輻射科学研究会資料

導波路ホログラム(Waveguide Hologram)の提案およびその基礎的検討

栖原敏明　　西原　浩　　小山次郎
(大阪大学　工学部　電子工学科)

昭和51年4月

導波路ホログラム (Waveguide Hologram) の提案およびその基礎的検討

栖原敏明　　西原浩　　小山次郎
(大阪大学　工学部　電子工学科)

1. まえがき

近年，高密度情報記録の有力手段としてホログラフィを用いた光記録装置の開発が進められているが，従来のホログラム記録・再生法においては，記録時の参照波および再生時の照明波として自由空間内を伝搬する波（通常は平面波）が用いられてきた。しかしこのような方式では，レンズ，ミラー等よりなる光学系を用いるので　装置の小型化が困難で，安定性・信頼性に問題があるうえ，ホログラム自体を多数集積化することにも原理的な困難が伴う。そこでこのような問題点を解決するための手段として，光導波路のホログラフィへの応用を考えることができる。著者らは先に，光ファイバによって導かれた後，ファイバ端面より出射する光を参照波又は照明波として用いてホログラム記録・再生を行なうことを検討し，既に報告した[1,2]。またBykovskiiらは薄膜導波路からの出射光（radiation field）を照明波としてホログラム再生を行なうことを提案している[3]。

本稿では，さらに進んだホログラム記録・再生方式として
1)薄膜光導波路の両側に浸み出した導波路光のエバネッセント波部分

または

2)薄膜状のホログラム内を導波される導波路光

を記録時の参照波および再生時の照明波の両方または一方として用いることを提案する。[4] 本方式によるホログラムは光導波路とホログラムが一体化された構造をもつので，著者らはこれを導波路ホログラム（Waveguide Hologram）と名付けた。導波路ホログラムは，集積光学におけるグレイティング出力カップラ[5,6]の原理によって信号波を波面再生する。またそれは光集積回路の部品として組込みに適した構造を有する。したがって本方式は，従来の方式に比べ，装置の小型化，信頼性向上に有利であるほか，本論で述べるように極めて広視野の波面再生が可能であることなど，いくつかの大きな長所をもつ。

以下の各節では，導波路ホログラムの波面再生に関して理論的解析および検討を行なう．解析モデルは上記1)の方式による場合を仮定したが，得られた結果はほとんど2)の場合に対しても有効なものである。また最後に，導波路ホログラムの1例として，平面波の参照波を用いて記録した導波路ホログラムを導波路光によって再生する実験[7]について述べる。

2. 導波路ホログラムの解析モデル

ホログラムの記録・再生において，記録時の参照波または再生時の照明波として光導波路内を伝搬する光のエバネッセント波部分を利用することを考える．図1のような非対称誘電体薄膜光導波路にホログラム記録材料層を重ねた構造を考え，記録

材料層内での
(i)導波路光に伴うエバネッセント波部分と信号波の干渉　又は
(ii)外部から入射する平面波と信号波の干渉
を記録することにより
ホログラムを作成し、
これを導波路光のエバ
ネッセント波により再
生するものとする。導
波路ホログラムからの
信号波再生の様子は図
2に模式的に示した。
ここでホログラム記録

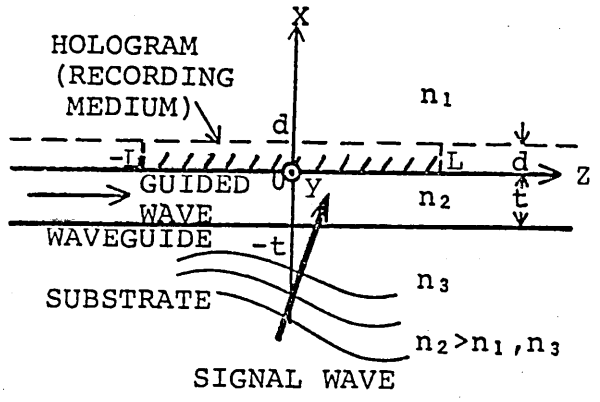


図1　導波路ホログラムの構造

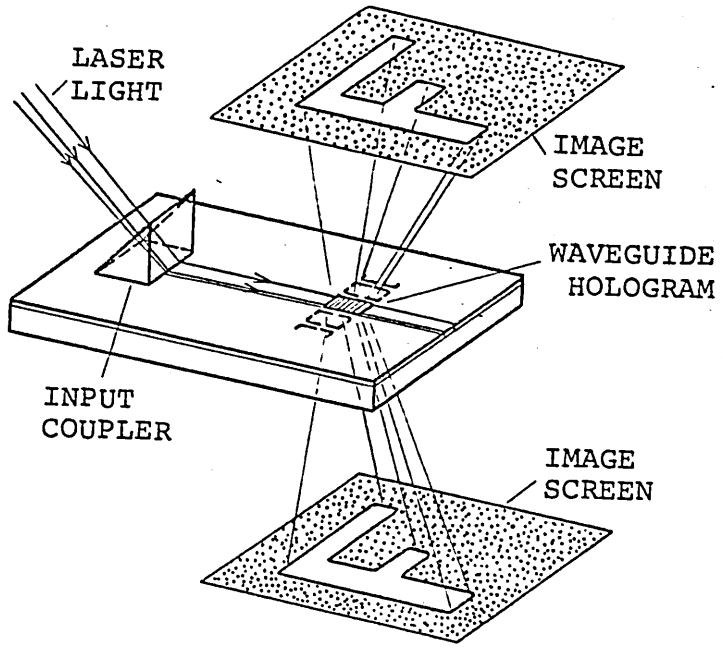


図2　導波路ホログラムからの信号波再生

の参照波は，(i)では導波路光のエバネッセント波部分，(ii)では外部からの平面波である。信号波は $x>d$ または $x<-t$ の領域から導波路ホログラムにほぼ垂直に入射する。記録時と再生時に用いる光は，必ずしも同波長である必要はない。

解析の簡単化のため次のような仮定を用いる。電磁界は電界ベクトルが y 方向成分のみしかないと考える。したがって電磁界はスカラーによって表され，導波モードはTEモードを考えることになる。電磁界の時間依存性は $\exp(-i\omega t)$ であるとし，この因子は全て省略する。記録されたホログラムは位相型とし，記録材料内の屈折率変化は微小なものでこれによって導波路内の伝搬モードが乱されることはないとする。またホログラムによる導波路光と回折光の結合は弱くて，再生時の照明波である導波路光の減衰は無視できるものとする。本質的でない境界面の生じることを避けるために，記録材料の未露光時の屈折率はホログラム上部の媒質の屈折率 n_1 に等しいとする。記録時の信号波（$x>d$ より入射する場合），参照波（外部からの平面波を用いる場合）および再生時の回折波は，導波路の境界（$x=0,-t$）により反射波を生じる。この反射の効果は，再生時に関しては厳密に考慮に入れるが，記録時に関しては無視する。以上の仮定は，解析結果に何ら本質的な制限を加えるものではない。

3. 導波路光および信号波

この節では解析の準備として，導波路光および信号波を数式

的に表現しておく。

3.1 導波路光[8)]

導波路内のTE導波モードは，Eを電界のy-成分として，

$$E(x,z) = \mathcal{E}(x)\exp i\beta z \qquad (1)$$

$$\mathcal{E}(x)=\begin{cases} A\exp(-qx) & ;\quad 0<x \\ A[\cos(hx)-(q/h)\sin(hx)] & ;\quad -t<x<0 \\ A[\cos(ht)+(q/h)\sin(ht)]\exp p(x+t) & ;\quad x<-t \end{cases}$$

で表わされる。ここに

$$h = (k_2^2-\beta^2)^{1/2}\ ,\quad q = (\beta^2-k_1^2)^{1/2}\ ,$$

$$p = (\beta^2-k_3^2)^{1/2}\ ,\quad k_j = n_j k\ (j=1,2,3)\ , \qquad (2)$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

であり，伝搬定数βは特性方程式

$$\tan(ht) = \frac{p+q}{h(1-pq/h^2)} \qquad (3)$$

により決定される。式(1)のAは任意定数であるが，ここでは

$$A = 2h\left[\frac{\omega\mu}{\beta t_{eff}(h^2+q^2)}\right] \qquad (4)$$

$$t_{eff} = t + 1/p + 1/q\ ;\ \text{等価膜厚}$$

とおいて，

$$S_z = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{-\int_{-\infty}^{\infty}E_y H_x^* dx\right\} = \frac{\beta}{2\omega\mu}\int_{-\infty}^{\infty}E^2 dx = 1 \qquad (5)$$

すなわち導波路の単位幅当りのパワーフロー S_zが1となるように規格化しておく。

3.2 信号波

任意の信号波を,$x>0$において,z方向の空間周波数スペクトルに分解してフーリエ積分で表す。

(A)信号波が $x<-t$ より入射する場合

$x\geq 0$ では xの正の方向に進行する透過波のみ存在する。

(B)信号波が $x>0$ より入射する場合

$x\geq 0$ では xの負の方向に進行する入射波とxの正の方向に進行する反射波が存在する。

以下では特に断わらない限り上記(A)の場合を考えることにするが,(B)の場合には,反射波を無視するなら,以下の各式でxに関する位相項を複素共役な量に置きかえればよい。

信号波の電界の y-成分 E_sは,

$$E_s(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} e_s(\beta) \exp i\{\zeta_1(\beta)x+\beta z\}\, d\beta \qquad (6)$$

で表わされる。ここに$e_s(\beta)$は信号波の$x=0$における空間周波数スペクトルである。

$$e_s(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_s(0,z)\exp(-i\beta z)\, dz \qquad (7)$$

また$\zeta_1(\beta)$は

$$\zeta_1(\beta) = (k_1^2-\beta^2)^{1/2}, \quad k_1 = n_1 k \ (k=2\pi/\lambda) \qquad (8)$$

で定義される。信号波は$x>d$に向って進行する波であるから,

$$e_s(\beta) = 0 \quad ; \quad |\beta| > k_1 \qquad (9)$$

でなければならない。特に信号波が，$x \geq 0$ で x 軸に対して θ_s なる角度の方向に進行する平面波でその振幅が A_s であるとき，E_s および e_s は次式となる。

$$E_s(x,z) = A_s \exp i(x k_1 \cos\theta_s + z k_1 \sin\theta_s) \qquad (10)$$

$$e_s(\beta) = A_s \, \delta(\beta - \beta_s), \quad \beta_s = k_1 \sin\theta_s \qquad (11)$$

4. 導波路ホログラム内の波動方程式

4.1 干渉縞の光強度および記録材料の屈折率変化

記録材料内で信号波 E_s と参照波 E_r が干渉してできる光強度分布 I は

$$I = \frac{1}{2}|E_s+E_r|^2 = \frac{1}{2}\{|E_s|^2+|E_r|^2+E_sE_r^*+E_s^*E_r\} \qquad (12)$$

である。記録材料が線形特性をもつ場合 I に比例した屈折率変化を生じるが，ホログラムを構成するのは空間的に速く振動する $E_sE_r^*$，$E_s^*E_r$ に比例する屈折率変化であるので，これのみを考え，$|E_s|^2$，$|E_r|^2$ に比例する屈折率変化は無視する。いま記録材料の感度を

$$\gamma = dn / dI$$

とすれば，記録材料内の屈折率の2乗の変化量は

$$\delta n^2 = 2n_1\delta n = 2n_1\gamma \times \frac{1}{2}(E_sE_r^* + E_s^*E_r)$$

$$= \delta\dot{n}^2 + (\delta\dot{n}^2)^* \qquad (13)$$

と書ける。ここに $\delta\dot{n}^2$ は

$$\delta\dot{n}^2 = n_1 \gamma E_s E_r^* \tag{14}$$

なる複素量である。上式の E_s に式(6)を，E_r に式(1)($x>0$)または x 軸に対して θ_r の角度で進む平面波

$$E_r = A_r \exp i(\gamma_r x + \beta_r z), \tag{15}$$
$$\gamma_r = k_1 \cos\theta_r, \quad \beta_r = k_1 \sin\theta_r$$

を用いれば，$\delta\dot{n}^2$ は $0<x<d$ において

$$\delta\dot{n}^2 = n_1 \gamma A_r^* \int_{-\infty}^{\infty} e_s(\beta) \exp i\{(\gamma_1(\beta) - \gamma_r)x + (\beta - \beta_r)z\} d\beta \tag{16}$$

となる。ここに γ_r は

$$\gamma_r = \begin{cases} \pm(k_1^2 - \beta_r^2)^{1/2} & ; \text{平面波の参照波の場合} \\ & (\text{複号は} \pm x \text{方向に進む波を示す}) \\ -i(\beta_r^2 - k_1^2)^{1/2} = -i q_r & ; \\ & \text{エバネッセント波の参照波の場合} \end{cases} \tag{17}$$

である。

4.2 波動方程式

さて，式(13),(16)で表わされる屈折率分布を記録したホログラムの，導波路光エバネッセント波による再生を考える。系における電界 E は波動方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2\right] E_{(x,z)} = 0, \tag{18}$$

$$n^2 = n_j^2 + \delta n^2 \quad (j = 1,2,3)$$

を満足しなければならない。ここで δn^2 は記録材料内では式(13),(16)で表わされ，記録材料外では0である。いま式(18)の解 E

を，入射波である照明波E_iと回折波E_dに分解して

$$E(x,z) = E_i(x,z) + E_d(x,z) \tag{19}$$

とおく。照明波E_iは式(1)で表わされる導波モードであるとし，$\delta n^2 = 0$とおいたときの波動方程式(18)を満たすものとする。すなわち次式が成り立つ。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n_j^2\right] E_i(x,z) = 0 \tag{20}$$

式(19)を式(18)に代入して式(20)を用い，回折波E_dと屈折率変化δn^2の相互作用を無視すれば，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n_j^2\right] E_d(x,z) = -k^2 \delta n^2 E_i(x,z) \tag{21}$$

が得られる。これより回折波E_dを求めるために

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n_j^2\right] G(x,x';z,z') = -\delta(x-x')\,\delta(z-z') \tag{22}$$

によりグリーン関数$G(x,x';z,z')$を定義すれば，$E_d(x,z)$は

$$E_d(x,z) = k^2 \int_{x'=0}^{d} \int_{z'=-L}^{+L} \delta n^2(x',z')\, E_i(x',z')\, G(x,x';z,z')\, dx'dz' \tag{23}$$

により計算される。グリーン関数$G(x,x';z,z')$は付録で求めた。そこではGはz方向のフーリエ積分で表わされている。付録の式(A7)で与えられるGのz方向フーリエ変換$\tilde{G}$を用いれば，上式は

$$E_d(x,z) = k^2 \int_{x'=0}^{d} dx' \int_{z'=-L}^{+L} dz' \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \delta n^2(x',z')\, E_i(x',z')\, \tilde{G}(x,x';\eta)$$

$$\times \exp i\eta(z-z')\, d\eta \qquad (24)$$

となる。式(23),(24)に用いる δn^2 は式(13),(16)で与えられる。また E_i は式(1)の $x>0$ に対する部分を用いて次式で与えられる。

$$E_i(x,z) = A_i \exp i(\beta_i z + iq_i x) \qquad (25)$$

5. 回折波（再生波）

この節では式(24)に式(13),(16),(25),(A7)を代入して積分を実行し回折波 E_d を求める。簡単のためホログラムの z 方向の大きさは十分に大きいとして $L\to\infty$ とおく。式(13)により，δn^2 は $\delta\hat{n}^2$ と $(\delta\hat{n}^2)^*$ の和であるが，式(24)に $\delta\hat{n}^2$ を代入して得られる波は直接波，$(\delta\hat{n}^2)^*$ を代入して得られる波は共役波を表わすので，これらをそれぞれ E_d^p，E_d^c として表示する。

5.1 $x>d$ に現れる回折波

式(24)に式(16),(25),(A7)($x'<x$)を代入すれば

$$E_d^p(x,z) = \frac{ik^2\chi n_1 A_r^* A_i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e_s(\beta)}{\xi_1(\eta)}\exp i\{\xi_1(\eta)x+\eta z\}\, d\eta\, d\beta$$

$$\times\int_0^d \exp\{i(iq_i-\gamma_r+\xi_1(\beta))x'\}\left[\exp\{-i\xi_1(\eta)x'\}+R(\eta)\exp i\xi_1(\eta)x'\right]dx'$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{i(-\eta+\beta_i+\beta-\beta_r)z'\}\, dz' \qquad (26)$$

を得る。ここで

z'の積分は　$2\pi\delta(\eta-[\beta+\beta_i-\beta_r])$

x'の積分は　$\dfrac{i}{iq_i-\gamma_r+\xi_1(\beta)-\xi_1(\eta)}+\dfrac{iR(\eta)}{iq_i-\gamma_r+\xi_1(\beta)+\xi_1(\eta)}$

(但しここで　$dq_i\gg 1$とした)

であるから式(26)は

$$E_d^p(x,z)=-\frac{k^2\chi\eta_1A_r^*A_i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e_s(\beta)}{\xi_1(\beta+\beta_i-\beta_r)}$$

$$\times\exp i\{\xi_1(\beta+\beta_i-\beta_r)x+(\beta+\beta_i-\beta_r)z\}$$

$$\times\left[\frac{1}{iq_i-\gamma_r+\xi_1(\beta)-\xi_1(\beta+\beta_i-\beta_r)}+\frac{R(\beta+\beta_i-\beta_r)}{iq_i-\gamma_r+\xi_1(\beta)+\xi_1(\beta+\beta_i-\beta_r)}\right]d\beta \tag{27}$$

となる。ここで$R(\eta)$は空間周波数ηの平面波に対する導波路構造の反射係数であり式(A6)で与えられる。上式と同様に，式(16)の代りに式(16)の複素共役を代入すれば，

$$E_d^c(x,z)=-\frac{k^2\chi\eta_1A_rA_i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e_s^*(\beta)}{\xi_1(\beta-\beta_i-\beta_r)}$$

$$\times\exp i\{\xi_1(\beta-\beta_i-\beta_r)x-(\beta-\beta_i-\beta_r)z\}$$

$$\times\left[\frac{1}{iq_i+i(i\gamma_r)^*-\xi_1(\beta)-\xi_1(\beta-\beta_i-\beta_r)}+\frac{R(\beta-\beta_i-\beta_r)}{iq_i+i(i\gamma_r)^*-\xi_1(\beta)+\xi_1(\beta-\beta_i-\beta_r)}\right]d\beta \tag{28}$$

が得られる。

式(27)より，信号波の空間周波数スペクトルがそのまま保存されて再生されるのは

$$\beta_i=\beta_r \tag{29}$$

すなわち参照波と照明波のx方向伝搬定数が等しいときに限られることがわかる。次に $\beta_i \neq \beta_r$ の場合について考えるために，図3(a)のように信号波の空間周波数範囲が $-\Delta\beta \leq \beta \leq \Delta\beta$ であるとすれば，すなわち，

$$e_s(\beta)\begin{cases} \neq 0 & ;|\beta| < \Delta\beta \\ = 0 & ;|\beta| > \Delta\beta \end{cases}$$

とすれば，回折波の空間周波数スペクトルは同図(b)のようになる。回折波が，$x > d$ の空間を伝搬するには，$\beta < k_1$ でなければならない。

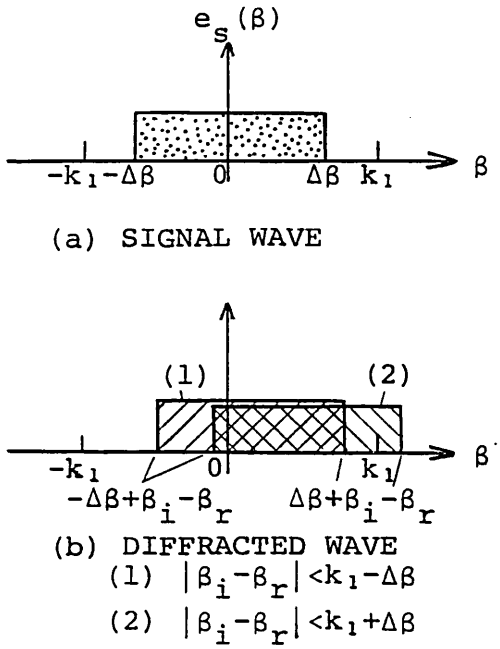


図3 信号波および回折波の空間周波数スペクトル

したがって同図(b)より，全ての空間周波数の回折波が $x > d$ に現れ，進行するための条件は

$$|\beta_i - \beta_r| < k_1 - \Delta\beta \qquad (30)$$

であることがわかる。また，回折波の少なくとも1部が $x > d$ に現れ，進行するための条件は

$$|\beta_i - \beta_r| < k_1 + \Delta\beta \qquad (31)$$

となる。

次に特に $\beta_i = \beta_r$ の場合を考えると，式(27),(28)はそれぞれ，

$$E^p_{d(x,z)} = -\frac{k^2 \mu \eta_1 A_r^* A_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_s(\beta)}{\xi_1(\beta)} \left[\frac{1}{i q_i - \gamma_r} + \frac{R(\beta)}{i q_i - \gamma_r + 2\xi_1(\beta)}\right] \times \exp i\{\xi_1(\beta)x + \beta z\}\, d\beta \qquad (32)$$

$$E_d^c(x,z) = -\frac{k^2 \not{\mu} n_1 A_r A_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_s^*(\beta)}{\xi_1(\beta - 2\beta_r)}$$

$$\times \left[\frac{1}{iq_i + i(i\gamma_r)^* - \xi_1(\beta) - \xi_1(\beta - 2\beta_r)} + \frac{R(\beta - 2\beta_r)}{iq_i + i(i\gamma_r)^* - \xi_1(\beta) + \xi_1(\beta - 2\beta_r)} \right]$$

$$\times \exp i\{\xi_1(\beta - 2\beta_r)x - (\beta - 2\beta_i)z\} d\beta \qquad (33)$$

となる。式(33)において，$\Delta\beta < k_1 < \beta_r$ であることより，

$$|\beta - 2\beta_r| > 2\beta_r - \Delta\beta > k_1$$

が成立するので，$\xi_1(\beta - 2\beta_r)$ は虚数となり共役回折波 E_d^c はエバネッセント波であることがわかる。したがって共役波が外部から観測されることはない。

5.2 $x < -t$ に現れる回折波

式(24)に式(16),(25),(A7)($x < -t$)を代入すれば，

$$E_d^p(x,z) = \frac{ik^2 \not{\mu} n_1 A_r^* A_i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_s(\beta)}{\xi_1(\eta)} \exp i\{-\xi_3(\eta)x + \eta z\} d\eta d\beta$$

$$\times \int_0^d \exp\{i(iq_i - \gamma_r + \xi_1(\beta) + \xi_1(\eta))x'\} T(\eta) dx'$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(-\eta + \beta_i + \beta - \beta_r)z'\} dz' \qquad (34)$$

を得る。ここで

z'の積分は　$2\pi\delta(\eta - [\beta + \beta_i - \beta_r])$

x'の積分は　$\dfrac{iT(\eta)}{iq_i - \gamma_r + \xi_1(\beta) + \xi_1(\eta)}$　$(dq_i \gg 1)$

であるので式(34)は

$$E^{p}_{d(x,z)} = -\frac{k^2 \chi n_1 A_r^* A_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_{s(\beta)}}{\xi_{1(\beta+\beta_i-\beta_r)}}$$

$$\times \exp i\{-\xi_{3(\beta+\beta_i-\beta_r)}x + (\beta+\beta_i-\beta_r)z\}$$

$$\times \frac{T_{(\beta+\beta_i-\beta_r)}}{iq_i - \gamma_r + \xi_{1(\beta)} + \xi_{1(\beta+\beta_i-\beta_r)}} d\beta \qquad (35)$$

となる。ここで $T(\eta)$ は空間周波数 η の平面波に対する導波路構造の透過係数であり式(A6)で与えられる。上式と同様に，式(16)の代りに式(16)の複素共役を代入すれば，

$$E^{c}_{d(x,z)} = -\frac{k^2 \chi n_1 A_r A_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^*_{s(\beta)}}{\xi_{1(\beta-\beta_i-\beta_r)}}$$

$$\times \exp i\{-\xi_{3(\beta-\beta_i-\beta_r)}x - (\beta-\beta_i-\beta_r)z\}$$

$$\times \frac{T_{(\beta-\beta_i-\beta_r)}}{iq_i + i(i\gamma_r)^* - \xi_{1(\beta)} + \xi_{1(\beta-\beta_i-\beta_r)}} d\beta \qquad (36)$$

が得られる。式(35),(36)で表わされる直接波，共役波は，共に，式(27),(28)で表わされる波とはx方向に関して逆方向に進行する。式(35)で信号波の空間周波数がそのまま保存されて再生されるのは，式(29)と同様，$\beta_i = \beta_r$ のときに限られる。$\beta_i \neq \beta_r$ の場合の式(30),(31)に対応する条件は，これらの式で k_1 を k_3 に置き換えればよい。

特に $\beta_i = \beta_r$ の場合を考えれば，式(35),(36)はそれぞれ，

$$E^{p}_{d(x,z)} = -\frac{k^2 \chi n_1 A_r^* A_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_{s(\beta)}}{\xi_{1(\beta)}} \times \frac{T_{(\beta)}}{iq_i - \gamma_r + 2\xi_{1(\beta)}}$$

$$\times \exp i\{-\xi_{3(\beta)}x + \beta z\} d\beta \qquad (37)$$

$$E_{d(x,z)}^{c} = -\frac{k^2 \chi n_1 A_r A_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_{s(\beta)}^{*}}{\xi_{1(\beta-2\beta_r)}}$$

$$\times \frac{T(\beta-2\beta_r)}{iq_i + i(i\gamma_r)^{*} - \xi_{1(\beta)} + \xi_{1(\beta-2\beta_r)}}$$

$$\times \exp i\{-\xi_{3(\beta-2\beta_r)}x - (\beta-2\beta_r)z\} d\beta \qquad (38)$$

となる。式(38)で与えられる共役波は，式(33)の波と同様に工バネッセント波であり，したがって外部から観測されることはない。

以上では記録時の信号波の入射方向については節3.2の(A)の場合を考えたが，(B)の場合も δn^2 に含まれるxに関する位相項を複素共役なものに書き換えて同様に計算できる。この場合の式(32),(37)に対応する結果はそれぞれ，

$$E_{d(x,z)}^{P} = -\frac{k^2 \chi n_1 A_r^{*} A_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_{s(\beta)}}{\xi_{1(\beta)}} \left[\frac{1}{iq_i - \gamma_r - 2\xi_{1(\beta)}} + \frac{R(\beta)}{iq_r - \gamma_r}\right]$$

$$\times \exp i\{\xi_{1(\beta)}x + \beta z\} d\beta \quad ; \quad x > d \qquad (39)$$

$$E_{d(x,z)}^{P} = -\frac{k^2 \chi n_1 A_r A_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_{s(\beta)}}{\xi_{1(\beta)}} \times \frac{T(\beta)}{iq_i - \gamma_r}$$

$$\times \exp i\{-\xi_{3(\beta)}x + \beta z\} d\beta \quad ; \quad x < -t \qquad (40)$$

である。

5.3 照明波伝搬方向の回折波への影響

前小節まででは再生時の照明波は記録時の参照波と同方向に進行するもの（β_i と β_r は同符号正）としたが，参照波とは逆

方向に進行する照明波を用いる場合を考えてみる。この場合，式(27),(28),(35),(36)で $\beta_i = -\beta_r$ とおくことにより，直折波はエバネッセント波となり外部から観測されることはなく，代って共役波が外部に現れることがわかる。すなわち，

$\beta_i = \beta_r$ の場合には互いに鏡像関係にある2つの直接波(虚像)

$\beta_i = -\beta_r$ の場合には互いに鏡像関係にある2つの共役波(実像)

が得られることになる。記録時の信号波の入射方向と，回折波の伝搬方向の関係については，図4に模式的に示した。導波路ホログラムの以上のような波面再生特性は，誘電体境界面での平面波全反射に伴うエバネッセント波を参照波として記録したホログラム[9,10]の特性に類似している。

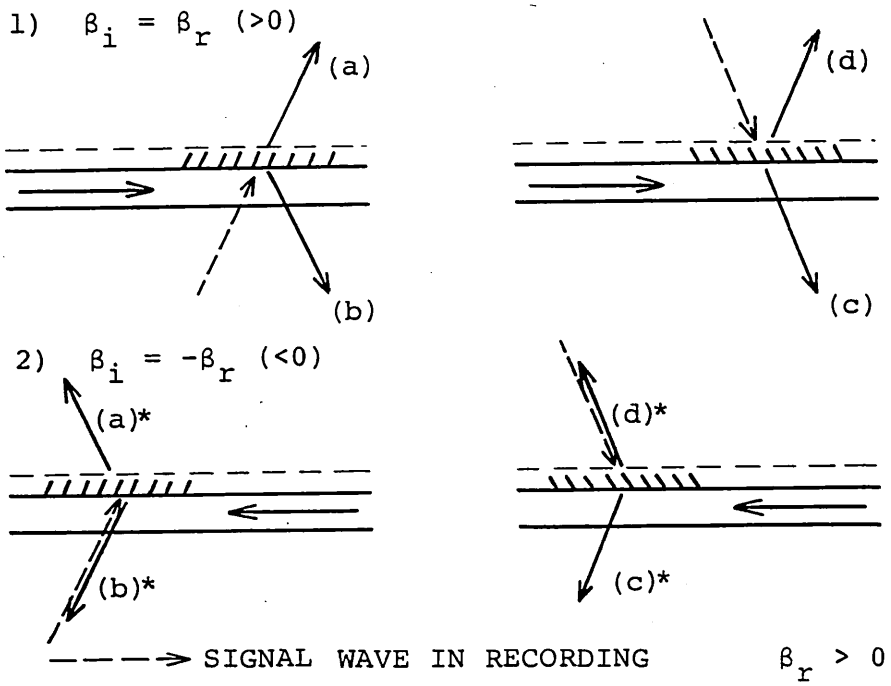


図4　信号波の入射方向と回折波の伝搬方向の関係

6. 波面再生における伝達関数

前節で信号波の空間周波数スペクトルがそのまま保存されて直接波として再生されるためには $\beta_i = \beta_r$ でなければならないことが明らかになった。しかし式(32),(37),(39),(40)で表わされる $\beta_i = \beta_r$ の場合の直接回折波は，記録時の信号波と同じ空間周波数域をもつが，完全に忠実な信号波の再生ではない。なぜならば，これらの波の空間周波数スペクトルは信号波の空間周波数スペクトル $e_0(\beta)$ に完全に等しくはないからである。その違いは，波面再生の伝達関数(Optical transfer function) $H(\beta)$ を，再生波と信号波の空間周波数スペクトルの比により定義して，これにより表現できる。$H(\beta)$ は，係数を適当にして無次元の量になるようにすれば，式(32),(37),(39),(40)より次のようになる。

信号波が $x<-d$ より入射する場合

(a) $x>d$ に現れる再生波

$$H(\beta) = \frac{k^2}{\xi_1(\beta)}\left[\frac{1}{i\eta_i - \gamma_r} + \frac{R(\beta)}{i\eta_i - \gamma_r + 2\xi_1(\beta)}\right] \qquad (41)$$

(b) $x<-t$ に現れる再生波

$$H(\beta) = \frac{k^2}{\xi_1(\beta)} \cdot \frac{T(\beta)}{i\eta_i - \gamma_r + 2\xi_1(\beta)} \qquad (42)$$

信号波が $x>0$ より入射する場合

(c) $x<-t$ に現れる再生波

$$H(\beta) = \frac{k^2}{\xi_1(\beta)} \cdot \frac{T(\beta)}{i\eta_i - \gamma_r} \propto \frac{k}{\xi_1(\beta)} \cdot T(\beta) \qquad (43)$$

(d) $x>d$ に現れる再生波

$$H(\beta) = \frac{k^2}{\xi_1(\beta)}\left[\frac{1}{iq_i - \gamma_r - 2\xi_1(\beta)} + \frac{R(\beta)}{iq_i - \gamma_r}\right] \qquad (44)$$

これらの式による伝達関数の絶対値２乗 $|H(\beta)|^2$ の計算例を図5に示す。同図より，$|H(\beta)|^2$ は空間周波数の広い範囲（$|\beta| \lesssim 0.6k$）内でほぼ一定値をとるので，この範囲内でほぼ一様な

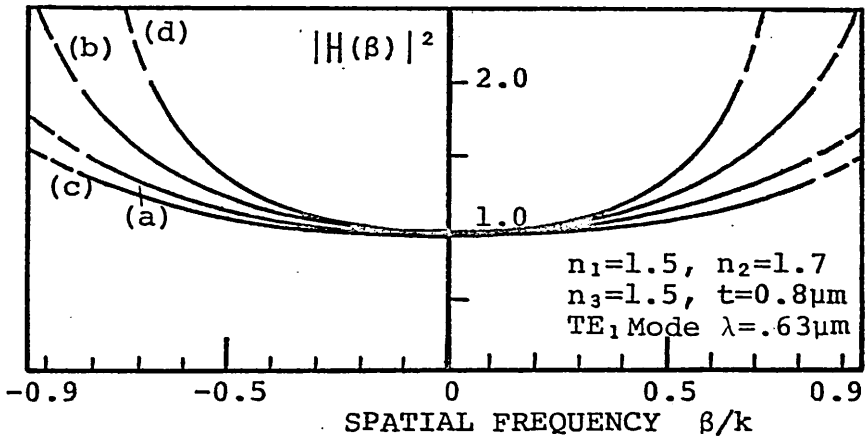
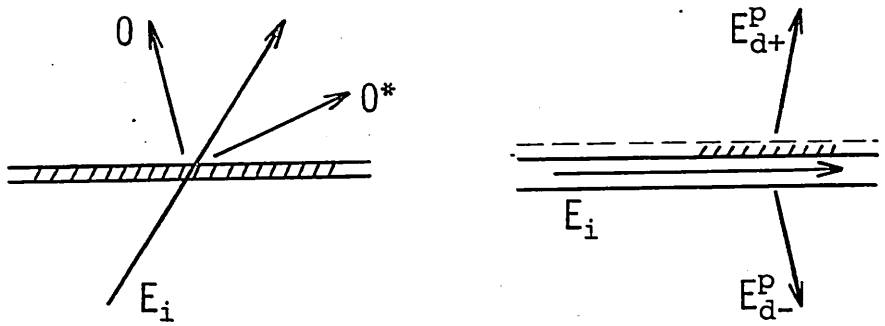


図5　波面再生の伝達関数の計算例（(a)~(d)は図4参照）



1) CONVENTIONAL HOLOGRAM　　2) WAVEGUIDE HOLOGRAM

図6　従来のホログラムと導波路ホログラムの回折波の比較

1) 従来のホログラム：視野が0次波，共役波により制限される

2) 導波路ホログラム：極めて広視野

波面再生が可能であることがわかる。

また導波路ホログラムにおいては，既に述べたように一度には直接波または共役波のいずれか一方のみしか外部に現れず，また回折されない波（0次波）は導波路内をそのまま伝搬するので，必要な像の再生が他の不要な波によって妨げられることは全くない。したがって原理的に極めて広視野の像再生が可能である。このことについては，図6に従来の方式のホログラムと対比して図示した。

7. 回折効率

7.1 単位長さ当りの回折効率

導波路ホログラムの回折効率を求めるために，信号波が $x \geq 0$ で x 軸に対して θ_s なる角度の方向に進行する平面波（式(10)）である場合を考える。信号波が $x \leq -t$ より入射する場合 $(-\frac{\pi}{2} < \theta_s < \frac{\pi}{2})$ の回折波は式(32),(37)に式(11)を代入して，

$$E^{p}_{d(x,z)} = -\frac{k^2 \chi n_1 A_i A_s A_r^*}{2} \frac{1}{\xi_1(\beta_s)} \left[\frac{1}{i q_i - \gamma_r} + \frac{R(\beta_s)}{i q_i - \gamma_r + 2\xi_1(\beta_s)} \right] \times \exp i\{\xi_1(\beta_s) x + \beta_s z\} \; ; \; x > d \qquad (45)$$

$$E^{p}_{d(x,z)} = -\frac{k^2 \chi n_1 A_i A_s A_r^*}{2} \frac{1}{\xi_1(\beta_s)} \frac{T(\beta_s)}{i q_i - \gamma_r + 2\xi_1(\beta_s)} \times \exp i\{-\xi_1(\beta_s) x + \beta_s z\} \; ; \; x < -t \qquad (46)$$

ここに　$\beta_s = k_1 \sin\theta_s$

となる。このときホログラム内の屈折率変化δnは空間的に正弦的分布となるが，その振幅$|\delta n|$は

$$|\delta n| = \gamma |A_r^* A_s| \tag{47}$$

である。また照明波E_iの振幅A_iを式(4)に従って

$$A_i = 2\beta_i \left[\frac{\omega\mu}{\beta_i t_i (\beta_i^2 + q_i^2)}\right]^{1/2} \tag{48}$$

$t_i = t + 1/p_i + 1/q_i$；照明波として用いる導波モードの等価膜厚

とおけば照明波のパワーフローは単位幅当り1となるよう規格化される。一方，回折波の，単位幅，単位長さ（z方向）のパワーフローS_dは，

$$S_d = \frac{1}{2\omega\mu}|E_d|^2 |\mathrm{Re}\{\xi_j\}|, \quad j=1,3 \tag{49}$$

であり，E_iが規格化されている場合にはこれがz方向単位長さ当りの回折効率ηを与える。式(47)に式(45)または(46)，および式(47),(48)を代入して

$$\eta^P = \begin{cases} \dfrac{|\delta n|^2 n_1^2 \beta_i^2}{2\beta_i t_i(\beta_i^2+q_i^2)} \cdot \dfrac{k^4}{|\xi_1(\beta_s)|} \cdot \left|\dfrac{1}{iq_i - \gamma_r} + \dfrac{R(\beta_s)}{iq_i - \gamma_r + 2\xi_1(\beta_s)}\right|^2 ; & x > d \quad (50a) \\ \dfrac{|\delta n|^2 n_1^2 \beta_i^2}{2\beta_i t_i(\beta_i^2+q_i^2)} \cdot \dfrac{k^4 |\xi_3(\beta_s)|}{|\xi_1(\beta_s)|^2} \cdot \left|\dfrac{T(\beta_s)}{iq_i - \gamma_r + 2\xi_1(\beta_s)}\right|^2 ; & x < -t \quad (50b) \end{cases}$$

が得られる。また，共役波（式(33),(38)）に関しては式(49)のξ_jは虚数であるので

$$\eta^C = 0 \quad ; \quad x > d, \ x < -t \tag{51}$$

となる。式(50),(51)で与えられる単位長さ当りの回折効率ηは

[長さ]$^{-1}$の次元をもつ。そこで真空波長当り（z方向）の回折効率で表わすことにすれば，これらの式は無次元の量となり，

$$\eta^P = \begin{cases} \dfrac{\pi|\delta n|^2 n_1^2 h_i^2}{\beta_i t_i (h_i^2+q_i^2)} \cdot \dfrac{k^3}{|\Xi_1(\beta_s)|} \cdot \left| \dfrac{1}{iq_i-\gamma_r} + \dfrac{R(\beta_s)}{iq_i-\gamma_r+2\Xi_1(\beta_s)} \right|^2 ; \\ \qquad\qquad x>d \qquad (50a)' \\ \dfrac{\pi|\delta n|^2 n_1^2 h_i^2}{\beta_i t_i (h_i^2+q_i^2)} \cdot \dfrac{k^3|\Xi_3(\beta_s)|}{|\Xi_1(\beta_s)|^2} \cdot \left| \dfrac{T(\beta_s)}{iq_i-\gamma_r+2\Xi_1(\beta_s)} \right|^2 ; \\ \qquad\qquad x<-t \qquad (50b)' \end{cases}$$

$$\eta^c = 0 \quad ; \quad x>d,\ x<-t \qquad (51)'$$

となる。信号波が$x>d$より入射する場合の真空波長（z方向）当りの回折効率も同様にして計算でき，次の結果を得る。

$$\eta^P = \begin{cases} \dfrac{\pi|\delta n|^2 n_1^2 h_i^2}{\beta_i t_i (h_i^2+q_i^2)} \cdot \dfrac{k^3}{|\Xi_1(\beta_s)|} \cdot \left| \dfrac{1}{iq_i-\gamma_r-2\Xi_1(\beta_s)} + \dfrac{R(\beta_s)}{iq_i-\gamma_r} \right|^2 ; \\ \qquad\qquad x>d \qquad (52a) \\ \dfrac{\pi|\delta n|^2 n_1^2 h_i^2}{\beta_i t_i (h_i^2+q_i^2)} \cdot \dfrac{k^3|\Xi_3(\beta_s)|}{|\Xi_1(\beta_s)|^2} \cdot \left| \dfrac{T(\beta_s)}{iq_i-\gamma_r} \right|^2 ; \\ \qquad\qquad x<-t \qquad (52b) \end{cases}$$

$$\eta^c = 0 \quad ; \quad x>d,\ x<-t \qquad (53)$$

表1には信号波が＋x方向に進む平面波である場合（$\theta_s=0$）の図4(a)の回折波の回折効率の計算例を示した。そこでは，z方向に5000λ（～3mm）の長さ当りの回折効率ηを，屈折率変化の振幅$|\delta n|$の2乗で規格化して表した。例えば導波路Iで屈折率変化が$|\delta n| = 10^{-2}$であるとすれば，z方向に約3mmの長さのホログラムで0.85％程度の回折効率となる。また

	I	II		
n_1 n_2 n_3 t[μm]	1.54 1.73 1.52 0.80	1.54 (8E75) 2.49 (As_2S_3) 1.46 (SiO_2) 1.20 (λ=.63μm)		
Mode	TE_1	TE_1	TE_4	TE_7
$\frac{\eta}{\lvert\delta n\rvert^2}$	0.845 $\times 10^2$	0.386 $\times 10^0$	0.931 $\times 10^1$	0.867 $\times 10^3$
η ; EFFICIENCY / 5000λ(∼3mm) $\lvert\delta n\rvert$; REFRACTIVE INDEX CHANGE				

表1 回折効率の計算例（図4(a), 式(50a)'）

導波路II（多モード導波路）に関する計算結果から，高次モードの導波路光を用いる方が低次モードの導波路光を用いるより回折効率の値は大きくなることがわかる。この傾向は，高次モードの電磁界ほど記録材料内へのエバネッセント波の浸み出しが大きく，そのため入射波と回折波の結合が強くなることを反映したものである。

7.2 照明波の減衰の効果

前小節で計算された回折効率は全て$|\delta n|^2$に比例する。すなわち回折効率は屈折率変化が大きいほど大となるので，最高回折効率については知ることができない。このことは，照明波から回折波への結合は微弱であり，したがって照明波は減衰しないと考えた仮定によるものである。回折効率の最大値やz方向の分布，およびz方向の実効ホログラムサイズについて知るためには，照明波のz方向の減衰を考慮に入れて解析を行なう必要がある。いま簡単のため，信号波は平面波であるとし，また$\beta_i = \beta_r$であるとする。この場合，導波路ホログラムはグレイ

ティング出力カップラ付の導波路にほかならない。このとき入射波としてホログラムがない場合の導波路光の式(25)を用いることは厳密には正しくない。ホログラム格子が存在する場合の導波路光としてより適当な波動は，例えばWKB近似により近似的に与えることができる[11]。しかしここではこのような導波モードや結合長を正確に求めることを目的とはしていないので，荒い近似ではあるが式(25)を用いる。ただ前述の減衰の効果を考慮に入れるために，zの単調減少関数$p(z)$を考え，導波路光は式(25)に$p(z)$を乗じた式で表わされると考える。ここでホログラムは$z \geq 0$の領域にあるとして，

$$p(0) = 1 \tag{54}$$

とおく。また$p(z)$はzに関して十分緩かに変化し，その微係数は無視できるものとする。このとき境界条件を満たすようにするためには，回折波を表す式(32),(33),(37),(38),(39),(40)にもまた$p(z)$を乗じなければならない。このようにすると式(5)および式(49)のパワーフローもzの関数となり，$p(z)$を用いて，

$$S_i(z) = S_i\{p(z)\}^2, \quad S_d(z) = S_d\{p(z)\}^2 \tag{55}$$

と書かなければならない。ここでzなる位置でのパワーフローの保存則を考えれば

$$\frac{d}{dz} S_i\{p(z)\}^2 = -\sum (S_d^+ + S_d^-)\{p(z)\}^2 \tag{56}$$

なる関係が得られる。ここでS_dの$+,-$は$x > d$，$x < d$へ進む回折波を表し，Σは輻射を生じる全ての回折波で和をとることを意味する。上式で$S_d^{\pm} / S_i = \lambda^{-1}\eta^{\pm}$（$\eta^{\pm}$は真空波長当りの回折効率で式(50)',(52)で与えられる）なる関係を用い，か

つ式(54)を考慮すれば,

$$P(z) = \exp\left\{\left(-\sum \frac{\eta^{+}+\eta^{-}}{2}\right)\lambda^{-1}z\right\} = \exp\left(-\frac{\eta^{p+}+\eta^{p-}}{2\lambda}z\right) \tag{57}$$

が得られるので, 照明波である導波路光は減衰定数

$$\alpha_i = \frac{\eta^{p+}+\eta^{p-}}{2\lambda} \tag{58}$$

で減衰することになる。したがってホログラムのz方向の長さが $1/\alpha_i$ より十分に大きい場合は, 総合の回折効率は100%に近くなる。またこの場合ホログラムのz方向の実効的な長さは導波路光の減衰の速さで決り

$$L_H = \frac{1}{\alpha_i} = \frac{2\lambda}{\eta^{p+}+\eta^{p-}} \tag{59}$$

であると考えることができる。

8. 実験的検討

導波路ホログラムの可能性を確認し, また実験的検討を加えるために, 平面波の参照波を用いて導波路ホログラムを記録し, これを導波路光で再生する実験を行なった。一般に記録時と再生時で同波長の光を用いる場合には, 平面波の参照波と導波路光の照明波の間で忠実な波面再生のための条件式(29)を満たすことはできない。そこで本実験では, 再生時に用いる光の波長より短波長の光を用いて記録を行なうことにより, 近似的に式(29)を満足させた。

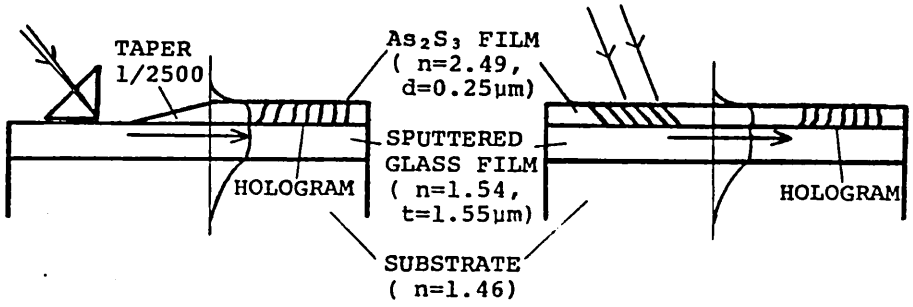


図7　作成した導波路ホログラムの構造

作成した導波路ホログラムの構造を図7に示す。(a)は導波路光の励振にプリズムカップラを用いるもの，(b)はグレイティングカップラを用いるものである。記録材料には優れた位相ホログラム記録材料であるアモルファス半導体As_2S_3の真空蒸着膜[12]を用いた。この材料は光導波路の構成材料としても用いることのできるものである[13]。一方，薄膜光導波路としてはスパッタガラス薄膜導波路（石英ガラス基板上のコーニング#7059ガラス薄膜）を用いた。記録材料As_2S_3の屈折率($n_1=2.49$)はガラス薄膜の屈折率($n_2=1.54$)よりかなり大きいので，導波路光はAs_2S_3膜とガラス膜の両方にまたがって導波され伝搬し†，As_2S_3膜内の光電磁界振幅は大きい。したがって導波路光と回折波の結合は強く，高い回折効率が期待できる。しかし，As_2S_3膜は薄い($d=2500$Å)ので，ガラス薄膜導波路の低損失

---

†したがってこの導波路ホログラムは節1での分類の2)の部類に属するものである。なお1)の部類のエバネッセント波を利用する導波路ホログラムの可能性については，記録材料として重クロム酸ゼラチン膜($n_1=1.53$)を用いた実験で確認された[7]。

な伝搬特性が活かされ，また伝搬定数はほとんどガラス薄膜の屈折率できまる[14]。伝搬定数の実測値は，$\lambda = 6328$ Åの波長のHe-Neレーザ光に対し次の値を得た。

$$\beta_i/k = \begin{cases} 1.51 & ; TE_1, TM_1 \text{ modes} \\ 1.46 & ; TE_2, TM_2 \text{ modes} \end{cases} \qquad (60)$$

記録時および再生時の実験構成をそれぞれ図8,9に示す。記録には$\lambda = 4579$ ÅのAr^+レーザ光，再生には$\lambda = 6328$ Åの

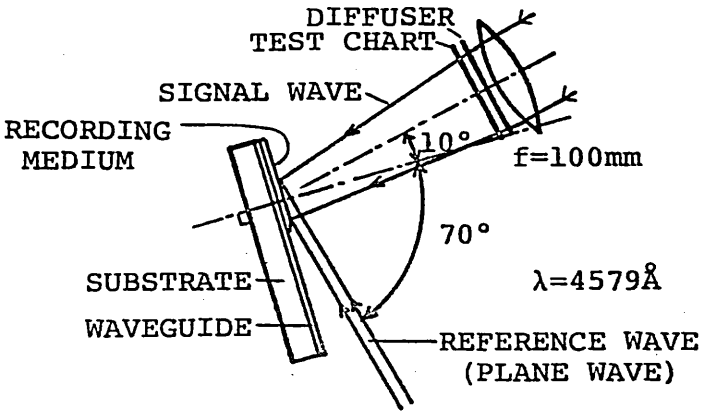


図8　導波路ホログラムの記録

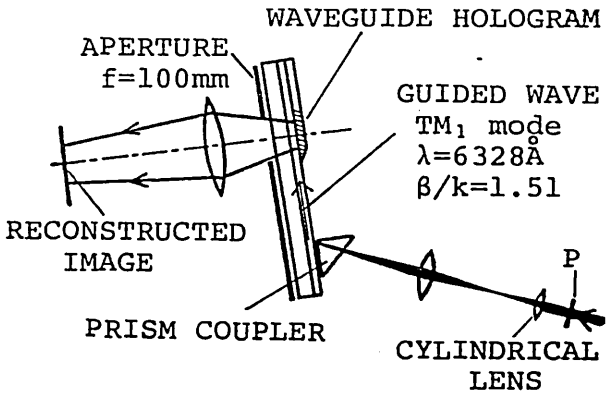


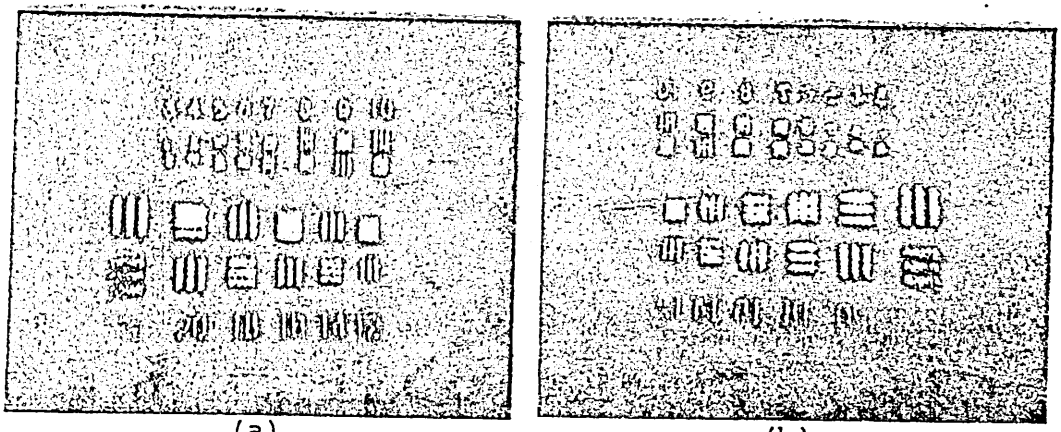
図9　導波路ホログラムの再生(直接波)

He-Neレーザ光を用いた。図8に示された参照波の伝搬定数β_rを，再生時の光の波数kで規格化すれば，

$$\beta_r/k = (6328\text{Å}/4579\text{Å}) \times \sin 70^\circ$$
$$= 1.30 \qquad (61)$$

となり，式(60)および式(61)の値により近似的にではあるが式(29)が満たされる。また信号波がその空間周波数範囲全域にわたって再生されるための条件式(30)が成り立っている。なお，図8で信号波はホログラムにほぼ垂直に入射するので，記録時と再生時で異なる波長の光を用いることによって生じる再生像の歪は小さい。

図9の実験で導波路ホログラムの両側に直接像が得られ，こ



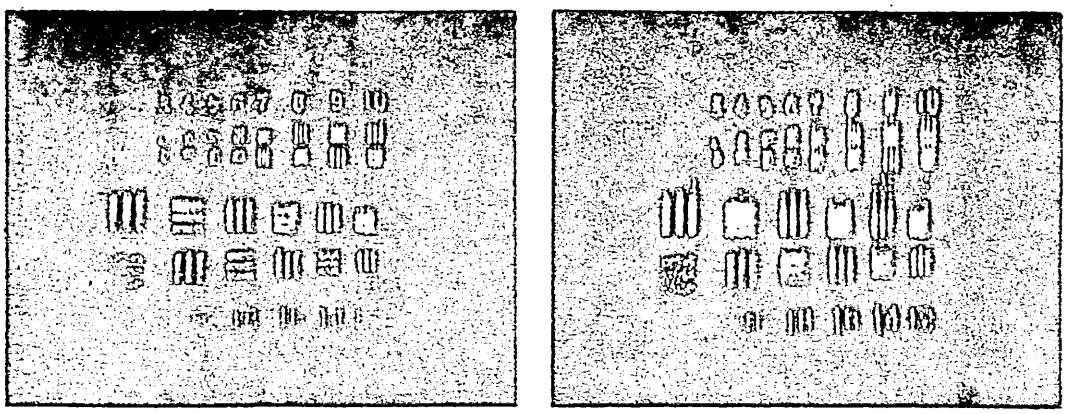
(a) (b)

TWIN PRIMARY IMAGES

RECORDING : PLANE WAVE λ = 4579 Å

RECONSTRUCTION : GUIDED WAVE (PRISM COUPLER)
λ = 6328 Å, TE_1 Mode

図10 導波路ホログラム再生像（直接像）



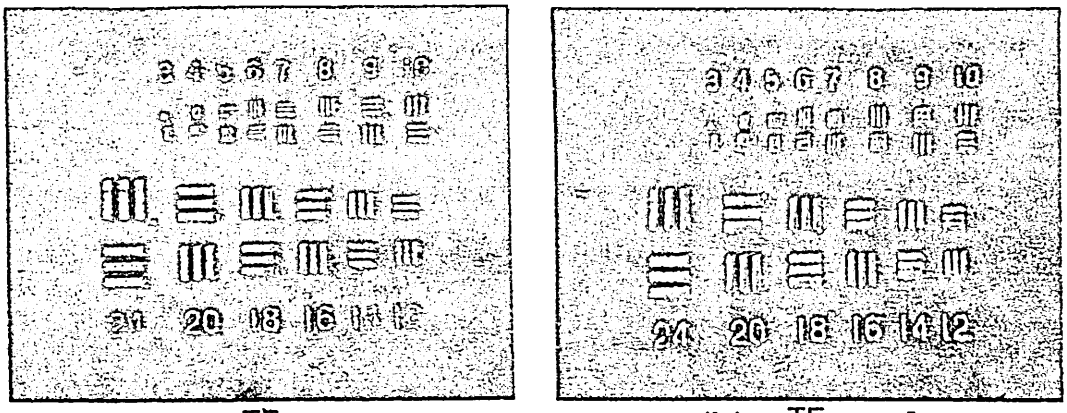
(a) TE_1 Mode　　(b) TM_1 Mode

PRIMARY IMAGES

RECORDING : PLANE WAVE λ =4579 Å

RECONSTRUCTION : GUIDED WAVE (PRISM COUPLER)
λ = 6328 Å

図11 導波路ホログラム再生像（直接像）



(a) TE_1 Mode　　(b) TE_2 Mode

CONJUGATE IMAGES

RECORDING : PLANE WAVE λ = 4579 Å

RECONSTRUCTION : GUIDED WAVE (GRATING COUPLER)
λ = 6328 Å

図12 導波路ホログラム再生像（共役像）

れらは互に鏡像の関係にあることが確認された。図10にその再生像を示す。このときの有効ホログラムサイズは幅1mm,長さ2mm である。図11はTEとTMの導波モードの違いによる再生像への影響を示したものである。同図より，TEモードの場合よりTMモードの場合の方が再生像の縦方向分解能の劣化が著しいことがわかる。この理由は，TMモードの導波路光の方が導波路表面の傷や汚れの影響を受け易く，散乱波を生じ易いからであると考えられる。これより導波路ホログラム再生にはTE導波モードが適していることが明らかになった。次に照明波である導波路光の伝搬方向を逆転することにより，1組の共役回折波が生じ，図2に示したようにレンズなしで実像が得られることが確認された。このときの再生像のS/N をファイバプローブを用いて測定した結果，再生像中のバーの明るさとバックグラウンドの明るさの比で定義したS/Nとして23dBの値が得られた。

図12はグレイティング入力カップラ付の導波路ホログラム（図7(b)）の共役再生像を示す。この実験で高次モード（TE_2モード）を用いる方が低次モード（TE_1モード）を用いる場合より明るい再生像の得られることが確認された。しかし同図より再生像の分解能に関しては低次モードの方が優れていることがわかる。同図(a)の再生像は，像面で10本/mm 程度まで分解できており，$1\times2\,mm^2$の大きさのホログラムの再生像としては，従来の方式によるホログラムの再生像と比較してさほど遜色のない良質のものであると考えられる。

9. むすび

光集積回路への組込みに適した新しい方式のホログラムとして導波路ホログラム（Waveguide Hologram）を提案し，その理論的解析を行なった。得られた結果は次のように要約される。

(1) 忠実な波面再生のためには，再生時照明波の伝搬定数β_iの大きさが記録時参照波の伝搬定数β_rの大きさに等しいことが必要である。（$|\beta_i| = |\beta_r|$）

(2) 参照波と同方向に進む照明波を用いる場合（$\beta_i = \beta_r$）には，ホログラムの両側にそれぞれ1個の直接像が得られ，これらは互に鏡像の関係にある。このとき共役波はエバネッセント波となり外部から観測されることはない。

(3) 参照波と逆方向に進む照明波を用いる場合（$\beta_i = -\beta_r$）には2個の共役像が得られる。このとき直接波はエバネッセント波となる。

(4) 波面再生の伝達関数は広い空間周波数範囲内でほぼ一定値をとる。また必要な像の再生が他の不要な波によって妨げられることは全くない。したがって極めて広視野の波面再生が可能である。

(5) 多モード導波路を用いる場合には，高次モードの導波路光を用いる方が高い回折効率が得られる。

つぎに平面波の参照波を用いて導波路ホログラムを記録し，これを導波路光により再生する実験を行なった。上記の解析結果のほとんど全ては，この実験により確認された。また，TE低次モードの導波路光を用いる方が，高い分解能で再生像を得られることが明らかになった。得られた再生像は，従来の方式

のホログラムの再生像と比較してさほど遜色のない良質のものである。

近年の光応用デバイスの集積化の動向と，特に最近優れた特性の導波路付半導体レーザが開発されていることを考えれば，導波路ホログラムは将来性の大きなものであると思われる。そこで今後，回折効率，記録密度などの特性の改善をはかるとともに，多数の導波路ホログラムの集積化，機能的導波路やパターン化導波路の利用，光源としての半導体レーザの利用などについて検討し，より広い機能をもつデバイスとして発展させたい。

謝辞

本研究に関して，実験面で御援助いただいている三菱電機中央研究所の中山 高 博士はじめIC-Ⅱグループの諸氏に深く感謝する。

文　献

1) 栖原敏明，西原浩，小山次郎：“ホログラム再生のためのファイバ出射光の解析”，輻射科学研究会資料，(昭49-12)。

2) 栖原敏明，西原浩，小山次郎：“ファイバ出力光の遠視野像およびホログラフィへの応用”，昭50信学会全国大会予稿集。S15-2 (昭50-03)。

3) Yu.A.Bykovskii, A.V.Makovkin and V.L.Smirnov : "Use of film waveguides in optoelectronic devices for reading information stored in holograms", Sov. J. Quant. Electron., 4, 1, p.129 (July 1974).

4) 栖原敏明, 小林直生, 西原浩, 小山次郎 : "導波路光によるホログラム記録・再生", 昭51信学会総合全国大会論文集, 811 (昭51-03).

5) H.Kogelnik and T.P.Sosnowski : "Holographic thin film couplers", Bell Syst. Tech. J., 49, p.1602 (Sep.1970).

6) K.Ogawa and W.S.Chang : "Analysis of holographic thin film grating coupler", Appl. Opt., 12, 9, p.2167 (Sep. 1973).

7) 栖原敏明, 小林直生, 西原浩, 小山次郎 : "薄膜導波路ホログラムの基礎実験", 昭51春応物連合講演会予稿, 27a-P-5, (昭51-03).

8) A.Yariv : "Coupled-mode theory for guided-wave optics", IEEE J. Quant. Electron., QE-9, 9, p.919 (1973).

9) H.Nassenstein : "Holographie und Interferenzversuche mit inhomogenen Oberflächenwellen", Phys. Letters., 28A, 3, p.249 (Nov. 1968).

10) O.Bryngdahl : "Holography with evanescent waves", J. Opt. Soc. Amer., 59, 12, p.1645 (Dec. 1969).

11) J.H.Harris, R.K.Winn and D.G.Dalgoutte : "Theory and design of periodic couplers", Appl. Opt., 11, 10, p.2234 (Oct. 1972).

12) 栖原敏明, 西原浩, 小山次郎 : "アモルファス半導体膜におけるホログラム記録", 信学会光・量子エレクトロニクス研究会資料, OQE75-28 (昭50-06).

13) 栖原敏明, 西原浩, 小山次郎 : "電子ビーム照射によるアモルファス半導体膜への光導波路書込", 昭50秋応物学会予稿

22a-R-12 (昭50-11).

14) 野村良徳，布下正宏："2層薄膜光ガイドの光機能素子への応用"，昭50秋応物学会予稿，22p-R-6 (昭50-11).

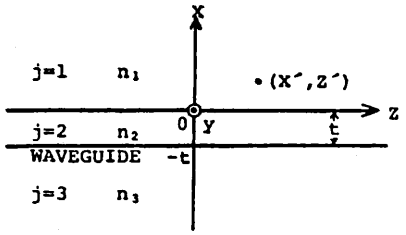
付録　導波路構造におけるグリーン関数

図A1 の導波路構造内での非斉次なヘルムホルツの波動方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_j^2\right]G(x,x';z,z') = -\delta(x-x')\delta(z-z'),$$

$$k_j = n_j k \quad (j=1,2,3),$$

$$k = 2\pi/\lambda \qquad (A1)$$



図A1　導波路構造

を満たすグリーン関数 $G(x,x';z,z')$ を求める。Gをz方向に関してフーリエ変換して

$$G(x,x';z,z') = \int \tilde{G}(x,x';\eta)e^{i\eta(z-z')}d\eta \qquad (A2)$$

とおき，$\delta(z-z')=(1/2\pi)\int e^{i\eta(z-z')}d\eta$ であることを用いれば，波動方程式(A1)は

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+(k_j^2-\eta^2)\right]\tilde{G}(x,x';\eta) = -\frac{1}{2\pi}\delta(x-x') \qquad (A3)$$

となる。本文の解析では $x'>0$ の場合のGのみが必要であるので，以下の計算はこの場合に限って行なう。式(A3)の解は，$x\neq x'$ においては，右辺＝0と置いたときの解となり，

$$\tilde{G}_1 = \begin{cases} A\exp i\xi_1 x & ; \ x'<x \\ B^+\exp i\xi_1 x + B^-\exp(-i\xi_1 x) & ; \ 0<x<x' \end{cases}$$

$$\tilde{G}_2 = C^+\exp i\xi_2 x + C^-\exp(-i\xi_2 x) \quad ; \ -t<x<0$$

$$\tilde{G}_3 = D\exp(-i\xi_3 x) \quad ; \ x<-t \qquad (A4)$$

ここで $$\xi_j = \begin{cases} \sqrt{k_j^2 - \eta^2} & ; |k_j| > |\eta| \\ i\sqrt{\eta^2 - k_j^2} & ; |k_j| < |\eta| \end{cases} \qquad (A5)$$

と書くことができる。上式で $A, B^{\pm}, C^{\pm}, D$ は境界条件より決定される。 $x=0$ および $x=-t$ での境界条件は G および $\frac{d}{dx}G$ の連続性を用い、また $x=x'$ での境界条件は G の連続性と式(A3)の両辺の $x'-\varepsilon \le x \le x'+\varepsilon$ $(\varepsilon \to +0)$ での積分を用いることにより、

$$A = \frac{i}{4\pi\xi_1}\{R\exp i\xi_1 x' + \exp(-i\xi_1 x')\},$$

$$B^+ = \frac{i}{4\pi\xi_1} R\exp i\xi_1 x', \quad B^- = \frac{i}{4\pi\xi_1}\exp i\xi_1 x',$$

$$C^+ = \frac{i}{4\pi\xi_1} F^+ \exp i\xi_1 x', \quad C^- = \frac{i}{4\pi\xi_1} F^- \exp i\xi_1 x',$$

$$D = \frac{i}{4\pi\xi_1} T \exp i\xi_1 x'$$

が得られる。ここに $R, F^{\pm}, T$ はそれぞれ、

$$R = \frac{(\xi_1-\xi_3)\xi_2 \cos\xi_2 t - i(\xi_1\xi_3 - \xi_2^2)\sin\xi_2 t}{(\xi_1+\xi_3)\xi_2 \cos\xi_2 t - i(\xi_1\xi_3 + \xi_2^2)\sin\xi_2 t},$$

$$F^+ = \frac{(R-1)\xi_1 + (R+1)\xi_2}{2\xi_2}, \quad F^- = \frac{(-R+1)\xi_1 + (R+1)\xi_2}{2\xi_2},$$

$$T = F^+ \exp\{-i(\xi_2+\xi_3)t\} + F^- \exp i(\xi_2-\xi_3)t \qquad (A6)$$

である。上の係数を式(A4)に代入すれば、$x'>0$ の場合のグリーン関数 G の x 方向フーリエ変換 $\tilde{G}$ は

$$\tilde{G}(x,x';\eta) = \frac{i}{4\pi\xi_1} X$$

$$\begin{cases} \exp i\xi_1(x-x') + R\exp i\xi_1(x+x') & ;\quad x' < x \\ R\exp i\xi_1(x+x') + \exp\{-i(x-x')\} & ;\quad 0 < x < x' \\ F^+\exp i(\xi_2 x + \xi_1 x') + F^-\exp\{-i(\xi_2 x - \xi_1 x')\} & ; \\ & \quad -t < x < 0 \\ T\exp\{-i(\xi_3 x - \xi_1 x')\} & ;\quad x < -t \end{cases} \tag{A7}$$

となり，グリーン関数 $G(x,x';z,z')$ は式(A7)を式(A2)に代入して得られる。式(A7)は $x=x'$ で生じた波動が導波路構造内の境界により多重反射を受けて生じる各種の波動を表現したものとなっている。なお，ξ_j, R, $F^{\pm}$, T は全て η の関数であるので，本文では $\xi_j(\eta)$, $R(\eta)$, $F^{\pm}(\eta)$, $T(\eta)$ と記した。特に $R(\eta)$, $T(\eta)$ は，それぞれ，空間周波数が η の平面波の導波路構造内での多重反射を考慮した反射係数および透過係数である。

輻射科学研究会資料

薄膜光変調素子の進行波形動作について

井筒雅之・山根康邦*・末田　正

(大阪大学基礎工学部　*現在 シャープ)

昭和51年4月30日

於 関西大学

薄膜光変調素子の進行波形動作について

井筒 雅之　山根 康邦*　末田 正

（大阪大学基礎工学部　*現在 シャープ）

1．まえがき

導波形光変調素子は，光集積回路（光IC）における外部変調回路として，光ICを構成するうえで最も基本的な能動素子の一つである。

導波形光変調素子には様々な形式が考えられている。本文では，電気光学効果を用いた横形配置の光変調素子について検討する。この素子は，通常のバルク形の横形光変調器を導波形化したものと見ることができる。バルク形素子に比べ，光波を狭い領域に閉じ込めるので電極間隔を小さくすることができる，光波の回折に制限されることなく電極長（素子長）を長く取ることができる，等により低電圧駆動が可能となる。さらに，他種の導波形光変調（ブラッグ反射形，方向性結合器形等）に比較して，原理的に高能率な変調ができる点も有利である。

横形配置の導波形光変調については，既に幾つかの実験も報告されている。なかでも，強誘電体光導波路を用いた近年の報告[1]では，変調電圧0.3Vに対し誘導移相量1radが得られている。しかし，この実験では周波路帯域幅は計算により500MHz程度と記されているのみであり，また他の報告においても1GHz以上での変調実験はほとんどなされていない。光ICにおいて外部変調素子が不可欠になると思われるのは，現在のところGHz以上の周波数帯であり，電気光学効果の持つ非常に高い応答速度を考え合わせると，帯域幅能率等の点で改善の余地が多く残されていると考えられる。

従来の報告には，変調素子の光回路的側面に中心を置いたものが多いようである。本報告では，電気回路的側面にも重点を置き，帯域幅，変調電力，損失等を検討し，進行波形動作の有用性を示すと共に，その特性について考察する。また，進行波形動作を確かめるために行なった変調実験の結果について述べる。

2．導波形光変調

この節では，変調素子の基礎的な性質を示すことを目的として，我々が先に報告した結合モード理論による導波形光変調の一般的取扱い[2]についての概略を述べ，変調の深さを与える式を示す。

光波および変調波がz方向に進行するものとする。光波電界Eを次式で表わす。

$$E = \frac{1}{2} A F \exp\{j(\omega t - \beta z)\} + c.c. \quad (1)$$

ここで、Aは複素振幅、Fは電界分布関数、ω, βは角周波数および位相定数であり、c.c.は複素共役項を示している。

一方、変調電界を電気光学結晶に印加することにより生ずる誘電率（屈折率）微少変化$\widetilde{\delta\varepsilon}$のij成分は次式で表わされる。

$$\delta\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}\gamma_{ijk}E_{ok} \quad (i,j,k = x,y,z) \quad (2)$$

ここで、E_oは変調電界、γは電気光学係数、εは比誘電率である。変調波を周波数Ω, 位相定数Kの進行波とし、$\widetilde{\delta\varepsilon}$を次式で表わす。

$$\widetilde{\delta\varepsilon} = \frac{1}{2} A_o \delta\varepsilon \exp\{j(\Omega t - Kz)\} + c.c. \quad (3)$$

ただし、A_oは複素振幅、$\delta\varepsilon$は分布関数である。$\widetilde{\delta\varepsilon}$を微少な摂動と考え、また光波モードに側波帯成分を考慮し、その振幅がゆるやかに変化するものとして、光波に対するマックスウェルの方程式を変形すれば、側波帯成分の振幅についての結合モード方程式が得られる。この方程式を解くことにより、結合が同一固有モードに関する側波帯成分間でのみ生じる場合には、位相変調の得られることが示される。詳細は省略し、結果のみを示せば、出力光の複素振幅A(L)は次のように表わされる。

$$A(L) = A(0) \cdot e^{j\varphi} \quad (4)$$

$$\varphi = |T| A_o L \{\sin u/u\} \cos\{\Omega t - (K + \Delta\beta) L/2\} \quad (5)$$

ここでは、入力光を単一周波数（搬送波、振幅A(0)）と仮定し、相互作用長をLとしている。また

$$T = j\omega\varepsilon_o \iint_{-\infty}^{\infty} F^* \delta\varepsilon F \, dx \, dy \quad (6)$$

$$u = (K - \Delta\beta) L/2 = \frac{\Omega L}{2}\left(\frac{1}{U_m} - \frac{1}{U_z}\right) \quad (7)$$

ただし、光波電界分布関数Fは$AA^*/2$が伝送電力を示すように正規化している。$\Delta\beta$はとなり合う側波帯成分の間の位相定数差であり、光の周波数が変調波に対して十分大きく分散が無視できるものとしている。U_m, U_zはそれぞれ変調波、光波の位相速度である。これより、光波および変調波の電界分布、位相定数、変調電界の振幅、相互作用長（電極長）等を用いて、誘導位相量$\Delta\varphi$を計算することができる。

$$\Delta\varphi \doteq |T| A_o L \sin u/u \quad (8)$$

3. 平面ストリップ線路の電界分布と線路定数

電気光学結晶導波路を用いた横形配置の導波形光変調を構成する場合，寸法，作成上の点から導波層面上の平行電極を利用する方法が有効である．図1はその代表的な例を示している．この節では，この様な電極について，静電容量，特性インピーダンス，電力損失等の特性を検討する．

図2は，ここで取扱うストリップ線路の断面上である．電極幅a，電極間隔b，変調電力はz方向に進行する．基板は電極寸法に比べ十分大きく，基板端面の影響は無視できるものとする．また変調波の波長は，電極断面寸法に比べ十分小さく，一方誘電体損，導体損等は無視できる程度とし，線路の基本伝搬モードはTEM波と見なせるものとする．

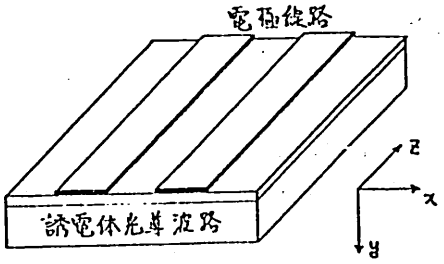


図1　導波形光変調素子の構成例

この場合，電極の形状で決まるxy断面内の2次元電位分布より線路の特性を評価することができる．電位分布を求めるため本文では等角写像による手法を利用する．

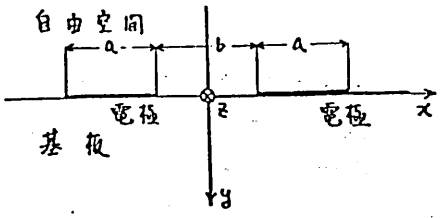


図2　平面ストリップ線路

3－1　電界分布

図3-aは，$\zeta = x + jy$ 面および ζ 面上の電極位置，境界条件を示している．シュワルツ・クリストッフェルの公式によれば次に示す関係式により，ζ の上（あるいは下）半平面が図3-bに示す $w = u + jv$ 平面上の長方形内に等角写像される．

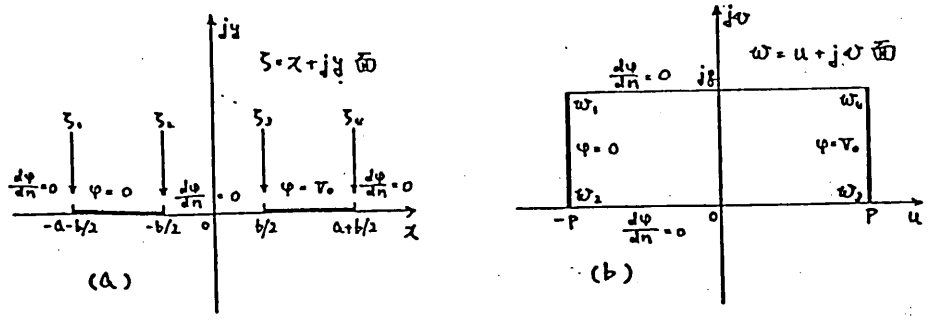


図3　$\zeta = x + jy$ および $w = u + jv$ 面

$$W=\int_0^{z_3/b}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{9}$$

あるいは

$$\zeta=\frac{b}{2}\,sn(w,k) \tag{10}$$

ただし

$$k=\frac{b}{2}/\left(\frac{b}{2}+a\right)=1/(1+2a/b) \tag{11}$$

(9)の右辺は第1種楕円積分であり，また(10)におけるsnはJacobiの楕円(sn)関数である。ζ面上の点ζ_i($i=1,2,3,4$)はW面上のw_iに対応している。また，

$$\left.\begin{aligned}p&=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=K(k)\\ q&=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}=K(k')=K(k)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ただし

$$k'=\sqrt{1-k^2}$$

ここにKは第1種完全楕円積分である。

式(10)において，$\zeta=x+jy$，$w=u+jv$を代入し，両辺の実部，虚部を比較すれば次の関係が得られる。

$$x=\frac{b}{2}\,snu\,\overline{dn}v/\left[\overline{cn}^2v\left(1+k^2sn^2u\,\overline{sn}^2v/\overline{cn}^2v\right)\right] \tag{14}$$

$$y=\frac{b}{2}\,cnu\cdot dnu\cdot\overline{sn}v/\left[\overline{cn}v\left(1+k^2sn^2v\,\overline{sn}^2v/\overline{cn}^2v\right)\right]$$

ただし，$\overline{sn}v$等は$sn(v,k')$を示している。W面上においてuが一定の直線は等電位線に対応している。(14)を用いれば，ζ面上すなわち線路断面上における電位分布を知ることができる。

また，ζ面上の電界を$E_0=(E_{ox},E_{oy})$とすれば，次式が成立する。

$$E_{ox}=-\partial u/\partial x,\qquad E_{oy}=-\partial u/\partial y \tag{15}$$

したがって線路間の電界を∇とすれば，(9)，(15)より

$$E_{ox}=-r\cos\theta,\qquad E_{oy}=-r\sin\theta \tag{16}$$

ただし

$$\gamma = \frac{V_0 b}{4K}\left[\left\{\left(\frac{b^2}{4}-k^2x^2+k^2y^2\right)^2+(2k^2xy)^2\right\}\left\{\left(\frac{b^2}{4}-x^2+y^2\right)^2+(2xy)^2\right\}\right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\left\{2k^2xy/\left(\frac{b^2}{4}-k^2x^2+k^2y^2\right)\right\}+\tan^{-1}\left\{2xy/\left(\frac{b^2}{4}-x^2+y^2\right)\right\}\right] \quad (17)$$

$$-\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}$$

3-2. 静電容量，特性インピーダンス，実効誘電率

等角写像の性質により，線路の静電容量は写像の前後で等しい。[3] 図3-aにおいて比誘電率をε_m（$y>0$），1（$y<0$）とする。それぞれの半平面は図3-bの長方形内に等角写像される。図3-aの上半平面による（単位長当りの）容量C_1は

$$C_1 = \varepsilon_0\varepsilon_m g/2p = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_m K'/K \quad (18)$$

同様に下半平面では

$$C_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 K'/K \quad (19)$$

これより図3-aの線路構造による単位長当りの静電容量Cは

$$C = C_1 + C_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_m+1)\varepsilon_0 K'/K = \varepsilon_e C_0 \quad (F/m) \quad (20)$$

ここで，$C_0 = \varepsilon_0 K'/K$は、全面の比誘電率が1の場合の容量であり，$\varepsilon_e = (\varepsilon_m+1)/2$は実効誘電率である。

また，線路の特性インピーダンスZは，以上の結果を用いて，次式で表わされる。

$$Z = 1/(\sqrt{\varepsilon_e}\, C_0 v_c) \quad (\Omega) \quad (21)$$

ただし、v_cは自由空間における光速度である。

実効誘電率ε_eは，基板の比誘電率ε_mのみによって決まる。また(11)，(20)，(21)より単位長当りの静電容量，特性インピーダンスは線路の幅と間隔の比，a/bとε_e（すなわちε_m）のみによって定まり，寸法には無関係となる。

3-3 線路損失

本文で取扱っている線路では，損失として，誘電体損，導体損，放射損が考えられる。しかし，変調素子を構成する場合には，通常，基板の誘電率が十分大きく，電界の基板中への集中度が大きいと考えられるので，放射損は無視できるものとする。また，誘電体損，導体損も十分小さく，特性インピーダンス等は無損失の場合とほとんど差がないものと仮定する。誘電体損，導体損による減衰定数をα_d，α_cとし，それぞれについて以下で検討する。

誘電体項

図2において，誘電体基板に微少な損失がある場合を考える．なお，自由空間は無損失とする．すなわち，図3-aにおいて上半平面だけに損失があるとする．

誘電体基板の等価的な導電率 σ は，損失角 δ を用いて，

$$\sigma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon \tan\delta \tag{22}$$

したがって線路の単位長当りの並列コンダクタンス G は，(18)より，

$$G = \omega C_1 \tan\delta = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_m C_0 \tan\delta \tag{23}$$

誘電体項 α_d と，コンダクタンス G，特性インピーダンス Z の間には，$\alpha_d = \frac{1}{2} GZ$ の関係があるので，

$$\alpha_d = \frac{\pi f}{v_c} \cdot \frac{\varepsilon_m/2}{\sqrt{\varepsilon_e}} \cdot \tan\delta \qquad (\text{Nep./m}) \tag{24}$$

ただし f は変調波の周波数（$f = \Omega/2\pi$）である．

導体項

つぎに，線路を構成する金属導体による導体項について検討する．線路の単位長当りの直列抵抗を R_0，導体の比抵抗を ρ，表皮の浸透の深さを d とすると次式が成立する．

$$R_0 = \begin{cases} 2\rho/at & t < 2d \\ \rho/ad = \sqrt{\pi f \mu \rho}/a & t > 2d \end{cases} \tag{25}$$

ただし μ は導体の透磁率，また導体の厚み t は幅 a，間隔 b に比べ十分小さく，端面の効果は無視できるものとした．

まず，線路に一様な電流 I が流れる場合を考える．線路の伝送電力は $P_t = I^2 Z$，導体項による単位長当りの損失電力は $P_c = I^2 R_0$ である．したがって，この場合の導体項による減衰係数 α_{c0} は次式で与えられる[4]

$$\alpha_{c0} = P_c / 2P_t = R_0 / 2Z \tag{26}$$

実際には線路に流れる電流は一様でなく，電流密度 J は a，b，t 等の関数となる．この場合，線路の単位長当りの直列抵抗 R は次のように表わされる．

$$R = \frac{R_0 \int_c |J|^2 dl}{\left(\int_c |J| dl\right)^2} = R_0 \int_c |J|^2 dl / I^2 \tag{27}$$

また，導体項 α_c は，

$$\alpha_c = R/2Z = \alpha_{c0} \int_c |J|^2 dl / I^2 \qquad (\text{Nep./m}) \tag{28}$$

ここで，積分路 C は2つの線路導体の断面における境界線上に取る．TEM 波では，導体上の電荷密度と電流密度は比例すると考えられる．導体は十分薄く，電界分布は，導体の厚みが無限小の場合に比べほとんど変化がないと1，また導体端の効果を無視すれば，電荷密度は近似的に厚さ t の線路上（すなわち $z = \pm jt/2$，$b/2 < |x| < b/2 + a$）の E_{oy} 成分に比例すると考えることができる．

図4は，この様に1T計算した α_e/α_{eo} の一例である．

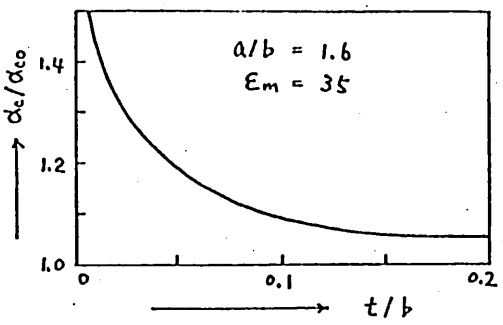


図4　α_e/α_{eo} の計算例

4. 導波形光変調素子の進行波形動作

前節までに導波形光変調の基本的な変調作用，および電極線路の線路定数等を示した．この節では，以上の結果を用いて具体的な例により変調素子の特性と検討し，進行波形動作を用いることの有利性を示す．電気光学効果を持つ光導波路として $LiNbO_3$ 薄膜導波路を，また光源として He-Ne (.633μm) レーザを仮定している．

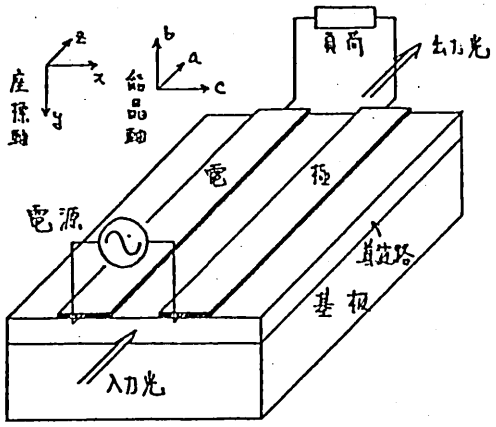


図5　導波形光変調素子の構成

4-1 誘導物理量

図5に，ここで考える導波形光変調素子の構成を示す．光波は平面ストリップ線路電極面と z 方向に進行する．図示の結晶軸では（点群対称 3m 結晶に対して）誘電率微少変化テンソルは次のようになる．

$$\delta\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_3^2 \gamma_{13} E_{ox} & -\varepsilon_1\varepsilon_3 \gamma_{51} E_{oy} & 0 \\ -\varepsilon_1\varepsilon_3 \gamma_{51} E_{oy} & \varepsilon_1^2(\gamma_{13} E_{ox} - \gamma_{13} E_{oy}) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\varepsilon_3(\gamma_{51} E_{ox} + \gamma_{13} E_{oy}) \end{bmatrix} \quad (29)$$

ここで，E_{ox}，E_{oy} はそれぞれ変調電界の x，y 成分．$\varepsilon_1 = n_o^2$，$\varepsilon_3 = n_e^2$ であり n_o，n_e は常および異常屈折率である．また，γ_{ij} $(i, j = 1 \sim 6)$ は電気光学係数の成分を表わしている．

ここでは簡単のため2次元薄膜光導波路を考えている．光波モードの電界分布関数は，よく知られているようにy軸方向に薄膜中で正弦関数，基板および上部層で指数関数となる．z軸方向には導波路に構造変化がなく，界分布は一様と考える．しかしここでは，実際上の見地からz方向にゆるやかなガウス分布（半値幅 w_0，電極間隔 b に等しいとする）を仮定する．その変化は十分小さく，y方向の変化に比べ無視できるとする．具体的な関数形等は他を参照(2)しここでは省略する．

光波電界分布および前節に示した変調電界分布(16)，(17)を(19)に代入すれば誘電率微少変化 $\delta\varepsilon$ が計算される．さらに(1)を用いて結合係数 Γ が得られる．ところで，(16)，(17)より変調電界 E_{0x}，E_{0y} はそれぞれzに関する偶および奇関数である．一方光波分布は先の仮定により偶関数である．それゆえ，変調電界のy方向成分 E_{0y} は（1次近似で）変調に寄与せず，E_{0x} による誘電率変化のみを考えればよいことになる．

この場合，(19)より $\delta\varepsilon$ は対角成分のみを持ち，TE，TM両モードの位相変調が可能であることがわかる．以下では主にTEモードの位相変調を考えるものとする．

図6は，電極間隔 b に対し，誘導位相量 1.2 rad（100%変調）の得られる変調電圧 v_m，および特性インピーダンスを 50 Ω とした場合の変調電力 P_m を計算したものである（TE_0 モード）．$LiNbO_3$ 結晶導波路（$n_e = 2.2$，$\Delta n = 2\times10^{-3}$，$r_{33} = 30.8\times10^{-12}$ m/V[5]）を仮定し，膜厚 D を 1 μm としている．$0.5 < a/b < 2$ の範囲ではこれらの値は a/b にほとんど無関係（±2% 以内）である．

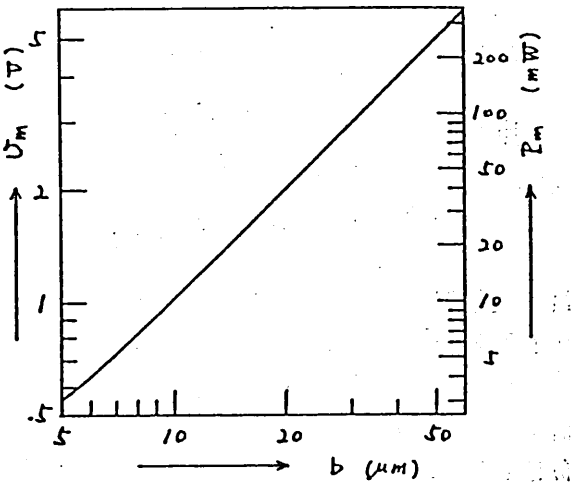


図6　電極間隔 b に対する 100% 変調電圧，電力 v_m，P_m の計算．

誘電体光導波路は，金属等の拡散により作成されることが多い．この様な場合，屈折率は基板と導波膜の間で連続的に変化し，本文で仮定しているような正確な3層構造とはならない．しかし，導波路の等価的厚さ D が電極間隔 b に比べ十分小さい場合には，誘導位相量等の値も3層構造と考えて得られるものとほとんど差がないと考えられる．実際，基板と導波路の電気光学係数が等しい3層光導波路では，$D \ll b$ の範囲で膜厚 D を変化させても，誘導位相量の計算値にはほとんど変化がない．光波エネルギーの集中している領域に比べ，通常変調電界分布は十分広く，光波の分布形状が多少変化しても誘導位相量等にはほとんど変化が現れないと考えられる．

4-2. 周波数帯域幅と進行波形動作

変調素子の主な構成法（変調波の印加法）に，集中定数形と進行波形とがある（図7）．

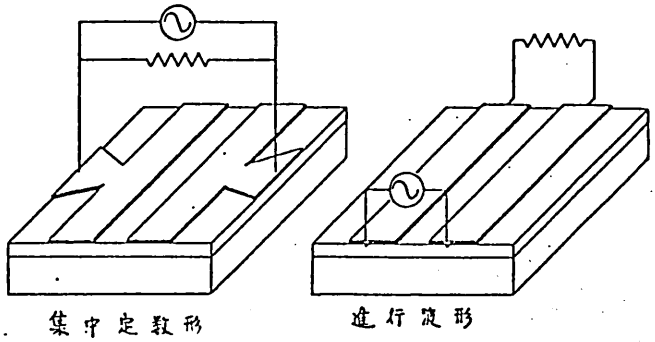


図7　集中定数形，進行波形薄膜光変調素子の構成例

電極線路における変調波の波長が電極長に比べ十分大きい場合，変調電界は電極の長さ方向に一様と考えることができ，電極線路を集中定数回路の容量 C と見なすことができる．電極に並列抵抗 R_m を装荷し，変調電源の内部インピーダンス R_g と整合（$R_m = R_g$）する．電極に加わる電圧が D.C. における 1/√2（誘導物理量も 1/√2）となる周波数を帯域幅 Δf_e と定義すれば，

$$\Delta f_e = 1 / \pi R_m C \qquad (20)$$

通常，光波は変調波に比べ進行速度が速いので，集中定数形では光波の走行時間による帯域制限よりも，容量 C によるものが中心と考えられる．

一方，変調電極を変調波に対する伝送線路として用いる進行波形光変調素子では，帯域幅は光波と変調波との位相速度の非整合により制限を受ける．(5) に示したように，位相非整合による変調の深さの減少は $\sin u/u$ に比例する．変調の深さが D.C. の値に対し 1/√2 となる周波数で帯域幅を定義すれば，

$$\Delta f_e = 1.4\, v_e / \pi (n_m - n_e) L \qquad (21)$$

ただし，$u = 1.4$ において $\sin u/u \simeq 1/\sqrt{2}$ である．n_m，n_e はそれぞれ，変調波，光波に対する等価屈折率である．

前節 (20)，(21) を用いれば，線路の単位長当りの容量 C および特性インピーダンス Z を計算することができる．

図8は，電極幅 a，電極間隔 b の比 a/b に対する C および Z の計算例である（C，Z は a/b，ε_r のみにより定まる）．基板を $LiNbO_3$ とし，導波層の影響は無視している．結晶軸方向は図5に示している．この場合，z および y 方向の誘電率が異なり異方性の効果が現れる．ここでは簡単のため，1次近似で誘電率を等方とし，その値を ε_1，ε_3 の幾何平均 $\varepsilon_m = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}$ でうえている[6]．$LiNbO_3$ では，$\varepsilon_1 = 43$，$\varepsilon_3 = 28$ [5]，$\varepsilon_m = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3} = 35$，また実効誘電率 $\varepsilon_e = (\varepsilon + 1)/2 = 18$．（$n_m = \sqrt{\varepsilon_e} = 4.2$）である．

特性インピーダンス Z は $a/b = 1.6$ において約 50Ω である．また，$a/b =$

1.2～2 において Z = 52～48 Ω と，a/b が多少変化しても インピーダンスの変化は小さい．このことから，誘電体光導波路を用いた光変調素子を進行波形として構成する場合，平面ストリップ線路電極の利用が有効であると考えられる．

表1 に図8を用いて集中定数形，進行波形の周波数帯域幅を比較している（電極長 1 cm）．進行波形では，位相整合は得られないが，集中定数形に比べ 2 倍以上の帯域幅が期待できることになる．

4-3 線路損失・変調能率

これまでに得られた結果を用いて，進行波形動作を行う導波形光変調素子の変調電力損失，変調能率を求めることができる．

図9は，前述の導波路（図5）を用いた線路損失の計算例である．a/b = 1.6 (Z = 50 Ω)，L = 1 cm とし，電極間隔 b に対する誘電体損 P_d および導体損 P_c を示している．ただし，周波数は表1より進行波形の帯域幅に当る 6.6 GHz，入力電力は D.C. にお

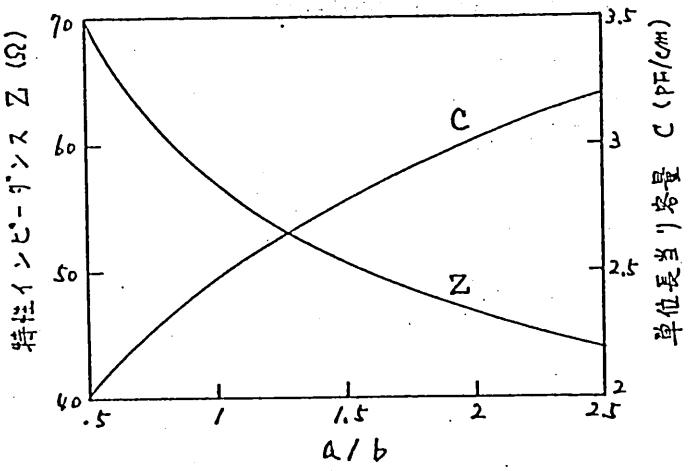


図8. a/b に対する C，Z の計算値 ($\varepsilon_r = 35$)

表1. 集中定数形，進行波形の周波数帯域幅

	a/b	C pF	Z Ω	Δf GHz
集中定数形	1.0	2.5	—	2.6
	1.6	2.8	—	2.3
	2.0	3.0	—	2.1
進行波形	1.6	—	50	6.6

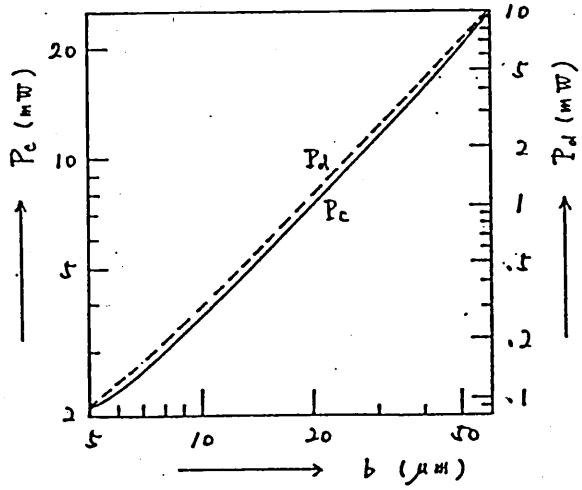


図9 誘電体損 P_d，導体損 P_c の計算値

て誘導初相量が 1.2 rad となる値（図6）を仮定している．

図10は先と同じ条件で，電極間隔 b に対する変調能率 $\eta = P_c/\Delta f$，$P_t = P_m + P_d + P_c$，を示したものである．参考のため，集中定数形（$\Delta f_0 = 2.2$ GHz）についての曲線も同時に示している．集中定数形における損失は，進行波形と必ずしも同様に扱うことはできないが，ここでは便宜上同一の式を用いて計算している．

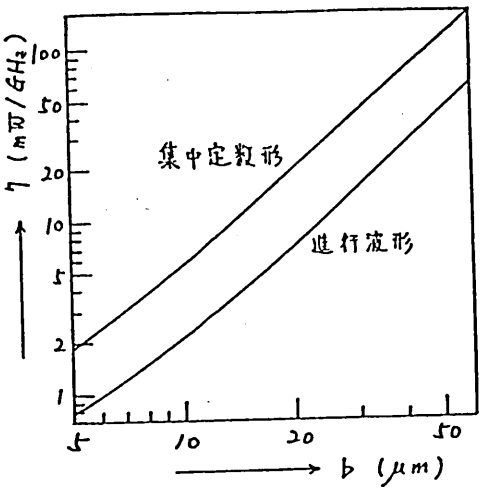


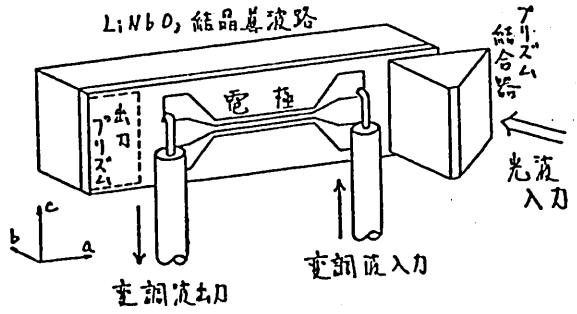
図10. 変調能率の計算

5. 変調実験

$LiNbO_3$ 結晶導波路を用いて，進行波形階段光変調素子を試作した．電極線路のマイクロ波特性を測定するとともに，.633 μm He-Ne レーザ光を用いた変調実験を行ない，7.5 GHz までの周波数で動作が確かめられた．

5-1. 変調素子の構成

図11に試作変調素子の構成を示



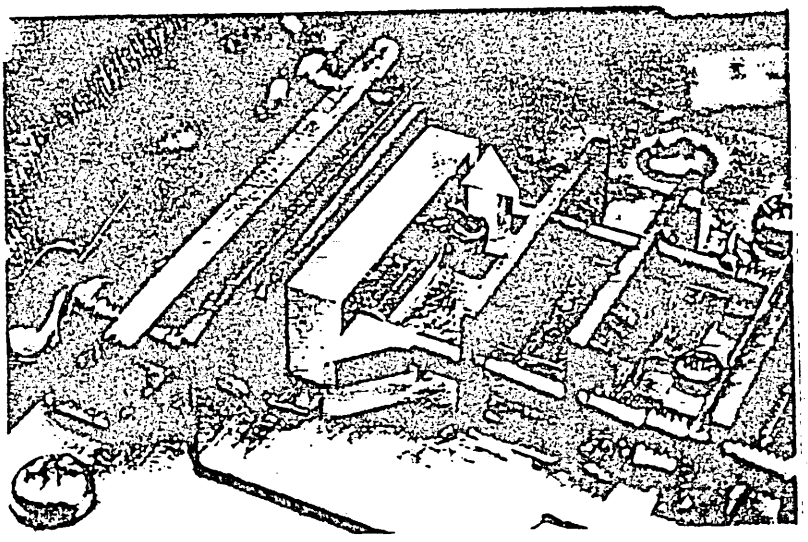


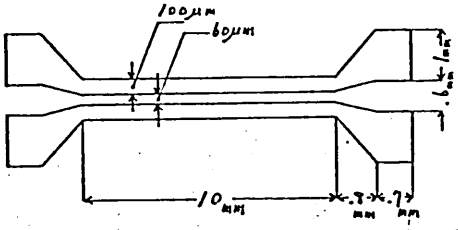
図11 試作変調素子の構成

す．導波路は $LiNbO_3$ 結晶に Ti を熱拡散したもの[7]である．主な特性を表2に示している．

表2 $LiNbO_3$ 光導波路の主なパラメータ

a × b × c	;	20 × 4 × 7 mm
等価屈折率	;	2.2 (TE₀モード)
屈折率分布	;	ガウス関数形
屈折率変化	;	2×10^{-2}
等価膜厚	;	2.5 μm
伝搬損失	;	< 3dB/cm

光源の入射力結合系として V 溝プリズムを用いた．入射プリズムを含めた導波路の光透過率は約 3.5 % であった．導波路損失を 4.5 dB (3dB/cm)．プリズム面での反射損失を 2.5 dB (25% × 2) とすると結合損失は (入射力2つのプリズムの和として) 約 7.5 dB，結合効率は 17% 程度と見積られる．光の透過度は，電極がある場合にもほとんど変化がなかった．



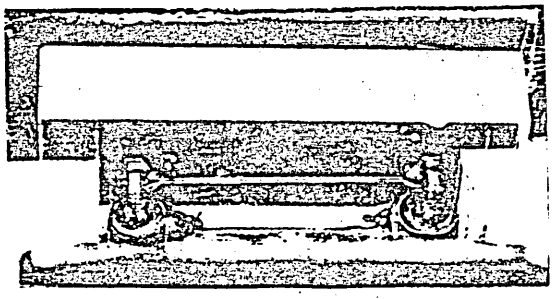


図12 電極線路の形状

図12に作成した電極線路形状の概要を示している．Al 蒸着およびフォトエッチングにより形成した (厚さ約 1.5μm)．変調部の長さ L = 1cm，幅，間隔は a = 100μm，b = 60μm である．給電，受電同軸線路との結線のため，電極両端と a/b を一定としてテーパ状に広げ (10倍) ている．T.D.R. により測定した特性インピーダンスは約 48 Ω であった．また，直流抵抗は電極一本当り 2 Ω 以下 (同軸および同軸，電極間の短絡抵抗を含む) であった．同軸線として，.085 inch セミリッジドケーブル (外径約 2.2mm，内導体径約 0.5mm) を用いた．

図13にマイクロ波の挿入および反射損失の測定結果を示している．3.5 GHz 程度までほぼ平坦な特性が得られている．それ以上の周波数では，線路の不連続によると思われる変動が大きく現われている．

5-2 変調実験

この変調素子を用いて，進行波形動作による変調実験を行なった．

まず，試作変調素子の動作を確かめるため，低周波 (1 ~ 100 KHz) での変調実験を行なった．図14に実験の構成を示す．実験では TE_0 モードの位相変調をマッハ・ツェンダー形の干渉系を組むことにより強度変調に変換して誘導物理量を測定した．図15に強

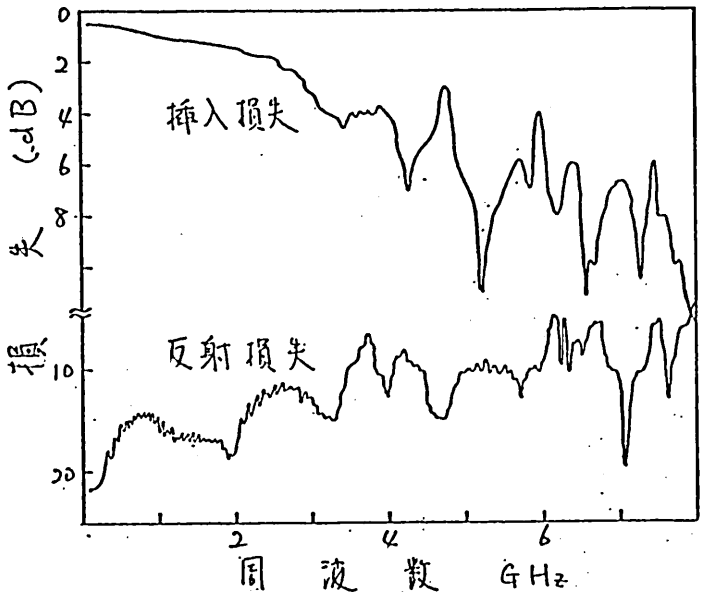


図 13
マイクロ波挿入，および反射損失の測定結果

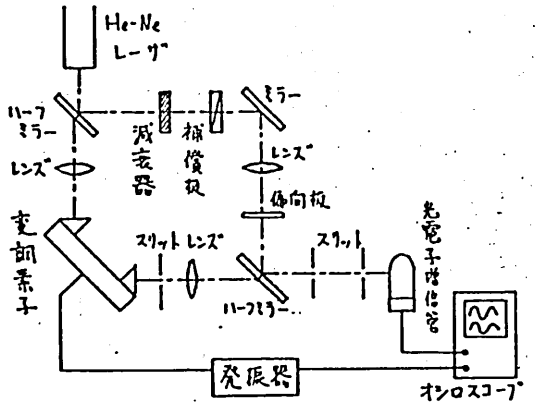


図 14
低周波 (1～100KHz) 変調実験の構成

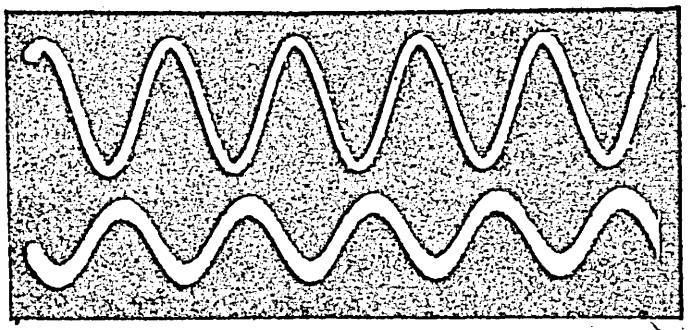


図 15
出力波形の一例
上が変調電圧波形
下が出力光の波形
(f = 10KHz)

表3　位相変調実験の測定結果

f kHz	Δφ rad/V	V_m V	P_m mW	Δφ(300mW) rad
1	0.22	5.5	300	1.21
10	0.22	5.5	300	1.21
100	0.17	7.1	500	0.93

度変調の波形の一例を示す．表3は測定結果である．

この実験では変調器からの出力光と参照光との干渉による消光比が4～5と良い値ではなかった．これは，2つの光波のビームパラメータの相異によると考えられる．

表3において，1，10 KHzにおける誘導位相量が計算値（Δφ(300mW) = 1.11 rad）より大きい．これは，逆圧電効果による間接的電気光学効果によるものと考えられる．また，100 KHzにおいて少し低い値となっているのは，機械的共振周波数に近づくためと推定される．

つぎに，進行波形動作を確かめるため，高周波（200 MHz ～ 7.5 GHz）での変調実験を行なった．図16は実験の構成である．掃引形ファブリペロー干渉計を用いて，位相変調された変調素子出力光の周波数スペクトルを観測している．

位相変調の深さをΔφとすると，第1番目側波帯成分と搬送波との強度比は $J_1^2(\Delta\varphi)/J_0^2(\Delta\varphi)$ となる．したがって，この比を測定すればΔφを計算することができる．変調電力は，出力側で20 dB減衰器を介して電力計で測定し，先に測定した変調素子のマイクロ波挿入損失より，入力電力を見積っている．

図17は，観測された位相変調光スペクトルの一例である．光源としてHe-Neレーザは，縦モード間隔が約380 MHzであるいくつかのモードが発振している．発振状態は多少不安定であり，出力光スペクトルは常にゆるやかに変化しているので，図においてもその様子が現れている．

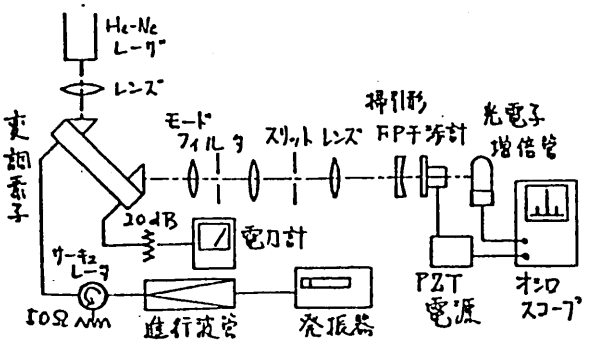
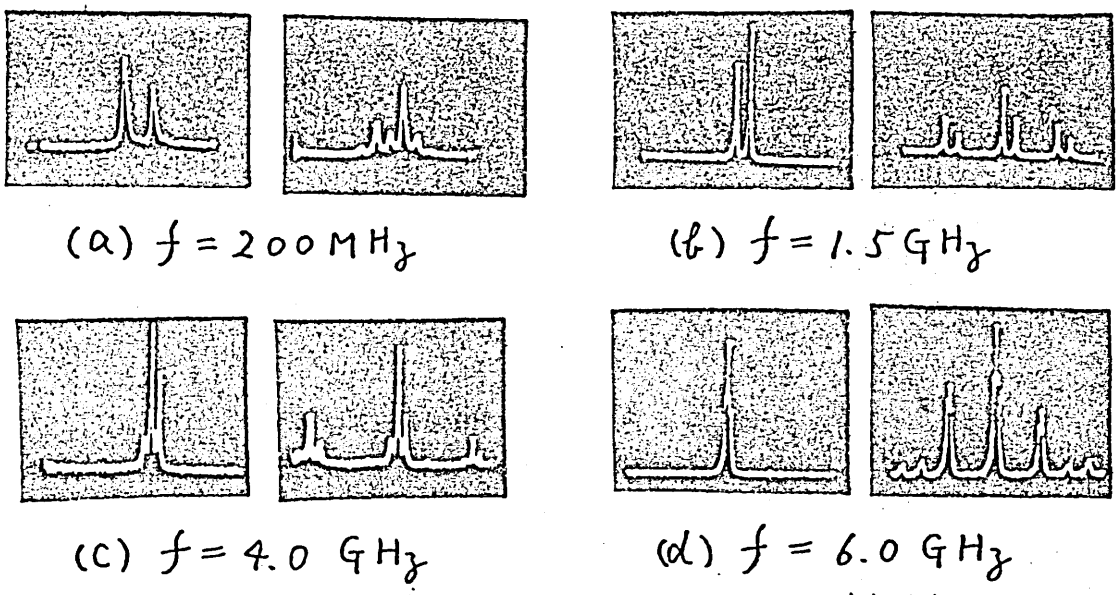


図16
高周波（200M～7.5GHz）
変調実験の構成



(a) $f = 200\,MHz$　　(b) $f = 1.5\,GHz$

(c) $f = 4.0\,GHz$　　(d) $f = 6.0\,GHz$

図 17　位相変調光スペクトルの一例　(左側：無変調時)

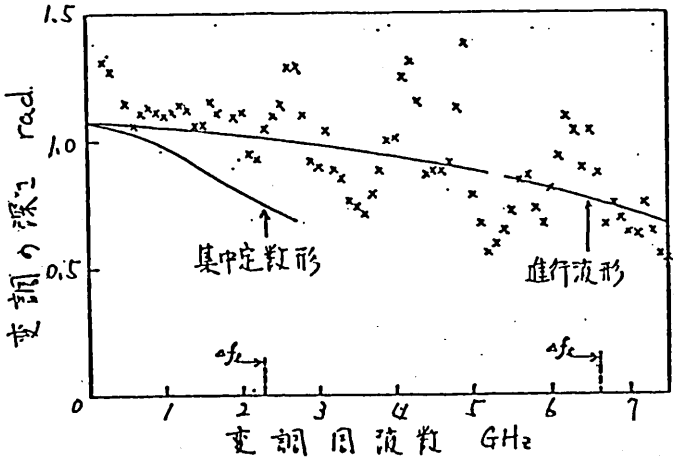


図 18
高周波変調実験の結果
(変調電力 300 mW)

図 18 は実験結果である．変調入力電力を 300 mW に換算した場合の変調の深さの周波数特性を示している．同時に計算により予測される特性を集中定数形（50 Ω負荷）についてのものと共に実線で示している．

変調の深さは 1 GHz 附近でほぼ 1.1 rad，7.5 GHz で 0.55 rad であった．これまでほとんど行なわれたことのない 1 GHz 以上の周波数帯でも変調動作が確かめられた．測定値には，マイクロ波特性に起因すると思われる変調の深さの変動が見られるが，傾向としては進行波形動作による計算値に近いものが得られた．

6. むすび

電気光学効果を用いた積形配置の導波形光変調素子は，素子の広帯域化，高能率化を行なう上で優れたものと考えられる．本文では，これまであまり考えられていなかった進行波形動作とすることにより，広帯域化を計ることを検討した．まず，電極とリブ平面ストリップ線路を用いることを考え，その電界分布，線路定数等を検討した．つぎに，$LiNbO_3$光導波路を具体例として，進行波形光変調素子の特性を考察し，集中定数形に比べ2倍以上の広帯域化が可能であることを示した．さらに，これらの結果を用いて変調素子を試作し，7.5 GHzまでの変調実験を行ない，進行波形動作の一応の確認を行なった．

この試作変調素子のマイクロ波特性は，3.7 GHz付近で挿入および反射損失が大きく（電極線路，同軸の接続部不連続によると思われる）改善の必要がある．また，電極間隔は，光波の横（x）方向の回折を考慮して 60 μmに選んでいるが，光導波路をパターン化することにより回折を抑え，電極間隔をより小さくして変調電圧，電力を低下させることが重要である．

さらに今後の課題として，位相変調でなく強度変調とすること，温度補償法について検討すること等が考えられる．また，光波と変調波との位相整合の度合を高め，より広帯域化することも興味深い．基板を低誘電率材料との2層構造とすること等により変調波に対する等価屈折率を低下することができれば，広帯域化が可能となると同時に，電極幅を広く取ることができ，線路損失の低減が期待できる．他の光集積回路素子，光ファイバー等との接続，集積化も重要な課題である．

謝辞　実験に用いた$LiNbO_3$光導波路を御提供頂だいた三菱電機中央研究所の，垂井川隆所長，中山高グループリーダ始め，関係各位に深く感謝します．

参考文献

[1] I. P. Kaminow et.al. "Efficient strip-waveguide modulator", A.P.L., 27, 10, 555 (Nov.1975)
[2] M. Izutsu, T. Sueta "Coupled Mode Analysis of Light Modulation in Dielectric Waveguides", Appl. Phys., 5, 307 (Jan.1975)
[3] S. Ramo et.al. "Field and Waves in Communication Electronics", Wiley-Toppan (1975)
[4] R.E. Collin. "Field Theory of Guided Waves" McGraw-Hill, New York (1960)
[5] "Handbook of Lasers", Chemical Rubber Co., Cleveland (1971)
[6] 山下，原木，"薄膜電気光学変調素子の分布容量"，信学全大 1210 (1974. 7月)
[7] 内藤，布下，大林，中山 "強誘電体薄膜光導波路の試作とその特性"，輸研資料 (1974, 1月)

輻射科学研究会資料

同軸形PEOTRON

—— 電子軌道の解析とその基本実験 ——

大東延久・後藤孝司・堀口只果・森田正信
（関西大学工学部）

1976年4月30日

同軸形PEOTRON

—— 電子軌道の解析とその基本実験 ——

1. まえがき

先に，われわれは電子振動を用いた光電子増倍管PEOTRONを提案し，それは入来光信号を周期的にサンプリングして増倍し，入力側では印加高周波電界の周期の90％に及ぶ広い範囲に亘って入来光信号をサンプリングし，出力側では高周波電界の周期毎のパルス出力を与える特徴をもっている。[1]
その解析は，

i) 理想的なDC電位分布（電子振動の等周期性を保つ放物線電位分布）

ii) 理想的なHF電位分布（大信号動作の解析に容易な電圧振幅の線形分布）

を仮定して行った．したがってその動作は比較的容易に解析

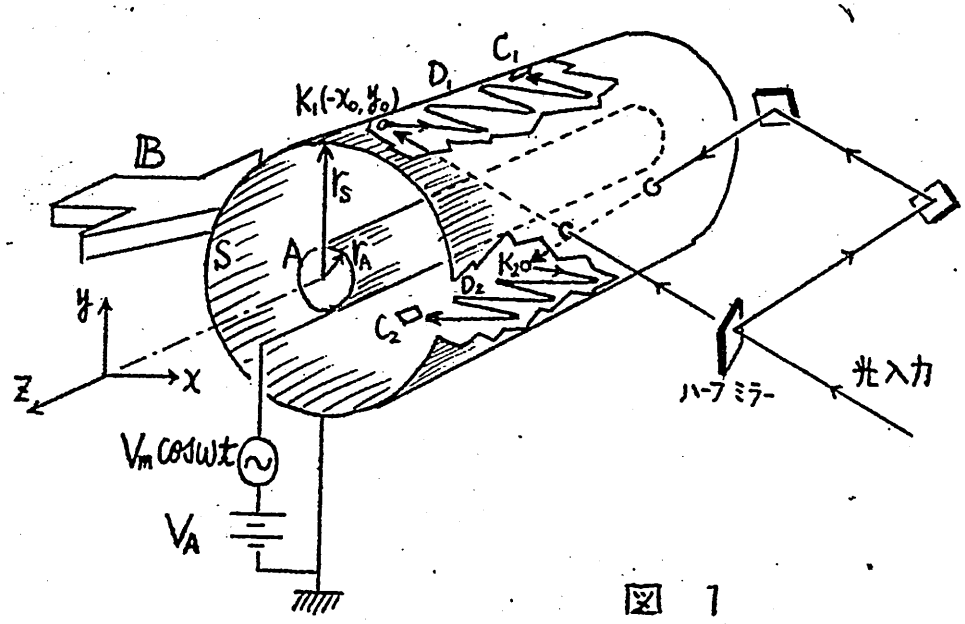


図 1

され，種々の特性がわかった．その反面，電極構造は上述の仮定を満たすようにαの値が低い理想化大阪管を用いたので複雑であり，非実用的であった．

そこで，これに対して実用性を目的とした同軸形PEOTRONを提案する．これは，同軸形STROPHOTRON[2]の電極を利用したものであり，図1のような構造をもっている．外側の円筒電極（S極）が零電位を保ち，中心円筒が陽極（A極）であり，S極上に光電陰極（K極），ダイノード（D極），集電子極（C極）がある．K極の位置r_0が外側円筒半径r_s程度に大きければ，電子はx方向に単振動する事が出来（角振動数ω_{ep}），かつ-z方向に推移運動を行う．電子増倍の目的に対して，電子振動の半周期毎に同期した高周波電界（角振動数ω）を加えるので

$$\omega = 2\omega_{ep} \qquad (1)$$

の関係でパラメーター励振を行うことになる．$\varphi = \omega t$として，$y = y_0$上の電位分布が図2のように変化するので，電子に対する加速，減速の様子は図3のようになり，出発位相$\varphi_0 \fallingdotseq 300°$の電子が最も加速される．このようにして，電子振動の半周期毎に向い側の円筒電極上のD極に電子が飛びこむ両側増倍作用を考えると，電子の出発，到着位相φ_0，φ_1の関係は

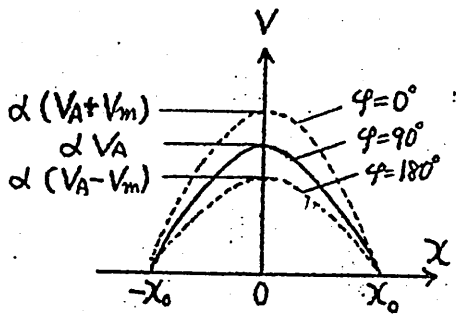


図　2

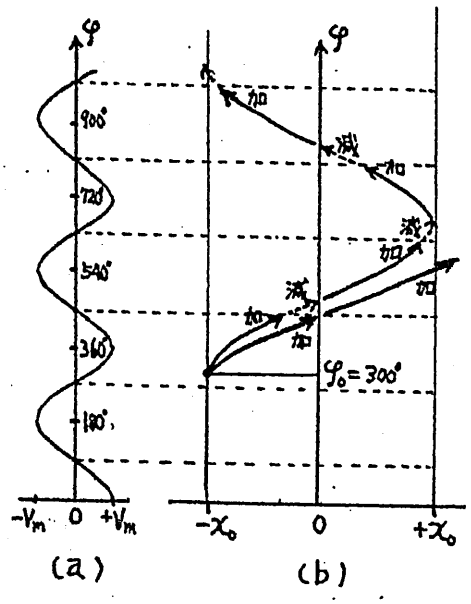


図 3

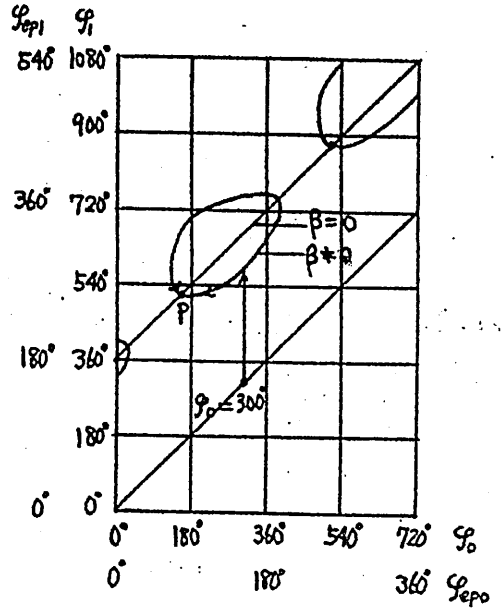


図 4

図4のようになることが予想される．両側増倍を繰り返すうちに、到着位相は P 点（φi ≒ 510° すなわち 150°）に集群される．この分布は高周波の 1 周期毎に得られるので，電子の位相集群も高周波の周期毎に起り，出力は高周波の周期毎のパルス列になることが期待される．この位相集群点は衝突エネルギー最大の位相よりずれるが，問題はこの P 点が増倍可能な衝突エネルギーをもつようにすることである．

この同軸形 PEOTRON は電極構造が簡単で，印加電圧も有効にかけられ，実用性に富んでいるが，電子軌道の解析は困難である．同軸形 STROPHOTRON では小信号動作理論によって解析されているが[2]，PEOTRON は大信号動作のためその解析は適用出来ない．前述のように，φ₀ が π_s 程度に大きければ，

電子は ω_{op} の単振動を行うが、高周波の印加により電子の運動方程式はMathieuの方程式となる。また y_0 が小さくなると電界の非線形性を生じ、結局は電子の運動方程式の解を電算機で求めなければならなくなる。その際、先に発表した理想化PEOTRONの解析結果を指導理論としてその解を検討することが出来、また高次同期[3)4)]の考え方が役立ってくる。以下その解析と、これに対する基本的な実験結果を述べる。

2. 基本式の導出

図5の電極断面について、電極内の電位Vと電界Eは次式で与えられる。

$$V = f_c \ln \frac{r_s}{r} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= f_c \frac{x}{x^2+y^2} \\ E_y &= f_c \frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ただし、

$$f_c = \frac{V_A}{L}(1+\beta\cos\omega t) \qquad (4)$$

$$\beta = V_m / V_A \qquad (5)$$

$$L = \ln \frac{r_s}{r_A} \qquad (6)$$

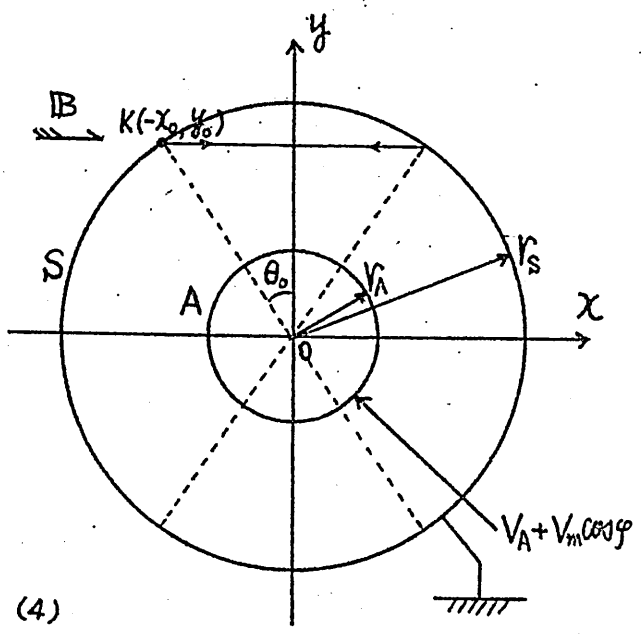


図 5

電子の運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_{ep}^2 (1+\beta\cos\omega t) \frac{y_0^2}{x^2+y^2} x \qquad (7)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_{ep}^2 (1+\beta\cos\omega t) \frac{y_0^2}{x^2+y^2} y - \omega_c \frac{dz}{dt} \qquad (8)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \omega_c \frac{dy}{dt} \qquad (9)$$

ただし

$$\omega_{ep} = \frac{1}{y_0}\sqrt{\frac{\eta V_A}{L}}, \qquad \eta = e/m \qquad (10)$$

$$\omega_c = \eta B. \qquad (11)$$

ここで，$\varphi = \omega t$ とおき，(1)式の関係を用いると(7)～(9)式は次のようになる．

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\varphi^2} = -\frac{1}{4}(1+\beta\cos\varphi) \frac{1}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} \tilde{x} \qquad (12)$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{d\varphi^2} = -\frac{1}{4}(1+\beta\cos\varphi) \frac{1}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} \tilde{y} - r_{wc} \frac{d\tilde{z}}{d\varphi} \qquad (13)$$

$$\frac{d^2\tilde{z}}{d\varphi^2} = r_{wc} \frac{d\tilde{y}}{d\varphi} \qquad (14)$$

ただし，

$$\tilde{x} = x/y_0, \quad \tilde{y} = y/y_0, \quad \tilde{z} = z/y_0 \qquad (15)$$

$$r_{wc} = \omega_c/\omega \qquad (16)$$

である．電子の運動エネルギー Ψ [eV] は

$$\Psi = \frac{1}{2\eta}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{\omega^2 y_0^2}{2\eta}\left\{\left(\frac{d\tilde{x}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{z}}{d\varphi}\right)^2\right\} \qquad (17)$$

となり，その規格化エネルギーは次式となる．

$$\hat{\Psi} = \frac{\Psi}{V_A} = \frac{2}{L}\left\{\left(\frac{d\tilde{x}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{z}}{d\varphi}\right)^2\right\} \qquad (18)$$

3. 電子軌道

(7)式中に現われる分数が1の場合、すなわち

$$\frac{y_0^2}{x^2+y^2} = \cos^2\theta = 1 \qquad (19)$$

が成り立つとき、(7)式はMathieuの方程式となり、更にβ=0のstaticな場合は単振動の解をもつようになる。このとき、電子はx方向の変位に比例した復元力を受けることから(19)式が成り立つ場を線形場とよぶ事にする。したがって電子振動の角振幅θが小さい間は線形場に近い動作となるが、θが大きくなると電子に対する電界の非線形性が現われる事になる。以下、その各場合について電子運動の様子を調べる。

3・1 線形場でstaticな場合(この場合をperfect caseとし、諸量に添字pを付ける)

この状態は実際上有り得ないが、基本的な電子運動の様子を求めるために調べる。(7)～(9)式は、この場合

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_{ep}^2 x \qquad (20)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_{ep}^2 y - \omega_c \frac{dz}{dt} \qquad (21)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \omega_c \frac{dy}{dt} \qquad (22)$$

となる。したがって、次式の解を得る。

$$x = -x_0 \cos(\varphi_{ep} - \varphi_{epo}) \qquad (23)$$

$$y = -\frac{y_0}{r_{wp}^2}\{1 - \cos r_{wp}(\varphi_{ep} - \varphi_{epo})\} + y_0 \qquad (24)$$

$$z = -y_0 \frac{\sqrt{r_{wp}^2 - 1}}{r_{wp}^3}\{r_{wp}(\varphi_{ep} - \varphi_{epo}) - \sin r_{wp}(\varphi_{ep} - \varphi_{epo})\} \qquad (25)$$

ただし、

$$\varphi_{ep} = \omega_{ep} t, \quad \omega_{mp}^2 = \omega_{ep}^2 + \omega_c^2 \qquad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} r_{wp} &= \frac{\omega_{mp}}{\omega_{ep}} = \sqrt{1+\left(\frac{\eta B}{\omega_{ep}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{\eta B^2 y_0^2 L}{V_A}} \\ &= \sqrt{(2r_{wc})^2+1} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

であり、初期条件は $\varphi_{ep}=\varphi_{epo}$ で、$x=-x_0$, $y=y_0$, $z=0$; $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dt}=0$ としている.

(23)式により、電子は x方向に ω_{ep} の単振動を行い、(24), (25)式により、yz 面内で ω_{mp} $(=r_{wp}\omega_{ep})$ の回転運動を行いながら-z方向に推移する運動を行う. この回転に伴う y, z 方向の振幅は、それぞれ

$$\left.\begin{aligned} y_{Ap} &= |y_0| / r_{wp}^2 \\ z_{Ap} &= |y_0|\sqrt{r_{wp}^2-1} / r_{wp}^3 \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

であり、$z_{Ap} < y_{Ap}$ であるが、r_{wp} が大きくなると円運動とみなせる. $r_{wp}=4$ の場合の xy 面内の電子軌道を図6に示し、$y=y_0$ より上に上る事はない. z方向には φ_{mp} $-\sin\varphi_{mp}$ の形で運動し、$y_0>0$ なら -z方向に推移するが、向い側のダイノードに到着した時の z方向距離 z_{1p} は

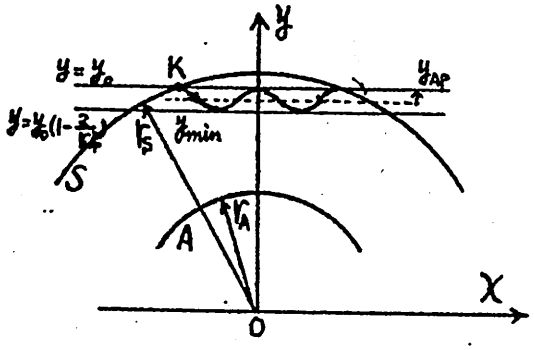


図 6

$$z_{1p} = \frac{|y_0|\sqrt{r_{wp}^2-1}}{2}\frac{}{r_{wp}^3}(2\pi r_{wp} - \sin 2\pi r_{wp}) \quad (29)$$

で与えられる. r_{wp} が大きいときは

$$z_{1P} \fallingdotseq |y_0| \frac{\pi}{r_{wp}} \qquad (30)$$

と表現出来る．また，xy面内の電子運動に対して $y_{min} > r_A$ の制限を受け，この条件を満たす r_{wp} の値は次のようになる．

$$r_{wp} > \sqrt{\frac{2}{1-\tilde{r}_s}} \equiv r_{wpc}, \quad \tilde{r}_s = \frac{r_s}{y_0} \qquad (31)$$

3・2 線形場で高周波の加わった場合

この場合，(12)～(14)式は φ_{ep} ($= \frac{1}{2}\varphi$) を使って

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\varphi_{ep}^2} + (1+\beta\cos 2\varphi_{ep})\tilde{x} = 0 \qquad (32)$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{d\varphi_{ep}^2} + (1+\beta\cos 2\varphi_{ep})\tilde{y} + 2r_{wc}\frac{d\tilde{z}}{d\varphi_{ep}} = 0 \qquad (33)$$

$$\frac{d^2\tilde{z}}{d\varphi_{ep}^2} - 2r_{wc}\frac{d\tilde{y}}{d\varphi_{ep}} = 0 \qquad (34)$$

と表現出来る．x方向の電子の運動方程式(32)式は，Mathieu の方程式の標準形

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\varphi_{ep}^2} + (\lambda - 2q\cos 2\varphi_{ep})\tilde{x} = 0 \qquad (35)$$

の $\lambda=1$, $q=-\beta/2$ の場合を示している．βの値は，高周波電界のすべての位相で電子がK極を出発出来るためには

$$0 < \beta < 1 \qquad (36)$$

の制限を受けるが，その内でなるべく大きな値をとるので $q \fallingdotseq -0.5$ となる．これらλ，qの

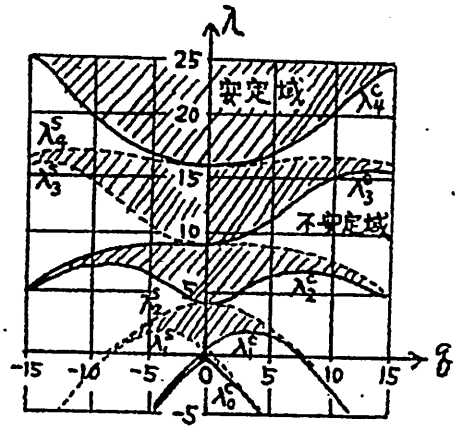


図 7

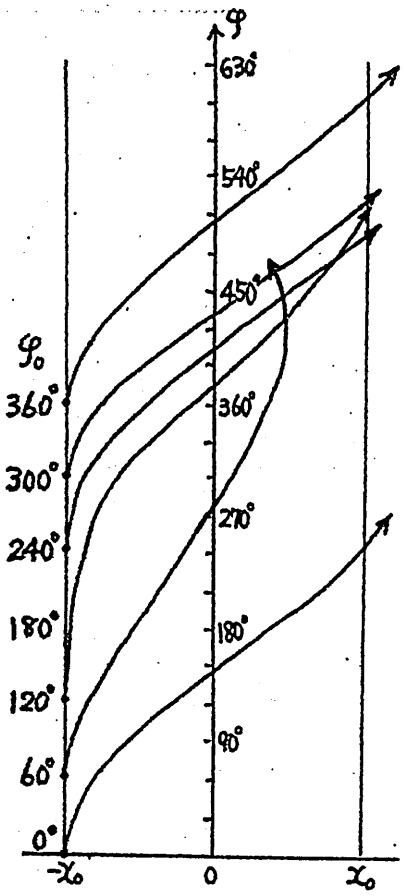


図　8

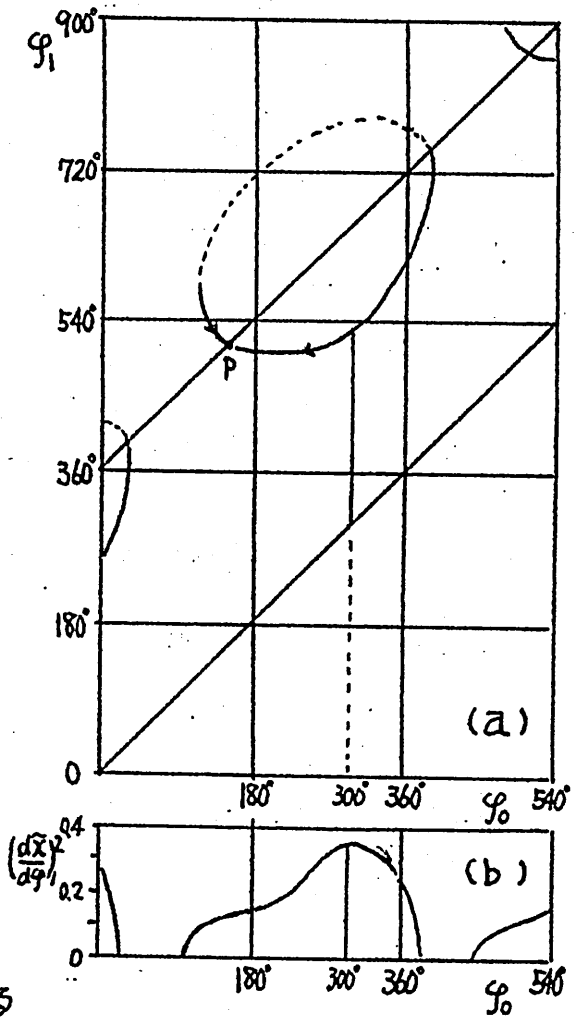


図　9

値によって、図7からわかるように(35)式の解は不安定解をとり、電子振動の振幅は次々に増大し、毎回、向い側のD極で増倍を繰り返す両側増倍が期待出来る。

(35)式の解は、各出発位相 φ_0 の電子に対して、β のべき級数の形で摂動法を用いて求めることが出来るが、[5)6)] その展開式は相当に複雑になる。ここでは(32)式を電算機を用いて解いた結果を示す。図8は、$\beta=0.9$ の場合の $\varphi(=2\varphi_{ep})$ に

よる $\tilde{z}$ の変化を，φ_0 $(=2\varphi_{epo})$ をパラメーターとして示す．これによって得られる出発，到着位相 φ_0, φ_1 の関係および，到着時のエネルギーに対応する $\left(\frac{d\tilde{z}}{d\varphi}\right)_1^2$ の変化を図9(a)，(b)に示す．その結果 $\varphi_0 \fallingdotseq 100° \sim 380°$ 間の電子が位相集群のためのグループを作り，$\varphi_0 \fallingdotseq 300°$ の電子が最も加速されて衝突することがわかる．

3・3　非線形場で高周波の加わった場合

この場合は実際の場合であって，(12)～(14)式の連立微分方程式を電算機で直接解くことになる．与えた数値は，

$\beta = 0.9$

$f = 160\,MHz$

$B = 800\,G$

$\therefore \gamma_{wc} = 13.99$

であり，$\varphi = \varphi_0$ で

$\theta_0 = 30°$

$\therefore \tilde{z}_0 = 0.5774$

として計算した．修正Euler法[7][8]

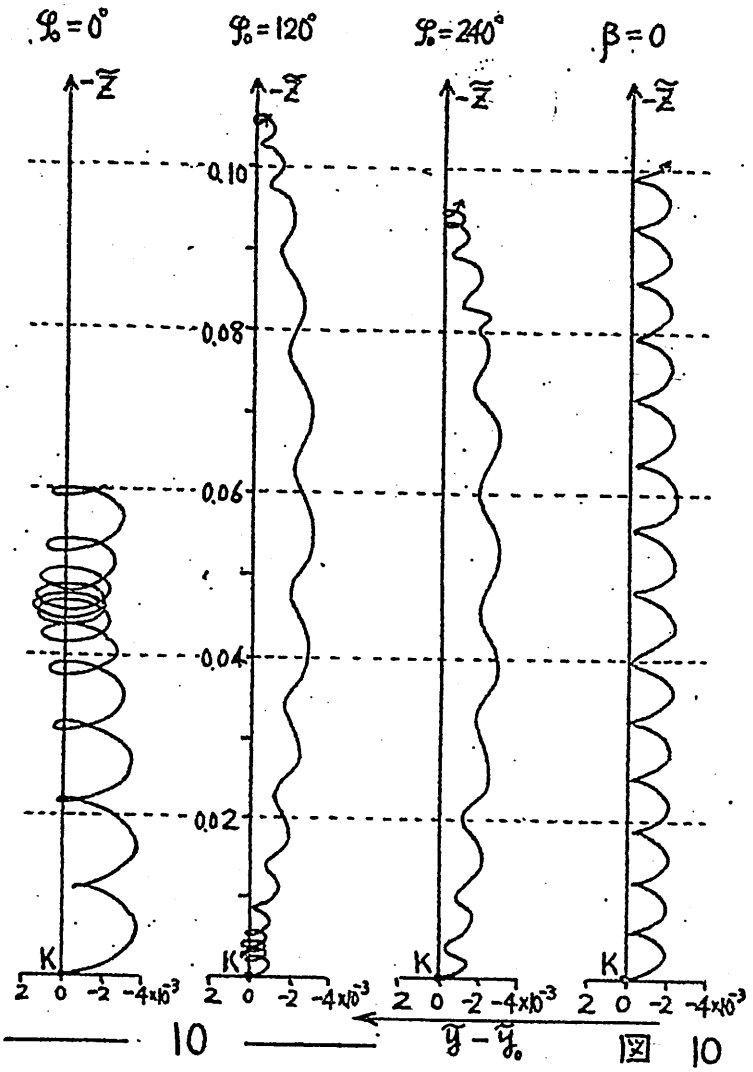


図 10

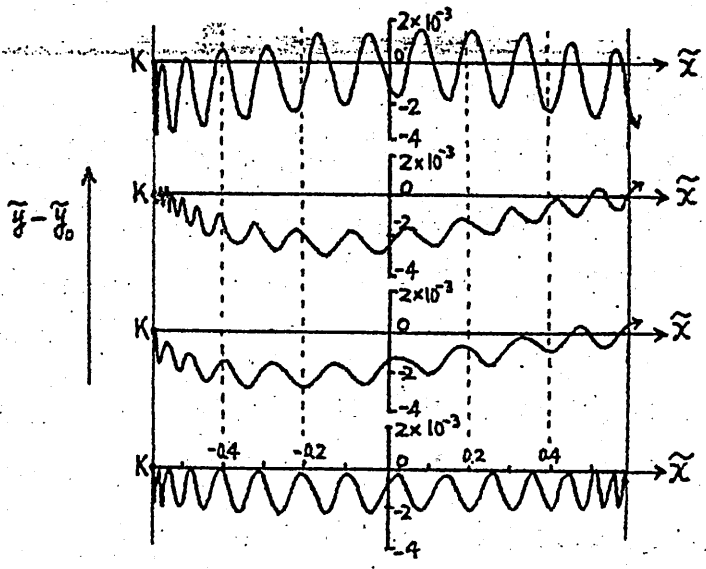

$\tilde{y}-\tilde{y}_0$
K
$\tilde{x}$
2×10^{-3}
0
-2
-4
-0.4
-0.2
0.2
0.4
$\varphi_0 = 0°$
$\varphi_0 = 120°$
$\varphi_0 = 240°$
$\beta = 0$

図 11

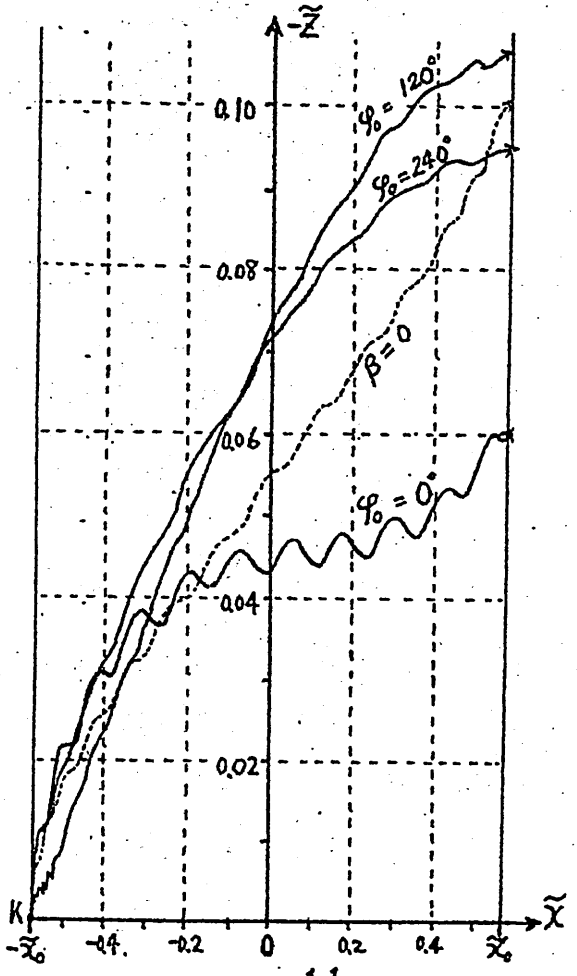

$-\tilde{z}$
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
$\varphi_0 = 120°$
$\varphi_0 = 240°$
$\beta = 0$
$\varphi_0 = 0°$
K
$\tilde{x}$
$-\tilde{x}_0$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\tilde{x}_0$

図 12

による計算結果を図10～12に示す.

今の場合のz方向到着距離$\tilde{z}_1$とy方向の振幅$\tilde{y}_A$を(30),(28)式から計算すると

$$\tilde{z}_{1P} \fallingdotseq \pi / r_{wp} = 0.112 \qquad \tilde{y}_{AP} \fallingdotseq 1/r_{wp}^2 = 1.28 \times 10^{-3}$$

となる. 図12では到着領域が$\tilde{z}_1 = 0.06 \sim 0.11$となっていて, staticの場合より平均的にみて約20%程小さい. これは高周波電界の影響と考えられる. 軌道が波を打つのはyz面内の小さな回転運動によるためである. 図11から, $\tilde{y}_A$は全体的にみて10^{-3}程度であり, 上記の$\tilde{y}_{AP}$の値に合う. また, 電子軌道は$y = y_0$よりも上ることはないという3·1の解析結果が図11の場合でも大略満たしていることがわかる. また, $-x_0$からx_0へ向う間に, 電子軌道がy方向に10～15振動しているが, これは$r_{wp} = 28$が示す14振動を中心として多少変動していることがわかる.

以上のことから, (12)～(13)式を実際に解いて得られる結果は, 3·1の単純化した結果と基本的には変らないが, 各数値はその基本線から多少ずれた値になる事がわかる.

図11, 12の計算から得られる$\tilde{y}_0$-$\tilde{y}_1$曲線と, 衝突時における$(\frac{dy}{dz})^2$特性は図13(a),(b)のようになる. 図13(a)に入れた実線直線群は, (25)式から計算した等$\tilde{z}_{1P}$直線群で, これは線形場のstaticな場合のz方向到着位置を示して居り, 今の実際的な場合と違うが, 一応の$\tilde{z}_1$の目安になるとして試したものである. これにより, 図12のz方向到着位置が$\tilde{y}_0$によって

異り、$\varphi_0 = 120°$ の電子が最も遠くへ、$\varphi_0 = 300°$ の電子が最も近くへ到着することが理解される。$\varphi_0 = 0°(360°)$ の電子が更に近くに到着しているのは、非線形場や高周波の影響によると思われる。

図13(b)の衝突時の $(\frac{dx}{d\varphi})^2$ 特性により、所要の衝突エネルギーをもつ電極を設計する事が出来る。この図より、広い位相範囲に亘って出発電子を増倍するには、少くとも $(\frac{dx}{d\varphi})_1^2 = 0.04$ が、$\mathcal{E}_1 = 100$ eV に対応させなければならない（サンプリング比 = 68 %）。 $\therefore \mathcal{E}_1/(\frac{dx}{d\varphi})_1^2 = 2500$ (37)

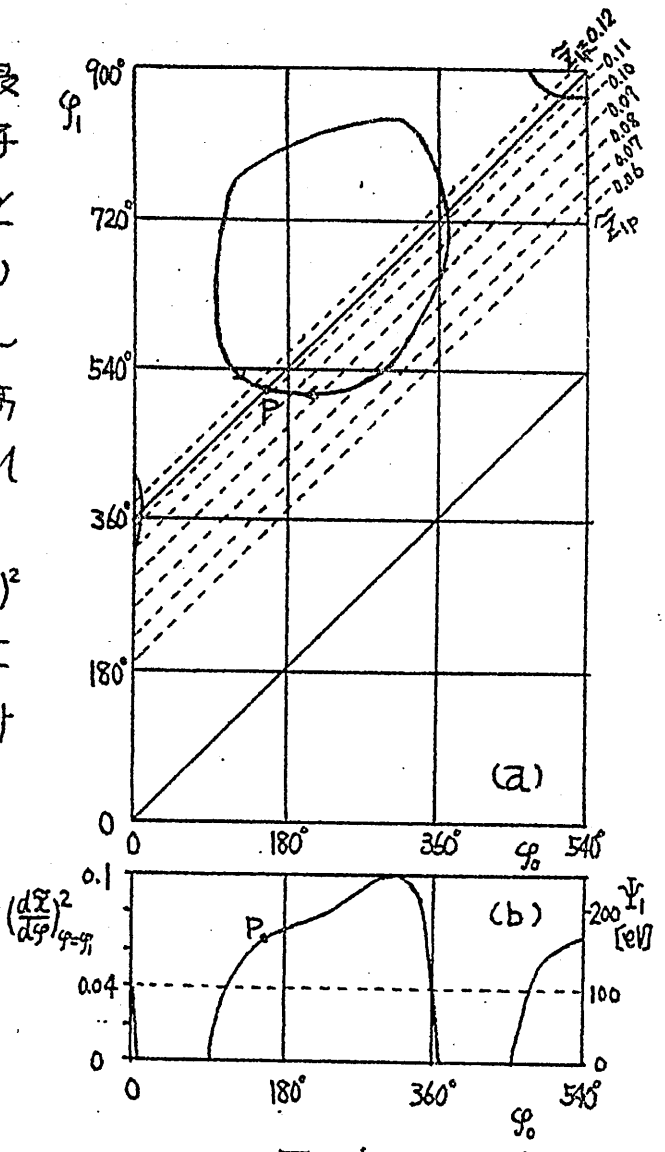


図 13

(18)式から $V_A/L \fallingdotseq \frac{1}{2}\{\mathcal{E}_1/(\frac{dx}{d\varphi})_1^2\} = 1250$ (38)

(10)式にこの関係を入れて $\omega t_0 \fallingdotseq \sqrt{2\eta\{\mathcal{E}_1/(\frac{dx}{d\varphi})_1^2\}} = 2.97\times10^7$ (39)

の関係を得る。

(38)式により $r_s/r_A = 1.2$ ($L = 0.182$) なら $V_A = 228$ V

$\therefore V_m = 0.9\, V_A = 205\, V_{pp} = 73\, V_{eff}$

(39)式により　$f = 160$ MHz なら $y_0 = 29.5$ mm

$\therefore \theta_0 = 30°$ なら $r_S = 34.1$ mm , $r_A = 28.4$ mm

4. 基本実験

実験は、本来は光電陰極の試作管で行うべきはずであるが、理論のチェックの意味で熱陰極の試作管（図14）を作った。

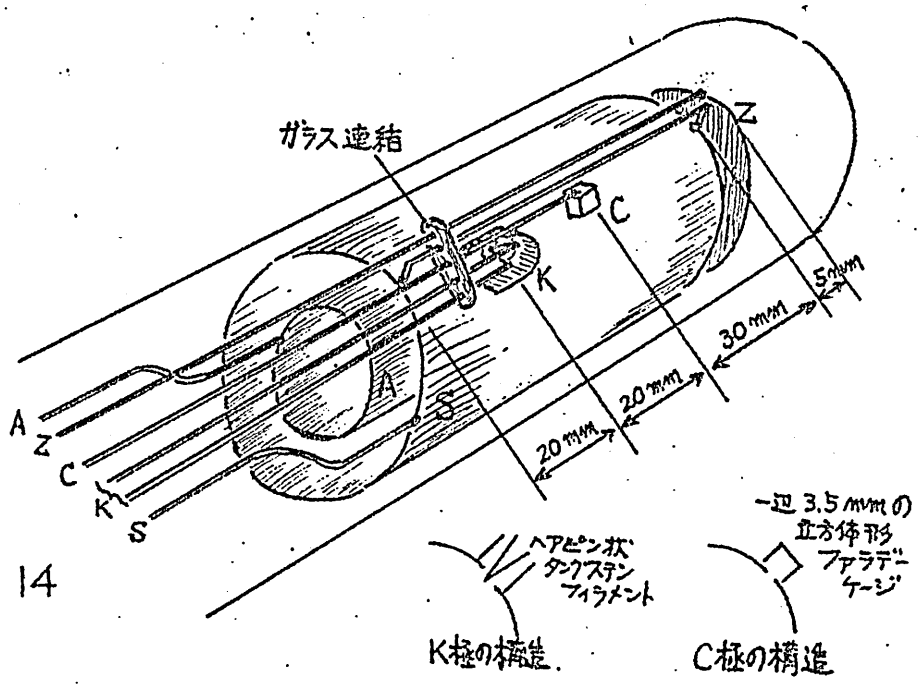


図　14

この電極は製作容易な寸法として、

$r_S = 15$ mm , $r_A = 10$ mm

の値を採用して、先ず作ったものである。この値によると(38)式によって、(37)式の値は500位になり、衝突エネルギーは図13(b)左側縦軸の1/5位に低くなる。また、特別の二次電子

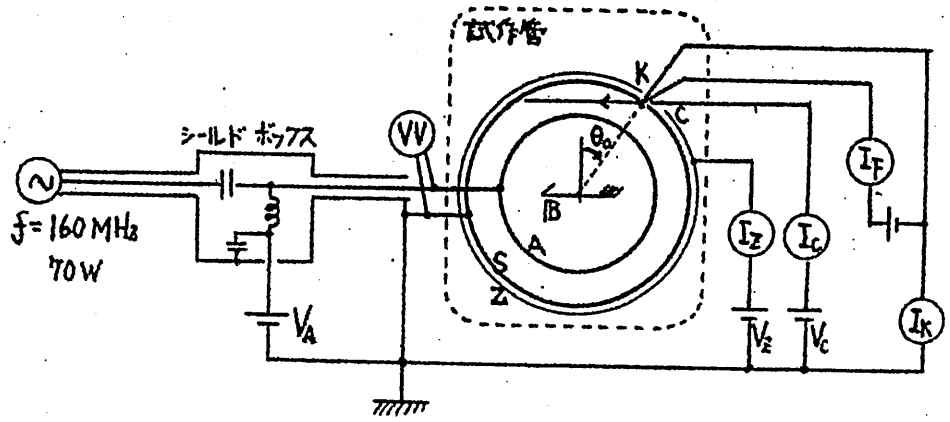


図　15

面もなく、M_o 板のままであるので増倍作用は望めず、たゞその基本特性を調べる目的で行った。電極は、すべて 0.2 mm 厚の M_o 板を用い、K極は 0.15 mmφ のトリタンをヘアピン状にして用い、C極はファラデーケージ形とし、これらK, C極はS極円筒上に 20 mm の間隔で 1.5 mmφ の孔をあけて作ってある。尚、試作管は封じ切り管である。結線図は図15に示す通りで、印加高周波電圧は、バルボル(VV)で、試作管の入口の電極リード線のところで測定した。

4・1　I_c 電流の磁界特性

図16は、磁界による各電流値の変化を示す。I_c の値が磁界変化に対して周期的に変化するのは、電子軌道のZ方向のピッチ $2z_1$ が磁界の増加と共に小さくなるために、丁度C極に流入出来る磁界が不連続となるためである。この I_c ピーク点の各磁界について、(27), (30)式から、$\nu_{\omega p}$, $2z_{1p}$ を計算すると表1のようになる。n_p は、これらの値による、K極か

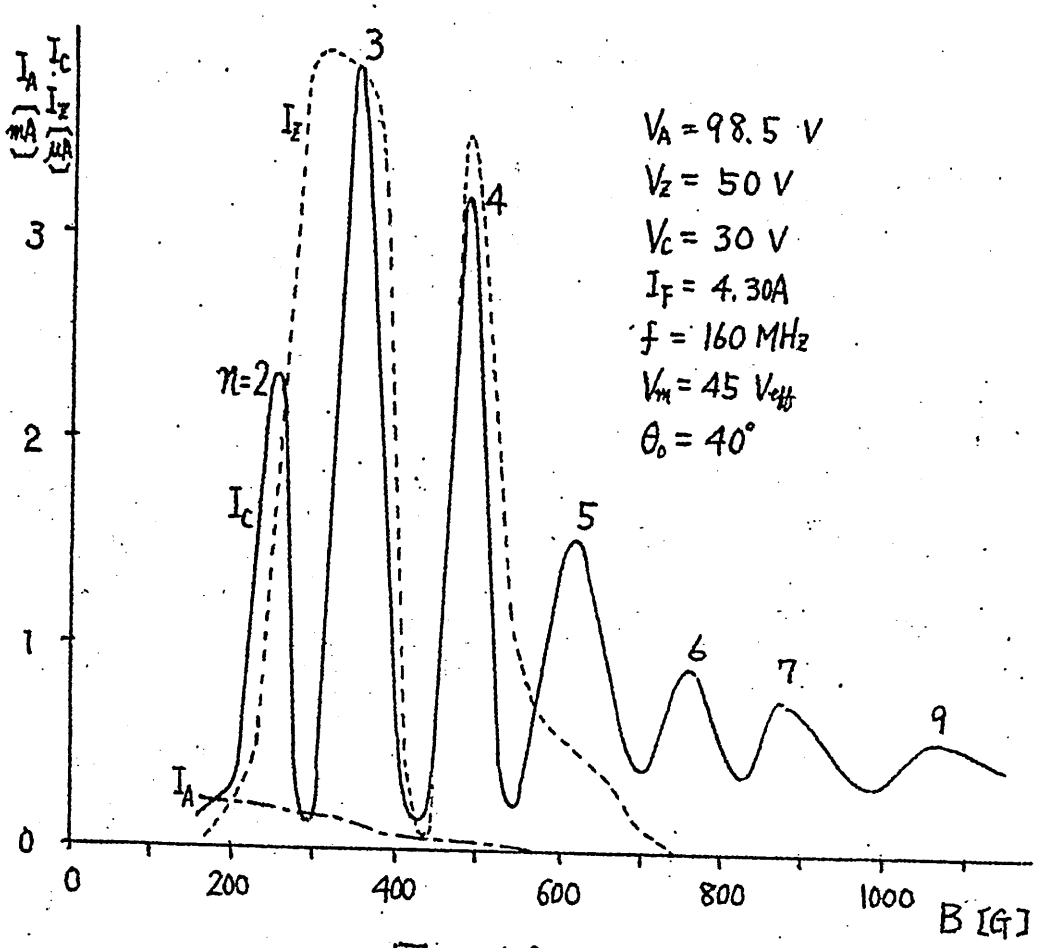


図 16

表 1 I_C ピーク点の磁界

B [G]	250	350	480	620	755	870	1060
r_{wp}	7.79	10.9	14.9	19.2	23.4	26.9	32.8
$2\tilde{z}_{ip}$	0.807	0.579	0.423	0.327	0.269	0.234	0.192
$n_p = \tilde{l}_z / 2\tilde{z}_{ip}$	2.15	3.01	4.12	5.32	6.47	7.45	9.08

らC極まで電子が推移する間の，Z方向の往復回数を示す．ここで，$r_0 = r_s \cos\theta_0 = 11.5$ mm，K,C 間距離 $l_z = 20$ mm，故に $\tilde{l}_z = l_z / r_0 = 1.74$ である．この n_p は線形場で static な

場合の計算値であるが、特に最初の間は、ほゞ整数値に近い値になっている。実際の場合の往復回数 n はこれに近い整数値をとると考え、この n が図16の I_c ピーク値に記した数値である。$n=3$ 以上では I_c ピークの値が減少して行くが、これは、衝突エネルギー不足による二次電子放出比 δ の低下のためと考えられる。

なお、この場合の臨界磁界指数は、(31)式より $\gamma_{wpc}=2.45$ となり、その磁界は $B_c=72.3\,G$ となる。それにもかかわらず $n=1$ ($\gamma_{wp}=3.61$, $B=112\,G$) が出ないのは、K極の向い側に達した時に y 位置が相当下り、そのために帰りの途中でA極にとられるのではないかと考えられる。

4・2 螢光物質による到着位置の観測

図14と同形状、同寸法の電極であるが、S極を半円筒にして、内面に螢光物質(ZnS)を塗布し、到着位置が観測出来るようにした試作管を作った。この概観は図17に示す通りである。($r_S=15\,mm$, $r_A=10\,mm$, $\theta_0=20°$, $y_0=14.1\,mm$).

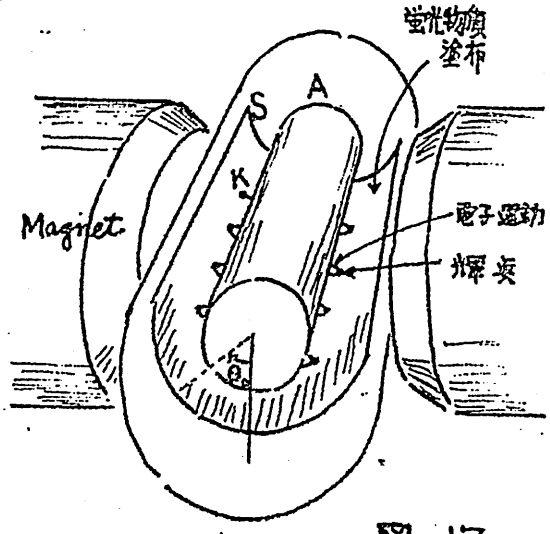
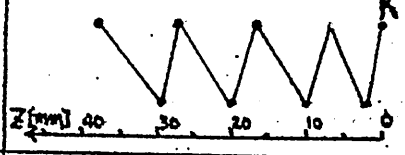
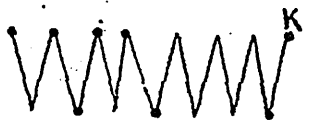
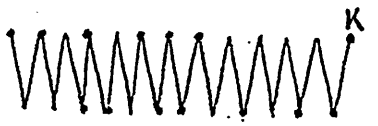


図 17

表2は、これによる観測結果を一括して示したもので、輝点の位置は観測出来た点だけ「•」で示してある。表中、2行は実測によるZ方向ピッ

表 2　　$\theta_0 = 20°$, $V_m = 118\ V_{eff}$, $I_F = 3.20\ A$

V_A	B	γ_{wp}	S極上の輝点の分布	$2\tilde{z}_1$	$2\tilde{z}_{1p}$	$2\tilde{z}'_{1p}$	$\frac{2\tilde{z}_1}{2\tilde{z}_{1p}}$	f_{ep}	$\frac{f}{f_{ep}}$
[V]	[G]			実測値(平均値)	計算値	×0.8		[MHz]	
134	532	17.3		0.674	0.363	0.290	2.32	86.0	1.86
106	498	18.2		0.638	0.345	0.276	2.32	76.5	2.09
116	532	18.6		0.355	0.337	0.270	1.31	80.1	2.00
106	532	19.5		0.284	0.323	0.258	1.10	76.5	2.09

ナ，$2\tilde{z}_{1p}$ は (30)式による線形場で static な場合の z方向ピッチ，$2\tilde{z}'_{1p}$ (= $0.8 \times 2\tilde{z}_{1p}$) は，3・3 で述べた非線形場で高周波の加った場合への大雑把な換算値を示している．これにより，実測値 $2\tilde{z}_1$ は γ_{wp} が大きくなると

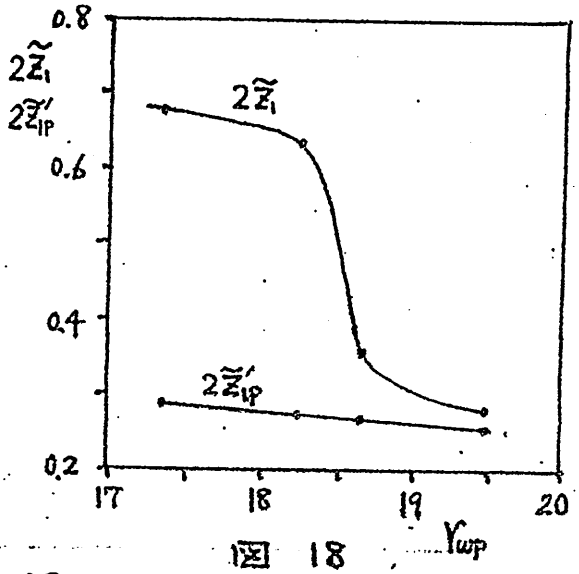


図 18

$2\varepsilon_{ip}$ に近かづく事がわかる．図18はこれを示したものであるが，この現象は理想化PEOTRONでも同様に起り，それは次のように説明出来る．図18の2つの値のずれは，蛍光物質（絶縁物）に電子が荷電して等価的な V_A の値が上るためであり，γ_{wp} が大きくなると電子の到着位置が一点に集中するため荷電密度を増し，遂に放電して絶縁物がない状態になるため，実測値は計算値と一致してくると考えられる．

このことから，$2\varepsilon_{ip}$ の考えによるその値は，大体信用出来るものと思われる．

5. あとがき

以上により，実験に容易な同軸形PEOTRON内の電子運動の様子が明らかになり，実際の場合の電子軌道は定性的には線形場でstaticな場合の軌道の考え方が適用出来，定量的にはそれよりも或る程度のずれを生ずる程度である事がわかった．実験は不十分であるが，基本的には上記解析結果で説明出来る特性が得られた．今後は，これを基にした本格的な試作管により実験を進めて行くつもりである．

終わりに，本研究に対して御懇篤な御助言を賜わりました大阪大学基礎工学部末田正教授に深謝しますと共に，種々御討論願った関西大学大学院研修生飯田幸雄氏に感謝します．

なお，本研究の数値計算にあたっては，関西大学電子計算機室の施設を利用した事を附記する．

文　　献

1) 大東・倉田・森田："電子振動を用いた光電子増倍管—PEOTRON—の解析"，信学論(C), 58-C, 7, p.341 (昭50-07).

2) B. Agdur : "The Strophotron", Crossed-Field Microwave Devices II, p.93, Academic Press NY (1961).

3) 大東・倉田・森田："PEOTRONの高次同期動作とそのゲート機構の解析"，信学会電装研資, ED75-2 (1975-05).

4) 大東・倉田・森田："PEOTRONの高次同期動作の解析"，信学論(C) 昭51-7月号掲載予定.

5) McLachlan N.W. : "Theory and application of Mathieu functions", Dover Pub. Inc. NY

6) 寺沢寛一編：自然科学者のための数学概論(応用編), P146, 岩波書店 (1974).

7) 磯田和男・大野豊監修：Fortranによる数値計算ハンドブック，オーム社 (昭46-5).

8) P. ヘンリチ著，清水留三郎，小林光夫共訳，計算機による常微分方程式の解法 I，KKサイエンス社，(昭48-5).

輻射科学研究会資料

導波管形バラクタ・チューニング・インパットダイオード発振器の等価回路

豊田幸弘
（大阪工業大学）

昭和51年4月30日
（於 関西大学）

導波管形バラクタ・チューニング・インパット ダイオード発振器の等価回路

1 まえがき

インパットあるいはガンダイオード発振器の論文については数多くの論文が発表されている。インパットあるいはガンダイオード発振器のチューニング方法としては，機械的同調[1]，ピンダイオード[2]，YIG[3]，バラクタダイオードなどがある。広帯域機械的同調発振器の場合には周波数飽和とヒステリシスがあり，ピンダイオードは損失の点で，YIGは高速応答の点で不適である。

この論文の目的は導波管内にバラクタダイオードとインパットダイオードをマウントしたときの等価回路の解析とチューニング発振特性を報告する。導波管内にダイオードをマウントした等価回路の解析については，1974年にM.Dean[4,5]は導体棒の下にガンダイオードとバラクタをマウントしたときの等価回路を仮定して発振器の実測値と計算値と比較している。1974年に，O.L.EL-SAYED[6]は2本の導体棒の下にダイオードをマウントした盆過形の等価回路をdyadic Green関数を用いて求めており，発振器の設計方法については ふれていない。したがって，著者は導波管内に2個のダイオードを直接マウントしたときの発振器を考案し，その等価回路を高次の反射の影響を考慮に入れて電磁界を解いて求めた。

2 導波管のZ軸方向に導体棒の下にダイオードを装荷したときの解析と等価回路

導波管のZ軸方向に導体棒の下にバラクタダイオードとインパットダイオードをマウントした構造を図1に示す。

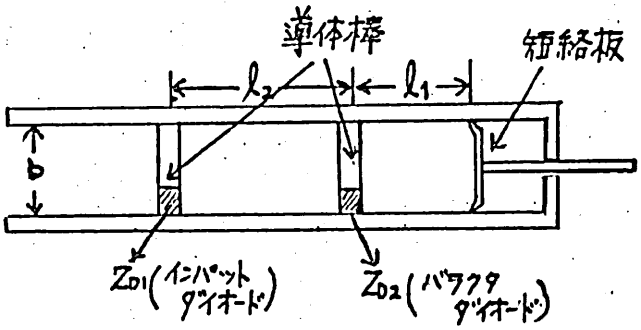


図1　Z軸方向に導体棒の下にダイオードを装荷した発振器の構造

図1に示すように，導波管の中央に導体棒の下にZ_{D1}（インパットダイオード）をマウントし，l_2を隔てて導体棒の下にZ_{D2}（バラクタダイオード）をマウントする。Z_{D2}の後方には短絡板をおいてある。図1に示す構造の等価回路は文献[9]から求めた。

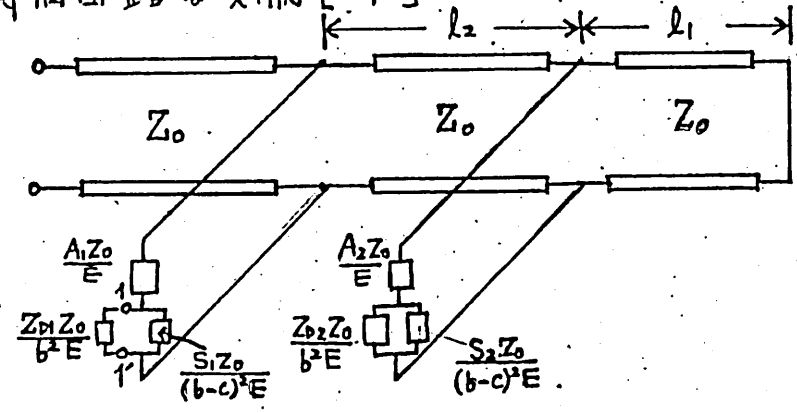


図2　等価回路

図2の等価回路のA_1, A_2, S_1, S_2は

$$\frac{A_1Z_0}{E} = j\frac{\Gamma_{10}Z_0}{4}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{\Gamma_{m0}}\left[\cos\left(\frac{m\pi r}{a}\right)-\cos\left\{\frac{m\pi(2d+r)}{a}\right\}\right] \quad (1)$$

$$\frac{A_2Z_0}{E} = j\frac{\Gamma_{10}Z_0}{4}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi d}{a}\right)\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{\Gamma_{m0}}\left(1-e^{-2\Gamma_{m0}l}\right)\cdot\left[\cos\left(\frac{m\pi r}{a}\right)-\cos\left\{\frac{m\pi(2d+r)}{a}\right\}\right] \quad (2)$$

$$\frac{S_1 Z_0}{(b-c)^2 E} = -j \frac{\Gamma_{10} Z_0}{2(b-c)^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}{\Gamma_{mn}} \cdot \left[\cos\left(\frac{m\pi r}{a}\right) - \cos\left\{\frac{m\pi(2d+r)}{a}\right\}\right] \left\{\frac{\sin\left(\frac{n\pi c}{b}\right)}{\frac{n\pi}{b}}\right\}^2 \quad (3)$$

$$\frac{S_2 Z_0}{(b-c)^2 E} = -j \frac{\Gamma_{10} Z_0}{2(b-c)^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}{\Gamma_{mn}} (1 - e^{-2\Gamma_{mn} l}) \cdot \left[\cos\left(\frac{m\pi r}{a}\right) - \cos\left\{\frac{m\pi(2d+r)}{a}\right\}\right] \left\{\frac{\sin\left(\frac{n\pi c}{b}\right)}{\frac{n\pi}{b}}\right\}^2 \quad (4)$$

$$E = \frac{2}{ab} \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right) \sin\left\{\frac{\pi(d+r)}{a}\right\} \quad (5)$$

となる。

図2のイーイ端子からインパットダイオードを取り除いて導波管側を見たアドミタンスの虚数部 $I_m(-Y_L)$ とインパットダイオード（NEC製品 Sip^+-n-n^+）のアドミタンスの虚数部 $I_m(Y_{D1})$ の曲線を図3に示す。

図3に示すように両曲線の交わる点が共振周波数である。バラクタダイオードのバイアス電圧を0(V)から−6(V)まで変化させても周波数の変化は約190MHzである。また、l_1 を変化させても $I_m(-Y_L)$ の曲線はほとんど変らない。実測値がないので文献4), 5)に示す実測値と比較すると傾向は良く一致している。

3. 導波管のZ軸方向に直接ダイオードを装荷したときの解析と等価回路

導波管のZ軸方向に直接バラクタダイオードとインパットダイオードをマウントした構造を図4に示す。

図4に示すように，導波管の中央に Z_{D1}（インパットダイオード）をマウントし，l_2 を隔てて Z_{D2}（バラクタダイオード）をマウントする。Z_{D2} の後方には短絡板をおいてある

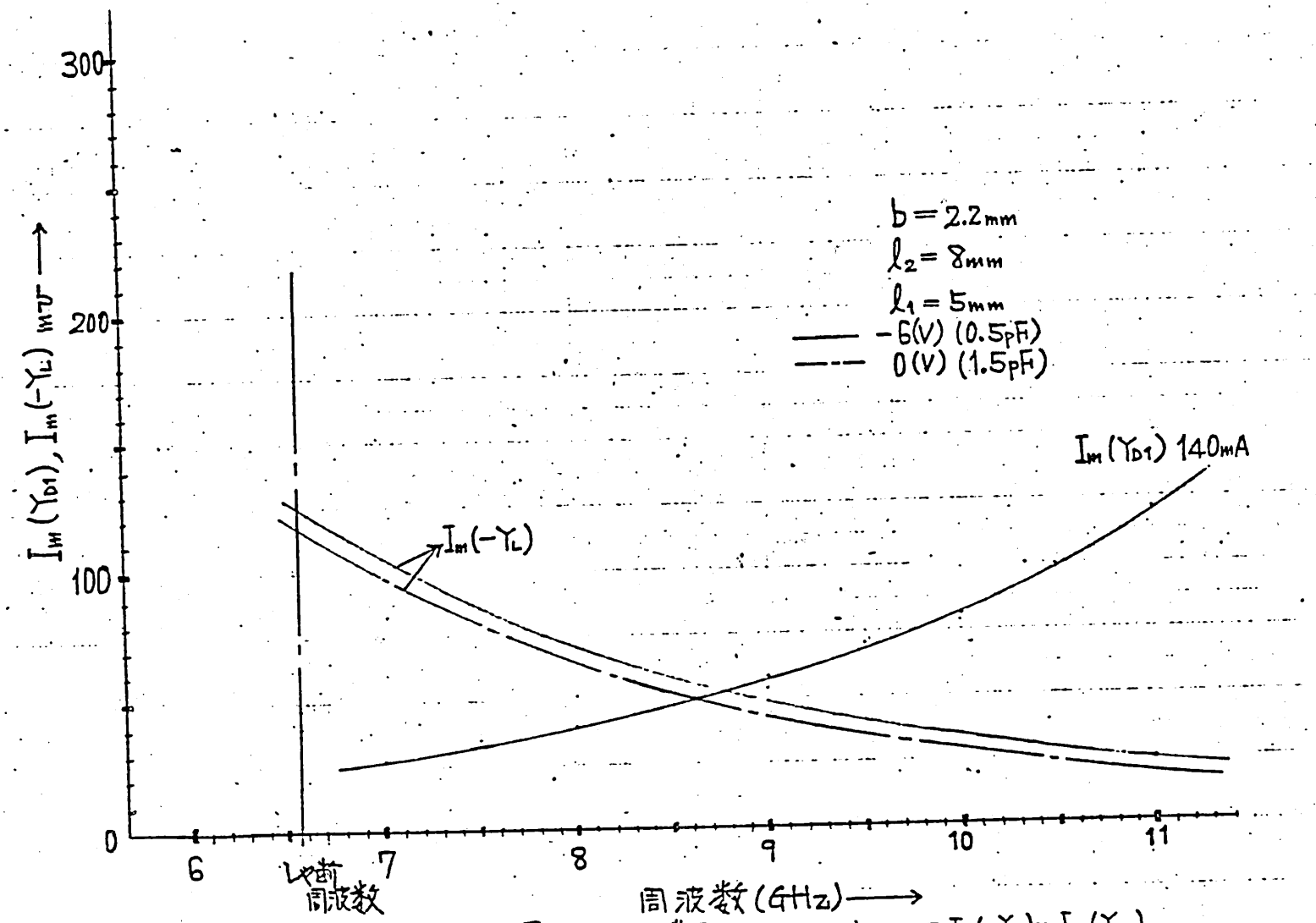


図3　図2の1-1'端子からみたアドミタンス $I_m(-Y_L)$ と $I_m(Y_{D1})$

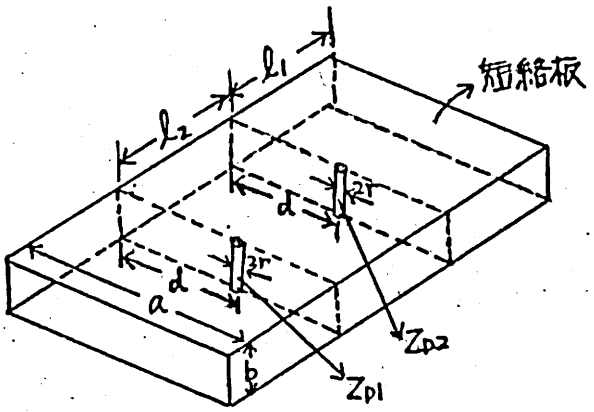


図4 導波管のZ軸方向に直接ダイオードを装荷した共振器の構造

ここでは導波管の高さはダイオードの寸法と一致する場合を考える。したがって，ここではダイオードに流れる電流は一定であると仮定する。

図4に示す構造の共振器の等価回路は文献［10］から求めた。

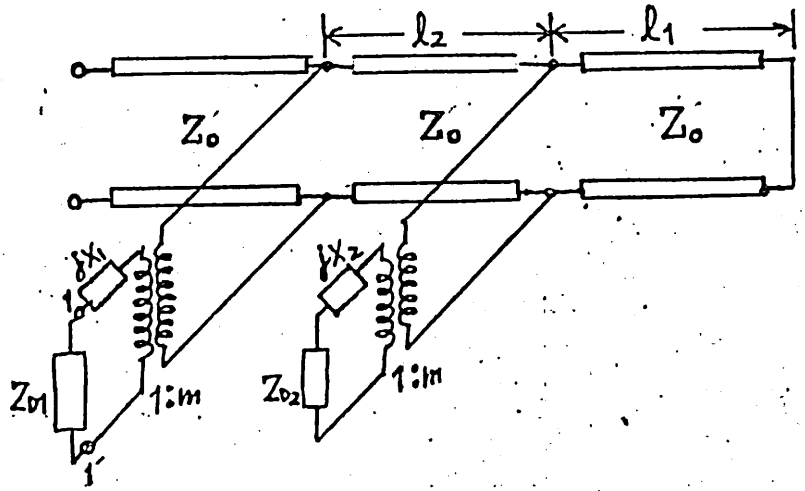


図5 等価回路

図5に示す X_1, X_2 は

$$X_1=\frac{\omega\mu_0 b}{a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Gamma_n}\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\} \qquad (6)$$

$$X_2=\frac{\omega\mu_0 b}{a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\Gamma_n}(1-e^{-2\Gamma_n l})\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\sin\left\{\frac{n\pi(d+r)}{a}\right\} \qquad (7)$$

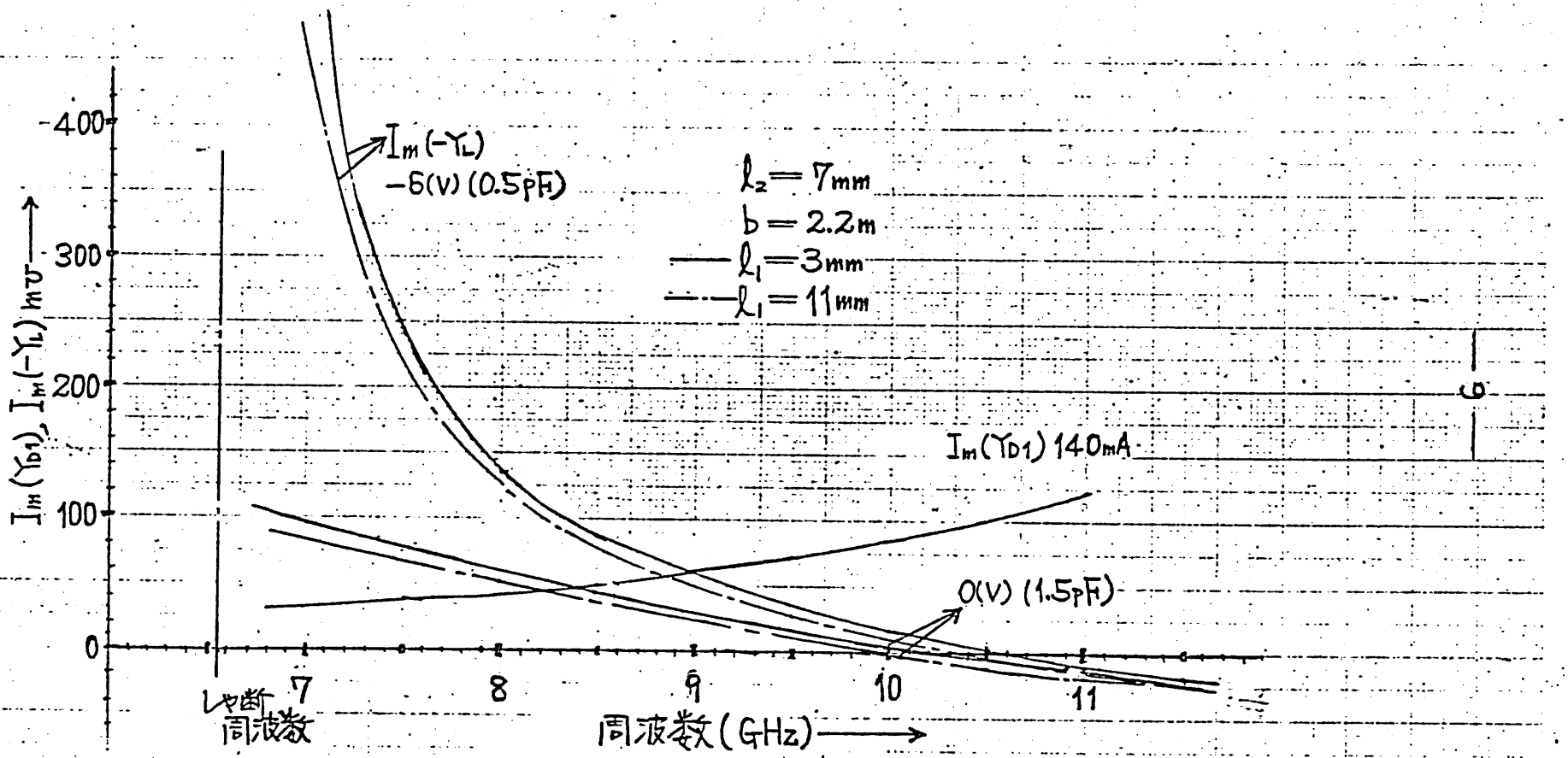


図6 (a) 図5の1-1'端子にみたアドミタンス $I_m(-Y_L)$ と $I_m(Y_{D1})$

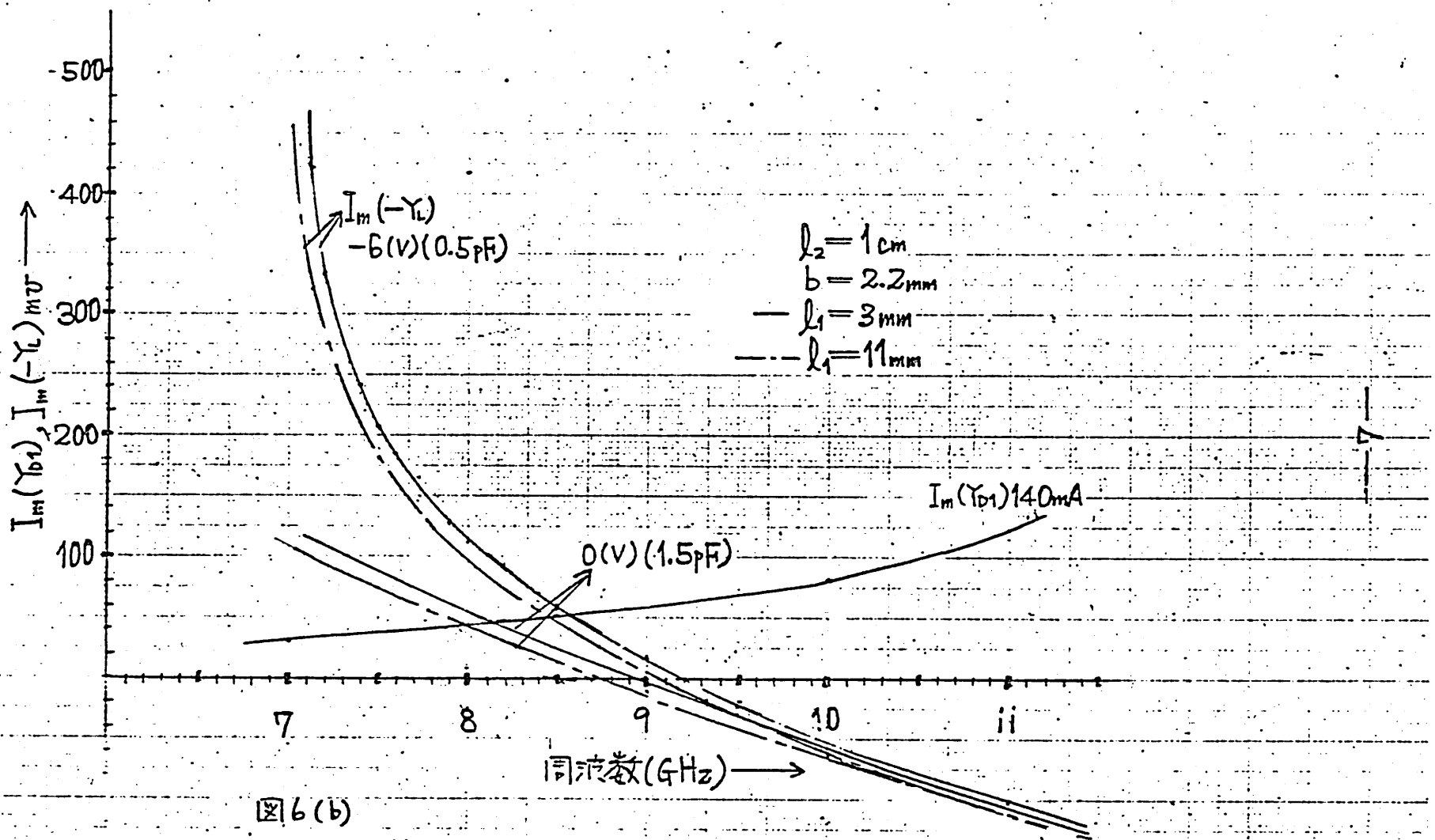

500
400
300
200
100
$I_m(Y_{D1}), I_m(-Y_L)$ mV
$I_m(-Y_L)$
−6(V)(0.5pF)
$l_2 = 1$ cm
$b = 2.2$mm
$l_1 = 3$mm
$l_1 = 11$mm
$I_m(Y_{D1})$ 140mA
0(V)(1.5pF)
7
8
9
10
11
同波数(GHz)

図6(b)

となる。

図5に示す等価回路の1-1'端子から導波管側を見たアドミタンスの虚数部 $Im(-Y_L)$ とインパットダイオードのアドミタンスの虚数部 $Im(Y_{D1})$ の曲線を図6に示す。

図6(a)に示すように，l_2の間隔を7mm，l_1を3mmにして，バラクタダイオードのバイアス電圧を0(V)から-6(V)変化させると発振周波数は約600MHzほど変化する。図6(b)に示すように，l_2の間隔を10mmにしたとき発振周波数の変化は約450MHzである。

つぎに，バラクタダイオードのバイアス電圧を一定にして，l_1を3mmから11mmまで変化させても発振周波数の変化は僅か150MHzしか変化しない。

図3と図6を比較した場合，導体棒の下にダイオードを装荷した発振器より導波管に直接ダイオードを装荷した発振器のほが，発振周波数の変化は約3.2倍広い。導体棒の下にダイオードを装荷したとき，ダイオードに並列にはいる容量性リアクタンスのためではないかと考えられる。

4. 導波管のx軸方向に直接2個のダイオードを装荷したときの解析と等価回路

導波管のx軸方向に直接バラクタダイオードとインパットダイオードをマウントした構造を図7に示す。

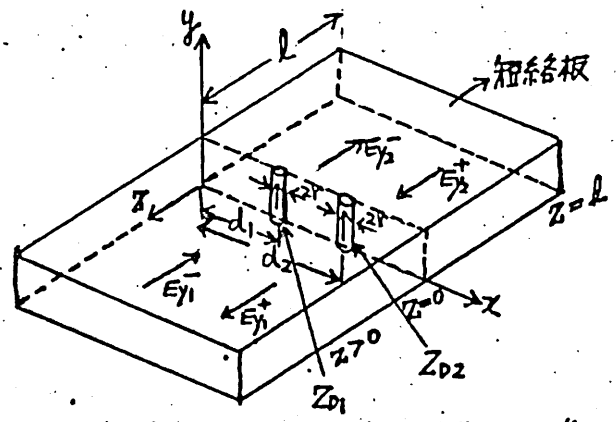


図7　x軸方向に直接2個のダイオードを装荷した発振器の構造

ここでは導波管の高さはダイオードの寸法と一致する場合を考える。したがって，ダイオードに流れる電流は一定であると仮定する。

この発振器の等価回路の解析はL.Lewin[11]の行なった導体ポストの解析にしたがい，2個のダイオードは等価的に一様な細い半径の円柱で置換し，円柱に流れる電流は線条電流$J_1\delta(z)\delta(x-d_1)$と$J_2\delta(z)\delta(x-d_2)$で近似する。これらの仮定に基づいて解析した結果の等価回路を図8に示す(解析の詳細は付録を参照)。

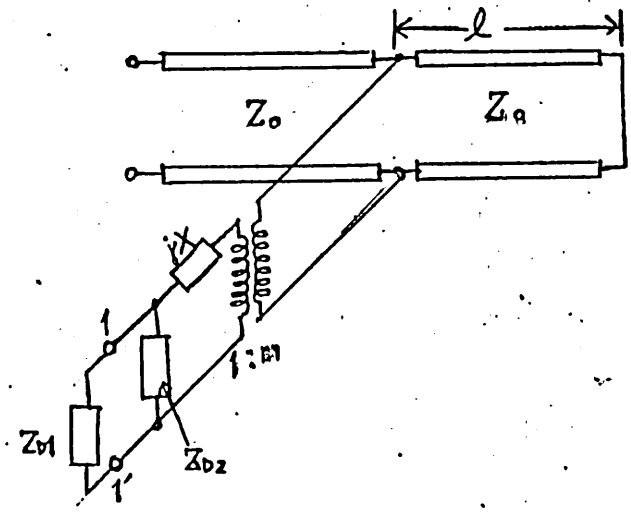


図8　等価回路

図8に示す等価回路の1－1'端子からZ_{D2}(バラクタダイオード)を含めて導波管側をみたアドミタンスの虚数部$I_m(-Y_L)$とインパットダイオードのアドミタンスの虚数部$I_m(Y_{D1})$の曲線を図9に示す。両曲線の交わる点が発振周波数である。図9aで，Z_{D2}のバイアス電圧を0(V)から－6(V)まで変化させると発振周波数は1.24GHz変化する。図9.からわかるように，ダイオードと短絡板の長さを大きく変化させても周波数は僅か変わるだけで，Z_{D2}の容量変化で周波数が大きく変化することが計算結果からわかった。

図9(b),(c),(d)は導波管の壁面に近づけた場合の数値計算を示す。

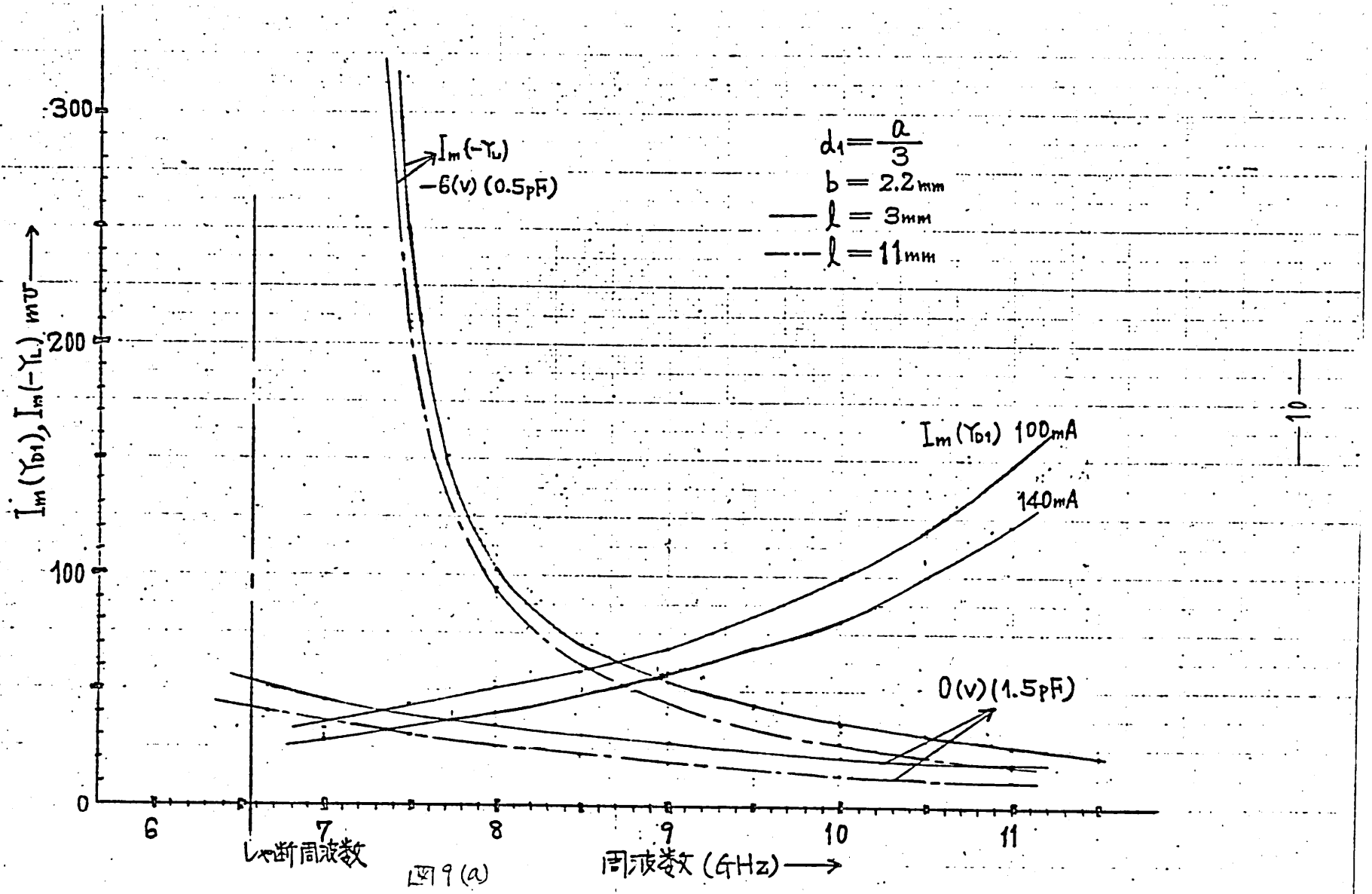
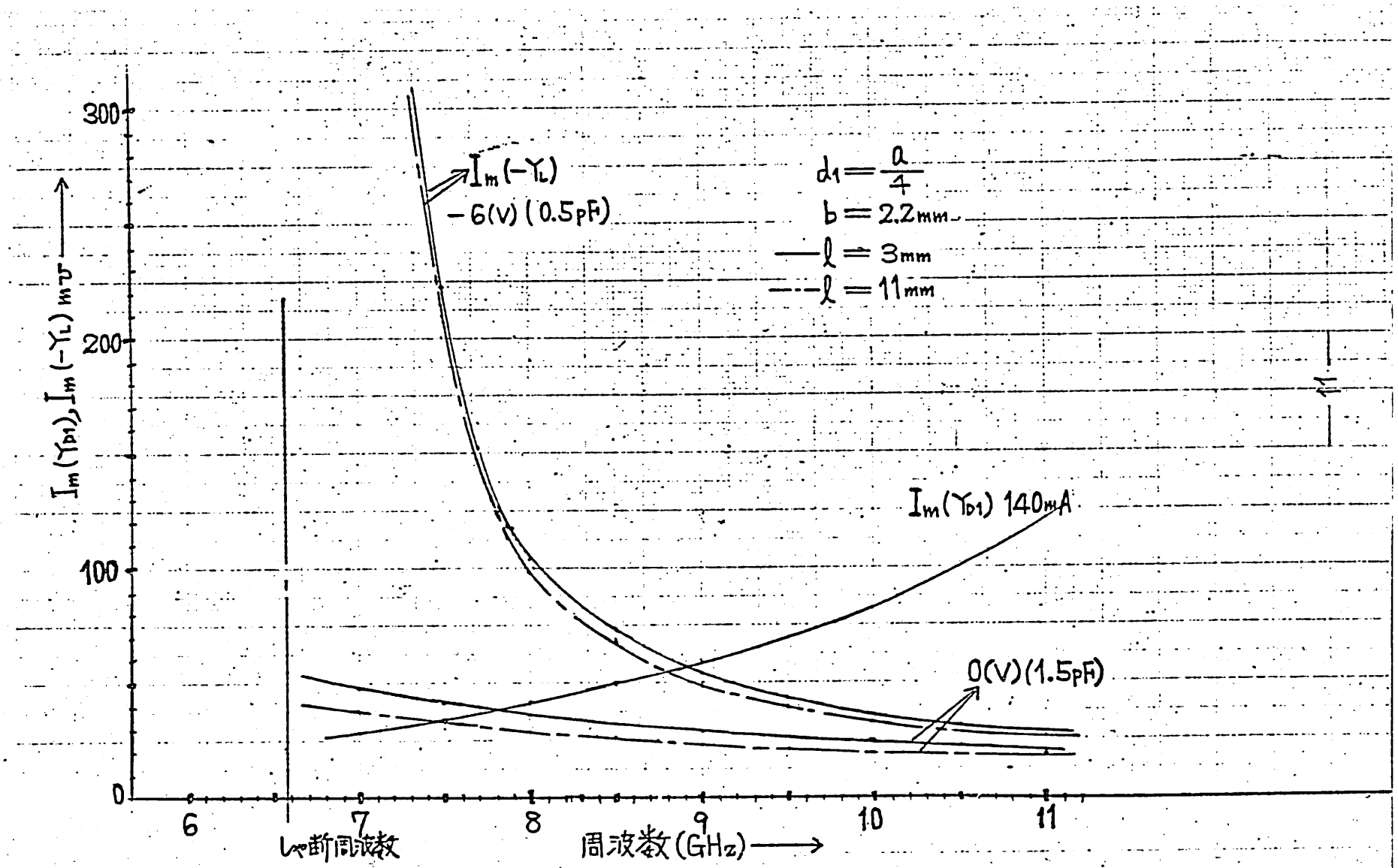
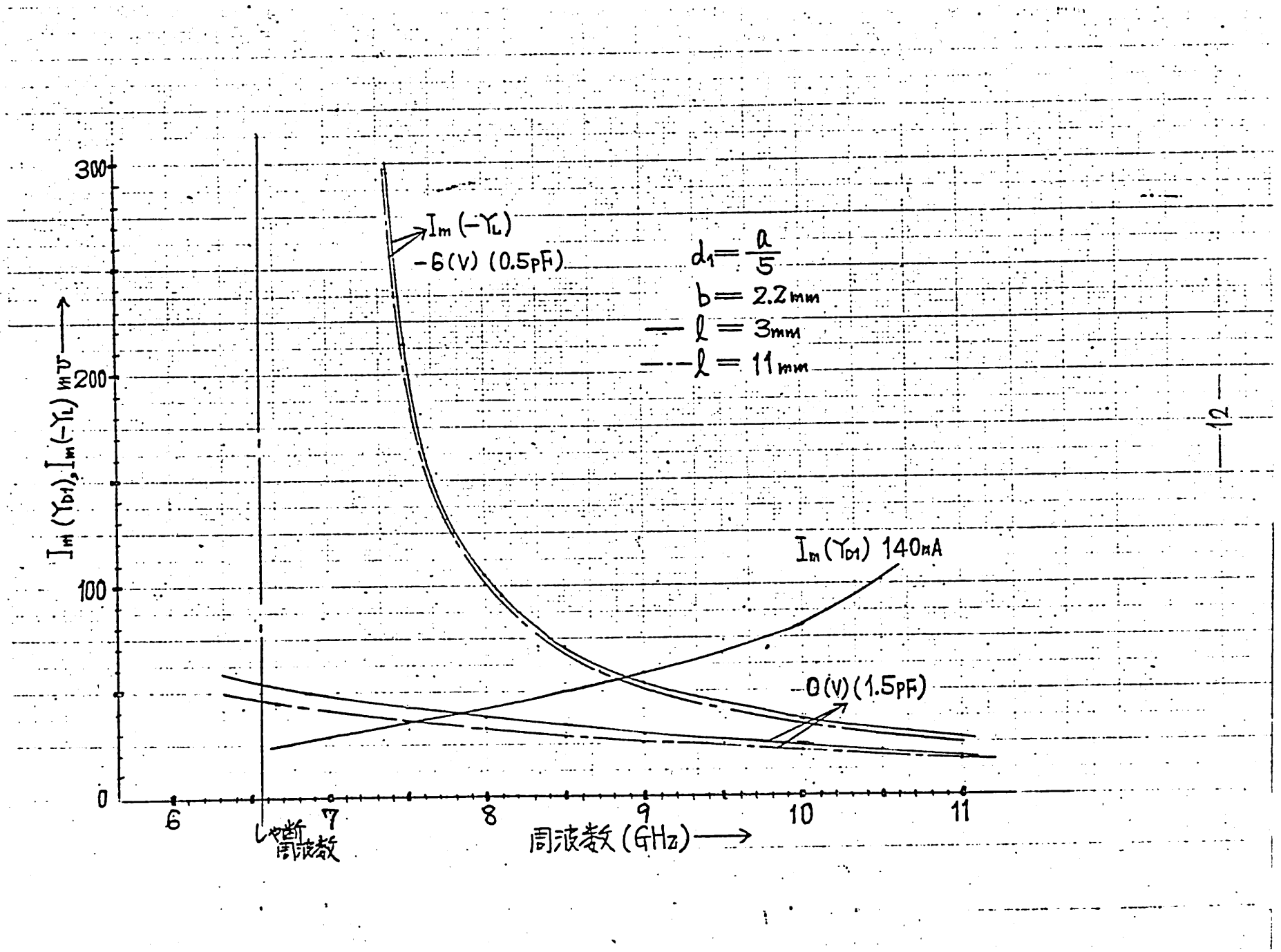

300
200
100
0
$I_m(\Gamma_{D1})$, $I_m(-\Gamma_L)$ mV
$I_m(-\Gamma_L)$
−6(V) (0.5pF)
$d_1 = \frac{a}{3}$
b = 2.2mm
— ℓ = 3mm
--- ℓ = 11mm
$I_m(\Gamma_{D1})$ 100mA
140mA
0(V)(1.5pF)
6
7
8
9
10
11
しゃ断周波数
周波数 (GHz)

図9(a)


300
200
100
0
$I_m(Y_{D1})$, $I_m(-Y_L)$ mV
$I_m(-Y_L)$
−6(V) (0.5pF)
$d_1 = \frac{a}{4}$
b = 2.2mm
—— ℓ = 3mm
---- ℓ = 11mm
$I_m(Y_{D1})$ 140mA
0(V)(1.5pF)
6
7
8
9
10
11
しゃ断周波数
周波数(GHz)


300
200
100
0
$I_m(Y_{D1}), I_m(-Y_L)$ mV
$I_m(-Y_L)$
-6(V) (0.5pF)
$d_1 = \frac{a}{5}$
b = 2.2mm
— ℓ = 3mm
---ℓ = 11mm
$I_m(Y_{D1})$ 140mA
-0(V)(1.5pF)
6
7
8
9
10
11
しゃ断周波数
周波数(GHz)

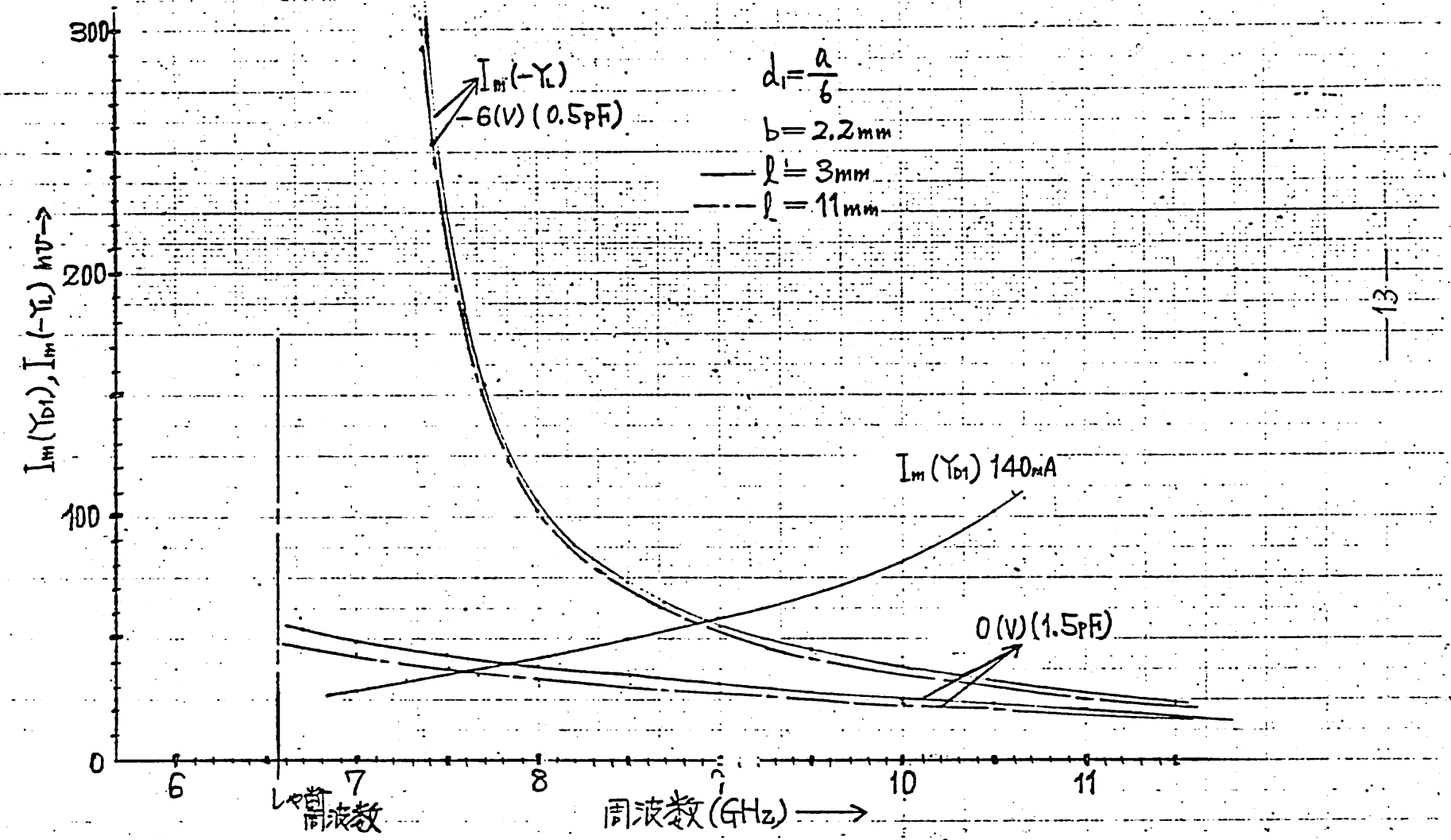

300
200
100
0
$I_m(Y_{D1})$, $I_m(-Y_L)$ mV
$I_m(-Y_L)$
6(V) (0.5pF)
$d_1 = \frac{a}{b}$
b = 2.2mm
ℓ = 3mm
ℓ = 11mm
$I_m(Y_{D1})$ 140mA
0 (V) (1.5pF)
6
7
8
9
10
11
しゃ断周波数
周波数 (GHz)

図7に示す発振器の構造と文献4),5),13)に示す2本の導体棒の下にダイオードを装荷した発振器の発振周波数の変化に比べて約3倍広いことがわかった。

5 検討

以上この論文では導波管内に直接2個のダイオードを装荷した発振器の等価回路を求める式を導いた。

また，3種類の発振器について比較検討した。

導波管のZ軸方向に直接2個のダイオードを装荷した発振器はZ軸方向に2本の導体棒の下にダイオードを装荷した発振器に比べて，構造が簡単で，発振周波数の変化が広く，等価回路を導く解析も簡単であることがあげられる。

文献

1) B.C. Taylor "Frequency-saturation effects in transferred electron oscillators", IEEE Trans., MTT-18, PP, 799-807 Nov. 1970

2) S.P.A. Marriot, "Tunable Gunn diode oscillators" Design Electronics, PP. 72-74, Nov. 1970

3) N.S. Chang, T. Hayamizu and Y. Matsuo "YIG tuned Gunn effect oscillator" Proc. IEEE, Vol. 55, P 1621, Sept. 1967.

4) M. Dean "J-Band Transferred-Electron Oscillators" Proc. IEEE, MTT-21, No 3. March 1973.

5) M. Dean "Electronic Tunig of Stable Transferred Electron Oscillators" Proc. IEEE ED-21, No 9 Sep. 1974

6) O.L. EL-SAYED "Impedance Chracterization of a Two-Post Mounting Structure for Varactor-Tuned Gunn Oscillators" IEEE MTT-22, No 8 Aug. 1974.

7) 豊田 "2個のダイオードを装荷した方形導波管の等価回路"
信学技報 Vol, 75, No80 昭和50-7
(同論文, 電子通信学会誌 B巻 掲載未定)
8) 豊田, 小笹 "バラクタダイオードチューニング発振器"
昭和51年 電子通信学会総合全国大会 No 716 昭和51-3
9) 豊田 "導波管反射形インパットダイオード増幅器"
電子通信学会誌 B巻 Vol 58-B No4 P169 (昭和50-4)
10) 豊田, 牧本 "導波管反射形エサキダイオード増幅器"
電信通信学会誌 B巻 第51-B巻 第7号 昭和43-7
11) G.CRAVEN and L.LEWIN "Design of Microwave Filters With Quarter-Wave Couplings"
Proc, IEE Part B Vol 103 1956.
12) 豊田, 杉尾 "2本の導体棒の下にダイオードを装荷した方形導波管の等価回路"
電子通信学会技報 昭和50-12

付　録

図7に示すように，右および左へ進む電界をフーリエ級数を用いて次のように表わすことができる。

$$E_{y1}^{-} = A_0 \sin(\pi x/a)\, e^{\Gamma z} \tag{A-1}$$

$$E_{y1}^{+} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/a)\, e^{-\Gamma_n z} \tag{A-2}$$

$$E_{y2}^{-} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x/a)\, e^{\Gamma_n z} \tag{A-3}$$

$$E_{y2}^{+} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\pi x/a)\, e^{-\Gamma_n z} \tag{A-4}$$

ここで，A_0は入射波の振幅，B_n，C_n，D_nは未定係数である。

電界は$z=0$において連続でなければならないので式（A－1）から式（A－4）より

$$A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{A-5}$$

となる。

$z=-l$において，電界は零となる必要があるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\Gamma_n l} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{\Gamma_n l} = 0 \tag{A-6}$$

となる。

マクスウェルの方程式より磁界のx成分は

$$H_x = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z} \tag{A-7}$$

となり，式（A－1）から（A－4）までを式（A－7）に代入すると各領域の磁界のx成分が得られる。

2個のダイオードは等価的に一様に細い半径の円柱で置換し，円柱に流れる電流は線条電流$J_1\delta(z)\delta(x-d_1)$と$J_2\delta(z)\delta(x-d_2)$で近似する。

$z=0$における，磁界に対する境界条件より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n(-B_n+C_n+D_n)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$
$$=j\omega\mu_0\left\{J_1\delta(x-d_1)+J_2\delta(x-d_2)\right\}-A_0\Gamma_1\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (A-8)$$

となる。

式(A-5)と(A-6)および式(A-8)の両辺に$\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$をかけ変数$x$で0からaまで積分し，$n=1$のときの$B_1$, C_1, D_1, $n\geq 2$のときのB_n, C_n, D_nを求めると

$$C_1=-\frac{j\omega\mu_0\left\{J_1\sin\left(\frac{\pi d_1}{a}\right)+J_2\sin\left(\frac{\pi d_2}{a}\right)\right\}}{a\Gamma_1}-A_0 \quad (A-9)$$

$$B_1=C_1(1-e^{-2\Gamma_1 l})-A_0 \quad (A-10)$$

$$D_1=-C_1e^{-2\Gamma_1 l} \quad (A-11)$$

$n\geq 2$の場合

$$C_n=-\frac{j\omega\mu_0\left\{J_1\sin\left(\frac{n\pi d_1}{a}\right)+J_2\sin\left(\frac{n\pi d_2}{a}\right)\right\}}{a\Gamma_n} \quad (A-12)$$

$$B_n=C_n(1-e^{-2\Gamma_n l}) \quad (A-13)$$

$$D_n=-C_ne^{-2\Gamma_n l} \quad (A-14)$$

となる。

$Z\geq 0$での合成の電界は

$$E_{y1}=A_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{\Gamma_1 z}$$
$$+\left[\left\{\frac{-j\omega\mu_0\left(J_1\sin\left(\frac{\pi d_1}{a}\right)+J_2\sin\left(\frac{\pi d_2}{a}\right)\right)}{a\Gamma_1}+A_0\right\}\cdot(1-e^{-2\Gamma_1 l})-A_0\right]\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-\Gamma_1 z}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{-j\omega\mu_0\left\{J_1\sin\left(n\pi d_1/a\right)+J_2\sin\left(n\pi d_2/a\right)\right\}}{a\Gamma_n}(1-e^{-2\Gamma_n l})\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{-\Gamma_n z}\right] \quad (A-15)$$

となる。

Lewinのおこなったポストの解析にしたがい，ポストの全表面における内外の電界を連続させる代りに，近似的に$Z=0$, $x=d_1+r$, $x=d_2-r$における電界を連続

させる。ポストの電界は式(A-15)から

$$E_{y1}(d_1+r,0)=A_0(1-e^{-2\Gamma_1 l})\sin\{\pi(d_1+r)/a\}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j\omega\mu_0\{J_1\sin(n\pi d_1/a)+J_2\sin(n\pi d_2/a)\}}{a\Gamma_n}$$
$$\cdot(1-e^{-2\Gamma_n l})\sin\left\{\frac{n\pi(d_1+r)}{a}\right\} \qquad (A-16)$$

$$E_{y2}(d_2-r,0)=A_0(1-e^{-2\Gamma_1 l})\sin\{\pi(d_2-r)/a\}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j\omega\mu_0\{J_1\sin(n\pi d_1/a)+J_2\sin(n\pi d_2/a)\}}{a\Gamma_n}$$
$$\cdot(1-e^{-2\Gamma_n l})\sin\{n\pi(d_2-r)/a\} \qquad (A-17)$$

となる。

E_{y1}とE_{y2}は$d_2=a-d_1$なる関係があれば同じ形になることがわかり，J_1とJ_2を求めやすくなる(ただし，2個のダイオードの素子値の違いにより マイクロ波電流J_1とJ_2は異なる)。

導波管の底を基準にした上面の電圧は次式のように与えられる。

$$V_1=\int_0^b E_{y1}\,dy=b\,E_{y1}(d_1+r,0) \qquad (A-18a)$$

$$V_2=\int_0^b E_{y2}\,dy=b\,E_{y2}(d_2-r,0) \qquad (A-18b)$$

$$V_1=Z_{D1}(-J_1) \qquad (A-18c)$$

$$V_2=Z_{D2}(-J_2) \qquad (A-18d)$$

ここで，Z_{D1}，Z_{D2}はダイオードのインピーダンスである。

式(A-18c)に(A-18a)と(A-16)，式(A-18d)に(A-18b)と(A-17)を代入して整理すると

$$J_1\left[Z_{D1}+\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{j\omega\mu_0 b\sin(n\pi d_1/a)}{a\Gamma_n}(1-e^{-2\Gamma_n l})\sin\left\{\frac{n\pi(d_1+r)}{a}\right\}\right]$$

$$+J_2\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{j\omega\mu_0 b\sin(n\pi d_1/a)}{a\Gamma_n}(1-e^{-2\Gamma_n l})\sin\left\{\frac{n\pi(d_1+r)}{a}\right\}$$

$$=bA_0(1-e^{-2\Gamma_1 l})\sin\left\{\frac{\pi(d_1+r)}{a}\right\} \qquad (A-19a)$$

$$J_2\left[Z_{D2}+\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{j\omega\mu_0 b\sin(n\pi d_1/a)}{a\Gamma_n}(1-e^{-2\Gamma_n l})\sin\left\{\frac{n\pi(d_1+r)}{a}\right\}\right]$$

$$+J_1\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{j\omega\mu_0 b\sin(n\pi d_1/a)}{a\Gamma_n}(1-e^{-2\Gamma_n l})\sin\left\{\frac{n\pi(d_1+r)}{a}\right\}$$

$$=bA_0(1-e^{-2\Gamma_1 l})\sin\left\{\frac{\pi(d_1+r)}{a}\right\} \qquad (A-19b)$$

となる。

式(A-19)より J_1 と J_2 を求めると

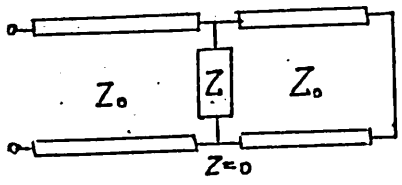
$$J_1=\frac{Z_{D2}\left[bA_0(1-e^{-2\Gamma_1 l})\sin\left\{\pi(d_1+r)/a\right\}\right]}{Z_{D1}Z_{D2}+(Z_{D1}+Z_{D2})\left[\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{j\omega\mu_0 b\sin(n\pi d_1/a)}{a\Gamma_n}\cdot(1-e^{-2\Gamma_n l})\cdot\sin\left\{n\pi(d_1+r)/a\right\}\right]} \qquad (A-20a)$$

$$J_2=\frac{Z_{D1}\left[bA_0(1-e^{-2\Gamma_1 l})\sin\left\{\pi(d_1+r)/a\right\}\right]}{Z_{D1}Z_{D2}+(Z_{D1}+Z_{D2})\left[\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{j\omega\mu_0 b\sin(n\pi d_1/a)}{a\Gamma_n}(1-e^{-2\Gamma_n l})\cdot\sin\left\{n\pi(d_1+r)/a\right\}\right]} \qquad (A-20b)$$

を得る。

ここで，等価回路を図A-1のように仮定する。ただし，Z_0 は導波管の mode インピーダンスである。

$$Z_0=\frac{j\omega\mu_0}{\Gamma_1} \qquad (A-21)$$



Z_Sはポストの等価インピーダンスであり，$Z=0$における基本姿態の反射係数Rは

$$R=\frac{Z_S\tanh\Gamma_1 l-Z_S-Z_0\tanh\Gamma_1 l}{Z_S\tanh\Gamma_1 l+Z_S+Z_0\tanh\Gamma_1 l} \qquad (A-22)$$

となり，式(A-22)よりZ_S/Z_0を求めると

$$\frac{Z_S}{Z_0}=-\frac{1+R}{Re^{\Gamma_1 l}+e^{-\Gamma_1 l}}\cdot\frac{e^{\Gamma_1 l}-e^{-\Gamma_1 l}}{2} \qquad (A-23)$$

で基本姿態の反射係数Rは式(A-15)のTE_{10}姿態で$+Z$方向に伝搬する振幅をとり($Z=0$を基準にして)

$$R=\left\{1-\frac{j\omega\mu_0\sin\left(\frac{\pi d_1}{a}\right)(J_1+J_2)}{a A_0\Gamma_1}\right\}(1-e^{-2\Gamma_1 l})-1 \qquad (A-24)$$

式(A-24)を式(A-23)に代入すると

$$\frac{Z_S}{Z_0}=-\frac{1-e^{-2\Gamma_1 l}}{2}+\frac{aA_0(1-e^{-2\Gamma_1 l})}{2Z_0\sin(\pi d_1/a)(J_1+J_2)} \qquad (A-25)$$

となり；式(A-25)に式(A-20)を代入してZ_Sを求めると

$$Z_S=-\frac{1-e^{-2\Gamma_1 l}}{2}Z_0$$

$$+\frac{a\left[\frac{Z_{D1}Z_{D2}}{Z_{D1}+Z_{D2}}+\sum_{n=1,3,5..}^{\infty}\frac{j\omega\mu_0 b(1-e^{-2\Gamma_n l})}{a\Gamma_n}\sin\left(\frac{n\pi d_1}{a}\right)\sin\left\{\frac{n\pi(d_1+r)}{a}\right\}\right]}{2b\sin\left(\frac{\pi d_1}{a}\right)\sin\left\{\frac{\pi(d_1+r)}{a}\right\}}$$

$$=m^2\left[\frac{Z_{D1}Z_{D2}}{Z_{D1}+Z_{D2}}+j\frac{\omega\mu_0 b}{a}\sum_{n=3,5,7..}^{\infty}\frac{1-e^{-2\Gamma_n l}}{\Gamma_n}\sin\left(\frac{n\pi d_1}{a}\right)\sin\left\{\frac{n\pi(d_1+r)}{a}\right\}\right]$$

— (A-26)

ただし

$$m^2 = \left(\frac{a}{2b}\right) \mathrm{cosec}^2\left(\pi d/a\right)$$

であり，この m は理想変成器の変成比である．
式（A－26）から図8に示す等価回路が得られる。

輻射科学研究会資料

フイラメント電源不要の変形同期荷電管

石川正臣　三村豊　森田正信
(大阪松資エンジニアリング)　(関西大学工学部)

昭和51年6月25日

1. まえがき

マイクロ波電力を直流電力に変換するための初期の装置は，効率良く直流電力を取り出すことよりも，高電圧直流を発生させることが主であったと思われる。しかし，近年，マイクロ波によるエネルギー伝送が提案され[1,2]，それに伴ない高能率な発振器（DC－RF変換），整流器（RF－DC変換器）[3]の開発が急がれている。その内，RF-DC変換器の効率は，現在の技術で66%であるが，将来，90.5%を目標としている。RF－DC変換器には，ショトキーバリア・ダイオードと与波長ダイポールを組み合せたrectenna[3]があり，効率は，現段階で70%を得る。一方，マグネトロン，2極管等[3]では，50%程度である。この場合，電子管は，半導体装置に比べて，効率面では劣るが，1個当りの変換出来る容量が大きいという特長を持つ。しかし，フイラメント，陽極等の電源を必要とするのが欠点である。

1938年，岡部金治郎博士が，電子振動の利用により，超高周波電力を高電圧直流に変換するための装置として，同期荷電管を発表した[4]。（同様な装置にA.M.Skellettのパレトロンがある。[5]）しかしながら，今までに，この装置の詳細な報告は少ない。著者等は，同期荷電管の特性を調べてゆく過程で，フイラメントに逆加熱が生じることを見つけた。そして，それが積極的に生じる様に，従来の双曲線形電極を改良した変形電極[6,7]を提案した。この電極では，動作時にフイラメント電源が不要になり，さらに，変形電極の集電子極を平板形状から，スロットを有する箱形形状に改良した結果，フイラメント電源が，始動時から不要で，かつ，変換効率が飛躍的に改

著され，最大50％を得る。[8] 一方，同期荷電管本来の特性を利用して，衝撃係数が広範囲に変化し来る高圧パルス波発生への利用も報告した。[9),10)]

フイラメント電源が不要である他の装置に，直進形多空胴クライストロンがある。この装置は，陰極に空胴共振器を用いて，印加されたマイクロ波電力の一部を利用することにより，空胴表面から熱電子を放出させる。しかし，実験の報告は，見当らない。

本論文は，始動時からフイラメント電源不要の箱形集電子極を持つ変形電極の特性を述べる。まず，電子軌道が，超高周波，陽極電圧等を考慮した条件での数値計算の結果について示す。その結果から，電子は，ある位相間隔でフイラメントを出発した電子は，集電子極に到着する時，位相集束を受け，出力が印加超高周波のほぼ半周期毎のパルス列となる。この事は，実験からも確かめられる。次に，集電子極に生じる高電圧は，フイラメントから集電子極の距離に比例するため，箱形集電子極では，超高周波電力の相異により，フイラメントからスロットまでの距離と電子の振動方向で一番遠い集電子極の壁面までの距離にそれぞれ比例した2種の高電圧が発生出来る。また，この装置が高能率である一因として，集電子極表面の熱損失が，従来の平板形集電子極に比べて非常に少ないことを確認する。さらに，フイラメントが切断しても逆加熱が持続され動作が可能であることについても示す。

2. 電極構造の変遷

図1は，(a)～(e)の順に改良されてきた電極構造を示す。

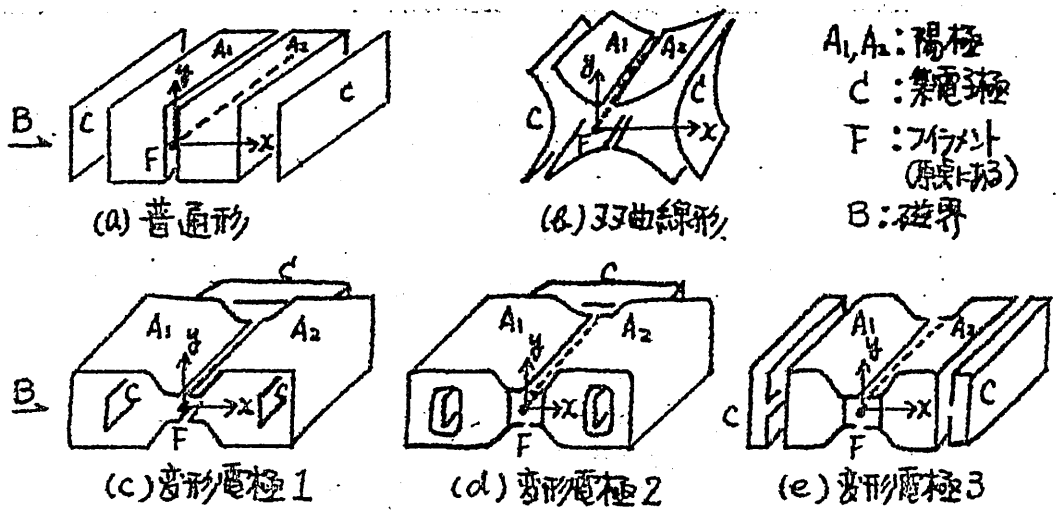


図1　電極構造の変遷

著者等が同期荷電管の特性を詳細に観察するまでに図1(a), (b)ですでにわかっていた事項をまとめると次の様になる。

(A) $n=1, 3$ の V_c^* が発生しやすい。((6)式参照)

(B) 磁界Bをy軸のまわりに回転させると V_c が次第に高くなり，電子流が電極をはずれるまで続く。

(C) 磁界をある程度以上強くしても V_c の値は変わらない。

1.でも述べた様に高電圧を得ることが主目的で，変換効率等の考察はない。(a), (b)の電極で著者等が変換効率を調べた結果，直流入力を考慮すれば，良くて，数パーセント程度であった。そのため，種々の電極を試作し，実験の結果，(C)の変形電極1の構造で，逆加熱が生じ，動作時にフイラメント電源が不要となった。変形電極の形状は，双曲線形を線形で近似したものである。(C)から(d)の変形電極2にすることにより，逆加熱が安定して起こり，変換効率も10数パーセントから30パーセント程度得られる様になった。

＊は発生電圧である。

しかし，(c)，(d)では，瞬間的であるがフイラメント電源が必要である。そこで，集電子極を(e)の様な電極にすることで始動時からフイラメント電源が不要となり．電子管の欠点の一部を取り除くことが出来た。

3. 動作概要.

図2は同期筒電管の概略と発生電圧による直流電位分布である。陽極(A_1,A_2)に超高周波が印加され，磁界(B)は電子を集束させるためにz方向にかけられ，フイラメント(F)は原点にある。

集電子極(C)に電圧が発生する定性的な動作は，次の様に説明出来る。まず，フイラメントから出た電子は，陽極間隙の超高周波電界で加速され，C極に(6)式のnの大きな整数値に対する発生電圧(V_c)を生じる。その後超高周波の周期と電子の振動周期が同期しているため，

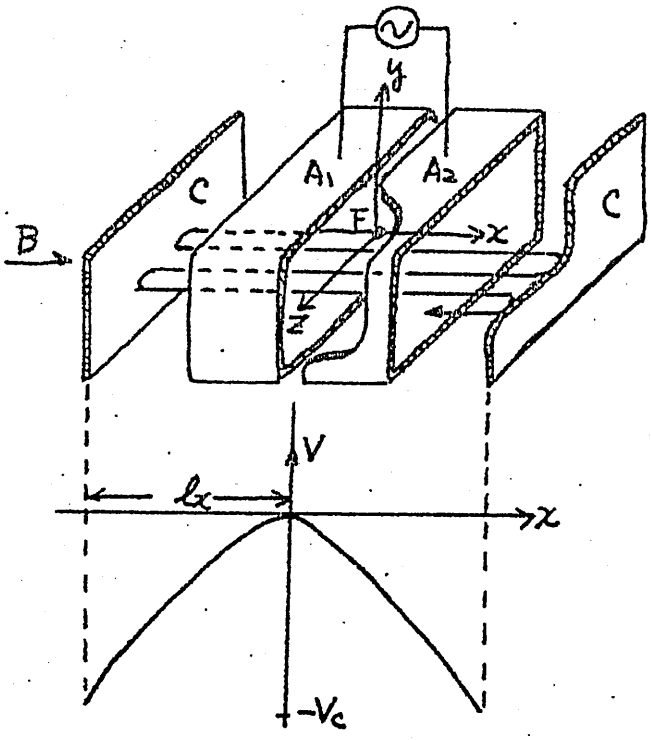
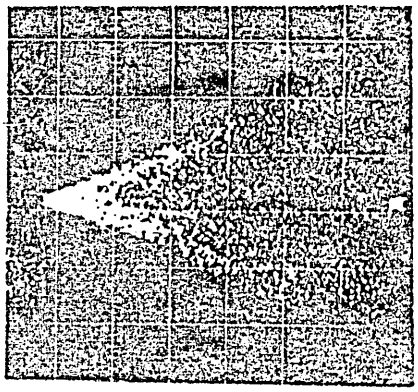


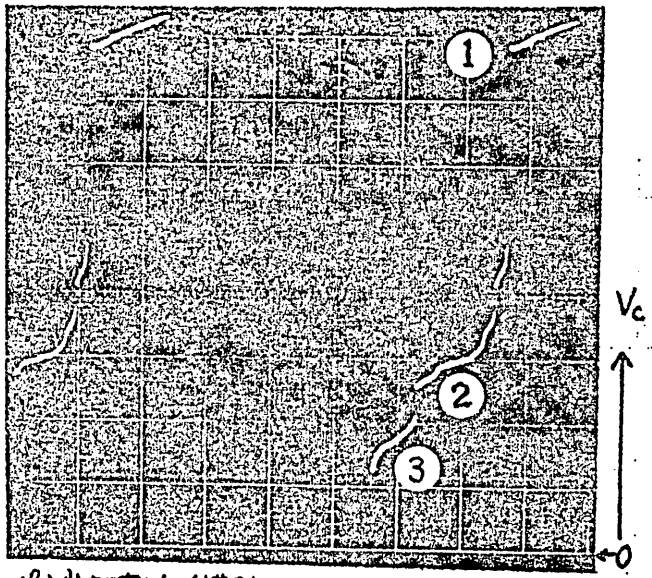
図2 基本的な電極構造と$y=0$上の電位分布.

電子に超高周波エネルギーが供給され，集電子極に(5)式のnより小さな整数値に対するVcを順次発生し，電圧が段階的に上昇して，最終的に定常値（n=1に対するVc）となる。この定性的な動作は図3で示される。三角波で振幅変調された超高周波を用いて[10]，集電子極に発生する電圧波形（図3(b)）からわかる。ここで，①，②，③はそれぞれ(6)式のn=1，2，3に対応するVcである。電圧の段階的な上昇は，超高周波電力がある程度以上に達すれば生じる。同じ事が陽極電圧の変化でも生じる。

次に，電子運動は簡単のため初速度，陽極電圧，空間電荷を無視する。磁界は十分大きく，そのため電子のy振幅が非



(a) 入力波形（横軸：5ms/目盛）



(b) 出力波形（横軸：5ms/目盛，縦軸：200V/目盛）

図3. 電圧の発生過程

常に小さいとして，x軸上の運動のみを取り扱う。集電子極での電圧を$-V_c$，フィラメントを零電位とすれば，x軸上の電位分布は

$$V=-V_c\left(\frac{x}{l_x}\right)^2 \qquad (1)$$

であらわされる放物線形電位分布であるとする。ただし，l_xはフィラメントから集電子極までの長さである。

電子の運動は，

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\eta\left(E+\frac{dr}{dt}\times B\right) \qquad (2)$$

ただし，$\eta=e/m$

より，上記の条件から，電子の運動方程式は，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-(2\eta V_c/l_x^2)x=-\omega_e^2 x \qquad (3)$$

$$\omega_e^2=2\eta V_c/l_x^2 \qquad (4)$$

になる。ω_eは電子の振動角周波数を示す。
印加超高周波の角周波数(ω)とω_eは，

$$\omega_e=n\omega \qquad (5)$$

の関係があり，nは整数を示す。
(4)，(5)式から，集電子極に発生する電圧は，

$$V_c=2\pi^2\eta c^2\left(\frac{l_x}{n\lambda}\right)^2 \quad [V] \qquad (6)$$

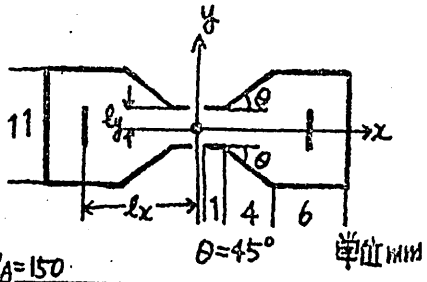
となる。ただし，cは光速，λは波長を示す。
(6)式は，多くの仮定から導びかれた発生電圧を表す基本的な式であるが，この式で実験結果が十分説明出来る。

4. 電子軌道と位相

ここでは，超高周波，陽極電圧を考慮したときの電子軌道の数値計算した結果が示される。例として，陽極電圧 (V_A)= 150 V，超高周波電圧 (V_m) = 400 V，超高周波周波数 (f_0) = 420 MHz，V_c = −1000 V，l_x = 8 mm，l_y = 1.4 mm における計算結果が述べられる。

まず，変形電極内の電界は，ラプラスの方程式を差分法から計算する。図4は，電極の四分の1空間の電位分布を示している。x，y方向の大きさは，それぞれ l_x, l_y, で規格化した $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ であらわし，実線は直流電位，破線は時刻 $t=0$ での超高周波電位の状態を示す。

電子軌道は，時間 0.263 ns 毎に電界を計算し，それを用いて差分により求めた。[11),12)]



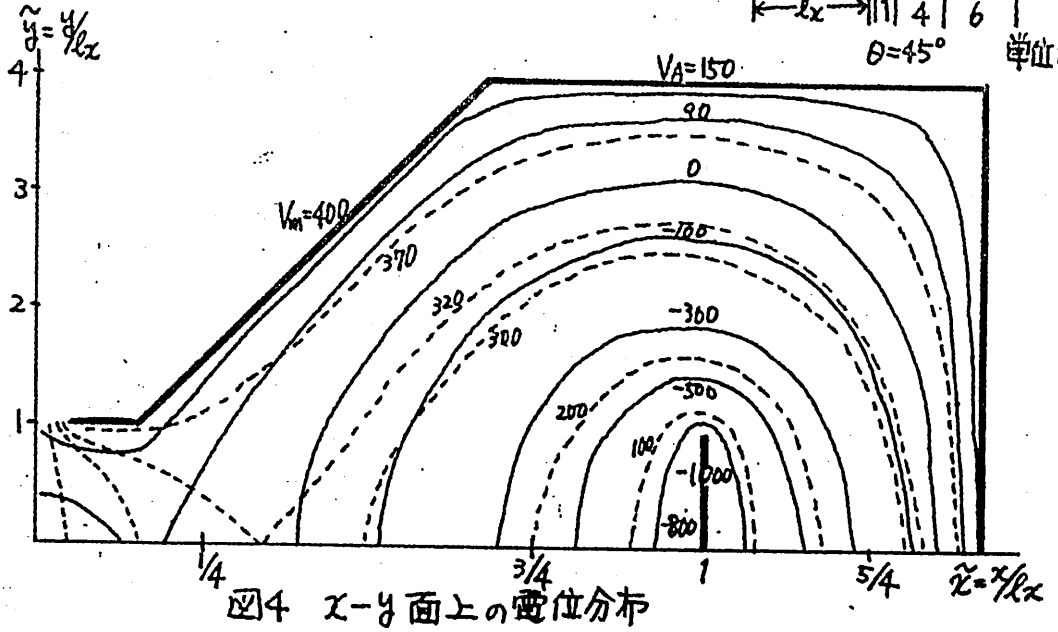


図4 x-y 面上の電位分布

軌道は，x，y方向を数値計算したが，磁界 B=3 kGauss では y振幅は，0.001オーダーの値となり，3の様にx方向の軌道だけ考えれば良い結果を得た。図5は，電子軌道を示す。横軸は走行角，縦軸は $\tilde{x}$ であらわす。x振幅は，走行角が増すに従って大きくなり，$\tilde{x}=\pm 1$ で集電子極に飛び込むが，全ての電子が，$\tilde{x}=0$（原点）を横切ってに振幅を増すのでなく，出発位相 $\phi_0=0.45\pi$, 0.75π (rad) の様に，電子が一度 $\tilde{x}=0$ 附近までもどり，またひき返し，これをくり返して後，結果，集電子極に飛び込む。図6は，出発位相 ϕ_0 に対する集電子極に到着するときの到着位相 ϕ_e の関係をあらわしている。図中，○印は $\tilde{x}=1$，●印は -1 に到着する。$\phi_0=0\sim0.4\pi$, $1.0\pi\sim1.4\pi$ rad に出発する電子は，x振幅は走行角の増加と共に大きく

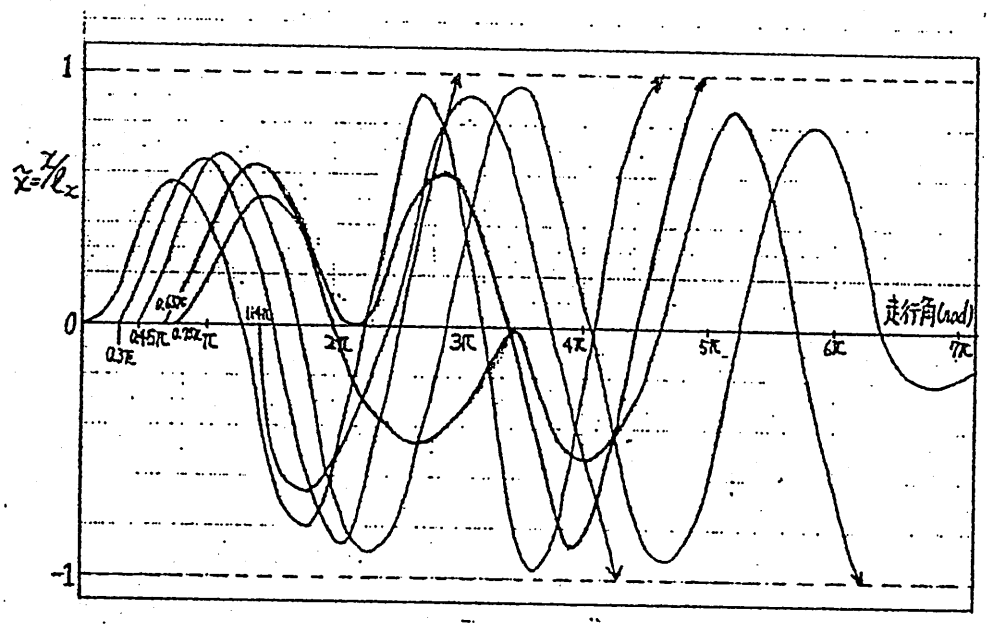


図5 電子振動の様子

なり．1～2往復の後．集電子極にとび込む。一方，上記以外のϕ_0に出た電子は走行角の増加と共に，Z振幅が増加，減少をくり返して集電子極にとびこむ。しかし，$\phi_0 = 0.55\pi$, 0.60π, 0.85π, 0.9π, 1.55π, ……; 1.90π では．20.0994nSの後にも．集電子極にとび込まない電子もある。つまり，$\phi_0 = 0 \sim 0.4\pi$, $0.95\pi \sim 1.4\pi$ 以外の電子は規則性が明確でない。そのため．実際に寄与するのは$\phi_0 = 0 \sim 0.4\pi$, $0.95\pi \sim 1.4\pi$の電子と考えられ．大体．印加超高周波の半周期毎にあらわれるパルス列となることが予想される。一方，陽極電圧を小さくするほど広範囲の出発位相が位相集束を受け，集電子極にとび込む。

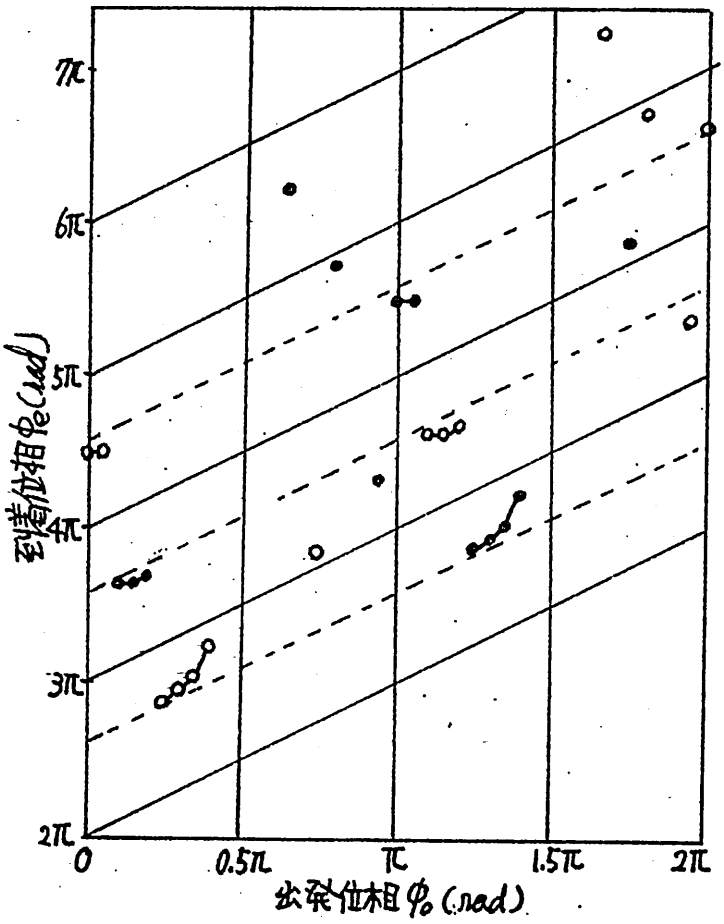


図6　出発位相と到着位相の関係

以前. 当研究会で, 陽極電圧を無視し, 超高周波電圧のみを考慮した時について報告した。[9] この場合, x軸上の電位分布を. 簡単のために.

$$V = -V_c \left(\frac{x}{\ell_x}\right)^2 + \frac{x}{\ell_x} V_m \sin \omega t$$

と仮定すると; すべての ϕ_0 が. 超高周波周期の半周期毎に集束される。このことからも超高周波の半周期毎のパルス列となることを示した。

5. 実験と検討

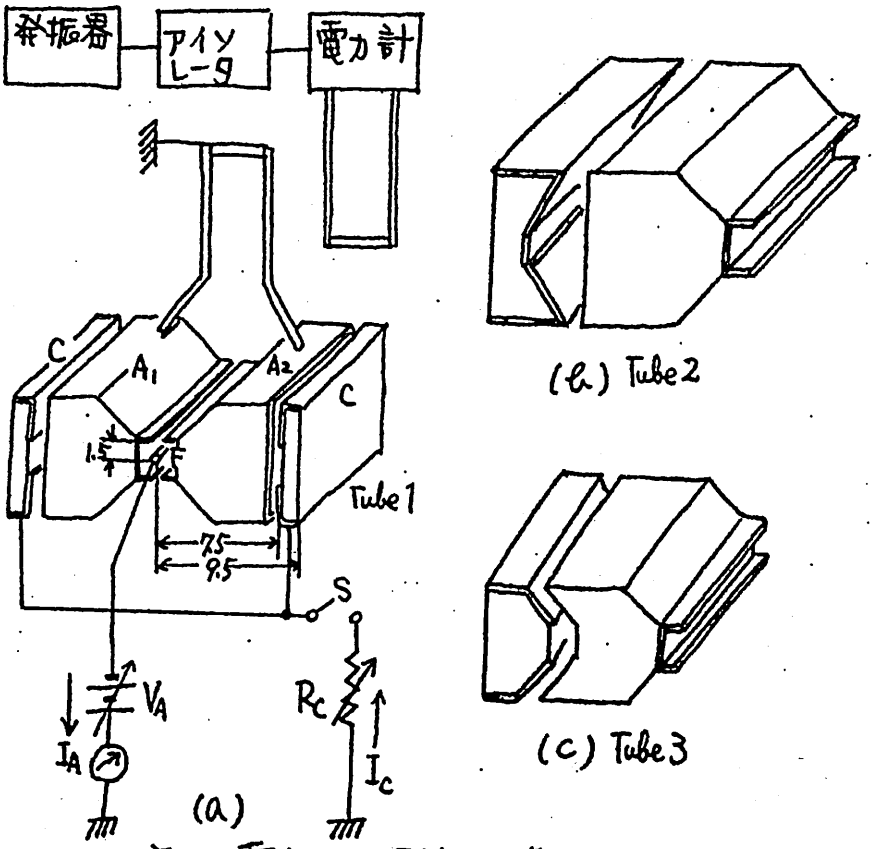


図7 変形電極と測定回路

5. 1 試作管と測定回路.

図7は，変形電極と測定回路を示す。測定は，主に f=20MHz で行ない，超高周波入力電力 (P) は，送信側の電力計で測定した値を実験値として用いる。

電極構造は大別して，3種類について行ない，(a), (c)は，電極が y 軸に関して対称であるために，片方の構造を示している。電極の材料は，フイラメントに 0.15mmφ トリエーテッドタングステン，陽極，集電子極に，0.1mmφ モリブデンを用いた。管は，研究室で封じ込み，排気の後，ベリウムゲッターをとばした封じ切り管である。

5. 2 出力パルスの観測.

4. で位相集束された電子が両側の集電子極から出力を取り出せば，印加超高周波の半周期毎にあらわれるパルス列となることを予想した。ここでは，それを実験的に確認した。図8は，その測定回路を示す。電極構造は，数値計算に用いた形状と多少異なるが，集電子極を図の様にすることで，超高周波の誘導が，サンプリングオシロスコープにあまりあらわれない実験結果を得た。

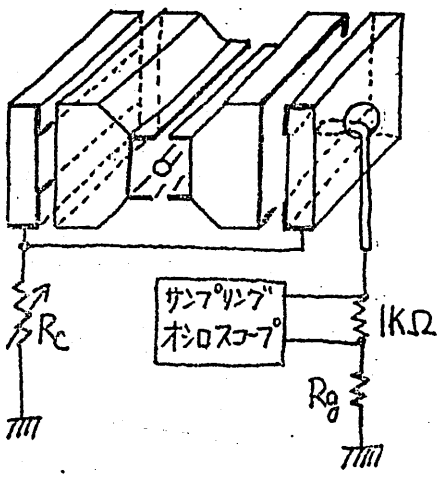
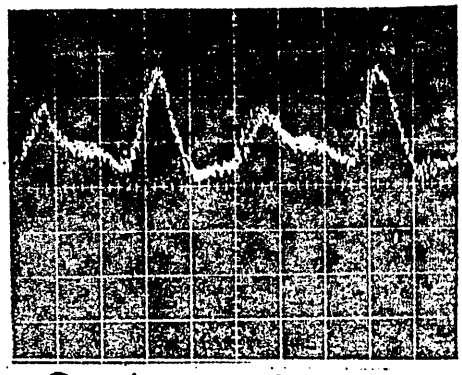
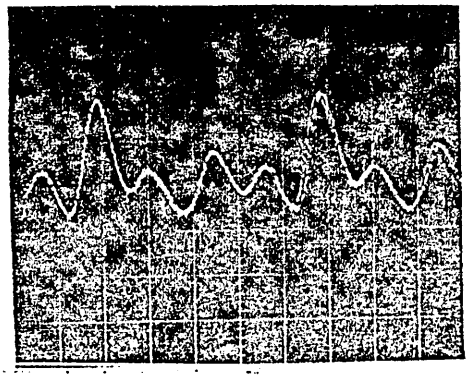


図8. パルス検出の測定回路

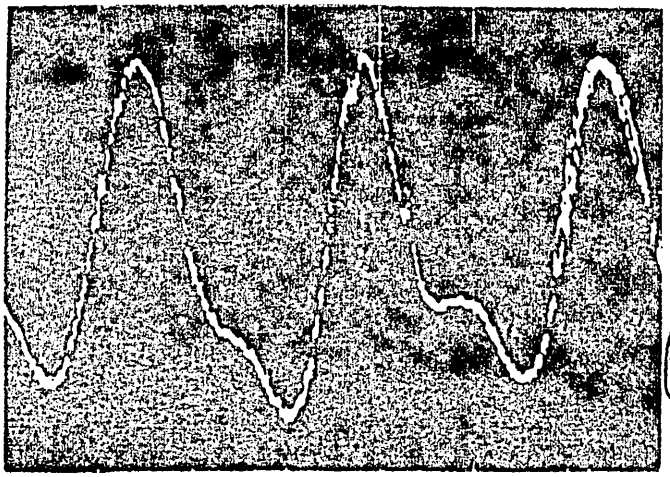
電子の取り出しは，断面0.8 mmφのプローブを用い，その出力をサンプリングオシロスコープで観測する。計算では，フィラメントの一点から出た電子に対する結果であるが，実際の実験は，2方向に張られた線状フィラメントを用いるから，点状フィラメントと等価にするために取り出しはプローブで行なった。実験は420 MHzで行ない，図9は，得られた出力パルスを示す。出力は，片側の集電子極から取り出しているため



(a) $R_c = 600K\Omega$ $R_g = 0\Omega$



(b) $R_c = 330K\Omega$ $R_g = 0\Omega$



(横軸 0.5ns/目盛)

(c) $R_c = 330K\Omega$ $R_g = 1M\Omega$

図9. 出力パルス

印加超高周波周期毎のパルス列となり，この事は(a)，(b)のパルス列からわかる。なお．パルスのピーク間の間隔は，約2.5nSである。(周波数で約420MHz)ここでは，負荷抵抗R_cの相異で，(a)又は(b)のパルス波形があらわれることを示したが．実験により，陽極電圧，磁界，印加超高周波電力の変化でもあらわれることを多く経験した。しかし．どの要素の変化で(a)又は(b)となるかは明確でない。(c)は特殊な場合で，調整の仕方により，半周期毎のパルス列としてあらわれた場合を参考に示した。

実際には，取り出しは，集電子極全体から行なうために，出力は，パルスの尖頭値の包絡線となり，それが一定であることから直流が取り出されると考えられる。

5．3 高電圧の発生．

箱形集電子極の変形同期荷電管をフイラメント電源無しで，発火させるには，図7(a)のSが開放，超高周波電力Pを10w以上に設定し，陽極電圧V_Aを変化させれば，250～900Vで，フイラメントが発火する。その後，適当な負荷抵抗(R_c)を接続すると，集電子極には(6)式の$n=1$のV_c(V_{c1})の電圧が発生している。フイラメントを発火させるのに．Sを開放とせず，適当な負荷を接続した状態から，動作を可能とするためには．超高周波電力を大きくするほど，低いR_cから可能である。また，フイラメントが発火するための最小陽極電圧は．一般に，超高周波電力，磁界が大きいほど低い傾向にある。

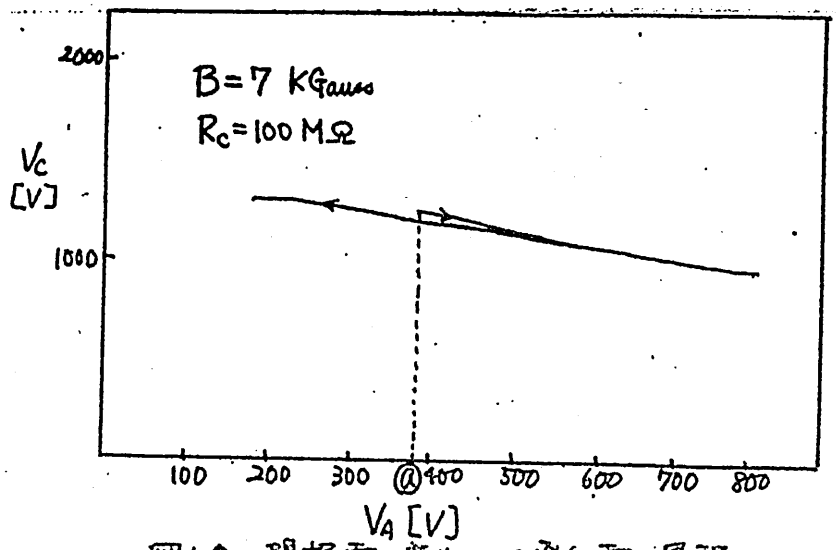


図10. 陽極電圧変化による発生電圧過程.

図10は，陽極電圧を変化させることによる発生電圧を示す。負荷抵抗を接続しない状態で陽極電圧を増すと@点($V_A \fallingdotseq 370V$)で変化し，さらに陽極電圧を増すことで発生電圧は低下する。一方，陽極電圧を下げれば，同じ経路を通って，200V程度まで，V_{c1}の電圧を保持する。

集電子極は，従来の平板形から，箱形となったために，フィラメントから，スロットまでの距離と，z方向に最も遠い集電子極壁面までの距離と2つのl_zを持つ。そのため，(6)式からわかる様に，l_zの相異により2種の発生電圧を得ることが出来る。普通，超高周波電力が10～15W程度であるために，発生電圧は，フィラメントからスロットまでの距離で発生電圧は決まってしまう。しかし，印加超高周波電力を増すことにより，図11の様に，2種の電圧が発生出来る。P=20, 40Wでは，ほぼ，フィラメントからスロット面までの距離でV_{c1}が決まり，P=50Wでは，フィラメントから最も遠い集電

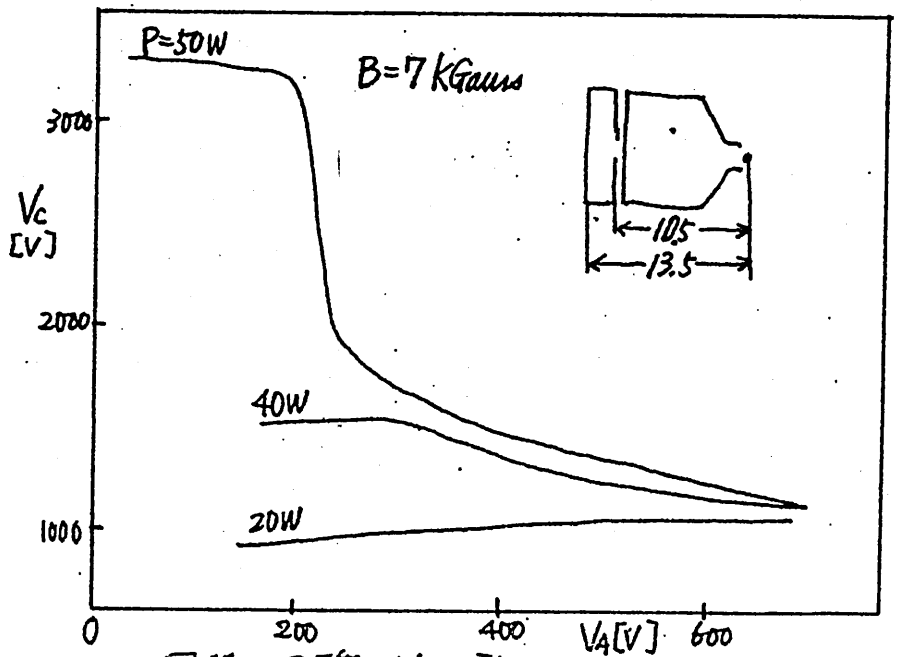


図11　2種の V_{c1} の発生

子極壁面までの距離で V_{c1} が決まる。

フイラメント電源無しで点火する定性的理由は，次の様に考えられる。封じ切り管のため管内の真空度は高いはずであるが，高磁場，さらに超高周波が印加されているために作用空間内で，わずかな放電が生じる。しかし，この時，Sは開放状態にあるから電子は集電子極で捕捉され負の電位を生じる。集電子極に蓄積された電子は或るきっかけ（例えば，磁界，陽極電圧を変化させる）で，作用空間に電子が飛び出し，フイラメントに衝突する。一方，集電子極にとび込むだけのエネルギーを持たない電子は，単振動を行なう間に一部の電子がフイラメントに衝突する。その結果，追加熱が持続する。また，変形電極は，双曲線を線形で近似した構造で，かつ，フイラ

メントが原点にあるという独特の構成のため電子ビームのX軸に対するY方向の振幅（つまり，ビーム厚さ）は図12の様な形状と考えられ，フィラメント位置で狭く（薄く），フィラメントから離れるに従って広く（厚く）なるくさび形状のビームが形成されていると予想される。この様なくさび形状のため，フィラメントの位置で電子密度が最も大きく，さらにフィラメントは超高周波との相互作用が最も密な位置であり運動エネルギーが最大の位置である。これらの理由により，フィラメントが容易に蒸発する一因であると考えられる。箱形集電子極の大きな特長は，フィラメントが切断しても動作が可能である。その様子が図13である。(a)はフィラメントが中央で切断している様子，(b)は両方が逆加熱で蒸

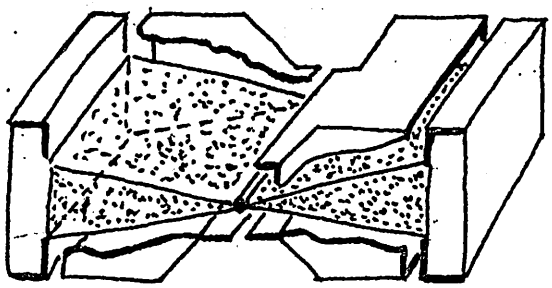
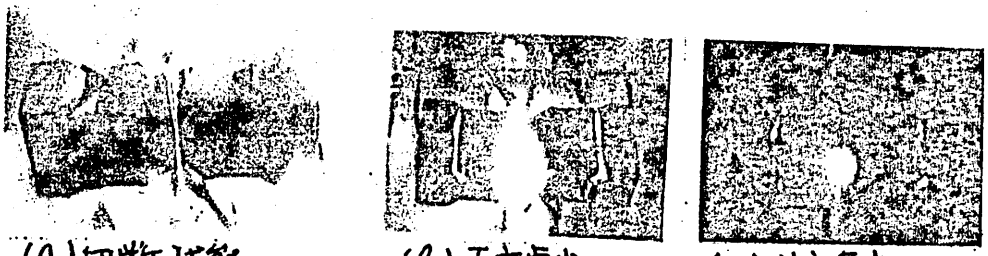


図12 電子ビームの集束の様子



(a)切断状態　(b)両方蒸発　(c)片方蒸発

図13 フィラメントの状態

火している状態，(C)は，片方のみが点火した状態である。この事から，この電極形状を使用すれば，半永久的に動作が可能と思われる。

5.4 効率，出力電力，

効率(η)，出力電力(P_o)は次式で定義する。

$$\eta = \frac{P_o}{P} \times 100 \quad (\%)$$

$$P_o = I_c^2 R_c - V_A I_A \quad (W)$$

ただし，I_cは負荷に流れる電流，I_Aは陽極電流である。

始動時にフィラメントを点火するときは，負荷抵抗が無限大の状態にあるが，一度点火すれば，V_{c1}が保持出来る最小負荷の時，出力電力が最大となる。図14は，負荷抵抗を小さくするにつれてのV_{c1}の様子を示し，@点に相当するのが最小負荷である。R_cが大きい場合の実験値は(6)式からの計算値に一致する。一方，R_cが小さい場合，V_{c1}は計算値より低いが，超高周波電力を増せば，定常値となる。

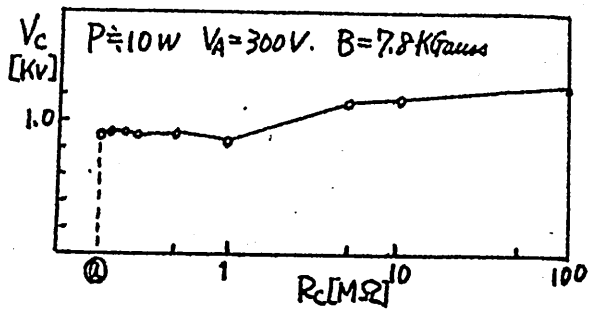


図14 負荷抵抗変化による発生電圧

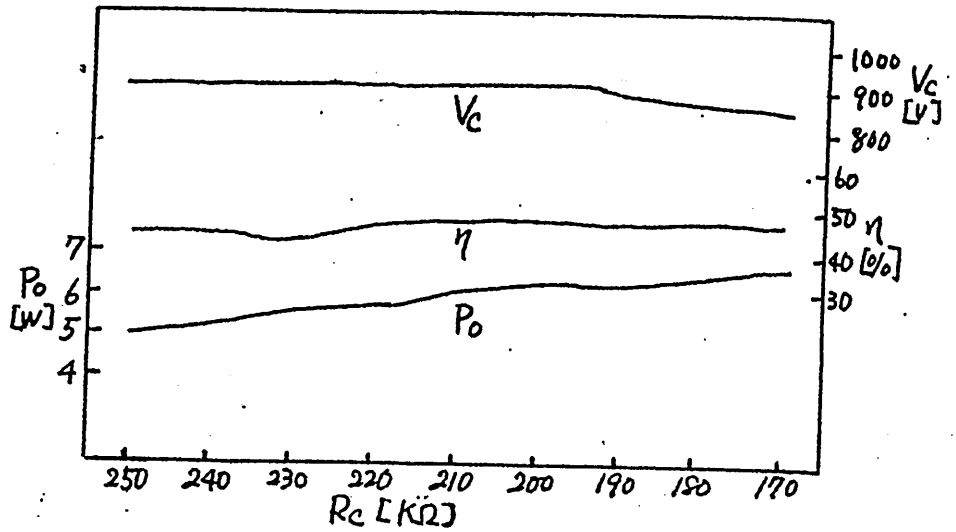


図15 最小負荷附近の諸特性

図15は，磁界7KGauss，陽極電圧300V，超高周波周波数420 MHz，入力電力10Wでの最小負荷附近のVc，η，Poの特性である。また，図16は，磁界変化による効率を示す。ηは最大50パーセントを得た。この値は，従来の変形電極（変形電極1）で始動時のフィラメント電力をも考慮した値と比べれば，飛躍的な向上である。

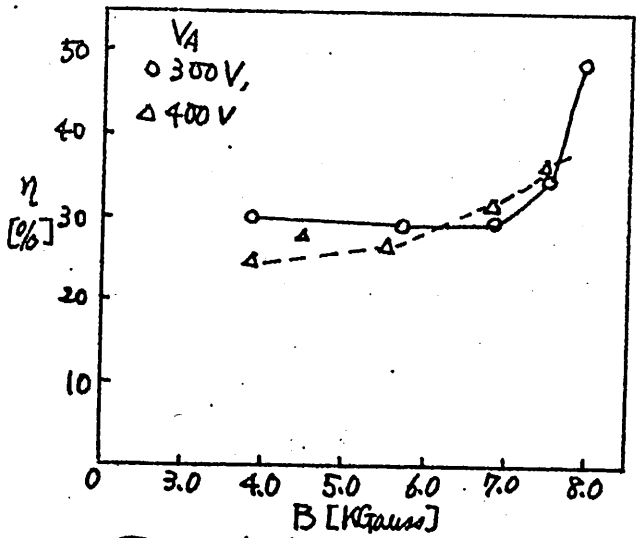
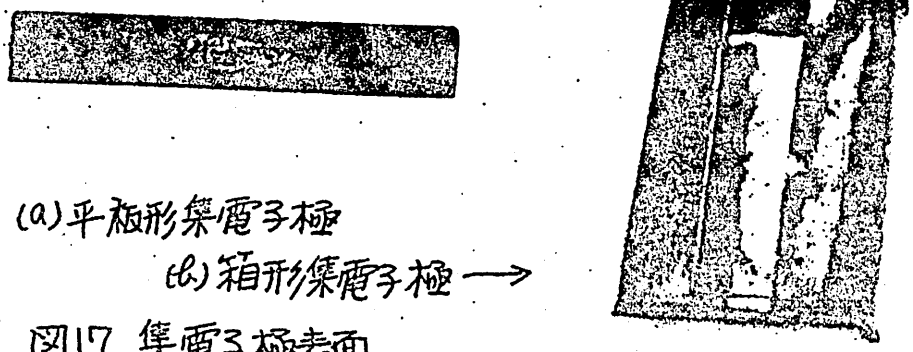


図16 磁界変化による効率特性



(a) 平板形集電子極
(b) 箱形集電子極 ⟶

図17 集電子極表面

この原因を熱損失と考え，集電子極表面の様子を図17に示した。平板形集電子極では，加速された電子による表面の損傷が認められ，箱形集電子極では認められない。この結果から，集電子形状の改良による熱損失の減少が，効率向上の要因の1つであると考えられる。

6. あとがき.

箱形集電子極を有する変形同期荷電管は，最初からフィラメント電源が不要となり，変換効率が最大50パーセントが得られることがわかった。さらに，平板形集電子極で得られなかった3000数百Vに達した。また，この装置は，超高周波電力の直流電力への変換器だけでなく，電子ビーム集束のための電磁界レンズとしても使用出来ると思える。

出力パルスが印加超高周波の半周期又は1周期毎にあらわれるためにマイクロ波パルス発振器としても利用出来る。

さらに，フィラメントが切断しても動作が可能のため半永久的に使用出来る。

謝辞　終りに，有益な御助言をいただいた関西大学工学部大東延久専任講師，飯田幸雄大学院研修生，岩井治夫氏に感謝します。

文　献

1) W.C. Brown: "Satellite power stations: a new source of energy?", IEEE Spectrum, 10, 3, p38.

2) 堀米孝，谷辰夫："マイクロ波による電力輸送システム"，電気学会誌，58，5，P.665，(1973-05).

3) E.C. Okress: "Microwave Power Engineering", Vol. 1, P.273 Academic Press, New York (1968).

4) 岡部金治郎，宇田新太郎，三戸左内："超高周波電子管"，P.130 修教社 (1949).

5) A.M. Skellett: "The Palletron, A New Electron Resonator and its Proposed Application", J. App. Phys. 19, P.187 (1948)

6) 石川，森田："電子振動を利用したマイクロ波の直流変換特性"，輻射科学研究会資料 昭和49年6月28日.

7) 石川，森田："動作時にフィラメント電力を必要としないマイクロ波直流変換素子"，信学誌，マイクロ波研資，MW74-52，(1974-09).

8) 石川，三村，森田："線条電源不要の高能率変形同期荷電管"，信学論 (B)，6月号掲載決定.

9) 石川，岩井，森田："変形同期荷電管の基礎特性とパルス波発生への応用"，輻射科学研究会資料 昭和50年7月4日.

10) 石川，岩井，森田："変形同期荷電管による超高周波の高圧パルスへの変換"，信学論 (B)，6月号掲載決定.

11) J. E. Boers: "Digital Computer Analysis of Axially Symmetric Electron Guns," Trans., ED-12, P425 (July -1965).

12) J. E. Boers: "Digital Computer Simulation of Crossed - Field Electron Guns," Trans., ED-17, P373 (April-1970).

輻射科学研究会資料

大阪湾の電子アドミタンスと諸特性

飯田幸雄　今井興一　森田正信
（関西大学　工学部）

昭和51年6月25日

1. まえがき

放物線電位分布中を電子が多重走行する場合の大阪管の電子アドミタンスを理論的に求め報告したが[1]，今回注入同期法[2]により電子アドミタンスの測定を行ない，大阪管の2,3の特性について検討した．

大阪管は電子の作用空間滞在時間を磁界により制御している。

磁界によりこの時間をほぼ連続的に変化できる場合とそうでない場合があるように思われる。

まず，動作特性からこの磁界の影響について述べ，電子アドミタンスの測定から通常の動作状態を調べる．

次に，多数回の電子振動が等周期性を保っていないことによる結果について報告する。

また，大阪管のQが比較的大きいためにおこると思われる信号注入時の特性についてふれている。

2.動作特性

磁界，陽極電圧に対する典形的な発振出力，周波数特性をそれぞれ図1，2に示す。その特徴は，(1)陽極電圧のより低い側で発振出力がなくヒステリシス特性を示すこと，(2)磁界の増加に伴なって出力はより狭い陽極電圧の範囲に限られること，(3)磁界指数の半整数毎の周期で出力変化が見られること，(4)陽極電圧変化に対する周波数変化は低磁界で小さく，高磁界になるほど大きくなること，等である。

大阪管の電子運動は図3の電極断面図でx軸方向に磁界をかけると，xz面内で回転しながらx軸と平行に単振動し，陰極Kのz位置z_0がゼロでないときにはz軸方向の推移運動を伴うものである。x軸方向の運動にのみ着目し，放物線分布の直流電位及び直線分布の高周波電位を仮定して求めた電子アドミタンスを図4(a)，(b)に示す。ここで，$g_0 = I_e/V_0$，I_eは陰極の放出電流，V_0は電子振動面中央の直流電位である。また横軸のαは高周波と電子振動周波数の比$\alpha = \omega/\omega_e$である。

この理論結果と上記の特性を比較する。電極はx方向に有限であり，磁界の増加とともに推移速度が減少するので振動回数が増すと考えると(2)と(4)の特性は説明できる。(1)の特性は直流電位分布が放物線から逸脱しているために生じるものと思われる。また(3)の特性は電子のz方向振動のために生じ，管によってはもっと激しい凹凸を示し，動作する磁界の範囲が狭いものがある。このような場合電子は上記のようにz方向の電極端まで推移するのでなく，空間電荷のために適当に陽極に収集されているものと思われる。従って磁界は大阪管の動作を大きく左右することになり磁界指数による特性の変化が生じる。

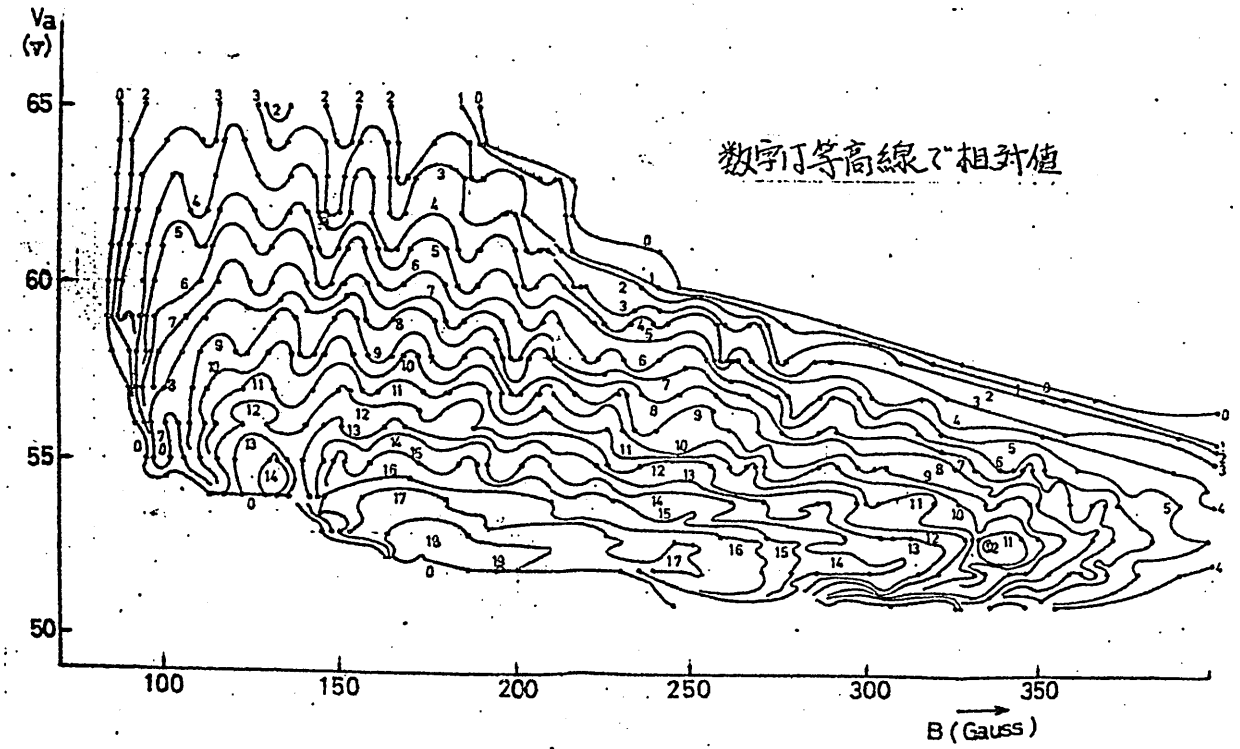


図 1 発振出力特性

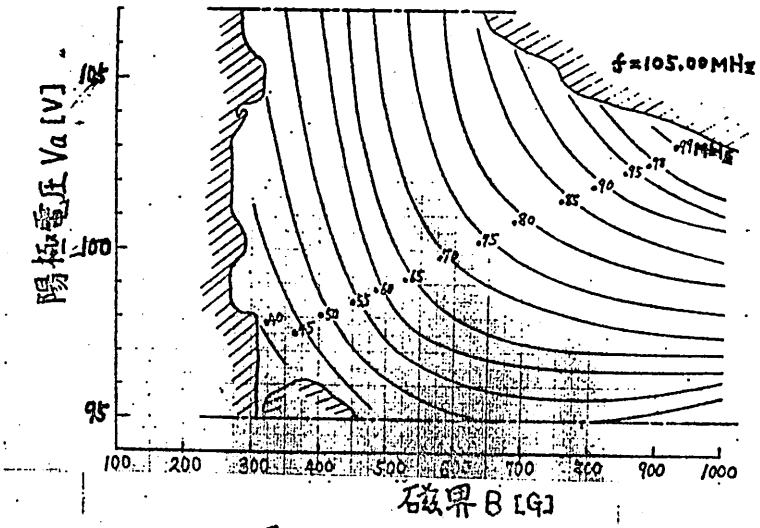
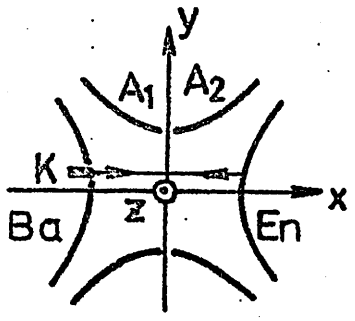
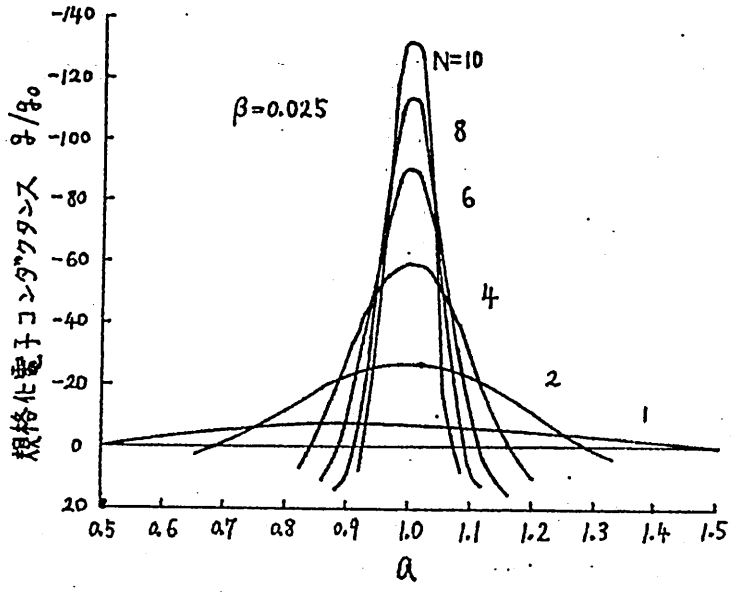


図2 発振周波数特性

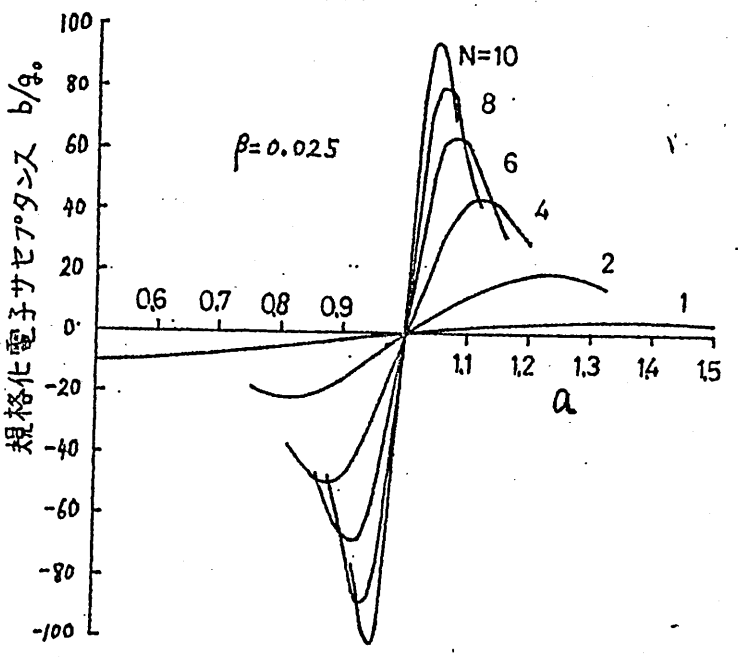


A_1, A_2：陽極
Ba：背電極
En：端電極
$K(-x_0, y_0)$：陰極

図3 電極断面図



(a) コンダクタンス



(b) サセプタンス

図4　aに対する電子アドミッタンスの変化

3. 電子アドミタンスの測定

3.1 測定回路と方法

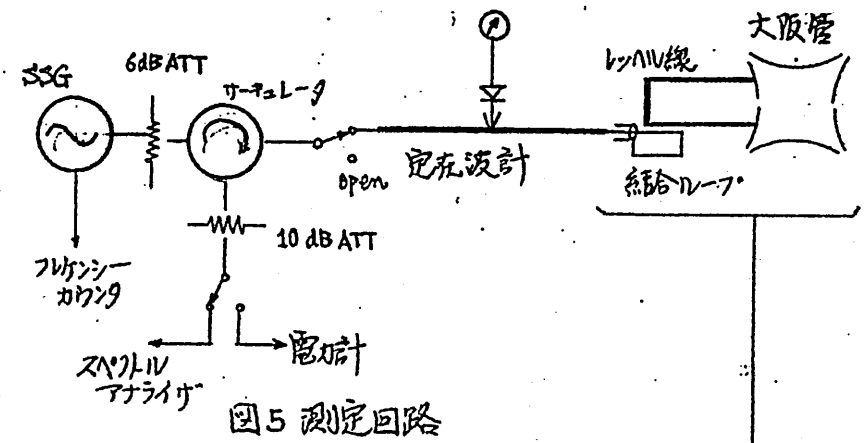


図5 測定回路

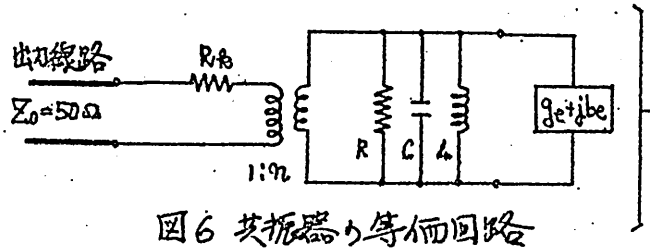


図6 共振器の等価回路

測定回路を図5に示す。共振回路系を図6のように仮定して次の手順で測定を行った。(1)レッヘル線共振器を離調して短絡面を測定し，これを基準面とする。このときの定在波比からR_nを決定する。(2)共振器をもとに戻し，共振周波数付近で定在波比と定在波最小点の位置より出力線路から見た回路のインピーダンスを求める。測定周波数範囲が広い場合にはサーキュレータを取り除いた。(3)大阪管を動作し測定を行なう。大阪管にかかる高周波電圧は基準面における定在波電圧であるとした。(4)測定が終るとガラス管の一部に穴をあけ，陽極間隙近くに設けた平行平板内に微小体積の導体を挿入して共振周波数変化から共振器の損失抵抗を求め，理想変圧器の巻線比nを求める。以上の測定により図6の共振器系の定数を決定し[3]，電子アドミタンスを求める。

測定に用いた試作管を図7に示す。電極のZ方向の長さは10[mm]で，その中央に陰極がある．陽極は+Z方向には開放，-Z方向では閉じられている。

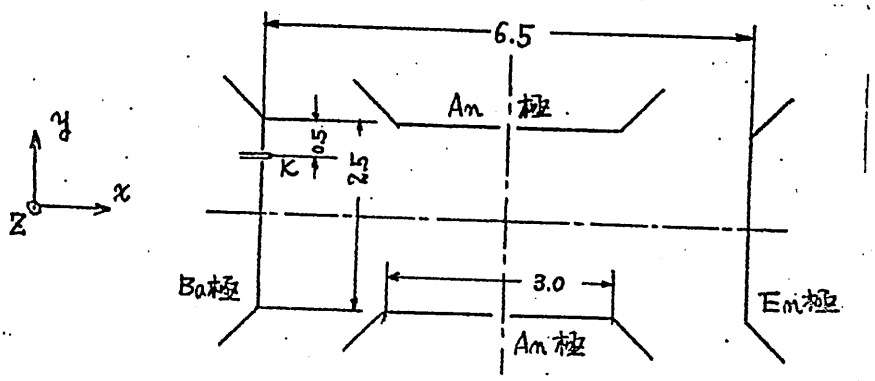


図7 電極断面図 [単位 mm]

3.2 測定結果

磁界をX の負方向にかけて電子をZの負方向に推移させた場合の結果を図8～10に示す．アドミタンスの値は出力線路側から見たものである。低陽極電圧側において，高周波電圧に対して負性コンダクタンスが増加する部分が見られる。特に図10では顕著に現われており，先に述べた低陽極電圧側で発振の立上がらない部分の存在することがわかる。図8に示すものとほぼ同一の動作条件のもとで，複雑なアドミタンス軌跡のために生じると思われるスペクトルを観測した。このときの発振出力を発振周波数に対して取ると図11となる。図中のC点において，スペクトルは最初（V_a = 262[V]の時）単一スペクトルであるがV_aの上昇に伴い両側に多くの側帯波を持つスペクトルへと変化して行く。これを図12に示す，（V_a=262.2[V]）。この間に中心スペクトルの周波数変化はほとんどない。スペクトル間隔は初めは広いが，しだいに狭くなり一致した瞬間（V_a=262.4[V]）にD点まで飛ぶ。A点からB点への変化も全く同様である。

次に磁界の向きを逆にして，発振するV_aの範囲について測定した結果を図13に示す。特に高周波電圧の高いところで良のサセプタンス側に片寄った軌跡となっているが，高周波電圧の低い所の一部に正常と思われる軌跡が見られる。

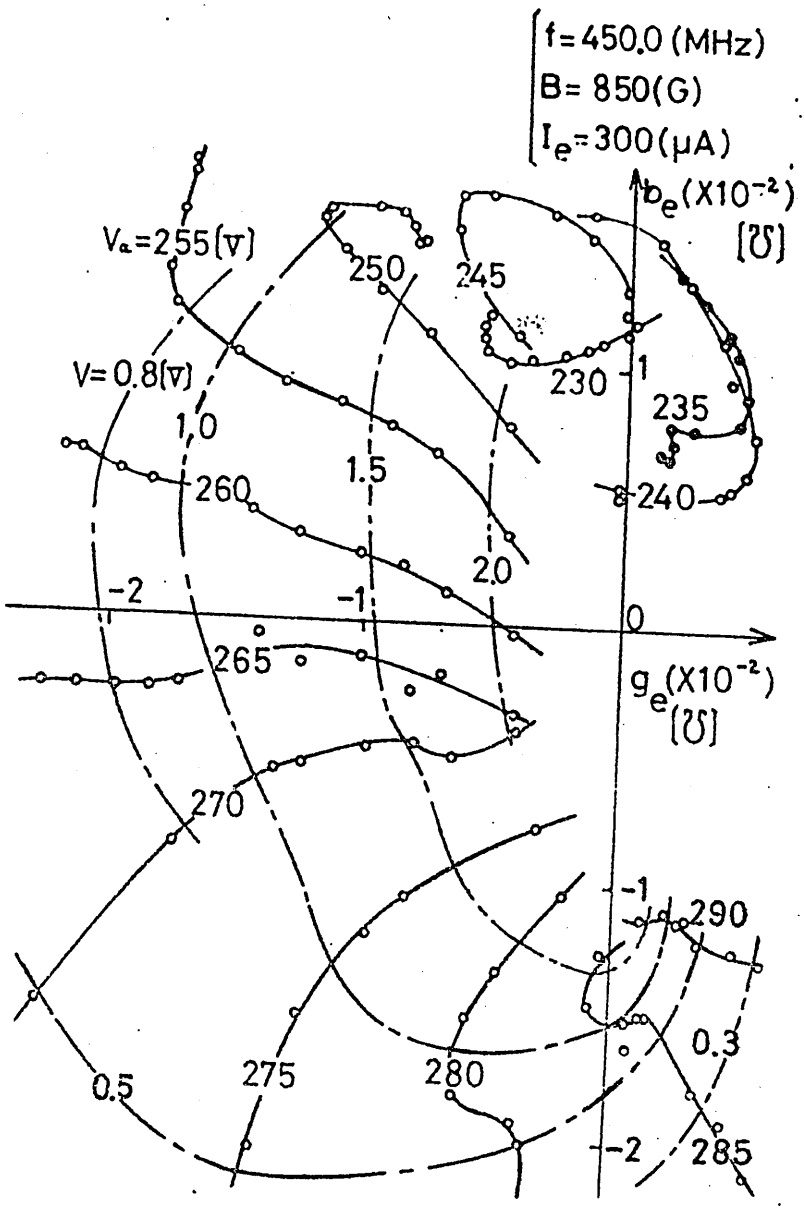


図8 電子アドミタンス特性 (1)

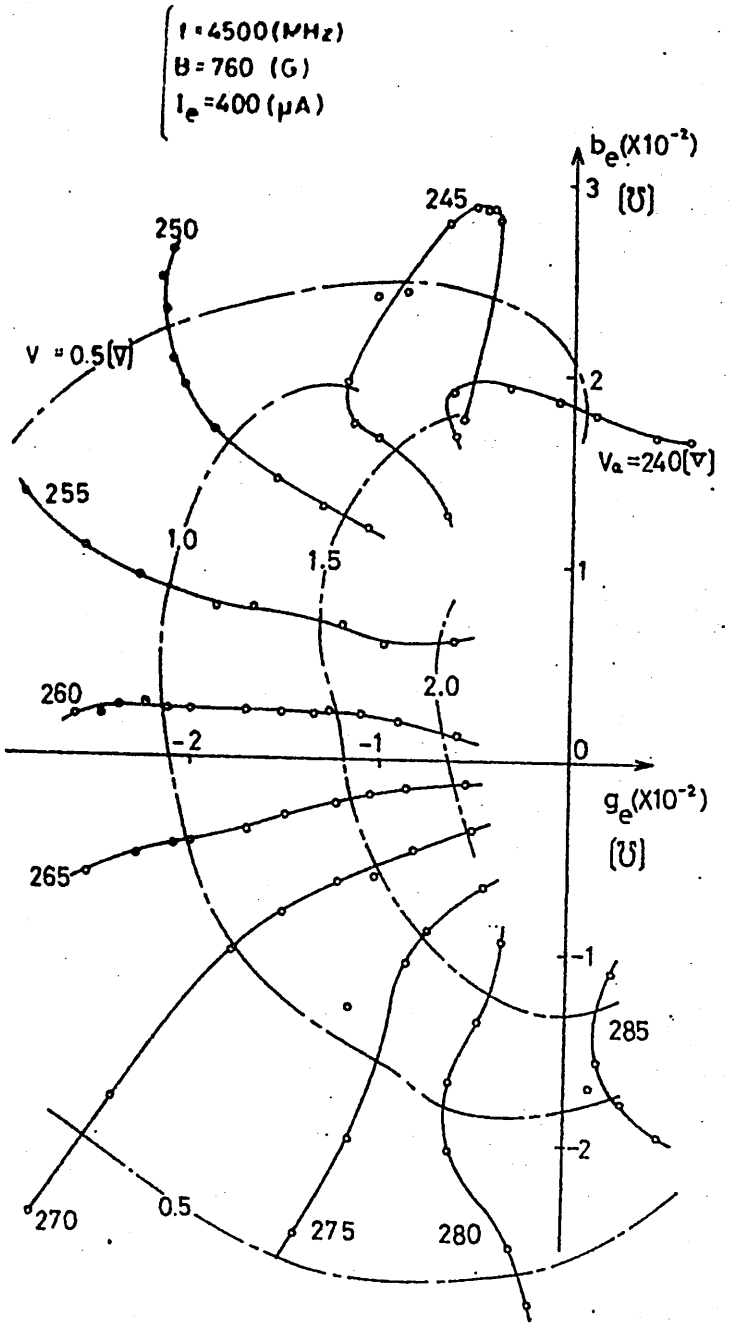


図9 電子アドミタンス特性 (2)

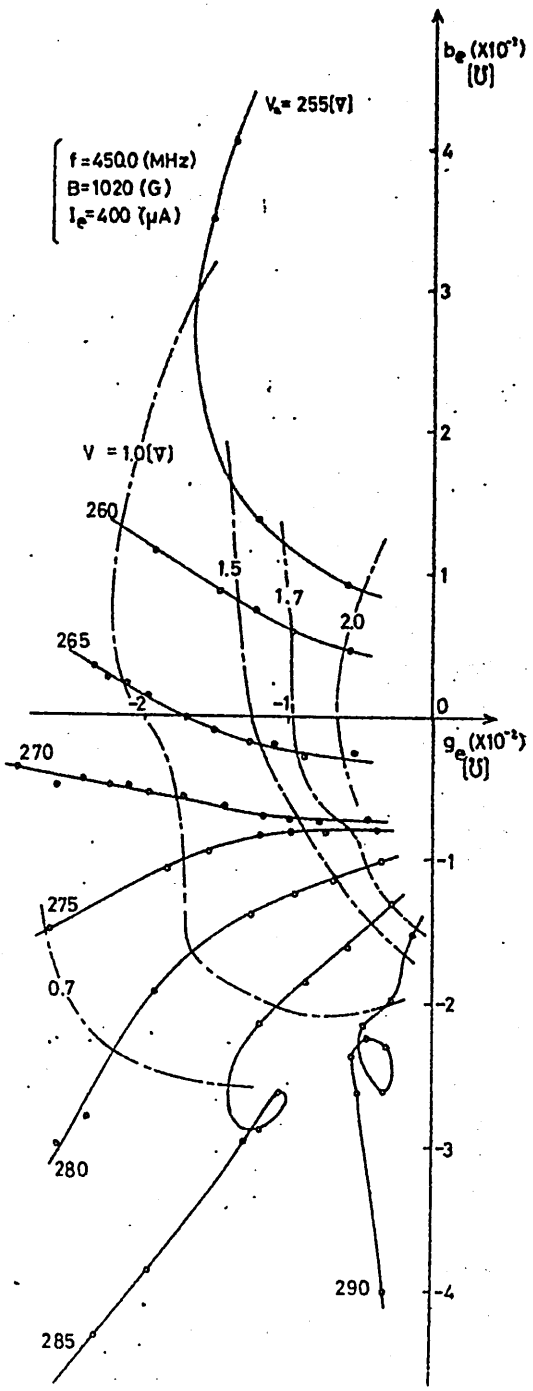


図 10 電子アドミタンス特性 (3)

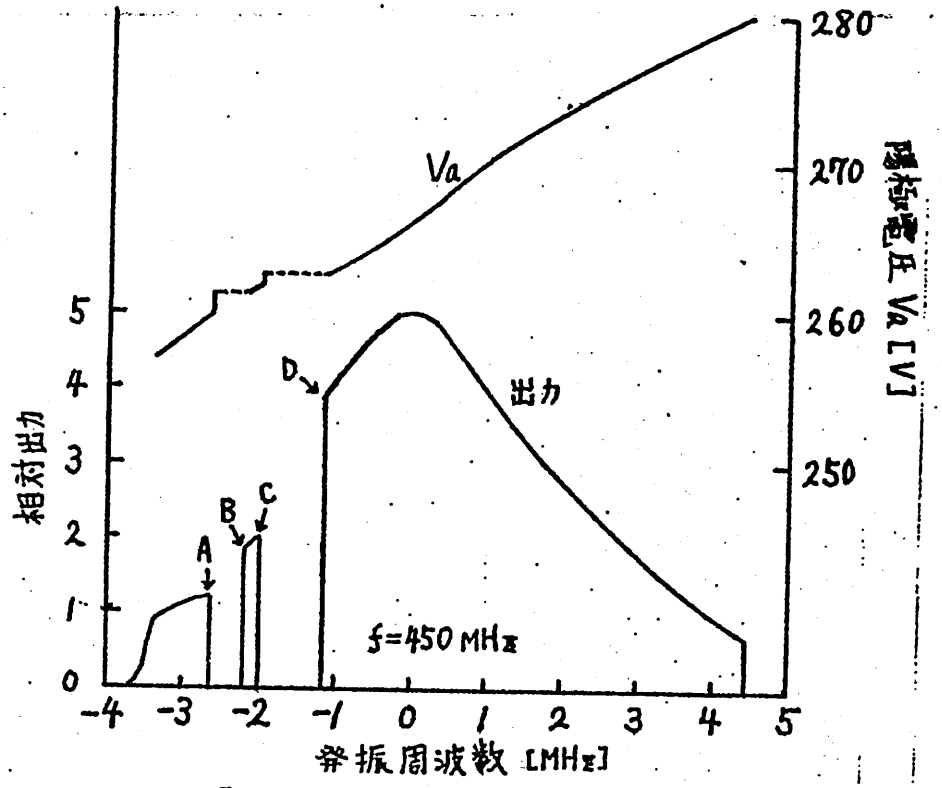


図 11 発振出力と周波数特性

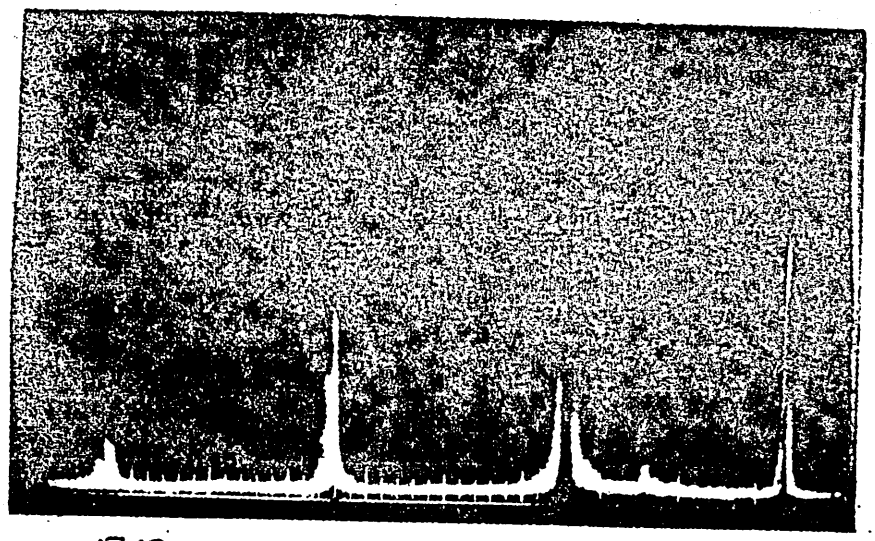


図 12 Va = 262.2 [V] における側帯波を持つスペクトル

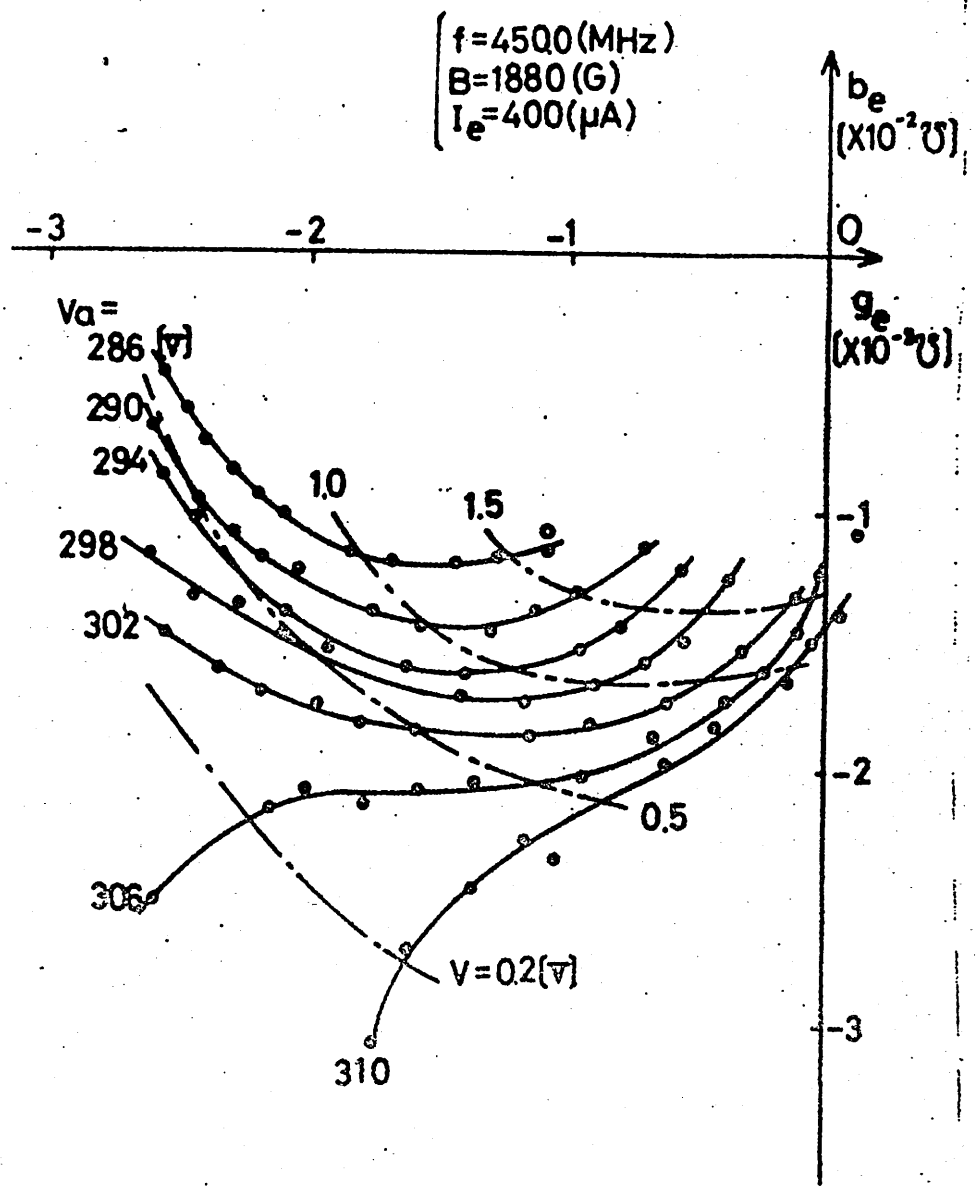


図13 磁界方向が逆の電子アドミタンス特性

3.3 検討

図 8～10 に示す結果から中心部分の周波数に対するサセプタンス変化を調べるために，次式で定義される素子の Q を使用する。

$$Qd = \frac{we}{2|ge|}\cdot\frac{\partial be}{\partial w}\Big|_{we} = \frac{1}{2|ge|}\cdot\frac{\partial be}{\partial a}\Big|_{a=1} \qquad (1)$$

$V = 1.0$ [V] における結果を表 1 に示す。また各振動回数 N に対する理論からの結果を表 2 に示す。これらの比較により図 8 の結果は $N \fallingdotseq 16$，図 9 は $N \fallingdotseq 13$，図 10 は $N \fallingdotseq 18$ に対応していることが分かる。

表 1

	Qd
図 8	19
図 9	16
図 10	22

表 2

N	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Qd	4.9	7.3	9.9	13	15	17	20	22	24

図 9 の $V_a = 260$ [V] の曲線のコンダクタンス変化を β に対して取ると図 14 となる。ここで β は規格化高周波電圧で，$\beta = V_m/V_0$，V_m は高周波電圧振幅の 1/2 である。同図には $N = 4$ と 13 に対応する理論の結果も示されている。サセプタンスの変化と異なりコンダクタンスの β に対する変化は比較的少なく低振動回数のそれに近い値となっている。

以上述べたことより次の事が明らかになる。電子アドミタンス軌跡は大なり小なり低電圧側で異常が見られる。特に $+\alpha$ 方向に電子が推移するように磁界を加えた場合は顕著である。これは直流電位分布が完全な放物線から逸脱していると考えると説明できる。つまり電子振動の振幅が小さくなったとき，振動周波数 we が小さくなるような電位分布であれば減速されるとともに $a = w/we$ が大となるので，$a < 1$ となる陽極電圧のときには，a はより 1 に近づき，$a > 1$ となるときには a が 1 より遠ざかろうとする。$a > 1$ すなわち低陽極電圧側では高周波電圧に直交した電流成分が大きくなり負性コンダクタンスは小さく，サセプタンスは大きくなるものと思われる。

特に+z方向に電子が推移するように磁界を加えた場合には，陽極の開放側に電子が推移するので，z方向の電界を受け電子振動面のり位置が大きくなりWeの減少が著しくなるためであると思われる。この効果は高周波電圧が大きいほど大となり図13がよく説明できる。これは図下の電極について言えることであるが，双曲線電極の場合にも低陽極電圧側の異常は見られる。図1は双曲線電極での結果であり，空間電荷のためであると考えられる。

また，コンダクタンスは低振動回数の値を示し，サセプタンス変化は高振動回数に対応する結果が得られたことにより，多数回の電子振動をしているものと思われるが等周期性が保たれていないようである。

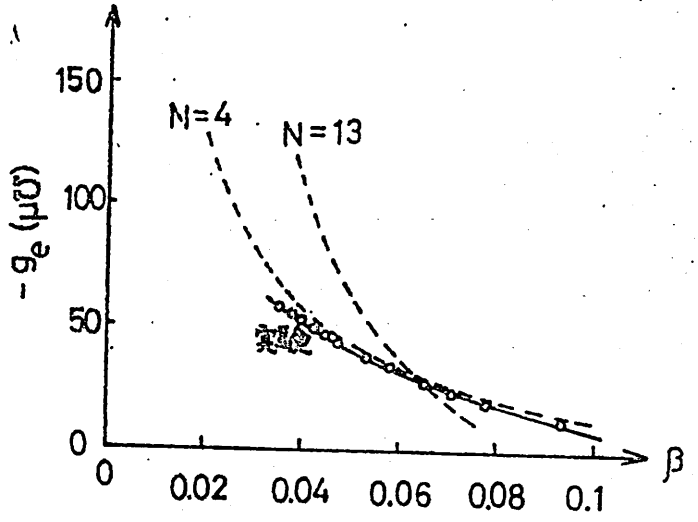


図14 電子コンダクタンスの理論値と実験値の比較。

3.4 注入同期範囲

大阪管は低磁界と異なり高磁界において，外部信号の影響が非常に小さいと思われる場合があるので注入同期範囲について調べた。

測定結果を図15に示す。−15 ～ −20 [dB] の注入比の範囲で Q_{ext} を計算すると周波数の低い側で平均96，高い側で平均97である。これらは回路測定から得られた値 $Q_{ext}=79$ の22%増しに相当する。すなわち，これだけAdlerの結果からずれることが分かる。

そのときのアドミタンス測定結果と回路アドミタンス軌跡を図16に示す。大阪管の電子アドミタンス軌跡と回路のそれはほぼ直角に交わっていることが分かる。

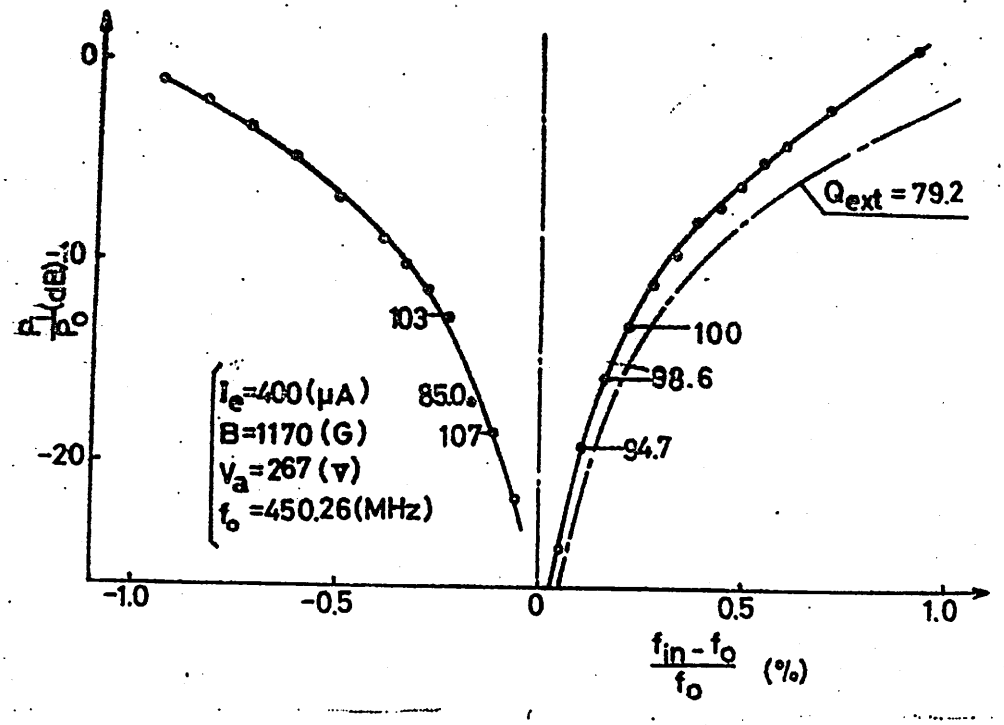


図15 注入同期領域の理論値と実験結果

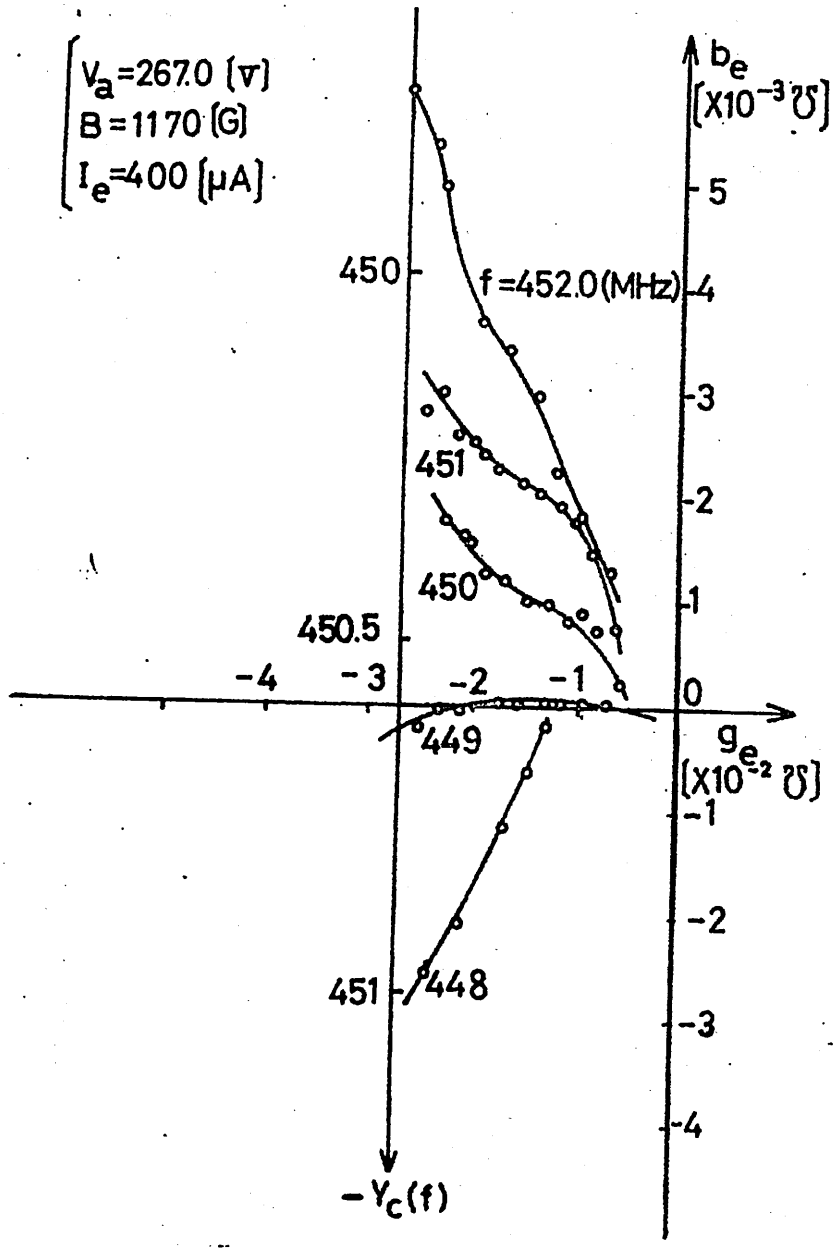


図16．　図15の動作点付近の電子アドミタンス軌跡

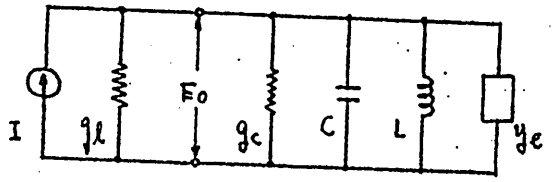


図17. 注入同期の等価回路

注入同期の等価回路を図17とし，小信号注入を仮定すると，次式が成立する．

$$g_l + g_c + g_e + j\left(2C + \frac{\partial b_e}{\partial w}\right)\Delta w = \frac{I}{E_0} \qquad (2)$$

ここで，g_l は負荷コンダクタンス，g_c は発振器の擬似コンダクタンスである，同期境界において(2)式は，

$$\left.\begin{aligned} g_l + g_c + g_e &= 0 \\ \left(2C + \frac{\partial b_e}{\partial w}\right)\Delta w &= \frac{|I|}{E_0} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$g_t = g_l + g_c$ と置くと次の関係が得られる．

$$Q_{ext} + \frac{g_l}{g_t} Q_d = \frac{w_0}{\Delta w}\sqrt{\frac{P_i}{P_0}} \qquad (4)$$

ここで，$Q_{ext} = \dfrac{w_0 C}{g_c}$　　$Q_d = \dfrac{w_0}{2|g_c|}\dfrac{\partial b_e}{\partial w}$

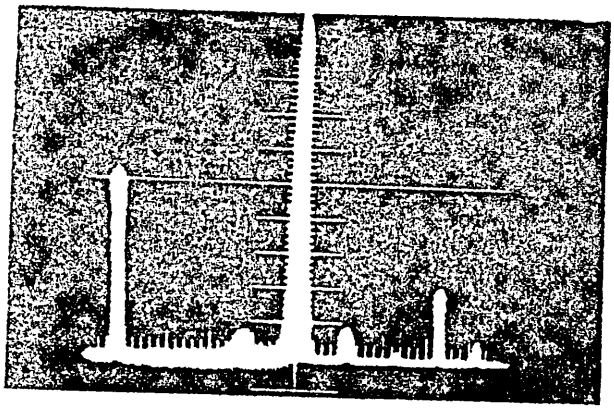
$P_i = |I|^2/4g_l$　　$P_0 = |E_0|^2 \cdot g_l$

見かけ上の Q_{ext} は $g_l Q_d / g_t$ だけ増加する。測定より得られた結果 $Q_d = 22$，$g_l = 0.02$[℧]，$g_t = 0.027$[℧] を代入すると，見かけの Q は 95.3 となり測定結果とほぼ一致する．

4. 信号注入時の一特性

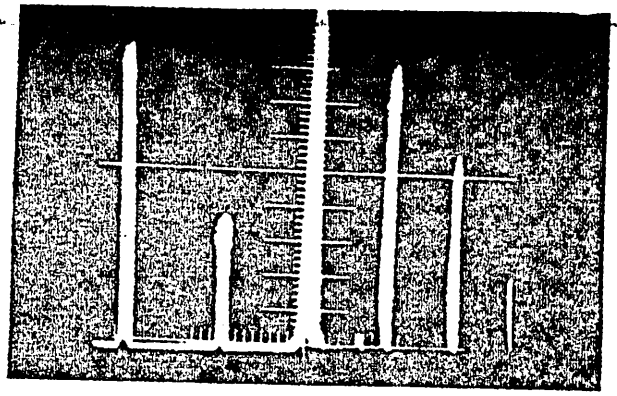
大阪管のQはかなり大きいことが示された。即ち，周波数変化に対してサセプタンスの変化はかなり大きい．このために生じると思われる興味あるスペクトルを観測した．図18がそれであり，注入電力の増大によって(a)図から(d)図へと移行する．信号は自由振動周波数より2.9[MHz]低いところに注入されている．-21dB (P_i/P_0 比)の信号を注入すると(a)図のようにfoによるビート以外に，注入信号成分のスペクトルを除く各スペクトルに側帯波が現われる．さらに注入比を増大して行くと，側帯波とfoスペクトルとの差の周波数は増大して行き，fo-foの1/2になるとき(b)図のように，側帯波は急に大きくなる．さらに信号を強めると，fo-foの1/3となるときに同様の現象が生じる．これが(c)図である．さらに増加すると，この側波帯り成分は消滅し，単一スペクトルとなる．((d)図)

このようにfo-foの1/2，1/3において系の動揺が大きくなるという結果を得た．

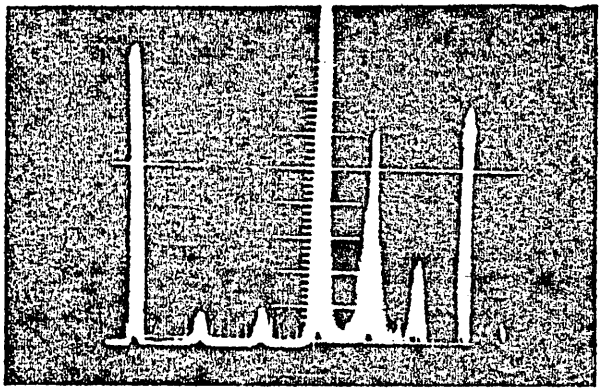


(a) $P_i/P_0 = -21.2$ [dB]

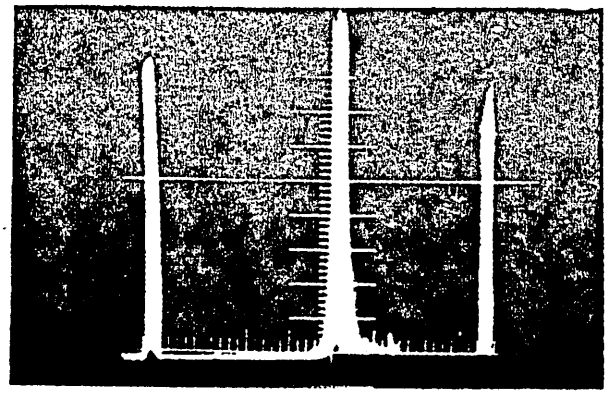
図18 信号注入における異常スペクトルの一例



(b) -16.0 [dB]



(c) -13.1 [dB]



(d) -11.8 [dB]

5. むすび

点状フィラメントを持つ大阪管では，電子が正方向の電極端まで推移して早期に作用空間から取除かれるような場合に低振動回数で動作できると思われるが，そうでない場合にはかなり多くの振動をしているようである。静電界の非線形性のために，理論値に比べコンダクタンス成分は小さくなり，サセプタンス成分が大きくなる結果を得た。

周波数に対する大阪管の電子サセプタンス変化はかなり大きいことが示された。

謝辞　有益な御討論をいただいた大阪工業大学 田 雅郎教授，関西大学工学部 大東延久専任講師，石丸尚通大学院生に感謝します。

文献

1) 飯田，森田，田；“大阪管の電子アドミタンスの計算”，輻射科学研究会資料 昭和49年12月6日

2) S. Okamura, Y. Okabe: “Measurements of Admittances of Microwave Oscillators with Injection Locking”, IEEE Trans., IM-21, P443 (Nov. 1972)

3) 藤澤和男；“マイクロ波回路”，コロナ社.

輻射科学研究会資料

多層異方性誘電体線路の行列表示による解析

岸岡 清

六島 克

(大阪府立大学・工学部)

昭和51年6月25日

1. まえがき

異方性媒質よりなる線路は、光I.C.への応用が期待され種々の面から研究されている。例えば、電気及び、磁気光学効果をもつ異方性媒質を用いたモード変換器、変調器やアイソレータ、サーキュレータ等の非相反回路素子、更には、半漏洩構造線路のモードフィルターへの応用が考えられている[(1)~(6)]。

これに伴って、その基礎となる異方性線路自体の解析も行なわれ、誘電率テンソルの非対角項成分が対角項に比べて十分小さい場合は、変分法を用いたモード結合理論により種々の回路が解析されている[(6),(7)]。また、波動論的立場からこの種の伝送系の電磁波モードに対する厳密解も得られているが、その取扱は誘電率テンソル成分の一部が零である場合に限られている[(8),(9)]。光軸の回転及び、電気、磁気光学効果をもつ結晶に対しては、印加電界、磁界の回転により大きな非対角項が現われる。そこで、筆者らは先に、光軸が任意方向にある一軸異方性誘電体よりなる多層構造の線路を横方向の伝搬に対応した伝送線路表示に基いて解析を行なった[(10)]。

本報告は、より一般的に任意のテンソル誘電率及び、テンソル透磁率をもつ多層平板構造の線路を取扱っている。この場合、境界面に垂直方向の電磁界の伝搬に着目して導いた界の結合方程式より固有値問題として横方向の位相定数及び、伝送行列を求め、計算機解法に適した行列演算で線路の特性が一般的に求まることを示し、種々の線路の伝搬モード特性、電磁界分布の数値例を示している。

2. 電磁界の導出

図1に示す様にy-z面に平行に境界面があり厚さt_nの各層内では一様な誘電率テンソル及び透磁率テンソルをもつ多層平板構造の誘電体線路を考える。電磁界はz方向に導波されy方向には一様であると仮定する。各層の誘電率テンソル$\hat{\varepsilon}$, 誘磁率テンソル$\hat{\mu}$を

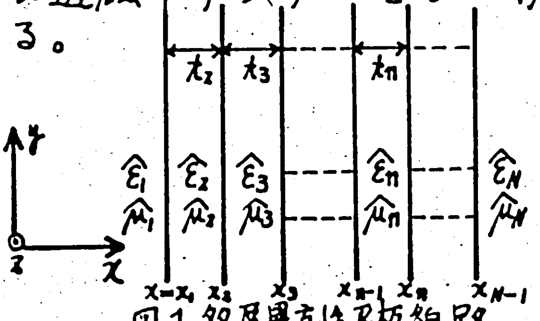


図1 多層異方性平板線路

$$\hat{\varepsilon}=\varepsilon_0\begin{bmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13}\\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23}\\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33}\end{bmatrix},\quad \hat{\mu}=\mu_0\begin{bmatrix}\mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13}\\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23}\\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33}\end{bmatrix} \quad (1)$$

とすると、Maxwellの方程式は、

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{H}&=\hat{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\\ \nabla\times\mathbf{E}&=-\hat{\mu}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

となる。(以下$\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$の添字を省略して第n層での量であるとする。) 電磁界のz方向の変化及び、時間変化を$\exp[-j(\beta_z z-\omega t)]$と仮定し$\partial/\partial y=0$を考慮して境界面に平行及び、垂直な界の成分を

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}E_y\\H_z\\E_z\\H_y\end{bmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}E_x\\H_x\end{bmatrix}\qquad(3)$$

で表示すると式(2)は、

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}=j\mathbb{C}\mathbf{a}\qquad(4)$$

$$\mathbf{b}=\mathbb{D}\mathbf{a}\qquad(5)$$

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}\frac{\beta_z\mu_{31}}{\mu_{11}} & \frac{-\omega\mu_0(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})}{\mu_{11}} & 0 & \frac{-\omega\mu_0(\mu_{11}\mu_{32}-\mu_{12}\mu_{31})}{\mu_{11}}\\ \frac{-\{k_0^2\mu_{11}(\varkappa_{11}\varkappa_{22}-\varkappa_{12}\varkappa_{21})-\varkappa_{11}\beta_z^2\}}{\omega\mu_0\mu_{11}\varkappa_{11}} & \frac{\beta_z\mu_{13}}{\mu_{11}} & \frac{-\omega\varepsilon_0(\varkappa_{11}\varkappa_{23}-\varkappa_{13}\varkappa_{21})}{\varkappa_{11}} & \frac{-\beta_z(\varkappa_{21}\mu_{11}-\varkappa_{11}\mu_{12})}{\mu_{11}\varkappa_{11}}\\ \frac{\beta_z(\varkappa_{12}\mu_{11}-\varkappa_{11}\mu_{21})}{\varkappa_{11}\mu_{11}} & \frac{\omega\mu_0(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{21})}{\mu_{11}} & \frac{\beta_z\varkappa_{13}}{\varkappa_{11}} & \frac{\{k_0^2\varkappa_{11}(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21})-\mu_{11}\beta_z^2\}}{\omega\varepsilon_0\varkappa_{11}\mu_{11}}\\ \frac{\omega\varepsilon_0(\varkappa_{11}\varkappa_{32}-\varkappa_{12}\varkappa_{31})}{\varkappa_{11}} & 0 & \frac{\omega\varepsilon_0(\varkappa_{11}\varkappa_{33}-\varkappa_{13}\varkappa_{31})}{\varkappa_{11}} & \frac{\beta_z\varkappa_{31}}{\varkappa_{11}}\end{bmatrix}\quad(6)$$

$$\mathbb{D}=\begin{bmatrix}-\varkappa_{12}/\varkappa_{11} & 0 & -\varkappa_{13}/\varkappa_{11} & \beta_z/\omega\varepsilon_0\varkappa_{11}\\ -\beta_z/\omega\mu_0\mu_{11} & -\mu_{13}/\mu_{11} & 0 & -\mu_{12}/\mu_{11}\end{bmatrix}\quad(7)$$

となる。式(4)の結合行列$\mathbb{C}$の固有値方程式は、固有値β_xに対する

$$\det(\mathbb{C}-\beta_x\mathbb{U})=0 \qquad (8)$$

なる4次方程式となるが．媒質が無損失であれば $\bar{\varepsilon}$，$\bar{\mu}$ はエルミート的となるので $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}^*$，$\mu_{ij}=\mu_{ji}^*$ が成り立ち，固有値方程式の β_x の各次数の係数は実数となり，β_x が複素根であればその複素共役 β_x^* も根となる。

固有値が単根である場合，β_{xi} $(i=1\sim4)$ に属する右固有ベクトルの1組を $\mathbf{e}_i$ $(i=1\sim4)$ で表わし，左固有ベクトルの1組を $\mathbf{d}_i$ $(i=1\sim4)$ で表わすと，$\mathbb{C}$ の対角化行列 $\mathbb{T}$ 及び，その逆行列 $\mathbb{T}^{-1}$ は．

$$\mathbb{T}=\left[\mathbf{e}_1/\sqrt{S_{11}}\quad \mathbf{e}_2/\sqrt{S_{22}}\quad \mathbf{e}_3/\sqrt{S_{33}}\quad \mathbf{e}_4/\sqrt{S_{44}}\right] \qquad (9)$$

$$\mathbb{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{d}_1^t/\sqrt{S_{11}}\\ \mathbf{d}_2^t/\sqrt{S_{22}}\\ \mathbf{d}_3^t/\sqrt{S_{33}}\\ \mathbf{d}_4^t/\sqrt{S_{44}}\end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$S_{ii}=\mathbf{d}_i^t\cdot\mathbf{e}_i \qquad (11)$$

と表わせる。但し，$\mathbf{d}_i^t$ は $\mathbf{d}_i$ の転置を表わす。

さて，式(4)の解は $x=x_0$ の界の値を用いて．

$$\mathbf{a}=\exp\{j\mathbb{C}(x-x_0)\}\,\mathbf{a}_{x=x_0} \qquad (12)$$

となる。ここで行列関数 $\exp\{j\mathbb{C}(x-x_0)\}$ は電磁界の境界面成分の x 方向の伝搬の伝送行列となっている。これを冪級数展開して．

$$\mathbb{T}^{-1}\mathbb{C}\,\mathbb{T}=\begin{bmatrix}\beta_{x1} & & & 0\\ & \beta_{x2} & & \\ & & \beta_{x3} & \\ 0 & & & \beta_{x4}\end{bmatrix} \qquad (13)$$

なる関係を用いるとこの伝送行列 $\mathbb{A}$ は．

$$A = T \begin{bmatrix} \exp(j\beta x_1 l) & & 0 & \\ & \exp(j\beta x_2 l) & & \\ 0 & & \exp(j\beta x_3 l) & \\ & & & \exp(j\beta x_4 l) \end{bmatrix} T^{-1} \quad (14)$$

と表せる。但し、$l = x - x_0$ であり x 方向の2点間の距離を表す。) ここで、

$$g = T^{-1} a \quad (15)$$

なるベクトルを定義すると式(12)、(14)より

$$g = \begin{bmatrix} \exp(j\beta x_1 l) & & 0 & \\ & \exp(j\beta x_2 l) & & \\ 0 & & \exp(j\beta x_3 l) & \\ & & & \exp(j\beta x_4 l) \end{bmatrix} g_{x=x_0} \quad (16)$$

を得る。これは g の i 成分 $g_i\ (i=1\sim4)$ は相互に結合することなく位相定数 β_{xi} で x 方向に伝搬する4つの正規モードであることを示している。この正規モードと界成分の関係は式(15)より

$$g_i = \frac{d_{1i}}{\sqrt{S_{11}}} E_y + \frac{d_{2i}}{\sqrt{S_{22}}} H_z + \frac{d_{3i}}{\sqrt{S_{33}}} E_z + \frac{d_{4i}}{\sqrt{S_{44}}} H_y \quad (17)$$
$$(i=1\sim4)$$

と表わせる。但し、d_{ji} は d_i の第 j 成分である。

以上により層内の断面 $x=x_0$ で電磁界の境界面に平行な成分 $a_{x=x_0}$ を与えると、式(14)及び式(3)の A, D により任意の点の電磁界成分とそれに対応した正規モードが求められる。

固有値方程式(8)の解は一般には数式的に表示できないので計算機による行列の固有値問題として数値解を求めなければならないが、特別な場合として、媒質の透磁率が $\mu_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij}: クロネッカ・デルタ) で誘電率テンソルが、

Longitudinal $$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Polar $\quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ 0 & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix}$ (19)

Equatorial $\quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & \kappa_{13} \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ \kappa_{31} & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}$ (20)

で与えられる様な3つの場合は固有値方程式より数式的に β_{xi} を表示出来る。Longitudinal及び、Polarの場合は固有値方程式は複2次式となり β_{xi}^2 及び、Π, Π^{-1} の要素は.

Longitudinal

$$\beta_{xi}^2 = \left[\left\{ k_0^2(\kappa_{11}\kappa_{33} - \kappa_{11}\kappa_{22} + \kappa_{12}\kappa_{21}) - \beta_z^2(\kappa_{11}+\kappa_{33}) \right\} \pm \sqrt{\left\{ k_0^2(\kappa_{11}\kappa_{33} - \kappa_{11}\kappa_{22} + \kappa_{12}\kappa_{21}) - \beta_z^2(\kappa_{11}+\kappa_{33}) \right\}^2 - 4\kappa_{11}\kappa_{33}\left\{ (\kappa_{11}-\beta_z^2)(k_{22}^2-\beta_z^2) - k_{12}^2 k_{21}^2 \right\}} \right] \Big/ 2\kappa_{11} \quad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} T_{1i} &= \omega\mu_0 \left[\beta_{xi}^2 - (k_{11}^2 - \beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_{11} \right] \Big/ \sqrt{S_{1i}} \\ T_{2i} &= -\beta_{xi} \left[\beta_{xi}^2 - (k_{11}^2 - \beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_{11} \right] \Big/ \sqrt{S_{1i}} \\ T_{3i} &= \omega\mu_0 \beta_{xi}\beta_z \kappa_{12}/\kappa_{11}\sqrt{S_{1i}} \\ T_{4i} &= \beta_z k_{33}^2 \kappa_{12}/\kappa_{11}\sqrt{S_{1i}} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} T_{1i}^{-1} &= -\beta_{xi} \left[\beta_{xi}^2 - (k_{11}^2 - \beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_{11} \right] \Big/ \sqrt{S_{1i}} \\ T_{2i}^{-1} &= \omega\mu_0 \left[\beta_{xi}^2 - (k_{11}^2 - \beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_{11} \right] \Big/ \sqrt{S_{1i}} \\ T_{3i}^{-1} &= -\beta_z k_{33}^2 \kappa_{21}/\kappa_{11}\sqrt{S_{1i}} \\ T_{4i}^{-1} &= -\omega\mu_0 \beta_{xi}\beta_z \kappa_{21}/\kappa_{11}\sqrt{S_{1i}} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$S_{1i} = -2\omega\mu_0\beta_{xi}\left[\left\{ \beta_{xi}^2 - (k_{11}^2 - \beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_{11} \right\}^2 + \beta_z^2 k_{33}^2 \kappa_{12}\kappa_{21}/\kappa_{11}^2 \right] \quad (i = \sim 4) \quad (24)$$

但し.

$$k_{ij} = k_0^2 \kappa_{ij}$$

Polar

$$\beta_{xk}^2 = \left[\left\{ k_{11}^2(\kappa_{33} - \kappa_{22}) - \beta_z^2(\kappa_{33} - \kappa_{11}) \right\} \pm \sqrt{\left\{ k_{11}^2(\kappa_{33} - \kappa_{22}) - \beta_z^2(\kappa_{33} - \kappa_{11}) \right\}^2 - 4\kappa_{11}(k_{11}^2 - \beta_z^2)\left\{ (k_{22}^2 - \beta_z^2)\kappa_{33} - k_0^2 \kappa_{23}\kappa_{32} \right\}} \right] \Big/ 2\kappa_{11} \quad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} T_{1i} &= \omega\mu_0 \left[\beta_{xi}^2 - (k_{11}^2 - \beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_{11} \right] \Big/ \sqrt{S_{1i}} \\ T_{2i} &= -\beta_{xi} \left[\beta_{xi}^2 - (k_{11}^2 - \beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_{11} \right] \Big/ \sqrt{S_{1i}} \\ T_{3i} &= \omega\mu_0 (k_{11}^2 - \beta_z^2)\kappa_{32}/\kappa_{11}\sqrt{S_{1i}} \\ T_{4i} &= k_{33}^2 \beta_{xi} \Big/ \sqrt{S_{1i}} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} T_{i1}^{-1} &= -\beta_{xi}\left[\beta_{xi}^2-(k_n^2-\beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_n\right]/\sqrt{S_{ii}} \\ T_{i3}^{-1} &= \omega\mu_0\left[\beta_{xi}^2-(k_n^2-\beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_n\right]/\sqrt{S_{ii}} \\ T_{i2}^{-1} &= -k_{23}^2\beta_{xi}/\sqrt{S_{ii}} \\ T_{i4} &= -\omega\mu_0(k_n^2-\beta_z^2)\kappa_{23}/\kappa_{11}\sqrt{S_{ii}} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$S_{ii} = -2\omega\mu_0\beta_{xi}\left[\left\{\beta_{xi}^2-(k_{11}^2-\beta_z^2)\kappa_{33}/\kappa_{11}\right\}^2+k_0^2\kappa_{23}\kappa_{32}(k_{11}^2-\beta_z^2)/\kappa_{11}\right] \quad (i=1\sim4) \quad (28)$$

の様に表される。

また、Equatorial の場合は結合行列は

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix}\mathbb{C}_e & 0\\ 0 & \mathbb{C}_m\end{bmatrix} \quad (29)$$

なるブロック対角となり電磁界はTE, TM波に分離する。従って対角化行列は

$$\mathbb{T}=\begin{bmatrix}\mathbb{T}_e & 0\\ 0 & \mathbb{T}_m\end{bmatrix} \qquad \mathbb{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbb{T}_e^{-1} & 0\\ 0 & \mathbb{T}_m^{-1}\end{bmatrix} \quad (30)$$

となり、$\mathbb{T}_e$, $\mathbb{T}_e^{-1}$ は $\mathbb{C}_e$ の固有値

$$\beta_{x\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{k_{22}^2-\beta_z^2} \quad (31)$$

より

$$\mathbb{T}_e=\begin{bmatrix}\omega\mu_0 & \omega\mu_0\\ -\beta_{x1} & -\beta_{x2}\end{bmatrix} \qquad \mathbb{T}_e^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/\omega\mu_0 & -1/\beta_{x1}\\ 1/\omega\mu_0 & -1/\beta_{x2}\end{bmatrix} \quad (32)$$

となる。また、$\mathbb{T}_m$ $\mathbb{T}_m^{-1}$ は $\mathbb{C}_m$ の固有値

$$\beta_{x\frac{3}{4}}=\frac{\kappa_n\beta_z(\kappa_{13}+\kappa_{31})\pm\sqrt{\{\kappa_n\beta_z(\kappa_{13}+\kappa_{31})\}^2-4\kappa_{11}^2(k_{11}^2-\beta_z^2)(\kappa_n\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})}}{2\kappa_{11}^2} \quad (33)$$

より

$$\mathbb{T}_m=\begin{bmatrix}(k_{11}^2-\beta_z^2)/\omega\varepsilon_0\kappa_n & (k_{11}^2-\beta_z^2)/\omega\varepsilon_0\kappa_n\\ -(\beta_z\kappa_{13}/\kappa_{11}-\beta_{x3}) & -(\beta_z\kappa_{13}/\kappa_{11}-\beta_{x4})\end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\Pi_m^{-1}=\frac{\omega\varepsilon_0\chi_{11}}{(k_{11}^2-\beta_z^2)(\beta_{x4}-\beta_{x4})}\begin{bmatrix}-(\beta_z\chi_{13}/\chi_{11}-\beta_{x4})-(k_{11}^2-\beta_z^2)/\omega\varepsilon_0\chi_{11}\\(\beta_z\chi_{13}/\chi_{11}-\beta_{x3})\quad(k_{11}^2-\beta_z^2)/\omega\varepsilon_0\chi_{11}\end{bmatrix}\qquad(35)$$

となる。なお、等方性媒質よりなる層はこの場合において

$$\chi_{ij}=\delta_{ij}\chi\ ,\ \beta_{x1,2}=\pm\sqrt{\chi k_0^2-\beta_z^2}\qquad(36)$$

とおくことにより与えられる。

3. 特性方程式

前節ではある1つの層内のx方向の伝搬について考えたが各層の境界面の間の電磁界成分aは、伝送行列Aにおいて$l=x_m$とおくことにより関係づけられ、各境界でaが連続である境界条件を考慮すると$a_{x=x_1}$と$a_{x=x_{N-1}}$は

$$a_{x=x_{N-1}}=\left(\prod_{i=2}^{N-1}A_i\right)a_{x=x_1}\equiv F\,a_{x=x_1}\qquad(37)$$

で関係づけられる。但し、A_iは第i層の伝送行列

次に両端層(第1,N層)は半無限空間と仮定しているのでこの2層での伝搬について考える。導波モードの電磁界は$x=\pm\infty$で零とならなければならないのでこの2層でのβ_{xi}は複素数でなければならない。よって上述した様にβ_{xi}も固有値となりこれらの層では互に複素共役な2組の固有値を持つことになる。しかしxの無限遠点での条件より第1層では$\mathrm{Im}(\beta_{xi})<0$を満足するこれらの$\beta_{xi}$に属する正規モードのみを採用し、第N層では$\mathrm{Im}(\beta_{xi})>0$を満足するこれらの$\beta_{xi}$に属する正規モードのみを採用しなければならない。そこで、第1層ではβ_{x2}、第N層ではβ_{x4}が条件に合ったとすると、

$$g_{i\,x=x_1}=0\ (i\neq 2),\quad g_{i\,x=x_{N-1}}=0\ (i\neq 4)\qquad(38)$$

とおき、式(15)より

$$\begin{bmatrix}E_y\\E_z\\H_y\\H_z\end{bmatrix}_{x=x_1}=\begin{bmatrix}{}^1T_{12}&{}^1T_{14}\\{}^1T_{32}&{}^1T_{34}\\{}^1T_{42}&{}^1T_{44}\\{}^1T_{22}&{}^1T_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_2\\g_4\end{bmatrix}_{x=x_1}\qquad(39)$$

なる関係が得られ．上式より $[g_k, g_l]^t$ を消去すれば．

$$\begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix}_{x=x_1} = \begin{bmatrix} {}^1T_{1k} & {}^1T_{1l} \\ {}^1T_{3k} & {}^1T_{3l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1T_{4k} & {}^1T_{4l} \\ {}^1T_{2k} & {}^1T_{2l} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix}_{x=x_1} \equiv {}^1\tilde{T} \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix}_{x=x_1} \quad (40)$$

となる。但し．${}^1T_{ij}$，${}^1\tilde{T}$ の添字は第1層の量であることを示す。同様に第N層では．

$$\begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix}_{x=x_{N-1}} = \begin{bmatrix} {}^NT_{1m} & {}^NT_{1n} \\ {}^NT_{3m} & {}^NT_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^NT_{4m} & {}^NT_{4n} \\ {}^NT_{2m} & {}^NT_{2n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix}_{x=x_{N-1}} \equiv {}^N\tilde{T} \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix}_{x=x_{N-1}} \quad (41)$$

となる。式(37)に式(40)，(41)の関係を用いて E_y．E_z を消去すれば．

$$\begin{bmatrix} -1 & {}^N\tilde{T}_{12} & 0 & {}^N\tilde{T}_{11} \\ 0 & {}^N\tilde{T}_{21} & -1 & {}^N\tilde{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\tilde{T}_{11} & {}^1\tilde{T}_{12} \\ 0 & 1 \\ {}^1\tilde{T}_{21} & {}^1\tilde{T}_{22} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix}_{x=x_1} \equiv \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix}_{x=x_1} = 0 \quad (42)$$

なる $[H_y\ H_z]^t$ に関する斉次な2元連立方程式を得る。この方程式が自明でない解をもつ条件として

$$\det\left(\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (43)$$

なる特性方程式を得る。さらに．$H_z(x_1)$ と $H_y(x_1)$ の比が

$$(H_z/H_y)_{x=x_1} = -W_{11}/W_{12} = W_{21}/W_{22} \quad (44)$$

と定まり．式(40)及び，伝送行列により層内の各点の電磁界成分の相対値が決定される。以上の取扱は両端層の固有値 β_k が縮退していない場合についてであるが．縮退があれば対角化行列を定めることは困難となりこの方法で特性方程式を求めることは出来ない。しかし．両端の層が等方性媒質よりなる場合には．式(40)，(41)に対応したE.Hの関係が直接的に波動インピーダンスを用いて．

$$E_y(x_1)=\rho_0 Z_0/\sqrt{k_1^2-\beta_z^2}\, H_z(x_1)\equiv Z_{e1} H_z(x_1)$$
$$E_z(x_1)=-\sqrt{k_1^2-\beta_z^2}/\rho_0 Y_0\, H_y(x_1)\equiv Z_{m1} H_y(x_1)\quad\Big\}(45)$$

$$E_y(x_{N-1})=-\rho_0 Z_0/\sqrt{k_N^2-\beta_z^2}\, H_z(x_{N-1})\equiv Z_{eN} H_z(x_{N-1})$$
$$E_z(x_{N-1})=\sqrt{k_N^2-\beta_z^2}/\rho_0 Y_0\, H_y(x_{N-1})\equiv Z_{mN} H_z(x_{N-1})\quad\Big\}(46)$$

と定まりこれらの関係と式(37)を用いれば

$$[(F_{11}-Z_{eN}F_{21})Z_{eN}+F_{12}-Z_{eN}F_{22}][(F_{33}-Z_{mN}F_{43})Z_{m1}+F_{34}-Z_{mN}F_{44}]$$
$$-[(F_{13}-Z_{eN}F_{23})Z_{m1}+F_{14}-Z_{eN}F_{24}][(F_{31}-Z_{mN}F_{41})Z_{e1}+F_{32}-Z_{mN}F_{42}]=0\quad(47)$$

なる特性方程式を得る。また、式(44)に対応する比は

$$(H_z/H_y)_{x=x_1}=-\frac{[(F_{13}-Z_{eN}F_{23})Z_{m1}+F_{14}-Z_{eN}F_{24}]}{[(F_{11}-Z_{eN}F_{21})Z_{e1}+F_{12}-Z_{eN}F_{22}]}=-\frac{[(F_{33}-Z_{mN}F_{43})Z_{m1}+F_{34}-Z_{mN}F_{44}]}{[(F_{31}-Z_{mN}F_{41})Z_{e1}+F_{32}-Z_{mN}F_{42}]}\quad(48)$$

と定められる。又後進波の特性はβ_zを負にすることで得られる。

4. 数値計算例

[I] 単一線路

(i) 誘電率テンソルの非対角項の一部が零である3つの場合の伝搬モード特性と電磁界分布を図3、図4に示す。
但し、誘電率テンソルの要素の出現位置と略名称の関係を通常使われている決め方に従って表1に示す。

表1

	Longitudinal	Polar	Equatorial
$\hat{\varepsilon}$	$\varepsilon_0\begin{bmatrix}\chi_{11} & \chi_{12} & 0\\ \chi_{12}^* & \chi_{22} & 0\\ 0 & 0 & \chi_{33}\end{bmatrix}$	$\varepsilon_0\begin{bmatrix}\chi_{11} & 0 & 0\\ 0 & \chi_{22} & \chi_{23}\\ 0 & \chi_{23}^* & \chi_{33}\end{bmatrix}$	$\varepsilon_0\begin{bmatrix}\chi_{11} & 0 & \chi_{13}\\ 0 & \chi_{22} & 0\\ \chi_{13}^* & 0 & \chi_{33}\end{bmatrix}$
Anisotropic A	χ_{12}：実数 AL	χ_{23}：実数 AP	χ_{13}：実数 AE
Gyrotropic G	χ_{12}：純虚数 GL	χ_{23}：純虚数 GP	χ_{13}：純虚数 GE

線路は無損失で構造は図2に示す。比誘電率テンソルの要素は全て、ε_1；(ε_0), ε_2；$(\varkappa_{11}=4.0, \varkappa_{22}=3.0, \varkappa_{33}=2.0, |\varkappa_{12}|=|\varkappa_{13}|=|\varkappa_{23}|=1.0)$ と仮定している。伝搬モード特性はGLとAL，及び，GPとAPでは等しくGEとAEは異ったものとなりこの2つの線路ではTE，TMモードが分離する。また，これらの線路では後進波のモード特性は前進波のものに等しい。

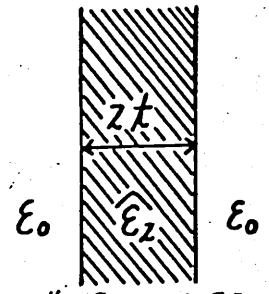
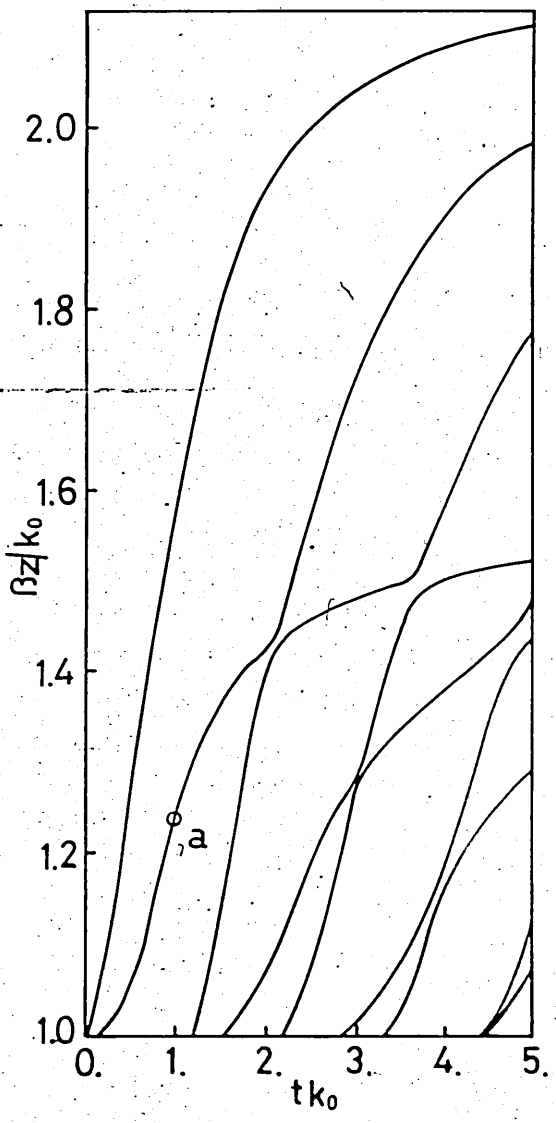
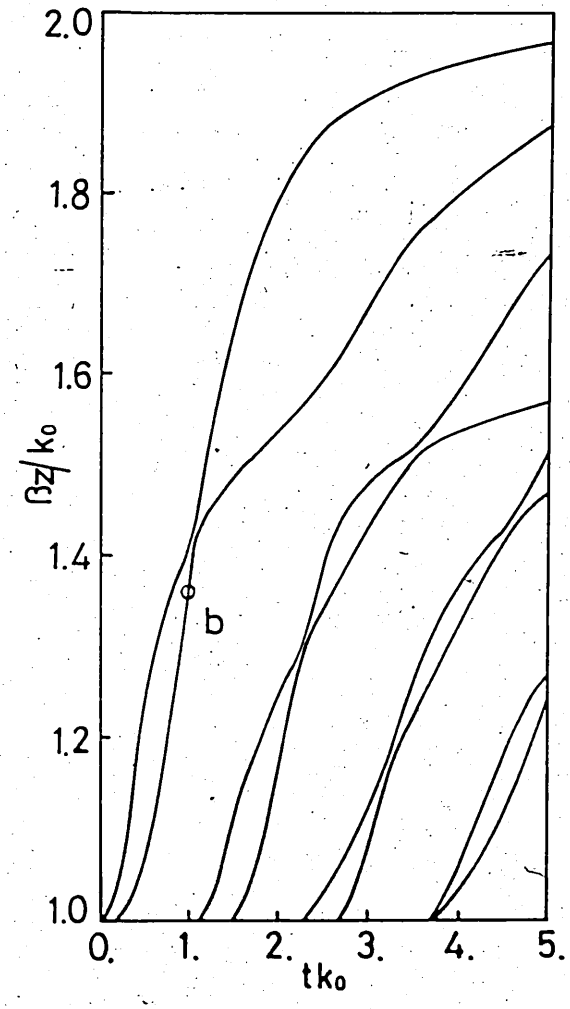


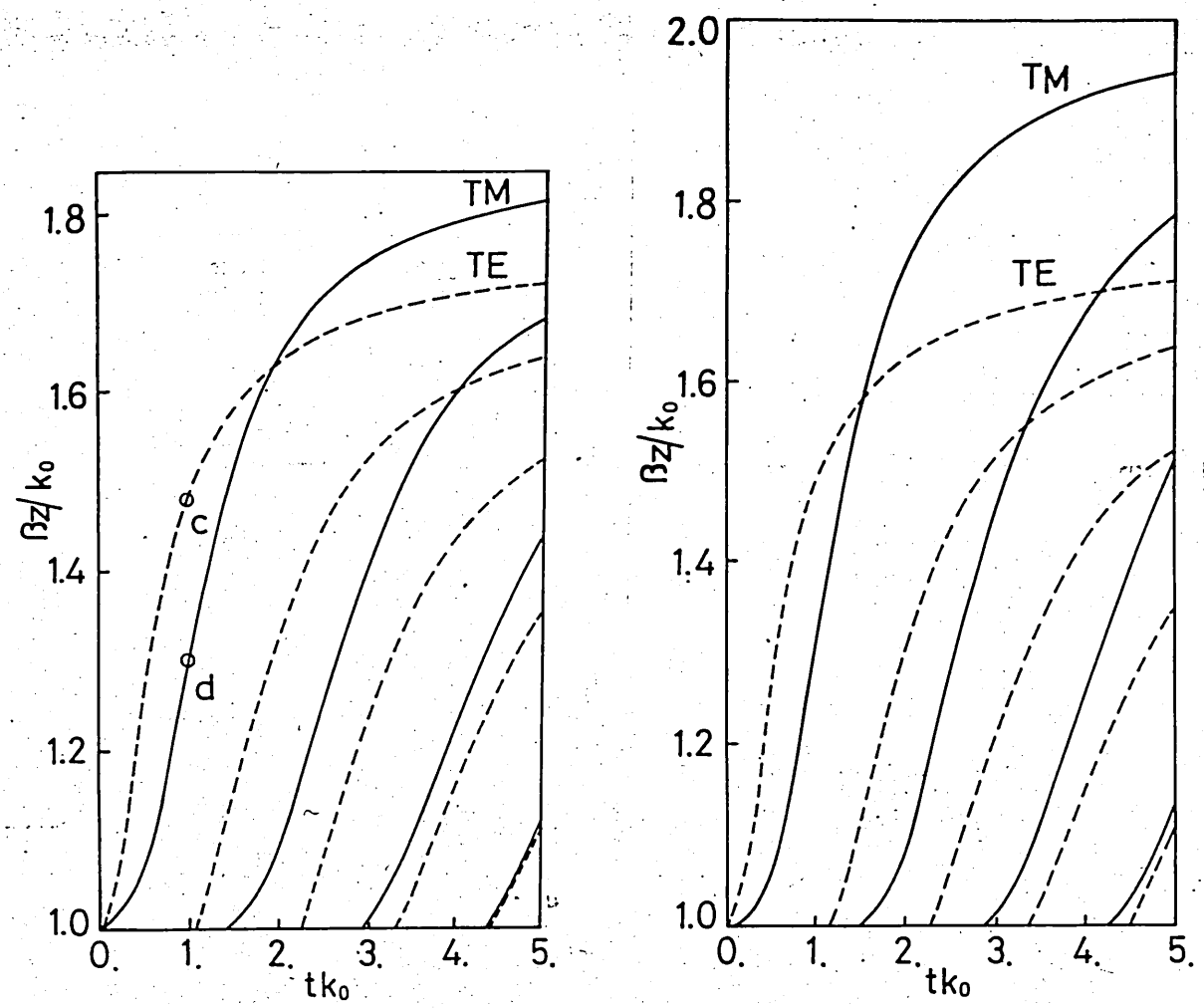
図2.単一異方性線路



3-(a) GL/AL 線路モード特性



3-(b) GP/AP 線路モード特性



3−(c) GE線路モード特性　　3−(d) AE線路モード特性

図3 単一線路のモード特性

これらの場合、式(21), (25), (31), (33)から2種のβ_z^2をもつことが解かるが、これに対応した2種の波がz方向に対してしゃ断となる条件よりβ_zとして2つのβ_{zc}を得る。これにより線路の伝搬モードのβ_zの上限β_{zc}は、

$$\beta_{zc} = MAX(\beta_{zc1}, \beta_{zc2}) \qquad (49)$$

となる。それぞれの場合のβ_{zc}は、

Longitudinal

$$\beta_{zc}/k_0 = \sqrt{(\kappa_{11}+\kappa_{zz} \pm \sqrt{(\kappa_{11}-\kappa_{zz})^2 + 4|\kappa_{12}|^2})/2} \simeq \begin{cases} 2.15 \\ 1.54 \end{cases} \qquad (50)$$

Polar

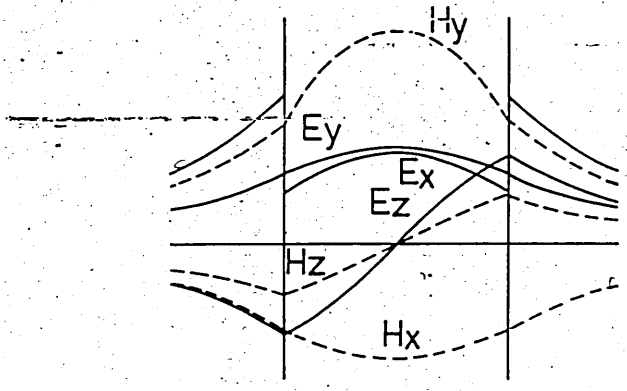
$$\beta_{zc_2'}/k_0 = \sqrt{(P \pm Q)/2\kappa_{33}} \simeq \begin{cases} 2.0 \\ 1.58 \end{cases} \qquad (51)$$

$$P = \kappa_{11}\kappa_{33} + \kappa_{22}\kappa_{33} - |\kappa_{23}|^2$$
$$Q = \sqrt{(|\kappa_{23}|^2 - \kappa_{11}\kappa_{33} - \kappa_{22}\kappa_{33})^2 - 4\kappa_{11}\kappa_{33}(\kappa_{22}\kappa_{33} - |\kappa_{23}|^2)}$$

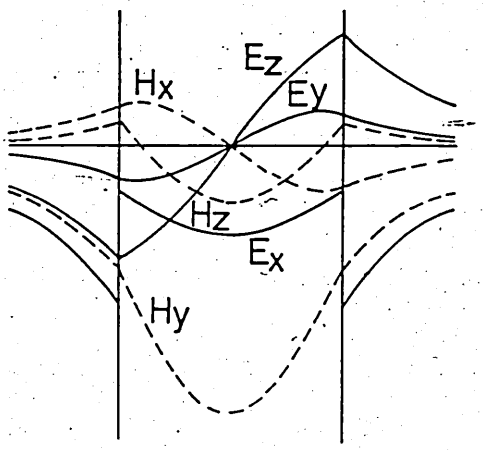
Equatorial

$$\beta_{zc_1}/k_0 = \sqrt{\kappa_{22}} \simeq 1.73 \ (TE)$$
$$\beta_{zc_2}/k_0 = 2\sqrt{\frac{\kappa_{11}(|\kappa_{23}|^2 - \kappa_{11}\kappa_{33})}{(\kappa_{13}+\kappa_{31})^2 - 4\kappa_{11}\kappa_{33}}} \simeq \begin{cases} 1.87\ (GE) \\ 2.0\ (AE) \end{cases} \ (TM) \qquad (52)$$

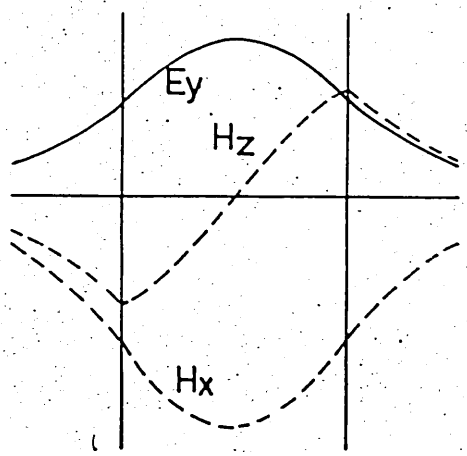
となりモード特性の曲線のゆがみの上限は β_{zc} 以外のもう一方の β_{zc_i}/k_0 に一致することも解かる。



4-(a)

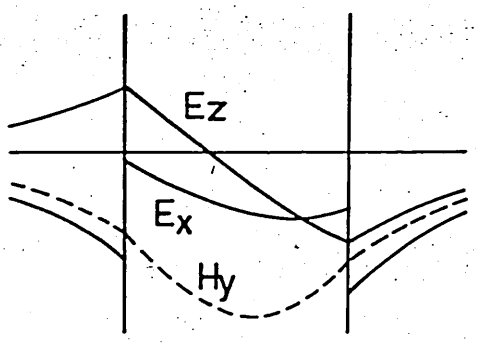


4-(b)

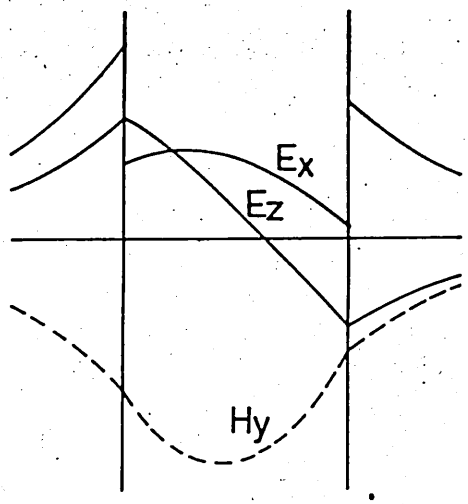


4-(c)

4-(a) GL線路の界分布(前進波)
(図3-(a) a表)
4-(b) GP線路の界分布(前進波)
(図3-(b) b表)
4-(c) GE線路の界分布(前進波, TE)
(図3-(c) c表)



4-(d) GE線路の界分布(前進波, TM)
(図 3-(c) d点)



4-(e) GE線路の界分布(後進波, TM)
(図 3-(c) d点)

図4 単一線路の電磁界分布

電磁界成分はAEのTMモードは複素量となるがそれ以外の場合は実数又は純虚数となる。GL, GPではそれぞれz, x方向に対して楕円偏波となっておりその回転方向と進行方向との関係は前進波と後進波では逆であるがAL, APでは直線偏波となり非可逆性は示さない。GEではTMモードの電磁界分布は非対称となっており, そのかたよりが前進波と後進波では異っている。また, AEのTEモードの電磁界はGEと一致している。

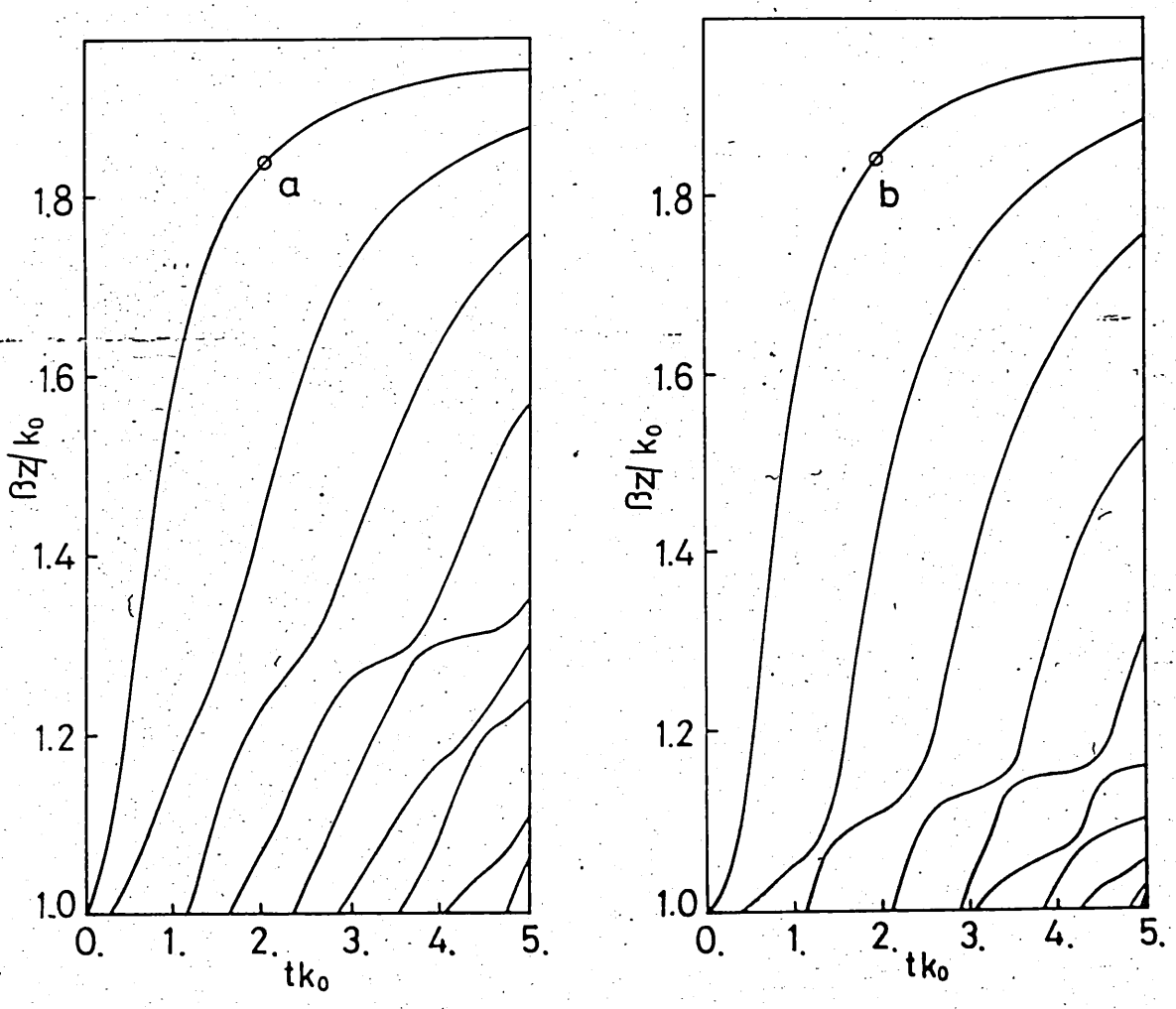
(ii) 誘電率テンソルが全ての要素をもつ例としてPolarとなっている座標系ξ-η-ζがx-y-zから立体的に回転している場合を考える。ζ軸がx-y面とのなす角をφで表わし, y-z面とのなす角をθで表すと, この二つの座標系の関係は

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\theta & -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \mathbb{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (53)$$

で表わされ誘電率テンソル $\hat{\varepsilon}_z$ は.

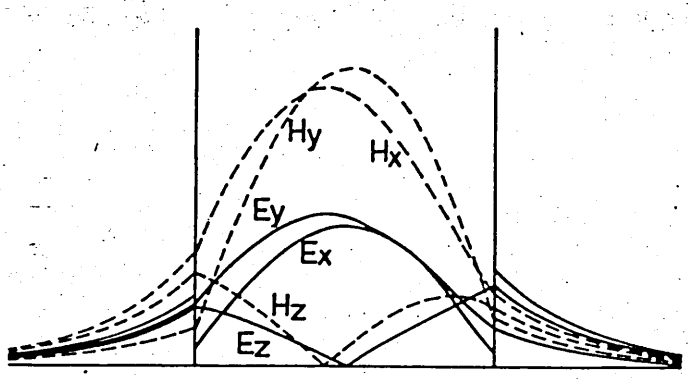
$$\hat{\varepsilon}_z = \mathbb{R}^{-1} \begin{bmatrix} \varkappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_{22} & \varkappa_{23} \\ 0 & \varkappa_{23}^* & \varkappa_{33} \end{bmatrix} \mathbb{R} \qquad (54)$$

となる。 $\varepsilon_1:(\varepsilon_0)$, $\varepsilon_2:(\varkappa_{11}=4.0, \varkappa_{22}=3.0, \varkappa_{33}=2.0, |\varkappa_{23}|=1.0, \varphi=\theta=\pi/4)$ 線路の厚さ；(zk) とした時の Anisotropic及び，Gyrotropicな媒質の線路の伝搬モード特性及び，電磁界分布を図5，6に示す。モード特性は前進波，後進波で同一となり，電磁界は全て複素量となるのでその絶対値と H_θ に対する各成分の位相差を示す。Gyrotropicな媒質の線路では界のかたよりが前進波と後進波で異なることが見られる。

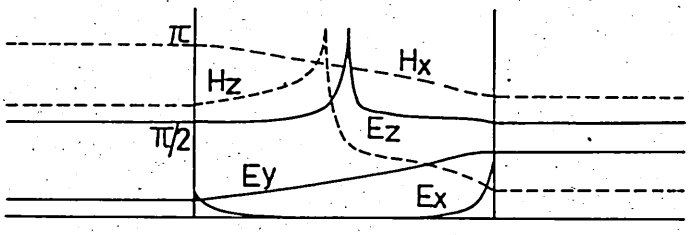


(a) GPの回転線路　　(b) APの回転線路

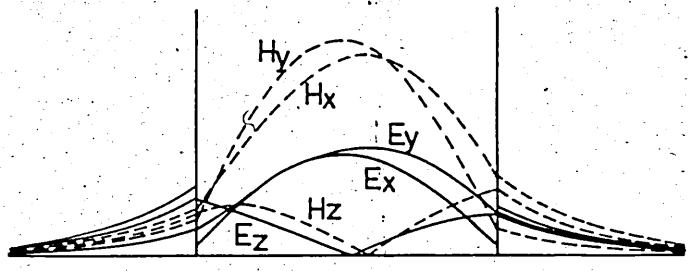
図5



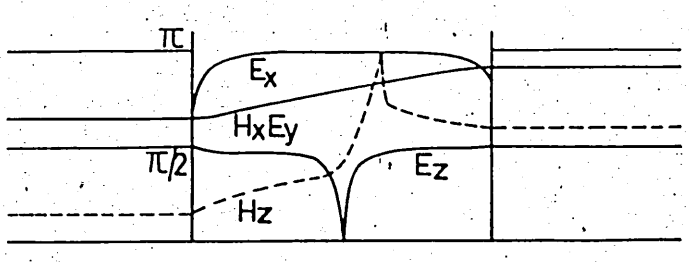
6−(a)
GP回転線路の界分布
(前進波)
(図5−(a) a点)



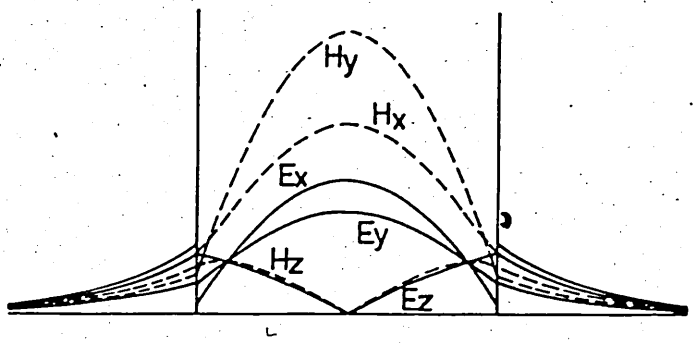
6−(b)
Hyに対する位相差



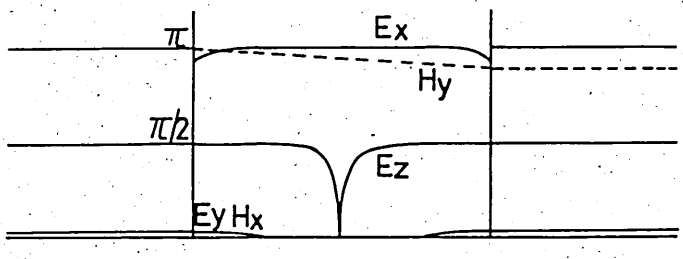
6−(c)
AP回転線路の界分布
G (後進波)
(図5−(a) a点)



6−(d)
Hyに対する位相差

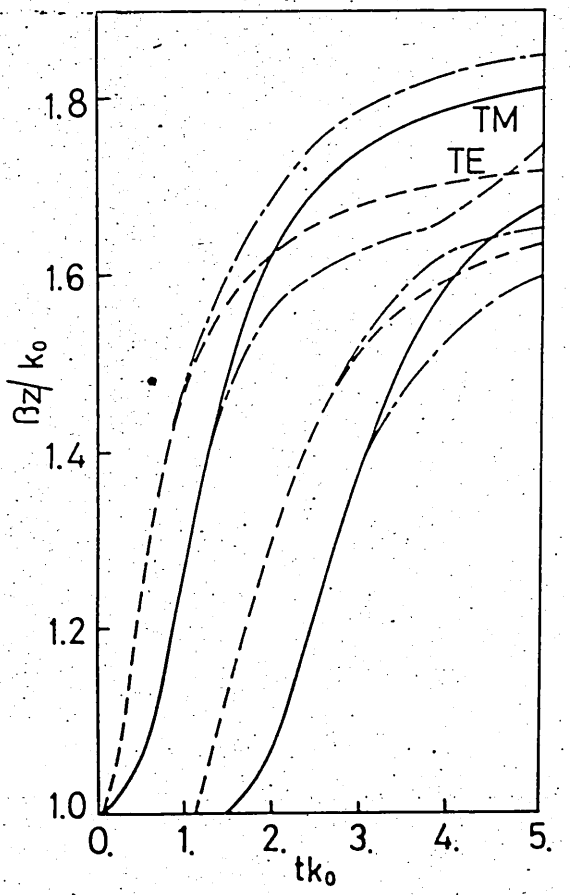


6−(e)
AP回転線路の界分布
(図5−(b) b点)



6−(f)
Hyに対する位相差.

図6

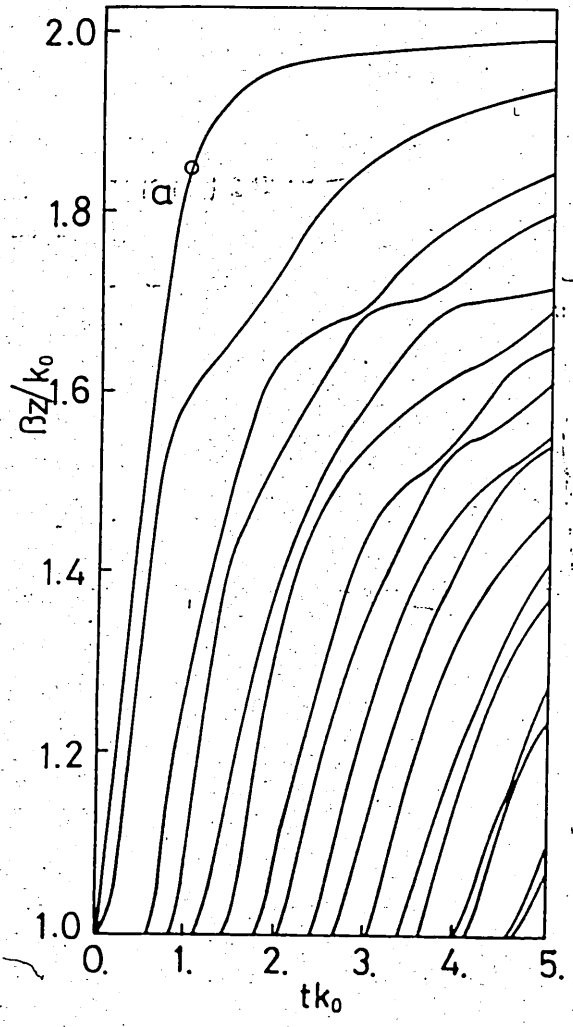


次にGEの線路は(i)で示した様にTE, TMモードは分離するが、座標系の回転により両モードは結合を起こす。この例として(i)のGE線路で$\varphi=\theta=\pi/18$だけ回転させた時の結合特性を図7に示す。ここでTE, TMモードの縮退している付近で結合が強くおこっているのが見られる。才1モードどうしの結合では縮退が起きているtk_0より大きい所では高次のモードからの結合も現われる。

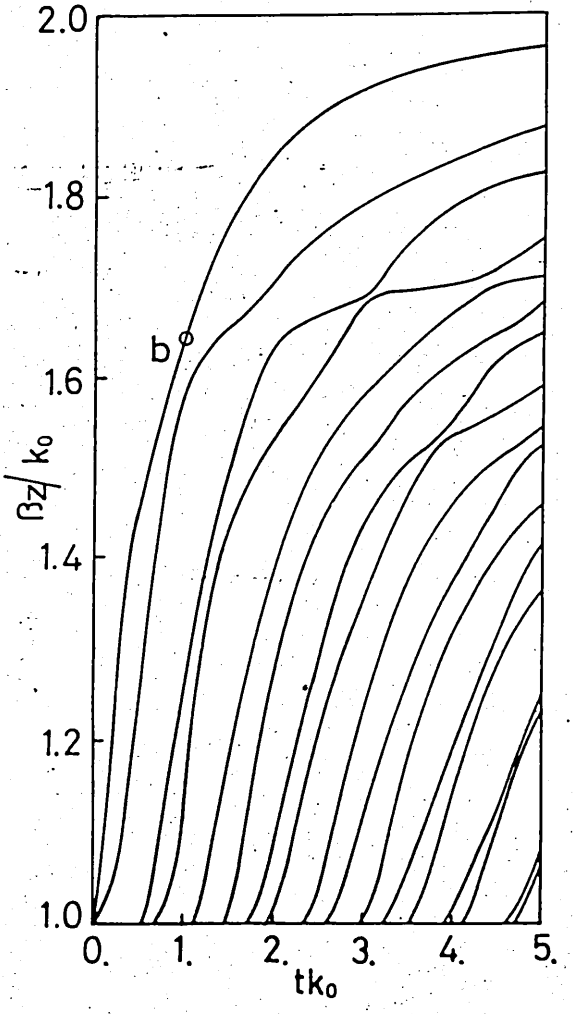
図7 GE回転線路のモード特性

[II]複合線路

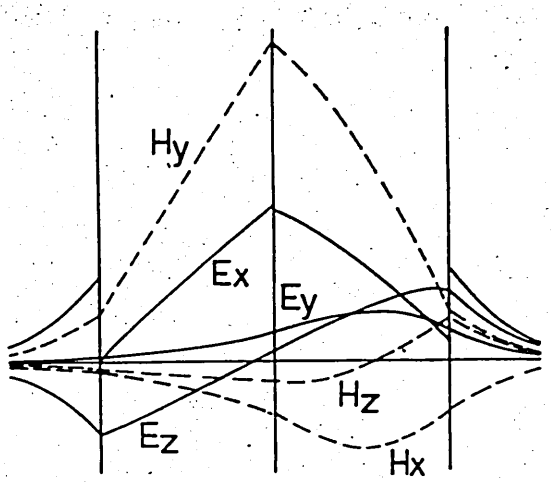
(i) Anisotropic と Gyrotropic な媒質よりなる複合線路の例として、GP−AE 及び、GE−AP の線路を考える。線路の諸定数は、ε_4;(ε_0)、ε_3;$(\kappa_{11}=4.0, \kappa_{22}=3.0, \kappa_{33}=2.0, |\kappa_{23}|=1.0)$、線路の厚さ;$(z_4+z_3)$ と仮定した時の伝搬モード特性と電磁界分布を図8，9に示す。GE−AP 線路では伝搬モード特性は前進波，後進波で異なり．電磁界は実数又は純虚数となる。一方．GP−AE 線路では伝搬モード特性は前進波，後進波で等しく電磁界は複素量となるので絶対値と H_0 に対する各成分の位相差を示す。



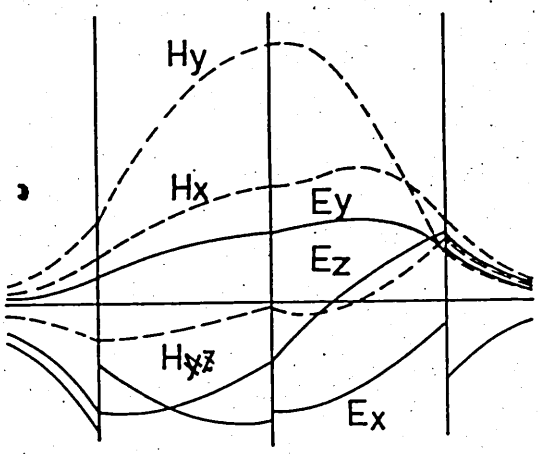
8−(a) GE−AP 線路のモード特性
(前進波)



8−(b) GE−AP 線路のモード特性
(後進波)



8－(c)

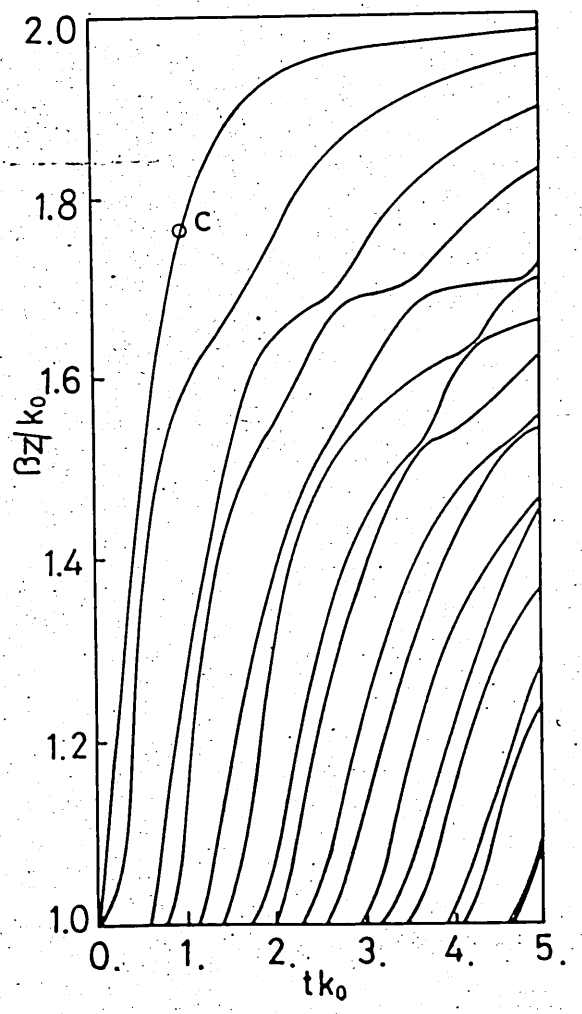


8－(d)

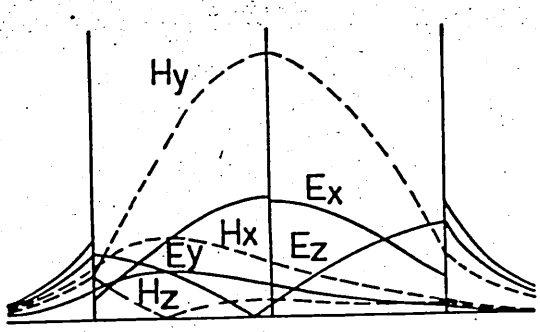
8－(c) GE－AP線路の界分布
(前進波)(a桌)

8－(d) GE－AP線路の界分布
(後進波)(b桌)

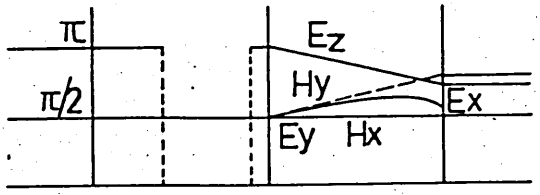
図 8 GE－AP線路の特性



9－(a) GP－AE線路のモード特性



9−(c)



9−(d)

9−(c) GP−AE線路の界分布
(図8-(c) C点)
9−(d) H_zに対する各成分の位相差
(前進波)

図9 GP−AE線路の特性

(ii) 双軸異方性線路を介して結合した2本の異方性線路を考える。線路の定数を ε_1:(ε_0), $\hat{\varepsilon}_2$:($\kappa_{11}=4.0$, $\kappa_{22}=3.0$, $\kappa_{33}=2.0$ $\kappa_{23}=j$, $\varphi=\theta=\pi/4$), $\hat{\varepsilon}_3$:($\kappa_{11}=3.0$, $\kappa_{22}=2.5$, $\kappa_{33}=1.5$, $\varphi=\pi/3$, $\theta=\pi/4$), $\hat{\varepsilon}_4$:($\kappa_{11}=4.0$, $\kappa_{22}=3.0$, $\kappa_{33}=2.0$ $\kappa_{23}=1.0$, $\theta=\pi/3$, $\varphi=\pi/6$), 線路の厚さ;($t+0.5t+t$)と仮定した時の前進波の伝搬モード特性と電磁界分布を図10, 11に示す。

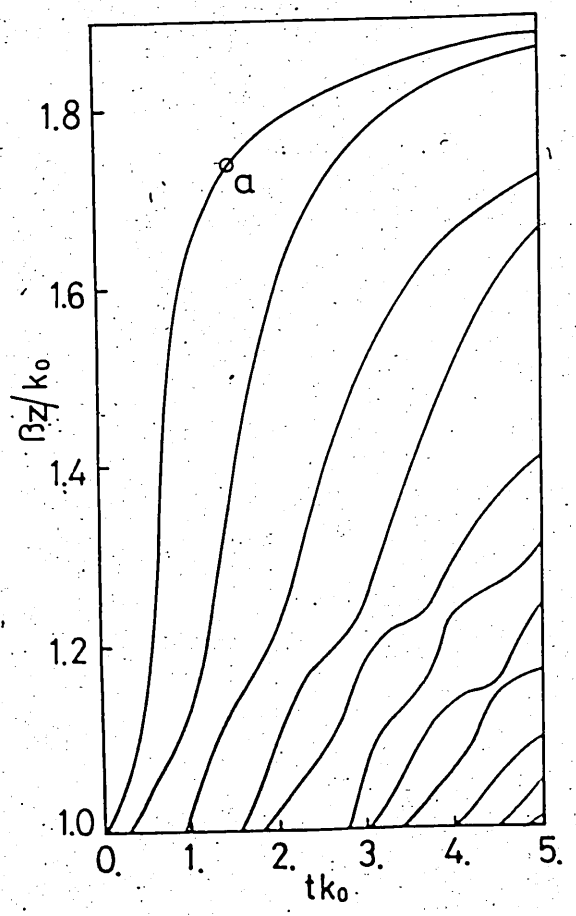
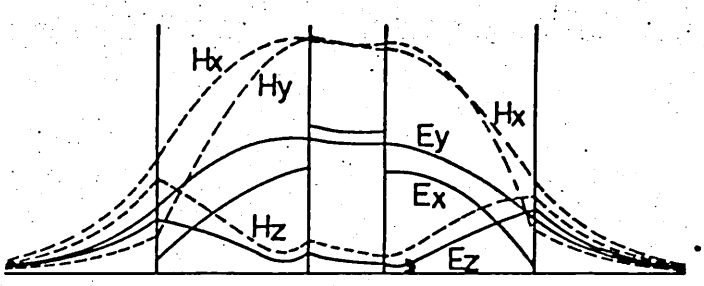
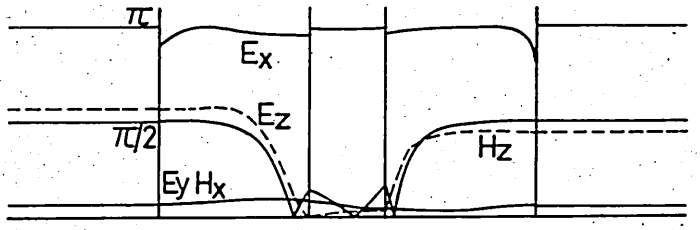


図10 双軸異方性媒質を介して結合した線路のモード特性



11－(a) 結合線路の電磁界分布(図10 a表)



11－(b) H_xに対する各成分の位相差

5. あとがき

本報告では、任意の誘電率テンソル及び、透磁率テンソルをもつ多層平板構造の線路の一般的解析を計算機解法に適した固有値問題と行列演算に帰着させることにより比較的容易に行なえることを示し、種々の線路を仮定してその特性を数値計算により示した。

今後この方法は、特性方程式の解法を工夫すれば、媒質に損失がある場合にも適用でき、さらには、誘電率テンソルが2方向に連続的に変化している場合にも拡張が可能と期待される。しかし、ここでは省かれていた結合行列の固有値が縮退している場合や、これに関連して非常に等方性に近い異方性媒質の場合の扱いが今後の問題であると考えられる。

最後に、御討論、御助言を頂いた森 静雄講師、小南晶

助手，本学博士課程の山北次郎氏に感謝します。また，数値計算に多大な御協力を頂いた南誠治君（現在，松下電産），云瀬正明君（現在，本学研究生）に深謝致します。
なお，数値計算は本学計算機センターによったことを付記し，謝意を表します。

文献

(1) S. Wang, M. Shar, and J. D. Crow; "Studies of use of gyrotropic and anisotropic materials for mode conversion in thin-film optical-waveguide application", J. Appl. phys, Vol. 43, P. 1861, April 1972.

(2) J. Warner; "Nonreciprocal magneto optic waveguides", IEE Trans. Vol. MTT-23, P. 70, Jan. 1975.

(3) 北山研一，熊谷信昭；"非相反光I.C.モード変換器の解析，" 信学研誌 Mw 75-114.

(4) D. Marcuse; "Electrooptic Coupling between TE and TM modes in anisotropic slab," IEEE Trans. Vol. QE-11, P. 759, Sep. 1975.

(5) 岡村，山本，牧本；"半漏れ構造の異方性薄膜光導波系の固有モード解析とモードフィルタへの応用，" 信学論 (C), Vol. 59-C, 4 (昭51-4).

(6) 山本，小山田，牧本；"異方性薄膜導波系の固有モード解析とその応用"，信学論 (C) Vol 55-C, 10 (昭47-10).

(7) 山本，牧本；"異方性薄膜光導波系の回路論的取扱いと非相反素子設計への応用"，信学論 (C), Vol. 56-C, 3 (昭48-3).

(8) Y. Satomura, M. Matsuhara, and N. Kumagai; "Analysis of electromagnetic-wave modes in anisotropic slab waveguide", IEEE, Vol. MTT-22, Feb. 1974.

(9) 里村，熊取，松原，熊谷；異方性媒質を含む誘電体スラブ線路における電磁波モードの解析，信学論(B)，技術討論室，Vol 58-B, 10 (昭50-10).

(10) 六島，岸岡，森，小南；"多層異方性誘電体線路の回路論的解析"，信学論(C). Vol. 59-C. 6 (昭51-6) 掲載予定.

(11) 例えば，入江昭二："線型数学Ⅱ"，共立出版．

付　録

$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ が全ての要素をもつ場合の右及び左固有ベクトル

$$e_{1i}=\frac{\omega\mu_0}{\mu_{11}}\Big[(\beta_z\kappa_{13}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\beta_z\kappa_{31}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})+k_0^2(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})\{(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{21})(\mu_{11}\mu_{32}-\mu_{12}\mu_{31})$$
$$-(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21})\}/\kappa_{11}\mu_{11}+(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})\beta_z^2/\kappa_{11}^2\Big]$$

$$e_{2i}=(\beta_z\mu_{31}/\mu_{11}-\beta_{xi})(\beta_z\kappa_{13}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\beta_z\kappa_{31}/\kappa_{11}-\beta_{xi})-k_0^2\{(\beta_z\mu_{31}/\mu_{11}-\beta_{xi})(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21})$$
$$-(\beta_z\kappa_{13}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\mu_{11}\mu_{32}-\mu_{12}\mu_{31})(\kappa_{11}\kappa_{32}-\kappa_{12}\kappa_{31})\}/\kappa_{11}\mu_{11}+(\beta_z\mu_{31}/\mu_{11}-\beta_{xi})(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})\beta_z^2/\kappa_{11}^2$$
$$-k_0^2\beta_z(\mu_{11}\mu_{32}-\mu_{12}\mu_{31})(\kappa_{12}\mu_{11}-\kappa_{11}\mu_{21})(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})/\kappa_{11}^2\mu_{11}^2$$

$$e_{3i}=-\frac{\omega\mu_0}{\mu_{11}}\Big[(\beta_z\kappa_{31}/\mu_{11}-\beta_{xi})(\beta_z\mu_{31}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{21})+\beta_z^2(\kappa_{11}\kappa_{32}-\kappa_{12}\kappa_{31})(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})/\kappa_{11}^2$$
$$+\beta_z(\beta_z\kappa_{31}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})(\kappa_{12}\mu_{11}-\kappa_{11}\mu_{21})/\kappa_{11}\mu_{11}+k_0^2(\kappa_{11}\kappa_{32}-\kappa_{12}\kappa_{31})$$
$$\cdot\{(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{21})(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{12}\mu_{31})-(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21})\}/\kappa_{11}\mu_{11}\Big]$$

$$e_{4i}=\frac{k_0^2}{\mu_{11}\kappa_{11}}\Big[(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})(\kappa_{11}\kappa_{32}-\kappa_{12}\kappa_{31})(\beta_z\kappa_{13}/\kappa_{11}-\beta_{xi})+(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{21})(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})$$
$$\cdot(\beta_z\mu_{31}/\mu_{11}-\beta_{xi})+\beta_z(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})(\kappa_{12}\mu_{11}-\kappa_{11}\mu_{21})/\kappa_{11}\mu_{11}\Big]$$

(A－1)

$$d_{1i}=(\beta_z\mu_{13}/\mu_{11}-\beta_{xi})(\beta_z\kappa_{13}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\beta_z\kappa_{31}/\kappa_{11}-\beta_{xi})+\frac{k_0^2}{\kappa_{11}\mu_{11}}\{(\beta_z\kappa_{31}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{21})(\kappa_{11}\kappa_{23}-\kappa_{13}\kappa_{21})$$
$$-(\beta_z\mu_{13}/\mu_{11}-\beta_{xi})(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{21}\mu_{12})(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})\}+(\beta_z\mu_{13}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})\beta_z^2/\kappa_{11}^2$$
$$-k_0^2\beta_z(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{21})(\kappa_{21}\mu_{11}-\kappa_{11}\mu_{12})(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})/\kappa_{11}^2\mu_{11}^2$$

$$d_{2i}=\frac{\omega\mu_0}{\mu_{11}}\Big[(\beta_z\kappa_{13}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\beta_z\kappa_{31}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})+\frac{k_0^2}{\kappa_{11}\mu_{11}}(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})\{(\mu_{11}\mu_{32}-\mu_{12}\mu_{31})$$
$$\cdot(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{21})-(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21})(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})\}+\beta_z^2(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})/\kappa_{11}^2\Big]$$

$$d_{3i}-\frac{k_0^2}{\kappa_{11}\mu_{11}}\Big[(\beta_z\kappa_{31}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})(\kappa_{11}\kappa_{23}-\kappa_{13}\kappa_{21})-(\beta_z\mu_{13}/\kappa_{11}-\beta_{xi})(\mu_{11}\mu_{32}-\mu_{12}\mu_{31})$$
$$\cdot(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})-\beta_z(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})(\kappa_{11}\kappa_{33}-\kappa_{13}\kappa_{31})(\kappa_{21}\mu_{11}-\kappa_{11}\mu_{12})/\kappa_{11}\mu_{11}\Big]$$

$$d_{4i}=\frac{\omega\mu_0}{\mu_{11}}\Big[(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{31})(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})/\kappa_{11}\mu_{11}+k_0^2\{(\mu_{11}\mu_{32}-\mu_{12}\mu_{31})(\mu_{11}\mu_{23}-\mu_{13}\mu_{21})$$
$$-(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})(\mu_{11}\mu_{22}-\mu_{12}\mu_{21})\}(\kappa_{11}\kappa_{23}-\kappa_{13}\kappa_{21})/\kappa_{11}\mu_{11}+\beta_z^2(\mu_{11}\mu_{33}-\mu_{13}\mu_{31})$$
$$\cdot(\kappa_{11}\kappa_{23}-\kappa_{13}\kappa_{21})/\kappa_{11}^2\Big]$$

(A－2)

静磁波の増幅における二三の問題について

張 年錫・山田省二・松尾幸人

大阪大学・産業科学研究所

昭和 51 年 6 月 25 日

輻射科学研究会

静磁波の増幅における二三の問題について

張年錫・山田省二・松尾幸人
(大阪大学産業科学研究所)

1. はじめに

マイクロ波増幅器として半導体ダイオード(Gunn, IMPATT, BARITT, FET, Transistor)を用いたものが定着し始め,信頼性もかなり向上しているのが現状で,小型軽量,小電力,長寿命の固体装置という夢が適えられつつある.

一方磁性体と半導体を結合した系を伝搬する静磁波(表面静磁波MSSW,体積静磁波MSVW)をマイクロ波領域で増幅する試み[1]がかなり以前から行われている.増幅の動作機構は微視的な観点からSchlömann[2]が始めて説明を行い,ついで巨視的な立場からエネルギ保存則を用いて検討した[3].静磁波の不安定性に関しては多くの研究がある.MSVWについても詳細な検討を行なった[4].しかし,実用という見地から増幅器を構成するための設計理論や実験報告は少ないようである.

本論文では以下の内容を理論的に検討している.

(1) 厚状構造(図1)の系でMSSW, MSVWに対する分散関係式を求め,波動の不安定性に関する解析的な表現を行う.
(2) 計算機解によるYIGと半導体の最適寸法を決定する.
(3) YIGと半導体相互間の空隙効果を評価する.
(4) 更に,YIGの損失が増幅特性に与える影響を調べる.
(5) 最後に,室温動作の可能性を動作モードと半導体特性との関連から若干考察する.

2. 解析

2.1 MSTWの分散関係式

図1に対するMSTWの分散関係式を求める．z軸に印加した外部静磁界H_0は波動の進行方向と一致し，半導体中のキャリアの漂流方向とも平行である．二次元モデルと静磁近似条件で計算する．各部の磁気ポテンシャルがMSSWと異なることを考慮し，磁束密度B_x，磁界成分H_zの境界での連続条件（境界条件）から系の分散関係式[4]が求まる．

$$\tan kVa = V\left[\tanh kd_5(\xi_V\tanh kd_3+1)+(\xi_V+\tanh kd_3)\right] \times\left[V^2\tanh kd_5(\xi_V+\tanh kd_3)-(\xi_V\tanh kd_3+1)\right]^{-1} \quad (1)$$

$$\gamma_V^2 = k^2-k_s^2\left[1+\{\omega_p^2\zeta/(\omega_c^2-\zeta^2)\omega^2\}(\omega-kv_0)\right] \quad (2)$$

ここに，

$$\xi_V=(\gamma_V'\tanh kd_1+\tanh\gamma_V b)\times\left[\gamma_V'(\gamma_V'\tanh kd_1\tanh\gamma_V b+1)\right]^{-1}$$

$$\gamma_V'=\gamma_V/k$$

$$\omega_c=eB_0/m,\quad \sqrt{-\mu_1}V=1,\quad \zeta=\omega-kv_0-j\nu_c$$

$$\mu_1=1+\omega_r\omega_m/(\omega_r^2-\omega^2),\quad \mu_2=\omega_m\omega/(\omega_r^2-\omega^2)$$

$$\omega_r=\gamma H_i,\quad \omega_m=\gamma 4\pi M_s$$

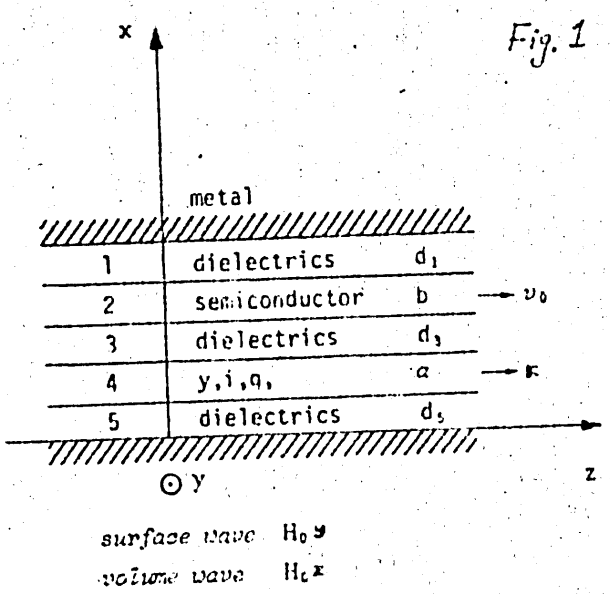
ν_cは衝突周波数，ω_pはプラズマ周波数，ω_cはサイクロトロン周波数で，他の記号は通常の意味をもつ．γ_Vは半導体中でx方向の波数を表わす．

ここでYIGスラブに存在するMSTWの分散関係を調べて見よう．(1)で$d_3=d_5=\infty$とすると，後進波特性をもつ分散式[6]を得る．

$$\tan|\beta_1|Va = 2V/(V^2-1) \quad (3)$$

一方，$d_3=\infty$，$d_5=0$の関係を(1)に代入すると，YIGスラブの片面が金属化された場

Fig. 1



合の式となる．

$$\tan|\beta|Va=-V \tag{4}$$

更にYIGスラブの両面が金属化（$d_1=b=d_3=d_5=0$）されたときは(1)から(5)が求まる．

$$\Omega^2=\Omega_H^2+\Omega_H/[1+(\beta a/m\pi)^2] \tag{5}$$

$$\Omega=\omega/\omega_m,\quad \Omega_H=\omega_r/\omega_m$$

ここでmは整数である．図2に(3)～(5)の曲線が示されていて，これらの波動の通過帯域幅が同じ値をもつことがわかる．

MSTWの不安定性を調べよう．$d_1=d_5=\infty$，$d_3=0$の関係を(1)に代入すると，比較的簡単な分散式をうる．

$$\tan kVa=V[\gamma_V(\gamma_V\tanh\gamma_V b+k)+k(\gamma_V+\tanh\gamma_V b)]\times[V^2\{k(\gamma_V+k\tanh\gamma_V b)\}-\gamma_V(\gamma_V\tanh\gamma_V b+k)]^{-1} \tag{6}$$

(6)でa，bが十分小さいとし，半導体について静磁近似を行うと波動の減衰定数，(利得定数) α ($k=\beta+j\alpha$)は(7)になる．

$$\alpha=[\mu_0\sigma(v_0-v_p)\beta b(1+\beta a)]\times[2(1+2\beta b)-\beta a(V^2-1)(2+3\beta b)]^{-1} \tag{7}$$

(7)はMSTWの不安定性が$v_0-v_p>0$のときに生ずることを示す．

βが十分大きい領域の解析は$\tanh\gamma_V b$，$\tanh ka$を1と近似することによって得られるだろう．

2.2 MSSWの分散関係式

MSSWのFAモードについては，すでに詳しく検討した[4]．図1で半導体をYIGと誘電体の

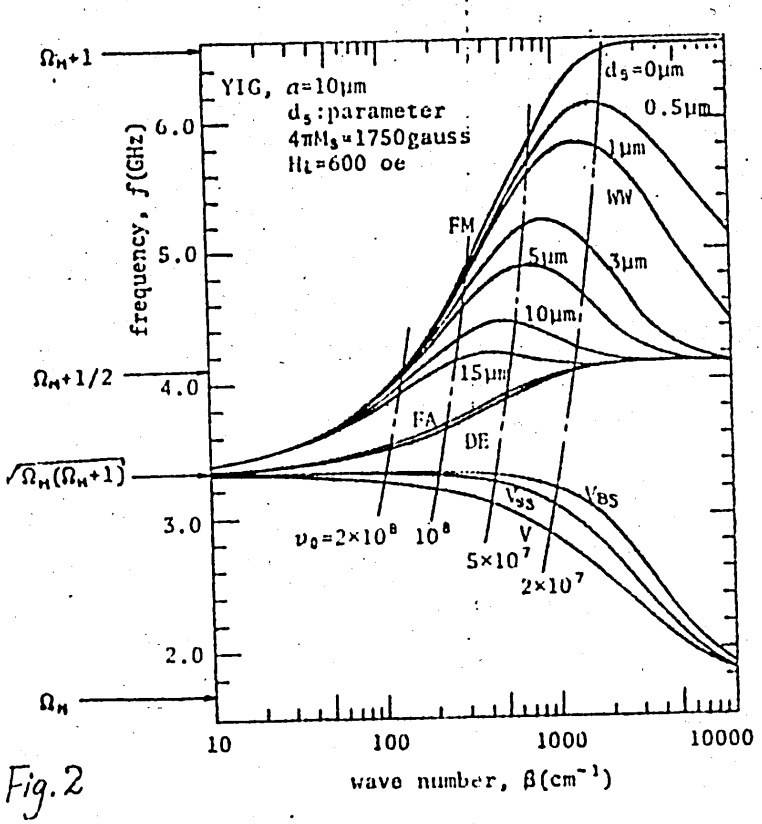


Fig.2

間に挿入した構造はWWモードで興味ある結合が期待できるので，これについて検討しよう．図3のWWモードに対する分散関係式は(8)となる．

$$\exp 2ka=(A-1)[B\gamma_s(\gamma_s\tanh kd\tanh\gamma_s b+k)-k(\gamma_s\tanh kd+k\tanh\gamma_s b)]\times[(B+1)\{A\gamma_s(\gamma_s\tanh kd\tanh\gamma_s b+k)+k(\gamma_s\tanh kd+k\tanh\gamma_s b)\}]^{-1} \quad (8)$$

$$\gamma_s^2=k^2-k_s^2[1-(\omega-kv_0)\omega_p^2/\omega^2] \quad (9)$$

ここに

$$A=\mu_1+\mu_2,\quad B=\mu_1-\mu_2$$

近似計算として薄膜条件と半導体に対して静電近似を行うとxが求まる．

$$|ka|\ll 1,\ |\gamma_s b|\ll 1,\ |kd|\ll 1$$

$$\alpha=\beta bd\mu_0\sigma(v_0-v_p)[A(B+1)T-B(A-1)]\times[(B+1)\{2a(A+\beta b)+b\}T+b(A-1)(1-2B\beta d)]^{-1} \quad (10)$$

$T=\exp 2\beta a$

波動の不安定性は $v_0>v_p$ のときに起きることを示している．すなわち，キャリアの漂流速度 v_0 がMSSWの位相速度 v_p より大きいときに生ずる．

(7)，(10)が示すように，図1のような結合系での静磁波の不安定性は本質的に $v_0>v_p$ の条件に左右することが理解できる．xの変化はこれらの式から簡単に評価できないが，半導体キャリアの移動度 μ と濃度 n の積に比例することを知る．試料の寸法，特にaの値は v_0 が与えられたとき，v_p との関連で重要な要素の1つになる．

3 数値計算

分散関係式の評価は半導体領域について静電近似を行い，downhill法を用いて進めた．

3.1 MSVW

図2に動作モードとキャリアの ω/β_0 ダイアグラムを示している．YIGスラブのみの場合(DE，Vモード)，YIGスラブ

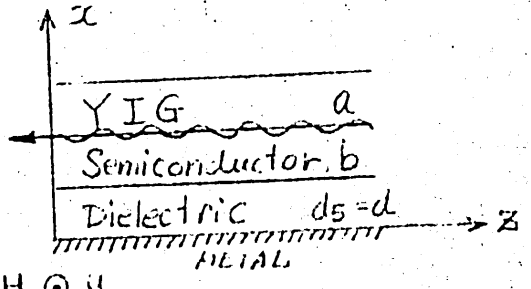


Fig. 3

と金属板の場合（FA, FM, V_{ss}, V_{Bs} モード），YIGスラブ，空隙と金属板（WWモード）のそれぞれの場合を，YIG，$a=10\mu m$，$4\pi M_s=1750$ Gs，内部磁界 $H_i=600$ oe で計算した．縦軸は周波数で，矢印は各モードの遮断周波数を示す．d_5 は空隙の値で，この値が大きくなるに従いWWモードの通過帯域および遮断点の波数が小さくなる．一方体積波では(3)～(5)で指摘された如く，通過帯域幅に変化はなく，金属板の影響は前者に比べて小さいことを示し，物理的にも容易に理解できる．一点細線はキャリアの漂流速度と周波数の関係（$\beta_0=\omega/v_0$）を示す．ω/β と ω/β_0 の交点の右側で $v_0>v_p$ の関係を満足する．たとえば $v_0=2\times10^5$ m/s とすると，FA，DEとFMモードは遮断点付近に交点がある．WWやMSVWモードは d_5 や金属板によって結合点が可変できることを示し，最も動作しやすいのがMSVWモード（$\alpha\sim0$ で β 最小）であることも理解できる．しかし，H_i において動作周波数が低くなるのは欠点の1つである．

図4は(1)で $d_3=0$，$d_1=d_5=\infty$ にしたときの分散関係式を半導体の厚みを100μm，YIGの共鳴吸収幅 $\Delta H=0.5$ oe とし，v_0 をパラメータとして信号周波数 f に対する利得係数 $|\alpha|$ を図示したものである．v_0 の増大は(7)からも予測される如く，α の増大と利得の存在する帯域幅 f_{bg} を増大させる．利得最大点の周波数は v_0 の増

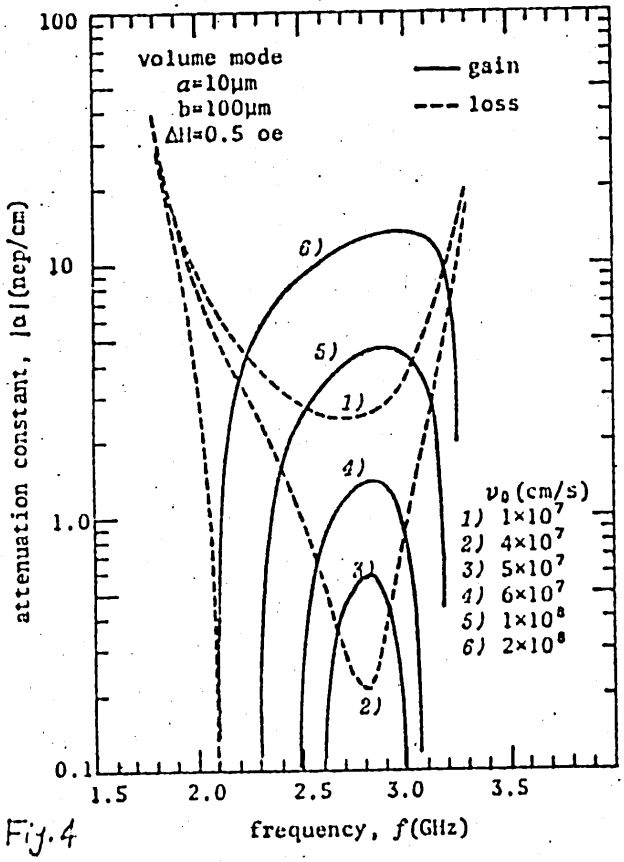


Fig.4

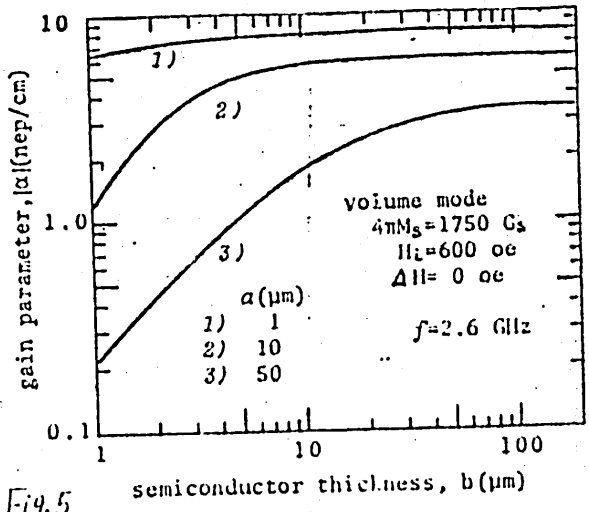


Fig.5

大と共に若干大きい方に移動する．不安定性が生起する v_0 の値は 4×10^5 と 5×10^5 m/s の間にあることがわかる．この計算では $\mu=22\,m^2/V\cdot s$（77°K，InSb，住友電工），$n=10^{21}/m^3$ と n が比較的小さい値を用いているので，利得が小さい．

図5は $\Delta H=0$，$v_0=10^6$ m/s，f を 2.6 GHz に固定，a をパラメータ，半導体の特性は図4と同じとして，b に対する α の変化を示している．$a=1\,\mu m$ では b に殆ど依存しないが，a が大きくなると，b の小さい値では α は非常に小さくなる．α の飽和は a が大きくなる程 b の大きい値でおこる．いずれにしても b の値は 100 μm 内外で十分で，印加直流バイアス電圧の観点から調整されなければならない．

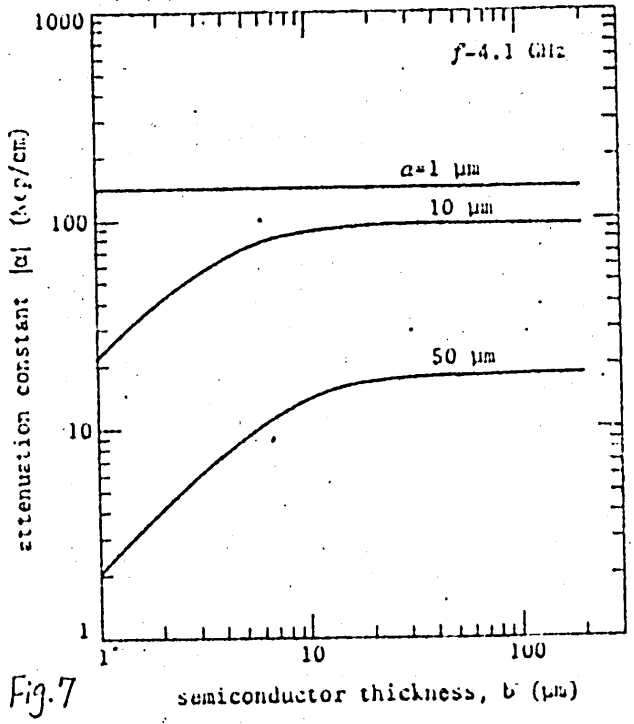


Fig.7

3.2 MSSW

図1の配置で半導体の濃度があまり大きくないときは b が十分薄い限り，FA モードの ω/β 特性に b の影響は現われない．[先の報告，文献4，では $b=1\,\mu m$ に限定していた] しかし，大きい利得をうるには b を大きくした方が望ましいのは当然である．

図6は $\Delta H=0$，$v_0=10^6$ m/s，$\sigma=3.52\times10^3/\Omega m$，($n=10^{21}/m^3$，$\mu=22\,m^2/V\cdot s$) $a=10\,\mu m$

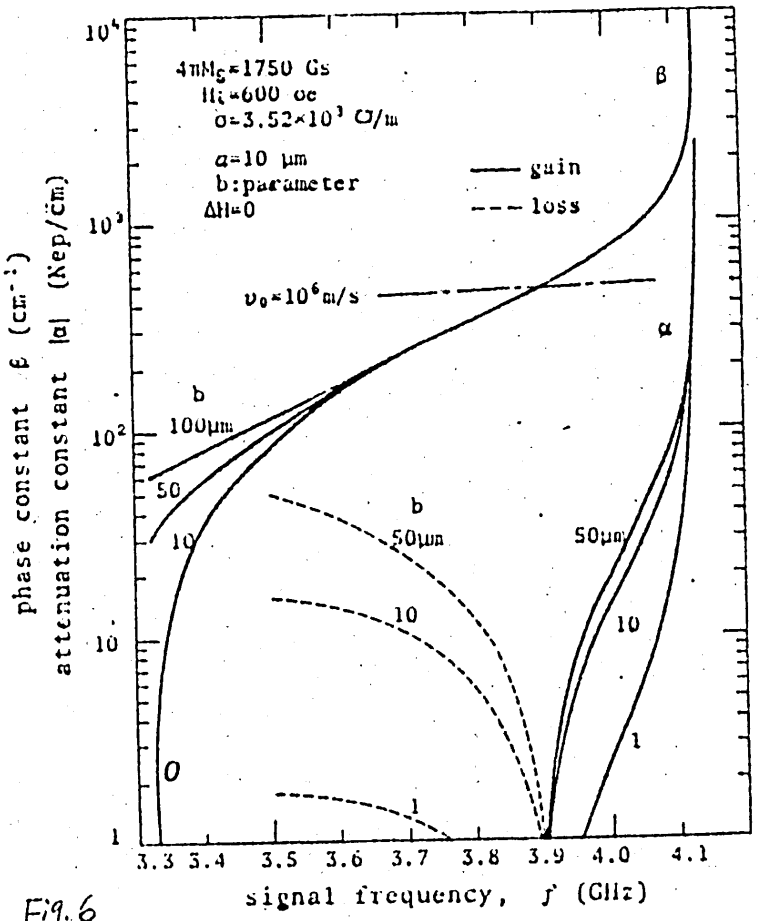


Fig.6

でbをパラメータにし，fに対してα，βを図示したものである．b＝10μmの場合，ω/β曲線はb＝0μmのものに近いが，bが大きくなるにつれて遮断波数が存在するようになる．α/ω曲線はv_0～v_pの周波数でα～0となり，bの増大と共にαは大きくなるが，遮断周波数(4.13GHz)付近ではbによる違いは見出せない．このような点近傍におけるαの変化模様はYIGに損失を含めることによって明らかになる．ω/β曲線と$v_0=10^6$m/s直線との交点付近では殆んどbによるω/β曲線の分離はおこっていないが，nを更に大きくすれば現われるだろう[4]．

図7は前図と同じ条件でaをパラメータとし，bに対してαをプロットしたもので図5と同じ傾向をもつ．a＝1μmではbの依存性はほとんどなく，a＝50μmのときαの飽和が図5よりbのかなり小さい値で起っている程度で，相互に顕著な差異はない．いずれにしても，aが大きくなるに従ってbの決定に注意を喚起する必要のあることを示している．

3.3 YIGスラブと半導体間の空隙効果

YIGスラブと半導体間の空隙効果は相対利得係数α_R，$\alpha_R=\alpha_{d_3\neq 0}/\alpha_{d_3=0}$，を計算機解と解析的に評価した．図1のFAモードについて$d_1=\infty$，$d_5=0$，$d_3\neq 0$，$d_3=0$，MSTWでは(1)で$d_1=d_5=\infty$，$d_3\neq 0$，$d_3=0$とし，b＝1μmに固定してd_3に対してα_Rを計算したのが図8である．各YIGスラブについて，動作周波数はそれぞれのスラブで同じ利得を与えるように選んでいる．非常に薄いスラブのとき，a＝b＝1μm，MSTWのα_RはMSSWより大きいが，厚い試料では様子が逆になり，d_3がか

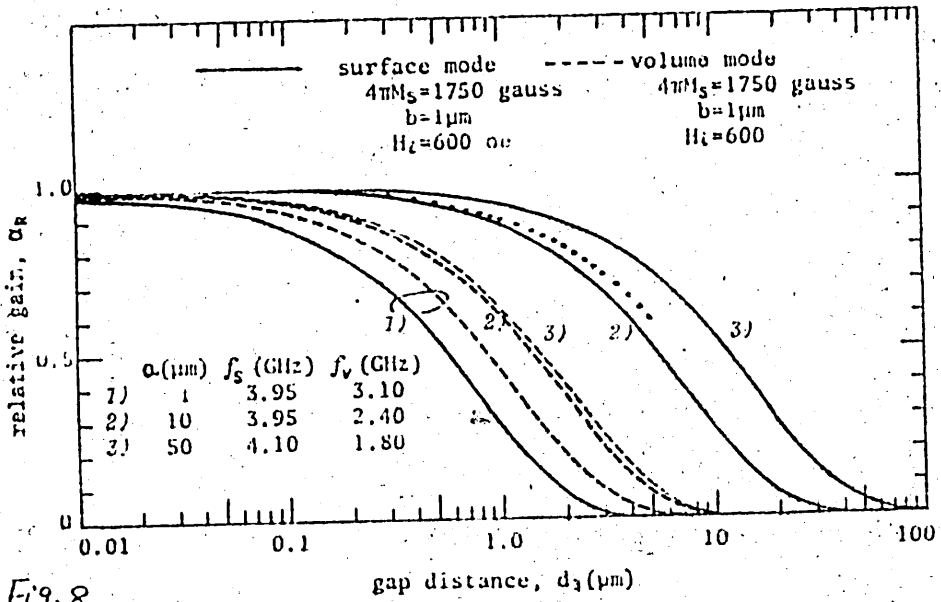


Fig.8

なり大きくなると，MSVWのα_RはMSSWのそれに比べて極端に小さくなる．図で点線はFAモードについて解析的に(11)から求めたものである．

$$\alpha_R=(\{TB(A+\beta d_3)-A(B-\beta d_3)\}[B(A+1)T\{2a(\beta b+1)+b\}-A(B-1)b])^{-1}$$
$$\times(AB(T-1)[B(A+1)T\{2a(\beta b+1)+b+d_3(2\beta b(\beta a+1)+2a+1)\}-A(B-1)\{b+d_3(2\beta b+1)\}]) \quad (11)$$

図からわかるように厳密解（曲線2の実線）と近似解の間によい一致を示している．これらの結果はYIG一半導体の接触面状態がα_Rに大きな影響を与えるという事実で，薄い試料ほどその影響が大きい．特にMSVWの場合で厚いYIGスラブを使用する場合，d_3は重要なパラメータになる．

3.4 MSSWのWWモード

図2の説明でもふれたように，比較的小さいv_0で不安定性を生起させるにはWWモードの利用が考えられる．しかし，図1のような配列形状の後進波領域で，増幅係数が予想に反して，fがf_{LC} (low cutoff frequency)に近ずくにつれて小さくなるという結果[4,7]が生ずる．これについては現在のところ物理的に納得の行く説明がついていない．しかし，図3のような半導体の装荷はキャリアとWWモードMSSWの間に強い結合が期待できる．

図9は(8)を計算したもので，ΔHをパラメータにし，fに対してαとβを図示している．用いたYIGの定数は図6と同じであるが，空隙の値$d=0.01\mu m$, $b=5\mu m$の厚みを用いた．

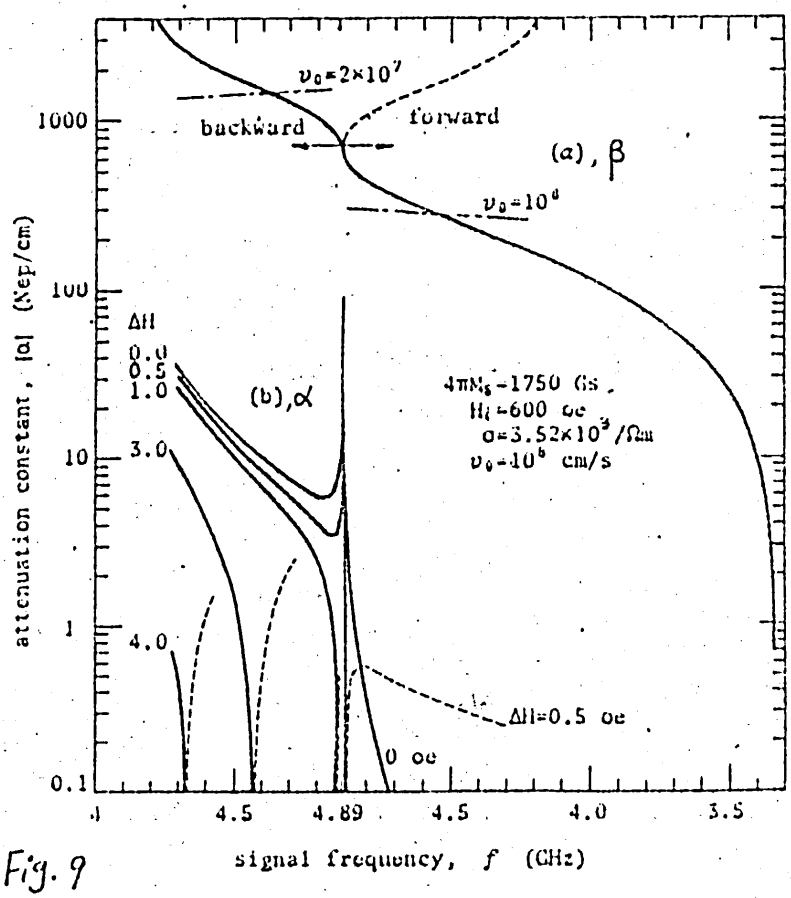


Fig. 9

横軸は群速度零の点（$f_c \fallingdotseq 4.89$GHz, $d+b=5.01\mu m$で決まる）を中心にし，左右に周波数が減少するように目盛っている．なお，後進波領域のω/β曲線はα/ωの図を見易くするために$v_g=0$（f_c）の周波数一定な軸に対称に実線で示し，もとの部分は dashed line で書いている．一点鎖線は$v_0=10^6$ m/s（前進波領域），2×10^5 m/s（後進波領域）におけるω/β_0直線を示す．この$v_g\sim0$の遮断周波数をf_cとしている．

α/ω特性は$v_0=10^6$ m/sの場合について示されていて，$\Delta H=0$ oeのとき，$f=4.72$GHz付近で$\alpha=0.1$となる．v_gが小さくなるに従いαは大きくなり，f_cでは極端に大きくなる．しかし，市販のYIG（$\Delta H=0.5$oe）を仮定しても，αはかなり大きくとれるが，f_{bg}は10MHz以下となる．一方後進波領域では，$\Delta H=0$ oeの場合，$v_g\sim0$の点からαはfの減少に従がって小さくなるが，更にfが小さくなると増加し始め，f_{cc}に近ずく程αが大きくなる．この領域では$\Delta H=0.5$ oeでもf_{bg}は$\Delta H=0$ oeと差異がない．$\Delta H=1$ oeではf_cで正の利得はなく，ΔHが3，4 oeと増大するに従い，f_{bg}は減少するけれどもf_{cc}に近ずくにつれてαは大きくなる．$f_{cc}=4.13$GHzであるが，この付近では計算時間の関係で略している．

図10は図9から計算されたΔHとf_{bg}の関係である．図から容易にわかるようにYIGを用いる限りほとんど問題にならないことを知る．

図11は図9と同じ条件で

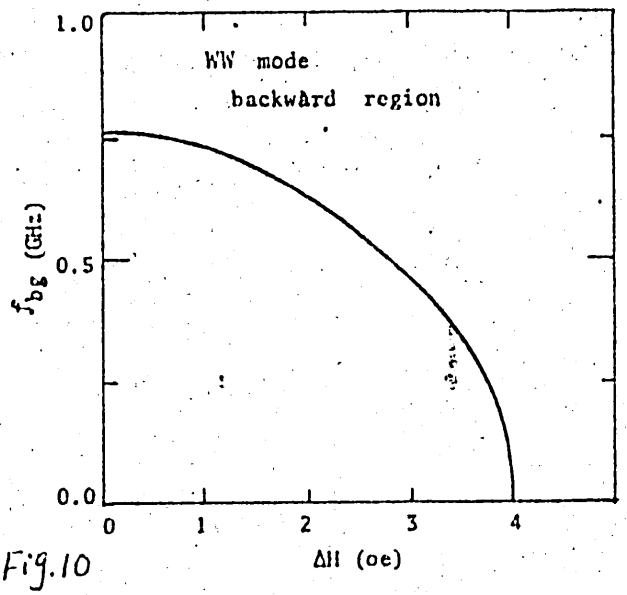


Fig.10

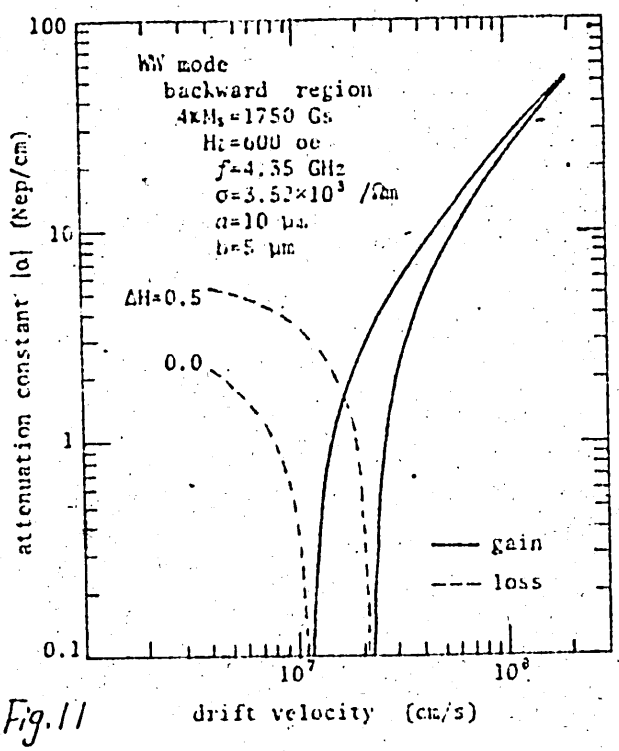


Fig.11

$\Delta H=0$, 0.5 oeの2つの場合, v_0 に対する α の変化を図示したものである. (7), (10)では α の ΔH 依存性を解析的に示していない. 図のように系の不安定性は $v_0=v_p$ のとき, f が一義的に決定された如く, ΔH の導入でも同様な表現ができる筈である. ΔH が0から0.5 oeまで変化すると $\alpha=0$ を与える v_0 は 1.17×10^5 m/s から 2.25×10^5 m/s まで変わる. すなわち, ΔH の減少は等価的に v_0 の小さい値で不安定性がおこることを意味し, 図4で ΔH 一定として v_0 を小さくすると $\alpha=0$ を与える周波数は低くなり, 図2で ω/v_0 直線が右方に移動することに対応する. このように, v_0 と ΔH は不安定性生起を決定する重要なパラメータであることがよく理解できる.

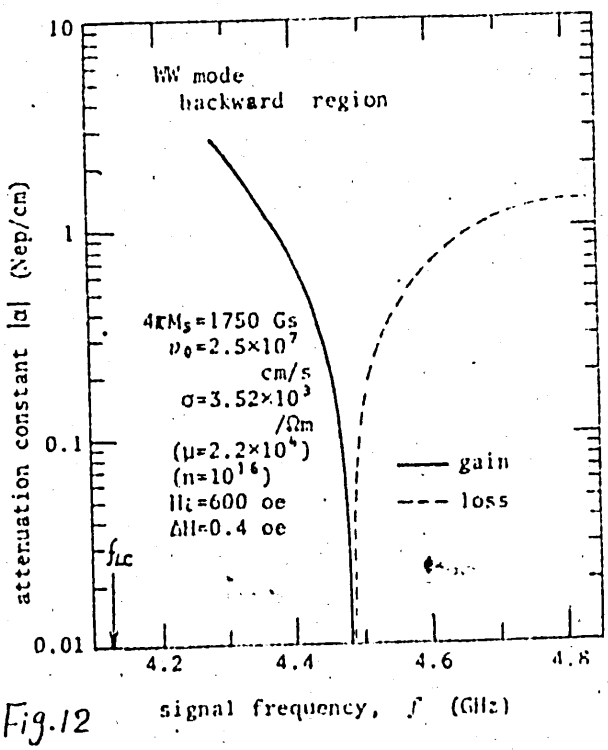


Fig.12

図12はかなり現実的な試料定数を用いて α/ω 関係を示していて, $v_0=2.5\times10^5$ m/s, $\Delta H=0.4$ oe 以外は図11と同じ条件で計算している. $\sigma=3.52\times10^3/\Omega m$ ($\mu=2.2 m^2/V.s$, $n=10^{22}/m^3$) は室温で十分得られる値である. 計算された f の範囲内では α は大きくないが, f_{LC} に近ずくに従い十分大きくなるとみてよい. この結果は今後の増幅器構成に明るい展望を与えていると云えるだろうか?

4. 検討

MSSWやMSVWモードを用いるマイクロ波増幅器の増幅機構はよく知られている電子管のそれと異なる. 微視的な考察からは $v_0>v_p$ のとき, スピン系の誤差角が増大するという結論に到る. 巨視的には $v_0>v_p$ で, 半導体が吸収する波エネルギがスピン系にエネルギを与えるので, YIG中の静磁波の振幅が増大すると説明している. もし, $v_0>v_p$ ($v_0\sim v_p$) でYIGに損失を含めると, 半導体とYIGとでは吸収エネルギの符号が異なるため

，合成したときの符号が負になるまでConvectiveな不安定性が生じない．v_0を大きくして負のエネルギを増大させると，不安定性が再起する．このことは計算結果（図11）と同じである．以上のように，増幅機構を電子スピンと漂流キャリアとの動的結合による微視的な観点と，巨視的にはエネルギ保存則の立場から説明されると結論してよい．

先に，図1の構造で，後進波領域において，αはf_cからf_{Lc}に近ずくにつれて減少することを指摘した．一方図3のように半導体を装荷して後進波領域でα/ωの関係（図9）を調べてみると，f_cで$\alpha\propto(v_0-v_p)$の値はv_pがかなり大きいにもかかわらず大きい値をもつ．f_{Lc}付近では$(v_0-v_p\sim v_0)$$v_p$が十分小さくなり，更に大きい$\alpha$が期待できる．[$\alpha\ll\beta$の関係が成立しない範囲では(10)から議論できない] このα/ωの曲線は物理的に受入れられる定性性をもつ．これらから結論されることは，v_0のかなり小さい値で通常のYIG（$\Delta H\sim 0.4$）を用いても正の利得を得る可能性のある点で興味がある．[図12参照]

v_0の大きいInSb（77°K）は静磁波増幅用半導体として注目されているが，室温動作という見地から$v_0=2.5\times10^5$ m/s程度の速度をもつ半導体が望まれている．最近，混晶の研究が進み，たとえば$In_{1-x}Ga_xSb$などはGaAsよりも低電界でGunn効果を示すという点で興味がある．ProkhRovら[8]はいろいろな谷間結合係数を用いてv-E特性を計算し，1KV/cm以下の電界で3×10^5 m/s付近の速度を得ている．室温でμの大きい値としてはMcGroddyら[9]らの報告があり，$0.3\leqq x\leqq0.54$の範囲で$\mu=3.5$ m²/V·sの値を実験で確認していて，threshold電界は600V/cm～800V/cm程度である．以上で見て来たように，室温での静磁波増幅器はμ，v_0，nがかなり大きく，WWモードの後進波領域を利用することにより，構成が可能であると云える．

しかし，具体的にはβのかなり大きいWWモードを励起する問題など実験的に解決されるべき事柄が多く，v_0やv_pの問題と関連して周期構造の系がこれら困難な問題を解決する一手段として注目されるかも知れない．

5. おわりに

本論文では図1の系を伝搬するMSSWとMSVWの増幅特性を系の分散関係式を解析的ならびに計算機解によって調べたものである．両波動の不安定性は$U_0 > U_p$で生起し，YIGに損失を導入すると，損失のない場合に比べて，より大きいU_0で不安定性が生ずることを示した．両波動の増幅で半導体厚さの選定は重要で，MSVWの方が厚み効果が大きい．半導体とYIG間の空隙効果はaが小さいとき，MSVWがMSSWより小さいが，aが大きくなるに従い前者が極端に大きくなる．半導体をYIGと金属板両に装荷したWWモードの増幅特性は適当な半導体の選択で低電界ドプ，室温動作増幅器の可能性を示唆し，YIGおよび半導体の物理定数や寸法に関する詳細な計算により増幅器の設計基準を与えた．

最後に，本予稿作成に協力して戴いた本研究所梅田徳男，阪口尚美氏に謝意を表わす．

文献

1. N.S. Chang and Y. Matsuo, IEEE 56, PP. 765, 1968.
2. E. Schlömann, J. Appl. phys., 40, pp. 1422, 1969.
3. 山田・張・松尾，電子通信学会 MW 75-82, 1975.
4. N.S. chong, S. Yamada and Y. Matsuo, "Amplification characteristics of magnetostatic surface and volume waves in a semiconductor-Dielectrics-YIG-Metal system" (to be published)
5. ———, J. Appl. phys., 47, PP. 385, 1976.
6. R.W. Damon and J.R. Eshbach, J. Phys. chem. Solid 118, PP. 308, 1960
7. Ju. I. Bespjatyf, A.V. Vashkovskii and V.I. Zubkov, Radiotekhnika i Elektronika 20, pp. 1003, 1975.
8. Э.Г. Тропоров, А.В. Удовенко and Н.Н. Белецкий, Радиотехника и Электроника 21, PP. 324, 1976.
9. J.C. McGroddy, M.R. Lorenz and T.S. Plaskett, Solid state commun. 7, PP. 901, 1969.

輻射科学研究会資料

半無限圧電結晶内の点波源による圧電弾性表面波の励振

白崎博公
牧本利夫

（大阪大学 基礎工学部）

昭和51年9月24日

1. まえがき

最近発展してきた弾性表面波素子用の基盤材料として，変換効率の高いすだれ状電極を使用できることなどの理由により，今日主に圧電結晶が用いられている。この圧電結晶は本質的に異方性を持ち，その任意方向においては，一般に位相とエネルギーの伝搬方向が異なっているため エネルギー速度面の交差現象[1][2]（付録1，2を参照）が生じることなどが知られている。よって，半無限圧電結晶の内部におかれた点波源（点荷重及び点電荷）により，結晶表面に励振される圧電弾性表面波のふるまいを3次元的に解析しておくことは重要であると思われる。しかし，まだこの解析はなされていないようである。

等方性媒質の場合には，地球内部の震源による地震波の研究の目的で，地球物理学者らにより広く解析がなされている[3]。異方性結晶に対しては，Buchwald[1]による，transverse isotropy の半無限結晶表面に点荷重が作用する場合の弾性表面波の励振の解析がある。しかし，結晶表面に点荷重を置いた場合には，荷重の作用する点での応力は零とおくことができないにもかかわらず，Buchwaldは，その解析の中で，結晶表面での応力が零という境界条件を用いている。しかし，Buchwaldの解析以後，半無限結晶の内部に作用する点荷重によって励振される弾性表面波の解析はなされていなくて，この誤りは

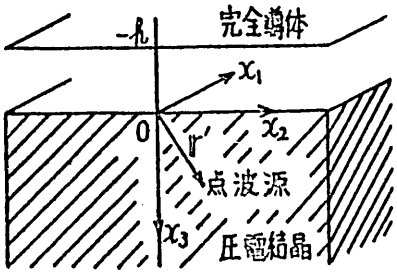


図1 構成図

指摘されていないようである。

本報告では，図1に示すような圧電結晶表面($x_3=0$)より高さhの位置で完全導体によりシールドされており，$x_3 \geq 0$ を占める半無限圧電結晶の内部の点 $r'=(x_1', x_2', x_3')$ に置かれた点波源（点荷重及び点電荷）によって励振される圧電弾性表面波のふるまいを解析することを目的としている。その中で，電磁波の解析によく用いられるダイアディックグリーン関数の手法[4]とstationary phase method[5]を用いて，点波源より遠方での，圧電弾性表面波解に対するダイアディックグリーン関数の漸近近似式を求めている。同時に，Buchwaldの解析の誤りを訂正することも目的としている。数値計算例は，圧電Cubic結晶の$Bi_{12}GeO_{20}$について示している。

2. 無限に広がった圧電結晶中でのダイアディックグリーン関数

この節では，無限に広がった圧電結晶中でのダイアディックグリーン関数を求める。

以下Einsteinの縮約記号を用いて解析するが，添字において英文字（a,b,c,…）は1,2,3の値をとり，ギリシア文字（α,β,γ,…）は1,2,3,4の値をとるこ

とにする。

運動方程式は

$$\partial_j \tau_{ij} - \rho_m \partial^2 u_i / \partial t^2 = -f_i \qquad (1)$$

準静電近似のもとでは

$$\partial_j D_j = \rho_e \qquad (2)$$

$$E_j = -\partial_j \phi \qquad (3)$$

構成方程式は

$$\tau_{ij} = C_{ijpg} \partial_g u_p - e_{ijp} E_p \qquad (4)$$

$$D_i = e_{pgi} \partial_g u_p + \varepsilon_{ip} E_p \qquad (5)$$

ここに∂_jはx_jに関する偏微分を表わしている。u_i, τ_{ij}, D_i, E_i, ϕ, ρ_m, ρ_e, f_i, C_{ijpg}, e_{ijg}, ε_{ig}はそれぞれ，粒子変位，応力，電束密度，電場，静電ポテンシャル，質量密度，電荷密度，体積力，弾性スティフネス定数，圧電定数，誘電定数である。

式(1)及び(2)において原点に作用する点荷重f_i及び点電荷ρ_eを

$$f_i(\mathbf{r}) = a_i \delta(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \qquad (i=1,2,3) \qquad (6)$$

$$\rho_e(\mathbf{r}) = a_4 \delta(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \qquad (7)$$

とおく。ここにa_α ($\alpha=1,2,3,4$)は任意ベクトルであり，$\delta(\mathbf{r})$はDiracのデルタ関数である。

また，粒子変位u_i及び静電ポテンシャルϕを次のようにおく。

$$u_i(\mathbf{r}) = G_{i\alpha}(\mathbf{r}) a_\alpha \qquad (i=1,2,3) \qquad (8)$$

$$u_4(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) = G_{4\alpha} a_\alpha \qquad (9)$$

ここに$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$, ($\alpha, \beta = 1,2,3,4$)は無限に広がった

圧電結晶中でのダイアディックグリーン関数である。

式(6)～(9)を式(1)～(5)に代入すると，次の関係式が得られる。

$$c_{ijkl}\partial_j\partial_k G_{p\alpha}(\mathbf{r}) + e_{ijp}\partial_j\partial_p G_{4\alpha}(\mathbf{r}) - \rho_m \partial^2 G_{i\alpha}(\mathbf{r})/\partial t^2 = -\delta_{i\alpha}\delta(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (10)$$

$$e_{pkj}\partial_j\partial_k G_{p\alpha}(\mathbf{r}) - \varepsilon_{jp}\partial_j\partial_p G_{4\alpha}(\mathbf{r}) = \delta_{4\alpha}\delta(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (11)$$

ここに$\delta_{\alpha\beta}$はCronekerのデルタである。

ダイアディックグリーン関数$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$をフーリエ積分を用いて次のように表わす。

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}dk_1dk_2dk_3 \quad (12)$$

式(12)を式(10),(11)に代入すると

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\tilde{G}_{\beta\gamma}(\mathbf{k}) = \Delta_{\alpha\gamma} \quad (13)$$

が得られる。ここに$\Gamma_{\alpha\beta}$は

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{ip} = c_{ijpq}k_jk_q - \rho_m\omega^2\delta_{ip} && (i,p=1,2,3)\\ &\Gamma_{i4} = \Gamma_{4i} = e_{ijp}k_jk_p && (i=1,2,3)\\ &\Gamma_{44} = -\varepsilon_{ip}k_jk_p \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

であり，$\Delta_{\alpha\gamma}$は

$$[\Delta_{1\gamma},\Delta_{2\gamma},\Delta_{3\gamma},\Delta_{4\gamma}] = [\delta_{1\gamma},\delta_{2\gamma},\delta_{3\gamma},-\delta_{4\gamma}] \quad (15)$$

である。

よって，式(13)より

$$\tilde{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = D_{\alpha\beta}(\mathbf{k})/D(\mathbf{k}) \quad (16)$$

が得られる。ここに

$$D(\mathbf{k}) = \det|\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{k})| \quad (17)$$

$D_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$: $\det|\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{k})|$ の第 α 列を $[\delta_{1\beta}, \delta_{2\beta}, \delta_{3\beta}, -\delta_{4\beta}]^T$ で置き換えた行列 (18)

である。記号 T は転置を表わす。

従って，無限に広がった圧電結晶中でのダイアディックグリーン関数は

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{D(\mathbf{k})} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} dk_1\, dk_2\, dk_3 \qquad (19)$$

で与えられる。

3. ダイアディックグリーン関数の2次元化

無限に広がった圧電結晶内の点 $\mathbf{r}' = (x_1', x_2', x_3')$ に点波源が作用する場合のダイアディックグリーン関数は，式(19)より次式で与えられる。

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{D(\mathbf{k})} e^{i\{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\omega t\}} dk_1\, dk_2\, dk_3 \qquad (20)$$

ここで，式(20)の k_3 に関する積分を留数を用いて計算し，無限に広がった圧電結晶中でのダイアディックグリーン関数の2次元化を行なう。

k_3 に関する積分の極は

$$D(k_1, k_2, k_3) = 0 \qquad (21)$$

を k_3 に関して解いた根 $k_3(k_1, k_2)$ で与えられる。式(21)は k_3 に関する実係数の8次式なので(式(17)及び(14)参照)，その複素根は複素 k_3 平面の上半面及び下半面に共役対で4つずつ得られる。よって，上

半平面にある4つの極を

$$k_3 = i\gamma_\gamma \,, \quad \mathrm{Re}[\gamma_\gamma] > 0 \,, \quad (\gamma = 1,2,3,4) \qquad (22)$$

とおく。そのとき，下半平面にある極は

$$k_3^* = -i\gamma_\gamma^* \qquad (\gamma = 1,2,3,4) \qquad (23)$$

で与えられる。ここに記号＊は複素共役を示す。

次に，$x_3 > x_3'$ のときには上半平面において，実軸上の線分 $-R < \mathrm{Re}[k_3] < R$, $R>0$ と，上半平面における半円弧 C_R, $|k_3| = R$ とからできた単一閉曲線を考える。また，$x_3 < x_3'$ のときには下半平面において同様に，実軸上の線分 $-R < \mathrm{Re}[k_3] < R$, $R>0$ と，下半平面における半円弧 C_R, $|k_3| = R$ とからできた単一閉曲線を考える。この単一閉曲線に沿って積分を行なえば，Jordanの補助定理により，$R \to \infty$ としたとき C_R からの寄与は無視できて，式(20)は次のように表わされる。

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \begin{cases} \dfrac{-1}{(2\pi)^2} \displaystyle\sum_{\gamma=1}^{4} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{\alpha\beta}^{\gamma}(k_1,k_2)}{D_3^{\gamma}(k_1,k_2)} e^{-\gamma_\gamma(x_3-x_3')} e^{i\{k_1(x_1-x_1')+k_2(x_2-x_2')-\omega t\}} dk_1 dk_2 \\ \qquad (x_3 > x_3') \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2} \displaystyle\sum_{\gamma=1}^{4} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{\alpha\beta}^{\gamma*}(k_1,k_2)}{D_3^{\gamma*}(k_1,k_2)} e^{-\gamma_\gamma^*(x_3'-x_3)} e^{i\{k_1(x_1-x_1')+k_2(x_2-x_2')-\omega t\}} dk_1 dk_2 \\ \qquad (x_3 < x_3') \end{cases} \qquad (24)$$

ここに

$$D_3^{\gamma}(k_1,k_2) = [\partial D(k_1,k_2,i\gamma)/\partial\gamma]_{\gamma=\gamma_\gamma} \qquad (25)$$

$$D_{\alpha\beta}^{\gamma}(k_1,k_2) = D_{\alpha\beta}(k_1,k_2,i\gamma_\gamma) \qquad (26)$$

であり†，記号＊は複素共役量を示している。

4. 自由振動項の導出

この節では，波源が存在しない場合の表面波解を求める。

2節に従って，粒子変位 u_i 及び静電ポテンシャル ϕ を次のようにおく。

$$u_i(\mathbf{r}) = A_{i\alpha}(\mathbf{r})a_\alpha \qquad (i=1.2.3) \qquad (27)$$

$$u_4(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) = A_{4\alpha}(\mathbf{r})a_\alpha \qquad (28)$$

ここに a_α $(\alpha=1,2,3,4)$は任意ベクトルである。そして $A_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ をフーリエ積分を用いて次のように表わす。

$$A_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\, dk_1\, dk_2 \qquad (29)$$

式(27)~(29)を波源項（f_i 及び ρ_e）を零とした式(1)~(5)に代入すると

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\tilde{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{k}) = 0 \qquad (30)$$

が得られる。ここに，$\Gamma_{\alpha\beta}$ は式(14)で与えられたものと同じである。

$\tilde{A}_{\beta\gamma}$ が自明でない解を持つためには，次式が成立しなければならない。

$$D(\mathbf{k}) = \det|\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{k})| = 0 \qquad (31)$$

この式は，式(21)と同じ式なので，k_3 に関して解

† 以下，減衰定数 δ_γ $(\gamma=1,2,3,4)$ に関係した量は添字 γ を右上肩につけて表わす。

くと式(22)及び(23)の8つの根が得られる。しかし，ここでは$x_3\to\infty$で零に収束する表面波解を得るために，式(22)の4つの根

$$k_3=i\xi_\gamma,\quad Re[\xi_\gamma]>0,\quad(\gamma=1,2,3,4) \tag{32}$$

をとることにする。

このとき，各ξ_γに対して式(30)より次式が成立する。

$$\frac{\tilde{A}_{1\alpha}}{\eta_1^\gamma}=\frac{\tilde{A}_{2\alpha}}{\eta_2^\gamma}=\frac{\tilde{A}_{3\alpha}}{\eta_3^\gamma}=\frac{\tilde{A}_{4\alpha}}{\eta_4^\gamma}=K_\alpha^\gamma \tag{33}$$

ここにK_α^γは重み関数であり，η_α^γは次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
\eta_1^\gamma&=-\begin{vmatrix}\Gamma_{14}^\gamma&\Gamma_{12}^\gamma&\Gamma_{13}^\gamma\\ \Gamma_{24}^\gamma&\Gamma_{22}^\gamma&\Gamma_{23}^\gamma\\ \Gamma_{34}^\gamma&\Gamma_{23}^\gamma&\Gamma_{33}^\gamma\end{vmatrix},\quad
\eta_2^\gamma=-\begin{vmatrix}\Gamma_{11}^\gamma&\Gamma_{14}^\gamma&\Gamma_{13}^\gamma\\ \Gamma_{12}^\gamma&\Gamma_{24}^\gamma&\Gamma_{23}^\gamma\\ \Gamma_{13}^\gamma&\Gamma_{34}^\gamma&\Gamma_{33}^\gamma\end{vmatrix},\\
\eta_3^\gamma&=-\begin{vmatrix}\Gamma_{11}^\gamma&\Gamma_{12}^\gamma&\Gamma_{14}^\gamma\\ \Gamma_{12}^\gamma&\Gamma_{22}^\gamma&\Gamma_{24}^\gamma\\ \Gamma_{13}^\gamma&\Gamma_{23}^\gamma&\Gamma_{34}^\gamma\end{vmatrix},\quad
\eta_4^\gamma=\begin{vmatrix}\Gamma_{11}^\gamma&\Gamma_{12}^\gamma&\Gamma_{13}^\gamma\\ \Gamma_{12}^\gamma&\Gamma_{22}^\gamma&\Gamma_{23}^\gamma\\ \Gamma_{13}^\gamma&\Gamma_{23}^\gamma&\Gamma_{33}^\gamma\end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

ここに

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(k_1,k_2)=\Gamma_{\alpha\beta}(k_1,k_2,i\xi_\gamma) \tag{35}$$

である。

よって，波源がない場合の$x_3\to\infty$につれて減衰する自由振動項は次式で与えられる。

$$A_{\alpha\beta}(\mathrm{II})=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\gamma=1}^{4}\iint_{-\infty}^{\infty}\eta_\alpha^\gamma(k_1,k_2)K_\beta^\gamma(k_1,k_2)e^{-\xi_\gamma x_3}e^{i(k_1x_1+k_2x_2-\omega t)}dk_1dk_2 \tag{36}$$

5. 半無限圧電結晶に対する ダイアディックグリーン関数

この節では，図1に示した$x_3 \geq 0$をしめる半無限圧電結晶内の点$\mathbf{r}'=(x_1', x_2', x_3')$に点波源がおかれた場合のダイアディックグリーン関数を求める。ここに，結晶表面($x_3=0$)より高さh($x_3=-h$)のところは，完全導体によりシールドされている。

結晶表面($x_3=0$)で応力が零という条件より，次の機械的な境界条件が得られる。

$$T_{3j}|_{x_3=0} = C_{3jkl}\partial_l u_k + e_{k3j}\partial_k u_4|_{x_3=0} = 0 \quad (j=1,2,3) \tag{37}$$

また電気的な境界条件は，結晶表面($x_3=0$)で

$$\left.\begin{aligned} E_1^{sub}|_{x_3=0} &= E_1^{air}|_{x_3=0} \\ E_2^{sub}|_{x_3=0} &= E_2^{air}|_{x_3=0} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$D_3^{sub}|_{x_3=0} = D_3^{air}|_{x_3=0} \tag{39}$$

で与えられる。ここに，添字subは結晶中($x_3>0$)での場を示し，添字airは$-h \leq x_3 \leq 0$での場を示している。そして準静電近似を用いると式(38),(39)は

$$\left.\begin{aligned} \partial_1\phi^{sub}|_{x_3=0} &= \partial_1\phi^{air}|_{x_3=0} \\ \partial_2\phi^{sub}|_{x_3=0} &= \partial_2\phi^{air}|_{x_3=0} \end{aligned}\right\} \tag{38'}$$

$$e_{3kl}\partial_l u_k - \varepsilon_{3k}\partial_k\phi^{sub}|_{x_3=0} = -\varepsilon_0\partial_3\phi^{air}|_{x_3=0} \tag{39'}$$

となる。また，$x_3=-h$のところでは，完全導体でシールドされているので

$$\phi^{air}|_{x_3=-h} = 0 \tag{40}$$

を満足しなければならない。

ところで，3節で求めた無限に広がった圧電結晶

中でのダイアディックグリーン関数だけでは，式〈37〉～〈40〉の境界条件を満足しないので，摂動項として，4節で求めた自由振動項を付加することによって，境界条件を満足するダイアディックグリーン関数を求める†。

粒子変位u_i及び静電ポテンシャルϕを次のようにおく。

$$u_i(\mathbf{r}) = B_{i\alpha}(\mathbf{r})\,a_\alpha \qquad (i=1,2,3) \tag{41}$$

$$u_4(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) = B_{4\alpha}(\mathbf{r})\,a_\alpha \tag{42}$$

ここにa_α $(\alpha=1,2,3,4)$は任意ベクトルである。そして，$B_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$, $(\alpha,\beta=1,2,3,4)$ は，半無限圧電結晶に対する境界条件を満足するダイアディックグリーン関数であり，式〈24〉と〈36〉を用いて次のように仮定する。

$$B_{\alpha\beta}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{4}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\eta_\alpha^\gamma(k_1,k_2)K_\beta^\gamma(k_1,k_2)e^{-\delta_\gamma x_3} + \frac{D_{\alpha\beta}^{\gamma*}(k_1,k_2)}{D_3^{\gamma*}(k_1,k_2)}e^{-\delta_\gamma^*(x_3'-x_3)}\right] \\ \qquad \cdot e^{i\{k_1(x_1-x_1')+k_2(x_2-x_2')-\omega t\}}dk_1dk_2\,, \quad (0\le x_3<x_3') \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{4}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\eta_\alpha^\gamma(k_1,k_2)K_\beta^\gamma(k_1,k_2)e^{-\delta_\gamma x_3} - \frac{D_{\alpha\beta}^{\gamma}(k_1,k_2)}{D_3^{\gamma}(k_1,k_2)}e^{-\delta_\gamma(x_3-x_3')}\right] \\ \qquad \cdot e^{i\{k_1(x_1-x_1')+k_2(x_2-x_2')-\omega t\}}dk_1dk_2\,, \quad (x_3'<x_3) \end{cases} \tag{43}$$

---

† この方法は，半無限等方性媒質中におかれた線状荷重の問題の解析に対してGarvin[6]によって用いられている。

そのとき，境界条件式(38)′及び(40)を満足する静電ポテンシャルϕ^{air}は次式で与えられる。

$$\phi^{air}(\mathbf{r}) = C_{4\alpha}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\,a_\alpha \tag{44}$$

ここに$C_{4\alpha}$は次式で与えられる。

$$C_{4\alpha}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{\gamma=1}^{4}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sinh\{k_3 h(x_3+h)\}}{\sinh(k_3 h)}\Big[\eta_4^\gamma(k_1,k_2)K_\alpha^\gamma(k_1,k_2) + \frac{D_{4\alpha}^{\gamma*}(k_1,k_2)}{D_3^{\gamma*}(k_1,k_2)}e^{-g_\gamma^* x_3}\Big]e^{i\{k_1(x_1-x_1')+k_2(x_2-x_2')-\omega t\}}\,dk_1\,dk_2 . \tag{45}$$

式(41)～(45)を，境界条件式(37)及び(39)′に代入することにより次式が得られる。

$$f_\alpha^\gamma(k_1,k_2)K_\beta^\gamma(k_1,k_2) = h_{\alpha\beta}(k_1,k_2) \tag{46}$$

ここに，f_α^γ及びh_β^γは次式で与えられる。

$$\begin{cases} f_i^\gamma = (C_{i3p1}k_1 + C_{i3p2}k_2 + iC_{i3p3}g_\gamma)\eta_p^\gamma \\ \qquad\quad + (e_{13i}k_1 + e_{23i}k_2 + ie_{33i}g_\gamma)\eta_4^\gamma\,, \quad (i=1,2,3) \\ f_4^\gamma = (e_{3p1}k_1 + e_{3p2}k_2 + ie_{3p3}g_\gamma)\eta_p^\gamma \\ \qquad - \{\varepsilon_{31}k_1 + \varepsilon_{32}k_2 + i\varepsilon_{33}g_\gamma + i\varepsilon_0\coth(k_3 h)\}\eta_4^\gamma\,, \quad (k_3 h \neq 0) \\ f_4^\gamma = \eta_4^\gamma\,, \quad (k_3 h = 0) \end{cases} \tag{47}$$

$$\begin{cases} h_{i\alpha} = -\sum_{\gamma=1}^{4}\Big[(C_{i3p1}k_1 + C_{i3p2}k_2 - iC_{i3p3}g_\gamma^*)\frac{D_{p\alpha}^{\gamma*}}{D_3^{\gamma*}}e^{-g_\gamma^* x_3'} \\ \qquad + (e_{13i}k_1 + e_{23i}k_2 - ie_{33i}g_\gamma^*)\frac{D_{4\alpha}^{\gamma*}}{D_3^{\gamma*}}e^{-g_\gamma^* x_3'}\Big]. \quad (i=1,2,3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{4\alpha} = -\sum_{\gamma=1}^{4}\Big[\big(e_{3p1}k_1 + e_{3p2}k_2 - ie_{3p3}\xi_\gamma^*\big)\dfrac{D_{p\alpha}^{\gamma*}}{D_3^{\gamma*}} e^{-\xi_\gamma^* x_3'} \\ \qquad -\big\{\varepsilon_{31}k_1 + \varepsilon_{32}k_2 - i\varepsilon_{33}\xi_\gamma^* + i\varepsilon_0 \coth(kh)\big\}\dfrac{D_{4\alpha}^{\gamma*}}{D_3^{\gamma*}} e^{-\xi_\gamma^* x_3'}\Big], \quad (kh \neq 0) \\ h_{4\alpha} = -\sum_{\gamma=1}^{4}\dfrac{D_{4\alpha}^{\gamma*}}{D_3^{\gamma*}} e^{-\xi_\gamma^* x_3'} \qquad (kh = 0) \end{cases} \tag{48}$$

よって，式(46)より重み関数 $K_\alpha^\gamma(k_1, k_2)$ は次式で与えられる。

$$K_\alpha^\gamma(k_1, k_2) = L_\alpha^\gamma(k_1, k_2) / L(k_1, k_2) \tag{49}$$

ここに

$$L = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_1^2 & f_1^3 & f_1^4 \\ f_2^1 & f_2^2 & f_2^3 & f_2^4 \\ f_3^1 & f_3^2 & f_3^3 & f_3^4 \\ f_4^1 & f_4^2 & f_4^3 & f_4^4 \end{vmatrix} \tag{50}$$

L_α^γ：L において第 γ 列を $[h_{1\alpha}, h_{2\alpha}, h_{3\alpha}, h_{4\alpha}]^T$ で置き換えた行列 (51)

である。

従って，式(49)を式(43)に代入することにより，半無限圧電結晶に対するダイアディックグリーン関数は次式で与えられる。

$$B_{\alpha\beta}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{4}\iint_{-\infty}^{\infty}\Big\{\dfrac{\eta_\alpha^\gamma(k_1, k_2) L_\beta^\gamma(k_1, k_2)}{L(k_1, k_2)} e^{-\xi_\gamma x_3} + \dfrac{D_{\alpha\beta}^{\gamma*}(k_1, k_2)}{D_3^{\gamma*}(k_1, k_2)} e^{-\xi_\gamma^*(x_3' - x_3)}\Big\} \\ \qquad \cdot e^{i\{k_1(x_1 - x_1') + k_2(x_2 - x_2') - \omega t\}} dk_1 dk_2, \quad (0 \le x_3 < x_3') \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\gamma=1}^{4} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\eta_\alpha^\gamma(k_1,k_2) L_\beta^\gamma(k_1,k_2)}{L(k_1,k_2)} e^{-\xi_\gamma x_3} - \frac{D_{\alpha\beta}^\gamma(k_1,k_2)}{D_3^\gamma(k_1,k_2)} e^{-\xi_\gamma(x_3-x_3')} \right] \right.$$
$$\left. \cdot e^{i\{k_1(x_1-x_1')+k_2(x_2-x_2')-\omega t\}} dk_1\, dk_2 . \quad (x_3' < x_3) \right.$$

(52)

一般に，荷重 $f_j(\mathbf{r}')$ $(j=1,2,3)$ 及び電荷 $\rho_e(\mathbf{r}')$ が，それぞれ領域 V_j' $(j=1,2,3)$ 及び V_4' に分布している場合には，粒子変位 $u_i(\mathbf{r})$ $(i=1,2,3)$ 及び静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は次式で与えられる。

$$u_i(\mathbf{r}) = \sum_{V_j'} \iiint B_{ij}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' + \iiint_{V_4'} B_{i4}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \rho_e(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \quad (i=1,2,3) \quad (53)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{V_j'} \iiint B_{4j}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' + \iiint_{V_4'} B_{44}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \rho_e(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \quad (54)$$

6. 圧電弾性表面波解に対する漸近近似式の導出

この節では，式(52)で与えられた半無限圧電結晶に対するダイアディックグリーン関数より，波源より遠方での圧電弾性表面波解に対する漸近近似式を求める。

式(52)において，点波源を $\mathbf{r}'=(0,0,x_3')$ におき，x_3 軸はそのままで，結晶表面の (x_1,x_2) 方向に新しい座標軸 x_2'' 軸がくるように座標軸の回転を行なうと次式が得られる。

$B_{\alpha\beta}(\mathbf{r}''|\mathbf{r}')=$

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{4}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{\eta_\alpha^\gamma(k_1'',k_2'')L_\beta^\gamma(k_1'',k_2'')}{L(k_1'',k_2'')}e^{-\delta_\gamma x_3}+\dfrac{D_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma}(k_1'',k_2'')}{D_3^{\gamma\gamma}(k_1'',k_2'')}e^{-\delta_\gamma^{\gamma}(x_3'-x_3)}\right] \\
\qquad\qquad \cdot e^{i(k_1''x_2''-\omega t)}\,dk_1''\,dk_2'' \qquad (0\le x_3<x_3') \\
\dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{4}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{\eta_\alpha^\gamma(k_1'',k_2'')L_\beta^\gamma(k_1'',k_2'')}{L(k_1'',k_2'')}e^{-\delta_\gamma x_3}-\dfrac{D_{\alpha\beta}^{\gamma}(k_1'',k_2'')}{D_3^{\gamma}(k_1'',k_2'')}e^{-\delta_\gamma(x_3-x_3')}\right] \\
\qquad\qquad \cdot e^{i(k_1''x_2''-\omega t)}\,dk_1''\,dk_2'' \qquad (x_3'<x_3)
\end{cases}
\tag{55}
$$

ここに，k_1'', k_2'' は新しい座標系での波数を表わしている。

式(55)の積分において，圧電弾性表面波への寄与を与える極は

$$L(k_1'',k_2'')=0 \tag{56}$$

より得られる。式(56)を満たす根の中で，複素数の k_2'' に対しては，x_2'' が十分大きいときに，式(55)の積分への寄与を無視できる†。よって，複素 k_2'' 平面において実軸上の極のみを考慮する。そのとき，k_1''-k_2'' 座標系において，式(56)で与えられる実数曲線は，逆速度面（付録1を参照）と呼ばれている。

ここで，放射条件を満たす解を得るために，次の操作を行なう。まず，角周波数 ω を $\omega+i\varepsilon$ で置き換える。ここに $\varepsilon>0$ であり，後に $\varepsilon\to 0$ とする。そのとき，式(56)は近似的に

$$L+i\varepsilon\,\partial L/\partial\omega=0 \tag{57}$$

となる。ここに，L は $\varepsilon=0$ のときの値を示している。

† この極は擬似圧電弾性表面波に対応している。

そして，Lの実数の1位の零点 $k_2''=k_{20}''$ の近傍で，式(57)は近似的に

$$(k_2''-k_{20}'')\partial L/\partial k_2''+i\varepsilon\partial L/\partial\omega=0 \qquad (58)$$

となる。よって，式(57)の零点は，もし群速度

$$v_g=-(\partial L/\partial k_2'')/(\partial L/\partial\omega) \qquad (60)$$

が正ならば，複素 k_2'' 平面の上半平面にあることがわかる。

ここで，$\chi_2''>0$ にとっているので，複素 k_2'' 平面の上半平面において，実軸上の線分 $-R<\mathrm{Re}[k_2'']<R$，$R>0$ と，半円弧 C_R, $|k_2''|=R$ とからできた単一閉曲線を考える。そして，この単一閉曲線に沿って積分を行なえば，Jordanの補助定理により，$R\to\infty$ としたとき，C_R からの寄与は無視できる。よって，式(55)より，留数の寄与のみを考慮すれば圧電弾性表面波解に対して，$\varepsilon\to 0$ の極限として次式が得られる。

$$B_{\alpha\beta}(k''|k')\sim \frac{i}{2\pi}\sum_{\gamma=1}^{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta_\alpha^\gamma(k_1'')L_\beta^\gamma(k_1'')}{L_2(k_1'')}e^{-\xi_\gamma x_3}e^{i(k_2''\chi_2''-\omega t)}dk_1'' \qquad (61)$$

ここに

$$L_2(k_1'')=[\partial L(k_1'',k_2'')/\partial k_2'']_{k_2''=k_2''(k_1)} \qquad (62)$$

である。

Lighthill[5]により発展させられたstationary phase methodによると，χ_2'' が十分大きいとき，式(61)の積分の漸近近似式への寄与は，式(56)で与えられる逆速度面の法線方向が，χ_2'' 軸方向に平行であ

るようなN コの点 (k''_{1S}, k''_{2S}), $(S=1,2,\cdots,N)$ の付近から得られる。それで，その各点で k''_2 を次式のように表わす。

$$k''_2 = k''_{2S} + \frac{1}{2}\lambda_S (k''_1 - k''_{1S})^2 + \cdots\cdots \tag{63}$$

ここに，λ_S は曲率であり

$$\lambda_S = \frac{L_1^2 L_{22} - 2L_1 L_2 L_{12} + L_2^2 L_{11}}{(L_1^2 + L_2^2)^{3/2}} \tag{64}$$

で与えられる。ここに

$$L_j = [\partial L / \partial k''_j]_{k''_1 = k''_{1S},\ k''_2 = k''_{2S}} \tag{65}$$

$$L_{ij} = [\partial^2 L / \partial k''_i \partial k''_j]_{k''_1 = k''_{1S},\ k''_2 = k''_{2S}} \tag{66}$$

である。

式(63)を(61)に代入して，stationary phase methodを用いると次式が得られる。

$$B_{\alpha\beta}(k''|k') \sim \sum_{S=1}^{N} \sum_{\gamma=1}^{4} \left[\frac{i\eta_\alpha^\gamma(k''_{1S}) L_\beta^\gamma(k''_{1S})}{2\pi L_2(k''_{1S})} e^{-\delta_\gamma x_3} e^{i(k''_{2S} x''_2 - \omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{1}{2}\lambda_S (k''_1 - k''_{1S})^2 x''_2} dk''_1 \right] \tag{67}$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ik u^2}{2}\right) du = \sqrt{\frac{2\pi}{|k|}} \exp\left(\frac{1}{4}\pi i \, \mathrm{sgn}\, k\right) \tag{68}$$

の関係式を用いると，圧電弾性表面波解に対する漸近近似式は次式で与えられる。

$$B_{\alpha\beta}(k''|k') \sim \sum_{S=1}^{N} \sum_{\gamma=1}^{4} \left[\frac{A_S \eta_\alpha^\gamma(k''_{1S}) L_\beta^\gamma(k''_{1S})}{\sqrt{2\pi x''_2 |\lambda_S| L_2(k''_{1S})}} e^{-\delta_{\gamma S} x_3} e^{i(k''_{2S} x''_2 - \omega t)} \right] \tag{69}$$

ここに，A_sは次式で与えられる。

$$A_s = \exp\{\pi i(2+\operatorname{sgn}\lambda_s)/4\} \tag{70}$$

式(69)を最初の座標系に戻すと，圧電弾性表面波解に対する漸近近似式は次式で与えられる。

$$B_{\alpha\beta}(|r||r') \sim \sum_{s=1}^{N}\sum_{r=1}^{4}\left\{\pm\frac{A_s\eta_\alpha^\gamma(k_{1s})L_\beta^\gamma(k_{1s})}{\sqrt{2\pi|r||\lambda_s||\nabla L|_s}}e^{-\delta_{rs}x_3}e^{i(k_{1s}x_1+k_{2s}x_2-\omega t)}\right\} \tag{71}$$

ここに，符号±は，点(k_{1s},k_{2s})で関数Lが原点からの距離とともに増加しているならば＋をとり，減少しているならば－をとる。

次に，逆速度面の曲率λ_sが零になる点(k_{1s}'',k_{2s}'')においては，k_2''を

$$k_2'' = k_{2s}'' + \frac{1}{6}\mu_s(k_1''-k_{1s}'')^3+\cdots\cdots \tag{72}$$

とTaylor展開する。そのとき，同様の議論により，圧電弾性表面波解に対する漸近近似式は，最初の座標系で表わすと次式で与えられる。

$$B_{\alpha\beta}(|r||r') \sim \sum_{r=1}^{4}\left\{\pm\frac{i\sqrt{3}\sqrt[3]{6}(1/3)!\,\eta_\alpha^\gamma(k_{1s})L_\beta^\gamma(k_{1s})}{2\pi\sqrt{|\nabla L|_s}\sqrt[3]{|\mu_s||r|}}e^{-\delta_{rs}x_3}e^{i(k_{1s}x_1+k_{2s}x_2-\omega t)}\right\} \tag{73}$$

よって，式(71)と(73)を比べることにより，逆速度面の曲率λ_sが零でない点に対応した方向†に伝搬する圧電弾性表面波がその伝搬距離とともに$O(r^{-1/2})$で減衰するのに比べて，逆速度面の曲率λ_sが零の点†すなわち，その点での逆速度面の法線方向である。

に対応した方向に伝搬する圧電弾性表面波は$O(r^{-1/3})$で減衰し，その減衰速度が遅くなることがわかる。

7. 数値計算

この節では，結晶表面を完全導体で覆った($h=0$) Z-cut の半無限圧電Cubic 結晶$Bi_{12}GeO_{20}$について，その内部におかれた点波源（点荷重及び点電荷）によって励振される，レイリー波型の圧電弾性表面波に対する数値計算例を示す。この場合には，エネルギー速度面の交差現象は生じない（付録2を参照）。なお，数値計算の際，$Bi_{12}GeO_{20}$の弾性定数，圧電定数及び誘電定数は文献(7)に従った。

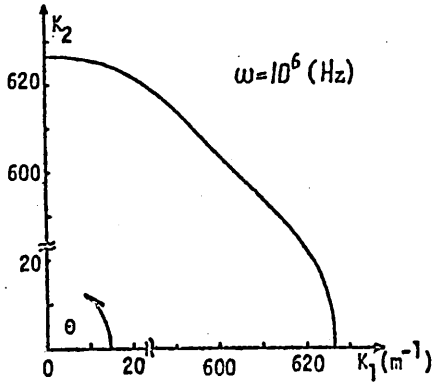


図2 逆速度面

図2には，式(56)より求めた圧電弾性表面波の逆速面を示した。この逆速度面は，$\theta=45°$の方向に引いた直線に関して対称であり，またk_1軸及びk_2軸に関しても対称である。そして，異方性のために，逆速度面はわずかに湾曲していることがわかる。

図3には，式(64)より求めた逆速度面の曲率λを示した。ここに，位相伝搬方向の方位角θが，0°から約4°までは逆速度面の曲率λは正で，約4°から45°までは逆速度面の曲率λは負である。そして，

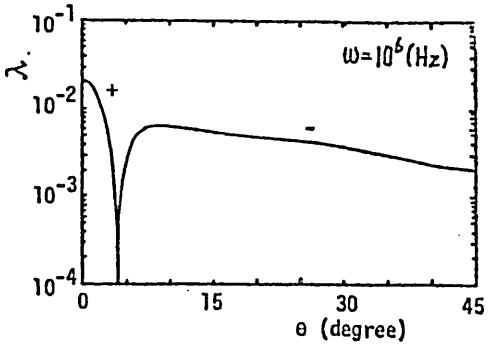


図3 逆速度面の曲率λ

約4°のところで，圧電弾性表面波の逆速度面の曲率λは零になっている。

図4には，式(71)を用いて，結晶表面より深さ $x_3'=\delta$ のところにおかれた，x_1, x_2, x_3 軸方向にそれぞれ働く調和点荷重によって励振された圧電弾性表面波の，各エネルギー伝搬方向への電力密度Pを示した†。図中 x_1, x_2, x_3 は，それぞれ x_1, x_2, x_3 軸方向に作用する調和点荷重によって励振された圧電弾性表面波の電力密度Pを示している。この場合，エネルギー速度面の交差現象が生じないので，式(71)の総和記号における指標Nは，各エネルギー伝搬方向に対して1である。

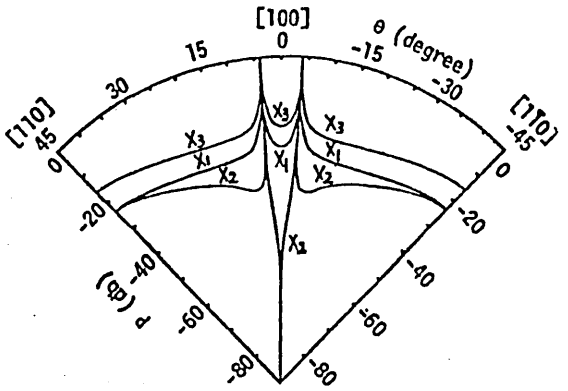
図5には，式(71)を用いて，結晶表面より深さ $x_3'=\delta$ のところにおかれた調和点電荷によって励振された圧電弾性表面波の，各エネルギー伝搬方向への電力密度Pを示した。

Buchwald[1]は，transverse isotropy の半無限結

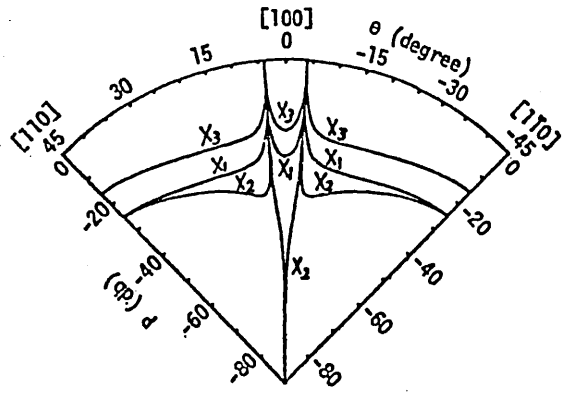
† ここに，電力密度Pとして，深さ方向（x_3座標）に関して積分した次の量を示した。

$$P_i = \int_0^\infty \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[i\omega \left(\phi D_i^* - \tau_{ij} U_j^* \right) \right] dx_3 \quad (i=1,2) \qquad (74)$$

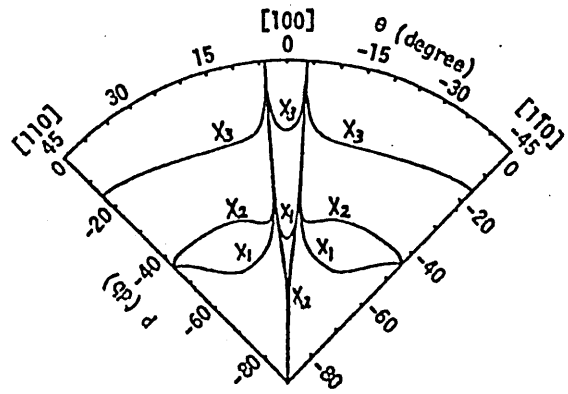
$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \qquad (75)$$



(a) $\delta=0$ (m)



(b) $\delta=1.6\times10^{-4}$ (m)



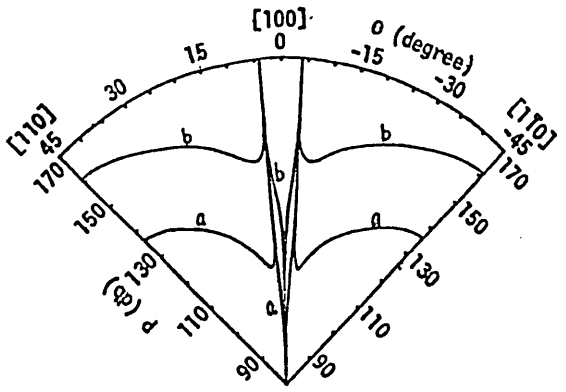
(c) $\delta=1.6\times10^{-3}$ (m)

$\omega=10^6$ (Hz), $f_i=1$ (N/m^3), $|\vec{r}|=1$ (m)

図4 点荷重により励振された圧電弾性表面波の電力密度P

晶表面に点荷重が作用する場合に対して，弾性表面波の励振の解析を行なった。しかし，結晶表面に点荷重を置いた場合には，荷重の作用する点での応力は零とおくことができないにもかかわらず，Buchwaldは，その解析の中で，結晶表面での応力が零という境界条件を用いている。筆者は，数値計算により，彼の得た弾性表面波解に対する漸近近似式は，恒等的に零になることを確かめている。結晶表面に荷重が作用する場合に対する正しい解は，結晶内部に点荷重を置いて解析を行ない，その後

点荷重の位置を結晶表面に近付けた極限として得られる。図4(a)に示したδ=0のときの電力密度Pは，式(71)において波源の位置を$x_3' \to 0$とした極限として得たものである。また，数値計算によると，調和点電荷が作用する場合には，δ=0のとき圧電弾性表面波は励振されない。これは，結晶表面を完全導体でシールドした場合(h=0)に対する数値計算を行なったことによっている。



(a) δ=1.6×10^{-4}(m) (b) δ=1.6×10^{-3}(m)
W=10^6(Hz), ρe=1(C/m^3) |W|=1(m)

図5 点電荷により励振された圧電弾性表面波の電力密度P

図4，図5において〔100〕方向には，x_2軸方向に働く点荷重及び点電荷では，圧電弾性表面波は励振されていない。すなわち，〔100〕方向には，sagital plane(x_1-x_3面)内に粒子変位を持つ，純粋に機械的なレイリー波が励振されることがわかる。

また，図4(a),(b),(c)を比べると，x_3軸方向(結晶表面に垂直な方向)に働く点荷重によって励振された圧電弾性表面波の電力密度Pは，点波源の深さδにほとんど依存せずに一定であることがわかる。

さらに，図4，図5において，エネルギー伝搬角

$\theta \fallingdotseq \pm 4.1°$のところで，電力密度Pは無限大になっている。この方向は，圧電弾性表面波の逆速度面の曲率λが零になる点での，逆速度面の法線方向に対応しており，圧電弾性表面波の伝搬距離に対する減衰速度が，他方向に伝搬する圧電弾性表面波に比べて遅くなっていることを示している。

8. むすび

本報告では，半無限圧電結晶内におかれた点波源（点荷重及び点電荷）による圧電弾性表面波の励振問題を，電磁波の解析によく用いられるダイアディックグリーン関数の手法を用いて3次元的に解析した。そして，点波源より遠方での圧電弾性表面波解に対する漸近近似式をstationary phase methodを用いて求めた。

さらに，圧電cubic結晶の$Bi_{12}GeO_{20}$を用いた数値計算により，点波源によって圧電弾性表面波を励振した場合，その伝搬距離に対する減衰速度が，他方向に伝搬する圧電弾性表面波に比べて遅くなるようなエネルギー伝搬方向が存在することを明らかにした。

謝辞　有益な助言を頂いた摂南大学講師
杉尾嘉彦工学博士に深謝する。

文 献

(1) V.T.Buchwald:"Rayleigh waves in transversely isotropic media", Quart.J.Mech. Appl.Math., 14, p293 (1961)

(2) 白崎, 牧本:"Cubic 結晶における弾性表面波のエネルギー伝搬特性", 信学論(B), 掲載予定

(3) W.M.Ewing, W.Jadetzky and F.Press:"Elastic waves in layered media", McGraw-Hill Book Company, New York (1957)

(4) 例えば, 梅原忠利:"電磁波序説", コロナ社, (昭49)

(5) M.J.Lighthill:"Anisotropic wave motions", Phil.Trans.Roy.Soc.London, A, 252, p397 (1960)

(6) W.W.Garvin:"Exact transient solution of the buried line source problem", Proc. Roy.Soc.London, 234A, p528 (1956)

(7) M.Onoe, A.W.Warnar and A.A.Ballman:"Elastic and piezoelectric characteristics of bismuth germanium oxide $Bi_{12}GeO_{20}$", IEEE Trans.Sonics Ultrasonics, 14, p165 (1967)

(8) B.A.Auld:"Acoustic fields and waves in solids, vol.1", John Wiley & Sons (1973)

付 録

1. 作図によるエネルギー速度面の求め方

圧電弾性表面波において，波数ベクトルを$\mathbb{K}$，位相速度を$\mathbb{V}_p$，エネルギー速度を$\mathbb{V}_e$，そして位相伝搬方向の単位ベクトルを$\hat{\mathbb{K}}$とすると次式が成立する[8]。

$$\hat{\mathbb{K}} \cdot \mathbb{V}_e = |\mathbb{V}_p| \qquad (A.1)$$

$$\delta\mathbb{K} \cdot \mathbb{V}_e = 0 \qquad (A.2)$$

ここに，$\delta\mathbb{K}$ は波数ベクトル$\mathbb{K}$の1次の微小変化量を示す。

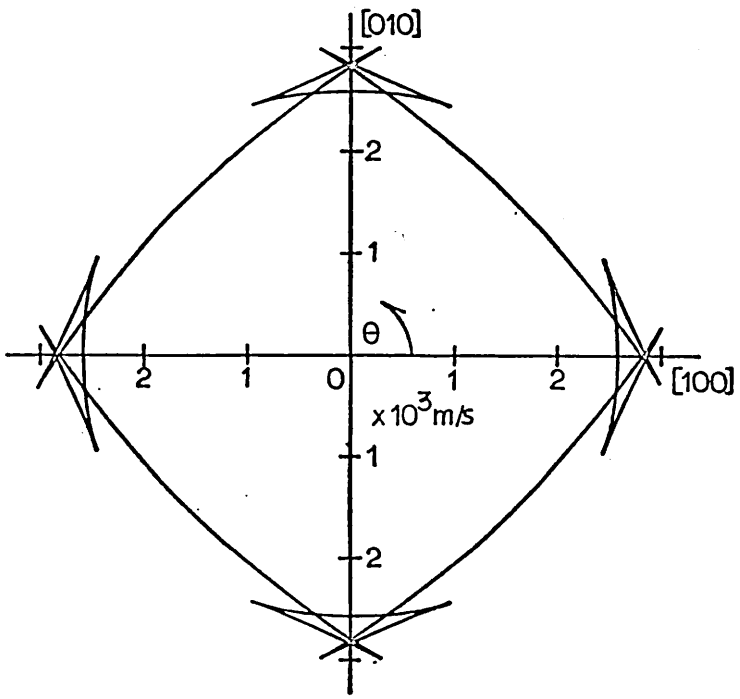
式(A.1)より，エネルギー速度は等位相面上にあることがわかり，各伝搬方向のエネルギー速度を結んだエネルギー速度面（wave surface）は，等位相面の包絡線を数値計算により求めることによって得られる。

また，位相速度の逆数は波数に比例した値を持つので，各伝搬方向の位相速度の逆数を結んだ逆速度面（slowness surface）の法線方向は，式(A.2)よりエネルギー伝搬方向を示していることがわかる。よって，各位相伝搬方向の位相速度を結んだ速度面（velocity surface）において等位相面を描き，エネルギー伝搬方向すなわち逆速度面の法線方向を速度面の原点からとり，等位相面との交点をとると，エネルギー速度$\mathbb{V}_e$が得られる。各位相伝搬方向に対して同じ作図を行なうと，エネルギー速度面が作図により得られる。

2. エネルギー速度面の交差現象について

図A.1には，ZnSについて，表面を無限に薄い完全導体でシールドされた，Z-cutの半無限結晶表面を伝搬するレイリー波型の圧電弾性表面波のエネルギー速度面を示した。これは，等位相面の包絡線をLagrangeの未定乗数法を用いて求める方法により，数値計算で求めたものである（付録1及び文献2を参照）。

図A.1より，ZnS結晶に対しては，エネルギー速度面の交差現象が生じることがわかる。そして，この図で例えば，位相伝搬方向が$\theta \fallingdotseq 51°, 64°, 88°, 117°, 127°$の圧電弾性表面波のエネルギーは，すべて$\theta =$



図A.1 ZnSに対するエネルギー速度面

88° の方向に進み，それぞれのエネルギー速度は，異なった大きさを持っている。よって，このエネルギー速度面の交差現象は，位相とエネルギーの伝搬方向のずれ角が非常に大きいときに生じることがわかる。

なお，本文で数値解析に用いた $Bi_{12}GeO_{20}$ 結晶に対しては，エネルギー速度面の交差現象が生じない。

輻射科学研究会資料

共平面型ストリップ線路のスプリアス・モード

池内雅紀・井上和夫
（立命館大学 理工学部）
沢奥英男・仁木滉
（岡山理科大学 理学部）

昭和51年9月24日

共平面型ストリップ線路の
スプリアス・モード

1. はじめに

マイクロ波集積回路用の伝送路として、マイクロストリップ線路をはじめ、用途に応じて様々の構成が提案されてきた。[1] 今日、それらは分布導体・分布誘電体を有する複雑な構成にまで至っている。また、同時に線路の電磁波伝搬姿態（モード）として、TEM波を仮定することによって、線路特性の解析も相当盛んに行われてきた。[2] しかしながら、線路の不均質な構成，高マイクロ波帯での線路の使用などを考えると、基本モードですら、もはやTEM波ではなく、高次モードの影響も予想される。したがって、より一般的な解析法が要求される。その際，LSM，LSEモードの結合を考え、電気，磁気型ヘルツ・ベクトルポテンシャルを用いるか、あるいは単に、TE波とTM波の結合を考え、スカラー・ポテンシャルを用いるのが妥当である。

本報告では、主に共平面型ストリップ線路を取り上げ、TE，TM波の混成を考えることによって、その伝搬モードの分散特性を明らかにする。また、その解析の手法として、最近マイクロ波工学への応用が盛んな有限要素法[3]を用いる。したがって、電磁波の伝搬

定数に関する変分表現が必要とされるが、それは、ここでは一般的な多導体・多誘電体層を有する線路について、導出される。また、数値計算の結果、非物理的なスプリアス解が現われたので[4,5]、その特徴および原因について考察したい。

2. 基本方程式

今、図.1に示すような不均質な線路の構成を考える。この線路は、一様で完全導体によって遮へいされており、ストリップ導体（S_i ; $i=1,2,\cdots,n$）は、その厚さが無視できるものとする。また、誘電体層（Γ_i ; $i=1,2,3$）は、それぞれ無損失、均質であるとする。

各均質な小領域（Γ_i）内における電磁界成分を伝搬軸（z）、横方向（t）について、それぞれ E_{zi}, H_{zi} および E_{ti}, H_{ti} とする。ただし、$e^{j(\omega t-\beta z)}$ の依存性を仮定した。このとき、マックスウエルの方程式から、E_{zi}, H_{zi} に関するヘルムホルツの方程式が得られる。

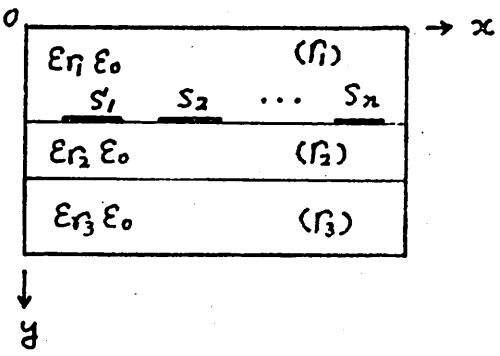


図.1 共平面型ストリップ線路

$$\nabla_t^2 E_{zi} + k_i^2 E_{zi} = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla_t^2 H_{zi} + k_i^2 H_{zi} = 0 \qquad (2)$$

ただし $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, また

$$k_i^2 = \varepsilon_{ri}(\omega/c)^2 - \beta^2 \quad ; \quad c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \qquad (3)$$

また、横方向成分は E_{zi}, H_{zi} を用いて次のように書き表わすことができる。

$$k_i^2 E_{ti} = -j\beta \{ \nabla_t E_{zi} - (\omega\mu_0/\beta)\, u_z \times \nabla_t H_{zi} \} \qquad (4)$$

$$k_i^2 H_{ti} = -j\beta \{ \nabla_t H_{zi} + (\omega\varepsilon_{ri}\varepsilon_0/\beta)\, u_z \times \nabla_t E_{zi} \} \qquad (5)$$

ただし、u_z は z 方向の単位ベクトルを示す。

したがって、(1), (2) 式を E_{zi} , H_{zi} ($i=1, 2, 3$) および $k_i(\omega, \beta)$ に関して解くことによって、全ての電磁界分布，分散特性などが明らかになる。その場合、電磁界の各成分は、次に述べるような 3 種類の境界・連続条件を、適宜満足せねばならない。

(a) 外部境界（外部遮へい導体）上において、

$$E_{zi} = 0 \quad ; \quad \partial H_{zi}/\partial n = 0 \qquad (6)$$

ただし、n は外部境界に垂直な法線方向を示す。

(b) 内部境界（相異なる誘電体層の境界）上において、

$$E_{xi} = E_{xj} \quad ; \quad H_{xi} = H_{xj} \qquad , i \neq j \tag{7}$$

$$E_{zi} = E_{zj} \quad ; \quad H_{zi} = H_{zj} \qquad , i \neq j \tag{8}$$

特に ストリップ導体上 (S_i ; $i=1, 2, \cdots, n$) では

$$E_{x1} = 0 \quad ; \quad E_{x2} = 0 \quad ; \quad H_{x1} \neq H_{x2} \tag{9}$$

$$E_{z1} = 0 \quad ; \quad E_{z2} = 0 \quad ; \quad H_{z1} \neq H_{z2} \tag{10}$$

このような境界条件の下では、通常、解の定式化は、非常に複雑になるばかりか、線路の構成の変化に対して汎用性がなくなる。 したがって、ここでは、次節で示すように誘電体あるいは、導体に接する各均質な小領域 (Γ_i) に対する変分表現に依拠し、それが上述の (1), (2) 式及び (6) ~ (10) 式を満たすことを示す。

3. 変分表現

電磁界の伝搬軸方向成分 E_{zi}, H_{zi} に対して、波動インピーダンスを考慮して、スカラー・ポテンシャルを次のように定める。

$$\phi_i^{(h)} = H_{zi} \quad ; \quad \phi_i^{(e)} = (\omega \varepsilon_0 / \beta) E_{zi} \tag{11}$$

このとき、(1), (2) 式は次のように書ける。

$$\nabla_t^2 \phi_i^{(h)} + k_i^2 \phi_i^{(h)} = 0 \tag{12}$$

$$\varepsilon_{ri} \nabla_t^2 \phi_i^{(e)} + k_i^2 \varepsilon_{ri} \phi_i^{(e)} = 0 \tag{13}$$

更に、波数 k_i^2 に関するパラメータを導入する。

$$T_i = k_1^2 / k_i^2 = (1 - \varepsilon_{eff}) / (\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{eff}) \quad (14)$$

ただし.

$$\varepsilon_{eff} = (\beta c/\omega)^2 = 1/v_p^2 \quad (15)$$

ここで. ε_{eff} は実効誘電率, v_p は真空中の光速 c に対する位相速度比を示す。

したがって. (12), (13) 式は. 簡潔に次のように書ける。

$$T_i L_i \nabla_t^2 \phi_i + k_1^2 L_i \phi_i = 0 \quad (16)$$

ただし.

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ri}\varepsilon_{eff} \end{bmatrix} \quad ; \quad \phi_i = \begin{bmatrix} \phi_i^{(h)} \\ \phi_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

波数 k_1 に関する変分表現は. (16) 式の 2次形式をとるのが最も手短かである。今. 真値 ϕ_i に対してその許容関数を ψ_i とすれば,

$$I_i(\psi_i; k_1) = \langle \psi_i, T_i L_i \nabla_t^2 \psi_i \rangle + k_1^2 \langle \psi_i, L_i \psi_i \rangle \quad (18)$$

となる。なお, $\langle , \rangle$ は小領域 Γ_i に関する内積を示す。また, 真値 ϕ_i に対して $I_i(\phi_i; k_1) = 0$ である。

ここで グリーンの定理を用いることによって. 汎関数 (18) は次のようになる。

$$I_i(\psi_i; k_1) = \int_{\Gamma_i} \nabla_t \psi_i^T \cdot T_i L_i \nabla_t \psi_i \, d\Gamma_i - k_1^2 \times \int_{\Gamma_i} \psi_i^T L_i \psi_i \, d\Gamma_i - \oint_{C_i} \psi_i^T T_i L_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n_i} \, dl_i \quad (19)$$

境界 C_i に関する積分は C_i が外部境界であるか、あるいはストリップ導体上でありさえすれば、(6), (9), (10) 式に示したように零になる。しかし、C_i が内部境界であれば、その積分は零にはならない。(7), (8) 式は境界 C_i の接線方向 (Δ_i) の電磁界成分の連続性を示しているから、今、その関係を (4), (5) 式から導出する。

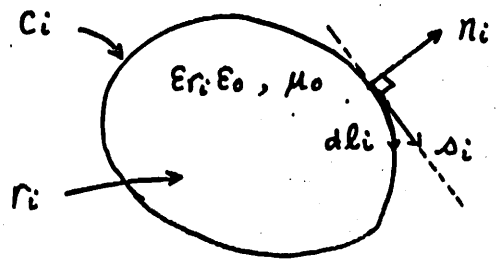


図.2 均質な小領域 Γ_i

$$L_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} = \varepsilon_{eff}\left(j\frac{k_i^2}{\beta} J \xi_i + J \frac{\partial \Phi_i}{\partial \Delta_i} \right) \tag{20}$$

ただし、

$$\xi_i = \begin{bmatrix} H_{\Delta i} \\ (\omega \varepsilon_0/\beta) E_{\Delta i} \end{bmatrix} \quad ; \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

ここで $E_{\Delta i}$, $H_{\Delta i}$ は電界および磁界の Δ_i 方向成分を示している。

(20) 式の連続性の関係は、許容関数 Ψ_i に関して成立すべきものであるから、汎関数 (19) の右辺第3項に、はめ込むことによって、次のようになる。

$$I_i(\Psi_i ; k_1) = \int_{\Gamma_i} \nabla_t \Psi_i^T \cdot T_i L_i \nabla_t \Psi_i \, d\Gamma_i - k_1^2 \times \int_{\Gamma_i} \Psi_i^T L_i \Psi_i \, d\Gamma_i - \oint_{C_i} \Psi_i^T T_i \varepsilon_{eff} J \frac{\partial \Psi_i}{\partial \Delta_i} \, dl_i$$

$$-j \oint_{C_i} \psi_i^T T_i \varepsilon_{eff} \frac{k_i^2}{\beta} J \xi_i \, dl_i \qquad (22)$$

右辺4項の積分は、有限個の小領域(Γ_i)に対して、C_iが内部境界であれば、往路と復路を構成するので零となる。第3項の積分を、ストークスの定理を用いて、書き直すと、最終的に、次の汎関数を得ることができる。

$$I_i(\psi_i; k_i) = \int_{\Gamma_i} \nabla_t \psi_i^T \cdot T_i L_i \nabla_t \psi_i \, d\Gamma_i - k_i^2 \times \int_{\Gamma_i} \psi_i^T L_i \psi_i \, d\Gamma_i - \int_{\Gamma_i} T_i \varepsilon_{eff} \nabla_t \psi_i^T J \times \nabla_t \psi_i \cdot \omega_z \, d\Gamma_i \qquad (23)$$

さて、この汎関数$I_i(\psi_i; k_i)$の停留点は、真値ϕ_iになっているか、どうかを調べるために、まず、その第1変分を取ってみよう。

$$\delta I_i = -2 L_i \int_{\Gamma_i} (T_i \nabla_t^2 \psi_i + k_i^2 \psi_i) \delta\psi_i \, d\Gamma_i + 2 T_i \oint_{C_i} \left(L_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n_i} - \varepsilon_{eff} J \frac{\partial \psi_i}{\partial s_i} \right) \delta\psi_i \, dl_i \qquad (24)$$

したがって、$\delta I_i \to 0$ に対して、上式右辺第1項は(16)式に漸近し、$\psi_i \to \phi_i$となる。また、そのとき、第2項は、

$$2j \oint_{C_i} T_i \varepsilon_{eff} (k_i^2/\beta) J \xi_i \, \delta\psi_i \, dl_i = 0 \qquad (25)$$

でなければならないが、少なくとも境界C_iが内部境界でありさえすれば、それは満足される。また、その停留点の極小性は、ルジャンドルの判定条件 $\delta^2 I_i \geq 0$ によって与えられるが、この場合それはT_iの符号に依存して

いる。汎関数(23)を有限個(N)の均質な誘電体の小領域から成る一様な線路に適用すれば、その汎関数 $I(\psi_i ; i=1,2,\cdots,N)$ は次のように表わされる。

$$I(\psi_i) = \sum_{i=1}^{N} I_i(\psi_i ; k_i) \qquad (26)$$

したがって、図.1に示した平面型ストリップ線路($N=3$)ばかりでなく、従来報告されてきた様々の線路構成に対して(26)式は適用可能である。

4. 有限要素法

線路内の電磁界分布および、その伝搬可能なモードの分散特性を知るために、前節で導出した汎関数を元に、有限要素法を用いる。

均質な誘電体から成る小領域(Γ_i)を有限個の三角形要素(一般には多角形)に分割し、その要素内の電磁界ポテンシャルを適当な区分的に連続な多項式を用いて展開する。たとえば、

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{3} \psi_i^{(j)} \alpha_j(x,y) \qquad (27)$$

ここで $\psi_i^{(j)}$ は三角形要素の節点 j 上における ψ_i の近似値を示し、$\alpha_j(x,y)$ はこの場合1次の区分的に連続な基底関数である。(27)式を汎関数(23)式に適用することによって、次のような線形行列方程式が各要素に関

して得られる。

$$I_i^{(j)}(\psi_i^{(j)}) = \{\psi_i^{(j)}\}^T (Se) \{\psi_i^{(j)}\} - a k_i^2 \{\psi_i^{(j)}\}^T (Me) \{\psi_i^{(j)}\}$$

ただし、(Se), (Me) はそれぞれ剛性行列, 質量行列[28]を表わしている。また、a は要素の寸法に依存する定数である。(28)式を小領域 Γ_i ($i=1,2,\cdots,N$) および、そのおのおのの要素について集めることによって、全体の汎関数(26)式に対する近似を得ることができる。その際、各節点上の $\psi_i^{(j)}$ に関して極値化することによって、最終的な固有値問題に帰着する。

$$(S) \{\psi_i^{(j)}\} = a k_i^2 (M) \{\psi_i^{(j)}\} \qquad (29)$$

ただし、(S), (M) はそれぞれ全体の剛性行列, 質量行列を示す。なお、(S), (M) はともに対称行列であり、特に速波領域 (fast waves $\varepsilon_{eff} < 1$) において、(S) は正定値行列となる。

ところで、例えば図.3に示すような一様な三角形要素を用いた場合の要素剛性行列 (Se), 要素質量行列 (Me) は次のようになる。

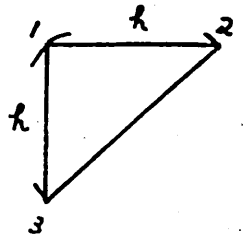


図.3 三角形要素 $j=1,2,3$

$$(Se) = \begin{bmatrix} 2T_i & 0 & -T_i & 0 & -T_i & W_i \\ & 2P_i & 0 & -P_i & -W_i & -P_i \\ & & T_i & 0 & 0 & -W_i \\ & \text{symmetry.} & & P_i & 0 & 0 \\ & & & & T_i & 0 \\ & & & & & P_i \end{bmatrix} \qquad (30)$$

$$(Me) = diag(1,\ P_i',\ 1,\ P_i',\ 1,\ P_i') \tag{31}$$

$$\{\psi_i^{(e)}\}^T = (\phi_{i1}^{(h)},\ \phi_{i1}^{(e)},\ \phi_{i2}^{(h)},\ \phi_{i2}^{(e)},\ \phi_{i3}^{(h)},\ \phi_{i3}^{(e)}) \tag{32}$$

ただし、

$$P_i = \varepsilon_{ri} W_i \ ;\quad W_i = \varepsilon_{eff} T_i \ ;\quad P_i' = \varepsilon_{ri}\varepsilon_{eff} \tag{33}$$

なお、$\phi_{ij}^{(h)}$, $\phi_{ij}^{(e)}$ $(j=1, 2, 3)$ は 節点 j 上における $\phi_i^{(h)}$, $\phi_i^{(e)}$ の近似である。 また、ここでは (31) 式に示したように、単に集中荷重を取った。 この場合 定数 $\alpha = h^2/3$ である。

5. 共平面型ストリップ線路の分散特性

図.4 に示すような共平面型ストリップ線路の分散特性を解析するために、前節までの議論を適用した。

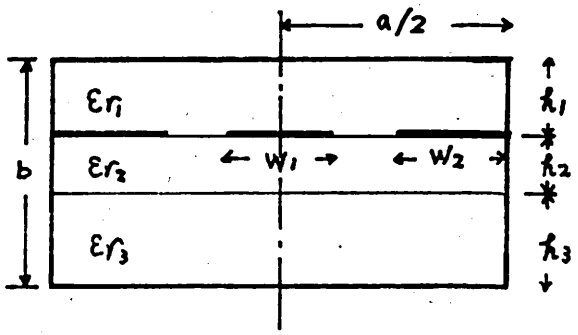


図.4 対称な共平面型ストリップ線路

有限要素解析に際し用いられた要素形状は図.3の一様な三角形要素、質量行列、剛性行列 (Me), (Se) はそれぞれ (31), (30) 式に示したものである。

なお、数値計算は、立命館大学理工学研究所の PANAFACOM U-300 を用いて行われた。

図.5 に共平面型ストリップ線路の分散特性を示す。その分散曲線は、適当に補間された結果である。 というのは

次節で述べられるスプリアスな解が現われるために、このような操作が行われた。 共平面型の分散曲線の特徴は、他の単ストリップ・2層のマイクロストリップと比べて、基本モード（擬似TEMモード）の分散性が弱く、高次モード（導波管モード）の遮断周波数が相当程度、線路の横寸法に依存しており、LSMモードと相似性をもっていることである。また、高次モードは、それらの間で結合を生じその分散曲線は、複雑に変化する。その様子は、たとえば、第2および第3誘電体層の比誘電率を変えることによって、（$\varepsilon_{r_2}=9.6$, $\varepsilon_{r_3}=2.5$），図.6に示すように更に変化する。また、そのとき、遮断周波数の若干の変化も確認される。

6. スプリアス解

共平面型ストリップ線路の分散特性の解析の結果、スプリアスな解が発生し、それが非物理的なスプリアス・モードを与えることが見い出された。一例として、すでに図.6で述べた基本モードの分散曲線について、そのスプリアスな解を、図.7に示す。その解は、スプリアス・モードと伝搬可能な実際のモードとの結合となっている。 なお、この場合、全体を通じて、（$0<\varepsilon_{eff}<9.6$）およそ、10本のスプリアス・モードに対応する分散曲線が確認された。それらは、全て、基本モードよりも一層、非分散的で、遮断周波数をもたない。

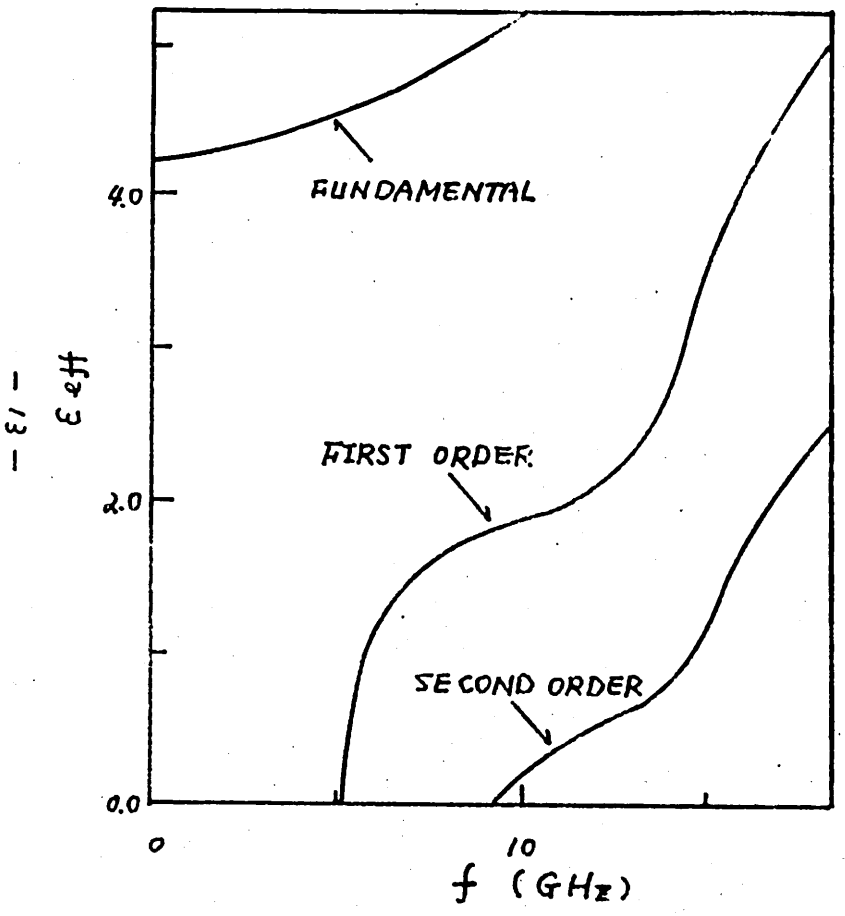


図. 6 分散特性

a=18mm, b=7.5 mm, $W_1 = W_2 = 6$ mm, $\varepsilon_{r_2} = 9.6$
$h_1 = h_3 = 3$ mm, $h_2 = 1.5$ mm, $\varepsilon_{r_1} = 1.0$, $\varepsilon_{r_3} = 2.5$

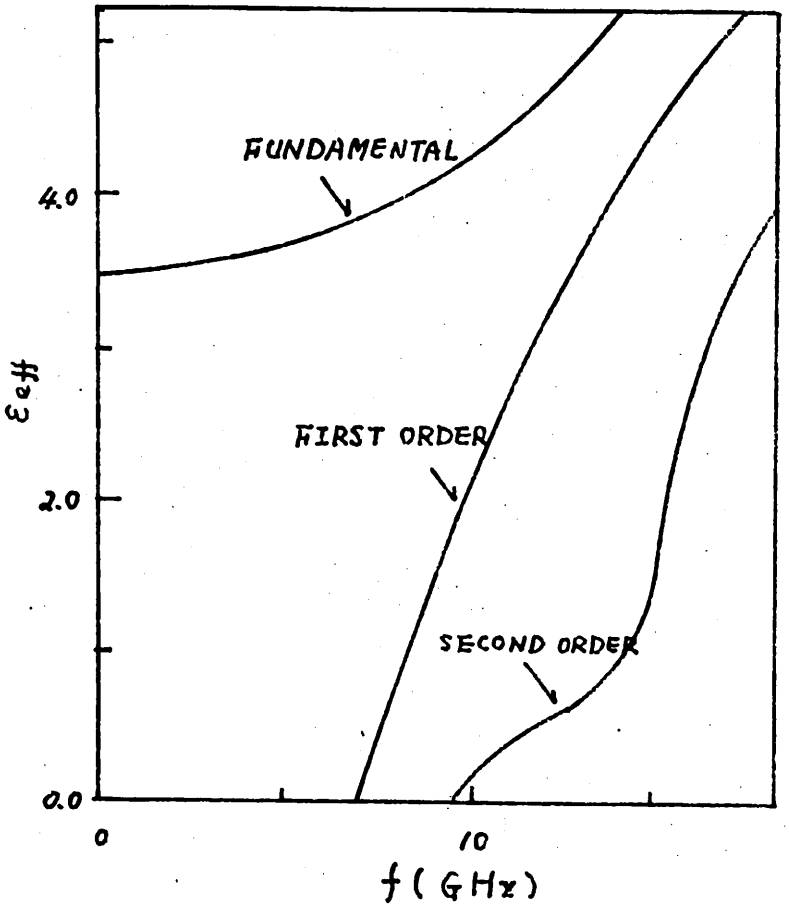


図. 5 分散特性

a = 18 mm, b = 7.5 mm, $W_1 = W_2 = 6$ mm, $\varepsilon_{r_2} = 9.6$
$h_1 = h_3 = 3$ mm, $h_2 = 1.5$ mm, $\varepsilon_{r_1} = \varepsilon_{r_3} = 1.0$

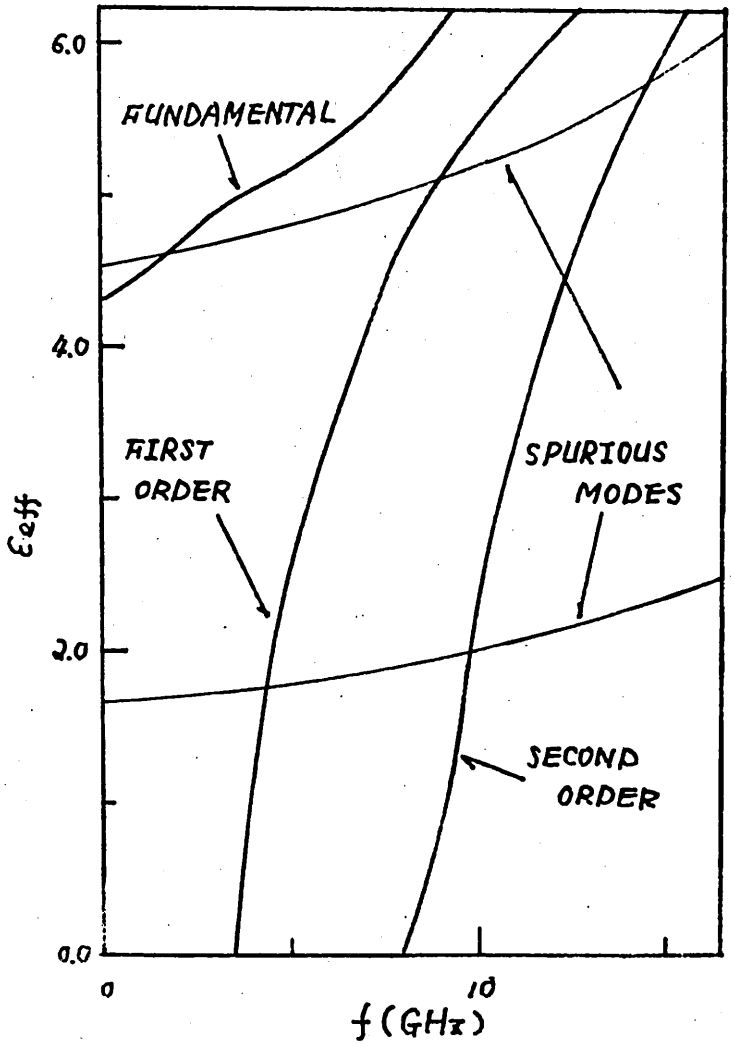


図.8 分散特性 (コープレーナ・ガイド)

a = 18 mm , b = 7.5 mm, $W_1 = W_2 = 6$ mm, $h_1 = 3$ mm, $\varepsilon_{r_1} = 1.0$, $\varepsilon_{r_2} = 9.6$

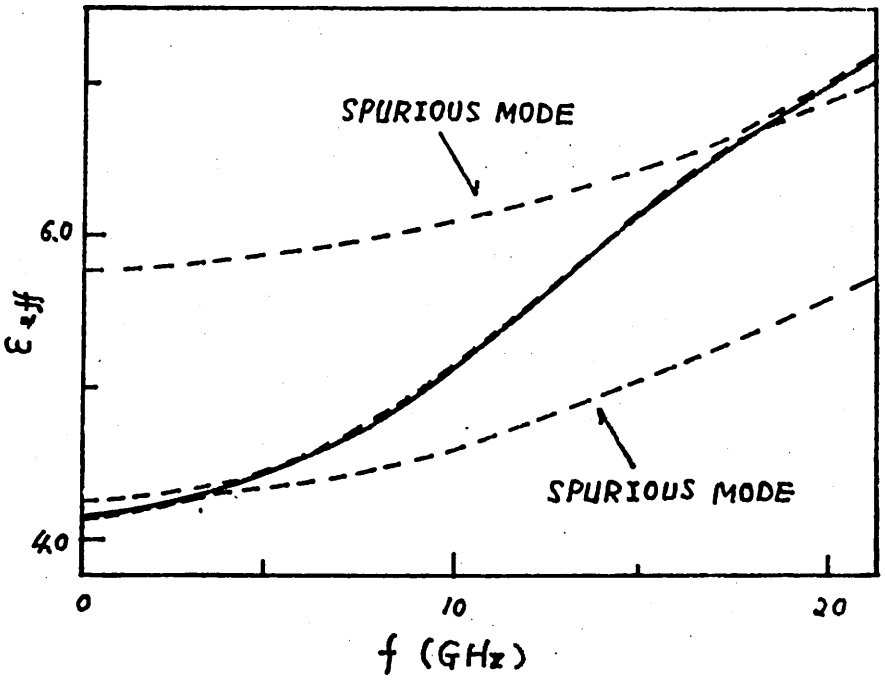


図.7 スプリアス・モード と 基本モード

a = 18 mm , b = 7.5 mm, $W_1 = W_2 = 6$ mm, $\varepsilon_{r_2} = 9.6$
$h_1 = h_3 = 3$ mm, $h_2 = 1.5$ mm, $\varepsilon_{r_1} = 1.0$, $\varepsilon_{r_3} = 2.5$

また、図.8に2層の誘電体から成る線路（$\varepsilon_{r2}=\varepsilon_{r3}=9.6$）の分散特性の解析結果を、スプリアス・モードと共に示す。3層の誘電体から成る共平面型ストリップ線路と比べ、そのスプリアス・モードの数は極端に減少した。したがって、このような解は基本的には、異なる誘電体の存在のためであり、その数は、内部境界上に取られた節点の数に依存していると考えられる。

7. 終りに

本報告の前半では、異なる誘電体媒質を有する一様な不均質線路に関する変分表現の導出を、各均質な小領域に分割して進め、その小領域の境界上で満たすべき境界条件・連続条件を3つに分類し、変分解がこれらの条件に適合していることが示された。このような変分表現をもとに、有限要素法を用いて、共平面型ストリップ線路の分散特性の解析を行なった。その際、非分散的な・遮断周波数をもたないスプリアス・モードが現われた。このような解の発生のメカニズムを調べる試みとして、(i) 誘電体基板の比誘電率を変えることと、(ii) ストリップ導体，接地導体を取り除いた導波管を考えた（本報告には含まれていない）。その結果、内部導体の存在に関係なく、スプリアスな解は現われ、それらは、内部境界上における電磁界各成分の

連続性が大きな影響を与えていることが認められた。

末筆ながら，本研究を進めるに当り，御指導頂いた鳥取大学工学部電子教室の小林洋志助教授に感謝します。

文献

[1] E. Yamashita and K. Atsuki , IEEE Trans. MTT, vol. 24, , no. 4 , 1976

[2] T. Hatsuda , IEEE Trans. MTT , vol. 23, no.10 , 1975

[3] G. Strang and G. J. Fix , "An Analysis of the Finite Element Method ", Prentice-Hall Inc. , 1973

[4] D. G. Corr and J. B. Davies , IEEE Trans. MTT , vol. 20, no.10 1972

[5] 池田他，信学会．マイクロ波研資，MW-76-26，1976

輻射科学研究会資料

研摩後の $LiTaO_3$ 結晶の屈折率分布

北山忠善
（三菱電機株式会社）

橋本正弘
（大阪電気通信大学
工学部）

中原昭次郎
（三菱電機株式会社）

昭和51年9月24日
（於 中央電気クラブ）

大ら注注るい調意れ設な　き研さの。　率存誘合。非告定
がかてりよ用変注さを要　大、小器るき。折依を場たは報測
数等しよにを光な右器重　るはは調あとる屈く化た。にがが
係とと塊術晶はう左調い　き化で変でるな強変しか面とと々
学こ料晶技結々よく変な　お変部光果すとしに率摩さ表こ我
光る材結なた我のき光ら　にの央は効作要定さ折研小のるで
気あの、緻れらそ大はな　後こ中化い製必測荒屈では晶すこ
電で器は巧さがもとば。　工。晶変なをが、のな粒化結在こ
、定調器に形な能えこねう加た結率くう先は粒さ砥変た存
は安変調ら成し性さのれろ摩しく折し素、研で砥大い率しがし、
晶に光変さりか的にこさな研測き屈ま調な験たは細折摩摩が
結的る光れ、よし学程。癒と、観大の望変的実いで、屈研クし

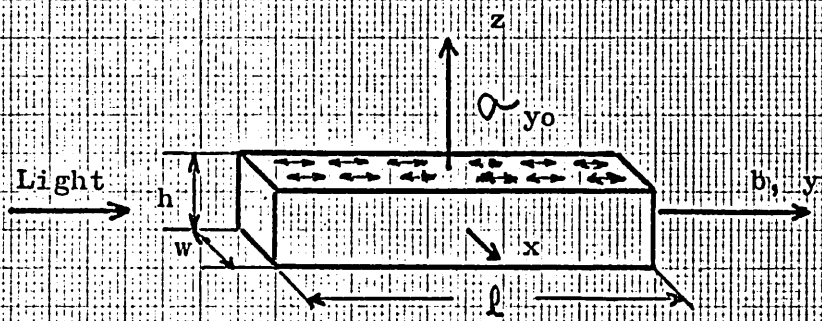
1. まえがき

学け。さに。光工た考タにを程こる光量た用粒後、た粒ッ。
化おる出工る、工っに一除化いにす、定っに砥のれ砥ラ(1)。
$LiTaO_3$と、系て切摩さ気形を場ラは率に般為。象が研荒。導にいい
在こ信れく研成電成とるパ々折面ーをが現々は。誘般薄て
現い通さ深粒構のいこす計我屈表。能たの我化た。しは一にれ
き光目意砥て器深る計設　な摩い性しこ　変し導に　常さ

した屈折率変化は、更に深い層にまで及ん屈
でいた。ここでは、そのような深い層の屈
折率変化を定量的に調べる。
　研磨表面層にあるクラックには、砥粒や
微細結晶片が弾性的に保持されて残留し、
クラック先端に応力が集中していることが
報告されている(2)。表面層の残留応力は試
料の内へ深く応力を分布する(3)。屈折率変
化は、分布した応力が光弾性効果により誘
導すると思われる。これに基づき計算した
屈折率分布は実験値にほぼ一致した。

2　屈折率変化の測定

　屈折率変化の測定実験は、ポーリングさ
れた $LiTaO_3$ 単結晶を用いて行った。$LiTaO_3$
結晶塊は、切り出し・研磨加工により5種
類の角柱に仕上げた。角柱の大きさは、1mm
×1mm×9mmである。光の通過方向は結晶
学上のb軸である（図1）。5種類の研磨
工程を図1に示す。NO.1，NO.2，
NO.3のロッドは、粒度#600のカー
ボランダム砥粒で荒仕上げした後、それぞ
れ粒度#800，#1200，#2000のカ
ーボランダム砥粒で仕上げた。NO.4，NO.5
のロッドは、粒度#600および#1000
のカーボランダム砥粒による荒仕上げの後
酸化セリウム砥粒により研磨して仕上げた。
NO.5はNO.4よりも上仕上げされている。



(h= 1 mm , w = 1 mm , ℓ = 9 mm)

Samples	Abrasives
NO.1	800 mesh
NO.2	1200 mesh
NO.3	2000 mesh
NO.4	CeO_2
NO.5	CeO_2

600 mesh carborundum

1000 mesh

0 10 50 100 250

仕上り面からの距離 (μm)

(NO.5 は NO.4 より上仕上げ研摩した。)

図 1 試料および研摩工程

SANPEI NO. 300 A

測定方法は、光学損傷における屈折率変化の測定方法(4)と同じ方法を用いた。測定光としては、直径 100 (μm) に集光した He−Ne レーザ (波長 6328 (Å)) を用いた。測定した屈折率分布を図 2 に示す。屈折率変化は、研磨砥粒の荒さに大きく依存している。NO.1 と NO.2 のロッドにおける屈折率変化の測定結果より、NO.4 および NO.5 のロッドにおいても荒仕上げの後では大きな屈折率変化があったと思われる。その屈折率変化は、表層を細い砥粒で研磨除去することにより著しく減少した。

3. 考察

研磨表面に残留する応力 σ_{y0} (図 1) は、ロッド内に応力を分布させる。この応力分布は、光弾性効果により屈折率分布を誘導する。ここで NO.1 のロッドに対し $\sigma_{y0} = 8.5 \times 10^9$ (N/m^2) を仮定し、$LiTaO_3$ 結晶の光弾性定数 π_{ij} (5) とともに次式に代入すると、図 2 に破線で示した X 方向屈折率分布を得る。計算値は実験とほぼ一致した。

$$\Delta(n_e - n_o) = \frac{1}{l}\int_{-0.5l}^{0.5l} \Delta(n_e - n_o)_{yz}\, dy \qquad (1)$$

MITSUBISHI ELECTRIC CORPORATION

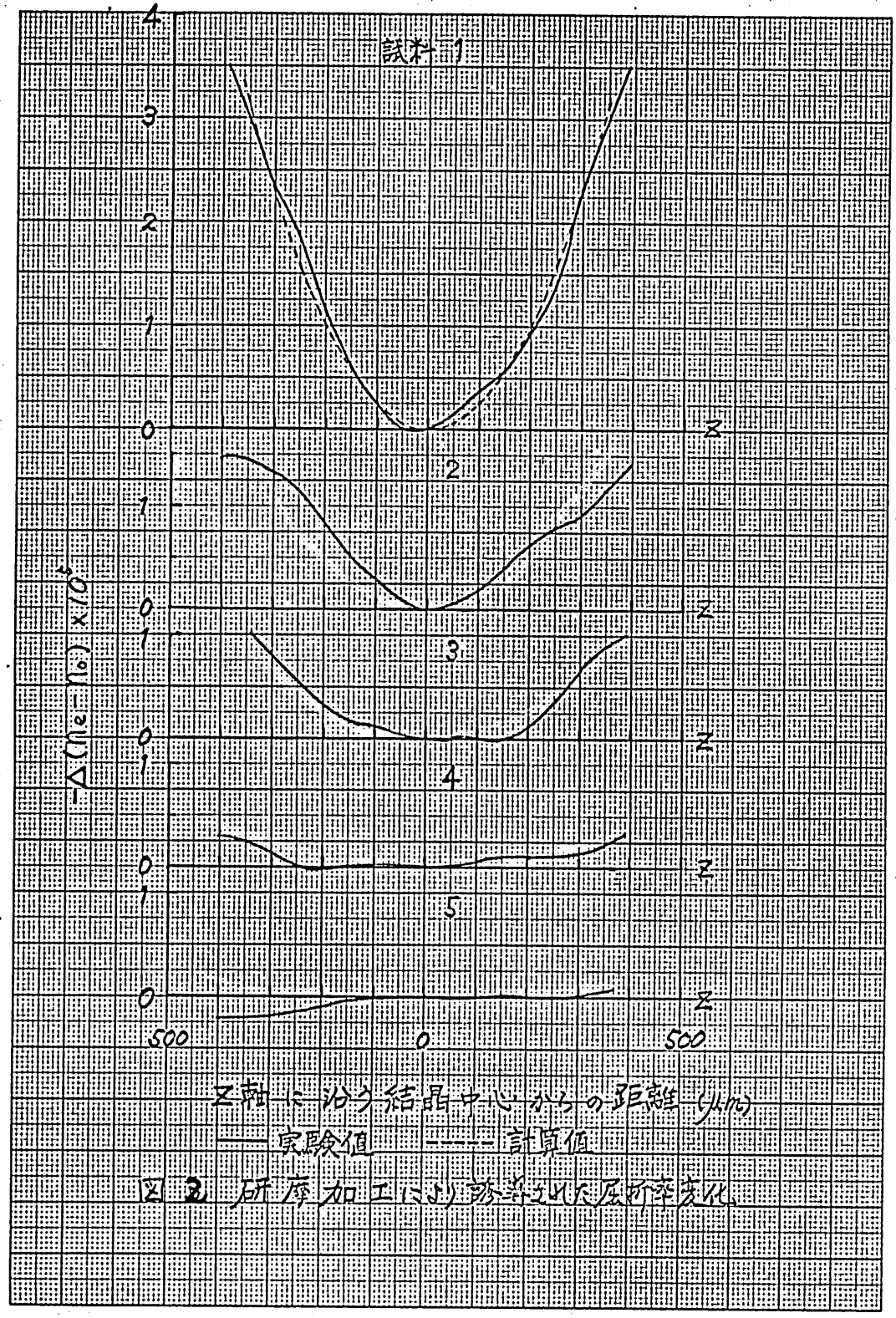


図 3 研摩加工により誘導された屈折率変化

CURVE NO. (/)

SIGN
DATE

$$\approx \Delta n_{so} + \Delta n_s z^2 \qquad (2)$$

ただし

$$\Delta n_{so} = \frac{h}{l}(n_e^3\pi_{31} - n_o^3\pi_{12})\cdot(4.4 - \frac{h}{l})\sigma_{yo} \qquad (3)$$

$$\Delta n_s = -\frac{1.93}{l\,h}(n_e^3\pi_{31} - n_o^3\pi_{12})\sigma_{yo} \qquad (4)$$

n_e, n_o はそれぞれ $LiTaO_3$ 結晶の異常および常屈折率である。h はロッドの断面寸法，l はロッドの長さである。xyz 座標系の配置を図1に示す。

式(1)における被積分値 $\Delta(n_e - n_o)_{yz}$ は、屈折率変化の空間分布である。分布は一次光弾性効果から応力分布を用いて次式のように表わされる。

$$\Delta(n_e - n_o)_{yz} = -\frac{1}{2}\{(n_e^3\pi_{33} - n_o^3\pi_{13})\sigma_z + (n_e^3\pi_{31} - n_o^3\pi_{12})\sigma_y - 2n_o^3\pi_{14}\tau_{yz}\} \qquad (5)$$

応力要素 σ_z, σ_y, τ_{yz} は境界条件および歪の適合条件を満足する応力の均り合

い方程式の解である。B.J.Aleckは熱膨張率の異なる基板に一面が固定された角柱内の熱応力分布の近似解を得ている[6]。式(5)の応力要素は、この解法を2つの研摩面（至面）に適用して求めた。

$LiTaO_3$結晶について残留応力σ_{y0}の値は知られていない。$LiTaO_3$結晶は、弾性定数や表面エネルギー（クラック等を押し広げて表面積を増すのに必要なエネルギー）[7]の値からみてSiと材料的に大きな違いはない。Siにおいては、粒度#600のカーボランダム砥粒で研摩したとき、10^9 (N/m^2)の残留応力が測定されている[8]ことから、$LiTaO_3$結晶においてσ_{y0}を10^9 (N/m^2)のオーダに見積ってもよいと思われる。

4. むすび

$LiTaO_3$結晶を光変調器用ロッドに成形加工した際に、結晶内に屈折率分布が生じることを見いだした。この屈折率変化は、成形研摩における砥粒が荒い程大きい。考察の結果、この屈折率変化は研摩により研摩面表層に生じる残留応力が原因で生じることが分かった。研摩面に応力が残留する機構については今後更に詳細な検討が必要である。また、光変調器を設計する観点から、残留応力を除去する方法として、エッチング法等を検討する必要がある。

最後に、有益な御討論を頂きました大阪電気通信大学　岡本教授、小川教授および当社中央研究所無機グループの方々に深謝いたします。

参考文献

(1) E.N. Pugh, L.E. Samuel, "Damaged Layers in Abraded Silicon Surfaces", J. Electrochem. Soc, vol. 111, No. 12, P. 1429, 1964

(2) 池田等, "非金属結晶材料のラッピング機構に関する研究", 電総研報 #709号 1970 (昭45)

(3) B.G. Cohen ("X-ray Measurement of Elastic Strain and Annealing in Semiconductors", Solid-St. Electron., vol. 13, P. 105, 1970) はSiの表面残留応力によって内部に応力分布が生じることを実証した。

(4) F.S. Chen, "Optically Induced change of Refractive Indicies in $LiNbO_3$ and $LiTaO_3$", J. Appl. Phys, vol. 40, No. 8, P. 3389, 1969

(5) R.W. Dixon, "Photoelastic properties of selected materials and their relevance for applications to acoustic light modulators and scanners", J. Appl. Phys, vol. 38, P. 5149, 1967

(6) B.J. Aleck, "Thermal Stresses in a Rectangular Plate Clamped Along an Edge", J. Appl. Mech, vol. 71, P. 118, 1949

(7) J. J. Gilman, "Direct Measurement of the Surface Energies of Crystals", J. Appl. Phys., Vol. 31 No. 12, P. 2208, 1960

(8) W. C. Dash, "Distorted Layers in Silicon Produced by Grinding and Polishing", J. Appl. Phys., Vol. 29, P. 228, 1958

輻射科学研究会資料

誘電率に摂動がある半無限不均質媒質による電磁ビーム波の反射について

神野 啓二郎
小嶋 敏孝
板倉 清保
(大阪大学・工学部)

1976年12月3日

1、まえがき

ある定まった誘電率分布に微小の摂動が付加された媒質に入射する電磁波の反射，透過および伝搬に関する議論が，摂動を位置の確率変数とした場合とそうでない場合について種々行なわれてきた。前者の場合の代表的な考察はTatarski[1]，Chernov[2]らによって行なわれている。彼らは入射波として平面波，球面波を考えている。その後，木下ら[3]はその拡張として入射波がビーム波の場合について考察を行なった。一方，後者の場合の摂動に関する議論にはつぎのようなものがある。すなわち，Pitteway[4]は，xおよびz座標に依存した3次元的な摂動による効果を反射電界の小さな変動分とみなす立場で解析を行ない，平面波入射に対する反射電界の摂動項を解析的に求めている。また，Hill[5]らは不均質媒質中のある点に存在するimpulse状の摂動が過渡応答の時間波形にどのような影響をもたらすかを調べる目的でPitteway の方法を応用している。

これらの問題は電離層伝搬に関連して解析されてきたのであるが，平面波入射よりもビーム波入射を考える方がより現実的であり，更に不均質誘電体で構成される種々の回路素子と光ビームの相互作用に関する基礎的問題の一つとしてもビーム波が入射する場合の解析を行なっておく必要があるものと思われる。

そこで，本稿では誘電率が直線的に変化し，1座標変数のみに依存する摂動を持つ不均質媒質によるビーム波の反射問題を扱う。なお，ここで考えている誘電率分布は確定的であり（摂動が位置の確率変数でない），その形状はインパルス状の場合と一様に分布したがウス形の場合である。

2、基礎理論

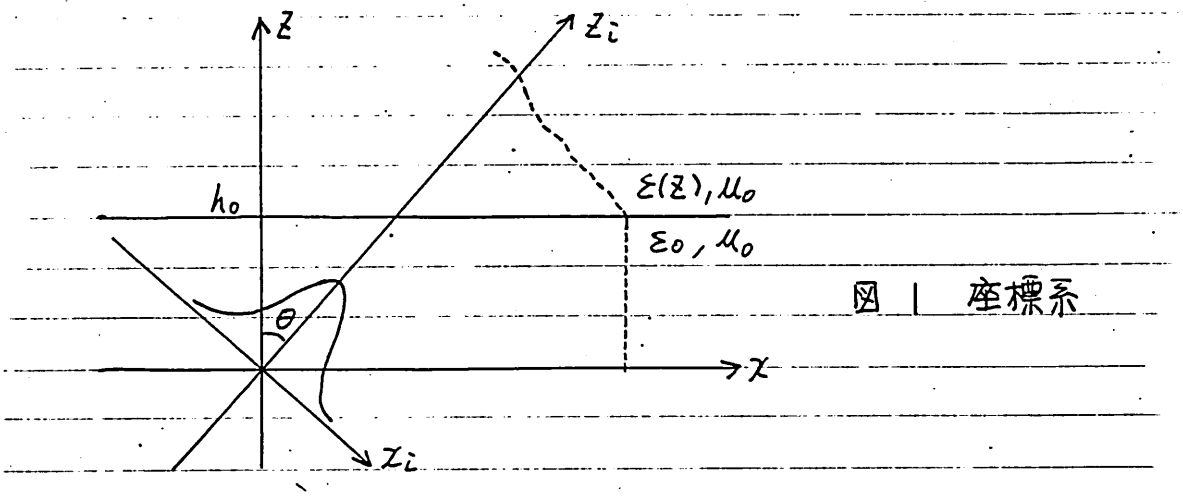


図1 座標系

図1に座標系を示す。ここでは解析を簡単にするため2次元問題を考える。$z=h_0$を媒質と真空の境界面とし、真空の誘電率および透磁率はε_0, μ_0で与えられ、媒質の誘電率, 透磁率はそれぞれ$\varepsilon(z)$(zのみの関数), μ_0とする。また, (x_i, y, z_i)座標は(x, y, z)座標をy軸に関してθ回転させたものである。

今, $\varepsilon(z)$を次式のように2つの項に分けて書く。

$$\varepsilon(z)=\varepsilon_0\{\varepsilon_1(z)-\varepsilon_2(z)\}, \quad \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 \qquad (1)$$

ただし, ε_1はある定まった誘電率分布であり, ε_2は$\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$なる誘電率に関する微小な摂動を表わしている。

式(1)でその誘電率が与えられる不均質媒質中の界はMaxwellの方程式と構成関係式から決定される。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}=\mu_0 \mathbf{H} \qquad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D}, \quad \mathbf{D}=\varepsilon(z)\mathbf{E} \qquad (3)$$

ただし, 界の時間変化を$e^{j\omega t}$としている。

Pitewayは摂動項ε_2がx, yおよびzの関数である場合について解析を行ない, Maxwellの式から出発し2次以上の微小量を無視することによって, 誘電率の摂動によって現われる反射

電界の変動分を与える一般式を導出した。

今の場合は摂動がzのみに依存するから入射角がψなる平面波に対する反射電界の変動分は式(4)で与えられる。

$$[e_1(z)\cdot E^i(z)]_{z=0} = \frac{jk}{2\cos\psi}\int_0^{z_1} \varepsilon_2(z)\, E^t(z)\cdot E^t(z)\, dz \qquad (4)$$

ただし、$e_1(z)$, $E^i(z)$ および $E^t(z)$ はそれぞれ摂動による反射電界の変動分、入射波、透過波のzに依存する項であり、z_1は摂動が存在するzの上限の値である。

本稿では1例として、$\varepsilon_1(z)$がzの一次関数で表わされた誘電率分布を用いることにする。

$$\varepsilon_1(z) = 1 - b(z-h_0) \quad , z > h_0 \qquad (5)$$

図1に示されているように波源としてz=0にy方向成分のみを持つ電界 $E_y^i(x_1, 0) = e^{-\alpha^2 x_1^2}$ が存在しているとする。したがってスペクトル関数$A(\alpha)$は次式のようになる。

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x_1^2 + j\alpha x_1}\, dx_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{4\alpha^2}} \qquad (6)$$

(x_1, y_1, z_1)座標における電界E_y^iは

$$E_y^i(x_1, z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha)\, e^{-j\alpha x_1 - j\beta z_1}\, d\alpha \qquad (7)$$

ただし、$\beta = \sqrt{k^2-\alpha^2}$, αはx_1軸方向の波数

で与えられる。

式(7)の入射波を(x, y, z)座標における表示に変換すると

$$E_y^i(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{4\alpha^2}} e^{-jxp - jz\sqrt{k^2-p^2}}\, d\alpha \qquad (8)^{(6)}$$

ただし、$p = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$, $\xi_z = \sqrt{k^2-p^2} = \beta\cos\theta - \alpha\sin\theta$ (9)

となる。

また、透過ビーム波は次式で与えられる。

$$E_y^t(x, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha)\, A_c(\gamma)\, e^{-jpx}\, d\alpha \qquad (10)^{(6)}$$

$$C(\alpha)=\frac{2\exp[-\mathrm{j}h_0(k^2-p^2)^{\frac{1}{2}}]}{A_i(f)|_{z=h_0}+\mathrm{j}(k^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}A_i'(f)|_{z=h_0}}A(\alpha) \quad (11)$$

ただし, $f=(k^2b)^{1/3}(z-h_0-1/b+p^2/bk^2)$ (12)

であり, A_iはAiry関数であり, A_i'はzに関する微分を表わす。

以上; 式(8), (10)等を式(4)に代入して反射波の微小摂動成分$\varepsilon_1(z)$を求めることができる。以下の節では誘電率の摂動を具体的に指定して$\varepsilon_1(z)$を計算することにする。

3. インパルス状の摂動がある場合

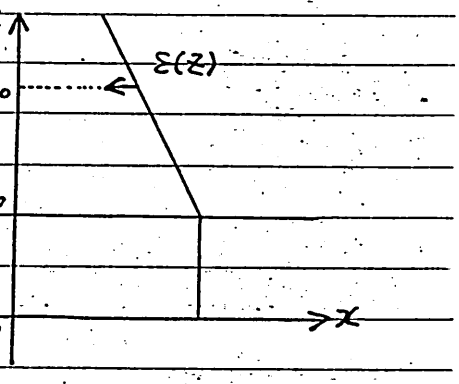
3.1 反射波の微小変動分の導出

本節は誘電率の摂動が

$$\varepsilon_z(z)=\gamma\delta(z-z_0) \quad (13)$$

$$\{\varepsilon(z)=\varepsilon_0\}1-b(z-h)-\gamma\delta(z-z_0)\}$$

と表わされる場合について, 摂動が反射面界に与える微小な変動分を計算する。但し, γは摂動の大きさを表わす定数であり, $\delta(z-z_0)$はDiracのデルタ関数である。したがって, 摂動は$z=z_0$平面にのみ存在することを仮定している。



式(8)のビーム波は種々の入射角を持つ平面波の和として表わされている。

したがって, まず入射角がψなる平面波からの寄与を求め, 次にビーム波を構成する素平面波にわたってその寄与の和をとることにより求めるべきビーム波に対する変動分が求められる。

まず, 式(4)から振巾1の入射角がψなる平面波による寄与は次式のようになる。

$$e_1(z,\alpha)\big|_{z=0} = \frac{jk}{2\cos\varphi}\int_0^{z_1} \gamma\delta(z-z_0)\times \left[\frac{2\exp[-jh_0(k^2-p^2)^{\frac{1}{2}}]A_i(\zeta)}{A_i(\zeta)|_{z=h_0} + j(k^2-p^2)^{-1/2}A_i'(\zeta)|_{z=h_0}}\right]^2 dz \quad (14)$$

よってビーム波に対しては，反射面界の小さな変動分 $e(x,z)$ は $z=0$ 平面上では

$$e(x,z)|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha)\, e_1(0,\alpha)\, e^{-jpx}\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{p^2}{4\alpha^2}} \frac{jk}{\cos\varphi}\gamma\, e^{-jpx}\, d\alpha$$

$$\times\left[\frac{2\exp[-jh_0(k^2-p^2)^{\frac{1}{2}}]A_i(\zeta)|_{z=z_0}}{A_i(\zeta)|_{z=h_0} + j(k^2-p^2)^{-1/2}A_i'(\zeta)|_{z=h_0}}\right]^2 \quad (15)$$

として求められる。

3.2 数値計算と検討

式(15)の被積分関数は複雑な関数であり，直接積分は困難である。そこで，本稿では式(15)を数値積分によって求めることとし，その積分公式にはSimpsonの公式を用いた。

また，A_i および A_i' をBessel関数で表わすと式(15)の被積分関数の $A_i/[A_i + j(k^2-p^2)^{-1/2}A_i']$ は

$$\frac{A_i(\zeta)|_{z=z_0}}{A_i(\zeta)|_{z=h_0} + j(k^2-p^2)^{-1/2}A_i'(\zeta)|_{z=h_0}} = \frac{\sqrt{w}\left[J_{1/3}(\tfrac{2}{3}\hat{w}^{\frac{3}{2}}) + J_{1/3}(\tfrac{2}{3}\hat{w}^{\frac{3}{2}})\right]}{\sqrt{v}\left[J_{1/3}(\tfrac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}) + J_{1/3}(\tfrac{2}{3}v^{\frac{3}{2}})\right] + \sqrt{v}\left[J_{2/3}(11) - J_{-2/3}(11)\right]} \quad (16)$$

但し，$\hat{w} = (-k^2b)^{1/3}\left[\frac{1}{b}\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right) - z_0 + h_0\right]$，$v = \frac{k^2-p^2}{(k^2b)^{2/3}}$ (17), (18)

となる。諸々のパラメータを入で規格化し無次元量として取り扱う。

式(15)は積分分面が $-\infty\sim\infty$ である異常積分であるので，実際の

計算においては有限区間の積分で近似することが必要である。そこで，ここでは積分区間を被積分関数が 10^{-10} のオーダとなる $d\lambda$ の値までの区間で近似した。

積分の収束条件としては

$$|C_{2^n} - C_{2^{n-1}}| / |C_{2^n}| \leq 10^{-4} \qquad (19)$$

を用いた。但し，C_{2^n} は分割数が 2^n に対する積分値である。

以下数値例を示すが，図の横座標は幾何光学的な伝搬軸が $z=0$ 平面と交わる点 $x_G = 2h_0 \tan\theta + \frac{z_0}{2}\sin 2\theta$ を中心として x を変化させたものであり，縦座標は式(15)の e の絶対値 $|e|$ を用いている。

図2～図4は入射角等を一定として，擾動がある位置 z_0 をパラメータとした場合の数値例である。

図2～図4においてそれぞれ $z_0/\lambda = 25.0, 20.0, 15.0$ は幾何光学的な全反射点に擾動がある場合に対応する。

これらの図から $|e|$ は x_G 点に関して対称になっておらず，さらに $|e|$ のピークは x_G 点からおよそ $(\frac{1}{4}\lambda)$ 程入射側に変位していることがわかる。

さらに，擾動が存在する位置 z_0/λ が小さいほど $|e|$ は大きい値を取ることが示されている。すなわち，擾動の存在する点が境界面に近いほど，反射率に大きな変化をもたらすことをこれらの図は示している。

$b\lambda$，θ 等の値を一定として，$a\lambda$ の値をパラメータとした数値例を図5～図7に示す。

図5(a)は $b\lambda = 0.03$, $h_0/\lambda = 10.0$, $\gamma = 0.001$, $\theta = 45°$, $z_0/\lambda = 26.66$ の例であり，$z_0/\lambda = 26.66$ の数値は幾何光学的な全反射点に擾動がある場合に相当する。

この図から，$|e|$ は x_G 点に関して対称になっておらず，$a\lambda$ の値が大きい程その非対称性が大きくなっていることがわかる。また，x_G 点の近傍において，$a\lambda = 0.07$ に相当する $|e|$ は $a\lambda = 0.05$,

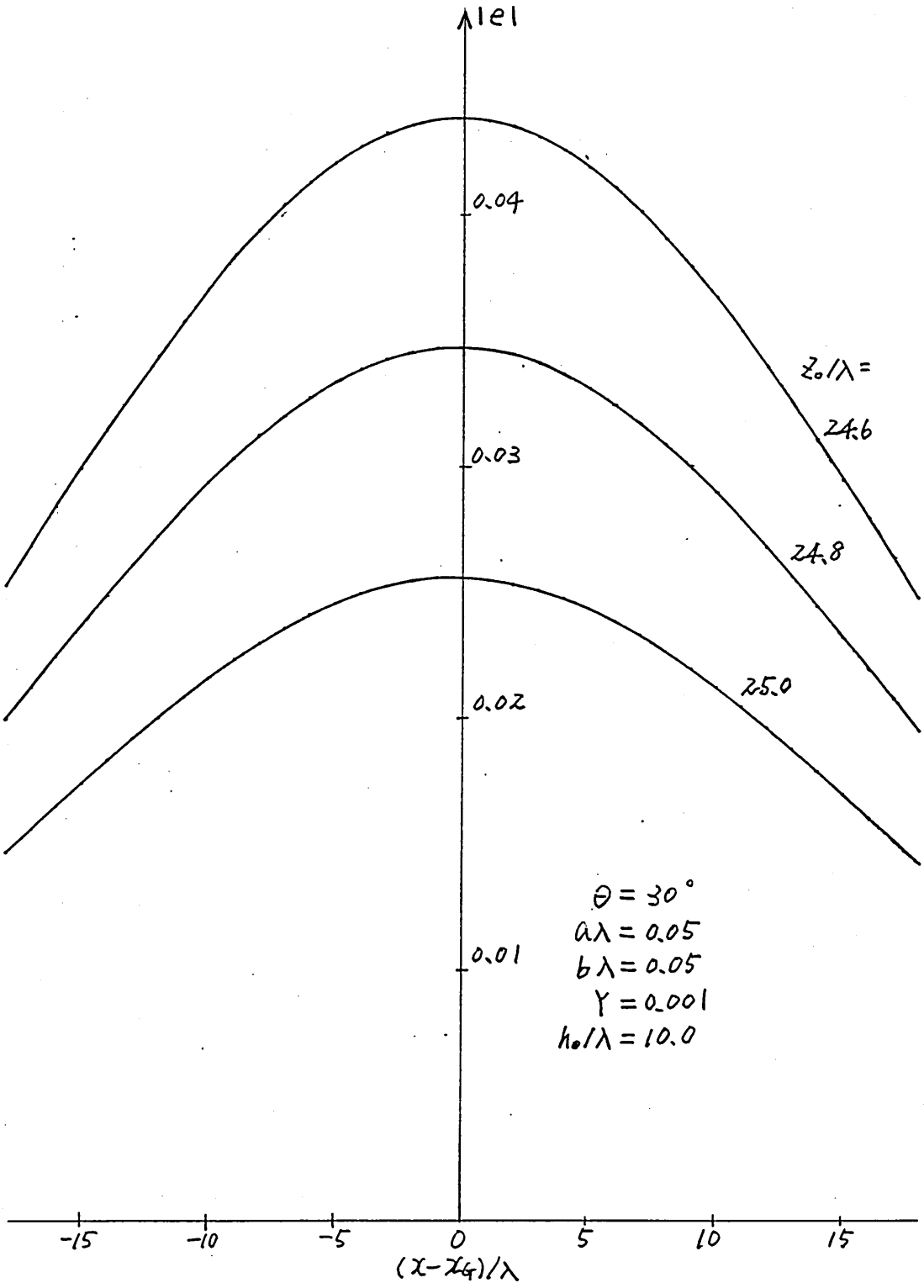


図 2　z_0/λ をパラメータとした場合(1)

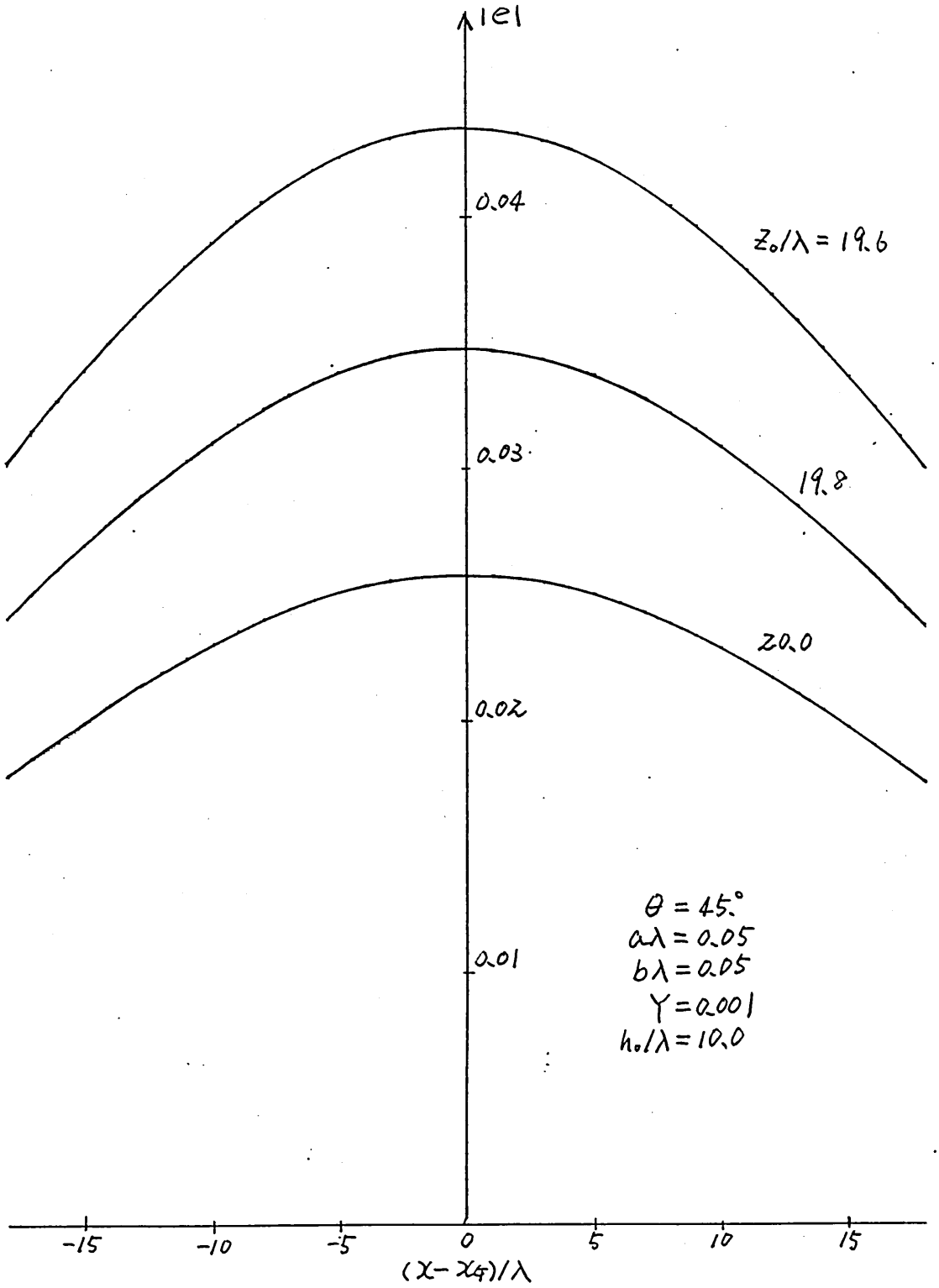


図 3 z_0/λ をパラメータとした場合(2)

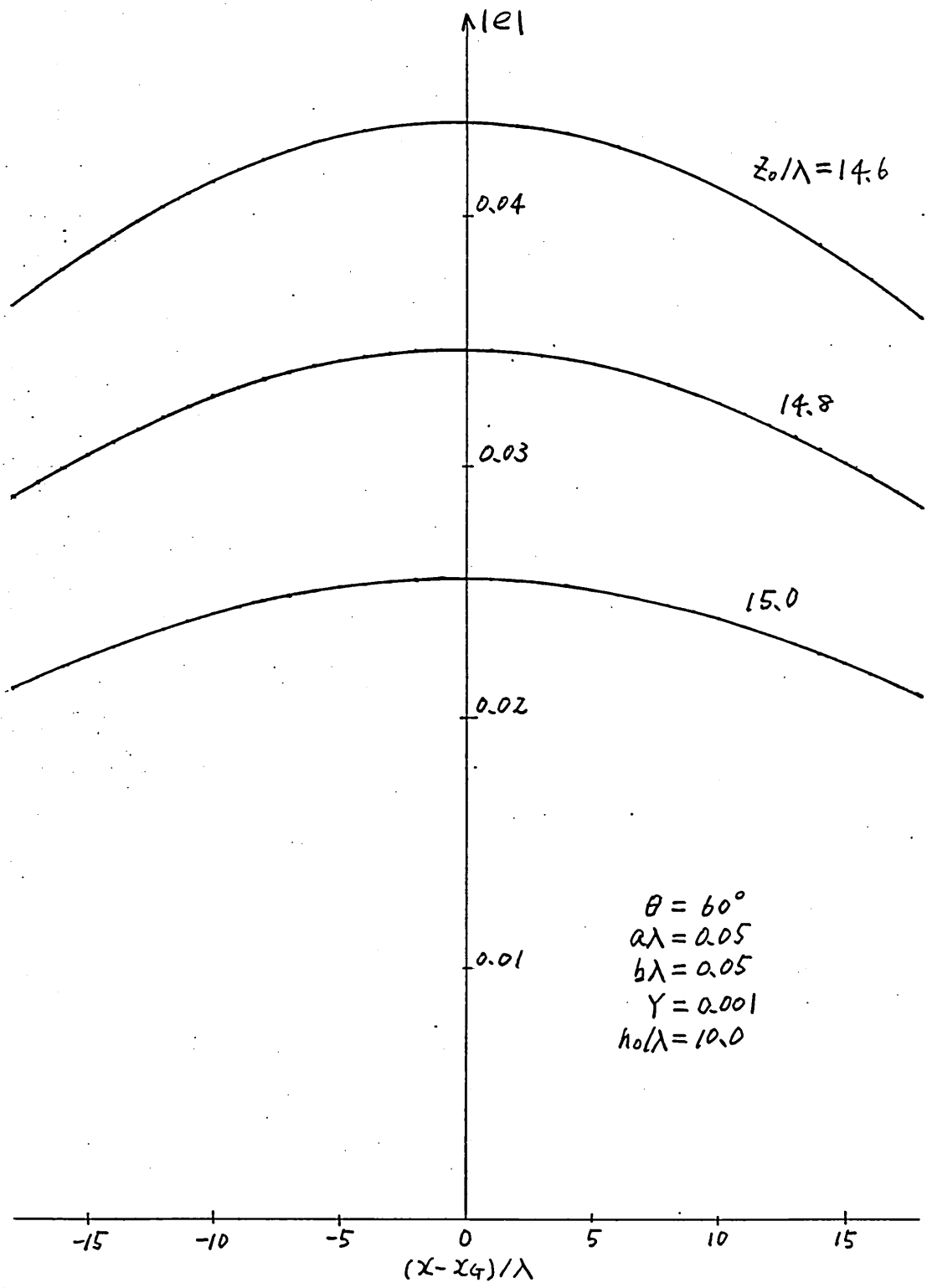


図 4　z_0/λ をパラメータとした場合 (3)

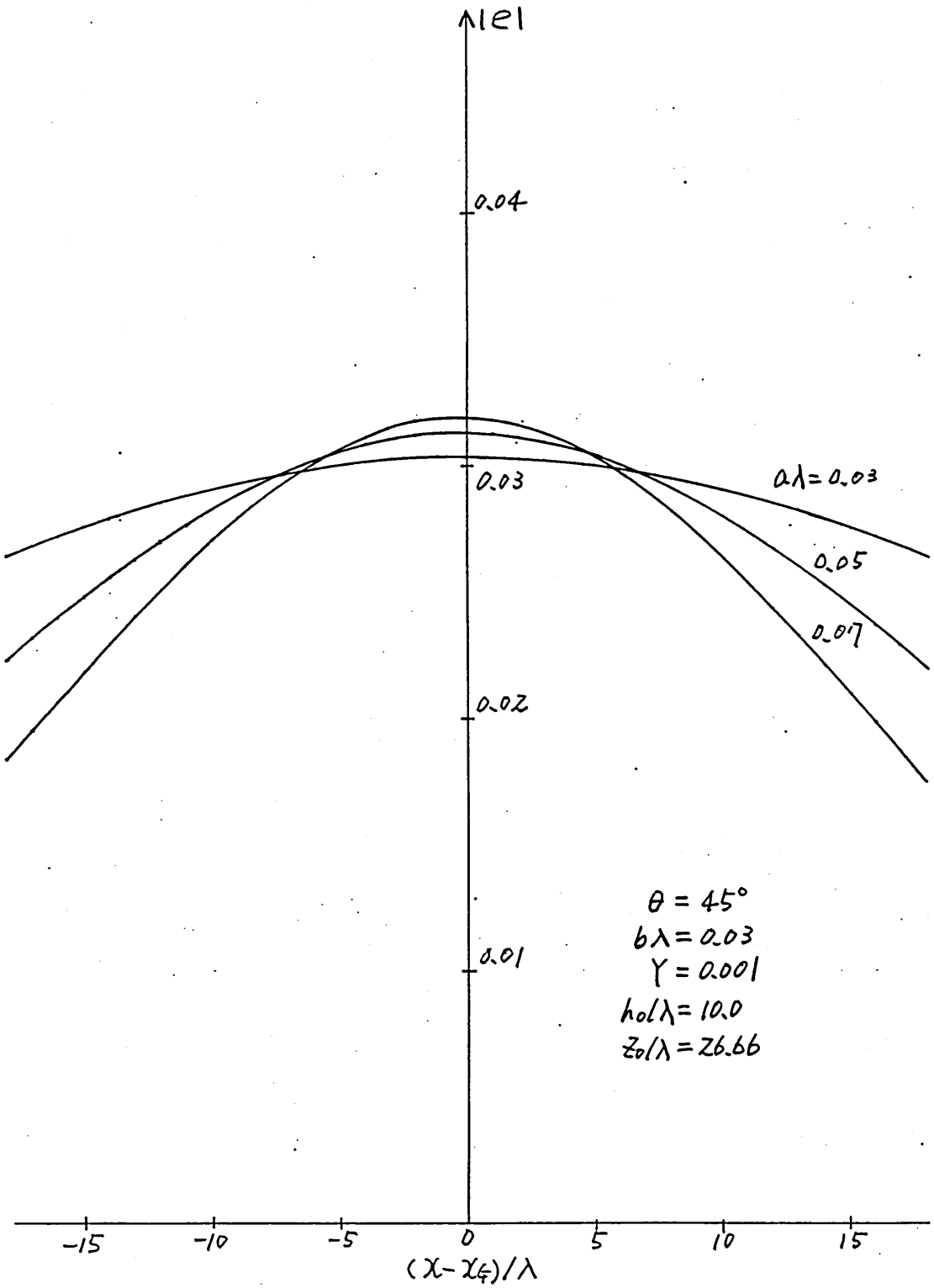


図 5(a) aλをパラメータとした場合 (1a)

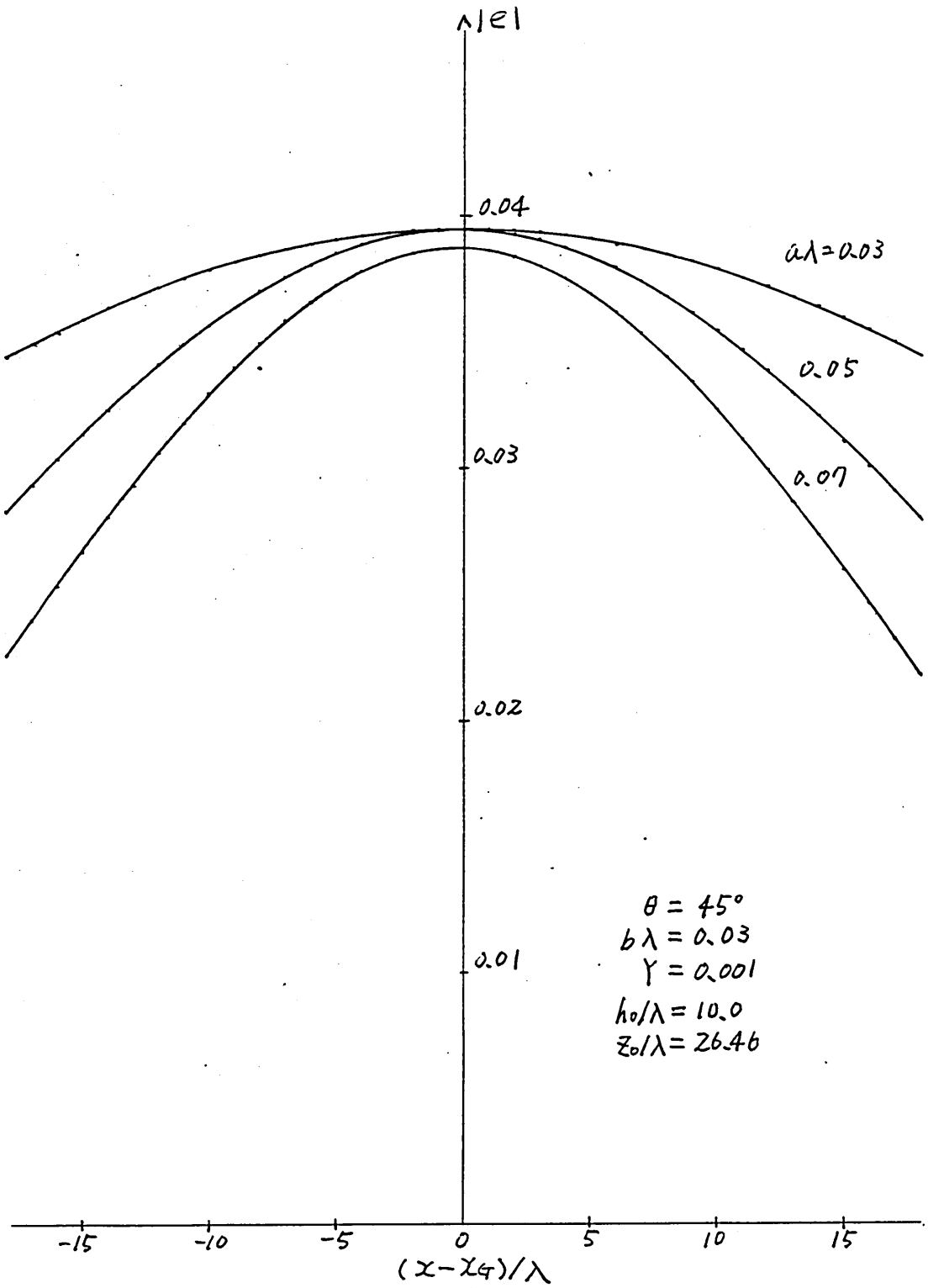


図5(b) aλをパラメータとした場合(1b)

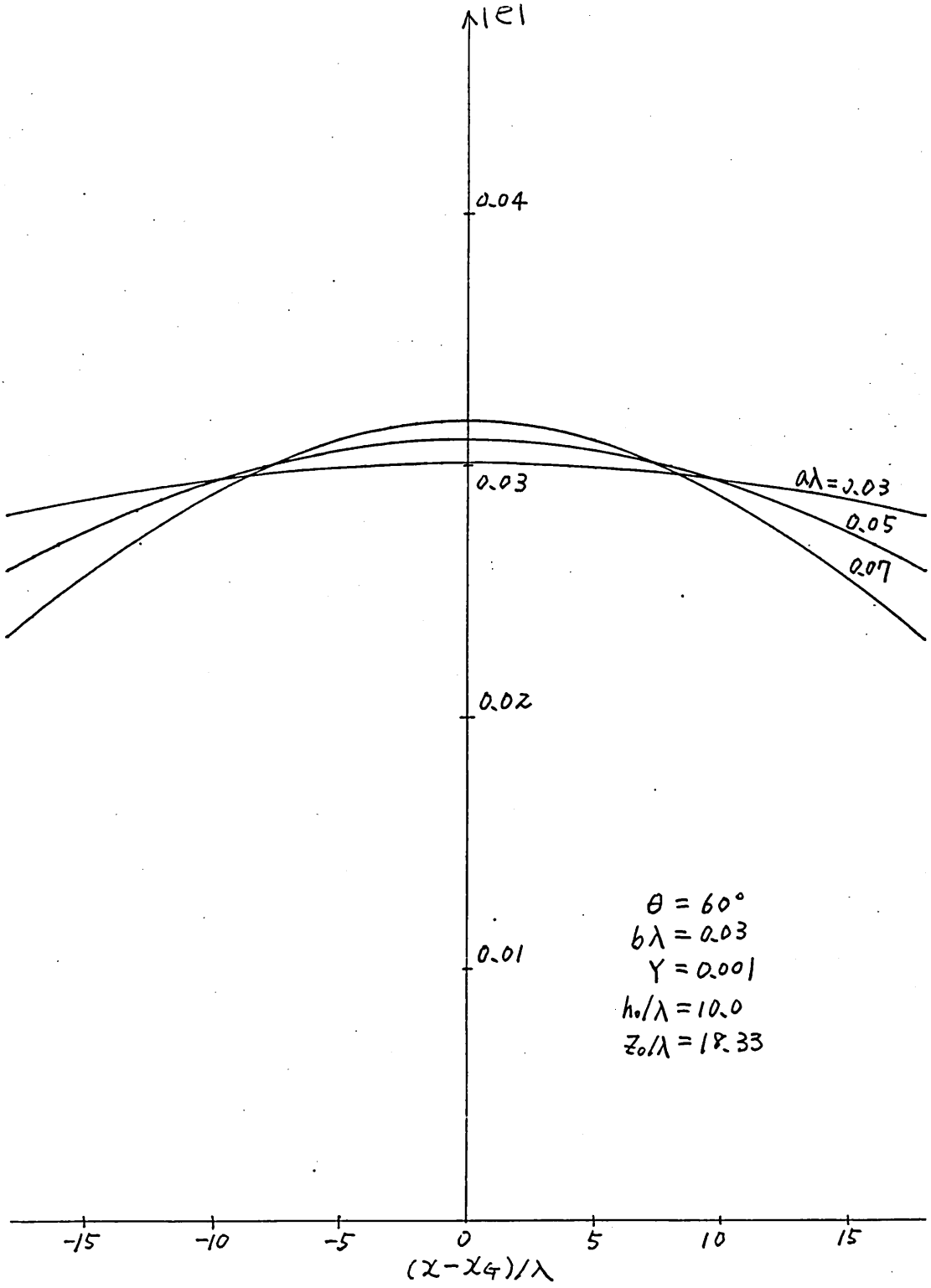


図 6(a) aλ をパラメータとした場合 (2a)

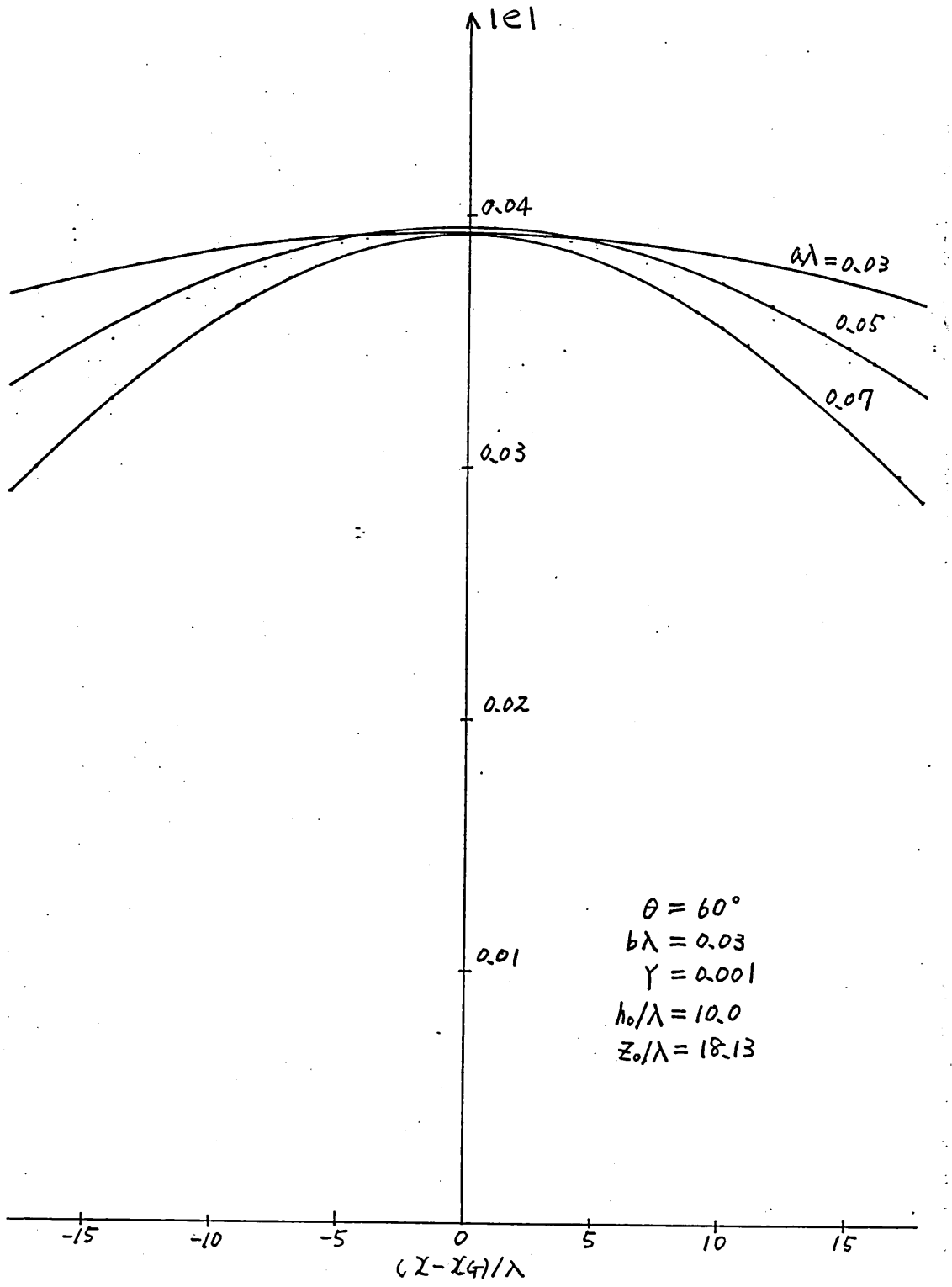


図 6(b) aλをパラメータとした場合(2b)

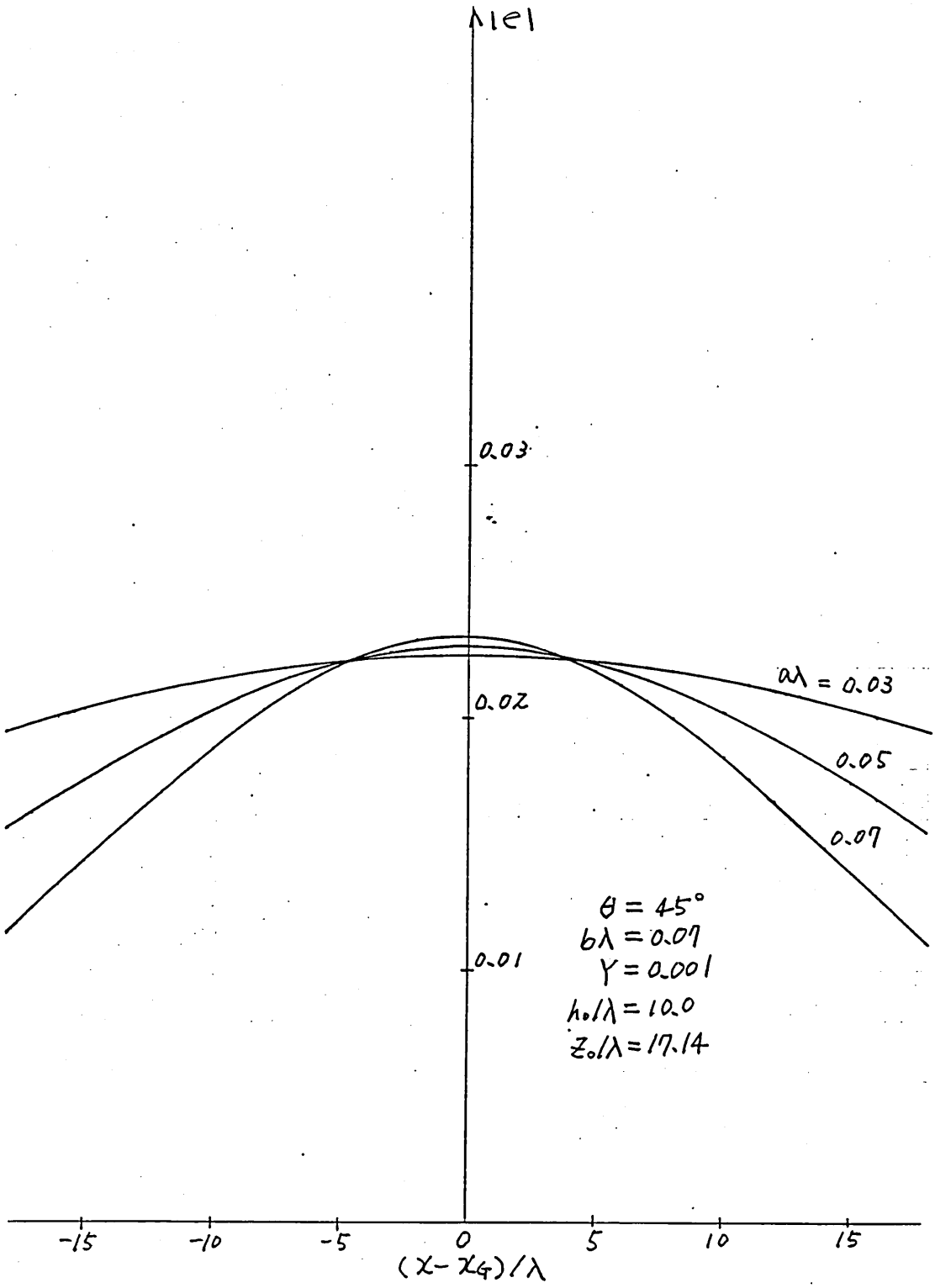


図 7 (a) aλをパラメータとした場合 (3a)

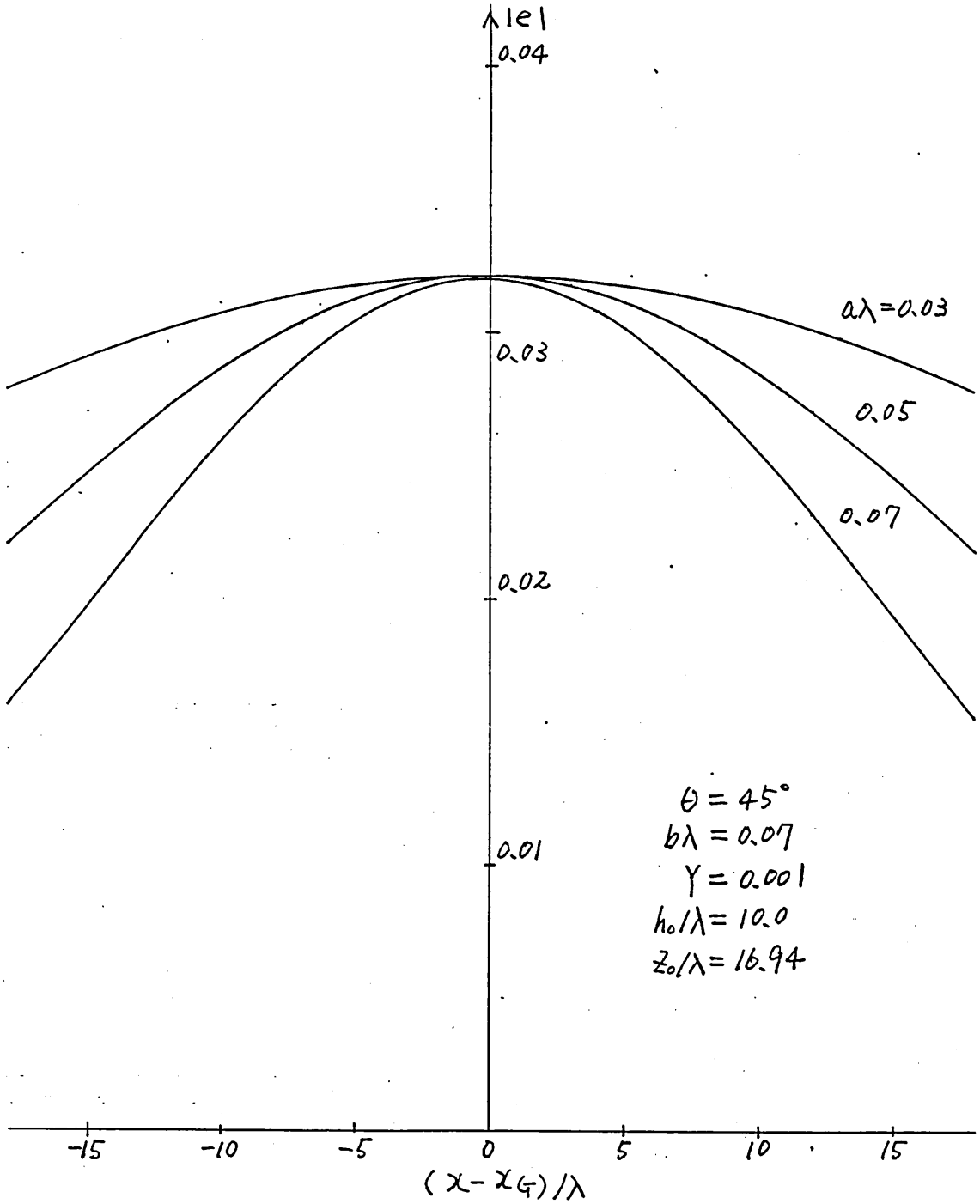


図 7(b) aλをパラメータとした場合 (3b)

0.03よりも若干大きい値を取っている。一方，$|z-z_G|$が大きいところでは$\alpha\lambda=0.07$に対する$|e|$は他の$\alpha\lambda$の場合よりも早く減少し，小さい値を取る。

次に図5(b)は$b\lambda$, h_0/λ等は図5(a)と同じ値に設定しているが，この図は摂動の位置を$z_0/\lambda=26.46$とした場合の数値例である。

この図においても$|e|$は非対称になっている。一方，$\alpha\lambda$が小さい程z/λの全体にわたって$|e|$は大きい値を取っており，z_G点の近傍における大小関係が図5(a)とは異なっている。

図5(a)，(b)におけるz_G点近傍の振舞の違いは次のような理由によるものと考えられる。すなわち，$\alpha\lambda$が大きい程図8に示すようにスペクトルは拡がっており入射角がθよりも小さい素平面波成分がたくさん存在することになり，次式で与えられるような入射角θの平面波に対する幾何光学的な全反射点

$$z_G = h_0 + \cos^2\theta/b \qquad (20)$$

入射角が

よりも大きな点で全反射する。従って，$\psi<\theta$なる平面波にとっては摂動は等価的に全反射点よりも境界面側に存在することになり，図2～図4と同様の効果を受け，それが反射波成分に強く影響を与えるものと考えられる。一方，幾何光学的な全反射点よりも境界面側に摂動が存在する場合ビームを構成する素平面波は$\alpha\lambda$が小さいほど$\alpha\lambda=0$におけるスペクトル関数は大きい値を取るから，中心成分による効果が反射電界へ強く影響するものと思える。

図6，図7も同様の数値例である。

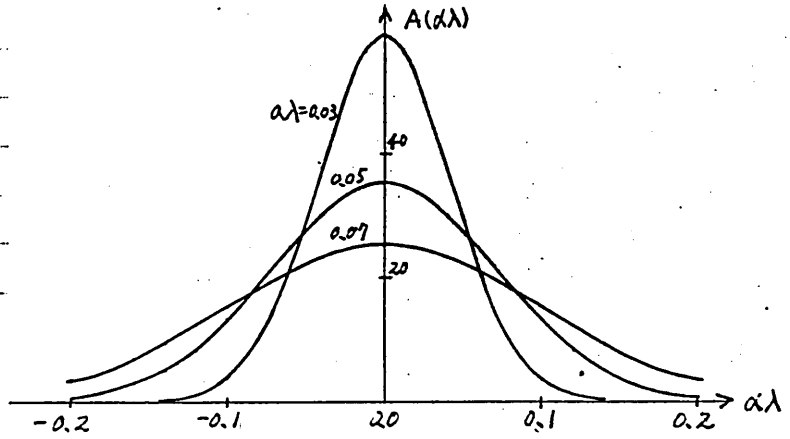


図8 スペクトル関数

4. ガウス形をした擾動がある場合

3章におけるようなimpulse状の擾動がある場合よりもむしろ有限の領域に擾動がある場合の方がより実際的であると思われる。

そこで本章ではその一例としてガウス形の擾動がある場合について検討する。

今,

$$\varepsilon_2(z)=\gamma\exp[-(z-z_0)^2/2s^2] \tag{21}$$

但し, s は擾動の広がりを表わす定数である。

とおくと, ビーム波に対する寄与は

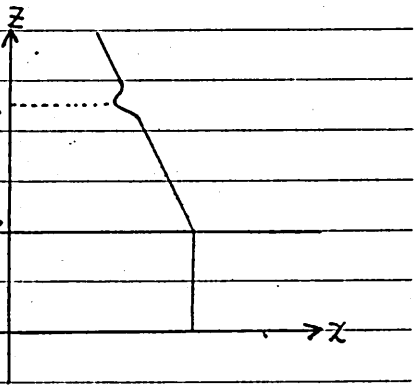
$$e(x,z)|_{z=0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,\frac{jk}{2\cos\varphi}\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{\beta^2}{4a^2}}\gamma e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2s^2}}e^{-jxp}$$

$$\times\left[\frac{2\exp[-jh_0(k^2-p^2)^{\frac{1}{2}}]A_i(\beta)}{A_i(\beta)|_{z=h_0}+j(k^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}A_i'(\beta)|_{z=h_0}}\right]^2 \tag{22}$$

となる。

式(22)は2重積分であり, これを計算する方法として種々考えられる。たとえば, 2次元のsimpsonの積分公式を用いる方法, 準乱数を用いる方法等である。

現在, この計算は進行中であり, 結果は別の機会に報告する。



5. あとがき

本稿では, 誘電率が直線的に減少し, かつz座標にのみ依存する擾動を持つ媒質に入射する電磁ビーム波の反射について考察を行なった。

No.

摂動がImpulse状の場合については次のような結果を得た。

(1)反射電界の変動分$|e|$はz_0点に関して対称になっていない。また，z_0/λが小さいほど$|e|$は大きい値をとる。

(2)$a\lambda$をパラメータとした場合，摂動が存在する位置が幾何光学的な全反射点とそれよりも境界面側に存在した場合とでは，$|e|$のz_0点近傍における振舞に多少の差異が認められる。

摂動がGauss形に分布した場合に関する考察は現在行なっており別の機会に報告する。

終りに，日ごろご討論いただく通信工学科電磁界理論研究グループの諸氏に深謝する。

文献

(1) V.I.Tatarski："Wave Propagation in a Turbulent Medium", Dover Pub. Ins., New York (1967)

(2) L.A.Chernov："Wave Propagation in a Random Medium", Dover Pub. Ins., New York (1967)

(3) 木下，鈴木，松本："ランダム媒質中のガウス形光ビーム伝搬"，信学誌，50，11，PZ146（昭42-11）

(4) M.L.V.Pitteway："The reflection of radio waves from a stratified ionosphere modified by weak irregulaties", Proc. Roy. Soc., A246, P556 (1958)

(5) D.A.Hill, J.R.Wait："Reflection of electromagnetic pulse from a perturbed linear ionosphere model", Radio Sci, 6, 12, P1039 (Dec. 1971)

(6) 上埜，安明："不均質媒質中のビーム波の伝搬について"，アンテナ伝搬研資，AP72-3 (1972)

輻射科学研究会資料

最小2乗誤差法を用いた誘電体線路の不連続部の解析

森下克己・稲垣晴一
熊谷信昭
（大阪大学　工学部）

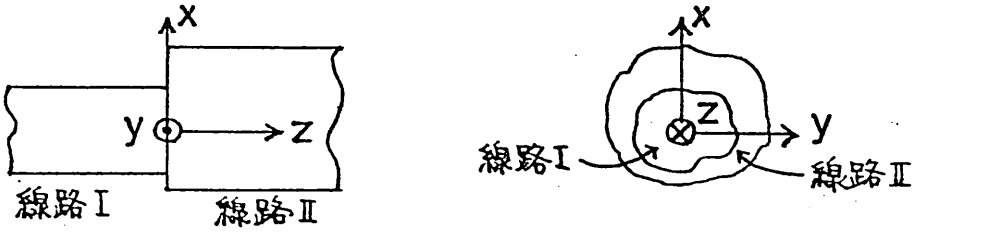
1976年 12月3日

1. まえがき

光通信システム実現のため種々の研究が進められているが，伝送線路に関しては光ファイバの低損失化が進展した現在，線路の広帯域化とともに線路の接続に関する研究も重要な問題として，関心が持たれている。しかしながら，現在までのところ接続方法の実験的研究[(1)~(2)]に比べると，接続部に関する理論解析[(3)~(8)]の報告は比較的少ない。また報告されている内容も，反射波および反射放射波を省略したもの，あるいはこれらを考慮しても不連続が小さい場合にしか適用できないものがほとんどである。

本報告では，通常の境界条件を適用する代わりに，最小2乗誤差法を用いて，不連続部の反射，透過および放射電力等を解析する手法について述べ，具体例としてこの方法を誘電体スラブ線路の軸ずれの解析に適用した場合を示す。本報告において，述べる方法は，導波管のような閉じた線路の解析に適用された例はあるが，[(9)~(10)]誘電体線路のような開放型線路の解析に用いられた例は，筆者等の知る限りでは見あたらないようである。この手法を用いると，透過波，反射波はもちろんのこと反射放射波および透過放射波も求めることができる。また，線路の形状ならびに不連続の大小にかかわらず適用できる利点があるものと思われる。

2. 最小2乗誤差法による不連続部の解析



(a) 線路の接続　　(b) 不連続面S(z=0)平面における横断面

図1. 線路の不連続部

図1に示すような2つの開放型導波系の接続部に，線路Ⅰから線路Ⅱの方向に入射波が入射すると，不連続部において反射，透過および放射の現象が起こる。ここで不連続面($z=0$)における各導波モードの電磁界の接線成分を$\mathbf{e}_i$, $\mathbf{h}_i$とし，入射モードの電磁界の接線成分を$\mathbf{e}_{in}$, $\mathbf{h}_{in}$，放射モードの電磁界の接線成分を$\mathbf{e}(\rho)$, $\mathbf{h}(\rho)$と表わす。ただし，ρは線路の外部における放射モードの横方向の伝搬定数である。不連続面における線路Ⅰの全電磁界の接線成分を，$\mathbf{E}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{H}^{\mathrm{I}}$，線路Ⅱのそれを$\mathbf{E}^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{H}^{\mathrm{II}}$とすると，それぞれの電磁界は線路の固有モードで次のように展開することができる。

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathrm{I}} &= \mathbf{e}_{in}+\sum_{i=1}^{M} R_i \mathbf{e}_i^{\mathrm{I}}+\int R(\rho)\mathbf{e}^{\mathrm{I}}(\rho)\,d\rho \\
\mathbf{H}^{\mathrm{I}} &= \mathbf{h}_{in}-\sum_{i=1}^{M} R_i \mathbf{h}_i^{\mathrm{I}}-\int R(\rho)\mathbf{h}^{\mathrm{I}}(\rho)\,d\rho \\
\mathbf{E}^{\mathrm{II}} &= \sum_{i=1}^{N} T_i \mathbf{e}_i^{\mathrm{II}}+\int T(\rho)\mathbf{e}^{\mathrm{II}}(\rho)\,d\rho \\
\mathbf{H}^{\mathrm{II}} &= \sum_{i=1}^{N} T_i \mathbf{h}_i^{\mathrm{II}}+\int T(\rho)\mathbf{h}^{\mathrm{II}}(\rho)\,d\rho
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ただし，R_iおよびT_iは各導波モードの反射係数および透過係数で，$R(\rho)$および$T(\rho)$は放射モードの反射係数および透過係数である。また，M，Nはそれぞれ線路Ⅰ，Ⅱの導波モードの数を表わす。次に式(1)の積分を離散的な和に直すために，$R(\rho)$および$T(\rho)$を適当な関数系$\{f_i(\rho)\}$で展開する。

$$\left.\begin{aligned}
R(\rho) &= \sum r_i f_i(\rho) \\
T(\rho) &= \sum t_i f_i(\rho)
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

上式を式(1)に代入すると次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathrm{I}} &= \mathbb{e}_{in} + \sum_{i=1}^{M} R_i \mathbb{e}_i^{\mathrm{I}} + \sum r_i \mathbb{E}_i^{\mathrm{I}} \\
\mathbb{H}^{\mathrm{I}} &= \mathbb{h}_{in} - \sum_{i=1}^{M} R_i \mathbb{h}_i^{\mathrm{I}} - \sum r_i \mathbb{H}_i^{\mathrm{I}} \\
\mathbb{E}^{\mathrm{II}} &= \sum_{i=1}^{N} T_i \mathbb{e}_i^{\mathrm{II}} + \sum t_i \mathbb{E}_i^{\mathrm{II}} \\
\mathbb{H}^{\mathrm{II}} &= \sum_{i=1}^{N} T_i \mathbb{h}_i^{\mathrm{II}} + \sum t_i \mathbb{H}_i^{\mathrm{II}}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{E}_i^{\mathrm{I,II}} &= \int f_i(\rho)\, \mathbb{e}^{\mathrm{I,II}}(\rho)\, d\rho \\
\mathbb{H}_i^{\mathrm{I,II}} &= \int f_i(\rho)\, \mathbb{h}^{\mathrm{I,II}}(\rho)\, d\rho
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

本解析では，不連続面（$z=0$平面）における電磁界の接線成分の差を誤差と考え，その誤差を評価する量

$$F = \frac{\displaystyle\int_S \left[|\mathbb{E}^{\mathrm{I}} - \mathbb{E}^{\mathrm{II}}|^2 + Z_0^2 |\mathbb{H}^{\mathrm{I}} - \mathbb{H}^{\mathrm{II}}|^2 \right] dS}{\displaystyle\int_S \left[|\mathbb{e}_{in}|^2 + Z_0^2 |\mathbb{h}_{in}|^2 \right] dS} \quad (5)$$

を定義する。ただし，Z_0は真空中の固有インピーダンス，Sは不連続面（$z=0$平面）を表わす。

さて，$\mathbb{E}^{\mathrm{I,II}}$, $\mathbb{H}^{\mathrm{I,II}}$は真の電磁界$\mathbb{E}_0^{\mathrm{I,II}}$, $\mathbb{H}_0^{\mathrm{I,II}}$と誤差の電磁界$\delta\mathbb{E}^{\mathrm{I,II}}$, $\delta\mathbb{H}^{\mathrm{I,II}}$とによって次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathrm{I,II}} &= \mathbb{E}_0^{\mathrm{I,II}} + \delta\mathbb{E}^{\mathrm{I,II}} \\ \mathbb{H}^{\mathrm{I,II}} &= \mathbb{H}_0^{\mathrm{I,II}} + \delta\mathbb{H}^{\mathrm{I,II}}\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

式(6)を式(5)に代入し，誤差の評価量Fの第1変分δFを計算すると，

$$\begin{aligned}&\delta F \cdot \int \left[|\mathbb{C}_{in}|^2 + Z_0^2 |\mathbb{h}_{in}|^2 \right] dS \\ &= \int_S \left[\delta\mathbb{E}^{\mathrm{I}*} \cdot (\mathbb{E}_0^{\mathrm{I}} - \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}) - \delta\mathbb{E}^{\mathrm{II}*} \cdot (\mathbb{E}_0^{\mathrm{I}} - \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}}) \right. \\ &\quad \left. + Z_0^2 \left\{ \delta\mathbb{H}^{\mathrm{I}*} \cdot (\mathbb{H}_0^{\mathrm{I}} - \mathbb{H}_0^{\mathrm{II}}) - \delta\mathbb{H}^{\mathrm{II}*} \cdot (\mathbb{H}_0^{\mathrm{I}} - \mathbb{H}_0^{\mathrm{II}}) \right\} \right] dS \\ &+ \mathrm{C.C.} \qquad (7)\end{aligned}$$

が，得られる。ただし，＊は複素共役を表わし，C.C.はこの記号より前にある項の複素共役を表わす。正しい電磁界に対しては，不連続面上で，

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E}_0^{\mathrm{I}} &= \mathbb{E}_0^{\mathrm{II}} \\ \mathbb{H}_0^{\mathrm{I}} &= \mathbb{H}_0^{\mathrm{II}}\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

で，あるから，式(7)より

$$\delta F = 0 \qquad (9)$$

となることがわかる。したがって，境界条件を合わせる代わりに，式(5)で定義した誤差評価量Fに関する停留値問題を解いても同じ結果が得られる。本解析では，式(5)のFが

停留値をとるように，反射係数および透過係数を定め，不連続部における全電磁界の分布を求めている。なお，この方法によって求められた電磁界分布は2乗誤差が最小になるという意味において最も良い近似を与えるものとなっている。

式(5)のFが停留値をとる条件は，R_i, T_i, h_iおよびt_iを一般にX_iで表わすと，次式で与えられる。

$$\frac{\partial F}{\partial X_i^*} = 0 \qquad (10)$$

式(10)より，R_i, T_i, h_iおよびt_iを未知数とする複素連立一次方程式が得られ，これを解くことにより未知数が求まり，電磁界を決定することができる。

3. 誘電体スラブ線路の軸ずれの解析

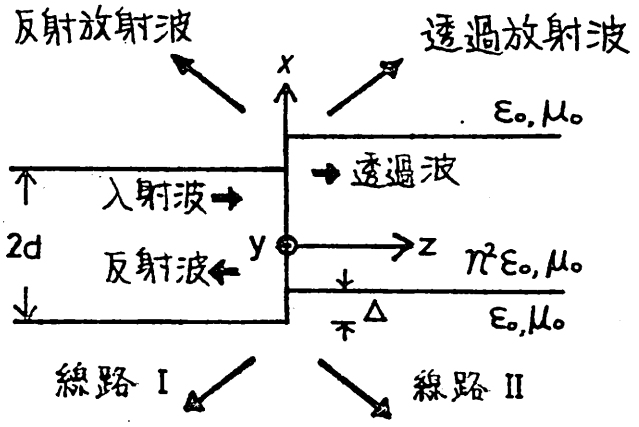


図2　誘電体スラブ線路の軸ずれ

本節では，前節で述べた最小２乗誤差法による不連続部の解析法を，図２に示すような２つの誘電体スラブ線路の接続部における軸ずれの問題に適用する。誘電体スラブ線路はいずれも屈折率がn，厚さが2dで，y方向には一様であるとする．入射波としてTEモードを考え，簡単のため誘電体スラブ線路には基本モードしか伝搬しないものと仮定すると，導波モードの電界は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= i_y A\cos K x && |x|\le d \\ &= i_y A\cos Kd\, e^{-\gamma(|x|-d)} && |x|>d \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

また，放射TEモードは，放射TE偶モードと放射TE奇モードとに分けて考えられる。式(12)に放射TE偶モードの電界を，また式(13)に放射TE奇モードの電界を示す。

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\rho) &= i_y C_e \cos\sigma x && |x|\le d \\ &= i_y (D_e e^{-i\rho|x|} + F_e e^{i\rho|x|}) && |x|>d \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\rho) &= i_y C_o \sin\sigma x && |x|\le d \\ &= i_y \frac{x}{|x|}(D_o e^{-i\rho|x|} + F_o e^{i\rho|x|}) && |x|>d \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

式(11)～(13)において，K，γはそれぞれ導波モードの，線路内部および線路外部におけるx方向の伝搬定数を表わし，σ，ρはそれぞれ放射モードのそれらを表わす。Aは K，γ等の関数で，C_e，C_o，D_e，D_o，F_eおよびF_oはσ，ρ等の関数である。これらについての詳細は文献(11)を参照されたい。導波モードおよび放射モードの直交条件は，それぞれ次式で与えられる。

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathbb{E}\times\mathbb{H}^*)\cdot\mathbb{i}_z\,dx=1 \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\{\mathbb{E}(\rho)\times\mathbb{H}^*(\rho')\}\cdot\mathbb{i}_z\,dx=\frac{\beta^*}{|\beta|}\delta(\rho-\rho') \tag{15}$$

ただし，δ はDiracのデルタ関数，β はz方向の伝搬定数である。

次に，式(2)に示した放射波の反射係数および透過係数 $R(\rho)$, $T(\rho)$ の展開について述べる。実際に放射される放射モードは，そのz方向の伝搬定数 ρ が入射波のz方向の伝搬定数に近いものが大部分で，ρ の大きなものはそれに比べて比較的少ないものと考えられる。そこで，$R(\rho)$ および $T(\rho)$ を展開する関数 $f_i(\rho)$ として，ρ が大きくなると指数関数的に減少するような，いわゆるGauss-Laguerre関数を用いることにする。以下にこの関数の低次の数項とその直交関係式とを参考までに示しておく。

$$\begin{aligned}
f_0(\rho)&=\sqrt{\xi d}\exp\left(-\frac{\xi\rho d}{2}\right)\\
f_1(\rho)&=\sqrt{\xi d}\left\{1-(\xi\rho d)\right\}\exp\left(-\frac{\xi\rho d}{2}\right)\\
f_2(\rho)&=\sqrt{\xi d}\left\{1-2(\xi\rho d)+\frac{(\xi\rho d)^2}{2}\right\}\exp\left(-\frac{\xi\rho d}{2}\right)\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{16}$$

ただし ξ は広がりを表わすパラメータである。

$$\int_0^{\infty}f_i(\rho)f_j(\rho)\,d\rho=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases} \tag{17}$$

式(11)～(17)等を前節の式(5)に代入し，式(10)を適用して解析を行なうと以下に示すような結果が得られる。ただし，以下に示す数値計算結果は，Gauss-Laguerre関数を9項とった場合で，広がりを示すパラメータαは，軸ずれが100%のところでの電力和が最も1に近くなるように決定した。

図3に，規格化周波数kadを1.0とした場合の，入射電力で規格化した反射電力Pr，透過電力Pt，放射電力Prad，および電力和Ptotalを示す。

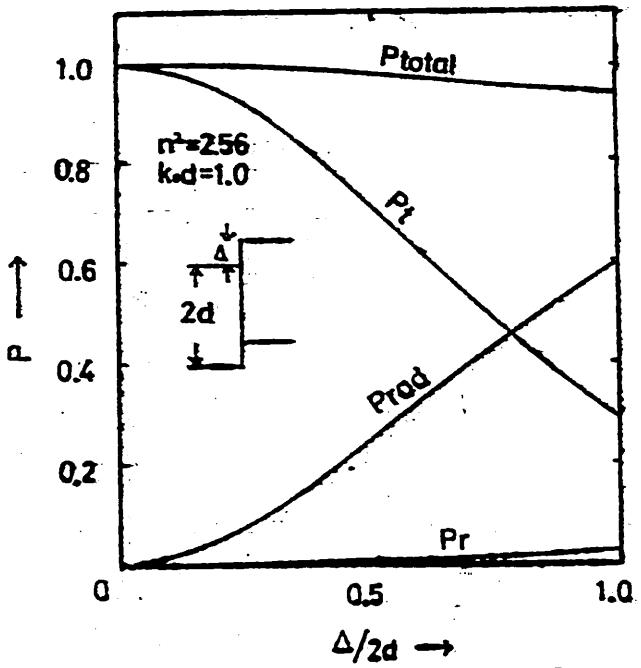


図3　反射電力Pr，透過電力Pt，放射電力Prad および電力和Ptotal ($k_0d = 1.0$)

ここで電力和とは，反射電力，透過電力および放射電力の和で数値計算結果の正確さの目安になる量の1つである。軸ずれが大きくなるにしたがって，電力和が1からずれていくが，このずれは主として Gauss - Laguerre 関数を，9項までで切ったため生じた放射電力の誤差によるものと考えられる。また，軸ずれにおける反射は極めて少なく，透過されない電力はほとんどが放射電力となることがわかる。図4に，同じく $k_0 d = 0.6$ の場合を示す。

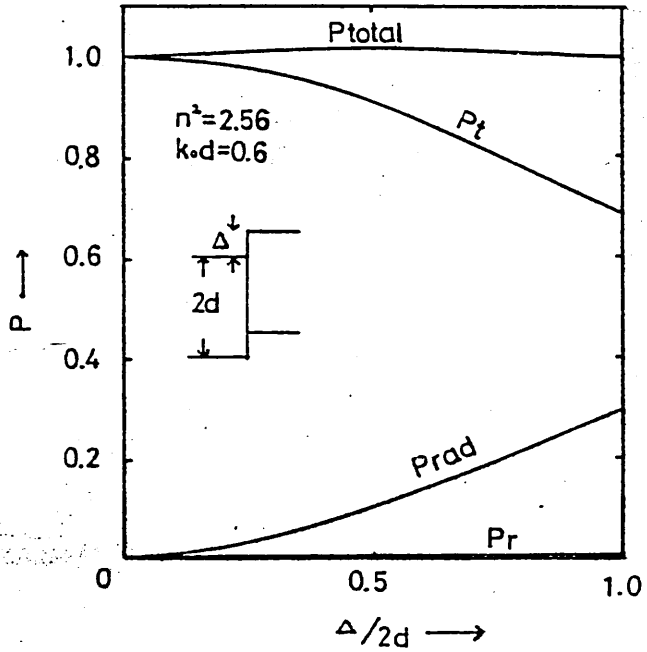


図4　反射電力 P_r，透過電力 P_t，放射電力 P_{rad} および電力和 P_{total} ($k_0 d = 0.6$)

$k_0 d = 1.0$ の場合と比べると，ほぼ放射電力が減少しているぶんだけ透過電力は増加し，電力和も1に近づいているのがわかる。この軸ずれに対する透過電力の増加原因は，$k_0 d$ がしゃ断周波数に近づくにつれて，電磁界分布が線路外部

に広がり，線路Ⅰと線路Ⅱの基本モードの間の差が減少してくることによるものである。

図5および図6に $k_0d=1.0$ の場合の透過放射電力および反射放射電力の電力スペクトル分布を示す。図6に示す反射放射電力の入射電力に対する割合は，軸ずれ $\Delta/2d=0.5$ のときで2.0％，$\Delta/2d=0.3$ のときで1.1％である。

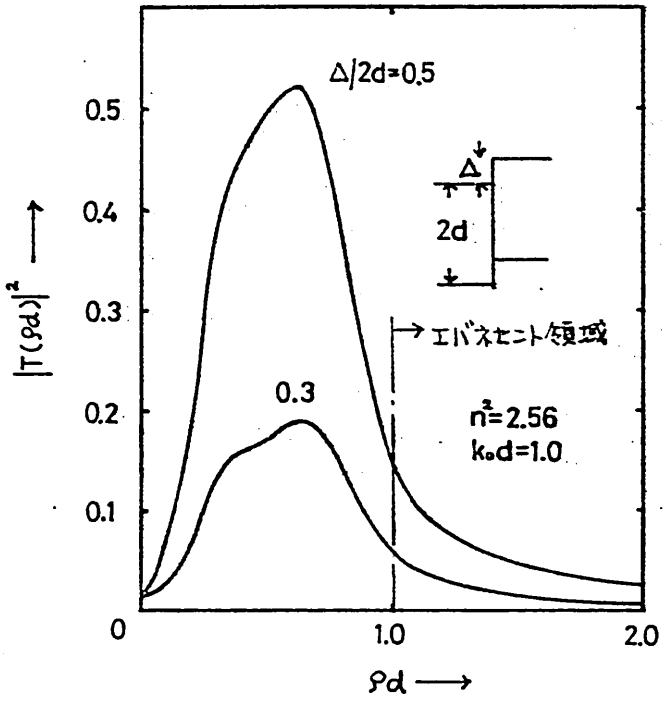


図5　透過放射電力のスペクトル分布（$k_0d=1.0$）

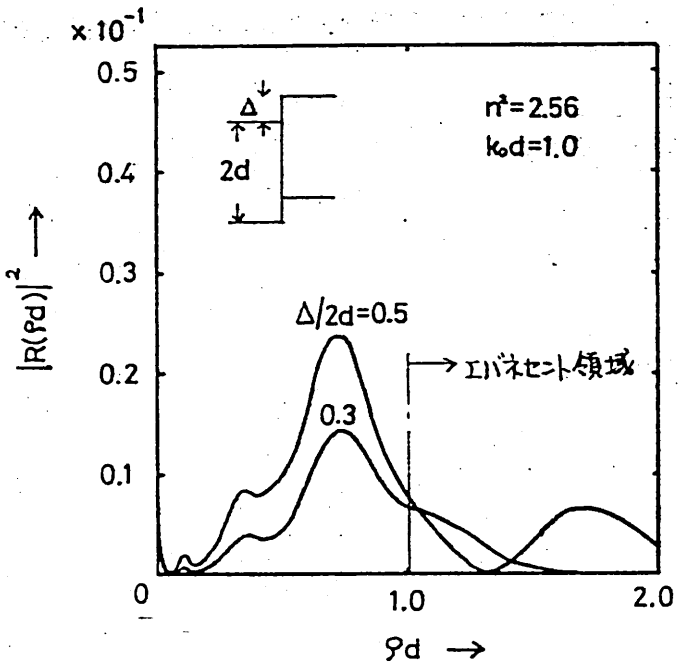


図6　反射放射電力のスペクトル分布 ($k_0d=1.0$)

図7および図8に$k_0d=0.6$の場合の同様の図を示す。この場合の反射放射電力の入射電力に対する割合は，$\Delta/2d=0.5$のときで2.3%，$\Delta/2d=0.3$のときで1.1%である。また図5～図8に示した放射電力のスペクトル分布から，軸ずれによって発生する波はその大部分が放射損失に寄与する放射モードであって，いわゆるエバネセントな放射モード[11]は，それに比べて十分少ないことがわかる。

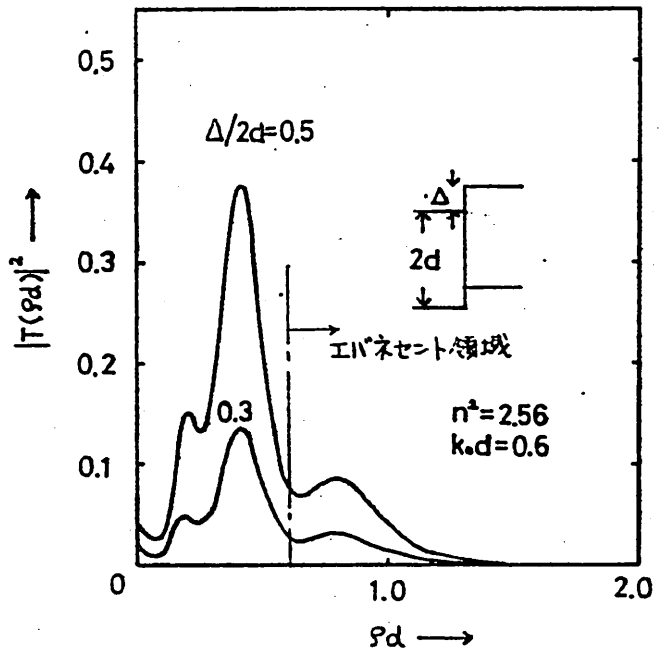


図7　透過放射電力のスペクトル分布 ($k_0d=0.6$)

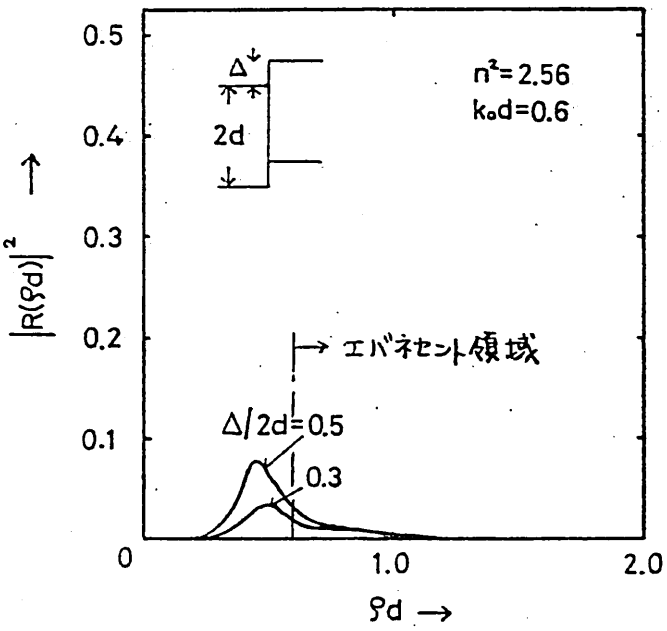


図8　反射放射電力のスペクトル分布 ($k_0d=0.6$)

図9および図10に，図5および図7の透過放射電力の電力スペクトル分布をもとに，鞍部点法を用いて算出した，放射パターンを示す。ただし，波の進行方向が図9および図10の$\theta = 0°$に対応している。また，両図とも軸ずれ$\Delta/2d = 0.9$の場合の放射電界の最大値で規格化してある。図9および図10において，軸ずれが大きくなるにしたがって，図2の軸ずれにおける前方下側への放射が，前方上側への放射に比べ増加していくのがわかる。

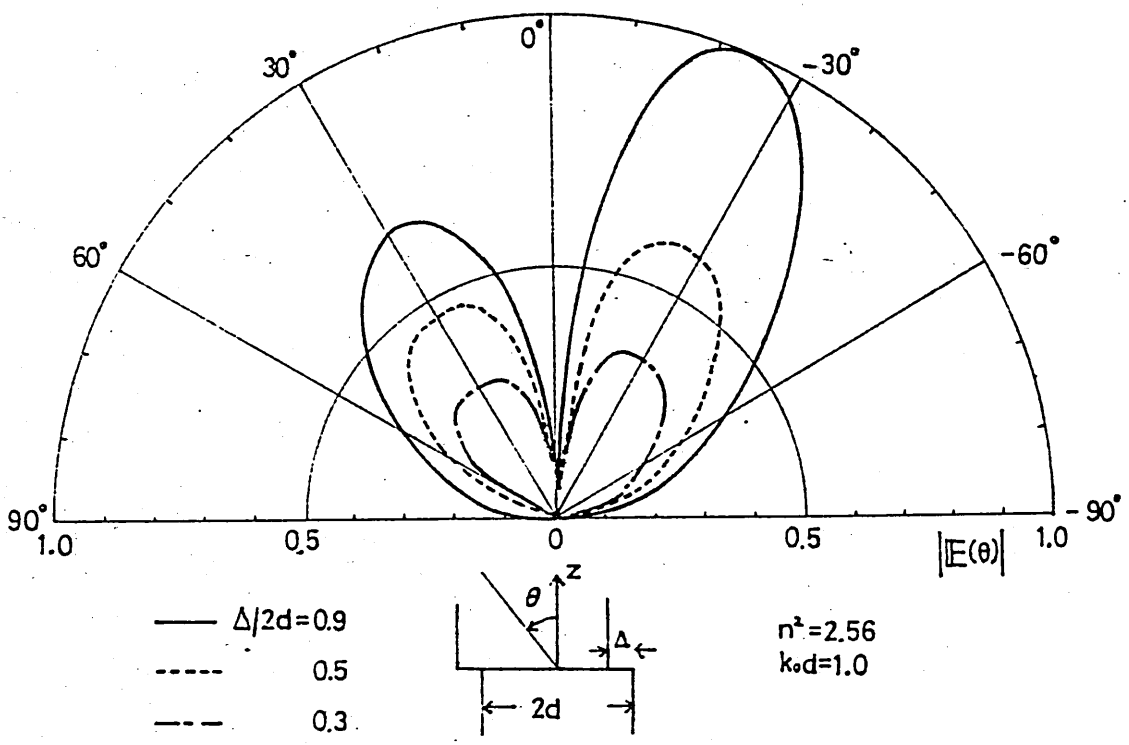


図9　放射電界分布（$k_0d = 1.0$）

図9と図10を比較すると，$k_0d=0.6$ の場合の方が，$k_0d=1.0$ の場合に比べて，放射パターンが乱れ，かつ放射パターンが若干広がっていることがわかる。

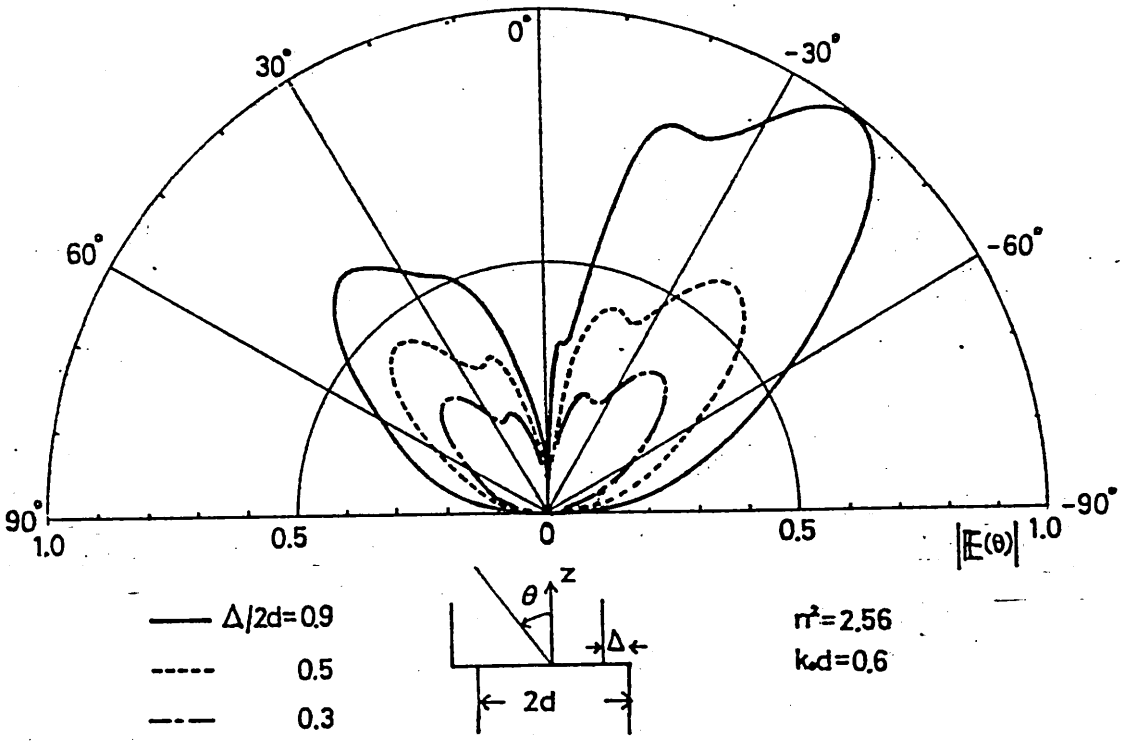


図 10　放射電界分布 ($k_0d=0.6$)

4. まとめ

最小2乗誤差法を用いる誘電体線路の不連続部の解析法について述べ，この手法を適用して誘電体スラブ線路の軸ずれの解析を行なった。その結果，透過係数はもちろんの

こと，従来省略されていた反射波や放射波の各電力をも求めることができた。また，放射波に関してはその電力スペクトル分布と放射パターンを求め，線路の軸ずれによる放射電力とその放射方向を明らかにした。今後の課題としては，本方法を多モード線路や屈折率分布が一様でない線路の不連続部，光源と線路との接続部，線路と受光器との接続部等の解析に応用することを考えている。

謝辞

本研究を進めるにあたって，討論していただいた大阪大学工学部通信工学科の松原正則助教授，森田長吉助手ならびに熊谷研究室の方々に深謝する。

参考文献

(1) D. L. Bisbee: "Measurements of loss due to offsets and end separations of optical fibers", Bell Syst. Tech. J., 50, 10, p. 3159 (Dec. 1971).

(2) 関沢義："光ファイバ通信小特集／6. 光回路素子"，信学誌，59，7，p. 728（昭51-07）.

(3) D. Marcuse: "Radiation losses of tapered dielectric slab waveguides", Bell Syst. Tech. J., 49, 2, p. 273 (Feb. 1970).

(4) S. F. Mahmoud and J. C. Beal: "Scattering of surface waves at a dielectric discontinuity on a planar waveguides", IEEE Trans., MTT-23, 2, p.193 (Feb. 1975).

(5) B. Rulf: "Discontinuity radiation in surface waveguides," J. Opt. Soc. Amer., 65, 11, p.1248 (Nov. 1975).

(6) 安浦亀之助, 富田正治: "Rayleighの仮説による光導波路の解析", 信学技報, 76, 77, MW76-39(昭51-07).

(7) D. Gloge: "Offset and tilt loss in optical fiber splices," Bell Syst. Tech. J., 55, 7, p.905 (Sep. 1976),

(8) C.M. Miller: "Transmission vs transverse offset for parabolic-profile fiber splices with unequal core diameters," Bell Syst. Tech. J., 55, 7, p.917 (Sep. 1976).

(9) J. Brian Davies: "A least-squares boundary residual method for the numerical solution of scattering problems," IEEE Trans., MTT-21, 2, p.99 (Feb. 1973).

(10) H. Oraizi and J. Perini: "A numerical method for the solution of the junction of cylindrical waveguides", IEEE Trans., MTT-21, 10, p.640 (Oct. 1973).

(11) D. Marcuse: "Light transmission optics", Van Nostrand Reinhold, New York (1972).

輻射科学研究会資料

電力結合方程式を用いた
異方性誘電体不規則線路についての考察

山北次郎　吉岡　勉　六島　克
（大阪府立大学　工学部）

昭和51年12月3日

1. まえがき

マイクロ波やミリ波に比べ使用波長の格段に短い光領域においては，導波路の不完全さが問題となり，理論と実際面との差を生ぜしめる主なる原因の一つになる。誘電体線路では，不完全さは屈折率のゆらぎや境界面の変動といった形で現われ，その結果モード変換や放射損失を生じる。本質的にゆらぎや変動は不規則な現象であるため解析は統計的見地から論じられ，すでに等方性誘電体線路に関しては数多くの報告がある。[1]～[4]

一方，光集積回路の研究が近年注目を集めるようになり，異方性媒質を含む複雑な構造の素子が数多く報告され詳細な検討がなされている。[5]～[7] しかしこれらの研究は理想的な導波路について論じたものが多く不完全さを考慮したものはあまり見かけない。

本文においては，上記のような背景から，その第一段階として，ステップ状の屈折率分布を有する線路で最も影響の大きい境界面の変動を考え，異方性誘電体線路における基本的な事項について述べる。解析は，境界面の変動が僅かであり，理想的な線路からの摂動であると見做せる範囲において，D. Marcuseにより導出された電力結合方程式[9]を適用し，モード電力の結合問

題として議論する。不規則線路では、各モードの複素振幅はランダム変数であり、モード電力はそのアンサンブル平均として定義される。電力結合方程式はこの平均電力の概念のもとに、振幅に関する結合方程式を摂動法を用いて電力形式に変換したものである。

以下、異方性誘電体線路における結合理論と電力結合方程式について簡単なる説明を加え、理想線路である基本系の導波および放射モードについて解析し、境界面にゆらぎを持つ異方性線路におけるモード電力の結合について論じる。計算例としては、境界面のゆらぎがガウス形の自己相関関数を有するものと仮定し、モード電力の減衰特性や移行特性等について示す。

2. 不規則線路における結合理論

比誘電率テンソル $K(x,z)$ で表わされる基本系および $\tilde{K}(x,z)$ で表わされる摂動系の二つの異方性誘電体線路を考える。線路は無損失であり、摂動系のテンソル $\tilde{K}$ は伝搬方向 z に関して不規則に変動しているものとする。いま基本系としてマルチモード線路を考え、ν 番目の導波モードの電磁界を e_ν, h_ν で、放射モードを $e(\rho)$, $h(\rho)$ で表わすことにすれば、各モードは完全直交系をなしており、摂動系の電磁界 E, H は基本

系のモードによって展開することができる※。

$$\mathbb{E} = \sum_{\nu} a_\nu \mathbb{e}_\nu + \Sigma \int_0^\infty a(\rho)\, \mathbb{e}(\rho)\, d\rho \quad (2-1)$$

$$\mathbb{H} = \sum_{\nu} a_\nu \mathbb{h}_\nu + \Sigma \int_0^\infty a(\rho)\, \mathbb{h}(\rho)\, d\rho \quad (2-2)$$

ここに，展開係数 a_ν, $a(\rho)$ は導波および放射モードの複素振幅を表わす。

電磁界 $\mathbb{E}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{e}_\nu$, $\mathbb{h}_\nu$ はそれぞれ Maxwell の方程式を満足することより，よく知られている次の結合方程式が導出される。

$$da_\mu/dz = -j\beta_\mu a_\mu + \sum_{\nu} C_{\mu\nu} a_\nu + \Sigma \int_0^\infty C_{\mu(\rho)}\, a(\rho)\, d\rho \quad (2-3)$$

$$da(\rho)/dz = -j\beta(\rho) a(\rho) + \sum_{\nu} C_{(\rho)\nu} a_\nu + \Sigma \int_0^\infty C_{(\rho)(\rho')}\, a(\rho')\, d\rho' \quad (2-4)$$

ただし，β_μ, $\beta(\rho)$ はそれぞれ導波，放射モードの伝搬定数，$C_{\mu\nu}$, $C_{\mu(\rho)}$, $C_{(\rho)(\rho')}$ はそれぞれ導波モード間，導波モードと放射モード，放射モード間の結合係数であり次式で示される[10]。

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu}(z) = \frac{j\omega\epsilon_0}{4} \iint \Bigg[& \mathbb{e}^*_{\mu t} \cdot \left\{ \left(\frac{\tilde{K}_t \cdot \tilde{K}_z}{\tilde{K}_{zz}} - \frac{K_t \cdot K_z}{K_{zz}} \right) - \left(\tilde{K}_t - K_t \right) \right\} \cdot \mathbb{e}_{\nu t} \\ & - \mathbb{e}^*_{\mu t} \cdot \left(\frac{K_{zz}}{\tilde{K}_{zz}} \tilde{K}_t - K_t \right) \cdot \left(\frac{K_z}{K_{zz}} \cdot \mathbb{e}_{\nu t} + \mathbb{e}_{\nu z} \right) \\ & + \left(K_z \cdot \mathbb{e}^*_{\mu t} + K_{zz}\, \mathbb{e}^*_{\mu z} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{K_{zz}}{\tilde{K}_{zz}} - 1 \right) \left(\frac{K_z}{K_{zz}} \cdot \mathbb{e}_{\nu t} + \mathbb{e}_{\nu z} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\tilde{K}_z}{\tilde{K}_{zz}} - \frac{K_z}{K_{zz}} \right) \cdot \mathbb{e}_{\nu t} \right\} \Bigg] dx\, dy \end{aligned} \quad (2-5)$$

ここに，ϵ_0 は真空中の誘電率，$\mathbb{e}^*$ は複素共役，$\mathbb{e}_t$ は横方向 (x, y) ベクトル，K_{zz} 等はテンソル K の要素で，

※本文では後進モードは考えないものとする。

K_t, K_z等は次式で示される。（i_x, i_y, i_zは単位ベクトル）

$$K_t \cdot \mathcal{E} = i_x (K_{xx} e_x + K_{xy} e_y + K_{xz} e_z) + i_y (K_{yx} e_x + K_{yy} e_y + K_{yz} e_z) \quad (2-6)$$

$$K_z \cdot \mathcal{E} = i_z (K_{zx} e_x + K_{zy} e_y + K_{zz} e_z) \quad (2-7)$$

また$C_{\mu(\rho)}$, $C_{(\rho)(\rho')}$についても同様な表現式であるので省略する。実際問題としては、誘電体媒質は僅かに異方性であり、テンソルの非対角要素は対角要素に比べはるかに小さいので式（2－5）は次のように近似される。

$$C_{\mu\nu}(z) = \frac{\omega \epsilon_0}{4j} \iint \mathcal{E}^*_\mu \cdot (\tilde{K} - K) \cdot \mathcal{E}_\nu \, dx dy \quad (2-8)$$

上式は周知のように、変分表示式からも導出できる。[11]

摂動系の電磁界は上述の結合方程式(2－3),(2－4)を解く問題に帰着するが、次のような問題点があり、一般的には解くことは難かしい。

- 摂動系のテンソルはランダム変数であるので、結合係数もランダム変数として取り扱わねばならない。
- 不規則線路では放射モードへの結合を無視できないので、連立微積分方程式の形式になり、解析的に厳密解を得ることは難かしい。

そこで、あまり興味のない放射モード間の結合は無視し、放射損失としては、導波モードから放射モードへの結合を考え、結合方程式（2－3)に摂動法を適用す

れば第一近似としての解を得る。さらに，複素振幅a_μより，アンサンブル平均としてモード電力を定義する。

$$P_\mu = \langle a_\mu a_\mu^* \rangle \qquad (2-9)$$

ここに，$\langle\ \rangle$は平均操作を表わす。

以上により，結合方程式を次の電力形式に変換することができる。[1][12][13]

$$dP_\mu/dz = -2\alpha_\mu P_\mu + \sum_\nu h_{\mu\nu}(P_\nu - P_\mu) \qquad (2-10)$$

ただし，$2\alpha_\mu$は導波モードμからの放射損失，$h_{\mu\nu}$は電力結合係数であり次式で表わされる。

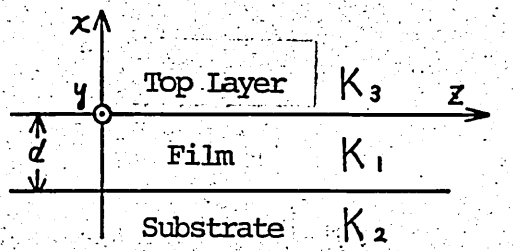
$$h_{\mu\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_{\mu\nu}(z')\, C_{\mu\nu}(z'+z) \rangle \exp\{-j(\beta_\mu - \beta_\nu)z\}\, dz \qquad (2-11)$$

$$2\alpha_\mu = \Sigma \int h_{\mu(\rho)}\, d\rho \qquad (2-12)$$

3.および4.で詳細に述べるが，電力結合係数は結合係数の自己相関関数のFourier変換として得られ，形式的には伝搬方向zに関する空間周波数を考えれば，結合係数の電力スペクトルである。放射損失は導波モードと放射モードとの間の電力結合係数をすべての放射モードの範囲にわたり積分し，総和を取ることにより得られる。

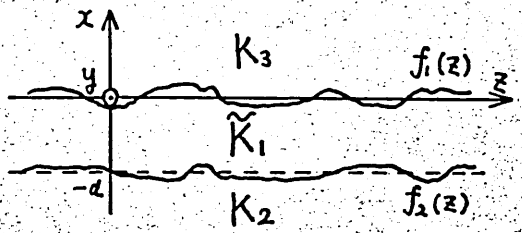
3. 導波路の構造と電力結合係数

本文で取り扱う異方性誘電体線路は三層平板構造で，その境界面にゆらぎを有する線路とする。このような不規則線路はゆらぎのない線路（基本系）のモード電力の結合問題として解析できる。基本系はできるだけ摂動系に近いものであり，しかもモード解析の簡単な構造が望ましい。そこで基本系として図1に示すような対角テンソルだけがろなる構造を選ぶ。この場合はTE，TMモードが分離され容易にモード解析できる。



$$K_i = \begin{bmatrix} K_{ixx} & 0 & \\ & K_{iyy} & \\ 0 & & K_{izz} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

図1. 基本系の構造



$$\langle f_i(z) \rangle = 0$$

$$\langle f_i^2(z) \rangle = \bar{\sigma}_i^2 \quad (i = 1, 2)$$

$$\tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} K_{1xx} & K_{1xy} & K_{1xz} \\ K_{1yx} & K_{1yy} & K_{1yz} \\ K_{1zx} & K_{1zy} & K_{1zz} \end{bmatrix} \qquad K_i = \begin{bmatrix} K_{ixx} & 0 & \\ & K_{iyy} & \\ 0 & & K_{izz} \end{bmatrix} \quad (i = 2, 3)$$

図2. 摂動系の構造

次に，摂動系として図2に示す境界面がランダム関数 $f_1(z)$，$f_2(z)$ で表わされる線路を考える．f_1 および f_2 の統計的性質は

$$\langle f_i(z) \rangle = 0 \qquad (3-1)$$

$$\langle f_i(z') f_i(z'+z) \rangle = \sigma_i^2 \exp\left(-\frac{z^2}{D_i^2}\right) \qquad (3-2)$$

で示されるように，平均値は0，二乗平均値 σ_1^2，σ_2^2 相関長 D_1, D_2 で表わされるガウス形の自己相関関数[※1]を持つものとする．

一方，比誘電率テンソルについての摂動が考えられるが，本文では簡単化のため，フィルムだけに摂動が加えられるものとし，上部層，下基板は基本系と同じ対角テンソルであるとする．境界面の変動やテンソルの摂動が充分に小さいとすれば，摂動系は基本系の固有モード電力の結合問題として考えることができる．

電力結合係数は式(2-8)，(2-11)，(3-1)，(3-2) を用いて求められるが，

$$|f_i(z)| \ll \lambda \qquad (3-3)$$

なる条件のもとにおいては，近似的に次のように表わせる[※2]．

※1 他に指数形の自己相関関数がよく用いられるが，等方性線路においては，大差ないとされている[4]．

○ $TE \longleftrightarrow TE$, $TM \longleftrightarrow TM$

$$h_{\mu\nu} = \frac{\omega^2 \epsilon_0^2}{16} \left\{ \left| \mathcal{E}_\mu^*(0) \cdot (K_1 - K_3) \cdot \mathcal{E}_\nu(0) \right|^2 F_1(\beta_\mu - \beta_\nu) + \left| \mathcal{E}_\mu^*(-d) \cdot (K_1 - K_2) \cdot \mathcal{E}_\nu(-d) \right|^2 F_2(\beta_\mu - \beta_\nu) \right\} \quad (3-4)$$

○ $TE \text{---} TM$ $(TM \text{---} TM)$

$$h_{\mu\nu} = \frac{\omega^2 \epsilon_0^2}{16} \left\{ 2\pi \left| \int_{-d}^{0} \mathcal{E}_\mu^*(x) \cdot (\tilde{K}_1 - K_1) \cdot \mathcal{E}_\nu(x)\, dx \right|^2 \delta(\beta_\mu - \beta_\nu) + \left| \mathcal{E}_\mu^*(0) \cdot (\tilde{K}_1 - K_1) \cdot \mathcal{E}_\nu(0) \right|^2 F_1(\beta_\mu - \beta_\nu) + \left| \mathcal{E}_\mu^*(-d) \cdot (\tilde{K}_1 - K_1) \cdot \mathcal{E}_\nu(-d) \right|^2 F_2(\beta_\mu - \beta_\nu) \right\} \quad (3-5)$$

ここに，F_1, F_2 は $f_1(z)$, $f_2(z)$ の電力スペクトルであり，式 (3-2) を Fourier 変換して得られる。

$$F_i(\beta_\mu - \beta_\nu) = \sqrt{\pi}\, \bar{\sigma}_i^2\, D_i \exp\left[-\left\{ \frac{D_i(\beta_\mu - \beta_\nu)}{2} \right\}^2 \right] \quad (3-6)$$

また，$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は統計的独立であるとした[※3]。すなわち

$$\langle f_1(z') f_2(z'+z) \rangle = 0 \quad (3-7)$$

とする。式 (3-4) は TE モード間，および TM モード間の結合を表わし，境界面の変動により，テンソルの対角項

※2 境界面の変動は僅かであるので，摂動積分の積分範囲は境界の近傍に限られる。従って電界はその範囲内では一定と考えられる。また厳密には $f_i(z)$ の正負によって結合係数は異なるが，その場合は相乗平均する。(13)

※3 相互相関関数として適切な関数がないため独立とした。対称三層等方性誘電体線路では，完全相関であれば結合係数は二倍になる(1)が，非対称構造ではそれ程でもない。

の変化によって生じた成分である。また式(3−5)はテンソルの非対角項の摂動に起因する成分で，AL, GL, AP, GP の各摂動に対してはTEとTMモードの結合に作用し，AE, GE摂動[5]ではTMモード間の結合に寄与する。電力スペクトル $F_i(\beta_\mu - \beta_\nu)$ はガウス形であるので，結合は伝搬定数の近いモードに対し，より強い結合が一般には生じるものと考えられる。さらに，境界面の変動と無関係に，式(3−5)の第一項は縮退モード間の結合に作用する。

4. 放射損失と電力結合方程式の行列表示

いま，N個の導波TEモードとM個の導波TMモードを有する基本系を考えれば，摂動系においては，N+M個の固有モード間に結合が生じる。電力結合係数は式(3−4)および(3−5)で表わされるが，便宜上，図3に示すような成分に分解して考える。

4.1 放射損失

導波TEモードμからの放射損失は次式で与えられる。

$$2\alpha_\mu^{(k)} = \int_{\sqrt{K_{3yy}}k_0}^{\sqrt{K_{2yy}}k_0} \mathcal{R}_{\mu\rho}^{(k,k)} \frac{\beta^{(k)}}{\rho^{(k)}} d\beta^{(k)} + \sum_{i=1}^{2} \int_0^{\sqrt{K_{3yy}}k_0} \mathcal{R}_{\mu\rho i}^{(k,k)} \frac{\beta^{(k)}}{\rho^{(k)}} d\beta^{(k)}$$
$$+ \int_{\sqrt{K_{3xx}}k_0}^{\sqrt{K_{2xx}}k_0} \mathcal{R}_{\mu\rho}^{(k,e)} \frac{\beta^{(e)}}{\rho^{(e)}} d\beta^{(e)} + \sum_{i=1}^{2} \int_0^{\sqrt{K_{3xx}}k_0} \mathcal{R}_{\mu\rho i}^{(k,e)} \frac{\beta^{(e)}}{\rho^{(e)}} d\beta^{(e)} \qquad (4-1)$$

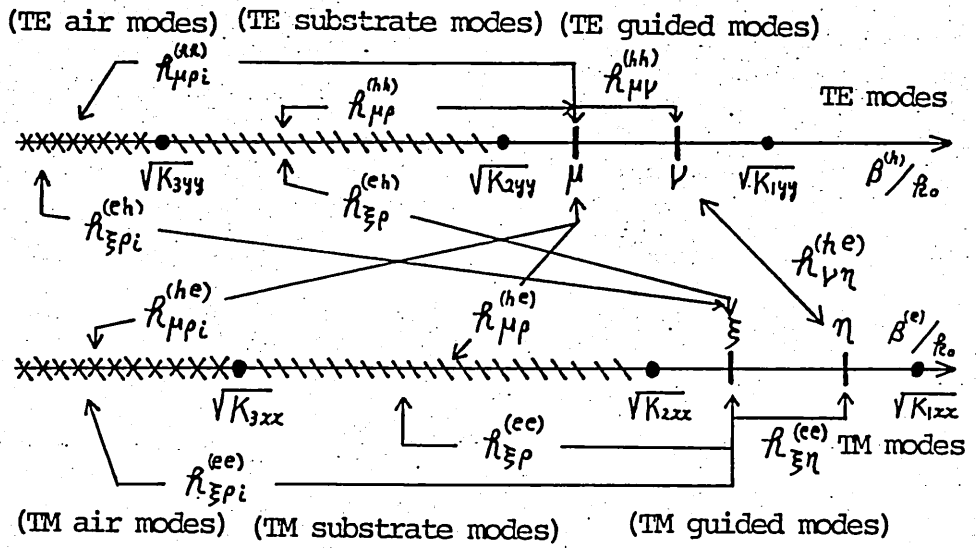


図3. 電力結合係数

式(4-1)において第一項は，TEサブストレートモードへの放射損失，第二項はTEエアーモードへの放射損失を表わし，第三，第四項はそれぞれTMサブストレートモード，TMエアーモードへの損失を示す。境界面の変動の相関長が長い場合は第二，第四項は無視でき，非常に短かければ後進モードへの放射損失を考える必要が生じる[14]。一般に，第一，第二項は第三，第四項に比べ大きいと考えられるが，放射モードが縮退モードとして存在するような構造では，式(3.5)の第一項が大きく作用し関係は逆になる。なお，第二，第四項における$\sum_{i=1}^{2}$はエアーモードが二重縮退モードであることに起因する。導波TMモードからの放射損失についても同様であり次式で与えられる。

$$2\alpha_\xi^{(e)} = \int_{\sqrt{K_{3xx}}k_0}^{\sqrt{K_{2xx}}k_0} \mathcal{A}_{\xi\rho}^{(ee)} \frac{\beta^{(e)}}{\rho^{(e)}} d\beta^{(e)} + \sum_{i=1}^{2} \int_0^{\sqrt{K_{2xx}}k_0} \mathcal{A}_{\xi\rho i}^{(ee)} \frac{\beta^{(e)}}{\rho^{(e)}} d\beta^{(e)}$$
$$+ \int_{\sqrt{K_{3yy}}k_0}^{\sqrt{K_{2yy}}k_0} \mathcal{A}_{\xi\rho}^{(eh)} \frac{\beta^{(h)}}{\rho^{(h)}} d\beta^{(h)} + \sum_{i=1}^{2} \int_0^{\sqrt{K_{3yy}}k_0} \mathcal{A}_{\xi\rho i}^{(eh)} \frac{\beta^{(h)}}{\rho^{(h)}} d\beta^{(h)} \quad (4-2)$$

4·2 電力結合方程式の行列表示

電力結合方程式(2-10)を計算に適した行列表示で表わすと次式となる。

$$\frac{d}{dz}\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{P} \quad (4-3)$$

ここに、$\mathbb{P}$ はN+M次元の列ベクトルであり、$P_1 \sim P_N$ はTEモードに、$P_{N+1} \sim P_{N+M}$ はTMモードに振り分けるものとする。$\mathbb{A}$ は電力結合行列であり、N+M行、N+M列の対称行列で、その各要素は

$$A_{\mu\nu} = -2\alpha_\mu^{(h)} - \sum_{\nu=1}^{N} \mathcal{A}_{\mu\nu}^{(hh)} - \sum_{\eta=1}^{M} \mathcal{A}_{\mu\eta}^{(he)} \quad (1 \le \mu \le N) \quad (4-4)$$

$$A_{\xi\xi} = -2\alpha_\xi^{(e)} - \sum_{\eta=1}^{M} \mathcal{A}_{\xi\eta}^{(ee)} - \sum_{\nu=1}^{N} \mathcal{A}_{\xi\nu}^{(eh)} \quad (4-5)$$
$$(N+1 \le \xi \le N+M)$$

$$A_{\mu\nu} = \mathcal{A}_{\mu\nu}^{(hh)} \quad (1 \le \mu \le N,\ 1 \le \nu < N) \quad (4-6)$$

$$A_{\mu\eta} = \mathcal{A}_{\mu\eta}^{(he)} \quad (1 \le \mu \le N,\ N+1 \le \eta \le N+M) \quad (4-7)$$

$$A_{\xi\eta} = \mathcal{A}_{\xi\eta}^{ee} \quad (N+1 \le \xi < N+M,\ N+1 \le \eta \le N+M) \quad (4-8)$$

で示される。したがって、電力結合方程式(4-3)の解は電力結合行列$\mathbb{A}$の固有値問題に帰着する。$z=0$ における モード電力の初期値を $\mathbb{P}(0)$ で示すと、$z=z$ に

おける値は

$$\mathbb{P}(z) = \mathbb{T}\exp(\Lambda z)\,\mathbb{T}^{T}\mathbb{P}(0) \qquad (4-9)$$

になる。ここに、

$$\exp(\Lambda z) = \begin{bmatrix} e^{-\alpha^{(1)}z} & & 0 \\ & e^{-\alpha^{(2)}z} & \\ & & \ddots \\ 0 & & e^{-\alpha^{(N+M)}z} \end{bmatrix} \qquad (4-10)$$

$\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \cdots, \alpha^{(N+M)}$ は行列$\mathbb{A}$の固有値であり、$\mathbb{T}$は固有ベクトル $B_{\mu}^{(i)}$ からなる直交行列であり、$\mathbb{T}^{T}$はその転置行列である。

式(4-9)において、行列 $\mathbb{T}\exp(\Lambda z)\,\mathbb{T}^{T}$ は電力に関する伝達行列と呼ぶべきものである。また、固有値$\alpha^{(i)}$は摂動系の固有モードの減衰を表わしており、固有ベクトル $B_{\mu}^{(i)}$ はモード電力の分布を示している。

5. 数値計算例

異方性薄膜誘電体線路の例として、光軸がz軸方向の $LiTaO_3$ から作られた線路[16]（$K_{1xx}=2.198^2$, $K_{1yy}=K_{1zz}=2.193^2$, $K_{2xx}=2.188^2$, $K_{2yy}=K_{2zz}=2.183^2$, $K_{3xx}=K_{3yy}=K_{3zz}=1.0$）を基本系に選び考察を加える。まず、基本系の導波モードについて、等価屈折率（β/k_0）と規格化膜厚（d/λ）との関係を図4に示す。同図より、TMモードの下限は基板の屈折率（$\sqrt{K_{2xx}}=2.188$）であ

るので，それ以下の等価屈折率を有するＴＥモードは必ずＴＭ放射モードが縮退モードとして存在する構造になっている。したがって，テンソルの非対角成分が摂動した場合は，これらのＴＥモードはＴＭ放射モードと強い結合を生じる。

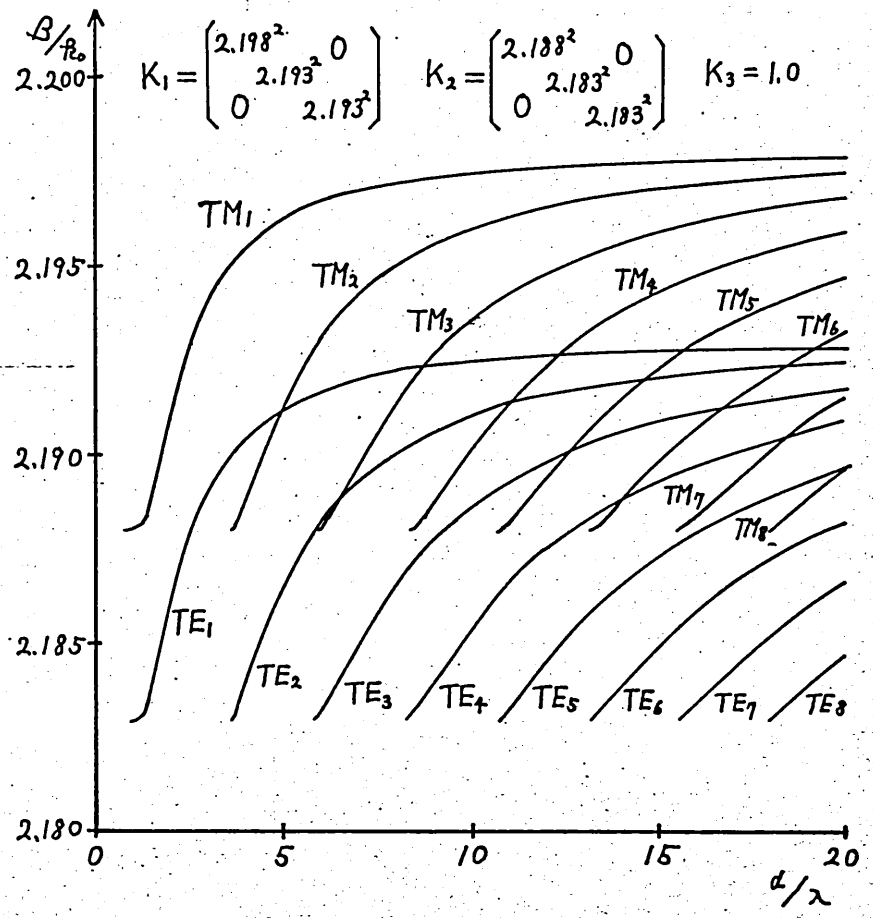


図４．基本系における等価屈折率と膜厚の関係

摂動系として，規格化膜厚 $d/\lambda = 10$（TE．4モード，TM．4モード）なる線路において，境界面がガウス形の自己相関関数で示されるゆらぎを有し，さらに，フィルムにAL摂動が生じた場合を想定する。ただし，境界面のゆらぎは，簡単化のために $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が同じ二乗平均 σ^2，同じ相関長Dを持つものとする。

まず，AL摂動の無い場合，すなわちTE．TM波が分離できるとき，摂動系の第一固有値（最小固有値）と第二固有値の相関長に対する関係を図5に，第一固有値に対する固有ベクトルを図6に示す。第一固有値は，伝搬距離が非常に長くなった場合の放射損失を表わしており，固有ベクトルは，この場合，モード電力の配合比を示している[13][15]。同図より，相関長の値によって大きく変化することがわかるが，これは等方性線路の場合[15]と同じである。

光集積回路では，伝搬する距離は短かいので，第一固有値よりむしろ，距離の短かい領域でのモード電力の移行特性が重要である。いま，TE_1 モードが $z=0$ において励振された場合のモード電力の移行を図7に示す。同図は，相関長 $D/\lambda = 1.0$，ゆらぎの標準偏差 $\sigma/\lambda = 0.1$，AL摂動 $K_{1xy} = K_{1yx} = 0.05$ の場合であり，$TE_2 \sim TE_4$，$TM_1 \sim TM_4$ の各モードへの電力

移行がよくわかる。 $K_{1xy}=0$ の場合はTMモードへの移行が無いことを除けば図7と大差ないので省略する。

興味深い TE_4 モードについて、$K_{1xy}=0.05$ の場合を図8に、$K_{1xy}=0$ の場合を図9に示す。両図を比較すれば明らかなように、TE_4 モードの減衰はAL摂動の有無により大きく変化する。これはTM放射モードとの縮退関係の結果である。図8の一点鎖線はゆらぎの無い場合を示している。最後に、TE_4 モードの $z=\lambda\times10^4$ 点での減衰量とAL摂動の関係を、$\bar{\sigma}/\lambda$ をパラメータにして図10に示す。

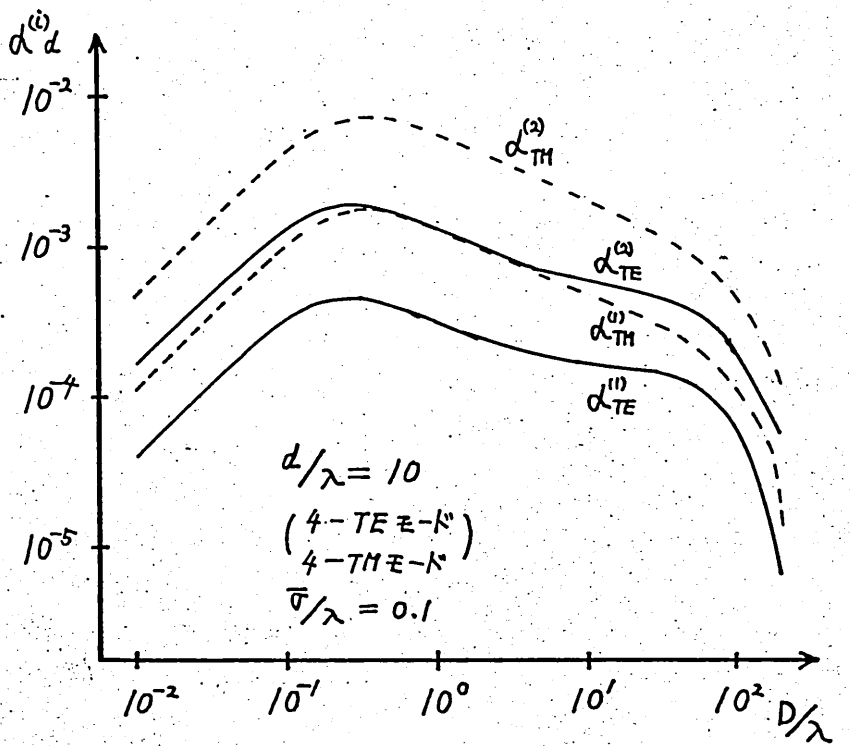


図5. 第1,第2固有値と相関長の関係

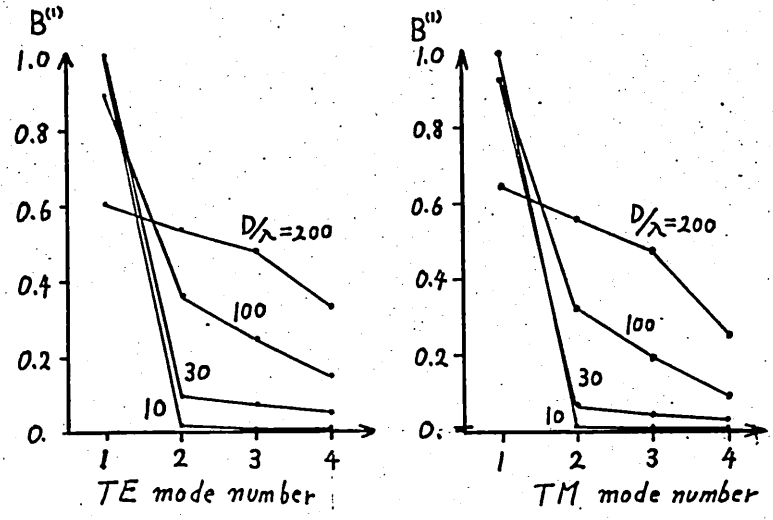


図6　固有ベクトル

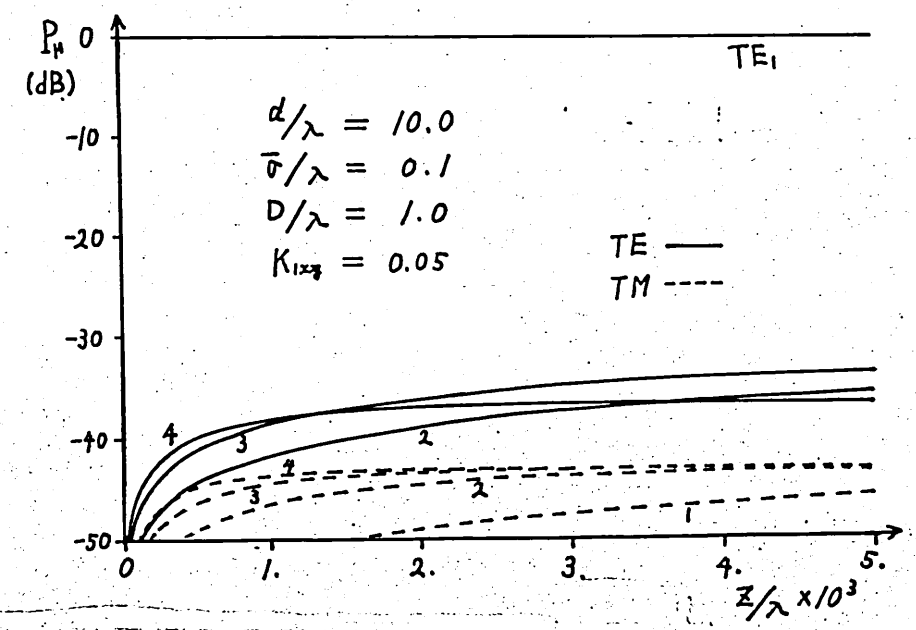


図7　TE1 励振時の電力移行特性

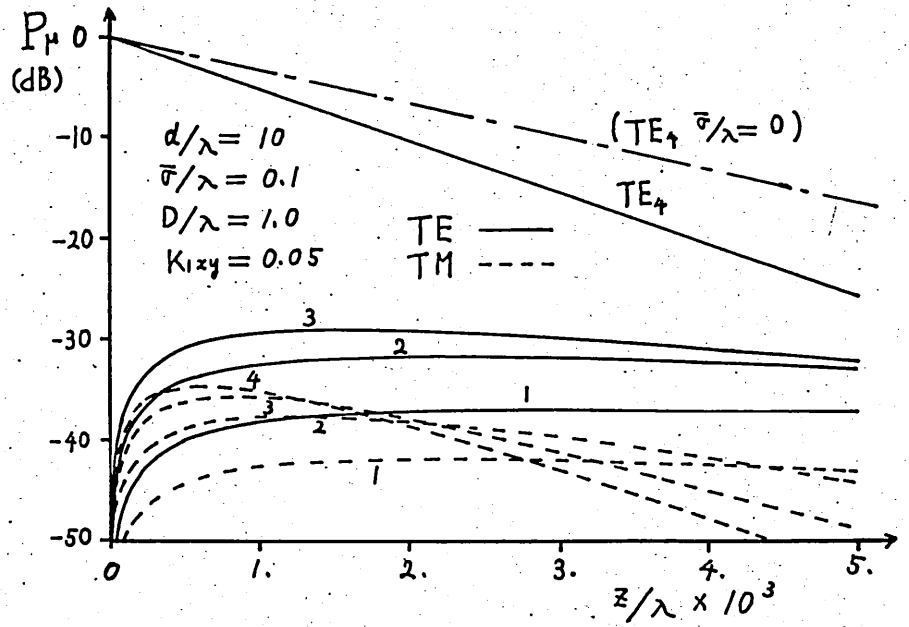


図 8. TE_4 励振時の電力移行特性

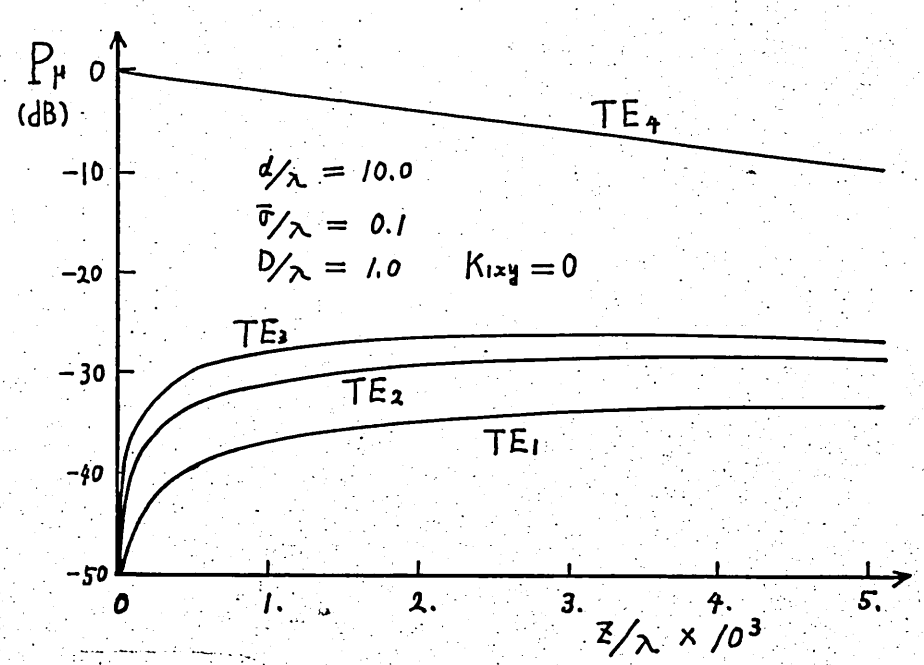


図 9. TE_4 励振時の電力移行特性

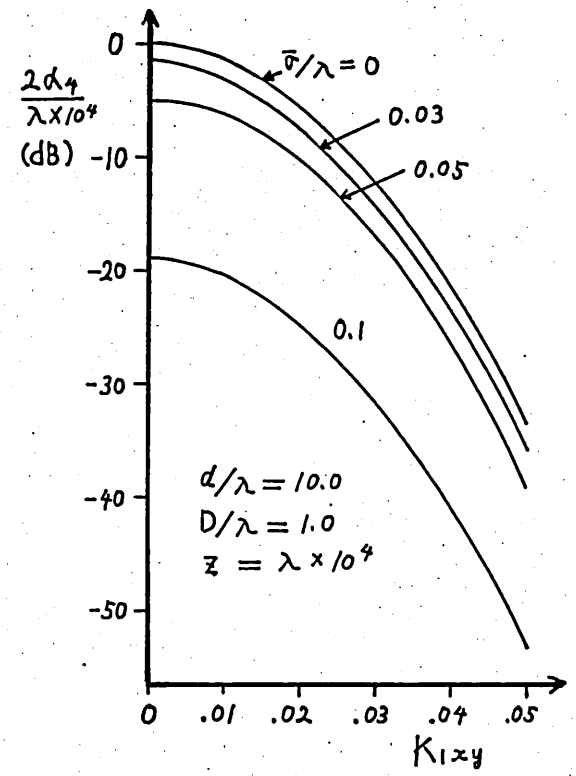


図10. TE_4モードの減衰量

6. むすび

本文では，境界面にゆらぎを持つ異方性誘電体線路におけるモード変換や放射特性について，電力結合方程式を用いて解析した。その結果，等方性誘電体線路の場合と同じように，ゆらぎの相関長が摂動系の固有モードの減衰を大きく左右すること，マルチモード線路では，モード変換のため，伝搬距離が短かくても不要モード電力を無視できない場合が生じること等が明らかになった。

線路の不完全さは，ステップ状の屈折率を持つ線路においては，本文のように境界面の変動による摂動が最も大きいが，屈折率のゆらぎやテンソルの非対角成分の不均一性等についても考えられる。とりわけ，レーリー散乱による効果は重要であり，今後の計算課題である。

最後に，本報告について，有益なる御教示，御討論を賜わった森 静雄講師，小南昌信助手，岸岡 清助手ならびに同研究室の諸氏に深く謝辞の意を表する。

文 献

(1) D.Marcuse;"Mode Conversion Caused by Surface Imperfections of a Dielectric Slab Waveguide",Bell Syst. Tech.J.48,(Dec.1969).

(2) S.D.Personick;"Time Dispersion in Dielectric Waveguides",Bell.Syst.Tech.J.50,(March 1971).

(3) 末松，古屋；"非対称薄膜光誘電体導波路の固有姿態と散乱損失"；信学論(C)，56-C，5（昭48-05）

(4) 今井，朝倉；"薄膜光線路内の屈折率変動による姿態変換"，信学論(C)，58-C，12（昭50-12）

(5) 山本，牧本，"異方性薄膜光導波系の回路論的取扱いと非相反素子設計への応用"，信学論(C)，56-C，3，(昭48-3)

(6) J.Warner;"Nonreciprocal Magnetooptic Waveguides", IEEE Trans.Vol.MTT-23,(Jan.1975).

(7) 六島，岸岡，森，小南；"多層異方性誘電体線路の回路論的解析"，信学論(C)，59-C，6 (昭51-6)

(8) 岡村，山本，牧本；"半漏れ構造の異方性薄膜光導波系の固有モード解析とモードフィルタへの応用"，信学論(C)，59-C，4 (昭51-4)

(9) D.Marcuse;"Derivation of Coupled Pawer Equations", Bell Syst.Tech.J.51,(Jan.1972).

(10) D.Marcuse;"Coupled-Mode Theory for Anisotropic Optical Waveguides",Bell.Syst.Tech.J,54,(July-Aug.1975).

(11) 山本，小山田，牧本，"異方性薄膜導波系の固有モード解析とその応用"，信学論(C)，55-C，10 (昭47-10)

(12) B.Crosignani,B.Daino,P.D.Porto;"Statistical Coupled Equations in Lossless Optical Fibers",IEEE Trans. Vol.MTT-23,(May 1975).

(13) D.Marcuse;"Theory of Dielectric Optical Waveguides", Academic Press,New York & London (1974).

(14) D.Marcuse;"Rayleigh Scattering and the Impulse Response of Optical Fibers",Bell Syst.Tech.J.53,(April-1974).

(15) D.Marcuse;"Power Distribution and Radiation Losses in Multimode Dielectric Slab Waveguides",Bell Syst. Tech.J.51,(Feb.-1972).

(16) D.Marcuse;"Electrooptic Coupling between TE and TM modes in Anisotropic Slabs",IEEE Trans.Vol.QE-11 (Sep.-1975).

輻射科学研究会資料

非線形計画法による八木・宇田アンテナの最適設計

小南　昌信　　六島　克
（大阪府立大学工学部）

昭和51年12月3日

1. まえがき

八木・宇田アンテナは，簡単な構造で比較的高い利得が得られることから各方面で広く用いられている。理論的な解析については既に多くの報告がなされ[1)~3)]，その設計法についてもいくつかの興味ある方法が提案されている[4)~10)]。例えば特定の形の八木・宇田アンテナについては，利得に着目して設計式を導き，それから最適パラメータの値を決定する方法[6)]や，素子間隔あるいは素子長の利得に対するperturbation procedureから最適設計する方法[7)]が提案されている。これらは利得のみについての設計法である。

八木・宇田アンテナの設計において重要な問題は，低サイドローブレベルでかつ高い利得，低い入力定在波比（SWR）で高い利得，あるいは広い周波数帯域にわたって高い利得をもつような素子長および素子間隔の組み合わせを決定することである。

最近，D. Kajfezによって非線形計画法による低サイドローブレベルあるいは広帯域特性をもつ八木・宇田アンテナの最適設計例が報告されている[9),10)]。これらは利得と制約条件を適当なcost functionによって評価して，これを非線形計画法によって最適化しようとするものである。

この場合，最適なパラメータの値は試行錯誤的に決定されるため計算に要する時間は，最適値に至るまでの試行回数と一回の試行計算時間の積で決まり，これは実用上できる限り短かいことが望ましい。

本報告は，多素子八木・宇田アンテナの設計を，各素子上の電流分布をPocklington形積分方程式から出発してGalerkin法で解き，非線形計画法によって制約条件をもつ最適化問題として取り扱っている。この方法では，電流分布はすべての要素がtabled functionで表わされた対称行列から計算され，最適化の過程で節約計算されているため，能率のよい最適化試行計算が行なえる。

実際にいくつかの設計条件を想定して数値計算を行なった結果，従来の設計法では困難であった指向性およびインピーダンスについても[4]~[8]，容易に比較的短時間で設計できることが判かった。

2. 八木・宇田アンテナの解析

図1に示すようなN本の素子からなる八木・宇田アンテナについて考える。第1素子が反射器，第2素子が放射器，第3素子から第N素子までが導波器であり，各素子は長さℓ_i，半径a_iおよび座標原点からの距離d_i ($i=1,2,\cdots,N$)をもつものとする。

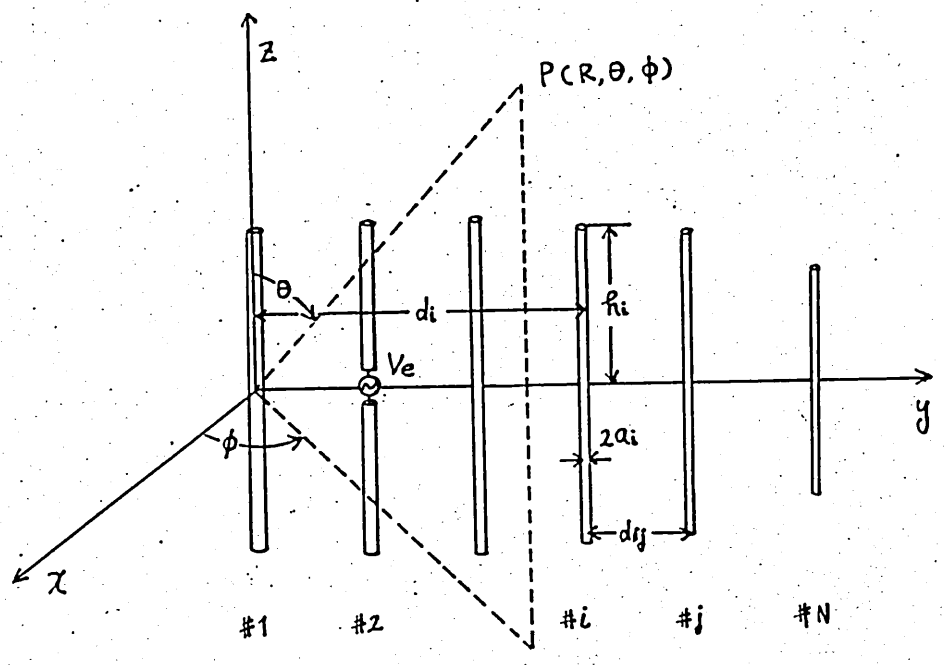


図1　多素子八木・宇田アンテナの構造

よく知られているように平行多素子ダイポールアンテナ列の各素子上の電流 $I(z_j')$ は，次の Pocklington 形積分方程式を満足する[11]。

$$\frac{V_i}{j30}\delta(z_i) = \sum_{j=1}^{N}\int_{-h_j}^{h_j} I_j(z_j')K_{ij}(z_i - z_j')\,dz_j' \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N)$$

ここで $\delta(z_i)$ は Dirac のデルタ関数であり，励振電圧および積分核 $K_{ij}(z_i - z_j')$ は次の関係式で与えられる。

$$V_i = \begin{cases} V_e & (i=2) \\ 0 & (i \neq 2) \end{cases} \tag{2}$$

$$K_{ij}(x_i - x_j') = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2\right)\psi_{ij}(x_i - x_j') \tag{3}$$

$$\psi_{ij}(x_i - x_j') = \frac{e^{-j\beta\sqrt{(x_i - x_j')^2 + d_{ij}^2}}}{\sqrt{(x_i - x_j')^2 + d_{ij}^2}} \tag{4}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} a_i & (i=j) \\ |d_i - d_j| & (i \neq j) \end{cases} \tag{5}$$

いま第 j 素子上の電流を全領域（$|x_j'| \leq h_j$）で2種類の分布関数 $S_{jm}(x_j')$ の一次結合によって，

$$I_j(x_j') = \sum_{m=1}^{2} I_{jm} S_{jm}(x_j') \tag{6}$$

$$S_{jm}(x_j') = \begin{cases} \sin\beta(h_j - |x_j'|) \\ 1 - \cos\beta(h_j - |x_j'|) \end{cases} \tag{7}$$

と表わし，2N個の複素電流振幅 I_{jm} を Galerkin 法で決定する。すなわち式(6)を式(1)に代入して，両辺に $S_{in}(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,N\ ;\ n=1,2)$ を乗じて領域（$|x_i| \leq h_i$）で積分すると次のような代数方程式を得る。

$$\frac{V_i}{j30} S_{in}(0) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{2} I_{jm} T_{ijmn}(h_i, h_j) \tag{8}$$

$$(i=1,2,\cdots,N\ ;\ n=1,2)$$

$$T_{ijmn}(R_i, R_j) = \int_{-R_i}^{R_i}\int_{-R_j}^{R_j} S_{in}(x_i)\, S_{jm}(x_j')\, K_{ij}(x_i - x_j')\, dx_i\, dx_j' \qquad (9)$$

ここで $2N \times 2N$ 個の係数 $T_{ijmn}(R_i, R_j)$ の作る行列は対称で，その要素は単一ダイポールに関する King の記法[11] $C_a(R)$, $S_a(R)$, $E_a(R)$ を用いると次のように表わされる．

$$\begin{aligned} T_{ij11}(R_i, R_j) = {} & \sin\beta(R_i + R_j)\{C_{dij}(R_i + R_j) - C_{dij}(R_j)\} \\ & + \sin\beta(R_i - R_j)\{C_{dij}(R_i - R_j) + C_{dij}(R_j)\} \\ & - \cos\beta(R_i + R_j)\{S_{dij}(R_i + R_j) - S_{dij}(R_j)\} \\ & - \cos\beta(R_i - R_j)\{S_{dij}(R_i - R_j) - S_{dij}(R_j)\} \\ & - 2\cos\beta R_j\{\sin\beta R_i\, C_{dij}(R_i) - \cos\beta R_i\, S_{dij}(R_i)\} \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} T_{ij12}(R_i, R_j) = {} & E_{dij}(R_i + R_j) - E_{dij}(R_i - R_j) - 2\cos\beta R_i\, E_{dij}(R_j) \\ & - \cos\beta(R_i + R_j)\{C_{dij}(R_i + R_j) - C_{dij}(R_j)\} \\ & + \cos\beta(R_i - R_j)\{C_{dij}(R_i - R_j) + C_{dij}(R_j)\} \\ & - \sin\beta(R_i + R_j)\{S_{dij}(R_i + R_j) - S_{dij}(R_j)\} \\ & + \sin\beta(R_i - R_j)\{S_{dij}(R_i - R_j) - S_{dij}(R_j)\} \\ & - 2\sin\beta R_j\{\sin\beta R_i\, C_{dij}(R_i) - \cos\beta R_i\, S_{dij}(R_i)\} \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} T_{ij21}(R_i, R_j) = {} & E_{dij}(R_j + R_i) - E_{dij}(R_j - R_i) - 2\cos\beta R_j\, E_{dij}(R_i) \\ & - \cos\beta(R_j + R_i)\{C_{dij}(R_j + R_i) - C_{dij}(R_i)\} \\ & + \cos\beta(R_j - R_i)\{C_{dij}(R_j - R_i) + C_{dij}(R_i)\} \\ & - \sin\beta(R_j + R_i)\{S_{dij}(R_j + R_i) - S_{dij}(R_i)\} \\ & + \sin\beta(R_j - R_i)\{S_{dij}(R_j - R_i) - S_{dij}(R_i)\} \\ & - 2\sin\beta R_i\{\sin\beta R_j\, C_{dij}(R_j) - \cos\beta R_j\, S_{dij}(R_j)\} \end{aligned} \qquad (12)$$

$$
\begin{aligned}
T_{ij22}(\ell_i,\ell_j) &= \beta\ell_i\{E_{dij}(\ell_j+\ell_i)+E_{dij}(\ell_j-\ell_i)\}\\
&+\beta\ell_j\{E_{dij}(\ell_i+\ell_j)+E_{dij}(\ell_i-\ell_j)\}\\
&-2\sin\beta\ell_i\,E_{dij}(\ell_j)-2\sin\beta\ell_j\,E_{dij}(\ell_i)\\
&-\sin\beta(\ell_i+\ell_j)\{C_{dij}(\ell_i+\ell_j)-C_{dij}(\ell_j)\}\\
&+\sin\beta(\ell_i-\ell_j)\{C_{dij}(\ell_i-\ell_j)+C_{dij}(\ell_j)\}\\
&+\cos\beta(\ell_i+\ell_j)\{S_{dij}(\ell_i+\ell_j)-S_{dij}(\ell_j)\}\\
&-\cos\beta(\ell_i-\ell_j)\{S_{dij}(\ell_i-\ell_j)-S_{dij}(\ell_j)\}\\
&+2\sin\beta\ell_j\{\cos\beta\ell_i\,C_{dij}(\ell_i)+\sin\beta\ell_i\,S_{dij}(\ell_i)\}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

なおここで $C_a(\ell)$, $S_a(\ell)$, $E_a(\ell)$ は次のような関数である。

$$
\left.
\begin{aligned}
C_a(\ell) &= \int_{-\ell}^{\ell}\cos\beta x\,\frac{e^{-j\beta\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx\\
S_a(\ell) &= \int_{-\ell}^{\ell}\sin\beta|x|\,\frac{e^{-j\beta\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx\\
E_a(\ell) &= \int_{-\ell}^{\ell}\frac{e^{-j\beta\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx
\end{aligned}
\right\}
\tag{14}
$$

式(8)で与えられる代数方程式を適当な数値解法で解くと，電流分布の未知展開係数 I_{jm} $(j=1,2,\cdots,N;\ m=1,2)$ は決定される。ここで $N=1$ として得られる結果は単一ダイポールの電流分布を変分法から求めた結果[11]と一致することからも判るように，本解析法は多素子ダイポールアンテナ列の変分法による解析結果とも一致する。

図1において，座標原点から十分離れた点 $P(R,\theta,\phi)$

における電界は，式(6)の電流分布を用いると次式で与えられる。

$$E_\theta(\theta,\phi)=j60\frac{e^{-j\beta R}}{R}\sum_{j=1}^{N}e^{j\beta d_j\sin\theta\sin\phi}\left[I_{j1}\frac{\cos(\beta h_j\cos\theta)-\cos\beta h_j}{\sin\theta}\right.$$

$$\left.+I_{j2}\left\{\sin(\beta h_j\cos\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)-\frac{\sin\beta h_j}{\sin\theta}\right\}\right]$$

$$E_\phi(\theta,\phi)=0 \qquad (15)$$

また指向性利得は次式となる。

$$G_T(\theta,\phi)=\frac{R^2}{30}\cdot\frac{|E_\theta(\theta,\phi)|^2}{V_e\cdot Re\{I_{21}\sin\beta h_2+I_{22}(1-\cos\beta h_2)\}} \qquad (16)$$

給電点におけるハ木・宇田アンテナの入力インピーダンス Z_{in} は，上で求めた電流分布より，

$$Z_{in}=\frac{V_e}{I_{21}\sin\beta h_2+I_{22}(1-\cos\beta h_2)} \qquad (17)$$

で与えられる。

3. 関数最小化法

前章のハ木・宇田アンテナの解析から判るように，構造を決めるパラメータ（$h_i, a_i, d_i : i=1,2,\cdots,N$）の一つの組み合わせに対して，利得は積分方程式の解より計算される。したがってこの利得を目的関数として，何らかの最適化手法によって最大利得を与えるような構造パラメ

yの各値を決定すれば，最適設計が行なえる。この場合設計値を得るに要する時間は，最適化過程における試行回数と目的関数を計算する時間の積で決まり，実用上はできる限り短かいことが望ましい。

本報告では，最適化過程で繰り返し計算される利得の計算時間の短縮を主眼として，アルゴリズムの比較的簡単なHookeとJeevesの非線形最適化法[12][13]を選んだ。この方法は探索移動とパターン移動と呼ばれる2つの主要部分を含んでいる。探索の方向を各変数の軸方向に選び，前章で示した解析法を用いると最適化過程において電流分布を求める行列要素の計算は，各段階で一部分のみを修正してゆけばよくきわめて能率よく最適化を行なうことができる。

最適化問題を目的関数の最小化として取り扱うことにすると，制約条件の下にある量を最大とする問題は目的関数を次のように表わすと，一種の制約条件のない関数最小化問題となる。

$$F = -G + Wg \qquad (18)$$

ここでGは最大化すべき量，Wは重みであり，gは制約条件を評価するための関数で，条件が満たされると0となり条件から離れると増加するように決める。

実用的なハ木・平田アンテナの設計においては，種々

複合した制約条件が現われるが，それらの基本的なものとして以下のような場合が考えられる．

(a) 前方指向性利得の最大化

これは全く制約条件のない場合の最適化で，目的関数は式(18)における右辺を，

$$\left.\begin{aligned} G &= G_{fr} \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

とする．ここで G_{fr} は前方指向性利得を表わす．

(b) 入力定在波比を抑さえた設計

入力定在波比をできるだけ低く抑さえて利得を最大とする設計においては，給電線インピーダンス Z_0 と八木・宇田アンテナの入力インピーダンス Z_{in} より決る定在波比

$$\rho = \frac{|Z_{in}+Z_0|+|Z_{in}-Z_0|}{|Z_{in}+Z_0|-|Z_{in}-Z_0|} \tag{20}$$

を用いて，式(18)の右辺を次のようにする．

$$\left.\begin{aligned} G &= G_{fr} \\ g &= \rho - 1 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(c) サイドローブを抑さえた設計

アンテナパターンのサイドローブ領域 ($\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$) での電界強度 $E_\theta(\theta, \pi/2)$ を，前方における値 $E_\theta(\pi/2, \pi/2)$ より D. dB 低いレベルに保ち利得を最大とする設計においては，領域内の適当に選んだ L 個の方向 θ_ℓ ($\ell = 1, 2, \cdots, L$)

での強度より式(18)の右辺の各項を次のように定義する。

$$\left.\begin{aligned} G &= G_{fr} \\ g &= \sum_{\ell=1}^{L} (D_\ell - D_0)\, H(D_\ell - D_0) \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

ただし D_ℓ および $H(x)$ は次のような関係にある。

$$D_\ell = 20 \log \left| \frac{E_\theta(\theta_\ell, \pi/2)}{E_\theta(\pi/2, \pi/2)} \right| \qquad (23)$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \qquad (24)$$

なお式(24)の $H(x)$ は Heaviside の階段関数である。

(d) 広帯域設計

ここでは利得の周波数特性に注目して，ある周波数帯域 ($f_1 \leqq f \leqq f_4$) での利得ができるだけ高いレベルで平坦となるような広帯域設計を考えることにして，式(18)右辺の各項は，

$$\left.\begin{aligned} G &= G_{av} \\ g &= \sum_{\ell=1}^{L} (G_{av} - G_\ell)\, H(G_{av} - G_\ell) \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

とする。なお G_ℓ は帯域内で適当に選んだ L 個の周波数における利得，G_{av} はその平均値で，

$$G_{av} = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^{L} G_\ell \qquad (26)$$

である。

ところで非線形計画法によって目的関数の最小化を行なった場合，初期値の与え方によって異なる最小値に収束することがある。これは，このような手法によって得られる最小値は局所的なもので絶対的な値でないためで，初期値をいろいろとってみる必要がある。

4. 数値計算例

先の2章で示した解析法と関数最小化法を組み合わせて行なったいくつかの八木・宇田アンテナの設計例を以下に示す。

八木・宇田アンテナの構造を決めるパラメータは素子長 ℓ_i，半径 a_i および間隔 d_i $(i=1,2,\cdots,N)$ で合計 $3N$ 個あるが，これらをすべて最適化することは計算が煩雑となるため，ここでは各素子の半径は一定とし，長さあるいは間隔のどちらか一方の組み合わせについて考えることにする。

表1および図2に本設計法の妥当性を検討するため行なった，各素子長の設計値および利得の周波数特性について，D. Kajfez の設計結果[10]との比較を示す。ここで設計は中心周波数 $f_0=300\,MHz$ について，素子半径 $a_i=3.37\,mm$ $(i=1,2,\cdots,6)$，放射器長 $\ell_2=250\,mm$，反射器と放射器

	This theory		D.Kajfez's theory		
Element No.	Initial h_i/λ	Optimum h_i/λ	Optimum h_i/λ	Tolerance o.1dB h/λ	Spacing d_i/λ
#1	0.250	0.240	0.240	0.0039	0
#2	0.250	0.250	0.250	-	0.250
#3	0.220	0.216	0.218	0.0100	0.400
#4	0.220	0.218	0.216	0.0037	0.550
#5	0.220	0.154	0.182	0.0236	0.700
#6	0.220	0.221	0.221	0.0038	0.850
Gain	10.82	11.47	11.5		-

表1　最大利得を与える構造パラメータ (N=6)

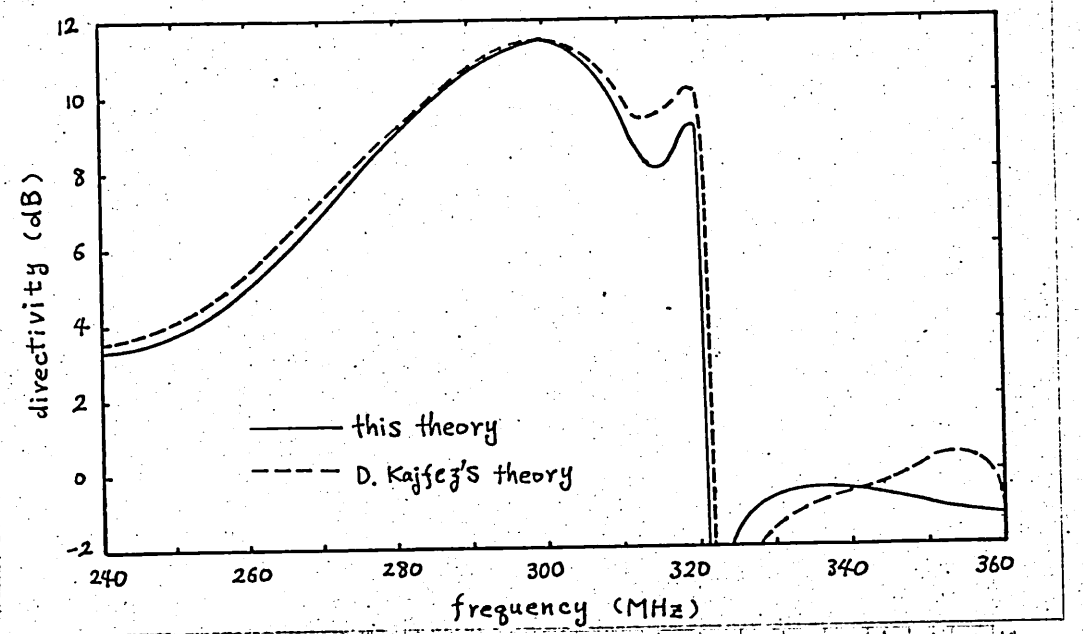


図2　最大利得をもつ八木・宇田アンテナの周波数特性

の間隔 $d_2 = 250$ mm，すべての導波器の間隔 $d_{i,i-1} = 150$ mm ($i = 3,4,5,6$) として，各素子長 h_1, h_3, h_4, h_5, h_6 について最適化を行なったものである。これら2つの解析法

や最適化法は異なるにもかかわらず，非常によい一致がみられることからここで示した手法の妥当性は一応確認されていると考えられる。

表2は素子数 $N=3,4,5,6$ なる4種類の八木・宇田アンテナの指向性利得が最大となるよう式(19)から計算した結果である。ここで各素子の半径は $a_i=0.00337\lambda$ $(i=1,2,\cdots,N)$ で一定とし，Hooke と Jeeves の方法における探索移動のステップ幅は $K=0.001\lambda$，収束判定定数は変化率 $\varepsilon=0.001$ にとり，素子長と素子間隔を交互に最適

		N = 3		N = 4		N = 5		N = 6	
		h_i/λ	d_i/λ	h_i/λ	d_i/λ	h_i/λ	d_i/λ	h_i/λ	d_i/λ
Initial array	#1	0.255	0	0.255	0	0.255	0	0.255	0
	#2	0.245	0.250	0.245	0.250	0.245	0.250	0.245	0.250
	#3	0.215	0.560	0.215	0.560	0.215	0.560	0.215	0.560
	#4	–	–	0.215	0.870	0.215	0.870	0.215	0.870
	#5	–	–	–	–	0.215	1.180	0.215	1.180
	#6	–	–	–	–	–	–	0.215	1.490
	Gain	8.13		10.40		10.88		11.17	
Optimum array	#1	0.236	0	0.239	0	0.242	0	0.242	0
	#2	0.270	0.251	0.259	0.251	0.262	0.251	0.255	0.243
	#3	0.217	0.559	0.218	0.559	0.221	0.559	0.221	0.530
	#4	–	–	0.221	0.869	0.220	0.869	0.220	0.836
	#5	–	–	–	–	0.225	1.181	0.218	1.210
	#6	–	–	–	–	–	–	0.208	1.770
	Gain	9.15		11.35		12.53		13.51	

表2　最大利得を与える構造パラメータ ($N=3,4,5,6$)

化している。これらの指向性パターンをE面（$\phi = \pi/2$）および H 面（$\theta = \pi/2$）で示したのが図3である。

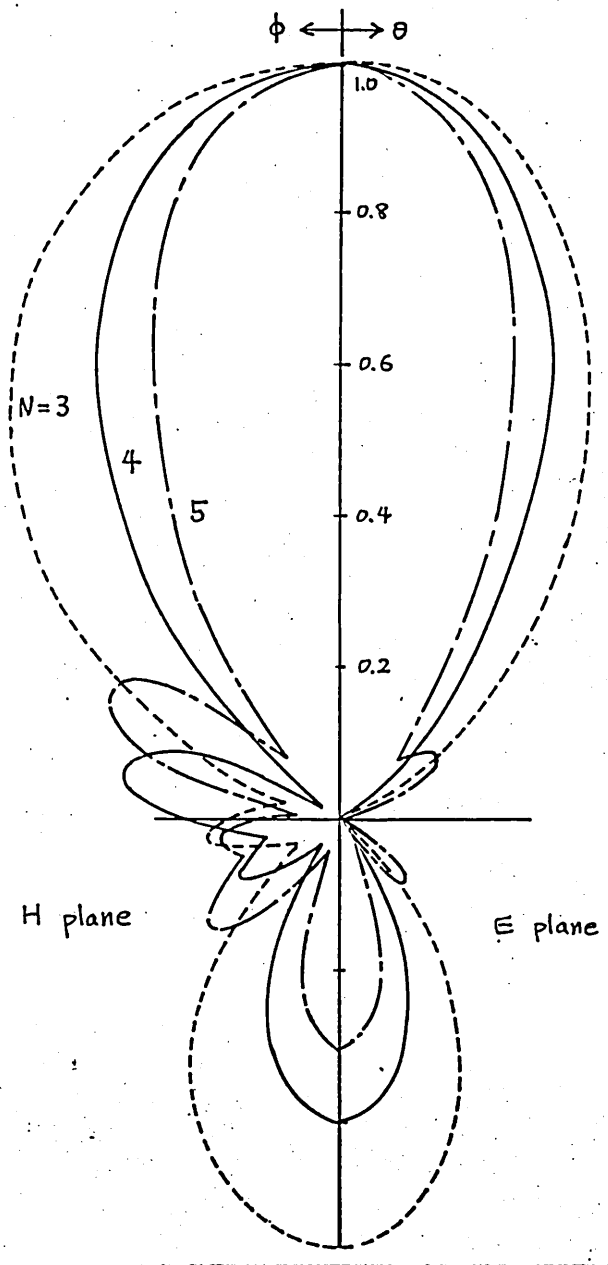


図3　最大指向性利得をもつ
八木・宇田アンテナの指向性

	Initial array		Optimum
	h_i/λ	d_i/λ	length h_i/λ
#1	0.242	0	0.2561
#2	0.255	0.243	0.2348
#3	0.221	0.530	0.2131
#4	0.220	0.836	0.2128
#5	0.218	1.210	0.2088
#6	0.208	1.770	0.2011
Gain	13.51		11.12
Z_{in}	12.48+j98.46		49.954+j0.0031
SWR(50Ω)	19.74		1.001

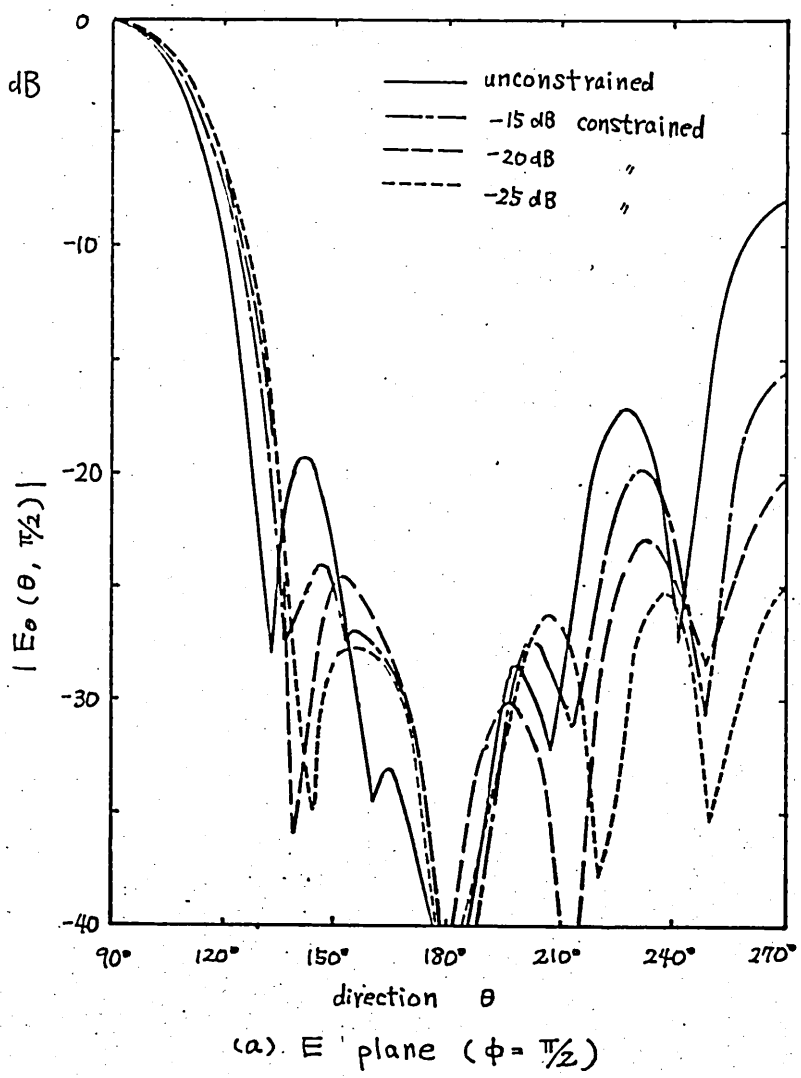
表3　入力定在波比を抑さえた設計

表3は入力定在波比（SWR)を抑さえて，利得が最大となるよう設計したものである。給電線のインピーダンスZ_0は50Ω として，表2のN=6のデータを初期値とし，重みはW=5.0とした。計算時間はTOSBAC-5600-120によって約3分でSWR=1.0となり十分満足のいく結果が得られている。

	Initial array		Optimum length h_i/λ		
	h_i/λ	d_i/λ	-15dB	-20dB	-25dB
#1	0.242	0	0.242	0.247	0.247
#2	0.255	0.243	0.265	0.280	0.345
#3	0.221	0.530	0.221	0.216	0.216
#4	0.220	0.836	0.220	0.220	0.220
#5	0.218	1.210	0.203	0.198	0.188
#6	0.208	1.770	0.203	0.193	0.193
Gain	13.51		13.05	12.12	11.95

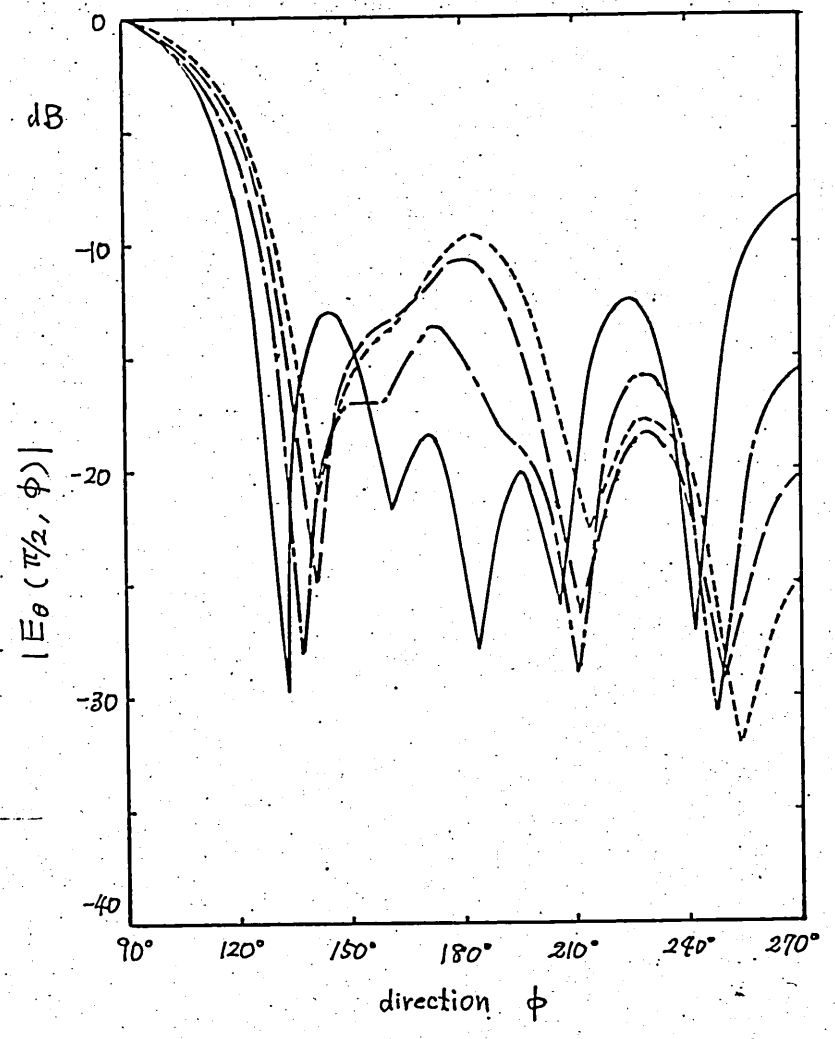
表4　サイドローブを抑さえた設計

表4および図4(a),(b)はN=6について,サイドローブレベルを抑さえて利得が最大となるよう設計した結果である。初期値は表2の最適値を用いて長さ ℓ_i ($i=1,2,\cdots,6$)についてのみ最適化を行ない,サイドローブレベルが-15, -20, -25 dB以下となるよう設計している。なお目的



(a) E plane ($\phi = \pi/2$)

図4 低サイドローブレベルアンテナの指向性(E面)



(b) H plane ($\theta = \pi/2$)

図4 低サイドローブレベルアンテナの指向性（H面）

関数は式(18), (22)を用いて重みは $W=1.0$, ステップ幅は $K=0.005\lambda$, 判定定数は $\varepsilon=0.001$, 電界分布照合点の数は $L=10$ としている。計算は3種のレベルのハミング・宇田アンテナについてまとめて行なったが，計算に要した時間は約4分30秒であった。

	Initial array		Optimum length	
	hi/λ	di/λ	±30Mhz	±50Mhz
#1	0.242	0	0.262	0.277
#2	0.255	0.243	0.405	0.431
#3	0.221	0.530	0.201	0.181
#4	0.220	0.836	0.185	0.180
#5	0.218	1.210	0.198	0.193
#6	0.208	1.770	0.208	0.223
Average gain	6.51		9.02	7.48

表5　広帯域設計 (f_0 = 300 MHz)

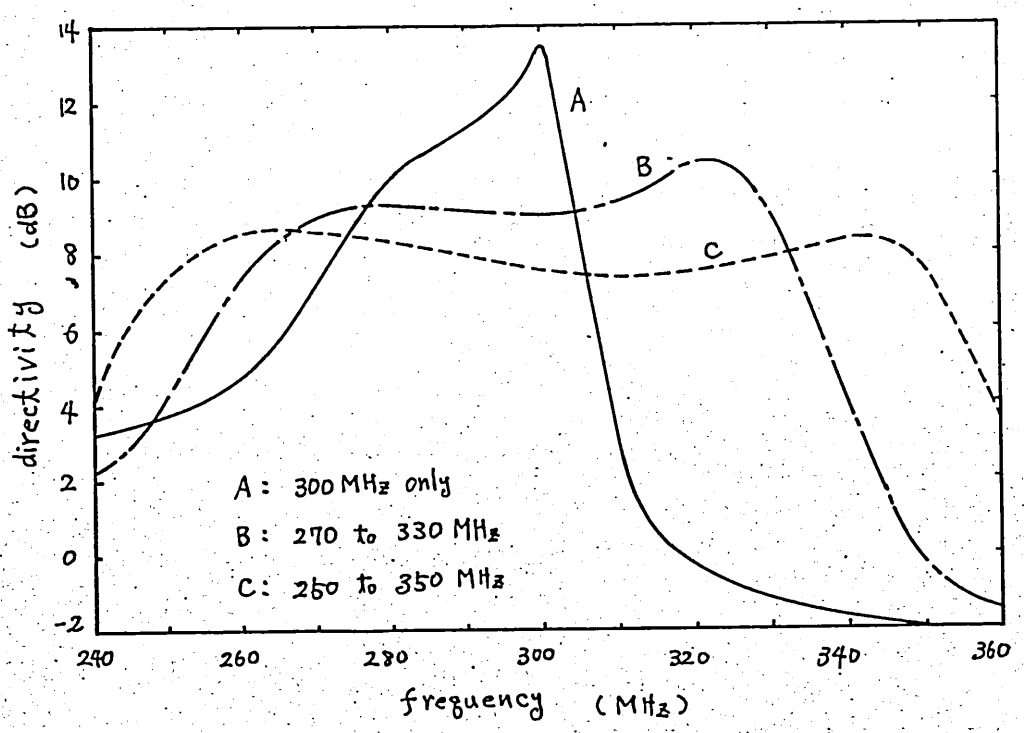


図5　広帯域アンテナの周波数特性

最後に式(25)に従って計算した広帯域設計の結果を表5および図5に示す。初期値は表2のN=6のデータ，重みはW=1.0，ステップ幅はK=0.005λ，利得照合点の数はL=3を用いた。また中心周波数はf_0=300MHzとし，帯域は±30MHzおよび±50MHzの2種について計算している。計算に要した時間は各々約11分であった。

5. むすび

本報告は多素子八木・宇田アンテナの利得を非線形計画法によって，入力インピーダンスやサイドローブレベルに課せられた設計仕様を満たしながら最大とする方法，および広い周波数帯域にわたって一定とする方法について示した。相互に結合した多素子ダイポールアレーアンテナの電流分布に関するPocklington形積分方程式を，2項近似によるGalerkin法で解き，最大化すべき利得と設計仕様を一つの目的関数で評価することによってHookeとJeevesの直接探索法で最適パラメータの値を決定している。この方法では電流分布はすべての要素がtabled functionで表わされた対称行列から計算され，最適化過程ではその一部分のみを順次修正してゆけばよく，入力インピーダンスやサイドローブレベルを考慮した最適設計も比較的短時間で行なうことができる。

ここでは制約条件を個別に取り扱ったが，実用的な八木・宇田アンテナにおいては，複数個の条件を満たして利得を最大とするような場合が多い．またすべての素子がダイポールで構成された八木・宇田アンテナでは，単に位置と長さの組み合わせだけで広帯域化することには限界があるように思われる．したがってこれらの点については，今後さらに検討する必要がある．

謝辞　日頃から有益なご検討をいただいている本学電気工学科の森啓真氏，岸岡清氏ならびに数値計算に御協力いただった院生山村正造君に深く感謝します。

参考文献

1) R.J.Mailloux : "The long Yagi-Uda array", IEEE Trans., AP-14, p.128 (March 1966).

2) W.M.Cheong and R.W.P.King : "Arrays of unequal and unequally spaced dipoles", Radio Science, Vol.2(New Series), p.1303 (Nov. 1967).

3) G.A.Thiele : " Analysis of Yagi-Uda-type antennas", IEEE Trans., AP-17, p.24 (Jan. 1969).

4) 抜山平一編："超短波通信の研究，第6編超短波空中線の研究"，P.275，コロナ社（昭和28年）．

5) H.W.Ehrenspeck and H.Poehler : "A new method for obtaining maximum gain from Yagi antennas", IRE Trans., AP-7, p.379 (Oct. 1959).

6) 雄山厚, 大山宏, 片山賢爾 : "利得に着目した多素子八木・宇田アンテナの設計", 信学論(B), 57-B, P.337 (昭49-06).

7) D.K.Cheng and A.Chen : "Optimum element spacing for Yagi-Uda arrays", IEEE Trans., AP-21, p.615 (Sept. 1973).

8) C.A.Chen and D.K.Cheng : "Optimum element length for Yagi-Uda arrays", IEEE Trans., AP-23, p.8 (Jan. 1975).

9) D.Kajfez : "Nonlinear optimization reduces the sidelobes of Yagi antenna", IEEE Trans., AP-21, (Commun.), p.714 (Sept. 1973).

10) D.Kajfez : "Nonlinear optimization extends the bandwidth of Yagi antenna", IEEE Trans., AP-23, (Commun.), p.287 (march 1975).

11) R.W.P.King : "Theory of linear antenna", Harvard Univ.Press, Cambridge, Mass., p.237 1956).

12) J.コワリック, M.R.オズボーン : "非線形最適化問題", 培風館(昭45).

13) L.C.W.ディクソン : "非線形最適化計算法", 培風館(昭49).

輻射科学研究会資料

周波数変調された発振器における自己注入同期

飯田幸雄　今井興一　森田正信
（関西大学　工学部）

昭和51年12月3日

1. まえがき

単一周波数をもつ発振器の注入同期については古くから研究が行なわれ，最近固体発振器の安定化，低雑音化ならびにFMまたはPM波の増幅に関して詳細に検討されており[1]，自己注入同期によるFM雑音改善の報告[2]もある。

一方，複数の周波数成分をもつ発振器への注入同期については，例えば周波数変調された発振器の側帯波に注入信号を加えても同期がとれるという報告がある[3]。

著者らは，発振器の寄生振動回路の周波数に相当する外力を作用して実験を行なっている際に，周波数変調された発振器の出力の一部を適当な時間遅れをもつ帰還回路を通して自己注入することにより周波数変調指数が増加できることを知った。そこで，周波数変調された発振器の自己注入同期として解析を行ない，回路の遅延時間と変調指数の増加率との関係を明らかにし，実験結果とよく一致して，変調感度[4]を増加できることがわかった。また，この周波数依存性についても考察を行なったので報告する。

2. 基礎式の導出

図1で表わされるマイクロ波発振器において，何らかの方法により系のサセプタンスを外部変調信号により変化すると出力波は周波数変調される。

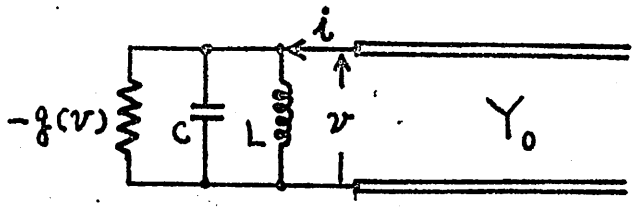


図1. 等価回路

今，容量Cが変調角周波数pで次のように変化するものとする。

$$C = C_0 + \Delta C \sin pt \qquad (1)$$

発振器の端子電圧をv，電流をiとすると

$$(C_0 + \Delta C \sin pt)\frac{dv}{dt} + (-g + p\Delta C \cos pt)v + \frac{1}{L}\int v\,dt = i \qquad (2)$$

電圧，電流の振幅および位相は時間的にゆっくり変化するものとし，

$$\left.\begin{aligned} v &= V\cos(\omega t + \phi) \\ i &= A\cos(\omega t + \theta) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

とおくと，

$$\frac{dv}{dt} = -V\left(\omega + \frac{d\phi}{dt}\right)\sin(\omega t+\phi) + \frac{dV}{dt}\cos(\omega t+\phi)$$
$$\int v\,dt \fallingdotseq \left(\frac{V}{\omega} - \frac{V}{\omega^2}\cdot\frac{d\phi}{dt}\right)\sin(\omega t+\phi) + \frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{dV}{dt}\cos(\omega t+\phi) \quad (4)$$

と書ける[5]．これらを式(2)に代入し，平均法により位相に関する式を求めると

$$\left(C_0 + \frac{1}{\omega^2 L} + \Delta C\,\sin pt\right)\frac{d\phi}{dt} + C_0\omega - \frac{1}{\omega L} + \omega\,\Delta C\,\sin pt = \frac{A}{V}\sin(\theta-\phi) \quad (5)$$

今，発振器の出力線路が特性アドミタンス Y_0 で終端されている場合を考える．式(5)の右辺はゼロとなり，また角周波数 ω は

$$\omega = \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{L\,C_0}}$$

と考えればよいので次式を得る。

$$\left(1 + \frac{\Delta C}{2C_0}\sin pt\right)\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\Delta C}{2C_0}\,\omega_0\,\sin pt \quad (6)$$

ここで，$\mu \equiv \Delta C/2C_0$ とおくと，$\mu \ll 1$ なので

$$\frac{d\phi}{dt} = -\mu\omega_0\sin pt \quad (7)$$

これを積分すると次式となる。

$$\phi = \frac{\mu\omega_0}{p}\cos pt \qquad (8)$$

したがって，発振器出力は変調指数 $m_{f_0} = \mu\omega_0/p$ の周波数変調波形となる。

3．自己注入時の発振器出力

発振器出力の一部が時間遅れ τ_d の帰還回路を通って自己注入される場合，発振器出力端子電流 i は

$$i = Y_0 V\left[2k\cos\{\omega(t-\tau_d)+\phi_d\} - \cos(\omega t+\phi)\right] \qquad (9)$$

ここで，小信号注入の場合を考えると，k は自己注入量を表わし，負荷側の反射係数の絶対値である。また，ϕ_d は時刻 $t=\tau_d$ における位相 ϕ を表わす。式(5)と同様にして，

$$\left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \mu\sin pt\right)\frac{d\phi}{dt} = -\frac{Y_0}{C_0}k\sin(\omega\tau_d + \phi - \phi_d) - \Delta\omega - \mu\omega\sin pt \qquad (10)$$

ただし，$\Delta\omega = \omega - \omega_0$ である。

$\mu \ll 1$，$\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ とすると式(10)は次のように近似できる。

$$\frac{d\phi}{dt} = -Y_0/C_0 \cdot k \sin(\omega t_d + \phi - \phi_d)$$

$$-\Delta\omega - \mu\omega \sin pt \qquad (11)$$

$\mu = 0$ とすると，$d\phi/dt = 0$，$\phi_d = \phi$ となるので次式が成立する。

$$k\frac{Y_0}{C_0} \sin\omega t_d + \Delta\omega = 0 \qquad (12)$$

これは周波数変調しない場合の自己注入時の周波数関係を表わしているので，ω をこの式によって定めることにする。

式(12)を用いて，式(11)中の $\Delta\omega$ を消去すると

$$\frac{d\phi}{dt} = -k\frac{Y_0}{C_0}\{\sin(\omega t_d + \phi - \phi_d) - \sin\omega t_d\}$$

$$\therefore -\mu\omega \sin pt \qquad (13)$$

t_d が変調信号の周期に比べて十分小さい，即ち

$$t_d \ll \frac{2\pi}{p} \qquad (14)$$

とすると

$$\phi - \phi_d \doteqdot \frac{d\phi}{dt} t_d \qquad (15)$$

さらに

$$t_d \ll \frac{2\pi}{\omega_m} \qquad (16)$$

とすると

$$\sin(\omega t_d + \phi - \phi_d) \fallingdotseq \sin\omega t_d + \frac{d\phi}{dt} t_d \cos\omega t_d \qquad (17)$$

(ただし，ω_m は発振器出力の最大周波数偏移である。)　と書ける。

式(13)は

$$\frac{d\phi}{dt}\left(1 + k\frac{Y_0}{C_0} t_d \cos\omega t_d\right) = -\mu\omega \sin pt \qquad (18)$$

積分すると

$$\phi = \frac{\mu\omega/p}{1 + k\frac{\omega_0 t_d}{Q_{ex}} \cos\omega t_d} \cos pt \qquad (19)$$

ここで，$Q_{ex} = \omega_0 C_0 / Y_0$ である。$\omega t_d = (2n+1)\pi$ (n は整数)となるように t_d を選ぶと

$$\phi = \frac{m_{f0}}{1 - k\frac{\omega_0 t_d}{Q_{ex}}} \cos pt \qquad (20)$$

ここで，$m_{f0} = \mu\omega_0/p$ は自己注入しないときの変調指数である。

したがって，周波数変調指数 m_f は式(14)と(16)の条件が満たされるとき，変調周波数によらずに $\left(1 - k\frac{\omega_0 t_d}{Q_{ex}}\right)^{-1}$ 倍に増加する。

4. 実験結果

測定は10GHz帯のガン発振器のバイアス電圧に変調信号を重畳し周波数変調した出力をサーキュレータ，アッテネータ，移相器を通して自己注入する図2の回路で行なった。自己注入しないときの変調指数をm_{f0}，自己注入時のそれをm_fとして増加率m_f/m_{f0}の自己注入量ξに対する測定結果を図3に示す。すべての測定点は一本の曲線の上によく乗っている。自己注入特性より式(12)を用いて外部Qを求めると$Q_{ex}=180$であった。

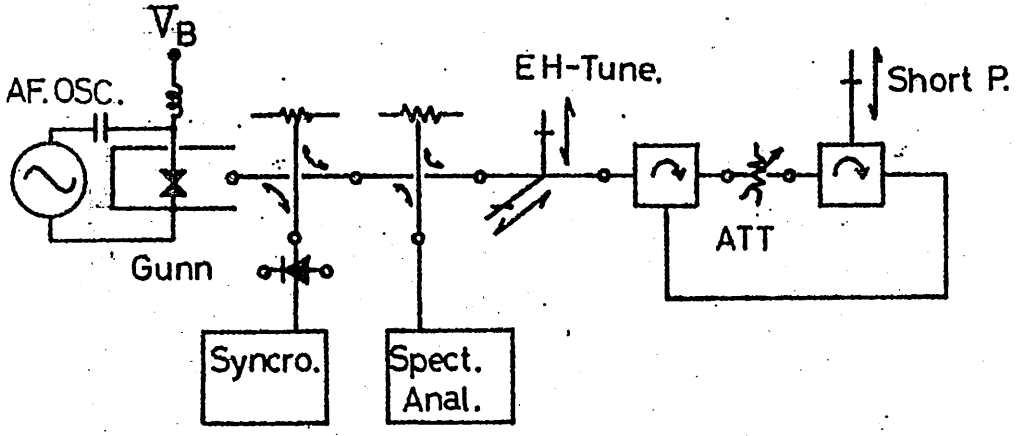


図2 実験回路構成

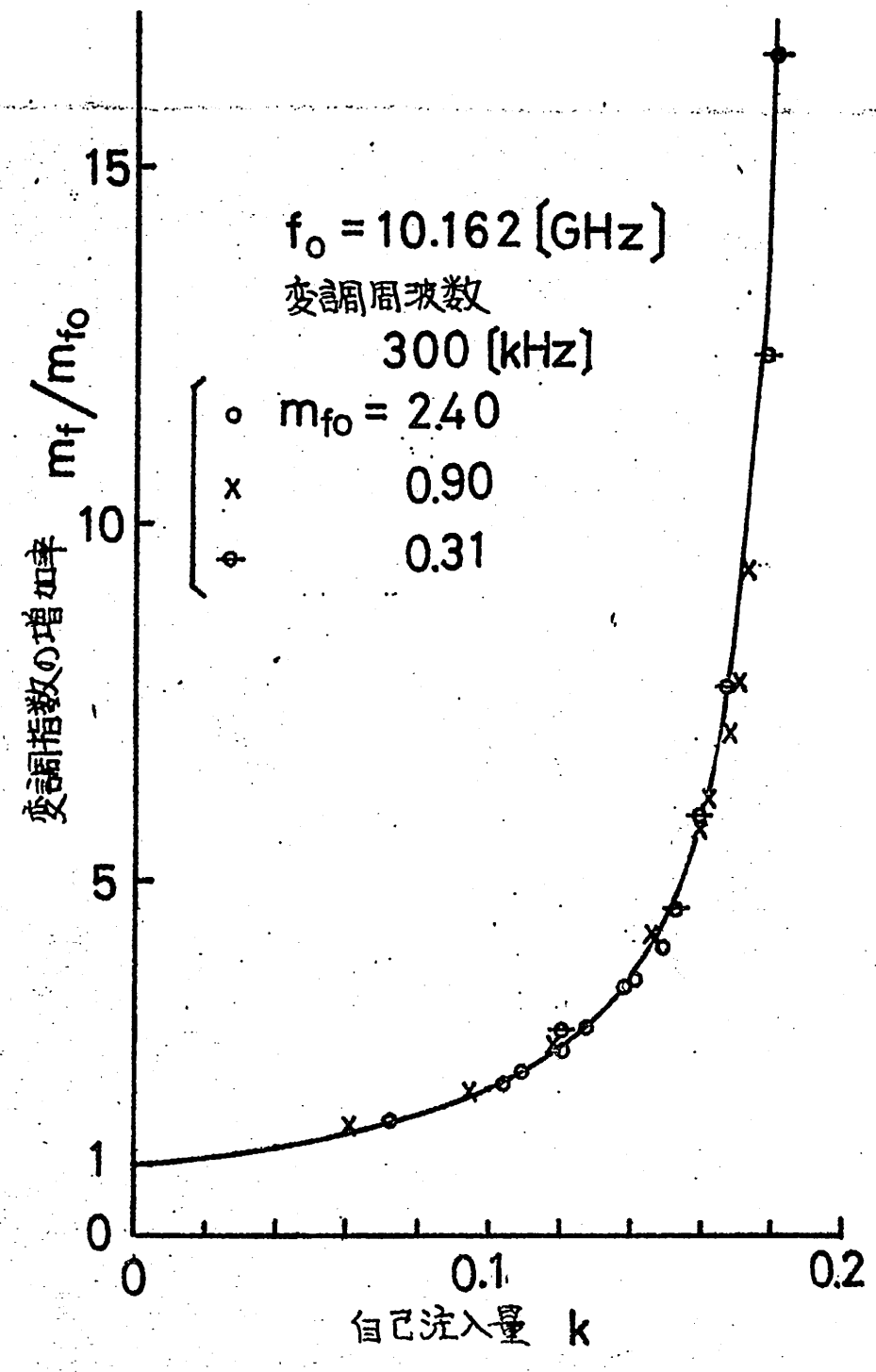


図 3 変調指数の増加率特性

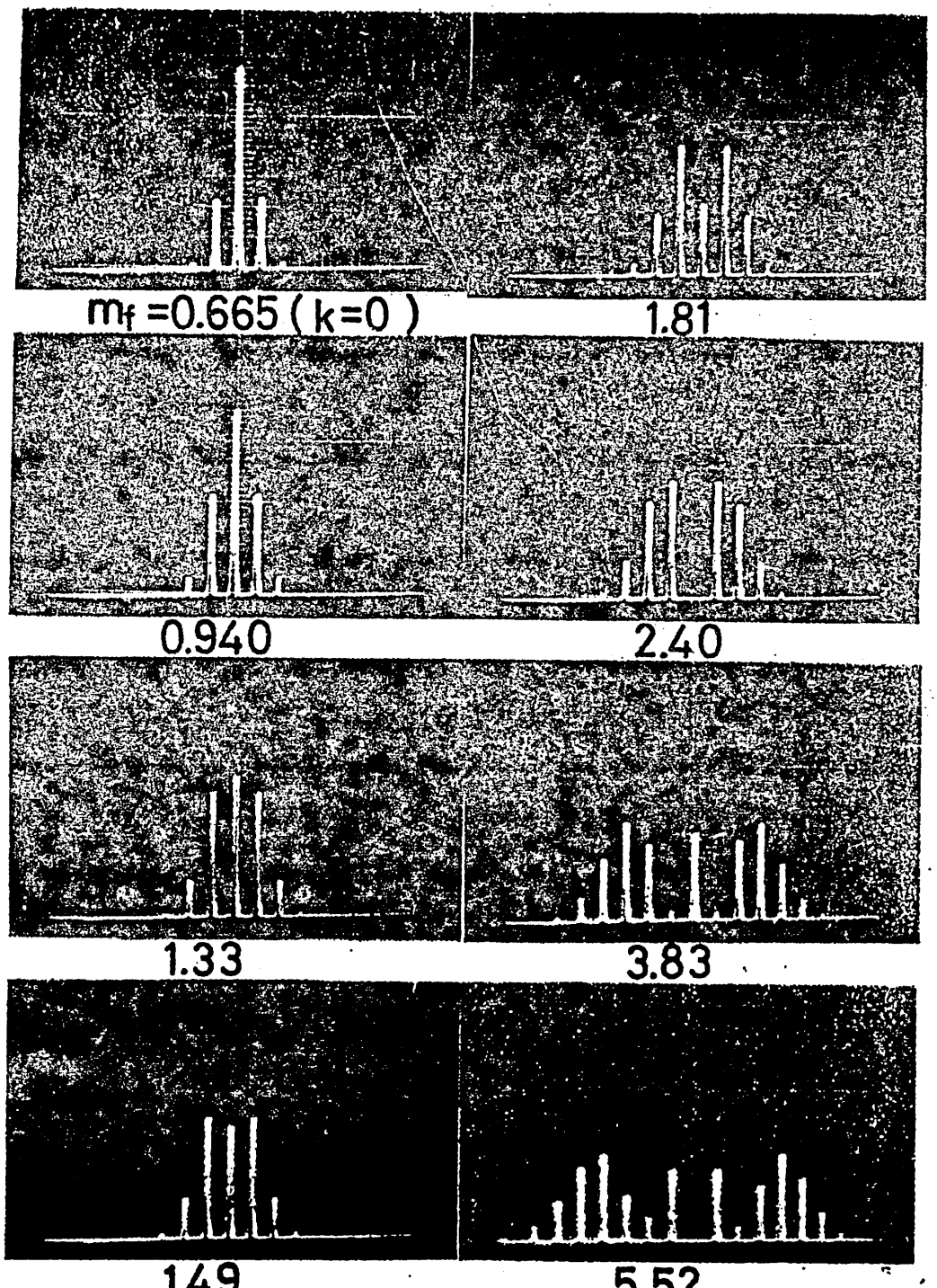


図4 スペクトル推移

遅延時間 $\tau_d = 14.7$ msec と仮定して式(20)より計算した値を同図に実線で示してある。この遅延時間が群速度から計算すると約3.3mの導波管長に相当するが，実験回路の導波管長は約2.5mであった。サーキュレータによる時間遅れもあると考えられるのでほぼ妥当ではないかと思われる。

図4は長を大きくしていくときのスペクトル推移で m_f の増加の様子を示している。

変調周波数に対する増加率の変化特性を図5に示す。

これは $M_f = 2.4$ となるように m_{f_0} を変化させて得た値である。増加率は変調周波数が3MHz

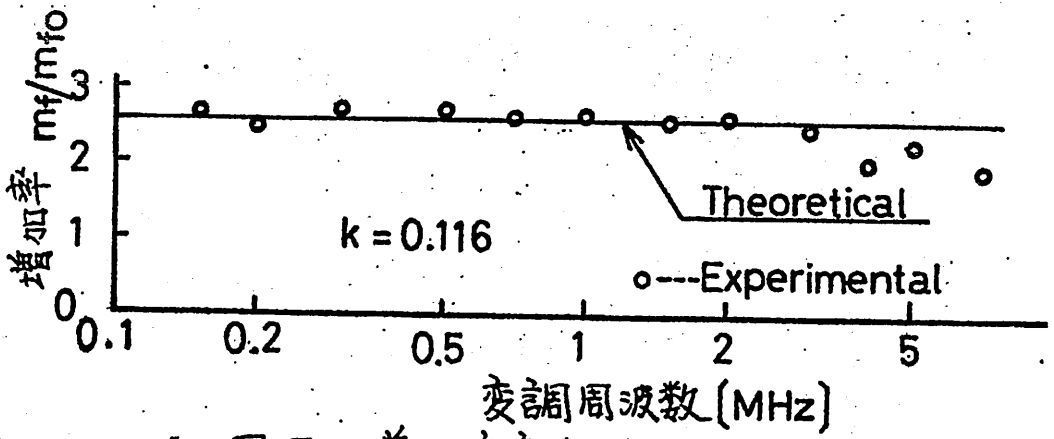


図5 増加率変化特性

以下のとき周波数に依存しないで一定値を取っている。$t_d = 14.7$ nsec であり，3MHzの2の時の最大周波数偏移は7.2MHzであるので，式(16)によって，$t_d < 2\pi / 9\omega_m$ の範囲で増加率の周波数依存性がないと考えてよい。このように自己注入量を増加することにより周波数変調指数を増加できるが，同時にFM雑音とか温度変化等に基づく発振周波数の変動も大きくなるので増加率があまり大きくとれないように思われる。しかし，m_f の大きいFMをマイクロ波発振器に直接かけようとすれば大きい変調信号を加えなければならず，AM成分が現われることになる。図6に自己注入量に対する振幅変調度の変化を示す。m_f が増加しても振幅変調度はかえって減少する傾向にある。しかし，自己注入によらないで，直接ガンダイオードに変調をかけようとすれば大きいAM成分を含むことになる。図7はこの特性を示している。

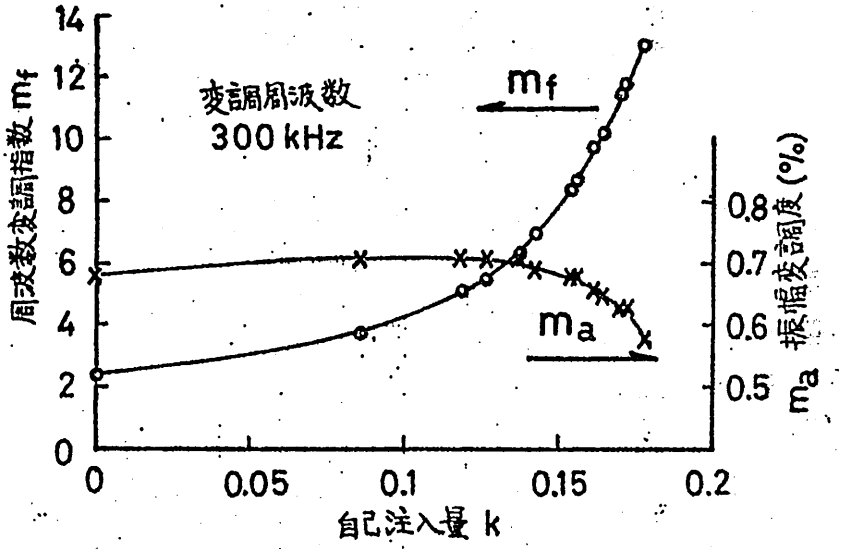


図6 自己注入時の振幅変調度特性

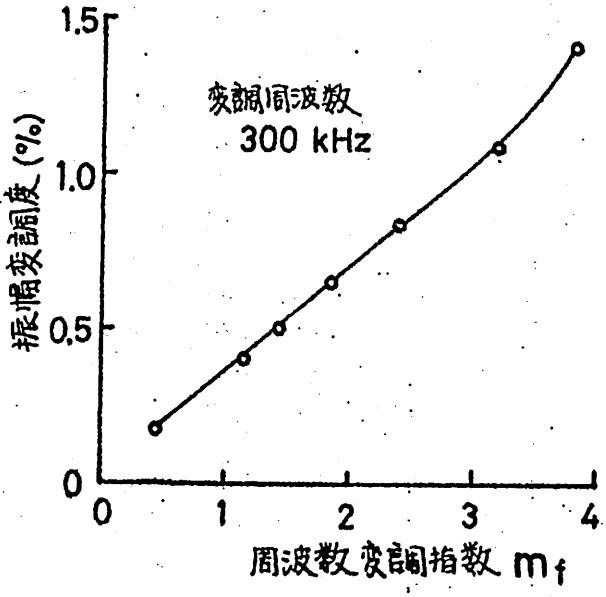


図7. Gunn発振器の振幅変調度特性

ここに使用したガン発振器の周波数および出力特性を図8に示す。実験を行なった動作点，$V_B = 7.5$ [V] での周波数変化は約 13MHz/V であり，この値は実験から得られた $m_{f_0} = 2.4$ とするに要する 300 kHz の信号電圧振幅 75mV とよく一致している。また出力特性から計算すると，300 kHz の変調周波数のとき $m_{f_0} = 10$ とするには約5%の振幅変調成分を伴なうことになるが，例えば $m_{f_0} = 2.4$ のとき自己注入によって $m_f = 10$ とした場合の AM 成分は図6より 0.7% であるので AM 成分をかなり減少できる。

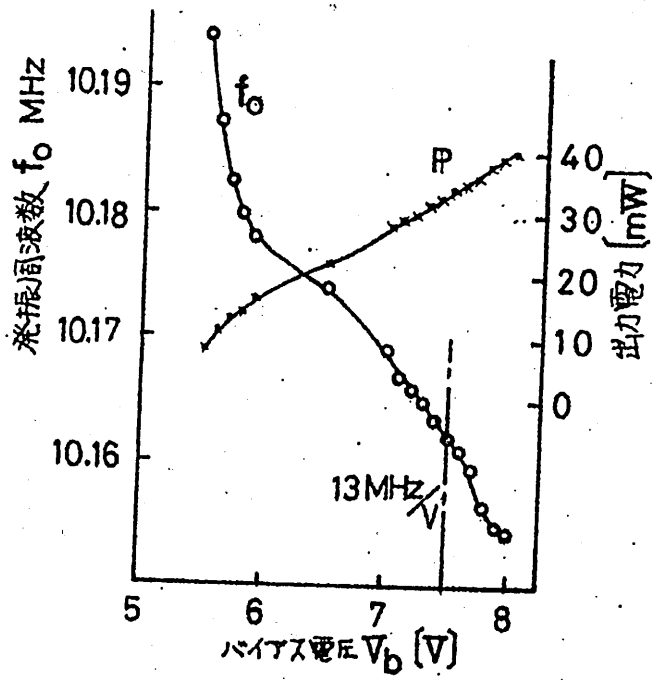


図 8 Gunn 発振器の周波数，出力特性

5．あとがき

マイクロ波発振器を直接周波数変調する場合に自己注入同期を用いると振幅変調成分を増加させることなく周波数変調指数を増加できることがわかった。

変調指数の増加率と自己注入回路の遅延時間との関係を理論的，実験的に明らかにし，増加率の変調周波数依存性について遅延時間との関係で考察した。

FM雑音のある程度の増加は許せるが，大きい振幅成分が伴なっては困る場合，または本来FM雑音の少ないマイクロ波発振器においてこの方法は有用であると思われる。

謝辞　終りに，有益な御討論を頂いた本学大泉延久専任講師に感謝します。

文献

1）池上，中島；“マイクロ波固体発振器の同期現象とその応用”，信学誌，54，5，P.693（1971）

2）太田，畑；“注入同期による発振器雑音改善”，信学論（B）53-B，9，P.487（1970）

3) Y. Fukatsu, H. Kato; "Frequency Conversion with Gain Through Sideband Locking of an IMPATT Diode Oscillation", Proc. IEEE 57, 3, P342 (1969)
4) W.C. Tsai, F.J. Rosenbaum; "Amplitude and Frequency Modulation of a Waveguide Cavity CW Gunn Oscillator", IEEE, MTT-18, 11, P877 (1970)
5) K. Kurokawa; "Noise in Synchronized Oscillators", IEEE, MTT-16, 4, P234 (1968)

輻射科学研究会資料

マイクロ波からみた発振器同期動作について

谷本善夫　　中島将光　　池上淳一
（京都大学工学部）

昭和51年12月3日

1. まえがき

発振器の同期現象は，非線形振動論の一分野として早くから研究され，集中定数回路として取り扱える低周波領域では大信号解析もなされ，その動作は明らかにされている。近年，マイクロ波固体発振器がマイクロ波回路の能動素子として広く使用されるようになり，同期現象に関する研究やその応用研究が再び盛んになっている。

ところが，マイクロ波で同期動作を測定すると，従来の低周波領域で考えられた同期特性とは外見的には全く異なる現象がみられる。しかし，これに対する研究の多くはマイクロ波回路を集中定数等価回路に変換して解析しているため，このマイクロ波領域特有の現象は余り気づかれず，また明確に説明されることもなかったようである。[3]

本文は，マイクロ波回路の取り扱いに容易な進行波の概念を用いて，マイクロ波における同期現象を扱うのに便利な諸式を導き，さらに大信号解析をおこなうことによってマイクロ波で観測される特有の同期動作を解明する。[1][4]

2. 発振器の簡約方程式

マイクロ波発振素子は発振周波数の近傍のみを問題にする場合，伝送線路の基準面を適当に設定すると，図上のように負性コンダクタンスと並列共振回路の並列接続として表わすことができる。[2]

まず，発振器アドミタンスが電圧振巾と周波数の関数として表わされるものと仮定して，一般的な簡約方程式を導出する。

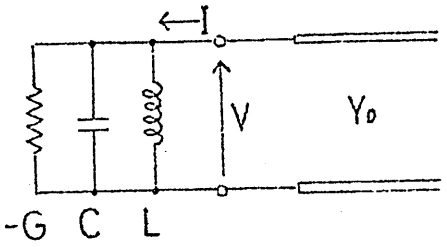


図1，マイクロ波発振器アドミタンス

通常のアドミタンス表現 $I = YV$ を

$$I e^{(\sigma + j\omega)t} = Y(\sigma + j\omega) V e^{(\sigma + j\omega)t} \qquad (1)$$

なるごとく複素周波数領域に拡張する。今電圧・電流振巾が時間的にゆるやかに変化する時，

$$V = V_0 e^{\rho(t) + j\phi(t)} \quad , etc. \qquad (2)$$

瞬時複素角周波数は $\dot{\rho}(t) + j\dot{\phi}(t)$ （・は時間微分）だけ変化するので，アドミタンスは

$$Y = Y\{\sigma + j\omega + \dot{\rho}(t) + j\dot{\phi}(t)\} \qquad (3)$$

と書けるはずである。 ω にくらべて $|\dot{\rho}(t) + j\dot{\phi}(t)|$ が十分小さい時

式(3)を ω のまわりにテーラー展開し1位の項までとって

$$Y = Y(j\omega) + Y' \cdot \{\dot{\rho}(t) + j\dot{\phi}(t)\} \qquad (4)$$

と書くことができる。ここに，δ は $\dot{\rho}(t)$ の中に含めるものとする。
Y が解析関数ならば コーシー・リーマンの条件

$$Y' = \frac{\partial Y}{\partial(\dot{\rho}+j\dot{\phi})} = \frac{\partial Y}{\partial j\omega} \equiv Y_{j\omega} \qquad (5)$$

が成立する。さて

$$\dot{\rho}(t) + j\dot{\phi}(t) = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \qquad (6)$$

であることに注意し，式(4)，(5)，(6)を式(1)に代入すると

$$I = \{Y(j\omega, |V|) + Y_{j\omega}\, d|V|/dt\}\, V \qquad (7)$$

を得る。ここに電圧振巾に関するアドミタンスの非線形性を導入して $Y(j\omega)$ を $Y(j\omega,|V|)$ と置いている。

この発振器の簡約方程式を基礎にして 次節以降，発振器の同期現象の解析をおこなう。

3. 集中定数等価回路による解析

従来，マイクロ波における同期特性は図3の等価回路として図2に示す集中定数回路を考えることによって論じられてきた.[3]
解析にもちいる発振器は Van der Pol 型を考える。すなわち

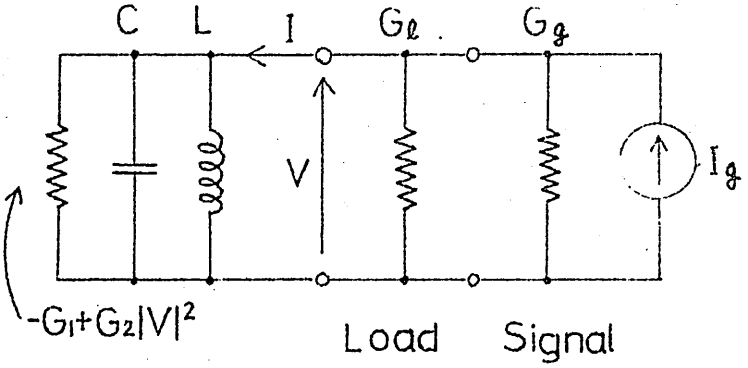


図2. 集中定数等価回路

$$Y(j\omega, |V|) = -G_1 + G_2|V|^2 + j\omega C + 1/j\omega L \quad , \qquad (8)$$

内部コンダクタンス G_g，注入信号 $I_g = |I_g|e^{j\phi_g}$ と負荷 G_ℓ にとりだされる発振器応答電圧 $V = |V|e^{j\phi}$ との関係式

$$I = I_g - G_e V \quad , \quad G_e = G_\ell + G_g \qquad (9)$$

を簡約方程式(7)に代入して次式を得る。

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{Y_{j\omega}}\left\{\frac{I_g}{V} - G_e - Y(j\omega, |V|)\right\} \qquad (10)$$

式(10)は実部と虚部に分離され

$$\begin{cases} 2C\dfrac{1}{|V|}\dfrac{d|V|}{dt} = \dfrac{|I_g|}{|V|}\cos(\phi_g-\phi) + G_1 - G_2|V|^2 - G_e & (11) \\ 2C\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{|I_g|}{|V|}\sin(\phi_g-\phi) - 2C(\omega-\omega_0) & (12) \end{cases}$$

ここに，注入信号周波数 ω は自由発振周波数 ω_0 の近傍にあるとして

$$j\omega C + 1/j\omega L \cong j2C(\omega-\omega_0),\quad Y_{j\omega} \cong 2C \qquad (13)$$

と近似している。式(11),(12)はそれぞれ発振器応答電圧の振幅と位相に関する方程式である。

両式の左辺 $d/dt = 0$ とおいて 定常状態における振幅$|V|$と位相差$(\phi_g-\phi)$を求める．定常解の安定性は，定常解からの微小変化分 $\Delta|V|$, $\Delta\phi$ に対する変分方程式から調べられる。

図6に解析結果を示す。注入信号電力 $P_{in}=|I_g|^2/4G_g$ (固有電力)をパラメータにして，横軸は注入信号周波数を取り，縦軸は負荷電力 $P=|V|^2G_e$ 及び位相差を取る。注入信号電力と負荷電力はともに自由発振出力 P_0 で規格化しておく。安定限界(同期限界)は一点鎖線で示されている。

＊ 自由発振時($I_g=0$)における発振器の出力電圧 $|V_0|$ と発振周波数 ω_0 は，式(10)において，$I_g=0$ とおき，定常状態($d/dt=0$)として得られる次式の実部と虚部から求まる。

$$G_g + G_e - G_1 + G_2|V_0|^2 + j(\omega_0 C - 1/\omega_0 L) = 0$$

自由発振出力は $P_0 = |V_0|^2 G_e$ である。

図6の振巾・位相特性の特徴は

(i) 振巾特性に見られる，直線と楕円とで囲まれる非同期範囲が存在する。

(ii) 負荷電力 P は注入信号周波数 ω が自由発振周波数 ω_0 に等しい時に最大値をとり．ω が ω_0 からはずれるにしたがって単調に減少し(i)の領域にはいると同期がはずれる。

(iii) 負荷電力 P は注入信号電力 P_{in} に対して単調増加する。

(iv) 位相差 $|\phi_g - \phi|$ の変化範囲は最大 110° 程度である。

等である．

これらの解析は低周波領域における同期現象を扱うには有効であるが，それが直ちにマイクロ波回路での振舞をも記述すると考えることが適当かどうかが問題である。

4. 進行波による同期動作の解析

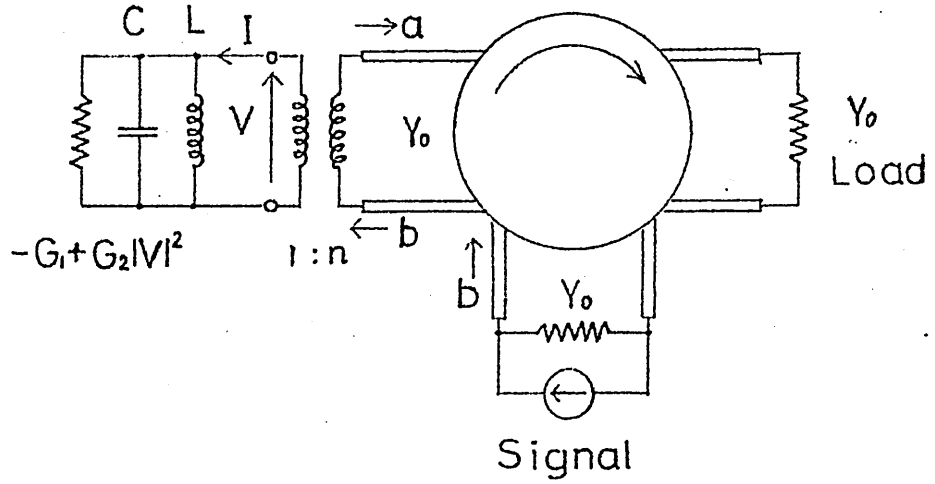


図3　マイクロ波における同期回路構成

そこで，本節ではマイクロ波を取り扱うに容易な進行波の概念を導入する。(4)

通常，マイクロ波回路で同期発振器を扱う場合，図3に示すようにサーキュレーターによって注入信号源 I_g と負荷 Y_0 とを分離し，発振器は伝送線路と結合比 $1:n$ で結合する。伝送線路の特性アドミタンスを Y_0 とする時発振器への入射波 b と出力波 a は次の様に表わされる。**

$$b = |b| e^{i\beta} = (Y_c V + I)/2\sqrt{Y_c} \qquad (14)$$

$$a = |a| e^{i\alpha} = (Y_c V - I)/2\sqrt{Y_c} \qquad (15)$$

ここに $Y_c = n^2 Y_0$ で，自由発振（$b=0$）時に発振器から見た負荷を表わす。

簡約方程式(7)に，式(8)，(14)，(15)を代入すると

$$Y_{j\omega} \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = Y_c\left(\frac{b}{a} - 1\right) - Y(j\omega, |a+b|\sqrt{Y_c})\left(\frac{b}{a}+1\right) \qquad (16)$$

を得る。注入信号がなく発振器が自由発振状態にあるとき，式(16)は

$$Y_c - G_1 + (G_2/Y_c)|a_0|^2 + j(\omega_a C - 1/\omega_0 L) = 0 \qquad (17)$$

** 注入信号源及び負荷が伝送線路と整合しているならば $|b|^2$ は信号源の固有電力 $|I_g|^2/4Y_0$ に等しく，負荷電力は $|a|^2$ である。

となり，自由発振出力 $|a_0|^2$ と自由発振角周波数 ω_0 は次式で与えられ，

$$|a_0|^2 = Y_c(G_1 - Y_c)/G_2 \tag{18}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \tag{19}$$

3節の場合と同形になっている。

再び式(16)に帰って，注入信号が印加された同期状態を考えよう。注入信号周波数 ω は ω_0 の近傍にあるとして

$$j\omega C + 1/j\omega L \cong j\,2Q_{ex}Y_c\delta\,,\quad Y_{j\omega} \cong 2Q_{ex}Y_c/\omega_0 \tag{20}$$

と近似する。ここに $\delta = (\omega-\omega_0)/\omega_0$；離調度，$Q_{ex} = \omega_0 C/Y_c$；発振器の外部 Q である。式(20)に注意して式(16)の実部と虚部とを分離すると

$$\begin{cases} 2\dfrac{Q_{ex}}{\omega_0}\dfrac{1}{|a|}\dfrac{d|a|}{dt} = \left\{2 - \dfrac{G_2}{Y_c^2}\left(3|a|^2+|b|^2-|a_0|^2\right)\right\}\dfrac{|b|}{|a|}\cos(\beta-\alpha) \\ \quad -\dfrac{G_2}{Y_c^2}\left[|a|^2-|a_0|^2+|b|^2\left\{1+2\cos^2(\beta-\alpha)\right\}\right] + 2Q_{ex}\delta\dfrac{|b|}{|a|}\sin(\beta-\alpha) \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{Q_{ex}}{\omega_0}\dfrac{d\alpha}{dt} = \left\{2 - \dfrac{G_2}{Y_c^2}\left(|a|^2+|b|^2-|a_0|^2\right)\right\}\dfrac{|b|}{|a|}\sin(\beta-\alpha) \\ \quad -2\dfrac{G_2}{Y_c^2}|b|^2\cos(\beta-\alpha)\sin(\beta-\alpha) - 2Q_{ex}\delta\left\{1+\dfrac{|b|}{|a|}\cos(\beta-\alpha)\right\} \end{cases} \tag{22}$$

が得られる。この両式は前節の式(11)，(12)に対応し，注入信号に対する発振器応答 a の振巾と位相とを決定する。

式(21),(22)から前節と同じ手順で同期特性を求め $Y_c = G_1/4, G_1/2, 3G_1/4$ の3通りの場合について，図7～12に示す。

横軸は注入信号周波数(δ)，パラメータは注入信号電力($|b|^2/|a_0|^2$)，縦軸は(振巾，位相特性)それぞれ出力($|a|^2/|a_0|^2$)と位相差($\beta - \lambda$)とを表わす。安定限界は図中一点鎖線で示されている。

最も顕著な特徴は，Y_cの値によって即ち自由発振時の発振器の結合度の調整の仕方によって，同期特性が全く異なった傾向を持つ点である。

i) $Y_c = G_1/4$ の時(図7, 10)

出力$|a|^2$は$\delta = 0$ (i.e. $\omega = \omega_0$)の時，常に自由発振出力$|a_0|^2$より低下し，信号が大きくなるほどこの傾向は強まる。そして小信号では$|b|$に対して単調増加し安定限界に達するが，大信号になると，ある$|b| \neq 0$において極大値になりその後減少して同期がはずれる。

位相差の変化範囲の最大値は160°前後になる。

ii) $Y_c = G_1/2$ の時(図8, 11)

自由発振出力$|a|^2$が最大になるように発振器が調整された場合で，i)とiii)の特性のつなぎになる。

iii) $Y_c = 3G_1/4$ の時(図9, 12)

出力$|a|^2$は，$\delta = 0$の時，小信号ではi)とは逆に自由発振出力$|a_0|^2$より増加し，この点を最大にしてその後$|b|$に対して減少する。ところが信号がある大きさ以上になると再び$\delta = 0$における出力は低下して$|b| \neq 0$の点で極大値を取るi)に類した傾向にうつる。

位相差は125°前後である。

iv) Y_cの値によらず大信号時における出力の極大点は，注入信号$|b|^2$と自由発振出力$|a_0|^2$の最大値との和になる。即ち発振器の調整の仕方に関係なく，ある信号周波数において発振器から最大の出力を引き出すことが可能であることを示す。

V) 信号の大きさが等しい時，Y_c を $0 \to G_1$ と大きくしてゆくと同期範囲は広くなるが，位相差の変化範囲は逆に狭くなる。

以上の解析結果は，これまでの集中定数等価回路では説明しえなかったマイクロ波で実際に観測される同期特性によく一致する。

5. マイクロ波からみた同期動作に関する吟味

集中定数(低周波)回路における同期特性と，マイクロ波回路からみたものとの相異をわかりやすくするため，発振器アドミタンス電圧Vをパラメータにとって考察の対象となる変数を表示すると次のようになる。

(マイクロ波)

応答　$a = (VY_c - I)/2\sqrt{Y_c} = V\{Y_c - Y(j\omega, |V|)\}/2\sqrt{Y_c}$　(23)

信号　$b = (VY_c + I)/2\sqrt{Y_c} = V\{Y_c + Y(j\omega, |V|)\}/2\sqrt{Y_c}$　(24)

(低周波)

応答　V　(25)

信号　$I_g = G_e V + I = V\{G_e + Y(j\omega, |V|)\}$　(26)

これらの変数の間の関係をわかり易くするため $Y_c = G_e$ とおいた場合のベクトル図を図4に示す。Vを基準にしてみるとマイクロ波からみた信号応答は，集中定数の信号・応答とは本来的に異なるものになることが予期できる。にもかかわらず，マイクロ波における小信号位相同期方程式は従来のアドラーの式と同じ形になるため[1),4)]

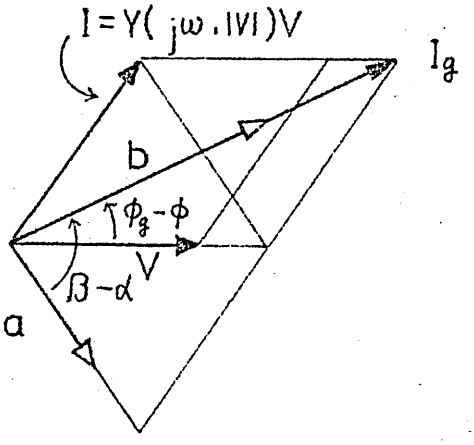


図4　ベクトル図 ($Y_c = G_e$)

実験的には進行波 a, b の間の位相関係を測定しながら，解析的にはアドラーの式を用いて電圧・電流（V, I_g またはそれと同類の物理量）の関係として比較される場合が多かったし，大信号でないかぎり解析と実験との差異には気づかれずにいた。

厳密な解析は，3.4節にゆずるとして，最後に，マイクロ波と低周波で***，同期特性としてどの程度異なってくるかを理解しやすい様おおよその見当をつけてみる。

まず，位相差は　マイクロ波では　式(23), (24)から

$$\beta-\alpha=\arg\left(\frac{b}{a}\right)=\tan^{-1}\frac{zQ_{ex}Y_c\delta}{Y_c+G_1-G_2|V|^2}+\tan^{-1}\frac{zQ_{ex}Y_c\delta}{Y_c-G_1+G_2|V|^2}\qquad(27)$$

であるから，δ を $-\infty$ から ∞ まで変えた時，$\beta-\alpha$ は最大の 2π 変わる。一方低周波では式(25), (26)から

$$\phi_g-\phi=\arg\left(\frac{I_g}{V}\right)=\tan^{-1}\frac{Z\omega_0C\delta}{G_e-G_1+G_2|V|^2}\qquad(28)$$

で，最大 π 変わるだけである。

次に振巾特性を検討する。簡単のため $\delta=0$ の場合を考える。注入信号電力は，$|b|^2$ と $|I_g|^2/4G_g$ とは $|V|^2$ に関して同形で

$$|b|^2=|V|^2\left(Y_c-G_1+G_2|V|^2\right)^2/4Y_c=|I_g|^2/4G_g\qquad(29)^{*4}$$

と表わされ，安定条件を考慮すると，$|V|^2$ は注入信号電力に関して，

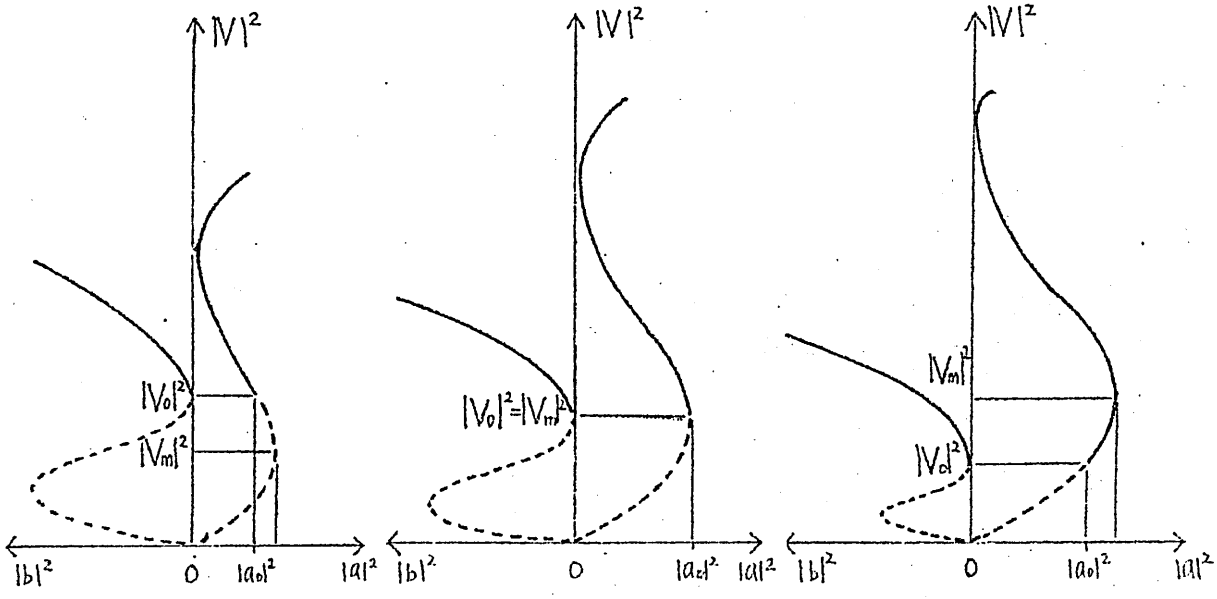
*** 以下，言葉づかいの簡単のため「マイクロ波では」という場合は a, b 間の関係を，「低周波では」という時は，V, I_g 間の関係を言う。

*4 比較の便宜のため両方の電源は全く等しい（$Y_0=G_g$）とおく。

$|V|^2 > |V_0|^2$ で単調増加する。したがって低周波(集中定数)回路では負荷電力 $P = |V|^2 G_2$ は単調増加することになるが、マイクロ波回路では出力電力は

$$|a|^2 = |V|^2 \left(Y_c + G_1 - G_2 |V|^2 \right)^2 \qquad (30)$$

で表わされるために、図5に示すように Y_c の値によってその特性は異なってくる。



$(0 < Y_c < \frac{1}{2} G_1)$　　$(Y_c = \frac{1}{2} G_1)$　　$(\frac{1}{2} G_1 < Y_c < G_1)$

$$\begin{cases} |V_0|^2 = (G_1 - Y_c)/G_2 \\ |V_m|^2 = (G_1 + Y_c)/3G_2 \end{cases}$$

図5　マイクロ波と低周波における出力特性の比較

6. 結び

マイクロ波回路における同期現象を進行波の概念を用いて解析すると，これまで集中定数等価回路では説明がむづかしかった現象がうまく説明できるようになった。しかし，マイクロ波と低周波とで，発振器自体の動作が異なる訳ではなく，マイクロ波を通して見ると一見ちがった現象のように映るということである。単なるパラメーターの取り方（V, I → a, b）は問題であるが，注意しなければならない所かんである。

今回の解析では発振器は Van der Pol 型のものを使ったが，定性的に類似した実験結果を得た。しかし実験的には上の解析では予期されない周波数に関する非対称性が表われる。これに関してはサセプタンスの電圧依存性をも考慮して解析すれば，現実により近づくものと思われる。

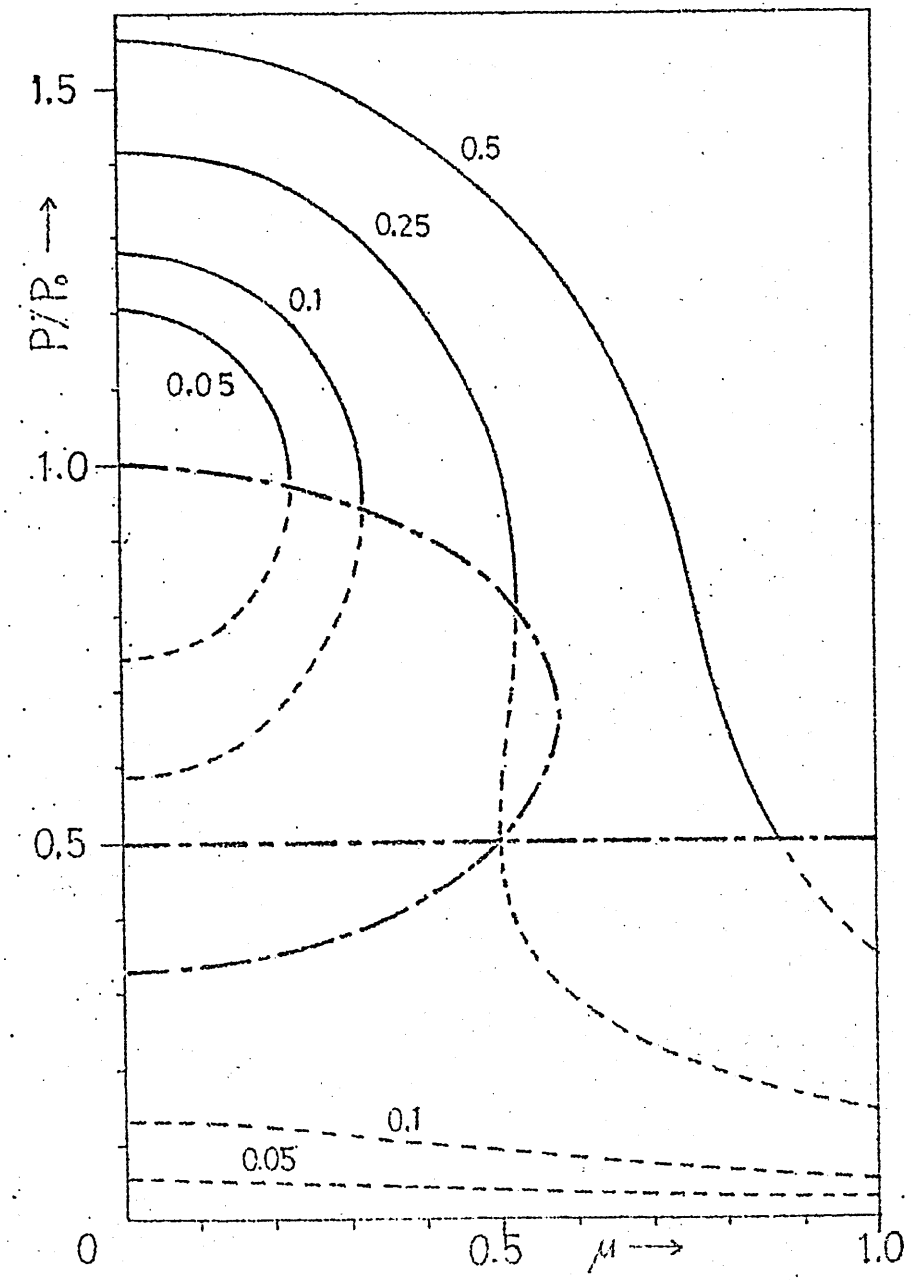
参考文献

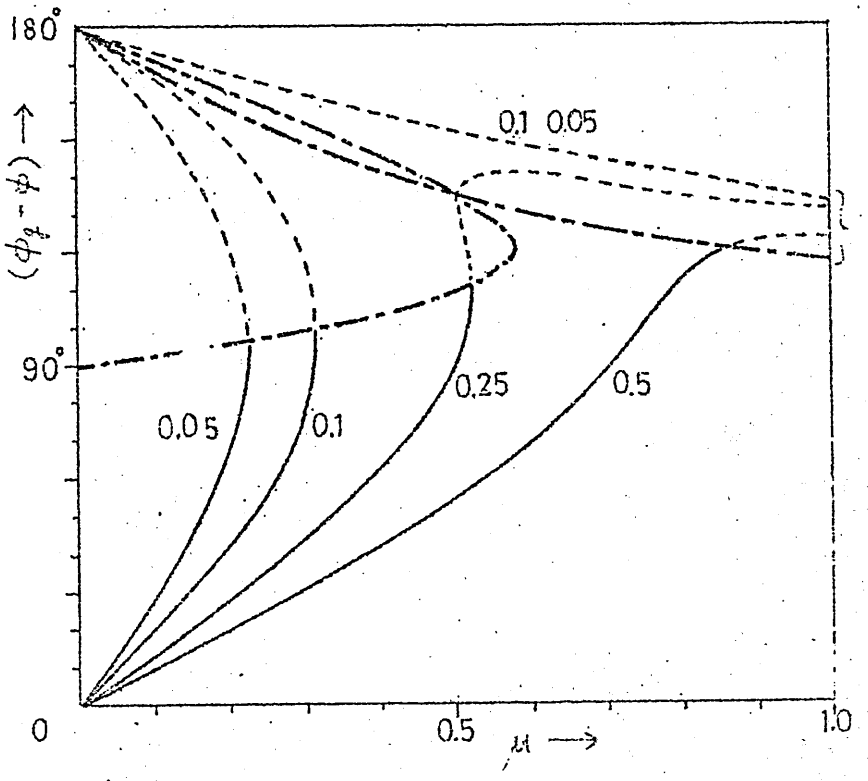
(1) R. Adler; "A Study of Locking Phenomena in Oscillators"
Proc. I.R.E. 34 June (1946) 351-357

(2) 中島，池上 "負性抵抗発振器信号経路に関する基礎理論"
輻射科学研究会資料 (1971)

(3) K. Kurokawa; "Injection Locking of Microwave Solid-state Oscillators"
Proc. IEEE, vol. 61 Oct. (1973) 1386-1410

(4) M. Nakajima and J. Ikenoue; "Locking Equations for Microwave Circuits"
the Memoirs of the Faculty of Engineering Kyoto University Vol. XXXVI Part 2 April (1974) 122





$$\mu = ZC(\omega - \omega_0)/(G_1 - G_{g_1} - G_2)$$

パラメータ ; $|I_g|^2 G_2/(G_1 - G_{g_1} - G_2)^3$

図 6. 振幅・位相特性（集中定数）

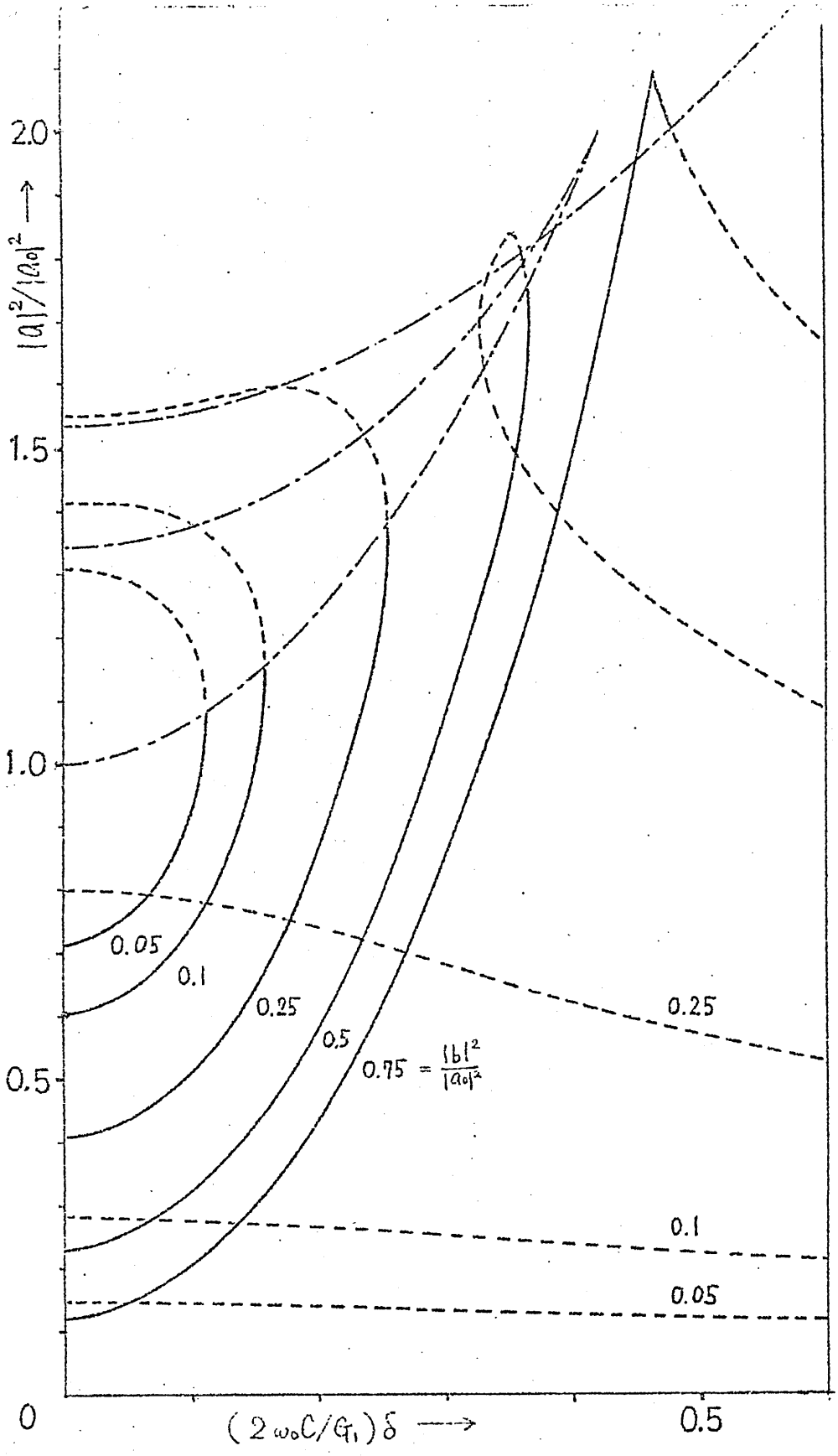


図7. 振幅特性（マイクロ波） $Y_c = \frac{1}{4} G_1$ の時

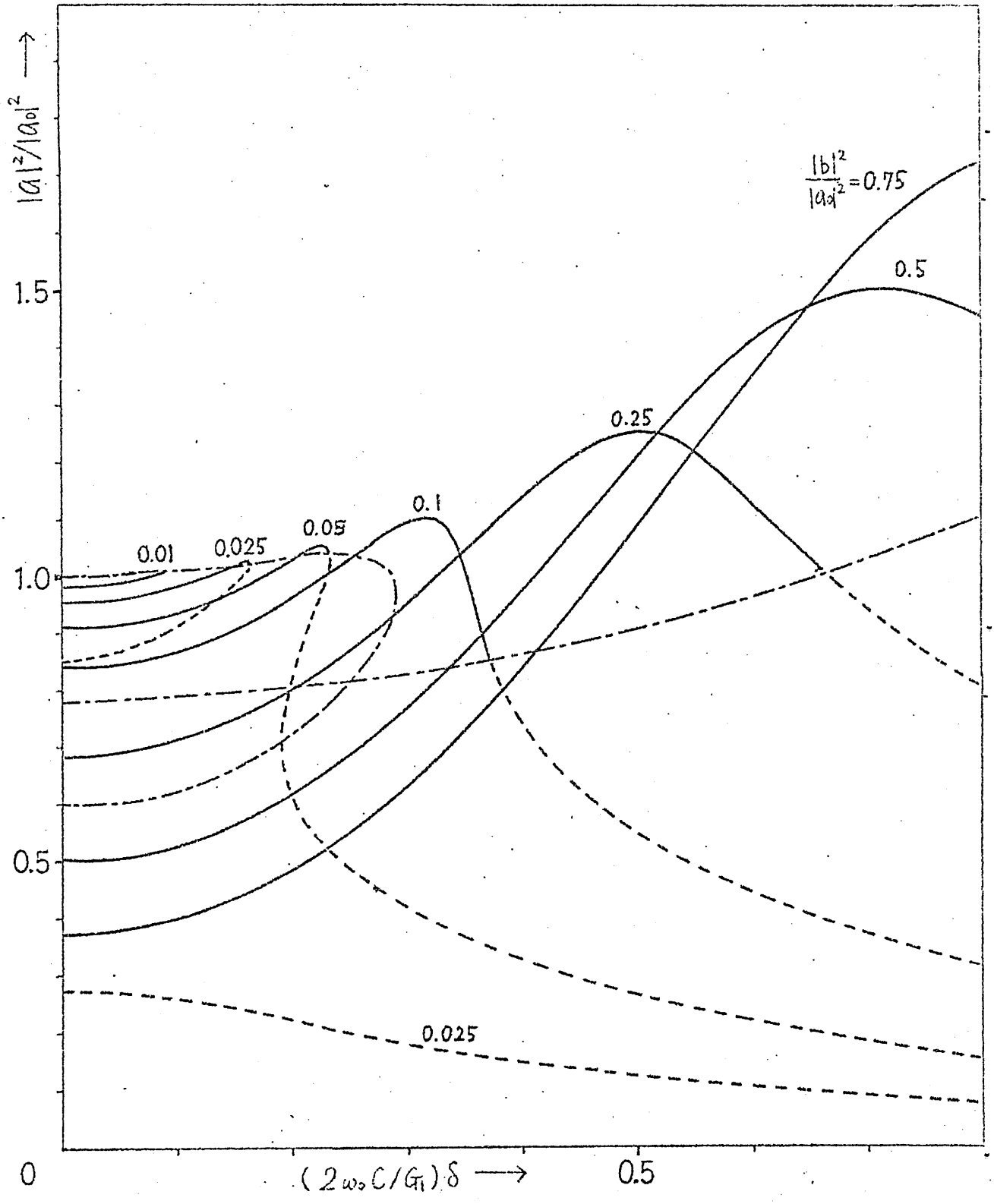


図 8. 振幅特性（マイクロ波） $Y_c=\frac{1}{2}G_1$ の時

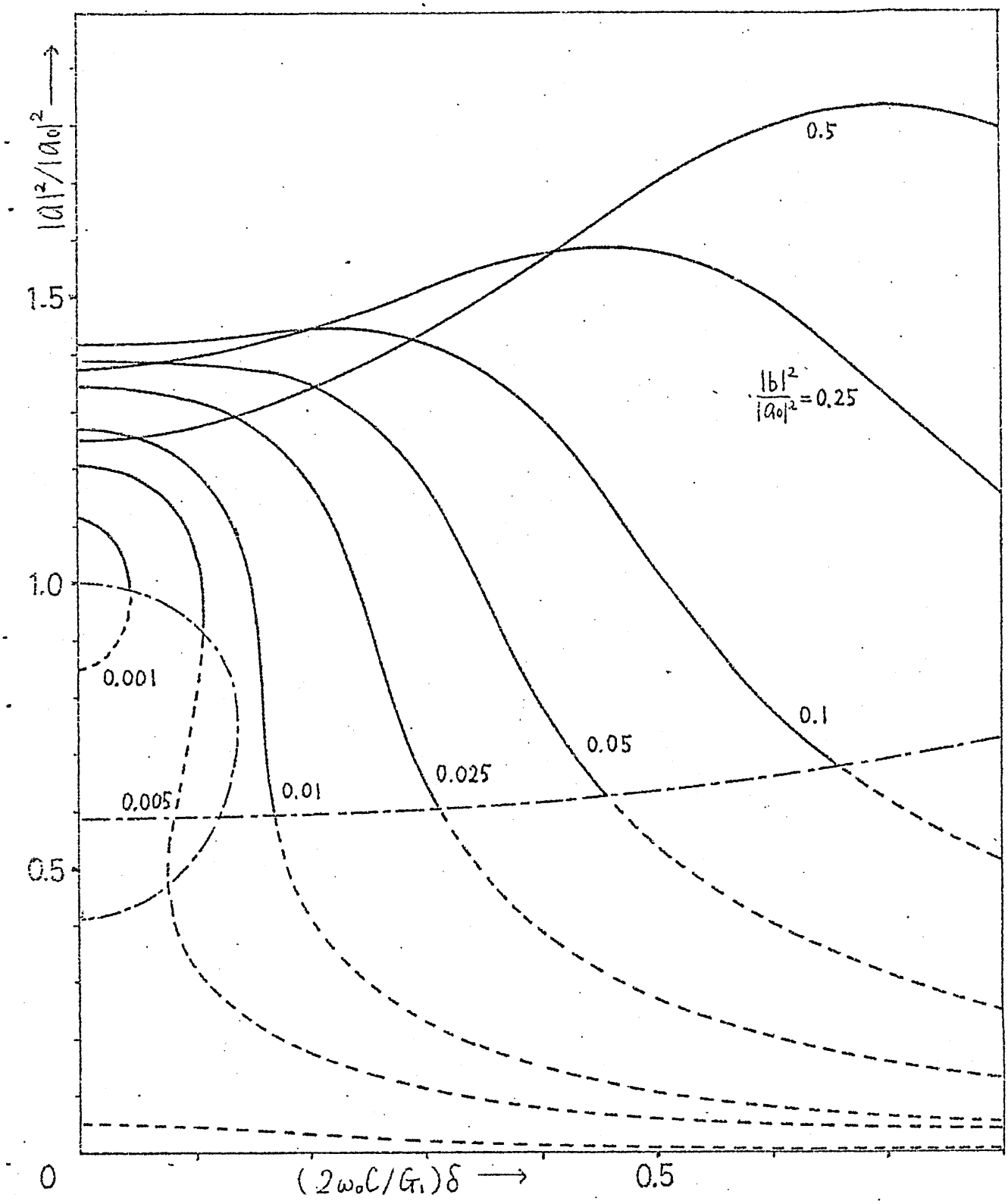


図9. 振幅特性 (マイクロ波) $Y_c = \frac{3}{4} G_1$ の時

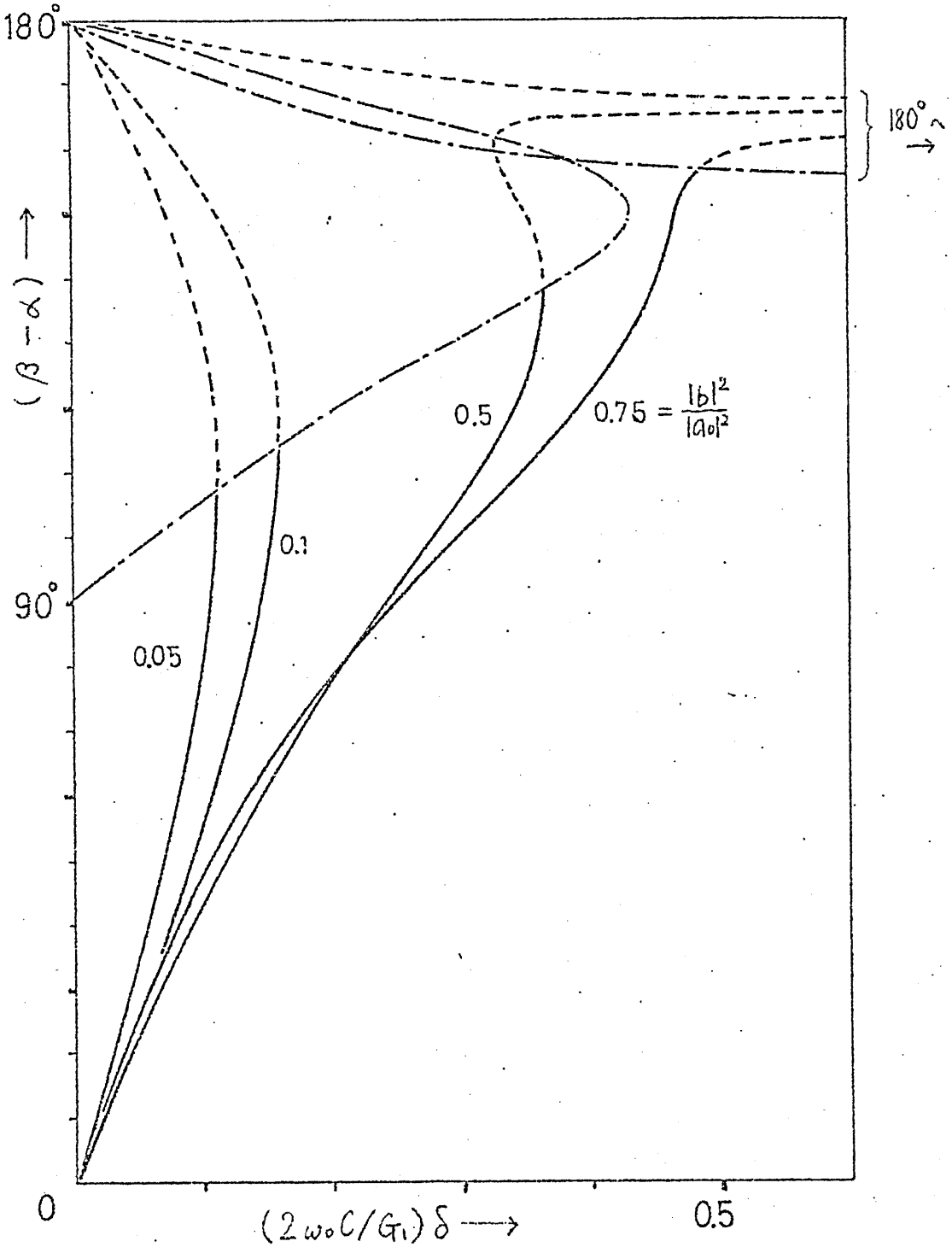


図10. 位相特性（マイクロ波） $Y_c = \frac{1}{4} G_1$ の時

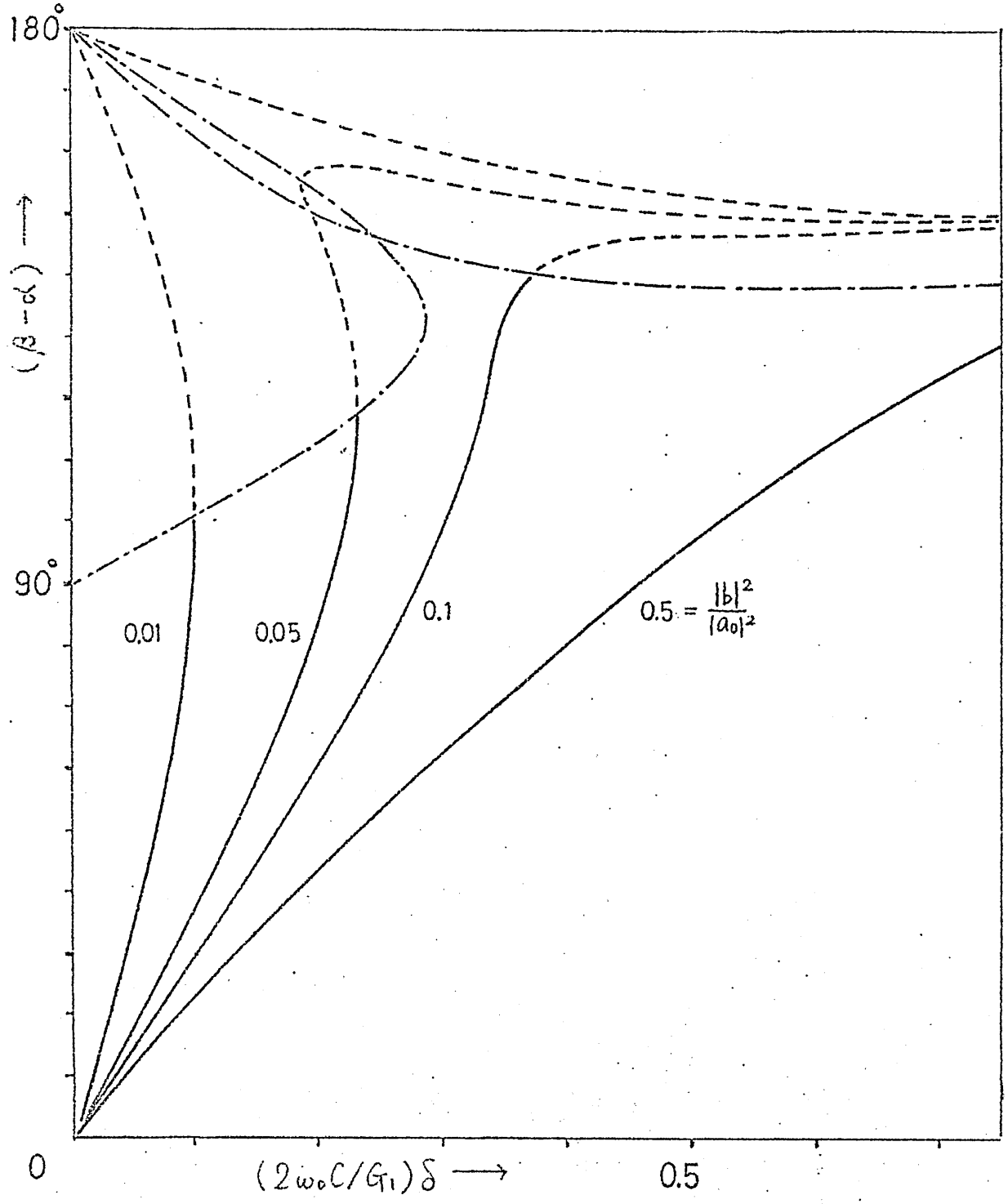


図11. 位相特性（マイクロ波） $Y_0 = \frac{1}{2}G_1$ の時

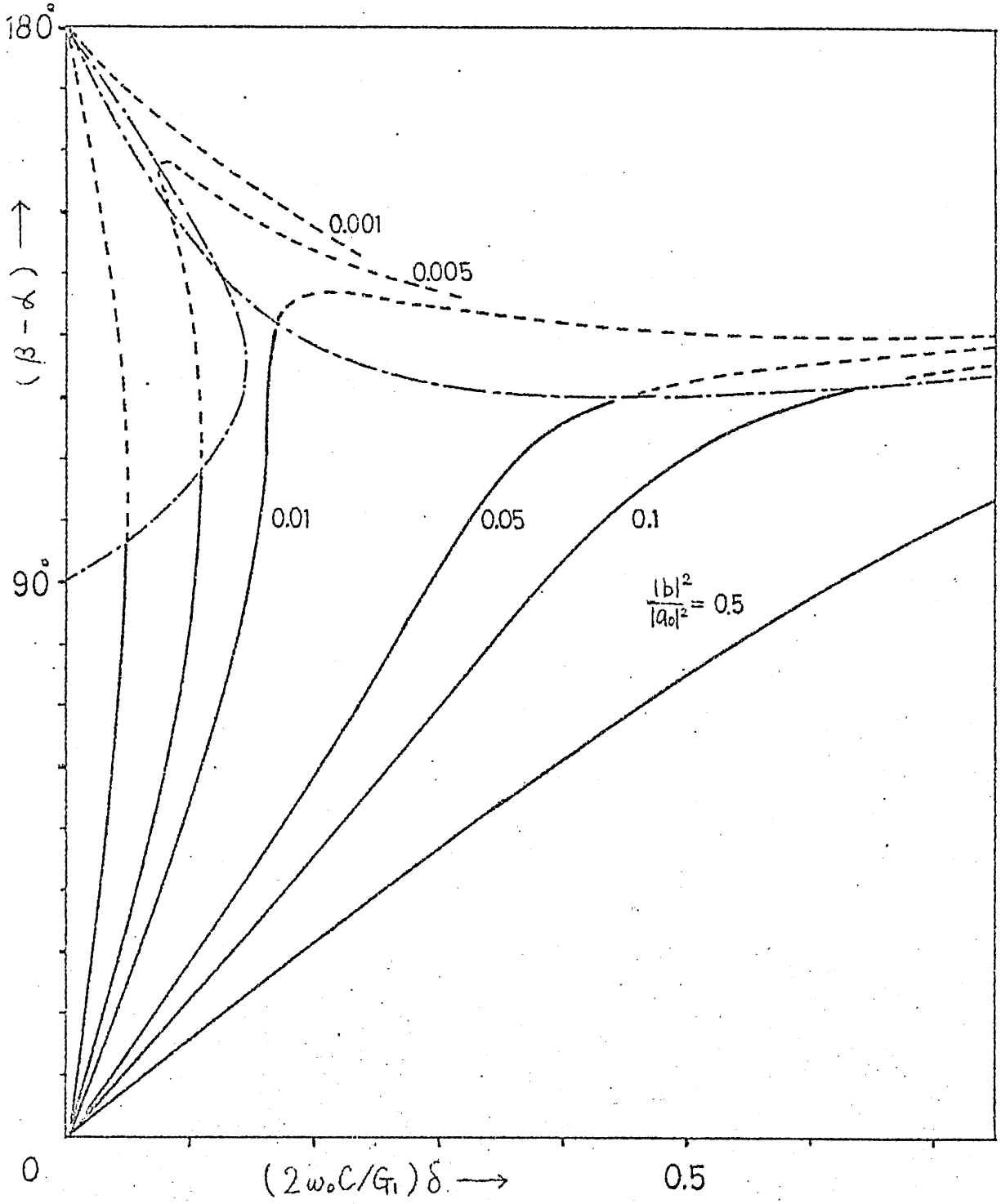


図 12. 位相特性（マイクロ波） $Y_c = \frac{3}{4} G_1$ の時

輻射科学研究会資料

回転運動を行う誘電体円柱による平面電磁波の散乱——相対論的考察

後藤英夫

塩沢俊之

(大阪大学・工学部)

1977年2月9日

1. まえがき

最近，等速度運動を行う媒質中における電気力学の基礎理論であるMinkowski の理論を，媒質あるいは観測者が加速度運動を行う場合に拡張する試みがいくつか報告された.[2],[4] とりわけ，回転運動は代表的な加速度運動であり，また，プラズマ物理学，天体物理学あるいは電子ビーム理論などへの応用が考えられることから，回転系の電気力学およびその応用については特に詳しく論じられている.[1]～[14] 回転運動を行う物体による電磁波の散乱に関しては，これまでに誘電体円柱[8],[13]および角柱,[13] ならびに電子プラズマ円柱[10]を取り扱ったものが報告されている．しかしながら，これらの報告では，回転物体の各点の速度が光速度に比べて十分小さい場合のみが取り扱われている．本稿では，Maxwell の方程式と回転運動を行う媒質に対するMinkowski 型の構成関係式を用いて，中心軸のまわりに一定の角速度で回転運動を行う誘電体円柱による平面電磁波の散乱について考察する．ただし，誘電体円柱は均質，等方かつ非分散とし，誘電体円柱表面の速度が真空中の光速度より小さい任意の値をとる一般的な場合を取り扱う．また，回転運動に伴う慣性力，すなわち遠心力およびCoriolisの力による誘電体の巨視的性質の変化は無視できるものとする．以下では，まず，回転運動を行う媒質中における電磁界の一般解および波動方程式を円筒座標表示によって示す．さて，回転運動を行う媒質中では，波動方程式は一般に結合方程式になり，円柱の各点の速度が光速度に比べて十分小さくない場合には，この方程式の解は既知の関数によって表わすことはできない．そこで，本稿では，回転運動を行う誘電体円柱内部における波動方程式の解として，筆者等が先に求めた級数解[14]を用いて，散乱電磁界，散乱パターンならびに後方散乱断面積を求め，回転運動を行う誘電体円柱の散乱特性を数値的に詳しく検討する．

2．回転運動を行う誘電体円柱内部の電磁界

回転運動を行う無限長誘電体円柱による平面電磁波の散乱について考察するために，図１に示すように座標系を定める．円柱（半径 a ）の軸方向に z

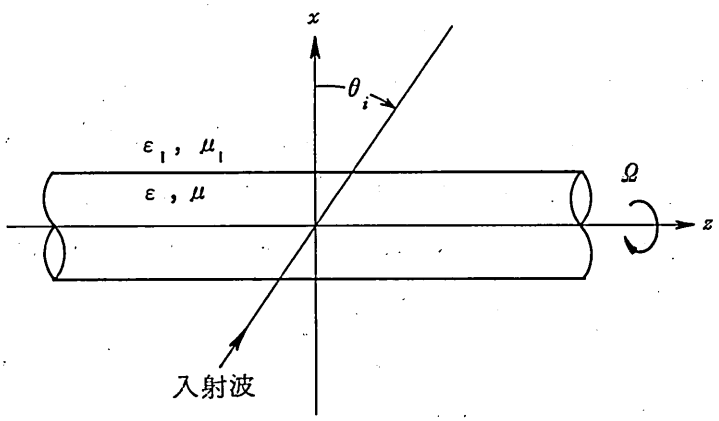


図１　座　標　系

軸を選び，円柱は一定の角速度 $\Omega = \mathbf{i}_z \Omega$ で中心軸のまわりに回転しているものとする．また，円柱を構成する媒質および周囲の媒質の誘電率および透磁率を，それぞれ，ε ，μ および ε_1, μ_1 とする． 本稿では，円柱に斜方向から入射する平面電磁波がどのように散乱されるかを調べる．

まず，以下での解析の準備として，中心軸のまわりに一様に回転している誘電体円柱内部の電磁界の一般解を円筒座標（r, φ, z）を用いて求めよう．簡単のために，媒質は均質，等方かつ非分散とし，また，観測者は慣性系に静止しているものとする．さて，Maxwell の方程式の共変性により，回転運動を行う媒質中においても，電磁界基本方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{1}$$

が成り立つ．一方，回転運動を行う媒質に対する構成関係式としては，回転運動に伴う慣性力，すなわち遠心力およびCoriolis の力による媒質の巨視的性質の変化が無視できる場合には，Minkowski の構成関係式をそのまま用いることができる．遠心力およびCoriolis の力の影響が無視できるための条件は，誘電体の場合には，次式で与えられる[6]．

$$\Omega \ll \omega_0, \qquad \omega \ll \omega_0 \tag{2}$$

ここで，ω_0およびωは，それぞれ，媒質の共鳴周波数および入射波の周波数を表わす．以下では，式(2)の条件が成り立つものとする．このとき，回転運動を行う媒質の任意の点における構成関係式は次式で与えられる[6], [13]．

$$\begin{aligned} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E} &= \mu(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}) \\ \mathbf{D} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{H} &= \varepsilon(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \tag{3}$$

ただし，

$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r} \tag{4}$$

であり，cは真空中の光速度，$\mathbf{v}$は動径ベクトル$\mathbf{r}$で表わされる点における媒質の速度を表わす．

さて，一般に，円柱内部の電磁界の各成分は，電界および磁界のz方向成分E_zおよびH_zによって表わすことができる．いま，電磁界の任意の成分が$R(r)\,exp\,[j(\omega t - m\varphi - k_z z)]$なる変化をする円筒波を考え，式(1)および

(3)から，電磁界の横方向成分$\mathbf{E}_t$および$\mathbf{H}_t$をそれらのz方向成分E_zおよびH_zで表わすと次のようになる.[14]

$$\mathbf{E}_t = j\frac{\omega\mu}{\Gamma}(\mathbf{i}_z \times \hat{F}_t \cdot \nabla_t H_z + j\omega\mathbf{G} \times \mathbf{i}_z H_z) - j\frac{k_z}{\Gamma}(\nabla_t E_z - j\omega E_z \mathbf{G})$$

$$\mathbf{H}_t = -j\frac{\omega\varepsilon}{\Gamma}(\mathbf{i}_z \times \hat{F}_t \cdot \nabla_t E_z + j\omega\mathbf{G} \times \mathbf{i}_z E_z) - j\frac{k_z}{\Gamma}(\nabla_t H_z - j\omega H_z \mathbf{G}) \quad (5)$$

ただし，

$$\Gamma = \omega^2 \varepsilon\mu\, f(r) - k_z^2, \quad \nabla_t = \nabla + j k_z \mathbf{i}_z$$

$$\hat{F}_t = \begin{bmatrix} f(r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{i}_\varphi \frac{g(r)}{c}$$

$$f(r) = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}, \quad g(r) = \frac{(n^2-1)\beta}{1-n^2\beta^2}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\Omega r}{c}, \quad n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \quad (6)$$

ε_0，μ_0およびnは，それぞれ，真空の誘電率，透磁率および媒質の屈折率を表わす.

一方，E_zおよびH_zは次の結合波動方程式から決定される.[14]

$$\frac{d^2E_z}{dr^2} + P(r)\frac{dE_z}{dr} + Q_1(r)E_z - j\eta Q_2(r)H_z = 0$$

$$\frac{d^2H_z}{dr^2} + P(r)\frac{dH_z}{dr} + Q_1(r)H_z + j\frac{1}{\eta}Q_2(r)E_z = 0 \quad (7)$$

ただし，

$$P(r) = \frac{1}{r} + \frac{\Gamma}{f(r)} \frac{d}{dr} \left[\frac{f(r)}{\Gamma} \right]$$

$$Q_1(r) = \Gamma - \frac{p^2}{f(r)}$$

$$Q_2(r) = \frac{k_z}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\, f(r)} \left[\frac{p}{r} + \Gamma \frac{d}{dr} \left(\frac{p}{\Gamma} \right) \right]$$

$$p = \frac{m}{r} + k_0 q(r) \quad , \qquad k_0 = \frac{\omega}{c} \quad , \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{8}$$

式(7)および(8)からわかるように，$k_z \neq 0$ の場合，すなわち入射平面波が斜方向から入射する場合には，媒質の回転運動によって，E_z および H_z は互いに結合する．式(7)の結合方程式の厳密解を，$r = 0$ のまわりのべき級数を用いて求めると，次のようになる．(14)

$$E_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[A_m R_m^{(1)}(\lambda r) + B_m R_m^{(2)}(\lambda r) \right] \phi_m$$

$$H_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j \frac{1}{\eta} \left[A_m R_m^{(1)}(\lambda r) - B_m R_m^{(2)}(\lambda r) \right] \phi_m \tag{9}$$

ただし，

$$R_m^{(l)}(\lambda r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu}^{(l)} (\lambda r)^{2\nu+|m|} \quad (l = 1, 2)$$

$$\phi_m = exp\left[j(\omega t - m\varphi - k_z z) \right]$$

$$\lambda^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - k_z^2 \tag{10}$$

A_m および B_m は未定定数である．また，式(10)の無限級数の展開係数

$a_{2\nu}^{(l)}$ ($l=1, 2$) は，式 (9) および式 (10) を式 (7) に代入し，r の各べき項の係数を 0 と置くことによって得られる次のような漸化式から求められる．

$$4\nu(\nu+|m|)a_{2\nu}^{(l)}+F_1^{(l)}(\nu-1)a_{2(\nu-1)}^{(l)}+q_1^2q_2^2\alpha^2F_2(\nu-2)a_{2(\nu-2)}^{(l)}$$

$$+n^2q_1^4q_2^4\alpha^4a_{2(\nu-3)}^{(l)}=0\,,\quad \nu\geqq 3\,,\quad (l=1, 2)$$

$$a_0^{(l)}=\frac{1}{2^{|m|}|m|!} \qquad (l=1, 2)$$

$$a_2^{(l)}=-\frac{F_1^{(l)}(0)}{4(1+|m|)}\,a_0^{(l)} \qquad (l=1, 2)$$

$$a_4^{(l)}=\frac{1}{8(2+|m|)}\left[\frac{F_1^{(l)}(1)\,F_1^{(l)}(0)}{4(1+|m|)}-q_1^2q_2^2\alpha^2F_2(0)\right]a_0^{(l)} \qquad (l=1, 2)$$

$$F_1^{(l)}(\nu)=1-2m(n^2-1)q_2^2\alpha-\left[4\nu(\nu+|m|)(1+n^2q_1^2)\right.$$

$$\left.+2(2\nu+|m|)(n^2-1)q_3^2-(n^2-1)m^2\right]q_2^2\alpha^2$$

$$+\delta_l\frac{2k_z}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}(n^2-1)q_2^2(\alpha-mn^2q_2^2\alpha^2) \qquad (l=1, 2)$$

$$F_2(\nu)=-(n^2+1)+2mn^2(n^2-1)q_2^2\alpha+n^2\left[4\nu(\nu+|m|)\right.$$

$$\left.-(n^2-1)m^2\right]q_2^2\alpha^2$$

$$q_1=\lambda_0/\lambda\,,\quad q_2=k_0/\lambda\,,\quad q_3=k_z/\lambda$$

$$\lambda_0^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0-k_z^2\,,\qquad \alpha=\Omega/\omega$$

$$\delta_l=\begin{cases}1 & (l=1)\\ -1 & (l=2)\end{cases} \qquad (11)$$

式 (10) に示した級数解 $R_m^{(l)}(\lambda r)$ ($l=1, 2$) は，$|\beta|\ll 1$ の場合には，

Bessel 関数に一致する．また，この級数解は，微分方程式(7)の特異点の考察から，$|\beta| < 1$ に対して収束することがわかる．[14] なお，式(9)には，回転運動を行う誘電体円柱内部の電磁界の z 方向成分のみを示したが，他の成分は式(5)から求められる．

3．散　乱　電　磁　界

次に，中心軸のまわりに一様に回転している無限長誘電体円柱による平面電磁波の散乱について考察する．いま，入射平面波の波動ベクトルが，図1に示すように，$x-z$ 平面内にあり，x 軸と θ_i なる角度をなすものとすると，入射平面波は，一般に次のような円筒波の形に表わすことができる．

$$E_z^{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(i)} J_m(\lambda_i r)\,\phi_m^{(i)}$$

$$H_z^{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j\frac{1}{\eta_1} B_m^{(i)} J_m(\lambda_i r)\,\phi_m^{(i)} \tag{12}$$

ただし，

$$\phi_m^{(i)} = exp\left[j(\omega t - m\varphi - k_{iz} z)\right]$$

$$\lambda_i = k_1 \cos\theta_i, \quad k_{iz} = k_1 \sin\theta_i$$

$$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad \eta_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} \tag{13}$$

$A_m^{(i)}$ および $B_m^{(i)}$ は，入射波の振幅の大きさおよび偏波によって決まる定数である．いま，入射平面波の電界ベクトルが y 軸と ϕ_i なる角度をなすものとし，その大きさを E_{i0} とすると，$A_m^{(i)}$ および $B_m^{(i)}$ は次式で与えられる．

$$A_m^{(i)} = (-j)^m E_{i0} \sin \phi_i \cos \theta_i$$

$$j \frac{1}{\eta_1} B_m^{(i)} = \frac{1}{\eta_1} (-j)^m E_{i0} \cos \phi_i \cos \theta_i \tag{14}$$

一方，散乱電磁界は，次のように表わすことができる．

$$E_z^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(s)} H_m^{(2)} (\lambda_s r) \phi_m^{(s)}$$

$$H_z^{(s)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j \frac{1}{\eta_1} B_m^{(s)} H_m^{(2)} (\lambda_s r) \phi_m^{(s)} \tag{15}$$

ただし，

$$\phi_m^{(s)} = exp\left[j(\omega t - m\varphi - k_{sz} z) \right]$$

$$\lambda_s^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - k_{sz}^2 \tag{16}$$

$A_m^{(s)}$および$B_m^{(s)}$は未定定数であり，後に境界条件から決定される．また，$H_m^{(2)}$は第2種Hankel関数を表わし，k_{sz}はz方向の伝搬定数である．式(12)および(15)では，入射波および散乱波のz方向成分のみを示したが，他の成分はMaxwellの方程式から得られる．

式(15)および(9)に現われる未定定数$A_m^{(s)}$，$B_m^{(s)}$，A_mおよびB_mは，円柱表面において電界および磁界の接線成分が連続でなければならないという境界条件[15]すなわち

$$E_\varphi^{(i)} + E_\varphi^{(s)} = E_\varphi$$

$$E_z^{(i)} + E_z^{(s)} = E_z$$

$$H_{\varphi}^{(i)} + H_{\varphi}^{(s)} = H_{\varphi} \qquad (r=a)$$

$$H_{z}^{(i)} + H_{z}^{(s)} = H_{z} \tag{17}$$

から求められる．

式(17)が成立するためには，まず，z 方向の伝搬定数は，すべて等しくなければならない．すなわち，

$$k_{z} = k_{iz} = k_{sz} \tag{18}$$

また，式(18)から

$$\lambda_{s} = \lambda_{i} \tag{19}$$

なる関係が得られる．

次に，式(12)，(15)および(7)を式(17)に代入すると，$A_{m}^{(s)}$，$B_{m}^{(s)}$，A_{m}およびB_{m}は次式で与えられることがわかる．

$$\begin{bmatrix} A_{m}^{(s)} \\ B_{m}^{(s)} \\ A_{m} \\ B_{m} \end{bmatrix} = [W]^{-1} \begin{bmatrix} A_{m}^{(i)} K_{i} J_{m}(q_{i}) + B_{m}^{(i)} M_{i} J_{m}'(q_{i}) \\ A_{m}^{(i)} J_{m}(q_{i}) \\ A_{m}^{(i)} M_{i} J_{m}'(q_{i}) + B_{m}^{(i)} K_{i} J_{m}(q_{i}) \\ B_{m}^{(i)} J_{m}(q_{i}) \end{bmatrix} \tag{20}$$

ただし，

$$[W]=\begin{bmatrix} -K_i H_m^{(2)}(q_i) & -M_i H_m^{(2)\prime}(q_i) & KR_m^{(1)}(q)+MR_m^{(1)\prime}(q) & KR_m^{(2)}(q)-MR_m^{(2)\prime}(q) \\ -H_m^{(2)}(q_i) & 0 & R_m^{(1)}(q) & R_m^{(2)}(q) \\ -M_i H_m^{(2)\prime}(q_i) & -K_i H_m^{(2)}(q_i) & N\{KR_m^{(1)}(q)+MR_m^{(1)\prime}(q)\} & -N\{KR_m^{(2)}(q)-MR_m^{(2)\prime}(q)\} \\ 0 & -H_m^{(2)}(q_i) & NR_m^{(1)}(q) & -NR_m^{(2)}(q) \end{bmatrix}$$

$$K_i=\frac{k_{iz}m}{\lambda_i^2 a}\quad,\qquad K=\frac{k_{iz}p}{\Gamma}\quad,\qquad N=\frac{\eta_1}{\eta}$$

$$M_i=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\lambda_i}\quad,\qquad M=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\Gamma}\lambda f(a)$$

$$q_i=\lambda_i a\quad,\qquad q=\lambda a \tag{21}$$

式 (20) において，プライム符号は一階微分を表わす．$A_m^{(s)}$ および $B_m^{(s)}$ が求まると，式 (15) から散乱電磁界が求められる．いま，特別の場合として，入射波が E 波および H 波の場合について，式 (20) から，$A_m^{(s)}$ および $B_m^{(s)}$ を求めると次のようになる．

(i) 入射波が E 波の場合 ($B_m^{(i)}=0$)

$$A_m^{(s)}=-A_m^{(i)}\left[\frac{J_m(q_i)}{H_m^{(2)}(q_i)}-G_{1E}\right]$$

$$B_m^{(s)}=-A_m^{(i)}G_2 \tag{22}$$

ただし，

$$G_{1E}=\frac{2j}{\pi q_i[H_m^{(2)}(q_i)]^2 G_0}\left[\frac{1}{N}\frac{M}{M_i}\left\{\frac{R_m^{(1)\prime}(q)}{R_m^{(1)}(q)}+\frac{R_m^{(2)\prime}(q)}{R_m^{(2)}(q)}\right\}-2\frac{H_m^{(2)\prime}(q_i)}{H_m^{(2)}(q_i)}\right]$$

$$G_2=\frac{2j}{\pi q_i\left[H_m^{(2)}(q_i)\right]^2 G_0}\left[\frac{M}{M_i}\left\{\frac{R_m^{(1)\prime}(q)}{R_m^{(1)}(q)}-\frac{R_m^{(2)\prime}(q)}{R_m^{(2)}(q)}\right\}+2\frac{K-K_i}{M_i}\right]$$

$$\begin{aligned}G_0=&\left[\frac{H_m^{(2)\prime}(q_i)}{H_m^{(2)}(q_i)}-N\frac{M}{M_i}\frac{R_m^{(1)\prime}(q)}{R_m^{(1)}(q)}\right]\left[\frac{H_m^{(2)\prime}(q_i)}{H_m^{(2)}(q_i)}-\frac{1}{N}\frac{M}{M_i}\frac{R_m^{(2)\prime}(q)}{R_m^{(2)}(q)}\right]\\&+\left[\frac{H_m^{(2)\prime}(q_i)}{H_m^{(2)}(q_i)}-\frac{1}{N}\frac{M}{M_i}\frac{R_m^{(1)\prime}(q)}{R_m^{(1)}(q)}\right]\left[\frac{H_m^{(2)\prime}(q_i)}{H_m^{(2)}(q_i)}-N\frac{M}{M_i}\frac{R_m^{(2)\prime}(q)}{R_m^{(2)}(q)}\right]\\&-2\left(\frac{K-K_i}{M_i}\right)\left[\frac{M}{M_i}\left\{\frac{R_m^{(1)\prime}(q)}{R_m^{(1)}(q)}-\frac{R_m^{(2)\prime}(q)}{R_m^{(2)}(q)}\right\}+\frac{K-K_i}{M_i}\right]\end{aligned}\qquad(23)$$

(ii) 入射波がH波の場合（$A_m^{(i)}=0$）

$$A_m^{(s)}=-B_m^{(i)}G_2$$

$$B_m^{(s)}=-B_m^{(i)}\left[\frac{J_m(q_i)}{H_m^{(2)}(q_i)}-G_{1H}\right]\qquad(24)$$

ただし，

$$G_{1H}=\frac{2j}{\pi q_i\left[H_m^{(2)}(q_i)\right]^2 G_0}\left[N\frac{M}{M_i}\left\{\frac{R_m^{(1)\prime}(q)}{R_m^{(1)}(q)}+\frac{R_m^{(2)\prime}(q)}{R_m^{(2)}(q)}\right\}-2\frac{H_m^{(2)\prime}(q_i)}{H_m^{(2)}(q_i)}\right]\qquad(25)$$

G_0およびG_2は式(23)で与えられる．

4．後方散乱断面積および散乱パターン

回転運動を行う無限長誘電体円柱の単位長当りの後方散乱断面積C_B，および円柱の軸に垂直な平面内における散乱パターン$C(\varphi)$は，静止している

円柱あるいは軸方向に運動している円柱の場合と同様に，次式で与えられる。[16]

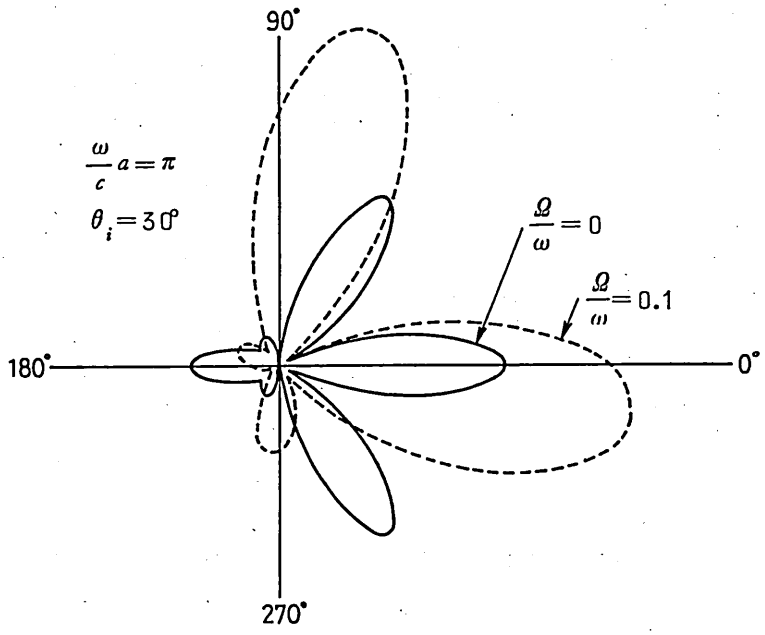
$$C_B=\frac{4}{E_{i0}^2\lambda_i\cos^2\theta_i}\left[\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-j)^m A_m^{(s)}\right|^2+\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-j)^m B_m^{(s)}\right|^2\right]$$

$$C(\varphi)=\frac{2}{\pi E_{i0}^2\lambda_i\cos^2\theta_i}\left[\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m^{(s)}e^{-jm(\varphi-\frac{\pi}{2})}\right|^2+\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_m^{(s)}e^{-jm(\varphi-\frac{\pi}{2})}\right|^2\right] \tag{26}$$

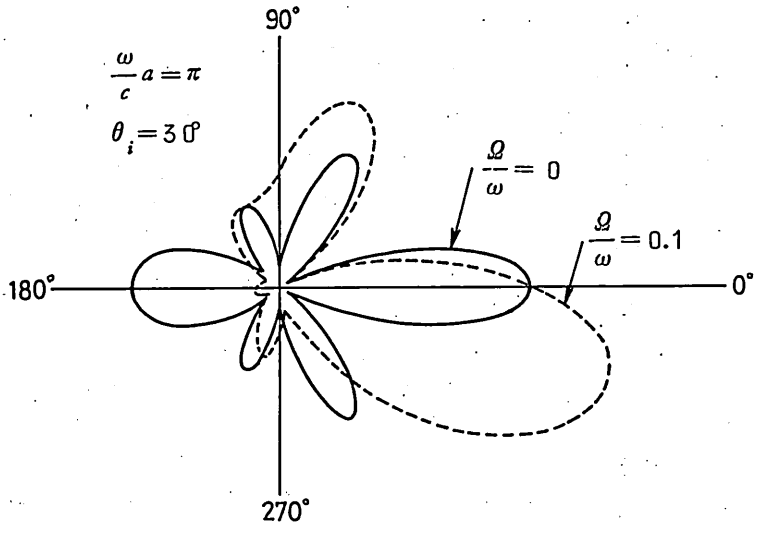
後方散乱断面積C_Bは，入射波源の方向，すなわち$\varphi=\pi$の方向に散乱されて戻ってくる電力の大きさを与え，散乱パターン$C(\varphi)$は，円柱の軸に垂直な平面内における散乱電力の分布を与える．

5. 検　　討

誘電体円柱の散乱特性が，回転運動によって，どのように変化するかを定量的に知るために，具体例として，非分散性の誘電体（$n=2$，$\mu=\mu_0$）からなる無限長円柱が真空中で回転している場合を考え，散乱パターンおよび後方散乱断面積を数値的に検討する．まず，散乱パターンの数値例を図2に示す．図2(a)および(b)は，それぞれ，入射波がE波の場合およびH波の場合の散乱パターンを示したものである．図2から，円柱が回転運動を行うと，散乱パターンは，大きさが大きく変化するとともに，円柱が静止している場合の対称性を失うことがわかる．図2は，$\theta_i=30°$，$\omega a/c=\pi$という特別な場合について示したものであるが，種々のパラメータが他の値をとるときの数値計算結果の検討から，散乱パターンのずれ方および大きさの変化は，円柱の回転速度の変化に対して一様ではないことがわかった．円柱が回転運動を行う場合に，散乱パターンが非対称になるのは，円柱内部の右まわりの

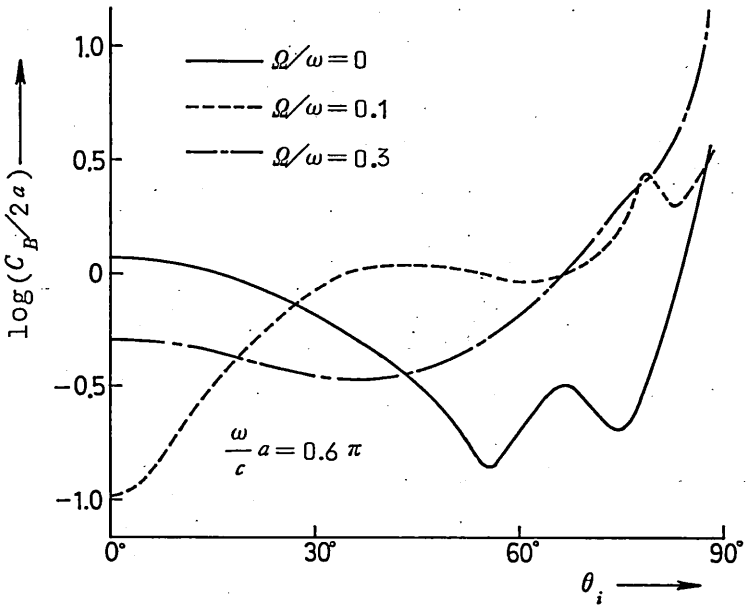


(a) 入射波が E 波の場合

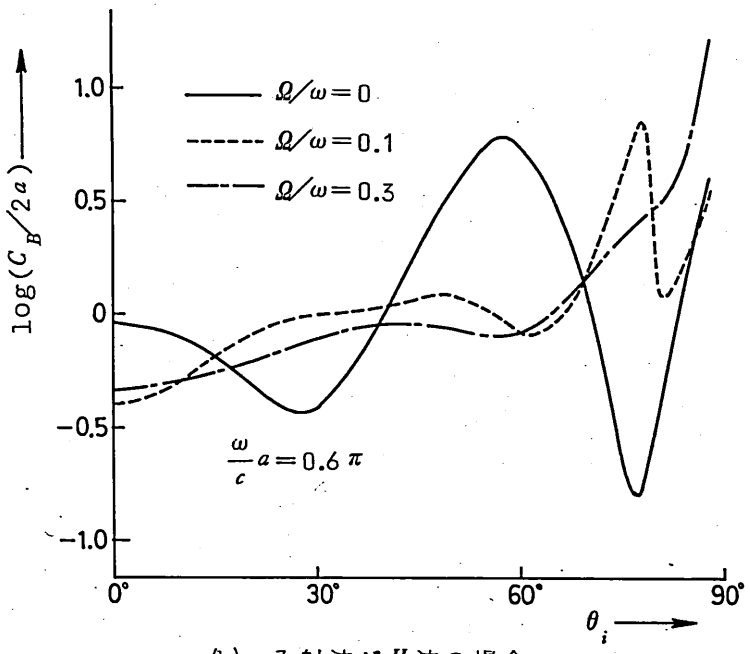


(b) 入射波が H 波の場合

図 2　回転運動を行う誘電体円柱の散乱パターン

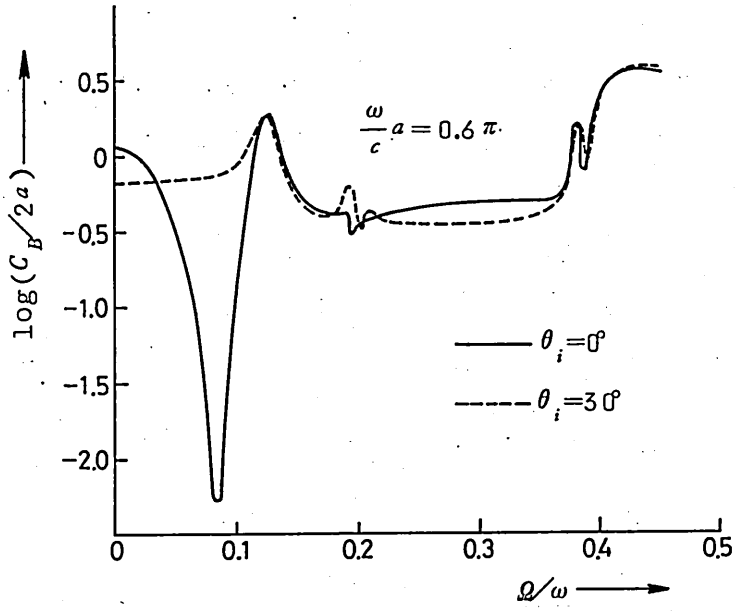


(a) 入射波が E 波の場合

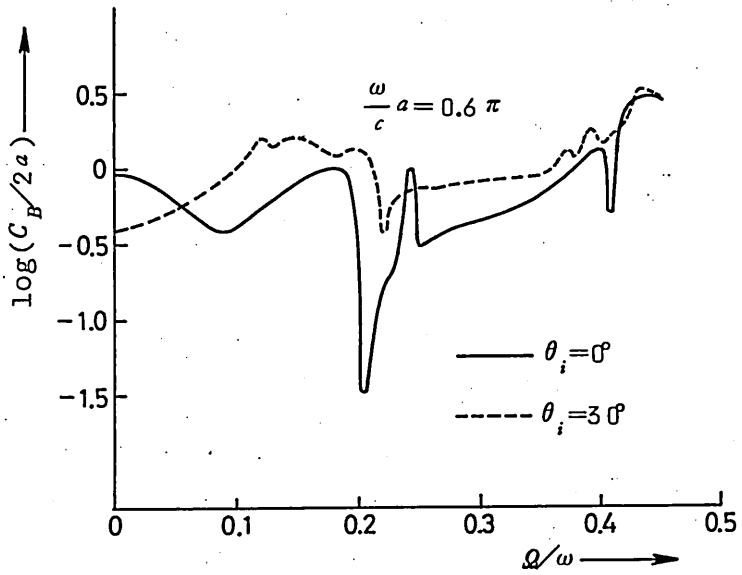


(b) 入射波が H 波の場合

図 3　後方散乱断面積と入射角との関係



(a) 入射波が E 波の場合



(b) 入射波が H 波の場合

図 4　後方散乱断面積と角速度との関係

波と左まわりの波が，回転運動によって異る性質をもつようになるからである．次に，後方散乱断面積と入射角との関係の数値例を図３に示す．図３から，円柱の回転速度が大きくなると，入射角の増加に対する後方散乱断面積の変化は緩やかになり，単調増加に近づくことがわかる．最後に，図４は後方散乱断面積と角速度との関係を $\theta_i = 0°$ および $\theta_i = 30°$ の場合について示したものである．図４からわかるように，回転運動の効果は，特に垂直入射の場合に顕著に現われている．以上の考察から，回転運動を行う円柱による散乱を取り扱う場合には，パラメータ Ω/ω が重要な役割を果すことがわかる．ただし，パラメータ Ω/ω の取り得る値はパラメータ $\omega a/c$ の値によって制限されることに注意しなければならない．すなわち，

$$\frac{\omega a}{c}\frac{\Omega}{\omega} = \frac{\Omega a}{c} \tag{27}$$

なる関係に注意すると，特殊相対論により $\Omega a/c < 1$ となることが要求されるので，パラメータ Ω/ω とパラメータ $\omega a/c$ は互いに独立に選ぶことはできないことがわかる．

6．むすび

本稿では，中心軸のまわりに一定の角速度で回転している無限長誘電体円柱による平面電磁波の散乱について考察した．まず，Maxwell の方程式と回転運動を行う媒質に対する構成関係式を用いて，回転運動を行う誘電体円柱内部の電磁界の一般表示および波動方程式を求め，波動方程式の厳密解を無限級数の形で与えた．次に，この級数解を用いて，散乱電磁界，後方散乱断面積および散乱パターンを一般的に求めた．さらに，円柱の回転運動によ

って，散乱特性がどのように変化するかを定量的に知るために，散乱パターンおよび後方散乱断面積について数値的に検討した．その結果，円柱の回転運動の効果は顕著に現われ，散乱特性には円柱が静止している場合とは異る特徴が現われることがわかった．

なお，本研究は，昭和５１年度文部省科学研究費補助金の援助によって行われたものである．

謝　辞　終りに，日ごろ御指導頂く大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに数値計算に御協力頂いた大阪大学工学部学生須崎俊彦氏に深謝する．

文　献

(1) C. V. Heer : "Resonant frequencies of an electromagnetic cavity in an accelerated system of reference", Phys. Rev., **134**, p. A799 (May 1964).

(2) A. Yildiz and C. H. Tang : "Electromagnetic cavity resonance in accelerated systems", Phys. Rev., **146**, p. 947 (June 1966).

(3) E. J. Post : "Sagnac effect", Rev. Mod. Phys., **39**, p. 475 (April 1967).

(4) J. L. Anderson and J. W. Ryon : "Electromagnetic radiation in accelerated systems", Phys. Rev., **181**, p. 1765 (May 1969).

(5) J. Van Bladel : "Relativistic theory of rotating

disks", Proc. IEEE, **61**, p. 260 (March 1973).

(6) T. Shiozawa : "Phenomenological and electron-theoretical study of the electrodynamics of rotating systems", Proc. IEEE, **61**, p. 1694 (Dec. 1973).

(7) H. A. Atwater and T. Shiozawa : " The electromagnetic field in rotating coordinate frames", Proc. IEEE (Letters), **63**, p. 316 (Feb. 1975).

(8) 塩沢，田中：" 回転運動を行う誘電体円柱による平面電磁波の散乱"，信学論(B)，**57−B**，6，p. 361 (昭49-06).

(9) T. Shiozawa : "Constitutive relations for a rotating electron plasma", Proc. IEEE (Letters), **62**, p. 1283 (Sept. 1974).

(10) S. Seikai and T. Shiozawa : " Scattering of electromagnetic waves by a rotating electron-plasma column", IEEE Trans., **AP−23**, p. 75 (Jan. 1975).

(11) T. Shiozawa : "Propagation of electromagnetic waves in rotating systems", Proc. IEEE (Letters), **63**, p. 1368 (Sept. 1975).

(12) 塩沢，徳田，青海：" 回転運動を行う電子プラズマ円柱に沿う空間電荷波の伝搬"，信学論(B)，**58−B**，10，p. 529 (昭50-10).

(13) J. Van Bladel : "Electromagnetic fields in the presence of rotating bodies", Proc. IEEE, **64**, p. 301 (March 1976).

(14) 後藤，塩沢：" 回転運動を行う誘電体円柱に沿う電磁波の伝搬"，信学論(B)，**59−B**，12，p. 579 (昭51-12).

(15) R. C. Costen and D. Adamson : " Three-dimensional deri-

vation of the electrodynamic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary", Proc. IEEE, **53**, p. 1181 (Sept. 1965).

(16) T. Shiozawa and S. Seikai : "Scattering of electromagnetic waves from an inhomogeneous magnetoplasma column moving in the axial direction", IEEE Trans., **AP-20**, p. 455 (July 1972).

輻射科学研究会資料

非直線容量パラメトリック励振による4相位相再生増幅器

池上淳一[+]
中島将光[+]
梅田博之[++]

[+] 京都大学 工学部
[++] 福井大学 工学部

1977年2月9日

1　まえがき

近年デジタル伝送方式の普及にともないＰＣＭ－ＰＭ通信の直接再生中継に対し，種々の直接位相再生器の研究がなされている。すでに提案されている4相直接位相再生器としては，(1)4逓倍された搬送波を励振波として使用し，エサキダイオードによるパラメトリック発振特性を利用する方法，[1] (2)位相コヒーレント縮退パラメトリック増幅器の励振位相を信号の変調とは関係なく固定し，増幅器を２台並列に使用する方法，[2] (3) 3－4逓倍法による4相位相合成の方法などがある。[3] しかし，(1)はエサキダイオードの負性抵抗領域にバイアスするので励振波を除いても自励振動が存在し，発振波が励振波に位相同期する同期範囲が存在し，また(2)，(3)の方法は搬送波抽出が容易であるという利点を持っているが回路構成が複雑，かつ大規模となる欠点を持っている。これに対して筆者らはさきに１個の非直線容量を4ωの周波数で励振し，2ω，ωの分周を相次いで，しかも同時に行なわせる新しい4相回路を提案し，その動作特性の解明を行った。[4]

本文ではこの4相回路のアイドラー回路（2ω）に注入電圧を印加し，4相直接位相再生増幅器を構成する。2ωでの外部注入電圧の印加により良好な位相再生特性が得られ，またωの周波数において増幅作用が得られる。この4相位相再生増幅器は増幅器の広帯域化により超高速ＰＣＭ－ＰＭ信号の位相再生器となり得る。さらに2相直接位相再生器を２個使用する方法と比較しても調整の容易の点で優れている。以下の章では，4相位相再生増幅器の動作原理の解析を行い，ついで数値計算により4相位相再生特性の諸特性について述べ，あわせて実験結果と比較検討し，解析結果の妥当性を明らかにする。

2.　回路構成および基本解析

図１は4ω，2ω，ωの共振回路をもつ4相回路の基本回路を

表わしている。入力信号電圧源を V_s, R_{1g}, アイドラー回路の注入電圧源を V_i, R_{2g}, 4ω の励振電圧源を V_p, R_{4g} とする。

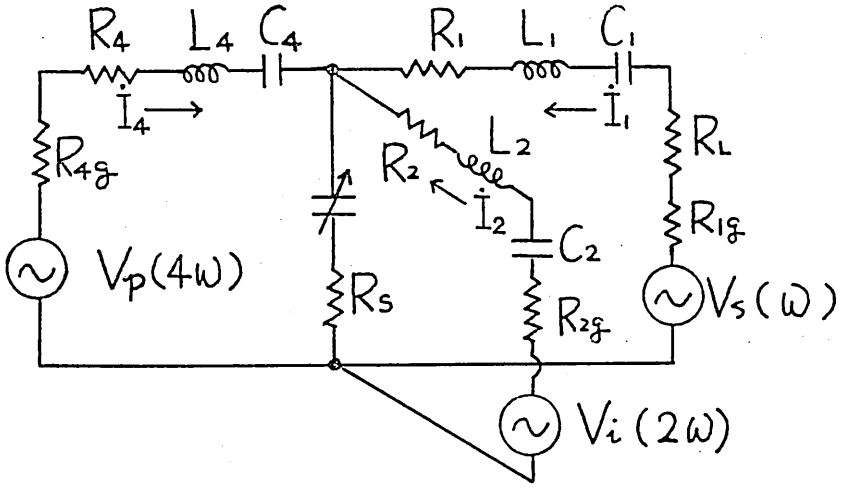


図1　4相回路

非直線容量の電荷 q と電圧 v との関係は2次式

$$v - V_0 = S_1(q - Q_0) + S_2(q - Q_0)^2 \qquad (1)$$

によって表わされるものと仮定する。ここに S_1 は直線エラスタンス, S_2 は2次の非直線係数であり, V_0 と Q_0 は動作点の電圧および電荷である。図1の回路において共振回路の Q が高いと仮定すると, q は Q_0 と ω, 2ω, 4ω なる3つの角周波数から成り

$$q = Q_0 + q_1\cos(\omega t + \theta_1') + q_2\cos(2\omega t + \theta_2') + q_4\cos(4\omega t + \theta_4') \qquad (2)$$

と表わすことができる。式(1), (2)より ω, 2ω, 4ω 成分の電圧のみ考慮し複素ベクトル表示すればつぎのようになる。

$$\dot{V}_1 = S_1 \dot{Q}_1 + S_2 \bar{\dot{Q}}_1 \dot{Q}_2 \qquad (3)$$

$$\dot{V}_2 = S_1 \dot{Q}_2 + S_2 (\bar{\dot{Q}}_2 \dot{Q}_4 + \frac{1}{2} \dot{Q}_1^2) \qquad (4)$$

$$\dot{V}_4 = S_1 \dot{Q}_4 + \frac{S_2}{2} \dot{Q}_2^2 \qquad (5)$$

上式で ・ は複素ベクトルを，また ― は共役値を示す。ω，2ω，4ω の回路のインピーダンスをそれぞれ $\dot{Z}_{1T}$，$\dot{Z}_{2T}$，$\dot{Z}_{4T}$，共振周波数を ω_1，ω_2，ω_4 とするとつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} \dot{Z}_{1T} &= R_{1T}(1 + j2\delta_1 Q_1) \\ \dot{Z}_{2T} &= R_{2T}(1 + j2\delta_2 Q_2) \\ \dot{Z}_{4T} &= R_{4T}(1 + j2\delta_4 Q_4) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} &R_{1T} = R_1 + R_{1g} + R_s + R_L, \quad R_{2T} = R_2 + R_{2g} + R_s \\ &R_{4T} = R_4 + R_{4g} + R_s \\ &\delta_1 = \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}, \quad \delta_2 = \frac{2\omega - \omega_2}{\omega_2}, \quad \delta_4 = \frac{4\omega - \omega_4}{\omega_4} \\ &Q_1 = \frac{\omega_1 L_1}{R_{1T}}, \quad Q_2 = \frac{\omega_2 L_2}{R_{2T}}, \quad Q_4 = \frac{\omega_4 L_4}{R_{4T}} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

図1の回路において電圧，電流の関係式は式（3）～（6）より

$$\dot{Z}_{1T}\dot{I}_1 + \frac{S_2}{2\omega^2}\dot{I}_2\bar{\dot{I}}_1 = \dot{V}_S \qquad (8)$$

$$\dot{Z}_{2T}\dot{I}_2 + \frac{S_2}{8\omega^2}(\dot{I}_4\bar{\dot{I}}_2 - 4\dot{I}_1^2) = \dot{V}_i \qquad (9)$$

$$\dot{Z}_{4T}\dot{I}_4 - \frac{S_2}{8\omega^2}\dot{I}_2^2 = \dot{V}_P \qquad (10)$$

が成立する。ただし $\dot{I}_n = |I_n|e^{j\theta_n} = jn\omega\dot{Q}_n$ である。

（2・1） 入力信号が存在しない場合（$\dot{V}_S = 0$）

式(9), (10)より複素ベクトル量 $\dot{I}_4$ を消去すると

$$\left(1 + \frac{\frac{S_2}{8\omega^2}|\dot{I}_2|}{\dot{Z}_{2T}\dot{Z}_{4T}}\right)\dot{I}_2 + \frac{\frac{S_2}{8\omega^2}\dot{V}_P}{\dot{Z}_{2T}\dot{Z}_{4T}}\bar{\dot{I}}_2 = \frac{\frac{S_2}{2\omega^2}\dot{I}_1^2}{\dot{Z}_{2T}} + \frac{\dot{V}_i}{\dot{Z}_{2T}} \qquad (11)$$

となる。 ω の分周波発振が生じているとき式(8)の関係を用いると

$$\left(1 + \frac{|\dot{Z}_{1T}|^2}{16\dot{Z}_{2T}\dot{Z}_{4T}} + \frac{\left(\frac{S_2}{2\omega^2}|\dot{I}_1|\right)^2}{\dot{Z}_{1T}\dot{Z}_{2T}}\right)\dot{I}_2 + \frac{\frac{S_2}{8\omega^2}\dot{V}_P}{\dot{Z}_{2T}\dot{Z}_{4T}}\bar{\dot{I}}_2 = \frac{\dot{V}_i}{\dot{Z}_{2T}} \qquad (12)$$

が成立する。いま図1の回路においてそれぞれの共振回路が ω, 2ω, 4ω に完全に同調しているものとすれば式(6)において $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_4 = 0$ であるから，式(12)より

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_i}{R_{2T}} \cdot \frac{\beta_c + p_\omega + \beta_p e^{j2\left(\theta_i - \frac{\theta_P + \pi}{2}\right)}}{(\beta_c + p_\omega)^2 - \beta_p^2} \qquad (13)$$ ※

※ $\dot{V}_i = 0$ の場合には式(14)が成立することは式(23), (24)によって明らかである。

ただし

$$(\beta_c + P_\omega)^2 - \beta_p^2 \neq 0 \qquad (14)$$

ここに θ_i, θ_p はそれぞれ $\dot{V}_i$, V_p の位相角を表わし

$$P_\omega = \frac{(S_2/2\omega^2 |\dot{I}_1|)^2}{R_{1T}\ R_{2T}},\quad \beta_p = \frac{S_2/8\omega^2 |\dot{V}_p|}{R_{2T}\ R_{4T}},\quad \beta_c = 1 + \frac{R_{1T}^2}{16 R_{2T} R_{4T}} \qquad (15)$$

である。P_ω は無次元化された 1/4 分周波発振出力振幅であり，β_p は 4ω の励振レベルを表わしている。また式(13)と式(8)より P_ω に関するつぎの4次方程式が得られる。

$$\left(\frac{P_\omega + \beta_c}{\beta_p}\right)^4 - \left\{2 + \left(\frac{\beta_i}{\beta_p}\right)^2\right\}\left(\frac{P_\omega + \beta_c}{\beta_p}\right)^2 - 2\left(\frac{\beta_i}{\beta_p}\right)^2 \cos 2\left(\theta_i - \frac{\theta_p + \pi}{2}\right) \times \frac{P_\omega + \beta_c}{\beta_p} + 1 - \left(\frac{\beta_i}{\beta_p}\right)^2 = 0 \qquad (16)$$

ただし

$$\beta_i = \frac{\frac{S_2}{2\omega^2}|\dot{V}_i|}{R_{1T}\ R_{2T}} \qquad (17)$$

は 2ω の励振レベルを表わしている。つぎに 2ω の出力振幅 $\dot{I}_2$ の位相角 θ_2 は式(13)より

$$\cos 2\left(\theta_2 - \frac{\theta_p + \pi}{2}\right) = \frac{\eta' + \cos 2\left(\theta_i - \frac{\theta_p + \pi}{2}\right)}{1 + \eta' \cos 2\left(\theta_i - \frac{\theta_p + \pi}{2}\right)} \qquad (18)$$

ただし

$$\eta' = \frac{2\beta_p(P_w+\beta_c)}{(P_w+\beta_c)^2+\beta_p^2} \tag{19}$$

として求まる。また $\dot{I}_1$ の位相角 θ_1 は式(8)より

$$\theta_1 = \frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{2} \quad or \quad \frac{\theta_2}{2} + \frac{3\pi}{2} \tag{20}$$

である。

いま式(18)において $\theta_i = \frac{\theta_p+\pi}{2}$ とすれば θ_2 は

$$\theta_2 = \frac{\theta_p+\pi}{2}\left(\dot{I}_2^A\right) \quad or \quad \frac{\theta_p+\pi}{2}+\pi\left(\dot{I}_2^B\right) \tag{21}$$

となり，したがって θ_1 は式(20)より

$$\left.\begin{aligned} &\theta_1 = \frac{\theta_p+\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\left(\dot{I}_1^{AA}\right), \quad \frac{\theta_p+\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\left(\dot{I}_1^{AB}\right), \\ &\frac{\theta_p+\pi}{4}+\pi\left(\dot{I}_1^{BA}\right) \quad or \quad \frac{\theta_p+\pi}{4}+2\pi\left(\dot{I}_1^{BB}\right). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

である。上記の $\dot{I}_2$, $\dot{I}_1$ のそれぞれの位相関係を図2に示す。

また式(16)において $\theta_i = \frac{\theta_p+\pi}{2}$ とすれば，P_w に関してつぎの2つの解が得られる。

$$P_w^A = \beta_p + \beta_i - \beta_c \tag{23}$$

$$P_w^B = \beta_p - \beta_i - \beta_c \tag{24}$$

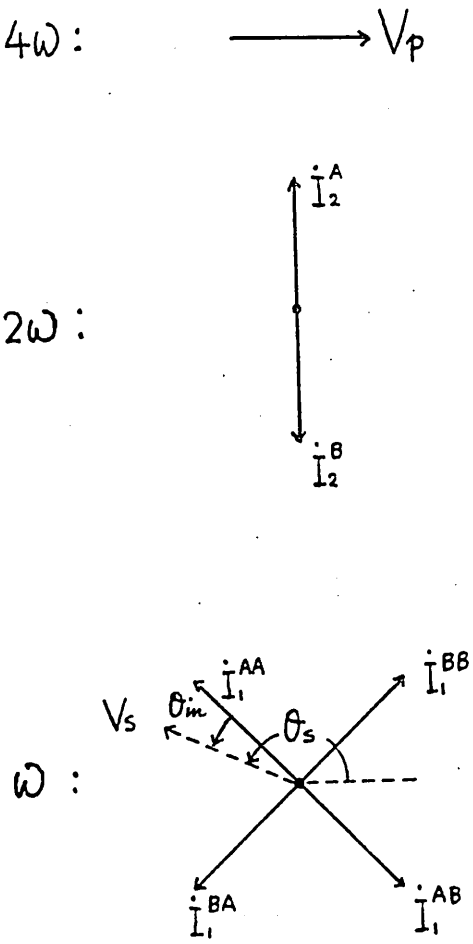

4ω :
V_p
2ω :
$\dot{I}_2^A$
$\dot{I}_2^B$
ω :
V_s
θ_{in}
θ_s
$\dot{I}_1^{AA}$
$\dot{I}_1^{BB}$
$\dot{I}_1^{BA}$
$\dot{I}_1^{AB}$

図 2　出力位相の関係

上式から β_i が増加したとき，増加する解と減少する解があることがわかる。この2つの解 P_w^A, P_w^B は図2に示された出力成分 $\dot{I}_2^A$ ($\dot{I}_1^{AA}$, $\dot{I}_1^{AB}$) と $\dot{I}_2^B$ ($\dot{I}_2^{BA}$, $\dot{I}_1^{BB}$) にそれぞれ対応している。すなわち $\theta_i = \frac{\theta_p + \pi}{2}$ の場合 $\dot{I}_2^A$ は $\dot{V}_i$ と同相であるから，β_i が増加すれば 2ω における $\dot{I}_2^A$ 成分を増大させ，したがって ω における $\dot{I}_1^{AA}$ 並びに $\dot{I}_1^{AB}$ も増大する。この場合 $\dot{I}_1^{AA}$ と $\dot{I}_1^{AB}$ は位相的に互いに π だけ異なるが大きさは等しいので ω の出力振幅値 P_w としては縮退した状態となり，式(23)で示される。一方 $\dot{I}_2^B$ は $\dot{V}_i$ と逆相であるので β_i の増加に対して $\dot{I}_1^{BA}$ 並びに $\dot{I}_1^{BA}$ は減少し P_w^B は式(24)で示される。以上のように θ_i を $\theta_i = \frac{\theta_p + \pi}{2}$ と置くことにより $\dot{I}_2$ と $\dot{I}_1$ の位相関係が明らかとなったが，つぎの節で示されるように入力信号が存在するとき θ_i は入力信号電圧の位相と関連して決定される。

(2.2) 入力信号が存在する場合 ($V_S \neq 0$)

式(8)は

$$1 - \left(\frac{S_2/2\omega^2 \, |\dot{I}_2|}{|\dot{Z}_{IT}|} \right)^2 \neq 0 \quad (25)$$

※

のとき

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_S}{\dot{Z}_{IT}} \cdot \frac{1 - \frac{S_2/2\omega^2 \, \dot{I}_2}{\dot{Z}_{IT}} e^{-j2\theta_S}}{1 - \left(\frac{S_2/2\omega^2 \, |\dot{I}_2|}{|\dot{Z}_{IT}|} \right)^2} \quad (26)$$

と変形できる。ただし θ_S は $\dot{V}_S$ の位相角である。式(26)を式(11)に代入し整理すればつぎの式が得られる。

※ 式(25)が成立しないときは前論文(文献4)で示したように $\dot{I}_2$ が特別の値をとるときである。

$$\dot{a}_1\dot{y} + \dot{a}_2\bar{\dot{y}} + \dot{a}_3\dot{y}^2 + \dot{a}_4 = 0 \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= -B_c X^3 e^{-j(\theta_{2T}+\theta_{4T})} + (1 + B_c e^{-j(\theta_{2T}+\theta_{4T})})X^2 \\
&\qquad + 2q e^{-j(\theta_{1T}+\theta_{2T})} \\
\dot{a}_2 &= -B_p^2 X^2 e^{j(-4\theta_{in}+2\theta_{1T}-\theta_{2T}-\theta_{4T})} \\
\dot{a}_3 &= -q e^{-j(\theta_{1T}+\theta_{2T})} \\
\dot{a}_4 &= a_3 + \beta_i X^2 e^{j(\theta_i - \frac{\theta_p+\pi}{2} - 2\theta_{in}+\theta_{1T}-\theta_{2T})}
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
\dot{y} &= -\frac{\frac{S_2}{2W^2}|\dot{I}_2|}{|Z_{1T}|} e^{j(\theta_2 - \frac{\theta_p+\pi}{2} - 2\theta_{in}+\theta_{1T})} \\
1 - X &= \frac{1-x}{1+(2\delta_1 Q_1)^2} \\
B_p &= \frac{\beta_p}{\sqrt{\{1+(2\delta_4 Q_4)^2\}\{1+(2\delta_2 Q_2)^2\}}}, \\
B_c &= \frac{(\beta_c - 1)(1+(2\delta_1 Q_1)^2)}{\sqrt{\{1+(2\delta_2 Q_2)^2\}\{1+(2\delta_4 Q_4)^2\}}} \\
B_i &= \frac{\beta_i}{\sqrt{\{1+(2\delta_1 Q_1)^2\}\{1+(2\delta_2 Q_2)^2\}}} \\
q &= \frac{q_0}{\sqrt{\{1+(2\delta_1 Q_1)^2\}^3\{1+(2\delta_2 Q_2)^2\}}} \\
\theta_{1T} &= \tan^{-1}2\delta_1 Q_1, \quad \theta_{2T} = \tan^{-1}2\delta_2 Q_2, \quad \theta_{4T} = \tan^{-1}2\delta_4 Q_4
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

として与えられる。ただし

$$\left.\begin{aligned} \theta_{in} &= \theta_s - \frac{\theta_p + 3\pi}{4}, \qquad \chi = 1 - \frac{P_{2\omega}}{\beta_c - 1} \\ P_{2\omega} &= \frac{\left(\frac{\varsigma_2}{8\omega^2}|I_2|\right)^2}{R_{2T}\,R_{4T}}, \quad g_0 = \frac{R_{2T}}{R_{1T}}\left(\frac{\frac{\varsigma_2}{2\omega^2}|V_s|}{R_{1T}\,R_{2T}}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

であり，θ_{in}，$P_{2\omega}$，g_0 はそれぞれ入力(信号)位相，2ω の無次元化された出力振幅値，および入力信号レベルを表わしている。式(27)より複素ベクトル量 $\dot{y}$ は $|\dot{y}|^2 = 1 - X$ なる関係を用いると

$$\dot{y} = \frac{\dot{b}_3\bar{\dot{b}}_1 - \bar{\dot{b}}_3\dot{b}_2}{|\dot{b}_1|^2 - |\dot{b}_2|^2} \quad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{b}_1 &= \bar{\dot{a}}_2\dot{a}_1 - \dot{a}_3\bar{\dot{a}}_4 \\ \dot{b}_2 &= |\dot{a}_2|^2 - |\dot{a}_3|^2(1-X) \\ \dot{b}_3 &= \bar{\dot{a}}_2\dot{a}_4 - \dot{a}_3\bar{\dot{a}}_1(1-X) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

として導出される。さらに式(31)より

$$(1-X)(|\dot{b}_1|^2 - |\dot{b}_2|^2)^2 - |\dot{b}_3\bar{\dot{b}}_1 - \bar{\dot{b}}_3\dot{b}_2|^2 = 0 \quad (33)$$

なる方程式が得られ $P_{2\omega}$ の値が求まる。また P_ω に対しては式(11)と式(31)より

$$P_\omega = \left|\left(1 + B_c(1-X)e^{-j(\theta_{2T}+\theta_{4T})}\right)\dot{y} - B_p e^{j(-4\theta_{in}+2\theta_{1T}-\theta_{2T}-\theta_{4T})}\bar{\dot{y}}\right.$$

$$+B_i e^{j(\theta_i - \frac{\theta_p+\pi}{2} - 2\theta_{in} + \theta_{iT} - \theta_{2T})} \quad (34)$$

さてωの周波数において増幅作用が得られるθ_sに対するθ_iの条件を導びこう。いま入力信号$\dot{V}_s$が$\dot{I}_1^{AA}$と同相に印加されたとき（すなわち$\theta_{in}=0$），それが2ωに変換された場合$\dot{I}_2^A$と逆位相に作用する（付録I参照）。そこでθ_iを$\theta_i = 2\theta_s + \pi$に設定すると

$$\theta_i - \frac{\theta_p+\pi}{2} - 2\theta_{in} = 0 \quad (35)$$

であるから，$\theta_{in}=0$において$\dot{V}_i$は$\dot{I}_2^A$と同相の関係にありωの周波数での増幅作用が期待される。また3章で示すように，式(35)が成立しているとき良好な4相位相再生特性が得られる。図1に示された4相回路の基本回路において式(35)の関係を満足させるには図3に示した回路構成を行うことにより実現される。

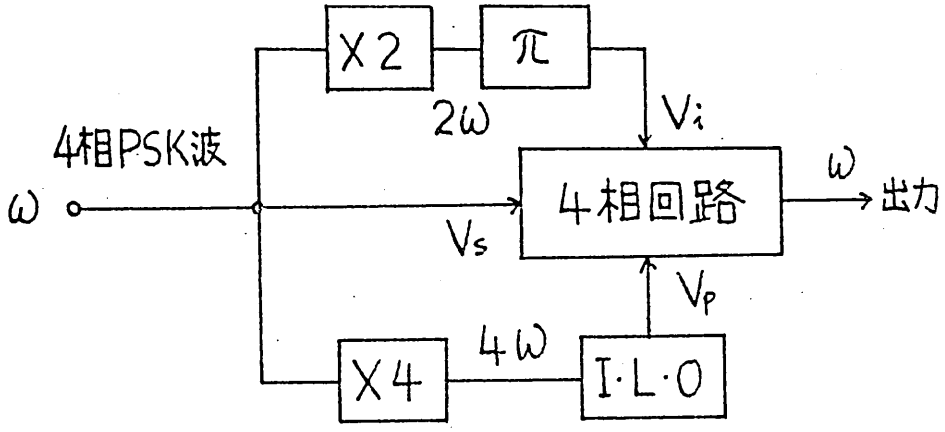


図3　4相位相再生回路

ωの入力信号波を2逓倍し，さらにπだけ位相推移させこれを$\dot{V}_i$とし，一方入力の一部を4逓倍し，注入同期発振器（ＩＬＯ）に注入する。このＩＬＯは注入波の過渡的な位相変動には応答せず，励振位相は固定されている。このような調整された回路では位相変動を伴ったＰＳＫ波の入力に対して出力は図2に示された4つの位相にそれぞれ位相固定され，位相再生効果が生ずることになる。以下この4相位相再生特性について検討を行う。

3. 4相位相再生の諸特性

3・1 発振特性

本節では$\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_4 = 0$ および$\delta_0 = 0$において2ω, ωの分周波発振が生ずる臨界条件を求め，つぎに$\delta_0 \neq 0$においてこれらの分周波出力と図2で示された電流成分との関係を調べる。

$\dot{V}_i = 0$において2ωの分周波は生ずるが，ωの発振は生じない状態は式（11）において$\dot{I}_1 = 0$とすれば

$$P_{2\omega} = \beta_p - 1 \qquad (36)$$

である。上式において$P_{2\omega} > 0$のとき発振状態とすれば，$\beta_p = 1$が2ωの発振の臨界点である。同様の考えでωの発振の臨界点は式（16）において$P_\omega = 0$として得られ，つぎの式によって与えられる。

$$\left(\frac{\beta_i}{\beta_c}\right)^2 = \frac{\left\{\left(\frac{\beta_p}{\beta_c}\right)^2 - 1\right\}^2}{\left(\frac{\beta_p}{\beta_c}\right)^2 + 2\frac{\beta_p}{\beta_c}\cos 2\left(\theta_i - \frac{\theta_p + \pi}{2}\right) + 1} \qquad (37)$$

式(37)の計算結果を図4に示す。図4の斜線の部分は式(16)で $P_\omega > 0$ なる範囲を示している。$\beta_p < \beta_c$ においても ω の発振可能な領域が存在し，また $\beta_p > \beta_c$ では 2ω，ω が同時に発振することがわかる。式(16)から計算される ω の分周波発振特性を図5に示す。$\theta_i - \frac{\theta_p+\pi}{2} = 0$ のとき解は式(23)，(24)であるから，$\dot{I}_1$ の4つの発振成分は図5に示されたように対応する。$0 \leqq \theta_i - \frac{\theta_p+\pi}{2} \leqq 45°$ では発振の不安定領域は存在せず，P_ω^B は β_i が増加すると零になる。これ以後は 4ω と 2ω の周波数に対する関係のみで不安定領域が決まり，$\dot{I}_2^B$ から $\dot{I}_2^A$ への転移が生ずる(付録Ⅱ参照)。$45° < \theta_i - \frac{\theta_p+\pi}{2} \leqq 90°$

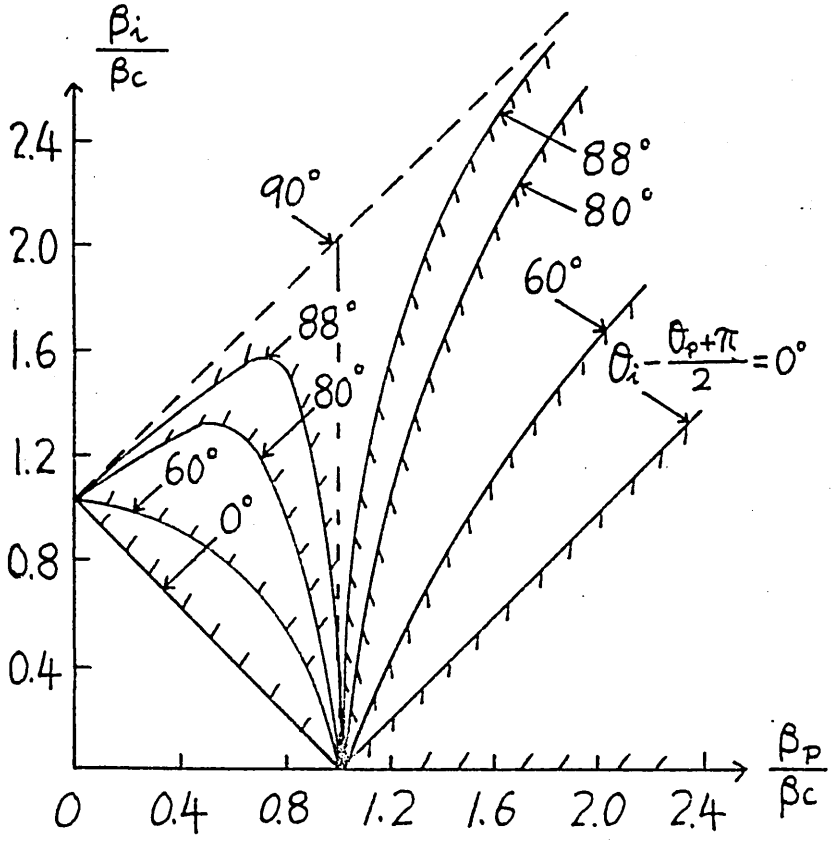


図4 1/4分周波発振領域

では図5で示された臨界点$(\beta_c/\beta_p)_c$が$(\beta_c/\beta_p)_c > \beta_c/\beta_p$の場合には$(\beta_c/\beta_p)_c$点で不安定点となるが，$(\beta_c/\beta_p)_c < \beta_c/\beta_p$のときは$0 \leqq \theta_i - \frac{\theta_p+\pi}{2} \leqq 45°$の場合と同様1/2分周波発振特性から決定される$\beta_p$と$\beta_i$の関係より不安定点が決まる。

つぎにg_0に対する分周波発振特性を式(33),(34)より調べる。$\beta_p = 1.2$，$\beta_c = 2.0$，$\beta_i = 0.05$における出力特性を図6に示す。この場合には図4より2ωのみ発振可能である。g_0が非常に小さい範囲においてはV_iの存在により$\dot{I}_2^A$のみ存在するが，g_0が増大するに従って$\dot{I}_2^B$に作用する効果が大きく現れ$\dot{I}_2^A$より$\dot{I}_2^B$へ転移する(2→3)。逆にg_0を大きい値から減少させた場合$\dot{I}_2^A$へ転移(5→6)するg_0の値は，2→3の

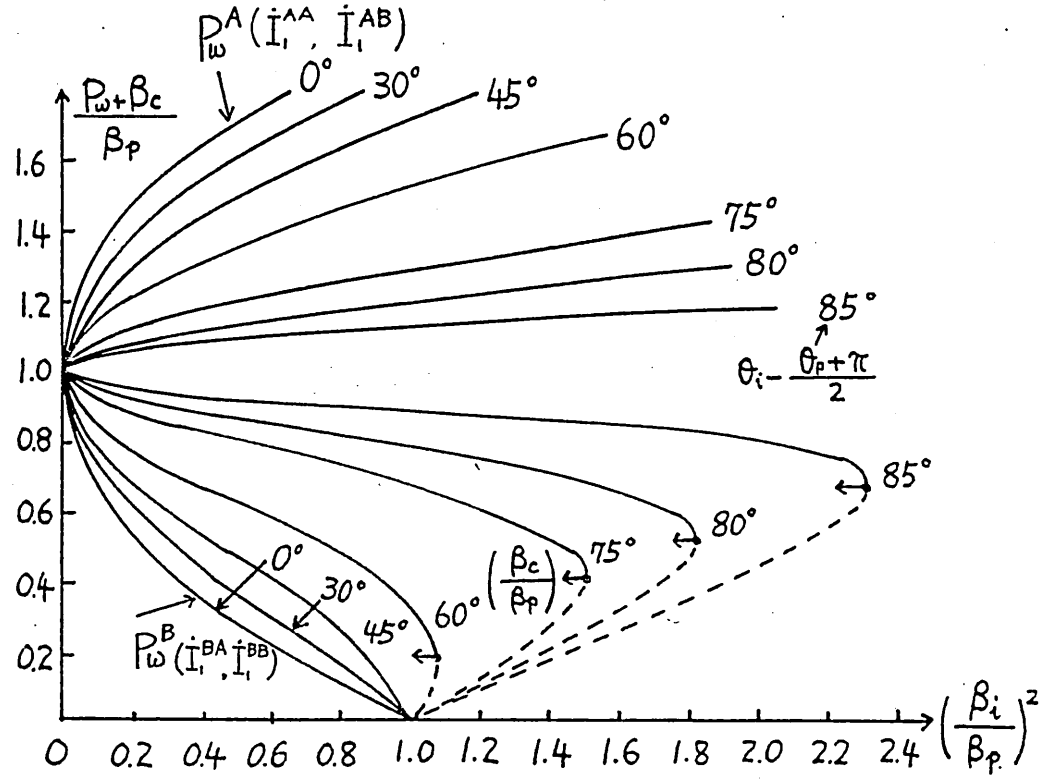
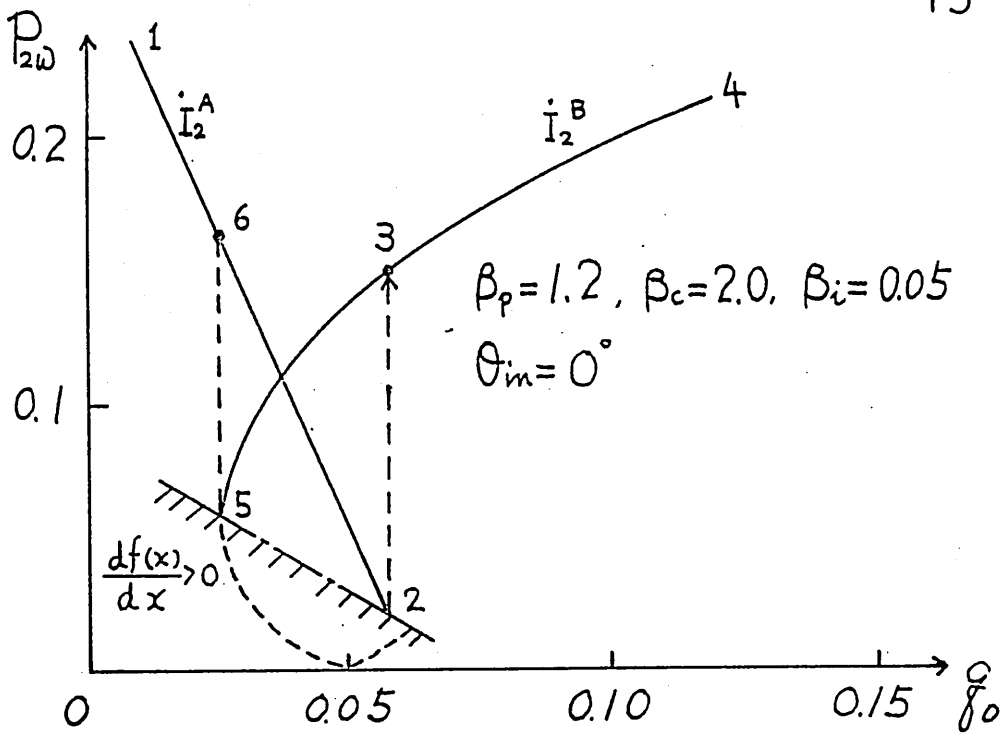
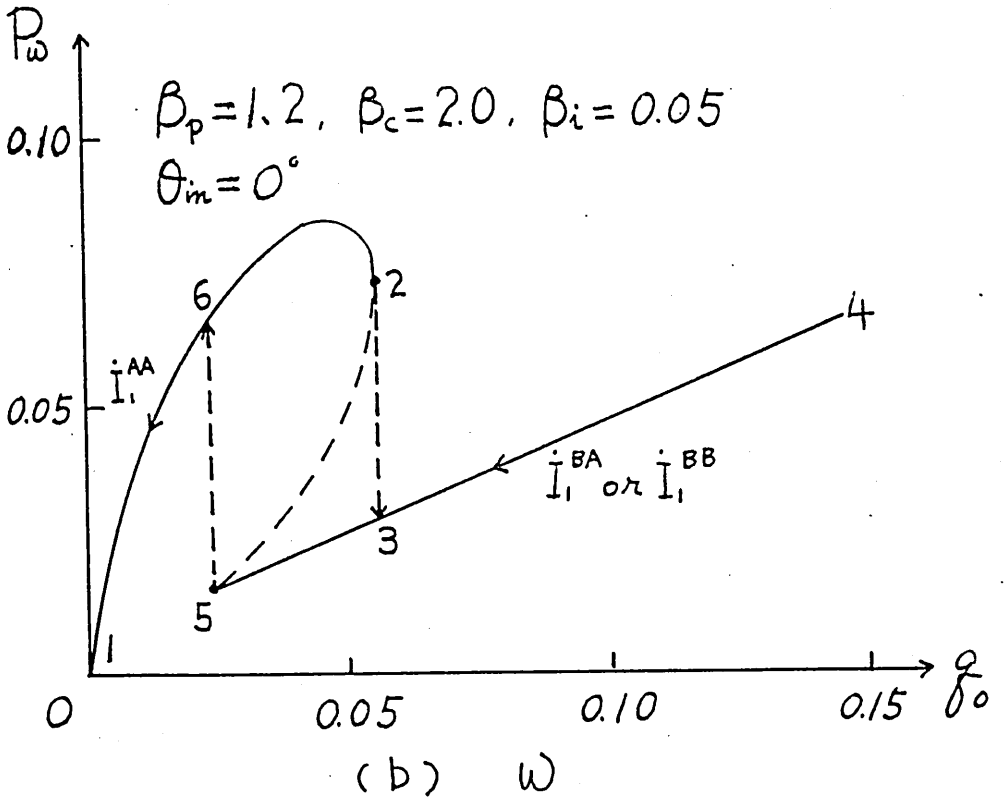


図5. $g_0 = 0$におけるωの分周波発振特性



(a) 2ω



(b) ω

図 6　入力信号レベルに対する出力特性
（2ω のみ発振）

場合より小さい値となる。この2ωでの跳躍現象が図6(b)に示されたωでのヒステリシス特性として現れる。図7，8に2ω，ωの分周波発振が同時に生じた場合の特性を示す。図7よりβiの存在により($\dot{I}_1^{BA}$, $\dot{I}_1^{BB}$)と($\dot{I}_1^{AA}$, $\dot{I}_1^{AB}$)にそれぞれ分離し

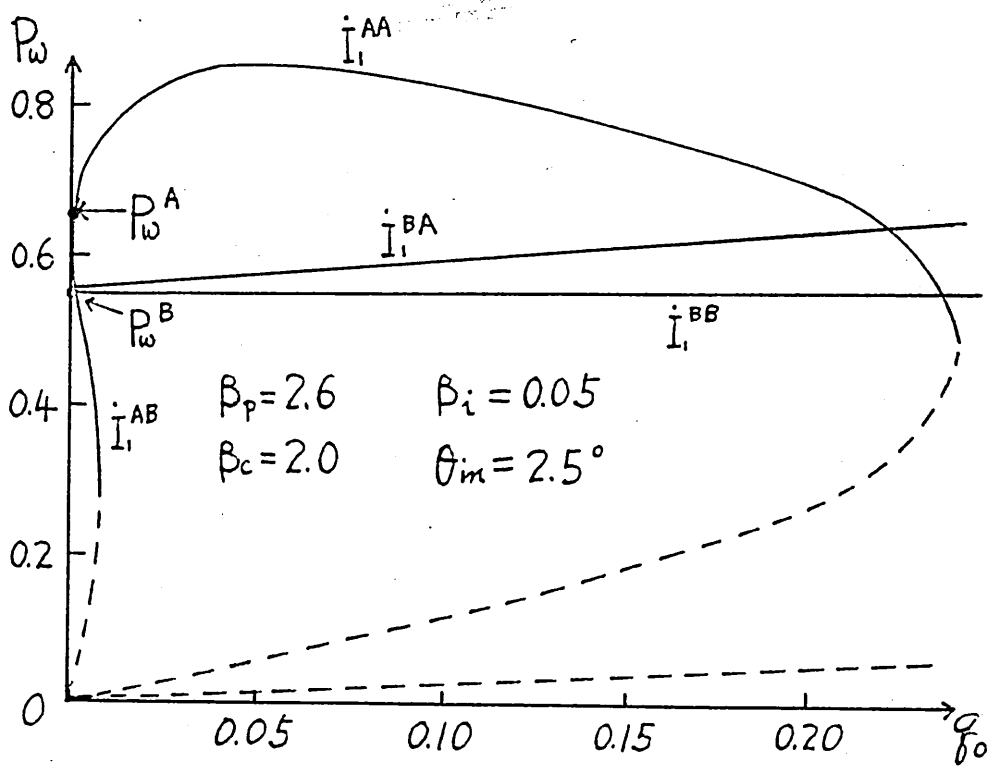


図 7 入力信号レベルに対する出力特性
(2ω.ω同時発振)

て現れ，$g_0 = 0$ において式(23)，(24)の関係が満足されている。また図8より，図5において縮退した状態が g_0 の印加によってそれぞれ2つの成分に分離し，合計4つの発振成分が現れるのがわかる。

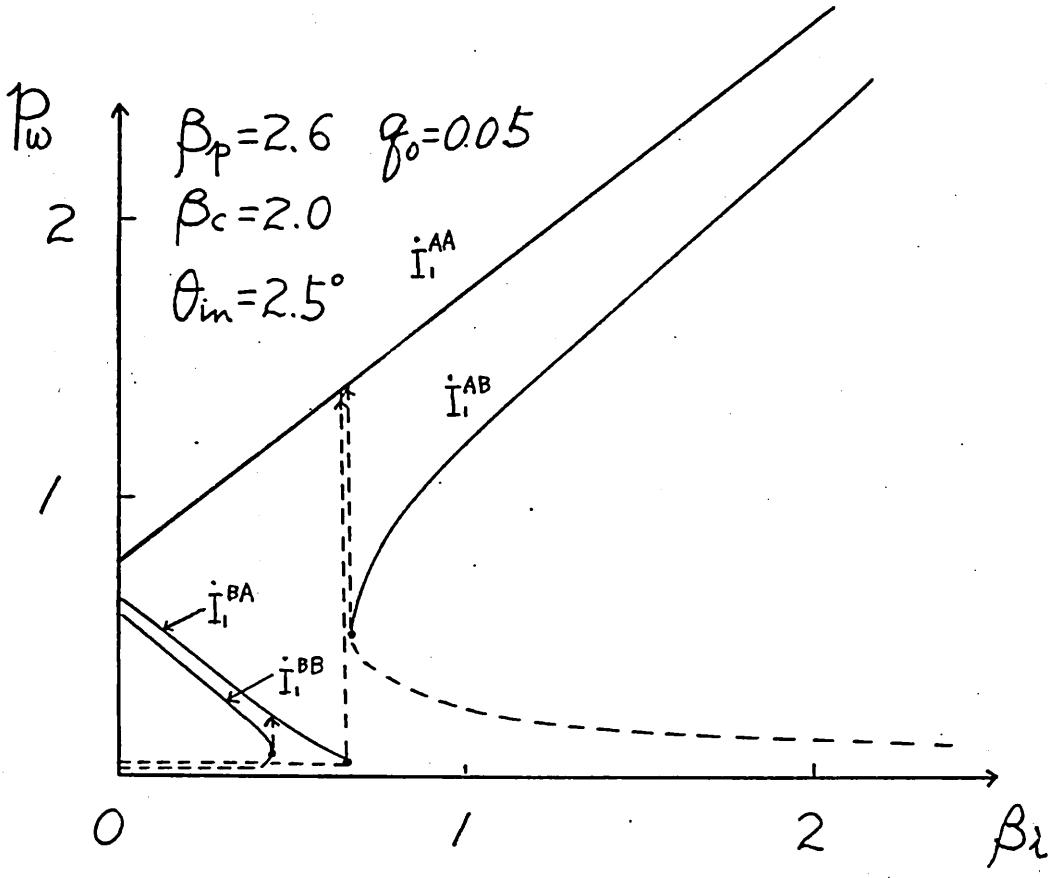


図8　2ω励振レベルに対する出力特性

3.2 増幅特性

図4より $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_4 = 0$ のとき ω の分周波発振を起こさない β_p, β_i の関係が得られるが，本節ではこの β_p, β_i の値に対して入力位相に対する ω の増幅特性を求める。このため，まず信号源から回路をみたインピーダンスの θ_{in}, β_p, β_i, g_o に対する依存性を調べる。そのインピーダンスは式(26)より

$$\frac{\dot{V}_s/\dot{I}_1}{R_{IT}} = \frac{x}{1-\dot{y}_o} \qquad (38)$$

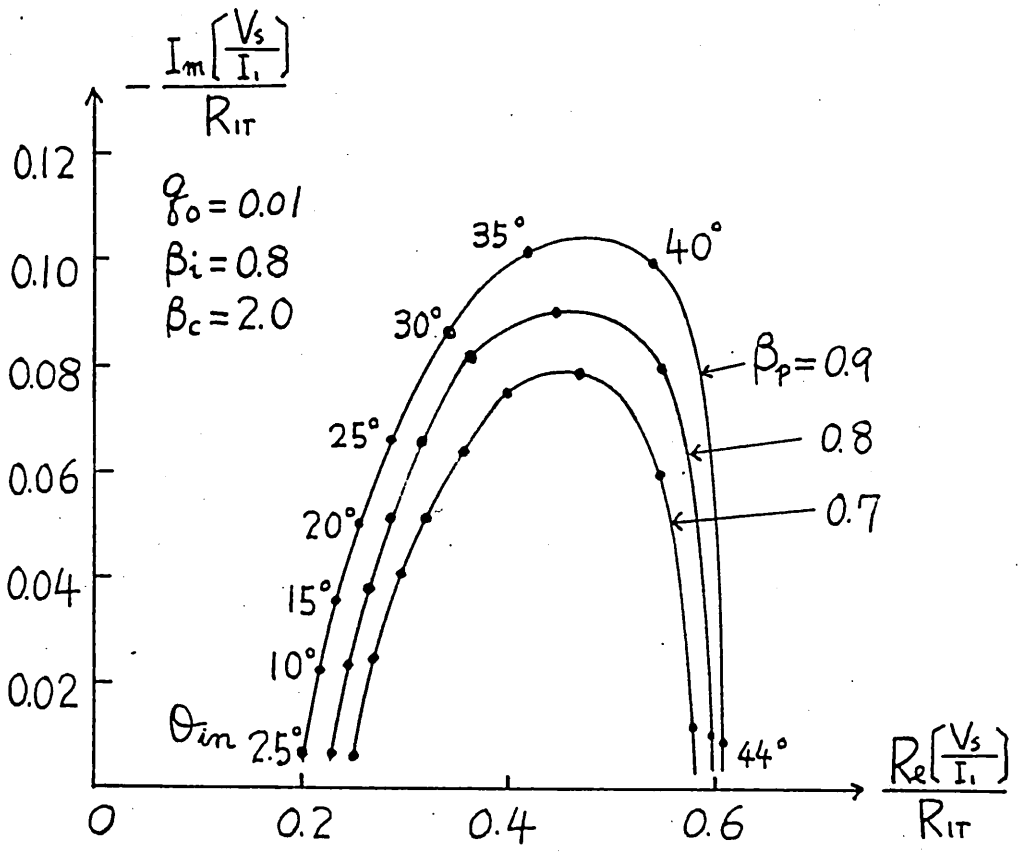


図9 β_p に対する信号源からみた回路のインピーダンス軌跡

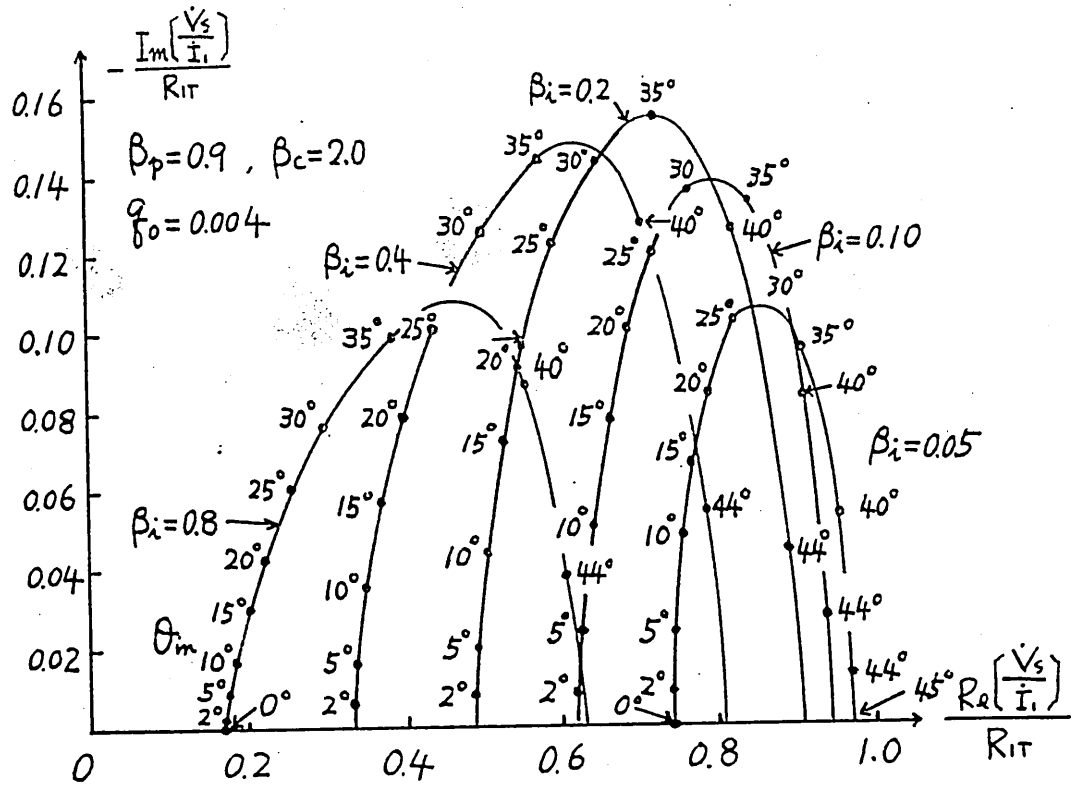


図10　β_i に対する信号源からみた回路のインピーダンス軌跡

ただし $\dot{y}_o$ は $S_1=0$ のときの $\dot{y}$ の値である。式(38)より θ_{in} に対するインピーダンス軌跡が求まる。β_p, β_i, g_o をパラメータとしたときの計算結果をそれぞれ図9, 10, 11に示す。図9より β_p の増加に対して一様に負性抵抗が増大し，またリアクタンス成分も増大するが，β_i に対しては図10よりリアクタンス成分を最大にする β_i の値が存在している。一方信号レベルに対しては図11より g_o の値が小さいほど負性抵抗の値は大きくなり，β_p, β_i と逆の作用をしている。しかし g_o が比較的大きい値でも β_i の存在によりほぼ θ_{in} の全域にわたって負性抵抗が得られている。

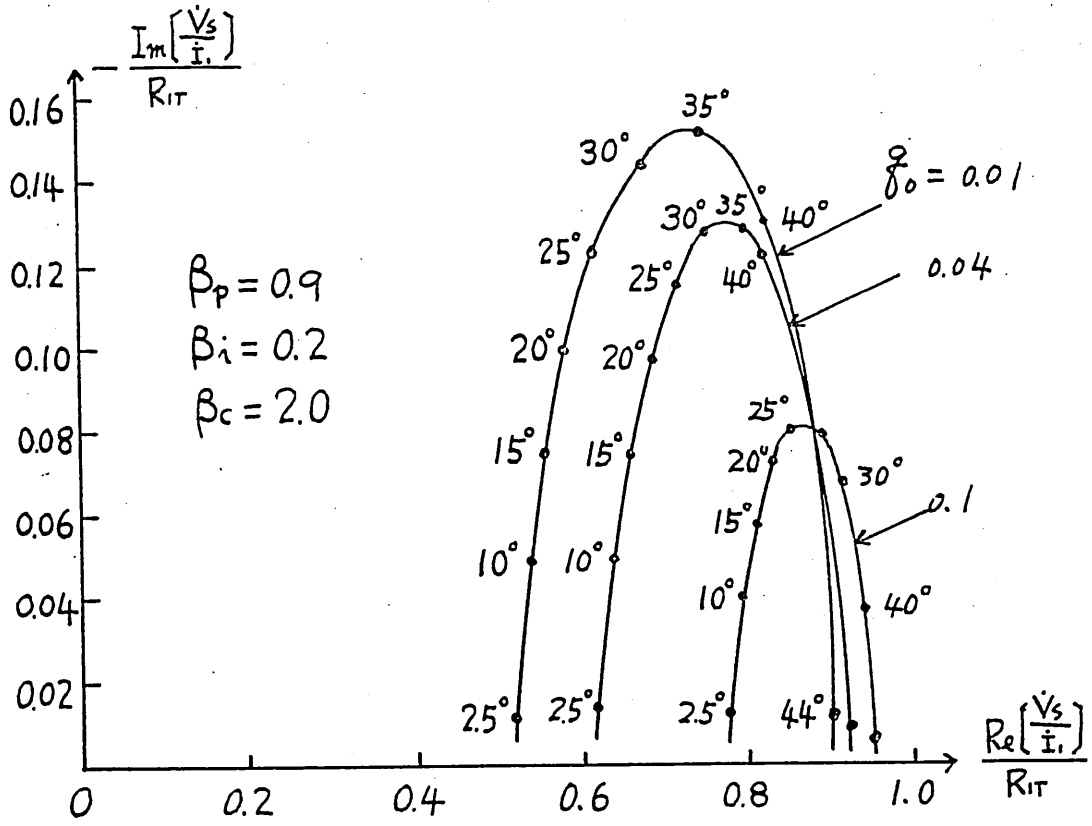


図11 g_0 に対する信号源からみた回路のインピーダンス軌跡

つぎに図9～11の特性を考慮して β_p, β_i, g_0 の値を定め，θ_{in} に対する利得特性を求めよう。電力利得 g を

$$g = \frac{R_L |\dot{I}_1|^2}{\frac{|\dot{V}_s|^2}{4R_{ig}}} \qquad (39)$$

と定義すれば，g は g_0 で規格化された値として

$$\frac{g}{g_0} = \frac{P_\omega}{g_0} \quad , \qquad g_0 = \frac{4 R_L R_{ig}}{R_{IT}^2} \qquad (40)$$

によって求まる。いま $\beta_p = 0.9$, $g_0 = 0.004$, $\beta_c = 2.0$ とし, β_i をパラメータとして入力位相 θ_{in} に対する g/g_0 の式(34)による数値計算結果を図12に示す。同図より β_i の増加

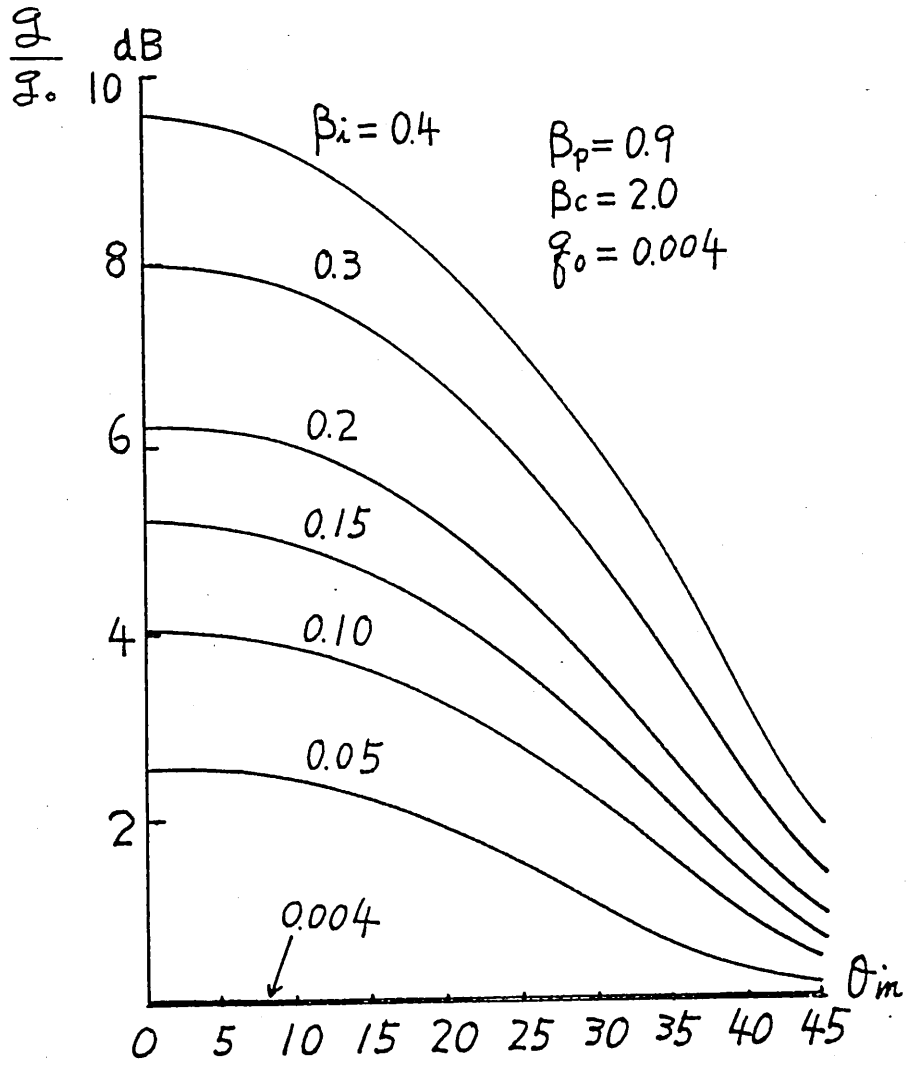


図12 β_i をパラメータとする θ_{in} 対利得特性

により大きな値の利得が得られ，$\beta_i = g_0$ のとき $g/g_0 = 1$ であることがわかる。図13に β_p をパラメータとした θ_{in} 対利得特性を示す。$\beta_p > 1$ においては2ωの分周波発振が生ずるが，β_i を十分大きくまた g_0 は十分小さい値に選定すれば2ωには $\dot{I}_2^A$ 成分のみ存在する領域が可能である。しかし β_i, g_0 の値

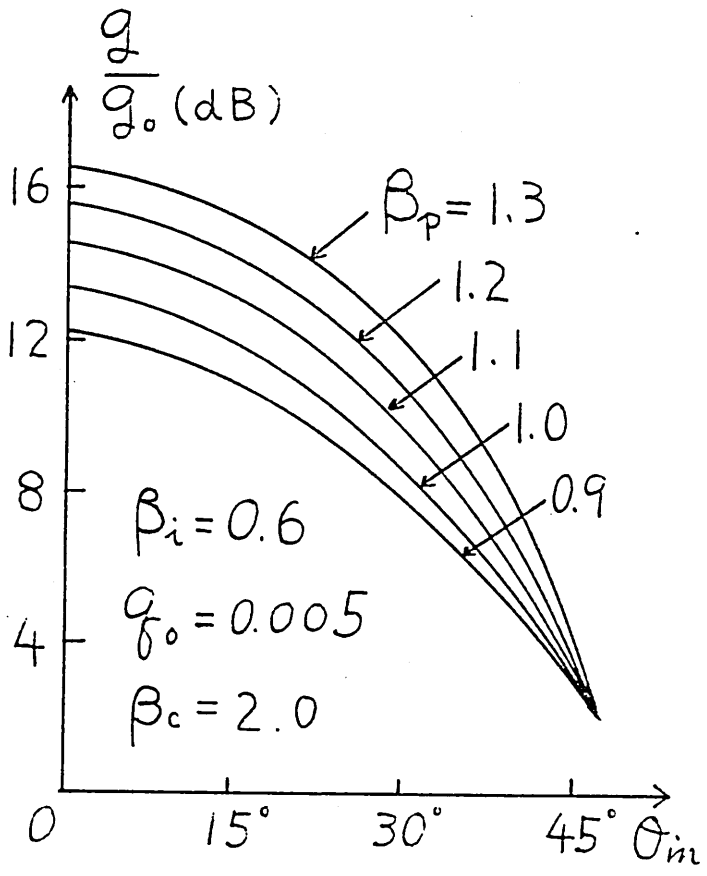


図13 β_p をパラメータとする θ_{in} 対利得特性

によっては $\dot{I}_2^B$ 成分が現れる可能性があり，図14のベクトル図で示したように位相再生効果における不完全性となる。

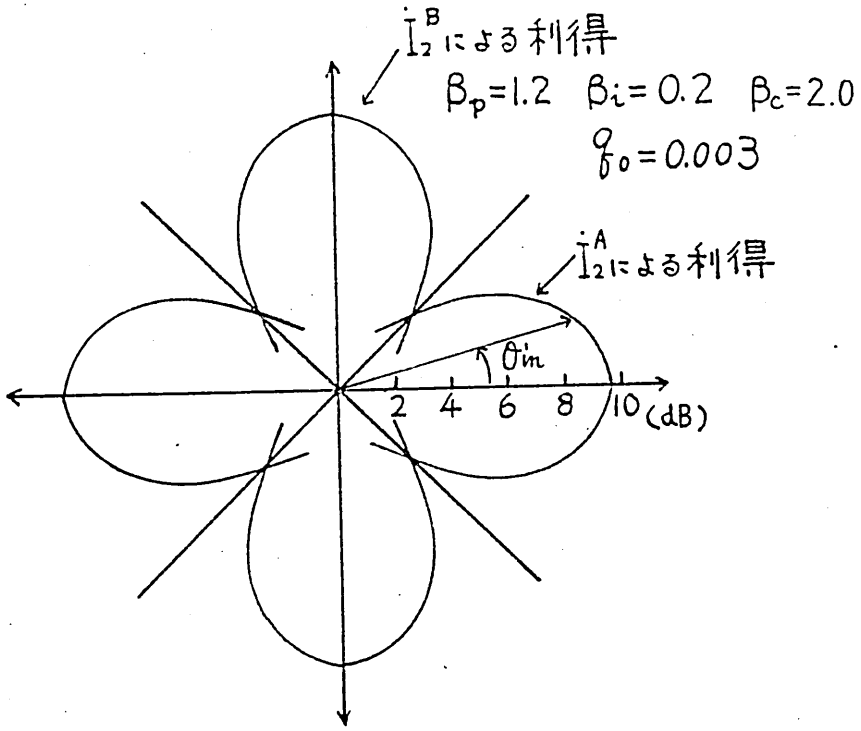


図14 利得のベクトル図

3.3 位相特性

図1の負荷抵抗 R_L に生ずる出力電圧の位相（θ_1）と入力信号電圧の位相（θ_s）との関係は式（26），（31）の数値計算より求められるが，$(I_m[\dot{y}]/R_e[\dot{y}])^2 \ll 1$ においては $\theta_p+\pi/4$ を基準位相としてつぎの関係式が得られる。

$$\cos 4\theta_e = \frac{\eta + \cos 4\theta_{in}}{1 + \eta \cos 4\theta_{in}} \qquad (41)$$

ここに

$$\theta_e = \theta_i - \frac{\theta_p + \pi}{4} \qquad (42)$$

$$\eta = \frac{-2\beta_p\left\{\beta_c + (1-\beta_c)\chi + \frac{\beta_i}{R_e[\bar{y}]}\right\}}{\beta_p^2 + \left\{\beta_c + (1-\beta_c)\chi + \frac{\beta_i}{R_e[\bar{y}]}\right\}^2} \qquad (43)$$

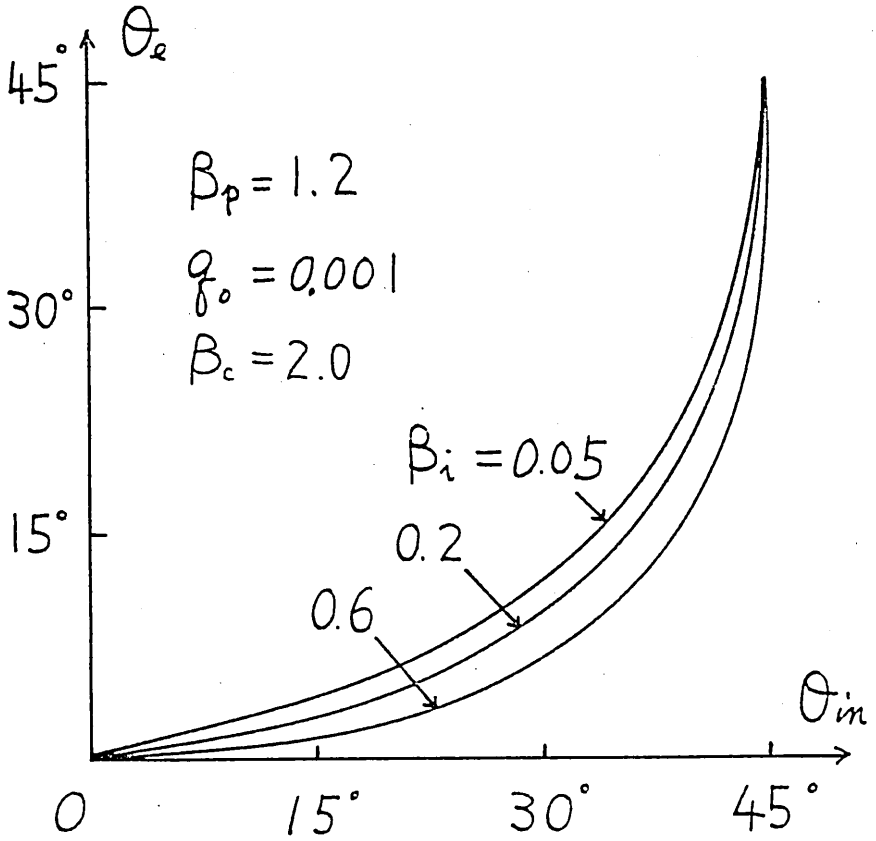


図15 β_i をパラメータとする入出力位相特性

式(41)より θ_{in} 対 θ_e 特性は θ_{in} が $n\frac{\pi}{2}$ ごとに同様の特性を繰返すので $n\frac{\pi}{2} < \theta_{in} < (n+1)\frac{\pi}{2}$ に対する θ_e を出力位相と定義する。$\eta \to \pm 1$ のとき入出力位相特性は直角にまがる階段状特性となり，この場合理想的な位相再生効果が得られる。式(26)，(31)より計算された入出力位相特性を図15，16に示す。

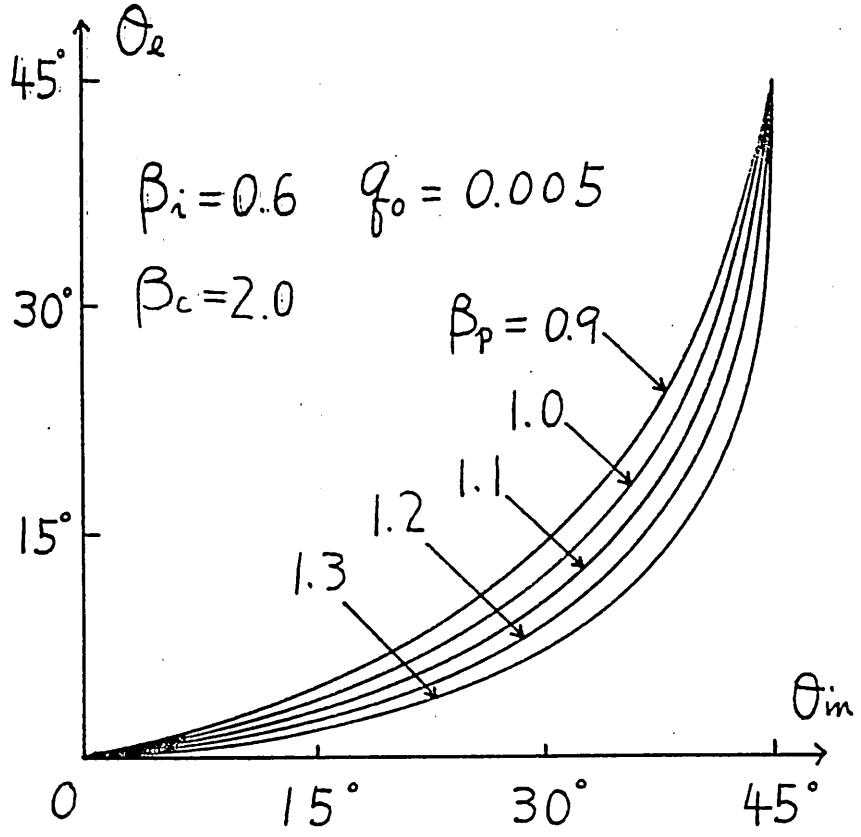


図16 β_p をパラメータとする入出力位相特性

3.4　周波数特性

式(34)によって利得の周波数特性を求め，増幅器としての帯域幅特性について検討する。いま ω_2, ω_4 の共振周波数が $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_4 = 4\omega_1$ なる関係にあるものとすれば式(7)において

$$\delta_1 = \delta \quad , \quad \delta_2 = \delta \quad , \quad \delta_4 = \delta \qquad (44)$$

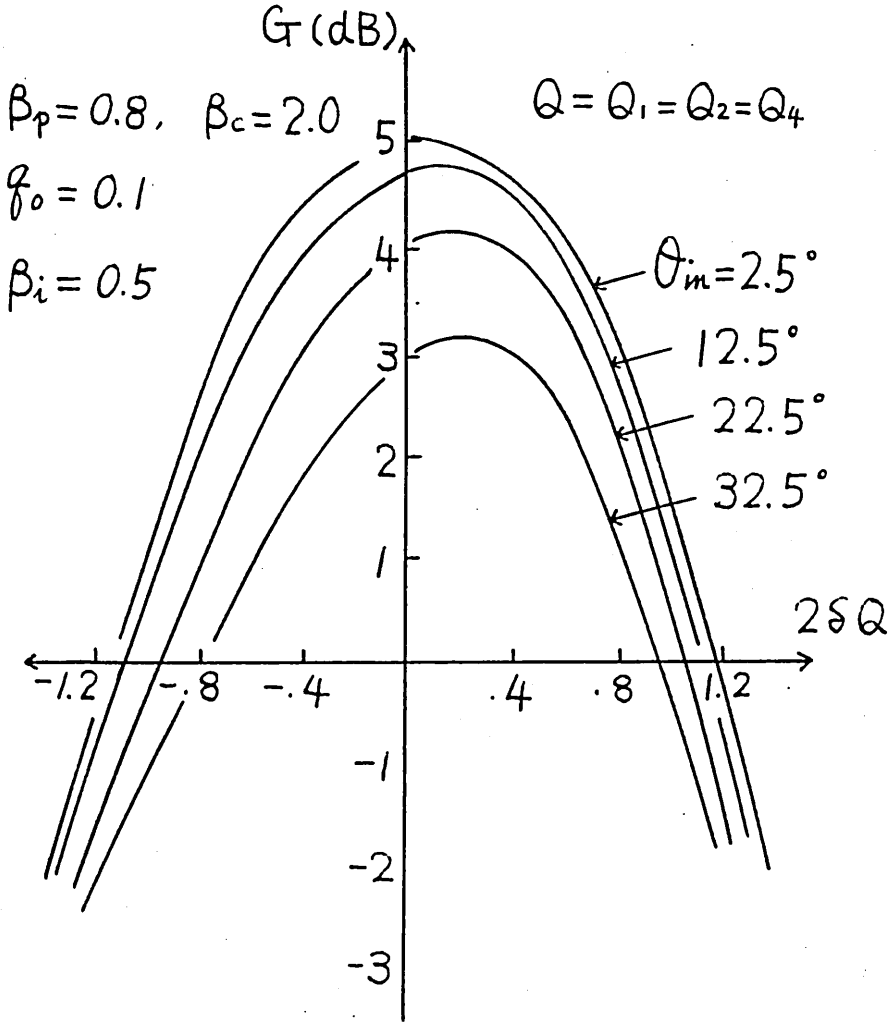


図17　$\theta_{in} \neq 0$ における周波数特性

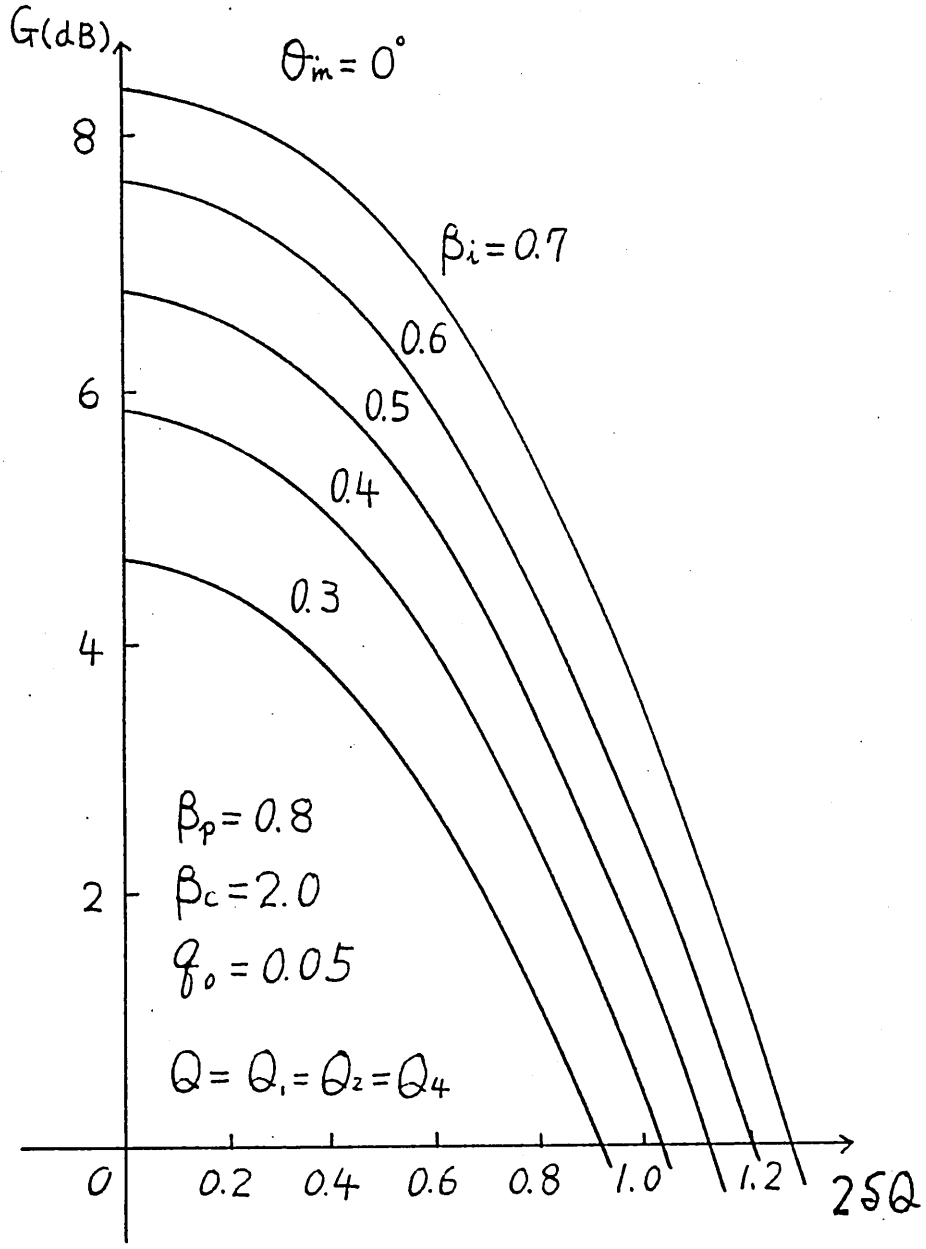


図18 β_i をパラメータとする周波数特性

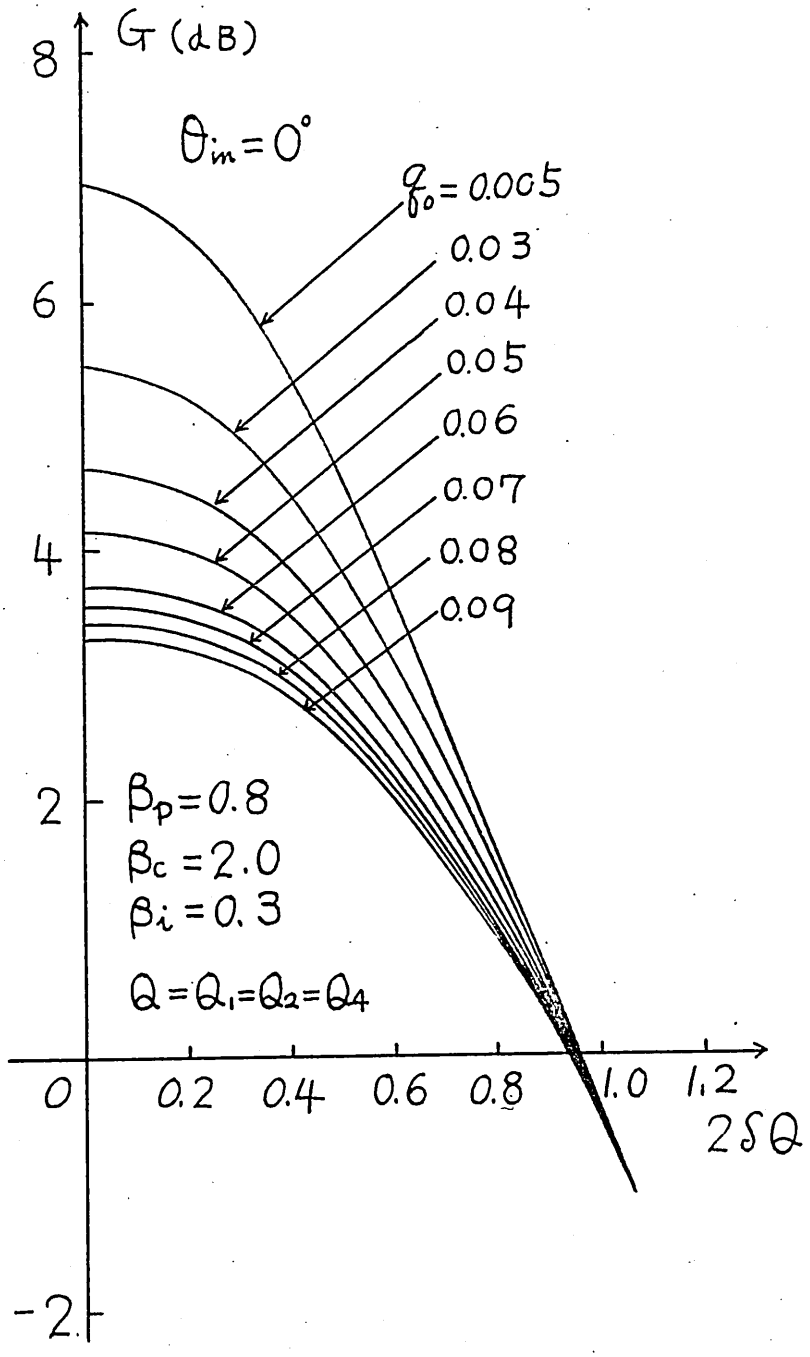


図19 f_0 をパラメータとする周波数特性

が成立する。式(44)を条件とし式(34)の計算結果を図17～21に示す。図17よりθimに対してはθim＝0のとき帯域幅は最も大きく，またβiに対して図18よりβiの値が大きい程帯域幅は増大する。一方f0に対して，図19よりf0の増大にともなって利得が大きく減少するので，大きな利得帯域幅積を得るにはf0は十分小さい値が望ましい。大きなf0の値に対しては

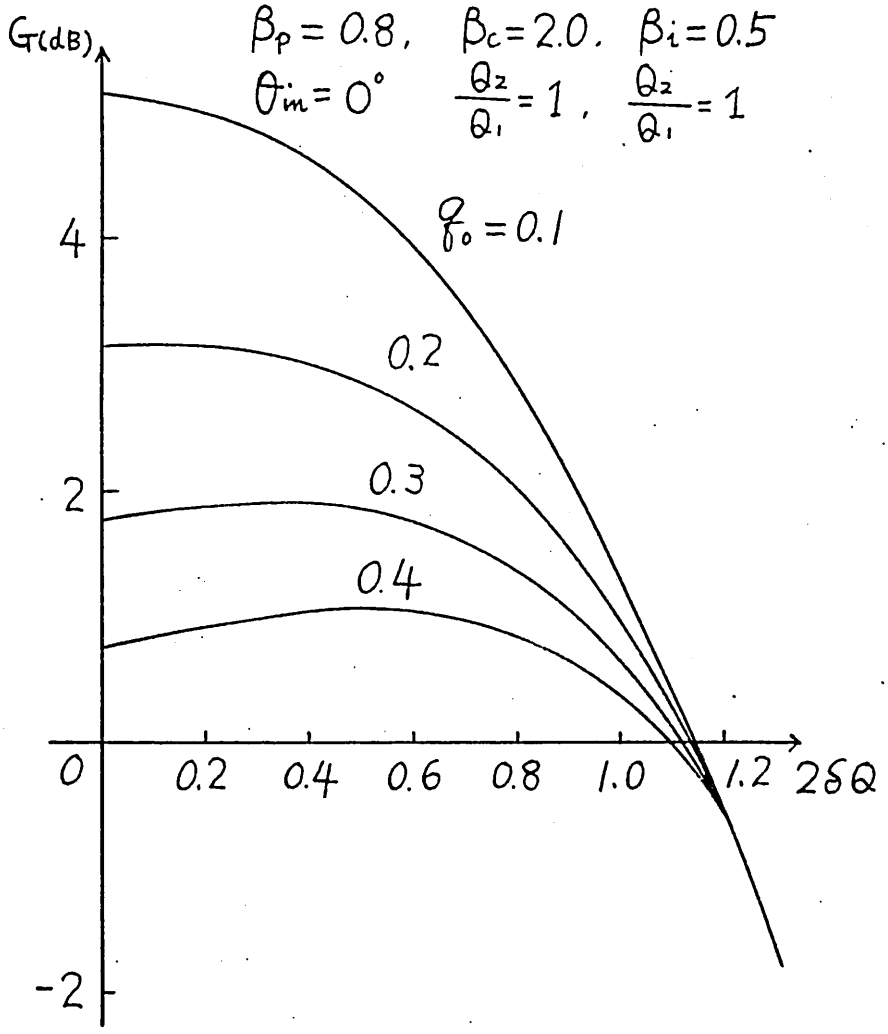


図20　十分大きいf0に対する周波数特性

図20に示したように平坦特性から双峰特性が現れるが，しかし β_i を増大することによって再び単峰特性となる（図21）。

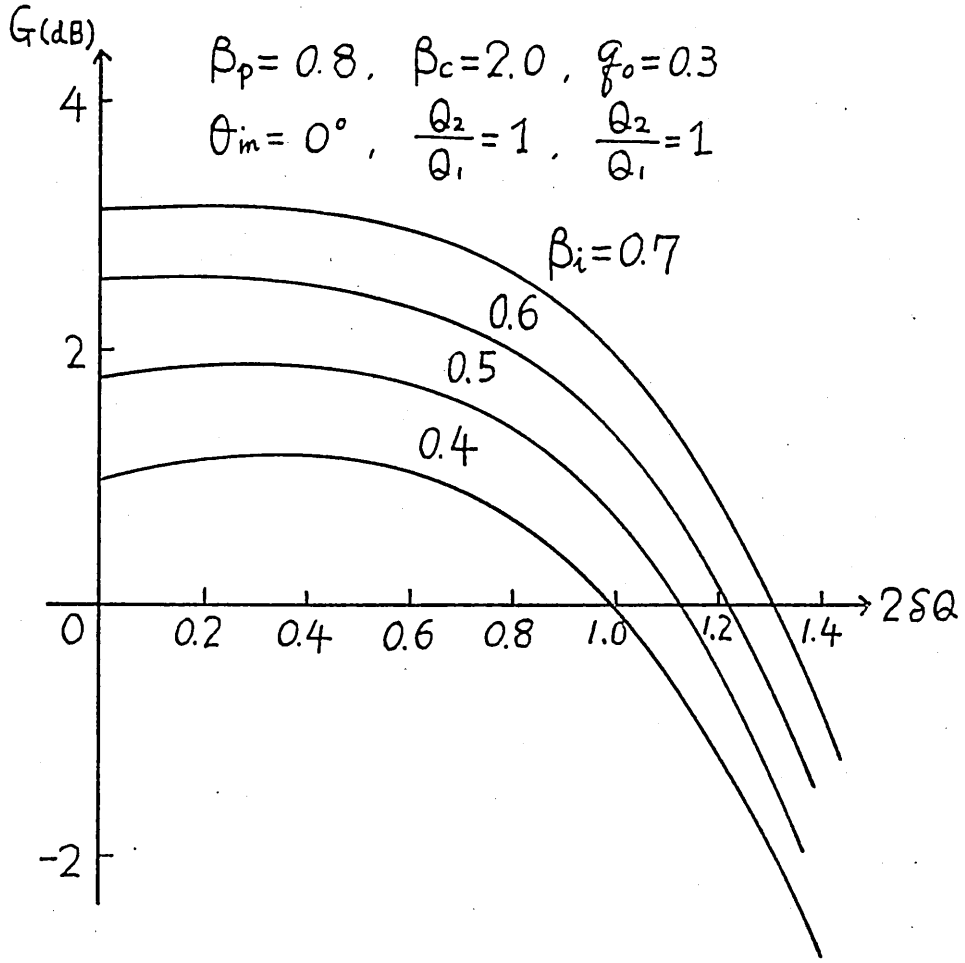


図21 十分大きい β_i に対する周波数特性

つぎに回路のQの値に対する帯域幅特性について調べる。図22に Q_4/Q_1 をパラメータとして，図23に Q_2/Q_1 をパラメータとしてそれぞれ Q_2/Q_1，Q_4/Q_1 に対する帯域幅特性を示す。図22，23より $Q_2/Q_1 \simeq 0.7$，$Q_4/Q_1 \simeq 0.5$ のときが最適値であることがわかる。

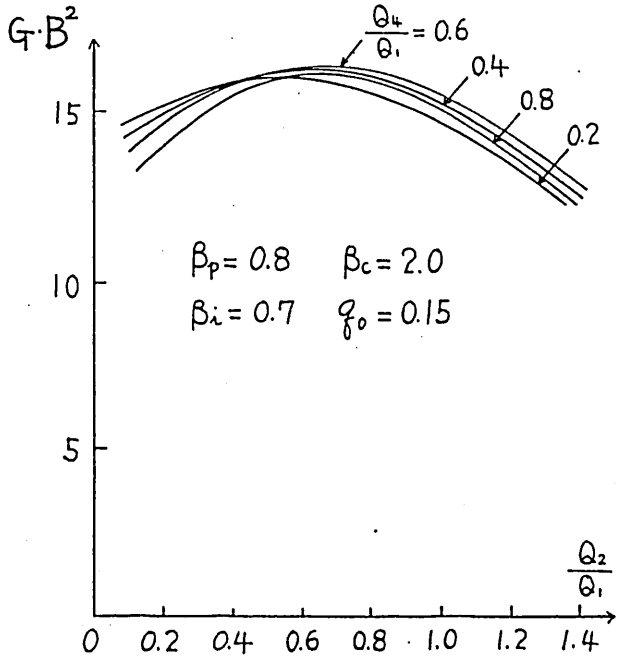


図22 $\frac{Q_2}{Q_1}$ 対帯域幅特性

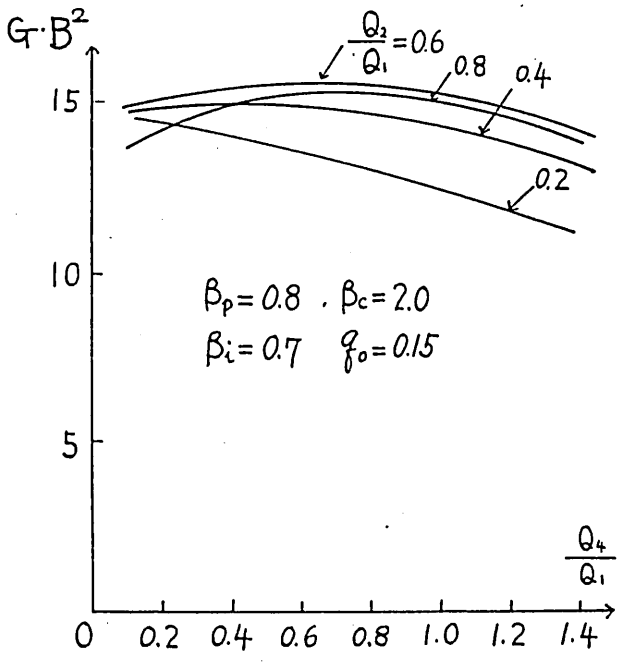


図23 $\frac{Q_4}{Q_1}$ 対帯域幅特性

4 実験結果との比較

解析結果の妥当性を確めるために，4ωの励振周波数100MHzで実験を行った。実験回路を図24に示す。式(35)の条件の設定はつぎのようにして行なえる。まず $V_p = 0$ の状態にする。つぎに十分小さい値の V_s を印加し，V_i を適当な値に定め ϕ_2 に対する増幅特性を求めれば，最大増幅度が得られるとき式(35)が成立する。このように θ_i が定まれば，θ_{im} の値は ϕ_1 の移相器を変化することにより変えられる。β_p，β_c および θ_{im} の決定は前論文の場合と同様に行なえ，$\beta_c = 2.1$ である。β_i は $V_p = 0$，$V_s = 0$ においてωの分周波発振が生ずる臨界値に対し，$\beta_i = 1$ と規定することにより求まる。

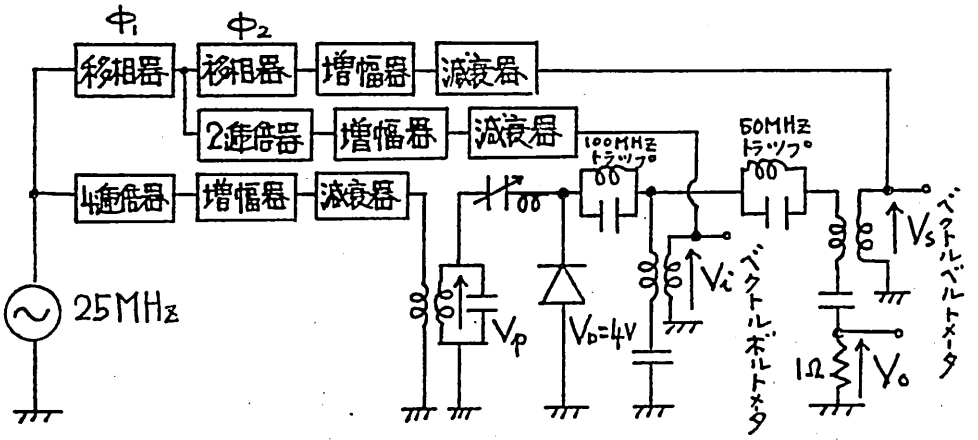
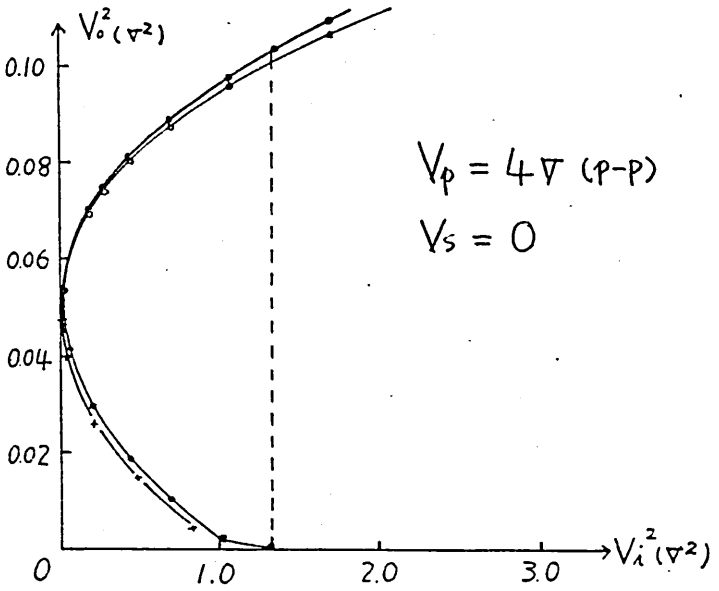
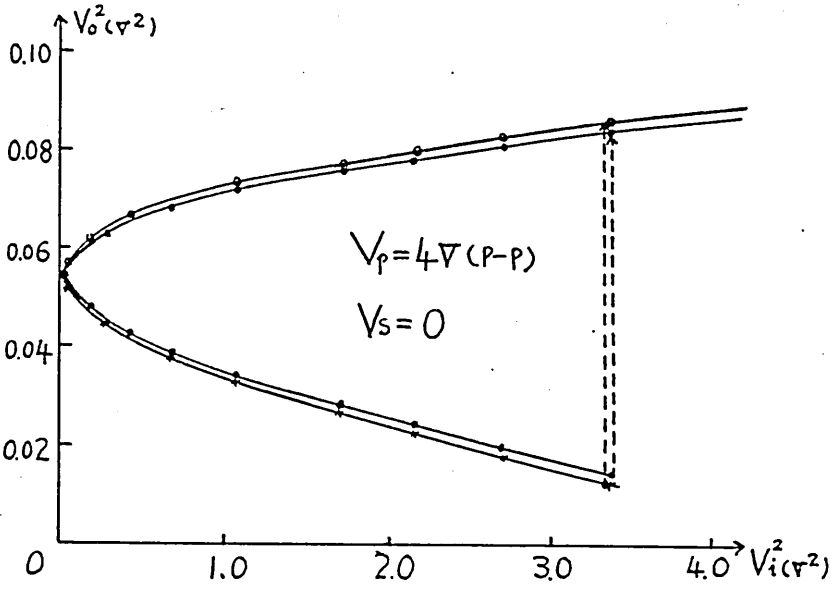


図24 実験回路

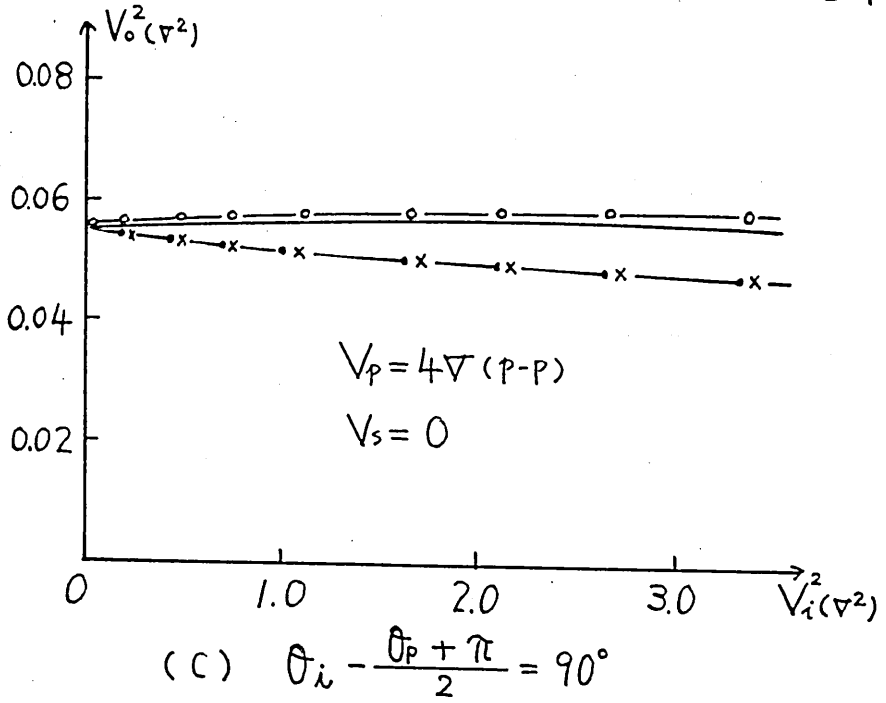
$V_s = 0$ におけるωの発振特性を図25に示す。V_i の変化に対する $\dot{I}_2^B$ から $\dot{I}_2^A$ への転移現象の実験結果は3章で行った解析の考察結果と一致している。また図26に信号レベルに対するωの出力特性を示す。実験で得られたヒステリシス特性は図6の解析結果の特性と良く一致している。



(a) $\theta_i - \frac{\theta_p + \pi}{2} = 30°$



(b) $\theta_i - \frac{\theta_p + \pi}{2} = 80°$



(C) $\theta_i - \frac{\theta_p + \pi}{2} = 90°$

図25 Ωの分周波発振特性

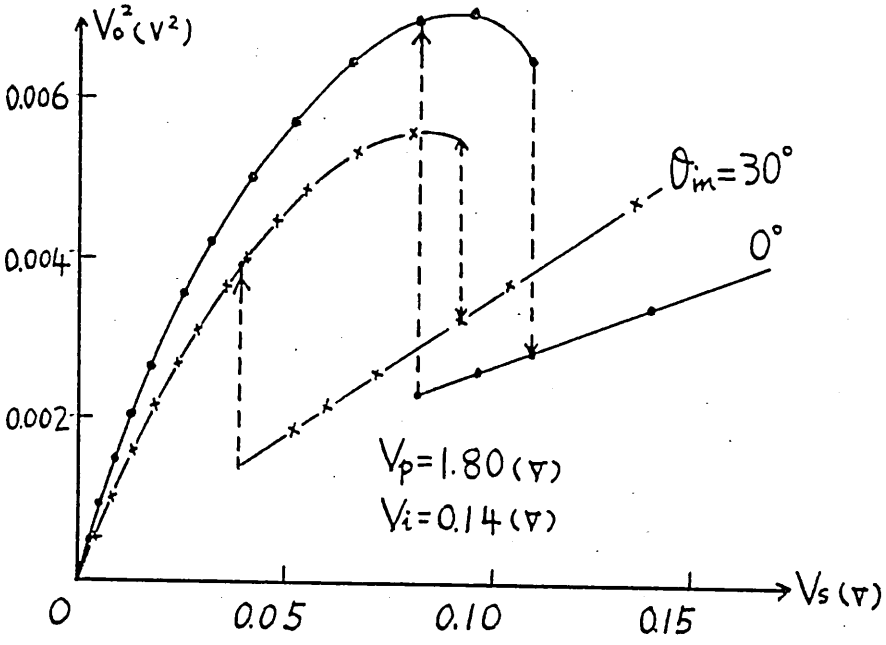


図26 V_sに対するΩの出力特性

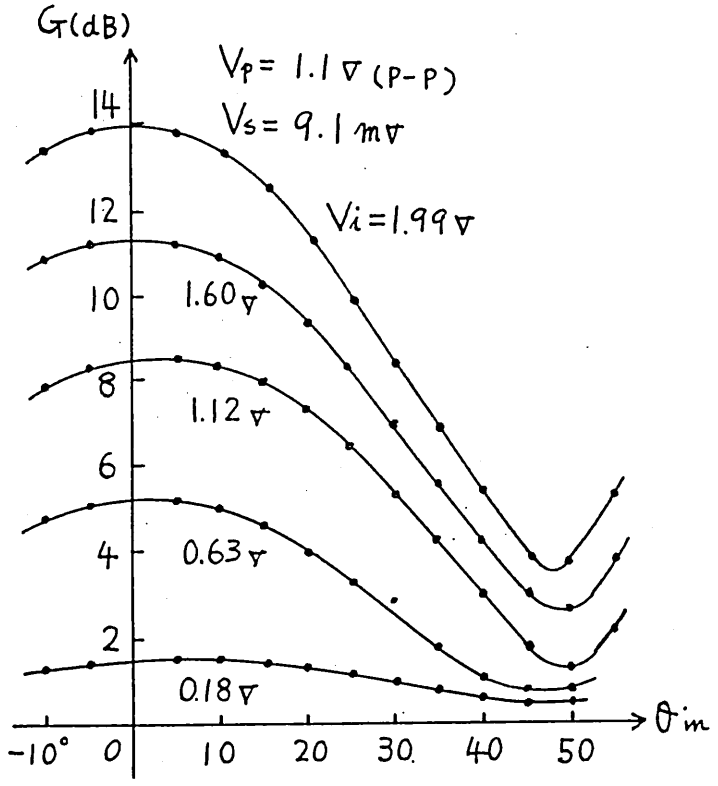


図27 θin対利得特性

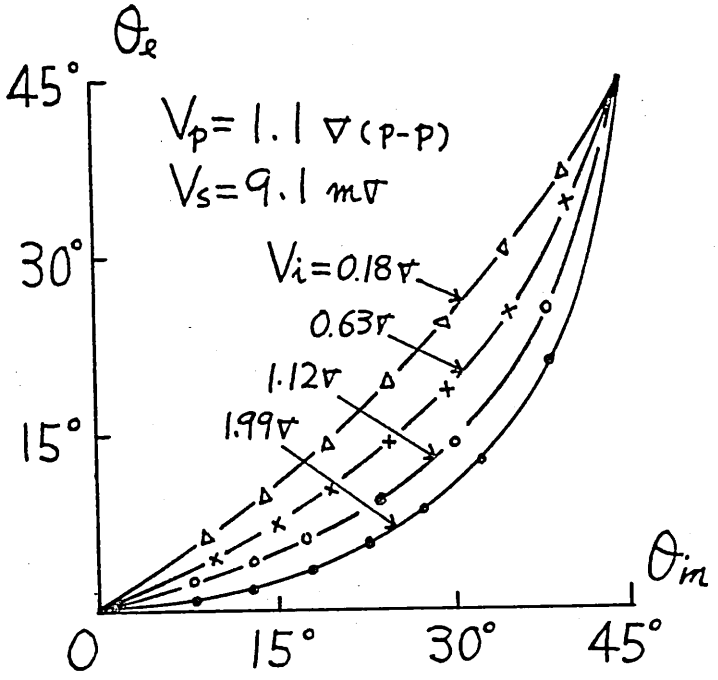


図28 入出力特性

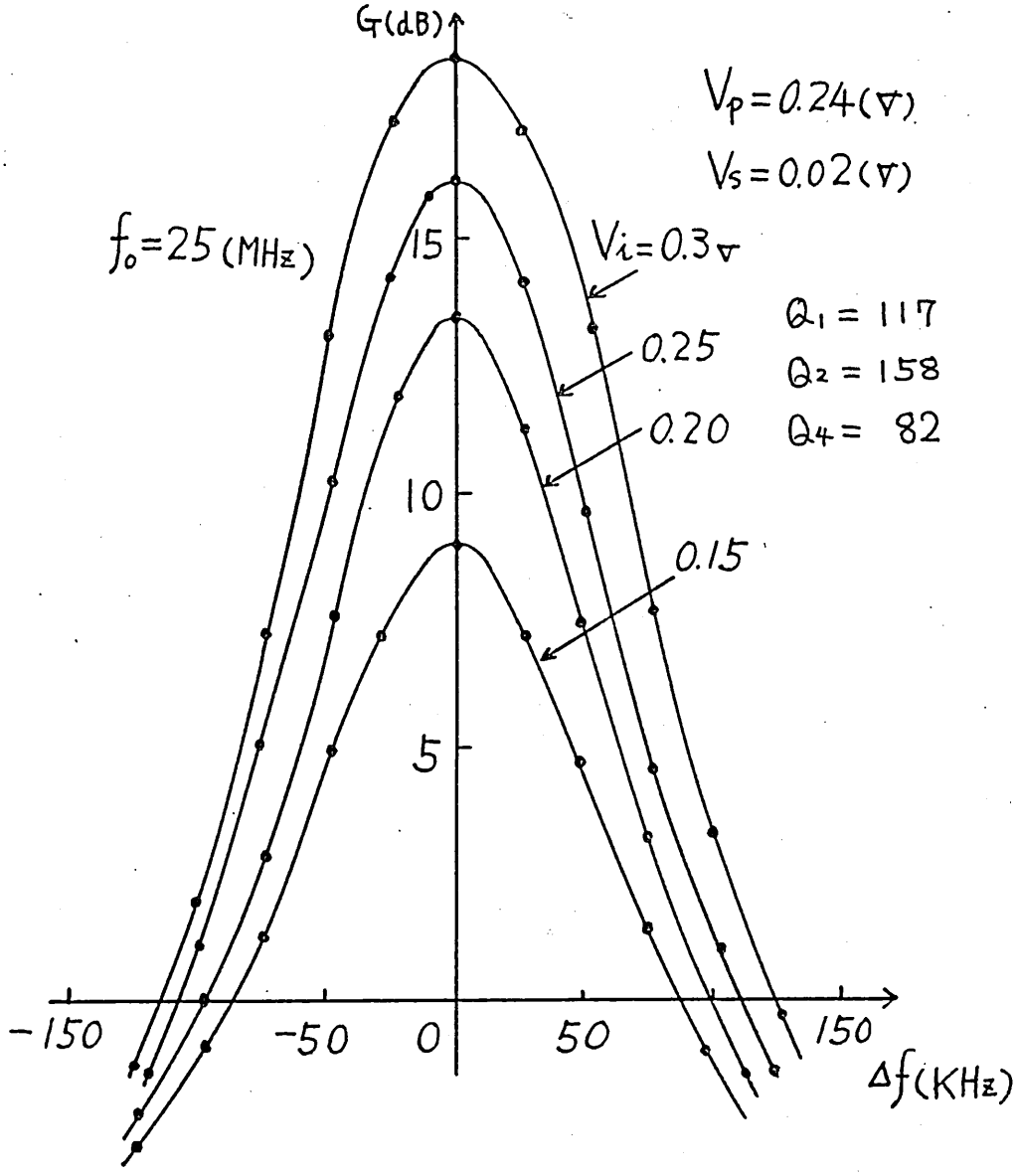


図29　V_iをパラメータとする
周波数特性

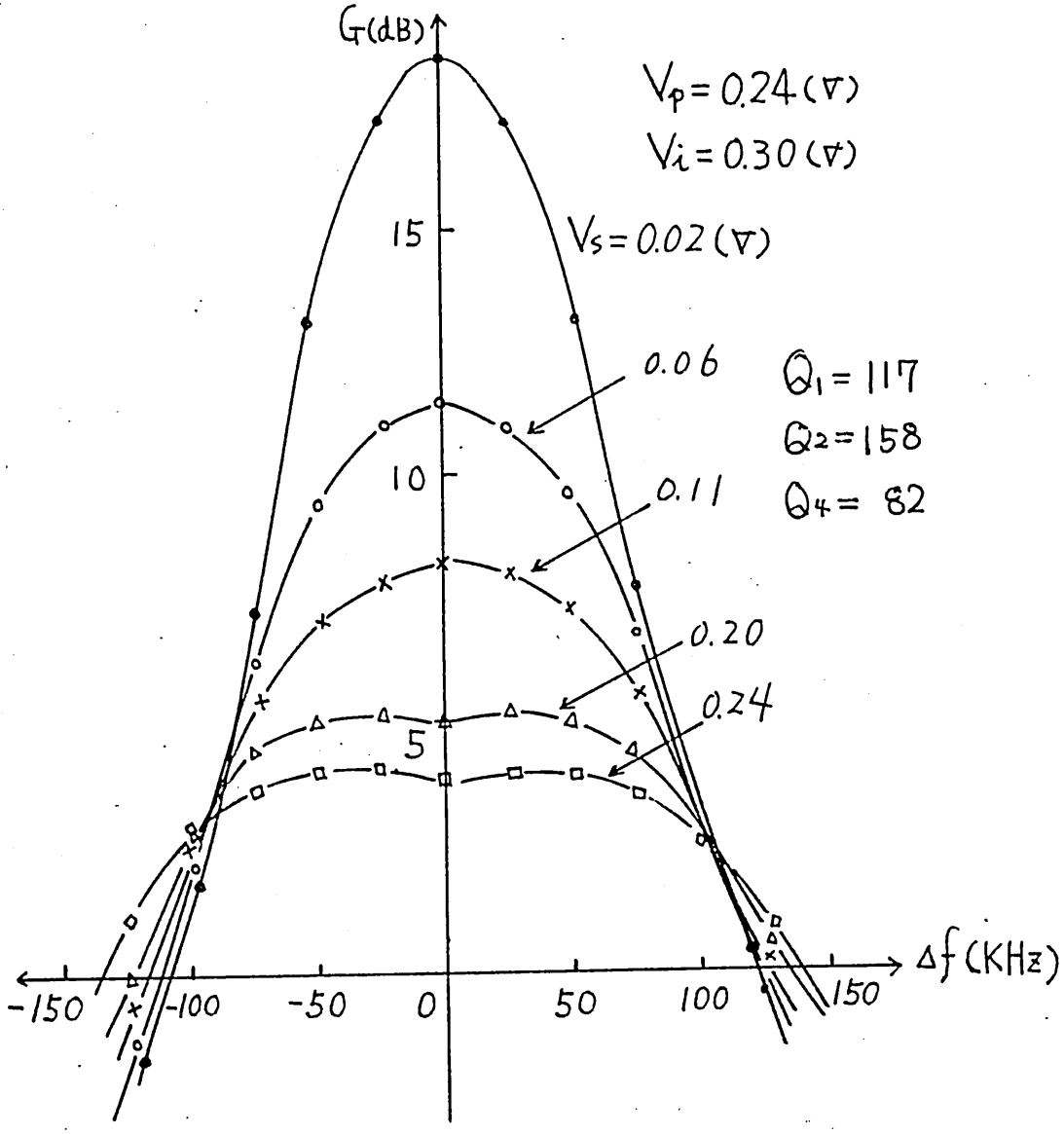


図30　Vsをパラメータとする周波数特性

θ_{in} に対する利得特性の実験結果を図27に，また入出力特性を図28に示す。V_i が大きくなれば利得は増大し，また入出力特性は階段状特性に近くなるのがわかる。つぎに利得の周波数特性の実験結果を図29，30に示す。図29より V_i が増大すれば帯域幅は大きく増加し，図30より十分大きな V_s に対して双峰特性が実験的にも現れる。

5　むすび

非直線容量パラメトリック励振における4相回路を用いて4相位相再生器を構成し，その動作機構の解明を行った。位相再生作用に重要な入力位相に対する出力位相特性，および利得特性の動作パラメータに対する依存性の検討を行い，また増幅器の周波数特性から帯域幅を最大にする回路条件を示し，位相再生効果の基礎的特性を明らかにした。この4相位相再生増幅器の基本動作と位相再生特性を確認するためバラクタダイオードを用いて実験を行った。この結果解析で得られた動作特性は実験的にも確認され，PCM－PM通信などの直接再生方式において有効な4相位相再生特性が得られた。今後位相再生効果の動特性について検討を行う必要があろう。

文　献

(1) 更田博昭，黒崎貞え：“4相PM波の位相再生の一方式”
信学誌 Vol 49　P 1835　(昭41-10)

(2) 太田智三，畑　雅恭：“位相再生作用をもつパラメトリック増幅器”
信学論 (B) Vol 53-B　P 202 (昭45-4)

(3) 小牧省三．目貝田正，栗田修：“3－4逓倍法による4相直接位相再生器”
信学会マイクロ波研究会 MW 76-35　P 113
(昭51－6)

(4) 梅田博之，中島将光，池上淳一：“非直線容量パラメトリック励振による1/4分周波発振の4相特性”
信学論 (A)　掲載予定 (昭52－1)

付 録

(1) 入力信号 V_s に対する 2ω での位相関係の導出

$\theta_{in}=0$ において $\dot{V}_s$ が 2ω に変換されたとき $\dot{I}_2^A$ と逆相に作用することを立証するには，$V_i=0$ において式(31)の $\dot{y}$ の位相を調べればよい。いま簡単なため $S_1=0$，$S_2=0$，$S_4=0$ とし，また $\beta_p<1$，$g_0^2 \ll 1$ としても一般性は失なわれないから，このとき式(28)，(32) および(31)より $\dot{y}$ の値を導出すると

$$\dot{y} \simeq \frac{g_0}{1+2g_0+\beta_p} \qquad (A\cdot 1)$$

となる。故に $\theta_2=\dfrac{\theta_p+\pi}{2}+\pi$ が成立し，2ω では $\dot{I}_2^A$ と逆相に作用することがわかる。

(II) 発振の不安定領域の導出

2ω の分周波発振に対する安定性を判別する条件式の導出方法についてはすでに文献〔4〕で述べられているのでここではその結果を用いて安定判別式の条件式を示す。$\dot{V}_s$，$\dot{V}_i$ の任意の値に対して 2ω の分周波出力に関しては式(33)より決定されるから

$$f(X)=(1-X)(|\dot{b}_1|^2-|\dot{b}_2|^2)-\frac{|\dot{b}_3\bar{\dot{b}}_1-\bar{\dot{b}}_3\dot{b}_2|^2}{|\dot{b}_1|^2-|\dot{b}_2|^2} \qquad (A\cdot 2)$$

関数 $f(X)$ が

$$\frac{df(X)}{dX}>0 \qquad (A\cdot 3)$$

のとき周期解は不安定となる。とくに $V_s=0$ の場合には式(A·2)

に対応して実際につぎのように表わされる。式(13)より

$$f(P_w)=(\beta_c+P_w)^2-\beta_p^2-\beta_i\frac{(\beta_c+P_w)^2+\beta_p^2+2\beta_p(\beta_c+P_w)\cos 2(\theta_i-\frac{\theta_p+\pi}{2})}{(\beta_c+P_w)^2-\beta_p^2}$$

(A・4)

ただし P_w は式(16)によって与えられ，$P_w^B \neq 0$ である。
$P_w^B = 0$ の場合には式(11)より

$$f(P_{2w})=P_{2w}\left\{(1+P_{2w})^2-\beta_p^2\right\}-(\beta_c-1)\beta_i^2\frac{(1+P_{2w})^2+\beta_p^2+2\beta_p(1+P_{2w})\cos 2(\theta_i-\frac{\theta_p+\pi}{2})}{(1+P_{2w})^2-\beta_p^2}$$

(A・5)

式(A・4)，(A・5)においていずれも

$$\frac{df(P_w)}{dP_w}<0 \quad , \quad \frac{df(P_{2w})}{dP_{2w}}<0 \qquad (A\cdot 6)$$

のとき周期解は不安定である。

輻射科学研究会資料

Ti拡散$LiNbO_3$導波路を用いた広帯域進行波光変調

井筒雅之・伊藤卓志・末田　正

（大阪大学　基礎工学部）

昭和52年2月9日

於　中央電気クラブ

Ti拡散 $LiNbO_3$ 導波路を用いた広帯域進行波光変調

井筒雅之　伊藤卓志　末田正
（大阪大学 基礎工学部）

1. まえがき

最近、$LiNbO_3$・$LiTaO_3$ 等の強誘電体結晶に Ti 等の金属を拡散することにより、低損失な電気光学結晶導波路が比較的容易に作成できるようになり[1]これを用いた各種導波形光回路素子の研究が活発に行なわれている。

なかでも、光集積回路を構成する上で重要な導波形光変調素子については様々な形式が提案され、多くの実験が報告されている。本文では、これらの中で特に高能率な変調が期待できる横形配置の導波形光変調素子に着目し、広帯域動作の可能性を検討する。この形式の光変調素子はバルク形の横形光変調器を導波形化したものと考えることができる。光波は狭い領域に閉じ込められ、電極間隔を小さくできるのでバルク形に比べ、小型でしかも低電圧駆動が可能となる。すでに、変調電圧 0.3 V に対し、誘導移相量が 1 rad であるものも報告されている。[2]

従来の報告では、素子の低電圧駆動に重点が置かれていたようであり、変調周波数帯域幅は GHz 以下のものがほとんどである。しかし、たとえば半導体レーザの直接電流変調周波数限界が 1～2 GHz 程度と考えられることからも、GHz 以上の帯域幅を持つ外部変調素子の開発が不可欠と思われる。

我々は、先に進行波動作による導波形光変調素子を提案し、実験により広帯域動作の可能性を示した。[3]しかし、その周波数特性には変動が多く広帯域変調素子としては不十分と考えざるを得ない。本文では、進行波動作による導波形光変調素子の周波数特性改善を目標として、非対称形電極線路[4]を用いて行なった広帯域光変調実験について報告する。

2. 導波形光変調素子の進行波動作

横形電気光学光変調素子の主な構成法（変調波印加法）に集中定数形と進行波形がある。この節ではこれらの比較を行ない、進行波動作の有利性を示す。

2-1. 集中定数および進行波動作

集中定数動作では光波および変調波が素子中を走行する時間を十分小さいものとし、変調素子を電気回路的に静電容量 C と見なす。周波数帯域幅は、この電極線路の容量と外部に装荷する並列負荷抵抗 R によって定まる。

一方、進行波動作では 電極線路を変調波に対する伝送線路として用い 走行時間による効果を積極的に利用する。 この場合 光波と変調波は分布結合を行なうと考えることができ 周波数帯域幅は 光波および変調波の速度非整合によって決まる。

表1は 集中定数動作 進行波動作それぞれについて 変調電力 P、周波数帯域幅 Δf、単位帯域幅あたりの変調電力 $P/\Delta f$ を示したものである。

表1. 集中定数動作と進行波動作

	集中定数動作	進行波動作
P	$V_0^2/(2RL^2)$	$c n_m C_0 V_0^2/(2L^2)$
Δf	$1/(\pi n_m^2 C_0 R L)$	$[1.4/\lvert 1-(n_l/n_m)\rvert]\cdot c/(\pi n_m)$
$P/\Delta f$	$\pi n_m^2 C_0 V_0/(2L)$	$[\lvert 1-(n_l/n_m)\rvert/1.4]\cdot \pi n_m^2 C_0 V_0/(2L)$

ここでは、電極線路の長さを L、単位長さあたりの変調電圧を V_0 としている。n_m、n_l はそれぞれ変調波、光波に対する実効屈折率であり、c は自由空間における光速である。C_0 は電極線路が自由空間に存在するときの単位長さあたりの容量を表わす。また、電極線路の特性インピーダンス Z、単位長さあたりの容量 C は それぞれ次式で与えられる。

$$Z = 1/(n_m c C_0) \quad , \quad C = n_m^2 C_0 \qquad (2-1)$$

これを用いて 同一寸法の導波形光変調素子を集中定数動作および進行波動作したときの特性について比較する。電極線路の形状は 特性インピーダンス Z が変調電源からの伝送線路の特性インピーダンス(通常50Ω)に一致するように決定したものと考える。

変調電力 ; $$\frac{P_t}{P_l} = c n_m C_0 R = \frac{R}{Z}$$

周波数帯域幅 ; $$\frac{\Delta f_t}{\Delta f_l} = \frac{1.4}{\lvert 1-(n_l/n_m)\rvert}\cdot c n_m C_0 R = \frac{1.4}{\lvert 1-(n_l/n_m)\rvert}\frac{R}{Z}$$

単位帯域幅あたりの変調電力 ; $$\frac{(P/\Delta f)_t}{(P/\Delta f)_l} = \frac{\lvert 1-(n_l/n_m)\rvert}{1.4} \qquad (2-2)$$

添字 t, l は それぞれ 集中定数動作、進行波動作の場合を表わす。

これより $(n_l/n_m) < 2.4$ であれば $(P/\Delta f)_t < (P/\Delta f)_l$ となる。(n_l/n_m) の値は ほとんど すべての電気光学結晶において 2.4以下であり 進行波動作の $P/\Delta f$ は 集中定数動作によるものに比べ、ほとんど常に小さな値となる。即ち、進行波動作を用いることにより、広帯域(あるいは高能率)な変調素子の得られる可能性がある。

2-2 進行波動作による導波形光変調

我々は、先に導波形光変調素子を進行波動作とする有利性を確かめ、変調実験を行なった。その概略を以下に示す

図1は試作変調素子の構成である。光導波路としてTi拡散$LiNbO_3$（Y板）結晶を用い、導波面上に、Al蒸着およびフォトエッチングにより対称形平行電極（幅100μm、間隔60μm、長さ1cm、厚さ1.5μm）を作成した。He-Neレーザ光（0.633μm）を用い、実験により7.5GHzまでの変調動作を確認した。変調の深さは掃引形FP共振器を用いて搬送波、側波帯成分の強度比を測定することにより求めた。動作電力250mWに対して、変調の深さは3GHzまで1rad程度で、7.5GHzにおいて0.5radを得た。

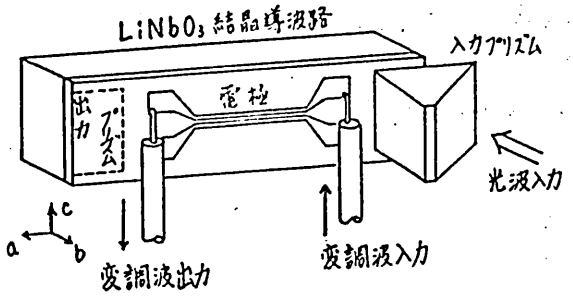


図1 光変調素子の構成

3. 非対称形平行電極による導波形光変調

2-2で示した変調実験により、導波形光変調素子を進行波動作とする有利性が確かめられた。しかし、その周波数特性には変動が多く広帯域変調素子としては満足すべきものではない。この変動の原因は主に、素子のマイクロ波特性にあると考えられる。そこで、これを改善するため、我々は図2に示すような非対称形平行電極の利用を提案した。電極線路を非対称形とすることにより、電極線路の周波数特性を良好にできる可能性がある。

以下では、非対称形平行電極の線路定数および電界分布について考察し変調特性についての計算結果を示す。

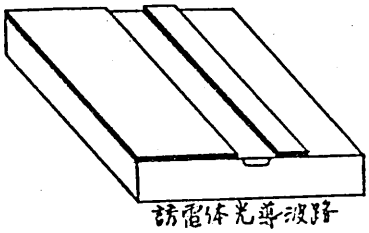


図2 非対称形平行電極線路

3-1 等角写像

図3は電極の断面図である。電極間隔dは変調波の波長に比べ十分小さく基本伝搬モードはTEM波と見なせるものとする。[5]

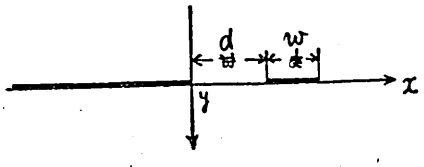


図3. 非対称形線路の断面図

又．電磁界は電極間付近に集中し．基板端面の影響は無視できるものとする。
この場合．線路の電気的性質は等角写像を用いることにより求められる。

図4-aは 図3を $\zeta = x + jy$ 面に書き表わしたもので．境界条件を示している。(3-1)に示すシュワルツ-クリストッフェル変換を施せば ζ の上半平面は 図4-bの $\zeta = u + jv$ 平面上の長方形内に等角写像され(*)．ζ 平面上の点 ζ_i $(i=1, 2, 3, 4)$ は ζ 面上の点 ζ_i となる。

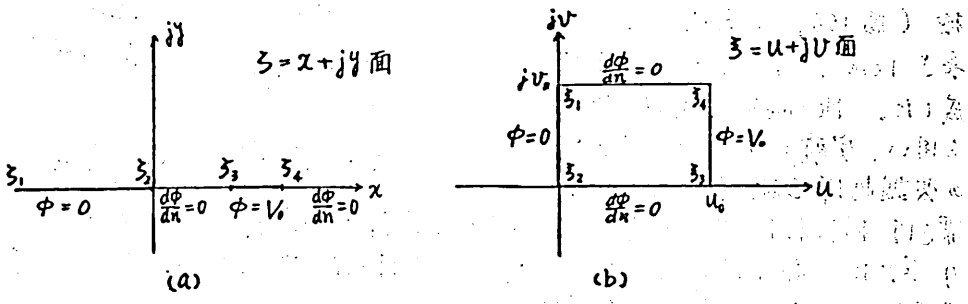


図4. $\zeta = x + jy$ 面 および $\zeta = u + jv$ 面

変換式は

$$\zeta = \int_0^{\sqrt{\zeta}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} \qquad (3-1)$$

逆変換は

$$\zeta = \mathrm{sn}^2(\zeta, k) \qquad (3-2)$$

ただし

$$k = 1/\sqrt{1+(W/d)} \qquad (3-3)$$

(3-1)の右辺は第一種楕円積分であり (3-2)の sn は Jacobi の楕円関数である。又

$$u_0 = K(k) \quad , \quad v_0 = K'(k) \qquad (3-4)$$

ここで K, K' は第一種完全楕円積分である。

(*) ζ の下半平面についても 同様のことをすることにより 全く同様な写像ができる。

3-2 静電容量・特性インピーダンス

線路の静電容量は等角写像を施しても変わらない.[6] 図4-aにおいて 比誘電率を ϵ_r ($y>0$), 1 ($y<0$) とする。各半平面が 図4-bの長方形内に写像されることから 図4-aの線路構造の単位長さあたりの静電容量Cが求められる.

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0(\epsilon_r+1)K'/K \qquad (3-5)$$

ここで $C_1=\epsilon_0\epsilon_r K'/K$, $C_2=\epsilon_0 K'/K$ は それぞれ 図4-aの上,下半平面による成分である.

実効誘電率 ϵ_m は次式のようになる.

$$\epsilon_m = C/C_0 = (\epsilon_r+1)/2 \qquad (3-6)$$

ただし, $C_0=2\epsilon_0 K'/K$ は 図4-aの線路構造を自由空間中に置いたときの静電容量である.

また,線路の特性インピーダンスZは 次式で表わされる.

$$Z = 1/\sqrt{CC_0}c = 1/(\sqrt{\epsilon_m}C_0 c) \qquad (3-7)$$

ここで, cは自由空間中における光速である.

以上の結果を用いて 非対称形線路の特性インピーダンスZと単位長さあたりの容量Cを計算することができる. 図5は 電極幅wと電極間隔dの比 w/d に対するCおよびZの計算例である. 基板を $LiNbO_3$ (Y板)とする。この場合 x および z 方向の誘電率 ϵ_x, ϵ_y は異なる ($\epsilon_x=43$ $\epsilon_y=28$) が、近似的に $\epsilon_r=\sqrt{\epsilon_x\epsilon_y}$ として与えることができる.[7]

特性インピーダンスZは $w/d=0.6$ において約50Ωとなる.

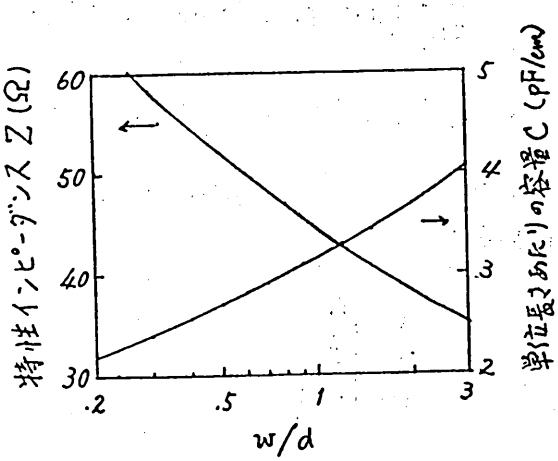


図5. w/d に対する Z, C

3-3 電位分布・電界分布

図4-aの線路構造の電位中の等電位線は媒介変数 t ($0<t<1$) を用いて 次のように表わされる.

$$x = d\cdot\frac{(1-k'^2t^2)\,sn^2u - t^2(1-t^2)\,cn^2u\,dn^2u}{\{(1-t^2)+k^2t^2sn^2u\}^2}$$

$$y = \pm d\cdot\frac{2t\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}\,sn\,u\,cn\,u\,dn\,u}{\{(1-t^2)+k^2t^2sn^2u\}^2} \qquad (3-8)$$

ただし　$u=(K/V_0)\phi$,　$k'=\sqrt{1-k^2}$,　$cn\,u=\sqrt{1-sn^2u}$,　$dn\,u=\sqrt{1-k^2sn^2u}$ である。

これを用いて等電位線を書くと図6のようになる。

また 5面上の電界を $E=(E_x, E_y)$ とすれば次式が成立する。

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -r\cos\theta$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -r\sin\theta \qquad (3-9)$$

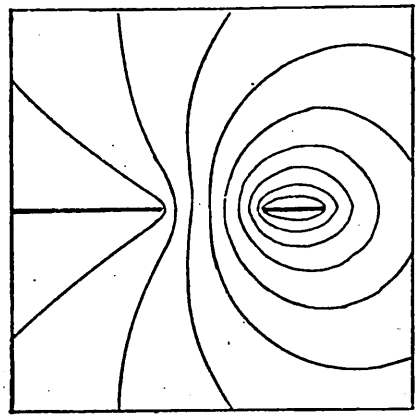


図6　電位分布

ただし、

$$r = \frac{V_0\sqrt{d}}{2K}\left[\{(x^2-dx-y)^2+(dy)^2\}\{(k^2x-d)^2+(k^2y)^2\}\right]^{-1/4}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\{dy/(-x^2+dx+y^2)\} + \tan^{-1}\{k^2y/(k^2x-d)\}\right] \qquad 0<x<d$$

図7に電界分布を示す。破線、実線、一点鎖線は各々 $y=0,\ \pm d/10,\ \pm d/2$ における値である。

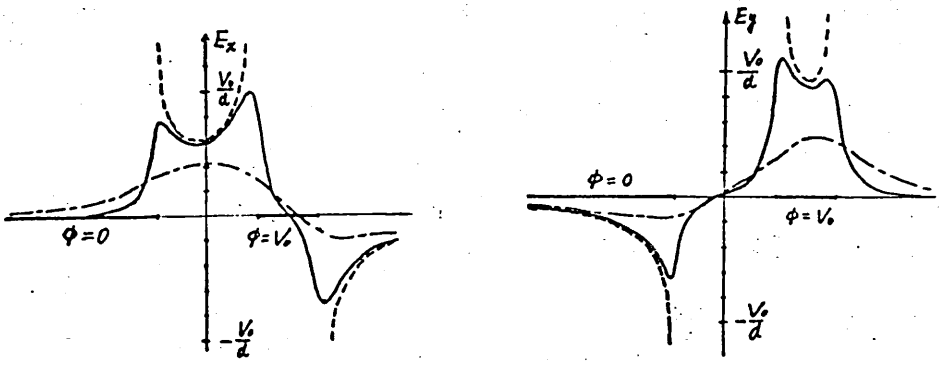


図7.　電界分布

3.4 変調特性

図8はここで扱う導波形光変調素子の構成図である。電気光学効果をもつ光導波路として Ti 拡散 $LiNbO_3$ パターン化導波路を、光源として He-Ne レーザ (0.633 μm) を仮定している。図示の結晶軸では TE および TM モードの位相変調が可能である。以下では TE モードの位相変調を検討する。

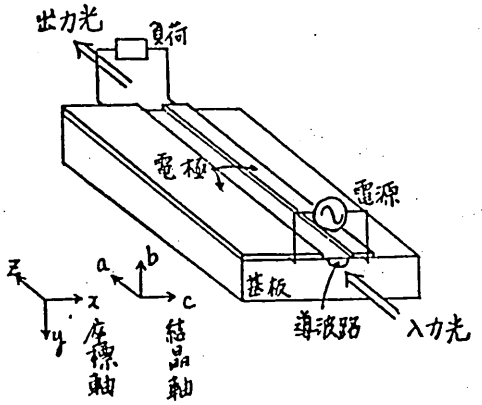


図8. 導波形光変調素子の構成

光導波路は y 方向についてガウス形の屈折率変化 (拡散の深さ 2μm, 屈折率差 2×10^{-2}) をもつとして TE_0 モードの光波分布を求めた [x 方向には導波路幅 (10μm) にわたって一様と仮定している]。この計算例を図9に示す。前節で得られた変調電界分布を用いて結合モード理論による解析法[8]を利用して電極間隔 d (w/d = 0.6) に対する誘導移相量を計算した。この結果を図10に示す。ここでは $LiNbO_3$ の異常屈折率 $n_e = 2.20$ 電気光学係数 $\gamma_{33} = 30.8\times10^{-12}$ m/V[9] としている。

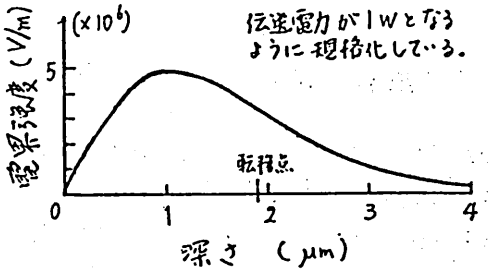


図9. TE_0 モードの光波電界分布

図11は誘導移相量 1.2 rad (100%変調) の得られる変調電圧 V_m, および特性インピーダンスを 50Ω とした場合の変調電力 P_m を電極間隔 d に対して計算したものである (TE_0 モード)。

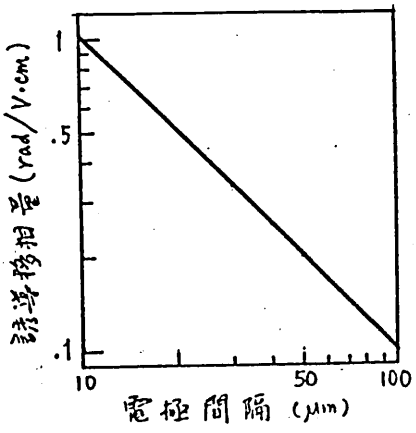


図10. 電極間隔に対する誘導移相量

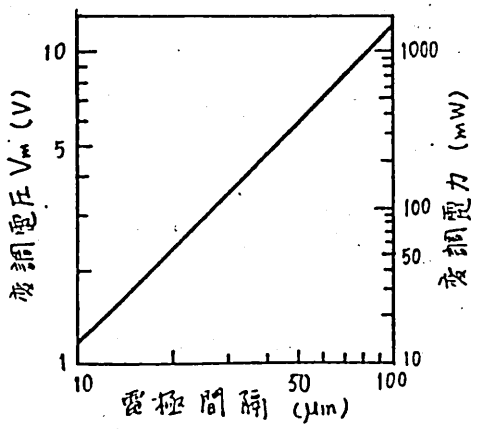


図11. 電極間隔に対する100%変調電圧・電力

4. 変調実験

Ti拡散 $LiNbO_3$ パターン化光導波路[10]を用いて 図12に示すような進行波形光変調素子を構成し、600MHz ~ 8.7GHz の周波数において 変調実験を行なった。表4に光導波路の主なパラメータを示す。

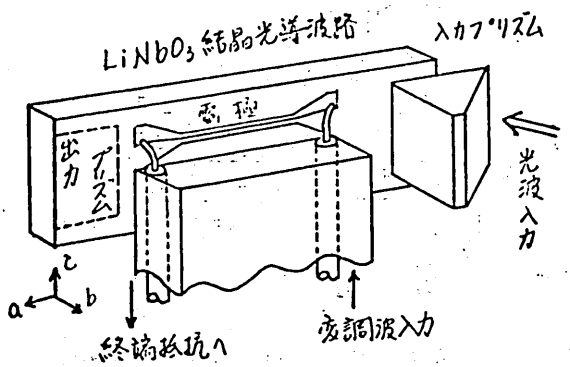


図12 試作変調素子の構成

表4. $LiNbO_3$ 光導波路のパラメータ

導波路幅	;	10 μm
導波路長	;	15 mm
等価屈折率	;	2.204 (TE_0モード)
屈折率分布	;	ガウス関数形
屈折率変化	;	2×10^{-2}
等価膜厚	;	2 μm

4-1 試作変調素子のマイクロ波特性

図13に作成した電極線路の形状を示す。電極線路は Al を真空蒸着(厚さ約2μm)しフォトエッチングにより作成した。上部電極の直流抵抗は 約3.5Ω であった。同軸線としては 0.85 inch セミリッジドケーブルを用いた。

図14に マイクロ波の V.S.W.R の測定結果を示す。7GHz 付近を除いて 8.7 GHz まで V.S.W.R は 2 以下である。

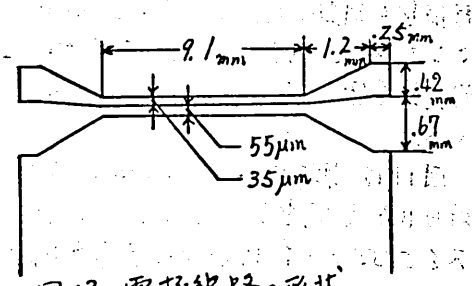


図13. 電極線路の形状

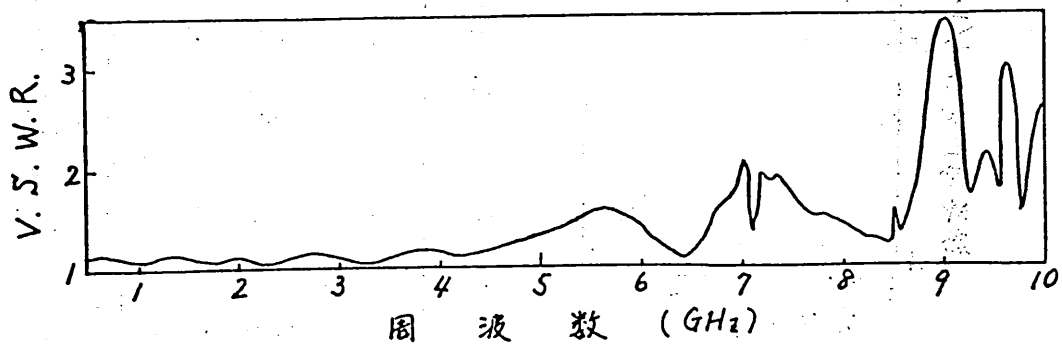


図14. 試作変調素子の V.S.W.R.

図15に 2-2で述べた対称形線路の場合について V.S.W.R.の測定結果を比較のために示す。

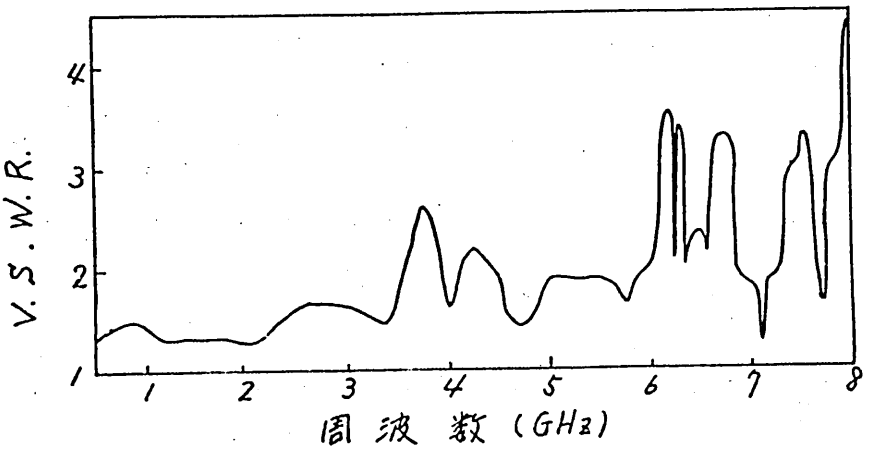


図15 対称形線路を用いた変調素子の V.S.W.R.

この比較から、非対称形線路を用いることにより マイクロ波特性の著しい改善が得られることがわかる。

4-2. 変調実験

進行波動作による広帯域化を調べるための変調実験は、図16に示す構成で行なった。掃引形ファブリペロー干渉計を用いて位相変調された出力光の周波数スペクトルを観測した。第1番目の側波帯成分と搬送波の強度比が $J_1(\Delta\Phi)/J_0(\Delta\Phi)$ となることから位相変調の深さ $\Delta\Phi$ を計算することができる。変調電力は素子入力側の方向性結合器(20dB)を通して電力計で測定した。

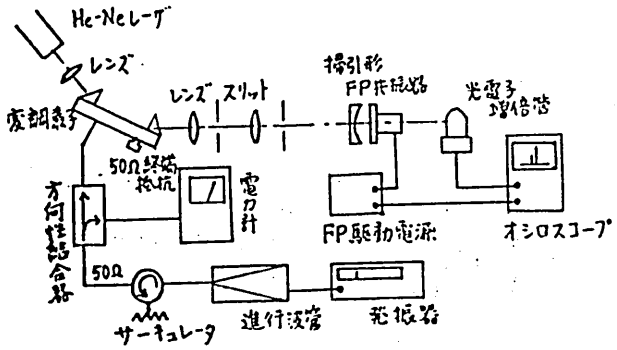


図16
変調実験の構成
(600MHz ~ 8.7GHz)

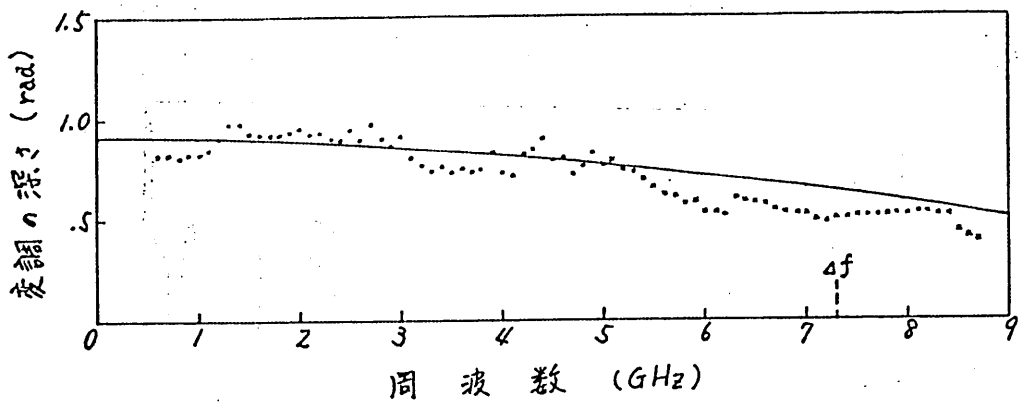


図17. 変調実験の結果 (変調電力 300mW)

図17に 変調電力を 300mW に増幅した場合の変調の深さの周波数特性を示す。ここでは 方向性結合器、電力計の周波数特性を考慮している。実験を行なった周波数は 600MHz ～ 8.7GHz である。ほぼ平坦な変調特性が得られている。

図において 実線は 変調波の減衰を考慮した変調特性の計算値である。変調波の減衰定数は 線路に一様な電流が流れるとして 直流抵抗 3.5Ω より算定した。このときの周波数帯域幅は $n_m = \sqrt{\varepsilon_m} = 4.2$, $n_z = 2.2$ として $\Delta f \simeq 7.3$ GHz と計算される。実験値と計算値とは ほぼ一致した値が得られている。

図18は 対称形線路を用いた場合の測定結果[3] である。周波数帯域幅は 線路長が 10mm であるから $\Delta f \simeq 6.6$ GHz である。

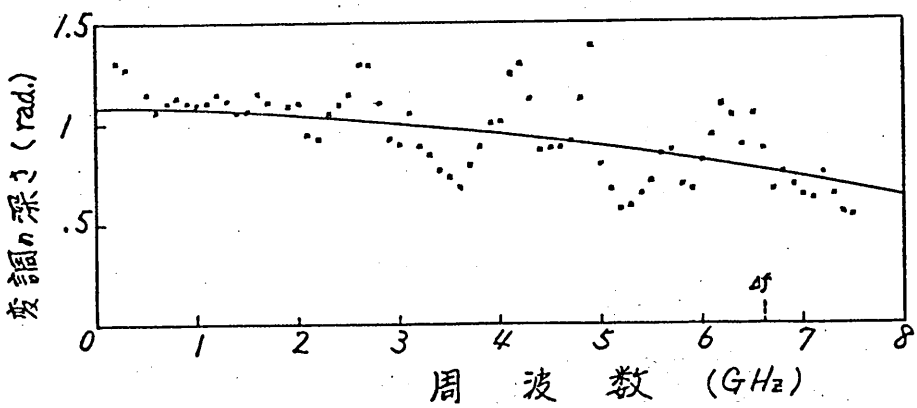


図18. 対称形線路を用いた変調実験の結果
(変調電力 300mW)

マイクロ波特性で見られた非対称線路の有用性が 変調特性においても 同様に確かめられる。

4-3 強度変調

これまで述べてきた横形配置の導波形光変調素子において強度変調を実現するには、従来、バルク形で行なわれてきたと同様に、TE, TMモードを同時に位相変調し、出力光をアナライザを用いて強度変調に変換する方法が考えられる。即ち、TE, TMモードという直交した偏波を持つ2つの光波モードの位相変調を同時に行なえば(変調の深さは異なる)、TE, TMモード出力光の移相量が異なり、これらを重ね合わせた全出力光の等価的な偏波面が変調電圧に比例して回転する。そこで、素子外部に配置したアナライザを用いて強度変調を得るものである。

この場合位相定数の異なるTE, TMモードを同時に励振しなければならない。プリズムやグレーティングによる光波の結合では実現が困難なため、素子端面より光波を直接照射することによって光波を入力し再び端面から出力光を取り出す必要がある。図19は端面研磨したTi拡散$LiNbO_3$パターン化光導波路を用いた試作変調素子と、端面照射のための装置である。図20は得られたnear field patternである。図20-bでは高次モードが励振され、2つのスポットが見られる。

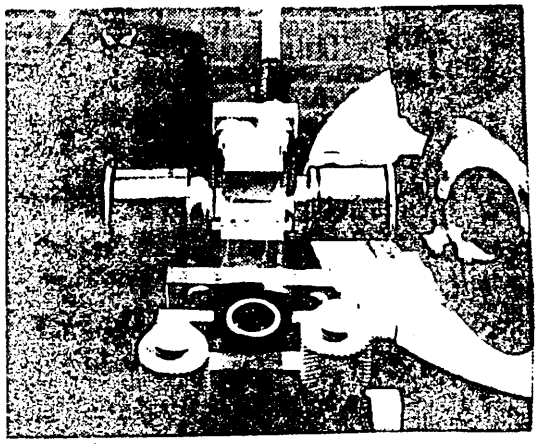


図19
試作変調素子と
端面照射のための装置

(a) (b)

図20. 出力光のnear field pattern

図21は変調実験の構成である。

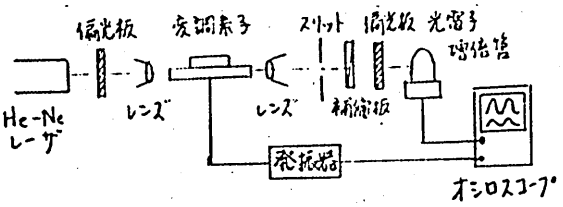


図21
強度変調実験の構成図

図22は 1kHzで行なった強度変調の波形である。このときの消光比は約15dBで、100%変調に必要な電圧は、約16Vであった。

現在、高周波における強度変調実験を準備中である。

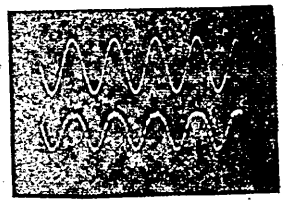


図22 強度変調波形

5. むすび

横形配置の導波形光変調素子は素子の広帯域化、高能率化をはかる上で有利と考えられる。本文では進行波動作による広帯域化に着目し、その可能性を検討した。良好な周波数特性を得るため非対称形線路の利用を考え、線路定数、電界分布を調べた。この結果を用いて変調素子を試作し、変調実験により8.7GHzまでほぼ平坦な変調特性が得られた。この実験では、$LiNbO_3$パターン化導波路を用いた。試作変調素子の電極間隔は55μmである。さらに電極間隔を小さくすることにより、高能率化をはかることができる。

また、強度変調の基礎実験を行ない、所期の結果を得た。高周波変調特性を確かめる必要がある。

さらに、今後の課題として、温度変化による光学バイアス変動の補償、モード分離素子(アナライザ)を同一導波路上に一体化して構成すること等が残されている。

謝辞　実験に用いた$LiNbO_3$光導波路を御提供頂いた三菱電機中央研究所の春連川隆所長、中山高グループリーダ始め、関係各位に深く感謝します。

参考文献

(1) R.V. Schmidt et al. "Metal-diffused optical waveguides in $LiNbO_3$", Appl. Phys. Lett., 25, 8, 458 (1974)

(2) I.P. Kaminow et al "Efficient strip-waveguide modulator", Appl. Phys. Lett, 27, 10, 555 (1975)

(3) 井筒, 山根, 末田 "薄膜光変調素子の進行波動作について," 頒研資料 (1976年4月)

(4) 井筒, 伊藤, 末田 "広帯域導波形光変調素子", 信学全大 S4-11 (1976年11月)

(5) 浜崎 "マイクロ波ストリップ線路", 信学誌, 52, 10, 1144 (1969)

(6) R.E. Collin. "Field Theory of Guided Waves", McGraw-Hill, New York (1960)

(7) 山下, 厚木, "薄膜電気光学変調素子の分布容量", 信学全大 1210 (1974年7月)

(8) M. Izutsu, T. Sueta, "Coupled Mode Analysis of Light Modulation in Dielectric Waveguides", Appl. Phys. 5, 307 (1975)

(9) "Handbook of Lasers", Chemical Rubber Co., Cleveland (1971)

(10) 内藤, 布下, 大林, 中山, "強誘電体薄膜導波路の試作とその特性" 頒研資料 (1976年1月)