輻射科学研究会資料

# 2空胴ガン発振器における多重発振

飯田幸雄　加藤忠男†　森田正信
（関西大学工学部，†大阪松貿エンジニアリングKK）

昭和54年5月11日

## 1. まえがき

2空胴をもつ9GHz帯のガン発振器において2重発振が観測され，バイアス端子より発振周波数差に近い周波数の信号を注入すると2重発振の一方の周波数が注入周波数変化に対応して変化する現象を報告した[1]。その後も同じ形をもつ発振器を種々試作した結果，どの発振器においても2重発振を起こすことができ，バイアス端子をサンプリングスコープで観測した結果2重発振の差の周波数をもつきれいな正弦波が観測された[2]。

この多重発振現象について実験的に種々検討を加えた結果自己励振パラメトリック発振現象であると思われる結果を得たので報告する。

なお，インパットダイオードにおいては自己励振パラメトリック発振現象ならびに増幅について文献(3)～(5)等の多数の報告があるが，ガンダイオードに関しては，3.622GHzの発振と同時に2.492GHzにおいて増幅ができるという結果がB. W. Hakki[6]により報告されている以外にあまりこのような現象についての報告はないようである。

## 2. 多重発振の観測

### 2-1 発振器の構造および実験回路

発振器構造を図1に示す。導波管WRJ-10のH面に平行な仕切りを入れることにより2空胴を構成しており，上下空胴とも周波数調整ネジおよび5.5mm×2.5mmの開口をもっている。上下空胴の仕切り板にはバイアスポストを通すために直径3.2mmφの穴が開けられている。ガンダイオードはNEC製10GM081発振器に取付けられているものを用いており，8.5～12GHzにおいて約60mWの出力が得られる。実験では発振器として動作する通常のバイアス電圧9Vで動作させている。

実験回路を図2に示す。上下空胴の出力を別々に取り出し観

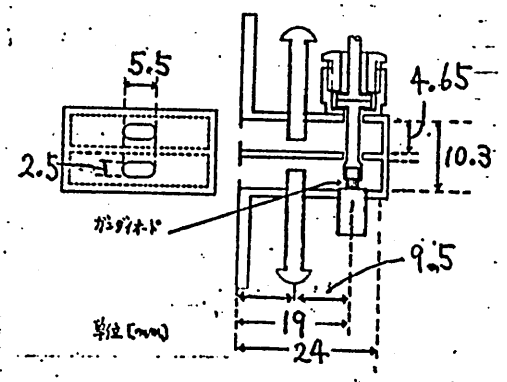



図1

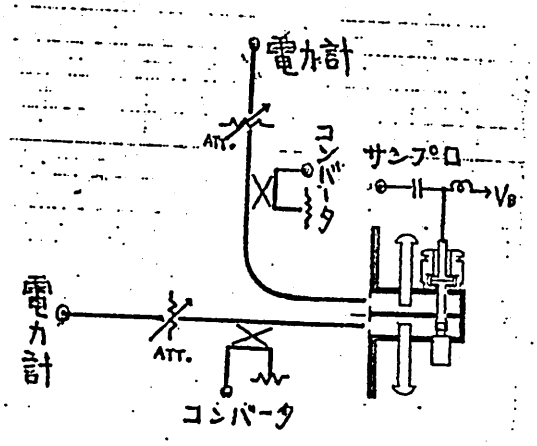



図2

測できる構成になっている。導波管側の出力はローカル周波数 $f_\ell$ のコンバータを通してスペクトルアナライザーで観測される。バイアス端子は直流分阻止用のコンデンサーを通して 50Ω の同軸系に接続され，50Ωの終端に発生する電圧をバイアス波形として観測している。

## 2-2 実験結果

上下空胴の周波数調整ネジの挿入長（それぞれ $d_u$, $d_\ell$ とする）を0にして，バイアス電圧9Vを印加すると約9.7 GHzの単一発振が観測される。出力は約10数mWで上の開口からほとんどが出力されている。そのため，実験では上の開口からの出力を観測する。

$d_\ell=0$ に固定し，$d_u$を変化するときの発振周波数変化を図3に示す。上ネジを挿入して行くと $d_u=0.4$ mmで周波数ジャンプを生じ9.7 GHzから10.5 GHzになり，$d_u=4.65$ mm（挿入長最大）まで周波数は低下してゆく。次にネジを抜いて行くと挿入時と同じ過程で周波数は高くなり $d_u=0.4$ mmで見られたジャンプはない。この時，$f_2$の発

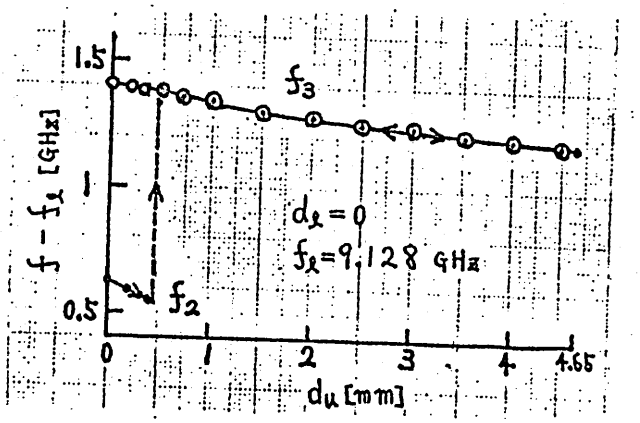



図3

振にもどすには下ネジを挿入しなければならない。

次に，図3でヒステリシスの見られる $d_u=0.25$ mm に上ネジを設定し，初めf₂の発振が存在する状態で $d_\ell$ を大きくして行くと図4に示すように発振周波数はなめらかに低下してゆくが，$d_\ell=4.34$ mm で新たにf₁の発振がf₂より約2GHz低い所に立ち上がり，f₁とf₂の2重発振状態となる。

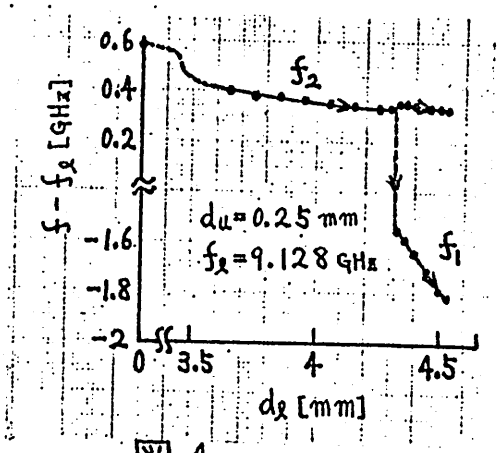


図4

図3でヒステリシスのない $d_u=0.5$ mm，1 mm に上ネジを設定した時の周波数変化を図5に示す。$d_\ell$ を0から増加して行くと発振はf₃から始まり，$d_u$ が0.4mmより小さい場合のf₂から始まるのと異なる。$d_u=0.5$ mm の場合はf₁とf₃の2重発振も見られるが，主としてf₁とf₂の発振であるのに対し，少し $d_u$ の大きい1mm の場合は主としてf₁とf₃の発振となる。

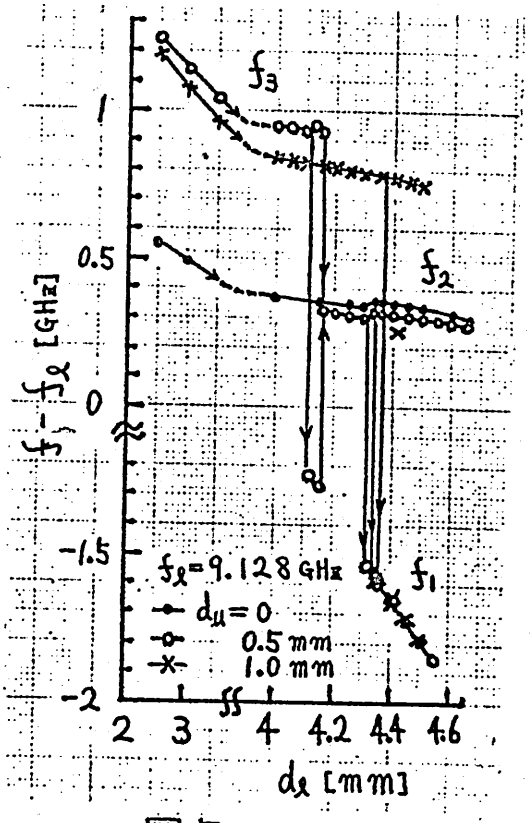


図5

$f_1$の発振は下ネジによって大きく変化し，上ネジに依存しない。$f_2$と$f_3$の発振は上下ネジによってあまり大きく変化しない。

次に下ネジを$d_\ell = 4.4$ mmに固定して$d_u$を変化するときの発振周波数を図6に示す。ネジを挿入するか抜くかにより多少のヒステリシスが見られるが，$f_1$, $f_2$の2重発振，$f_1$, $f_2$, $f_3$の3重発振および$f_1$, $f_3$の2重発振が観測される。

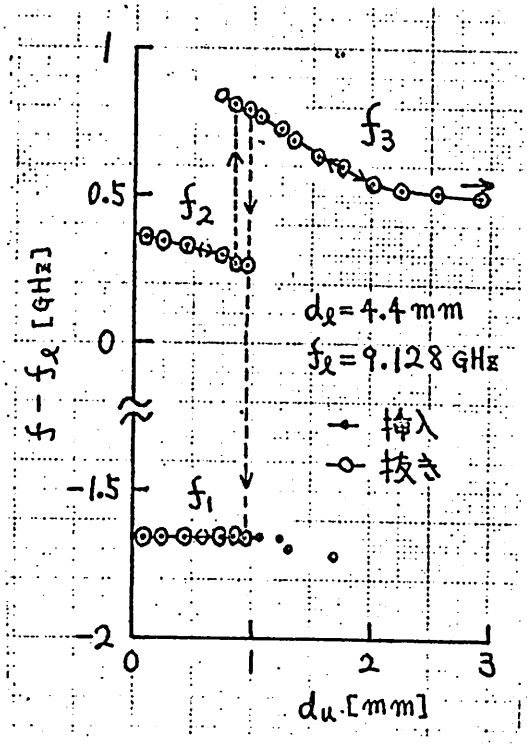


図6

観測される発振は次の4種類がある。

(1) $f_1$と$f_2$

約2GHzの間隔で起こる発振で上下ネジ挿入長の最も広い範囲で観測される安定な発振である。スペクトルとバイアス波形を図7に示す。バイアス側に約2.1GHzのきれいな正弦波が観測される。

(2) $f_1$と$f_3$ —— $f_1$と$f_2$同様安定に見られる発振で，バイアス波形は図7と同様な波形である。

(3) $f_1$, $f_2$と$f_3$ —— 上下ネジ挿入長のごく限られた範囲で見られる。図8に示すように，バイアス側には$f_2$と$f_3$の

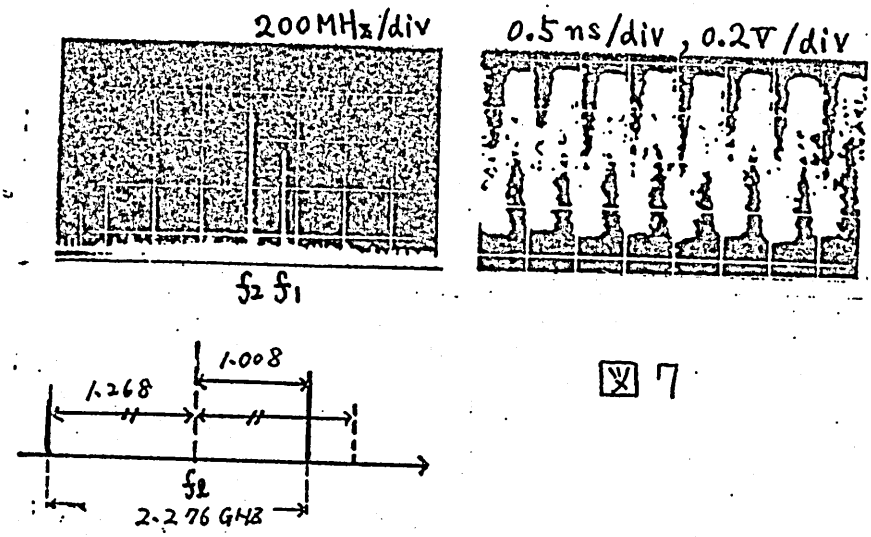

200MHz/div
0.5ns/div, 0.2V/div
f2 f1
1.008
1.268
f2
2.276 GHz

図7

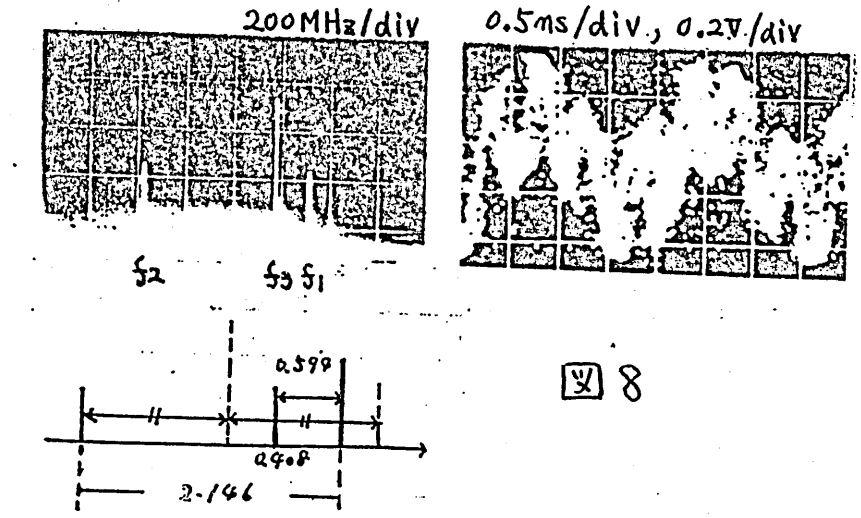

200MHz/div
0.5ms/div., 0.2V/div
f2
f3 f1
0.599
0.408
2.146

図8

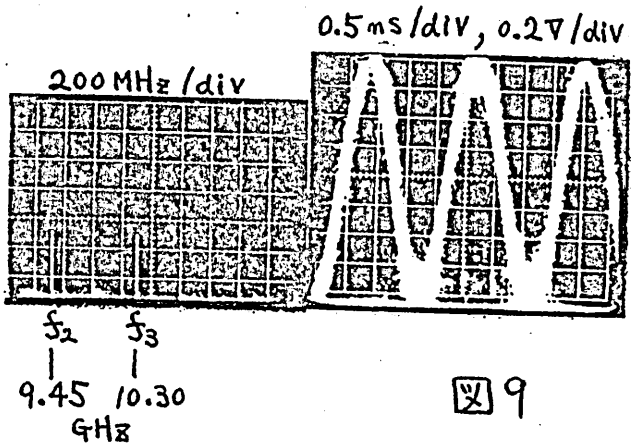

0.5ms/div, 0.2V/div
200MHz/div
f2
f3
9.45
10.30
GHz

図9

差の約540 MHzの波と$f_1$と$f_2$又は$f_1$と$f_3$の2GHz帯の波とが重畳している。

(4) $f_2$と$f_3$ —— $f_2$と$f_3$の差の数100 MHzの間隔で起こる発振で，$f_1$，$f_2$，$f_3$の3重発振の範囲で局所的に見られる。図9に示しているが，バイアス側にはきれいな正弦波が観測され，バイアス波形の振幅としては最も大きいものが得られる。

次に出力電力について検討する。

図4に示している場合の$f_1$，$f_2$の発振が生じるまでと$f_1$，$f_2$の発振時における出力電力を図10に示す。$P_u$は上の開口の出力を，$P_\ell$は下の開口の出力を表わしている。$f_2$の電力は主に上の開口から出力されている。$f_1$が起こる直前の$P_u$は1.6 mWであり，$f_1$が起こるとすぐ1 mWに減少している。その時$P_\ell$は53 μW

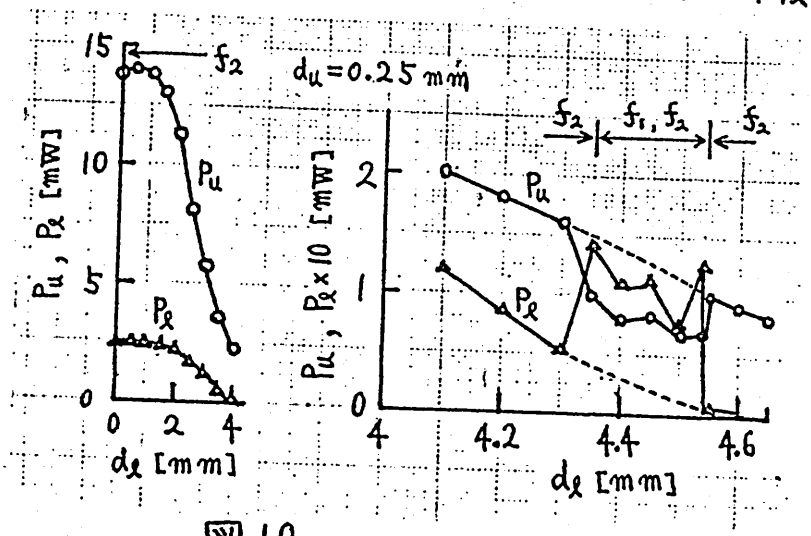
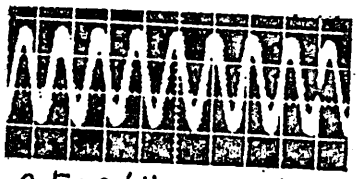



図10

から145μWに増える。$f_1$の電力は$f_2$の電力が下空胴に漏れている量を引いて約90μW程度であると考えられる。

$f_1$の発振電力が上空胴に漏れる量は無視してもよい値である。図11はこの$f_1$，$f_2$の2重発振時の上下開口より観測したスペクトルとバイアス波形である。バイアス波形は振幅0.45Vp-pで約0.5mWの電力である。$f_2$の単一発振電力が1.6mWから1mWに減少し，その差の0.6mWが$f_1$とバイアス側の電力となっていることが大まかではあるが認められる。

以上の結果より，$f_1$は下空胴のみに関係した発振であることが明らかであるが，$f_2$と$f_3$は電力的には主として上の開口より出力されるものの周波数は下ネジによっても変化する。$f_2$と$f_3$は$f_1$に比べるとネジによる変化が少ないので，主としてガンダイオード付近の発振器構造と関係しているものと思われる。



0.5ns/div，0.2V/div

図11（$d_u$=0.25mm，$d_l$=4.35mm）

図1と同じ形をもつ発振器を種々試作した結果，どの発振器においても上下空胴のネジを調整することで多重発振を起こすことができた。2重発振時に導波管側に取り出される電力は図1の発振器の場合は少なかったが，発振器により異なり第3章で取り上げる発振器の場合は約25mWが得られている。

## 2-3 発振器(II)における結果

前節では$f_1$と$f_2$を上下空胴より独立に取り出すことはできない。そこで，$f_1$と$f_2$を独立に取り出すことを目的に図12に示す構造の発振器を試作した。周波数調整ネジの挿入長$d_1$と$d_2$を0としてバイアス電圧を印加すると空胴2の発振$f_2$が起る。出力は約60mWである。この時，$d_1$を挿入しても発振に影響をおよぼさなかった。$d_1$，$d_2$に対する発

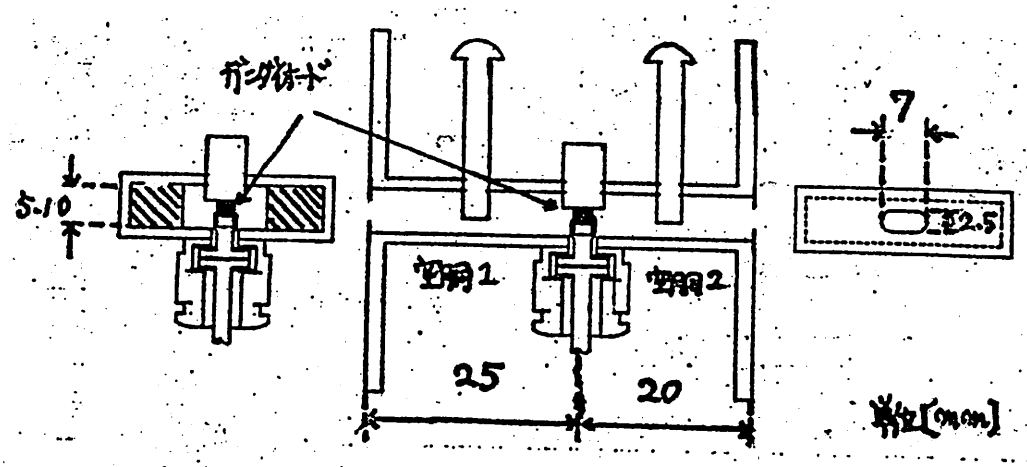



図12

振周波数は図13のようになり，$f_1$は空胴1の発振，$f_2$は空胴2の発振というはっきりとした区別ができる。$f_1$から$f_2$へジャンプする領域で2周波発振が観測される。

図14にスペクトルとバイアス波形を示す。スペクトル(a)は両空胴からの出力を合成して観測したもので，(b)，(c)はそれぞれ空胴2および1の出力を観測したものである。電力は良く分離されている。

2重発振の起こる領域が小さいので今後空胴の仕切り板等改良を試みたい。

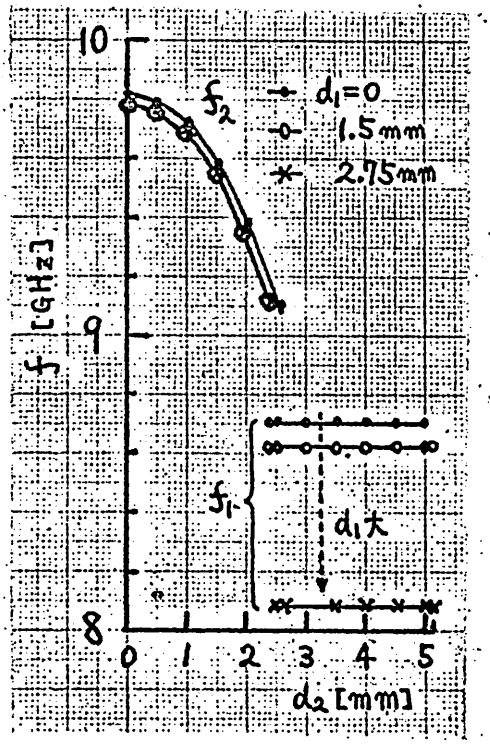



図13

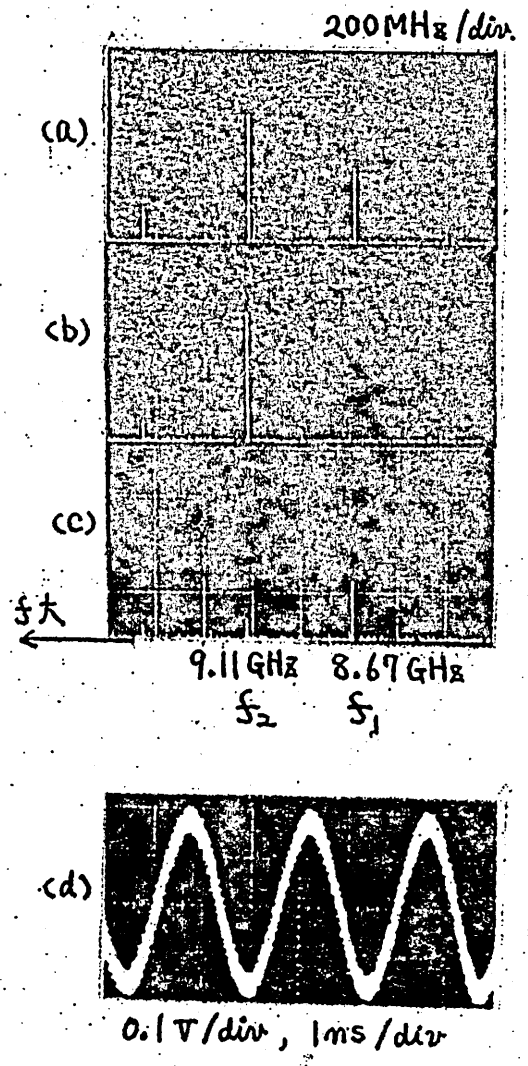



図14

## 2-4 検討

導波管側に取り出される電力は多重発振が生じると単一発振時に比べて減少する。2節において $f_1$ と $f_2$ を調べたところ $f_2$ の単一発振時の電力が2周波発振時には減少し，その差の電力は $f_1$ の出力とバイアス側の出力電力の合計にほぼ一致していることが認められた。$f_1$ と $f_2$ の2重発振を例にとり，バイアス側の発振周波数を $f_b$ とすると，3つの周波数の間には $f_1+f_b=f_2$ の関係があり，3つの周波数の間には一般に整数関係はないので，この現象は $f_2$ の発振電力を励振源として $f_1$ と $f_b$ へ電力を供給する自己励振パラメトリック発振であると考えられる。

ガンダイオードは適当な共振器をバイアス側に設ければマイクロ波側とは一応独立にバイアス発振を生じる。バイアス発振によりマイクロ波側の単一発振に変調がかかると上下側波帯のスペクトルが発生するが，この現象の場合 $f_1$ と $f_2$ が同レベルで発振している時でもそのような周波数関係にあるスペクトルは観測されない。バイアス発振で変調される場合もあるが，ここに観測した現象とは明確に区別できる。

## 3. バイアス注入同期

2重発振時において，その差に近い周波数の信号をバイアス端子より注入すると，2重発振のスペクトルのまわりに同期現象特有のスペクトル群が現われ，注入信号のある周波数範囲にわたり2重発振の2つのスペクトル間隔が同期される現象が観測される。

約400 MHz差の2重発振時において，注入周波数$f_i$を変化したときの出力スペクトルの例を図15に示す。$f_i$=390 MHz～405 MHzの範囲において同期されている。

この実験に用いた発振器の構造は図1のものと同様であるが，寸法が少し異なっている。上下空胴の出力はまとめて1つの導波管に取り出し観測している。

図16に約60 MHzの同期幅が得られた時の周波数変化を示す。注入電力$P_i$は約2mW，$f_1$と$f_2$の合成した出力$P_0$は約25mWである。$f_i$が387 MHzから446 MHzの間で同期され，この間$f_2$は約10 MHzしか動かないのに対して$f_1$は約61 MHzほぼ直線的に変化している。従って，$f_2$がもっと安定化できればガンダイオード1個で一種のアップコンバータとして動作できる。

このバイアス注入同期は他の発振器でも行なったが，興味

ある点はどの発振器においても，周波数の高いほうの発振は$f_2$によってあまり変化せず，低いほうの発振周波数$f_1$がほぼ$f_2$に追従して変化することである。また，導波管側より$f_1$または$f_2$の近くに信号を注入すると，$f_2$に注入した場合には$f_2$にも$f_1$にもビート状のスペクトルが発生するが，$f_1$に注入した場合には$f_1$のまわりにのみ生じるだけで$f_2$にあまり変化を及ぼさなかった。このことから最も高い周波数$f_2$が外部信号により乱されると$f_1$にもバイアス側周波数$f_b$にも変化を及ぼすが$f_1$（又は$f_b$）が乱されるときには$f_b$（又は$f_1$）が乱れるのみであることがわかる。従って，$f_2$

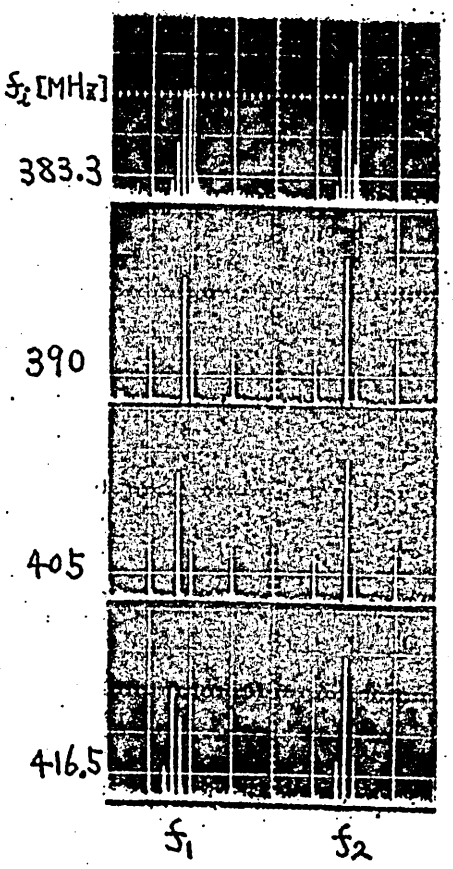



図15 (100MHz/div.)

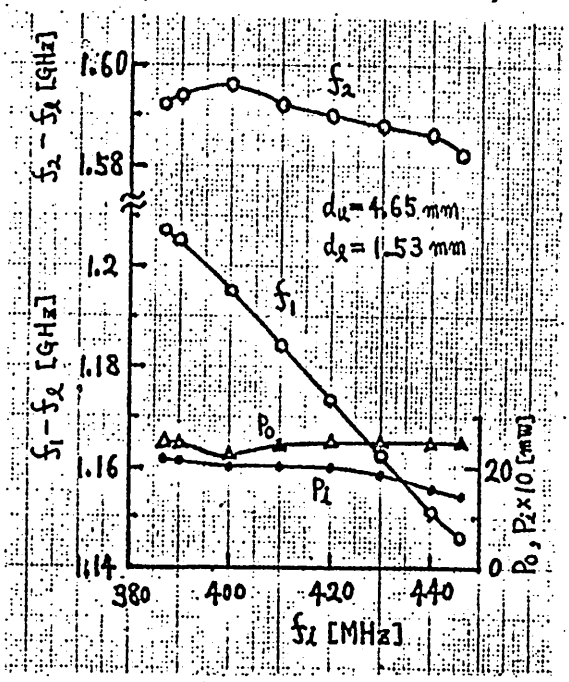



図16

はパラメトリック発振の励振源と考えたように特別の立場をもっている。

## 4. 自己励振パラメトリック増幅

これまで多重発振状態を主として述べてきた。発振器を単一発振状態に調整しておきバイアス端子より $f_b$ の信号を注入するとバイアス側で反射増幅ができる。一例として $P_i = 3.6\,\mu W$ において約19dBの利得が得られ，帯域幅は数MHzであった。図17にこの時のスペクトルを示す。$f_b$ を注入するとアイドラーに相当する $f_1$ のスペクトルが立ち上る。

増幅については今後十分に検討する必要がある。また，自己励振形のアップコンバータとしての利用も考えられる。

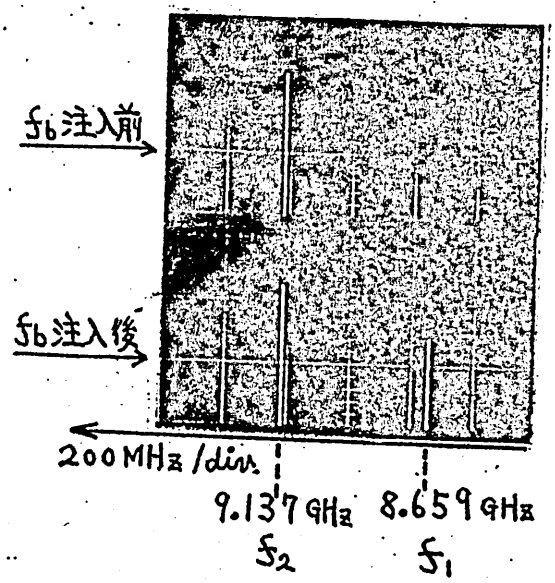



図17 ($f_b$=475.2MHz)

## 5. あとがき

2空胴をもつガン発振器において自己励振パラメトリック発振と考えられる多重発振現象が観測された。また，自己励振パ

ラメトリック増幅等の可能性を示した。この現象の機構解明が今後の問題として残される。

最後に，精力的に実験に御協力いただいた中島 靖，松尾昌行，三村芳明君に心から感謝します。

## 文　献

(1) 飯田，加藤，河合，森田；昭53 信学総全大 735

(2) 飯田，加藤，河合，森田：昭53 電気関係学会関西支部連大 G11-11

(3) B.C.De LOACH and R.J.JOHNSTON, "Avalanche Transit-Time Microwave Oscillators and Amplifiers," IEEE Trans. ED-13, p.181 (1966)

(4) P.BURA, "Self-Pumped Parametric Amplification with Avalanche Diodes," Proc.IEEE, 55, p.1076 (1967).

(5) A.S.CLORFEINE, "Self-Pumped Parametric Amplification with an Avalanching Diode," Proc.IEEE, 54, p.1956 (1966).

(6) B.W.HAKKI, "GaAs Post-Threshold Microwave Amplifier, Mixer, and Oscillator," Proc.IEEE, 54, p.299 (1966).

輻射科学研究会資料

# ガウス分布近似を用いた単一モード光ファイバの接続損失の解析

根本承次郎、牧本利夫

（大阪大学　基礎工学部）

昭和54年5月11日

（於　大阪大学　基礎工学部）

## 1. まえがき

二本の単一モードファイバを低損失で接続するには、きわめて精度の高い位置制御が必要である[1]−[3]。換言すれば、ファイバ間のわずかな位置不整により接続損失は大幅に増加する。接続損失は主として、軸ずれ、端面分離、角度ずれによって生じるが、これらの不整の最大許容量を明らかにするには、接続損失に対する簡明な表示式を求めておく必要がある。ファイバ間の接続損失あるいは等価的に結合効率は、送り側ファイバから出射する光の界分布と、受け側ファイバ中のモードの界分布との重ね合わせ積分により、形式的に表わすことができる。しかしながら、上記の界分布に対する解析的な表示式が得られている場合でも、重ね合わせ積分を数値計算によって評価しなければならない。

最近、ファイバ中の基本モードの横方向界分布が、適当なスポットサイズをもつガウス分布により十分精度良く近似できることが示された[4]−[7]。この近似を用いると、上述の積分は二つのガウス分布間の積分に帰着され、したがって、接続損失の解析は非常に簡単化される。このようなガウス分布近似を用いた接続損失の解析はすでに報告されているが[4]、[8]、それらは三種類の不整のうち、一つあるいは二つが生じた場合に限られている。本報告では、まず、ガウス分布近似の説明を行ったのち、ステップまたはグレーデッドインデックス形ファイバ間に軸ずれ、端面分離、角度ずれが同時に生じた場合につき、ガウス分布近似を用いて、接続損失に対する簡明な表示式を求めている。つぎに、それをもとに、一定の結合効率を与える不整量間の関係、整合液の結合効率への影響などを調べ、さらに、今までに報告されているステップ形ファイバ間の結合効率の測定値と、ここでの解析によって得られる計算値とを比較することにより、本解析結果の妥当性を確かめている。

## 2. ガウス分布近似

屈折率分布が次式で与えられるファイバを考える。

$$n(\rho)=\begin{cases} n_1[1-\Delta(\rho/a)^{\alpha}], & 0\le\rho\le a \\ n_1(1-\Delta), & a\le\rho<\infty \end{cases} \qquad (1)$$

ただし、$\Delta$はコアとクラッド間の比屈折率差、$\rho$は径方向座標、$a$はコア半径、$\alpha$は屈折率勾配を決めるパラメータである。基本モードの横方向界分布を十分良く近似しうるガウス分布のスポットサイズの決め方は種々提案されており、文献[4]−[6]では、ファイバに、その端面の位置にウェストをもつガウスビームを軸ずれなしに入射させたとき、基本モードの励振効率を最大にするようなビームスポットサイズを採用している。また、文献[4]においては、ガウス分布が近似的に、式(1)の屈折率分布に対する波動方程式をみたすように、スポットサイズを決める方法が示されている。さらに、文献[7]では、基本モードの強度分布にもとづく径方向座標のr.m.s.値すなわち期待値で近似ガウス分布のスポットサイズを定義している。いずれの方法も、正規化周波数$V(=n_1ka\sqrt{2\Delta}$, $k$:真空中の波数)が3程度以上のときは、ほぼ同じスポットサイズを与えるが、$V$が2程度以下になると、各方法によるスポットサイズには顕著な差が生じてくる。最も近似度の高いガウス分布は基本モードの励振効率を最大にするそれであるが、いずれにせよ、基本モードの界分布は$exp[-(\rho/s)^2/2]$なる関数で近似できる。図1に、いくつかの$V$の値に対し、$s/a$を$\alpha$の関数としてプロットした結果を示す。

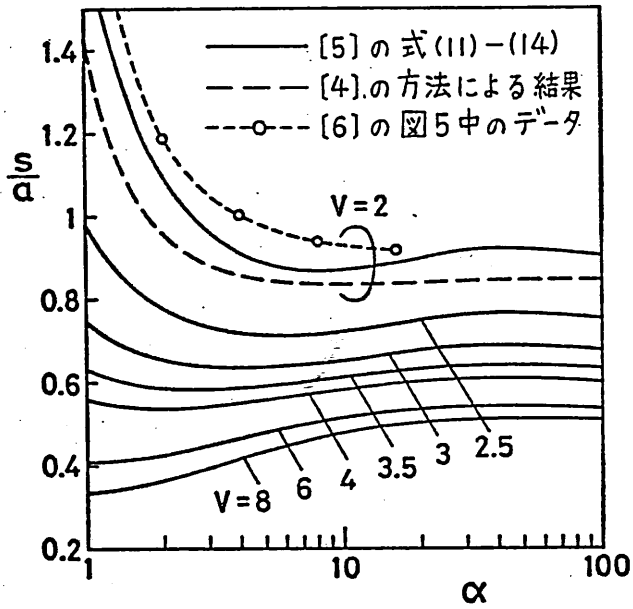



図1 $s/a$の$\alpha$による変化

## 3. ファイバ間の結合効率

図2に、ファイバF1、F2間の不整状態と解析に用いる座標系を示す。F1、F2間の軸ずれ量を$x$、軸方向への分離距離を$z$、角度ずれを$\theta$とする。なお、$x$と$\theta$は正および負の値をとりうるとし、図2に示した状態での$x$、$\theta$を正と約束する。

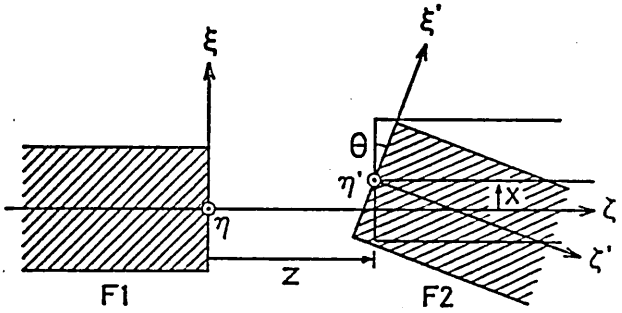



図2 ファイバF1、F2間の不整状態
(この状態での$x$、$\theta$を正と約束する)

また、F1、F2中の基本モードに対する近似ガウス分布のスポットサイズを、それぞれ$s_1$、$s_2$とし、一般に$s_1 \neq s_2$と仮定する。F1から出射する光をF1の終端$\zeta=0$の位置にウエストをもつガウスビームで近似すると、時間因子を$e^{j\omega t}$として、電界ベクトルの$\xi$成分$E_\xi$は次式で与えられる。

$$E_\xi = (2Z_0P/\pi w^2)^{1/2}\exp(-\tau\rho^2/2)\exp(-j\Psi), \qquad (2)$$

$$\tau = 1/w^2 + jk/R, \quad \Psi = k\zeta - \tan^{-1}(kw^2/R), \qquad (3)$$

$$w = s_1[1+(\zeta/ks_1^2)^2]^{1/2}, \quad R = \zeta[1+(ks_1^2/\zeta)^2]. \qquad (4)$$

ただし、$Z_0$は真空の特性インピーダンス、$P$はF1中のモードまたはガウスビームの伝送電力†であり、ファイバ間の間隙は空気で満たされているとする。なお、屈折率$n_0$の整合液が間隙を満たす場合は、式(3)、(4)中の$k$を$n_0k$で置き換えねばならない。F2内を伝搬するモードの電界$E_{\xi'}$は、$\rho'$を径方向座標、$\beta$を伝搬定数として、次式で近似できる。

$$E_{\xi'} = (2Z_0P/\pi n_1 s_2^2)^{1/2}\exp[-(\rho'/s_2)^2/2]\exp(-j\beta\zeta'). \qquad (5)$$

図2より明らかなように、二つの座標系は、つぎの関係式で結ばれている。

$$\begin{aligned} \xi &= \xi'\cos\theta - \zeta'\sin\theta + x, \quad \eta = \eta' \\ \zeta &= \xi'\sin\theta + \zeta'\cos\theta + z \end{aligned} \qquad (6)$$

† 本節では、ファイバ端面とファイバ間の間隙を満たす媒質との不連続面における電力反射を無視する。

また、直角座標と円筒座標との関係式は $\xi=\rho\cos\phi$, $\eta=\rho\sin\phi$; $\xi'=\rho'\cos\phi'$, $\eta'=\rho'\sin\phi'$ である。これらの関係式と式(6)より $\zeta'=0$ なる条件のもとで次式が得られる。

$$\rho^2 \simeq (\rho')^2 + 2\rho' x\cos\phi' + x^2, \qquad (7)$$
$$\zeta = \rho'\cos\phi'\sin\theta + z.$$

F2の端面の位置 $\zeta'=0$ における、ガウスビームとF2中のモードとの結合係数 $C$ は次式のように表わすことができる。

$$C = (n_1^{1/2}/2Z_0P)\int_0^\infty\int_0^{2\pi} E_\xi E_{\xi'}^* \rho' d\rho' d\phi' \qquad (8)$$

ただし、* は複素共役を表わす。式(7)を用いて式(8)中の積分を実行し整理した結果を以下に示す。

$$C = C_0 \exp[-p(u+jv)/2g]\exp(-j\Psi_0), \qquad (9)$$
$$C_0 = (4\sigma/g)^{1/2}, \quad \Psi_0 = pG - \tan^{-1}[G/(\sigma+1)], \qquad (10)$$
$$p = (ks_1)^2, \quad g = G^2 + (\sigma+1)^2, \qquad (11)$$
$$u = (\sigma+1)F^2 + 2\sigma FG\sin\theta + \sigma(G^2+\sigma+1)\sin^2\theta, \qquad (12)$$
$$v = F^2G - 2\sigma(\sigma+1)F\sin\theta - \sigma^2 G\sin^2\theta, \qquad (13)$$
$$F = x/ks_1^2, \quad G = z/ks_1^2, \quad \sigma = (s_2/s_1)^2 \qquad (14)$$

なお、上式の導出の際、$w$、$R$ 中の $\zeta$ を $z$ で近似し、つぎの関係式 $kw^2/R = z/ks_1^2$ をしばしば用いた。ファイバ間の電力伝送係数 $T=|C|^2$ は $T = C_0^2\exp(-pu/g)$ で与えられ、接続損失は $-10\log_{10}T$ (dB) である。三種類の不整のうち、一種類の不整のみ存在するとき、ここで求めた $T$ が文献[4]に示されている結果に一致することを、容易に確かめることができる。たとえば、端面分離のみが生じているとき、ここでの $T$ は

$$T = [(z/2ks_1s_2)^2 + \{(s_1^2+s_2^2)/2s_1s_2\}^2]^{-1} \qquad (15)$$

であり、上式は文献[4]の式(22)($n_2=1$)に一致する。†

---

† 若干の計算により、文献[4]の式(22)は、つぎのように変形できる。

$$T = [Z^2 + \{(w_1^2+w_2^2)/2w_1w_2\}^2]^{-1}, \quad Z = D/n_2kw_1w_2$$

ただし、$w_1=\sqrt{2}s_1$, $w_2=\sqrt{2}s_2$ の関係にある。

以下、ファイバF1、F2が同一である実際的な場合に限って議論を進めることにする。この場合、$S_1 = S_2 \equiv S\ (\sigma = 1)$であるので次式を得る。

$$T = [4/(G^2+4)]\cdot$$
$$\cdot \exp[-2(KS)^2\{F^2 + FG\sin\theta + (G^2/2+1)\sin^2\theta\}/(G^2+4)], \quad (16)$$
$$F = X/KS^2, \quad G = Z/KS^2, \quad (17)$$
$$K = ka, \quad S = s/a, \quad X = x/a, \quad Z = z/a. \quad (18)$$

式(16)を$T = T(x, z, \theta)$と書くと、$T(x, z, \theta) = const.$なる曲面は一定の結合効率を与える$x$、$z$、$\theta$間の関係を表わす。この曲面(等結合効率曲面と呼ぶことにする)は、たとえば$\theta = f(x, z)$なる形に書くことができる。すなわち、一定の$T$に対し、式(16)より次式が得られる。

$$\sin\theta = -FG/(G^2+2) \pm [(G^2+4)/(G^2+2)]^{1/2}\cdot$$
$$\cdot[(KS)^{-2}\ln\{4/T(G^2+4)\} - F^2/(G^2+2)]^{1/2}. \quad (19)$$

## 4. 数値計算例

本節では、$n_1 = 1.5$, $\Delta = 0.01$, $V = 2$のときの等結合効率曲面および結合効率の数値例を示す。計算にあたっては$\alpha = \infty$のとき$s/a = 0.896$(文献[4]の式(8)より)を用い、また、$\alpha = 2, 4, 8$のとき、それぞれ$s/a = 1.19, 1.01, 0.94$(文献[6]の図5より)を用いた。図3に、$T = 0.1$(損失10 dB)に対するステップインデックス形ファイバ($\alpha = \infty$)の等結合効率曲面を示す。図3(a)、(b)は、それぞれ$x > 0$、$x < 0$の場合に対応している。図3(b)において、曲面が急に切断され、$\theta$軸に平行な側面が見られる。このことは、切断された曲面の外部に存在する$x/a$と$z/a$の組合せに対しては、$T = 0.1$を与える$\theta$が存在しないことを意味している。すなわち、このような$x/a$、$z/a$に対しては、式(19)中の第二の根号内の関数は負となる。図4には、$T = 0.1$に対するパラボリックインデックス形ファイバ($\alpha = 2$)の等結合効率曲面を示す。ただし、図4(a)、(b)において、$z/a > 50$なる領域での曲面は紙面のスペースの都合により省略してある。

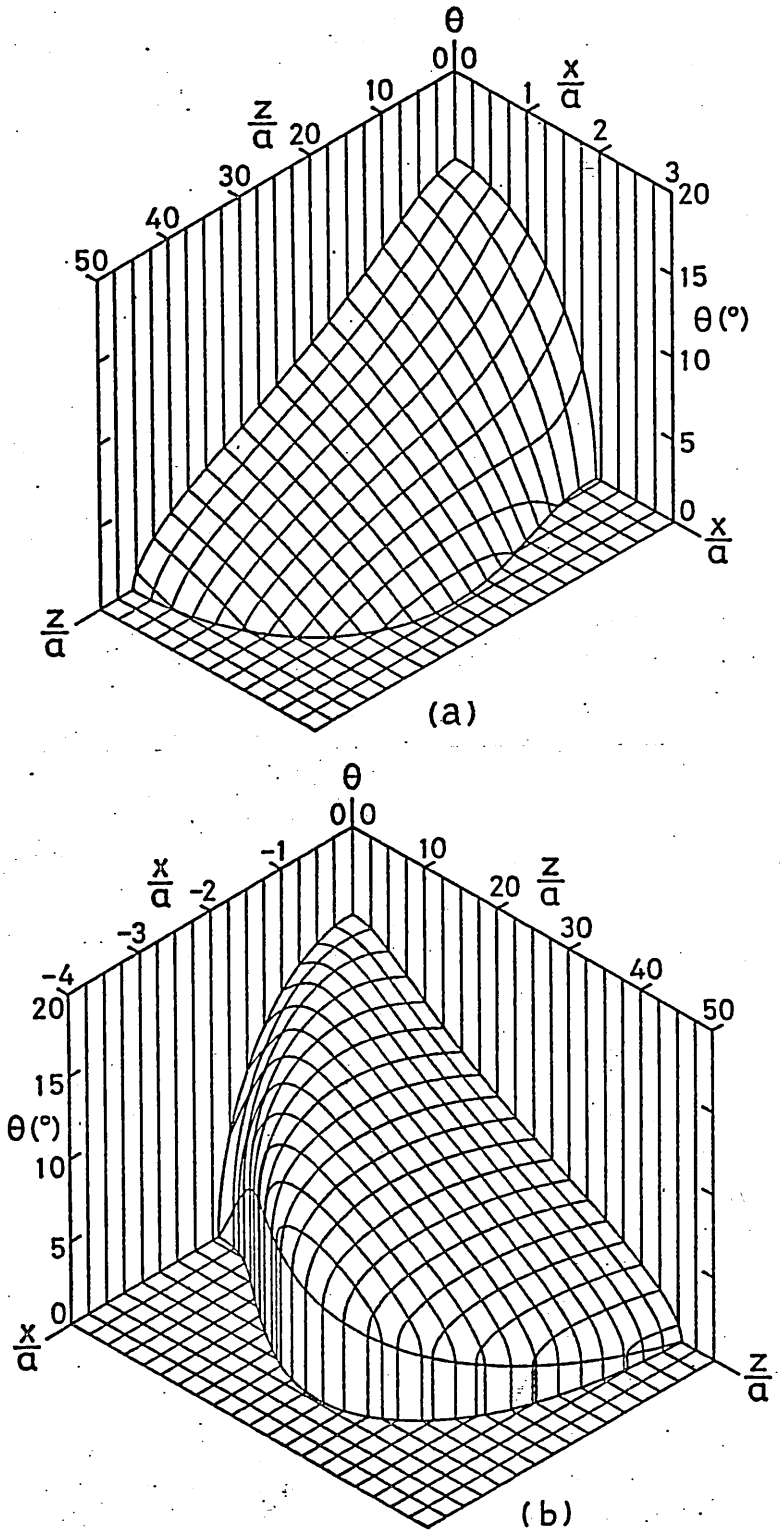



図3 ステップ形ファイバの等結合効率曲面($T=0.1$, $n_1=1.5$, $\Delta=0.01$, $V=2$)

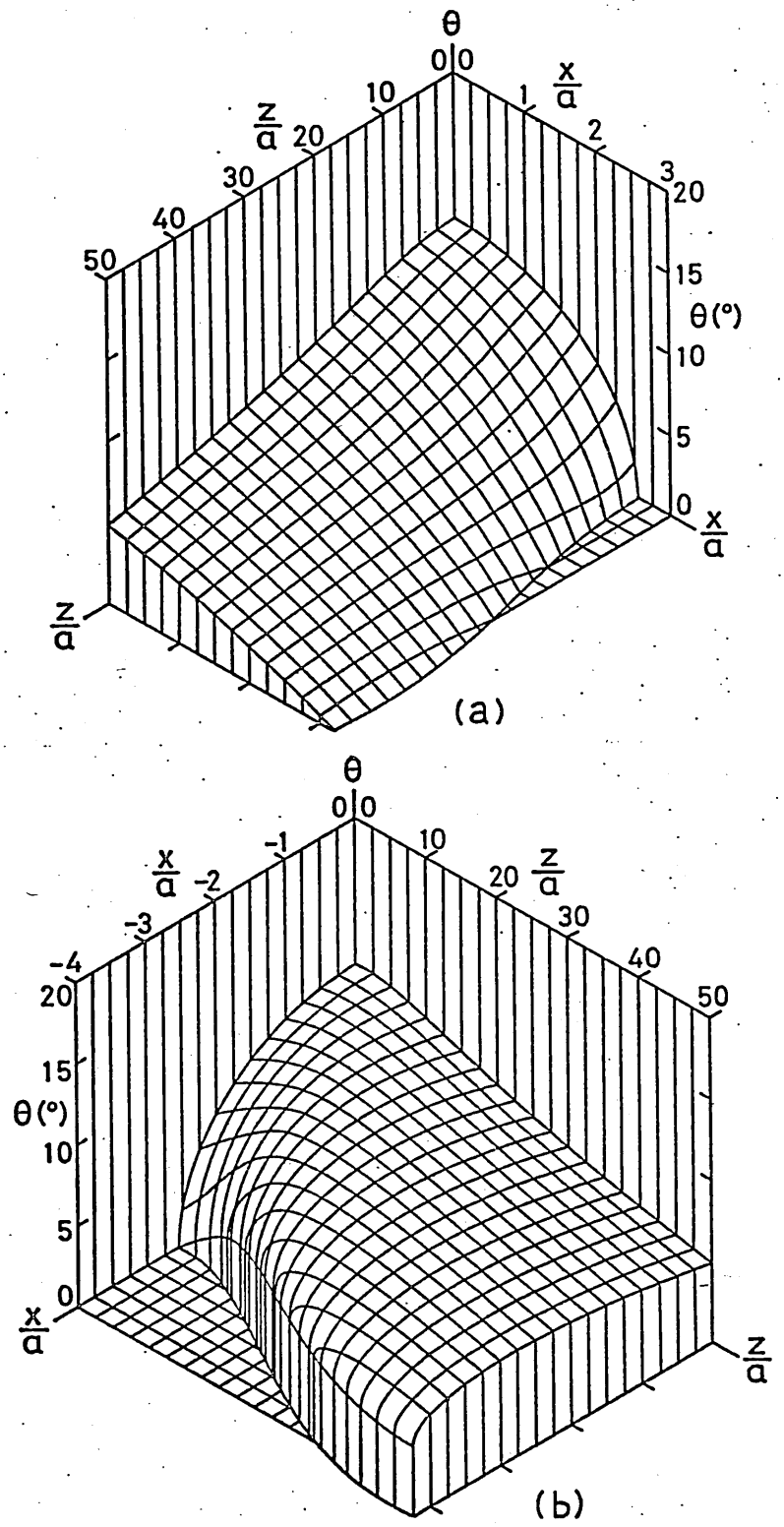



図4 パラボリック形ファイバの等結合効率曲面（パラメータは図3と同じ）

図3と図4を比較すると、図3の曲面が占める体積は、図4の曲面が占める体積より小さい。このことは、ステップ形ファイバ間の結合効率を100%から10%に下げる不整量は、パラボリック形ファイバ間の結合効率を10%に下げる不整量より小さいことを意味する。換言すれば、結合効率の点で、ステップ形ファイバはパラボリック形ファイバにくらべ、より大きな影響を受ける。

図5(a)、(b)には、それぞれステップ形およびパラボリック形ファイバの等結合効率曲線($T=0.1, 0.2, \cdots, 0.9$)を示す。$x/a=z/a=0$のとき、同一の$T$の値について図5(a)と(b)を比較すると、図5(b)における$\theta$の値は図5(a)における$\theta$より小さい。このことから、角度ずれのみが生じているとき、同じ傾き角$\theta$に対し、パラボリック形ファイバの受ける損失は、ステップ形ファイバの受ける損失より大きいことが分かる。

図6(a)−(c)に、ステップ形ファイバの詳細な等結合効率曲線($T=0.1, 0.15, 0.2, \cdots, 0.95$)を示す。各図の上部の図はファイバ間の間隙が空気により、また、下部の図は屈折率1.5の整合液により満たされた場合に対応

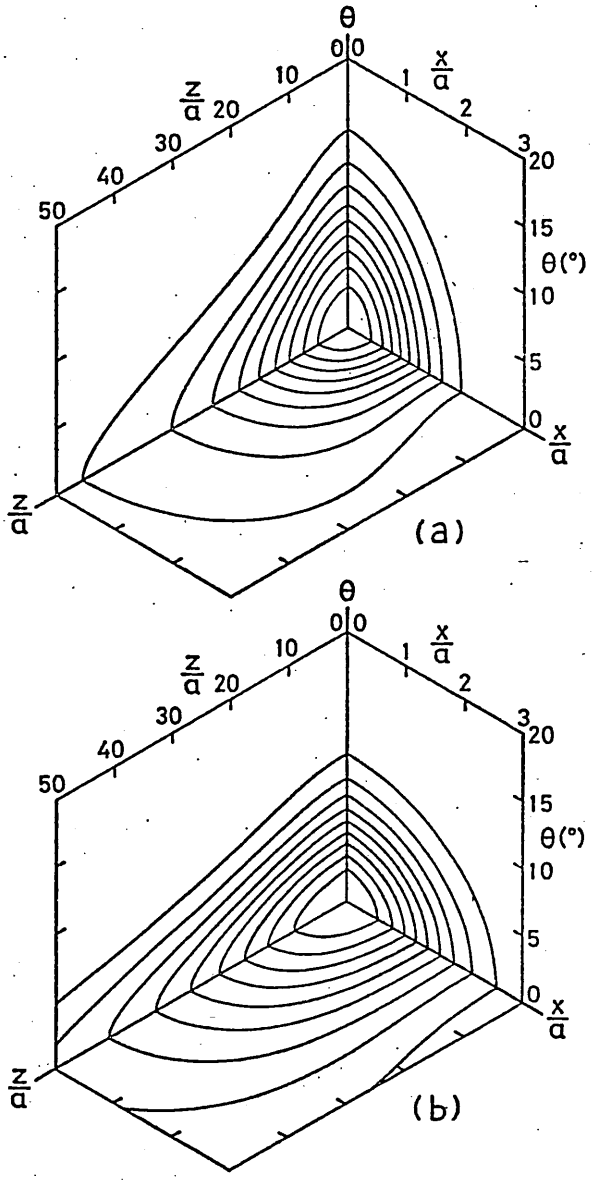
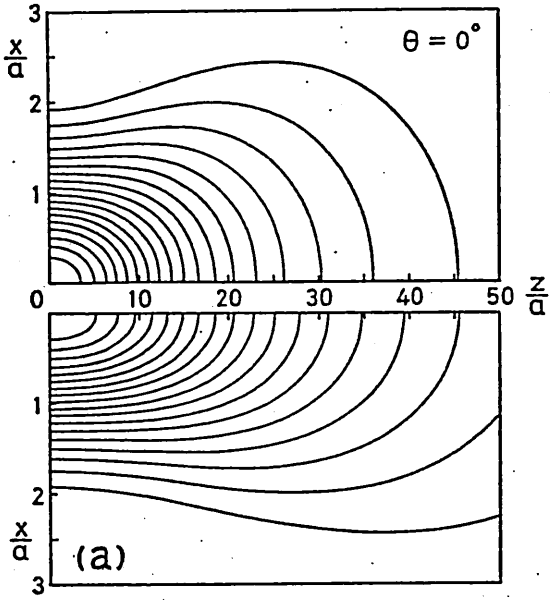



図5 等結合効率曲線($T=0.1, 0.2, \cdots, 0.9$)
(a)ステップ形、(b)パラボリック形

している。各図について、上部と下部の図を比較すると、整合液は端面分離に対しては有効であるが、角度ずれに対しては逆効果になることが分かる。すなわち、ファイバ間の間隙に整合液を満たすことにより、ある特定な結合効率(接続損失)を与える端面の分離距離を、間隙が空気で満たされている場合のそれより大きくすることができるが、同じ接続損失を生じさせる傾き角は間隙に整合液のない場合のそれより小さくなってしまう。なお、これと同じことが、パラボリック形ファイバについても言える。また、付録で図6(a)の曲線の形状につき考察した。



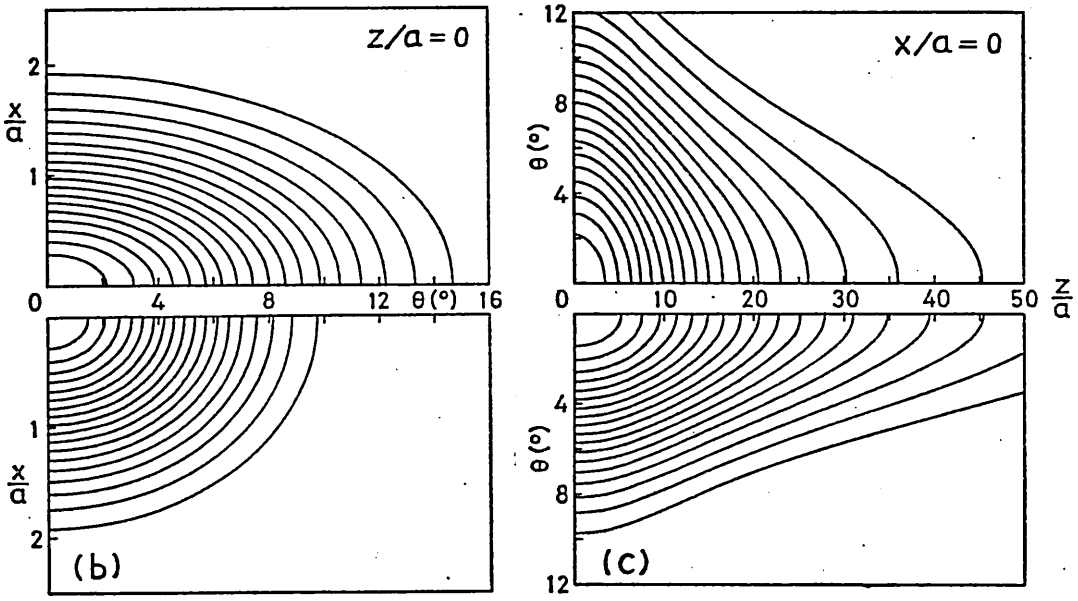




図6 ステップ形ファイバの等結合効率曲線($T=0.1, 0.15, 0.2, \cdots, 0.95$)
各図の上部の図はファイバ間の間隙が空気により、また、下部の図は屈折率1.5の整合液により満たされた場合に対応する($n_1=1.5, \Delta=0.01, V=2$)。

図7(a)、(b)、(c)には、それぞれ、軸ずれ、端面分離、角度ずれのみが生じたときの結合効率$T_x$、$T_z$、$T_\theta$を$\alpha=2, 4, 8, \infty$について示す。これらの図より、各不整量が一定の場合、$\alpha$が増加するにつれ$T_x$、$T_z$は減少するのに対し、$T_\theta$は増加することが分かる。これは、図1に見られるように、$V=2$のとき、$\alpha$が増加するにつれ、$s/a$が減少するためである。すなわち、$\alpha$が大きくなるとスポットサイズが小さくなるため、一定の軸ずれ量に対し、$T_x$は低下する。また、スポットサイズの減少はガウスビームの広がり角を大きくするから、ファイバF2の端面における界分布不整合および等位相面不整合を大きくし、その結果、$T_z$も低下する。その反面、ビームの広がり角の増大は、一定の傾き角のもとで、$T_\theta$の増加をもたらすことになる。

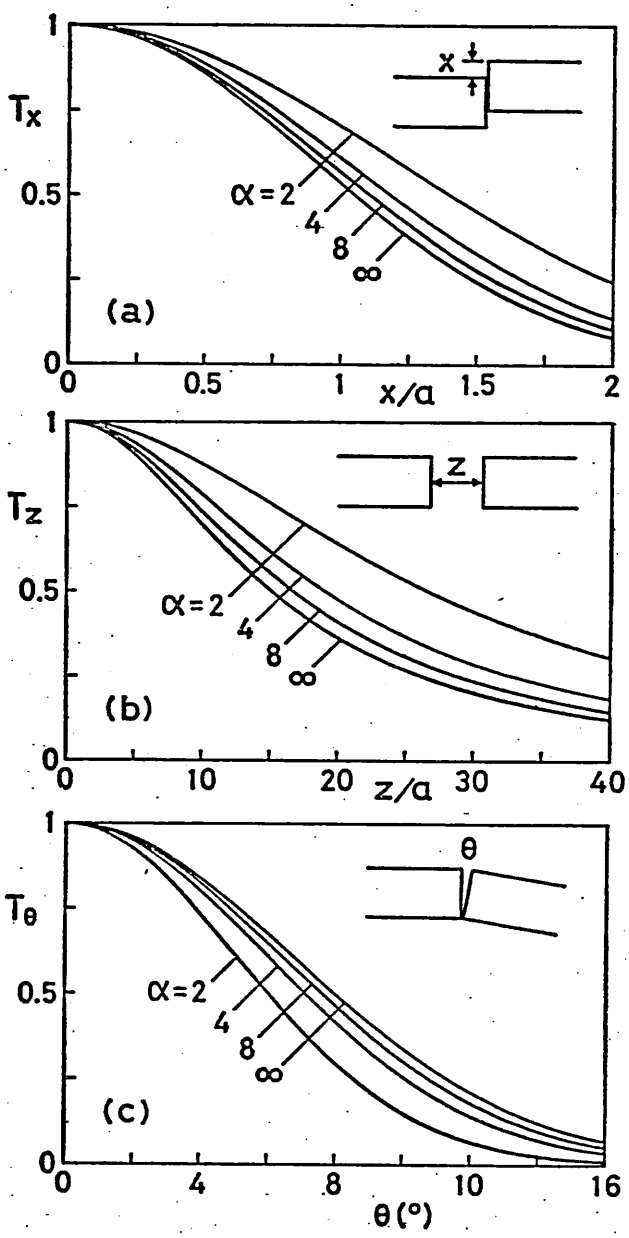



図7　一種類の不整のみが生じたときの結合効率($n_1=1.5$, $\Delta=0.01$, $V=2$)

ステップ形ファイバについては、基本モードの厳密な界分布を用いて$T_x$、$T_\theta$を計算した結果が文献[3]、[9]に示されている。$V=2$のとき、文献[3]の図4より$T_x$の値を読み取った結果は、$x/a=0.25$, $0.5$, $0.75$, $1$に対し、それぞれ、$T_x=0.96$, $0.85$, $0.69$, $0.54$であり、本報告での解析によれば、$T_x=0.96182$, $0.85581$, $0.70446$, $0.53644$である。また、$V=2$, $\Delta=0.01$のとき、文献[9]の図5(b)より$T_\theta$の値を読み取った結果は、$\theta=2.5°$, $5°$, $7.5°$, $10°$に対し、それぞれ、$T_\theta=0.86$, $0.54$, $0.28$, $0.12$であり、本解析によれば、間隙が整合液により満たされているとして、$T_\theta=0.85835$, $0.54344$, $0.25468$, $0.08885$である。以上の比較より、ガウス分布近似を用いて結合効率を計算した結果と、厳密な界分布を用いた計算結果とは、ほぼ一致することが分かる。

## 5. 結合効率の測定値との比較

本節では、ここでの解析結果の妥当性を確かめるため、式(16)を用いて計算したステップ形ファイバ間の結合効率を、Bisbee[1]によって報告された測定値と比較する。図8に、文献[1]で用いられたファイバ中の基本モードの厳密な界分布と、ガウス分布との一致度を調べた結果を示す。なお、ガウス分布のスポットサイズとして$s/a=0.896$を用いた。文献[4]で指摘されているように、ガウス分布は、ステップ形

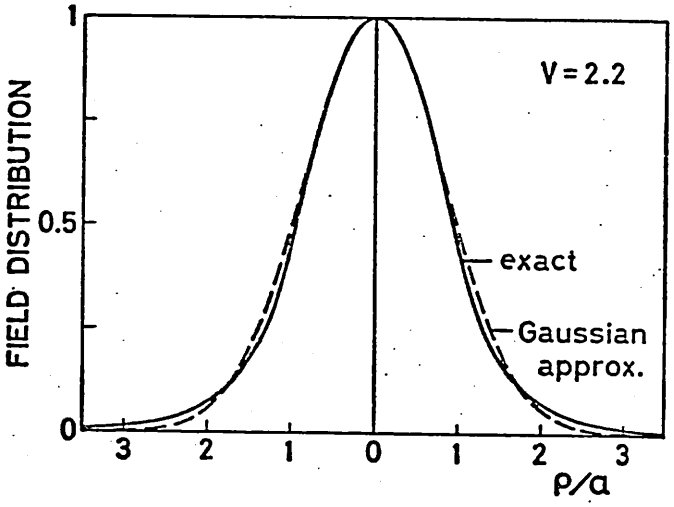



図8 ステップ形ファイバ中の基本モードの界分布 ($s/a=0.896$)

ファイバ中のモードの界分布との一致度が最も低いが、図8に見られるように、両者はかなり良く一致している。したがって、ガウス分布はグレーデッド形ファイバ中のモードの界分布と、さらに良く一致すると考えられる。結合効率の計算にあたっては、ファイバ端面と間隙を満たす媒質との不連続面における電力反射を考慮した。すなわち、間隙の電力透過係数 $T_g$ と式(16)の $T$ との積を計算した。$T_g$ の値として文献[1]中の測定値より、間隙が整合液で満たされているとき $T_g=0.97$ を、また、満たされていないとき $T_g=0.89$ を用いた。†

図9は、端面分離のみが生じたときの結合効率につき、測定値と計算値を比較した結果であり、整合液を用いない場合(A)、用いた場合(B)において、両者は、ほぼ一致する。図10(a)は、整合液を用いない場合に端面分離と軸ずれが同時に生じたときの結合効率について測定値と計算値を比較した結果であり、両者は

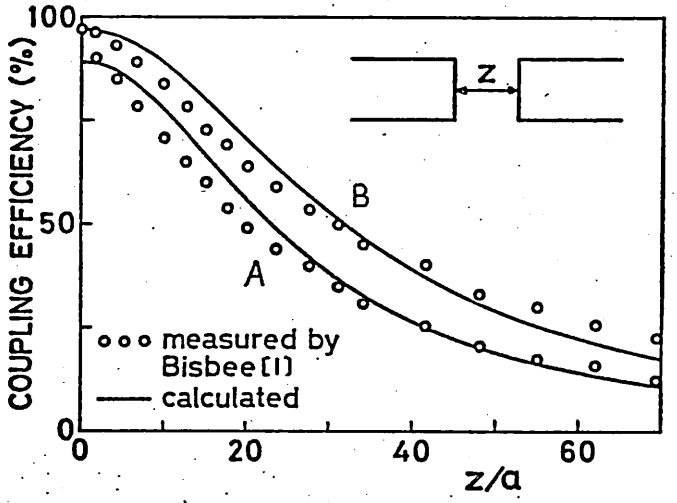



図9 ステップ形ファイバ間に端面分離が生じたときの結合効率 ($V=2.2$, $a=1.85\,\mu m$, $\lambda=0.6328\,\mu m$)。 A：整合液なし、B：整合液あり

† 屈折率 $n_0$ の整合液が間隙を満たすときの $T$ を計算する際、式(18)中の $k$ を $n_0k$ で置き換えねばならない。文献[1]には $n_0$ の値が示されていないので、$T_g=[4n_0n_1/(n_0+n_1)^2]^2$ において、まず、$T_g=0.89$ と $n_0=1$ より $n_1=1.617$ を求め、つぎに、$T_g=0.97$ と $n_1=1.617$ より $n_0=1.263$ とした。

非常によく一致する。図10(b)は整合液を用いた場合であり、図10(a)ほどではないが、測定値と計算値は、かなりよく一致する。

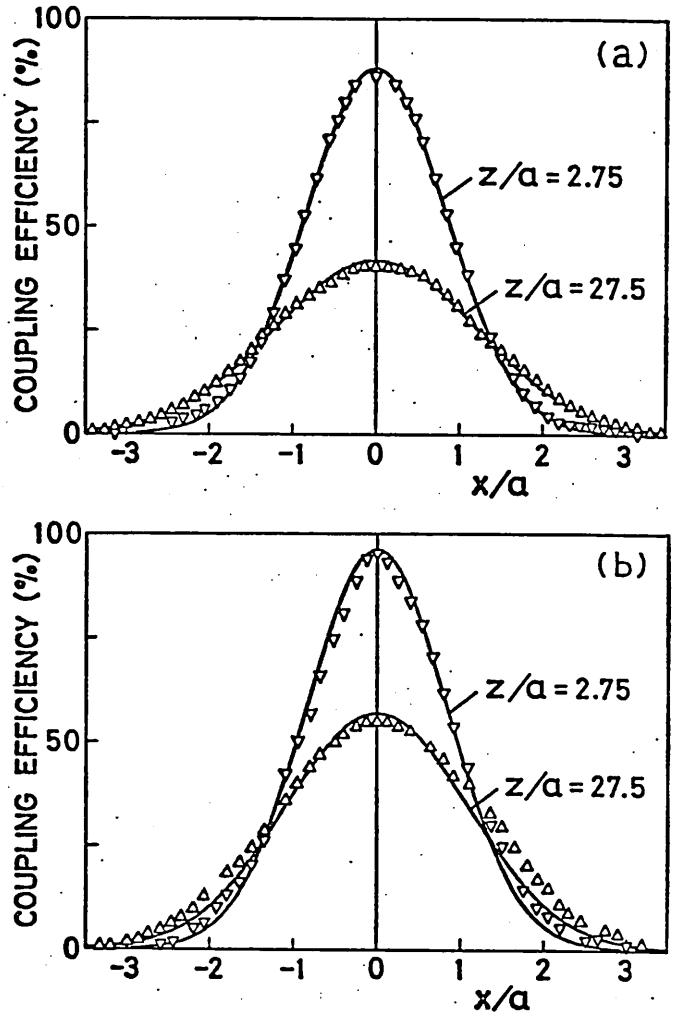



図10　端面分離と軸ずれが同時に生じたときの結合効率（▽▽▽△△△測定値〔1〕、——計算値）(a) 整合液なし、(b) 整合液あり

## 6. むすび

基本モードの横方向界分布を、適当なスポットサイズをもつガウス分布によって近似することにより、単一モードファイバ間に軸ずれ、端面分離、角度ずれが同時に生じた場合の接続損失に対する簡明な表示式を導出した。これを用いてファイバ間の結合効率を計算した結果、以下の諸点が明らかになった。(i)上記三種類の不整が同時に生じた場合、接続損失の面で、ステップ形ファイバはパラボリック形ファイバにくらべ、より大きな影響を受ける。(ii)角度ずれのみが生じた場合、パラボリック形ファイバ間の損失はステップ形ファイバ間の損失より大きい。(iii)反射損失を減らす目的でファイバ間の間隙に用いる整合液は、端面分離による損失の増加を抑える作用も示すが、その反面、角度ずれに対しては逆効果をもたらす。

# 文 献


1. D. L. Bisbee, "Measurements of loss due to offsets and end separations of optical fibers," Bell Syst. Tech. J. 50 (1971) 3159－68.
2. C. G. Someda, "Simple, low-loss joints between single-mode optical fibers," ibid 52 (1973) 583－96.
3. J. S. Cook, W. L. Mammel, and R. J. Grow, "Effect of misalignments on coupling efficiency of single-mode optical fiber butt joints," ibid 52 (1973) 1439－48.
4. D. Marcuse, "Loss analysis of single-mode fiber splices," ibid 56 (1977) 703－18.
5. Idem, "Gaussian approximation of the fundamental modes of graded-index fibers," J. Opt. Soc. Am. 68 (1978) 103－9.
6. W. A. Gambling and H. Matsumura, "Propagation in radially-inhomogeneous single-mode fibre," Opt. Quant. Elect. 10 (1978) 31－40.
7. K. Petermann, "Fundamental mode microbending loss in graded-index and W fibres," ibid 9 (1977) 167－75.
8. W. A. Gambling, H. Matsumura, and C. M. Ragdale, "Joint loss in single-mode fibres," Elect. Lett. 14 (1978) 491－3.
9. 土屋,"単一モード光ファイバの結合損失" 電子通信学会 光・量子エレクトロニクス研資料 OQE73-61 (1973).

# 付　録

## A. ファイバ終端より出射した光の等強度曲線

単一モードファイバ内のモードの横方向界分布が、スポットサイズ$s$をもつガウス分布で近似できるとき、ファイバの終端より出射した光は、端面の位置でウエストをもつガウスビームで近似できる。円筒座標$(\rho, \varphi, \zeta)$において、$\zeta=0$なる面がファイバ端面であるとすれば、$\rho=\zeta=0$での強度で規格化したビーム強度$I$は、式(2)—(4)より、次式で与えられる。

$$I=(s/w)^2 exp[-(\rho/w)^2], \qquad (A1)$$

$$w=s[1+(\zeta/ks^2)^2]^{1/2}. \qquad (A2)$$

$I$を一定としたときの$\rho$-$\zeta$曲線すなわち等強度曲線は、式(A1)より

$$\rho=w[ln(s^2/w^2 I)]^{1/2} \qquad (A3)$$

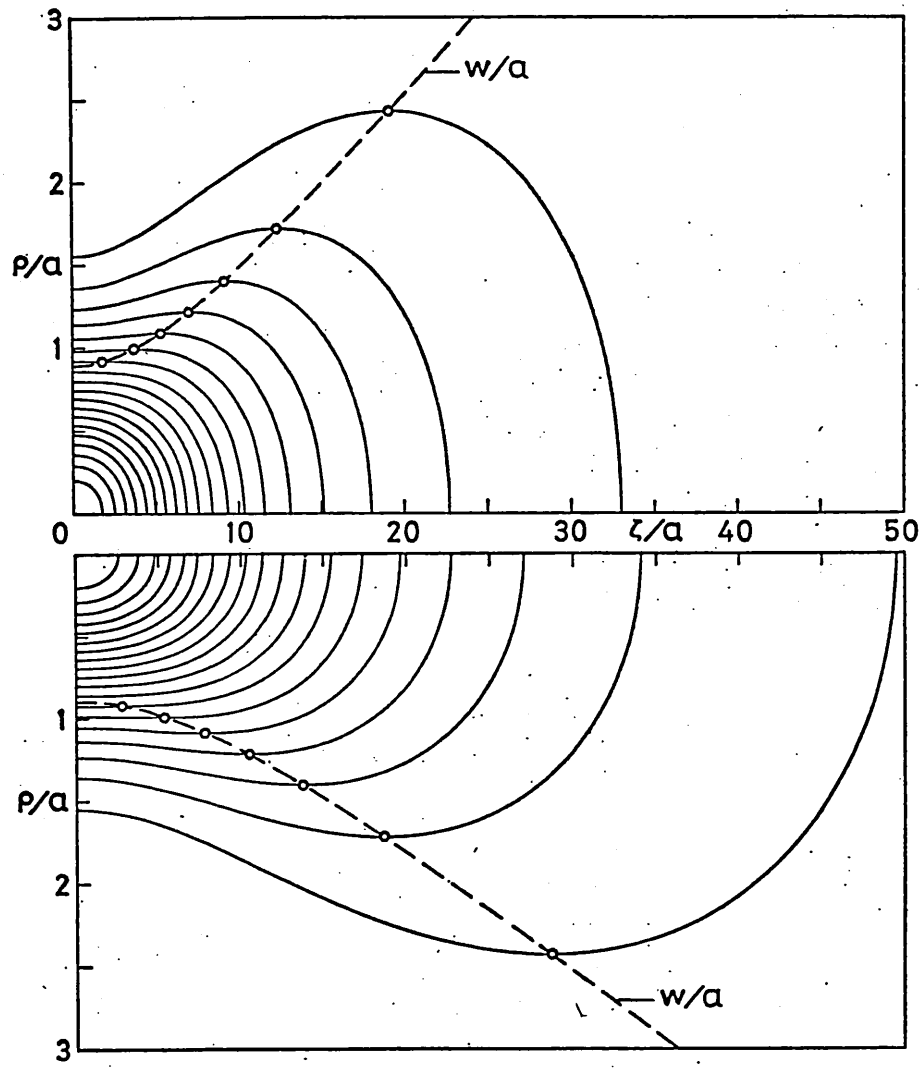
である。図A1には、ステップ形ファイバについて、$I=0.05, 0.1, 0.15, \cdots, 0.95$に対する$\rho/a$と$\zeta/a$の関係を示してある。ただし、$a$はコア半径であり、上部の図は$\zeta>0$なる空間が空気により、また、下部の図は屈折率1.5の媒質により満たされた場合に対応している。なお、破線は$w/a$の$\zeta/a$による変化、すなわち、スポットサイズ$w$の$\zeta$による変化を表わしている。† 図6(a)と図A1を比較すると、等結合効率曲線と等強度曲線には、その形状に類似点の多いことが分かる。このことは、二本のファイバを接続する際、受け側のファイバが、送り側ファイバより出射する光の検出器として働くと考えれば理解できる。

---

† 式(A2)は、$V=n_1 ka\sqrt{2\Delta}$を用いて書き変えると

$$w/a=(\zeta/a)[1+2\Delta\{n_1(\zeta/a)/V(s/a)^2\}^2]^{1/2}$$

となる。なお、$w$の$\zeta$による変化を表わす曲線は、式(A3)の等強度曲線において、$d\rho/d\zeta=0$をみたす点、(図A1中の○印)の軌跡であることを容易に証明することができる。




図A1　ステップ形ファイバの終端より出射した光の等強度曲線（$I=0.05, 0.1, 0.15, \cdots, 0.95$ ; $n_1=1.5$, $\Delta=0.01$, $V=2$, $s/a=0.896$）上部の図は$\zeta>0$なる空間が空気により、また、下部の図は屈折率1.5の媒質により満たされた場合に対応する。破線は、スポットサイズ$w$の$\zeta$による変化を示す曲線であり、この曲線は○印で示した$dP/d\zeta=0$なる点、の軌跡でもある。

輻射科学研究会資料

# 点接触ジョセフソン接合によるミリ波の逓倍混合ヘテロダイン検波

藤家和彦[†]　廣崎　徹[††]
喜多　定　藤澤和男

（大阪大学　基礎工学部）

昭和54年7月6日

---

† 現在 ソニー（株）勤務
†† 現在 電々公社 勤務

## 1. まえがき

最近プラズマの計測や電波天文の分野でミリ波・サブミリ波の超高感度検波の必要性が増大して来た。超高感度検波という点ではビデオ検波に比べてヘテロダイン検波がはるかに優れていることはいうまでもない。ヘテロダイン検波の場合には安定な局部発振器を必要とするが，サブミリ波に対しては適当な局部発振器が得難いという事情があり，サブミリ波のヘテロダイン検波の実験はこれまでごく少数の実験例があるに過ぎない。

ジョセフソン接合は極めて高速かつ微弱な信号に感応できるという点でサブミリ波の検波には特に適しているといえよう。マイクロ波から中ミリ波位まではショットキーダイオードが十分高感度で使い易く，実用的見地からはジョセフソン接合素子の出番は少ないと思われるが，100 GHz 以上の短ミリ波：サブミリ波帯になると，ジョセフソン接合の優位性が際立って来る。すなわち，ジョセフソン接合は次の三つの点でショットキーダイオードよりも優れている。i)、この周波数帯ではジョセフソン接合がより高感度であり，より低雑音の受信を可能にする。ii)、ミキサの局発電力が1μW以下の小さな値で済む。これに対してショットキーダイオードミキサの局発電力は1mW位必要である。iii)．直流電流電圧（I－V）特性が非常に強い非線形性を持ち，非常に高次の周波数逓倍混合を効率よく行うことが出来る。この最後の点はサブミリ波の受信に対し，発振源の得易いミリ波の局部発振器の使用を可能にするもので，サブミリ波のヘテロダイン検波に対して大変好都合である。

さて，電磁波検波用のジョセフソン接合には，トンネル接合，マイクロブリッジ，点接触接合の3種類が考えられるが，短ミリ波・サブミリ波に対しては点接触素子が最も適していると考えられている。その理由は，i)．接合抵抗が大きくとれ，接合容量が小さいので，サブミリ波に対して整合をとり易く，最も感度が良いこと，ii)．接合抵抗が大きくまた形状が3次元構造であるため，γ-ヒーティングに対する耐性が最も大きいことのためである。

そこで本研究では点接触ジョセフソン接合を用いて，逓倍混合ヘテロダイン検波の実験を短ミリ波帯で行うことにした。本来の目的はサブミリ波の逓倍混合ヘテロダイン検波を実現することであるが，ジョセフソン接合を用いる周波数逓倍混合の動作については定量的に未解明の点が多く，その動作解明を行うには測定器類の整備されているミリ波帯で実験を行うことが得策であるからである。

これまでに行われたジョセフソン接合を用いる逓倍混合ヘテロダイン検波の研究としては，Taur らの36 GHzにおける4逓倍混合[1]，Akimenko らの70 GHzにおける9逓倍混合[2]，Blaney らの450 GHzにおける6逓倍混合[3]などがある。Taur らは9GHzを局発とする4逓倍混合で変換効率$\eta$=−3dB，ミキサの等価雑音温度$T_M$=400 K を得ている。Akimenko らは7.8 GHzを局発とする9逓倍混合で$\eta$=−44.5 dB を得ている。これはあまり良い結果ではない。Blaney らは70 GHzを局発とする6逓倍混合で$\eta$=−18 dB（クライスオスタットの窓の損失も含めた総合値），$T_M$ = 190 K を得ている。これはサブミリ波帯の実験値としては相当良い結果であ

る。なおこの他に，赤外・遠赤外レーザ周波数の精密測定を目的として，マイクロ波を局発源として数百倍の次数の逓倍混合を行わせる実験が色々行われているが(4)〜(6)，これらの実験は十分大きい信号電力に対して行うもので，超高感度検波という観点から行ったものではないので，検波特性について詳しい検討はない。

本論文では，10 GHz の局発源を用い，70 GHz および 100 GHz 波に対して逓倍混合ヘテロダイン検波を行った実験結果について述べる。逓倍次数 N は 7 および 10 で，実験例は少ないものの逓倍次数が奇数の場合と偶数の場合とで検波特性に重要な差が見出され，逓倍次数が偶数の場合に好ましい検波動作が可能となることが分った。以下順を追って説明する。

## 2. 70 GHz 波の逓倍混合ヘテロダイン検波 (N=7)

ジョセフソン接合は 70 GHz 帯の偏平導波管 (3.1×0.4 mm²) 内に設けられている点接触素子で，直径 0.127 mm の Nb 線の先端を電解研磨により尖らしたものを針電極とし，直径 2 mm の Nb 棒の端面を平滑面に仕上げた平坦電極と接触させることにより形成される。この Nb 棒は導波管の底面より管内に突出しており，その突出長はネジで加減され，針電極との接触圧力を調節できるようになっている。針電極は導波管の上壁面に取付けられた同軸線 UT-85 の OSM コネクタのジャックの中心導体の先端にスポット溶接されており，導波管壁とは絶縁され管内に突出している。この同軸線を通って 10 GHz の局発波電力が接合に導かれ，また直流バイアスお

よび工下出力が供給あるいは取出される。70 GHzの信号波は標準導波管（3.1 × 1.55 mm²）よりテーパ部を介して接合の設けられている偏平導波管に導かれる。なお接合に対して入力側と反対の方向の導波管部は可動短絡板で終端され，入力波に対して接合の整合を取るようになっている。なお，この導波管マウントが液体ヘリウムを満たしたガラスジェア内に入れられて実験されるので，上記の平坦電極棒と導波管の可動短絡板とは，ガラスジェア外より動かせるようにギア機構が設けられている。マウント全体の構造図を図1に示す。

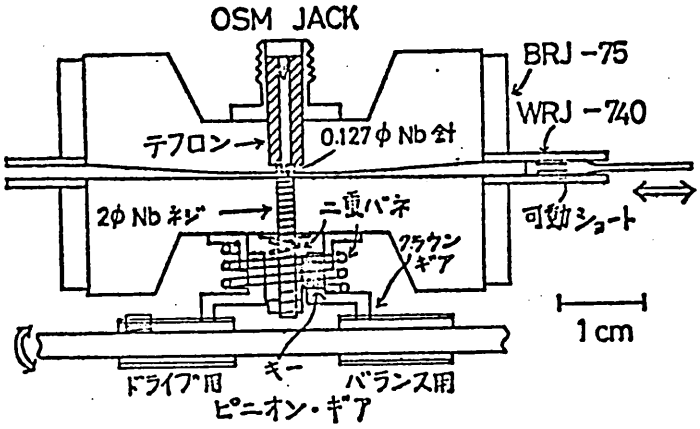



図1．ジョセフソン接合マウント

次に実験装置全体の構成を説明する。10 GHzの局発源としてはガン発振器を用い，70 GHz の信号源としては反射型クライストロンを用いた。中間周波数を30 MHzに選んでヘテロダイン検波の実験を行うために，反射型クライストロンにAFCをかけて周波数

を安定化し，30 MHz の中間周波出力が安定に取り出せるようにした。この具体的な方法として，まずクリスタル 1N53 に 10 GHz 波と 69.97 GHz 波とを加えて逓倍混合を行わせ，その中間周波出力が 30 MHz に保たれるように制御電圧を発生させてこれをクライストロンのリペラーに加える方法を採っている。中間周波増幅器のバンド幅は 1.2 MHz であるが，このAFC の動作により IF 出力の変動は ±0.5 dB 程度におさえられた。IF 前置増幅器としては Avantek 社 AD-502 B を用いたがその等価雑音温度は $T_{IF}$ = 240 K で，あまり良いものではない。IF 出力はこれで約 30 dB 増幅された後，IF 主増幅器で約 50 dB 増幅される。この出力が二乗検波器により整流され，IF 出力 $P_{IF}$ に比例する直流電圧を生じ，これが XY レコーダの Y 軸に加えられて記録される。この実験装置全体の構成図を図2に示す。

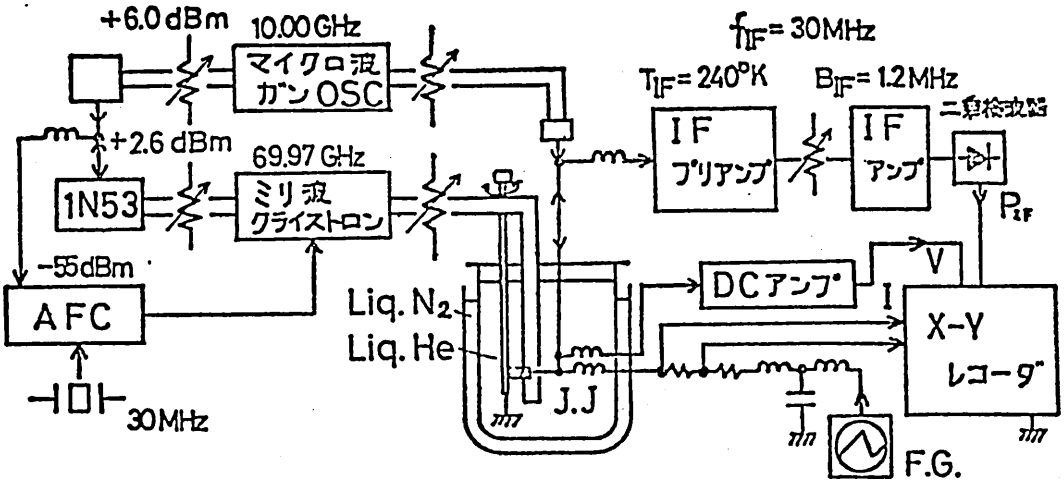



図2、実験装置全体の構成図

また図3にはマイクロ波回路系とIF出力取出し回路および直流バイアス供給回路の構成図を示す。直流バイアス供給回路は，図に示すように導波管に取り付けられた同軸OSMコネクタのすぐ近くに設けられた同軸線のモニタ1分岐にゲョーク線路を介して．I，V供給リード線（1.5D2V同軸線）を接続することにより構成されている。このゲョーク線路部分ははんだメッキした銅箔内に収められて超伝導シールドされ，雑音の混入を防いでいる。なお，I，V供給リード線と接合との間には実測値にして約0.1Ωの共通インピーダンスが存在しており，このためI．Vの完全な4端子法的測定ができず，えがかれたI-V特性曲線の零電圧ステップがやや傾斜している。

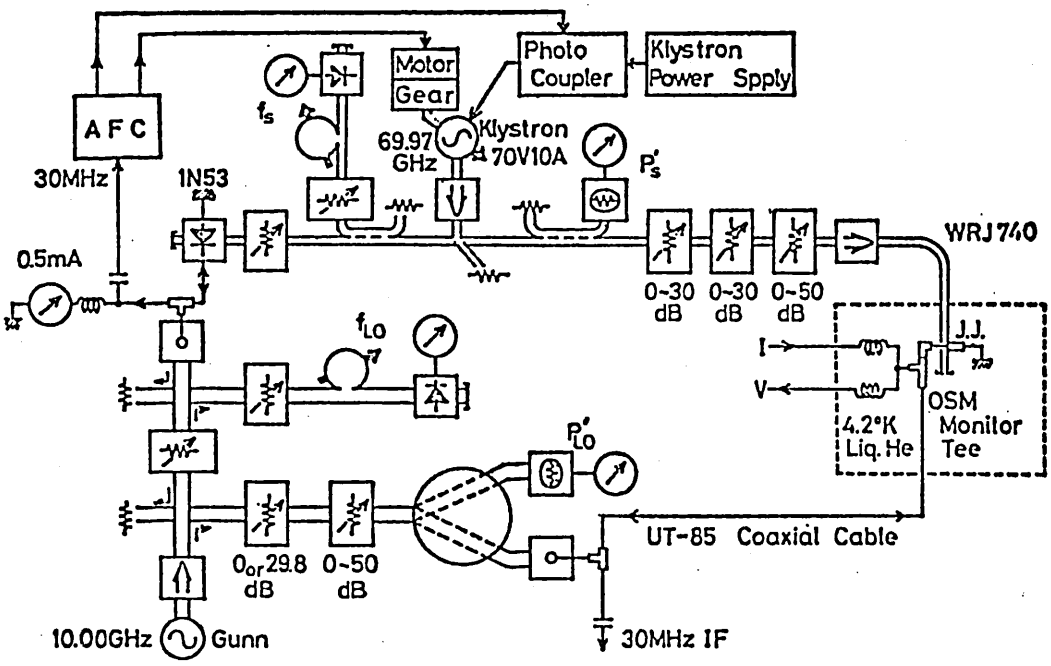



図3．マイクロ波回路系とIF取出し回路および直流バイアス供給回路構成図

次に実験結果について述べる。ジョセフソン接合素子としては18個の試作素子について実験した。試作素子の特性はかなりばらついているが総合的にみて最良の結果が得られた検波特性の1例を図4に示す。同図にはほぼ一定の信号入力に対して，局発電力を変えた4つの場合のIF出力特性とI－V特性が示されている。最大のIF出力が得られるバイアス点は，零バイアスの両側で零バイアスと第1次定電圧ステップとの中間点にあるのが特長で最大の変換効率（IF出力／信号入力）は $\eta = -11.5$ dB である。また雑音と区別して検出し得る最小信号電力であるMDP（minimum detetectable power）は，S/N＝1となる信号入力の値として求められ，0.23 pWであった。そしてこの素子の雑音等価電力 NEP は $1.9\times10^{-19}$ [W/Hz] であった。ここに示す信号入力の値は途中の導波管の伝送損失を差引いて実際に素子に入射する電力の値を示しており，素子のインピーダンス不整合による反射損失を含んだ値である。またIF出力の値は，素子とIF取出し同軸線とのインピーダンス不整合による反射損失や，同軸線の途中の色々な反射損失の存在の下に実際に外部に取出される出力である。従ってここにあげた変換効率の値は，信号波の入力回路の伝送損失だけを差引いた総合値である。

素子の雑音等価電力 NEP は MDP の値をIF増幅器のバンド幅 1.2 MHz（すなわち $1.2\times10^6$）で割って求められている。この NEP は受信機の雑音温度 $T_R$ と次式で結びつけられている。

$$NEP = 2kT_R \qquad (DSB)$$

$$T_R = T_{IF}/\eta + T_A + T_M$$

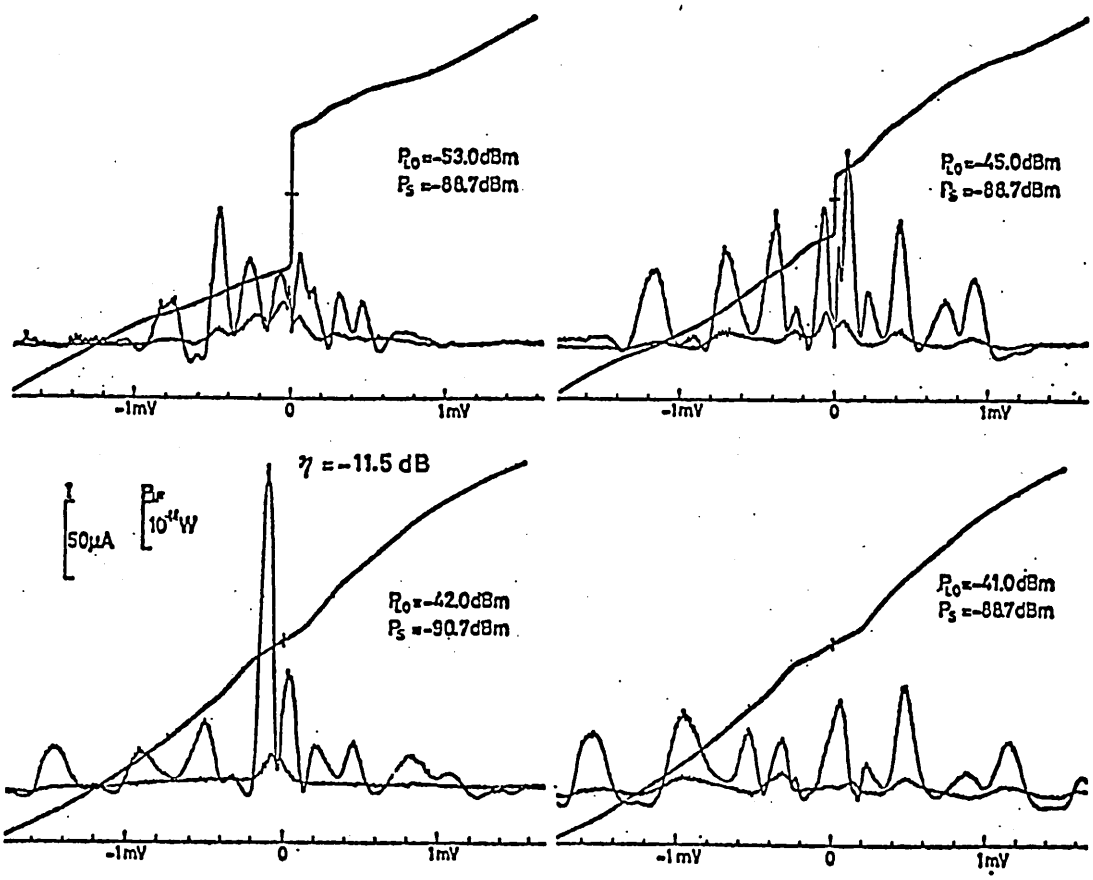



図4. 局発電力を変化した時の素子のI-V特性とIF出力特性

ここで$T_A$はアンテナの雑音温度，$T_M$はミキサの雑音温度である。本実験のように$T_{IF}$=240K，$\eta$<0.1の場合には，$T_R$は殆んど上式の第1項で決まってしまう。また$T_M$の値の中にはジョセフソン接合自身の発生する雑音の他に，局発源からの雑音や直流バイアスリード線からの外来雑音も含まれるので，このような周辺回路の雑音対策を十分に講じた後でないとミキサの雑音温度を推定することは困難である。

図5には図4と同じ素子について，信号入力とIF出力との線形

性を調べた結果を示すが，$P_S < -75$dBm の範囲内で直線性が保たれている。また図6には実験した18個の素子について，得られた変換効率の値が素子の臨界電流 $I_c$ と接合抵抗 R．とにどのように関係するかを調べた結果を示す。図よりわかるように素子の $I_cR$ 積が大きく，また R が大きいものほど変換効率が良いという傾向が認められる。この18個の素子についての諸結果をまとめて表1に示す。

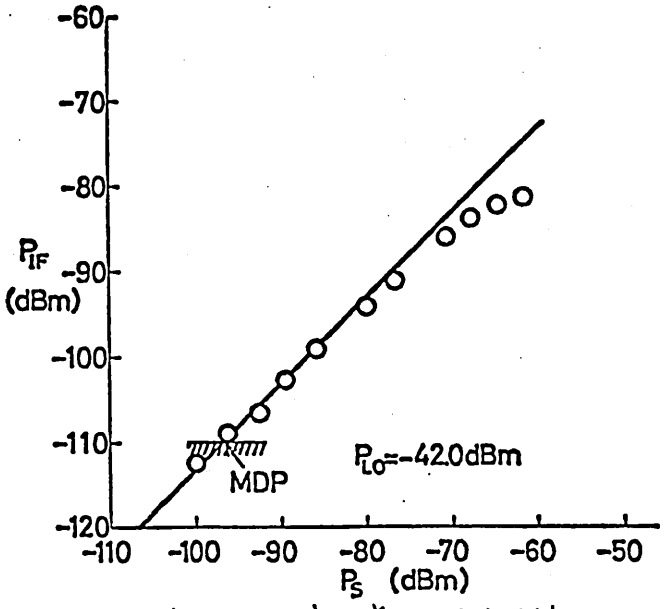



図5、信号入力に対する素子の検波特性

表1、試作ジョセフソン素子の諸量

| Junction | R | Ic | IcR | η | MDP | NEP | $P_{LO}$ | $I_c/I_{co}$ | $R_0/R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ohm | μA | mV | dB | pico W | W/Hz | dBm | | |
| 1 | 2.1 | 265 | 0.56 | -22.1 | 3.2 | $2.6\times10^{-18}$ | -38.5 | 0.79 | 2.2 |
| 2 | 3.6 | 513 | 1.83 | -22.8 | 1.9 | $1.6\times10^{-18}$ | -22.0 | 0.30 | 1.0 |
| 3 | 4.2 | 298 | 1.26 | -24.8 | 3.6 | $3.0\times10^{-18}$ | -25.0 | 0.13 | 5.4 |
| 4 | 4.9 | 153 | 0.75 | -23.2 | 3.3 | $2.8\times10^{-18}$ | -42.0 | 0.76 | 1.8 |
| 5 | 4.9 | 240 | 1.18 | -14.5 | 0.68 | $5.6\times10^{-19}$ | -26.5 | 0 | 3.4 |
| 6 | 6.0 | 225 | 1.35 | -11.0 | 1.5 | $1.3\times10^{-18}$ | -26.0 | 0.19 | 23 |
| 7 | 7.1 | 196 | 1.40 | -17.1 | 0.71 | $5.9\times10^{-19}$ | -29.0 | 0 | 1.2 |
| 8 | 8.7 | 9.5 | 0.083 | -41.0 | 95 | $8.0\times10^{-17}$ | -46.8 | 0 | 1.0 |
| 9 | 9.6 | 184 | 1.77 | -10.7 | 0.68 | $5.6\times10^{-19}$ | -29.0 | 0.20 | 9.3 |
| 10 | 10.4 | 20.5 | 0.21 | -23.8 | 1.9 | $1.6\times10^{-18}$ | -45.5 | 0 | 1.1 |
| 11※ | 19.2 | 69 | 1.32 | -11.5 | 0.23 | $1.9\times10^{-19}$ | -42.0 | 0 | 1.4 |
| 12 | 34.1 | 35.5 | 1.21 | -16.7 | 0.59 | $4.9\times10^{-19}$ | -51.0 | 0.66 | 0.92 |
| 13 | 39.5 | 37.3 | 1.47 | -13.3 | 0.25 | $2.0\times10^{-19}$ | -51.3 | 0.74 | 1.6 |
| 14 | 40.0 | 8.3 | 0.33 | -21.8 | 1.0 | $8.7\times10^{-19}$ | -53.8 | 0 | 1.1 |
| 15 | 40.3 | 7.3 | 0.29 | -37.3 | 54 | $4.5\times10^{-17}$ | -51.8 | 0 | 0.96 |
| 16 | 86.2 | 9.1 | 0.78 | -18.8 | 0.54 | $4.5\times10^{-19}$ | -46.8 | 0 | 0.93 |
| 17 | 143 | 2.2 | 0.31 | -20.6 | 0.98 | $8.1\times10^{-19}$ | -60.8 | 0 | 1.3 |
| 18 | 317 | 1.6 | 0.51 | -21.2 | 1.0 | $8.3\times10^{-19}$ | -56.8 | 0 | 1.2 |

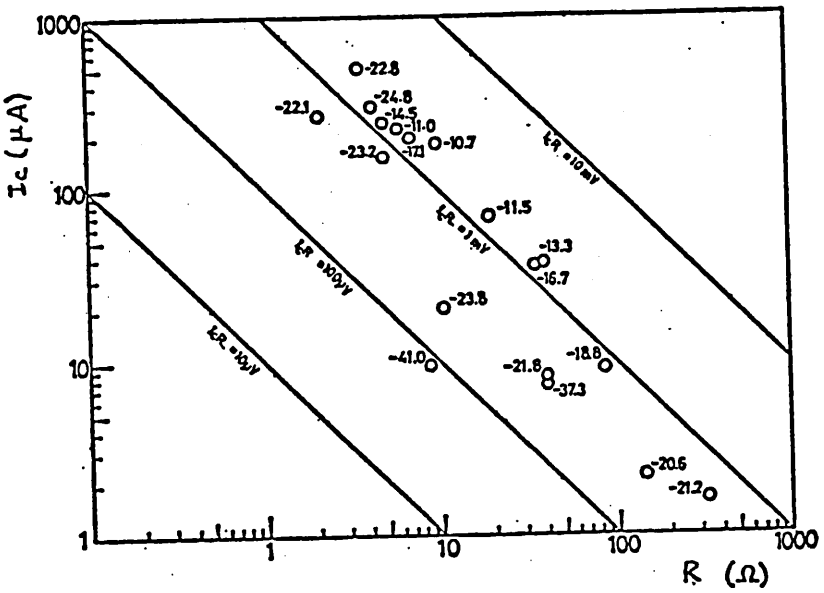



図6、変換効率のIcおよびRに対する依存性

3. 100 GHz波の逓倍混合ヘテロダイン検波（N=10）

ジョセフソン接合は100 GHz帯の標準導波管（2.54×1.27 mm²）内に設けられている。接合を形成する針電極と平坦電極の構造・寸法とマウントの構造は前節で述べたものとほとんど同じである。相異点としてはフラット電極を形成するNbネジ切り棒の駆動方法に改良を加えている。すなわちこのネジ切り棒の両側に2つのウォームギヤを取り付け，この2つのウォームギヤを別のギヤで反対方向に回転させることによりこのネジ切り棒を両側から軸方向に駆動するようにしてある。これによりネジ切り棒はウォームギヤの回転の際に横方向にブレることなくスムースに軸方向に駆動され，針電極との接触圧力を微妙に調節できるようになった。このような機構で針電極と平坦電極とを接触させてまず高抵抗（数百～数千オーム）

の接合を作り，これに数ミリアンペアから数十ミリアンペアの過定流を流して burn-in させ，接合抵抗を数十オームに下げる。(7) これにより安定な素子を作ることが出来た。この方法により接合の IcR 積を理論値の 2.2mV（Nb に対し）付近まで高めることが出来，高感度の検波を行うことが出来た。

70 GHz 波の逓倍混合ヘテロダイン検波の時と同じように，100 GHz の信号源である反射型クライストロンに AFC をかけて安定に 30 MHz の中間周波を取出す必要があるが，その実行方法は前節で述べた方法と異る方法を用いる必要があった。その理由は，今度は 10 逓倍混合であるため，1N53 を用いて 100 GHz 波と 10 GHz 波とを逓倍混合したのでは十分な IF 出力が得られず，IF 周波数を 30 MHz に保つために反射型クライストロンのリペラー電極に加えるべき十分な制御電圧が得られなかったからである。そこで前節で記述した 70 GHz 用ジョセフソン接合マウントを 1N53 の代りに用いて，AFC の制御電圧発生用の IF 出力を得て実験を行った。図7に実験装置全体の回路図を示す。

ジョセフソン接合素子としては 40 個を試作して検波実験を行った。接合形成方法の改善により，サブミリ波まで十分高感度であると思われる素子が多数得られた。その最も良い特性の1例を図8に示す。Nb のエネルギーギャップの 3mV 付近に明瞭にいわゆるギャップ構造が認められ，その付近で特性曲線の微分抵抗が大きく変っている，その変化を定量的に表わすパラメータとして $S=R/r$ なる量が導入されているが (8)，図8の例では $S=4$ にもなっている。

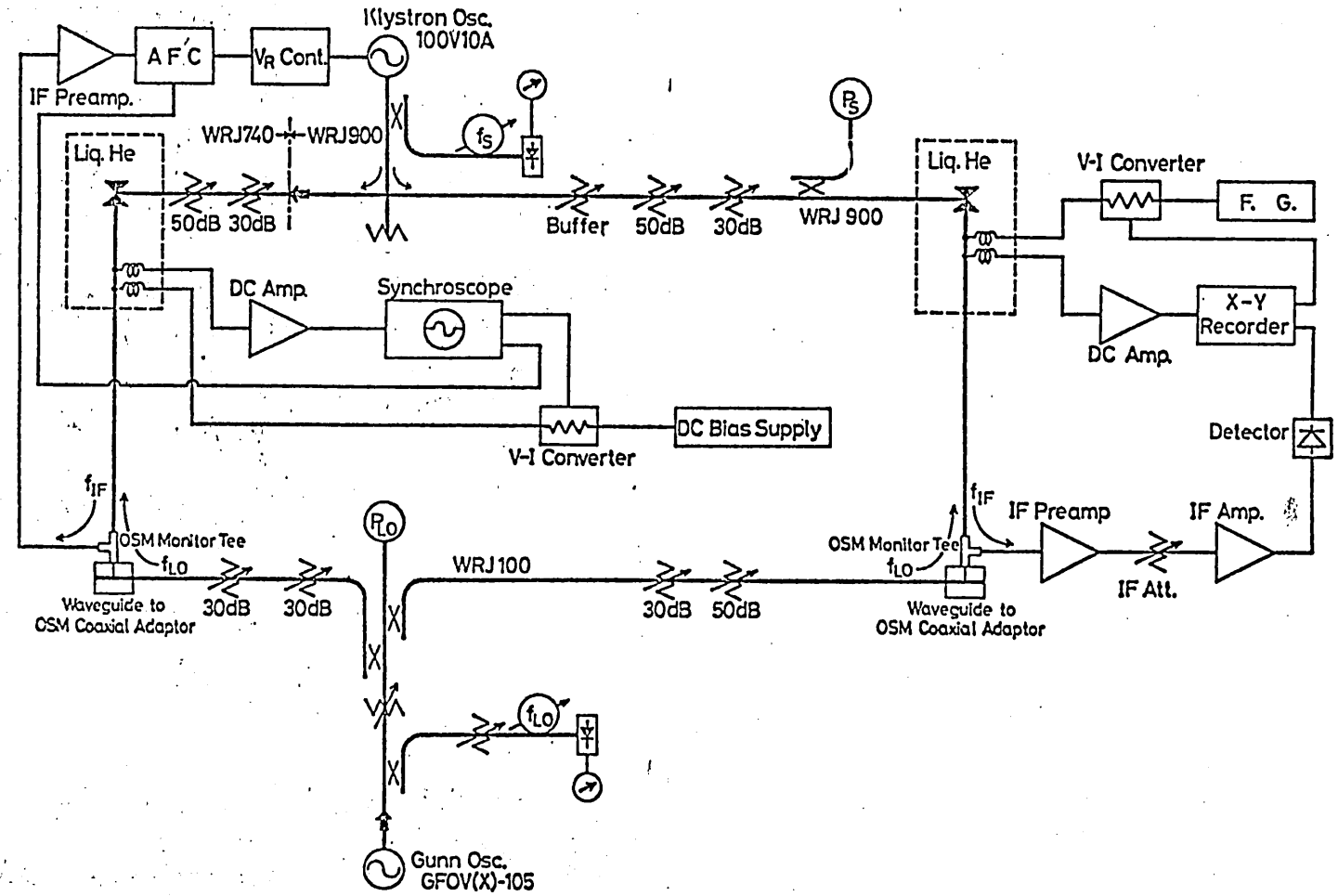



図7. 実験装置全体の回路図

ハーバード大学のTinkhamらにより，サブミリ波まで高感度である接合の条件として，i) $I_cR \gtrsim 2mV$，ii) $S \gtrsim 2$ が提唱されているが，図8の素子特性はこの条件を十分満足している。これら40個の素子の$I_c$とRの値の分布を図9に示すが，大部分の素子の$I_cR$積は2mV付近にあることがわかる。

この実験において中間周波数は前同様30 MHzに選んでおり，IF前置増幅器としてTrontech社W110B ($T_{IF}$=90 K)を用いている。10遠赤混合における代表的なIF出力特性を図10に示す。

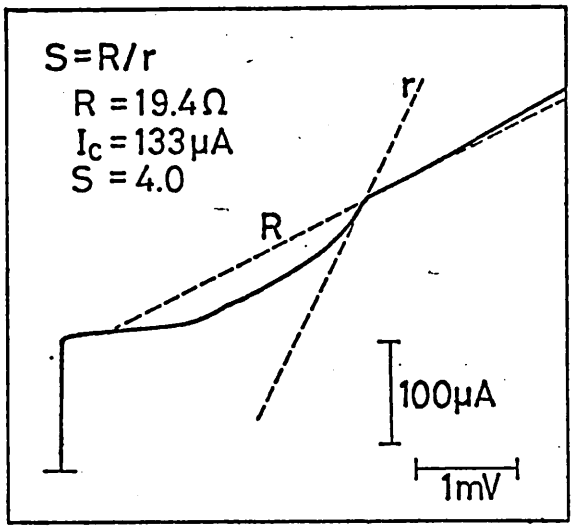



図8. サブミリ波まで使用可能な素子のI-V特性

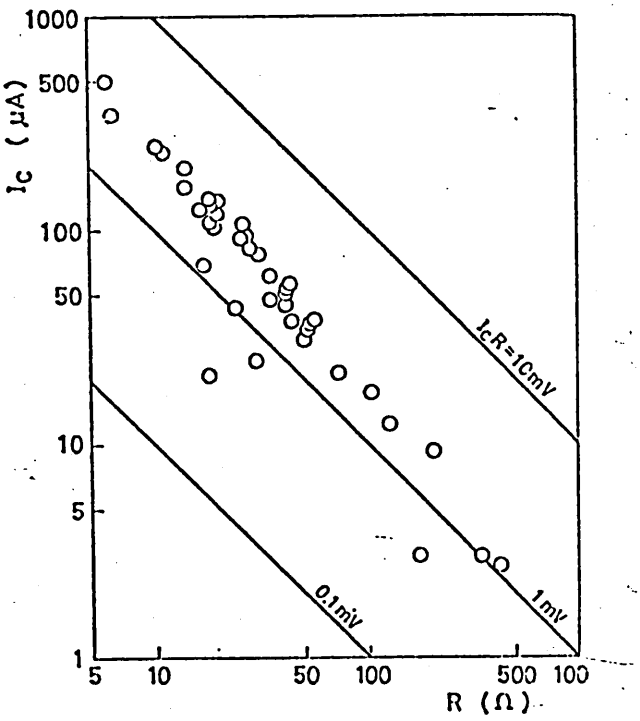



図9. 接合抵抗と臨界電流の関係

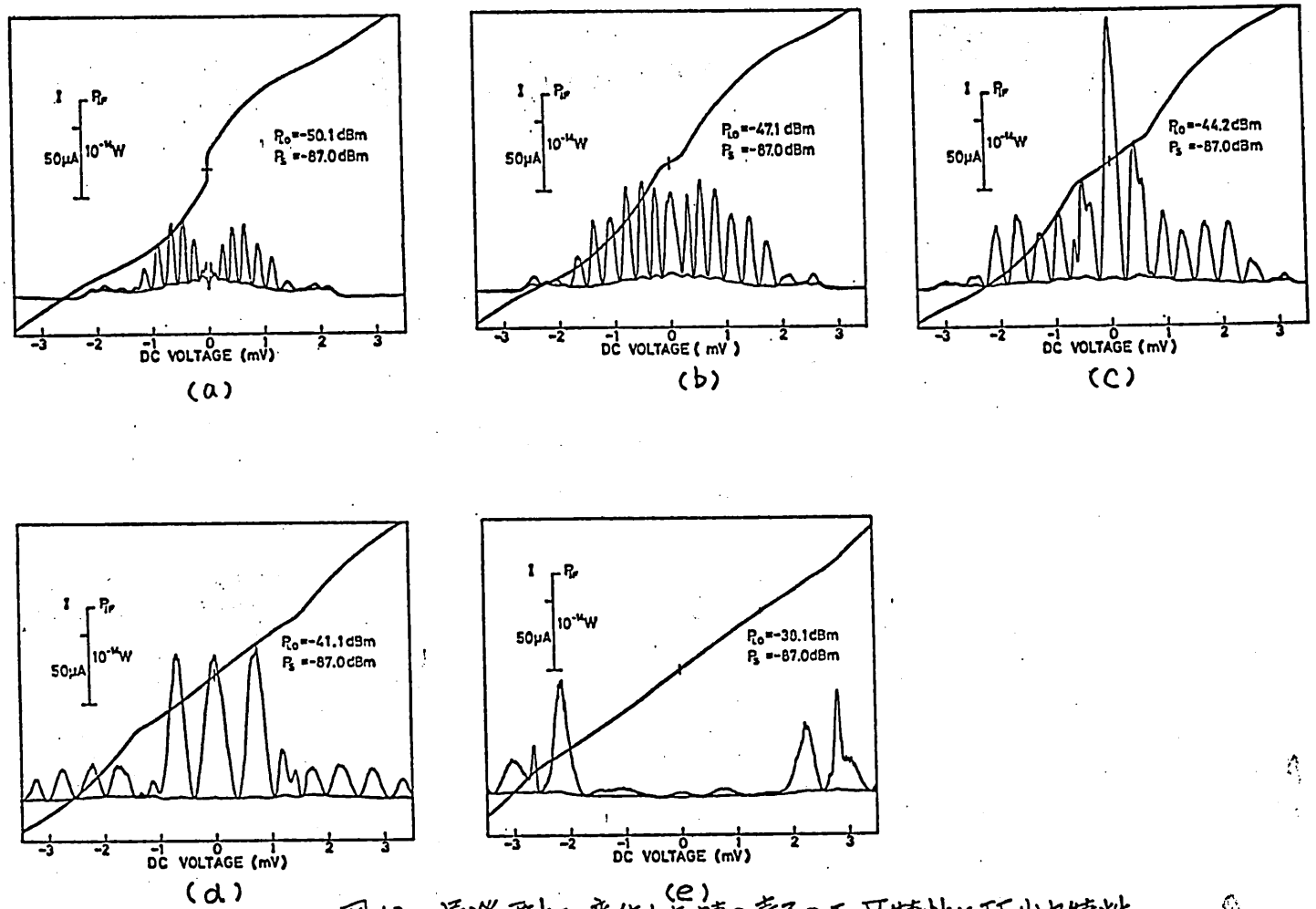



図10. 局発電力を変化した時の素子のI-V特性とIF出力特性

同図には信号入力 $P_S$ を一定に保ち，局発電力 $P_{LO}$ を色々変えた時のIF出力 $P_{IF}$ のバイアス依存性が示されている。同図（C）の場合がIF出力最大を与え，その時の変換効率 $\eta = -17.7$ dB，NEP $= 2.2 \times 10^{-19}$ [W/Hz] であった。図10において特徴的なことは，$P_{LO}$ が最適値において零バイアス点でIF出力の最大が得られることである。この点は前節で述べた7逓倍混合の場合と根本的に異る。シミュレータによるアナログ解析の結果でも確かめられたことであるが，逓倍次数が偶数の時には零バイアス点でIF出力の最大が得られ，逓倍次数が奇数の場合には零バイアスと第1次定電圧ステップとの中間でIF出力の最大が実現する。逓倍次数が偶数の場合に零バイアスで検波動作を行なわせ得ることは，バイアス電力によるヒーティングが皆無であるという点で非常に利点である。なお，IF出力 $P_{IF}$ と信号入力 $P_S$ との直線関係は $P_S < -60$ dBm の範囲内で成立している。

表2には試作した40個の素子について測定した諸量をまとめて示す。また変換効率 $\eta$ の $I_cR$ 積依存性を図11に示す。図中の数字はRの値を示す。図中の黒丸の点5個はたまたま同一のRの値（$R = 18\,\Omega$）を持つ素子についてのデータで，一定のRに対しては $I_cR$ 積の値が大きい程 $\eta$ が大きくなる傾向が認められる。また，図12には $\eta$ のSと $I_cR$ 積とに対する依存性を示すが，Tinkhamらの述べているように $I_cR \gtrsim 2$ mV，$S \gtrsim 2$ を満足する素子は高い変換効率を持つことが認められる。10逓倍混合に対して $\eta > -20$ dB の変換効率が得られていることは相当良い結果である。

| Junction | R (Ohm) | $I_C$ (μA) | $I_CR$ (mV) | $V_g$ (mV) | S | η (dB) | MDP (pW) | NEP (W/Hz) | $P_{LO}$ (dBm) | $R_D/R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6.0 | 498 | 2.99 | 2.9 | 2.6 | -18.3 | 0.45 | $3.4 \times 10^{-19}$ | -23.3 | 0.63 |
| 2 | 6.2 | 355 | 2.20 | 2.9 | 1.3 | -21.1 | 1.2 | $8.8 \times 10^{-19}$ | -31.0 | 0.63 |
| 3 | 10.0 | 248 | 2.48 | 2.7 | 2.1 | -20.8 | 0.72 | $6.0 \times 10^{-19}$ | -34.9 | 0.45 |
| 4 | 10.7 | 238 | 2.54 | 2.9 | 2.9 | -19.3 | 0.78 | $6.0 \times 10^{-19}$ | -33.6 | 1.17 |
| 5 | 13.5 | 158 | 2.13 | 2.8 | 1.4 | -30.8 | 7.1 | $5.5 \times 10^{-18}$ | -39.5 | 0.59 |
| 6 | 13.8 | 194 | 2.67 | 2.7 | 1.2 | -26.0 | 2.2 | $1.7 \times 10^{-18}$ | -34.9 | 0.60 |
| 7 | 16.1 | 126 | 2.03 | 2.8 | 1.4 | -28.1 | 3.3 | $2.6 \times 10^{-18}$ | -40.4 | 0.50 |
| 8 | 16.8 | 68.0 | 1.14 | 2.9 | 1.2 | -34.6 | 19 | $1.4 \times 10^{-17}$ | -44.6 | 0.48 |
| 9 | 17.6 | 20.8 | 0.37 | --- | --- | -32.5 | 7.9 | $6.1 \times 10^{-18}$ | -54.6 | 0.50 |
| 10 | 18.0 | 107 | 1.93 | 3.0 | 2.5 | -27.9 | 3.9 | $3.0 \times 10^{-18}$ | -45.4 | 0.51 |
| 11 | 18.0 | 138 | 2.48 | 3.0 | 3.3 | -23.1 | 1.6 | $1.2 \times 10^{-18}$ | -40.4 | 1.11 |
| 12 | 18.2 | 130 | 2.37 | 3.0 | 3.1 | -19.5 | 0.68 | $5.2 \times 10^{-19}$ | -38.4 | 1.15 |
| 13 | 18.4 | 105 | 1.93 | 2.8 | 1.6 | -27.6 | 2.9 | $2.2 \times 10^{-18}$ | -41.8 | 0.53 |
| 14 | 19.2 | 119 | 2.28 | 3.1 | 1.1 | -24.6 | 1.5 | $1.1 \times 10^{-18}$ | -40.7 | 0.83 |
| 15 | 19.4 | 133 | 2.57 | 3.0 | 4.0 | -26.7 | 4.0 | $3.1 \times 10^{-18}$ | -40.6 | 1.06 |
| 16 | 23.5 | 43.0 | 1.01 | 3.1 | 1.4 | -29.9 | 5.8 | $4.4 \times 10^{-18}$ | -47.8 | 0.80 |
| 17 | 25.0 | 92.0 | 2.30 | 2.9 | 2.4 | -24.6 | 2.0 | $1.5 \times 10^{-18}$ | -40.1 | 0.70 |
| 18 | 26.0 | 107 | 2.77 | 2.9 | 1.9 | -23.7 | 1.5 | $1.1 \times 10^{-18}$ | -49.4 | 0.86 |
| 19 | 26.8 | 95.0 | 2.55 | 3.0 | 2.0 | -24.7 | 1.6 | $1.2 \times 10^{-18}$ | -39.8 | 0.65 |
| 20 | 27.2 | 83.0 | 2.26 | 3.0 | 2.2 | -19.1 | 0.58 | $4.4 \times 10^{-19}$ | -40.2 | 0.76 |

表2-1、試作ジョセフソン素子の諸量

| Junction | R (Ohm) | $I_C$ (μA) | $I_CR$ (mV) | $V_g$ (mV) | S | η (dB) | MDP (pW) | NEP (W/Hz) | $P_{LO}$ (dBm) | $R_D/R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 29.6 | 24.5 | 0.73 | 2.9 | 1.1 | -30.4 | 6.5 | $5.0 \times 10^{-18}$ | -52.0 | 0.61 |
| 22 | 31.2 | 78.8 | 2.46 | 3.0 | 2.5 | -21.8 | 0.76 | $5.8 \times 10^{-19}$ | -44.4 | 0.96 |
| 23 | 34.0 | 48.7 | 1.66 | 3.0 | 2.5 | -27.3 | 6.3 | $4.9 \times 10^{-18}$ | -49.4 | 1.35 |
| 24 | 34.8 | 60.5 | 2.11 | 3.1 | 2.6 | -17.8 | 0.85 | $6.6 \times 10^{-19}$ | -42.4 | 0.93 |
| 25 | 41.6 | 45.5 | 1.89 | 2.9 | 2.5 | -26.1 | 2.5 | $1.9 \times 10^{-18}$ | -43.8 | 0.78 |
| 26 | 41.6 | 50.0 | 2.08 | 2.9 | 3.0 | -22.5 | 1.4 | $1.1 \times 10^{-18}$ | -43.0 | 0.92 |
| 27 | 42.0 | 53.5 | 2.25 | 3.0 | 2.4 | -20.1 | 0.52 | $4.0 \times 10^{-19}$ | -44.4 | 0.74 |
| 28 | 43.6 | 55.0 | 2.40 | 3.0 | 3.0 | -17.7 | 0.29 | $2.2 \times 10^{-19}$ | -44.2 | 0.79 |
| 29 | 44.0 | 37.5 | 1.65 | 2.9 | 3.1 | -19.7 | 1.0 | $7.9 \times 10^{-19}$ | -49.8 | 0.78 |
| 30 | 50.0 | 31.0 | 1.55 | 2.8 | 3.3 | -20.8 | 1.1 | $8.2 \times 10^{-19}$ | -44.4 | 0.90 |
| 31 | 51.6 | 34.0 | 1.75 | 2.8 | 3.5 | -18.7 | 0.50 | $3.9 \times 10^{-19}$ | -42.9 | 0.83 |
| 32 | 53.6 | 36.0 | 1.93 | 2.8 | 1.5 | -22.6 | 1.6 | $1.3 \times 10^{-18}$ | -46.4 | 0.82 |
| 33 | 55.2 | 36.0 | 1.99 | 2.9 | 3.1 | -20.5 | 0.74 | $5.7 \times 10^{-19}$ | -45.0 | 0.85 |
| 34 | 72.8 | 21.8 | 1.58 | 3.0 | 1.6 | -27.3 | 2.6 | $2.0 \times 10^{-18}$ | -46.4 | 0.69 |
| 35 | 104 | 17.3 | 1.79 | 3.1 | 2.5 | -21.7 | 0.85 | $6.6 \times 10^{-19}$ | -47.1 | 0.74 |
| 36 | 127 | 12.5 | 1.59 | 3.0 | 2.9 | -26.4 | 4.6 | $3.5 \times 10^{-18}$ | -46.6 | 0.78 |
| 37 | 176 | 3.0 | 0.53 | 2.6 | 1.3 | -37.2 | 49 | $3.8 \times 10^{-17}$ | -50.2 | 0.74 |
| 38 | 202 | 9.3 | 1.88 | 3.2 | 2.2 | -26.8 | 2.8 | $2.2 \times 10^{-18}$ | -49.6 | 0.67 |
| 39 | 348 | 3.0 | 1.04 | 3.1 | 3.5 | -25.1 | 5.1 | $4.0 \times 10^{-18}$ | -52.8 | 1.05 |
| 40 | 420 | 2.7 | 1.12 | 3.1 | 2.5 | -35.0 | 19 | $1.5 \times 10^{-17}$ | -48.1 | 0.73 |

表2-2、試作ジョセフソン素子の諸量

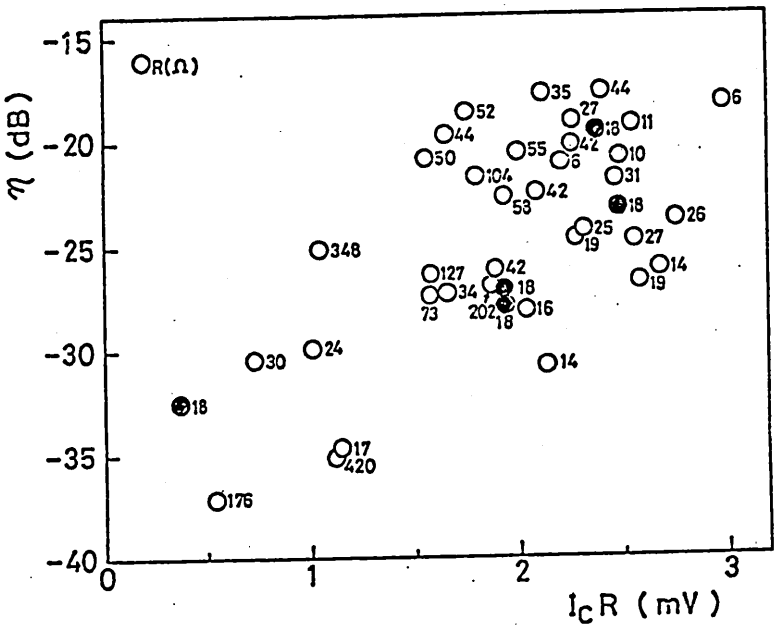



図11. 変換効率ηのIcR積依存性

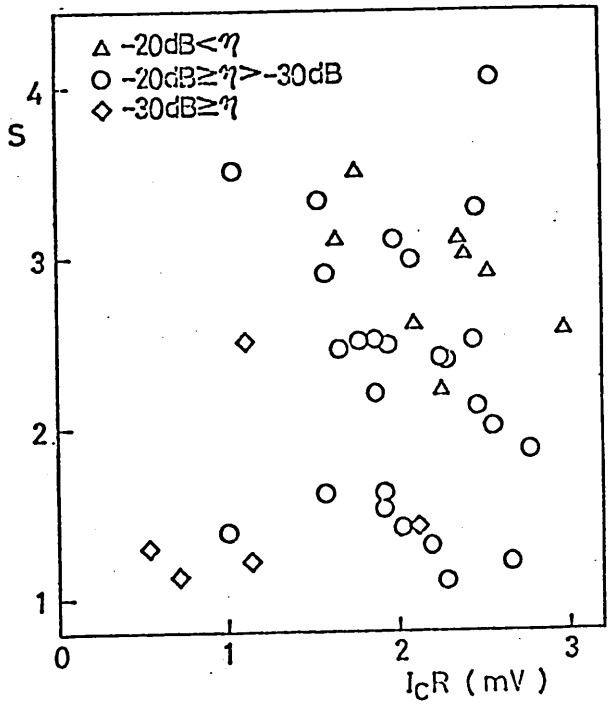



図12. ηのSとIcR積に対する依存性

ほぼ同じ周波数帯でGaAsショットキーバリヤダイオードによる10逓倍混合の変換効率が約−40dBであること[9]と比べると，ここに得られた変換効率の値は20dB以上も大きく，ジョセフソン接合が逓倍混合ヘテロダイン検波に対して非常に優れた特性を持つことが良くわかる。

## 4. むすび

10GHzの局発源を用い，70GHz波および100GHzとの逓倍混合ヘテロダイン検波の実験を行い，本文で述べたような実験結果を得たが，それを要約すると次のようになる。

i)、7逓倍混合の場合、IF出力最大のバイアス動作点は，零バイアス点と局発入力による第一の定電圧ステップの点との中間にある。これに対し，10逓倍混合の場合には零バイアス点でIF出力の最大が得られる。アナログシミュレータによる解析の結果によれば，このことは逓倍次数が奇数の場合と偶数の場合に対し一般的に成立する関係である。偶数次の逓倍混合ヘテロダイン検波が零バイアスで最適動作することは実用上大きなメリットをもたらすものである。

ii)、7逓倍混合の最大変換効率は約−11dB，10逓倍混合のそれは約−18dBであり，いずれもGaAsショットキーバリヤダイオードによる同様な実験の変換効率に比べて20dB以上大きい。ジョセフソン接合が逓倍混合ヘテロダイン検波に対して極めて優れた特性を持つことが確かめられたといえる。なお，NEPは7逓倍混合の場合も10逓倍混合の場合も共

に約 $2\times10^{-19}$ [W/Hz] であり，半導体ダイオードに比べて2桁程感度が良い。

iii). 点接触ジョセフソン接合の形成方法として，最初1KΩ位の高抵抗接合を作り，これに過電流を流してburn-inをさせ，抵抗を数十オームに下げる製作方法を採用した所，非常に高感度で安定な素子を作ることが出来た。IcR積が理論値の2.2mVを超える素子もしばしば得られた。

iv). 変換効率はIcR積とSの値が大きい程良いという傾向が認められる。Timkhamらの提唱しているようにIcR≳2mV，S≳2の条件を満足する素子は高い変換効率を示した。また接合抵抗Rについては数十オームのものが良い結果を生ずるようである。

v). 最大のIF出力を与えるバイアス電力は−40dBm以下であり(0.1μW以下)，また検波出力の直線性が成立する信号入力の範囲は7逓倍混合の場合が約−70dBm以下(0.1nW以下)，10逓倍混合の場合が約−60dBm以下(1nW以下)であった。このことはジョセフソン接合が半導体ダイオードに比べてはるかに微弱な局発および信号入力に対して動作するものであることを示している。

# 文　献


(1) Y.Taur, J.H.Claassen and P.L.Richards, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-22, p.1005(1974).

(2) A.I.Akimenko, V.S.Solover and I.K.Yanson, Phys. State. Sol. (a), 33, p.53(1976).

(3) T.G.Blaney, NPL S.I. No.89/0382 (1978).

(4) D.G.McDonald, A.S.Risley, J.D.Cupp and K.M.Evenson, Appl. Phys. Lett., 18, p.162(1971).

(5) D.G.McDonald, A.S.Risley, J.D.Cupp and K.M.Evenson, Appl. Phys. Lett., 20, p.296(1972).

(6) T.G.Blaney and D.J.E.Knight, J.Phys.D: Appl.Phys., 6, p.936(1976).

(7) J.S.Wells, D.G.McDonald, A.S.Risley, S.Jarris and J.D.Cupp, Rev. Phys. Appl., 9, p.285(1974).

(8) D.A.Weitz, W.J.Skocpol and M.Tinkham, J.Appl.Phys., 49, p.4873(1978).

(9) 冨.松山.植木, 昭和50年度電子通信学会全国大会, 721 (1975).

輻射科学研究会資料

# CW色素レーザからのサブピコ秒光パルスの発生

黒堀　利夫
張　吉夫
松尾　幸人
（大阪大学・産業科学研究所）

1979年　7月6日

# CW色素レーザからのサブピコ秒光パルスの発生

黒堀 利夫・張 吉夫・松尾 幸人
(大阪大学産業科学研究所)

## 1. まえがき

1974年CW色素レーザからのサブピコ秒光パルスの発生が、初めて報告されて[1]以来、ここ数年間の理論的検討ならびに実験的改善によって、最近では0.2ps程度の超短光パルスが得られるようになってきた。[2] また超短パルス化と同時に高出力化[1],[3]、安定化[4]、同調範囲の拡大化[5]等の工夫もなされてきている。そしてこの超短光パルスの応用は多岐にわたり、特に物理、化学、生物における超高速現象の観測等に用いられている。[6]

蓄倉等は、現在までピコ秒あるいはサブピコ秒領域に入る励起状態の位相緩和時間の直接測定を目的として研究を進めてきた。[7]

本報告では、蓄倉等が今日まで行なってきたCW色素レーザからの超短光パルス発生の研究を述べるとともに、今後

0.1ps 以下の極超短光パルス発生で、新たに問題となる点について検討を行なっている。

ここで最近のCW色素レーザによる超短光パルス発生の現況とそれに到るまでの経過についてふれておく。今日までCW色素レーザからのサブピコ秒光パルスは、ほとんど可飽和色素を用いた受動モード同期法とモード同期した他のレーザを用い、共振器長を同調した色素レーザをパルス的に光励起するシンクロナスモード同期法によって得られている。表1.2は、これらの結果をまとめて示したものである。表1に示した受動モード同期について、その代表的な共振器構成を示し簡単に説明する。

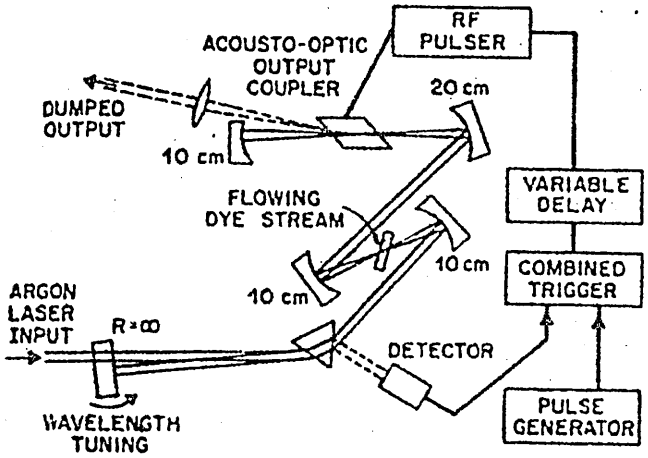
表1. 受動モード同期からのサブピコ秒光パルス発生の現況

| Laser dye | Absorber dye | Pulse duration ( ps ) | Tuning range ( nm ) | References |
|---|---|---|---|---|
| Rh-6G | DODCI | 0.7 - 1.0 | 615 | C. V. Shank (1) |
| Rh-6G | DODCI | 0.3 | 615 | E. P. Ippen (8) |
| Rh-6G | DODCI | 0.3 - 0.9 | 598 - 615 | I. S. Ruddock (9) |
| Rh-6G | C.V. | 0.55 - 1.1 | 592 - 600<br>635 - 640 | Z. A. Yasa (10) |
| Rh-6G | DODCI | 0.17 | 612 | J. C. Diels (2) |

表2. シンクロナスモード同期からのサブピコ秒光パルス発生の現況

| Laser dye | Absorber dye | Pulse duration ( ps ) | Tuning range ( nm ) | References |
|---|---|---|---|---|
| Rh-6G | DODCI | 0.7 | 605 | J. P. Ryan (11) |
| Rh-6G | | 0.5 | 569 | C. P. Ausschnitt (12) |
| Rh-B | | 0.8 - 1.0 | 609 - 620 | J. P. Heritage (13) |
| Oxazine -1 | | 0.35 - 0.5 | 745 | J. Kuhl (14) |

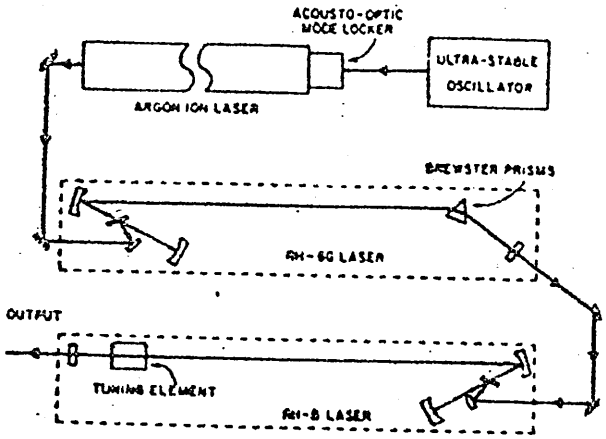
図1はShankら[1]が初めて受動モード同期からサブピコ秒光パルスの発生を行なった時の共振器構成を示している。レーザ媒質であるローダミン6G（以下Rh-6Gとする）と可飽和吸収体であるDODCI（＝3,3'-diethyl-oxadicarbocyanine iodide）を混合して一本のジェット・ストリームとし、アルゴンレーザ（λ=514.5 nm）で励起を行なっている。この場合、ピークパワーの大きいパルスを取り出すために、キャビティーダンプ法を用いている。また内部にプリズムを挿入することにより、発振波長の同調を行なっている。




Mode-locked cw dye laser with arrangement for dumping intracavity pulses.

図1. Shankら[1]の受動モード同期色素レーザ

次に図2は、Heritageら[9]が能動励起シンクロナスモード同期を行なった時の実験構成を示している。まず励起源であるアルゴン・レーザを超音波変調器を用いて強制




Tandem pumping arrangement for the Rhodamine B tunable subpicosecond dye laser. The mode-locked cw argon-ion laser synchronously pumps the Rhodamine 6G laser which provides short pump pulses for the Rhodamine B laser.

図2. Heritageら[12]の能動励起シンクロナスモード同期色素レーザ

モード同期し，パルス幅～100ps程度のパルス列を作り，これに共振器長を同調したRh-6G色素レーザを励起し，55psの光パルスを得て，このパルスを用いて，Rh-B色素レーザを励起して，0.8psのサブピコ秒光パルスを得ている。

次の節では，著者等の研究室で行なってきた実験および結果について述べる。

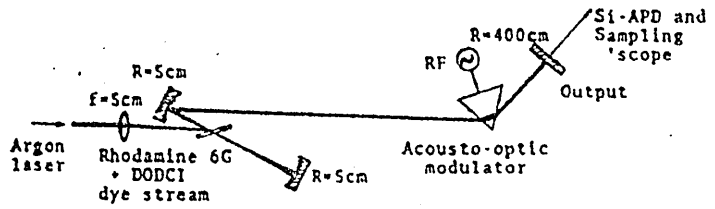
## 2. 実験装置

### 2.1 CW色素レーザ

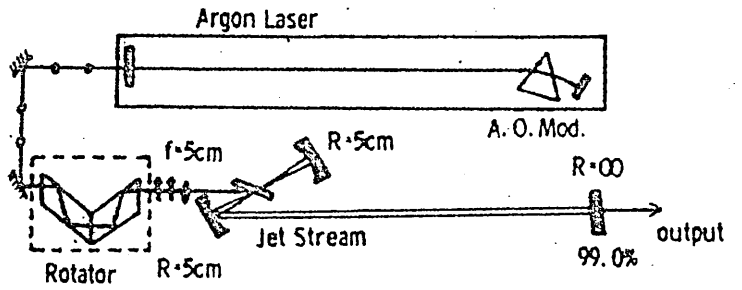
図3(a)～(c)に本実験で用いたCW色素レーザの共振器構成を示す。共振器構成は，折れ曲り3枚ミラー構成である。[15] 集光用凹面ミラーとしては，波長450～650nmで反射率100%，曲率半径R=5cm，出力ミラーとしては波長600nmで反射率99%で多重反射を避けるために裏面を1°ウェッジとした平面ミラーを用いた。図3(a)は，著者等の提案してきた受動モード同期と強制モード同期を併用した場合の共振器構成である。[4] この方法の有効性を示すための計算機シミュレーションについては既に他の機会に述べた。[16] (b)はシンクロナス・モード同期の場合であり，(c)は，受動モード同期の場合の共振器構成である。

製作したCW色素レーザでは，特にジェット・ストリームおよび循環系の安定性に注意を払った。[17] このジェット・

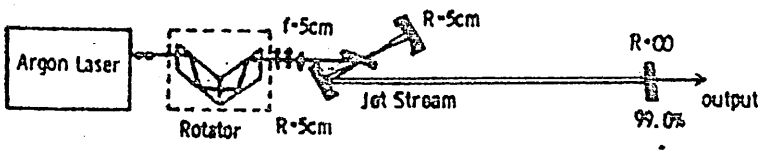
ストリームの厚さとしては、200、250、300、400 μm のものを用意したが、図3 (a)、(b) では 300μm、(c) では 200μm のものを用いた。ジェット・ストリームの流速は、約 10 m/sec である。




(a) 受動モード同期＋強制モード同期




(b) シンクロナスモード同期




(c) 受動モード同期

図3. 本実験で用いた実験構成図

## 2.2 パルス幅測定装置

図4(I)が、本実験で用いたパルス幅測定装置である。1節でサブピコ秒光パルス発生の現況について述べてきたが、発生と並行してこの様な超短光パルスを測定するための種々の技術的発展も進められてきている。サブピコ秒領域に入る測定には、もはや光検出器とオシロスコープとの組み合わせによる測定では時間的分解能(~50ps)が十分ではない。現在この様な超短光パルス測定に用いられている方法には、電子的ストリーク・カメラによる直接法[18]とSHG(Second Harmonic Generation)[19]、TPF(Two-Photon Fluorescence)[20]に代表される空間的非線形相関法による間接法とがある。直接法では、種々の改善により分解能700fsのストリーク・カメラも現わ

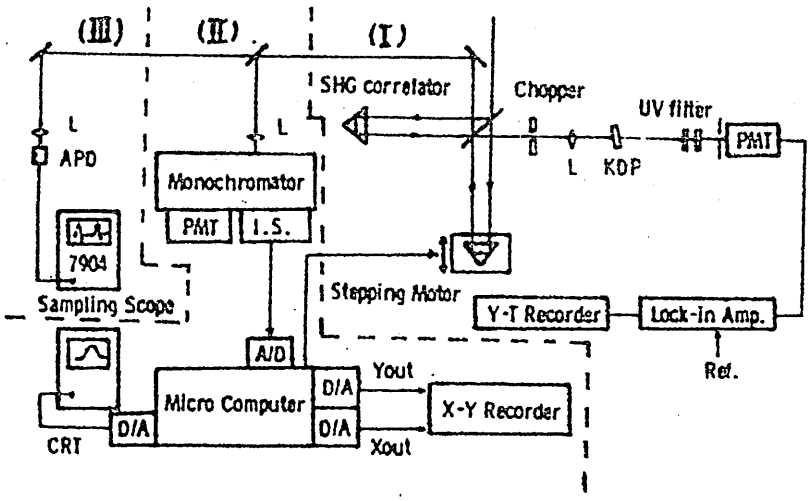



図4. 測定装置

れてきている。[21] ここでは、通常低出力連続動作のレーザでよく用いられているSHG自己相関法について述べる。この方法は図4(I)に示す様に、ビームを2つに分けて一方に光路差による可変遅延時間を与え、再び重ね合わせて、非線形効果により2次の相関関数を出力として測定して、時間情報を空間的情報に直して得るものである。この方法には、2つに分けられた基本波の偏波面が、互いに平行か垂直かによって通常第1種のSHG法および第2種のSHG法と呼ばれている2つの方法がある。本実験では、第1種のSHG法を用いている。またマイケルソン干渉系の部分は、コーナーキューブを用いて元の共振器中への不必要な出力パルスのフィードバックを防いでいる。

次にこれらの方法でパルスを測定した時の理論的相関波形を図5に示す。この場合、コントラスト比(ピーク値 $I_P$ とバックグラウンド $I_B$ との比 $R = I_P / I_B$)がモード同期パルスによるものか雑音によるものかの重要な判定となる。第1種のSHG相関法では、バック・グラウンドを伴った自己相関波形が得られ、理想的なモード同期の場合には、コントラ

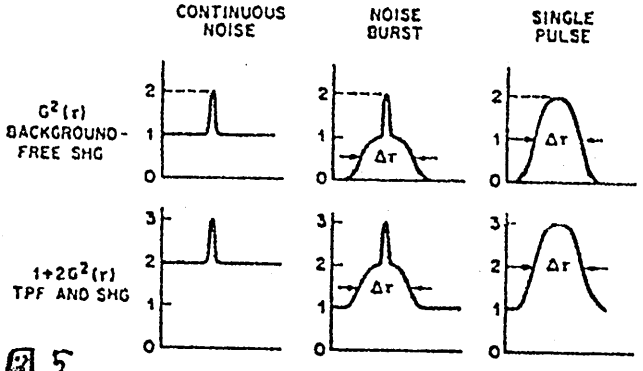



図5 Theoretical correlation traces for SHG and TPF measurements

スト比は 3:1 となる。この場合のパルス分解能は、非線形結晶中での基本波と逓倍波とのパルス間の群速度のミスマッチにより主に制限される。たとえば、この場合の群速度の遅れ $\tau_D$ は、次式で与えられる。[22]

$$\tau_D = \frac{\lambda_1 \ell}{c}\left(\frac{\partial n^{\omega}}{\partial \lambda_1} - 2\frac{\partial n^{2\omega}}{\partial \lambda_2}\right)$$

ここで　$\lambda_1$, $\lambda_2$ ; 基本波、逓倍波の波長

$n^{\omega}$, $n^{2\omega}$ ; 基本波・逓倍波での屈折率

$\ell$ ; 結晶長

$c$ ; 光速

非線形光学結晶としてKDPを用いた場合、$\lambda_1$ = 600 nm, $\lambda_2$ = 300 nm として 約 0.07 ps/cm である。一方、第2種のSHG相関法では、バックグラウンドを伴わない自己相関波形が得られ、理想的なモード同期の場合には、コントラスト比は 1:0 となる。この場合のパルス分解能は結晶中での2つのビームの群速度の違いによる複屈折によって制限される。Weber[23]によれば、この方法での分解能は、厚さ 1mm のKDP結晶で約 0.8 ps であると報告している。本実験では、サブピコ秒光パルスにおいて十分な分解能をもつ厚さ 170 μm のKDP結晶を用いた。結晶のカットは、$\lambda_1$ = 600 nm での位相整合角、約 60° を考慮して、45° z - 60 y' カットである。

いずれにしても、この間接法ではあくまでも測定しているのは相関関数であり、実際のパルス幅ではないということで誤

しかし、高次の相関関数を用いれば、2次では得られなかった実際のパルスの詳しい情報を得ることができる。

次に、この様にして得られた空間的情報から実際のパルス幅を決定する方法について述べる。ここで、次の様な関数およびパラメータを考える。

$I(t)$：パルスパワー時間波形、$\Delta\tau_p$：パルス幅（$I(t)$のFWHM）

$F_0(f)$：発振パワースペクトル関数、$\Delta F_0$：バンド幅（$F_0(f)$のFWHM）

$G(\tau)$；パルスパワー相関関数、$\Delta\tau_G$：相関関数幅（$G(\tau)$のFWHM）

とすれば、SHG相関法で測定したのは$G(\tau)$の$\Delta\tau_G$であってこれから$I(t)$の$\Delta\tau_p$を求めるのである。

ここで、超短光パルスを考える上で重要なパラメータは、

$\Delta\tau_p \times \Delta F_0\ (=p)$　；時間幅・バンド幅積

$\Delta\tau_G/\Delta\tau_p\ (=\gamma)$　；相関幅・時間幅比

である。表3に、各種の代表的波形に対する$p$と$\gamma$の値を示す。

表3. 各種の波形に対する$p$と$\gamma$の値

| $I(t)$ | | $\gamma=\Delta t_G/\Delta t_p$ | $p=\Delta t_p\times\Delta F_0$ |
|---|---|---|---|
| $1\ (0\leq t\leq\Delta t_p)$ | 方形波 | 1 | 0.886 |
| $\exp\left\{-\frac{(4\ln 2)t^2}{\Delta t_p^2}\right\}$ | ガウス | $\sqrt{2}$ | 0.441 |
| $\mathrm{sech}^2\left\{\frac{1.76t}{\Delta t_p}\right\}$ | $\mathrm{sech}^2$ | 1.55 | 0.315 |
| $\exp\left\{-\frac{(\ln 2)t}{\Delta t_p}\right\}\ (t\geq 0)$ | ローレンツ | 2 | 0.11 |

ここで $P=\Delta\tau_p\times\Delta f_0$ が最小の $P$ の値となるパルスを transform-limited pulse（以下TLPとする）と呼ぶ。TLPが、超短光パルスの発生および各種の測定上望ましい。

次に $P=\Delta\tau_p\times\Delta f_0$ の積が最小になる場合をTLPと呼んだが、この関係になっているかどうかを評価するためには、$\Delta\tau_p$ の測定と同時に、次に述べるモード同期時におけるパワースペクトル幅 $\Delta f_0$ を測定しなければならない。

## 2.3 スペクトル観測装置

図4(II)が、本実験で用いたスペクトル観測装置である。スペクトル観測には、分光器（島津 GE-100）の乾板取付け枠の位置に自己走査型1024ビットイメージセンサ（MEL-1024KV、松下）を用いた。このイメージセンサは、仕様では、ダイナミックレンジが広く、ピーク比で50dB以上となっているが、実際使用する場合には、集光条件、各フォトダイオード素子のバラツキおよび直線性のチェック等が意外と難しい。特に著者等は、モード同期時のスペクトル幅 $\Delta f_0$ のみならずそのプロファイル $f_0(f)$ も問題としているので、その場合には直線性の良いフォトマルも併用している。しかしスペクトルの過渡的な変化やミラーのアライメント時におけるモニターとしてはイメージセンサは非常に便利である。またマイクロコンピュータシステムとの組み合わせによるデータ処理には、インターフェイスが簡単に済むという利点もある。

図4(b)は、モード同期波形のモニター装置である。検出器としては、アバランシ・フォトダイオード（立ち上り 300ps 三菱）と Tektronix 7904 サンプリングスコープ（立ち上り 25ps）を用いた。この装置は、モード同期時における時間波形のモニターとして用いている。

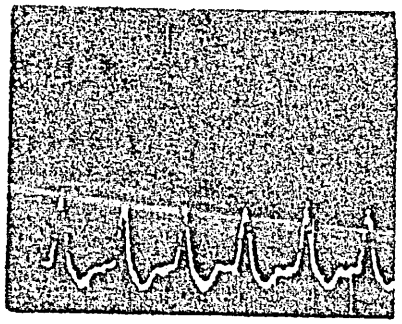
## 3. モード同期実験および結果

### 3.1 受動モード同期＋強制モード同期 (4)

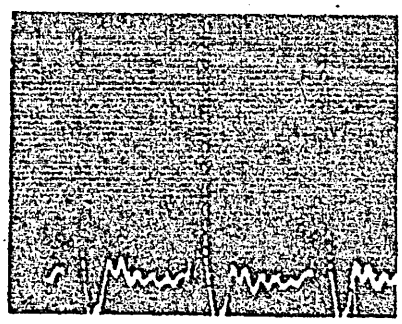
受動モード同期＋強制モード同期とは、受動モード同期に強制モード同期を併用して、安定な超短光パルスを得る方法である。この方法は、著者等が提案したものである。共振器構成を図3(a)に示した。レーザ媒質であるRh-6Gと可飽和吸収体であるDODCIとを混合してエチレングリコール溶液としてジェットストリームとし、アルゴンレーザで励起する。色素レーザ共振器中に溶融石英からなるプリズム状の超音波変調器（Spectra Physics, Model H-400, 寸法 10×10×7 mm）を配置し強制モード同期をかけ、DODCIによる受動モード同期との併用構成となっている。この変調器は、溶融石英中の超音波定在波による Bragg 回折を利用したもので外部から共振器長に相当する周波数で共振器中に損失を与えるものである。またこの変調器はプリズム状になっていることから同時に波長同調素子と

しても使える。

図6にこの方法の有効性を示すモード同期波形を示す。(a)は、受動モード同期だけの場合で1周回中（T=7ns）に2パルスが存在している。(b)は、この状態で強制モード同期を併用した場合で、1パルスでしかもピークパワーの高いパルスが得られている。図7に併用した場合のSHG自己相関波形を示す。実験条件としては、Rh-6G、DODCIの濃度はそれぞれ $1.5\times10^{-3}$ M/ℓ，$1.0\times10^{-5}$ M/ℓ である。共振器長はL=105cmで波長同調範囲は590～610nmである。



(a)



(b)

図6. Experimental verification of the effect of the passive-active mode locking. (a) passive mode locking alone, 2-pulse mode locking. (b) passive-active mode locking, 1-pulse mode locking.

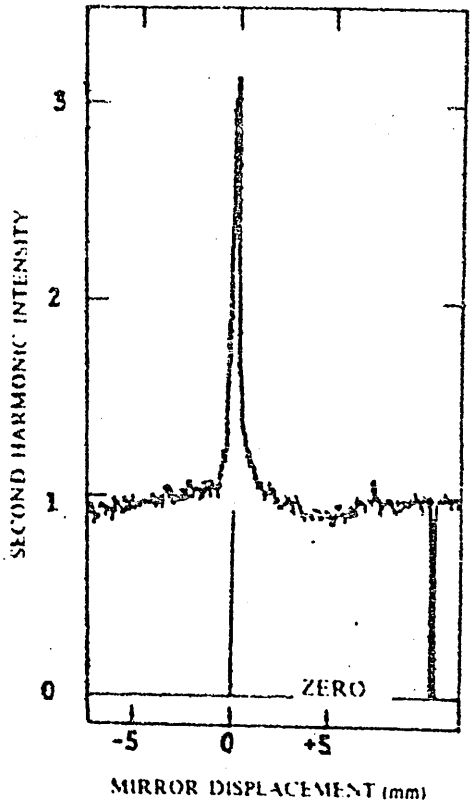



図7. SHG autocorrelation measurement of pulsewidth of the pulse shown in Fig. 10 (b). Pulsewidth deduced from this plot is 1.4 ps with assuming sech pulse waveform.

この方法では、励起しきいパワーの50%増しの励起パワーに対しても安定な単一パルスが得られた。図7の自己相関波形から、元のパルス波形を $sech^2$ 形と仮定して 1.4ps が得られた。この方法で問題となるのは超短光パルスを目指す場合、共振器内のプリズムによるパルス拡がりである。プリズムによるパルス拡がりでまず最初にきくのは、プリズム中を通過する有限断面ビームのプリズム中での光路差によるパルス拡がりでこれを transverse group dispersion time と呼ぶ。この拡がりを $\Delta t$ とすると $\Delta t$ は次式で表わされる。[24]

$$\Delta t = \frac{x(n_g - n_\varphi)}{c}, \quad n_g - n_\varphi = -\lambda \frac{dn_\varphi}{d\lambda}$$

ここで

$n_g$, $n_\varphi$ ; 群屈折率、位相屈折率

$x$ ; 媒質中での光路差

$$-\frac{dn_\varphi}{d\lambda} = 0.35 \times 10^{-5} [A^{-1}] \quad (\lambda = 5890A\text{で})$$

（溶融石英の場合）

今、プリズム中でのビーム径を 2mm$^\varphi$ とすれば $\Delta t = 0.12$ ps となる。このことから、プリズムを用いても 0.1 ps までのサブピコ秒パルス発生の可能性は十分あると考えられる。

## 3.2 シンクロナスモード同期

この場合には図3(b)に共振器構成を示したように、アルゴンレーザ中に先ほどの超音波変調器を挿入して強制モード同期をかけ、この共振器長に同調した色素レーザをパルス的に励起している。色素レーザパルスのパルス幅は励起パルス幅より2～3桁程度短かくなる。しかしこの方法ではアルゴンレーザの共振器長と色素レーザの共振器長をμmオーダの精度で同調させなければ超短パルスの発生は望めない。このことは理論的[25]および実験的にも[11]～[14]検討されている。図8に色素レーザの共振器長の変化に対するモード同期波形の変化の有様を示す。ここで最適長としているのはSHGの出力が最大になる位置を示しており符号"－"は、それより共振器長が短かいことを示している。これよりほぼ最適長から±0.2mm程度の範囲でモード同期がかかっていることがわかる。また図9は、共振器長の変化に対する出力の平均パワーを示している。

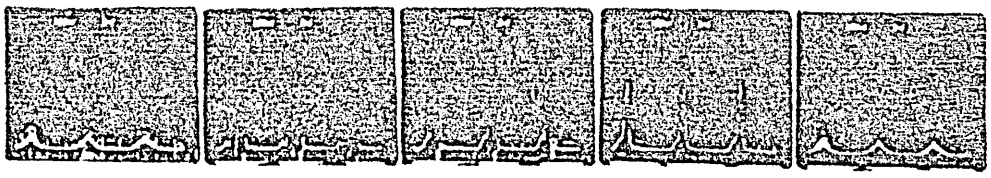



図8 共振器長の変化に対するモード同期波形

次にこの方法によるSHG相関波形を図10に示す。
この実験では、アルゴンレーザ、色素レーザとも共振器長の安定性
および アルゴンレーザモード同期用発振器の安定性等が

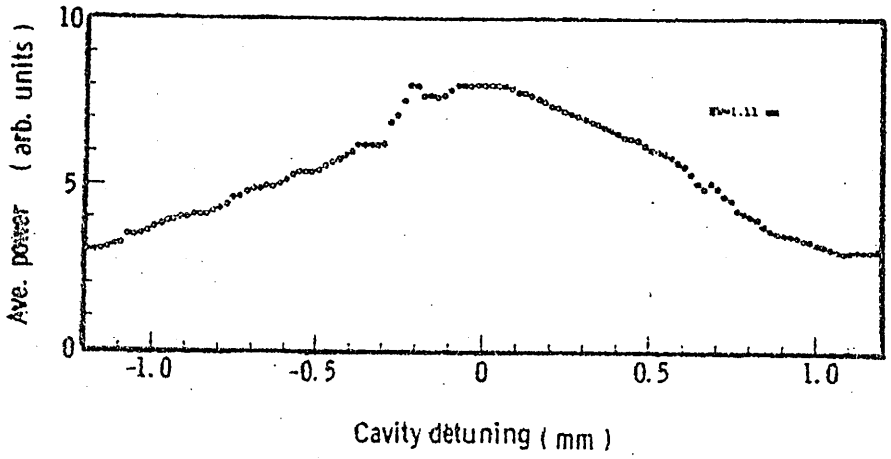



図9. 共振器長の変化に対する出力パワー

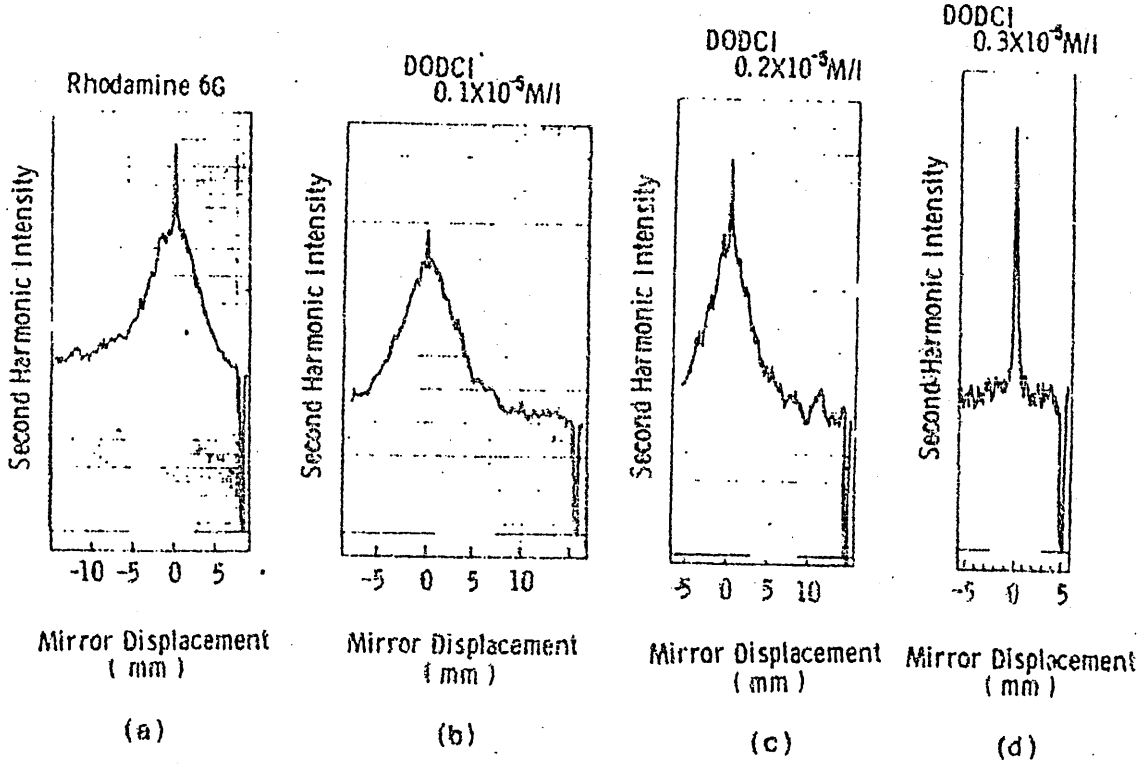


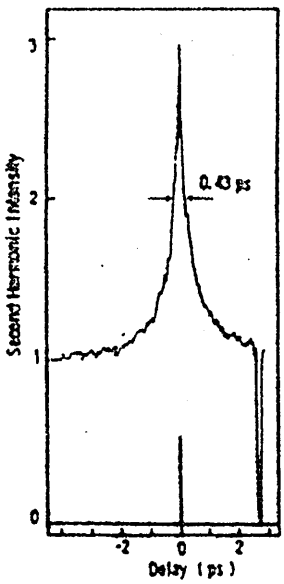

図10. SHG相関波形

まだ十分でなかった。(a)は可飽和吸収体であるDODCIを加えない場合でパルス幅は $sech^2$ 形と仮定して 30.1 ps である。この状態でも少し共振器長を調整すれば 10 ps 前後のパルスは簡単に得られる。(b)〜(d)は、(a)の状態で可飽和吸収体であるDODCIをそれぞれ 0.1, 0.2, $0.3\times10^{-5}$ M/l 加えていった時の一連のSHG相関波形の変化の有様を示している。パルス幅は、それぞれ 22.9 ps, 14.3 ps, 1.4 ps である。これより可飽和吸収体の飽和効果によるパルス幅の短縮化の効果が、シンクロナスモード同期効果によるそれより著るしいことを示している。

## 3.3 受動モード同期

受動モード同期は、可飽和吸収体による吸収の飽和効果とレーザ媒質の利得の飽和効果の2つの受動的な効果だけで超短光パルスを得る方法である。現在、この方法で最短パルスの発生が行なわれている。[25] 特に著者等は、現在この方法において混合色素の組み合わせを用いて利得幅の拡大による超短パルス化と同調範囲の拡大化を目指して実験を行なっている。[26] 用いた共振器構成は、図3(c)である。混合色素の組み合わせは、レーザ媒質としてRh-6G, Rh-B、可飽和

吸収体としてDODCI, DOOCI (= 1,3'-diethyl-4,2'-quinolyoxacarbocyanide iodide) であり，これらを混合してエチレングリコールを溶媒として一本のジェットストリームとして流しアルゴンレーザ（λ=514.5nm）で励起している。共振器長は，複数個のパルス分裂を防ぐ意味で，レーザ媒質のゲイン回復時間程度（Rh-6Gの場合 ~5ns）にした。まずRh-6GとRh-Bの混合色素において，ノーマル発振を試みたところRh-6GおよびRh-B単独の場合に比較してスペクトル幅の拡がりおよび同調範囲の拡大がみられた。図11 (a)〜(c)は，それぞれ波長λ=613nm，λ=615nm，λ=620nmでのSHG相関波形を示している。この時の実験条件は，励起パワー810mW，Rh-6G，Rh-Bの濃度はそれぞれ$1.5\times10^{-3}$ M/l，DODCI，DOOCIの濃度はそれぞれ$1.0\times10^{-5}$ M/lである。発振波長の同調は，共振器ミラーの傾きによる波長選択性を利用している。(a)，(b)，(c)のパルス幅は，光の波形を$sech^2$形と仮定してそれぞれ0.43ps，0.55ps，0.71psである。図12は，同時に測定した図11(a)に対応するスペクトルである。この場合の時間幅・バンド幅積は，$\Delta\tau_p\times\Delta\nu_0$

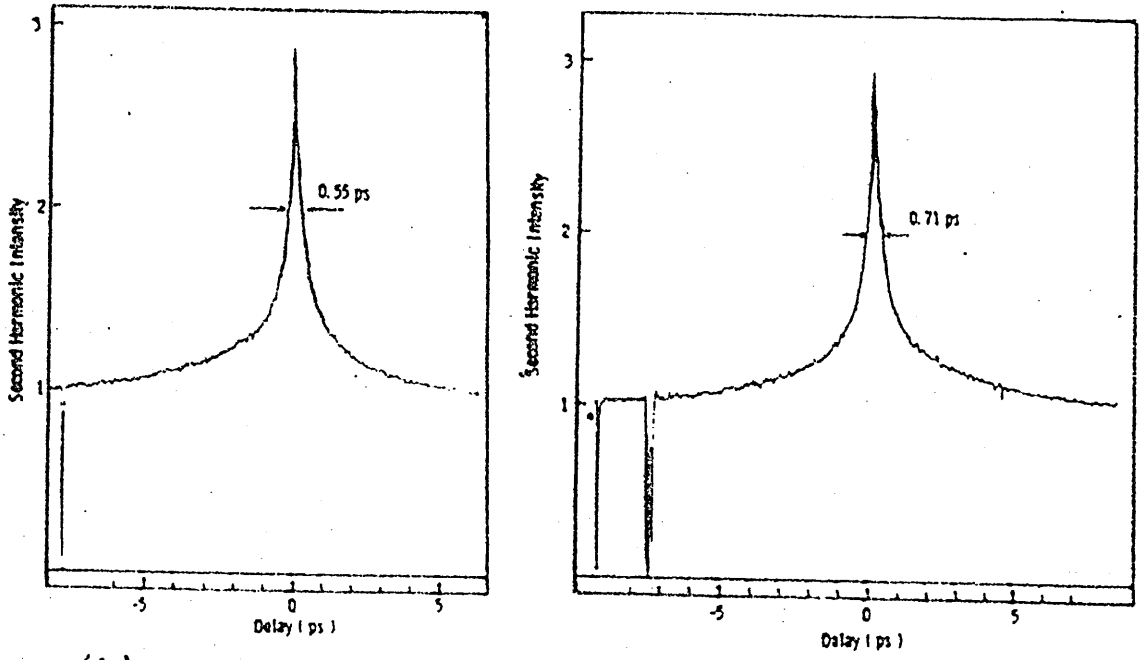



(a) λ=613nm

図11. SHG相関波形

が 0.487 となりほぼ TLP となっている。

特に混合色素を用いたこの実験では、これまでの Rh-6G DODCI の組み合わせによるものに比較して、より短かい光パルスは得られなかったが、同調範囲を拡大することができた。




(b) λ = 615 nm　　(c) λ = 620 nm

図 11. SHG 相関波形

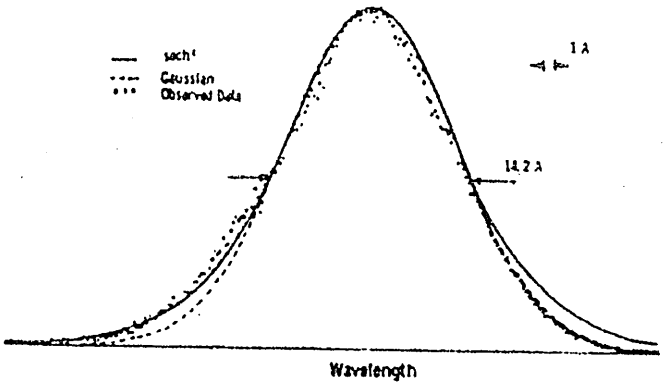



図 12. 図 11 (a) に対応するスペクトル

現在混合色素の組み合わせ、濃度の選択および励起パワー、共振器構成等が十分でないので今後の改善により波長580～630nmの広い波長範囲でサブピコ秒光パルスが得られる見込みである。また長波長側に同調するにつれパルス幅が拡がっているのは、もしRh-6GとDODCI、Rh-BとDBOCIとの組み合わせで、モード同期がなされているとすれば、レーザ媒質の放出断面積と可飽和吸収体の吸収断面積との比が影響しているためと考えられる。

## 4. 検討

超短光パルスの発生方法として、CW色素レーザで代表的な受動モード同期、シンクロナスモード同期および著者等の提案した受動モード同期と強制モード同期を併用する方法について、著者等の研究を中心に述べてきた。ここでは、0.1 ps を切る極超短パルス発生には、どのような点に注意をすることが必要かについて検討する。

(1) 利得帯域幅が広いこと。

色素レーザの場合、利得帯域幅が1000 $cm^{-1}$ 程度あるとすれば、得られるパルス幅は、0.03 ps (30 fs) となり、また1桁程度の短パルス化が可能である。また3.3で述べたように混合色素の組み合わせで、

利得帯域幅を拡げる方法も有効である。

(2) 分散性媒質を極力排除する。

3.1で述べたように共振器中にプリズム等の分散性媒質を挿入すると、プリズム中を通過する有限断面ビームのプリズム中での光路差によるパルス拡がりを生じる。またジェット・ストリームの厚さをうすくすることにより、可飽和吸収体の濃度を上げることができ飽和効果によるパルスの短縮化が期待できる。また、共振器外においても光学ガラス等の使用でパルス幅は拡がる。例えばパルス幅 0.1ps のTLPが光学ガラス中を 5cm 伝搬した場合、そのパルス幅は、元の幅の 50% にも拡がってしまう。特に、この効果は、超短パルスになればなるほど、またTLPになっていない場合ほど大きくきいてくる。この意味でもTLPが望ましい。TLPを得るためには、適当なスペクトル幅を有する複屈折フィルターの使用あるいはDiels[2]らのように矩形的な通過特性をもつ出力ミラー（λ=604～620nm で反射率 99.7%）を一種のフィルターとして用いてある程度スペクトル幅を制限する等の工夫も必要である。

(3) レーザ媒質の放出断面積（$\sigma_a$）と可飽和吸収体の吸収断面積（$\sigma_b$）との比を上げる。

New[27]は、この比をSとし次式で定義している。

$$S = k \frac{A_a \sigma_b}{A_b \sigma_a}$$

ここで

$A_a$, $A_b$ ; レーザ媒質、可飽和吸収体でのビーム断面積

$k$ ; 可飽和吸収体の位置により決まる定数

$$\begin{cases} k=1 & \text{ノンコンタクトセル} \\ k=2 & \text{コンタクトセル} \end{cases}$$

Newは比Sが大きいほど、パルス圧縮の領域が拡かり、長共振器長でも安定な動作が行なえると報告している。この長共振器長は、また各パルス毎に十分な反転分布を蓄積することができ、短パルス化に通じている。またこの比Sを上げるためには、Bradley[9,11]らが行なっているように可飽和吸収体をミラーに付着させたコンタクトセル構成が良い。そして、また彼らは可飽和吸収体の方を、レーザ媒質より2倍程度きつく絞り込むことにより$A_a/A_b$の比を上げている。またShank[11]らはレーザ媒質を共振器中のほぼ中心に置くことにより いくらか複数パルスの発生を抑えることができることを報告している。このようにレーザ媒質、可飽和吸収体の位置が短パルス化に影響するのは、

通常のファブリーペロー形共振器において媒質中に生ずる定在波のためであるから、これを取り除くためには、リング形共振器とし、単方向進行波形として使用するのが望ましい。この場合単方向進行波の実験には強制モード同期、受動モード同期を通じて、同期条件を両進行波に対して異なるよう設定することができるので、特に単方向性素子を用いなくても実現できる可能性がある。

また超短パルス化と同時に、その安定性および波長同調範囲の拡大も重要となる。

安定性に関しては、Ippen[5]らが Rh-6G、DODCI にマラカイトグリーン（これ自体では、モード同期はかからないが DODCI に比較して回復時間が1桁程度短い）を混ぜることにより受動モード同期単独の場合でも高励起パワーレベルで複数パルスが抑制されたと報告している。また 3.1 で述べたように強制モード同期と受動モード同期と組み合わせることにより、受動モード同期単独の場合より、かなり安定な光パルスが得られる。また CW 色素レーザでは、ピークパワーが低いので プローブ光として使用するには問題はないが超短パルスでしかもピークパワーの高い光パルスを必要とする場合には、どうしてもアンプする必要があり

その場合、タイミングをとるのに強制モード同期の使用は有効である。

同調範囲の拡大については、ふるで述べたように混合色素の使用が有効となる。

## 5. まとめ

以上可視光域の超短光パルス発生に関して問題となる点を若干述べてきた。一般には発振波長を短波長化することが短パルス化には有利と考えられるが、可視光域でも、以上検討してきた点を十分に考慮し、さらに技術的改良により0.1psを切る極超短光パルスの発生が十分可能であろう。

## 参考文献


(1) C. V. Shank and E. P. Ippen ;
Appl. Phys. Lett., 24, 8 (1974) 373

(2) J. C Diels, E. Van. Stryland and G. Benedict ;
Opt. Commun., 25, 1 (1978) 93

(3) E. I. Moses, J. J. Turner and C. L Tang
Appl. Phys. Lett., 28 (1976)

(4) T. Kurobori, T. Cho, Y. Matsao ;
Opt. Commun., 24, 1 (1978) 41

(5) J. de Vries, D. Bebelaar and J. Langelaar ;
Opt. Commun., 18 (1976)

(6) C. V. Shank, E. P. Ippen, S. L. Shapiro ed. ;
"Picosecond Phenomena", Springer-Verlag (1978)

(7) 黒瀬, 張, 松尾 ;
第39回応用物理学会学会 秋季
5a-P-9 (1978) 319

(8) E. P. Ippen and C. V. Shank ;
Appl. Phys. Lett., 27, 9 (1975) 488

(9) I. S. Ruddock and D. J. Bradley ;
Appl. Phys. Lett., 29, 5 (1976) 296

(10) Z. A. Yasa, A. Dienes and J. R. Whinnery ;
Appl. Phys. Lett., 30, 1 (1977) 24

(11) J. P. Ryan, L. S. Goldberg and D. J. Bradley ;
Opt. Commun., 27, 1 (1978) 137
(12) C. P. Ausschnitt and R. K. Jain ;
Appl. Phys. Lett., 32 (1978) 247
(13) J. P. Heritage and R. K. Jain ;
Appl. Phys. Lett., 32 (1978) 101
(14) J. Kuhl, H. Klingenberg and D. von der Linde ;
Appl. Phys., 18 (1979) 279
(15) R. L. Kohn, C. V. Shank, E. P. Ippen and A. Dienes ;
Opt. Commun., 1 (1971) 177
(16) 黒瀬, 張, 松尾 ;
51年 電子通信学会全国大会, 209 (1976) 266
(17) 黒瀬, 張, 松尾 ;
レーザ研究, 5, 1 (1977)
(18) E. G. Arthurs et al. ;
Proc. 10th Intern. Congr. High Speed Photography (1972) 6, 7
(19) J. A. Armstrong ;
Appl. Phys. Lett., 27, (1975) 382
(20) J. A. Giordmaine, P. M. Rentzepis, S. L. Shapiro and K. W. Wecht ;
Appl. Phys. Lett., 12 (1968) 197

(21) D. J. Bradley ;
Proc. 11th Intern. Congr. High Speed Photography, ed by P. J. Rolls (1974) 23
(22) W. H. Glenn ;
IEEE J. QE-5 (1969) 283
(23) H. P. Weber ;
J. Appl. Phys. 38, 5 (1967) 2231
(24) H. R. Topp and G. C. Orner
Opt. Commun., 13 (1975) 196
(25) A. Dupernex ;
Opt. Commun., 19, 1 (1976) 19
(26) 星 [illegible], 隆, 松尾 ;
電子工研究会 発表予定 (78)
(27) G. M. C. Now ;
IEEE J. Q. E., QE-10, 2 (1974) 115

輻射科学研究会資料

# バラクタダイオードを用いたマイクロストリップ可変帯域通過フィルタ

豊田幸弘
(大阪工業大学)

昭和54年10月25日
(於 電子会館)

# バラクタダイオードを用いたマイクロストリップ可変帯域通過フィルタ

## 1 まえがき

マイクロ波フィルタの論文についてはこれまでに数多く発表されている。このマイクロ波フィルタの通過帯域幅は固定されていて可変することができない。
帯域通過フィルタの通過帯域幅を可変させる方法として，機械的と電気的に可変させる方法がある。機械的と電気的にやる方法についてはすでに報告した。

本論文はバラクタダイオードを用いたマイクロストリップ可変帯域通過フィルタについて述べる。
著者はバラクタダイオードの容量変化を用いて可変帯域通過フィルタを考案した。このフィルタは4種類のフィルタである。その構造は次に述べる通りである。

1) 4分の1波長結合フィルタ2個（$N_1$，$N_2$）を同軸電力分割器に接続して並列回路を構成した。バラクタの容量変化によって，フィルタ$N_1$，$N_2$の中心周波数を変えて通過帯域幅を変化させる。

2) 短絡伝送線路とバラクタダイオードで並列共振回路を構成し，3つの共振回路の結合をバラクタダイオードで行ない，結合用バラクタの容量変化によって通過帯域幅を変化させる。

3) マイクロストリップ線路の中央に3個のバラクタダイオードを間隔$l$を開けて直接装荷してローパスフィルタを構成した。バラクタの容量変化によってローパス・フィルタのしゃ断周波数を変化させる。

4) マイクロストリップ線路の2方向の3ヶ所にコンデンサCを形成し そして開放伝送線の一端にバラクタダイオードを装荷してハシゴ形回路を形成し，ハイパス・フィルタを構成した．

このハイパス・フィルタとローパス・フィルタを直列に接続し可変帯域通過フィルタを構成した．バラクタの容量変化によって通過帯域幅を変化させる

バラクタダイオードの容量変化に対する通過帯域幅の可変範囲は380MHzから2.18GHzまで変化した．解析による等価回路の計算結果は実測値とよい一致を示す

## 2 4分の1波長結合可変帯域通過フィルタ

4分の1波長結合フィルタの構造は図1に示す．

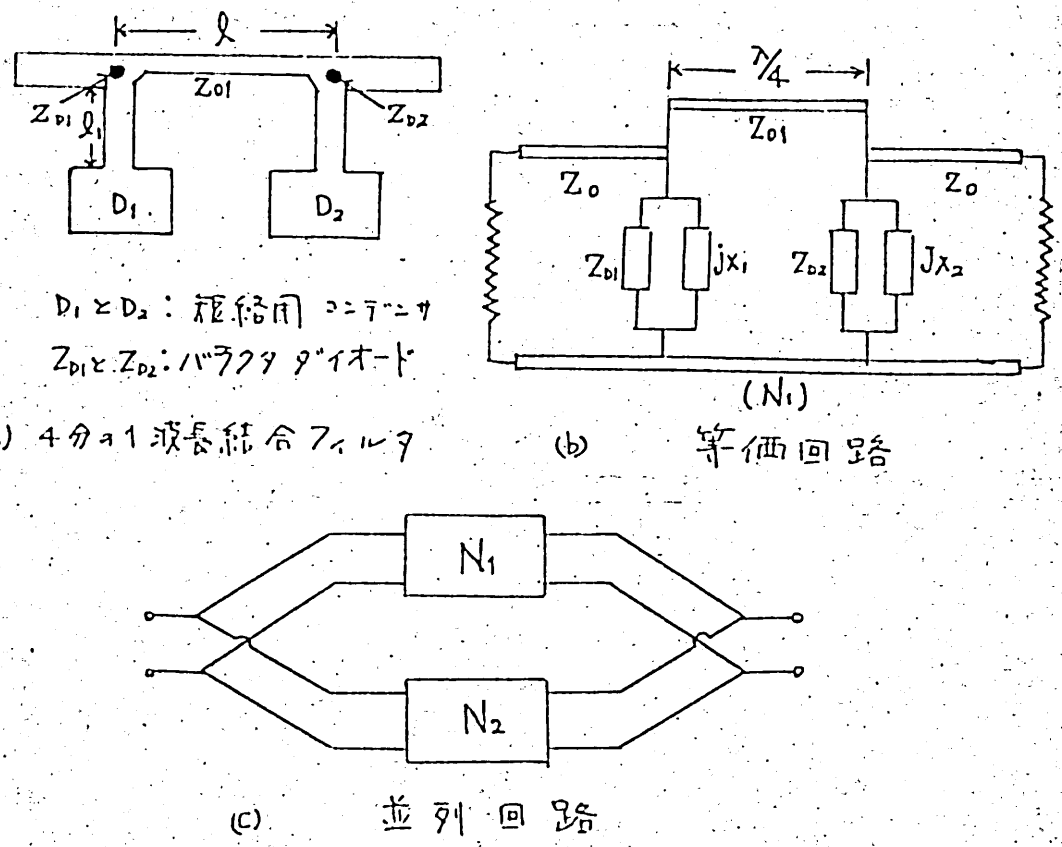


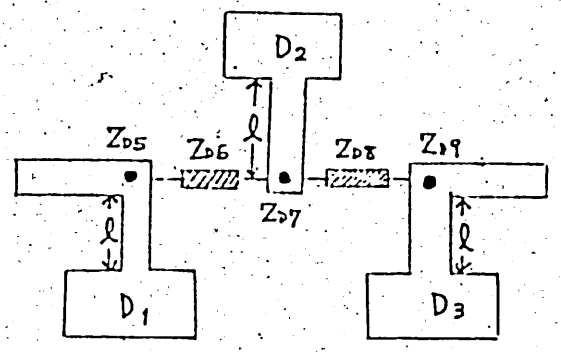

図1 4分の1波長結合フィルタ

図1(a)に示すように，短絡伝送線路とバラクタダイオードを並列接続して並列共振回路を構成し，更に4分の1波長隔てた位置に同様な並列共振回路をおいたものである．図1(b)は等価回路を示す．

図1(c)に示すように，4分の1波長結合フィルタ($N_1$と$N_2$)を同軸電力分割器に接続し，並列回路を形成し可変帯域通過フィルタを構成した．

## 3 バラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタ

バラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタは図2に示す．




$D_1$, $D_2$, $D_3$：短絡用コンデンサ

$Z_{p5}$, $Z_{p6}$, $Z_{p7}$, $Z_{p8}$, $Z_{p9}$：バラクタダイオード

図2 バラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタ

図2に示すように，短絡伝送線路とバラクタダイオードで並列共振回路を構成した．3個の共振回路の結合にはバラクタダイオードを用いた．結合度はバラクタダイオードの容量変化によって行なう．

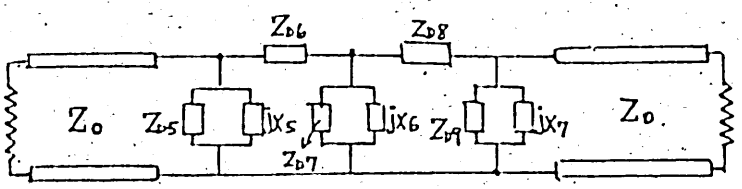
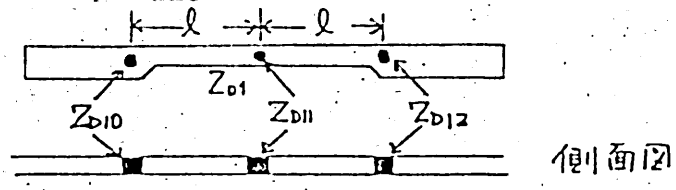



図3　図2の等価回路

図3はバラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタの等価回路を示す。

## 4　ローパス・フィルタおよびハイパスフィルタを直列に接続した可変帯域通過フィルタ

ローパス・フィルタは図4に示す。




$Z_{D10}, Z_{D11}, Z_{D12}$：バラクタダイオード

図4　ローパスフィルタ

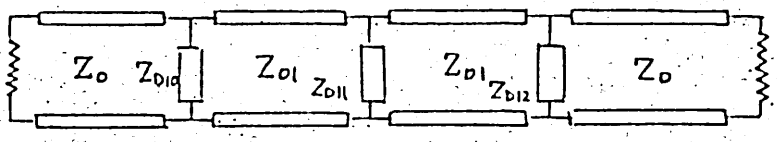
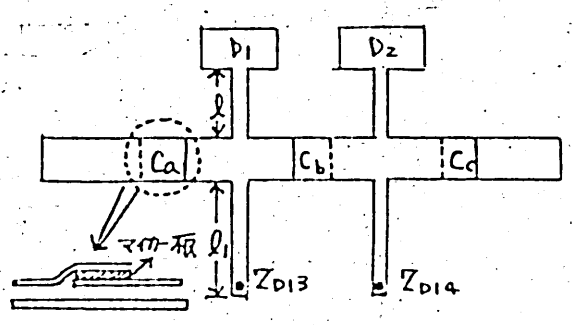



図5　図4の等価回路

図4に示すように、マイクロストリップ線路にバラクタダイオード $Z_{D10}$, $Z_{D11}$, $Z_{D12}$ を間隔 $l$ を隔てて直接装荷し、ローパス・フィルタを構成した。ローパスフィルタの等価回路は図5に示す。




$D_1$, $D_2$：短絡用コンデンサ

$Z_{D13}$, $Z_{D14}$：バラクタダイオード

図6　ハイパスフィルタ

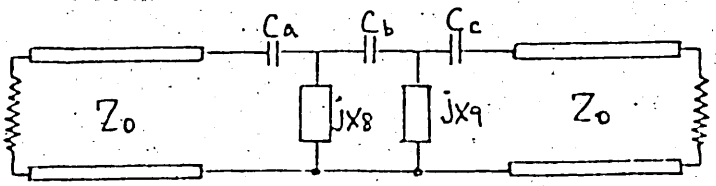



図7　図6の等価回路

ハイパスフィルタは図6に示す．図6に示すように$C_a$，$C_b$，$C_c$は基板上に対向電極，マイカー板，下部電極でサンドイッチ構造にしてコンデンサを形成した．開放伝送線路の終端にバラクタダイオードを装荷した．バラクタダイオードのバイアス電圧供給に短絡伝送線路も設けた．

ハイパス・フィルタの等価回路は図7に示す．ローパスおよびハイパスフィルタのしゃ断周波数はバラクタダイオードの容量変化でかえられる．

## 5　試作フィルタの構造

### 5.1　4分の1波長結合可変帯域通過フィルタ

4分の1波長結合可変帯域通過フィルタの構造は図8に示す．

基板はRexolite基板を用いた．バラクタダイオードは側面図に示すように装荷した．入出力はOSMコネクタ

を用いた。バラクタダイオード $Z_{D1}$ と $Z_{D2}$ の間隔は

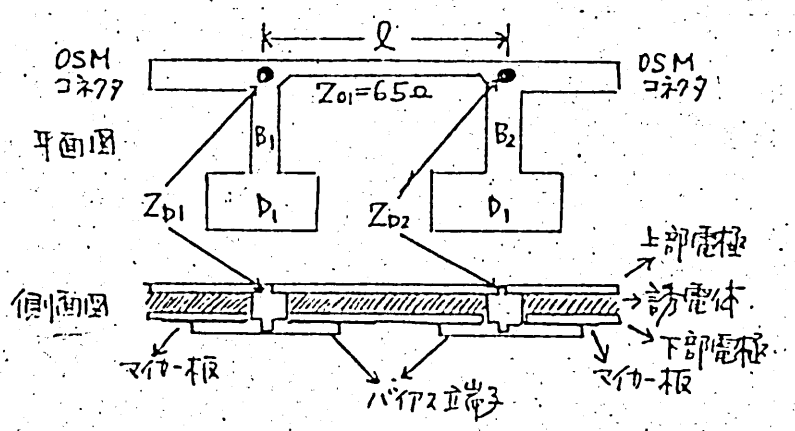



図8 4分の1波長結合フィルタの構造

1.875cmで、特性インピーダンス $Z_{01}$ は65Ωにした。短絡伝送線路の特性インピーダンスは50Ωにした。バラクタダイオードにバイアス電圧を供給するために、短絡伝送線路の終端はコンデンサ・ショートにした。

図8に示す4分の1波長結合フィルタを2個作り、Omni Spectra の Coaxial Power dividers 2個を用いて並列接続にした。

## 5.2 バラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタ

バラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタの構造は図9に示す。

バラクタダイオードは図9に示すように装荷した。入出力はOSMコネクタを用いた。短絡伝送線路の特性インピーダンスは50Ωで、長さは5mmにした。

バラクタダイオードにバイアス電圧を供給するために、$D_1$, $D_2$, $D_3$ はコンデンサ・ショートにした。

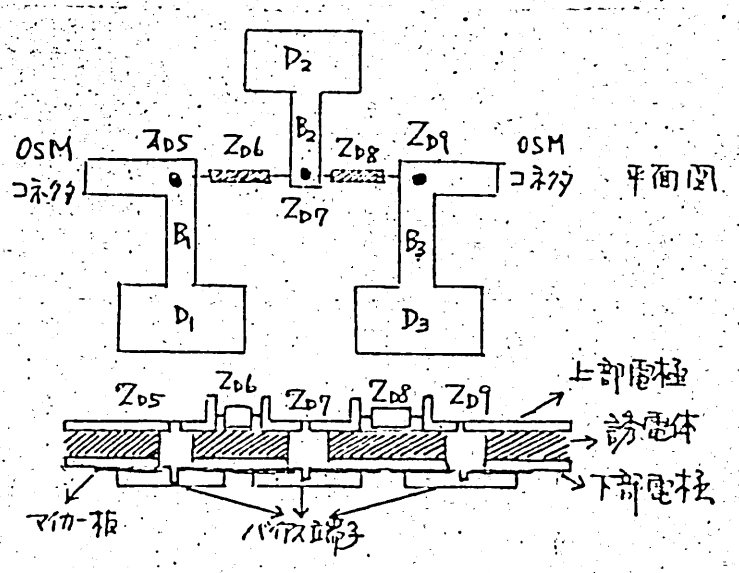



図9 バラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタの構造

## 5.3 ローパス・フィルタおよびハイパス・フィルタ

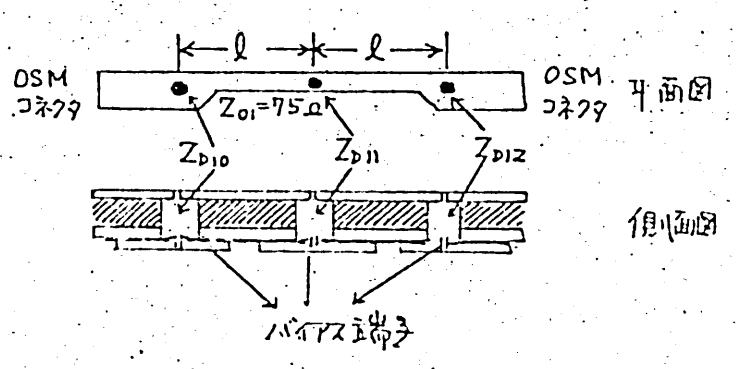



図10 ローパス・フィルタ

ローパス・フィルタの構造は図10に示す．バラクタダイオード $Z_{D10}$, $Z_{D11}$, $Z_{D12}$ の間隔 $l$ は1cmにした．$Z_{01}$ は75Ωにした．バラクタダイオードへのバイアス電圧供給は下部電極のバイアス端子とInside D.C Block/Monitor Teeを用いて供給する．

ハイパス・フィルタの構造は図11に示す．コンデンサ $C_a$, $C_b$, $C_c$ の値は図11の側面図に示してある．

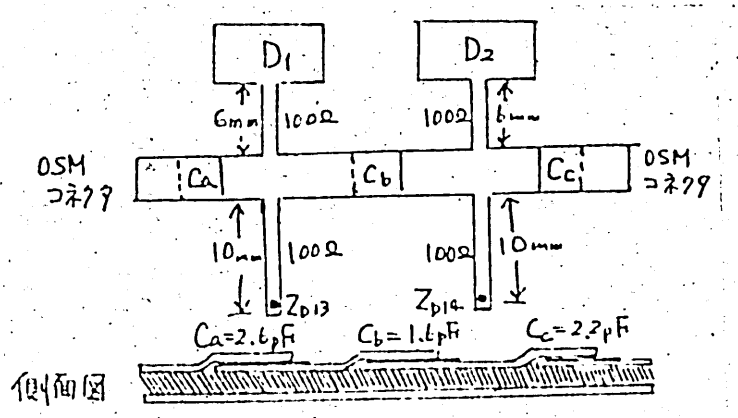



図11　ハイパスフィルタの構造

バラクタダイオードは開放伝送線路の終端に装荷した．開放伝送線路の特性インピーダンスは100Ω，長さは10mmにした．また，バラクタダイオードにバイアス電圧を供給するために，短絡伝送線路を設けた．$D_1$，$D_2$はコンデンサ・ショートにして上部電極と下部電極からバイアス電圧を供給する．

## 6 帯域通過フィルタの数値計算と実験結果

### 6.1 4分の1波長結合可変帯域通過フィルタ

フィルタに用いたバラクタダイオードはD5047である．このダイオードのパッケージ定数は$C_p$=0.16pF，$L_s$=0.47μH，$R_s$=0.8Ωである．図12(a)はバラクタダイオードのバイアス電圧を変化させたときの接合容量Cの測定値である．

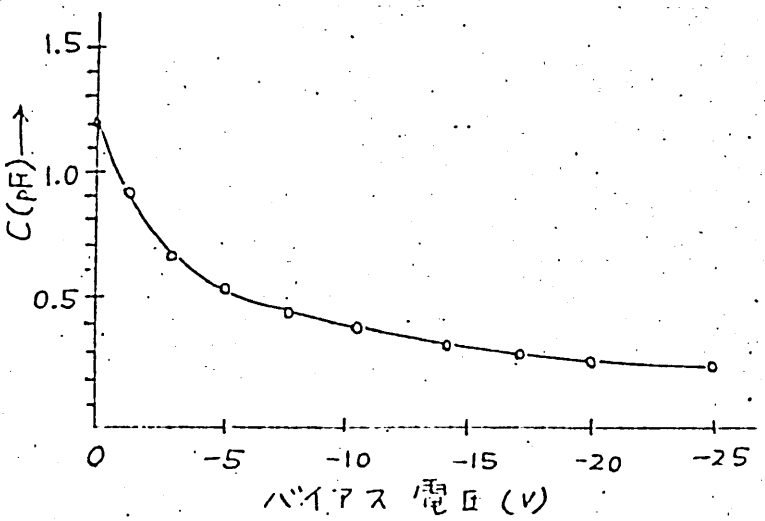



図12　バラクタダイオードの測定値

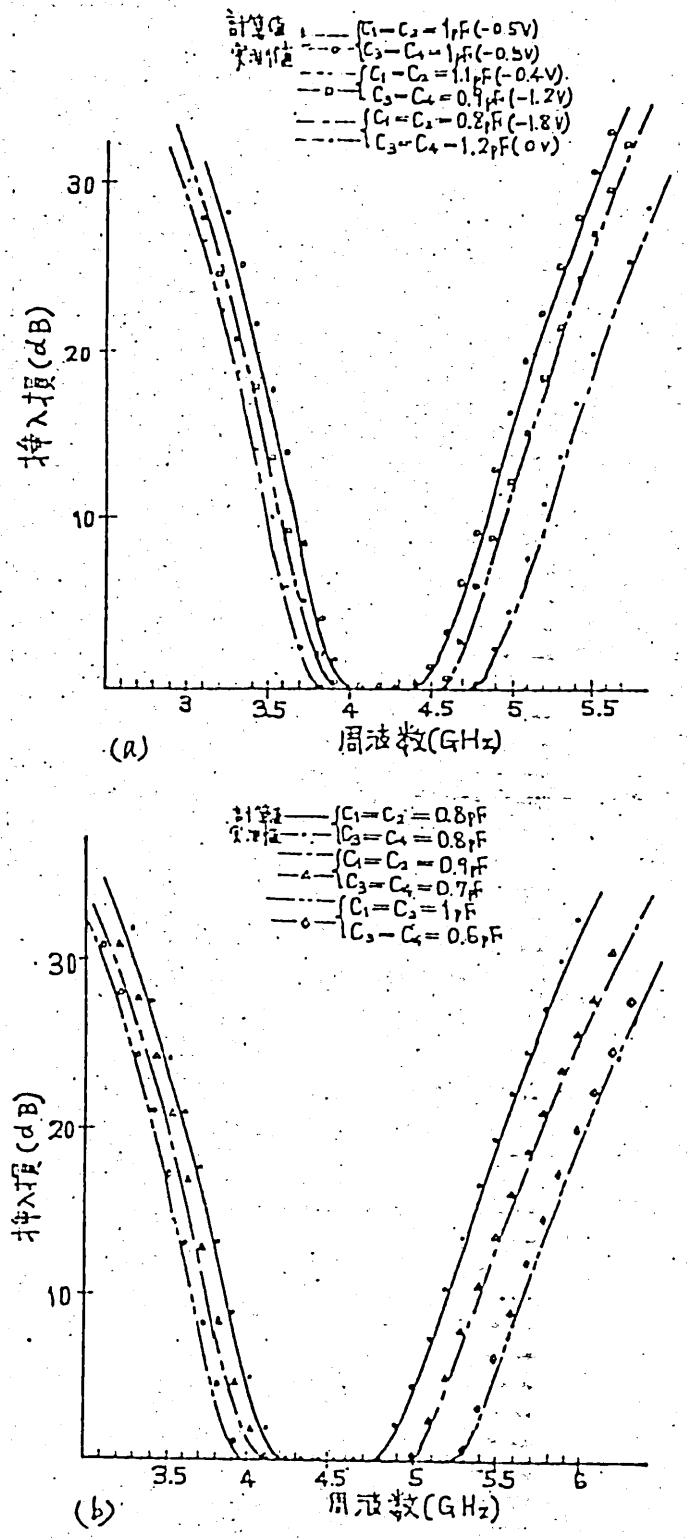



図13　4分の1波長結可変帯域通過フィルタの減衰特性

ほぼ特性のそろった4個のバラクタダイオードを図8に示すフィルタに用いた。

図13は4分の1波長結合フィルタ2個を同軸電力分割器に並列接続したときの可変帯域通過フィルタの減衰特性を示す。

図13(a)はバラクタダイオード $Z_{D1}$, $Z_{D2}$ ($Z_{D1}$と$Z_{D2}$の接合容量を$C_1$, $C_2$とする)のバイアス電圧を−0.5(V)(1pF), $Z_{D3}$と$Z_{D4}$(接合容量を$C_3$と$C_4$とする)のバイアス電圧を−0.5(V)(1pF)一定にしたときの通過帯域幅は計算値で780MHz, 実測値で730MHzであった。$C_1$と$C_2$が1.1pF, $C_3$と$C_4$が0.9pFのとき, 計算値で980MHz, 実測値で940MHzであった。

バラクタダイオードの容量変化に対して通過帯域幅は730MHzから1.22GHzまで変化した。

図13(b)に示すように, $C_1=C_2$が0.8pF, $C_3=C_4$が0.8pFのとき, 通過帯域幅は計算値で920MHz, 実測値で880MHzであった。$C_1=C_2$が1pF, $C_3=C_4$が0.6pFのとき, 計算値で1.6GHz, 実測値で1.44GHzであった。

バラクタダイオードの容量変化に対して通過帯域幅の変化は880MHzから1.44GHzまで変化した。

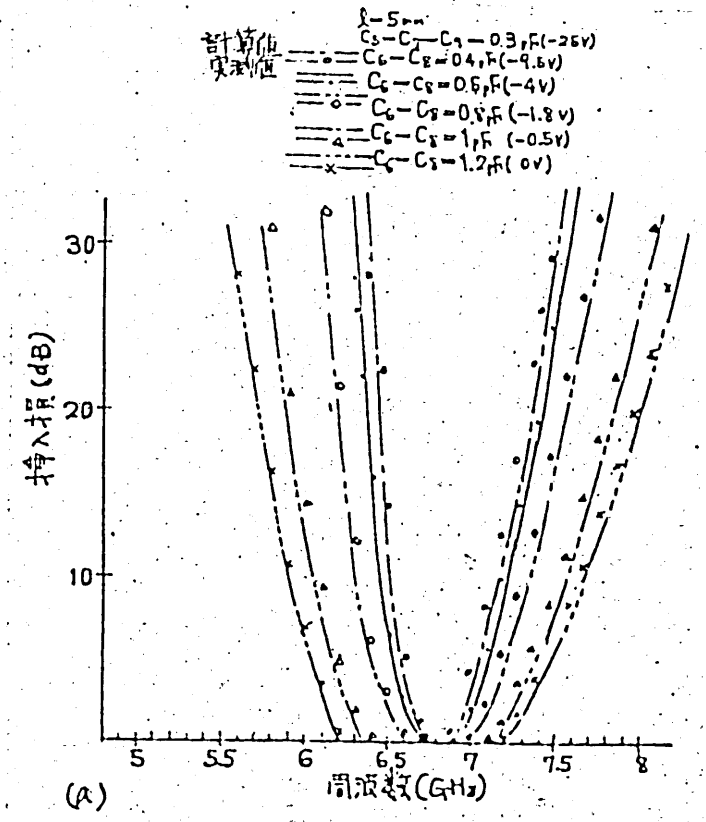
中心周波数を低い方へ移動させたいときはバラクタダイオードの接合容量の大きい値を選べば良い。

図13の減衰特性は計算値と実測値は比較的よく一致した。また, 実測値での通過帯域内の挿入損は1dB以下であった。

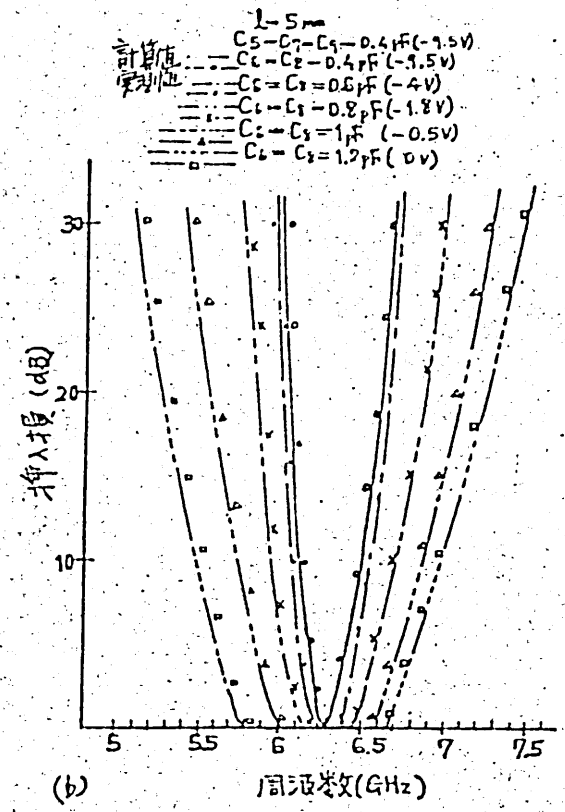
## 6.2 バラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタ

図14はバラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタの減衰特性を示す。

図14(a)はバラクタダイオード $Z_{D5}$, $Z_{D7}$, $Z_{D9}$, ($Z_{D5}$, $Z_{D7}$, $Z_{D9}$の接合容量を$C_5$, $C_7$, $C_9$とする)のバイアス電圧を−25(V)(0.3pF)一定にして, $Z_{D6}$と


l=5mm
計算値
実測値
C5−C7−C9=0.3pF(−2.5V)
C6−C8=0.4pF(−9.5V)
C6−C8=0.6pF(−4V)
C6−C8=0.8pF(−1.8V)
C6−C8=1pF (−0.5V)
C6−C8=1.2pF(0V)
挿入損(dB)
30
20
10
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
周波数(GHz)

(a)


l=5mm
計算値
実測値
C5−C7−C9=0.4pF(−9.5V)
C6−C8=0.4pF(−9.5V)
C6−C8=0.6pF(−4V)
C6−C8=0.8pF(−1.8V)
C6−C8=1pF (−0.5V)
C6−C8=1.2pF(0V)
挿入損(dB)
30
20
10
5
5.5
6
6.5
7
7.5
周波数(GHz)

(b)

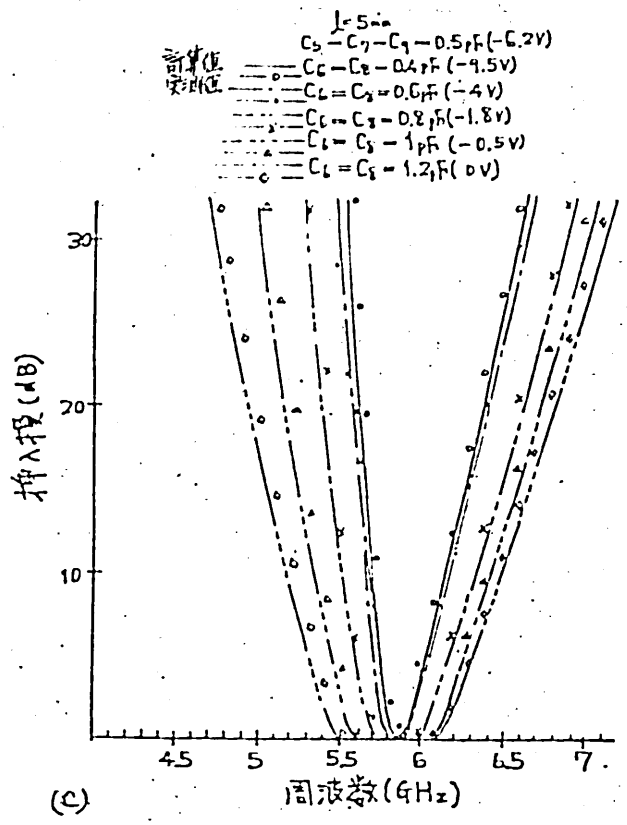



図14 バラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタの減衰特性

$Z_{D8}$(接合容量を$C_6$, $C_8$とする)のバイアス電圧を0(V)から−9.5(V)(1.2pFから0.4pFまで)変化させたときの通過帯域幅の変化は計算値で350MHzから1.3GHzまでである。実測値では310MHzから1.24GHzまで変化した。中心周波数は6.8GHzである。

バラクタダイオードの接合容量を大きくすると各共振回路の結合度は大きくなり、中心周波数は低い方へ約45MHzほどずれている。

図14(b)は$Z_{D5}$, $Z_{D7}$, $Z_{D9}$のバイアス電圧を−9.5(V)(0.4pF)一定にして、$Z_{D6}$と$Z_{D8}$のバイアス電圧を0(V)から−9.5(V)(0.4pFから1.2pFまで)まで変化させたときの通過帯域幅は計算値で160MHzから1.09GHzまで変化し、実測値では120MHzから1.04GHzまで変化した。中心周波数は6.3GHzである。

図14(c)はZD5, ZD7, ZD9のバイアス電圧を−6.2(V)(0.5pF)一定にして，ZD6とZD8のバイアス電圧を0(V)から−9.5(V)(0.4pFから1.2pFまで)まで変化させたときの通過帯域幅は計算値で180MHzから840MHzまで，実測値では140MHzから820MHzまで変化した．中心周波数は5.85GHzである．

中心周波数を低い方へ移動させたいときは，ZD5, ZD7, ZD9の接合容量の大きい値のものを用いればよい．

図14の減衰特性は計算値と実測値とは比較的よく一致した．また，実測値での通過帯域内の挿入損は1dB以下であった．

## 6.3 ローパスとハイパス・フィルタを直列に接続した可変帯域通過フィルタ

図15はローパスフィルタの減衰特性を示す．

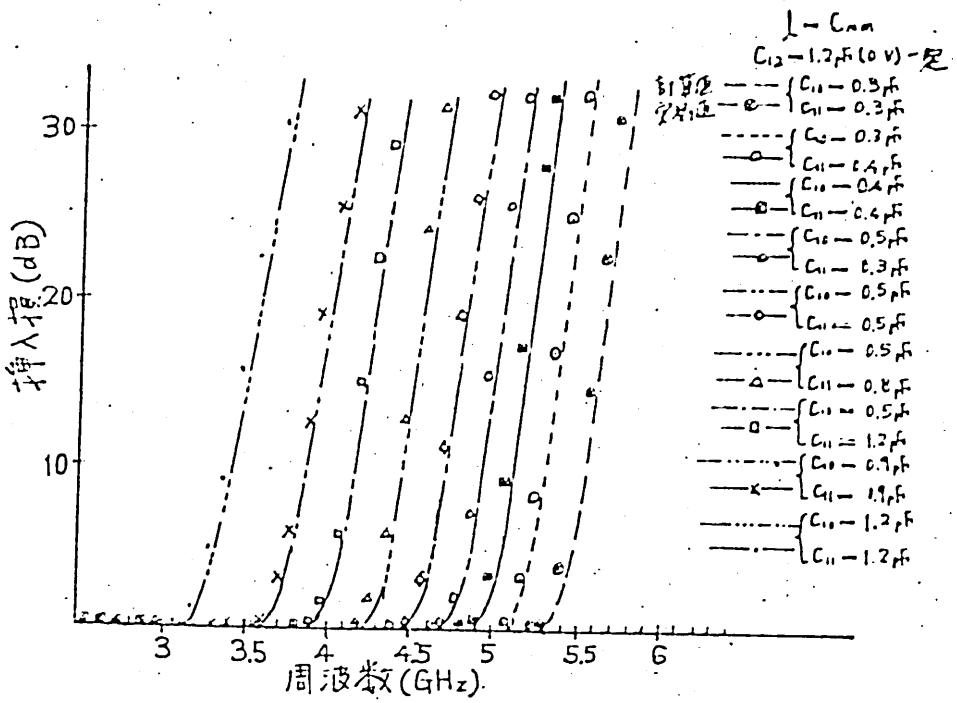



図15 ローパスフィルタの減衰特性

バラクタダイオード $Z_{D10}$, $Z_{D11}$, $Z_{D12}$の接合容量を$C_{10}$, $C_{11}$, $C_{12}$とする．$Z_{D12}$のバイアス電圧は0(V)(1.2pF)一定にして，$Z_{D10}$と$Z_{D11}$のバイアス電圧を−25(V)から0(V)(0.3pFから1.2pFまで)まで変化させたとき，カットオフ周波数は計算値で3.27GHzから5.24GHzまで変化し，実測値では3.25GHzから5.37GHzまで変化した．

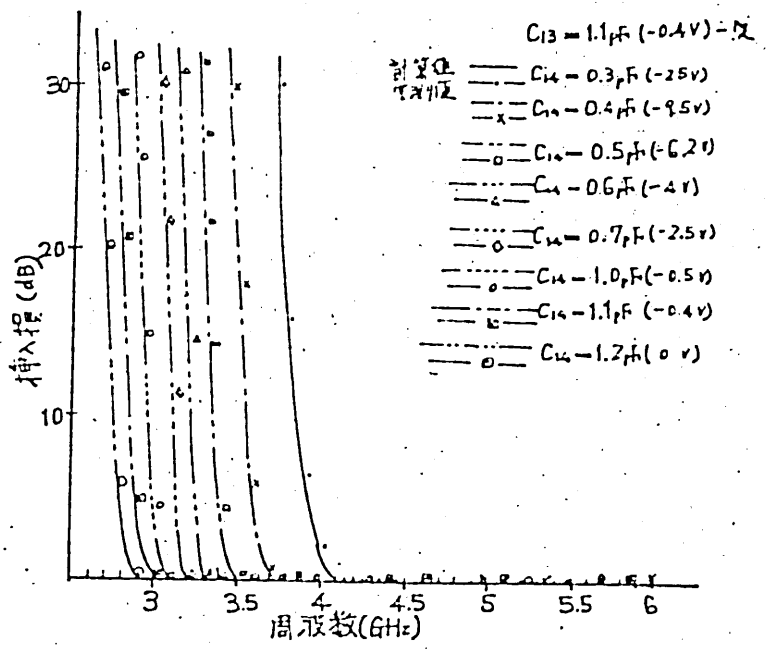
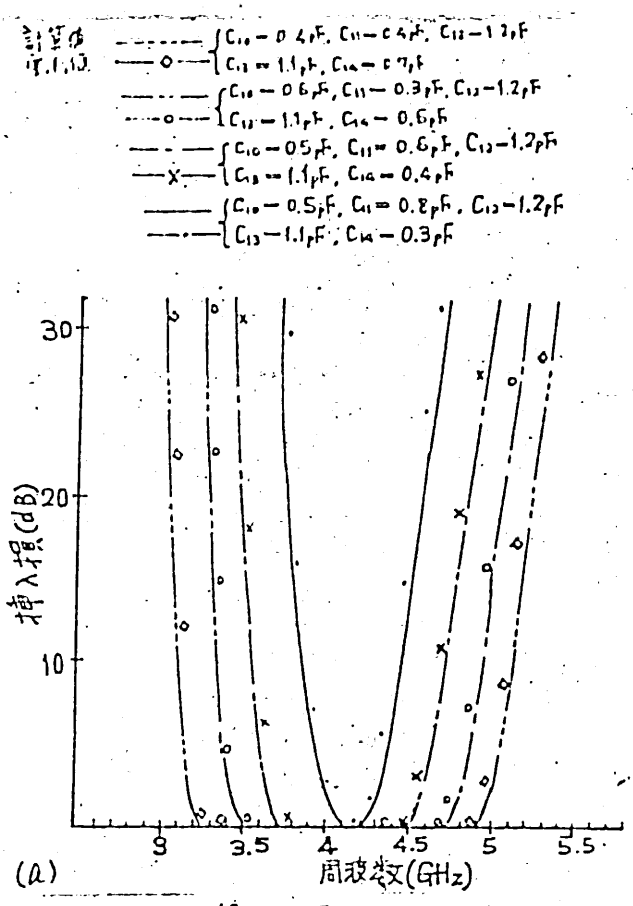



図16 ハイパスフィルタの減衰特性

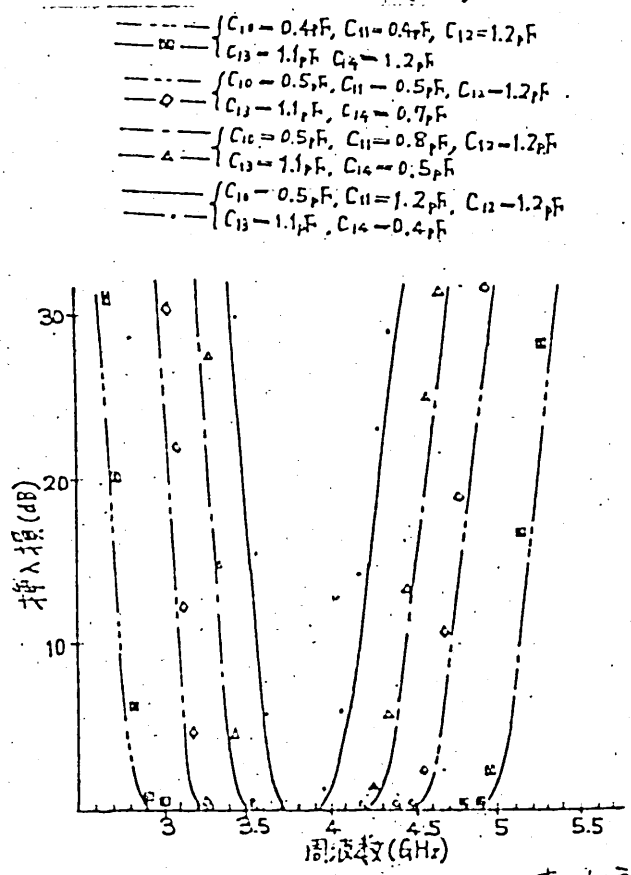
図16はハイパスフィルタの減衰特性を示す．バラクタダイオード$Z_{D13}$と$Z_{D14}$の接合容量を$C_{13}$と$C_{14}$とする．$Z_{D13}$のバイアス電圧を−0.4(V)(1.1pF)一定にして，$Z_{D14}$のバイアス電圧を0(V)から−25(V)(0.3pFから1.2pFまで)変化させたとき，カットオフ周波数は計算値で2.82GHzから3.97GHzまで変化し，実測値では2.82GHzから4.05GHzまで変化した．

図17はローパスとハイパスフィルタを直列接続した可変帯域通過フィルタの減衰特性を示す．

バラクタダイオード$Z_{D12}$のバイアス電圧は0(V)(1.2pF)一定にし，$Z_{D10}$と$Z_{D11}$のバイアス電圧は−9.7(V)




(a)




(b)

図17 ローパスとハイパスフィルタを直列接続した可変帯域通過フィルタ

(0.4pF), $Z_{D13}$のバイアス電圧は−0.4(V)(1.1pF), $Z_{D14}$のバイアス電圧は−2.6(V)(0.7pF)から$Z_{D10}$のバイアス電圧は−6(V)(0.5pF), $Z_{D11}$のバイアス電圧は−1.8(V)(0.8pF), $Z_{D13}$のバイアス電圧は−0.4(V)(1.1pF), $Z_{D14}$のバイアス電圧は−2.5(V)(0.3pF)まで変化させたときの通過帯域幅は計算値で360MHzから1.85GHzまで，実測値では320MHzから1.805GHzまで変化した．中心周波数は4.15GHzである．

図17(b)は$Z_{D12}$のバイアス電圧を0(V)(1.2pF)一定にして，バラクタダイオードの接合容量を$C_{10}=C_{11}=0.4$pF, $C_{13}=1.1$pF, $C_{14}=1.2$pFから$C_{10}=0.5$pF, $C_{11}=1.2$pF, $C_{13}=1.1$pF, $C_{14}=0.4$pFの値になるようにバイアス電圧を変化させたときの通過帯域幅は計算値で420MHzから2.22GHzまで，計算値では380MHzから2.18GHzまで変化した．中心周波数は3.8GHzである．

ローパスとハイパス・フィルタのしゃ断周波数はバラクタの容量変化に対して広範囲に変化でき，帯域通過フィルタの中心周波数を望むのが容易で，通過帯域幅が広範囲に変化できる．

## 7 3種類の可変帯域通過フィルタの比較

4分の1波長結合フィルタ2個を同軸電力分割器で並列接続した可変帯域通過フィルタとバラクタダイオード結合可変帯域通過フィルタおよびローパスとハイパスフィルタを直列接続した可変帯域通過フィルタの通過帯域幅を比較する．

可変帯域通過フィルタの減衰特性は図13と図14および図17に示してある．

図13に示す帯域通過フィルタの減衰特性はバラクタの容量変化に対して通過帯域幅の変化は840MHzから1.44GHzまで変化した．

図14に示す減衰特性は並列共振回路の結合に用いたバラクタダイオードの容量変化に対して，通過帯域幅の変化は350MHzから1.3GHzまで変化した。また，並列共振回路に用いたバラクタダイオードの接合容量を0.3pFから0.7pFまで変化させると帯域通過フィルタの中心周波数は5.15GHzから6.8GHzまで変化した。

図17に示す減衰特性はバラクタダイオードの容量変化に対して，通過帯域幅の変化は380MHzから2.18GHzまで変化した。

ローパスとハイパス・フィルタを直列接続した可変帯域通過フィルタは2種類の可変帯域通過フィルタに比べて広範囲に通過帯域幅が変化し，中心周波数を選ぶのが容易であることを計算値と実測値で示した。

## 8 むすび

以上この論文ではマイクロストリップ線路を用いて3種類の可変帯域通過フィルタを構成した。

この3種類の可変帯域通過フィルタのうち，ローパスとハイパス・フィルタを直列接続した可変帯域通過フィルタは他の2種類の可変帯域通過フィルタに比べて広範囲に通過帯域幅が変化することを計算値と実測値で示した。

## 文献


1) S. Toyoda "Rectangular Waveguide-Type Variable Band-pass Filters" IEEE MTT-S 1979 International Microwave Symposium digest. pp281/283

2) 豊田・牧本 "バラクタダイオードを用いた導波管可変帯域通過フィルタ" 電子通信学会 B巻. 6. 1979

輻射科学研究会資料

# 高変調度 導波-放射モード形光変調器に関する解析

小野寺 秀俊
中島 将光
栗井 郁雄
池上 淳一
（京都大学工学部）

昭和54年10月5日

# 1. まえがき

広く知られた電気光学結晶である$LiNbO_3$や$LiTaO_3$を用いた導波系における導波-放射モード結合形光変調器は、Marcuseによって提案され[1]、岡村、山本、牧本氏によってさらに詳細な研究が進められている[2]。また、他の電気光学結晶であるKLN-KBN構造における解析例も報告されている[3]。これら導波-放射モード結合形光変調器は、導波-導波モード結合形光変調器と比べて、結合モード間の位相整合が自動的にとれるので、導波路の精度があまり要求されず、製作が容易であるという利点を持つ。しかしながら、従来の構造では両モード間の結合が小さく、そのため実用的に充分な変調度が得られなかった。そこで、変調度を改善する方法として周期電極を用いたり[4]、導波路として軸ずれ構造を考えるなどの試みがなされて来た[2][3][5]。本文では、$LiTaO_3$基板-$LiNbO_3$薄膜構造の導波系を用いると、大幅な変調効率の改善が可能になることを報告する。

解析の方法として、まず従来よりよく用いられているMarcuseの近似解法を採用し、変調効率を概算する。次に、より厳密な導波-放射モード結合の解析法として、基板の厚さの有限性を考慮した4層構造導波系を考え、放射モードの量子化を行なうことにより、導波-放射モード結合を一対多モードの導波・導波モード結合として記述する方法を述べ、両者の比較を行なう。

## 2. $LiNbO_3$ - $LiTaO_3$ 薄膜導波路における導波-放射モード結合

### 2-1 導波路の構造と固有モード

最初に解析の対象とする構造は、図1に示すような$LiTaO_3$基板-$LiNbO_3$薄膜2次元導波路である。座標系を図2のように取り、結晶の光学軸は共に膜面に垂直な方向（x方向）を向いているものとする。動作波長0.6328μmにおける各材料定数を表1に示す。このような導波路の固有モードは、TE.TMの直交モード群に分離され、連続な伝搬定数を持つ放射モードと、離散的な伝搬定数を持つ導波モードから成る。図3に放射モード、導波モード伝搬定数の存在領域を示す。これよりTE導波モードの伝搬定数$\beta_{ge}$が$n_{oz} < \beta_{ge}/k_0 < n_{ez}$の範囲にあれば、常にそれと等しい伝搬定数を持つTM放射モードが存在することがわ

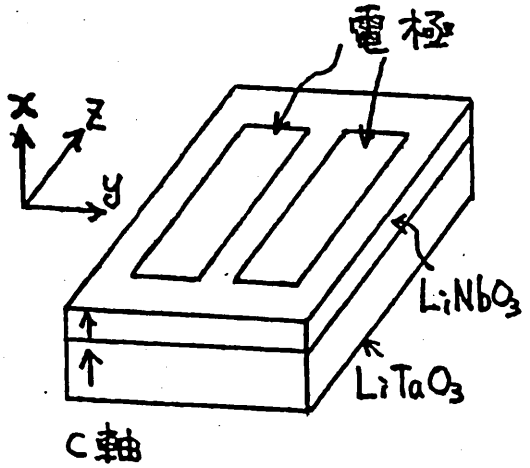



図1 導波路の構造

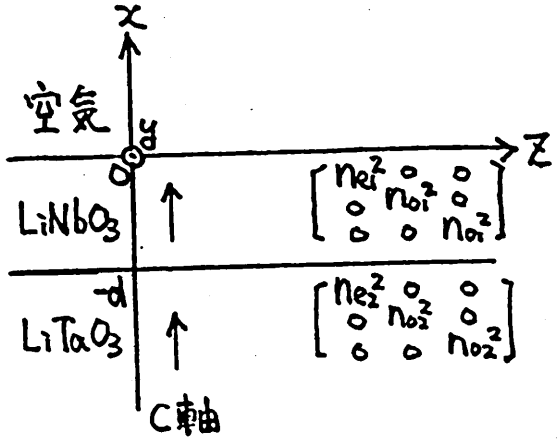



図2 座標系

| $LiNbO_3$ | | | $LiTaO_3$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Li/Nb | $n_{o1}$ | $n_{e1}$ | Li/Ta | $n_{o2}$ | $n_{e2}$ | |
| 0.80 | 2.288 | 2.218 | 0.905 | 2.177 | 2.183 | |
| 0.924 | 2.288 | 2.207 | 0.951 | 2.176 | 2.181 | ☆ |
| 1.20 | 2.288 | 2.188 | 1.137 | 2.175 | 2.177 | |
| $r_{13}^S=8.6$ $r_{22}^S=3.4$ | | | $r_{13}^S=7.9$ $r_{22}^S=1$ | | | |
| $r_{33}^S=30.8$ $r_{51}^S=28$ $(\times10^{-12}\,m/V)$ | | | $r_{33}^S=30.3$ $r_{51}^S=20$ $(\times10^{-12}\,m/V)$ | | | |

表1　$LiNbO_3$, $LiTaO_3$ の材料定数 [6]
（☆は congruent 組成）

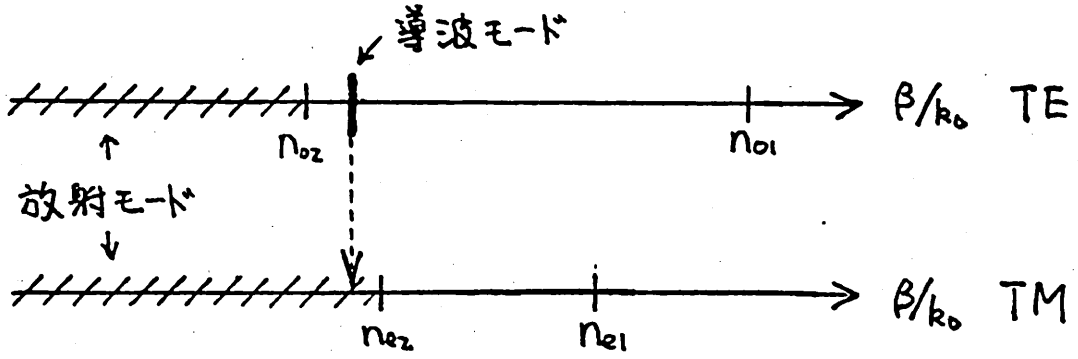



図3　固有モード伝搬定数の分布

かる。

この構造における電磁界分布の解析に関しては、Marcuse [1] の結果がそのまま適用でき、以下のように表わせる。

[TE導波モード]　　$n_{02} < \beta_{ge}/k_0 < n_{01}$

$$e_y \begin{cases} A_g \exp(-\delta_e x) & x \geqq 0 \\ A_g\left(\cos \kappa_e x - \frac{\delta_e}{\kappa_e}\sin \kappa_e x\right) & 0 \geqq x \geqq -d \\ A_g\left(\cos \kappa_e d + \frac{\delta_e}{\kappa_e}\sin \kappa_e d\right)\exp[\gamma_e(x+d)] & x \leqq -d \end{cases} \quad (1)$$

$$\delta_e = (\beta_{ge}^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\kappa_e = (n_{01}^2 k_0^2 - \beta_{ge}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$
$$\gamma_e = (\beta_{ge}^2 - n_{02}^2 k_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$h_x = -\frac{\beta_{ge}}{\omega\mu_0} e_y \quad , \quad h_z = \frac{j}{\omega\mu_0}\frac{\partial e_y}{\partial x} \quad (3)$$

$\beta_{ge}$は、次のモード方程式を満足しなければならない。

$$\kappa_e d = \tan^{-1}\frac{\gamma_e}{\kappa_e} + \tan^{-1}\frac{\delta_e}{\kappa_e} + m\pi \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \quad (4)$$

但し　$0 \leqq \tan^{-1}\frac{\gamma_e}{\kappa_e} \leqq \frac{\pi}{2}$ ,　$0 \leqq \tan^{-1}\frac{\delta_e}{\kappa_e} \leqq \frac{\pi}{2}$

z方向の伝送電力をPとすることにより、正規化振幅係数$A_g$は

$$A_g = \left\{\frac{4\omega\mu_0\kappa_e^2 P}{\beta_{ge}\left(d + \frac{1}{\gamma_e} + \frac{1}{\delta_e}\right)(\kappa_e^2 + \delta_e^2)}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

［TM放射モード（フィルム－サブストレートモード）］

$$1.0 < \beta_{rm}/k_0 < n_{e2}$$

$$h_y \begin{cases} B_r \exp(-\Delta_m x) & x \geqq 0 \\ B_r \left(\cos\sigma_m x - n_{o1}^2 \dfrac{\Delta_m}{\sigma_m} \sin\sigma_m x\right) & 0 \geqq x \geqq -d \\ B_r \Big[ \left(\cos\sigma_m d + n_{o1}^2 \dfrac{\Delta_m}{\sigma_m} \sin\sigma_m d\right) \cos\rho_m(x+d) \\ \quad + \dfrac{n_{o2}^2}{n_{o1}^2} \dfrac{\sigma_m}{\rho_m} \left(\sin\sigma_m d - n_{o1}^2 \dfrac{\Delta_m}{\sigma_m} \cos\sigma_m d\right) \sin\rho_m(x+d) \Big] & x \leqq -d \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \Delta_m &= (\beta_{rm}^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}} \\ \sigma_m &= \frac{n_{o1}}{n_{e1}} (k_0^2 n_{e1}^2 - \beta_{rm}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \rho_m &= \frac{n_{o2}}{n_{e2}} (k_0^2 n_{e2}^2 - \beta_{rm}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{7}$$

$$e_z = -\frac{j}{n_o^2 \omega \varepsilon_0} \frac{\partial h_y}{\partial x}, \qquad e_x = \frac{\beta}{n_e^2 \omega \varepsilon_0} h_y \tag{8}$$

z方向伝送電力密度をPとすることにより．正規化振幅係数$B_r$は

$$B_r = \left\{ \frac{4 n_{e2}^2 \omega \varepsilon_0 P}{\pi \beta_{rm} \Big[ \left(\cos\sigma_m d + n_{o1}^2 \dfrac{\Delta_m}{\sigma_m} \sin\sigma_m d\right)^2 + \dfrac{n_{o2}^4 \sigma_m^2}{n_{o1}^4 \rho_m^2} \left(\sin\sigma_m d - n_{o1}^2 \dfrac{\Delta_m}{\sigma_m} \cos\sigma_m d\right)^2 \Big]} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

## 2-2. 導波-放射モード結合光変調

図1のように薄膜面上に平行平板電極を配置し、y方向電界$E_m$を印加した場合、基板及び薄膜の比誘電率テンソル$\hat{\varepsilon}$は

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} n_e^2 & \Delta\varepsilon & 0 \\ \Delta\varepsilon & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_o^2 \end{bmatrix} \qquad \Delta\varepsilon = -n_o^2 n_e^2 \varepsilon_0 r_{51} E_m \tag{10}$$

となり、非対角項$\Delta\varepsilon$が出現する。この非対角項を通して前述のTE導波-TM放射モード間の結合が生じ、光変調器が実現できる。

TM放射モードとの結合による、TE導波モードの電力減衰定数$2\alpha$(neper)は、Marcuseの解析によれば

$$2\alpha = 2\pi \frac{n_{o2}^2}{n_{e2}^2} |K_{gr}|^2 \frac{\beta_{ge}}{P_m} \tag{11}$$

$$K_{gr} = \frac{j\omega\varepsilon_0}{4P} \int_{-\infty}^{0} n_o^2 n_e^2 r_{51} e_y^{TE} e_x^{TM} E_m \, dx \tag{12}$$

で与えられる。

## 2-3. 数値計算例

変調電界$E_m$を指数関数で

$$E_m = E_0 \exp(x/D) \tag{13}$$

のように近似し、$E_0 = 30\,kV/cm$とする。ここでDは電極間隔をaとするとき$D = a/0.8$である。[1] 表2に、D,

表2[1]

| D/λ | 電極間隔(μm) | 変調電圧(V) |
|---|---|---|
| 1 | 0.51 | 2.4 |
| 10 | 5.06 | 23.84 |
| 100 | 50.6 | 238.5 |

α及び $E_0 = 30\,kV/cm$ とするのに必要な変調電圧の関係を示す。$LiNbO_3$, $LiTaO_3$ の屈折率として congruent 組成のものを用い、基本 $TE_0$ 導波モードに対する減衰定数 2α を、$LiNbO_3$ の膜厚に対して計算すると図4を得る。参考のために、同様の構造で $LiTaO_3$ 金属拡散導波路（薄膜の屈折率 $n_{o1} = 2.186$, $n_{e1} = 2.191$ 基板の屈折率 $n_{o2} = 2.176$, $n_{e2} = 2.181$）を用いた場合の減衰特性を図5に示す。

図4において、減衰特性の膜厚依存性は、$LiTaO_3$ 拡散導波路の場合に比べて相当強くなっているが、減衰定数の値ははるかに大きく、例えば膜厚 0.2 μm とした場合、D/λ = 10, 100 において、それぞれ 17.3 dB/cm, 22.6 dB/cm の減衰が得られる。なお、$LiTaO_3$ 拡散導波路の場合、膜厚 0.88 μm, D/λ = 1 で 0.7 dB/cm である。また、$LiNbO_3$-$LiTaO_3$ 構造では、$n_{e1}$ と $n_{e2}$ の差が、$n_{o1}$ と $n_{o2}$ の差に比べてかなり小さいため、TM導波モードは、膜厚が 0.45 μm 以上にならないと表われない。従って、$TE_0$ モード

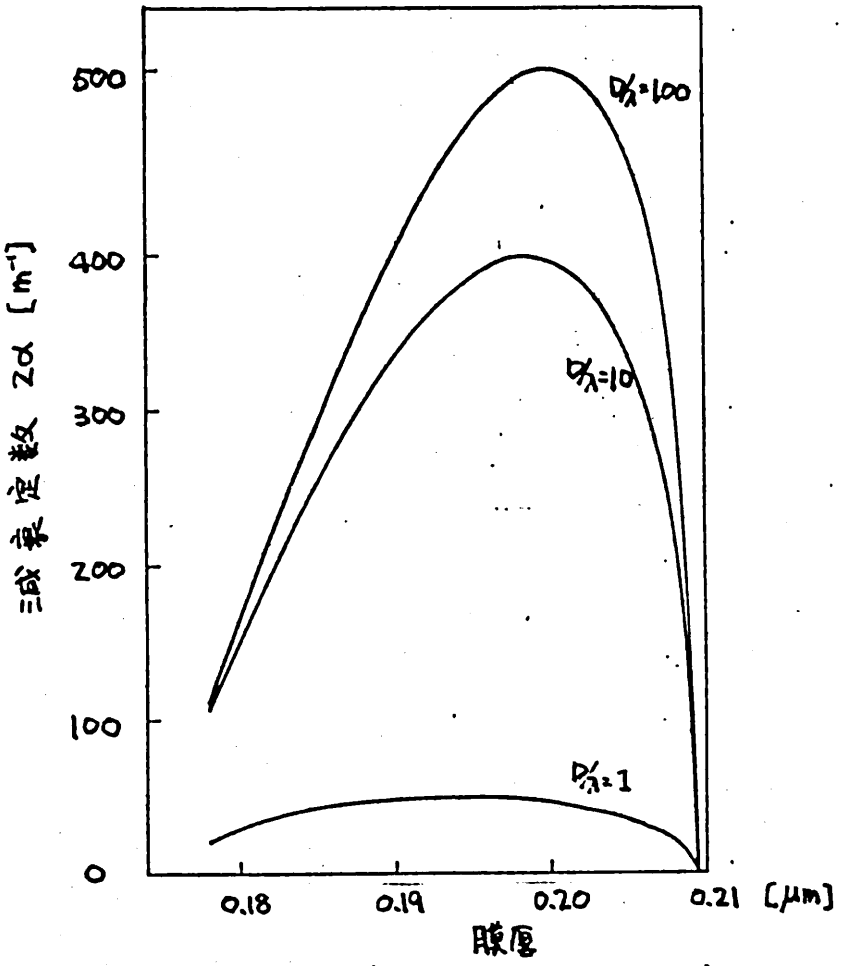



図4 $LiNbO_3$-$LiTaO_3$ 導波路における減衰特性

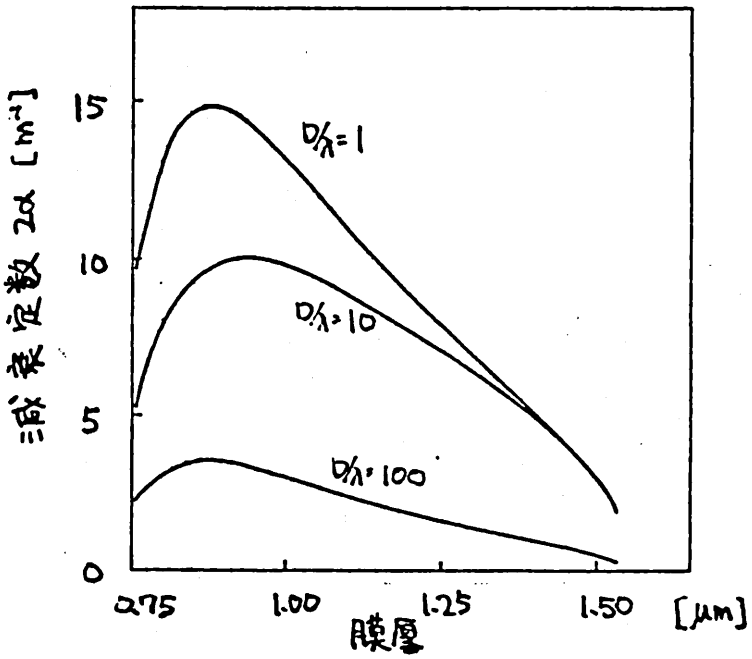
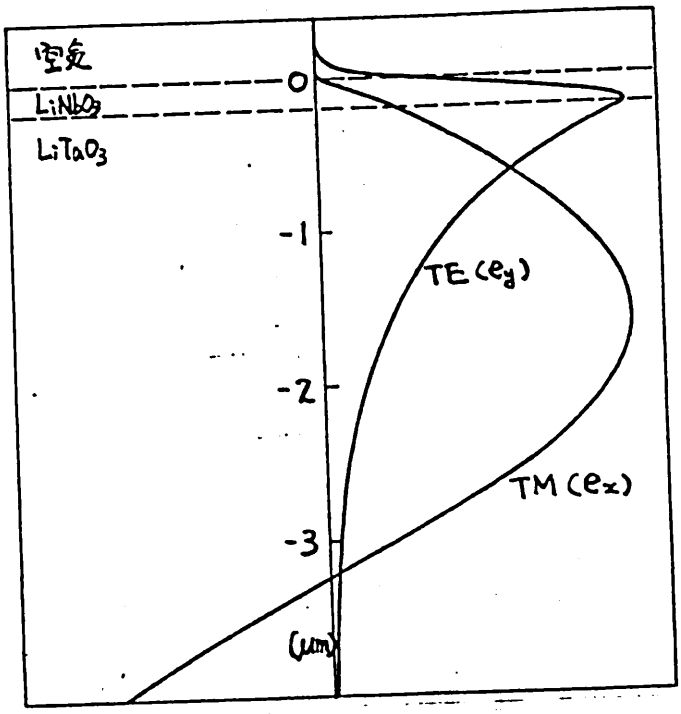


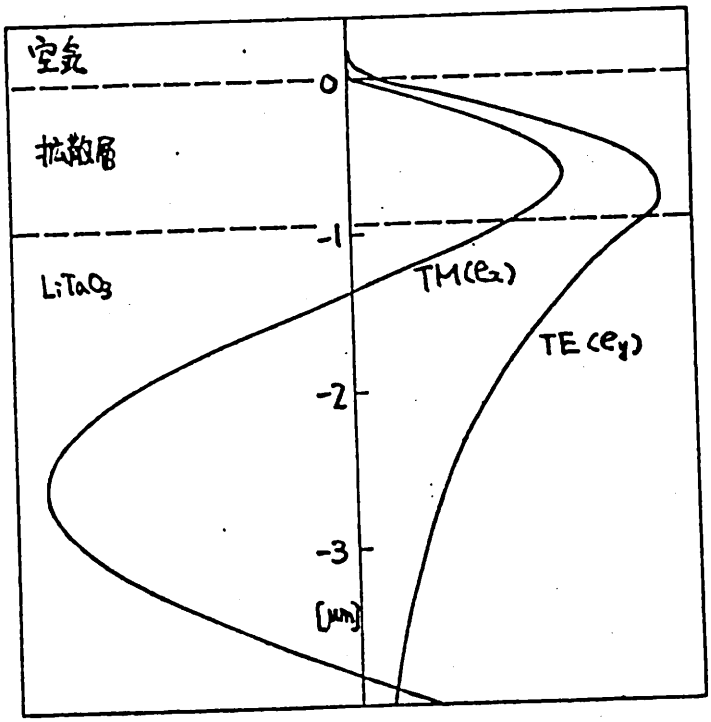

図5 $LiTaO_3$ 金属拡散導波路における減衰特性




$\beta/k_0 = 2.1789$

$d = 0.200\ \mu m$

図6. $LiNbO_3$ - $LiTaO_3$ 構造導波路における電界分布




$\beta/k_0 = 2.1772$

$d = 0.937\ \mu m$

図7. $LiTaO_3$ 金属拡散導波路における電界分布

とTM放射モードとの結合を考える限り、基本導波モードTE₀以外に導波モードは存在せず、例えば、膜面の不整のため、不要導波モードへの結合による消光比の悪化も生じないなどの利点もある。

$LiNbO_3$-$LiTaO_3$構造にすることによって、大幅な減衰特性の改善が得られる理由は、TE₀モードと、それに結合するTM放射モードの界分布の重なり積分が大きな値を取るためである。この構造における界分布の一例を図6に、$LiTaO_3$拡散導波路の例を図7に示す。重なり積分が大きくなるための物理的条件の概要を説明すれば次のようになる。TE₀基本導波モードの界分布の概形は、図示のように一つの山形をしている。従って、正弦波的分布をもつTM放射モードとの重なり積分が大きくなるためには、その放射モードの$x$方向位相定数（波数）が、山形のそれに大体等しくなることが先ず必要である。薄膜内と基板内との位相定数（波数）が異なること、及び境界条件を考慮すると、薄膜内のTM放射モードの位相定数（波数）がTE導波モードのそれよりやや小さくなるような屈折率 $n_{e1} < n_{o1}$ が実在することが必要となる。$LiNbO_3$-$LiTaO_3$構造は、このような条件を満たしている。しかし、例えば金属拡散$LiTaO_3$導波路では、$n_{e1} > n_{o1}$であるため薄膜内の位相定数（波数）が大きくなり、基板内で放射モードの界の符号が薄膜内に対し逆転し、重なり積分の打ち消しが起こるのである。

さて、図6において、モード結合は$LiNbO_3$層中よりも

$LiTaO_3$ 層中で強く起こっていることが推測される。実際 $LiTaO_3$ 層での重なり積分値は、$LiNbO_3$ 層での値と比べて1桁大きい。今、基板内の界分布のみに着目すれば、$LiTaO_3$ としてより異方性の弱いものを用いると、$LiTaO_3$ 中で $x$ 方向減衰定数 $\alpha$, $x$ 方向位相定数 $\beta_m$ 共に小さくなる。換言すれば、界の変化が少なくなり、重なり積分値が大幅に増加するものと予想される。そこで $LiTaO_3$ の屈折率値を表1に従って変え、減衰特性を計算したものが図8である。

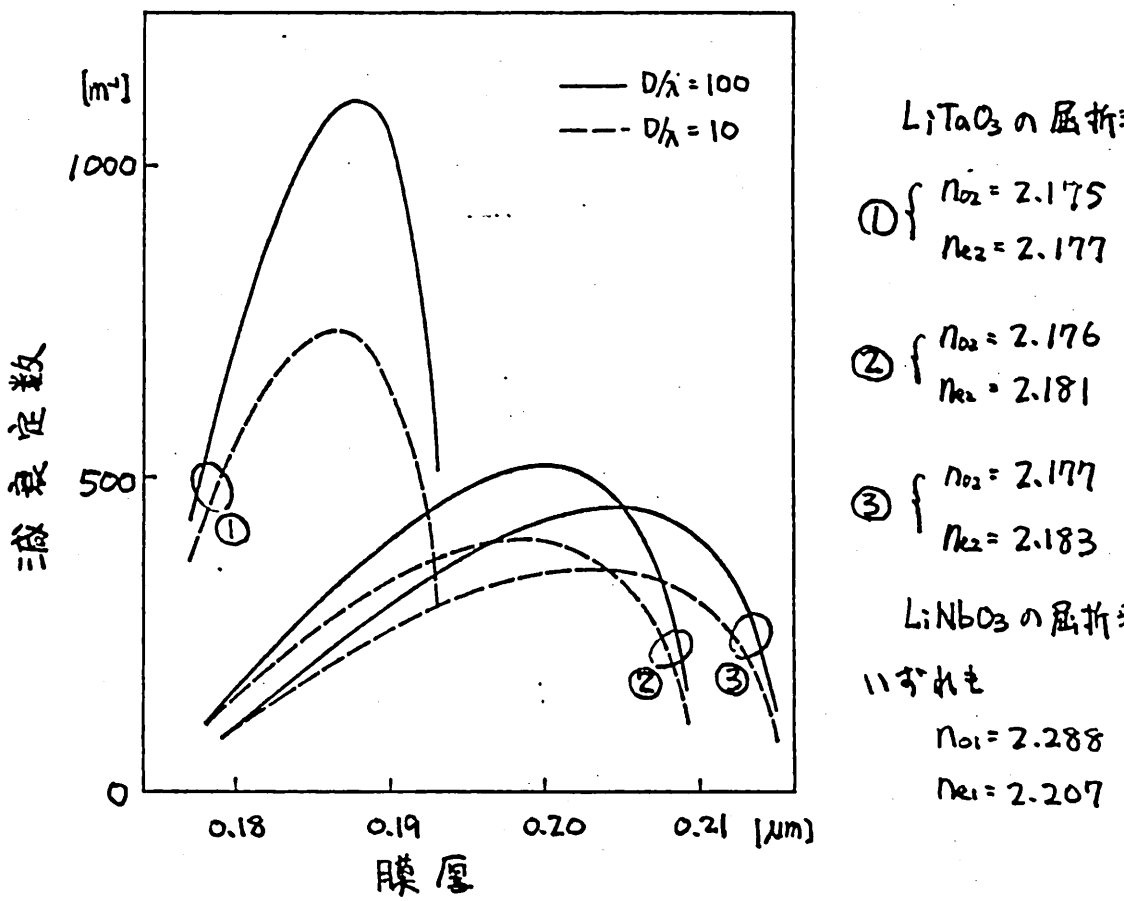



図8. $LiTaO_3$ の屈折率値を変えた場合の減衰特性

このように減衰特性は$LiTaO_3$の屈折率値により大きく変化し、最も異方性の弱い$LiTaO_3$を用いた場合には、$LiNbO_3$の厚さが0.188 μmにおいて、$D/\lambda=10$, 100でそれぞれ724 (m⁻¹)〔31.4 dB/cm〕, 1107 (m⁻¹) (48.1 dB/cm) の電力減衰定数が得られる。

次に、入射光が高次のTE導波モードの場合を考えてみる。この場合、界の重なりが0次モードの場合と比べて悪化するため、電力減衰定数の最大値は低下し、$D/\lambda=100$としても、TE 1次モードでは 138 (m⁻¹) 〔6.0 dB/cm〕 TE 2次モードでは 352 (m⁻¹)〔15.3 dB/cm〕に留る。このように、基本モードに対して最も大きい減衰が得られるのは実用的にも好都合なことである。

# 3. $LiNbO_3$ - $LiTaO_3$ 4層構造導波路における解析

前章での解析は、(11)式の近似を基にしたものであった。(11)式は、結合モード方程式を解くに際して、結合因子 $|K_{gr}|^2\frac{\beta}{p}$ を$\beta$によらない定数とするなどの粗い近似の下に得られる式である。そこでより厳密な解を得るために、例えば結合因子 $|K_{gr}|^2\frac{\beta}{p}$ をローレンツ分布で近似する方法が報告されている[2]。ここでは、基板の厚さの有限性を考慮した4層構造導波系を考えることにより、連続スペクトルを持つ放射モードの量子化を行ない、導波-放射モード結合を、一対多モードの導波-導波モード結合として記述する方法を述べる。

## 3-1. 導波路の構造と固有モード

本章では図9のように、$LiTaO_3$の厚さが有限である場合

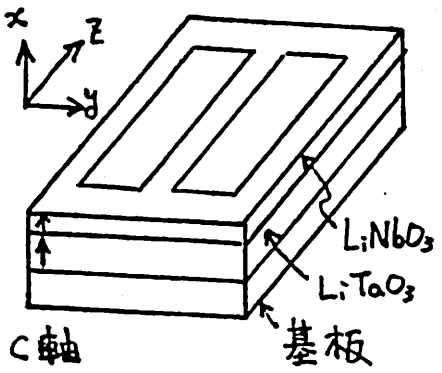



図9. 4層構造導波路

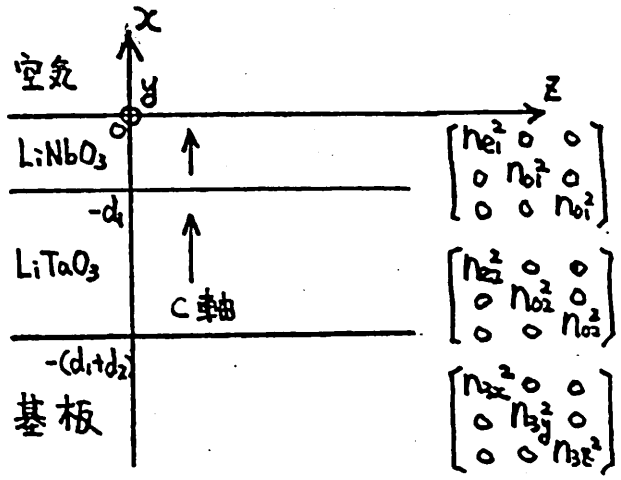



図10. 座標系

を扱う。座標系を図10のように取り、$LiNbO_3$, $LiTaO_3$ の厚さを、それぞれ $d_1$, $d_2$ とする。また、基板の比誘電率テンソルは対角化されており、$LiTaO_3$ よりも小さな値を有するものとする。このような構造を考えることにより、3層構造における放射モードのうち、伝搬定数が $n_s k_0$ 以上のものが量子化され、導波モードとなる。従来の導波モードは、$LiNbO_3$ 薄膜中のみで正弦波的で、それ以外の領域では指数関数的な界分布を持つのに対して、この新たな導波モードの界分布は、$LiNbO_3$, $LiTaO_3$ 中で正弦波的、空気及び下の基板中で指数関数的である。そこで両者を区別するために、従来のものをフィルム導波モード、新たなモードをフィルム-サブストレート導波モードと呼ぶことにする。図11は、この導波系における各固有モードの存在領域を図示したものである。また、TEフィルム導波モードとTMフィルム-サブストレート導波モードの電磁界は次のよう

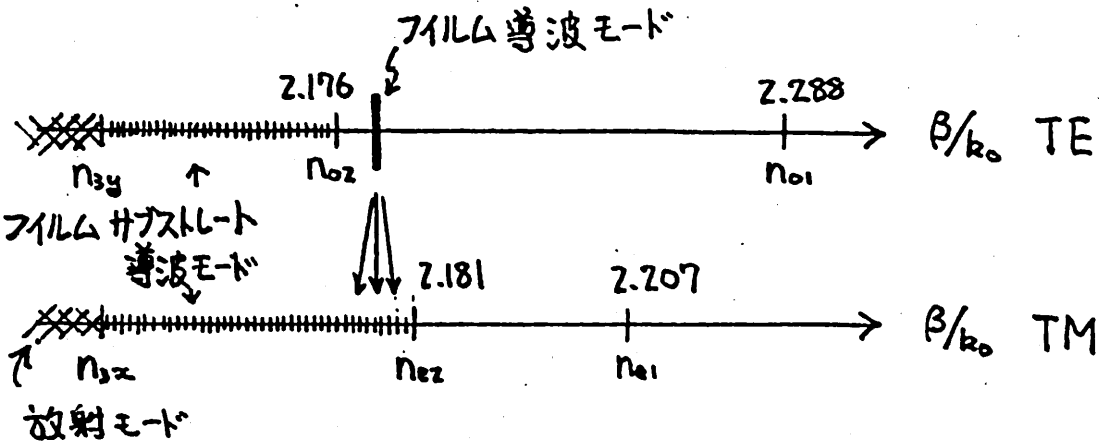



図11. 固有モード伝搬定数の分布

に表わせる。

［TEフィルム導波モード］　　$n_{02} < \beta_{ge}/k_0 < n_{01}$

$$e_y \begin{cases} A_e \exp(-\delta_e x) & x \geqq 0 \\ A_e \left(\cos \kappa_e x - \frac{\delta_e}{\kappa_e} \sin \kappa_e x\right) & -d_1 \leqq x \leqq 0 \\ A_e \left[B_e \exp\{r_e(x+d_1)\} + C_e \exp\{-r_e(x+d_1)\}\right] & -d_1-d_2 \leqq x \leqq -d_1 \\ A_e \left[B_e \exp(-r_e d_2) + C_e \exp(r_e d_2)\right] \exp[\zeta_e(x+d_1+d_2)] & x \leqq -d_1-d_2 \end{cases} \quad (14)$$

但し

$$B_e = \left\{1 - \frac{\delta_e}{r_e}\frac{(1-b)}{2}\right\} \cos \kappa_e d_1 + \left\{\frac{\delta_e}{\kappa_e} + \frac{\kappa_e}{r_e}\frac{(1-b)}{2}\right\} \sin \kappa_e d_1 \quad (15)$$

$$C_e = \left(\frac{\delta_e}{r_e} \cos \kappa_e d_1 - \frac{\kappa_e}{r_e} \sin \kappa_e d_1\right) \cdot \frac{(1-b)}{2} \quad (16)$$

$$b = \frac{\tanh r_e d_2 + \frac{r_e}{\Delta_e}}{1 + \frac{r_e}{\Delta_e} \tanh r_e d_2} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta_e &= (\beta_{ge}^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}} \\ \kappa_e &= (k_0^2 n_{01}^2 - \beta_{ge}^2)^{\frac{1}{2}} \\ r_e &= (\beta_{ge}^2 - k_0^2 n_{02}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \zeta_e &= (\beta_{ge}^2 - k_0^2 n_{3y}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$h_x = -\frac{\beta_{ge}}{\omega \mu_0} e_y \quad , \quad h_z = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial e_y}{\partial x} \quad (19)$$

$\beta_{ge}$は次のモード方程式を満足しなければならない.

$$\kappa_e d_1 = \tan^{-1}\frac{\delta_e}{\kappa_e} + \tan^{-1}\left(\frac{r_e}{\kappa_e} \cdot \frac{1}{b}\right) + m\pi \qquad m = 0, 1, \cdots \quad (20)$$

但し $0 \leq \tan^{-1}\frac{\delta_e}{\kappa_e} \leq \frac{\pi}{2}$ , $0 \leq \tan^{-1}\left(\frac{\gamma_e}{\kappa_e}\cdot\frac{1}{b}\right) \leq \frac{\pi}{2}$

$A_e$は正規化振幅係数であり、y方向単位長さ当りのz方向伝送電力をPとすることにより

$$A_e = \left[4\omega\mu_0 P\left[\beta_{ye}\left[\frac{1}{C_e}\left\{B_e\exp(-\gamma_e d_2) + C_e\exp(\gamma_e d_2)\right\}^2 + 4B_eC_e d_2 + \frac{B_e^2}{\gamma_e}\left\{1-\exp(-2\gamma_e d_2)\right\} - \frac{C_e^2}{\gamma_e}\left\{1-\exp(-2\gamma_e d_2)\right\} + d_1\left(1+\frac{\delta_e^2}{\kappa_e^2}\right) + \frac{1}{2\kappa_e}\left(1-\frac{\delta_e^2}{\kappa_e^2}\right)\sin 2\kappa_e d_1 + \frac{\delta_e}{2\kappa_e^2}\left(1-\cos 2\kappa_e d_1\right) + \frac{1}{\delta_e}\right]\right]^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

と求まる。これらの式において、$LiTaO_3$の厚さ $d_2 \to \infty$ とすることにより

$$b \to 1 \tag{22}$$

$$B_e \to \cos\kappa_e d_1 + \frac{\delta_e}{\kappa_e}\sin\kappa_e d_1 \tag{23}$$

$$C_e \to 0 \tag{24}$$

となり、3層構造における式(1)〜(5)に漸近することがわかる。

[ TMフィルム・サブストレート導波モード ]

$$n_{3x} < \beta_{ym}/k_0 < n_{e2}$$

$$h_y \begin{cases} A_m\exp(-\delta_m x) & x \geq 0 \\ A_m\left(\cos\kappa_m x - n_{01}^2\frac{\delta_m}{\kappa_m}\sin\kappa_m x\right) & -d_1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$h_y \begin{cases} A_m\left[B_m \cos r_m(x+d_1) + C_m \sin r_m(x+d_1)\right] & -d_1-d_2 \leqq x \leqq -d_1 \\ A_m\left[B_m \cos r_m d_2 - C_m \sin r_m d_2\right] \exp\left[\zeta_m(x+d_1+d_2)\right] & x \leqq -d_1-d_2 \end{cases} \tag{25}$$

但し

$$B_m = \cos k_m d_1 + n_{01}^2 \frac{\delta_m}{k_m} \sin k_m d_1 \tag{26}$$

$$C_m = \frac{n_{02}^2}{n_{01}^2} \frac{k_m}{r_m} \sin k_m d_1 - n_{02}^2 \frac{\delta_m}{r_m} \cos k_m d_1 \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \delta_m &= (\beta_{gm}^2 - k_0^2)^{\frac{1}{2}} \\ k_m &= \frac{n_{01}}{n_{e1}} (k_0^2 n_{e1}^2 - \beta_{gm}^2)^{\frac{1}{2}} \\ r_m &= \frac{n_{02}}{n_{e2}} (k_0^2 n_{e2}^2 - \beta_{gm}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \zeta_m &= \frac{n_{3z}}{n_{3x}} (\beta_{gm}^2 - k_0^2 n_{3x}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{28}$$

$$e_z = -\frac{j}{n_0^2 \omega \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial h_y}{\partial x} \quad , \quad e_x = \frac{\beta_{gm}}{n_e^2 \omega \varepsilon_0} h_y \tag{29}$$

$\beta_{gm}$は次のモード方程式を満足しなければならない。

$$r_m d_2 = \tan^{-1}\left(\frac{n_{02}^2}{n_{3z}^2} \frac{\zeta_m}{r_m}\right) + \tan^{-1}\left[\frac{n_{02}^2}{n_{01}^2} \frac{k_m}{r_m} \tan\left\{\tan^{-1}\left(n_{01}^2 \frac{\delta_m}{k_m}\right) - k_m d_1\right\}\right] + m\pi \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{30}$$

ここでmをモード次数と一致させるためには、各arc tanの値を

$$0 \leqq \tan^{-1}\left(\frac{n_{02}^2}{n_{3z}^2} \cdot \frac{\zeta_m}{r_m}\right) \leqq \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leqq \tan^{-1}\left(n_{01}^2 \frac{\delta_m}{k_m}\right) \leqq \frac{\pi}{2} \tag{31}$$

及び

$$\tan^{-1}\left(n_{01}^2\frac{\delta_m}{k_m}\right) - k_m d_1 = \alpha - n\pi \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \frac{\pi}{2} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

であれば

$$\tan^{-1}\left[\frac{n_{02}^2}{n_{01}^2}\frac{k_m}{r_m}\tan\left\{\tan^{-1}\left(n_{01}^2\frac{\delta_m}{k_m}\right) - k_m d_1\right\}\right] = \alpha' - n\pi \qquad (32)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha' < \frac{\pi}{2}$$

のように選ぶ必要がある。

正規化振幅係数 $A_m$ は、$y$ 方向単位長さ当りの $z$ 方向伝送電力を $P$ とすることにより

$$A_m = \left[4\omega\varepsilon_0 P\left[\beta_m\left\{\frac{1}{n_3^2 c_m}\left(B_m\cos r_m d_2 - C_m\sin r_m d_2\right)^2\right.\right.\right.$$

$$+\frac{1}{n_2^2 r_m}\left\{(B_m^2+C_m^2)r_m d_2 + \frac{1}{2}(B_m^2-C_m^2)\sin 2r_m d_2 - B_m C_m(1-\cos 2r_m d_2)\right\}$$

$$+\frac{1}{n_1^2 k_m}\left\{\left(1+n_{01}^4\frac{\delta_m^2}{k_m^2}\right)k_m d_1 + \frac{1}{2}\left(1-n_{01}^4\frac{\delta_m^2}{k_m^2}\right)\sin 2k_m d_1 - n_{01}^2\frac{\delta_m}{k_m}(1-\cos 2k_m d_1)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{\delta_m}\right]\right]^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (33)$$

と表わせる。

## 3-2. 結合モード解析

互いに直交する $m$ 個の導波モードが、わずかに結合している場合、各モードの振舞いは、次の結合モード方程式により記述できる。

$$\frac{d\mathbb{A}}{dz} = -j\mathbb{B}\cdot\mathbb{A} + \mathbb{K}\cdot\mathbb{A} \tag{34}$$

ここに$\mathbb{A}$はモードの複素振幅$a_i$を要素に持つ列行列、$\mathbb{B}$は結合していない状態での伝搬定数$\beta_i$を対角要素に持つ対角行列、$\mathbb{K}$は結行係数$K_{ij}$からなる結合行列で

$$K_{ij} = \frac{\omega}{4jP}\int_{-\infty}^{\infty} e_i^{*}(\hat{\varepsilon}-\bar{\varepsilon})e_j\,dx \tag{35}$$

である。

以下では、$LiNbO_3$-$LiTaO_3$ 4層構造導波路に、変調電界を印加した場合のTEフィルム導波モードの振幅変化を、(34)式に従い解析する。(10)式の比誘電率テンソルの形より、結合はTE・TMモード間でのみ生じる。TEフィルム導波モードと結合するモードとして、n個のTMフィルム-サブストレート導波モードを考える。TEフィルム-サブストレート導波モードとTMフィルム-サブストレート導波モードの結合は、TEフィルム-サブストレート導波モードの振幅が、TEフィルム導波モードの振幅と比べて非常に小さいため、無視する。これは、従来TE, TM放射モード間の結合を考えなかったことに対応している。TEモードの複素振幅を$a_1$, TMモードのそれを$a_2 \sim a_{n+1}$として(34)(35)式より次式を得る。

$$\frac{d\mathbb{A}}{dz} = -j\mathbb{C}\cdot\mathbb{A} \tag{36}$$

$$\mathbb{A}(z)=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{C}=\begin{bmatrix} \beta_1 & c_{12} & \cdots & c_{1,n+1} \\ c_{12} & \beta_2 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ c_{1,n+1} & & & \beta_{n+1} \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$c_{1,i}=\frac{\omega}{4P}\int_{-\infty}^{\infty} e_y^{TE}\Delta\varepsilon\, e_x^{TM}\, dx \tag{38}$$

(36)式の一般解は、$\mathbb{C}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$ ，固有ベクトルを $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ とすれば

$$\mathbb{A}(z)=\sum_{i=1}^{n+1} y_i x_i e^{-j\lambda_i z} \tag{39}$$

と表わされる。ここで $y_i$ は初期条件によって定まる定数である。そこで入射TEフィルム導波モードの振幅を 1と定めれば、初期条件は

$$\mathbb{A}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

となり、(39)式より

$$\mathbb{X}\cdot\mathbb{Y}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{但し} \quad \mathbb{X}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \tag{41}$$

が得られる。一方、問題にしている無損失受動的モード結合系では、$\mathbb{C}$ はエルミート行列（実対称行列）となるので、固有ベクトルの長さを 1 に正規化すれば、$\mathbb{X}$ はユニタリ行列

$$\mathbb{X}^{-1} = \mathbb{X}^{*} \tag{42}$$

である。従って(41),(42)式から

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}^{*}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{*} \\ x_2^{*} \\ \vdots \\ x_{m1}^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

となり、$\mathbb{Y}$は各固有ベクトルの1列目の値 $x_{1,i}^{*}$ を要素に持つことがわかった。これより

$$A(z) = \sum_{i=1}^{m1} x_{1,i}^{*}\, x_i\, e^{-j\lambda_i z} \tag{44}$$

特に、TEフィルム導波モードの振幅は

$$|a_1(z)|^2 = \left| \sum_{i=1}^{m1} |x_{1,i}|^2 e^{-j\lambda_i z} \right|^2 \tag{45}$$

である。

## 3-3. 数値計算例

TEフィルム導波モードとして0次を考え、結合するTMフィルム-サブストレート導波モードの数を、TEフィルム導波モードの伝搬定数に最も近い伝搬定数を持つものを中心に 1, 10, 100個とり、(45)式の計算を行なった。変調電界は前章と同様であり、$LiNbO_3$, $LiTaO_3$ の屈折率は congruent組成のものを用いている。また、基板は屈折率が1.5の等方性媒質とする。$D/\lambda = 10$, $LiNbO_3$ の厚さ0.2μm として、$LiTaO_3$ の厚さを 0.1mm, 0.3mm

図12

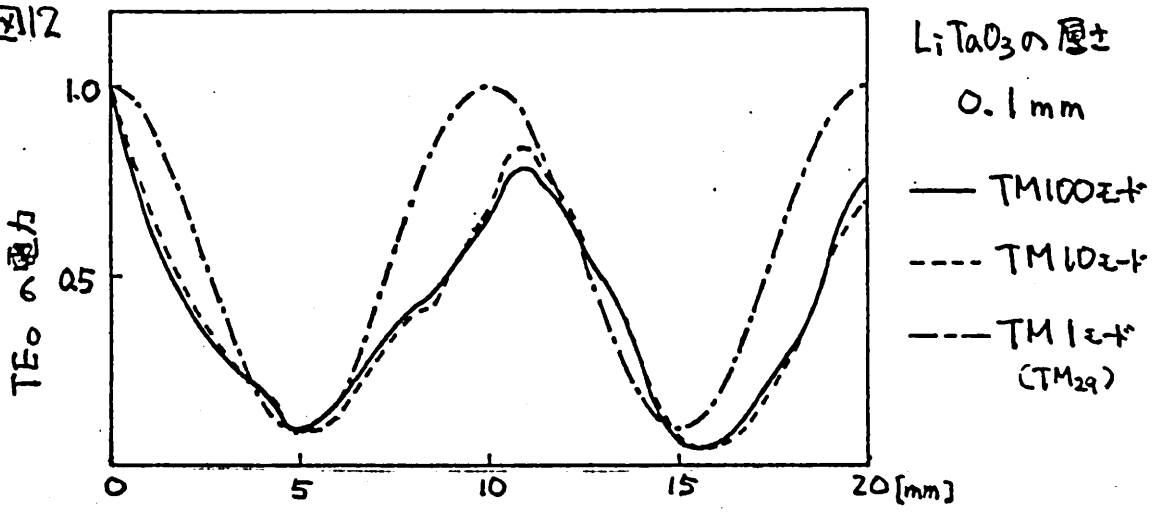



図13

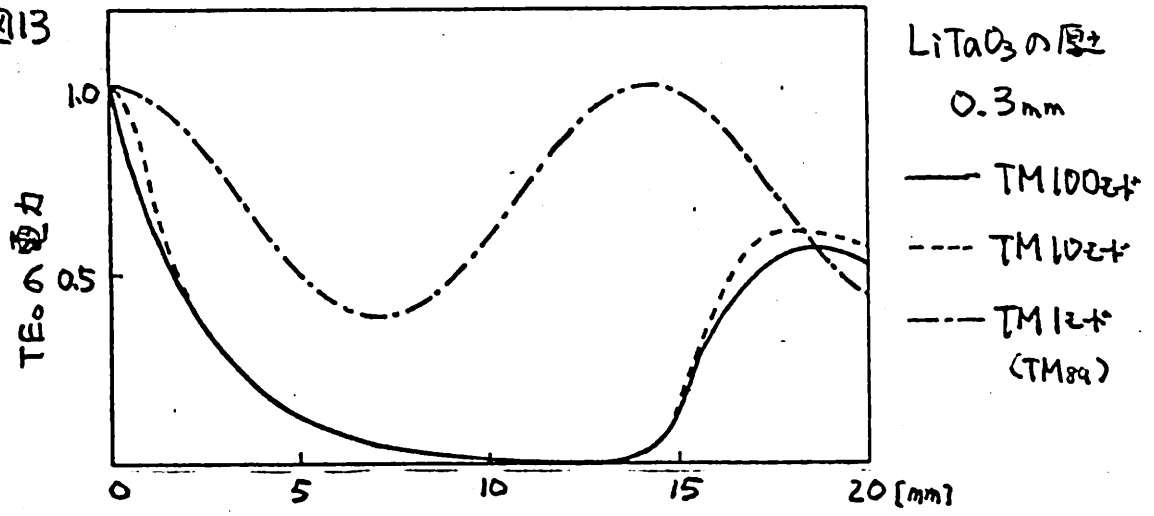
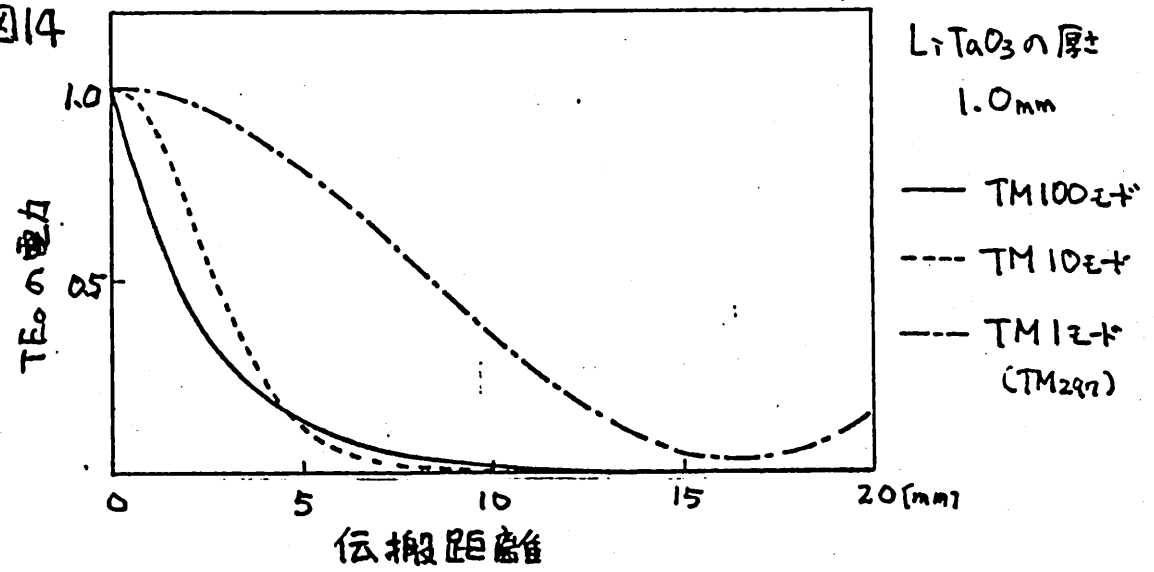



図14




TE0フイルム導波モードの電力変化
( $LiNbO_3$ の厚さ 0.2 μm . D/λ=10 )

1.0mmと変えたものが 図12, 図13, 図14 である。なお、$LiTaO_3$ の厚さが 0.1mm の場合には、TEフィルム導波モードの伝搬定数に最も近い伝搬定数を持つTMフィルム・サブストレート導波モードは、29次 モードであるため、TM100モード近似として、0次から99次までを取っている。

いずれの場合も、多モード結合の影響が表われているが、$LiTaO_3$ 層の厚さが 0.1mm 程度では1モード対1モードの結合が支配的で、TEフィルム導波モードの電力は、正弦波的に変化している。しかし、$LiTaO_3$層の厚さが 0.3mm 1.0mm においては多モード結合の効果が顕著に表われ、電力は指数関数的に減少する。そこで TM100 モード近似において、最小2乗法により指数関数への近似を行なえば、

$LiTaO_3$ の厚さが 0.3mm のとき　　$1.01\exp(-414z)$

$LiTaO_3$ の厚さが 1.0mm のとき　　$1.03\exp(-418z)$

となる。従ってTEフィルム導波モードの電力減衰定数は 414 [m⁻¹] (18.0 dB/cm), 418 [m⁻¹] (18.2 dB/cm) と定まる。これは3層構造において得られた値 398 [m⁻¹] と非常に近い値である。また $LiTaO_3$ の厚さが 0.3mm のとき、$D/\lambda = 100$ として同様に指数関数で近似すれば、減衰定数として 543 [m⁻¹] (23.6 dB/cm) を得る。これも3層構造で得られる値 520 [m⁻¹] (22.6 dB/cm) に近い。

このように、3層構造における結果は、より厳密な4層構造における解析結果と良く一致し、簡単なMarcuseの解

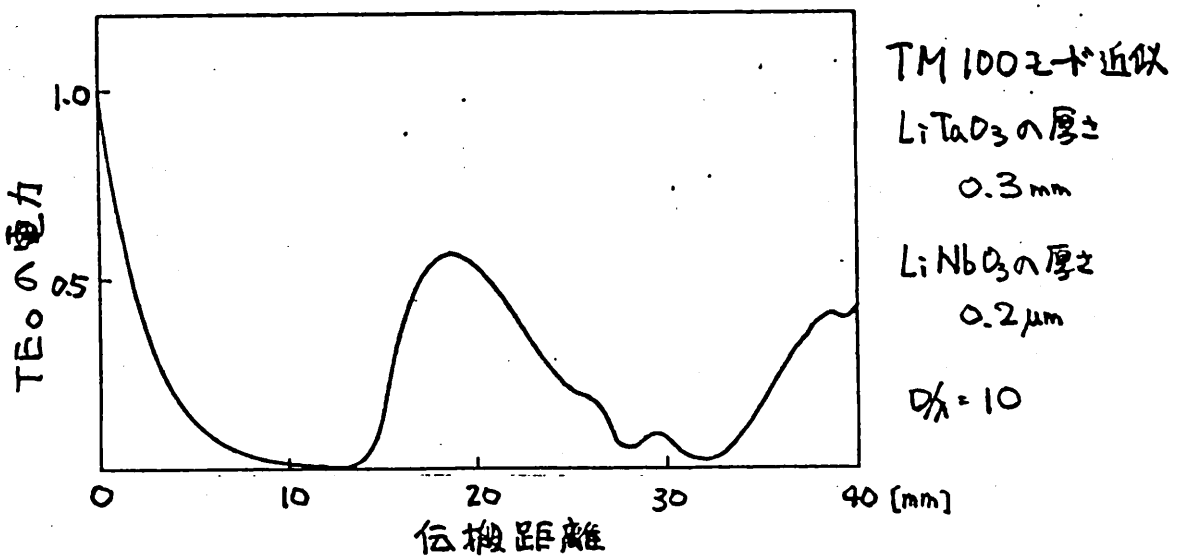



図15. TE0フィルム導波モードの電力変化

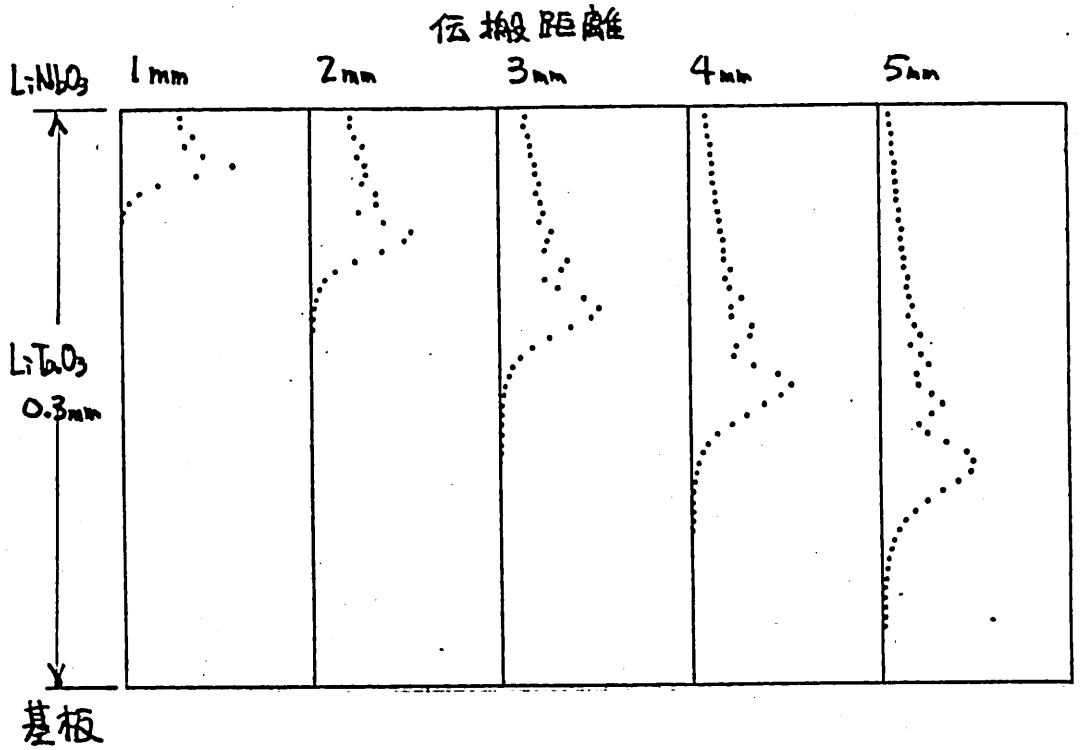
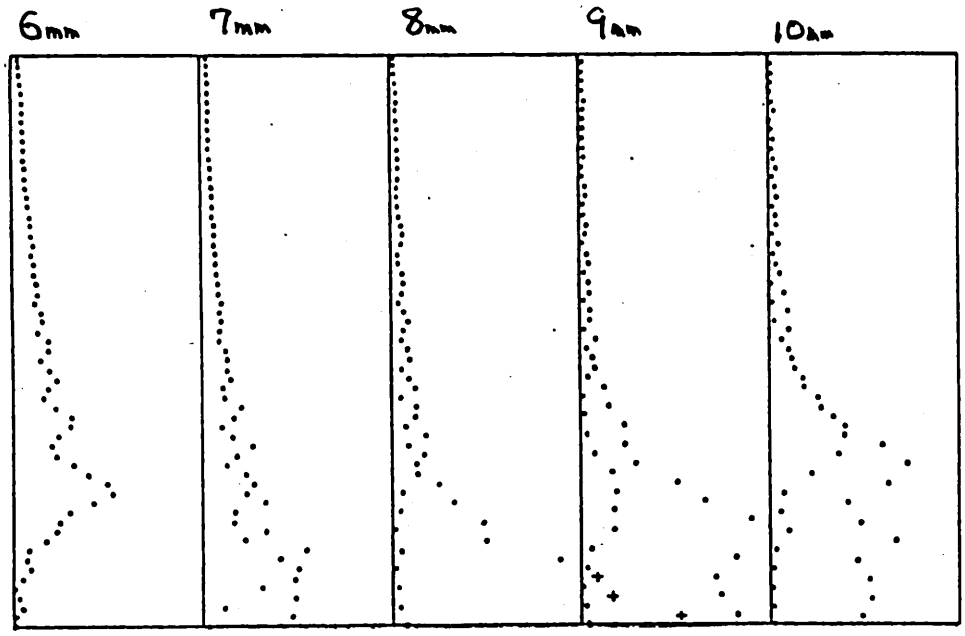



図16. LiTaO3層におけるTMモードz方向ポインティングベクトル分布




伝搬距離

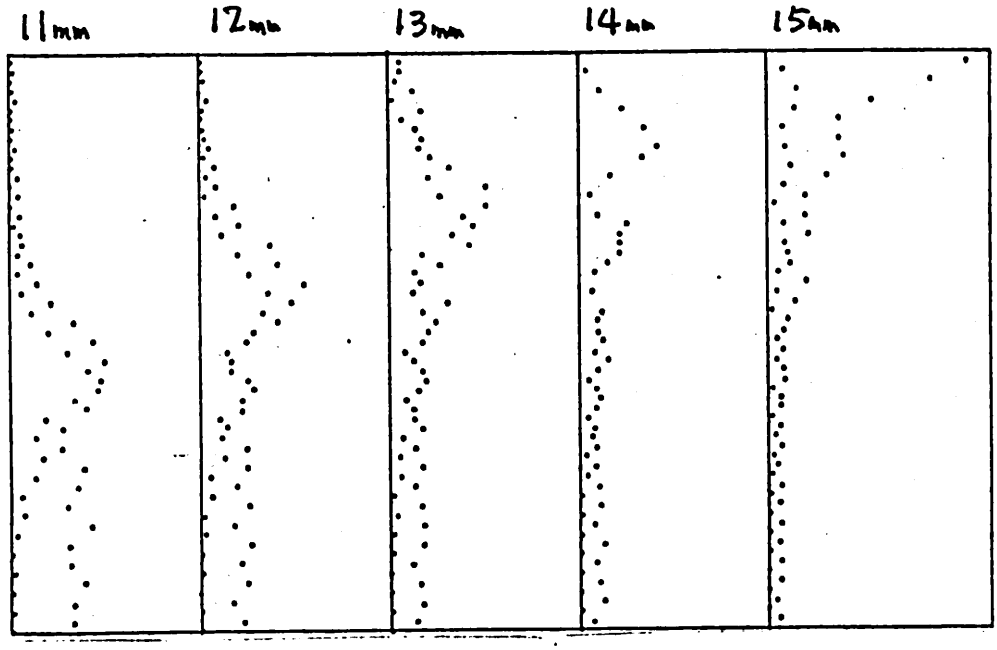
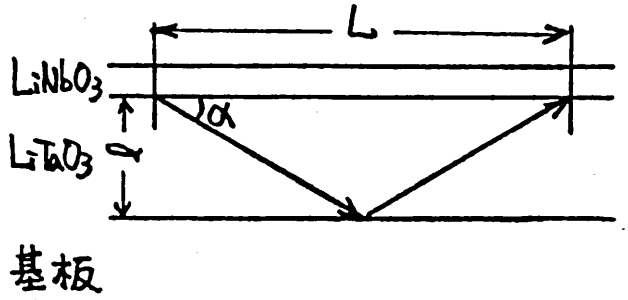



図16.　$LiTaO_3$の厚さ 0.3mm . $LiNbO_3$の厚さ 0.2μm

法でもかなり良い近似解が得られることがわかる。

図15は、$LiTaO_3$の厚さを0.3mmとして、TEフィルム導波モードの電力変化を40mm伝搬するまで描いたものである。伝搬距離が13.5mm程度までは、前述のように指数関数的に減衰する。しかし、その後急激に増加しているが、これはTMモードに変換されて$LiTaO_3$層中に'放射'された電力が、$LiTaO_3$と下の基板の境界面で全反射し、再び$LiNbO_3$と$LiTaO_3$の境界層に到達して、TEモードに再結合したためである。図16は$LiTaO_3$層中におけるTMフィルム-サブストレート導波モードのz方向ポインティングパワー分布を、伝搬距離を変えて描いたものであって、TMモードが$LiTaO_3$中に放射され、下の基板との境界面で反射し、再び$LiNbO_3$-$LiTaO_3$境界面に達する様子がわかる。なお、伝搬距離が7mm以後は、底面で反射した波と、底面に向う波が干渉し、激しく振動する。

このような'放射'TMモードとの再結合は、$LiTaO_3$層が0.3mm厚のとき、14mm*程度という比較的短い伝搬距離で起こるため、実際の光変調器を製作する際には、$LiTaO_3$底面で光を吸収させるなどの工夫が必要となる。




* $\beta/k_0 = 2.1790$ とすると
TMモードのポインティングパワーの方向αは
$\alpha = 2.49°$
$\ell = 0.3mm$ の場合
$L = 13.8mm$

## 4. むすび

$LiTaO_3$ 基板 - $LiNbO_3$ 薄膜構造の導波 - 放射モード結合形光変調器を提案し、その変調特性について、まず、Marcuse の近似解法によって解析を行なった。次に $LiTaO_3$ の膜厚の有限性を考慮し、4層構造導波系を考えることにより放射モードを量子化し、より厳密な解析を行なった。両方法による結果はほぼ等しく、簡単な近似解を用いても比較的精度良く解析が可能であることがわかった。

解析により得られた変調特性は、$LiTaO_3$ 金属拡散導波路の場合と比較して、膜厚依存性が強いものの、変調度は非常に大きく、最大で $D/\lambda=10$ のとき約 18 dB/cm, $D/\lambda=100$ で約 23 dB/cm となる（$LiTaO_3$ 拡散導波路では最大で約 0.7 dB/cm）。なお、薄膜として $LiNbO_3$ と $LiTaO_3$ の混晶を考えることにより、より変調度が高く、膜厚依存性の弱い光変調器が構成可能であるが、これについては別の機会に報告したい。

また、4層構造における解析の結果、放射されたTMモードが $LiTaO_3$ 底面で反射し、TE導波モードへの再結合が生じることがわかった。そのため実際の変調素子においては、$LiTaO_3$ 底面で光を吸収又は散乱させることが必要になる。

以上、解析によって得られた結果を示したが、この構造は

(1)電気光学結晶として、最も広く研究されている $LiNbO_3$ および $LiTaO_3$ を用いる。

(2)両結晶の格子定数が接近している。

(3)位相整合をとる必要がない

(4)モードフィルタが不要である

などの利点を有しており、構造も単純であるのでその実現は容易であると考えられる。

材料面に関する有益な御教示を頂いた安達正利氏に感謝します。

## 参考文献

(1) D. Marcuse : "Electrooptic coupling between TE and TM modes in anisotropic slabs", IEEE J. Quantum Electron. QE-11, 9, p759

(2) 国村、山本、牧本；"$LiNbO_3$ プレーナ導波路における導波-放射モード変換 - 結合モード解析と強度変調器への応用 -" 信学論(C) J61-C, 9, p.579

(3) 須藤、中島、池上；"KLN-KBN 薄膜導波路における光伝播と光変調器への応用" 輻射科学研資.(1978-12)

(4) 国村、長谷川、山本、牧本；"Cu イオン電界拡散 $LiTaO_3$ 導波路における導波-放射モード変換", 輻射科学研資 (1977. 5)

(5) 神谷、山内、茶山；"異方性薄膜光導波路を伝搬する Leaky Surface Wave", 信学技報, MW 76-102

及び

K. Yamanouch , M. Yasumoto , K. Sibayama ; " Optical Switching Device Using Leaky Surface Wave ", IEEE J. Quantum Electron. QE-14 , 11 , p863

(6) S. Miyazawa ; " Growth of $LiNbO_3$ single-crystal film for optical waveguides ", Appl. Phys. Lett. Vol 23. no4 p198

超音波材料学研究会資料

# コルゲーションを装荷した圧電性結晶における BGS弾性表面波のフィルタ特性

堤 誠 熊谷信昭
(大阪大学 工学部)

昭和54年10月5日

## 1. まえがき

近年、コルゲーションなどの周期回路を装荷した弾性表面波導波路の研究が活発に行われ、フィルタ、カップラ、共振器などのデバイスが実用化されている。[1] しかしながらこれらのデバイスは帯域が狭まく、現段階においては、弾性表面波のローパス、ハイパスフィルタの実現が不可能である。最近、木下らはSH波を積極的に用い、共振器型フィルタの広帯域化をはかり、圧電性と帯域巾との関係について主に実験的に明らかにしている。[2]

一方、周期回路を伝搬する弾性表面波の取り扱いは非常に複雑なものであり、主にフリクエの定理による方法を通じて計算機による数値解法に依存することが多く、フィルタの帯域巾と弾性媒質の諸パラメータとの関係を容易に知ることが出来ない。[3][4] 最近、Seshadriはこのような周期回路を取り扱う上で簡単でかつ精度が良くさらに解析手順をシスマテイックに論じることが出来るマルテイプルスケール法（またはSingular Perturbation Procedure）を提案し、コルゲーションを装荷した弾性媒質におけるラブ波、[5] レイリー波さらに電磁波、[7] 静磁波[8]などの伝搬特性をこの手法で求めている。

本論文はコルゲーションを装荷した圧電性媒質における

BGS (Bleustein, Gulyaev, Shimizu) 波[19][20]の伝搬特性をマルティプルスケール法により取り扱い，フィルタ特性と媒質の諸定数，特に圧電性との関係について，特性の広帯域化の点から検討したものである。

## 2. 問題の取り扱い

問題の構成は図1のごとき ものである。同図で $x$ の正の部分に $C_{6v}$ の対称性を有する例えば CdS, ZnO の圧電性媒質があり，$x$ が負の部分は真空であるとする。この圧電性媒質の表面が

$$x = f(y) = \delta\eta \cos Ky \qquad (1)$$

ただし $K = \frac{2\pi}{L}$

と，周期 $L$，変調率 $\delta\eta$ でコルゲーションが装荷されているものとする。ここでは $\delta\eta$ は小さいものと仮定して，マルチプルスケール法における摂動の1次項のみに着目する。[5]~[8]

図1に示す導波路でBGS波の界は結晶軸 $z$ に依存しないものと仮定し，$\frac{\partial}{\partial z}=0$ の条件のもとに圧電性媒質における運動方程式を求めると

$$-\omega^2\rho u_z = c_{44}^E \nabla^2 u_z + e_{15}\nabla^2\phi, \qquad (2)$$

$$e_{15}\nabla^2 u_z - \epsilon_{11}^S \nabla^2\phi = 0 \qquad (3)$$

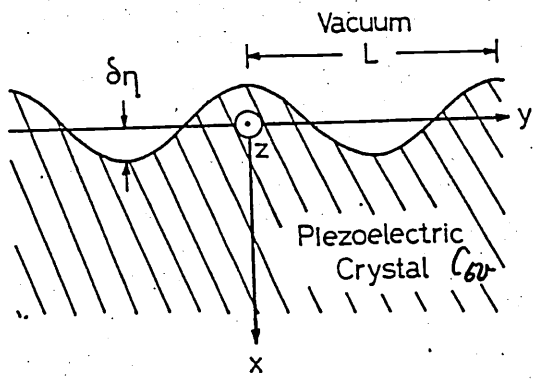



図1 問題の構成

となる。ここに$u_z$はz方向の変位，$\phi$は電位，$e_{15}$は圧電係数，$\rho$は密度，$C_{44}^E$はスティフネス，$\epsilon_{11}^S$は誘電率である。[9][10]
また，真空中の電位$\Phi$は

$$\nabla^2 \Phi = 0 \qquad (4)$$

の関係を満足する。
マルチプルスケール法の手法に従って角周波数，変位，電位などを$\delta$の1次項で展開して

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega_1,$$
$$u_z = u_{z0} + \delta u_{z1}, \qquad (5)$$
$$\phi = \phi_0 + \delta\phi_1,$$

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi_1$$

と置く。ここに$\omega_1$, $u_{z1}$, $\phi_1$, $\Phi_1$はコルゲーションによる界の微小摂動量である。一方，BGS波の伝搬方向（$y$方向）の演算子も連鎖定理により

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_0} + \delta\frac{\partial}{\partial y_1} \qquad (6)$$

と置ける。(5)，(6)を(2)～(4)に代入し，$\delta$の零次の項と1次の項に関連する運動方程式を求めると，零次の運動方程式として

$$-\rho\omega_0^2 u_{z0} = c_{44}^E \nabla_0^2 u_{z0} + e_{15}\nabla_0^2\phi_0 , \qquad (7)$$

$$e_{15}\nabla_0^2 u_{z0} - \epsilon_{11}^S \nabla_0^2\phi_0 = 0 , \qquad (8)$$

$$\nabla_0^2 \Phi_0 = 0 \qquad (9)$$

が求まり，$\delta$の1次の運動方程式として

$$-\rho\omega_0^2 u_{z1} - 2\rho\omega_1\omega_0 u_{z0} =$$

$$c_{44}^E\left(\nabla_0^2 u_{z1} + 2\frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial y_0 \partial y_1}\right) + e_{15}\left(\nabla_0^2\phi_1 + 2\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y_0\partial y_1}\right) , \qquad (10)$$

$$e_{15}\left(\nabla_0^2 u_{z1} + 2\frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial y_0\partial y_1}\right) - \epsilon_{11}^S\left(\nabla_0^2\phi_1 + 2\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y_0\partial y_1}\right) = 0 , \qquad (11)$$

$$\nabla_0^2 \Phi_1 + 2\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y_0 \partial y_1} = 0 \qquad (12)$$

が求まる。ここに演算子$\nabla_0^2$は

$$\nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}$$

である。

次にこの問題における境界条件を考える。真空と圧電性媒質との境界面はコルゲーションにより傾むくため、(1)から

$$\frac{d}{dy} f(y) = -\delta \eta \kappa \sin \kappa y = \tan\theta \qquad (13)$$

なる量を境界条件を求める上で考慮せねばならない。(13)を考慮すると、電界の接線成分は(1)の座標で

$$E_y + E_x \tan\theta = E_{y0} + E_{x0} \tan\theta \qquad (14)$$

と連続でなければならず、さらに電束密度の法線成分は(1)の座標で

$$D_x - D_y \tan\theta = D_{x0} - D_{y0} \tan\theta \qquad (15)$$

と連続であり、応力の法線成分は

$$T_{xz} - T_{yz} \tan\theta = 0 \qquad (16)$$

と（1）の座標で零である。

（14），（15），（16）に（5），（6）を代入し，（14）～（16）をδの零次の項と1次の項とに分けて書き表わし，さらに$x=0$のまわりでテイラー（Taylor）級数に展開すると，$x=0$における零次の境界条件は（14）～（16）から

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial y_0} = \frac{\partial \phi_0}{\partial y_0}, \tag{17}$$

$$C_{44}^E \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} + e_{15}\frac{\partial \phi_0}{\partial x} = 0, \tag{18}$$

$$e_{15}\frac{\partial u_{z0}}{\partial x} - \epsilon_{11}^S \frac{\partial \phi_0}{\partial x} = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \tag{19}$$

と成り，1次のδの項に関連する境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\eta \cos Ky_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial \phi_0}{\partial y_1} - \eta K \sin Ky_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\eta \cos Ky_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_1} - \eta K \sin Ky_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \tag{20}$$

$$e_{15}\left(\eta \cos Ky_0 \frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial x}\right) - \epsilon_{11}^S\left(\eta \cos Ky_0 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)$$

$$+ \eta K \sin Ky_0 \left(e_{15}\frac{\partial u_{z0}}{\partial y_0} - \epsilon_{11}^S \frac{\partial \phi_0}{\partial y_0}\right) =$$

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \eta K \epsilon_0 \sin K y_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_0} - \varepsilon_0 \eta \cos K y_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = 0 \qquad (21)$$

$$C_{44}^E \frac{\partial u_{21}}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \eta \cos K y_0 \left( C_{44}^E \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} \right)$$

$$+ \eta K \sin K y_0 \left( C_{44}^E \frac{\partial u_{20}}{\partial y_0} + e_{15} \frac{\partial \phi_0}{\partial y_0} \right) = 0 \qquad (22)$$

の形で論じることが出来る。

## 3 結合モード方程式の導出

コルゲーションが存在すると，波動の進行波の一部がコルゲーションにより反射され後退波となり，この後退波と進行波とが結合することにより，コルゲーション内に定在波が生じ，波動に阻止効果を生む。このような波動の阻止効果の物理的メカニズムに着目して，ここではすでに求めた運動方程式（7）～（12）と $x=0$ における境界条件（17）～（22）からBGS波の進行波と後退波との間の結合を与える方程式（結合モード方程式）を導出する。

零次のBGS波の界を $x=\pm\infty$ の境界条件を考慮し，進行波と後退波との和で定義し，

$$u_{20} = B_0^+ e^{-k_x x} e^{+j\beta^+ y_0} + B_0^- e^{-k_x x} e^{-j\beta^- y_0}, \qquad (23)$$

$$\phi_0 = \left(D_0^+ e^{-\beta x} + \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} B_0^+ e^{-k_x x}\right) e^{+j\beta^+ y_0}$$

$$+ \left(D_0^- e^{-\beta x} + \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} B_0^- e^{-k_x x}\right) e^{-j\beta^- y_0} \qquad (24)$$

$$\Phi_0 = C_0^+ e^{\beta x} e^{+j\beta^+ y_0} + C_0^- e^{\beta x} e^{-j\beta^- y_0} \qquad (25)$$

と置く。ここに$B_0^\pm$, $C_0^\pm$, $D_0^\pm$は進行波および後退波の振巾である。(23)〜(25)を零次の運動方程式(7)〜(9)に代入すると，$k_x$の値として

$$k_x = \sqrt{\beta^2 - \frac{\rho}{\bar{C}_{44}^E}\omega_0^2} \qquad (26)$$

ただし $\bar{C}_{44}^E = C_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S}$

が求まる。零次の境界条件式(17)〜(19)に(23)〜(25)を代入すると，零次のBGS波の分散関係式

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho}{C_{44}^E\left[1-\left(\frac{e_{15}^2}{\bar{C}_{44}^E \epsilon_{11}^{EF}}\right)^2\right]}}\,\omega_0 \qquad (27)$$

ただし，$\epsilon_{11}^{EF} = \epsilon_{11}^S\left(1 + \frac{\epsilon_{11}^S}{\epsilon_0}\right)$

が求まる。(27)はBleustein によって求められた分散関係式に一致する。[9] (27)を$\omega$で微分すると，群速度が求ま

り，その値は

$$v_{ga}^{\pm} = \frac{1}{\omega_0 \rho}\left(\beta \bar{C}_{44}^{E} - \frac{e_{15}^2}{\epsilon_1^{EF}} k_x\right) \qquad (28)$$

である。

次にコルゲーションによって生じた界の1次摂動量，$u_{21}$, $\phi_1$, $\Phi_1$を求める。これらの界を零次の界と同様に進行波と後退波との和で定義し，

$$u_{21} = g^{+}(x) e^{j\beta^{+} y_0} + g^{-}(x) e^{-j\beta^{-} y_0}, \qquad (29)$$

$$\phi_1 = f^{+}(x) e^{j\beta^{+} y_0} + f^{-}(x) e^{-j\beta^{-} y_0}, \qquad (30)$$

$$\Phi_1 = g^{+}(x) e^{j\beta^{+} y_0} + g^{-}(x) e^{-j\beta^{-} y_0} \qquad (31)$$

と置く。(29)〜(31)と(23)〜(25)を$\delta$の1次の運動方程式(10)〜(12)に代入すると，(10)は

$$\frac{\partial^2 g^{\pm}(x)}{\partial x^2} - k_x^2 g^{\pm}(x) = \mp 2j\beta \frac{\partial B_0^{\pm}}{\partial y_1} e^{-k_x x} - \frac{2\rho\,\omega_1\omega_0}{\bar{C}_{44}^{E}} B_0^{\pm} e^{-k_x x} \qquad (32)$$

の方程式となり，(11)は

$$\psi^{\pm}(x) = f^{\pm}(x) - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^{S}} g^{\pm}(x) \qquad (33)$$

と，$\psi^{\pm}(x)$という関数を新らしく導入することにより，(

10)に関連して

$$\frac{\partial^2 \psi^{\pm}(x)}{\partial x^2} - \beta^2 \psi^{\pm}(x) = \pm 2j\beta \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^{EF}} e^{-\beta x} \frac{\partial B_0^{\pm}}{\partial y_1} \qquad (34)$$

となり、(12)は

$$\frac{\partial^2 g^{\pm}(x)}{\partial x^2} - \beta^2 g^{\pm}(x) = \mp 2j\beta \frac{\partial C_0^{\pm}}{\partial y_1} e^{\beta x} \qquad (35)$$

となる。(32)、(34)、(35)の微分方程式を解くと、

$$g^{\pm}(x) = \frac{1}{k_x}\left\{\frac{\rho\omega_1\omega_0}{C_{44}^{E}} B_0^{\pm} \pm j\beta \frac{\partial B_0^{\pm}}{\partial y_1}\right\} x e^{-k_x x}$$

$$+ B_1^{\pm} e^{-k_x x}, \qquad (36)$$

$$\psi^{\pm}(x) = \mp j \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^{EF}} \frac{\partial B_0^{\pm}}{\partial y_1} x e^{-\beta x} + D_1^{\pm} e^{-\beta x}, \qquad (37)$$

$$g^{\pm}(x) = \mp j \frac{\partial C_0^{\pm}}{\partial y_1} x e^{\beta x} + C_1^{\pm} e^{\beta x} \qquad (38)$$

となる。ここに$B_1^{\pm}$, $C_1^{\pm}$, $D_1^{\pm}$は定数である。

次に(23)～(25)および(29)～(31)を$\delta$の1次の境界条件式に代入する。ここでコルデーションによって表われるBGS波の空間高調波の内零次と－1次に着目し、高次の空間高調波を無視する。この近似は$\delta$が1次の展開項の範囲内で十分成立するものであり、[5][18] この場合、進行波の伝搬定数$\beta^+$と後退波の伝搬定数$\beta^-$の間には

$$\beta^{+} - K = -\beta^{-} \qquad (39)$$

の関係が成立する。(39)の関係に注意し、1次のδの境界条件を$e^{+j\beta^{+}y}$モードと$e^{-j\beta^{-}y}$モードごとに整理して求めると、

$$k_x \bar{C}_{44}^{E} B_1^{\pm} + e_{15}\beta D_1^{\pm} =$$

$$\frac{\rho\omega_1 a_0}{k_x} B_0^{\pm} \pm j\left[\frac{\beta}{k_x}\bar{C}_{44}^{E} - \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^{EF}}\right]\frac{\partial B_0^{\pm}}{\partial y_1} + \frac{\eta}{2}\left[\bar{C}_{44}^{E}(k_x^2 - K\beta)\right.$$

$$\left. + \frac{e_{15}^2(K-\beta)\beta}{\epsilon_{11}^{EF}}\right] B_0^{\mp} \qquad (40)$$

,

$$\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^{S}} B_1^{\pm} - C_1^{\pm} + D_1^{\pm} =$$

$$\mp j\frac{1}{\beta}\left[\frac{\epsilon_{11}^{S}\bar{C}_{44}^{E}}{\epsilon_0 e_{15}\beta}k_x - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^{S}+\epsilon_0}\right]\frac{\partial B_0^{\pm}}{\partial y_1} - \frac{\eta}{2}\frac{\beta+K}{\beta}\left[\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^{S}}\left(\frac{\beta\epsilon_0}{\epsilon_{11}^{S}+\epsilon_0} - k_x\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\epsilon_{11}^{S} k_x \bar{C}_{44}^{E}}{\epsilon_0 e_{15}}\right] B_0^{\mp} \qquad (41)$$

,

$$C_1^{\pm} + \frac{\epsilon_{11}^{S}}{\epsilon_0} D_1^{\pm} = \mp\frac{j}{\epsilon_0\beta}\left(\frac{\epsilon_0 e_{15}}{\epsilon_0+\epsilon_{11}^{S}} - \frac{\epsilon_{11}^{S} k_x \bar{C}_{44}^{E}}{e_{15}\beta}\right)\frac{\partial B_0^{\pm}}{\partial y_1}$$

$$- \frac{\eta(\beta-K)}{2\epsilon_0\beta}\left[\frac{\epsilon_{11}^{S} k_x \bar{C}_{44}^{E}}{e_{15}} + \frac{\epsilon_0 e_{15}\beta}{\epsilon_{11}^{S}+\epsilon_0}\right] B_0^{\mp} \qquad (42)$$

となる。(40)〜(42)の$B_1^{\pm}$, $C_1^{\pm}$そして$D_1^{\pm}$を零次の分散関

係式(47)を用いて消去すると、BGS波の進行波と後退波との関係を与える結合モード方程式

$$\omega_1 B_0^+ + j v_{ga}^+ \frac{\partial B_0^+}{\partial y_1} = \eta C_a B_0^-,$$

$$\omega_1 B_0^- - j v_{ga}^- \frac{\partial B_0^-}{\partial y_1} = \eta C_a B_0^+ \qquad (43)$$

が求まる。ここに$C_a$は結合係数で

$$C_a = \frac{e_{15}^2 \beta^2}{2\rho\omega_0 \epsilon_{11}^{EF}} \left\{ K + \frac{e_{15}^2}{\bar{C}_{44}^E \epsilon_{11}^{EF}} \left[ \frac{e_{15}^2 K}{\bar{C}_{44}^E \epsilon_{11}^{EF}} - K + \beta + \frac{(3K-\beta)\epsilon_{11}^S - \epsilon_0 (K+\beta)}{\epsilon_0 + \epsilon_{11}^S} \right] \right\}$$

である。(43)式で圧電係数$e_{15}$を零とすると進行波と後退波間の結合が無くなることに注意すべきである。

次に図1に示す半無限圧電性媒質の表面に質量効果が無視できる程度の薄い金属膜を蒸着し、金属膜がおよぼすフィルタ特性の影響について論じる。この場合、真空中の界を考慮する必要が無く、また、電束密度に関する境界条件も考慮する必要も無いため、問題は非常に簡単になる。途中の解析過程を省略して最終式である結合モード方程式を記すと、

$$\omega_1 B_0^+ + j v_{gb}^+ \frac{\partial B_0^+}{\partial y_1} = \eta C_b B_0^-,$$

$$\omega_1 B_0^- - j v_{gb}^- \frac{\partial B_0^-}{\partial y_1} = \eta C_b B_0^+ \qquad (44)$$

となり，ここに$v_{gb}$は群速度であり，$C_b$は結合係数であり，

$$v_{gb} = \frac{1}{\rho\omega_0}\left(\bar{C}_{44}^{E}\beta - \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S}k_x\right),$$

$$C_b = \frac{e_{15}^2\beta^2 K}{2\rho\omega_0\epsilon_{11}^S\bar{C}_{44}^{E}}\left\{C_{44}^{E} + \left(\frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S}\right)^2\frac{1}{\bar{C}_{44}^{E}} - \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}^S}\right\} \qquad (45)$$

である。この場合も圧電係数$e_{15}$によって，結合の大きさが変わることが分る。このようにマルチプルスケール法で解析すると，コルゲーションの効果をより見通しの良い形で論じることができる。

## 4. ブリルアンダイアグラム

ここでまず(27)の零次の分散関係式を数値的に評価する数値計算に用いた媒質の諸定数はCdSを基準とし，$\rho = 4.82 \times 10^3\ kg/m^3$，$C_{44}^{E} = 1.5 \times 10^{10}\ N/m^2$，$\epsilon_{11}^S/\epsilon_0 = 9.02$ の値を用い，さらに圧電性の効果を明確にするために圧電係数$e_{15}$を$-0.21$の整数倍だけ変化させる。図2は(27)を数値的に評価した結果求まる分散曲線を描いたもので，同図の実線は金属膜が無い場合であり，一点鎖線は金属膜を媒質の表面に加えた場合である。この場合，空間高調波は零次と$-1$次だけを考慮しており，両曲線はブラッグの周波数$f_0$（$f_0 = \omega_0/2\pi$）で伝搬定数が$\frac{\pi}{\Lambda} = \beta_0$（$\Lambda = 10\mu$）で交叉する。両曲線と

も圧電性が増すと，群速度は大きくなるとともに，金属膜があると群速度は小さくなることが分る。

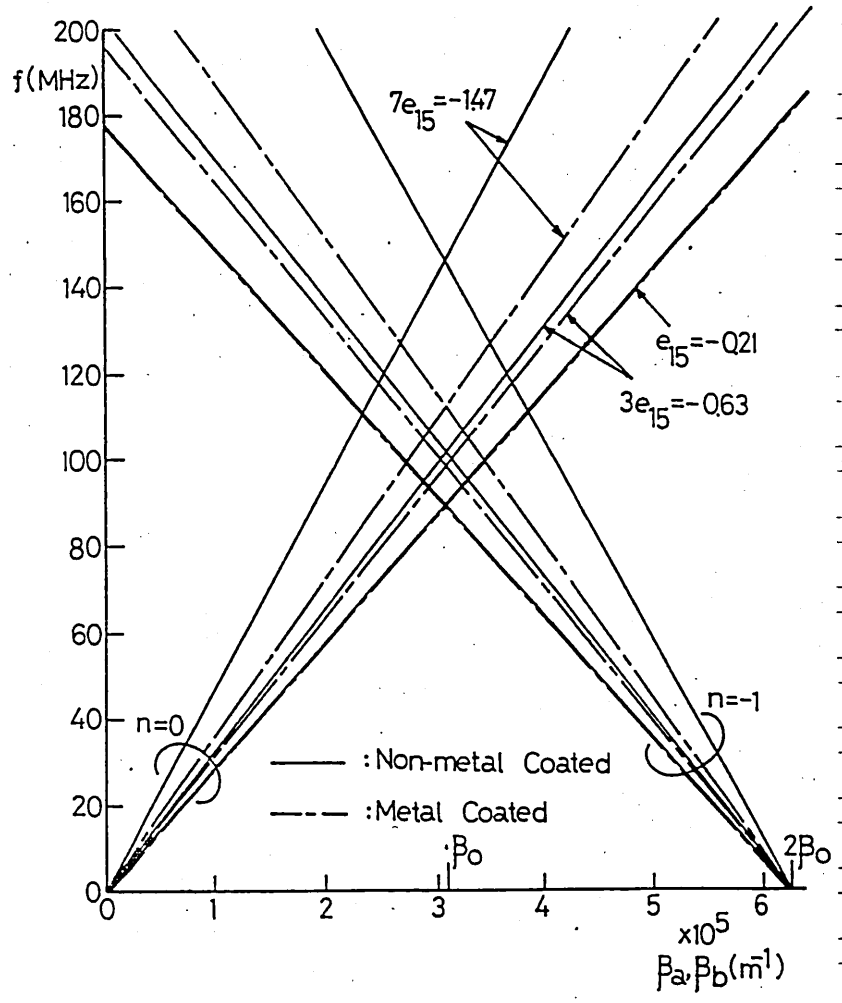



図2 BGS波の分散曲線

次に(43)，(44)の結合モード方程式を解いて，ブラッグの周波数附近のブリルアンダイアグラムを評価する。

(43)，(44)で $B_0^{\pm}$ の解を

$$B_0^{\pm} = B_{00}^{\pm} e^{j\beta_1 y_1} \qquad (46)$$

と仮定して、$\delta$の1次の項によって摂動する伝搬定数$\beta_{1i}$を結合モード方程式から求めると、

$$\beta_{1i} = \frac{\sqrt{\omega_1^2 - (C_i \eta)^2}}{v_{gi}} \qquad (47)$$

ただし、$i = a, b$

となる。ここに$i = a$は金属膜を加えない場合の伝搬定数であり、$i = b$は金属膜を加えた場合である。(47)は$\delta$の1次の分散関係式であると言える。(47)の$\beta_{1i}$は$\omega_1$が$-\eta C < \omega_1 < \eta C$の周波数帯域内であると虚数となり、この帯域内ではコルゲーションによりBGS波が減衰し、阻止効果を与える。

ここで金属膜を加えた場合と加えない場合のブラッグの周波数($\omega_0$)附近のブリルアンダイアグラムを(47)を数値的に評価して描くと、図3および図4のごとくなる。この場合、$\eta$の値は10μm、コルゲーションの周期Cは10μmである。金属膜を加えない図3の場合、圧電係数$e_{15}$が-0.21から-1.47まで変えると、阻止帯域巾は5MHzから70MHzまで変化し、金属膜の無い図4の場合は10MHzから100MHzまで帯域巾は変化する。この結果から推察すると、金属膜があると帯域巾は広がることになる。なお、図中の実線は$\beta_{1i}$が虚数である場合の曲線である。

次に阻止帯域巾と圧電係数$e_{15}$との関係を明らかにする。

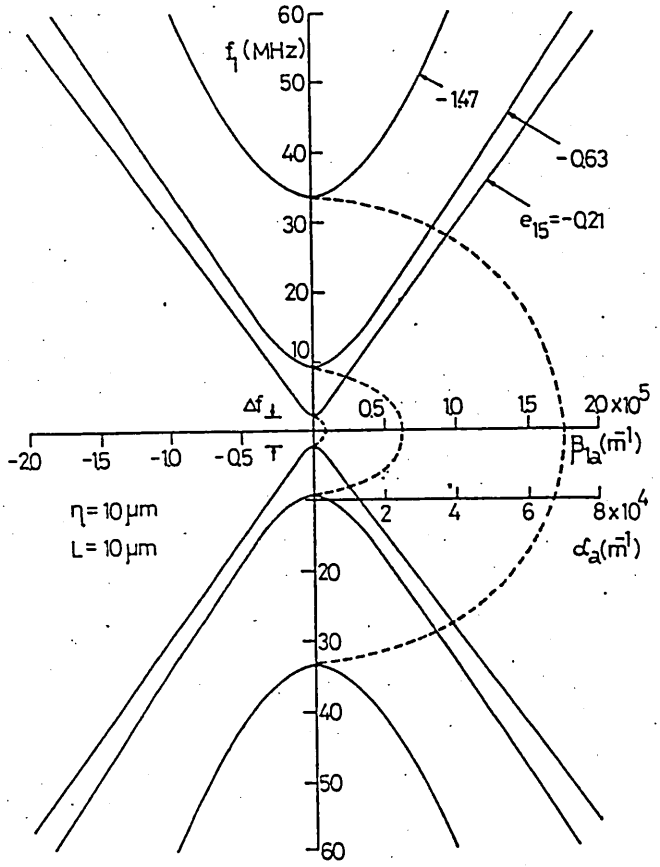



図3　金属膜が無い場合のブラッグの周波数の近くのブリルアンダイアグラム

図5はブラッグの周波数$f_0$（$\omega_0=2\pi f_0$）とコルゲーションの変調度$\eta$の積で規格化した阻止帯域巾$\Delta f$（$\Delta f/\eta f_0$）の圧電係数$e_{15}$の依存性を描いたものである。この図から阻止帯域巾は$e_{15}$が小さい場合$e_{15}$の自乗に比例して大きくなるが金属膜があると，帯域巾は金属膜が無い場合に比べて，1桁程大きくなる。しかしながら$e_{15}$の値が-2を越えると，金属膜はかえって帯域巾を狭めてしまう作用が表われ興味深

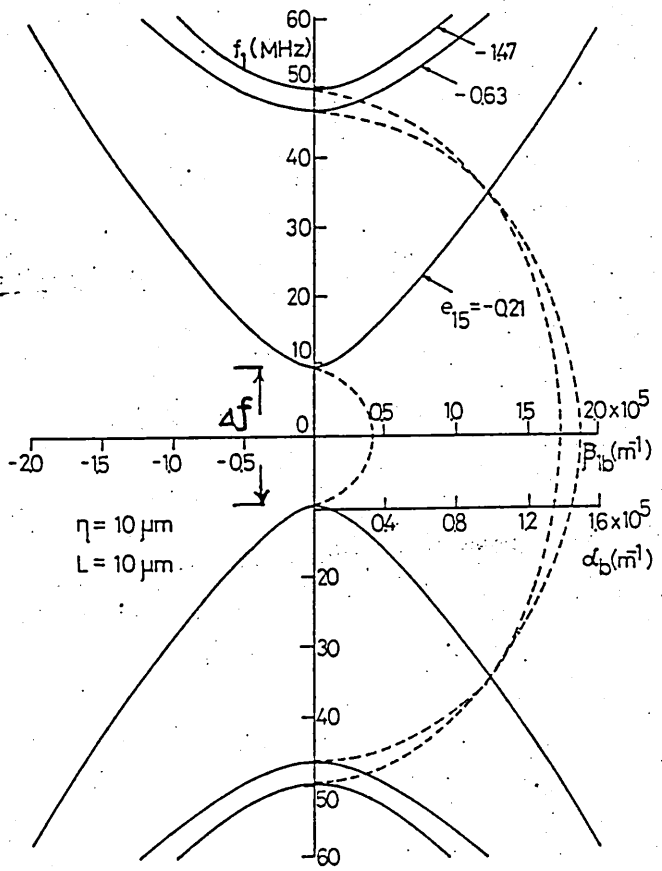



図4　金属膜を加えた場合のブラッグの周波数の近くのブリルアンダイアグラム

vl。

同じく、ここで阻止帯域内での波動の減衰定数の圧電係数$e_{15}$の依存性を評価する。この場合、(47)で$\omega_1=0$の場合、波動の減衰が最大となる。この最大の減衰を与える定数を$\alpha_{max}$とすると、

$$\alpha_{max}=\frac{C_i l}{v_{gi}} \qquad (48)$$

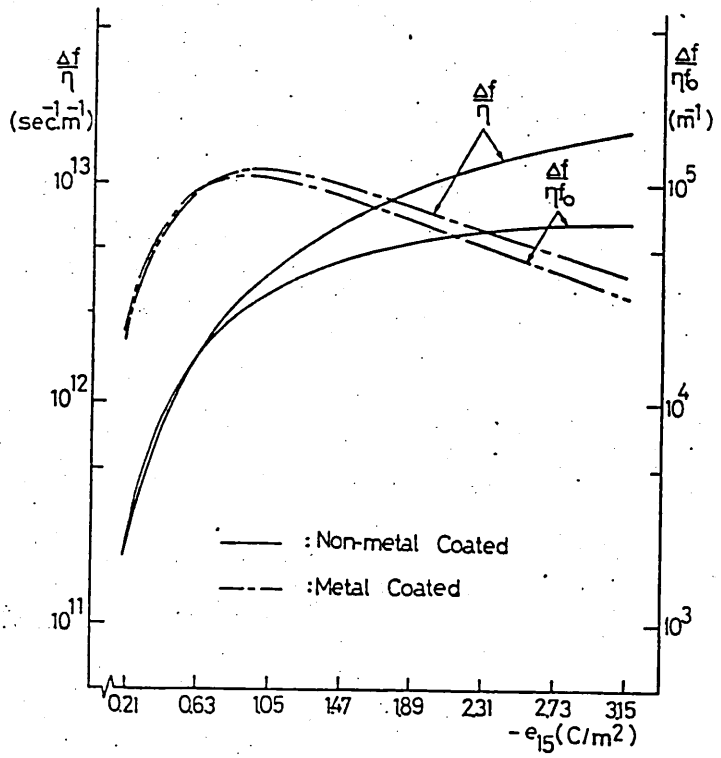



図5 阻止帯域巾と圧電性との関係

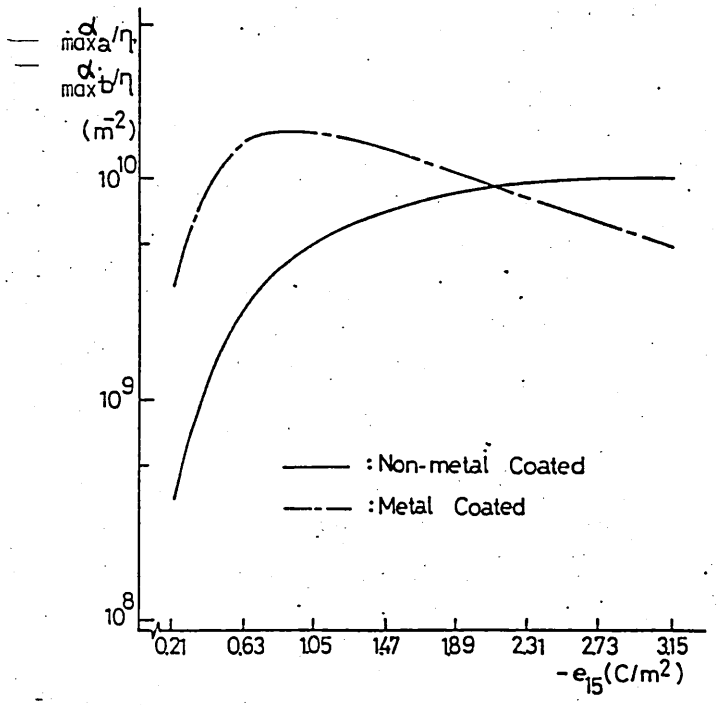



図6 減衰定数と圧電性との関係

となる。(48)の$\alpha_{max}$を$\eta$で規格化して圧電係数を変えて評価した結果を図6に示す。この場合も金属膜を加えると減衰が大きいが$C_{15}$がある値以上に大きくなると、かえって減衰量は減る。

以上の結果から、圧電係数が大きいと阻止帯域幅は広がることが分り、この帯域幅は同じ諸定数でレイリー波と比較した場合、少くとも1桁程度、広い[6]。

## 5. フィルタ特性

すでに求めたブリルアンダイアグラムからコルゲーションを装荷した圧電性媒質におけるBGS波のフィルタ特性の概略を把握することが出来るが、ここではより具体的な面からフィルタ特性を調べるために図7に示すように$y=0$と$y=D_1$の間に有限の長さで$N$個のコルゲーションを圧電媒質を装荷した場合のフィルタ特性を求める。

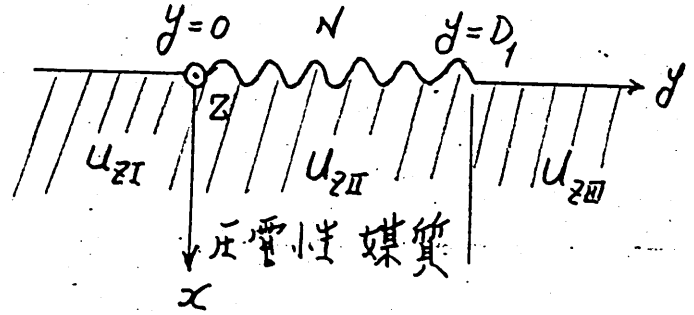



図7 有限の長さのコルゲーションを装荷したB-G-S導波路

この場合，基本となる解は $x=0$ における (23) の $u_{z0}$ である。$y$ 方向の領域ごとに $u_z$ を

$$u_{zI} = A_i e^{j\beta y_0} + A_r e^{-j\beta y_0}, \quad y<0 \qquad (49)$$

$$u_{zII} = B_0^+ e^{j\beta y_0} + B_0^- e^{-j\beta y_0} \quad 0 \leq D_1 \leq y \qquad (50)$$

ただし，

$$B_0^+ = F_1^+ e^{j\beta_1 y_1} + F_1^- e^{-j\beta_1 y_1},$$

$$B_0^- = \frac{\omega_1 - v_g\beta_1}{\eta C} F_1^+ e^{j\beta_1 y_1} + \frac{\omega_1 + v_g\beta_1}{\eta C} F_1^- e^{-j\beta_1 y_1},$$

$$u_{zIII} = A_t e^{j\beta(y_0 - D_1)} \quad y > D_1 \qquad (51)$$

と置く。ここに $A_i$ は入射波の振巾，$A_r$ は反射波，$A_t$ は透過波の振巾で $F_1^\pm$ は定数である。

$y=0$，$y=D_1$ において変位 $u_z$ が連続，および $y$ 方向の応力成分 $T_{yz}$ が連続である境界条件のもとに (49) ～ (51) を評価すると，

$$\Gamma = \frac{A_r}{A_i} = \Gamma_0 e^{j\theta} \qquad (52)$$

ただし $\Gamma_0 = \dfrac{j e^{j2\beta D_1} \eta C \sin 2\beta_1 D_1}{j\omega_1 \sin 2\beta_1 D_1 - \beta_1 v_g \cos 2\beta_1 D_1}$

$$\theta = 2\beta D_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\beta_1 v_g}{\omega_1}\cot 2\beta_1 D_1\right) = 2\beta D_1 - \theta_1$$

の形で求まる。ここにθはコルゲーションによる位相の変化量を示す。

(52)をコルゲーションの数を10個，周期10μmとし，ηが10μm，さらにすでに求めたブリルアンダイアグラムから求まる諸定数を用いて数値的に評価すると図8および図9のごとくフィルタ特性が求まる。

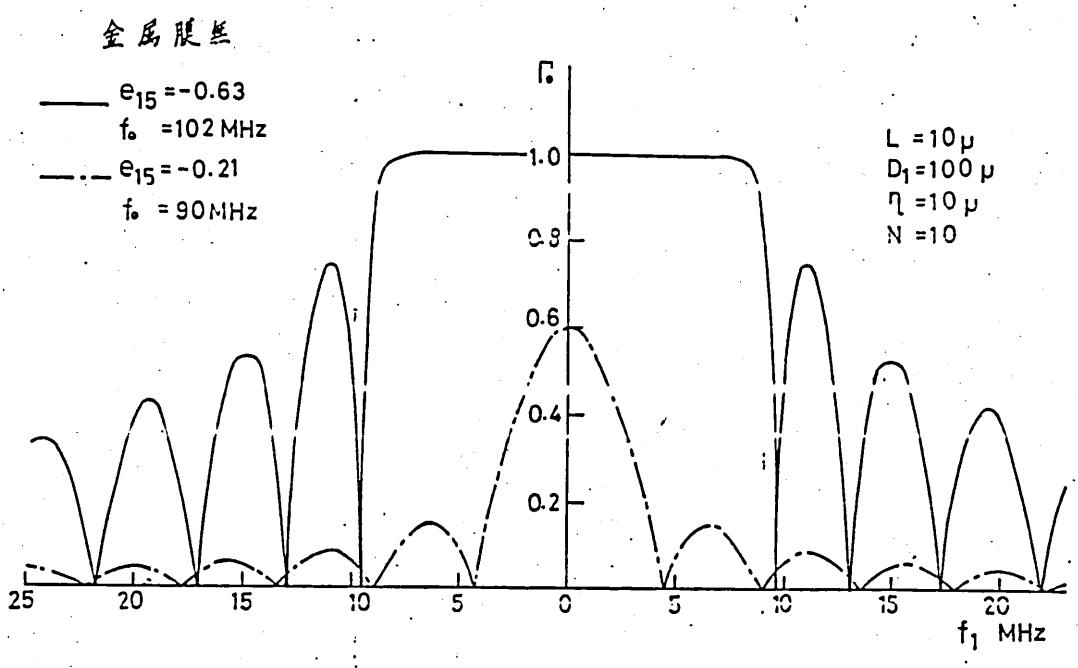



図8　金属膜が無い場合のBGS波のフィルタ特性

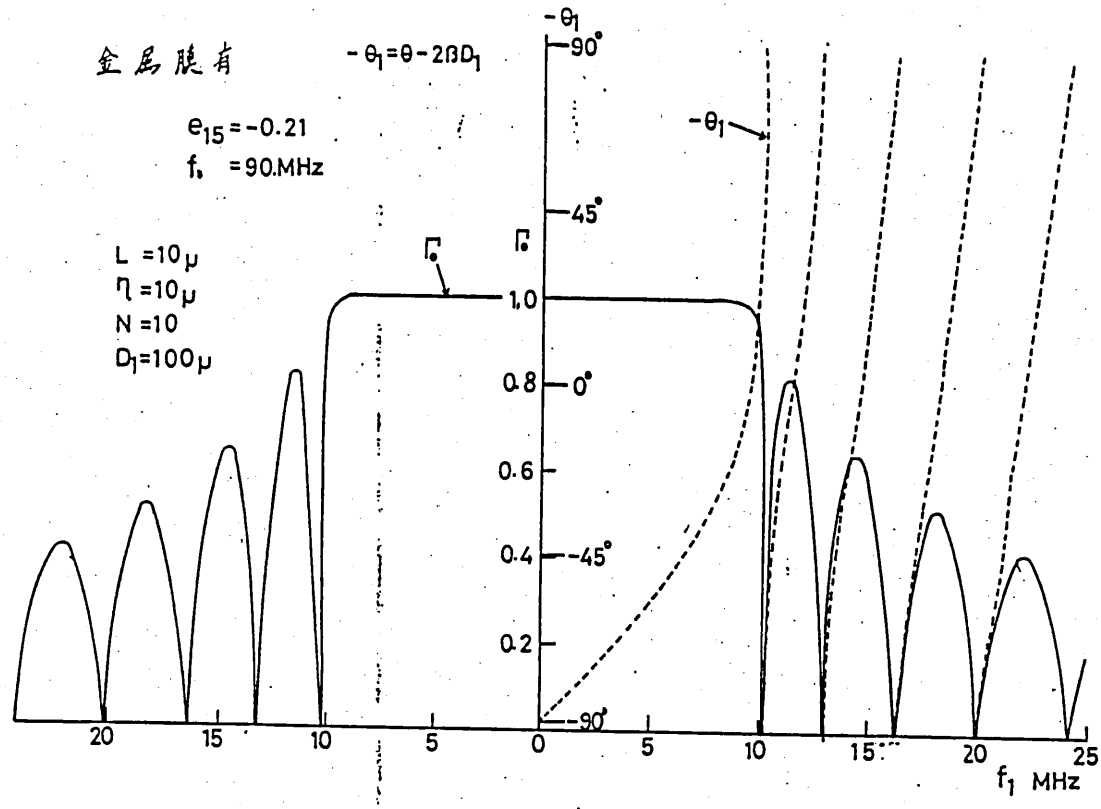



図9 金属膜がある場合のBGS波のフィルタ特性

図8の場合は金属膜が無い場合であり，$e_{15}$の値は-0.21と-0.63の2種類を選んでいる。また，図9は金属膜を加えた場合であり，この場合，$e_{15}$は-0.21である。これらの結果から，金属膜を加えた場合，中心周波数90MHzで10μmの周期のコルゲーションを10個圧電性媒質に装荷するだけで約20MHzの帯域巾を有するフィルタが実現できることになる。

## 6. むすび

コルゲーションを装荷した圧電性媒質におけるBGS弾性表面波のフィルタ特性をマルチプルスケール法により取り扱い，結合モード方程式を評価することにより，工学的に見通しの良い形でブリルアンダイアグラム，阻止帯域巾および減衰定数の圧電係数の依存性，さらに有限の巾にコルゲーションを装荷した場合のフィルタ特性を明らかにした。

これらの結果から，BGS波フィルタはレイリー波フィルタに比べてかなり帯域巾は広くなれ，かつ少ないコルゲーションの数で大きな阻止作用が表われるものと考える。また，帯域巾は圧電係数の自乗に比例して広がるので，圧電性が大きい材料ほど広帯域化に有利であると考えられるが一般に圧電性が大きい材料は誘電率も大きくなり（例えばPZTなど[11]），かえってこのことは広帯域化を妨げる。

今後，異なった2つの圧電性媒質にコルゲーションを装荷し，これらを空隙を介して近づけること，ならびにカスケード接続することなどによりBGS弾性表面波のローパスハイパスフィルタが実現可能であると考える。

## 謝辞

マルチプルスケール法による解析にたいして助言をいた

だいた本学産業科学研究所の張年鍾博士ならびに米国ウィスコンシン大学のS.R. Sadhadri教授に感謝の意を表わす。

文献

1) R.C. Williamson:
"Properties and applications of reflective-array devices",
Proc IEEE, Vol 64, No.5, PP 702-710 May 1976.
D.T. Bell, R.C. M.Li:
"Surface-acoustic-wave resonators",
Proc IEEE, Vol 64, No.5, PP 711-712 May 1976.
2) T. Kinoshita, M. Hikita, T. Taguchi and H. Kojima:
"Broad band resonant filter using surface shear wave mode and twin-turn reflector",
Electro. Litt., Vol. 15, No 4, PP130-131 Feb. 1979
3) 竹内, 清水:
"周期的に変形した表面を伝搬する漏洩弾性表面波",
日本音響学会講演論文集, PP. 473-474, (昭47年6月)
4) 河崎:
"Bluestein-Gulyaev波導波路のグレーティングの解析",
信学論誌, Vol J62B, No.6, PP 550-556 (昭54年6月)

5) S.R. Seshadri:
"Love wave interaction in a thin film with a periodic surface corrugation",
IEEE, Trans. Sonics & Ultrasonics, Vol SU-25 No.6, pp 378-383, Nov. 1978.
6) S.R. Seshadri:
"Effect of periodic surface corrugation on the propagation of Rayleigh waves,"
J. Acoust. Soc. Am., Vol. 65, No.3 pp. 687-694, Mar. 1979.
7) S.R. Seshadri:
"Asymtotic theory of mode coupling in a space-time periodic medium," - Part 1, Stable interactions, Proc IEEE., Vol. 65 No. 7, pp 996 - 1004. July 1977.
8) S.R. Seshadri:
"Theory of a YIG film filter."
Report on University of Wisconsin, Dept of Electrical & Computer Engineering, ECE-78-3, March 1978.
S.R. Seshadri;
"Magnetic wave interactions in a periodically

corrugated TIG film."
IEEE, Trans. MTT, Vol.27, No.2, pp199-204
Feb. 1979.
9) J. L. Bleustein:
"A new surface wave in piezoelectric materials",
Applied Phys. Lett., Vol.13, No.2, pp 412-413
Dec. 1968.
10) 堤, 桜井, 青柳:
"圧電性結晶平板を伝搬する弾性波",
信学論誌, Vol.54A, No.1, pp63-64, (昭46年1月)
11) B. A. Auld:
"Acoustic field and waves in solids",
New York, Vols 1 & 2, 1973.

Some Important Concepts in Maxwell's Theory

C. T. Tai
Radiation Laboratory
University of Michigan
and
Department of Electrical Communications
Tohoku University

## Introduction

In this report we will summarize some of the important concepts in electromagnetic theory which are perhaps useful in teaching and learning electromagnetic theory. The topics to be covered are :

a) Independent and dependent equations,

b) Indefinite and definite forms,

c) Integral form of Maxwell's theory,

d) Faraday's law for a moving contour,

e) Invariance of Maxwell's equations.

## Independent and Dependent Equations

From the logical point of view Maxwell's equations can be classified into two groups. One group consists of the independent equations ; they are

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3}$$

The two dependent equations are

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \tag{5}$$

Equation (4) can be derived from (1) because by taking the divergence of that equation we obtain

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) = 0$$

or

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \bar{B} \right) = 0$$

An integration of the above equation with respect to $t$ gives

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{B} \, dt = 0$$

If we put the constant of integration at $t = -\infty$ equal to zero we obtain

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

which is exactly Eq.(4). We, therefore, consider Eq.(4) as a dependent equation. Similarly, from Eqs.(2) and (3) we can derive Eq.(5). Thus, Eqs.(4) and (5) are not independent equations in the structure of Maxwell's theory.

## Indefinite and Definite Forms

The three independent equations described by Eqs.(1-3) are indefinite in the sense that we have sixteen scalar unknown quantities as each vector function has three components and there are five vectors functions, $\bar{E}$, $\bar{D}$, $\bar{B}$, $\bar{H}$, $\bar{J}$ plus one scalar function $\rho$. The number of scalar differential equations is only seven, described by two vector equations and one scalar equation. The number of scalar equations is less than the number of unknowns by nine. We, therefore, consider Eqs.(1-3) to be indefinite. In order to make the formulation definite we need nine more scalar relations. These are supplied by the constitutive relations, such as,

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \tag{6}$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \tag{7}$$

$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_a) \tag{8}$$

Equations (1-3) and (6-8) provide a definite form of Maxwell's theory. Based on these equations all the problems can be formulated.

Integral Form of Maxwell's Theory

The standard equations represent the integral form of Maxwell's theory are

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{\ell} = -\iint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{s} \tag{9}$$

$$\oint \bar{H}\cdot d\bar{\ell} = \iint \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right)\cdot d\bar{s} \tag{10}$$

$$\iint \bar{J}\cdot d\bar{s} = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv \tag{11}$$

Equation (9) can be derived from Eq. (1) provided that we assume $\hat{n}\times(\bar{E}_1-\bar{E}_2)=0$ at a boundary made of different media. This is due to the fact that if the tangential component of $\bar{E}$ is discontinuous across a boundary Stokes' theorem would read

$$\iint_S \nabla\times\bar{E}\cdot d\bar{s} = \oint_L \bar{E}\cdot d\bar{\ell} + \int_\ell (\bar{E}_1-\bar{E}_2)\cdot d\bar{\ell} \tag{12}$$

The region of integration and the contours $L$ and $\ell$ are shown in Fig. 1

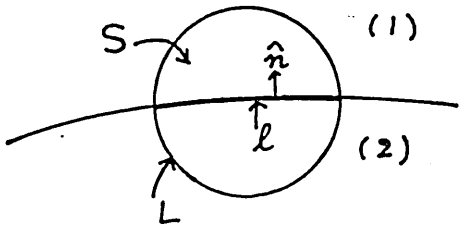



Fig. 1

Then an integration of Eq. (1) through a discontinuous medium would yield

$$\iint \nabla\times\bar{E}\cdot d\bar{s} = -\iint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{s}$$

$$\oint_L \bar{E}\cdot d\bar{\ell} + \int_\ell (\bar{E}_1-\bar{E}_2)\cdot d\bar{\ell} = -\iint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{s}$$

By discribing the integral form of Eq.(1) by

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\iint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} \tag{9}$$

it is implied that $\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0$ across a boundary separating two different media. In other words we have postulated Eq.(9) to be true even when the medium is discontinuons. The use of Eq.(9) to derive the boundary condition

$$\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \tag{10}$$

as often done in many books is, therefore, merely a redundant exercise to affirm the trueness of Eq.(10) which can only be verified by experiments, as witnessed by the validity of Snell's law and Fresnel's law. This exercise was precisely the dissertation topic of H. H. Lorentz. In view of this discussion we must convey the concept that Eq.(9) is more global than Eq.(1). The integral form as represented by Eq.(9) implies that the equation applies to discontinuous medium under the assumption that Eq.(10) holds true. The derivation of Eq.(1) from Eq.(9), on the other hand, is strict forward when we apply the integration to a small region and make use of the mean-value theorem in calculus, together with the definition of the curl operator. The previous argument also applies to the relationship between Eq.(2) and Eq.(10). In this case, the postulate is that $\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = 0$ across a discontinuous medium.

An alternative integral form of Maxwell's equations is sometimes useful ; they are

$$\oiint (\hat{n} \times \bar{E}) ds = -\iiint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} dv \tag{12}$$

$$\oiint (\hat{n} \times \bar{H}) ds = \iiint (\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) dv \tag{13}$$

$$\iint (\hat{n} \cdot \bar{D}) ds = \iiint \rho \, dv \tag{14}$$

These equation can be used to demonstrate the boundary conditions

$$\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0$$
$$\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = 0$$
$$\hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = 0$$

by merely applying Eqs. (12-14) to a small volume separating two media as shown in the following picture :

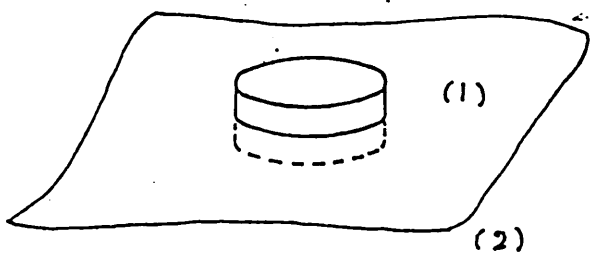



Fig. 2

Faraday's Law for a Moving Contour

Faraday's law is the foundation of electric generators and motors. In many textbooks its presentation is not clear. We will show the steps which will lead to ultimate form of the commonly used relation, namely,

$$E.M.F. = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{15}$$

It should be emphasized that the derivative of the magnetic flux $\Phi$ in (15) involves the total derivative, not the partial derivative.

We start with the integral form of Faraday's law as given by Eq. (9)

$$\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\iint_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} \tag{9}$$

When the contour L or a part of it is in the state of motion as shown in the picture we must distinguish the field $\bar{E}$ measured at a stationary station and the field $\bar{E}'$ measured at a moving station.

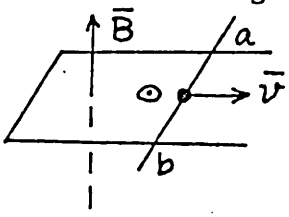



Fig. 3

A stationary station is shown in the picture by "$\odot$" and the corresponding moving station is shown by "$\bullet$" . The induced E. M. F. is measured in the circuit involving the moving part a-b. It is, therefore, the field $\bar{E}'$ which is responsible for the produce of the electromotive force. The relation between $\bar{E}$ and $\bar{E}'$ is governed by Lorentz law, i.e.

$$\bar{E}' = \bar{E} + \bar{v} \times \bar{B} \tag{16}$$

Equation (16) is a good approximation of a more precise relation derivable from the theory of relativity which will be elaborated in the next section. Substituting $\bar{E}$ from (16) into (9) we have

$$\oint \bar{E}' \cdot d\bar{l} = -\iint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} + \oint (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} \tag{17}$$

The integral $\oint \bar{E}' \cdot d\bar{l}$ is the measure of the induced E. M. F.. In vector analysis there is a theorem due to Helmhotz which states that

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \lim \frac{1}{\Delta t} \left[ \iint_{S(t+\Delta t)} \bar{F}(t+\Delta t) \cdot d\bar{s} - \iint_{S(t)} \bar{F}(t) \cdot d\bar{s} \right]$$

$$= \iint \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} - \nabla \times (\bar{v} \times \bar{F}) + \bar{v} \nabla \cdot \bar{F} \right) \cdot d\bar{s} \tag{18}$$

where $\bar{v}$ denotes the velocity of motion of the surface. When we identify $\bar{F}$ with $\bar{B}$ and make use of the magnetic Gauss law $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ Eq. (17) can be written in several forms

$$\oint \bar{E}' \cdot d\bar{l} = \begin{cases} -\iint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} + \oint (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} \\ -\iint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} + \iint \nabla \times (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{s} \\ -\frac{d}{dt} \iint \bar{B} \cdot d\bar{s} \end{cases} \tag{19}$$

The last line of Eq.(19) is the most compact and also the most convenient form of stating Faraday law involving a moving contour.

Similarly if we invoke the magnetic Lorentz law

$$\bar{H}' = \bar{H} - \bar{v} \times \bar{D} \tag{20}$$

where $\bar{H}$ and $\bar{H}'$ denote, respectively, the magnetic field measured at a stationary and a moving station, then the integral form of Ampere-Maxwell's law as stated by Eq.(10) can be changed to

$$\oint \bar{H}' \cdot d\bar{l} = \iint (\bar{J} - \rho \bar{v}) \cdot d\bar{s} + \frac{d}{dt} \iint \bar{D} \cdot d\bar{s} \tag{21}$$

where $\oint \bar{H}' \cdot d\bar{l}$ is the measure of the induced magnetomotive force in a contour involving a moving part with velocity $\bar{v}$. To demonstrate the validity of Eq.(21) we consider the problem of finding $\bar{H}'$ due to a stationary charge. Since the observer is in a state of motion, a stationary charge would appear to be a moving charge with respect to the observer. Applying Eq.(21) to the configuration shown below we obtain

$$\oint \bar{H}' \cdot d\bar{l} = 2\pi r H'_\phi$$

$$\iint \bar{D} \cdot d\bar{s} = \frac{q}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\tan\theta = \frac{r}{z}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\sin\theta}{R}\frac{dz}{dt} = -\frac{v \sin\theta}{R}$$

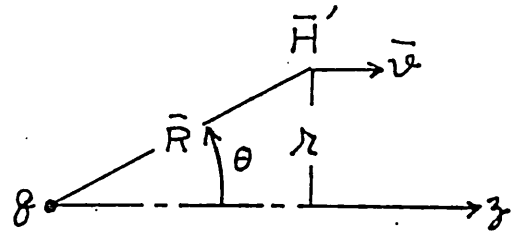



Fig. 4

hence

$$2\pi r H'_\phi = \frac{q}{2} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

therefore

$$H'_\phi = -\frac{q v \sin\theta}{4\pi R^2} \tag{22}$$

which is, of course, the same as the one obtained by means of the magnetic Lorentz law $\bar{H}' = -\bar{v} \times \bar{D}$

Invariance of Maxwell's Equations

In the indefinite form Maxwell's equations can be described by other field vectors, such as $\bar{E}, \bar{H}, \bar{P}, \bar{M}$, where the polarization vector $\bar{P}$ and the magnetization vector $\bar{M}$ are related to $\bar{E}, \bar{D}, \bar{H}, \bar{B}$, by

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \tag{23}$$

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) \tag{24}$$

The two principal equations in Maxwell's theory then would read

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\bar{H} + \bar{M}) \tag{25}$$

and

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) \tag{26}$$

Sometimes we designate $\frac{\partial \bar{P}}{\partial t}$ as the polarization current density and $\mu_0 \frac{\partial \bar{M}}{\partial t}$ as the magnetization current density. The use of these field vectors do not change the content of Maxwell's theory. Sometimes the physical nature of polarization and magnetization phenomenon can be better explained by using $\bar{P}$ and $\bar{M}$. The scope of the different forms of Maxwell's equations is further enlarged when the theory of relativity is considered.

According to Einstein all the physical laws must also obey the theory of relativity. In the realm of the special theory of relativity the space and time of two inertial systems obey the Lorentz transformation. For the orientation of the systems shown below, the transformation is described by

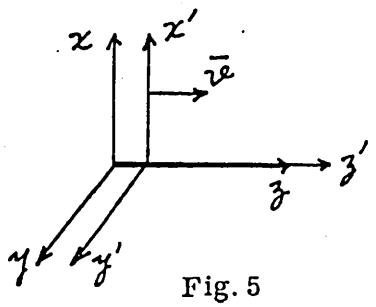



Fig. 5

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \quad y' = y \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (z - vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} z\right) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

where $\beta = v/c$ , C = velocity of light in vacuum.

The concept of invariance introduced by Einstein is that a physical law, such as Maxwell's theory, must have the same form in two systems, i.e.,

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\bar{E} &= -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}, & \nabla'\times\bar{E}' &= -\frac{\partial\bar{B}'}{\partial t'} \\ \nabla\times\bar{H} &= \bar{J}+\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} & \nabla'\times\bar{H}' &= \bar{J}'+\frac{\partial\bar{D}'}{\partial t'} \\ \nabla\cdot\bar{J} &= -\frac{\partial\rho}{\partial t} & \nabla'\cdot\bar{J}' &= -\frac{\partial\rho'}{\partial t'} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

where the primed variables are defined in the $(x', y', z', t')$ system, here by designated as the moving system.

Because of the relations described by Lorentz transformation we can change the unprimed differentiation to primed differentiation, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial z'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t}=\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial z'}\right)$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

The differential operators in the Maxwell's equations for the stationary system, therefore, can be changed into the differential operators for the moving system. As a result of the invariance the field equations the two sets of fields must be transformed according to the following relations :

$$\left.\begin{aligned} \bar{E}' &= \bar{\bar{\gamma}}\cdot(\bar{E}+\bar{v}\times\bar{B}), & \bar{B}' &= \bar{\bar{\gamma}}\cdot\left(\bar{B}-\frac{1}{c^2}\bar{v}\times\bar{E}\right) \\ \bar{H}' &= \bar{\bar{\gamma}}\cdot(\bar{H}-\bar{v}\times\bar{D}), & \bar{D}' &= \bar{\bar{\gamma}}\cdot\left(\bar{D}+\frac{1}{c^2}\bar{v}\times\bar{H}\right) \\ \bar{J}' &= \bar{\bar{\gamma}}_c\cdot(\bar{J}-\rho\bar{v}), & \rho' &= \bar{\bar{\gamma}}_c\cdot\left(\rho-\frac{1}{c^2}\bar{v}\cdot\bar{J}\right) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

where

$$\bar{\bar{\gamma}} = \gamma(\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y})+\hat{z}\hat{z}$$

$$\bar{\bar{\gamma}}_c = (\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y})+\gamma\hat{z}\hat{z}$$

If the vectors $\bar{E}, \bar{H}, \bar{P}, \bar{M}$ and $\bar{E}', \bar{H}', \bar{P}', \bar{M}'$ are used then the relations between $\bar{P}, \bar{M}$ and $\bar{P}', \bar{M}'$ are

$$\left.\begin{aligned} \bar{P}' &= \bar{\bar{\gamma}} \cdot \left(\bar{P} - \frac{1}{c^2}\bar{v} \times \bar{M}\right) \\ \bar{M}' &= \bar{\bar{\gamma}} \cdot \left(\bar{M} + \bar{v} \times \bar{P}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Because of these relations Maxwell's equations can now be described in many forms. For example, if the vectors $\bar{E}, \bar{H}, \bar{P}', \bar{M}'$ are used the two principal equation will have the form

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \bar{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mu_0 \left[\bar{H} + \bar{\bar{\gamma}} \cdot \left(\bar{M}' - \bar{v} \times \bar{P}'\right)\right] \\ \nabla \times \bar{H} &= \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon_0 \bar{E} + \bar{\bar{\gamma}} \cdot \left(\bar{P}' + \frac{1}{c^2}\bar{v} \times \bar{M}'\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

These two equations were shown first by M. Born (1910).

Another form of the equations which was originated found by Chu (1960) using a kinematic method. Unfortunately he did not recognize that it is one of the forms derivable from an invariance consideration. We will now derive this form based on Born's equations. Let us introduce four new field vectors, $\bar{E}c, \bar{H}c, \bar{P}c$ and $\bar{M}c$ defined by

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\bar{\gamma}} \cdot \bar{P}' = \bar{P}_c \quad , \quad \bar{\bar{\gamma}} \cdot \bar{M}' = \bar{M}_c \\ &\epsilon_0 \bar{E} + \frac{1}{c^2}\bar{\bar{\gamma}} \cdot \left(\bar{v} \times \bar{M}'\right) = \epsilon_0 \bar{E}_c \\ &\bar{H} - \bar{\bar{\gamma}} \cdot \left(\bar{v} \times \bar{P}'\right) = \bar{H}_c \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

In terms of these four field vectors Eq. (31) can be changed to

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \left(\bar{E}_c - \mu_0 \bar{v} \times \bar{M}_c\right) &= -\frac{\partial}{\partial t}\mu_0 \left(\bar{H}_c + \bar{M}_c\right) \\ \nabla \times \left(\bar{H}_c + \bar{v} \times \bar{P}_c\right) &= \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \bar{E}_c + \bar{P}_c\right) \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

These are the equations found by Chu without recognizing that they are another invariant form of Maxwell's equations. In fact, it can be shown

$$\left.\begin{aligned} \bar{E} + \bar{v} \times \bar{B} &= \bar{E}_c + \mu_0 \bar{v} \times \bar{H}_c \\ \bar{H} - \bar{v} \times \bar{D} &= \bar{H}_c - \epsilon_0 \bar{v} \times \bar{E}_c \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

These relations are the justification of Chu's postulates that $\bar{E}_c + \mu_0 \bar{v} \times \bar{H}_c$ represents the force on a moving unit electric charge and $\bar{H}_c - \epsilon_0 \bar{v} \times \bar{E}_c$ represents the force on a moving unit magnetic charge. In Chu's formulation it is necessary to introduce the concept of magnetic charge which is known to be non-existent.

Based on the transformation of the field vectors as described by Eqs. (29) Minkowski (1909) has found the constitutive relations for a moving isotropic medium. In such a medium

$$\bar{D}' = \epsilon \bar{E}', \quad \bar{B}' = \mu \bar{H}' \tag{35}$$

then according to Eq. (29), one has

$$\left.\begin{aligned} \bar{B} - \frac{1}{c^2} \bar{v} \times \bar{E} &= \mu (\bar{H} - \bar{v} \times \bar{D}) \\ \bar{D} + \frac{1}{c^2} \bar{v} \times \bar{H} &= \epsilon (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

These relations were originally derived by Minkowski. By eliminating $\bar{B}$ or $\bar{D}$ in Eq. (36) we obtain

$$\left.\begin{aligned} \bar{D} &= \epsilon \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{E} + \bar{\Omega} \times \bar{H} \\ \bar{B} &= \mu \bar{\bar{\alpha}} \cdot \bar{H} - \bar{\Omega} \times \bar{E} \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

where

$$\bar{\Omega} = \frac{(n^2 - 1)\beta}{(1 - n^2\beta^2)c} \hat{z}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad n^2 = \frac{\mu\epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha(\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}) + \hat{z}\hat{z}, \quad \alpha = \frac{1 - \beta^2}{1 - n^2\beta^2}$$

Mawwell's equations in moving isotropic media then read

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\bar{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\bar{\bar{\alpha}}\cdot\bar{H} - \bar{\Omega}\times\bar{E}) \\ \nabla\times\bar{H} &= \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\bar{\bar{\alpha}}\cdot\bar{E} + \bar{\Omega}\times\bar{H}) \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

These equations can be solved to study the radiation of antennas placed in such a medium (Tai, 1965)

## References


1) C.T.Tai, " On the Presentation of Maxwell's Theory ", Proc.IEEE, Vol.60, pp.936-945, August,1972.

2) S.A.Schelkunoff, " On Teaching the Undergraduate Electomagnetic Theory ", IEEE Trans. Educ., Vol.E-15, pp.15-25, February,1972.

3) C.T.Tai, " Present Views on Electrodynamics of Moving Media ", Radio Science, Vol.2, pp.245-248, February,1967.

4) R.M.Fano, L.J.Chu, and R.B.Adler, Electromagnetic Fields, Energy, and Forces, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960

5) H.Minkowski, " Die Grundgleichen fur die Elektromagnetischen Vorgange in Bewegten Korpern, " Gottingen Nachrichten, pp.33-116, 1909.

6) C.T.Tai, " The Dyadic Green's Function for a Moving Isotropic Medium ", IEEE Trans. A-P 13, pp.322-323, 1965.

輻射科学研究会資料

# 結合したスロット一線状導体アンテナの理論的解析

西尾仁志、小南昌信　六島克
（大阪府立大学　工学部）

昭和54年12月7日

## 1. まえがき

スロットアンテナと線状導体アンテナを結合させることにより、スロット単独や線状導体単独では持ち得ないような特性を得ようとする研究は古くからなされている。[1] 磁流源としてのスロットアンテナからの放射と、電流源としての線状導体アンテナからの放射は、Maxwell の方程式が、電界と磁界に対して互いに対称であることからわかるように、互いに相補的関係を持っている。したがって、これらの素子を適当に組み合わせれば、線状導体ではかなり複雑な形状でしか与えられなかった特性を、単純な形状で構成する事が可能である。たとえば、スロットの両側に2本の非励振モノポールや逆L形アンテナを付加することにより、スロットに対するE，H両面の指向性を一致させたアンテナ、[2][3] スロットと近接したダイポールなどに適当な励振位相差を与え、円偏波を得ようとするアンテナ[4][5] などが提案されている。

本報告では、従来実験的検討が中心で比較的単純な場合に限られていた、これらのスロット－線状導体混合型アンテナについても、先に線状導体系アンテナで提案してきた理論的取り扱い法[6][7] が拡張できることを示し、閉じた形の核を持つ一般的な Hallen型積分方程式を与え

ている。これにより、曲がりなどを持つスロットと線状導体両アンテナからなるかなり複雑なアンテナ系についても統一的に解析することができ、非常に有用なものと考えられる。数種の電磁流混合型アンテナについて数値計算をおこない、さらに実測データとの比較により、その有効性を確認している。

## 2. 電磁界の表現式

図1のように$x$-$y$平面内にある大地板上に$N_s$個のスロットが切られ、$z \geq 0$の半空間内に$N_c$個の線状導体が置かれた、スロット—線状導体混合型アンテナ系について考える。

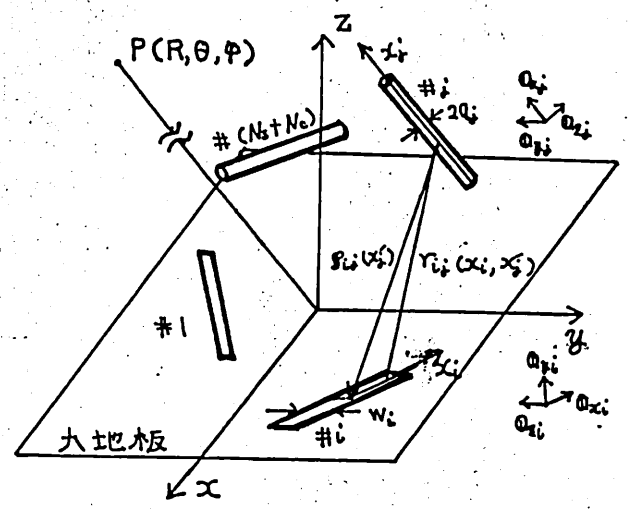



図1 スロット—線状導体混合アンテナ系

まず各スロット（$i = 1, 2, ---, N_s$）および線状導体（$i = N_s+1, N_s+2, ---, N_s+N_c$）に対して、それぞれ独立に直角座標系（$(x_i, y_i, z_i)$ $i = 1, 2, ---, N_s+N_c$）を設ける。この時、$x_i$軸は各素

子軸に一致させるようにする。

さて、スロットと線状導体各素子の幅 $w_i$ および半径 $a_i$ は、その素子の長さ $h_i$ に比べて充分に小さく、スロット面および線状導体表面での磁流と電流は、軸方向のみに流れていると仮定する。

この条件のもとにおいて、第 $i$ 素子表面上における磁気的および電気的ベクトルポテンシャル（$\mathbb{F}_i(x_i)$, $\mathbb{A}_i(x_i)$）は、各素子ならびにその素子の大地面における影像からの寄与の和として、次のような式で表現される。

$$\mathbb{F}_i(x_i)=\sum_{j=1}^{N_s}\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{h_j} I_j(x_j')\,\mathbb{a}_{x_i}\,\psi_{ij}(x_i,x_j')\,dx_j' \qquad (1)$$

$$\mathbb{A}_i(x_i)=\sum_{j=N_s+1}^{N_s+N_c}\frac{\mu}{4\pi}\int_{h_j} I_j(x_j')\Big\{\mathbb{a}_{x_i}\,\psi_{ij}(x_i,x_j') - \mathbb{a}_{x_i}\,\psi_{ij}^{\dagger}(x_i,x_j')\Big\}\,dx_j' \qquad (2)$$

ここで式(2)における $\psi_{ij}(x_i,x_j')$ の肩の記号 † は 影像に関する量であることを示している。 さらに $I_j(x_j')$ は、磁流（$j=1,2,\cdots,N_s$）および電流（$j=N_s+1,N_s+2,\cdots N_s+N_c$）を表わしている。 また $\psi_{ij}(x_i,x_j')$ は、自由空間におけるグリーン関数で、次のように表現される。

$$\psi_{ij}(x_i,x_j')=\frac{e^{-j\beta r_{ij}(x_i,x_j')}}{r_{ij}(x_i,x_j')} \qquad (3)$$

ここで $r_{ij}(x_i,x_j')$ は、図1中に示されているように第

$i$ 素子上の点 $x_i'$ と第 $j$ 素子上の点 $x_j'$ の間の距離を表わしており、これはまた図中におけるベクトル $\rho_{ij}(x_j')$ と第 $i$ 素子における単位ベクトル $(a_{xi}, a_{yi}, a_{zi})$ によって 次のように表現される。

$$r_{ij}(x_i, x_j') = \left[\left\{x_i + \rho_{ij}(x_j')\cdot a_{xi}\right\}^2 + \left\{\rho_{ij}(x_j')\cdot a_{yi}\right\}^2 + \left\{\rho_{ij}(x_j')\cdot a_{zi}\right\}^2 + b_i^2\right] \quad (4)$$

$$b_i = \begin{cases} W_i/4 & (i = 1, 2, ---, N_s) \\ a_i & (i = N_s+1, N_s+2, ---, N_s+N_c) \end{cases} \quad (5)$$

Maxwell の電磁界方程式のベクトルポテンシャルによる表現式から、電気的および磁気的ベクトルポテンシャル $(\mathbb{F}_i(x_i), \mathbb{A}_i(x_i))$ を使って、スロット面上における磁界と、線状導体表面上の電界 $(\mathbb{H}_i^{\pm}(x_i), \mathbb{E}_i(x_i))$ は、次のように表現される。

$$\mathbb{H}_i^{\pm}(x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\mathbb{A}_i(x_i) - j\dfrac{\omega}{\beta^2}\left\{\beta^2\mathbb{F}_i(x_i) + \nabla\nabla\cdot\mathbb{F}_i(x_i)\right\} & (z \geq 0) \\ j\dfrac{\omega}{\beta^2}\left\{\beta^2\mathbb{F}_i(x_i) + \nabla\nabla\cdot\mathbb{F}_i(x_i)\right\} & (z \leq 0) \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, ---, N_s) \quad (6)$$

$$\mathbb{E}_i(x_i) = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbb{F}_i(x_i) - j\frac{\omega}{\beta^2}\left\{\beta^2\mathbb{A}_i(x_i) + \nabla\nabla\cdot\mathbb{A}_i(x_i)\right\}$$
$$(i = N_s+1, N_s+2, ---, N_s+N_c) \quad (7)$$

ここで式(6)における $\mathbb{H}_i^{\pm}(x_i)$ の肩の $\pm$ は、$x-y$ 面の $z \geq 0$ および $z \leq 0$ の半空間での磁界を示している。

磁気的スカラーポテンシャル$\phi_i^*(x_i)$は、電気的ベクトルポテンシャル$\mathbb{F}_i(x_i)$を使って、また電気的スカラーポテンシャル$\phi_i(x_i)$は、磁気的ベクトルポテンシャル$\mathbb{A}_i(x_i)$を使って次のような式で表現される。

$$\phi_i^*(x_i)=j\frac{\omega}{\beta^2}\left\{\nabla\cdot\mathbb{F}_i(x_i)\right\} \qquad (i=1,2,---,N_s) \qquad (8)$$

$$\phi_i(x_i)=j\frac{\omega}{\beta^2}\left\{\nabla\cdot\mathbb{A}_i(x_i)\right\} \qquad (i=N_s+1,N_s+2,---,N_s+N_c) \qquad (9)$$

## 3. 積分方程式および付加条件

スロット面上での磁界および線状導体表面での電界について、それぞれの軸方向成分は次のような境界条件を満たす必要がある。

$$\left\{\mathbb{H}_i^+(x_i)-\mathbb{H}_i^-(x_i)\right\}\cdot\mathbb{a}_{x_i}=0 \qquad (i=1,2,---,N_s) \qquad (10)$$

$$\mathbb{E}_i(x_i)\cdot\mathbb{a}_{x_i}=0 \qquad (i=N_s+1,N_s+2,---,N_s+N_c) \qquad (11)$$

式(1),(2),(6),(7)をこの関係式に代入し、整理すると、線状導体アンテナ系における場合と同様に、[6][7] スロット—線状導体混合型アンテナ系についても次に示すように、Hallen型積分方程式を得ることができる。

$$B_i\cos\beta x_i+C_i\sin\beta x_i=\sum_{j=1}^{N_s+N_c}\int_{\ell_j}I_j(x_j')K_{ij}(x_i,x_j')dx_j' \qquad (i=1,2,---,N_s+N_c) \qquad (12)$$

ここで $B_i$ および $C_i$ は任意定数であり、微分および積分を含む積分核 $K_{ij}(x_i, x_j')$ は次のように表現される。

$$
K_{ij}(x_i, x_j') =
\begin{cases}
j\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\Big[a_{x_i}\cdot a_{x_j}\,\psi_{ij}(x_i, x_j') \\
\quad +\displaystyle\int_0^{x_i}\left\{a_{y_i}\cdot a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} + a_{z_i}\cdot a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i}\right\}\cos\beta(x_i-\xi_i)\,d\xi_i\Big] \\
\qquad (i=1,2,\cdots,N_s \quad j=1,2,\cdots,N_s) \\[2ex]
-\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_0^{x_i}\Big[a_{z_i}\cdot\left\{a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} - a_{x_j}^{\dagger}\dfrac{\partial\psi_{ij}^{\dagger}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i}\right\} \\
\quad -a_{y_i}\cdot\left\{a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i} - a_{x_j}^{\dagger}\dfrac{\partial\psi_{ij}^{\dagger}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i}\right\}\Big]\sin\beta(x_i-\xi_i)\,d\xi_i \\
\qquad (i=1,2,\cdots,N_s \quad j=N_s+1, N_s+2,\cdots,N_s+N_c) \\[2ex]
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{x_i}\left\{a_{z_i}\cdot a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} - a_{y_i}\cdot a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i}\right\}\sin\beta(x_i-\xi_i)\,d\xi_i \\
\qquad (i=N_s+1, N_s+2,\cdots,N_s+N_c \quad j=1,2,\cdots,N_s) \\[2ex]
j\dfrac{1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\Big[a_{x_i}\cdot\left\{a_{x_j}\psi_{ij}(x_i, x_j') - a_{x_j}^{\dagger}\psi_{ij}^{\dagger}(x_i, x_j')\right\} \\
\quad +\displaystyle\int_0^{x_i}\Big[a_{y_i}\cdot\left\{a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} - a_{x_j}^{\dagger}\dfrac{\partial\psi_{ij}^{\dagger}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i}\right\} \\
\quad +a_{z_i}\cdot\left\{a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i} - a_{x_j}^{\dagger}\dfrac{\partial\psi_{ij}^{\dagger}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i}\right\}\Big]\cos\beta(x_i-\xi_i)\,d\xi_i\Big] \\
\qquad (i=N_s+1, N_s+2,\cdots,N_s+N_c \quad j=N_s+1, N_s+2,\cdots,N_s+N_c)
\end{cases}
\tag{13}
$$

スロットと線状導体素子上の磁流および電流分布は、式(12)の積分方程式を解くことにより決定される。し

かし一般に特殊な場合を除いて、解析的に解くことは困難であり、適当な数値解法が使用される。[9] なお、式(12)中の任意定数$B_i$, $C_i$ ($i=1,2,---,N_s+N_c$)は、磁流および電流($I_j(x_j)$)そして磁気的および電気的スカラーポテンシャル($\phi^*(x_i)$, $\phi(x_i)$)の境界条件を積分方程式に付加することによって、磁流と電流と同時に決定される。この場合、付加条件として次の3種類が考えられる。

(a) 開放端条件

開放した素子端では、磁流値と電流値は0となる。

(b) 接合部条件

複数個の素子が接合した点では、磁流値と電流値がKirchhoffの電流則を満たし、磁気的および電気的スカラーポテンシャルは連続する。

(c) 励振部条件

磁気的スカラーポテンシャルの差の2倍が励振源電流値に、また電気的スカラーポテンシャルの差が線状導体の励振源電圧値に一致する。また励振点での磁流値と電流値は連続する。

なお磁気的スカラーポテンシャル($\phi_i^*(x_i)$ $i=1,2,---,N_s$)および電気的スカラーポテンシャル($\phi_i(x_i)$ $i=N_s+1,N_s+2$

---, $N_s+N_c$) に対する表現式は、式(8),(9)を使って統一的に次のように表現される。

$$\phi_i(x_i) = -B_i \sin\beta x_i + C_i \cos\beta x_i + \sum_{j=1}^{N_s+N_c} \int_{\ell_j} I_j(x_j') L_{ij}(x_i, x_j') dx_j'$$

$$(i = 1, 2, ---, N_s+N_c) \qquad (14)$$

ここで核 $L_{ij}(x_i, x_j')$ は、次のように表現される。

$$L_{ij}(x_i, x_j') = \begin{cases} j\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\displaystyle\int_0^{x_i}\left\{a_{y_i}\cdot a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} + a_{z_i}\cdot a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i}\right\}\sin\beta(x_i-\xi_i)d\xi_i \\ \qquad (i=1,2,---,N_s \quad j=1,2,---,N_s) \\ \dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int_0^{x_i}\left[a_{z_i}\left\{a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} - a_{x_j}^{\dagger}\dfrac{\partial\psi_{ij}^{\dagger}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i}\right\}\right. \\ \qquad \left. - a_{y_i}\left\{a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i} - a_{x_j}^{\dagger}\dfrac{\partial\psi_{ij}^{\dagger}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i}\right\}\right]\cos\beta(x_i-\xi_i)d\xi_i \\ \qquad (i=1,2,---,N_s, \quad j=N_s+1, N_s+2, ---, N_s+N_c) \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{x_i}\left\{a_{y_i}\cdot a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} - a_{z_i}\cdot a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i}\right\}\cos\beta(x_i-\xi_i)d\xi_i \\ \qquad (i=N_s+1, N_s+2, ---, N_s+N_c \quad j=1,2,---,N_s) \\ j\dfrac{1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\displaystyle\int_0^{x_i}\left[a_{z_i}\cdot\left\{a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} - a_{x_j}^{\dagger}\dfrac{\partial\psi_{ij}^{\dagger}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i}\right\}\right. \\ \qquad \left. + a_{y_i}\left\{a_{x_j}\dfrac{\partial\psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i} - a_{x_j}^{\dagger}\dfrac{\partial\psi_{ij}^{\dagger}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i}\right\}\right]\sin\beta(x_i-\xi_i)d\xi_i \\ \qquad (i=N_s+1, N_s+2, ---, N_s+N_c \quad j=N_s+1, N_s+2, ---, N_s+N_c) \end{cases} \qquad (15)$$

なお積分方程式(13),(15)における微分と積分を含む項は、フーリエ変換を利用する方法[6][7]により閉じた形で表わされ、それらの式をまとめると次のようになる。

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_0^{x_i} \frac{\partial \psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} \cos\beta(x_i-\xi_i)\,d\xi_i = \rho_{ij}(x_j')\cdot a_{3i}\, g_{ij}(x_i, x_j') \\
\displaystyle\int_0^{x_i} \frac{\partial \psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i} \cos\beta(x_i-\xi_i)\,d\xi_i = \rho_{ij}(x_j')\cdot a_{2i}\, g_{ij}(x_i, x_j') \\
\displaystyle\int_0^{x_i} \frac{\partial \psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial y_i} \sin\beta(x_i-\xi_i)\,d\xi_i = \rho_{ij}(x_j')\cdot a_{3i}\, f_{ij}(x_i, x_j') \\
\displaystyle\int_0^{x_i} \frac{\partial \psi_{ij}(\xi_i, x_j')}{\partial z_i} \sin\beta(x_i-\xi_i)\,d\xi_i = \rho_{ij}(x_j')\cdot a_{2i}\, f_{ij}(x_i, x_j')
\end{cases}
\tag{16}
$$

ここで $g_{ij}(x_i, x_j')$, $f_{ij}(x_i, x_j')$ は次のように示される。

$$
\begin{aligned}
g_{ij}(x_i, x_j') = \frac{-1}{(\rho_{ij}(x_j')\cdot a_{3i})^2 + (\rho_{ij}(x_j')\cdot a_{2i})^2 + b_i^2} \Big\{ & (x_i + \rho_{ij}(x_j')\cdot a_{xi})\,\psi_{ij}(x_i, x_j') \\
& - (\rho_{ij}(x_j')\cdot a_{xi}) \cos\beta x_i \cdot \psi_{ij}(0, x_j') + j \sin\beta x_i \cdot e^{-j\beta r_{ij}(0, x_j')} \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{ij}(x_i, x_j') = \frac{-1}{(\rho_{ij}(x_j')\cdot a_{3i})^2 + (\rho_{ij}(x_j')\cdot a_{2i})^2 + b_i^2} \Big\{ & j e^{-j\beta r_{ij}(x_i, x_j')} \\
& - (\rho_{ij}(x_j')\cdot a_{xi}) \sin\beta x_i\, \psi_{ij}(0, x_j') - j \cos\beta x_i\, e^{-j\beta r_{ij}(0, x_j')} \Big\}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

## 4. 放射界

磁流および電流分布が定まれば、遠方点 $P(R, \theta, \varphi)$

における電界と磁界は、次のように表現される。

$$\mathbb{E}=-j\frac{\beta}{4\pi}\frac{e^{-j\beta R}}{R}\left\{\sum_{i=1}^{N_s}\mathbb{a}_{x_i}\times\mathbb{a}_r\int_{\ell_i}2I_i(x_i)e^{j\beta\mathbb{d}_i(x_i)\cdot\mathbb{a}_r}dx_i\right.$$
$$\left.+\sum_{i=N_s+1}^{N_s+N_c}(\mathbb{a}_r\times\mathbb{a}_{x_i})\times\mathbb{a}_r\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_{\ell_i}I_i(x_i)e^{j\beta\mathbb{d}_i(x_i)\cdot\mathbb{a}_r}dx_i\right\}\quad(18)$$

$$\mathbb{H}=-j\frac{\beta}{4\pi}\frac{e^{-j\beta R}}{R}\left\{\sum_{i=1}^{N_s}\mathbb{a}_r\times(\mathbb{a}_{x_i}\times\mathbb{a}_r)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int_{\ell_i}2I_i(x_i)e^{j\beta\mathbb{d}_i(x_i)\cdot\mathbb{a}_r}dx_i\right.$$
$$\left.+\sum_{i=N_s+1}^{N_s+N_c}\mathbb{a}_r\times(\mathbb{a}_r\times\mathbb{a}_{x_i})\times\mathbb{a}_r\int_{\ell_i}I_i(x_i)e^{j\beta\mathbb{d}_i(x_i)\cdot\mathbb{a}_r}dx_i\right\}\quad(19)$$

ここで $\mathbb{d}_i(x_i)$ は原点から第 $i$ 素子上の点 $x_i$ に向かうベクトル、また $(\mathbb{a}_r, \mathbb{a}_\theta, \mathbb{a}_\varphi)$ は、$(R, \theta, \varphi)$ における単位ベクトルで、それぞれ次のように表わされる。

$$\mathbb{d}_i(x_i)=\ell_{0i}(x_i)\cdot\mathbb{a}_x+\ell_{0i}(x_i)\cdot\mathbb{a}_y+\ell_{0i}(x_i)\cdot\mathbb{a}_z\quad(20)$$

$$\begin{cases}\mathbb{a}_r=\sin\theta\cos\varphi\cdot\mathbb{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\cdot\mathbb{a}_y+\cos\theta\cdot\mathbb{a}_z\\ \mathbb{a}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\cdot\mathbb{a}_x+\cos\theta\sin\varphi\cdot\mathbb{a}_y-\sin\theta\cdot\mathbb{a}_z\\ \mathbb{a}_\varphi=-\sin\varphi\cdot\mathbb{a}_x+\cos\varphi\cdot\mathbb{a}_y\end{cases}\quad(21)$$

電界が与えられれば、それによるアンテナ系における指向性利得は、次の式により求めることができる。

$$P_0(R,\theta,\varphi)=4\pi R^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\mathbb{E}\cdot\mathbb{E}^*}{\sum_{i=1}^{N_s+N_c}V_{0i}I_i^*(0)}\quad(22)$$

ここで $*$ は複素共役を表わし、$V_{0i}$ は各素子の励振電流（$i=1,2,---,N_s$）または励振電圧（$i=N_s+1, N_s+2, ---, N_s+N_c$）を表わす。

## 5. 計算結果および考察

スロットおよび線状導体アンテナ系における磁流と電流分布に関する積分方程式の数値解法としては、Galerkin法，モーメント法，ポイントマッチング法などがよく使用される。[9] ここではHallen型積分方程式と組み合わすと、計算量が少なく精度のよい解が得られるポイントマッチング法を用いている。[9] また磁流および電流の展開関数としては、比較的簡単で素子長が短かい場合に収束性のよい次式で示されるようなべき多項式[10]を使用し、式(12)のHallen型積分方程式を解いている。

$$I_i(x_i)=\sum_{m=1}^{M} I_{im}\left(1-\frac{x_i}{h_i}\right)^{m-1} \qquad (23)$$

ここで$I_{im}$は磁流および電流の未知係数、Mは近似項数である。

前章まで示した理論的解析法の妥当性と有効性を確認するために、ここでは数種のスロット—線状導体混合型アンテナ系についておこなった数値計算結果と実測データを比較して示す。まず図2は式(23)の展開項数Mによる解の収束性を、スロット—モノポールアンテナのスロットにおける磁流分布によって調べたものである。この図からM=5で充分な精度が得られることがわかる。

したがって、以下の数値計算例においては、磁流および電流の展開項数は5項を使用している。

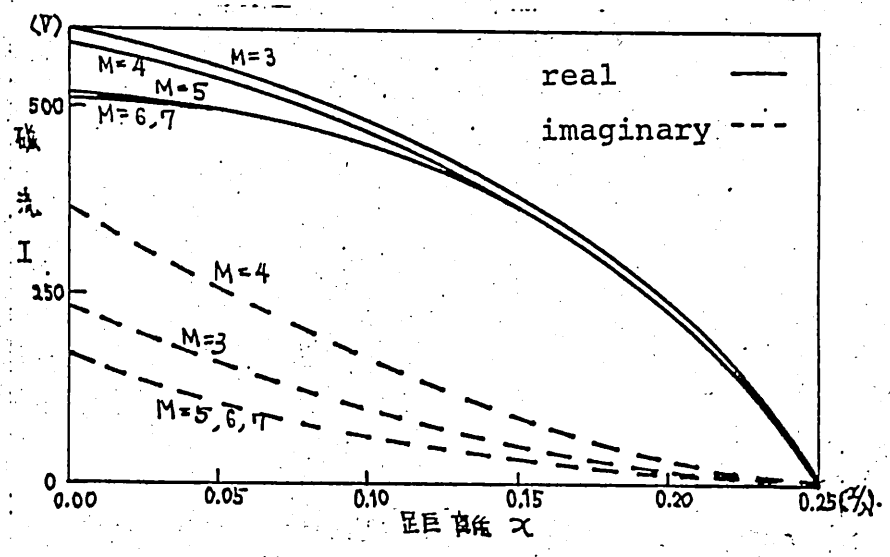



図2. 展開項数による磁流特性の変化

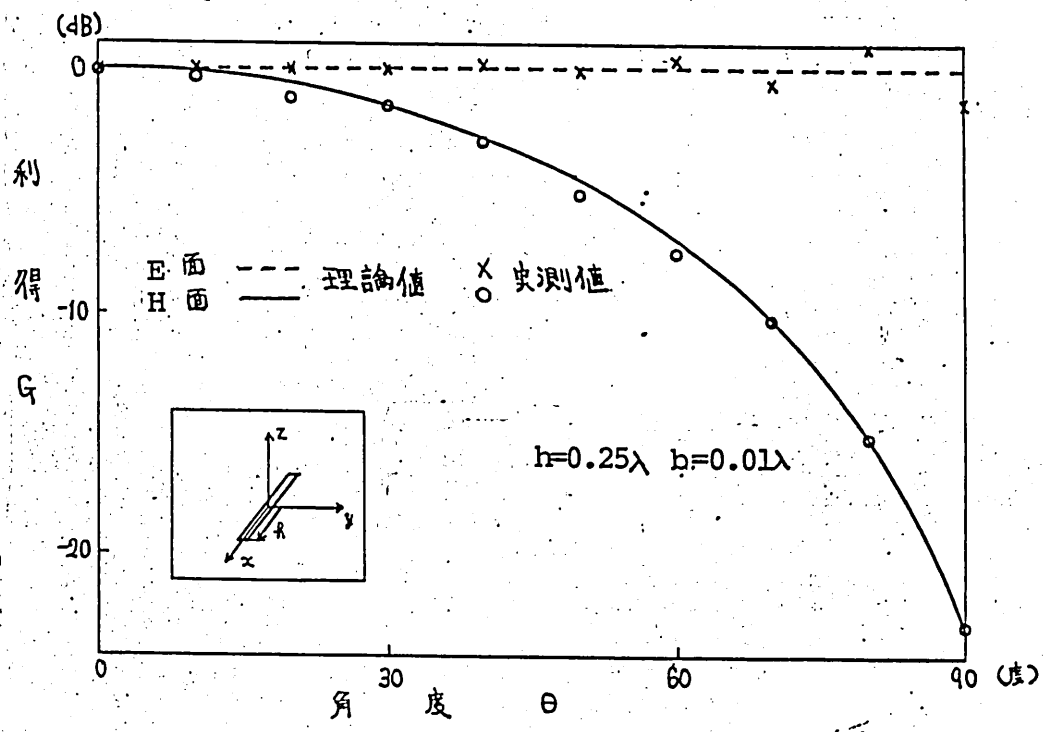



図3 スロットの指向性パターン

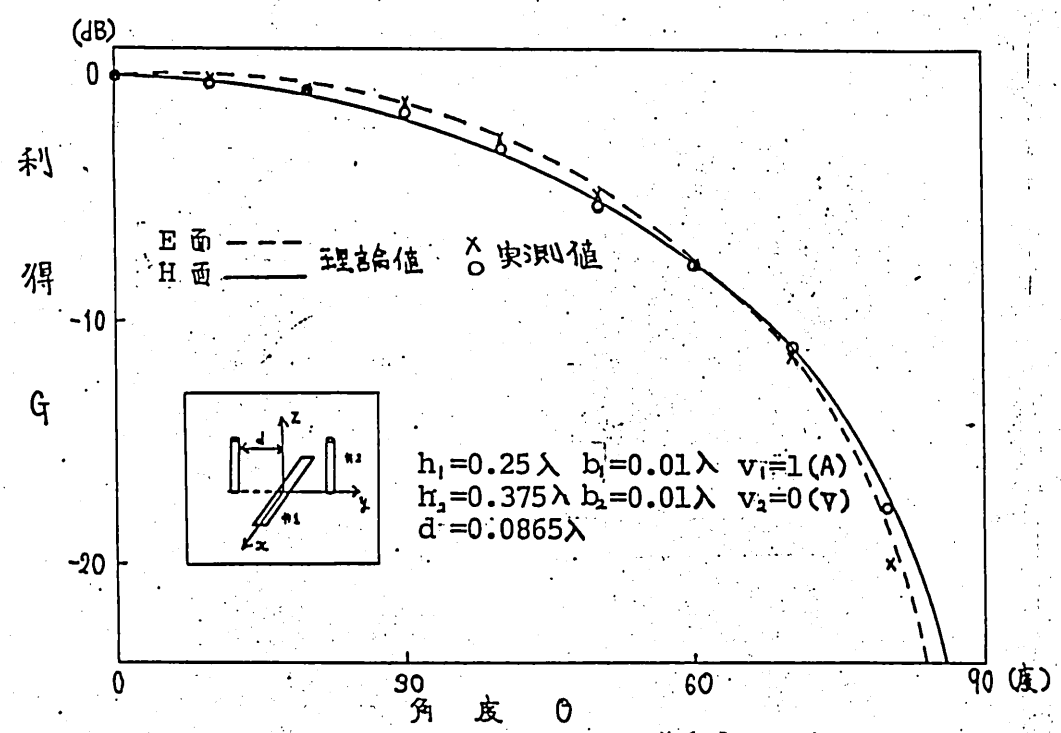



図4. スロット－モノポールアンテナの指向性パターン

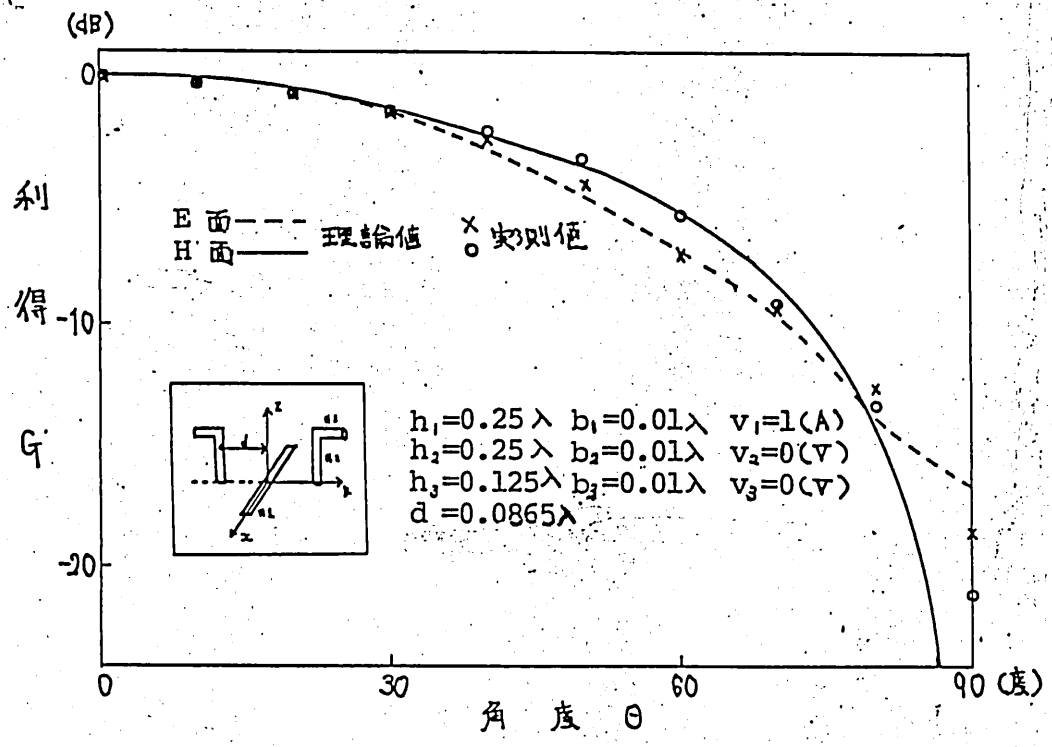



図5. スロット－逆Lアンテナの指向性パターン

図3はここで取り扱っているアンテナ系の基本素子であるスロットアンテナについて、H面(x-z面)とE面(y-z面)の指向性パターンを示したものである。図中の実線と破線は本解析より求めた理論値を，○×は、Clavin[2]による実測値を示す。なお各構造パラメータは図中に示す数値を用いた。この両結果を比較すると、H面はほぼ一致しているのに対して、E面は実測値が多少波うっている。これは有限大地板(実験は直径12インチの円板)のエッジ効果によるためと考えられる。

次に上のアンテナのH面とE面パターンをほぼ一致させるために、スロットの両側にパラスティック素子を付加して構成されたアンテナ系への適用例を示す。図4は2本の非励振モノポールを付加した場合、また図5は2本の非励振逆L形アンテナ付加した場合の指向性パターンを実測値[2]と比較したものである。各構造パラメータは図中に記した値を用いている。なおこれらの図は式(22)の指向性利得を$\theta=0°$における値を0dBとして示したものである。この結果より、理論的計算結果と実験結果は水平方向($\theta=90°$)付近を除いてよく合致していることがわかる。

図3，4，5より本解析法の妥当性は確認されていると考えられる。

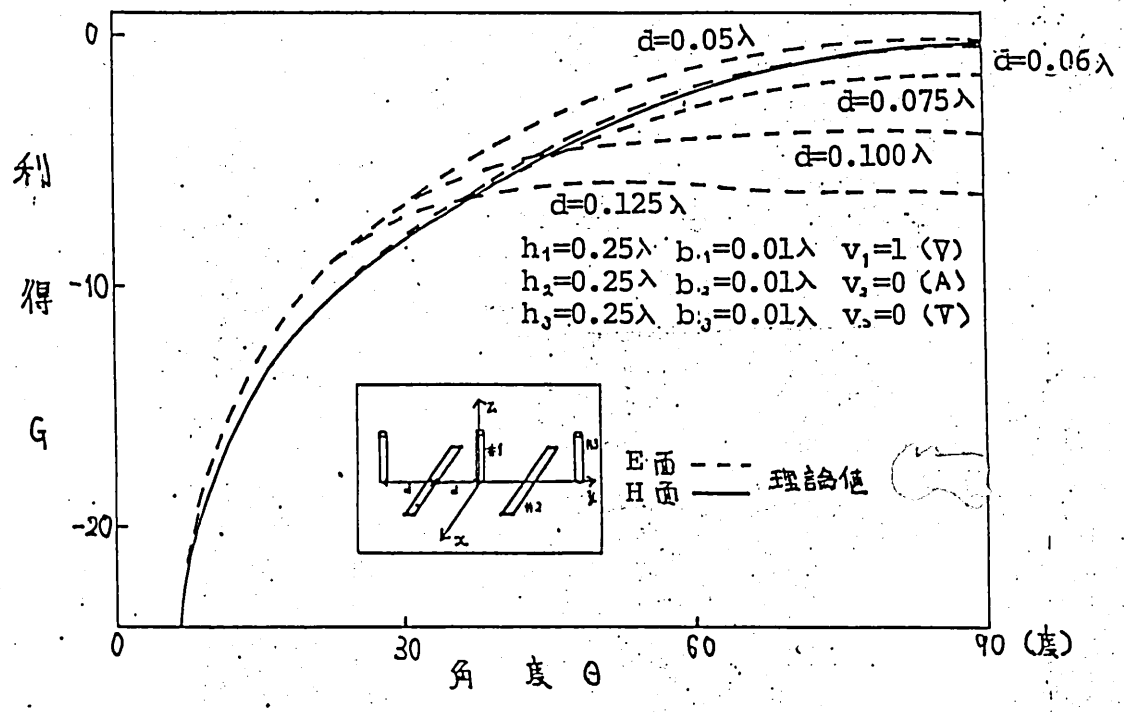



図6. スロット－モノポールアレイアンテナの
間隔dによる指向性パターンの変化

次にこの解析法を使って図6中に示すスロットとモノポールを交互に配置したアレイアンテナを考える。このアンテナ系において、間隔dをパラメータにとって指向性利得を計算したものが図4である。ここではすべてのアンテナの長さを影像を含めて0.5λにとっている。またH面およびE面のパターンを実線と破線で示している。H面はdによって変わらず一定で、E面はd=0.06λ付近でH面と合致して、そののちdが離れると共にθが大きな角度で利得がH面に比べて減少していることがわかる。ここで素子長および間隔を等しくしたが、それらを適当に選べば、電磁流混合形八木アレイとしての利

用が考えられる。

## 6. むすび

複数個のスロットと線状導体を組み合わせて構成される電磁流混合型アンテナの理論的解析を行なうために、一般化されたHallen形連立積分方程式を導びいた。この方程式の核は、線状導体のみからなるアンテナ系における場合と同様[6][7]、微分積分演算を含まない閉じた形式で表現できることを示した。

未知電磁流分布の展開関数としてべき級数を用いたポイントマッチング法によりこの積分方程式を解いている。3種類の結合したスロット—線状導体アンテナにについて本解析法で得られた結果を実測値と比較することにより、その妥当性を確認した。

線状導体系では、素子に分岐や曲がりをつけることにより、周波数特性や利得を改善した変形アンテナが種々提案されている。同様のことが、スロット—線状導体アンテナ系についても可能であると考えられる。ここで示した閉じた核をもつ積分方程式は、それらの解析に有効であり今後の応用が期待される。

# 文献

(1). King and Owyang ; "The slot antenna with coupled dipoles", IRE Trans. AP-8, pp.136 (march 1960).

(2). A. Clavin and D. Huebner and F.J. Kilburg ; "An improved element for use in array antennas", IEEE Trans. AP-22, pp.521 (July 1974)

(3). A.B. Papiery and S.M. Sanygiri and S.R. Larpati ; "Analysis of Antenna Structure with equal E-and H-plane patterns", Proc. IEE, vol.124, 1 (jan. 1977).

(4). 安藤，伊藤；"電流—磁流結合型円偏波配列空中素子"，信学技報，AP79－36 (昭54－09)

(5). 関，後藤；"円偏波用導波管スロットアンテナについて"，信学技報，AP79－2 (昭54－02)

(6). 小南，六島；"線状導体系における簡単化された積分方程式"，信学論(B)，J59－8；4，PP.267 (昭51－05)

(7). 小南，六島；"3次元線状導体系における簡単化された積分方程式とトップロードアンテナへの応用"，信学論(B)，J60－B，3，PP.205 (昭52－03)

(8). Stuart A. Long ; "Acombination of linear and slot antenna for quasi isotropic coverge", IEEE Trans. AP-23, pp.572 (July 1975).

(9). C.M. Butler and D.R. Wilton ; "Analysis of various numerical techniques Applied to thin-wire Scatters",IEEE Trans. AP-23, pp.534 (July 1975)

(10). B.D. Popovich ; " Polynominal approximation of current along thin symmetrical cylindrical dipoles", Proc. IEE, vol.117,5, pp.873 (May 1970).

輻射科学研究会資料

# 半導体レーザによる ピコ秒パルス発生

吉川昭男 青木恭弘 森本朗裕
小林哲郎 末田正
(大阪大学 基礎工学部)

昭和54年12月7日

於 新住友ビル

## [1] はじめに

ピコ秒パルス技術[☆)]は、レーザのモード同期技術の発達とあいまって著しく進歩し、光パルスの超短化と高出力化がともに進められている。　超短光パルスは、ピコ秒分光、光計測、光通信、レーザ核融合、物質の非線形現象の研究等に用いられている。現在の超短時間性を用いた超短光パルス発生システムは、比較的高価でシステム全体は大型で、適用範囲は広いとはいえ限られる。

我々はその欠点を補えるものとして、従来、光ファイバ通信などの光源として用いられている半導体レーザ[1)]を用いたピコ秒光パルス発生器の研究をすすめている。半導体レーザは、小型・軽量・発振が容易・高効率・発振波長範囲大・安価・直接電流変調がマイクロ波周波数まで可能という特長があり、ピコ秒光パルス発生システムとしては、広い波長範囲の光パルスが得られ、十分小型化が可能である。さらに、本来、広帯域(~数THz)短共振器の半導体レーザはps~数十psの短光パルス発生に適し[2)~8)]、(1)直接変調[9)](2)モード同期[10)](3)帰還同期変調[5)](4)Self-Pulsation[11)]等の発生法がある。これらの方法により発生した光パルスのパルス幅は従来~100ps程度であったが、レーザ素子自身の質の向上とパルス技術の発達により、最近(2)で20ps[10)]、我々は(1)で17ps[5)~8)]の光パルスを発生させ、報告している。

サブピコ秒領域の光パルスの発生はモード同期によらざるをえないが、半導体レーザの共振器往復時間$T_c$(~7ps)の数倍程度の光パルスは、直接変調でも発生できる。

本報告では、直接変調により、12.7psの光パルスの発生に成功したので、それについて報告する。また、過渡応答時の光パルスの時間波形を高時間分解能(~10ps)のストリークカメラで、周波数スペクトルを(分光器+赤外線TVカメラ)で観測し、レート方程式に基づく数値計算との比較を行ない、そのふるまいを明らかにした。さらに、レーザの駆動回路・波形の工夫により、25psの単一光パルスの発生をも行なったので、これらについても述べたい。

## [2] 過渡応答の観測

### (2-1) 実験構成

半導体レーザのパルス変調の実験を図1に示すような構成で行なった。左端のパルス・ジェネレータにより、パルス電流を発生させて

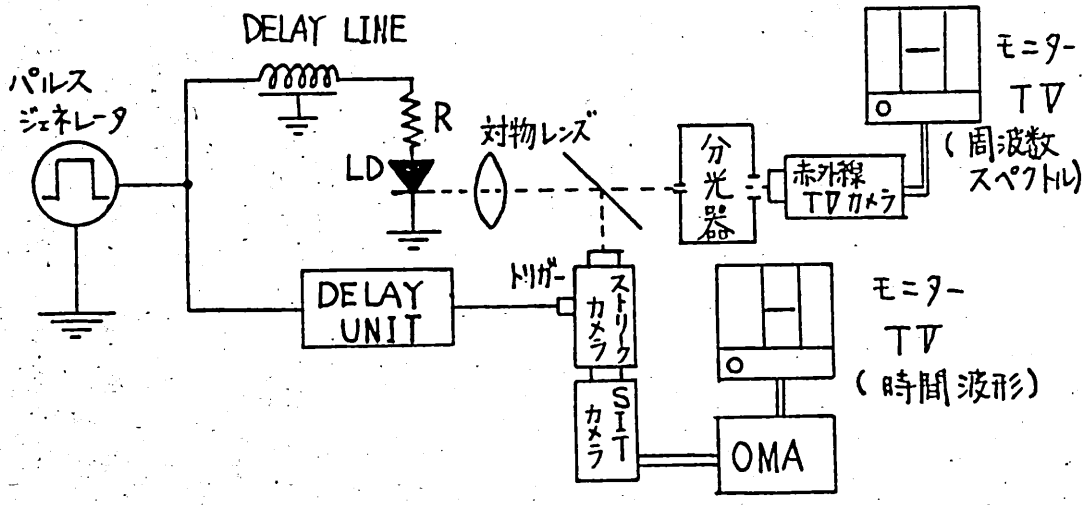
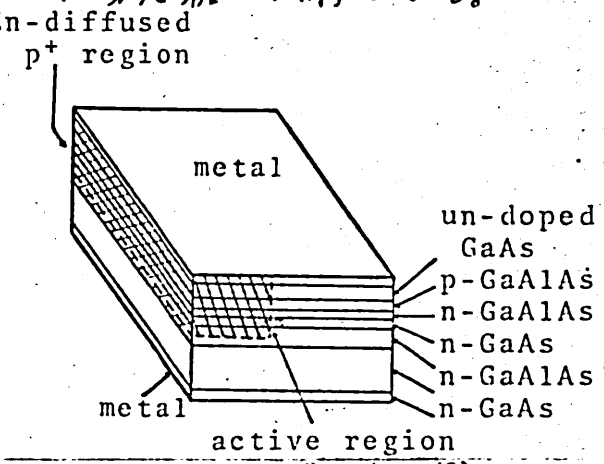


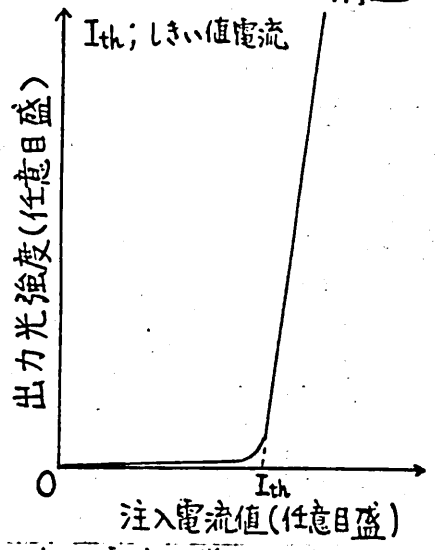

図1. 実験構成図

特性インピーダンス50Ωの同軸線路を介して、半導体レーザを直接電流駆動する。発生した光パルスは、対物レンズを通って、実時間波形測定ではストリークカメラに、周波数スペクトルの測定の時には、分光器に入射させる。

実験に使用したレーザは、通常のDH(double heterostructure)レーザ、及び図2(a)に示すようなTJS(transverse-junction stripe)レーザ[12]で、CW時の注入電流-光出力特性はともに、図2(b)のように、注入電流がしきい値電流を越える領域では、電流値を増すと、線形に光出力が増加し、いわゆる'kink'と呼ばれる折れ曲がりは観測されなかった。DHレーザは、CW時に多重縦モード発振をするが、TJSレーザは、図2(a)で水平方向にホモ接合を形成し、電流、光ともに閉じ込めを行なってい



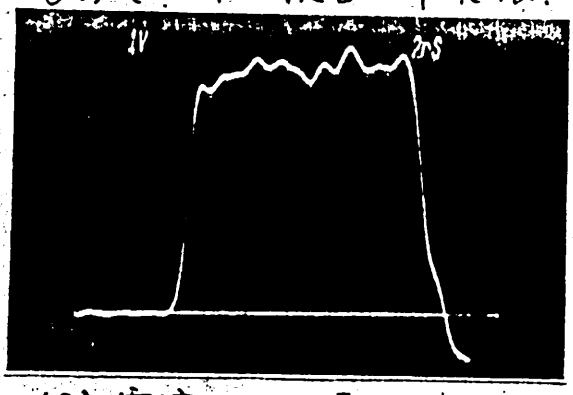

(a) TJSレーザの構造[12]



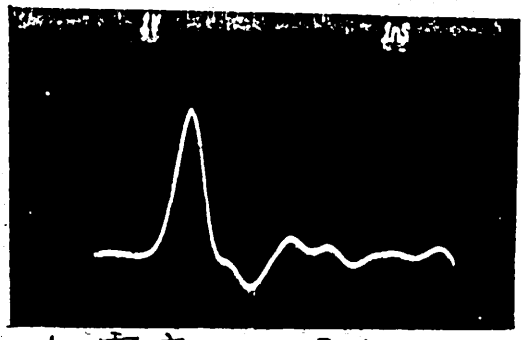

(b) 電流-光出力特性

図2 TJSレーザの構造(a)と半導体レーザの電流-光出力特性(b)

るので、単一縦モード発振、基本横モード発振を行なう。




(a) 電流パルス幅 10ns




(b) 電流パルス幅 500ps

図3　駆動電流パルスの時間波形

使用したパルス・ジェネレータより発生する電流パルスは、図3に示すような時間波形で、立ち上がり時間250ps以下、パルス幅は半値全幅が500ps～10nS、繰り返し周波数は、ほぼ700ppsである。

（2－2）時間波形

実時間波形を観測するのに用いた、高時間分解能(～10ps)をもつストリークカメラの原理について簡単に述べる。用いたストリークカメラは、HTV－C979（浜松テレビ）で図4にその構造図を示す。図中、右の入射スリット（本実験では幅30μm）から入射した光パルスは、スリット像に変換され、光電面に当たり、電子に変換される。

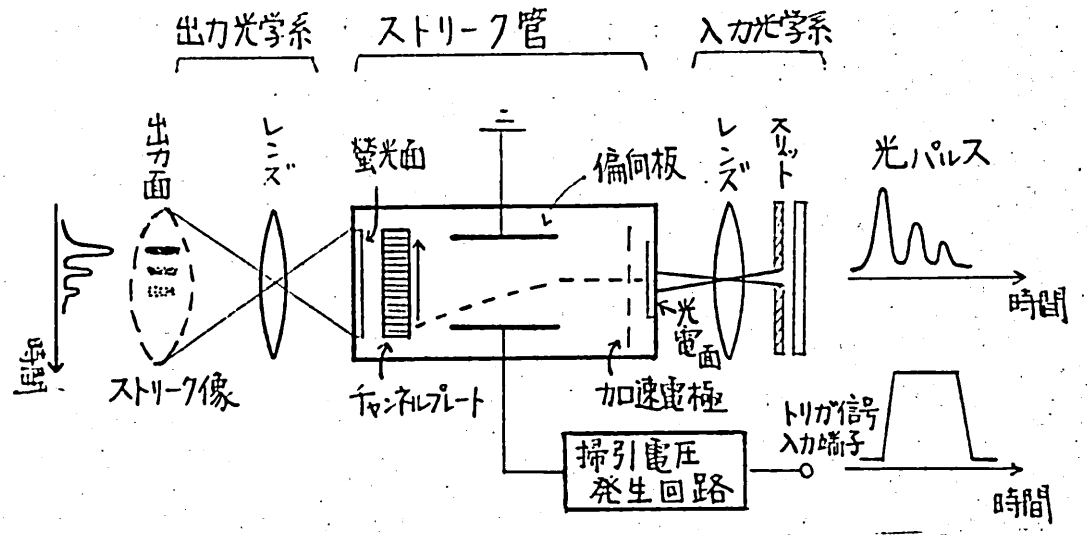
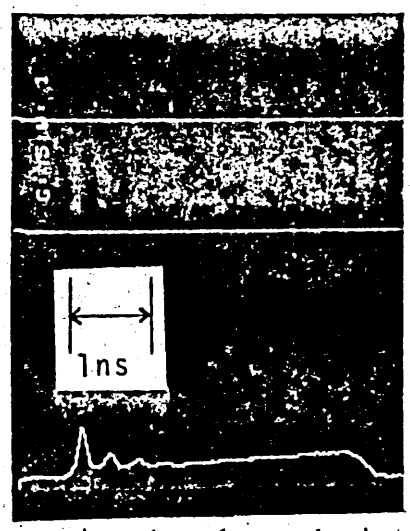
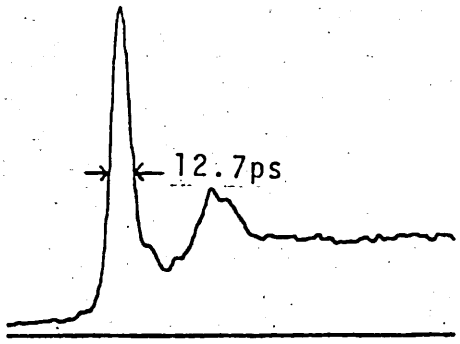



図4. ストリークカメラの動作原理図

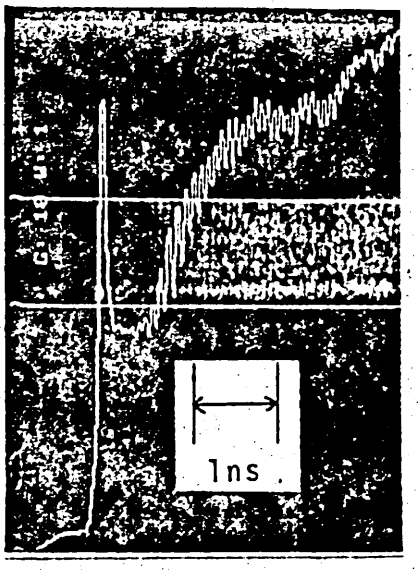
電子は加速され、偏向電極により、チャンネルプレート上にストリークされ、光パルスの連続的な時間分布が、チャンネルプレート上の連続的な空間分布に置き換えられる。螢光面により、電子を光に変換し、出力光学系によって光パルスがストリーク像として観測される。なお、本実験では、さらにこのストリーク像をSITカメラで観測し、OMAにより、信号処理し、モニタテレビ画面上にストリーク像と光強度の時間変化が表わされるようになっている。図5の実時間波形は、モニタテレビ画面中央にあるウィンドウ内のストリーク像を256回積分して得られ、雑音の影響を少なくしてある。図5(a)は、半導体レーザで



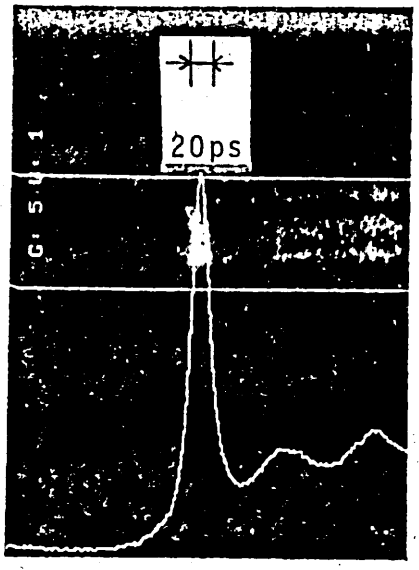

(a)典型的な緩和振動波形
$V_d = 3.5V$, $W_d = 4ns$




(d) 観測波形例
$V_d = 18V$, $W_d = 10ns$




(b) 観測波形例
$V_d = 15V$, $W_d = 10ns$



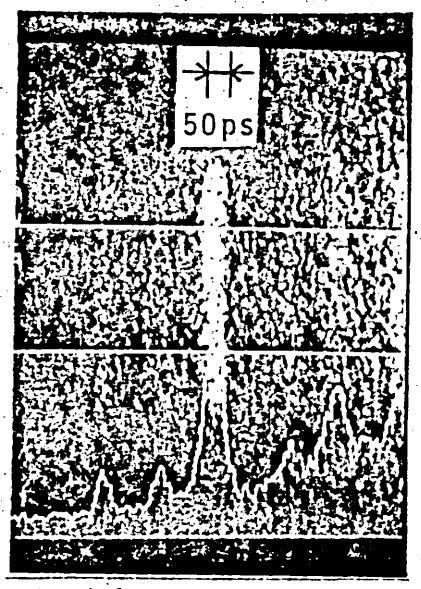

(c) 観測波形例
$V_d = 15V$, $W_d = 10ns$
((b)の10倍の時間分解能で観測)

ただし
$V_d$；駆動電圧, $W_d$；駆動パルスのパルス幅

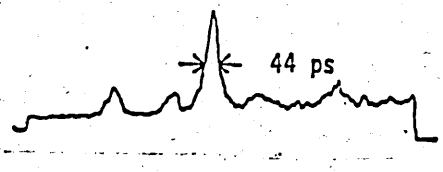
図5. 直接変調による光パルス実時間波形(TJSレーザ)

よく見られる典型的な緩和発振波形である。最初のピークのパルス幅は100ps程度で、緩和振動周期を通常用いられている。最初のピークと第二のピークの時間間隔にとると、約300psとなる。図5(b),(c)は(a)よりさらに励起を上げた場合で、ストリークカメラの時間分解能だけが違う。(b)は分解能は100psで、最初のパルスの幅は分解能以下である。(c)は分解能が10psで、10倍に時間分解能を上げて(b)と同一の時間波形を観測したものである。ここでの光パルスの最初のピークのパルス幅は20ps、緩和振動の周期は60psである。図5(d)は、図5(a)~(c)と別のTJSレーザを使ってパルス発振させたもので、パルス幅12.7psで、緩和振動周期60psである。他のTJSレーザでも実験を行なったが、何れもパルス幅30ps以下であったがかなりの個体差がある。我々は、半導体レーザの直接変調によるピコ秒パルス発生では、共振器往復時間$T_c$(~7ps)の数倍程度までの光パルスの発生が可能であると考えているので、この12.7psというパルス幅は、ほぼその限界の値と考えられる。図5(b),(c)では、波形に速い緩和とともにゆっくりとした光出力の増加(遅い緩和)が見られ、この原因の1つとして、キャリアの横方向への拡散[13]が考えられるが、明らかではない。

図6は、DHレーザによるパルス発振時間波形である。TJSレーザの時間波形に比べて、光強度が最大となるピークの前に二つのピークが観測されるが、これはDHレーザの多モード発振のため、それぞれのモードの発振開始時間が異なり、それらの重ね合せの効果であると考えられる。DHレーザでは光強度最大のピークを持つパルス幅は50ps程度であった。




(a) 観測波形例
Vd=40V, Wd=10ns



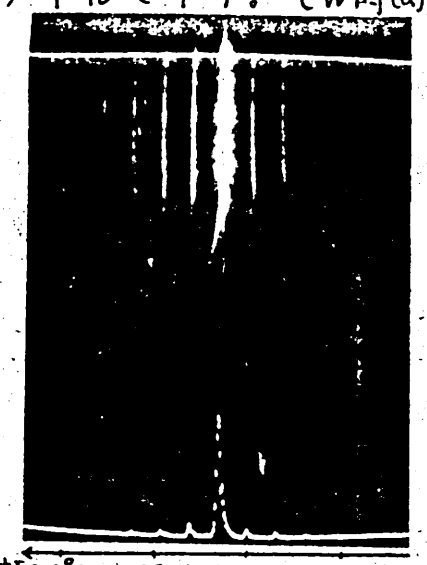

(b) 観測波形例
Vd=45V, Wd=10ns

図6 直接変調による光パルス実時間波形(DHレーザ)

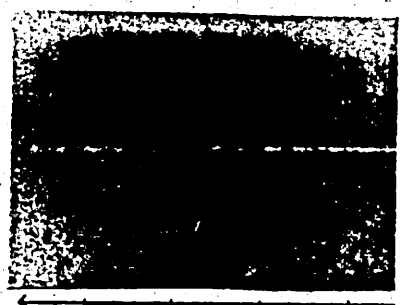
(B) 周波数スペクトル

周波数スペクトルは、半導体レーザからのピコ秒光パルスを分光器の入射スリット(スリット幅10μm)から入射させ、グレーティングにより水平方向に分散された光パルスを出射スリットを十分開けて広範囲の波長成分を一度に観測できるようにし、後置された赤外線TVカメラで、時間的に平均化されたものをモニタテレビを通して観測した。ここで用いた分光器の波長分解能は我々が用いた半導体レーザの波長(0.8～0.9μm)では1Å以下である。

図7にTJSレーザのCW時とパルス変調時の周波数スペクトルを示す。CW時(a)には単一縦モード発振をして



(a) CW時; I=35mA ($I_{th}$=30mA)

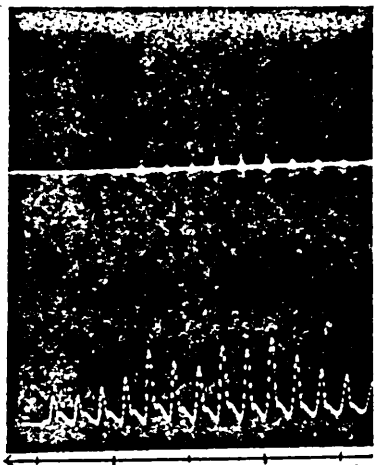


(b) 直接変調時; $V_d$=15V, $W_d$=10ns
(図5(b),(c)の時間波形に対応)

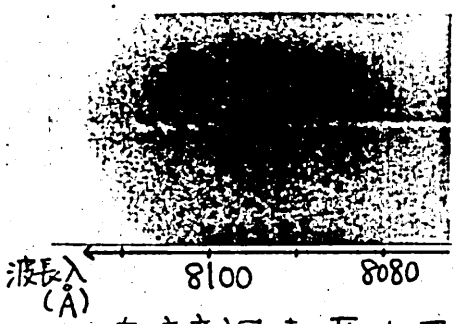
図7　TJSレーザの周波数スペクトル

いたものがパルス発振時(b)[20psパルス発生時]には、モードの形成・選択が不十分なままで光パルスが発生するため、増幅された自然放出光との区別がつきにくく、50Å程度の広いスペクトル拡がりを生じ、多縦モード発振する。また、高励起及びそれに伴うピコ秒パルスが発生するため、レーザ内部の屈折率等の諸パラメータが急激に変化するため、1本の縦モードもそれぞれチャーピングを受け、その幅が2Å程度までふくらんでいる。励起が低いときは、発振開始時間が遅れるため、ある程度の波長選択性が生じているのが観測された。

図8にDHレーザのCW時のスペクトル(a)とパルス変調時のスペクトル(b)を示す。CW時(a)、パルス発振時(b)




(a) CW時; I = 285mA (Ith = 240mA)




(b) 直接変調時; Vd=40V, Wd=10ns
(図6(a)の時間波形に対応)

図8　DHレーザの周波数スペクトル

ともに多重縦モード発振で、CW時でさえ、横モードは1つでないことが観測される。

TJSレーザ、DHレーザ何れも、パルス発振時には中心波長がCW発振時に比べて短波長側へずれる。これは、CW時には、パルス変調時に比べてレーザ素子内部での温度上昇が多いため、バンドギャップのエネルギーが僅かに小さくなるためと思われる。

## (2-3) 検討及び考察

我々は高時間分解能(~10ps)の測定系を用い、半導体レーザからのピコ秒光パルスを観測した。実時間波形の観測には、通常、detectorとして、APD(avalanche photodiode)を用い、その出力をサンプリングオシロで観測している。この場合、時間分解能は~100ps、良くて50ps程度で、我々の実験で得たような短光パルスの観測は、detectorを通った観測波形出力が、実波形と時間分解能のコンボリューションとなるため不可能である。半導体レーザの過渡応答及びピコ秒光パルスの観測には、高時間分解能の測定系が必要と思われる。

本実験では光パルスの実時間波形をS/N比を上げるた

め、256個の光パルスを積分して観測したが、実際にはピコ秒光パルスの発生時のジッタやストリークカメラのトリガジッタのため、実時間波形と多少異なっていると考えられ、今後単発電流パルス励起でのピコ秒光パルスの実時間波形の観測が必要と思われる。

なお、周波数スペクトルは時間的に平均化したものを観測しているため、スペクトルのtransientなふるまいがわからず、[分光器＋ストリークカメラ]の構成での時間分解分光測定[14]が半導体レーザでのパルス発振機構の解明を行なううえでも、非常に重要である。

## [3] レート方程式による数値計算

### (3-1) レート方程式

レート方程式による半導体レーザの過渡応答に関する数値計算は、多数行なわれており、我々の実験においても定性的にある程度よく現象を表わす。以下にキャリア密度$n$と光子密度$S_i$の時間変化を表わすレート方程式[15]を示す。

$$\frac{dn}{dt} = \frac{J}{ed} - \frac{n}{\tau_s} - \sum g(n,\lambda) S_i \qquad (1)$$

$$\frac{dS_i}{dt} = \left\{ g(n,\lambda) - \frac{1}{\tau_{ph,i}} \right\} S_i + \beta_{sp,i} \frac{n}{\tau_s} \qquad (2)$$

$n$; キャリア密度　　$S_i$; $i$モードの光子密度
$d$; 活性層の厚さ　　$e$; 単位電荷
$J$; 注入電流密度　　$g$; 利得（ここでは $g \propto n$）
$\tau_s$; キャリア寿命　　$\tau_{ph}$; 光子寿命
$\beta_{sp,i}$; 自然放出光のレーザモードへの寄与

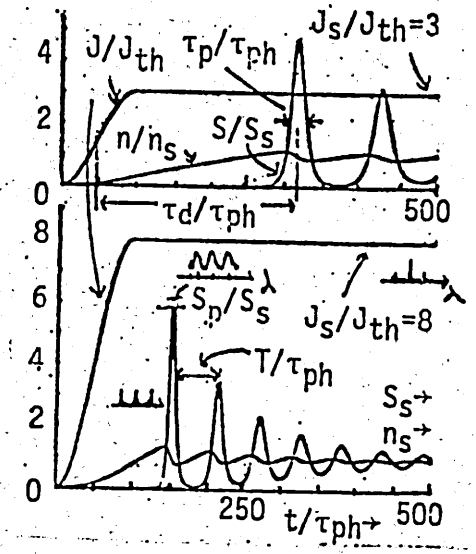
式(1),(2)より明らかなように、ここではレーザ素子を集中定数的な点と考え、素子内部での空間的な変化は考慮されていず、この近似は結局$\tau_c$程度までの時間スケールでキャリヤ密度$n$や光子密度$S_i$が急激に変化する時に適用可で、それ以下の時間スケールでの変化及び素子内部での空間的な変化の記述には、特別な工夫が必要となる。

電流印加後数百ps以内の過渡領域では縦モードの形成・選択は不十分で、多モードの取扱いが必要であるが、ここでは簡単のため、$\sum S_i \sim S$として、適当な規格化を行なったのち数値計算を行ない、光パルスの諸パラメータ（パルス幅$\tau_p$，ピーク値$S_p$，時間遅れ$\tau_d$，緩和振動周波数$f$）の変化に着目した。この時、駆動電流の立ち上がり時間はほぼ実験での値と一致させている。

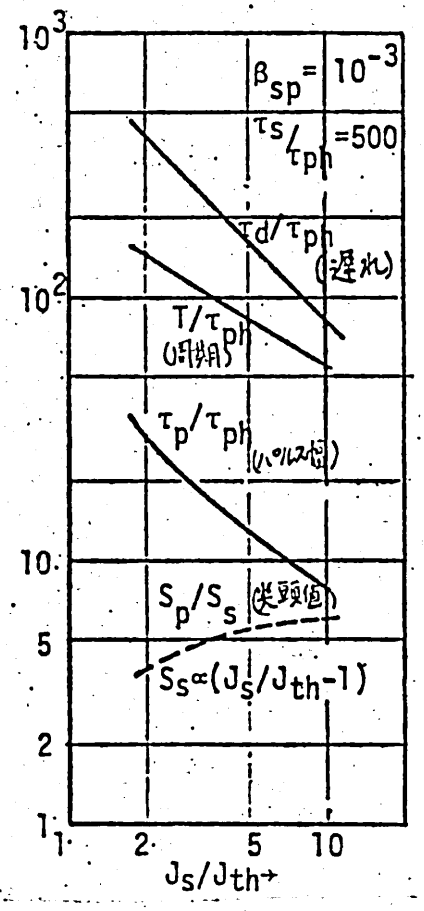
## (3-2) 解析結果

レート方程式を用いたナノ秒オーダーでの解析は多数行なわれているが、psオーダーでの実験観測例がなかったために、この領域での解析結果は、ある程度予想はできるものの行なわれていなかった。

図9～図12に計算結果を示す。図9(a)は出力パルス波形の計算例を表わす。図9(b)はパルス諸パラメータの電流依存性を表わす。




(a) 出力パルス波形計算例




(b) パルス諸パラメータの電流依存性

図9 光パルスの電流依存性

パルス変調を行なう時には、電流注入レベルをできるだけ高くした方が全てに有利であることがわかる。図10は電流の立ち上がり時間を変化させた時の計算結果を示す。立ち上がり時間が1ns以下の領域では、四つのパラメータはほぼ定数で、1ns以上では特性がわずかに劣化する。図11は、バイアス電流$J_b$の効果を見たもので、$J_b \geq \sim 0.8 J_{th}$以上だと$\tau_p$及び$S_p$を著しく悪化させるが、high bit rates な光通信を考えた場合、$J_b$が大きいほど、$\tau_d$が小さく、周波数スペクトルを考えた場合、バイアス電流が大きい程、モードの選択性が生じ、発振幅が狭くなり、有利であるので、バイアスの設定は光パルスの使用目的に応じて最適値が存在しうると思われる。

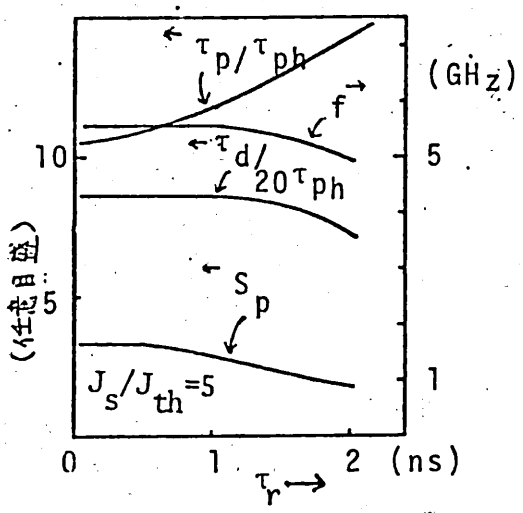



図10 電流の立ち上がり時間$\tau_r$の変化による効果

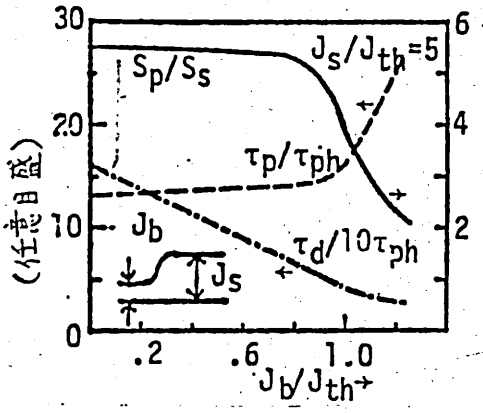



図11. バイアス電流$J_b$の効果

図12は光子寿命$\tau_{ph}$の変化による効果を調べたもので、パルス幅$\tau_p$はほぼ$\sqrt{\tau_{ph}}$に比例し，緩和振動周波数fはほぼ$1/\sqrt{\tau_{ph}}$に比例する。何れにしても有用な光パルスの生成には$\tau_{ph}$が小さい事が望ましい。

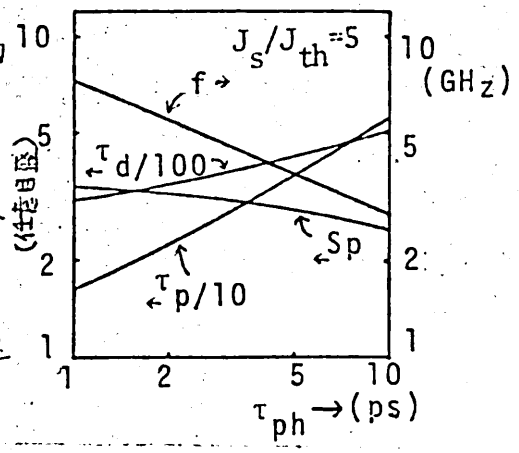



図12 光子寿命$\tau_{ph}$の変化による効果

## (3－3) 考察

以上の計算結果はピコ秒光パルスの発生には立ち上がり時間は1ns以下でその注入レベルはレーザを劣化させない程度まで高くしてやる方がいいという事を示しており、我々の実験での15ps光パルス発生を定性的にではあるが裏付ける。パルス幅に関しては、$\tau_{ph}\sim 2ps$として、$J/J_{th}\sim 10$で16ps程度のパルスが計算で示され、定量的にもほぼ対応がつくことがわかる。

パルス幅を損わないで尾部のない単一光パルスを発生させるには、短い駆動電流パルスを適当な注入レベルで印加するこ

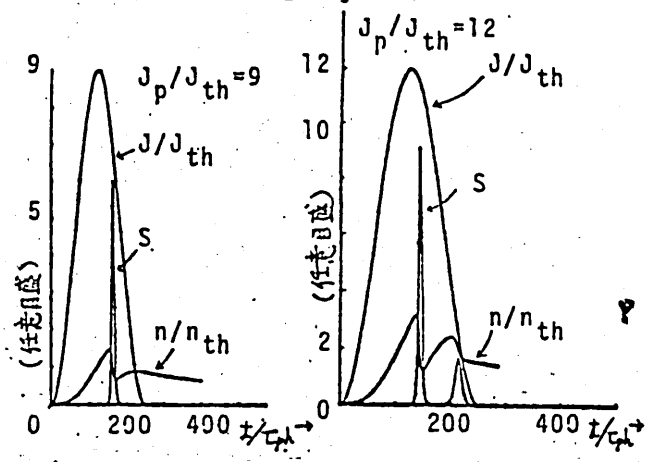



図13 短パルス電流駆動計算例

とにより可能で、図13にその計算例を示す。注入レベルを上げると単一パルスとはならず、2個以上のパルスが発生する。

## 〔4〕ピコ秒単一光パルス発生

### (4-1) 観測波形

半導体レーザを短パルス電流駆動するために、レーザに直列にコンデンサCを入れ微分回路を形成した。図14にそれを示す。図14中、負の電流パルスが出るがこれは蓄積キャリアの除去の効果を持っている。

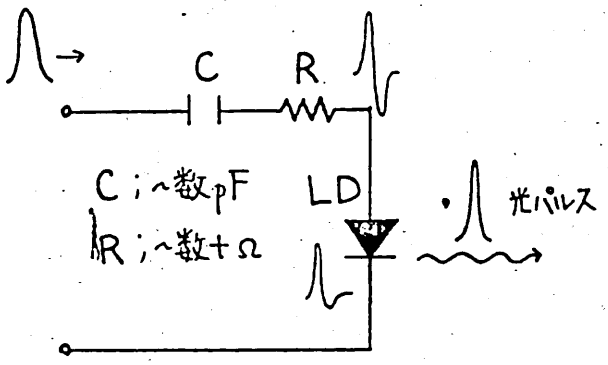
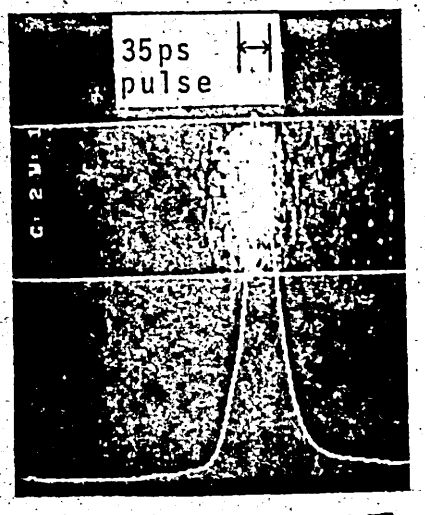
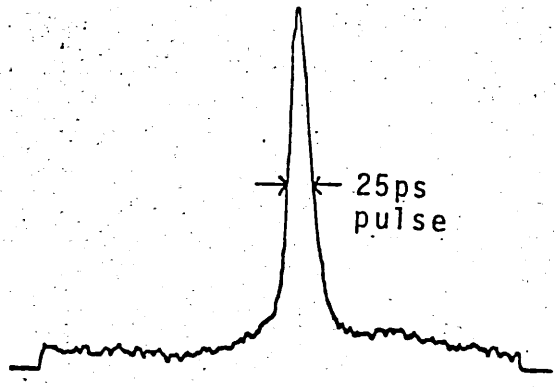


図14. 短パルス電流駆動回路例

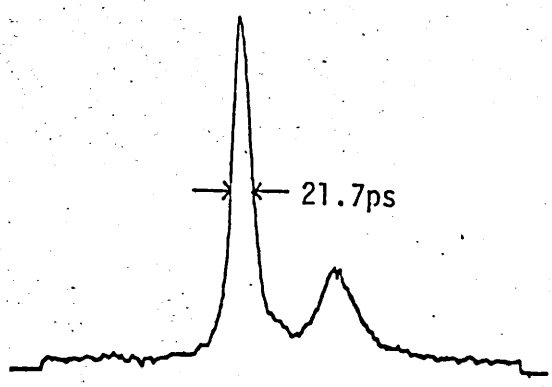
実験を行なった結果、TJSレーザにより図15に示すような尾部のない単一光パルスを観測した。3個のレーザで実験を行なった結果、いずれも40ps以下の単一光パルスを生じ、図15(b)では、25psの単一光パルスを得た。電流の注入レベルを上げると図15(c)のように第2




(a) Wd = 10ns, Vd = 35V
(R = 10Ω, C = 1pF)




(b) Wd = 500ps, Vd = 20V, (R = 10Ω, C = 3pF)




(c) Wd = 500ps, Vd = 23V (R = 10Ω, C = 3pF)

図15. ピコ秒単一光パルス観測波形例

のパルスが生じ、図13(b)の計算例と定性的かつ定量的に波形がほぼ一致している。短パルス電流駆動の時は、発振しきい値は、電流印加時から発振開始時までの注入キャリア数の積分となるため、高くなる。

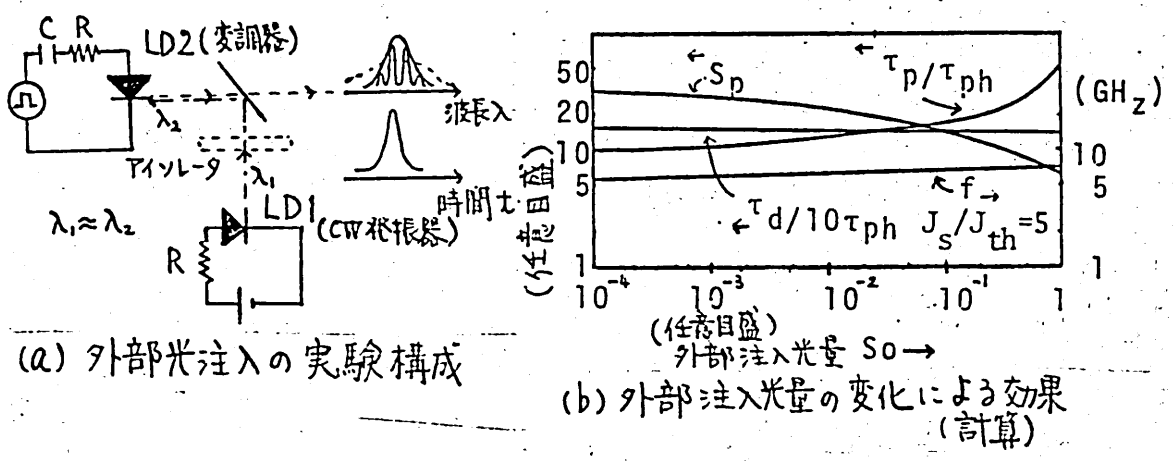
## (4-2) 問題点

我々は25psの単一光パルスを得たが、この値は尾部のある光パルスでの最小パルス幅15psと比べて10ps程度大

きい。この差を縮めるためには特にレーザの駆動回路の改善・工夫を行ない、より幅の短い、尖頭値の大きい電流パルスでレーザをパルス変調することが必要である。

単一光パルス発生時の周波数スペクトルは観測しなかったが2章での観測例及び考察により、かなり拡がっていることが予想され、時間領域と周波数領域とで transform limited とはなっていない。そこでこの光パルスをたとえば、光通信やピコ秒分光等でより有用なものとするためには発振スペクトル幅を縮める必要があり、我々は図16で示されるような外部光注入を提案し、実験の準備とともに、レート方程式による解析をも併せて行なっている。

図16(a)に示すように実験では2個の発振波長範囲が比較的近いレーザを用い、LD1を単一モードの発振器とし




(a) 外部光注入の実験構成

(b) 外部注入光量の変化による効果（計算）

図16、外部光注入

てCW発振させ、その光をLD2をパルス発振させるときの種として、LD2に注入し、周波数スペクトルの拡がりが少ない出力光パルスを得ようとするものである。

解析結果より、外部光注入量を増加させていくと、$\tau_d$と$f$はほぼ一定で、$S_p$及び$\tau_p$は外部光の注入量がある値以上になると、ピコ秒光パルスとしてみた場合、劣化する。従って、単一光パルスのパルス幅と発振スペクトル幅は、ある注入光レベルで両方が最適になるであろうが詳細は実験によらざるを得ない。

## [5] むすび

以上、半導体レーザの直接電流変調によるピコ秒光パルス発生について述べた。過渡応答時には、$T_c$の2倍以下(~14ps以下)の12.7ps光パルスを観測し、レート方程式による数値解析ともほぼ定性的かつ定量的に一致を示した。しかし、同一素子構造の半導体レーザでも光出力パルスのパルス幅等に個体差があり、良質なピコ秒パルス発生器としての半導体レーザを製作するには、時間分解分光等による過渡発振時の特性の研究が重要であると思

われる。また、半導体レーザのストライプ構造の差がパルス発振時の出力光パルスに表われるかどうかも不明であり、今後の課題である。単一ピコ秒光パルスの発振波長幅を縮めるには外部光注入が必要であると考えられる。

〔謝辞〕

半導体レーザを御提供頂いた三菱中研の須崎、池田両氏、及びテンポラルアナライザの便宜を計って頂いた浜松テレビの諸氏に感謝いたします。

〔参考文献〕

1) 末松；信学誌 54 (1971) 806
2) 鷲尾，ラング，岸田；応物量エレ冬期研究会"超短パルス"p.11
3) 鷲尾，覧具，岸田；応用物理 47 (1978) 908
4) D.Gloge , T.P.Lee ; IEEE J. Quant. Electron. QE-7 (1971)43
5) 小林，吉川，森本，末田；53秋応物予稿 5aP4
6) 小林，吉川，森本，末田；54春応物予稿 29pT1
7) 小林，吉川，森本，青木，末田；54春応物予稿 29pT2

8) 小林, 吉川, 森本, 末田 ; 1979秋物理学会 3p-Y-4
9) 池上 ; 応用物理 47 (1978) 812
10) P.-T.Ho , L.A.Glasser ,E.P.Ippen , and H.A.Haus;
Appl.Phys.Lett. 33 (1978) 241
11) G.Arnold , K.Petermann ; Optical and Quantum Electron.
10 (1978) 311
12) H.Namizaki ; IEEE J. Quant. Electron.
QE-11 (1975) 427
13) N.Chinone , K.Aiki , M.Nakamura , and R.Ito ;
IEEE J. Quant. Electron. QE-14 (1978) 625
14) 堀口, 犬塚, 土屋; テレビ全大 15-11 (1979) 409
15) R.Salathe , C.Voumard , H.Weber ;
Opto-Electronics 6 (1974) 451

☆) 例えば.
S.L.Shapiro ed.; "Ultrashort Light Pulses"
(Springer-Verlag, 1977)

輻射科学研究会資料

# 相対論的電子ビームによる誘導ラマン散乱

## ——自由電子レーザの解析——

塩沢俊之
(大阪大学・工学部)

1979年12月7日

## 1. まえがき

相対論的電子ビームによる電磁波の誘導散乱を用いてコヒーレントな電磁波を発生させる自由電子レーザは，サブミリから赤外に至る周波数領域において大出力*が得られ，その発振周波数は電子ビームの加速電圧を変えることにより広い範囲にわたって連続的に変えられるという従来のレーザにはない大きな利点をもっている．ところで，自由電子レーザ[1]~[7]に関しては，これまでに，理論と実験の両面から，かなり詳しい研究が行われているが，出力の飽和特性，エネルギー関係式等，まだ解決されていない重要な問題も少くない．本稿では，相対論的電子ビーム中に励起される電子の集団的振動（電子プラズマ振動）による電磁波の誘導散乱，すなわち誘導ラマン散乱を用いた自由電子レーザを考え，ポンプ電力の減少に伴う出力の飽和特性ならびにエネルギー関係式について詳しく考察し，発振特性の詳細を明らかにする．

さて，以下では，簡単のために，一次元の相対論的電子ビームを考え，この電子ビームに，電子ビームの運動方向とは逆の方向に，大強度の平面電磁波（ポンプ波）が入射するものとする．このとき，適当な条件が満たされると，ポンプ波，散乱波（電子ビームの運動方向と同じ方向に進む平面電磁波）および電子ビーム中に励起される電子プラズマ波（負エネルギー波）の間にパラメトリック不安定が生じ，散乱波および電子プラズマ波は，電子ビームの運動方向に伝搬するにつれて次第に増大する．本稿では，まず，Maxwellの方程式，電子に対する相対論的運動方程式および電子群に対する連続の方程式を用いて，振動成分に関して二次のオーダまでを考慮に入れ，ポンプ波，散乱波および電子プラズマ波に対するモード結合方程式を導き，その厳密解を求める．次に，上記の三つの波に対するエネルギー関係式について詳しく考察し，ポンプ波の作用によって電子ビームから散乱波へエネルギーが移行し，散乱波が次第に増大していく模様を定量的に明らかにする．

## 2. 誘導ラマン散乱の原理

解析に入る前に，まず，相対論的電子ビームによる誘導ラマン散乱の原理について簡単に述べる．いま，図1に示すように，z方向にドリフトする一次元の相対論的電子ビームを考え，この電子ビームにzの正方向から大強度の平面電磁波（ポンプ波）が入射するものとする．このとき，まず，陰極近傍で電子ビーム中の雑音成分によって生じた散乱波（zの正方向に進む平面電磁波）とポンプ波の非線形結合により，電子ビーム中にローレンツ力のz方向成分が生じ，この力によって電子プラズマ波（負エネルギー波）が励起される．そうすると，今度は，新たに励起された電子プラズマ波とポンプ波の非線形結合により，負エネルギー波である電子プラズマ波とポンプ波から

* 波長0.4 mm において1 MW[4] および波長3.4 μm において7 kW[5]（いずれもパルス出力）が得られている．

散乱波にエネルギーが供給され，散乱波が強められる．さらに，散乱波とポンプ波の結合により電子プラズマ波が強められ，このようにして，散乱波と電子プラズマ波の間には，ポンプ波を介して正帰還のループが形成される．その結果，散乱波と電子プラズマ波（負エネルギー波）は z 方向に伝搬するにつれて次第に増大し，電子ビームのエネルギーは散乱波に移行していく．上に述べた過程は，プラズマ物理学においてすでによく知られているパラメトリック不安定性[8]の一種であると考えられる．

ポンプ波，散乱波および電子プラズマ波（負エネルギー波）のパラメトリック結合の様子を分散曲線上に示すと，図2のようになる．図2において，曲線①は相対論的電子ビーム中を伝搬する平面電磁波の分散曲線であり，直線②および③は電子プラズマ波の分散関係を示す．ただし，直線②の $\omega > 0$ の部分および直線③の $\omega < 0$ の部分は正エネルギー波の分散関係を表し，直線②の $\omega < 0$ の部分および直線③の $\omega > 0$ の部分は負エネルギー波の分散関係を表す．また，ポンプ波，散乱波および電子プラズマ波（負エネルギー波）の周波数を $\omega_i$，$\omega_s$ および $\omega_\ell$ とし，これらに対応する波数を $k_i$，$k_s$ および $k_\ell$ とすると，これらの間には，位相整合の条件が厳密に成り立つ．すなわち，

$$\omega_i = \omega_s + \omega_\ell$$
$$k_i = k_s + k_\ell \qquad (1)$$

ここで注意すべきことは，散乱波の周波数は，電子ビームのドリフト速度が大きくなると，ドップラ効果によって非常に大きくなることである．従って，ポンプ波としてマイクロ波を用いると，

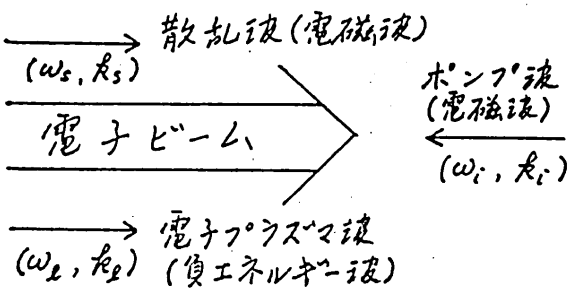



図1 誘導ラマン散乱の原理

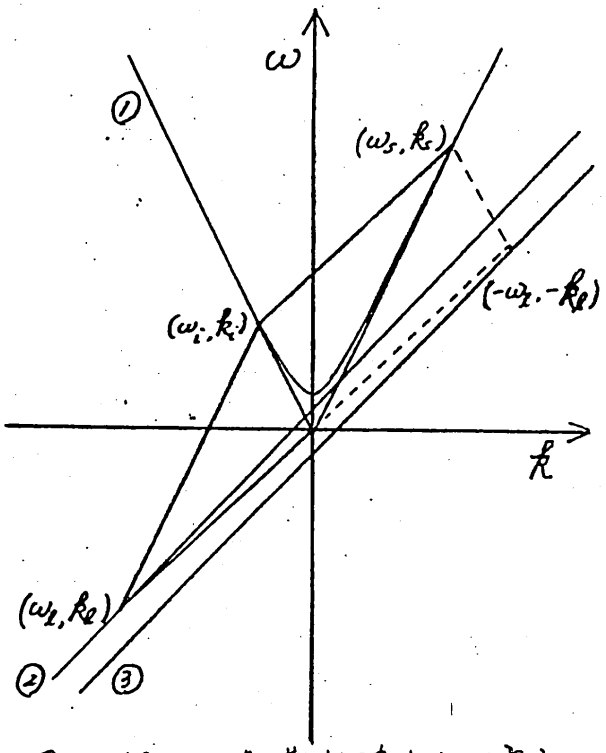



図2 ポンプ波，散乱波および電子プラズマ波のパラメトリック結合

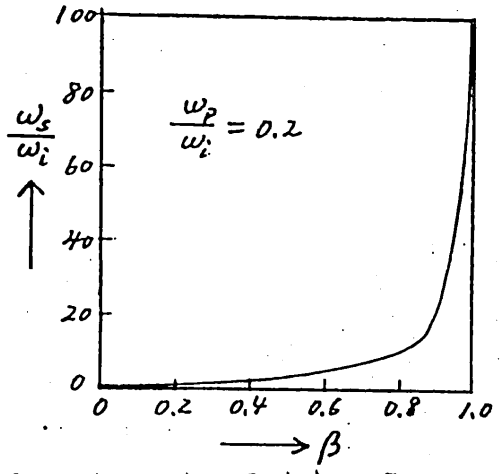



図3 散乱波の周波数と電子ビームのドリフト速度との関係

散乱波としてはサブミリから赤外の領域の電磁波が得られる．参考のために，ポンプ波の周波数で規格化した散乱波の周波数と電子ビームのドリフト速度との関係を図3に示す．なお，上では後方散乱のみを考えたが，実際には前方散乱も存在する．しかしながら，電子ビームのドリフト速度が十分大きくなると，後者は前者に比べて十分小さくなり，無視することができるので，以下では後方散乱のみについて考える．

## 3. 誘導ラマン散乱の解析

### 3.1 基礎方程式

相対論的電子ビームによる誘導ラマン散乱の解析に必要な基礎方程式は，Maxwellの方程式，電子に対する相対論的運動方程式および電子群に対する連続の方程式である．本節では，以下での解析の準備として，振動成分に関して二次のオーダまでを考慮に入れた基礎方程式を求めておく．

まず，相対論的電子ビーム中における振動成分に対するMaxwellの方程式は次式で与えられる．

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbb{B} = 0$$

$$\nabla \times \frac{\mathbb{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} + \mathbb{J} \ , \ \nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

ここで，$\mathbb{J}$および$\rho$は，電子ビームによって生じる電流密度および電荷密度を表す．簡単のために，電子ビームはイオンによって中和されており，また電子の熱運動は無視できるものとする．

本稿で取り扱う一次元の電子ビームの場合には，式(2)は電磁波に対する式と電子プラズマ波に対する式に分離できる．まず，電磁波成分は($E_x$, $B_y$, $J_x$)によって記述することができ，これらは次の方程式を満たす．

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \ , \quad -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + J_x$$

$$J_x = -e(n_0 + n)\, v_x \qquad (3)$$

ただし，$-e$および$n_0$は電子の電荷および平均密度を表す．また，$n$および$v_x$は電子密度および電子の$x$方向速度の交流分を表す．

次に，電子プラズマ波は($E_z$, $J_z$, $\rho$)によって記述することができ，これらは次の方程式を満足する．

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + J_z = 0 \ , \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$J_z = -e(n_0 v_z + n v_0 + n v_z) \ , \quad \rho = -en \qquad (4)$$

ここで，$v_0$は電子ビームのドリフト速度，$v_z$は電子の$z$方向速度の交流分を表す．

次に，電子に対する相対論的運動方程式およびエネルギー保存則は次式で与えられる．

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = -e\left[\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = -e\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{E} \qquad (5)$$

ここで，$m_0$ および $c$ は，電子の静止質量および真空中の光速度であり，$\mathbf{u}$ は電子の速度の瞬時値を表す．

式(5)の二式から次式が得られる．

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -e\left[\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{E})\right] \qquad (6)$$

いま，$v_x \ll v_0$，$v_z \ll v_0$ として，式(6)を $x$ 成分および $z$ 成分に分けて書くと次のようになる．

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_0\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{e}{\gamma m_0}\left[E_x - v_0 B_y\right] + \frac{e}{\gamma m_0}\left[v_z B_y + \frac{\beta}{c}v_x E_z\right]$$
$$-v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - \gamma^2\frac{\beta}{c}v_z\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_0\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_0\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{e}{\gamma^3 m_0}E_z - \frac{e}{\gamma m_0}v_x B_y + \frac{e}{\gamma m_0}\frac{\beta}{c}\left[v_x E_x + 2v_z E_z\right]$$
$$-v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} - \gamma^2\frac{\beta}{c}v_z\left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_0\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] \qquad (7)$$

ただし，

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}\ ,\quad \beta = v_0/c \qquad (8)$$

最後に，電子群に対する連続の方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v_0\frac{\partial n}{\partial z} + n_0\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left[n\frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z\frac{\partial n}{\partial z}\right] \qquad (9)$$

式(3)，(4)，(7)および(9)が以下での解析の基礎となる式である．

### 3.2 線形近似における波動

前節で求めた基本式において非線形項が無視できる場合には，電磁波モードと電子プラズマ波モードは独立に存在し得る．本節では，以下での解析に必要となる線形近似における基本的な関係式を示す．まず，電磁波モードの $B_y$ および $v_x$ の複素振幅を $E_x$ の複素振幅によって表すと，次のようになる．

$$\tilde{B}_y = \frac{k}{\omega}\tilde{E}_x\ ,\quad \tilde{v}_x = i\frac{e}{\gamma m_0\omega}\tilde{E}_x \qquad (10)$$

また，分散関係式は次式で与えられる．

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left[1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]\ ,\quad \omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\gamma m_0 \varepsilon_0} \qquad (11)$$

一方，電子プラズマ波モードに対して，$\tilde{n}$ および $\tilde{v}_z$ を $\tilde{E}_z$ によって表わすと

$$\tilde{n} = i\frac{k\varepsilon_0}{e}\tilde{E}_z\ ,\quad \tilde{v}_z = i\frac{e(\omega - v_0 k)}{\gamma m_0\omega_p^2}\tilde{E}_z \qquad (12)$$

また，電子プラズマ波モードに対する分散関係式は次のようになる．

$$\omega - v_0 k = \pm(\omega_p/\gamma) \qquad (13)$$

式(11)および(13)で与えられる分散関係式は図2に示されている.

### 3.3 モード結合方程式の導出

3.1で求めた基本方程式において非線形項を考慮に入れると,電磁波モードと電子プラズマ波モードはたがいに結合する.本節では,3.1で求めた基本式を用いて,ポンプ波,散乱波および電子プラズマ波に対するモード結合方程式を求める.まず,電磁波成分はポンプ波と散乱波の和として次のように表される.

$$E_x = \frac{1}{2}\left[\tilde{E}_{ix}(z)e^{i(\omega_i t - k_i z)} + \tilde{E}_{sx}(z)e^{i(\omega_s t - k_s z)} + c.c.\right] \qquad (14)$$

ただし,$\tilde{E}_{ix}$ および $\tilde{E}_{sx}$ はポンプ波および散乱波の振幅を表し,これらはzとともに緩やかに変化するものとする.すなわち,次の条件が成り立つものとする.

$$|\partial\tilde{E}_{ix}/\partial z| \ll |k_i\tilde{E}_{ix}|, \quad |\partial\tilde{E}_{sx}/\partial z| \ll |k_s\tilde{E}_{sx}| \qquad (15)$$

また,

$$k_i = -(\omega_i/c)\sqrt{\varepsilon_i}, \quad k_s = (\omega_s/c)\sqrt{\varepsilon_s}$$

$$\omega_s = \gamma^2\omega_i\left[1+\beta\sqrt{\varepsilon_i} - (\omega_p/\gamma\omega_i) + \beta\sqrt{(1+\beta\sqrt{\varepsilon_i})\{1+\beta\sqrt{\varepsilon_i} - (2\omega_p/\gamma\omega_i)\}}\,\right]$$

$$\varepsilon_i = 1-(\omega_p/\omega_i)^2, \quad \varepsilon_s = 1-(\omega_p/\omega_s)^2 \qquad (16)$$

式(14)において,c.c.は複素共役を表す.また,式(16)における散乱波の周波数$\omega_s$は,周波数と波数に対するLorentz変換を用いて,まず入射波の周波数$\omega_i$を電子ビームの静止系に変換し,この系における散乱波の周波数$\omega_s'$を求め,次に$\omega_s'$を実験室系に逆変換することによって得られる.なお,本稿では,簡単のために,散乱波としてはStokesモードのみを考える.

一方,電子プラズマ波の成分は次のように表される.

$$E_z = \frac{1}{2}\left[\tilde{E}_{\ell z}(z)e^{i(\omega_\ell t - k_\ell z)} + c.c.\right] \qquad (17)$$

ただし,

$$|\partial\tilde{E}_{\ell z}/\partial z| \ll |k_\ell\tilde{E}_{\ell z}| \qquad (18)$$

なる条件が成り立つものとし,$\omega_\ell$, $k_\ell$は式(13)の負エネルギー波に対する分散関係を満すものとする.また,ポンプ波,散乱波および電子プラズマ波は式(1)の位相整合条件を満足するものとする.

まず,式(14)および(17)を式(7)の第1式に代入し,さらに3.2に示した関係式を用いると,ポンプ波および散乱波に対する電流密度を得ることができる.これらの電流密度を式(3)に用いることにより,次のようなポンプ波および散乱波に対する方程式が得られる.

$$\frac{\partial\tilde{E}_{ix}}{\partial z} = \frac{\mu_0 c}{2\sqrt{\varepsilon_i}}\tilde{J}_{ix}^{NL} = -C_i\tilde{E}_{sx}\tilde{E}_{\ell z}, \quad C_i > 0$$

$$C_i = \frac{e}{4\gamma m_0 c^2}\left(\frac{\omega_i}{\omega_s} + \frac{\sqrt{\varepsilon_s}}{\sqrt{\varepsilon_i}}\right) + \frac{e\omega_p^2}{4\gamma m_0 c^2\sqrt{\varepsilon_i}\,\omega_i\omega_s}\,\frac{\beta + \gamma(\omega_s/\omega_p)[(2-\beta^2)\sqrt{\varepsilon_s} - \beta]}{1+\beta\sqrt{\varepsilon_i}}$$

$$\frac{\partial \tilde{E}_{sx}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 c}{2\sqrt{\varepsilon_s}} \tilde{J}_{sx}^{NL} = -C_s \tilde{E}_{ix} \tilde{E}_{\ell z}^{*} \quad , \quad C_s > 0$$

$$C_s = \frac{e}{4\gamma m_0 c^2}\left(\frac{\omega_s}{\omega_i} + \frac{\sqrt{\varepsilon_i}}{\sqrt{\varepsilon_s}}\right) - \frac{\beta e \omega_p^2}{4\gamma m_0 c^2 \sqrt{\varepsilon_s}\,\omega_s \omega_i} \frac{1-\gamma(\omega_i/\omega_p)(1+\beta\sqrt{\varepsilon_i})}{1-\beta\sqrt{\varepsilon_s}} \qquad (19)$$

式(19)において，$\tilde{J}_{ix}^{NL}$ および $\tilde{J}_{sx}^{NL}$ は非線形電流項を表す．

次に，式(14)および(17)を式(7)の第2式および式(9)に代入し，さらに3.2に与えた関係式を用いると，電荷密度の交流分 $\tilde{n}$ が得られる．この $\tilde{n}$ を式(4)の第2式に代入すると，$\tilde{E}_{\ell z}$ に対する方程式が得られる．

$$\frac{\partial \tilde{E}_{\ell z}}{\partial z} = -\frac{e}{\varepsilon_0} \tilde{n}^{NL} = -C_\ell \tilde{E}_{ix} \tilde{E}_{sx}^{*} \quad , \quad C_\ell > 0$$

$$C_\ell = \frac{e\omega_p}{4 m_0 c^2 \beta}\left[\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_s}}{\omega_i} + \frac{\sqrt{\varepsilon_i}}{\omega_s}\right) - \beta\left(\frac{1}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_s}\right)\right] \qquad (20)$$

以上得られた式(19)および(20)が，ポンプ波，散乱波および電子プラズマ波を結びつけるモード結合方程式を表す．式(19)および(20)の形の結合方程式は，プラズマ物理学あるいは非線形光学の分野ですでによく知られている．

### 3.4 モード結合方程式の解

本節では，式(19)および(20)で与えられるモード結合方程式の解を求める．まず，ポンプ波が十分大きく，その振幅が一定であると仮定できる場合を考えると，この場合には，$z$ とともに指数関数的に増大する散乱波および電子プラズマ波の解が存在することがわかる．以下では，ポンプ波の振幅が一定と仮定できない一般的な場合を取り扱う．

さて，式(19)および(20)において次のような変数変換を行う．

$$\frac{\tilde{E}_{ix}}{|\tilde{E}_{ix}(L)|} = u_i e^{i\varphi_i}, \quad \sqrt{\frac{C_i}{C_s}} \frac{\tilde{E}_{sx}}{|\tilde{E}_{ix}(L)|} = u_s e^{i\varphi_s}, \quad \sqrt{\frac{C_i}{C_\ell}} \frac{\tilde{E}_{\ell z}}{|\tilde{E}_{ix}(L)|} = u_\ell e^{i\varphi_\ell}$$

$$\zeta = \sqrt{C_s C_\ell}\,|\tilde{E}_{ix}(L)|\, z \qquad (21)$$

ここで，$\tilde{E}_{ix}(L)$ はポンプ波の入力端 $z=L$ における振幅を表す．

式(21)の変換を行うと，式(19)および(20)は次のようになる．

$$\frac{du_i}{d\zeta} = -u_s u_\ell \sin\theta \qquad \frac{d\theta}{d\zeta} = -\left(\frac{u_s u_\ell}{u_i} + \frac{u_\ell u_i}{u_s} + \frac{u_i u_s}{u_\ell}\right)\cos\theta$$

$$\frac{du_s}{d\zeta} = -u_\ell u_i \sin\theta \qquad \theta = \frac{\pi}{2} + \varphi_i - \varphi_s - \varphi_\ell$$

$$\frac{du_\ell}{d\zeta} = -u_i u_s \sin\theta \qquad (22)$$

上式から次式が得られる．

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \left(\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{d\zeta} + \frac{1}{u_s}\frac{du_s}{d\zeta} + \frac{1}{u_\ell}\frac{du_\ell}{d\zeta}\right)\cot\theta \qquad (23)$$

式(23)を積分すると

$$u_i u_s u_\ell \cos\theta = K \ (\text{一定}) \qquad (24)$$

また，式(22)の第1式～第3式から次の保存則が得られる．

$$u_i^2 - u_s^2 = m_1 > 0, \quad u_i^2 - u_\ell^2 = m_2 > 0 \tag{25}$$

式(24)および(25)を式(22)の第1式に用いると次式が得られる．

$$\frac{du_i^2}{d\zeta} = 2\sqrt{(u_i^2 - u_{i1}^2)(u_i^2 - u_{i2}^2)(u_i^2 - u_{i3}^2)} \tag{26}$$

ただし，$u_{i1}^2$，$u_{i2}^2$，$u_{i3}^2$は

$$u_i^2(u_i^2 - m_1)(u_i^2 - m_2) - K^2 = 0 \tag{27}$$

の3根を表し，$u_{i3}^2 \geqq u_{i2}^2 \geqq u_{i1}^2$であるとする．

式(25)から，$u_i^2 > m_1$，$u_i^2 > m_2$であるから，式(26)右辺の根号の中が正であるためには，$u_i^2 > u_{i3}^2$でなければならないことがわかる．そこで，

$$\xi = \sqrt{\frac{u_{i3}^2 - u_{i1}^2}{u_i^2 - u_{i1}^2}}, \quad 0 < \xi < 1 \tag{28}$$

なる変換を行うと，式(26)は次のようになる．

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = -\frac{1}{\sqrt{u_{i3}^2 - u_{i1}^2}} \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \quad k^2 = \frac{u_{i2}^2 - u_{i1}^2}{u_{i3}^2 - u_{i1}^2} \tag{29}$$

上式を積分すると

$$\zeta - \zeta_L = -\frac{1}{\sqrt{u_{i3}^2 - u_{i1}^2}} \int_{\xi_L}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \tag{30}$$

ただし，$\zeta_L$および$\xi_L$は，それぞれ，$z = L$における$\zeta$および$\xi$の値を表す．
式(30)から次式が得られる．

$$\xi^2 = sn^2\left[\sqrt{u_{i3}^2 - u_{i1}^2}(\zeta_L - \zeta + \alpha_L), k^2\right]$$

$$\alpha_L = \frac{1}{\sqrt{u_{i3}^2 - u_{i1}^2}} \int_0^{\xi_L} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \tag{31}$$

ここで，$sn$はJacobiの楕円関数を表す．

いま，境界条件

$$u_s = u_s(0), \quad u_\ell = u_\ell(0) \quad \text{at } z = 0, \quad u_i = u_i(L) = 1 \quad \text{at } z = L \tag{32}$$

を用いると，式(31)，(28)および(25)から，$u_i^2$，$u_s^2$および$u_\ell^2$は次のように表される．

$$u_i^2 = 1 + (u_{i3}^2 - u_{i1}^2)\left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi_L^2}\right)$$

$$u_s^2 = u_s^2(0) + (u_{i3}^2 - u_{i1}^2)\left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi_0^2}\right)$$

$$u_\ell^2 = u_\ell^2(0) + (u_{i3}^2 - u_{i1}^2)\left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi_0^2}\right) \tag{33}$$

ただし，$\xi_0$は$z=0$における$\xi$の値を表す．

ポンピング電力の変換率を$\eta$とすると，$\eta$は式(33)から次のようになる．

$$\eta = \frac{u_i^2(L) - u_i^2(0)}{u_i^2(L)} = (u_{i3}^2 - u_{i1}^2)\left(\frac{1}{\xi_L^2} - \frac{1}{\xi_0^2}\right) \tag{34}$$

上式の$\eta$を得るための距離$L$は，式(30)から，次式で与えられる．

$$\xi_L = \frac{1}{\sqrt{u_{i3}^2 - u_{i1}^2}} \int_{\xi_L}^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \tag{35}$$

## 3.5 エネルギー関係式

まず，ポンプ波および散乱波に対するエネルギー関係式を求める．式(3)から，電磁波モードに対するエネルギー保存則は次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu_0} E_x B_y\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2\right) = -E_x J_x \tag{36}$$

ポンプ波および散乱波のそれぞれに対して，式(36)の一周期にわたる時間平均を求めると，次式が得られる．

$$\frac{dP_i}{dz} = \frac{1}{2} c\sqrt{\varepsilon_i}\, C_i\, \varepsilon_0 (\tilde{E}_{ix}^* \tilde{E}_{sx} \tilde{E}_{\ell z} + c.c.)$$

$$\frac{dP_s}{dz} = -\frac{1}{2} c\sqrt{\varepsilon_s}\, C_s\, \varepsilon_0 (\tilde{E}_{ix}^* \tilde{E}_{sx} \tilde{E}_{\ell z} + c.c.) \tag{37}$$

ここで，

$$P_i = -c\sqrt{\varepsilon_i}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 |\tilde{E}_{ix}|^2\right), \quad P_s = c\sqrt{\varepsilon_s}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 |\tilde{E}_{sx}|^2\right) \tag{38}$$

$P_i$および$P_s$はポンプ波および散乱波に対する電力流密度を表す．

一方，電子プラズマ波に対しては，式(4)の第1式から次式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_z^2\right) = -E_z J_z \tag{39}$$

上式の電子プラズマ波の一周期にわたる時間平均を求めると，次式が得られる．

$$\frac{dP_\ell}{dz} = \frac{1}{2} v_0 \gamma \frac{|\omega_\ell|}{\omega_p} C_\ell\, \varepsilon_0 (\tilde{E}_{ix}^* \tilde{E}_{sx} \tilde{E}_{\ell z} + c.c.) \tag{40}$$

ここで，

$$P_\ell = -v_0\left(\frac{1}{2}\gamma \frac{|\omega_\ell|}{\omega_p} \varepsilon_0 |\tilde{E}_{\ell z}|^2\right) \tag{41}$$

$P_\ell$は電子プラズマ波に対する電力流密度を表す．

さて，一般には，式(37)および(40)から

$$\frac{d}{dz}(P_i + P_s + P_\ell) = 0 \tag{42}$$

なる保存則は厳密には成り立たないことがわかる．これは，ポンプ波のエネルギーが後方散乱波のみならず，一部前方散乱波にも与えられるからである．

しかしながら，後者に与えられるエネルギーは十分小さく，特に電子ビームのドリフト速度が大きくなると，式(42)の保存則は十分よい近似で成立する．

次に，式(37)および(40)から次式が得られる．

$$P_s(L) - P_s(0) = -\frac{\sqrt{\varepsilon_s}}{\sqrt{\varepsilon_i}}\frac{C_s}{C_i}\left[P_i(L) - P_i(0)\right]$$

$$P_\ell(L) - P_\ell(0) = \gamma\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon_i}}\frac{|\omega_\ell|}{\omega_p}\frac{C_\ell}{C_i}\left[P_i(L) - P_i(0)\right] \qquad (43)$$

式(43)では，一般に，$P_s(L) \gg P_s(0)$，$|P_\ell(L)| \gg |P_\ell(0)|$と考えてよい．上式から，散乱波として取り出すことのできる最大電力流密度は次のようになる．

$$P_s(L)\Big|_{max.} = \frac{\sqrt{\varepsilon_s}}{\sqrt{\varepsilon_i}}\frac{C_s}{C_i}|P_i(L)| \qquad (44)$$

この最大電力流密度を得るために必要な電子ビームの長さ$L_{max}$は，式(35)を参照すると，次式から得られることがわかる．

$$\zeta_{L_{max}} = \frac{1}{\sqrt{u_{i3}^2 - u_{i1}^2}}\int_0^{\xi_0}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \qquad (45)$$

さて，ポンプ波，散乱波および電子プラズマ波の電力流密度が距離とともにどのように変化するかを定量的に調べるために，$P_i$，$P_s$および$P_\ell$を次のように書き換えよう．

$$P_i = -u_i^2|P_i(L)|$$

$$P_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_s}}{\sqrt{\varepsilon_i}}\frac{C_s}{C_i}u_s^2|P_i(L)|$$

$$P_\ell = -\gamma\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon_i}}\frac{|\omega_\ell|}{\omega_p}\frac{C_\ell}{C_i}u_\ell^2|P_i(L)| \qquad (46)$$

式(46)の関係を用いて，$\beta = 0.98$，$\omega_p/\omega_i = 0.2$の場合について，$P_i$，$P_s$および$P_\ell$と$z$との関係を示すと，図4のようになる．図4から，電子ビームのドリフト速度が十分大きくなると，散乱波のエネルギーの大部分は負エネルギー波である電子プラズマ波から供給されることがわかる．いま，電子ビームの運ぶ電力流密度を$P_b$とすると，$P_b$は次式で与えられる．

$$P_b = \left\langle\frac{(n_0+n)m_0c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\right\rangle v_0 \qquad (47)$$

ここで，$\langle\ \rangle$は時間平均値を意味する．

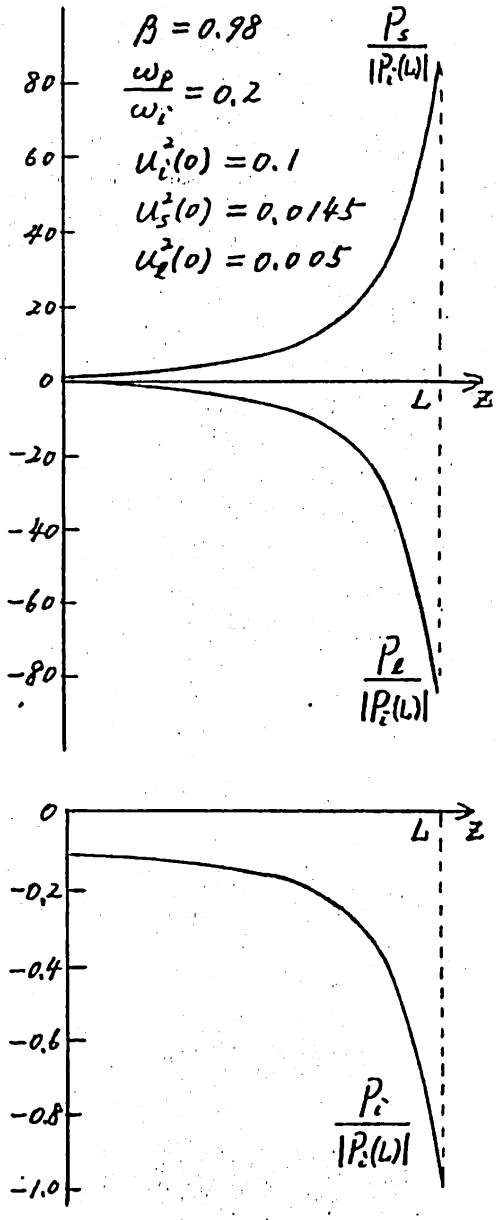



図4．ポンプ波，散乱波および電子プラズマ波の電力流密度

式(47)から，$\beta$が十分大きくなると，次式が成立することがわかる．

$$\frac{dP_s}{dz} = \frac{dP_e}{dz} \tag{48}$$

従って，散乱波のエネルギーは結局電子ビームの運動エネルギーによって供給されることになる．以上の考察から，自由電子レーザでは，ポンプ波は，文字通り，電子ビームからエネルギーを汲み出す"ポンプ"の役割を果していることがわかる．

## 4、むすび

本稿では，相対論的電子ビームによる誘導ラマン散乱を用いた自由電子レーザについて理論的に考察した．まず，Maxwellの方程式，電子に対する相対論的運動方程式ならびに電子群に対する連続の方程式を用いて，振動成分に関して二次のオーダまで考慮に入れ，ポンプ波，散乱波および電子プラズマ波（負エネルギー波）に対するモード結合方程式を導き，その解を求めた．次に，上記の三つの波に関するエネルギー関係式について詳しく考察し，ポンプ波の働きによって電子ビームから散乱波にエネルギーが移行し，散乱波が次第に増大していく模様を定量的に明らかにした．

謝辞　日頃御鞭撻を頂く大阪大学工学部熊谷信昭教授，ならびに数値計算に御協力頂いた大阪大学工学部盛田　仁，福井英雄の両氏に深謝する．

## 文　献

(1) R.H. Pantell et al., IEEE J. Quantum Electron., QE-4, p.905 (Nov. 1968).
(2) P. Sprangle et al., Phys. Rev. A, 12, p.1697 (Oct. 1975).
(3) T. Kwan et al., Phys. Fluids, 20, p.581 (April 1977).
(4) V.L. Granatstein et al., Appl. Phys. Lett., 30, p.384 (April 15, 1977).
(5) D.A.G. Deacon et al., Phys. Rev. Lett., 38, p.892 (April 18, 1977).
(6) V.L. Granatstein and P. Sprangle, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-25, p.545 (June 1977).
(7) A. Hasegawa, Bell Syst. Tech. J., 57, p.3069 (Oct. 1978).
(8) K. Nishikawa, J. Phys. Soc. Japan, 24, p.916 (1968).
(9) J.A. Armstrong et al., Phys. Rev., 127, p.1918 (Sept. 15, 1962).

輻射科学研究会資料

# 非均質異方性薄膜光導波路における光ビームの追跡

村尾　次男
粟井　郁雄
池上　淳一
（京都大学工学部）

昭和54年12月7日

## 1. まえがき

薄膜中に光をとじこめ伝搬させる構造は小形，軽量，信頼性などの点ですぐれており，通信用更には情報処理用の素子[3],[4],[1],[2],[5]の開発を目ざして多くの研究が進められている．前者の目的のためには薄膜構造とはいえ，一次元的な信号処理に適した継続的な素子の配列が行なわれるのに対して，後者のためにはレンズに代表される二次元的な広がりを持った素子が配列され，時間だけでなく空間的な信号処理もあわせて行なわれる。

これらの素子は結局，不均一な膜厚，誘電率をもった薄膜導波路と見なすことができ，数学的には変係数の微分方程式を解く問題に帰着される。光学の分野では古くから，アイコナールを用いた幾何光学近似法[6]が不均一媒質の伝搬解析に用いられてきたが，二次元的な構造に対してもこの方法を有効に用いることができ，等方性薄膜については既に多くの研究結果が発表されている。

一方材料の面からながめるとき，基板又は薄膜に結晶を用いた方が圧電性，電気光学効果などを利用できるために多様な機能をもった素子の実現が期待できるので，単に等方な場合だけでなく異方性結晶を用いた不均一薄膜の解析のできる事が望ましい。そこで我々は任意の一軸異方性結晶の光軸を任意方向に向けた場合の光ビームがどのような振舞をするかを明らかにするための電算機プログラムを作

成した。等方性の場合とは異なって解析的な扱いが殆んど不可能であり見通しが悪いという欠点をもつが、定性的な振舞は分散曲線から大まかな検討ができる。

この報告は異方性薄膜に対する計算法と近似の成立する条件を明らかにする事に重点を置いているので興味深い数値計算結果を示すにまでは到っていない。それは今後の課題である。異方性薄膜構造について計算法をくわしく説明を行なうのはあまりにも煩雑であるので、比較的単純な等方性薄膜構造でのビーム追跡法についてまず述べ、異方性の場合はその拡張という事で簡単に触れたい。

## 2. 等方なバルク媒質におけるアイコナール方程式

等方性で誘電率が非均質なバルク内での電磁波の伝搬は一般には「アイコナール」を使って表現される。光の電界を $\mathbb{E}(x,y,z)$ とすると、$\mathbb{E}$ は次の波動方程式を満たす。

$$\nabla^2 \mathbb{E} + k^2 \mathbb{E} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E} = 0 \qquad (2-1)$$

上式左辺の才3項は結果に影響しないので[6],[7]、簡単のために省略する。$\mathbb{E}$ の成分 $E_x$, $E_y$, $E_z$ は各々、波動方程式を満足しなければならないが、各成分は同じ形をしているので、代表して $u(x,y,z)$ で表わし、

$$(\nabla^2 + k^2)\, u(x,y,z) = 0 \qquad (2-2)$$

の解を求める。

$k^2$ が $x, y, z$ の関数である場合の解として、

$$u(x,y,z) = A(x,y,z) \exp[j\{\omega t - k_0 \phi(x,y,z)\}] \qquad (2-3)$$

を仮定する。$\phi$ がアイコナールである。式(2-3)を式(2-2)に代入して、$k_0^2$ で割ると、

$$\{n^2 - (\mathrm{grad}\,\phi)^2\} A + \frac{1}{k_0^2} \nabla^2 A + \frac{j}{k_0}[A \nabla^2 \phi + 2(\mathrm{grad}\,A)\cdot(\mathrm{grad}\,\phi)] = 0 \qquad (2-4)$$

となる。但し、$k^2 = n^2 k_0^2$ とした。波長が充分短かい場合、即ち $k_0$ の値が非常に大きく、更に誘電率の変化が緩やかで $\nabla^2\phi$, $\nabla^2 A$, $\nabla A$ が小さければ

$$n^2 - (\mathrm{grad}\,\phi)^2 = 0$$

或いは

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 = n^2 \qquad (2-5)$$

と近似できる。式(2-5)はアイコナール方程式と呼ばれ、$\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$は各々$x$, $y$, $z$方向の局所的な波数に相当するものである。

アイコナール方程式を何らかの方法で解き、得られた解$\phi$を式(2-3)に代入すれば、電界が求まる。磁界はマクスウェルの方程式から電界より求められるので電磁界が求まることになる。

## 3．等方性非均質薄膜光導波路の解析

### 3－1．波数の関係

最初に、ここでいう非均質とは、薄膜の膜厚や各層の誘電率が緩やかに変化する場合に限ることにする。解析の対象となる構造は、図1に示すような薄膜導波路で、膜厚 $d$, 誘電率 $\epsilon$ が $y, z$ の関数で表わされる分布をしているものである。非均質薄膜においても、光ビームを記述する基本式は波動方程式であるが、均質媒質の波動方程式では0となった grad div $\mathbf{E}$ の項が入いる。光の電界を $\mathbf{E}(x, y, z)$ とおくと、$\mathbf{E}$ は各層で

$$k_0^2 \epsilon \mathbf{E} + \nabla^2 \mathbf{E} - \mathrm{grad\,div}\,\mathbf{E} = 0 \qquad (3-1)$$

を満たさなければならない。

バルク媒質では $x, y, z$ 全ての方向に緩やかに誘電率が変化したが、薄膜構造では、膜厚方向に層の境界面で誘電率は急激に変化する。そのため膜厚方向には、幾何光学的な近似ができない。そこで $x$ 方向には、無限遠点で0とな

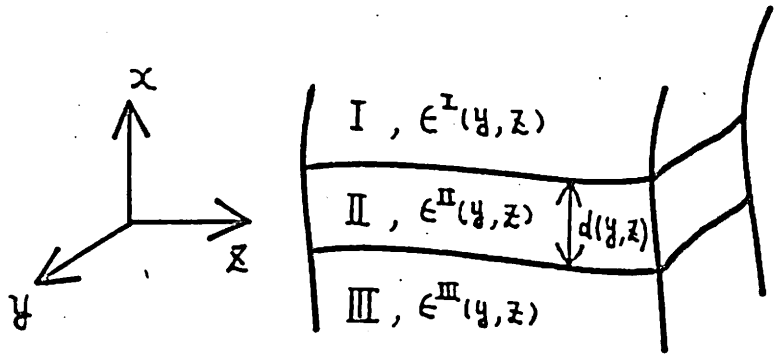



図1．導波路の構造と座標

り、薄膜中では定在波となるような波動論的な解を採る。

膜厚方向の波数と、膜面方向の波数との関係を調べるために、次式の局所的な平面波解を仮定する。

$$\mathbb{E}(x,y,z) = A(y,z)\,\alpha(y,z)\,\exp[-jk_0\gamma(y,z)x]$$
$$\times\exp[j\{\omega t - k_0\phi(y,z)\}] \qquad (3\text{-}2)$$

ここで局所的なという表現を用いたのは、2章で説明したようにアイコナール，$\phi$の偏微分 $\partial\phi/\partial y$，$\partial\phi/\partial z$ は膜面方向の波数に相当するが、これらが $y, z$ の関数となるためである。$\alpha(y,z)$ は今考えている平面波の固有ベクトルであり、電界の成分 $E_x$, $E_y$, $E_z$ の振幅比を定める。$A(y,z)$ は膜厚，誘電率の分布による振幅変化を表わすパラメータである。仮定した平面波が波動方程式を満たす条件は、式(3-2)を式(3-1)に代入して得られる。代入した結果を成分毎に示すと次のようになる。

$$(k_0^2\epsilon\mathbb{E} + \nabla^2\mathbb{E} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E})_x$$
$$= \Big[\, k_0^2\Big\{[(\epsilon-\phi_y^2-\phi_z^2) - z(\phi_y x\gamma_y + \phi_z x\gamma_z) - x^2(\gamma_y^2+\gamma_z^2)]\alpha_x$$
$$+[\phi_y\gamma + \gamma x\gamma_y]\alpha_y + [\phi_z\gamma + \gamma x\gamma_z]\alpha_z\Big\}$$
$$-jk_0\Big\{[\phi_{yy} + \phi_{zz} + z(\phi_y\frac{\partial}{\partial y} + \phi_z\frac{\partial}{\partial z}) + x(\gamma_{yy}+\gamma_{zz})$$
$$+zx(\gamma_y\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z\frac{\partial}{\partial z})]\alpha_x$$
$$-[\gamma\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_y]\alpha_y - [\gamma\frac{\partial}{\partial z} + \gamma_z]\alpha_z\Big\}$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\alpha_x\Big]\,A\exp[-jk_0\gamma x]\exp[j(\omega t - k_0\phi)]$$
$$= 0 \qquad (3\text{-}3a)$$

$$
\begin{aligned}
&(k_0^2 \epsilon \mathbb{E} + \nabla^2 \mathbb{E} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E})_y \\
&= \Big[ k_0^2 \Big\{ [\gamma\phi_y + x\gamma\gamma_z]\alpha_x + [\epsilon - \phi_z^2 - \gamma^2 - \phi_z x\gamma_z - x^2\gamma_z^2]\alpha_y \\
&\qquad + [\phi_y\phi_z + x(\gamma_y\phi_z + \gamma_z\phi_y) + x^2\gamma_y\gamma_z]\alpha_z \Big\} \\
&\quad - jk_0 \Big\{ [-\gamma\frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z]\alpha_x + [2\phi_z\frac{\partial}{\partial z} + \phi_{zz} + x\gamma_{zz} + 2x\gamma_z\frac{\partial}{\partial z}]\alpha_y \\
&\qquad - [\phi_z\frac{\partial}{\partial y} + \phi_y\frac{\partial}{\partial z} + \phi_{zy} + x\gamma_{zy} + x\gamma_z\frac{\partial}{\partial y} + x\gamma_y\frac{\partial}{\partial z}]\alpha_z \Big\} \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\alpha_y \Big] A \exp[-jk_0\gamma x] \exp[j(\omega t - k_0\phi)] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3-3b}
$$

$$
\begin{aligned}
&(k_0^2 \epsilon \mathbb{E} + \nabla^2 \mathbb{E} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E})_z \\
&= \Big[ k_0^2 \Big\{ [\gamma\phi_z + x\gamma\gamma_y]\alpha_x + [\epsilon - \phi_y^2 - \gamma^2 - \phi_y x\gamma_y - x^2\gamma_y^2]\alpha_z \\
&\qquad + [\phi_y\phi_z + x(\gamma_z\phi_y + \gamma_y\phi_z) + x^2\gamma_y\gamma_z]\alpha_y \Big\} \\
&\quad - jk_0 \Big\{ [-\gamma\frac{\partial}{\partial z} - \gamma_y]\alpha_x + [2\phi_y\frac{\partial}{\partial y} + \phi_{yy} + x\gamma_{yy} + 2x\gamma_y\frac{\partial}{\partial y}]\alpha_z \\
&\qquad - [\phi_y\frac{\partial}{\partial z} + \phi_z\frac{\partial}{\partial y} + \phi_{yz} + x\gamma_{yz} + x\gamma_y\frac{\partial}{\partial z} + x\gamma_z\frac{\partial}{\partial y}]\alpha_y \Big\} \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\alpha_z \Big] A \exp[-jk_0\gamma x] \exp[j(\omega t - k_0\phi)] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3-3c}
$$

但し、$\phi_y, \phi_z, \gamma_y$ などは、添字方向の偏微分を表わす。レーザ光の波長は数千Å程度であるから、$k_0 \sim 10$ (1/μm) であり、膜厚，誘電率の変化が緩やかであれば、式(3-3)の $k_0$ の2次の項は1次，0次の項より充分大きく、1次，0次の項を省くことができる。また、伝搬している電磁界の膜厚方向分布は $y, z$ により急激に変化しないものと考え、

$$\phi_y \gg x\gamma_y \quad , \phi_z \gg x\gamma_z \tag{3-4}$$

とすることができる。

以上の近似を施すと、式(3-3)は

$$(k_0^2\epsilon\mathbb{E}+\nabla^2\mathbb{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E})_x$$

$$\simeq\{[\epsilon-\phi_y^2-\phi_z^2]\alpha_x+\phi_y\gamma\cdot\alpha_y+\phi_z\gamma\cdot\alpha_z\}$$

$$\times k_0^2 A\exp[-jk_0\gamma x]\exp[j(\omega t-k_0\phi)]$$

$$=0 \qquad (3\text{-}3a')$$

$$(k_0^2\epsilon\mathbb{E}+\nabla^2\mathbb{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E})_y$$

$$\simeq\{\phi_y\gamma\cdot\alpha_x+[\epsilon-\phi_z^2-\gamma^2]\alpha_y+\phi_y\phi_z\cdot\alpha_z\}$$

$$\times k_0^2 A\exp[-jk_0\gamma x]\exp[j(\omega t-k_0\phi)]$$

$$=0 \qquad (3\text{-}3b')$$

$$(k_0^2\epsilon\mathbb{E}+\nabla^2\mathbb{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E})_z$$

$$\simeq\{\phi_z\gamma\cdot\alpha_x+\phi_y\phi_z\alpha_y+[\epsilon-\phi_y^2-\gamma^2]\alpha_z\}$$

$$\times k_0^2 A\exp[-jk_0\gamma x]\exp[j(\omega t-k_0\phi)]$$

$$=0 \qquad (3\text{-}3c')$$

と簡単になる。$k_0^2 A\exp[-jk_0\gamma x]\exp[j(\omega t-k_0\phi)]$ で割ってマトリクス表示すると、

$$\begin{bmatrix}\epsilon-\phi_y^2-\phi_z^2 & \phi_y\gamma & \phi_z\gamma\\ \phi_y\gamma & \epsilon-\phi_z^2-\gamma^2 & \phi_y\phi_z\\ \phi_z\gamma & \phi_y\phi_z & \epsilon-\phi_y^2-\gamma^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_x\\ \alpha_y\\ \alpha_z\end{bmatrix}=0 \qquad (3\text{-}5)$$

を得る。上式が $\alpha_x=\alpha_y=\alpha_z=0$ でない解をもつための必要十分条件は

$$\det[\quad]=0 \qquad (3\text{-}6)$$

である。式(3-5)は $\gamma$ に関する4次方程式となるが、解析的に解くことができ、2つの重根をもつことが明らかになる。

$$\gamma = \pm\sqrt{\epsilon - \phi_y^2 - \phi_z^2} \qquad (3-7)$$

上式は$\gamma$と$\phi_y, \phi_z$との関係を決定する式であり、本稿では波数の関係式と呼ぶことにする。

均質等方性薄膜では伝搬するモードはTEとTMに分離するが、非均質の場合にもこのことは次のように確められる。これまで考えていた座標系は$(x, y, z)$であったが、この座標系に代って図2に示されるような膜面方向の波数$\phi_y$, $\phi_z$で規定される座標系$(X, Y, Z)$を考える。$(X, Y, Z)$系は$\phi_y, \phi_z$の変化に伴ない回転するので、ビーム軌跡を記述するには不備であるが、薄膜を局所的には均質と考え、電磁界の振舞を調べるには有益な座標系である。$(X, Y, Z)$系の$(x, y, z)$系からの回転角$\theta$を

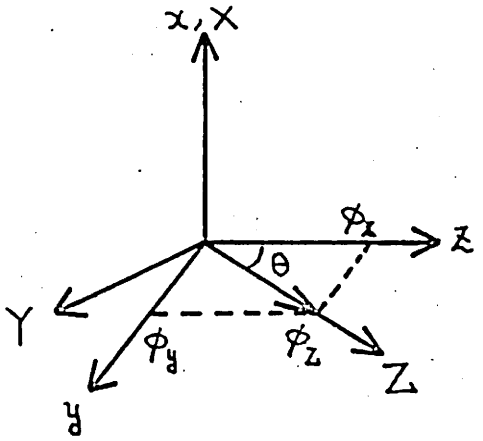



図2、$(x, y, z)$系と$(X, Y, Z)$系

$$\theta = \tan^{-1}(\phi_y/\phi_z) \qquad (3-8)$$

で定義すれば、$(x, y, z)$系から$(X, Y, Z)$系への座標変換テンソルは

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \qquad (3-9)$$

となるから、式(3-5)の行列を$\tilde{D}(x, y, z)$とすると、テンソ

ルの座標変換を施すことにより、

$$\tilde{D}(X,Y,Z) = T\,\tilde{D}(x,y,z)\,T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \epsilon-\phi_z^2 & 0 & \gamma\phi_z \\ 0 & \epsilon-\phi_z^2-\gamma^2 & 0 \\ \gamma\phi_z & 0 & \epsilon-\gamma^2 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}10)$$

となる。$\alpha(x,y,z)$ も $\alpha(X,Y,Z)$ に変換して、式(3-5)は

$$\begin{bmatrix} \epsilon-\phi_z^2 & 0 & \gamma\phi_z \\ 0 & \epsilon-\phi_z^2-\gamma^2 & 0 \\ \gamma\phi_z & 0 & \epsilon-\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_X \\ \alpha_Y \\ \alpha_Z \end{bmatrix} = 0 \qquad (3\text{-}5')$$

と表わせる。この式の1番目と3番目が1組を成し、2番目は独立であるので、式が2組に別れる。最初の組は電界成分として $\alpha_X, \alpha_Z$ をもつことからTMモードであり、後者は $\alpha_Y$ だけであるからTEモードであることは明らかである。固有値はTE，TMに関係なく、

$$\gamma_X = \pm\sqrt{\epsilon-\phi_z^2} \qquad (3\text{-}7')$$

で与えられる。固有ベクトルは式(3-7)，(3-7')で与えられる $\gamma$ に対し各々次式となる。

$$\begin{bmatrix} \alpha_X \\ \alpha_Y \\ \alpha_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{或いは} \quad \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_z/\sqrt{\phi_y^2+\phi_z^2} \\ -\phi_y/\sqrt{\phi_y^2+\phi_z^2} \end{bmatrix} \qquad \text{(TE)} \quad (3\text{-}11a)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_X \\ \alpha_Y \\ \alpha_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_X\phi_z \\ 0 \\ \epsilon-\gamma_X^2 \end{bmatrix} \quad \text{或いは} \quad \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\sqrt{\phi_y^2+\phi_z^2} \\ (\epsilon-\gamma^2)\phi_y/\sqrt{\phi_y^2+\phi_z^2} \\ (\epsilon-\gamma^2)\phi_z/\sqrt{\phi_y^2+\phi_z^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{(TM)} \qquad (3\text{-}11b)$$

## 3－2、各層における電磁界の表現

前節において、モードはTEとTMに分離することがわかったが、本稿で扱う非均質性は伝搬につれてモードが他のモードに移るほど強い場合ではないからこの意味でTE, TM各々について議論すれば充分である。

ここではTEモードの場合について説明する。TMモードについても同様な方法で解析できる。最初に(X, Y, Z)系で考え、後で(x, y, z)系に戻す。局所的に均質な図3の構造を用いて考えると、TEモードであるから存在する電界成分はY方向だけで、各層で次のように仮定できる。

$$E_Y^{I} = A_{Y1}(Y,Z)\exp[-k_0 n^{I}(Y,Z)X]\exp[j\{\omega t - k_0\phi_z(Y,Z)Z\}]$$

$$E_Y^{II} = \{A_{Y1}(Y,Z)\cos k_0 n^{II}(Y,Z)X + A_{Y2}(Y,Z)\sin k_0 n^{II}(Y,Z)X\}$$

$$\times\exp[j\{\omega t - k_0\phi_z(Y,Z)Z\}] \qquad (3\text{-}12)$$

$$E_Y^{III} = \{A_{Y1}(Y,Z)\cos k_0 n^{II}(Y,Z)d(Y,Z)$$

$$-A_{Y2}(Y,Z)\sin k_0 n^{II}(Y,Z)d(Y,Z)\}$$

$$\times\exp[k_0 n^{III}(Y,Z)\{X + d(Y,Z)\}]\exp[j\{\omega t - k_0\phi_z(Y,Z)Z\}]$$

磁界はマクスウェルの方程式.

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{E} = -j\omega\mu_0\mathbb{H}$$

から求められる。$E_Y$から生ずる磁界成分は$H_X$, $H_Z$であるが.

$$H_X = \frac{1}{j\omega\mu_0}\cdot\frac{\partial E_Y}{\partial Z}$$

には. $\frac{\partial A_Y}{\partial Z}$, $\frac{\partial n}{\partial Z}$, $\frac{\partial\phi_z}{\partial Z}$, $\frac{\partial d}{\partial Z}$ を

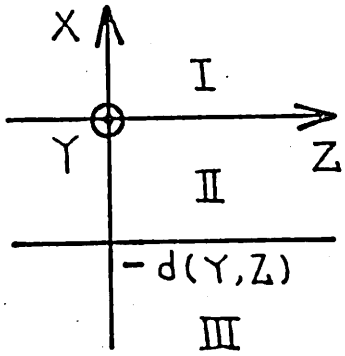



図3、局所的な薄膜の構造

含む項が現れる。これらの項が存在すると、得られた磁界を用いてマクスウェルの方程式

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon\,\mathbb{E}$$

から求めた電界は、初めに仮定した電界に一致しなくなり、自己一貫性が崩れる。

$$\phi_z \gg \frac{1}{k_0 A_Y}\frac{\partial A_Y}{\partial Z}\ ,\ \frac{\partial}{\partial Z}(h d)\ \text{或いは}\ x\frac{\partial h}{\partial Z}\ ,\ \frac{\partial \phi_z}{\partial Z}Z \qquad (3\text{-}13)$$

であれば自己一貫性は保たれる。式(3-13)は、膜厚，誘電率の分布が緩やかで、局所的に均質とみなせるための条件を表わすものである。境界条件に必要な $H_z$ だけを以下に示す。

$$H_z^{\mathrm{I}} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\{k_0 h^{\mathrm{I}}(Y,Z)\}A_{Y1}(Y,Z)\exp[-k_0 h^{\mathrm{I}}(Y,Z)X]$$
$$\times\exp[j\{\omega t - k_0\phi_z(Y,Z)Z\}]$$

$$H_z^{\mathrm{II}} = \frac{k_0 h^{\mathrm{II}}(Y,Z)}{j\omega\mu_0}\{A_{Y1}(Y,Z)\sin k_0 h^{\mathrm{II}}(Y,Z)X$$
$$-A_{Y2}(Y,Z)\cos k_0 h^{\mathrm{II}}(Y,Z)X\}$$
$$\times\exp[j\{\omega t - k_0\phi_z(Y,Z)Z\}] \qquad (3\text{-}14)$$

$$H_z^{\mathrm{III}} = \frac{-k_0 h^{\mathrm{III}}(Y,Z)}{j\omega\mu_0}\{A_{Y1}(Y,Z)\cos k_0 h^{\mathrm{II}}(Y,Z)\,d(Y,Z)$$
$$-A_{Y2}(Y,Z)\sin k_0 h^{\mathrm{II}}(Y,Z)\,d(Y,Z)\}$$
$$\times\exp[k_0 h^{\mathrm{III}}(Y,Z)\{X+d(Y,Z)\}]\exp[j\{\omega t - k_0\phi_z(Y,Z)Z\}]$$

式(3-12)，(3-14)に採用する膜厚方向の波数 $h^{\mathrm{I}}$, $h^{\mathrm{II}}$, $h^{\mathrm{III}}$ は X方向の無限遠点で電磁界が0になり、薄膜中では定在波となるように選ぶ。即ち、

$$h^{I}=\sqrt{\phi_z^2-\epsilon^{I}(Y,Z)}$$
$$h^{II}=\sqrt{\epsilon^{II}(Y,Z)-\phi_z^2} \qquad (3\text{-}15)$$
$$h^{III}=\sqrt{\phi_z^2-\epsilon^{III}(Y,Z)}$$

である。

式(3-12)の電界は既に境界条件を満足する形で書かれている。従って磁界 $H_Z$ の境界での連続条件だけを考えればよく、その結果

$$\tan^{-1}\frac{h^{I}(Y,Z)}{h^{II}(Y,Z)}+\tan^{-1}\frac{h^{III}(Y,Z)}{h^{II}(Y,Z)}+m\pi-k_0h^{II}(Y,Z)d(Y,Z)=0 \qquad (3\text{-}16)$$

但し、$m=0,1,2\cdots$

なる分散関係式を得る。$(x,y,z)$ 系に戻すと、

$$\tan^{-1}\frac{h^{I}(y,z)}{h^{II}(y,z)}+\tan^{-1}\frac{h^{III}(y,z)}{h^{II}(y,z)}+m\pi-k_0h^{II}(y,z)d(y,z)=0 \qquad (3\text{-}17)$$

但し、$h^{I}(y,z)=\sqrt{\phi_y^2+\phi_z^2-\epsilon^{I}(y,z)}$

$$h^{II}(y,z)=\sqrt{\epsilon^{II}(y,z)-\phi_y^2-\phi_z^2}$$
$$h^{III}(y,z)=\sqrt{\phi_y^2+\phi_z^2-\epsilon^{III}(y,z)}$$
$$m=0,1,2,\cdots$$

となる。

## 3-3、分散関係式と光ビーム軌跡

式(3-17)の分散関係式は、ビームを考えている位置 $y$, $z$ 及び膜面方向の波数 $\phi_y$, $\phi_z$ の関数として表現できる。

$$f(y,z,\phi_y,\phi_z)=0 \qquad (3\text{-}18)$$

$\phi_y$, $\phi_z$ はアイコナール $\phi$ の偏微分であったから、上式は $\phi$

に関する一階偏微分方程式と考えることができる。その意味で式(3-18)はバルク媒質のアイコナール方程式(2-5)と同一である。従って式(3-18)をφについて解き、得られた解φを式(3-12),(3-14)に代入すれば電磁界がわかる。また以下に説明する方法を用いれば光ビーム軌跡を求めることができる。

一階偏微分方程式を解く場合、これを直接解かずに、特性微分方程式と呼ばれる方程式を導出し、これを解く方法がある。この方法はcharpitの方法と呼ばれる。特性微分方程式は$f$がφを陽に含まないので

$$\frac{dy}{\partial f/\partial \phi_y} = \frac{dz}{\partial f/\partial \phi_z} = -\frac{d\phi_y}{\partial f/\partial y} = -\frac{d\phi_z}{\partial f/\partial z} \qquad (3\text{-}19)$$

となる。独立変数τを導入し、式(3-19)の比を$d\tau$とおくと、

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \frac{\partial f}{\partial \phi_y} \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{\partial f}{\partial \phi_z} \end{aligned}\right\} \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} \qquad (3\text{-}20a)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\phi_y}{d\tau} &= -\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{d\phi_z}{d\tau} &= -\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \qquad (3\text{-}20b)$$

但し、$\mathbf{r} = \mathbf{i}_y y + \mathbf{i}_z z$ , $\mathbf{P} = \mathbf{i}_y \phi_y + \mathbf{i}_z \phi_z$

と書ける。これより特性微分方程式は4つの変数$y, z, \phi_y,$

$\phi_z$が共にτの関数であるような連立一階常微分方程式であることに気付く。連立一階常微分方程式を解析的に解くことは困難であるが、電算機による数値計算は比較的簡単であり、本稿ではこの方法を採用することにする。

光ビームは電磁波のエネルギー流であり、その方向は群速度の方向である。群速度は定義により次式で与えられる。

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbb{P}} \tag{3-21}$$

ここで分散関係式を$y, z, \phi_y, \phi_z$だけでなく、$k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0}$を通してωの関数でもあるとして全微分をとると、

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbb{r}} d\mathbb{r} + \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}} d\mathbb{P} + \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega = 0 \tag{3-22}$$

であるが、$d\mathbb{r} = 0$の条件を加えると、

$$\left.\frac{d\omega}{d\mathbb{P}}\right|_{d\mathbb{r}=0} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbb{P}} = -\frac{\partial f/\partial \mathbb{P}}{\partial f/\partial \omega}$$

と群速度の定義に一致した式が得られ、光ビームの群速度は式(3-20a)と考え合わせると結局

$$v_g = -\frac{1}{\partial f/\partial \omega}\frac{d\mathbb{r}}{d\tau} \tag{3-23}$$

となる。上式を質点の運動を表わす式と考え、$v_g$を速度、$d\mathbb{r}$を微小時間における移動距離とみると、今まで物理的な意味のはっきりしなかった独立変数τが、時間$t$と次の関係があることがわかる。

$$dt = -\partial f/\partial \omega \cdot d\tau \tag{3-24}$$

式(3-20)を時間を用いて書き直すと、

$$\frac{d\mathbb{r}}{dt}=\frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}}\Big/\left(-\frac{\partial f}{\partial \omega}\right) \qquad (3\text{-}20a')$$

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial \mathbb{r}}\Big/\left(-\frac{\partial f}{\partial \omega}\right) \qquad (3\text{-}20b')$$

となる。

## 3－4、特性微分方程式の物理的考察

式(3-20)で与えられる特性微分方程式が、ビームの挙動を決定する一種の運動方程式であることがわかった。以下に方程式に含まれる偏微分 $\partial f/\partial \mathbb{P}$, $-\partial f/\partial \mathbb{r}$ のもつ物理的な意味について考察を試みる。

(i) $\partial f/\partial \mathbb{P}$ について

$\partial f(\mathbb{r},\mathbb{P})/\partial \mathbb{P}$ は $\mathbb{r}$ を固定した状態における分散関係式の $\mathbb{P}$ についての微分である。従って膜厚，誘電率を一定として均質な構造を考え、等価屈折率曲線を調べればよい。

等価屈折率曲線は、図4のように $\mathbb{P}$ の方向に対してその大きさを描いたもので、$f=0$ の曲線がちょうどそれに当る。$\partial f/\partial \mathbb{P}$ は従ってこの等価屈折率曲線の法線を表わす。等価屈折率曲線の法線がエネルギー流の方向を示すことはこれまでにも明らか

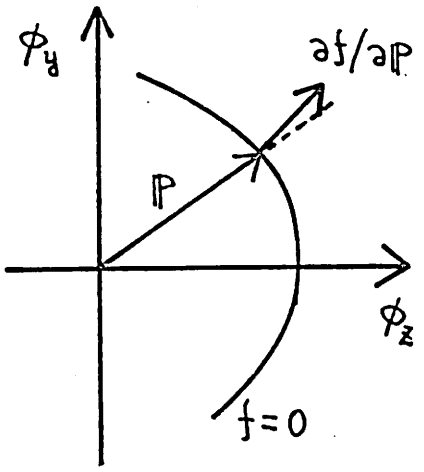



図4、等価屈折率曲線

にされており、式(3-23)はこれと一致している。等方性媒質では屈折率に方向依存性がないので曲線は円となり、群速度の方向は$\mathbb{P}$の方向と一致する。

(ii) $-\partial f/\partial \mathbb{r}$ について

$\partial f/\partial \mathbb{P}$ が或る位置における群速度の方向と$\mathbb{P}$の方向との関係を与えたのに対し、$-\partial f/\partial \mathbb{r}$ は膜厚 $d(\mathbb{r})$, 誘電率 $\epsilon(\mathbb{r})$ の分布による$\mathbb{P}$の変化を表わす。例を上げて説明する。導膜の膜厚は一定で、誘電率が、

$$\epsilon(y) = \epsilon(0)\{1-(y/a)^2\}$$

なる分布をする場合を考える。等価屈折率を調べると右図のような分布となる。このとき、$\partial f/\partial y$, $d\phi_y/d\tau$ は表1のようになることがわかった。$z$方向には分布は一様であるから変化はなく、$\mathbb{P}$は$\Delta\tau$後にはいくら

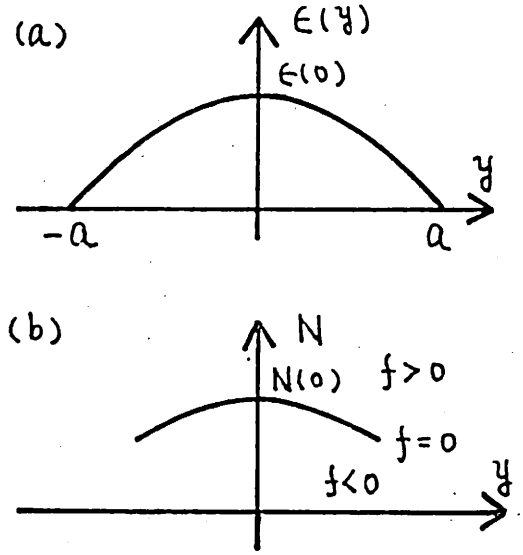



図5. 誘電率が$z$乗分布する場合の (a)誘電率分布と (b)等価屈折率分布

| | | |
|---|---|---|
| $\partial f/\partial y$ $>0$ | $d\phi_y/d\tau$ $<0$ | $(y>0)$ |
| 〃 $=0$ | 〃 $=0$ | $(y=0)$ |
| 〃 $<0$ | 〃 $>0$ | $(y<0)$ |

表1. 図5の分布の場合の $\partial f/\partial y$, $d\phi_y/d\tau$ の符号

が内側を向くことになる。等方性の場合には、$\mathbb{P} \parallel \nabla g$であるから、光ビームも内側に曲がる。結局 $-\partial f/\partial \mathbb{r}$ は「光は屈折率の高い方へ曲がる。」ということを分散関係式を通して表わしたものと考えられる。

## 3－5、電算機による解法

3－3節より、$d\mathbb{r}$が光ビームの移動距離を表わすことがわかったから、$\mathbb{r}$を追跡すればそれが光ビーム軌跡を示すことになる。さて、$\mathbb{r}$, $\mathbb{P}$は式(3－20a′), (3－20b′)を積分して、

$$\mathbb{r} = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}} \Big/ \left(-\frac{\partial f}{\partial \omega}\right) dt \qquad (3\text{-}25a)$$

$$\mathbb{P} = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial \mathbb{r}} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right) dt \qquad (3\text{-}25b)$$

で与えられるが、電算機では微小時間 $\Delta t$ を用いて、次式のように近似する。

$$\mathbb{r}_{n+1} = \mathbb{r}_n + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}} \cdot \frac{\Delta t}{-\partial f/\partial \omega}\right]_{\mathbb{r}_n, \mathbb{P}_n}$$

$$\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}_n - \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbb{r}} \frac{\Delta t}{-\partial f/\partial \omega}\right]_{\mathbb{r}_n, \mathbb{P}_n} \qquad (3\text{-}26)$$

上式において、$\mathbb{r}_n$, $\mathbb{P}_n$はこれまでに追跡してきた結果求められた位置と波数であり、$\mathbb{r}_{n+1}$, $\mathbb{P}_{n+1}$は $\Delta t$ 後のビームの位置及び波数である。微分は$\mathbb{r}_n$, $\mathbb{P}_n$点で数値微分することにより求め、式(3－26)を繰り返せばビームを追跡できる。

$\mathbb{r}$, $\mathbb{P}$の初期値は $t=0$ における入射位置 $\mathbb{r}_0$ とそのときの$\mathbb{P}$の方向を与えることにより等価屈折率を求め，$\mathbb{P}$を決定する方法を採っている。

また，アイコナールは式(3-20)を用いて

$$\phi=\int_C \nabla_t\phi\cdot d\mathbb{r}=\int_C \mathbb{P}\cdot d\mathbb{r}=\int_0^t \mathbb{P}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}}\Big/\left(-\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)dt \qquad (3-27)$$

但し，$\nabla_t\phi=\mathbb{i}_y\phi_y+\mathbb{i}_z\phi_z=\mathbb{P}$

なる積分によって得られる。Cはビーム軌跡に沿う線積分である。式(3-20)，(3-27)で得られた($y(t)$, $z(t)$, $\phi_y(t)$, $\phi_z(t)$, $\phi(t)$)の組は，方程式(3-18)の「特性帯」と呼ばれる。又，($y(t)$, $z(t)$, $\phi(t)$)は「特性曲線」であり，光ビーム軌跡は「特性曲線」の$yz$平面への射影に他ならない。

# 4．異方性非均質薄膜光導波路の解析

## 4－1．波数の関係

等方性薄膜と本質的に異なる点は、誘電率がスカラーからテンソルになることである。等方性媒質では等価屈折率曲線は円であったが、異方性媒質では$\mathbb{P}$の向きにより等価屈折率が変化し、曲線は円からずれる。そのため異方性薄膜では等方性薄膜とは異なった光ビーム軌跡を示す。

解析方法は基本的には等方性の場合と同様であるが、誘電率がテンソルであるので、特別な場合を除いてモードはハイブリッドとなりTEとTMは分離しない。その結果、分散関係式は複雑なものとなり、一般には電算機により数値計算される。以下に、モードをハイブリッドとした場合と、その近似としてモードがTE，TMに分離するようにした簡単な場合を説明する。

波動方程式は、誘電率をテンソルとして、

$$k_0^2 \tilde{\epsilon} \mathbb{E} + \nabla^2 \mathbb{E} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E} = 0 \qquad (4-1)$$

で与えられる。局所的な平面波を

$$\mathbb{E}(x,y,z) = A(y,z)\,\mathbb{d}(y,z)\,\exp[-jk_0\gamma(y,z)x] \times \exp[j\{\omega t - k_0\phi(y,z)\}] \qquad (4-2)$$

と仮定する。式(4－2)を式(4－1)に代入して、各成分毎に書くと、

$$(k_0^2\hat{\epsilon}\mathbb{E}+\nabla^2\mathbb{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E})_x$$

$$=[k_0^2\{[(\epsilon_{xx}-\phi_y^2-\phi_z^2)-z(\phi_y x\gamma_y+\phi_z x\gamma_z)-x^2(\gamma_y^2+\gamma_z^2)]\alpha_x$$

$$+[\epsilon_{xy}+\phi_y\gamma+\gamma x\gamma_y]\alpha_y+[\epsilon_{xz}+\phi_z\gamma+\gamma x\gamma_z]\alpha_z\}$$

$$-jk_0\{[\phi_{yy}+\phi_{zz}+z(\phi_y\frac{\partial}{\partial y}+\phi_z\frac{\partial}{\partial z})+x(\gamma_{yy}+\gamma_{zz})$$

$$+zx(\gamma_y\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_z\frac{\partial}{\partial z})]\alpha_x-[\gamma\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_y]\alpha_y-[\gamma\frac{\partial}{\partial z}+\gamma_z]\alpha_z\}$$

$$+(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\alpha_x]A\exp[-jk_0\gamma x]\exp[j\{\omega t-k_0\phi\}] \quad (4\text{-}3a)$$

$$(k_0^2\hat{\epsilon}\mathbb{E}+\nabla^2\mathbb{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E})_y$$

$$=[k_0^2\{[\epsilon_{xy}+\gamma\phi_y+x\gamma\gamma_z]\alpha_x+[\epsilon_{yy}-\phi_z^2-\gamma^2-\phi_z x\gamma_z-x^2\gamma_z^2]\alpha_y$$

$$+[\epsilon_{yz}+\phi_y\phi_z+x(\gamma_y\phi_z+\gamma_z\phi_y)+x^2\gamma_y\gamma_z]\alpha_z\}$$

$$-jk_0\{[-\gamma\frac{\partial}{\partial y}-\gamma_z]\alpha_x+[2\phi_z\frac{\partial}{\partial z}+\phi_{zz}+x\gamma_{zz}+zx\gamma_z\frac{\partial}{\partial z}]\alpha_y$$

$$\mp[\phi_z\frac{\partial}{\partial y}+\phi_y\frac{\partial}{\partial z}+\phi_{zy}+x\gamma_{yz}+x\gamma_z\frac{\partial}{\partial y}+x\gamma_y\frac{\partial}{\partial z}]\alpha_z\}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\alpha_y]A\exp[-jk_0\gamma x]\exp[j(\omega t-k_0\phi)] \quad (4\text{-}3b)$$

$$(k_0^2\hat{\epsilon}\mathbb{E}+\nabla^2\mathbb{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{E})_z$$

$$=[k_0^2\{[\epsilon_{xz}+\gamma\phi_z+x\gamma\gamma_y]\alpha_x+[\epsilon_{zz}-\phi_y^2-\gamma^2-\phi_y x\gamma_y-x^2\gamma_y^2]\alpha_z$$

$$+[\epsilon_{yz}+\phi_y\phi_z+x(\gamma_z\phi_y+\gamma_y\phi_z)+x^2\gamma_y\gamma_z]\alpha_y\}$$

$$-jk_0\{[-\gamma\frac{\partial}{\partial z}-\gamma_y]\alpha_x+[z\phi_y\frac{\partial}{\partial y}+\phi_{yy}+x\gamma_{yy}+zx\gamma_y\frac{\partial}{\partial y}]\alpha_y$$

$$-[\phi_y\frac{\partial}{\partial z}+\phi_z\frac{\partial}{\partial y}+\phi_{yz}+x\gamma_{zy}+x\gamma_y\frac{\partial}{\partial z}+x\gamma_z\frac{\partial}{\partial y}]\alpha_z\}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\alpha_z]A\exp[-jk_0\gamma x]\exp[j(\omega t-k_0\phi)] \quad (4\text{-}3c)$$

となる。等方性の場合と同様の仮定をし、整理すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}-\phi_y^2-\phi_z^2 & \epsilon_{xy}+\phi_y\gamma & \epsilon_{xz}+\phi_z\gamma \\ \epsilon_{xy}+\phi_y\gamma & \epsilon_{yy}-\phi_z^2-\gamma^2 & \epsilon_{yz}+\phi_y\phi_z \\ \epsilon_{xz}+\phi_z\gamma & \epsilon_{yz}+\phi_y\phi_z & \epsilon_{zz}-\phi_y^2-\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = 0 \qquad (4\text{-}4)$$

波数の関係は det[ ] = 0 から求められるが、ここでは、(X, Y, Z)系に変換してから求めることにする。3－1節と同様に、式(4-4)を(X, Y, Z)系で表わすと

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{XX}-\phi_Z^2 & \epsilon_{XY} & \epsilon_{XZ}+\gamma\phi_Z \\ \epsilon_{XY} & \epsilon_{YY}-\phi_Z^2-\gamma^2 & \epsilon_{YZ} \\ \epsilon_{XZ}+\gamma\phi_Z & \epsilon_{YZ} & \epsilon_{ZZ}-\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_X \\ \alpha_Y \\ \alpha_Z \end{bmatrix} = 0 \qquad (4\text{-}5)$$

となることがわかる。上式から、一軸性結晶の常光屈折率を $n^o$, 異常光屈折率を $n^e$ とすると、固有値は

$$\gamma^o = \pm\sqrt{\epsilon^o-\phi_Z^2} \qquad (4\text{-}6a)$$

$$\gamma^e = -\frac{\epsilon_{XZ}}{\epsilon_{XX}}\phi_Z \pm \frac{1}{\epsilon_{XX}}\sqrt{\epsilon^o\epsilon^e\epsilon_{XX}-(\epsilon_{ZZ}\epsilon_{XX}-\epsilon_{XZ}^2)\phi_Z^2} \qquad (4\text{-}6b)$$

但し、$\epsilon^o=(n^o)^2$, $\epsilon^e=(n^e)^2$

とわかる。$\gamma^o$は常光線に対する膜厚方向の波数, $\gamma^e$は異常光線に対する波数である。$\tilde{\epsilon}(X,Y,Z)$は式(3-9)の座標変換テンソルを用いて、

$$\tilde{\epsilon}(X,Y,Z) = T\,\tilde{\epsilon}(x,y,z)\,T^{-1} \qquad (4\text{-}7)$$

で与えられる。式(4-6)の固有値に対する固有ベクトルは

$$\begin{vmatrix} \alpha_X \\ \alpha_Y \\ \alpha_Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\phi_Z\gamma+\epsilon_{XZ})(\epsilon_{YY}-\phi_Z^2-\gamma^2)-\epsilon_{YZ}\epsilon_{XY} \\ (\epsilon_{ZZ}-\gamma^2)\epsilon_{XY}-\epsilon_{YZ}(\phi_Z\gamma+\epsilon_{XZ}) \\ \epsilon_{YZ}^2-(\epsilon_{ZZ}-\gamma^2)(\epsilon_{YY}-\phi_Z^2-\gamma^2) \end{vmatrix} \qquad (4\text{-}8)$$

である。但し、以下の場合に注意しなければならない。

(i) 結晶軸が座標軸 (X, Y, Z) に一致するとき

このときは $\epsilon$ の非対角項が 0 となるので、式 (4-6), (4-8) は簡単になり、

$$\gamma^o = \pm\sqrt{\epsilon^o - \phi_z^2} \qquad (4\text{-}6a')$$

$$\gamma^e = \pm\sqrt{(\epsilon^o\epsilon^e - \epsilon_{zz}\phi_z^2)/\epsilon_{xx}} \qquad (4\text{-}6b')$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_z\gamma(\epsilon_{yy} - \gamma^2 - \phi_z^2) \\ 0 \\ (\epsilon_{zz} - \gamma^2)(\epsilon_{yy} - \phi_z^2 - \gamma^2) \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}8')$$

となるが、固有値, 式 (4-6a') に対しては式 (4-8') は常に 0 になり無意味な解となってしまう。従ってこのような場合には式 (4-5) に戻って、固有ベクトルとして

$$\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_z\gamma \\ 0 \\ \gamma^2 - \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}9)$$

を採用する。

(ii) 等方性の場合

このときには $\tilde{\epsilon}$ の非対角項が全て 0 であるだけでなく、対角項の値も全て等しいので、式 (4-8) で与えられる固有ベクトルは採用できないが、(i) に含まれるので特に議論する必要はない。

## 4-2. 各層における電磁界の表現

一般に異方性媒質中では正常波と異常波成分が存在するので、薄膜の伝搬モードを取り扱う際、両成分の一次結合

として電磁界を表現することが必要である。

図3の領域Iでは、電界の各成分は

$$E_i = \sum_n A_n^{I}(Y,Z)\,\alpha_{ni}^{I}(Y,Z)\,\exp[-jk_0\gamma_n^{I}(Y,Z)X]$$
$$\times \exp[j\{\omega t - k_0\phi_Z(Y,Z)Z\}] \qquad (4\text{-}10)$$
$$i = X, Y, Z \qquad n = 1, 2$$

と書くことができる。$i$はX, Y, Z各成分を表わし、$n$は採用する固有値$\gamma$の番号である。領域IではX→∞で収束するような$\gamma$が2根存在し、これらを採ることを表わしている。

同様にして、領域IIでは

$$E_i = \sum_n A_n^{II}(Y,Z)\,\alpha_{ni}^{II}(Y,Z)\,\exp[-jk_0\gamma_n^{II}(Y,Z)X]$$
$$\times \exp[j\{\omega t - k_0\phi_Z(Y,Z)Z\}] \qquad (4\text{-}11)$$
$$n = 1 \sim 4$$

である。領域IIでは固有値を4根全て採用する。

領域IIIでは

$$E_i = \sum_n A_n^{III}(Y,Z)\,\alpha_{ni}^{III}(Y,Z)\,\exp[-jk_0\gamma_n^{III}(Y,Z)X]$$
$$\times \exp[j\{\omega t - k_0\phi_Z(Y,Z)Z\}] \qquad (4\text{-}12)$$
$$n = 1, 2$$

と、X→−∞で収束する2根を採用する。

境界条件を課するに必要な$H_Z$, $D_X$はマクスウェルの方程式及び$\mathbb{D} = \hat{\epsilon}\mathbb{E}$から容易に求められ、局所的に均質な構造と考えると、式(3-13)と同様な条件の下で

$$H_Z = \frac{-1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_Y}{\partial X} = \frac{1}{\omega\mu_0}\sum_n A_n\alpha_{nY}\gamma_n\exp[-jk_0\gamma X]$$

$$\times \exp[j\{\omega t - k_0 \phi_z Z\}] \qquad (4-13)$$

$$D_X = \epsilon_0 (\epsilon_{XX} E_X + \epsilon_{XY} E_Y + \epsilon_{XZ} E_Z)$$
$$= \epsilon_0 \sum_i \sum_n \epsilon_{iX} A_n \alpha_{ni} \exp[-jk_0 \gamma X] \exp[j(\omega t - k_0 \phi_z Z)] \qquad (4-14)$$

となる。

## 4－3．分散関係式

各層の境界面における $E_Y$, $H_Z$, $E_Z$, $D_X$ の連続条件を課すと、$A_n^{I}$, $A_n^{II}$, $A_n^{III}$ の4つの未知数に対する4つの斉次方程式を得る。この方程式をマトリクス表示し、その係数行列を0とおくことによって分散関係式が求まる。これは（X, Y, Z）系で記述されたものであるが、式中の要素を（x, y, z）系で表わせばビームを追跡するのに必要な分散関係式が得られる。式（3-16），（3-17）及び式（4-15）を見れば明らかなように、$\phi_y$, $\phi_z$ をそれぞれ $k_y$, $k_z$ とおきかえればこれらの式は全て均質な媒質に対する分散関係式と一致する。従って結果的に見るとこれまでの解析を行なわずとも、既知の分散関係式の複数をアイコナールの微分におきかえ、かつ誘電率又は膜厚を場所の関数とするだけで、非均質媒質に対する特性方程式が得られるわけである。それゆえ、これまでの解析の目的はどのような条件の下でおきかえが可能かを明らかにすることであった。又、本来「アイコナール方程式」というべきところを「分散関係式」と称していたのも上の理由による。

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{22}^{(1)} & \alpha_{12}^{(2)} & \alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{32}^{(2)} & \alpha_{42}^{(2)} & 0 & 0 \\
\alpha_{12}^{(1)}\gamma_1^{(1)} & \alpha_{22}^{(1)}\gamma_2^{(1)} & \alpha_{12}^{(2)}\gamma_1^{(2)} & \alpha_{22}^{(2)}\gamma_2^{(2)} & \alpha_{32}^{(2)}\gamma_3^{(2)} & \alpha_{42}^{(2)}\gamma_4^{(2)} & 0 & 0 \\
\alpha_{13}^{(1)} & \alpha_{23}^{(1)} & \alpha_{13}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} & \alpha_{33}^{(2)} & \alpha_{43}^{(2)} & 0 & 0 \\
\sum \epsilon_{i1}^{(1)}\alpha_{1i}^{(1)} & \sum \epsilon_{i1}^{(1)}\alpha_{2i}^{(1)} & \sum \epsilon_{i1}^{(2)}\alpha_{1i}^{(2)} & \sum \epsilon_{i1}^{(2)}\alpha_{2i}^{(2)} & \sum \epsilon_{i1}^{(2)}\alpha_{3i}^{(2)} & \sum \epsilon_{i1}^{(2)}\alpha_{4i}^{(2)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\alpha_{12}^{(2)} e^{-jk_0\gamma_1^{(2)}d} & -\alpha_{22}^{(2)} e^{-jk_0\gamma_2^{(2)}d} & -\alpha_{32}^{(2)} e^{-jk_0\gamma_3^{(2)}d} & -\alpha_{42}^{(2)} e^{-jk_0\gamma_4^{(2)}d} & \alpha_{12}^{(3)} & \alpha_{22}^{(3)} \\
0 & 0 & -\alpha_{12}^{(2)} k_0\gamma_1^{(2)} e^{-jk_0\gamma_1^{(2)}d} & -\alpha_{22}^{(2)} k_0\gamma_2^{(2)} e^{-jk_0\gamma_2^{(2)}d} & -\alpha_{32}^{(2)} k_0\gamma_3^{(2)} e^{-jk_0\gamma_3^{(2)}d} & -\alpha_{42}^{(2)} k_0\gamma_4^{(2)} e^{-jk_0\gamma_4^{(2)}d} & \alpha_{13}^{(3)}\gamma_1^{(3)} & \alpha_{23}^{(3)}\gamma_2^{(3)} \\
0 & 0 & -\alpha_{13}^{(2)} e^{-jk_0\gamma_1^{(2)}d} & -\alpha_{23}^{(2)} e^{-jk_0\gamma_2^{(2)}d} & -\alpha_{33}^{(2)} e^{-jk_0\gamma_3^{(2)}d} & -\alpha_{43}^{(2)} e^{-jk_0\gamma_4^{(2)}d} & \alpha_{13}^{(3)} & \alpha_{23}^{(3)} \\
0 & 0 & -\sum \epsilon_{i1}^{(2)}\alpha_{1i}^{(2)} e^{-jk_0\gamma_1^{(2)}d} & -\sum \epsilon_{i1}^{(2)}\gamma_2^{(2)} e^{-jk_0\gamma_2^{(2)}d} & -\sum \epsilon_{i1}^{(2)}\gamma_3^{(2)} e^{-jk_0\gamma_3^{(2)}d} & -\sum \epsilon_{i1}^{(2)}\gamma_4^{(2)} e^{-jk_0\gamma_4^{(2)}d} & \sum \epsilon_{i1}^{(3)}\alpha_{1i}^{(3)} & \sum \epsilon_{i1}^{(3)}\gamma_{2i}^{(3)}
\end{vmatrix}
= 0 \qquad (4-15)
$$

## 4－4．TE，TMへの分離による簡単化

前節で得られた分散関係式は8×8の行列式で与えられ、ビームを追跡するのに必要な微分係数を求めるのは容易ではない。そこで定性的な結果を目的とするような場合には以下の近似により、比較的簡単な分散関係式が得られるのでこれを用いた方が簡単である。

式(4-5)において、$\tilde{\epsilon}$の非対角項を無視すると、

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}-\phi_z^2 & 0 & \gamma\phi_z \\ 0 & \epsilon_{yy}-\phi_z^2-\gamma^2 & 0 \\ \gamma\phi_z & 0 & \epsilon_{zz}-\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = 0 \qquad (4\text{-}5')$$

となり、明らかにTE，TMが分離する。このとき波数の関係は

$$\gamma = \pm\sqrt{\epsilon_{yy}-\phi_z^2} \qquad (4\text{-}6a')$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\epsilon_{zz}/\epsilon_{xx}\,(\epsilon_{xx}-\phi_z^2)} \qquad (4\text{-}6b')$$

で与えられる。モードはTE，TMに分離するから、等方性の場合と同様に電磁界を仮定すれば、次の分散関係式が得られる。

$$\tan^{-1}\frac{\gamma^{I}}{\gamma^{II}} + \tan^{-1}\frac{\gamma^{III}}{\gamma^{II}} + m\pi - k_0\gamma^{II}d = 0 \qquad (TE)$$

$$(4\text{-}15')$$

$$\tan^{-1}\frac{\epsilon_{zz}^{I}}{\epsilon_{zz}^{II}}\frac{\gamma^{I}}{\gamma^{II}} + \tan^{-1}\frac{\epsilon_{zz}^{I}}{\epsilon_{zz}^{II}}\frac{\gamma^{I}}{\gamma^{II}} + m\pi - k_0\gamma^{II}d = 0 \qquad (TM)$$

上式の$\tilde{\epsilon}$，$\gamma$を$(x, y, z)$系で表わせば所望の分散関係式が得られる。

## 5、数値計算例

以上の理論に基づき電算機プログラムを作成してビームの追跡を行なったので紹介する。ここに紹介する軌跡の入射条件は全て、入射点における局所的な波数ベクトル$\mathbb{P}_0$をz軸に平行としている。

### 5－1．等方性非均質薄膜光導波路

レンズ状導波路，Luneburgレンズなどの等方性薄膜については解析，実験共に行なわれているので，本稿の方法の検証の一つとして結果を比較した。更に末松氏らの方法では解析できなかった"遠軸"光線についても計算を行なった。基板をパイコールガラス，薄膜をコーニング7059ガラスと仮定した。屈折率の値を表2に示す。

図6～9ではコーニング7059ガラスの誘電率が次式で与えられる分布をすると仮定している。

$$\epsilon(y) = \epsilon(0)\{1-(y/10)^2\} \qquad (5-1)$$

| | |
|---|---|
| コーニング7059 | $n=1.568$ |
| パイコールガラス | $n=1.475$ |
| KLN | $n^o=2.294$ , $n^e=2.156$ |
| KBN | $n^o=2.227$ , $n^e=2.264$ |

表2、媒質の屈折率　　$n^o$：常光屈折率
$n^e$：異常光屈折率

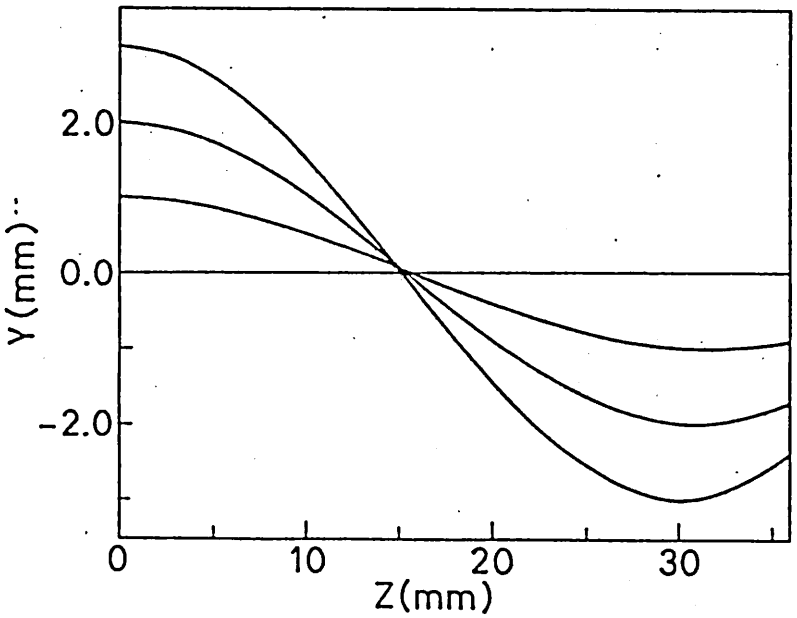



図6. 誘電率分布形導波路のビーム軌跡
TE0モード

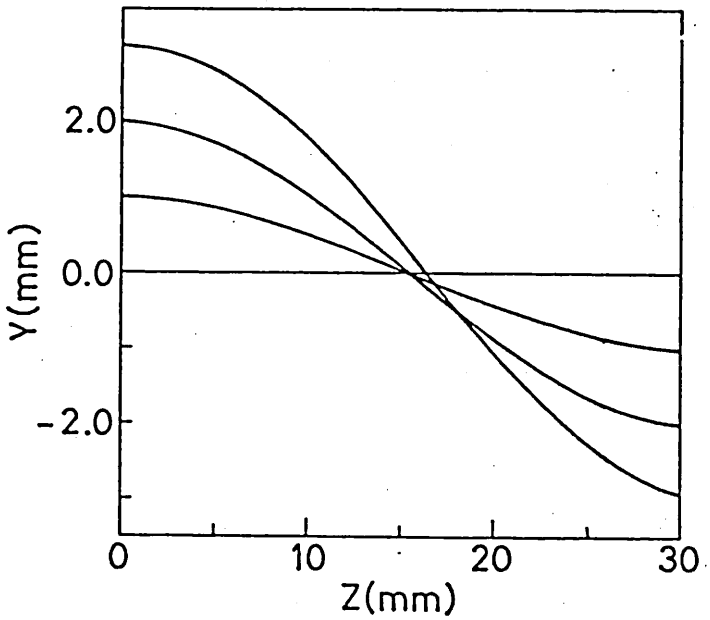



図7. 誘電率分布形導波路のビーム軌跡
TE1モード

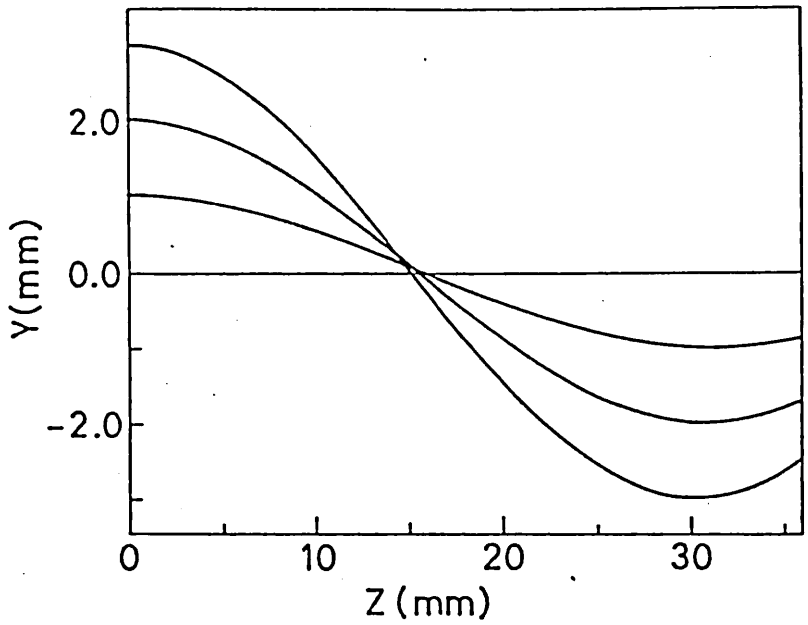



図8. 誘電率分布形導波路のビーム軌跡
TM0モード

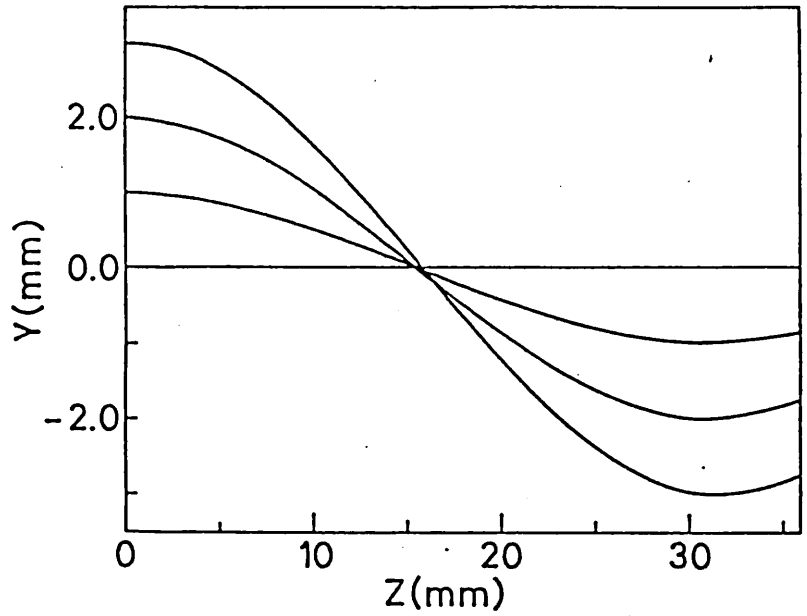



図9. 誘電率分布形導波路のビーム軌跡
TM1モード

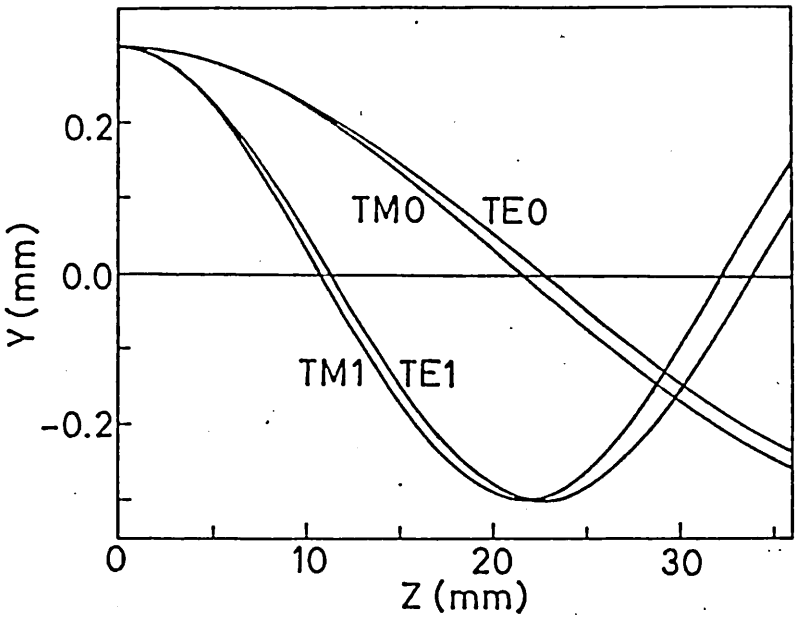



図 10．膜厚分布形導波路のビーム軌跡．

| | TE0 | TE1 | TM0 | TM1 |
|---|---|---|---|---|
| 誘電率分布形 | 15.70 | 15.67 | | |
| 膜厚分布形 | 22.19 | 11.09 | 21.34 | 10.67 |

表3．末松氏の解析[4]による焦点距離の値（近似式によって計算した）

膜厚は一定とし、2.0 (μm) である。

各モードとも近軸光線は焦点を結び、ビームは正弦波状に蛇行することが確められた。"遠軸"光線のビーム軌跡はきれいな正弦波にならず、いくらか歪む。また焦点を結ばず収差の原因となることがわかる。

図10は同じ媒質で、コーニング7059ガラスの膜厚が次式の分布をすると仮定した場合である。

$$d(y) = d(0)\{1-(y/1.9)^2\}, \quad d(0)=1.8\,(\mu m) \qquad (15-2)$$

誘電率は一定である。モードにより焦点距離が大きく変わることがわかる。比較のために未拡民の解析による結果を表3に示す。

## 5－2、異方性非均質薄膜光導波路

等方性の場合との光ビーム軌跡の相違を調べるために、基板にKBN，薄膜にKLNを考えて計算を行なった。膜厚を一定とし、誘電率テンソルの全要素が式(15-1)の分布に従うと仮定している。C軸の方向を定める角θ，φは図11に示すように採る。計算では、常にθ＝90°，即ちC軸を膜面内にあるとしている。このときの等価屈折率曲線を図12，13に示す。図12は y＝0 (mm) での誘電率に対するもの

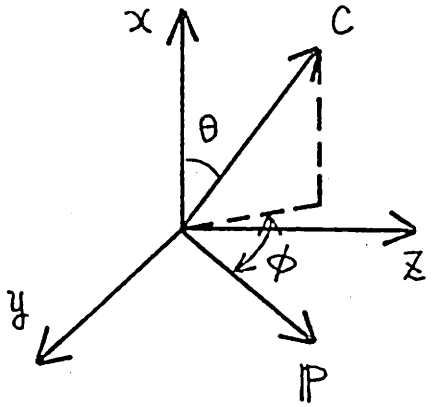



図11. C軸の方向

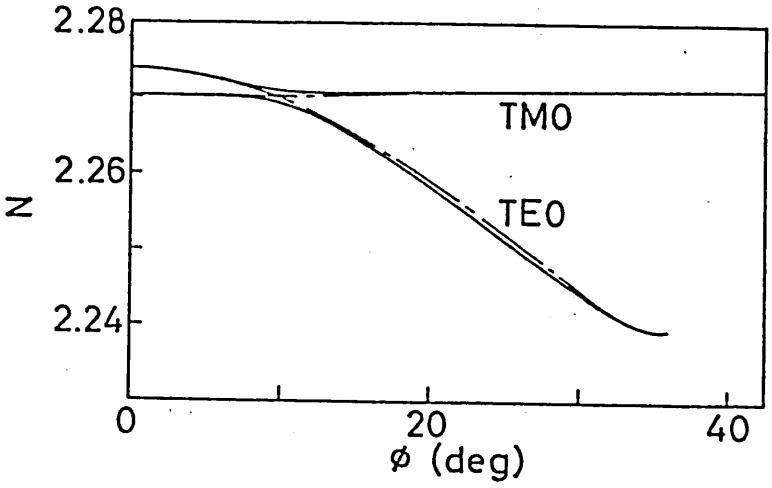



図12. KLN, KBNの等価屈折率曲線($y_0=0$)
$\theta=90°$, 膜面内にc軸があるとき

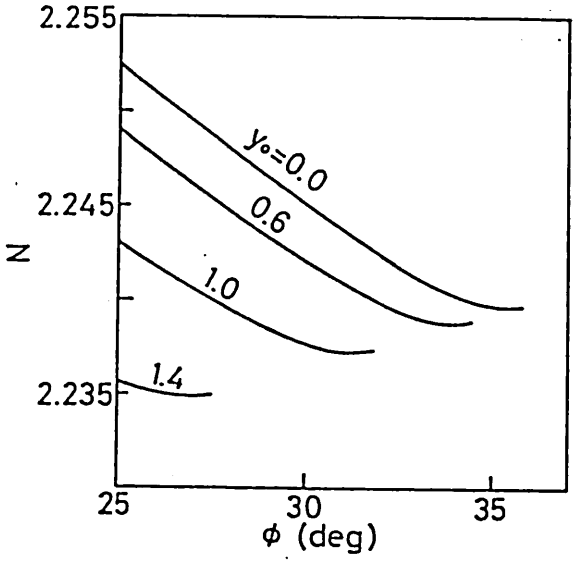



図13. KLN, KBNの等価屈折率曲線
図12の拡大図

で、実線は式(4-15)によるハイブリッド・モードで求めたものであり、鎖線は式(4-15')の近似により求めたものである。TE，TMモード間の結合の強くないところでは、つまり$\phi = 10°$付近を除けば、両者は比較的よく一致しており、4-3節で行なった近似が妥当なものであることが推察される。また本稿には掲載していないが、式(4-15)より求めたビーム軌跡と、式(4-15')で求めたビーム軌跡は$\phi \sim 10°$付近を除いてよく一致している。

図13は図12の$\phi = 25° \sim 35°$の拡大図で、更にビームの位置$y_0$による等価屈折率曲線の変化も示している。

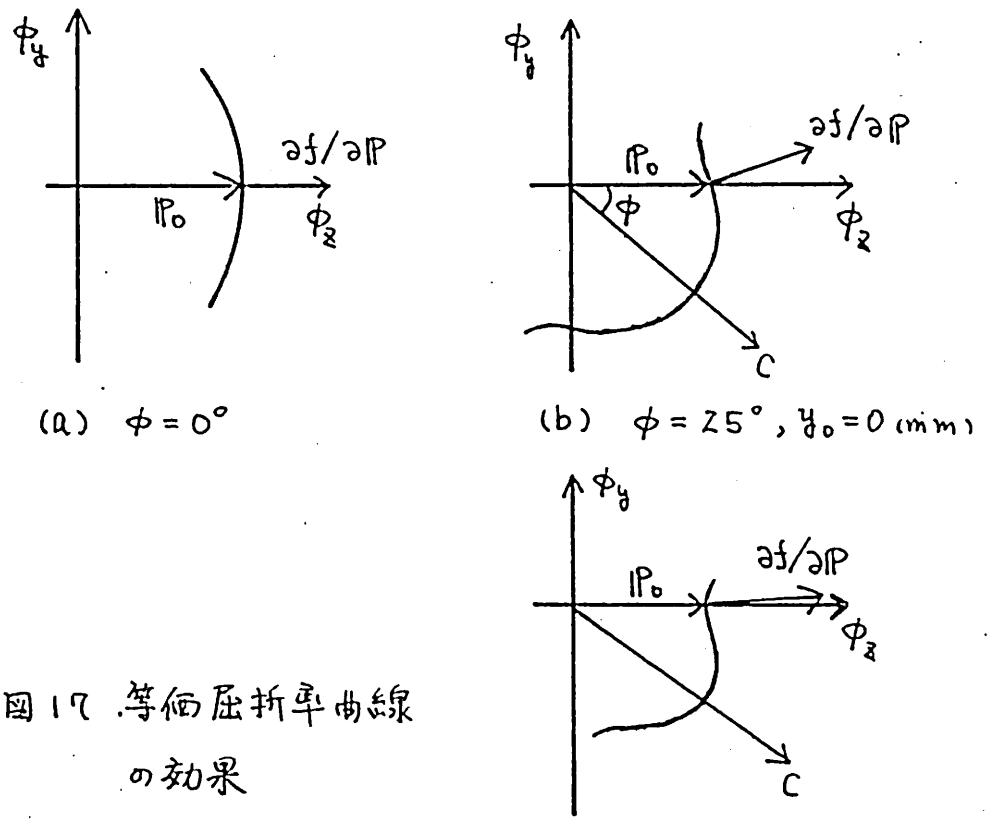
図14～16は$\phi = 0°, 10°, 25°$のときのビーム軌跡である。$\phi = 0°$のときには等方性薄膜に類似した軌跡を示している。ビームの振れ角は大きくても数度で、$\phi$は入射時の値から大きく変わらない。従って$\phi = 0$のように、この付近で等価屈折率がほぼ一定であるならば、その軌跡は等方性薄膜に類似するわけである。

図16では入射位置$y_0$により大きくビーム軌跡が変わっている。特に、$y_0 = 1.5, -1.5$ではそれが顕著である。その理由は図13を見ればわかる。図17は図13より求めた$\phi = 0°, 25°$に対する入射点での$\partial f/\partial P$の模式図である。$\phi = 0°$では$y_0$に関係なく$P_0 \parallel \partial f/\partial P$であるが、$\phi = 25°$では$y_0$により$\partial f/\partial P$の向きが異なることがわかる。入射後のビームの振舞は$-\partial f/\partial r$との相互作用で決定されるので定量的な解析は電算機に依らなければわからないが、

$|\mathbb{P}_0|$が大きいほど、$-\partial f/\partial \mathbb{P}$は大きくなるので"遠軸"光線では内側に曲がる力が強くなる。

図16では近軸光線はz軸から離れた点に焦点ができ、異方性の効果を示している。

図15は結合の強い$\phi=10°$での計算結果である。図12の等価屈折率曲線の上側のモードを追跡したもので、下側のモードへの移行は現れず良好な結果を得た。




(a) $\phi=0°$

(b) $\phi=25°$, $y_0=0$ (mm)

(c) $\phi=25°$, $y_0=1.0$ (mm)

図17 等価屈折率曲線の効果

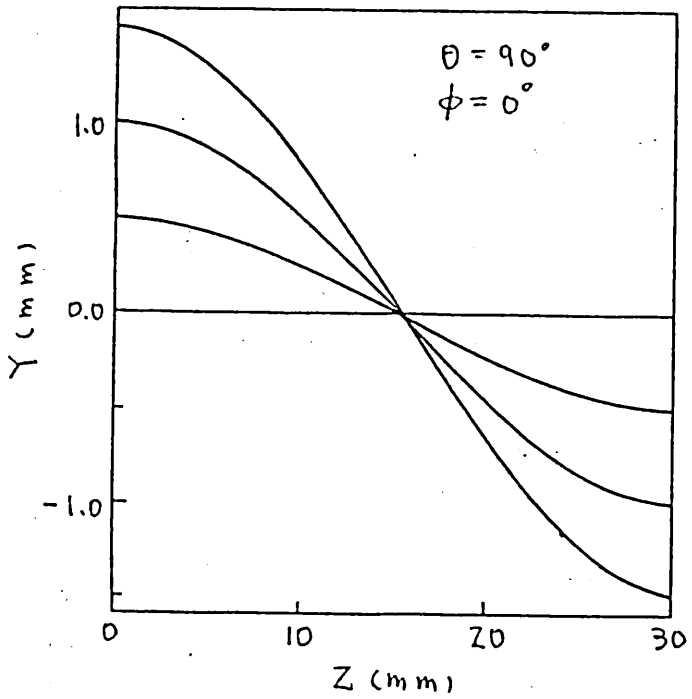



図14. KLN－KBNのビーム軌跡，
図12の上側のモード

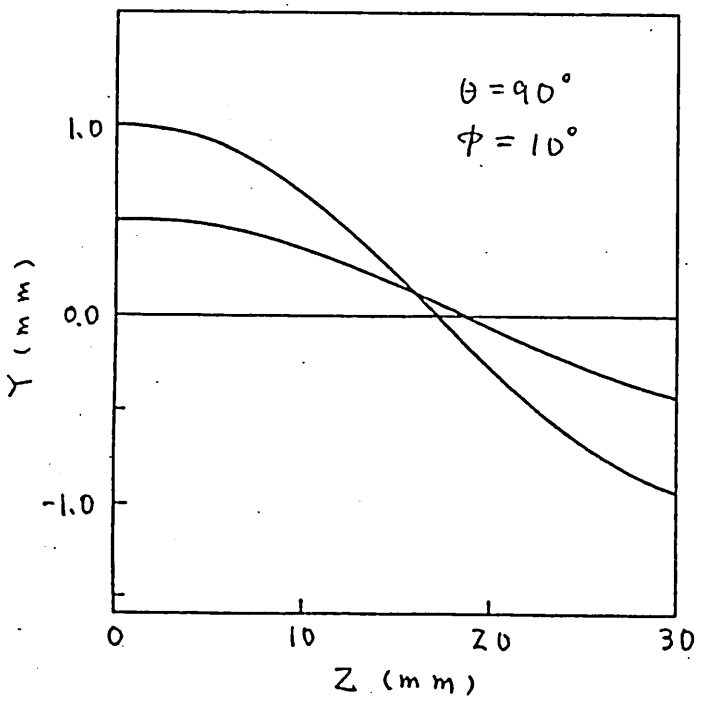



図15. KLN－KBNのビーム軌跡，
図12の上側のモード

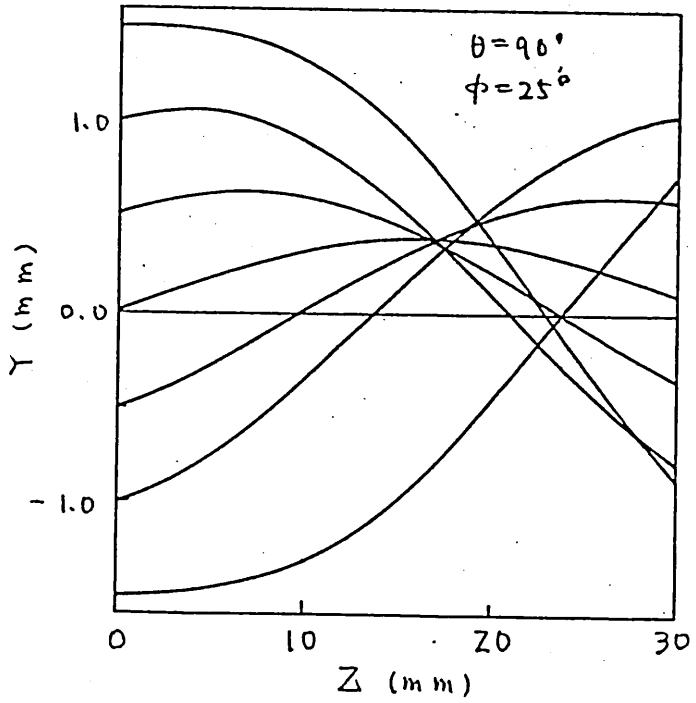



図 1.6. KLN-KBNのビーム軌跡
図12の下側のモード

## 6. むすび

非均質媒質中の光線の伝搬を解析する際に用いられる幾何光学近似を膜厚，誘電率が緩やかに分布する非均質薄膜光導波路に適用して光ビームを追跡した。その方法はアイコナールの偏微分を含んだ特性方程式（一階偏微分方程式）を、電算機により解くものである。本方法によれば、分散関係式が与えられれば、式中の波数を$\varphi_y$, $\varphi_z$におきかえることによって、等方性，異方性にかかわらず任意の分布について光ビーム軌跡を求める事ができる。

一例として一次元導波路レンズについて数値計算を行なった。等方性薄膜については従来、解析・実験がなされていたが、本方法による結果はそれらによく一致した。更に従来求められていなかった"遠軸"光線についてもビーム軌跡を得た。又、異方性薄膜においては、光ビームは等方性とは大きく軌跡を変えることが明らかとなった。異方性薄膜におけるこの特徴は、等方性薄膜におけるより光ビームを操作する点でパラメータが増えたことを意味し、光情報処理などへ非均質薄膜を利用する際大きな利点になると考えられる。

# 参考文献

(1) R. Ulrich, R. J. Martin : "Geometrical Optics in Thin Film Light Guides", APPLIED OPTICS, Vol. 10, No. 9, P. 41

(2) R. Shubert, J. H. Harris : "Optical Guided-Wave Focusing and Diffraction", J.O.S.A., Vol. 61, P. 154, 1971.

(3) 田中 : "光導波路レンズ", 応用物理, Vol. 48, No. 3, 1979.

(4) 末松, 上林, 古屋 : "薄膜レンズ状導波路の集束特性", 信学論誌, Vol. 58-C, No. 10, 1975.

(5) W. H. Southwell : "Inhomogeneous optical waveguide lens analysis", J.O.S.A., Vol. 67, No. 8, P. 1004, 1977.

(6) M. ボルン, E. ウォルフ : "光学の原理",

(7) 飯塚 : "光工学"

(8) 栗井, 池上 : "表面静磁波のビーム軌跡", マイクロ波研資 MW 76-81

輻射科学研究会資料

# 集束形ロッドレンズの光ビーム偏向特性

根本承次郎、吉田陽彦†、牧本利夫

（大阪大学　基礎工学部）

昭和55年2月1日

（於　中央電気クラブ）

†現在、関西電力株式会社に勤務

## 1. まえがき

断面内で二乗形の屈折率分布をもつ集束形ロッドレンズは、小体積、軽量であることと、ビーム径変換、光路変更などの作用を示すため、最近では、光ファイバ通信システムにおける周辺受動回路素子の構成要素として数多く用いられており、[1] 同時に、その特徴を生かした種々な使い方が検討されている。[2] よく知られているように、レンズ状媒質に軸ずれ、かつ、斜め入射した光線は媒質中で正弦状の軌跡をえがき、その周期Lは屈折率分布の勾配によって決まる。特に厚さがL/4の奇数倍のレンズ状媒質から自由空間へ出射する光線は、媒質の中心軸に対し、入射角によらない一定の角度をなす。この出射角は、市販のロッドレンズで、入射光線の軸ずれ量が数十～数百ミクロンのとき数度～数十度であり、入射光線の微小な変位により出射光線は大きく偏向される。

従来、集束形ロッドレンズの光ビーム偏向特性については、屈折率分布の勾配を推定するための一手段として、軸ずれ量に対する出射ビームの偏向角の変化が測定されているが、[3],[4] 出射ビームの形状まで含めた詳細な議論は行われていないようである。本報告では、まず、半無限レンズ状媒質にガウスビームが軸ずれ、かつ、斜め入射したときの媒質中の界分布を計算したのち、特定な厚さをもつレンズ状媒質の終端面からの放射界を回折積分により求めて、入射ビームの変位量およびスポットサイズと、出射ビームのそれらとの関係を明らかにしている。つぎに、代表的な集束形ロッドレンズであるSELFOC®LENSから出射したビームの変位量および強度分布を測定して計算値と比較した結果を述べ、さらに、このレンズの微小変位拡大への応用を目的として、スピーカーの振動板の振動振幅を測定した結果を示す。

## 2．レンズ状媒質中の光ビーム

直角座標系$(x, y, z)$において、屈折率分布が次式で与えられるレンズ状媒質を考える。

$$n(x, y) = n_0[1 - g^2(x^2 + y^2)]^{1/2} \qquad (1)$$

ただし、$n_0$は$z$軸上の屈折率、$g$は径方向への屈折率勾配を決めるパラメータである。この媒質中を$z$方向へ伝搬する固有モード$E_{pq}$は、時間因子を$e^{j\omega t}$として、次式で与えられる。[5]

$$E_{pq}(x, y, z) = \frac{1}{s(\pi 2^{p+q} p! q!)^{1/2}} H_p\left(\frac{x}{s}\right) H_q\left(\frac{y}{s}\right) \cdot$$
$$\cdot \exp[-(x^2 + y^2)/2s^2] \exp(-j\beta_{pq} z) \qquad (2)$$

$$\beta_{pq} = n_0 k[1 - 2(p + q + 1)g/n_0 k]^{1/2} \qquad (3)$$

ただし、$H_p(x)$は$p$次のエルミート多項式、$s = 1/(n_0 k g)^{1/2}$は媒質の特性スポットサイズ、$k = 2\pi/\lambda$は真空中の波数である。式(2)の固有モードは、つぎの正規直交関係を満たす。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_{pq}(x, y, z) E^*_{p'q'}(x, y, z)\, dx\, dy = \delta_{pp'} \delta_{qq'} \qquad (4)$$

ここで、$*$は複素共役を表わし、$\delta_{pp'}$はクロネッカーのデルタ記号である。

図1において、$z < 0$および$z > 0$なる領域が、それぞれ空気およびレンズ状媒質で満たされているとし、以下では、このような半無限媒質にガウスビームが軸ずれ、かつ、斜め入射

したときの透過波の表示式をモード展開法により求める。入射ビームは、図1中の直角座標系$(x', y', z')$において$z'$方向に伝搬し、ビームの中心と境界面$z=0$との交点が$(x, y)=(x_0, 0)$であるとする。

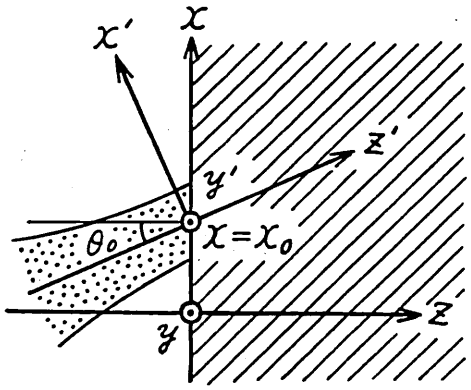



図1 半無限レンズ状媒質へ入射したガウスビーム

さらに、ビームウエストは$z'=0$の位置にあると仮定する。このとき、$z'=0$付近での入射ビーム$E^i$は次式で与えられる。

$$E^i(x', y', z') = A_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'}{S_x}\right)^2 + \left(\frac{y'}{S_y}\right)^2\right]\right\} e^{-jkz'} \qquad (5)$$

ただし、$S_x$、$S_y$は、それぞれ、$x'$、$y'$方向のスポットサイズ、$A_0$は伝送電力を$P$、真空の固有インピーダンスを$Z_0$として、$A_0=(2Z_0P/\pi S_x S_y)^{1/2}$である。ビームの入射角を$\theta_0$とすると、つぎの関係式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-x_0)\cos\theta_0 - z\sin\theta_0, \quad y' = y \\ z' &= (x-x_0)\sin\theta_0 + z\cos\theta_0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

また、入射点でのスネルの法則$\sin\theta_0 = n(x_0, 0)\sin\theta$より定まる$\theta$を用いると、境界面直後の界分布$E(x, y, 0)$は次式で与えられる。

$$E(x, y, 0) = A_0 \exp[-(x-x_0)^2\cos^2\theta/2S_x^2 - y^2/2S_y^2]\cdot$$
$$\cdot\exp[-jn_0k(x-x_0)\sin\theta] \qquad (7)$$

$z \geq 0$ での界 $E(x, y, z)$ を固有モードにより、つぎのように展開する。[5]

$$E(x,y,z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} C_{pq} E_{pq}(x,y,z) \tag{8}$$

$$C_{pq}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(x,y,0)E_{pq}^{*}(x,y,0)\,dx\,dy. \tag{9}$$

式(2)、(7)および積分公式[6]を用いて展開係数 $C_{pq}$ を計算した結果は

$$C_{pq}=\frac{2\sqrt{\pi}A_0 s s_x s_y}{[2^{p+q}p!q!(\bar{s}^2+s_x^2)(s^2+s_y^2)]^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\{-[\bar{x}_0^2/(\bar{s}^2+s_x^2)+(n_0 k s_x \tan\theta)^2]/2\}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\bar{s}^2-s_x^2}{\bar{s}^2+s_x^2}\right)^{p/2}\left(\frac{s^2-s_y^2}{s^2+s_y^2}\right)^{q/2}H_p\left[\frac{\bar{s}\bar{x}_0}{(\bar{s}^4-s_x^4)^{1/2}}\right]H_q(0) \tag{10}$$

$$\bar{s}=s\cos\theta,\quad \bar{x}_0=x_0\cos\theta-jn_0 k s_x^2\tan\theta \tag{11}$$

である。式(10)を式(8)に代入し、$\beta_{pq}\simeq n_0 k-(p+q+1)g$ なる近似式および総和公式[7]を用いると次式が得られる。

$$E(x,y,z)=\frac{A_0 s_x s_y}{[(s_x^2\cos gz-j\bar{s}^2\sin gz)(s_y^2\cos gz-js^2\sin gz)]^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\{-[\bar{x}_0^2/(\bar{s}^2+s_x^2)+(n_0 k s_x\tan\theta)^2]/2\}\cdot$$

$$\cdot\exp[-(x^2+y^2)/2s^2]\exp(-jn_0 kz)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{2\bar{x}_0\bar{x}-[(1-s_x^2/\bar{s}^2)\bar{x}^2+(1+s_x^2/\bar{s}^2)^{-1}\bar{x}_0^2]e^{jgz}}{2(s_x^2\cos gz-j\bar{s}^2\sin gz)}\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{(1-s_y^2/s^2)y^2e^{jgz}}{2(s_y^2\cos gz-js^2\sin gz)}\right\} \tag{12}$$

ただし、$\bar{x}=x\cos\theta$ である。上式が $z=0$ のとき式(7)に一致する

ことを容易に確かめることができる。特に $S_x = S_y \equiv S_0$ の場合に、式(12)を変形し整理した結果を以下に示す。

$$E(x,y,z) = a(x,y,z)\exp[j\psi(x,y,z)] \tag{13}$$

$$a(x,y,z) = A_0\left(\frac{\tilde{S}_0 S_0}{w_x w_y}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x - x_0\cos gz - x_1\sin gz}{w_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{w_y}\right)^2\right]\right\} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\psi(x,y,z) = \{&[(\tilde{\sigma}^4-1)x^2 - x_0^2 + \tilde{\sigma}^4 x_1^2]\sin 2gz \\ &+ 4x(x_0\sin gz - \tilde{\sigma}^4 x_1\cos gz) + 4\tilde{\sigma}^4 x_0 x_1\cos^2 gz\}/(2\tilde{\sigma}w_x)^2 \\ &+ (\sigma^4-1)y^2\sin 2gz/(2\sigma w_y)^2 - n_0 kz \\ &+ (1/2)[\tan^{-1}(\tilde{\sigma}^{-2}\tan gz) + \tan^{-1}(\sigma^{-2}\tan gz)]\end{aligned} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} w_x &= (S/\sqrt{2}\tilde{\sigma})[(\tilde{\sigma}^4-1)\cos 2gz + \tilde{\sigma}^4 + 1]^{1/2} \\ w_y &= (S/\sqrt{2}\sigma)[(\sigma^4-1)\cos 2gz + \sigma^4 + 1]^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\sigma = S_0/S,\quad \tilde{\sigma} = \sigma/\cos\theta,\quad x_1 = n_0 k S^2\sin\theta \tag{17}$$

なお、$A_0 = (2Z_0P/\pi S_0^2)^{1/2}$ である。式(13)～(15)は、図1に示したように、入射ビームの伝搬軸($z'$軸)が $xz$ 面内に存在する場合の結果であり、$z'$軸が $xz$ 面内に存在しない場合、すなわち、媒質中のビームの中心が、つる巻きばね状の軌跡をえがく場合、の結果は文献(8)に示されている。† 式(17)中で定義されている $x_1$ は

† 若干の計算により、式(13)～(15)が文献(8)中の式(7)～(9)において $\varphi = 0$ とした式に完全に一致することを示すことができる。

$s=1/(n_0 k g)^{1/2}$ を用いると $x_1=g^{-1}\sin\theta$ と書くことができる。

式(14)より明らかなように、ガウスビーム入射時の透過波の振幅分布は $z$ 軸に垂直な面内でガウス形であり、振幅が最大となる点の軌跡は

$$x=x_0\cos gz+g^{-1}\sin\theta\sin gz \qquad (18)$$

なる曲線で与えられる。一方、レンズ状媒質に対する近軸光線方程式 $d^2x/dz^2=-g^2x$ を、$z=0$ で $x=x_0$、$dx/dz=\tan\theta$ なる初期条件のもとで解くと

$$x=x_0\cos gz+g^{-1}\tan\theta\sin gz \qquad (19)$$

であり、式(18)と式(19)は $\cos\theta\simeq 1$ なる近似のもとで一致する。

$E(x,y,z)$ は $z$ に関する周期 $L=2\pi/g$ の周期関数であり、特別な値の $z$ に対しては、表1に示すように簡単な形をとる。

表1　特別な値の $z$ に対する $a/A_0$ と $\psi$

| $z$ | $a(x,y,z)/A_0$ | $\psi(x,y,z)$ |
|---|---|---|
| $0$ | $\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-x_0}{\tilde{s}_0}\right)^2+\left(\frac{y}{s_0}\right)^2\right]\right\}$ | $-\frac{x_1(x-x_0)}{s^2}$ |
| $\frac{L}{4}$ | $\frac{s^2}{\bar{s}_1 s_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-x_1}{\bar{s}_1}\right)^2+\left(\frac{y}{s_1}\right)^2\right]\right\}$ | $\frac{x_0x}{s^2}-\frac{n_0kL}{4}$ |
| $\frac{L}{2}$ | $\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+x_0}{\tilde{s}_0}\right)^2+\left(\frac{y}{s_0}\right)^2\right]\right\}$ | $\frac{x_1(x+x_0)}{s^2}-\frac{n_0kL}{2}$ |
| $\frac{3L}{4}$ | $\frac{s^2}{\bar{s}_1 s_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+x_1}{\bar{s}_1}\right)^2+\left(\frac{y}{s_1}\right)^2\right]\right\}$ | $-\frac{x_0x}{s^2}-\frac{3n_0kL}{4}$ |

なお、表1中のパラメータ $\tilde{s}_0$、$s_1$、$\bar{s}_1$ は次式で定義されている。

$$\tilde{s}_0=s_0/\cos\theta,\quad s_1=s^2/s_0,\quad \bar{s}_1=s_1\cos\theta \qquad (20)$$

## 3．レンズ状媒質からの出射ビーム

図2に示すように、空気中に厚さ$z_0$のレンズ状媒質が置かれ、端面$z=0$に、式(5)で与えられるガウスビームが入射したとき、終端面$z=z_0$より出射する波の遠方界$F(\xi,\eta,\zeta)$は

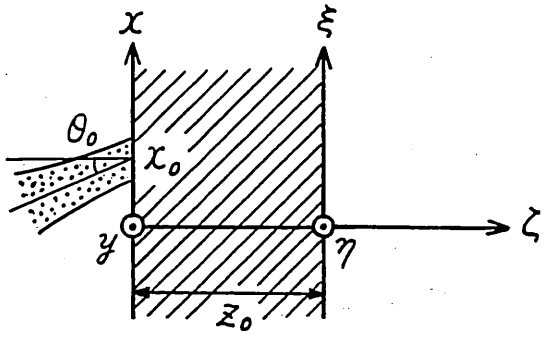



図2 厚さ$z_0$のレンズ状媒質に軸ずれ、斜め入射したガウスビーム

$$F(\xi,\eta,\zeta)=\frac{jk}{2\pi R}e^{-jkR}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E(x,y,z_0)e^{jk(\xi x+\eta y)/R}dxdy \tag{21}$$

と表わされる。ただし、$R=(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{1/2}$である。上式を

$$F(\xi,\eta,\zeta)=A(\xi,\eta,\zeta)\exp[j\Psi(\xi,\eta,\zeta)] \tag{22}$$

と書くことにし、特別な値の$z_0$に対し、$A$、$\Psi$を求めた結果を表2に示す。なお、$z_0=0$は、レンズ状媒質が存在しない場合に対応する。

表2　特別な値の$z_0$に対する$A/A_0$と$-(\Psi-\pi/2)/k$

| $z_0$ | $A(\xi,\eta,\zeta)/A_0$ | $-[\Psi(\xi,\eta,\zeta)-\pi/2]/k$ |
|---|---|---|
| $0$ | $\frac{\tilde{S}_0}{w_0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi-\xi_1}{\tilde{w}_0}\right)^2+\left(\frac{\eta}{w_0}\right)^2\right]\right\}$ | $R-\frac{x_0}{R}(\xi-\xi_1)-\frac{x_0x_1}{kS^2}$ |
| $\frac{L}{4}$ | $\frac{S_0}{w_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi+\xi_0}{\tilde{w}_1}\right)^2+\left(\frac{\eta}{w_1}\right)^2\right]\right\}$ | $R-\frac{x_1}{R}(\xi+\xi_0)+\frac{n_0L}{4}$ |
| $\frac{L}{2}$ | $\frac{\tilde{S}_0}{w_0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi+\xi_1}{\tilde{w}_0}\right)^2+\left(\frac{\eta}{w_0}\right)^2\right]\right\}$ | $R+\frac{x_0}{R}(\xi+\xi_1)-\frac{x_0x_1}{kS^2}+\frac{n_0L}{2}$ |
| $\frac{3L}{4}$ | $\frac{S_0}{w_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi-\xi_0}{\tilde{w}_1}\right)^2+\left(\frac{\eta}{w_1}\right)^2\right]\right\}$ | $R+\frac{x_1}{R}(\xi-\xi_0)+\frac{3n_0L}{4}$ |

また、表2中の種々なパラメータは次式で定義されている。

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= x_0 R/kS^2, & \xi_1 &= x_1 R/kS^2 \\ w_0 &= R/kS_0, & w_1 &= R/kS_1 \\ \bar{w}_0 &= w_0 \cos\theta, & \tilde{w}_1 &= w_1/\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

以下、$z_0 = 3L/4$ のときの遠方界について考える。$\zeta = const.$ なる面内で振幅 $A$ が最大となる点は、$\partial A/\partial\xi = \partial A/\partial\eta = 0$ なる条件より近似的に $(\xi, \eta) = (\xi_m, 0)$ で与えられる。ここで、

$$\xi_m = \zeta X_0/(1 - X_0^2)^{1/2}, \quad X_0 = x_0/kS^2 \qquad (24)$$

である。界分布の $\xi$ 方向への広がりを表わすパラメータ $\tilde{w}_1$ は $\xi$、$\eta$ の関数であるが、$(\xi, \eta) = (\xi_m, 0)$ での値で近似する。すなわち

$$\tilde{w}_1 \simeq \tilde{w} = w/\cos\theta, \quad w = \zeta/kS_1(1 - X_0^2)^{1/2} \qquad (25)$$

であり、$\tilde{w}$ を $\xi$ 方向のスポットサイズと定義する。式(24)、(25)および表2より、$A/A_0$ は次式で近似できる。

$$\frac{A}{A_0} = \frac{S_0}{w} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi - \xi_m}{\tilde{w}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{w}\right)^2\right]\right\} \qquad (26)$$

また、式(24)より、遠方界の振幅が最大となる点は、ガウスビームの入射角 $\theta_0$ とスポットサイズ $S_0$ によらないことが分かる。座標原点 $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$ と振幅最大点 $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_m, 0, \zeta)$ とを結ぶ直線が $\zeta$ 軸となす角、すなわち、出射ビームの偏向角を $\varphi$ とすると

$$\tan\varphi = \xi_m / \zeta = X_0 / (1 - X_0^2)^{1/2} \qquad (27)$$

であり、† 上式より $\sin\varphi = X_0$ が得られる。出射ビームの変位量 $\xi_m$ と入射ビームの軸ずれ量 $x_0$ との比は

$$\xi_m / x_0 = \zeta / \hbar s^2 (1 - X_0^2)^{1/2} \qquad (28)$$

であり、また、$\theta_0 = 0$ のとき、出射ビームのスポットサイズ $w$ と入射ビームのスポットサイズ $s_0$ との比は

$$w / s_0 = \zeta / \hbar s^2 (1 - X_0^2)^{1/2} \qquad (29)$$

である。よって、式(28)、(29)より、関係式 $\xi_m / x_0 = w / s_0$ が得られる。すなわち、$\theta_0 = 0$ のとき、ビーム変位拡大比 $\xi_m / x_0$ とスポットサイズ拡大比 $w / s_0$ とは等しい。

## 4. SELFOC® LENS の光ビーム偏向特性

本節では、セルフォックマイクロレンズの光ビーム偏向特性の測定法、測定結果および計算値との比較結果について述べる。使用した2種類のマイクロレンズ(直径2mm、長さ3L/4)の諸定数を表3に示す。なお、

表3 セルフォックマイクロレンズの諸定数($\lambda = 0.589\,\mu m$)[9]

| 呼称 | $2\theta_c$ (°) | $n_0$ | $g$ ($mm^{-1}$) | $L$ ($mm$) | $s$ ($\mu m$) |
|---|---|---|---|---|---|
| SLS* | 36 | 1.553 | 0.2 | 32 | 17.4 |
| SLW* | 60 | 1.616 | 0.3 | 20.8 | 13.9 |

* SLS(W): SELFOC® LENS STANDARD(WIDE) APERTURE

† 式(19)の光線軌跡を用いると、$\tan\varphi = X_0 / [1 - (1 - n_0^{-2}) X_0^2]^{1/2}$ である。

表3中の$\theta_c$は、入射光線の最大受容角である。測定系を図3に示す。光源として波長0.6328 μmのHe-Neレーザを用い、出射端でのスポットサイズが0.318 mmのガウスビームを焦点距離20 cmの球面レンズで絞ったのち、ミラーで直角に伝搬軸を変えてマイクロレンズに垂直入射させた。図3中の$d_1$、$d_2$、$d_3$の値は、それぞれ5 cm、9 cm、10.4 cmであり、このとき入射ビームのウエストの位置はマイクロレンズの入射端に一致する。† マイクロレンズは$x$、$\xi$方向に微動可能であり、出射ビームの検出器として、受光面の直径が20 mmの太陽電池の直前に幅2 mmのスリットを置いたものを用いた。検出器も$\xi$方向に微動可能である。

出射ビームの変位量の測定には、まず、入射ビーム、マイクロレンズ、検出器が一直線上にあるように微動装置を調節する。つぎに、マイクロレンズを$x$方向に移動させて入射ビームに軸ずれ量$x_0$を与え、出射ビームに

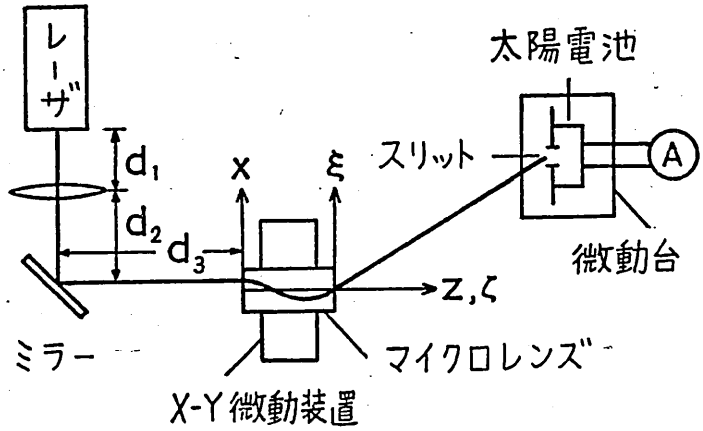



図3 光ビーム偏向特性の測定系

† このことは、入射ビームのスポットサイズの伝搬距離による変化をナイフエッジ掃引法[10]によって測定した結果より、確かめられた。

偏向を起こさせる。さらに、出力電流が軸ずれのないときの値に一致するまで検出器を移動させ、その移動距離を$\xi_m$とした。ただし、出射ビームの広がりにより、出力電流が最大となる位置付近での電流変化はかなりゆるやかなので、電流値の比較は最大値をはずした変化の大きな位置で行った。また、マイクロレンズの終端面と検出器の距離$\zeta$を、$\zeta=20, 35, 50$ cmと変え、それぞれの場合につき、変位量の測定を3回ずつ行って、その平均値を$\xi_m$の測定値とした。

図4に、SLSの$x_0-\xi_m$特性を示す。実線は式(24)を計算した結果であり、三つの$\zeta$の値に対し、測定値は計算値とよく一致している。図5にはSLWの$x_0-\xi_m$特性を示してある。実線は式(24)による計算値、破線は使用したSLWの長さが$3L/4=15.6$ mmより0.8 mm短いことを考慮した補正値である。† $\zeta=20, 35$

† $\theta_0=0$, $z_0=3L/4\pm d$のとき、ビーム中心の軌跡の勾配が、式(18)より、$z=z_0$において$dx/dz=gx_0\cos gd=X_0\cos gd$であるので、式(24)中の$X_0$を$X_0\cos gd$で置き換えた。

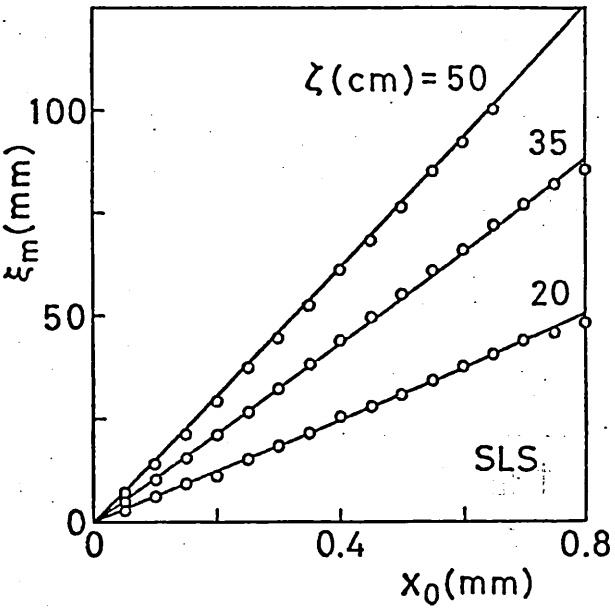



図4　SLSの$x_0-\xi_m$特性
(実線は計算値)

cm のとき、測定値は補正値とほぼ一致するが、$\zeta = 50$ cm のときは両者にかなりの差が見られる。この原因として $\zeta = 50$ cm では出射ビームのスポットサイズが $w \simeq 27.5$ mm と大きく、電流値を比較する際の誤差が大きくなることが考えられる。また、$x_0 = 0$ のときの強度分布と $x_0 \neq 0$ のときのそれとが異なる(図7の下図を参照)ため、一定レベルでの電流値の比較によっては、ピーク位置のずれ $\xi_m$ を正確に測定できなかったことも考えられる。

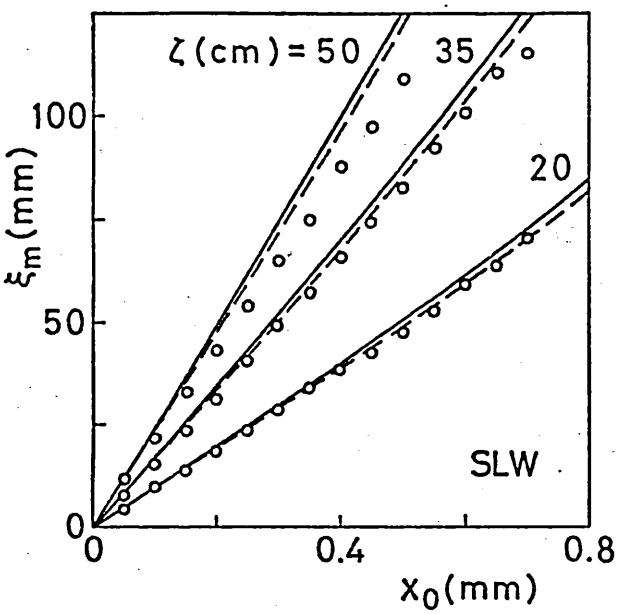



図 5　SLW の $x_0$-$\xi_m$ 特性
(実線は計算値、破線は補正値)

図6に、$\zeta = 20, 50$ cm のとき、SLS から出射したビームの強度分布を $x_0 = 0, 0.3, 0.6$ mm と変えて測定し、規格化した結果を示す。実線は式(26)による計算値であり、入射ビームの最小スポットサイズ $s_0$ の値として測定値 111 μm を用いた。なお、太陽電池直前の幅 2 mm のスリットを考慮して計算した結果は実線にほぼ一致した。† 測定された強度分布

† 幅 $2a$ のスリットを通して受光したときの規格化強度分布 $I/I_0$ はスリットの中心の位置を $\xi = \xi_s$ として、次式で与えられる。$I/I_0 = \{erf[(\xi_s - \xi_m + a)/w] - erf[(\xi_s - \xi_m - a)/w]\}/2erf(a/w)$, $erf(x) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^x e^{-t^2}dt$

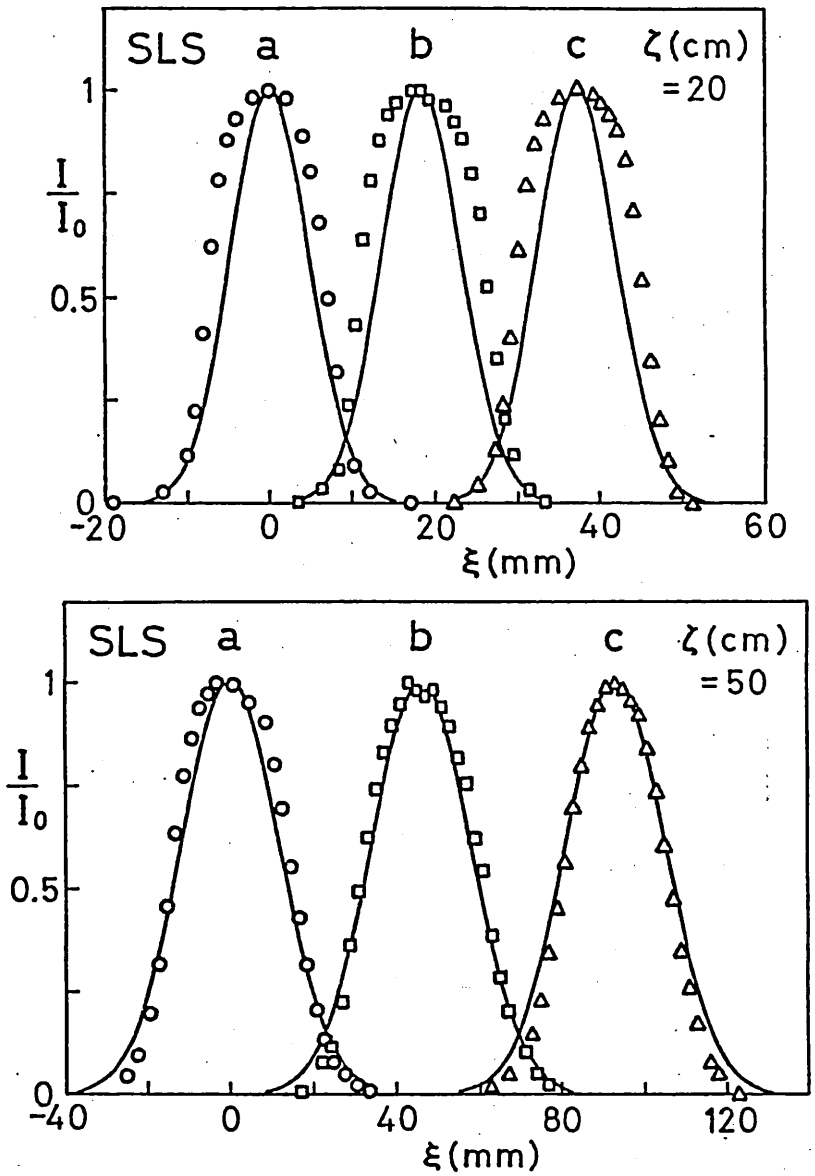



図 6　SLS から出射したビームの規格化強度分布（実線は計算値、a: $x_0=0$、b: $x_0=0.3$ mm、c: $x_0=0.6$ mm）

の形状は $\zeta=20$ cm のとき、ベル形であり、計算値からかなりずれているが、$\zeta=50$ cm のときはガウス形に近く、計算値にほぼ一致する。また、計算結果と同じく、スポットサイズの $x_0$ による変化も小さい。†

† 計算によれば、$\zeta=50$ cm のとき、$x_0$ が 0 から 0.6 mm へ変化すると、$w$ は 16.9 mm から 17.2 mm へわずかに増加する。

図7には、SLWから出射したビームの強度分布を示す。測定された強度分布はガウス形ではなく、また、$\zeta = 50\ cm$ のとき、ビームの中心付近にやや不規則な変動が見られ、スポットサイズも計算値より小さくなっている。図8は、入射ビーム(A)とSLSから出射した

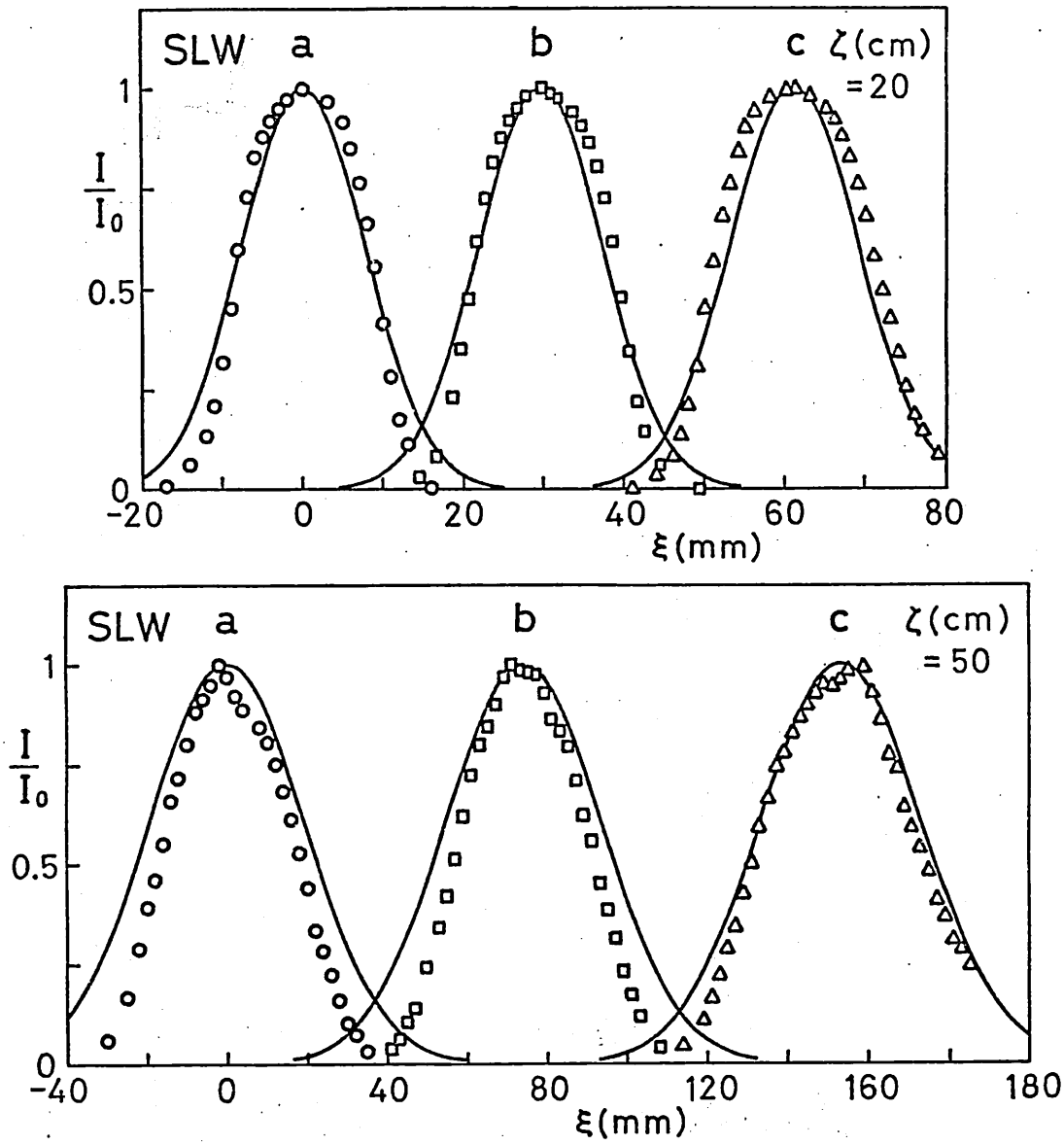



図7　SLWから出射したビームの規格化強度分布(実線は計算値、
a: $x_0 = 0$、b: $x_0 = 0.3\ mm$、c: $x_0 = 0.6\ mm$、
$x_0 \neq 0$ のときは、測定値をξ軸の正方向へ多少ずらせてある。)

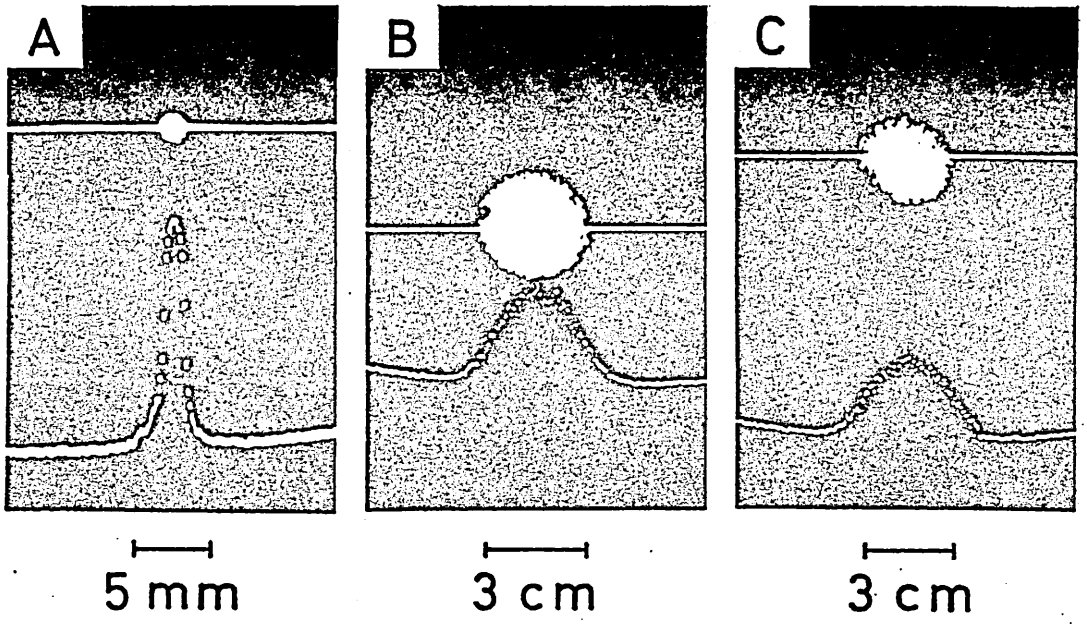



図 8　テレビカメラで観測した光強度分布（A：入射ビーム、
B：SLS からの出射ビーム、$x_0=0$、$\zeta=50$ cm、
C：SLS からの出射ビーム、$x_0=0.3$ mm、$\zeta=50$ cm）

ビーム（B、C）を白紙へ投射し、そのときの光強度分布をテレビカメラで観測したときの画面であり、† 輝線（$\eta$方向）上の強度分布が下部の曲線に示されている。図8Aより、入射ビームの強度分布はほぼガウス形であること、また、図8Bより、$x_0=0$ のときの出射ビームは軸対称な強度分布を示すことが分かる。さらに、図8Cより、$x_0 \neq 0$ のとき、出射ビームの強度分布は、計算結果と異なり、軸対称ではなく、垂直方向（$\xi$方向）の広がりが$\eta$方向のそれより小さいことが分かる。なお、$x_0=0.6$ mm のときも図8Cとほぼ同じパターンが観測された。また、付録1で、マイクロレンズ終端面上の界分布を遠方界強度分布より推定した。

---

† 見やすくするため、もとの画面を90°反時計方向に回転してある。

## 5. 微小振動振幅の測定への応用

前節で検討したマイクロレンズの光ビーム偏向特性を利用してスピーカーの振動板の最大変位量を測定した。図3において、ミラーの位置に、振動板の中心部に小さなミラーを張り付けたテレビ音声用スピーカー（許容入力 0.3W、長径 95mm、短径 58mm）を置き、検出器に接続された電流計のかわりにシンクロスコープを用いた。スピーカー入力端子に 60Hz、1～5V の電圧を印加し、振動板によるビーム中心の微小振動をマイクロレンズで拡大したのち、まず、検出器を適当な位置 $\xi=\xi_1$ に置いてシンクロスコープ上の電圧波形を撮影した。つぎに、検出器を $\xi=\xi_2$ に移動させて再び電圧波形を撮影し、検出器の移動量 $\Delta\xi=\xi_2-\xi_1$ と二枚の写真より読み取った波形の変化をもとに、振動板の振幅を逆算した。一定の入力電圧に対して上記の操作を6～10回繰り返し、各回に得られる振幅を平均して測定値とした。

図9に、印加電圧に対する振動振幅の変化を、SLSを用いて測定した結果を示す。

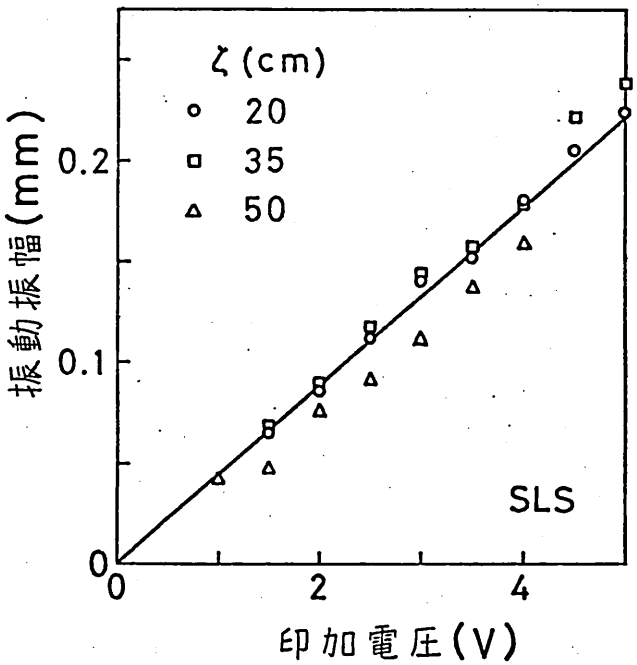



図 9 印加電圧による振動振幅の変化（SLSを使用）

測定値は$\zeta$によらないはずであるが、実際には、かなりのばらつきが見られる。実線は最小二乗法により求めた直線である。図10に、SLWを用いて測定した結果を示す。図9に比べ測定値のばらつきが大きいが、最小二乗近似した直線は図9における直線とほとんど一致する。

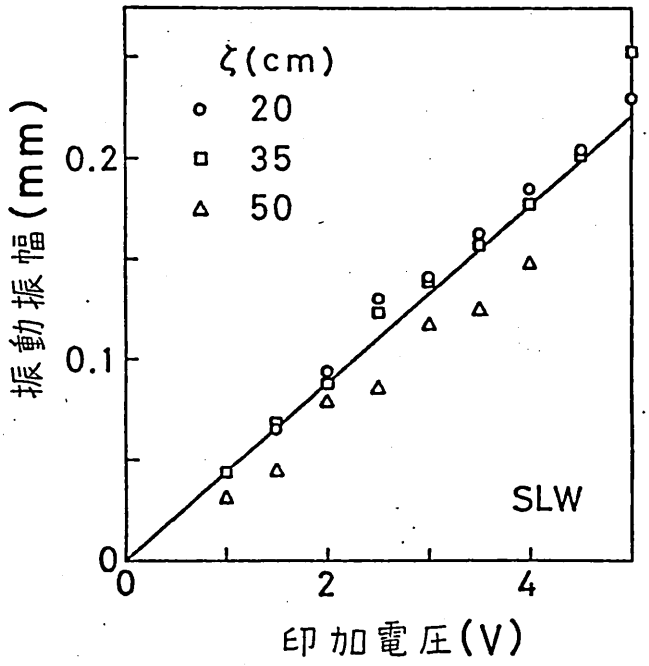



図10 印加電圧による振動振幅の変化
(SLWを使用)

## 6. 薄肉球面レンズの光ビーム偏向特性との比較

図11(a)に示すように、厚さ$z_0=L/4$のマイクロレンズにガウスビームが軸ずれ量$x_0$で垂直に入射したときの透過波の振幅分布$A$は表2および$A_0=(2Z_0P/\pi s_0^2)^{1/2}$より次式で与えられる。

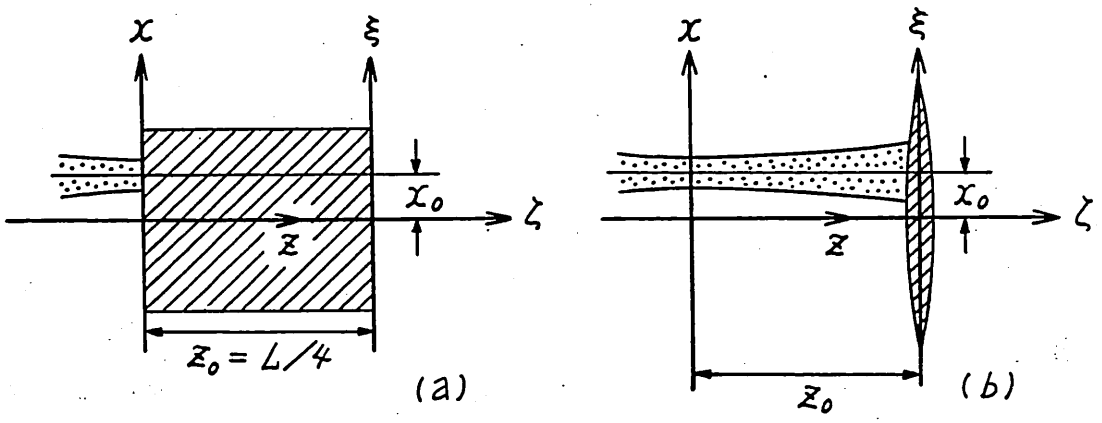



図11 マイクロレンズ(a)および薄肉球面レンズ(b)に軸ずれ入射したガウスビーム

$$A(\xi,\eta,\zeta)=\left(\frac{2Z_0P}{\pi w^2}\right)^{1/2}exp\left\{-\frac{1}{2w^2}\left[(\xi+\xi_m)^2+\eta^2\right]\right\} \qquad (30)$$

ただし、$\xi_m$、$w$ は、それぞれ 式(24)、(25) で定義されており、$(x_0/kS^2)^2 \ll 1$ のとき、次式が成り立つ。

$$\xi_m/x_0 = w/S_0 \simeq \zeta/kS^2 = (\pi n_0/2)(\zeta/f_{ML}) \qquad (31)$$

上式中の $f_{ML}$ はマイクロレンズの焦点距離であり、$f_{ML}=L/4$ で与えられる。一方、図11(b)に示すように、$z=z_0$ の位置に置かれた焦点距離 $f$ の薄肉球面レンズに、$z=0$ でウエストをもつガウスビームが軸ずれ量 $x_0$ で垂直に入射したときの振幅分布 $\hat{A}$ は次式で与えられる(付録2を参照)。

$$\hat{A}(\xi,\eta,\zeta)=\left(\frac{2Z_0P}{\pi \hat{w}^2}\right)^{1/2}exp\left\{-\frac{1}{2\hat{w}^2}\left[(\xi+\hat{\xi}_m)^2+\eta^2\right]\right\} \qquad (32)$$

ただし、$\hat{\xi}_m$、$\hat{w}$ は、それぞれ 式(A18)、(A19) で定義されており、$(x_0/f)^2 \ll 1$、$(z_0/kS_0^2)^2 \ll 1$ のとき、次式が成り立つ。

$$\hat{\xi}_m/x_0 \simeq \hat{w}/S_0 \simeq \zeta/f - 1 \simeq \zeta/f \qquad (33)$$

よって、式(31)、(33)より、次式が得られる。

$$\xi_m/\hat{\xi}_m \simeq w/\hat{w} \simeq \pi n_0/2 \quad if\ f_{ML}=f \qquad (34)$$

すなわち、焦点距離の等しいマイクロレンズと薄肉球面レンズについては、出射ビームの変位量の比およびスポットサイズの比は、ほぼ $\pi n_0/2$ であり、表3中の $n_0$ の値より、$\pi n_0/2 = 2.44(SLS),\ 2.54(SLW)$ が得られる。

## 7. むすび

四分の一周期長の集束形ロッドレンズに、ウエストの位置がレンズ入射端に一致するようなガウスビームが軸ずれ量$x_0$、角度$\theta_0$で入射したとき、レンズ終端面から出射する光波の遠方界を計算した結果、つぎの諸点が明らかになった。(1)振幅分布はガウス形であり、強度が最大となる点のレンズ中心軸からのずれ、すなわち出射ビームの変位量$\xi_m$は、$\theta_0$と入射ビームの最小スポットサイズ$S_0$によらない。(2)$\theta_0=0$のとき、振幅分布はスポットサイズ$w$の軸対称なガウス形であり、変位拡大比$\xi_m/x_0$とスポットサイズ拡大比$w/S_0$とは等しい。(3)出射ビームの偏向角$\varphi$は$C$を定数として、$\varphi=\sin^{-1}(Cx_0)$なる簡単な形で与えられる。

つぎに、SELFOC®LENSの光ビーム偏向特性を$\theta_0=0$の場合に測定した結果、$x_0$-$\xi_m$特性は、ほぼ計算値に一致するが、出射光の強度分布は、ガウス形よりはむしろベル形に近いことが分かった。このことは、レンズ終端面上の界分布がガウス分布からずれていることを意味し、このレンズをビーム径変換素子として用いる際の問題点と言える。また、$x_0\neq0$のとき、計算結果とは異なり、強度分布は軸対称でない。このレンズの光ビーム偏向特性を利用して、スピーカーの振動板の振動振幅を測定し、50$\mu m$程度までの振幅を検出できることを示した。さらに、集束形ロッドレンズのビーム変位拡大比は、これと同一の焦点距離をもつ薄肉球面レンズのそれの、約2.5倍であることを示した。


### 謝辞

実験に関して有益な助言をいただいた、本学文部技官 山本 尚氏に感謝します。

# 文　献


(1) 小林功郎、鹿田 實, 石川 朗, 小田切雄一, 杉元重時, "内部反射膜型マイクロオプティック回路," 電子通信学会総合全国大会講演論文集(1978), S3-13.

(2) 北野一郎, "集束形ロッドレンズ", "特定研究「光導波エレクトロニクス」第4回総合シンポジウム 講演論文集(1979), S12.

(3) T. Uchida, M. Furukawa, I. Kitano, K. Koizumi, and H. Matsumura, "Optical characteristics of a self-focusing fiber guide and its applications," IEEE J. Quantum Electron., QE-6(1970), 606.

(4) 西沢紘一, "集束型ファイバーレンズ(セルフォックレンズ)の分散特性," 光学, 7(1978), 259.

(5) D. Marcuse, Light Transmission Optics, Van Nostrand Reinhold(1972), 267.

(6) I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press(1965), 837, Eq. 8.

(7) A. Erdelyi et al., Higher Transcendental Functions, Vol. II, McGraw-Hill Book Co.(1953), 194, Eq. 22.

(8) 竹中 隆, "基本姿態ビーム波入射時の2乗則媒質内の界," 電子通信学会論文誌, J61-C(1978), 184.

(9) 日本板硝子(株)、カタログ(開発部, 光ファイバー・グループ発行).

(10) Y. Suzaki and A. Tachibana, "Measurement of the μm sized radius of Gaussian laser beam using scanning knife-edge," Appl. Opt., 14(1975), 2809.

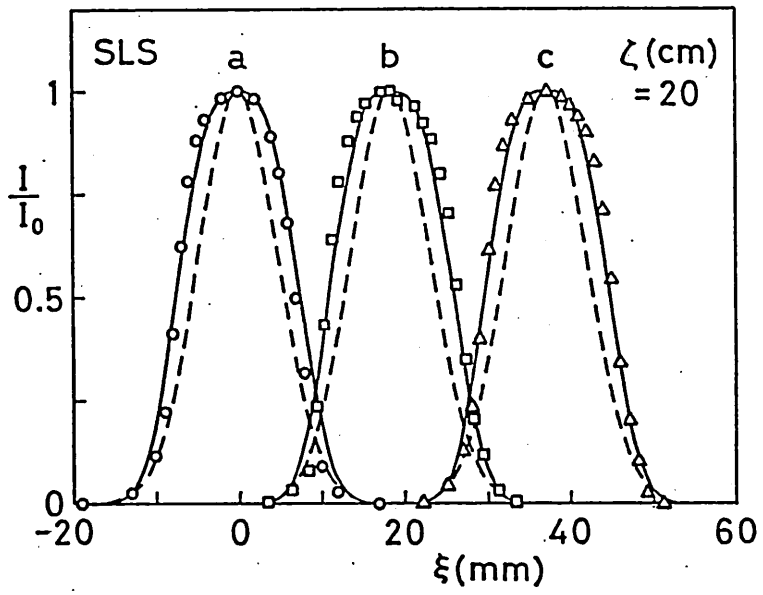
(11) 宮城光信(東北大学 電気通信研究所), 私信.

## 付録1　マイクロレンズ終端面上の界分布の推定

マイクロレンズから出射したビームの強度分布は、計算によればガウス形であるが、本文の図6、7に見られるように、測定値はベル形の分布を示す。たとえばSLSについて、$\zeta=20\ cm$ のとき、測定された規格化強度分布は次式で近似できる。

$$I/I_0 = exp[-(|\xi-\xi_m|/w_a)^3],\ w_a = 8.5\ mm \qquad (A1)$$

図A1には、SLSから出射したビームの強度分布の測定値を、式(A1)による計算結果と比較してある。なお、破線はガウス分布である。




図A1　SLSから出射したビームの規格化強度分布（実線は式(A1)による計算結果を、また、破線はガウス分布を示す。a：$x_0=0$、b：$x_0=0.3\ mm$、c：$x_0=0.6\ mm$）

以下では、出射ビームの強度分布の測定結果より、マイクロレンズ終端面上の界分布を推定する。本文の式(21)を再び記すと

$$F(\xi,\eta,\zeta)=\frac{jk}{2\pi R}e^{-jkR}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}E(x,y,z_0)e^{jk(\xi x+\eta y)/R}dxdy \tag{A2}$$

上式において、$e^{-jkR}$ 以外の $R$ を $\zeta$ で近似すると、次式が得られる。

$$E(x,y,z_0)=-\frac{jk}{2\pi\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jkR}F(\xi,\eta,\zeta)e^{-jk(x\xi+y\eta)/\zeta}d\xi d\eta \tag{A3}$$

かりに、$F(\xi,\eta,\zeta)=F_1(\xi)F_2(\eta)e^{-jkR}$ と書けるとすれば、

$E(x,y,z_0)=E_1(x)E_2(y)$ とおくことができ、次式が成り立つ。

$$\frac{E_1(x)}{E_1(0)}=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\xi)e^{-jkx\xi/\zeta}d\xi\Big/\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\xi)d\xi \tag{A4}$$

$$\frac{E_2(y)}{E_2(0)}=\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\eta)e^{-jky\eta/\zeta}d\eta\Big/\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\eta)d\eta \tag{A5}$$

いま、$F_1(\xi)$ として、式(A1)に対応する次式を仮定する。

$$F_1(\xi)/F_1(0)=exp[-(|\xi|/w_a)^3/2],\quad x_0=0 \tag{A6}$$

上式を式(A4)に代入し、積分を実行†した結果を次式に示す。

$$\frac{E_1(x)}{E_1(0)}=\frac{1}{\Gamma(1/3)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\Gamma\left(\frac{2n+1}{3}\right)\left(\frac{2^{1/3}w_a kx}{\zeta}\right)^{2n} \tag{A7}$$

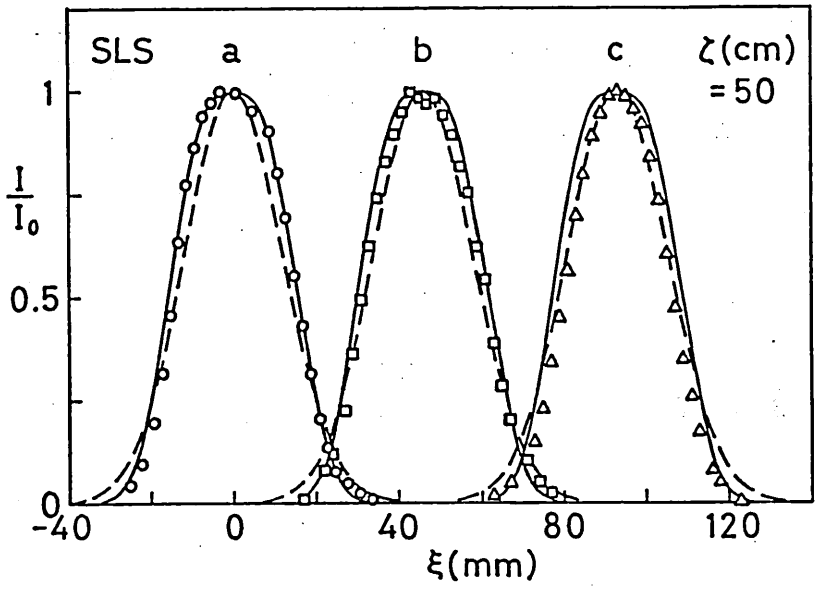
ただし、$\Gamma(x)$ はガンマ関数である。一方、$\zeta=50\ cm$ における強度分布の測定値は次式で近似できる(図A2を参照)。

$$I/I_0=exp[-(|\xi-\xi_m|/w_b)^3],\quad w_b=18\ mm \tag{A8}$$

---

† 次式[11]を用いる。

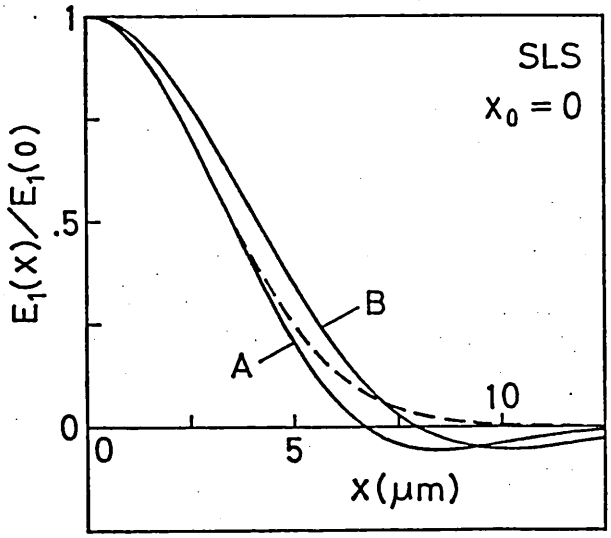
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|^3-jbx}dx=\frac{2}{3a^{1/3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\Gamma\left(\frac{2n+1}{3}\right)\left(\frac{b}{a^{1/3}}\right)^{2n},\quad a>0$$




図A2　SLSから出射したビームの規格化強度分布（実線は式(A8)による計算結果を、また、破線はガウス分布を示す。a：$x_0=0$、b：$x_0=0.3\,mm$、c：$x_0=0.6\,mm$）

式(A8)をもとに$E_1(x)/E_1(0)$を求めた結果は、式(A7)で$w_a$を$w_b$で置き換えた式で与えられる。

以上のようにして求めたマイクロレンズ終端面上の界分布を図A3に示す。曲線A、Bは、それぞれ$\zeta=20\,cm$、$50\,cm$における強度分布より得られた結果であり、実際の界分布は曲線AまたはBに近いものと思われる。




図A3　マイクロレンズから出射したビームの強度分布より求めたレンズ終端面上の界分布（実線A、Bは、それぞれ、$\zeta=20\,cm$、$50\,cm$での強度分布より得られた結果であり、破線はガウス分布である。）

## 付録2　薄肉球面レンズの軸ずれ入射ガウスビームに対する特性

図11(b)において、レンズ直前のビームの界分布$U$は次式で与えられる。

$$U(x,y,z_0)=(2Z_0P/\pi\hat{s}_1^2)^{1/2}\exp\{-(1/\hat{s}_1^2+jk/D)[(x-x_0)^2+y^2]/2\} \quad (A9)$$

$$\hat{s}_1=s_0[1+(z_0/ks_0^2)^2]^{1/2},\quad D=z_0[1+(ks_0^2/z_0)^2] \quad (A10)$$

レンズを透過したあとのビームの界分布$V$は次式より求められる。

$$V(\xi,\eta,\zeta)=\frac{jk}{2\pi R}e^{-jkR}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U(x,y,z_0)e^{\frac{jk}{2}\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\right)(x^2+y^2)}e^{\frac{jk}{R}(x\xi+y\eta)}dx\,dy \quad (A11)$$

上式に式(A9)を代入し、積分を実行した結果を以下に示す。

$$V(\xi,\eta,\zeta)=\hat{A}(\xi,\eta,\zeta)\exp[j\hat{\Psi}(\xi,\eta,\zeta)] \quad (A12)$$

$$\hat{A}(\xi,\eta,\zeta)=(2Z_0P/\pi\hat{w}_1^2)^{1/2}\exp\{-[(\xi+\hat{\xi}_0)^2+\eta^2]/2\hat{w}_1^2\} \quad (A13)$$

$$\hat{\Psi}(\xi,\eta,\zeta)=\pi/2-kR-(k/2)[x_0^2/D-Q(\xi,x_0)-Q(\eta,0)]$$
$$-\tan^{-1}[k\hat{s}_1^2(1/D+1/R-1/f)] \quad (A14)$$

$$\hat{\xi}_0=x_0(R/f-1),\quad \hat{w}_1=\hat{s}_1R[(1/k\hat{s}_1^2)^2+(1/D+1/R-1/f)^2]^{1/2} \quad (A15)$$

$$Q(\xi,x_0)=(\hat{s}_1/\hat{w}_1)^2\{\xi^2(1/D+1/R-1/f)$$
$$+2\xi x_0R[(1/k\hat{s}_1^2)^2+(1/D+1/R-1/f)/D]$$
$$+(x_0R)^2[(1/D-1/R+1/f)/(k\hat{s}_1^2)^2$$
$$+(1/D+1/R-1/f)/D^2]\} \quad (A16)$$

式(24)、(25)を求めたのと同様な方法を用いると、振幅分布$\hat{A}$は次式で近似できる。

$$\hat{A}(\xi,\eta,\zeta)=(2Z_0P/\pi\hat{w}^2)^{1/2}\exp\{-[(\xi+\hat{\xi}_m)^2+\eta^2]/2\hat{w}^2\} \quad (A17)$$

$$\frac{\hat{\xi}_m}{x_0}=\left\{\sqrt{\left(\frac{\zeta}{f}\right)^2\left[1-\left(\frac{x_0}{f}\right)^2\right]+\left(\frac{x_0}{f}\right)^2}-1\right\}\Big/\left[1-\left(\frac{x_0}{f}\right)^2\right] \quad (A18)$$

$$\frac{\hat{w}}{\hat{s}_1}=\left(\frac{\hat{\xi}_m}{x_0}+1\right)\sqrt{\left(\frac{f}{k\hat{s}_1^2}\right)^2+\left[\frac{f}{D}-\frac{\hat{\xi}_m}{x_0}\left(\frac{\hat{\xi}_m}{x_0}+1\right)^{-1}\right]^2} \quad (A19)$$

輻射科学研究会資料

# スラブ型光導波路の円形曲り部の一構成法

小野 和雄　沢 新之輔
（愛媛大学　工学部）

昭和55年2月1日
（於 中央電気クラブ）

## 1. まえがき

スラブ型光導波路或いは光ファイバの曲り部における放射損失及びモード変換損失については，これまでにも，多くの検討が行われている[1]~[5]。その結果，このような開放形導波路の円形曲り部の固有モードは，曲り部の曲率半径に依存した固有の放射損失を受けることが知られている。又，直線部と円形曲り部を，導波路中心軸を一致させたまま直接接続すると，直線部と円形曲り部とで，一般に，固有モードの界分布が異るために，モード変換損失が生じることも知られている。前者は，導波路の構造と曲率に依存して損失が定まってしまうのに対し，後者は，直線部と円形曲り部の間に適当なモード変換部をそう入することにより，損失を小さくすることが可能である[5],[6]。たとえば，直線部と円形曲り部の界分布が異ることに基づくモード変換の影響を除去するために，これまでにも，レンズ状媒質からなる光ビーム導波路[7]，レンズ列光ビーム導波系[8]，及び反射形ビーム導波系[9]等の超多重モード導波路に対する曲り部の構成法が提案されている。又，単一モード光ファイバの曲り部に関しては，文献[5]で，直線部と円形曲り部の間に，曲率が零から円形曲り部の一定曲率にまで緩やかに変化するテーパ部が介在すれば，モード変換損失は，小さくなることが示されている。しかし，光IC線路等で重要と思われるスラブ型光導波路に対して，モード変換損失を除去或いは減少させるための曲り部の構成法については，十分に検討されていな

いように思われる。

本稿では、従来から超多重モード光導波路の円形曲り部の構成法として提案されている方法が、スラブ型光導波路の円形曲り部の構成法としても有効であることを示す。

## 2. 解析法

本章では、スラブ型光導波路の曲り部におけるモード変換現象の解析を、文献(2)のTaylorの手法に従って行う。本手法では、まず、一連の折れ曲り部が接続された導波路におけるモード変換現象の解析を行う。その後、折れ曲りの個数を無限大とし、かつ、折れ曲り部の長さ及び折れ曲り角を零とする極限をとることによって、滑らかな曲り部におけるモード変換現象の解析を行う。

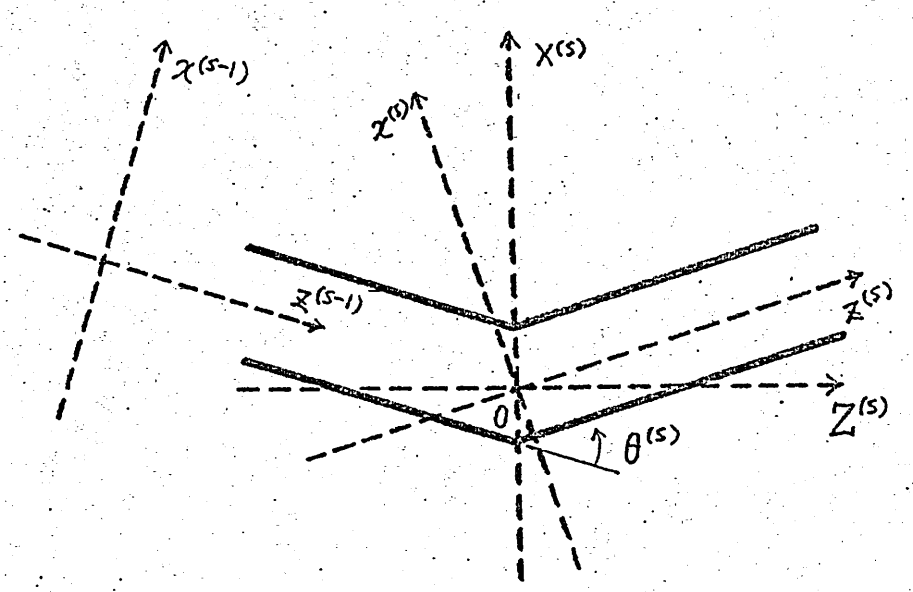



図1. スラブ型光導波路の折れ曲り部と座標系

図1に，スラブ型光導波路の折れ曲り部の構造を示す。導波路幅を $2d$，外部空間とコアの屈折率比を $n$ とする。スラブ型光導波路に沿うTE及びTMモードの伝搬特性は，表1及び2に示す記号を用いると，統一的に取り扱うことができる。さて，折れ曲り導波路の任意の区間 $s$ において界 $\Phi$ は，直線状導波路の固有モードの重ね合わせで，次のように表すことができる。

$$\Phi^{(s)} = \sum_i C_i^{(s)} \psi_i(x^{(s)}) e^{-j\beta_i z^{(s)}} + \int_0^{k} g^{(s)}(\rho)\, \varphi(x^{(s)}, \rho)\, e^{-j\beta z^{(s)}} d\rho \qquad (1)$$

ここで，上付添字 $(s)$ は，番号 $s$ の区間の諸量であることを表す。又，$C_i^{(s)}$ 及び $g^{(s)}(\rho)$ は，それぞれ，区間 $s$ における $i$ 番目の導波モードの複素

表.1　TEモードとTMモードの対応表
（但し，$\varepsilon$ は外部空間の誘電率）

| モード ＼ 諸元 | TE | TM |
|---|---|---|
| $\psi_v$, $\varphi(\rho)$ | $E_y$ | $H_y$ |
| $\varepsilon$ | $\mu_0$ | $\varepsilon$ |
| $h$ | $1/2\omega\mu_0$ | $1/2\omega\varepsilon n^2$ $\lvert x\rvert \leq d$<br>$1/2\omega\varepsilon$ $\lvert x\rvert > d$ |
| $m$ | $1$ | $n$ |

モード振幅及び波数 $\rho$ の放射モードの複素振幅係数を，$\beta_i$ 及び $\beta$ は，それらのモードの伝搬定数を表す。更に，$\psi_i$ 及び $\varphi$ は，表1及び2に示す界分布関数を表す。任意の区間 s-1 と s の境界面 $x^{(s)}$ に沿って，電磁界の境界条件を，次式のように界分布関数の連続条件で近似する。

$$\sum_i C_i^{(s-1)} \psi_i(u x^{(s)})\, e^{-j\beta_i\{-v x^{(s)} + l^{(s-1)}\}}$$
$$+ \int_0^k g^{(s-1)}(\rho)\, \varphi(u x^{(s)}, \rho)\, e^{-j\beta\{-v x^{(s)} + l^{(s-1)}\}}\, d\rho$$

表2 (a) TM導波モードの界分布
（但し，V は規格化周波数 $V=\sqrt{n^2-1}\,kd$）

| 諸元 | 偶モード | 奇モード |
|---|---|---|
| $\psi_\nu$ | $A_e \cos\gamma_\nu x$ $\quad \lvert x\rvert \le d$<br>$A_e \cos\gamma_\nu d \cdot e^{\gamma_\nu(\lvert x\rvert - d)}$ $\quad \lvert x\rvert \ge d$<br>$\nu = 0, 2, 4 \cdots$ | $A_o \sin\gamma_\nu x$ $\quad \lvert x\rvert \le d$<br>$A_o \frac{x}{\lvert x\rvert} \sin\gamma_\nu d \cdot e^{-\gamma_\nu(\lvert x\rvert - d)}$ $\quad \lvert x\rvert \ge d$<br>$\nu = 1, 3, 5 \cdots$ |
| $A_e$<br>$A_o$ | $\left[\dfrac{2\omega\varepsilon m^2}{\beta_\nu\left\{d + \dfrac{m^2}{\gamma_\nu}\dfrac{\gamma_\nu^2+\gamma_\nu^2}{\gamma_\nu^2+m^4\gamma_\nu^2}\right\}}\right]^{\frac{1}{2}}$ | 同左 |
| 特性方程式 | $\tan\gamma_\nu d = m^2 \dfrac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu}$<br>$V^2 = \gamma_\nu^2 d^2 + \gamma_\nu^2 d^2$<br>$n^2 k^2 = \beta_\nu^2 + \gamma_\nu^2$ | $\tan\gamma_\nu d = -\dfrac{\gamma_\nu}{m^2\gamma_\nu}$<br>$V^2 = \gamma_\nu^2 d^2 + \gamma_\nu^2 d^2$<br>$n^2 k^2 = \beta_\nu^2 + \gamma_\nu^2$ |

$$= \sum_i C_i^{(s)} \psi_i (u x^{(s)}) e^{-j\beta_i v x^{(s)}}$$

$$+ \int_0^k g^{(s)}(\rho)\, \varphi(u x^{(s)}, \rho)\, e^{-j\beta v x^{(s)}}\, d\rho \qquad (2)$$

但し，

$$\left.\begin{aligned} u &= \cos(\theta^{(s)}/2) \\ v &= \sin(\theta^{(s)}/2) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

であり，$l^{(s)}$ は s 番目の区間の長さである。

表2(b)　TM 放射モードの界分布

| 諸元 | 偶モード | 奇モード |
|---|---|---|
| $\varphi(\rho)$ | $a_e \cos\sigma x \quad \lvert x\rvert \le d$<br>$\bar{a}_e \cos(\rho\lvert x\rvert - \phi_e) \quad \lvert x\rvert \ge d$<br>$\phi_e = \rho d - \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{m^2\rho}\tan\sigma d\right)$ | $a_o \sin\sigma x \quad \lvert x\rvert \le d$<br>$\bar{a}_o \frac{x}{\lvert x\rvert}\cos(\rho\lvert x\rvert - \phi_o) \quad \lvert x\rvert \ge d$<br>$\phi_o = \rho d + \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{m^2\rho}\cot\sigma d\right)$ |
| $a_e$<br>$a_o$ | $\left[\frac{2\omega\varepsilon m^2\rho^2}{\pi\beta\left(m^2\rho^2\cos^2\sigma d + \frac{\sigma^2}{m^2}\sin^2\sigma d\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$ | $\left[\frac{2\omega\varepsilon m^2\rho^2}{\pi\beta\left(m^2\rho^2\sin^2\sigma d + \frac{\sigma^2}{m^2}\cos^2\sigma d\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$ |
| $\bar{a}_e$<br>$\bar{a}_o$ | $\left[\frac{2\omega\varepsilon}{\pi\beta}\right]^{\frac{1}{2}}$ | 同左 |
| 特性方程式 | $V^2 = \sigma^2 d^2 - \rho^2 d^2$<br>$m^2 k^2 = \beta^2 + \sigma^2$ | |

さて，折れ曲り部へ入射するモードは基本偏モードのみと仮定する。又，折れ曲り角は小さく，入射モードから結合可能なモードへのモード変換量は，入射モードが任意の区間で一定電力を持つと仮定してよい程小さいとする。従って，入射モードから一旦モード変換された電力が，更に，他のモードと結合する効果は無視してよい。すると，入射モードから，結合可能な放射モード及び導波モードへのモード変換量は次のように計算される。

$$g^{(s)}(\rho)\, e^{j\beta L^{(s)}} = g^{(s-1)}(\rho)\, e^{j\beta L^{(s-1)}} + M_{\beta\beta_0}\, C_0\, e^{j(\beta-\beta_0)L^{(s-1)}} \tag{4}$$

$$C_i^{(s)}\, e^{j\beta_i L^{(s)}} = C_i^{(s-1)}\, e^{j\beta_i L^{(s-1)}} + M_{\beta_i\beta_0}\, C_0\, e^{j(\beta_i-\beta_0)L^{(s-1)}} \tag{5}$$

$$M_{\beta\beta_0} = \beta \int_{-\infty}^{\infty} h\, \varphi(ux, \rho)\, \psi_0(ux)\, e^{j(\beta+\beta_0)vx}\, dx \tag{6}$$

$$M_{\beta_i\beta_0} = \beta_i \int_{-\infty}^{\infty} h\, \psi_i(ux)\, \psi_0(ux)\, e^{j(\beta_i+\beta_0)vx}\, dx \tag{7}$$

但し，以下の近似を用いている。

$$\left.\begin{aligned} M_{\beta\beta'} &\fallingdotseq \delta(\beta-\beta') \\ M_{\beta_i\beta_j} &\fallingdotseq \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

又，入射モードのモード振幅を $C_0$ で，折れ曲り部の入射端からs番目の折れ曲り部までの距離を $L^{(s)}$ で表している。

式(4)及び(5)で，区間長 $l$ を零，折れ曲り角 $\theta$ を零とする極限をとると，モード変換量を次式のように微分方程式の形に表すことができる。

$$\frac{d\{q(p)\,e^{j\beta L}\}}{dL} = \frac{e^{j\Omega L}}{R}\,K\,C_0 \tag{9}$$

$$\frac{d\{C_i\,e^{j\beta_i L}\}}{dL} = \frac{e^{j\Omega_i L}}{R}\,K_i\,C_0 \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Omega = \beta - \beta_0 \quad , \quad \Omega_i = \beta_i - \beta_0 \\ &K = \left.\frac{dM_{\beta\beta_0}}{d\theta}\right|_{\theta=0} \quad , \quad K_i = \left.\frac{dM_{\beta_i\beta_0}}{d\theta}\right|_{\theta=0} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ここで，モード変換係数 $K$ 及び $K_1$ を求める。但し，入射モードを基本偏導波モードと仮定しているから，奇導波モード及び奇放射モードに対してのみ，モード変換係数 $K$ 及び $K_1$ は零と異る値をとり[2),3)]，次のように計算される。

$$\begin{aligned} K = j\,\frac{\beta(\beta+\beta_0)}{2}\left\{\frac{1}{\pi\beta\beta_0\left(d+\frac{m^2}{\gamma_0}\,\frac{\gamma_0^2+\gamma_0^2}{\gamma_0^2+m^4\gamma_0^2}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ \Bigg[\!\Bigg[\left\{\frac{p^2}{m^2p^2\sin^2\sigma d+\frac{\sigma^2}{m^2}\cos^2\sigma d}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\frac{\sin(\sigma+\gamma_0)d}{(\sigma+\gamma_0)^2}+\frac{\sin(\sigma-\gamma_0)d}{(\sigma-\gamma_0)^2}\right. \\ \left.-\frac{d\cos(\sigma+\gamma_0)d}{\sigma+\gamma_0}-\frac{d\cos(\sigma-\gamma_0)d}{\sigma-\gamma_0}\right\} \\ +2m\cos\gamma_0 d\left[\frac{d}{\gamma_0^2+p^2}\left\{\gamma_0\cos(pd-\phi)-p\sin(pd-\phi)\right\}\right. \\ \left.+\frac{1}{(\gamma_0+p)^2}\left\{(\gamma_0^2-p^2)\cos(pd-\phi)-2\gamma_0 p\sin(pd-\phi)\right\}\right]\Bigg]\!\Bigg] \end{aligned} \tag{12}$$

$$K_1 = j\frac{\beta_1(\beta_1+\beta_0)}{2}\left\{\frac{1}{\beta_0\beta_1\left(d+\frac{m^2}{\gamma_0}\frac{\gamma_0^2+\gamma_0^2}{\gamma_0^2+m^4\gamma_0^2}\right)\left(d+\frac{m^2}{\gamma_1}\frac{\gamma_1^2+\gamma_1^2}{\gamma_1^2+m^4\gamma_1^2}\right)}\right\}^{1/2}$$

$$\cdot\left[\frac{\sin(\gamma_1+\gamma_0)d}{(\gamma_1+\gamma_0)^2}+\frac{\sin(\gamma_1-\gamma_0)d}{(\gamma_1-\gamma_0)^2}-\frac{d\cos(\gamma_1+\gamma_0)d}{(\gamma_1+\gamma_0)}-\frac{d\cos(\gamma_1-\gamma_0)d}{(\gamma_1-\gamma_0)}\right.$$

$$\left.+2m^2\cos\gamma_0 d\sin\gamma_1 d\,\frac{1}{\gamma_0+\gamma_1}\left(d+\frac{1}{\gamma_0+\gamma_1}\right)\right] \qquad (13)$$

## 3. 円形曲り部におけるモード変換特性

直線部と曲り部の導波路中心軸が，図2に示すように，滑らかに接続されている場合，円形曲り部における放射モード及び奇導波モードへのモード変換電力 $\Delta P$ 及び $\delta P$ は，入射モードの電力で規格化して示すと次のようになる。

$$\Delta P = \int_0^{k_0} |K|^2 \cdot |\mathcal{F}(L,\Omega)|^2 d\rho \qquad (14)$$

$$\delta P = |K_i|^2 \cdot |\mathcal{F}(L,\Omega_i)|^2 \qquad (15)$$

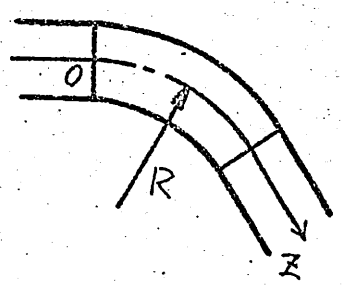



図2. 直線部と曲り部の接続

但し，$\mathcal{F}(L,\Omega)$ 及び $\mathcal{F}(L,\Omega_i)$ は，それぞれ，次式で表される曲率の Fourier 変換係数である。

$$\mathcal{F}(L,\Omega) = \int_0^L \frac{e^{j\Omega z}}{R(z)} dz \qquad (16)$$

$$\mathcal{F}(L, \Omega_i) = \int_0^L \frac{e^{j\Omega_i z}}{R(z)} dz \tag{17}$$

図2に示す曲りの場合，

$$|\mathcal{F}(L, \Omega)|^2 = \frac{2}{R^2\Omega^2}(1-\cos\Omega L) \tag{18}$$

となる。形式的には，放射モードに対しても，導波モードに対しても，Fourier変換係数は同じ関数形で表される。そこで，以下では，Fourier変換係数の$\Omega$を，放射モードに対しては$\Omega$，導波モードに対しては$\Omega_i$と見なすことにする。

基本偏TEモードが，図2に示す曲り部に入射した場合の数値例を示すと次のようになる。屈折率比$n$を1.01と選び，規格化周波数$V$を$\pi/2$とした場合の規格化放射電力$(R/d)^2\cdot\Delta P$を図3(a)に，又，規格化周波数$V$を$\pi$とした場合の規格化導波電力$(R/d)^2\cdot\delta P$及び規格化放射電力$(R/d)^2\cdot\Delta P$を図3(b)及び(c)に示す。図3(a)及び(c)に示す破線は，曲り部の長さLを無限大においたときの放射電力，即ち，放射モードへの変換電力の定常値$\Delta P_\infty$を示している。放射電力は，曲り部を伝搬するに従って，$\Delta P_\infty$を中心としてほぼ周期的に振動し，定常値に漸近することがわかる。これに対して，導波電力は，零と最大値の間をビート波長$\Lambda_1 = 2\pi/\Omega_1$で振動することがわかる。

放射モードの平均伝搬定数$\langle\beta\rangle$及び分散$\sigma_\beta$を，次式のように，定義する[5]。即ち，重み関数として，放射電力密度を用いて，

$$\langle\beta\rangle \equiv \int_0^{k} \beta\,|g(\beta)|^2 d\beta \Big/ \int_0^{k} |g(\beta)|^2 d\beta \tag{19}$$

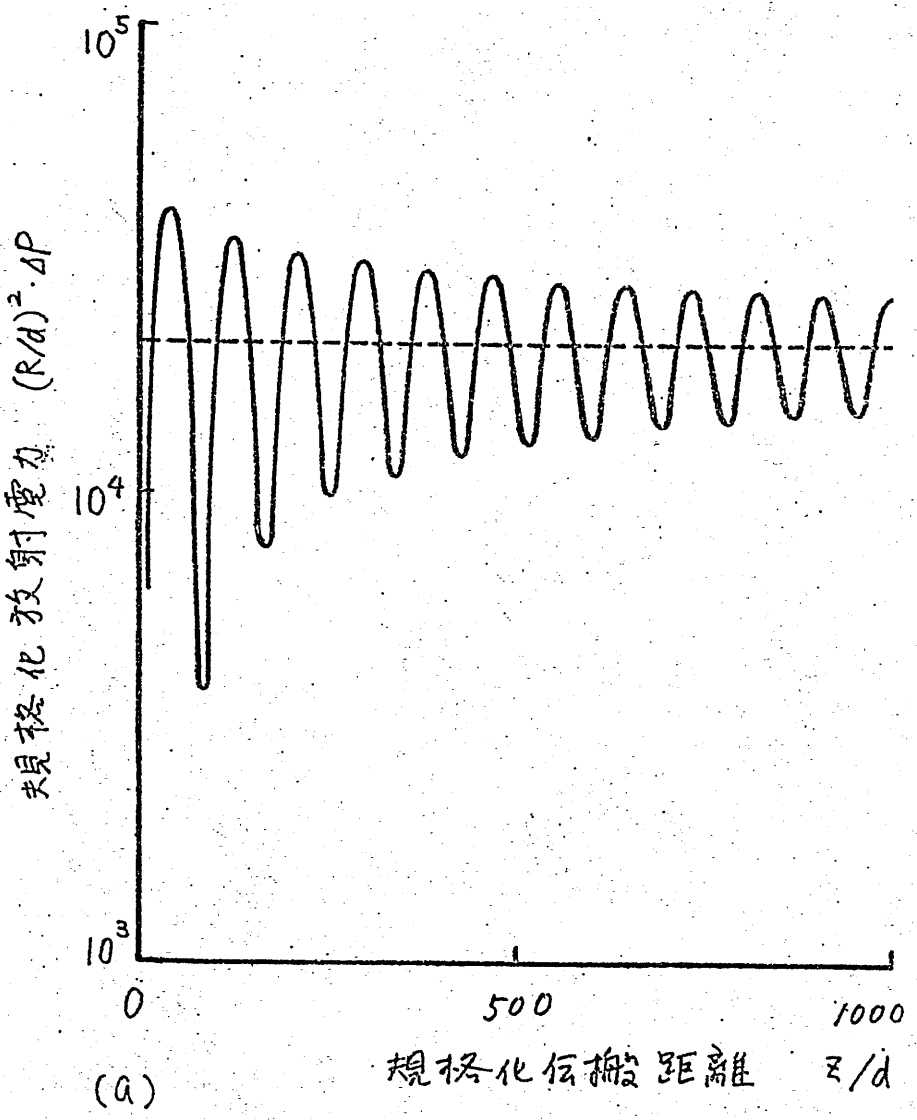



図3. 円形曲り部におけるモード変換電力特性

(a) 放射電力 ( $V=\pi/2$, $n=1.01$ )

(b) 導波電力 ( $V=\pi$ , $n=1.01$ )

(c) 放射電力 ( $V=\pi$ , $n=1.01$ )

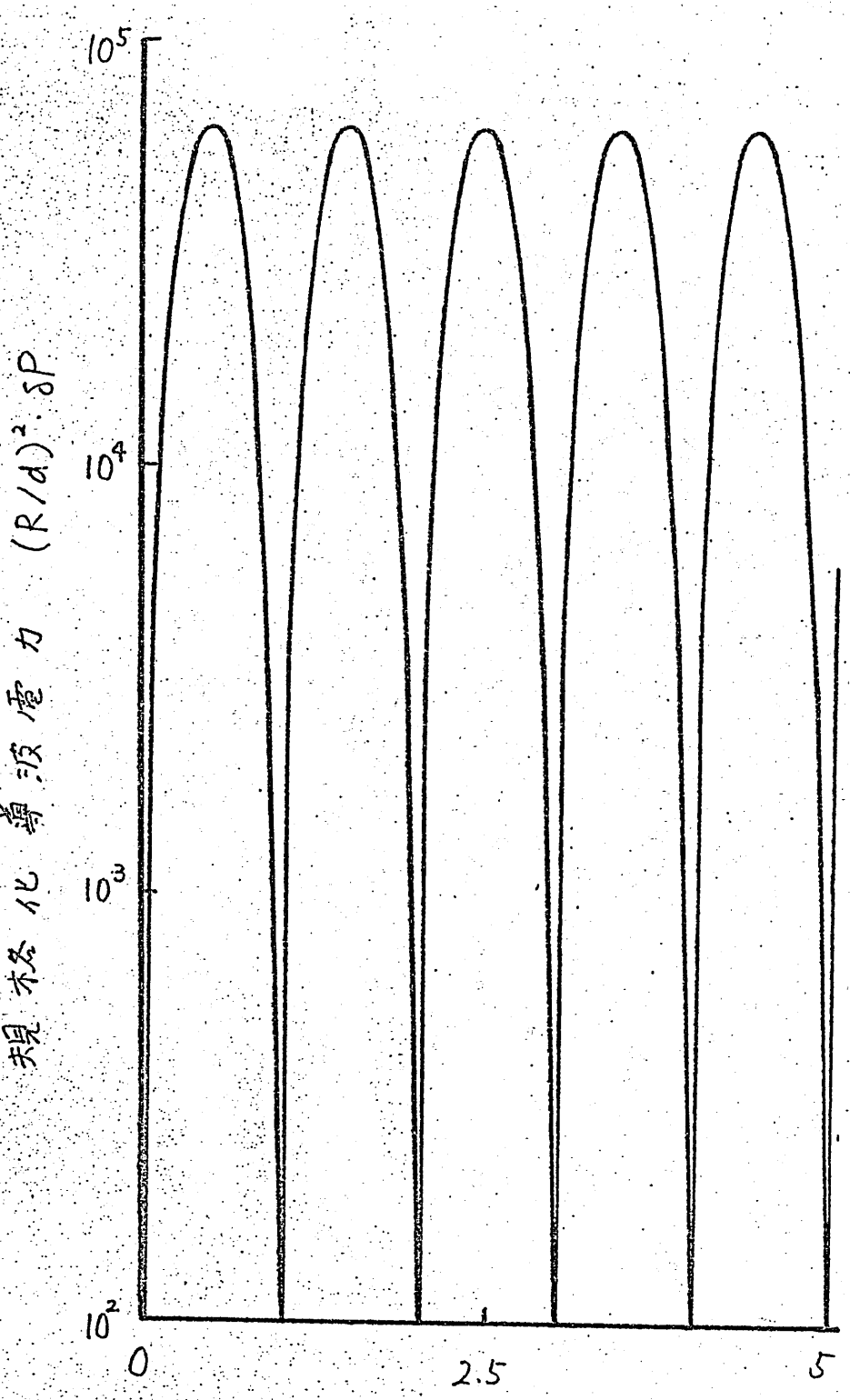



図 3 (b)　ビート波長で規格化した伝搬距離

$\Lambda_1 = 70.9\,d$

$$\sigma_\beta \equiv \int_0^{k} (\beta - \langle\beta\rangle)^2 |g(\rho)|^2 d\rho \Big/ \int_0^{k} |g(\rho)|^2 d\rho \qquad (20)$$

と定義する。

図3(a)及び(c)で示した放射モードの平均伝搬定数 $\langle\beta\rangle$ 及び分散 $\sigma_\beta$ を，それぞれ，図4(a)及び(b)に示す。図4から，平均伝搬定数 $\langle\beta\rangle$ の伝送

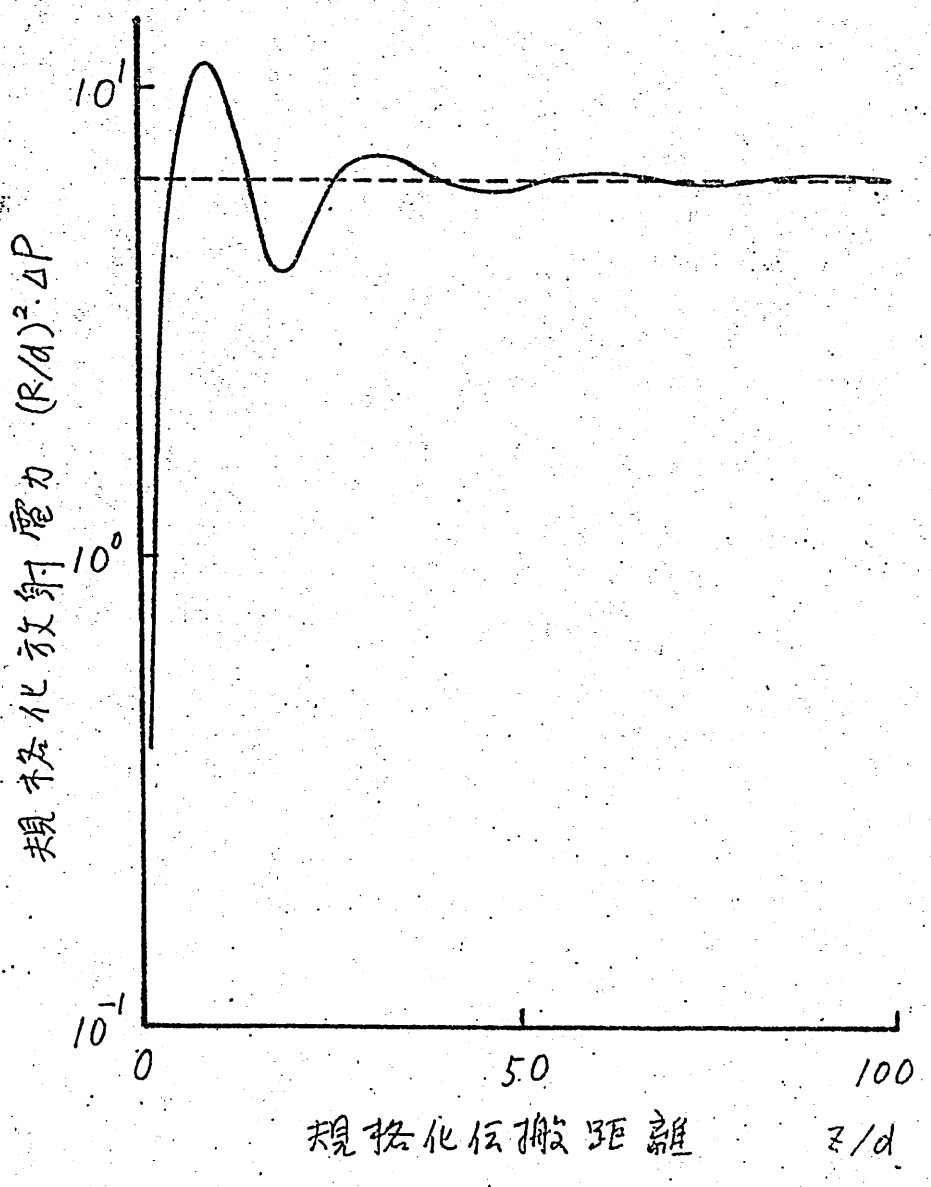



図3(c)

距離に対する変化は，規格化周波数が π/2 並びに π のいずれの場合に対しても小さいこと，又，規格化周波数が大きい程 ⟨β⟩ の脈動振幅は急速に小さくなることがわかる。伝搬定数の分散 $\sigma_\beta$

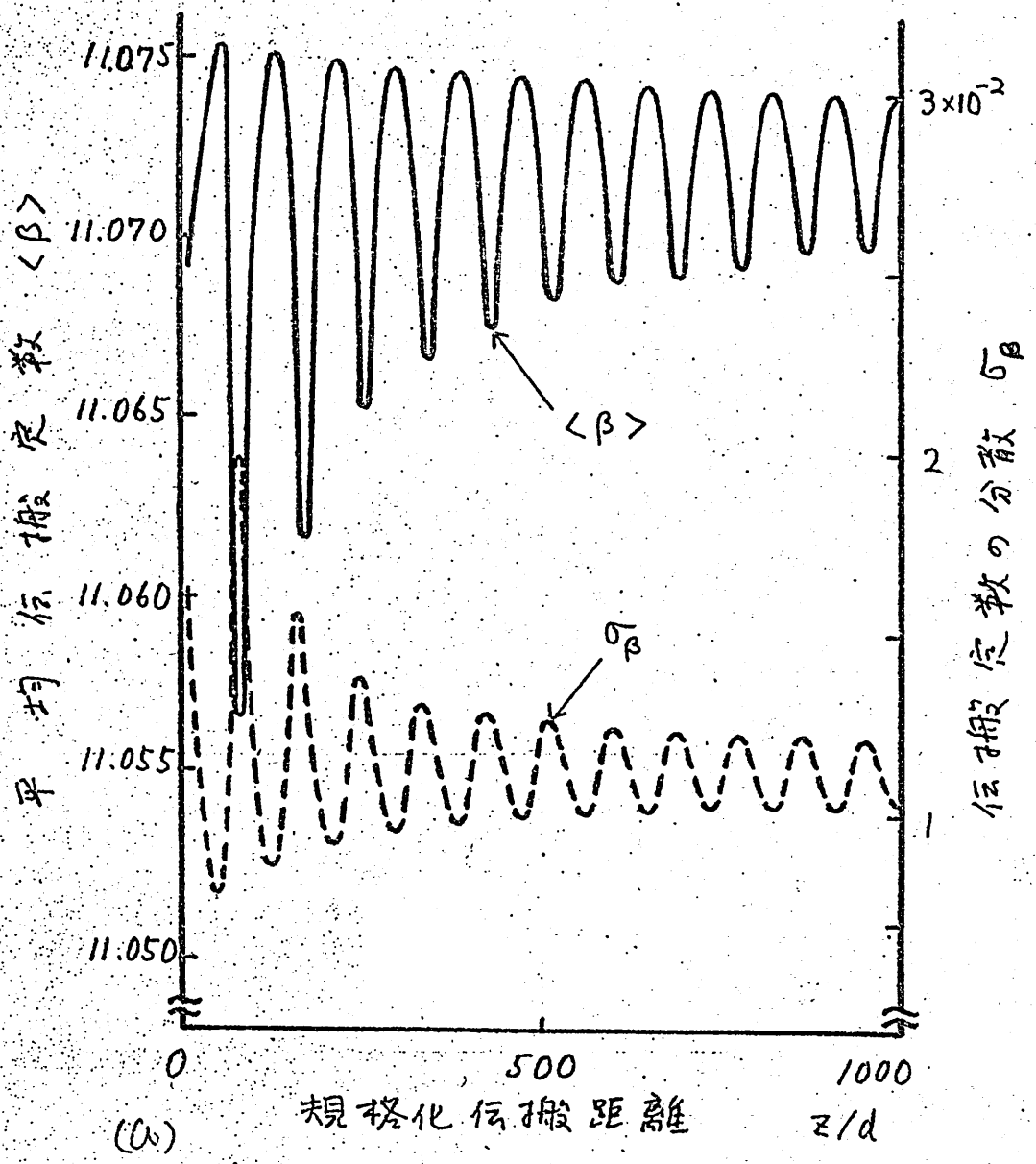



図4. 円形曲り部における放射モードの平均伝搬定数及び伝搬定数の分散

(a) $V = \pi/2$, $n = 1.01$ ; (b) $V = \pi$, $n = 1.01$

に対しても，平均伝搬定数と同様の傾向があることが，図4からわかる。図3(a)及び(c)に示す放射電力の振動周期Dと，図4(a)及び(b)に示す平均伝搬定数の関係を表4に示す。導波モードの伝搬定数$\beta_0$と$\langle\beta\rangle$のビート波長$\Lambda$と，放射電力の振動周期Dとは，表4に示すようにほぼ一致する。従って，放射モードは，平均伝搬定数$\langle\beta\rangle$の線スペクトルを持つ擬導波モード[3],[5]と考えても良いと思われる。又，図3(a)及び図4(a)から，放射電力の極大値と平均伝搬定数の極大値及び分散の極小値がほぼ対応し，逆に，極大値と極小値を入れ換えても同様のことが成立している。このことからも，放射モードは，平

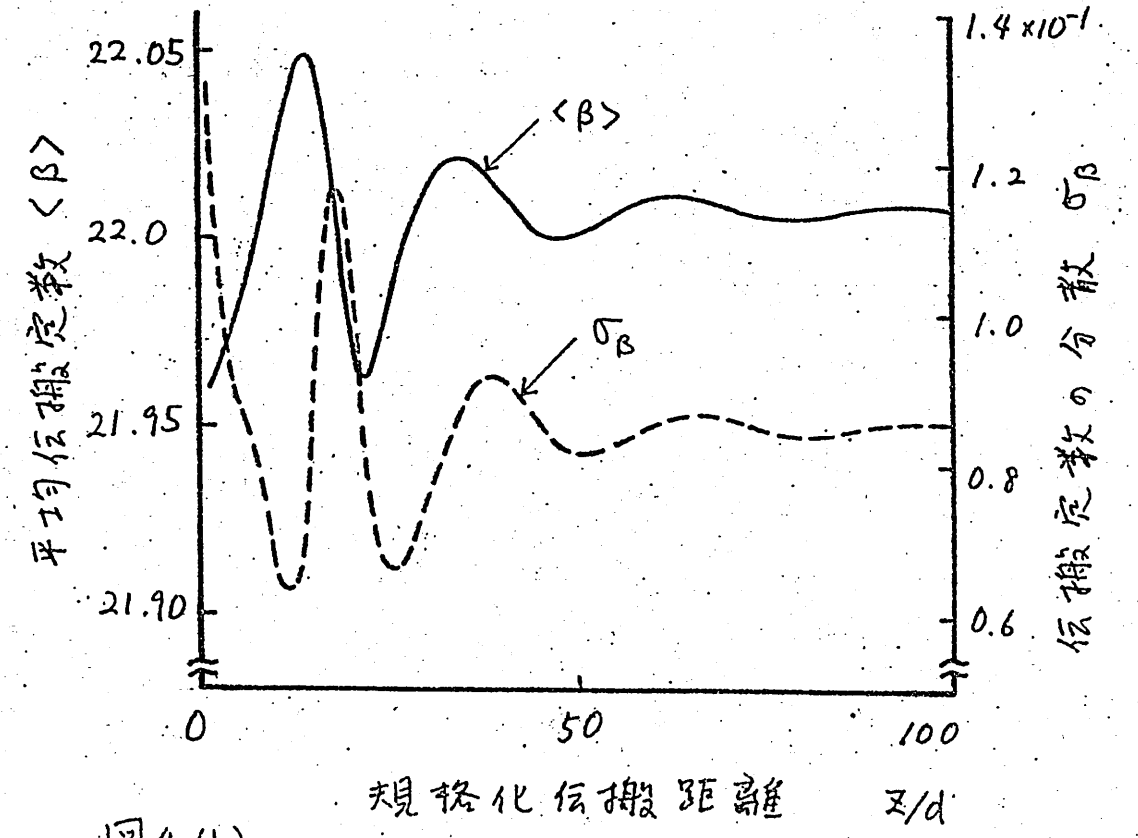



図4(b)

表.4　平均伝搬定数 $\langle\beta\rangle$ と放射電力の振動周期 D の関係

| 規格化周波数 / 諸元 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|
| 基本モードの伝搬定数 $\beta_0$ | 11.151 | 22.349 |
| 平均伝搬定数 $\langle\beta\rangle$ | 11.072 | 22.010 |
| ビート波長 $\Lambda$ | 79.2 | 18.5 |
| 振動周期 D | 85 | 21 |

均伝搬定数を仮想的な線スペクトルとして持つ擬導波モード[3),(5)]として取り扱うことができると予想される。即ち、平均伝搬定数 $\langle\beta\rangle$ が大きいところでは、平均伝搬定数付近の伝搬定数を持つ放射モードの電力が大きく、逆に $\langle\beta\rangle$ が小さいところでは、$\langle\beta\rangle$ 付近の放射モードの電力が小さいと考えられ、放射電力と $\langle\beta\rangle$ の相関から、放射電力の振動は、$\langle\beta\rangle$ 付近の放射モードと導波モードとのモード変換の結果であることがわかる。又、分散 $\sigma_\beta$ が、平均伝搬定数 $\langle\beta\rangle$ と逆の位相で振動することも同様にして説明することができる。

## 4. 円形曲り部の構成法

本章では、直線部と円形曲り部の導波路中心軸を一致させて滑らかに接続した場合に、モード変換損失を除去或いは小さくする方法を提案する。前章の数値例から、曲り部において導波

モードと結合する放射モードを，仮想的な線スペクトルを持つ擬導波モード[3],[5]と見なしてよいと思われる。すると，曲り部で入射モードと結合する導波モードのみならず放射モードに対しても，従来から，超多重モードビーム導波系の円形曲り部の構成法[7]~[9]として提案されている方法が，スラブ型光導波路の円形曲り部の構成法としても適用することができる可能性がある。

図5に，直線部と円形曲り部の間に補助的な曲り部（モード変換部と言うことにする）をそう入する円形曲り部の構成法を示す。モード変換部としては，図5(b)～(d)に曲率変化を示すように，(i)円形曲り部，(ii)直線状テーパ曲り部，及び(iii) Raised Cosine テーパ曲り部を考える。以下では，構成法(i)，(ii)及び(iii)として引用する。式(14)及び(15)からわかるように，放射電力密度及び結合導波モード電力は，それぞれ，モード変換係数と Fourier 変換係数の積の絶対値の2乗で与えられる。そこで，上記(i)，(ii)及び(iii)のモード変換部を用いたときの伝搬方向に対する曲率の変化と，Fourier 変換係数を，まとめて表4に示す。但し，表4で，伝搬定数の差Ωは，結合するモードが放射モードの場合には $\beta-\beta_0$ を，一方，導波モードの場合には，$\beta_1-\beta_0$ をとるものとする。

### 4.1 2モード導波路の場合

導波モードが2つ伝搬可能な場合，前章の数値計算例に示したような導波路では，基本モードからの変換電力は，導波モードの方が放射モ

ードに比べて3桁程大きい。従って，放射モードへのモード変換は，一応無視してよいと考えられる[3]。更に，放射波は，出射側直線状導波路から次第に遠ざかるため，信号歪等を起こす恐れは少ない。これに対して，高次導波モードは，基本モードと同様に，導波路に沿って伝搬するため，信号歪を引き起こす恐れは多分にあると考えられる。そこで，導波モードが2つ伝

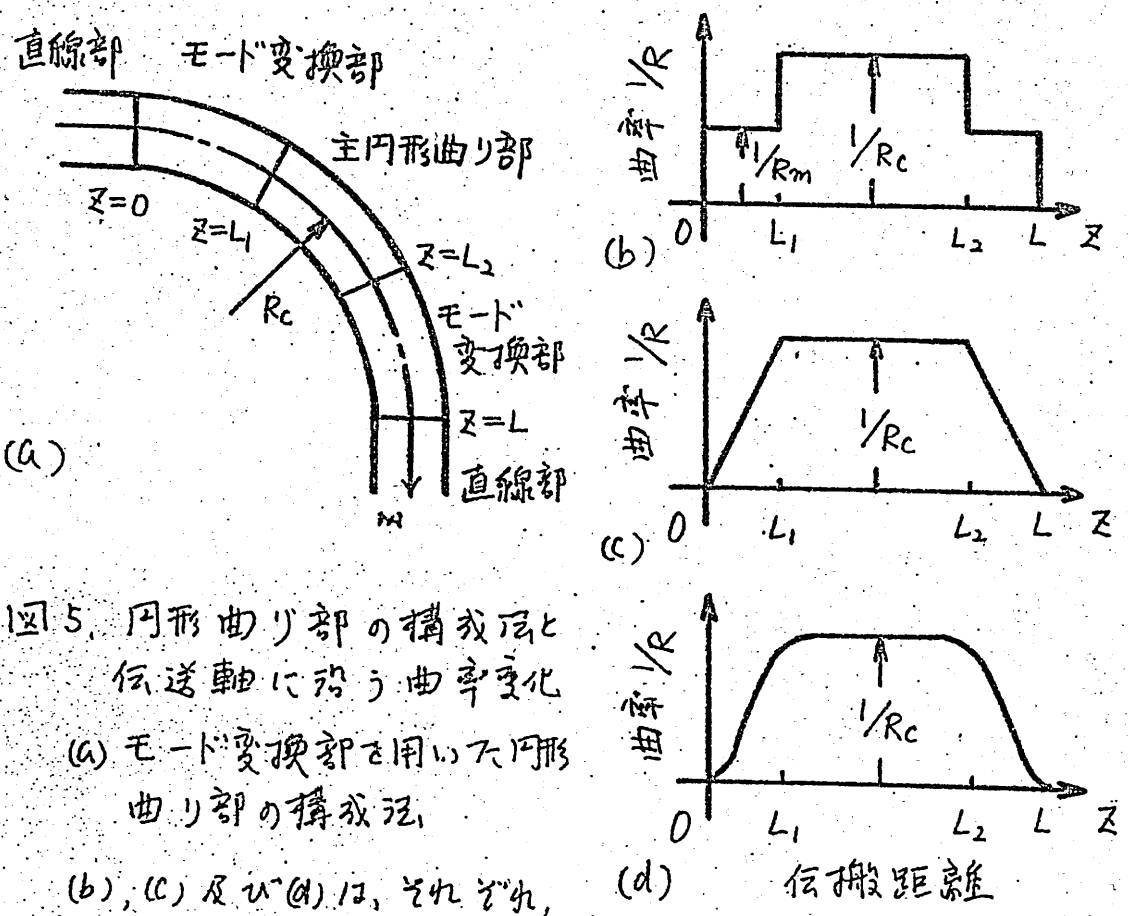



図5. 円形曲り部の構成法と伝送軸に沿う曲率変化

(a) モード変換部を用いた円形曲り部の構成法

(b), (c) 及び (d) は，それぞれ，モード変換部として，円形曲り部，直線状テーパ曲り部及び Raised Cosine テーパ曲り部を用いた場合の，伝送軸に沿う曲率変化を示す。

表4　円形曲り部の構成法(i)，(ii)及び(iii)に対する（但し，結合モードが導波モードの場合

| 構成法 | 伝送軸に沿う曲率変化 | |
|---|---|---|
| (i) | $\frac{1}{R}=\begin{cases}\frac{1}{R_m} & L_1 \geqq z > 0 \\ \frac{1}{R_c} & L_2 \geqq z > L_1 \\ \frac{1}{R_m} & L \geqq z > L_2\end{cases}$ | |
| (ii) | $\frac{1}{R}=\begin{cases}\frac{z}{R_c L_1} & L_1 \geqq z > 0 \\ \frac{1}{R_c} & L_2 \geqq z > L_1 \\ -\frac{z-L_2}{R_c(L-L_2)}+\frac{1}{R_c} & L \geqq z > L_2\end{cases}$ | |
| (iii) | $\frac{1}{R}=\begin{cases}\frac{1}{2R_c}\left\{1-\cos\frac{\pi z}{L_1}\right\} & L_1 \geqq z > 0 \\ \frac{1}{R_c} & L_2 \geqq z > L_1 \\ \frac{1}{2R_c}\left\{1+\cos\frac{\pi(z-L_2)}{L-L_2}\right\} & L \geqq z > L_2\end{cases}$ | |

搬可能な場合，導波モード間に曲りの影響が生じないように曲り部を構成する方法を検討する。この場合，入射モードと結合モード間の曲りによる結合の影響を，主円形曲り部の長さに無関係に，完全に除去することができる。その条件を，3種類の構成法に対して，表5にまとめて示す。結合の生じるモード間のビート波長は，

る曲率変化とFourier変換係数
$\Omega=\beta_i-\beta_0$，放射モードの場合 $\Omega=\beta-\beta_0$ とする）

| Fourier 変換係数 $\lvert F(L,\Omega)\rvert^2\times R_c^2$ |
|---|
| $\frac{1}{\Omega^2}\left[\eta\{\cos\Omega L_1-1\}+\{\cos\Omega L_2-\cos\Omega L_1\}+\eta\{\cos\Omega L-\cos\Omega L_2\}\right]^2$ $+\frac{1}{\Omega^2}\left[\eta\sin\Omega L_1+\{\sin\Omega L_2-\sin\Omega L_1\}+\eta\{\sin\Omega L-\sin\Omega L_2\}\right]^2$ 但し，$\eta=R_c/R_m$，$\xi=L_1/L$ である。 |
| $\frac{1}{\Omega^4 L_1^2}\left[\{-1+\cos\Omega L_1+\cos\Omega L_2-\cos\Omega L\}^2+\{\sin\Omega L_1+\sin\Omega L_2-\sin\Omega L\}^2\right]$ |
| $\frac{\pi^4}{4\Omega^2\{\Omega^2L_1^2-\pi^2\}^2}\left[\{-1-\cos\Omega L_1+\cos\Omega L_2+\cos\Omega L\}^2+\{-\sin\Omega L_1+\sin\Omega L_2+\sin\Omega L\}^2\right]$ |

スラブ型光導波路の場合 $2\pi/\Omega$ であり，これは，レンズ状媒質からなる光ビーム導波路の場合 $2\pi/g$ に対応するものである。ここで，$g$ は集束パラメータである。従って，本稿で取り扱っている2モードスラブ型光導波路の導波モード間の結合に及ぼす曲りの影響を除去するための条件と，従来から，後者の導波路に対して曲率

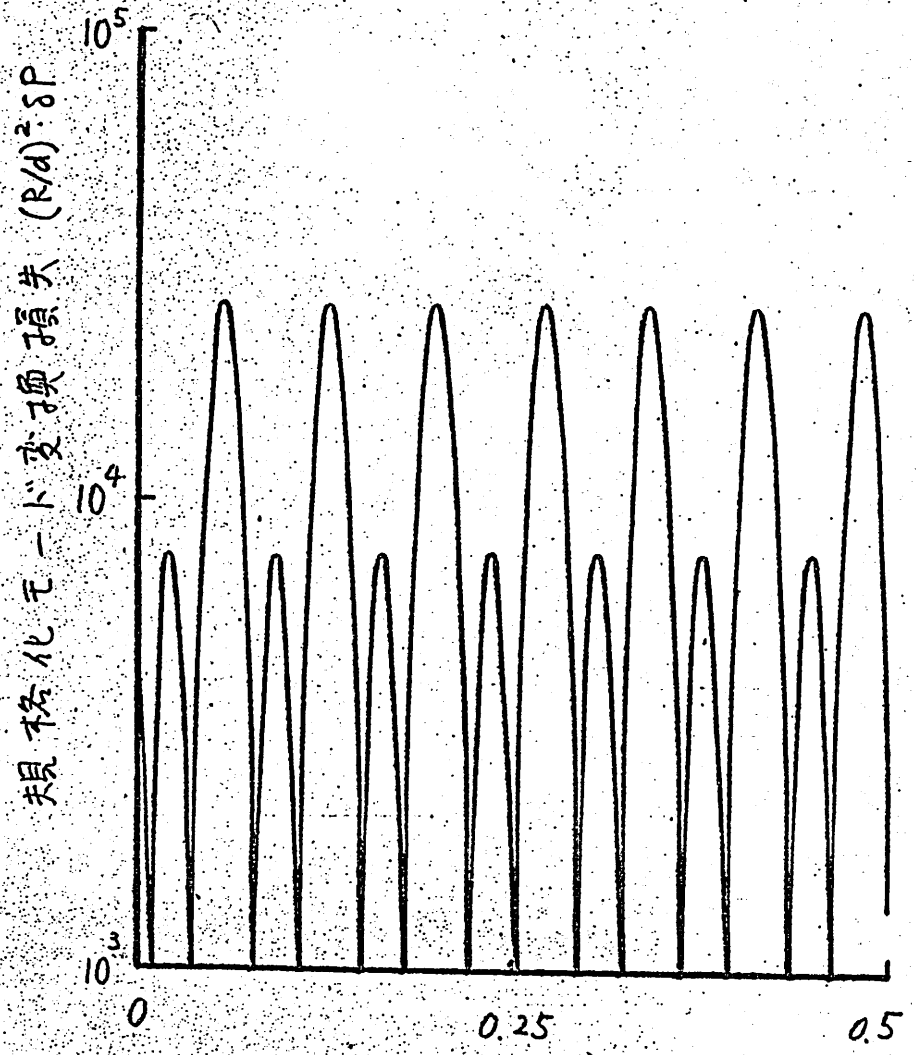
表 5　円形曲り部の構成条件
（但し，$\nu = 1, 2, 3 \cdots$）

| 構成法 | 構成条件 |
|---|---|
| (i) | $L_1 = (2\nu-1)\pi/\Omega_i$ ，$R_m = 2R_c$ |
| (ii) | $L_1 = 2\nu\pi/\Omega_i$ |
| (iii) | $L_1 = (2\nu+1)\pi/\Omega_i$ |

の1次の影響を除去するために得られている条件とは、完全に対応がつく。

図6(a)，(b)及び(c)に，構成法(i)，(ii)及び(iii)を用いた場合の結果を示す。同図の横軸は、曲り部の全長Lで規格化したモード変換部の長さ$\xi$（$=L_1/L$）を，又，縦軸は、出射側直線部における高次モードの規格化モード変換電力，即ち、規格化モード変換損失$(R/a)^2 \cdot \delta P$を示す。構成法(i)，(ii)及び(iii)夫々に，表5の構成条件を満す距離ごとに，規格化モード変換損失$(R/a)^2 \cdot \delta P$は零になる。図6からは，構成条件を満す場合以外にも、モード変換損失$\delta P$が極小となる場合があることがわかる。これは，円形曲り部の全長Lを定め，しかも，主円形曲り部の長さをも適当に定めると，$\delta P$を小さくすることができることを示している。又，構成法(ii)及び(iii)の場合，モード変換部が長くなる程，モード変換損失は一般に小さくなることがわかる。更に，モード変換部の長さが構成条件からずれた場合には，モード変換部としてRaised Cosine型テーパ曲り部

を用いる方が、直線状テーパ曲り部を用いるよりも、モード変換損失は小さいことがわかる。
円形曲り部のパラメータCを、全曲り角 $\theta_t$、



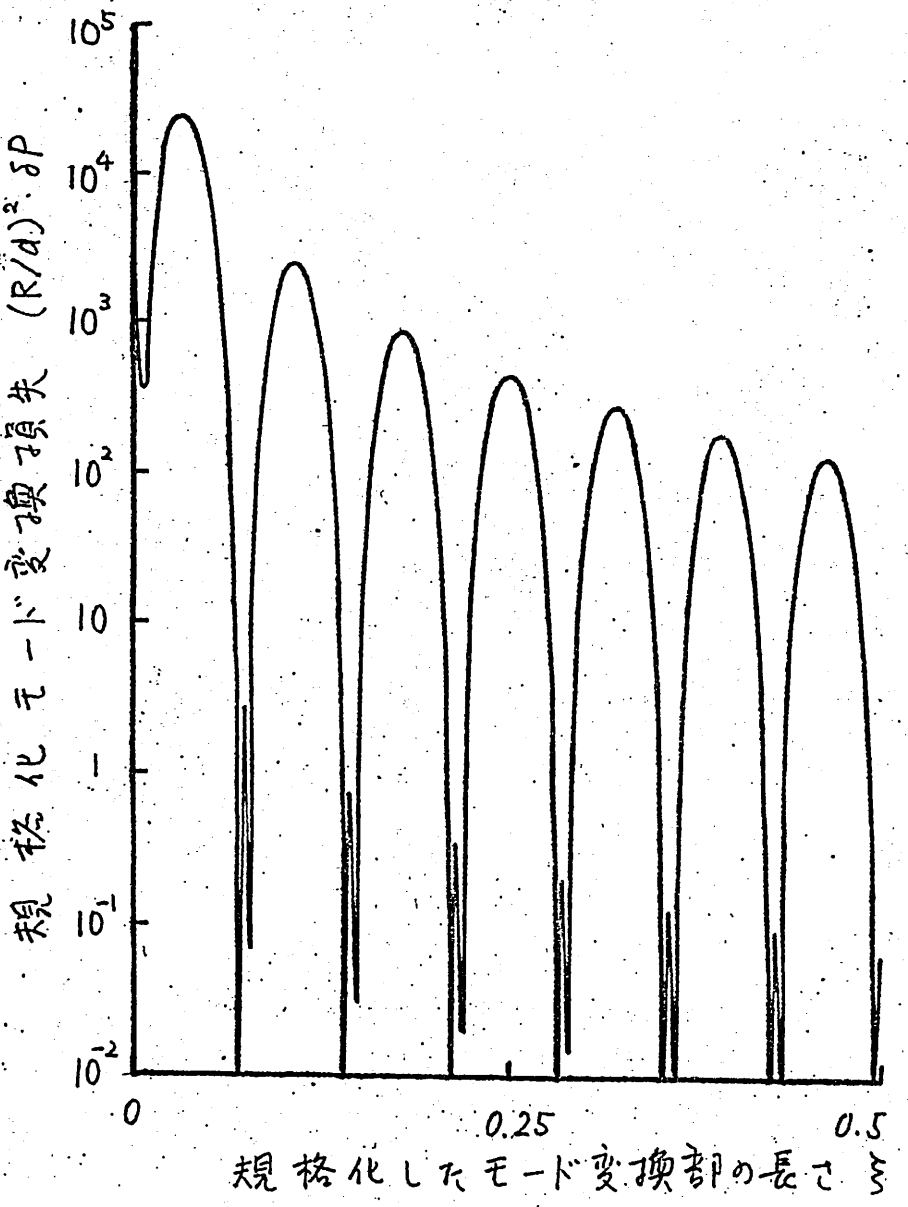

(a)

図6. 円形曲り部の構成法を用いた場合の導波モードのモード変換損失特性。(a)、(b)及び(c)は、それぞれ、構成法(i)、(ii)及び(iii)の結果に対応する。

主円形曲り部の曲率半径 $R_c$，及び曲り部の全長 $L$ を用いて，

$$C = \theta_t R_c / L$$

と定める。モード変換部として円形曲り部を用

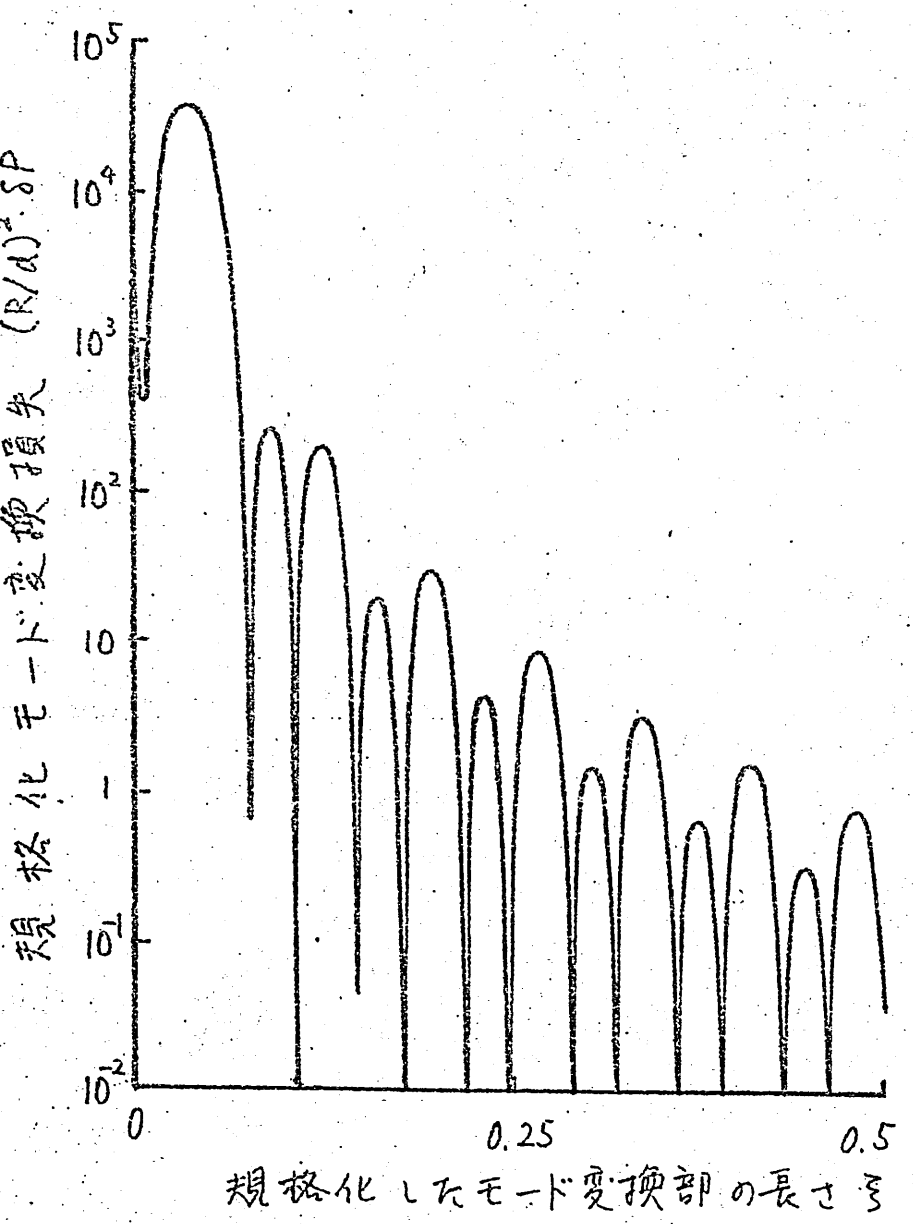



(b)

いる場合，モード変換部の曲率半径 $R_m$ に対する主円形曲り部の曲率半径 $R_c$ の比 $\zeta$ を 0.5 と選ぶと，全ての構成法 (i)，(ii) 及び (iii) に対して，

$$C = 1 - \zeta$$

となり，規格化したモード変換部の長さ $\xi$ が同




(c)

表6. 円形曲り部の数値設計例（規格化周波数 $\nu=\pi$, 屈折率比 $n=1.01$, 曲り角 $\theta_t=\pi/2$, 曲り部の全長 $L=1000d$）

| 構成法 | 諸元 | | 数値 |
|---|---|---|---|
| 共通 | 導波路半幅 | $d/\lambda$ | 3.527 |
| | 曲り部の全長 | $L/\lambda$ | 3527 |
| (i) | モード変換部の長さ | $L_1/\lambda$ | 125.1 |
| | モード変換部の曲率半径 | $R_m/\lambda$ | 4331 |
| | 主円形曲り部の曲率半径 | $R_c/\lambda$ | 2166 |
| (ii) | モード変換部の長さ | $L_1/\lambda$ | 250.2 |
| | 主円形曲り部の曲率半径 | $R_c/\lambda$ | 2086 |
| (iii) | モード変換部の長さ | $L_1/\lambda$ | 375.6 |
| | 主円形曲り部の曲率半径 | $R_c/\lambda$ | 2006 |

じであれば，パラメータ $C$ は同じ値をとる。

次に，モード変換部の長さを最小に選んだ場合の曲り部の数値設計例を表6に示す。但し，屈折率比 $n$ を1.01，曲り部の全長 $L$ を $1000d$ とし，全曲り角 $\theta_t$ を $\pi/2$ とする。表6に示す長さは全て外部空間の波長 $\lambda$ で規格化して示すことにする。

## 4.2 単一モード導波路の場合

単一モード導波路の場合，基本モードと結合するのは放射モードだけであり，モード変換損失，即ち，出射側直線部における放射モードの電力 $\Delta P$ は，式(12)，(14)及び表4の結果から計算することができる。図7(a)に構成法(i)を用いた

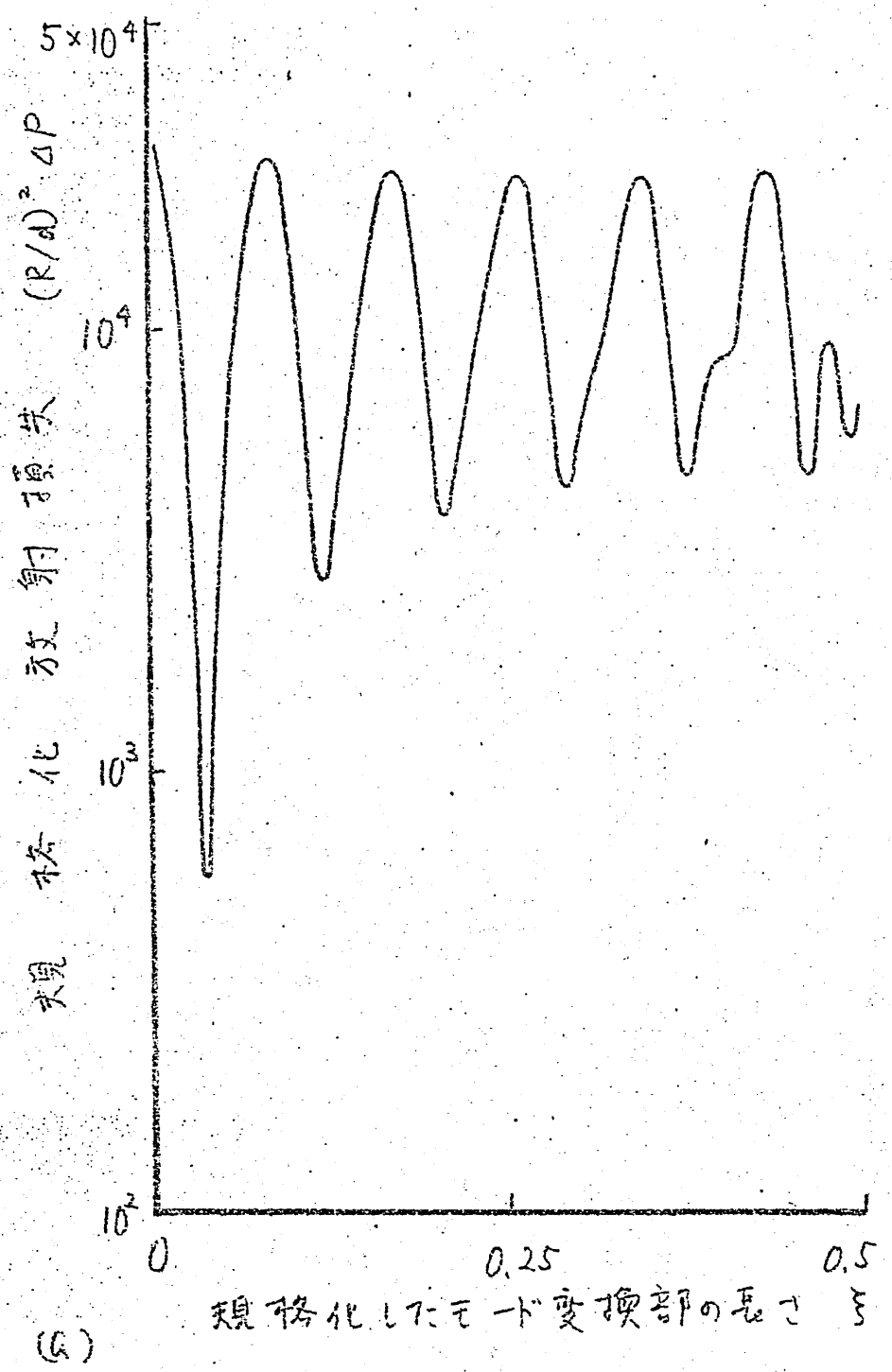
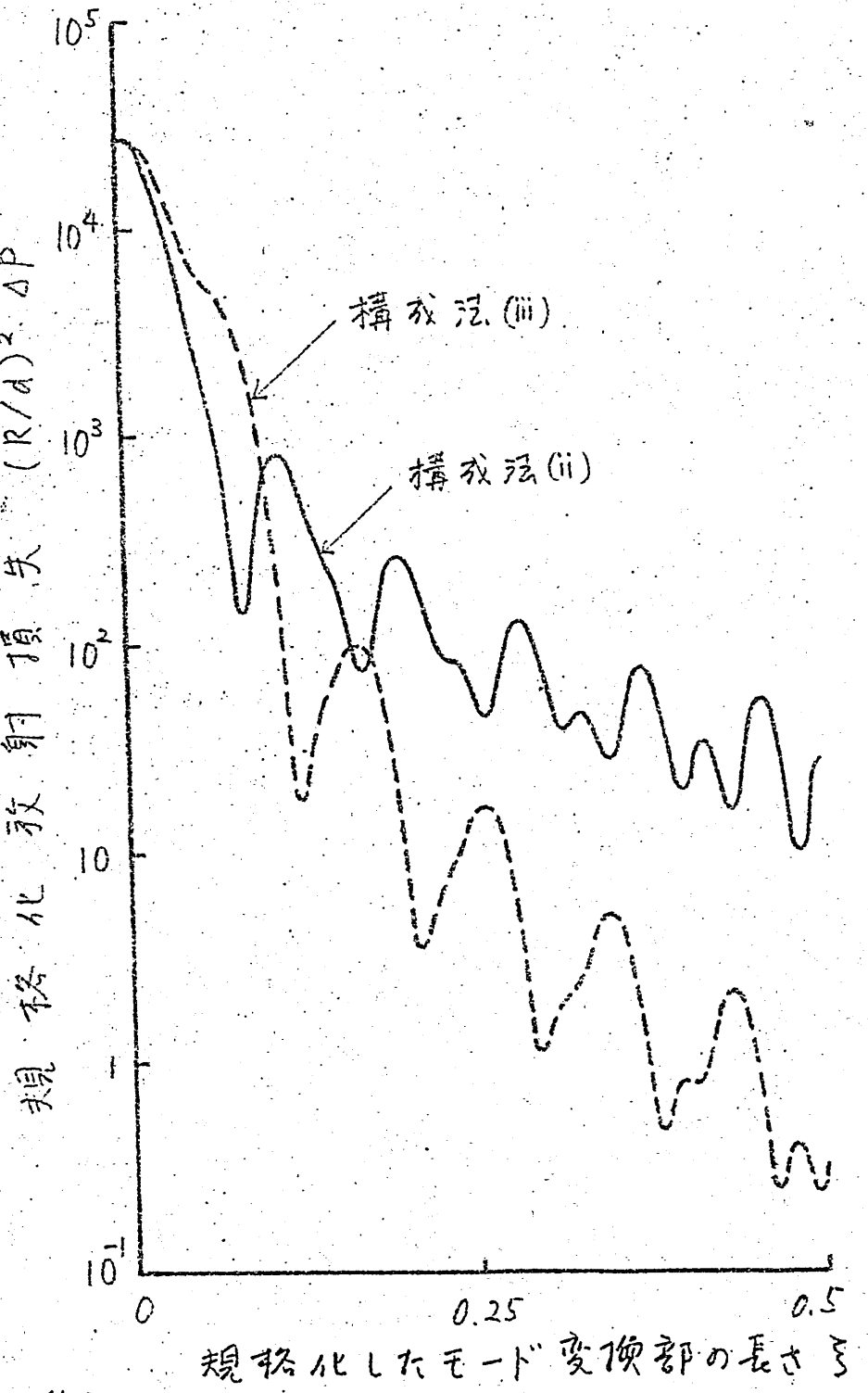



図7. 円形曲り部の構成法を用いた場合の放射モードのモード変換損失特性
(G) 構成法(i)を用いた場合


$10^5$
$10^4$
$10^3$
$10^2$
10
1
$10^{-1}$
規格化放射損失 $(R/d)^2 \cdot \Delta P$
構成法(iii)
構成法(ii)
0
0.25
0.5
規格化したモード変換部の長さ ξ

(b)

表7　単一モードスラブ型光導波路の円形曲り部の構成法（$n=1.01$, $V=\pi/2$, $L=1000d$, $\theta_t \doteqdot \pi/2$）

| 構成法 | 諸元 | | 数値 |
|---|---|---|---|
| 共通 | 導波路半幅 | $d/\lambda$ | 1.763 |
| | 曲り部の全長 | $L/\lambda$ | 1763 |
| (i) | モード変換部の長さ | $L_1/\lambda$ | 70.5 |
| | モード変換部の曲率半径 | $R_m/\lambda$ | 2154 |
| | 主円形曲り部の曲率半径 | $R_c/\lambda$ | 1077 |
| | 損失の低減率 | | $2.74\times10^{-2}$ |
| (ii) | モード変換部の長さ | $L_1/\lambda$ | 150.0 |
| | 主円形曲り部の曲率半径 | $R_c/\lambda$ | 1033 |
| | 損失の低減率 | | $6.76\times10^{-3}$ |
| (iii) | モード変換部の長さ | $L_1/\lambda$ | 220.4 |
| | 主円形曲り部の曲率半径 | $R_c/\lambda$ | 982.3 |
| | 損失の低減率 | | $8.64\times10^{-4}$ |

場合の規格化放射損失 $(R/d)^2\cdot\Delta P$ を，又，図7(b)に，構成法(ii)及び(iii)を用いた場合の $(R/d)^2\cdot\Delta P$ を示す。但し，屈折率比 $n$ を1.01，曲り部の全長 $L$ を $1000d$，規格化周波数 $V$ を $\pi/2$ としている。又，構成法(i)の場合，図6と同様に，モード変換部の曲率 $R_m$ に対する主円形曲り部の曲率半径 $R_c$ の比 $\eta$ を0.5と選んである。図7(a)及び(b)から，放射モード変換損失も，平均伝搬定数 $\langle\beta\rangle$ を用いれば，表5に示した構成条件を満足する場合に，小さくし得ることがわかる。又，

図6と同様，図7にも，構成条件の他にモード変換損失に極小値が現れることから，主円形曲り部が適当な長さを持つ場合にも放射損失を小さくすることができることがわかる。図7(b)から，構成法(ii)及び(iii)の場合，構成条件を満さなくても，モード変換部の長さが長くなる程，モード変換損失は小さくなること，又，この例では，Raised Cosine 型テーパ曲り部をモード変換部として用いる構成法が，損失は最も小さくなっていることがわかる。

表7に，単一モードスラブ型光導波路の円形曲り部の数値設計例を示す。但し，屈折率比 $\eta$ を 1.01，規格化周波数 $V$ を $\pi/2$，曲り部の全長 $L$ を 1000 $\alpha$，曲り角 $\theta_c$ を $\pi/2$ とし，モード変換部は最も短い場合を仮定している。表7における損失の低減率は，放射モードの定常モード変換損失 $\Delta P_\infty$ に対する構成法を用いた場合の放射モード変換損失 $\Delta P$ の比 $\Delta P/\Delta P_\infty$ である。曲り部の構成法を用いると，モード変換損失は，定常モード変換損失 $\Delta P_\infty$ に比べて 2桁～3桁程度小さくすることができることがわかる。

## 5. あとがき

本稿では，従来から超多重モードビーム導波路の円形曲り部の構成法[7]～[9]として提案されている方法が，スラブ型光導波路の円形曲り部の構成法としても有効であることを示した。特に，2モードスラブ型光導波路の場合，基本モードと放射モード間のモード変換損失は，高次導波モードへの変換損失に比べて無視してよい程小

さい[3]ことを示し，更に，この条件の下では，基本モードと高次導波モード間の曲りによるモード変換の影響を完全に除去することができることを示した。又，単一モードスラブ型光導波路の場合，本稿で提案した曲り部の構成法を用いることにより，放射モードへのモード変換損失を，ほぼ2桁以上小さくすることができることを示した。更に，モード変換部としてテーパ曲り部を用いた場合，テーパ曲り部が長くなる程，モード変換損失は，一般に小さくなること，又，Raised Cosine型テーパ曲り部は直線状テーパ曲り部よりも，モード変換損失を小さくすることができることを示した。

本稿のような曲り部の構成法は，Rib guide，Strip loaded guide 及び Bulge guide 等の集束効果を持つ平面導波路の円形曲り部の構成法としても適用される可能性があると思われる。

本稿では，外部空間とコアの屈折率比がほぼ1の weakly guiding の導波路に沿うTEモードについてのみ数値的に検討を行ったが，今後，TEモードとTMモードとの相異が大きく現れる屈折率比の大きい場合について検討を行う必要があると考えられる。

## 参考文献


(1) E. A. J. Marcatili ; "Bend in optical dielectric guides", Bell Syst. Tech. J., Vol. 48, p. 2103 (Sept. 1969).

(2) H. F. Taylor ; "Power loss at directional change in dielectric waveguides", Applied Optics, Vol. 13, NO. 3, p. 642 (March 1974).

(3) 川上，西田；"クラッド型および W 型伝送路の曲がりによるモード変換損失"，信学技報，光量子エレクトロニクス OQE 76-17，1976年.
(4) D. Marcuse；"Field deformation and loss caused by curvature of optical fibers"，J. Opt. Soc. Am.，Vol. 66，NO. 4，p. 311 (April 1976).
(5) W. A. Gambling，H. Matsumura，C. M. Ragdale，"Curvature and microbending losses in single-mode optical fibres"，Opt. Quant. Elect.，Vol. 11，NO. 1，p. 43 (Jan. 1979).
(6) 小野，沢，原；"単一モードスラブ型光導波路の円形曲り部の一構成法"，昭54電気関係学会四国支部連大，通信 4-10 (昭 54-11).
(7) S. Sawa，N. Kumagai；"Analysis of optical waveguide consisting of a square-law lenslike medium and its analogies to circular $TE_{01}$ waveguide"，IEEE，Trans. Microwave Theory Tech.，Vol. MTT-24，NO. 7，p. 441 (July 1976).
(8) 沢，小野，熊谷；"レンズ列光ビーム導波系の円形曲り部の一構成法"，信学論 (C)，56-C，NO. 7，p. 431 (昭 48-07).
(9) 小野，沢；"反射形ビーム導波系の円形曲り部の新しい構成法について"，信学論 (B)，57-B，NO. 10，p. 649 (昭 49-10).

# 超音波制御光ファイバ結合器

吉田泰三，増田正光，小山次郎
（大阪大学 工学部 電子工学科）

1980年2月1日
輻射科学研究会

# 超音波制御光ファイバ結合器
## （ACFC）
## ACOUSTOOPTICALLY CONTROLLED FIBER COUPLER

吉田泰三　増田正光　小山次郎
（大阪大学 工学部 電子工学科）

## 1. まえがき

現在までに実現されている機能的光デバイスは$LiNbO_3$を中心とする薄膜光導波路を用いて構成されており、これを実際の光通信に応用するときには、光ファイバとの高効率な結合が要求される。また、両者の断面形状の差異による結合損失は避けようがない。

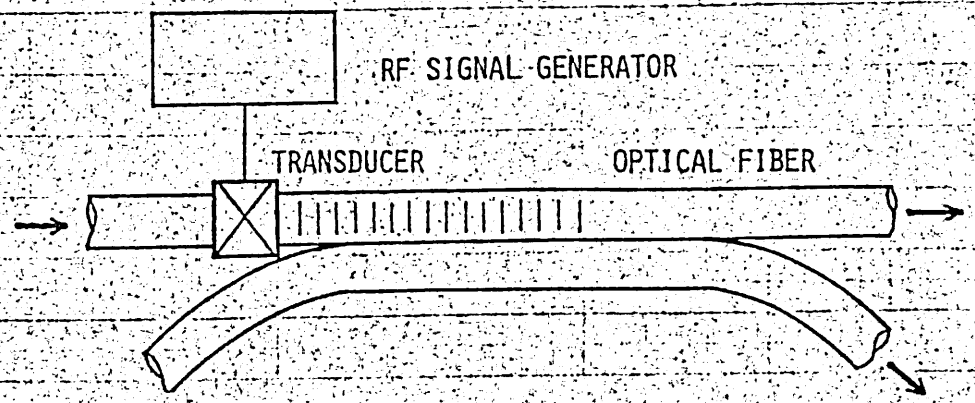
これに対して、光ファイバ自体に$LiNbO_3$と同等の機能性（分波、結合、フィルタリング）を付与することができれば、上述の光ファイバと機能的デバイスの結合の問題は自ずから解決される。

以上のような観点から、我々はすでに図1のような、光ファイバ自体に超音波を伝搬させ、光波を制御する機能的光ファイバデバイスを提案、報告している。[1],[2]

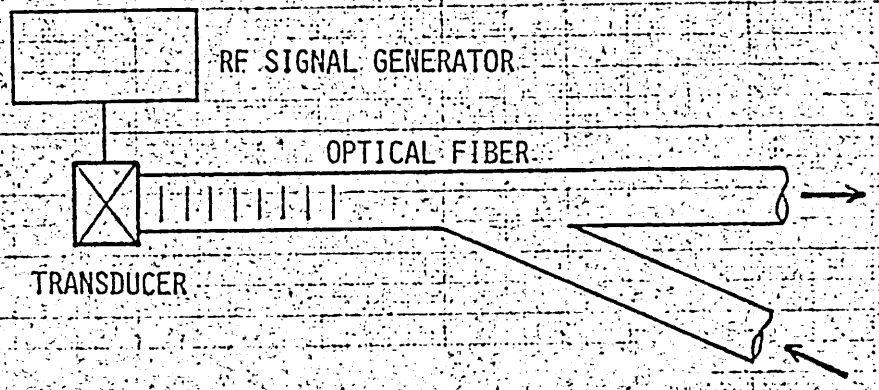
光ファイバ径は一般に数百μm以下であるから微少な高周波電力で光制御に十分な超音波を励振できる点でも有利である。しかし、超音波による光ファイバ

内屈折率変化の割合は$10^{-5}$程度であり、超音波と光波の伝搬方向が一致するような、ブラッグ条件を満足しない場合、超音波による光波の変化は累積せず、利用するに足る効果が起こらない。このような、コ・リニアな光波－超音波相互作用を利用するため、従来の光導波路で二，三提案がなされている。(3),(4)

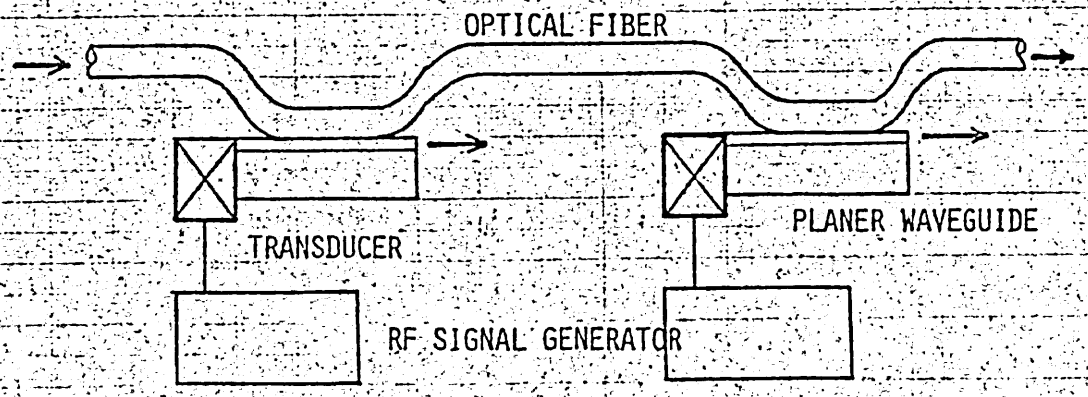
本稿では、二本の光ファイバを結合させ、その一方に超音波を伝搬させ、光結合を行なう超音波制御光ファイバ結合器（ACFC）の可能性について基礎的検討を行なったので報告する。




(a) 透過型トランスジューサによるもの




(b) 反射型トランスジューサによるもの




(c) 平板導波路との結合

(図1 機能的光ファイバデバイスの構成例)

## 2. 動作原理および諸特性

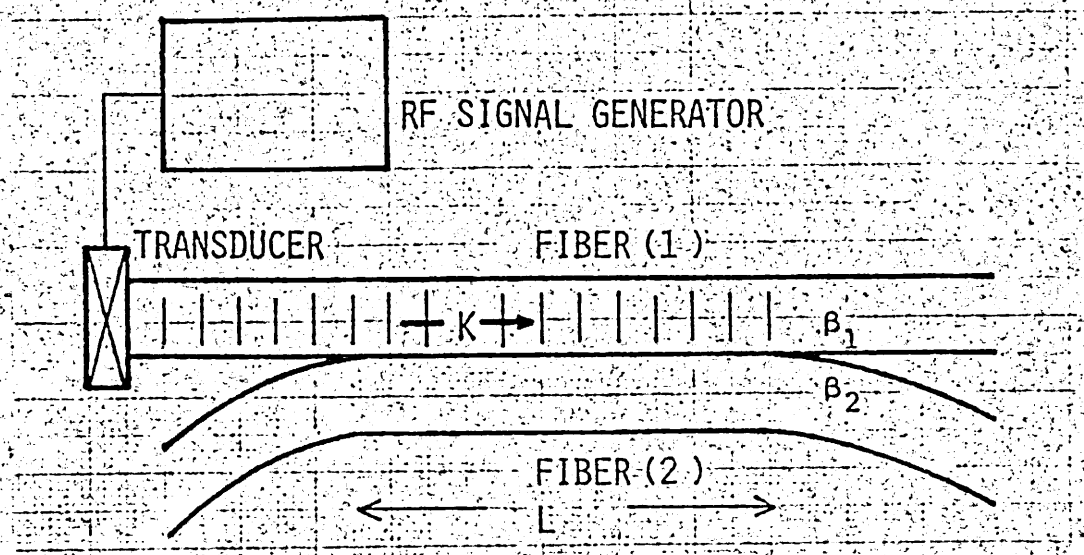
図2に示すACFCにおいて、ファイバI, II内の光波の伝搬定数$\beta_1$, $\beta_2$が異なる場合、両ファイバ間でのパワ移行は起こらない。しかし、ファイバIに励振された超音波（波長$\Lambda$）により結合部で伝搬定数

$$\beta = \beta_1 \pm K \qquad K = \frac{2\pi}{\Lambda} \qquad (*1)$$

の高調波が生ずる。
ファイバII内の光波の伝搬定数$\beta_2$が

$$\beta = \beta_2 \qquad (*2)$$

のとき、両ファイバ間の位相整合条件が得られ、ファイバI, II間でのパワ移行が起こる。

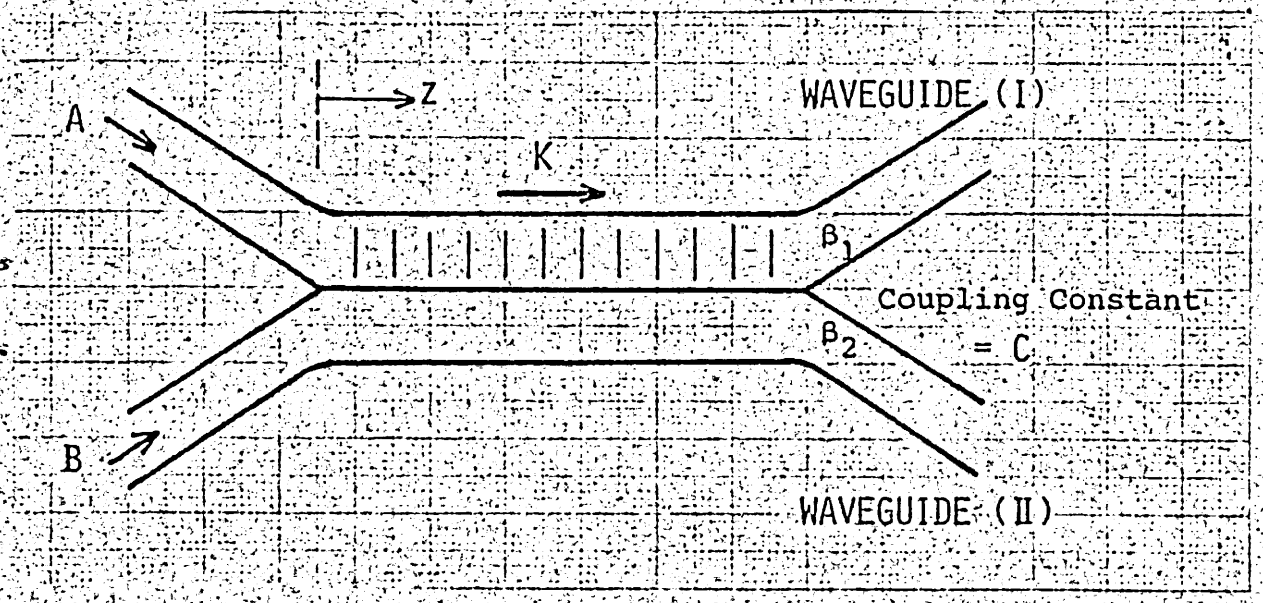



（図2 超音波制御光ファイバ結合器）

ファイバⅡからの出力光を変化させるには、超音波のパワ、または K すなわち周波数を変えればよい。また、マルチモードファイバを用いた場合には、その多数の光波の中から(*1),(*2)式を満足するモードのみをファイバⅡに移行させることができる。

本章では簡単のために、一方にグレーティングがある線路間結合について、光波結合理論を用いて解析し、さらに周波数特性、分波特性、モード選択性について計算を行ない、このデバイスの特性を明らかにした。

解析モデルとして図3に示すような、光結合器を考える。導波路Ⅰ,Ⅱの伝般定数を $\beta_1$, $\beta_2$、グレーティングが無い時の結合係数をC、導波路Ⅰ内にのみ静止したグレーティングが存在するとする。




(図3. 解析モデル)

## 2.1 結合理論

図3のW.G.Iのように導波路にグレーティングのある場合を考える。
平面波動方程式を

$$\frac{d^2U}{dz^2} = -k^2U \qquad (1)$$

とおいてグレーティングの影響を

$$k \fallingdotseq k_1\left(1 + \frac{\Delta n}{n}\sin Kz\right)$$
$$k_1 = n_1 k_0 \qquad (2)$$

とおく。これを(1)式に代入すれば、$2k \gg K$のとき、グレーティングが存在する場合の波動方程式は

$$\frac{dU}{dz} \fallingdotseq -jk_1\left(1 + \frac{\Delta n}{n}\sin Kz\right)U \qquad (3)$$

となる。
W.G.I, II を伝搬するパワの平方根をA, Bとすると次の結合方程式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dz} = -j(\beta_1 + \Delta\beta\sin Kz)A + jCB \\ \dfrac{dB}{dz} = -j\beta_2 B + jCA \\ \Delta\beta = \dfrac{\Delta n}{n}\beta_1 \end{cases} \qquad (4)$$

ここで

$$\begin{cases} A = \phi e^{-j\beta_0 z}, \quad B = \varphi e^{-j\beta_0 z} \\ \beta_0 = (\beta_1 + \beta_2)/2 \end{cases} \qquad (5)$$

とおけば

$$\begin{cases} \phi' = -j(\beta_d + \Delta\beta \sin Kz)\phi + jC\psi \\ \psi' = j\beta_d \psi + jC\phi \\ \beta_d = (\beta_1 - \beta_2)/2 \end{cases} \tag{6}$$

基本波 $\phi_0$, $\psi_0$ が $\exp(j\gamma z)$ で変化するとして

$$\begin{cases} \phi = \sum_m \phi_m e^{j\gamma z} e^{jmKz} \\ \psi = \sum_l \psi_l e^{j\gamma z} e^{jlKz} \end{cases} \tag{7}$$

$(m, l$ 整数$)$

とおき、$|m|, |l| \geq 2$ の成分は十分小さく無視できるとすると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \{(\gamma - K)^2 - \beta_d^2 - C^2\}\phi_{-1} = -j\frac{\Delta\beta}{2}(\gamma - \beta_d - K)\phi_0 \\ \{(\gamma + K)^2 - \beta_d^2 - C^2\}\phi_1 = j\frac{\Delta\beta}{2}(\gamma - \beta_d + K)\phi_0 \\ (\gamma - \beta_d)\psi_0 = C\phi_0 \\ (\gamma - \beta_d - K)\psi_{-1} = C\phi_{-1} \\ (\gamma - \beta_d + K)\psi_1 = C\phi_1 \end{cases} \tag{8}$$

(8) 式から位相定数 $\gamma$ の決定式が得られ、グレーティングがない場合は

$$\gamma^2 = \beta_d^2 + C^2 \tag{9}$$

となるが、グレーティングがあるために実際の $\gamma$ はそれから僅かにずれるはずである。

グレーティングがあるためのγ²のずれをδ²とすれば

$$\delta^2 = \gamma^2 - \beta_d^2 - C^2 \qquad (10)$$

$$(\delta^2 \ll \beta_d^2 + C^2)$$

これより、δが最大になる条件は次のようになる。

$$K = Z\sqrt{\beta_d^2 + C^2} \doteqdot 2p \qquad (11)$$

このとき、

$$\delta^2 = \frac{1}{Z}\left(\frac{\Delta\beta}{Z}\right)^2 \pm \frac{\Delta\beta C}{Z} \doteqdot \frac{\Delta\beta C}{Z}$$

$$\gamma = \pm\left(p + \frac{\delta^2}{2p}\right) \qquad (12)$$

つぎに、Z＝0におけるW.G.I, IIの光波振幅をそれぞれ、$\phi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ とすると、$\Delta\beta$, $\delta^2 \ll \beta_d$のとき、W.G.Iの光波振幅は同様の考察により次のように書ける。

$$\phi(z) = j\varphi_0 \frac{C}{\beta_d} \cos\Delta Z \cdot \sin pZ$$

$$- j\varphi_0 e^{-jpZ} \sin\Delta Z \qquad (13)$$

$$- j\varphi_0 \left(\frac{C}{2\beta_d}\right)^2 e^{jpZ} \sin\Delta Z$$

$$\Delta = \delta^2 / 2p$$

$C \ll \beta_d$ のとき

$$|\phi| \doteqdot \varphi_0 \sin\left(\frac{\Delta\beta \cdot C}{4\beta_d}\right) Z$$

$$= \varphi_0 \sin\left(\frac{\Delta\beta \cdot C}{2K}\right) Z \qquad (14)$$

$$K = 2p \fallingdotseq 2\beta_d$$

となる。(13)式を見るとわかるように、右辺第一項は二つの導波路が単に結合しているために生ずる項であり、$\Delta$ $(=\Delta\beta C/2K)$ が小さいときはこの項のみが残る。しかし、結合係数に比して両線路の位相定数差 $(=2\beta_d)$ が十分大きいときは、この項は無視できる。第二項と第三項は超音波グレーティングによって現われる項であるが、第三項は第一、第二項に比して十分小さく、常に無視できる。第二項は超音波によるグレーティングのある導波路の−1次高調波，光波周波数 $(\omega-\Omega)$ の位相定数が、他方の導波路の位相定数 $\beta_2$ と一致することで生ずる光波出力で

$$\Delta \cdot Z = (\Delta\beta C/2K) \cdot Z = \frac{\pi}{2} \qquad (15)$$

のとき、最大になる。

以上のように、$(\Delta\beta \cdot C/2K)$ が十分大きくない場合、または $C/2\beta_d \lesssim 1$ の場合の近似式としては(13)式で、$C/2\beta_d \ll 1$ が十分満たされる場合は(14)式で超音波による結合現象を見ることができる。

## 2.2 周波数特性，分波特性

前節の考察から

$$\beta_1 - K \cong \beta_2$$
$$\beta_1 - \beta_2 - K = 2\beta_d' \qquad (16)$$

のとき、W.G I 内の-1次高調波と W.G. II 内の基本波のみが強く結合する。したがって結合方程式は次のように書ける。

$$\frac{d\phi}{dz} = -j\beta_d'\phi - jCa\varphi$$
$$\frac{d\varphi}{dz} = -jCa\phi + j\beta_d'\varphi \qquad (17)$$
$$a = \frac{\Delta n}{n}\frac{\Lambda}{2\lambda} \quad (\Lambda: 超音波の波長)$$

$\phi$, $\varphi$ が $\exp(-j\beta_d z)$ で変化しているとすると

$$\beta_b^2 = \beta_d'^2 + (Ca)^2 \qquad (18)$$

となり、$z=0$ で $\phi=0$, $\varphi=\varphi_0$ とすれば

$$\phi = -j\frac{Ca}{\beta_b}\varphi_0 \sin\beta_b z$$
$$\varphi = \varphi_0\cos\beta_b z + j\frac{\beta_d'}{\beta_b}\varphi_0 \sin\beta_b z \qquad (19)$$

となり、前節(14)式と同じ形の式が得られる。

(16)式の $\beta_d' = 0$ を満足する超音波の波数 $K$ を $K_0$ とすると、$K$ が $K_0$ から $\Delta K$ だけずれた場合、すなわち $K = K_0 + \Delta K$ のとき、結合出力 $|\phi|$ は

$$|\phi| = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1+(\Delta K/2Ca)^2}} \sin\left[Cal\sqrt{1+(\Delta K/2Ca)^2}\right]$$

$$Cal = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{l}{L}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda}\cdot\frac{\Delta n}{n} \qquad (20)$$

$$C = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{L}$$

$l$：結合長
$L$：完全結合長

また、光の波長 $\lambda$ が $\lambda_0$ から $\Delta\lambda$ だけずれたとすると、同様にして

$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ のとき、結合出力 $|\phi|$ は

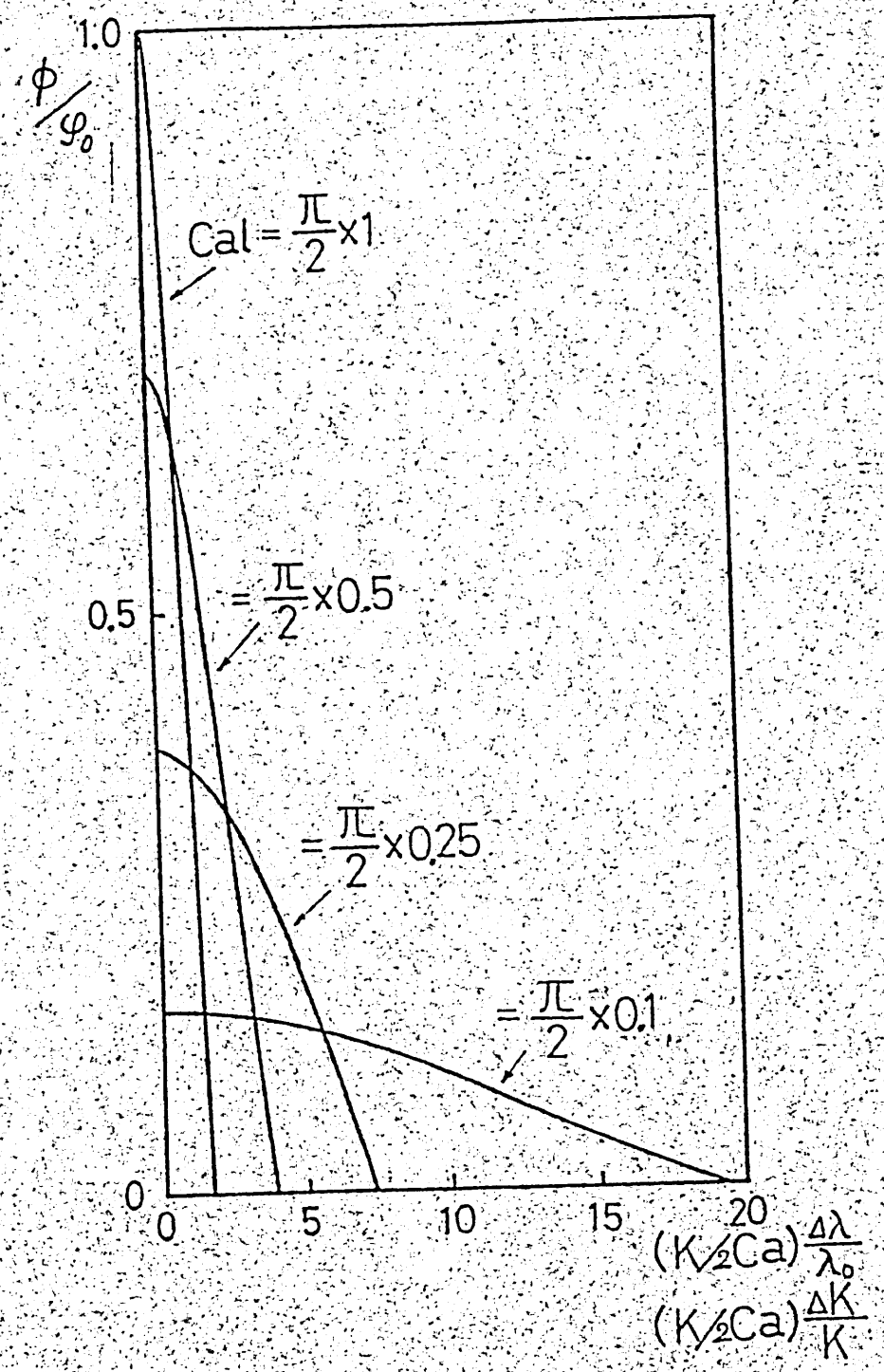
$$|\phi| = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1+(K\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}/2Ca)^2}} \sin\left[Cal\sqrt{1+(K\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}/2Ca)^2}\right] \qquad (21)$$

となる。

$|\phi|/\varphi_0$ と $\Delta\lambda/\lambda_0$, $\Delta K/K_0$ との関係を図4に示す。各定数として、$Cal = \pi/2$ となるようにたとえば、

$$\begin{cases} \lambda = 0.45\ \mu m \ (SiO_2 \text{ 中の He-Ne レーザ光}) \\ \Lambda = 150\ \mu m \ (f = 40\ MHz) \\ L = 0.1\ cm, \quad l = 12\ cm \\ \Delta n/n = 7 \times 10^{-4} \end{cases}$$

を用いると、図4より $K$ あるいは $\lambda$ がわずか0.25%ずれることによって結合効率が40%減ずることがわかる。




（図4. 周波数特性および分波特性）

## 2.3 モード選択性

$\beta_1 - \beta_2$ が(14)式を満足する $\beta_d$ から $\Delta\beta_d$ だけずれているとすると、

$$Cal\sqrt{1+\left(\frac{\Delta\beta_d}{Ca}\right)^2} = \pi \qquad (22)$$

で結合出力 $|\phi| = 0$ となる。

$$(\Delta\beta_d)^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - (Ca)^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \{1-(Cal/\pi)^2\}$$

$$\frac{\Delta\beta_d}{\beta} \doteqdot \frac{\lambda}{2l}\{1-(Cal/\pi)^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad (23)$$

$Cal \leqq \frac{\pi}{2}$ では $\{1-(Cal/\pi)^2\}^{\frac{1}{2}} \cong 1$ とみなせるから、$Cal$ の大小にかかわらず

$$\frac{\Delta\beta_d}{\beta} = \frac{\lambda}{2l} \qquad (24)$$

のモード選択性をもつことになる。これは $\lambda$ と $l$ のみで決まる量で前例の $l = 12\,cm$、$\lambda = 0.45\,\mu m$ を用いると、

$$\frac{\Delta\beta_d}{\beta} = 1.9 \times 10^{-6}$$

となる。

次に、一般のマルチモードファイバにおいての、同一位相定数をもつモード群間の位相定数差を考える。(5)

$EH_{l,m}$, $TE_{0m}$ モードに対して

$$N = l + 2m - 1 \quad (N = 0, 1, 2 \cdots)$$

で表わされるモード番号 $N$ を用いると、そのモード群の位相定数はほゞ等しく

$$\beta_N \cong n_1 k_0 \left[ 1 - \Delta \left( \frac{N+1}{N_{max}+1} \right)^2 \right] \qquad (25)$$

$$\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$$

となることが分っている。したがってモード群間の位相定数差は

$$\Delta\beta_N \cong \beta_{N-1} - \beta_N$$

$$= n_1 k_0 \frac{2N+1}{(N_{max}+1)^2}$$

$$\cong \beta \cdot \frac{2N+1}{(N_{max}+1)^2}$$

$$\therefore \frac{\Delta\beta_N}{\beta} = \frac{2N+1}{(N_{max}+1)^2} \quad (N = 1, 2, 3 \cdots) \qquad (26)$$

SI型ファイバでは

$$N_{max} + 1 = 4 n_1 \sqrt{2\Delta} \cdot a / \lambda_0 \qquad (27)$$

であり、$a = 30\,\mu m$, $n_1 = 1.45$, $\lambda_0 = 0.633\,\mu m$, $\Delta = .007$ を用いると、(26) (27) 式より

$$2.9 \times 10^{-3} \leq \frac{\Delta\beta_N}{\beta} \leq 6.4 \times 10^{-2}$$

この数値はACFCのモード選択性より$10^3$〜$10^2$程度大きい。したがって、マルチモードファイバを用いたとしても、複数のモード群と結合することはなく、単一のモード群と選択的に結合する性質を持っていることが分る。

さらに、マルチモードファイバを用いたACFCにおける結合量を考えるために、光ファイバ中の同一位相定数をもつモード群の伝送するパワ比を次に検討する。

## 2.4 多モードファイバにおけるモード当りの伝送パワ

光ファイバ中の全モード数$M$は次式で与えられる。

$$M = \left(V/(\pi/2)\right)^2/2 = \frac{(N_{max}+1)^2}{2} \qquad (28)$$

前節で定義した$N$番目のモード群中に含まれるモード数、$(l, m)$の組は$(N/2)+1$である。
よって、全伝送パワ$P_0$に対する、$N$番目のモード群が伝送するパワ$P_N$の比は

$$\frac{P_N}{P_0} = \frac{\frac{N}{2}+1}{M} \qquad (29)$$

$$= \frac{N+2}{(N_{max}+1)^2}$$

前節の数値例を用いると

$$\frac{P_N}{P_0} = 1 \times 10^{-3} \sim 1.9 \times 10^{-2}$$

以上の数値は、全モードに平等にパワが分配されていると仮定したものであるが、しかしこれは励起条件等によってかなり任意性のあるものである。(14)式において $\beta_\alpha$ が小さい程有利である点、また低次モードの方が伝搬中での損失が小さいことを考えると、マルチモードファイバを使用する光通信系の中では、低次モードとの結合を利用した分岐，結合デバイスを考えることが適切であろう。

また、デバイス構成上の困難は増すであろうが、単一モード光ファイバまたは集束型光ファイバを用いてこのデバイスを実現する方向がより望ましいと考えられる。

# 3. 単一のファイバによる光スイッチング

前章で述べた二本の光ファイバからなるACFCは、実際にデバイスを構成する上において種々の問題がある。なかでも、特に本質的であると思われるものは

(i) 極めて細い光ファイバに超音波を励起伝搬させる技術の確立。

(ii) 光ファイバ同士の極めて強い結合の実現。

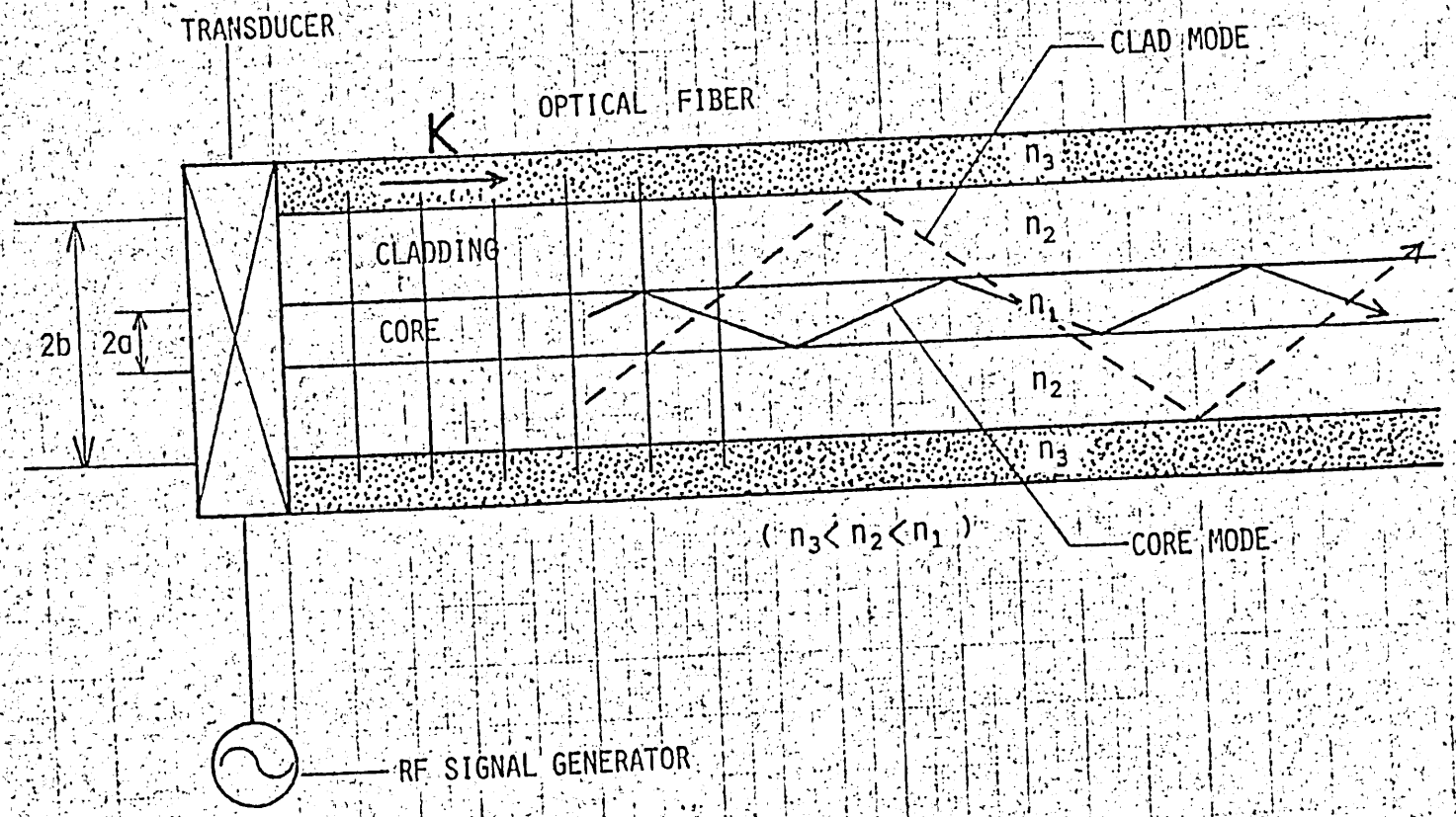
である。そこで、こゝに到るまでに本提案を実証し、またACFCとしても利用できる構成を考えた。すなわち、一本のファイバ中にはコアモードとクラッドモードが存在し、超音波を用いて相互の結合を制御しようという構成である。一例を図5に示す。この方法によれば、

(i) クラッド部も含めた太いファイバへの超音波の励起伝搬を可能にすればよい。

(ii) 両モード間の結合はかなり強くできる。

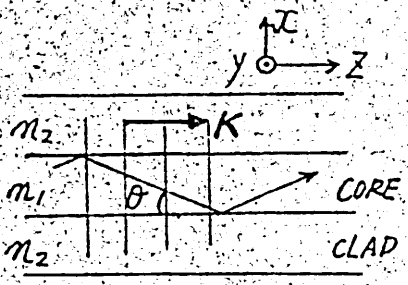
ことになり、問題はかなり解決され、またクラッドモード，コアモードの結合を制御できれば、それをそのまゝ機能的な分岐、結合デバイスに適用することができる。

本章では一本のファイバ中でのコアモードからクラッドモードへの変換について検討し、これを利用した光変調器について述べることにする。




（図5. 超音波による、コアモードとクラッドモードの結合）

## 3.1 超音波によるコアモードの高調波発生




(図6)

図6において、超音波による屈折率変化を

$$n(z) = n_1 + \Delta n \sin Kz$$

また、界分布を

$$\begin{cases} U = \sum_m U_m(z)\, e^{-jk_m \cdot r} \\ k_{m\cdot z} = n_1 k \cos\theta + mK \\ k_{m\cdot x} = n_1 k \sin\theta \end{cases} \qquad (1)$$

とする。

$$\nabla^2 U + n^2(z) k^2 U = 0$$

より $\dfrac{d^2 U_m}{dz^2} \cong 0$ , $mK \ll n_1 k$

を考慮すると、次式を得る。

$$\frac{dU_m}{dz} + \frac{n_1 k \Delta n}{2}\left(U_{m-1} - U_{m+1}\right) \cong jmKU_m \qquad (2)$$

$U_m(z)$ を次のようにおき、$|m| \geq 2$ を無視すると、界分布 $U$ は(4)式のように与えられる。

$$U_m = \exp\left[j\frac{mK}{2\cos\theta} z\right] J_m\left[2\frac{\Delta n k}{K} \sin\frac{K}{2\cos\theta} z\right] \qquad (3)$$

$$U \fallingdotseq e^{-jkn_1\cos\theta z} - j\frac{\Delta n k}{K} e^{-jkn_1\cos\theta z}$$
$$+ j\frac{\Delta n k}{K} e^{-j(n_1 k\cos\theta - K)z}$$
$$+ j\frac{\Delta n k}{K} e^{-j(n_1 k\cos\theta + K)z} \qquad (4)$$

すなわち、$\beta$ なる位相定数をもつファイバ中の光線に超音波が作用することによって、$\beta - K$, $\beta + K$ なる位相定数をもつ、$-1$ 次および $+1$ 次高調波が発生する。それぞれの成分は共に、基本波の

$$j\frac{\Delta n k}{K}$$

倍である。この高調波を介して、コアモードとクラッドモードが結合する。

## 3.2 コアモードとクラッドモードとの結合

コアモードおよびクラッドモードのパワの平方根を $a_1$, $a_2$ とすると、結合方程式は[6]

$$\begin{cases} \dfrac{da_1}{dz} = -j\beta_1 a_1 + C_{12} a_2 e^{-j(\beta_1-\beta_2)z} \\ \dfrac{da_2}{dz} = -j\beta_2 a_2 + C_{21} a_1 e^{-j(\beta_2-\beta_1)z} \end{cases} \qquad (5)$$

$$\beta_1 = n_1 k\cos\theta \quad , \quad \beta_1 - \beta_2 = K$$

コアモードとクラッドモードが結合するのは、コア部においてのみであるから

$$C_{12} = C_{21} = j\frac{\Delta n k}{K}\cdot\frac{\tan\theta}{2a} \qquad (6)$$

$a_1$, $a_2$ が結合の結果 $e^{j\delta z}$ で変化するとし、

$$\begin{cases} a_1 = A_1 e^{j\delta z}\cdot e^{-j\beta_1 z} \\ a_2 = A_2 e^{j\delta z}\cdot e^{-j\beta_2 z} \end{cases} \qquad (7)$$

として $\delta$ を求めると、

$$\delta = \pm\frac{\Delta n k}{K}\cdot\frac{\tan\theta}{2a} \qquad (8)$$

となる。コアモード，クラッドモードの光波振巾をそれぞれ

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 e^{j\delta z} + \phi_2 e^{-j\delta z} \\ \varphi = \varphi_1 e^{j\delta z} + \varphi_2 e^{-j\delta z} \end{cases} \qquad (9)$$

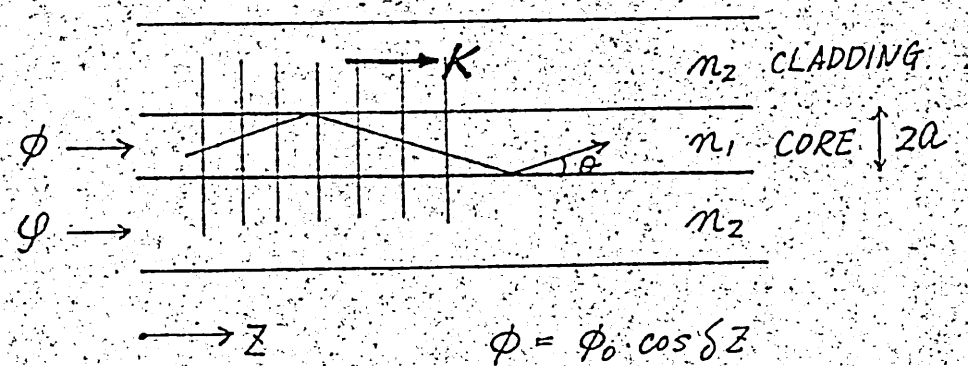
とし、$z=0$ で $\phi=\phi_0$ ; $\varphi=0$ という条件を与えると

$$\begin{cases} \phi = \phi_0 \cos\delta z \\ \varphi = j\phi_0 \sin\delta z \end{cases} \qquad (10)$$

が求まる。

完全結合長 $L$ は

$$L = \frac{\pi}{2\delta} = \frac{\pi\cdot\lambda_1\cdot a}{\Delta n\cdot\lambda\cdot\tan\theta} \qquad (11)$$




$$\phi = \phi_0 \cos \delta Z$$
$$\varphi = j\phi_0 \sin \delta Z$$

（図7. 解析モデル）

で与えられ、一般的な数値から計算すると、

$\lambda_1 = 0.44\,\mu m$, $\Lambda = 100\,\mu m$, $\theta = 5°$

$a = 30\,\mu m$, $\Delta n = 10^{-4}$ のとき

$$L = 4.7\ cm$$

であるから、$10^{-4}$ 程度の屈折率変化を起こしうる超音波を数cm伝搬させることができれば、十分実現可能であることが分る。

しかし、現在の段階では $\Delta n \simeq 10^{-5}$ が限度であり、超音波伝搬距離を $l = 5\ cm$ 程度であるから、位相変化 $\delta l$ は 0.17 rad くらいである。(10)式から予想されるパワ変化は 2〜17% であるから、この場合でも十分観察可能であると思われる。

## 4. あとがき

光ファイバ自体に能動的機能をもたせる方法として、超音波制御光ファイバ結合器（ACFC）を提案、検討しその動作原理，諸特性を明らかにした。この原理を用いれば、単一光波の変調および分岐素子はもちろんとして、多数の光波から所定の波を取り出すモード選択素子、またはフィルタ型分岐，結合素子の実現も有望である。

また、一本のファイバのみを利用する型のACFCでの検討では、クラッドモードのみを効率よく取り出すことができれば、比較的容易にこの種のデバイスが構成できることが分った。

なお、ファイバの断面寸法が超音波の波長と同程度となる場合には、超音波の諸特性がバルク中でのそれらとはかなり差があると考えられ、このデバイスの研究の過程でこの問題も明らかにしていく必要がある。

今後、実験結果との比較検討を行ない、この解析の妥当性、あるいは、さらに解析に付け加えるべき条件等を明らかにしていくつもりである。


## 謝辞

これまでの研究に対し有益な御討議、御援助を戴いた、(株)リコー瀬川秀夫氏，本学西原浩助教授，栖原敏明助手に深く感謝の意を表す。また、基礎実験

等に御協力願った、本研究室 藤原 隆君、および光ファイバを御提供下さっている、(株)富士通研究所、赤松室長をはじめ諸氏に深く感謝する。

## 参考文献

1) 瀬川, 増田, 吉田, 小山：昭54春季応物予稿 30p-W-8 (1979).
2) 吉田, 増田, 小山, 瀬川：信学会光量エレ研究会資料 OQE 79-29 (1979・6).
3) 佐々木, 御子柴：光導波エレ研才2回総合シンポジウム (1978. 11. 4).
4) 近藤, 宮崎, 赤尾：信学会光量エレ研究会資料 OQE77-9 (1977).
5) 末松, 伊賀："光ファイバ通信入門" オーム社 (1976).
6) 小山, 西原："光波電子工学" コロナ社 (1978).

# 多層スパッタガラス膜の屈折率差測定法

岸岡 清　　橋本正弘
（大阪電気通信大学・工学部）

輻射科学研究会資料

昭和55年2月1日
於 中央電気クラブ

て異った依存性を持つことを実測と計算によって明らかにし，それを利用した図的な反復法によって，屈折率差と光学的膜厚を同時に求められることを示す。さらに，実際にスパッタされたガラス膜に本方法を適用した例も合わせて示している。

## 2. 周期状薄膜の製作と反射特性の測定

バイコールガラス（屈折率1.458，20×40×3 mm）の基板上にパイレックスガラス（屈折率1.474）と $SiO_2$（屈折率1.459）を交互にRFスパッタして4周期8層の周期状多層薄膜を作製した。RFスパッタはいづれも $3\times10^{-3}$ Torr のアルゴンガス中で行いRF－Powerはそれぞれ150 W及び250 W

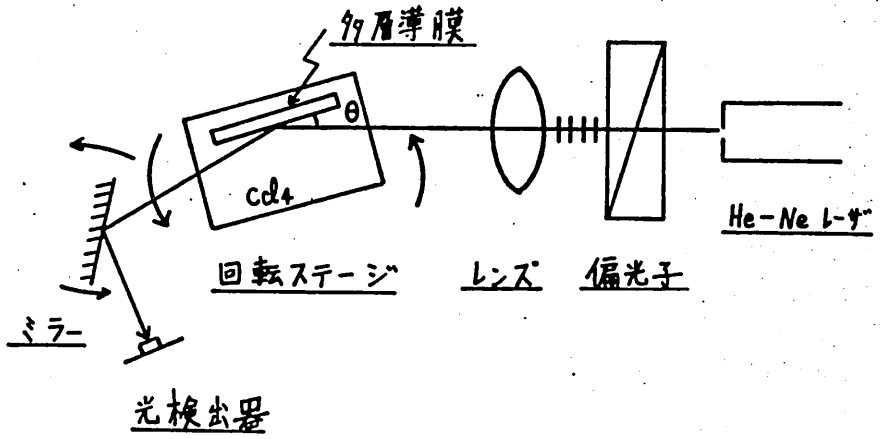



図1　反射特性測定の装置構成

とした。膜厚はパイレックスガラス層及び$SiO_2$層で共に等しく作製され，その測定は繰返し反射干渉法（multiple beam interferometry）[4]によって行った。この際スパッタ膜上にDCスパッタによってAl膜を付加して，干渉縞の読み取り誤差の低減を図ったがスパッタ膜のステップのだれによる測定誤差が生じ，測定全体を通しての誤差は5%程度とかなり悪化した。しかし，後述の様に本方法においては，屈折率差及び光学的膜厚を求める限りこの程度の誤差は問題とならない。

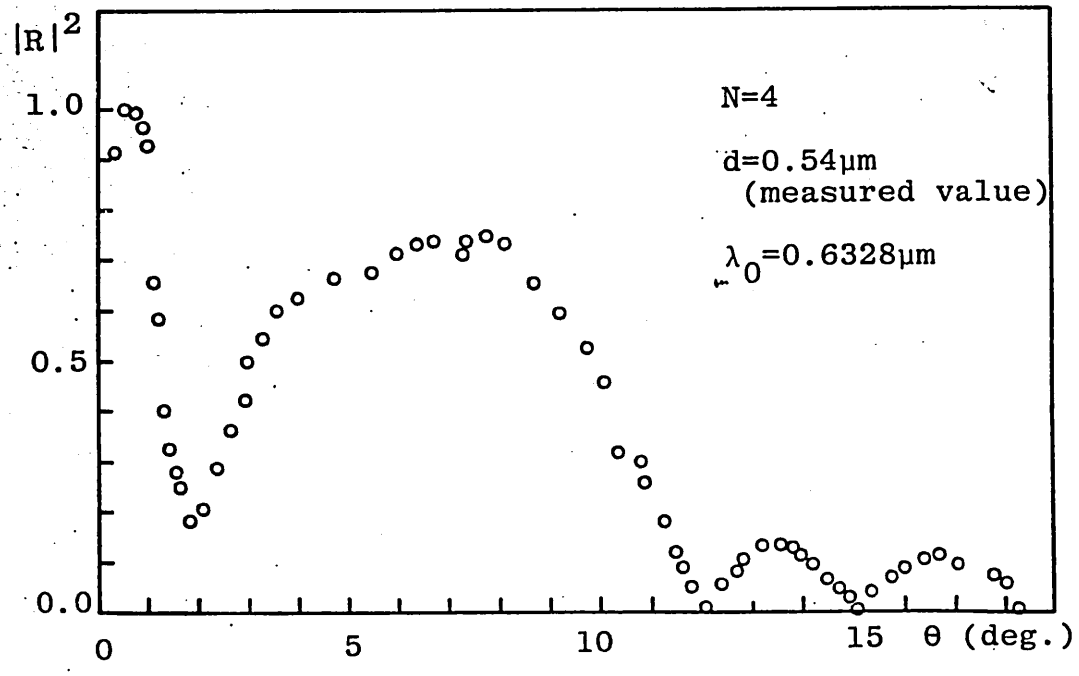



図2　周期状多層薄膜の反射特性の測定値

作製された多層膜の反射特性は図1に示す装置構成で測定を行った。ここで，空気とガラスの境界面での反射の影響を除き，周期構造による反射特性のみが観測できる様に，$SiO_2$とほぼ同じ屈折率（1.46，25°C）をもつ四塩化炭素（$CCl_4$）の液体に資料を浸して測定を行った。図2に得られた反射の角度依存特性を示す。ここで，Bragg反射が比較的小さな角度（θ～8°）で起っており，これに伴うメインローブの幅が広くなるなどBragg反射が入射角の大きな領域で起る場合と異った特性が見られる。

## 3. 周期状多層薄膜の反射の角度依存性と屈折率推定の概要

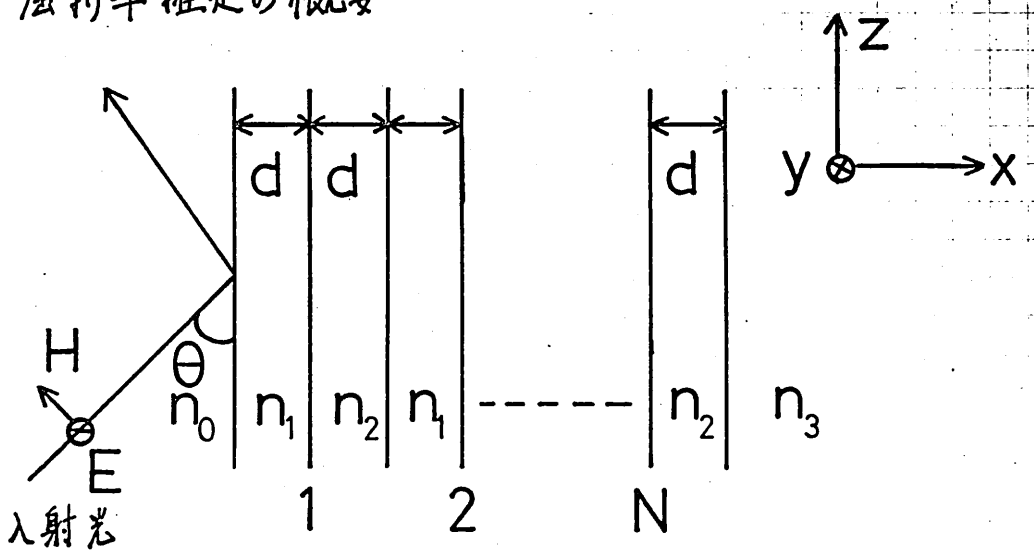



図3　周期状多層薄膜

ここでは，周期状多層薄膜の入射角が小さい領域での反射特性の特徴を調べると共に，それを利用した構造パラメータ推定の概要を述べる。

図3に示す様な屈折率$n_3$の基板上に作られた屈折率$n_1$及び$n_2$の媒質よりなる厚さ$d$の周期状多層薄膜を考える．光は境界面と$\theta$の角度で入射している。簡単にするために，入射光はz方向には一様な平面波であるとし，同方向に偏光しているものとする。この時，電界に対する反射係数は，

$$R(\theta)=\frac{(Q_1/Q_2-Q_2/Q_1)\,e^{-jQ_1d}\,\sin Q_2d\,\sin N\gamma}{2\left[\left\{\sin Q_1d\cos Q_2d+\frac{1}{2}(Q_1/Q_2+Q_2/Q_1)\cos Q_1d\sin Q_2d\right\}\sin N\gamma-j\sin\gamma\cos N\gamma\right]}$$

但し，$Q_1=k_0n_1\sin\theta$，$Q_2=k_0n_1\sqrt{\frac{n_2^2-n_1^2}{n_1^2}+\sin^2\theta}$ (1)

$k_0=2\pi/\lambda_0$ ，$\lambda_0$：自由空間波長

と表わされる。(付) この導出に当っては，実験を想定し，煩雑さを避けるために$n_0=n_3=n_1$ ($n_2>n_1$) とした。また，$\gamma$はブロッホ波の位相定数を表わし，

$$\cos\gamma=\cos(Q_1+Q_2)d-\frac{1}{2}\frac{(Q_1-Q_2)^2}{Q_1\,Q_2}\sin Q_1d\,\sin Q_2d \qquad (2)$$

で与えられる。式(1)より$R(\theta)$の零点の$\theta$は$N\gamma=m\pi$ ($m=1,2\cdots$) より求まるが，この条件は式(2)を用いると，

$$\cos(Q_1+Q_2)d - \frac{1}{2}\frac{(Q_1-Q_2)^2}{Q_1 Q_2}\sin Q_1 d \sin Q_2 d = \cos\frac{m}{N}\pi \quad (3)$$

$$(m = 1, \cdots N-1)$$

と表わせる。これは $n_0 \neq n_3 \neq n_1$ の一般的な場合にも成立し，零点は周期層の構造パラメータのみに依存することになる。入射角θが小さい領域での反射特性構造パラメータに対する依存性を調べるために，式（3）の左辺を光学的膜厚 $n_1 d$ 及び屈折率差 $\Delta n$ ($\equiv n_2 - n_1$) を変数に取ってθの関数として図4，5に示す。まず，$\Delta n$ の依存性を見るために図4に光学的膜厚を一定値（$n_1 = 1.459$，$d = 0.5\,\mu m$）として $\Delta n$ の値を変えた場合を示す。図には，式（3）の右辺 $\cos m\pi/N$（$m = 1, 2, 3$，$N = 4$）の値に対応する直線も同時に描かれており，曲線とこれらの直線の交点のθが反射係数 $R(\theta)$ の零点である。ここで，$\Delta n$ が変化するとθの小さな領域では曲線が大きく変化して，それに伴なって零点のθの値も大きく変わっている。さらに，$\Delta n = 0.025$ の場合について，光学的膜厚を一定値に保ったまま $n_1$ を変化させた曲線も同時に示す。図からわかる様に，光学的膜厚が一定であればθの小さい領域でも曲線はほとんど変化せず，零点の変化も僅かである。次に，図5には屈折率差を一定値（$\Delta n = 0.025$）として光学的膜厚を変えた場合を示してある。$n_1 d$ の変化によ

る曲線のずれはθの全領域で同程度であり，これによる零点の移動量もθが大きい領域と大差はない。従って，反射係数の零点は光学的膜厚$n_1d$と屈折率差$\Delta n$に依存し，$n_1d$による依存度はθの全領域で同程度であるのに対して$\Delta n$によるものはθが小さくなるほど急激に増大することがわかる。

この種の周期構造においては，θが大きい領域での反射が取り扱われることが多く[5],[6]その場合は上に述べた様にその

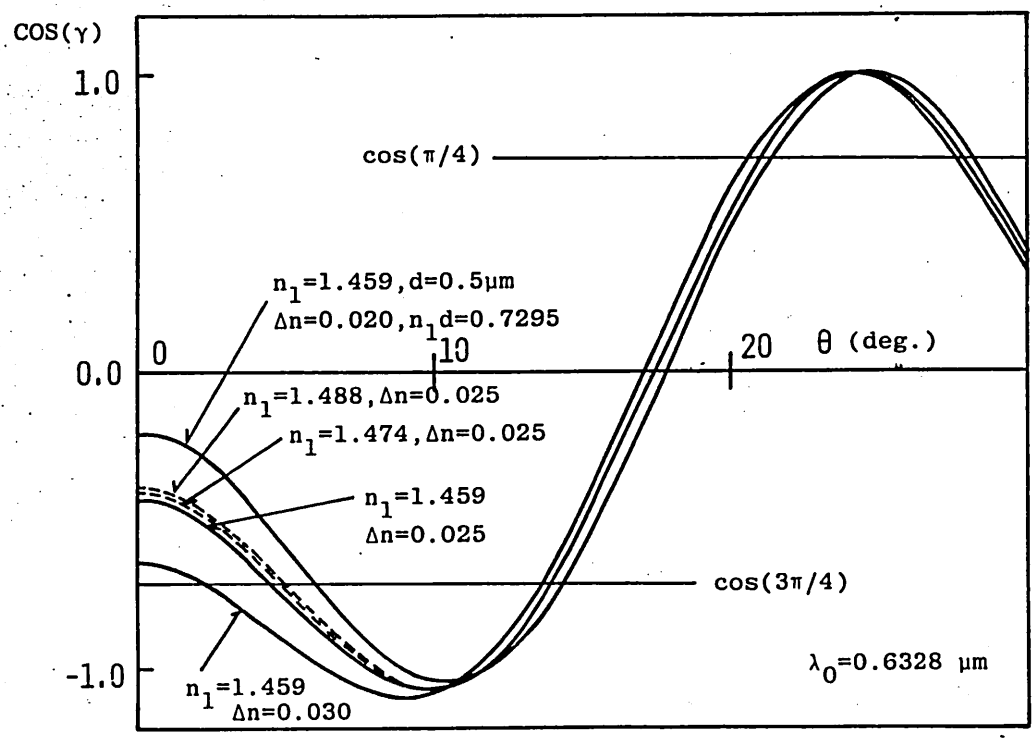



図4　Cosγの$\Delta n$依存性

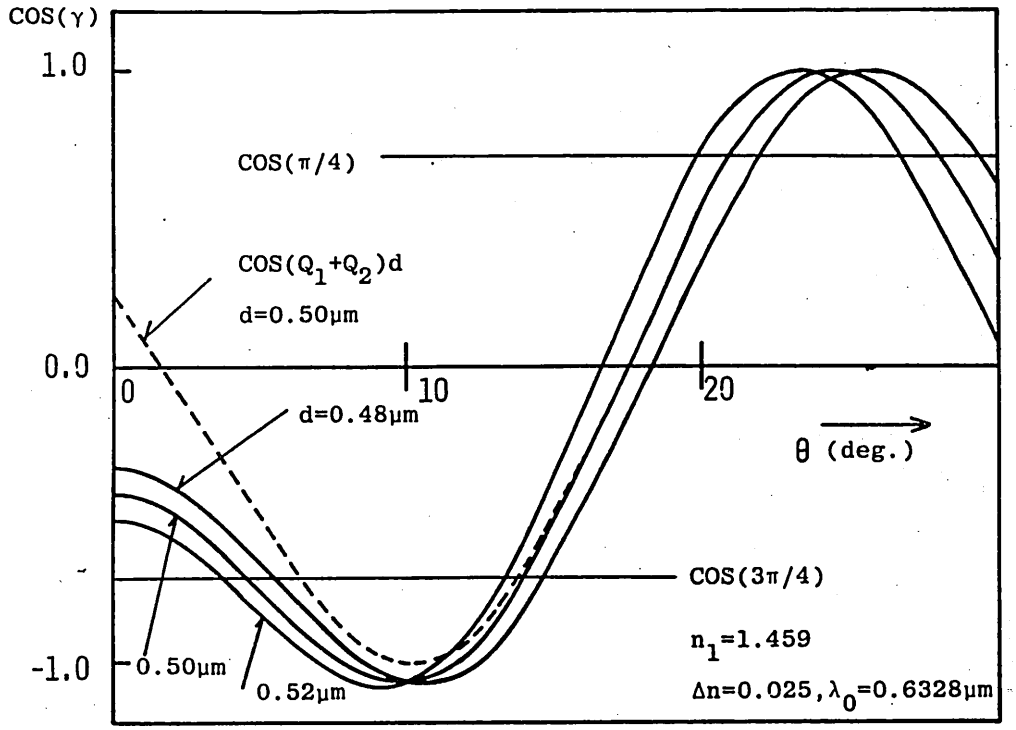



図5　Cos γの $n_1 d$ 依存性

特性は主に光学的膜厚のみに依存するものであった。このことは，この領域においては $\Delta n/n_1 \ll \sin^2\theta$ が成立するので，$(Q_1-Q_2)^2/Q_1Q_2 \ll 1$ となり式（3）は，

$$(Q_1+Q_2)d = \frac{m}{N}\pi \quad (m=1,2,3) \qquad (4)$$

で近似できると云うことに対応している。これは境界面間の多重反射を無視した結果と一致する。そこで，この近似が前

れる限界を知るために，図5に $\cos(Q_1+Q_2)d$ の曲線（破線）を同時に示す。図では，$\theta$ が10°以下では破線が大きくずれ近似が崩れていることを示している。この様に，$\Delta n/n_1$ が十分小さい場合においても上の近似が成立しない $\theta$ の領域では，

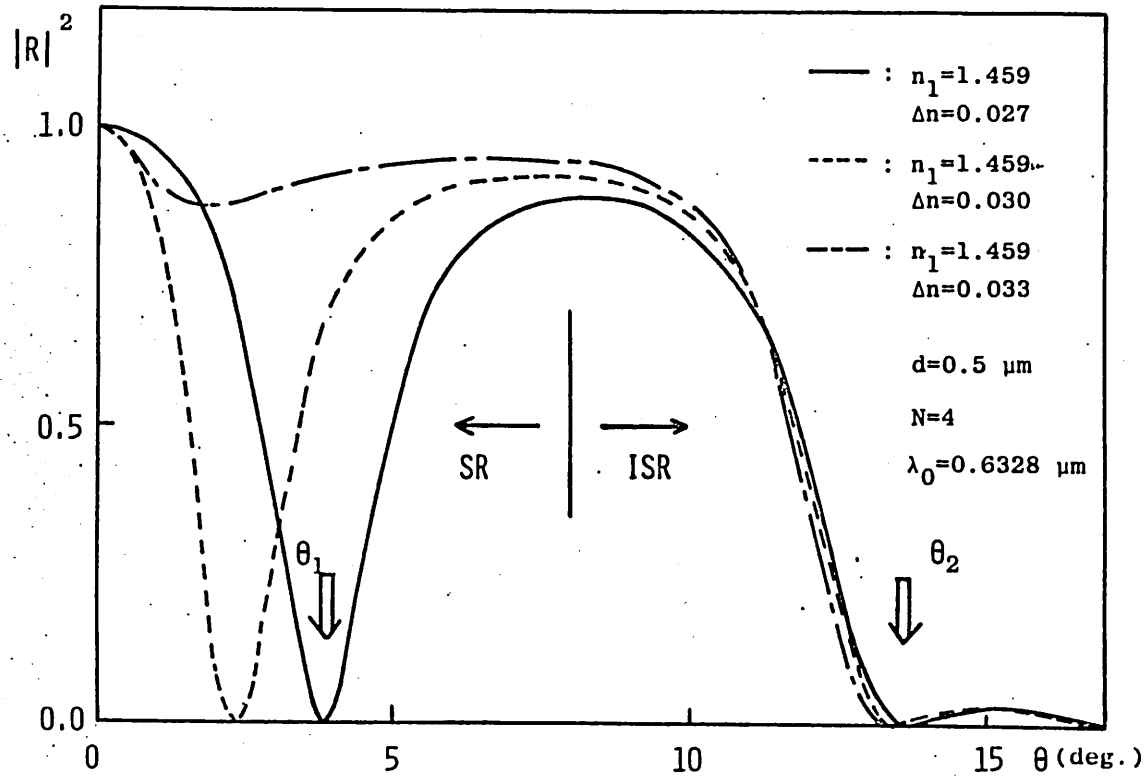



図6　反射特性の $\Delta n$ 依存性

$\theta_1$：$\Delta n$ の依存性が大きい領域SR(Sensitive region)にある零点、

$\theta_2$：$\Delta n$ の依存性が小さい領域ISR(insensitive region)にある零点、

特性は$n_1d$だけでなくて，$\Delta n$にも非常に大きく依存することになる。図6は式（1）を用いて得られた$\Delta n$による反射特性の変化を示したものである。Bragg反射の中心が8°付近に現われ，上に述べた様にそれより小さい領域にある零点$\theta_1$は$\Delta n$の変化に敏感であるが，それに反して大きい領域にある零点$\theta_2$の変化は僅かである。そこで，1つの零点が$\Delta n$の変化に敏感な領域（SR）にあり，もう1つの零点が主に$n_1d$のみに依存する領域（ISR）に来る様に構造パラメータを設定して多層膜を作り，それの反射光の零点の測定値とその計算値を対比させることにより光学的膜厚と屈折率差を推定することができる。

## 4. 屈折率差と光学的膜厚の推定法

前節で述べた条件で作られた多層薄膜からの反射光を測定して得られた2つの零点$\theta_1$及び$\theta_2$の内，$\theta_1$は$n_1d$より$\Delta n$に大きく依存するが，逆に$\theta_2$は$\Delta n$より$n_1d$の依存度が大きい。従って，$\theta_1$の値より$\Delta n$を，一方，$\theta_2$の値より$n_1d$を推定し，その推定値を交互に反復利用することにより順次正確な値にすることが出来る。この事を図的に行うために，$d$をパラメータにして$\Delta n$と$\theta_1$の関係を図7に示し，また，$\Delta n$をパラメ

ータにして $d$ と $\theta_2$ の関係を図8に示す。これらの関係は式(3)より Newton 法を用いて数値計算して得られたものである。

ここでは，実測できる構造パラメータは膜厚 $d$ だけであることを考慮してパラメータ $n_1 d$ のかわりに $n_1$ をスパッタ前の屈折率（$n_1 = 1.459$）とそれに対して1%及び2%増加した値に固定して $d$ をパラメータにして表わした。構造パラメータは第1節で述べた多層薄膜のものに基づくものである。

1例として，4周期の多層薄膜においてその膜厚の測定値が0.5 μm で $\theta_1$ と $\theta_2$ の測定値が4.67°及び13.75°である場合の反復の過程の初めの何つかの Step を図7，8に示し，その結果を表1にまとめて示す。また，比較のために，$n_1$ が1%増加したと仮定した場合の結果も同時に示す。ここで，$\Delta n$ 及び $n_1 d$ ともほぼ同一の値が得られている。この収束値の僅かな違いは図4の $n_1$ を変えた時の曲線のずれに起因するものである。本方法においては，$d$ が順次修正されて正しい $n_1 d$ の値に致するので，初期値となる $d$ の測定値にはそれほど厳しい精度を必要としない。しかし，推定された $n_1 d$ の値を $d$ の測定値で割って $n_1$ を決定すると，$d$ の測定誤差がそのまま $n_1$ の誤差となる。次に $\theta$ の測定の誤差の影響を調べるために $\theta_1$，$\theta_2$ の測定値に1%の誤差がある（$\theta_1 = 4.6°$，$\theta_2 = 13.9°$）と

した時，$d$ と $\Delta n$ の収束値としてそれぞれ，0.503μm，及び0.0246を得る。これらと表1の値を比べると $\Delta n$ と $n_1 d$ には $\theta$ の測定誤差の最大2倍程度の誤差を含むことがわかる。

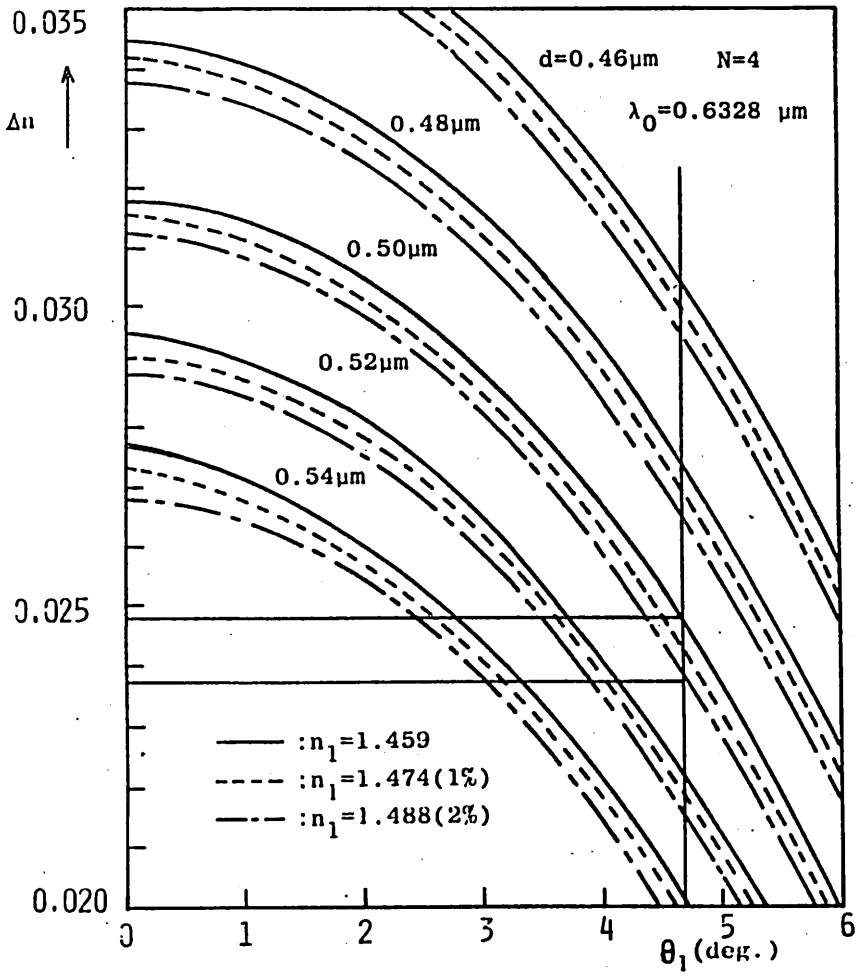



図7 $\theta_1$ と $\Delta n$ の関係

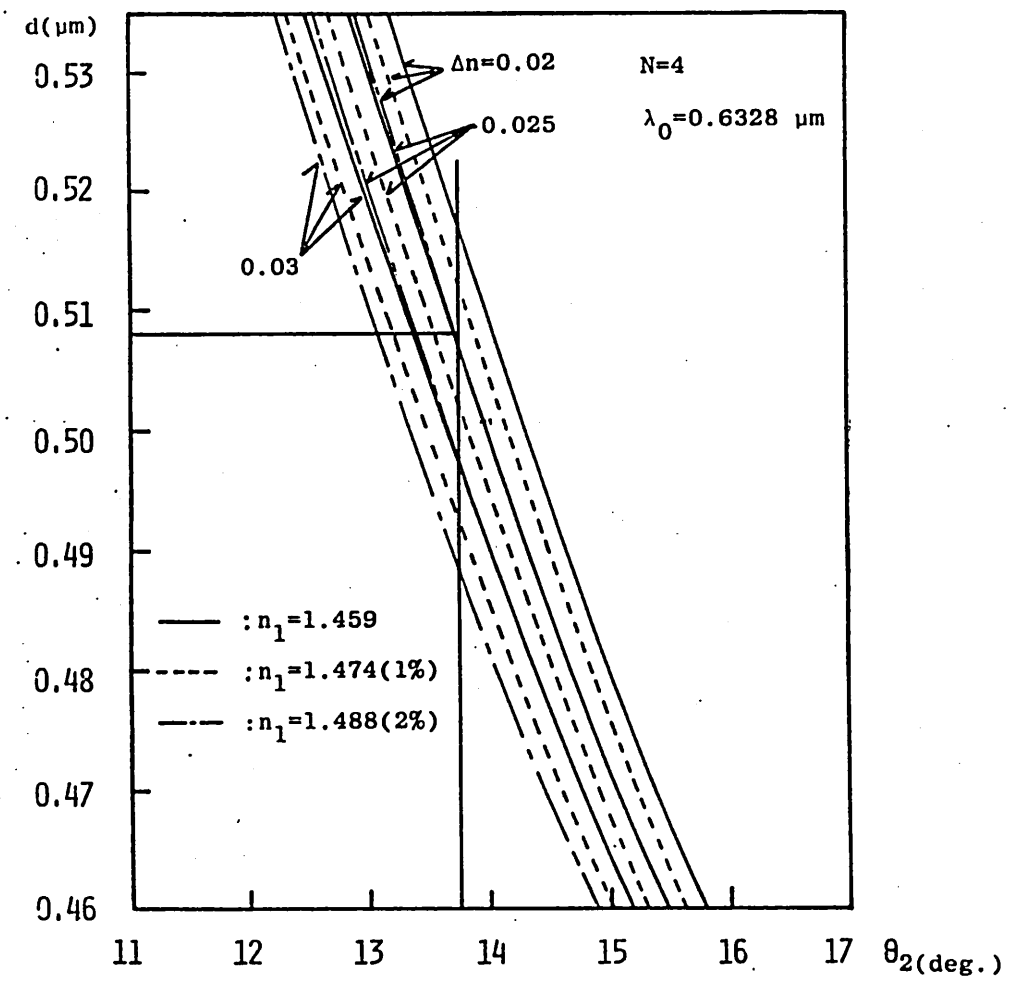



図8　$\theta_2$と$d$の関係

表1　反復による推定値

| 零点測定値 | $\theta_1=4.67°$ | | $\theta_2=13.75°$ | |
|---|---|---|---|---|
| 屈折率($n_1$) | $n_1=1.459$ | | $n_1=1.474$ | |
| 反復ステップ | d (μm) | Δn | d (μm) | Δn |
| 1 | 0.50 | 0.0248 | 0.50 | 0.024 |
| 2 | 0.5075 | 0.02375 | 0.5035 | 0.0239 |
| 3 | 0.5080 | 0.02380 | 0.5040 | 0.02385 |
| FINAL | d=0.5080<br>Δn=0.02380<br>$n_1d$=0.741172 | | d=0.504<br>Δn=0.02385<br>$n_1d$=0.7426893 | |

## 5. むすび

スパッタガラスの屈折率差と光学的膜厚を同時に求められる簡易な測定法を示した。本方法は極めてその屈折率差が小さな場合にも適用可能であり，反復の初期値となる膜厚の値にはそれほど高い精度は要求されない等の測定上非常に有利な点が挙げられる。一方，本方法における誤差の原因としては，反射特性の零点の測定誤差あるいは，多層膜作製時の同一膜厚の再現性の不完全さによる誤差が考えられるが，これらの問題については現在検討中である。

最后に，スパッタガラスの屈折率の変化に対する文献を御提供下さった三菱電機(株)中央研究所　武藤 勝俊氏に感謝致します。

# 文献


(1) T. Tamir ; "Integrated Optics", Springer-Verlag, New York, 1975, P.14.

(2) 西村, 下元, 笹野 ; "ガラス薄膜光導波路", 応物学会, 応用電子物性分科会研資料, 1973, 7.

(3) Alvin M. Goodman ; "Optical interference method for approximate determination of refractive index and thickness of transparent layer", Appl. Opt. Vol. 17, P. 2779 (1978).

(4) 麻蒔 立男 ; "薄膜作成の基礎", 日刊工業新聞社刊(昭52).

(5) L. Young and E.G. Criseal ; "Low-pass and High-pass Filters Consisting of Multilayer Dielectric stacks", IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-14, P.75 (1966).

(6) W. W. Rigrod ; "Multilayer Dielectric stacks of Coupled Filters", Appl. Opt. Vol. 10, No. 7 P. 1524 (1971).

# 付 録

## 周期状多層薄膜の反射係数の導出

電磁界成分の内境界条件に関与する $E_y$, $H_z$ に着目すると，一周期分の境界面と境界面の間は各層の伝搬を表わす四端子行列の積として，

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} \cos Q_1 d \cos Q_2 d - Z_2 Z_1^{-1} \sin Q_1 d \sin Q_2 d & -jZ_1 \sin Q_1 d \cos Q_2 d - jZ_2 \cos Q_1 d \sin Q_2 d \\ -jZ_2^{-1} \cos Q_1 d \sin Q_2 d - jZ_1^{-1} \sin Q_1 d \cos Q_2 d & \cos Q_1 d \cos Q_2 d - Z_1 Z_2^{-1} \sin Q_1 d \sin Q_2 d \end{bmatrix} \tag{A-1}$$

$$Q_1 = k_0 n_1 \sin\theta \ , \ Q_2 = k_0 n_1 \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2} + \sin^2\theta}$$

$$Z_i = \omega \mu_0 Q_i^{-1} \ (i = 1, 2) \ , \ \lambda_0 : \text{自由空間波長}$$

なる4×4行列で関係づけられる。但し，煩雑さを避けるために，$n_0 = n_3 = n_1$ とした。さらに，多層薄膜全体を考えると，$\hat{A}$ をN乗することによって，両端の境界面間における $E_y$, $H_z$ は，

$$\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix}_{x=x_N} = \hat{A}^N \begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix}_{x=x_0} \tag{A-2}$$

$$\hat{A}^N = \frac{1}{\sin\gamma} \begin{bmatrix} a_{11} \sin N\gamma - \sin(N-1)\gamma & a_{12} \sin N\gamma \\ a_{21} \sin N\gamma & a_{22} \sin N\gamma - \sin(N-1)\gamma \end{bmatrix} \tag{A-3}$$

と関係づけられる。但し，$a_{ij}$ は $\hat{A}$ の $i, j$ 要素を表わし，

$x=x_0$, $x=x_N$ はそれぞれ toplayer 及び substrate と薄膜の境界面を表わす。ここで，$\gamma$ については，$\hat{A}$ の固有値として，

$$e^{\pm j\gamma}=\cos(Q_1+Q_2)d-\frac{1}{2}\frac{(Q_1-Q_2)^2}{Q_1Q_2}\sin Q_1d\sin Q_2d$$
$$\pm\sqrt{\left\{\cos(Q_1+Q_2)d-\frac{1}{2}\frac{(Q_1-Q_2)^2}{Q_1Q_2}\sin Q_1d\sin Q_2d\right\}^2-1} \quad (A\text{-}4)$$

が得られ，これにより与えられる。式（A-2）に両端の境界面での $E_y$, $H_z$ の関係

$$\left.\begin{aligned} E_y=E_{iy}+E_{ry}\ ,\ H_z=H_{iz}+H_{rz}=Z_1^{-1}E_{iy}-Z_1^{-1}E_{ry} &\quad : x=x_0 \\ H_z=Z_1^{-1}E_y &\quad : x=x_N \end{aligned}\right\}(A\text{-}5)$$

但し，$(E_{iy}, H_{iz})$, $(E_{ry}, H_{rz})$ はそれぞれ入射波，反射波の界成分を表わす。

を用いて，$H_z$ 成分を消去すると，反射系数 $R\equiv(E_{ry}/E_{iy})$

$$R(\theta)=\frac{(Q_1/Q_2-Q_2/Q_1)\,e^{-jQ_1d}\sin Q_2d\sin N\gamma}{2\left[\left\{\sin Q_1d\cos Q_2d+\frac{1}{2}(Q_1/Q_2+Q_2/Q_1)\cos Q_1d\sin Q_2d\right\}\sin N\gamma-j\sin\gamma\cos N\gamma\right]} \quad (A\text{-}6)$$

が得られる。