb{K} - \mathbb{B}\mathbb{K} + \mathbb{D}) \phi_{oi}$
$$+ \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_{oj} - \lambda_{oi}} \left\{ \phi_{oj}^{*T} \left(\frac{\lambda_{oi} + \lambda_{oj}}{2} \mathbb{K} - \mathbb{B}\mathbb{K} + \mathbb{D} \right) \phi_{oi} \right\}^2$$

式(67) $m_j = \frac{j}{\lambda_{oi} - \lambda_{oj}} \phi_{oj}^{*T} \left(\frac{\lambda_{oi} + \lambda_{oj}}{2} \mathbb{K} - \mathbb{B}\mathbb{K} + \mathbb{D} \right) \phi_{oi}$

式(68) $\Delta\lambda_i = j \phi_{oi}^{*T} \{ (\lambda_{oi} - \beta_o)\mathbb{K} + \mathbb{D} \} \phi_{oi}$
$$+ \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_{oj} - \lambda_{oi}} \left[\phi_{oj}^{*T} \left\{ \left(\frac{\lambda_{oi} + \lambda_{oj}}{2} - \beta_o \right) \mathbb{K} + \mathbb{D} \right\} \phi_{oi} \right]^2$$

式(69) $m_j = \frac{j}{\lambda_{oi} - \lambda_{oj}} \phi_{oj}^{*T} \left\{ \left(\frac{\lambda_{oi} + \lambda_{oj}}{2} - \beta_o \right) \mathbb{K} + \mathbb{D} \right\} \phi_{oi}$

式(70) $\Delta\lambda_i = jk\lambda_{oi} + j \phi_{oi}^{*T} (-k\mathbb{B} + \mathbb{D}) \phi_{oi}$
$$+ \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_{oj} - \lambda_{oi}} \left\{ \phi_{oj}^{*T} (-k\mathbb{B} + \mathbb{D}) \phi_{oi} \right\}^2$$

式(71) $m_j = \frac{j}{\lambda_{oi} - \lambda_{oj}} \phi_{oj}^{*T} (-k\mathbb{B} + \mathbb{D}) \phi_{oi}$

式(72) $\Delta\lambda_i = j \{ k(\lambda_{oi} - \beta_o) + d \}$

式(73) $m_j = 0$

輻射科学研究会資料

回転運動を行う相対論的電子ビームの理論

塩　沢　俊　之
（大阪大学・工学部）

1976年1月30日

1. まえがき

等速直線運動を行う電子ビームに沿って伝搬する小信号電磁界の振舞いについては，非相対論的および相対論的電子ビームのいずれの場合にも，すでに十分明らかにされている.[1]~[9] しかしながら，中心軸のまわりに回転運動を行う直線状の電子ビームに関しては，非相対論的な場合について二，三報告されているにすぎない.[10],[11],[5] ところで，電子ビームは，巨視的電気力学の立場から見ると，分散性の運動媒質と考えられるが，等速度運動を行う分散性媒質中における電気力学については，すでに詳しく考察されている.[12]~[14] また，最近，等速度運動を行う媒質中における電気力学の基礎理論である Minkowski の理論を，媒質あるいは観測者が加速度運動を行う場合に拡張する試みがいくつか報告された.[16],[18] とりわけ，回転運動は代表的な加速度運動であり，応用上も興味のあることから，回転系の電気力学およびその応用については特に詳しく論じられている.[15]~[26] 本稿では，回転運動を行う媒質の具体例として，中心軸のまわりに一定の角速度で回転しながら，軸方向に一定の相対論的速度でドリフトしている電子ビームを考え，この電子ビーム中を伝搬する小信号電磁界に関する基本法則について，相対論的電子論を基礎にして考察する．以下では，まず，回転運動を行う相対論的電子ビームを形成する方法について述べ，つづいて，慣性系において小信号電磁界の満たす基礎方程式および構成関係式を求める．つぎに，電子ビームの静止系，すなわち回転系における電磁界方程式を求める．最後に，上で得られた電磁界基礎方程式および構成関係式を用いて，電子ビームを分散性の運動媒質とみなす立場から，回転運動を行う相対論的電子ビームに対する小信号エネルギー関係式について詳しく考察する．

2．回転運動を行う相対論的電子ビームの形成

本節では，周方向に一定の角速度で回転しながら，軸方向に一定の相対論的速度でドリフトする電子ビームを形成する方法について述べる．さて，図1に示すように，電子ビームの加速系ならびに二つのソレノイドとそれらを連結する磁極片からなる構造を考えよう．図1において，陰極から放出され

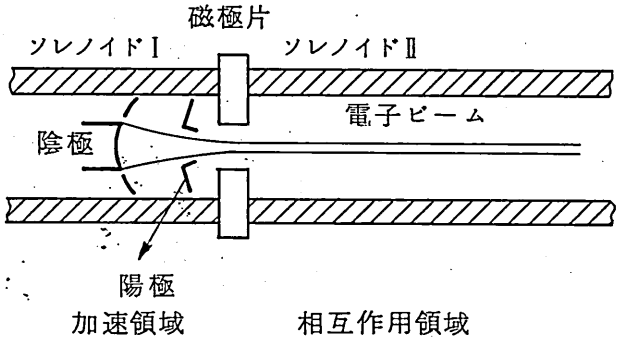
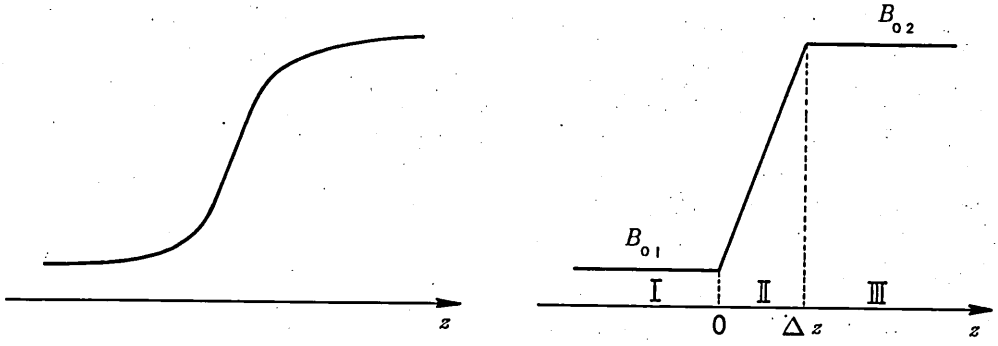


図1　回転運動を行う相対論的
電子ビームの形成

た電子流は加速電極によって相対論的速度に加速され，磁極片の近傍の領域に達する．この領域を通過すると，軸方向の磁束密度が急激に変化するために，電子流は大きい周方向のトルクを受け，中心軸のまわりに回転する．相互作用領域において，電子密度の大きさおよび軸方向の磁束密度の大きさが適当な関係を満たすとき，半径方向の力がちょうど釣合って，一定半径の電子ビームが形成される．以下では，図1の構造によって一定半径の電子ビームが形成されることを定量的に示す．

まず，図1の磁極片の近傍における軸方向の磁束密度の中心軸上の変化の様子を示すと，図2 (a) のようになる．以下では，簡単のために，図2 (a) の磁束密度の分布を同図 (b) のように理想化して考える．いま，一様な軸方



(a) 実際の分布　　(b) 実際の分布を理想化した分布

図 2　磁極片の近傍における軸方向の磁束密度 B_{oz} の分布

向速度 v_{z0} の相対論的電子流が，$z = 0$ の面に半径方向の速度 0 で入射するものとしよう．ただし，$z = 0$ の面におけるビーム半径を a，プラズマ周波数を ω_p，ビームの回転速度を Ω_0 とするとき，$\omega_p a \ll v_{z0}$ および $\Omega_0 a \ll v_{z0}$ なる条件が成立するものとする．さて，電子の静止質量を m_0，電荷を $-e$ とすると，電子に対する相対論的運動方程式は次式で与えられる．

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\right] = -e\,[\mathbf{E}_0 + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0] \qquad (1)$$

ただし，$\mathbf{u}$ は電子の速度，c は真空中の光速度である．また，$\mathbf{E}_0$ は電子の空間電荷によって作られる静電界であり，$\mathbf{B}_0$ は外部から印加された磁束密度と電子の運動によって生じる磁束密度の和を表わす．

さて，図 2 に示すように，三つの領域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲに分けて考え，まず領域Ⅱにおける電子の運動について考察する．いま，円筒座標を (r, θ, z) とし，

$$\frac{dr}{dt} = 0, \qquad \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \ll \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \qquad (2)$$

なる仮定のもとに式(1)を各成分に分けて書くと，つぎのようになる．

$$\gamma_0 m_0 \frac{d^2 r}{dt^2} - \gamma_0 m_0 r \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -eE_{0r} - er\frac{d\theta}{dt} B_{0z} + e\frac{dz}{dt} B_{0\theta}$$

$$\frac{\gamma_0 m_0}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = -e\frac{dz}{dt} B_{0r}$$

$$\gamma_0 m_0 \frac{d^2 z}{dt^2} = er\frac{do}{dt} B_{0r} \qquad (3)$$

ここで，

$$E_{0r} = -\frac{1}{2}\frac{N_0 e}{\epsilon_0} r\ , \quad B_{0z} = B_{01} + \frac{B_{02} - B_{01}}{\Delta z} z$$

$$B_{0r} = -\frac{1}{2}\frac{B_{02} - B_{01}}{\Delta z} r\ , \quad B_{0\theta} = -\frac{1}{2}\mu_0 N_0 e v_{z0} r$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_{z0}/c)^2}} \qquad (4)$$

ただし，ϵ_0 および μ_0 は，それぞれ，真空の誘電率および透磁率であり，N_0 は電子密度を表わす．N_0 は領域Ⅱにおいてほぼ一定であると仮定する．また，電子流による B_{0z} への寄与は本稿の仮定のもとでは二次の微小量となるので無視されており，B_{0r} は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の関係から得られる．

さて，電子が領域Ⅱを通過するのに要する時間を $\Delta\tau$ とし，式(4)の B_{0r} を用いて式(3)の第二式を0から $\Delta\tau$ まで積分すると，次式が得られる．

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=\Delta\tau} = \frac{1}{2}\frac{e}{\gamma_0 m_0}(B_{02} - B_{01}) + \Omega_0 \qquad (5)$$

いま，陰極面における電子の初速度を0，ビーム半径を a_0，磁束密度の軸方向成分を B_{00} とすると，$z = 0$ の面における回転速度の初期値 Ω_0 は，非相対論

的ビームに対して知られているBuschの定理[27]を若干拡張することにより，次式で与えられることがわかる．

$$\Omega_0 = \frac{1}{2}\frac{e}{\gamma_0 m_0} B_{01}\left(1-\frac{B_{00}}{B_{01}}\frac{a_0^2}{a^2}\right) \tag{6}$$

ただし，ビームを構成する各電子に対して，陰極面で取り囲む磁束と $z=0$ の面で取り囲む磁束の比が一定であると仮定する．このとき，Ω_0 はビームの断面にわたって一定であると見なすことができる．式(6)を式(5)に用いると次式が得られる．

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega_{c2}\left(1-\alpha\right) \tag{7}$$

ただし，

$$\omega_{c2} = \frac{e\,B_{02}}{\gamma_0 m_0}\ , \qquad \alpha = \frac{B_{00}}{B_{02}}\frac{a_0^2}{a^2} \tag{8}$$

つぎに，式(2)の第二の仮定，ならびに式(3)の第二式および第三式から，

$$\frac{dz}{dt} \simeq v_{z0} \tag{9}$$

であることがわかる．

さらに，式(3)の第一式を0から$\Delta\tau$まで積分することにより，つぎの関係が成り立つことがわかる．

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < K\int_0^{\Delta\tau} r\,dt \tag{10}$$

ただし，

$$K = \Omega^2 + |\omega_{c2}||\Omega| + \frac{1}{2}\omega_P^2 \left[1 + \left(\frac{v_{z0}}{c}\right)^2\right]$$

$$\omega_P^2 = \frac{N_0 e^2}{\gamma_0 m_0 \varepsilon_0} \tag{11}$$

式(10)から，

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \left|\frac{dr}{dt}\right| = 0 \tag{12}$$

が成り立つ．すなわち，式(2)の第一の仮定が妥当であることがわかる．したがって，Δz（$\Delta\tau$）が十分小さい場合には，ビーム半径はほぼ一定に保たれることがわかる．

さて，領域Ⅲ，すなわち相互作用領域において一定半径のビームが得られるためには，この領域において，$d^2r/dt^2 = 0$ とならなければならない．すなわち，式(3)の第一式を領域Ⅲに適用することによって，つぎの条件が必要であることがわかる．

$$\omega_P^2 = 2\gamma_0^2 \Omega (\omega_{c2} - \Omega) = \frac{1}{2}\omega_{c2}'^2 (1 - \alpha^2)$$

$$\omega_{c2}' = \frac{e B_{02}}{m_0} \tag{13}$$

ここで，$\omega_P^2 \geqq 0$ であることから，つぎの関係が得られる．

$$|\alpha| \leqq 1 \tag{14}$$

特に，B_{02} が一定の場合には，ω_P^2 すなわち電子密度 N_0 は $\alpha = 0$ のとき最大になる．$\alpha = 0$ かつ $\gamma_0 \simeq 1$ のビームは Brillouin 流[27]としてすでによく知られている．

以上の議論から，周方向にΩなる一定の角速度で回転しながら，軸方向に相対論的な一定の速度 v_{z0} でドリフトする電子ビームが得られた．すなわち，電子ビームの任意の点における電子の速度を $\mathbf{v}$ とすると，$\mathbf{v}$ は次式で与えられる．

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{z0} + \Omega \times \mathbf{r} \ , \quad \mathbf{v}_{z0} = \mathbf{i}_z v_{z0} \ , \quad \Omega = \mathbf{i}_z \Omega \tag{15}$$

ただし，ビーム半径を a，ビームのプラズマ周波数を ω_p とするとき，

$$\Omega a \ll v_{z0} \ , \quad \omega_p a \ll v_{z0} \tag{16}$$

なる条件が必要である．また，ビームのプラズマ周波数，サイクロトロン周波数および回転周波数の間には式(13)の関係が必要である．

3. 小信号電磁界方程式

さて，回転運動を行う相対論的電子ビーム，すなわち，式(15)の速度で運動する電子ビーム中を伝搬する小信号電磁界の満たすべき基本方程式を求めよう，電子ビーム中における小信号電磁界方程式は，電子ビームに小信号の摂動が加わったときに全電磁界が満たす方程式と摂動のないときの方程式との差をとり，小信号成分について二次以上の項を無視することによって得られる．上記の方法により，回転運動を行う相対論的電子ビームに対して，つぎのような基本方程式が得られる．

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \ , \quad \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho \tag{17}$$

ここで，

$$\mathbf{J} = -N_0 e \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} - \Omega \times \mathbf{s} \right) - Ne\mathbf{v} \quad , \quad \rho = -Ne \tag{18}$$

ただし，$\mathbf{s}$は小信号電磁界による電子の微小変位であり，Nは電子密度の変動分を表わす．

いま，

$$\mathbf{P} = -N_0 e \mathbf{s} \quad , \quad \mathbf{M} = -\mathbf{v} \times \mathbf{P} \tag{19}$$

によって分極$\mathbf{P}$および磁化$\mathbf{M}$を定義すると，電流密度$\mathbf{J}$および電荷密度ρは，$\mathbf{P}$および$\mathbf{M}$によってつぎのように表わされる．

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \quad , \quad \rho = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{20}$$

式(20)の関係を式(17)に用い，さらに，

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{M} \tag{21}$$

によって電磁界ベクトル$\mathbf{D}$および$\mathbf{H}$を導入すると，最終的に，つぎのようなMinkowski 型式の電磁界基本方程式が得られる．

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{22}$$

従来の電子ビーム理論では，式(17)の形の基本方程式が用いられているが，本稿では，式(22)の基本方程式を用いて議論を進める．式(17)の基本方程式

では，電子ビームは真空中における電流密度Jおよび電荷密度ρを通じて電磁界EおよびBを生じる源と考えられているのに対して，式(22)の基本方程式では，電子ビームは巨視的な運動媒質と見なされているが，いずれの基本方程式を用いても全く同様に電子ビームの電磁気的振舞いを記述することができる．

4. 構成関係式

前節では，回転運動を行う相対論的電子ビーム中を伝搬する小信号電磁界に対する基本方程式を求めたが，式(22)の基本方程式は，このままでは，まだ不定形であり，電磁界ベクトルE，B，DおよびHの間の構成関係式が与えられてはじめて閉じた方程式となる．本節では，電子の相対論的運動方程式を用いて，回転運動を行う相対論的電子ビームに対する構成関係式を求める．いま，小信号電磁界による摂動がない場合に点Rにある電子を考えると，この電子は，小信号の摂動が加わると，Rから微小距離sだけ隔った点R_pに移動する．さて，R_pにおける電子の速度をu_pとすると，R_pにおける電子に対する相対論的運動方程式は次式で与えられる．

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 \mathbf{u}_p}{\sqrt{1-(u_p/c)^2}}\right] = -e\left[\mathbf{E}_0(\mathbf{R}_p)+\mathbf{E}(\mathbf{R}_p)+\mathbf{u}_p \times \{\mathbf{B}_0(\mathbf{R}_p)+\mathbf{B}(\mathbf{R}_p)\}\right] \tag{23}$$

ただし，

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{v}+\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}_{z0}+\Omega\times\mathbf{r}+\frac{d\mathbf{s}}{dt} \tag{24}$$

式(23)の方程式を線形化するために，まず，式(23)の右辺を点Rのまわりに展開し，小信号成分について一次の項までを残すと，

$$\text{式 (23)の右辺} = -e\left[\mathbf{E}_0(\mathbf{R}) + (\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{E}_0(\mathbf{R}) + \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_0(\mathbf{R}) + \mathbf{v}\times\{(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{B}_0(\mathbf{R})\} + \frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{B}_0(\mathbf{R}) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{R})\right] \tag{25}$$

また，式(23)の左辺は，つぎのように書き換えられる．

$$\text{式 (23)の左辺} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u_P/c)^2}}\frac{d\mathbf{u}_P}{dt} + \frac{\mathbf{u}_P}{c^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u_P/c)^2}}\right] \tag{26}$$

式(26)の右辺第一項は，線形近似のもとでつぎのように表わされる．

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-(u_P/c)^2}}\frac{d\mathbf{u}_P}{dt} = \gamma_0 m_0\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \gamma_0 m_0\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} + \gamma_0^3 m_0\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{27}$$

式(26)の右辺第二項は，電子に対するエネルギー保存則

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u_P/c)^2}}\right] = -e\,\mathbf{u}_P\cdot\left[\mathbf{E}_0(\mathbf{R}_P) + \mathbf{E}(\mathbf{R}_P)\right] \tag{28}$$

から，つぎのようになる．

$$\frac{\mathbf{u}_P}{c^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u_P/c)^2}}\right] = -e\frac{\mathbf{v}}{c^2}\left[\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{R}) + \mathbf{v}\cdot\{(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{E}_0(\mathbf{R})\} + \frac{d\mathbf{s}}{dt}\cdot\mathbf{E}_0(\mathbf{R})\right] \tag{29}$$

一方，小信号電磁界による摂動がない場合には，点Rにおいて次式が成り立つ．

$$\gamma_0 m_0\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\left[\mathbf{E}_0(\mathbf{R}) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_0(\mathbf{R})\right] \tag{30}$$

式(25)～(29)の関係を用いて式(23)を変形し，その結果得られる式と式(30)を比較することにより，つぎのような電子の微小振動分に対する相対論的運動方程式が得られる．

$$\begin{aligned} r_0 m_0 \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = & -e\left[\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})\right]-e(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{E}_0 \\ & -e\mathbf{v}\times\left[(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{B}_0\right]+e\frac{\mathbf{v}}{c^2}\left[\mathbf{v}\cdot\{(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{E}_0\}\right] \\ & -e\left[\frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{B}_0-\frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\cdot\mathbf{E}_0\right)\right] \\ & -r_0^3 m_0\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)\frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned} \tag{31}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= -\mathbf{i}_r\,\frac{1}{2}\,\frac{N_0 e}{\varepsilon_0}\,r \\ \mathbf{B}_0 &= \mathbf{B}_{0z}+\mathbf{B}_{0\theta} = \mathbf{i}_z\,B_{02}-\mathbf{i}_\theta\,\frac{1}{2}\,\frac{N_0 e}{\varepsilon_0}\,\frac{v_{z0}}{c^2}\,r \end{aligned} \tag{32}$$

ただし，式(31)では，電子の微小変位 $\mathbf{s}$ および右辺に現われる電磁界の量はすべて点 $\mathbf{R}$ における値をとるものとする．ここで，$\Omega r \ll c$ および $\omega_p r \ll c$ なる条件を考慮し，式(32)の関係を用いて式(31)を変形すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = & -\frac{e}{r_0 m_0}\left[\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p}{r_0}\right)^2\mathbf{s}_\perp \\ & -\frac{e}{r_0 m_0}\,\frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{B}_{0z}+\left(r_0^2\Omega^2-\frac{1}{2}\omega_p^2\right)\frac{v_{z0}}{c^2}\left(\mathbf{i}_z\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)\mathbf{r} \end{aligned} \tag{33}$$

ただし，$\mathbf{s}_\perp$ は $\mathbf{s}$ の z 軸に垂直な成分を表わす．

式(33)の運動方程式を解くために，円筒波の伝搬を考え，$\mathbf{s}$ をつぎのよう

に仮定する．

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0(r)\ exp\left[\ j(\omega t - n\theta - k_z z)\right] \tag{34}$$

上式から，sの時間微分に関して，つぎの関係が成り立つことがわかる．

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{s}_0}{dt}\ exp\left[j(\omega t - n\theta - k_z z)\right] + \mathbf{s}_0 \frac{d}{dt}\ exp\left[j(\omega t - n\theta - k_z z)\right]$$

$$= \Omega \times \mathbf{s} + j\tilde{\omega}\mathbf{s}$$

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \Omega \times \frac{d\mathbf{s}}{dt} + j\tilde{\omega}\ \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

$$= \Omega \times (\Omega \times \mathbf{s}) + 2j\tilde{\omega}\Omega \times \mathbf{s} - \tilde{\omega}^2\mathbf{s}$$

$$\tilde{\omega}\ = \omega - n\Omega - k_z v_{z0} \tag{35}$$

式(35)を式(33)に代入し，さらに式(13)の関係を用いると，次式が得られる．

$$\tilde{\omega}^2\mathbf{s} + j\tilde{\omega}(\omega_{c2} - 2\Omega) \times \mathbf{s} - j\gamma_0^2\tilde{\omega}\Omega(\omega_{c2} - 2\Omega)\frac{v_{z0}}{c^2}\ s_z\ \mathbf{r}$$

$$= \frac{e}{\gamma_0 m_0}\left[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\right] \tag{36}$$

式(36)からsを求め，このsを用いて，式(19)からPを求めると，つぎのようになる．

$$\mathbf{P} = \gamma_0^2 \varepsilon_0 \left[\hat{\varepsilon} - \hat{1}\right] \mathbf{F} \tag{37}$$

ただし，

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) + j\Omega Y \frac{v_{z0}}{c^2} E_z \mathbf{r}$$

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -j\varepsilon_{12} & 0 \\ j\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{11} = 1 - \frac{X}{1-Y^2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{XY}{1-Y^2}, \quad \varepsilon_{33} = 1 - X$$

$$X = \frac{\omega_P^2}{\omega''^2}, \quad Y = \frac{\omega_{c2} - 2\Omega}{\tilde{\omega}} = \frac{\omega'_{c2} - 2\Omega'}{\omega''}$$

$$\omega'' = \gamma_0 \tilde{\omega} = \omega' - n\Omega', \quad \omega'_{c2} = \gamma_0 \omega_{c2}, \quad \Omega' = \gamma_0 \Omega \qquad (38)$$

テンソル $\hat{\varepsilon}$ は電子ビームの任意の一点が瞬間的に静止している慣性系，すなわち局所慣性系における誘電率テンソルを表わし，$\hat{I}$ は単位テンソルを表わす．また，ω'' および ω' は，それぞれ，電子ビームの静止系および電子ビームとともに z 方向に v_{z0} なる速度で運動している慣性系における周波数を表わす．さらに，Ω' および ω'_{c2} は，それぞれ，ω' の定義される慣性系における電子ビームの回転周波数およびサイクロトロン周波数である．

式(37)，(19)および(21)を用いて，DおよびHをEおよびBによって表わすと，つぎのようになる．

$$\mathbf{D} = \hat{\xi}\cdot\mathbf{E} + \hat{\eta}\cdot\mathbf{B}$$
$$\mathbf{H} = \hat{\zeta}\cdot\mathbf{E} + \hat{\chi}\cdot\mathbf{B} \qquad (39)$$

ただし，

$$\hat{\xi} = \varepsilon_0 \gamma_0^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}-\beta_z^2 , & -j\varepsilon_{12} , & \beta_x\beta_z X \\ j\varepsilon_{12} , & \varepsilon_{11}-\beta_z^2 , & \beta_y\beta_z X \\ \beta_z\beta_x X , & \beta_z\beta_y X , & \varepsilon_{33}/\gamma_0^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \gamma_0^2 \begin{bmatrix} -j\beta_z\varepsilon_{12} , & -\beta_z(\varepsilon_{11}-1) , & \beta_y(\varepsilon_{11}-1)+j\beta_x\varepsilon_{12} \\ \beta_z(\varepsilon_{11}-1) , & -j\beta_z\varepsilon_{12} , & -\beta_x(\varepsilon_{11}-1)+j\beta_y\varepsilon_{12} \\ \beta_y X , & -\beta_x X , & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\zeta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \gamma_0^2 \begin{bmatrix} -j\beta_z\varepsilon_{12} , & -\beta_z(\varepsilon_{11}-1) , & -\beta_y X \\ \beta_z(\varepsilon_{11}-1) , & -j\beta_z\varepsilon_{12} , & \beta_x X \\ -\beta_y(\varepsilon_{11}-1)+j\beta_x\varepsilon_{12} , & \beta_x(\varepsilon_{11}-1)+j\beta_y\varepsilon_{12} , & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\chi} = \frac{1}{\mu_0} \gamma_0^2 \begin{bmatrix} 1-\beta_z^2\varepsilon_{11} , & j\beta_z^2\varepsilon_{12} , & \beta_z\{\beta_x(\varepsilon_{11}-1)-j\beta_y\varepsilon_{12}\} \\ -j\beta_z^2\varepsilon_{12} , & 1-\beta_z^2\varepsilon_{11} , & \beta_z\{\beta_y(\varepsilon_{11}-1)-j\beta_x\varepsilon_{12}\} \\ \beta_z\{\beta_x(\varepsilon_{11}-1)+j\beta_y\varepsilon_{12}\} , & \beta_z\{\beta_y(\varepsilon_{11}-1)-j\beta_x\varepsilon_{12}\} , & 1/\gamma_0^2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_x = -\Omega y/c \ , \quad \beta_y = \Omega x/c \ , \quad \beta_z = v_{z0}/c \qquad (40)$$

式(40)で定義されているテンソル$\hat{\xi}$，$\hat{\eta}$，$\hat{\zeta}$および$\hat{\chi}$は，つぎのような性質をもっていることがわかる．

$$\hat{\xi} = \hat{\xi}^+ , \quad \hat{\chi} = \hat{\chi}^+ , \quad \hat{\eta} = -\hat{\zeta}^+ \qquad (41)$$

ただし，添字＋はエルミート共役（転置テンソルの複素共役）を意味する．

式(39)の構成関係式は，つぎのような形に書くこともできる．

$$\mathbf{D} = \hat{\kappa}\cdot\mathbf{E} + \hat{\lambda}\cdot\mathbf{H}$$
$$\mathbf{B} = \hat{\nu}\cdot\mathbf{E} + \hat{\mu}\cdot\mathbf{H} \qquad (42)$$

ただし，

$$\hat{\kappa} = \hat{\xi} - \hat{\eta}\,\hat{\chi}^{-1}\hat{\zeta} \quad , \quad \hat{\lambda} = \hat{\eta}\,\hat{\chi}^{-1}$$
$$\hat{\nu} = -\hat{\chi}^{-1}\hat{\zeta} \quad , \quad \hat{\mu} = \hat{\chi}^{-1} \tag{43}$$

式(41)の関係から，テンソル$\hat{\kappa}$，$\hat{\lambda}$，$\hat{\nu}$および$\hat{\mu}$は，つぎのような対称性を示すことがわかる．

$$\hat{\kappa} = \hat{\kappa}^{+} \quad , \quad \hat{\mu} = \hat{\mu}^{+} \quad , \quad \hat{\lambda} = \hat{\nu}^{+} \tag{44}$$

式(41)および(44)は，構成関係式が式(39)あるいは(42)の形で与えられる媒質が無損失であるための一般的な条件を表わしている．本節で求められた構成関係式(39)あるいは(42)を用いることにより，回転運動を行う相対論的電子ビームは分散性の運動媒質として取り扱うことができる．

5. 回転系への変換

つぎに，電子ビームの静止系，すなわち回転系における構成関係式を求めよう．そのために，まず，式(39)の成立する慣性系をIとし，I系から$v_{z0}=0$となる慣性系I'への変換を考える．I'系における構成関係式は，式(39)にLorentz 変換を適用するか，あるいは式(39)において$\beta_z = 0$とおくことによって得られ，次式で与えられる．

$$\mathbf{D}' = \hat{\xi}' \cdot \mathbf{E}' + \hat{\eta}' \cdot \mathbf{B}'$$
$$\mathbf{H}' = \hat{\zeta}' \cdot \mathbf{E}' + \hat{\chi}' \cdot \mathbf{B}' \tag{45}$$

ここで，

$$\hat{\xi}' = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \quad , \quad \hat{\chi}' = \frac{1}{\mu_0}\hat{\gamma}$$

$$\hat{\eta}' = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & \beta'_y\ (\varepsilon_{11}-1) + j\beta'_x\ \varepsilon_{12} \\ 0 & , & 0 & , & -\beta'_x\ (\varepsilon_{11}-1) + j\beta'_y\ \varepsilon_{12} \\ \beta'_y X & , & -\beta'_x X & , & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\zeta}' = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & -\beta'_y X \\ 0 & , & 0 & , & \beta'_x X \\ -\beta'_y\ (\varepsilon_{11}-1)+j\beta'_x\ \varepsilon_{12} & , & \beta'_x\ (\varepsilon_{11}-1)+j\beta'_y\ \varepsilon_{12} & , & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta'_x = -\Omega' y/c \quad , \beta'_y = \Omega' x/c \tag{46}$$

電子ビームの静止系，すなわち回転系（K系とする）における構成関係式は，式(45)で与えられる構成関係式をK系に変換することによって得られる．まず，I'系とK系との間の電磁界ベクトルの変換式は次式で与えられる．[20]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'' - \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'' \quad , \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'' \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H}'' + \mathbf{v}' \times \mathbf{D}'' \quad , \qquad \mathbf{D}' = \mathbf{D}'' \\ \mathbf{v}' &= \Omega' \times \mathbf{r}' = \Omega' \times \mathbf{r} \end{aligned} \tag{47}$$

ただし，$\mathbf{E}''$，$\mathbf{B}''$，$\mathbf{D}''$および$\mathbf{H}''$は回転系における電磁界ベクトルを表わす．回転系における構成関係式は，式(45)に式(47)の変換式を適用することによって得られ，つぎのようになる．

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'' &= \hat{\xi}'' \cdot \mathbf{E}'' + \hat{\eta}'' \cdot \mathbf{B}'' \\ \mathbf{H}'' &= \hat{\zeta}'' \cdot \mathbf{E}'' + \hat{\chi}'' \cdot \mathbf{B}'' \end{aligned} \tag{48}$$

ここで，

$$\hat{\xi}'' = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \quad , \qquad \hat{\chi}'' = \frac{1}{\mu_0}\ \hat{I}$$

$$\hat{\eta}'' = \hat{\zeta}'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & -\beta'_y \\ 0 & , & 0 & , & \beta'_x \\ \beta'_y & , & -\beta'_x & , & 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

式(48)は，つぎのように書くこともできる．

$$\mathbf{D}'' = \hat{\xi}'' \cdot \mathbf{E}'' - \varepsilon_0 \mathbf{v}' \times \mathbf{B}''$$

$$\mathbf{H}'' = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}'' - \varepsilon_0 \mathbf{v}' \times \mathbf{E}'' \tag{50}$$

なお，本節では，I'系およびK系における構成関係式のみについて述べたが，Maxwell の方程式の共変性により，I'系およびK系においても，式(22)と同じ形の電磁界基本方程式が成立する．

6．小信号エネルギー関係式

先の議論から，回転運動を行う相対論的電子ビームは，構成関係式が式(39)あるいは(42)で与えられる分散性の運動媒質に等価であることがわかった．本節では，電子ビームを分散性の媒質とみなす立場から，回転運動を行う相対論的電子ビームに沿って伝搬する小信号電磁界の運ぶエネルギーおよびその保存則について考察する．まず，式(22)の電磁界基本方程式から，つぎのようなよく知られた関係式が得られる．

$$\nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{R}, t)]$$

$$= -\left[\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{R}, t)}{\partial t} + \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{R}, t)}{\partial t}\right] \tag{51}$$

式 (51)は電磁界の瞬時値に対する関係式であるが，電子ビーム理論で実際に必要になるのは時間平均値に対するエネルギー保存則である．そこで，式(51)の時間平均を求めるために，角周波数 ω_0，周方向および z 方向の波数 n_0 および k_{z0} のまわりの狭い領域にスペクトルの広がりをもつ波束の伝搬を考えよう．このような波束の電界は，Fourier 積分を用いて，つぎのように表わされる．

$$\mathbf{E}(\mathbf{R},t)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{E}_0(\mathbf{R},t)\,e^{j(\omega_0 t-n_0\theta-k_{z0}z)}+c.c.\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left[\mathbf{E}(\omega,n,k_z)\,e^{j(\omega t-n_0\theta-k_z z)}+c.c.\right]d\omega\,dn\,dk_z \qquad (52)$$

ここで，$\mathbf{E}(\omega,n,k_z)$ は，$\omega=\omega_0$，$n=n_0$ および $k_z=k_{z0}$ において鋭いピークをもつ関数であり，$c.c.$ はその前の関数の複素共役を表わす．また，磁界 $\mathbf{H}(\mathbf{R},t)$ も式 (52)と同じような形に書くことができる．したがって，$\mathbf{D}(\mathbf{R},t)$ は，式(42) の関係が各 Fourier 成分について成立することに注意すると，つぎのように表わすことができる．

$$\mathbf{D}(\mathbf{R},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left[\hat{\kappa}\cdot\mathbf{E}(\omega,n,k_z)\,e^{j(\omega t-n\theta-k_z z)}+c.c.\right]d\omega\,dn\,dk_z$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left[\hat{\lambda}\cdot\mathbf{H}(\omega,n,k_z)\,e^{j(\omega t-n\theta-k_z z)}+c.c.\right]d\omega\,dn\,dk_z \qquad (53)$$

式 (42)の関係を用いると，$\mathbf{B}(\mathbf{R},t)$ も式 (53)と同じような形に書くことができる．

文献 (28)あるいは (29)の方法に従って，式 (52)および (53)の関係ならびに $\mathbf{H}(\mathbf{R},t)$ および $\mathbf{B}(\mathbf{R},t)$ に対するこれらと同様の関係を用いて，ω_0の一周期にわたる式 (51) の時間平均を求めると，時間平均値に関するつぎのよう

に関するつぎのようなエネルギー保存則が得られる。

$$\nabla \cdot \langle S \rangle + \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial t} = 0 \tag{54}$$

ここで，

$$\langle S \rangle = \langle S_0 \rangle + \langle S_1 \rangle$$

$$\langle S_0 \rangle = \frac{1}{4} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0)$$

$$\langle S_1 \rangle = \mathbf{i}_z \langle S_{1z} \rangle + \mathbf{i}_\theta \langle S_{1\theta} \rangle$$

$$\langle S_{1z} \rangle = -\frac{1}{4} \left[\mathbf{E}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\kappa}}{\partial k_z} \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{H}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\mu}}{\partial k_z} \cdot \mathbf{H}_0 \right.$$

$$\left. + \mathbf{E}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\lambda}}{\partial k_z} \cdot \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\nu}}{\partial k_z} \cdot \mathbf{E}_0 \right]$$

$$\langle S_{1\theta} \rangle = -\frac{1}{4} r \left[\mathbf{E}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\kappa}}{\partial n} \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{H}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\mu}}{\partial n} \cdot \mathbf{H}_0 \right.$$

$$\left. + \mathbf{E}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\lambda}}{\partial n} \cdot \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\nu}}{\partial n} \cdot \mathbf{E}_0 \right]$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \left[\mathbf{E}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\kappa}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{H}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\mu}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{H}_0 \right.$$

$$\left. + \mathbf{E}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\lambda}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_0^* \cdot \frac{\partial \omega \hat{\nu}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{E}_0 \right] \tag{55}$$

ただし，$\langle S_{1z} \rangle$ ，$\langle S_{1\theta} \rangle$および$\langle w \rangle$に現われる k_z ，n および ωによる微分は，$k_z = k_{z0}$ ，$n = n_0$ および $\omega = \omega_0$ における値をとるものとする。また，$\langle w \rangle$ および $\langle S \rangle$ は，それぞれ，電磁エネルギー密度および電磁エネルギー流密度の時間平均値を表わす。 電磁エネルギー流密度 $\langle S \rangle$ は，通常の

Poynting ベクトル $\langle S_0 \rangle$ と媒質の空間分散による項 $\langle S_1 \rangle$ との和によって表わされることがわかる．$\langle S_0 \rangle$ は電磁界のみによって運ばれるエネルギー流密度を表わしており，一方，$\langle S_1 \rangle$ は電子ビームのドリフトによって運ばれるエネルギー流密度を表わす．式(40)および(43)からわかるように，$\hat{\kappa}$，$\hat{\mu}$，$\hat{\lambda}$ および $\hat{\nu}$ は式(35)で定義されている $\tilde{\omega}$ を通してのみ n および k_z に依存する．したがって，$\langle S_{1z} \rangle$ は軸方向速度 v_{z0} に，また $\langle S_{1\theta} \rangle$ は周方向速度 Ωr に比例することがわかる．電子ビーム理論では，電子ビームのドリフトによって運ばれるエネルギー流密度 $\langle S_1 \rangle$ が重要な役割を果す．

さて，式(54)は，電子ビームの各点における局所的なエネルギー保存則を表わしているが，電子ビーム理論で実際に必要とされるのは，式(54)の関係を電子ビームの断面にわたって積分することによって得られるビームの単位長に関するエネルギー保存則である．いま，電子ビームに垂直な，微小間隔 Δz だけ隔った二枚の無限平面によって囲まれた領域で式(54)を積分し，$\Delta Z \to 0$ とすると，次式が得られる．

$$\frac{\partial P_{av}}{\partial z} + \frac{\partial W_{av}}{\partial t} = 0 \tag{56}$$

ここで，

$$P_{av} = \int \langle S \rangle \cdot \mathbf{i}_z \, da$$
$$W_{av} = \int \langle w \rangle \, da \tag{57}$$

式(57)の積分は，電子ビームに垂直な無限平面にわたる面積分を表わす．ただし，ビームの外部は真空とし，この領域では，$\hat{\kappa} = \varepsilon_0 \hat{I}$，$\hat{\mu} = \mu_0 \hat{I}$，$\hat{\lambda} = \hat{\nu} = 0$ となる．W_{av} および P_{av} は，それぞれ，電子ビームの単位長当りの電磁エネルギー密度および電磁エネルギー流密度を表わし，これらは Z および t のゆるやかに変動する関数である．式(55)からわかるように，局

所的には周方向のエネルギー流があるが，このエネルギー流は式(57)のP_{av}には寄与しない．なお，本節で求めたエネルギー関係式は，慣性系Iのみならず，前節で定義された慣性系I'および回転系Kに対しても同様に適用することができる．

7．むすび

本稿では，相対論的電子論を用いて，中心軸のまわりに一定の角速度で回転しながら，軸方向に一定の相対論的速度でドリフトしている電子ビームについて理論的に考察した．まず，階段関数的に急激に変化する軸対称の静磁界中における電子の運動について，電子の空間電荷の効果を考慮に入れて考察し，このような静磁界の分布によって回転運動を行う相対論的電子ビームが形成されることを示した．つぎに，回転運動を行う相対論的電子ビーム中における小信号電磁界の振舞いについて考察し，小信号電磁界はMinkowski型の基礎方程式を満たすことを示した．つづいて，小信号電磁界に対する構成関係式を電子の相対論的運動方程式から求め，回転運動を行う相対論的電子ビームは，小信号電磁界に関する限り，分散性の運動媒質として取り扱うことができることを明らかにした．さらに，上で得られた慣性系における構成関係式を回転系に変換することにより，電子ビームの静止系（回転系）における構成関係式を求めた．最後に，電子ビームを分散性の運動媒質とみなす立場から，回転運動を行う相対論的電子ビームに対する小信号エネルギー関係式について詳しく考察した．

なお，本研究は，昭和５０年度文部省科学研究費補助金の援助によって行われたものである．

謝　辞　終りに，日ごろ御指導頂く大阪大学工学部板倉清保教授に深謝する．

文　　献

(1) W.C.Hahn : "Small signal theory of velocity-modulated electron beams", Gen. Elec. Rev., **42**, p. 258 (June 1939).

(2) S.Ramo : "Space charge and field waves in an electron beam", Phys. Rev., **56**, p.276 (Aug. 1939).

(3) L.J.Chu : "A kinetic power theorem", paper presented at the IRE-PGED Electron Tube Research Conference, Durham, N.H. (June 1951).

(4) P.A.Sturrock : "In what sense do slow waves carry negative energy?", J.appl. Phys., **31**, p.2052 (Nov. 1960).

(5) D.L.Bobroff, H.A.Haus, and J.W.Klüver : "On the small signal power theorem of eleotron beams", J. appl. Phys., **33**, p.2932 (Oot. 1962).

(6) R.J.Briggs : "Transformation of small-signal energy and momentum of waves", J.appl. Phys., **35**, p.3268 (Nov. 1964).

(7) P.A.Sturrock : "A variational principle and an energy theorem for small-amplitude disturbances of electron beams and of electron-ion plasmas", Ann. Phys., **4**, p.306 (July 1958).

(8) A.Bers and P.Penfield, Jr. : "Conservation principles for plasmas and relativistic electron beams", IRE Trans., **ED-9**, p.12 (Jan. 1962).

(9) 森川，浜田，竹内 : "電子ビーム波のエネルギー関係式 — 場の古典的一般論からのアプローチ —", 信学論(B), **57-B**, p.83 (昭49-02).

(10) W.W.Rigrod and J.A.Lewis : "Wave propagation along a magnetically - focused cylindrical electron beam", Bell Syst. tech. J., 33, p.399 (March 1954).

(11) W.W.Rigrod : "Space - charge wave harmonics and noise propagation in rotating electron beams" Bell Syst. tech. J., 38, p.119 (Jan. 1959).

(12) T.Musha and M.Agu : "Energy and power flow of a wave in a moving dispersive medium", J.Phys. Soc. Japan, 26, p.541 (Feb. 1969).

(13) K.Furutsu : "Energy - momentum tensor of electromagnetic field in moving dispersive media and instability : relativistic formulation", Phys. Rev., 185, p.257 (Sept. 1969).

(14) M.Agu, Y.Daido, and T.Takagi : "On the energy and momentum conservation laws for linearized electromagnetic fields in a dispersive medium", J.Phys. Soc. Japan, 33, p.519 (Aug. 1972).

(15) C.V.Heer : "Resonant frequencies of an electromagnetic cavity in an accelerated system of reference", Phys. Rev., 134, p.A799 (May 1964).

(16) A.Yildiz and C.H.Tang : "Electromagnetic cavity resonances in accelerated systems", Phys. Rev., 146, p.947 (June 1966).

(17) E.J.Post : "Sagnac effect", Rev. Mod. Phys., 39, p.475 (April 1967).

(18) J.L.Anderson and J.W.Ryon : "Electromagnetic radiation

in accelerated systems", Phys. Rev., 181, p. 1765 (May 1969).

(19) J.V.Bladel : "Relativistic theory of rotating disks", Proc. IEEE, 61, p.260 (March 1973).

(20) T.Shiozawa : "Phenomenological and electron-theoretical study of the electrodynamics of rotating systsystems", Proc. IEEE, 61, p.1694 (Dec. 1973).

(21) H.A.Atwater and T.Shiozawa : "The electromagnetic field in rotating coordinate frames", Proc. IEEE (Letters), 63, p.316 (Feb. 1975).

(22) 塩沢、田中 : "回転運動を行う誘電体円柱による平面電磁波の散乱", 信学論(B), 57-B, p.361 (昭49-06).

(23) T.Shiozawa : "Constitutive relations for a rotating electron plasma", Proc. IEEE (Letters), 62, p.1283 (Sept. 1974).

(24) S.Seikai and T.Shiozawa : "Scattering of electromagnetic waves by a rotating electron-plasma column", IEEE Trans., AP-23, p.75 (Jan. 1975).

(25) T.Shiozawa : "Propagation of electromagnetic waves in rotating systems", Proc. IEEE (Letters), 63, p.1368 (Sept. 1975).

(26) 塩沢, 徳田, 青海 : "回転運動を行う電子プラズマ円柱に沿う空間電荷波の伝搬", 信学論(B), 58-B, p.529 (昭50-10).

(27) J.R.Pierce : "Theory and design of electron beams", D.Van Nostrand Co. Inc., New York (1954).

(28) V.L.Ginzburg : "The propagation of electromagnetic waves in plasmas", Appendixes A,B, and C, Pergamon (1964).

(29) K.C.Yeh and C.H.Liu : "Theory of ionospheric waves", p.49, Academic Press, New York (1972).

輻射科学研究会資料

回転運動を行う誘電体円柱に沿う電磁波の伝搬

後藤英夫

塩沢俊之

(大阪大学・工学部)

1976年1月30日

1. まえがき

最近，等速度運動を行う媒質中における電気力学の基礎理論であるMinkowski の理論を，媒質あるいは観測者が加速度運動を行う場合に拡張する試みがいくつか報告された.[2],[4] とりわけ，回転運動は代表的な加速度運動であり，応用上も興味のあることから，回転系における電気力学およびその応用については特に詳しく論じられている.[1]~[12]先に，著者の一人は，回転運動を行う媒質中における電磁界方程式について，現象論的および電子論的観点から詳しく考察し，回転運動に伴う慣性力，すなわち遠心力およびCoriolis の力による媒質の巨視的性質の変化が無視できる場合には，回転運動を行う媒質に対してもMinkowski の理論がそのまま適用できることを明らかにした.[6] 本稿では，回転系の電気力学における基本的な問題の一つとして，Minkowski の理論を用いて，中心軸のまわりに一定の角速度で回転運動を行う誘電体円柱に沿う電磁波の伝搬について考察する．ただし，誘電体円柱は均質，等方かつ非分散とし，誘電体円柱表面の速度が真空中の光速度より小さい任意の値をとる一般的な場合を取り扱う．以下では，まず，回転運動を行う媒質中における電磁界の一般解および波動方程式を円筒座標表示によって求める．回転運動を行う媒質中では，波動方程式は結合方程式になり，円柱の各点の速度が真空中の光速度に比べて十分小さくない場合には，この方程式の解は既知の関数によって表わすことはできない．そこで，本稿では，結合方程式の解を無限級数の形で求め，この級数解を用いて，回転運動を行う誘電体円柱に沿って伝搬する電磁波モードの伝搬特性を数値的に詳しく検討する．

2. 回転運動を行う誘電体円柱内部の電磁界

まず，以下での解析の準備として，中心軸のまわりに一様に回転している無限長誘電体円柱内部の電磁界の一般表示を求める．いま，図１に示すよう

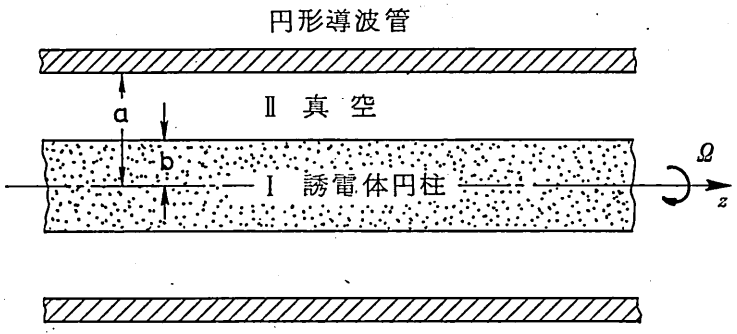


図１　円形導波管内で回転運動
を行う誘電体円柱

に，円柱（半径 b ）の軸方向に z 軸を選び，円柱は一定の角速度 $\Omega = i_z \Omega$ で中心軸のまわりに回転しているものとする．簡単のために，円柱を構成する媒質は均質，等方かつ非分散性とし，その誘電率および透磁率を，それぞれ，ε および μ とする．円柱は円形導波管（半径 a ）によって取り囲まれており，$b < r < a$ の領域は真空とする．また，観測者は慣性系に静止しているものとする．

さて，Maxwell の方程式の共変性により，回転運動を行う媒質中においても電磁界基本方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{1}$$

が成り立つ．一方，回転運動を行う媒質に対する構成関係式は，回転運動に伴う慣性力，すなわち遠心力および Coriolis の力の影響が無視できる場合には，Minkowski の構成関係式をそのまま用いることができる．遠心力および Coriolis の力の影響が無視できるための条件は，非分散性誘電体の場合，次式で与えられる．(6)

$$\Omega \ll \omega_0 \quad , \quad \omega \ll \omega_0 \tag{2}$$

ここで，ω_0 および ω は，それぞれ，媒質の共鳴周波数および取り扱う電磁波の周波数を表わす．以下では，式(2)の条件が成り立つものとする．この時，回転運動を行う媒質の任意の点における構成関係式は，次式で与えられる．(6)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E} &= \mu \left[\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D} \right] \\ \mathbf{D} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{H} &= \varepsilon \left[\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] \end{aligned} \tag{3}$$

ただし，

$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r} \tag{4}$$

であり，c は真空中の光速度，$\mathbf{v}$ は動径ベクトル $\mathbf{r}$ で表わされる点における媒質の速度を表わす．ここで，円筒座標を用いると，$\mathbf{v} = \Omega r \mathbf{i}_\varphi$ であるから，式(3)の構成関係式は，次のように書ける．

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{G} \times \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{G} \times \mathbf{H} \end{aligned} \tag{5}$$

ただし，

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f(r) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \frac{q(r)}{c}\ \mathbf{i}_\varphi$$

$$f(r) = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}$$

$$q(r) = \frac{(n^2-1)\beta}{1-n^2\beta^2}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\Omega r}{c}\ , \qquad n = \sqrt{\varepsilon\mu / \varepsilon_0 \mu_0} \qquad (6)$$

ε_0，μ_0およびnは，それぞれ，真空の誘電率，透磁率および媒質の屈折率を表わす．

いま，電磁界の任意の成分が，$R(r)\ exp\left[j(\omega t - m\varphi - k_z z)\right]$ なる変化をする円筒波の伝搬を考え，式(1)および(5)から，電磁界の横方向成分 $\mathbf{E}_t$ および $\mathbf{H}_t$ をそれらの z 方向成分 E_z および H_z で表わすと，次のようになる．

$$\mathbf{E}_t = j\frac{\omega\mu}{\Gamma}(\mathbf{i}_z \times \hat{F}_t \cdot \nabla_t H_z + j\omega \mathbf{G} \times \mathbf{i}_z H_z) - j\frac{k_z}{\Gamma}(\nabla_t E_z - j\omega E_z \mathbf{G})$$

$$\mathbf{H}_t = -j\frac{\omega\varepsilon}{\Gamma}(\mathbf{i}_z \times \hat{F}_t \cdot \nabla_t E_z + j\omega \mathbf{G} \times \mathbf{i}_z E_z) - j\frac{k_z}{\Gamma}(\nabla_t H_z - j\omega H_z \mathbf{G}) \qquad (7)$$

ただし，

$$\Gamma = \omega^2 \varepsilon \mu f(r) - k_z^2$$

$$\widehat{F}_t = \begin{bmatrix} f(r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_t = \nabla + j k_z \mathbf{i}_z \qquad (8)$$

一方，E_z および H_z は次の結合波動方程式から決定される．

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + P(r)\frac{dE_z}{dr} + Q_1(r) E_z - j\eta Q_2(r) H_z = 0$$

$$\frac{d^2 H_z}{dr^2} + P(r)\frac{dH_z}{dr} + Q_1(r) H_z + j\frac{1}{\eta} Q_2(r) E_z = 0 \qquad (9)$$

ただし，

$$P(r) = \frac{1}{r} + \frac{\Gamma}{f}\frac{d}{dr}\left(\frac{f}{\Gamma}\right)$$

$$Q_1(r) = \Gamma - \frac{p^2}{f}$$

$$Q_2(r) = \frac{k_z}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, f}\left[\frac{p}{r} + \Gamma\frac{d}{dr}\left(\frac{p}{\Gamma}\right)\right]$$

$$p = \frac{m}{r} + k_0 q \quad , \quad k_0 = \omega/c \quad , \quad \eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} \qquad (10)$$

式(9)の結合波動方程式を解くことにより，回転運動を行う媒質内部の電磁界を求めることができる．

3. 波動方程式の級数解

式(9)の結合方程式は，媒質の各点の速度が光速に比べて十分小さいものとしてβの2次の量を無視すると，フェライトあるいは磁化プラズマ中の電磁波の伝搬に関連して既によく知られた形の波動方程式になり，その解はBessel関数を用いて容易に求められる．本節では，βの2次の量を考慮に入れた式(9)の厳密な解を無限級数の形で求めることにする．ただし，以下では $r=0$ で有界な解のみを考える．

さて，式(9)を次のように変形する．

$$\begin{aligned} D\,E_z - j\eta Q H_z &= 0 \\ D\,H_z + j\frac{1}{\eta} Q E_z &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

ただし，

$$D = P_1(r)\frac{d^2}{dr^2} + P_2(r)\frac{d}{dr} + P_3(r)$$

$$P_1(r) = (1-\beta^2)(1-n^2 q_1^2 \beta^2)$$

$$P_2(r) = \left[(1-\beta^2)(1-n^2 q_1^2 \beta^2) - 2(n^2-1) q_3^2 \beta^2\right]/r$$

$$P_3(r) = (1-n^2 q_1^2 \beta^2)\left[\lambda^2 - 2m(n^2-1)k_0^2(\Omega/\omega) + n^2 m^2 k_0^2 (\Omega/\omega)^2 - \lambda_0^2 \beta^2 - \frac{m^2}{r^2}\right]$$

$$Q = 2\frac{k_z}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}(n^2-1)k_0^2\left[\Omega/\omega - m n^2 q_2^2 (\Omega/\omega)^2\right]$$

$$\lambda_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k_z^2 \quad , \quad \lambda^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - k_z^2$$

$$q_1 = \lambda_0/\lambda \quad , \quad q_2 = k_0/\lambda \quad , \quad q_3 = k_z/\lambda \tag{12}$$

式(11)から

$$(D+Q)(D-Q)E_z = 0$$

$$(D+Q)(D-Q)H_z = 0 \tag{13}$$

が成り立つ。

したがって，u_1 および u_2 を

$$\begin{aligned} D u_1 + Q u_1 &= 0 \\ D u_2 - Q u_2 &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

の解とすると，E_z および H_z は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} E_z &= (A_m u_1 + B_m u_2)\,\psi_m \\ H_z &= j\frac{1}{\eta}(A_m u_1 - B_m u_2)\,\psi_m \end{aligned} \tag{15}$$

ただし，

$$\psi_m = exp\left[j(\omega t - m\varphi - k_z z)\right] \tag{16}$$

であり，A_m および B_m は任意の定数である。

このようにして，式(11)の結合方程式は式(14)の一対の二階線型微分方程式に変換される。ここで，式(14)の $r=0$ で有界な解を $R_m^{(1)}(\lambda r)$ および $R_m^{(2)}(\lambda r)$ とし，次のような $r=0$ のまわりのべき級数の形で求める。[13]

$$R_m^{(i)}(\lambda r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(i)} (\lambda r)^{\nu+\xi_i} \quad (i=1,2) \tag{17}$$

式(17)を式(14)に代入し，r の各べきの係数を0と置くことによって，次式が得られる。

$$\xi_1 = \xi_2 = |m| \quad , \quad a_1 = a_3 = a_5 = \cdots\cdots = 0 \tag{18}$$

したがって，式(14)の解は次のようになる。

$$R_m^{(i)}(\lambda r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu}^{(i)} (\lambda r)^{2\nu+|m|} \quad (i=1,2) \tag{19}$$

ただし，係数 $a_{2\nu}^{(i)}$ は次のような漸化式から求められる．

$$4\nu(\nu+|m|)\, a_{2\nu}^{(i)} + F_1^{(i)}(\nu-1)\, a_{2(\nu-1)}^{(i)} + q_1^2 q_2^2 (\Omega/\omega)^2 F_2(\nu-2)\, a_{2(\nu-2)}^{(i)}$$
$$+ n^2 q_1^4 q_2^4 (\Omega/\omega)^4 a_{2(\nu-3)}^{(i)} = 0 \quad , \quad \nu \geqq 3, \qquad (i=1,2)$$

$$a_2^{(i)} = -\frac{F_1^{(i)}(0)}{4(1+|m|)}\, a_0^{(i)} \qquad (i=1,2)$$

$$a_4^{(i)} = \frac{1}{8(2+|m|)}\left[\frac{F_1^{(i)}(1) F_1^{(i)}(0)}{4(1+|m|)} - q_1^2 q_2^2 (\Omega/\omega)^2 F_2(0)\right] a_0^{(i)} \qquad (i=1,2)$$

$$F_1^{(i)}(\nu) = 1 - 2m(n^2-1) q_2^2 (\Omega/\omega) - \left[4\nu(\nu+|m|)(1+n^2 q_1^2)\right.$$
$$\left. + 2(2\nu+|m|)(n^2-1) q_3^2 - (n^2-1) m^2 q_1^2\right] q_2^2 (\Omega/\omega)^2$$
$$+ \delta_i \frac{2k_z}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} (n^2-1) q_2^2 \left[\Omega/\omega - m n^2 q_2^2 (\Omega/\omega)^2\right] \qquad (i=1,2)$$

$$F_2(\nu) = -(n^2+1) + 2m n^2 (n^2-1) q_2^2 (\Omega/\omega) + n^2 \left[4\nu(\nu+|m|)\right.$$
$$\left. - (n^2-1) m^2\right] q_2^2 (\Omega/\omega)^2$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ -1 & (i=2) \end{cases} \tag{20}$$

ここで $a_0^{(i)}$ $(i=1,2)$ は任意に決めることができるが，ここでは，次のように定めるものとする．

$$a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = \frac{1}{2^{|m|}|m|!} \tag{21}$$

このように $a_0^{(i)}$ ($i=1,2$) を決めると，媒質が静止している場合 ($\Omega=0$) には，式 (19)は m 次 Bessel 関数 $J_m(\lambda r)$ に一致する．

式 (19)の無限級数の収束域は $n>1$ のとき $\beta<1$ となる．一方，特殊相対論によって円柱表面の速度は光速を越えられない．すなわち $\Omega b/c<1$ なる制限をうけるので，円柱内部 ($r<b$) では常に $\beta<1$ である．したがって，式 (19)は形式的に式 (14)を満たすだけでなく，円柱の内部全体を収束域として持つ物理的にも有効な解であることがわかる．表 1 に級数解 $R_m^{(1)}(\lambda r)$，$R_m^{(2)}(\lambda r)$ の収束の模様を，また図 2 にその数値計算例を示す．

表 1　項数に対する級数 $R_m^{(i)}(\lambda r)$ ($i=1,2$) の変化

$$R_m^{(i)}(\lambda r)=\sum_{\nu=0}^{N} a_{2\nu}^{(i)}(\lambda r)^{2\nu+|m|} \quad (i=1,2)$$

$n=2$, $\Omega/\omega=0.2$, $k_z/k_0=1$, $\lambda r=5$				
	$m=0$		$m=1$	
N	$R_m^{(1)}(\lambda r)$	$R_m^{(2)}(\lambda r)$	$R_m^{(1)}(\lambda r)$	$R_m^{(2)}(\lambda r)$
1	-6.50000	-4.00000	-3.43750	-1.14583
2	6.31250	1.41667	0.273438	0.188079×10^{-1}
3	-1.51736	-0.388889	-0.370823	-0.545549×10^{-2}
4	0.195421	-0.276042	-0.378876	-0.798292×10^{-2}
5	0.138328	-0.268519	-0.379748	-0.841118×10^{-2}
6	0.134364	-0.267474	-0.379892	-0.850040×10^{-2}
7	0.133838	-0.267282	-0.379921	-0.852125×10^{-2}
8	0.133746	-0.267241	-0.379927	-0.852648×10^{-2}
9	0.133727	-0.267231	-0.379929	-0.852786×10^{-2}
10	0.133723	-0.267229	-0.379929	-0.852824×10^{-2}
11	0.133722	-0.267228	-0.379929	-0.852835×10^{-2}
12	0.133722	-0.267228	-0.379929	-0.852838×10^{-2}
13	0.133722	-0.267228	-0.379929	-0.852839×10^{-2}
14	0.133722	-0.267228	-0.379929	-0.852839×10^{-2}
15	0.133722	-0.267228	-0.379929	-0.852839×10^{-2}

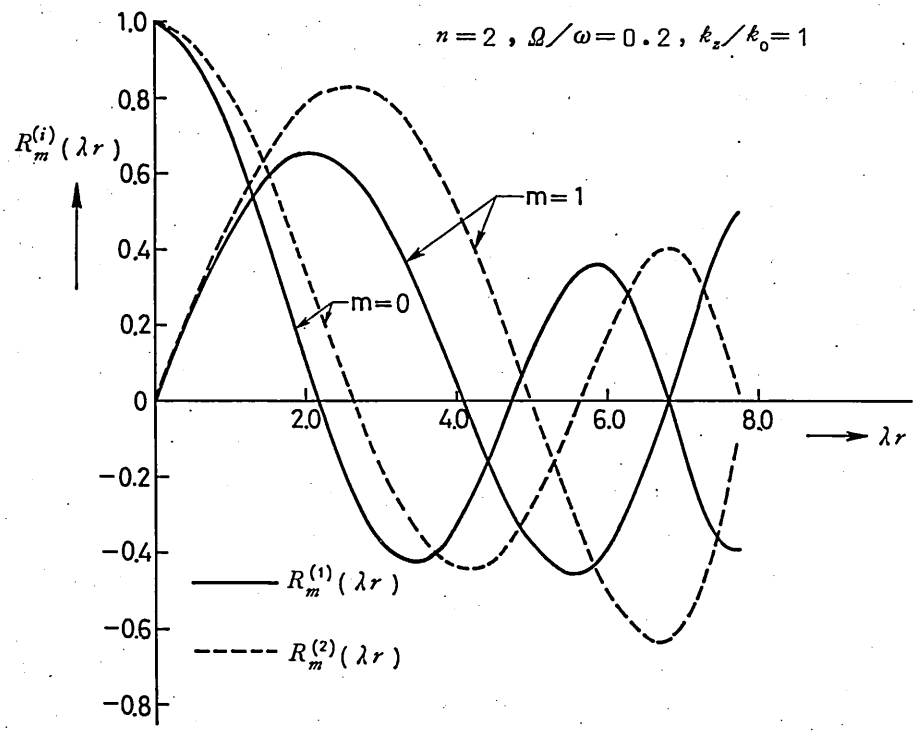


図 2　級数解 $R_m^{(1)}(\lambda r)$ および $R_m^{(2)}(\lambda r)$

4. 回転運動を行う誘電体円柱に沿う電磁波の伝搬

本節では，前節で求めた波動方程式の級数解を用いて，回転運動を行う誘電体円柱に沿って伝搬する電磁波モードの電磁界分布ならびに分散関係式を求める．

まず，式(15)および(19)より，式(9)の解は次のように表わされる．

$$E_z = \left[A_m R_m^{(1)}(\lambda r) + B_m R_m^{(2)}(\lambda r)\right] \psi_m$$

$$H_z = j\frac{1}{\eta}\left[A_m R_m^{(1)}(\lambda r) - B_m R_m^{(2)}(\lambda r)\right]\psi_m \qquad (22)$$

円柱内部の電磁界の他の成分は，式(7)および式(22)から次のようになる．

$$E_r = \left[A_m S_m^{(1)}(\lambda r) + B_m S_m^{(2)}(\lambda r)\right]\psi_m$$

$$H_r = j\frac{1}{\eta}\left[A_m S_m^{(1)}(\lambda r) - B_m S_m^{(2)}(\lambda r)\right]\psi_m$$

$$E_\varphi = \left[A_m T_m^{(1)}(\lambda r) + B_m T_m^{(2)}(\lambda r)\right]\psi_m$$

$$H_\varphi = j\frac{1}{\eta}\left[A_m T_m^{(1)}(\lambda r) - B_m T_m^{(2)}(\lambda r)\right]\psi_m \qquad (23)$$

ここで，

$$S_m^{(1)}(\lambda r) = -j\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\Gamma}\left[p R_m^{(1)}(\lambda r) + \frac{k_z\lambda}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} R_m^{(1)\prime}(\lambda r)\right]$$

$$S_m^{(2)}(\lambda r) = j\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\Gamma}\left[p R_m^{(2)}(\lambda r) - \frac{k_z\lambda}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} R_m^{(2)\prime}(\lambda r)\right]$$

$$T_m^{(1)}(\lambda r) = -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\Gamma}\left[\frac{k_z}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} p R_m^{(1)}(\lambda r) + \lambda f R_m^{(1)\prime}(\lambda r)\right]$$

$$T_m^{(2)}(\lambda r) = -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\Gamma}\left[\frac{k_z}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} p R_m^{(2)}(\lambda r) - \lambda f R_m^{(2)\prime}(\lambda r)\right] \qquad (24)$$

ただし，$R_m^{(1)\prime}(\lambda r)$ および $R_m^{(2)\prime}(\lambda r)$ は $R_m^{(1)}(\lambda r)$ および $R_m^{(2)}(\lambda r)$ の λr による一階微分を表わす．

次に，領域Ⅱ（$b<r<a$）における電界及び磁界の各成分は，$\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - k_z^2 > 0$ のとき，Maxwell の方程式から，次のように表わされる．

$$E_z = \left[C_m J_m(\lambda_0 r) + D_m Y_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m$$

$$H_z = \left[E_m J_m(\lambda_0 r) + F_m Y_m(\lambda_0 r) \right] \psi_m \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
E_r &= -\eta_0 \frac{k_0 m}{\lambda_0^2 r} \left[E_m J_m(\lambda_0 r) + F_m Y_m(\lambda_0 r) \right] \psi_m \\
&\quad - j \frac{k_z}{\lambda_0} \left[C_m J'_m(\lambda_0 r) + D_m Y'_m(\lambda_0 r) \right] \psi_m \\
H_r &= \frac{1}{\eta_0} \frac{k_0 m}{\lambda_0^2 r} \left[C_m J_m(\lambda_0 r) + D_m Y_m(\lambda_0 r) \right] \psi_m \\
&\quad - j \frac{k_z}{\lambda_0} \left[E_m J'_m(\lambda_0 r) + F_m Y'_m(\lambda_0 r) \right] \psi_m \\
E_\varphi &= -\frac{k_z m}{\lambda_0^2 r} \left[C_m J_m(\lambda_0 r) + D_m Y_m(\lambda_0 r) \right] \psi_m \\
&\quad + j \eta_0 \frac{k_0}{\lambda_0} \left[E_m J'_m(\lambda_0 r) + F_m Y'_m(\lambda_0 r) \right] \psi_m \\
H_\varphi &= -\frac{k_z m}{\lambda_0^2 r} \left[E_m J_m(\lambda_0 r) + F_m Y_m(\lambda_0 r) \right] \psi_m \\
&\quad - j \frac{1}{\eta_0} \frac{k_0}{\lambda_0} \left[C_m J'_m(\lambda_0 r) + D_m Y'_m(\lambda_0 r) \right] \psi_m
\end{aligned} \tag{26}$$

ただし，

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \tag{27}$$

C_m，D_m，E_m，F_m は未定定数であり，J_m および Y_m は m 次 Bessel関数および Neumann 関数を表わす．また，J'_m および Y'_m は，それぞれ，J_m および Y_m の一階微分を表わす．

さて，図１に示すような回転運動を行う誘電体円柱に沿って伝搬する電磁波モードの分散関係式は，$r = a$ 及び $r = b$ における境界条件から決定される．$r = a$ における境界条件は電界の接線成分が零になることであり，$r = b$ における境界条件は電界および磁界の接線成分が連続になることである．[14]

すなわち，これらの条件は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} E_z^{\mathrm{I}} &= E_z^{\mathrm{II}} \ , \quad H_z^{\mathrm{I}} = H_z^{\mathrm{II}} \\ E_\varphi^{\mathrm{I}} &= E_\varphi^{\mathrm{II}} \ , \quad H_\varphi^{\mathrm{I}} = H_\varphi^{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\} \quad (r=b)$$

$$E_z^{\mathrm{II}} = E_\varphi^{\mathrm{II}} = 0 \qquad (r=a) \qquad (28)$$

ただし，添字IおよびIIは，それぞれ，領域Iおよび領域IIの電磁界成分を表わす．

式(22)，(23)，(25)および(26)に式(28)の境界条件を適用すると，次式が得られる．

$$A_m R_m^{(1)}(\lambda b) + B_m R_m^{(2)}(\lambda b) = C_m J_m(\lambda_0 b) + D_m Y_m(\lambda_0 b)$$

$$j\frac{1}{\eta}\left[A_m R_m^{(1)}(\lambda b) - B_m R_m^{(2)}(\lambda b)\right] = E_m J_m(\lambda_0 b) + F_m Y_m(\lambda_0 b)$$

$$A_m T_m^{(1)}(\lambda b) + B_m T_m^{(2)}(\lambda b) = -\frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}\left[C_m J_m(\lambda_0 b) + D_m Y_m(\lambda_0 b)\right] + j\eta_0 \frac{k_0}{\lambda_0}\left[E_m J'_m(\lambda_0 b) + F_m Y'_m(\lambda_0 b)\right]$$

$$j\frac{1}{\eta}\left[A_m T_m^{(1)}(\lambda b) - B_m T_m^{(2)}(\lambda b)\right] = -\frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}\left[E_m J_m(\lambda_0 b) + F_m Y_m(\lambda_0 b)\right] - j\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0}{\lambda_0}\left[C_m J'_m(\lambda_0 b) + D_m Y'_m(\lambda_0 b)\right]$$

$$C_m J_m(\lambda_0 a) + D_m Y_m(\lambda_0 a) = 0$$

$$E_m J'_m(\lambda_0 a) + F_m Y'_m(\lambda_0 a) = 0 \qquad (29)$$

式(29)は，A_m，B_m，C_m，D_m，E_mおよびF_mに関する六元連立一次方程式を表わす．これらが自明でない解を持つためには，A_m，B_m ……等の係数によって作られる行列式が零にならなければならない．これから，次のよう

な回転運動を行う誘電体円柱に沿って伝搬する電磁波モードに対する分散関係式が得られる。

$$
\begin{vmatrix}
R_m^{(1)}(\lambda b) & R_m^{(2)}(\lambda b) & -J_m(\lambda_0 b) & -Y_m(\lambda_0 b) & 0 & 0 \\
j\frac{1}{\eta}R_m^{(1)}(\lambda b) & -j\frac{1}{\eta}R_m^{(2)}(\lambda b) & 0 & 0 & -J_m(\lambda_0 b) & -Y_m(\lambda_0 b) \\
T_m^{(1)}(\lambda b) & T_m^{(2)}(\lambda b) & \frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}J_m(\lambda_0 b) & \frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}Y_m(\lambda_0 b) & -j\eta_0\frac{k_0}{\lambda_0}J'_m(\lambda_0 b) & -j\eta_0\frac{k_0}{\lambda_0}Y'_m(\lambda_0 b) \\
j\frac{1}{\eta}T_m^{(1)}(\lambda b) & -j\frac{1}{\eta}T_m^{(2)}(\lambda b) & j\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0}{\lambda_0}J'_m(\lambda_0 b) & j\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0}{\lambda_0}Y'_m(\lambda_0 b) & \frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}J_m(\lambda_0 b) & \frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}Y_m(\lambda_0 b) \\
0 & 0 & J_m(\lambda_0 a) & Y_m(\lambda_0 a) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & J'_m(\lambda_0 a) & Y'_m(\lambda_0 a)
\end{vmatrix} = 0
\tag{30}
$$

一方，$\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - k_z^2 < 0$ のときは，式(25)および(26)は，それぞれ，つぎのようになる。

$$
\begin{aligned}
E_z &= \left[C_m I_m(\lambda_0 r) + D_m K_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m \\
H_z &= \left[E_m I_m(\lambda_0 r) + F_m K_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
E_r &= \eta_0\frac{k_0 m}{\lambda_0^2 r}\left[E_m I_m(\lambda_0 r) + F_m K_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m \\
&\quad + j\frac{k_z}{\lambda_0}\left[C_m I'_m(\lambda_0 r) + D_m K'_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m
\end{aligned}
$$

$$H_r = -\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0 m}{\lambda_0^2 r}\left[C_m I_m(\lambda_0 r) + D_m K_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m + j\frac{k_z}{\lambda_0}\left[E_m I'_m(\lambda_0 r) + F_m K'_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m$$

$$E_\varphi = \frac{k_z m}{\lambda_0^2 r}\left[C_m I_m(\lambda_0 r) + D_m K_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m - j\eta_0\frac{k_0}{\lambda_0}\left[E_m I'_m(\lambda_0 r) + F_m K'_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m$$

$$H_\varphi = \frac{k_z m}{\lambda_0^2 r}\left[E_m I_m(\lambda_0 r) + F_m K_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m + j\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0}{\lambda_0}\left[C_m I'_m(\lambda_0 r) + D_m K'_m(\lambda_0 r)\right]\psi_m \qquad (32)$$

ただし，

$$\lambda_0^2 = k_z^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0 \qquad (33)$$

であり，I_m および K_m は m 次第一種および第二種変形 Bessel 関数を表わす．また，I'_m および K'_m は，それぞれ，I_m および K_m の一階微分を表わす．この場合，式 (30)の分散関係式は，$\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - k_z^2 > 0$ の場合と同様にして，式 (28)より次のようになる．

$$\begin{vmatrix} R_m^{(1)}(\lambda b) & R_m^{(2)}(\lambda b) & -I_m(\lambda_0 b) & -K_m(\lambda_0 b) & 0 & 0 \\ j\frac{1}{\eta}R_m^{(1)}(\lambda b) & -j\frac{1}{\eta}R_m^{(2)}(\lambda b) & 0 & 0 & -I_m(\lambda_0 b) & -K_m(\lambda_0 b) \\ T_m^{(1)}(\lambda b) & T_m^{(2)}(\lambda b) & -\frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}I_m(\lambda_0 b) & -\frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}K_m(\lambda_0 b) & j\eta_0\frac{k_0}{\lambda_0}I'_m(\lambda_0 b) & j\eta_0\frac{k_0}{\lambda_0}K'_m(\lambda_0 b) \\ j\frac{1}{\eta}T_m^{(1)}(\lambda b) & -j\frac{1}{\eta}T_m^{(2)}(\lambda b) & -j\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0}{\lambda_0}I'_m(\lambda_0 b) & -j\frac{1}{\eta_0}\frac{k_0}{\lambda_0}K'_m(\lambda_0 b) & -\frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}I_m(\lambda_0 b) & -\frac{k_z m}{\lambda_0^2 b}K_m(\lambda_0 b) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & , & 0 & , & I_m(\lambda_0 a) & , & K_m(\lambda_0 a) & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & I'_m(\lambda_0 a) & , & K'_m(\lambda_0 a) \end{vmatrix} \tag{34}$$

特別の場合として，$a \to \infty$ の場合には，分散関係式は，式 (34)において，$I_m(\lambda_0 a)$ および $I'_m(\lambda_0 a)$ を含む行及び列を除いた小行列式によって与えられる．また，$a = b$ の場合の分散関係式は，式(28) の第二式から得られ，次式で与えられる．

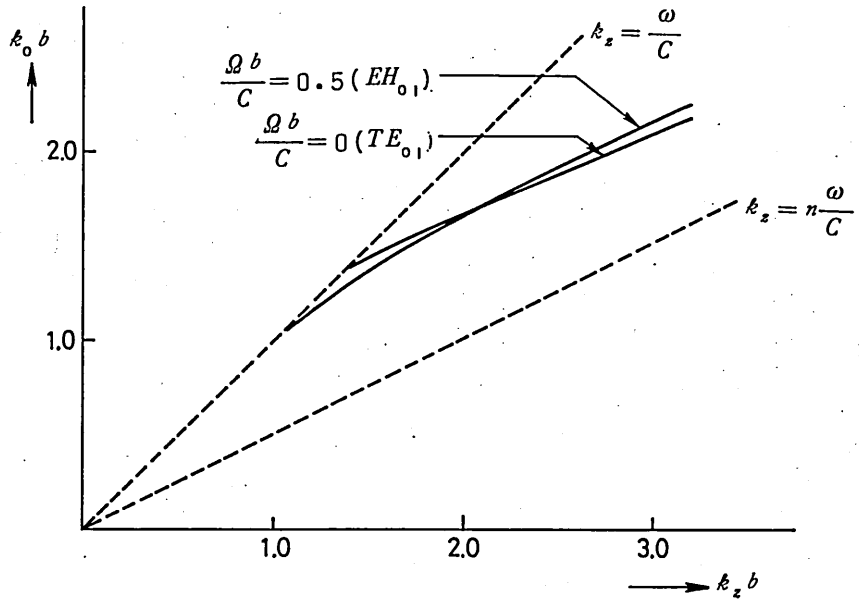
$$R_m^{(1)}(\lambda b) R_m^{(2)\prime}(\lambda b) + R_m^{(1)\prime}(\lambda b) R_m^{(2)}(\lambda b) = 0 \tag{35}$$

式 (30)または (34)および (35)から分散関係が求まると，A_m , B_m , ……の比が決まり，電磁界分布を求めることができる．

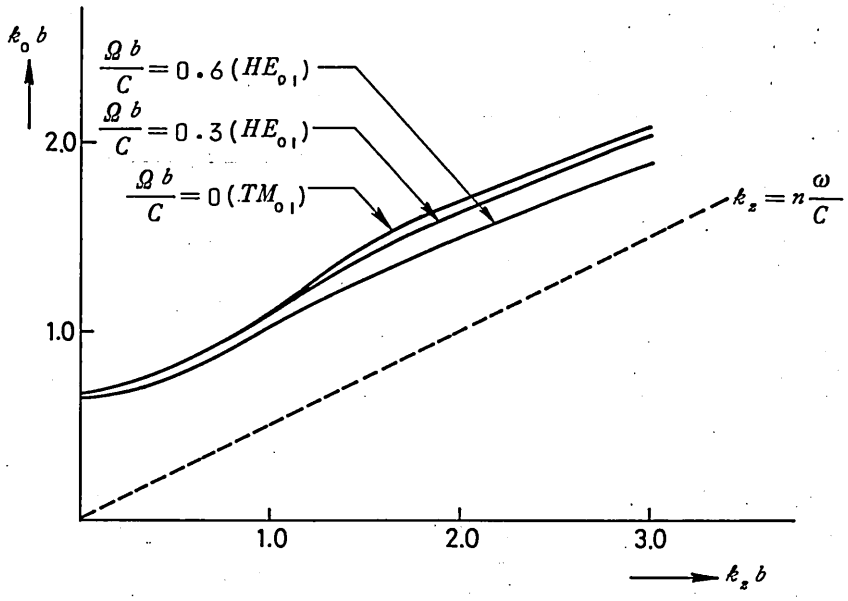
5． 検　　討

つぎに，回転運動を行う誘電体円柱に沿う電磁波モードの伝搬特性について，数値例をあげて検討する．ここで，式(9)からわかるように，回転運動を行う誘電体円柱内部では，回転運動によって E_z および H_z が互いに結合しているため，電磁波のモードは一般にハイブリッド・モードとなる．ここでは，これらのモードを円柱が静止している場合にしたがって，つぎのように分類する．[5] すなわち，$TE(H)$ モードに近いものを EH_{mn} モード，$TM(E)$モードに近いものを HE_{mn} モードと呼ぶことにする．

具体例として，非分散性の誘電体 ($n=2$, $\mu=\mu_0$) からなる無限長円柱について，$m=0$ および $m=\pm 1$ の最低次のモードに対する分散関係式の数値

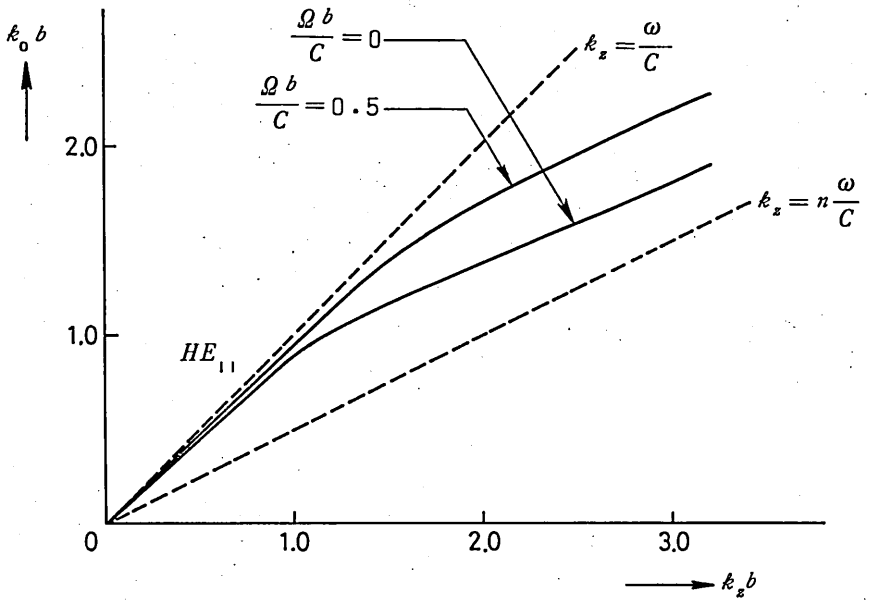


(a)　$a \to \infty$ の場合

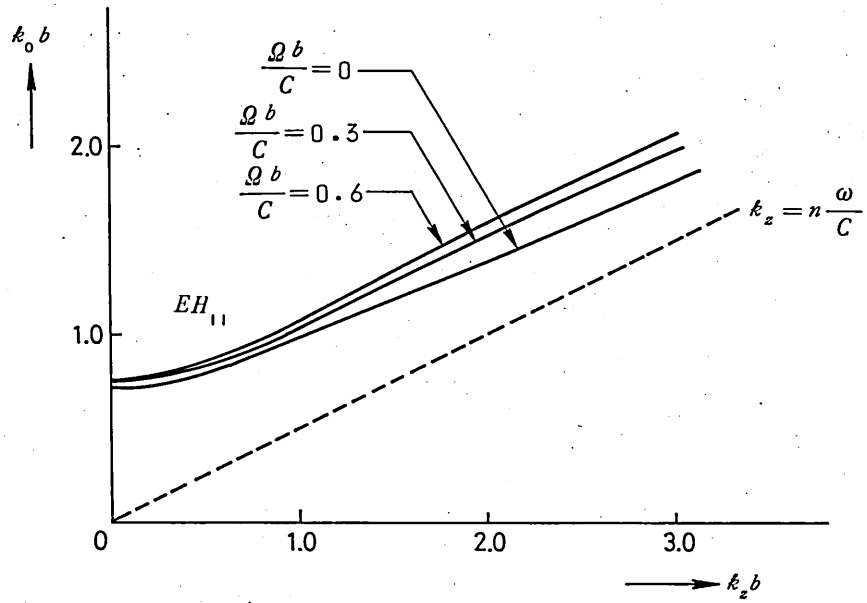


(b)　$b/a = 0.5$ の場合

図 3　$m = 0$ のモードの分散関係

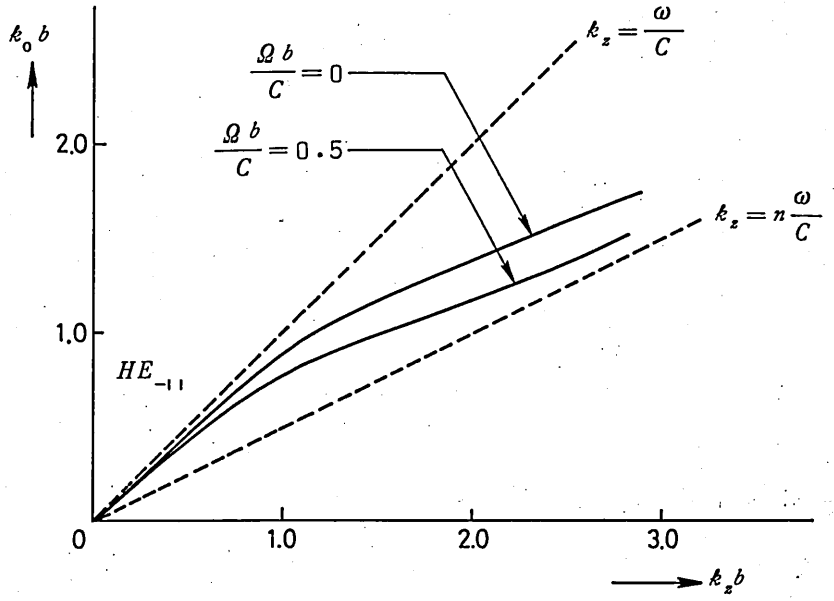


(a)　$a \to \infty$ の場合

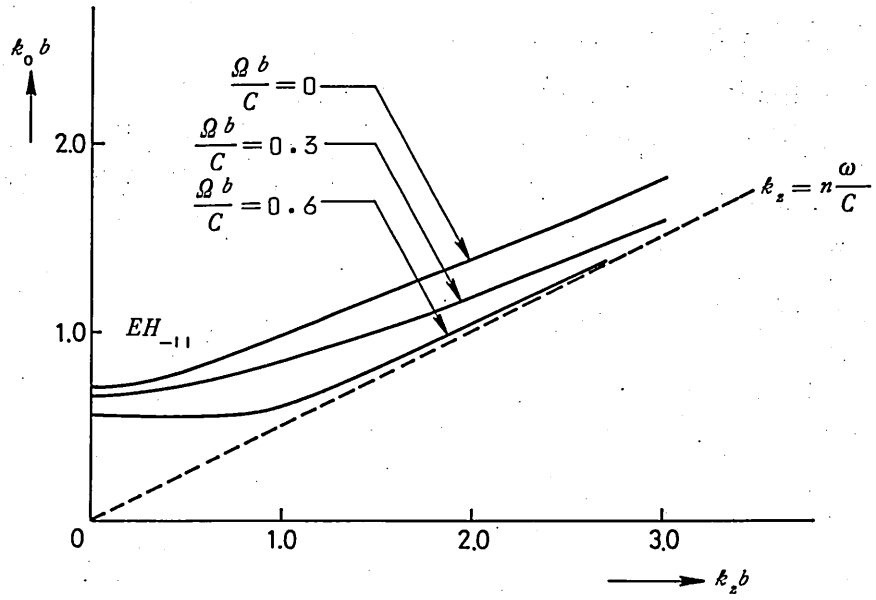


(b)　$b / a = 0.5$ の場合

図 4　$m = 1$ のモードの分散関係



(a)　$a \to \infty$ の場合



(b)　$b/a = 0.5$ の場合

図 5　$m = -1$ のモードの分散関係

例を図３，図４および図５に示す．図３，図４および図５は，それぞれ，$m=0$，$m=1$および$m=-1$のモードに対する．$a\to\infty$および$b/a=0.5$の場合の分散関係式を示しており，これらは式(30)および(34)から計算したものである．これらの結果から，回転対称である$m=0$のモードには回転運動の効果はあまり現われないが，$m\neq 0$のモードには顕著に現われ，また$m=1$と$m=-1$のモードではその効果は互いに異なることがわかる．これは，円柱が静止している場合には縮退していた右まわりのモード（$m=1$）と左まわりのモード（$m=-1$）が，回転運動によって異なった性質をもつようになるからである．以上のことからわかるように，円柱が回転運動を行うと同一の周波数に対して，右まわりの波と左まわりの波は異なる伝搬定数をもつようになる．したがって，軸方向に磁化されたフェライトあるいはプラズマを含む導波管と同様のファラデー回転の効果が得られる．

つぎに，図６に$b/a=0.5$の場合の$m=0$および$m=\pm 1$の最低次のモードの遮断周波数と回転速度との関係の一例を示す．図６から，$m=0$および$m=1$のモードの遮断周波数は回転運動の影響をあまり受けないが，$m=-1$のモードの遮断周波数は回転運動によって大きく変化することがわかる．

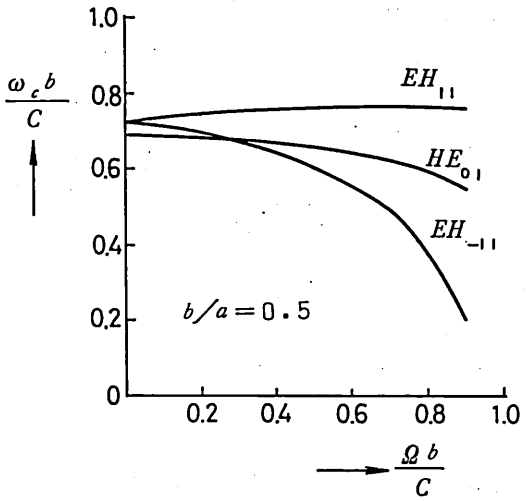


図６　遮断周波数と回転速度との関係

6. むすび

本稿では，中心軸のまわりに一定の角速度で回転している無限長誘電体円柱に沿う電磁波の伝搬について，理論的に考察した．まず，回転運動を行う媒質中における電磁界の一般表示および波動方程式を求め，波動方程式の解を無限級数を用いて求めた．つぎに，この級数解を用いて，回転運動を行う誘電体円柱に沿って伝搬する電磁波モードの分散関係式ならびに電磁界分布を求めた．最後に，数値例を用いて，電磁波モードの伝搬特性について詳しく検討した．その結果，回転対称のモードには回転運動の効果はあまり見られないが，回転対称でないモードの場合には，周方向のモード次数mの正負により異なる効果が顕著に現われ，ファラデー回転と同様の効果が得られることがわかった

なお，本研究は，昭和５０年度文部省科学研究費補助金の援助によって行われたものである．

謝　辞　終りに，日ごろ御指導頂く大阪大学工学部板倉清保教授に深謝する．

文　　献

(1) C.V.Heer : "Resonant frequencies of an electromagnetic cavity in an accelerated system of reference", Phys. Rev., **134**, p.A799 (May 1964).

(2) A.Yildiz and C.H.Tang : "Electromagnetic cavity resonances in accelerated systems", Phys.Rev., **146**, p.947 (June 1966).

(3) E.J.Post : "Sagnac effect ", Rev. Mod. Phys., **39**, p.475 (April 1967).

(4) J.L.Anderson and J.W.Ryon : "Electromagnetic radiation in accelerated systems", Phys. Rev., **181**, p.1765 (May 1969).

(5) J.V.Bladel : "Relativistic theory of rotating disks", Proc. IEEE, **61**, p.260 (March 1973).

(6) T.Shiozawa : "Phenomenological and electron-theoretical study of the electrodynamics of rotating systems", Proc. IEEE, **61**, p.1694 (Dec. 1973).

(7) H.A.Atwater and T. Shiozawa : "The electromagnetic field in rotating coordinate frames", Proc. IEEE (Letters), **63**, p.316 (Feb. 1975)

(8) 塩沢，田中 : "回転運動を行う誘電体円柱による平面電磁波の散乱 ", 信学論 (B), **57-B**, p.361 (昭 48-06).

(9) T.Shiozawa : "Constitutive relations for a rotating electron plasma", Proc. IEEE (Letters), **62**, p.1283 (Sept. 1974).

(10) S.Seikai and T.Shiozawa : "Scattering of electromagnetic waves by a rotating electron-plasma column", IEEE Trans., AP-23, p.75 (Jan. 1975).

(11) T.Shiozawa : "Propagation of electromagnetic waves in rotating systems", Proc. IEEE (Letters), 63, p.1368 (Sept. 1975).

(12) 塩沢，徳田，青海 : "回転運動を行う電子プラズマ円柱に沿う空間電荷波の伝搬", 信学論(B), 58-B, p.529 (昭50-10).

(13) 寺沢寛一 : "数学概論", 岩波書店.

(14) R.C.Costen and D.Adamson : "Three-dimensional derivation of the electromagnetic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary", Proc. IEEE, 53, p.1181 (Sept. 1965).

(15) E.Snitzer : "Cylindrical dielectric waveguide modes", J.Opt.Soc.Amer., 51, p.491 (May 1961).

輻射科学研究会資料

He-Ne 3.39μmレーザのモード同期による超短パルス発生

小西 顕，小林 哲郎，末田 正
（大阪大学　基礎工学部）

昭和51年1月30日

1. まえがき

レーザ光パルスは光通信，光情報処理，計測などの応用において重要な役割を担っている．モード同期によるパルス発生法は，細いパルスの発生，高速繰返しなどの点において優れており現在までに種々のレーザ媒質に対して理論的にも実験的にも多くの研究がなされている．[1] モード同期には，可飽和吸収体やレーザ媒質自体の非線形性を用いる自己同期と，レーザ共振器内に挿入された非線形素子を通して外部より変調を加える強制同期とがある．これらの内，強制同期は安定な連続パルスの発生に適しており，通信関係への応用面が大きい．

強制同期を行なうには内部損失変調および内部位相変調がよく用いられる．いづれの変調方式によってもパルス幅は無制限に細くすることはできず，レーザ媒質の利得曲線の幅（以下，利得線幅と言う）の逆数程度が限度であると考えられている．したがって，超短パルスの発生を目的とする場合には，広い利得線幅を持つレーザ媒質が必要とされていた．

上のような観点から見れば，He-Ne 3.39μmレーザのように狭い利得線幅（約300MHz[2]）を持つレーザから超短パルスを発生させることは困難と考えられる．しかし，He-Ne 3.39μmレーザは大きな利得[2]を持つため，利得線幅より大きい周波数でしかも大信号の内部変調を用いることにより，利得線幅内の発振モードのエネルギーを受動モード*にまで分散させても発振は停止しない．したがってこれらの励起された受動モードにより，利得線幅の逆数より細いパルスの発生が可能であると考えられる．本報告においては，この可能性を理論と実験とにより論じる．

赤外ガスレーザでは，ドップラー幅（不均質広がり幅）が可視光レーザに比べて狭く，自然幅や衝突広がりなどによってその線広がりは均質に近いと考えられる．特に，He-Ne 3.39μmのように高い利得を持つレーザ媒質ではその傾向が著しい．均質な広がりを持つレーザのモード同期はKuizenga等により

---

*共振器モードの内でレーザ利得線幅の中に含まれないモード．

すでに理論的[3]にも実験的[4]にも研究されている．しかし，彼等の理論は変調周波数のみならずパルスの周波数スペクトルの広がり幅までが利得線幅より十分小さい場合について与えられており，高周波・大信号の変調により多くの受動モードを励起させる場合については適用できない．また，実験的には，このように受動モードを利用したパルス発生はほとんど行なわれていない．[5] しかも，He-Ne 3.39μm レーザでは従来の方式によるモード同期ですらほとんどその例を見ない．

そこで，変調周波数が利得線幅より大きい場合について小信号のみならず大信号変調のときにでも適用できる新しいモード同期* の理論をたて，その解析結果より高周波・大信号変調による超短パルス発生の可能性を調べる．つぎに種々の変調周波数と変調強度の内部位相変調を用いてHe-Ne 3.39μm レーザにモード同期をかけてこの可能性を実験的に調べる．さらに，変調周波数と変調強度に対するパルス発振特性より，従来のモード同期理論[3],[6] あるいはここで示す理論の結果と実験結果とを比較，検討する．

2. 高い変調周波数を用いたモード同期の解析

モード同期理論における解析の困難さは，モード振幅を決定するのにレーザ利得と変調信号の2つの要素が大きく関係していることにある．従来の理論では変調信号の方に小信号という仮定を入れて隣接モード間結合のみを考えたり[7]

---

*従来のモード同期では，変調によるモード結合により利得線幅内の発振モードに位相同期を起こしている．一方，ここで示すモード同期においては，変調による発振モードのサイドバンドを通して受動モードを励起している．このとき励起された各受動モードの位相は変調によりすでに決まっている．したがって，このモード同期は共振器モードの励起がレーザ利得ではなく変調によるという点が従来のモード同期と異なるだけで，励起モードが一定の位相関係を持つ結果パルスが発生するという点では全く同じである．

あるいは変調信号も利得曲線も共に解析上都合のよい関数形で置き換えたり[3],[8]する近似解析法が用いられていた．しかも，これらはパルスの周波数スペクトルが利得線幅より広いときには成立せず，高周波・大信号変調によるモード同期には適用できない．一方，変調周波数が利得線幅より大きいときは発振モードは1本であり，変調により励起された受動モードにはレーザ利得は直接には影響を及ぼさず変調だけが関与する．そのため解析は容易になると共に変調信号を近似表現する必要はなくなる．したがって，高い変調周波数のときは，小信号のみならず大信号変調に対しても成立する解析を行なうことができる．以下にこの解析を示す．

2.1 出力波形の表現式

図1は解析の対象とするモード同期レーザの略図である．鏡1の電界反射係数 ρ_1 には共振器中の損失分も含ませてあるものとする．鏡2は，簡単のために全反射鏡とする．同期信号としては位相変調を考える．光が変調器を一度通過するときに受ける透過光の電界の時間変化 $M(t)$ は

$$M(t) = \exp(-j\Delta\theta \sin \omega_m t) \qquad (1)$$

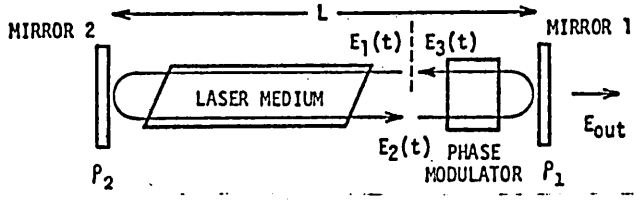


図1 モード同期レーザのモデル

で与えられる．* ここで，$\Delta\theta$ は位相変調指数であり，同期信号の角周波数は

$$\omega_m = 2\pi q \cdot c/2L \qquad (2)$$

にとる．q は整数である．レーザ媒質に入射する直前の電界 $E(t)$ は，n 番目のモードの複素振幅を a_n，光の角周波数を ω_0 とすれば次式のように与えられる．

---

*どのような種類の変調を用いる場合でも，$M(t)$ が分ればこの理論と同様にして解析が行なえる．ただし式(2)の同期条件は満たされなければならない．

$$\mathcal{E}(t) = \mathrm{Re}\{E_1(t)\}$$
$$E_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \exp[j(\omega_0 + n\omega_m)t] \tag{3}$$

変調周波数がレーザの利得線幅より大きいときには，図2に示すように，利得線幅内で単一モード（これを0番目のモードとする）の発振をしており，レーザ媒質はそれに対してのみ増幅作用を持つ．そのためレーザの飽和利得を G_s とすると次式が成立する．

$$E_2(t) = \left(G_s a_0 + \sum_{n\neq 0} a_n e^{jn\omega_m t}\right) e^{j\omega_0 t} \tag{4}$$

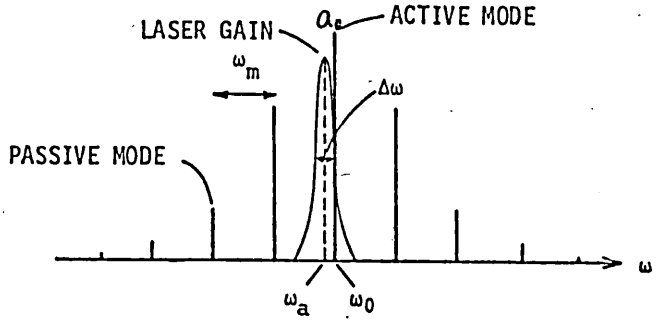


図2 モード同期時の受動モードと単一発振モード

変調器を通過後レーザ媒質へ入射する直前の電界 $E_3(t)$ は次式を満たす．

$$E_3(t) = \rho_1 M^2(t) E_2(t) \tag{5}$$

共振器中の界が定常状態にある場合は，界は共振器中を一巡しても元の界と全く同じである．したがって，$E_3(t-2L/c) = E_1(t)$ が成立し，式(4)，(5)より結局次式が得られる．

$$E_1(t) = (G_s - 1)\frac{\rho_1 M^2(t)\exp(-j2\omega_0 L/c)}{1-\rho_1 M^2(t)\exp(-j2\omega_0 L/c)}\, a_0 e^{j\omega_0 t} \tag{6}$$

式(6)で与えられる $E_1(t)$ の ω_0 成分を求めて式(3)の0番目のモードと比較すると G_s は次のように求まる．

$$G_s = 1 + \frac{1}{\dfrac{\omega_m}{2\pi}\displaystyle\int^{2\pi/\omega_m} \frac{dt}{1-\rho_1 M^2(t)\exp(-j2\omega_0 L/c)} - 1} \tag{7}$$

均質な広がりを持つレーザでは利得は次のように表わされる.

$$G_s = \exp\left(\frac{g_s/2}{1+j\frac{\omega_0-\omega_a}{\Delta\omega/2}}\right) \tag{8}$$

ここで, g_s はレーザの利得中心 ω_a での飽和電力利得で, $\Delta\omega$ は利得の半値全幅である. g_s と ω_0 は式(7), (8)の実数部と虚数部より具体的に求まる. 高利得レーザでは媒質中での発振モードの成長による飽和利得の空間的変化が大きい. この変化を考慮したとき, g_s は発振モードのパワ P_0 特にそれが媒質中を一度通過することによる増分 ΔP_0 とは

$$g_s = g_0 - \Delta P_0/P_s \tag{9}$$

なる関係を持つ(付録参照). ここで, g_0 はレーザの小信号利得である. ΔP_0 はその定義より次のように与えられる.

$$\Delta P_0 = (|G_s|^2 - 1)P_0 \tag{10}$$

式(6), (9), (10)より出力パワは鏡1の透過係数を T_1 とすると

$$P(t) = T_1(g_0-g_s)\frac{|G_s-1|^2}{|G_s|^2-1}\left|\frac{M(t)}{1-\sqrt{R_1}M^2(t)\exp(-j2\theta_0)}\right|^2 P_s \tag{11}$$

となる. ただし, $|a_0|^2 \propto P_0$ の関係が用いられ, 式(11)中の各パラメータは次のように与えられている.

$$\begin{aligned} R_1 &= |P_1|^2 \\ \theta_0 &= (\omega_0-\omega_c)\cdot L/c - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Arg}.\{P_1P_2\} \end{aligned} \tag{12}$$

ここで, ω_c は ω_0 に最も近い縦モードの角周波数であり, $\mathrm{Arg}.\{P_1P_2\}$ は鏡1, 2での反射による位相シフトを表わしている. したがって, $2\theta_0$ は光が共振器中を一巡したときの物相量である.

式(11)の右辺第4項は出力電力の時間変動分を示し，M(t) に式(1)を代入しこれを書き出すと

$$\frac{1}{(1-\sqrt{R_1})^2\left[1+\frac{4\sqrt{R_1}}{(1-\sqrt{R_1})^2}\sin^2(\theta_0+\Delta\theta\,\mathrm{Sin}\,\omega_m t)\right]^{m}} \qquad (13)$$

となる．これは，最大位相量が $\Delta\theta$ で掃引角周波数が ω_m の掃引形 Fabry-Perot 干渉計の透過特性に比例している．したがって，その透過特性の類似より容易にパルス発生の様子を把握することができる．(4)

2.2 解析結果と検討

式(11)で与えられるパルス波形は，共振器が決まっても，$\Delta\theta$ だけでは一意的には定まらず θ_0 によっても大きく変化する．パルスの半値全幅を τ_p として，その代表例を次に示す．

$$\tau_p=\frac{1}{\pi f_m}\,\mathrm{Sin}^{-1}\left[\frac{1}{\Delta\theta}\,\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{R_1})^2}{4\sqrt{R_1}}}\right] \qquad (\theta_0=0)$$

$$\tau_p=\frac{2}{\pi f_m}\,\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{1}{2\Delta\theta}\,\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{R_1})^2}{4\sqrt{R_1}}}} \qquad (\theta_0=\pm\Delta\theta) \qquad (14)$$

ただし，$f_m=\omega_m/2\pi$ である．式(14)は $\Delta\theta<\pi/2$ のときに成立し，$\Delta\theta>\pi/2$ のときにはパルス波形は複雑になり二重パルス，三重パルスが発生する．$\theta_0=0$，$\theta_0=\pm\Delta\theta$ は $\Delta\theta$ が一定のときにそれぞれ最小と最大のパルス幅を与える位相角である．

図3は $\Delta\theta$ に対する出力パルスの幅と平均パワを示している．これより1GHz程度の変調周波数では数十ピコ秒のパルスが得られることが分る．τ_p は式(14)からも分るように変調周波数の逆数に比例し，しかも利得線幅には無関係である．したがって，高い変調周波数を用いるほど発生パルスは細くなる．しかも平均パワは減少しない．

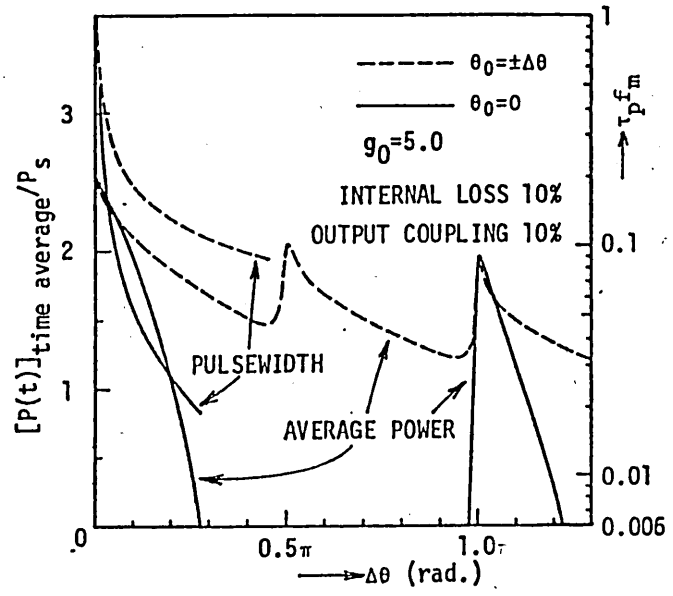


図3　$\Delta\theta$ に対する平均出力パワと パルス幅 τ_p

式(13)より，パルス幅の変調周波数および変調強度に対する依存性を求めると次式のようになる．

$$\tau_p \propto \frac{1}{f_m}\left(\frac{1}{\Delta\theta}\right)^{\frac{1}{2}\sim 1} \qquad (f_m \gg \Delta f) \qquad (15)$$

一方，均質な広がりを持つレーザ媒質において，変調周波数が利得線幅より十分小さいときパルス幅は次のようになることが従来の解析[3),16)]から分っている．

$$\tau_p \propto \frac{1}{\sqrt{f_m \Delta f}}\left(\frac{1}{\Delta\theta}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (f_m \ll \Delta f) \qquad (16)$$

ただし，$\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ である．式(15)，(16)を比較することによって，$f_m \gg \Delta f$ のときの方がパルス幅の変調信号に対する依存性が大きいことが分る．これは，$f_m \ll \Delta f$ の場合励起モードには変調信号とレーザ利得が作用し，$f_m \gg \Delta f$ のときには変調信号のみが作用するからである．さらに，$f_m \gg \Delta f$ では変調周波数も変調強度もパルス幅を細くするのに強く働くことが分る．一方，

レーザ利得にはアクティブ・フィルタとして励起モードの帯域を狭める働きがあり，そのため $f_m \ll \Delta f$ では変調周波数および変調強度を上げてもパルスは余り細くはならない．

3. 実験

ここでは，He-Ne 3.39μm レーザに種々の変調周波数と変調強度の内部位相変調によりモード同期をかけて超短パルス発生の可能性を調べ，さらに得られたパルス発振特性より本報告のモード同期と従来のモード同期との比較，検討を行なう．

3.1 実験装置および測定法

図4に基本的な実験装置の構成を示す．レーザ共振器には反射係数98%と100%の鏡を用いた．レーザ管は全長80cm内径5mmであった．He-Neの全ガス圧は2torrで，小信号利得は測定の結果15dB/mであった．変調周波数には40MHz，144MHz，301MHz，590MHz，1.20GHzの5種類を選んだ．144MHz以下では $c/2L$ がそれぞれの変調周波数に等しくなるように共振器長Lを決め，301MHz以上では式(2)の g がそれぞれ2，4，8となるようにLを調節した．位相変調器としては，301MHz以下では光学結晶を挿入した並列LC共振器を用い，590MHz以上ではreentrant形共振器を用いた．変調用結晶としては，40MHzに対して $22\times3\times3\,mm^3$ x-cut無反射コーティング $LiTaO_3$ を使い，他の変調周波数に対して $15\times3\times3\,mm^3$ x-cut無反射コーティング $LiNbO_3$ を用い，どちらも横形動作させた．

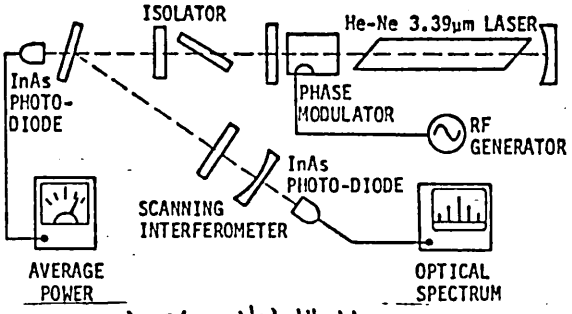


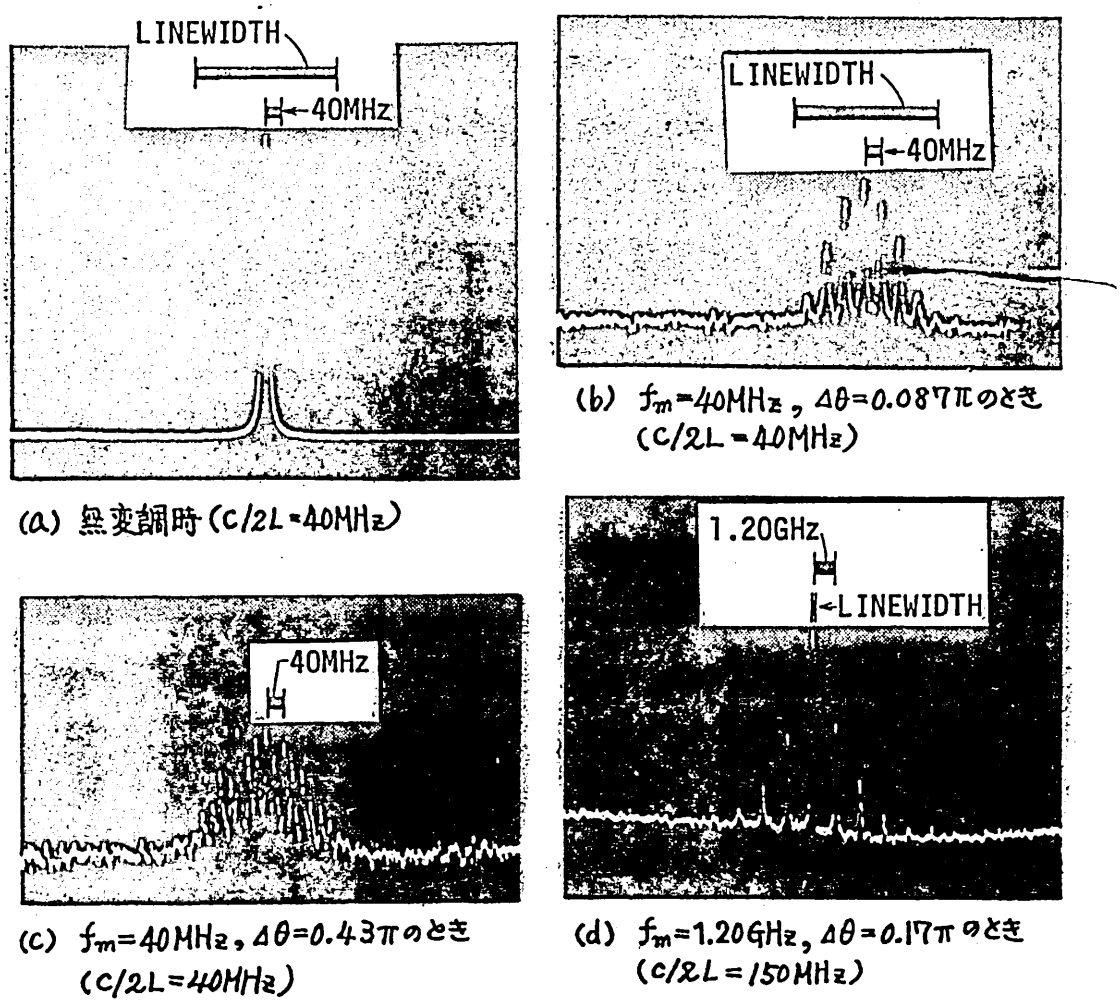
図4 実験の基本構成

位相変調指数はレーザ光を外部変調することによりあらかじめ変調電力ある

いは変調器に付けたプローブの電圧に対して較正しておいた．平均パワはInAsのフォトダイオードで測定した．パルスの実波形は高速の検出器がないため観測できなかった．そこで，掃引形Fabry-Perot干渉計によりパルスの周波数スペクトルを観測し，その結果よりパルス幅を見積った．

3.2 実験結果

先に述べた5種類の変調周波数に対して，それぞれ変調強度に対する平均パワと励起モードの広がり幅を調べた．図5に観測した周波数スペクトルの代表例を示す．図5(a)は縦モード間隔が40MHzの場合の無変調時の周波数スペクト



(a) 無変調時 (c/2L=40MHz)

(b) f_m=40MHz, $\Delta\theta$=0.087π のとき (c/2L=40MHz)

(c) f_m=40MHz, $\Delta\theta$=0.43π のとき (c/2L=40MHz)

(d) f_m=1.20GHz, $\Delta\theta$=0.17π のとき (c/2L=150MHz)

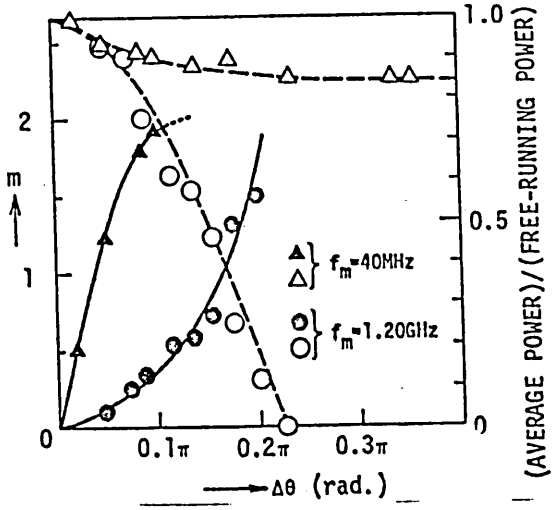
図5 出力パルスの周波数スペクトル

ルである．利得線幅内に数本の縦モードが入るにもかかわらず，均質な線広がりにより1本のモードしか発振していない．他の共振器長においても，無変調時にはやはり単一モード発振が保たれた．図5(b)はf_m=40MHz，$\Delta\theta$=0.08πのときの周波数スペクトルである．モードの励起幅は利得線幅程度で多動モードの励起は見られない．変調強度をさらに上げた場合は，図5(c)に見られるように，発振していた縦モードの間にさらに別の発振モードが現われ，全体として2種のモード群が生じた．モード群どうしの中心周波数のずれは20MHz程度で，励起幅はやはり利得幅程度である．図5(d)は，f_m=1.20GHz，$\Delta\theta$=0.17πのときの周波数スペクトルであり，約10GHzの範囲にわたり多動モードが励起されている．また，励起モードは縦モード間隔ではなく変調周波数間隔で現われており，変調周波数を上げることにより容易に励起幅を広げられる* ことが分る．

図6(a)は，パルスの平均パワとスペクトル広がりを表わすパラメータmとの位相変調指数に対する変化を示している．ただし，mはn番目のモードのパワをP_nとして

$$m=\frac{\sum_n P_n|n|}{\sum_n P_n} \qquad (17)$$

で定義する．mは励起モードの広がり幅をモード番号を単位に表わしており，$m\cdot f_m$は励起幅に対応する．f_m=40MHzのときには，

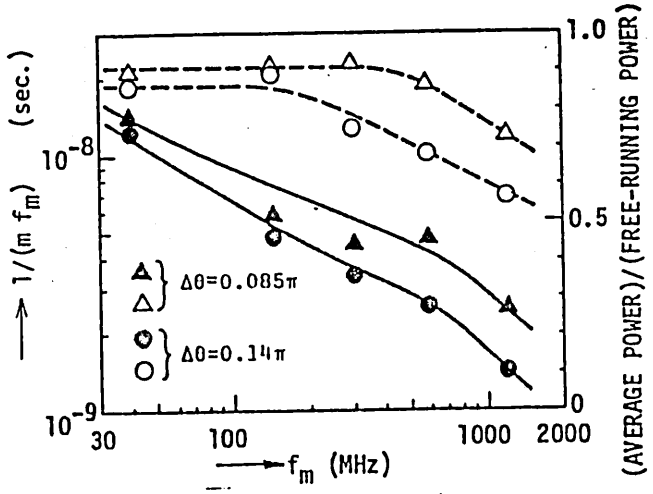


(a) $\Delta\theta$に対する平均パワとm
(△印と○印と破線は平均パワを示し，△印と○印と実線はmを示す)

図6 パルス発振特性

---

*逆に，利得線幅内の縦モード次全て発振している不均質レーザでは，変調周波数を上げても励起幅は余り広がらない．(10)



(b) f_mに対する平均パワと励起幅
(△印と○印と破線は平均パワを示し，▲印と●印と実線は励起幅を示す)

図6 パルス発振特性

Δθ≧0.10πでは2種のモード群が生じmは定義できなかった．つぎに，図6(b)に変調周波数に対する平均パワと励起幅の変化を示す．ただし，mf_mはその逆数で表わされており，パルス幅にほぼ比例すると考えられる*．

3.3 超短パルス発生の検討

図6(b)の励起幅曲線より変調周波数も変調強度も大きい方がパルスが細くなることが分る．高い変調周波数として，f_m=1.20 GHzの場合のパルス幅を図7に示す．これは理論で得られたモードの位相関

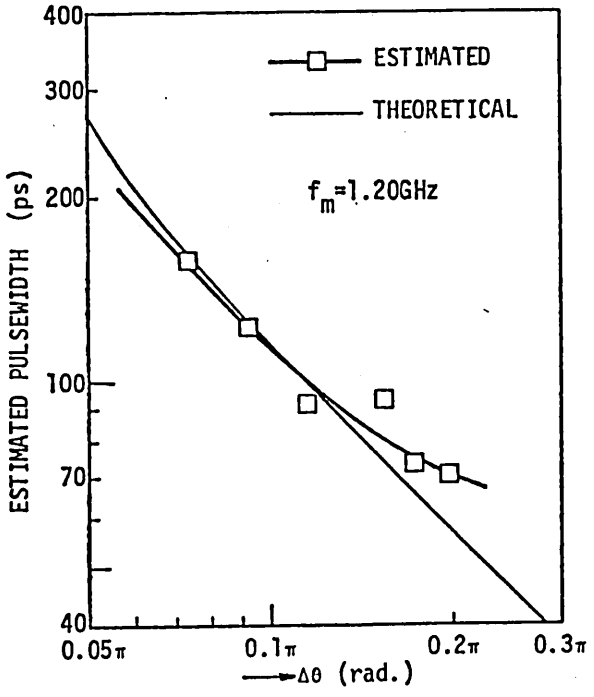


図7 f_m=1.20GHzのときのΔθに対する推定パルス幅
(理論値はθ_0=0の場合)

---

* mf_mとパルス幅τ_pとの関係は，例えば，モードの間隔が励起幅に比べて十分小さくモード分布がガウス関数形でしかも全てのモードが同相のとき，$\tau_p = 1/(6.69 m f_m)$で与えられる．

係*を用いて，実験で得られたモードのスペクトル合成を行なった結果である．$\Delta\theta = 0.20\pi$ ではパルス幅は実に約70ピコ秒となる．一方，利得線幅の逆数で決まるパルス幅は3ナノ秒程度である．逆に，$f_m = 40$ MHzの低い変調周波数では，変調信号を大きくしても励起幅は利得幅以上にはならない．パルス幅は，mを用いて従来のモード同期理論より見積ると，2ナノ秒が最小限度であることが分った．

3.4 パルス発振の諸特性

パルス幅の変調周波数に対する依存性は，図6(b)より，$f_m < 590$ MHzでは $\tau_p \propto (1/f_m)^{1/3 \sim 2/3}$ となり，$f_m > 590$ MHzでは $\tau_p \propto (1/f_m)^{\sim 1}$ となる．$f_m < 590$ MHzは変調周波数が利得線幅より十分小さい従来のモード同期に対応し，$f_m > 590$ MHzは変調周波数が利得線幅より十分大きい場合すなわち本報告の解析で示したモード同期に対応する．それぞれに対して，周波数依存度は，式(16)，(15)より理論的には，

$$\tau_p \propto 1/\sqrt{f_m} \qquad (f_m \ll \Delta f) \qquad (18a)$$

$$\tau_p \propto 1/f_m \qquad (f_m \gg \Delta f) \qquad (18b)$$

で与えられる．実験結果はほぼこれらの様子を示していると考えられる．パルス幅が式(18a)のようになる低変調周波数と(18b)のようになる高変調周波数との境となる周波数は，利得および変調強度にもよるが，均質レーザでは利得線幅の1/2～2倍程度であると考えられる．[11] したがって，He-Ne 3.39μm レーザの均質広がり幅を300 MHzとすると590 MHzはこの境の周波数と言える．

パルス幅の変調強度に対する依存度は，$f_m = 1.20$ GHzでは図7より $\tau_p \propto$

---

*この位相関係を求めるには$\Delta\theta$だけでなくθ_0も必要である．$\Delta\theta$には実験値を用いたが，θ_0は実験的には求まらない．そこで平均パワの理論値が実験値とよく一致するときのθ_0を選んでその値を用いた．

$(1/\Delta\theta)^{1/2\sim1}$ である。一方，$f_m = 40\,MHz$ では，図6(a)のmのΔθに対する依存度から，$f_m = 1.20\,GHz$ のときのそれよりパルス幅の変調強度に対する依存度は小さい。これらは，式(15)，(16)に対応すると考えられる。以上により変調周波数が利得線幅より十分大きいときは，従来のモード同期に比べて変調周波数も変調強度もパルス幅を細くするのに強く働くことが分った。

均質レーザでは発振モードのエネルギーを受動モードに分散させて励起幅を広げても平均パワは余り減少しない。[12],[13] f_m が小さいとき利得線幅内に何本もの縦モードが入り，利得は全体的に飽和しており均質広がりが支配的である。そのため図6(b)に見られるように $f_m < 301\,MHz$ では f_m の増大による励起幅の増大に対してパワの減少は少ない。

式(18b)の適用範囲では，変調周波数を上げても平均パワが減少しないことは理論的にすでに示された。しかし，実際には $f_m > 590\,MHz$ でパワ減少が見られる。これは，励起された受動モードに利得曲線の裾の部分が影響しているためである。しかしそれでも，高い変調周波数により細いパルスを発生させる方が大きな変調信号による場合に比べてパワの低下は少ない。

式(18b)は，変調周波数を上げてもパルスの繰返し周期が短くなるだけで，duty cycleは一定であることを意味する。したがって，本報告で示した高変調周波数によるモード同期は高速繰返しが要求されるパルス光源に適したパルス発生法である。

4. むすび

狭い利得線幅を持つHe-Ne 3.39μmレーザによる超短パルス発生の可能性を理論的ならびに実験的に検討し次のような成果が得られた。

(1) 利得線幅より十分大きな変調周波数に対して，大きな変調信号を用いる場合にでも適用できるモード同期の解析を行ない，従来のモード同期の概念からは困難とされていた狭い利得線幅のレーザからでも超短パルス発生が可能であることを理論的に示した。

(2) He-Ne 3.39μm レーザに種々の変調周波数と変調強度の内部位相変調によりモード同期をかけ，高周波・大信号変調時に推定70ピコ秒のパルスを発生させて理論における予想を裏付けた．

今後の課題として，赤外域での高速検出器の開発あるいは高速光シャッターの工夫により実験で得たパルスの実波形観測が残されている．

文献

(1) P. W. Smith:"Mode-locking of lasers", Proc. IEEE, 58, p. 1342(1970).

(2) E. I. Gordon, A. D. White and J. D. Rigden:"Gain saturation at 3.39 Microns in the He-Ne maser", Symp. Optical Masers, Polytechnics Institute of Brooklyn, p. 309(1963).

(3) D. J. Kuizenga and A. E. Siegman:"FM and AM mode locking of the Homogeneous laser-Part I: Theory", IEEE J.,QE-6, p. 694(1970).

(4) D. J. Kuizenga and A. E. Siegman:"FM and AM mode locking of the Homogeneous laser-Part II: Experimental results in a Nd:YAG laser with internal FM modulation", IEEE J.,QE-6, p. 709(1970).

(5) D. E. Caddes, L. M. Osterink and R. Targ:"Mode locking of the CO_2 laser", Appl. Phys. Lett., 12, p. 74(1968).

(6) H. Haken and M. Pauthier:"Nonlinear theory of multimode action in loss modulated lasers", IEEE J., QE-4, p. 454(1968).

(7) S. E. Harris and O. P. McDuff: "Theory of FM laser oscillation", IEEE J., QE-1, p. 245(1965).

(8) H. A. Haus: "A theory of forced mode locking", IEEE J., QE-11, p. 323(1975).

(9) 小西 顕, 小林 哲郎, 末田 正: "狭利得幅レーザからの超短パルスの発生", 信学会光・量エレ研資, OQE73-28 (1973).

(10) J. Hirano and T. Kimura: "Generation of high-repetition-rate optical pulses by a He-Ne laser", Appl. Phys. Lett., 12, p. 196(1968).

(11) 小林 哲郎, 末田 正: "モード同期の新しい解析法", 信学会光量エレ研資, OQE73-07 (1973).

(12) S. Konishi, T. Kobayashi and T. Sueta: "FM mode-locking of a He-Ne 3.39μm laser using large locking signal", J. J. Appl. Phys., 13, p. 1189(1974).

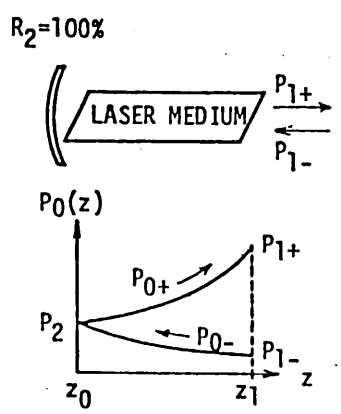
(13) T. Kobayashi, S. Konishi and T. Sueta: " Generation of ultra-short pulses from high-gain narrow-line-width lasers", Opt. and Quant. Electron., 7, p.229(1975).

付 録

レーザ媒質中の光の伝搬軸zに対して図A·1に示すように正と負の方向に進む発振モードのパワをP_{o+}ならびにP_{o-}とすると, それぞれに対して

$$\frac{dP_{o\pm}(z)}{dz} = \pm Re\{g\} P_{o\pm}(z) \qquad (A\cdot1)$$

が成立する. ここで, 媒質中の点zにおける微分利得gは次のように与えられる.



図A·1 レーザ媒質中での発振モードのパワの増大

$$g = g_L\, S(z)$$

$$g_L = \frac{g_0}{1 + j\,\frac{\omega_0 - \omega_a}{\Delta\omega}} \qquad (A\cdot 2)$$

$$S(z) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega_0 - \omega_a}{\Delta\omega/2}\right)^2}\,\dfrac{P_{0+}(z) + P_{0-}(z)}{2P_s}}$$

g_L は単位長さ当りのローレンツ形小信号利得を表わし，$S(z)$は飽和効果を表わしている．ただし，共振器中の定在波による飽和効果は無視した．P_s は飽和パワである．z_1とz_0でのパワを$P_{1\pm}$と$P_{2\pm}$とし，式(A·2)を用いて式(A·1)の連立微分方程式を解くと次のようになる．

$$\ln|G_s| + \frac{\mathcal{L}}{2P_s}\Delta P_0 = \mathcal{L}\, g_0 \cdot (z_1 - z_0) \qquad (A\cdot 3)$$

ただし，$\Delta P_0 = P_{1+} - P_{1-}$，$\mathcal{L} = 1/(1 + 4(\omega_0 - \omega_a)^2/\Delta\omega^2)$ である．さらに，$2g_0\cdot(z_1 - z_0) = g_0$ とし，式(A·3)に式(8)を代すると

$$g_s = g_0 - \Delta P_0 / P_s \qquad (9)$$

が得られる．

輻射科学研究会資料

強誘電体薄膜光導波路の試作とその特性

内藤初彦
布下正宏
西和郎
大林由和
中山高
（三菱電機・中央研究所）

昭和51年1月30日

1. はじめに

将来の光通信の実用化をわさして，薄膜光スイッチの研究が活発に行なわれている。[1),2)] 薄膜光スイッチには電気光学効果を利用するものが多いが，$LiNbO_3$結晶は電気光学効果に優れた特性を有するので，$LiNbO_3$結晶を用いた薄膜光導波路を薄膜光スイッチへ応用することは有利と考えられる。$LiNbO_3$結晶を用いて，薄膜光導波路を作成する方法にはi)エピタキシアル法，ii) out-diffusion法，iii) in-diffusion法等があるが，我々は比較的作成が容易で，導波路の特性の制御が比較的容易なin-diffusion法を用いて，$LiNbO_3$にTiを拡散することにより薄膜光導波路を作成し，単一モード薄膜光導波路を作成する目的で，上記光導波路の諸特性について測定したので報告する。

2. 光導波路表面の屈折率差Δn，膜厚D_n(Δnが$1/e$になる表面よりの距離)の導出

$LiNbO_3$中にTiを熱拡散するとその拡散のプロフィルは一般に
i) 拡散中常にTiが表面に存在する場合はErfc関数になり
ii) 拡散途中でTiが表面よりなくなった場合，なくなった時点よりGauss関数になる。

故に$LiNbO_3$中のTiの拡散による屈折率分布もi)とii)に対応してそれぞれErfc関数かGauss関数のどちらかに近い形になることが予想される。それで以下屈折率分布をそれぞれErfc関数，Gauss関数と仮定して解析を行ない，比較検討する。

以下においては，Fig.1に示すような導波路を考える。ただしn_bは$LiNbO_3$基板の屈折率を表わし，X, Y, Zはそれぞれ結晶の軸方向を表わす。光はX方向に伝搬し，Z方向に偏光しているとする。すなわちTEモードを考える。Y方向の波動ベクトルを$b(y)$，Z方向の波動ベクトルを$k_0 n_{eff}$とする。一般に屈折率がある関数のプロファイルを有する場合その境界条件は

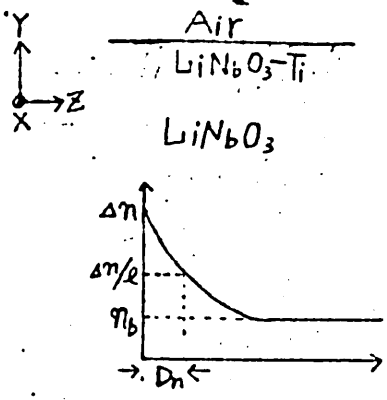


Fig.1

$$\int_0^{y_T} b(y)\,dy = \phi_{10} + \phi_{12} + m\pi \qquad (1)$$

で表わされる。[3),4)] ただしy_Tはturning pointを表わし，ϕ_{10}, ϕ_{12}

は各々光導波路と基板，光導波路と空気層の間の光の位相変化を表わす。一般に金属拡散による屈折率の変化 Δn は1.に比べて小さいので(1)式において $\phi_{10}=\pi/4$, $\phi_{12}=\pi/2$ と表わされる。

故に $$\int_0^{y_T} b(y)\,dy=(m+3/4)\pi \qquad (2)$$

また z 方向の波動ベクトルは $k n_{eff}$ であるので

$$b^2(y)+k^2n_{eff}^2=k^2n^2(y) \qquad (3)$$

ただし k は真空中の波動ベクトル，n_{eff} は実効屈折率，$n(y)$ は屈折率のプロファイルを表わす。一般に $b(y_T)=0$ であるから $n_{eff}=n(y_T)$ となる。次に屈折率のプロファイルを

$$n(y)=n_b+\Delta n f(y/D_n) \qquad (4)$$

と表わす。$\Delta n=n_s-n_b$ とすると

$$n^2(y)\cong n_b^2+(n_s^2-n_b^2)f(y/D_n) \qquad (5)$$

(2)(3)より

$$k\int_0^{y_T}\{n(y)^2-n_{eff}^2\}^{\frac{1}{2}}dy=(m+3/4)\pi \qquad (6)$$

(6)式に(5)式を代入すると

$$V\int_0^{x_T}\{f(x)-b\}^{\frac{1}{2}}dx=(m+3/4)\pi \qquad (7)$$

ただし $V=kD_n(n_s^2-n_b^2)^{\frac{1}{2}}$　　$b=\dfrac{n_{eff}^2-n_b^2}{n_s^2-n_b^2}$　　$x=y/D_n$

i) 屈折率分布を Erfc 関数としたとき　($\frac{4m+3}{4}$

一般に規格化された Erfc 関数は

$$Erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2}dt \qquad (8)$$

で表わされる。この形では取り扱いに不便であるので，多項式展開して，近似式を求めると

$$Erfc(x)=1/(1+0.0705230784x+0.0422820123x^2+0.0042705272x^3+0.0001520143x^4+0.0002765672x^5+0.0000430638x^6)^{16} \qquad (9)$$

となる。

(7)式より $k D_n (2n_b \Delta n)^{\frac{1}{2}} \int_0^{x_{T0}} \{Erfc(x) - b\} dx = 3/4\pi$ (10)

$k D_n (2n_b \Delta n)^{\frac{1}{2}} \int_0^{x_{T1}} \{Erfc(x) - b\} dx = 7/4\pi$ (11)

$n_{eff} = n(y_c)$ および(4)式より

$$\Delta n \, Erfc(x_{T0}) = K_0. \quad (12)$$

$$\Delta n \, Erfc(x_{T1}) = K_1 \quad (13)$$

ただし $x_{T0} = y_{T0}/D_n$, $x_{T1} = y_{T1}/D_n$ であり y_{T0} および y_{T1} はそれぞれ TE_0, TE_1 モードに対する turning point を表わす。また K_0, K_1 は実測できるので (10)～(13) 式において未知数は x_{T0}, x_{T1}, Δn, D_n の4個であり，方程式は4個であるので上の未知数はユニークに定まる。しかし解析的には解けないので次に述べる方法で，電子計算機を用いて近似的に求める。

1) (12) (13) 式において Δn をある範囲内をあるきざみで動かし各々の Δn に対して x_{T0}, x_{T1} を Newton-Raphson 法を用いて求める。

2) 1)でまとまった Δn, x_{T0}, x_{T1} を (10) (11) 式より D_n を消去した式に代入し simpson の公式を用いて，方程式を満足するかどうか判定する。実際には0に近い数をを与えておき方程式がをより小さくなればそのときの Δn, x_{T0}, x_{T1} を解とする。

3) (10) 式に Δn, x_{T0}, x_{T1} を代入して D_n を求める。

また m 番目のモードに対する cut off の条件は

$$V \int_0^{\infty} \sqrt{Erfc(x)}\, dx = (m + 3/4)\pi \quad (14)$$

で表わされる。[4]

ii) 屈折率分布を Gauss 関数としたとき
i) において $Erfc(x)$ を e^{-x^2} でおきかえれば後は全く同様である。

3. $LiNbO_3$ 中へのTiの拡散の実験

ユニオンカーバイト社製の $LiNbO_3$ (Y板, 厚さ0.5mm, 研磨精度250Å) を基板として用いた。

i) 基板の洗浄

次の方法で基板の洗浄を行なった。1) クロム酸混液に浸す, 2) テイポールで洗浄, 3) アセトンで超音波洗浄, 4) トリクレンで超音波洗浄, 4) アセトンで超音波洗浄

ii) Tiの蒸着

金属Tiを電子ビーム蒸着法で $LiNbO_3$ 基板に各々250Å, 500Å, 750Å, 950Å 蒸着した。なお膜厚は水晶発振式膜厚計でモニターすることにより制御した。

iii) 熱拡散

Tiを250Å蒸着した試料を970℃で3時間, 7時間拡散させたがいづれも完全に拡散している。

Tiを500Å蒸着した試料を970℃で3時間, 5時間, 7時間, 9時間, 11時間拡散させたが, 3時間, 5時間では完全に拡散しさらない。また1020℃, 1070℃, 1140℃で各々5時間, 7時間, 7時間拡散したがいづれも拡散している。

Tiを750Å蒸着した試料を970°, 1020℃で各々7時間拡散したがいづれも完全に拡散している。

Tiを950Å蒸着した試料を970℃, 1020℃で各々7時間拡散したが970℃では完全には拡散しない。

いづれの場合も雰囲気は N_2 ガス3000cc/minであり, 温度制御精度は±1℃であり, 室温から拡散温度まで達するまでに約40~70分を要している。

4. 光伝搬

拡散した各試料についてHe-Neレーザーおよび山口でFig.2に示すようにルチルのプリズムカップラーを用いてTEモードで光を入射させ各モードに対する入射角を測定し, 入射角より $n_{eff}, \Delta n, D_n$ を求めた。

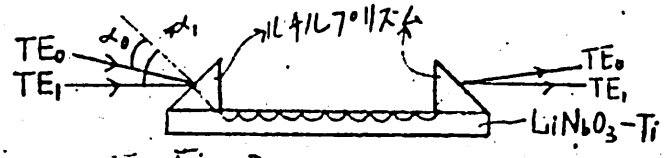


Fig.2

i) He-Ne レーザでの測定

Tiの膜厚 500Å, 拡散温度 970°C については, 拡散時間 5 時間の試料は伝搬ロスが大きくて測定不可能, 拡散時間 7 時間, 9時間, 11時間の試料はいづれも 2 本のモードが励振されている。拡散温度 1020°C, 1070°の試料についてもいづれも 2 本のモードが励振されている。拡散温度 1140°C の試料についてはいづれも2本のモードが励振されているようであるが TE_0 モードと TE_1 モードの分離角が非常に小さいので独立に入射角を測定することはできなかった。

Tiの膜厚 750Å, 拡散温度各々 970°C, 1020°C, 拡散時間 7 時間の試料はいづれも 3 本のモードが励振される。

Tiの膜厚 950Å 拡散温度 1020°C, 拡散時間 7 時間の試料は 4 本のモードが励振されている。

Tiの膜厚 250Å, 拡散温度 970°C, 拡散時間 7 時間の試料は 2 本のモードが励振され, 拡散時間 3 時間の試料は励振されるモード数が 1 本か 2 本かの判別が難しくかつ非常にロスが大きい。

次に各試料について, 測定した入射角より導波路中の実効屈折率 n_{eff} を (15) 式から求める。

$$n_{eff} = \sin\alpha_m \cos\varepsilon + \sqrt{n_p^2 - \sin^2\alpha_m}\,\sin\varepsilon \qquad (15)$$

ただし α_m は光のプリズムの法線に対する入射角, ε はプリズムの角度 (この場合は 45°) n_p はプリズムの屈折率 (He-Ne の波長 0.6328 μm で TE モードに対しては 2.8720)。Tiの膜厚 d, 拡散温度 T, 拡散時間 t に対する n_{eff} の関係を Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5 に示す。また n_{eff} と d, T, t の関係を実験式として下に示す。

TE_0 モード; $n_{eff} = 2.2000 + 6.7780\times10^{-3}\exp(1.6502d) \pm 0.0007$ (16)

TE_0 モード; $n_{eff} = 2.2100 + 4.4378\times10^{10}\exp(-3.0750\times10^{-2}T) \pm 0.0004$ (17)
ただし $1225°K < T < 1343°K$

TE_0 モード; $n_{eff} = 2.2110 + 6.4454\times10^{-2}\exp(-3.7099\times10^{-1}t) \pm 0.0005$ (18)
$7 < t < 11$

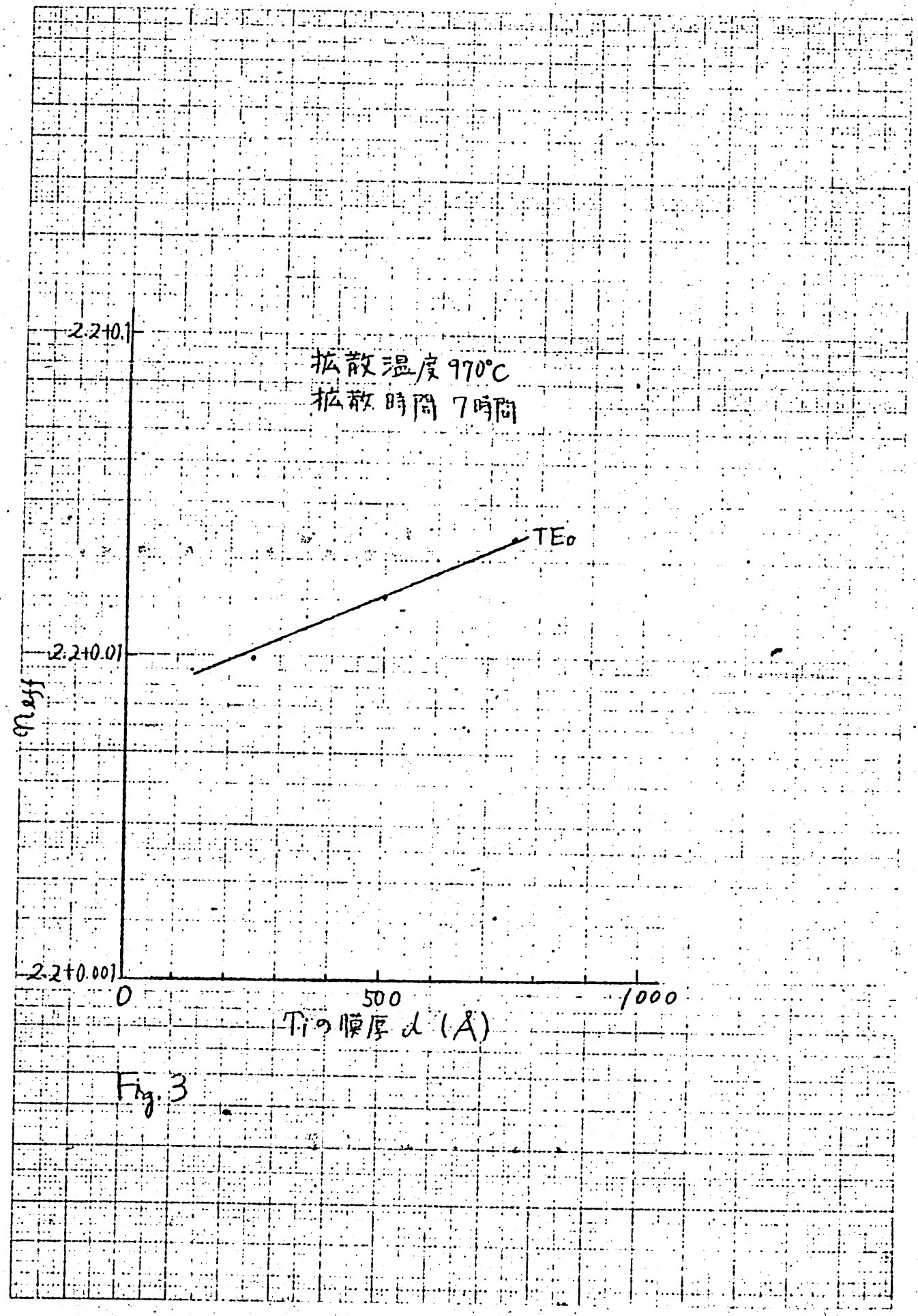


Fig. 3

SIGN
DATE

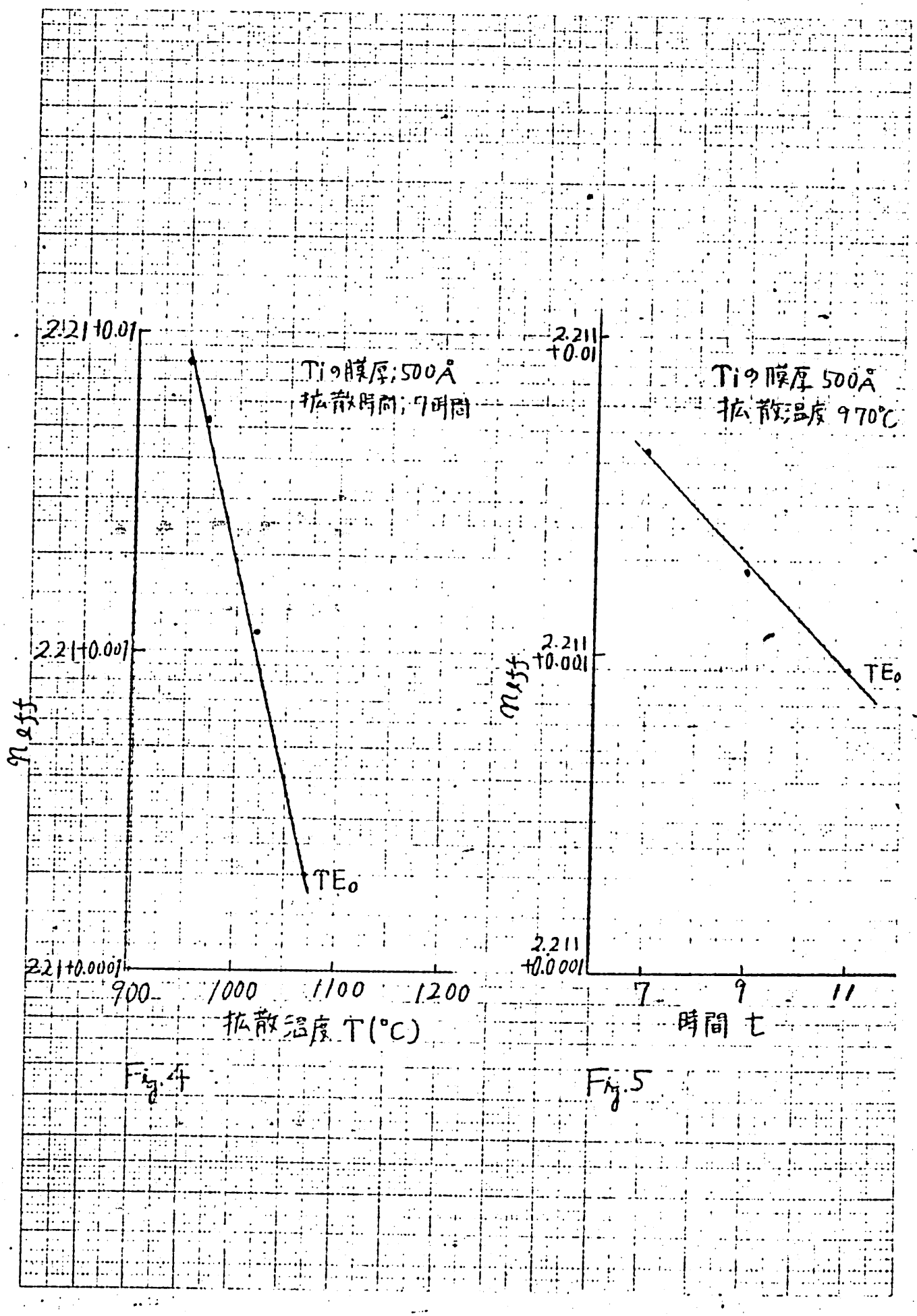


Fig. 4

Fig. 5

SIGN
DATE

(12) (13)式の K_0, K_1 は $K_i = n_{eff_i} - n_b$ (19)
より求まるので $\Delta n, D$ は (10)～(13)式および(19)式を用いて求まる。ただし(17)式の 0, 1 は 0次モード 1次モードに対応し, n_b は $LiNbO_3$ のTEモードに対する屈折率を表わし 0.6328 μm では 2.200 である。Tiの膜厚, 拡散温度, 拡散時間に対する $\Delta n, D$ の関係を Fig.5～Fig.10 に示す。

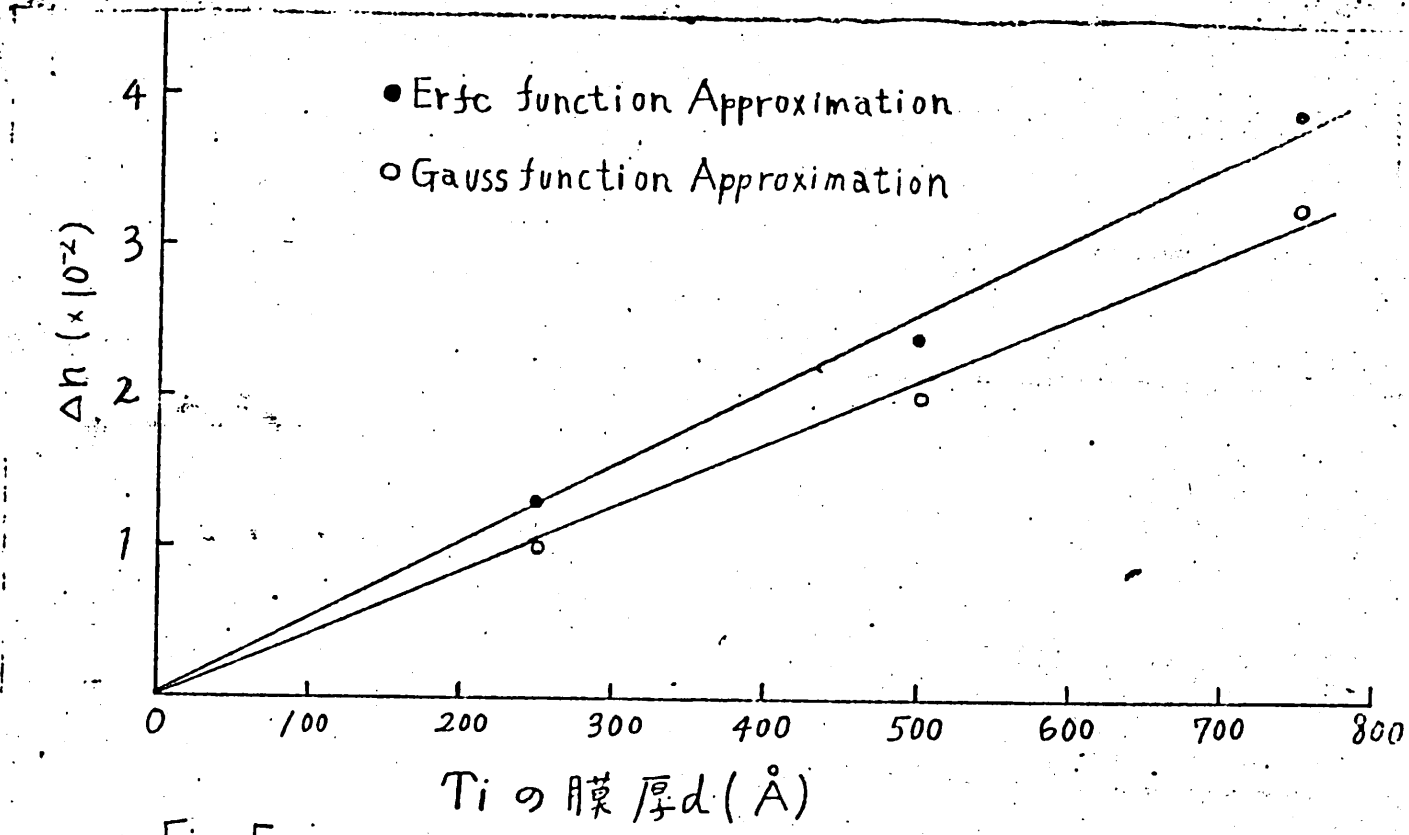


Fig.5

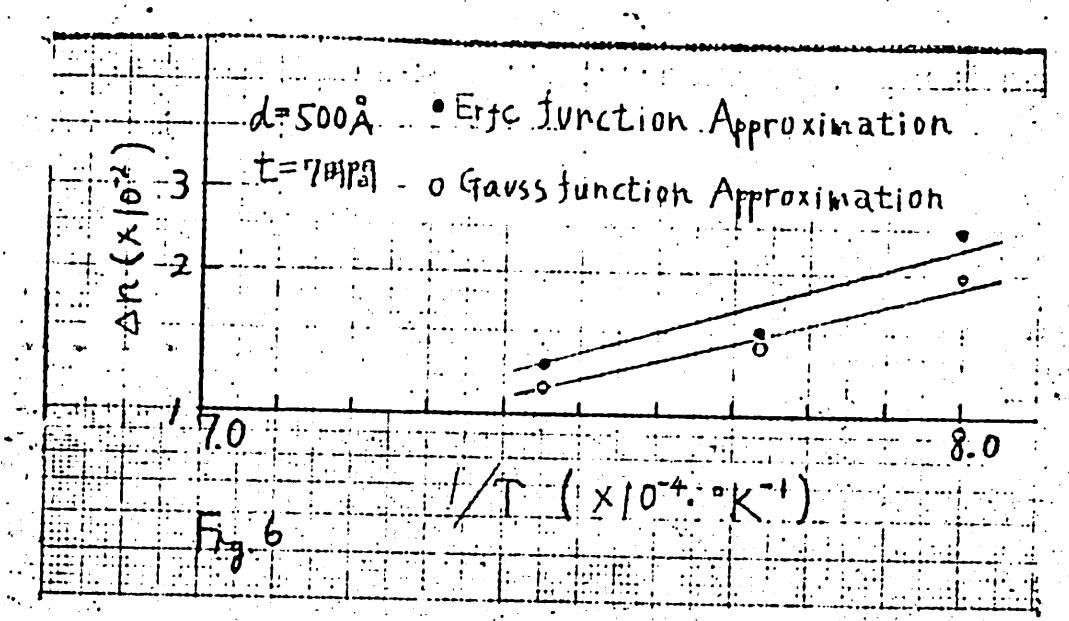


Fig.6

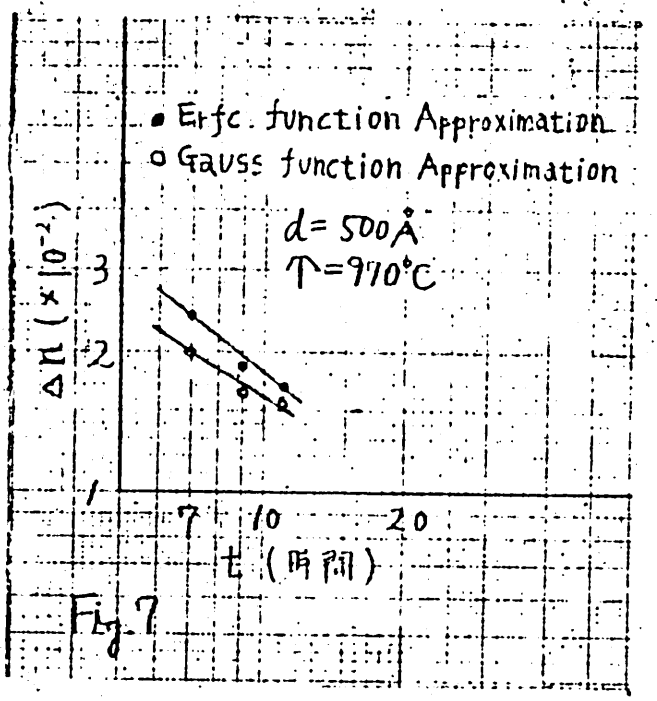


Fig. 7

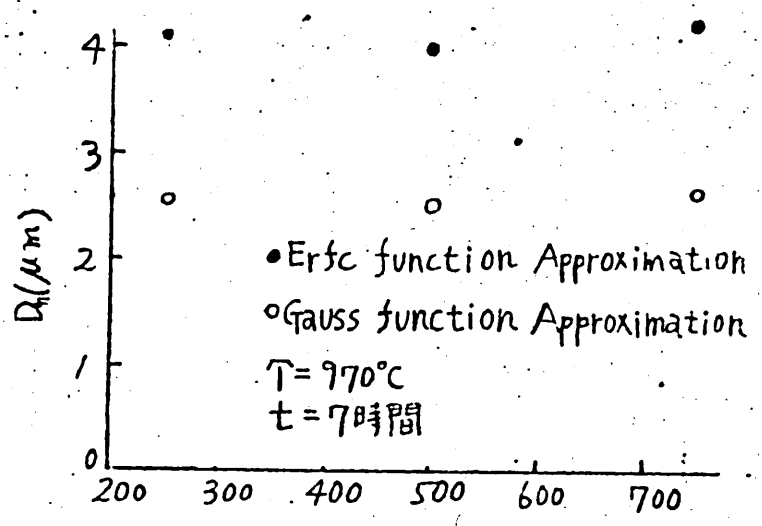


Fig. 8

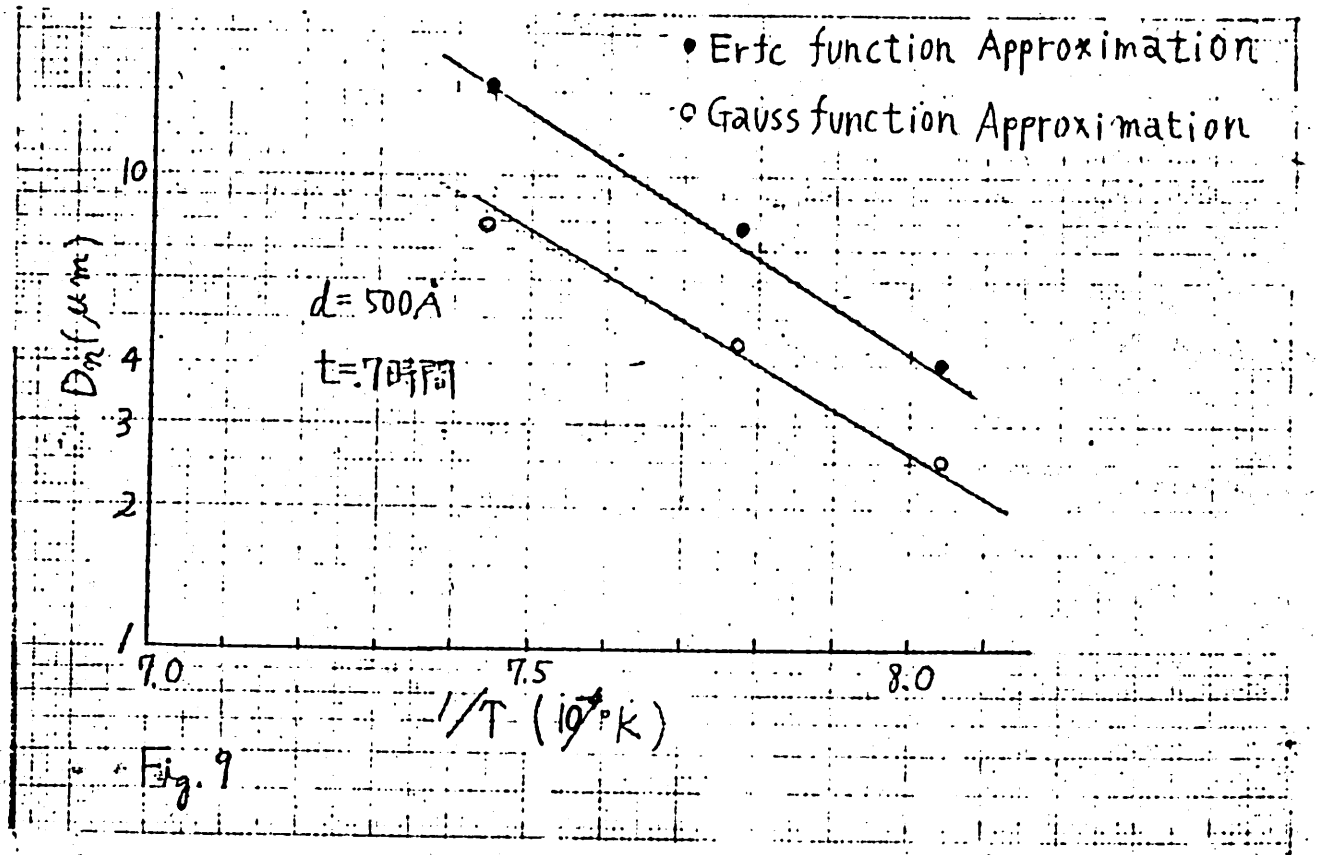


Fig. 9

一般の拡散のプロフィルはErfc関数かGauss関数かのどちらかに近い形になるので，Δn, Dをもめる際，拡散による結晶内部の屈折率のプロフィルは上に述べた2つの関数のどちらかであると仮定した。拡散のプロフィルがErfc関数とGauss関数のどちらに近いかを調べるため3本以上のモードが励振される試料を用いて，TE_0モードとTE_1モードおよびTE_1モードとTE_2モードより得られる各々のΔn, D_n をErfc関数とGauss関数につき比較検討することにより，結晶内部の屈折率のプロフィルはGauss関数に近いことがわかった。以下屈折率のプロフィルはGauss関数として取り扱う。

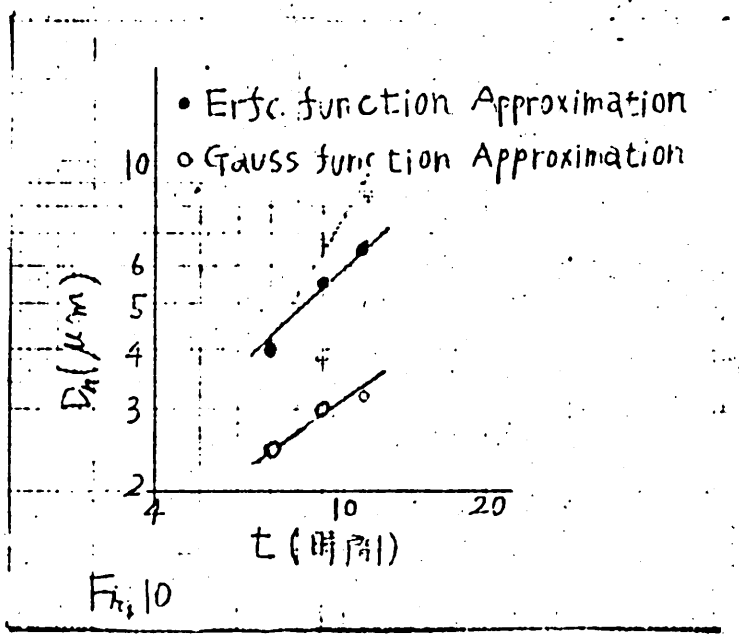


Fig. 10

一般にGauss関数形の拡散の場合，拡散方程式の解は(20)式で表わされる。

$$C(y,t)=\frac{N}{\sqrt{\pi t D_k}}\exp\left(-\frac{y^2}{4tD_k}\right) \qquad (20)$$

ただし$C(x,t)$はt時間後の表面よりの距離yにおける濃度，Nは初期濃度，D_kは拡散定数。$y=0$とすると

$$C(0,t)=\frac{N}{\sqrt{\pi t D_k}} \qquad (21)$$

$$D_k=D_0\exp\left(-\frac{T_0}{T}\right) \qquad (22)$$

(21)(22)より時間tおよび温度Tを一定にすれば$C(0,t)$はNに比例することがわかる。すなわち$C(0,t)$は$LiNbO_3$表面に蒸着するTiの膜厚dに比例することになる。Fig. 5よりΔnはdに比例してでるので，Δnは表面のTiの濃度$C(0,t)$に比例することがわかる。Δnとdの関係を実験式として表わすと(23)式になる。

$$\Delta n=0.0436d\pm0.0008 \qquad (23)$$
$$250\text{Å}\leq d\leq 750\text{Å}$$

(21)(22)式より $C(0,t)=\frac{N}{\sqrt{\pi t D_0}}\exp\left(\frac{T_0}{2T}\right)$ (24)

$$\ln C(0,t)=\ln\frac{N}{\sqrt{\pi t D_0}}+\frac{T_0}{2T} \quad (25)$$

となり $\ln C(0,t)$ と $1/T$ とは、tが一定の場合直線的な関係があるので $\ln\Delta n$ と $1/T$ も直線的な関係があり、Fig.6はこの関係が満足されていることを示している。Δn と T との関係を実験式で表わすと

$$\Delta n=6.7736\exp(9.8938\times10^3/T)\times10^{-6} \quad (25)$$

$$1243^\circ K\leqq T\leqq 1343^\circ K$$

また

(21)式より $\log C(0,t)=\log\frac{N}{\sqrt{\pi D_k}}-\frac{1}{2}\log t$ (26)

となり T が一定の場合同様に $\log\Delta n$ と $\log t$ は直線的な関係があり、Fig.7はこの関係が満足されていることを示している。Δn と t との関係を実験式で示すと

$$\Delta n=0.0568\,t^{-0.5421}\pm0.0003,\ 7\leqq t\leqq 7 \quad (27)$$

$C(0,t)$ が $1/e$ になる表面よりの距離 D_e は

$$D_e=2\sqrt{tD_k} \quad (28)$$

で表わされる。D_e は Ti の膜厚 d に依存しないので Δn が $1/e$ になる表面よりの距離 D_n も d に依存しないことが予想されるが Fig.8 はこの傾向を示している。(22)(28)式より、tが一定の場合 $\ln D_n$ と $1/T$ とは直線的な関係があるが Fig.9 はこの関係が満足されていることを示している。D_n と T との関係を実験式で示すと

$$D_n=1.06\times10^7\exp(-1.89\times10^4/T)\pm0.06 \quad (29)$$

$$1243^\circ K\leqq T\leqq 1343^\circ K$$

T が一定の場合 $\log D_n$ と $\log t$ とは直線的な関係があるが、Fig.10はこの関係が満足されていることを示している。D_n と t との関係を実験式で示すと

$$D_n=0.86\,t^{0.55}\pm0.05 \quad (30)$$

次にリフトオフ法により Fig.11 に示すように $LiNbO_3$ 上に各々 10μm, 20μm, 30μm, 40μm 中で Ti を選択的に 500Å 蒸着し，1000℃, 7時間, N_2 ガス雰囲気中で選択拡散した。拡散後，Ti の拡散された部分を顕微鏡で観察すると，Ti の拡散された部分は屈折率が変化しているため，拡散されていない部分との境界がはっきりと区別されていることがわかった。

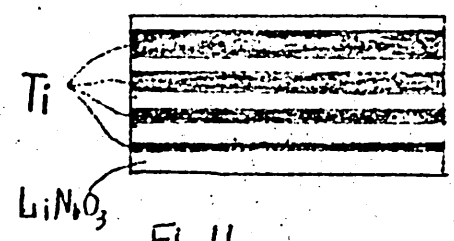


Fig.11

また拡散により導波路の中は最初に蒸着した Ti 金属の中よりも約 1μm～2μm 程度広くなることがわかった。

ルチルプリズムカップラーを用いて He-Ne レーザー光を入射させ，実効屈折率 n_{eff} を求めると $n_{eff}=2.2196$ となり導波路中による差は我々の測定精度内では認められなかった。

ii) レーザーダイオードによる測定

レーザーダイオードの 0.87μm の光をルチルプリズムカップラーを用いて光導波路中に入射した。測定した試料は Ti の膜厚 750Å, 拡散温度 970℃, 拡散時間 7時間の試料，Ti の膜厚 500Å 拡散温度 1070℃，拡散時間それぞれ 5時間, 7時間, 9時間の試料であるが，モードは 750Å, 1070℃, 7時間の試料に関しては 2本観測されたが その外の試料に関しては 1本か 2本かの判別が難しく，独立に観測することはできなかった。実効屈折率および Δn, D を表1に示す。

表1

Ti の膜厚(Å)	拡散温度(℃)	拡散時間(H)	モード数	実効屈折率	Δn	D_n
750	970	7	2	2.1786	0.035	2.01
500	1020	5	1or2	2.1716		
500	1020	7	1or2	2.1676		
500	1020	9	1or2	2.1698		

レーザーダイオードの場合実効屈折率は He-Ne レーザーと比較して小さくなり，Δn は大きくなっており，D_n は小さくなっていることがわかる。また Fig.11 に示す光導波路にレーザーダイオードの光を入射して実効屈折率を求めると $n_{eff}=2.1756$ となる。

4. おわりに

本報告では，単一モードの強誘電体光導波路を作成する目的で$LiNbO_3$のY板にTiを熱拡散させ，$LiNbO_3$内部の屈折率分布がErfc関数よりもGauss関数に近いことを確め，Δn, D_nの蒸着するTi金属の膜厚d，温度T，時間tに対する関係を求め各々の関係を実験式で表わした。この関係式とすでに求められている単一モードを与えるΔnとD_nの条件より，単一モードを作成するための拡散条件d, T, tを定めることができる。今後，これらの条件を定め，ΔnとD_nの組みあわせの異なる各種の単一モード光導波路を作成する予定である。またこれらの光導波路を光スイッチや光変調器等の光機能素子にも応用していく予定である。

文献 1) I.P. Kaminow et al, Appl. Phys. Lett. 22 540 (1973)
2) I.P. Kaminow et al, Appl. Phys. Lett. 27 555 (1975)
3) P.K. Tien et al, Appl. Phys. Lett. 24, 503 (1974)
4) G. Benjamin Hocker et al, IEEE QE11, 270 (1975)

輻射科学研究会資料

格子変調を用いた位相板による ホログラム記録再生

井岡栄雄　倉橋浩一郎
三菱電機(株)中央研究所

昭和51年1月30日

格子変調を用いた位相板によるホログラム記録・再生

Holographic Storage by Using Grating Modulated Phase Plates

井岡果雄　倉橋法一郎
Akio Ioka　Koichiro Kurahashi

三菱電機(株)中央研究所
Central Research Laboratory, Mitsubishi Electric Corp.

1. はじめに

Gabor[1]により1948年に発明されたホログラフィーは、コヒーレント光源としての1960年当初に於けるレーザの出現と共に、Leith, Upatnieks[2]による非共軸ホログラフィー(off-axis holography)の開発を契機として、種々の応用が検討されてきた。このoff-axis holographyは良質の像再生を可能ならしめたが、レーザ出現時より注目された斑紋状の空間的濃淡パターンが其の後のホログラフィー技術の実用化の大きな障害となっている。この種空間的パターンはスペックルないしスペックルノイズと称され光源の有する高いコヒーレンシィに基づく互いにランダムな位相関係にある波面間の干渉に起因するものと考えられる。

一般にホログラフィーによる情報の記録、再生過程に於ける考慮されるべき主要な条項として(1)冗長性、(2)記録密度、(3)回折効率、(4)再生像のSN比、(5)階調特性、(6)解像度等の諸点が挙げられ、今日迄様々な記録法、感光材料等に関する研究が為されている。今日良く知られているホログラフィーの一大特性である情報の高密度、高冗長性の記録、再生の達成の為には、記録光学系の構成、記録感材の考察と伴わせ上記光源の高い干渉性に基づく空間的雑音パターンおよび強度揺らぎの因を本質的に追求し、これらノイズ抑圧の策が取られねばならない。すなわちホログラフィーの優れた特徴を活かすためにスペックル抑圧は、重要な課題の一つと考えられる。

本報告では、二次元情報の記録、再生を対称にして情報の記録密度の観点から有位性が認められるフーリエ変換型のホログラム記録法に主点を置き、次の才二章に於いて従来の記録法の発展の跡の簡単なreviewを行ない、記録過程における拡散板の導入、拡散板導入に依って生じらせられる空間的ノイズ成分の顕在化、記録密度との矛盾、更にこれらの問題を打破すべく考えだされたコード化された情報拡散板について言及する。才三章では近年新に導入された情報拡散板の構成法として従来の多層蒸着或は腐食法に替る新たな格子変調を用いた位相板構成法の原理的解析を試みると同時にその特徴を述べる。才4章では、隣接情報点間の干渉効果抑圧を目的として θ変調された情報拡散板に依る原情報点の分散記録の概念を述べ才5章に於ける再生像面上からの情報拡散板の位相系列考察の準備とする。最後に位相板作成法およびホログラム記録、再生例について触れる。

2. ホログラム記録法

情報の記録、再生過程に於いて、その記録密度の点から有利とされているフーリエ変換タイプの基本的なホログラム記録光学系をFig. 1に示す。しかし単純なフーリエ変換型の光学系を利用した場合には、系内に含まれる僅かな欠陥がノイズ発生の原因となる上に、通常の情報記録に際しては、低周波の回折成分のエネルギーが大きいために現存する感材の性能を充分に利用することができず、良質の再生像を得ることが難かしい。喩、理想的なダイナミックレンジの広い記録材料を利用できたとして也、干渉縞の不均一な分布のために、大きな回折効率を期待することができない。

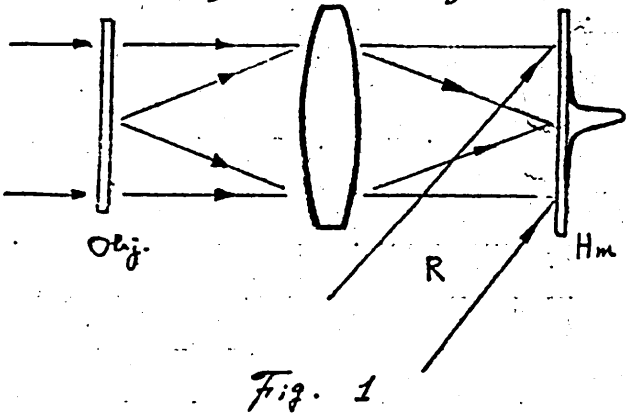


Fig. 1

情報光の特定回折方向への集中を緩和する一手法として、Fig. 2に示される如く、フーリエ変換面からすらした

位置でホログラム記録を行なうデフォーカス法がある。しかしながらこの方法は、情報光の偏りが生じ冗長性に難があり、冗長度を増すために デフォーカス量を大きくすると記録密度が低下する。更にデフォーカス量が一義的に定まらないという欠点を有する。

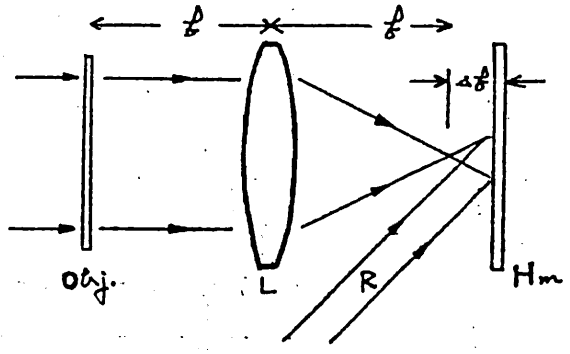


Fig. 2

冗長性、回折効率の改善をするためにスリガラス状の拡散板を通過した一様拡散光で物体照明するデフューザ法に於ては（Fig.3）、再生像は、ホログラム開口に逆比例した著しいスペックルノイズを呈する故、高密度記録に適しない。Figure 4 は、物体に重畳して位相格子を設置し、位相格子の各回折次数に対応してサブホログラムを形成する多重光束照明（Multiple Beam）法[3]を示す。規則的な格子パターンにより光の回折方向の制御を行うこの方法により良質な再生像を得ることができるが、冗長度向上のためには、多くの回折光を含まねばならず、これは、ホログラム開口の増大を招くと同時に、再生像中に格子パターンを出現させることになり、解像度の低下を来す。

フーリエ変換型のホログラム記録・再生において、高密度高冗長度の記録を達成するためには、何らかの手段により極小の記録面積内に一様な情報光分布を得るべく拡散法が考えだされる必要がある。この契機を与えたのは

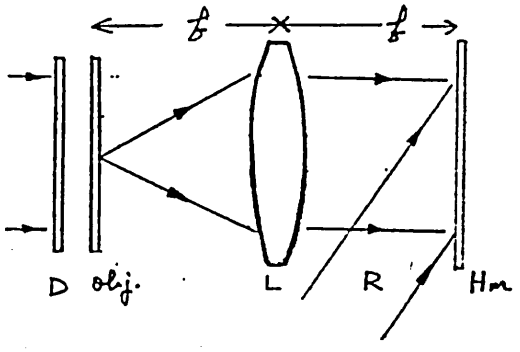


Fig. 3

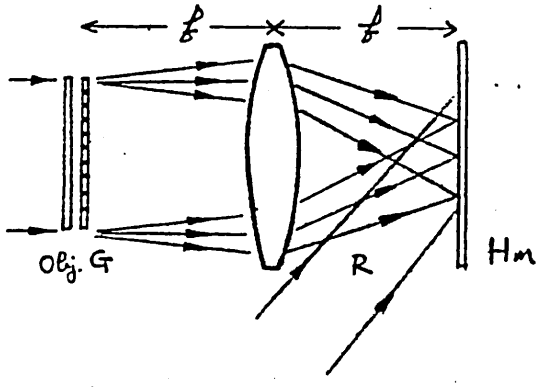


Fig. 4

Burkhardt[4]の提唱したランダム・フェーズ・マスクである。これは、二次元の情報構成要素に対して0乃至πの位相をランダムに賦与する方法で、この手法によれば、完全フーリエ変換面上で一情報点と記録光学系、使用波長で決まる回折ぼけ内に比較的一様な情報光分布を得ることができる。

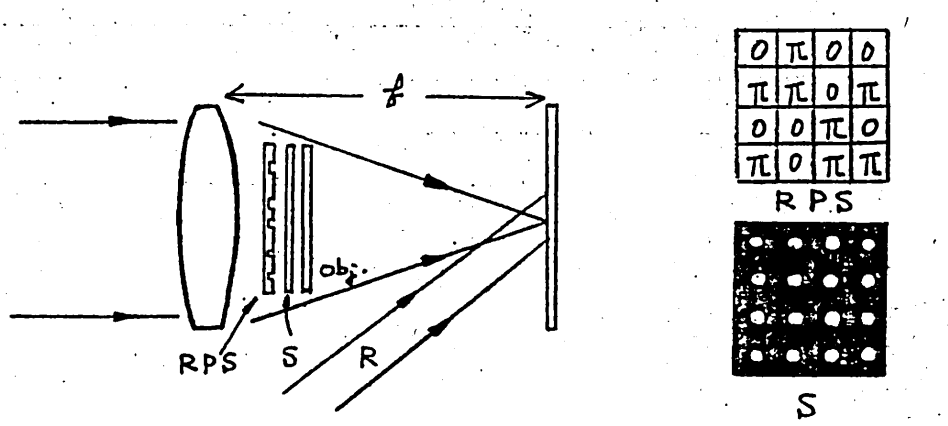


Fig. 5

この手法に依りディジタルパターンの高密度、高冗長度の記録が行ない得る。

角田と武田[5]は、ランダム・フェーズ・マスクとサンプリングメッシュを組合せ、画像情報の高密度記録を試みている(Fig.5)。加藤[6]らは、位相板をホログラム記録したものをビームスプリッターとして用い白色干渉光学系を利用しスペックル抑圧を行なっている。

上記以外に、決定論的(deterministic)[7,8]位相コードを利用する方法もあるが、何れにしても、現段階では、帯域制限された情報拡散板を情報拡散の手段として用い、かなり良好な情報記録・再生技術が確立しつつある。然しながら、後述する様に、再生像のSN比等の点から猶、考慮するべき余地が残されている。取り敢えず、次章で上記情報拡散板の構成法として、格子変調を利用した新しい手法の原理的解析を試みる。

3. 格子変調による情報拡散板構成法[9]

従来の情報拡散板は、総て多層蒸着或は腐食過程を利用した特定波長に対して凹凸状の形状を設け、その位相制御の機能を果たしめている。ここに記述する手法は、全く従来法と異なる格子変調を利用して情報点に対

する位相賦与機能を達成する情報振幅板（Grating Modulated phase plate：GMPP）であり．其の基本概念をFig.6に示す。図は(m.n)点の様相を示すもので．xy面上に格子定数dの格子を想定し．Δxのサンプリング・ピッチでxy面をサンプルし、各サンプル点半径をaとする。半径a内に、想定した格子と同じピッチを有する位相格子を重畳する。ここで図に示す様に想定した格子とサンプル点内の位相格子との相対的シフト量をdPmn(x-mΔx, y-nΔx)とする。

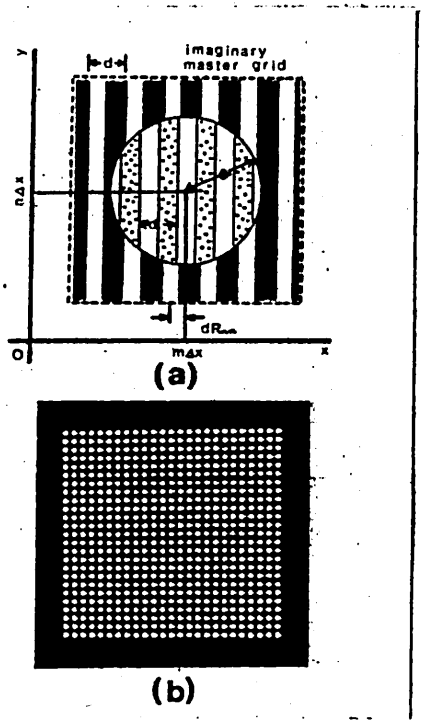


Fig. 6

Figure 7に示される光学系において．上述した如き概念で構成された位相板にコヒーレントな平行平面波を照射した場合、位相板通過後の複素振幅分布u(x.y)は、次式の如く表わされる。

$$u(x.y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \exp\left[j(A_{mn}/2)\sin 2\pi(x/d+P_{mn})\right] \times t_0(x-m\Delta x,\ y-n\Delta x) \qquad (1)$$

ここで$A_{mn}(x-m\Delta x, y-n\Delta x)/2$は第(m.n)点における位相格子の振幅を表わす。M, Nはx.y方向における総サンプル点数を表わし．振幅透過関数$t_0(x.y)$は次の様に表わされる。

$$t_0(x.y)=\begin{cases}1 : \text{in } (x^2+y^2)^{1/2}\le a\\ 0 : \text{otherwise}\end{cases} \qquad (2)$$

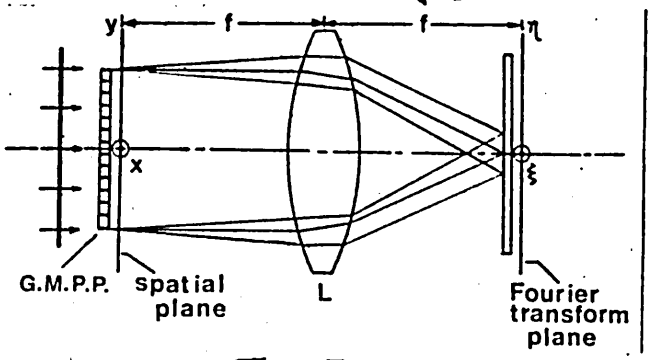


Fig. 7

以下の解析を簡単にするため．各サンプル点内で$A_{mn}(x-m\Delta x, y-n\Delta x)$, $P_{mn}(x-m\Delta x, y-n\Delta x)$は一定の値$A_{mn}$, P_{mn}を取るものと仮定する。

第一種g次のベッセル関数 J_g を用いると(1)式は次の様に変形される。

$$u(x,y)=\sum_{g=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} J_g(A_{mn}/2)$$

$$\times \exp\left[j2\pi g(x+dP_{mn})/d\right]\cdot t_0(x-m\Delta x, y-n\Delta x) \qquad (3)$$

フーリエ変換面(ξ,η)上での複素振幅分布 $U_g(\xi,\eta)$ を求めると

$$U_g(\xi,\eta)=\sum_{g=-\infty}^{\infty}\sum_{m}\sum_{n} J_g(A_{mn}/2)$$

$$\times F\left\{\exp\left[j2\pi g(x+dP_{mn})/d\right]\right\} * F\left[t_0(x-m\Delta x, y-n\Delta x)\right] \qquad (4)$$

となる。 F はフーリエ変換操作，$*$ はコンボリューションを表わす。
(4)式を計算整理すると

$$U_g(\xi,\eta)=\text{const.}\times\sum_{g=-\infty}^{\infty}\sum_{m}\sum_{n} J_g(A_{mn}/2)$$

$$\times \frac{2J_1\left\{2\pi a\left[(\xi-g/d)^2+\eta^2\right]^{1/2}\right\}}{2\pi a\left[(\xi-g/d)^2+\eta^2\right]^{1/2}}$$

$$\times \exp\left\{-j2\pi\left[(\xi-g/d)\cdot m\Delta x+\eta\cdot n\Delta x\right]+j2\pi g P_{mn}\right\} \qquad (5)$$

となり g の値に依り 情報拡散板の各回折次成分を求めることができる。

ここで $g=0$ に対応する 0次回折次成分に対する強度分布 $I_0(\xi,\eta)$ を求めると次の様になる。

$$I_0(\xi,\eta)=U_0(\xi,\eta)\cdot U_0^{*}(\xi,\eta)=\left|\text{const.}\times J_0(A_{mn}/2)\right.$$

$$\left.\times \frac{2J_1\left[2\pi a(\xi^2+\eta^2)^{1/2}\right]}{2\pi a(\xi^2+\eta^2)^{1/2}}\right|^2\cdot\left(\frac{\sin\pi\xi\cdot M\Delta x}{\sin\pi\xi\cdot\Delta x}\right)^2$$

$$\times\left(\frac{\sin\pi\eta\cdot N\Delta x}{\sin\pi\eta\cdot\Delta x}\right)^2 \qquad (6)$$

上式において計算を簡略にするため $A_{mn}(x-m\Delta x, y-n\Delta x)$ は xy 面上一定と仮定した。(6)式から 0 次回折波成分は、ξ, η が $1/\Delta x$ の整数倍の位置で I エネルギーの集中が生じることを示しており、干渉縞の局所的偏在を招き、雑音・回折効率の点から望ましくない。

一方 ±1 次回折波に相当する $\xi\eta$ 面上の複素振幅分布 $U_{\pm 1}(\xi, \eta)$ は次式の如く求められる。

$$U_{\pm 1}(\xi,\eta) = \text{const.} \times \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} J_{\pm 1}(A_{mn}/2) \times \frac{2J_1\left\{2\pi a\left[(\xi \mp 1/d)^2+\eta^2\right]^{1/2}\right\}}{2\pi a\left[(\xi \mp 1/d)^2+\eta^2\right]^{1/2}} \times \exp\left\{-2\pi\left[(\xi \mp 1/d)\cdot m\Delta x + \eta \cdot n\Delta x\right] \pm j2\pi P_{mn}\right\} \quad (7)$$

したがって、±1 次回折波のエネルギー分布 $I_{\pm 1}(\xi,\eta)$ として次式を得ることができる。

$$I_{\pm 1}(\xi,\eta) = \left| \frac{2J_1\left\{2\pi a\left[(\xi \mp 1/d)^2+\eta^2\right]^{1/2}\right\}}{2\pi a\left[(\xi \mp 1/d)^2+\eta^2\right]^{1/2}} \right|^2 \times \left\{ \sum_m \sum_n \left[J_{\pm 1}(A_{mn}/2)\right]^2 + 2I_{CR}(\xi,\eta) \right\} \quad (8)$$

ここで

$$I_{CR}(\xi,\eta) = \frac{1}{2} \times \sum_{m=1}^{M}{}' \sum_{m'=1}^{M}{}' \sum_{n=1}^{N}{}' \sum_{n'=1}^{N}{}' J_{\pm 1}(A_{mn}/2) \times J_{\pm 1}(A_{m'n'}/2) \times \exp\left\{-j2\pi\left[(\xi \mp 1/d)\cdot(m-m')\Delta x + \eta(n-n')\Delta x\right]\right\} \times \exp\left[\pm j2\pi(P_{mn}-P_{m'n'})\right] \quad (9)$$

であり、$\sum_m{}' \sum_{m'}{}' \sum_n{}' \sum_{n'}{}'$ は $(m,n) \neq (m',n')$ を意味する。

$I_{CR}(\xi,\eta)$ は各情報点間の cross correlation を表わし、P_{mn} の値として 0 と 1 の間に一様分布するランダムな値を附与し、M, N が充分

大きな値を取るとすると (9) 式で表わされる項は無視することができる。

結局，情報振幅板に依る ±1次回折光の ξη 面上でのエネルギー分布は次式で与えられることになる。

$$I_{\pm 1}(\xi,\eta) = \left| \frac{2J_1\{2\pi a[(\xi \mp 1/d)^2+\eta^2]^{1/2}\}}{2\pi a[(\xi \mp 1/d)^2+\eta^2]^{1/2}} \right|^2 \times \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left[J_{\pm 1}(A_{mn}/2)\right]^2 \qquad (10)$$

(10)式は．$\xi = \pm 1/d$．$\eta = 0$ を中心とする1情報点の大きさで決まる回折振り内にエネルギー集中がないことを示しており．良質のホログラムが形成できる。Figure 8 に7-11受検面上で得られたエネルギー分布を示す。

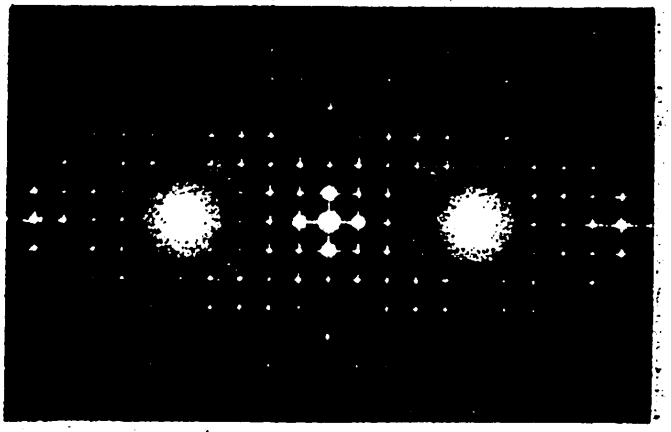


Fig. 8

また (6)．(8) 両式より 0次回折光と±1次回折光との影響を無視でき得る条件として

$$a > 1.2d \qquad (11)$$

が得られる。尚．Fig. 8 は $P_{mn} = 0$ 或は 1/2 を等確率に二次元面上ランダム分布させた時のエネルギー分布である。

多層蒸着等による厚さを制御することにより情報点へ付加する位相を決める従来の情報振幅板と異なり．ここに記述した手法に依れば、総ての波長に対して互換用し得る情報振幅板を作成することができる。Figure 9 はこれを説明する図で．Fig. 6 で設定した imaginary master grid と正確に一致する位相格子を有する情報点とそれと dP_{mn} の変位量をもつ位相格子で表わされた情報点を通過した

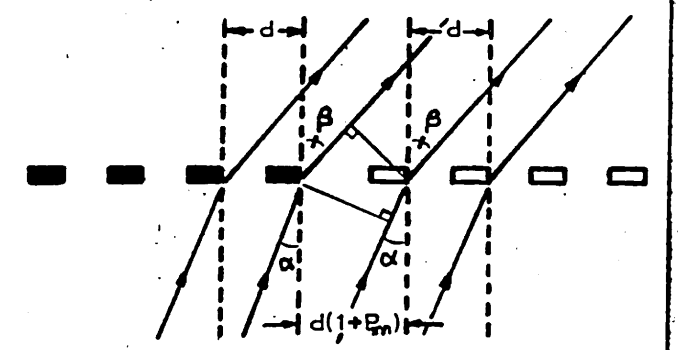


Fig: 9

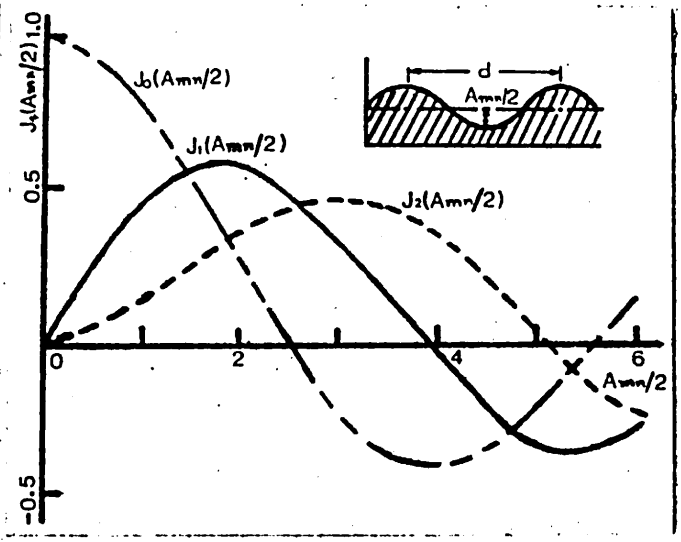


Fig.10

光の行路差をLとしたとき、次の関係が得られる。

$$L = d P_{mn} (\sin\beta - \sin\alpha) = 2\pi P_{mn} \qquad (12)$$

ここに、dは格子定数、α、βはそれぞれ情報振幅板に依る入射波および回折波の入射角、回折角を表わす。上式から光行路差Lは入射角および波長に依存しないことが明らかで、従来の情報振幅板と異なる大きな特徴を備えていることが判る。

更に(3)式に於いて $P_{mn}(x\text{-max}, y\text{-max})$ と同時に $A_{mn}(x\text{-max}, y\text{-max})$ を制御することができる。これはFig.10に示した $J_1(A_{mn}/2)$ と $A_{mn}/2$ との関係がlinearな範囲に於て、ここに記した情報板自体で各情報点を通過する情報光を制御し得ることを意味する。したがって、現在実用化されている油膜への電子ビーム書込み法を応用することにより ディジタル情報は言うに及ばずアナログ情報に対しても特異な情報構成素子達成の可能性がある。

4. コード化されたGMPPに依る像合成[10.]

格子変調を利用した情報振幅板においては、各情報点への位相付加と同時に、微細格子構造の角度(θ)或は周波数変調に依り情報点の選択を行い得る。ここで、ホログラフィックな像記録・再生過程に於て、再生像面上に意を払いスペックルの最大の因を考えると、それは最隣接情報点間の干渉効果にあると考えられる。したがって隣り合う情報点間の干渉効果を抑圧することに依り情報点間のランダムな位相差に基づく、望ましくないス

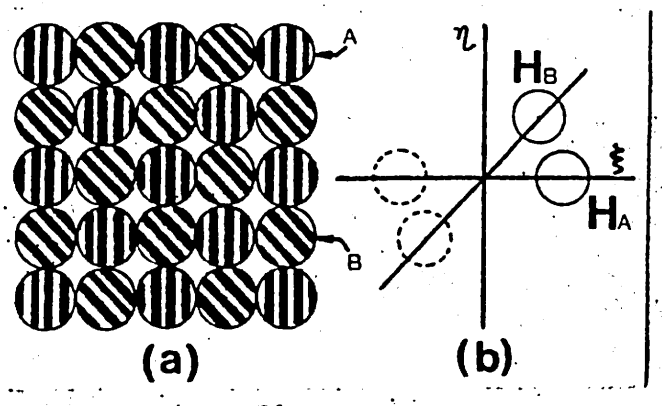


Fig. 11

ペクトルパターン或は強度揺らぎの大部分を抑圧できると考えられる。Figure 11 はこの原理的説明図で、ここでは隣接点を角度変調に依り、フーリエ変換面上で、二つの回折限界拡りの大きさのホログラム H_A および H_B として記録し、再生過程に於て両ホログラムをインコヒーレントに再生する方法を示している。

矩形開口でサンプルした場合、開口の辺の長さを a, b としたとき、再生像面上で相隣接する二点を (m,n) および (m',n') で表わしたとき、インコヒーレント像合成の際の像面 (X,Y) での強度分布は、次式で表わされる。

$$I(X,Y) = |ab\, J_1(A_{mn}/2)\cdot S_p(X-m\Delta X)\cdot S_p(Y-n\Delta X)|^2 + |ab\, J_1(A_{m'n'}/2)\cdot S_p(X-m'\Delta X)\cdot S_p(Y-n'\Delta X)|^2 \quad (13)$$

ここで

$$S_p(X-m\Delta X) = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sin a\pi\xi}{a\pi\xi}\cdot \exp[j2\pi(X-m\Delta X)\xi]\, d\xi$$

$$S_p(Y-n\Delta X) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \frac{\sin b\pi\eta}{b\pi\eta}\cdot \exp[j2\pi(Y-n\Delta X)\eta]\, d\eta \quad (14)$$

であり、d, β は矩形ホログラムの両辺の長さを表わす。$S_p(\ )$ は、ホログラムサイズに依存した形状を取るが、インコヒーレント像合成の場合は、相隣接する情報点間の干渉効果は無く、互いの寄与は強度和のみで考えられ得る。したがって、空間的な強度揺らぎ等ノイズ成分の主要な原因と考えられる相隣接情報点間の位相差に基づく相関を抑圧することができる。

Figure 12 は $\theta = 90°$ の場合の位相板および斯様な位相板と情報を重畳した場合のスペクトラムの一例を示す。Figure 13 は像合成の一例である。

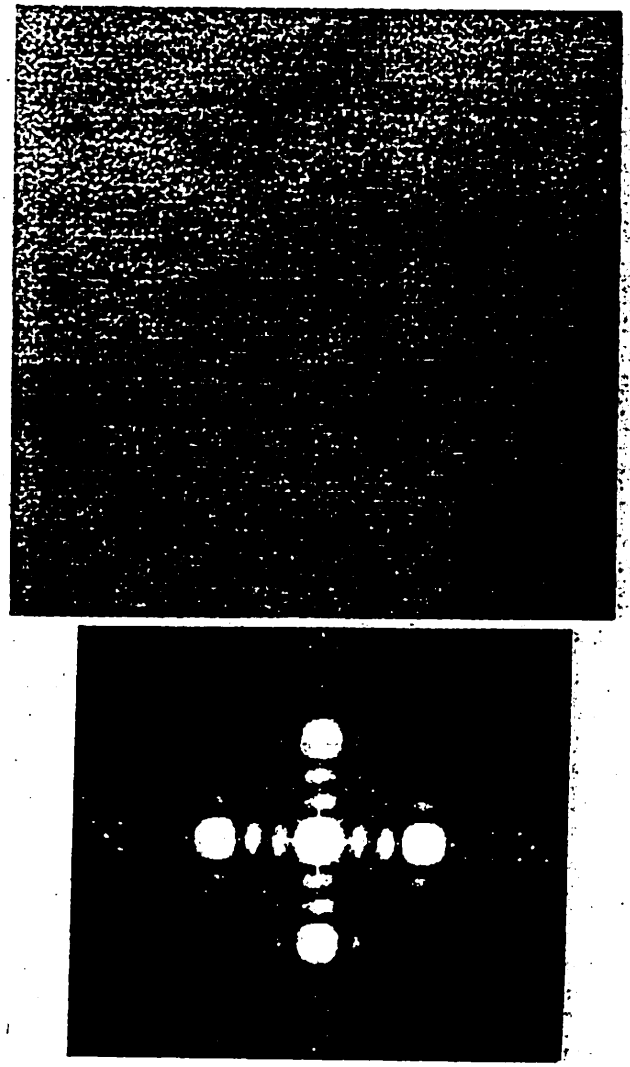


Fig. 12

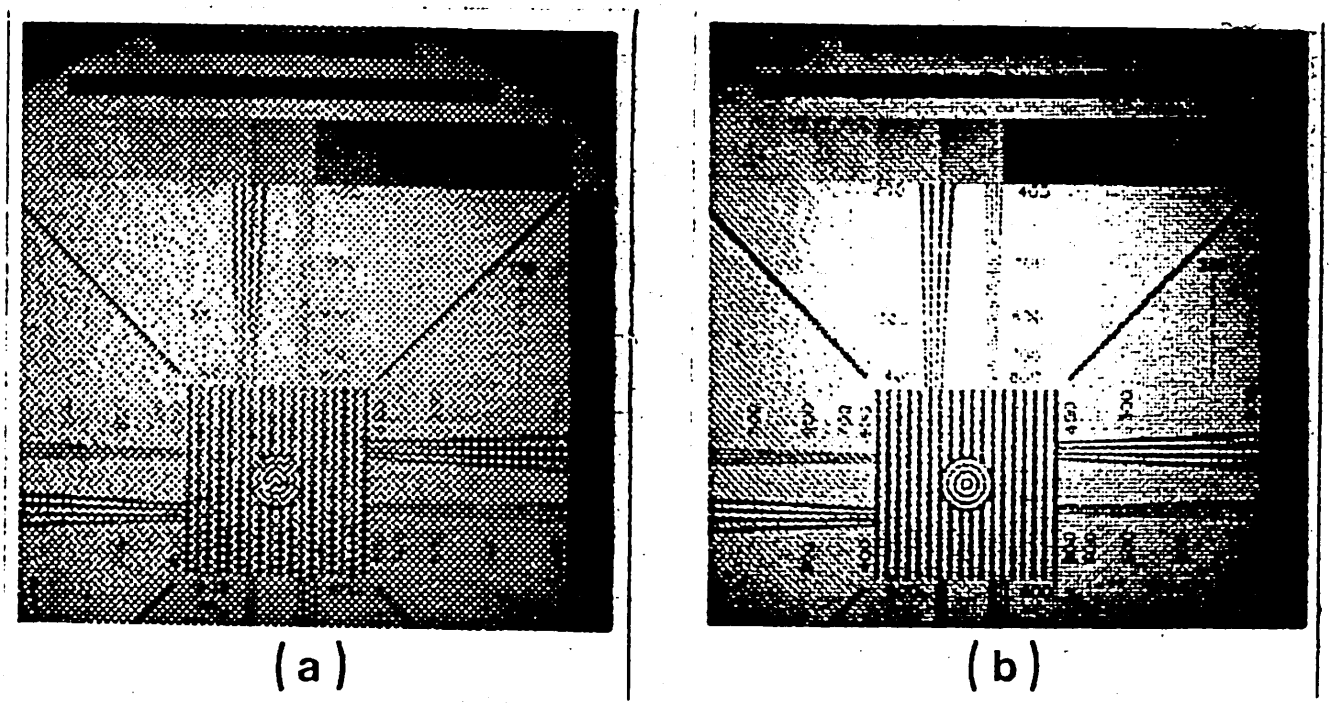


Fig. 13

5. 再生像面上からの情報拡散板の位相系列の考察

前章の最近接情報点間の干渉効果を抑圧するという考察は、白変調の如きコード化を用いなくて乱情報拡散板の位相系列を考慮することに依り、同様の効果が期待できる。詳細な解析[10]に依れば、(14)式で表わされる関数を定義することに依り、最近接情報点間の位相差を $|\pi/2|$ とすることにより、再生像面上に於て隣接情報点間の強度分布の断面が(13)式で表わされることが解析的に帰結される。

斯様な位相系列を有する情報拡散板は、特にアナログ情報に対し、強度揺ぎを抑圧する効果が大きいと考えられる。これに対し通常0或は π radの位相が二次元面上ランダムに分布した拡散板は、0乃至 π radのランダムな位相差に基づく強度揺ぎを生じる。

次章に示す0或 π の二値位相がランダムに配列された拡散板(Fig.16)と最近接点間の位相差が $|\pi/2|$ となる様に設計された情報拡散板(Fig.17)の使用に於ける両者の再生像面上での差異を比較する意味で、同一開口サイズのホログラムからの再生像を示す。Figure 14 は2ステップの位相板使用による再生像であり、Fig. 15 は4ステップ拡散板使用によるそれである。両情報拡散板の差異が明確に認められる。

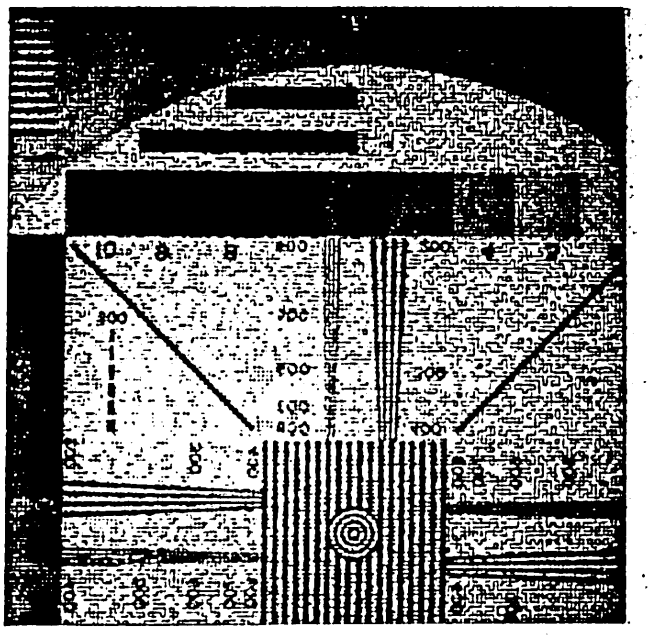


Fig. 14

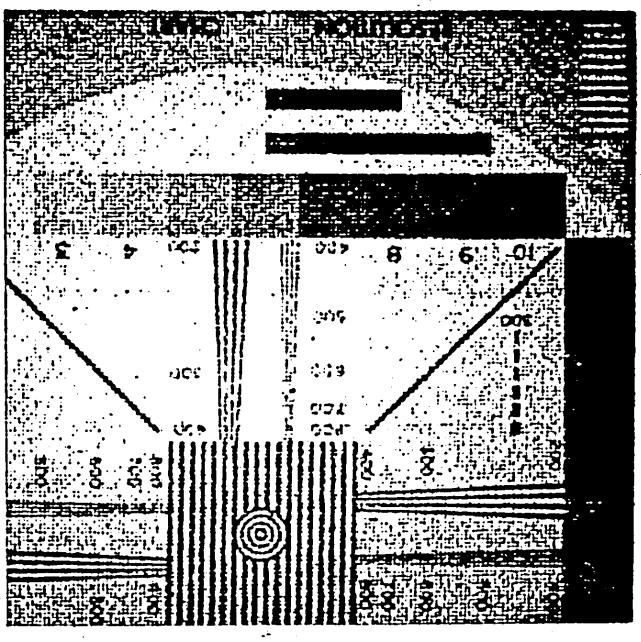


Fig. 15

6. 情報振幅板の作成およびホログラム記録

情報振幅板作成法としては、計算機制御下にあるプロッタ（ドラフター）乃至パターンジェネレータによる作成が最も簡単であると考えられる。2レベルおよび等節の再生像面上の考察から解析的に導かれる隣接情報長間の位相差が $|\pi/2|$ の場合の試作例を Fig. 16 および Fig. 17 に示す。

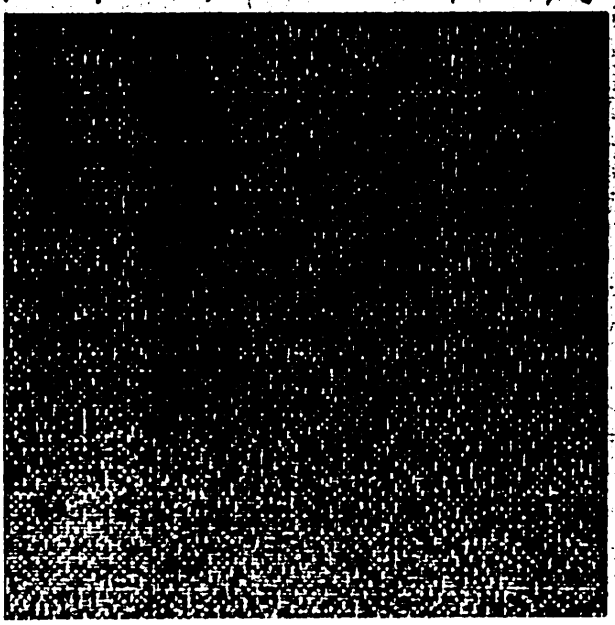


Fig. 16.

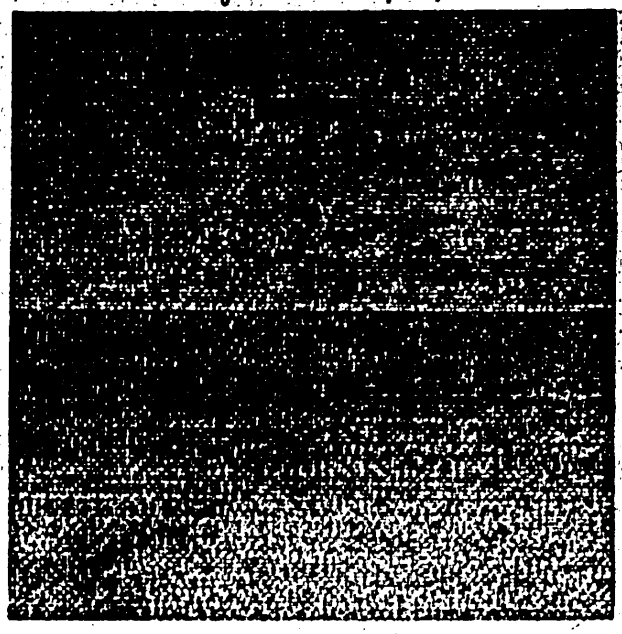


Fig. 17

ホログラム記録光学系の一例を Fig. 18 に示す。Figure 6 に示した1情報点 100 μm 中の情報振幅板を用いた場合の振幅板の0次および1次回折波を利用した記録再生例を Fig. 19 に示す。情報振幅板の効果が顕著に現われている。図において (a), (c) は原情報，(c), (d) は $g=0$ すなわち0次回折波を利用したホログラムからの再生像を，(e), (f) は $g=1$ すなわち1次回折波を利用したホログラムからの再生像を示す。

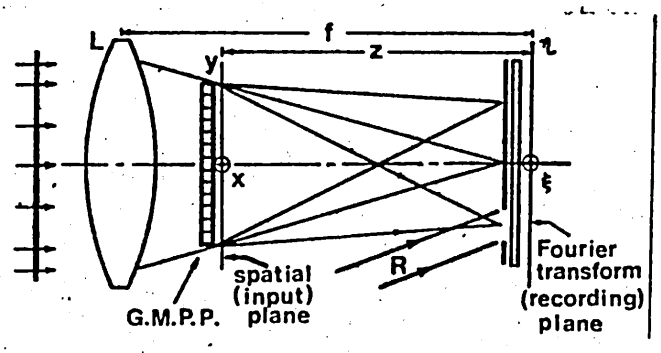


Fig. 18

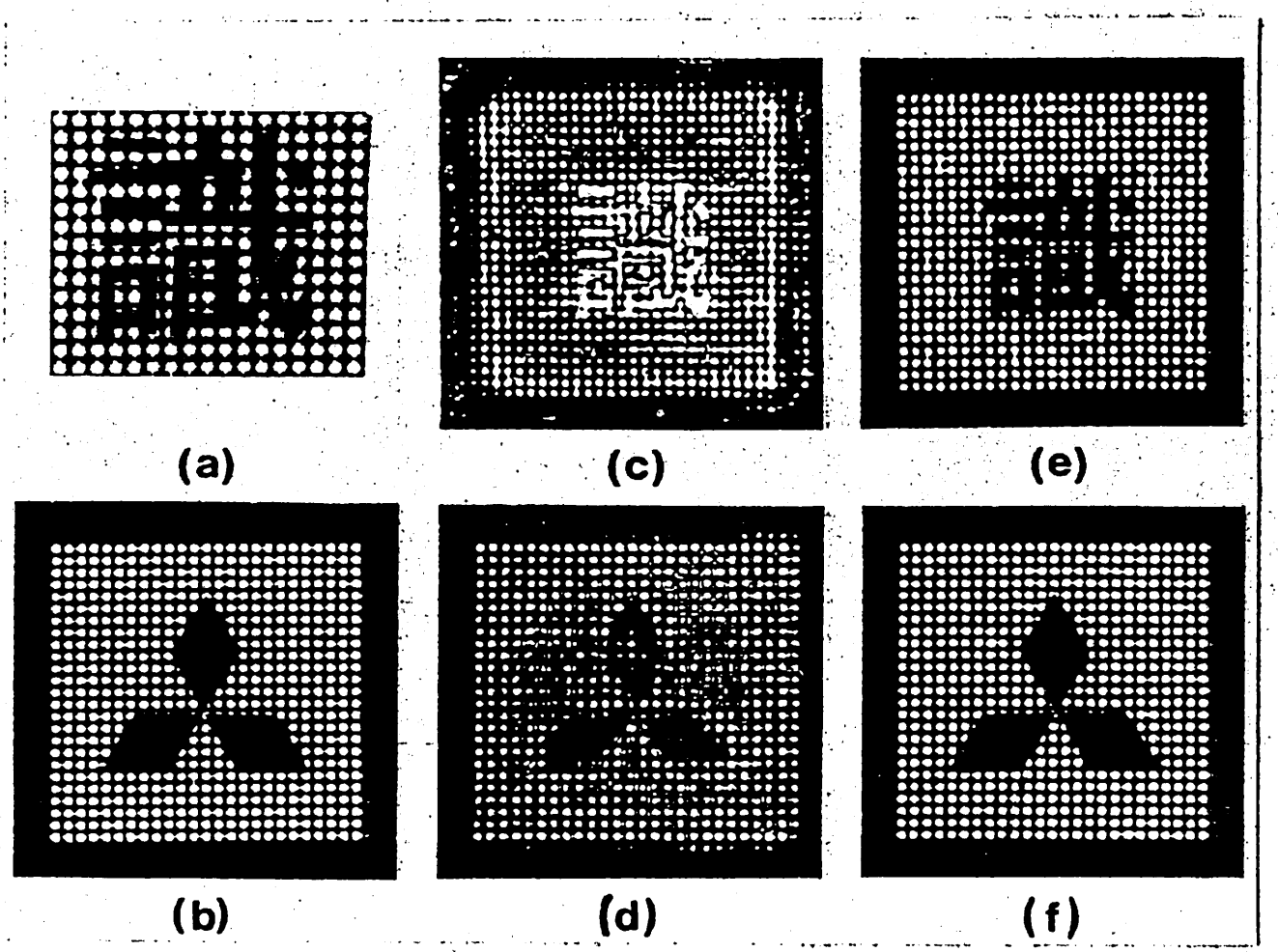


Fig. 19

7. 結び

新しい手法の情報拡散板構成法が考え出された。主要な特徴を纏めると

(i) 位相制御と振幅制御の両機能を同時にもた世得る

(ii) 使用波長、入射方向依存性がない

(iii) 作成の容易性

(iv) 拡散板を角度或は周波数変調することに依り隣接情報点間をインコヒーレント像合成可能

(v) 特異な情報構成素子に展開できる

等を挙げることができる。

情報拡散板については、SN比等の観点から、上述これに其の位相系列等に関する猶一層の考察が必要であると考えられる。更に情報の記録再生技術の研究と共にメモリー技術確立の為には、記録材料および光偏向、検知器(法)等の周辺技術の有機的、総合的研究が望まれる。

参考文献

(1) D. Gabor, Nature 161, 777 (1948).

(2) E. N. Leith and J. Upatnieks, J. Opt. Soc. Amer. 52, 1123 (1962).

(3) H. J. Gerritsen, W. J. Hannan and E. J. Ramberg, Appl. Opt. 7, 2301 (1968).

(4) C. B. Burckhardt, Appl. Opt. 9, 695 (1970).

(5) Y. Tsunoda and Y. Takeda, Appl. Opt. 13, 2046 (1974).

(6) M. Kato, Y. Nakayama and T. Suzuki, Appl. Opt. 14, 1093 (1975).

(7) W. J. Dallas, Appl. Opt. 12, 1179 (1973).

(8) H. Akahori, Appl. Opt. 12, 2336 (1973).

(9) A. Ioka and K. Kurahashi, Appl. Opt. 14, 2267 (1975).

(10) A. Ioka and K. Kurahashi, 投稿中