輻射科学研究会資料

アドミタンスの不連続部に幅のあるときの反射係数

弓場芳治　山北次郎
(京都工芸繊維大)　(大阪府立大)

昭和52年5月13日

於 中央電気クラブ

アドミタンスの不連続部に幅のあるときの反射係数

弓場芳治（京都工芸繊維大学）　山北次郎（大阪府立大学）

まえがき.

分布定数線路において，アドミタンスの不連続による反射を利用して，共振器あるいはフィルターが構成されることは周知の事実であり、光導波線路においても当然このことを利用して共振器を作ることが考えられている。

光導波線路で，アドミタンスに変化をつけるには、一様な線路をエッチングによって削り取るか[注]、不純物の注入によって屈折率（誘電率）を変化させるなどの方法がとられている。しかし，これらの方法を使うとすれば，アドミタンスをマスクの形どおり2つのレベルに変化させることが困難で，マスクの境界付近において、

注　以下の議論では放射モードを考えていないので，厳密には、この理論が適用できない。

滲みのため、アドミタンスの接続部は幅を持って接かれると考えねばならない。　接続部の幅が、波長に比べて十分短い場合には、接続部の幅の効果が無視され屈折率の変化の差のみで反射係数が決定できる。

また、従来多くの解析がおこなわれているように、接続部を十分長くとり、単位長当りのアドミタンスの変化が少ないようにとれば、アドミタンス整合用のテーパー線路として、ほとんど無反射になるような条件も求められている。

この論文では、本来反射をおこすべく設計した線路が、技術的な欠陥で、反射係数が減少するような条件として、接続部が波長のオーダーであるような線路について計算した。計算の結果は、接続部を無限小にした極限では、2つの線路のアドミタンスで反射係数が定まり、接続幅を大きくとれば、無反射に近づくことを示している。

解析

アドミタンス Y_1, Y_3 の一様な2本の線路 I, III が両者のアドミタンスの差を単調に変化して結ぶ短い線路 II で接かれているものとする。

以下アドミタンスの変化を屈折率(誘電率)の変化で置き換え、線路 I の値で正規化して表わす。

$$
\begin{aligned}
Y_1/Y_1 &= 1 && \text{線路 I} \quad z \leq 0 \\
Y_2/Y_1 &= \sqrt{\varepsilon_r(z)} && \text{〃 II} \quad 0 \leq z \leq z_a \qquad (1) \\
Y_3/Y_1 &= \sqrt{\varepsilon_a} = n && \text{〃 III} \quad z_a \leq z
\end{aligned}
$$

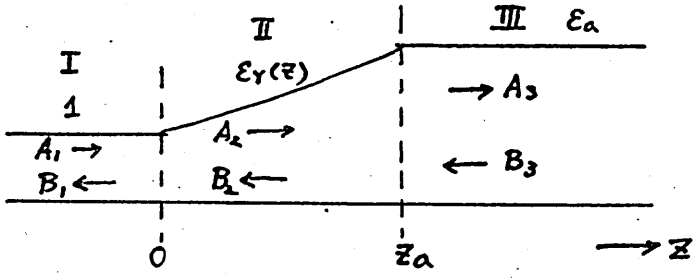


図1. 誘電率の変化.
A_i : 往進波, B_i : 復進波, 透磁率 $= \mu_0$

また 線路内では z方向に伝播する TEM波 (E_x, H_y) のみを考えている。

z方向の波動方程式を立てると電界 ($E = E_x$) に関し、

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \varepsilon_r k^2 E = 0 \qquad (2)$$

となり磁界 ($H = H_y$) に対して

$$H = \frac{j}{\omega\mu}\frac{\partial E}{\partial z} \qquad (3)$$

が成立する。こゝで $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ とし、時間因子 $\exp(j\omega t)$ は省略している。

以下、線路定数が一定な領域(線路 I, III)と線路定数が変化する領域(線路 II)に分けて式(2), (3)を求め、接続部での連続性より解を求める。また、線路 II の誘電率に単調な変化を与える関数として、z の一次関数と指数関数を与えた。

1) 線路 I, III

この領域では式(2), (3)の解として、

$$E = A_i \exp(-jk_i z) + B_i \exp(jk_i z) \qquad (4)$$

$$H = \frac{k_i}{\omega\mu}\{A_i \exp(-jk_i z) - B_i \exp(jk_i z)\} \qquad (5)$$

が得られる。こゝで A_i, B_i $(i=1,3)$ はそれぞれ

zの正方向へ進む前進波，負方向へ進む後進波の振幅を表わし．$k_1 = k$，$k_3 = nk$ としている。

2) 線路 II

a) 指数変化.

線路 II の誘電率がzの指数関数で変化する場合を考える。

$$\varepsilon_r(z) = \exp(2z/d) \qquad (6)_a$$

$$d = z_a / \ln(n) \qquad (7)_a$$

式 (6)a を 式(1) に代入すると.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 \exp(2z/d)\, E = 0 \qquad (8)_a$$

となる．こゝで $u = \exp(z/d)$ と変数変換すると.

$$\frac{du}{dz} = \frac{u}{d}, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{u}{d^2} \qquad (9)_a$$

となる．一方

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \left(\frac{du}{dz}\right)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{\partial E}{\partial u} \qquad (10)$$

より 波動方程式 は次のようにおける.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + \frac{d^2u/dz^2}{(du/dz)^2}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{u^2 k^2}{(du/dz)^2} E = 0 \qquad (11)$$

式(11)に式(9)aを代入して、次のベッセルの微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial E}{\partial u} + (kd)^2 E = 0 \qquad (12)a$$

この式の解は $kd = p$ とおいて次のように第1種，第2種のベッセル関数の和で示される。

$$E = C J_0(pu) + D N_0(pu) \qquad (13)a$$

磁界は式(3)より

$$H = \frac{j}{\omega\mu}\frac{du}{dz}\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{-jku}{\omega\mu}\{C J_1(pu) + D N_1(pu)\} \qquad (14)a$$

である。

b) 直線変化.

線路IIの~~透電~~屈折率が、zの一次関数で変化するとき、

$$\varepsilon_r(z) = \left(1 + \frac{z}{g}\right)^2 \qquad (6)b$$

$$g = z_a/(n-1) \qquad (7)b$$

$$u = \left(1 + \frac{z}{g}\right)$$

$$du/dz = 1/g, \quad d^2u/dz^2 = 0 \qquad (9)b$$

とすると a)節同様に、波動方程式

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2\left(1+\frac{z}{g}\right)^2 E = 0 \qquad (8)b$$

は $2p = kg$ とおいて

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + (2pu)^2 E = 0 \qquad (12)b$$

となり、やはりベッセル関数で解が与えられる。

$$E = \sqrt{u}\left\{C J_{\frac{1}{4}}(pu^2) + D N_{\frac{1}{4}}(pu^2)\right\} \qquad (13)b$$

$$H = \frac{j\sqrt{u}}{\omega\mu g}\left[\frac{1}{u}\left\{C J_{\frac{1}{4}}(pu^2) + D N_{\frac{1}{4}}(pu^2)\right\} - 2pu\left\{C J_{\frac{5}{4}}(pu^2) + D N_{\frac{5}{4}}(pu^2)\right\}\right] \qquad (14)b$$

3) 境界条件（未定係数の決定）

式(4), (5) と 式(13), (14) の a, b を組合わせ、2ケ所の接続点 $z=0$, $z=z_a$ で電磁界の接線成分の連続性より未定係数を決定する。

指数変化の場合

$z=0$ において $u=1$ を代入する

$$A_1 + B_1 = C J_0(p) + D N_0(p) \qquad (15)a$$

$$A_1 - B_1 = -j\left\{C J_1(p) + D N_1(p)\right\} \qquad (16)a$$

$z=z_a$ において $u=n$

$$A_3 \exp(-jnkz_a) + B_3 \exp(jnkz_a) = CJ_0(np) + DN_0(np) \qquad (17)a$$

$$A_3 \exp(-jnkz_a) - B_3 \exp(jnkz_a) = -j\{CJ_1(np) + DN_1(np)\} \qquad (18)a$$

こゝで

$$\left.\begin{aligned} J_p &= J_0(p) + jJ_1(p), & N_p &= N_0(p) + jN_1(p), \\ J_n &= J_0(np) + jJ_1(np) & N_n &= N_0(np) + jN_1(np) \end{aligned}\right\} \qquad (19)a$$

とおいて、式(15), (16) と式(17), (18) の和と差より A_1, B_1, A_3 および B_3 は次のように求まる。

$$A_1 = \frac{1}{2}(CJ_p^* + DN_p^*) \qquad (20)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(CJ_p + DN_p) \qquad (21)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(CJ_n^* + DN_n^*)\exp(jnkz_a) \qquad (22)$$

$$B_3 = \frac{1}{2}(CJ_n + DN_n)\exp(-jnkz_a) \qquad (23)$$

ただし こゝで J^* は J の共役複素数を示している。

直線変化の場合、

上と同様に2つの境界条件を入れると、

$$A_1 + B_1 = CJ_{1/4}(p) + DN_{1/4}(p) \qquad (15)b$$

$$A_1 - B_1 = \frac{j}{2p}\{CJ_{\frac{1}{4}}(p) + DN_{\frac{1}{4}}(p)\} - j\{CJ_{\frac{5}{4}}(p) + DN_{\frac{5}{4}}(p)\} \qquad (16)b$$

$$A_3 \exp(-jnkz_a) + B_3 \exp(jnkz_a) = \sqrt{n}\{CJ_{\frac{1}{4}}(p) + DN_{\frac{1}{4}}(p)\} \qquad (17)b$$

$$A_3 \exp(-jnkz_a) - B_3 \exp(jnkz_a) = \frac{j}{2p\sqrt{n}}\Big[\frac{1}{n}\{CJ_{\frac{1}{4}}(pn^2) + DN_{\frac{1}{4}}(pn^2)\} - 2pn\{CJ_{\frac{5}{4}}(pn^2) + DN_{\frac{5}{4}}(pn^2)\}\Big] \qquad (18)b$$

となる。こゝで

$$\left.\begin{aligned}
J_p &= J_{\frac{1}{4}}(p) - j\{\tfrac{1}{2p}J_{\frac{1}{4}}(p) - J_{\frac{5}{4}}(p)\} \\
N_p &= N_{\frac{1}{4}}(p) - j\{\tfrac{1}{2p}N_{\frac{1}{4}}(p) - N_{\frac{5}{4}}(p)\} \\
J_n &= \sqrt{n}\Big[J_{\frac{1}{4}}(pn^2) - j\{\tfrac{1}{2pn^2}J_{\frac{1}{4}}(pn^2) - J_{\frac{5}{4}}(pn^2)\}\Big] \\
N_n &= \sqrt{n}\Big[N_{\frac{1}{4}}(pn^2) - j\{\tfrac{1}{2pn^2}N_{\frac{1}{4}}(pn^2) - N_{\frac{5}{4}}(pn^2)\}\Big]
\end{aligned}\right\} \qquad (19)b$$

の変換をおこなうと、式(20)～(23)は全く同形になる。

4) 反射係数、透過係数

今考えている接続部は対称回路であるから、電磁界に関して重ね合わせの理が適用できる。したがって B_3 あるいは A_1 を 0 とおいても一般性を失わない。接合部を 2P 回路と考えて、S マトリクスを求めると、反射係数、透過係数が求まる。

$$B_3 = 0 \text{ より} \qquad D/C = -J_n/N_n \qquad (24)$$

$A_1=0$ を式(20)に代入して. $D/C=-J_p^*/N_p^*$ (25)

$$S_{11}=\frac{B_1}{A_1}_{B_3=0}=\frac{J_pN_n-N_pJ_n}{J_p^*N_n-N_p^*J_n} \tag{26}$$

$$S_{12}=\frac{B_1}{B_3}_{A_1=0}=\frac{J_p^*N_p-N_p^*J_p}{J_p^*N_n-N_p^*J_n}\exp(jnkz_a) \tag{27}$$

$$S_{21}=\frac{A_3}{A_1}_{B_3=0}=\frac{J_n^*N_n-N_n^*J_n}{J_p^*N_n-N_p^*J_n}\exp(jnkz_a) \tag{28}$$

$$S_{22}=\frac{A_3}{B_3}_{A_1=0}=\frac{J_p^*N_n^*-N_p^*J_n^*}{J_p^*N_n-N_p^*J_n}\exp(j2nkz_a) \tag{29}$$

こゝで

$$\begin{bmatrix}B_1\\A_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\B_3\end{bmatrix} \tag{30}$$

である。

図2～9は式(26)の結果を数値計算したものである。縦軸は反射係数 $R=S_{11}$ の絶対値を対数目盛で表示し、横軸は接続部の幅 z_a を線路Iの線路波長で正規化してある。また線路IIIと線路Iの誘電率の比を1.05～10.まで変化させてある。

$z_a=0$ のときの反射係数は比誘電率 ε の線路を接続したときの値 $S_{11}=\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}$ に一致する。

あとがき.

以上の計算結果は、たとえば、屈折率4/3の線路(線路I)に不純物を注入して2.5%の屈折率変化(誘電率では5%の変化)を与えた線路(線路III)では、境界で起す反射係数が

$$\left|(1-1.025)/(1+1.025)\right| \fallingdotseq 0.012$$

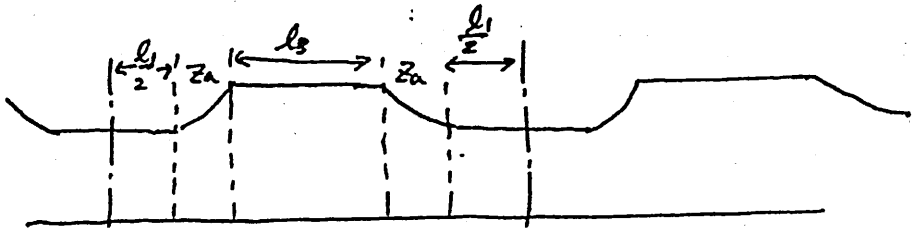
と期待される。しかし、こゝで指摘したように境界に幅を持ち、線路IIが介在したとすれば、図2,6のように反射係数は大きく変化する。線路IIの長さを試算して見ると、自由空間波長0.6μmの光は線路Iで管内波長0.45μmであり、もしマスクによる滲みが、0.225μmあったとすれば、反射係数はほとんど0になる。計算の結果によれば、線路IIの伝搬定数も単調に変化して居り、反射係数が極小になる線路IIの長さも整数倍にはならない。また、単純な2境界の合成反射のように、完全に反射を打

消すこともない。このことは、参考のために計算した透過率変化の大きいものの計算結果を見れば一層よく理解できる。

こゝで述べたことは光線路のリアクティブ素子に対する一つの危惧であって、製作技術が向上すれば解決すると考えられる。また実際には断面方向の境界条件、あるいは放射モードとの結合等を考慮しなければ正しい解は得られないかも知れないが、定性的には、接続部の効果が反射係数に大きく影響することを示した。

付録

多重反射の場合



図のように線路I（長さl_1）と線路III（長さl_3）がZ_aの幅で接続されているとする。一点鎖線で示した範囲を単位の長さとして、これをm段重ね合わせればよい。

本文のSマトリクスを縦続接続するために波動振幅伝達マトリクス（以下Wマトリクスと略記する。）で次のように表示する。

$$W = \frac{1}{j\,M_n}\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{1}{S_{21}} = (J_p^* N_n - N_p^* J_n)\exp(-j\alpha)$$

$$W_{12} = \frac{-S_{22}}{S_{21}} = (N_p^* J_n^* - J_p^* N_n^*)\exp(j\alpha)$$

$$W_{21} = \frac{S_{11}}{S_{21}} = (J_p N_p - N_p J_n)\exp(-j\alpha)$$

$$W_{22} = S_{12} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}} = (N_p J_n^* - J_p N_n^*)\exp(j\alpha)$$

$$\alpha = k_n z_n$$

$$jM_n = N_n^* J_n - J_n^* N_n \qquad jM_p = N_p^* J_p - J_p^* N_p$$

$$|W| = \frac{M_p}{M_n}$$

である。(W)の裏返しマトリクス (W_b) は

$$(W_b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(W)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{jM_p}\begin{pmatrix} W_{22} & W_{11} \\ W_{12} & W_{22} \end{pmatrix}$$

であり、線路Ⅰ, 線路Ⅲの Wマトリクスは

$$\theta_1 = kl_1 \qquad \theta_3 = k_n l_3$$

とおいてそれぞれ次の式で示される

$$(W_1) = \begin{pmatrix} \exp(j\frac{\theta_1}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-j\frac{\theta_1}{2}) \end{pmatrix} \qquad (W_3) = \begin{pmatrix} \exp(j\theta_3) & 0 \\ 0 & \exp(-j\theta_3) \end{pmatrix}$$

したがって 単位線路のマトリクス (W_U) は

$$(W_U) = (W_1)\cdot(W)(W_3)(W_b)(W_1)$$

$$= \frac{1}{M_p M_n}\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

$$V_{11} = +\{W_{11}W_{12}\exp(j\theta_3) + W_{12}W_{21}\exp(-j\theta_3)\}\exp(j\theta_1)$$

$$V_{12} = +2W_{11}W_{12}\cos\theta_3$$

$$V_{21} = +2W_{22}W_{21}\cos\theta_3$$

$$V_{22} = +\{W_{11}W_{12}\exp(-j\theta_3) + W_{12}W_{21}\exp(j\theta_3)\}\exp(-j\theta_1)$$

となる。

$$W_{11}W_{22} = M_pM_n + (J_p^*N_n^* - J_n^*N_p^*)(N_pJ_n - J_pN_n)$$
$$= M_pM_n + P$$

$$W_{12}W_{21} = P$$

$$W_{11}W_{12} = -(J_n^*N_n + J_nN_n^*)J_p^*N_p^* + |N_n|^2(J_p^*)^2 + |J_n|^2(N_p^*)^2$$
$$= Q$$

$$W_{22}W_{21} = Q^*$$

の関係があるので、(WU)を書き換えると

$$V_{11} = (M_pM_n\exp(j\theta_3) + 2P\cos\theta_3)\exp(j\theta_1)$$

$$V_{12} = 2Q\cos\theta_3 \qquad V_{21} = 2Q^*\cos\theta_3$$

$$V_{22} = V_{11}^* = \{M_pM_n\exp(-j\theta_3) + 2P\cos\theta_3\}\exp(-j\theta_1)$$

$$|W_U| = \left(\frac{1}{M_pM_n}\right)^2(V_{11}V_{22} - V_{12}V_{21}) = 1$$

となる。

次に m 段の単位回路を接続すると

$$F = \frac{V_{11}+V_{22}}{2} = M_p M_n \cos(\theta_1+\theta_3) + 2P\cos\theta_1\cos\theta_3$$

$$G = \frac{V_{11}-V_{22}}{2} = j\{M_p M_n \sin(\theta_1+\theta_3) + 2P\sin\theta_1\cos\theta_3\}$$

とおいて、

$$R_{11} = T_m(F) + G\,U_m'(F)$$

$$R_{12} = 2Q\cos\theta_3\,U_m'(F)$$

$$R_{21} = 2Q^*\cos\theta_3\,U_m'(F)$$

$$R_{22} = T_m(F) - G\,U_m'(F)$$

として表わされる。ここで T_m, U_m' は第1種,第2種のチェビシェフ関数である。

したがって合成の多段反射回路は、

$$(W_T) = (W_1)^{-1}(W_U)^m(W_1)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{11}\exp(-j\theta_1) & R_{12} \\ R_{21} & R_{22}\exp(j\theta_1) \end{pmatrix}$$

となる。

線路Ⅰと線路Ⅲの誘電率比

E= 1.050
(EXP.)
線路Ⅱ指数変化

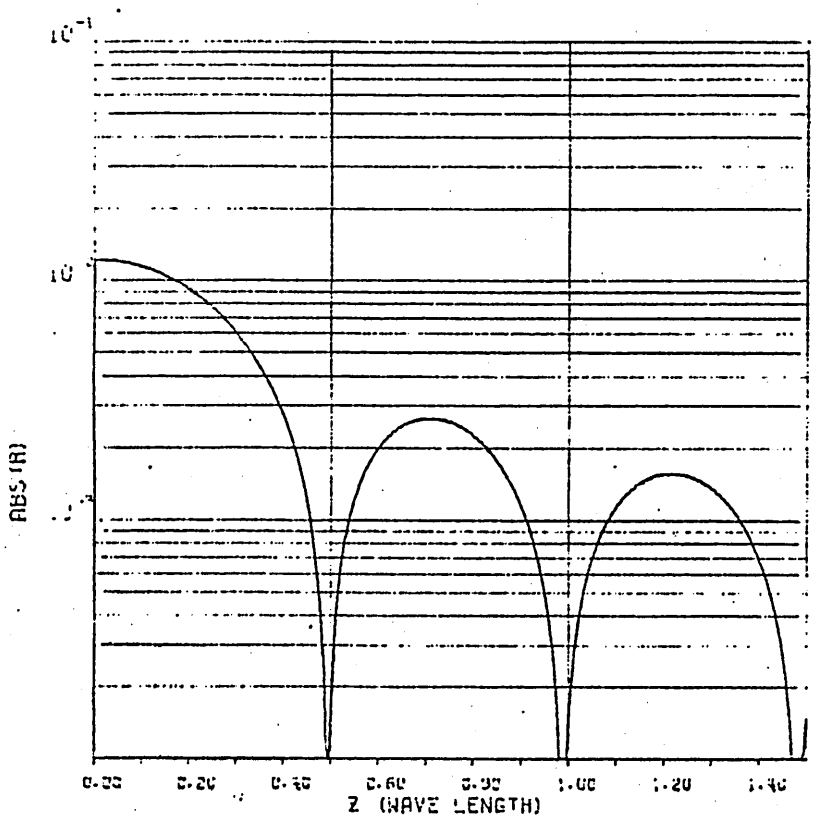


Fig 2

E= 1.050
(LIN.)
線路Ⅱ 直線変化

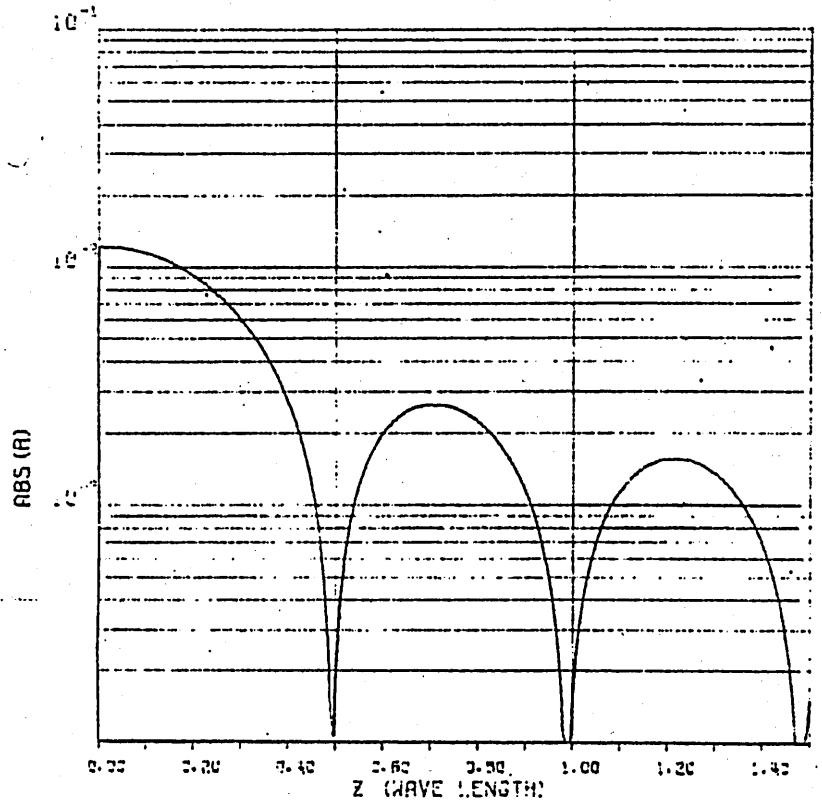


Fig 3

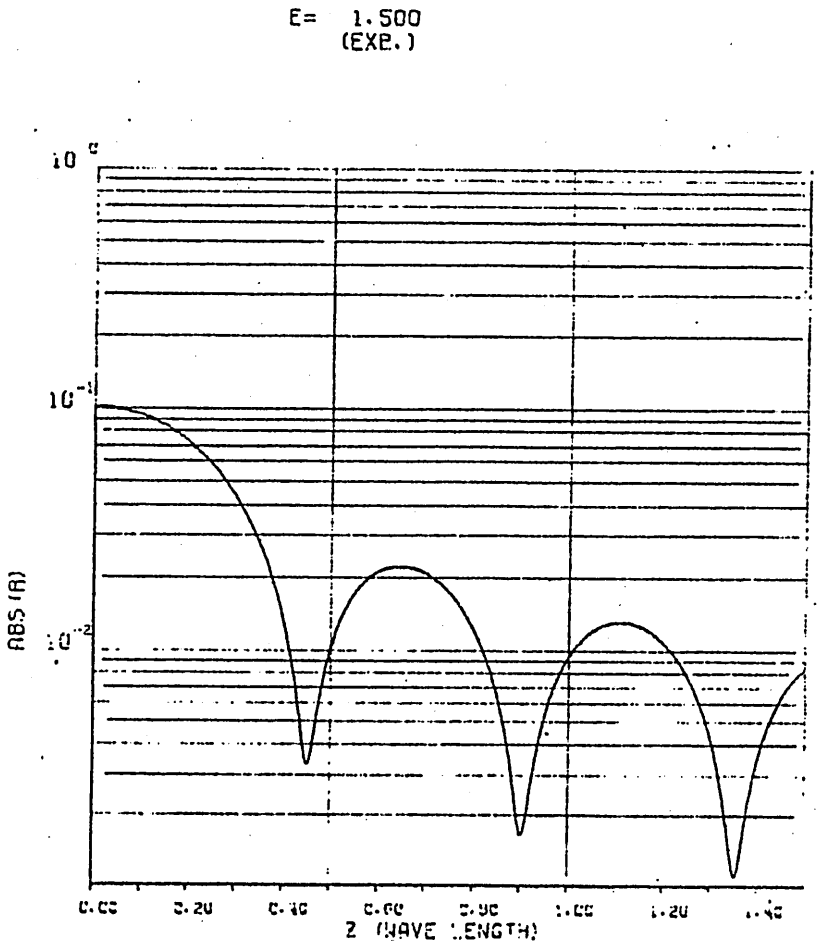


Fig. 4

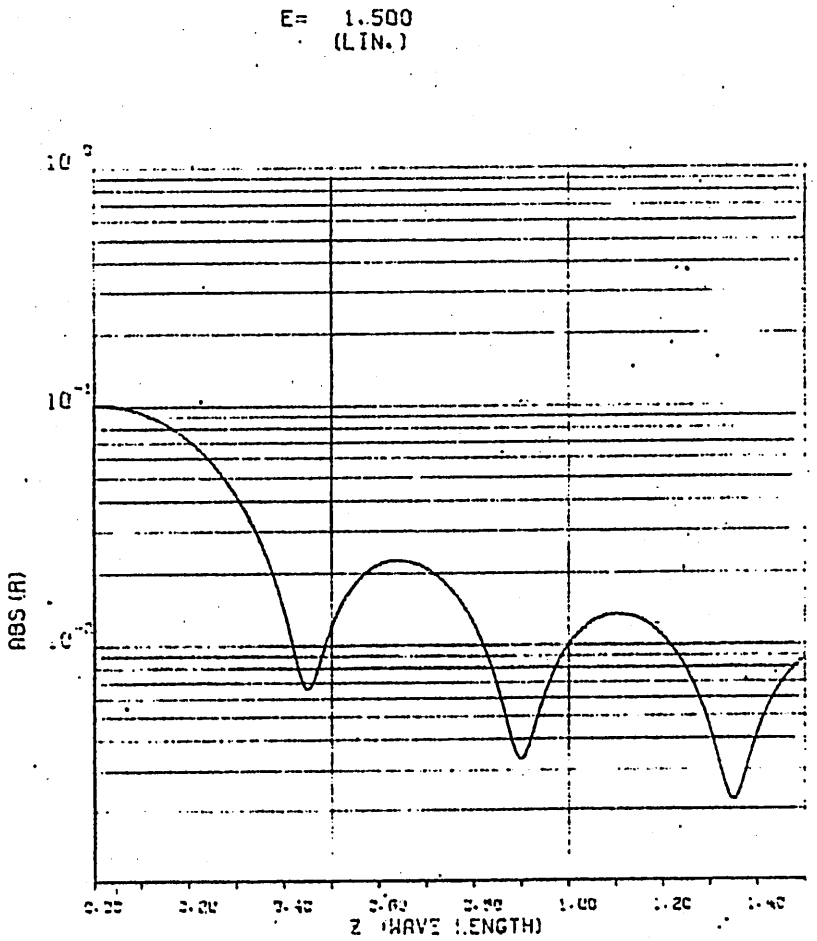


Fig. 5

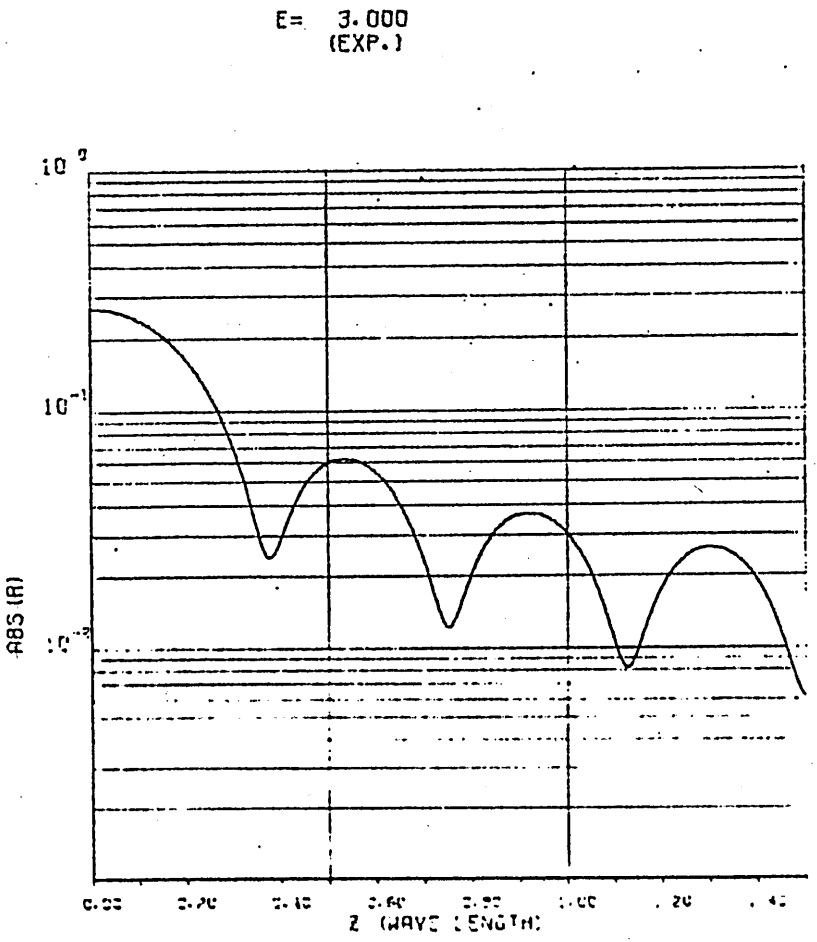


Fig. 6

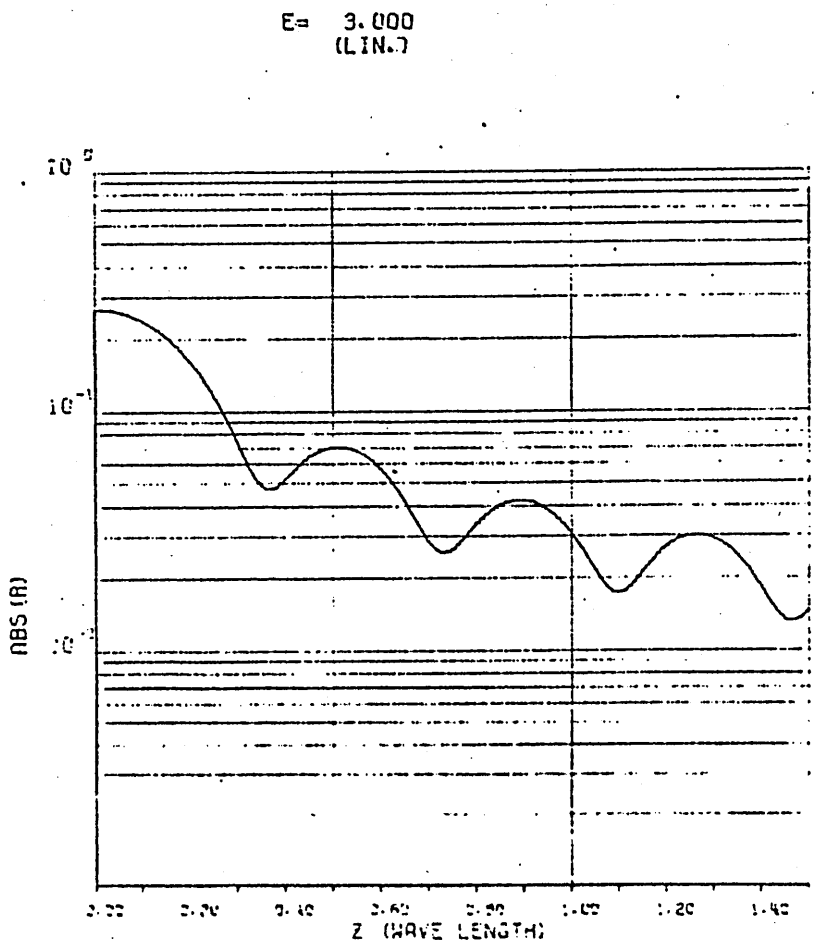


Fig 7

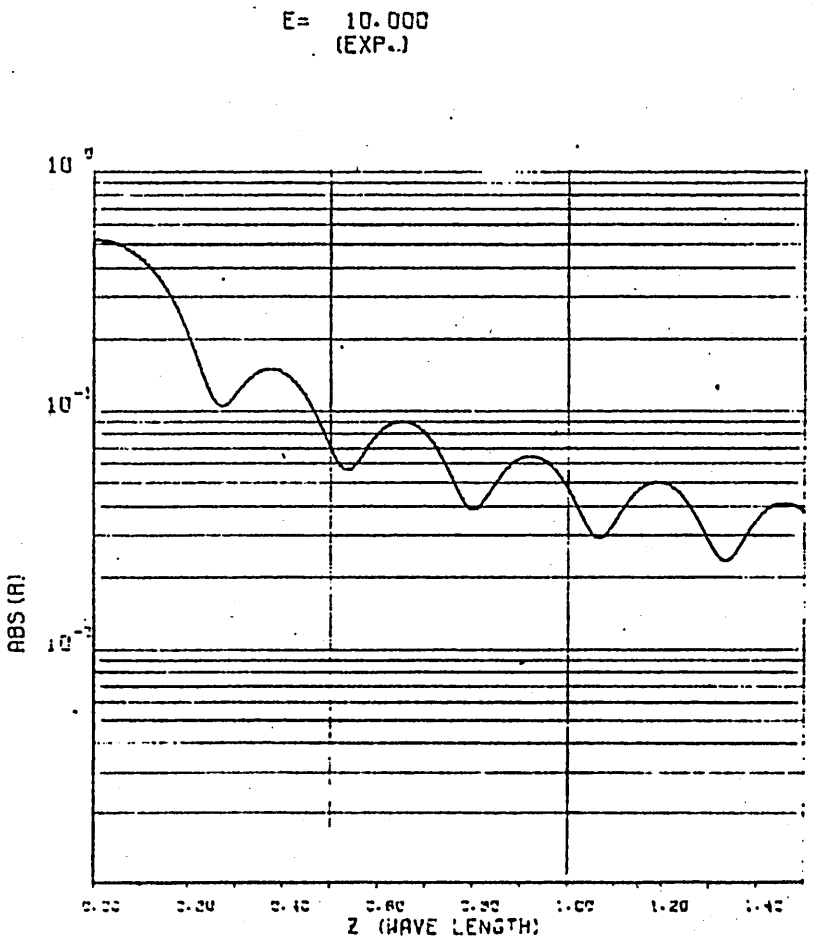


Fig 8

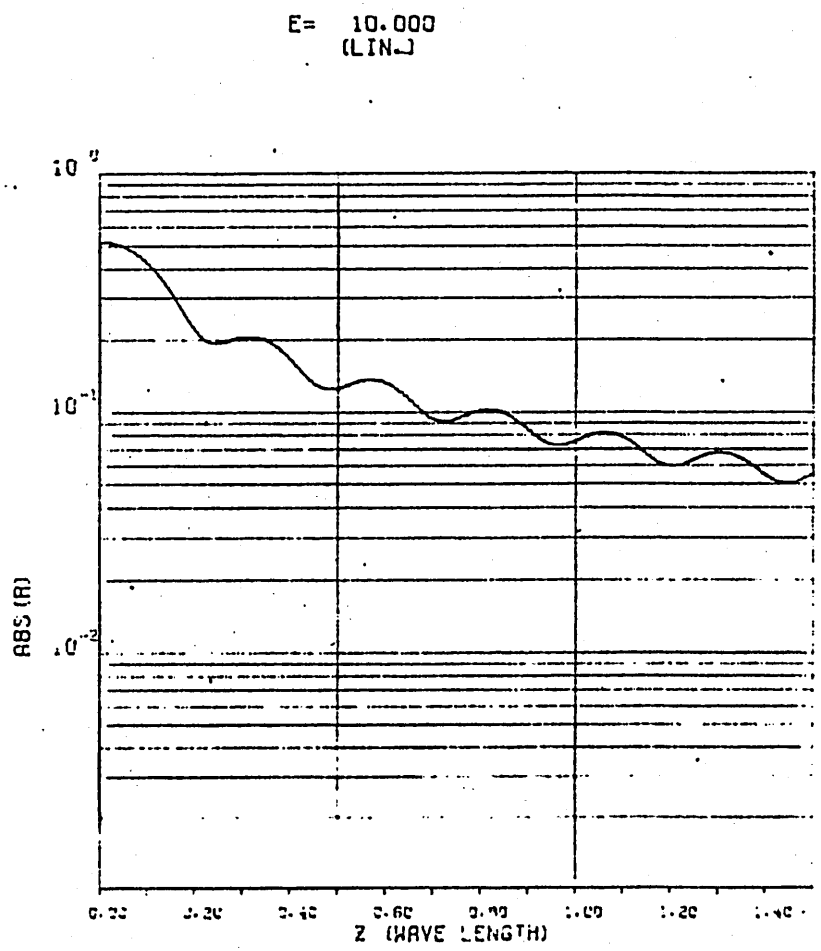


Fig. 9

輻射科学研究会資料

円柱による二次元ガウスビーム波の散乱について

小嶋　敏孝
柳内　洋一
（大阪大学・工学部）

1977年　5月　13日

1. まえがき

物体による電磁波の散乱は、電磁気学の基本的な問題のひとつであり、また、工学的にも重要な応用面をもつものである。近年、特にマイクロ波、ミリ波、及び光波などの短波長領域の電磁波を利用する伝送系に関する研究が活発になるとともに、ビーム波の物体による回折、反射、あるいは散乱等について種々の解析が行なわれてきた。ビーム波の物体による散乱問題は、既に、いくつか報告されている。(1)〜(11)

文献(1),(2),(10),(11)は3次元問題であり、文献(3)〜(9)は2次元問題である。また、文献(8),(9)は光線光学の立場で、その他は波動理論の立場で、問題を解析している。さらに、文献(3)〜(9)はビームのウエストにおける形を入射波の形として考えており、かなり粗い近似を用いている。また、入射ビーム波の中心軸と散乱体の中心(軸)とのずれを考慮したものは、文献(2),(4)〜(6)のみである。3次元問題で、ビームがこのような軸ずれをもたない場合の解析は、文献(10),(11)で示しているようなベクトル固有モードによる展開方法で、ほぼ完全に行なわれていると思われる。特に、軸ずれがある場合の有効な解析結果は、2次元、3次元問題とも報告はされていないようである。また2次元問題に限れば、ビーム軸と円柱軸とのずれだけでなく、ビームウエストと円柱軸とのずれを考慮した解析はない。文献(4)〜(6)で示された解析はビーム軸と円柱軸とのずれを扱っているが、入射波をビームウエストで近似しているので、散乱体の大きさとビーム幅が同程度になったり、軸ずれの量が大きくなると、かなり誤差があるものと思われる。

そこで、本稿では文献(4)の方法を用いて、ビーム軸と円柱軸、及びビームウエストと円柱軸の両方の軸ずれがある入射ビーム波の円柱による散乱問題を扱う。このような形の入射波は波動方程式の近似解として与えられる、いわゆるビーム波表示式になる。

まず，与えられた入射波をフーリエ級数展開し，その展開係数を数値積分法によって数値的に求める。そして，この展開係数を用いて，入射ビーム波がE波，及びH波の場合における完全導体円柱，及び誘電体円柱による散乱パターンの計算例を示し，軸ずれの量，入射波及び円柱の種類によって，散乱パターンがどのように変化するかを調べる。

2. 入射ガウスビーム波の円柱座標における表示

座標系を図1に示す。考察する問題は z 方向に一様な 2次元問題であり，電磁界の時間変化は $e^{j\omega t}$ で記述されている。いま，ビーム軸と距離 d ずれ，さらにビームウエストから y_0 離れたところに，散乱体となる半径 a の無限長円柱が存在しているとする。

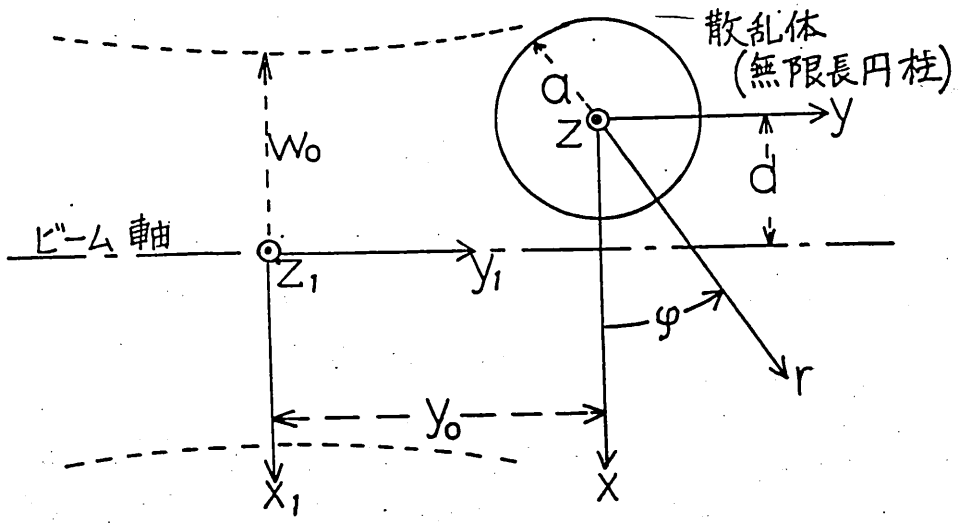


Fig. 1　座標系の構成

入射波となるガウスビーム波として，2次元の波動方程式の近似解から，円柱軸に平行な電界成分のみを持つE波，及び円柱軸に平行な磁界成分のみを持つH波の2つの場合を考える。図1の直角座標系(x_1, y_1, z_1)で，入射ビーム波を記述すると

$$\{E^i_{z_1} \text{ or } H^i_{z_1}\} = \sqrt{\frac{W_0}{W}}\, e^{-\frac{1}{2}px_1^2} e^{j\frac{1}{2}\arg p - jk_0 y_0 + j\omega t} \qquad (2.1)$$

となる。ここで，$k_0\ (=\omega/c)$は自由空間中の平面波の波数，W_0はウエストでのスポットサイズである。さらに，p, W, Rは次式で与えられる。

$$p = \frac{2}{W^2} + j\frac{k_0}{R}$$

$$W = W_0\sqrt{1+\left(\frac{2y_1}{k_0 W_0^2}\right)^2}$$

$$R = y_1\left\{1+\left(\frac{k_0 W_0^2}{2y_1}\right)^2\right\} \qquad (2.2)$$

次に，ビーム軸と円柱軸とのずれ，ウエストと円柱軸とのずれを考慮し，座標変換によって，円柱座標系(r, φ, z)でビーム波を表示する。以下$e^{j\omega t}$は省略する。

$$\{E^i_z \text{ or } H^i_z\} = \sqrt{\frac{W_0}{W}}\, e^{-I_r(\rho\cos\varphi-\delta)^2} e^{j\{\frac{1}{2}\theta - I_i(\rho\cos\varphi-\delta)^2-(\rho\sin\varphi+\nu)\}} \qquad (2.3)$$

なお，ここで，

$$x_1 = r\cos\varphi - d$$

$$y_1 = r\sin\varphi + y_0$$

$$\alpha = \frac{1}{k_0 W_0} \quad \rho = k_0 r \quad \delta = k_0 d \quad \gamma = k_0 y_0$$

$$I_i = \frac{2\alpha^2(\alpha^2 \rho \sin\varphi + \alpha^2 \gamma)}{1 + 4(\alpha^2 \rho \sin\varphi + \alpha^2 \gamma)^2}$$

$$I_r = \frac{\alpha^2}{1 + 4(\alpha^2 \rho \sin\varphi + \alpha^2 \gamma)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\{2(\alpha^2 \rho \sin\varphi + \alpha^2 \gamma)\} \qquad (2.4)$$

である。また，境界条件に必要な φ 方向成分は Maxwell の式より次式で与えられる。

$$H_\varphi^i = -jY_0\left(\frac{\partial}{\partial\rho} E_z^i\right)$$

$$E_\varphi^i = jZ_0\left(\frac{\partial}{\partial\rho} H_z^i\right) \qquad (2.5)$$

ただし $Y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ ， $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ である。

3. 入射ビーム波の展開

前章で求めた $E_z^i, H_\varphi^i, H_z^i, E_\varphi^i$ は，φ に関して一価連続で，周期 2π の周期関数であるから，区間 $[0, 2\pi]$ で，φ に関する Fourier 級数展開が可能である。すなわち，E_z^i 等は次式のごとく表現できる。

〈E波〉 $$E_z^i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^e(\rho|\alpha, \delta, \gamma)\, e^{jn\varphi}$$

$$H_\varphi^i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^e(\rho|\alpha, \delta, \gamma)\, e^{jn\varphi} \qquad (3.1)$$

〈H波〉 $H_z^i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^h(\rho|\alpha,\delta,\gamma)\, e^{jn\varphi}$

$$E_\varphi^i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^h(\rho|\alpha,\delta,\gamma)\, e^{jn\varphi} \tag{3.2}$$

$A_n^e(\rho|\alpha,\delta,\gamma)$ 等は第n項目の係数であり，α,δ,γをパラメータとするρの関数である。また添字の e，h はそれぞれE波，H波の係数であることを表わしている。

展開係数は次式によって与えられる。

$$\begin{Bmatrix} A_n^e(\rho|\alpha,\delta,\gamma) \\ A_n^h(\rho|\alpha,\delta,\gamma) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} E_z^i \\ H_z^i \end{Bmatrix} e^{-jn\varphi}\, d\varphi \tag{3.3}$$

$$\begin{Bmatrix} B_n^e(\rho|\alpha,\delta,\gamma) \\ B_n^h(\rho|\alpha,\delta,\gamma) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\begin{Bmatrix} -jY_0 \\ jZ_0 \end{Bmatrix}\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}E_z^i \\ \frac{\partial}{\partial\rho}H_z^i \end{Bmatrix} e^{-jn\varphi}\, d\varphi \tag{3.4}$$

従って，

$$\begin{Bmatrix} A_n^e(\rho|\alpha,\delta,\gamma) \\ A_n^h(\rho|\alpha,\delta,\gamma) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\left\{f_r(\varphi)+jf_i(\varphi)\right\} d\varphi \tag{3.5}$$

$$\begin{Bmatrix} b_n^e(\rho|\alpha,\delta,\gamma) \\ b_n^h(\rho|\alpha,\delta,\gamma) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\Big[\left\{u(\varphi)f_r(\varphi)-v(\varphi)f_i(\varphi)\right\} + j\left\{v(\varphi)f_r(\varphi)+u(\varphi)f_i(\varphi)\right\}\Big]\, d\varphi \tag{3.6}$$

ただし，$b_n^e(\rho|\alpha,\delta,\gamma)$，$b_n^h(\rho|\alpha,\delta,\gamma)$ は

$$B_n^e(\rho|\alpha,\delta,\gamma) = -jY_0\, b_n^e(\rho|\alpha,\delta,\gamma)$$

$$B_n^h(\rho|\alpha,\delta,\gamma) = jZ_0\, b_n^h(\rho|\alpha,\delta,\gamma) \tag{3.7}$$

また.

$$F(\varphi)=\sqrt{\frac{W_0}{W}}\,e^{-I_r(\rho\cos\varphi-\delta)^2}$$

$$f_r(\varphi)=\cos\Phi(\varphi)$$

$$f_i(\varphi)=\sin\Phi(\varphi)$$

$$\Phi(\varphi)=\frac{1}{2}\theta-I_i(\rho\cos\varphi-\delta)^2-(\rho\sin\varphi+\nu)-n\varphi$$

$$u(\varphi)=I_r(\rho\cos\varphi-\delta)\left\{(\rho\cos\varphi-\delta)-2\cos\varphi+8I_r(\rho\sin\varphi+\nu)\sin\varphi\right\}$$

$$\begin{aligned}v(\varphi)=&-2I_r^2(\rho\cos\varphi-\delta)^2\left\{1-4\alpha^2(\rho\sin\varphi+\nu)^2\right\}\sin\varphi\\&+I_r\left\{\sin\varphi-4\alpha^2(\rho\cos\varphi-\delta)(\rho\sin\varphi+\nu)\cos\varphi\right\}-\sin\varphi\end{aligned}$$

(3.8)

である。

4. 散乱電磁界及び散乱電力パターン

円柱座標系での散乱波の一般解は、次式で与えられる.

$$\begin{Bmatrix}E_z^s\\H_z^s\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}C_n\\D_n\end{Bmatrix}H_n^{(2)}(\rho)\,e^{jn\varphi}\qquad(4.1)$$

$$\begin{Bmatrix}H_\varphi^s\\E_\varphi^s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-jY_0\\jZ_0\end{Bmatrix}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}C_n\\D_n\end{Bmatrix}H_n^{(2)\prime}(\rho)\,e^{jn\varphi}\qquad(4.2)$$

$H_n^{(2)}(\rho)$は第2種Hankel関数, $H_n^{(2)\prime}(\rho)$は$H_n^{(2)}(\rho)$をρについて

微分したもの，C_n，D_nは任意定数である。

遠方散乱界は上式で$\rho \to \infty$とすることによって，

$$\langle E波 \rangle \quad E_z^s \simeq \sqrt{\frac{2j}{\pi\rho}}\, e^{-j\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (j)^n e^{jn\varphi} \tag{4.3}$$

$$\langle H波 \rangle \quad H_z^s \simeq \sqrt{\frac{2j}{\pi\rho}}\, e^{-j\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n (j)^n e^{jn\varphi} \tag{4.4}$$

と記述できる。

誘電体円柱の場合には，その比誘電率をε_rとし，比透磁率を$\mu_r=1$とすれば，内部電磁界は次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} E_z^d \\ H_z^d \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} F_n \\ G_n \end{Bmatrix} J_n(\sqrt{\varepsilon_r}\,\rho)\, e^{jn\varphi} \tag{4.5}$$

$$\begin{Bmatrix} H_\varphi^d \\ E_\varphi^d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -j\gamma_0\sqrt{\varepsilon_r} \\ j\dfrac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \end{Bmatrix} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} F_n \\ G_n \end{Bmatrix} J_n'(\sqrt{\varepsilon_r}\,\rho)\, e^{jn\varphi} \tag{4.6}$$

$J_n'(\sqrt{\varepsilon_r}\,\rho)$は$J_n(\sqrt{\varepsilon_r}\,\rho)$を$\sqrt{\varepsilon_r}\,\rho$について微分したもので，$F_n$，$G_n$は任意定数である。

半径aなる円柱が完全導体，及び誘電体であるときの散乱波の係数C_n（E波入射時），D_n（H波入射時）は$\rho=k_0a$での境界条件から求められる。

（完全導体円柱）

$$C_n = -\frac{A_n^e(k_0a\,|\,\alpha,\delta,\gamma)}{H_n^{(2)}(k_0a)} \tag{4.7}$$

$$D_n = -\frac{b_n^e(k_0a\,|\,\alpha,\delta,\gamma)}{H_n^{(2)\prime}(k_0a)} \tag{4.8}$$

（誘電体円柱）

$$C_n = \frac{-\sqrt{\varepsilon_r} A_n^e(k_0a|\alpha,\delta,\gamma) J_n'(\sqrt{\varepsilon_r}k_0a) + J_n(\sqrt{\varepsilon_r}k_0a)\, b_n^e(k_0a|\alpha,\delta,\gamma)}{\sqrt{\varepsilon_r} H_n^{(2)}(k_0a) J_n'(\sqrt{\varepsilon_r}k_0a) - H_n^{(2)\prime}(k_0a) J_n(\sqrt{\varepsilon_r}k_0a)} \tag{4.9}$$

$$D_n = \frac{-A_n^h(k_0a|\alpha,\delta,\gamma) J_n'(\sqrt{\varepsilon_r}k_0a) + \sqrt{\varepsilon_r} J_n(\sqrt{\varepsilon_r}k_0a)\, b_n^h(k_0a|\alpha,\delta,\gamma)}{H_n^{(2)}(k_0a) J_n'(\sqrt{\varepsilon_r}k_0a) - \sqrt{\varepsilon_r} H_n^{(2)\prime}(k_0a) J_n(\sqrt{\varepsilon_r}k_0a)} \tag{4.10}$$

以上の各係数を用いて，電界及び磁界の散乱パターンを求めることができる。また，散乱体から十分遠方の任意の距離で，円柱座標系（r, φ, z）の r の正方向へ流れる単位面積当りの散乱電力の角度分布は，E波ならびにH波入射時に対して次式で与えられる。

（E波入射時）　$$P_s^e(\varphi) = \frac{|E_z^s|^2}{Z_0} \tag{4.11}$$

（H波入射時）　$$P_s^h(\varphi) = \frac{|H_z^s|^2}{Y_0} \tag{4.12}$$

さらに，$P_s^e(\varphi)$，$P_s^h(\varphi)$ をそれぞれ $2j/\pi Z_0 P$，及び $2j/\pi Y_0 P$ で規格化したものを $T_s^e(\varphi)$，$T_s^h(\varphi)$ とすると，

（E波入射時）　$$T_s^e(\varphi) = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (j)^n e^{jn\varphi}\right|^2 \tag{4.13}$$

（H波入射時）　$$T_s^h(\varphi) = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n (j)^n e^{jn\varphi}\right|^2 \tag{4.14}$$

となる。$T_s^e(\varphi)$，$T_s^h(\varphi)$ は，それぞれE波及びH波入射時の散乱電力パターンを与える。

5. 数値計算と検討

式(3.3)～(3.6)おけるフーリエ級数の展開係数を、解析的な形で求めるのは困難である。そこで，ここでは数値積分によって求めることにする。数値積分にはSimpsonの公式を用いて，φの積分区間をnの値に応じて最大72(|n|+1)の分割数まで取れるようにし，分割数$2m$のときの積分値と，分割数mのときの積分値の差の絶対値が10^{-6}以下となるまで分割数を増加させて計算を実行した。なお，この展開係数を用いて計算した入射ビーム波の数値は、有効桁5桁まで信頼できることが，計算結果より確認できている。

つぎに，E波及びH波の入射ビーム波が，完全導体及び誘電体円柱によって散乱された場合の散乱電力パターンを式(4.13)(4.14)より求める。図には，0°～357.5°における2.5°間隔のφに対する$T_s^e(\varphi)$，$T_s^h(\varphi)$を対数表示した。また，式(4.13)及び(4.14)のnに関する級数和は，式(5.1)のような部分和に関して，式(5.2)のような条件が満たされるまでとった。

$$S_N = \left| \sum_{n=-N}^{+N} \begin{Bmatrix} C_n \\ D_n \end{Bmatrix} (j)^n e^{jn\varphi} \right| \tag{5.1}$$

$$\left| \frac{S_N - S_{N-1}}{S_N} \right| \leqq 10^{-6} \tag{5.2}$$

ビームウエストが円柱軸と同じ平面に存在し，ビーム軸と円柱軸がdなるずれをもっているときの散乱パターンを図2～4に示した。図2，4は円柱が完全導体であり，図3は誘電体($\varepsilon=4.0\varepsilon_0$)の場合である。また，図2(a)，3(a)，4(a)はE波入射時，図2(b)，3(b)，4(b)はH波入射時の散乱パターンである。図2，3は円柱の径が同じであり，W_0は図2～4

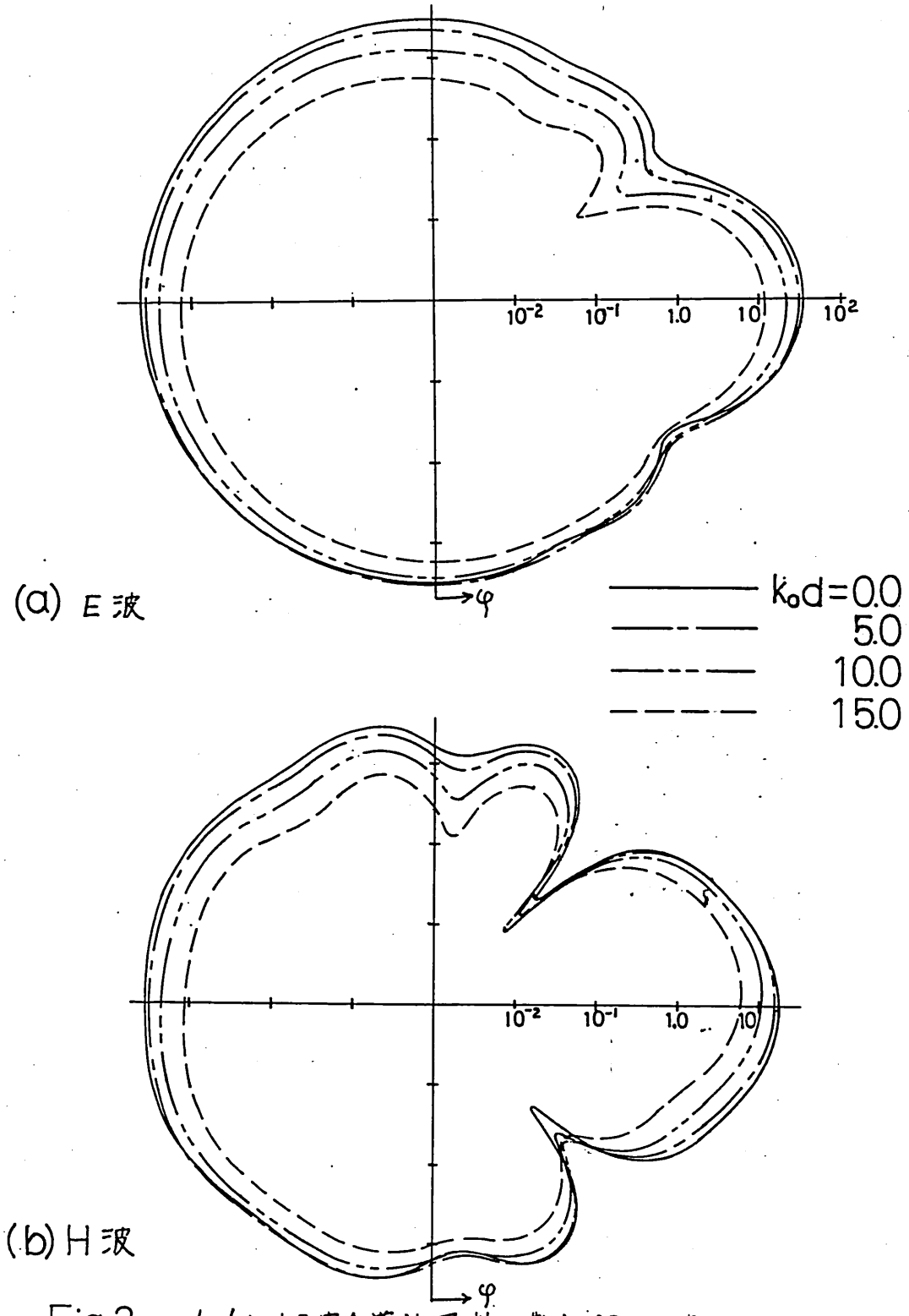
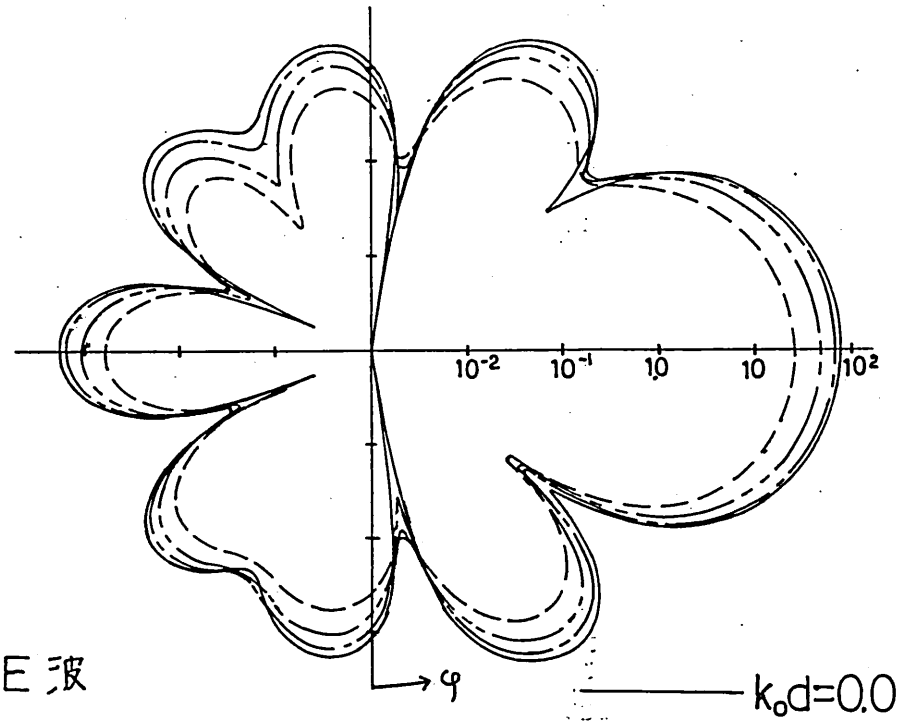
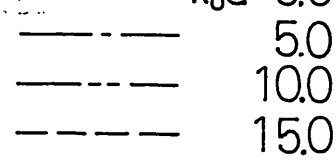
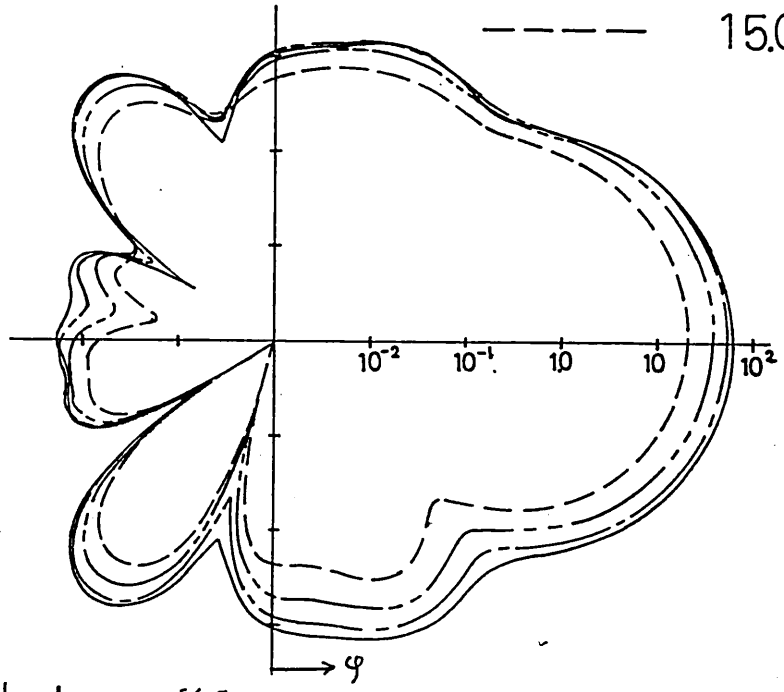


Fig.2 k_0d による完全導体円柱の散乱パターンの変化
($k_0a=5.0$ $w_0=4a$ $k_0y_0=0$)



(a) E 波





(b) H 波

Fig. 3 k_0d による誘電体円柱の散乱パターンの変化
($k_0a=5.0$ $w_0=4a$ $k_0y_0=0$ $\varepsilon_r=4.0$)

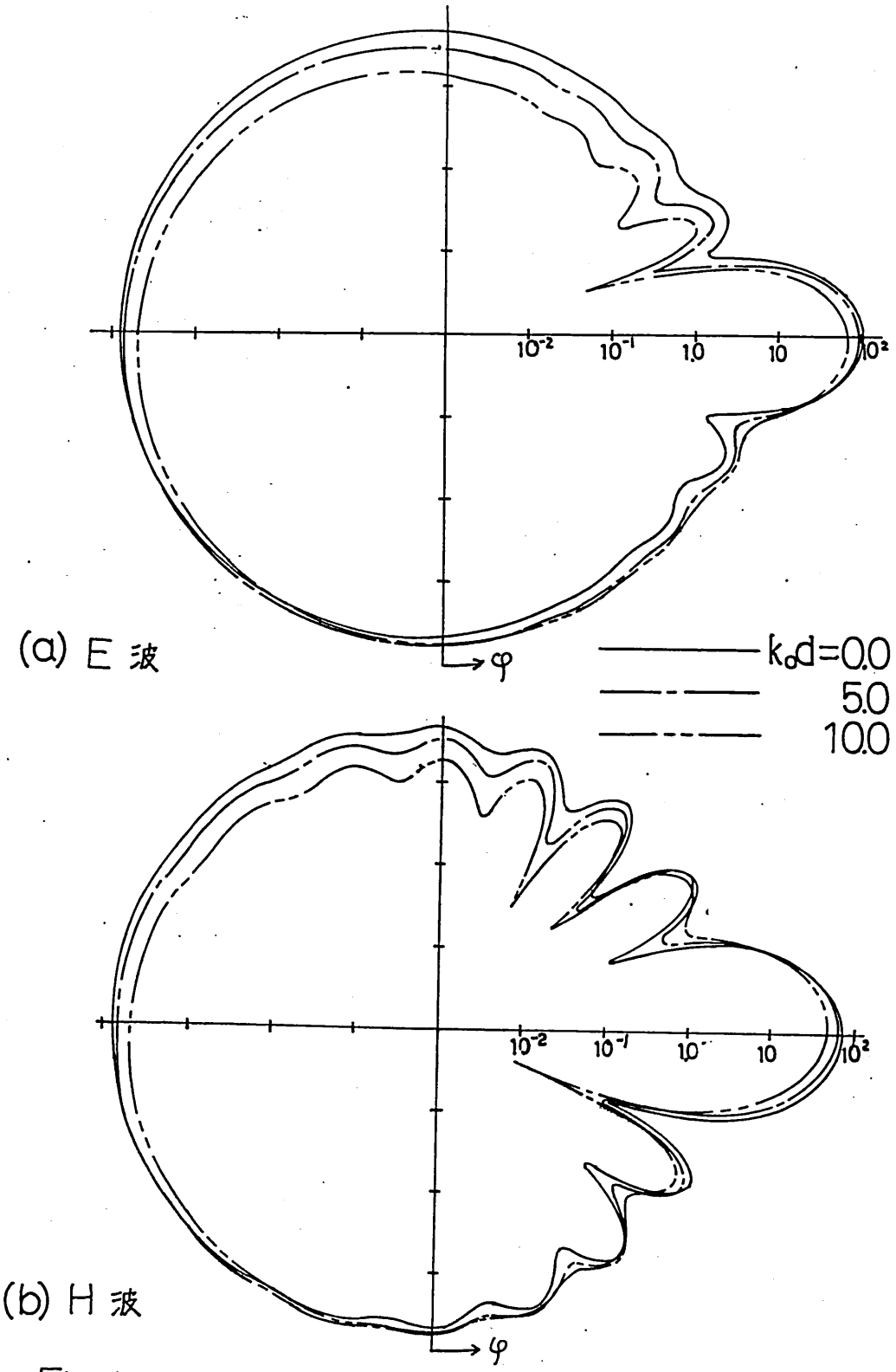


Fig.4 k_0dによる完全導体円柱の散乱パターンの変化
(k_0a=10.0 w_0=2a k_0y_0=0)

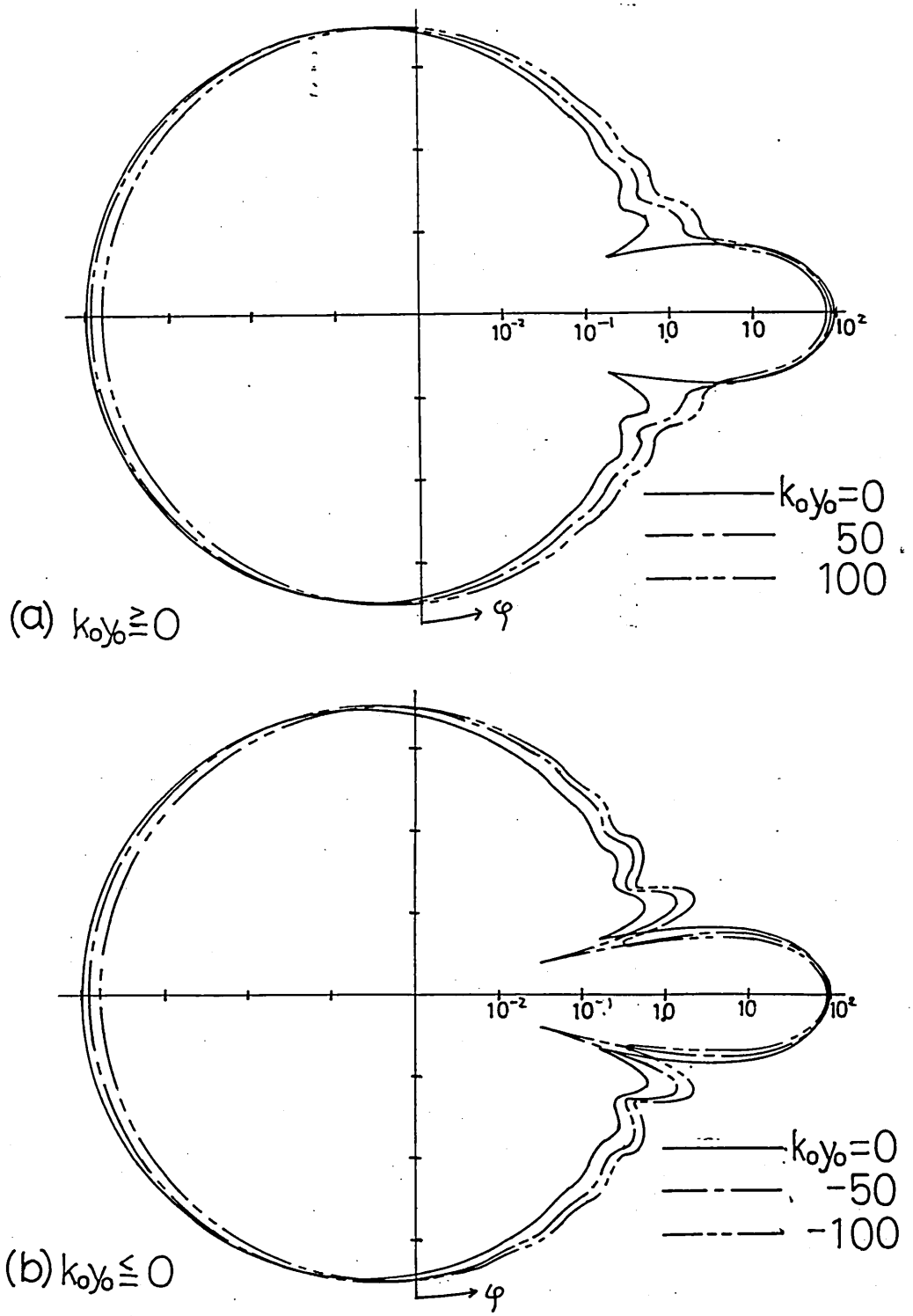
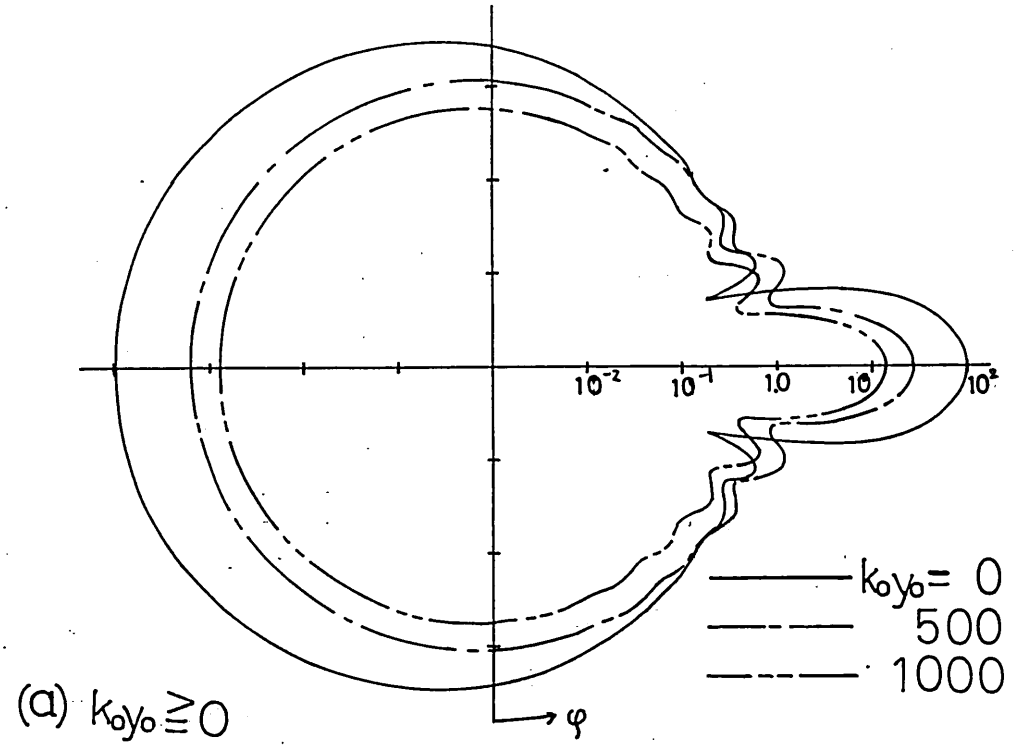
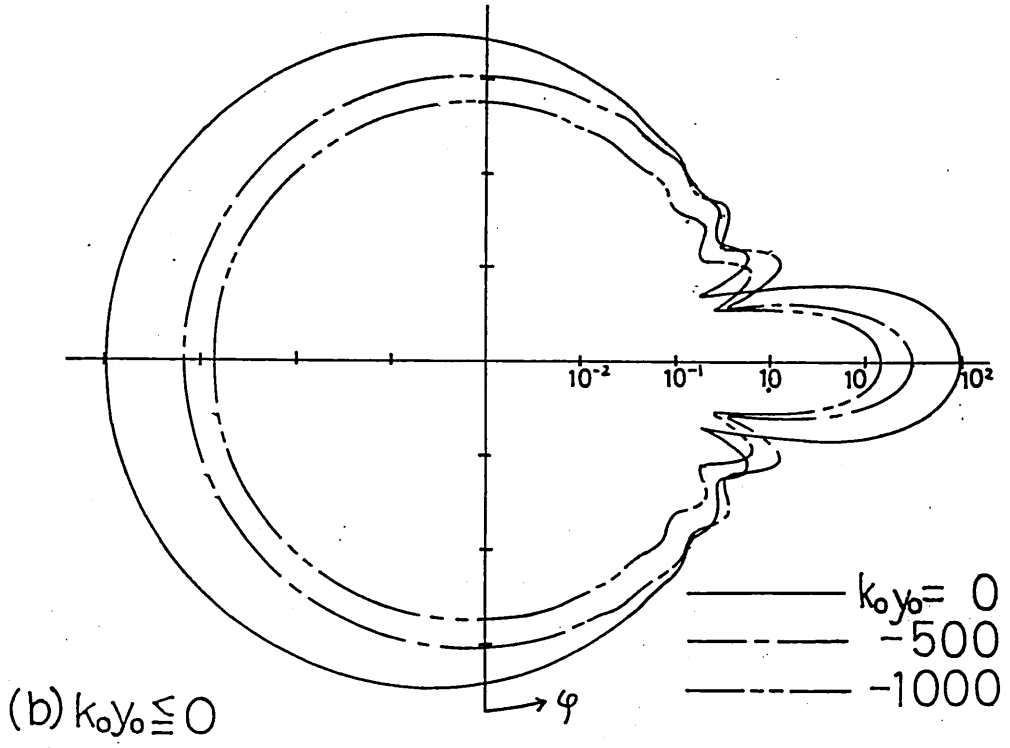


Fig.5 k_0y_0による完全導体円柱の散乱パターンの変化
($k_0a=12.5$ $w_0=a$ $k_0d=0.0$)



(a) $k_0y_0 \geqq 0$



(b) $k_0y_0 \leqq 0$

Fig.6 k_0y_0による完全導体円柱の散乱パターンの変化
($k_0a=12.5$ $w_0=a$ $k_0d=0.0$)

を通して同じである。

まず，全体的に言えることは，軸ずれが大きくなるに従って散乱電力全体の強度が小さくなっている。これは円柱を照射するビーム波のエネルギーが軸ずれによって減少するからである。

つぎに，軸ずれによって散乱パターンが y-z 平面に関して非対称となっていることが図2〜4よりわかる。特に，図2，4において，$\varphi=0°$付近の散乱電力がある大きさの軸ずれのときに，軸ずれのないときよりも強くなっている現象がみられる。幾何光学的な立場から考察すると，振幅の大きな成分を含んでいるビーム軸近傍の波が，円柱表面において$\varphi=0°$方向付近の散乱に大きく寄与する部分に入射し，そこで完全反射されるためであると考えられる。従って，円柱の径と軸ずれの大きさの関係によって，このような現象の様態は変化しなければならないが，図4から容易に確認できる。つまり，図2と比較すると，軸ずれが$k_0d=10.0$のとき図2($k_0a=5.0$)の場合には，軸ずれが過大であるため，このような現象は認められないが，図4($k_0a=10.0$)の場合には，上記の条件を満たすような軸ずれになっているので，$\varphi=0°$方向の散乱が強くなっている。

ところが，誘電体円柱の場合には，このような傾向は認められない。これは入射波が，完全導体円柱の場合のように完全に反射されずに，一部円柱内部に進入することによるものであると考えられる。

入射波の種類，または散乱体の種類，大きさによって，散乱パターンが異なることが図より確められる。入射波の種類(E波or H波)による散乱パターンの相異は，散乱体が完全導体円柱である場合に特徴的に現われている。(図2，4)つまり，この4つの図の散乱パターンにおいて，前方側($50°\leq\varphi\leq130°$)への散乱電力強度の軸ずれによる変化について，次のことがいえる。軸ずれによって，この付近の散乱電力は非対称とな

り弱くなるが，E波入射の場合には，$50° \leq \varphi \leq 90°$の散乱電力は$90° \leq \varphi \leq 130°$の散乱電力より強くなって非対称となっている。言いかえると，$50° \leq \varphi \leq 90°$の散乱電力の軸ずれによる減少がすくない。一方，H波入射の場合には逆に，$90° \leq \varphi \leq 130°$の散乱電力の減少がすくない。$90° \leq \varphi \leq 130°$は軸ずれと反対の部分で，影の部分に相当するので，H波とE波の回り込みの量の相異，すなわちH波の方が回り込みの量が多いことによって，このような現象が起こるものと考えられる。

軸ずれのない状態で，ビームウエストと円柱軸との位置関係によって散乱パターンが，どのように変わるかを図5，6に示した。入射波はすべてE波で，円柱は完全導体の場合を示した。図5は，ビームウエストが円柱軸から比較的近い距離（$|k_0 y_0| = 50, 100$）にある場合，図6は比較的遠い距離（$|k_0 y_0| = 500, 1000$）にある場合を示している。また，図5(a) 6(a)は，ビームウエストが円柱の手前（ビームの進行方向に向かって）ある場合で，図5(b) 6(b)は向こう側にある場合を示している。

これらの図より，ビームウエストが円柱に近い所にあると，ビームウエストが円柱の手前か，それとも向こう側かによって散乱パターンは異なる。さらに，前方側への散乱パターンに注目すると，ビームウエストと円柱とが離れるに従って，散乱電力の強度が強くなる角度がかなり広く存在する。（図5）しかし，ウエストが円柱から十分に離れていると，ウエストが円柱の手前でも向こう側でも，散乱パターンはほとんど同じである。また，円柱からの距離がさらに大きくなっても，散乱パターンはほぼ相似形で小さくなるだけである。（図6）

以上のことから，円柱軸とビームウエストとの距離が$|k_0 y_0| \leq 100$程度では，円柱近傍における入射波は，ビーム波としての性質，たとえば，位相面の湾曲，不均一な振幅分布をもつ波であるから，散乱パターンに上記のような影響を与える。しかし，ウエ

ストと円柱が大きく離れると，円柱近傍における入射波は位相も振幅も均一な平面波に近い波となるので，散乱パターンが相似形をなすものと考えられる。

6. むすび

本稿では，ビームウエストでの値を入射ビーム波とする近似を用いないで，波動方程式の近似解として与えられるビーム波の表示式を入射波とし，解析を行なった。そしてさらに，E波及びH波入射時の完全導体円柱，及び誘電体円柱による散乱パターンの数値例を示し，各パラメータ，軸ずれ量の変化，あるいは入射波及び散乱体の種類などによって，散乱パターンがどのように振舞うかについて調べた。

謝辞　終りに，日頃ごべんたついただく板倉清保教授，熊谷信昭教授，中西義郎教授，ならびにご討論いただく通信工学教室電磁界理論研究グループの方々に感謝する。

参考文献

(1) Morita, Tanaka, Yamasaki, Nakanishi ; "Scattering of a Beam Wave by a Spherical Object", I.E.E.E. Trans AP-16, 6

(2) 森田長吉 "球導体による電磁波の散乱ー積分方程式" 電子通信学会論文誌 1970-3 Vol. 53-B No. 3

(3) Nicolaos. G. Alexopoulos and Pyong K. Park. "Scattering of waves with Normal Amplitude Distribution from Cylinders" I.E.E.E. Trans. AP-20, 2,

(4) 松本隆男, 小嶋敏孝, 板倉清保 "円柱による2次元ガウスビーム波の散乱", 輻射科学研究会資料 ('76-2)

(5) 小嶋敏孝 "円柱による2次元ガウスビーム波の散乱" 電磁界理論・プラズマ合同研究会資料 EMT-75-33 EP75-33

(6) 小嶋敏孝 "無限長完全導体円柱によるガウスビーム波の散乱ー成田・阿座上両氏の論文に対する討論" 信学会論文誌 Trans IECE '76/7 Vol 59-B

(7) 成田, 阿座上; "無限長完全導体円柱によるガウスビーム波の散乱" 信学会論文誌 B (昭50-11)

(8) S. Choudhary and L. B. Felsen, "Analysis of gaussian beam propagation and diffraction by inhomogeneous wave tracking" Proc. IEEE. vol. 62, P1530

(9) W. Wong and G.A. Deschamps, "Application of complex ray tracking to scattering problems" Proc. IEEE. vol. 62, P154

(10). Wen-Chung Tsai and Ronald. J. Pogorzelski "Eigenfunction solution of the scattering of beam radiation fields by spherical objects." Journal of the Optical Society of America. Vol65, No12 P1457

(11) R. J. Pogorzelski and E. Lun "On the Expansion of Cylindrical vector waves in terms Spherical vector waves" Radio Science. Vol.11 No.10 p753-761

(12) H. Kogelnik and T. Li "Laser Beams and Resonators" Proc. IEEE. Vol54 No10.

(13) 末松安晴, 吹抜洋司 "理想化されたガス光導波系の解析" 信会雑誌 第48巻10号

(14). J. A. STRATTON "ELECTROMAGNETIC THEORY"

輻射科学研究会資料

多モード光ファイバにおける最適屈折率分布

里村　裕・桐本哲郎
松原正則・熊谷信昭

（大阪大学 工学部）

1977年　5月13日

〔1〕まえがき

光通信における大容量長距離伝送路として，励振効率および接続の容易さの点からコア径の大きい多モード光ファイバが有用であると考えられている．しかしながら多モード光ファイバにおいては，導波モード間の群速度の差異によるモード分散のためパルス幅の拡がりが生じ，その結果，伝送帯域幅が制限される．したがって，多モード光ファイバにおけるパルス拡がり特性を改善するため，モード分散をできるだけ少なくすることが重要な課題となっている．これまで，多モード光ファイバにおいて各種のパルス拡がりを改善する方法が検討されている．例えば，コアの屈折率分布の傾きを2乗にする[1]，あるいはドーナツ型にする[2]，あるいは2乗分布に4乗項を付加する[3],[4]，あるいはコアとクラッドとの境界に所望の屈折率の不連続をつける[5],[6],[7]，さらにクラッドに損失を付与することにより高次モードをとりのぞく[8],[9]など，モード分散を押えるための各種の解析例が報告されている．また最近では，モード分散の他に材料分散をも考慮することにより屈折率分布の傾きが2乗からずれることを指摘した報告[10],[11]も見られる．

一方，グレーデッド型光ファイバの導波モードの解析手法として，これまでWKB法のような近似解法[1]のほかに，変分法による方法[12],[13]，屈折率分布を多層ステップで近似する方法[14],[15]，電磁界を級数展開で求める方法[16],[17]などがあり，さらに縮退に近いモード間の伝搬定数差を厳密に求めるため屈折率勾配の影響を考慮した摂動法による解析[18]も検討されている．

本資料では，パルス拡がりの低減を目的として，一般的な屈折率分布をもったファイバについて考察している．まず，コアの屈折率分布を一般の多項式で表わし，界分布

をべき級数展開によって求める．次に，数値解析例として屈折率分布が任意の２次式で表わされた場合について，モード分散のチャートを求め，最適屈折率分布を明らかにする．本資料で検討した屈折率分布の形状は，ステップ型，三角型，パラボリック型，ドーナツ型，およびそれらの谷付を含めて２次式で表わされるあらゆる屈折率分布を包含している．また，これまである規格化周波数について，または非常に少ない導波モード数においてモード分散が評価されていたが，本資料では規格化周波数が10から15におけるモード分散の平均の値をもとにして最適屈折率分布を検討している．このとき，導波モード数は50から110である．

[2] 多モード光ファイバの解析

スカラー近似のもとで，光ファイバにおける界Φは次式のスカラー波動方程式で与えられる．

$$\nabla^2 \Phi + k^2 n^2 \Phi = 0 \qquad (1)$$

ここで$k = 2\pi/\lambda$は自由空間中における波数であり，また，nは屈折率を表わす．さて，円柱座標系(r, θ, z)を採用し，屈折率nはθおよびzには依存しないとすれば，界は変数分離でき，次式のように表わすことができる．

$$\Phi(r, \theta, z) = \phi(r) \cdot \begin{Bmatrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{Bmatrix} \cdot \exp(-j\beta z) \qquad (2)$$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} + \left\{k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2}\right\}\phi = 0 \qquad (3)$$

ここで，βはz方向の伝搬定数であり，ℓは周方向のモード番号で零または正の整数である．

いま，コア内での屈折率分布が次式のようにべき級数で与えられているものとする．

$$n^2(r) = \sum_{j=0}^{J} b_j r^j \quad (0 \leqq r \leqq R) \tag{4}$$

ここでb_j ($j = 0, 1, 2, \cdots J$) は展開係数であり，既知の定数である．またRはコアの半径である．このとき，区間[0, R]における式(3)の解は，微分方程式のべき級数展開による解法を用いて以下のようにして解くことができる．いま，$\phi(r)$をrのべき級数展開の形として次式のように表わす．

$$\phi(r) = A \cdot r^{\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^i \tag{5}$$

ここで，λおよびa_i ($i = 0, 1, 2 \cdots$) は式(5)が微分方程式(3)の解となるように定められるべき定数である．いま，$a_0 = 1$とし，その代わりに積分定数Aを導入しても一般性は失なわれない．式(4)および式(5)を式(3)に代入し，rの昇べき順にならべ，その各べきの係数を零とおいて次式を得る．

$$(\lambda^2 - \ell^2) a_0 = 0 \quad ,$$

$$\{(\lambda+1)^2 - \ell^2\} a_1 = 0 \quad ,$$

$$\{(\lambda+i)^2 - \ell^2\} a_i = \beta^2 a_{i-2} - k^2 \sum_{j=0}^{\min(J, i-2)} a_{i-j-2} b_j \quad (i \geqq 2) \tag{6}$$

式(6)の最初の式より，$\lambda=\ell$，および$\lambda=-\ell$が得られる．いま，$\lambda=\ell$とおいて式(6)の残りの式よりa_iが次のように定まる．

$$\lambda=\ell\ ,$$

$$a_0=1\ ,$$

$$a_1=0\ ,$$

$$a_i=\frac{1}{i(i+2\ell)}\left[\beta^2 a_{i-2}-k^2\sum_{j=0}^{\min(J,i-2)} a_{i-j-2}\,b_j\right] \quad (7)$$

$$(i\geq 2)$$

このようにして，2階の微分方程式(3)の1つの解が求まったことになる．他のもう1つの解は，ℓが零または正の整数である場合には式(5)の形で与えられず，別の方法で計算せねばならないのであるが，それらは$r=0$で有限の値をもたないため，ここでは考察しないことにする．以上より，区間［0，R］すなわちコア内における界は，式(7)に示した指数λおよび展開係数a_iからなるべき級数で表わされることがわかる．

一方，$r>R$なるクラッドの領域においては，屈折率は

$$n^2(r)=n_2^2 \qquad (R<r<\infty) \qquad (8)$$

とする．ここでn_2は定数である．式(8)を式(3)に代入し，$r=\infty$においてψの満足すべき条件を考慮して，次式を得る．

$$\phi(r) = B \cdot K_\ell(\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, r) \qquad (9)$$

ここで，Bは積分定数，K_ℓはℓ次の第2種変形ベッセル関数である．

いま，式(5)および式(9)に境界$r=R$においてϕおよび$d\phi/dr$が連続であるという境界条件を用いると，次の特性方程式が得られる．

$$K_\ell(uR) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\ell+i) a_i R^i$$

$$= uR \cdot K_\ell'(uR) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i R^i \quad (\ell = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (10)$$

ただし，$u = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2} > 0$．

ここで′はrについての微分を表わしている．式(10)の大きい方から数えて第$(m+1)$番目の根βは(ℓ, m)モードの伝搬定数$\beta_{\ell m}$を与える．ここでmは零または正の整数である．式(10)を満足する根，すなわち固有値βは通常有限個存在し，したがって有限個の導波モードが存在する．多モード光ファイバではそれらの群遅延$d\beta_{\ell m}/dk$がそれぞれ異なるために，群遅延に起因するパルス拡がりが生じる．このパルス拡がりを評価する簡単な目安として，全導波モードに対する群遅延$d\beta_{\ell m}/dk$の標準偏差Sを導入する[7][9]．

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\ell, m} \left\{ \frac{d\beta_{\ell m}}{dk} - \left(\frac{1}{N} \sum_{\ell', m'} \frac{d\beta_{\ell' m'}}{dk} \right) \right\}^2} \qquad (11)$$

ここでΣはすべての導波モードについての和を表わし；また，Nは導波モードの総数である．このSは群遅延のばら

つきの程度を示す量であり，群遅延に起因するパルス拡がりの模様を実際的に評価するのに適した量である．たとえば，入射パルスがインパルスであり，出力パルスの各導波モードの群遅延がガウス分布を示すような場合は，出力パルスの 1/e 幅 $\Delta\tau$ はおよそ，

$$\Delta\tau \simeq 3.3 \frac{L}{c} S \qquad (12)$$

と表現できる．ここでLは線路長，cは光速度である．

[3] モード分散特性と最適屈折率分布

前節の解析手法を用いて，コア内での屈折率分布が次式に示すように半径r方向に一般的な2次式で表わされたファイバにおけるモード分散特性を検討することにする．

$$n^2(r) = a + b\left(\frac{r}{R}\right) + c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad (0 \leqq r \leqq R) \qquad (13)$$

また，クラッドにおける屈折率は一定で次のとおりである．

$$n^2(r) = n_2^2 \qquad (R < r < \infty) \qquad (14)$$

図1に式(13)および(14)で表わされる屈折率分布を示す．さて，種々の屈折率分布をもつファイバを比較検討するため，次式の規格化周波数を導入する．

$$V = kR\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \qquad (15)$$

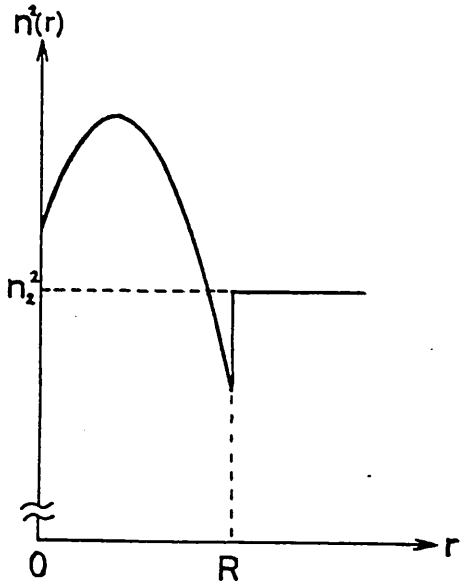


図1. 光ファイバの屈折率分布

ここで，$\bar{n}_1$ は次式で定義される量であり，コアの等価的な屈折率である．

$$\bar{n}_1^{\,2} = n_2^2 + \frac{2}{R^2}\int \{ n^2(r) - n_2^2 \} r\, dr \qquad (6)$$

ただし，積分は $n^2(r) \geq n_2^2$ の領域についてのみ行なうものとする．これは，屈折率分布の形状の違いによる伝送特性を統一的に比較検討できるように導入したもので，この値を一定にして計算を行なう．なお，本資料における数値計算例では，

$$\frac{\bar{n}_1}{n_2} = 1.01 \qquad (7)$$

としている．また，規格化周波数Vとファイバの導波モードの総数Nとの間には，次の関係が存在する．

$$N \simeq \frac{V^2}{2} \tag{18}$$

このことはWKB近似の解析から示唆され，また，以下の数値計算からも認められる．

さて，種々の屈折率分布におけるモード分散特性を図2に示す．縦軸および横軸はそれぞれ屈折率分布(13)の2次係数Cおよび1次係数bをあらわしている．また，図の等高線に示す数値は，Vが10から15までにおける$S/(\bar{n}_1-n_2)$の平均値*の1000倍を示している．このチャートには式(13)で表現されるすべての屈折率分布が含まれている．いま説明の便宜上のために，図のA，B，C，DおよびEの各点で表わされる屈折率分布をもつファイバをそれぞれタイプA，タイプB，タイプC，タイプDおよびタイプEのファイバと呼ぶことにする．タイプAはいわゆるステップ型ファイバである．タイプB，CおよびDのファイバは$b=0$であるところの，いわゆるパラボリック型ファイバであり，境界におけるコアの屈折率が，Bではクラッドのそれより大きい，Cでは等しい，またDでは小さい（いわゆる谷付の）ファイバである．さらに，タイプEは屈折率分布にわずかのrの1次項が付加され，コアの中心で屈折率分布がいくらか鋭くなった谷付のパラボリック型ファイバである．図3には，A，B，CおよびEの各タイプの屈折率分布の様子を具体的に示している．

---

* Vが10，10.5，11，…15の11ポイントの$S/(\bar{n}_1-n_2)$値の平均

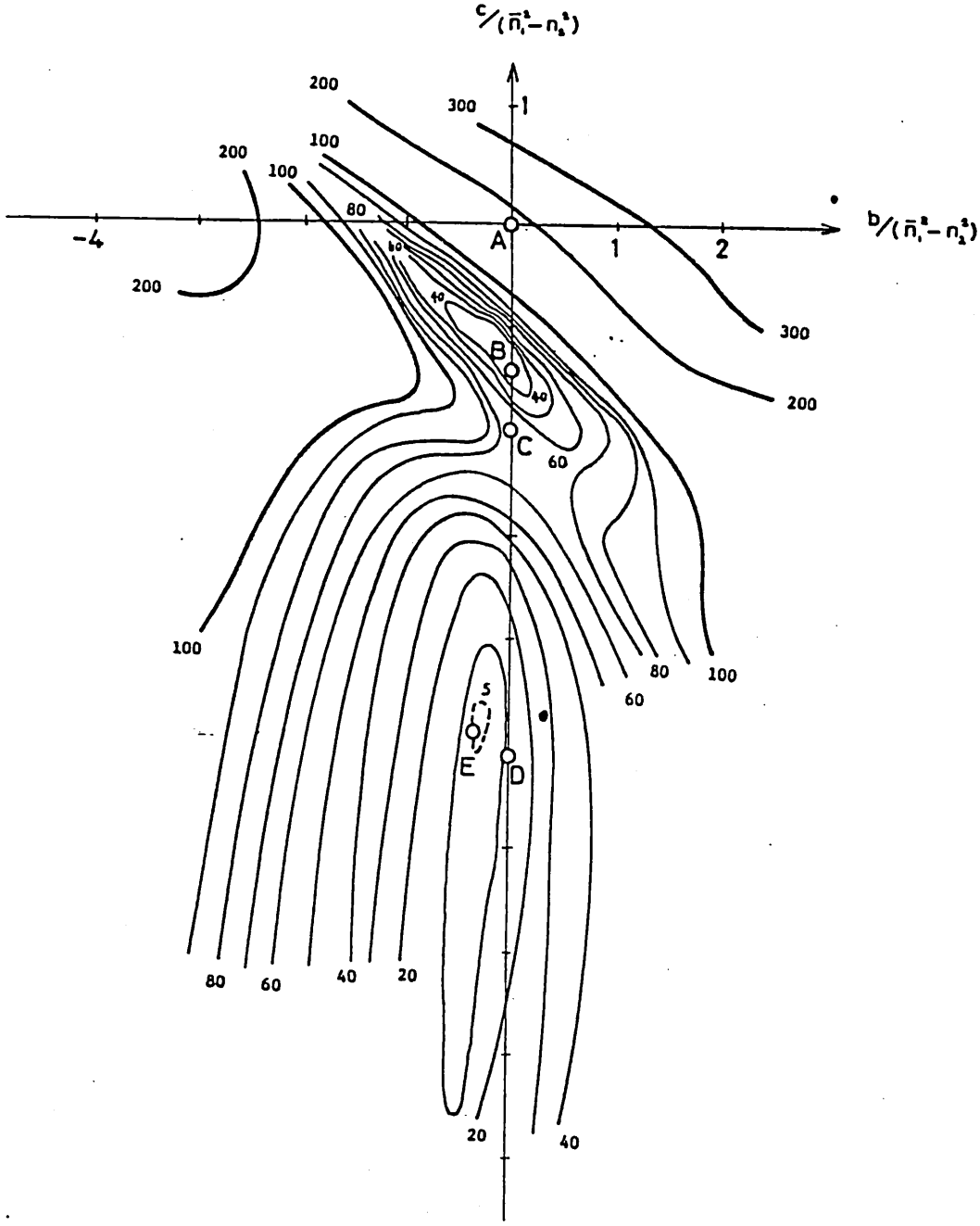


図2. 各種の屈折率分布をもつファイバのモード分散特性

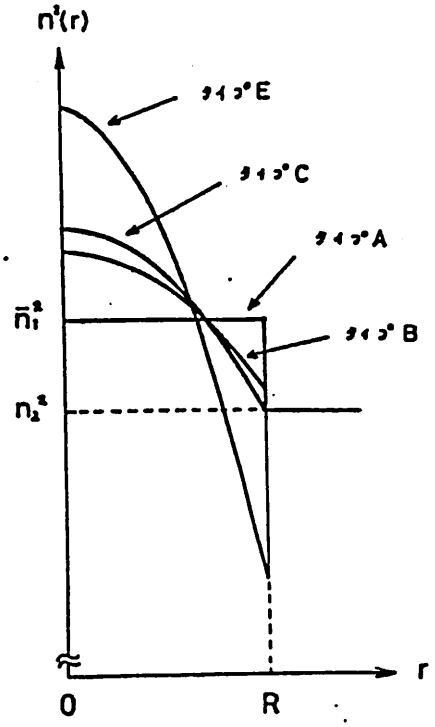


図3．　屈折率分布

いま，C軸に沿って屈折率分布とモード分散との関係を見てみよう．点Cより上方へC軸に沿って移動すれば，モード分散は初めのうちは減少し，次に増加に転じる．すなわち，極小点Bが存在する．このBの存在は，下代らによってすでに示されている[7]．一方，C軸に沿って点Cより下方へ移動すれば，モード分散はやはり減少する．このように谷を付けることによるモード分散は，すでによく知られている．しかるに，C軸に沿ってさらに下方へ移動するとモード分散は増加に転ずる．このように谷をあまり深くすると，かえってモード分散が増加することになり，Dが極小値を与えている．B，C，Dの各点における$S/(\bar{n}_1-n_2)$はそれぞれ0.038，0.065，0.013である．したがって，C軸に沿った屈折率分布においては，Dにおける屈

折率分布がモード分散の最小値を与える．これは，Aにおける値（ステップ型ファイバ）の約15分の1であり，Cにおける値の約5分の1である．

さて，チャート全体をながめると，このDよりもさらにモード分散の小さい屈折率分布Eが存在することがわかる．Eにおける値は0.0046で，式(3)で示されるすべてのファイバのうちでもっともモード分散が小さい．このとき，$(n_2 - n_{min})/(n_{max} - n_2) \fallingdotseq 0.59$ である．このEでの屈折率分布は，rの2次項にさらにわずかの1次項が付加された形となっている．このことはこれまでモード分散を押さえる効果として報告されてきた，α乗分布においてαが2よりわずかにずれるといったモード分散の改善例と全く等価である．

図4にはいくつかの屈折率分布のファイバについて，$S/(\bar{n}_1 - n_2)$とVとの関係を示している．タイプCでは，標準偏差Sが周波数Vの増加とともに周期的に増減しているのが見られる．これは，$(l+2m)$の値が同一であるすべての導波モードがほぼ等しい分散特性をもっており，周波数の増加とともにこれらのモードが一団となって新たに導波されるようになるためである．このような発散周波数近傍の導波モード群によるパルス拡がりは，タイプDあるいはタイプEのようにコアとクラッドとの境界に谷をつけることにより軽減されるのがわかる．

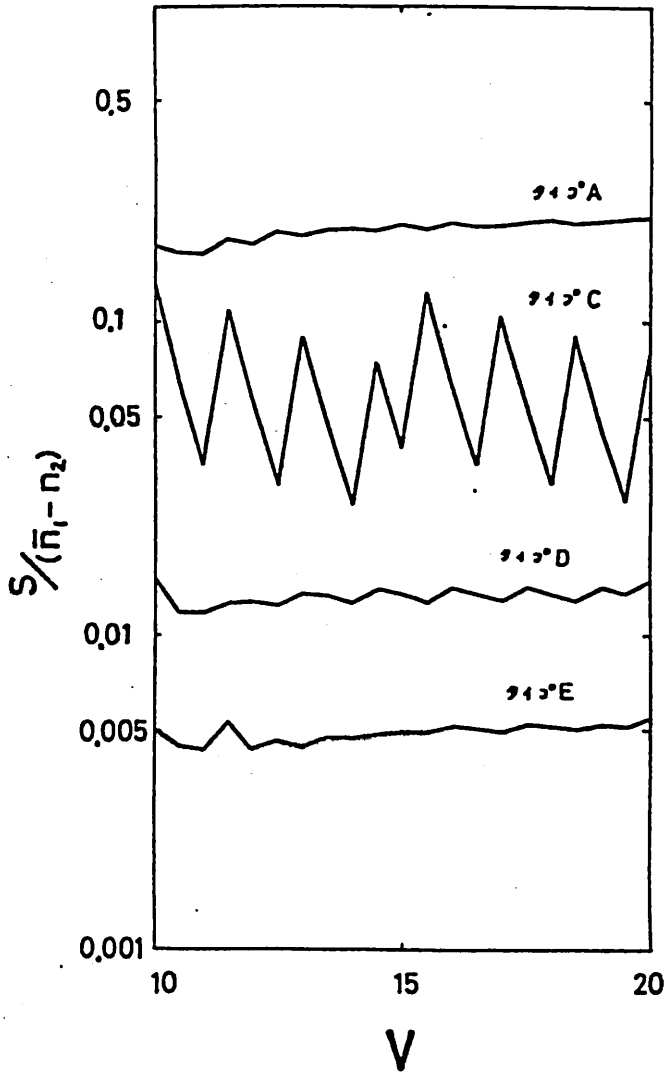


図4．　モード分散特性

[4] むすび

本報告では，多項式屈折率分布で表わされた多モード光ファイバにおける導波モードについて解析し，特にコアの屈折率分布が2次式で表わされた場合を例にとり，そのモード分散特性を各導波モードの群遅延の標準偏差を用いて数値的に検討した．さらに各種屈折率分布について，規格化周波数が10から15までの群遅延の標準偏差の平均値を求め，チャートに表わした．このように，これまである1つの周波数や限られたモード数においてのみ検討されていたモード分散特性を，実際的な周波数範囲でのモード分散の平均値で表現することにより，より一般的に評価した．その結果，屈折率分布がコアの中心部でいくらか鋭くなった形状で，コアとクラッドとの境界においてコアの屈折率がクラッドのそれよりも小さいパラボリック形ファイバが，モード分散を最小にするという意味で最適であることが明らかになった．

なお，数値計算は大阪大学大型計算機センター，および京都大学大型計算機センターによったことを付記し，謝意を表わす．

参考文献

(1) D.Gloge and E.A.J.Marcatili,BSTJ,vol.52,no.9, pp.1563-1578,Nov.1973.

(2) D.Gloge and E.A.J.Marcatili,BSTJ,vol.52,no.7, pp.1161-1168,Sept.1973.

(3) S.Kawakami and J.Nishizawa,IEEE Trans.Microwave Theory and Tech.,vol.MTT-16,no.10,pp.814-818,Oct.1968.

(4) M.Ikeda,IEEE J. Quantam Electron.,vol.QE-10,no.3, pp.362-371,March 1974.

(5) 末松，古屋；信学論，vol.57-C，no.9，pp.289-295，昭49-09.

(6) K.Okamoto and T.Okoshi,IEEE Trans.Microwave Theory and Tech.,vol.MTT-24,no.7,pp.416-421,July 1976.

(7) 下代，松原，熊谷，信学会光・量エレ研資，OQE75-59，1976-04.

M.Geshiro,M.Matsuhara and N.Kumagai,IEEE Trans.Microwave Theory and Tech.(To be published).

(8) 宮崎，電気学会電磁界理論研資，EMT76-29，1976-10.

(9) 政木，松原，熊谷，信学会光・量エレ研資，OQE76-59，1976-09.

(10) R.Olshansky and D.B.Keck,Applied Optics,vol.15,no.2, pp.483-491,Feb.1976.

(11) H.M.Presby and I.P.Kaminow,Applied Optics,vol.15,no.12, pp.3092-3036,Dec.1976.

(12) M.Matsuhara,J.Opt.Soc.Am.,vol.63,no.12,pp.1514-1517, Dec.1973.

(13) 岡本，大越，信学会光・量エレ研資，OQE76-4，1976-04.

(14) P.J.B.Clarricoats and K.B.Chan,Elect.Lett.,vol.6,no.22, pp.694-695,Oct.1970.

(15) Y.Suematsu and K.Furuya,IEEE Trans.Microwave Theory and Tech.,vol.MTT-20,no.8,pp.524-531,Aug.1972.

(16) H.Kirchhoff,Arch.Elekt.Übertragung,vol.27,no.1,pp.13-18, Jan.1973.

(17) 日向，増田，細野，斉藤，電気学会電磁界理論研資，EMT75-30，1975-10.

(18) 石川，古屋，末松，信学会光・量エレ研資，OQE76-98，1977-02.

輻射科学研究会資料

Cu イオン電界拡散 $LiTaO_3$ 導波路における導波ー放射モード変換

岡村 康行
長谷川 清[†]
山本 鎧彦
牧本 利夫
（大阪大学 基礎工学部）
（† 現在 関西電力 ）

昭和52年5月13日

1. まえがき

モード結合現象を利用した光集積回路素子については，これまでに多くの報告がなされているが，それらの大部分は導波モード間の結合を用いたものである。これに対し導波－放射モード結合は，以前はプリズムやグレーティングカプラなどの入出力結合器への応用が主であったが，最近になって，他の種類の回路素子への応用の提案[1-3]とともに実験結果の報告[4-6]もなされるようになってきた。

導波－放射モード結合の特徴は，結合モード間の空間的な分離が自動的に行なわれるということであり，この効果を利用すれば，例えば偏光子等の周辺素子を用いることなく直接強度変調出力が得られるなどといったように，従来よりも簡単な構成の素子が実現される可能性がある。しかしながら，この方面の研究はまだごく初期の段階で，効率の向上など種々検討すべき重要な問題が残されている。

本文では Cu イオンを電界拡散して作成した $LiTaO_3$ 導波路の電気光学効果による偏波面の回転を伴った

導波ー放射モード変換の実験結果について報告する。このタイプのモード変換に関しては，これまでにTa_2O_5薄膜／SiO_2／$LiTaO_3$基板構造の導波路[5]や外拡散$LiNbO_3$導波路[6]を用いた実験がなされているが，これらはいずれも光の進行方向に一様な構造の電極による摂動によって，同一の縦方向位相定数を持つ導波および放射モードを結合させる形式である。これに対し，ここでは周期電極による縦方向位相定数の異なるモード間の結合について検討する。導波ー放射モード結合においては，結合に関与するモード対の一方が広範囲の連続スペクトルを持っているので，適当な周期構造を導入してやれば，指定の導波モードと結合する放射モードを任意に選択することができ，周期の変化につれて，導波路断面内の結合モード対の界分布の重なりによって決まる結合の効率が一般に大きく変化する。とくに本文で取扱う構造のように，異方性薄膜内での結合が重要な役割を果たす場合には，むしろ縦方向位相定数のずれたモード間において結合効率が大きくなる。した

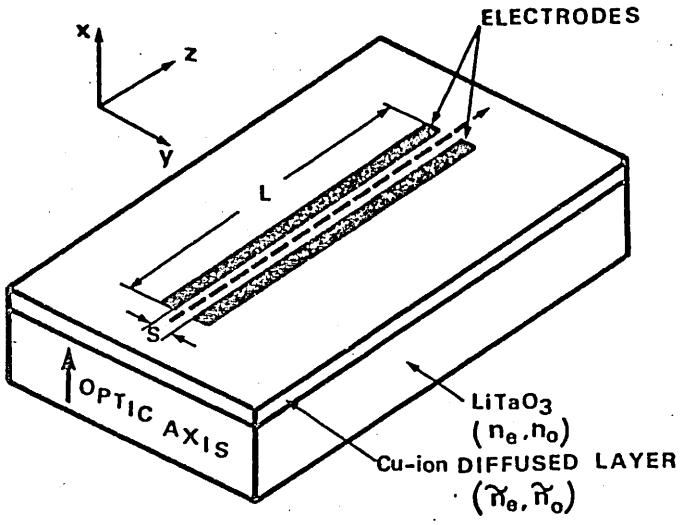
がって，ここでは電極の周期に対するモード変換効率の変化に注目して測定を行なった。なお$LiTaO_3$を材料として選んだのは，必要な電極の周期が300 μm前後という比較的製作が容易な値になるからである。*

2. $LiTaO_3$導波路における導波－放射モード変換

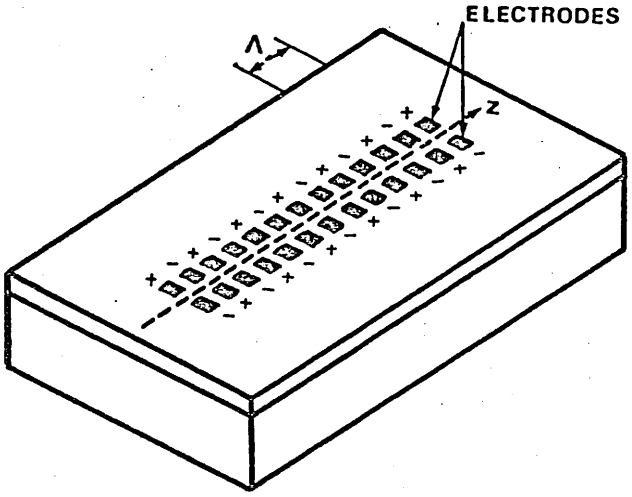
図1に示すような光学軸方向にCuイオンを電界拡散したZ－cut $LiTaO_3$板（$n_o=2.177$, $n_e=2.181$, $\lambda=0.63\,\mu m$）にコプレーナ電極を付けた構造を考える。但し，図1(a)の電極は光の進行方向に一様な構造，(b)の電極は周期構造（周期Λ）になっている。また，結晶のa, b軸はそれぞれy, z方向に向いており，光の伝搬方向をz方向とする。

---

*拡散形導波路の作成そのものはキュリー点の高い$LiNbO_3$の方が簡単であるが，自然複屈折が$LiTaO_3$よりかなり大きいので，10 μm以内の周期が必要となり，電極の作成が困難となる。



(a)



(b)

図1　Cu イオンを電界拡散した Z-cut $LiTaO_3$ 導波路上に (a) 一様電極，(b) 周期電極を持つ導波－放射モード変換器

まず図1の構成で，電極のない場合の導波路自体の特性について述べる。Cu イオンの拡散によって，$LiTaO_3$ 板の表面層の常波および異常波屈折率はわずかに増加する。したがって，図1の系はTE，TM両偏波に対し導波構造として動作し，導波路の座標系と結晶軸の方向が一致しているため，結晶表面層の比誘電率は次のような対角テンソルで与えられる。

$$\mathbb{K} = \mathrm{diag}\,[\,K_{xx},\ K_{yy},\ K_{zz}\,] \qquad (1)$$

ここで，結晶の屈折率と比誘電率テンソルの成分とは

$$K_{xx} = (n_e + \Delta n_e\ \mathrm{erfc}(-x/d_e))^2 \qquad (2)$$

$$K_{yy} = K_{zz} = (n_o + \Delta n_o\ \mathrm{erfc}(-x/d_o))^2 \qquad (3)$$

の関係で結ばれている。但し，erfc は規格化された補誤差関数，Δn_e，Δn_o は拡散層の結晶表面での異常波，常波の屈折率の増加分，d_e，d_o は拡散層の実効的な深さである。

この系におけるTEおよびTM偏波の固有モードには離散的な固有値（縦方向位相定数 β）を持つ導

波モードと連続スペクトルを持つ放射モードが存在するが，結晶の異方性のため，導波モードの縦方向位相定数の存在範囲が各偏波によって異なる。図2は等価屈折率 n_{eff}（$=\beta/k_0$，ここに k_0 は真空中の平面波の位相定数）をパラメータとして，この模様を表わしている。但し，この図には導波モードとサブストレート放射モードの一部分のみを示した。ここで注目すべき点は，TE導波モードの存在範囲（$\hat{n}_0 > n_{eff}^{TE} > n_0$）とTMサブストレートモードの存在範囲（$n_e > n_{eff}^{TM} > 1$）が一部分（$n_e > n_{eff}^{TE}, n_{eff}^{TM} > n_0$）で重っており，あるTE導波モードの等価屈折率が n_e より小さければ，これと

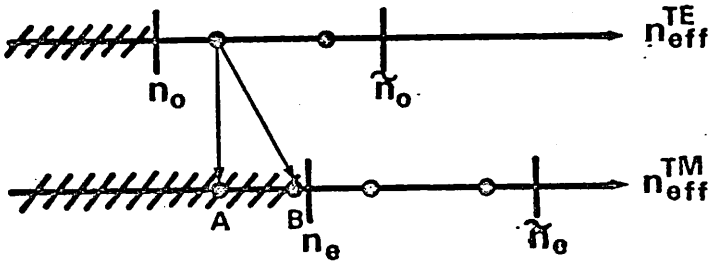


図2　固有モードの縦方向位相定数の分布

（⊙導波モード，////放射モード）

（$\hat{n}_0 = n_0 + \Delta n_0$，$\hat{n}_e = n_e + \Delta n_e$）

同じ等価屈折率を持つ放射モードが必ず存在し（図2のA点に相当する），位相整合条件が自動的にみたされるということである。

次に一様あるいは周期構造の電極により y 方向電界 E_y が印加されると，$LiTaO_3$ のポッケルス効果により比誘電率テンソルに非対角成分 $K_{xy} = K_{yx} = -K_{xx} K_{yy} \gamma_{51} E_y$ が生じ，これによってはじめ独立であった直交偏波のTE導波－TM放射モード間に結合が生ずる。したがって，この系に入射したTE導波モードは，伝搬につれてTM放射モードへの結合によって減衰し，結合によって生じた放射モードと導波モードとの再結合が無視できるときには，その電力変化は摂動論による解析より，次式で表わされる。

$$P(z) = P(0) \exp(-2\alpha z) \qquad (4)$$

ここに α は振幅減衰定数で

$$\alpha = \eta \pi \left[\frac{n_o^2}{n_e^2} |\tilde{K}|^2 \frac{\beta}{s} \right]_{\beta=\beta_g} \qquad (5)$$

で与えられる。[2] 但し，$\tilde{K}$ は結合係数で，導波路断面内の結合モード対の界分布の重なりと非対角成分

の大きさによって決まる量であり，また β_g は導波モードの縦方向位相定数，そして s は放射モードの基板内の横方向位相定数である。図1(a)の一様な構造の電極の場合，図2のA点のように同一の縦方向位相定数を持つ導波－放射モード間に結合が生じ，また図1(b)の周期電極の場合，図2のB点のように位相定数の異なる導波－放射モード間に結合が生ずる。* 図3に，結晶表面での屈折率の増加分を0.0075，拡散層の実効的な深さを6μmとした場合の，結合に関与する導波および放射モードの界分布を示す。ここに(a)はTE，導波モードの横方向電界分布，そして(b)，(c)は，それぞれ一様電極および周期電極（$\Lambda = 250\,\mu m$）によってこの導波モードと結合するTM放射モードの横方向磁界分布である。この図から分かるように，一様電極による同一の縦方向位相定数をもつ導波－放射モード結合

---

* この場合はA点に対して，B点と対称の位置にある放射モードとも結合するが，結合が弱いので，考慮しなくてよい。

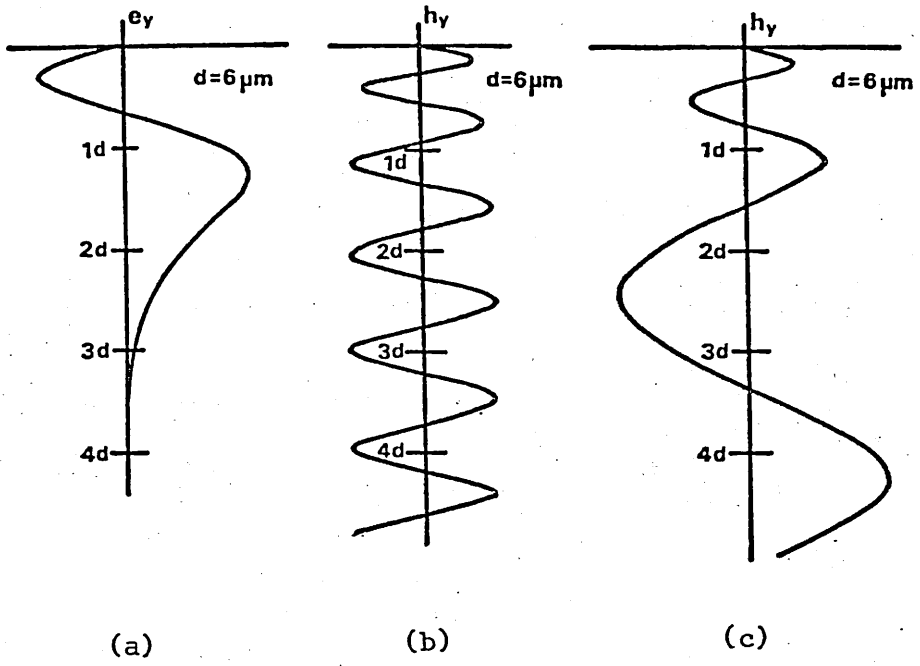


図3 (a) TE₁ 導波モードの横方向電界分布 (e_y) ($d = 6\mu m$, $\Delta n = 0.0075$), (b) 一様電極によってTE₁導波モードと結合するTM放射モードの横方向磁界分布 ($h_y \propto e_x$), (c) 周期電極 ($\Lambda = 250\mu m$) によってTE₁導波モードと結合するTM放射モードの横方向磁界分布 (h_y).

の場合，放射モードの界が激しく振動しているため，結合モード対の界分布の重なり積分は大きくならない。一方，周期電極による縦方向位相定数の異なる導波－放射モード結合の場合には，放射モードの界

の振動がゆるやかになり，一様電極の場合よりも大きな結合係数が期待できる。但し，式(5)からも分かるように，周期電極の場合には，一様電極の場合と比べ，振幅減衰定数に1/4という係数がかかるので，界分布の重なりの効果がこれをこえるものでなければ，その有効性がでてこないということに注意すべきである。

なお，結合によって生じたTM偏波の電力は基板中に放射され，結合モード間の空間的な分離が自動的に行なわれている。さらに，結合係数が印加電界強度に比例することから，変調特性曲線は通常の導波ー導波モード結合形の素子のコサイン2乗形と異なり，ガウス形になる。

3. 導波ー放射モード変換素子の作成

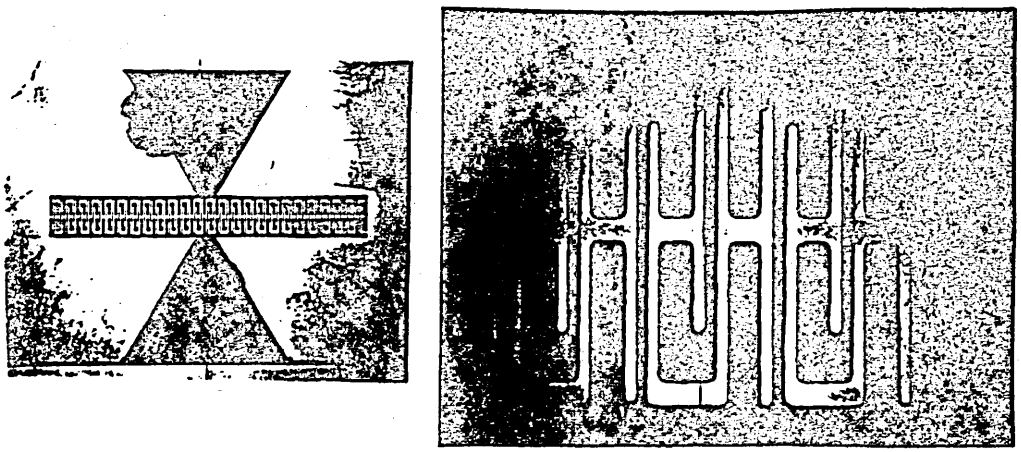
$LiNbO_3$，$LiTaO_3$ などの電気光学結晶に拡散技術を用い，結晶表面付近に高屈折率層を形成し，それを導波路として利用する方法がいろいろ報告されている。例えば，結晶を高温真空中で熱処理し，結晶表面に Li_2O の欠乏層を形成する out-diffusion[7]，

あるいは Ni, Ti, Nb などの金属を高温真空中で結晶内部へ拡散させる in-diffusion[8-9] などがある。しかしながら，このような高温（1000°C以上）中で熱処理をする方法は，$LiNbO_3$ のようなキュリー点の高い結晶（T_c = 1253°C）では問題はないが，$LiTaO_3$ のようにキュリー点の低い結晶（T_c = 617°C）では再ポーリングする必要がある。とくに Z-cut 結晶の場合，拡散層ができている結晶表面付近には再ポーリングによる単分域が形成されない。そこで，ここでは直流電界により拡散を促進させ，プラス電極側に導波路を形成するいわゆる電界拡散法[10]を用いた。この方法の特徴はキュリー点以下の拡散温度でも導波路作成が可能なことである。なお，拡散不純物としては Cu イオンを用いた。

光学研磨した Z-cut $LiTaO_3$（a×b×c = 10×25×3 mm）の両面に，拡散源と電極の両方の役割を兼ねる Cu_2O 膜を3000 Å程度真空蒸着し，電気炉中の温度を550°C，印加電界強度20 V/mm，電界印加時間15分，空気雰囲気中で Cu イオンを

結晶表面から拡散させた。拡散後，結晶表面には拡散源が残っていたが，過硫酸アンモニウム水溶液でエッチングし，さらに光学研磨することにより，これを取除いた。表面処理後の導波路にはTEモードが2本（TE_0, TE_1），TMモードが1本（TM_0），それぞれ励振できた。さらに等価屈折率の測定より，表面での屈折率増加が約0.0075，拡散層の実効的な深さが約6 μmと推定された。

このようにして作成した拡散形 $LiTaO_3$ 導波路上に，図4(a)に示すようなAl製の周期構造の電極



(a)　　(b)

図4 (a) $LiTaO_3$ 導波路上の周期電極の写真

（$L = 7$ mm, $\Lambda = 278$ μm, $S = 45$ μm），

(b) (a)の部分拡大写真

をフォトエッチングにより取付けた。前節で述べた結合モード対の界分布についての考察より，結合係数の大きくなる電極の周期が300μm付近になるということが予想される。そこでここでは，電極の周期の変化に対するモード変換効率の変化を調べるために，298μmから308μmまで10μm間隔で周期を変えた4種類の電極を作成した。但し，電極のパターン化に同一の原図を用いたため，実際の電極長は7mmから7.6mmまで0.2mm間隔で変化した。なお，電極間隔は約45μmであった。図4(a)は電極長7mm，電極周期298μmの場合の写真である。さらに電極の一部を拡大した写真を(b)に示す。電極上には，放電を避けるためポリウレタンが塗布されている。

4. 導波－放射モード変換効率の測定

測定のブロックダイアグラムを図5に示す。光源をHe－Neレーザ光（λ＝0.63μm）とし，直流の高電界による屈折率変化[11]を避けるため，低周波（500Hz）による強度変調実験より，変換効率を測

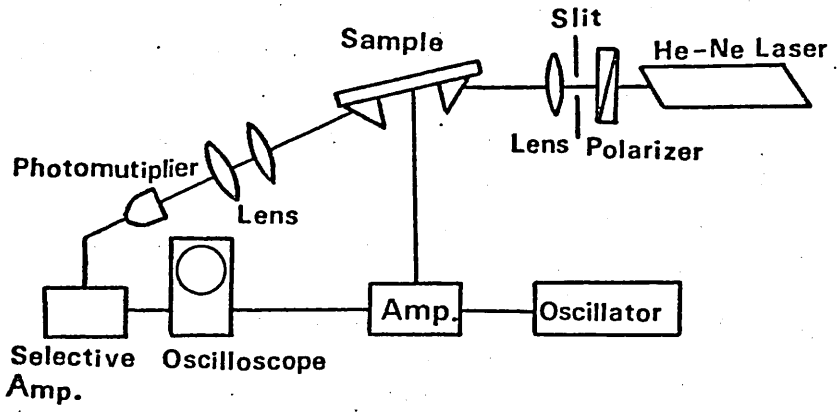


図5　導波ー放射モード変換効率の測定系

定した。ゼロバアイアス時には，出力光は印加電圧の周波数の2倍の周波数で変調されるので，電子増倍管の出力を1kHz選択の増幅器を通して，オシロスコープで観測した。なお，1次の導波モードによる結合の方が，0次の導波モードによるものより大きくなることが理論的に予想されるため，入力光をTE₁モードとした。図6に，電極長7.4mm，電極周期298μmの電極に600V印加した時の出力光と印加電圧の波形を示す。但し，この場合変換効率は16%（電極長を1cmに換算して21%）であった。図7は印加電圧に対するTE導波ーTM放射モード変換効率の測定値を，4種類の周期

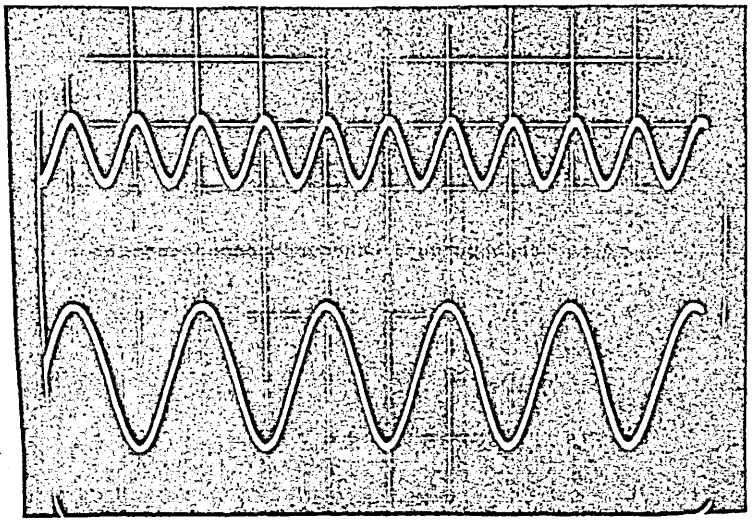


図6　出力光と印加電圧波形

（上段：出力光　50mV/div
下段：印加電圧　500V/div）

電極についてプロットしたものである。なお，図には，各電極の長さが異なるため電極長を1cmに換算した値を示している。但し，変換効率は

$$(I(0)-I(E))/I(0)\times 100\ (\%)$$

で定義している。ここにI(0)は電圧を印加していない時の出力強度，I(E)は印加時のそれである。この図において，変換効率が2乗曲線に沿って変化するのは，導波ー放射モード結合によるものであることを示している。図8には，図7の結果を3種類の印

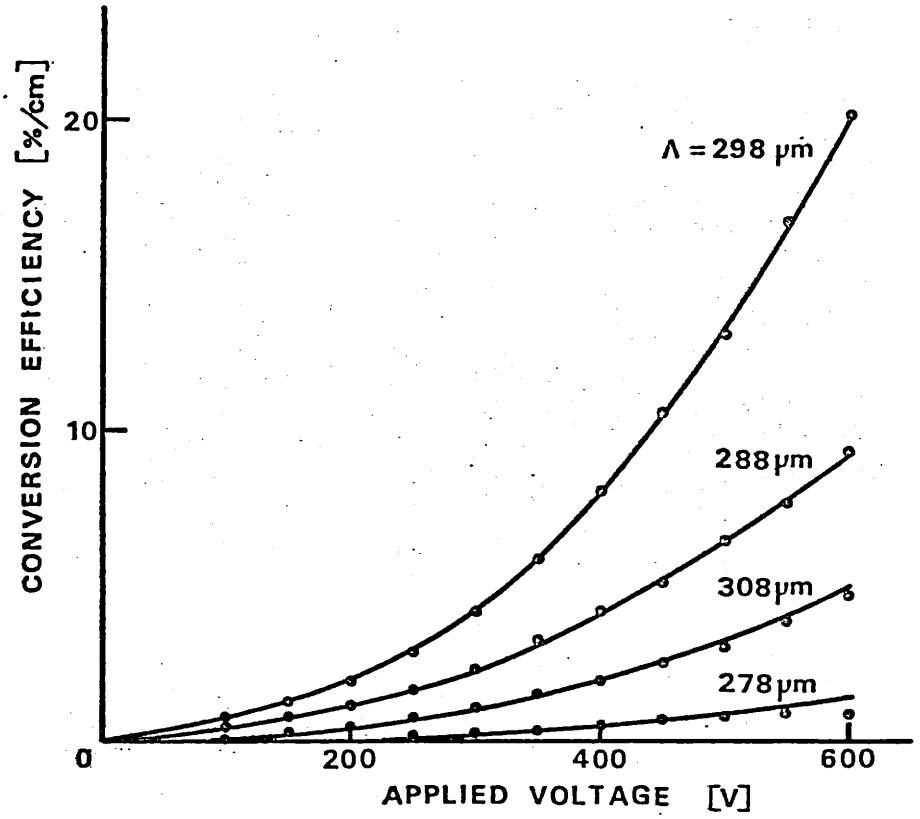


図7　TE₁導波－TM放射モード変換効率の測定値と印加電圧との関係

加電圧について，電極周期に対するTE₁導波モードからTM放射モードへの結合損としてプロットしなおしたものを示す。電極の周期の変化に伴い，結合効率が大きく変化することが分かる。この変化は導波路断面内の結合モード対の界分布の重なりの変化によるものである。

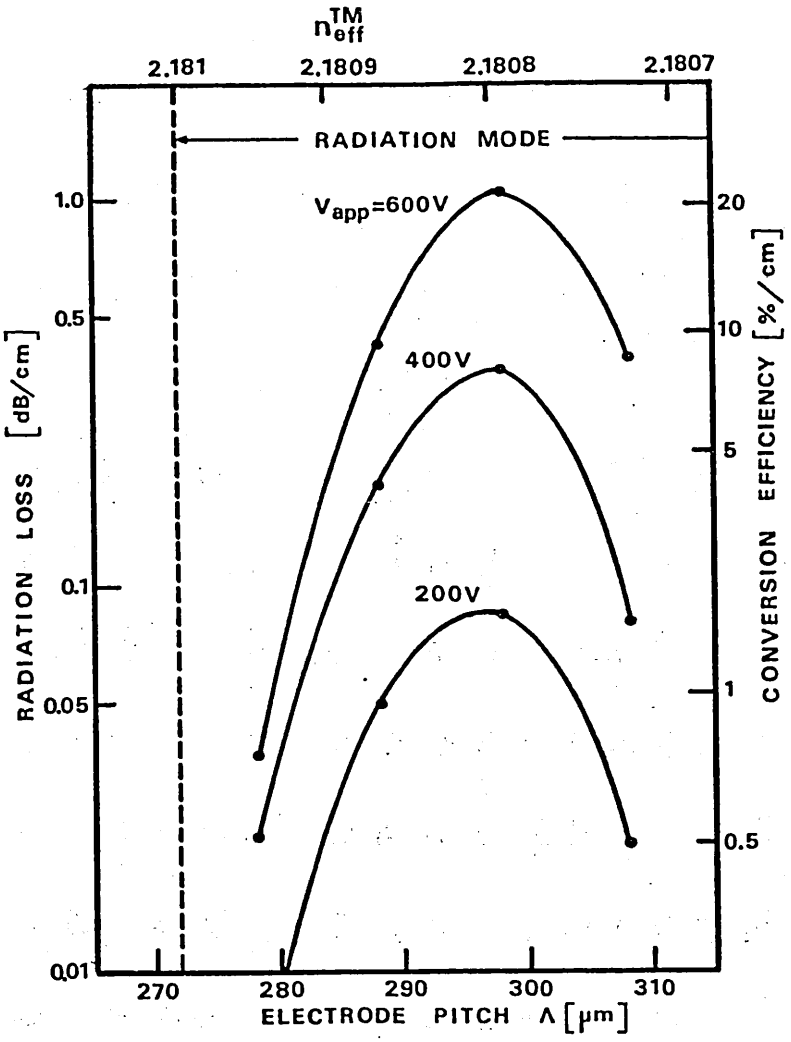


図8 TE_1導波モードの放射損と電極周期との関係

5. むすび

本文では Cu イオンを電界拡散した $LiTaO_3$ 導波路における直交偏波の導波ー放射モード変換の実験結果について述べた。このタイプのモード変換に関しては，これまでは一様電極による同一の縦方向位

相定数を持つ導波ー放射モード間の結合が取扱われていたが，ここでは周期電極による縦方向位相定数の異なるモード間の結合に注目して測定を行なった。その結果，電極の周期によってモード変換の効率が顕著に変化し，ある特定の周期において極値を持つことが確かめられた。これについては，導波路断面内の放射モードの界分布の変化によって説明することができるが，効率そのものは簡単な摂動論の結果から予想される値よりもかなり小さい。これは結合によって基板中に放射されるビームの結晶表面に対する放射角が小さい（いまの場合，基板の深いところで約1°）ため，導波モードとの再結合が起っているためであろうと考えられる。このような場合に適用すべき導波ー放射モード結合の精密な取扱いに関しては，別の機会に報告したい。なお，動作電圧については，導波路を3次元化し，電極間隔を狭くすることにより，1桁下げることは可能であると考えられるが，それ以上の効率の改善には，材料の選択や導波路の構成の面でさらに検討する必要がある。

文献

(1) W.S.C.Chang,"Acoustooptical deflections in thin films," IEEE J. Quantum Electron., QE-7, 4, p.167 (April 1971).

(2) D.Marcuse,"Electrooptic coupling between TE and TM modes in anisotropic slabs," IEEE J. Quantum Electron., QE-11,9,p.759 (Sept. 1975).

(3) 山本，岡村，平井，牧本，"半漏れ構造薄膜光導波系における導波一放射モード結合の解析と変調器および非相反素子への応用，" 信学論(C)，60－C，2，p.98（昭52－02）.

(4) F.R.Gfeller and L.W.Pitt,"Acousto-optic scanner," Electron. Lett., 8 p.549 (1972).

(5) Y.-K.Lee and S.Wang,"Electrooptic guided-to-unguided mode converter," IEEE J. Quantum Electron., QE-12,5,p.273 (May 1976).

(6) 岡村，長谷川，山本，牧本，"拡散形電気光学導波路における導波一放射モード結合形光変調器，" 昭52 信学全大 892（昭52.3月）.

(7) I.P.Kaminow and J.R.Carruthers,"Optical waveguiding layers in $LiNbO_3$ and $LiTaO_3$," Appl. Phys. Lett., 22,7,p.326 (1 April 1973).

(8) R.V.Schmidt and I.P.Kaminow,"Metal-diffused optical waveguides in $LiNbO_3$," Appl. Phys. Lett., 25, 8, p.458 (15 Oct. 1974).

(9) J.M.Hammer and W.Phillips,"Formation of lithium niobate-tantalate waveguides," J. Electronic Mat., 4,p.549 (March 1975).

(10) J.Noda, T.Saku and N.Uchida,"Fabrication of optical waveguiding layer in $LiTaO_3$ by Cu diffusion," Appl. Phys. Lett., 25, 5,p.308 (1 Sept. 1974).

(11) F.S.Chen,"A laser-induced inhomogeneity of refractive indices in KTN," J. Appl. Phys., 38, p.3418 (1967).

輻射科学研究会資料

「M-O-Mダイオードを用いたH_2COレーザーパルスの検出」

昭和52年5月19日

大阪市立大学 工学部

堀内泰男　小森優

村井昭

於　中央電気クラブ

1. 概 要

2. 緒 言

3. M-O-M ダイオードの製作

4. M-O-M ダイオードの整流特性
   1) 低周波特性
   2) マイクロ波検波特性
   3) HCN レーザー出力の検出

5. H_2CO からの FIR レーザー発振
   1) 発振波長，及び動作
   2) 時間挙動

6. 低周波ビートの観測

7. Walking Phenomena

8. 直線偏光性

9. 偏光角の回転

10. 結 語

11. 謝 辞

文 献

1、概要

Ni表面の薄い酸化層にW線を接触した、いわゆるM-O-Mダイオードを試作した。これは感度は低いが、構造簡単、冷媒不用、且、早い応答速度をもってをり、便利に使える。これを用いて、H_2COからの遠赤外域レーザパルスの出力包絡線を観測し、多モード発振時のモードビート、Walking Phenomenaの測定に成功した。又ダイオードはW線方向の偏波に感度をもつので、2個のダイオードを直交して併用し、発振パルスを観測した所、瞬間的には出力は直線偏光であるが、偏波角がゆっくり回転する（～50 μsec にほぼ最大90°）動作をしている事が分かった。

上記の如く、クライストロン出力をSi－W鉱石検波器で検波した結果にレーザー出力を自製M-O-Mダイオードで便利に検波観測出来て、詳しい動作が得られるようになった。

2. 緒　言

遠赤外域小出力の検出には通常 Golay cell を用いる。この最小検出感度は～10^{-11} watt に達してをり、重宝であるが、入力を気体の熱膨張に変換し、膜の歪みにして観測する為、応答速度が～100 msec と遅く、繰返し 60 Hz のパルス出力には僅かに応答する。

此の領域で早い応答と高い感度を持つものとしては浅い不純物準位をもつ InSb 光電導検出器がある。その速度は～10^{-8} sec に達し、～μsec 程度のパルス中の波形観測には充分であるが、liq. He を必要とする。

Josephson Junction は極低温下トンネル現象による非線型性をもち、その検出感度は 10^{-11} Gauss・cm² に達し、又 400倍に及ぶ高次高周波混合[1]もあるが、極低温及び gap ～10 Å を保持する無振動室が必要と云はれている。常温で検出可能なものにミリ波域迄充分実用化してきた Si－W ダイオードがある。この検出動作の周波数限界は～2 THz (λ～0.15 mm) 附近であろう。この限界の延長には高濃度不純物添加した Si と、より細い W 線が必要で、～20 THz 迄は延長可能ではないかと考えている。Si－W ダイオードは高周波混合動作には有効な面をもっている。

Si を金属に置換した形の Ni－酸化被膜・W ダイオード[2]は He－Ne 3.39 μm や Xe 2.0 μm の高周波混合用に使はれてをり、1.5×10^{-14} sec での応答速度をもつ事が確かめられている。[3]

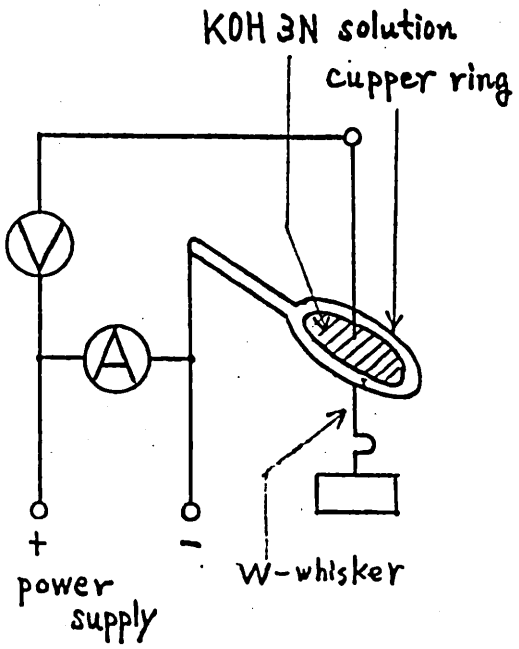
我々も赤外域の絶対周波数測定用に試作して来たが、手持ちクライストロンは未だ第ビードが得られず、此の方面の仕事は遅れてしまった。一方、小出力ながらパルス波形の波形観測には充分使用に耐える検出器が得られ、重宝している。これにより H_2CO 4原子分子からのレーザー発振出力[4][5]の早い振舞が得られ、パルス発振中に直線偏波の偏波面がゆっくり回転する現象等を得たので、これ迄の実験結果について述べる。

3. M-O-M ダイオードの製作

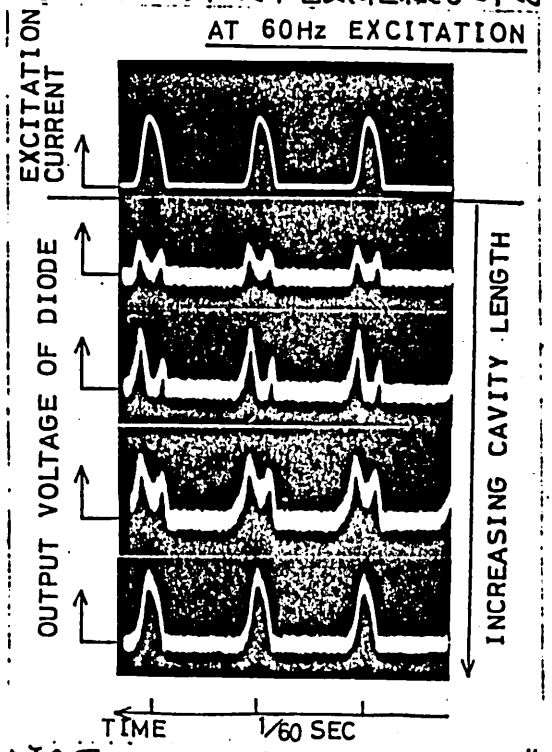
2種金属の接触部が整流作用をもつ事は古くから知られている。W線の性質は拾て難く、相手金属として仕事関数からは魅力的な組み合せは沢山あるが、室中に露呈して他より抜群に安定な面を持つ事から、結局Niを選んだ。電解研磨面でもよいと云はれているが、我々の所ではこれはうまくゆかず、2mmφのNi線の新しい切断面を利用した。この表面は瞬間的に約10ÅのNiOが形成され、其后略、安定と云はれている。夫々の仕事関数はNi 4.84V、W 4.50Vであり、NiOは絶縁物に属するが詳細は不明である。

W線は50μmφのものを、3規定KOH水溶液の水膜を通し、2~5Vを印加して、電解研磨した。研磨所要時間は研磨電流30mAで約1分であった。この方法により、針尖端部は半径1μm以下の鋭さが得られた。(第1図)

このNi線とW線を直進マイクロメーターのベッドに、電気絶縁して、対向固定し、接触させる。



第1図. 電解研磨装置.

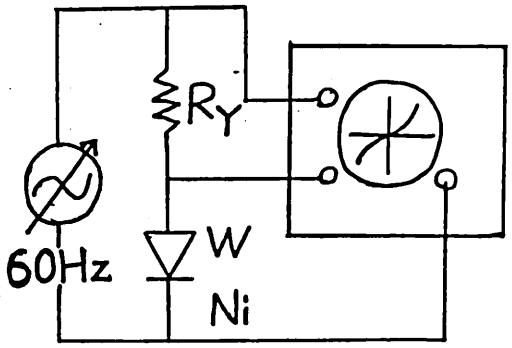


第9図. 60Hz励起 HCN 337μm レーザー 共振器調対出力特性.

4. M-O-M ダイオードの整流特性

1) 低周波特性

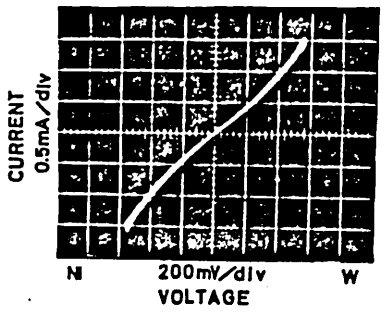
60Hz, 1～0.04 V の小電圧に対する電流応答の観測は第2図の様に行なった。この電流応答は基本的に直線～3次曲線であるが2次及びより高次成分も含んでいる。これが針圧、電圧履歴等により複雑な変化を示すが、これを大体以下3型式に分類した。型式Ⅰは両端電圧部で電流勾配が増大しつつ正負対称性の強いもの(第3図)で、これはW針先端が新しく鋭い時よく出現し、接解は軽い時である。型式Ⅱは両端電圧部で電流が飽和傾向を示しつつ、正負対称性の強いもの(第4図)で、やや強く接解した時によく現れ、針先端部が折れ曲った状態でも見られた。殆ど正負非対称性をもたない状態である。型式Ⅲはより低電圧範囲で見て、電流非対称性の強いもので、(第5図) 針の接解は型式Ⅰと同じであり、ここで正負印加電圧を0.3V以上にすると不安定となり、より低抵抗化して、型式Ⅰに移行する。以上3型式に対応する微分抵抗の変化を第6 a, b, c 図に示した。



第2図. 低周波 V-I 応答の測定回路. RY: 100Ω～10KΩ.

2) マイクロ波検波特性

マイクロメーターヘッドに装着したM-O-Mダイオード部を導波管に入れるのが困難で、5KHzで矩形波変調した2K25よりの8.6GHz出力を減衰させ、導波管開口より自由空間を介してM-O-Mダイオードに輻射した。同時に60Hz微小電圧を加え、シンクロスコープ横軸にこれをとると、第7図が得られた。この上の線はマイクロ波入力＝0のV－I曲線に対応し、下の線は横軸バイアスに一定マイクロ波が重なった時の検波電流の低下を示し、第8図の関係にある。約～30mVの点で両曲線



第3図　Type 1

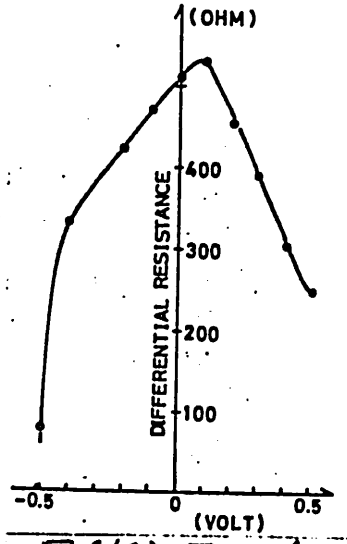
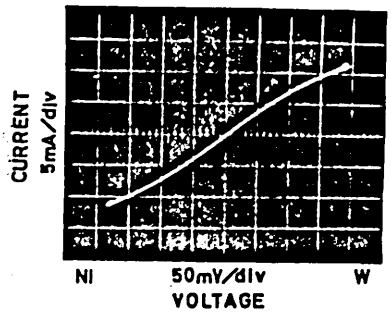


図6(a)　Type 1



第4図　Type 2

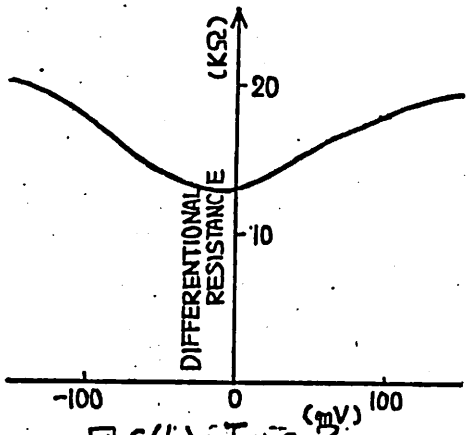
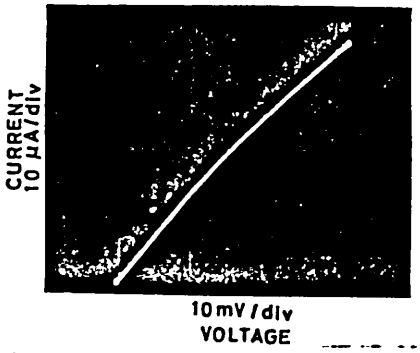


図6(b)　Type 2



第5図　Type 3

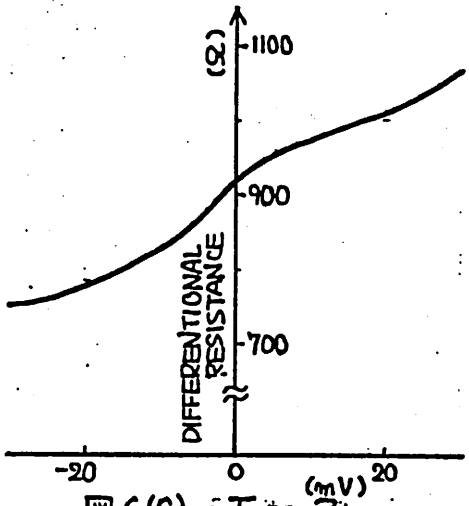
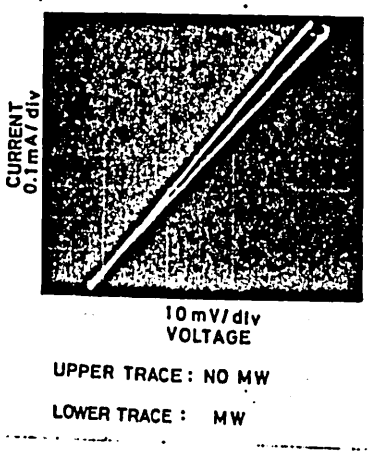
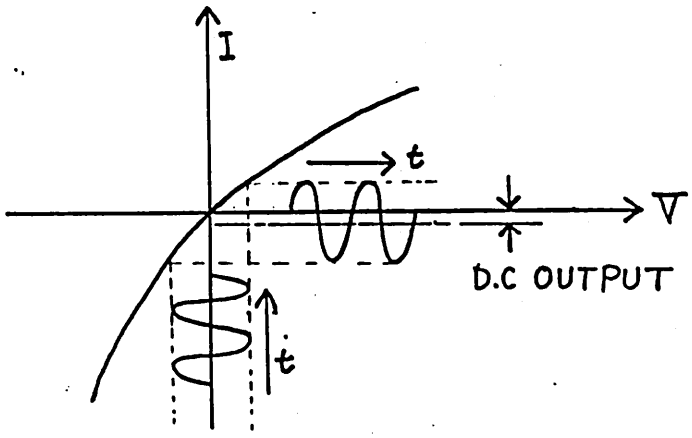


図6(c)，Type 3

第3.4.5図．MOMのV-I特性

が一致しているが、これはこの点のまわりで対称な電流をもつ事による。





第7図 MOMのμWave応答　　第8図 V-I特性へのμWave印加

マイクロ波入力を印加するとダイオード抵抗自身が低くなる方へ変化し、更に増加すると全く導通状態になる変化を示す。

0バイアスでマイクロ波入力変化に対する検波電流を調べると入力と殆んど比例する結果を得たが、通常のSi-Wダイオードに比べ感度は大体、数10分の1と悪い。

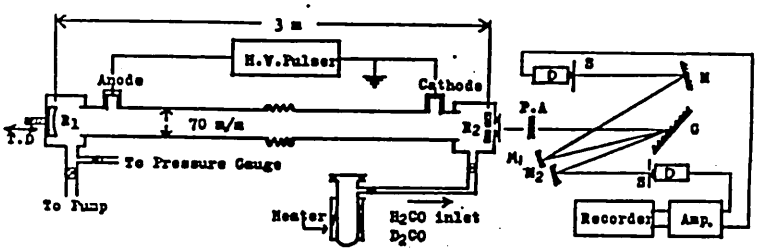
微小入力に対し微小正出力、増大入力に対し負出力、より大入力に対し正出力を示す特性も得られ、トンネル特性が顕著になったMIV型式と考えている。

3) HCNレーザー出力の検出

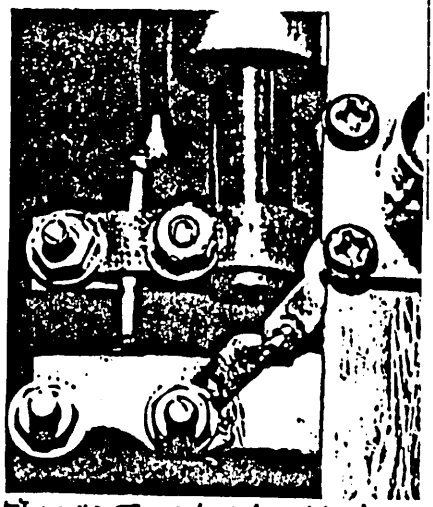
$\lambda = 337\mu m$, $f \fallingdotseq 890\,GHz$ のHCNレーザー線を、励起電源にDC+AC(60Hz)重畳したものを用いて発振させ、丁度半波整流の様に電源変調した準CW出力を用いた。この出力を凹面鏡集光し、その焦点にM-O-Mダイオードの接触部を置いて出力を観測した。その結果を第9図に示す。

5. H_2COからのFIRレーザー発振

1) 発振波長及び動作



第10(a)図. H_2CO FIRレーザー装置.



第10(b)図. MOMダイオード

H_2COからのレーザー新線の発見，分子内部変調関係，M-O-Mダイオード(第10図a)による検出，偏光問題等に用いた装置を第10図bに示す。F.P鏡間隔3m，管内径7cm

(鏡 M_1 : $R_1 \fallingdotseq 20m$ ，出力結合孔 4(m/m)φ
〃 M_2 : $R_2 \fallingdotseq 5m$ ，縦同調 8mm

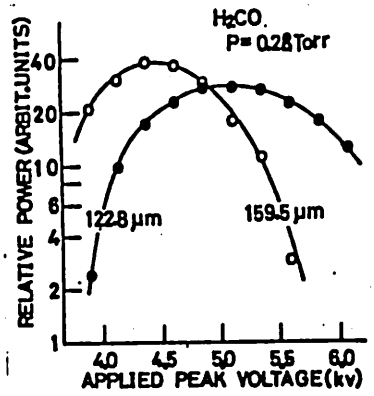
励起入力はDC 2～8KV，C = 0.5μFの繰返し2.5Hz充放電，電極間隔2.5m，先頭電流～30Aの放電励起を用いている。波長測定は12×8cm角，5本/mmのEchelette type回折格子を用い，波長の校正はH_2O 28μmの高次線を用い，この誤差は$\Delta\lambda \sim \pm 0.2\mu m$以内と見積れる。発振波長・出力と管内圧に或関係があり，実験した範囲は

H_2CO : (0.18～0.35 Torr
2.5～7.1 KV

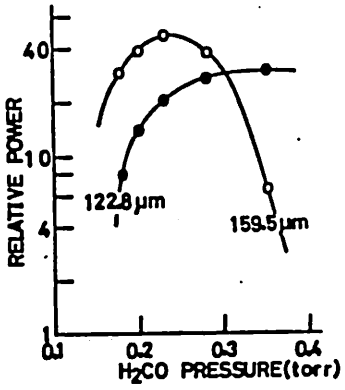
D_2CO : 上よりやや低圧，低入力が良好

であった。パルス繰返し周波数は2.5Hzとしたが，7.5Hzでは122μm，159μmの2本のみ発振し，60Hz，DCでは全く発振しなかった。管内の長

体の流速は約2m/secであった。強く同時発振するH₂CO 122.8μmと159.5μmの入力電圧依存性を第11図に、圧力依存性を第12図に示す。159μmは常に低入力、低圧力側でよく発振するのが特長で、又高圧力側で減少して、4Torrで0になるが、122μm線は高圧側で飽和傾向を示す。他の発振線の大部分は以上何れかの特長をもつので、これより、A群(122.8, 119.6, 125.9), B群(159.5, 155.1, 157.6, 163.8, 184.4)に分類した。残余の101.9, 170.2μm線は小出力のため不明である。各線の相対出力は同管のH₂O 118.59μm線の管内圧0.15Torrの最大出力を100とした相対値で表1の右端欄に示す。



第11図.
励起電圧尖頭値—出力



第12図
管内圧—出力

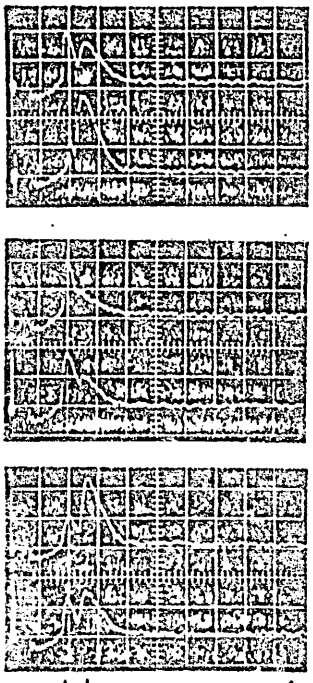
obs.λ_1 (μm)	d (μm)	cal.λ_2 (μm)	correlation (λ_1 and λ_2)	m (%)	group (A or B)	relative outputs
101.9 ±0.2	- - -			<10		0.4
119.6 ±0.2	2330. ±60	122.75	cascade	<90	A	14
	239.1 ±5	159.46	?		B?	
122.8 ±0.2	- - -			<10	A	102
125.9 ±0.1	2454. ±63	122.75	competitive	~70	A	1.4
155.1 ±0.2	2799. ±78	159.52	competitive	100	B	220
157.6 ±0.2	6797. ±160	159.45	cascade	>90	B	260
159.5 ±0.2	- - -			<10	B	154
163.8 ±0.2	2873. ±10	155. 159.26	cascade competitive	100	B	6.4
170.2 ±0.2	- - -			<10		0.6
184.4 ±0.2	- - -			~40	B?	3

表1. H₂CO. 発振波長. 内部関係. 出力相対値.

wavelength (μm)	correlation	m (%)	output*
[a]141.	-------	---	0.08
164.	-------	---	20
184.	cascade	---	12
190.		100	0.8
[a]228.	cascade	---	12
[a]237.		100	0.6

* , The outputs obtained for D_2CO 0.17 torr are normalized against the H_2O 118 μm output (100).

表2. D_2CO、発振波長、内部関係、出力相対値



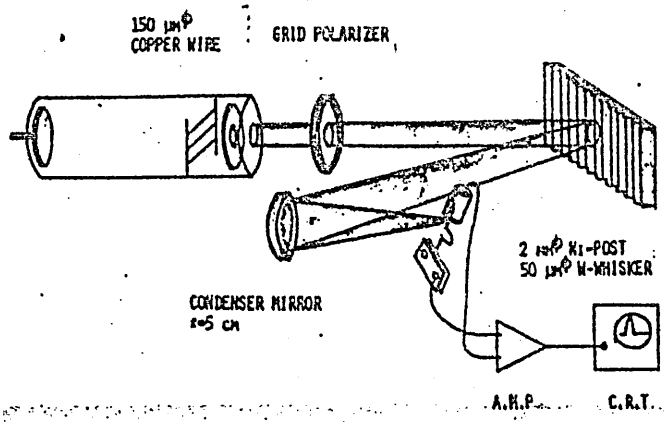
第13図. MOMでみた、内部競合関係

表2にD_2COでの値を示したが、H_2COに比べて小出力である。

パイロ検出器(JS-05)とNi-Wダイオードで測ったH_2CO 159μm線の出力は約30mWであった。λ=155μmと159μmの2線はcompetitiveな関係にあり、パルスの励起で一方が大きいと他方は小さくなる変化を示す(第13図)

2) 時間挙動

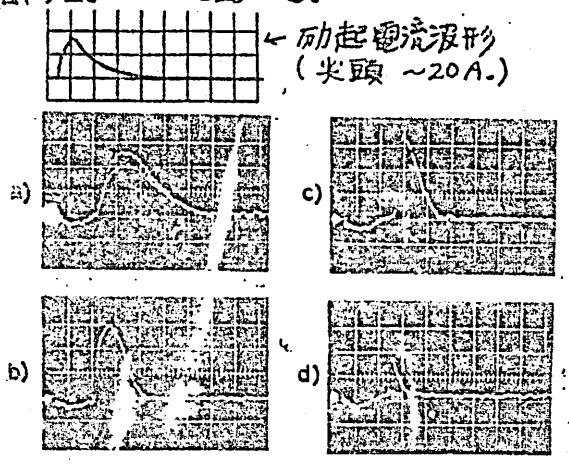
図14から、Grid Polarizerとcopper wire radderを除いた配置にする。M-O-M検出器の接触部に、回折格子で159.5μmの出力を選び、銀蒸



第14図. MOM検出器によるレーザー動作の観測配置図.

着した r=50m/m の凹面鏡で集光して、入力約15mVに対し出力1.5mVを得ている。これを～30dbの前段増巾器をへてCRTに画かせる。作製は容易であるがNi面，針先の研磨，接触圧等に影響され，特に機械的振動に弱さがある。これにより観測したパルス包絡線，Time delay，Time duration 等，レーザーパルスの時間挙動について述べる。

H_2COレーザーの全出力は励起時間巾10～40μsecのafterglowの終り頃の放電開始から30～50μsecに立上り，15～120μsec持続する。これらのてdelay，てdurationは励起入力，管内圧，同調位置に敏感に依存する。W線を回折格子の溝に並行になるようにし，200μmピッチの回折光を利用した。(図14)．122.8 159.5μm線は殆ど同時に発振開始するが，122μm線の立上りは他に比べてゆっくりしており(第15図)長いてdurationを持ち，これは120μsecを超える事もある。151.1，157.6μm線は殆ど同じpulse shapeで，159.5μm線の発振域で発振している。H_2CO 0.26Torr，4.9KV，30A励起でのてdelay，てdurationを表3に示した。



a) 122, b) 159, c) 155, d) 157 μm. 20μs/div
p = 0.3 torr, V=4.8 kV, C=0.5 μF.

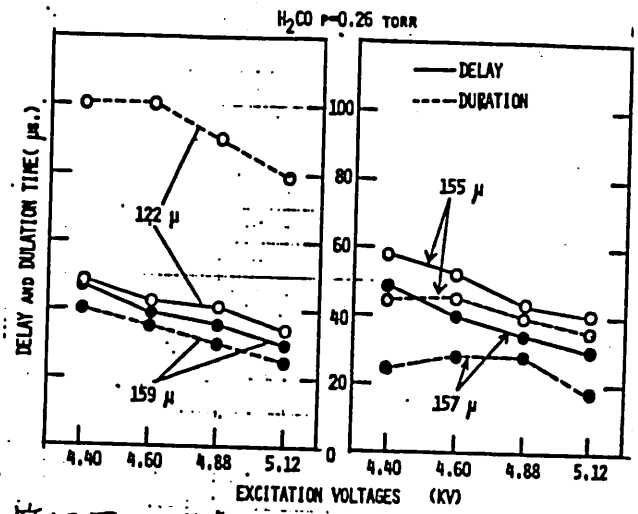
第15図．各波長の時間挙動

WAVELENGTH (μm)	DELAY (μs)	DURATION (μs)
119.6	43	25
122.8	40	90
155.1	43	40
157.6	35	28
159.5	35	30
163.8	45	20

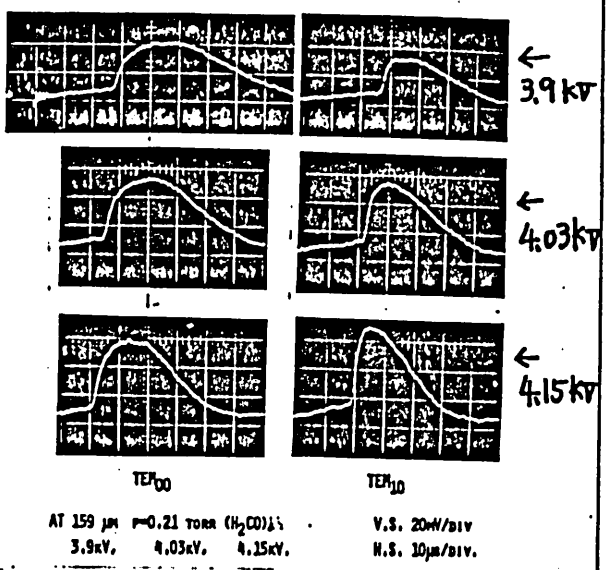
H_2CO p=0.26 torr, V=4.9 kV, C=0.5 μF
current width=50 μ s.

表3．各波長のDelay，Duration time.

図16に4本の発振線についての励起電圧依存性を示した。励起電圧の増加と共に，τ delay，τ duration 共に短かくなっていく傾向を示している。又V一定の時，管内圧の増加はτ delayを大きくし，τ durationをへらす。分子の励起パルスから後，反転分布形成迄のτ delayが長い事は，H_2Oの様な電子からの直接励起でなく，HCNに近い機構を内包すると思われる。レーザー立上り時には電子が存在してをり，rise timeからの検討は出来ないが，decay timeはほぼレーザー上準位の緩和時間と考えられ，これは159，155μm線で20～40μsec，122μm線で40～50μsecと異なっている結果になった。励起パルス電圧の変化に対する00，01モードの出力変化例を第17図に示す。



第16図 励起電圧 — Delay. Duration time.



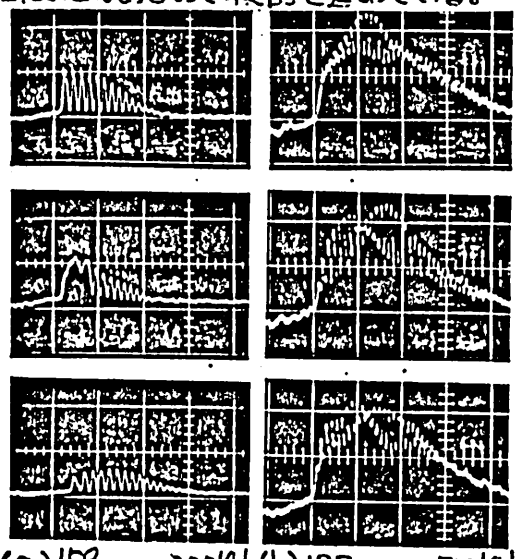
第17図. 入力変化に対する出力の影響

6. 低周波ビートの観測

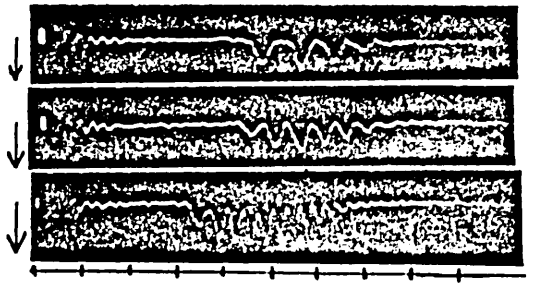
M-O-Mで観測して，H_2COからのパルス波形は同一波長でも、励起，圧力，同調等によって種々に変化することを述べたが，下図のような一見パルゼーションともとれる様な振舞を示すこともある。このような波形は、高利得の159，122μm線で高次横モードでの動作の場合に限定される。圧力，励起，同調によってもわずかに変わるが159μmで100～400KHz，122μmで500～1000KHzでみられる。通常低周波ビートのようにみえるが、高励起ではスパイク状になる。122μm線ではこのビートが更に～10MHzで変調されていることもある。この装置の$N_F \simeq 3$ (160μm)であり，$TEM_{q+1,n,m-1}$モードに対する共振周波数$\nu_{q,n,m}$は次の式を満たす。

$$\nu_{q,n,m} = c/2L \left\{ q + (n+2m-1)/\pi \cdot \cos^{-1}\sqrt{(1-L/R_1)(1-L/R_2)} \right\}$$

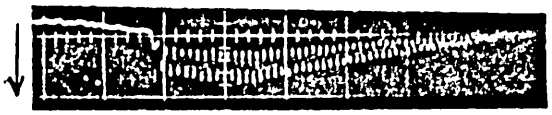
今、TEM_{q00}モードと高次横モード$TEM_{q,n,m-1}$とのモードビート周波数は($\nu_{q,n,m} - \nu_{q,0,1}$)で与えられる。($L=3m$，$R_1=5m$，$R_2=20m$)としたとき、$\nu_{q00}-\nu_{q10}=14.9MHz$ $\nu_{q00}-\nu_{q20}=25.8MHz$，$4\nu_D \simeq 5MHz$ (160μm)であり，この横モード間ビートでは～1MHz以下では起こり得ない。しかし，TEM_{20}と01は縮退しており，このビートの可能性が考えられる。他に，122，159μmの近接線の存在の可能性もあり，又プラズマの時間変化もあるので検討を進めている。



(a) 159μm ～300KHz (b) 122μm ～500KHz
(同一条件での各パルス波形) 20 μS/div.



(c) 159μm (上) ～120 (中) ～200 (下) ～300 KHz 10μS/div



(d) 122μm ～800 KHz. 10 μS/div

低周波ビートの出力波形

7. Walking Phenomena

鏡をゆっくり縦同調しながら発振を観測すると励起パルスから発振立上り迄の遅延時間τ delay が鏡の位置により変化する現象である。

今、縦モード次数 q で鏡間長 L のレーザーが周波数 ν_c で共振し、この時の媒質の屈折率を n とすると

$$\nu_c = \frac{c}{2Ln} q \quad \text{----------} \quad (1)$$

繰返し 2.5 Hz の放電励起により、プラズマが発生し、消滅過程で発振する。(第15図) この間 L が ΔL (1.07 μm / 0.4 秒) 減少したとすると

$$\frac{\Delta\nu_c}{\nu_c} = -\frac{\Delta L(t)}{L} - \frac{\Delta n(t)}{n} = -\frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{\frac{m\varepsilon_0\omega^2}{Ne^2}-1}\frac{\Delta N}{2N} \quad \text{-----} \quad (2)$$

N：プラズマの原子密度

先づ、右辺第2項を省略して話を進めると第1項により毎パルス当り $\Delta\nu_c$ = 0.67 MHz 増加する。

ガスレーザーの発振 threshold の式

$$N_{th} = \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1\right) = \frac{8\pi n^2 t_{sp}}{\lambda^2 g(\nu)}\left(\alpha - \frac{1}{l}\ln r_1 r_2\right) \quad \text{----} \quad (3)$$

$$t_{sp} = A_{21}^{-1}$$

$$g(\nu) = \frac{\Delta\nu_0}{2\pi\left[(\Delta\nu_c/2)^2 + (\nu-\nu_0)^2\right]} \qquad \text{規格化} \quad \text{-----} \quad (4)$$

α：利得　　$r_1 r_2$：鏡反射率

ν_0：分子中心周波数

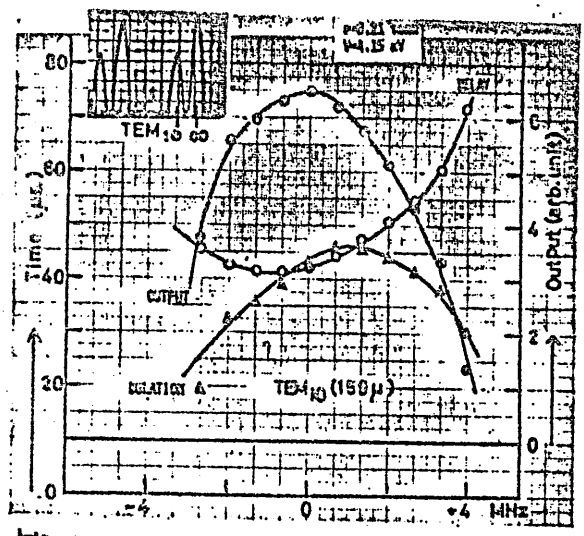
(4) ⟶ (3) より

$$N_{th} \propto \left[(\nu_c-\nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_c}{2}\right)^2\right] \quad \text{-------} \quad (5)$$

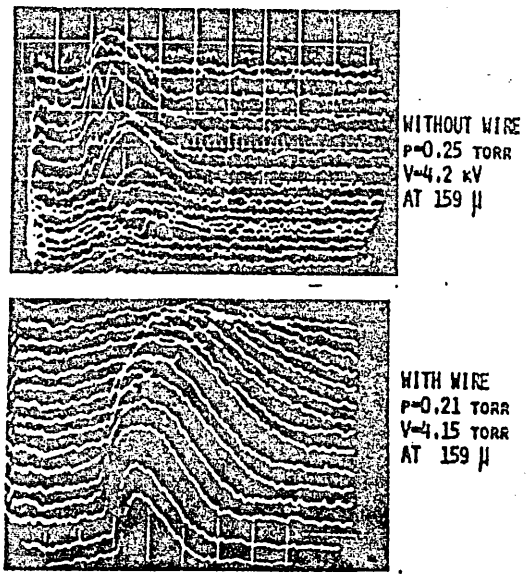
(5) 式より N_{th} は $\nu_c = \nu_0$ で最小、detuning の2乗に比例して対称的に大きくなることがわかる。一方 (2) 式右辺第2項は N の存在が n をより小

さくして、ν_cを大きくするので、この効果は(5)式の$(\nu_c-\nu_0)$をより大きく、$\nu_c<\nu_0$の時は、打消し成分を生じて小さくする事になり、この結果、$\nu_c>\nu_0$では大きなN_{zh}が必要でてdelayが大きく、$\nu_c<\nu_0$ではてdelayが小さくなる事になる。励起入力を大きくすると、Nの増加から非対称性が著しくなり、一方へ歩くように見え、又モード間では低損失モードのてdelayが小さい結果になる。

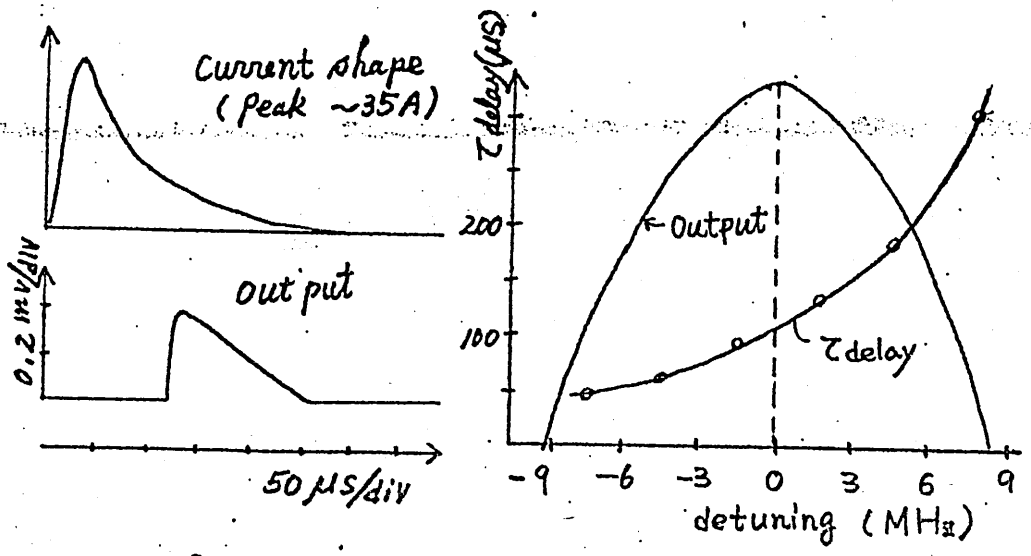
以上、てdelayが共振器長に依存して変化する事を述べた。管内に三本ワイヤーの格子を押入し、完全直線偏光発振させ、鏡を連続同調しながら毎パルス出力を続けて、CRT上を下から上へ移動させてとったのが図18である。此の間159μmのTEM$_{10}$の1つのモードを、周波数の低い側から、中心周波数を経て、高い方へと、0.67MHz/パルスの割合いで、同調している。このデータから、横軸の周波数に対するてduration、てdelay、出力を求めたのが図19である。HCN 337μmについての結果を図20a,bに示す。



第19図.
同調一出力, τdelay, τduration
H_2CO 159μm, TEM$_{10}$ にて.



第18図. "Walking phenomena
(上) ワイヤーなし.
(下) ワイヤーあり.



(a) 励起電流,出力波形.　　(b) τ_{delay} − 出力 相関.

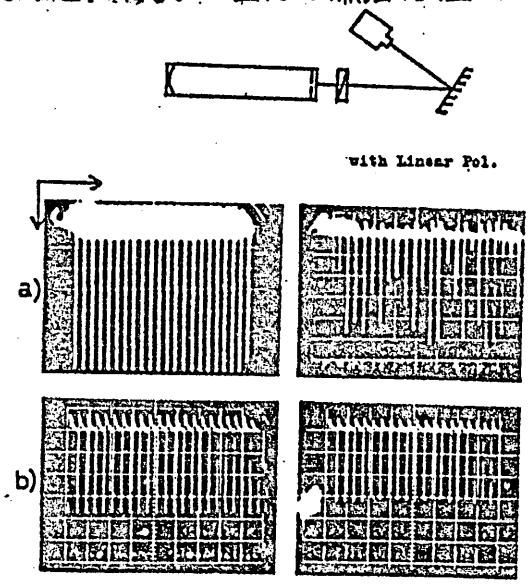
第20図. HCN 337μm の waking phenomena.

(V = 4.7kV, peak current ~35A.
$CH_4 : N_2 = 4:3$ (total 0.37 torr) 低速流し.

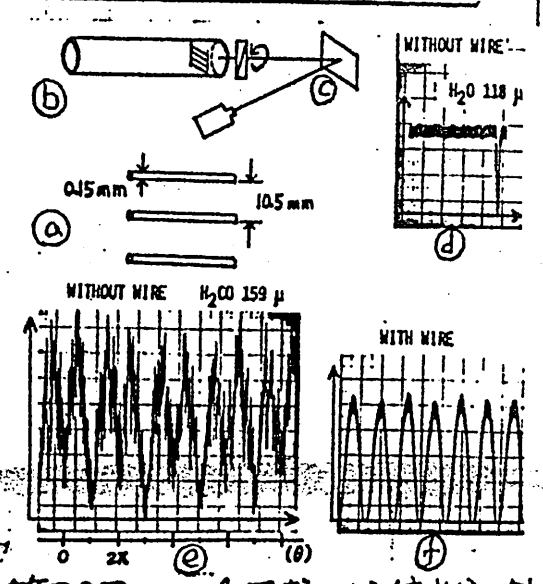
8. H_2CO の偏光

H_2CO レーザー出力を回折格子を使はずに観測していると，Golay cell 出力は毎パルス安定しているのに，M-O-M 検出器出力は可成り不揃いになる。光源を H_2O 118 μm に替えるとこの様な事は起らない。これは M-O-M 検出器が wire 方向の偏光成分を検知する事と，H_2CO の出力の偏光特性に関係があると考えた。

図21の a)段は H_2CO，b)段は H_2O の発振を Golay cell で検出したもので左側は Polarizer なしで，両者共安定している。右側は上図の様に Polarizer を押入した場合で，下の H_2O 118 μm は安定しているが，上の H_2CO 159 μm は不安定である。励起を下げ，同調により，ほぼ単一波長発振を得てをり，又，Polarizer は FP 鏡表面との干渉を避ける為，やや傾けてある。Polarizer を入れる事は M-O-M の直線偏波感度と同じになる。Polarizer の回転は H_2O 118 μm 線には影響しない。一方 H_2CO 159 μm 線は不揃いのまま全体の出力に大小の変化を示す。これから H_2CO 線がパルス毎に変化する直線偏波であると考えられる。次に図22(a)の様なワイヤーを3本ピンとはって(b)の様に管内に組込んだ。(c)は単なる反射板で，回折格子ではない。ワイヤーを組込まないで Polarizer をゆっくり回転させた時の Golay 出力



第21図．固定 pol による Golay 出力．

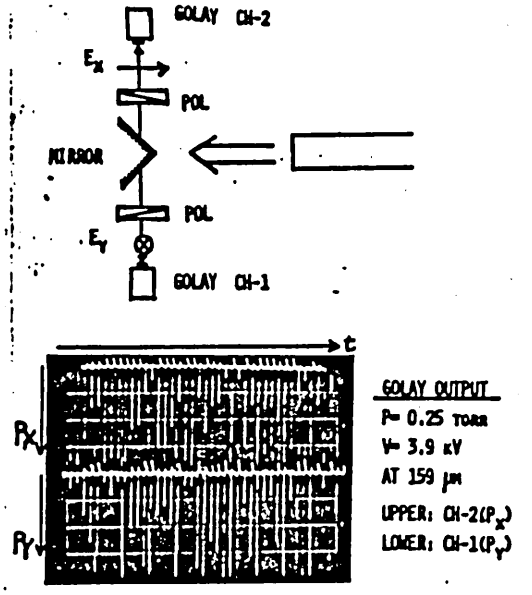


第22図．pol 回転による偏光実験

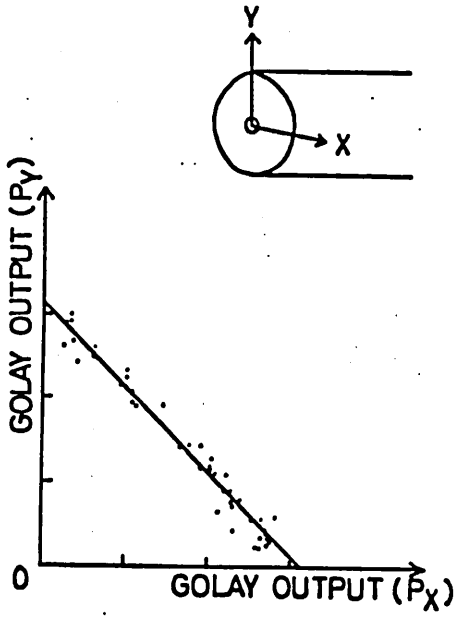
は，H_2O 118 μm では変化しない(d)が，H_2CO 159 μm は変調されており，約85～95%の偏光性を示し，全体としては偏光方向が決まっているようである(e)。先のワイヤーを管内に組込むと，これによる共振器の loss 異方から，159 μm 線の出力は完全直線偏光し，その方向はワイヤに垂直であった(f)。尚この時，H_2O 118 μm 線は約50%の偏光を示した。又，ワイヤーを1本にしても159 μm 線は完全に偏光した。変調曲線はきれいになっており，最大透過 Polarizer 角に固定した毎パルス出力は不揃いが消失する。尚これは 125，169 μm 以外の8本の線で観測された。電磁場下でのこのような偏光現象は He-Ne の原子レーザーについてのゼーマンレーザーの理論の中で，CW 動作について取扱われている。この様な分散性媒質中で，Cavity，Phase 異方が存在する時，$J > \frac{1}{2}$ での $\Delta J = \pm 1$ の遷移弱結合発振の "Polarization Preference" は直線性を示す。H_2O 118 μm は $\Delta J = 0$ 遷移で，理論から，円偏光を示す事がわかる。それは上の実験結果をよく説明している。このことから，H_2CO の8本の遷移は $\Delta J = \pm 1$ と思われる。

9. 偏光角の回転

先の図21で示した不揃いの様子を図23(a)のように、レーザー光を2つのPolarizerでそれぞれ直交成分(実験室に水平X軸、垂直Y軸をとる)に分けた毎パルスのGolay出力を2現象でCRT上で観測した結果を図23(b)に示す。この30数パルスのX、Y出力をベクトル的に合成したものが図24である。各点と原点を結ぶ方向にほぼ偏光していると考えてよいが、パルス毎に偏光の方位角を変えている。図からX軸に近い方向に確率的に多く偏光しているようである。この方向に図22(e)の変調のMaxが対応しているものと思われる。各点は傾き(−)1の直線にのるが、これは全反射パワーが偏光方向に無関係にほぼ一定であることを意味している。これの早い動作をみるため、図25(a)のように、1枚のPolarizerで直交する偏光にわけ2台のM-O-Mを配置した。結果は(b)に示す。各々の写真は各パルスのX、Y各出力波形を示している。ここで、毎パルス偏光のX、Y成分の波形が異っており、最大Intensityを与える時間に違いを示している。即ちこの場合、X軸出力の方が早くピークに達している。これらのうち典型

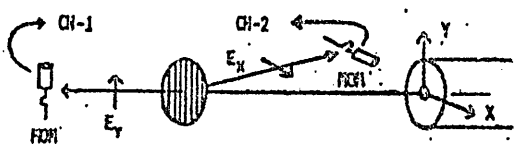


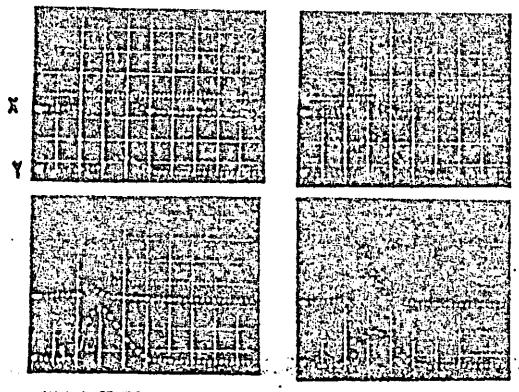
第23図. 偏波のX-Y成分のGolay出力



第24図.

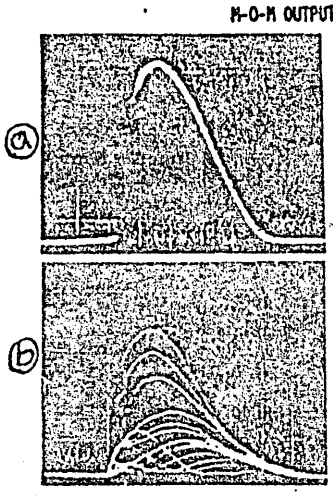
的な結果から$|E_x|$, $|E_y|$を仮定して、その時間成長を図26に示した。合成、電場の方向ベクトルは時間と共に、X軸からY軸へむけ約75°回転している。この間50μsecである。このことは、毎パルスのレーザーで任意の方位角で発振するが、更に、その方位角が発振時間内に最大で90°回転することを意味している。更にみやすくするため、図25でE_y方向のみを、重ねどりしたのが図27(b)(at 159μm)であり、これからピークの位置が異っている様子がわかる。同様に122μmの場合(c)では偏光がほとんど回転していない。図(a)はwireを





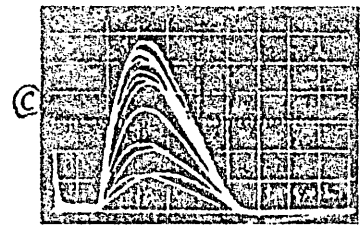
MOM OUTPUTS:
H_2CO 159 μm, P=0.23 TORR, V=3.7 kV, V: 0.2 mV/DIV, H: 20 μs/DIV.

第25図. MOMによる偏光X-Y成分の同時観測



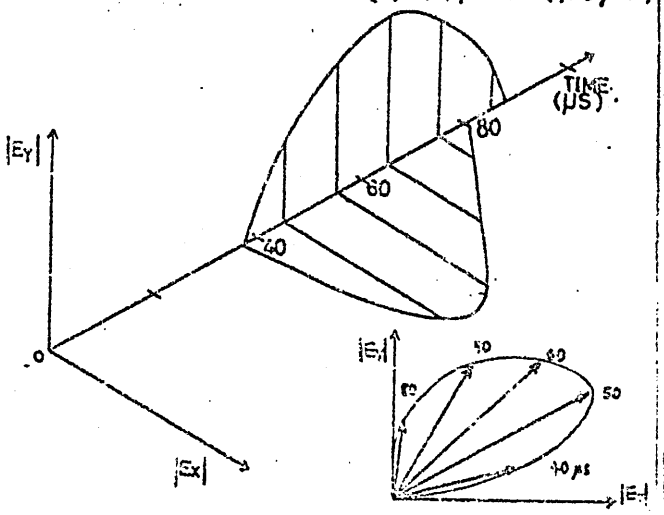
WITH WIRE
P= 0.26 TORR
V= 3.7 kV
159 μm, TEM_{00}
V: 0.2 mV/DIV,
H: 10 μs/DIV.

WITHOUT WIRE
P= 0.23 TORR
V= 3.5 kV
159 μm, TEM_{00}
V: 0.2 mV/DIV,
H: 10 μs/DIV.



WITHOUT WIRE
P= 0.3 TORR
V= 4.4 kV
122 μm, TEM_{00}
V: 0.2 mV/DIV,
H: 20 μs/DIV.

第27図. MOM出力 (Y方向のみ). (a) ワイヤーあり(159μm) (b) ワイヤーなし(159μm) (c) ワイヤーなし(122μm)



第26図. 偏光角の回転.

押入して偏光を決めた場合である。10数パルスの重ねどりであるが毎パルス同一波形で偏光方位角は回転していない結果を得た。

10. 結語

自作のM-O-Mダイオードの安定性については実験始めに毎回調整しなければならないので、調子の悪い時はここ2~30年の技術進歩に逆行した感になるが、新しいW針に取替えれば大低うまくゆき、動かさなければ、1日はそのまま使えて便利である。V-I曲線について、2次成分が小さいので、Video det. に好適とは云い難いが、馴れると毎日経時変化も認め難い状態に迄すぐに調整出来る。酸化防止のグリーンガス等を併用して、経時変化≒0になるかどうか、或は他金属との組合せで能率向上が得られるか、及びヘテロダイン式利用の高周波混合素子としての応用は今後の課題である。

我々の所でこれまでに検出に利用した最短波長はH_2Oレーザーの$\lambda = 47\,\mu m$であるが、もう少しは短波長へも使へそうで機会があれば試みたい。

レーザーパルスの振舞について詳しい観察が可能になり、整理が追いつかないが、今后、定量的検討をして、レーザー媒質の動作の本質の追求とH_2COレーザーの準位固定に役立てたい。

11. 謝辞

研究室の皆さんの御協力に感謝する。特に、曽我部伸助手院生 北川幹男，研究生 中村稜の諸氏に終始御尽力になった事を深謝する。

(文 献)

1) D.G. Mcdonald, A.S. Risly, J.D. Cupp & K.M. Evenson
Applied Phys. Lett 20 (1972) 296

2) V. Derean, D. Sokoloff, A. Sanchez and A. Javan
Applied Phys. Lett 15 (1969) 398

3) D.A. Denning, R.F. Peterson and K.M. Evenson
Applied Phys. Lett 26 (1975) 510

4) S. Okajima and A. Murai
IEEE J. Quantum Electron 8 (1972) 677

5) Y. Horiuchi and A. Murai
IEEE J. Quantum Electron 12 (1976) 547

輻射科学研究会資料

$LiNbO_3$ 薄膜光導波路における導波ー放射モード結合の解析と変調器への応用

岡村 康行
山本 鋭彦
牧本 利夫
（大阪大学 基礎工学部）

昭和52年 7月8日

1. まえがき

誘電体薄膜光導波路におけるモード結合現象は光集積回路素子を構成する上で非常に興味深い現象であり，これまでにも多くの報告がなされているが，それらの大部分は導波モード間の結合を利用したものである。これに対し，最近導波－放射モード結合形素子に関する報告が見られるようになり，例えば，同一偏波モード結合形の音響光学偏向器[1,2]あるいは電気光学効果による直交偏波モード間の結合を利用したモード変換器[3-6]の提案ならびに実験結果の報告がある。

ところで，この種のモード結合現象は，結合モード方程式によって記述されるが，放射モードが連続スペクトルを持つため，位相定数で積分する項を含み，さらに結合係数が位相定数に対し複雑な分布をなすため，それを厳密に解くことは極めて困難であり，従来の報告では，いわゆる摂動解法[7]が用いられていた。この方法の特徴は，変換された放射モードと導波モードとの再結合を無視すると同時に，結

合係数の分布も考慮しないということであり，取扱いは非常に簡単になる。しかし，当然のことながら，結合係数が急峻な変化をしたり，また放射角度が小さく，従ってモード間の空間的な分離がゆるやかな場合には，この方法は適用できず，このようなときにも適用可能となる解法が望まれていた。

本文では，光学軸が膜面内にあり，伝搬方向が光学軸とずれたX（あるいはY）－cut $LiNbO_3$ 導波路を例にとって，結合係数の分布を考慮した結合モード方程式の解析的な取扱いについて述べ，厳密解と考えられるRunge－Kutta－Gill法による数値解との比較により，この解法が摂動解法より近似度がよいことを確め，さらに摂動解法の近似の範囲についても検討している。

さらに本文では，この導波路における導波－放射モード結合を利用した強度変調素子を提案し，その特性例を示す。電気光学薄膜導波路を用いた導波－放射モード結合形変調素子では，これまで主として，Z－cut結晶が用いられていた。[3-6] この場合には，電

界を印加して始めて導波ー放射モード結合が生じ，特性曲線はガウス形となって，直線変調を得るためには直流バイアスを必要とする。これに対し，本文で述べる素子は，軸ずれ伝搬による後動モード結合特性を印加電界によって変調するという点に特徴があり，無バイアスで直線強度変調が可能となる。

2. 導波路の構造と基本系固有モードの特性

本文では図1に示すような X－cut $LiNbO_3$（$n_o = 2.286$, $n_e = 2.200$, $\lambda = 0.63\mu m$）板に Ti などの金属を内拡散した薄膜導波路を取扱う。その光学軸は膜面内にあり，伝搬方向が光学軸と角

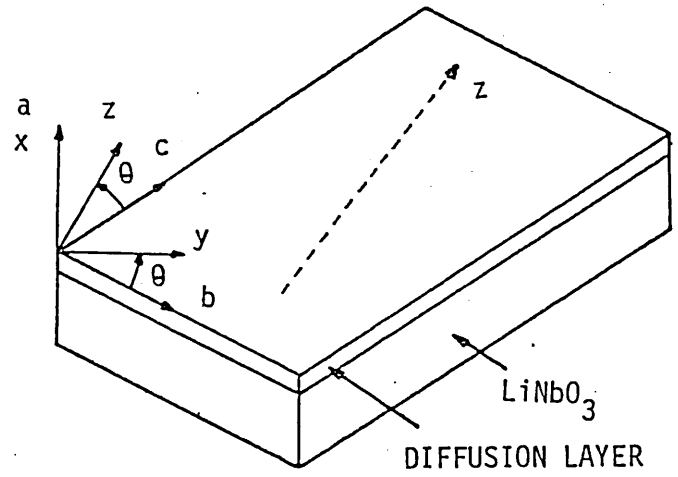


図1　X－cut $LiNbO_3$ 薄膜光導波路（伝搬方向は光学軸と θ だけずれている）

度θ（以下伝搬角と呼ぶ）ずれるとする。ただし系は無損失で，伝搬方向をz方向とする。さらに，導波路が存在する結晶表面層の屈折率は，深さ方向（−x方向）に単調減少分布をなすが，計算に当っては表面からdまで一定値をとる階段状分布とした。なお上部層を空気としている。

このような系において，導波路の座標系（x, y, z）に対する基板および薄膜の比誘電率テンソルは，次式で表わされる。

$$\mathbb{K}^i = \begin{bmatrix} K_{xx}^i & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy}^i & K_{yz}^i \\ 0 & K_{zy}^i & K_{zz}^i \end{bmatrix} \quad (i = F, S) \qquad (1)$$

ただし，添字F，Sはそれぞれ薄膜および基板の値であることを示す。比誘電率テンソルの各成分は，次式のように常屈折率，異常屈折率および伝搬角と関係づけられる。

$$K_{xx}^i = n_o^{i\,2} \qquad (2-1)$$

$$K_{yy}^i = n_o^{i\,2}\cos^2\theta + n_e^{i\,2}\sin^2\theta \qquad (2-2)$$

$$K_{zz}^i = n_o^{i\,2}\sin^2\theta + n_e^{i\,2}\cos^2\theta \qquad (2-3)$$

$$K_{yz}^{i} = K_{zy}^{i} = (n_e^{i2} - n_o^{i2}) \sin\theta \cos\theta \quad (2\text{-}4)$$

$$(i = F, S)$$

ここに n_j^S はバルクの屈折率，そして n_j^F は，結晶表面での屈折率増加分を Δn_j とすれば，

$$n_j^F = n_j + \Delta n_j \qquad (j = o, e) \quad (3)$$

で表わされる。

この系の固有モードは結晶の主軸と導波系の座標軸とが一致する場合（$\theta = 0°$，$90°$）を除いて，一般にはハイブリッドモードになり，取扱いが非常に複雑になる。神谷ら[8]はこの場合の固有モードを直接波動方程式から求め，その伝搬特性を調べている。しかし，式(1)の比誘電率テンソルの非対角成分が対角成分に比べて充分小さいので，文献(9)に従い，このような系を対角成分のみから成る導波系（以下基本系と呼ぶ）からの摂動系と考え，この摂動系のモードを基本系の固有モードの結合としてとらえることができる。本文ではこの結合モード理論に基づいた解析を行う。

以下解析の基礎となる基本系の固有モードについ

て考察する。このような系には，等方性の系の場合と同じく，TEモードとTMモードとが存在可能である。ただし，伝搬角が変ると，比誘電率テンソルの対角成分 K_{yy}，K_{zz} が変化し，これによってTMモードは殆んど影響を受けないが，TEモードの位相定数 β の分布の様子が著しく変化する。図2は，θ を $0°$，$20°$，$90°$ とした場合，各偏波の固有モードの位相定数の分布を示したものである。この図より，θ が $0°$ すなわち伝搬方向と光学軸とが一致する場合，両偏波の位相定数の存在範囲は完全に一致

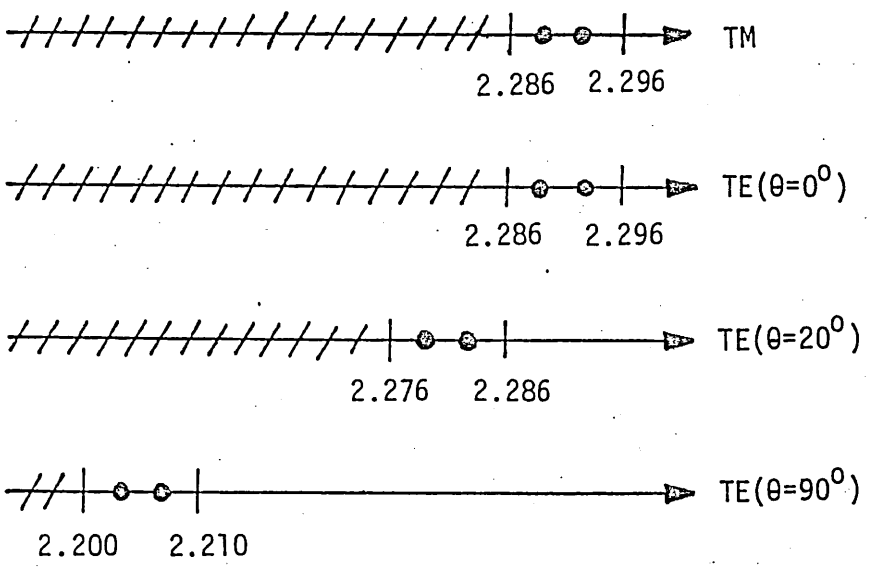


図2　固有モードの等価屈折率 β/k_0 の分布
（●：導波モード，////：放射モード）

し，90°の場合，最大に分離し；20°付近からTE導波モードと位相整合がとれたTM放射モードが存在するようになることが分かる。

3. 導波ー放射モード結合の解析

本節では，図1の系において伝搬角$\theta \geq 20°$のとき，すなわちTE導波モードとTM放射モードとが位相整合している場合の導波ー放射モード結合現象を結合モード理論[10]に基づいて解析する。なお，最近内藤ら[11]は拡散形$LiNbO_3$導波路を用いた曲り線路において，予想された値より大きな損失を測定しているが，これは本節で述べるような導波ー放射モード結合に起因するものであると考えられる。

結晶軸回転によるTE導波ーTM放射モード間の結合の様子は次式のような連立の微積分方程式によって表わされる。

$$\frac{dA}{dz} = \int_{k_0}^{k_0 n_0} \frac{K_{zz}^{s}}{K_{xx}^{s}} K(\beta) \frac{\beta}{\rho} B \exp[-j(\beta-\beta_g)z]\, d\beta \quad (4\text{-}1)$$

$$\frac{dB}{dz} = -K^{*}(\beta)\, A \exp[+j(\beta-\beta_g)z] \quad (4\text{-}2)$$

ここにA, BはそれぞれTE導波モード（位相定数：β_g），TM放射モードの規格化複素振幅である。またk_0は真空中の平面波の位相定数そしてςはTM放射モードに対する基板内での横方向（x方向）位相定数で，次式のように縦方向位相定数βと関係づけられる。

$$\varsigma = \left[\frac{K^s_{zz}}{K^s_{xx}} \left(K^s_{xx} k_0^2 - \beta^2 \right) \right]^{1/2} \qquad (5)$$

そして$K(\beta)$は次式で与えられる結合係数である。

$$K(\beta) = \frac{-j\omega\varepsilon_0}{4P} \int_{-\infty}^{\infty} K^*_{yz}\, e_z^{TM*}\, e_y^{TE}\, dx \qquad (6)$$

ここにωは角周波数，ε_0は真空の誘電率，Pは固有モードの規格化の際用いた定数，$e_{y,z}$は各固有モードの断面内界分布関数である。なお式(4-1)の右辺の積分の範囲としては位相整合条件を考慮してサブストレートモードの領域を選んでいる。ここで入射端（$z=0$）に導波モード（いまの場合，TEモード）が入射してきたものとすると，境界条件は次のようになる。

$$A(0) = A_0 \ , \quad B(0,\beta) = 0 \qquad (7)$$

上記の条件を考慮して式(4-2)を解くと

$$B(z,\beta) = -\int_0^z K^*(\beta)\, A(z') \exp[+j(\beta-\beta_g)z']\,dz' \quad (8)$$

となり，さらにこの式を式(4-1)に代入し，積分順序を入れ替えると，次式が得られる。

$$\frac{dA(z)}{dz} = -\int_0^z A(z')\, F(z-z')\,dz' \quad (9)$$

ここに関数 $F(z)$ は次式で定義される。

$$F(z) \triangleq \int_{k_0}^{k_0 n_0} K(\beta) \exp[-j(\beta-\beta_g)z]\,d\beta \quad (10)$$

ただし

$$K(\beta) = \frac{K^s_{zz}}{K^s_{xx}} \, |K(\beta)|^2 \frac{\beta}{s} \quad (11)$$

さらに式(9)をラプラス変換することにより

$$a(p) = \frac{A_0}{p + f(p)} \quad (12)$$

が得られる。ここに，p はラプラス変数，$a(p)$，$f(p)$ はそれぞれ $A(z)$，$F(z)$ のラプラス変換である。そして式(12)を逆ラプラス変換することにより，$A(z)$ が求まる。しかしながら，一般に $K(\beta)$ が位相定数の変化に対し，複雑な多峰分布を持つので，このままでは取扱いが極めて困難である。そこで $K(\beta)$ を (i) 一定値($=K(\beta_g)$)，および (ii) ローレンツ分布(中心：β_0)で置き換える近似を行う。さらに式(10)において右辺の積分の範囲を $-\infty < \beta < +\infty$ に拡張

する。以下では (i) を一様近似 (ii) をローレンツ近似と呼ぶ。

(i) 一様近似

$K(\beta_g)=K$ と置くと，式(10)より

$$F(z) = \pi K \delta(z) \tag{13}$$

が得られる。ここに $\delta(z)$ は Dirac のデルタ関数である。さらにこの式をラプラス変換すると次式が得られる。

$$f(p) = \pi K \tag{14}$$

式(14)を式(12)に代入し，さらに式(12)を逆変換すると

$$A(z) = A_0 \exp(-\pi K z) \tag{15}$$

が得られ，従って，導波モードの電力変化は

$$P(z) = P_0 \exp(-2\pi K z) \tag{16}$$

となる。この結果は Marcuse が放射モードから導波モードへの再結合を無視するという近似の下で求めた摂動解法の結果[7]と一致する。

(ii) ローレンツ近似

次に導波モードの位相定数 β_g 近傍の $K(\beta)$ の 1

つのピークを次式のような $\beta=\beta_0$ に中心を持つローレンツ分布で置き換える。ただし、一般には $\beta_g \neq \beta_0$ である。

$$K(\beta)=\frac{a}{(\beta-\beta_0)^2+b^2} \tag{17}$$

定数 a, b の決定にはいろいろな方法があるが、ここでは、2つの曲線のピーク値と半値幅が一致するようにする。式(17)を式(10)に代入すると

$$F(z)=\frac{\pi a}{b}\exp(-bz)\exp(+j\delta z) \tag{18}$$

が得られる。ここに

$$\delta=\beta_g-\beta_0 \tag{19}$$

さらに $F(z)$ をラプラス変換することにより次式が得られる。

$$f(p)=\frac{\pi a/b}{p+b-j\delta} \tag{20}$$

式(20)を式(12)に代入し、$a(p)$ の逆変換をとると

$$A(z)=A_0\exp(-gz)\left(\cosh gz+\frac{g}{q}\sinh gz\right) \tag{21}$$

が得られる。ただし、

$$g=(b-j\delta)/2 \tag{22-1}$$

$$q=\left[\frac{b(b-j\delta)^2-4\pi a}{4b}\right]^{1/2} \tag{22-2}$$

式(21)より導波モードの振幅は振動しつつ減衰することが予想されるが，定数 ξ，ζ が一般には複素量となり，取扱いが複雑となるので，以下では導波モードの位相定数が $K(\beta)$ のピークの位置に一致する場合すなわち $\delta=0$ のときについて考察を行う。

まず $4\pi a > b^3$ すなわち $K(\beta)$ のピーク値が半値幅に比べて大きい場合，式(21)は

$$A(z) = A_0\sqrt{1+(b/2c)^2}\exp(-\tfrac{b}{2}z)\cos(cz+\psi) \quad (23)$$

となる。ここに，

$$c = \left[(4\pi a - b^3)/b\right]^{1/2} \quad (24)$$

$$\psi = -\mathrm{Tan}^{-1}(b/2c) \quad (25)$$

式(23)から明らかのように，導波モードの振幅は減衰振動する。

一方，$K(\beta)$ の半値幅がピーク値に比べて大きく，$b^3 > 4\pi a$ となるときには，式(21)は

$$A(z) = A_0\sqrt{1-(b/2c')^2}\exp(-\tfrac{b}{2}z)\cosh(c'z+\psi') \quad (26)$$

単調減少となる。ここに

$$c' = \left[(b^3 - 4\pi a)/b\right]^{1/2} \quad (27)$$

$$\psi' = +\mathrm{Tanh}^{-1}(b/2c') \quad (28)$$

さらに $b^3 \gg 4\pi a$ のときには

$$A(z) \cong A_0 \exp[-\pi(a/b^2)z] \tag{29}$$

となる。すると電力減衰定数は

$$2\pi(a/b^2) = 2\pi K(\beta)\big|_{\beta=\beta_g} \tag{30}$$

となるので，一様近似解と一致する。

以上の結果より，$K(\beta)$ の分布が幅のせまいインパルス状の関数になる場合，ピーク付近の放射モードは導波モードのような性質を持つのに対し，$K(\beta)$ の分布がなだらかになると，その性質は失なわれ，導波モードは単調に減少することが分かる。

4. 放射モードへの結合による導波モードの損失

以下では図1の $LiNbO_3$ 導波路において膜厚を5 μm，結晶表面での屈折率の増加分を 0.01 とする。この導波路には，TE，TMモードともに2次モードまで存在する。まず伝搬角 θ を 15° とし，位相定数 β に対する TE_2 モードの位相定数近傍の $K(\beta)$ の分布曲線とローレンツ分布で置き換えた曲線をプロットしたものを図3に示す。この図より両者は裾の部分を除いて比較的よく一致し，ローレンツ

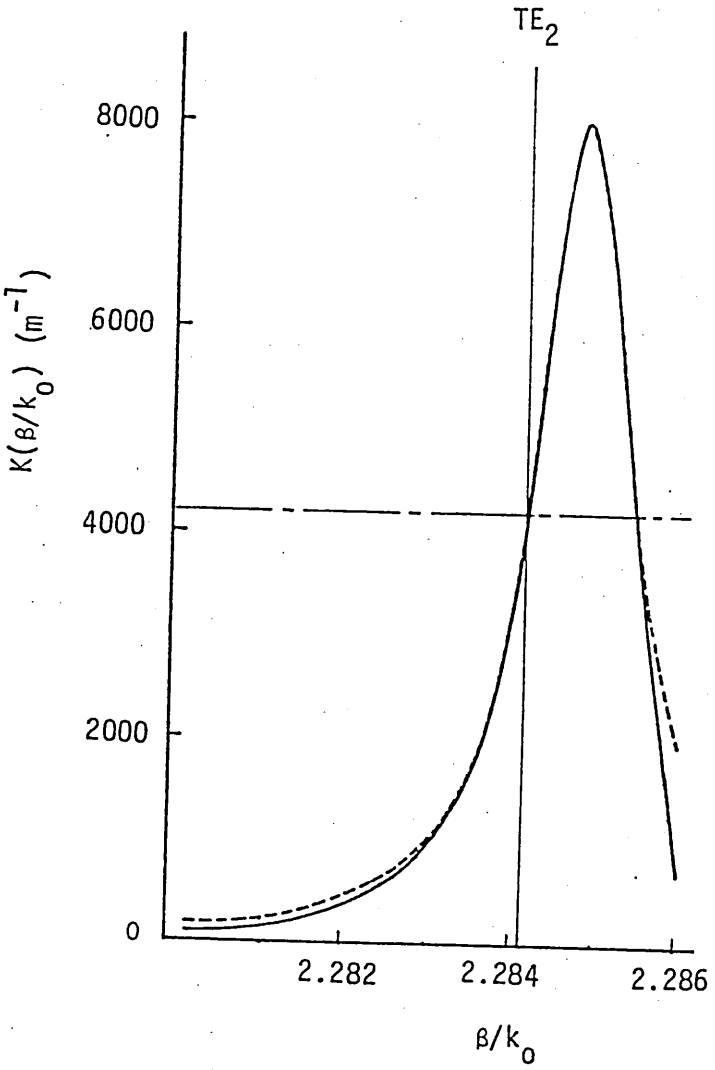


図3　TE_2モード－TM放射モード結合における$K(\beta)$の分布（実線：式(11)，破線：ローレンツ近似，一点鎖線：一様近似）
$d = 5\mu m$，$\Delta n = 0.01$，$\theta = 15°$

分布で近似することが妥当であると考えられる。図4は一様近似解法，ローレンツ近似解法および

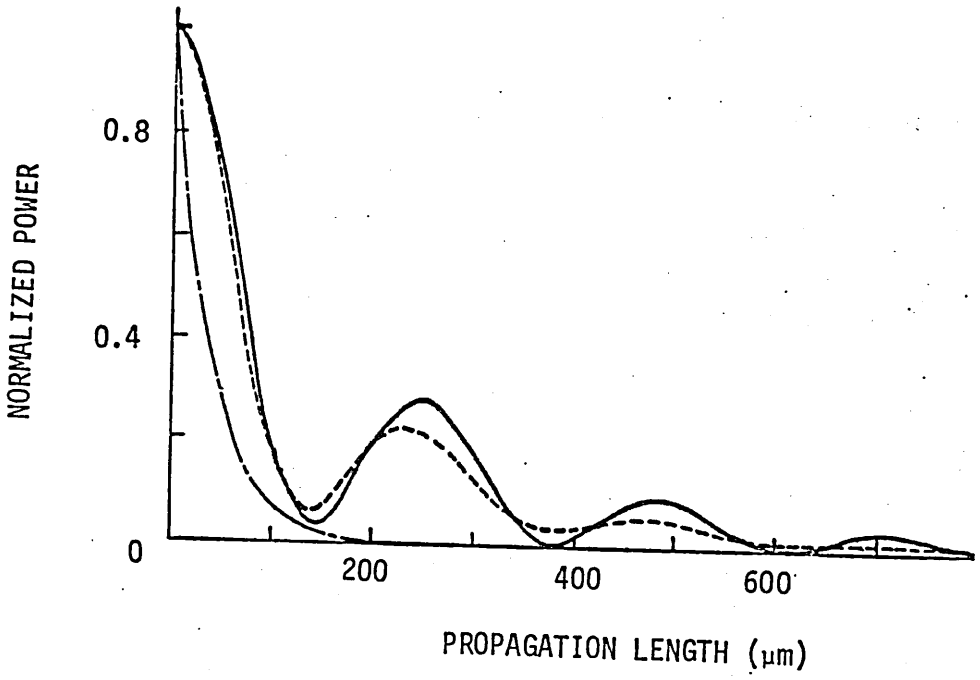


図4　TM放射モードへの結合によるTE_2モードの電力変化（実線：数値解，破線：ローレンツ近似解，一点鎖線：一様近似解）
$d = 5\mu m$，$\Delta n = 0.01$，$\theta = 15°$

R. K. G. 法による数値解法より求めたTE_2モードの電力変化を示している。この図よりローレンツ近似解の導波モードの電力変化は，厳密解と考えられるR. K. G. 法による数値解の変化と比較的よく一致していることが分かる。ここで導波モードの電力変化における振動は次のように説明できる。すな

わち放射モードから導波モードへ再結合する際，ピーク付近の放射モードによる寄与が主となり，変換された導波モードの位相がそろうため，いったん減少した導波モードの電力は伝搬するに従い，ある程度増加する。ところで，ローレンツ近似解による導波モードの電力変化の各ピークは数値解のそれより小さくなっているが，これは式(10)の積分範囲を $-\infty < \beta < +\infty$ と拡張したため，全放射モードから導波モードへの再結合の寄与がそろいきらないためであると考えられる。さらに一様近似解による導波モードの電力変化が結合係数の分布を考慮した解の変化より急になるのは，図3から分るように β_g より離れた点での結合係数を大きくみつもりすぎているからである。

図5は，3種類の伝搬角について，TE_2 モードの電力変化の模様をプロットしたものである。ただし伝搬角が大きくなるに従い，図3において，$K(\beta)$ のピークの位置から β_g が離れるので，放射モードへの移行の割合が小さくなり，さらに振動の周期も

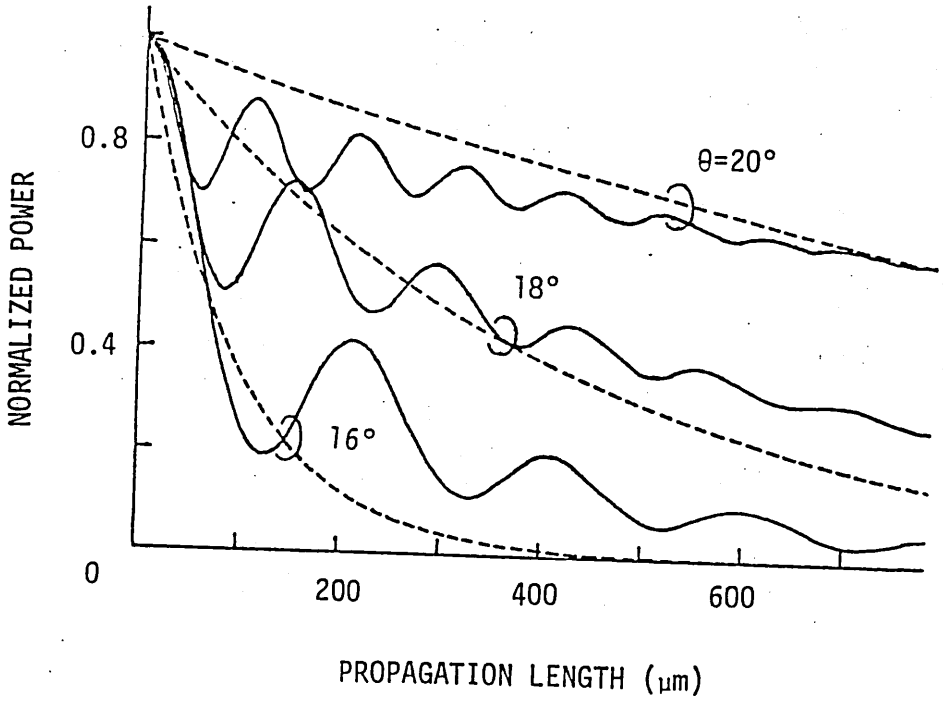


図5　TE_2モードの電力の伝搬距離に対する変化
（実線：数値解，破線：一様近似解）
$d = 5\mu m$, $\Delta n = 0.01$, $\theta = 16°, 18°, 20°$

小さくなる。このことは導波モード間結合において，位相整合条件からずれるに従い，モード変換量が減少し，さらに最大変換に達する距離も短縮されることと似ており，$K(\beta)$のピーク付近の放射モードがあたかも導波モードのようにふるまうことが分かる。また図5において，伝搬角θが20°の場合，一様近似解の方が減衰がおそい。これはβ_gがピークの位

置から遠く離れ，図3の $K(\beta)$ の分布の裾の部分に来るため，ピーク付近の結合係数を小さくみつもりすぎているからである。

さらに，0～2次モードの電力減衰定数と伝搬角との関係をプロットしたものを図6に示す。0，1次モードについては，電力変化が単調減少になるので，電力減衰定数はその変化を対数グラフにプロットし，その直線部分の傾きより求めた。又2次モードについては，極大値の変化を同様にプロットして電力減衰定数を求めた。同図には比較のため一様近似解による電力減衰定数も示している。これより放射損が小さいところでは一様近似解は数値解と比較的合っていると考えられる。この図において伝搬角が増すにつれて放射損は増減するが，この性質は結合係数の分布によって次のように説明できる。ただし，図7は結合係数の2乗の β 一依存性とともに，TE_1 モードの位相定数の位置を示している。ここに(a)は図6(b)において放射損が最大値（$\theta = 25.5°$），(b)は最小値（$\theta = 33°$）をとるときの結合係数

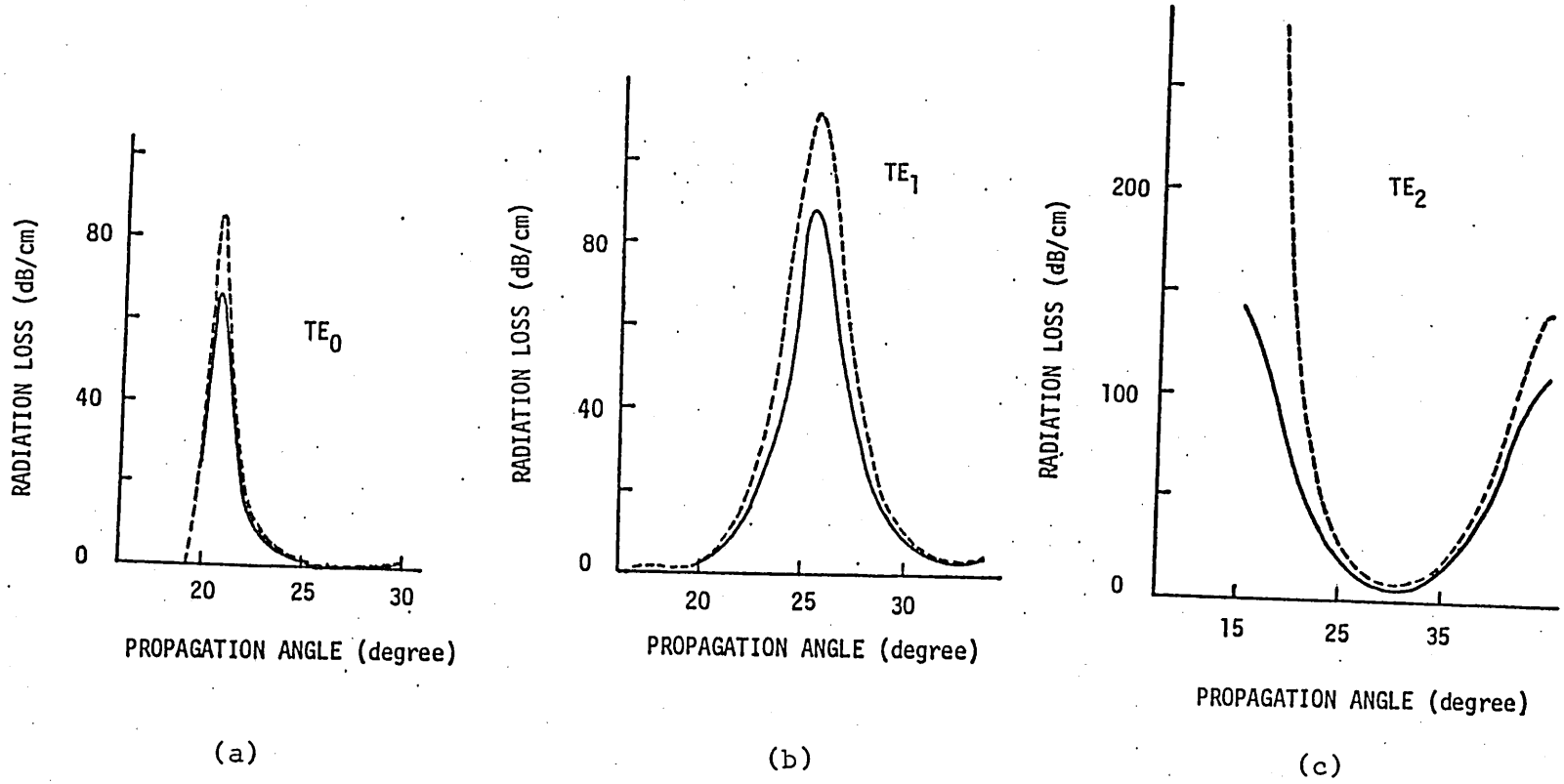
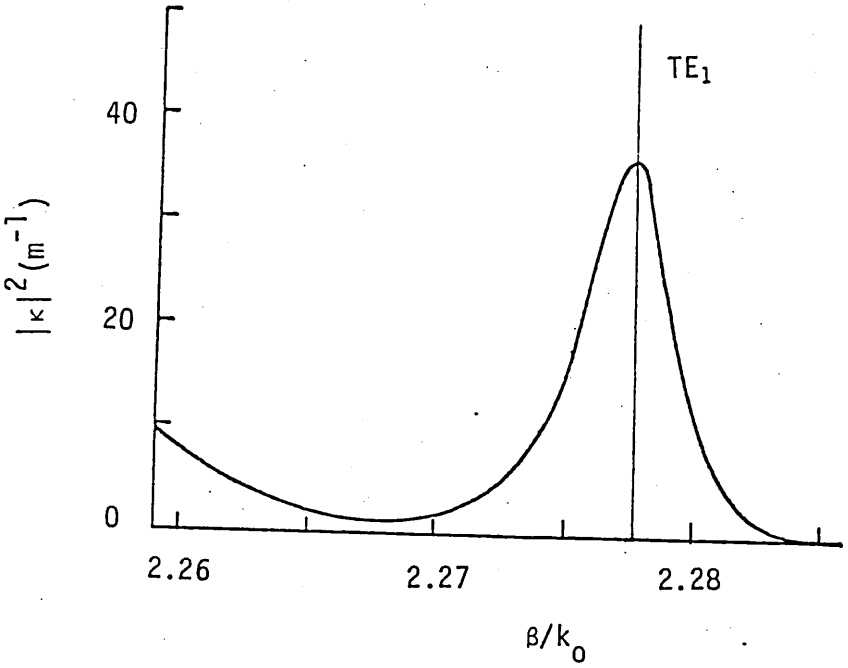
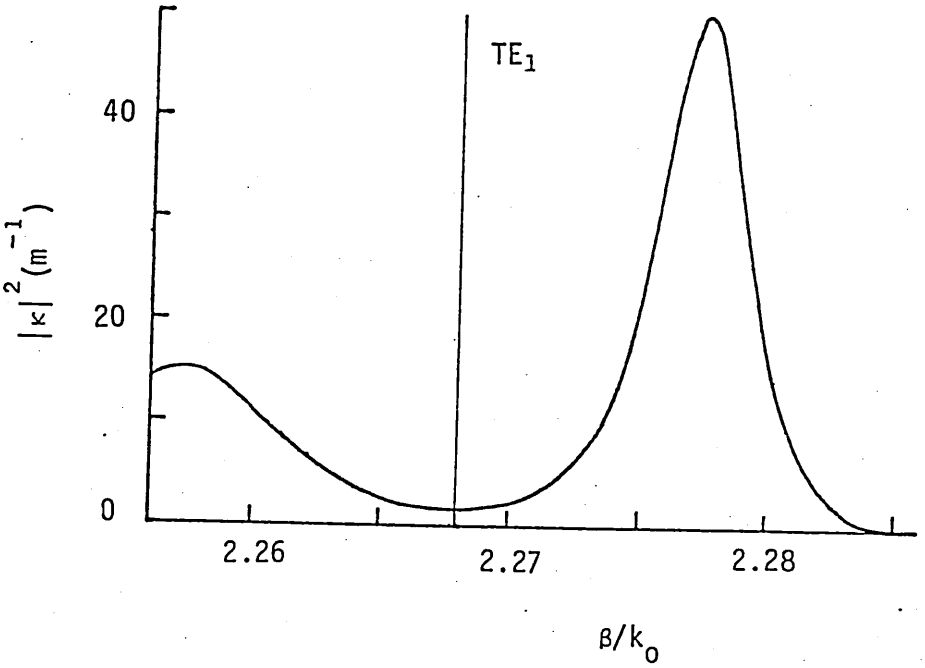


図6　導波モードの放射損と伝搬角との関係（実線：数値解，破線：一様近似解）(a) TE_0　(b) TE_1　(c) TE_2
$d = 5\mu m$，$\Delta n = 0.01$



(a)



(b)

図7　図6(b)の極値における$|\kappa|^2$と等価屈折率β/k_0との関係　(a) $\theta=25.5°$, (b) $\theta=33°$

の分布である。伝搬角が変化すると，結合係数の相対的な分布は変化せず，導波モードの位相定数のみが大きく変化し，結合係数を最大および最小にする伝搬角に対応して，放射損も最大値，最小値をとる

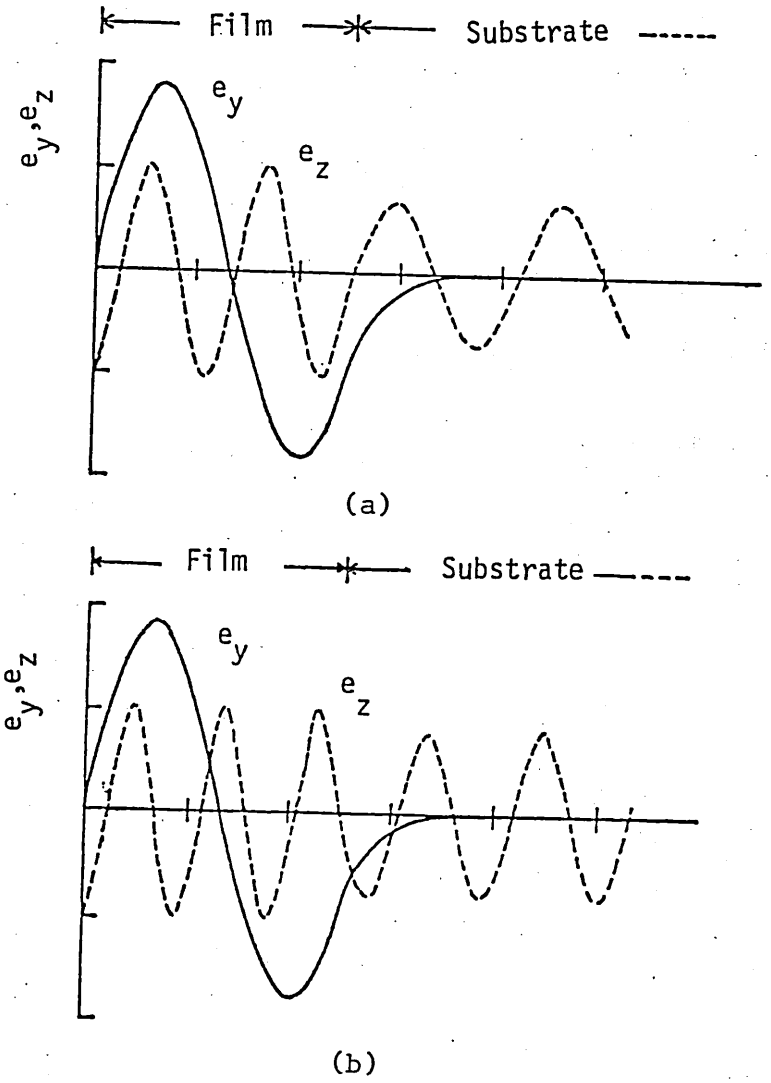


図8　TE_1モードの横方向電界分布e_yおよびそれと結合するTM放射モードの電界分布e_z

(a) $\theta = 25.5°$，(b) $\theta = 33°$，$d = 5\mu m$，$\Delta n = 0.01$

ことが分かる。このことは次のように結合モード対の電界分布によっても説明できる。図8は，上記の例の結合モード対の電界分布を示したものである。この図より伝搬角が変化すると，導波モードの界分布は変化せず，放射モードの界分布のみが変化し，従って，界分布の重なり方が異なり，界分布が互いに重なり合う場合，結合係数は大きくなり，そして互いに打ち消し合う場合，結合係数は小さくなることが分かる。

ここで取扱っている導波路において伝搬角θを変化させることは，通常，位相定数の異なる結合モード間の位相整合をとるために導入される周期構造の周期を変化させることと同じ働きがあることが分かる。なお，ピークは漏れモードと導波モードとの結合としても説明できるが，これについては付録で詳細に検討している。

5. 電気光学変調器への応用

本節では，図1の構造の導波路における導波—放射モード結合を利用した強度変調器について述べる。

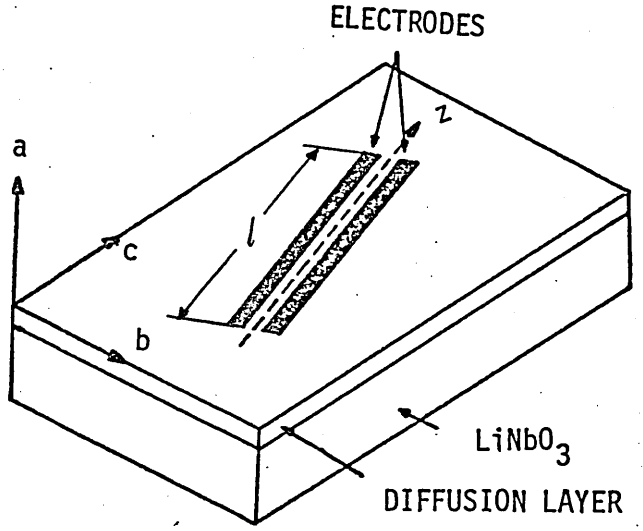


図9　拡散形 X-cut $LiNbO_3$ 導波路を用いた強度変調器の構造

その構造は，図9に示すように，図1の導波路上に，伝搬方向と平行に一様なコプレーナ電極を付けたものである。

まず，電極のない場合の導波路自体の特性について述べる。図10は TE₀ モードの電力減衰定数の伝搬角に対する変化を膜厚が3，4，5 μm についてプロットしたものである。ただし，素子の動作点としては放射損が小さい（3 dB/cm程度）ところを用いるので計算には一様近似解を用いた。ここで伝搬角を20°以上の適当な値に設定し，電界を印加す

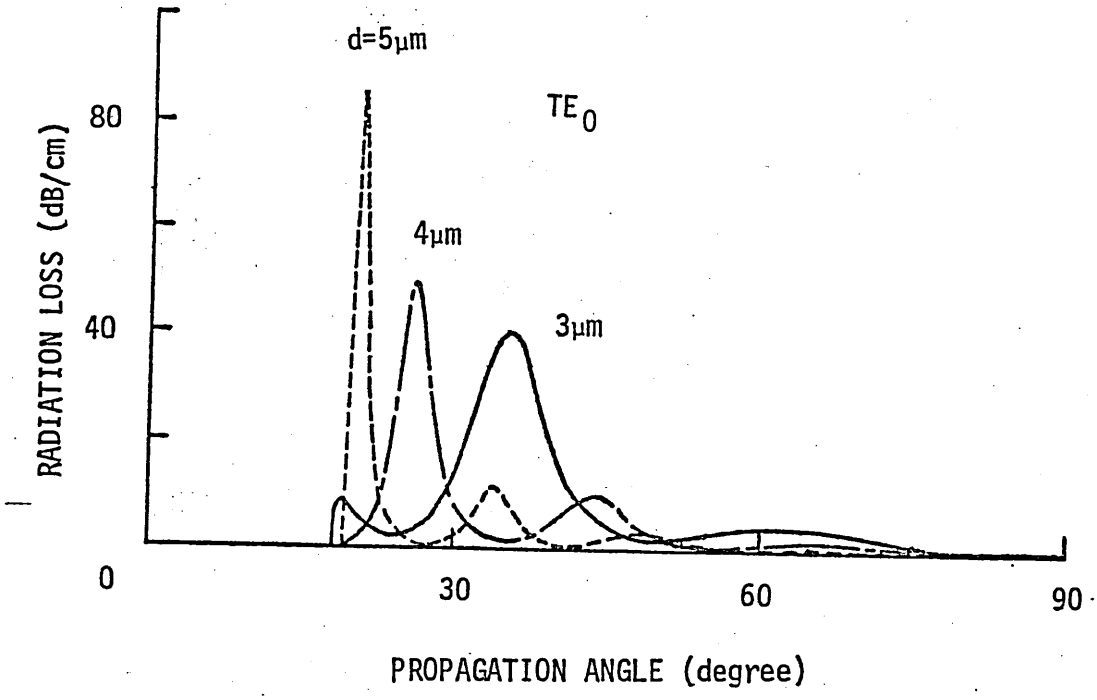


図10 光学軸回転によるTE₀モードの放射損

ることによって，放射損を制御すれば，強度変調器として動作させることができる。

コプレーナ電極により y方向電界 E_y が印加されると，$LiNbO_3$ の電気光学効果により，比誘電率テンソルは次式のようになる。

$$\mathbb{K}^i = \begin{bmatrix} K^i_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K^i_{yy} & K^i_{yz} \\ 0 & K^i_{zy} & K^i_{zz} \end{bmatrix} \qquad (31)$$

$$(i = F, S)$$

ここに

$$K_{xx}^{i} = n_o^{i2} - n_o^{i4}(r_{12}\cos\theta + r_{13}\sin\theta)E_y \qquad (32-1)$$

$$K_{yy}^{i} = n_o^{i2}\cos^2\theta + n_e^{i2}\sin^2\theta$$
$$-\{n_o^{i4}(r_{22}\cos\theta + r_{23}\sin\theta)\cos^2\theta + n_e^{i4}r_{33}\sin^3\theta$$
$$+ 2n_o^{i2}n_e^{i2}r_{42}\sin\theta\cos^2\theta\}E_y \qquad (32-2)$$

$$K_{zz}^{i} = n_o^{i2}\sin^2\theta + n_e^{i2}\cos^2\theta$$
$$-[n_o^{i4}(r_{22}\cos\theta + r_{23}\sin\theta)\sin^2\theta + n_e^{i4}r_{33}\cos^2\theta$$
$$\times\sin\theta - 2n_o^{i2}n_e^{i2}r_{42}\sin\theta\cos^2\theta]E_y \qquad (32-3)$$

$$K_{yz}^{i} = K_{zy}^{i} = (n_e^{i2} - n_o^{i2})\sin\theta\cos\theta$$
$$+\{[n_o^{i4}(r_{22}\cos\theta + r_{23}\sin\theta) - n_e^{i4}r_{33}\sin\theta]$$
$$\times\sin\theta\cos\theta + n_o^{i2}n_e^{i2}r_{42}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\cos\theta\}E_y \qquad (32-4)$$
$$(i = F, S)$$

ただし，r_{ij} は $LiNbO_3$ の電気光学定数であり，電界は基板および薄膜に一様にかかっているものとする。

変調器として利用する場合，動作点と印加電界強度に対する出力特性が重要となる。通常の位相差形強度変調器において直線変調を得る場合，動作点としては相対出力強度が 50 % となる点が選ばれる。

本構成では，印加電界がゼロでも放射損失いいかえれば挿入損失が存在することになり，上記のことを考慮すると動作点（いまの場合，伝搬角）は初期挿入損が 3 dB となるように選ぶのが妥当であると思われる。

図11 に，膜厚を 4 μm，電極長を 10 mm，導波モードを TE_0 とした場合の変調特性を示す。ただ

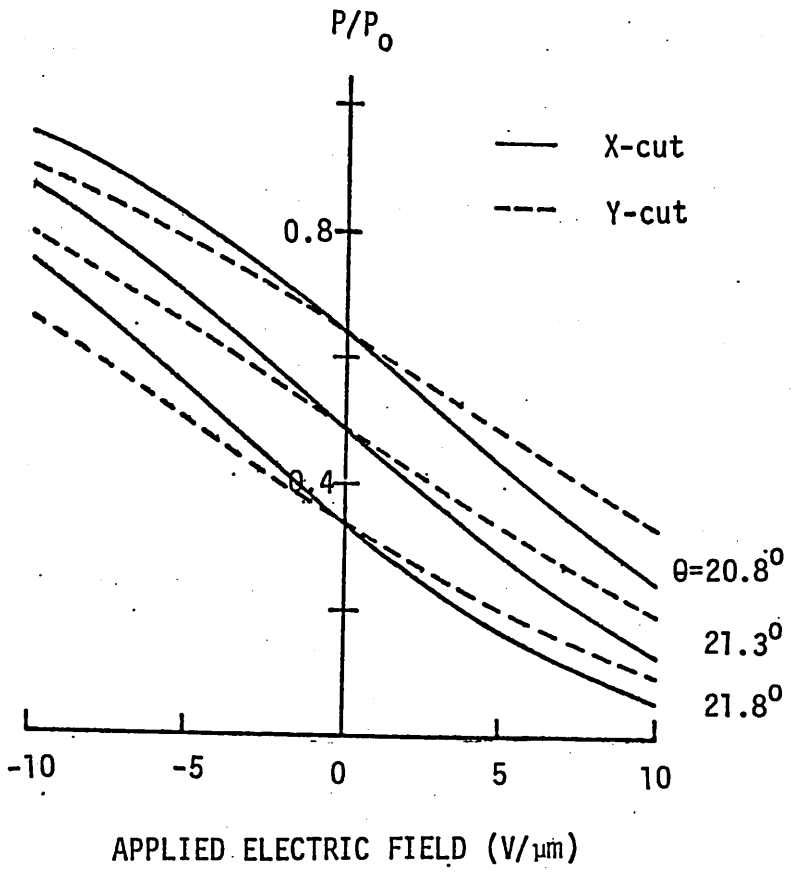


図11 変調特性（入射モード：TE_0）

$d = 4\,\mu m$, $\Delta n = 0.01$, $l = 10\,mm$

し，伝搬角は21.3°である。同図にはこれから±0.5°ずれた時の特性も示している。またこの図には比較のためにY-cut結晶の場合の特性も挙げている。このように特性曲線はほぼ直線となりこれまでに報告されている導波一放射モード結合形変調器のガウス形特性曲線とは様子が違ってくる。

ところで，TE偏波の場合，伝搬方向と光学軸とがずれていると，複屈折により伝搬方向（波面法線方向）とエネルギー伝送方向（光線方向）とは一致しない。本文の例では角度の差は1.5°程度となる。従って，このことを考慮して電極の方向をややずらす必要があるが，この場合変調特性は殆んど変わらない。なお放射角は3°程度になる。

6. むすび

本文では，導波一放射モード結合方程式の解法として，結合係数の分布まで考慮した解析的な手法について，伝搬方向が光学軸からずれた$LiNbO_3$導波路を例にとり，その詳細を述べた。この種の問題の解法には，これまで摂動解法が用いられていたが，

その適用範囲には制限があった。これに対し本文で述べた解法はより一般的なものであり，結合係数の分布にローレンツ近似を行うことにより，厳密解と考えられるR.K.G.法による数値解に比較的一致した結果が得られた。なお摂動解法による結果は，本文の方法において結合係数の分布を一様とした場合の解と一致することが分かり，放射損が小さい範囲では，ほぼ正しいということが明らかになった。

さらに，ここではX（あるいはY）－cut $LiNbO_3$ 導波路を用いた新しいタイプの導波－放射モード結合形光変調器を提案し，その設計例と特性の計算結果を示した。今後は，ここで取りあげた導波路におけるモード変換の実験を行うとともに，強度変調器の試作を行う予定である。

文献

(1) W.S.C.Chang,"Acoustooptical deflections in thin films," IEEE J. Quantum Electron., QE-7, 4, p,167 (April 1971).

(2) F.R.Gfeller and L.W.Pitt,"Acousto-optic scanner," Electron. Lett.,8 p.549 (1972).

(3) D.Marcuse,"Electrooptic coupling between TE and TM modes in anisotropic slabs," IEEE J. Quantum Electron., QE-11,9,p.759 (Sept. 1975).

(4) 山本, 岡村, 平井, 牧本, "半漏れ構造薄膜光導波系における導波ー放射モード結合の解析と変調器および非相反素子への応用," 信学論(C), 60-C, 2, p. 98 (昭52-02).

(5) Y.-K.Lee and S.Wang,"Electrooptic guided-to-unguided mode converter," IEEE J. Quantum Electron., QE-12,5,p.273 (May 1976).

(6) 岡村, 長谷川, 山本, 牧本, "Cuイオン電界拡散 $LiTaO_3$ 導波路における導波ー放射モード変換," 輻研資料 (昭52-05).

(7) D.Marcuse, Theory of Dielectric Optical Waveguides, Academic Press, New York and London (1974).

(8) 神谷, 山之内, 柴山, "異方性薄膜光導波路を伝搬する Leaky Surface Wave," 信学マイクロ波研資, MW-76-102, (1976).

(9) S.Yamamoto,S.Koyamada, and T.Makimoto,"Normal-mode analysis of anisotropic and gyrotropic thin-film waveguides for integrated optics," J. Appl. Phys., 43, p.5090 (Dec. 1972).

(10) D.Marcuse,"Coupled mode theory for anisotropic optical waveguides,"Bell Syst. Tech. J., 54, 7 p.985 (July/Aug. 1975).

(11) 内藤，野田，武藤，布下，中山，"拡散形（$LiNbO_3$－Ti）による光回路素子の作成，" 信学光・電波部門全大，340（昭51－11）.

付 録

図10における放射損は以下に述べるような導波モードと漏れモードとの共振現象であると考えられる。

TM漏れモードの位相定数 β は，平面波のzig-zag伝搬としての取扱いより，等価屈折率が $1<\beta/k_0<n_0$ の範囲* では，次式の決定方程式より求めることができる。(7)

$$k_x^F \cdot d = N\pi + \tan^{-1}\left[\frac{k_x^T / K_{zz}^T}{k_x^F / K_{zz}^F}\right] \qquad (A-1)$$

ここに

$$N = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \qquad (A-2)$$

$$k_x^i = \left[K_{zz}^i / K_{xx}^i \ (\beta^2 - k_0^2 K_{xx}^i)\right] \qquad (A-3)$$

$(i = F, T)$

図12に，図1の導波路において，膜厚を5 μm，結晶表面での屈折率の増加を0.01とした場合，伝搬角に対するTE$_0$ 導波モードおよびTM漏れモードの位相定数の変化を示す。この膜厚の場合，N の

---

* この範囲では，薄膜中のzig-zag平面波は上部層との境界では全反射し，基板との境界では部分反射する。

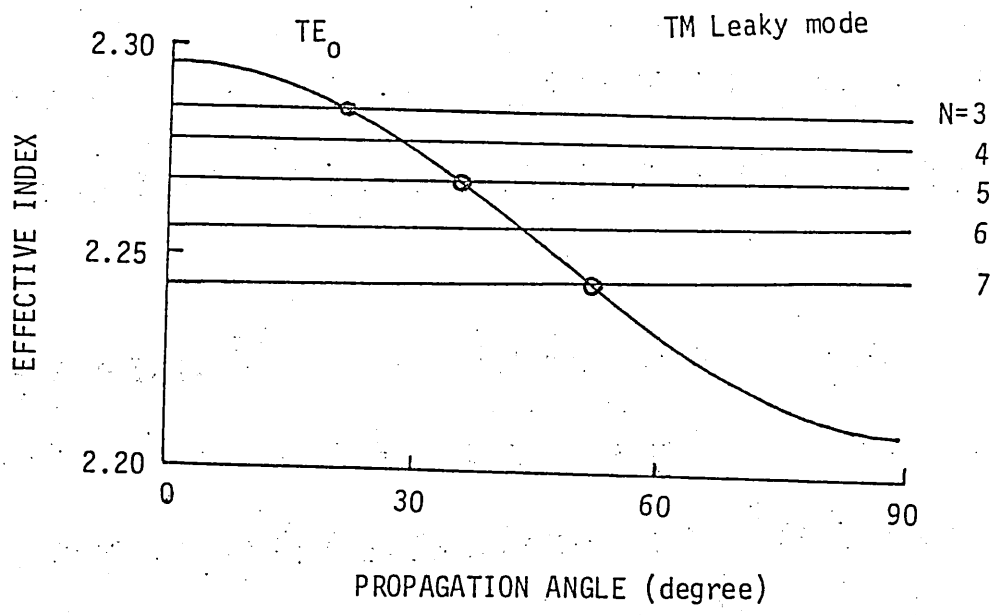


図12　TM 漏れモードおよび TE_0 モードの等価屈折率 β/k_0 と伝搬角 θ との関係。$d=5\mu m$, $\Delta n=0.01$

値が2以下では漏れモードは存在せず，従って，ここでは $N=3$ 以上を考える。図12の各次数の伝搬角と図10のピークの位置での伝搬角とほぼ一致し，0次の導波モードと3，5，7次の漏れモードの共振によって損失が大きくなっていることが分かる。このことは次のようにして説明できる。結合の大きさは導波モードの電界 e_y と漏れモードの電界 e_z との重なりによって決まるが，e_z は $\frac{\partial e_y}{\partial x}$ に比例

するため，0次の導波モードの界分布に対しては，偶数次より奇数次の漏れモードの界分布が重なりが大きくなるからである。

輻射科学研究会資料

$GaAs$光導波路の伝搬モード

黒田研一・浜中宏一・中山　高

（三菱電機　中央研究所）

1977年7月8日

1. まえがき

GaAs を基板とした半導体レーザ光源を中心に送信機の集積化をはかる上で，発光源と導波路及び他の素子との一体化を実現することが重要である。GaAs 系光導波路及び機能素子の開発がそのために注目されている。GaAs系 光導波路としては，ショットキー型[1),2)]，rib型[3)]，拡散型[4)]，多層型[5)]，埋め込み型[6)]等が報告されている。ここでは製作が容易であり，変調器，スイッチ素子としての応用も可能であるものとして拡散型，ショットキー型をとり上げ励振モードを調べた。

拡散型光導波路は自由キャリア濃度差にもとずく屈折率差を求め，等価的な rib 型光導波路として考え，励振モードを計算した。

ショットキー型光導波路は metal-clad による影響を考え，等価屈折率法を用いて励振モードを求め，印加電圧を加えた場合について空乏層での電気光学効果による影響を調べた。さらに電極端での電界集中による効果についても検討した。

2. 拡散型 GaAs 光導波路

2-1 拡散型 GaAs 光導波路の励振モード

拡散型 GaAs 光導波路は Fig.1 のように n^+GaAs 基板にエピタキシャル成長をおこない，P^+拡散層をもうけて拡散層の間を導波路としたものである。

この構造の導波路を，計算を容易にするために Fig.2 のように近似した。

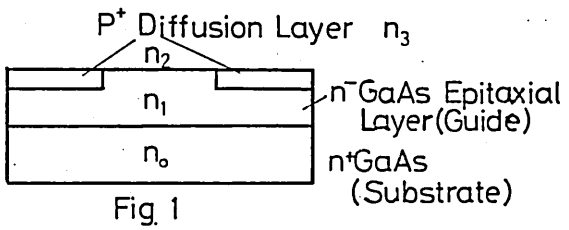


Fig. 1

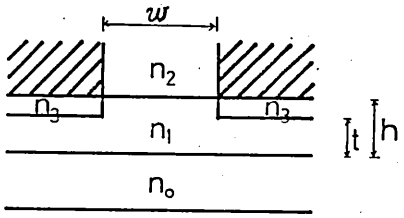


Fig. 2

GaAs の屈折率は

$$n = A + B/(\lambda^2 - c) - D\lambda^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(A = 10.906,\ B = 0.97501,\ C = 0.27969,\ D = 0.002467)$$

により与えられ[7]，自由キャリア濃度差による屈折率変化は

$$\triangle n=-\frac{1}{2n}\frac{e^2}{\varepsilon_0 m^* \omega^2}\triangle N \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

（ただし，$\omega=2\pi c/\lambda$，e:電子電荷，m^*:キャリアの有効質量，$\triangle N$:自由キャリア濃度差）

で与えられる。[7),8)]

さらに，Fig.2の構造の光導波路は，次の条件の下にrib型光導波路（Fig.3）に置きかえることができる。[9)] ⅰ）$n_1>n_0$，n_2，n_3，ⅱ）電磁エネルギーの大部分が屈折率 n_1 の領域に閉じ込められる，ⅲ）屈折率 n_1 の領域において電磁界はslabの部分のみで指数関数的に減衰する。

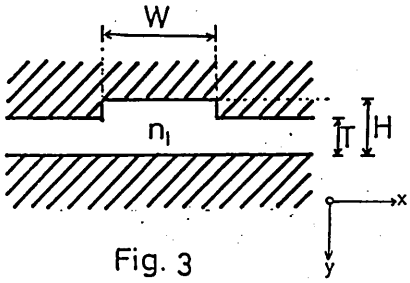


Fig. 3

Fig.3において，斜線部分には電磁界のしみ出しはなく，境界で消滅しているとすれば，H，W，Tは次のように与えられる。

$$\begin{cases} H=h+\dfrac{1}{n_1^2}\left(\dfrac{n_0^2}{k_0}+\dfrac{n_2^2}{k_2}\right) & (\text{for } E^y_{pq}) \\ W=w+\dfrac{2}{k_3} & (\text{for } E^y_{pq}) \\ T=t+\dfrac{1}{n_1^2}\left(\dfrac{n_0^2}{k_0}+\dfrac{n_3^2}{k_3}\right) & (\text{for } E^y_{pq}) \end{cases} \qquad \begin{cases} H=h+\dfrac{1}{k_0}+\dfrac{1}{k_2} & (\text{for } E^x_{pq}) \\ W=w+\dfrac{2}{k_3}+\dfrac{n_3^2}{n_1^2} & (\text{for } E^x_{pq}) \\ T=t+\dfrac{1}{k_0}+\dfrac{1}{k_3} & (\text{for } E^x_{pq}) \end{cases}$$

ただし，$k_{0,2,3}=\dfrac{2\pi}{\lambda}\sqrt{n_1^2-n_{0,2,3}^2}$

この時，E^x_{pq}，E^y_{pq} モードが励振する条件は

$$\frac{W}{PT}\geqq\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{qT}{H}\right)^2}}\left(1-\frac{2T}{P\pi H}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

で与えられる。

次に，具体的な数値を代入して励振モードを求める。

GaAs の吸収波長端は～0.9μmであることから，ここでは吸収損失を避けるために波長としては $\lambda=1.15\mu m$を選ぶ。エピタキシャル層の自由キャリア濃度は屈折率差を大きくするために小さいことが望ましいが，現在，製作上 $1\times10^{14}cm^{-3}$ が限度である。そこで，自由キャリア濃度を

n^+GaAs基板	$N=1\times10^{18}cm^{-3}$
n^-GaAsエピタキシャル層	$N_D=1\times10^{14}\sim1\times10^{15}cm^{-3}$
P^+拡散層	$N_A=4.6\times10^{19}cm^{-3}$

として与えると，屈折率は

$n_0=3.4406$

$n_1=3.4431$

$n_2=1.0003$

$n_3=3.4123$

となる。

Fig.4，5，6はh，t，wについての E^y_{pq} モードのカット・オフ条件を計算したものであり，Fig.4 は $h=3\mu m$，Fig.5 は $h=10\mu m$，Fig.6 は$h-t=2\mu m$ としている。

同様に E^x_{pq} モードについても計算したがほとんど変りがなかった。

したがって，シングル・モードの励振条件として，例を上げると次のようになる。

i）$h=3\mu m$，$t=2\mu m$

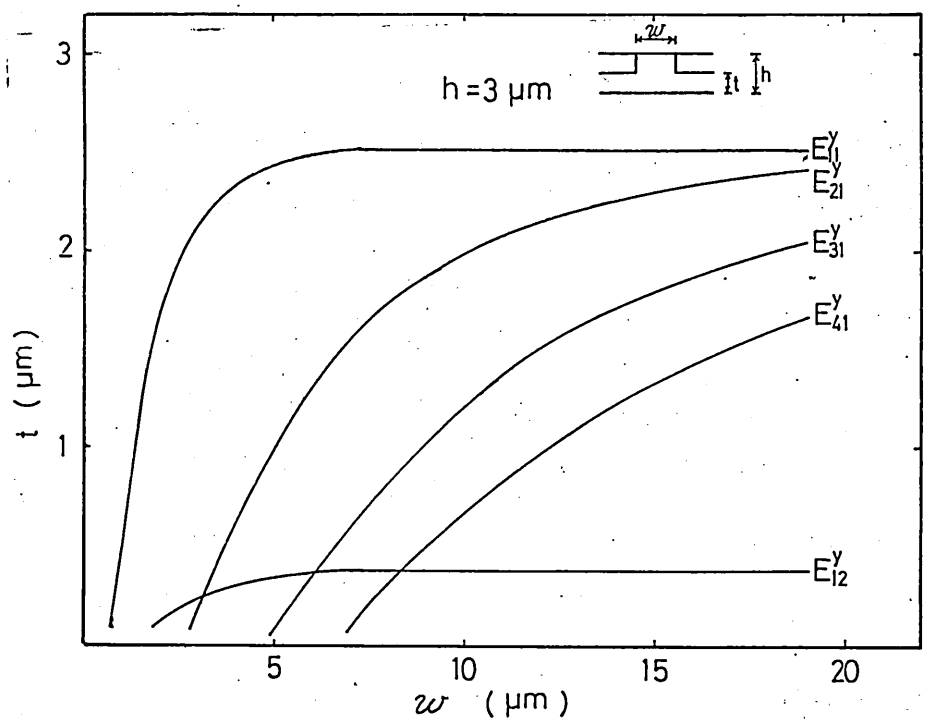
$2.6\mu m<w<10.1\mu m$　(for E^y_{11})

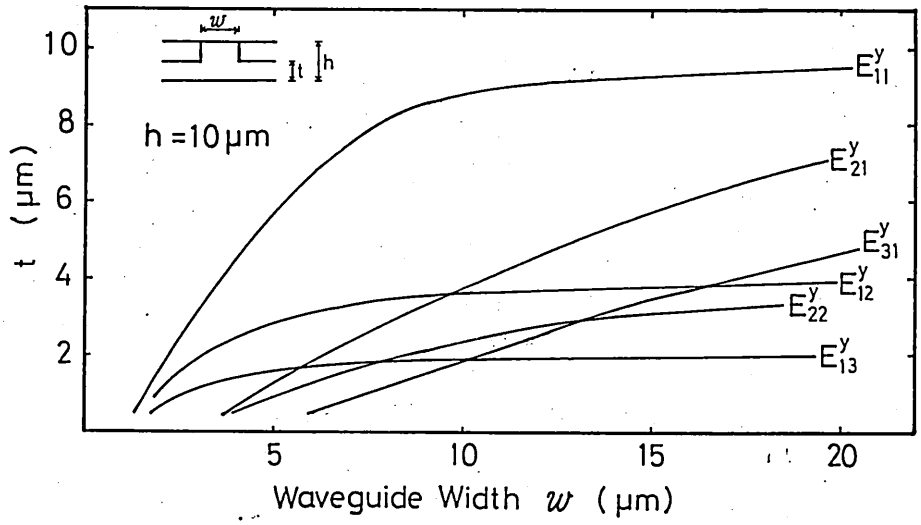
$2.5\mu m<w<9.9\mu m$　(for E^x_{11})

ii）$h=10\mu m$，$t=8\mu m$

$7.9\mu m<w<27.0\mu m$　(for E^y_{11})

$7.8\mu m<w<26.8\mu m$　(for E^x_{11})


h =3 μm
w
t
h
E^y_{11}
E^y_{21}
E^y_{31}
E^y_{41}
E^y_{12}
t (μm)
w (μm)
1
2
3
5
10
15
20
Fig. 4


h =10 μm
w
t
h
E^y_{11}
E^y_{21}
E^y_{31}
E^y_{12}
E^y_{22}
E^y_{13}
t (μm)
Waveguide Width w (μm)
2
4
6
8
10
5
10
15
20
Fig. 5

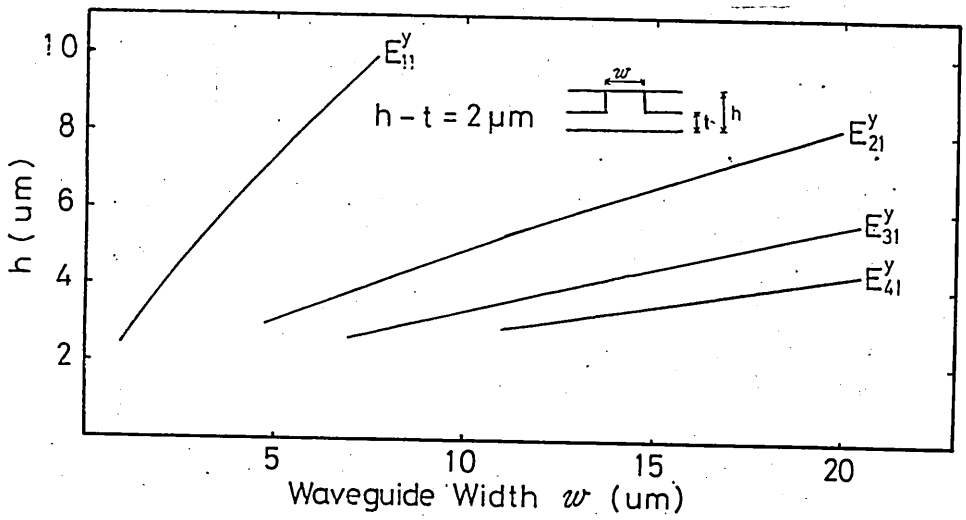


Fig. 6

次に波長λとwについてのカット・オフ条件を計算した。 Fig.7は$h=3\,\mu m$, $t=2\,\mu m$, Fig.8は$h=10\mu m$, $t=8\,\mu m$である。λ=0.9～2.0(μm)の範囲では，ほとんど変化はない。

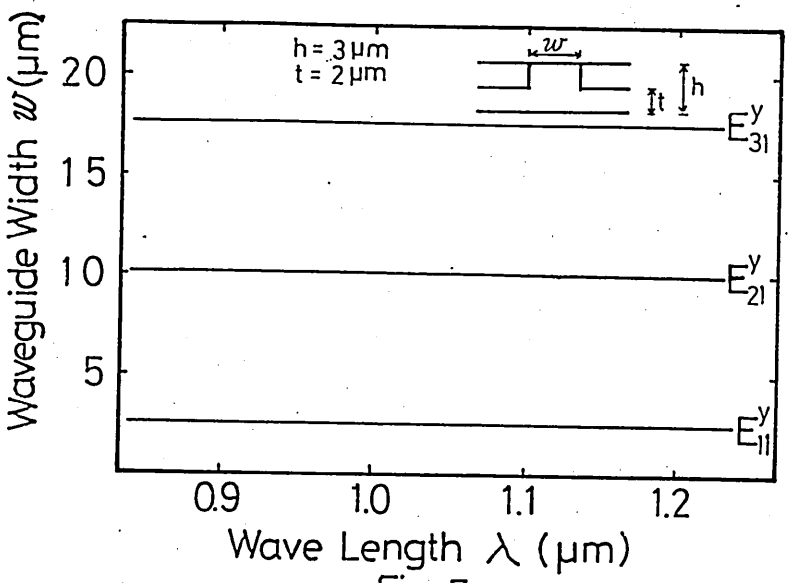


Fig. 7

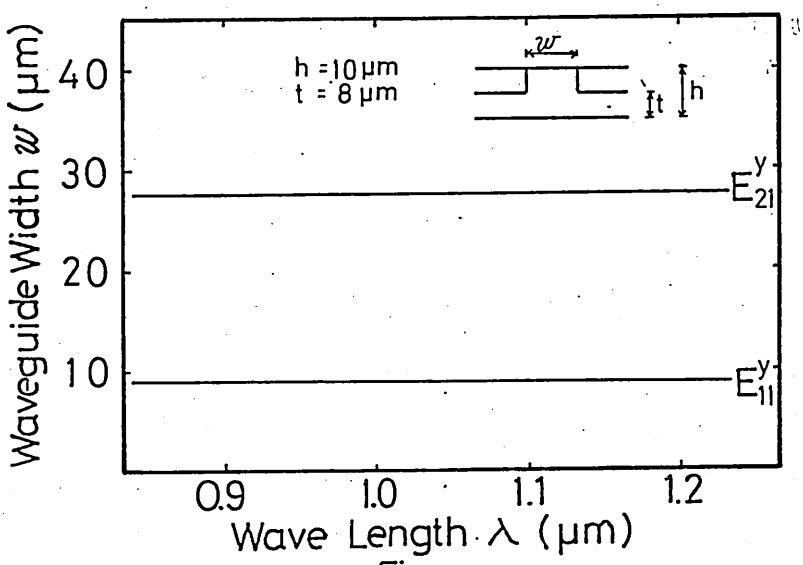


Fig. 8

2 - 2　$p-n$ junction による空乏層の影響

次に$p-n$ junction による空乏層の影響を考える。$p-n$ junction を abrupt junction とする。空乏層の深さ w_d は

$$w_d = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{e}\left(\frac{N_A+N_D}{N_A \cdot N_D}\right)(\psi - V)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

空乏層での電界 E は

$$|E| = \frac{eN_D}{\varepsilon_s}(w_d - y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

で与えられる。[10]

ただし，ψは内蔵電位，Vは印加電圧，ε_sは誘電率，N_DはN層のドナー濃度，N_AはP層のアクセプター濃度，eは電子の電荷，yはエピタキシャル層表面からの距離である。

GaAsは$T_d=m43$ (Z_nS) 型の結晶構造をもち，電界のかかっていない状態では屈折率楕円体は球($n_x=n_y=n_z=n_1$) となっている。電界 $E=(E_x,\ E_y,\ E_z)$ を結晶にかけると屈折率楕円体は

$$\frac{1}{n_1^2}(x^2+y^2+z^2)+2\gamma_{41}(E_x yz+E_y zx+E_z xy)=1$$

となる。[11]

電気光学効果による屈折率変化は，結晶面を（0 1 0）とし，これに垂直にすなわち y 方向に電界がかかっているとすれば E_{pq}^{x} モードに対して

$$\triangle n_{eo}=\frac{1}{2}n^{3}r_{41}E \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

となる。E_{pq}^{y} モードに対しては屈折率変化はない。

ただし，r_{41} はポッケル定数で，$r_{41}=1.4\times10^{-12}(m/V)$ とした。[11]

具体的な例として，$h=3\,\mu m$，$t=2\,\mu m$，$N_D=1\times10^{15}cm^{-3}$ として計算した。この時の空乏層の幅 $w_d=1.3\mu m$ となる。この空乏層において電気光学効果による屈折率変化は，E_{pq}^{x} モードに対し 3×10^{-5} 程度であり，励振条件への影響はほとんどない。また空乏層による自由キャリア濃度差にもとずく屈折率変化は $N_D=1\times10^{15}cm^{-3}$ では，2.5×10^{-6} であり，これも無視できる。

以上の結果より，印加電圧をかけない場合は $p-n$ junction の空乏層による屈折率変化は小さく無視できると考えられる。

reverse bias をかけた場合は p-n 界面のエッヂ部分に電界が集中し，屈折率が高くなると予想される。

3．ショットキー型GaAs光導波路

3－1　metal-clad による屈折率変化

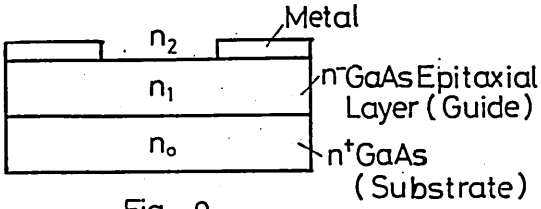


Fig. 9

Fig.9 はショットキー型 GaAs光導波路の構造である。n^{+}GaAs 基板にエピタキシャル成長をおこない，金属をその上に成膜している。

印加電圧 0 V では metal-clad 領域においてエピタキシャル層の等価屈折率は低くなり，metal-unclad 領域が損失の少ない光導波路になる。metal-clad型の誘電体光導波路については等価屈折率法による計算が有効であることが知られている。[12] [13] が，

GaAs 光導波路の場合，誘電体光導波路とちがってエピタキシャル層に空乏層が存在し，それによる電界が生ずるために屈折率は分布をもつ。しかし，その影響は小さいので，誘電体光導波路と同様に等価屈折率法を用い，その後に空乏層の効果を考えることにする。

印加電圧 0 V では metal-unclad 領域が光導波領域になる。Fig.9 をFig.10 のように書き直し，等価屈折率法を用いれば Fig.10はFig.11のような導波路に近似できる。

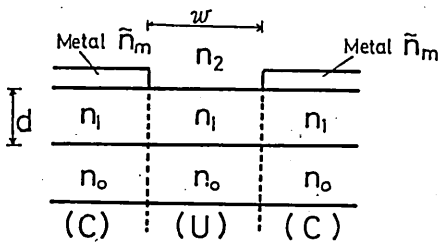


Fig. 10

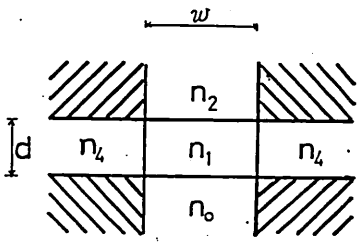


Fig. 11

Fig.11において，n_4は次の式で与えられる。

$$n_4=(n_1^2-n_{ueff}^2+\tilde{n}_{ceff}^2)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ただし，n_{ueff}はFig.12のような metal-unclad領域でのn_1 の等価屈折率であり，$\tilde{n}_{ceff}$ はFig. 13のような metal-clad 領域での n_1 の等価屈折率である。

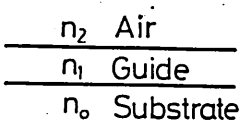


Fig. 12

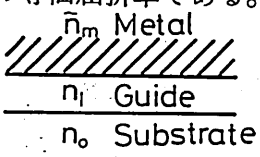


Fig. 13

Fig.11の構造の光導波路の励振モードは Marcatili の計算[14]を用いて求めることができる。

具体的な一例として波長を $\lambda=1.15\mu m$, n^+GaAs 基板とエピタキシャル層の自由キャリア濃度をそれぞれ $N=10^{18}cm^{-3}$, $N_D=1\times10^{15}cm^{-3}$, エピタキシャル層の膜厚を 3 μm, 金属をPtとして計算をおこなった。

自由キャリア濃度差から，各部分の屈折率は

$$\begin{cases} n_0=3.4406 \\ n_1=3.4431 \\ n_2=1.0 \\ \tilde{n}_m=1.29-12\cdot2j \end{cases}$$

となる。

Fig.14は，この時の導波路の膜厚に対する metal-clad 領域と metal-unclad 領域での n_1 の等価屈折率の差である。$d=3\,\mu m$では，E^x_{pq} モードに対して 3×10^{-5}, E^y_{pq} モードに対して1.9×10^{-4}となる。

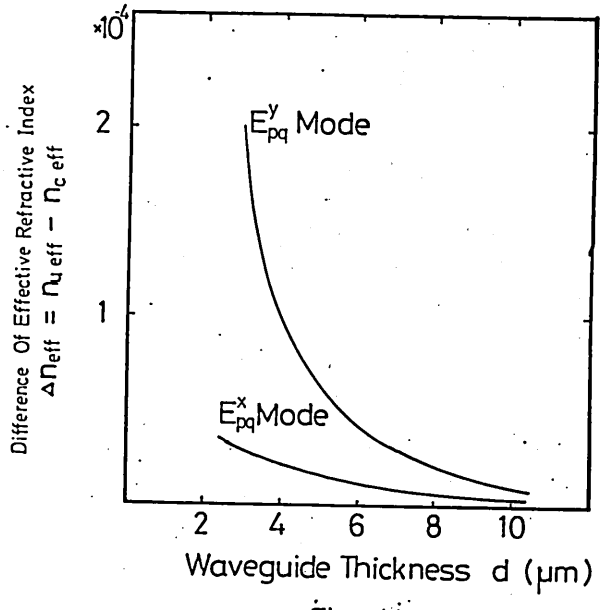


Fig. 14

このときシングルモードのみが励振するためのwの条件を求めると

$$0<w<40\mu m \quad (\text{for } E^x_{pq})$$

$$0<w<16\mu m \quad (\text{for } E^y_{pq})$$

となる。

3－2　空乏層での屈折率変化

空乏層での電気光学効果による屈折率変化は，（0 1 0）面に垂直に電界がかかっているとすれば，p-n junction の場合と同様に，E^x_{pq} モードに対して

$$\Delta n_{eo}=\frac{1}{2}n^3 r_{41}E$$

であり，E^y_{pq} モードに対しては屈折率変化はない。

空乏層の幅は

$$w_d=\sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{eN_D}(\psi-V)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

電界は

$$|E|=\frac{eN_D}{\varepsilon_s}(w_d-y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

で与えられる[10]。

（ただし，N_Dは自由キャリア濃度）

式(9)より，空乏層では電界分布をもち，したがって屈折率分布をもつが，電気光学効果によるy方向の屈折率変化は相対的に小さい場合は，その屈折率変化を一様とみなし等価的な屈折率変化を用いた。

なお実際には電極端で電界が集中し屈折率が高くなることが予想されるので，次に電極端での効果を考える。

電極端では電界分布は複雑であるが，ここでは電極端の効果を$p-n$ junctionにおけるcylindrical junctionの効果に等しいとして計算した。

内蔵電位をψ_i，印加電圧をV，電界をE，電極端からの距離をr，cylindrical junctionの曲率半径をr_j，空乏層の幅をw_eとすると，

$$\psi_i-V=\frac{1}{2}\frac{eN}{\varepsilon_s}w_e\left(l_n\frac{w_e}{r_j}-\frac{1}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$|E_{(r)}|=\frac{1}{2}\frac{eN}{\varepsilon_s}\frac{1}{r}(w_e^2-r^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

となる。

電界成分を直交座標系で表わし，簡単のために電気光学効果による屈折率変化を

E_{pq}^xモードに対して　$\Delta n_{eo}=\frac{1}{2}n^3r_{41}E_y$

E_{pq}^yモードに対して　$\Delta n_{eo}=\frac{1}{2}n^3r_{41}E_x$

とする。

これより電極端での屈折率分布が求まるが，y方向に屈折率差が充分あり，電気光学効果による屈折率変化はそれに比して充分小さく閉じ込め効果に影響を及ぼさない

とすれば，y方向への電気光学効果による屈折率変化は一様であるとして，その等価的な屈折率変化を用いることができる。

具体的な一例として$\lambda=1.15\mu m$，$\eta_{ff}=0.2\mu m$，$d=3\mu m$，GaAs基板およびエピタキシャル層での自由キャリア濃度をそれぞれ$N=1\times10^{18}cm^{-3}$，$N_D=1\times10^{15}cm^{-3}$として計算をおこなった。

印加電圧0(V)ではE^x_{pq}モードに対し，表面から1μmの範囲で屈折率変化は$\Delta n_{eo}=2.4\times10^{-5}$であり無視してよい。

印加電圧−20(V)ではE^x_{pq}モードに対し，エピタキシャル層（3μm）全体で，等価的な屈折率変化は$\Delta n_{eo}=1.8\times10^{-4}$である。

なお空乏層による自由キャリア濃度差にもとずく屈折率変化は2.6×10^{-6}である。

次に印加電圧−20(V)の時，電極端での効果を考えると，E^x_{pq}モードに対する屈折率分布はFig.15，E^y_{pq}モードに対する屈折率分布はFig.16の実線のようになる。

ここで計算を容易にするためにFig.15，16において屈折率分布を波線のように近似した。

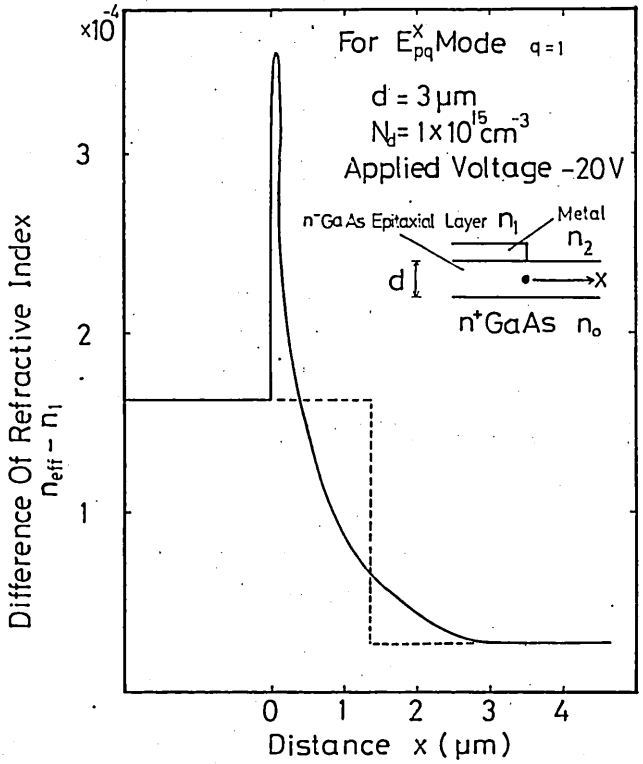


Fig. 15

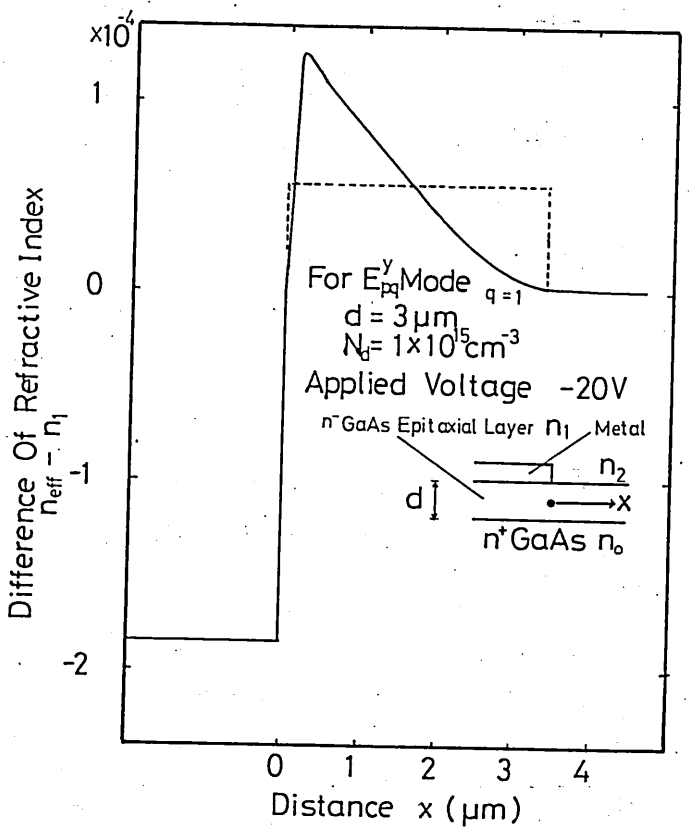
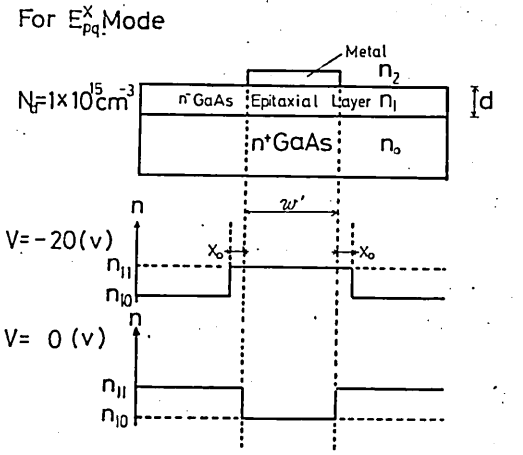


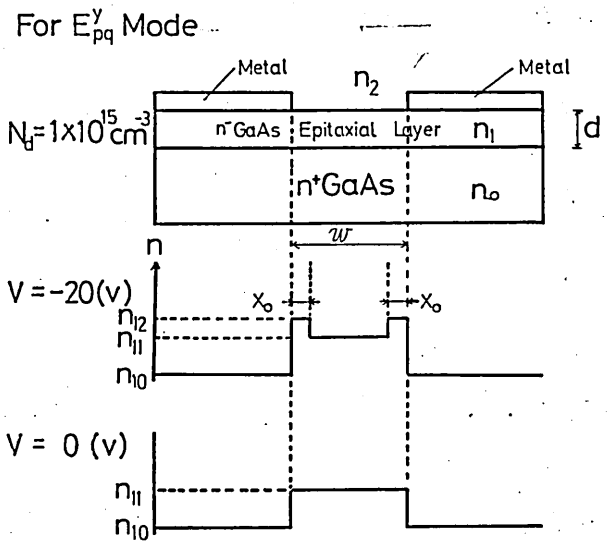
Fig. 16

このような近似を用いて，E_{pq}^{x}モード，E_{pq}^{y}モードについて印加電圧0 (V)，−20 (V) での全体的な屈折率分布をFig.17，18に示す。



V(V)	d(μm)	n_{10}	n_{11}	X_o(μm)
-20	3	3.443120	3.44327	1.37
0	3	3.44307	3.44310	—

Fig. 17



V(V)	d(μm)	n_{10}	n_{11}	n_{12}	X_0(μm)
-20	3	3.44290	3.44310	3.44316	3.4
0	3	3.44291	3.44310	—	—

Fig. 18

印加電圧0(V)の時，空乏層による影響は無視でき，metal-clad領域とmetal-unclad領域の等価屈折率の差からmetal-unclad領域が導波路になる。

たとえば，　$w=15\mu m$に対して　E^x_{11}，E^y_{11}モード

$w=25\mu m$に対して　E^x_{11}，E^y_{11}，E^y_{21}モード

が励振する。

印加電圧−20(V)の時，E^x_{pq}モードについてはFig.17のように導波領域はmetal-unclad領域からmetal-clad領域に変化し，三層構造の導波路とみなせる。

metal-cladの幅をw'とすれば

$w'=15\mu m$に対して　E^x_{11}モード

$w'=25\mu m$に対して　E^x_{11}，E^x_{21}モード

が励振する。

E^y_{pq}モードについてはFig.18のようにmetal-unclad領域が導波領域であり，対称五層構造の導波路とみなせる。

$w=15\mu m$に対して　E^y_{11}，E^y_{21}，E^y_{31}モード

$w=25\mu m$に対して　E_{11}^{y}, E_{21}^{y}, E_{31}^{y} モード

が励振する。

4. ま と め

GaAs光導波路として拡散型光導波路とショットキー型光導波路をとり上げ，その励振モードを調べた。拡散型光導波路は自由キャリア濃度差にもとずく屈折率変化を用い，導波路の形をrib型として考え，励振モードを求めた。さらに空乏層の影響も考慮した。

ショットキー型は metal-clad による屈折率変化と空乏層での電気光学効果による屈折率変化から励振モードを求めた。さらに電極端での効果も考えた。印加電圧 0(V) では metal-unclad 領域が導波領域となるが，reverse bias を加えていくと電気光学効果により E_{pq}^{x} モードの導波領域は metal-clad 領域に移行することがわかった。

以上の計算によりモードの励振条件を大よそ見積ることができるが，厳密には上記の近似によることなく一般的な屈折率分布から励振モードを求める必要があり，さらに Maxwell 方程式を境界条件の下に解くことが必要である。また，実験により，いかなるモードが励振するか確認しなければならない。

謝辞　有益な助言を頂いた横須賀通信研究所の小山調査役，三菱電機中研の三井主任研究員を始め，関係各位に深く感謝します。

参考文献

(1) J. C. Campbell et al. 'GaAs electro-optic channel-waveguide modulator' Appl. Plys. Lett., 26, 11, 640 (June 1975)

(2) J. C. Campbell et al. 'GaAs electro-optic directional-coupler switch' Appl. Phys. Lett., 27, 4, 202 (August 1975)

(3) F. K. Reinhart et al. 'Transmission properties of rib waveguides formed by anodization of epitaxial GaAs on $A\ell_xGa_{1-x}As$ layers' Appl. Phys. Lett., 24, 6, 271 (March 1974)

(4) F. J. Leonberger et al. 'Low-loss GaAs $p^+n^-n^+$ three-dimensional optical waveguides' Appl. Phys. Lett., 28, 10, 616 (May 1976)

(5) F. A. Blum et al. 'Optical striplines for integrated optical circuits in epitaxial GaAs' Appl. Phys. Lett., 25, 2, 116 (July 1974)

(6) J. C. Tray et al. 'Three-dimensional light guides in single-crystal GaAs-$A\ell_xGa_{1-x}As$' Appl. Phys. Lett., 22, 10, 511 (May 1973)

(7) V. Evtuhov, A. Yariv 'GaAs and GaAlAs Devices for Integrated Optics' IEEE MTT-23, 1, 44 (January 1975)

(8) W. S. C. Chang 'Integrated Optics at 10.6-μm Wavelength' IEEE MTT-23, 1, 31 (January 1975)

(9) E. A. J. Marcatili 'Slab-Coupled Waveguides' Bell System Technical Journal, 53, 4, 645 (April 1974)

(10) Sze 'Physics of Semiconductor Devices' (Wiley-Interscience)

(11) 応用物理学会光学懇話会 '結晶光学' (森北出版)

(12) H. Furuta et al. 'Novel Optical Waveguide for Integrated Optics' Appl. Opt., 13, 2, 322 (February 1974)

(13) Y. Yamamoto et al. 'Propagation Characteristics of Partially Metal-Clad Optical Guide:Metal-Clad Optical Strip Line' Appl. Opt., 14, 2, 322 (February 1975)

(14) E. A. J. Marcatili 'Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics.' Bell System Technical Journal, 48, 9, 2071 (September 1969)

輻射科学研究会資料

フェライト装荷導波管回路

森 静雄*・宮越一光**・六島 克*
(*大阪府立大学工学部, ** シャープ)

昭和52年7月8日
(於 三菱電機)

1. まえがき

フェライトを装荷した導波管回路は構造を変化させることなしに，印加直流磁界を変化させるという電気的変化によって，周波数特性を変化させることができる特徴をもっている。

磁性体を方形導波管の管軸方向の一部に，全断面にわたって装荷した回路に関する研究は種々報告されている。Brand[1]は導波管の一部の横巾を狭くし，その中央にフェライトを装荷すると，周波数特性が印加直流磁界によって変化することを報告している。Hass and Godtmann[2]は上記と同じ構造を用いた帯域通過フィルタについて，フェライト内の電磁界を準等方性近似して周波数特性を求めている。また，O'Brien[3]は一様な横巾の導波管内に磁性体を装荷し，その不連続問題を磁性体の異方性を考慮して解析している。

本文中では，回路の小形化が可能な構造として，方形導波管内にその横巾を狭めた遮断領域とその領域より少し横巾を拡げたフェライト装荷通過領域を，管軸

方向に交互に設けて導波管回路を構成し，直流磁界をTE_{10}波の電界方向に印加した場合の伝送特性について考察している。解析においては，フェライトの異方性を考慮し，モード解析法[7]を用いている。

2 電磁界の解析

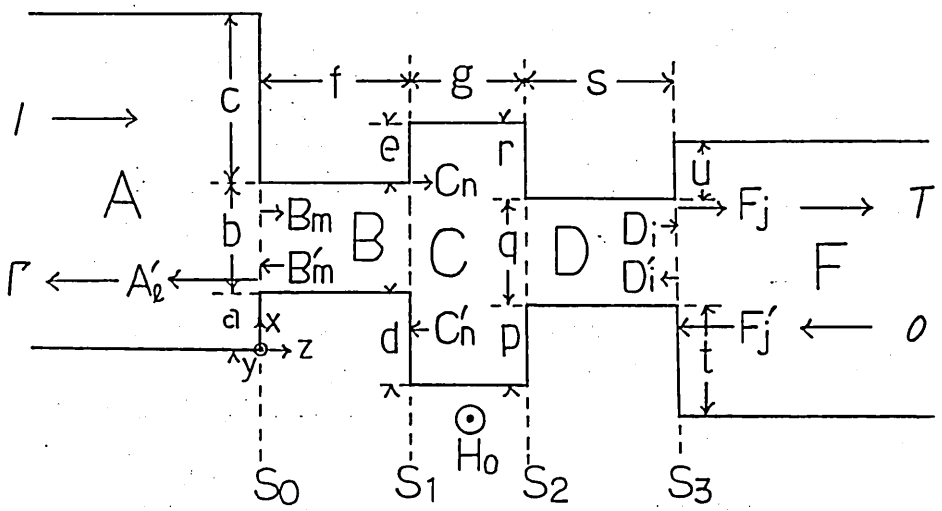


図1 フェライト装荷導波管回路

図1に示されるように，境界面S_0，S_1，S_2，S_3によって区分された領域A，B，C，D，Fをもつ方形導波管を考える。領域Cにフェライトを装荷し，他の領域は空気層（一般には誘電体層）とする。フェライトにはy軸方向に直流磁界を印加する。いま，S_0

面の左側から単位振巾のTE_{10}波が入射した場合の各領域のモード振巾をつぎのように決める。

A_l'：　A領域におけるl次モードの反射振巾

B_m, B_m'：B領域におけるm次モードの入，反射振巾

C_n, C_n'：C領域におけるn次モードの入，反射振巾

D_i, D_i'：D領域におけるi次モードの入，反射振巾

F_j, F_j'：F領域におけるj次モードの入，反射振巾

ε_{rA}, ε_{rB}, ε_{rC}, ε_{rD}, ε_{rF}：

A，B，C，D，F領域における比誘電率

各境界面S_0, S_1, S_2, S_3の両側の電界Eおよび磁界Hはつぎのように表わされる。

A領域

S_0面の左側で

$$E_A=(1+\Gamma)\sin\frac{\pi x}{a+b+c}+\sum_{l=2}^{\infty}A_l'\sin\frac{l\pi x}{a+b+c} \qquad (1)$$

$$H_A=-Y_{A1}(1-\Gamma)\sin\frac{\pi x}{a+b+c}+\sum_{l=2}^{\infty}Y_{Al}A_l'\sin\frac{l\pi x}{a+b+c} \qquad (2)$$

ただし，Γは反射係数，Y_{Al}は波動アドミッタンスで

$$Y_{Al}=\frac{\gamma_{Al}}{j\omega\mu_0}=\frac{1}{j\omega\mu_0}\sqrt{\left(\frac{l\pi}{a+b+c}\right)^2-\varepsilon_{rA}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$$

である。

B領域

S_0 面の右側で

$$E_B=\sum_{m=1}^{\infty}(B_m+B_m')\sin\frac{m\pi}{b}(x-a) \tag{3}$$

$$H_B=-\sum_{m=1}^{\infty}Y_{Bm}(B_m-B_m')\sin\frac{m\pi}{b}(x-a) \tag{4}$$

S_1 面の左側で

$$E_B=\sum_{m=1}^{\infty}(B_m e^{-\gamma_{Bm}f}+B_m' e^{\gamma_{Bm}f})\sin\frac{m\pi}{b}(x-a) \tag{5}$$

$$H_B=-\sum_{m=1}^{\infty}Y_{Bm}(B_m e^{-\gamma_{Bm}f}-B_m' e^{\gamma_{Bm}f})\sin\frac{m\pi}{b}(x-a) \tag{6}$$

ここで $Y_{Bm}=\dfrac{\gamma_{Bm}}{j\omega\mu_0}=\dfrac{1}{j\omega\mu_0}\sqrt{\left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2-\varepsilon_{rB}\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$ である。

C領域

S_1 面の右側で

$$E_c=\sum_{m=1}^{\infty}(C_n+C_n')\sin\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d)) \tag{7}$$

$$H_c=-\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{Y_{csn}(C_n-C_n')\sin\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))$$
$$-Y_{ccn}(C_n+C_n')\cos\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))\Big\} \tag{8}$$

S_2 面の左側で

$$E_c=\sum_{m=1}^{\infty}(C_n e^{-\gamma_{cn}g}+C_n' e^{\gamma_{cn}g})\sin\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d)) \tag{9}$$

$$H_c=-\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{Y_{csn}(C_n e^{-\gamma_{cn}g}-C_n' e^{\gamma_{cn}g})\sin\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))$$
$$-Y_{ccn}(C_n e^{-\gamma_{cn}g}+C_n' e^{\gamma_{cn}g})\cos\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))\Big\} \tag{10}$$

ここで、$Y_{csn}=\dfrac{\gamma_{csn}}{j\omega\mu_0\mu_{eff}}$, $\gamma_{csn}=\sqrt{\left(\dfrac{n\pi}{b+d+e}\right)^2-\varepsilon_{rc}\mu_{eff}\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$

$Y_{ccn}=\dfrac{n\pi}{\omega\mu_0\mu_{eff}(b+d+e)}\cdot\dfrac{\kappa}{\mu}$ （μ_{eff}, κ および μ は 付

録Aに示す)

D領域

S_2 面の右側で

$$E_D = \sum_{i=1}^{\infty} \left(D_i e^{\gamma_{Di} s} + D_i' e^{-\gamma_{Di} s}\right) \sin \frac{i\pi}{q}\left(x-(a-d+p)\right) \tag{11}$$

$$H_D = -\sum_{i=1}^{\infty} Y_{Di} \left(D_i e^{\gamma_{Di} s} - D_i' e^{-\gamma_{Di} s}\right) \sin \frac{i\pi}{q}\left(x-(a-d+p)\right) \tag{12}$$

S_3 面の左側で

$$E_D = \sum_{i=1}^{\infty} \left(D_i + D_i'\right) \sin \frac{i\pi}{q}\left(x-(a-d+p)\right) \tag{13}$$

$$H_D = -\sum_{i=1}^{\infty} Y_{Di} \left(D_i - D_i'\right) \sin \frac{i\pi}{q}\left(x-(a-d+p)\right) \tag{14}$$

ここで, $Y_{Di} = \frac{\gamma_{Di}}{j\omega\mu_0} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\sqrt{\left(\frac{i\pi}{q}\right)^2 - \varepsilon_{rD}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$ である。

F領域

S_3 面の右側で

$$E_F = \sum_{j=1}^{\infty} F_j \sin \frac{j\pi}{q+t+u}\left(x-(a-d+p-t)\right) \tag{15}$$

$$H_F = -\sum_{j=1}^{\infty} Y_{Fj} F_j \sin \frac{j\pi}{q+t+u}\left(x-(a-d+p+t)\right) \tag{16}$$

ここで, $Y_{Fj} = \frac{\gamma_{Fj}}{j\omega\mu_0} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\sqrt{\left(\frac{j\pi}{q+t+u}\right)^2 - \varepsilon_{rF}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$ である。

つぎに, S_0 面での電磁界の連続条件を考えると,

$$E_A = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ E_B & (a < x < a+b) \\ 0 & (a+b < x < a+b+c) \end{cases} \tag{17}$$

$$H_A = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ H_B & (a < x < a+b) \\ 0 & (a+b < x < a+b+c) \end{cases} \tag{18}$$

したがって，式(1)および(3)から得られる電界の連続条件式に $\sin\frac{l'\pi}{a+b+c}x$ を掛けて $0<x<a+b+c$ の範囲で積分すると，

$$A_l'\frac{a+b+c}{2}=\sum_{m=1}^{\infty}(B_m+B_m')f_{7ml'} \qquad (19)$$

ここで，$f_{7ml'}=\int_a^{a+b}\sin\frac{m\pi}{b}(x-a)\sin\frac{l'\pi}{a+b+c}x\,dx$ である。

同様に，式(2)および(4)から得られる磁界の連続条件式に $\sin\frac{m'\pi}{b}(x-a)$ を掛けて $a<x<a+b$ の範囲で積分すると，

$$Y_{A1}(1-\Gamma)f_{81m'}-\sum_{l=2}^{\infty}Y_{Al}A_l'f_{8lm'}=Y_{Bm}(B_m-B_m')\frac{b}{2} \qquad (20)$$

ここで，$f_{81m'}=\int_a^{a+b}\sin\frac{\pi}{a+b+c}x\sin\frac{m'\pi}{b}(x-a)\,dx$

$f_{8lm'}=\int_a^{a+b}\sin\frac{l\pi}{a+b+c}x\sin\frac{m'\pi}{b}(x-a)\,dx$ である。

以下同様にして，S_1 面，S_2 面および S_3 面における電磁界の連続条件式からつぎの式(21)～(26)までの式を得る。

$$(B_m e^{-\gamma_{Bm}f}+B_m'e^{\gamma_{Bm}f})\frac{b}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n+C_n')f_{1m'n} \qquad (21)$$

$$Y_{Bm}(B_m e^{-\gamma_{Bm}f}-B_m'e^{\gamma_{Bm}f})\frac{b}{2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\{Y_{csn}(C_n-C_n')f_{2m'n}-Y_{ccn}(C_n+C_n')f_{3m'n}\} \qquad (22)$$

$$(D_i e^{\gamma_{Di}s}+D_i'e^{-\gamma_{Di}s})\frac{a}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{-\gamma_{cn}g}+C_n'e^{\gamma_{cn}g})f_{4in} \qquad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{Y_{csn}(C_n e^{-\gamma_{cn}q}-C_n' e^{\gamma_{cn}q})f_{5i'n}-Y_{ccn}(C_n e^{-\gamma_{cn}q}+C_n' e^{\gamma_{cn}q})f_{6i'n}\}$$
$$=Y_{Di}(D_i e^{\gamma_{Di}s}-D_i' e^{-\gamma_{Di}s})\frac{q}{2} \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}(D_i+D_i')f_{9ij'}=F_j\frac{q+t+u}{2} \tag{25}$$

$$Y_{Di}(D_i-D_i')\frac{q}{2}=\sum_{j=1}^{\infty}Y_{Fj}F_j f_{10i'j} \tag{26}$$

ここで，
$$f_{1m'n}=\int_{a-d}^{a+b+e}\sin\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))\sin\frac{m'\pi}{b}(x-a)\,dx$$
$$f_{2m'n}=\int_{a}^{a+b}\sin\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))\sin\frac{m'\pi}{b}(x-a)\,dx$$
$$f_{3m'n}=\int_{a}^{a+b}\cos\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))\sin\frac{m'\pi}{b}(x-a)\,dx$$
$$f_{4i'n}=\int_{a-d}^{a+b+e}\sin\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))\sin\frac{i'\pi}{q}(x-(a-d+p))\,dx$$
$$f_{5i'n}=\int_{a-d+p}^{a-d+p+q}\sin\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))\sin\frac{i'\pi}{q}(x-(a-d+p))\,dx$$
$$f_{6i'n}=\int_{a-d+p}^{a-d+p+q}\cos\frac{n\pi}{b+d+e}(x-(a-d))\sin\frac{i'\pi}{q}(x-(a-d+p))\,dx$$
$$f_{9ij'}=\int_{a-d+p-t}^{a-d+p+q+u}\sin\frac{i\pi}{q}(x-(a-d+p))\sin\frac{j'\pi}{q+t+u}(x-(a-d+p-t))\,dx$$
$$f_{10i'j}=\int_{a-d+p}^{a-d+p+q}\sin\frac{j\pi}{q+t+u}(x-(a-d+p-t))\sin\frac{i'\pi}{q}(x-(a-d+p))\,dx$$

である。

式(19)～(26)を用いて，反射係数Γと透過係数F_1＝Tとの関係式を求める。

式(19),(20),(21)および(22)より反射係数ΓをC_n，C_n'で表わすと，式(27)になる。

$$\sum_{m,n}P_{mn}C_n+\sum_{m,n}Q_{mn}C_n'+Y_{A1}(1-\Gamma)f_{8lm'}=0 \tag{27}$$

ただし，P_{mn} および Q_{mn} は 次数 m，項数 n の行列要素である。

同様にして，式(23)，(24)，(25) および (26) より透過係数 T を C_n，C_n' で表わすと，式(28)になる。

$$\sum_{i,n} R_{in} C_n + \sum_{i,n} S_{in} C_n' + \gamma_{F1} T f_{10i'} = 0 \qquad (28)$$

ただし，R_{in} および S_{in} は 次数 i，項数 n の行列要素である。

また，S_0 面における電界の連続条件式に $\sin\frac{\pi}{a+b+c}x$ を掛けて $0<x<a+b+c$ の範囲で積分すると，

$$(1+\Gamma)\frac{a+b+c}{2} = \sum_{m=1}^{\infty}(B_m + B_m')\int_a^{a+b}\sin\frac{m\pi}{b}(x-a)\sin\frac{\pi}{a+b+c}x\,dx \qquad (29)$$

式(29)に式(21)および(22)から得た B_m，B_m' を代入して C_n，C_n' のみからなる式に変形すると，

$$\sum_m T_m C_n + \sum_m U_m C_n' - (1+\Gamma)\frac{a+b+c}{2} = 0 \qquad (30)$$

S_3 面における電界の連続条件式に $\sin\frac{\pi}{q+t+u}(x-(a-d+p-t))$ を掛けて $a-d+p-t<x<a-d+p+q+u$ の範囲で積分し，式(23)および(24)を用いて D_n，D_n' を消去すると，式(31)が得られる。

$$\sum_n V_n C_n + \sum_n W_n C_n' - T\frac{q+t+u}{2} = 0 \qquad (31)$$

ただし，T_m, U_m, V_n および W_n は 行列要素である。

式(27), (28), (30) および (31) において，C_n, C_n', Γ, T と定数項に注目すると，つぎの線形方程式が得られる。

$$\alpha C_n + \beta C_n' + \gamma \Gamma + \delta T = 定数 \qquad (32)$$

式(32)より透過係数 T を求めることによって透過減衰量 F は 式(33)で与えられる。

$$F = 20 \log \left| \frac{1}{T} \right| \ (dB) \qquad (33)$$

3 回路の小形化

第2章で述べている，回路の小形化が可能な導波管回路の構造とは そのような構造にすると，管軸方向に薄形化された回路が構成できることを意味している。本章では，上記の内容を説明するために近似計算を行なう。すなわち，フェライト内の電磁界を準等方性近似し，回路論的取扱い[2]によって考察する。

図2に示すように，導波管回路の不連続面に対して境界面 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 を考え，S_5 面をこの回路の対称面とする。境界面によって区分される各領域を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。通過領域，遮断領域およ

びフェライト装荷通過領域の横巾寸法をそれぞれa, b および c と d，遮断領域の管軸方向の長さを ℓ，フェライト装荷領域の長さの $1/2$ を x_0 とする。

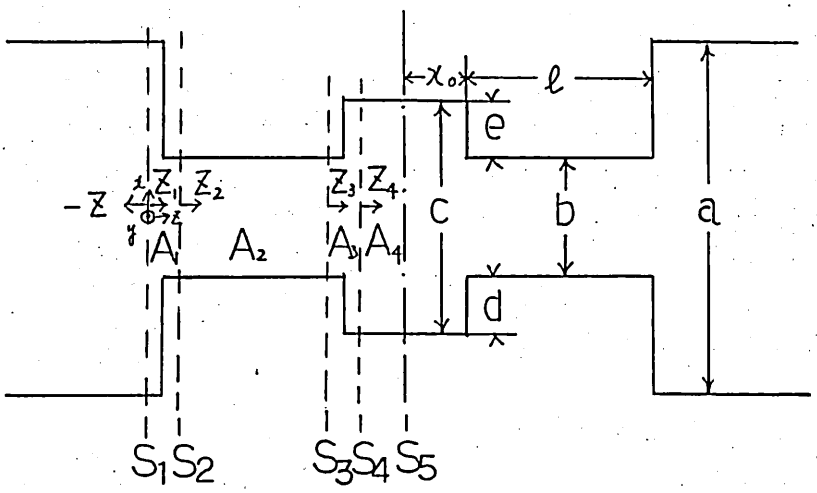


図2　フェライト装荷導波管回路

各境界面における電磁界に対して，等価電圧および等価電流の概念を導入する。Z, $j|Z_H|$, Z_μ をそれぞれ通過領域，遮断領域，フェライト装荷領域の特性インピーダンスとすると，各境界面の等価電圧 V および等価電流 I は Fマトリックスを用いてつぎのように表わされる。

A_1 領域で

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

A_2領域で

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha l & j|Z_H|\sinh\alpha l \\ -(j/|Z_H|)\sinh\alpha l & \cosh\alpha l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

A_3領域で

$$\begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_4 \\ I_4 \end{pmatrix} \quad (36)$$

A_4領域で

$$\begin{pmatrix} V_4 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta x_0 & jZ_\mu \sin\beta x_0 \\ (j/Z_\mu)\sin\beta x_0 & \cos\beta x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_5 \\ I_5 \end{pmatrix} \quad (37)$$

ここで，$|Z_H| = \dfrac{\omega\mu_0}{\alpha}$ ，$\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$ ，

$$Z_\mu = \frac{\omega\mu_0\mu_{eff}}{\beta}, \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varepsilon_r \mu_{eff} - \left(\frac{\pi}{c}\right)^2},$$

ε_r，μ_{eff} はフェライトの比誘電率，実効比透磁率である。また，

$$Z = \frac{\omega\mu_0}{\beta_0}, \quad \beta_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

各境界面から伝送方向を見たインピーダンスを Z_1，Z_2，Z_3，Z_4 とし，対称面 S_5 に磁気壁を仮定すると，式(37)の等価電流 I_5 は零になる。いま，式(34)～(37)を用い，さらに，S_1 面における境界条件式(38)を用いると，式(39)が導かれる。

$$Z_1 = -Z \tag{38}$$

$$A_{43} + j\frac{\tan\beta x_0}{Z_\mu} = \frac{\left(-\frac{1}{Z} - A_{21}\right) + j\frac{\tanh\alpha l}{|Z_H|}}{1 - j\left(-\frac{1}{Z} - A_{21}\right)|Z_H|\tanh\alpha l} \tag{39}$$

ここで，A_{21}，A_{43} は 領域 A_1 および A_3 の不連続部に発生する奇数次の高次モードを考慮したマトリックス要素で，式(40)に示す形で与えられる。

$$A_{21} = -\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} & \cdots & g_{1M} \\ g_{31} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{M1} & \cdots & \cdots & g_{MM} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_{11} & g_{13} & \cdots & g_{1M} \\ p_{31} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{M1} & g_{M3} & \cdots & g_{MM} \end{vmatrix}} \tag{40}$$

ここで，

$$p_{mn} = 4\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi}\frac{m\cos\frac{n b}{2a}\pi}{m^2 - \left(n\frac{b}{a}\right)^2}(-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$-g_{rs} = \sum_{n=3,5,\cdots} Y_n p_{rn} p_{sn} + \sum_{\nu=3,5,\cdots} \delta_{\nu r}\delta_{\nu s}$$

$\delta_{\nu r}$, $\delta_{\nu s}$ ：クロネッカーの δ

である。

式(39)に含まれる A_{43} は A_{21} と同一形の式となる。式(39)は フェライト内で電磁波が偶モード（最低次モード，110 タイプ）で共振を起しているときの特性方

程式を表わしている。いま，領域 A_1, A_2 の導波管寸法を変えずに領域 A_3, A_4 のそれを変えると，式(39)から同一共振周波数に対してつぎの式(41)が得られる。

$$A_{43} + j\frac{\tan\beta x_0}{Z_\mu} = -定 \qquad (41)$$

ここで，寸法 b と c との差が小さいと仮定すると，A_{43} は零と見做すことができる。同時に，フェライトの損失項を無視して考える。いま，c を b に等しくしたときの Z_μ, β, x_0 をそれぞれ Z_μ', β', x_0' とすると，式(41)よりつぎの式(42)が得られる。

$$\beta \tan\beta x_0 = \beta' \tan\beta' x_0' \qquad (42)$$

$\beta > \beta'$ の条件からつぎの式(43)が得られる。

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\tan\beta' x_0'}{\tan\beta x_0} > 1 \text{，すなわち} \quad \frac{x_0'}{x_0} > \frac{\beta}{\beta'} > 1 \qquad (43)$$

よって，領域 A_4 の横巾 c を b より大きくすることによって，その領域の管軸方向の長さ $2x_0$ を小さくすることができる。同時に，共振周波数近傍の位相定数 β は大きくなることが判る。

4 数値計算と検討

第2章の解析に基づいて多結晶フェライトを装荷し

た導波管回路について，数値計算を行なう。第3章において，本文中で取扱っている導波管構造で回路の小形化（すなわち薄形化）が実現できることが判った。また，フェライトを管軸方向に薄形化して平板として用い，直流磁界をこの平板に平行に印加すると，直流磁界方向の反磁界係数は小さくなる。したがって，フェライトは低印加磁界で飽和する。

フェライトを用いた回路の温度特性をよくするためには，キュリー温度の高い，すなわち，飽和磁化の大きい材料を選ぶとよい。飽和磁化が大きいと低磁界損失は増大するが，これを逓減する手段としてフェライトの共振角周波数ωの高い点を選ぶとよい。いま，フェライトの共振角周波数ωと波数kの関係は，直流磁界を電磁波の伝搬方向と垂直になるように印加した場合，図3のように表わされる。この図は低磁界共

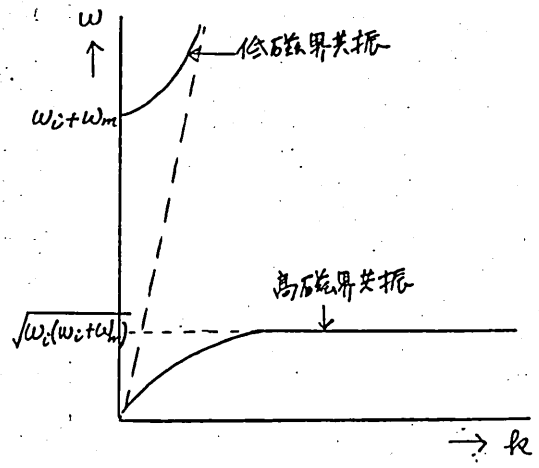


図3　ω-k曲線
$(\omega_i=\gamma H_0^i,\ \omega_m=\gamma M_s)$

振と高磁界共振の模様を示しているが，低磁界共振で直流磁界を印加すると，高い角周波数で共振を起すことを示している。

よって，ここで提案する導波管構造は回路を小形化し，かつ，温度特性をよくするため低磁界共振で動作させ，高い共振角周波数帯で使用するのに適していると考える。

以下は低磁界共振の動作特性について計算結果を示す。図4～6には，飽和磁化 $M_s=1950$ (Gauss)，比誘電率 $\varepsilon_r=13.3(1-j5\times10^{-4})$，磁気半値巾 $\Delta H=8$ (Oe) のフェライトに内部直流磁界 $H_0^i=1000$ (Oe) を印加した場合，反磁界係数 $N_y=0.0696$ として導波管寸法の一部をパラメータとした回路の伝送特性を図示している。いづれの場合も，遮断領域とフェライト装荷領域の横巾の差 e, d, r, p（図1参照）は 1mm にしている。また，計算結果と実験結果の対比は図7に示している。ここでは，フェライトの比誘電率 ε_r の公称値は $16.4(1-j5\times10^{-4})$ であるが，計算では 13.3(1-

$j5\times10^{-4}$)を用い，共振点近傍の回路の伝送特性を示している。フェライトの比誘電率として公称値から19%減じた値を計算に用いれば，内部直流磁界H_0^iを変化させても共振点近傍の計算値と実験値が一致することを示している。

6 むすび

フェライト装荷導波管回路において，フェライトの装荷された通過領域の横巾を遮断領域の横巾より拡げた構造にした回路の周波数特性について，理論的および実験的考察を行なった。このような構造にすると，回路の小形化と同時に，低印加直流磁界で動作する導波管回路が構成される。今後，この回路のフィルタ回路への応用が期待できる。

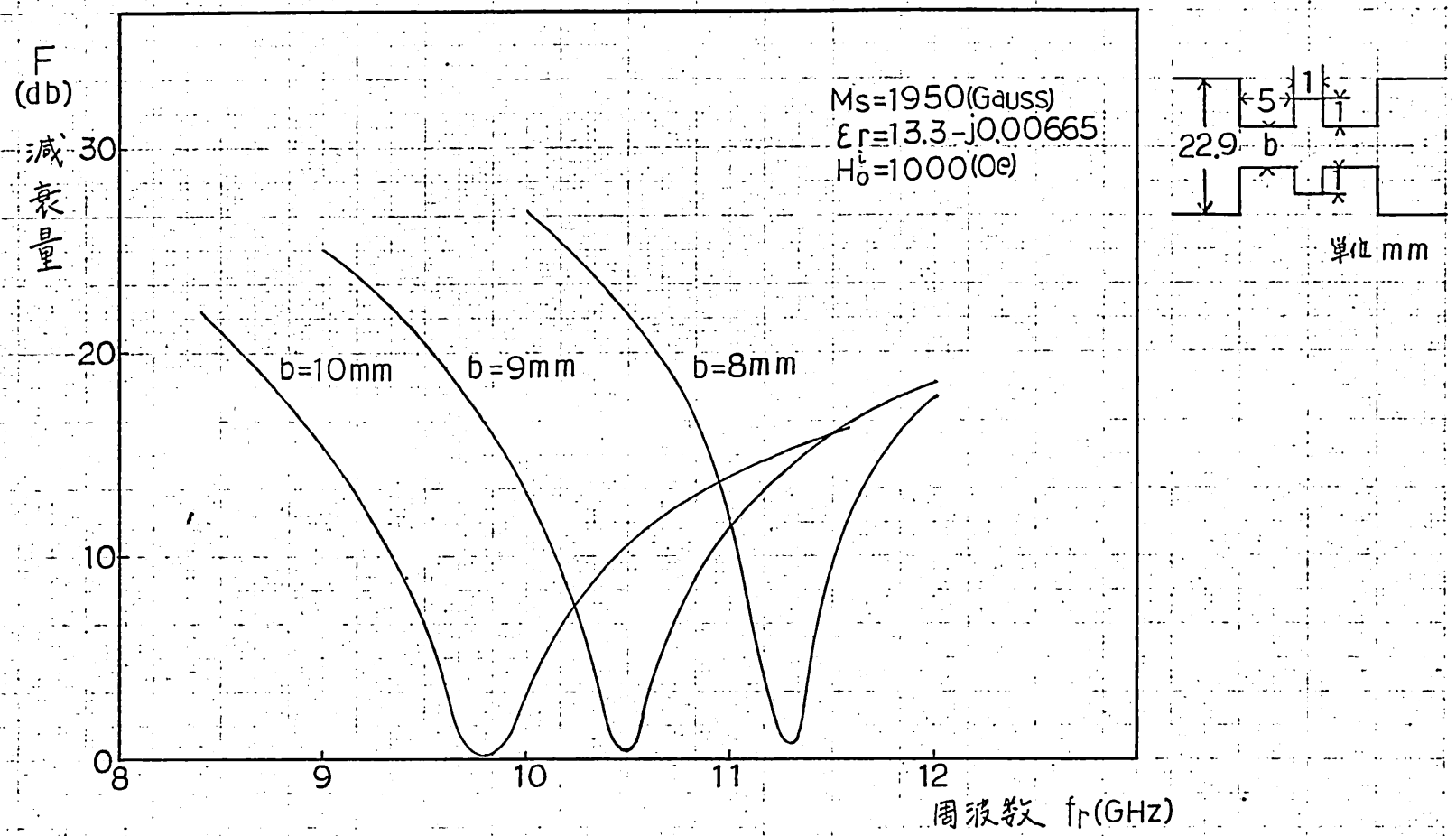

F
(db)
減衰量
30
20
10
0
8
9
10
11
12
周波数 fr(GHz)
b=10mm
b=9mm
b=8mm
Ms=1950(Gauss)
εr=13.3-j0.00665
H0=1000(Oe)
22.9
5
1
1
b
単位 mm

図4 伝送特性

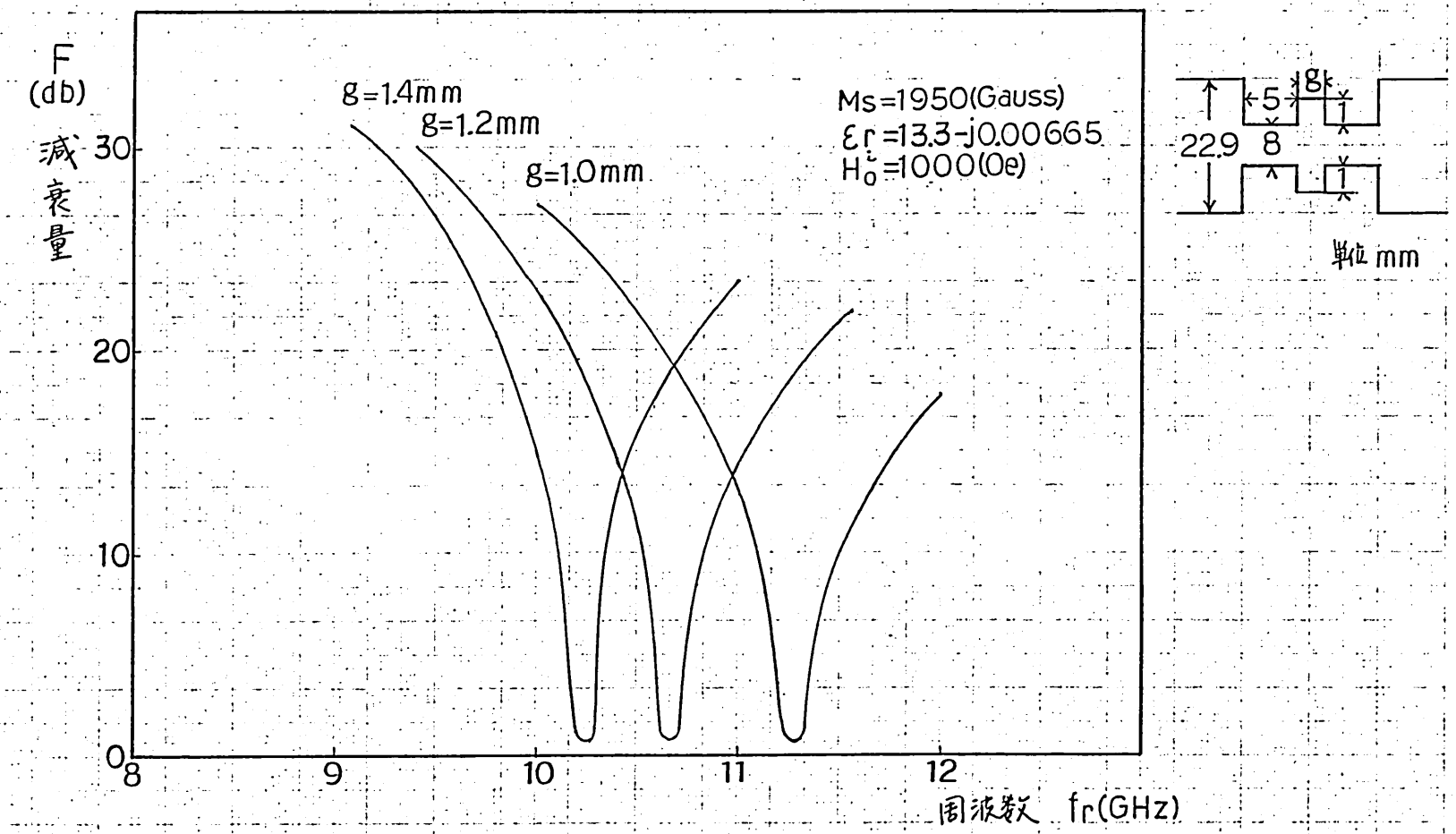

F
(db)
減衰量
30
20
10
0
8
9
10
11
12
周波数 fr(GHz)
g=1.4mm
g=1.2mm
g=1.0mm
Ms=1950(Gauss)
εr=13.3-j0.00665
H0=1000(Oe)
22.9
5
8
g
1
1
単位 mm

図5 伝送特性

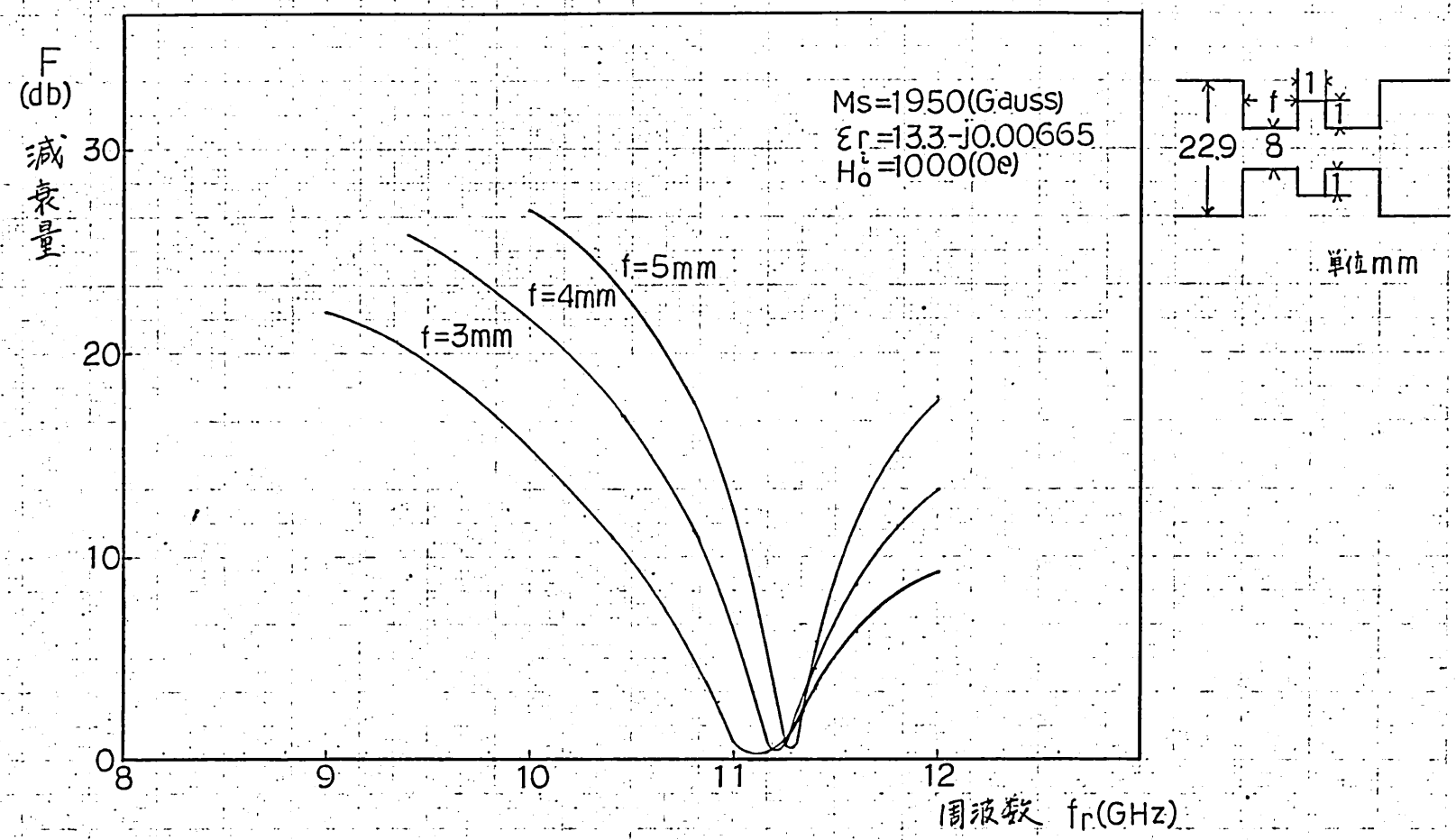

F
(db)
減衰量
30
20
10
0
8
9
10
11
12
周波数 fr(GHz)
Ms=1950(Gauss)
εr=13.3-j0.00665
H0i=1000(Oe)
f=3mm
f=4mm
f=5mm
22.9
f
8
1
1
1
単位mm

図6 伝送特性

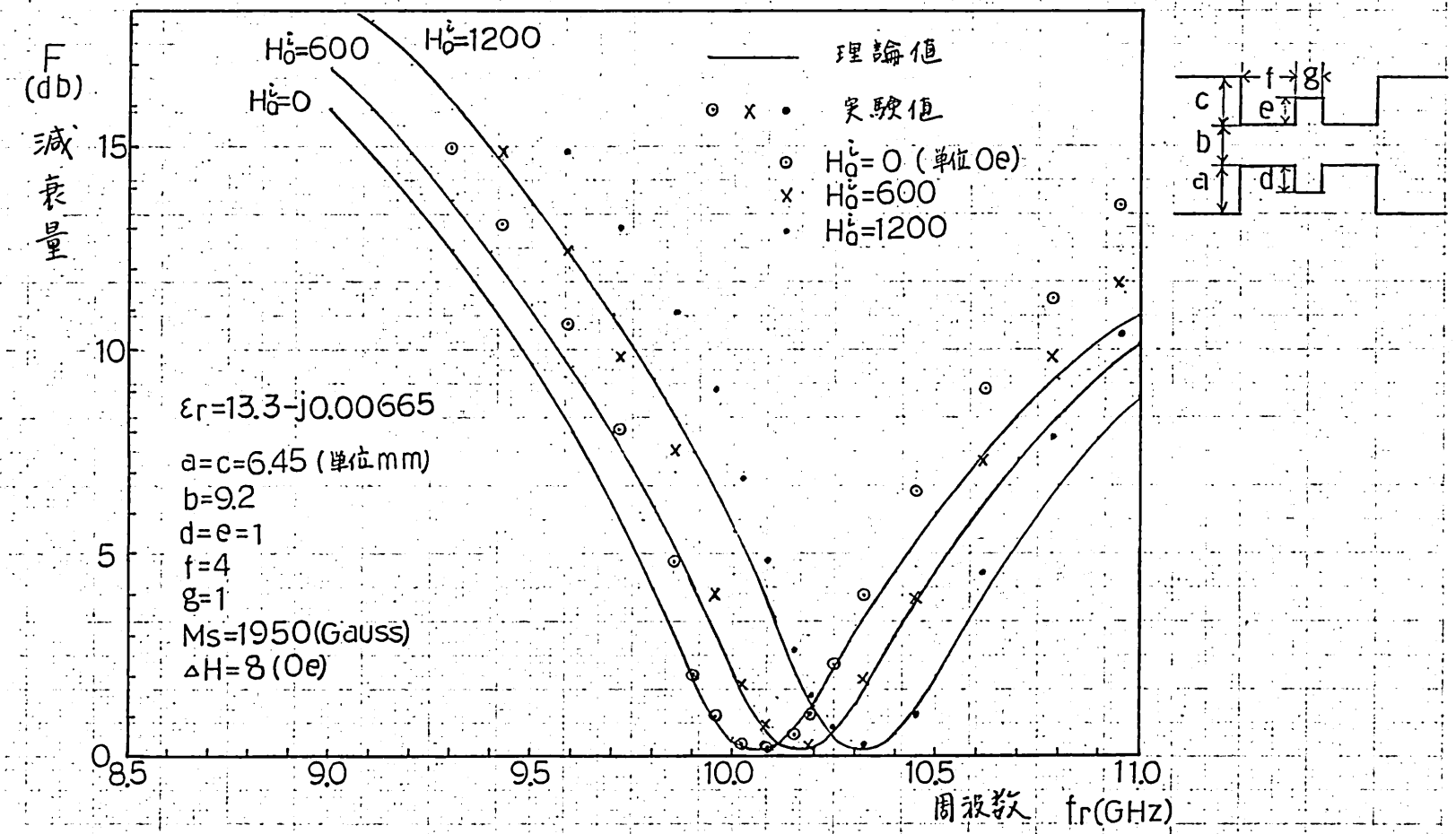

F
(db)
減衰量
15
10
5
0
8.5
9.0
9.5
10.0
10.5
11.0
周波数 fr(GHz)
H_0^i=600
H_0^i=1200
H_0^i=0
理論値
実験値
H_0^i= 0 (単位Oe)
H_0^i=600
H_0^i=1200
εr=13.3-j0.00665
a=c=6.45 (単位mm)
b=9.2
d=e=1
f=4
g=1
Ms=1950(Gauss)
ΔH=8 (Oe)
f
g
c
e
b
a
d

図7 伝送特性

参考文献

(1) H. Brand, "Magnetisch durchstimmbare Mikrowellenresonatoren aus polykristallinen Ferritquadern", A.E.Ü., 18, pp371-379 (1964).

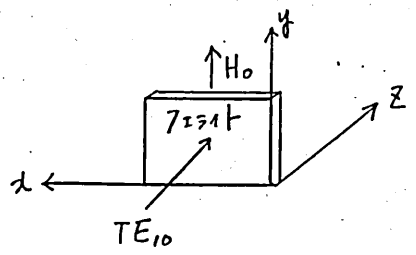
(2) W. Haas and H.D. Godtmann, "Mikrowellenbandfilter unter Verwendung eindimensional offener Resonatoren", A.E.Ü., 19, pp551-558 (1965).

(3) K.C. O'Brien, "Microwave Properties of slabs of Uniformly Magnetized Material Filling the Cross Section of a Rectangular Waveguide Operating in TEno Modes", I.E.E.E. Trans. MTT-18 (No. 7) pp377-382 (1970).

(4) A. Wexler, "Solution of Waveguide Discontinuities by Modal Analysis", I.E.E.E. Trans. MTT-15 (No. 9) pp508-517 (1967).

付録A　フェライトの定数

フェライトが外部印加直流磁界によって y 軸方向に磁化されているとき，フェライトのテンソル透磁率 $\hat{\mu}$ は 式(A-1)で表わされる。



図A-1

$$\hat{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & 0 & -j\kappa \\ 0 & 1 & 0 \\ j\kappa & 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad (A-1)$$

μ, κ は テンソル透磁率の要素でつぎの式で表わされる。

$$\mu = 1 + \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \kappa = -\frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (A-2)$$

ここで $\omega_0 = h_0^i + j\alpha\omega$, $h_0^i = H_0^i / M_s$, $H_0^i = H_0 - N_y M_s$

$\alpha = \Delta H / (2\omega M_s)$, $\omega = f / f_m$, $f_m = -(\gamma/2\pi) M_s$,

H_0^i：内部直流磁界(Oe)，H_0：印加直流磁界(Oe)，

M_s：フェライトの飽和磁化(Gauss)，

N_y：Bozorthの反磁界係数，ΔH：磁気半値巾(Oe)，

f：使用周波数，f_m：磁化周波数，γ $(=-\eta)$：磁気回転比，

また，実効比透磁率 μ_{eff} は つぎの式(A-3)で表わされる。

$$\mu_{eff} = \frac{\mu^2 - \kappa^2}{\mu} = \mu'_{eff} - j\mu''_{eff} \qquad (A-3)$$

輻射科学研究会 資料

損失のある誘電体円柱による電磁波の散乱

安藤俊一
飯田一男
(大阪工業大学)

1977年10月7日

1. まえがき

誘電体または金属の電磁波散乱については多くの研究がある。この中には種々の形状および材質が不均一な場合も取扱われている。[8][9][10] 本稿では特に均質な複素誘電体で，しかもその形状によって決まる固有振動モードを有する物体の散乱を取扱う。例えば円柱，楕円柱，球体などの散乱問題はすでに多くの解析がある。[1]~[6] しかしこれらを構成する誘電体が実数の場合に比べ，複素誘電体になると計算が複雑になり，散乱の様子がわかりにくくなる。このときの散乱の状況を知る一つの方法として，誘電体の固有モードと損失率が散乱とどのように関連するかの問題が考えられるが，筆者らの知る限りにおいて，これについての解析例は見当らないようである。本稿はこの問題を検討し，固有モードを有する複素誘電体の散乱を的確に知る解析法を提出する。

周知のように，円柱，楕円柱，球体などの固有モードは，それぞれベッセル関数，マシュー関数，球ベッセル関数で構成された超越方程式で表わされる。[1]~[6] そして入射波に対する境界条件で決まる散乱モード振巾係数によって散乱波が決定される。散乱は一般に3次元であるが，本稿は固有モードと損失率が散乱に与える基礎的関係を検討する意味において，誘電体円柱の2次元散乱で代表させる。

従って無限長誘電体円柱が円柱軸に平行な電界または磁界の入射波によって散乱するとき，円柱軸方向に伝搬定数を有しないモードのみを取り上げる。そしてこのときの散乱波の固有モード，散乱モード振巾係数および共振の鋭さなどと，複素誘電率との関係を解析し，実際の数値計算に便利な式を提出する。次いでこれの具体的数値計算を行い，実測値と比較する。

またこの解析法の楕円柱，球体への適用にも言及する。

2. 散乱モード振巾係数

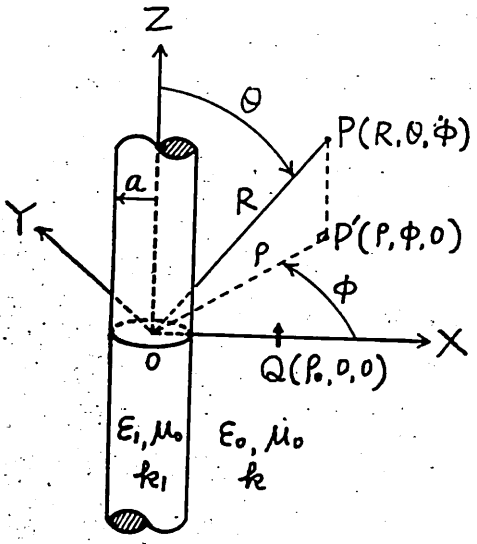


図1 座標系

誘電体円柱および入射波源の座標系を図1に示す。座標は直交座標(X,Y,Z)，円筒座標(ρ,φ,Z)，球座標(R,θ,φ)を併用する。誘電体円柱(半径a)の軸はZ軸上に，Z方向を向いた電気または磁気ダイポール波源はX軸上の点Q(ρ₀,0,0)にある。電磁界は時間因子exp(−jωt)に比例するものとし，以下これを省略する。

点Q(ρ₀,0,0)に電気ダイポールI·dZ(I：電流，dZ：長さ)があるとき，Q点からの1次波のZ方向のヘルツベクトルπ_z^p，誘電体円柱の散乱波および回折波のZ方向の電気および磁気ヘルツベクトルπ_z^s，π_z^{*s}，π_z^r，π_z^{*r}を求めて円柱表面(ρ=a)における境界条件で解けば，散乱波の展開係数が得られる。ここで散乱波のうち，水平面内(θ=π/2)での散乱波のモード振巾係数の分母を零とする式は，無限長誘電体円柱の固有モードのうち，伝搬定数h=0のものを決める方程式に一致する。このとき，水平面の電界の散乱波モード振巾係数B_{ms}^e(添字mはモード次数で，m=0,1,2,…，eはQ点に電気ダイポールがあることを意味する)は次のようになる。[3]

$$B_{ms}^e = -\frac{J_m'(ka)\cdot J_m(\sqrt{\varepsilon_r}\cdot ka)-\sqrt{\varepsilon_r}\cdot J_m(ka)\cdot J_m'(\sqrt{\varepsilon_r}\cdot ka)}{H_m^{(1)\prime}(ka)\cdot J_m(\sqrt{\varepsilon_r}\cdot ka)-\sqrt{\varepsilon_r}\cdot H_m^{(1)}(ka)\cdot J_m'(\sqrt{\varepsilon_r}\cdot ka)} \qquad (1)$$

ここで

J_m，$H_m^{(1)}$はそれぞれベッセルおよび第1種ハンケル関数，

J_m', $H_m^{(1)\prime}$ はそれぞれ J_m, $H_m^{(1)}$ の第1次導関数,
$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}$, $\varepsilon_r = \varepsilon_1/\varepsilon_0$, ω：波源の角周波数,
ε_0, μ_0 はそれぞれ自由空間の誘電率および自由空間と誘電体円柱の透磁率, ε_1 は誘電体円柱の誘電率, ε_r：比誘電率。

Stratton は無限長円柱の固有波の伝搬に関して次式を示している。[1]

$$\left[\frac{\mu_1}{u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)} - \frac{\mu_2}{v}\frac{H_m^{(1)\prime}(v)}{H_m^{(1)}(v)}\right]\left[\frac{k_1^2}{\mu_1 u}\frac{J_m'(u)}{J_m(u)} - \frac{k_2^2}{\mu_2 v}\frac{H_m^{(1)\prime}(v)}{H_m^{(1)}(v)}\right] = m^2 h^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2}\right) \quad (2)$$

ただし, k_1, k_2 はそれぞれ円柱および外部媒質の波数, $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$, $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$, $u = \lambda_1 a$, $v = \lambda_2 a$, $\lambda_1^2 = k_1^2 - h^2$, $\lambda_2^2 = k_2^2 - h^2$, a は円柱半径である。式(2)の超越方程式の根は伝搬定数 h に関して可附番的固有値が無数に存在する。式(2)で $h=0$ としたとき, 軸方向に伝搬のない E波, H波の固有モードを決定するが, 式(1)の分母はそのうちの E波に相当する。

式(1)の分母は波源の励振角周波数が実数であるため零になることはなく, 従って B_{ms}^e は無限大になり得ない。

$$H_m^{(1)\prime}(\gamma_{m.n}) \cdot J_m(\sqrt{\varepsilon_r} \cdot \gamma_{m.n}) - \sqrt{\varepsilon_r} \cdot H_m^{(1)}(\gamma_{m.n}) \cdot J_m'(\sqrt{\varepsilon_r} \cdot \gamma_{m.n}) = 0 \quad (3)$$

が成立するためには $\gamma_{m.n}$ は複素数でなければならない。いま

$$\frac{\gamma_{m.n}}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot a} = \omega' = \omega_{m.n} - j\kappa_{m.n} \quad (4)$$

として $e^{-j\omega' t}$ の実部 $R_e(e^{-j\omega' t})$ をとれば

$$R_e(e^{-j\omega' t}) = e^{-\kappa_{m.n} t} \cdot \cos \omega_{m.n} t \quad (5)$$

となる。式(5)は誘電体円柱の E波の自由減衰振動を表わし, $\omega_{m.n}$ は固有角周波数を, $\kappa_{m.n}$ は振動の減衰定数を表わす。ここで m はモード次数で, $m = 0, 1, 2, \cdots$,

nは$\gamma_{m,n}$の大きさの小さい方から数えた順位で，$n=1, 2, 3, \cdots$である。

誘電体円柱を実数のωで強制振動するとき，ωが$\omega_{m,n}$の近くで共振現象を起すが，$\kappa_{m,n}$によって制限されるため，有限な振巾で共振する。式(1)に実数のωを入れたものが誘電体円柱の各振動モードにおける散乱波の複素振巾B_{ms}^{e}となる。Scheafer らは実数のε_rに対して複素根$\gamma_{m,n}$を具体的に計算し，$\omega_{m,n}$の近くで共振があり，$\kappa_{m,n}$が小さい程，共振が鋭く起ることを実証している。[2] 一般にモード次数mが大きくなるに従い$\kappa_{m,n}$は小さくなり，鋭い共振をする。

損失のある誘電体円柱を取扱う本題において，この辺の事情を明確にするために，式(1)を次のように書き換える。

$$B_{ms}^{e} = -\frac{a_m}{a_m + j b_m} = \alpha_m^{e} + j\beta_m^{e} \qquad (6)$$

ただし

$$a_m = J_m'(x)\cdot J_m(y) - \sqrt{\varepsilon_r}\cdot J_m(x)\cdot J_m'(y)$$
$$b_m = N_m'(x)\cdot J_m(y) - \sqrt{\varepsilon_r}\cdot N_m(x)\cdot J_m'(y)$$

N_mはノイマン関数，N_m'はN_mの第1次導関数

$$x = ka, \quad y = \sqrt{\varepsilon_r}\cdot x \quad 。$$

式(4)(5)の$\omega_{m,n}$の近くの共振角周波数$\omega_{m,n,0}$において，実数のωに対し，式(6)の$\beta_m^{e}=0$となり，誘電体円柱は共振する。このとき実数のε_rに対しては，$B_{ms}^{e}=-1$となる。

ε_rが複素比誘電率のとき，誘電体の損失率$\tan\delta$を導入して，式(6)のε_r，yをそれぞれ次のように書く。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_{r0}(1 + j\tan\delta) \\ y &= y_0 + j\Delta y \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ここで

$$y_0 = x\sqrt{\varepsilon_{r0}}\left[\frac{1}{2}\left\{(1+\tan^2\delta)^{\frac{1}{2}}+1\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta y = x\sqrt{\varepsilon_{r0}}\left[\frac{1}{2}\left\{(1+\tan\delta)^{\frac{1}{2}}-1\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

式(7)を式(6)に適用すれば，$J_m(y)$，$J_m'(y)$は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} J_m(y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(j\Delta y)^n}{n!}J_m^{(n)}(y_0) = R + jI \\ J_m'(y) &= \frac{\partial R}{\partial y_0} + j\frac{\partial I}{\partial y_0} = R' + jI' \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ただし

$$R = J_m(y_0) - \frac{(\Delta y)^2}{2}\left[J_m^{(2)}(y_0) - \frac{(\Delta y)^2}{12}\left\{J_m^{(4)}(y_0) - \cdots\right\}\right]$$

$$I = \Delta y\left[J_m^{(1)}(y_0) - \frac{(\Delta y)^2}{6}\left\{J_m^{(3)}(y_0) - \frac{(\Delta y)^2}{20}J_m^{(5)}(y_0) + \cdots\right\}\right]$$

$J_m^{(n)}$はJ_mの第n次導関数。

式(8)を式(6)に代入し，$a_m = d_m + je_m$，$b_m = f_m + jg_m$，としてα_m^e，β_m^eは次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \alpha_m^e &= -\frac{d_m(d_m - g_m) + e_m(e_m + f_m)}{(d_m - g_m)^2 + (e_m + f_m)^2} \\ \beta_m^e &= \frac{d_m f_m + e_m \cdot g_m}{(d_m - g_m)^2 + (e_m + f_m)^2} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ただし

$$d_m = \frac{1}{x}J_m(x)\left[y_0 \cdot R' - \Delta y \cdot I'\right] - J_m^{(1)}(x) \cdot R$$

$$e_m = \frac{1}{x}J_m(x)\left[y_0 \cdot I' + \Delta y \cdot R'\right] - J_m^{(1)}(x) \cdot I$$

$$f_m = \frac{1}{x}N_m(x)\left[y_0 \cdot R' - \Delta y \cdot I'\right] - N_m^{(1)}(x) \cdot R$$

$$g_m = \frac{1}{x}N_m(x)\left[y_0 \cdot I' + \Delta y \cdot R'\right] - N_m^{(1)}(x) \cdot I$$

$J_m^{(1)}$，$N_m^{(1)}$はそれぞれJ_m，N_mの第1導関数。

従つてこのときの共振角周波数$\omega_{m.n.0}$は次式で与えられる。

$$d_m f_m + e_m \cdot g_m = 0 \tag{10}$$

また誘電体円柱に貯えられるエネルギーをW，放射エネルギーをW_R，損失エネルギーをW_Dとし，$\omega_{m.n.0}$の前後で$|\alpha_m^e| = |\beta_m^e|$となる角周波数をそれぞれ$\omega_{m.n,1}$，$\omega_{m,n,2}$とすれば，$m,n$モード共振点における共振の鋭さ$Q_{m.n}$は次のようになる

$$Q_{m.n} = \omega_{m.n.0} \frac{W}{W_R + W_D} \simeq \frac{\omega_{m.n.0}}{\Delta \omega_{m.n}} \tag{11}$$

ただし

$$\Delta \omega_{m.n} = \omega_{m.n.2} - \omega_{m.n.1}$$

誘電体の$\tan\delta = 0$のときは，式(11)で$W_D = 0$となる。

さらに，$x_{m.n.1} = \omega_{m,n,1}\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot a$，$x_{m,n,2} = \omega_{m.n,2}\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot a$，$\Delta x_{m.n} = x_{m.n.2} - x_{m.n.1}$とすれば，式(4)(5)の$\kappa_{m.n}$は次のようになる。

$$\kappa_{m,n} \simeq \frac{1}{2} \Delta x_{m,n} \tag{12}$$

特に$\tan\delta \ll 1$のときは

$$\left.\begin{aligned} y_0 &\simeq x\sqrt{\varepsilon_{r0}} \\ \Delta y &\simeq \frac{1}{2} x \sqrt{\varepsilon_{r0}} \cdot \tan\delta \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

として，式(9)のd_m. e_m. f_m. g_mは次のように近似できる。

$$\left.\begin{aligned} d_m &\simeq \sqrt{\varepsilon_{r0}} \cdot J_m(x) \cdot G_m - J_m^{(1)}(x) \cdot L_m \\ e_m &\simeq \Delta y \left[\sqrt{\varepsilon_{r0}} \cdot J_m(x) \cdot M_m - J_m^{(1)}(x) \cdot J_m^{(1)}(y_0)\right] \\ f_m &\simeq \sqrt{\varepsilon_{r0}} \cdot N_m(x) \cdot G_m - N_m^{(1)}(x) \cdot L_m \\ g_m &\simeq \Delta y \left[\sqrt{\varepsilon_{r0}} \cdot N_m(x) \cdot M_m - N_m^{(1)}(x) \cdot J_m^{(1)}(y_0)\right] \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ただし

$$G_m = J_m^{(1)}(y_0) - (\Delta y)^2 \left\{ \frac{1}{y_0} J_m^{(2)}(y_0) + \frac{1}{2} J_m^{(3)}(y_0) \right\}$$

$$L_m = J_m(y_0) - \frac{1}{2}(\Delta y)^2 \cdot J_m^{(2)}(y_0)$$

$$M_m = \frac{1}{y_0} J_m^{(1)}(y_0) + J_m^{(2)}(y_0)$$

またこのときの $\omega_{m.n.0}$ における $|B_{mns}^e|$ は

$$|B_{mns}^e|_{\omega_{m.n.0}} \simeq \left[\frac{d_m^2}{(d_m - g_m)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

としてよい。

式(7)〜(15)を用いれば，$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0}(1 + j\tan\delta)$，半径 a の誘電体円柱からの水平面散乱波が，ε_{r0}，$\tan\delta$，a から直接的に，各固有モード毎に $ka = x$ の関数として簡単に計算できる。*

次に図1の Q 点に磁気ダイポール $M \cdot dz$ が z 軸と平行にある場合，即ち H 波に対しても前記 E 波と同様に計算できる。このときの式(6)，(9)に対応した B_{mns}^h，α_{mns}^h，β_{mns}^h（添字 h は H 波を表わす）を示せば，それらは次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
B_{mns}^h &= -\frac{l_m}{l_m + j m_m} = \alpha_m^h + j\beta_m^h \\
\alpha_m^h &= -\frac{n_m(n_m - q_m) + o_m(o_m + p_m)}{(n_m - q_m)^2 + (o_m + p_m)^2} \\
\beta_m^h &= \frac{n_m \cdot p_m + o_m \cdot q_m}{(n_m - q_m)^2 + (o_m + p_m)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ただし

$$l_m = n_m + j o_m, \quad m_m = p_m + j q_m$$

---

* 誘電率の実数部と虚数部の周波数関係は Kramers-Kronig の関係で結ばれているので，ε_{r0} と $\tan\delta$ は与えられた $x = ka$ に対して独立な値をとり得ない。[12]

$$n_m = \frac{1}{x} J_m^{(1)}(x)\left[y_0 \cdot R - \Delta y \cdot I\right] - J_m(x) \cdot R'$$
$$o_m = \frac{1}{x} J_m^{(1)}(x)\left[y_0 \cdot I + \Delta y \cdot R\right] - J_m(x) \cdot I'$$
$$p_m = \frac{1}{x} N_m^{(1)}(x)\left[y_0 \cdot R - \Delta y \cdot I\right] - N_m(x) \cdot R'$$
$$q_m = \frac{1}{x} N_m^{(1)}(x)\left[y_0 \cdot I + \Delta y \cdot R\right] - N_m(x) \cdot I'$$

x, y_0, Δy, R, I, R', I' は式(6)(7)(8)のそれらと同じ。

またこのときの共振角周波数 $\omega_{m.n.0}$ は $\beta_m^h = 0$ で，共振の鋭さ $Q_{m.n}$，減衰定数 $\kappa_{m.n}$ も式(11),(12)と同様な形で与えられる。そして $\tan\delta \ll 1$ のときは式(16)において，

$$\left.\begin{aligned}
n_m &\simeq \sqrt{\varepsilon_{r0}} \cdot J_m^{(1)}(x) \cdot X_m - J_m(x) \cdot Y_m \\
o_m &\simeq \Delta y\left[\sqrt{\varepsilon_{r0}} \cdot J_m^{(1)}(x) \cdot Z_m - J_m(x) \cdot J_m^{(2)}(y_0)\right] \\
p_m &\simeq \sqrt{\varepsilon_{r0}}\, N_m^{(1)}(x) \cdot X_m - N_m(x) \cdot Y_m \\
q_m &\simeq \Delta y\left[\sqrt{\varepsilon_{r0}} \cdot N_m^{(1)}(x) \cdot Z_m - N_m(x) \cdot J_m^{(2)}(y_0)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

ただし

$$X_m = J_m(y_0) - (\Delta y)^2\left\{\frac{1}{y_0} J_m^{(1)}(y_0) + \frac{1}{2} J_m^{(2)}(y_0)\right\}$$
$$Y_m = J_m^{(1)}(y_0) - \frac{1}{2}(\Delta y)^2 \cdot J_m^{(3)}(y_0)$$
$$Z_m = \frac{1}{y_0} J_m(y_0) + J_m^{(1)}(y_0)$$

となり，$\omega_{m.n.0}$ における $|B_{ms}^h|$ は次のように書ける。

$$|B_{ms}^h|_{\omega_{m.n.0}} \simeq \left[\frac{n_m^2}{(n_m - q_m)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

また，楕円柱，球体においても，それらの散乱モード振巾係数は，それぞれマシュー関数，球ベッセル関数で構成され，式(1)と同形式であるため[1),(4),(5)]，楕円柱では $R_{em}^{(1)}$, $R_{em}^{(1)\prime}$ または $R_{om}^{(1)}$, $R_{om}^{(1)\prime}$ に，球体では j_n, j_n' にそれぞれ式(7)(8)と同様な要領を適用すれば，式(9)～(15)に対応した結果が期待できる。

3. 数値計算例

誘電体円柱の軸方向に伝搬しないE波の散乱において，ε_rと共振点$x_{m,n,0}=\omega_{m,n,0}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cdot a$との関係は，$\tan\delta=0$のとき，式(6)の$b_m=0$から求められる。図2は$\sqrt{\varepsilon_r}=1\sim100$，$m=0,1,2,3$，$n=1,2,3,5,7,10$についての計算結果である。

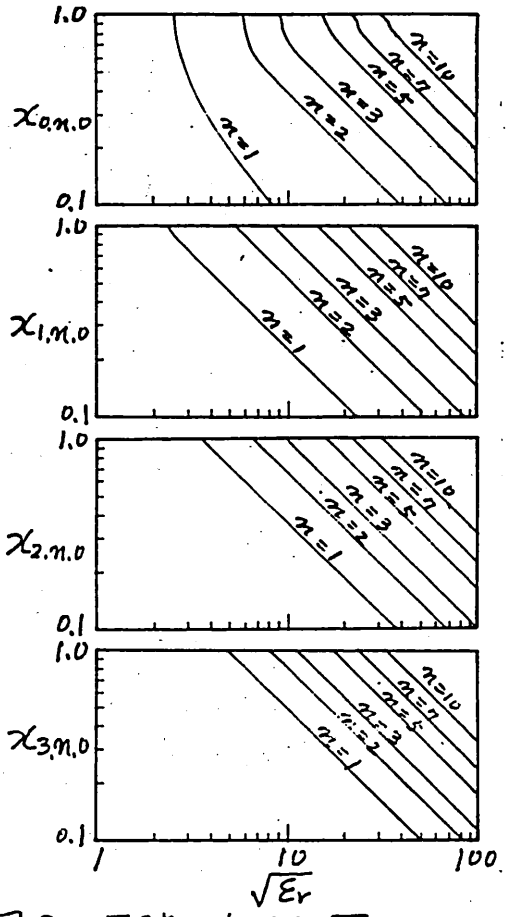


図2．E波における$\sqrt{\varepsilon_r}$と$x_{m,n,0}$との関係($\tan\delta=0$)

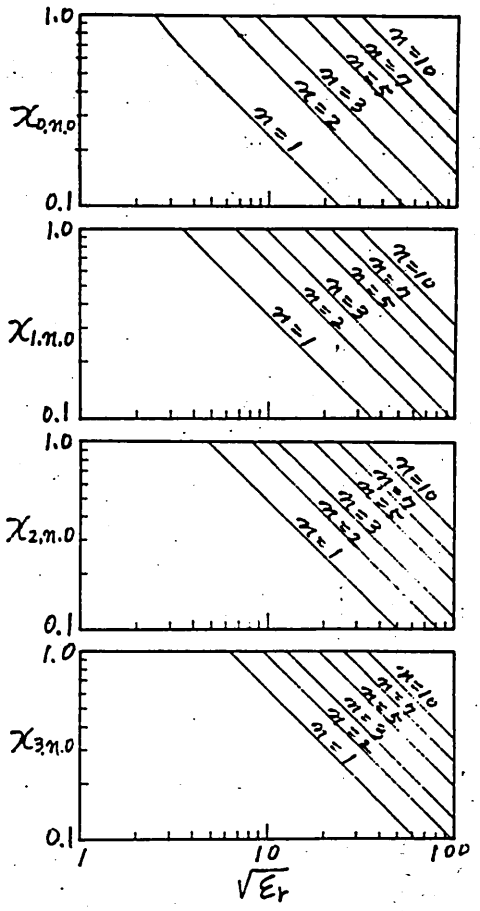


図3．H波における$\sqrt{\varepsilon_r}$と$x_{m,n,0}$との関係($\tan\delta=0$)

また，図3は同じくH波の場合を示す。何れも$\sqrt{\varepsilon_r}$と$x_{m,n,0}$は略対数直線関係になる。

図4，5は$\varepsilon_{r0}=81.0$，$\tan\delta=0$で$ka=x=0\sim1.0$における$|B^e_{ms}|$と$|B^h_{ms}|$（ただし$m=0,1,2,3$）を示す。これらから誘電体円柱は一般にkaに対して，常に2つ

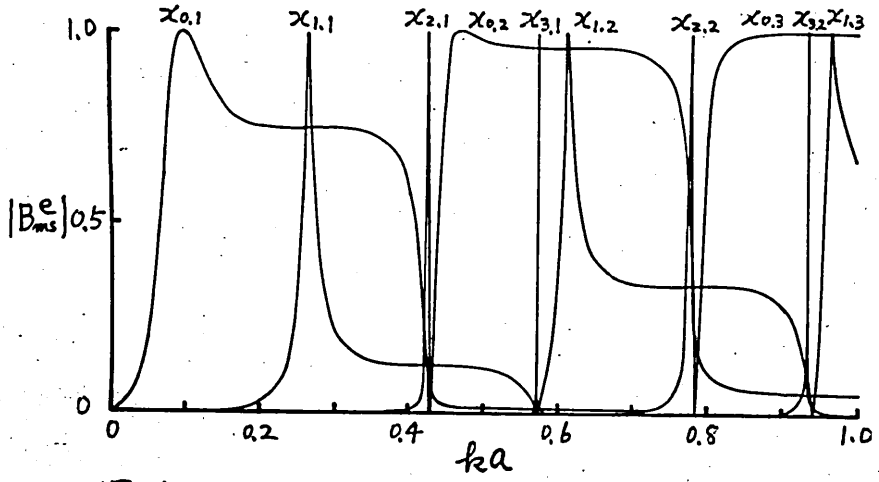


図4　$\varepsilon_{r0}=81.0$, $\tan\delta=0$ のときの ka に対する $|B^e_{ms}|$

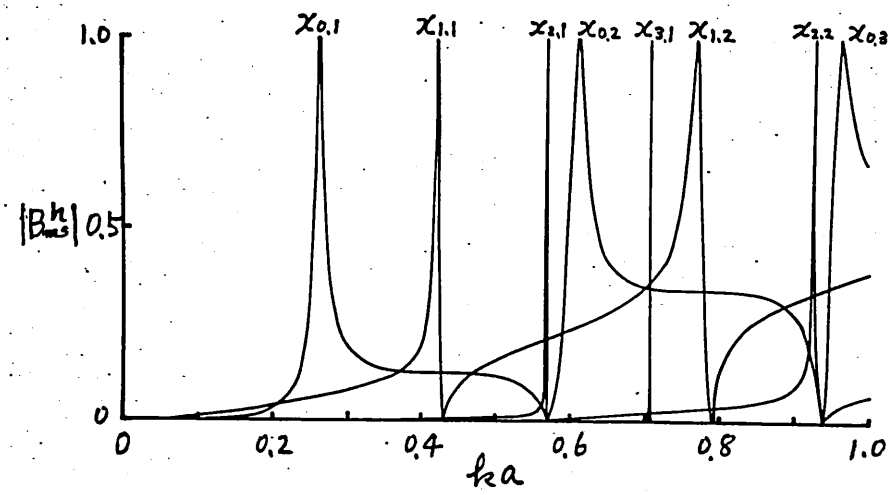


図5　$\varepsilon_{r0}=81.0$, $\tan\delta=0$ のときの ka に対する $|B^h_{ms}|$

または3つ以上のモードが併存していることがわかる。

図6,7は式(9),(14)と式(16),(17)を用いて，$\varepsilon_{r0}=81.0$ $\tan\delta=0\sim0.1$ のときの $|B^e_{ms}|$, $|B^h_{ms}|$ の $m=1,2$ $(n=1)$ 共振点附近を拡大したものである。$\tan\delta\neq0$ では $|B^e_{ms}|$, $|B^h_{ms}|$ の最大値 $|B^e_{ms}|_{max}$, $|B^h_{ms}|_{max}$ は1以下になると共に，ka の値も $\tan\delta=0$ のときの値から外れる。

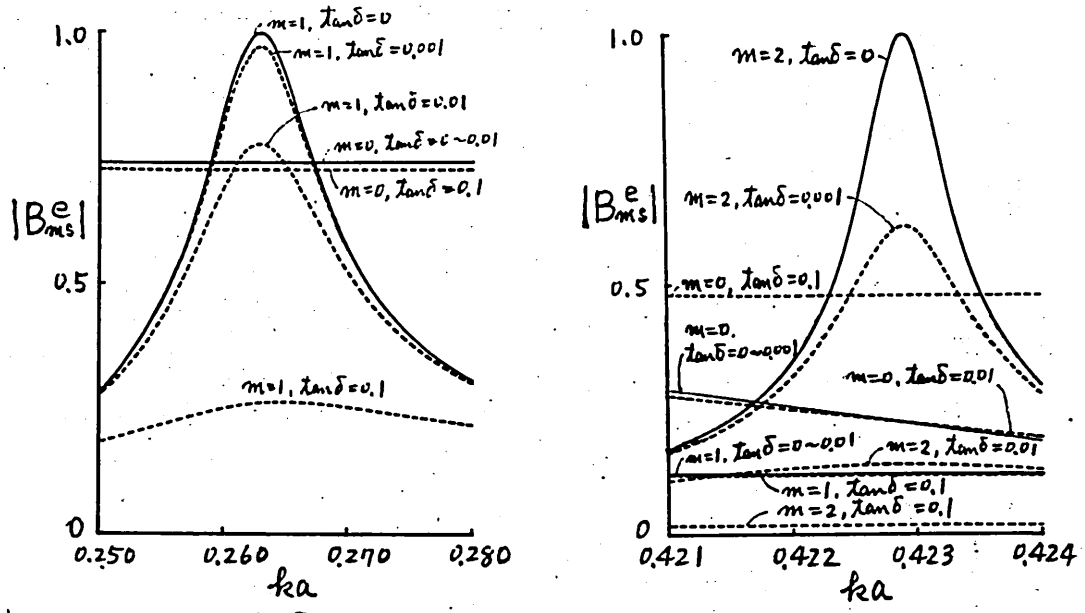


図6. $\varepsilon_{r0}=81.0$, $\tan\delta=0, 0.001, 0.01, 0.1$, $m=1.2\ (n=1)$ における $|B^e_{ms}|$ の部分拡大

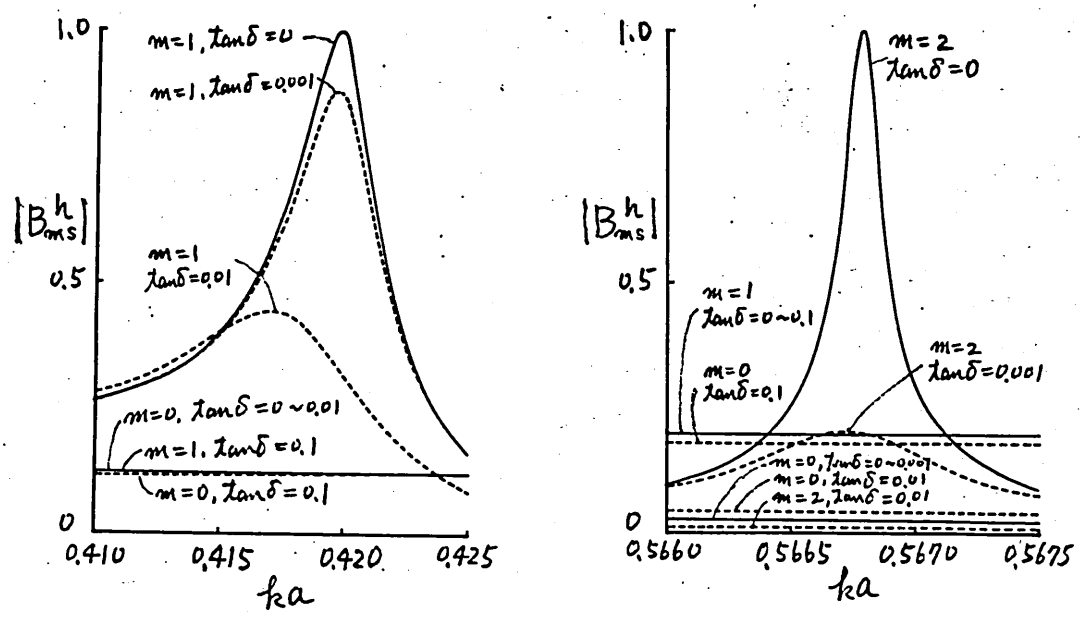


図7. $\varepsilon_{r0}=81.0$, $\tan\delta=0, 0.001, 0.01, 0.1$, $m=1, 2\ (n=1)$ における $|B^h_{ms}|$ の部分拡大

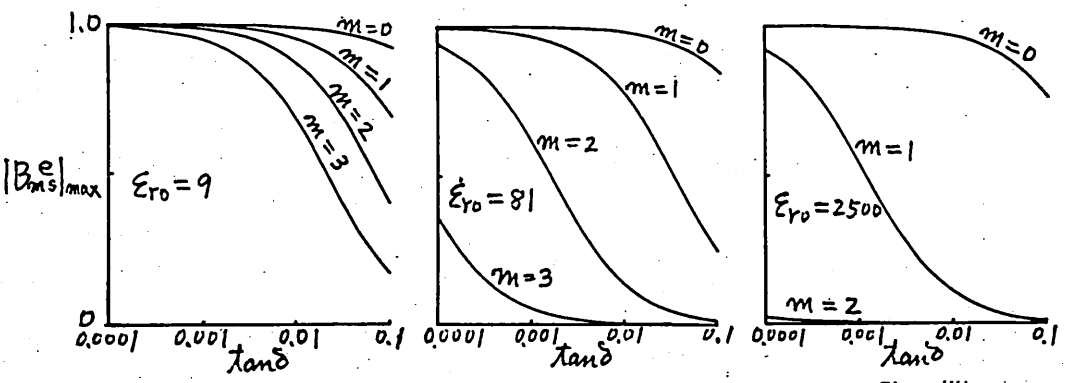


図8. $\varepsilon_{r0}=9, 81, 2500$, $\tan\delta=0.0001\sim0.1$, $m=0,1,2,3$ $(n=1)$ のときの $|B^e_{ms}|_{max}$

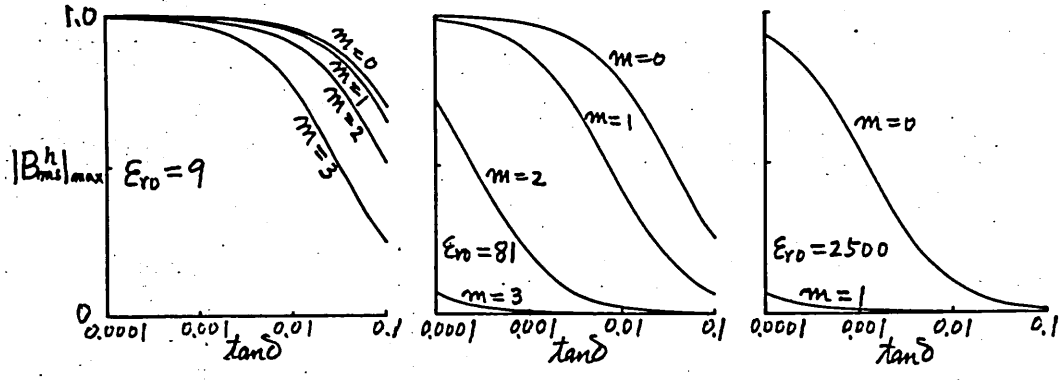


図9. $\varepsilon_{r0}=9, 81, 2500$, $\tan\delta=0.0001\sim0.1$, $m=0,1,2,3$ $(n=1)$ のときの $|B^h_{ms}|_{max}$

図8, 9は代表的ε_{r0}について, $\tan\delta$に対する$|B^e_{ms}|_{max}$, $|B^h_{ms}|_{max}$をモード別に式(9), (15), (16), (18)を用いて計算したものである。即ちこれらは同一$\tan\delta$におけるモード別の散乱波の大きさを表わしている。一般にε_{r0}とmが大きくなるに従い, $\tan\delta$の影響が増大する。

4. 実 測

以上のような誘電体円柱の軸に垂直な水平面内の散乱波を確認するために，図1の点$Q(\rho_0,0,0)$に入射波源を置いたときの水平面の遠点$P'(\rho\to\infty,\phi,0)$の電界の大きさおよび指向特性を数値計算し，これを実測する。

点$Q(\rho_0,0,0)$にz軸方向を向いたIdzなる電気ダイポールがあるときの遠点$P'(\rho\to\infty,\phi,0)$の電界E_zは波源からの直接波と誘電体円柱からの散乱波とを合成して次のように近似出来る。[3]

$$E_z \simeq -\frac{k^2 Idz}{4\pi\varepsilon_0\omega}\frac{e^{jk\rho}}{\rho}\left[e^{-jk\rho_0\cdot\cos\phi} + \sum_{m=0}^{\infty}(-j)^m\epsilon_m\cdot B^e_{ms}\cdot H^{(1)}_m(k\rho_0)\cdot\cos m\phi\right] \qquad (19)$$

ただし

$k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$，$\epsilon_0=1$，$\epsilon_m=2\ (m\geq 1)$

$$e^{-jk\rho_0\cdot\cos\phi}=\sum_{m=0}^{\infty}(-j)^m\epsilon_m\cdot J_m(k\rho_0)\cdot\cos m\phi$$

ω：電流Iの角周波数

Iの時間因子$\exp(-j\omega t)$はIに含める。

E_zの指向特性は，波源がz軸に平行なダイポール波，円筒波，線形空中線波の何れであっても同じである[3]から，ここでは半波長空中線を用いることとし，このときの式(19)の係数部を正規化し，[ ]の部分のみに着目する。

いま半波長空中線からの直接波が遠点$P'(\rho\to\infty,\phi,0)$に発生する電界を基準にして，合成波E_zの大きさ$|E_z|$を求めると次のようになる。

$$|E_z| \simeq \Big[1 + A_{m\phi}^2 + B_{m\phi}^2 + 2\left\{ A_{m\phi}\cdot\cos(kP_0\cdot\cos\phi) - B_{m\phi}\sin(kP_0\cdot\cos\phi) \right\} \Big]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

ただし

$$A_{m\phi} = \sum_{m=2,4,6,\cdots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \epsilon_m \cdot v_m \cdot \cos m\phi + \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} 2 \cdot u_m \cdot \cos m\phi$$

$$B_{m\phi} = \sum_{m=2,4,6,\cdots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \epsilon_m \cdot u_m \cos m\phi - \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} 2 \cdot v_m \cdot \cos m\phi$$

$$u_m = J_m(kP_0)\cdot\beta_m^e + N_m(kP_0)\cdot\alpha_m^e$$

$$v_m = J_m(kP_0)\cdot\alpha_m^e - N_m(kP_0)\cdot\beta_m^e$$

$|E_z|$の散乱波成分が最大のときは$P_0=a$，即ち半波長空中線が誘電体円柱に密着したときで，しかも電源のωが誘電体円柱の共振角周波数$\omega_{m,n,0}$に一致しているときである。

いま$\varepsilon_{r0}=81.0$（これは純水の代表的比誘電率である）とし，$kP_0=ka=0.2626$，0.4229（これらはそれぞれ，$\varepsilon_{r0}=81.0$，$\tan\delta=0$のときの$m=1,2$（$n=1$）モード共振点におけるkaの値），$\tan\delta=0\sim0.5$を式(20)で計算し，（ここで，α_m^e，β_m^eの値は，式(8)のR，I，R'I'を第3項まで採って式(9)に入れたもの使い，また式(20)の$\sum$は$m=0,1,2$とした）$|E_z|$の指向特性として画いたのが図10である。

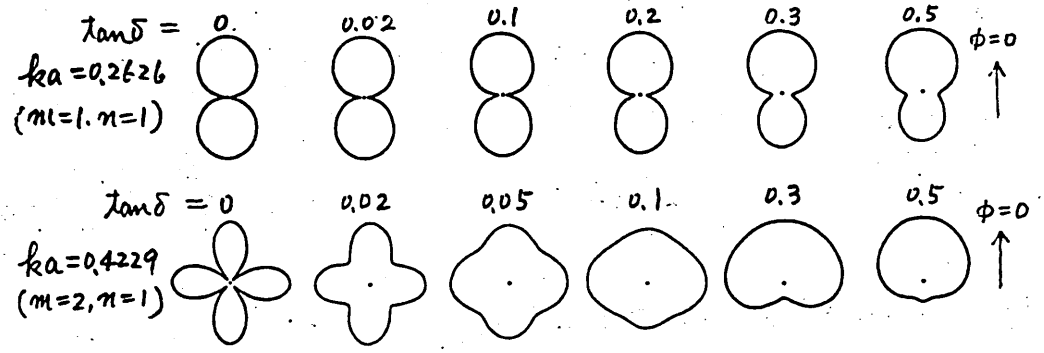


図10. $\varepsilon_{r0}=81.0$のときの$\tan\delta$に対する$|E_z|$指向特性の計算例

指向特性の実測はグランド板（9m×9m）を用いてユニポール型とし，グランド板背面より給電して，VHF，UHF帯で行なった。誘電体円柱はフイルム（厚さ0.1～0.3m/m）で作った円筒にイオン交換で得た純水（$\varepsilon_{r0} \fallingdotseq 81.0$，$\tan\delta \fallingdotseq 0.02$，$f = 300\,MHz$）[11]を入れ，$\tan\delta$の可変には小量のNaClを溶解させた。$\tan\delta$の測定は金属同軸円筒に被測液を入れ，定在波法とブリッジ法とを併用した。水の$\tan\delta$はNaClの添加量に略比例していた。励振用空中線には1m/mφの銅線を約λ/4の長さにしてフイルム円筒の外側に密着させた。従って正確には$\rho_0 = a$ではない。水は温度による誘電率の変化が比較的大きく，外界の影響を受け易い。また容器材料のイオン溶解による$\tan\delta$の変化，容器の形状歪，グランド板の影響等がある。このような状態で水平面上の指向特性を

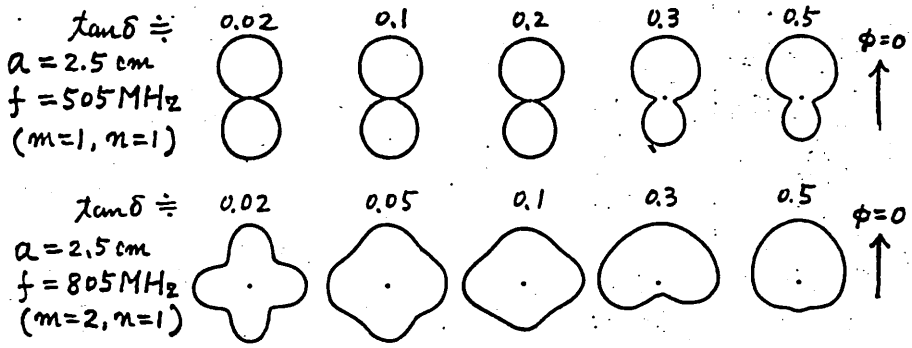


図11. H_2O（水，$\varepsilon_{r0} \fallingdotseq 81.0$）を用いて図10に対応した実測値

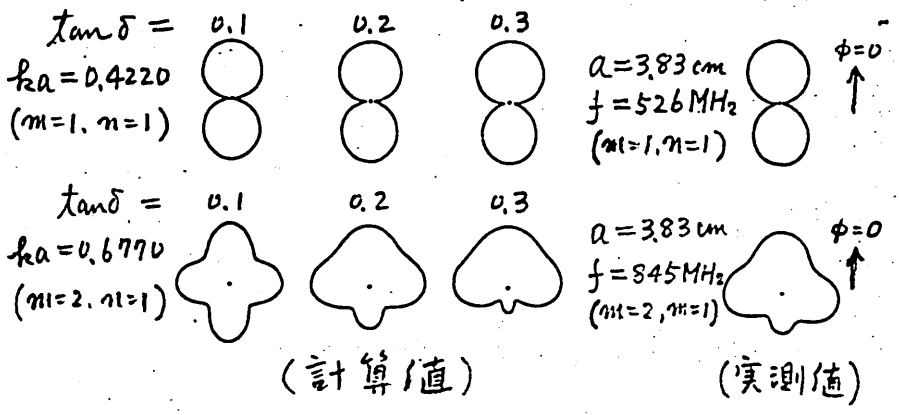


図12. $\varepsilon_{r0} = 30.9$（CH_3OH，工業用アルコール）のときの$|E_z|$指向特性の計算値と実測値.

測定した結果を図11に示す。図10, 11の両者はよく合っている。

図12は同様な方法で工業用アルコール（$\varepsilon_{r0} \fallingdotseq 30.9$, $\tan\delta \fallingdotseq 0.08$, $f = 300\,MHz$）[11]についての計算値と実測値である。実測値は$\tan\delta = 0.2$の計算値に近い。これはHippelの資料と、この測定に使った材質および測定周波数の相違によるものと考えられる。

また図13(1),(2)は図10, 11, 12のうちから選んで拡大したもので、計算値、実測値の細部を示すものである。

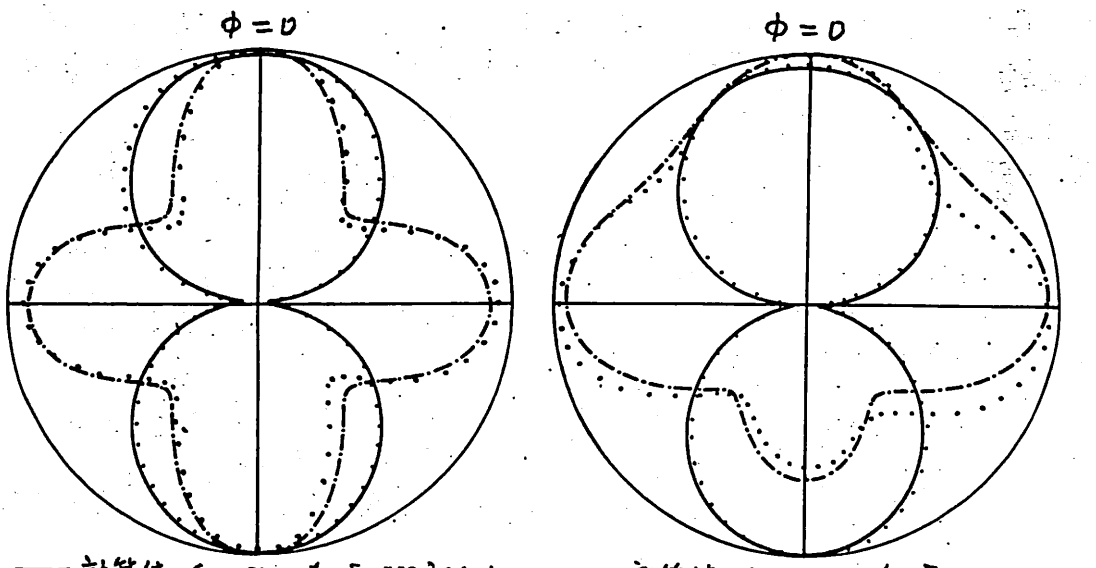


図13. 図10, 11, 12の部分拡大

なおこれらのほかに、マイクロ波（3.8～7.5 GHz）を用いて、$\varepsilon_{r0} \fallingdotseq 16, 25$, $\tan\delta \fallingdotseq 0.001 \sim 0.005$についても検討したが、何れも理論値をよく説明している。

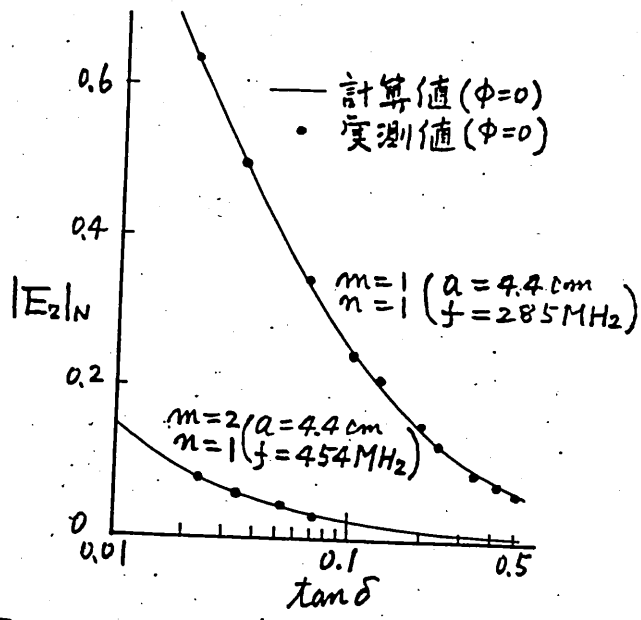


図14, $\varepsilon_{r0}=81.0$, $m=1,2$ $(n=1)$, $\phi=0$ の $\tan\delta$ に対する $|E_z|_N$ の計算と実測値

図14は $\varepsilon_{r0}=81.0$ $m=1,2$ $(n=1)$, $\phi=0$ 方向の $|E_z|_N$ と $\tan\delta$ との関係を計算し、実測したものである。ここで $|E_z|_N$ は $\tan\delta=0$ のときの $|E_z|$ で規格化した $\tan\delta\neq0$ のときの $|E_z|$ である。

この場合も両者はよく合っている。

5. 考　察

式(19)の〔　〕内の第1項は波源からの直接波であり、第2項が散乱波である。従って m, n モードの散乱波の振巾は $|E_m \cdot B^e_{mns} \cdot H^{(1)}_m(k\rho_0) \cdot \cos m\phi|$ に比例する。従って $\rho_0=a$ のとき散乱波成分は最大となり遠点の指向特性から誘電体円柱の各モードの振動モーメントの状態が推測できる。

例えば図10の $\varepsilon_{r0}=81.0$ の場合、$\rho_0=a$ のときの諸定数を例示すれば表1の如くである。表1の定数を式(20)に入れると、各モードの散乱波の相互関係が明らかになる。即ち $ka=0.2626$ で $\tan\delta=0$ のときは、$m=1$ $(n=1)$ モードの散乱波が $|E_z|$ を支配し、他のモードの散乱波および波源からの直接波は無視できる程になる。従ってこのときの $|E_z|$ 指向特性は $\cos\phi$ として近似できる。(図10参照) 同様なことが $ka=0.4229$ の場合についても言える。このときは $\cos 2\phi$ としてよい。しかし $\tan\delta=0.1$ のときは、

表 1

$\varepsilon_{r0}=81.0$ のときの定数例 〔$(-n)$ は 10^{-n} を示す〕

ka	0.2626 ($m=1, n=1$)		0.4229 ($m=2, n=1$)	
$\tan\delta$	0	0.1	0	0.1
α_0^e	−5.511 (−1)	−5.485 (−1)	−5.190 (−2)	−4.376 (−1)
β_0^e	−4.974 (−1)	−4.798 (−1)	−2.218 (−1)	−1.955 (−1)
α_1^e	−1.000 (0)	−2.606 (−1)	−1.497 (−2)	−2.515 (−2)
β_1^e	0	−9.483 (−3)	−1.214 (−1)	−1.181 (−1)
α_2^e	−2.744 (−8)	−2.623 (−5)	−1.000 (0)	−1.607 (−2)
β_2^e	+1.656 (−4)	+1.634 (−4)	− 0	−9.412 (−4)
u_0	+6.171 (−3)	+2.113 (−2)	−1.826 (−1)	+6.092 (−2)
v_0	−9.884 (−1)	−9.701 (−1)	−1.752 (−1)	−5.289 (−1)
u_1	+2.586 (0)	+6.726 (−1)	+3.106 (−4)	+1.827 (−2)
v_1	−1.302 (−1)	−5.844 (−2)	−2.092 (−1)	−2.057 (−1)
u_2	+1.936 (−6)	+4.943 (−4)	+7.462 (0)	+1.199 (−1)
v_2	+3.112 (−3)	+3.071 (−3)	−2.202 (−2)	−7.377 (−3)

主モード以外のモードおよび波源からの直接波が大きく影響する。

上記は $\varepsilon_{r0}=81.0$ の例であるが，他の ε_{r0} についても同様なことが言える。一般に m, n モード共振点では，$\tan\delta=0$ のとき，その共振点のモードのみでよい近似が得られ，指向特性は n に関係なく，$\cos m\phi$ として近似できる。しかし $\tan\delta \neq 0$ のときは波源からの直接波と主モードより低次のモードの影響が現れてくる。従って $\tan\delta$ が大きい場合でも一般に主モードより高次のモードは無視してよい。このために式(20)の計算を遂行する場合，$\sum$ の項は主モードまでで充分よい近似が得られる。しかし励振周波数が誘電体円柱の共振点を外れているときは，式(20)の収束から決定される。

以上はE波の散乱について論じたが，H波の場合も図3，5，7，9を参照すればわかるように，E波の場合と同様な議論が成立する。

6. むすび

複素誘電体で構成された固有モードを有する散乱体の散乱特性を検討するために，最も基礎的と思われる誘電体円柱の軸方向に伝搬定数を有しないモードを取り上げ，誘電体円柱の軸に垂直な平面内での散乱波について，誘電体の損失を考慮して解析と実験を行なった。そしてこの解析法が直ちに楕円柱，球体の散乱に導入できることを示した。

謝辞　本研究について終始御懇篤な御指導を賜わった本学の園田忍教授に深く感謝致します。また貴重な御指摘，御助言をいただいた大阪大学基礎工学部の末田正教授，根本承次郎助手に感謝致します。

参考文献

(1) J.A.Stratton: "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill, (1941)

(2) C.Schaefer und J.Merzkirch: "Experimentelle Untersuchungen über die Beugung ungedämpfter elektrischer Wellen an dielektrischen Zylindern und über die Eigenschwingungen dielektrischer Zylinder", Zs.f. Phys. XIII, 166 (1923)

(3) 飯田,角,安藤,園田: "円柱誘電体付加空中線の理論", 電学誌, 90, 12, 2539, 昭45, 12 (1970)

(4) 飯田,安藤,角,園田: "楕円柱誘電体付加空中線の理論", 阪工大紀要, 理, 15, 1 (1970)

(5) 安藤,飯田,角,園田: "矩状波源に誘電体の球を付加したときの電磁界について", 阪工大紀要, 理, 18, 2 (1973)

(6) 浅利英吉: "球状誘電体の散乱断面積の計算について", 信学論(B), 52-B, 4 (1969)

(7) C.A.Chuang, Charles S.Liang, Chung-Wu Lee: "High Frequency Scattering from an Open-Ended Semi-Infinite Cylinder", IEEE Trans. AP-23, 6, PP.770 (Nov. 1975)

(8) Shu-Kong Chang, Kenneth K.Mei: "Application of the Unimoment Method to Electromagnetic Scattering of Dielectric Cylinders", IEEE Trans. AP-24, 1, pp35 (Jan. 1976)

(9) A. Nelson, L. Eyges: "Electromagnetic scattering from dielectric rods of arbitrary cross section", J. Opt. Soc. Am. Vol 66, 3, pp 254 (March 1976)

(10) P. Barber, C. Yeh: "Scattering of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric bodies", Applied Optics, Vol 14, 12, pp 2864 (Dec. 1975)

(11) A von Hippel: "Dielectric Materials and Applications", 361 (1959)

(12) L. D. Landau and E. M. Lifshitz: "Electrodynamics of continuous media", p 259, Pergamon Press, (1960)

輻射科学研究会資料

結合度可変形方向性結合器

池上淳一
中島将光
中西一雄
(京都大学・工学部)

昭和52年10月7日

1. はしがき

方向性結合器は電力測定，インピーダンス測定など広く応用されている。しかし，従来の方向性結合器の結合度は殆んどすべて固定である。もし，結合度が自由に変化できるものが得られれば，色々な点で便利であろう。結合度を可変にするための二三の研究があるが，[1],[2] 実用上何らかの制約をもっている。

この小文では，マジックT二個と移相器とを用いれば，結合度を任意に変化させ得る方向性結合器ができることを理論的に示し，実験によって確めている。原理的に零デシベルから無限大デシベルまでの任意の方向性が得られることとがその特長である。

2. 原理

図1に示すように，二つのマジックTのE分岐(3)同志およびH分岐(4)同志を線路で結合し，夫々の線路の移相量を ϕ および θ とする。そのとき，図1の構成のシグナル・フローグラフは図2のようになる。[3]

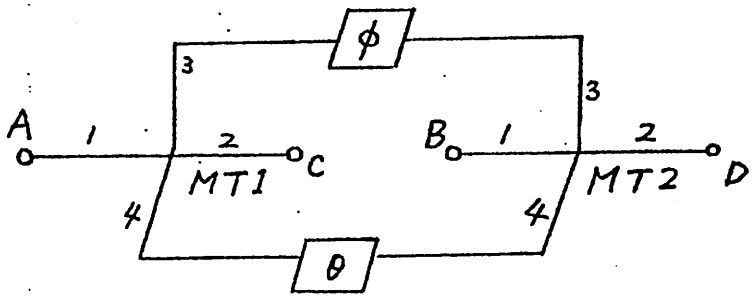


図1. 方向性結合器の構成

この図において，例えば，B端子からA端子に至る信号波は

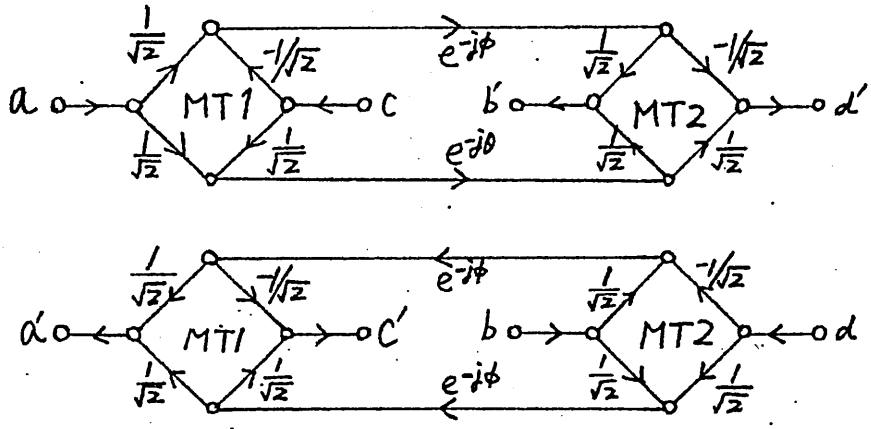


図2　図1のシグナル・フローグラフ

$$a' = b\{(1/\sqrt{2})e^{-j\phi}(1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})e^{-j\theta}(1/\sqrt{2})\}$$

とかける。したがって，図1を四端子対回路網とみた場合，その散乱行列は

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & e^{-j\phi}+e^{-j\theta} & 0 & -e^{-j\phi}+e^{-j\theta} \\ e^{-j\phi}+e^{-j\theta} & 0 & -e^{-j\phi}+e^{-j\theta} & 0 \\ 0 & -e^{-j\phi}+e^{-j\theta} & 0 & e^{-j\phi}+e^{-j\theta} \\ -e^{-j\phi}+e^{-j\theta} & 0 & e^{-j\phi}+e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (1)$$

とかけることがわかる。

いま，θの値を $\theta = 2n\pi - \phi$（nは整数）となるように選定すると，上の散乱行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & j\beta \\ \alpha & 0 & j\beta & 0 \\ 0 & j\beta & 0 & \alpha \\ j\beta & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \left.\begin{aligned} \alpha &= \cos\phi \\ \beta &= \sin\phi \\ \alpha^2+\beta^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

となって，方向性結合器の散乱行列に一致する。したがって，開口AからD，又はBからCへの結合度は

$$1/\beta^2 = \operatorname{cosec}^2\phi \qquad (3)$$

となり，移相量ϕ（およびθ）を適当にえらぶことによって，どのような結合度（正のデシベル値）の方向性結合器とも実現できることが判る。

3. 物理的意味

図1の動作を物理的に考えてみよう。開口Aから入った信号波はマジックT(1)によって分岐(3)および(4)に二等分割される。もし二つの分岐につながる線路の移相量ϕおよびθが等しければ，マジックT(2)で二つの波が合成される場合，出力は全部開口Bに現われるはずである。次に，二つの移相量ϕおよびθが異なれば，それに応じてマジックTの分岐(3)および(4)にかわる二つの波に位相のずれが生じ，その分だけ開口Dに出力することになる。ϕとθの移相量差が180°になれば，開口Bに出力されなく

なる。二つのマジックTの整合が完全であれば，常に開口Cへは出力されない。

4. 補足

上の結果を実際に実現するには二つの移相器を逆向に連動させる構造のものを使えばよい。しかし，方向性結合器の基準面を考慮に入れる必要がなければ，可変移相器は1個あれば十分である。それは次のようにして証明することができる。

図1の分岐(4)の位相$\theta=0$の場合を考える。その代り$\phi \to 2\phi$とおき，各開口A, B, C, Dの基準面を$\phi/2$だけ内側へずらせて，その散乱行列を求めると

$$\begin{bmatrix} e^{j\phi/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\phi/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\phi/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\phi/2} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{-j2\phi}+1 & 0 & -e^{-j2\phi}+1 \\ e^{-j2\phi}+1 & 0 & -e^{-j2\phi}+1 & 0 \\ 0 & -e^{-j2\phi}+1 & 0 & e^{-j2\phi}+1 \\ -e^{-j2\phi}+1 & 0 & e^{-j2\phi}+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\phi/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\phi/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\phi/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\phi/2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & j\beta \\ \alpha & 0 & j\beta & 0 \\ 0 & j\beta & 0 & \alpha \\ j\beta & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

となる。

つまり，移相器が一個だけであっても，基準面をずらせてみれば，方向性結合器の散乱行列に等しくなっている。故に，基準面を考慮する必要がなければ，可変位相器は一個でよい。

5. 実験

開口Aから信号波を入れ，開口BまたはDに現われる電力を測定した。Bに現われる信号は $\alpha^2=\cos^2\phi$ に比例し，Dに現われる信号は $\beta^2=\sin^2\phi$ に比例するはずである。図3は実験との一致が極めてよい事を示している。なお，実験は 9081 MHz，30mW で行なった。

6. むすび

二個のマジックTと一個の移相器によって結合度の可変な方向性結合器が構成できることを提示し，実験によって確めた。二つのマジックTのH分岐を背中合せに結合し，E分岐間に移相器を挿入する構造にすると，非常にコンパクトに組立てられる。特に結合度が数dbの場合，通常の形の方向性結合器より小形になる。

ここに述べた方法は導波管回路ばかりではなく，マイクロストリップ線路を用いたMICにも応用できることはいうまでもない。

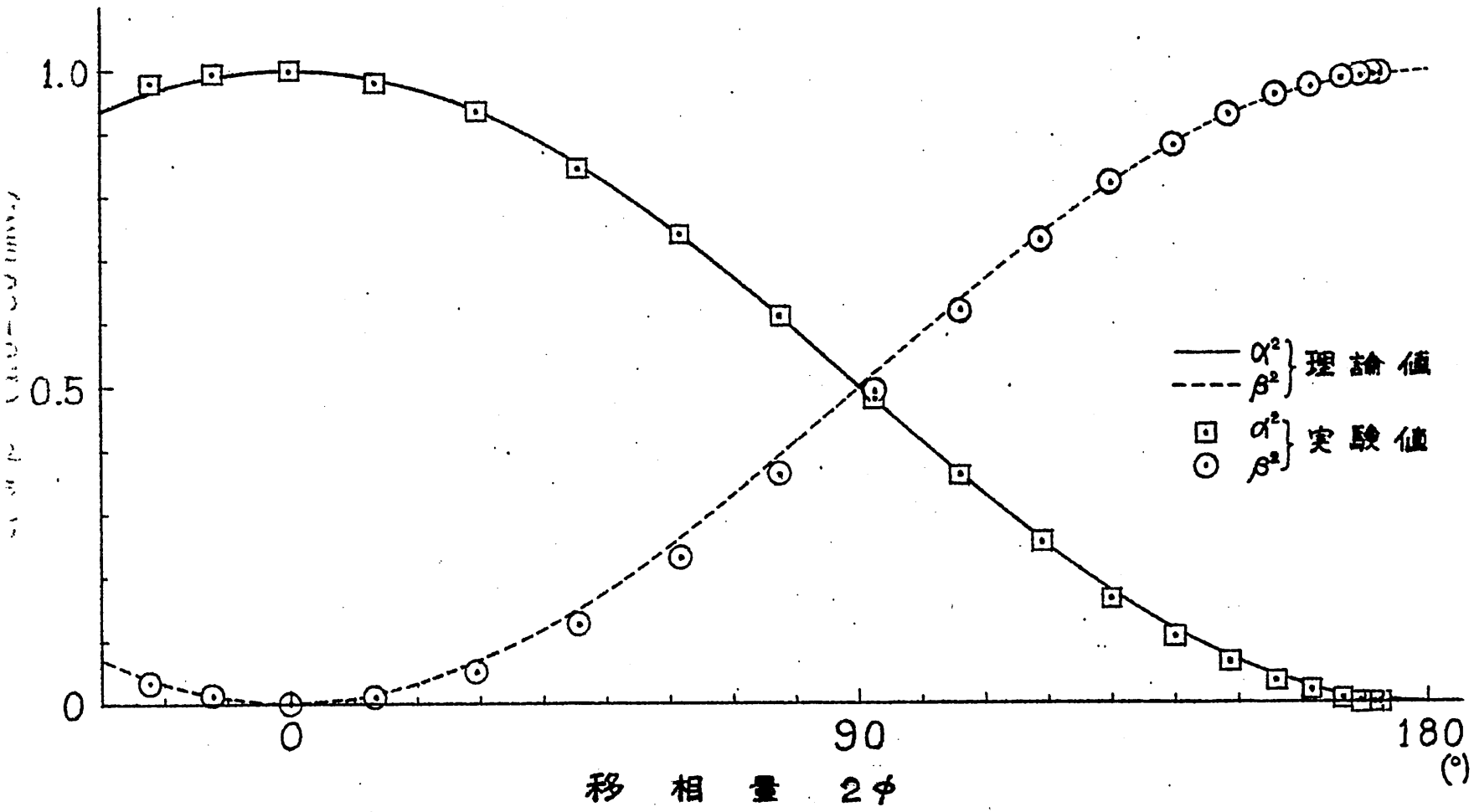


図3　位相量と結合度の関係

文献

(1) I. TANAKA and M. OHSHITA; "A Variable Directional Coupler Using InSb Thin Films," IEEE Trans. MTT-24, 10, pp. 660-662, October 1976.

(2) 池田, 佐藤; "結合量可変形方向性結合器," テレビ誌, 30, 11, pp. 900-904, 1976-11.

(3) 中島; "マイクロ波工学", 森北出版.

輻射科学研究会資料

多数個相互同期発振器の電力合成と雑音の解析

牧野俊彦
(松下電器・無線研究所)

中島将光

池上淳一
(京都大学・工学部)

昭和52年10月7日

1. まえがき

マイクロ波帯，ミリ波帯の固体発振器を高出力化する手段として，多数個発振器を同期させて回路的に電力合成する方法があり，$2^n (n \geq 2)$ 個の発振器を特定の回路で結合させた場合には，主として実験的検討がなされており，[1]〜[3] 2個の発振器の場合には，理論的にも実験的にも詳しい検討がなされている。[4]〜[10] また，多数個（任意個数）の発振器を一般的な回路で結合した場合の安定性と雑音の理論解析もなされている。[5]

しかしながら，多数個（任意個数）の発振器の電力を合成するという観点から，結合回路の最適条件を求めるような一般的な解析は行なわれていない。また，任意個数の発振器の電力合成を実現する具体的な結合回路についても一般的な解析は行なわれていない。

本論文では，n 個の発振器を無損失可逆回路で相互同期させた場合に，電力が合成されるための結合回路のSマトリクスをできるだけ一般的な形で求める。また，このSマトリクス表示を用いて，n 個の発振器の同期現象を解析し，安定性を考慮した最適動作条件についても考察する。さらに，完全出力合成時の出力のAMおよびPM雑音の表示を導き，理想的な場合には，これらの雑音は単一発振器の雑音の $1/n$ になることを証明する。

次に，任意個数の発振器の電力を合成する具体的な回路として，多数電力合成回路[6]のSマトリクス

を求め，先の一般的解析結果と比較することにより，この回路で実際に電力合成と雑音低減が可能なことを示す。

解析は発振器の同期方程式も含めて，すべて，マイクロ波回路に便利な進行波表示で行なう。

まず 2.では，進行波表示の同期方程式について簡単に説明し，本論文の解析の前提を明らかにする。 3.では，一般的な結合回路に実現可能な仮定を設けて，完全電力合成がなされるための結合回路のSマトリクスの条件を求める。4.では，多数個発振器の同期現象を解析し，電力合成と発振器の位相の関係および安定性について議論する。5.では 出力波のAMおよびPM雑音の表示を導き，理想的な場合には，これらの雑音は単一発振器の雑音の $1/n$ になることを証明する。 6.では，電力合成回路の具体例として多段電力合成回路のSマトリクスを求め，先の一般論と比較することにより，この回路で電力合成と雑音低減が可能なことを示す。

2. マイクロ波同期方程式

発振器の等価回路として，図1のような負性コンダクタンス $-G$ とLC並列共振回路から成るものを考える。また，雑音源として，負性コンダクタンスに並列な雑音アドミタンス $Y_N = G_N + jB_N$ を仮定する。発振器出力波を $a=|a|e^{j\phi}$，入力波を b とすれば，次式が導かれる。[10]

$$\frac{1}{|a_0|}\frac{d|a|}{dt} = \frac{\omega_0}{Q_{ex}}\left\{1+\frac{G'(|V_0|)}{2Y_0\sqrt{Y_0}}|a_0|\right\}\mathrm{Re}\left\{\frac{b}{a}\right\}+\frac{\omega_0}{Q_{ex}}\frac{G'(|V_0|)}{2Y_0\sqrt{Y_0}}(|a|-|a_0|)-\frac{G_N}{Y_0} \tag{1}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_0}{Q_{ex}}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{b}{a}\right\}-\omega+\omega_0-\frac{B_N}{Y_0} \tag{2}$$

ここで，$|a_0|$と$|V_0|$はそれぞれ自由発振時の出力波の振幅および出力電圧振幅，ωは発振角周波数，ω_0は自由発振角周波数，Q_{ex}は発振器の外部Q，Y_0は伝送線路の特性アドミタンス，$G'(|V_0|) = \partial G/\partial|V|\,\big|_{|V|=|V_0|}$である。

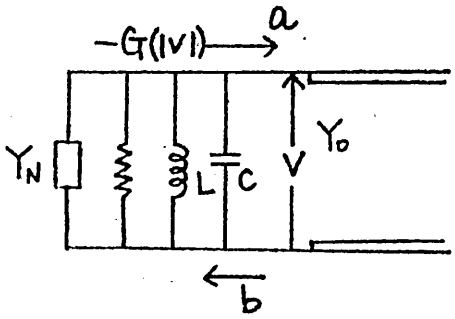


図1　発振器等価回路

発振器が自由発振時に最大出力状態に調整されているときは，$-G'(|V_0|) = 2Y_0\sqrt{Y_0}/|a_0|$で，このとき$|a|=|a_0|$となり，注入波bによって発振出力波の振幅は（一次近似で）変化しない。[10] したがって，この場合は式(2)の位相の方程式のみに着目すればよい。式(2)はAdler[11]の式に対応するものであるが，その意味は若干異なる。[12]
マイクロ波発振器の同期現象を解析するには式(2)を用いると便利であり，実験ともよく一致することが示されている。[6][7]
特に，電力合成の場合のように注入波を小さくするような動作条件を問題にする場合は自由発振時からのずれは小さく，式(2)の近似度はよくなる。

3. 結合回路のSマトリクス

図2に示すようにn個の発振器が結合回路に接続され，$n+1$番目の端子の負荷に出力が取出されるものとする。k番目の発振器の出力波をa_k，入力波をb_kとすれば，結合回路のSマトリクスを用いて次の関係が成立つ，

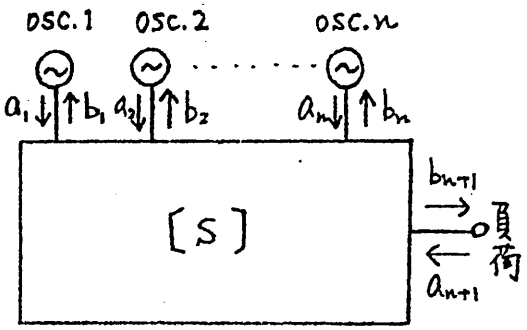


図2. n個の発振器の結合系

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} & S_{1n+1} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} & S_{2n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} & S_{nn+1} \\ S_{n+11} & S_{n+12} & \cdots & S_{n+1n} & S_{n+1n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

以下，実際的な回路条件を考慮し，さらに若干の仮定を設けて，電力が完全合成されるためのSマトリクスの条件を求める。

(1) 無損失：結合回路が無損失のとき式(3)のSマトリクスはユニタリである。したがって，式(3)のマトリクスを〔S〕で表わせば

$$[S]^{+}[S] = [I] \qquad (4)$$

である。ここで，$[S]^{+}$は〔S〕のエルミート共役である。

また〔I〕は単位マトリクスである。

式(4)はマトリクスの要素を用いれば次のように表わされる。

$$\sum_{k=1}^{n+1} S_{ki}{}^{*} S_{kj} = S_{ij} \quad (i, j \neq 1, \cdots\cdots n+1) \qquad (4a)$$

(2) 可逆：結合回路中に非可逆素子を用いないときは

$$S_{ik} = S_{ki} \qquad (5)$$

である。

(3) 整合負荷：負荷は整合しており，負荷からの反射波はないと仮定する。すなわち

$$a_{n+1} = 0 \qquad (6)$$

(4) 対称：結合回路が各発振器接続端子に対して対称となっており，$b_k = \sum_{i=1}^{n} S_{ki} a_i = S_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i + S_{kk} a_k$ と書けるものと仮定すると，$S_{ki} = S_k$ $(i \neq k)$ である。このとき式(5)から $S_{ki} = S_{ik} = S_k = S_i$ であるから，S_{ki} は k にも依存しないことになり

$$S_{ki} = S_{ik} = C_1 \qquad (i \neq k) \qquad (7)$$

である。また，S_{kk} は k 依存しない。すなわち

$$S_{kk} = C_2 \qquad (8)$$

と仮定する。さらに，各発振器接続端子が出力端子に

対して対称，すなわち，$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} S_{n+1,k}\, a_k = S_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k$ と書けるものと仮定すれば，式(5)を用いて

$$S_{n+1,k} = S_{k,n+1} = C_3 \quad (k \leq n) \qquad (9)$$

とおくことができる。

(5)等発振出力：各発振器の発振出力がすべて等しい，すなわち

$$|a_k| = |a| \qquad (k = 1 \cdots\cdots n) \qquad (10)$$

と仮定する。

(6)完全電力合成：各発振器の出力が完全に合成される条件は式(6)および(10)の仮定のもとで

$$|b_{n+1}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = n|a|^2 \qquad (11)$$

である。

条件(1)～(6)の下で S_{ik} を求めると次のようになる(付録I参照)

$$\left.\begin{aligned} S_{kk} &= \frac{n-1}{n} e^{jx} \\ S_{ik} &= S_{ki} = -\frac{1}{n} e^{jx} \qquad (i \neq k) \\ S_{k,n+1} &= S_{n+1,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{jy} \\ S_{n+1,n+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

ここで，x と y は任意の数である。位相因子 x を決めるためには発振器の同期現象を考えて，定常状態の発振器位相を求め，安定条件を考慮する必要がある。これについては次章で述べる。また，位相因子 y は出力波の位相に関係す

るだけであるから、出力電力を問題にするときは求める必要はない。

4. 多数個発振器の相互同期

4.1 同期方程式と定常状態

図2の osc. k の出力波を $a_k = |a_k| e^{j\phi_k}$ とすれば、osc. k に対する同期方程式は、式(2)を用いて

$$\frac{d\phi_k}{dt} = B_k \, \mathrm{Im}\left\{\frac{b_k}{a_k}\right\} - \omega_s + \omega_{fk} \qquad (k=1 \cdots n) \qquad (13)$$

と表わせる。ここで、$B_k = \omega_{fk} / Q_{exk}$ であり、ω_{fk} と Q_{exk} は、それぞれ osc. k の自由発振角周波数および外部Qである。式(3)より、$b_k = \sum_{i=1}^{n} S_{ki} a_i$（ここでは式(6)を用いている）であるから、これに式(12)の S_{ki} を代入し、式(10)を用いて、その結果を式(13)に代入すれば

$$\frac{d\phi_k}{dt} = B_k \left[\frac{n-1}{n} \sin\chi - \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \sin(\phi_i - \phi_k + \chi) - \omega_s + \omega_{fk} \qquad (14)$$

が得られる。

次に、$d\phi_k/dt = 0$ なる定常状態を考える。このとき式(14)から

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \sin(\phi_{iks} + \chi) = \frac{n(\omega_{fk} - \omega_s)}{B_k} + (n-1)\sin\chi \qquad (15)$$

が得られる。ここで、$\phi_{iks} = \phi_{is} - \phi_{ks}$ であり、これは、定常状態の osc. i と osc. k の定常位相差を表わす。ϕ_{1s}（osc. 1 の定常位相）を基準にとれば、$\phi_{iks} = \phi_{i1s} - \phi_{k1s}$ であるから式(15)

は ω_s と ϕ_{k1s} $(k=2\cdots n)$ を未知数とする連立方程式である。簡単のため $B_k = B$ と仮定し，式(15)で $k=1$ とおいたものと式(15)の差をとれば次式が得られる。

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \sin(\phi_{iks}+\chi) - \sum_{i=2}^{n} \sin(\phi_{i1s}+\chi) = \frac{n}{B}(\omega_{fk}-\omega_{f1}) \quad (16)$$

$$(k=2\cdots n)$$

これは，ϕ_{i1s} $(i=2\cdots n)$ を未知数とする連立方程式である。ϕ_{i1s} は χ と $\omega_{fk}-\omega_{f1}$ の関数として求めることができるが 式(16)の一般解を解析的に表わすことは困難であるので，以下特別な場合に限って議論する。

各発振器の自由発振角周波数が，すべて等しい，すなわち

$$\omega_{fk} = \omega_f \qquad (k=1,2,\cdots n) \qquad (17)$$

とすれば，式(16)の右辺はゼロになり，式(16)の解として

$$\phi_{k1s} = 0 \qquad (k=2,3\cdots n) \qquad (18)$$

があることは容易にわかる。※

次に，安定性について考察する。いま，位相差 $\phi_k - \phi_1 \equiv \phi_{k1}$ が定常状態 ϕ_{k1s} から微少量 $\Delta\phi_{k1}$ だけ変動したとして

$$\phi_{k1} = \phi_{k1s} + \Delta\phi_{k1} \qquad (19)$$

とおき，式(14)から $\Delta\phi_{k1}$ の変分方程式を求めると次のようになる。

$$\frac{d\Delta\phi_{k1}}{dt} = \frac{B}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left[\cos(\phi_{i1s}+\chi)-\cos(\phi_{iks}+\chi)\right]\Delta\phi_{i1}$$

$$+\frac{B}{n}\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\cos(\phi_{iks}+\chi)+\cos(\phi_{kis}+\chi)\right]\Delta\phi_{k1} \qquad (20)$$

※ 上記以外の解については今回は考えないことにする。

xの値を与えれば、式(16)から ϕ_{k1s} が決まりこれを式(20)に代入して $\Delta\phi_{k1}$ について解き、$t\to\infty$ のときの $\Delta\phi_{k1}$ のふるまいを調べれば安定判別ができるのであるが、ここでは簡単のため式(18)で与えられる状態のみについて考察する。式(18)を式(20)に代入すれば

$$\frac{d\Delta\phi_{k1}}{dt} = B\cos x\cdot\Delta\phi_{k1} \tag{21}$$

が得られる。$\phi_{k1s}=0$ が安定となるためには

$$\cos x < 0 \tag{22}$$

でなければならない。位相が $\phi_{k1s}=0$ からずれたとき、元の値に復帰する速さは、$\cos x=-1$ のときに最大になるので、xの最適値は

$$x=(2m+1)\pi \qquad (m:\text{整数}) \tag{23}$$

である。

同期角周波数 ω_s は式(15)で $k=1$ とおいた式より

$$\omega_s = \omega_{f1} - \frac{B}{n}\sum_{i=2}^{n}\sin(\phi_{i1s}+x) + B\frac{n-1}{n}\sin x \tag{24}$$

として求めることができる。$\phi_{i1s}=0\ (i=2\cdots n)$ のとき式(24)は

$$\omega_s = \omega_f \tag{25}$$

となる。

4.2 出力

出力波 b_{n+1} は式(3), (12)より

$$b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}|a|e^{j\eta}\sum_{k=1}^{n}e^{j\phi_k} \tag{26}$$

で与えられる。

出力電力 $|b_{n+1}|^2$ は、式(26)から次のように表わされる。

$$|b_{n+1}|^2 = \frac{1}{n}|a|^2\left[n + 2\sum_{k>l}\cos(\phi_k - \phi_l)\right] \qquad (27)$$

ここで、$\sum_{k>l}$ は $k>l$ なる k, l のすべての組についての和をとることを意味し、その組合せは ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ 通りである。式(17)が成立し、$\phi_{k1s} = 0$ となるときは、式(27)より定常状態の出力は $|b_{n+1}|^2 = n|a|^2$ となる。すなわち、各発振器の自由発振周波数がすべて等しい場合には、$\cos\chi < 0$ なる χ の全範囲で電力は完全合成されることになる。安定性から言えば、χ の最適値は式(23)で与えられるが、これは各発振器の自由発振周波数が少しずつ異なっている場合に合成電力を(完全電力合成ではないが)最大にする χ の値でもあることが次のように示される。自由発振周波数が、わずかに異なっている場合、すなわち、式(16)の右辺がゼロではないが、ひじょうに小さいときは、ϕ_{k1s} は近似的に

$$\phi_{k1s} \cong \frac{\omega_{fk} - \omega_{f1}}{B\cos\chi} \qquad (\cos\chi < 0) \qquad (28)$$

で与えられることがわかる。式(27)からわかるように、$\omega_{fk} \neq \omega_{f1}$ に起因する出力低下は $|\phi_{k1s}|$ が小さくなるとき、小さくなる。したがって、$\cos\chi = -1$、すなわち、$\chi = (2m+1)\pi$ のときに、出力は最大になることがわかる。

次に、発振器の相互同期による電力合成の物理的な意味[12]を考察することにする。結合回路のSマトリクスが式(12)で与えられている場合、各発振器の特性が同じ、すなわち外部Q、発振出力、および自由発振周波数が同じであると仮定すれば、

$\cos x < 0$ なる x の範囲では各発振器の定常位相は先に述べたように一致し，相互同期していることになる。このとき，各発振器への注入波 b_k は 式(3)と(12)から容易にわかるように，ゼロになっている。すなわち，各発振器へ戻ってくる波は相互に打消しあってゼロになり，各発振器の出力波は同相で加わり合い負荷へ完全合成された電力が供給される。発振器の位相がずれると注入波が生じ，これが位相を元に戻すように作用し相互同期状態を保っているのである。これが相互同期による電力合成の物理的な意味である。最適条件 $x=(2m+1)\pi$ のときは 式(12)からわかるように各発振器は，自己の発する波を逆相に受け ($S_{kk}=-(n-1)/n$)，他の発振器からの波を同相に受け ($S_{ki}=1/n$) ていることがわかる。

5. 出力の雑音

5.1 ゆらぎの方程式

いま，発振出力波の振幅と位相が雑音によって次のように変化するものとする。

$$|a| = |a_s| + \delta|a| = |a_s|(1+\delta A) \tag{29a}$$

$$\phi = \phi_s + \delta\phi \tag{29b}$$

ここで，$\delta A = \delta|a|/|a_s|$ で，添字 s は定常値を表わす。式(1)，(2)で自由発振時最大出力条件が満たされているとし，式(29)を式(1)(2)に代入して定常項をとり除くと次式が得

られる。

$$\frac{d\delta A}{dt} = -B\left[\mathrm{Re}\left(\frac{b}{a}\right)_s + 1\right]\delta A - \frac{B}{2}\hat{G}_N(t) \qquad (30a)$$

$$\frac{d\delta\phi}{dt} = B\,\mathrm{Im}\,\delta\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{B}{2}\hat{B}_N(t) \qquad (30b)$$

ここで，$\hat{G}_N = G_N/Y_0$　$\hat{B}_N = B_N/Y_0$ である。また，$b/a = (b/a)_s + \delta(b/a)$，$B = \omega_0/Q_{ex}$ である。

5.2 自由発振時の雑音

発振器が最大出力状態で自由発振しているときは，$b=0$ であるから，式(30)で $b=0$ とおいて，δA と $\delta\phi$ のパワー・スペクトル密度を求めると次のようになる。

$$S(\delta A;\Omega) = \frac{1}{4}\frac{S(\hat{G}_N;\Omega)}{(\Omega/B)^2+1} \equiv S_{AM1} \qquad (31a)$$

$$S(\delta\phi;\Omega) = \frac{1}{4}\frac{S(B_N;\Omega)}{(\Omega/B)^2} \equiv S_{PM1} \qquad (31b)$$

ここで，Ω はオフキャリヤ角周波数で，$S(\hat{G}_N;\Omega)$ と $S(\hat{B}_N;\Omega)$ はそれぞれ，$\hat{G}_N$ と $\hat{B}_N$ のパワースペクトル密度である。

5.3 出力波の雑音

負荷への出力波 b_{n+1} を $Ke^{A_{n+1}+j\phi_{n+1}}$，osc. k の出力波 a_k を $Ke^{A_k+j\phi_k}$ と表わす。A_k と ϕ_k が雑音により，それぞれ $A_k = A_{ks} + \delta A_k$，および $\phi_k = \phi_{ks} + \delta\phi_k$ となるとき，A_{n+1} と ϕ_{n+1} が，それぞれ $A_{n+1} = A_{n+1s} + \delta A_{n+1}$，

および $\phi_{n+1} = \phi_{n+1s} + \delta\phi_{n+1}$ となるものとする。これらのゆらぎが小さいとして，2次以上の項を無視すれば式(26)から次式が得られる。

$$\delta A_{n+1} + j\delta\phi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{j\tau} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{ks}(\delta A_k + j\delta\phi_k)}{b_{n+1s}} \qquad (32)$$

以下，完全電力合成時に限って考察する。完全電力合成時には，$\phi_{k1s} = 0$ であるから，このとき $a_{ks} = a_{1s}$ となり，$b_{n+1s} = \sqrt{n}\, e^{jnd_{1s}}$ となる。したがって，式(32)から次の関係式が得られる。

$$\delta A_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta A_k \qquad (33a)$$

$$\delta\phi_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta\phi_k \qquad (33b)$$

この場合，出力波のゆらぎは，各発振器の出力波のゆらぎ平均になっていることがわかる。

各発振器について式(30)を立て，Sマトリクスの要素の式(12)を用いると，OSC. k の振幅と位相のゆらぎの方程式として次式がえられる。

$$\frac{d\delta A_k}{dt} = -B_k \delta A_k - \frac{B_k}{2} \hat{G}_{Nk}(t) \qquad (34a)$$

$$\frac{d\delta\phi_k}{dt} = -\frac{n-1}{n} B_k \delta\phi_k + \frac{1}{n} B_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \delta\phi_i - \frac{B_k}{2} \hat{B}_{Nk}(t) \qquad (34b)$$

ここで，$\hat{Y}_{Nk}(t) = \hat{G}_{Nk} + j\hat{B}_{Nk}$ は OSC. k の雑音アドミタンスである。

簡単のため $B_k = B$ と仮定して，δA_{n+1} と $\delta\phi_{n+1}$ のパワースペクトル密度を求める。$\hat{G}_{Nk}(t)$ と $\hat{B}_{Nk}(t)$ を，それぞれ独立な定常確率過程とし，そのパワースペクトル密度を $S(\hat{G}_{Nk};\Omega)$ および，$S(\hat{B}_{Nk};\Omega)$ で表わせば，δA_{n+1} と $\delta\phi_{n+1}$ のパワースペクトル密度 $S(\delta A_{n+1};\Omega)$ と $S(\delta\phi_{n+1};\Omega)$ は次のように表わされる（付録Ⅱ参照。）

$$S(\delta A_{n+1};\Omega) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{S(\hat{G}_{Nk};\Omega)}{(\Omega/B)^2+1} \tag{35a}$$

$$S(\delta\phi_{n+1};\Omega) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{S(\hat{B}_{Nk};\Omega)}{(\Omega/B)^2} \tag{35b}$$

特別な場合として，各発振器の雑音が等しく，$S(\hat{G}_{Nk},\Omega) = S(\hat{G}_N;\Omega)$，$S(\hat{B}_{Nk};\Omega) = S(\hat{B}_N;\Omega)$ とおける場合は式(35)は

$$S(\delta A_{n+1};\Omega) = \frac{1}{4n}\frac{S(\hat{G}_N;\Omega)}{(\Omega/B)^2+1} \equiv S_{AMn} \tag{36a}$$

$$S(\delta\phi_{n+1};\Omega) = \frac{1}{4n}\frac{S(\hat{B}_N;\Omega)}{(\Omega/B)^2+1} \equiv S_{PMn} \tag{36b}$$

となる。式(31)と(36)から

$$S_{AMn} = \frac{1}{n}S_{AM1}, \qquad S_{PMn} = \frac{1}{n}S_{PM1} \tag{37}$$

の関係が得られる。すなわち n 個の発振器の合成出力のAM，PM雑音（C/N比）は単一発振器の場合の $1/n$ になる[5]ことがわかる。

6. 多段電力合成回路[6][7]

6.1 Sマトリクス

任意個数の発振器の電力合成が行なえる回路として，図3に示すような電力合成回路がある。図で $U_0 \cdots\cdots U_n$，$D_1 \cdots\cdots D_n$，$\theta_1 \cdots\cdots \theta_n$ および，$\Gamma_1 \cdots\cdots \Gamma_n$ は，それぞれ単向管，方向性結合器，移相器および，反射器を表わす。

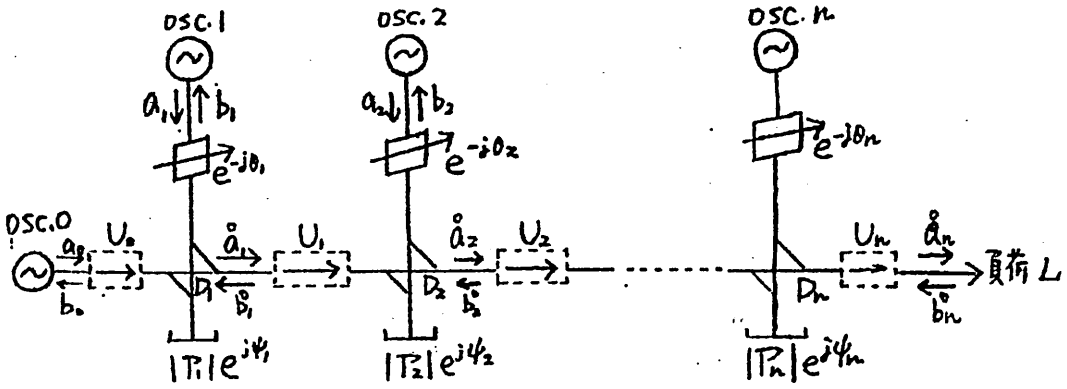


図3　多段電力合成回路

主線路に単向管を挿入した場合については，その原理と実験結果はすでに報告してある[6]。また，単向管を用いない場合も最初の2個の発振器について結合回路条件と電力合成特性との関係はすでに報告してある。[7] ここでは，単向管を用いない場合について，これをn+1個の発振器の相互同期の問題としてとらえることにし，結合回路のSマトリクスを求め，前章までの一般論との比較を行なう。

図3の結合回路をSマトリクスで表わせば各発振器の出力波 a_k と入力波 b_k の関係は次のように書くことができる。

$$
\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ \mathring{a}_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
S_{00} & S_{01} & S_{02} & \cdots & S_{0n} & S_{0n+1} \\
S_{10} & S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} & S_{1n+1} \\
S_{20} & S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} & S_{2n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
S_{n0} & S_{n+1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} & S_{nn+1} \\
S_{n+10} & S_{n+11} & S_{n+12} & \cdots & S_{n+1n} & S_{n+1n+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \mathring{a}_n \\ \mathring{b}_n \end{bmatrix}
\tag{38}
$$

ここで、$\mathring{a}_n$ と $\mathring{b}_n$ は、それぞれ負荷への出力波および負荷からの反射波を表わす。

次に、式(38)のSマトリクスの要素を求めることにする。図3の k 番目の方向性結合器 D_k の各ポートを図4のように①～④とし、基準面を適当に選べば、Sマトリクスは次のように書くことができる。

$$
\begin{bmatrix}
0 & \alpha & 0 & j\beta \\
\alpha & 0 & j\beta & 0 \\
0 & j\beta & 0 & \alpha \\
j\beta & 0 & \alpha & 0
\end{bmatrix}
\quad (\alpha^2+\beta^2=1)
$$

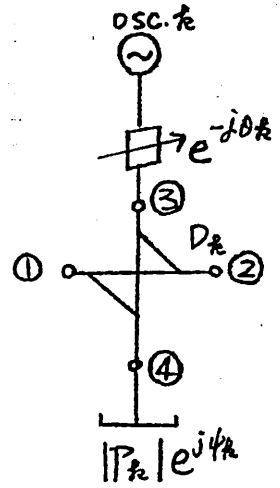


図4　k 番目の結合回路

したがって、k 番目の結合回路のシグナルフローグラフは図5のように表わされる。図5から各端子の波の関係は次のように与えられる。

$$
\mathring{b}_{k-1} = u_k \mathring{a}_{k-1} + \alpha_k \mathring{b}_k + P_k a_k \tag{39}
$$

$$\mathring{a}_k = \alpha_k \mathring{a}_{k-1} + q_k a_k \qquad (40)$$

$$b_k = p_k \mathring{a}_{k-1} + q_k \mathring{b}_k + v_k a_k \qquad (41)$$

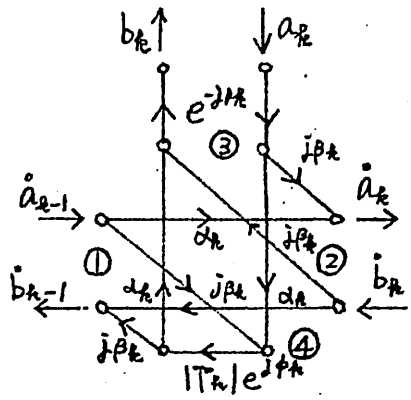


図5　k番目の結合回路のシグナルフローグラフ

ここで

$$u_k = -\beta_k^2 |\Gamma_k| e^{j\psi_k}$$
$$v_k = \alpha_k^2 |\Gamma_k| e^{j\psi_k} e^{-j2\theta_k}$$
$$p_k = j\alpha_k \beta_k |\Gamma_k| e^{j\psi_k} e^{-j\theta_k}$$
$$q_k = j\beta_k e^{-j\theta_k}$$
$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1 \qquad (42)$$

ただし，$p_0 = 0$，$q_0 = 1$，$v_0 = 0$，$\mathring{b}_{-1} = 0$，$\mathring{a}_{-1} = 0$，$\mathring{b}_0 = b_0$，$\mathring{a}_0 = a_0$ と約束するものとする。こうしておけば，式(39)〜(41)は $k=0$ のときにも成立する。

式(40)から，$\mathring{a}_k$ を求めると

$$\mathring{a}_k = \sum_{i=0}^{k} \left(q_i \prod_{s=i+1}^{k} \alpha_s\right) a_i \qquad (k = 0, 1 \cdots\cdots n) \qquad (43)$$

となる。ただし $\prod_{s=k+1}^{k} \alpha_s = 1$ と約束する。式(39)と(43)から $\mathring{b}_k$ は

$$\mathring{b}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{l=k+1}^{n} u_l q_i \prod_{s=k+1}^{l-1} \alpha_s \prod_{s=i+1}^{l-1} \alpha_s\right) a_i + \left[\sum_{i=k+1}^{n} u_i q_k \left(\prod_{s=k+1}^{i-1} \alpha_s\right)^2\right] a_k$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n-1} \left(p_i \prod_{s=k+1}^{i-1} \alpha_s + \sum_{l=i+1}^{n} u_l q_i \prod_{s=k+1}^{l-1} \alpha_s \prod_{s=i+1}^{l-1} \alpha_s\right) a_i + \left(p_n \prod_{s=k+1}^{n-1} \alpha_s\right) a_n$$

$$+ \left(\prod_{s=k+1}^{n} \alpha_s\right) \mathring{b}_n \qquad (44)$$

が与えられる。

式(41)に式(43),(44)を代入して整理すれば

$$b_k=\sum_{i=0}^{k-1}\left[q_i p_k \prod_{s=i+1}^{k-1}\alpha_s + q_i q_k \sum_{l=k+1}^{n} u_l \prod_{s=k+1}^{l-1}\alpha_s \prod_{s=i+1}^{l-1}\alpha_s\right] a_i$$

$$+\left[v_k + q_k^2 \sum_{l=k+1}^{n} u_l \left(\prod_{s=k+1}^{l-1}\alpha_s\right)^2\right] a_k$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n-1}\left[q_k p_i \prod_{s=k+1}^{i-1}\alpha_s + q_k q_i \sum_{l=i+1}^{n} u_l \prod_{s=k+1}^{l-1}\alpha_s \prod_{s=i+1}^{l-1}\alpha_s\right] a_i$$

$$+\left(q_k p_n \prod_{s=k+1}^{n-1}\alpha_s\right) a_n + \left(q_k \prod_{s=k+1}^{n}\alpha_s\right) \mathring{b}_n \qquad (45)$$

が得られる。式(43)で $k=n$ とおいた式と，式(45)から，式(38)のSマトリクスの要素はすべて求まることになる。

最初の2個の発振器の解析結果によれば方向性結合器の結合度を

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{|a_0|}{|a_1|} \qquad (\alpha_1^2+\beta_1^2=1)$$

を満たすように選ぶことが完全電力合成の必要条件になっている[6][7]。$|a_0|=|a_1|$ とすれば，$\alpha_1/\beta_1=1$ である。いま，$n+1$ 個の発振器の出力が等しいとして，この条件を用いると，k 番目の方向性結合器の結合度は，$\alpha_k/\beta_k=\sqrt{k}$ に選べばよいことになる。したがって $\alpha_k^2+\beta_k^2=1$ の関係から α_k, β_k を求めると次のようになる。

$$\alpha_k=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}, \qquad \beta_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}} \qquad (k=1,\cdots\cdots n) \qquad (46)$$

簡単のため，$\psi_k=\varphi$, $\theta_k=\theta$ $(k=1,\cdots\cdots n)$ とすれば，式(43),

(45), (46) からSマトリクスの要素は次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} S_{00} &= -\frac{n}{n+1}e^{j\psi} \\ S_{k0} &= S_{0k} = \frac{j}{n+1}e^{j(\psi-\theta)} \qquad (1 \le k \le n) \\ S_{0n+1} &= S_{n+10} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

$$\left.\begin{aligned} S_{kk} &= \frac{n}{n+1}e^{j(\psi-2\theta)} \\ S_{ik} &= S_{ki} = -\frac{1}{n+1}e^{j(\psi-2\theta)} \qquad (1 \le i,\ k \le n) \\ S_{kn+1} &= S_{n+1k} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}je^{-j\theta} \\ S_{n+1n+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

OSC.0は図3からわかるようにOSC.1〜OSC.nとは接続の仕方が異なるため、式(38)のSマトリクスの1行目と1列目は他の要素とは異なった形になっている。

式(47), (48)が式(12)の形に書けるための条件を求めると、$\theta = (4M+1)\pi/2$ (M:整数)となる。このとき、式(47), (48)は

$$\lambda \equiv \psi - (2N+1)\pi \qquad (N:\text{整数}) \qquad (49)$$

とおけば、まとめて

$$\left.\begin{aligned} S_{kk} &= \frac{n}{n+1}e^{j\lambda} \\ S_{ik} &= S_{ki} = -\frac{1}{n+1}e^{j\lambda} \\ S_{kn+1} &= S_{n+1k} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

と書くことができる。これから，式(12)のxと$\lambda \equiv \psi-(2N+1)\pi$が対応していることがわかる。4.2節で述べたように$\omega_{fk}=\omega_f$のときは$\cos\lambda<0$のλの範囲で電力が完全合成される。したがって，$\theta=(4M+1)\pi/2$のとき$\cos\psi>0$なるψの範囲で電力が完全合成されることになる。ψの最適値は$\cos\psi=1$となるψ，すなわち

$$\psi = 2l\pi \qquad (l：整数)$$

である。以上のことから，図3の電力合成回路で，電力合成が可能であることが結論できる。また，5.で述べたことから，この回路で雑音低減が可能であることも明らかである。

6.2 2個の発振器の解析および実験結果との比較

図3の最初の2個の発振器の相互同期については，すでに，文献(7)で報告しているが，そこでは$|a_0|/|a_1|=\alpha_1/\beta_1 \neq 1$として解析を行なっている。$\alpha_1/\beta_1 \neq 1$の場合には，$\omega_{f0}=\omega_{f1}$とすれば，$\theta_1=N'\pi$ (N'：整数)，$\cos\psi_1<0$のときにも完全電力合成が可能なことが示されているが，これは，$\alpha_1/\beta_1 \neq 1$という場合に限られる。このとき$|a_0|/|a_1|=\alpha_1/\beta_1=1$とすれば安定限界になることが示される*。

---

* 式(47)と(48)で$n=2$とおいたものを用いて式(13)を具体的に解いて安定判別を行なえばよい。

したがって $\alpha_1/\beta_1 \neq 1$ の場合も含めて最適回路条件は $\theta_1 = (4M+1)\pi/2$ で $\psi = 2l\pi$ であると言える。$\alpha_1/\beta_1 = 1$ の場合は マジックTで相互同期させた場合と本質的には同じものである。マジックTを用いた相互同期発振器の解析は文献(5)で，実験は文献(7)で報告されているが，最適回路条件については，これらの結果と前節の理論で述べたこととは一致する。

7. むすび

n個の発振器を，無損失可逆回路で結合した場合，電力が完全合成されるための結合回路のSマトリクスの条件をできるだけ一般的な形で求めた。さらに，このSマトリクスを用いて，合成出力波のAMおよびPM雑音の表示を導き，理想的な状態では，これらの雑音は単一発振器の雑音の $1/n$ に低減されることを示した。

また，多数個発振器の電力を合成する具体例として，多段電力合成のSマトリクスを求め，先の一般論と比較することにより最適回路条件を求めた。そして，この回路で任意個数の発振器の電力合成と雑音低減が可能であることを示した。

参考文献

(1) H. Fukui : "Frequency locking and modulation of microwave silicon avalanche diode oscillators," Proc. IEEE, 54, P. 1475 (Oct. 1966)

(2) S. Mizushima : "2^n oscillators combined with 3-dB directional couplers for output power summing", Proc. IEEE, 55, P. 2166 (Dec. 1967).

(3) J. R. Nevarez et. al. : "Output Power and Loss Analysis of 2^n Injection Locked Oscillators Combined Through and Ideal and Symmetric Hybrid Combiner," IEEE, Trans. MTT-17, P. 2 (Jan. 1969)

(4) 大越, 小谷 : "ガン発振器の並列運転とその雑音特性", 信学会. マイクロ波研資, MW 69-70 (1970-02)

(5) 岡部, 岡村 : "多数個発振器の並列運転系の安定性および雑音," 信学論 (B), 53-B., 12, P. 743 (昭45-12)

(6) M. Nakajima : "A Proposed Multistage Microwave Power Combiner," Proc. IEEE, 61, P. 242 (Feb. 1973)

(7) 牧野, 中島, 池上 : "多段マイクロ波電力合成回路", 信学会 マイクロ波研資, MW 72-93 (1972-11).

(8) 井田, 林, 橋本 : "相互注入同期発振器の特性", 信学論 (B), 56-B, 11, P. 486 (昭48-11).

(9) 太田, 福井："2個の発振器の非対称並列運転", 信学論(B), 60-B, 6, P.403(昭52-6).
(10) M. Nakajima, International Journal of Electronics に掲載予定.
(11) R. Adler: "A study of locking phenomena in oscillators", Proc. IRE, 34, P351 (June 1946).
(12) 中島, 池上："相互同期発振器系の動作と結合回路定数について", 昭52 信学全大, 656.

付録 I　結合回路のSマトリクス

式(12)のSマトリクスの要素を導出する。出力波 b_{n+1} は、式(3)より、式(6)、(9)を用いれば

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} S_{n+1k}\, a_k = C_3 \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (A\cdot 1)$$

で与えられる。$a_k = |a_k| e^{j\phi_k}$（ここで式(10)を用いている）とおいて、これを式(A・1)に代入して $|b_{n+1}|^2$ を求めると

$$|b_{n+1}|^2 = |C_3|^2 |a|^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} e^{j\phi_k} e^{-j\phi_l} \qquad (A\cdot 2)$$

となる。これから、$|b_{n+1}|^2$ の最大値は $|b_{n+1}|^2_{max} = |C_3|^2 |a|^2 n^2$ となり、式(11)が満たされるためには $|C_3|^2 = 1/n$ でなければならない。したがって

$$C_3 = S_{n+1k} = 1/\sqrt{n}\; e^{j\eta} \qquad (A\cdot 3)$$

と書くことができる。式(4a)で $i = j = n+1$ とおいて、式(9)を用いれば

$$n|C_3|^2 + |S_{n+1\,n+1}|^2 = 1$$

が得られる。上式に式(A・3)を代入すれば

$$S_{n+1\,n+1} = 0 \qquad (A\cdot 4)$$

となる。式(A・4)は出力端子から結合回路を見たときに整合がとれていることを意味し、これは仮定(1)～(5)のもとでの完全電力合成の必要条件である。次に、式(4・a)で $i = n+1$,

$j \leq n$ とおき，式(9)と式(A・4)を用いると

$$\sum_{k=1}^{n} S_{kj} = 0 \qquad (A\cdot 5)$$

が得られる。式(A・5)に式(7)，(8)を代入すれば

$$C_1 = -C_2/(n-1) \qquad (A\cdot 6)$$

が得られる。また，式(4a)で $i=j$ とおいた式に，式(7)，(8)，(9)を代入すれば

$$(n-1)|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1 - |C_3|^2 \qquad (A\cdot 7)$$

が得られ，これに式(A・6)を代入して $|C_2|^2$ について解けば

$$|C_2|^2 = \frac{n-1}{n}(1-|C_3|^2) \qquad (A\cdot 8)$$

となる。式(A・8)に式(A・3)を代入すれば，$|C_2|^2 = (n-1)^2/n^2$ となり

$$C_2 = S_{kk} = \frac{n-1}{n} e^{jx} \qquad (A\cdot 9)$$

と書けることがわかる。式(A・9)を式(A・6)に代入すれば

$$C_1 = S_{ki} = -\frac{1}{n} e^{jx} \qquad (A\cdot 10)$$

が得られる。式(A・3)，(A・4)，(A・9)，(A・10)が式(12)を与える。

付録 II　パワースペクトル密度の計算

定常確率過程は一般にフーリエ変換を有しないが次のようにして形式的にフーリエ変換とパワースペクトル密度を関係づけることができる。$x(t)$を定常確率過程として，そのパワースペクトル密度を$S(x;\Omega)$とすれば

$$S(x;\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle x(t+\tau)x^*(t)\rangle e^{-j\Omega\tau}d\tau \qquad (B.1)$$

である。ここで，$\langle\ \ \rangle$はアンサンブル平均を示す。いま

$$\int_{-\infty}^{\infty}\langle x(t+\tau)x^*(t)\rangle e^{-j\Omega\tau}d\tau\equiv\langle x_\Omega x_\Omega^*\rangle \qquad (B.2)$$

と定義すれば，形式的に$x(t)$のフーリエ変換

$$x(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\Omega t}dt \qquad (B.3)$$

とおくと，式(B.2)と次式で関係づけられる。

$$\langle x(\Omega)\,x^*(\Omega')\rangle=\langle x_\Omega x_\Omega^*\rangle 2\pi\delta(\Omega-\Omega') \qquad (B.4)$$

以上のことを用いて，式(35)のパワースペクトル密度を求めることにする。式(34)より，$B_k=B$として次式が得られる。

$$\delta A_{k\Omega}=-\frac{B}{2}\frac{\hat{G}_{Nk\Omega}}{j\Omega+B} \qquad (B.5)$$

$$\left[j\Omega+\frac{(n-1)B}{n}\right]\delta\phi_{k\Omega}-\frac{B}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\delta\phi_{i\Omega}=-\frac{B}{2}\hat{B}_{Nk\Omega} \qquad (B.6)$$

一方，式(33a)より

$$\delta A_{n+1\Omega} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta A_{k\Omega} \qquad (B.7)$$

が得られる。

δA_{n+1} のパワースペクトル密度 $S(\delta A_{n+1};\Omega)$ は式(B.2)と、式(B.7)より

$$S(\delta A_{n+1};\Omega) \equiv \langle \delta A_{n+1\Omega}\, \delta A_{n+1\Omega}^{*} \rangle = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \langle \delta A_{k\Omega} \cdot \delta A_{l\Omega}^{*} \rangle$$

となり、これに式(B.5)を代入すれば

$$S(\delta A_{n+1};\Omega) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\langle \hat{G}_{Nk\Omega}\, \hat{G}_{Nl\Omega}^{*} \rangle}{(\Omega/B)^2+1} \qquad (B.8)$$

が得られる。$\hat{G}_{Nk}(t)$ と $\hat{G}_{Nl}(t)$ $(k \neq l)$ が独立であると仮定すれば $\langle \hat{G}_{Nk}(t)\, \hat{G}_{Nl}^{*}(t+\tau) \rangle = 0$ であり、$\langle \hat{G}_{Nk\Omega}\, \hat{G}_{Nl\Omega}^{*} \rangle = \langle \hat{G}_{Nk\Omega}\, \hat{G}_{Nk\Omega}^{*} \rangle \delta_{kl} = S(\hat{G}_{Nk};\Omega)\, \delta_{kl}$ と表わせる。

これを式(B.8)に用いれば

$$S(\delta A_{n+1};\Omega) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{S(\hat{G}_{Nk};\Omega)}{(\Omega/S)^2+1} \qquad (B.9)$$

となり、これが、式(35a)を与える。

式(B-6)をマトリクスで表わせば

$$\begin{bmatrix} (j\Omega+\frac{n-1}{n}B) & -\frac{B}{n} & \cdots & -\frac{B}{n} \\ -\frac{B}{n} & (j\Omega+\frac{n-1}{n}B) & \cdots & -\frac{B}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{B}{n} & -\frac{B}{n} & \cdots & (j\Omega+\frac{n-1}{n}B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\phi_{1\Omega} \\ \delta\phi_{2\Omega} \\ \vdots \\ \delta\phi_{n\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{2}\hat{B}_{N1\Omega} \\ -\frac{B}{2}\hat{B}_{N2\Omega} \\ \vdots \\ -\frac{B}{2}\hat{B}_{Nn\Omega} \end{bmatrix} \qquad (B.10)$$

これを，ベクトルとマトリクスで表わして

$$[D]\,\delta\phi_{\Omega} = (-B/2)\,\hat{B}_{N\Omega} \tag{B.11}$$

と書くことにする。いま

$$x = -n\,[1 + j(\Omega/B)] \tag{B.12}$$

とおけば，$[D]$は次のように表わされる。

$$[D] = \begin{bmatrix} -B/n & & 0 \\ & -B/n & \\ & & \ddots \\ 0 & & -B/n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \cdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{bmatrix} \equiv [B][x]$$

$[B]\cdot[x]$の逆行列$[B]^{-1}$, $[x]^{-1}$の要素は次のようになる。

$$[B]^{-1}_{ik} = -(n/B)\,\delta_{ik} \tag{B.13}$$

$$[x]^{-1}_{ik} = \frac{1}{x}\left[\delta_{ik} - \frac{1}{x+n}\right] \tag{B.14}$$

したがって，$[D]^{-1}$の要素は

$$[D]^{-1}_{ik} = \sum_{l=1}^{n} [x]^{-1}_{il}\,[B]^{-1}_{lk} = -\frac{n}{B}\frac{1}{x}\left[\delta_{ik} - \frac{1}{x+n}\right]$$

$$= \frac{1}{B[1+j(\Omega/B)]}\left[\delta_{ik} + \frac{B}{jn\Omega}\right] \tag{B.15}$$

式(B.11)より

$$\delta\phi_{k\Omega} = \sum_{l=1}^{n} [D]^{-1}_{kl}\,(-B/2)\,\hat{B}_{N\Omega l}$$

これに 式(B.15)を代入すれば

$$\delta\phi_{k\Omega} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+j(\Omega/B)}\sum_{l=1}^{n}\left[\delta_{kl}+\frac{B}{jn\Omega}\right]\widehat{B}_{Nl\Omega} \qquad (B\cdot16)$$

となる。一方，式(33b)より

$$\delta\phi_{n+1\Omega} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta\phi_{k\Omega} \qquad (B\cdot17)$$

である。したがって，$\delta\phi_{n+1}$ のパワースペクトル密度は

$$S(\delta\phi_{n+1};\Omega)\equiv\langle\delta\phi_{n+1\Omega}\,\delta\phi^{*}_{n+1\Omega}\rangle=(1/n^2)\sum_{k=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\langle\delta\phi_{k\Omega}\,\delta\phi^{*}_{v\Omega}\rangle$$

$$=\frac{1}{4n^2}\frac{1}{1+(\Omega/B)^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left[\delta_{kl}+\frac{B}{jn\Omega}\right]\left[\delta_{vm}-\frac{B}{jn\Omega}\right]\langle\widehat{B}_{Nl\Omega}\,\widehat{B}^{*}_{Nm\Omega}\rangle \qquad (B\cdot18)$$

となる。$\widehat{B}_{Nl}$ と $\widehat{B}_{Nm}$ $(l\neq m)$ が独立であると仮定すれば
$\langle\widehat{B}_{Nl\Omega}\,\widehat{B}^{*}_{Nm\Omega}\rangle=\langle\widehat{B}_{Nl\Omega}\,\widehat{B}^{*}_{Nl\Omega}\rangle\delta_{lm}=S(\widehat{B}_{Nl};\Omega)\delta_{lm}$ と表わせるから，これを式(B.18)に用いれば

$$S(\delta\phi_{n+1};\Omega)=\frac{1}{4n^2}\frac{1}{1+(\Omega/B)^2}\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\left[\delta_{kl}+\frac{B}{jn\Omega}\right]\left[\delta_{vl}-\frac{B}{jn\Omega}\right]\right\}\times S(\widehat{B}_{Nl};\Omega)$$

$$=\frac{1}{4n^2}\sum_{l=1}^{n}\frac{S(\widehat{B}_{Nl};\Omega)}{(\Omega/B)^2}$$

が得られる。これが，式(35b)を与える。

付録Ⅲ 電力合成回路のSマトリクス

α_k と β_k が式(46)で与えられるとき，式(42)は

$$u_k = -\frac{1}{k+1} e^{j\psi_k}, \qquad v_k = \frac{k}{k+1} e^{j(\psi_k - 2\theta_k)}$$
$$p_k = j\frac{\sqrt{k}}{k+1} e^{j(\psi_k - \theta_k)}, \qquad q_k = j\frac{1}{\sqrt{k+1}} e^{-j\theta_k} \tag{C・1}$$

となる。また，このとき

$$\prod_{s=s_1}^{s_2} \alpha_2 = \frac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{s_1+1}}\frac{\sqrt{s_1+1}}{\sqrt{s_1+2}} \cdots\cdots \frac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2}}\cdot\frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{s_2+1}} = \frac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{s_2+1}} \tag{C・2}$$

である。式(C・1)と(C・2)を式(45)に用いれば，Sマトリクスの要素は次のように求まる。

$$S_{00} = -\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right)e^{j\psi_l}$$

$$S_{0i} = \frac{j}{i+1} e^{j(\psi_i - \theta_i)} - j\sum_{l=i+1}^{n}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right)e^{j(\psi_l - \theta_i)} \quad (1 \leq i \leqq n-1)$$

$$S_{0n} = \frac{j}{n+1} e^{j(\psi_n - \theta_n)}, \qquad S_{0n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{C・3}$$

$1 \leq k \leq n$ に対して

$$S_{ki} = -\frac{1}{k+1} e^{j(\psi_k - \theta_k - \theta_i)} + \sum_{l=k+1}^{n}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right)e^{j(\psi_l - \theta_i - \theta_k)} \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

$$S_{kk} = -\frac{k}{k+1} e^{j(\psi_k - 2\theta_k)} + \sum_{l=k+1}^{n}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right)e^{j(\psi_l - 2\theta_k)}$$

$$S_{ki} = -\frac{1}{i+1} e^{j(\psi_i - \theta_i - \theta_k)} + \sum_{l=i+1}^{n} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) e^{j(\psi_l - \theta_i - \theta_k)}$$

$$(k+1 \leq i \leq n-1)$$

$$S_{k0} = \frac{j}{k+1} e^{j(\psi_k - \theta_k)} - j \sum_{l=k+1}^{n} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) e^{j(\psi_l - \theta_k)}$$

$$S_{kn+1} = \frac{j}{\sqrt{n+1}} e^{-j\theta_k} \qquad (C\cdot 4)$$

式(43)で $k=n$ とおいたものから

$$S_{n+1k} = \frac{j}{\sqrt{n+1}} e^{-j\theta_k} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

$$S_{n+10} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad S_{n+1n+1} = 0 \qquad (C\cdot 5)$$

が得られる。

また，式(C・3)，(C・4)，(C・5)で $\psi_k = \psi$，$\theta_k = \theta$ とすれば Σ の中の指数項は前に出て

$$\sum_{l=l_1}^{l_2} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) = \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2+1}$$

なる関係を用いれば 式(47)，(48)が得られる。

輻射科学研究会資料

幾何光学近似を用いた磁気表面波の解析

栗井郁雄
池上淳一
(京都大学・工学部)

1977年10月7日

§1. まえがき

不均一媒質中を伝搬する光波の特性を知るために用いられる幾何光学近似の手法は，磁気波の解析についても拡張して用いることができる。これを体積モードについて行なったのはAuldらであり，[1~3] 彼等は磁気弾性波に対してこの近似法が適用できることを示した。磁気波の媒質，即ち磁化された強磁性体は，その形状が楕円体でない限り必ず内部磁場が不均一となり，その結果透磁率も同じ影響を受ける。そして一方，磁気弾性波の波長は極めて小さく，光の波長程度にすらなるという事実によって，幾何光学近似適用の条件 ——1波長あたりの透磁率の変化が十分小さい—— が満たされることになる。この時，均一媒質中を伝搬する波動に対して得られる分散関係式において，波数kを$\mathrm{grad}\,\varphi$におきかえて得られるφに関する微分方程式が解くべき方程式となる。もちろん均一媒質の時には定数であった透磁率は空間的に変化する量に変えられる。上のような事情は光学においてこの近似法が用いられる場合と全く同様であり，違いは単に誘電率と透磁率の入れかえ，及びφに関する方程式（アイコナール方程式）の複雑さのみである。

光学においてのみ用いられてきた方法を磁気波に対しても用いうる事を示した点でAuldらの研究は学問的に高く評価できるものであるが，残念なことに彼等の解析したバルク状試料中の体積モードは現段階では余り応用の点で期待されてはいない。むしろ，最近は薄膜状YIG中の磁気表面波が遅延等化器や，可変遅延線への応用において有望とされている。そして薄膜といえども有限な厚さを持っているために内部磁場は不均一となるので，そのような条件のもとで，磁気表面波の伝搬を取り扱かわねばならない。従ってこの近似法を平面波から表面波の解析に用い得るよう変形する事が必要となる。

我々は前回の報告において[4]，そのような変形が可能である事，かつ現実に実験が行なわれているいくつかの試料形状，諸パラメータの下で計算を行なった結果内部磁場不均一の効果が相当大きく現われる事を明らかにした。又，この近似法が適用可能であるための条件を見出しならびに数値計算における誤差の評価もあわせて行なった。そこで今回は前回不充分であった種々のパラメータに対するビーム軌跡のふるまいと，その定性的説明に重点を置くことにしよう。

§2. 薄膜状試料の内部磁場

この報告では，図1のようなz方向に直流磁場を加えられた薄膜状磁性体をy方向に伝搬する表面静磁波について考える。それゆえ，まず直流内部磁場がどのような空間的変化を呈するか，つまり媒質の非均一性の程度について調べてみよう。

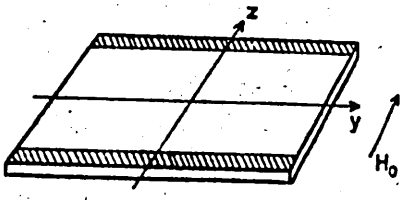


図1. 内部磁場の非一様な表面静磁波の伝搬系

このような構造では両端面 $z=\pm d/2$ に表面磁荷が現われるために，一様な直流磁場を加えたとしても，z方向の内部磁場は非一様となるばかりでなく，x, y方向成分も出現することになり，内部磁場は次のような式で書かれる。

$$\mathbb{H}(x, y, z) = H_0 \mathring{\mathbb{e}}_z + \mathbb{H}_d(x, y, z) \qquad (1)$$

ここでは $\mathbb{H}_d$ は表面磁荷によって生じた反磁場であり，$\mathring{\mathbb{e}}_z$ はz方向の単位ベクトルを意味する。

H_{dz} 即ち，反磁場のz方向成分は $z=\pm d/2$ において試料

の飽和磁化の半分の値（YIGの場合875Oe）となり極めて大きい上に、そこから離れるに従って急激に減衰する（変化率が大きい）のでz=±d/2の近傍で幾何光学近似を用いる事ができないのは最初から明白である。そこで図1の斜線で示したように両端から試料幅の1/10だけを除外して考えることにしよう。

長さ10mm，幅5mm，厚さ10μmのYIGについて500Oeの直流磁場を幅方向に加えたものとし，内部磁場の空間的分布を示すと図2のようになる。H_xは至る所で0.23Oeを越える事がないので除外した。この図は試料表面つまりx=5μmにおける値であるが，H_z，H_yの厚み方向での変化は至る所で1%以下であったので無視しても差し支えない。又，H_z，H_yのy，z方向変化量はほぼ同じオーダーであるが，大きさについてはH_zはH_yの100倍にもなるので内部磁場ベクトルの向きはz方向と考えてよい。

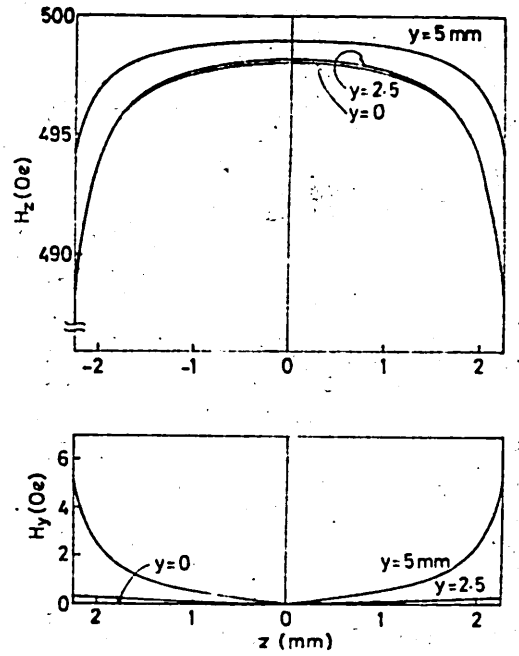


図2. 直流内部磁場H_z，H_yの変化
(H_e=500Oe，$4\pi M_s$=1750G，0.01×10×5mm)

以上の結果をまとめると，ここで扱かおうとする媒質の非均一性は次のような性格をもっている。透磁率は厚み方向には一様であり，幅，長さ方向に変化している。そして主としてH_z成分のみによって変化が決定される。

§3. アイコナール方程式の導出

不均一媒質中においても静磁波のふるまいを記述するための式の形そのものは均一媒質と変わらない。即ち、

$$\mathrm{rot}\ \mathbb{h} = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{div}(\mathbb{h} + 4\pi \mathbb{m}) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d\mathbb{m}}{dt} = -\gamma(\mathbb{M} + \mathbb{m}) \times (\mathbb{H} + \mathbb{h}) \tag{4}$$

が出発点である。なぜなら式(2),(3)は直流磁場$\mathbb{H}$を含まないし、式(4)は空間的な微分操作を含まないからである。式(4)から

$$4\pi \mathbb{m} = \begin{bmatrix} K & j\nu & 0 \\ -j\nu & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\chi]\,\mathbb{h} \tag{5}$$

なる関係が得られるがもちろんここではK, νはy, zの関数である。

$$K = \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad \nu = \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{6}$$

$$\omega_0 = \gamma H, \qquad \omega_m = \gamma 4\pi M \tag{7}$$

次に式(2)によって

$$\mathbb{h} = -\mathrm{grad}\ \psi \tag{8}$$

とおいて式(3)を計算すればψについて次の式が得られる。

$$\nabla^2 \psi + \mathrm{div}([\chi]\,\mathrm{grad}\ \psi) = 0 \tag{9}$$

一方、磁性体の外では$[\chi] = 0$であるからラプラスの方程式

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{10}$$

が成り立つ。これらを満たす解の形を次のように仮定する。

$$\psi_{\mathrm{I}} = A e^{-j\phi(y,z) - f(y,z)x} \qquad ; x \geq a$$

$$\psi_{\mathrm{II}} = (B e^{-\gamma(y,z)x} + C e^{\gamma(y,z)x}) e^{-j\phi(y,z)} ; a \geq x \geq -a$$

$$\psi_{III} = De^{-j\phi(y,z)+f(y,z)x} \quad ; \; x \leq -a \qquad (11)$$

但し $x=\pm a$ は試料の上下面を表わす。この ψ を $x=\pm a$ における磁界の接線成分，磁束密度の法線成分の連続条件に代入し，$\gamma, f, \phi, K, \nu, \psi$ などの微分の大小関係に関する適当な条件を課せば次の方程式が得られる。

$$f^2+(1+K)^2\gamma^2-\nu^2\phi_y^2+2(1+K)f\gamma\coth(2\gamma a)=0 \qquad (12)$$

上に述べた適当な条件とは結局「内部磁場の変化率が十分小さい」ことを意味するものであり，詳細については文献 4) を参照されたい。

式(12)に現われる諸量がもし，y, z の関数でなければ，この式は一様磁場における表面静磁波の分散関係式に他ならないが，ここでは独立変数 y, z に対する従属変数 ϕ の一階非線形偏微分方程式となっている。これによって表面波の場合も，アイコナール方程式は一様媒質中での分散関係式から容易に得られる事がわかった。即ち，分散関係式中の k_y, k_z を $\phi_y(=\partial\phi/\partial y), \phi_z$ で置きかえ，透磁率を y, z の関数と考えれば結果的にアイコナール方程式が得られる事になる。

前節で調べたように内部磁場の y 方向成分 H_y は z 方向成分 H_z に比べて 1/100 以下であるが，H_y の存在も考慮に入れて上と同様に微分方程式を導くと

$$[2(\omega_0^2-\omega^2)+\omega_0\omega_m]f^2+\omega_m(\omega_0+\omega_m)(\phi_y\sin\theta-\phi_z\cos\theta)^2$$
$$+2(\omega_0^2-\omega^2+\omega_0\omega_m)f\gamma\coth 2\gamma a=0 \qquad (13)$$

但し
$$f^2=\phi_y^2+\phi_z^2 \qquad (14)$$
$$\gamma^2=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)(\phi_y^2+\phi_z^2)+\omega_0\omega_m(\phi_y\sin\theta-\phi_z\cos\theta)^2}{\omega_0^2+\omega_0\omega_m-\omega^2} \qquad (15)$$

なお θ は $\mathbb{H}$ と y 軸のなす角でありほぼ $90°$ に近い。今後は念のため H_y を含んだ式(13)の方をアイコナール方程式として採用し計算を進める。

§4. ビーム軌跡とそれに付随する量

偏微分方程式(13)を

$$\Omega(y, z, \phi_y, \phi_z) = 0 \qquad (16)$$

と書くことにしよう。一階の偏微分方程式を解くために次のような「特性方程式」を用いる方法が通常用いられる。

$$\frac{dy}{\frac{\partial\Omega}{\partial\phi_y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\Omega}{\partial\phi_z}} = -\frac{d\phi_y}{\frac{\partial\Omega}{\partial y}} = -\frac{d\phi_z}{\frac{\partial\Omega}{\partial z}} \qquad (17)$$

ここで更に独立変数としてτを導入すれば上式は次のように書き直される。

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{p}} \qquad (18.a)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{r}} \qquad (18.b)$$

但し　$\mathbf{r} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j}$,　$\mathbf{p} = \phi_y\mathbf{j} + \phi_z\mathbf{j}$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}$ は y, z 方向の単位ベクトル

式(18)は波動力学において「正準方程式」と呼ばれる。式(16)において独立変数は y, z, 従属変数は ϕ であったが、式(18)においては独立変数はτで従属変数は y, z, ϕ_y, ϕ_z と変っており、かつ連立常微分方程式になっている。

一方式(16)において $y, z, \phi_y, \phi_z, \omega$ を変数と考え式(16)をそれらで微分すれば

$$d\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{p}}\cdot d\mathbf{p} + \frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial\Omega}{\partial\omega}d\omega = 0 \qquad (19)$$

となる。そこで $\mathbb{v}_g$ の定義と式(19)から

$$\mathbb{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbb{P}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbb{P}} \Big/ \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} \tag{20}$$

が得られる。式(18.a)によれば $d\mathbb{r}$ は $\partial\Omega/\partial\mathbb{P}$ と同方向を向いているから式(20)によって群速度 $\mathbb{v}_g$ の向きと $d\mathbb{r}$ の向きは等しいことになる。即ち $\mathbb{r}$ の軌跡を求めればそれがエネルギービームの軌跡を表わすことがわかる。

実験では図1において z 軸に平行な細線又はストリップ線状アンテナを試料表面の両端に置くという励振・受信の方法がとられる。従って初期条件として $\phi_z = 0$ とする事が許される。その下で式(18)を積分すれば

$$\mathbb{r} = \int_0^\tau \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbb{P}}\, d\tau \tag{21}$$

$$\mathbb{P} = -\int_0^\tau \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbb{r}}\, d\tau \tag{22}$$

となるがこの積分は解析的に行えないので電算機によって逐次積分をしてビーム軌跡を追跡していく

又 アイコナール ϕ は式(18.a)を用いて

$$\phi = \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbb{r} = \int_C \mathbb{P}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^\tau \mathbb{P}\cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbb{P}}\, d\tau \tag{23}$$

によって得られる。ここでは C はビーム軌跡を表わす。式(21)〜(23)で得られた $(y(\tau),\ z(\tau),\ \phi_y(\tau),\ \phi_z(\tau),\ \phi(\tau))$ の組は方程式(16)の「特性帯」とよばれる。又 $(y(\tau),\ z(\tau),\ \phi(\tau))$ は「特性曲線」でありエネルギービーム軌跡はこの特性曲線の yz 平面への射影に他ならない。

最後に試料表面のある点から出発したエネルギービームの群遅延時間は式(18),(20)を用いると

$$T = \int_C \frac{d\mathbb{r}}{|\mathbb{v}_g|} = \int_C \frac{d\mathbb{r}}{|d\mathbb{r}/d\tau| / |\partial\Omega/\partial\omega|} = \int_0^\tau \left|\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}\right| d\tau \tag{24}$$

となるので，これも電算機によって値を知ることができる。

§5. 解の特徴

厚さ10μm，長さ10mm，巾5mmの長方形YIG薄膜について計算した結果を説明する事にしよう。特に断わらぬ限り励振は $y=-5$(mm)の所に置かれた線状アンテナによるものとし，励振周波数は3.6GHz，印加磁場は500Oeとする。

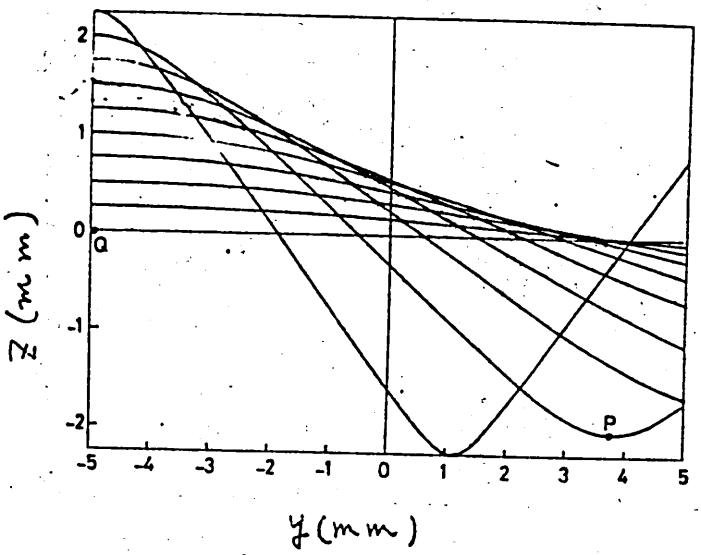


図3 表面静磁波のビーム軌跡
($f=3.6$GHz, $H_e=500$Oe, $4\pi M_s=1750$G, 0.01×10×5mm)

図3はそのようなパラメータについて $z\geq 0$ の領域から出発したビームの軌跡である。$z\leq 0$ から出発したものは内部磁場の対称性によってそれと全く対称な軌跡を描くので省略してある。

(i) H_yの寄与

内部磁場のy方向成分の存在はエネルギービームの運動に大きな影響を与えないだろうと予測はしつつも，アイコナール方程式としてはそれを含んだものを用いる事にしたのは前述の通りである。そこで，ここでは $H_y=0$ とおいて数値計算を行ない H_yの寄与がどの程度あるのか調べてみる事にした。計算の結果はほとんどのビーム軌跡が図3のものと線の太さ以下の差に収まりわずかに最も端に近い $z=2.25$(mm)から出発するビームのみが若干図3に

示したものとは離れて進行する事がわかった。しかしそれとても $y=5$ (mm)の到着点における z座標の値が 0.84(mm)から 0.61(mm)に変るだけの変化であり軌跡そのものとしては殆んど重なっている。従って H_yは無視しても差し支えないと結論できよう。

(ii) 周波数特性

図4は励振周波数を3.8GHzに増加させた場合の軌跡である。図3よりも各ビームが激しく振動しており、この特徴は次のように説明される。式(20)によればビームの進行方向は一定の y, z, ω に対して

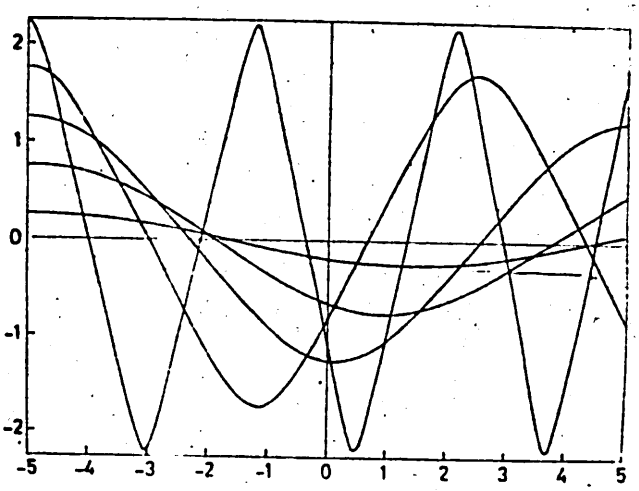


図4. f=3.8GHzにおけるビーム軌跡

$$\Omega(P_y, P_z) = 0 \qquad (25)$$

を満足するような曲線への法線方向に等しい。ところが式(25)は一様媒質での分散関係式 (k_y, k_z, ω 空間での曲面)

$$\Omega(k_y, k_z, \omega) = 0 \qquad (26)$$

を ω=一定の面で切り出したもの(波数ベクトル曲線)に他ならない。従って図5のように波数ベクトル曲線の (k_y, k_z) なる点

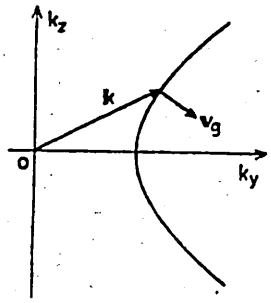


図5. 波数ベクトルと群速度の関係

における曲線への法線の方向がビームの方向であり，空間の各点においてこのような曲線が定義されるから，その点の(ϕ_y, ϕ_z)に応じてビームの方向が決定されることになる。そこで$\omega/2\pi=$ 3.6及び3.8 GHzとして式(26)で表わされる曲線を描けば図6のようになる。これを見れば明らかに3.8 GHzの方がビームのふれる角がより大きくなる事が予測されよう。

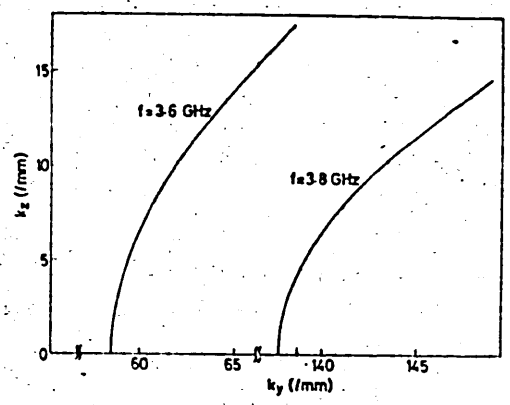


図6. 2つの異なる周波数に対する波数ベクトル曲線 (H_z = 5000e)

(iii) 励振アンテナの位置

励振アンテナを$y=-5$ (mm)から順次内側へ平行移動した場合に軌跡がどのような変化を呈するかを図7に示した。ビーム出発点のz座標は+2.25(mm)のものだけに限ることにしたのは他も全く同様なふるまいを示すからである。これらの軌跡を互いに平行移動して重ねてみると少しずつずれてはいるが，非常によく似ている事に気づく。

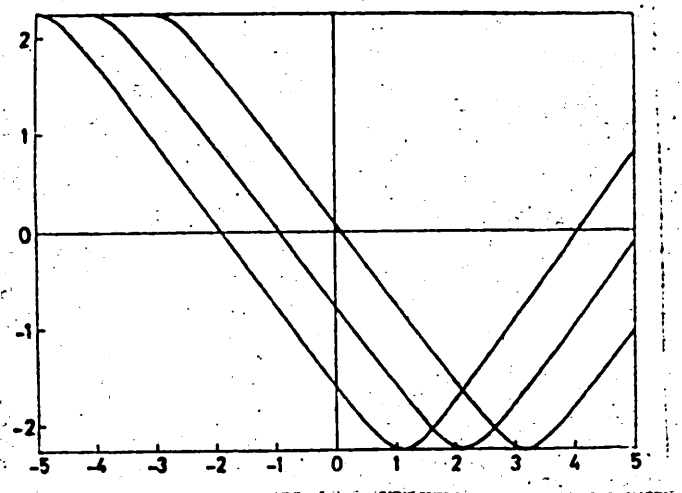


図7. いくつかのy_sに対するビーム軌跡の変化

軌跡は結局内部磁場の変化の仕方によって決定されるので，図2のH_y, H_zの変化を検討すれば良いのであるが，よりわかり易くするために図8にH_{dz}のyz面内における等高線を描いてみた。これは反磁場の等高線であるが，内部磁場は5000eからこれを引きもったものであるから(式(1)参照)形としては

全く同じである。図8を見ると(図1の斜線部以外の)試料全表面にわたって内部磁場は10 Oe以上変わらないことがわかる。ところがH=500及び490 Oeに対する波数ベクトル曲線を描いてみると図9のようになり両者をky方向に平行移動して重ねてみると全く同じといってもよいくらいに一致する。これは要するに式(18.a)の右辺がkz(あるいはφz)のみの関数となって、y, z, φyに関係しない事を意味している。

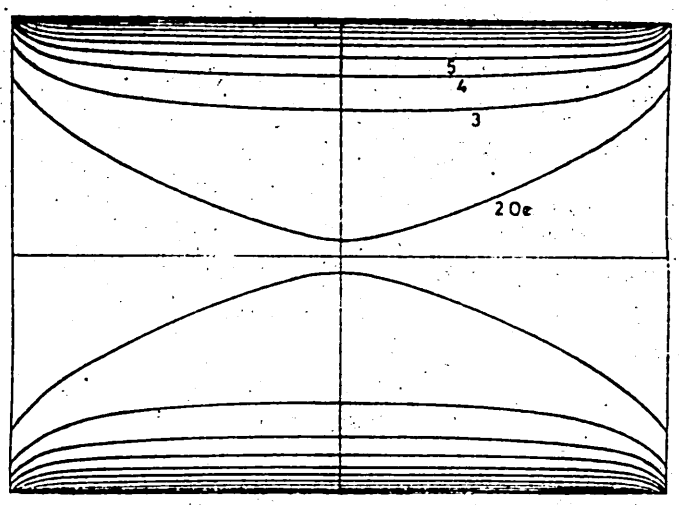


図8、反磁場 H_{dz} の等高線

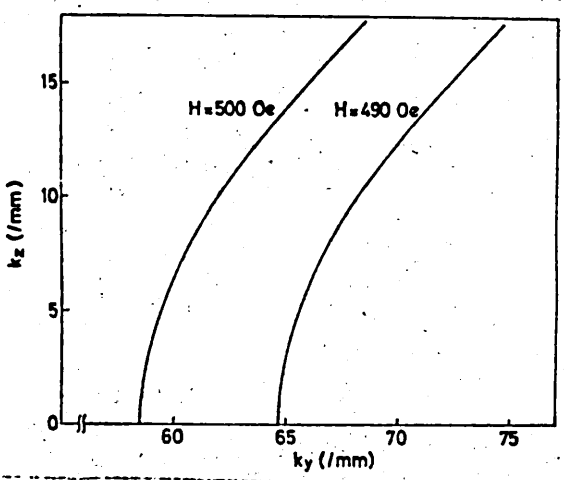


図9. 内部磁場の最大値と最小値に対する波数ベクトル曲線 (f=3.6 GHz)

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial\Omega}{\partial\phi_y} \simeq \xi(\phi_z) \quad (27)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial\Omega}{\partial\phi_z} \simeq \eta(\phi_z) \quad (28)$$

一方式(18.b)によると $\dfrac{d\phi_z}{d\tau} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} \simeq -\dfrac{\partial\Omega}{\partial H_z}\dfrac{\partial H_z}{\partial z}$ (29)

であるから、$\partial\Omega/\partial H_z$ が一定であれば ϕ_z 従って $\vec{k}$ の軌跡が $\partial H_z/\partial z$ だけによって決定される事になる。$\partial\Omega/\partial H_z$ は H_z, ϕ_y, ϕ_z の複雑な関数であって解析的手段によってその大きさを知る事は困難であるが数値計算によれば至る所で正でありその大きさは最大数%しか変化し

ないのでほぼ一定と考えてよい。

このようにして H_z の z 方向への変化 $\partial H_z/\partial z$ がビームの軌跡を決定する重要な量であることがわかった。そこで $\partial H_z/\partial z$ の様子を次に調べてみよう。今度は図2とちがって横軸を y 方向の座標変化にとり、y, z≧0 の領域で $\partial H_z/\partial z$ を描くと図10の如くになる。つまり y=±5(mm) の近傍でだけ他と異なった値をとるほかはほぼ一定と言うことができる。この性質はもちろん H_{dz} の等高線図8からも予想されるところである。

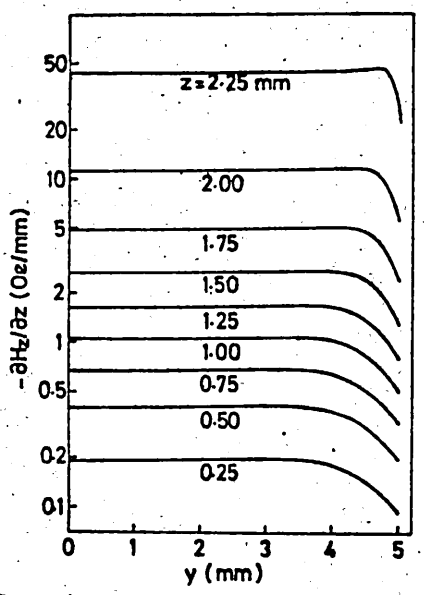


図10 内部磁場 H_z の z 方向への傾き

以上の準備によって図7の性質は次のように説明することができる。y=-5(mm) から出発するビームは式(29)によって ϕ_z を初期値0からどんどん増大させる。その増大の速さは $\partial H_z/\partial z$ の大きさによって決まるから最初は小さいがビームはその間に y 方向に進行し、y≃-5 の領域からぬけ出すので ϕ_z の値そのものは(式(29)の積分値であるから)すぐに y 依存性がなくなってしまう。つまり出発点の y 座標にもかかわらず同じ ϕ_z をもつことになり、そのため同じ軌跡を描くことになる。なお参考のため図7における y_s=-5と-3のビームに沿った ϕ_y と ϕ_z の変化を示したものが図11である。

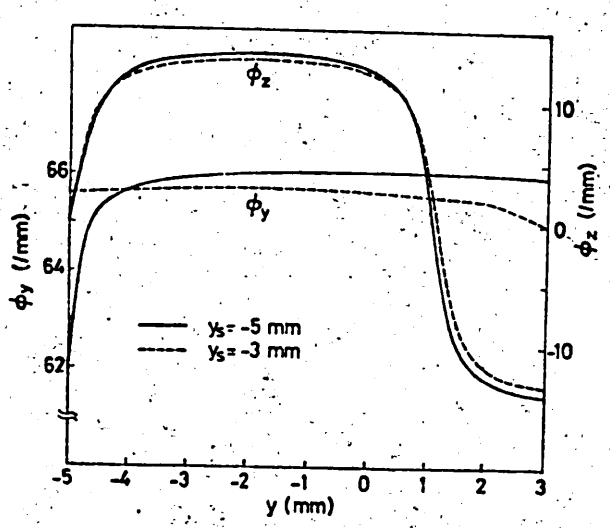


図11. ビームの伝搬経路に沿った ϕ_y と ϕ_z の変化(y_s=-3mm に対する曲線は左へ2mmずらしてある)

$y_s=-3$のビームの諸量は左方に-2だけ平行移動して比較の便宜を計っている。これをみてもϕ_zはよく似た変化をしている事、ϕ_yは全く異なっていることがわかる。又逆にϕ_zがビーム軌跡を決定する様子がよく理解される。

(iv) 励振アンテナの傾き

実験においてアンテナが完全にz軸に平行に設定されるとは限らないのでそのずれの影響について調べてみた(図12)。励振の対称性がくずれる結果ビーム軌跡もy軸について非対称となる。又ϕ_zの初期値はこの場合0ではなくアンテナの傾きに応じた値を持っているのでビームは一定の傾きをもって出発している。

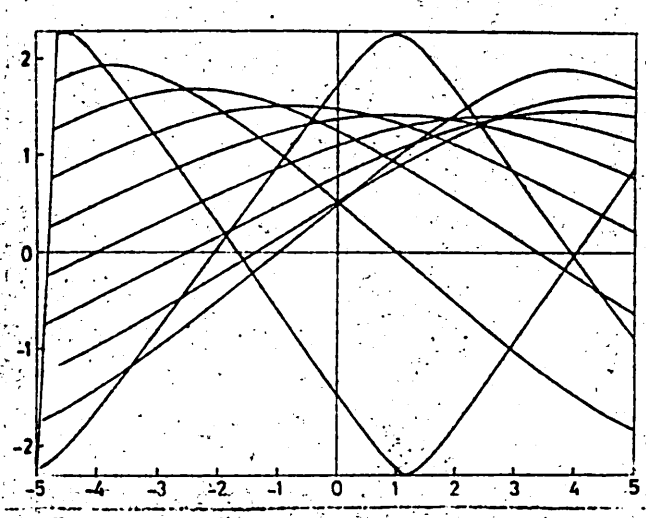


図12 励振アンテナを4°傾けた時のビーム軌跡

(v) 試料の大きさ

ⓐ 厚さ依存性

図3は厚さ10μmに対するものであるが、図13に3μm厚に対する軌跡を描いた。試料が薄いほど内部磁場の変化

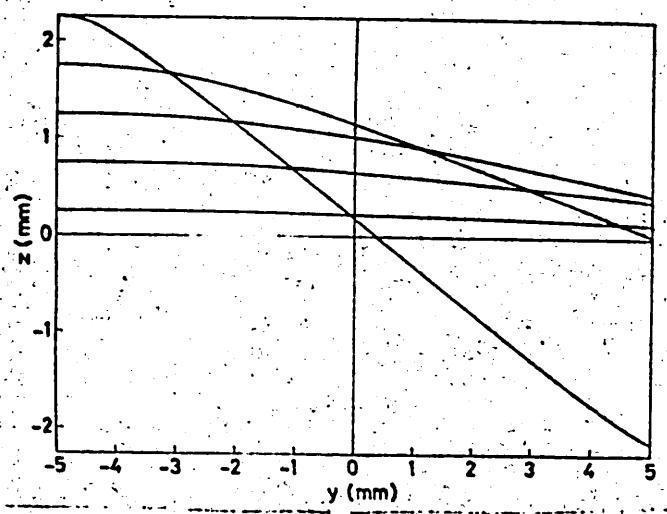


図13 厚さが3μmの試料でのビーム軌跡
(0.003 × 10 × 5 mm)

が緩慢となる事によりビームのふれが少なくなる事は予想されるところである。

ⓑ幅依存性

図14は試料幅を4mmに減らした場合の軌跡である。両端に生じた表面磁荷が接近するため内部磁場変化は激しくなる。そのためビームは大きくふれている。

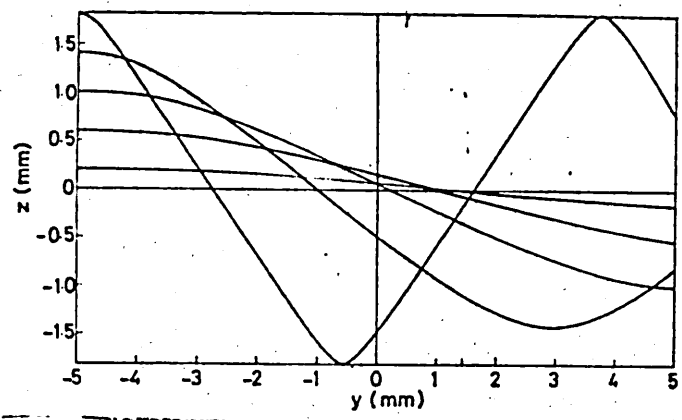


図14 幅が4mmの試料でのビーム軌跡
(0.01 × 10 × 4 mm)

ⓒ長さ依存性

図15は試料長さを5mm, 即ち, 半分にした時の軌跡を示す。この場合は前二者とは異なりビームの形は図3と殆んど変らない。即ち, この図の軌跡は丁度図3の左側半分を切り取って描いたものとなっている。この理由はやはり H_z のふるまいによるものである。H_z の等高線は図8をy方向に半分に縮めたものと大体等しくなり, それは殆んど全域で $\partial H_z/\partial z$ はyに依存せず図8の $y=0$ 付近の値に等しいことを意味するからである。

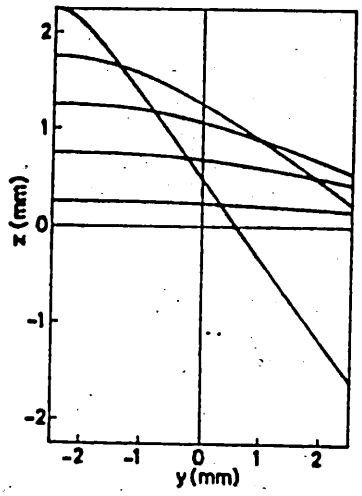


図15. 長さが5mmの試料でのビーム軌跡
(0.01 × 5 × 5 mm)

以上によって, 薄膜試料の大きさを変えることによりビームのふれを制御する事を望む場合, 厚さ又は幅を変える方法が有効である事が明らかになった。

(vi) 一般的な特徴

以上は個々のパラメータを変化させた場合のビーム軌跡の特徴であるが、全体を通じて常に存在する特徴がいくつかあるのでそれらについて説明しておこう。

ⓐ端から出発した($|z|$の大きい)ビームほど急角度にふれる。そして振動周期が短かい。

端ほど$|\partial H_z/\partial z|$が大きい事は図8から明らかである。そして$\partial H_z/\partial z$の符号は$z=0$を境にして変化する。従って式(29)より$|z_s|$が大きいほど$|\phi_z|$が大きい事がわかる。すると図5によってビームはより急角度にふれるであろう事は(ii)と同様直ちにわかる。

ⓑ夫々のビームは出発点のz座標に応じた一定の振幅をもって振動する。

$\partial H_z/\partial z$の値は$z=0$に対して対称であり、$z>0$では$\partial H_z/\partial z<0$、$z<0$では$\partial H_z/\partial z>0$である。それゆえ式(29)及び図5から$z_s>0$のある点から出発したビームは$\phi_z$をどんどん増大させながら$z=0$に向って進行した後$z=0$で$\phi_z$は最大値となり、その後上と全く対称的に$\phi_z$を減少させながら$z<0$の領域を進行する。そして$\partial H_z/\partial z$の$z$軸対称性によって$z>0$の領域における最大の$z$座標と同じ$|z|$の点で$\phi_z=0$となるので図5から明らかな如くそこでビームは再び上方に向かい同じふるまいをくり返すことになる。

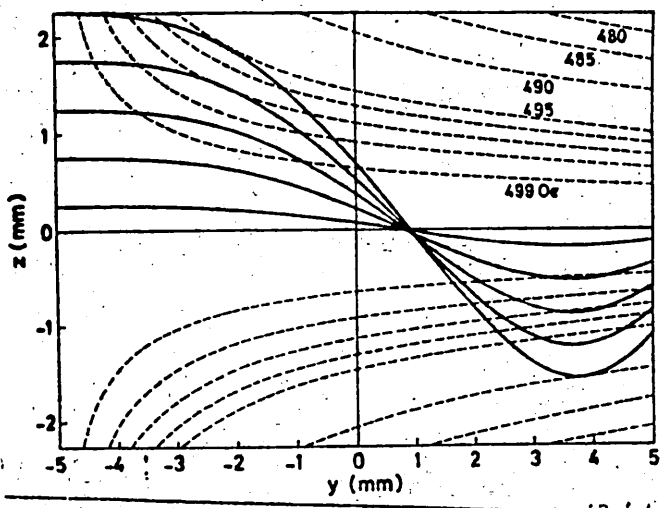


図16 $\partial H_z/\partial z$が長さ方向に変化する仮想的な試料でのビーム軌跡(点線はH_zの等高線)

この性質は$\partial H_z/\partial z$がy依存性をもたない事を条件としてより試みに

$$H_z = 500 - 3\left(\frac{z}{2.5}\right)^2 (5+y) \qquad (30)$$

なる内部磁場分布を仮定してビーム軌跡を求めたところ図16のような結果が得られた。図において実線はH_zの等高線を表わしている。

ⓒビームは転回点を除いては直線的に進行する。

図6に示されているようにϕ_zが大きい所では波数ベクトル曲線は直線的であり，ϕ_zの大小によって曲線への法線の傾きはあまり変化しない。一方ⓑの説明によってϕ_zは$z=0$で最大となり，かつ$z=0$の近傍におけるH_zの変化がゆるやかであることにより$z=0$の上下の広い範囲にわたってϕ_zは一定なのでビームは殆んどの領域で直線的となる。その対応関係は図11のϕ_zの変化と図7のビーム軌跡を見ればよくわかる。

(vii) 空間的遅延ひずみ

出発点のz座標により軌跡が異なる事は，当然ビームによって伝搬時間が異なるという結果をもたらす。上述したいくつかのパラメータの変化に対応してこの空間的遅延ひずみ0は空間的分散とでもいうべき量がどのように変るか調べてみよう。(図17)

図3の結果をもたらす配置即ち0.01×10×5mmの薄膜YIGの端部にアンテナを平行に置いて励振した時は曲線(I)のように出発点のz座標z_sによって各ビームの伝搬時間が異なる。この場合は$|z_s| > 1.7$(mm)から急激に伝搬時間が増大しており，もし図1のようなシールドを$|z|>1.7$に対して

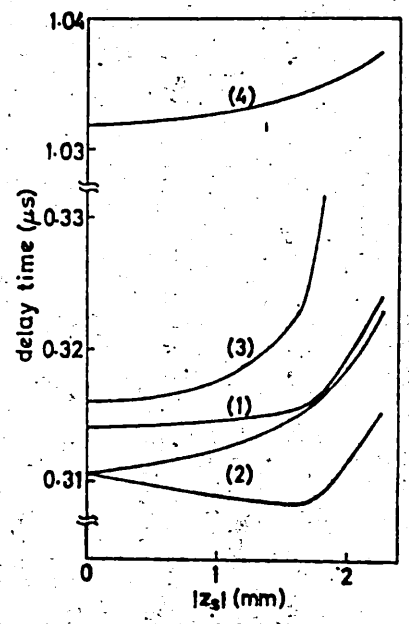


図17. ビームの出発点による伝搬時間の変化
(1) 標準的な配置(図3)
(2) 励振アンテナが傾いた場合(図12)

行なえば伝搬時間の差はほとんど無視し得る量(0.6%以下)となる。

曲線(2)は図12に対応するものであり励振アンテナが4°傾けられた時の結果である。曲線が2本描いてあるのは $z_s<0$ に対する結果を折り返したものを含むからであってこれは(iv)で述べた励振の非対称によっている。この2本の曲線を1本にのばしてみるとあたかも曲線(1)の片方の端をとめておいてそのまま傾けたような形になっているのは面白い。これは図12に示すようにアンテナの配置が丁度そのようになっている事と対応している。この時伝搬時間差は(1)のほぼ1.6倍となり、遅延ひずみは増大するのでアンテナの傾きはできるだけ0にしなければならない。

曲線(3)は図14で示した幅の狭い試料を伝搬するビーム、曲線(4)は厚さを3/10に減らした試料中のビーム(図13)によるものである。伝搬時間はほぼ厚さに反比例するので曲線(4)だけスケールを変えて描いた。この時伝搬時間差の相対値は0.6%以下であって極めて小さい。従って試料を薄くする事は遅延ひずみを減らす点で非常に有効である事がわかる。

§6 むすび

薄膜YIGを伝搬する表面静磁波の伝搬特性をアイコナール方程式を用いて解析した。前報告[4]において不充分であった点、即ちパラメータ変化に対するビームのふるまいの詳細にわたる検討とそれらの定性的説明とに重点を置いて述べた。この二つの報告によって不均一磁場の下における表面静磁波の理論的検討は大体終了したと筆者等は考えるが、残された問題が一つある。それはこのようなビームのふれが現実の実験によってどのような効果をもたらすかという点が必ずしも明らかでないという事である。

一つは前節(vii)で述べたように信号波形の遅延ひずみが生ずるという効果であり、これは実験的にも検証可能であろう。

ただ周波数分散との分離が難かしくはある。次に非線形効果の問題がある。ビームがyz面のどこかに収束するために才差運動が飽和する可能性があるが、それを試料の何らかのパラメータによって定量化する事は困難である。第三に励振、又は受信の効率に対する影響、特に後者が問題である。前者は非一様媒質での励振問題ということでそれ自身難しい問題であるが、ビームのふれと直接の関係はない。受信アンテナの近傍でビームが直角にアンテナに向かわないという事は波数ベクトルの向きもアンテナに直角にではないという事であり、必ず受信効率の低下を招くであろうが、やはりこの問題の解析も相当に困難である。

しかしいずれにせよ通常の応用においては上に述べた効果は避けるべきものであり、本文中で述べたような方法や、薄膜を楕円形に切りぬくことによって内部磁場の非一様性を減らせば、ビームのふれを減少させることができる。本研究はビームのふれの存在を予測しその効果的除去法を提案したという点で応用上の意味をも持つと考える。

文献

1) B. A. Auld : BSTJ 44, PP 495～507 (1965)
2) R. C. Addison, B. A. Auld and J. H. Collins: J. of Appl. Phys. 39, PP 1828～1839 (1968)
3) B. A. Auld and R. C. Addison : IEEE Trans on SU 13 PP 92～96 (1966)
4) 栗井, 池上 : 信学技報 MW 76－81 (1976. 10)

輻射科学研究会資料

圧電効果を含む磁気弾性ラブ波とキャリア波との相互作用

生澤芳昭
張　年錫
松尾幸人

（大阪大学・産業科学研究所）

1977年10月7日

1. まえがき

磁化した磁性体を伝播する磁気波（静磁波，スピン波）は，磁気弾性相互作用により，弾性波と結合し磁気弾性波として伝播することが知られている。[1,2] 弾性定数の異なる磁性体と誘電体とからなる層状媒質における磁気弾性波は，磁気波とラブ波との結合した波動（磁気弾性ラブ波）として伝播することが明らかにされ，層の厚みが薄くなるにしたがって結合が強くなることが示された。[3,4] また，飽和磁化の異なる層状の磁性体媒質を伝播する磁気弾性ラブ波の伝播特性についても議論され，飽和磁化の大きさを変えることによっても結合が強くなることが示された。[5] さらに，半無限の磁性体と半無限の圧電体とからなる構造における磁気弾性波の伝播特性についても議論されている。[6]

一方，圧電体を伝播する弾性波は，圧電結合によりキャリア波と相互作用することが知られている．そして，キャリアのドリフト速度が圧電弾性波の位相速度を超えたときに，圧電弾性波が増幅されることが示された。[7-9]

最近，SHタイプの磁気弾性表面波と半導体中のキャリア波との相互作用による磁気弾性表面波の増幅について議論され，キャリアのドリフト速度が磁気弾性表面波の位相速度を超えたときに，磁気弾性表面波が増幅されることが示された。[10,11] しかし，圧電結合による場合に比べて，その利得はそれほど大きくはない。

本報告では，磁気弾性波と圧電弾性波とを弾性的に結合させ

た磁気弾性ラブ波と半導体中のキャリア波との相互作用について述べる．第2節において，圧電効果を含めた場合の層状媒質における磁気弾性ラブ波の伝播特性について議論する．第3節において，半導体をその層状媒質の上に近づけた場合の磁気弾性ラブ波とキャリア波との相互作用による磁気弾性ラブ波の増幅・減衰特性について，拡散を含めて議論する．

2．圧電効果を含む磁気弾性ラブ波

2.1．分散関係

半無限の磁性体基板（クラス m3m）の表面に金属膜をコーティングし，厚さ d の圧電体（クラス 6mm 及び 4mm）の薄膜を重ねた図1のような層状媒質における表面波の伝播について考える．磁性体の<100>軸を座標軸に，圧電体の c 軸を z 軸と平行に選び，磁場を z 軸方向に印加する．磁性体においては静磁近似を，圧電体においては静電近似を行なう．簡単のために，波

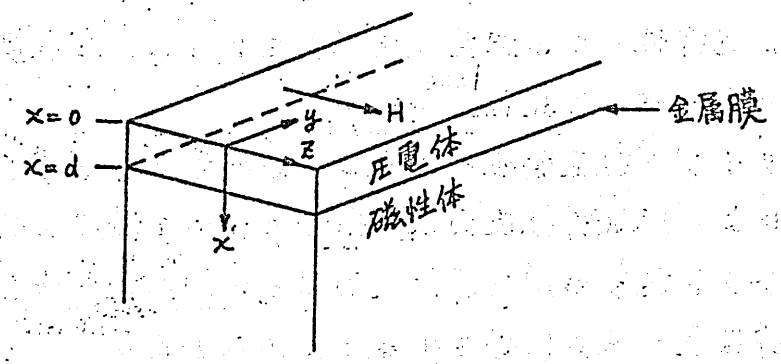


図1．構成及び座標系

動のz方向の変化はないとする（$\partial/\partial z = 0$）．また，スピン波の交換効果及び金属膜の質量効果を無視する．

磁性体における線形運動方程式は，

$$\nabla^2 \psi_s = 4\pi\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right), \tag{1}$$

$$\dot{m}_x = -\gamma\left(H m_y + b\frac{\partial R_s}{\partial y} + M\frac{\partial \psi_s}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$\dot{m}_y = \gamma\left(H m_x + b\frac{\partial R_s}{\partial x} + M\frac{\partial \psi_s}{\partial x}\right), \tag{3}$$

$$\rho_s \ddot{R}_s = \alpha_s \nabla^2 R_s + \frac{b}{M}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right) \tag{4}$$

で与えられ，[4,12] 圧電体における線形運動方程式は，

$$\epsilon_\ell \nabla^2 \phi_\ell = 4\pi e_\ell \nabla^2 R_\ell, \tag{5}$$

$$\rho_\ell \ddot{R}_\ell = \alpha_\ell \nabla^2 R_\ell + e_\ell \nabla^2 \phi_\ell \tag{6}$$

で与えられる．[13,14] ここに，ψは磁気ポテンシャル，ϕは静電ポテンシャル，Hは内部磁場，m_x，m_yは高周波磁化のx，y成分，Mは飽和磁化，Rは変位のz成分，γ（>0）は磁気回転比，b（$=b_2$）は磁気弾性結合定数，ϵ_ℓ（$=\epsilon_{xx}^S$）は誘電率，e_ℓ（$=e_{x5}$）は圧電定数，α（$=C_{44}^{HE}$）は弾性定数，ρは密度，∇^2は二次元ラプラシアン，$\cdot$は時間に関する微分であり，添字s，ℓは基板，薄膜層を示す．

一方，自由空間（$x<0$）においては，

$$\nabla^2 \phi_0 = 0. \tag{7}$$

境界条件は，各境界面での応力テンソル，変位，磁束密度の垂直成分，磁気ポテンシャル，電束密度の垂直成分，静電ポテンシャルの連続である．自由表面（$x=0$）においては，$T_{zx}=0$，及び D_x，ϕ の連続より，

$$\alpha_\ell \frac{\partial R_\ell}{\partial x} + e_\ell \frac{\partial \phi_\ell}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

$$4\pi e_\ell \frac{\partial R_\ell}{\partial x} - \epsilon_\ell \frac{\partial \phi_\ell}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial x}, \tag{9}$$

$$\phi_\ell = \phi_0 \tag{10}$$

となる．また，金属膜境界面（$x=d$）においては，T_{zx}，R の連続，及び $\phi_\ell = B_x = 0$ より，

$$\alpha_\ell \frac{\partial R_\ell}{\partial x} + e_\ell \frac{\partial \phi_\ell}{\partial x} = \alpha_s \frac{\partial R_s}{\partial x} + \frac{b}{M} m_x, \tag{11}$$

$$R_\ell = R_s, \tag{12}$$

$$\phi_\ell = 0, \tag{13}$$

$$-\frac{\partial \psi_s}{\partial x} + 4\pi m_x = 0 \tag{14}$$

となる．

高周波磁化 m_x，m_y 及び変位 R_s，R_ℓ の時間依存性を $e^{i\omega t}$ とすると，式(2)，(3)より，

$$m_x = \frac{i\omega\gamma}{\omega^2-(\gamma H)^2}\left[\frac{\gamma H}{i\omega}\left(b\frac{\partial R_s}{\partial x}+M\frac{\partial \psi_s}{\partial x}\right)+b\frac{\partial R_s}{\partial y}+M\frac{\partial \psi_s}{\partial y}\right], \tag{15}$$

$$m_y = \frac{i\omega\gamma}{\omega^2-(\gamma H)^2}\left[\frac{\gamma H}{i\omega}\left(b\frac{\partial R_s}{\partial y}+M\frac{\partial \psi_s}{\partial y}\right)-b\frac{\partial R_s}{\partial x}-M\frac{\partial \psi_s}{\partial x}\right] \tag{16}$$

と書くことができる。これらを式(1)に代入して，

$$\nabla^2 \Psi_s = 0 \tag{17}$$

を得る。ここに，

$$\Psi_s = \psi_s - \frac{4\pi\gamma^2 bH}{\omega^2-\omega_0^2}R_s, \tag{18}$$

$$\omega_0 = \gamma\left[H(H+4\pi M)\right]^{1/2}. \tag{19}$$

式(15)－(17)を(4)に代入して，

$$-\rho_s\omega^2 R_s = \bar{\alpha}_s \nabla^2 R_s \tag{20}$$

を得る。ここに，

$$\bar{\alpha}_s = \alpha_s\left(1+\frac{\sigma\gamma H}{\omega^2-\omega_0^2}\right), \quad \sigma = \frac{\gamma b^2}{\alpha_s M}. \tag{21}$$

一方，式(5)より，

$$\nabla^2 \Phi_\ell = 0. \tag{22}$$

ここに，

$$\Phi_\ell = \phi_\ell - \frac{4\pi e_\ell}{\epsilon_\ell}R_\ell. \tag{23}$$

また，式(5)，(6)より，

$$-\rho_\ell \omega^2 R_\ell = \bar{\alpha}_\ell \nabla^2 R_\ell \tag{24}$$

を得る．ここに，

$$\bar{\alpha}_\ell = \alpha_\ell (1+\delta), \quad \delta = \frac{4\pi e_\ell^2}{\alpha_\ell \epsilon_\ell} \tag{25}$$

で，$\delta^{1/2}$は電気機械結合定数である．

境界条件(8)－(14)を新しく導入したポテンシャルΨ_s，Φ_ℓで書き換える．式(15)，(16)，(18)，(23)を用いて，境界条件は次のようになる：$x=0$で，

$$\bar{\alpha}_\ell \frac{\partial R_\ell}{\partial x} + e_\ell \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x} = 0, \tag{26}$$

$$\epsilon_\ell \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x} = \frac{\partial \phi_0}{\partial x}, \tag{27}$$

$$\Phi_\ell + \frac{4\pi e_\ell}{\epsilon_\ell} R_\ell = \phi_0 ; \tag{28}$$

$x=d$で，

$$\bar{\alpha}_\ell \frac{\partial R_\ell}{\partial x} + e_\ell \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x} = \bar{\alpha}_s \frac{\partial R_s}{\partial x} + \frac{b}{4\pi M} \frac{\partial \Psi_s}{\partial x}, \tag{29}$$

$$R_\ell = R_s , \tag{12}$$

$$\Phi_\ell + \frac{4\pi e_\ell}{\epsilon_\ell} R_\ell = 0 , \tag{30}$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial x} - \frac{i\omega 4\pi\gamma M}{\omega^2-\omega_0^2} \frac{\partial \Psi_s}{\partial y} - \frac{i\omega 4\pi\gamma b\left[\omega^2-(\gamma H)^2\right]}{(\omega^2-\omega_0^2)^2} \frac{\partial R_s}{\partial y} = 0. \tag{31}$$

波動の伝播方向を±y方向として，式(7)，(17)，(20)，(22)，(24)を

解いて，次の解を得る：自由空間（$x<0$）において，$x\to-\infty$ で $\phi_0\to 0$ を満たす解として，

$$\phi_0 = A e^{kx} e^{\mp iky}; \tag{32}$$

磁性体基板（$x>d$）において，$x\to\infty$ で Ψ_s，$R_s\to 0$ を満たす表面波の解として，

$$\Psi_s = B e^{-kx} e^{\mp iky}, \tag{33}$$

$$R_s = C e^{-\eta_s x} e^{\mp iky}, \tag{34}$$

ここに，

$$\eta_s = \left(k^2 - \frac{\alpha_s}{\bar{\alpha}_s}\frac{\omega^2}{v_s^2}\right)^{1/2}, \quad v_s = \left(\frac{\alpha_s}{\rho_s}\right)^{1/2}; \tag{35}$$

圧電体薄膜（$0<x<d$）において，

$$\Phi_\ell = (D_1 e^{kx} + D_2 e^{-kx}) e^{\mp iky}, \tag{36}$$

$$R_\ell = (E_1 e^{i\eta_\ell x} + E_2 e^{-i\eta_\ell x}) e^{\mp iky}, \tag{37}$$

ここに，

$$\eta_\ell = \left(\frac{\alpha_\ell}{\bar{\alpha}_\ell}\frac{\omega^2}{v_\ell^2} - k^2\right)^{1/2}, \quad v_\ell = \left(\frac{\alpha_\ell}{\rho_\ell}\right)^{1/2}. \tag{38}$$

ここで，$e^{i\omega t}$ は省略した．また，A，B，…は任意定数である．

式(32)－(34)，(36)，(37)を境界条件(12)，(26)－(31)に代入して，任意定数を消去して，

$$\bar{\alpha}_s \eta_s - \bar{\alpha}_\ell \eta_\ell \tan \eta_\ell d \mp \frac{\sigma \alpha_s k}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{\omega(\omega \pm \gamma H)}{\omega \pm \gamma(H + 4\pi M)}$$

$$- \frac{\delta \alpha_\ell k}{\epsilon_\ell + \tanh kd} \left\{ \frac{\tan \eta_\ell d}{\bar{\alpha}_\ell \eta_\ell} \left[\alpha_s \eta_s \mp \frac{\sigma \alpha_s k}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{\omega(\omega \pm \gamma H)}{\omega \pm \gamma(H + 4\pi M)} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \delta \alpha_\ell k \tanh kd \right] + 2 + \epsilon_\ell \tanh kd - \frac{2}{\cos \eta_\ell d \cosh kd} \right\} = 0 \qquad (39)$$

を得る．これが求める分散関係である：上側の符号は波動の$+y$方向伝播を，下側の符号は波動の$-y$方向伝播を示す．

圧電効果を含めた磁気弾性ラブ波の分散関係(39)は，磁気弾性結合定数$b = 0$及び圧電定数$e_\ell = 0$とおくことによって，結合がない場合の分散関係になる．これは，式(39)の分散関係を議論する上で重要である．そして，$b = e_\ell = 0$に対して，式(39)は次のようになる：

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 0, \qquad (40)$$

$$\alpha_s \eta_s - \alpha_\ell \eta_\ell \tan \eta_\ell d = 0, \qquad (41)$$

$$\omega \pm \gamma(H + 4\pi M) = 0. \qquad (42)$$

式(40)は$\theta_k = \pi/2$の体積モードの静磁波の分散関係であり，[15] 式(41)はラブ波の分散関係である．[16] 式(42)はF－Mモードの静磁表面波の分散関係であり，[17] 図1の場合には，$-y$方向伝播に対してのみ存在する．

また，$b \neq 0$，$e_\ell = 0$に対して，式(39)は，

$$\bar{\alpha}_s \eta_s - \alpha_\ell \eta_\ell \tan \eta_\ell d \mp \frac{\sigma \alpha_s k}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{\omega(\omega \pm \gamma H)}{\omega \pm \gamma(H + 4\pi M)} = 0 \qquad (43)$$

となり，これは図1の磁性体基板の上に重ねられた薄膜が非圧電性の誘電体である場合の磁気弾性ラブ波の分散関係である。[4]

2.2. 数値計算結果と検討

式(39)を数値計算した結果を図2及び図3に示す。基板としてはGa-YIGを，層としてはZnO或いはPZT-2を考えた。基板のGa-YIGの各定数としては，Gaを含まない純粋なYIGにおける定数[2,18] $\alpha_s = 7.66 \times 10^{11}$ dyn/cm^2, $\rho_s = 5.17$ g/cm^3, $b^2/M = 3.49 \times 10^{11}$ erg^2/cm^6·Oe を採用し，飽和磁化は $4\pi M = 300$ G，内部磁場は $H = 50$ Oe とした。また，層のZnO及びPZT-2の各定数は次の値を採用し，[18] 厚さを1μとした：ZnOに対して，$\alpha_\ell = 4.25 \times 10^{11}$ dyn/cm^2, $\rho_\ell = 5.68$ g/cm^3, $e_\ell = -1.44 \times 10^5$ statcoul./cm^2, $\epsilon_\ell = 8.55$；PZT-2に対して，$\alpha_\ell = 2.22 \times 10^{11}$ dyn/cm^2, $\rho_\ell = 7.60$ g/cm^3, $e_\ell = 2.94 \times 10^6$ statcoul./cm^2, $\epsilon_\ell = 504$.

図2及び図3において，+y方向伝播に対しては，F-Mモードの静磁表面波は存在しない。したがって，磁気弾性結合は $\theta_k = \pi/2$ の体積モードの静磁波とラブ波との結合する領域 $\omega \sim \omega_0$ でのみ生じることになる。しかし，−y方向伝播に対しては，F-Mモードの静磁表面波及び体積モードの静磁波とラブ波とが結合し，それぞれの領域 $\omega \sim \gamma(H+4\pi M)$ 及び $\omega \sim \omega_0$ で磁気弾性結合が生じることになる。また，図からわかるように，非圧電性の層の場合に比べて，圧電性の層からなる層状媒質を伝播

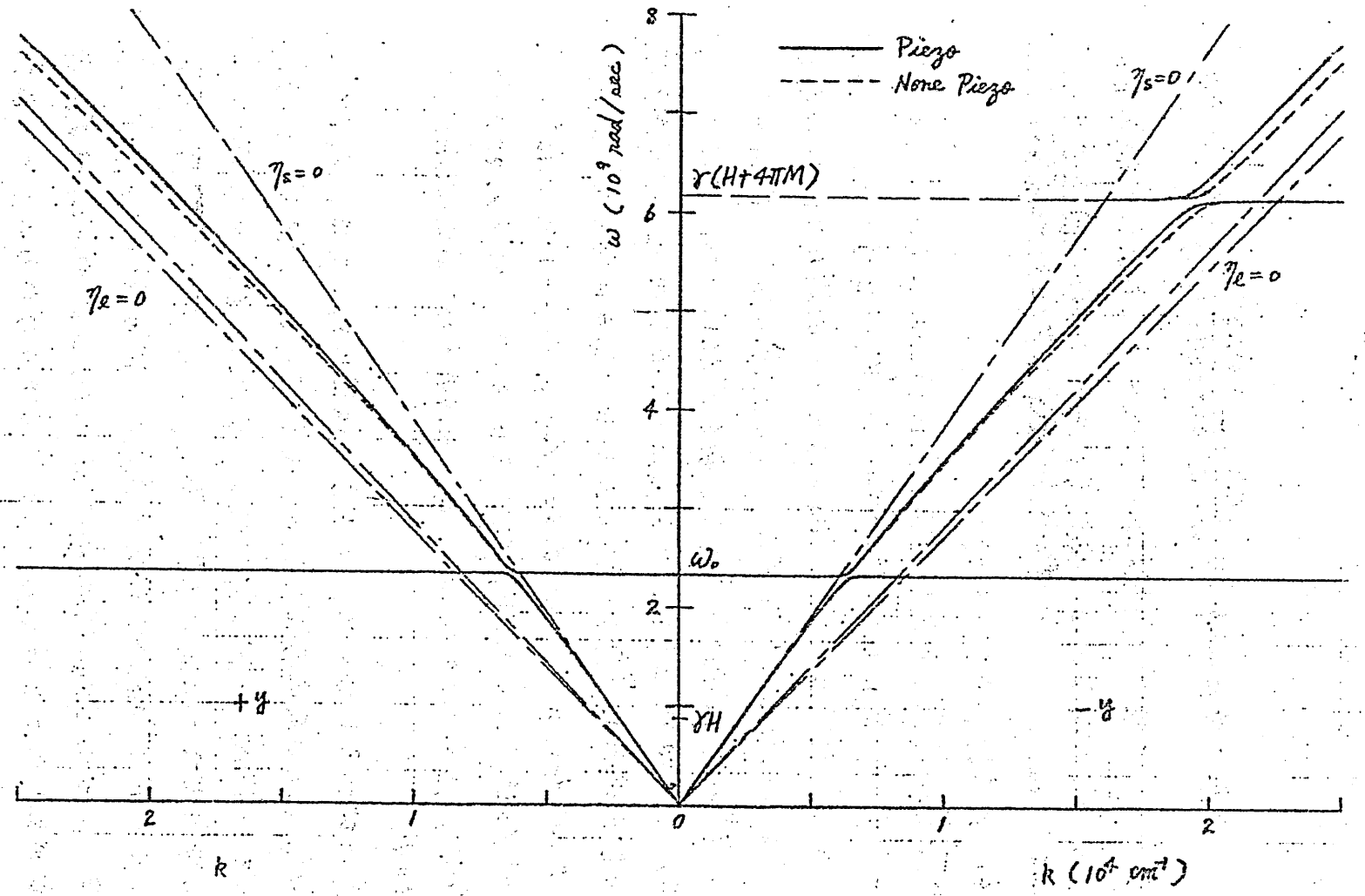


図2. 1μ-ZnO-Ga-YIG における磁気弾性ラブ波

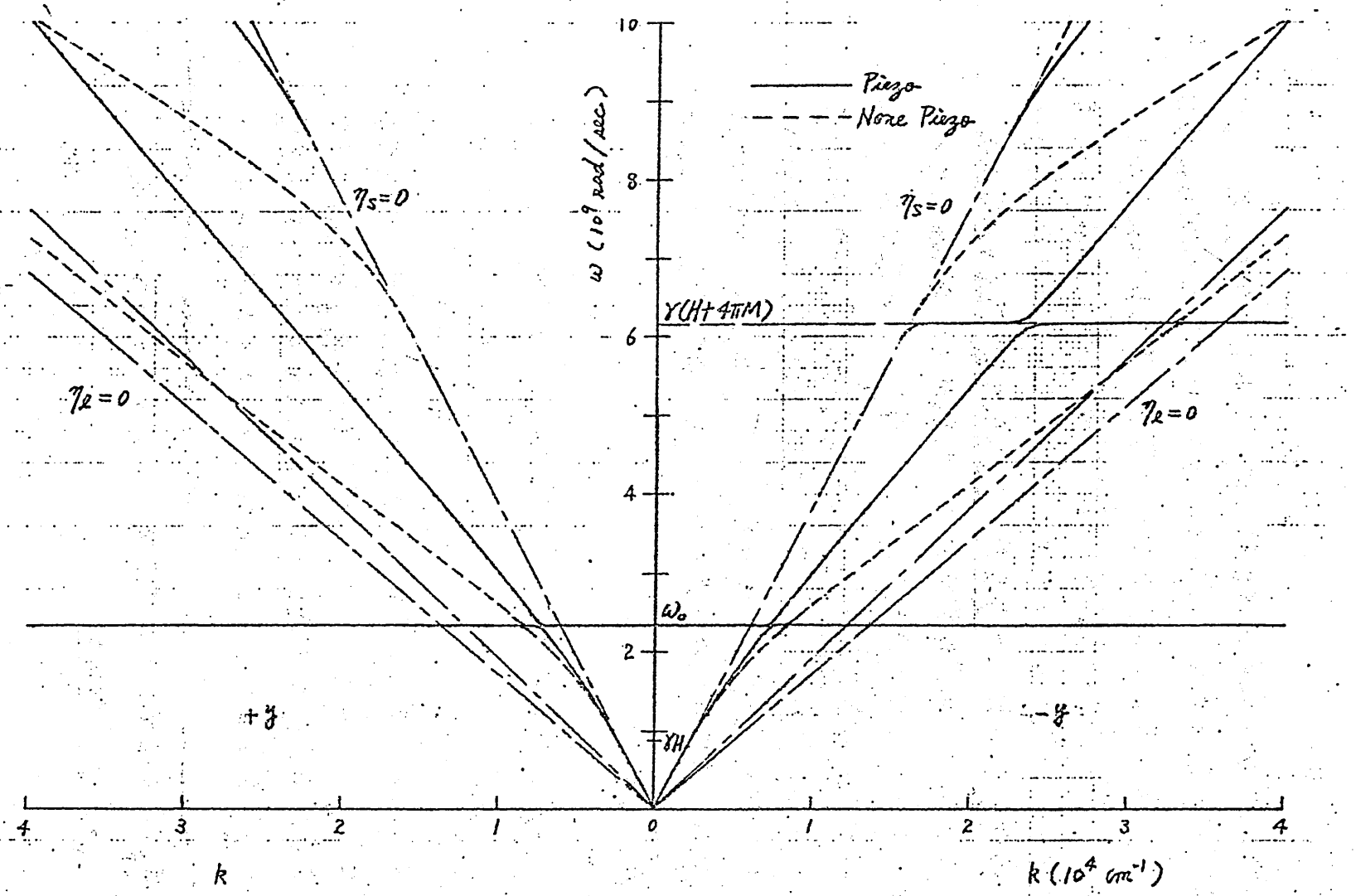


図3. 1μ-PZT = Ga-YIG における磁気弾性ラブ波

する磁気弾性ラブ波の方が波数kが少し小さくなる．特に，電気機械結合定数の大きなPZT-2の場合には，それが顕著に現われている．そして，また，圧電性の層を伝播する磁気弾性ラブ波の方が，非圧電性の層を伝播する場合よりも，結合による分割現象が大きくなっていることがわかる．これは，式(25)よりわかるように，圧電効果により層の弾性定数が$(1+\delta)$倍大きくなり，層を伝播する弾性横波の伝播速度が$(1+\delta)^{1/2}$倍大きくなることが最大の要因と考えられる．しかし，層の厚みが薄くなれば，ラブ波の分散曲線が$\eta_2=0$に近づくため，この効果はあまり大きくならないが，層の厚みが厚くラブ波の分散曲線が$\eta_2=0$に近づく場合には，この効果が顕著となる．いずれにしても，層が圧電性の場合の方が結合による分割現象が大きくなることがわかる．

3．圧電効果を含む磁気弾性ラブ波とキャリア波との相互作用

3.1．分散関係

磁性体基板及び圧電体層における線形運動方程式は前節で与えた．そして，それらからなる層状媒質を伝播する波動が圧電効果を含む磁気弾性ラブ波となることを示した．その層状媒質の上に半導体を高さhまで近づけた図4のような場合について考える．

半導体が等方性であるとすると，ポアッソンの方程式は，

$$\nabla^2 \phi_1 = -\frac{4\pi n_1 e}{\epsilon_h} \tag{44}$$

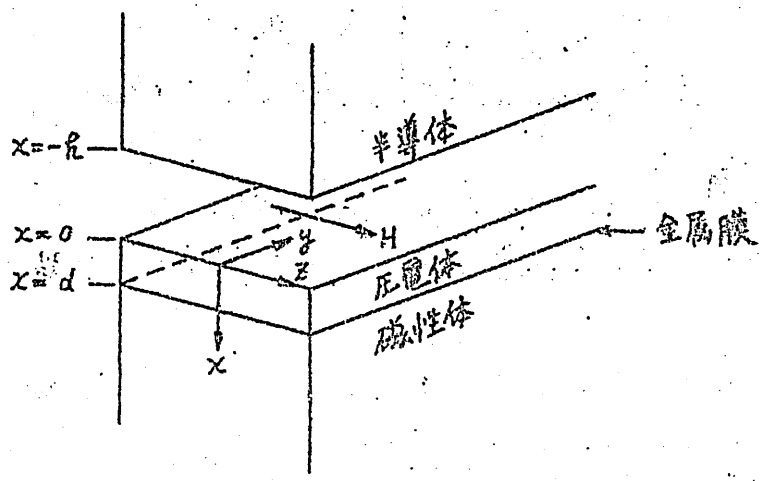


図4．構成及び座標系

となる．ここに，ϕ_1は静電ポテンシャル，n_1は電子密度の交流成分，eはキャリアの電荷，ϵ_hは半導体の誘電率である．また，半導体中での電流連続の式は，

$$\nabla \cdot \mathbb{J}_1 = -e\dot{n}_1 \tag{45}$$

である．ここに，$\mathbb{J}_1$は電流密度である．

一方，キャリアの生成，再結合，トラップなどの影響を無視すると，電流密度に対する線形状態方程式は，

$$\mathbb{J}_1 = -\sigma \cdot \nabla\phi_1 + n_1 e\mu \mathbb{E} - e\mathbb{D} \cdot \nabla n_1 \tag{46}$$

と表わすことができる．[8] ここに，σは伝導度テンソル，$\mathbb{D}$は拡

散テンソルであり，移動度テンソルμを用いて表わすと，

$$\sigma = ne\mu, \quad D = \frac{D_0}{\mu_0}\mu, \tag{47}$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{1+(\mu_0 H/c)^2}\begin{pmatrix} 1 & \mu_0 H/c & 0 \\ -\mu_0 H/c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+(\mu_0 H/c)^2 \end{pmatrix} \tag{48}$$

となる．[19] ここに，μ_0，D_0は磁場Hがないときの移動度，拡散定数であり，cは光速度である．また，nは伝導帯の電子濃度である．

波動のz方向の変化がないとし，前節の磁気弾性ラブ波の伝播方向とキャリアのドリフト方向が同方向になるように電場を$E = \pm E\hat{y}$とする．ϕ_1の時間依存性を$e^{i\omega t}$とすると，式(44)－(48)より，

$$\left[\frac{\mu_0}{1+(\mu_0 H/c)^2} \pm \frac{\epsilon_k \mu E}{4\pi n e}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\epsilon_k}{4\pi n e}\frac{D_0}{1+(\mu_0 H/c)^2}\nabla^2 + \frac{i\omega\epsilon_k}{4\pi n e}\right] \times \nabla^2\phi_1 = 0 \tag{49}$$

を得る．ここに，∇^2は二次元ラプラシアンである．これを波動の$\pm y$方向伝播について解いて，半導体（$x<-h$）において，$x\to-\infty$で$\phi_1\to 0$を満たす解として，

$$\phi_1 = (F_1 e^{kx} + F_2 e^{\zeta x})e^{\mp iky} \tag{50}$$

を得る．ここに，F_1，F_2は任意定数，

$$\zeta = \left\{k^2 + \frac{1}{D}\left[\omega_c + i(\omega - v_d k)\right]\right\}^{1/2} \tag{51}$$

であり，v_dはキャリアのドリフト速度，ω_cは磁界中での誘電緩和周波数である．

$$\omega_c = \frac{4\pi n e \mu_0/\epsilon_R}{1+(\mu_0 H/c)^2}\ ;\quad \sigma = \frac{D_0}{1+(\mu_0 H/c)^2}\ ,\quad v_d = \mu E. \tag{52}$$

一方，自由空間（$-h<x<0$）においては，式(7)を解いて，

$$\phi_0 = \left(A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}\right) e^{\mp iky} \tag{53}$$

を得る．ここに，A_1，A_2は任意定数である．また，磁性体基板及び圧電体薄膜に対しては，解は式(17)，(20)，(22)，(24)を解いた式(33)，(34)，(36)，(37)となる。

境界条件は，前節の$x=0$，dの境界条件(12)，(26)-(31)と，$x=-h$の半導体表面における電束密度の垂直成分，静電ポテンシャル，電流密度の垂直成分の連続である：$x=-h$において，D_x，ϕの連続と$J_{1x}=0$より，

$$-\epsilon_R \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\ , \tag{54}$$

$$\phi_1 = \phi_0\ , \tag{55}$$

$$\mu_0\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\mu_0 H}{c}\frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right) - \frac{\epsilon_R D_0}{4\pi n e}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mu_0 H}{c}\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2 \phi_1 = 0. \tag{56}$$

式(33)，(34)，(36)，(37)，(50)，(53)を境界条件(12)，(26)-(31)，(54)-(56)に代入して，任意定数を消去して，次のような分散関係を得る：

$$\bar{\alpha}_s \eta_s - \bar{\alpha}_l \eta_l \tan \eta_l d \mp \frac{6\pi N_s k}{\omega^2 - \omega_0^2}\,\frac{\omega(\omega \pm \gamma H)}{\omega \pm \gamma(H+4\pi M)}$$

$$-\frac{\delta\alpha_\ell k}{\epsilon_\ell\theta+\tanh kd}\left\{\frac{\tan\eta_\ell d}{\bar{\alpha}_\ell\eta_\ell}\left[\bar{\alpha}_s\eta_s\mp\frac{\sigma\alpha_s k}{\omega^2-\omega_0^2}\frac{\omega(\omega\pm\gamma H)}{\omega\pm\gamma(H+4\pi M)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\delta\alpha_\ell k\tanh kd\right]+2+\epsilon_\ell\theta\tanh kd-\frac{2}{\cos\eta_\ell d\cosh kd}\right\}=0. \quad (57)$$

ここに，

$$\theta=\frac{\tanh kh+\xi}{1+\xi\tanh kh}, \quad (58)$$

$$\xi=\frac{(1\mp i\xi_1)k+i\xi_2(\zeta\mp i\xi_1 k)}{\epsilon_h[(1\mp i\xi_1)\zeta+i\xi_2(\zeta\mp i\xi_1 k)]} \quad (59)$$

$$\xi_1=\frac{\mu_0 H}{c}, \quad \xi_2=\frac{\omega-v_d k}{\omega_c}. \quad (60)$$

式(57)の上側の符号は波動の＋y方向伝播を，下側の符号は波動－y方向伝播を示す．また，この分散関係は，$h\to\infty$に対して$\theta\to 1$となり，半導体がない場合の圧電効果を含む磁気弾性ラブ波の分散関係(39)に等しくなる．

3.2．数値計算結果と検討

式(57)を数値計算した結果を図5－10に示す．基板としてはGa-YIGを，層としては厚さ1μのZnOを考え，半導体としてはGeを考えた．基板及び層の各定数は第2.2節で示した値を採用し，半導体はn型とし，$\mu_0=-4000\ cm^2/V\,sec$，$\epsilon_\ell=15.8$を用い，拡散定数はアインシュタインの関係式より室温に対して求めた．

図5及び図6は，電子のドリフト速度$v_d=3.2\times10^5\ cm/sec$の場合のキャリア波と相互作用をした磁気弾性ラブ波の分散曲

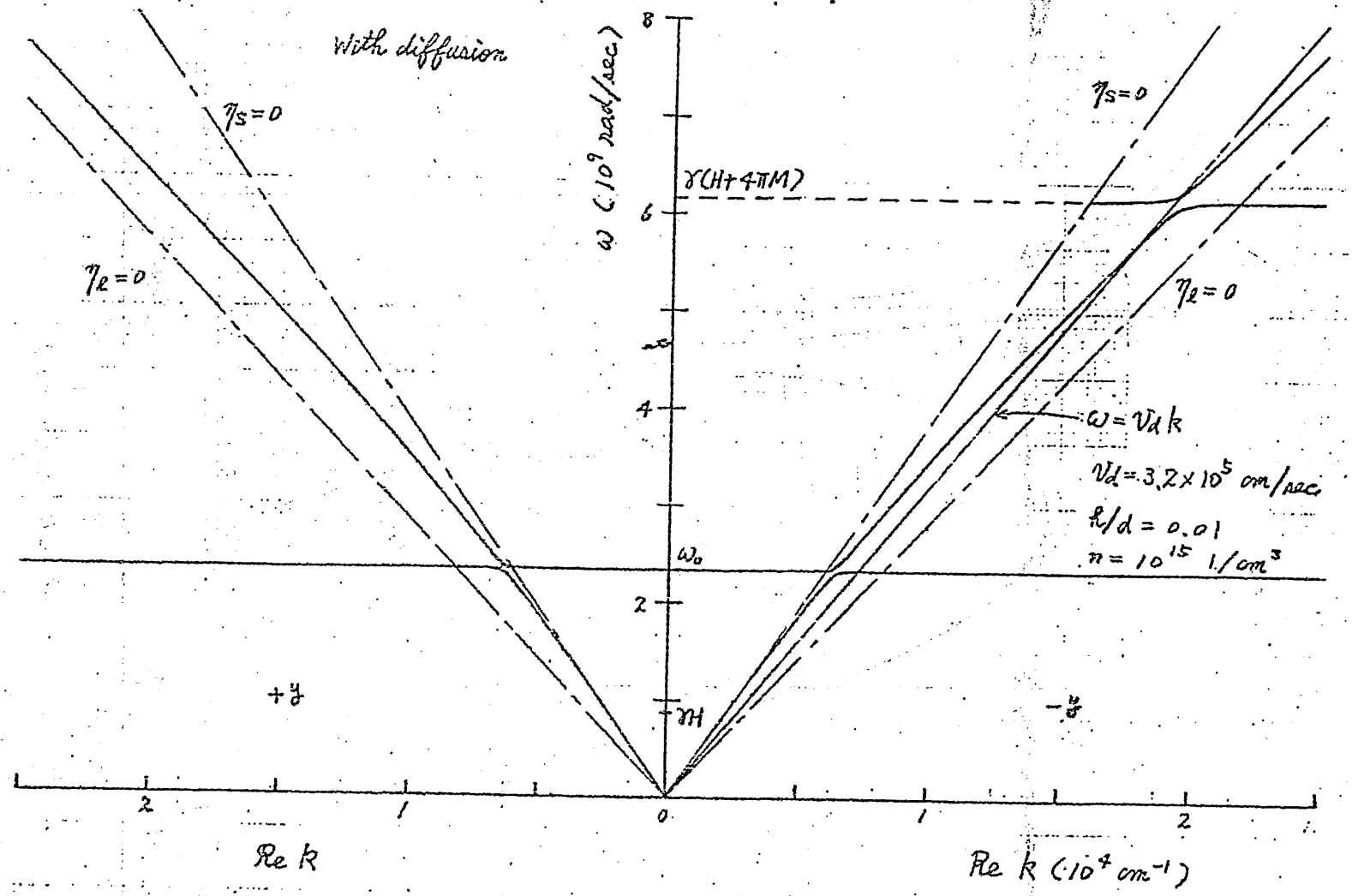


図5. μ-ZnO:Ga-YIG におけるキャリア波と相互作用した場合の磁気弾性ラブ波の分散曲線

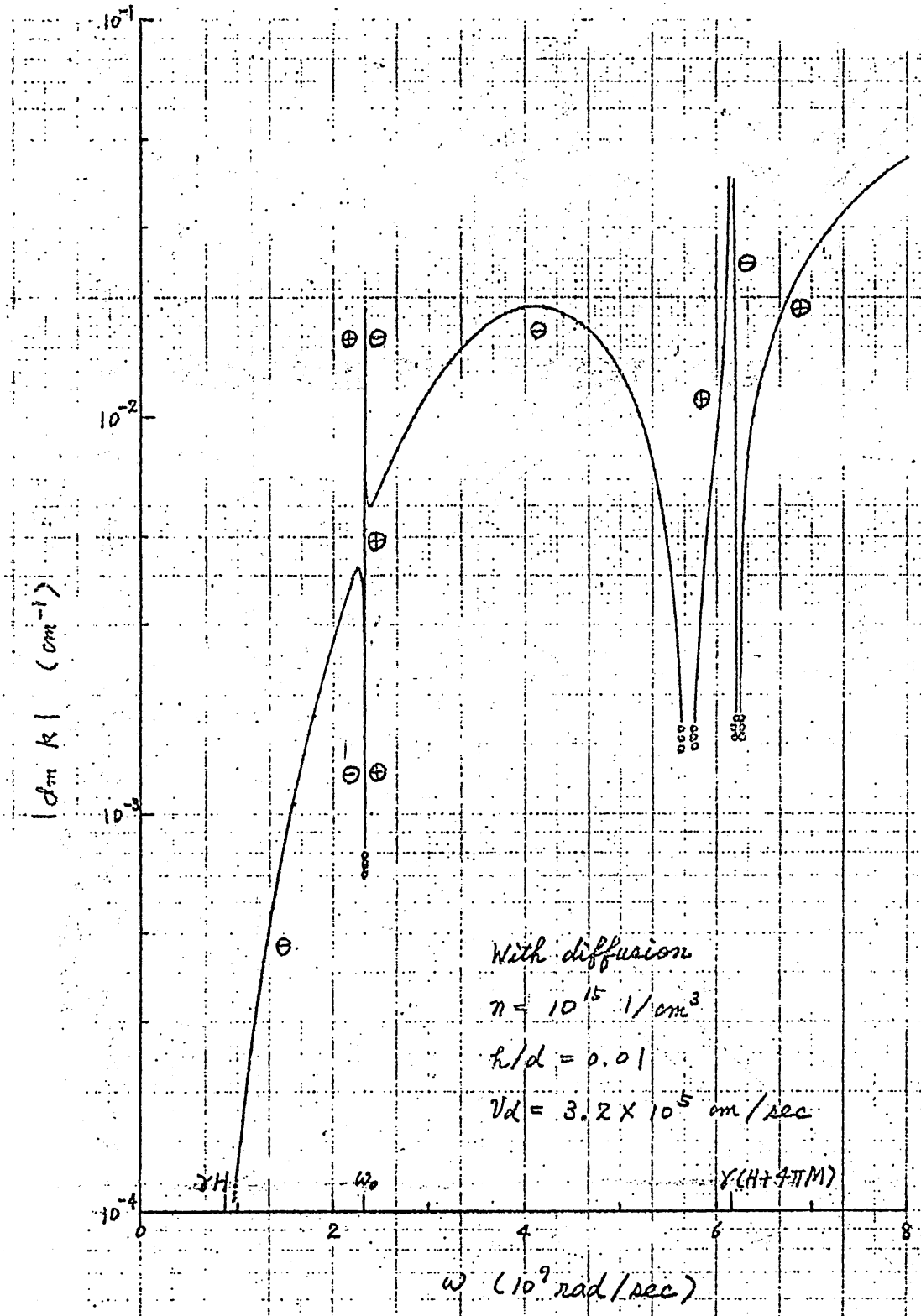


図6. ω－dm k 曲線（－y方向伝播）

線と波数の虚部の周波数に対する変化を示す．波数の実部に対する分散曲線は半導体がない場合の分散曲線とほとんど変わらない．しかし，半導体を近づけた場合には，磁気弾性ラブ波の波数が複素数となり，波数に虚部が現われる．図5と比較して図6の波数の虚部の符号の変化を見ると，磁気弾性ラブ波の位相速度が電子のドリフト速度よりも大きいときには波数の虚部の符号は負であるが，逆の場合には波数の虚部の符号が正となることがわかる．波数の虚部が負であるとき磁気弾性ラブ波が減衰する．そして，波数の虚部が正であるとき，磁気弾性ラブ波が増幅される．したがって，電子のドリフト速度が磁気弾性ラブ波の位相速度を超えたときに，磁気弾性ラブ波が増幅されることがわかる．そして，その増幅度は，

$$GAIN = 20 \log_{10} \exp(\mathrm{Im}\, k) \quad (dB/cm) \qquad (61)$$

で与えられる．次に，この増幅度について議論する．

図7は，空隙の大きさ h をパラメータとして，電子のドリフト速度に対する磁気弾性ラブ波の増幅・減衰特性を示す．拡散がある場合もない場合をともに，電子のドリフト速度が磁気弾性ラブ波の位相速度を超えたときに磁気弾性ラブ波が増幅されることがわかる．$\omega_c/\omega = 74$ のときには，増幅度は電子のドリフト速度に比例して増加することがわかる．また，空隙を小さくするほど増幅度は大きくなるが，増幅度を議論する上で，拡散の有無が重要なことを示している．

図8(a)，(b)に，誘電緩和周波数 ω_c をパラメータとして，電子のドリフト速度に対する磁気弾性ラブ波の増幅・減衰特性を示

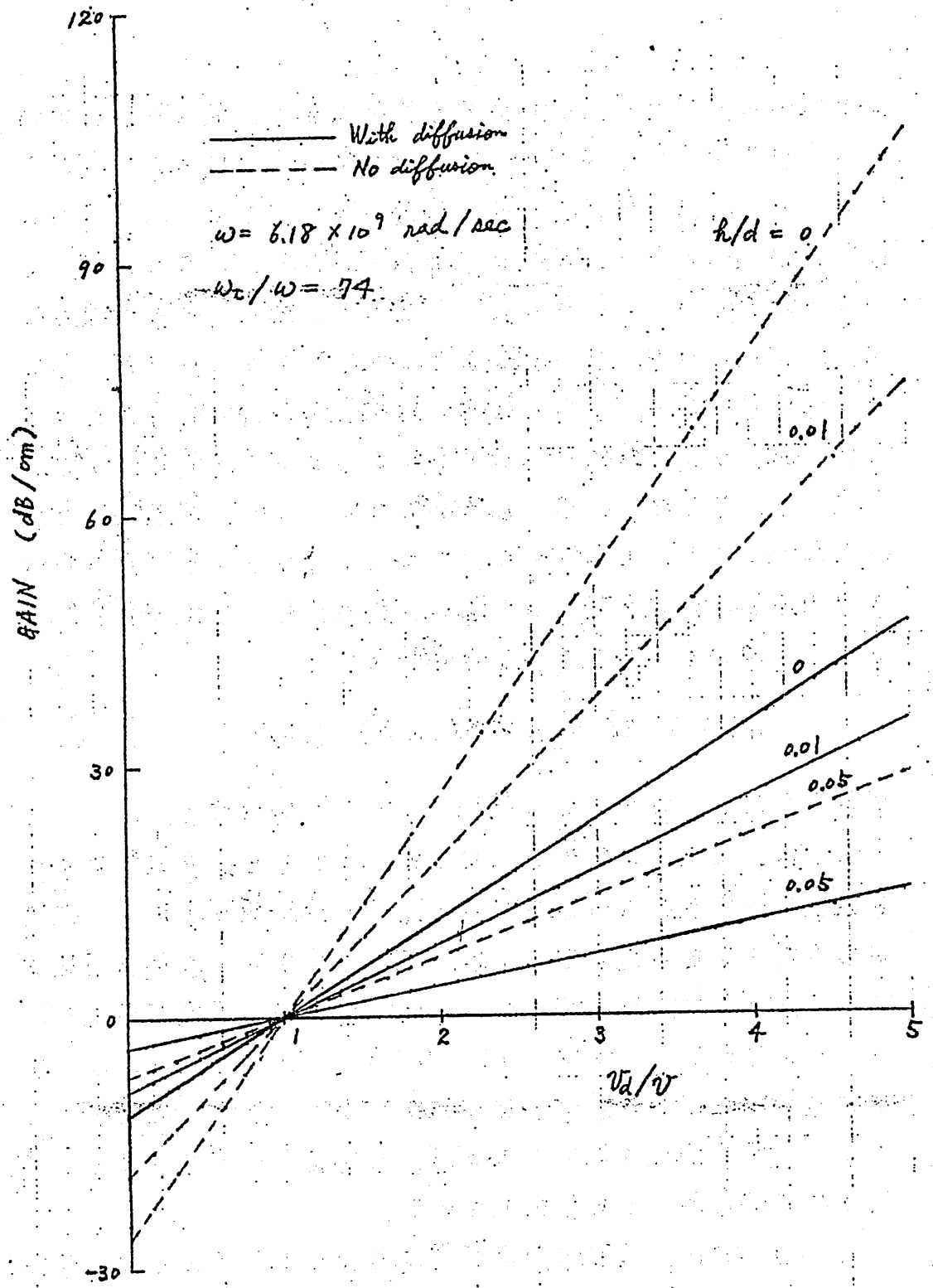


図7. v_d - GAIN 特性(-y方向伝播)

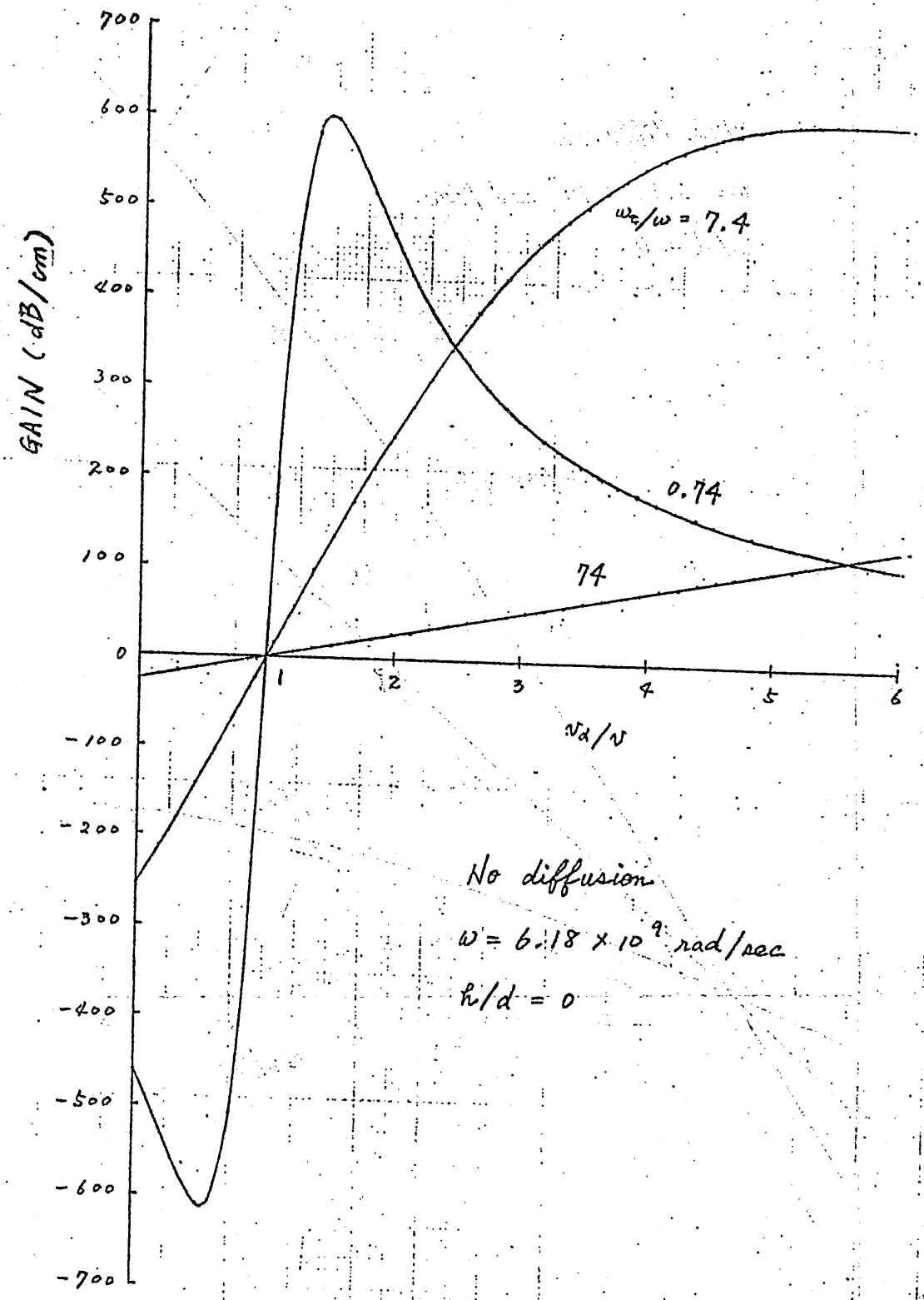


図 8(a). v_d - GAIN 特性 (−y方向伝播)

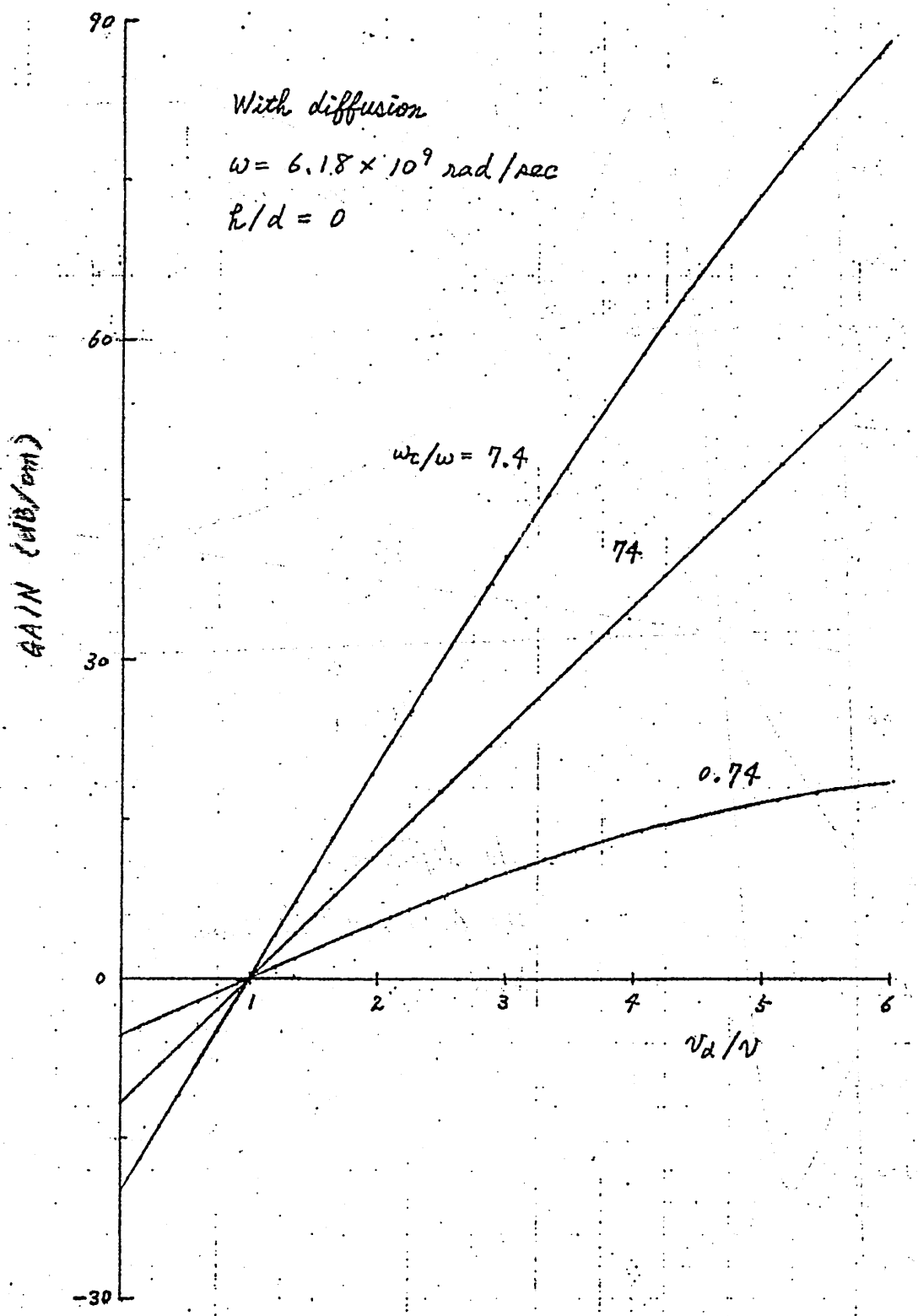


図 8 (b). v_d - GAIN 特性 (-y方向伝播)

す．拡散がある場合もない場合もともに，磁気弾性ラブ波の増幅度は ω_c/ω があまり小さくないときには電子のドリフト速度の増加とともに大きくなることがわかる．しかし，拡散がない場合，ω_c/ω があまり小さすぎると，電子のドリフト速度を増加しすぎると逆に磁気弾性ラブ波の増幅度が減少する．これについては後で述べる．また，$\omega_c \gg \omega$ の場合にも，磁気弾性ラブ波の増幅度は大きくならない．これは，ω_c が非常に大きく $\omega_c \gg \omega$ となる場合には，緩和時間が小さく，半導体中に生じた空間電荷が緩和時間内に消滅してしまうために，磁気弾性ラブ波によって生じた電場が伝導電子によってほとんどスクリーニングされることに対応していると考えられる．[7] したがって，電子濃度を大きくしても最大の増幅度を得ることができないと考えられる．

そこで，ω_c の最適値を検討するために，空隙及び電子のドリフト速度をパラメータとして，誘電緩和周波数 ω_c に対する磁気弾性ラブ波の増幅特性を図9及び図10に示す．空隙を大きくしてゆくにしたがって，拡散がある場合もない場合も，磁気弾性ラブ波の最大の増幅度が得られる ω_c の値が小さくなってゆくことが，図9からわかる．そして，空隙が小さい程，拡散の影響が大きくなることを示している．また，図10からわかるように，拡散がある場合は電子のドリフト速度を変化させても最大の増幅度を与える ω_c の値はほとんど変化していないが，拡散がない場合には，電子のドリフト速度の変化にともなって最大の増幅度を与える ω_c の値が変化する．これは，図8(a)で，$\omega_c/\omega=0.74$ の場合に電子のドリフト速度を増加してゆくにしたがって，磁

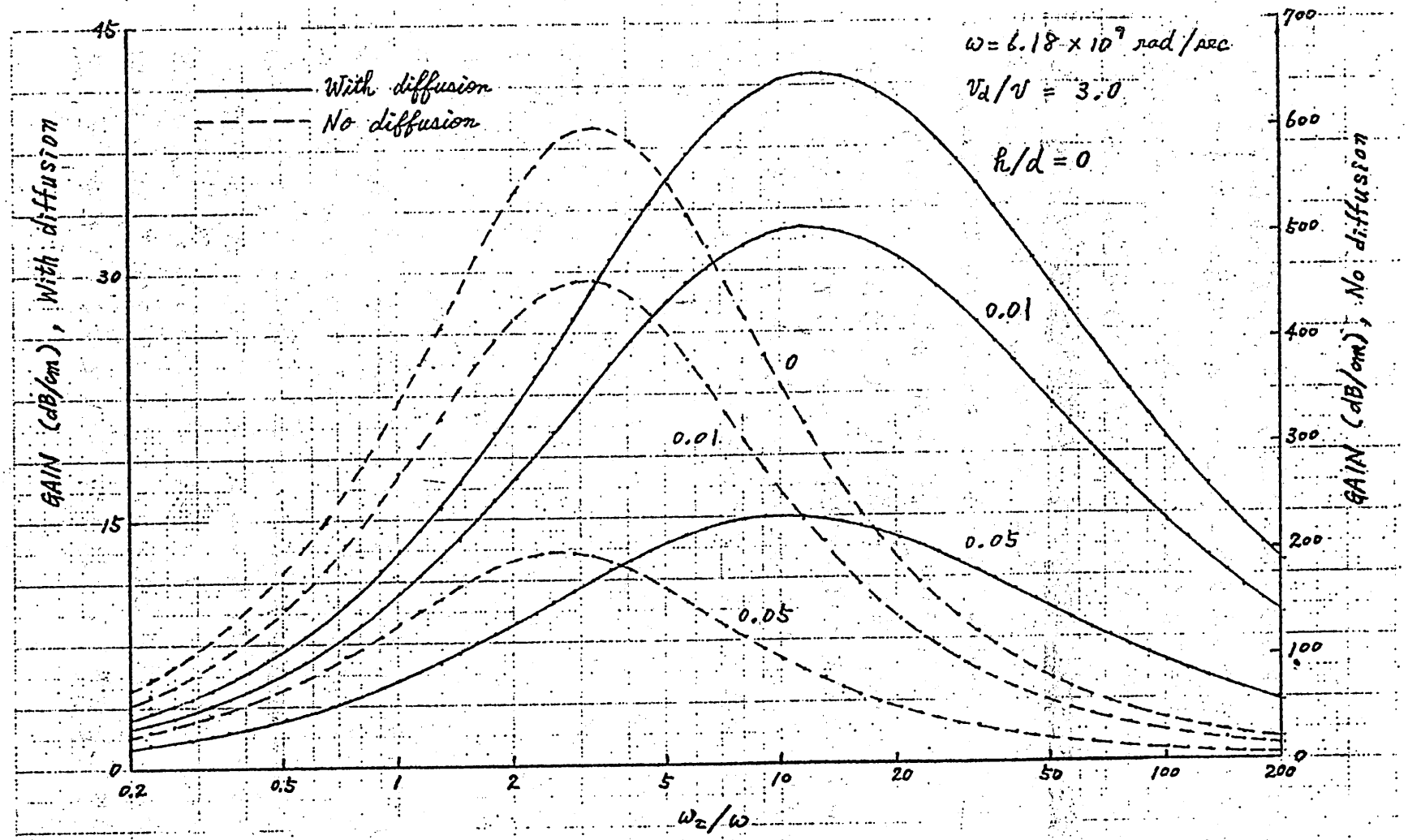


図9. ω_c - GAIN 特性 (−y方向伝播)

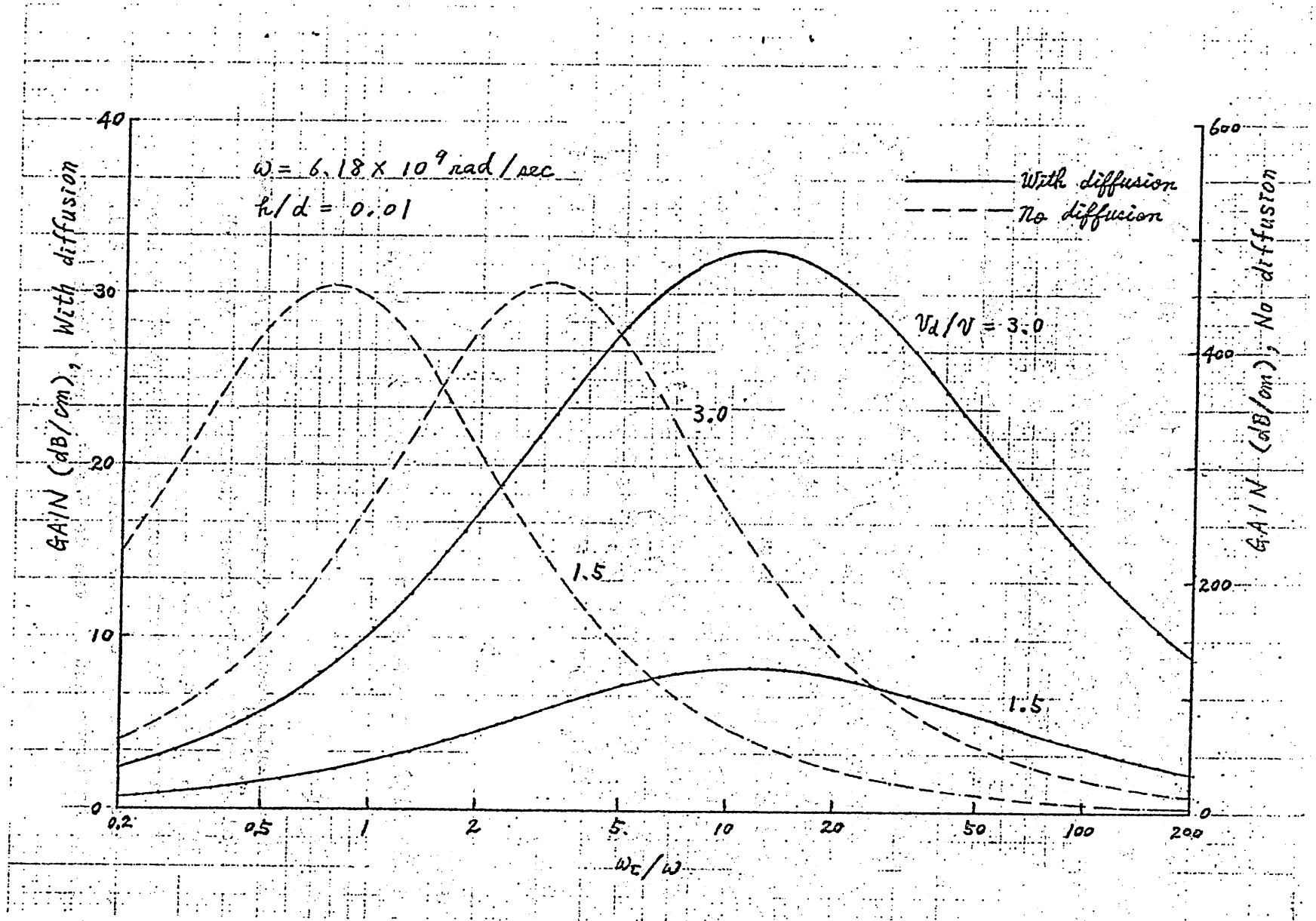


図10. ω_c - GAIN 特性 (−y方向伝播)

気弾性ラブ波の増幅度が減少していったことに対応している。そして，これは電子のドリフト速度の増加にともなって，半導体中に生じた空間電荷波の位相が最大の増幅度を与える位相よりずれるためと考えられるが詳細なことはわからない。

4. 結び

磁性体と圧電体層からなる層状媒質を伝播する磁気弾性ラブ波の伝播特性を明らかにした。そして，数値計算によって，圧電効果によって磁気弾性ラブ波の結合による分割現象が大きくなることを示した。また，その圧電効果を含む磁気弾性ラブ波と半導体中のキャリア波との相互作用によって，磁気弾性ラブ波が増幅されることを，数値計算によって示した。そして，その増幅度が，空隙，拡散，誘電緩和周波数に依存し，キャリアのドリフト速度を増加させるだけでは大きくならないことが示された。

謝辞

日頃，討論していただいている研究室の方々に感謝する。

参考文献

1. B. A. Auld, Applied Solid State Science, ed. by R. Wolfe and C. J. Kriessman (Academic P., New York, 1971), Vol. 2, p. 1.
2. W. Strauss, Physical Acoustics, ed. by W. P. Mason (Academic P., New York, 1968), Vol. IV-B, p. 211.
3. H. Matthews and H. van de Vaart, Appl. Phys. Letters

15, 373 (1969).
4. H. van de Vaart, J. Appl. Phys. 42, 5305 (1971).
5. 堤誠, 岸本靖治, 信学論 56-B, 279 (1973).
6. T. Bhattacharyya, M. Tsutsumi, and N. Kumagai, IEEE Trans. MTT-24, 226 (1976).
7. D. L. White, J. Appl. Phys. 33, 2547 (1962).
8. G. S. Kino and T. M. Reeder, IEEE Trans. ED-18, 909 (1971).
9. W. Soluch, IEEE Trans. SU-24, 43 (1977).
10. 湯川敏信, 前田哲男, 粟井郁雄, 池上淳一, 電気関係学会関連大 69-7 (1975); 信学会総連大 588 (1976).
11. 桐山勝己, 堤誠, 熊谷信昭, 信学技報 MW76-23 (1976).
12. H. F. Tiersten, J. Appl. Phys. 36, 2250 (1965).
13. H. F. Tiersten, J. Acoust. Soc. Am. 35, 234 (1963).
14. J. L. Bleustein, Appl. Phys. Letters 13, 412 (1968).
15. R. W. Damon and J. R. Eshbach, J. Phys. Chem. Solids 19, 308 (1961).
16. See, for instance, B. A. Auld, Acoustic Fields and Waves in Solids (Wiley, New York, 1973), Vol. II, p. 95.
17. P. Young, Electron. Letters 5, 429 (1969).
18. B. A. Auld, Acoustic Fields and Waves in Solids (Wiley, New York, 1973), Vol. I, p. 357.
19. 例えば, 川村肇, 固体プラズマ (朝倉, 東京, 1972), P.156.

輻射科学研究会資料

多周波ホログラム、マトリックスによる結像について

中山純一
西尾勝
藤原美貴雄
小倉久直
吉田靖夫
（京都工芸繊維大学・工芸学部）

昭和57年10月7日

コクヨ コピー410 (37×25)

1. まえがき

リモートセンシングの技術として従来のエコーを利用したレーダーにかわって、ホログラフィーの原理を利用したレーダーが考えられている。その有名な例に合成開口レーダーがあるが、これは2次元標的の奥行き(Range)に関してはエコーの原理を用い、方位(azimth)に関しては電波の波動性を利用した開口合成を行って解像度を得るものである。電波/超音波などを用いる長波長ホログラフィーでは、光ホログラフィーの乾板に対応するような、干渉場の強度分布を直接記録、測定する材料がないため、アンテナの機械的、電子的な走査法によらざるを得ない。しかし、その反面、干渉場の強度分布のみならず散乱場自身の複素振幅、つまり散乱波の振幅と位相分布を直接測定できる利点がある。

このような電波、超音波の特長を利用したホログラフィーとして筆者らは、ホログラム、マトリックスの概念を導入し、これを氷の厚さを測るレーダーに応用して成功をおさめた。[1] さらに2次元標的の結像について検討を行い、数個の点標的の結像について計算機シミュレーションを行って設計パラメータを決定し、超音波での基礎実験を行ってきた。[2][3]

ホログラムマトリックスとは、アンテナアレイにおいて一つのアンテナが標的を照射し、他の一つが散乱波を受信するものとしたとき、アレイの送受信アンテナの対の全ての組合せ(またはその一部)について、散乱波の複素振幅を記録したものである。つまりホログラムマトリックスとは、アンテナ系に関してみた標的の散乱マトリックスである。ホログラムマトリックスの利点は、移相器などのハードウェアーを用いずに、計算機のソフトウェアーにて送受信ビームを合成し制御できることである。とくに送受信両ビームを同一点に焦点を合せる処理が可能であるため、分解能を向上できる。

一般に線形アレイが形成するビームの強度分布は、方位方向に狭く、奥行き方向に長いため、受信アレイと送信アレイとを直交に配置すれば、二つのビームが交差するため横方向、奥行き方向に等しい理想的な分解能が得られる。しかし、目的によっては直交アレイより、線形アレイの方が都合がよい場合もある。この場合、奥行き分解能の低下はまぬがれない。この点を改善するため、電波ホログラフィーで検討されている多周波を用いる方法を、[4] ホログラムマトリックスに適用して検討を加えた。本報告では、三周波を用いたホログラムマトリックスの結像について述べる。結像の基礎過程を与えるビームの合成について先ず論じ、次いで、点像の奥行き方向の広がりを最小にするような三周波の組合せを求め、最後に計算機シミュレーションの結果を示した。

2. ホログラム・マトリクス

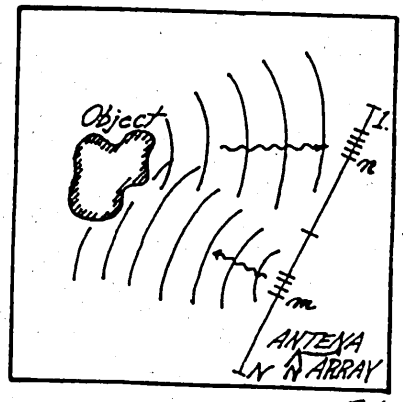


図1.

図1のようなN個のアンテナからなる線状アレイと2次元標的を考える。アレイは必ずしも等間隔である必要はなく，また直線以外に円弧でも平面アレイでもよい。今，m番目のアンテナが送信アンテナとして標的を照射し，n番目のアンテナが受信アンテナとして散乱波の振幅，位相を測定し，複素振幅H_{mn}を記録するものとする。これをすべてのm, nの組合せについて測定した$N \times N$マトリクスH_{mn} $(m, n = 1, 2, \cdots, N)$をホログラムマトリクスという。これはアンテナアレイに関する標的のSマトリクスである。送信アレイと受信アレイは別れていてもよく，この場合にはH_{mn}は完全なSマトリクスの部分マトリクスである。H_{mn}が記録されるとmに関する線型変換

$$h_{\mu n} = \sum_{m=1}^{N} f_{\mu m} H_{mn} \quad , (n = 1, 2, \cdots, N) \qquad (1)$$

によって任意の照射モードに対するホログラムを合成できる。ここで$f_{\mu m}$は複素ベクトルであって，μは照射モードを表わす変数とする。ホログラムの再生処理については更に線型変換

$$I_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} f_{\mu m} g_{\nu n} H_{mn} \qquad (2)$$

を行って得られる。ここに$g_{\nu n}$は複素ベクトルで，νは受信モードを表わす1つの変数と思ってよい。従ってホログラムマトリクスの処理は一般に2つのサフィックスに関する双一次変換であらわされる。

処理公式には目的に応じていろいろ考えられるが本報告で用いるものは送受信アレイ共に同一点に焦点を結ぶように行うものである。したがってμ，νは共にこの共焦点の位置をあらわす座標変数とみなす。その時，像の強度を

$$I_{\mu} \equiv |I_{\mu\mu}|^2 = \left| \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} f_{\mu m} g_{\nu n} H_{mn} \right|^2 \qquad (3)$$

とすれば，合成共焦点に散乱体があればI_{μ}は大きい値をとるのでμを標的領域にわたって走査すれば標的の形状を再生できる。また，$f_{\mu m}$，$g_{\nu n}$にはビームをより鋭くするため，或は背景雑音を少なくするために適当な振幅，位相分布をもたすことができる。さらに各アンテナチャネルの減衰量，移相量の補正もROMに入れておいて計算処理のさいに取入れることができる。このように送受信モードを変化させながら像の再生処理を行いうるのがホログラムマトリクスの特長であって計算機の使用によりはじめて可能な技術である。

さて本報告で用いた共焦点処理では再生像の強度は

$$I_\mu = \left| \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} V_{n\mu} \cdot W_{m\mu} \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(r_{m\mu} + r_{n\mu})\right] H_{mn} \right|^2 \qquad (4)$$

を計算することによって得られる。ただし I_μ は走査している点 μ での強度，$r_{m\mu}$, $r_{n\mu}$ はそれぞれ m 番目の送信アンテナ，n 番目の受信アンテナと点 μ との距離，$V_{n\mu}$, $W_{m\mu}$ は焦点ビーム形成のための重み因子である。

(4)式の物理的意味を明確にするため，簡単なモデルとして点標的の場合について考えてみる。

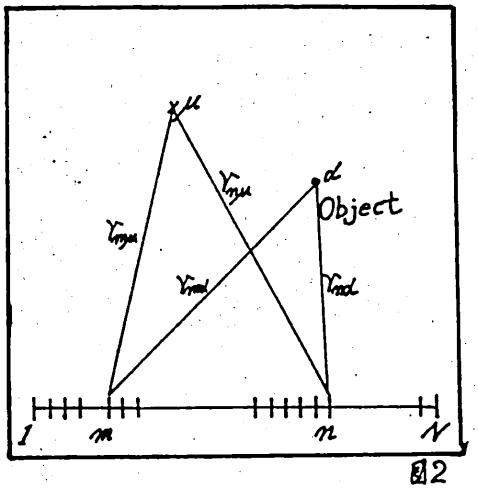


図2

図2の様に点 α にある点標的のホログラムマトリクス H_{mn} は送信アンテナから単位振幅の球面波が放射され α 点において散乱されるとすると

$$H_{mn} = S_\alpha \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(r_{m\alpha} + r_{n\alpha})}}{r_{m\alpha} \cdot r_{n\alpha}} \qquad (5)$$

と書け (4), (5) より

$$I_\mu = \left| \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} S_\alpha \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(r_{m\alpha} - r_{m\mu})}}{r_{m\alpha}} \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(r_{n\alpha} - r_{n\mu})}}{r_{n\alpha}} \right|^2$$

となる。(但し $V_{n\mu} = W_{m\mu} = 1$ としてよく) (6)

それゆえ，点 α が点 μ に一致した時は(6)の絶対値カッコの中は同位相で加え合わさることになり I_μ はたきい値をとるが，一方一致しない時はさまざまな位相で加え合わさることになるため I_μ は小さくなる。つまり標的のあった所では強度 I_μ が大となり，その他の場所では小さくなって標的の探知が可能となる。また(6)式を書きかえると

$$I_\mu \propto \left| \sum_{m=1}^{N} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(r_{m\alpha} - r_{m\mu})}}{r_{m\alpha}} \right|^2 \times \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(r_{n\alpha} - r_{n\mu})}}{r_{n\alpha}} \right|^2$$

となる。この式の第1項は送信アンテナが点 μ にフォーカスするビームを放射していることと等価であり，第2項は点 μ から散乱された球面波を同位相で加え合わせるように各アンテナエレメントに位相の重みをつけていることになる。つまり(4)式は送受信アレイを同一の点 μ にフォーカスしていることを意味している。

また図2の様な線状アレイを1周波で用いた時のフォーカスの様子は図3のようになり横方向に比べて奥行き方向の分解能が悪い。これを改善するために J 個の周波数を用いることを考える。このとき(4)に対応した処理公式は

$$I_\mu = \left| \sum_{j=1}^{J} Q_j \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} H_{mn}^{(j)} \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda_j}(r_{m\mu} + r_{n\mu})\right] \right|^2 \qquad (7)$$

(但し $H_{mn}^{(j)}$ は波長 λ_j の球面波によるホログラムマトリクス)

となる。

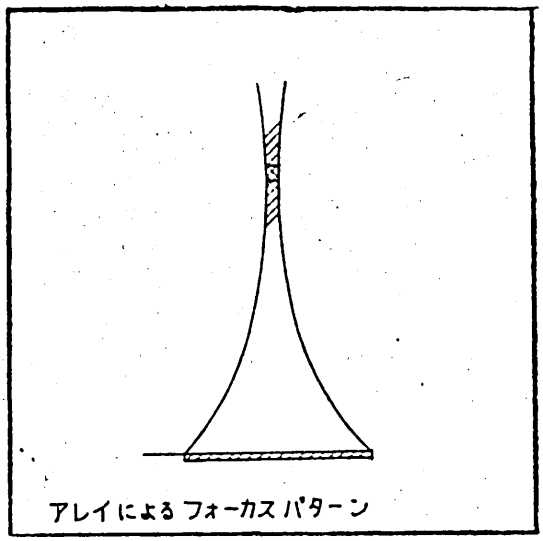


図 3.

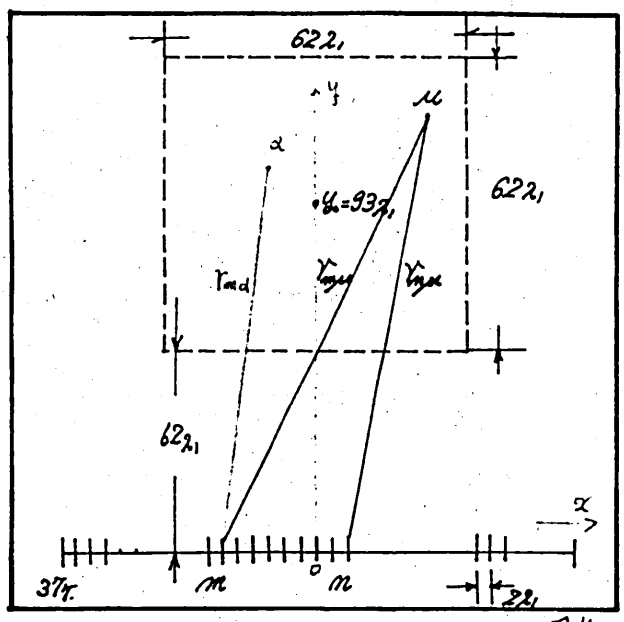


図4

3. 多周波ビーム の合成

以下の報告では図4に示すように間隔 $2\lambda_1$ で配列された37本のエレメント より なる線状アレイを考え，$y_0 = 93\lambda_1$ の点がターゲットエリアの中央にくるように設定して考える。

さて図4において N 周波で $\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ なる点にフォーカスするビームの $\mu = (x_\mu, y_\mu)$ 点での複素振幅 $\varphi_N(x_\mu, y_\mu, x_\alpha, y_\alpha)$ は

$$\varphi_N(x_\mu, y_\mu; x_\alpha, y_\alpha) = \sum_{j=1}^{N} Q_j \sum_{m=1}^{37} \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda_j} (r_{m\mu} - r_{m\alpha}) \right] / r_{m\mu}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} Q_j \, \varphi(x_\mu, y_\mu, x_\alpha, y_\alpha \mid \lambda_j) \qquad (8)$$

と書ける。ここで Q_j は各周波に対する振幅重みである。

$|\varphi_N|^2$ に関しては，焦点近傍のみでビームの強度が強く，それ以外の領域では弱いことが望ましいが，これを評価するために次式を考える。ここでフォーカスの位置はターゲットエリアの中央 $\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) = (0, 93\lambda_1)$ とする。

$$J = \frac{\int_{L_1} |\varphi_N(x_\mu, y_\mu, x_\alpha, y_\alpha)|^2 \, dy_\mu}{\int_{L_2} |\varphi_N(x_\mu, y_\mu, x_\alpha, y_\alpha)|^2 \, dy_\mu} \qquad (9)$$

L_1 は $|y_\mu - y_0| \le \frac{\lambda_1}{2}$，$L_2$ は $10\lambda_1 \ge |y_\mu - y_0| > \frac{\lambda_1}{2}$ なる領域

この式の分子は焦点近傍でのビームの強度の寄与，分母はそれ以外の領域でのビームの寄与を表わしており，J によって奥行方向についての評価が得られ，J が大きいことが望ましい。

さて，$\lambda_3 < \lambda_1 < \lambda_2$ かつ $Q_j = 1$ なる3周波を用い λ_2/λ_1 を 1.0～1.3，λ_3/λ_1 を 1.0～0.7 の領域を 0.01 間隔でスキャンしてJの分布を計算すると図5のようになる。

この図より $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1.1$，$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = 0.91$ がよいことがわかり，1周波(λ_1)と3周波とでは $\frac{J_3}{J_1} = 3.1$ で約3倍という値が得られた。

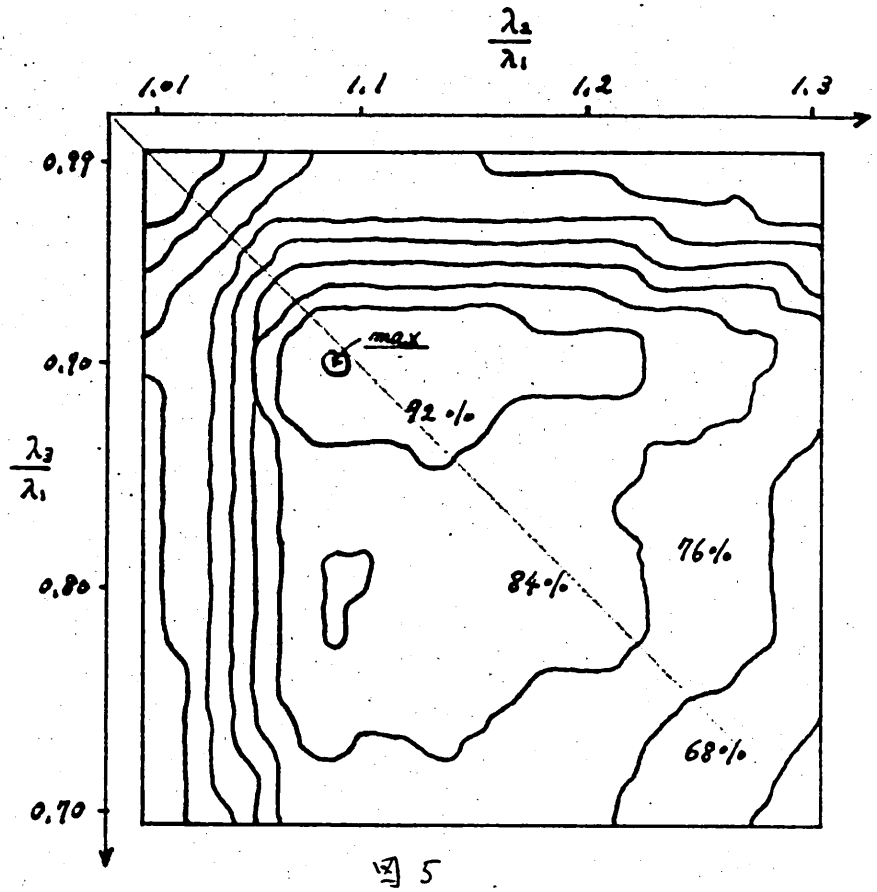


図5

上の結果は面積，つまり積分による評価であるが今度は簡単なモデルで計算してみよう。

ビームは焦点近傍では平面波で近似できるから，$x_\mu = x_\alpha = 0$ のとき(8)式より

$$\varphi(x_\mu, y_\mu, x_\alpha, y_\alpha \mid \lambda_j) = \sum_{m=1}^{37} Q_j \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_j}(r_{m\mu} - r_{m\alpha})\right] / r_{m\mu}$$

$$\simeq A\left(\frac{y_\mu - y_\alpha}{\lambda_j}\right) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda_j}(y_\mu - y_\alpha)\right] \qquad (10)$$

となる。但し，以下では振幅Aに関しては数値計算の値を用いるものとする。

さらに図5により対角線の部分が重要であるので λ_1 よりのずれ $\Delta\lambda$ を用いて $\lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_2$，$\lambda_1 - \Delta\lambda = \lambda_3$ とする。(8)式より合成されたビームの強度は $Q_1 = 1$，$Q_2 = Q_3$ とすれば次式で与えられる。

$$|\varphi_3(0, y_\mu, 0, y_\alpha)|^2 \simeq \left[A\left(\frac{y_\mu - y_\alpha}{\lambda_1}\right)\right]^2 \left[1 + 2Q_2 \cos\left[\frac{2\pi\Delta\lambda}{\lambda_1^2}(y_\mu - y_\alpha)\right]\right]^2 \qquad (11)$$

右辺の積の第1項 $|A|^2$ は1周波のビーム強度分布であり，積の第2項が3周波合成の効果を表わしている。ビームの形は図6（次ページ）に示すようになり，3周波合成によって主ローブの幅が狭く出来ることになる。又，同図より $\Delta\lambda$，Q_2 の値によってサイドローブの発生位置，サイドローブの高さを操作できることがいえる。

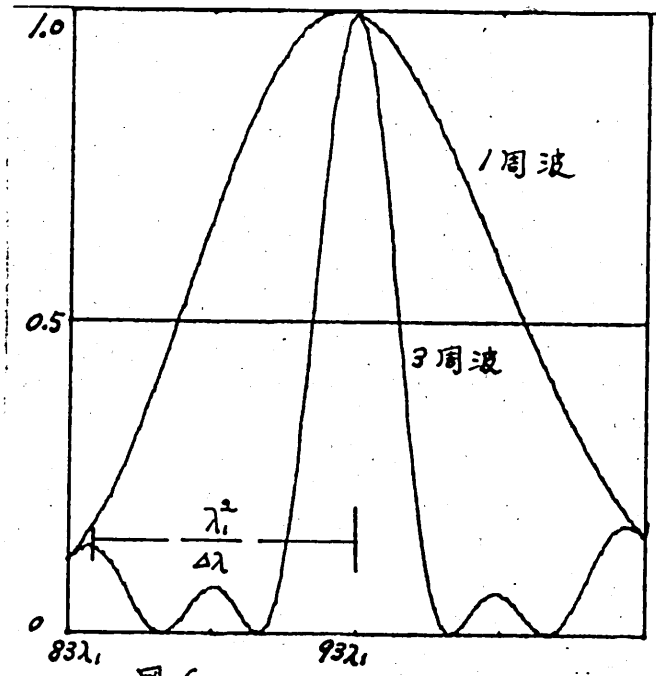


図 6

なお，λ_1を固定して$\lambda_1^2/\Delta\lambda$を大きくすると第2のサイドローブの強度は低下するが主ローブの幅が広くなり，一方$\lambda_1^2/\Delta\lambda$を小さくすると主ローブは急峻となるが第2のサイドローブが高くなることが図6よりいえる。$|A|^2$が10 dB低下するのは焦点から±$10\lambda_1$離れた位置であるから$\Delta\lambda$を決定するために第2のサイドローブの強度が−10dBであるとすると(11)式，図6より

$$10\lambda_1 = \frac{\lambda_1^2}{\Delta\lambda}$$

より　$\Delta\lambda = \lambda_1/10$　となる。

これは丁評価(9)式の最大値をとるパラメーターλ_2, λ_3を与える。

4. 3周波による1点再生像に関する考察

3節ではビームの奥行き方向の広がりについて考察したが，ここでは点像の広がりについて検討を加えよう。

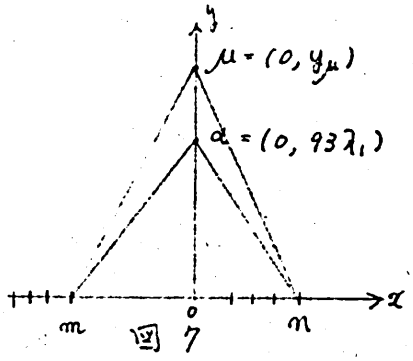


図 7

図7において点$\alpha(0, 93\lambda_1)$に1ケの点ターゲットを置いた時，点$\mu(0, y_\mu)$での再生像強度は(7)式より

$$I_\mu = \left| \sum_{j=1}^{3} Q_j \sum_{n=1}^{37}\sum_{m=1}^{37} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda_j}(r_{m\alpha}-r_{m\mu})}}{r_{m\alpha}} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda_j}(r_{n\alpha}-r_{n\mu})}}{r_{n\alpha}} \right|^2$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{3} Q_j \left(\sum_{m=1}^{37} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda_j}(r_{m\alpha}-r_{m\mu})}}{r_{m\alpha}} \right)^2 \right|^2$$

ここで(10)式の近似を用い，$Q_1 = 1$, $Q_2 = Q_3$, $\lambda_1+\Delta\lambda = \lambda_2$, $\lambda_1-\Delta\lambda = \lambda_3$ とすれば

$$I_\mu \simeq \left| \sum_{j=1}^{3} Q_j A^2\left(\frac{y_\mu - y_\alpha}{\lambda_j}\right) \exp\left[i\frac{4\pi(y_\mu - y_\alpha)}{\lambda_j} \right] \right|^2 \quad (y_\alpha = 93\lambda_1)$$

$$\simeq A^4\left(\frac{y_\mu - y_\alpha}{\lambda_1}\right)\left[1 + 2Q_2 \cos\left[\frac{4\pi\Delta\lambda}{\lambda_1^2}(y_\mu - y_\alpha)\right]\right]^2 \qquad (12)$$

と書ける。右辺の積の第1項A^4は1周波の点像の奥行き方向の広がりを表す。第2項は3周波の合成の効果を示している。このためI_μは図8に示すように，リップルを持ち，$y_\mu = y_\alpha$, $y_\mu = y_\alpha \pm \lambda_1^2/2\Delta\lambda$にて1周波の分布に接する形になり奥行き方向分解能が改善される。(12)式と(11)式とを比較すればcosの位相項が2倍異っているが，これはホログラムマトリクスでは送，受信両ビームをフォーカスしているためである。これにより合成した像強度のサイドローブの発生位置はビームの場合((11)式)の半分である。

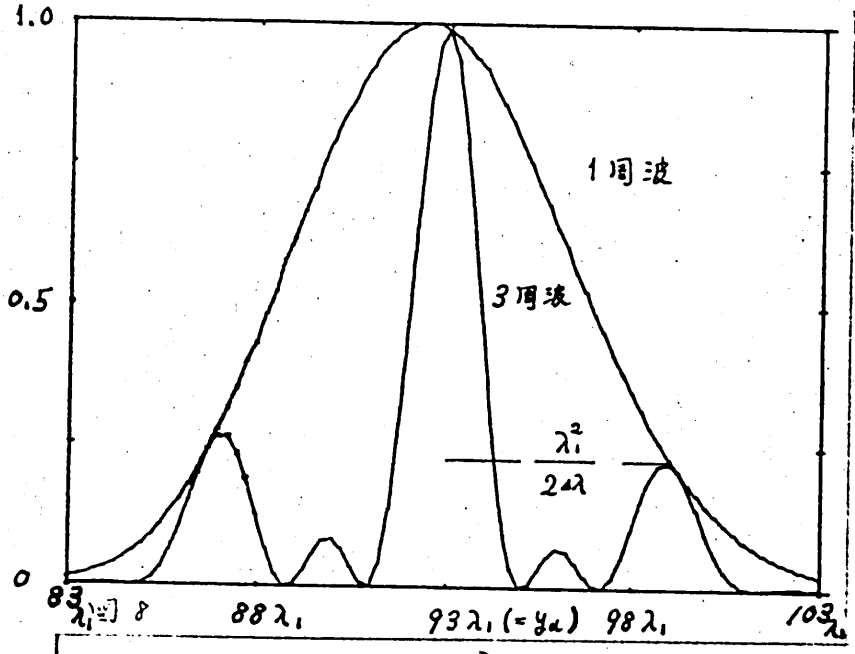


図8

A^yは$(y_\mu - y_\alpha)/\lambda_1 \fallingdotseq 8$にて10 dB低下するので$(\Delta\lambda/\lambda_1) \simeq 0.06$にてオユサイドローブが10 dB低下し，$Q_2 = 1$の場合は第1サイドローブでも10低下することがいえる。

さてオ3節と同様な考え方で再生像の奥行き方向の広がりを小さくする周波数の組合せを求めるために次式を導入する。

$$J = \frac{\int_{L_1} I_\mu \cdot dy_\mu}{\int_{L_2} I_\mu \cdot dy_\mu} \qquad (13)$$

ここでL_1は$|y_\mu - y_\alpha| \leq \frac{\lambda_1}{2}$，$L_2$は$10\lambda_1 \geq |y_\mu - y_\alpha| > \frac{\lambda_1}{2}$なる領域とする。$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$を1.0～1.3，$\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$を1.0～0.7まで0.02間隔でスキャンした場合のJの分布を図9に示す。この図より$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \simeq 1.06$，$\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \simeq 0.94$がよいことがわかる。

5. 計算機シミュレーション

前節に7点像の広がりを最小にする波長の組合せを求めたので，これを使った結像のシミュレーションを行った。シミュレーションは理想化された実験に対応し，得られた結果からシステムの分解能，雑音などを見ることが出来る。

シミュレーションでは多数個の点標的が$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_L$に存在するとしたときホログラムマトリクス

$$H_{mn} = \sum_{\alpha_\ell} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda_j}(r_{m\alpha_\ell} + r_{n\alpha_\ell})}}{r_{m\alpha_\ell} \cdot r_{n\alpha_\ell}}$$

を計算し，これを処理公式(7)により処理して再生像を求めた。ただし$Q_j = 1$としてある。

遠方にある散乱点の像はアレイアンテナからの距離rによる減衰のためr^{-4}に比例して再生像強度I_μが低下する。これを改善するにはI_μに距離rに比例する重みを乗じて処理する必要がある。実際にはアレイの中心が3再生点までの距離rの2乗または4乗をI_μに乗じた処理を行った。

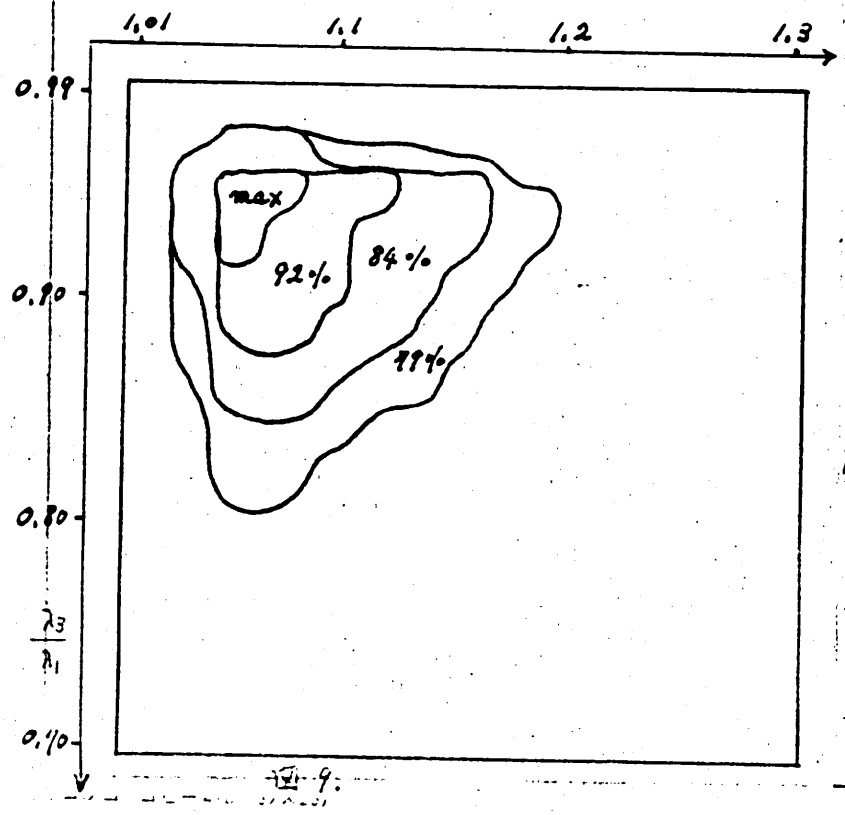


図9

この結果をさらに5レベルに量子化，20%以下の強度の弱い像は無視することにした。これは一点の再生像のサイドローブレベルが−10dB程度であるためである。（図10参照）

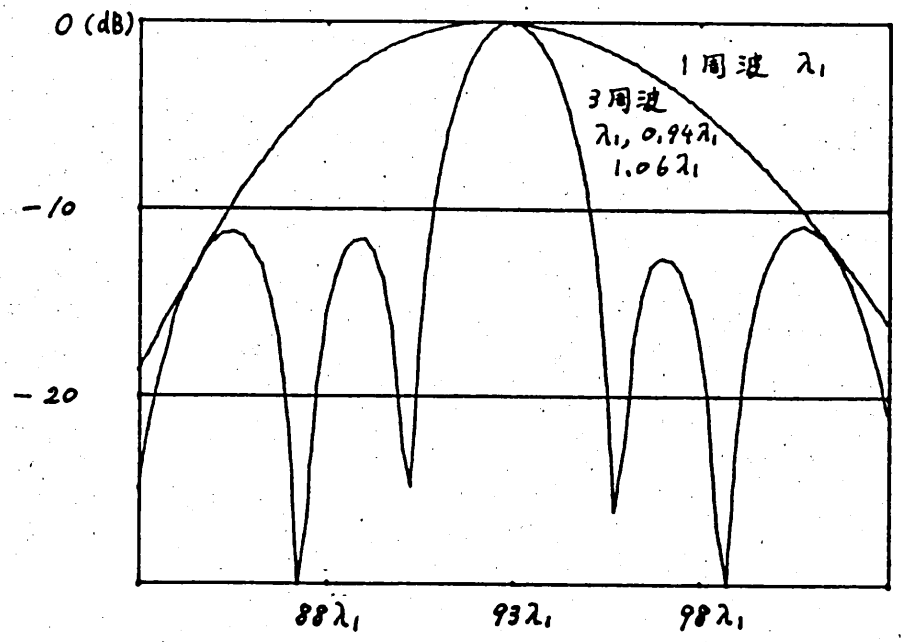


図10　点像の広がり（奥行き方向）

一点の再生像（図11）

1周波による像の広がりは奥行き方向に12 λ1であるが3周波合成によれば2λ1となることがわかる。

楕円（20点）（図12）

1周波では奥行き方向に長い像となっているが3周波では奥行き分解能が改善され像が鮮明になっている。

楕円（40点）（図13, 14）

一般に点標的の数が増加すれば再生像は劣化する。これは各散点の再生像が干渉することに起因する。従って散乱点の数を増加させた場合をシミュレーションで求めることは結像系の情報処理能力（何点ぐらいの散乱点なら鮮明に再生できるか）を知る上で興味深いことである。

図13，14により分かるように1周波であればもとの楕円を再生しえないが，3周波を使えばやや雑音は増加するものの，もとの散乱点配置が再生されることが示されている。

コクヨ コピー41D (27×25)

6. 今後の問題点

1. 3周波を用いれば1周波に比較して大幅に再生像が改善されることが分ったが，再生像強度がターゲットエリア内で一様ではない。これは処理に用いた重みにアレイ中心から再生点までの距離を用いたことに一つの原因があると考えられる。重みを変えて処理することで最適な重みを求めることは今後の課題である。

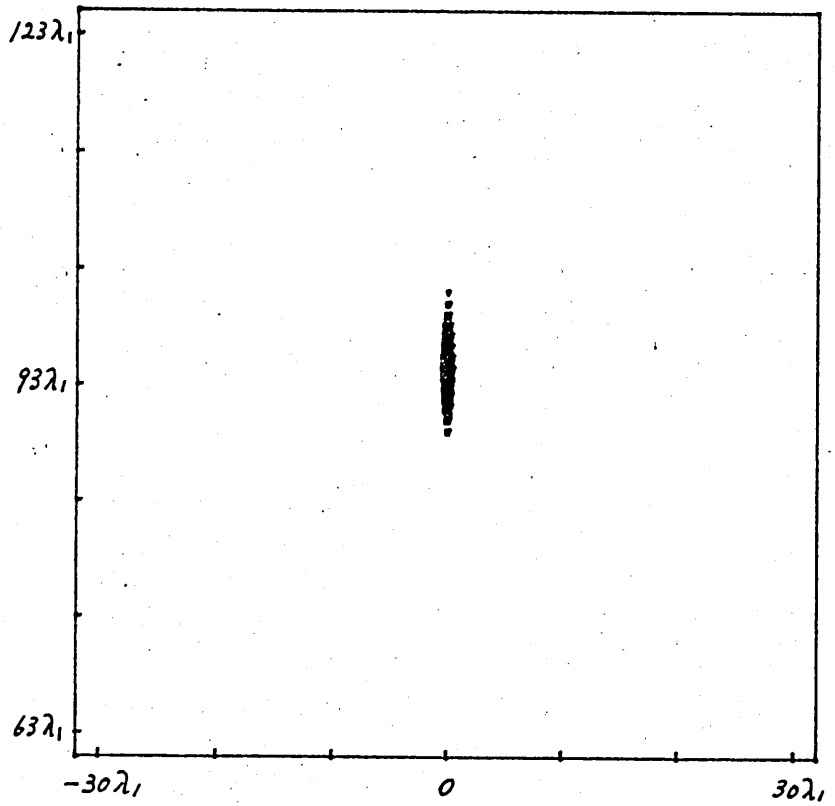
2. 本論文ではターゲットエリアの中央に置いた点標的の再生像が最適になる波長の組合せを求めたが，ターゲットエリアの端では像は劣化しやすいことを考慮した最適な波長の組合せを求め，シミュレーション像を求めること。

3. 結像系の情報処理能力とでも言うべき標的点の数と再生像のSNの関係を求めること。[5] とくに1周波に対して多周波ではどの程度SNが改善されるか，ということは興味がある。

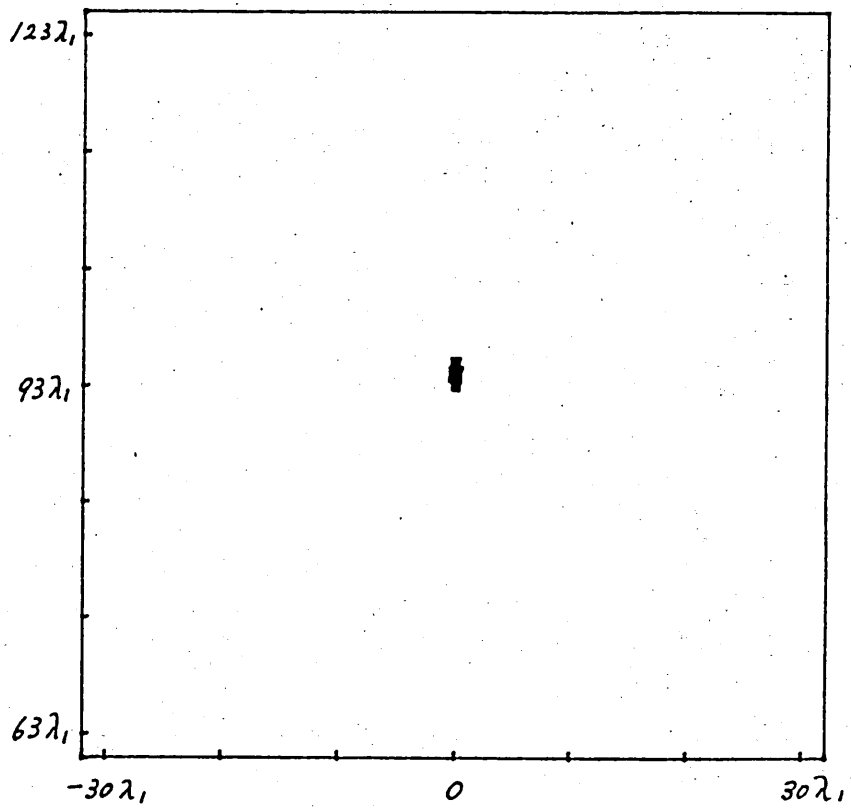
文献

(1) Ogura, Iizuka : Proc, IEEE 61, pp 1040-1041 July 1975.
(2) Ogura, Fukuoka : Proc, IEEE 63, pp 364-366 March 1976.
(3) 赤木，中山，宮下 et. al. 信学技報 US 76-66 March 1977
(4) 繁沢，滝山，信学技報，MW 77-17 May 1977.
(5) 小倉，中山，吉田，信学技報，MW 77-17 May 1977.

コクヨ コピー410 (37×25)

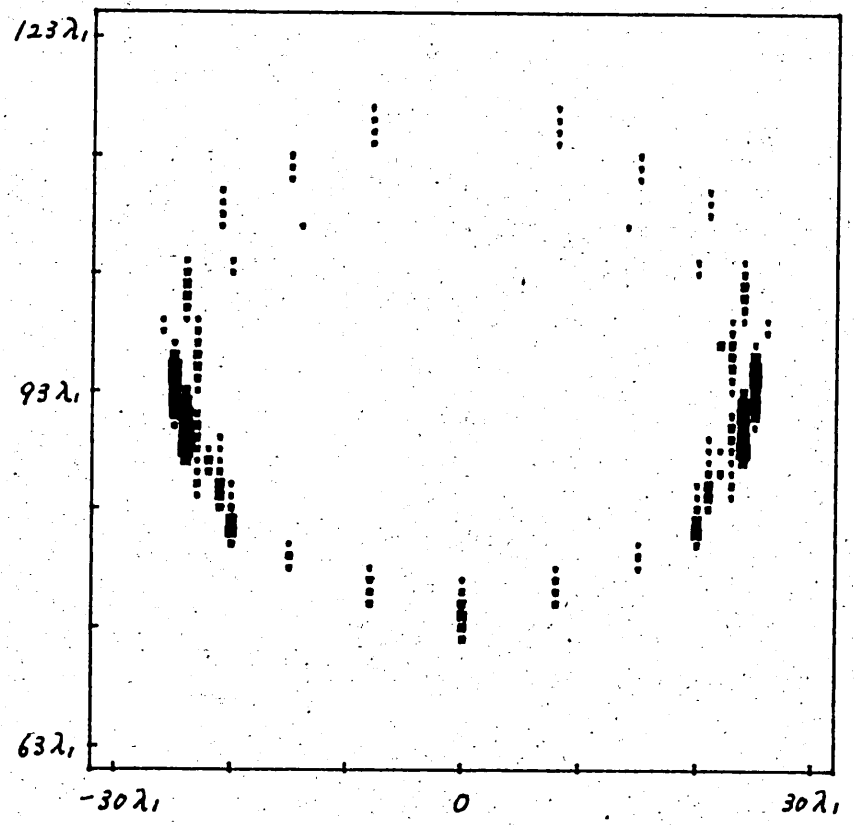


1 周波による再生像
(λ_1)

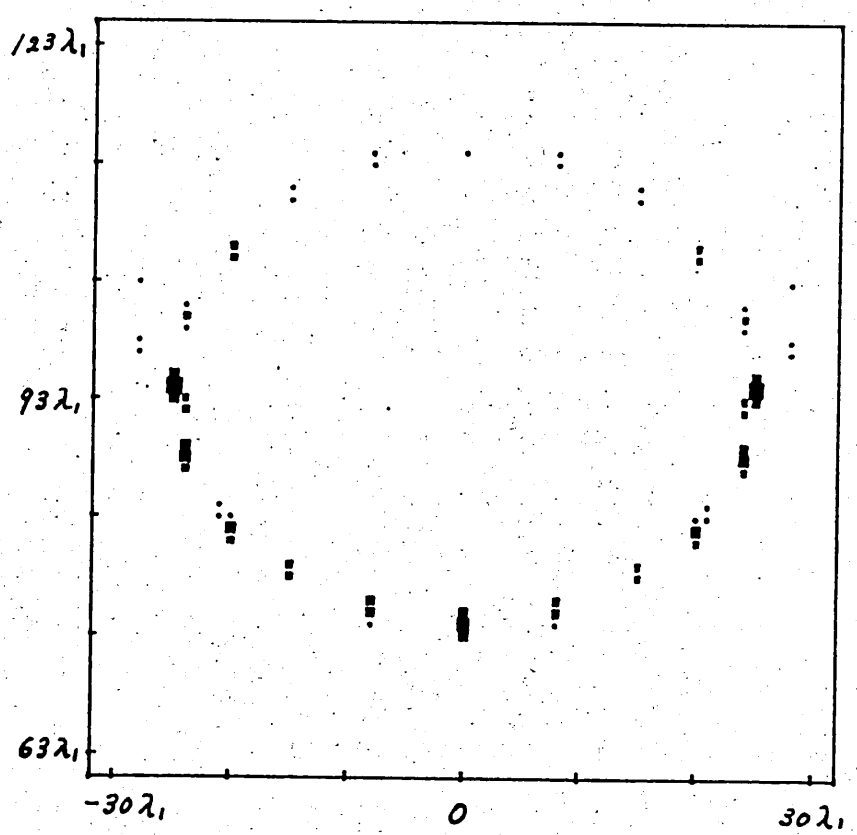


3 周波による再生像
(λ_1, $0.94\lambda_1$, $1.06\lambda_1$)

図 11　標的1点(0, $93\lambda_1$)

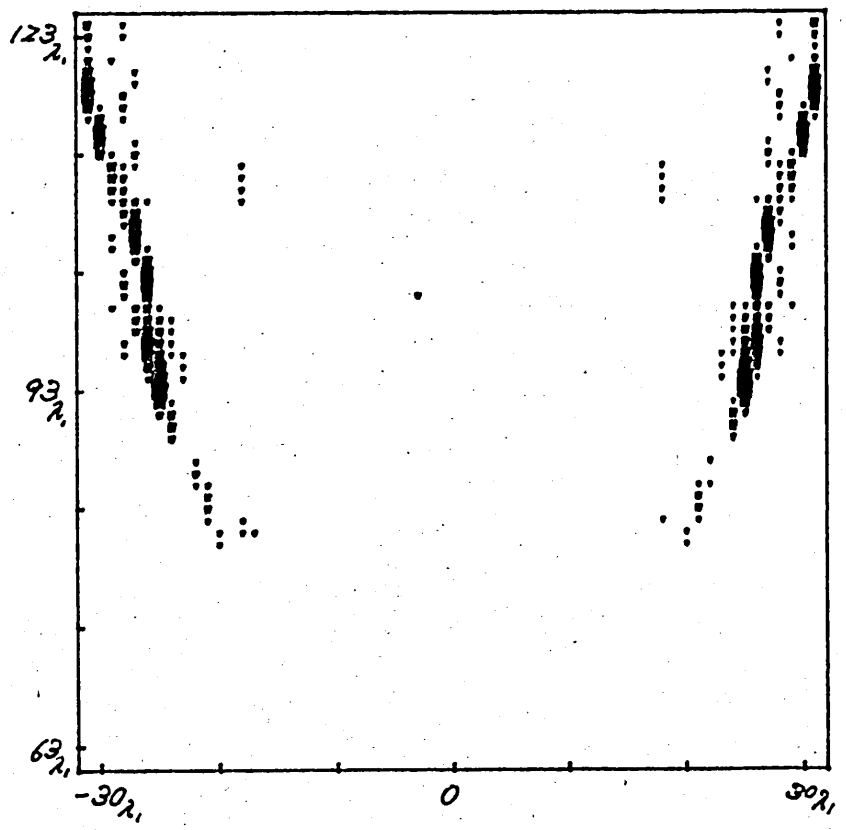


1周波による再生像

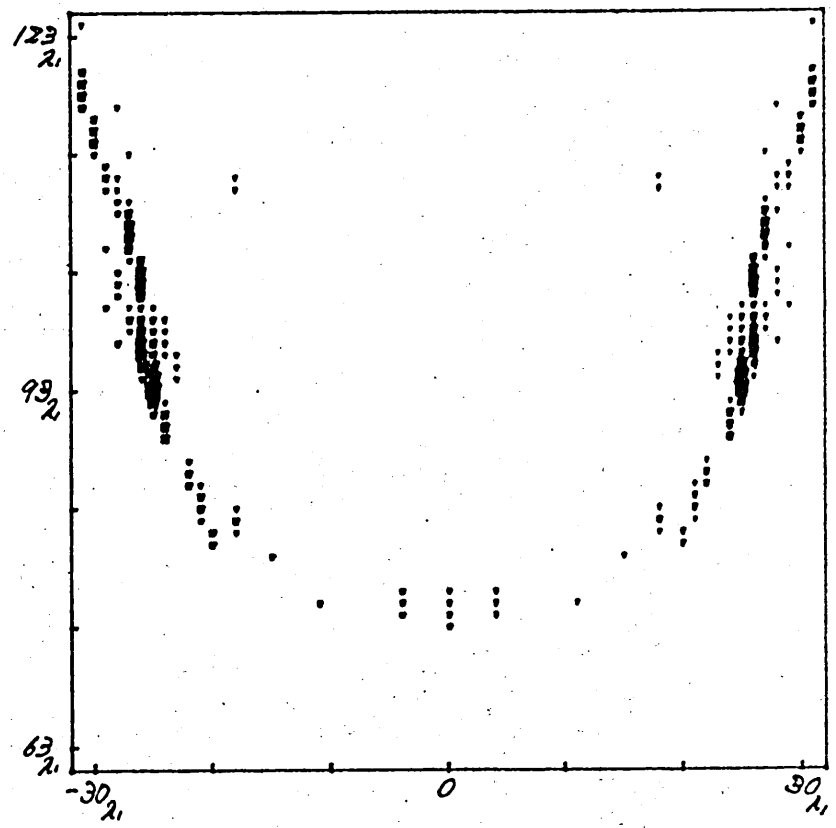


3周波による再生像
(λ1, 0.95λ1, 1.05λ1)

図 12 楕円 (20点)

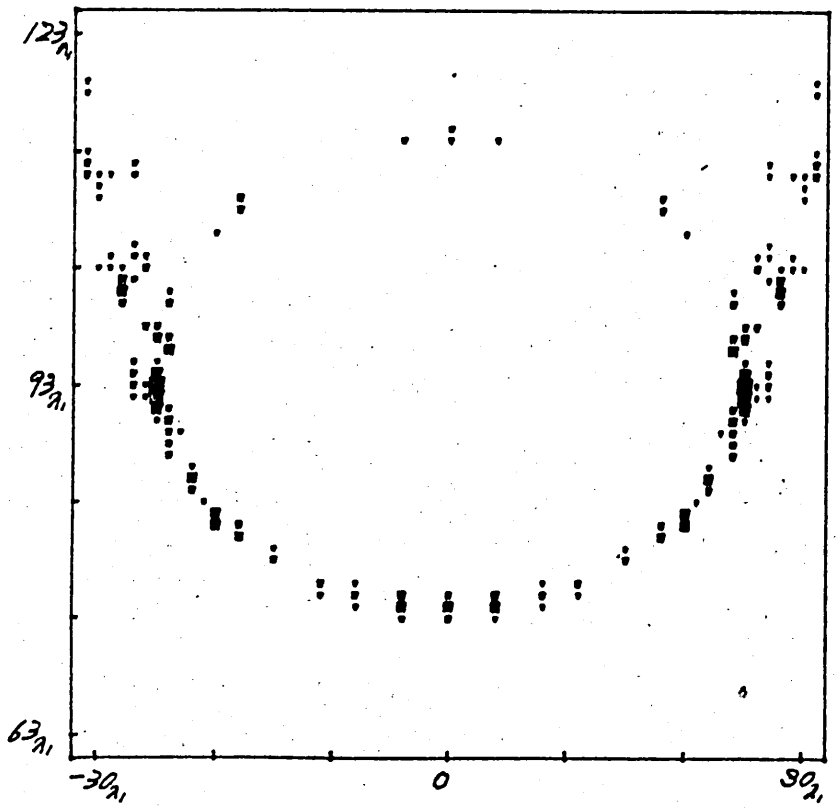


1周波による再生像（重み：r^4）
（λ_1）

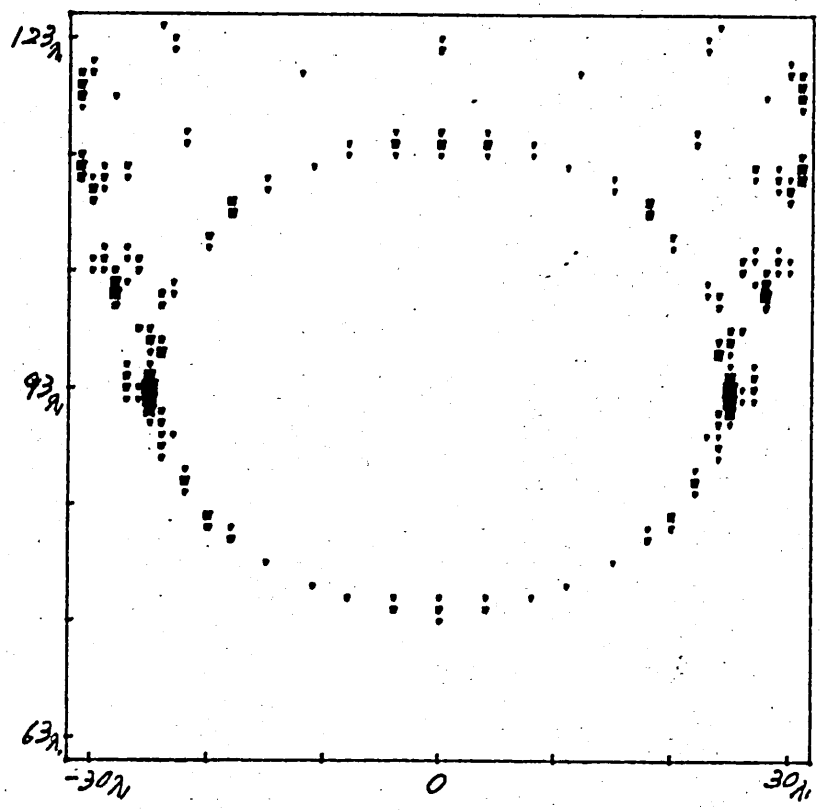


1周波による再生像（重み：r^2）
（λ_1）

図 13　楕円（40点）



3周波による再生像
(λ1, 0.94λ1, 1.06λ1)　(重み: r^2)



3周波による再生像
(λ1, 0.94λ1, 1.06λ1)　(重み: r^4)

図 14　楕円 (40点)

輻射科学研究会資料

半無限圧電Cubic結晶表面上を伝搬する圧電弾性表面波の逆速度面の曲率

白崎博公
牧本利夫

（大阪大学　基礎工学部）

昭和52年12月9日

1. まえがき

筆者らは先に[1]，Lighthill[2]により発展させられたstationary phase methodを用いることにより，半無限圧電結晶内の点荷重及び点電荷によって結晶表面に励振された圧電弾性表面波の漸近式を得た。その結果，逆速度面の曲率が零になる点に対応するエネルギー伝搬方向での圧電弾性表面波は，その伝搬距離rに対して$O(r^{-1/3})$で減衰し，他の伝搬方向での$O(r^{-1/2})$の減衰に較べ，減衰の割合が遅くなることを示した。よって，異方性結晶の半無限自由表面上を伝搬する圧電弾性表面波の逆速度面のガウス曲率を調べておくことは重要である。本報告では，結晶表面を無限に薄い完全導体で覆ったZ-cutの半無限圧電Cubic結晶（クラス$\bar{4}3m$，23）表面上を伝搬する圧電弾性表面波の逆速度面のガウス曲率の計算式を導出し，ZnS結晶に対して数値計算例を示している。

他の論文で[3]筆者らは，結晶表面を無限に薄い完全導体で覆ったZ-cutの半無限Cubic結晶表面上を伝搬する圧電弾性表面波のエネルギー速度面が交差現象を起すことを示した。この現象は，異なった位相速度と変位ベクトルを持った幾つかの表面波が，同じ一つのエネルギー伝搬方向に伝搬することを意味している。ここでは，逆速度面の曲率の零点が，エネルギー速度面の先点に対応していることを数値的に示している。また，逆速度面の曲率の零点は，θを

位相伝搬角，εを位相伝搬方向とエネルギー伝搬方向とのずれ角としたとき，ε-θ曲線上で$\partial\varepsilon/\partial\theta=-1$を満足する点に対応しているということも示している。

2. 基本式の導出

結晶表面($x_3=0$)を無限に薄い完全導体で覆った，$x_3>0$をしめる半無限Cubic結晶のZ-cut面上を伝搬する圧電弾性表面波の基本式を導く[4]。

運動方程式は

$$\partial_j \tau_{ij} - \rho_m \partial^2 u_i/\partial t^2 = -f_i \tag{1}$$

準静電近似のもとでは

$$\partial_j D_j = \rho_e \tag{2}$$

$$E_j = -\partial_j \phi \tag{3}$$

構成方程式は

$$\tau_{ij} = c_{ijpq}\partial_q u_p - e_{pij} E_p \tag{4}$$

$$D_i = e_{ipq}\partial_q u_p + \varepsilon_{ip} E_p \tag{5}$$

ここに∂_jはx_jに関する偏微分を表わしている。u_i，τ_{ij}，D_i，E_i，ϕ，ρ_m，ρ_e，f_i，c_{ijpq}，e_{ijq}，ε_{iq}はそれぞれ，粒子変位，応力，電束密度，電場，静電ポテンシャル，質量密度，電荷密度，体積力，弾性スティフネス定数，圧電定数，誘電定数である。ここでは，波源項f_i及びρ_eは零として解析を行なう。

$x_3\to\infty$につれて減衰する表面波解を，$x_3>0$において次のように仮定する。

$$(u_1, u_2, u_3) = (U_1, U_2, U_3)\exp\{-qx_3 + i(k_1x_1 + k_2x_2 - \omega t)\} \tag{6}$$

$$u_4 \equiv \phi = U_4 \exp\{-g x_3 + i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)\} \tag{7}$$

ここに g は深さ方向への減衰定数，k_1, k_2 は波数，そして $i^2=-1$ である。

表面波解 (6),(7) を，式 (1)~(5) に代入することにより圧電 Cubic 結晶に対して次式が得られる。

$$\sum_{\beta=1}^{4} \Gamma_{\alpha\beta} U_\beta = 0 \ , \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \tag{8}$$

ここに

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11}k_1^2 + C_{44}k_2^2 - C_{44}g^2 - \rho\omega^2, & (C_{12}+C_{44})k_1k_2, & i(C_{12}+C_{44})k_1 g, & i2e_{14}k_2 g \\ (C_{12}+C_{44})k_1k_2, & C_{44}k_1^2 + C_{11}k_2^2 - C_{44}g^2 - \rho\omega^2, & i(C_{12}+C_{44})k_2 g, & i2e_{14}k_1 g \\ i(C_{12}+C_{44})k_1 g, & i(C_{12}+C_{44})k_2 g, & C_{44}k_1^2 + C_{44}k_2^2 - C_{11}g^2 - \rho\omega^2, & 2e_{14}k_1k_2 \\ i2e_{14}k_2 g, & i2e_{14}k_1 g, & 2e_{14}k_1k_2, & -\varepsilon_{11}(k_1^2+k_2^2-g^2) \end{bmatrix} \tag{9}$$

U_β が自明でない解を持つためには，次式が成立しなければならない。

$$D = \det|\Gamma_{\alpha\beta}| = 0 \tag{10}$$

式 (10) は減衰定数の自乗 g^2 に関して4次式となるが，$x_3 \to \infty$ で解が零になるという条件より，実数部が正の4つの根のみが意味を持つ。ここでは，その根を g_γ $(\gamma = 1, 2, 3, 4)$ と表わす。この各根 g_γ を式 (10) に代入すると次式が得られる。

$$D^\gamma = \det|\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma| = 0 \tag{11}$$

ここに

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(k_1, k_2) = \Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, g_\gamma) . \tag{12}$$

このとき，振幅変位 U_β は式 (8) より次式で与えられる。

$$\frac{U_1}{\eta_1^\gamma}=\frac{U_2}{\eta_2^\gamma}=\frac{U_3}{\eta_3^\gamma}=\frac{U_4}{\eta_4^\gamma}=K^\gamma, \quad (\gamma=1,2,3,4) \tag{13}$$

ここにK^γは重み関数であり，η_α^γは次式で与えられる。

$$\eta_1^\gamma=-\begin{vmatrix}\Gamma_{14}^\gamma & \Gamma_{12}^\gamma & \Gamma_{13}^\gamma\\ \Gamma_{24}^\gamma & \Gamma_{22}^\gamma & \Gamma_{23}^\gamma\\ \Gamma_{34}^\gamma & \Gamma_{23}^\gamma & \Gamma_{33}^\gamma\end{vmatrix}, \quad \eta_2^\gamma=-\begin{vmatrix}\Gamma_{11}^\gamma & \Gamma_{14}^\gamma & \Gamma_{13}^\gamma\\ \Gamma_{12}^\gamma & \Gamma_{24}^\gamma & \Gamma_{23}^\gamma\\ \Gamma_{13}^\gamma & \Gamma_{34}^\gamma & \Gamma_{33}^\gamma\end{vmatrix},$$
$$\eta_3^\gamma=-\begin{vmatrix}\Gamma_{11}^\gamma & \Gamma_{12}^\gamma & \Gamma_{14}^\gamma\\ \Gamma_{12}^\gamma & \Gamma_{22}^\gamma & \Gamma_{24}^\gamma\\ \Gamma_{13}^\gamma & \Gamma_{23}^\gamma & \Gamma_{34}^\gamma\end{vmatrix}, \quad \eta_4^\gamma=\begin{vmatrix}\Gamma_{11}^\gamma & \Gamma_{12}^\gamma & \Gamma_{13}^\gamma\\ \Gamma_{12}^\gamma & \Gamma_{22}^\gamma & \Gamma_{23}^\gamma\\ \Gamma_{13}^\gamma & \Gamma_{23}^\gamma & \Gamma_{33}^\gamma\end{vmatrix}. \tag{14}$$

無限に薄い完全導体で覆われた結晶表面($x_3=0$)で応力及び静電ポテンシャルが零という条件より，次の境界条件が得られる。

$$\tau_{3j}\big|_{x_3=0}=c_{3jkl}\partial_l u_k+e_{k3j}\partial_k u_4\big|_{x_3=0}=0, \quad (j=1,2,3) \tag{15}$$

$$\phi\big|_{x_3=0}=0 \tag{16}$$

境界条件を満足する式を，$x_3\geq 0$に対して次のように仮定する。

$$(u_1,u_2,u_3,u_4)=\sum_{\gamma=1}^{4}(\eta_1^\gamma,\eta_2^\gamma,\eta_3^\gamma,\eta_4^\gamma)K^\gamma\exp\{-q_\gamma x_3+i(k_1x_1+k_2x_2-\omega t)\}. \tag{17}$$

式(17)を境界条件式(15),(16)に代入すると，次式が得られる。

$$\sum_{\gamma=1}^{4} f_\alpha^\gamma K^\gamma=0, \quad (\alpha=1,2,3,4). \tag{18}$$

ここにf_α^γは次式で与えられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
f_1^\gamma &= i c_{44} \eta_1^\gamma g_\gamma + c_{44} \eta_3^\gamma k_1 + e_{14} \eta_4^\gamma k_2 \ , \\
f_2^\gamma &= i c_{44} \eta_2^\gamma g_\gamma + c_{44} \eta_3^\gamma k_2 + e_{14} \eta_4^\gamma k_1 \ , \\
f_3^\gamma &= i c_{11} \eta_3^\gamma g_\gamma + c_{12} \eta_2^\gamma k_2 + c_{11} \eta_1^\gamma k_1 \ , \\
f_4^\gamma &= \eta_4^\gamma \ .
\end{aligned}
\right\} \qquad (19)
$$

K^γが自明でない解を持つための条件より次式が得られる。

$$
L = \begin{vmatrix}
f_1^1 & f_1^2 & f_1^3 & f_1^4 \\
f_2^1 & f_2^2 & f_2^3 & f_2^4 \\
f_3^1 & f_3^2 & f_3^3 & f_3^4 \\
f_4^1 & f_4^2 & f_4^3 & f_4^4
\end{vmatrix} = 0 \qquad (20)
$$

3. 逆速度面のガウス曲率の導出

k_1-k_2平面での式(20)で与えられる実数曲線は，結晶表面を無限に薄い完全導体で覆ったZ-cutの半無限圧電Cubic結晶表面上を伝搬する圧電弾性表面波の逆速度面を表わしている。そのとき文献[1]により，圧電弾性表面波の逆速度面のガウス曲率λは，次式で与えられる。

$$
\lambda = \frac{L_1^2 L_{22} - 2 L_1 L_2 L_{12} + L_2^2 L_{11}}{(L_1^2 + L_2^2)^{3/2}} \qquad (21)
$$

ここに

$$
L_j = \partial L / \partial k_j \qquad (22)
$$

$$
L_{ij} = \partial^2 L / \partial k_i \partial k_j \qquad (23)
$$

ここで，式(22)と(23)において，減衰定数g_γもk_1とk_2の関数なので，k_1とk_2に関して偏微分しなければならない。そこで，g_γのk_1とk_2に関する偏微分を，式(11)を用いて，陰関数の定理[5]より以下のように求める。

$$\partial g_\gamma/\partial k_1 = -(\partial D^\gamma/\partial k_1)/(\partial D^\gamma/\partial g_\gamma) \tag{24}$$

$$\partial g_\gamma/\partial k_2 = -(\partial D^\gamma/\partial k_2)/(\partial D^\gamma/\partial g_\gamma) \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 g_\gamma}{\partial k_1^2} = -\left[\frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial k_1^2} + 2\frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial k_1 \partial g_\gamma}\left(\frac{\partial g_\gamma}{\partial k_1}\right) + \frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial g_\gamma^2}\left(\frac{\partial g_\gamma}{\partial k_1}\right)^2\right] \Big/ \left(\frac{\partial D^\gamma}{\partial g_\gamma}\right) \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 g_\gamma}{\partial k_2^2} = -\left[\frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial k_2^2} + 2\frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial k_2 \partial g_\gamma}\left(\frac{\partial g_\gamma}{\partial k_2}\right) + \frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial g_\gamma^2}\left(\frac{\partial g_\gamma}{\partial k_2}\right)^2\right] \Big/ \left(\frac{\partial D^\gamma}{\partial g_\gamma}\right) \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 g_\gamma}{\partial k_1 \partial k_2} = -\left[\frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial k_1 \partial k_2} + \frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial k_1 \partial g_\gamma}\left(\frac{\partial g_\gamma}{\partial k_2}\right) + \frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial k_2 \partial g_\gamma}\left(\frac{\partial g_\gamma}{\partial k_1}\right) + \frac{\partial^2 D^\gamma}{\partial g_\gamma^2}\left(\frac{\partial g_\gamma}{\partial k_1}\right)\left(\frac{\partial g_\gamma}{\partial k_2}\right)\right] \Big/ \left(\frac{\partial D^\gamma}{\partial g_\gamma}\right). \tag{28}$$

4. 数値計算

ここでは，結晶表面を無限に薄い完全導体で覆ったZ-cutの半無限圧電Cubic結晶ZnSの表面を伝搬するレイリー波型の圧電弾性表面波に対する数値計算例を示す。結晶定数は文献[6]に従う。

図1には，圧電弾性表面波の周波数$f=1\,GHz$のときの逆速度面を示した。文献[3]で議論したように，ZnSに対する逆速度面は大きく湾曲している。

図2には，図1に示した逆速度面に対してのガウス曲率を，式(21)を用いて計算した結果を示した。横軸は，圧電弾性表面波の位相伝搬角θである。図

1に見られるように，逆速度面は対称性を持っているので，図2には0°から45°までのθの範囲のみを示した。図2において，曲率はθが0°～18.5°そして28.7°～45°の範囲で正であり，18.5°～28.7°の範囲で負である。そして，逆速度面の湾曲点に対応するθ=18.5°と28.7°で，曲率は零になっている。

また図3には，位相伝搬角θとエネルギー伝搬角φとのずれ角εを示した。図3より，θ=18.5°と28.7°は，それぞれφ=21.3°と-5.2°に対応していることがわかる。よって，先の論文[1]で示された結論から，結晶表面を無限に薄い完全導体で覆ったZ-cutの

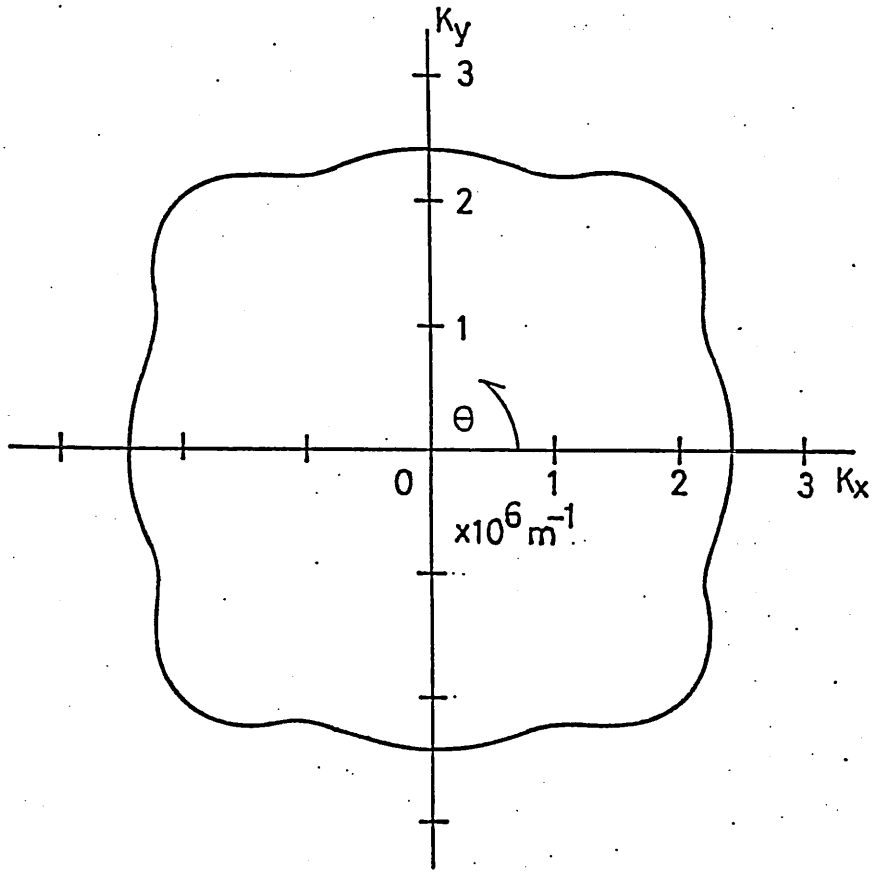


図1　ZnSに対する逆速度面（f=1GHz）.

ZnS結晶内部に置かれた点荷重及び点電荷によって，$\varphi = 21.3°$と$-5.2°$のエネルギー伝搬方向に放射された圧電弾性表面波の振幅は，その伝搬距離rに対して，$O(r^{-1/3})$で減衰し，他の伝搬方向での$O(r^{-1/2})$の減衰に較べ，減衰の割合が遅くなることがわかる。

5. エネルギー速度面の交差現象との関係

文献[3]で筆者らは，結晶表面を無限に薄い完全導体で覆ったZ-cutのZnS結晶表面上を伝搬する圧電弾性表面波のエネルギー速度面は，交差現象を起

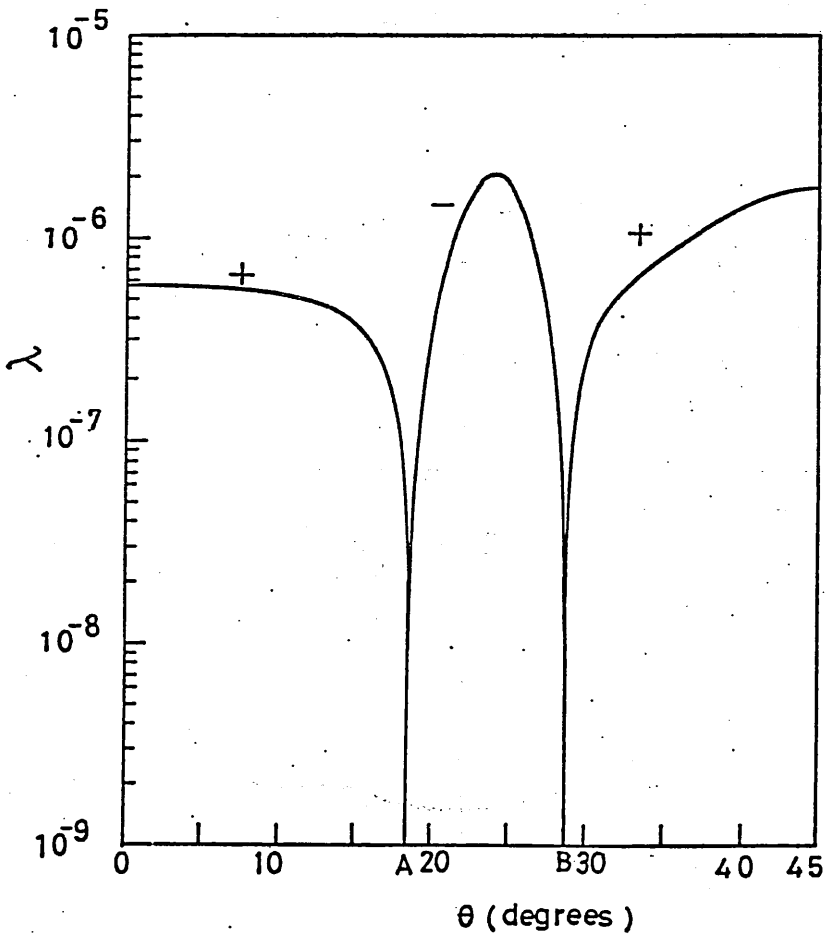


図2　ZnSに対する逆速度面の曲率，λ．

すことを示した。この現象は，異なった位相速度と変位ベクトルを持った幾つかの圧電弾性表面波が，同じ一つのエネルギー伝搬方向に伝搬することを示している。図4には，文献[3]で記述された方法を用いて得たZnSに対するエネルギー速度面を示した。そのとき，逆速度面の曲率の零点に対応するエネルギー伝搬方向 $\phi = 21.3°$ と $-5.2°$ は，エネルギー速度面の先点の方向に対応しているということが数値的にわかる。この現象は，一般の異方性波動に対して，文献[2]に理論的に証明されている。

ここで，逆速度面の曲率が零になるということ，

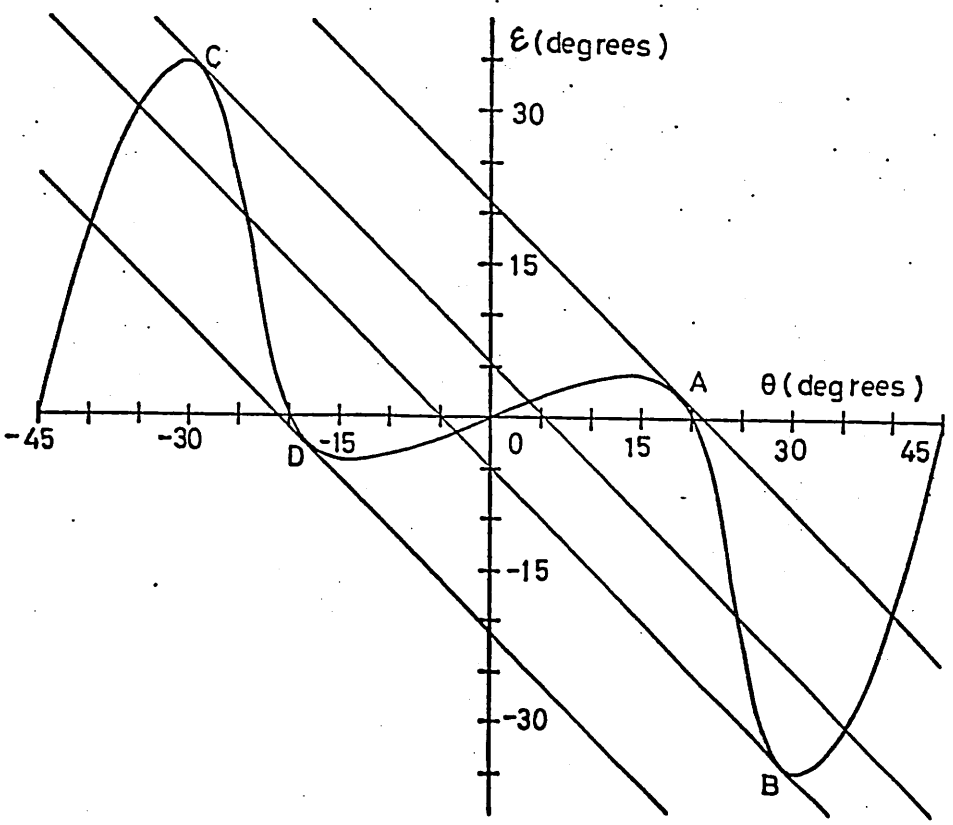


図3　位相伝搬角 θ とエネルギー伝搬角 φ のずれ角 ε

及び，エネルギー速度面が交差現象を起すということを，位相伝搬角θとエネルギー伝搬角φのずれ角εと関係付けて明確にする。

ずれ角εは定義より次式で与えられる。

$$\varepsilon(\theta) = \varphi(\theta) - \theta \qquad (29)$$

φを定数とおいたときに式(29)で与えられる直線を図3で引けば，この直線とε曲線との交点でのθ座標は，エネルギー伝搬角がφであるところの位相伝搬角を示している。また，式(29)で与えられる直線が，ε曲線と幾つかの点で交わる場合には，異なった位相速度と変位ベクトルを持った幾つかの圧電弾

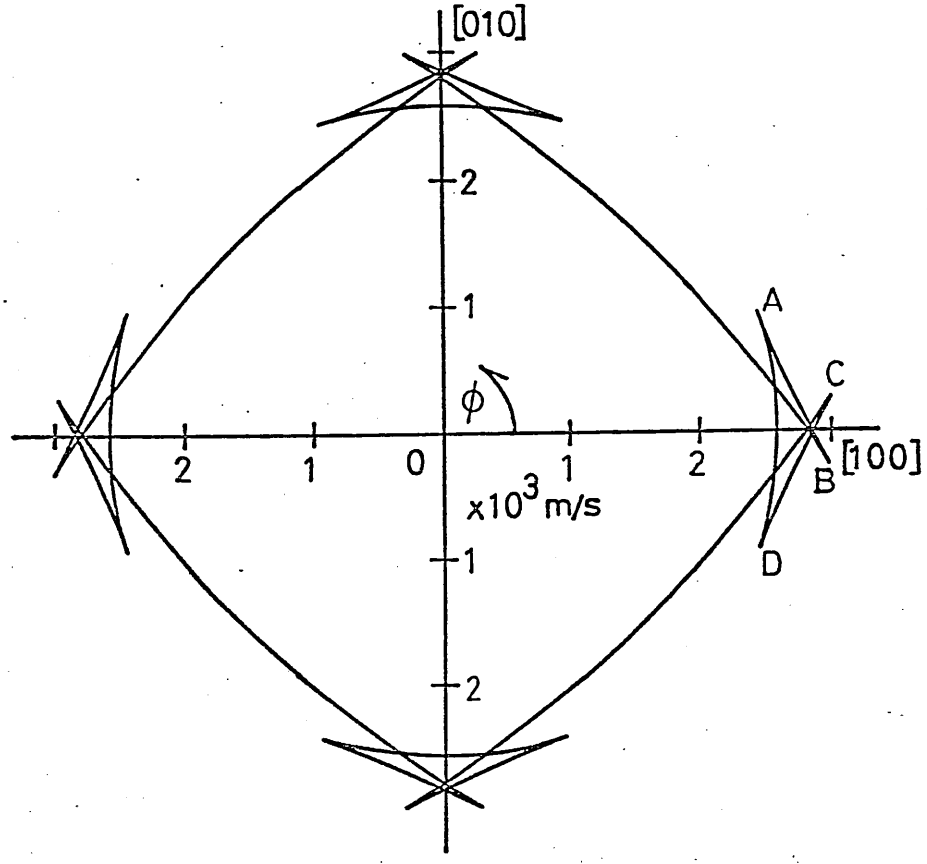


図4　ZnSに対するエネルギー速度面

性表面表面波が，同じエネルギー伝搬方向に進むということを示しており，すなわち，エネルギー速度面が交差現象を起していることを示している。

逆速度面の法線方向はエネルギー伝搬方向に対応しているので，エネルギー伝搬角φは，逆速度面の曲率が零の点で停留値をとる。すなわち

$$d\varphi/d\theta = 0. \tag{30}$$

それで，式(29)の両辺をθで微分し，式(30)を用いると次式が得られる。

$$d\varepsilon/d\theta = -1. \tag{31}$$

よって，逆速度面の曲率が零の点は，ε曲線の接線の傾きが-1の点に対応していることがわかる。

以上に述べたことを図2，3，4を用いて表わすと，図2での逆速度面の曲率が零の点A，Bは，それぞれ図3でのA，B，そして図4でのA，Bに対応しているということになる。

6. むすび

本報告では，結晶表面を無限に薄い完全導体で覆ったZ-cutの半無限圧電Cubic結晶表面上を伝搬する圧電弾性表面波の逆速度面のガウス曲率の計算式を導出し，ZnS結晶に対して数値計算例を示した。そして，逆速度面の曲率の零になる点が，エネルギー速度面の先点に対応していることを数値的に示した。さらに，それらの点が，ε曲線の接線の傾きが-1の

点に対応していることも示した。

また，5節の最後の議論は，ε曲線から逆に，エネルギー速度面の交差現象の性質及び，逆速度面の曲率の零になる点を調べられることを示したという点で有用であると思われる。

文献

(1) H. Shirasaki and T. Makimoto, "Asymptotic expressions for piezoelectric surface waves excited by the buried mechanical and electrical point sources", J. Appl. Phys. (to be published).

(2) M.J. Lighthill, "Anisotropic wave motions", Phil. Trans. Roy. Soc. London, 252A, 397 (1960).

(3) H. Shirasaki and T. Makimoto, "Energy propagation properties of piezoelectric surface waves on cubic crystals", J. Appl. Phys. (to be published).

(4) See, for example, J.J. Campbell and W.R. Jones, "A method for estimating optimal crystal cuts and propagation directions for excitation of piezoelectric surface waves", IEEE Trans. Sonics Ultrason. SU-15, 209 (1968)

(5) 寺沢寛一，"自然科学者のための数学概論"，岩波書店(昭44)，p.19.

(6) D. Berlinecourt, H. Jaffe, and L.R. Shiozawa, "Electroelastic properties of the sulfides, selenides, and tellurides of zinc and cadminium", Phys. Rev. 129, 1009 (1963).

輻射科学研究会資料

電子ビーム偏向用多間隙空胴共振器

藤沢和男
松本真明
岩井　通
山本幸男
(大阪大学・基礎工学部)

1977年12月9日

電子ビーム偏向用多間隙空胴共振器

A Multy-gap Cavity for deflecting Electron Beams

藤澤和男　松本真明　岩井通　山本幸男
Kazuo FUJISAWA　Motoaki MATSUMOTO　Tōru IWAI　Yukio YAMAMOTO
大阪大学　基礎工学部
Faculty of Engineering Science, Osaka University

1. はしがき

最近ピコ秒電子ビームパルスの発生とか，光パルス測定用のストリークカメラなどで，電子ビームをマイクロ波で偏向させる必要が生じて来た。[1),2)] 我々はこのような要求に応えるため，偏向効率の良い多間隙空胴を開発したので茲に報告する。この空胴共振器は前に報告したもの[2)]と同じく，長短2種類の細隙を交互に多数個あけた導体板を2枚，狭間隔を保って配置し，その間に多数個の偏向間隙を形成させたものである。今回はこの空胴の振動モードについてより詳しく調べ，偏向特性との相関を明らかにした。また間隙数として4間隙のものと6間隙のものを10GHz帯で試作し，後者については偏向感度が大幅に増大するという結果を得た。

2. 偏向空胴の共振特性と間隙電界分布

図1に偏向空胴の構成を示す。図に示すのは4間隙のものである。空胴の上下壁面に接する細隙の幅は，壁面が対称面になることを考慮して，普通のものの$\frac{1}{2}$に選んである。この偏向空胴の共振の基本構成要素は，図2に示すような導体板上の長短2個の隣接細隙対である。まずこれについて以下に述べる。

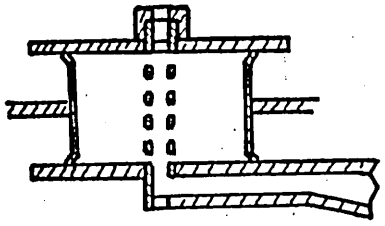


図1　偏向空胴の構成図

2・1 隣接細隙対の共振

図2において各細隙の中央を給電点と考え，これより各細隙を見た入力アドミタンスを求めると次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= -j2Y_0\cot\frac{\pi l_1}{\lambda} \\ Y_2 &= -j2Y_0\cot\frac{\pi l_2}{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

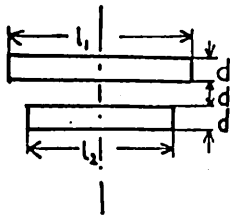


図2　隣接細隙対

ここでY_0は細隙の特性アドミタンスである。この細隙対の共振条件は次式で与えられる。

$$Y_1 + Y_2 = 0 \qquad (2)$$

そして共振波長λ_0は次式を満足する。

$$l_2 \lesssim \frac{1}{2}\lambda_0 \lesssim l_1 \qquad (3)$$

この時，式(1)は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &\simeq j\frac{2\pi Y_0}{\lambda_0}\left(l_1 - \frac{1}{2}\lambda_0\right) \\ Y_2 &\simeq j\frac{2\pi Y_0}{\lambda_0}\left(l_2 - \frac{1}{2}\lambda_0\right) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

上式を式(2)に代入して次式を得る。

$$\lambda_0 \simeq l_1 + l_2 \qquad (5)$$

実際には細隙の幅が有限であるため，電磁界は細隙の両端の外側に漏れて出している。この現象は等価的に細隙長を長くする効果を生じ，共振波長は式(5)で与えられる値よりも長くなる。次の実験式は比較的良く合う。

$$\lambda_0 \simeq l_1 + l_2 + \frac{1}{2}d \qquad (6)$$

式(3)および(4)より Y_1 は正のサセプタンスを持ち，容量性アドミタンスとなることが分る。また Y_2 は負のサセプタンスを持つ誘導性アドミタンスとなる。そしてこの両者が1つの共振素子を形成する。

2・2 試作4間隙空胴

空胴の主要部である細隙群のあけられた対向導体板の部分を図3に示す。細隙の中で両端の空胴壁面に接する2つの長細隙は前述したようにその幅が $\frac{1}{2}d$ に選ばれており，それに伴って式(6)を考慮してその長さ l_1' はやや長くとってある。

Xバンドの試作空胴の諸元は次の値をとる。

$l_1 = 15.7$ mm
$l_2 = 13.7$ mm
$l_1' = 16.0$ mm
$d = 1.28$ mm
$2w = 1.60$ mm

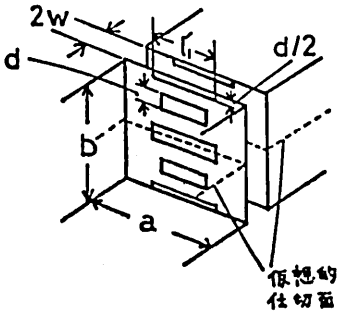


図3　4間隙空胴の主要部

導体板厚 = 0.5 mm, $a = 22.9$ mm, $b = 10.2$ mm

このような対向導体板が方形導波管を横切って挿入され，距離 L の所で両端を短絡されて方形空胴共振器が形成されている。対向導体板の両側は互いに逆位相に励振され，対向導体板の間に形成される間隙群に横方向の偏向電界を生ずる。著者の一人が以前に開発したミリ波磁控管"ラグートロン"[3]では対向導体板の両側の空胴部は同位相に励振され，両板間の作用空間には縦方向の速度変調電界を生じる点で異っている。

この空胴の空胴長 L を変えて共振周波数を測定した所，図4に示すような曲線を得た。$L \simeq 0$ および $L \simeq \frac{1}{2}\lambda_g \simeq 20$ mm の近傍を除いて周波数変化は小さい。このことは共振が殆んど細隙対の共振であることが分る。導波管空胴部は入力導波管との整合に関係し，各細隙対の相互結合に影響を及ぼす。

図5は入力導波管から見たこの空胴の反射特性を示す。図6は対向導体板の間の作用空間中を銅円板プローブを移動させた時の共振周波数の変化を示す。銅円板の寸法は直径 0.66 mm，厚さ 0.2 mm である。プローブの置かれた位置における横方向電界 E_x と共振周波数の減少分 Δf とは次式で結ばれる。

$$\Delta f \propto E_x^2 \qquad (7)$$

従って図6より偏向電界 E_x の相対分布を求めることが出来る。この Δf の最大値は間隙の中心で生じているので，Δf が偏向電界 E_x に対応していることが確認された。またこの図から上組の細隙対に属する2つの間隙の偏向電界はほぼ等振幅であり（位相は逆），この上組の細隙対を含む領域が1つのセクションを構成していることが分る。従って4間隙空胴は図3に示すように，仮想的な仕切面で2つのセクションに分けて考えることが出来る。そして空胴長 L を変えることにより，この2つのセクションの結合状態が変化し，図6に見られるように偏向電界分布に色々なパターンを生じる。

このような考え方を確め，より望ましい偏向電界分布を実現するために，図3の仮想的な仕切面の位置に実際に薄い銅板（22.9×10.0×0.1mm）を挿入した空胴を試作し実験を行った。図7は空胴長 L に対する共振周波数の変化を示す。また図8は入力導波管から見たその反射特性を示す。図9は前と同様に作用空間に銅円板プローブを挿入した時の共振周波数の変化を示す。図9と図6とを比べると，仕切板の挿入により偏向電界分布のパターンが改善されていることが分る。後述するように，偏向感度も実際に向上している。

2・3 試作6間隙空胴

図3の4間隙空胴と全く同様な構造で，単に細隙数だけを増した6間隙空胴を試作した。その諸元は次の通りである。

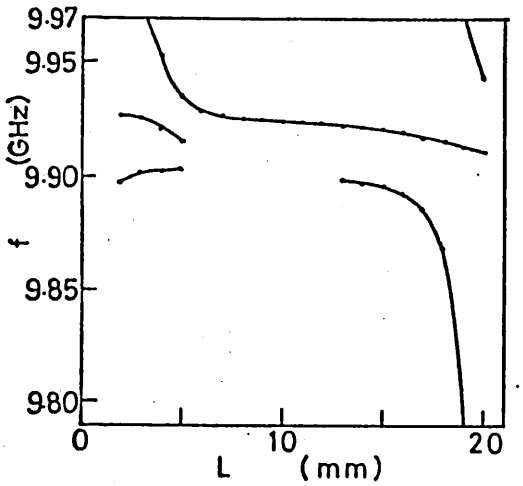
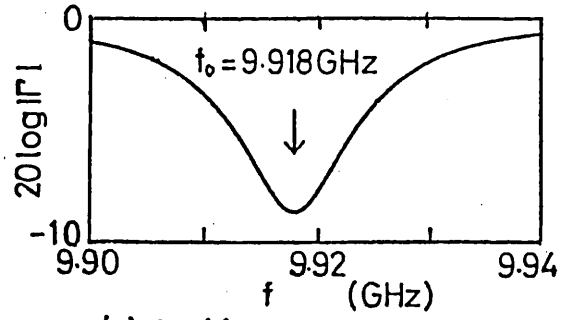
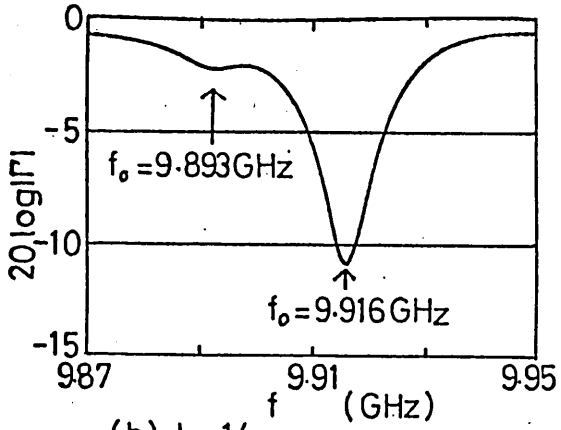


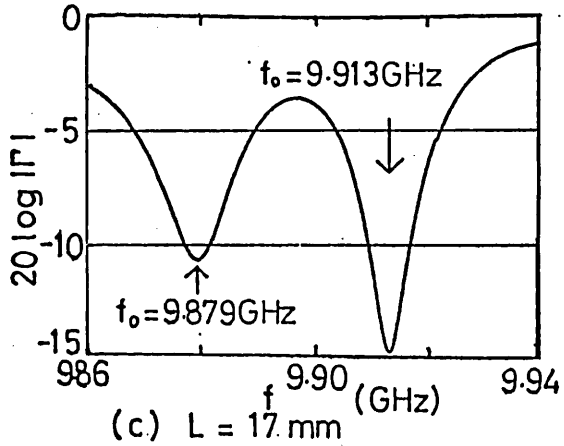
図4　4間隙空胴の共振周波数



(a) L = 11 mm

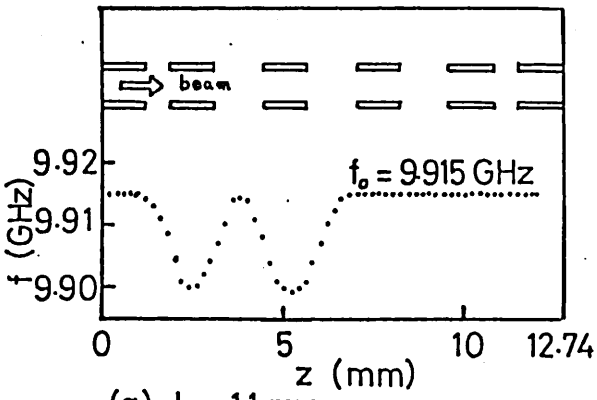


(b) L = 14 mm

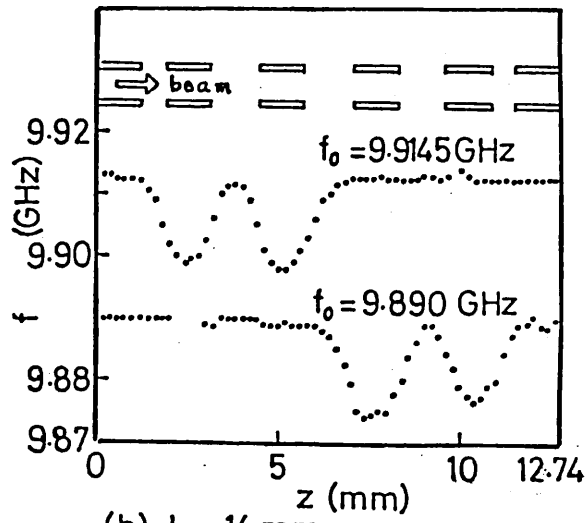


(c) L = 17 mm

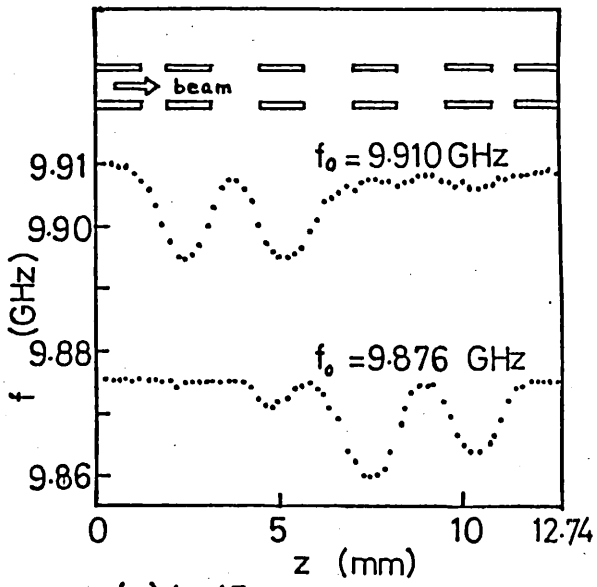
図5　4間隙空胴の入力端の反射特性



(a) L = 11 mm



(b) L = 14 mm



(c) L = 17 mm

図6　4間隙空胴の銅円板ブルーブ挿入による共振周波数の変化

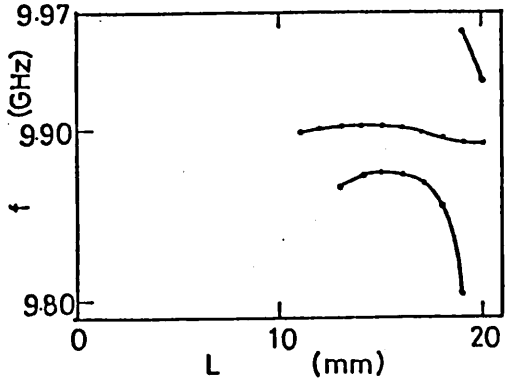
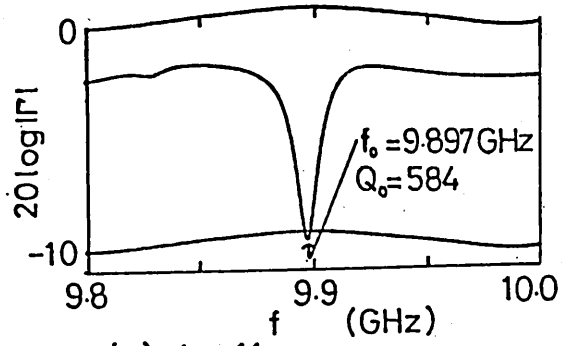
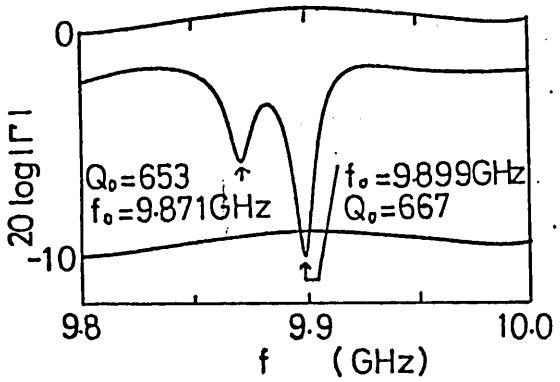


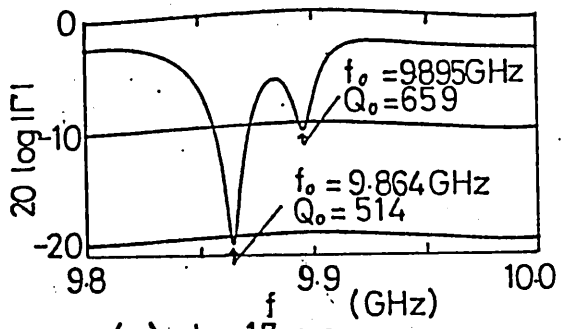
図7 仕切板付4間隙空胴の共振周波数



(a) L = 11 mm

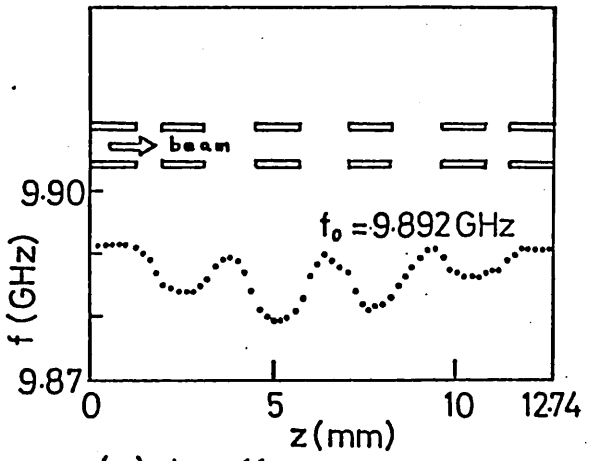


(b) L = 14 mm

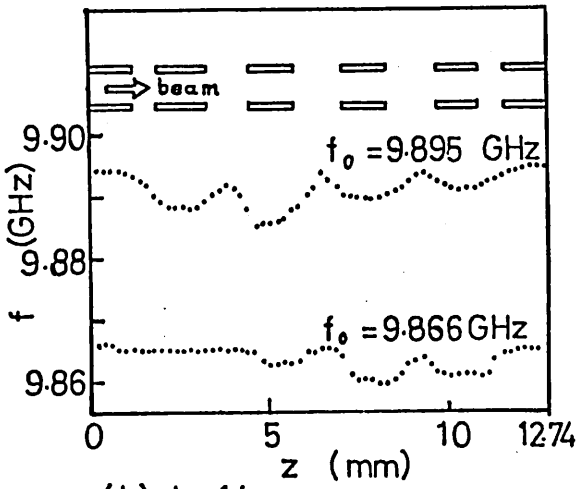


(c) L = 17 mm

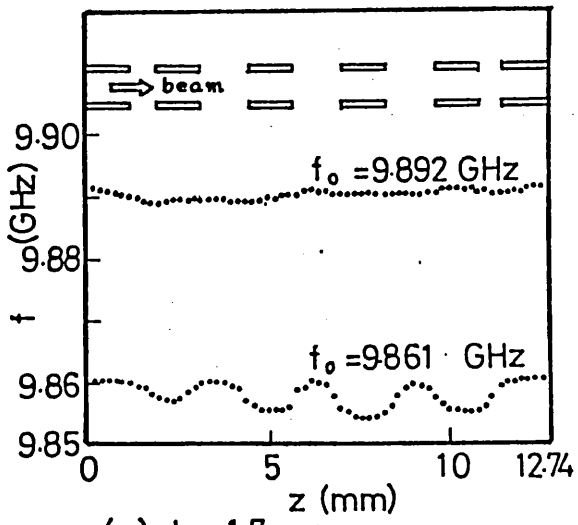
図8 仕切板付4間隙空胴の入力端の反射特性.



(a) L = 11 mm



(b) L = 14 mm



(c) L = 17 mm

図9 仕切板付4間隙空胴の銅円板プローブ挿入による共振周波数の変化

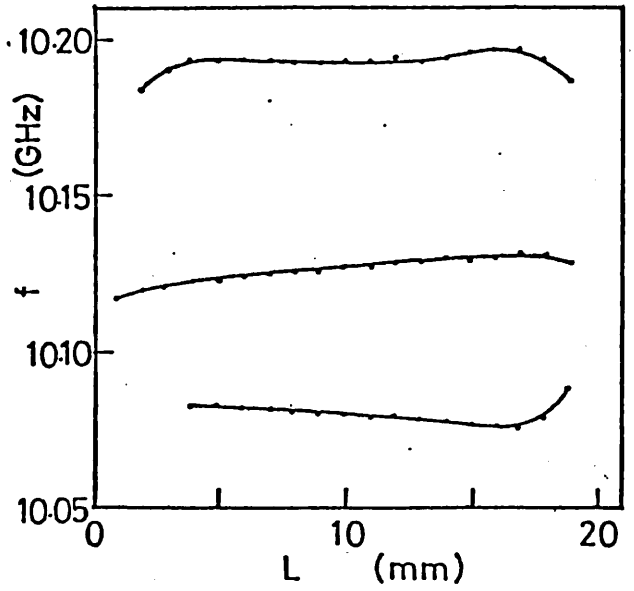


図10　6間隙空胴の共振周波数

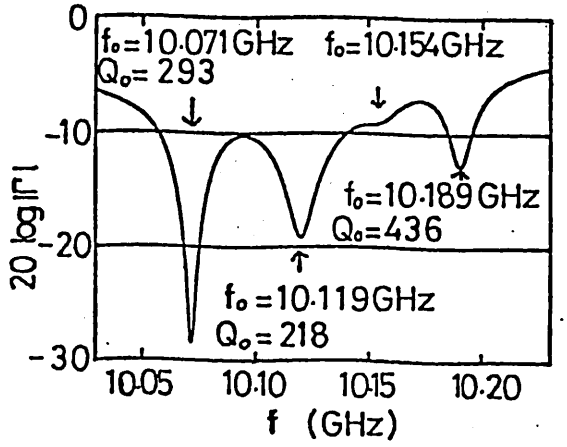


図11　6間隙空胴の入力端の反射特性

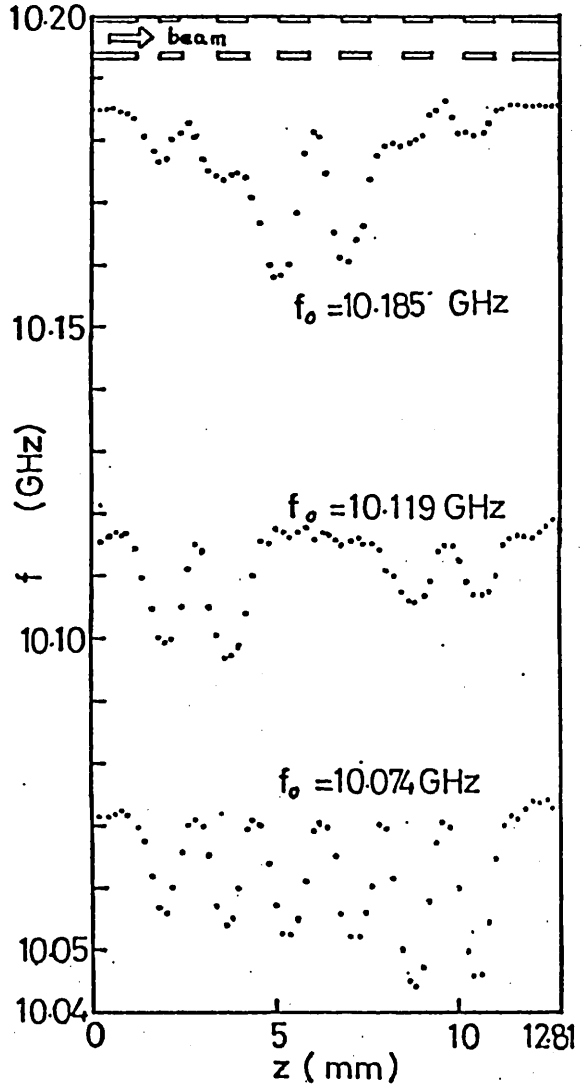


図12　6間隙空胴の銅円板プルーブ挿入による共振周波数の変化

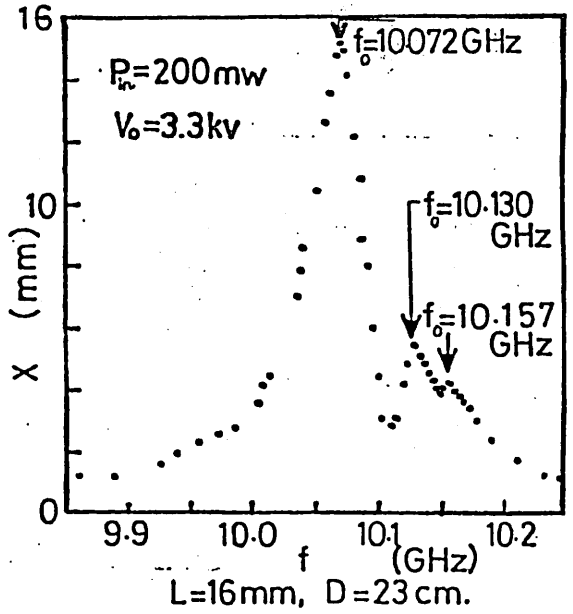
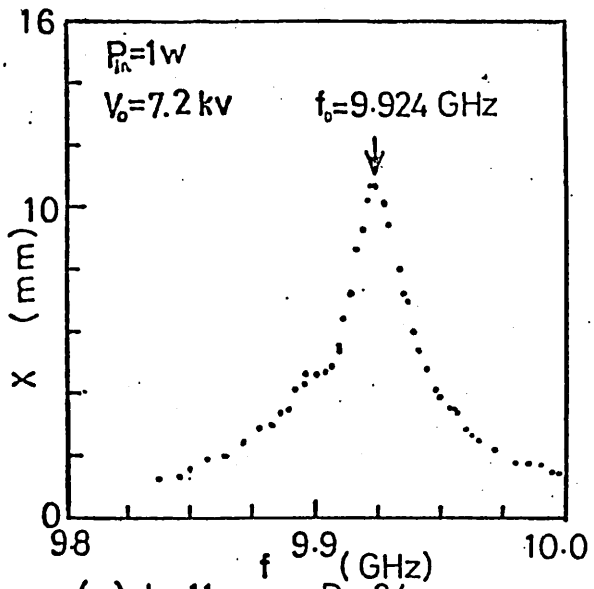
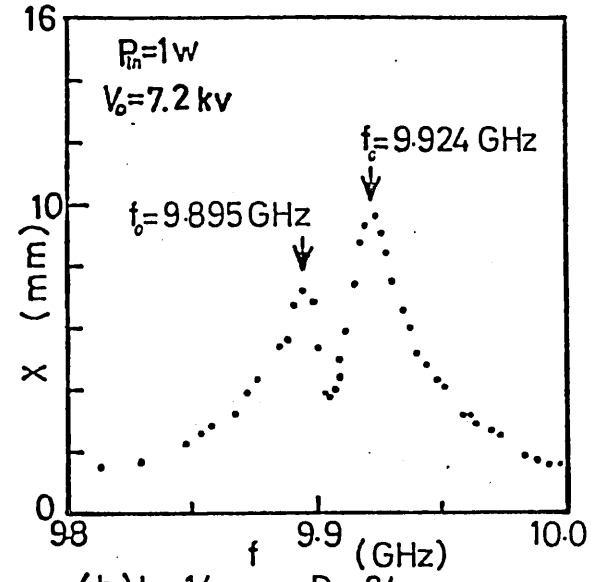


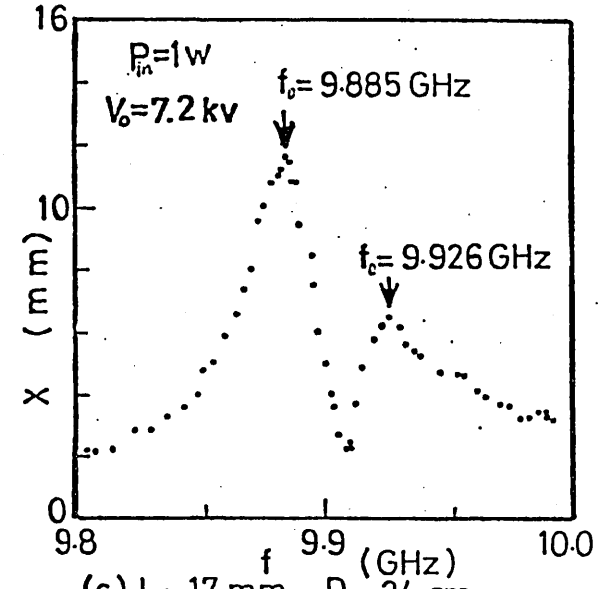
図15　6間隙空胴の電子ビーム偏向特性



(a) L=11 mm, D=24 cm.

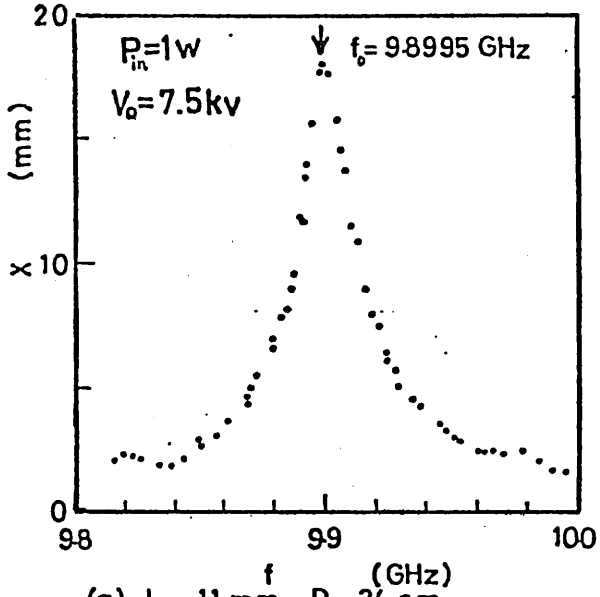


(b) L=14 mm, D=24 cm.

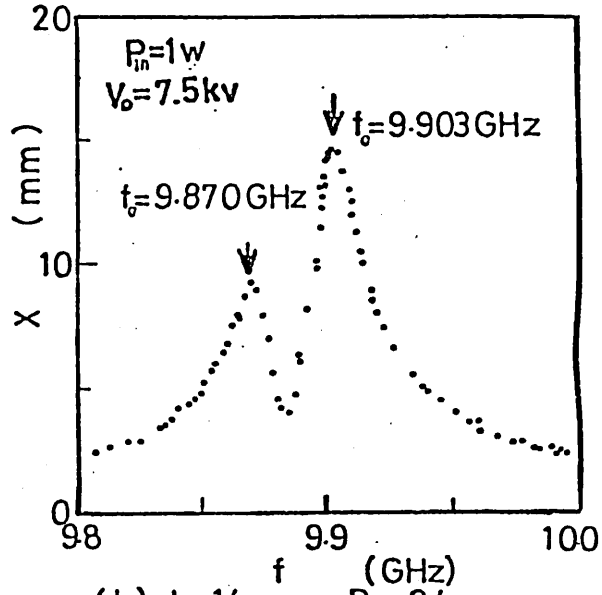


(c) L=17 mm, D=24 cm.

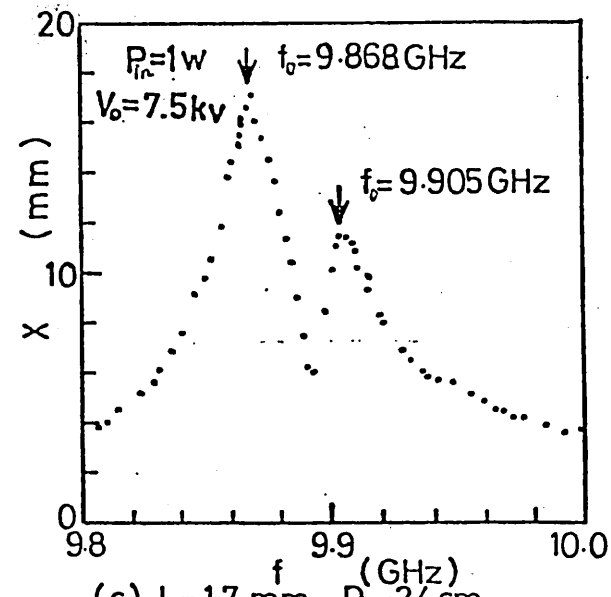
図13　4間隙空胴の電子ビーム偏向特性



(a) L=11 mm, D=24 cm.



(b) L=14 mm, D=24 cm.



(c) L=17 mm, D=24 cm.

図14　仕切板付4間隙空胴の偏向特性

$l_1 = 15.8$ mm, $l_2 = 13.8$ mm, $l_1' = 16.0$ mm
$d = 0.85$ mm, $2w = 1.06$ mm, 導体板厚 = 0.33 mm。（d, $2w$, 板厚は前の場合の $\frac{2}{3}$）

この空胴の1対共振周波数の変化を図10に示す。また入力導波管から見た反射特性を図11に示す。図12には前と同じ銅円板プルーブを挿入した時の共振周波数の変化を示す。この場合は明らかに3つのモードが観測されている。この空胴はそれぞれ1組の細隙対を含む3つのセクションからなると考えることが出来，この3つのセクションの相互結合の相異により3つの共振モードを生じていると考えられる。この中で最低周波数のモードでは各セクションが同位相で励振されており，偏向電界分布としては最も望ましい形になっている。事実，この場合が最も偏向感度が良かった。これに対して最高周波数のモードでは，各セクションの振動の位相関係が電子ビームに対する偏向を打消すようになっているせいか，$|E_x|$ の分布が存在しているにもかかわらず，実際の偏向感度は0であった。

3. 試作空胴の電子ビーム偏向特性

前節でコールド・テストを行った3つの空胴を用い，電子ビームの偏向実験を行った。ここでまず偏向感度を定義しておく。空胴の中心より螢光面までの距離を D，螢光面上のビームスポットの偏向振幅を X，空胴へのマイクロ波入射電力を P_{in} として，偏向感度 S を次式のように定義する。

$$S = \frac{X/D}{\sqrt{P_{in}}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{P_{in}}} \simeq \frac{\theta}{\sqrt{P_{in}}} \quad \left[\frac{\text{rad.}}{\sqrt{\text{W}}}\right] \tag{8}$$

いま，電子ビームの直流速度を v_0，空胴出口における偏向速度を v_x とすれば

$$\frac{v_x}{v_0} = S\sqrt{P_{in}} = \tan\theta \simeq \theta \tag{9}$$

図13は4間隙空胴，図14は仕切板付4間隙空胴，図15は6間隙空胴の偏向特性を示す。それぞれの共振モードに対応して，原則的には偏向感度の山が生じている。しかし，各間隙電界の位相が不良なものは偏向感度が非常に低いか，場合によっては0になる。前にも言及したように6間隙空胴の最も周波数の高い共振モードがそれに該当する。最も偏向感度が良いのは，空胴の各セクションが同位相に励振されて，その励振振幅もほぼ同程度の場合である。表1に各共振モードの偏向感度を表示する。

表1 試作空胴の各共振モードの偏向感度

4間隙空胴			
L(mm)	f_0(GHz)	$S \times 10^2$ (rad/√W) 実測値	計算値
11	9.918	2.17	
14	9.893	1.49	
	9.916	1.99	
17	9.879	2.40	
	9.913	1.35	

仕切板付4間隙空胴			
L(mm)	f_0(GHz)	$S \times 10^2$ (rad/√W) 実測値	計算値
11	9.897	3.73	3.09
14	9.871	1.94	2.87
	9.899	3.07	3.16
17	9.864	3.48	2.87
	9.895	2.38	3.14

6間隙空胴			
L(mm)	f_0(GHz)	$S \times 10^2$ (rad/√W) 実測値	計算値
16	10.071	7.32	6.08
	10.119	2.60	
	10.189	0	

4. 偏向感度の計算

ここでは，空胴への入射電力より偏向電界を求め，それより偏向感度を計算する近似式を求める。

4・1 間隙電界分布の計算

図16(a)に1組の細隙対を含む空胴の1セクションの間隙電界分布を示す。この電界に垂直な2つの直交する対称面で仕切られた $\frac{1}{4}$ の領域を考え，この対称面を導体壁として作った空胴を同図(b)に示す。

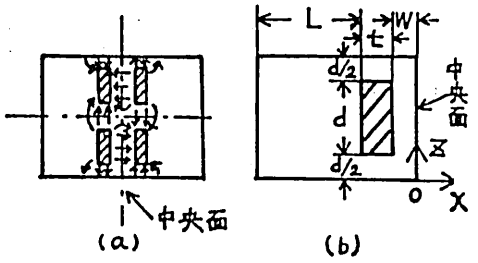


図16 1組の細隙対を含む空胴セクション

間隙附近の電極寸法は波長に比べてはるかに小さいから，間隙電界分布に対して準静的近似が使える。そこで図1b (b) のような2次元の電極配置の静電場を数値解析により求めた。寸法諸元を次のように選んだ。

$d = 1.28$ mm, $w = 0.8$ mm, $t = 0.48$ mm, $L + t + w = 5.00$ mm

この時の中央面（xz面）上の偏向電界 E_x の分布を図17に示す。同図で $E_0 = V_g / w$ は間隙を無限大平行平板とした時の直流電界の値である。この分布は正弦波に非常に近い。

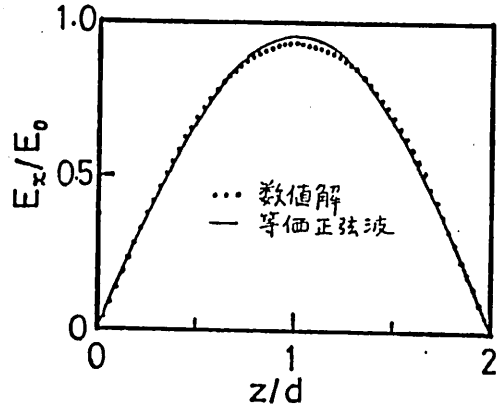


図17　作用空間の軸上の偏向電界分布

そこで，同じ偏向感度を与える等価正弦波分布を作ることができる。数値解析の結果定めた等価正弦波は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} E_x(z) &= E_m \sin\left(\frac{\pi z}{2d}\right), \\ E_m &= M E_0, \quad M = 0.951 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

この等価正弦波分布を図17に実線の曲線として与えている。

4・2　間隙の等価静電容量と空胴の蓄積エネルギー

図1b (b) に示す空胴は，断面が同図で与えられる角形の同軸線路が両端で短絡され，半波長の定在波分布を生じているものと見做すことが出来る。この同軸線路の単位長当りの静電容量は数値解析の結果，次の値をとる。

$$C_0 = 5.280 \times 10^{-11} \quad [F/m] \qquad (11)$$

そして，その特性インピーダンスは次式で与えられる。

$$Z_0 = \frac{1}{cC_0} = 63.175 \quad [\Omega] \qquad (12)$$

ここで c は光速度である。

さて，図1b (b) の空胴の蓄積エネルギーの時間平均値は次式で与えられる。

$$W_1 = \frac{1}{2} C_0 \int_0^{\lambda_0/2} V_g^2 \sin^2 \frac{2\pi y}{\lambda_0}\, dy = \frac{1}{8} C_0 V_g^2 \lambda_0$$

従って図1b (a) に示す空胴の1セクションの蓄積エネルギーの時間平均値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} W &= 4 W_1 = \frac{1}{2} C_0 V_g^2 \lambda_0 \\ &= \frac{1}{2} C_0 \lambda_0 \frac{w^2}{M^2} E_m^2 \end{aligned} \qquad (13)$$

$$E_m = \frac{M}{w}\sqrt{\frac{2W}{C_0\lambda_0}} = \frac{M}{w}\sqrt{\frac{w Z_0 W}{\pi}} \qquad (14)$$

これによって空胴の1セクションの蓄積エネルギーの時間平均値と偏向電界の最大値とが結びつけられた。

4・3　偏向感度の計算

ここでは式(10)を用いて，空胴の1セクション当りの偏向感度の計算式を導く。

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_x}{v_0} &= \frac{1}{v_0}\frac{eE_m}{m}\int_{t_0}^{t} \sin\frac{\pi z}{2d} \sin\omega t\, dt \\ z &= v_0(t - t_0) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

ここで，t_0 は電子ビームの入射時刻，t はこのセクションを出る時刻である。いま，$\theta = \omega t$，$\theta_0 = \omega t_0$ とおき，上式の積分を遂行する。

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{v_0} &= \frac{eE_m}{m v_0^2}\int_0^{4d} \sin\frac{\pi z}{2d} \sin\left(\frac{\omega z}{v_0} + \theta_0\right) dz \\ &= \frac{eE_m}{2mv_0^2}\,\frac{\pi/d}{(\omega/v_0)^2 - (\pi/2d)^2}\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right) \end{aligned}$$

ここで

$$\theta = \theta_0 + 4\omega d/v_0, \quad 4\omega d/v_0 = 2\pi + \Delta\theta$$

$$\Delta\theta/2\pi \ll 1$$

とおいて，次式を得る。

$$\frac{v_x}{v_0} \simeq \frac{2eE_m d}{m v_0^2}\cos\left(\theta_0 + \frac{1}{2}\Delta\theta\right) = \frac{E_m d}{V_0}\cos\left(\theta_0 + \frac{1}{2}\Delta\theta\right) \qquad (16)$$

ここで $V_0 = m v_0^2/2e$ は電子ビームの直流加速電圧である。

空胴内にこのようなセクションがN個含まれている場合には，各セクションによる偏向速度を加え合せて（各セクションが同位相に励振されている場合）次式を得る。

$$\frac{v_x}{v_0} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{v_x}{v_0}\right)_i = \frac{d}{V_0}\sum_{i=1}^{N} E_{mi}\cos\left[\theta_0+\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta\theta\right] \qquad (17)$$

これより偏向感度が次式のように計算できる。

$$S = \frac{1}{\sqrt{P_{in}}}\frac{v_x}{v_0} = \frac{\sqrt{1-\Gamma^2}}{\sqrt{\omega W/Q_0}}\frac{v_x}{v_0}$$

$$\simeq \sqrt{1-\Gamma^2}\,\frac{d}{w}\,\frac{M}{V_0}\sqrt{\frac{Z_0 Q_0}{\pi}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sqrt{W_i}}{\sqrt{W}}\cos\left[\theta_0+\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta\theta\right] \qquad (18)$$

ここで，Γ は入力導波管から見た空胴の反射係数，Q_0 は空胴の無負荷Q，W は空胴の全蓄積エネルギーで，ΣW_i で与えられる。

上式を用いて3節で述べた空胴の偏向感度を求め，実験値と対比させて表1に示す。空胴の各セクションの励振位相が同位相であるか，または1つのセクションしか励振されていない場合は，上式の計算値は実測値より約17%低かった。これに対して，計算値の方が実測値よりも大きな値を示す場合は各セクションの励振に位相差があるためと考えられる。上記の約17%の誤差は準静的近似で空胴の蓄積エネルギーを計算したためと考えられる。

5. まとめ

今回は導体板上にあけられた長短1組の細隙対を基本構成要素とする4間隙空胴および6間隙空胴について，その共振特性，間隙電界分布，電子ビーム偏向特性を調べ，次のような結論を得た。

i) 空胴の共振の基本となるのは長短1組の細隙対で，その共振波長は近似的に長短両細隙長の和で与えられる。

ii) 4間隙空胴はそれぞれ1組の細隙対を含む2つのセクションからなり，両者の励振位相は空胴長Lによって変化し易く，間隙電界分布の良いものが得られるLの範囲は狭い。これを改善するために，この2つのセクションの境界面に薄い導体の仕切板を挿入すると効果がある。

iii) 6間隙空胴は3つのセクションからなり，励振の位相差の異る3つの振動モードを生ずる。その内で，3つのセクションが同位相で励振されるモードは偏向感度が良い。

iv) 空胴長Lは各セクションの相互結合および入力導波管との整合に関係し，波長可変の効果は一般に小さい。

v) 準静的近似の下に間隙電界分布が求められ，空胴の偏向感度を計算する近似式が導かれた。この式は各セクションが同位相に励振される場合，実測値よりも約17%低い偏向感度の値を与えた。

謝辞　空胴の試作を担当された坂口技官，空胴の入力反射特性測定に便宜を供与された牧本研究室西村助手，測定に協力された4年次学生西田勝紀，沼田克司の両君の方々に深く感謝する次第である。また電子銃を供給された松下電子工業株式会社鈴木弘，山下克之の両氏に厚く御礼申上げる次第である。

なお本研究は昭和49年度三菱財団学術研究助成金によるもので，茲に記して深く謝意を表する。

文献

(1) 森村，松田，裏，"ピコセカンドパルス電子ビームの発生"，信学論文誌 56-B，p.72 (1973-02)

(2) 藤澤，山本，坂井，松本，岩井，"ピコ秒電子ビームパルスの形成と計測"，信学技報 ED 76-108 (1977-02)

(3) K. Fujisawa, "The Ladder tron — A New Millimeter Wave Power Oscillator", IEEE Trans. ED-11, p.381 (1964-08)

輻射科学研究会資料

ブラッグ回折を利用した ピコ秒光カースイッチ

森本朗裕・平尾良昭
小林哲郎・末田正

(大阪大学　基礎工学部)

昭和52年12月9日

於　中央電気クラブ

[1] はじめに

モード同期レーザパルスは，高出力，超短時間という2つの大きな特長を有している。パワーについて言えばガラスレーザあるいはCO_2レーザにおいて出力を増幅することにより数TWという出力が得られているし，パルス幅については色素レーサの受動モード同期によってサブピコ秒というデータもある。[1] モード同期レーザパルスはこの2つの特長を生かして多くの実験・研究に用いられてきた。たとえば，レーザ核融合，非線形光学効果等の研究はその高出力性を利用したものであり，ピコ秒領域での発光・緩和現象等にはその高速性が利用されている。このような光パルスの高速性を利用した実験や計測を行なう場合，観測対象となる現象自体ピコ秒領域の超高速現象であるので，その現象以上の高速で信号を処理する必要がある。信号の多くは光信号であり，光信号をピコ秒でスイッチすることが最も基本的なことである。ピコ秒領域ではゲートに電気信号を用いた光スイッチは使えないので，ピコ秒光パルスをゲート信号とする光－光スイッチが利用されている。

現在発表されている光－光スイッチとしては光カー効果を利用した光カーシャッタ，[2] 可飽和吸収色素の飽和特性を利用したPGOA，[3] 光パルスを一旦ピコ秒の電気信号に変換するパイロエレクトリックスイッチ，[4] シリコンスイッチ[5] などがある。このうち光カーシャッタが原理的に最も高速であり，また広く用いられている。我々は光カーシャッタに用いられ

る媒質のような非線形媒質中で2光波が干渉するとグレーティングが形成されることに注目し，このグレーティングによるブラッグ回折を利用したピコ秒光スイッチ（以下ブラッグ形光カースイッチと呼ぶ）の可能性を検討している。[6] 従来この光励起グレーティングによる回折現象は，媒質の非線形定数や緩和の測定に利用されてきた。[7]~[9] しかし光スイッチとしての利用は考えられていないようである。実験の結果，ブラッグ形光カースイッチの特性は従来の光カーシャッタとくらべても遜色のないものであった。実験に用いたNd：ガラスレーザの特性についてもあわせて述べる。

[2] 光カー媒質を用いたピコ秒光－光スイッチ

等方性である液体や気体でも電界を加えると屈折率に変化が生じ，単軸結晶と同様にふるまう。これが古くから知られているカー効果であり，屈折率変化は加える電界の2乗に比例している。光波電界によって引き起こされるカー効果を光カー効果という。カー効果の大きな媒質としては2硫化炭素（CS_2），ニトロベンゼン等が上げられる。

本節では光カー効果を用いたピコ秒光－光スイッチの構成法としてのブラッグ形光カースイッチの原理と特性を，従来の光カーシャッタと対比して述べる。

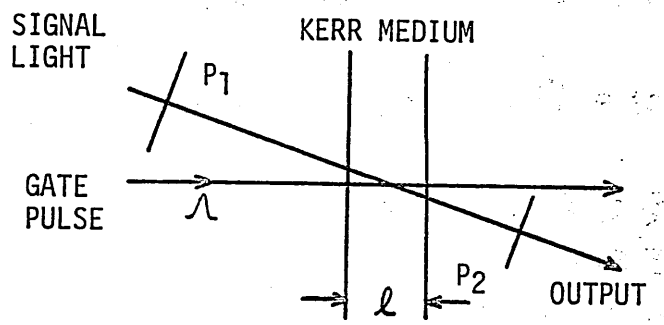


図1　光カーシャッタの構成

(2-1)　光カーシャッタ

光カーシャッタの構成を図1に示す。ゲートであるピコ秒光パルスが光カー媒質中に引き起こす誘導複屈折によって信号光をスイッチするものである。図中偏光子P_1，検光子P_2は互いに直交しており，それぞれゲート光の偏光方向から45°傾けておく。誘導複屈折 Δn の時間的な変化は緩和を考慮して次式で与えられる。[10]

$$\Delta n = \delta n_{\parallel} - \delta n_{\perp} = \frac{n_{2B}}{\tau}\int_{-\infty}^{t} E^2(t')\exp\left(\frac{t'-t}{\tau}\right)dt' \quad (1)$$

ここで$E(t')$はゲート光の電界，τはカー効果の緩和時間，n_{2B}はカー効果の大きさをあらわす定数である。緩和時間τは媒質によって大きく異なるが，CS_2では約2ps[11]と非常に早いことが知られている。光源としてよく用いられるNd：ガラスレーザでは，パルス幅は普通10ps程度なので，CS_2の場合緩和の効果はゲートパルスの形に対して無視して差しつ

かえない。このとき式(1)は，

$$\Delta n(t) = \delta n_{\parallel} - \delta n_{\perp} = n_{2B}\,\overline{E}^{2}(t) \qquad (1)'$$

と書き換えられる。ここで $\overline{E}^{2}(t)$ はゲート光の電界を一光周期にわたって2乗平均したものである。

上式のように誘導複屈折が生じたとして，信号光の透過率：T は次式で与えられる。

$$T = \sin^{2}(\pi \Delta n \ell / \lambda) \qquad (2)$$

ここで ℓ はカー媒質の長さ，λ は信号光の波長である。

光カーシャッタの透過率の数値例を求めてみよう。カー媒質として CS_2 ($n_{2B} = 2.2 \times 10^{-20}\ m^2/V^2$)[12]，$\ell = 1\ cm$，ゲート光のピークパワー密度を $100\ MW/cm^2$ と仮定すると，式(1)′，(2)より最大透過率は<u>23%</u>($\lambda = 530\ nm$)と計算される。

(2-2) ブラッグ形光カースイッチ

ここで述べるブラッグ形光カースイッチの構成を図2に示す。光カー媒質中でゲート光である2つの光パルスが干渉すると，その干渉パターンに応じた屈折率変化がおこり位相グレーティングが形成される。ゲート光にピコ秒の光パルスを，カー媒質として CS_2 のような緩和の早いものを用いるならば，このグレーティングはゲート光の通過に伴ないピコ

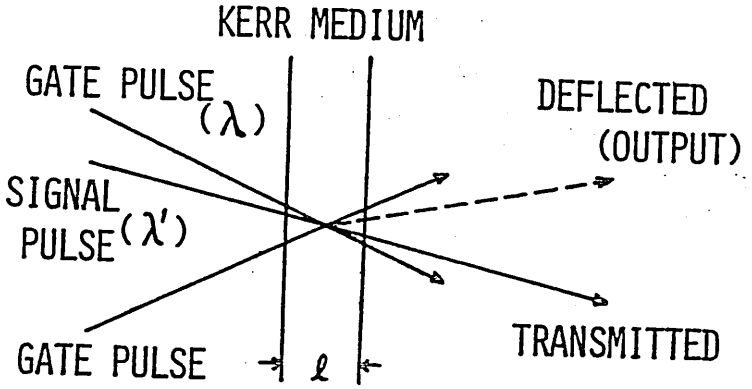


図2　ブラッグ形光カースイッチの構成

秒の幅で媒質中を走行する。したがってこのグレーティングによる信号光のブラッグ回折を利用するならば，ピコ秒の回折，すなわちピコ秒のスイッチが可能と思われる。

次にこのブラッグ形光カースイッチの回折効率（スイッチ効率を計算する。いまゲート光の干渉によってカー媒質中にひきおこされた屈折率変化が次式で表わされたとする。

$$n(x) = n_0 + \delta n_{//} \cos(2\pi x/d) \qquad (3)$$

ここで $\delta n_{//}$ はゲート光によって引き起こされた屈折率変化のうち，ゲート光電界に平行な成分の振幅である。この値はゲートパワーが等しいとすれば光カーシャッタの式(1)，(1)′中の $\delta n_{//}$ に一致する。また d は形成されたグレーティングのピッチである。信号光がこのグレーティングによってブラッグ回折をされるためには，4光波の k ベクトルの間に図3の関係が成り立たなければならない。これはブラッグ

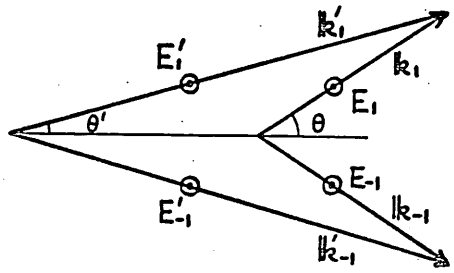


図 3
$\mathbb{k}$ベクトルの関係

条件であり，式で表わせば，

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{\lambda'}{2\sin\theta'} \qquad (4)$$

となる。λ，λ'はゲート光と信号光の波長，θ，θ'はそれぞれの入射角である。このブラッグ条件が満足されている場合の信号光の回折効率：R は2光波の結合方程式を解くことにより次のように与えられる。[13]

$$R = \sin^2(\pi\,\delta n_{/\!/}\,\ell/\lambda') \qquad (5)$$

この式は，光カーシャッタの透過率の式(2)でΔnが$\delta n_{/\!/}$に変わっているだけにすぎない。式(5)を用いて回折効率の例を光カーシャッタの場合と同じ条件で計算すると，$\delta n_{/\!/}/\Delta n \approx 0.7$* と仮定して R = <u>12%</u> ($\lambda' = 530\,nm$) となる。

以上の計算では，信号光パワーがゲート光パワー

---

* $\dfrac{\delta n_{/\!/}}{\Delta n} = \dfrac{\chi_3^{1122} + 2\chi_3^{1221}}{2\chi_3^{1221}}$ を用い，文献(14)の値から推定した。

にくらべて十分小さいとして屈折率パターンの信号光による変化分を無視し，透過光と回折光の2光波間の結合のみを考えている。実際には4光波間の結合なので，信号光パワーが大きくなると回折効率は式(5)で与えられる値からずれると予想される。この回折の正確なふるまいを知るためには4光波間の結合方程式を解かねばならない。図3の関係にある4光波の結合方程式は，4光波の電界振幅を波動方程式に入れ非共鳴項を無視することにより次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_1}{dr_1} &= -j\eta\,(E_1E_{-1}^{*}E_{-1} + E_1'E_{-1}'^{*}E_{-1}) \\
\frac{dE_{-1}}{dr_{-1}} &= -j\eta\,(E_1^{*}E_{-1}E_1 + E_1'^{*}E_{-1}'E_1) \\
\frac{dE_1'}{dr_1'} &= -j\eta'\,(E_1E_{-1}^{*}E_{-1}' + E_1'E_{-1}'^{*}E_{-1}') \\
\frac{dE_{-1}'}{dr_{-1}'} &= -j\eta'\,(E_1^{*}E_{-1}E_1' + E_1'^{*}E_{-1}'E_1') \\
\eta &= \frac{k_0}{4n}\chi_3 \quad , \quad \eta' = \frac{k_0'}{4n'}\chi_3
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ここで E_1，E_{-1} はゲート光の，E_{-1}'，E_1' は信号光の透過光と回折光の電界振幅，k_0，k_0' はそれぞれの波数，n，n' は屈折率，χ_3 は3次の非線形感受率である。また4光波の電界は図3ですべて紙面に垂直としている。式(6)より次の関係が成立することが容易に示される。

$$\frac{d|E_1|^2}{dr_1^2} = -\frac{d|E_{-1}|^2}{dr_{-1}^2}, \quad \frac{d|E_1'|^2}{dr_1'^2} = -\frac{d|E_{-1}'|^2}{dr_{-1}'^2}$$

$$\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d|E_1|^2}{dr_1^2} = -\frac{1}{\tau'}\cdot\frac{d|E_1'|^2}{dr_1'^2} \qquad (7)$$

これはManley - Roweの関係式である。E_1とE_{-1}の間，E_1'とE_{-1}'の間でエネルギーが保存されていること，全体として運動量が保存されていることを示している。結合方程式(6)でゲート光E_1，E_{-1}が信号光E_1'，E_{-1}'に比べて十分大きく，その変化が無視できるならば，式(6)はE_1'とE_{-1}'のみの結合方程式になり，その結果は式(5)と一致する。E_1'，E_{-1}'も大きいとして結合方程式(6)を数値的に解いた一例を図4に実線で示す。図中破線は信号光の小信号を仮定した場合の結果である。この図から信号光の回折がおこると同時にゲート光にも回折がおこることがわかる。また信号光の回折のピークは小信号を仮定した場合より多少小さい。図5は信号光強度が大きくなるにつれてこの回折のピークが減少してゆくようすを示している。この図より信号光パワーがゲート光パワーに対して同程度までなら回折効率の最大値はほぼ1になることがわかる。したがってこの範囲では回折効率の式として小信号近似式(5)を用いることができる。

ブラッグ形光カースイッチの特長は，まず，ブラッグ回折を利用しているので出力光は他のいずれの光とも異なった方向に現われることである。したがって光カーシャッタの場合に必要であった出力分離

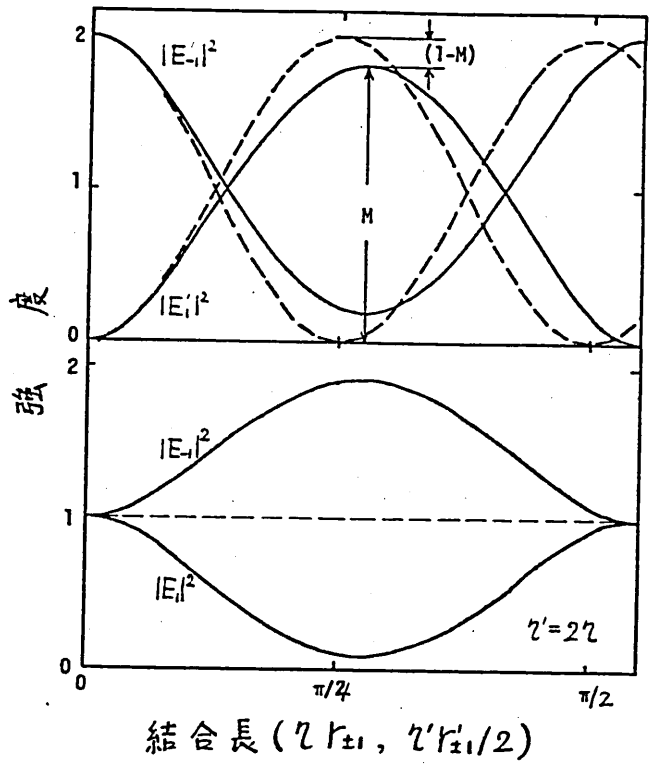


図4　結合方程式(6)の解(実線)と
小信号近似解(破線), $\eta'=2\eta$.

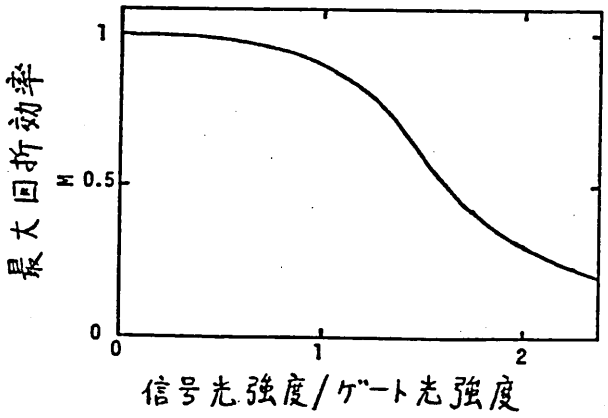


図5　信号光強度の増加に伴なう
最大回折効率の低下

用の偏光子，検光子は不用である。また背景光雑音が減少して，消光比も向上すると考えられる。次に，光カーシャッタの場合には信号光が大きくなるとそれに伴なって消光比が悪化するなどの悪影響が表われるが，この方式ではスイッチの原理が屈折率変化のパターンのみを用いた回折であるため，消光比へのそのような悪影響はあまり考えられない。したがって信号光パワーが強大になっても良好なスイッチ動作が可能と思われる。この特長により，たとえば幅の広い高出力の光パルスからピコ秒の光パルスを切り出すというような用途にも使用可能と思われる。

[3] 実験

ブラッグ形光カースイッチの実験には光源としてNd：ガラスレーザを，カー媒質として CS_2 を用いた。以下，この実験について，Nd：ガラスレーザの特性とあわせて述べる。

(3-1) Nd：ガラスレーザとその特性

モード同期Nd：ガラスレーザを製作し，実験に用いた。図6にその構成を示す。可飽和吸収色素を用いた受動モード同期法により高出力，ピコ秒の光パルス列を得ている。色素濃度，ポンピングエネルギーなどの条件を適正にし，十分なアライメントをおこなうと単一横モードのきれいなモード同期発振と

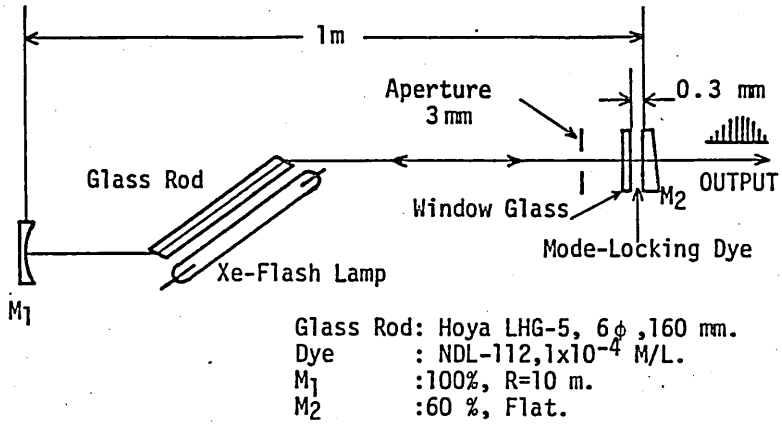


図 6 Nd：ガラスレーザの構成

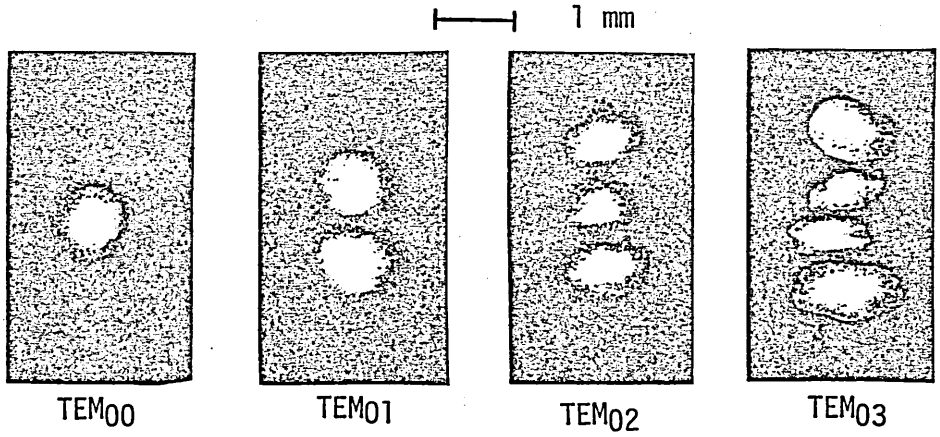


図 7 横モードパターン

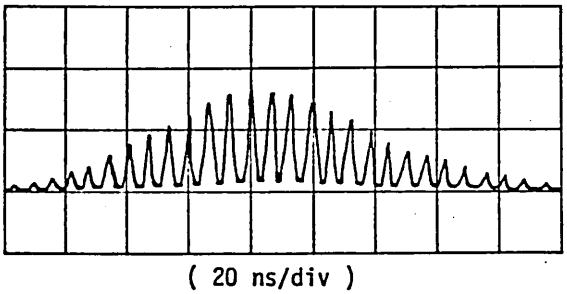


図 8
モード同期波形

なる。図7はこのNd:ガラスレーザの横モードパターン，図8はモード同期発振の波形である。波形はオシロスコープの応答（立ち上がり約2ns）によって制限されているので，個々のパルス幅はわからない。発振出力は励起が300Jの時全体で約100mJ，ピークパワーは100MWに達すると予想される。

モード同期パルスのパルス幅は2光子螢光法（TPF法）によって測定した。TPF法は2光子螢光の強度が励起光強度の2乗に比例することを利用した超短光パルスの相関測定法である。[15] 光パルスが完全に重なった部分は，全く重ならない部分にくらべて螢光強度が3倍になる。図9にその構成と結果を示す。この結果モード同期パルスは単一パルスになる場合もあるが，多くはサテライトパルスをいくつか持つマルチパルスであることがわかった。これらのサテライトパルスは，レーザ装置図6において色素セルの一部であるウィンドウガラス表面での反射が原因と考えられる。単一パルスになった場合，パルス幅は10～20ps，マルチパルスでは個々のパルスは10ps以下と予想される。

TPF法によるパルス幅の測定は簡便ではあるが正確な議論をするにはコントラスト比の解析が必要であり，フィルム感度の補正など問題が多い。前述の光カーシャッタを利用してピコ秒写真を撮影すると，背景光のない，より直接的な波形観測が可能である。図10(a)がその実験の構成で，一般的なピコ秒写真の実験と同じである。偏光子P_1，検光子P_2と

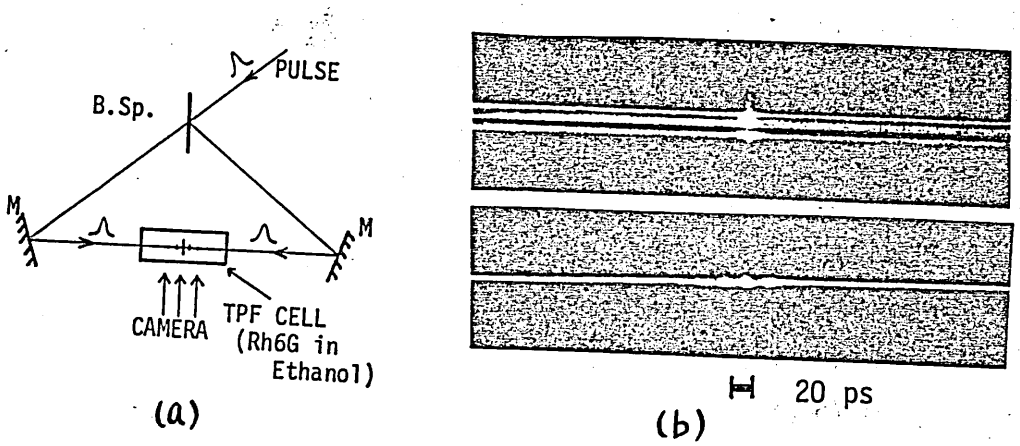


図 9　TPFの構成(a)と結果(b)

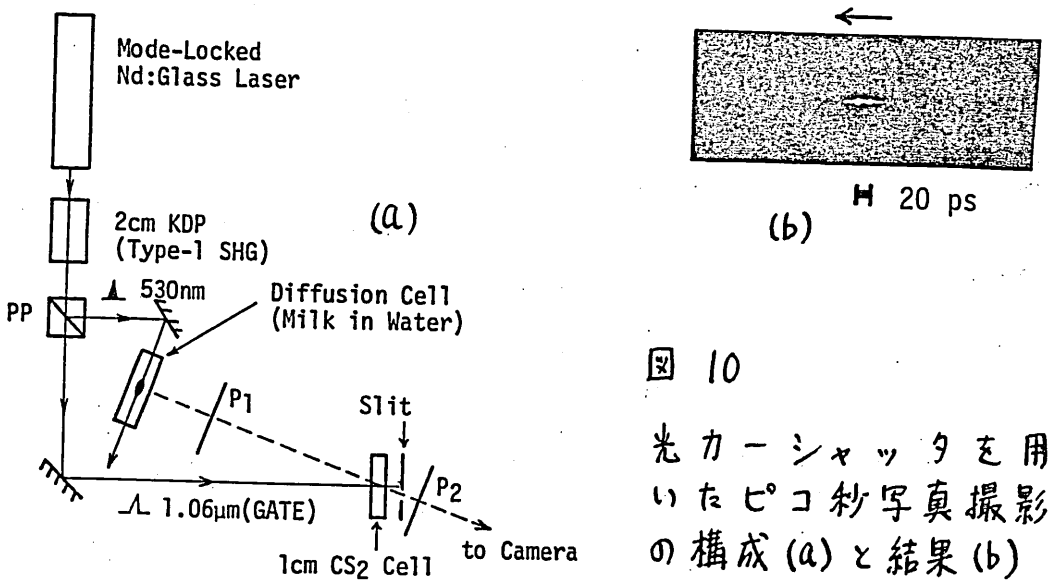


図 10

光カーシャッタを用いたピコ秒写真撮影の構成(a)と結果(b)

CS_2 セル（ℓ=1cm）とで光カーシャッタを構成し，Nd：ガラスレーザの出力パルス列（λ=1.06μm）をゲート光として用いる。KDP結晶（長さ2cm，45°z-41.2°y' cut）は第2高調波発生用（第1種）で，1.06μm の赤外光を 530nm の可視光に変換する。

高調波光は偏光分離プリズムで分離され散乱セルを通り，ここでの散乱光が光カーシャッタでスイッチされてフィルム上に記録される。フイルム上には散乱セル中を走行する光パルスの姿がゲート光との相関の形で写る。図10(b)にその結果の一例を示す。実験の結果，多くの場合個々のパルスは10ps以下，サテライトパルスも含んだ全体でも30ps程度となることがわかった。光カーシャッタの透過率は約1%で，ショットごとにかなりのばらつきがある。このばらつきはレーザの不安定性が原因である。また透過率が理論的に予想された値（23%）よりかなり小さいのはゲート光の直径が有限であるため信号光との相互作用長がセル長より短かくなっていること，アライメントの不良，偏光子による吸収などが原因と思われる。

（3－2）　ブラッグ形光カースイッチの実験

ブラッグ回折を利用したピコ秒光カースイッチの動作を確認し，スイッチの開き時間を測定することを目的として実験を行なった。図11がその構成である。先に述べたNd：ガラスレーザの出力をビームスプリッタで2つに分け，カーセル中で干渉させてグレーティングを作る。このときゲート光相互の角度は約20°であるので，形成されるグレーティングのピッチは約3μmである。高調波光は信号光として用い，ブラッグ条件を満足する角度にしてカーセルに入射させる。図12はカーセルの後方約50cm

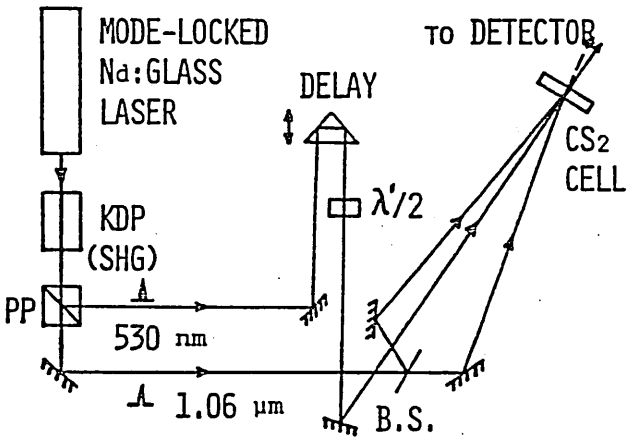
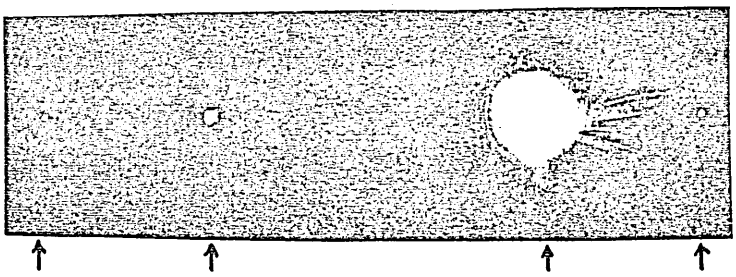


図 11
ブラッグ形光カースイッチの実験構成図



ゲート光　回折光 ← 10° → 透過光　ゲート光

図 12　ブラッグ形光カースイッチによる回折スポット

のところにスクリーンをおき，その上にあらわれた信号光の透過光と回折光のスポットを撮影したものである。透過光と回折光は互いに 10° の角度であらわれている。次にスイッチ時間を測定するために遅延プリズムを移動させながら透過光と回折光の強度をそれぞれ高速フォトダイオードで測定した。図13にその結果を示す。回折効率はピークで約 1% であった。測定点はそれぞれ 5 つのレーザショットにつ

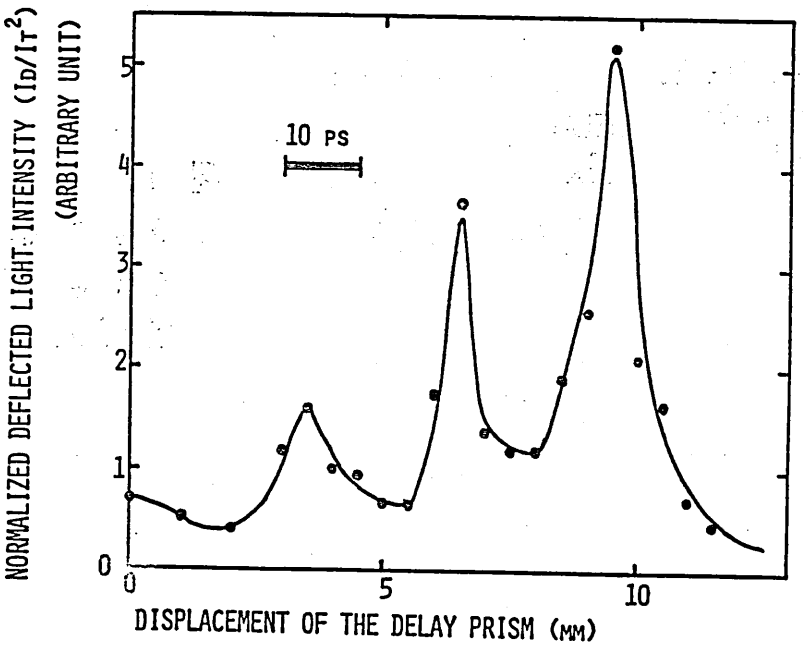


図 13　遅延プリズムの変位に対する
回折効率の変化

いての平均を表わしている。この図から回折が10ps以下という超高速で起こっていることがわかる。図中には3つのピークが存在するが，これはNd：ガラスレーザのサテライトパルスが原因と考えられる。

[4]　むすび

ピコ秒光パルスをゲート信号とする光－光スイッチは，ピコ秒光現象の観測手段として非常に有用と考えられる。本文では従来の方式と異なるブラッグ回折を利用したピコ秒光カースイッチ（ブラッグ形光カースイッチについてその動作を検討し，実験に

ついて述べた。実験の結果，回折効率は約1%，スイッチの開き時間は約1cps であった。これらの特性は従来の光カーシャッタと同程度のものである。したがってブラッグ回折を利用したことによる特長を生かした，さまざまな使用法が考えられる。

従来の光カーシャッタと同じく，このブラッグ形光カースイッチにおいても，ゲート光の特性すなわちピークパワー，パルス幅，サテラットの有無，横モードパターンなどが主にスイッチの特性を決定する。実験に用いた我々のNd:ガラスレーザはサテライトパルスが多く，そのためスイッチの特性が悪化している。現在スイッチ特性の改善をめざして，レーザの改良，ガラスアンプの製作をおこなっている。

[謝辞]

実験に際し有益な助言，助力を賜わった本学レーザ核融合研究センターの諸兄に深く感謝します。

[参考文献]

(1) I.S.Ruddock and D.J.Bradley, Appl.Phys.Lett. 29, 296 (1976)

(2) M.A.Duguay and J.W.Hansen, Appl.Phys.Lett. 15, 192 (1969)

(3) G.E.Busch, K.S.Greve, G.L.Olson, R.P.Jones and P.M.Rentzepis, Appl.Phys.Lett. 27, 450 (1975)

(4) D.H.Auston and A.M.Glass, Appl.Phys.Lett. 20, 398(1972)

(5) P.LeFur and D.H.Auston, Appl.Phys.Lett. 28, 21 (1976)

(6) 森本，平尾，小林，末田，第38回応物予稿集 32 (1977, 秋)

(7) P.Y.Key, R.G.Harrison, V.I.Little and J.Katzenstein, IEEE J.Quant.Electon. QE-6, 641 (1970)

(8) R.I.Scarlet, Phys.Rev.A 6, 2281 (1972)

(9) D.W.Phillion, D.J.Kuizenga and A.E.Siegman, Appl.Phys.Lett. 27, 85 (1975)

(10) R.A.Fisher, P.L.Kelley and T.K.Gustafson, Appl.Phys.Lett. 14, 140 (1969)

(11) S.L.Shapiro and J.D.Broida, Phys.Rev. 154, 129 (1967)

(12) M.A.Duguay, J.W.Hansen and S.L.Shapiro, IEEE J.Quant.Electron. QE-6, 725 (1970)

(13) 例えば A.Yariv "光エレクトロニクスの基礎", 327 (丸善, 1974)

(14) C.C.Wang, Phys.Rev. 152, 149 (1966)

(15) J.A. Giordomaine, P.M.Rentzepis, S.L.Shapiro and K.W.Wecht, Appl.Phys.Lett. 11, 216 (1967)

輻射科学研究会資料

CW HCN レーザの出力特性

辻 幹男　川井国孝　須原成史
繁沢 宏　滝山 敬
（同志社大学工学部）

1978年 1月27日

1. 緒言

1964年にGebbie[1]らによって初めて報告されたHCNレーザは，HCN分子の振動回転準位間の遷移[2]を利用したレーザで、337μmに強い発振線を持っている。このレーザに関して種々の試料気体を用いたパルス，CW動作の実験が報告されているが、発振特性は個々の実験により大きく異なり，発振の機構も依然として不明な点が多い。

本文では，まずHCNレーザの特性がガスの流量等のパラメータによってどのように変化するかを明確にするために，N_2およびCH_4の流量と，管内圧力を独立に変化させた場合の出力特性について述べる。次にレーザの小型安定化を進めるために，可動構造の電極を用いて放電長を短くしたときのレーザの特性の変化を調べた。その結果，放電長が短い場合には，出力と放電長の間に直線的関係が存在するが，放電長が長くなるにつれて，非線形的な変化を程するようになることが明らかになった。そしてこのような測定結果より，不飽和利得係数の放電長依存性の導出を行ない，それが放電長に強く依存することを示した。最後にレーザ管の放電電流をできるだけ低くするために，予めN_2とCH_4を解離しておくための補助放電管の使用を提案し，その効果について述べる。

2. 試作HCNレーザの構造

Fig. 2-1に試作したレーザ装置の構造を示す。

[a] 共振器系

HCNレーザの利得係数があまり大きくないことを考慮してレーザの共振器長1200mm，電極間距離を950mmとした。共振器は回折損失を小さくするために，平面鏡と凹面鏡で構成し，フレネル数が4となるよう80mmφの鏡を用いている。また，凹面鏡の曲率半径はBoydとKogelnik[3]によって与えられた二次元ダイヤグラムの安定領域に入り，しかも共振器の鏡面上でのスポット半径が鏡の半径の1/2以下となるよう6mに設計されており，平

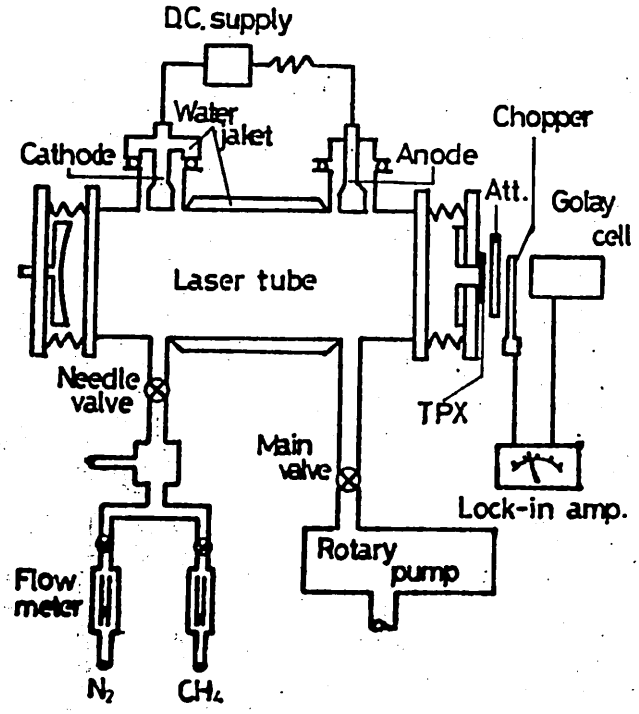


Fig. 2-1 レーザ装置

面鏡上でのスポット径は16.2mm，凹面鏡上でのスポット径は18.1mmとなっている。その結果，このレーザにおける回折損失は基本モードであるTEM00モードに対して約0.05%となっている[4]。なお平面鏡，凹面鏡ともに金蒸着したものを用いており，凹面鏡は同調をとるために可動構造になっている。また平面鏡の中心には6mmφの結合孔があり，結合孔の窓には厚さ2mmのTPX板を用いている。

[b] 真空系

レーザ管は共振器の鏡が80mmφであることを考慮して内径85mmφ外径120mmφの水冷二重管になっており，この管の陰極側の真空系にはニードルバルブ，陽極側の真空系にはピラニゲージ，メインバルブが設置されている。レーザ管内は排気量500 l/minのロータリーポンプによって低圧にひいている。レーザ媒質であるCH4とN2はまずそれぞれ専用の流量計を通り，ガス混合器に送られる。ガス混合器の一方はニードルバルブに接続されており，もう一方は流量計を正しく動作させるためのモニタとして大気圧である外部と接続されている。この混合器で混合された気体は，ニードルバルブを通してレーザ管内に入り，管内を陰極側から陽極側へ流れ，その後はロータリーポンプを通って外部へ排気されるが，実際には排気ガスの中に極微量ではあるが，HCNが含まれているものと思われるので，ロータリーポンプの後に化学処理装置を設け，これにより排気ガスを無毒化してから外部に排気している。

[c] 検出系

平面鏡の結合孔から取り出された出力は、可変減衰器を通った後 機械的チョッパによって17Hzの周波数で断続され、ゴーレイセルで受光される。そして受光出力をロックインアンプで検波し、レーザ出力の測定を行なっている。

[d] 放電系

直流放電用の電源は、最大電圧が5KV、最大電流が0.5Aで 安定抵抗として10KΩを使用している。また電極には ステンレス製の水冷構造のものを使用している。

3. 同調特性

Fig.3-1は 凹面鏡をモータにより1.4 mm/min.の一定速度で掃引したときの同調特性を示している。測定の際の放電電流は0.3A，圧力は0.7 Torr，N_2とCH_4の混合比は1:1である。

図ではA,B,Cで示される3本のモードが同じパターンで繰り返されているが、これらのモードは共振器の系によって定まる高次の横モードであり、図に示されたAが基本モードのTEM_{00}モード，BがTEM_{01}モード，CがTEM_{10}モードである。

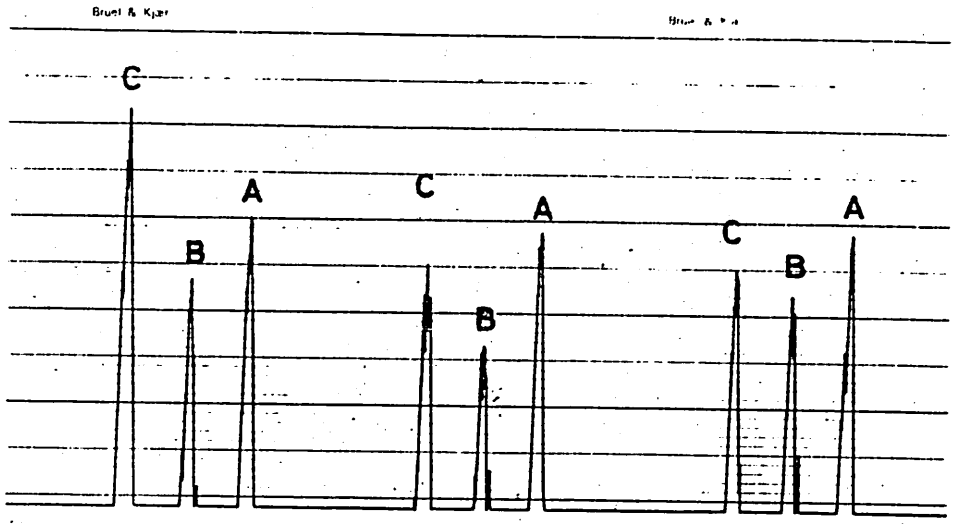


Fig. 3-1. 同調特性

4. 流量，圧力，混合比をパラメータにした出力特性

前述のようにHCNレーザの特性は個々の実験で異なり，発振機構も不明な点が多い。これらをより明らかにするためには，レーザの発振出力に影響を及ぼすパラメータ（放電電流，圧力，流量，気体混，結合孔径など）間の関係を明確にすることが必要と考えられるが，従来HCNレーザの出力特性としては放電電流の変化に対して流量と圧力のパラメータが従属的に取り扱われたものが多く，流量と圧力を独立なパラメータとしたときの特性は明らかにされていない。そこで本章では放電電流の変化に対して流量と圧力を独立なパラメータとして取り扱ったときの出力特性を明らかにした。

Fig.4−1 は総流量 30cc/min.S.T.P., 圧力 0.6Torr 一定のもとで N_2 と CH_4 の混合比をパラメータとしたときの放電電流と発振出力の関係を示している。この出力特性から明らかなように、低電流域においては N_2 の量の多い方が発振のしきい値電流が低く高出力であるが、出力の飽和は N_2 の割合の増加に伴って低電流側で生じている。このような傾向は Fig.4−2 が示すように総流量を一定にして圧力を 0.8Torr, 1.0Torr, 1.2Torr と高くした場合にも同様にあらわれることから、N_2 と CH_4 の混合比で定まる特性の傾向は流量、圧力の変化により不変であると考えられる。そこで N_2 と CH_4 の混合比を 1:1 に定め 流量、圧力に対する出力特性を取ると Fig.4−3 Fig.4−4 のようになる。Fig.4−3 では総流量を 30cc/min. S.T.P. に固定したときの圧力と発振出力の関係を また Fig.4−4 では圧力を 0.8Torr に固定したときの総流量と発振出力の関係を示している。これら二つの特性から 各放電電流に対して発振出力を最大にする圧力や流量の最適値が存在し、それらは電流の増加に伴い 圧力一定のときには流量の多い方へ、流量一定のときには圧力の高い方へ移動していることがわかる。これらの結果より 最大出力は分子の解離度がある一定値のもとで得られるという推論が成り立つ。たとえば Fig.4−3 では電流が大、つまり電子密度が高い場合は それに見合う分子密度の高い領域、すなわち高圧力側で最大出力が得られている。 このように流量、圧力には各放電電流に対し、発振出力を最大にする最適値が存在することが明らかとなった。

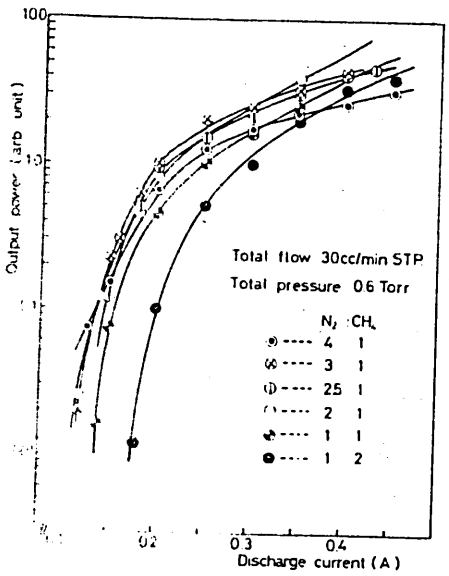


Fig. 4 − 1

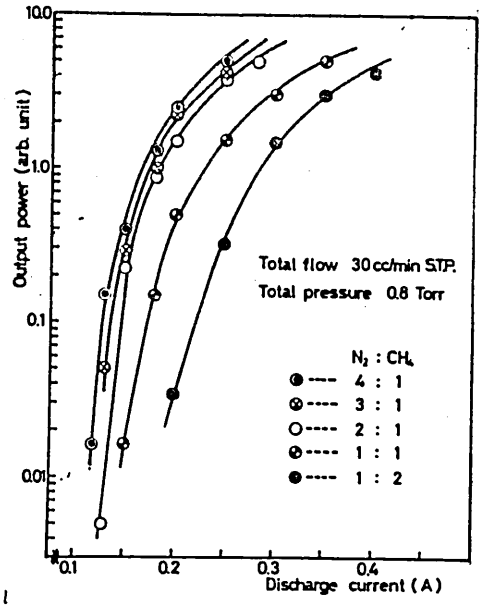


Fig. 4-2 (A)

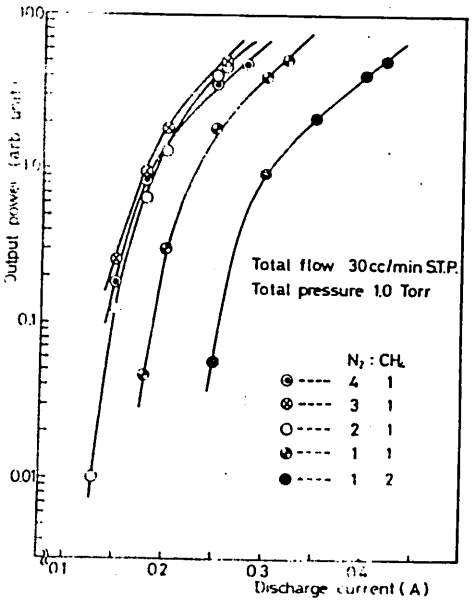


Fig. 4-2 (B)

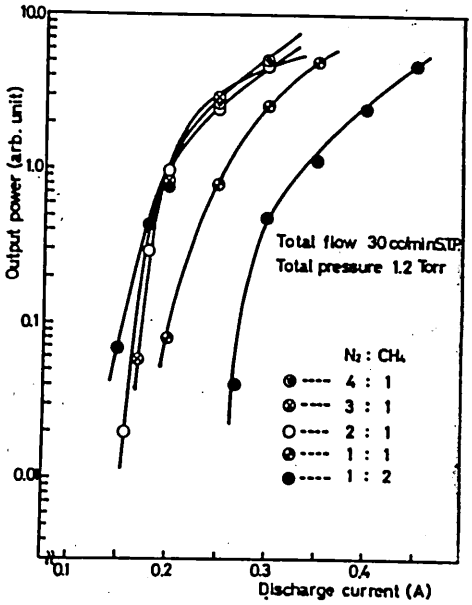


Fig. 4-2 (C)

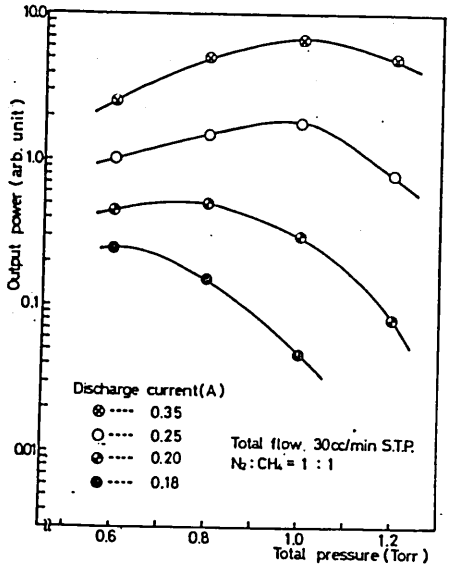


Fig. 4-3

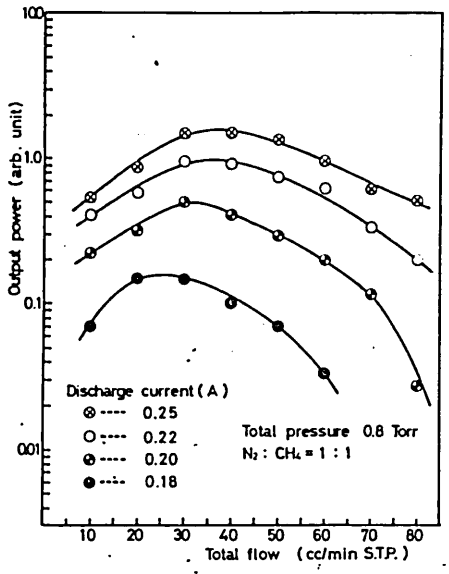


Fig. 4-4

5. 不飽和利得係数の放電長依存性

HCNレーザをサブミリ波の発振器として伝送実験等を行なう場合には発振出力や周波数が安定であることが要求されるが，レーザの出力の安定化のためにはレーザの小型化が一つの有効な手段と考えられる。そこで本章では レーザの一方の電極を管軸方向に移動し，活性媒質の長さを短くすることによってレーザの簡易的な小型化を行ない，その出力特性を求めるとともに実際の小型化にあたり重要なパラメータである不飽和利得係数の測定の一方法を示した。

Fig.5-1 に示すように 従来のレーザとは陽極だけが異なる。陽極は内径 80mmφ の銅製の円筒

電極で　低圧中でも管軸方向に移動のできる構造を有する。

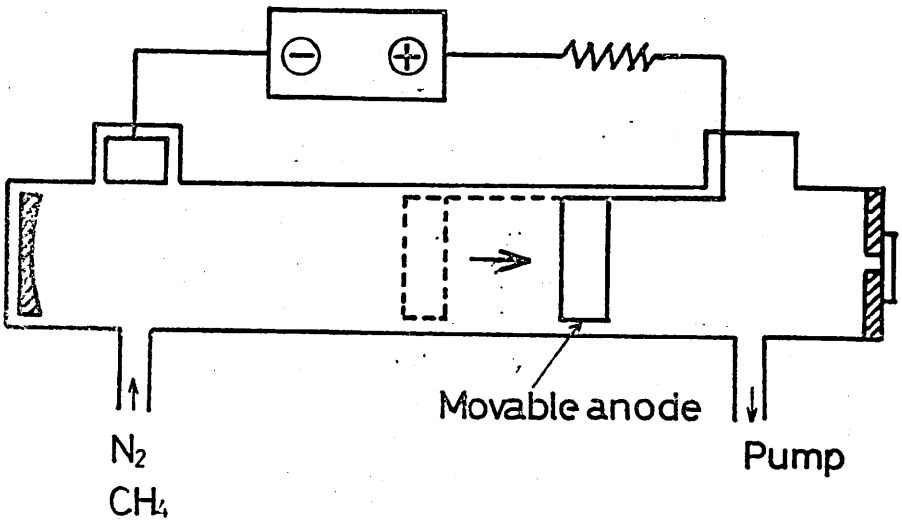


Fig. 5-1.　可動電極

Fig.5-2 は N_2 と CH_4 の混合比 2:1　総流量 30cc/min. S.T.P　圧力 0.6 Torr の条件のもとで陽極を移動したときの活性媒質の長さと発振出力の関係を示したもので，放電電流がパラメータになっている。ここでこの特性を検討するために　不飽和利得係数 γ_0 と発振出力 P との間の関係を求めると次式のようになる⑤。

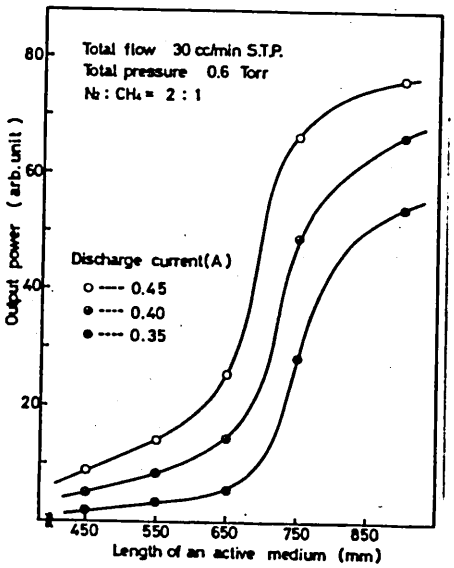


Fig. 5-2

$$P = C\left(\frac{\gamma_0 l}{a+t} - 1\right) \qquad (5-1)$$

ただし l は活性媒質の長さ，t は共振器を1回通過する毎の結合孔による損失の割合，a は他の原因による損失の割合を示している。また C はレーザ媒質の性質や共振器の構造で定まる値で，この場合には電極の移動だけで共振器の構造は不変であるから a, t と共に定数として取り扱うことができる。いま活性媒質の長さ l の変化に対し不飽和利得係数 γ_0 が一定であると考えると(5-1)式から活性媒質の長さと発振出力の間には直線関係が成立する。

実験により得られた Fig.5-2 の特性は活性媒質の長さが短い範囲(450mm～650mm)だけ上述の直線関係が成立しているが，活性媒質の長さが 650mm 以上では出力が急激に増加し直線関係が成立しないことを示している。Fig.5-3 は γ_0 が一定である直線関係の部分に着目して出力特性を拡大したもので，図に示した破線と出力 $P=0$ の軸との交点が，活性媒質の長さに対する発振しきい値 l_{th} を表わすものと思われる。この l_{th} と γ_0 との間には(5-1)式で $P=0$ とおくことによって次の関係が成立する。

$$\gamma_0 = \frac{a+t}{l_{th}} \qquad (5-2)$$

l_{th}と$a+t$が既知であれば、(5-2)式よりγ_0を求めることができる。Fig.5-3よりl_{th}を求め$a+t$を4%としたときの不飽和利得係数γ_0を計算するとTable 5-1のようになる。また直線関係でない部分のγ_0を(5-1)式およびFig.5-2から計算し活性媒質の長さに対する不飽和利得特性を示すとFig.5-4のようになる。

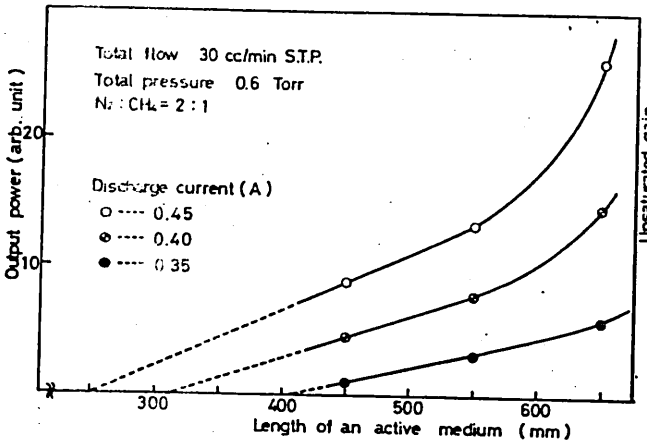


Fig.5-3

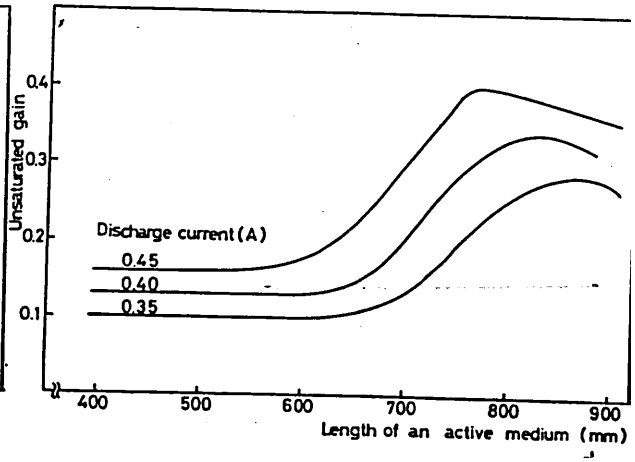


Fig.5-4

[Table 5-1]

Discharge current (A)	Length of the active medium on the threshold (mm)	Unsaturated gain
0.35	405	0.10
0.40	310	0.13
0.45	250	0.16

不飽和利得係数は活性媒質の長さに対して一定でなく，媒質がある程度長くなると非直線的に増加し始め ピークを有することがわかる。このように可動電極を用いることによって 不飽和利得係数の値 および不飽和利得係数の活性媒質の長さに対する依存性が明らかとなった。

6. 補助放電管の効果

前章ではレーザの小型化を中心に考えたが，レーザの安定面から考えると放電電流も一つの重要なパラメータであり，これを低く抑えることが熱発生の抑制等レーザの安定化に有効と思われる。

HCNレーザの場合，N_2とCH_4の解離に高放電電流を要するものと考えられることから 補助放電管を用いてN_2とCH_4を前もって解離すれば レーザ本体の放電電流の低減が期待できる。そこで本章ではパルスHCNレーザの大出力化のためにDL Jassbyらによって用いられた補助放電管をレーザの安定化のために用いることを提案し，補助放電の長さに対する依存性など補助放電の効果による詳細な出力特性を明らかにした。

補助放電管はFig.6-1に示すように レーザ本体の陰極側吸気孔の前に取り付けてあり，補助放電管には管長480mmで電極間隔が330mmに固定されているものと，管長1000mmで片側の電極が移動できる電極間距離可変のものとの二種類使用している。どちらの管もパイレックスガラス製で，その内径

は85mmφである。実験はN_2とCH_4の混合比を2:1総流量を30cc/min S.T.P. 圧力を0.6 Torrに固定して行なっている。Fig 6-2は補助放電管の電極間隔をパラメータにしたときの補助放電電流と発振出力との関係を示しており レーザ本体の放電電流は発振のしきい値に近い0.12Aに固定している。

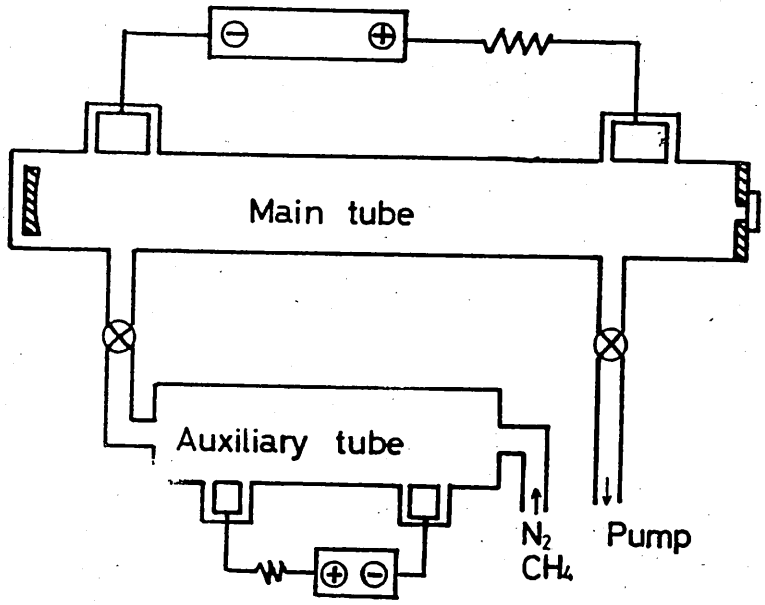


Fig. 6-1. 補助放電管

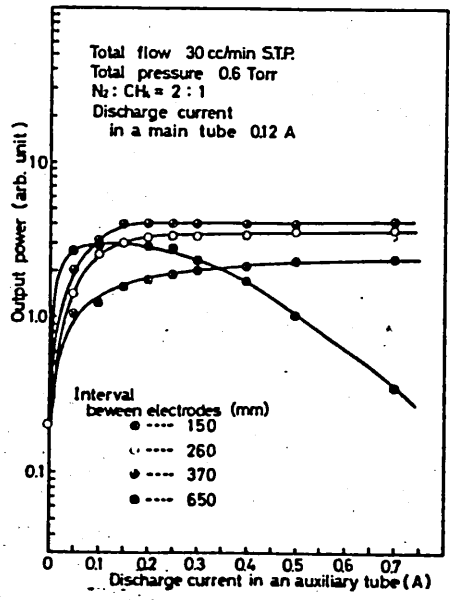


Fig. 6-2

補助放電の効果による出力の増加は、いかなる電極間隔の場合にも見られるが、電極間隔が300mm前後のときに出力の増加率が最大となる。なお電極間隔が650mmのとき0.3A以上の補助放電電流で出力の減少が見られるが、これは電極間隔が長くなり、しかも放電電流が高くなると レーザに導入される混合ガス中に発振に寄与するガスばかりでなく，発振に寄与しない汚れたガスも多数含まれるようになるので出力の低下が生じるものと考えられる。 次に電極間隔を330mmに固定した補助放電管を用いて補助放電の長さが最適と思われるときの出力特性を取ると，Fig.6-3Aのようになる。Fig.6-3Aでは補助放電電流と発振出力の関係が示されており レーザ本体の放電電流がパラメータになっている。 またFig.6-3BはFig.6-3Aで示された補助放電の効果を出力の増加率であらわしている。これらの図から明らかなように補助放電による出力の増加率はレーザ本体の放電電流が0.12Aのときに最大で 10数dbの出力増加が見られ，その後放電電流の増加に伴い増加率は減少している。これは混合ガスが補助放電によって一定の解離度をもって本体に送られるため，主放電電流が低くしたがってそれによる解離が少ない場合には補助解離が有効に寄与するが，主放電電流が高くなり，それによる解離も多くなると発振に対する最適解離を越え 出力の上昇率が抑えられるものと考えられる。 このように補助放電の効果により 低電流域では出力が10数db増加することから，補助放電はHCNレーザの安定化に有効であると考えられる。

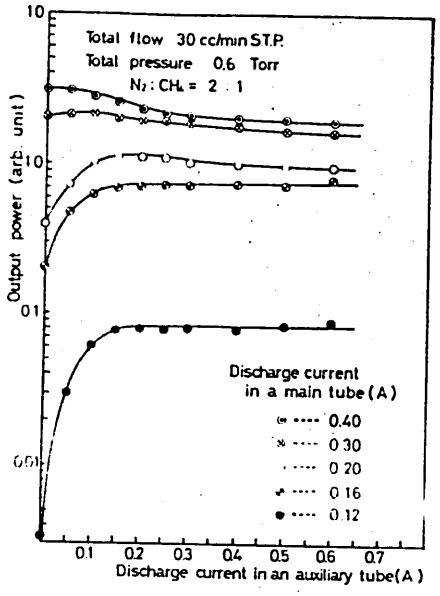


Fig. 6-3 (A)

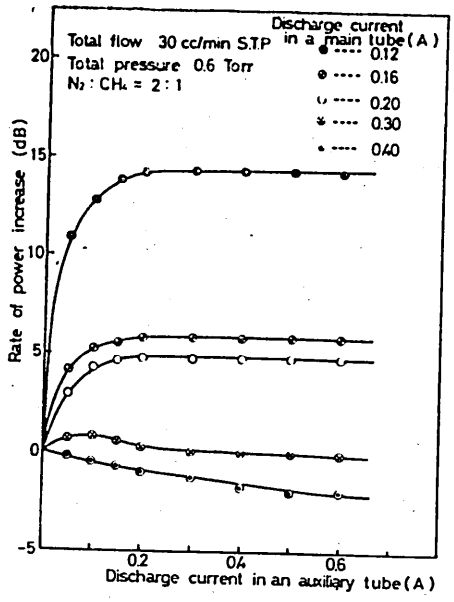


Fig. 6-3 (B)

7. 結言

本文では，サブミリ波の発振源となる連続発振のHCNレーザの設計，試作を行ない，レーザ媒質の流量，圧力，混合比などをパラメータにした出力特性を詳細に検討した。次いでレーザの小型化を進める目的で，可動構造の電極を持つレーザを考案し，活性媒質の長さと発振出力との関係を明らかにするとともに，不飽和利得係数の導出を行なった。また，レーザの放電電流の低下にともなう出力低下を補うために，補助放電管の導入を提案し，その効果を明らかにした。

謝辞

末筆ながらレーザ装置の試作実験にあたり、多大の御配慮を頂いた堀場製作所社長、堀場雅夫氏はじめ関係各位に謝意を表します。

参考文献

(1) H.A.Gebbie,N.W.B.Stone and F.D.Findley," A stimulated emission source of 0.34 millimeter wave-length ," Nature, 202, May, P.685, 1964.

(2) D.R.Lide and A.G.Maki," On the explanation of the so-called CN laser," Applied Physics Letter, vol.11, July, P.62, 1967.

(3) G.D.Boyd and Kogelnik," Generelized confocal resonator theory," B.S.T.J. July, P.1347, 1962.

(4) T.Li," Diffraction loss and selection of modes in maser resonators with circular mirrors," B.S.T.J. May, P.917, 1965.

(5) Yariv,A," Introduction to optical electronics," Holt,Rinehart and Winston Inc. Chap.6.

超音波光偏向器の多周波動作の解析

—多重周期をもつ体積型グレイティング中の光波伝搬—

小林道生　西原浩　小山次郎

（大阪大学　工学部　電子工学科）

昭和53年1月

輻射科学研究会

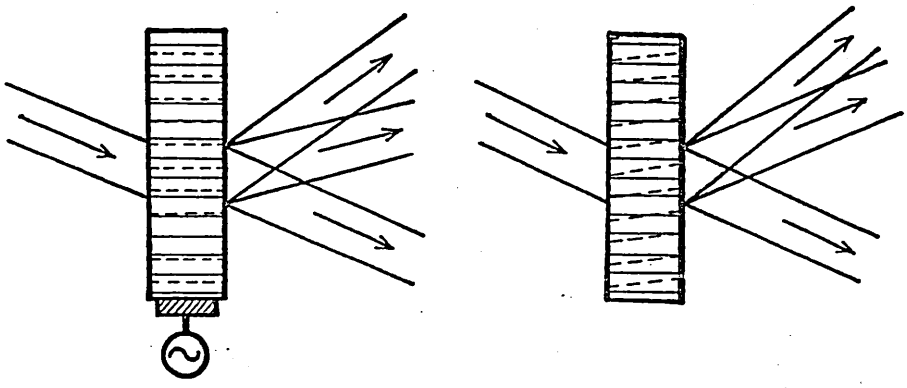
超音波光偏向器の多周波動作の解析
—多重周期をもつ体積型グレイティング中の光波伝搬—

小林 道生　　西原 浩　　小山 次郎
（大阪大学 工学部 電子工学科）

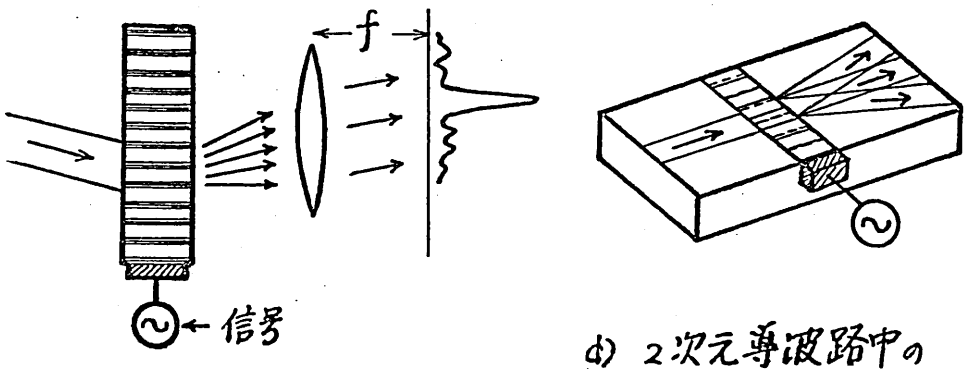
1. まえがき

多数個の異なる周期を同時にもつ周期構造中を伝搬する光波の回折現象は興味深く、これを利用した光デバイスには、たとえば図1に示すような i) 多数の周波数の超音波を用いて多周波動作する超音波光偏向器（図a） ii) 多重露光により作成された多分岐型ホログラフ（図b） iii) ある時間信号が乗っている超音波によるスペクトルアナライザ（図c） iv) 2次元導波路中の超音波光偏向器（図d） などがある。そして、これらのデバイスのいくつかの動作特性は、多重露光された比較的薄いホログラム、あるいは比較的厚いホログラムと考えて解析できる。[1]

さて、これらのデバイスのうち、たとえば超音波光偏向器をn個の周波数で動作させる場合、n個のうちの1個をon-offしたとき、残りの(n-1)個の周期構造による回折波へどのような影響を与えるか あるいは、どのような条件の下でその影響を小さくできるか という実際上重要な問題がある。



a) 超音波光偏向器　　b) 多分岐型ホログラフ



c) 超音波スペクトルアナライザ　　d) 2次元導波路中の超音波光偏向器

図1　多重周期グレイティングを用いたデバイス

そこで、本報告では、上記の問題の物理的現象を明らかにするために、超音波光偏向器を体積型ホログラムと見なして、結合波理論[2]を用いて解析した。

2. 解析モデル

解析モデルとして、図2のような多重記録された体積型ホログラムを考えることにする。

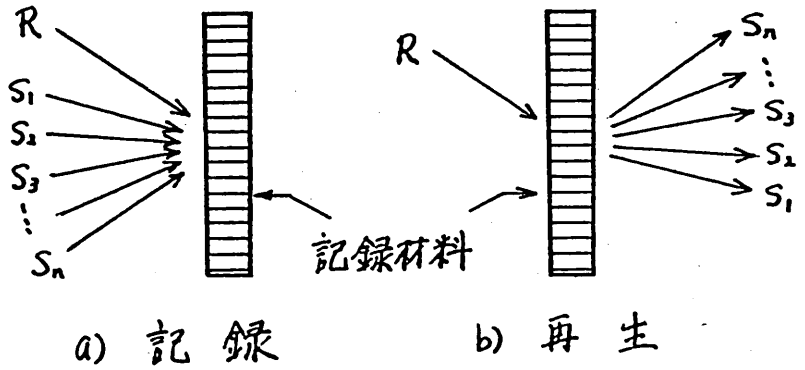


図2 解析モデル

そして、解析に際しては、次に挙げる条件を仮定している。

(i) 互いにインコヒーレントな干渉縞

記録のとき、図2 a)のようにまずRとS_1の干渉パターンを次にRとS_2、さらにRとS_3というように順次多重露光を行ない、n種類のグレイティングが多重化されたホログラムを得る。したがって、異なるグレイティングは互いにインコヒーレントに記録されていることになる。

(ii) 平行光の使用

使用される光R, S_1, S_2 … S_nはすべて平行光とする。

(iii) 記録材料の線形性

記録材料の露光特性は線形であり、形成されるグレイティングは正弦的であるとする。

(iv) 体積型ホログラム

ホログラムの厚さは干渉縞の間隔に比べ充分厚く、体積型ホログラムと見なせるとする。

(v) Bragg角動作

再生の際、図2 b)のRは記録のときのRと同じ角度で入射させ、記録されているn種類のすべてのグレイティングに対してBragg条件が満たされているとする。

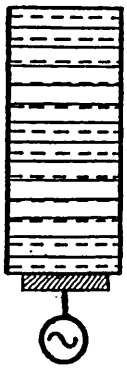


図3 超音波による回折格子

しかし、実際の超音波光偏向器を考えた場合超音波により形成されるn種類のグレイティングは、図3のように格子間隔が異なるだけで、方向は同じである。したがって、入射ビームに対しBragg条件を満たすものはn種類のうちの1つだけで、その他のものはBragg条件からずれてくる。それゆえ、厳密には解析の際、このBragg条件からのずれも考慮してやらねばならないが、通常このずれが問題とならない範囲で動作させるため、その影響は無視できると考えられる。

(vi) 相互変調の無視

形成されたグレイティングのKベクトルとして$\mathbb{K}_1$と$\mathbb{K}_2$の2種類が存在するとき、2次あるいは3次の相互変調によって生じる$\mathbb{K}_1-\mathbb{K}_2$あるいは$2\mathbb{K}_1-\mathbb{K}_2$に対応した回折ビームは、$\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$に対応した回折ビームに比べその強度は小さく、このような高次の相互変調は生じないものとする。(4)

3. 結合波理論による解析

簡単化のため、まず2重露光の場合についての解析を行なったのち、n重露光された場合の理論へ拡張する。

A) 2重露光の場合

2重露光により、図4のようにグレイティングベクトル $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ の回折格子が形成される。ここで、R, S_1, S_2 の伝搬ベクトルをそれぞれ $\sigma, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ とするとき、これらと $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ の間には、

$$\begin{cases} \mathbb{P}_1 = \sigma + \mathbb{K}_1 \\ \mathbb{P}_2 = \sigma + \mathbb{K}_2 \end{cases} \qquad \text{---(1)}$$

なる関係があり、そのようすを図5に図示した。

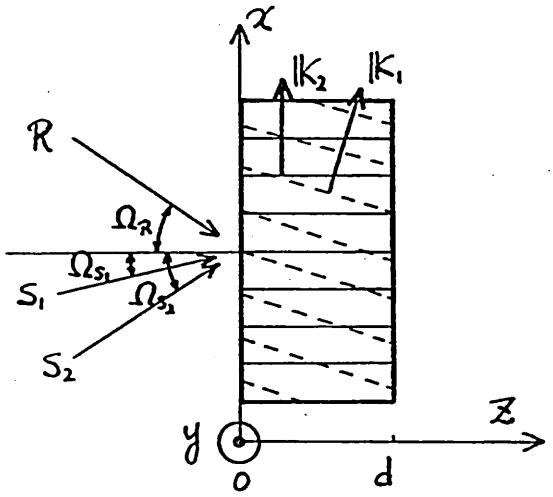


図4　2重露光により形成された回折格子

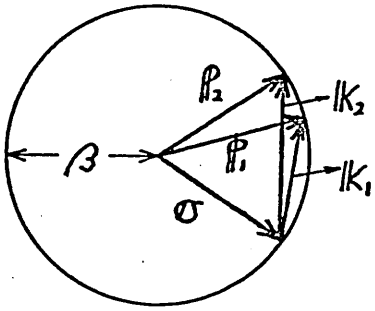


図5　グレイティングベクトルダイアグラム

今 R, S_1, S_2 は図4のy方向に偏光しているとし、記録時と同じ伝搬ベクトルおよび偏光方向をもった光を照射したときの回折格子中の光波伝搬を解析する。さて、格子中の光波の電界 $\mathbb{E}$ は、次の波動方程式を満足せねばならない。すなわち、

$$\nabla^2 \mathbb{E} + k^2 \mathbb{E} = 0 \qquad \text{---(2)}$$

ここで

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon$$

$$= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{r}) + \varepsilon_2 \cos(\mathbb{K}_2 \cdot \mathbb{r}) \right]$$

$$= \beta^2 + 2\beta k_1 \left(e^{j\mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{r}} + e^{-j\mathbb{K}_1 \cdot \mathbb{r}}\right) + 2\beta k_2 \left(e^{j\mathbb{K}_2 \cdot \mathbb{r}} + e^{-j\mathbb{K}_2 \cdot \mathbb{r}}\right) \text{--(3)}$$

また

$$\beta = 2\pi n / \lambda, \quad k_1 = \pi n_1 / \lambda, \quad k_2 = \pi n_2 / \lambda \qquad \mathbb{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(n_1, n_2 : 回折格子 $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ の屈折率変化)

この波動方程式(2)を解くわけであるが、充分に体積化されたホログラムを考え、存在しうる電界 $\mathbb{E}$ が次式のように3つの波の和で表わされると仮定する。すなわち、

$$\mathbb{E} = R(z) e^{-j\sigma \cdot \mathbb{r}} + S_1(z) e^{-j\mathbb{P}_1 \cdot \mathbb{r}} + S_2(z) e^{-j\mathbb{P}_2 \cdot \mathbb{r}} \qquad \text{---(4)}$$

式(3), (4) を式(2)に代入し、次式を得る。

$$e^{-j\sigma\cdot\mathbf{r}}\left[R''-2j\sigma_z R'+(\beta^2-\sigma^2)R+2\beta k_1 S_1+2\beta k_2 S_2\right]$$
$$+\,e^{-j\rho_1\cdot\mathbf{r}}\left[S_1''-2j\rho_{1z}S_1'+(\beta^2-\rho_1^2)S_1+2\beta k_1 R\right]$$
$$+\,e^{-j\rho_2\cdot\mathbf{r}}\left[S_2''-2j\rho_{2z}S_2'+(\beta^2-\rho_2^2)S_2+2\beta k_2 R\right]=0 \qquad ---(5)$$

この式(5)の各expの係数を0として、R, S_1, S_2に関する連立微分方程式を得る。その際、$R(z)$ $S_1(z)$, $S_2(z)$の変化はゆるやかで、R'', S_1'', S_2''は無視できるとし、またBragg条件を満足していることより、

$$\beta^2-\sigma^2=\beta^2-\rho_1^2=\beta^2-\rho_2^2=0$$

となるので、結局、その連立微分方程式(coupled wave equation)は次のようになる。

$$\begin{cases} C_R R'+jk_1S_1+jk_2S_2=0 \\ C_{S_1}S_1'+jk_1R=0 \\ C_{S_2}S_2'+jk_2R=0 \end{cases} \qquad ---(6)$$

(ただし、$C_R=\cos\Omega_R$ $C_{S_1}=\cos\Omega_{S_1}$ $C_{S_2}=\cos\Omega_{S_2}$)

式(6)に表わされるR, S_1, S_2のカップリングのようすを模式的に示すと、図6のようになる。

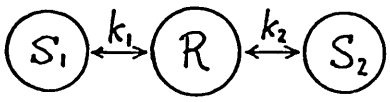


図6. カップリングのようす
(2重露光の場合)

さて、式(6)を

$$R(0)=e^{j\phi_0} \qquad S_1(0)=S_2(0)=0$$

なる初期条件の下で解くと、次式を得る。[3]

$$\begin{cases} R(z)=e^{j\phi_0}\cos\left(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,z\right) \\ S_1(z)=-je^{j\phi_0}\sqrt{\dfrac{C_R}{C_{S_1}}}\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\sin\left(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,z\right) \\ S_2(z)=-je^{j\phi_0}\sqrt{\dfrac{C_R}{C_{S_2}}}\dfrac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\sin\left(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,z\right) \end{cases} \qquad \text{---(7)}$$

(ただし、$\alpha_1=\dfrac{k_1}{\sqrt{C_R C_{S_1}}}$, $\alpha_2=\dfrac{k_2}{\sqrt{C_R C_{S_2}}}$)

ここで、$C_R/C_{S_1}\approx 1$, $C_R/C_{S_2}\approx 1$ また、$z=d$ とし、$\alpha_1 d=\nu_1$ $\alpha_2 d=\nu_2$ と置くと、次のような式を得る。

$$\begin{cases} |R(d)|^2=\cos^2\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2} \\ |S_1(d)|^2=\dfrac{\nu_1^2}{\nu_1^2+\nu_2^2}\sin^2\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2} \\ |S_2(d)|^2=\dfrac{\nu_2^2}{\nu_1^2+\nu_2^2}\sin^2\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2} \end{cases} \qquad \text{---(8)}$$

B) n重露光の場合

一般にn重露光の場合にも同様の解析により次のような式が導かれる。すなわち式(8)において $\nu_1^2+\nu_2^2$ のところを $\sum_{k=1}^{n}\nu_k^2$ に置き換えればよい。

$$\begin{cases} |R(d)|^2 = \cos^2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\nu_k^2} \\ |S_i(d)|^2 = \dfrac{\nu_i^2}{\sum_{k=1}^{n}\nu_k^2}\sin^2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\nu_k^2} \end{cases} \quad \text{---(9)}$$

となる。このとき、図6に対応する図は図7のようになり、nが変化すると、Rとエネルギをやりとりする相手の数が変化するため、z方向に沿ってこのエネルギのやりとりを観測したとき、エネルギ移行（RからS₁, S₂, …Sₙへあるいはその逆向きへ）の周期がnに応じて変化する。つまり、nが大きいと、このエネルギ移行の周期は短くなる。したがって、z=dにおける回折光強度もnによって変化することになるのである。

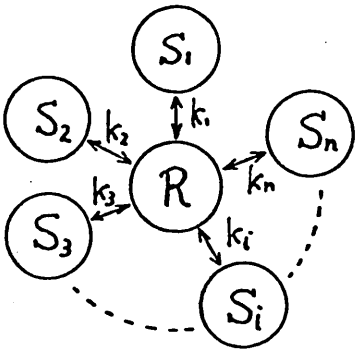
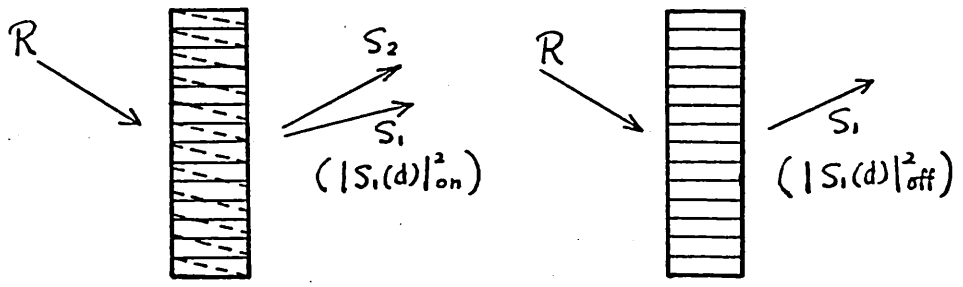


図7. カップリングのようす
（n重露光の場合）

4 超音波光偏向器の2周波動作の場合

超音波光偏向器の2周波動作特性は2重露光を行なったホログラムの話に置き換えて考えることができる。そこで、3.で得た解析結果を超音波偏向器の話としてとらえたとき、超音波素子の幅でdが決まり、超音波の出力によって式(7)でいうとα、式(8)でいうとνが変化する。たとえば、ν_1に相当する超音波の出力は一定にし、ν_2に相当する超音波出力をon-offすることにより図8のように $\nu_1=\nu_2=\nu_0$ のon状態から、$\nu_1=\nu_0$, $\nu_2=0$ のoff状態へ変化させたとき、回折光強度が $|S_1(d)|^2_{on}$ から $|S_1(d)|^2_{off}$ になったとすると、それぞれの大きさは次式で与えられる。



a) on状態 ($\nu_1=\nu_2=\nu_0$)　b) off状態 ($\nu_1=\nu_0$, $\nu_2=0$)

図8 ν_2 の on-off

$$\begin{cases} |S_1(d)|^2_{on} = \frac{1}{2}\sin^2(\sqrt{2}\,\nu_0) \\ |S_1(d)|^2_{off} = \sin^2\nu_0 \end{cases} \quad \text{---(10)}$$

これをグラフにしたのが図9で on状態とoff状態における回折光強度 $|S_1(d)|^2_{on}$ $|S_1(d)|^2_{off}$ と ν_0 すなわち超音波出力の関数として表わしている。

たとえば、$\nu_0=\pi/4$ とし onからoffにしたとき、回折光強度は図9の点Pから点Qへと変化することになる。

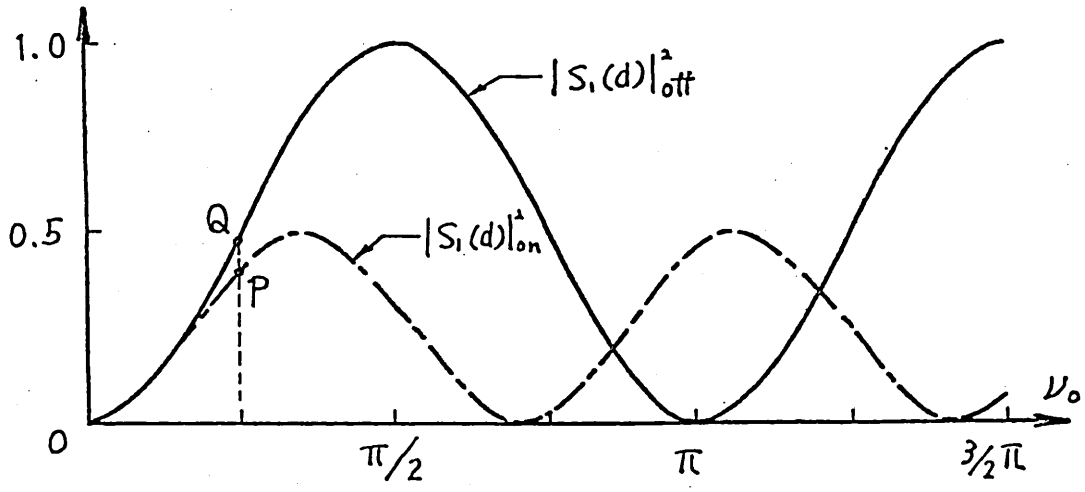


図9 ν_0 の on-off による $|S_1(d)|^2$ の変化

ν_0 の設定位置を変えるとこの $|S_1(d)|^2$ の変化率 a も変わり、また回折効率も変化することになる。ただし、a は次のように定義しておく。すなわち

$$a=\left(|S_1(d)|^2_{off}-|S_1(d)|^2_{on}\right)\Big/|S_1(d)|^2_{on}$$

たとえば 変化率 a を小さく抑えたいときは、ν_0 をもっと小さな値にすれば良いが そうすると回折効率が低くなる。よって、仮に許容される変化率 a_P が与えられたならば、その条件の下で回折効率を最大にする ν_0 が決定されることになる。

5. 超音波光偏向器のn周波動作の場合

n周波動作についても、2周波動作のときと同じような考察を行なってみた。

A) 超音波出力を1つずつoffにしていったときの回折光強度の変化

$\nu_1=\nu_2=\cdots=\nu_n=\nu_0$ なるon状態から、超音波出力をν_nの方から順次1つずつoffにしていったとき、残されたグレイティングにより回折された光の強度（回折ビーム1本当たりの強度）がどのように変化するか（図10参照）計算してみた。

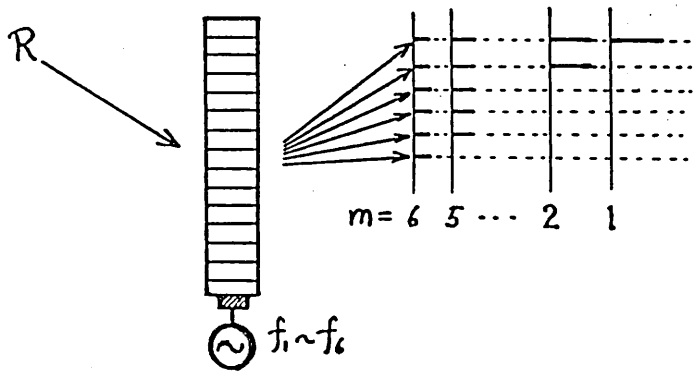


図10 超音波出力を1つずつoffにしていったときの回折光の強度変化

超音波出力がn個のうちm個だけonの状態にあるときの回折光強度 $|S_i(d)|^2_{(m)}$ $(1\leqq i\leqq m)$ は式(9)より次のようになる。

$$|S_i(d)|^2_{(m)}=\frac{\nu_i^2}{\sum_{k=1}^{m}\nu_k^2}\sin^2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\nu_k^2}=\frac{1}{m}\sin^2(\sqrt{m}\,\nu_0) \quad \text{---(11)}$$

$$(\because\ \nu_1=\nu_2=\cdots=\nu_m=\nu_0)$$

ここで 図9との比較のため $n=3$ において $m=1$ のときと $m=3$ のときの $|S_1(d)|^2_{(m)}$ の変化のようすを図11に示した。

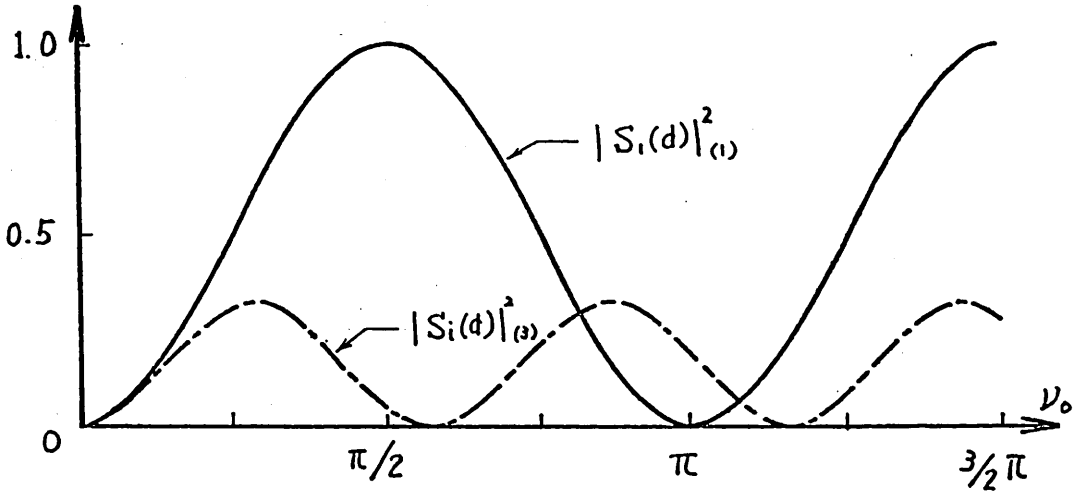


図11 回折ビームの数を3本から1本にしたときの回折ビームの強度変化

なお、$|S_1(d)|^2_{(1)}$ $|S_i(d)|^2_{(3)}$ は 式(11)より次のようになる。

$$\begin{cases} |S_1(d)|^2_{(1)} = \sin^2 \nu_0 \\ |S_i(d)|^2_{(3)} = \frac{1}{3} \sin(\sqrt{3}\,\nu_0) \end{cases} \quad \text{---(12)}$$

図11からわかるように、図9の $|S_1(d)|^2_{on}$ に比べ、$|S_i(d)|^2_{(3)}$ の方が ν_0 に対する周期が短くなっており、ν_0 の設定位置も $n=2$ の場合より小さな値にしなければならないと考えられる。

また、$n=6$ とし、$m=6, 5, \cdots 2, 1$ と置いて $|S_i(d)|^2_{(m)}$ の大きさを計算した結果を図12に示す。

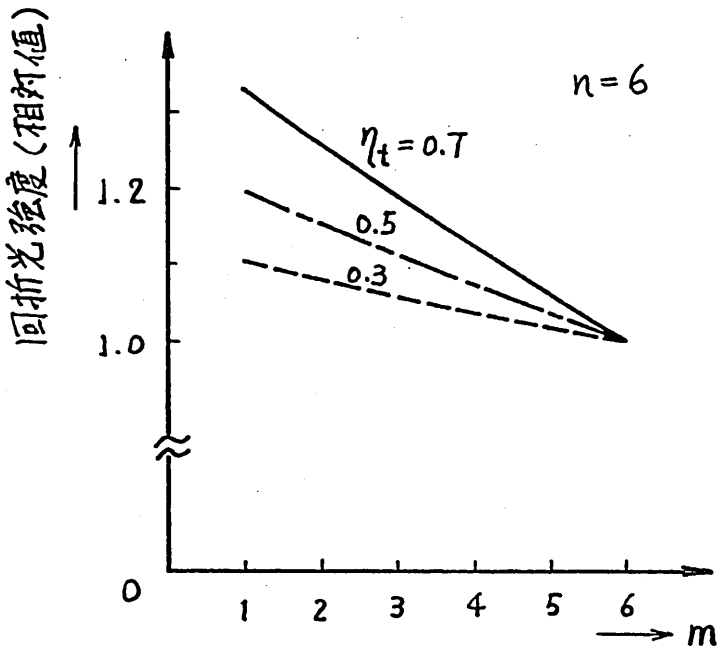


図12 mを変化させたときの回折ビーム強度変化

この図の中の η_t とは、6個すべてon（$m=6$）の状態での総合回折効率で

$$\eta_t = \sum_{i=1}^{6} |S_i(d)|^2_{(6)} \Big/ |R(0)|^2 = \sin^2(\sqrt{6}\,\nu_0) \qquad \text{---(13)}$$

で与えられる。なお、グラフでは $|S_i(d)|^2_{(6)}$ の値を1とし、ν_0 相対値で示してある。このグラフからも、回折効率を上げようとすると、mの変化による回折光強度の変化も大きくなることがわかる。

B) 許容される回折光強度変化率に対する最大回折効率

n 周波動作の場合、$m=n$ の状態から $m=1$ の状態になったときの回折光強度の変化率 a が、許容変化率 a_p より小となる条件の下でとりうる η の最大値を計算した。ただし、a は

$$a = \left(|S_1(d)|^2_{(1)} - |S_i(d)|^2_{(n)}\right) \Big/ |S_i(d)|^2_{(n)}$$

で定義し、$a = a_p$ と置いたとき η は最大となる。式(7)より

$$\begin{cases} |S_i(d)|^2_{(n)} = \dfrac{1}{n}\sin^2(\sqrt{n}\,\nu_0) \\ |S_1(d)|^2_{(1)} = \sin^2\nu_0 \end{cases} \qquad \text{---(14)}$$

なる式を得る。ここで、n と a_p を決めると、これらの条件を満たす ν_0 が求まり、

$$\eta_t = \sin^2(\sqrt{n}\,\nu_0) \qquad \text{---(15)}$$

として、総合回折効率 η_t が求まる。このようにして求めた、許容変化率 a_p と、その条件の下での最大総合回折効率 $\eta_{t\,max}$ を与える ν_0、およびそのときの $\eta_{t\,max}$ の関係を示したのが、図13 および図14である。

a_p を小さく抑えようとすると $\eta_{t\,max}$ も小さくなり、n が大きくなるとそれだけ条件も厳しくなることがわかる。たとえば $n=6$ において $a_p = 0.2$ とすると、超音波の出力は $\nu_0 \fallingdotseq \pi/10$ となるように調整すれば良いということになり、またこのときの総合回折効率は約50%となる。

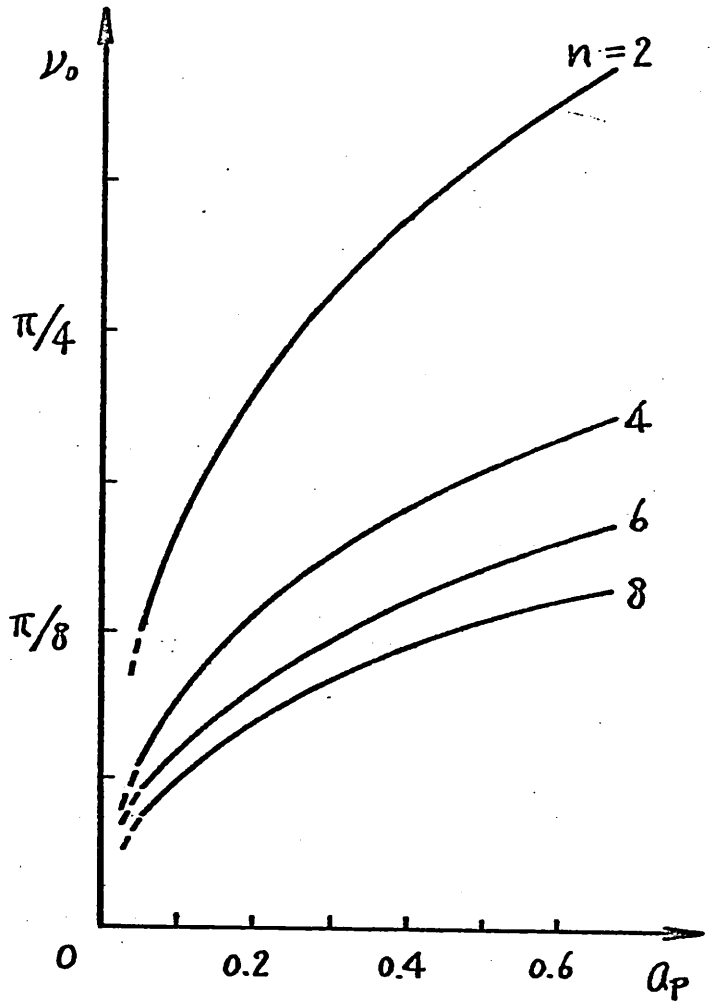


図13 許容変化率a_pに対し最大総合回折効率を与えるν_0

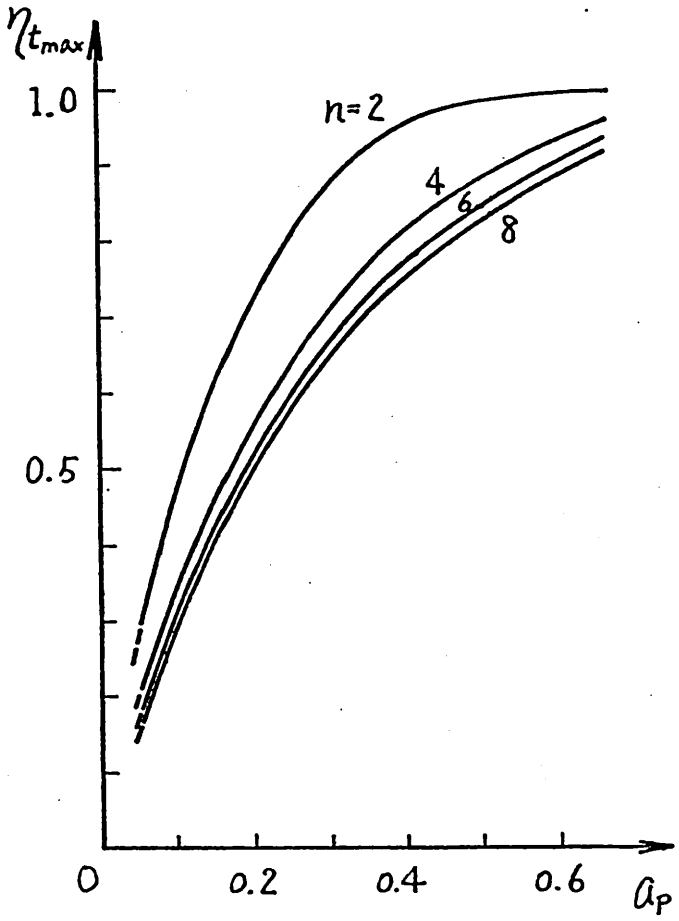


図14 許容変化率 a_p に対する最大総合回折効率 $\eta_{t_{max}}$

6. まとめ

多重同期をもつグレイティングによる光波の回折現象を利用した光デバイスのうち、超音波光偏向器について結合波理論を用いて解析を行ない、その多周波動作特性を明らかにした。すなわち、n種類の周波数の超音波によってn本の回折ビームを生じている状態から、1つずつ超音波出力を切っていったとき、残りの回折ビームの強度がどのように変化するか解析した。そして、その強度変化の許容度を与えた場合に、超音波出力の大きさをどのように設定すれば良いか計算し、これにより多周波動作を行なう超音波光偏向器設計の基礎資料を得た。

また、この解析結果は多重露光により多分岐型ホロカップラを作成するときの露光条件の設定にも利用される。

今後、実験結果との比較検討を行ない、この解析の妥当性、あるいは、さらに解析に付け加えるべき条件等を明らかにしていくつもりである。

参考文献

(1) W.R.Klein, B.D.Cook: "Unified Approach to Ultrasonic Light Diffraction" IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics July '67 P.123

(2) Kogelnik: "Coupled Wave Theory for Thick Hologram Gratings" B.S.T.J. vol. 48 No. 9 (Nov. '69) P.2909

(3) S.K. Case: "Coupled Wave Theory for multiply exposed Thick Holographic Gratings" J.O.S.A. vol. 65 No. 6 (June '75) P.724

(4) D.L. Hecht: "Multifrequency Acoustooptic Diffraction" IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics vol SU-24 No. 1 (Jan. '77) P.7

輻射科学研究会資料

ソ連ハリコフ大学訪問を終えて

橋本正弘
(大阪電気通信大学)

昭和53年1月27日 (中央電気クラブにて)

N
Minsk
Leningrad
White Russian
Russian
Kiev
Kharkov
Moscow
Ukrainian
Black Sea
Rostov
Kazak
Turky
Caspian Sea
Iran

1. まえがき

私は以前ソ連の研究者と2,3度話しをしたことがある。そのときいづれも、彼らからなかなか情報を聞き出しにくい印象をもった記憶がある。ソ連を数日訪れた英国と西独の人々とも話したが彼らも同様の印象を語っていた。ところが今回、ソ連の一部ではあるが、3ヶ月間訪れる機会を得て、街の人々、学生、大学の教員、その他の二部の組織の事務員等と接することができ、大学のシステム、研究形態、および社会意識制度を目の当りに見ることができた。その結果以前私はいわゆる"欧米社会の常識および価値感"で比較判断していたことに気付き、以前にロシア人にいだいていた不可解な印象も分りかけたように思う。われわれは特に研究面で日本とほとんど同じ思想や方向をもっている米、英、西独を中心とする自由主義圏とつき合っているためややもすれば このようなグループが全てであると錯覚しがちである。ソ連の中からみると逆の現象があるように感じた。これは私の訪問先がモスクワのような大きな国際都市でなかったためであるかもしれない。しかし私の体験は鷲見先生(名大)の一年間モスクワ滞在経験(1)とよく似ていたし、また先生の、ソ連の研究動向に対する見方も私の感じたものとよく一致していた。一方、角地先生(明大)の欧米の研究動向に対する所見(2)を対照すれば隔今違っていることがわかった。要するに、教育・研究をみる限り、"日本は欧米と同じである"と言っても過言ではない。したがって今回の機会は私にとって、私自身がややもすれば陥りやすい教育・研究に対する"価値感の偏見"に強

熱を刺激を与えてくれた点で意義深い訪問であった。以下でその一端を御紹介しよう。

2. ハリコフ(Kharkov)の街

今回はソ連の理論ラジオ物理学者と接触を深めることを目的として(for scientific mission) 3ヶ月間 Visiting Professor の形で滞在した。私はこのときウクライナ共和国第2の都市ハリコフにあるハリコフ大学を拠点としその他2.3の大学を訪問した。ハリコフはモスクワ、レニングラードについで大きな工業都市であるといわれる。主として大型トラクター、大型蒸気タービン、飛行機等ソ連工業界の主製品を製造している。都市人口も150万人という大都市である。特に地下鉄が走っている点からもその大きさ推察できる。

これらの産業界の要請を受けて工科系の教育機関が沢山あった。一つの都市には一つの大学しかないがその代りに(Higher Educational) Institute と呼ばれる単科大学それぞれの専門に応じて多く(約20ヶ所)設置されていた。その他、Scientific Institute なる専門機関もある。その一つである Institute of Superlow Temperature は建物の大きさからしてハリコフ大学と同じ規模に見えた。Institute of Law, (Kharkov) Mathematical School (B. M. Levitan のいた所) なるものもある。もちろんその他に2年制の短期大学もあった。ソ連は男女平等の国である。したがって工科系の部門にさえも男女同数の学生がいた。美しさで世界的な定評のある若いロシア女性(18才~23才)が半数を占めている。この点は特にうらやましく思えた。大学側から大学院生(アスペラントと呼ばれている)を対象に講義するよう要請されたが

私は学部学生を含めた方がよりよいと申し入れたあたり彼等にはとうてい理解できなかったであろう。

3. 街の人々

男女平等がどのようなものであるのかつくづく思い知らされた。あらゆる仕事に従業員の半数が女性である。たとえばトロリーバスの運転手の殆ども女性である。中年の人もいれば若い人もいる。女性の80%は仕事に従事していると言う。したがって街を歩く人々のほとんどは通勤者であると同時に買物をする人達でもある。買物かごをさげて通勤する人は何も女性に限らない。男性も全く同じである。朝の出勤途上に子供の手を引いてあるいは乳母車を押して保育所へ行く男性をよく見かけた。もちろん大学のProfessorと言えども これは同じである。

街の人々は概してのんびりしている。また粗切――おせっかいやきと言った方がよいかもしれない――である。ソ連は日本のような娯楽設備がない。彼等は酒を飲んだり食事を共にしたり、またダンス（ゴーゴーダンスに近い）をしたりするのが日常の娯楽のようである。そのせいか レストラン、食堂などで見知らぬ人同志が相席したときはたいてい楽しくしゃべり 酒（ウオッカ）を勧め合っていた。これはモスクワおよびミンスク、ロストーフなどでも同じであった。

4. 物価・生活レベル

彼等の生活レベルを推し計るのに給料だけの比較では無理なようである。社会主義体制の下では ① 医療費がすべて（歯科も）無料、

老後の生活保障が行き届いていること ② 住宅は（市街地では半ば強制的にアパートに入れられるが）人数に応じた（1人当り 8m²以上）広さのものを，ガス・水道・暖房費として月に7000円弱くらいで支給されること ③ 夫婦のほとんどはほぼ同一条件で共働きしていること ④ 保育所が完備していること ⑤ 必需品および交通費が極端に安いこと，等の条件を考慮して生活レベルを推察しなければならない．

まず最低は学生であろう．大学生は自宅通学のものが月に14,000円（40p）寄宿舎にいるものは月に32,000円（90p）程度支給される．大学の諸費用（本代を含む）と食費は40pでまかなえる．90pもらうと夜食付を満喫することができる．大学院生は43,000円/月（120p）もらっている．もちろん女子学生も同じである．したがって一人でいるより二人でいる方が生活費をへらすことができるため若くして結婚するものが多い．次は事務員（ホワイトカラー）であろう．彼等は平均すると約7万円（200p）くらいの月給をもらう．次に高いのは労働者である．熟練工ともなると12万円（350p）となるそうだ．さて大学教授は相当に高い地位にあり，その給料も相当なものである．能力に応じて異るとのことであるが私のホスト役の教授は40才すぎの若さにもかかわらず18万円以上の給料であった．

このように贅沢をしない限り裕福な生活ができるようである．彼等の裕福さは特に20才台の若い人に感じられた．これはソ連がここ数年の間に急激に生活レベルが上昇したことと裏付けているように見えた．たずねてみるとやはりそうであった．ここ2・3年皆が贅沢品を買いあさるよう

になっていると言う。

彼等にとって"貯蓄"はあまり必要のないもののように思われた。このような社会でのお金の価値は日本での100円が向うでは10円，日本での1万円が向うでは3万円というような非線形の価値比較をすればすっきりするようだ（公式レートでは1P≒360円）。

ラジオ・テープレコーダ，ステレオ等のエレクトロニクス製品は極めて高価である。その中でも日本製品は群を抜いて高い（正式の店では販売されていない）がその優秀さにやはり人気の的である。衣類・時計もそうである。たとえば折りたたみ式洋がさのほとんどは日本製と聞いた。日本で2,000円くらいのものが向うで1万4千円くらいの値段であった。もっとも ソ連製の洋がさも見せてもらったが日本製とさほど違いはなかったように思えたが……。

5. システムの違いによるトラブル

先ほど円とルーブルの為替レートが，実質，非線形であると述べた。これはーつに社会のシステムが異っていることに起因する。そのようなことが沢山あり，これらを理解しないとトラブルに巻込まれる。ソ連を短期間訪問した欧米人のほとんどが語るようにたえずトラブルがついてまわる。ソ連ではこれを避けるためIntourist システム（日本の交通公社に当る）がたえず面倒をみてくれる。欧米人（日本人も含む）は逆にこれを監視として嫌い自由行動しようとしてますますトラブルを巻き起す。いづれの側からしても当事者同志にとって不可能なトラブルにみえる。その大半は主として次のことが原因で起るように思われた。すなわち社会主義社会では金でサービスを買うことができない。

そのため金を持っている人が店もしくは会社に対し暗黙のうちにサービスの強制をしている。資本主義国ではこれは常識であろう。しかしソ連では違っていた。このような知識を訪問前にいくらか身につけていったが実際に遭遇するとなかなか理解できないものであった。

6. 大学

日本の6・3・3制度は、ソ連では統一されていて10年制度と相当する。日本の6才入学が7才入学となっていた。したがって大学へは通常17才で入学する。大学は5年制である。1・2年は教養課程、2・3年が専門課程、4・5年が大学院修士課程に似ていた。この上にアスペラントコース(3年)がある。日本での博士課程に類似している。アスペラントは生徒でないと言っていた。級等は給料をもらって"働いている"そうだ。だから時々講義を代講することもある。アスペラントコースを修了すると Candidate of Science なる称号が与えられる。ただし修了条件として 1. Speciality, 2. Foreign languages, 3. Philosophy の3つの試験に合格し、さらに論文(150頁以内、少くとも6つの発表論文を含むこと)を提出しなければならない。この資格は教育者(たとえば Associate professors)になるためには不可欠のものであるそうだ。さらに進んで新らしい研究成果を提示し、さらに20ト以上の論文を発表した場合250頁以内の論文を科学アカデミーに提出し、審査に合格すれば USSR doctor の称号を得ることができる。その審査はアカデミーによって統一して行われるため USSR doctor は非常に高い資格とされている。これをもっぱら

よってProfessorの地位が約束される。USSR doctorは研究指導できる資格である。

さて、ハリコフ大学およびその学部を紹介しよう。この大学の歴史は150年以上も前から始まっていると言う。特に物理部門では多くの著名人を輩出している。Landauもここで教鞭を執っていたという。大学には1500人の教員と15000人の学生がいる。その学部は次のように11に分れている。

1. Math. & Mechanics 2. Physics 3. Technical Physics
4. Radiophysics 5. Economics 6. Chemistry
7. Geography & Geology 8. History 9. Literature
10. Foreign Languages (Eng., French, Germ.)
11. Preliminary for Foreigners.

学部の中に"学科"がある。しかしこの学科は日本でいう"講座"の連携の大きいものと考えた方がよりわかり易い。そのせいか"講座"の集団からなる"学部"はその専門が隣合と片寄っていた。これは各大学によって大きく異り、それぞれが特色をもっていた(もっともモスクワ大学だけはほとんどすべてを網羅していると言われていた)。

たとえばRadiophysics学部では42名の教授陣と300名の職員からなり、それぞれ次のようなchair("講座")に分れている。

1. Theoretical Radiophysics 2. Applied Electromagnetism
3. Microwave Technology 4. Quantum Radiophysics
5. Cosmic Radiophysics 6. Semiconductor, Vacuum

その中で特にTheoretical Radiophysicsでは1教授，4助教授，25エンジニア，7ドクター(Candidates)および25名の学生とから成っていた．もっともここは平均より大きい所帯であるそうだ．Applied Electromagnetismでは1教授，4助教授，3 Senior Lecturers，…，Semiconductorでは5助教授，1 Senior Lecturer，20 Scientific Workers，その他エンジニア，秘書を合わせて50名で構成されているとのことであった．もっともMinskにある白ロシア大学の物理学部の1 chairにはかつて60名の教授がいたと言っていた．それでも未だに1 chairに13人の教授がいる．このようにそれぞれのchairの形態は必ずしも統一されていないように見えた．Rostov State Univ.にも訪れたがそこでは学会と議論が目的であったため学科については聞かなかった．しかし後にKharkov State Univ.とも大差ないとのことだった．

表でハリコフ大学と白ロシア大学の一部のchairsの講義内容をリストにした．各々の授業が非常に細分化されていて，手厚い教育がなされており，それだけ教員の負担も重く，すべてが教育中心であった．研究は教育と一体となって行われ，研究設備もすべて教育用に向けられていた．このことは授業内容のリストからもうかがえるであろう．特に学部学生の落ちこぼれ現象がほとんどみられないのに驚いた．

大学における研究は専門機関における(1)のと違って教育を主体としてそれと融合した形で行われていた．というのは学生実験，専門講義の多くが各chairの内で行われており，テーマ，測定装置，器具の手

表：授業内容．A/B の A は年間の講義時間数，B は
それとは別に実施される実験（実習）の時間数

	Kharkov State Univ. Radiophysics		White Russian Univ. physics	White Russian Univ. Radiophysics
	Applied Electromagnetism	Semiconductor	Spectroscopy	?
General	Theoretical essentials of radioengineering and Theory of oscillators II–III 157/68	Vacuum electronics III. 70/	?	Radiation and propagation of EM waves 40/40
		Semiconductor electronics 70/	physical optics 50/	Information Theo. 50/30
	Propagation of radiowaves IV 54/36	Semiconductor Theory 54/36	Introduction to quantum optics 50/	TV Eng. 60/60
				Pulse Eng. 50/40
Special	Theory of radiation of EM waves and Antennas IV 72/90	Semiconductor electronics 51/36	Structure of molecules and Crystal optics 49/	Microwave Eng. 100/50
	Theory of excitation of EM waves IV 87/34	Gas discharge 51/36	Holography 32/	physical experimental accuracy
	Antenna theory with controlled radiation IV 51/34	plasma physics and diagnostics 40/30	Atomic spectroscopy (Nuclear physics) 16/	Holography
	Additional chapters of antenna theory V 80/45	Semiconductor and physical phenomena 36/45	Molecular Spectroscopy 40/72	Data processing
	Additional chapters of Theory of propagation of radiowaves V 46/36	Electromagnetic phenomena in solid plasma 45/	Spectroscopy of liquid 24/	Computer (Software)
	Integral equation of electrodynamics and the Theory of artificial media V 40/	Physics of Solid 54/	Luminescence 40/72	Graph Theo.
	Essentials of radiogology V 20/20	Semiconductor materials 40/	crystal spectroscopy 32/	Image processing
	Seminar on speciality – Space and time elaborating of signals V 20/20	Principle of micro-electronics 50/	plasma spectroscopy 30/	Micro-electronics
			Applied optics 36/	
			Special course of quantum optics	
			Geometric optics /36	
			Quantum generator (laser) /40	
			Lab. of Special Schedule B.S. /140	

入れもchairの人々が行っているため，研究テーマと教育用テーマがほとんど似かよっているし，また装置も共通利用しているからである．各chairに支給される金はほとんど教育用であって，これも雑費用と考えた方がよい（日本の大学の講座費とほぼ同様）．研究費のほとんどは産業界から研究業績に応じて援助される．米国を訪れたことのあるphysicsの学部長は，この点に関する限り，米国のシステムと似ていると語っていた．ハリコフ大学のProf. Gequzinは（crystalのdislocationの分野で）著名な物理学者であるが彼の研究に対する価値感は欧米の物理学者のと似ていた．しかしソ連の応用数学部門は独自の方向をとり，そのレベルは世界に誇っている．われわれからみるといささか特殊な部門と見ていたのであるが，その部門の有力者Prof. Ivanov（ロシア大学数学部学部長）が日本の工学は"Special"であると言ったのには驚いた．

ソ連の数学，物理はよく知られている．しかし日本で考えられるようなエレクトロニクス部門は今ひとつという感じがした．Radiophysicsおよび Technical physicsは本来その部門を含んでいる筈であるがその中ではいわゆる物理学者が多く理論嗜好形に見受けられた．そのせいか学生は電離層や電波伝播論のような難しい理論を好むという日本とは逆の現象がみられた．ところがLebedev physical Institute of Academy Science USSRのProf. Belanovおよび彼の門下生のように完全といってほど欧米的発想のもったエンジニアもいる．最近の科学アカデミーのエレクトロニクスを中心とする技術

重視の方針[1]に従い，ごく近い将来，欧米的な仕事をするものがさらに増えるであろう．ソ連の従来の研究方法と欧米のものとをうまく調和させれば何か今までにない新らしい研究成果を生み出すのではないかと期待される．事実，最近始められたFiber Opticsの研究にはその独自の方向がみられた（別節参照）．

7. 国際シンポジウムに出席して

1977年9月13日－15日の3日間，ロシア共和国にあるRostovのDept. of High Education, Rostov State Univ. で科学アカデミー主催の第7回 All State Symposium on "Theory of Diffraction and Propagation of Waves" が開かれた．私の仕事はこれに間に合わなかったため単に出席して聴講するだけにした．会合は"International"であったが共産圏の人々が多く欧米の人はまれであった．そのせいか公用語はロシア語であった．

講演では，15分の持ち時間を越えて45分もしゃべる人，始めから終りまで黒板に難しい数式を所狭しとばかりに書きながらしゃべる人，ビラやスライドも用意せず黒板にさえも一文字たりとも書かないでただうろうろしてしゃべる人，等，私にとって目をまるくするような光景が多く，結局講演はわからなかった．ただ，同伴してくれたProfessorの通訳でどのようなことをしたのかくらいがかろうじてわかった．

ここでは多数の"理論物理屋"さんが光の伝搬を取り上げていた．彼等が言うにはこのテーマは極く最近始まったばかりである

私はこのテーマを中心に聴講したから，ここで，それを中心に概容を述べる．まず Opening session では レーザパルスによる流体の中の音波発生について，および プラズマ診断としての EM 波インバース問題 の 2件があった．Asymptotic session (11件) では Whispering gallery wave に関する報告が多かった．また Aperture のエッヂによる回折波の検討が多かった．Waveguide session (11件) では不均質媒質の導波路，Statistical な取り扱いによる多層曲り導波路の放射損の解析，幾何光学を用いたマルチモードファイバの解析など テーマ自体には新らしいものはなかったが 高度の数学・物理学を応用した Approach が独特であった．現在得られている結果は それほど目新らしくはなかったが それは始まってまだ時間が経っていないせいと思われる．その他 Numerical methods, Inverse problems, Nonlinear waves 等 多くの sessions があり 各々でかなり激しい質疑応答があった．

講演のあと，ソ連の Fiber Optics のリーダ Prof. Katsenellenbaum (Institute of Radioengineering and Electronics, Academy of Science USSR) に現状をたずねてみた．ファイバ損失は 5 dB/km，レーザダイオードの寿命は 1万時間 を越えていると言っていた．ファイバ通信の開発目的は，今の所はっきりしないが，シベリア等の長距離通信につかえたら…… とのことであった．

会場からの帰りに著名な物理学者 Prof. Krasnushkin と 97

シーで同乗することとなった。彼も目下光の伝搬に興味をもち、すでに彼の門下の人がそちらの仕事をしているそうだ。彼はすっかり私の仕事に興味をもち、後に、私の論文を読んで詳細なコメントを送付してくれた。

8. おわりに

2・3度鉄道を利用してソ連国内を旅行したことがある。列車の窓から見ただけでもソ連は広大な国であることがわかった。ほとんど森や林の中を走っている。このように私の訪問した所はソ連の極く一部にすぎない。ここで報告した内容も片寄っているかもしれないが幸いなことにソ連は政策上統一体制をしいているため、システム、物価、物(食物を除く)はどこでもほとんど同じであるということから、多分それほど大きな差異はないであろうと考えられる。

ハリコフ大学では私のような形式で訪れるケースは始めてとのことである。たしかにモスクワ、レニングラードを除いた他の都市はまだまだ国際化していないようだ。しかし今後日本からも訪れる人も多くなると思われ、本稿がそれらの人に何か役に立てると幸いである。

参考資料

(1) 鷲見治一："ソ連における電磁波理論の動向—モスクワ滞在記"
電磁界理論研究会資料 EMT-76-68, 1976.

(2) 菊地弘："欧米における電磁界理論教育・研究の動向"
電磁界理論研究会資料 EMT-76-72, 1976