

輻射科学研究会資料

マイクロ波発振器特性の
数式的表現に関する考察

福本克巳 中島将光 池上淳一

(京都大学 工学部)

昭和 55年 4月 25日

§1 はしがき

古くは、クライストロンやマグネットロンなどのマイクロ波電子管、また、近年のガン・ダイオード、インパット・ダイオード、FETなどの固体マイクロ波能動素子の開発に至るまで、マイクロ波発振器の特性表現には、リーケ・ダイアグラムが用いられて來た。発振器は一般に大きな非線形性を含むものであるため、その特性表示 (characterization) は難しい。ところが、マイクロ波に於いては、スミス・チャートのような便利な回路の図式的表現が可能であったので、それを利用したリーケ・ダイアグラムは発振器特性を記述する一般的で有効な方法として久しく用いられて來た訳である。しかしながら、現在の所、与えられた発振器のリーケ・ダイアグラムを作製するには、多數個のインピーダンスに対して発振器周波数と出力電力を測定するという非常な手数を要し、また、得られたリーケ・ダイアグラムを用いて発振器回路の最適設計を行うなどとは殆んど試みられていない。

この小文は、発振器特性を幾何学的・図式的表現ではなく、一般的な数式によって表現することを

試みたものである。これか“ある程度成功すれば”発振器の特性表現に複雑な回路を必要とせず、通常の電子管または、トランジスタなどの能動素子と同様に数個の数値で特性が表示できるのみならず、近年、進歩しつつある電子計算機技術を採用することにより、与えられた発振器から最大電力を取り出し得るような回路の設計も簡単にできるようになるであろう。また、数式的表現を適当にえらぶと、従来、多大な手数を要したリーケーダイアグラムの作成を、計算機処理と併用することによって単純化されることも示している。

§2 非線形アドミタンスの数式的表現と その基礎的考察

2-1 フアン・デル・ポール形の発振器

非線形性を考慮した最も基礎的な発振器の理論的取扱いは、ファン・デル・ポールによって行なわれ、彼の名で冠される微分方程式によって代表される。この方程式によって表わされる発振器の基本発振

周波数におけるアドミタンスは次式のように、周波数と電圧振幅の絶対値の自乗の関数として表現することができる。⁽¹⁾

$$Y(j\omega, |V|) = -G_0 + G_\alpha |V|^2 + jB_\omega \Delta\omega \quad \cdots \cdots (1)$$

上式において、 G_0 が負性コンダクタンス、 G_α が電圧依存項、そして B_ω が周波数依存項である。

しかし、後に説明するように、この形では一般的な発振器特性を表現するには全く不充分であって、このアドミタンス表示から得られるリーケ・ダイアグラムと実際の発振器のものとの間には、大きな相異がある。したがって、実用的なアドミタンス形式を得るには、(1)式をさらに一般化する必要がある。^(注)

(注) ファン・デル・ポール微分方程式を少し一般化したものにダブル・微分方程式がある。しかし、これでも、通常の発振器に適用するには不充分である。このように、時間領域の非線形方程式として扱うと、計算の繁雑さから見て一般化に限度があるが、次節以下のように、周波数領域で考えると一般化がかなり容易になる。

2-2 発振器アドミタンスの一般化表示

(1) 式を一般化して

$$\begin{aligned}
 Y(j\omega, |V|) = & -G_0 + (G_\omega + jB_\omega)\Delta\omega \\
 & + (G_{\nabla} + jB_{\nabla})|\nabla| + (G_{\nabla} + jB_{\nabla})|\nabla|^2 \\
 & + (G_{C_1} + jB_{C_1})\Delta\omega|\nabla|^2 + (G_C + jB_C)\Delta\omega|\nabla|^2 \\
 & + (G_{\omega_2} + jB_{\omega_2})\Delta\omega^2 \quad \cdots \cdots \cdots \quad (2)
 \end{aligned}$$

により、アドミタンス特性式を表わすことを考える。(2)式は、(1)式の係数を複素数に拡張し、 $\Delta\omega^2$ の項も加えてある。更に、電圧の絶対値 $|V|$ の項を加えることにより、一層、一般化できるものと思われる。このように、他の項を加えてゆくと、表式は厳密になるが、項数の増加について、計算がめんどうになる。したがって、どの項まで考えれば、使い易くて、しかも実用上問題が無いかを調べることも、本研究の一課題である。

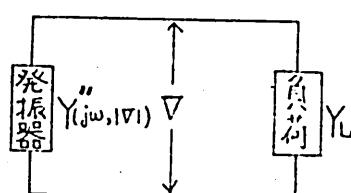


図 1

図 1 に発振器と負荷の接続の最も基本的

な等価回路を示す。次に、図1をより実際的にし

たものが図2である。図1の $Y''(j\omega, IV)$ は、図2の $a-a'$ から左を見た時のアドミタンス $Y''(j\omega, IV)$ に対応している。そして、理想変圧器 ($1:n$) は、負荷と発振器との結合度を

決定している。したがって、 $\beta-\beta'$ から左側を見た時の発振器特性アドミタンス $Y'(j\omega, IV)$ は、

$$Y'(j\omega, IV) = \frac{1}{n^2} Y(j\omega, IV) \quad \dots \dots \quad (3)$$

となる。次に、 $\alpha-\alpha'$ から左側を見た時には、線路の長さによる変換を受ける。変換を L とすれば、

$$\begin{aligned} Y''(j\omega, IV) &= L [Y'(j\omega, IV)] \\ &= L \left[\frac{1}{n^2} Y(j\omega, IV) \right] \quad \dots \dots \quad (4) \end{aligned}$$

と表わせる。変換 L については、3-1節“座標軸の回転”的で説明している。線路の効果は、その方法を用いると、消去できるから、発

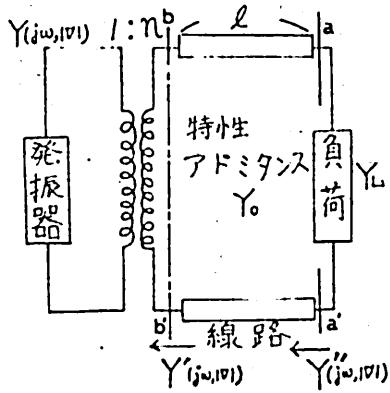


図 2

振器特性アドミタンスは、

$$Y'(j\omega, |V|)$$

すなわち、

$$\frac{1}{n^2} Y(j\omega, |V|)$$

として以下考察を行う。すると、キレヒホップの法則から

$$Y(j\omega, |V|) + Y_L = \frac{1}{n^2} Y(j\omega, |V|) + Y_L = 0 \quad \dots \dots (5)$$

を得る。負荷電力 P は ($Y_L = G_L + jB_L$)

$$P = G_L |V|^2 \quad \dots \dots \dots \dots (6)$$

で与えられるから、(5), (6)式より

$$\frac{1}{n^2} Y(j\omega, \sqrt{P/G_L}) + Y_L = 0 \quad \dots \dots \dots \dots (7)$$

を得る。

ここで、リーケ線図の描き方について触れる。
等電力線は、(7)式の P を一定にして、 ω を変化させた時の Y_L を、スマス・アドミタンス図上にプロットすれば求まり、等周波数線は、逆に、(7)式の P を変

化させた時の γ_w をプロットすればリーケ線図が求まる。

2-3 各係数の意味

次に、(2)式の各係数の意味を知るために、先づ、基準となる発振器を、ファン・デル・ポール形に決めて、結合度 n^2 と係数($G_w, G_c, G_{w2}, B_v, B_c, B_{w2}$)の性質を、グラフを用いて調べて見る。実際には、表1のような場合分けを行なって調べている。

表1

$N\theta$	n^2	G_w	G_w	B_w	G_v	B_v	G_c	B_c	G_{w2}	B_{w2}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	$\frac{6}{5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\frac{3}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表1で、○印は、考慮した係数を表わしている。例えば $N\theta 2$ は、 $n^2 = \frac{1}{6}$ であり、発振器特性アドミタンスは、

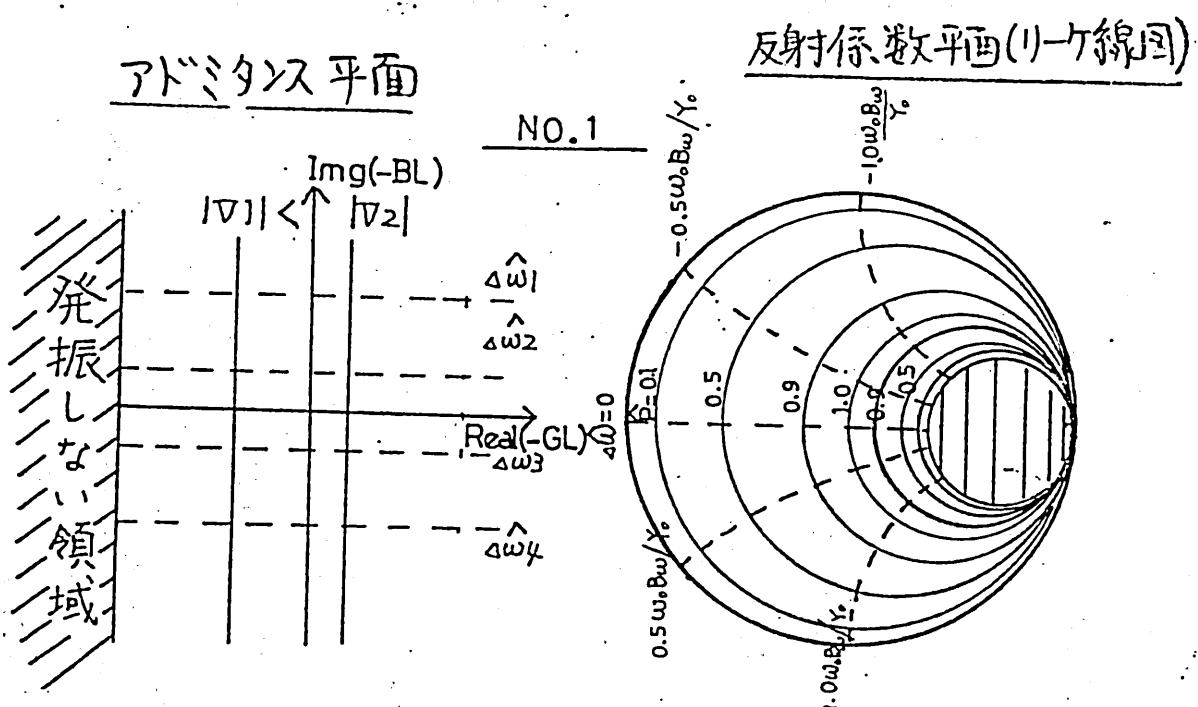
$$Y(j\omega, |\nabla|) = 6(-G_0 + G_v |\nabla|^2 + jB_w \omega) \quad \dots \quad (8)$$

となることを示している。

No.1 ~ No.5 までは、結合度 η^2 の意味を調べている。そして、No.6 ~ No.11 では、係数 B_{ω} から B_{ω_2} の意味を調べている。以下、順に説明する。

ここでは、 $|V|^2$ の項しか考察していないが、 $|V|$ の項は、 $|V|^2$ の項と同様な意味を持つために、省略している。

まず、基礎となる $\eta^2 = 1$ の場合のファン・デル・ポール形発振器のリーケ線図を下図に示す。左図



は、参考のために、発振等電圧(等出力電力)直線および

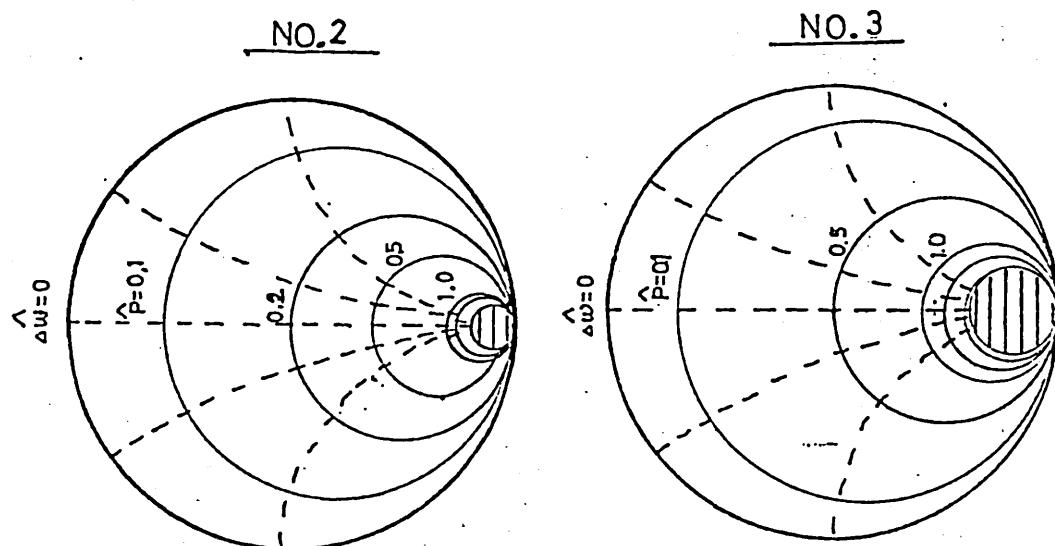
等発振周波数直線を負荷アドミタンス平面上に示したものである。リーケ系図の電力は、最大出力電力 $P_m = G_0^2 / 4G_A$ で規格化して

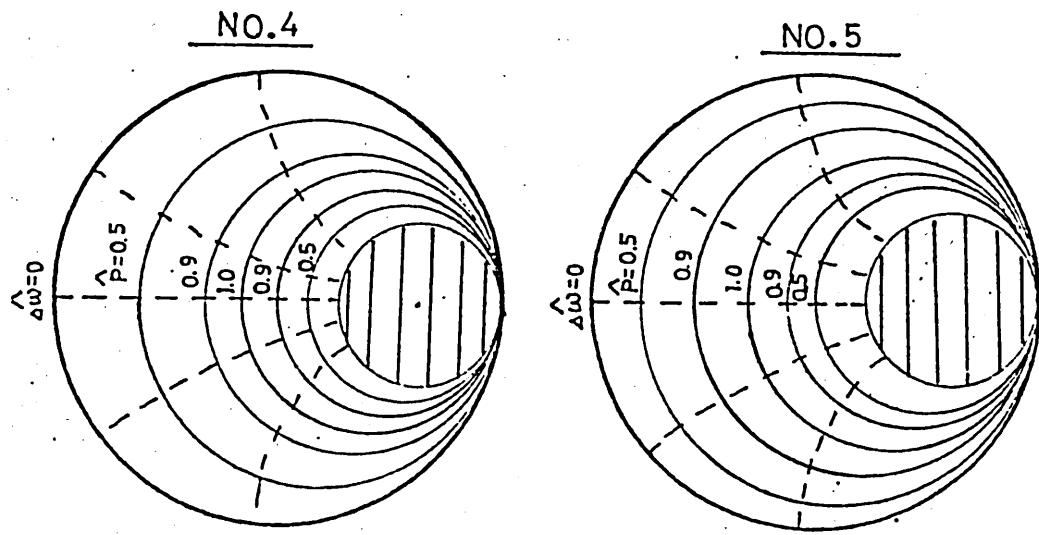
$$\hat{P} = P / P_m$$

で表わしてある。又、 $G_0/2 = Y_0$ とし、周波数は自由発振周波数で規格化されている。

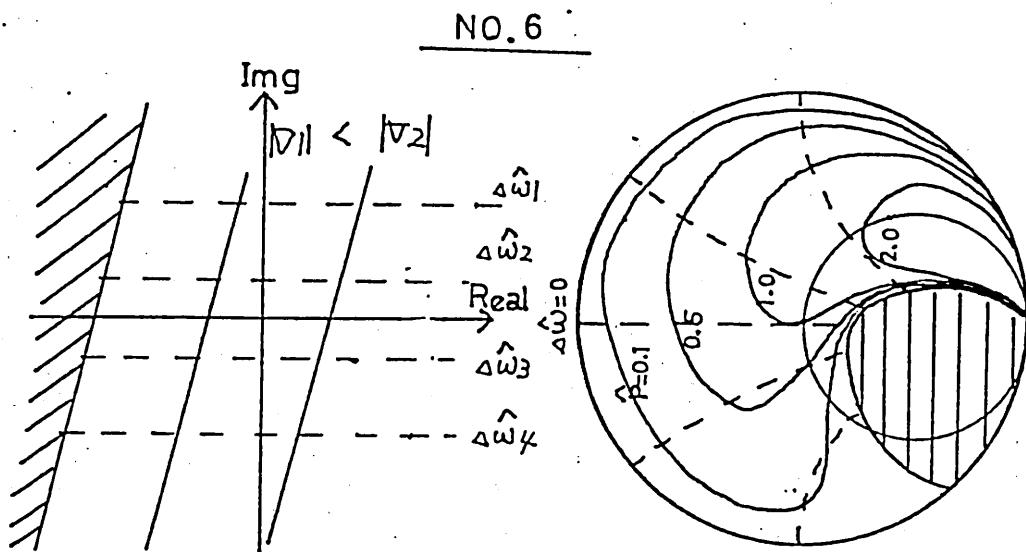
結合度 $\beta\omega^2$ について

結合度 $\beta\omega^2$ が変化すると、最大電力が供給される点が移動する(円の半径が変化する)。それと共に発振しない領域も変化する。(下図)





G_w の意味



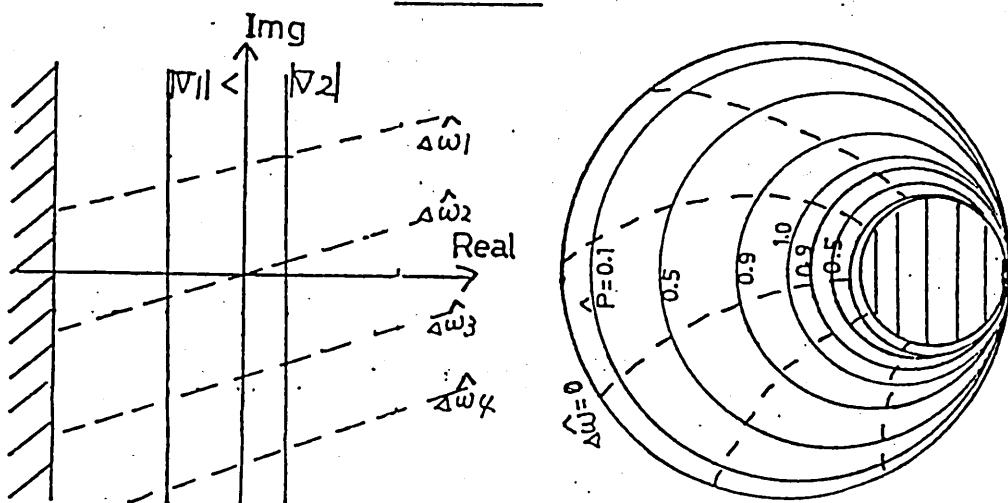
ファン・デル・ホール形発振器に G_w の項を付加すると、アドミタンス複素平面上において、電圧 $|V|$ 一定の直線は傾きを変え、その傾きはすべて等

(注)

いい。リーケ線図上では、等電力線は左右非対称になる。このとき、最大負荷供給電力は、無限大にまで増加することになるが、この効果は、他の項、特に G_{w2} の項を付加することによって打消される。

B_V の意味

No.7

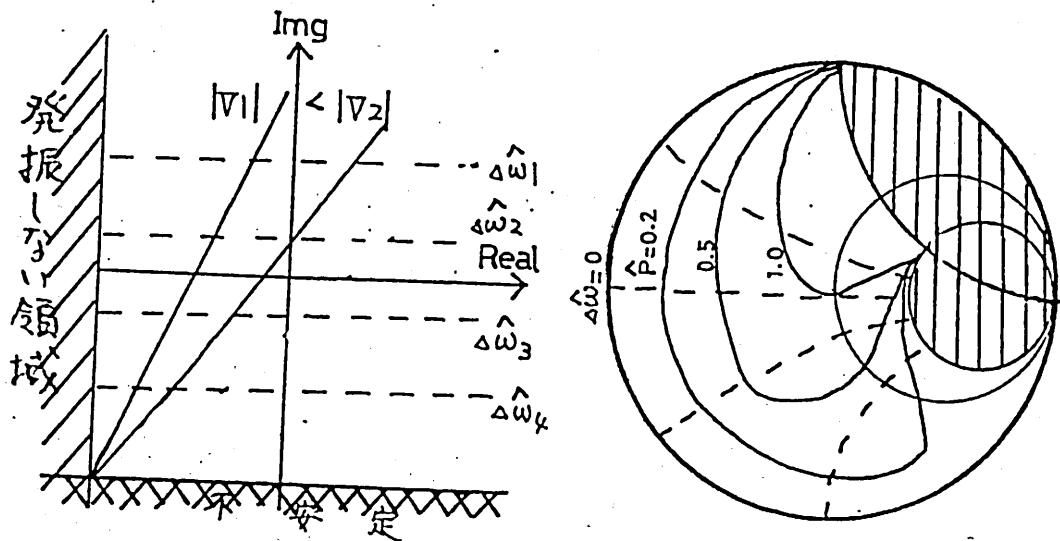


B_V は、アドミタンス複素平面上において、等周波数線を等しい傾きの直線群に変える。リーケ線図上では、等周波数線を全体的に、左又は右に曲げる。

注) No.1 ~ No.5 のファン・デル・ポール形の場合には等出力電圧曲線と等出力電力曲線とは一致するが、 G_w の項を付加すると両者は一致しなくなる。

G_C の 意味

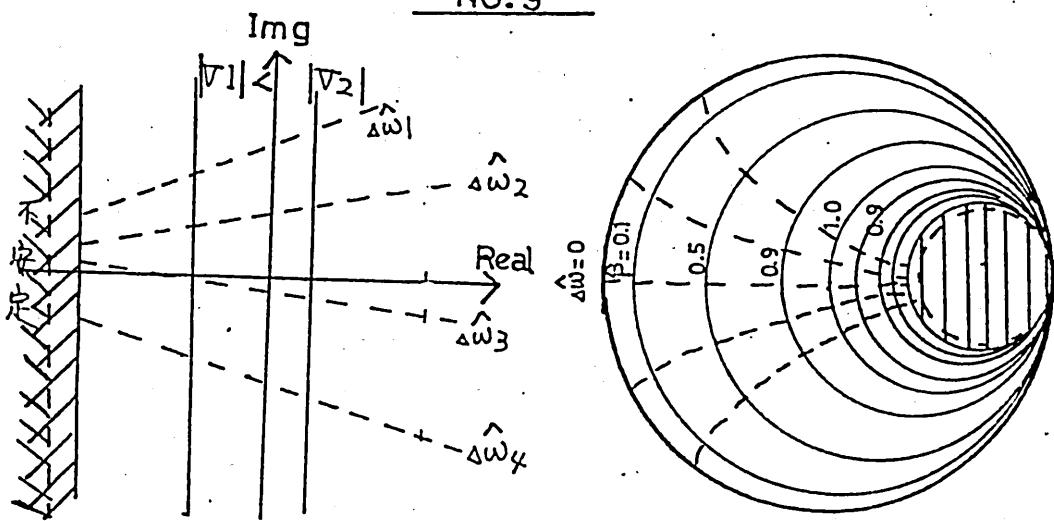
NO. 8



G_C は、アドミタンス複素平面上において、電圧 $|V|$ 一定の直線群を放射状の直線群にする。リーベ線図上では、等電力線を左右非対称にする。このとき、最大負荷供給電力は無限大まで増加する。また、 G_W と異なり、不安定領域が生じる。(次節 安定判別 参照)。

Bc の意味

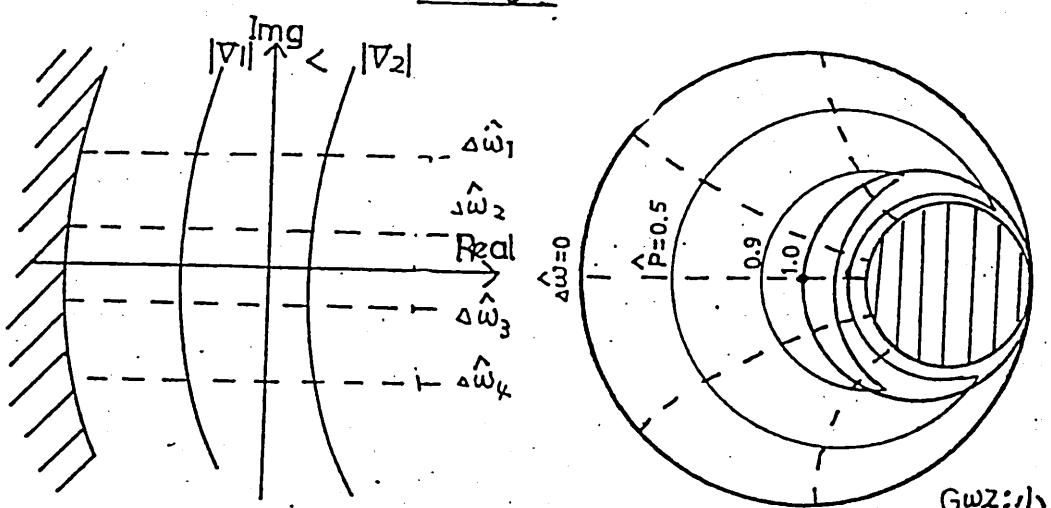
NO.9

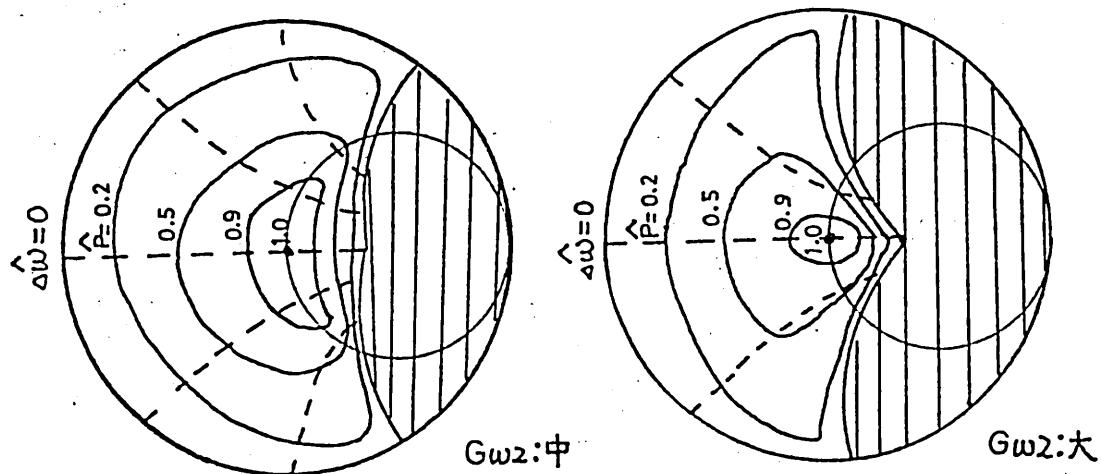


B_c は、アドミタанс複素平面上において、等周波数線を放射状の直線群にする。リーケ線図上では、等周波数線の曲率を変化させる。

Gwz の意味

NO.10

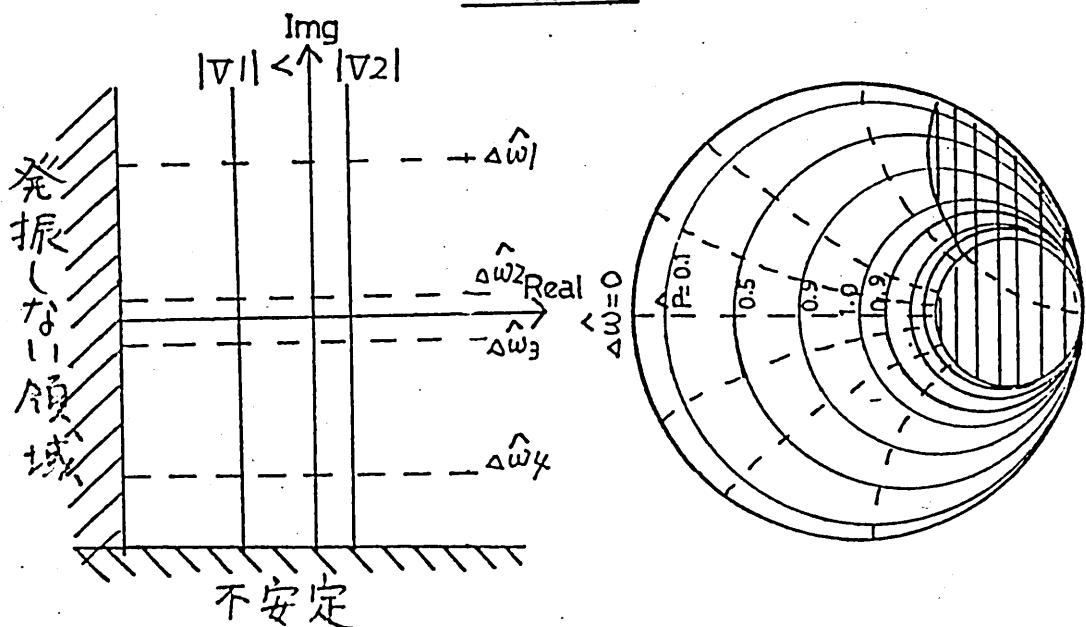




G_{w2} は、アドミタンス複素平面上において、電圧 $|V|$ 一定の直線群を放物線群に変える。リーク線図上では、等電力線を左右非対称な三日月形に変える。この G_{w2} の作用により、最大負荷供給電力は、ある負荷において最大値をとる。等電力線が三日月形となり、実際の発振器の特性を表わすためには、 $G_{w2} \geq 0$ でなければならぬ。

B_{w2} の意味

NO.11



B_{w2} は、アドミタанс複素平面上において、等周波数線の間隔を変化させる。リーク線図上では、等周波数線の間隔が変化するとともに、曲線の曲率も変化する。

NO.5のファン・デル・ポール形を見れば判る様に、ファン・デル・ポール形の発振器では、最大負荷供給電力を発生する負荷が曲線を描いて無数の点になる。しかし、実際の発振器は、一般にある一つの負荷で最大となる。一方、等周波数線に関する

しても、ファン・デル・ポール形では、 $\Delta\omega = 0$ に対応する点は、 $\hat{B}_L = 0$ の直線上にあるが、実際の発振器では、自由発振周波数線 ($\Delta\omega = 0$) は曲線となり、 $\hat{B}_L = 0$ 上とは限らない。このように、ファン・デル・ポール形は、実際とは相当かけ離れていている。しかし、No. 6 ~ No. 11 の様な係数を加えれば、実際に近い図式が得られる。

2-4 安定判別

(7)式を解いただけでは、根の安定性は判らない。だから、求まった根を吟味する必要がある。

安定判別は、定常解からの微小変化分 $d|V|$ に対する変分方程式

$$\frac{d \delta|V|}{dt} = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{Y_{101}(j\omega_0, |V_0|)}{Y_{j\omega}(j\omega_0)} \right\} \delta|V| \quad \dots \quad (9)$$

により行なう。すなわち、判定は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta|V|} \frac{d \delta|V|}{dt} &< 0 \quad \dots \text{安定} \\ &> 0 \quad \dots \text{不安定} \end{aligned}$$

である。⁽²⁾

§3 リーケ線図による発振器特性係数の決定

発振器特性係数をリーケ線図を用いて決定する方法について考察する。ここで発振器特性アドタンス式としては、(2)式の電圧の絶対値 $|V|$ に関する項は零として、電圧の絶対値の自乗 $|V|^2$ の項を考慮する。これは、電圧の絶対値 $|V|$ と自乗 $|V|^2$ の両方の項を考えると、式が扱いにくく、そして、得られる結果も予想程には良くならず、電圧の絶対値 $|V|$ の項よりも、自乗 $|V|^2$ の項を考えた方が、最大出力電力の点と、発振しない領域との距離が実際的に良く合うからである。したがって、種々の考察の結果、最終的には、発振器特性アドタンスは、

$$\begin{aligned}
 Y(j\omega, |V|) = & -G_0 + (G_w + jB_w)\Delta\omega \\
 & + (G_V + jB_V)|V|^2 + (G_C + jB_C)\Delta\omega|V|^2 \\
 & + (G_{w2} + jB_{w2})\Delta\omega^2 \quad \cdots \cdots (10)
 \end{aligned}$$

で表現できるとして以下の考察を行っている。

3-1 座標軸の回転

図2の等価回路から判る様に、実際には、発振器と負荷との間には伝送線路が存在する。したがって、実際の発振器のリーケ線図は、線路長だけアドミタンス線図上で回転している。今回は、

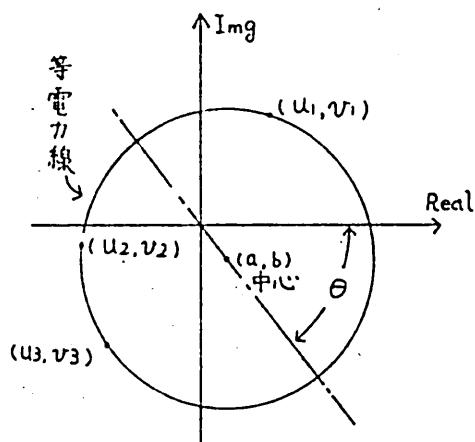


図3

簡単のために、図3の様に、等電力線を円近似することにより回転角 θ を求めた。すなわち、等電力線上の任意の点の反射係数 Γ を、 $U+V$ 複素平面座標によって表わす。

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta} = U + jV \quad \cdots \cdots (11)$$

等電力線が (a, b) を中心とする半径 C の円で

あるとすれば

$$(U - a)^2 + (V - b)^2 = C^2 \quad \dots \dots \quad (12)$$

或いは、

$$\left(\frac{1}{z}, U, V \right) \begin{pmatrix} C^2 - a^2 - b^2 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \frac{U^2 + V^2}{z} \quad \dots \dots \quad (13)$$

等電力線上の3点 $(U_1, V_1), (U_2, V_2), (U_3, V_3)$ を与えると、円の中心 (a, b) が求まるから、回転角 θ が求まる。角 θ だけ、逆に回転すれば求めるベキアドミタンス $Y'(j\omega, 171)$ の図形が得られる。この操作の後に、各係数の決定を行なう。

3-2 最小自乗法による係数の決定

係数の決定には、最小自乗法を使つた。理由は、オーナーに多くの測定データを情報として使つたからであり、オーナーに、測定データの誤差の影響を全体的に平均化したいためである。係数の決定は次のようにする。(7)式と、負荷 $Y_L = G_L + jB_L$ に

キルヒホッフの法則 ($\dot{Y}(j\omega, |V|) + Y_L = 0$) を用いる
と、実部から

$$G_L - G_0 + G_{w1} \Delta w + G_V |V|^2 + G_C \Delta w |V|^2 + G_{w2} \Delta w^2 \quad \dots \dots \dots (14)$$

虚部から

$$B_L + B_{w1} \Delta w + B_V |V|^2 + B_C \Delta w |V|^2 + B_{w2} \Delta w^2 \quad \dots \dots \dots (15)$$

を得る。ここで負荷の電力 $P = G_L |V|^2 = Y_0 \hat{G}_L |V|^2$ 、
規格化負荷アドミタンス $\gamma_L = Y_L / Y_0 = \hat{G}_L + j \hat{B}_L$ を用い
る。N個の測定データに対する残差方程式 R_i は

$$R_i = \operatorname{Re} \{ \dot{Y}(j\omega_i, P_i) + \hat{Y}_{L,i} \} + j \operatorname{Img} \{ \dot{Y}(j\omega_i, P_i) + \hat{Y}_{L,i} \} \quad \dots \dots \dots (16)$$

である。最小自乗法の定義より、係数の最良値
は、残差の平方和 S_R

$$S_R = \sum_i^N \{ \operatorname{Re}(R_i) \}^2 + \sum_i^N \{ \operatorname{Img}(R_i) \}^2 \quad \dots \dots \dots (17)$$

が最小になるものである。この条件を満足する係数値を求めればよい。

3-3 加重平均について

最小自乗近似を行なったのは、複素アドベタ
ンス平面上であり、今、我々が扱っているのは、反射
係数平面上だから、このまでは、リーケ線図上にお
ける誤差のばらつきが大きい。この誤差の偏差を
減少させるためには、複素平面から、反射係数平面へ
変換された時の空間の密度変化を考慮すればよい。こ
では、反射係数平面上を、
数個の異なる重みを持
つ領域に分けた。

これにより、誤差のば
らつきは減少した。

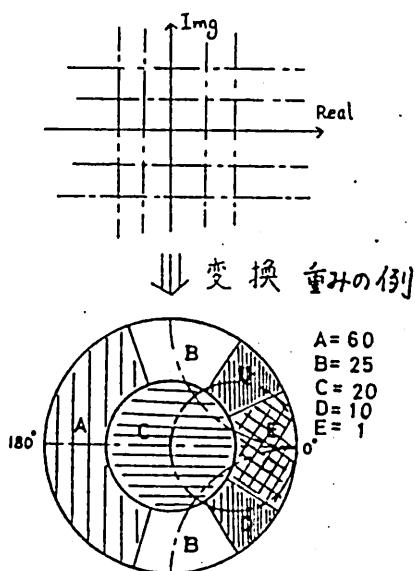


図 4

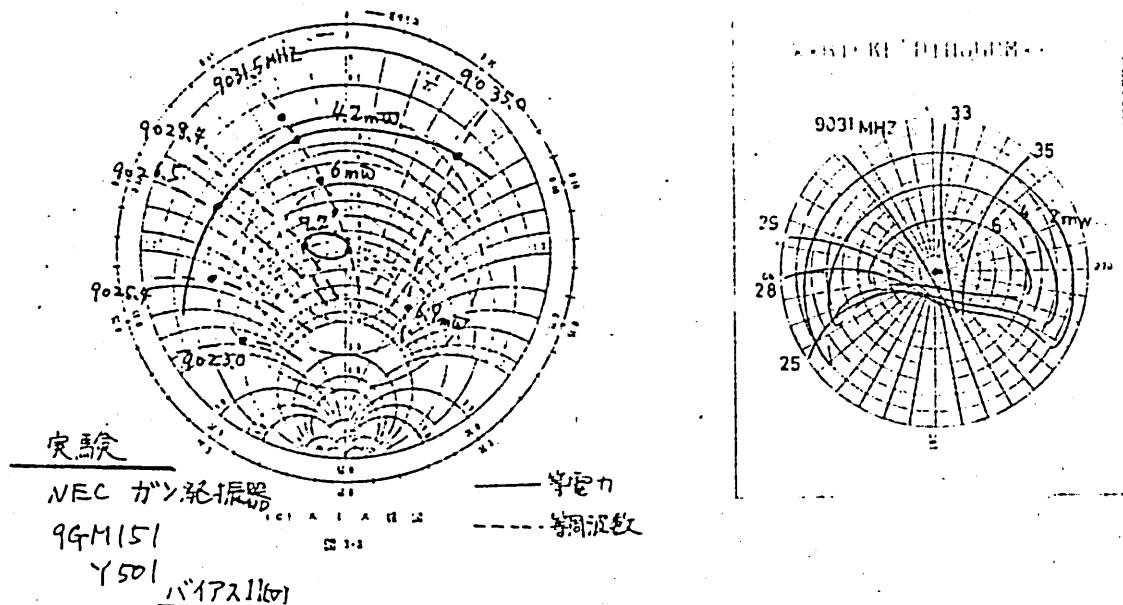
3-4 プロッタによる方法

以上の作業を、電子計算機にプログラムしておけば、発振器のリーケ線図を、実験により多數個の点を求めて描くという手間のかかる作業がずっと簡単になる。

すなわち、回転角 θ を求めるために数個、係数を求めるために、6～10数個、合計10数個の測定データからリーケ線図全体が描ける。

§4 実際例

図5の左側]にカソン発振器に対するいくつかの測定点を示す。⁽³⁾ 右下の表式は、本文に述べた方法によって求めた発振器特性の数値を示している。右上の図はこの数式を計算機プログラミングによってリーケ線図として再現したものである。等周波数線では、9026～9028MHzあたりの誤差がやや大きいが、他の所は良く合っている。等電力線は、2mW、4mW、6mWと8mWを描くように入力したが、8mWは存在しないから表われしていない。



左図 実験図

右図 プロッタ出力

右表 繩数値

図5. 実際例 I

YGM151 Y501
ガン発振器

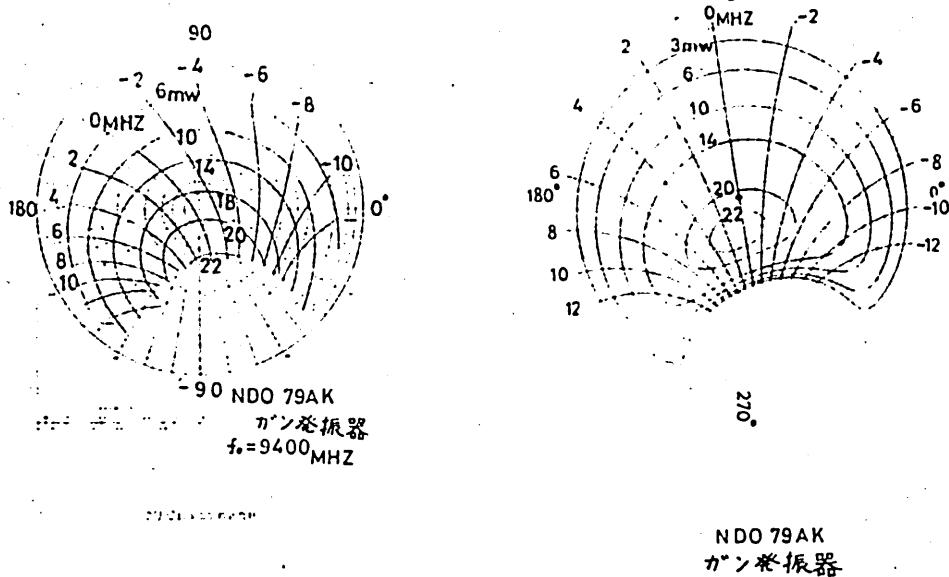
$$Y(j\omega, lVI) = -G_{\infty} \cdot (G_{\omega} + jB_{\omega}) \Delta \omega \\ \cdot (G_V + jB_V) M \cdot (G_C + jB_C) \Delta \omega |VI| \\ \cdot (G_{\omega_2} + jB_{\omega_2}) \Delta \omega^2$$

$$G_{\infty} = 0.906 \times 10^{-1} \\ G_{\omega} = -0.623 \times 10^{-2} \quad B_{\omega} = 0.14 \times 10^{-2} \\ G_V = -0.427 \times 10^{-4} \quad B_V = 0.915 \times 10^{-4} \\ G_C = 0.272 \times 10^{-5} \quad B_C = -0.288 \times 10^{-5} \\ G_{\omega_2} = 0.880 \times 10^{-4} \quad B_{\omega_2} = -0.447 \times 10^{-4}$$

POWER (mW)
FREQ. $\Delta \omega = f - 9000$ (MHz)
LINE ADM. 0.02 (s)

24

図6は、会社の発表したデータ(リーケ線図)を用いた場合であるが、等周波数線 0MHzあたりで誤差が大きい。しかし、これは、重みの付け方や、入力データを遅延することにより、近似度を上げることができる。右図から、最大発振電力は、約22.5mWであることが判る。



左図 カタログデータ

$$Y(j\omega, lV) = -G_0 + (G_0 + jB_0)\Delta\omega \\ \cdot(G_V + jB_V)lV + (G_C + jB_C)\Delta\omega lV \\ \cdot(G_{02} + jB_{02})\Delta\omega^2$$

右図 プロット出力

$$G_0 = 0.572 \times 10^{-1} \\ G_0 = -0.650 \times 10^{-3} \quad B_0 = 0.331 \times 10^{-7} \\ G_V = 0.360 \times 10^{-4} \quad B_V = -0.626 \times 10^{-6} \\ G_C = 0.646 \times 10^{-6} \quad B_C = -0.575 \times 10^{-5} \\ G_{02} = 0.911 \times 10^{-4} \quad B_{02} = 0.215 \times 10^{-5}$$

右表 係数値

図6 実際例 II

POWER (mW)
FREQ. Δω (MHz)
LINE ADM. 0.02 (dB)

上の二例は、共に、図4にある「重みの例」の値を用いた。

§5 結論

マイクロ波発振器のアドミタンス特性を、ファン・デル・ポール形を基礎にしてそれを一般化することにより、数式的に表現することを試みた。その結果

- (1) 電圧振幅の依存性については、絶対値 $|V|$ よりも、絶対値の自乗 $|V|^2$ を考えた方が、リーケ線図上において最大出力電力点と、発振しない領域との距離が実際的に良く合う。
- (2) そして、結果的には、(10)式を用いれば発振器特性が全体的にかなり良好に表現できる。ということが判った。

したがって、この結果を利用すると、発振器の特性の数値的表示が可能になり、発振器に関する回路の計算機による最適設計が可能となるであろう。また、計算機プロッタを用いることにより、リーケ線図の作成も簡単化される。

座標軸の回転に周波数特性を考慮すること、最小自乗法における重みの付け方など、いくつかの改良すべき点が残されて居り、これらは今後の課題である。

参考文献

- (1) 池上、中島，“負性抵抗発振器信号応答に関する基礎理論”輻射科学研資，1971-11
- (2) 広田、中島、池上“非線形性を考慮したマイクロストリップ線路ガン発振器の等価回路”信学技報 1978年 No29.MW78-16
- (3) 勝部、川野“10GHz帯IMPATTダイオード発振器のリーケ線図”信学全大 昭和47年 No.607
- (4) HAMILTON, KNIPP AND KUPER
“KLYSTRON AND MICROWAVE TRIODES”
MAC.GRAWHILL 1948年 SEC.15
- (5) NEC “電子デバイスデータブック(半導体編)”
1977年

輻射科学研究会資料

注入同期増幅器における
逆相自己注入の効果

飯田幸雄 二階和美 森田正信
(関西大学 工学部)

昭和55年4月25日

1. まえがき

発振器出力の一部を遅延線路を通して再び発振器に帰還する自己注入同期⁽¹⁾において、自己注入が逆相で行われるととき発振器外部Qは低下である。この点に着目し、注入同期発振器への応用を試み、同期特性および位相応答について検討した⁽²⁾。そこでは発振器が自由振動時に最大出力となる様に調整されている場合の特性を調べたが、自己注入と外部注入により負荷は変化し、最大出力条件よりずれるので、逆相自己注入の効果を調べるためには、逆相自己注入回路がある場合とない従来の場合とで負荷条件を変えなければならぬ。ここでは、発振器の固有電力と入力電力の和が出力電力となる負荷結合において両者を比較し、注入同期土増幅器における逆相自己注入回路の効果を調べる。

本報告では、発振器コンタクタニスが直線で電圧のみに依存し、サセプタニスが周波数の1次関数であるとした発振器モデルについて、池上、中島の両氏⁽³⁾により導かれた一般的な発振器方程式に基づいて大信号解析した基本解析⁽²⁾とともに、負荷が変化する場合へ拡張し、特性を検討する。

2. 増幅器の基本特性

2.1 負荷結合

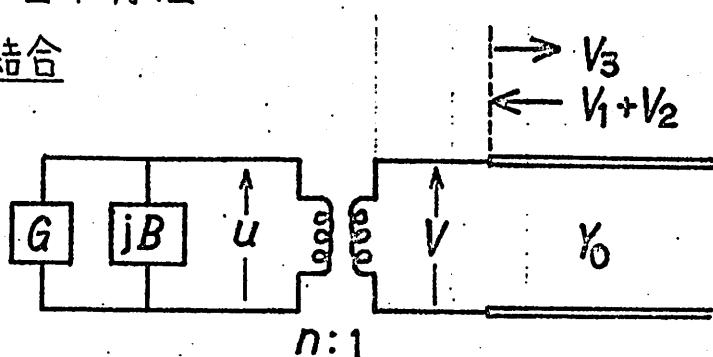


図1 発振器の等価回路

図1のように発振器端子電圧を U 、理想変圧器より右側の出力線路側での端子電圧を V とし、その振幅 $|U|, |V|$ をそれぞれ \hat{U}, \hat{V} と表わす。高周波電圧振幅に対する負性コンタクタンス G の変化は次の1次式で与えられるとする。

$$G(\hat{U}) = G_1 \hat{U} - G_0 \quad (G_1, G_0 > 0) \quad (1)$$

自由振動時の振幅 \hat{V}_0 は

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{nG_1} \left(G_0 - \frac{Y_0}{n^2} \right) \quad (2)$$

が与えられ、 $n = \sqrt{3Y_0/G_0}$ のとき最大となる。負荷の結合度 K を次式で定義する。

$$K = \frac{\sqrt{3Y_0/G_0}}{n} \quad (3)$$

K が大きい程負荷が重く、 $0 < K < \sqrt{3}$ で自由振動が

起り、 $K \geq \sqrt{3}$ で発振停止となる。 $K=1$ のとき \hat{V}_o は最大となり、これを \hat{V}_{oM} で表わすと

$$\hat{V}_{oM} = \frac{2G_0}{3G_1} \sqrt{\frac{G_0}{3Y_0}} \quad (4)$$

K と \hat{V}_{oM} を用いて自由振動時の振幅 \hat{V}_o を表わすと

$$\hat{V}_o = \frac{K}{2} (3 - K^2) \hat{V}_{oM} \quad (5)$$

となる。

負荷結合度に対する特性を調べるために前記のような準備をしてきたが、逆相自己注入が存在するときの外部注入信号に対する発振器の振舞を記述する関係式は基本解析のところですごく導いた。そこでは発振器コンタクタンスの電圧依存性を表すのに、出力線路側から見た発振器コンタクタンスの自由振動時の動作点のまわりの電圧に対する変化量 G_V を用いて表わした。この G_V を $2Y_0/\hat{V}_o$ で規格化した値を g は、 G_V が出力線路側の電圧振幅 \hat{V}_o に対する変化であることに注意して変形し、 K を用いて表わすと次式となる。

$$g = \frac{\hat{V}_o}{2Y_0} G_V = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{K^2} - 1 \right) \quad (6)$$

また、回路の外部 Q は K によって変化し、

$$Q_e = \frac{3\omega_0}{2G_0K^2} \left. \frac{\partial B}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0}$$

と表わされるので、 $K=1$ のときの外部 Q を Q_{eM} とする

$$Q_e = Q_{eM} / K^2 \quad (7)$$

となる。

および Q_e の K に対する変化が与えられた。

2.2 自己注入と発振特性

ここでは自己注入回路を形成する上での基礎的な知見を得る。

定常状態の振幅を規定する関係式において、外部注入のない場合を考えると規格化振幅 \hat{V}/\hat{V}_{oM} に関する2次方程式が得られる。その解は

$$\frac{\hat{V}}{V_o} = 1 + \frac{1-a}{2g} \pm \sqrt{-\left\{ \frac{1}{g} \left(4\Omega + \frac{b}{2} \right) \right\}^2} \quad (8)$$

但し、

$$a = \frac{1 - k_s^2}{1 + k_s^2 - 2k_s \cos \varphi}, \quad b = \frac{-2k_s \sin \varphi}{1 + k_s^2 - 2k_s \cos \varphi},$$

$$\varphi = 4\Omega \cdot T_d + \Delta \theta,$$

$$\Delta \Omega = \frac{Q_e}{\omega_0} \Delta \omega, \quad T_d = \frac{\omega_0}{Q_e} t_d \quad (9)$$

であり、 ω_0 は自由振動時の角周波数、 t_d は自己注入波の遅延時間、 $\Delta\theta$ は自己注入波位相の逆相よりのずれを表す。

式(8)において \hat{V}/V_0 が実数であるためには $a\Omega + b/2 = 0$ でなければならぬ。この条件は自己注入時の発振周波数を定めている。すなわち、

$$\Delta\Omega = \frac{k_s \sin \varphi}{1 + k_s^2 - 2k_s \cos \varphi} \quad (10)$$

今、 $\Delta\theta = 0$ のときを考える。式(10)の左辺と右辺は、それが x_1 、 x_2 とおくと、図2のように変化し、両曲線の交点が発振周波数を規定する。図の場合には、 $T_d = 1$ のときは $\Delta\Omega = 0$ のみが解であるが、 $T_d = 3$ のときは3つの解

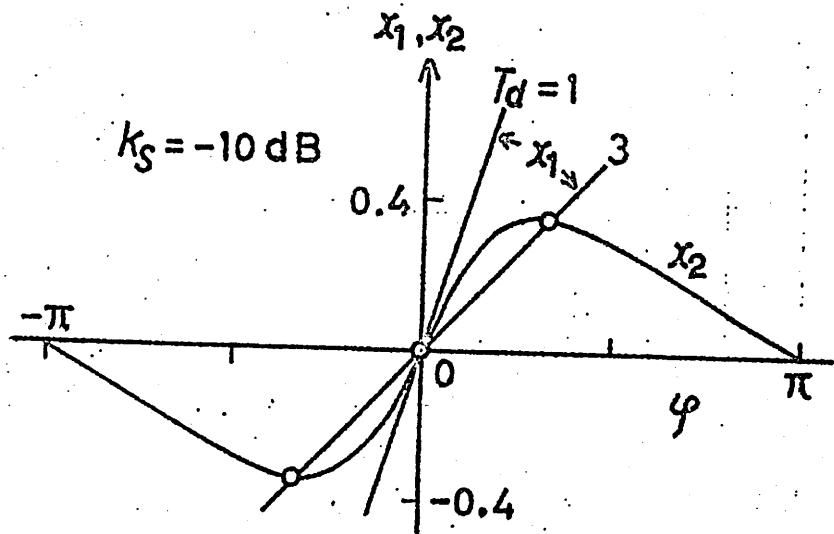


図2 φ 対 x_1, x_2

が存在し、 $\Delta\Omega=0$ を除く他の2つの解のいずれかで発振する ($T_d=3$ のときの $\Delta\Omega=0$ の解は不安定であるから)。

以上のように T_d が大きいと $\Delta\Omega=0$ 以外で発振することになる。逆相自己注入回路をもつ注入同期増幅器において、 T_d があまり大きいと高速で変化する信号を取扱えなくなるので、 $\Delta\Omega=0$ でのみ解を持つ範囲に T_d を限っても十分であることが後の結果からわかる。

この範囲は

$$T_d < \frac{(1 - k_s)^2}{k_s} \quad (11)$$

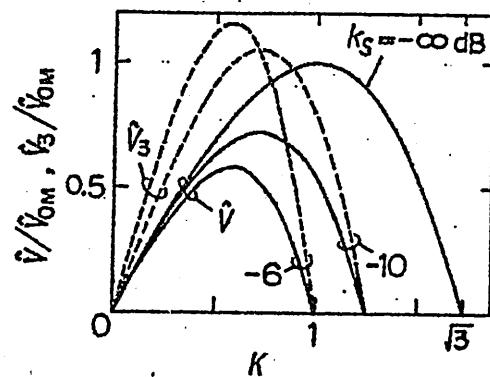
で与えられる。

このとき、発振の振幅は、式(8)より

$$\frac{\hat{V}}{\hat{V}_0} = 1 - \frac{1}{g} \cdot \frac{k_s}{1 - k_s} \quad (12)$$

となる。これを図3に示す。また、同図には出力波振幅 \hat{V}_3 も示されている。 k_s が大きい程、発振領域の小ささに限られる。

図3 発振振幅



2.3 最大出力条件における増幅器の基本特性

ここでは、0-πPM波に対する位相応答時間ならびに同期幅について述べる。なお、 $\Delta\theta=0$ の場合を取扱う。これらの特性は発振器の負荷結合により大きく変化するが、出力が帯域中央において最大となる負荷結合のときを取り扱う。この最大出力条件においては、自己注入回路の構成を考慮するとき、発振器の固有電力と入力電力の和が出力電力として取り出せる条件である。これについては3章で述べる。

出力が最大となる負荷結合度を K_M と表わし、これを図4に示す。 K_M は自己注入量 k_s が大きい程小さく、外部注入量 \hat{V}_1 / \hat{V}_{0M} が大きい程大きい値となっている。 k_s と \hat{V}_1 / \hat{V}_{0M} がほぼ同じ値となるとき $K_M=1$ となるのがわかる。これは、外部注入波と逆相の自己注入波が帯域中央において打ち合いで、見掛け上負荷が自由振動時と同じになるた

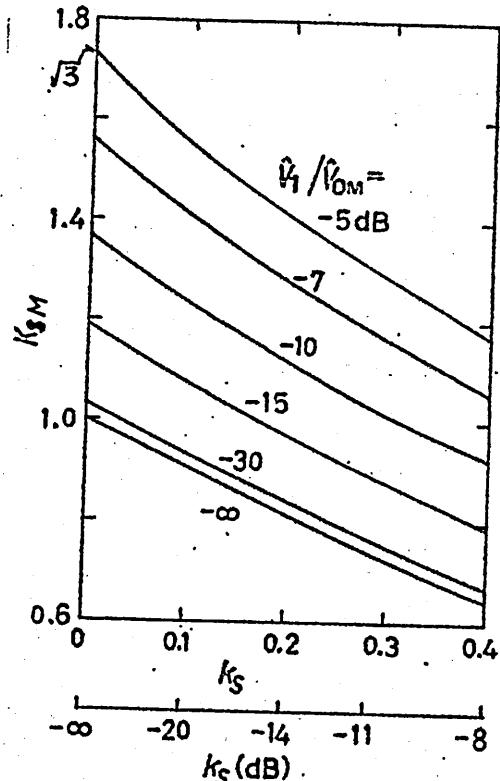


図4 出力最大となる負荷結合度

めであり、自由振動時の最大出力条件と一致する。

次に最大出力条件における位相応答時間と同期幅について、逆相自己注入のある場合と自己注入のない従来の場合($k_s=0$)と比較する。

位相応答は基本解析のところ述べたように T_d により大きく影響される。初期位相角を $\phi_1 - \phi_3 = 30^\circ$ と選び、外部注入波の位相角 ϕ_1 が 180° ステップ 0 関数状に変化するとき、出力波の位相角 ϕ_3 の応答が最適応答となる T_d を自己注入波の最適遅延時間 $T_{d, \text{opt}}$ とする。これを図5に示す。 T_d が $T_{d, \text{opt}}$ よりも小さいと位相応答時間は長くなる。 T_d の許容範囲を知る意味で、同図には応答時間が $T_{d, \text{opt}} \pm 10\%$ のときのそれよりも 10% 長くなる範囲も示している。

$T_{d, \text{opt}}$ は k_s に大きく依存し、外部注入量には大きく依存しない。

位相応答時間 T_d と同期幅又は動作角周波数の ω_0 よりのずれを表わす $\mu\omega$ は、QEM を用いて次のように規格化

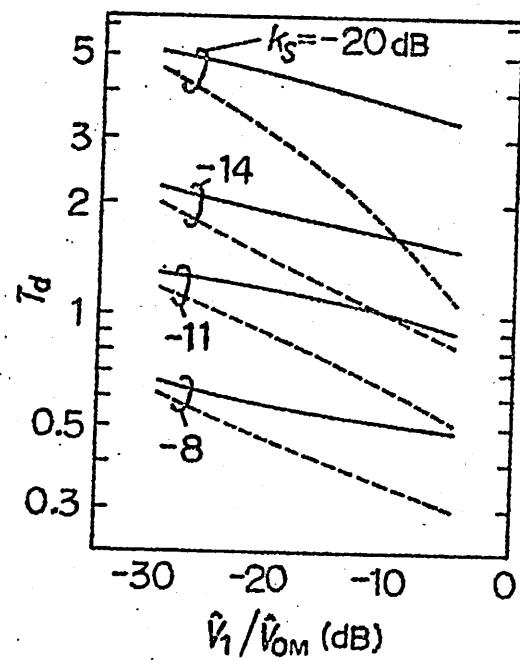


図5 $T_{d, \text{opt}}$ とその許容範囲

すると特性の比較をする上での便利である。すなわち、

$$T_{RM} = \frac{\omega_0}{Q_{eM}} t_r, \quad \Delta\Omega_M = \frac{Q_{eM}}{\omega_0} \Delta\omega \quad (13)$$

図6は T_{dopt} における規格化位相応答時間 T_{RM} を示している。逆相の自己注入により、特に外部注入量の小さいところでは、位相応答がかなり速くかかることがわかる。例えば、 $\hat{V}_1 / \hat{V}_{oM} = -10 \text{ dB}$ において $f_s = -8 \text{ dB}$ と $f_s = 0$ の場合とを例により比較する。これを表1に示す。ただし、 Q_e の値は $Q_{eM} = 30$ としたときのものである。これは、
 $K = 1.37$ で $Q_e = 16$ の発振器と $K = 0.93$ で $Q_e = 35$ の発振器が同じように困難なしに実現できまとするならば、自己注入のある場合は $f_s = 0$ の応答時間の 0.59 倍の時間で応答することを表わしている。

表1. 位相応答時間の比較例

発振器	I	II
K	1.37	0.93
Q_e	16	35
\hat{V}_1 / \hat{V}_{oM}	-10 dB	
f_s	0	-8 dB
T_{RM}	5.9	3.5

図7は $T_d = T_{dopt}$ における同期幅の特性である。 \hat{V}_1 の小さいところでは $f_s = 0$ のものと比べるとかなり広いが、 \hat{V}_1 の大きいところでは狭くなっている。 $f_s = -8 \text{ dB}$ の場合、 $\hat{V}_1 / \hat{V}_{oM} = -9 \text{ dB}$ より大きいところで自己注入時のほうが同期幅は広いが、位相応答は速い。

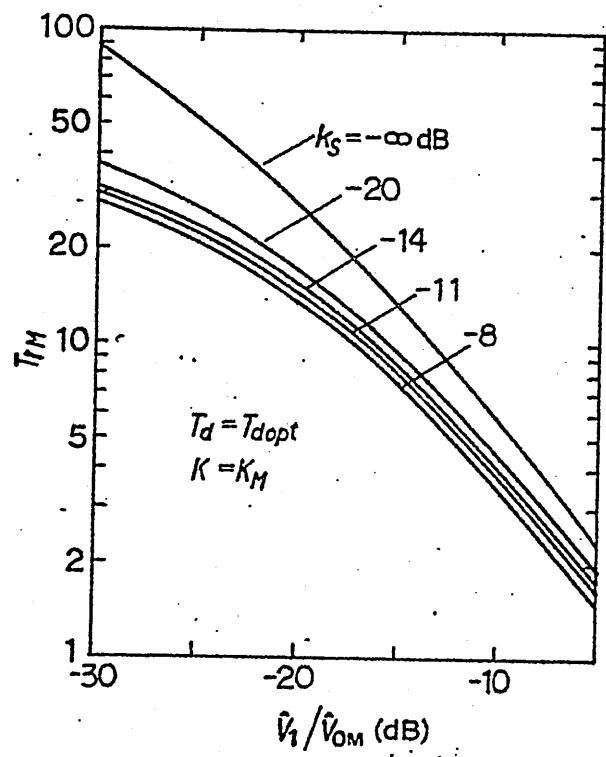


図6 位相応答時間

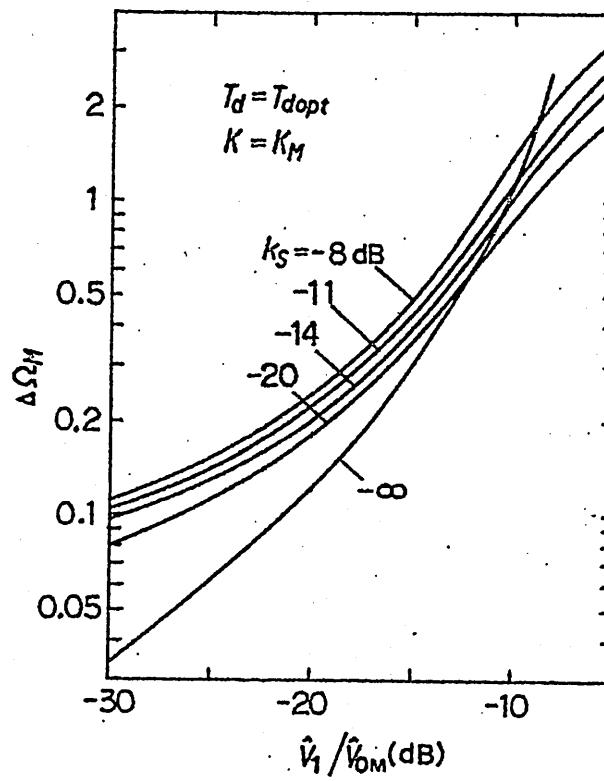


図7 同期幅

3. 増幅器の特性

ここでは自己注入回路の一構成法について述べ、増幅器の静特性ならびに過渡応答特性を調べる。

3.1 自己注入回路の一構成法

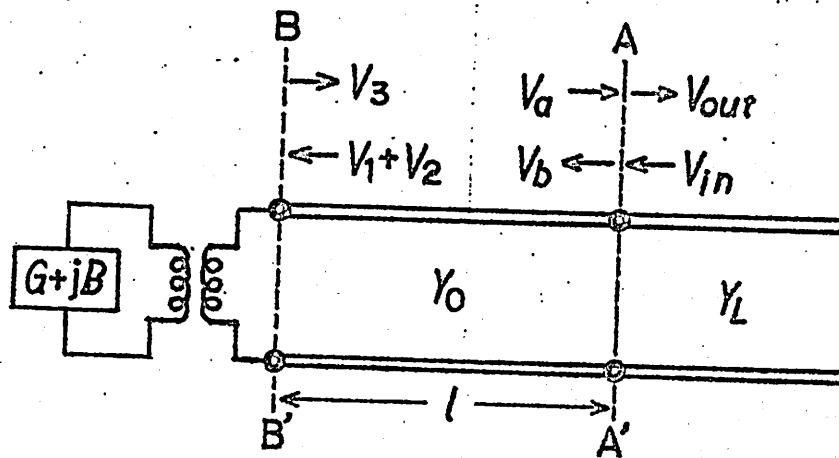


図8 自己注入回路の構成

発振器出力線路の特性アドミッタンスをある適当な長さのところまで変化することによっても自己注入回路を構成することができる。ここでは、図に示すように発振器より長さのところまで特性アドミッタンスが Y_0 から Y_L に変化する形の回路において、 $Y_0 > Y_L$ の場合を取り扱う。

図のように、増幅器の端子と面 $A-A'$ にとり、入力および出力の電圧波をそれぞれ V_{in} , V_{out} とする。面 $A-A'$ において、図に示された各電圧波はスマトリックスにより次式の

ように関係づけられる。

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Y_0}{2}} V_b \\ \sqrt{\frac{Y_L}{2}} V_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Y_0}{2}} V_a \\ \sqrt{\frac{Y_L}{2}} V_{in} \end{pmatrix} \quad (14)$$

但し、

$$S_{11} = -S_{22} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L}, \quad S_{12} = S_{21} = \frac{2\sqrt{Y_0 Y_L}}{Y_0 + Y_L} \quad (15)$$

V_a が面A-A'で反射して自己注入波となるので、 S_{11} は自己注入量 r_s に等しい。すなわち、

$$Y_L / Y_0 = (1 - r_s) / (1 + r_s) \quad (16)$$

とおくと、Sマトリックスは

$$[S] = \begin{pmatrix} r_s & \sqrt{1-r_s^2} \\ \sqrt{1-r_s^2} & -r_s \end{pmatrix} \quad (17)$$

となる。発振器への外部注入波 V_1 と自己注入波 V_2 は面A-A'からB-B'まで V_b が伝搬してきた結果であるから、式(14), (17)により V_b を求めれば V_1 と V_{in} の関係は求められる。 V_{in} を

$$V_{in}(t) = \hat{V}_{in}(t) e^{j\phi_{in}(t)}$$

と表わし、他の電圧波についても同様に定義すると次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{Y_0}{2}} (V_1 + V_2) = & R_S \sqrt{\frac{Y_0}{2}} \hat{V}_3(t - t_d) e^{j\{\phi_3(t-t_d) - w\}} \\ & + \sqrt{1 - \frac{R_S^2}{2}} \sqrt{\frac{Y_L}{2}} \hat{V}_{in}(t - \frac{t_d}{2}) e^{j\{\phi_{in}(t-\frac{t_d}{2}) - \frac{w}{2}\}} \quad (18) \end{aligned}$$

但し, $w = \Delta\omega \cdot t_d + \Delta\theta + (2m+1)\pi$, m は整数。

V_2 はこれまで通りの形で V_3 と関係づけられている。同様に,
 V_{out} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{Y_L}{2}} V_{out} = & \sqrt{1 - \frac{R_S^2}{2}} \sqrt{\frac{Y_0}{2}} \hat{V}_3(t - \frac{t_d}{2}) e^{j\{\phi_3(t-\frac{t_d}{2}) - \frac{w}{2}\}} \\ & - R_S \sqrt{\frac{Y_L}{2}} \hat{V}_{in}(t) e^{j\phi_{in}(t)} \quad (19) \end{aligned}$$

V_{in} と V_1 および V_3 と V_{out} の関係が与えられた。

増幅器の入力電力を P_{in} , 出力電力を P_{out} , 発振器の固有電力を P_{oM} とする。すなわち,

$$P_{in} = \frac{Y_L}{2} \hat{V}_{in}^2, \quad P_{out} = \frac{Y_L}{2} \hat{V}_{out}^2, \quad P_{oM} = \frac{Y_0}{2} \hat{V}_{oM}^2$$

なお, $\Delta\theta$ は自己注入波位相の逆相よりのずれを表わすが,
いはばさくの間 $\Delta\theta = 0$ の場合を取り扱う。

3.2 静特性

図9は入力 P_{in} / P_{oM} がそれぞれ -29.3 dB , -9.3 dB , -4.3 dB において P_{out} / P_{oM} が最大となるように k を選んだときの
入出力特性である。図中の○印で示す点(それが上記の入力

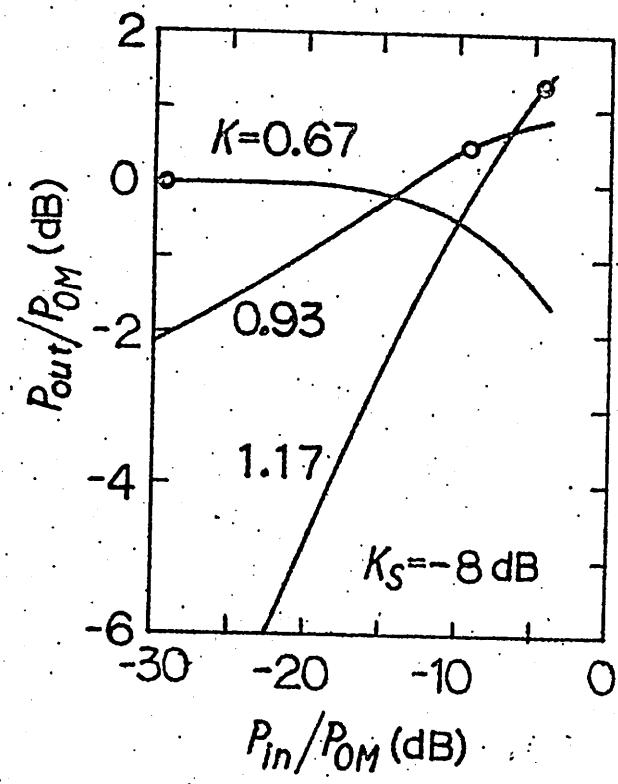


図9 入出力特性

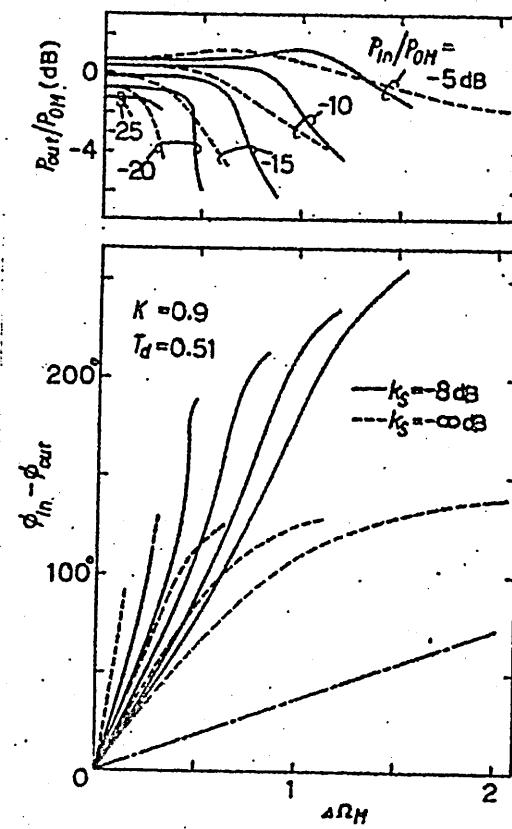


図10 静特性の比較

(と対応する)において発振器の固有電力と入力電力の和が
出力電力となっていることがわかる。この増幅器は従来の
ものと同様に k を適当に選べば“電力が合成されるので、
それぞれの増幅器の出力最大点において帯域幅、位相
応答などの特性を比較することは自己注入による効果
を調べることになる。

なお、 $k=1.17$ のときの特性は入力の減少に伴って大き
く出力が減少している。これは k が負性抵抗増幅の領域
にあるためである。

次に帯域内の特性について述べる。 $P_{in}/P_{oM}=-10\text{ dB}$
における K_M , T_{dopt} において、 $\tau_s = -8\text{ dB}$ と $-\infty\text{ dB}$ の特性
を比較すると図10となる。ここで、従来のものは図8の面
B-B'を増幅器端子としているのに対し、逆相自己注入時
の特性は面A-A'を増幅器端子としたものであるので、
面A-A' と B-B' の間を波が一往復するときの位相の変化
(これは図中に一実録線で示されている) をも含んでいる。

逆相自己注入のあるときには従来のものに比べて次の特
徴をもつ。(1) $P_{in}/P_{oM}=-5\text{ dB}$ のものを除き、帯域幅が
広く帯域内の特性もより平坦であることがわかる。
(2) 入力の変化に対する帯域幅の変化と帯域中央部付
近における位相の変化は小さい。すなわち、AM-PM変

換特性が良い。(3) 位相差 $\phi_{in} - \phi_{out}$ は、帯域のはじめにおいてはかなり大きいが、帯域中央部においては $P_{in}/P_{oM} = -5 \text{ dB}$ のものを除き小さい。

また、 $P_{in}/P_{oM} = -30 \text{ dB}$ における K_M , T_{dopt} の場合について、 P_{in}/P_{oM} が $-40 \sim -25 \text{ dB}$ の範囲で調べた特性は位相特性の形がほとんど変らないままに帯域幅が大きくなるという特徴がある。このときの帯域幅の比較を表2に示す。

表2 帯域幅の比較

3.3 過渡応答特性

図11は図10と同一条件のときの過渡特性の比較であり、帯域中央 ($\Delta Q_M = 0$) において入力波の位相角が初期値 ϕ_{ins} から 0° にステップ状に変化したときのものである。過渡応答は初期に複雑な変化をしている。位相応答の変化の様子を $\phi_{ins} = 135^\circ$ について図12に模式的に示す。自己注入のある場合に限らず、ない場合もかなりの不連続が現われるが、實際は入力信号がある立ち上り時間もついているので図12に示されるような細かい変化はあまり明瞭には現われないと期待される。

$\frac{P_{in}}{P_{oM}}$	$K_S (\text{dB})$	-11	$-\infty$
(dB)	K	0.77	1.03
	T_d	1.2	—
ΔQ_M	-25	0.142	0.057
	-30	0.090	0.032
	-35	0.053	0.018
	-40	0.030	0.011

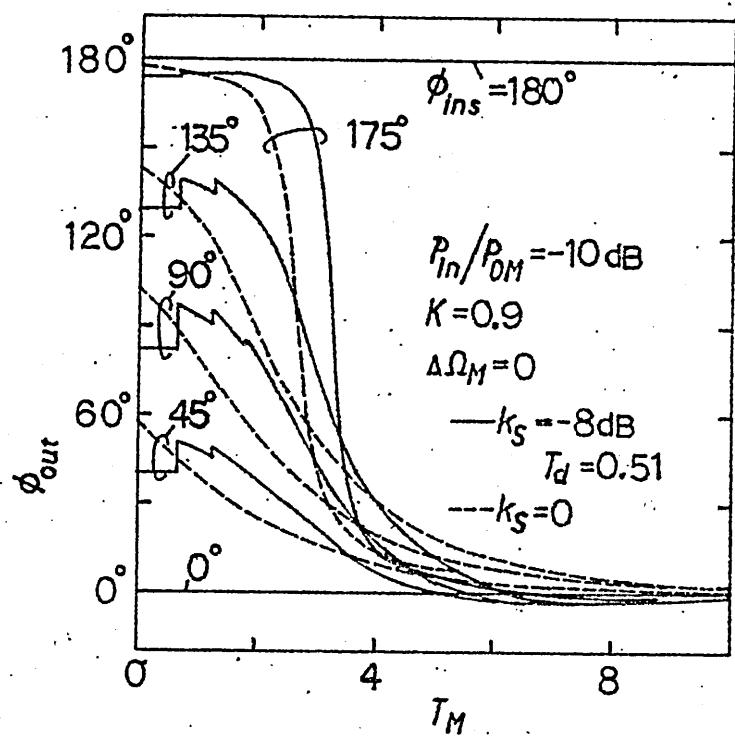


図11 位相応答の比較

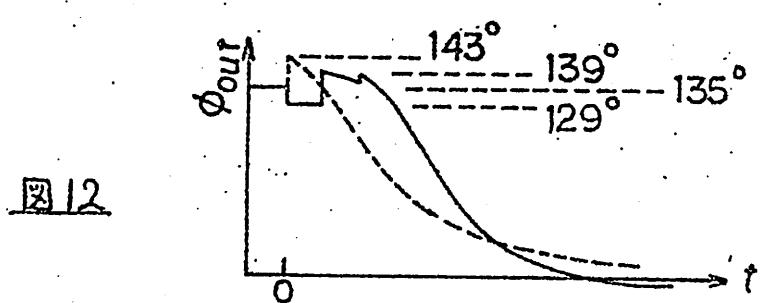


図12

これまで用いてきた位相応答時間 τ は、基本解析のところで定義したように、入力の位相が変化する時から最終値の 90% にまで立上るときのものであった。今後、通常の定義通り、最終値の 10% になるまでの位相応答の遅延時間 (T_d) と区別するために以下では遅れ時間 (呼ぶ) を τ とし、10% から 90% になるまでを立上り時間 τ_{up} と再定義する。式(13) と同様にこれらの規格化値を T_{EM} , T_{RM} と表わす。

$\phi_{\text{ins}} = 135^\circ$ のときの位相応答を比較すると表3に示すように自己注入のある場合は遅れ時間は長いが立上り時間が 0.60 倍に短縮されることがわかる。この立上り時間は入力の小さいところほど短縮効果が大きくなることは 2.3 節で述べた通りである。

ところで、 $\phi_{\text{ins}} = 180^\circ$ の場合には位相が変化しない。これは注入同期発振器においては良く知られた事柄であるが、次節で述べるように、自己注入時にはある程度改善される。

表3 位相応答の比較

R_s	0	-8 dB
T_{EM}	1.1	2.1
T_{RM}	4.7	2.8

3.4 自己注入波位相

2.3 および 3.3 節において過渡応答の解析を行ったが、これらは基本解析で述べられているように次の差分微分方程式を数値解析したものである。

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_0} \right) = \frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_0} \cos(\phi_1 - \phi) + g \left(1 - \frac{\hat{V}}{\hat{V}_0} \right) \frac{\hat{V}}{\hat{V}_0} - k_s \frac{\hat{V}_{3d}}{\hat{V}_0} \cos(\phi_{3d} - \phi - \varphi) \quad (20)$$

$$\frac{d\phi}{dT} = \frac{\hat{V}_1}{\hat{V}} \sin(\phi_1 - \phi) - \Delta \underline{\omega} - k_s \frac{\hat{V}_{3d}}{\hat{V}} \sin(\phi_{3d} - \phi - \varphi) \quad (21)$$

但し、 \hat{V}_{3d} , ϕ_{3d} は時刻 $t-t_d$ における \hat{V}_3 , ϕ_3 を表わし、それぞれ $\hat{V}_3(t-t_d)$, $\phi_3(t-t_d)$ のことである。

自己注入のない場合、式(20), (21)の右辺第3項は零である。式(21)において $\Delta \underline{\omega} = 0$ のとき、 $\phi_1 - \phi = 0$, $d\phi/dT = 0$ の定常状態を考える。入力信号の位相が元だけ変化したとすると、右辺は相変わらず零のままであるので ϕ は変化を始めてない。これは注入同期増幅器一般に共通する欠点である。一般に、 $\Delta \underline{\omega} \neq 0$, $\sin(\phi_1 - \phi) \neq 0$ のときには、 $\sin(\phi_1 - \phi)$ の値を変えない ϕ_1 の変化に対しては式(20)より \hat{V} が変化するので、式(21)

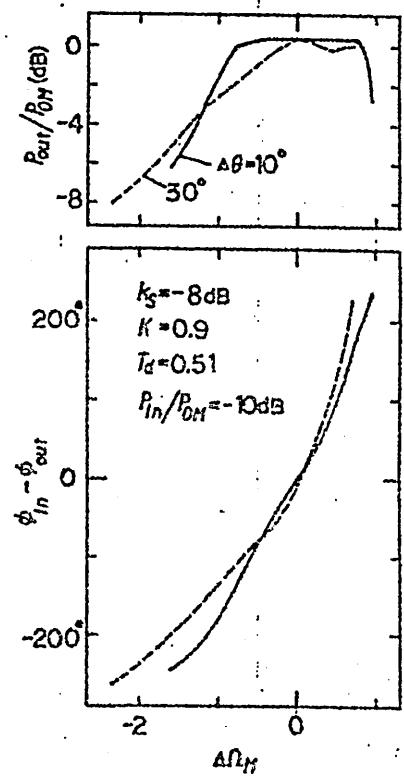


図13 静特性

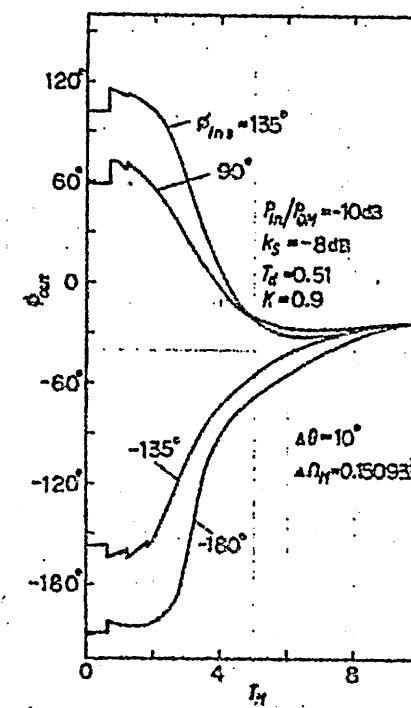


図14 位相応答

の右辺が変化し、 ϕ の変化が始まることがある。

自己注入時には第3項が加わるので、 $\Delta\theta$ を零以外の値に選ぶと、式(21)の右辺の各項がすべて零となる状態は存在しなくなり、上記の欠支が補えるように思われる。

図13は $\Delta\theta$ を変えたときの静特性の変化を示している。また、図14は $\Delta\theta=10^\circ$ のとき、定常状態において $\phi_1-\phi=0$ となるように $\Delta\varphi$ を設定したときの位相応答である。 $\phi_{ins}=180^\circ$ の応答は、 ϕ_1 が 180° 変化する場合に対応しているが位相は変化している。

4. すすび

自己注入回路の構成法を示し、静特性、過渡特性について調べた。

特に、3.4節と関連して、過渡応答については入力信号の立ち上り時間を考慮した解析が必要であること、および実験による確認が今後の問題である。

また、図11の $\phi_{ins}=175^\circ$ の応答が非常に遅いのは興味深い。

最後に、日頃有益な御討論を頂いている本学
大東延久助教授に感謝します。

文 献

- (1) 太田, 村上: “自己注入による負性抵抗発振器の雜音軽減”, 信学論(B), 51-B, 10, P.516 (昭43-10).
- (2) 飯田, 森田: “逆相自己注入同期発振器の外部注入同期特性”, 信学論(B), 62-B, 1, P.66 (昭54-01).
- (3) 池上, 中島: “マイクロ波固体発振器の同期現象とその応用”, 信学誌, 54, 5, P.693 (昭46-05).

輻射科学研究会資料

p-n 接合を用いた光変調器

大家重明

楠 陽

張 吉 夫

松 尾 幸 人

(大阪大学 産業科学研究所)

1980年 4月25日

pn接合を用いた光変調器

大綱重明・楠陽・庵吉夫・松尾幸人
(大阪大学 産業科学研究所)

あらまし

本報告はモノリシック光デバイスに適した構造として GaAs 基板上の GaAlAs 層を導波路に用いた $p^+ n^- n^+$ 構造を有する新しいタイプのカットオフ形光変調器について提案し、その基本的な動作特性を考案したのである。ここでは、逆バイアスされたpn接合ダイオードの空気層内の電界分布を計算機で求めた新しい解法を示し、この方法を上述のカットオフ形光変調器に適用し、変調空間での多次元空気層内の電界分布について数値計算の結果を示した。更に、この変調器に対して、三層スラブ状構造を仮定して、印加電圧に対する変調係数を導波路の観点から固有モード展開法を用いて解析した。この結果、変調器の素子長さ mm で変調度 90% 以上を得る: とかくできる: ことを明らかにした。

1. まえがき

光導波形変調素子は光集積回路の重要な構成要素として、近年、盛んに研究されている。また種々の半導体デバイスにおいて、ショットキー接合やpn接合が非常に多く利用されている。モノリシック光集積回路用材料として化合物半導体、とくに GaAs - GaAlAs 系が期待される。現在、この種の半導体光強度変調素子は大別して次のように分類される。

1. 導波路のカットオフを制御する構造^{1)~3)}
2. 分布結合カイト形構造^{4)~6)}
3. 周期構造を有する構造⁷⁾

これらのうち、分布結合形ならばに周期構造形はカットオフ制御形と比較すると、導波モード間の制御であって簡便的であるために使用する光源の波長や素子長などからの厳しい制約のために製作技術上の問題点をもち実現がかなり遅れていた⁵⁾。これらに対して、カットオフ制御形のものは、1970年に Hall ⁶⁾ がスラブ状の GaAs のニヨットキー接合を用いた構造のものを実現し以来、各種の構造のものが報告されている。この種の構造の利点は導波モード — 放射モード間の直接的制御であり、上記の制約が緩やかで比較的製作が容易なことにある。

筆者らはモノリシック光デバイスに適した素子として、GaAlAs を導波路に用いた光強度変調器を提案し、検討してきたが、^{7)~9)} ここ

では、その中のひとつの光機的構造の簡単なカットオフ形の半導体光
変調器について、その変調空間としての空気層内の電界の2次元分布
を数値解法によって明らかにした。更に、その結果、電気光学効果によつて
P+N接合部に生ずる不均一屈折率変化を簡単のためにステップ状
であると仮定し、三層スラブ状のモデルによって、Marcuse¹⁰⁾ の
固有モード展開による手法¹¹⁾¹²⁾ を適用して、変調器の特性を明らかに
した。

2. 二次元空気層内の電界分布の光変調器への適用

2.1 空気層内の電位分布

半導体内の電界あるいは電位を求めるためには、一般にボアソンの式、電流連続の式、およびキマリヤ濃度と電位との関係を与える式を連立させて解かねばならず。その数値解法のアルゴリズムはかなり複雑なものとなる。しかし、通常バイアス電圧を印加し、流れの電流が無限大となる場合には、近似的にボアソンの方程式で十分といえる。通常、キマリヤが完全に枯渇したモデル、いわゆる空気近似を用いての2次元での解法は電位に対する境界条件のみで解くことができる¹³⁾。

例えば、図1(a)のようなP+N接合の場合、ほとんどN層のみに空気層があると仮定し、かつ空気層境界で $d\phi/dx = 0$, $x=0$ で $\phi = 0$ の境界条件でボアソンの式を解けば、その解の電位φは放物

線と直線のつながりた(が)

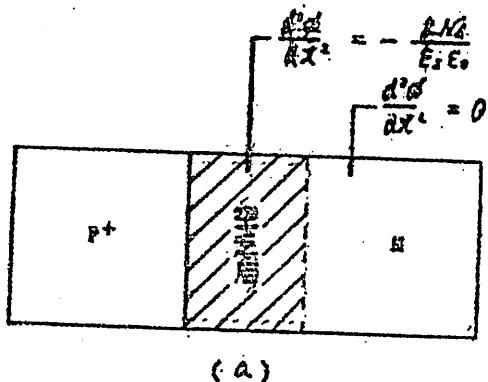
のような形となる。これに
対して、ここで著者らが行
なった計算は、空乏層内で
はポアソンの式、空乏層外
ではラプラスの式を満たし
ており、これら各々の解の
電位 ϕ が空乏層内外の境界
でなめらかにつながってい
なければならぬといふう境
界条件で解く方法である。

この計算は、ここで提案す
る光変調器のようないき層
が多次元に広がる場合にも拡張して行なうことができる。すなわち
空乏層内外で。

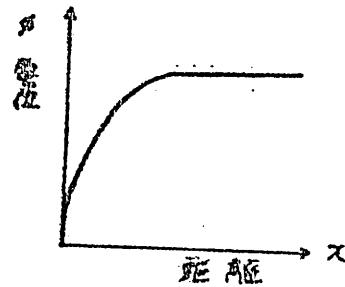
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{ENq}{\epsilon_s \epsilon_0} \quad (\text{空乏層内})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{空乏層外})$$

が満足されており、ポアソンの式とラプラスの式を反復計算させて空
乏層の境界を決定する方法である。図2はこの計算過程のフローを示
している。図3はこのような方法を図1に示した一次元の場合の計算
に適用して、解の収束の過程を示したもので、逆バイアス電圧100



(a)



(b)

図1 P+ n 接合の空乏層

マ印加時の電位分布で
ある。なお、この時の
n層のキャリヤ濃度は
 10^{15} cm^{-3} と仮定して
いる。このような方法
で求めた1次元の場合
の計算は当然のことな
がら、計算の反復回数
の増加とともに通常の
電位に対する境界条件
より求めた解とよい一
致を示すものである。

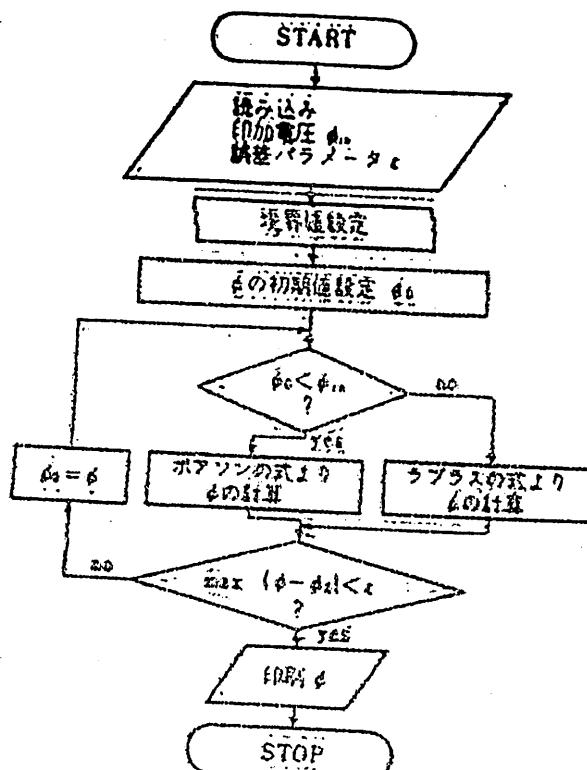


図2 空乏層内電位分布の数値計算フロー

8. 2. p-n接合を用いた光変調器とその電界分布
モノリシック光デバイスに適した素子として、GaAs基板上の Ga-
AlAs層を導波路とする変調器について、その原理と電界分布（屈折
率変化分布）を示す。

図4(a)は光のまくら向の境界が主成分であるTE様モード（Eモード）における変調器の構造で $p^+ - \text{GaAlAs}$ 層にはさまれた n-Ga-
AlAs層の上部を主として導波路とするものである。光はまくら向には
キャリヤ濃度差による屈折率差で閉じこめられているが、このままで
は、より屈折率の高い GaAs 基板方向に発散する。そこで、 $p^+ - \text{Ga}$

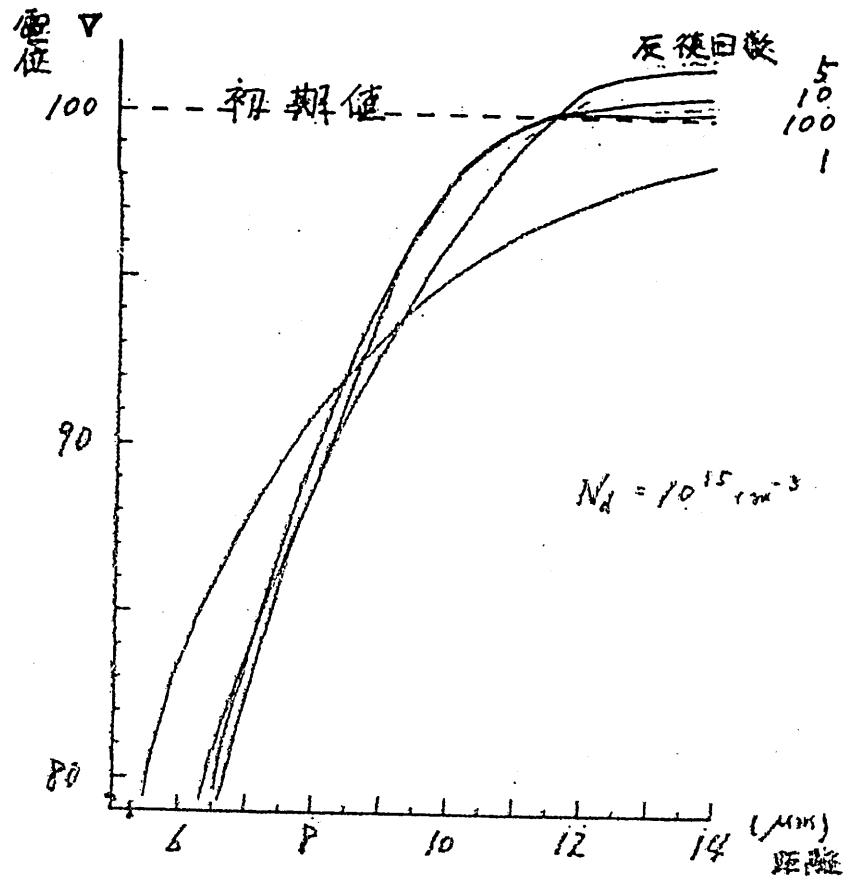


図3. 1次元電位分布計算における3Dの収束の過程

AlAs層とn+ - GaAs

基板の間に逆バイアス電圧を印加すると

電界は空乏層に集中し、その結果、n層

の上部と下部に不均一電界エミッションが生じる。

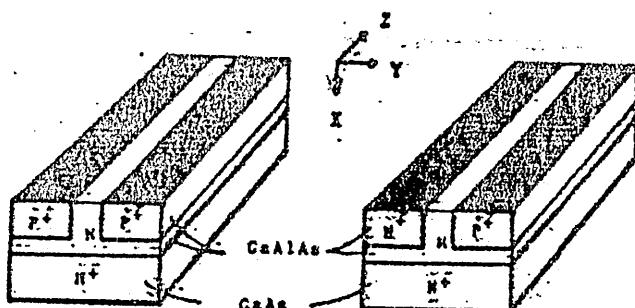


図4. 変調素子の構造

これと電気光学効果とを組み合わせることにより分離層が形成され。光は n 層上部に閉じこめられて下へと移される。光は λ 無光で電気光学効果により屈折率が下がる面に入射するものとするとき屈折率変化は。

$$\Delta n = -\frac{1}{2} k_{41} n^3 E_x$$

と表わされる。ここで、 k_{41} は GaAlAs の電気光学定数、 n は GaAlAs の屈折率である。従って、加える電界 E_x により透過度を制御することができる。図 5(a) は Δn 分布の計算結果の一例として、逆バイアス電圧 30 V 印加時の Z 方向不均一屈折の大きさを示すものである。光源に GaAs 半導体レーザーを考えた場合、導波路の GaAlAs の Al 含量はバンド間吸収をさける程度に選ぶが、一般に、この k_{41} 、 n の値は GaAs の定数と等しいと仮定できる。結局、図中の数値 10 が屈折率変化に換算して、 -3.0×10^{-4} に相当する。

図 4(b) は同じく TM 様モード (E_x モード) における変調器の構造で、 P^+ - GaAlAs $\times n^+$ - GaAlAs 層にはされた n - GaAlAs 層を導波路とするものである。この場合、GaAlAs の P^+ 層と n^+ 層の間に横方向に逆バイアス電圧を印加し、 n 層に広がる空乏層内の電界 E_y と電気光学効果とを組み合せて光を開じこめる構造となっている。光は λ 無光で電気光学効果により屈折率が上がる面に入射するものとする。

$$\Delta n = +\frac{1}{2} k_{41} n^3 E_y$$

8.

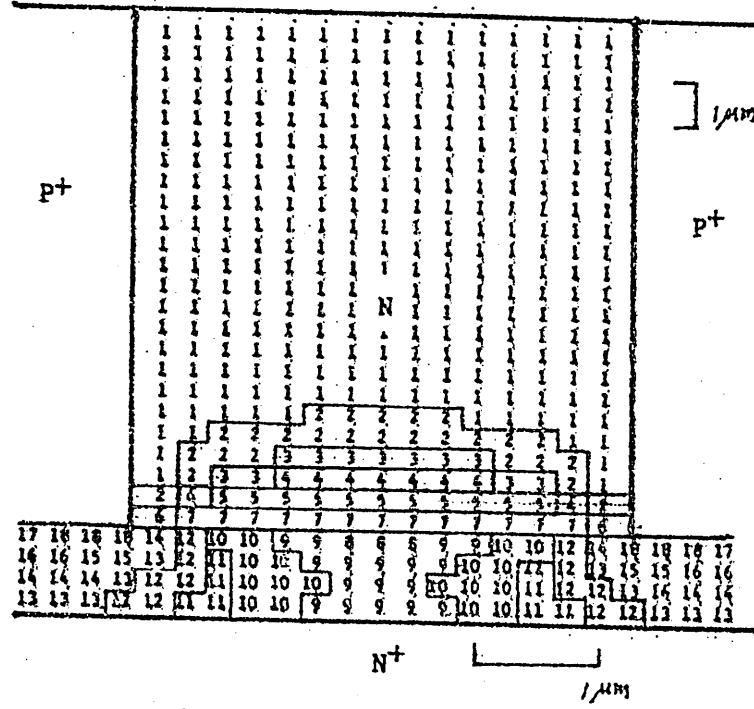
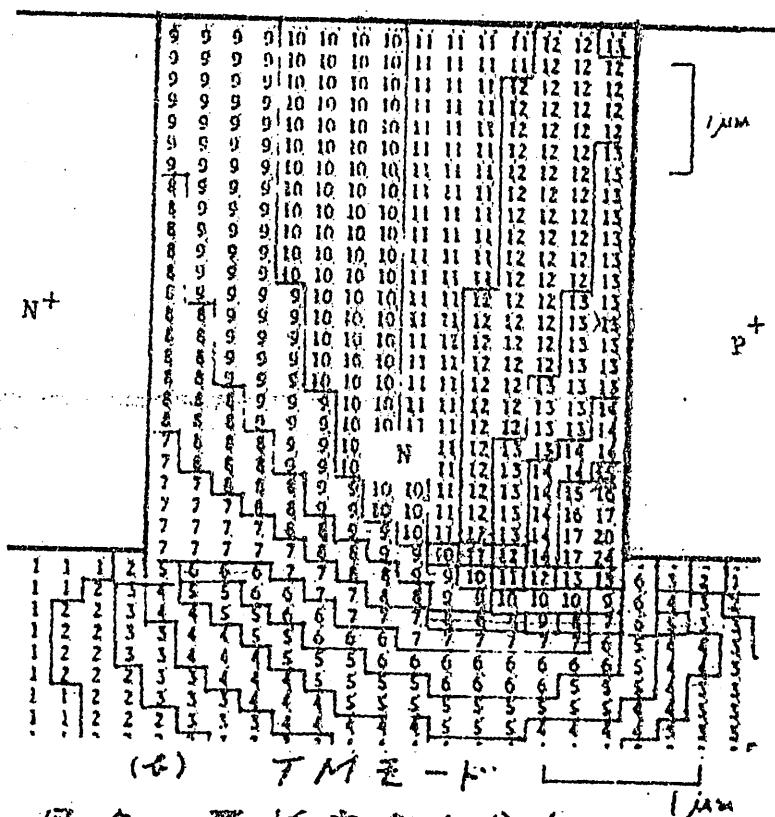
(A) $TE \pi - k^{\circ}$ (B) $TM \pi - k^{\circ}$

图 5. 折射率变化分布

- (a) -10 corresponds to $\Delta n = -3.0 \times 10^{-4}$ with $V_{bias} = -30$ V in TE mode.
- (b) -10 corresponds to $\Delta n = +2.0 \times 10^{-4}$ with $V_{bias} = -30$ V in TM mode.

となる。従って、この電界 E_y により透過度を制御することができる。
 図 5(b) は、やはりリムカ分布の計算結果の一例として、逆バイアス
 電圧 30 V 印加時の方向不均一電界の大きさを示すものである。図
 中の数値 10 が屈折率変化に換算して、 $+3.0 \times 10^{-4}$ に相当する。
 ここで、図 5(a), (b)ともに計算された層のキャリヤ密度 (N_i) は
 10^{15} cm^{-3} , 化学電離率 (ξ_s) は 12.5, P^+ 層と n^+ 層の内部は一
 定電位であり、空乏近似を仮定し、緩和法 (SOR 法) によった。また、キャリヤ密度にともなう各層における空乏層内の屈折率増加は、
 $\sim 10^{-6}$ と小さなため無視している。

3. 固有モード展開法の光変調器への適用

前節までに筆者らが提案している光変調器が逆バイアスの有無により導波路を形成、あるいは消滅し、スイッチング機能を得ることを証明してきた。ここでは漏れ導波路、いわゆる放
 射モードの解析手段のひとつである固有モード展開による手法をこの
 光変調器に適用し、その印加電圧に対する変調特性について考察する。
 通常、この光変調器のような 3 次元導波路間の問題はボックスモー
 ド的を取り扱いが必要であるが、簡単のために前節で示した不均一屈
 折率分布の導波路を三層スラブ構造で近似して、そのパワーの伝播
 の様子を調べた。

領域 I の導波部と領域 II の変調部とかく図 5 に示すように接続されて

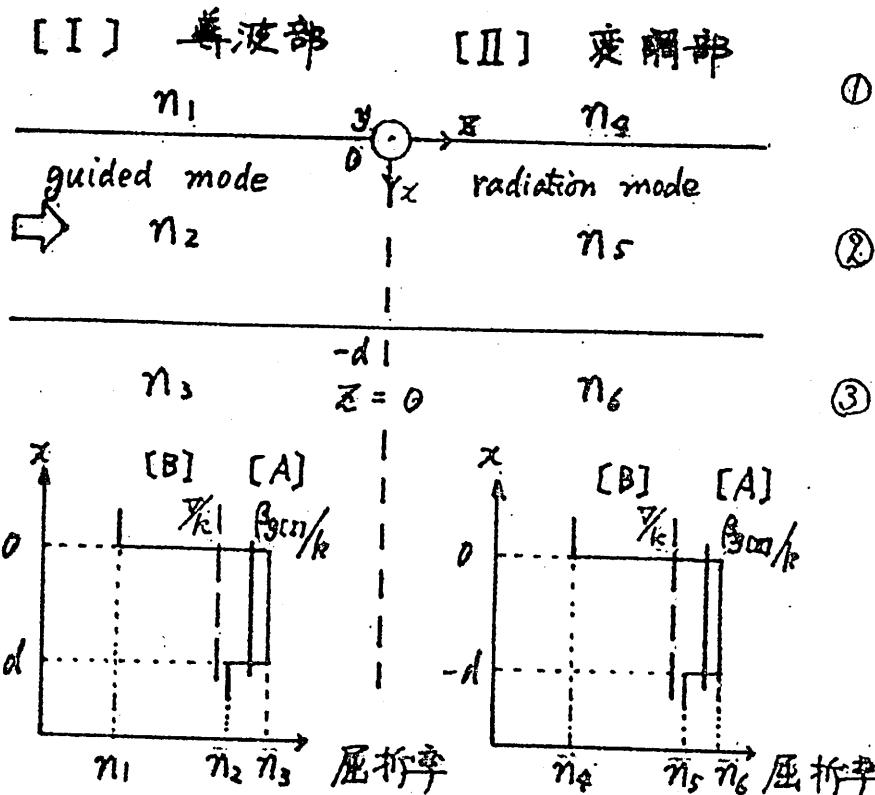


図6. 導波モードの入射

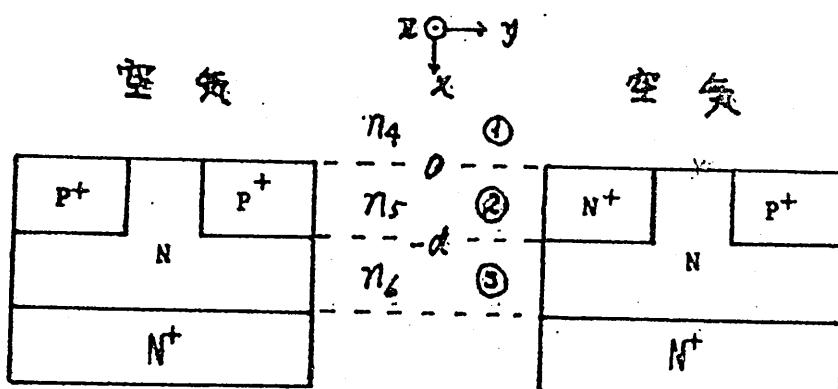
(a) $TE \pm -k$ (b) $TM \pm -k$

図7. 図6と変調器との対応

11.

いふとすと接続部の不連続によつて、反射、散乱、透過、および放射の現象が起つる。不連続面 ($z = 0$ 平面) における入射導波モードの電磁界成分を $E^{(i)}, H^{(i)}$ 、透過導波モードの電磁界成分を $E^{(t)}, H^{(t)}$ 、散乱および直通放射モードの電磁界成分を $E^{(s)}(P), H^{(s)}(P)$, $E^{(s)}(S), H^{(s)}(S)$ と表わす。但し、 P は散乱および放射モードの下部層 (n_3, n_6 層) でのズカラ向の波数である。また領域 I, II ともに存在する導波モードはたかだかひとつであるとする。簡単化のために、すべての電磁界成分はり立棟には独立、すなわち、 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ と仮定する。更に、これを変調器の構造と対応させると、図 7 のように空気層 (…①), 導波層 (…②), 分離層 (…③), 基板層 であり、基板層は電磁界成分にはほとんど影響を与えないといふと仮定することにより、三層スラブ状構造で近似することができる。従つて、この導波路の構造を簡略化しては E_y, H_x, H_z の電磁界成分のみをもつ TE モードか、 H_y, E_x, E_z 成分のみをもつ TM モードかが存在する。

3.1 TE モード入射

TE モードについて、 $z = 0, -d$ の境界面において電磁界の連続性を考慮して運動方程式を解くと次のようになる。

3.1.1 TE 導波モード

$$E_{y1} = A_g \exp(-h_1 x) \exp(-j\beta_g z) \quad \cdots x \geq 0$$

$$E_{y2} = A_g \left\{ \cos(h_2 x) - \frac{h_1}{h_2} \sin(h_2 x) \right\} \exp(-j\beta_g z) \quad \cdots -d \leq x \leq 0 \quad (1)$$

12.

$$E_{j3} = \frac{1}{2} \left\{ \cos(h_2 d) + \frac{\beta_1}{h_1} \sin(h_2 d) \right\} \exp\{h_3(x+d)\} \exp(-j\beta_3 z) \quad \cdots x \leq -d \quad \boxed{(2)}$$

ここで、

$$h_1 = (\beta_g^2 - n_1^2 k^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$h_2 = (n_2^2 k^2 - \beta_g^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$h_3 = (\beta_g^2 - n_3^2 k^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

であり、固有方程式は(2)式のように与えられる。

$$\tan(h_2 d) = \frac{h_2(h_1 + h_3)}{h_2^2 - h_1 h_3} \quad (2)$$

また、導波モードの電気的パワーパーは

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (E \times H^*) dx$$

で与えられる。この関係式より規格化振幅 A_g は

$$A_g = \left\{ \frac{4 h_2^2 \omega \mu_0 P}{\beta_g (d + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3}) (h_2^2 + h_1^2)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

となる。但し、 β_g は導波モードの位相定数、 ω は周波数、 c は光速である。

3. 1. 2 TE 放射モード

$$E_{j4} = Ar \exp(-h_4 x) \exp(-j\beta_4 z) \quad \cdots x \geq 0 \quad \boxed{(3)}$$

$$E_{j5} = Ar \left\{ \cos(h_5 x) - \frac{\beta_4}{h_5} \sin(h_5 x) \right\} \exp(-j\beta_4 z) \quad -d \leq x \leq 0 \quad \boxed{(3)}$$

$$E_{j6} = Ar [a \cos\{h_6(x+d)\} + b \sin\{h_6(x+d)\}] \exp(-j\beta_4 z) \quad x \leq -d \quad \boxed{(3)}$$

ここで、

$$k_0 = (A^2 - n_s^2 k^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k_5 = (n_s^2 k^2 - A^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k_6 = (n_s^2 k^2 - A^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$a = \cos(k_5 d) + \frac{k_6}{k_5} \sin(k_5 d)$$

$$\theta = \frac{k_6}{k_5} \sin(k_5 d) - \frac{k_6}{k_5} \cos(k_5 d)$$

また、放射モードの各方向のパワーは

$$P_S(\theta, \theta') = \frac{\beta_r}{2\pi \mu} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(\theta) E_y^*(\theta') dx$$

で与えられる。従って、規格化振幅 A_T は、

$$A_T = \frac{\left(\frac{240 \mu P}{\beta_r T E} \right)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

となる。但し、 β_r は放射モードの位相定数である。

3. 1. 3 不連続面 ($\theta = 0$) での TE モードの界の連続性

不連続面 ($\theta = 0$) において、固有モードで展開すれば、

$$\left. \begin{aligned} (1 + a_r) E_y^{(H)} + \int_0^\infty \delta_r(p) E_y^{(H)}(p) dp &= C_r E_y^{(H)} + \int_0^\infty \delta_r(p) E_y^{(H)}(p) dp \\ (1 - a_r) H_x^{(H)} + \int_0^\infty \delta_r(p) H_x^{(H)}(p) dp &= C_r H_x^{(H)} + \int_0^\infty \delta_r(p) H_x^{(H)}(p) dp \end{aligned} \right] \quad (4)$$

ここで、 a_r は反射係数、 C_r は透過程数、また $\delta_r(p)$ 、 $\delta_r(p)$ はそれぞれ、散乱および反射係数である。領域 I、II において、導波毛

14.

一ト、散乱および直進放射モードの位相定数をそれぞれ $\beta_{g(I)}$, $\beta_{g(II)}$
 $\beta_{r(I)}$, $\beta_{r(II)}$ とい。モード間の直交性を考慮することにより。(4)
式は(5) 式のように書きなおすことができる。

$$\begin{aligned}
 & (1+\alpha_r)\beta_{r(II)} \int_0^\infty E_y^{(I)} E_j^{+(k)}(P) dx + \beta_{r(II)} \int_0^\infty \delta_r(P) \int_0^\infty E_y^{(I)}(P) E_j^{+(k)}(P) dx dp \\
 & = \delta_r(P) 2\omega \mu P \\
 & (1-\alpha_r)\beta_{g(II)} \int_0^\infty E_y^{(I)} E_j^{+(k)}(P) dx - \int_0^\infty \beta_{r(I)} \delta_r(P) \int_0^\infty E_y^{(I)}(P) E_j^{+(k)}(P) dx dp \\
 & = \delta_r(P) 2\omega \mu P \quad (5) \\
 & (1+\alpha_r)\beta_{g(II)} \int_0^\infty E_y^{(I)} E_j^{+(k)} dx + \beta_{g(II)} \int_0^\infty \delta_r(P) \int_0^\infty E_j^{(I)}(P) E_j^{+(k)} dx dp \\
 & = C_t 2\omega \mu P \\
 & (1-\alpha_r)\beta_{g(II)} \int_0^\infty E_y^{(I)} E_j^{+(k)} dx - \int_0^\infty \beta_{r(I)} \delta_r(P) \int_0^\infty E_y^{(I)}(P) E_j^{+(k)} dx dp \\
 & = C_t 2\omega \mu P
 \end{aligned}$$

ここで、等者らの考えていいる等波部 [I] と変調部 [II] の接続面での
不連続性は電気光学効果による屈折率差 ($\Delta n = \pm \frac{1}{2} k_1 n^3 E_{x,y}$) であ
り、微小変化とみなす得るので、(5) 式の項中で、

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \delta_r(P) \int_0^\infty E_j^{(I)}(P) E_j^{+(k)}(P) dx dp &= \int_0^V \delta_r(P) \int_0^\infty E_j^{(I)}(P) E_j^{+(k)}(P) dx dp \\
 &+ \int_V^\infty \delta_r(P) \int_0^\infty E_j^{(I)}(P) dx dp \quad (6)
 \end{aligned}$$

と考える。すなわち、波数 P によって $\beta_{r(I)} \doteq \beta_{r(II)} \doteq (\beta_{g(I)} \doteq \beta_{g(II)})$

15.

とみなせる領域[A]とそうでない領域[B]とにPの積分範囲をわけて
考えることができる。(5)式は[A]領域、[B]領域で、個々に解けば…
・[A]領域で、

$$\left. \begin{aligned} \theta_t(P) &\approx \frac{\rho_{\text{air}}}{2\omega_0 c p} \int_a^b \bar{E}_y^{(t)} E_y^{*(t)} dx \\ C_f &\approx \frac{\rho_{\text{air}}}{2\omega_0 c p} \int_a^b \bar{E}_y^{(t)} \bar{E}_y^{*(t)} dx \\ a_r &\approx 0 \\ \theta_r(P) &\approx 0 \end{aligned} \right] \quad (7)$$

となり、一方、[B]領域では、

$$\left. \begin{aligned} \theta_t(P) &\approx 0 \\ \theta_r(P) &\approx 0 \end{aligned} \right] \quad (8)$$

となる。従って、(7)式、(8)式より、[A]領域のみで積分範囲を考
えることができ、このことは、物理的には、このような薄渦部から、
微小な屈折率変化($< 10^{-3}$)を介しての変渦部への伝播では、不直
接面での反射と散乱が無視できることを意味している。すなわち、近
似的に、

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_y(x, z) &= C_f E_y^{(t)} + \int_0^P \theta_t(P) E_y^{(t)(P)} dP \end{aligned} \right] \quad (9)$$

それがモードの展開係数として、

$$C_t = \frac{\beta_0 \omega}{2\mu_0 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_y^{(n)} E_y^{*(n)} dx$$

$$\beta_t(\rho) = \frac{\beta_0 \omega}{2\mu_0 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_y^{(n)} E_y^{*(n)}(\rho) dx$$

を得る。この (9) 式は、(1), (3) 式を用いて決定し得る式である。

3. 2 TMモード入射

TMモードについても本質的には TE モードのそれと同様であり。
電磁界は次のようすに与えられる。

3. 2. 1 TM導波モード

$$\left. \begin{aligned} H_{y1} &= A_g \exp(-k_1 x) \exp(-j\beta_g z) && \cdots x > 0 \\ H_{y2} &= A_g \left\{ \cos(k_1 x) - \frac{n_2^2 k_1}{n_1^2 k_2} \sin(k_1 x) \right\} \exp(-j\beta_g z) && \cdots -d \leq x \leq 0 \\ H_{y3} &= A_g \left\{ \cos(k_1 d) + \frac{n_2^2 k_1}{n_1^2 k_2} \sin(k_1 d) \right\} \left[\exp\{k_3(x+d)\} \exp(-j\beta_g z) \right] && \cdots x \leq -d \end{aligned} \right] \quad (10)$$

ここで、

$$k_1 = (\beta_g^2 - n_1^2 k^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k_2 = (n_1^2 k^2 - \beta_g^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k_3 = (\beta_g^2 - n_2^2 k^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

であり、固有方程式は (11) 式のように与えられる。

$$\tan(\theta_{cd}) = \frac{n_2^2 n_2 (n_1^2 k_2 + n_3^2 k_1)}{n_3^2 n_1^2 k_2^2 - n_3^2 k_1^2 k_3} \quad (11)$$

また、標準化振幅 A_g は

$$A_g = \left(\frac{\omega \epsilon_0 P}{\rho_g} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2 n_2 n_1^2 k_2}{(n_1^2 k_2^2 + n_2^2 k_1^2)^{\frac{1}{2}}} \left[d + \frac{n_2^2 n_3^2 (k_2^2 + k_3^2)}{n_3 (n_1^2 k_2^2 + n_2^2 k_1^2)} + \frac{n_2^2 n_1^2 (k_2^2 + k_1^2)}{k_1 (n_1^2 k_2^2 + n_2^2 k_1^2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

となる。

3.2.2 TM~~モード~~-ド

$$H_{y4} = Ar \exp(-k_4 x) \exp(-j \beta_F z) \quad \dots x \geq 0$$

$$H_{y5} = Ar \left\{ \cos(k_5 x) - \frac{n_5^2 k_5}{n_4^2 k_5} \sin(k_5 x) \right\} \exp(-j \beta_F z) \quad \dots -d \leq x \leq 0 \quad (12)$$

$$H_{y6} = Ar \left[a \cos \{ k_6 (x+d) \} + b \sin \{ k_6 (x+d) \} \right] \exp(-j \beta_F z) \quad \dots x \leq -d$$

となる。

$$k_4 = (\beta_F^2 - n_4^2 k_e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k_5 = (n_5^2 k_e^2 - \beta_F^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k_6 = (n_6^2 k_e^2 - \beta_F^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$a = \cos(k_5 d) + \frac{n_5^2 k_5}{n_4^2 k_5} \sin(k_5 d)$$

$$b = \frac{n_5^2 k_5}{n_6^2 k_6} \sin(k_5 d) - \frac{n_6^2 k_6}{n_4^2 k_5}$$

また、標準化振幅 Ar は

$$Ar = \frac{\left(\frac{\omega \epsilon_0 n_6^2 P}{\beta_F \pi} \right)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

となる。

3.2.3 不連続面 ($\Sigma = 0$) での TM モードの電場の連続性

TE モードの場合と全く同様に不連続面 ($\Sigma = 0$) において、固有モードで展開して (13) 式を得る。

$$\left. \begin{aligned} H_y(x, z) &= C_t H_y^{(t)} + \int_0^P \theta_t(p) H_y^{(t)}(p) dp \\ C_t &= \frac{\rho_{\text{g}}[\Sigma]}{2\pi\epsilon_0 P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n_k^{(i)}} H_y^{(i)} H_y^{*(k)} dx \\ \theta_t(p) &= \frac{\rho_{\text{rec}}[\Sigma]}{2\pi\epsilon_0 P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n_k^{(i)}} H_y^{(i)} H_y^{*(k)}(p) dx \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

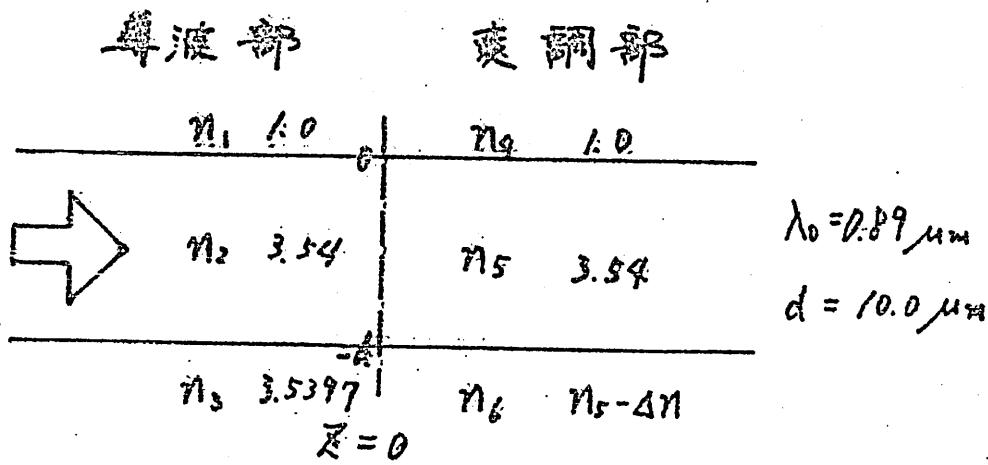
但し、 $n_k^{(i)}$ ($i = 1 \sim 6$) はそれぞれの領域での屈折率である。 (9) 式と同様 (13) 式も (10) , (12) 式を用いて決定することができる。

3.3 TE モード, TM モード入射によるパワーの伝播

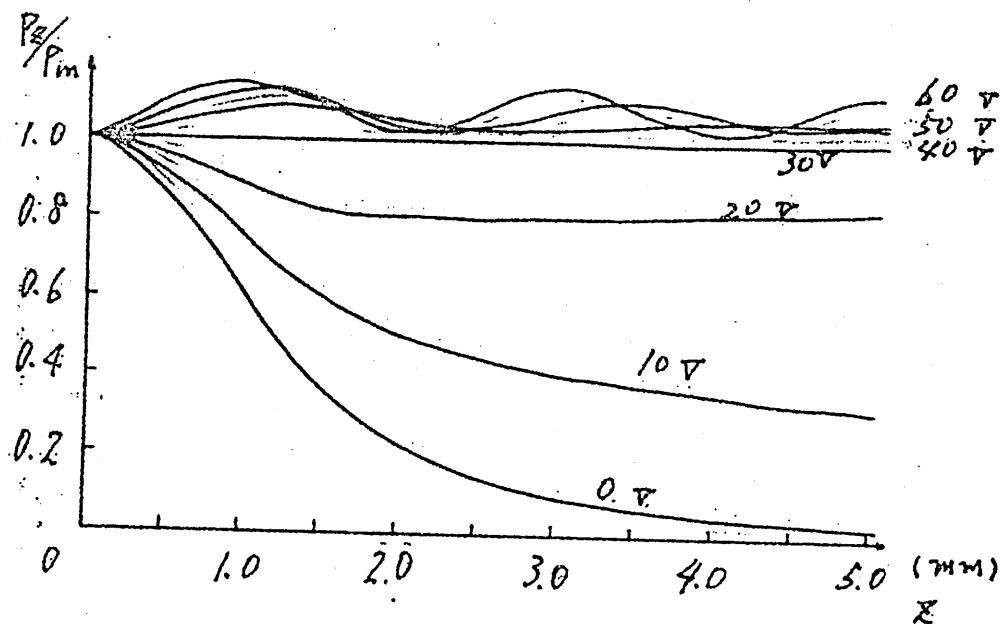
—— 数値例 ——

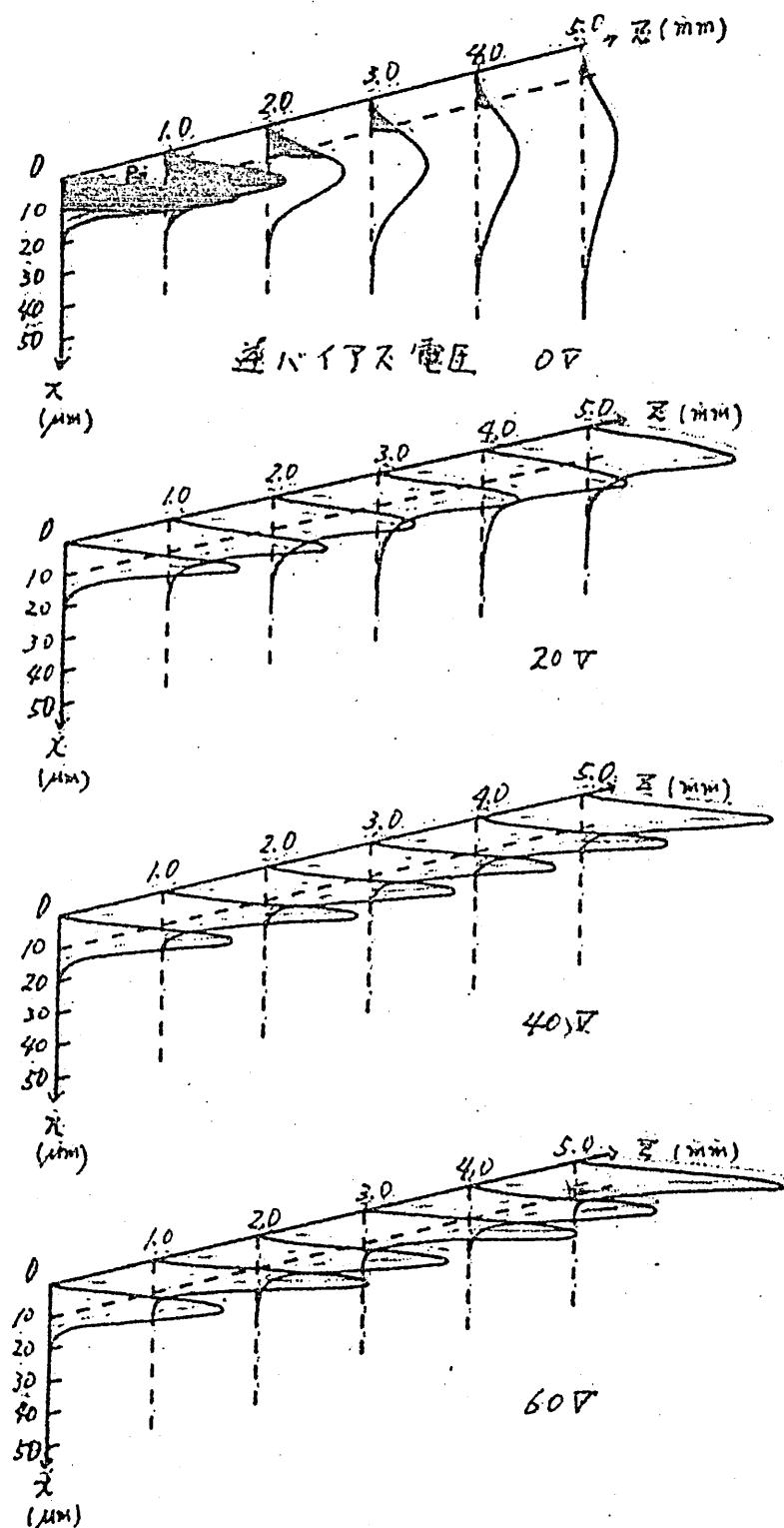
TE モード, TM モードの各方向伝播によるパワー分布はそれなりに、 (9) 式と (13) 式を用いて計算すればよいが、筆者らの提案する変調器の特性を調べるために、ここでは具体的な数値例をあげて検討する。

例えば、図 4 のような変調器の構造に対して、それぞれ、図 8(a), 図 9(a) のような数値例で導波部と変調部とか接続されているとする。TE モード、すなわち、図 8(a) の場合、逆バイアス電圧を印加することによって、電光効果により、 n_6 の屈折率が変化する。また、図 9(a) の TM モードの場合に n_5 の屈折率が変化する。図 8

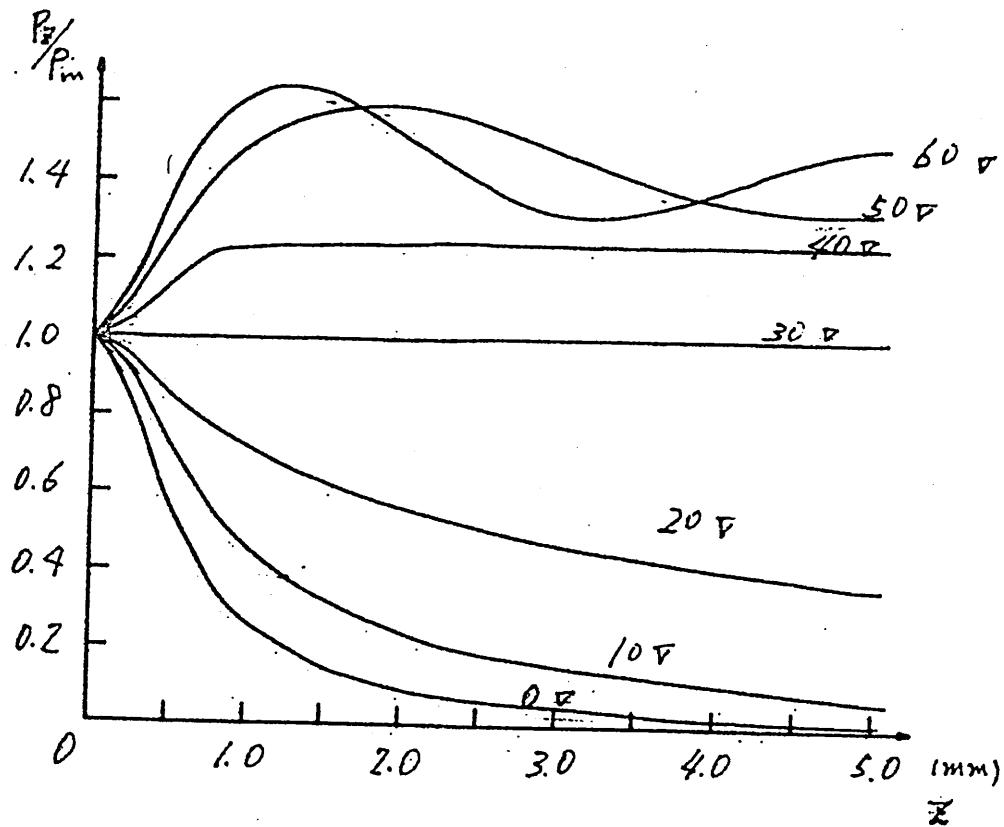
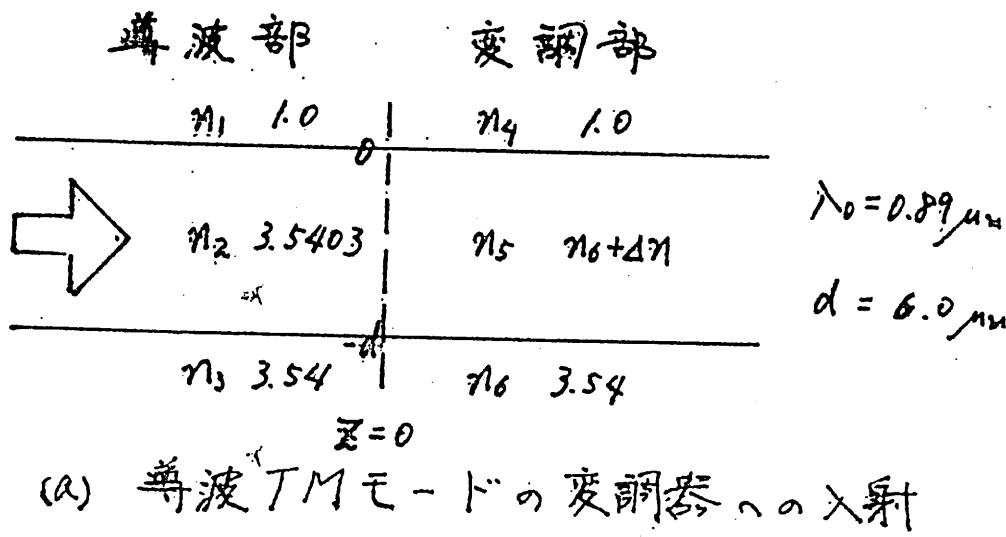


(a) 導波 TEモードの遷調部への入射

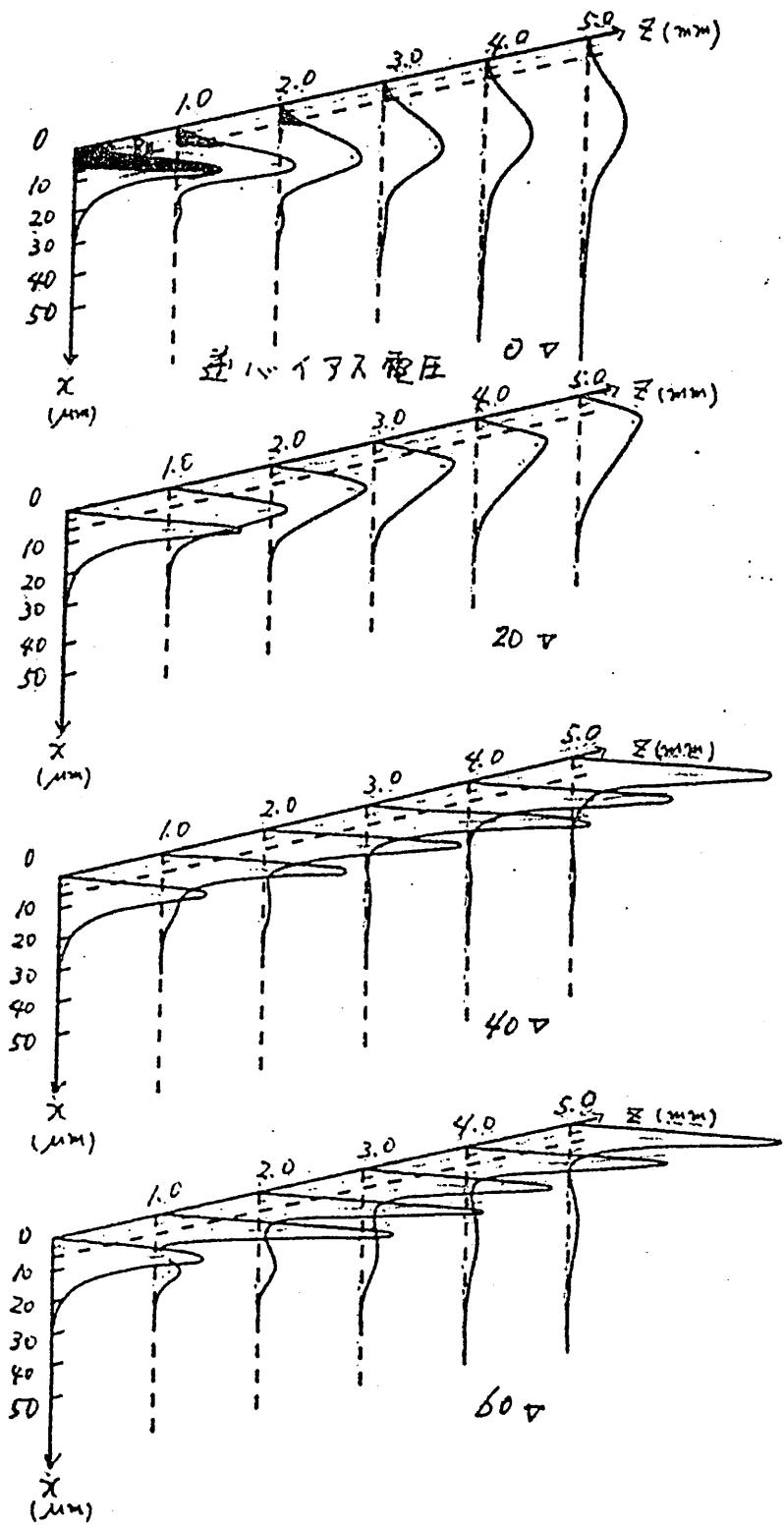
(b) 逆ハイアス電圧をパラメータとした
TEモードパワー・フロー



(c) TEモードパワー分布波形
図8. TEモード変調特性



(b) 遠バイアス電圧をパラメータとした
TMモードハーフワーフロー



(c) TMモードパワー分布波形

図 9. TMモード変調特性

(a), 図9(a)はそれが逆バイアス電圧とパラメータとしたる方向の変調部導波路中のパワー変化を示すものであり、図9(c), 図9(d)は同じく該方向のパワー分布(P_x)を示している。

逆バイアス電圧を印加しない時(0 V)は、全くの放射モードであり、該方向に對して危険に瀕する。この側では、TEモードで約3mm, TMモードで約2mmの距離で、パワーは8との入射パワーの1/10に減衰する。印加電圧が増加するにつれて、光の導波量が増加し始め、次第に放射モードから導波モードへと交換される。逆バイアス電圧20 Vで、この場合、TE, TMモードとともに変調部においても導波モードとなるが、導波部と変調部で導波路内の定常的な光の開口こめ量が異なるため、放射モードをともなうので、少なからず、パワーの減衰をともない、変調部の三層構造で決まる定常的な導波モードに接近していく。電圧30 Vでは変調部にかかる電界を一定として近似しているため、放射モードの寄与はなくなり、100%通過する。更に電圧が増加すれば、逆に導波部より変調部の開口こめかくなるので、パワーは導波路内に次第に乗ずし、振動しながらも変調部の三層構造で決まる導波モードに近づいていく。

3.4まとめ

本変調器は逆バイアスの有無により導波路を形成、または消滅し、スイッチングの機能を果たし得るものであり、素子長数mmで変調度90%を得ることができる。また、この結果より、パワー・バンド幅比としても、0.3~0.5 MW/MHz程度は十分可能であることがわ

4. まとめ

以上、本論文ではモノリシック化に適した素子として、pn接合を用いた GaAlAs 光変調器の一形式を提案し、TEモード(エミート)・TMモード(エキモード)両構造における変調器の動作原理を逆バインダース印加時の2次元空気層内電界分布をポアソンの式とラプラスの式を用いて計算することにより説明した。更に、この変調空間に対しては近似的に屈折率変化がステップ状であると仮定し、三層スラブ状のモデルとみなし、固有モード展開法により、ひとつめの数値例をあげて、詳しい変調特性を考察した。この結果、導波部と変調部の接続面での不連続が電気光学効果による屈折率変化程度であれば、不連続面での反射と散乱は無視し得るものであり、素子長さ 3mm で 90 % の変調度が得られることがわかった。今後、GaAlAs 介電層を通じてのパワーの漏れを考慮した四層構造での解析、更には、不均一屈折率分布を考慮した解析が必要である。

謝辞

本研究を進めるにあたり、有益な助言ならびに討論を頂いた安藤治博士に深く感謝します。

参考文献

- (1) Hall David, Yarif Amnon and Garmire Eric : "Observation of propagation and its control in thin optical waveguides", Appl. Phys. Lett., 17, P127 (1970)
- (2) Campbell, J.C., Blum, F.A and Shaw, D.W. ; "GaAs electro-optic channel-waveguide modulator", Appl. Phys. Lett., 28, P690 (1975)
- (3) Reisinger, A.R., Bellavance, D.W. and Lawley, K.L. ; "Intensity modulator in GaAlAs metal-gap channel waveguides", Appl. Phys. Lett., 32, P663 (1978)
- (4) Mercatelli, E.A.J. ; "Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics", Bell System Technical Journal, Sep. 88 P2071 (1969)
- (5) Tada Kuniro and Hirose Keikichi ; "A new light modulator using perturbation of synchronism between two coupled guides", Appl. Phys. Lett., 25, P561 (1974)
- (6) Reisinger, A.R., Bellavance, D.W. and Lawley, K.L. ; "GallAs Schottky directional-coupler switch", Appl. Phys. Lett., 31, P836 (1977)

- (7) 安, 武田, 張, 松尾: “輻射損を考慮した分布フランク
反射形 GaAlAs 光変調器”, 第39回応用物理学会講演
予稿集, 3a-P-10 (昭53)
- (8) 大家, 安, 楠, 張, 松尾: “不均一電界を用いた
GaAlAs 光強度変調素子”, 第40回応用物理学会
講演予稿集, 1a-R-8 (昭54)
- (9) 大家, 楠, 張, 松尾: “pn 接合を用いた GaAlAs
光変調素子の一形式” 信学論(C)採録決定, 5月號
- (10) Dietrich Marcuse: “Radiation Losses of
Tapered Dielectric Slab Waveguides”,
B.S.T.J. Feb. P273 (1970)
49.
- (11) Mahmoud, S.F. and Beal, J.C.: “Scattering of
surface waves at a dielectric discontinuity
on a planar waveguides”, IEEE Trans.
Microwave Theory & Tech., MTT-23, 2 p193 (1975)
- (12) 山本, 牧本: “誘電体漏れ導波路の
固有モードによる取扱い” 特定研究「光導波
エレクトロニクス」 第18, 19回研究会資料
(昭54)
- (13) 例えは 菅野海雄 “半導体の物理と素子(I)”
昭晃堂 (昭48)

輻射科学研究会資料
(June 27 1980)

不均質光ファイバの漸近
ベクトル波モード

橋本正弘
(大阪電気通信大学)

昭和 55 年 6 月 27 日
(於 中央電気ラジオ)

1. 考え方

波動問題の基本方程式である Sturm-Liouville 方程
式はまだに解かれていません。1926年に沿用する WKB
解(既に Liouville と Green 等によっても用いられて)
は漸
近似解として有望視されていましたが、その後次項の導出が解析的
に困難であるから(Heckert, Jeffrey, Kramer 等)
定式化されたオーバー近似解のみを WKB 解と称するようになりました。
当時 Wentzel [1,2] が提唱した Bohr-Sommerfeld 条件の複素
積分表現は彼の不願意で許されておらずと注目されましたが、
(Kramer による半整数量子条件の発見を再度くわしく述べ
ています)。しかし Wentzel の提案は an物理的, 統一的背景
として 1932 年に Dunham [3] によって解決されました。その後、多くの W
KB 解をためるため多くの努力が費され、1950 年頃から開
発された Related equation method, Uniform asymptotic
method, Coupled equation method の基礎となりました。これらは
一般的 Modified WKB methods と呼ばれます。これらは
ほとんど無関係に並んでいて Wentzel-Dunham の方法とは
別々の "Modified" WKB methods は 1960~70 年
に開発されました。YU" エーの著者, Maslov の
-1-

1960年K. Siegertが理論用に非常に短い論文があるが、先に述べた2つの1970年WKB理論を橋渡しうる(私の個人的見解ではあるが)点として独創性があり、ひいては結果が注目に値するものであつた。

これは今、完成をいつてゐる(Kirschner等による)新たな存在問題点を指摘せられてはいるが、この対象はほとんどが1次元の Schrödinger 方程式である(radial Schrödinger 方程式に対する解法は上のとおり異所で述べられてゐる)。Maslov⁴⁾が与えた radial Schrödinger 方程式の固有値公式は、光の所のスカラー波函数に適用できる(Ikano⁵⁾によれば、多項式分布アーバーに適用して結果、Felsen の方法を始めたのに一致したと報告している)。著者は Dunham の流儀に基づき、マイバウト(スカラー波)の固有値を条件を複素積分で表わし、Maslov が与えた異形(主に簡単な形で)固有値公式を導いた。解析手段として複素積分を利用した Maslov 法は、たゞ直命の事に特徴がある。著者はさらに、解析的複素平面上の諸点が主につかつたベクトル微動(Hilbert-Adams)の漸近解析にその手法を用いた結果、振幅の4乗の誤差が成立する。ベクトル微動の固有値を一般形で導いた。即ち、その結果、

ベクトルモードの縮退現象に解析的検討を加えられる方には多くの門。本手法の物理的解釈は一般に複素量を扱うため必然ではない（Dunhamの説明を参考とする）。
1930年頃に議論で Local momentum あるいは Extended local wavenumber の概念（文献[4]）があるが引用文献を参照）と結ぶべきと分明である。文献[8]では結果のみを報告したが本文では上記の事柄を小字で詳しく述べる。
3. (解析手法の歴史的背景については末尾の資料を参照)

2. ベクトル波動、漸近展開

電磁界では通常、誘導体線路と取り扱われる。ここでは一般的に、誘導率および磁導率の両者を半径 $r=0$ で不均一であるとする。これらの導体の変化は係数 $k(r)$ と局所 impedance $y(r)$,

$$k(r) = \omega \times \sqrt{\text{誘導率} \times \text{磁導率}}$$

$$y(r) = \omega \times \sqrt{\text{誘導率} + \text{磁導率}}$$

で表される。両者の π にアインルヒ共に $r=0$ で最大で π で零となる。両者の $y(0)=0, k'(0)=0$ (1は絶縁) となる。伝播定数 β は因解法入で表す。

$$\beta = k(0) \sqrt{1-\lambda} \quad (1)$$

λ の値は 従来 $1/\varepsilon - 1$

$$\varepsilon \equiv 1/k(0) \quad (2)$$

で漸近的に展開式をとる。

$$\lambda = \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \varepsilon^4 \lambda^{(3)} + \dots \quad (3)$$

とし、液滴方程式の中での陽の形で表すと λ は媒質による次を定義する。

$$g(r) \equiv [\beta/k(r) - 1] \quad \lambda = \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots \quad (4.1)$$

$$h_2(r) \equiv k'(r)/k(r) \quad (4.2)$$

$$g_2(r) \equiv y'(r)/y(r) \quad (4.3)$$

$$h_1(r) \equiv \frac{1}{2} h_2'(r) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2} h_2(r) \right] h_2(r) + \frac{1}{4} g_2^2(r) \quad (4.4)$$

$$g_1(r) \equiv \frac{1}{2} g_2'(r) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} + h_2(r) \right] g_2(r) \quad (4.5)$$

$$k(r) \equiv k(0) \sqrt{1-f(r)} \quad (4.6)$$

$$P_0(r) \equiv \sqrt{\lambda - f(r)} \quad (4.7)$$

アインハルトは一般にアインハルト(矢)方向の電界 E_z と磁界 H_z が結合してのハイドロモードである。今これらを合成すると $\Psi(r), \Psi(r)$ で代表する。

$$E_z = \frac{1}{\sqrt{k(r)} y(r)} \Psi(r) \quad (5.1)$$

$$H_z = -j \sqrt{\frac{y(r)}{k(r)}} \bar{\Psi}(r) \quad (5.2)$$

円筒座標系 (r, θ, z) における電界 Θ 依存性を $e^{jm\theta}$ ($m=0, 1, 2, \dots$) とするとき $\Psi(r)$ が満たす方程式は次のようになる [2]。

$$\bar{\Psi}'' + \left(\frac{1}{r} - 2\frac{P'_0}{P_0}\right)\bar{\Psi}' + \left\{ \frac{P_0^2}{\epsilon^2} - \frac{m^2}{r^2} + (h_z + g_z) \frac{P'_0}{P_0} - h_r - g_r \right\} \bar{\Psi} = \frac{2m}{r}(1+g) \frac{P'_0}{P_0} \bar{\Psi} \quad (6.1)$$

$$\bar{\Psi}'' + \left(\frac{1}{r} - 2\frac{P'_0}{P_0}\right)\bar{\Psi}' + \left\{ \frac{P_0^2}{\epsilon^2} - \frac{m^2}{r^2} + (h_z - g_z) \frac{P'_0}{P_0} - h_r + g_r \right\} \bar{\Psi} = \frac{2m}{r}(1-g) \frac{P'_0}{P_0} \bar{\Psi} \quad (6.2)$$

ただし P_0 と h_r, g_r は $r=r_1$ ($\lambda=f(r_1)$) で $P_0=0$ で定義される singularities を持つ。この点 r_1 は $\lambda=f(r_1)$ の逆数 $r_1=f^{-1}(\lambda)$ であり 後述する大切な事柄である。

式(6)を漸近的に解く。導波管内の場合は $r=0$ を含むことによって解が得られるか、このことは最後で考慮するとして、まずは次のようすの “一つの解” を求める。したがって外縁部の場合は $r=0$ と $r=\infty$ で解が異なることに留意する必要がある。

$$\bar{\Psi}(r) = e^{\frac{j\delta}{2}} \frac{P_0(r)}{\sqrt{r}} e^{-j \int_{j\delta}^r P_e(r) dr} \quad (7.1)$$

$$\bar{\Psi}(r) = \pm e^{\frac{j\delta}{2}} \frac{P_0(r)}{\sqrt{r}} e^{-j \int_{j\delta}^r P_m(r) dr} \quad (7.2)$$

ここで $\bar{\Psi}$ は Ψ の複素共役 (E 波と H 波の合成比) とすると、 δ は正の微小値 (最後では $\delta \rightarrow 0$ とする) で、 $-j\delta$ は積分の

下限を表す。一般の下限は任意であるが、混成比 10° メートルで導入したため、式(7.1)(7.2)の積分下限は同一の値に近くなければならない。ここでは特に便宜上負の絶値を取った。

さらに $r=r_1$ における特異性も考慮して式(7.1)を取る。ここに
ここで $r=r_1$ における便宜上積分路と下図のように取ることにする。

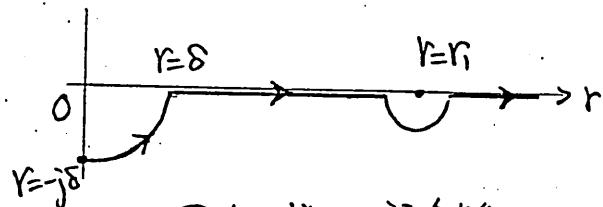


図1 式(7)の積分路

$r=-\delta$ からみて r の点は半径 δ の $1/4$ 円周を反時計方向に周り、 r の実軸上を正の方向へ進み、 $r=r_1$ の近傍で r_1 点と左側に見えた時に直線し再び実軸上を正の方向へ進む。 $r=0, r_1$ 点のまでは半径が極めて小さい。

$|t|=\infty$ で $r>r_1$ で $P_0=j|P_0|$ とする。これより式(7)で $r>r_1$ の場合、
複素数 t は増大する。すなわち式(7)で示された界は $r \rightarrow +\infty$ を含む
する。式(5)と式(6)に代入すると P_e, P_m に対する非線形総合級分
方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & -jP'_e - P_e^2 + \left\{ \frac{P_0^2}{\varepsilon^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \left(\frac{P'_0}{P_0} \right)' - \left(\frac{P'_0}{P_0} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} + h_2 + g_2 \right) \left(\frac{P'_0}{P_0} \right) - h_1 - g_1 \right\} \\ & = \pm \frac{2m}{r} (1+g) \left(\frac{P'_0}{P_0} \right)' e^{jR} \cdot \exp \left[j \int_{-\infty}^r (P_e - P_m) dr \right] \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned}
 & -jP_m' - P_m^2 + \left\{ \frac{P_0^2}{\varepsilon^2} - \frac{m^2 \frac{1}{4}}{r^2} + \left(\frac{P_0'}{P_0} \right)' - \left(\frac{P_0'}{P_0} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} + h_2 g_2 \right) \left(\frac{P_0'}{P_0} \right) - h_1 g_1 \right\} \\
 & = \pm \frac{2m}{r} (1+g) \left(\frac{P_0'}{P_0} \right) e^{-\delta r} \cdot \exp \left[-j \int_{r_0}^r (P_e - P_m) dr \right] \quad (8.2)
 \end{aligned}$$

$(m=0, 1, 2, \dots)$

この時点で、ベクトル方程の式を解くよりに式(8.1)(8.2)を解いて
ベクトル場を求めることが出来る。ただし式(8)が基本となる。

式(8)で示す P_e, P_m の関係式(7)の界は複数回の反射界を示
している。これが r の範囲である。

$$\delta < r < +\infty ; r \neq r_i, \delta \rightarrow 0 \quad (9)$$

式(7)が成立して、先に述べたようにこの反射界は $r \rightarrow \delta, r \rightarrow +\infty$ で発散する。この発散界の複素共役界は独立な二つの解で
ある。この二種の解を適当な線形結合の形で表せば $r = \delta, +\infty$
で発散しない、いわゆる有界な界を構成できるのである。これを式(8)を漸近展開していくため漸近解特有の発散である。しか
しこれは有界な固有モード自身の性質ではない。

式(7)との複素共役界から2つの点の Singularities を除去して
る条件は式(7)の界の、 $r = \delta$ から $+\infty$ までの位相推移がπの整
数倍であることにある。特に重、重には P_0 に対する回転が掛けて
あること、 P_0 から $r = r_i$ をこえると $\pi/2$ の位相変化があることを考

底面近似式(7)による(相界面)を用いて取り扱うと次のようになります。

$$\operatorname{Re} \int_{+\delta}^{\infty} P_e(r) dr = \pi(l + \frac{1}{2}) \quad (10,1)$$

$$\operatorname{Re} \int_{+\delta}^{\infty} P_m(r) dr = \pi(l + \frac{1}{2}) \quad (10,2)$$

$$(l=0, 1, 2, \dots)$$

が、共に成立する二式ある。上で(10)式より $\delta \rightarrow +0$ とすれば、

$P_e(0) = \pi \lambda \sinh \Sigma \delta - \frac{1}{\lambda} \cosh \Sigma \delta$, ここでこの式の量を両式に代入

同時に代入する。以上の概念の下で解析を進める。すな

$$P_e(r) = \frac{P_0}{\varepsilon} + P_1 + \varepsilon P_{e2} + \varepsilon^2 P_{e3} + \varepsilon^3 P_{e4} + \dots \quad (11,1)$$

$$P_m(r) = \frac{P_0}{\varepsilon} + P_1 + \varepsilon P_{m2} + \varepsilon^2 P_{m3} + \varepsilon^3 P_{m4} + \dots \quad (11,2)$$

と展開する。 $\Sigma l = \gamma_1 z$ が同様である。

$$\Sigma = \Sigma^{(0)} + \varepsilon \Sigma^{(1)} + \varepsilon^2 \Sigma^{(2)} + \dots \quad (11,3)$$

これを式(8)に代入して Σ のべきに従順し各項を両面で等しいとする
次式を得る。

$$P_1 = -j \frac{1}{2} \frac{P'_0}{P_0} \quad (12,1)$$

$$P_{e2} = P_2 = \frac{m}{r}(1+g)(\frac{P'_0}{P_0^2}) \cosh \Sigma^{(0)} \\ + [\frac{1}{2} g_2 (\frac{P'_0}{P_0^2}) - \frac{1}{2} (\frac{g_1}{P_0})] = \frac{m}{r}(1+g)(\frac{P'_0}{P_0^2}) \sinh \Sigma^{(0)} \quad (12,2)$$

$$P_{m2} = P_2 = \frac{m}{r}(1+g)(\frac{P'_0}{P_0^2}) \cosh \Sigma^{(0)} \\ - [\frac{1}{2} g_2 (\frac{P'_0}{P_0^2}) - \frac{1}{2} (\frac{g_1}{P_0})] = \frac{m}{r}(1+g)(\frac{P'_0}{P_0^2}) \sinh \Sigma^{(0)} \quad (12,3)$$

$T = T_e = V$

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{m^2 - 1}{r} + j P_1}{P_0} \right]' - \frac{1}{8} \frac{(P'_0)^2}{P_0^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{m^2 + \frac{3}{r}}{r} + h_2 \right] \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{P_0} \right) \quad (12.4)$$

左に

$$P_{e_3} = -j \left(\frac{P_{e_2}}{2P_0} \right)' e^{j\Omega^{(0)} F} \quad (12.5)$$

$$P_{m_3} = -j \left(\frac{P_{m_2}}{2P_0} \right)' + e^{-j\Omega^{(0)} F} \quad (12.6)$$

F は 次の量である。

$$F = \pm \frac{m}{r} (1+8) \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) \left\{ \Omega^{(1)} + j \int_r^R \left[\Omega_2 \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) - \left(\frac{g}{P_0} \right) \right] dr \right. \\ \left. \mp \frac{2m}{r} (1+8) \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) \sinh j\Omega^{(0)} \right\} \quad (12.7)$$

以下 同様の手続で 次項を 算出する。

3. 固有値の算出

式(12.1)から 式(12.7)まで 従つて 固有値入力を 入るの図を、すなはち入力 Σ^4 の Σ^4 の Σ^4 の Σ^4 を計算する。

式(7)の界は 先に述べたように $r \rightarrow +\infty$ で 終わる。 $k(r)$ と $y(r)$ の Σ^4

式(7)の $k'(0)=0$, $y'(0)=0$ であるため $r=0$ 附近では 平坦である。

したがって $r \rightarrow +\infty$ の程度は ステップインティラス フィルタや

複数形インティラス フィルタの界で 推察 される [12]。 $n_1 = n_2$

$r \rightarrow 0$ で 正、正か $\pm 2\pi$ のハーモニカル (奇数) $H_m^{(2)}$ の形を取る。つまり

r^m の程度で 限られる。これは (式(8)を しきりよう) P_e, P_m, b_m

$r \rightarrow 0$ で

$$P_e, P_m \sim -j \frac{(m-\frac{1}{2})}{r} \quad (13)$$

となることを意味する。したがって これが $-j\delta$ のときの円周上の
積分(図1)は $\delta \rightarrow +0$ で 有界となる。

$$\int_{-j\delta}^{\delta} P_e \text{ or } P_m dr = \frac{\pi}{2} (m - \frac{1}{2}) \quad (14)$$

式(10)にこれを代入すると

$$\operatorname{Re} \int_{-j\delta}^{\infty} P_e(r) dr = \pi \left(l + \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \right) \quad (15.1)$$

$$\operatorname{Re} \int_{-j\delta}^{\infty} P_m(r) dr = \pi \left(l + \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \right) \quad (15.2)$$

となる。上式の積分路は図1のように取られる。この両式が同時に
 $\operatorname{Re} \int_{-j\delta}^{\infty}$ と $r=0, \infty$ で有界である形となる。

モードの構造(界の空間的振舞)は式(7)(8)(12)にみられる $m =$
についての複数の値、すなはち m の値等は全く異なる。整数 l
は ($r=0$ および $r=\infty$ を含む) または l に進行する “進行波” の方向を
確定成分が $r=0$ から $r=\infty$ に進行方向を受ける位相進移(πl)
を示す指数であり、モードの径方向指数に附加される量である。
また、しかし 構造的にはモードの径方向指数 $n (= 1, 2, 3, \dots)$
が その成分の電磁場ではなく transverse 成分の電磁場分布

を考慮して作られる。ここではステップインテグラスマイバーム
放物形インテグラスマイバームに適用されるモードの分類法
[13-15]を用いることとする。それによれば(付録1)

$$l = \begin{cases} n-1 & ; \text{複号の上級} \\ n & ; \text{複号の下級} \\ \text{または } m=0 \end{cases} \quad (16)$$

で表される。上式は

$$l = n + \frac{|\pm m - 1| - 1}{2} - \frac{m}{2} \quad (17)$$

とも書ける。式(16)はステップインテグラスマイバームにおけるモード
E1 構成式である[13, 14]。特に複号に1印をつけ HE_{mn} モード,
 EH_{mn} モード, または $m=0$ における TE_{0n} モード, TM_{0n} モードと名付
けられる。Yip等[15]は放物形インテグラスマイバームの漸近モード
界からステップインテグラスの場合に対することからやほり[8]-
[9]と名づけられた。ここではさらに一般的なマイバーム取扱い
によるモードの区分は Yip 等のに準ずることにする。したがって
以下では複号において HE, EH モード呼ぶこととする。

このように, HE_{mn} , EH_{mn} (TE_{0n} , TM_{0n}) モードの条件はそれに
より次の両式の複号に対応して 2式が同時に満たされねば
ならぬ。

$$\operatorname{Re} \int_{-j\delta}^{\infty} P_e(r) dr = \pi \left(n + \frac{|Im-1|-1}{z} + \frac{1}{4} \right) \quad (18.1)$$

$$\operatorname{Re} \int_{-j\delta}^{\infty} P_m(r) dr = \pi \left(n + \frac{|Im-1|-1}{z} + \frac{1}{4} \right) \quad (18.2)$$

ここで、 P_e, P_m は漸近線に沿って、これを有限個の級数で近似計算していることを第K回頭に入れておく必要がある（つまり厳密なものを用いていよいよこと忘れなければならぬ）。その限りにおいて以下議論を進行。

$P_0(r)$ は $r=r_1$ での枝点を r^* ($f(r)$ が $r=r_1$ で滑らかである)。

今枝線は $r=0$ と $r=r_1$ の実軸上の区间である。したがって枝線の下では異符号を取る。これから r は、今、図1の複合路上にあるとす。すなはち複素共役量 r^* に対する

$$P_0^*(r) = -P_0(r^*) \quad (19)$$

の関係を書き出せる。 r^* は図1の複合路の共役複合路（実軸に対する対称の位置（上側）にある）と並んである。式(12.1)で与えられる P_1 は r_1 と同一である。 P_{e2}, P_{m2} も同じ関係を書き出せる。

$$P_1^*(r) = -P_1(r^*) \quad (20)$$

* $f'(r_1)$ が有限の値を取るとき $r=r_1$ で $P_0(r)$ は root の形の特異性を持つ。もし $f'(r_1)$ が非零に近くなるとき $P_0(r)$ の特異性は root の形とは異ったものになる。本章では root の形を仮定しているため $f'(r_1)$ が $\pm \infty$ であるとき誤差が目立つようになる。Kirchhoff 等はこの点を指摘している。

$$P_{e_2}^*(r) = -P_{e_2}(r^*) \quad (21)$$

$$P_{m_2}^*(r) = -P_{m_2}(r^*) \quad (22)$$

式(12.7)で定義される $F(r)$ の積分の下限 $-j\delta$ は $\delta \rightarrow 0$ と約束される。

$f(r)$ であるから被積分項の $r=0$ 以下の積分は消去。IF が $F(r)$ の積分下限は 0 に置き換えられる。この表現の下で式

$$F^*(r) = -F(r^*) \quad (23)$$

である。式(12)の初項はいつれも同一条件をみたす。結局

$$P_{e_3}^*(r) = -P_{e_3}(r^*) \quad (24.1)$$

$$P_{m_3}^*(r) = -P_{m_3}(r^*) \quad (24.2)$$

である。高次項も同様な条件が成立すると思われるが、ここではそれ以上は角を山下に置いて、すくと P_e, P_m を 4 項まで取る。
式(23)を用いて

$$P_e^*(r) = -P_e(r^*) \quad (25.1)$$

$$P_m^*(r) = -P_m(r^*) \quad (25.2)$$

である。この条件を利用して、 P_e の積分値 F_{e0} との共役値の和。

IF

$$\begin{aligned} & \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-j\delta}^L P_e(r) dr + \int_{-j\delta}^{r^*} P_e^*(r) dr^* \right\} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-j\delta}^L P_e(r) dr + \int_L^{r^*} P_e(r^*) dr^* \right\} \\ &= \int_C P_e(r) dr \end{aligned} \quad (26)$$

と書ける。 $P_m(r)$ の積分は ω を同じくする。 $\Gamma = \Gamma' + C$ (図2) に等しい積分路である。

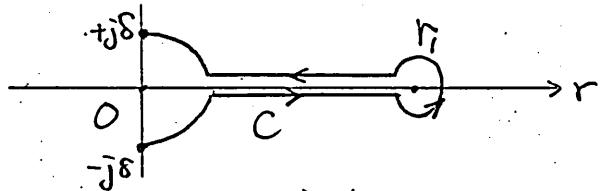


図2 積分路 $C (\delta \rightarrow 0)$

以上のように積分路 C が式(12)を満足する。

$$\int_C P_e(r) dr = \pi (2n + |m| - 1 + \frac{1}{2}) \quad (27,1)$$

$$\int_C P_m(r) dr = \pi (2n + |m| - 1 + \frac{1}{2}) \quad (27,2)$$

となる。 $\delta \rightarrow 0$ は省略される。上式の左辺を計算すれば左列、右列各項の積分を検討する。すなはち(12.1)より

$$\int_C P_1(r) dr = \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

であることがわかる。 P_1 の積分は $\Gamma = +j\delta, -j\delta$ の端点の値は互いに相殺される。以下が ω 同じ軸を用いる。 $\omega(27,1)(27,2)$ が同時に成立するため P_{e2} と P_{m2} の積分値は同一である。すなはち式(12.1), 式(12.2)が

成立する。

$$\int_C \left[\frac{1}{2} g_2 \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g_1}{P_0} \right) + \frac{m}{r} (1+g) \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) \sinh \Omega^{(0)} \right] dr = 0 \quad (29)$$

が成り立つ。この条件より

$$\sinh \Omega^{(0)} = \pm \frac{1}{m} \frac{\int_C \left[\frac{1}{2} g_2 \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g_1}{P_0} \right) \right] dr}{\int_C \left[\frac{1+g}{r} \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) \right] dr} \quad (30)$$

とすり $\Omega^{(0)}$ が決定された。53 と $m \neq 0$ のとき 3 と $m=0$ のとき
TEm, TMm のときには式(7.1)(7.2) が定義され

$$\Omega = \begin{cases} +\infty & ; TE_{0n} \text{ たり} \\ -\infty & ; TM_{0n} \text{ たり} \end{cases} \quad (m=0) \quad (31)$$

である。式(29)の下に

$$\begin{aligned} \int_C P_{ez}(r) dr &= \int_C P_{mz}(r) dr = \int_C P_z(r) dr \\ &= m \cosh \Omega^{(0)} \int_C \left[\frac{1+g}{r} \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) \right] dr \\ &= - \int_C \frac{1}{8} \frac{(P'_0)^2}{P_0^3} dr + \frac{1}{2} \int_C \left[\frac{m^2 g^2}{r} + h_2 - g_2 \cosh \Omega^{(0)} \right] \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) dr \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_C \left[\frac{h_1 - g_1 \cosh \Omega^{(0)}}{P_0} \right] dr \end{aligned} \quad (32)$$

と書ける。すなはち P_{ez}, P_{mz} の積分値は等しい。 $(12.5), (12.6)$ が

$$\int_C F(r) dr = 0 \quad (33)$$

である。このとき $\Omega^{(0)}$ は

$$\int_C P_{ez}(r) dr = \int_C P_{mz}(r) dr = 0 \quad (34)$$

となる。式(33)の条件より $\Sigma^{(1)}$ を決定する式が導かれる。

$$\Sigma^{(1)} = - \frac{\int_C G(r) H(r) dr}{\int_C G(r) dr} \quad (35)$$

ただし

$$G(r) = \frac{m}{r}(1+g)\left(\frac{P'_0}{P_0^2}\right) \quad (36.1)$$

$$H(r) = j \int_0^r \left[g_2 \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right) - \frac{g_1}{P_0} \right]$$

$$= \frac{2m}{r}(1+g)\left(\frac{P'_0}{P_0^2}\right) \sinh \Sigma^{(0)} J dr \quad (36.2)$$

(ここで $F(r) = \pm G(r) \{ \Sigma^{(1)} + H(r) \}$ であることを用いてある)。

$H(r)$ は $r = -j0$ と $r = +j0$ で零である。また $r \in C$ に沿って順次左側へ上

側から $-j0$ に近づけると式(29)の条件より $H(r)$ は零である。

$$H(-j0) = H(+j0) = 0 \quad (37)$$

すなはち $H(0) = 0$ である。しかし $H(r)$ は多価関数であるため $r = 0$ ま

で $r = r_1$ 点へ上側から近づける場合と下側から近づける場合に二通り

を取る。他方 $G(r)$ は常に右半平面の上下で異符号を取る。結局

$G(r) \cdot H(r)$ の積の値は $r = r_1$ を除いて正則である。したがって式(35)

の右辺は r_1 の周りの留数計算で求められる。

$$\int_C G(r) H(r) dr = \oint_{r=r_1} G(r) H(r) dr = 2\pi j \times (GHの留数) \quad (38)$$

付録あるいは別紙では GH の $r = r_1$ における留数値は

$$2 \left[(r-r_1)^3 (H''G - H'G') \right]_{r=r_1}$$

である。この直線式(36)を代入して求められる。 $\lambda = f(r)$

$$\begin{aligned} & j \frac{\partial u}{\partial r} \left[1 + g(r_1) \right] \left\{ g'_2(r_1) - 2g_1(r_1) - \left[\frac{g'(r_1)}{1+g(r_1)} - \frac{1}{r_1} \right] g_2(r_1) \right\} \\ & \times \left[(r-r_1)^3 \left(\frac{P'_0}{P_0^2} \right)^2 \right]_{r=r_1} \end{aligned}$$

である。 $\left[J_{r=r_1} \right]_{\pm} = [4f'(r_1)]^{-1}$ である。 $f = f(r)$

$$\int_C G(r) H(r) dr = m \pi \left[\left(\frac{1+g}{P_f} \right) \left(g'_2 - 2g_1 - \left(\frac{g'}{1+g} - \frac{1}{r} \right) g_2 \right) \right]_{r=r_1} \quad (37)$$

以上で $P_1, P_{e_2}, P_{m_2}, P_{e_3}, P_{m_3}$ は各々の項別積分を行つて。

次にかくまう式(30)(32), (35)の C 上積分をさすに荷物式(37)を用いる。

$$\frac{P'_0}{P_0^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{f'}{P_0} \right), \quad \frac{(P'_0)^2}{P_0^3} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(\frac{f'}{P_0} \right)^2$$

を利用して。 $\lambda = f(r)$ の微小変動は積分外へ出せる。そこで、積

分は $r=r_1$ の円上に積分は無視できるほど小さい。したがって

2 積分は $r=0$ と $r=r_1$ の実数積分となる。このとき Maslow

[4], Krieger 等 [16], Kirschner 等 [5], Keswani [17] によると

取り入れて結果式を簡潔化すれば(21)式。これは $F(r)$, F_0 である。

$$\int_C G(r) dr = -2m \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_1} \left(\frac{1+g}{r} \frac{1}{P_0} \right) dr$$

とすると、 $\lambda = \lambda_1$ は Λ の固有値であることは注目すべきである。

式(28)(30)(32)(34)(35)(39) より

$$\begin{aligned} \pi\left(n + \frac{|m-1|-1}{2}\right) &= \int_0^{r_i} \frac{P_0 dr}{\varepsilon} \\ &- \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \int_0^{r_i} \frac{(f')^2}{P_0} dr \right. \\ &- \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_i} \frac{\frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r} + h_2 - g_2 \coth \Sigma^{(0)}}{P_0} f' dr \\ &\left. + \int_0^{r_i} \frac{h_1 - g_1 \coth \Sigma^{(0)}}{P_0} dr \right] + O(\varepsilon^3) \quad (40) \end{aligned}$$

を得る。右辺には λ が隠の形で含まれている。すなはち式(30)より

$$\Sigma^{(0)} = \pm \sinh^{-1} \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_i} \frac{g_2 f'}{P_0} dr - \int_0^{r_i} \frac{g_1}{P_0} dr}{2m \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_i} \frac{1+8}{r P_0} f' dr} \right\} \quad (41)$$

右辺に含まれる λ は 式(40)で決定される λ であるが、 $\lambda = \lambda^{(1)}$ で置換え

らうる。式(35)より

$$\Sigma^{(1)} = -\frac{\pi}{2} \frac{\left[\left(\frac{1+8}{r f'} \right) \left(g'_2 - g_2 - \left(\frac{8'}{1+8} - \frac{1}{r} \right) g_2 \right) \right]_{r=r_i}}{\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_i} \frac{1+8}{r P_0} f' dr} \quad (42.1)$$

ここでやけに λ_1 は $\lambda^{(1)}$ で置換えらう。しかし式(4)の条件から

左辺

$$\Sigma^{(1)} = 0 \quad (42.2)$$

となる。

式(40)の右辺にあら入に式(3)の展開式を代入し、結果式をΣで
くわ展開する。等は第1項で

$$\int_0^{r_i} \frac{P_0}{\varepsilon} dr = \left(\int_0^{r_i} \frac{P_0 dr}{\varepsilon} \right)_{\lambda=\lambda''} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_0^{r_i} \frac{dr}{P_0} \right)_{\lambda=\lambda''} \lambda^{(2)} + \dots$$

となる。したがって λ'' は次式の決定式の WKB 解である。

$$\int_0^{r_i} \frac{P_0}{\varepsilon} dr = \pi(n + \frac{1+m-1-1}{2}) \quad (43)$$

$\lambda^{(2)}$ は展開式の形をとる。

$$\begin{aligned} \lambda^{(2)} = & \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \int_0^{r_i} \frac{(f')^2}{P_0} dr - \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_i} \frac{\frac{m^2+1}{r} + h_2 - g_2 \coth S_L^{(0)}}{P_0} f' dr \right. \\ & \left. + \int_0^{r_i} \frac{h_1 - g_1 \coth S_L^{(0)}}{P_0} dr \right\}_{\lambda=\lambda''} \end{aligned} \quad (44)$$

ここで

$$T = \left(\int_0^{r_i} \frac{dr}{P_0} \right)_{\lambda=\lambda''} \quad (45)$$

式(43)(44)(45) および式(4)(42.2) が最終結果である。これらは定
意の媒質において成立する一般式である。

4. スカラーベクトルの固有値との関係

ここで言及するスカラーベクトルとは Weak inhomogeneity の仮定の下でスカ
ラーベクトルとしたときに得られる運動方程式である。すなはち、式(6.1)

式(6.2)で h_1, h_2, g_1, g_2 が F_G の Σ に恒等的であるとおいたときに得られる
運動である。付録1で示すように

$$\phi'' + \frac{1}{r}\phi' + \left[\frac{P_0^2}{\varepsilon^2} - \frac{|\pm m-1|^2}{r^2} \right] \phi = 0 \quad (46)$$

を解くと等価である。上式の固有値は既に文献[7]で示され、ここで
その前節の結果から導かれる。式(41)(42)で $g_1, g_2 \neq 0$ となる μ
 $\Sigma^{(1)}=0, \Sigma^{(0)}=0$ となる。式(44)は $\coth \Sigma^{(0)}$ は

$$\coth \Sigma^{(0)} = \coth \Sigma^{(0)} + \tanh \frac{\Sigma^{(0)}}{2} \rightarrow \coth \Sigma^{(0)} \quad (47)$$

となる。したがって式(44)の左辺にあたる次量は式(41)で与えられる

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_1} \frac{g_2 f'}{P_0} dr - \int_0^{r_1} \frac{g_1}{P_0} dr \right)_{\lambda=\lambda^{(1)}} \coth \Sigma^{(0)} \\ & \rightarrow \pm 2m \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_1} \frac{f'}{r} dr \right)_{\lambda=\lambda^{(1)}} \end{aligned} \quad (48)$$

となる。この結果よりスカラーテルの固有値

$$\lambda_{\text{scalar}} = \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_{\text{scalar}}^{(2)} + O(\varepsilon^4) \quad (49)$$

は

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{scalar}}^{(2)} &= \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \int_0^{r_1} \frac{(f')^2}{P_0} dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_1} \frac{(\pm m-1)^2 - 1}{r P_0} f dr \right\}_{\lambda=\lambda^{(1)}} \end{aligned} \quad (50)$$

となり文献[7]の結果と一致する。 $\lambda^{(1)}$ は式(43)で示すとおり、 T は
式(45)で定義される量である。 $\lambda^{(2)}$ に対する $\lambda^{(1)}$ の差を $\Delta \lambda_V^{(2)}$

とある。

$$\lambda^{(2)} = \lambda_{\text{scalar}}^{(2)} + \Delta \lambda_V^{(2)} \quad (51)$$

$\Delta \lambda_V^{(2)}$ が λ の値に合致する項に含まれる、二項式

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_V^{(2)} &= \frac{1}{T} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{r_i} \frac{\pm \frac{2m}{r} + h_2 - g_2 \coth \Sigma^{(0)}}{P_0} f' dr \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{r_i} \frac{h_1 - g_1 \coth \Sigma^{(0)}}{P_0} dr \right\}_{\lambda = \lambda^{(1)}} \end{aligned} \quad (52)$$

として表わせる。

5. 断熱半導体の熱拡散率が多項式分布であるとき

具体的例を示す。最初に熱拡散率分布と多項式分布を取上げ

3.

$$f(r) = A_1 r^2 + A_2 r^4 + A_3 r^6 \quad (53)$$

となる

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= S(\varepsilon \sqrt{A_1}) + \frac{3A_2}{8A_1} S^2(\varepsilon \sqrt{A_1})^2 \\ &\quad + \left(\frac{5A_3}{16A_1^2} - \frac{17A_2^2}{64A_1^4} \right) S^3(\varepsilon \sqrt{A_1})^3 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{scalar}}^{(2)} &= -\frac{A_2}{2A_1} (\alpha^2 - 1) - (3\alpha^2 - 7) \frac{A_3}{4A_1^2} S(\varepsilon \sqrt{A_1}) \\ &\quad + (9\alpha^2 - 19) \left(\frac{A_2^2}{16A_1^2} \right) S(\varepsilon \sqrt{A_1}) \end{aligned} \quad (55)$$

である。すなはち

$$S = 4n + 2(\alpha - 1) \quad ; n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha = |\pm m - 1| \quad ; m = 0, 1, 2, \dots$$

式(52)と同様に $\Delta\lambda_V^{(1)}$ を求めた時の 同軸波動のアシスは \pm であるが、
分子を假定する。

$$y(r) = y(0) \sqrt{1 - B_1 r^2 - B_2 r^4} \quad (58)$$

もし 透磁率分布 が 誘電率分布 と同じとす $B_1 = B_2 = 0$ である、もし通

導の先端アライヤのように誘電率導波路とす $B_1 = A_1, B_2 = A_2$ とする。

$B_1 = B_2 = 0$ のとき HE_{mn}, EH_{mn} に対する TE_{on} に対する

TM_{mn} に対する完全な総合式となる。

式(53)(56)と式(4)に代入し、近似すれば

$$h_1 \approx -A_1 - \left(\frac{7A_1^2 + B_1^2}{4} + 4A_2\right)r^2 \quad (57.1)$$

$$g_1 \approx -B_1 - (2B_1^2 + 4B_2 - \frac{1}{2}A_1 B_1)r^2 \quad (57.2)$$

$$h_2 \approx -A_1 r - (A_1^2 + 2A_2)r^3 \quad (57.3)$$

$$g_2 \approx -B_1 r - (B_1^2 + 2B_2)r^3 \quad (57.4)$$

$$\begin{aligned} g \approx & -\frac{1}{2} \left\{ \lambda^{(1)} + \left(\frac{\lambda^{(1)}}{2}\right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda^{(1)}}{2}\right) A_1 r^2 \\ & + \frac{1}{8} (3A_1^2 + 4A_2)r^4 \end{aligned} \quad (57.5)$$

と表せる。これを式(1)に入れ、ナレル倒置法から核合計算を行え。

$$\Sigma^{(0)} = \mp \sinh^{-1} \left\{ \frac{1}{m} \cdot \frac{\left(\frac{A_1 B_1}{4} + B_2 + \frac{1}{2} B_1^2 \right) \lambda^{(1)}}{A_1^2 + A_2 + \left(\frac{5}{8} A_1^2 + \frac{1}{4} A_2 - \frac{15}{8} \frac{A_2^2}{A_1^2} + \frac{3}{2} \frac{A_2}{A_1} \right) \lambda^{(1)}} \right\} \quad (58)$$

for HE_{mn}, EH_{mn}

$$\Sigma^{(0)} = \pm \infty \text{ for } TE_{on}, TM_{on} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_V^{(2)} = & \pm m A_1 + (\pm m+1) \left(\frac{5}{8} A_1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \lambda^{(1)} + \frac{1}{8} \frac{B_1^2}{A_1} \lambda^{(1)} \\ & - \left(\frac{1}{2} \frac{B_1^2}{A_1} + \frac{1}{4} B_1 + \frac{B_2}{A_1} \right) \lambda^{(1)} \tanh\left(\frac{\Sigma^{(0)}}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.0)$$

$$\simeq \pm m A_1 + (\pm m+1) \left(\frac{5}{8} A_1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \lambda^{(1)} + \frac{1}{8} \frac{B_1^2}{A_1} \lambda^{(1)}$$

for HE_{m,n}, EH_{m,n}

$$\Delta \lambda_V^{(2)} = \left(\frac{5A_1 + 2B_1}{8} + \frac{A_2 - B_2}{A_1} + \frac{1}{8} \frac{B_1^2}{A_1} - \frac{1}{2} \frac{B_1^2}{A_1} \right) \lambda^{(1)} \quad (61)$$

for TE_{0n}, TM_{0n}

を得る。固有向量の数 m が大きいと HE_{ik} と EH_{ik} は重複して振舞う。 m が十分大きいと分离し、特に TE_{ik} と TM_{ik} はその差が目立つ。TE_{ik} では、伝播定数の差と表せば

$$\beta_{TE} - \beta_{TM} \simeq \varepsilon^2 \sqrt{A_1} \left(B_1 + 4 \frac{B_2}{A_1} + 2 \frac{B_1^2}{A_1} \right) n \quad (62)$$

$(n=1, 2, \dots)$

と表す。

$$B_2 = -\frac{A_1 B_1}{4} - \frac{B_1^2}{2} \quad (63)$$

となる。また (説明の通り $A_2 = -3A_1^2/4$ のこと), TE_{ik} と TM_{ik} は導入縮退する。 HF_{ik} と EH_{ik} は $\Sigma^{(0)} = 0$ となる。 H_{ik} 成分と E_{ik} 成分が同一の混合成形となる。

6. おまけ

ベクトル場を表す結合形微分方程式を漸近的に解き、半径の4乗の誤差が成立する固有値と一般形を求めた。漸近手法は途中で計算が煩雑になると、システィックに行われ、その最終結果が半径方向簡単な形を与えられた。さらに高次項を取る場合も全

く同様の手段が取られる。其の例として多項式アーリングルの伝播定数を与え、モードの総波数に7つで解析的に検討した。マイハムの諸特徴の評価がこれを基準と同一で行えるがここで直略する。又
 バモトの漸近界は $\lambda < r_t$ で求められるとかく全領域の界を定めると
 いはずと一様漸近展開手法を用いたければならない。これにつ
 いて Arnold の論文 [8, 19, 20] を参照して $r_t = T = 11$ 。

参考文献

1. G. Wentzel, "Die mehrfach periodischen Systeme in der Quantenmechanik", Z. Phys. 37 (1926) P. 80, sec. 3.
2. ———, "Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik", Z. Phys. 38 (1926) P. 578, sec. 6.
3. J. L. Dunham, "The Wentzel-Brillouin-Kramers method of solving wave equation", Phys. Rev. 41 (1932) P. 713.
4. V. P. Maslov, "Asymptotic eigenvalues of one-dimensional and radial Schrödinger equations", YMH 15-4 (1960) P. 220.
5. S. M. Kirovskaya and R. J. LeRoy, "On the application, breakdown and near-dissociation behavior of higher-order JWKB quantization condition", J. Chem. Phys. 68 (1978) P. 3139 and 72 (1979) P. 3146.
6. H. Ikuno, "Propagation constants of guided modes in graded index fiber with polynomial-profile core", Electron Lett. 15 no. 23 (1979). P. 762.
7. M. Hashimoto, "On the asymptotic eigenvalues of an inhomogeneous circular waveguide", Opt. Commun. 32 (1980) P. 383.
8. ———, "Asymptotic eigenvalues of vector waves in an inhomogeneous circular waveguide", Opt. Commun. (in press).

9. ———, "Vectorwave characteristics of radially inhomogeneous waveguide modes", *Electron. Lett.* (in Press).
10. ———, "Reflection of waves by imperfectly periodic layered media", *Radio Sci.* 15: x0.5 (1980)
11. ———, "A numerical method of determining propagation characteristics of guided waves along inhomogeneous planar waveguides", *J. Appl. Phys.* 50 (1979) p. 2512.
12. ———, "Propagation of inhomogeneous waves in cladded optical fibers", *Int. J. Electron.* 46 (1979) p. 125.
13. N.S. Kapany and J.J. Burke, *Optical Waveguides*. Academic press; New York 1972, p. 113.
14. H.G. Unger, *Planar Optical Waveguides and Fibers*. Clarendon press: Oxford 1977, p. 321.
15. G.L. Tip and S. Nemoto, "The relations between scalar modes in a lens-like medium and vector modes in a self-focusing optical fiber", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-23 (1975) p. 260.
16. J.B. Krieger, M.L. Lewis and C. Rosenzweig, "Use of the WKB method for obtaining energy eigenvalues", *J. Chem. Phys.* 47 (1967) p. 2942; 48 (1968) p. 5784.
17. R.N. Kesarwani, "Five-term WKBJ approximation" *J. Mach. Phys.* 21 (1980) p. 90.
18. J.M. Arnold, "Asymptotic evaluation of the normalized cut-off frequencies of an optical waveguide with quadratic index variation", *IEE J. Microwave, Opt. Acoust.* 1 (1977) p. 203; 2 (1978) p. 64.
19. ———, "Inhomogeneous dielectric waveguides: a uniform asymptotic theory", *J. Phys. A: Math. Gen.* 13 (1980) p. 347.
20. ———, "Uniform theory of inhomogeneous waveguide modes near cutoff", *ibid* 13 (1980) p. 361.

付録1 ハーバード方程の解法

式(6)をもとにして導かず導かぬ向量を $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ と無視する。とかく \mathbf{h}_1 と \mathbf{h}_2 はこの可視である。このようにして式(6)が対称形となる。

(1) 解法

$$\Phi = \pm \Psi \quad (A.1)$$

やがて得る。方程式 $\tilde{\Phi}'(1) = 0$ の解 $\tilde{\Phi} = 0, p_0 = p_m$ を取る。 $\epsilon = b''$ を式(1)に

$$\tilde{\Phi}'' + \left(\frac{1}{r} - 2\frac{p'_0}{p_0} \right) \tilde{\Phi}' + \left[\frac{p_0^2}{\epsilon^2} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{2m}{r} \left(\frac{p'_0}{p_0} \right) \right] \tilde{\Phi} = 0 \quad (A.2)$$

と書き直せる。Kurtz-Streifer 変換 [C.N.Kurtz and W.Streifer, "Guided waves in inhomogeneous focusing media Pt.II: Asymptotic solutions for general weak inhomogeneity"; IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-17 (1969) p.250]

$$\phi = \frac{1}{p_0^2} (\tilde{\Phi} \pm \frac{m}{r} \tilde{\Phi}) \quad (A.3)$$

$$\tilde{\Phi} = -\epsilon^2 \left(\phi' + \frac{1 \mp m}{r} \phi \right) \quad (A.4)$$

式(4)を式(A.2)に

$$\phi'' + \frac{1}{r} \phi' + \left[\frac{p_0^2}{\epsilon^2} - \frac{|1 \mp m|^2}{r^2} \right] \phi = 0 \quad (A.5)$$

$|1 \mp m|$ 帰着する。この ϕ の漸近解

$$\phi \sim \frac{1}{\sqrt{r}} e^{\pm j \int_0^r p dr}; p = \frac{p_0}{\epsilon} - j \mp \frac{p'_0}{p_0} \quad (A.6)$$

で与えられる [19, 20]。このとく固有モード解

$$\int_0^R \frac{P_0}{\varepsilon} dr = \pi \left(n + \frac{|m-1|-1}{2} \right) \quad (A.7)$$

$(n=1, 2, 3, \dots)$

と表す [9.20]. 式(28) ($P_1 = -j P_0' / 2P_0$) の条件と式(A.7)は矛盾する。

$$Re \int_0^\infty p dr = \pi \left(n + \frac{|m-1|-1}{2} + \frac{1}{4} \right) \quad (A.8)$$

を得る。このように式(A.2)の固有値条件は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき式(A.8)となる。

上式の複号によると式(28)と式(A.8)は HE_{mn}, EH_{mn} で一致する。

実際は h_1, h_2, g_1, g_2, f が存在するため 固有値と固有関数が少し変化する。式(15)はある P_0, P_m は $\varepsilon \rightarrow 0$ で $P_1 = \sqrt{\varepsilon} \gamma C$. ($\gamma = b^{1/2}$) 式(15)の左辺と式(A.8)の左辺を比較すれば 複号は $l=0 \Rightarrow l=n-1, l=n$ で一致しない。

付録2 G(r) H(r) の組合せ

$G(r)$ および $H(r)$ は $r=r_1$ の附近で 次のようになる。

$$G(r) = \frac{a_0}{(r-r_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a_1}{(r-r_1)^{\frac{1}{2}}} + \dots \quad (B.1.1)$$

$$H(r) = \frac{b_0}{(r-r_1)^{\frac{1}{2}}} + b_1 (r-r_1)^{\frac{1}{2}} + \dots \quad (B.1.2)$$

組合せ $G(r) H(r)$ の係数と $r=r_1$ で等しい。

$$GH \text{の組合せ} = a_0 b_1 + a_1 b_0 \quad (B.2)$$

である。一方 式(B.1)の

$$H''G = \frac{3}{4} \frac{a_0 b_0}{(r-r_i)^4} + \frac{1}{4} \frac{3a_1 b_0 - a_0 b_1}{(r-r_i)^3} + \dots \quad (B.3.1)$$

$$H'G' = \frac{3}{4} \frac{a_0 b_0}{(r-r_i)^4} + \frac{1}{4} \frac{a_1 b_0 - 3a_0 b_1}{(r-r_i)^3} + \dots \quad (B.3.2)$$

である。これは利用するべき式である。

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 2 \left[(r-r_i)^3 (H''G - H'G') \right]_{r=r_i} \quad (B.8)$$

を導く。この式は式(B.8)の右边が GH の留数である。

129 不均質光導波路の解析手法

(WKB 法, 多層分割法)

橋本正弘(大阪電通大)

1. まえがき

不均質媒質と並ぶ波動問題の歴史は古く、また今野が云う。たとえば水中の音波[1][2][3]、地震波[4]、電離層の電磁波[5][6][7]、対流圏の電磁波[8]、回路における不均一伝送線路の電圧・電流[9]、特に物理における不均質アントンシャル場、電気張力[10]の算定など本報題である不均質光導波路問題と同トドリにして取り扱える。したがって今日解釈手法として、多数の人々によって種々の方法が提案されることは、その方法の応用まで含めると非常に多い。その方法の応用まで含めると、あるいは新しい歴史がある。それらの諸問題は、「伝搬」という性質から、結局、1次元あるのは2次元の波動問題に帰着されるが、解釈手法を論じる上で向左には確立途上である。KellerとPapadakis[11]は2次元波動に詳しく述べ方法と、特に点波源問題起りで波動を表現する立場で、簡単な系統図をもつて相互の関係を示す。しかし1次元も含めこれを二つの方法論の相互の関連をさらに詳細に示すことは、試みである。

そこで本章では1次元波動問題に帰着ひままで、これらにWKB法と多層分割法に限定してその方法を、表現形態ではなく考え方(感想)の類似性を分類し、図を表して試みを行つた。そこには今までからられておりかつて思われる部分をいくつか含んでいる。その分類図における同一系統の方法は同じ判点と欠点をもつためその適用範囲も一致している。したがつてこのようほんごとを行うことにDFTで各種方法の特徴と明瞭にすることができる。F. なお探索方法と今野がないとの若干されていふのがあり、まだ発展しない厚層場の論述を少しごくことなく。

2. 光導波路の問題

これはじつは今野と同じ問題を取り扱われていいことに多くある。それはそれで本稿は部分があらかじめ一つにそれらの今野の適用範囲を多少異なっている。すなはち種々の方法はそれが他の今野の問題に応じて開拓されるのである。たとえば低速における Low Energy Electron Diffraction (LEED) の問題[12]では原子ボテンシャル場の範囲と波長にはほぼ同じである。このようすは「強」不均質場の波動に対し漸近解法が序解法よりも直接法のようすを数値解析が用いられるのをさることばである。また今野の波長より大きい場合の解法は伝搬速度が高いため波長より大きい場合の解法は、逆算、波長

変化は1波長当り 10^5 程度[13]であり、まだ地球一周するにしてもその距離は 10^3 波長程度である。このようすを下記で WKB 解の 1 次もしくは 2 次近似解でかたりの精度を期待せよ。しかし最近の Graded fibers の屈折率変化[14] 1 波長当り 4×10^{-4} 程度もあり、fiber 1m IF 2.5×10^6 波長である。いいかえると対流圏と地球一周する電磁波とファイバ中の光が走行すると 10cm ファイバ長がそれに付随する。其形状平面導波路の場合には 1 cm の算波距離が走行する。ここにからもし 10cm ファイバあたり 1cm の平面導波路を走らせた場合のこととし問題として、これを解釈する所は 1950 年代の飛躍が十分である。しかし長距離ファイバでは「は」方程式結合器・フィルタ等の位相とことより問題とするデバイスが現実化した現在、解釈精度を絶えずよりよくとく 2~3 行以上する必要がでて互に。この点が他の今野と大きく異つてこりとこうである。

ここでは光導波路と解釈する立場上、従来からよく用いられる WKB 法と F. の多層分割法と比較して範囲内にてて解説する。両方法から得られる解釈表現の上に似ていいが方法論として全く異なるものである。

3. WKB 法

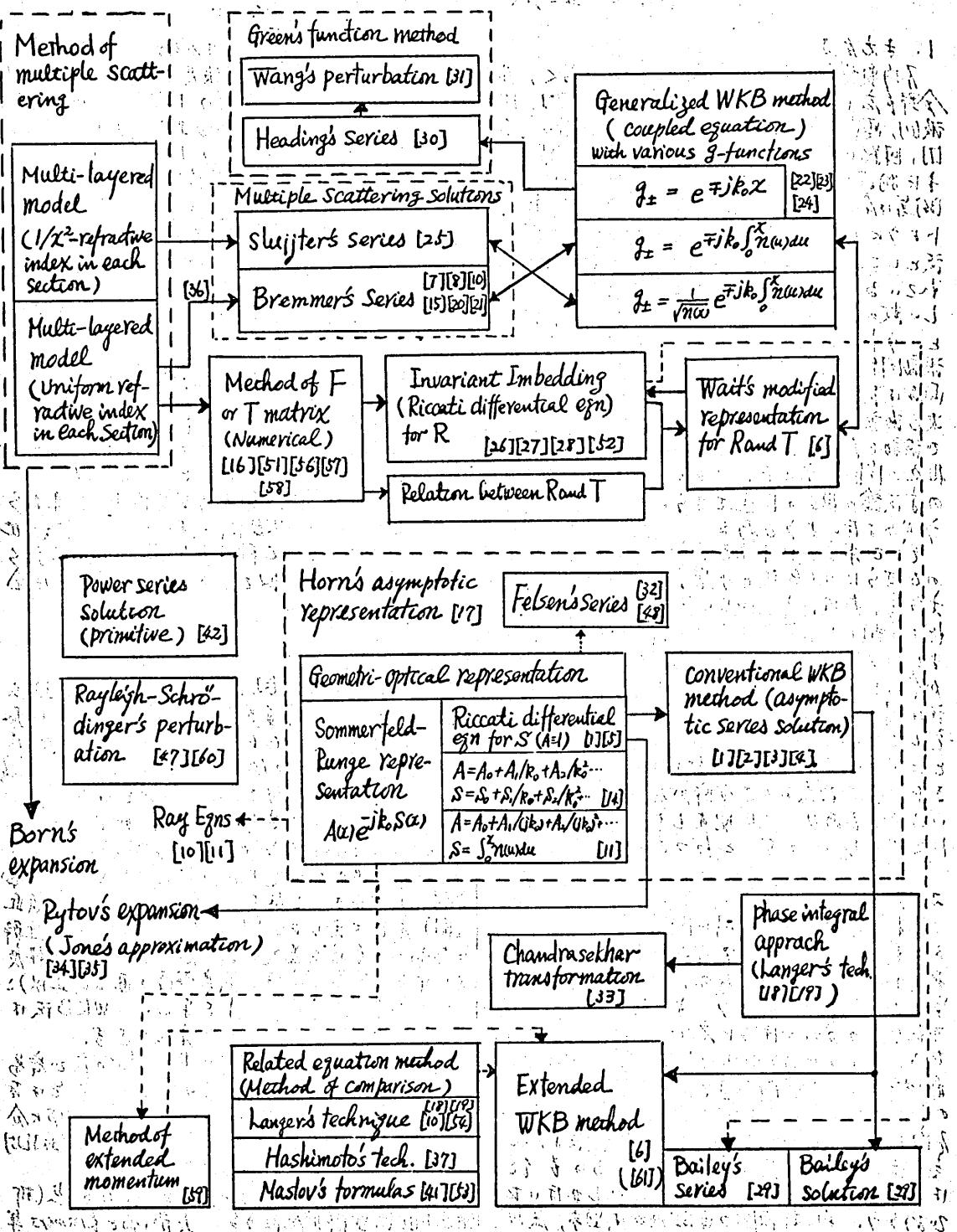
この方法は Wentzel[15], Kramers[16], Brillouin[17] 等が同時期に發表した漸近解法である。少し前に Jeffreys[18] が取り扱つていたのが JWKB 法と呼ぶことである。Bailey[19] や Pike[20] などは Liouville, Rayleigh, Green 等と同様の近似を行つていて、(この点に関しては Pike を見よ)。Brillouin が波動に Sommerfeld-Bunge[21]、幾何光学表現式 Aetikos の最も簡単な形である、 $\partial/\partial k$ と定して $\partial/\partial k$ に対する Riccati 方程式を導いて、これでくり返し法で解く(漸近展開)方法を示して。Wentzel (Brillouin) は漸近解に Bohr 量と条件を導入した。Kramers は解釈精度を上げるために(振動解能率に減衰解能率を直結させ)、これより半整数の量と条件を示した。WKB 法は広い意味でこれらを総合して方法とす。

$S = \int_{x_1}^{x_2} R$ Riccati 方程式の Runge-Kutta 法が容易に数値解法である。しかし、その応用例の報告はないようである。さて入射波の波とその通り $A(k)$ に対してくり返し法で解く Pyatov 法[22][23] は、Brillouin と同一思想である。

一般に WKB 法は、もとよりが要とする点(折返点)より漸近解が導かれる。Jeffreys と Kramers 等

Figure 1 Methods of determining the propagation characteristics of inhomogeneous waves
(for one-dimensional problems)

281



は必ず近似点を一メンタムが解とする点(折返点)の附近でボテンシャル場と直線化近似し、折返点の内側の振動解と外側の漸近解とつなぎ合せた。このつなぎ方を一般化するため、セーメンツの積分値を差引とする phase integral (その方法を phase integral method といふ [47]) を導入し、WKB 法を拡張した。特にこれと Extended WKB 法 [6] という(国参照)。本方法だけ特に折返点付近の解を正確に求めることに主眼を置き、延年の WKB 法の欠点を改善し F とすらもそのじみ (hanger [19] Morikuchi [61])。同様の目的の Bailey [29] は hanger とはナレ更に変数変換を行って WKB-1 次漸近解より梯度の高い近似解山と並め F。これがより U, が折返点で巻き戻すのを防ぐため $U_2 = U_1 \int^x u^{-2} dx$ の解を用いた。

hanger の変数変換法 [8] [19] [54] [61] を用いると改めて方程式は新たに下記のように書きかえられる。中でもややこしく変化する導関数 u' はその方程式の中に含まれる微小項と無視できる。このようにして得た方程式を Related equation といふ。希望の方程式を “適当” な変数変換で解く “Related equation” に導むこと、近似解を求める方法を Related equation method あるいは Method of comparison といふ。この方法を応用すれば Extended WKB 法といえるであろう。Maslov [53] は Related equation method を用いて WKB 法の固有值と特徴 K がめる公式を導いた。Hashimoto [37] はやはり Related equation method を用いて、ボテンシャルに振動がある場合の振動解と、一次の近似の下で一般解とをえた。また同時に補正項を固有值と導いた。IKuno は 4 次の補正項のある準拠物形度折半分布では両者の解が一致することを指摘した [41]。(6 次の補正項をも含む)。このように如何なる表現式からか常に漸近展開式はその簇、改良が加えられて Extended WKB 法へと進んでいく K(国参照)。

4. 多層分割法

おこる多層反射法として今題した方がよい。多層分割法は多層反射法の一部と考えられるからである。ここでおこる散乱体の大きさは幾段折半が十分に小さく、ここに有名な Born の散乱表現式をこれに分類されるからである。エコ多層分割の考え方方は回路論における直列多層接続の解析と同じである。導波路の回路伝搬定数を決定するには直列接続回路の入出力にリニアターンス回路を接続したときの共振周波数をもとめると問題(6)と同一である。

最も簡単なモデルは各層の中には均質であるよう階級状度折半分布が近似したものである。このモデルでは第一伝送線路の多層接続として取り扱える [51] [56] [57] [58]。通常、層の数が 10 以上に

なる [59] ため本手法は数值解析法である。もちろん各層の接続面における反射係数 R, 透過係数 T を順次求めることで散乱マトリクスを取り扱える [59]。反射係数 R の表現式は層の厚さと無限大とするとき R はつづての Riccati 総合方程式が導かれると ($R = T$ の関係を用意に総合方程式の形で組みつけられる)。通常、2 層の境界条件を必要とする 2 階の波动方程式問題を、1/2 の境界条件をもつ 1 階の非特形波动方程式 (Riccati 法) と併せて方法を埋込み法 (Invariant Embedding [26] [27] [28] [52]) といふ。したがって多段接続元を並列解析するのと埋込み法で数値解析するのもこの意味で全く同じである。

散乱マトリクス法が多層反射法と直通波の表現式を導いた、各層の厚さを零とすると多層反射の総合表現式となる Brummel's series [7] [8] [10] [15] [20] [21] が得る。その初期は WKB の第一次近似解となつていい。総合表現式を組合せ原理に直すと逆行波と反射波の結合方程式を得る。結合と無視すると WKB の漸近解に帰る。逐次、結合項を補正していくと漸近解を補正することによって (Brummel の手法)。Wait [67] はこれを Generalized WKB 法と呼んだ。

Bahar [23], Kampen [23] が新しい Ψ 回路を導入して Ψ 回路の整規により結合項を自由にかえられる総合方程式を導むを、これを解く方法を Generalized WKB 法と呼んだ。この点は Wait の呼ぶ方よりも一層新しかった。

図に示す F の形の Ψ 回路を代入すると、たゞえば Heading [30] の解に帰るに、Brummel の解に帰る、Slichter の解 [25] に帰る。さら K から埋込み法の R はつづて Riccati 総合方程式を導むける。 Ψ 回路として折返点を巻数する漸近解を用いると Generalized WKB 法の解をやはり折返点を巻数する。したがって Bahar [23] 年は Ψ 回路を元に総合方程式を逐次解析する方法を示した。上記説明より直ちにわかるように、波等の手法は多層分割の逐次解析からいはば埋込み法の逐次解析と同一である。

5. おまけ

WKB 法と多層分割法の基本的な考え方、および計算生じた方程を述べる。しかし上記示した数値解析法を除いて近似解析の手段は誤差の点でまだ光導波路の解析に十分でないといえども、特に回路アバーフィルの解析の解説書として [55] を参照) では多層分割法の応用 [59] [50] を除いて、エア部分の波動解析が複雑であり [44] [45] [46] [47]、その上クラッドの影響も考慮しなければならぬ ([38] [39] [40] [42] [43] [46])。したがって不対称光導波路の解析は今後このドウガの問題点を解決していかなければならぬと思われる。

参考文献

- [1] L. Brillouin, *Compt. Rend.* 183 24 (1926); *J. de Physique I* 353 (1926).
- [2] G. Wentzel, *Z. Physik* 28 518 (1926).
- [3] H.A. Kramers, *Z. Physik* 29 828 (1926).
- [4] H. Jeffreys, *Proc. London. Math. Soc.* 23 428 (1923).
- [5] W. Pauli, *Wave Mechanics* (Cambridge, MIT Press 1973).
- [6] J.R. Wait, *Electromagnetic Waves in Stratified Media* (New York, Pergamon 1970).
- [7] K.G. Budden, *The Waveguide Mode Theory of Wave Propagation* (New York, Academic Press 1961), *Radiowaves in the Ionosphere* (Cambridge Univ. Press 1961).
- [8] L.M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media*, translated by P. Lielerman (New York, Academic Press 1960).
- [9] 河野 大介編 *漸近法* (技術出版社 1976).
- [10] L.B. Felsen and N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves* (London, Prentice-Hall 1973).
- [11] J.B. Keller and J.S. Papadakis (Eds), *Wave Propagation and Underwater Acoustics* (Berlin, Springer-Verlag 1977).
- [12] P.G. Provis and R. Radok (Eds), *Waves on Water at Variable Depth* (Berlin, Springer-Verlag 1976).
- [13] A. Sommerfeld, *Optics* (New York, Academic press 1964).
- [14] M. Kline and I.W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publ. 1965), p. 280.
- [15] K.C. Yeh and C.H. Liu, *Theory of Ionospheric Waves* (New York, Academic Press 1972) p. 223.
- [16] R.B. Adler, L.J. Chu and R.M. Fano, *Electromagnetic Energy Transmission and Radiation* (New York, John Wiley and Sons 1965) p. 378.
- [17] J. Horn, *Mach. Annalen* 53 340 (1899).
- [18] R. McElvey, *Trans. Amer. Math. Soc.* 91 410 (1959).
- [19] R. Haager, *Trans. Amer. Math. Soc.* 37 397 (1935).
- [20] H. Bremmer, *Comm. Pure Appl. Math.* 8 105 (1951).
- [21] H.L. Berk, D.L. Book and D. Pfirath, *J. Math. Phys.* 8 1611 (1967).
- [22] E. Baharai, *J. Math. Phys.* 8, 1735 (1967).
- [23] N.G. van Kampen, *Physica* 35 70 (1967).
- [24] E. Baharai, *Radio Science* 11 885 (1976).
- [25] F.W. Sluyter, *J. Math. Anal. Appl.* 27 282 (1969).
- [26] H.N. Kritikos, K.S.H. Lee and C.H. Papas, *Radio Science* 2 191 (1967).
- [27] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding* (New York, Academic Press 1968).
- [28] R.W. Latham, *Canadian J. Phys.* 46 1463 (1968).
- [29] V.A. Bailey, *Phys. Rev.* 96 865 (1954).
- [30] J. Heading, *J. Research NBS* 62D (Radioprop.) 65 (1958).
- [31] T.N.C. Wang, *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-13, 986 (1965).
- [32] L.B. Felsen, *J. O.S.A.* 66 751 (1976).
- [33] R.H.T. Bates, *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-24, 251 (1976).
- [34] J.B. Keller, *J. O.S.A.* 59 1003 (1969).
- [35] R.H.T. Bates, W.M. Boerner and G.R. Dunlop, *Opt. Comm.* 18 421 (1976).
- [36] J.B. Pendry, *Low Energy Electron Diffraction* (New York, Academic Press 1972) ch.5.
- [37] M. Hashimoto, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-24 559 (1976).
- [38] ————— *MTT-24* 404 (1976).
- [39] —————, *Int. J. Electron.* 39 579 (1975).
- [40] —————, *Propagation of inhomogeneous waves in daddled optical fibers*, *Int. J. Electron.* (in press).
- [41] H. Ikuno, *Analysis of wave propagation in homogeneous dielectric slab waveguides*, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* (in press).
- [42] H. Kirchhoff, *AEÜ* 26 537 (1972).
- [43] M. Hashimoto, S. Nemoto and T. Nakimoto, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-25 11 (1977).
- [44] C.N. Kurtz and W. Streifer, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-12 11 (1969), MTT-12 250 (1969).
- [45] H. Kirchhoff, *AEÜ* 22 13 (1973).
- [46] R. Yamada and Y. Inabe, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-23 813 (1974), *J.O.S.A.* 64 964 (1974).
- [47] Y. Miyazaki, *AEÜ* 29 205 (1975).
- [48] S. Choudhary and L.B. Felsen, *J.O.S.A. J.A.S.A.* appears in 1977.
- [49] P.J.B. Clarricoats and K.B. Chen, *Electron. Lett.* 6 684 (1970).
- [50] H.O. Vassell, *Opto-Electron.* 6 271 (1974).
- [51] W. Culshaw, *Appl. Opt.* 11 2639 (1972).
- [52] E.F. Kuester and D.C. Chang, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-23 98 (1975).
- [53] V.P. Maslov, *微分方程の複素分析* (岩波 1970) 119-128.
- [54] E.R. Pike, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 17 105 (1964).
- [55] 大越・河野・岸, *光71/11号特集* (J-Circ 1977).
- [56] Y. Suenotsu and K. Furuya, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-20 526 (1972), *情報論 C* 52-C 289 (1974).
- [57] 河野 大介, *情報論 B* 16-B 445 (1977).
- [58] J. Galejo, *Antennas in Inhomogeneous Media* (Oxford, Pergamon Press 1969), 104.
- [59] 木村 伸一, *情報論 B* 16-B 445 (1977).
- [60] C.L. Peteris, *J. Appl. Phys.* 37 678 (1966).
- [61] H. Moriguchi, *J. Phys. Soc. Japan* 16 1771 (1959).

輻射科学研究会資料

ジヨセフソン接合ハーモニックミキサの
アナログシミュレーション

大前 義信 久保 謙二⁺
神代 万亜夫 喜多 定
藤澤 和男

(大阪大学 基礎工学部)

昭和 55 年 6 月 27 日

⁺ 現在 日立製作所(株) 勤務

1. まえがき

ジョセフソン接合は、マイクロ波からサブミリ波帯における範囲の電磁波の超高感度検出素子として有望視されている。その中で特に注目されているのが、外部局発による遙倍混合ヘテロダイン検波である。ジョセフソン接合では高次の遙倍混合が比較的効率良く行なえ、安定な局発源が得易いミリ波によるサブミリ波のヘテロダイン検波を可能にするものとして広く研究されている。

ジョセフソン接合によるヘテロダイン検波に関する研究の方向は、2つに大別される。その1つは、赤外・遠赤外レーザの周波数精密測定のために高安定のマイクロ波・ミリ波の発振出力を局発源として赤外・遠赤外レーザの発振線と周波数混合させ、その中間周波数よりレーザ周波数を求めるとするものである。この場合には、遙倍次数は数百という大きな値になるのが普通である。⁽¹⁾⁽²⁾ もう1つは、サブミリ波の高感度検波を目指すものである。この場合には、遙倍次数としてはせいぜい10ぐらいいまでを考えればよいが、変換効率、混合器雑音温度、最小検出電力(NDP)、雑音等価電力(NEP)などの諸量について十分把握することが必要となる。この実験例として代表的な2例をあげる。米国のTaurらは、9GHzの局発波を用いて36GHz波の4遙倍混合の実験を行ない、変換効率 $\eta = -3\text{dB}$ 、ミキサの等価雑音温度 $T_M = 400\text{ K}$ を得ている。⁽³⁾ また、英國のBlaneyらは75GHzの局発波を用いて450GHzのサブミリ波の6遙倍混合の実験を行ない、変換効率 $\eta = 18\text{ dB}$ （固有変換効率の推定値-12dB）、接合の中間周波数帯等価雑音温度190K、SSBミキサ等価雑音温度300Kを得ている。⁽⁴⁾

しかしながら、ジョセフソン接合による周波数混合の理論は基本波混合

の場合を除き、まだ十分解明されていないのが現状である。基本波混合の場合は振幅変調モデルを用いることができため変換効率の理論式がみちびかれていふ。⁽⁵⁾⁽⁶⁾それに対して遙倍混合の場合、信号および局発周波数を接合の特性周波数 f_c で規格化した量 f_s/f_c , f_{lo}/f_c もともに 1 より十分大きい場合には変換効率の近似式が得られていふが、ミリ波や一部のサブミリ波のように規格化周波数が 1 より小さいときにはこれを用いることができない。

したがつて、RSJ (Resistively Shunted Junction) モデルに基づくジョセフソン接合のアナログ、シミュレータによって、周波数遙倍混合のシミュレーションを行なう、動作解明の足がかりをつかむことは非常に有益なことと考えられる。本報告では Magerlein によって提案されたアナログ・シミュレータ⁽⁷⁾を使って周波数混合のシミュレーションを行なった結果について述べる。

2. RSJ (Resistively Shunted Junction) モデル

ジョセフソン効果の基本関係式は、よく知られているように次式(1), (2)で与えられる。⁽⁸⁾

$$I_s = I_c \sin \phi \quad (1)$$

$$\phi = \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t') dt' + \phi_0 \quad (2)$$

ここで、 I_s は超伝導電流、 I_c は接合で決まる臨界電流である。また ϕ は 2 つの超伝導体の巨視的な波動関数の位相差である。

ジョセフソン接合のふるまいを表わすためにしばしば図 1 に示すような簡単なモデルが使われる。すなわち、接合には(1), (2) 式で決定される超伝導電流 I_s と準粒子のトンネリングによる常電流 I_0 が流れれる。接合

間の電圧を V 、常抵抗を R とす
ると、 I_N は $I_N = V/R$ で与え
られる。したがって、接合を流
れる全電流 I は

$$I = I_c \sin \phi + \frac{V}{R} \quad (3)$$

となる。このモデルを RSJ (Resistively Shunted Junction) モデルと呼んでいる。RSJ モデルは、接合面積が小さく、接合間の容量 C が無視できるような点接触型、あるいはブリッジ型に適用できる。

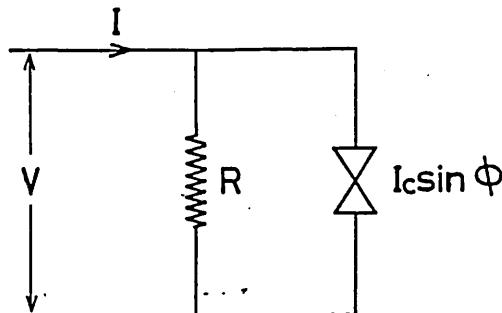


図1 RSJ モデル

3. アナログ・シミュレータ⁽⁴⁾

われわれは、Bell 研の Magerlein によって提案された積分型のアナログ・シミュレータを使用した。このシミュレータは、従来のアナログ計算機によるもの⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾より高い周波数まで動作させることができ、PLL アナログによるもの⁽¹¹⁾⁽¹²⁾より出力周波数の安定という点ですぐれている。このアナログ・シミュレータのブロック図を図2に示す。これ全体で超伝導電流 $I_c \sin \phi$ を発生し、外付けにした抵抗 R はショセフソン接合の常抵抗に対応している。

このシミュレータの原理について簡単に述べる。(2)式より、位相差 ϕ は接合間の端子電圧 $V(\phi)$ を直接積分して得られる。無限に積分を行なうこととはできないので次のようない法をとる。すなわち、超伝導電流 $I_s = I_c \sin \phi$ は、 ϕ に関して 2π の周期性を持つので中の範囲としては1周期、たとえば $-\pi/2$ から $3\pi/2$ までを考えればよい。位相差 ϕ は、図3に示すように ϕ に対して三角波的に変化する V_1 で置き換えることができる。

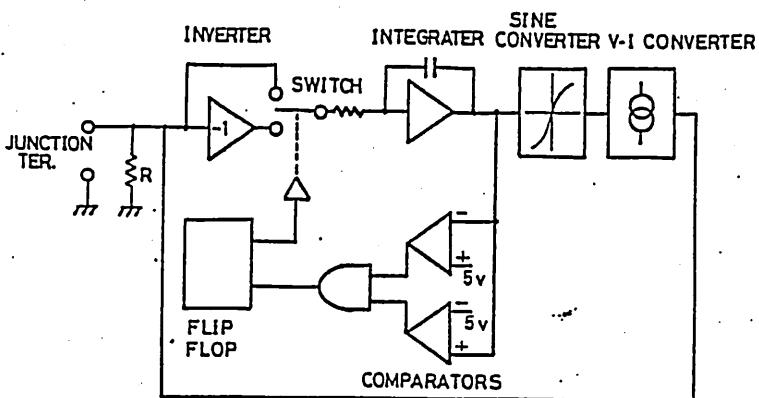


図2. アナログ・シミュレータ ブロック図

すなわち、 ϕ は2つの領域 ($-\pi/2 < \phi < \pi/2$), ($\pi/2 < \phi < 3\pi/2$) に分かれている。 ϕ がどの領域にあるかは比較器で判断し、フリッフロップの状態を変化させ、アナログスイッチを作動させる。この切り換えは $|V_1| > V_{max}$ に至ったときに行なわれ、 $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ では V_1 は V の積分であり、 $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ では $-V$ の積分となる。 V を加えたときの V_1 の変化率は、積分器の時定数を $R_I C_I$ とするとき、 $dV_1/dt = V/R_I C_I$ である。 ϕ の1周期で V_1 は $4V_{max}$ だけ変化するので発振の周波数 f は、

$$f = V/\Phi' \quad (4)$$

$$\Phi' = 4V_{max} R_I C_I \quad (5)$$

となる。

三角波 $V_1(\phi)$ は正弦波変換器によって $\sin\phi$ に比例する電圧 $V_2 = V_s \sin(\pi/2 V_1/V_{max})$ に変換される。 V_2 は電圧電流変換器によって超伝導電流 $I_s = I_c \sin[\frac{2\pi}{\Phi'} \int_0^t V_1(t') dt' + \phi_0]$ に変換される。ここで、われわれは、

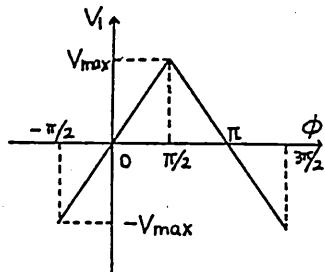


図3 ϕ と V_1 の関係

$R_I = 10 \text{ k}\Omega$, $C_I = 5000 \mu\text{F}$ に設定した。また、 $V_{max} = 5V$ としたので、 $\bar{\omega}' = 4V_{max}R_I C_I = 10^{-3} \text{ V}/\text{Hz}$ となる。さらに常抵抗 R を $1 \text{ k}\Omega$ としたので、シミュレータの特性周波数 $f_c = I_c R / \bar{\omega}' = 1 \text{ kHz}$ となる。これらのことから、シミュレータにおいて電流の基準は 1 mA 、電圧の基準は 1 kHz となる。

4. 周波数倍混音シミュレーションの方法

RSJTモデルを基本として、バイアス電流 I_B 、局発電流 I_o 、信号電流 \tilde{I}_s を加えることにより周波数倍混音のアナログ・シミュレーションを行なう。常抵抗 R から生じる雑音（熱雑音）を等価的に外部から加えるとシミュレーションの基本となる関係式は次のようになる。

$$I_B + \tilde{I}_{lo} + \tilde{I}_s + I_n = \frac{V}{R} + I_c \sin \phi \quad (6)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2e}{h} V \quad (7)$$

ここで、 $\tilde{I}_{lo} = I_{lo} \cos(\omega_{lo} t + \phi_{lo})$, $\tilde{I}_s = I_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$ であり、熱雑音電流 I_n の 2 乗平均 \bar{I}_n^2 は帯域幅 Δf のとき

$$\bar{I}_n^2 = \frac{4kT}{R} \Delta f \quad (8)$$

である。ここで、 k はボルツマン定数である。

いま簡単のため、電流を I_c 、電圧を $I_c R$ 、周波数を $f_c = \frac{2e}{h} I_c R$ ($\therefore f_c$ を特性周波数という)、時間を $1/2\pi f_c$ で規格化すれば、

$$\tilde{i}_B + \tilde{i}_{lo} + \tilde{i}_s + \tilde{i}_n = V + \sin \phi \quad (9)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = V \quad (10)$$

となる。ここで、 $\tilde{i}_{lo} = i_{lo} \cos(\omega_{lo} t + \phi_{lo})$, $\tilde{i}_s = i_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$ であり、また熱雑音電流は規格化すると、 $\bar{i}_n^2 = (2/\pi) \cdot \Gamma \cdot \Delta \Omega$ と書くこ

とができる。 Γ は雑音の大きさを規格化した量で雑音パラメータと呼ばれる。

$$\Gamma = \frac{2eKT}{\pi I_c} \quad (11)$$

で表わされる。

Ω_{IF} と Ω_s の間には、 $\Omega_{IF} = \Omega_s - N\Omega_{IF}$ の関係がある。 Ω_{IF} は規格化した中間周波数である。 N は倍増次数で、 $N=1$ が基本波混合に相当する。

周波数混合の関係式 (9), (10) を解いて $i(t)$ を求め、その中間周波数成分 $V_{IF}(t)$ を取り出すことによって混合による検出電圧が得られる。

次に変換効率の計算式を示す。(13) 中間周波(以後、IFと略す)出力は、ペイアス点での微分抵抗 r_s を内部インピーダンスに持ち、振幅が V_{IF} の電圧源と考えることができ。したがって有能工出力 $(P_{IF})_{av}$ は、

$$(P_{IF})_{av} = \frac{V_{IF}^2}{8r_s} \quad (12)$$

となる。ここで、抵抗を R で、電力を $I_c^2 R$ で規格化している。一方、信号源の規格化インピーダンスを r_s とすると、有能信号電力 $(P_s)_{av}$ は、

$$(P_s)_{av} = \frac{r_s i_s^2}{8} \quad (13)$$

となる。したがって信号と接合との結合および工出力と工增幅器との結合が理想的に行なわれているとしたときの変換効率 η は、(12), (13) より、

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(P_{IF})_{av}}{(P_s)_{av}} = \frac{1}{r_s r_s} \left(\frac{V_{IF}}{i_s} \right)^2 \\ &= \frac{1}{r_s} \left(\frac{V_{IF}}{r_s i_s} \right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

基本波混合の場合には、局盤が信号によってその差周波で振幅変調され

ていいと考えることができ、IF出力電圧 V_{IF} は、バイアス電流 i_B における直流電流 i_s に対する変化の割合 ($\partial i_s / \partial i_B$) i_B とバイアス点での微分抵抗 r_s および信号振幅 i_s に比例し。

$$V_{IF} = r_s i_s \left(\frac{\partial i_s}{\partial i_B} \right) i_B \quad (15)$$

となる。

これを (14) に代入すると、変換効率 η は

$$\eta = \frac{r_a}{r_s} \left[\left(\frac{\partial i_s}{\partial i_B} \right) \right]^2 \quad (16)$$

で計算できる。

遙倍混合の場合にも、基本波混合に対応させてバイアス電流 i_B における信号電流 i_s に対する直流電流 i_s の変化率 ($\partial i_s / \partial i_s$) i_B を導入すると、変換効率 η は、

$$\eta = \frac{r_a}{r_s} \left[\left(\frac{\partial i_s}{\partial i_s} \right) \right]^2 \quad (17)$$

となる。

次に、周波数混合の測定回路を図4に示す。バイアス電流 i_B 、局発電流 i_{LO} 、信号電流 i_s 、および雑音電流 i_n はそれぞれ電圧として加算された後、1Vを1mAの割合で電圧電流変換されシミュレータに加えられる。

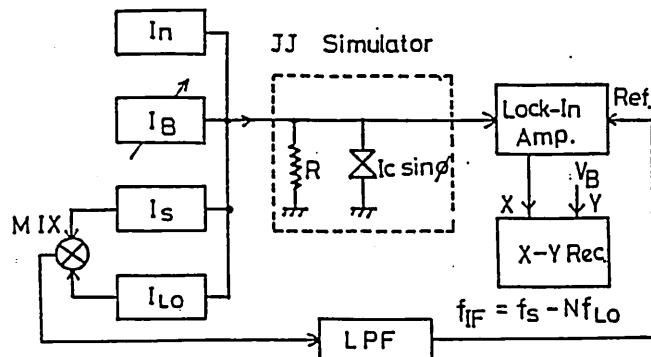


図4 周波数遙倍混合シミュレータ・プロック図

I_B , I_{m} , および I_s の発生源として、関数発生器を使用した。また雑音 I_n の発生源として、帯域幅内でスペクトラムが平坦なランダムノイズ発生器を用いた。

接合の端子間電圧の交流成分を検出するため、アナログアンプを用いた。参照信号として中間周波信号が必要であるため、アナログ乗算器を組み合わせて周波数倍混ぜを行ない、得られた中間周波電圧を参照信号としてロックインアンプに供給した。

5. シミュレーションの結果と検討

図5に熱雑音を考慮に入れたときの電流電圧特性の肩のまるまりのようすを示す。われわれは、 $\Gamma = 0.005$ として以下のシミュレーションを行なった。 $\Gamma = 0.005$ は、(11)より $T = 4.2K$, $I_c = 35 \mu A$ の場合に相当し、実際の

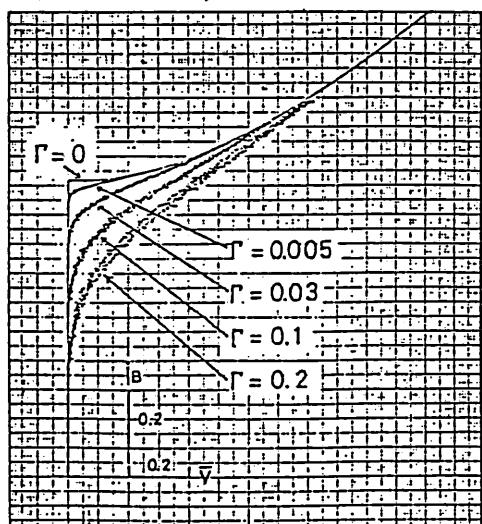


図5 Γ による特性の丸まり

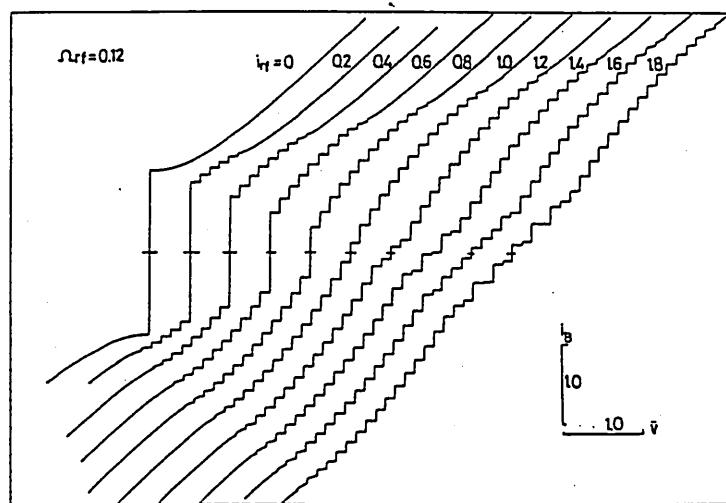


図6 i_{inf} による定電圧ステップの変化

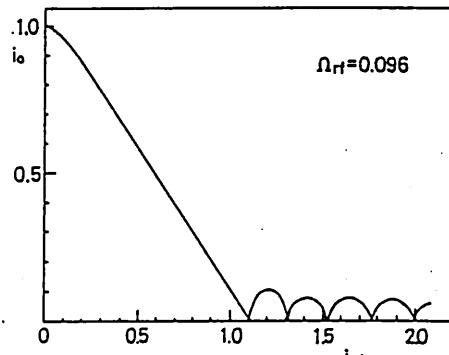


図7. 0次スティップの高さの*i₀*に対する変化

接合においてよく得られる値である。

ジヨセフソン接合に高周波を加えると、電流電圧特性上にその周波に対応する電圧でステップが生じる。高周波電流*i_{rf}*を順次大きくしたときの各ステップの変化のようすを図6に示す。外部から加える高周波電流の周波数を規格化したΩ_{rf}は0.12に設定している。

次に、Ω_{rf}=0.096のとき、0次ステップの高さの変化だけに注目して高周波電流*i_{rf}*との関係を示したのが図7である。*i_{rf}*を0から次第に大きくなると*i₀*は徐々に小さくなり、*i_{rf}*=1.11で*i₀*=0となる。さらに*i_{rf}*=1.32で0に戻る。以後、これを繰り返すことがわかった。

5-1 IF出力電圧特性

IF出力電圧*V_{IF}*の特性から、基本波混合と2倍波混合を比較しよう。ここでは、局発周波数Ω₀=0.096、基本波混合の場合信号周波数Ω_s=0.106、2倍波混合の場合Ω_s=0.202とし、中間周波数Ω_{IF}=0.010

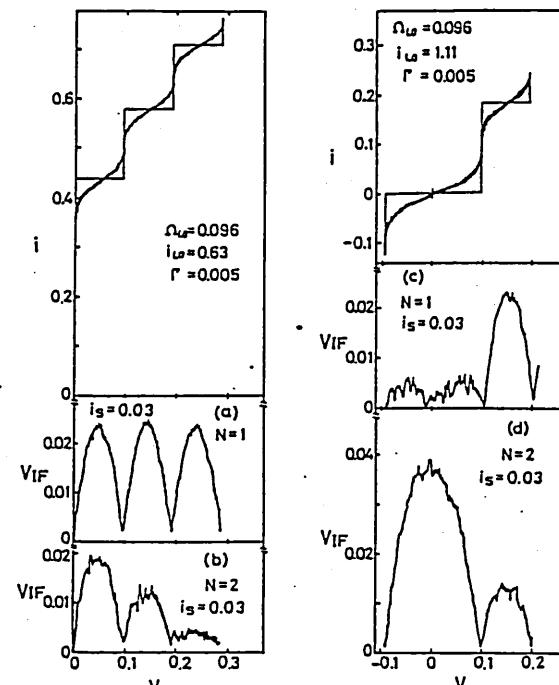


図8. 基本波混合と2倍波混合の*V_{IF}*特性

としている。基本波混合のとき最適な i_L (i_L が約 0.5 になると i_L) に設定すると、定電圧ステップ間に大きな工出力が得られることを図 8(a) に示す。同じ値の i_L に対し 2 過倍混合の場合も同様に定電圧ステップ間で工出力電圧が得られる。これを図 8(b) に示す。さらに i_L を 0 次ステップの高さ i_L が 0 になるまで加えたときの工出力電圧のようすを図 8(c), (d) に示す。(c) は基本波混合、(d) は 2 過倍混合の場合である。ここで、注目すべきことは 2 過倍混合の場合にはバイアス電圧 $V_B = 0$ で大きな工出力電圧が得られるのに対し、基本波混合の場合には全く得られないことである。 $\Omega_{L0} = 0.0615$ に対して行なったシミュレーションでも同じことが言えた。2 過倍混合では、 i_L を 0 にする i_L が最適値となる。この特長は、2 過倍混合だけに限らずわれわれが行なった 10 次までの偶数次過倍混合すべてに見られるものである。

5-2 電流変換効率の測定

信号電流 i_s を加えたとき、直流 I-V 特性の定電圧ステップの高さが変調を受ける。このようすを過倍次数 1 から 10 までについて図 9 に示す。

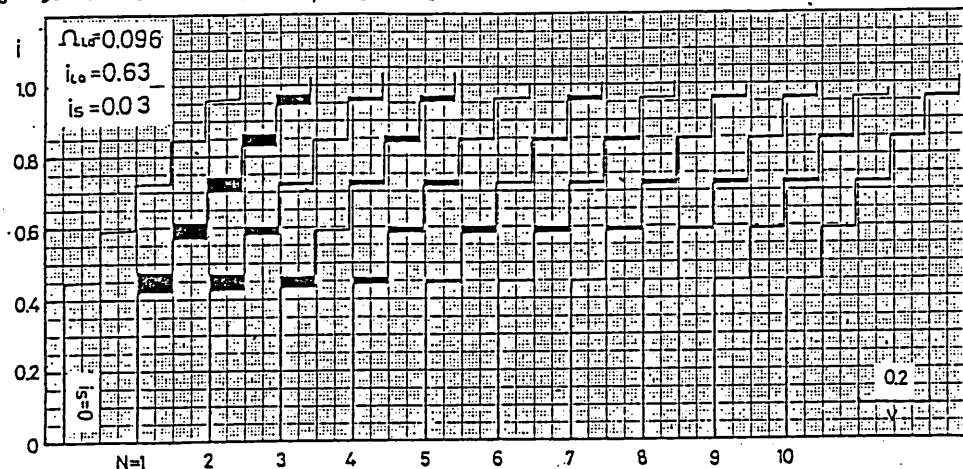
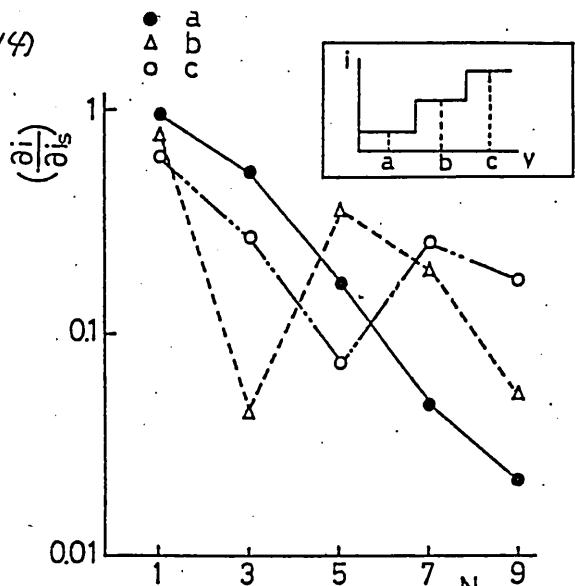


図 9. 0 次ステップの高さを約 0.5 にしたときの $i_s = 0.03$ に対する定電圧ステップの変化

デジタル計算機による数値計算(14)

では、 N 次混倍混合の場合、信号周波数 Ω_s は周波数 Ω_{lo} のちょうど N 倍としてステップの高さの変化が最大となるようこれらで信号の位相差を設定できるが、われわれのアナログ・シミュレータでは $\Omega_s = N\Omega_{lo}$ とすると2信号が同期して定電圧ステップの変化



が見られないで、 $\Omega_{IF} = \Omega_s - N\Omega_{lo}$ 図10 奇数次混倍混合における電流変換効率のバイパス依存性 ≈ 0 として実験を行なった。 N が奇数の場合、電流変換効率の i_{lo} に対する依存性があまりないことから、 i_{lo} の大きさは基本波混合のときの最適な i_{lo} (i_{lo} が約0.5にになる i_{lo})に設定し、各混倍次数で一定とした。また、偶数次混倍混合の場合、前述したようにこの i_{lo} が最適値ではないが比較のためにこのときの電流変換効率も測定した。

N が奇数の場合に注目すると、 $N=1, 3$ のとき、0次ステップと1次ステップの間の領域で最大の電流変化が見られるのに対し、 $N=5, 7, 9$ と大きくしていくと、最大変化を示す領域が高次ステップ間に移っていくことがわかった。このようすを図10に示す。

N が偶数の場合、最適な i_{lo} は $i_{lo}=0$ とする値であることは前に述べたとおりである。このとき $i_{lo}=0$ に対して定電圧ステップが変化するようすを図11に示す。なお、同時に N が奇数の場合についてもステップ変化を示したが、偶数混倍混合とステップ変化のようすが異なることがわかる。さらに、図7から明らかなように、 $i_{lo}=0$ にすると i_{lo} は複数個存在する。

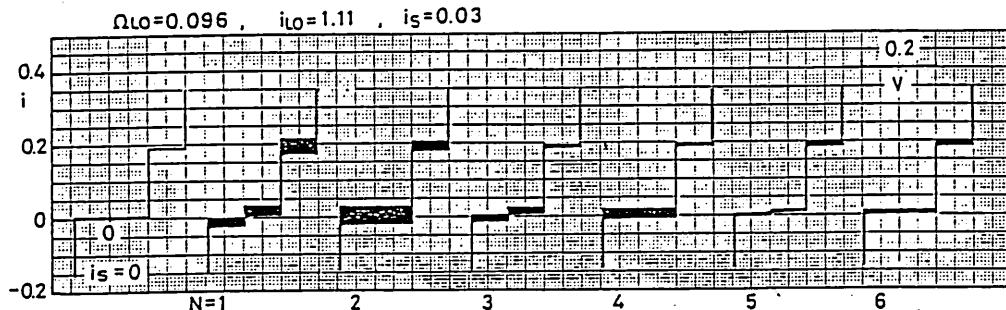


図11. 0次ステップの高さを0にしたときの $i_s=0.03$ に対する定電圧ステップの変化

これら複数個の0点のうち、どの

0点で大きな電流変換効率が得ら

れろか示したのが図12である。

最初の0点から順に、 a' , b' , c' ,

と名前を付けて、初めの3つについ

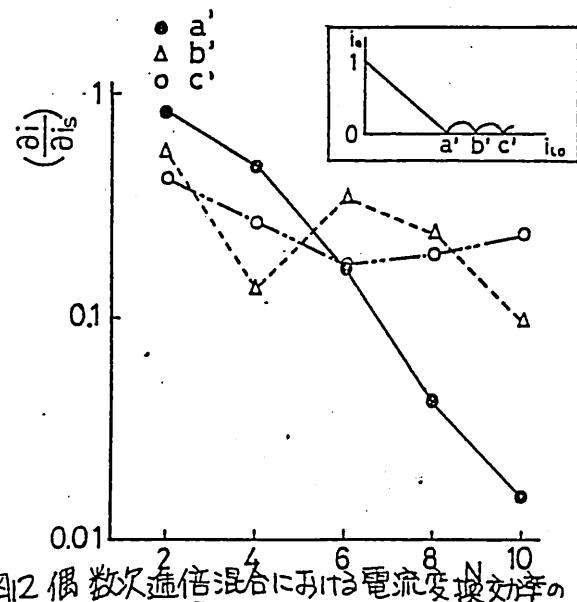
て調べた。N=2のとき最初の0

点、 a' で電流変換効率が最大で以

下 b' , c' の順であるが、N=6, 8

では b' 点で、N=10では c' 点で最

大の電流変換効率が得られた。図12 偶数次過倍混合における電流変換効率の



N	Ω_s	i_{L0}	V_B	$(\frac{\partial i}{\partial i_s})$	$(\frac{\partial i}{\partial i_s})^2$	r_d	η
1	0.0962	0.63	0.048	0.930	0.866	1.32	0.286
2	0.1922	1.11	0	0.806	0.650	2.53	0.411
3	0.2882	0.63	0.048	0.539	0.291	1.32	0.096
4	0.3842	1.11	0	0.471	0.222	2.53	0.140
5	0.4802	0.63	0.144	0.368	0.136	1.51	0.0513
6	0.5762	1.32	0	0.335	0.112	2.86	0.0800
7	0.6722	0.63	0.240	0.253	0.0642	1.76	0.0282
8	0.7682	1.32	0	0.235	0.0555	2.86	0.0397
9	0.8642	0.63	0.240	0.169	0.0286	1.76	0.0126
10	0.9602	1.54	0	0.236	0.0556	3.00	0.0417

表1 各過倍次数における最適バエス条件と変換効率

以上の結果から、各倍倍数 N について最大の変換効率が得られるバイアス条件を選定し(17)にしたがって変換効率を計算したものと表1に示す。またこれを図13に図示する。さらに $\Omega_{LO}=0.0615$ について同様に最適バイアス条件を選び、そのときの倍倍数と変換効率の関係を示したのが図14である。 $V_S=4$ (一定)と仮定し、 V_B は $r=0.005$ としたときの直流エ- V 特性から読み取っている。

図11、図12から必ずしも N が大きいほど変換効率 η が小さくならないことがわかる。たとえば、図11から $N=8$ よりも $N=10$ の方が大きな変換効率が得られるし、図12から $N=5$ よりも $N=7$ の方が大きな値が得られている。

さらに、両図から言えることは、基本波混合より2倍倍混合の方が大きな変換効率を示すことである。さらに2倍倍混合では、最適バイアス点は $V_B=0$ であることから消費電力、雑音の面からも有利であることが予想される。また、全体的にみて偶数次の方が奇数次よりも有利であることも

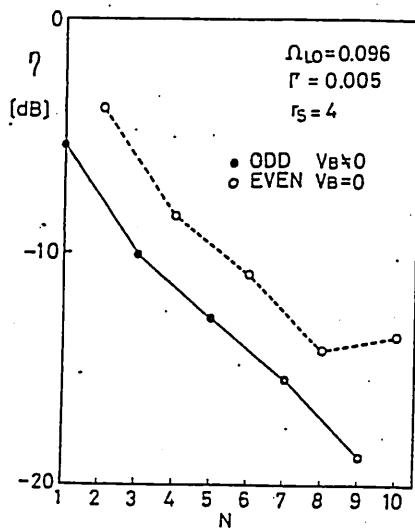


図13 $\Omega_{LO}=0.096$ のときの最適バイアス条件における変換効率と倍倍数の関係

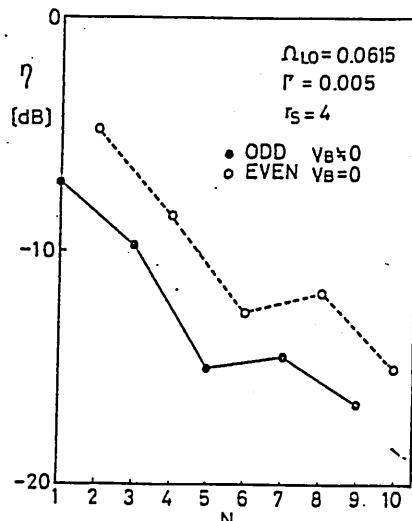


図14 $\Omega_{LO}=0.0615$ のときの最適バイアス条件における変換効率と倍倍数の関係

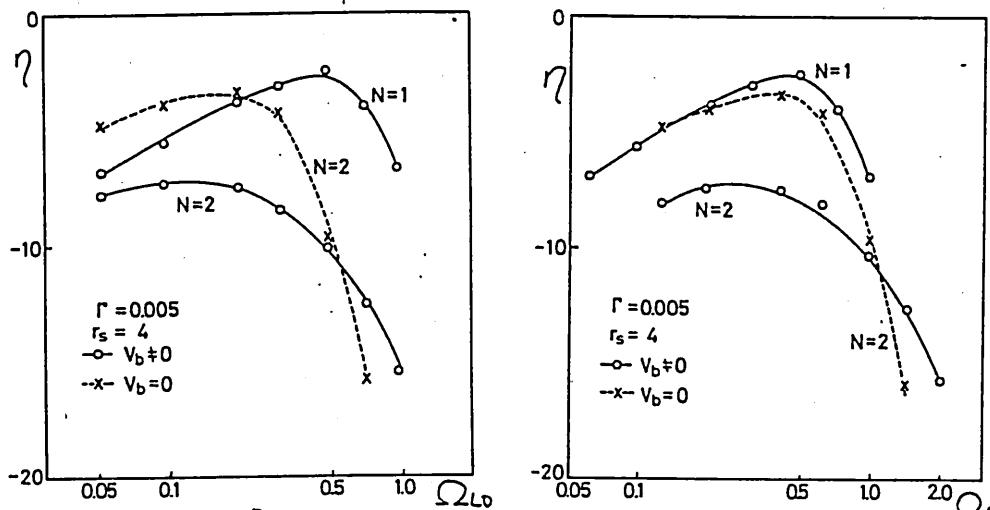


図15 基本波混合と2倍周波数混合の局発周波数 Ω_{lo} 。図16、図15を信号周波数 Ω_s に
いえる。と変換効率との関係。
関する図に書き換えたもの

さらに、奇数次倍では、最適バイアス点は倍周波数Nが大きくなるにつれ高次ステップ間に移っていくことが明らかになつたが、実際の接合においてバイアス電圧 V_b が大きいと雑音による丸まりや加熱効果によって変換効率が予測値よりも悪くなることが考えられる。このことから、特に倍周波数Nが大きいとき、偶数次倍混合の方がさらに有利になることが考えられる。

さらに基本波混合と2倍周波数混合について、局発周波数 Ω_{lo} を変化させて変換効率を算出した。その結果を図15に示す。2倍周波数混合の場合には前述したように、0電圧バイアス動作と有限バイアス動作の2つが可能であるためその両方について調べている。2倍周波数混合の0バイアス動作の有限バイアス動作に対する優位性は $\Omega_{lo} > 0.6$ で失はれることがわかつた。横軸を信号周波数 Ω_s に書き換えたものが図16である。この図から、 $\Omega_s \leq 0.3$ なる信号を検波する場合(Ω_s を固定して考えると)基本波混合と2倍周波数混合を比較すると変換効率に関してはほぼ同等であることが

わかった。

6. おまけ

Magerlein によって提案されたアナログ・シミュレータを使って、周波数混合のシミュレーションを行なった。

その結果をまとめると

- i) 過倍次数 N が偶数の場合、0次ステップの高さ \bar{v}_0 が 0 にならなければ局発電流 I_0 を加えたときバイアス電圧 0 で中間周波出力が得られる。これに反して N が奇数の場合は出力が得られない。すなはち、偶数過倍混合の場合には有限バイアス動作に加えて 0 電圧バイアス動作が可能である。さらに、規格化した局発周波数が小さいとき偶数過倍混合において 0 電圧バイアス動作が最適となり、最大の変換効率が得られる。2 過倍の場合、 $\Omega_0 < 0.5$ の範囲で 0 電圧バイアス動作が有限バイアス動作より変換効率の面で有利である。
- ii) i) で述べた偶数過倍混合固有の 0 電圧バイアス動作では、バイアス電圧 $V_B = 0$ で良いことから、消費電力や雑音の面でも有利であることが予想される。
- iii) 局発周波数 Ω_0 を固定して考えてみた場合、 $\Omega_0 < 0.2$ の範囲で 2 過倍混合の 0 電圧バイアス動作時の変換効率が基本波混合のそれより大きくなる。

なお試作ジョセフソン混台ハーモニックミキサの 2 過倍混合の実験では 0 電圧バイアス動作が最適とはならず、われわれのシミュレーションの結果とは一致しない。2 過倍混合において 2 つの動作モードが存在することに関してはよく一致している。今後、ミキサの雑音温度の面で、0 電圧動

作と有限バイアス動作を比較検討し、試作実験の予見を得たいと考えてい
る。

謝 辞

本研究の遂行に当り、実験に御協力頂いた本学卒業生福井勝浩君に感
謝する。なお、本研究は昭和54年度文部省特定研究費によるものであ
ることを記し、謝意を表す。

文 献

- (1) T.G.Blaney et al , J.Phys., D7 (1974) 1882.
- (2) T.G.Blaney et al , J.Phys., D9 (1976) 2175.
- (3) Y.Taur et al , Rev.Phys.Appl., 9 (1974) 263.
- (4) T.G.Blaney, NPL S.I., No.89/0382 (1978).
- (5) Y.Taur et al , Appl.Phys.Lett., 24 (1974) 101.
- (6) Y.Taur et al , Rev.Phys.Appl., 9 (1974) 263.
- (7) J.H.Magerlein, Rev.Sci.Instrum., 49 (1978) 486.
- (8) B.D.Josephson, Phys.Lett., 1 (1962) 251.
- (9) P.Russer, J.Appl.Phys., 43 (1972) 2008.
- (10)C.A.Hamilton, Rev.Sci.Instrum., 43 (1972) 445.
- (11)C.K.Bak et al , Appl.Phys.Lett., 22 (1973) 149.
- (12)C.K.Bak, Rev.Phys.Appl., 9 (1974) 15.
- (13)J.H.Claassen et al , J.Appl.Phys. 49 (1978) 4117.
- (14)Y.Taur, IEEE Trans. on Mag., MAG-15 (1979) 465.
- (15)喜多、藤澤, 信學技報, 79 ED-79-127 (1980).

McGill大学上における薄膜光導波路の研究

増田正光

(大阪大学工学部 電子工学科)

昭和55年 6月 27日

輻射科学研究会

McGill大学における薄膜光導波路の研究

Research on thin film optical waveguides
in McGill University

増田正光

Masamitsu MASUDA

大阪大学 工学部 電子工学科

1.はじめに

筆者は1978年9月から1980年2月末まで丁度1年半、カナダモントリオール市のMcGill大学電気工学科のYip助教授手下で研究する機会に恵まれた。McGill大学はDowntownの近くに広大な敷地を有し、その中にピクトリア王朝風のビルが建ち並ぶ古風で落ち着いた雰囲気の大学である。一方、モントリオールはカナダの都市の中でも特にフランス色の濃い町で、真冬の最低気温は-30°C以下で記録することもあるという嚴寒地である。しかし、Old Montrealの古い町並みの独特、香り、Mount Royalの散策など市内の人々の親切な心を初めとし、長期滞在における格好の場所である。このような環境の中で1年半、外国生活を経験できることは

誠に幸運である。

McGill大学では LiNbO_3 を中心とする薄膜光導波路とそれを応用して光子技術の研究を行なうが、その内容は次のとおりである。

1. 光ストップ導波路の作成

(1) Ti 抵散 LiNbO_3 導波路

(2) Al_2O_3 及び Corning 7059ガラス・ストック薄膜導波路

2. リフトオフ法による2次元線路の作成

3. LiNbO_3 光分岐線路を用いた TE-TMモードスイッタの提案と実験

4. ビデオ信号による光波調度実験

外国の大学における研究方法は、日本のYukio Ito博士による。本文では、先ず筆者の体験とともに McGill大学での研究の進め方について述べたい。3章では、McGillにおける基礎的な薄膜光導波路作成技術の現状を紹介し、4章では、新規導波型TE-TMモードスイッタの動作原理と実験結果を示す。されど、 LiNbO_3 光分岐素子を用いてビデオ信号による光波調度実験を行なうが、こゝについては5章で述べる。

2. McGill大学での研究の進め方

McGillでは、Research Associateの身分で、光IC専門の

実験を中心とした研究を行なうという約束であったが、Yip助教授の専門は光電子への理論解析であり、正直私は出发前では一寸の不安があった。McGillへ行ってYip助教授の所有する唯一の光導実験室へ室内を歩き、片隅に真新しい抵抗加熱蒸着・RFスパッタ兼用の小型真空中置装置を封じ切らず置いてあるばかりで、他の光導波路作成に必要な装置・器具は見当らなかった。

最初の仕事は実験に必要な工具の確保と、光導波路作成用の装置を室内から探し出すことである。幸いも、Semi-conductor Lab. の教授が実験室の使用と、振動炉の借用を認めてくれた。その後、他の教授から、アトリエにて保有しているセナーやスクアラン等の暗室装置を借り受けたので、一心の体勢は整った。McGillには日本同立大学のように講座制の体制無い、というものの、すべての装置・器械は各教授・助教授が自らの研究費で購入したものであり、これらを借用することは容易ではない。この次に、実験材料・器具の調査・購入である。南米業者と電話で話し合い飛沫するのであるが、この時最も感心したのは、語彙力の不足と痛感した。電話に通じるまでやけりや2ヶ月は要する。スカナダや北米の会社は比較的のいいところであり、折々見えて満足すると思われた。

McGill電気工学科には Mechanical Workshop と Electrical Workshop がある。二つは各々4~5人の熟練

した technician がいた。実験上の問題やトラブルが発生した場合は、こゝに相談に行く。やはり複雑な工作や回路の組立もこの workshop で請け負ってくれる。筆者の場合は、ワイヤーハンガー、蒸着、ワッカ用器具あるいはフォトマスクアラナー等の作製、及び光導波路実験上要する測定器具機の準備を依頼した。こゝの workshop の方々の援助を受けた筆者の如き異乎人間 McGill で実験を行ってきましたから、アーリー、しかし、technician は年配の人が多く、日頃から少しおしゃべりで話す機会を作り、良き human relations を維持することを心掛けねばなりません。

されど、筆者は 1 年半の間、最初大学院生 7~8 人と同心協力して並んで過した。ほんどの学生は国外からの留学生で、考え方・習慣も異なり、専門分野も各自違っていた。しかし、お互い助け合つて異國で精一杯生きようという雰囲気があり、筆者も着任して 2~3ヶ月の間、公私ともに、この街で教える事など全くやれなかった。McGill で研究を進める上で、少しご友人達の助けが非常に役立つものではある。

3. 光導波路作成技術¹⁾

先に述べたように、新たな導波型 LiNbO₃ 光デバイスを実現することを目的として、研究を開始したが、1 年半の滞在期間、大半を基礎的・光導波路作成技術の確立と光導波路系

整備に費した。本章では、筆者や用意した McGill の装置、器具を用いて薄膜光導波路作成技術の現状について紹介する。

3.1 Ti 拡散 LiNbO₃ 光導波路

SAW grade の LiNbO₃ 単結晶 (Union Carbide 社製) に Ti を 500 Å 程度真空中蒸着し、N₂ ガスあるいは Ar ガス雰囲気中で 1000 °C で熱拡散し、さらに O₂ ガス中で 1 時間酸化して、低損失の薄膜光導波路を得る。拡散深さ及び表面屈折率変化 Δn は Ti 膜厚と熱拡散時間で調整する。

Li₂O の out diffusion 防止を行う。2.1.2.2 " $\Delta n_e > \Delta n_o$ " ある。2 次元線路キャリコット法を用いて作成できる。フォトレジストは Shipley AZ-1350J である。Workshop で作製したフォトマスクアライナーを用いて、幅 20 μm あるいはそれ以下の 2 次元線路を作成する。回りに X の 1 列を立てる。

3.2 RF スパッタ薄膜光導波路とバッファ層

LiNbO₃ 光デバイスにおいては、電極金属装荷による伝播損失を低減するため、低屈折率誘電体バッファ層を付加する必要がある。これに南達江、Al₂O₃ 及び Corning 7059 ガラスの RF スパッタを行い、これらを薄膜光導波路を作成した。スピッタ装置は Cooke Vacuum Co., CV-3002, 5" のターゲットを anode とする 2 極 sputtering up system

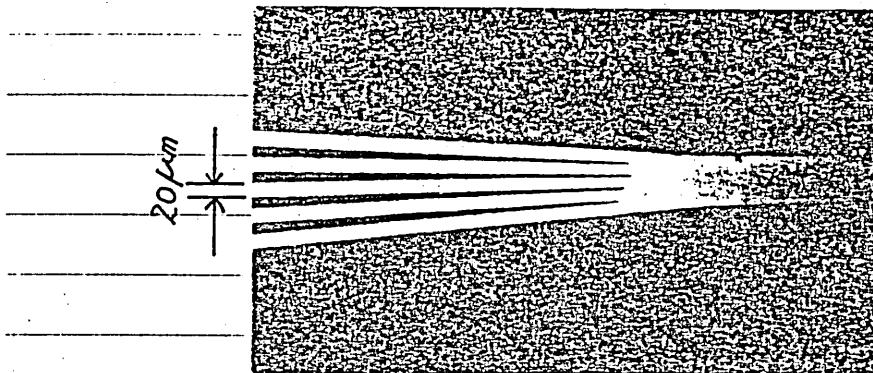


図1 LiNbO₃ 5分岐線路のTi film Pattern: $\theta = 2^\circ$

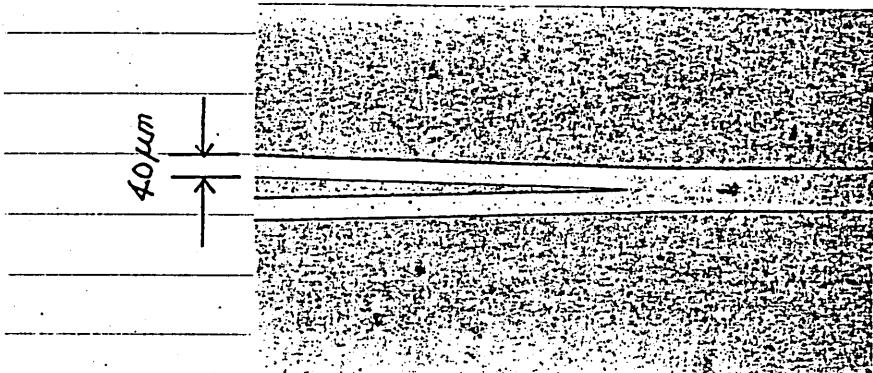


図2 Al₂O₃ 71.5%薄膜 2分岐線路: $\theta = 2.86^\circ$

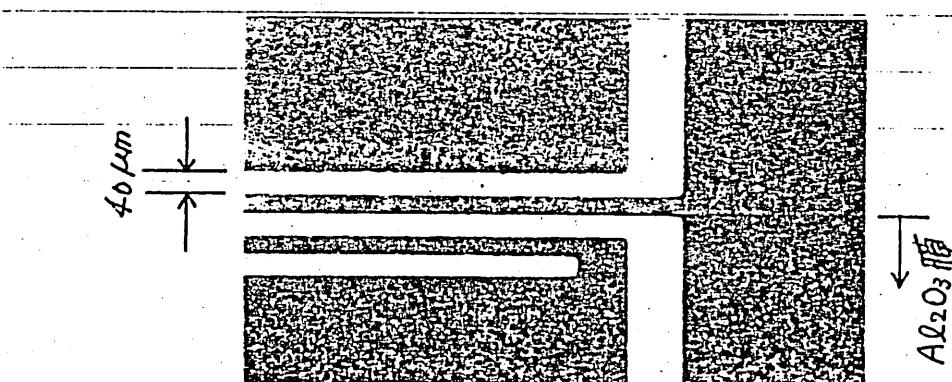


図3 Al 70L+電極 (TE-TMモード用)

である。Al₂O₃の場合、Ar/O₂(4:1)の混合ガス、ガス圧 2×10^{-2} torr, RF 1.09-50Wで、スライド基板上に屈折率1.663 ($\lambda = 0.633 \mu\text{m}$) のAl₂O₃薄膜を得る。同時に、リトグラフ法により作成したAl₂O₃薄膜の岐線路とする。また、Ti: 拡散LiNbO₃導波路上にAl₂O₃バッファ層を形成したとき、アモルファス光導体が見出される。これはAl₂O₃ストップ後試料をO₂ガス零気中で約500°C, 3時間、再酸化するにより完全に克服できる。

3.3 制御用電極の作成

AlとTi: 拡散2次元線路上に蒸着し、電極用フォトマスクを重ね合わせてフォトエッチングを行い、図3上部によれば制御用電極を作成する。リード線、ボンディングは高純度の低In-Ti_nヘタあるいは超音波ボンディングを行なう。

3.4 光学実験系

薄膜光導波路中のガイド光は+5°カット Ti:O₂フリズム、TAFDフリズムあるいは60°カット Sr-Ti:O₃フリズムを用いて励起する。フリズムホールダーはX-Y・回転微動ステージ以外に、横モード制御のためのゴニオメータも取り付けてある。He-Neレーザ光は先ずコメートしてから一定のゼンマイにて拡げ、偏光板を通してレインボーフリズムエッヂに集束する。又出力側に顯微鏡筒を置き、出射ゼンマイのnear-field patternを

観測する。必要に応じて APD 等、光検出器を用意する。

以上は、LiNbO₃を中心とする薄膜光導波路の研究上、必須不可欠な基礎的技術である。筆者の帰国後、現大学院修士課程の学生が実験を継続に行なっている。近々将来他の Postdoctoral fellow が赴任し、光 IC 向けのこの技術をさらに発展させていくことを期待している。

4. LiNbO₃ 分岐線路を用いた TE-TM モードスプリッタ

従来、LiNbO₃ 分岐線路を用いた光スリット^{2), 3)} 及び X の光アソルーバーへの応用⁴⁾ が報告されている。光結合器と比較して分岐線路の場合、カクド光の phase-matching の制御を必要とする。X 小分け設計・微細加工が容易であるという利点を持つ。一方、これまで光導波型 TE-TM モードスプリッタ^{2), 3)} が報告されているが、^{5), 6)} これは LiNbO₃ 分岐線路を用いた新たな TE-TM モードスプリッタの提案と実験結果について述べる。^{7), 8)} なお、つい最近 LiNbO₃ 光結合器モードスプリッタが提案されている。⁹⁾

4.1 動作原理

図 4-1 提案されたモードスプリッタの形状を示す。分岐線路上に誘電体ドップラ層が部分的に装荷されており、3 点で除

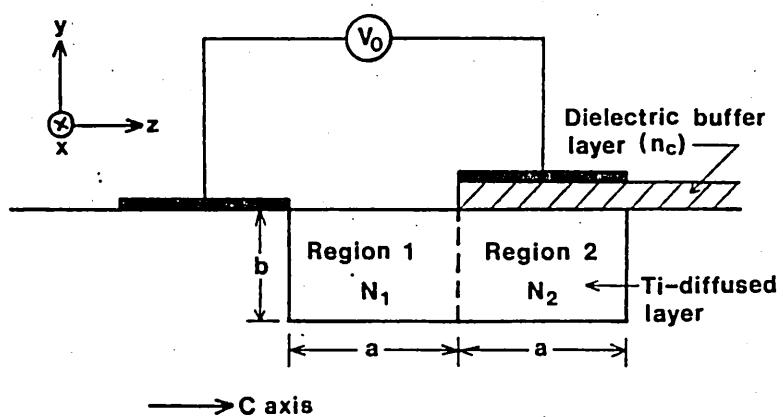
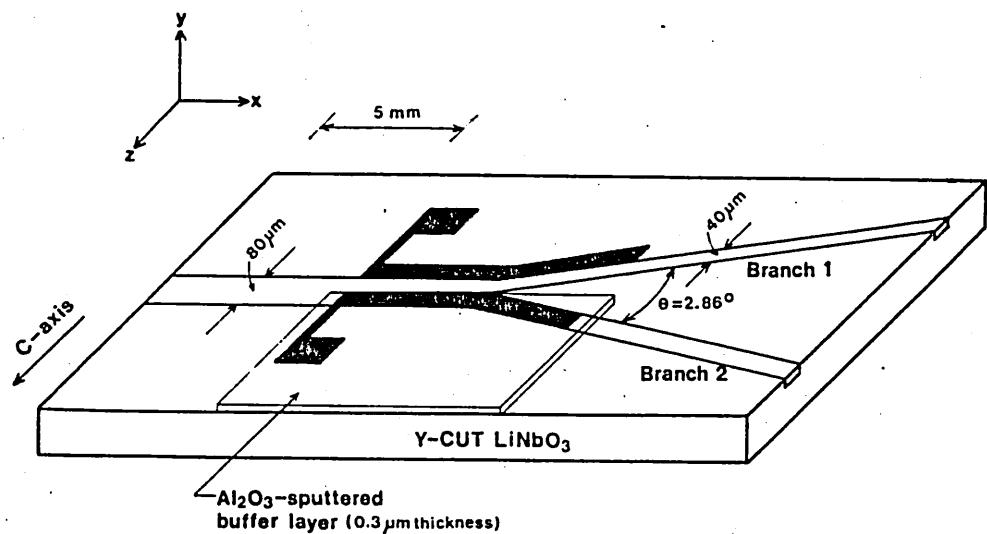


図4 LiNbO_3 光分波 TE-TM モードスプリッタ
 (a) 素子の形状と寸法
 (b) 主線路の断面図

の形状は光分岐スイッチ素子³⁾と同様である。このビニア層の部分的クラッディングモードスリットイング動作において重要な役割を果す。主線路の断面図を図4(b)に示す。まず、誘電体ビニア層の部分的クラッディングの結果によると、領域2の導波光に対する屈折率差 $N_2 - N_1$ は領域1の N_1 より大きくなる。ゆえに、印加電圧 $V_0 = 0$ のとき、TE(E^z)、TM(EY) モード共に領域2に同心込められ、X₁₀ の光₁₀の大部分は分歧2より取り出される。次に、実効屈折率差 ($N_2 - N_1$) を補償する以上の電圧を印加する。このとき TE モードは Y 极 LiNbO₃ の電気光学定数 r_{33} を通じ、領域1に同心込められ、分歧1へ送り込まれる。一方、TM モードは電圧に対する感度が最も高く、X₃ 光₁₀は領域2に残るままである。このようにして、LiNbO₃ 光分岐線路における TE-TM モードスリットイングが可能となる。

4.2 近似解析による検討

実験では各モード分歧線路を用いて実験を行ったが、このとき、主線路上における低次の横モードの同心込めをいかに電圧で制御するかが key point となる。制御すべき横モードの数とモードスリットイング上に必要な電圧の試算及びこれら量と誘電体ビニア層の屈折率 n_c の関係を明らかにするため、等価屈折率法を用いて近似解析を行った。ここで主線路の厚さを b 、幅 $2a$ とし、これを step-index 線路と仮定した。Ti 拡散による屈折率変化 $\Delta n_e = \Delta n_o = 0.015$ 、

1バッファ層の厚み $0.3 \mu\text{m}$ とした。領域1及び2の屈折率差 $(N_2 - N_1)$ は b^3 に逆比例し、又上式によれば指数関数的に増加する。フレード電極上電圧を印加すると、領域1ではC軸上沿の電界 \tilde{E}_z が発生し、これと同時に領域2ではY方向の電界 \tilde{E}_y が誘起される。 $\tilde{E}_y \approx \tilde{E}_z/2$, $\tilde{E}_z = 9V/a$ であり、Y電極端面における電界集中を考慮して $\rho = 1.3$ である。適当な電圧を印加すればとの、TE, TMモードに対する合成の屈折率差は次式で与えられる。

$$(\Delta N)_{TE} \approx f_{TE} \left\{ Y_{33} n_e^3 \tilde{E}_z / 2 + n_e^3 (Y_{51} \tilde{E}_y)^2 / \alpha \right\} - (N_2 - N_1)_{TE} \quad (1a)$$

$$(\Delta N)_{TM} \approx (N_2 - N_1)_{TM} = f_{TM} \left\{ n_o^3 (Y_{13} \tilde{E}_z - Y_{22} \tilde{E}_y) / 2 - n_o^3 (Y_{51} \tilde{E}_y)^2 / \alpha \right\} \quad (1b)$$

ここで、 $\alpha = n_e^2 - n_o^2$ 。 f は電圧による結晶内に誘起される屈折率変化に対する軽減係数で、常に $f < 1$ となる。 $\tilde{E}_y \neq 0$ のとき、一般に LiNbO_3 の屈折率構造体の主軸は

$$\hat{\theta} = Y_{51} |\tilde{E}_y| / \alpha \quad (2)$$

だけ回転する。(すなはち、 $|\tilde{E}_y| = 1 \text{ V}/\mu\text{m}$ としておけば $\hat{\theta} \lesssim 0.1^\circ$ であり)この効果は無視できる。(1a), (1b) 式において、 $(\Delta N)_{TE} > 0$, $(\Delta N)_{TM} > 0$ を満足するととも、TEは領域1に、TMは領域2に束縛され、各々分岐1, 分岐2へ送り込まれる。TE, TMモードが同程度の消光比を有する場合、すなはち $(\Delta N)_{TE} = (\Delta N)_{TM}$ としてモードスプリッティングが

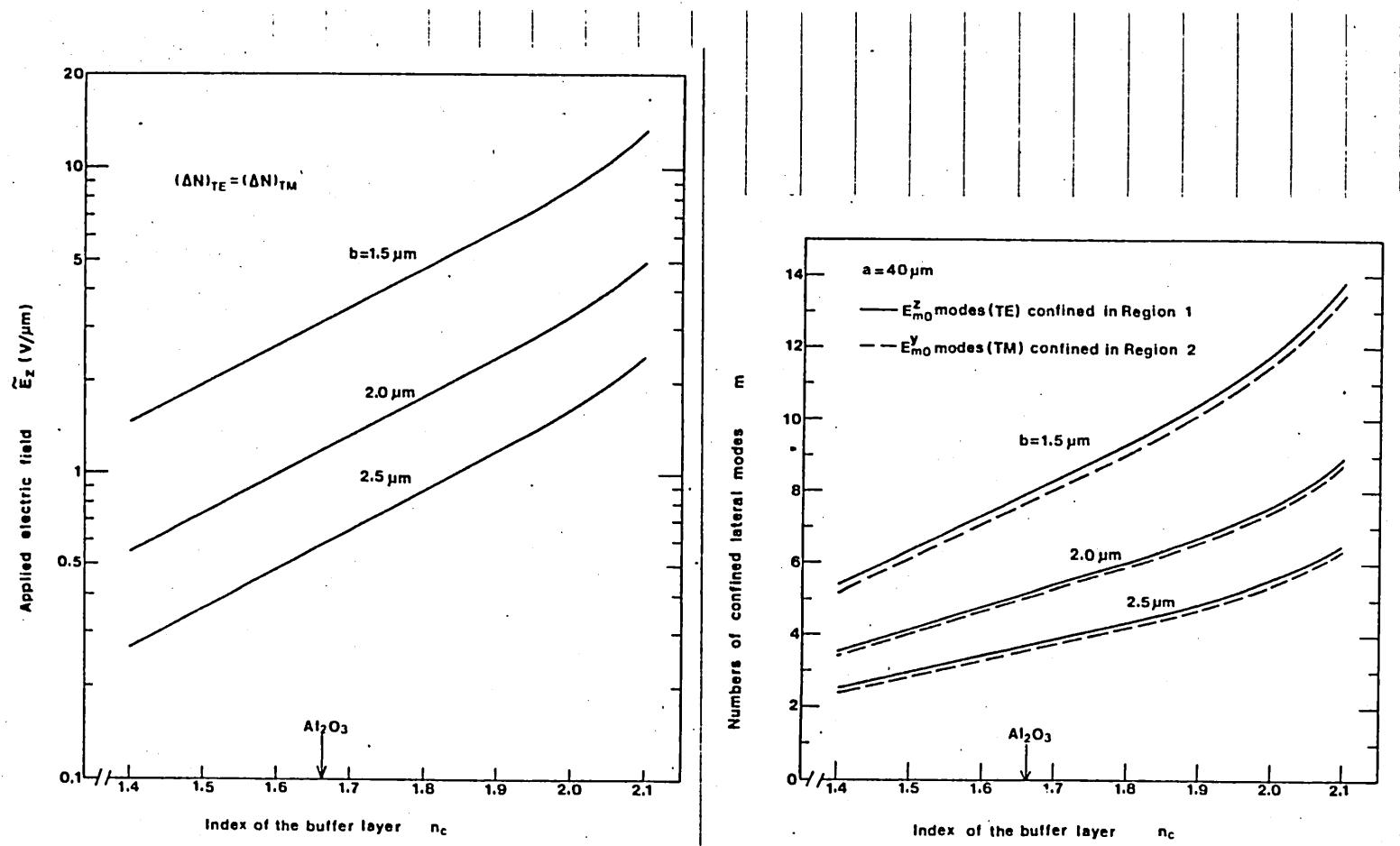


図5 モードスケーリング上界を示す電場

図6 電圧によってX軸に沿って制御される場合の
横モード数

必要な印加電界強度 E_z を評価する。結果を図5, 6
示す。図6は $a = 40 \mu\text{m}$ のときの、主線路において電圧に
よる X の内包みを制御し得る低次の横モードの総数
を示したものである。パラメータは線路の厚さ b である。光合板
スリット素子に関する我々の実験結果^{3), 4)}によると、主線路
幅 $2a = 80 \mu\text{m}$ のとき、光路系を調整して 3~4 個の低次の横
モードのみを強く励起することは十分可能である。この事実と
図5, 6 の結果を合せ考えると、 $n_c = 1.6 \sim 1.7$ で“われば”印加
電圧も比較的の低くでき、適当であることが判る。

4.3 実験

試作したモードストリッタの形状は図4(a)に示すとおりである。
主線路幅 $80 \mu\text{m}$, 分岐線路幅 $40 \mu\text{m}$, 分岐角 $\theta = 2.86^\circ$
である。これは十分大きく、二つの Y 板 $L: \text{NbO}_3$ 分岐線路は power
divider として効く。¹⁰⁾ T: 拡散線路の常光・異常光に対する
表面屈折率変化と拡散深さは $\Delta n_e = 0.019$, $d_e = 2.6 \mu\text{m}$
及び $\Delta n_o = 0.015$, $d_o = 1.93 \mu\text{m}$ である。 L_{120} の外拡散を防
止するため Δn_e , d_e が十分大きい。誘電体バッファ層には、
 Al_2O_3 の RF スピッタ膜を述べ、二つを図4に示すように $L: \text{NbO}_3$
分岐線路上に部分的にケラッティングして。 Al_2O_3 膜の屈折
率は $n_c = 1.663$, X_c の厚さは $0.3 \mu\text{m}$ で金属性による過剰の伝
搬損を完全に除去することができる。¹¹⁾ Al 制御電極の
幅と高さ共に $40 \mu\text{m}$, 長さ 9 mm である。

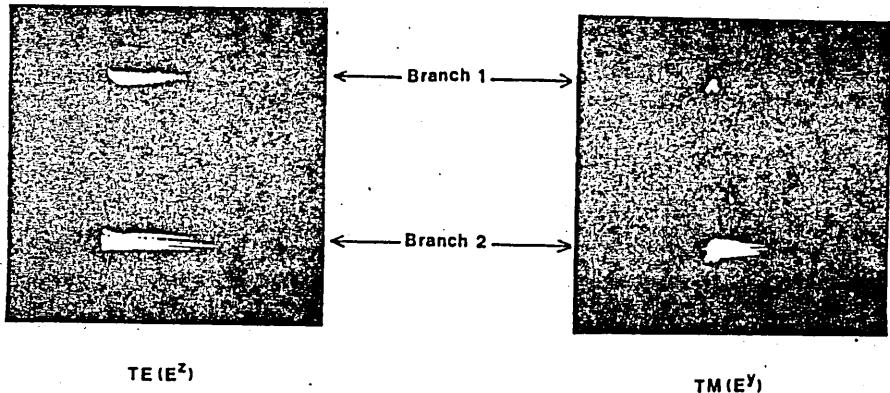


図7 印加電圧 $V_0=0$ のときの分歧出射光の near-field patterns

$\lambda=0.633\mu\text{m}$ He-Ne レーザ光をコリメートル、 45° カット TiO₂ フィルムを用いて主線路上導波光を励起した。このとき、依次の横モードのみ強く励起されるよう、コリメーターハーフマウラーを調整した。図7に、印加電圧 $V_0=0$ 上における、分歧1及び2からの出射光の near-field patterns を示す。 $V_0=0$ では、Al₂O₃ 膜の部分的クラックティングの効果により、2. TE (E_m^z)、TM (E_m^y) と共に主線路の領域2に同心込められ、分歧2へ送り込まれることが確認できた。TE、TMに対する消光比は各々 5.5 dB, 9.7 dB である。この消光比の差異は Ti 桜散線路において $d_2 > d_1$ である、従って $(N_2 - N_1)_{TE} < (N_2 - N_1)_{TM}$ によって帰因するものである。次に、1 kHz の矩形波状の交流電圧をフレーナ電極上印加した。図8に印加電圧による両分歧からの出力光強度の変化を示す。負の電圧を増加

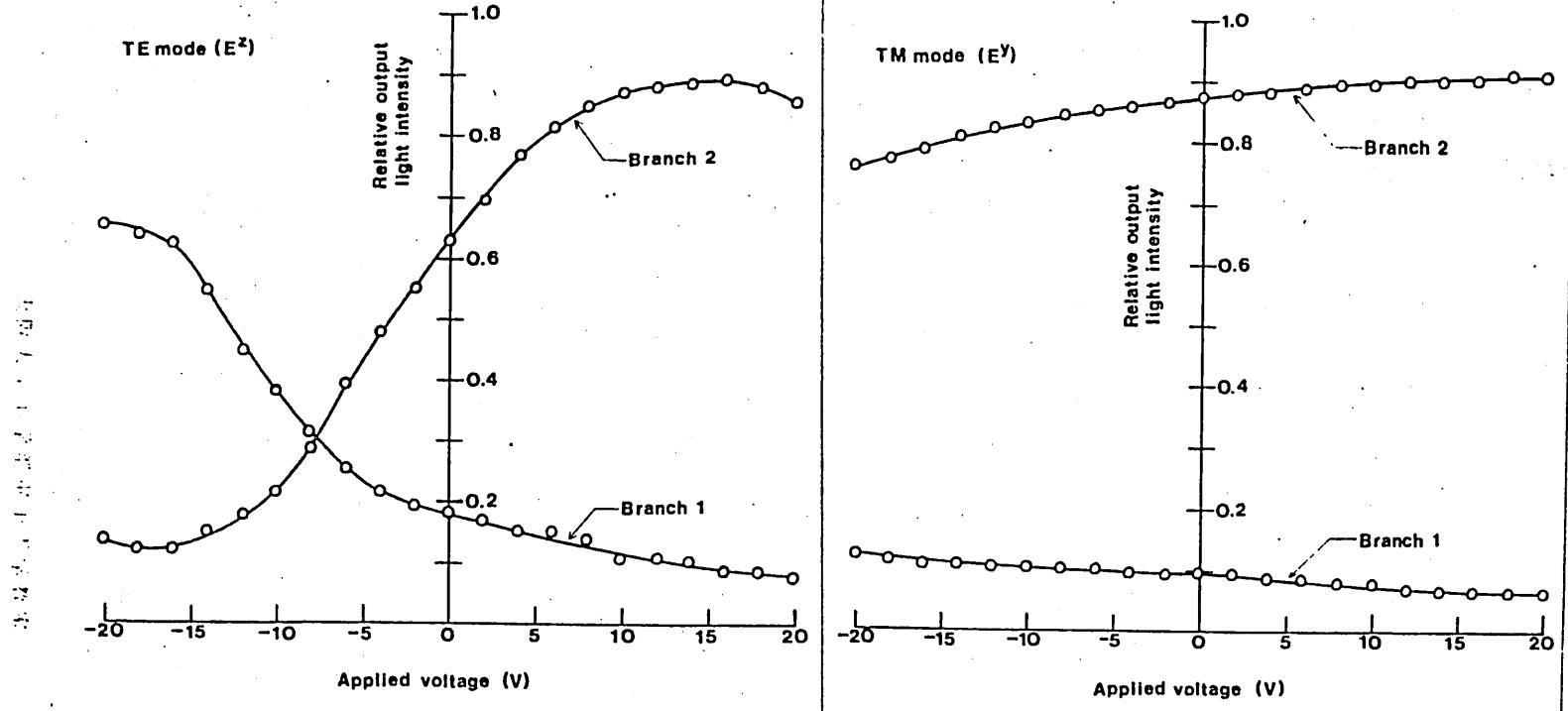


図8 分波出力光強度の印加電圧に対する変化 (1KHz)
 (a) TE (E^z) モード, (b) TM (E^y) モード。

次に、分歧1からのTEモードの出力が逆に増加し、 $V_o = V_c \approx -7.6V$ を越えると分歧2の出力より大きくなる。一方、TMモードの V_o に対する変化は小さく、約大半分の光パワーは分歧2から抽出される。このように、試作した素子が $V_o \approx -15V$ でTEモードスリットについて動作することを確認された。 $V_o = -2$ Vにおける消光比はTEに対して 6.0 dB, TMに対して 8.0 dB である。なお、素子上に直流電圧を印加したとき、電圧によって誘起される屈折率変化と時間の経過と共に、より緩やかになる現象が認められた。これは既に報告されている直電圧印加時のドリフト現象^{[12], [13]}と同様のもとの考え方か、今後解決すべき問題である。

ここでは2モードLiNbO₃分歧線路を用いたTE-TMモードスリットについて述べてきたが、この場合、付加的小槽モードの干渉効果などにより動作特性が複雑化する。同時に、高いモードスリットアーティ比を得ることは困難である。单一モードのLiNbO₃分歧TE-TMモードスリットの場合、消光 20 dB 程度のものは十分に期待でき、現在二重化して検討を行っている。

5. ビデオ信号による光変調実験

前章で述べた LiNbO₃ 光分歧素子は、当然高速の光スリットについて使用することはできる。フレーナ電極の形状によって決まる

静電容量は 2.9 pF であり、素子を 50Ω 負荷で終端すると
約 2 GHz のベースバンド周波数を得る。この高速光スイッチ動作
は実験室級階で實現する方法は種々考らねば、
筆者はビデオ信号で導波光を変調し、これを APP で検出
(2) X の出力を TV に加之像を再生するという方法を試す。¹⁴⁾

先ず、図 4 の LiNbO_3 光分岐素子上 TE (EX) の低次の横モードを励起し、電極に周波数 30 MHz から 100 MHz の RF 電圧が印加された。変調光を APP で検出した。図 9 に分岐器からの出力光の RF 電圧による変化を示す。 $V_0 = \pm 12 \text{ V}$ の範囲で、出力光は電圧に比例して 17 dB 直線的に変化する。このときの消光比は 7.5 dB である。 $1V.1 \geq 15 \text{ V}$ では出力光は飽和する傾向にある。又、分岐器における V_0 による出力光の

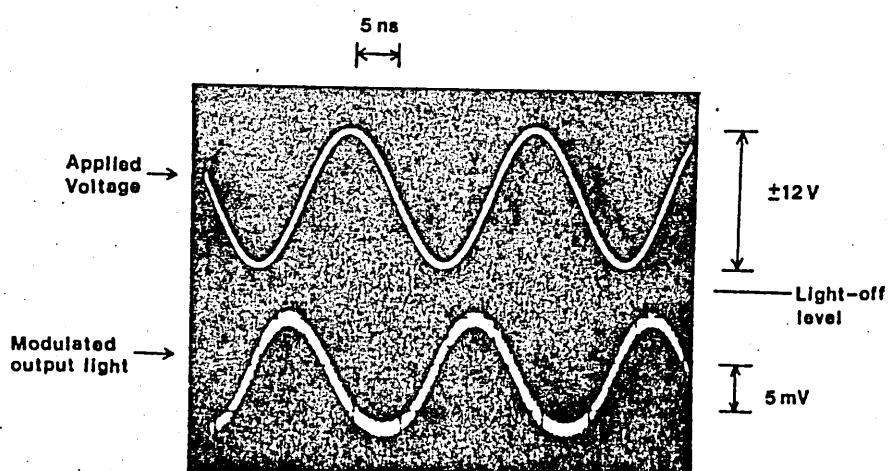


図 9 LiNbO_3 分岐素子の 50 MHz 光強度変調特性

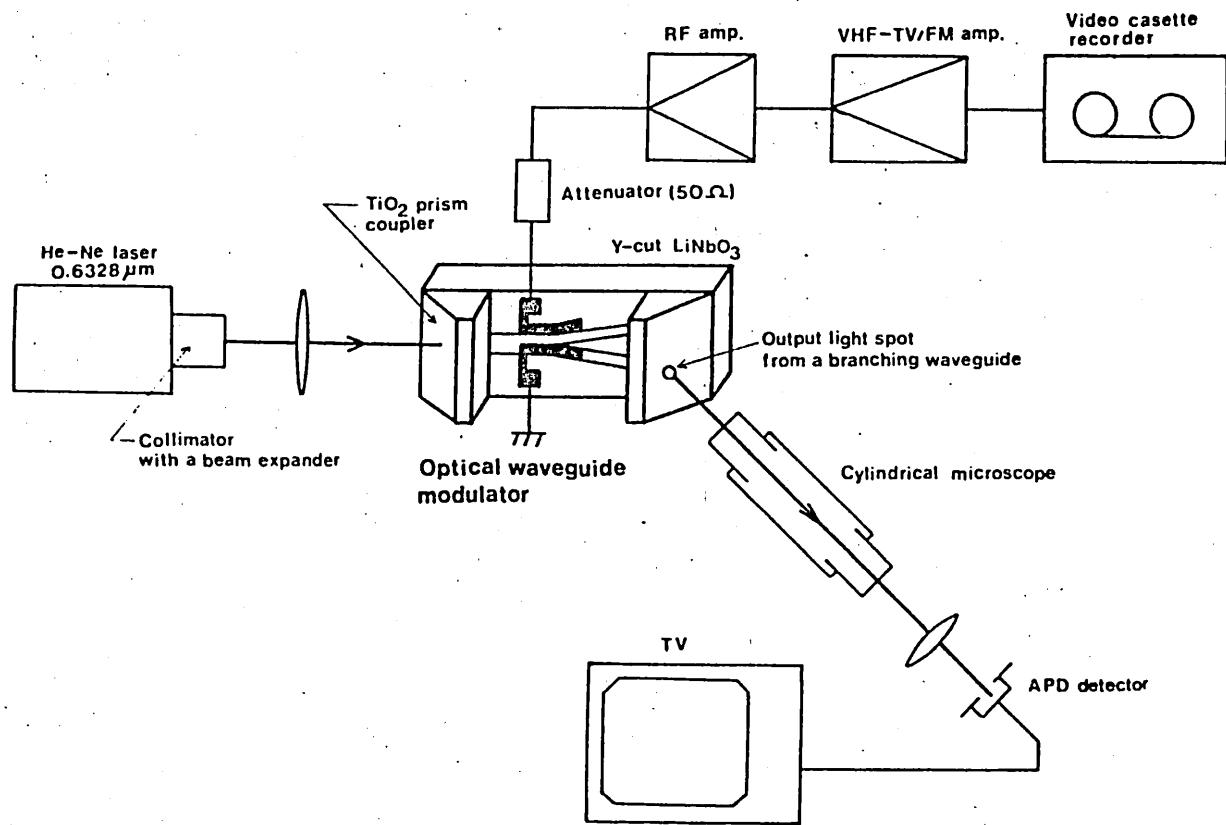
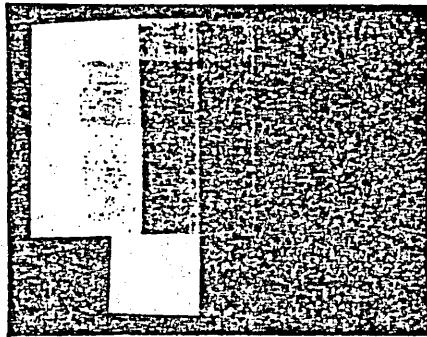


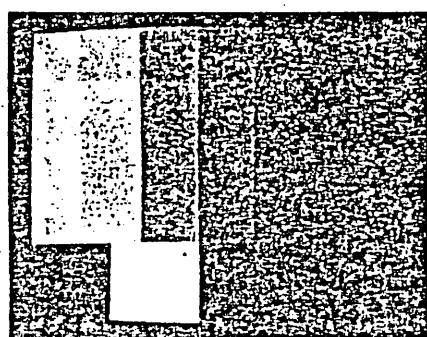
図10 ビデオ信号による斎波光変調の実験系

変化は指數関数的である。 $V_0 = \pm 12V$ に対する消光比は
6.5 dB と分岐2トビ比べて劣る。

次に、図10にて光学実験系を用いて、ビデオ信号による光
変調実験を行なう。ビデオカセットレコダーカラの出力信号を
YHF TV/FM増幅器及びRFトーマー増幅器を通して素子上
印加した。このLC-2"では Video carrier frequency は 70
MHz で、これがビデオ信号によつて AM 变調される。又カラー
及ぶ白黒画像の発生も可能である。素子の手前には 50Ω の可
変抵抗減衰器が挿入されており、TV 上の再生像を見ながら
減衰率を調整する。分岐2からの变調出力光を、顯微
鏡筒及びレンズを通して APD で受け、X の出力をカラー-TV に入れる。
このとき光学系は最大の消光比を得るために調整せらる
ばつた。図11は LiNbO₃ 分岐素子を通してビデオ信号の
再生像と、LC-2"の出力を直接 TV に加えて得られる像(直接
像)を示してある。2種類の test patterns を用いたが、
background noise を除いて、再生像と直接像の画質に
顯著な差異は認められなかつた。再生像に見らるる background
noise の原因としては、分岐素子自体の消光比があまり高くない
ことと APD の avalanche noise が上げられる。又、RFトーマー
増幅器出力部からの RF leakage level は、分岐素子を通して
APD 上検出される signal level より -35 dB 以上低い、この
RF leakage の影響が TV 映像上にはほとんど現わらない。
なお、LC-2"の代りに CATV の cable を接続した場合に、
比較的良い画質のカラー画像を再生することができた。

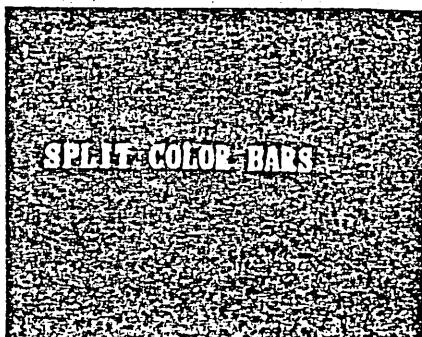


Received image through the optical waveguide modulator

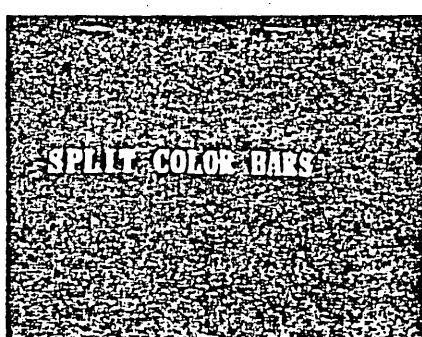


Direct image from the video recorder

(a)



Received image through the optical waveguide modulator



Direct image from the video recorder

(b)

図11 LiNbO_3 光波導素子を通過して得られた像と直接像の比較

6. まとめ

以上、1年半のMcGill大学電気工学科における、筆者の研究について述べた。光IC関係の研究に関しては、カナダの研究

著者も日本と比較して深い active な経験。

McGill でと以前に有機薄膜導光導波路の実験報告があるが、本格的に薄膜導光導波路の実験着手したのは筆者も初めてといふのが現状である。最初は二つ以上の状況の中に飛び込んで、筆者のような産業研究家が研究できることのか危險なものである。しかし、今1年半の McGill の滞在を振り返ると、種々の苦労もあり、ただ、少しずつ有意義であると思う。風俗・習慣の異なる外国の大学で実験を始め、それにある程度の研究目的を達成することができたのは、筆者をとり得た人々の協力によるところである。

McGill 大学において、これらの人の温い人情と真摯な対応が一番の収穫であったからである。これまで研究分野が同じでレベルも同じであるのは高い大学へ留学するケースの多くで、筆者の場合は例外に入るかといふ。しかし、1~2年の海外研修の場合、やはり研究成果を上げる目的とするのも一つだ。研究を通して外国の人々と接し、いろいろの知識・考え方を吸収することは意義深いと思う。この意味で、筆者は1年半非常に貴重な有意味な時間をモントリオール・McGill 大学で過ごせたと自負している。最後に、筆者の得た成果を踏ま合計、今後 McGill における光ICの研究がまた発展するところを願ってやまない。

謝辞

McGill大学滞在中、種々御助言・御援助頂いた。

G. L. Yip 助教授、海外研修、機会を与えられ、終始
激励頂いた 大阪大学工学部 小山次郎教授、西原浩
助教授に深謝する。実験課題、便宜を計り頂いた。

McGill大学電気工学科 Semiconductor Lab. の C. H.
Champness 助教授、SAW Lab. の M. C. Jain 博士、
X12 御協力頂いた Workshop の J. Foldvari 氏はじめ
technicianの方々、ビデオ信号による光波調用駆動上
の協力願、F. K. Clowes 氏に感謝する。

なお、本研究は National Science and Engineering
Research Council (NSERC) of Canada の援助を
蒙った。記して謝意を表す。

参考文献

1. M. Masuda, and G. L. Yip, "Fabrication techniques of thin film optical waveguides using McGill facilities" Report No. 000 for the Dept. of Electrical Engineering McGill Univ., Jan. 1980.
2. H. Sasaki, I. Anderson, "Theoretical and experimental studies on active Y-junctions in optical waveguides" IEEE J. Quantum Electron. QE-14, 883 (1978).

3. 光永, 増田, 小山, "LiNbO₃光分岐線路の特性"
電子通信学会論文誌, 63-C, 178 (1980).
4. K. Mitsunaga, M. Masuda and J. Koyama, "Optical waveguide isolator in Ti-diffused LiNbO₃," Opt. Commu. 27, 361 (1978),
5. H. F. Mahlein, R. Oberbacher, and W. Rausher, "An integrated optical TE-TM mode splitter," Appl. Phys. 7, 15 (1975).
6. M. Kobayashi, H. Terui, and K. Egashira, "An optical waveguide TE-TM mode splitter," Appl. Phys. Lett. 32(5), 300 (1978).
7. M. Masuda, and G. L. Yip, "An optical TE-TM mode splitter using a LiNbO₃ branching waveguide," Appl. Phys. Lett., to be published.
8. M. Masuda, and G. L. Yip, "An optical waveguide TE-TM mode splitter in Ti-diffused LiNbO₃," submitted to 6-th European Conference on Optical Communication, Univ. of York, United Kingdom, Sept. 1980.
9. O. Mikami, "LiNbO₃ coupled-waveguided TE/TM mode splitter," Appl. Phys. Lett. 36(7), 491 (1980).

10. W. K. Burns, and A. F. Milton, "Mode conversion in planar-dielectric separating waveguides," IEEE J. Quantum Electron, QE-11, 32 (1975).
11. M. Masuda, and J. Koyama, "Effects of a buffer layer on TM modes in a metal-clad optical waveguide using Ti-diffused LiNbO₃ C-plate," Appl. Opt. 16, 2994 (1977),
12. G. L. Tangonan, D. L. Persechini, J. F. Lotspeich, and M. K. Barnoski, "Electrooptic diffraction modulation in Ti-diffused LiTaO₃," Appl. Opt. 17, 3259 (1978),
13. 山田, 橋本, 皆方, "LiNbO₃ 光変調器/スリットの直列ドリフト停止
才27回光物連合講演会, 3PK7, 233 (1980).
14. M. Masuda, and G. L. Yip, "A wideband LiNbO₃ branch waveguide modulator," to be presented in SPIE's Annual International Technical Symposium and Exhibit San Diego, USA, July 1980.

LiNbO₃光分岐型TE-TMモードスプリッタ
—その理論的検討—

森田哲郎、光永一正、増田正光、小山次郎

(大阪大学工学部電子工学科)

昭和55年9月26日

輻射科学研究会

LiNbO_3 光分岐型 TE-TM モードスプリッタ —その理論的検討—

森田哲郎、光永一正、増田正光、小山次郎
(大阪大学工学部電子工学科)

1. 序言

LiNbO_3 (LN) 光分岐素子¹⁾は光結合器と比較して導波光の位相整合の制御を必要とせず、それだけ設計・微細加工が容易であるという利点をもつ。我々はこれまで LN 光分岐素子の基本特性を明らかにし^{2), 3)}これを応用した光アシレータ⁴⁾、及び分岐素子と Nb_2O_5 リッジ曲り線路を組み合せた 4 端子光スイッチ⁵⁾を提案・実証してきた。一方、従来光 IC の重要な基本素子の一つである光導波型 TE-TM モードスプリッタについては 2, 3 報告されてい^{6), 7), 8)}るが、筆者らの一人は先に LN 光分岐素子の機能と適当な誘電体の部分的クラーティングの効果を利用して新たな TE-TM モードスプリッタが構成できることを提案し、その基本的な動作を実験によって確認した。^{9), 10)}しかしながら、このとき多モード分岐線路を用いているために、素子のスイッチング特性は光ビームの入射条件に非常に敏感であり、また線路内における横モード間の干渉によって消光比は劣化するという欠点を持っていた。さらに多モードであるために、素子性能の理論的評価は困難で、素子設計に必要なパラメータの詳細な検討は行っていない。これらの欠点を克服するために、

我々は新たに単一モード LN 光分岐線路を用いた TE-TM モードスプリッタの構成を考え、その試作を意図して理論的検討を行ったが、本論文では、その結果について述べる。先ず、単一モード素子の構成とその動作原理を第2章で示し、第3章では分岐点における解析とともに素子性能の評価を行う。さらに第4章では入力部のテープ線路設計のための数値計算結果を示す。

2. モードスプリッタの構成とその動作原理

2.1 素子の形状

TE-TM モードスプリッタは 図1 に示すように、我々が現在その設計・試作を進めている単一モード LN 光分岐線路¹⁾をもとにした構成される。基板は T の横方向拡散の小さな凸板 LN である。入力線路及び出力分岐線路幅 w は、T 拡散による表面屈折率増分 Δn 、拡散深さ s に応じて、横方向に基本モードのみが伝搬するように設定される。入力線路から分岐点に至る横モード制御部分において、高次横モードの発生を防ぐために、十分ゆるやかなテープがつけられている。また、この制御部分には、図1 に示すように、SiO₂ バッファ層を介して、P+レート電極が置かれ、電極間隔は分岐線路側で一定である。この電極直線部の長さ l_1 は、素子の製作行程における分岐点のなまり（図1 中の破線）を考慮して決められる。例えば分岐角 1°、分岐点のなまり $t = 2 \mu\text{m}$ とすると、 $l_1 \approx 200 \mu\text{m}$ が必要である。制御部分におけるテープ長 l_2 については 第4章で定量的に検討

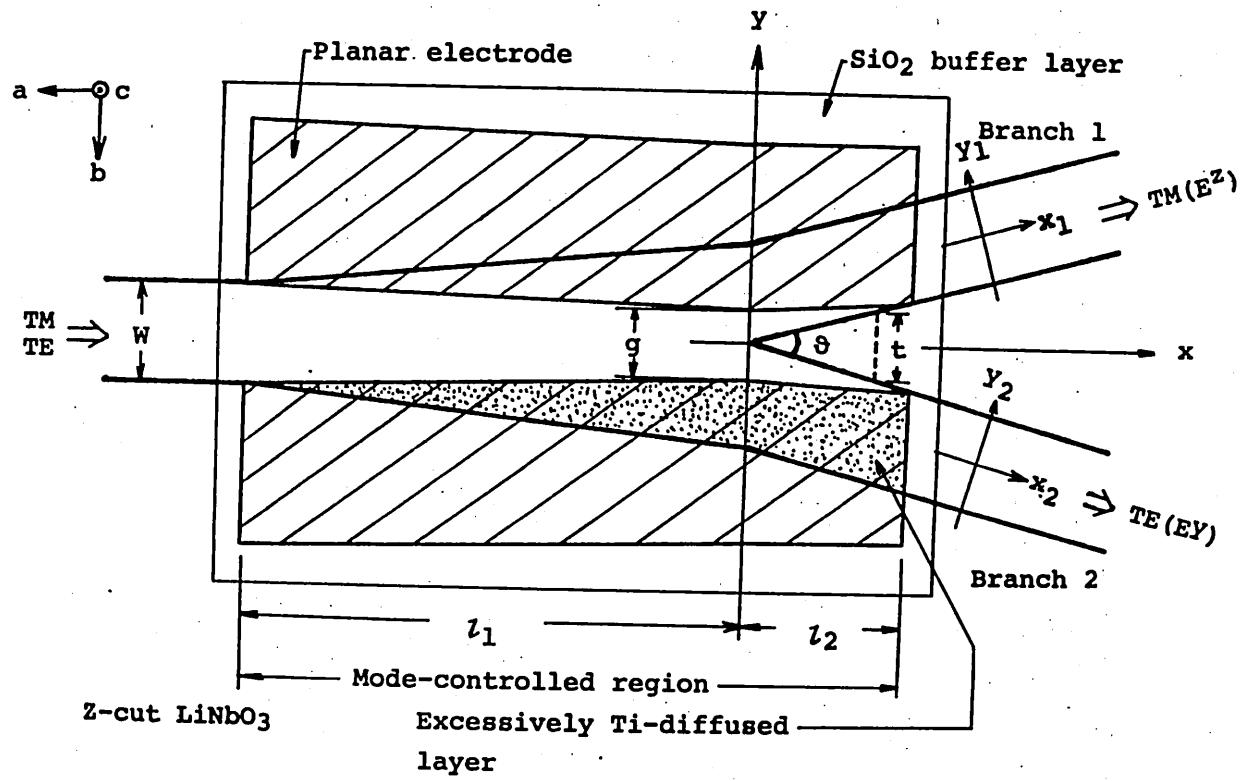


図1 単一モードLN光分岐線路を用いた
TE-TMモードスプリッタの構成

である。さらに分岐点近傍の電極間隔 δ は分岐角 θ 及び線路幅 w と共にモードスプリッタの性能を左右する重要なパラメータである。

LN2分岐線路をモードスプリッタとして動作させるときには印加電圧 $V_0=0$ の状態で線路が非対称でなければならぬ。先に提案した多モードスプリッタの場合^{9), 10)}、その線路の非対称性は適当な誘電体膜(ALDスピッタ膜)の部分的クラッディング効果を利用して与えられた。しかし図1に示す單一モード素子の場合、分岐線路の片側のTi拡散量を他の部分に比べて大きくする。(つまりTiの重拡散あるいはリフトオフの際にTiの膜厚を増加してこの部分の屈折率変化を大きくする)ことによって、 $V_0=0$ のときの非対称性を与えることにする。これによて誘電体膜の選択という困難さを取り除くことができる。図2にTE, TM両偏波に対する印加電界分布と表面屈折率変化分布を示す。

ここで電圧を印加することによって拡散線路表面の屈折率のみが変化し、厚み方向の拡散深さ δ は一定で、かつ屈折率分布はガウス関数を保持すると仮定している。また煩雑さを避けるために以下の解析では、Tiの横方向拡散及び電極端での電界集中を考慮しないことにする。従って実験結果と対応させるとときには、解析結果に補正を加える必要がある。

2.2 動作原理

図2に示すように線路の断面を3つの領域に分けて考える。まず、 $V_0=0$ のとき、部分的Tiの拡散量の増加によって、TE, TM

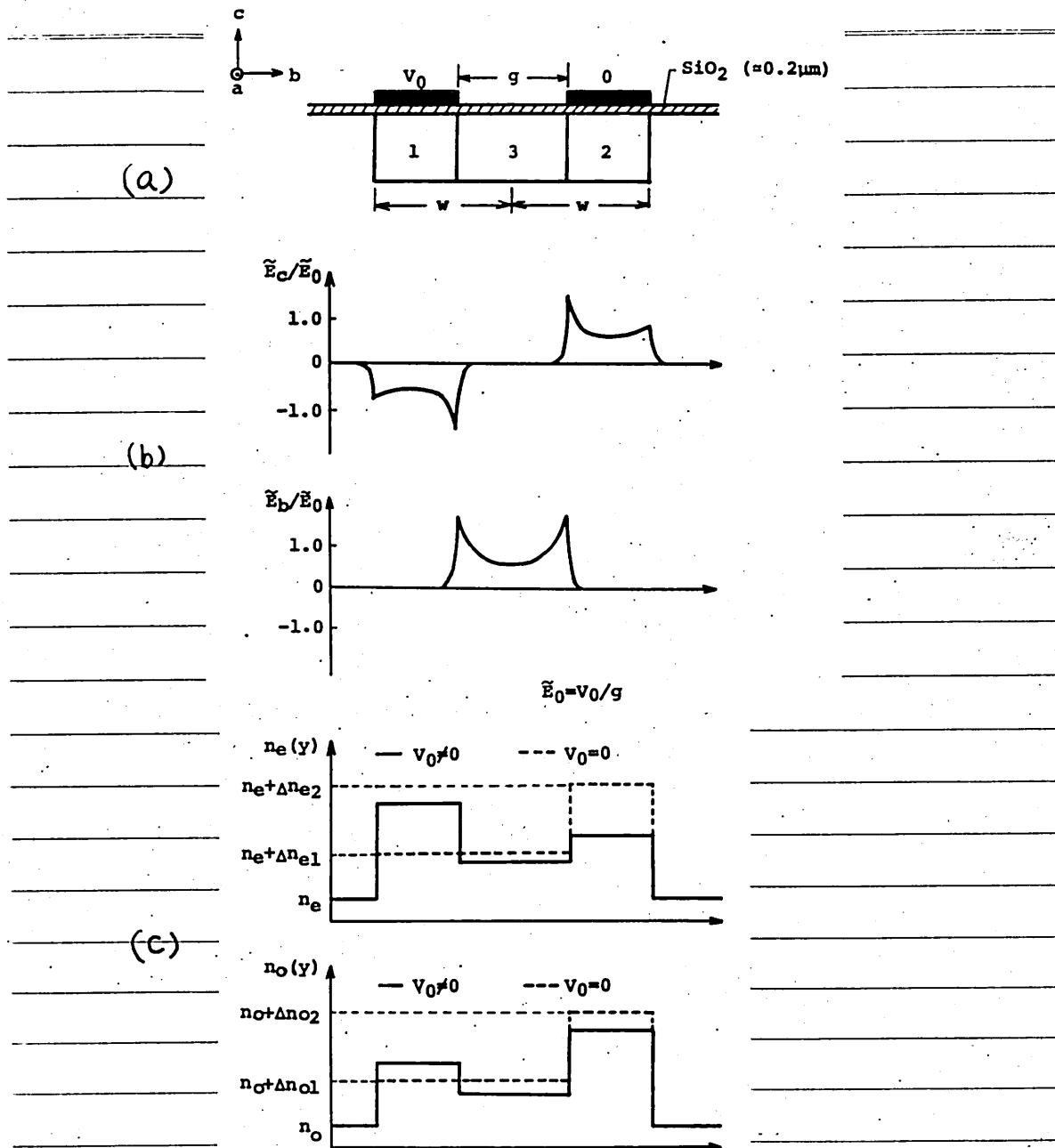


図2 分岐点($x=0$)における入力線路側の
(a) 断面図 (b) 印加電界分布
(c) 表面屈折率変化分布
(実線は $V_0 \neq 0$, 破線は $V_0 = 0$)

モード共に $\Delta n_2 > \Delta n_1$ となり、その光パワーは領域 2 に閉じ込められ、分歧 2 へ送り込まれる。さらに電圧印加時における領域 1 と 2 の屈折率差 δn は次式で与えられる。

$$(\delta n)_{TM} \approx r_{33} n_e^3 \tilde{E}_c - (\Delta n_{e2} - \Delta n_{e1}) > 0 \quad (1a)$$

$$(\delta n)_{TE} \approx (\Delta n_{o2} - \Delta n_{o1}) - r_{13} n_o^3 \tilde{E}_c > 0 \quad (1b)$$

電気光学定数 r_{33} と r_{13} の差 ($r_{33} \approx 3.6 \times r_{13}$) を利用して部分的 Ti 拡散量の増加による屈折率差 ($\Delta n_2 - \Delta n_1$) を適当に選べ、電圧を印加して $(\delta n)_{TM} > 0$, $(\delta n)_{TE} > 0$ の状態を実現することができる。この状態の下では、TM(E^z) モードは領域 1 に閉じ込められて、分歧 1 から取り出され、一方 TE(E^y) モードは電圧に対する感度が鈍く、依然としてその光パワーは領域 2 に残る。このようにしてモードスアリッティング動作が可能となる。

3. 素子性能の評価

3.1 部分的 Ti 拡散量の増加による屈折率差

素子設計に際しては、始めに部分的 Ti 拡散量の増加による屈折率差を評価しておく必要がある。Ti 熱拡散時における Li₂O の外拡散を防止すれば $(\Delta n_{e2} - \Delta n_{e1}) \approx (\Delta n_{o2} - \Delta n_{o1})$ ($= (\Delta n_2 - \Delta n_1)$) とすることができる。また TM と TE モード分離比(分歧光出力比)を等しくするには $(\delta n)_{TM} \approx (\delta n)_{TE}$ であり、これらの条件を (1a), (1b) 式に代入して次式を得る。

$$(\Delta n_2 - \Delta n_1) \approx \frac{1}{2} (r_{33} n_e^3 + r_{13} n_o^3) \tilde{E}_c \quad (2)$$

最大平均印加電界を LN 単結晶の破壊電界と目安として $\tilde{E}_c \approx 10 \text{ V}/\mu\text{m}$ とすると、入 = $0.6328 \mu\text{m}$ L-ザ光に対する最適の屈折率差は $(\Delta n_2 - \Delta n_1) \approx 2.1 \times 10^{-3}$ となる。

以上の議論では 領域 3 における電圧による屈折率変化を考慮していない。領域 3 での屈折率 楕円体の主軸方向の屈折率差は

$$n_c = n_e + \Delta n_{e1} - n_e^3 (r_{51} \tilde{E}_b)^2 / \alpha \quad (3a)$$

$$n_b = n_o + \Delta n_{o1} - \frac{1}{2} r_{22} n_o^3 \tilde{E}_b + n_o^3 (r_{51} \tilde{E}_b)^2 / \alpha \quad (3b)$$

ここで $\alpha = n_e^{-2} - n_o^{-2}$ である。印加電界 \tilde{E}_b によって 楕円体の主軸は

$$\tilde{\theta} \approx r_{51} |\tilde{E}_b| / \alpha \quad (4)$$

だけ回転する。この主軸の回転によって 領域 3 で TE \leftrightarrow TM モード変換が起ると予想されるが、実際には TE と TM の伝搬定数差が大きく、この効果は 素子の特性に影響しない。椭円体の主軸回転によって生ずる TE, TM モードの結合係数を二つモードの伝搬定数差を $\Delta \beta / c$ とすると、 $\Delta \beta / c \approx 2(n_o - n_e) / n_e^3 |r_{51}| |\tilde{E}_b| \approx 60$ となり¹³⁾、モード間のパワ伝達比はわずか 0.1 % 程度となる。さらに (3) 式の電圧による屈折率変化量については r_{22} は r_{13} よりさらに小さく、かつ $|r_{22} \tilde{E}_b| \gg (r_{51} \tilde{E}_b)^2 / \alpha$ であるので、これらの諸量はわずかに特性に影響するにすぎない。

3.2 分岐点における解析

多モード分岐線路に対して成された解析手法^{2),3)}をそのまま適用し、分岐点($x=0$)における光波の振舞を解析することができる。¹⁾ 分岐点では角度 γ に依存して導波光の伝搬方向にずれが生ずる。このため解析において、 $x=0$ 面での分岐側の導波光の等位相面回転を考慮し、かつ線路の横方向の屈折率分布の変化に応じて、入力線路側と分岐線路との界の重なり具合を計算することによって、各分岐出力光強度及び分岐点における損失を得ることができる。今モード変換が無視できること十分にテーパ長さが長い場合には、入力線路側($x < 0$)には基本モードのみが存在する。また分岐角 γ が比較的大きい場合には、分岐線路はパワーフィルタとして働き、 $x > 0$ での電磁界を各々の分岐が独立に存在する場合の界の線形和として表現できる。各線路の界分布は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{入力線路 : } C_0 F(y) \exp(-j\beta_0 y) \\ \text{分岐 1 : } C_1 U(y_1) \exp(-j\beta_1 y_1) \\ \text{分岐 2 : } C_2 U(y_2) \exp(-j\beta_2 y_2) \end{array} \right. \quad (5)$$

ここで C_0, C_1, C_2 は電界振幅係数、 F, U, U は横方向の分布関数、 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ は各モードの伝搬定数である。近似的に $x=0$ 面で界の y 方向成分が連続であることから

$$C_0 F(y) = C_1 u[y - \omega] \exp[-j\beta_1 \epsilon(y - \omega)]$$

$$+ C_2 v[y + \omega] \exp[j\beta_2 \epsilon(y + \omega)] \quad (6)$$

ここで, $u = \cos(\theta/2)$, $\epsilon = \sin(\theta/2)$, $\omega = W/2\mu$ である。

モードの直交条件を用いて (6) 式より、分歧 1 及び 2 の規格化電界振幅係数 E_1, E_2 の表現式を得る。

$$\begin{cases} E_1 = p - r E_2 \\ E_2 = q - s E_1 \end{cases} \quad (7)$$

$$p = \frac{\int F(\frac{y}{\mu} + \omega) \cdot u(y) \exp(j\beta_1 \varphi y) dy}{\sqrt{\int F^2(y) dy \cdot \int u^2(y) dy}}$$

$$q = \frac{\int F(\frac{y}{\mu} - \omega) \cdot v(y) \exp(-j\beta_2 \varphi y) dy}{\sqrt{\int F^2(y) dy \cdot \int v^2(y) dy}}$$

$$r = \frac{\int v(y + W) \cdot u(y) \exp[j\varphi((\beta_1 + \beta_2)y + \beta_2 W)]}{\sqrt{\int u^2(y) dy \cdot \int v^2(y) dy}}$$

$$s = \frac{\int u(y - W) \cdot v(y) \exp[-j\varphi((\beta_1 + \beta_2)y - \beta_1 W)]}{\sqrt{\int u^2(y) dy \cdot \int v^2(y) dy}}$$

$$\varphi = \tan(\theta/2)$$

(?) 式より分歧 1 及び 2 への透過パラメータ P_1, P_2 は次式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = \left(\frac{P - \theta r}{1 - rs} \right)^2 \quad (8a) \\ P_2 = \left(\frac{\theta - sp}{1 - rs} \right)^2 \end{array} \right.$$

$$(8b)$$

なお上記の解析は、分歧角 $\theta > \theta_c$ の範囲で適用できること。ここで θ_c は両分歧間のモード結合が無視できる最大の分歧角である。この θ_c の値は線路が対称なときの両分歧間の結合量を計算することによって評価できる。¹⁴⁾ 線路が非対称であれば θ_c はこの評価値より小さくなる。

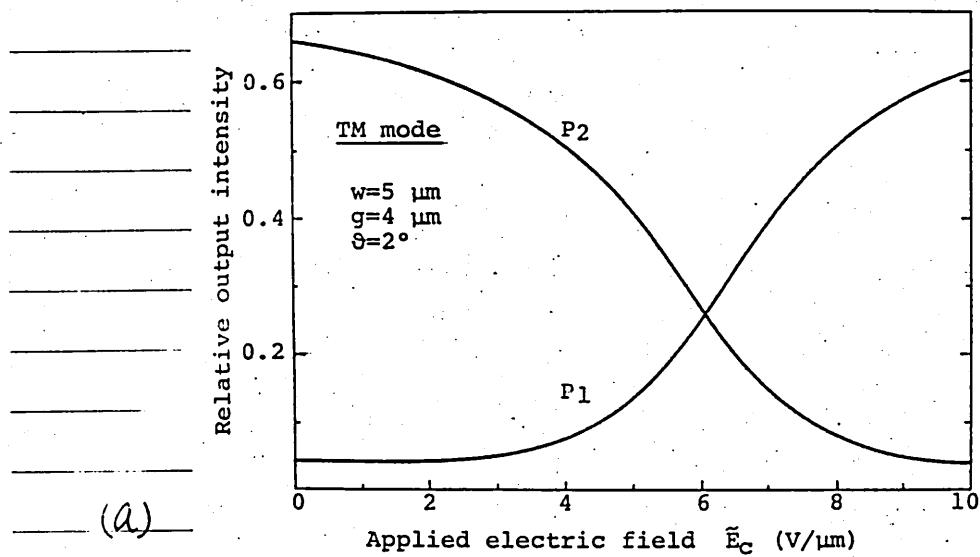
3.3 数値計算の結果

前節の解析に基づいて具体的な数値を用いて計算を行ったが、本節ではその結果について述べる。先ず 3.1 節の近似計算とともに、入力線路側の断面における領域 1 と 2 の部分的 Ti 拡散の増減による表面屈折率差を ($\Delta n_2 - \Delta n_1$) = 2×10^{-3} とした。計算に用いた導波路パラメータは次のとおりである。

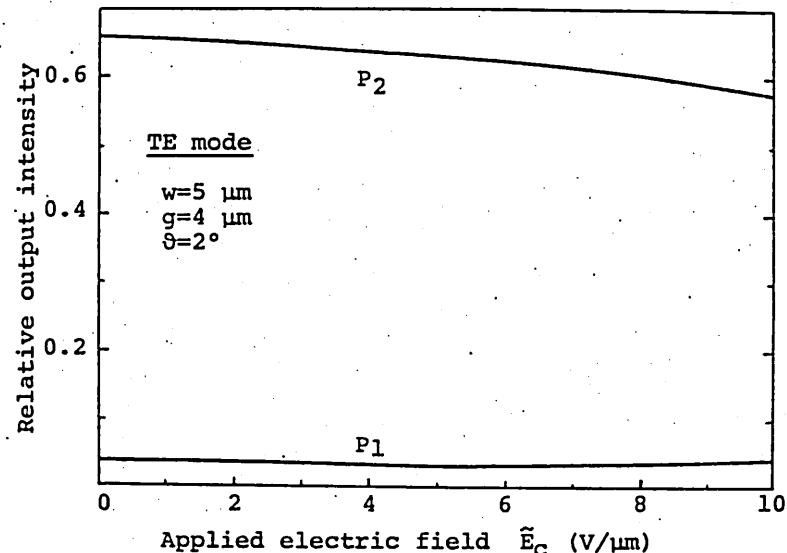
波長 $0.6328 \mu\text{m}$ に対して

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta n_{e1} = \Delta n_{o1} = 3 \times 10^{-3} \\ \Delta n_{e2} = \Delta n_{o2} = 5 \times 10^{-3} \\ d_e \approx d_o = 2.2 \mu\text{m} \end{array} \right.$$

図 3 に分歧角 $\theta = 2^\circ$ 、線路幅 $W = 5 \mu\text{m}$ 、電極間隔 $g = 4 \mu\text{m}$ の



(a)



(b)

図3 平均印加電界 \tilde{E}_c による

分岐光出力比の変化

(a) TM (E^z)モード(b) TE (E^y)モード

場合の平均印加電界に対する各分歧光出力光強度の変化を示す。 $T_0 = 0$ では、部分的な Ti 拡散量の増加による線路の非対称性から TM(E^z), TE(E^y) 共に領域 2 に侵入され、分歧 2 へ送り込まれる。 $T_0 = 0$ における TM, TE モードに対する分歧光出力比 P_2/P_1 は各々 11.9 dB 及び 12.3 dB である。TM モードに対しては $\tilde{E}_c = 6 \text{ V}/\mu\text{m}$ で線路は対称となり、光パワーは等量分歧され、さらに T_0 を増加すると (1a) 式に従って $(S_n)_{TM} > 0$ の状態となる。最大印加電界 $\tilde{E}_c = 10 \text{ V}/\mu\text{m}$ のとき、TM モードの分歧光出力比 $P_1/P_2 = 12.2 \text{ dB}$ を得る。一方 右板 LN であるために TE モードの出力光の変化は小さく、 $\tilde{E}_c = 10 \text{ V}/\mu\text{m}$ で $P_2/P_1 = 11.4 \text{ dB}$ となる。このように Ti の拡散量を部分的に増加し、電圧を印加することによって所望の TE-TM モード スプリッティング動作が可能となる。

図 3 の結果からわかるように、单一モード素子の動作原理を確認できたが、素子設計に際してはさらに他のパラメータの効果をも明らかにしておく必要がある。図 4 は分歧光出力比と分歧点での散乱損失、分歧角 θ に対する依存性を示したものである。ここで素子には $10 \text{ V}/\mu\text{m}$ の電界が印加されており $\mu = 5 \mu\text{m}$, $g = 4 \mu\text{m}$ である。また図 4 で $\theta > \theta_c (= 0.8^\circ)$ の範囲では、両分歧間の結合を完全に無視することができる。この範囲で LN 分岐線路を光強度変調器及びスイッチとして使用することができる。さて多モードの素子の場合と比較して^{2), 3)}、单一モード素子における分歧点での損失はより強く分歧角 θ に依存する。この損失を 2 dB 以下に抑えようすれば $\theta \lesssim 2^\circ$ また 3 dB まで許されるならば $\theta \approx 2.5^\circ$ まで大きくできる。モードスプリッティング

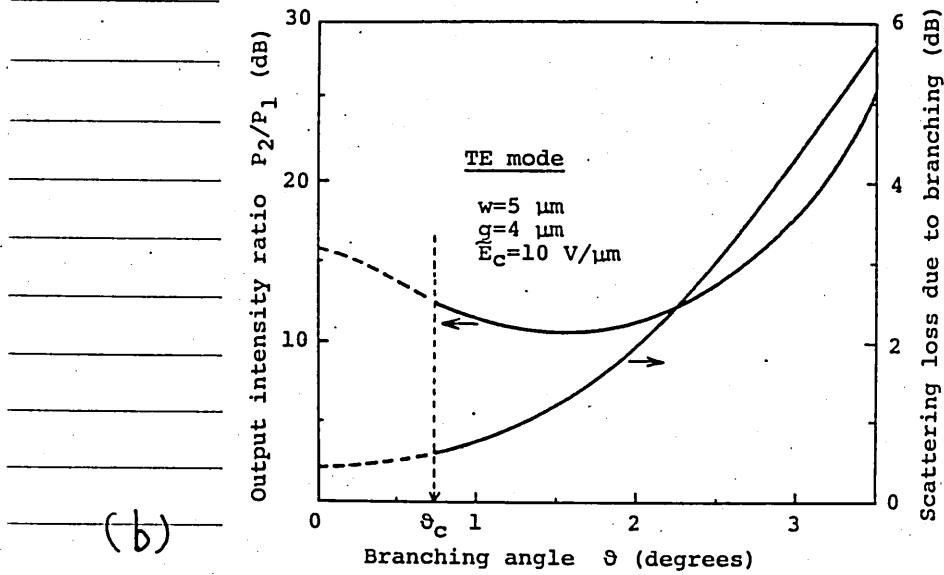
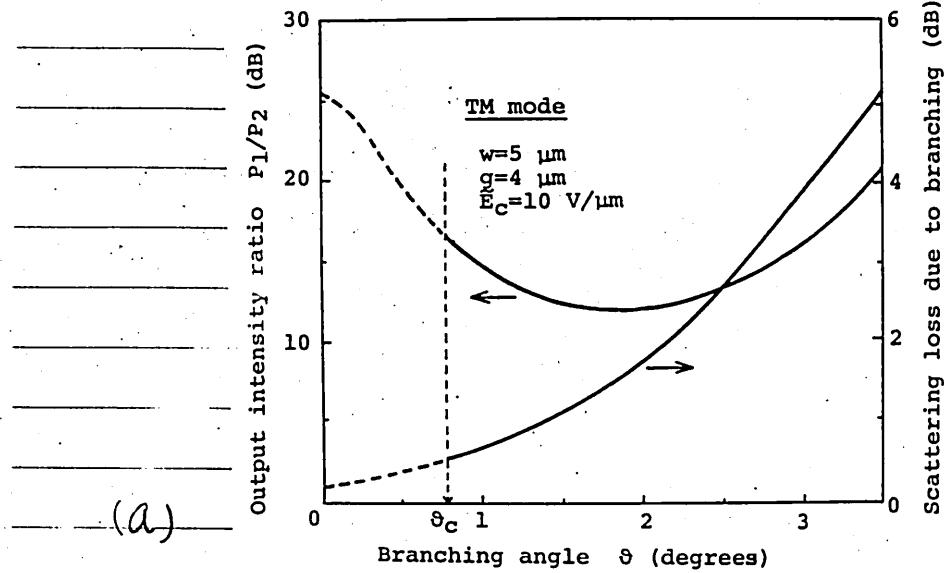


図4 分岐光出力比 及び 分岐損失の
分岐角θに対する依存性

(a) TMモード

(b) TEモード

に直接関係する量 分岐光出力比を見ると、図4では $\theta = 1.5^\circ \sim 2^\circ$ 付近で最小値が現れている。各分岐出力はもちろんの 増加とともに減少するが、その減少の割合は線路の 強・非対称性のため一様ではなく分岐1と2では異なる。 特に低屈折率側の分岐(TM, 場合には分岐2)への透過 パワは $\theta = 1.5^\circ \sim 2^\circ$ 付近で入射モードとの整合がとれて比較的大きくなるが、 $\theta > 3^\circ$ になると急減に減少する。従って分岐光出力比は $\theta > 3^\circ$ で増加するが、同時に分岐損失も大きくなり、この範囲で素子を設計するのは不利である。

図5は $\theta = 2^\circ$, $\tilde{E}_c = \tilde{E}_b = 10 \text{ V}/\mu\text{m}$ のとき、電極間隔 g を $1\text{ }\mu\text{m}$ ラメータとして分岐光出力比と線路幅の関係を示したものである。ここで $W \leq 5.5 \mu\text{m}$ のときは単一モード線路となる。 θ と W が与えられたとき、 g を小さくすると高屈折率側における導波光の中心めが良くなり分岐損失はわずかに良くな。しかし、 分岐光出力比の点から見ると、図5の結果からわかるようにある W の値に対して g の最適値が存在する。 $\theta = 2^\circ$ のとき $g/W = 0.8$ で最大の分岐光出力比を得ることができる。

4. 入力テーパ線路の設計

図1のモードスプリッタには入力線路側にテーパ部を 含むが、これは直接モード分離比に関係するので慎重に 設計する必要がある。もしこのテーパ部で高次の横モードが発生 すると分岐点の入力線路側 ($z < 0$) で横モード間の干渉が起り

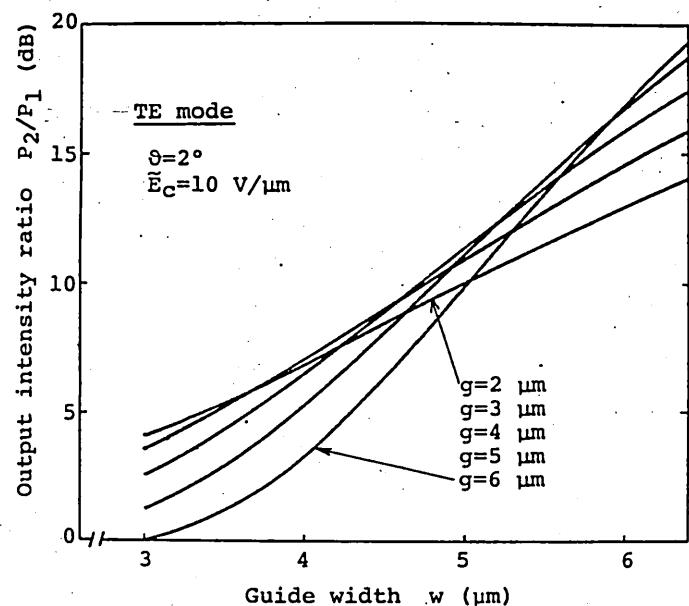
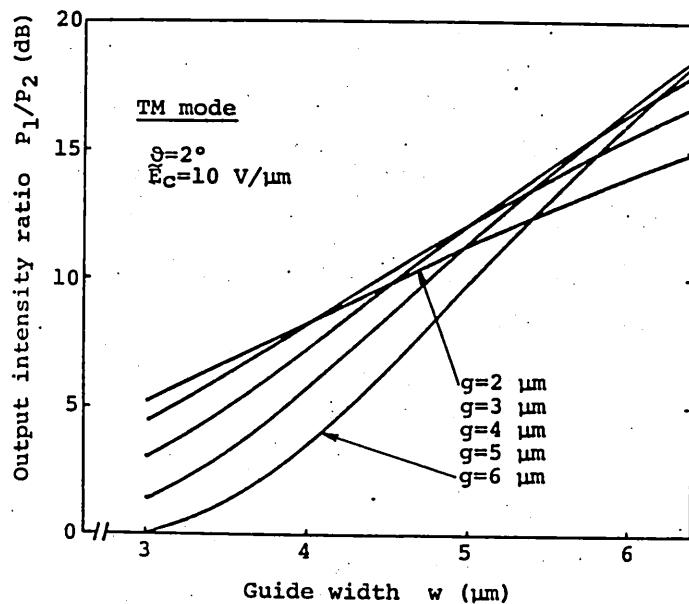


図5 線路幅 w による分歧光出力比の変化

(a) TMモード

(b) TEモード

パラメータは電極間隔 g

分離比は劣化する。テープ線路におけるモード変換は文献(5)に従って解析できる。実際の計算は線路を光波の伝搬軸方向に沿って微小正間に分割して行う。

図6にテープ部における基本モードの界分布の変化の様子を示す。線路内の屈折率分布の非対称性を反映して、分歧点近くでは界分布のピークは線路側面に引き寄せられる。このような特殊な線路において高次モードの発生を抑制しようとすれば、テープ角 0.1° 以下の極めてゆるやかなテープ線路が要求される。テープ長さによって2番目の横モードに変換されパワーカーに変化するかを図7に示す。パラメータは電極間隔 λ_2 である。 $W = 5\mu m$, $g = 4\mu m$ のときテープ部で発生する2番目の横モードのパワーオリジンを1%以下に抑制するには $\lambda_2 \geq 2.5 mm$ が必要である。

なお分歧線路側の電極端($x = \lambda_2$)での反射は過大評価しても1%以下で、この部分にテープを設ける必要はない。これよりも、作成時における分歧先端のなまり大きさを正しく評価して電極の直線部の長さ λ_2 を決定することの方が大切である。

5. まとめ

以上、單一モードLN光分歧型TE-TMモードスプリッタの構成法を示し、素子設計に必要な諸因子の効果を明

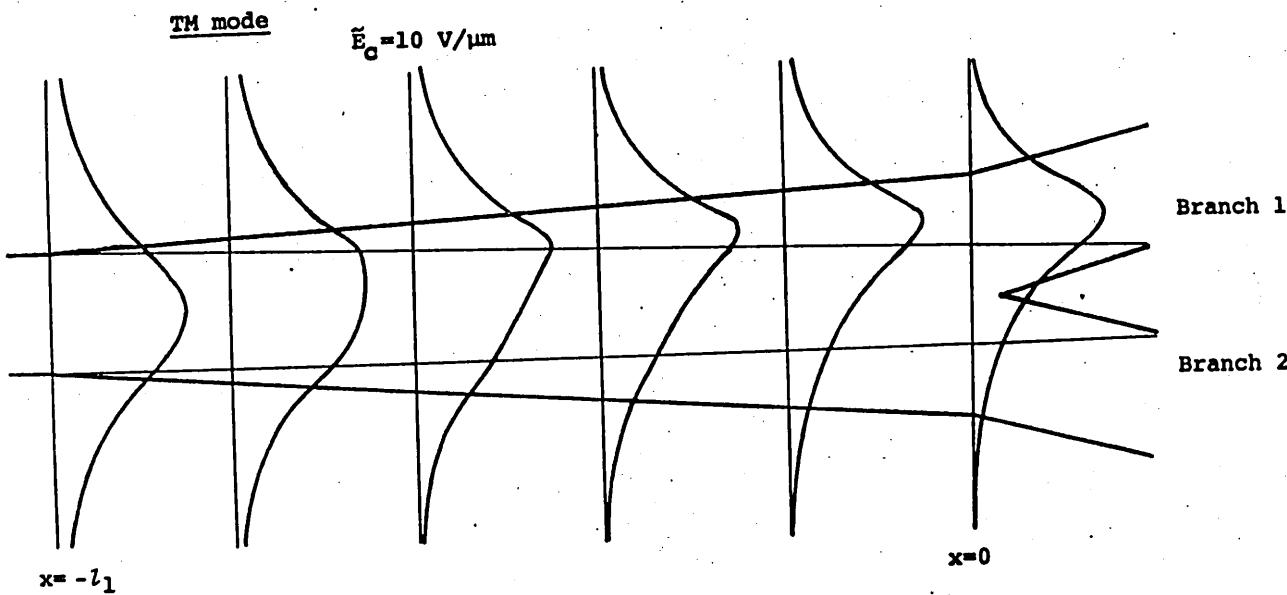


図 6 入力チーパ線路における界分布の推移

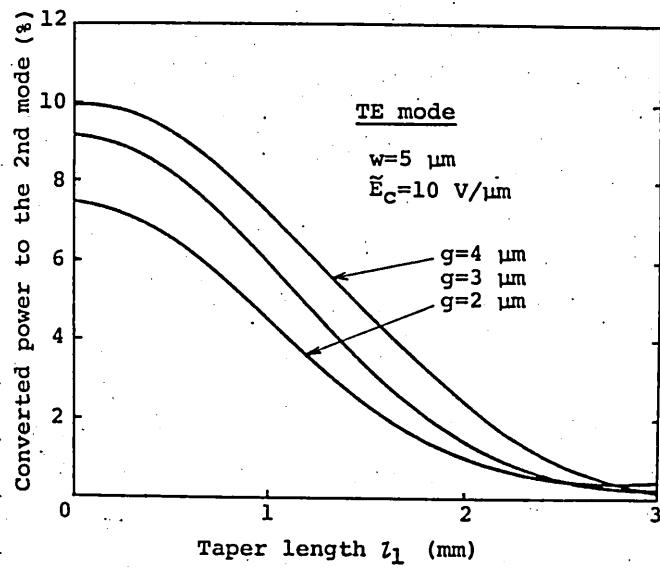
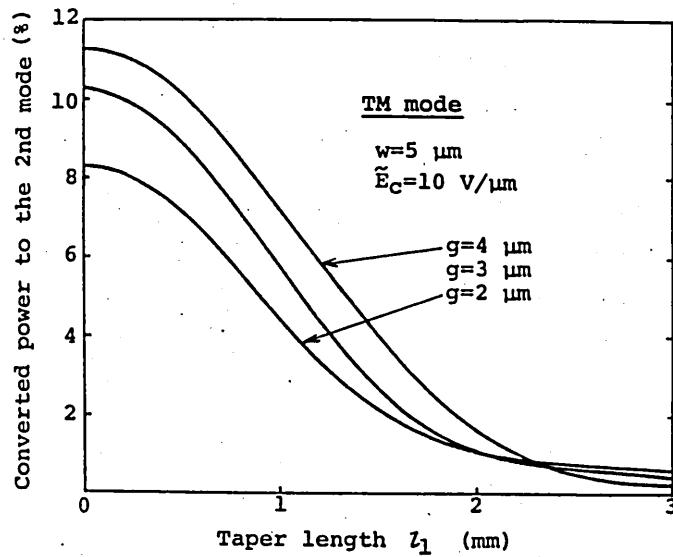


図7 テーパ長 z_1 による2番目の
横モードへの変換パワの変化

(a) TM モード

(b) TE モード

らかにすると共にその性能を評価した。図1の素子構成に
対応させて、表1にモードスプリッタ設計の一例を示す。

$\theta = 2^\circ$ の場合、分歧損失を2dB以下に抑え、TM, TE
モードに対する分歧光出力比約12dBのものが得られた。

これは必ずしも最適設計例ではなく、例えば $\theta = 1^\circ$ とすると
分歧損失1dB以下で分歧光出力比、13dB以上の
素子が容易に実現可能である。

Ti-diffused waveguides	$n_{e1} = n_{o1} = 3 \times 10^{-3}$ $n_{e2} = n_{o2} = 5 \times 10^{-3}$ $d_e = d_o = 2.2 \mu\text{m}$
Guide width	$W = 5 \mu\text{m}$
Branching angle	$\theta = 2^\circ$
Scattering loss due to branching	TM mode : $L = -1.8 \text{ dB}$ TE mode : $L = -2.1 \text{ dB}$
Electrode spacing at the branching point	$g = 4 \mu\text{m}$
Applied electric field	$E_c = E_b = 10 \text{ V}/\mu\text{m}$
Taper length of the input waveguide	$t_1 = 2.5 \text{ mm}$
Electrode length in the output side ($x > 0$)	$t_2 = 0.2 \text{ mm}$
Output light intensity ratio	TM mode : $P_1/P_2 = 12.2 \text{ dB}$ TE mode : $P_2/P_1 = 11.5 \text{ dB}$

Table 1 Device parameters and performances of the
TE-TM mode splitter using single-mode
branching waveguides in Z-cut LiNbO₃.

参考文献

- (1) H. Sasaki, and R. M. De La Rue, "Electrooptic V-junction modulator/switch," Electron. Lett. 12, 18, p. 459 (1975).
- (2) 光永, 増田, 小山, "LiNbO₃光分岐線路における損失の評価", 電子通信学会光量エレ研究会, OQE'78-79 (1978)
- (3) 光永, 増田, 小山, "LiNbO₃光分岐線路の特性", 電子通信学会論文誌 63-C, 3, P178 (1980)
- (4) K. Mitsunaga, M. Masuda, and J. Koyama, "Optical waveguide isolator in Ti-diffused LiNbO₃," Opt. Commu. 27, 3, p. 361 (1978).
- (5) K. Mitsunaga, K. Murakami, M. Masuda, and J. Koyama, "An optical LiNbO₃ 3-branched waveguide and its application to a 4-port optical switch," Appl. Opt. 19, 22 (1980), to be published.
- (6) H. F. Mahlein, R. Oberbacher, and W. Rausher, "An integrated optical TE-TM mode splitter," Appl. Phys. 7, p. 15 (1975).
- (7) M. Kobayashi, H. Terui, and K. Egashira, "An optical waveguide TE-TM mode splitter," Appl. Phys. Lett. 32(5), p. 300 (1978).
- (8) O. Mikami, "LiNbO₃ coupled-waveguide TE/TM mode splitter," Appl. Phys. Lett. 36(7), p. 491 (1980).
- (9) M. Masuda, and G. L. Yip, "An optical TE-TM mode splitter using a LiNbO₃ branching waveguide," Appl. Phys. Lett. 37(1), 1, p. 20 (1980).
- (10) M. Masuda, and G. L. Yip, "An optical waveguide TE-TM mode splitter in Ti-diffused LiNbO₃," 6th European Conference on Optical Communication, Univ. of York, United Kingdom (Sept. 1980).
- (11) 光永, 増田, 小山, "凸板 LiNbO₃ 単一モード光分岐線路", 第41回秋期応用物理学会, 17P-R-4, (昭55, 10月, 発表予定)

-
- (12) E. A. J. Marcatilli, "Optical subpicosecond gate," Appl. Opt. 19, 9, p. 1385 (1980).
- (13) A. Yariv, "Coupled-mode theory for guided-wave optics," IEEE J. Quantum Electron. QE-9, 9, p. 919 (1973).
- (14) H. Sasaki, and I. Anderson, "Theoretical and experimental studies on active Y-junctions in optical waveguides," IEEE J. Quantum Electron. QE-14, 11, p. 883 (1978).
- (15) W. K. Burns, and A. F. Milton, "Mode conversion in planar-dielectric separating waveguides," IEEE J. Quantum Electron. QE-11, 1, p. 32 (1975).
-

輻射科學研究會資料

Z光子発振 TE-CO₂ L-サ"

西 良男 堀内泰男
曾我部 伸 村井昭
大阪市大工

昭和55年9月26日

目次

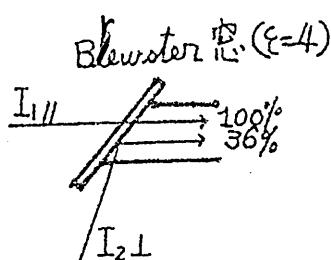
	頁
§1 緒言	(1)
§2 装置	
2-1 TE-CO ₂ L-ガス	(3)
2-2 共振回路	(4)
2-3 検出回路	(9)
2-4 モード関係とHybrid Tube	(9)
§3 実験結果	
3-1 2光子共振特性	(11)
§4 結論	(19)

§1 緒言

エレクトロニクス回折格子の波長分散を利用した波長同調TE-CO₂レーザーは容易に尖頭出力100kW～MWが得られ、高圧化して～TWのものまで得られている。これを励起光源とした單一光子吸収→反転分布→パルス発振レーザーの報告は CW CO₂光励起と比べ多くはないが一段落したようと思える。

異なる2波長 λ_1, λ_2 の2光子吸収によるレーザー発振の報告は更に限られている。従来の方法は同様な2台のTE-CO₂レーザーのパルス光出力を光導波管の一端のBrewster窓の透過光と反射光で組合せている。(Fig. 1)

この反射波について $\epsilon=4$ の表面1回反射までを考えると、入射光強度 I_{10}, I_{20} から2光子吸収に有



効率を積入力は、

$$I_1 I_2 = (1 - R_{11}^2) I_{10} \left(\frac{-\sin(\phi - \phi')}{\sin(\phi + \phi')} \right)^2 I_{20}$$
$$= 0.36 I_{10} I_{20} (\epsilon = 4 の 材 料 で) と す る。 ——— (1)$$

Fig. 1 2光子励起方法

(1)

なおこの時2台のTE-L-サーのレーザーパルスの同期調整、ビームの空間分布調整の問題が生じる。

これを1台のTE-L-サーで行えば"利卓"としては、

- (1) 電源は簡単になる。
- (2) 2波長発振の同期を取る問題はますないと思われる。
- (3) 出力ビームは同一方向指向で歯起入力結合孔へ導き易い。
- (4) 2波長発振とも同一偏波であるから Brewster 窓も使える。

他方問題点としては、CO₂発振の(00°1)上準位が共通で、高圧の為のHomogeneous lineが強く、Competitive 関係をもつと思われる。これから(00°1)内種々 J₂, J'₂ にわたり、2波発振の強度を1波発振時の $\frac{I_{10}}{2} \times \frac{I_{20}}{2} = \frac{1}{4} I_{10} I_{20}$ に保てるかどうかである。この際の利得媒質内のモード直交性、波長直交性、偏波直交性 J₂, J'₂ 依存性、圧力依存性に対する実際動作を調べたので報告する。

§2. 装置

2-1. TE-CO₂L-ガ"-

実験に用いたTE-CO₂L-ガ"-はピニタイフ^oで、陰極は161本の直径1mmのステンレス製ピンを3列、光軸と垂直方向に立て、2cmはなれて断面がカマボコ形状の陽極と対向させている。(Fig.2)

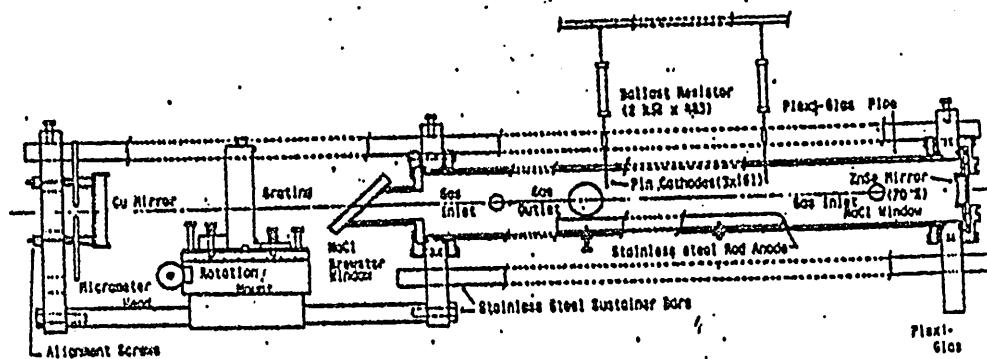


Fig.2: construction scheme of the TE CO₂ Laser.

なお放電回路をFig.3に示す。

陰極には各々のピンに2kΩの直列バラスト抵抗を接続し放電の局部集中を防いでいる。

コンデンサの容量は0.051μFで、最高40kV充電でStorageエネルギーは約40 Jouleである。

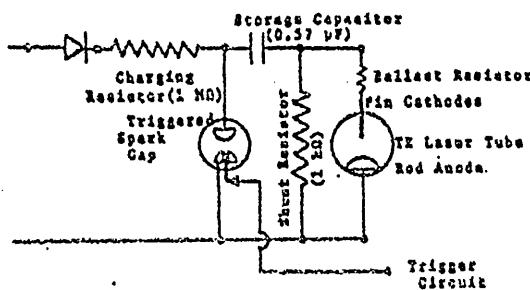


Fig.3. 放電回路

放電時間は管内ガス圧によって異なるが 150 Torr で
 1.5 μsec 位で、この尖頭電流は 1500A 位である。
 CO_2 レーザー発振は放電が終ってから約 2μsec 後に
 立上ると云われている。この時太い(管内径 $\varnothing > 4\text{cm}$)
 管に接近した共振器で発振させると、回折格子による
 複雑な横モード列と共振器間隔 L に対する縦モード
 間隔 c/L の縦モード列が現われる。

2-2. 共振回路

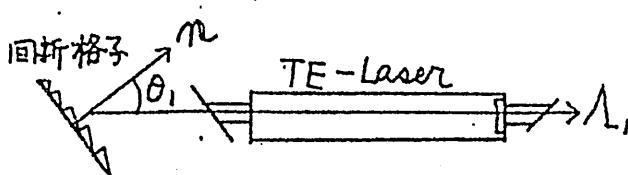


Fig. 4. Littrow 角 θ_1 による共振

通常 CO_2 レーザーの発振線は短波長から順に $9R, 9P, 10R, 10P$ とブランチがあり、各ブランチには約 20 本の発振可能線を持ち

合計約 80 本が利用出来る。

エミレットタイプ回折格子を用いた場合、この各発振線の選択は Littrow 角条件 (Fig. 4)

$$2d \sin \theta_1 = m \lambda_1 \quad \text{--- (2)}$$

但し θ_1 ：光軸と Grating Normal となす角

d ：格子間隔 (この実験では $6.66\text{ }\mu\text{m}$)

(3.)

n : 整数 (この実験では $n=1$ のみ)
により行なっている。

エシエレット回折格子は溝と垂直な偏波に対しては一次側への反射率が非常に高く殆んど 100% である。今一次側より波長 Λ_2 を入れたとする (Fig. 5) それは θ_2 方向に殆んど反射され、その条件は 周知の

$$d(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = m\Lambda_2 \quad \text{--- (3)}$$

である。

よって $\Lambda_2 < \Lambda_1$ に対し $\theta_2 < \theta_1$

$\Lambda'_2 > \Lambda_1$ に対し $\theta'_2 > \theta_1$

となる。

(3) 式は θ_1 と θ_2 につき対称であり、 θ_1, θ_2 diagram 上 $1 = 9R \sim 10P$ 発振の位置を図示したのが Fig. 6 の曲線である。この θ_2, θ'_2 方向にある距離はなして鏡 M_2, M'_2 を置くと (3) 式を満たす Λ_2, Λ'_2 を発振させる事が出来る。Littrow 発振の共振回路損失

$1 - R_{G\Lambda_1} R_{M_1}$

$=$ クラベ

$1 - R_{G\Lambda_2}^2 R_{M_1} R_{M_2}$ 但し $R_{G\Lambda_1}, R_{G\Lambda_2}$ 回折格子
反射率 (パワー)

R_{M_1} 出力側反射率
 R_{M_2} Λ_2 共振鏡

(5)

となり反射損はやや増大する。

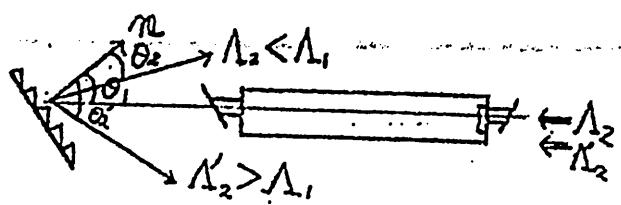


Fig. 5. 回折格子の波長分散特性

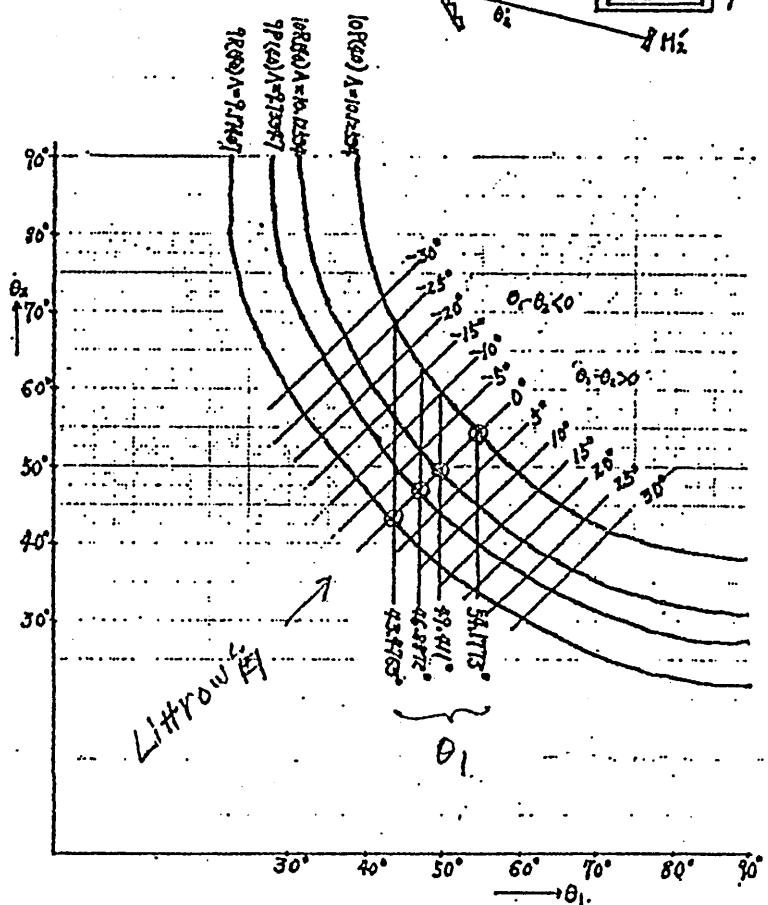


Fig. 6. 2波共振 diagram その1

Fig. 6 中の 4 本の縦線は 各々 $9R(40)$ ～ $10P(40)$ を Littrou 角 θ_1 で 発振させ、それと同時に他の $J=40$ 線を発振させると、その M_2 の角 θ_2 を示してある。又 45° 方向の斜線は 鏡 M_2 の角 θ_2 で 固定した状態で回折格子を回転した時の共振波長関係を示している。

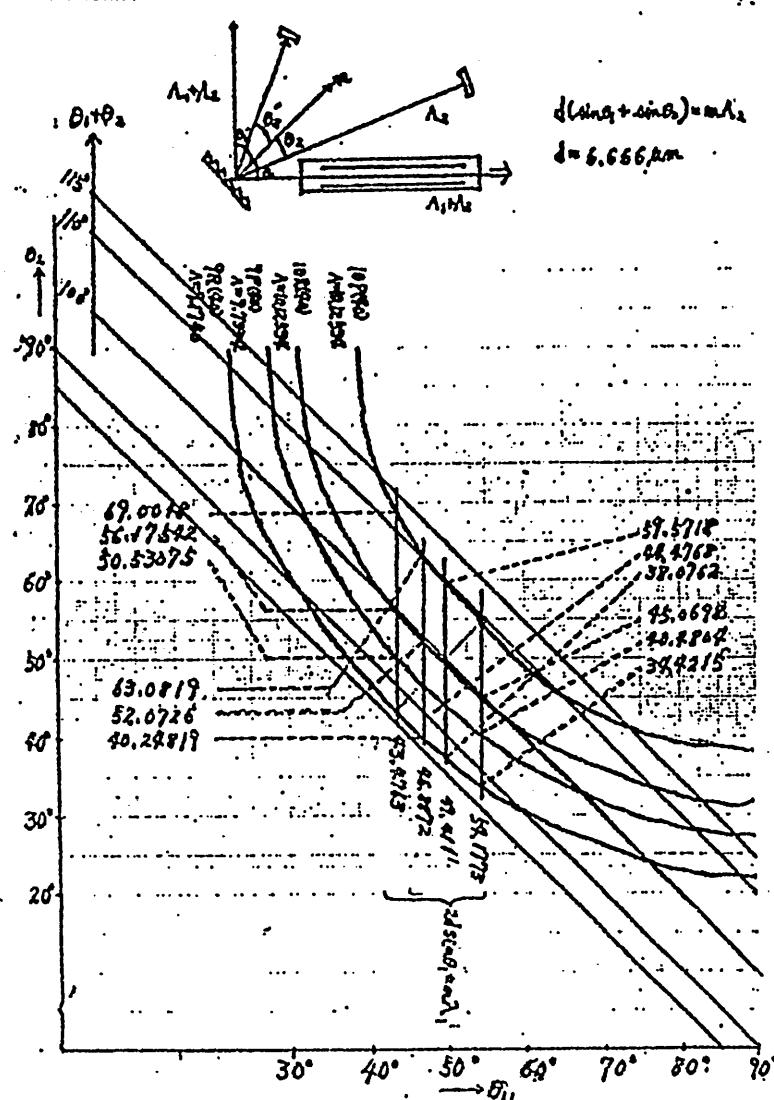


Fig. 7. 2波発振 diagram xの2.

している。この場合、 $\theta_1 + |\theta_2| = \text{一定}$ となり、波長の変化はすくない。

Fig. 8 は発振付近の θ_1, θ_2 を拡大したもので、9R~10P の発振範囲を図示した。2波同時発振の実験では、 $\theta_1 \approx 48^\circ$ に選び、Littrow 角での

Fig. 7 は回折格子の法線に対して偏側に回折光とともに場合の、共振鏡 M_2 による λ_2 組合の角度関係を示している。

回折格子を選んで選べば、溝に平行な偏波成分の共振も可能でははないかと考えている。

- 45° の斜線は回折格子だけを回転させたときの、波長同時特性を示

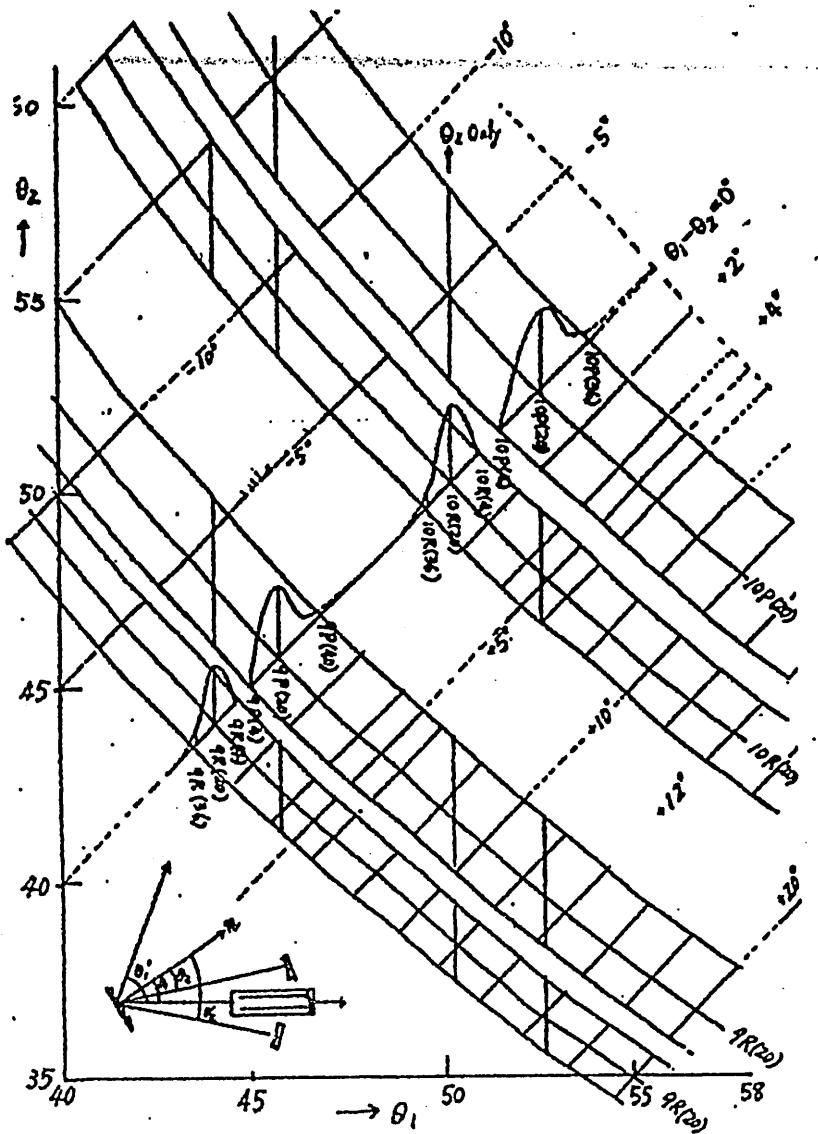


Fig. 8 2波流振 diagram その3

流振はない。鏡 M_2, M'_2 を各自
 $\theta_2 = 38^\circ \sim 45^\circ, \theta'_2 = 51^\circ \sim 60^\circ$ を掃引でまよ
 うにし、特定 A_2 と掃引 A'_2 (あるいはこの逆)
 で 2波長同時流振の影響を調べた。

2-3. 検出回路

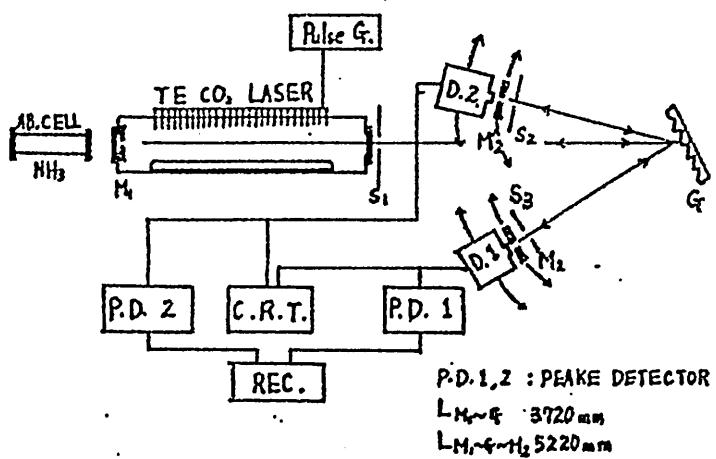


Fig. 9. 2波混振検出回路

Z波混振検出回路をFig. 9に示す。

M_2, M'_2 は中央に $0.5 \text{ mm}/\text{m}$ の結合子しを持ちその後 Pyro-electric Detector D_1, D_2 で検出した。この間に減光材として多數枚のホリエチレンを用いた。

全出力は出力鏡 M_1 を通して得られる(鏡径 $25 \text{ mm} \phi$)。この M_2, D_2 (M'_2, D'_2)を装着した台を釣糸を介して低速モーターを用いて掃引した。なお格子は固定して用いた。

2-4 モード関係と Hybrid tube

主混振管と回折格子の間に单一線従モードを切り出す狭帯域小振巾利得管を用いる予定であるが、(1) 今回は主混振管の2光子 Λ_2, Λ'_2 の発振間の

Competitive 関係についてだけ実験した。

この為、発生した横モードについては、スリット S_1, S_2, S_3 を用いて除いたが、縦モードについては、発振管の利得帯域（ガス圧 150 Torr で推定 1 GHz）の全域で縦モード列が発振していると考えられる。

M_1 -一回折格子- $M_2 (M_2')$ 共振系の光学長 522 cm であるから縦モード間隔は約 29 MHz となり、約 35 本位の縦モード列が考えられる。

§3. 実験結果

3-1. 2光子発振特性

実験はまず Fig. 9 で、スリット S_1, S_2, S_3 の全てをとりはずして行った。結果を Figs. 10a, 10b に示す。

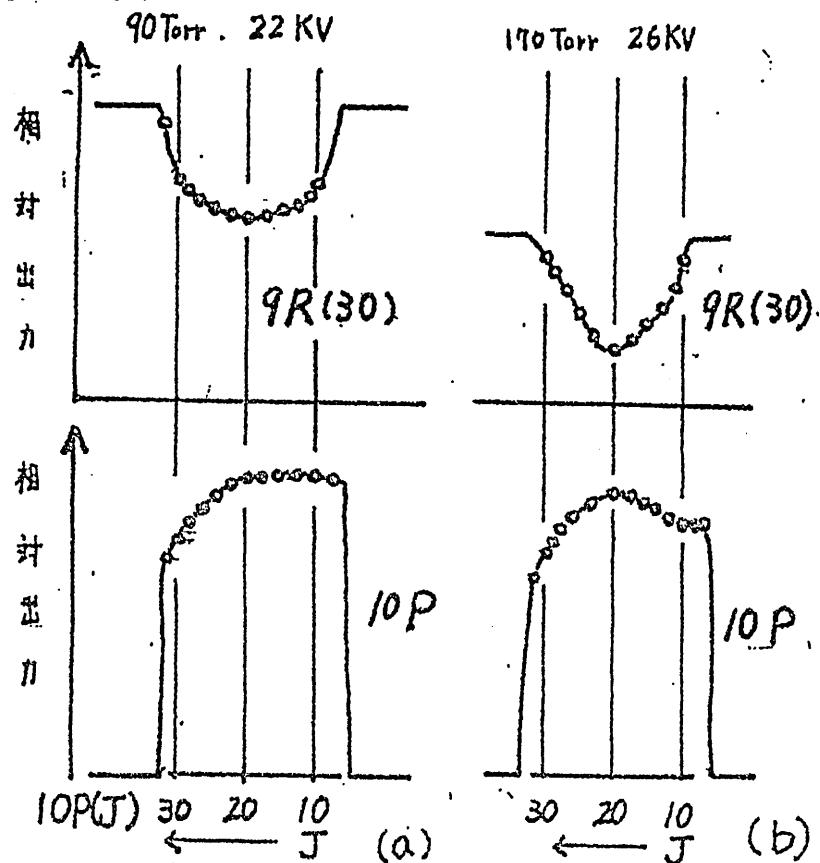


Fig. 10a, b. 9R(30)固定 10Pブランチ掃引
2波長発振特性。

この図では M'_2 を $9R(30)$ に固定し、 $10P$ ブランチを掃引した時の $9R(30)$ 及び $10P$ ブランチの出力変化を Pyro-electric Detector で検出しシーケンスコープでモニターしながら Recorder 上に記録した結果の包絡線を示す。

なおレコーダーの chart の一部を Fig. 14 に示す。この図はガス圧 170 Torr において記録したものである。

この図からわかるように $9R(30)$ の出力は $10P(20)$ 付近で最も大きな影響を受け、ガス圧 90 Torr で約 $\frac{2}{3}$ 、又ガス圧 170 Torr では約 $\frac{1}{3}$ に減少する。

よって例えば $9R(30)$, $10P(20)$ を 2 光子過程として用いれば有効 2 光子励起入力 $I_1 I_2 = \frac{1}{3} I_0 I_{20}$ (ガス圧 170 Torr) となる。次にスリット S_1 ($\pm 7\text{mm}$) 及びスリット S_2 ($\pm 10\text{mm}$) を設げ $10P$ ブランチを M_2 で $10P(6)$, $10P(8)$, $10P(12)$, $10P(16)$, $10P(20)$, $10P(24)$, $10P(28)$ に同様周をとり、それと並んでつき $9P$ ブランチを掃引して得られた data の結果を Figs. 11(a) ~ 11(h) に示す (圧力 = 50 Torr)。Figs. 11(a) ~ 11(h) に表われている $10P$ ブランチの傾向を見ると、 $9P$ ブランチの影響を大きく受け発振域が狭まっている ($10P(8)$ ~ $10P(14)$)。

この傾向はスリット S_2 のため $10P$ ブランチの発振 Q 値が低下したために表われたもので、この状態では例えば Fig. 11(h) による 2 光子励起は不可能である。一方 $9P$ ブランチへの影響は $10P$ ブランチ程顕著でない。更に $10P$ ブランチの利得最大線 $10P(20)$ は発振

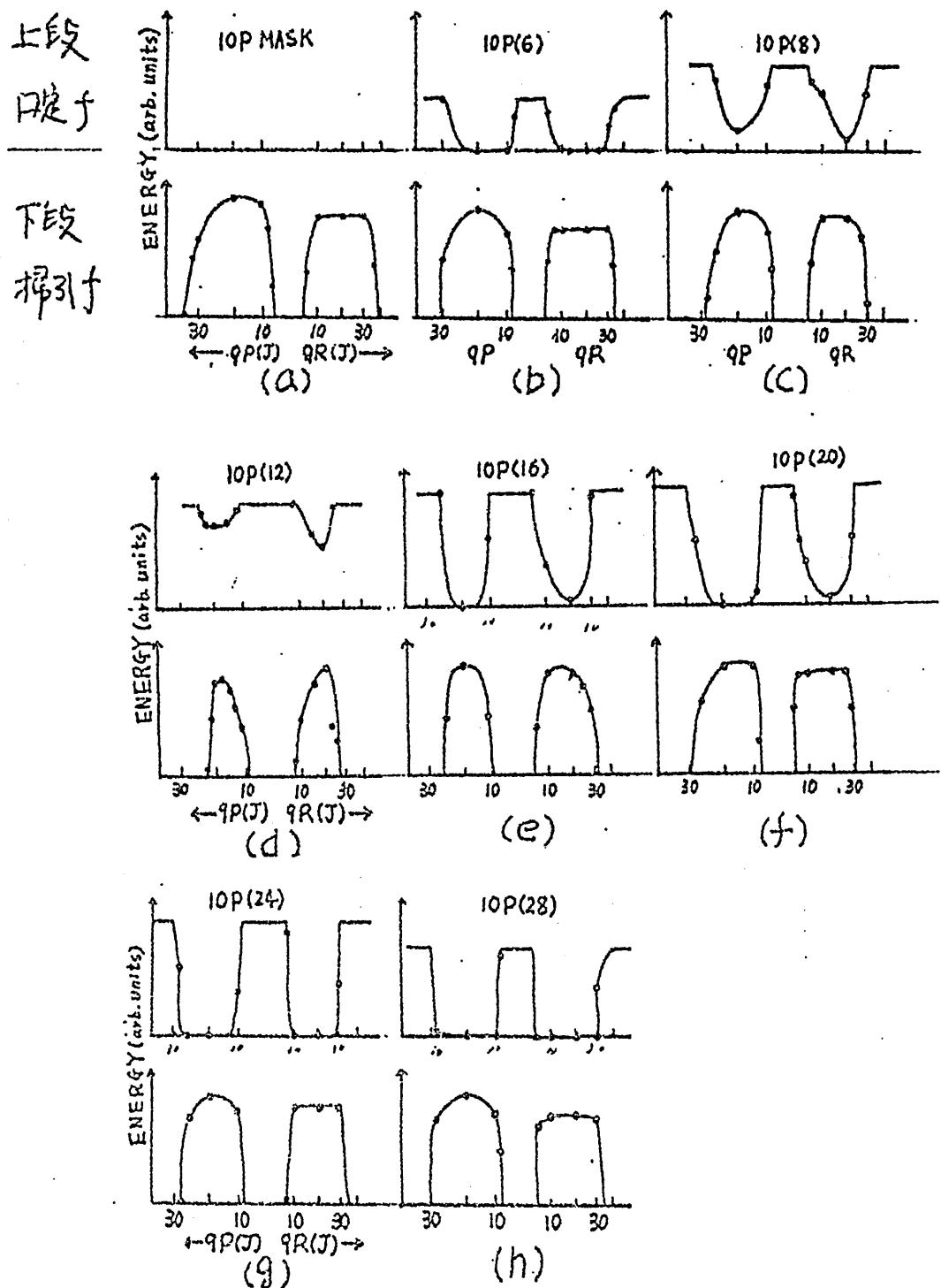


Fig. 11. 10P(6) ~ 10P(28) 固定 — 9 μm 帶掃引 2 波
光振特性

せず、10P(20)よりも波長の短い方に発振が偏っている。
傾向が現われている。

この傾向はFig.9の実験配置においては一様に
現われる (9R, 9P, 10R, 10P の順に他の発振の
影響が小さい)。

しかしながら 10P ブランチ各線の発振出力の影響
も現われており (例えば 10P(12) は、これよりも利得の大
きい 10P(8) よりも 9P ブランチの影響が小さい)

同様にこのようにスリット S_1, S_2 を設けた状態で、
 M_2 で "9P(8), 9P(12), 9P(16), 9P(20), 9P(26)" に同調をとり
10P ブランチを掃引して data をとった。

その結果を Figs. 11(a) ~ 11(e) の傾向とくらべてみると

(1) 発振出力の大きい線は他の発振の影響が小さい。

(2) 波長の短い線は波長の長い線に比べて影響が小さい。

なお、この data の一例を Fig. 15 に示す

更にスリット S_1, S_2 を設けた状態で、 M_2 で "9R(28)" に同調
をとり圧力を 40 Torr, 50 Torr, 70 Torr, 100 Torr, 150 Torr と変化
させ、それをにつき 10P ブランチを掃引して得られた結果
を Figs. 12(a) ~ 12(e) に示す。

この結果をスリットを設けない Figs. 10(a), 10(b) を考慮し
入れて観察してみると

- (イ) 圧力が高くなるにつれて Q 値の低い方の発振(今の場合 1OP ブランチ)は Q 値の高い方の発振(9R28)の影響を大きく受け、1OP ブランチの本数、出力共に小さくなる。
- (ロ) Q 値の低い方の発振の中でも(1OP ブランチの中でも)発振利得の小さな線は他の発振(9R28)の影響を大きく受けける。
- (ハ) 同じ Q 値であれば"圧力が高くなる程 発振利得の小さな線は発振利得の大きい線の影響を大きくうける。

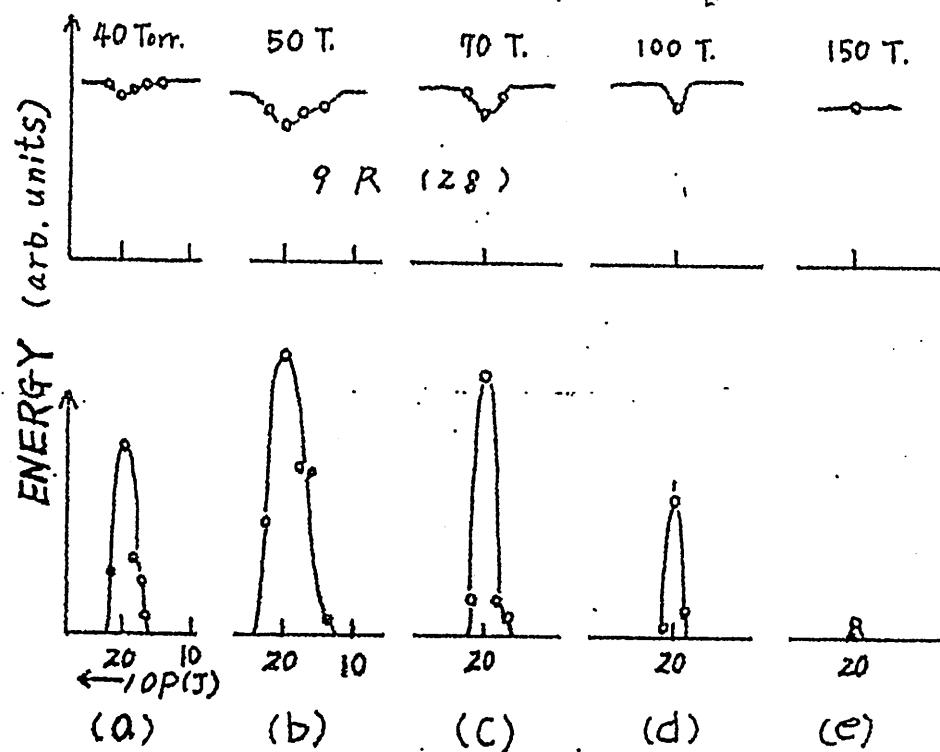
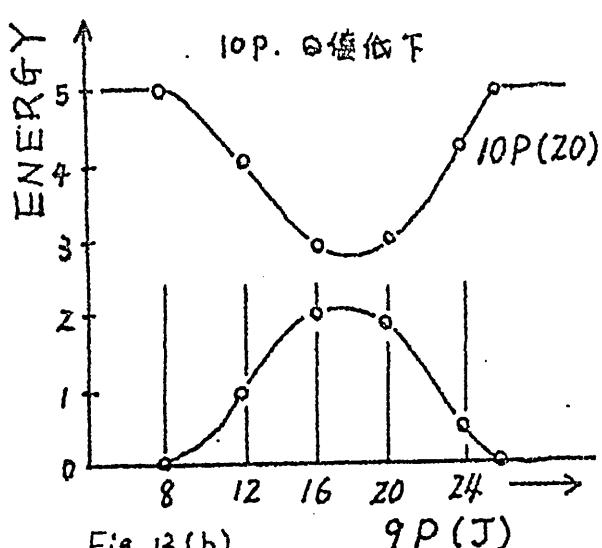
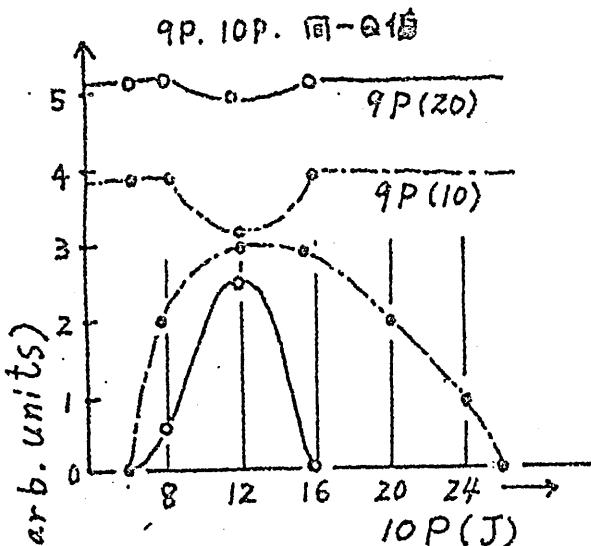


Fig.12. 9R(28) 固定 - 1OP ブランチ 掃引。
2 波長 発振出力特性。



Figs. 13(a), (b).
2波発振、波長、Q値
発振利得依存性

これらの結果をまとめれば、他の発振線の影響も大きく受け、場合によつては発振が止まってしまう要因として、

- (1) Q値が他の発振線に比べて低い。
- (2) 波長が他の発振線に比べて長い。
- (3) 発振利得が他の発振線に比べて小さい。
- (4) 圧力が高い (Figs. 10a, 10b).

以上の要因が考えられる。これらの関係を Figs. 13(a), 13(b), に示す。

その原因について

(2)に関しては、Fig. 9 の装置配列では回折格子の反射率が波長が長くなるにつれて低下するのではないかと思われる。

(1), (3), (4)については $(0, 0^\circ, 1)$ 単位ベクトルで圧力 50 Torr 以上では、 $J = 8$ 位から $J = 32$ 位まで collision による緩和時間が、発振時間(推定 300 ns)にくらべて短い⁽²⁾ことによるものであろう。

なお同じ実験を圧力 8 Torr, Pure CO₂ で、この緩和時間による影響を調べたが、現在のところ、明瞭な影響は観測されていない。

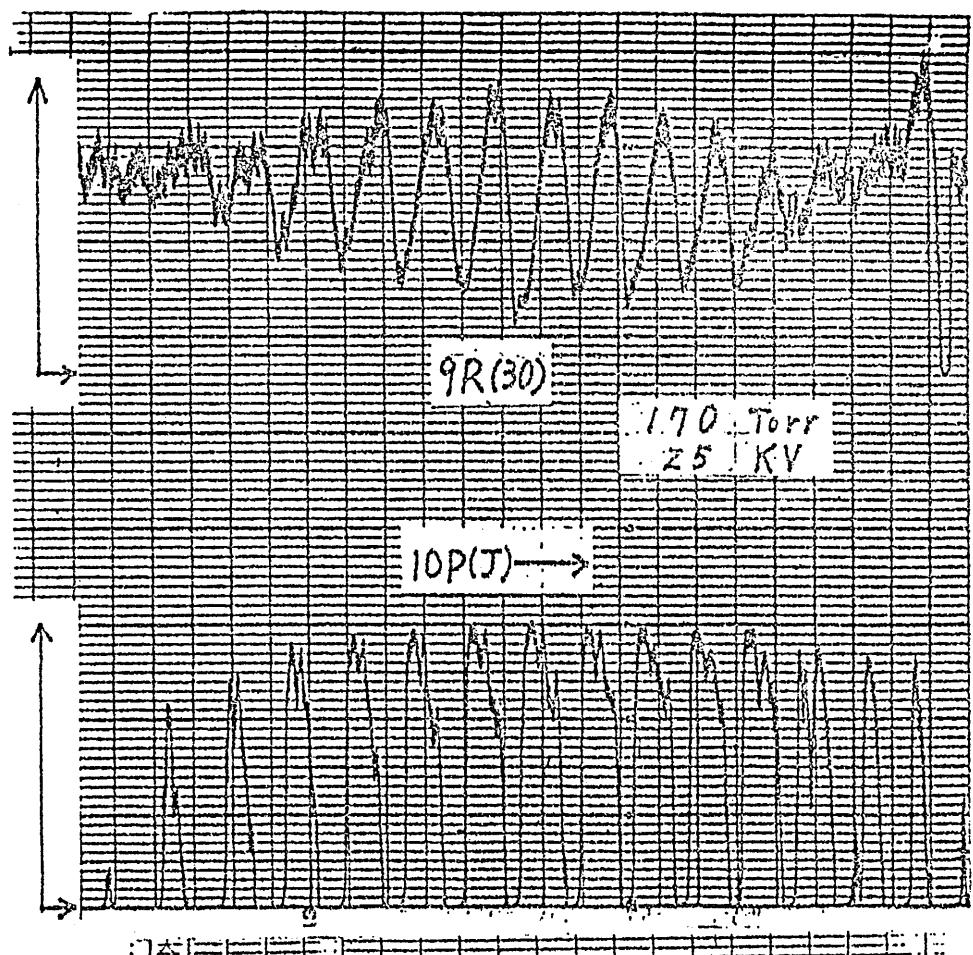
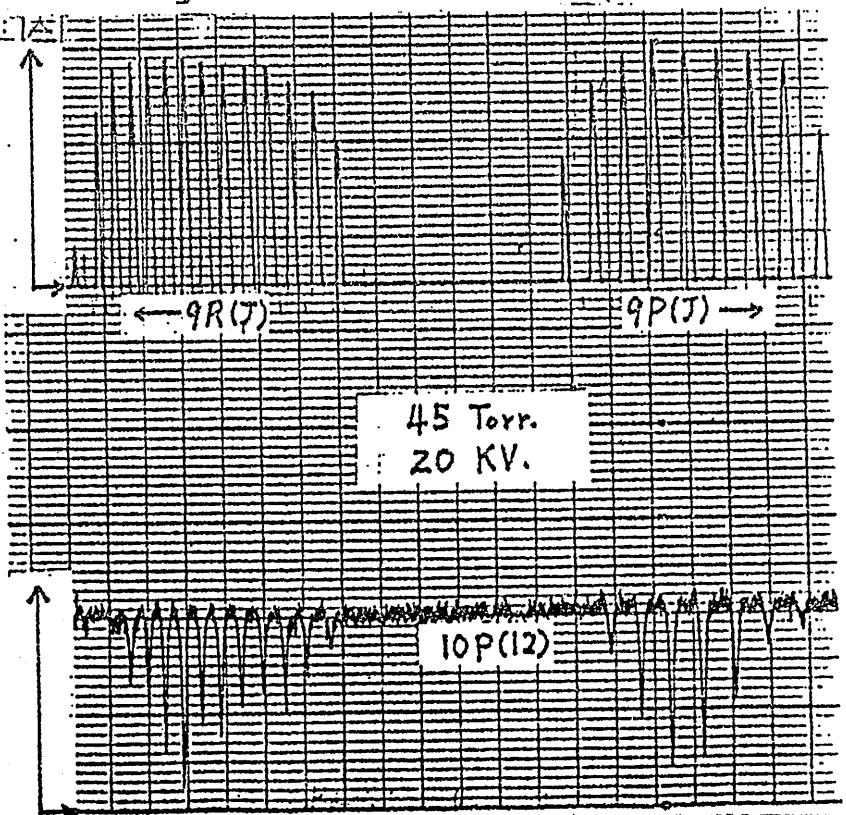


Fig. 14. (上図).
9R(30) 固定一
10P(J) = 4 扫引
chart.

→
Fig. 15. (右図)
10P(12) 固定一
9μm 帯扫引
chart.



(B)

§4. 結論

この実験は一本のレーザー管から2本の異なる波長 λ_1, λ_2 を同時に取り出し、それを用いて NH_3 などの2光子過程を研究する目的で行った。

よって当初からどの程度互いに独立に2波長レーザー光がとり出せるかと云う点に関心があった。

その結果は 3-1 に述べてあるように、2波長レーザー光出力 I_1, I_2 の基本的傾向はかなりの部分が解明出来たと思う。

即ち、この方式において 2 波長を取り出すためにはガス圧力、Q 値、各線の利得、波長の要因を考慮する必要がある。

例えば $9R(8)$ と $10P(20)$ をガス圧 150 Torr で同時発振させた場合 発振利得の小さい $9R(8)$ の方は発振が止まってしまうであろう。

この時 $9R(8)$ と $10P(20)$ を同時に発振させる為には圧力を下げるか、あるいは $10P(20)$ の方にスリットを用い、Q 値を下げて、 $9R(8)$ に対する影響を小さくしてやらなければならぬ。そうすれば $10P(20)$ の方の出力が当然低下し 2 光子過程励起有効入力 I_1, I_2 も低下する。

しかしながら 発振利得にそれほど差のない線

(例えは "9R(18)と10R(22)") では、それはほど (1) 式の

$I_1 I_2 = 0.36 I_{10} I_{20}$ に比べて低下しないであります。

I_1, I_2 をほとんど独立に取り出す方法の一つとして、

回折格子を 2 号用、直交偏波で取り出す方法が考えら
れる。

又 TE-Laser を高出力にして I_{10}, I_{20} を大きくし、
どちらかをスリットで小さくして 2 波長同時発振させて
も十分 2 光子過程励起入力として取れるようにする事も
重要である。

この研究に用いた TE-CO₂ Laser は ピンタイプで、

出力は 10P(20) 付近で 約 300 kW 位である。

今後、この実験の方式で 2 光子過程の研究が進みた
時は、更に大出力 TE-CO₂ Laser が必要と考え、現在
MW 級平行平板型 TE-Laser を製作中である。

又 この 2 光子発振の方式では、同一アーチ内に近接線
(例えは "9P(12) と 9P(16)") の同調には 装置上の制限が
生じる。

謝辞

この実験を通じ四回生の津田亮紀、宮武孝之
両君の協力をいただいた事を感謝します。

参考文献

1. 第27回応用物理学関係連合講演会
講演予稿集 240頁
"インジェクションラインロッキング"による炭酸ガスレーザー
マルチライン発振の研究
大阪大学レーザー機能融合研究センター 福丸文雄
河村良行 的場幹史 中井貞雄 山中千代衛

2 1980年秋の分科会予稿集(日本物理学会)

256頁

"CO₂ L-サ"-の回転緩和定数の丁依存性"

上智大理工 植田寛一, 伍坂木庫二, 清水文子

輻射科学研究会

改良有限要素法による任意断面中空導波管解析

Analysis of Arbitrarily Shaped Hollow Waveguide
by the Improved Finite Element Method

池内雅紀 江見英男 仁木灝

岡山理科大学

昭和 55 年 9 月 26 日

阪大・産研

改良有限要素法による任意断面中空導波管解析

Analysis of Arbitrarily Shaped Hollow Waveguide

by the Improved Finite Element Method

池内雅紀 沢見晃男 仁不愧 (岡山理科大学)

Masatoshi IKEUCHI, Hideo SAWAMI and Hiroshi NIKI

(Okayama University of Science)

We present an improved finite element method for calculating cutoff wavenumbers of arbitrarily shaped hollow waveguides, and in the convergence characteristics we compare it with the usual finite element method and the finite difference method.

1. まえがき。

任意断面中空導波管問題の解析法は、非常に多く發表されてきてる〔1]-〔3〕。特に、有限要素法(FEM)は応用範囲、境界条件の处理、角の精度など各方面で大きな利点をもつており、最近益々注目されてる〔4〕。しかし、FEM解法では実際上、大規模行列問題を解くためには、大規模コンピュータの使用を前提として計算時間、収束計算上の問題は無視できない。そこで、筆者らは従来より疎解(sparse)，比較的小規模な行列問題を解く問題で、かつ高精度の解を得らるるよう[6]解法などを開発する研究を進めてる〔5]-〔8〕。

本論文では、中空導波管問題のための改良有限要素解析法(改良FEM)を与える。本改良FEMはPetrov-Galerkin法〔9〕,〔10〕であり、既に実験結果と重く一致する事を示してある。また、重み系数は1次既約度数と非1次である3次既約度数である。本改良FEMは従来のFEMおよび差分法(FDM)の補間法でもある。以下に見て、本改良FEMの理論と1次元数学モデルについて述べると共に、その数値結果を示す。次に、中空導波管問題への改良FEM理論の拡張と矩形要素および3次既約度数について述べ、応用例を示す。特に、従来のFEMではみられないので、(やがて)波数に関する収束特性を明らかにする。最後に、本論文の結果を要約し、今後の課題を述べる。

2. 改良有限要素法。

2.1 Galerkin形式。中空導波管のTMモード解が得られる、次のよう

の区間 $\bar{\Omega} (= \Omega \cup \partial\Omega)$ 上の数値問題 (Sturm-Liouville 問題) を取り上げる。

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \lambda u(x) = 0, \quad x \in \Omega = (0, 1) \quad (2.1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \{0, 1\} \quad (2.2)$$

ここで、 $u(x)$ は第2種通常微分方程式 $v(x)$ 、重み関数は $w(x)$ と表すと λ (2.1) の Galerkin 法²で、 λ を求める方法が得られる。ただし、 $w(x)$ は非負である。

$$I(w, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{dw}{dx} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right) dx - \lambda \int_{\Omega} w v dx \quad (2.3)$$

ここで、 $v(x)$ (初期値) は且し次の条件を満たしてゐるものと仮定する。

$$w(x) \cdot \left(\frac{dv(x)}{dx} \right) |_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.4)$$

ここで、式 (2.2) の境界条件 $v(x) = 0$ ($x \in \partial\Omega$) と式 (2.4) の境界条件 $w(x) \cdot (dv(x)/dx)|_{\partial\Omega} = 0$ が満たされている。

$$w(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (2.5)$$

ここで、式 (2.3) の積分は $I(w, v) = I(v, w)$ である。從来有限要素法 (FEM) では通常 $v = w$ と取扱ってある。このとき、式 (2.3) は式 (2.1) の式 (2.2) の離散化による差分近似式となる。

2.2 重み関数と評価関数. 区間 $\bar{\Omega}$ に沿った離散点 x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) を取る。このとき、 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ である。また、 m 次要素 $\Omega^{(m)} = [x_{i-m}, x_i]$ とするとき $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=0}^n \Omega^{(m)}$ となる。 $\Omega^{(m)}$ は、1 次要素 $\Omega_i^{(1)}$ の要素 $\Omega_i^{(1)}$ (有限要素)、 $s_i = x_i - x_{i-1} (> 0)$ である。以下のように、1 次要素 $\Omega_i^{(1)}$ を線形として取扱う。このとき、重み関数 $w(x)$ は式 (2.5) のように表わされる。

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i f_i(x) \quad (2.6)$$

ここで、重み関数 $f_i(x)$ は線形である、 $s = x/s_i$ とおくと式 (2.6) は区間 (linear piecewise) 多項式と図 (圖 1, 参照)。

$$f_i(s) = \begin{cases} 1-|s| & , |s| \leq 1 \\ 0 & , |s| > 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

また、上述の連続性等条件により、 $v_0 = v_n = 0$ である $f_0(x) = f_n(x) = 0$ となる。

次に、重み関数 $w(x)$ と次のようない近似関数 $w_j(x)$ の摂動形式を考える：

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n-1} w_j(x) \quad (2.8)$$

ここで、

$$w_j(x) = f_j(x) + \sigma_0 g_j(x) + \sigma_e h_j(x) \quad (2.9)$$

ここで、 $g_j(x)$ はまた $h_j(x)$ の摂動 (perturbing) 関数であり、 σ_0, σ_e はそれらの摂動パラメータである。また、 $f_j(x)$ はすでに式 (2.7) で与えられた一次偶関数であり、 $g_j(x)$ を奇関数、 $h_j(x)$ を偶関数とする。

図 2 および 3 に、摂動関数 $g_j(x)$ 、 $h_j(x)$ の別々として条件 $\int_0^1 g_j(s) ds = 0$ 、 $\int_0^1 h_j(s) ds = 0$ を満たすものをあげておく。ここで、節点 x_j, x_{j+1} 上で零とならない (図 2(b))、また不連続な (図 3(b)) 非適合関数 (non-conforming) も考えらる。本数学モデルでは、すでに述べたように、Galerkin 形式 (2.3) が対称性を有していないので、一般に $w_j(x)$ は偶関数となるのが自然である。したがって、摂動パラメータを $\sigma_0 = 0$ としておく。なお、移動現象などにおいてみらる非自己随伴 (non-selfadjoint) な演算子を有する問題では、 $\sigma_0 (\neq 0)$ を考慮する必要がある。さて従来の FEM では、当然 $\sigma_0 = \sigma_e = 0$ となる。

さて、摂動関数 $h_j(x)$ は式 (2.5)、(2.8) および (2.9) より、 $h_j(x_i) = 0$ を満足する必要がある。以下次の性質を有しているものとする。

$$\int_0^1 h_j^{(k)}(s) ds = 0 \quad , \quad k = 0, 1 \quad (2.10)$$

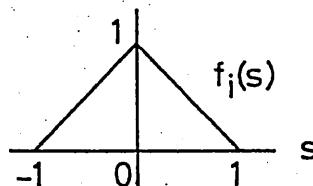
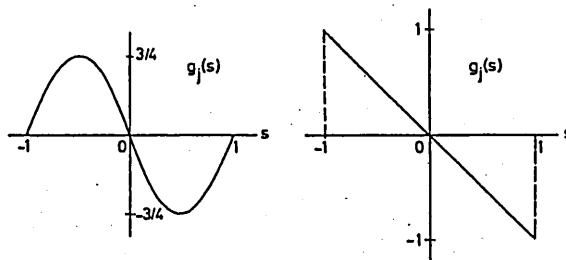
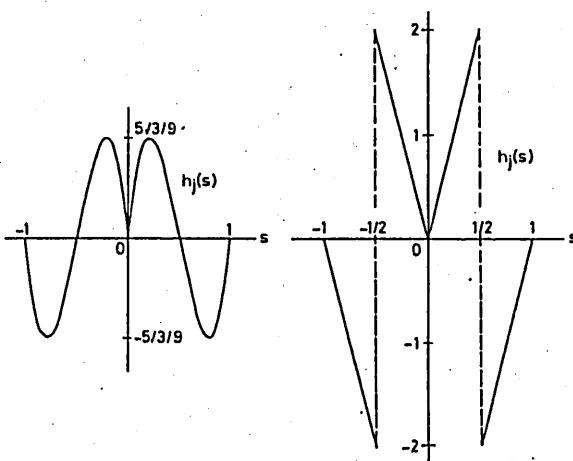


Fig.1-Linear test function.



(a)conforming quadratic (b)non-conforming linear
Fig.2-Perturbing odd functions $g_j(s)$.



(a)conforming cubic (b)non-conforming linear
Fig.3-Perturbing even functions $h_j(s)$.

では、 $h_j^{(n)}(x)$ は才次階導関数を示していき。 例に、 $h_j(x)$ は $s = x/h_j$ は常に 2 次のよう規定で 3 (図 3(a))。

$$h_j(s) = \begin{cases} 10|s|(1-2|s|)(1-|s|), & |s| \leq 1 \\ 0, & |s| > 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

才次のように非適合擾動関数も見い出せる (図 3(b))。

$$h_j(s) = \begin{cases} 4|s| & , |s| \leq 1/2 \\ 4(|s|-1) & , 1/2 < |s| \leq 1 \\ 0 & , |s| > 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

2.3要素方程式 1次要素 Ω_i^0 ($m=1$) に関する、本改良FEMによる要素方程式は、式(2.3), (2.6) やおよび(2.8) より次のようになる。

$$S_\sigma \mathbf{v} = \lambda^\sigma M_\sigma \mathbf{v} \quad (2.13)$$

ここで、 $\mathbf{v} = [v_{i-1}, v_i]^T$ (たとえ転置を意味する。) に簡略化。

$$S_\sigma = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{sym.}) \quad (2.14a)$$

$$M_\sigma = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 2-\sigma & 1-\sigma \\ 1-\sigma & 2-\sigma \end{bmatrix} \quad (\text{sym.}) \quad (2.14b)$$

ここで、振動パラメータは $\sigma = \sigma_e$ として。もちろん、 $\sigma = 0$ のとき、式(2.13)は従来のFEMによる要素方程式である。また剛性(stiffness)行列 S_σ および質量行列 M_σ は、式(2.10)のものである。したがって、振動係数 $\rho_j(x)$ とて式(2.11)あるいは(2.12)どちらを用いても同じ結果が得られる。更に、 $\sigma = 1$ のとき質量(mass)行列 M_σ は対角行列となる。このとき M_σ はいわゆる集中(lumped)質量行列であり、式(2.13)は3点差分公式を与える。すなはち、 $\sigma = 1$ は差分法(FDM)を意味する。故に、本改良FEMは $\sigma \in [0, 1]$ に対して従来のFEMとFDMの補間法でもある。

図4に、振動パラメータ $\sigma (= \sigma_e)$ を変えてときの解(固有値)入力の誤差 e の振舞いを示す。同図より、ほぼ $\sigma = 0.5$ で、 $e \approx 0$ となること。

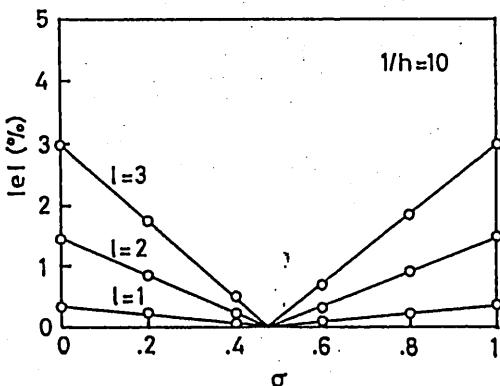


Fig.4-Perturbing parameter.

$$e = (\sqrt{\lambda_1^0} - \sqrt{\lambda_1}) / \sqrt{\lambda_1} \quad \text{relative error, } \lambda_1 = (1\pi)^2.$$

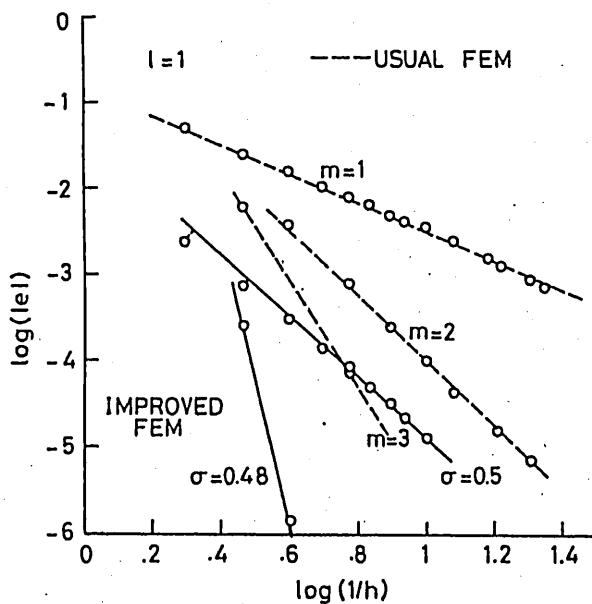


Fig.5-Convergence characteristics.

知らぬる。しかも、次数 m にほとんど依存していないようである。図5は、第1固有値 ($\ell = 1$) に関する収束特性を示す。本改良FEMは、単に1次要素 $\Omega_i^{(1)}$ ($m = 1$) にもとづいて定式化されて居ないから、その収束特性は複雑であるが $\sigma = 0.5$ より 0.48 のとき、それを従来の2次要素 $\Omega_i^{(2)}$ ($m = 2$)、4次要素 $\Omega_i^{(4)}$ ($m = 4$) を用いてFEMに相当していることが知らぬる。

3.導波管問題への拡張。

3.1 導波管問題。 中空導波管問題は、管断面 Ω 上の次のようなスカラ・ヘルムホルツの方程式にうまく表わされる。

$$\nabla^2 U(x, y) + \lambda U(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.1)$$

ただし、 $\lambda = k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta^2$ 、 k はしゃ断波数、 ω は角周波数、 ϵ_0 、 μ_0 は真空中の誘電率および透磁率、 β は軸方向の位相定数である。また、TMモード解釈では管壁(完全導体壁)の Ω 上で、次の同次ディリクレ条件を課せらる。

$$U(x, y) = 0 \quad , \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.2)$$

ここで、 $U(x, y)$ は軸方向成分 E_z を意味する。
これが式(3.2)である。TEモード解析では、次の同次ノイマン条件を課せらる。

$$\partial U(x, y) / \partial n = 0 \quad , \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (3.3)$$

ここで、 $U(x, y)$ は軸方向成分 H_z を意味する。また、これは管壁上での外向法線ベクトルである。

今、前章と同様に、 $U(x, y)$ に対する近似関数を $V(x, y)$ 、重み関数を $W(x, y)$ とするところ、式(3.1), (3.2) から式(3.1), (3.3) に適用する Galerkin 形式は次のようになる。

$$I(W, V) = \iint_{\Omega} \nabla W \cdot \nabla V \, dx dy - \lambda \iint_{\Omega} WV \, dx dy \quad (3.4)$$

ただし、 $\nabla \cdot \nabla$ は元々配達算子である。また、この条件を満たさないものと仮定している。

$$W (\partial V / \partial n) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.5)$$

ここで、TMモード解析では、式(3.2)より強制境界条件として $V(x, y) = 0$ となるとき $W(x, y) = 0$ ($(x, y) \in \Omega$) を満たすが、これは TEモード解析では、 $W(x, y) \neq 0$ ($(x, y) \in \Omega$) となる式(3.3)は自然境界条件となる。

3.2 斜形要素と3角形要素方程式。まず、薄波管問題への拡張で、近似関数 $V(x, y)$ に対する変数分離形を仮定する。すなはち、双一次要素(斜形要素) $\Omega_{ij}^{(1)}$ ($m=1$) を考える(図6(a))。したがって、式(2.6)より $V(x, y)$ は次のようにならわせる。

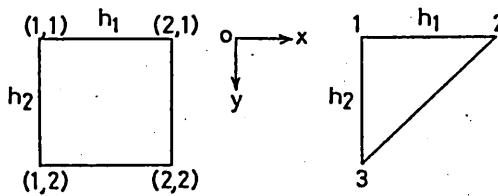
$$V(x, y) = \sum_i \sum_j V_{(i,j)} f_i(x) f_j(y) \quad (3.6)$$

ただし、 $V_{(i,j)}$ は節点 (i,j) 上の関数値、 $f_i(x)$ は式(2.7)で定義される。また、便宜上要素 $\Omega_{ij}^{(1)}$ は正方形、要素寸法を $h_1 = h_2 = h$ としている。

また、重み関数も同様に変数分離形を仮定する。式(2.8)から式(2.9)より次のようになる。

$$W(x, y) = \sum_k \sum_l (f_k(x) + \sigma h_k(x))(f_l(y) + \sigma h_l(y)) \quad (3.7)$$

ここで、本章波浪問題においても、やはり $I(W, V) = I(V, W)$ を用いる
から摂動関数 $h_j(x)$ および $h_j(y)$ は考慮されていない（そのため、摂動
パラメータ $\sigma = 0$ 、 $\sigma = 0$ とします）。また、 $h_i(x)$ は式(2.11)
あるより (2.12) で与えられています。



(a) rectangular (b) triangular

Fig. 6-Linear elements.

このとき、式(3.4)、(3.6) および (3.7) より双一次要素 $\Omega_{ij}^{(1)}$ に関する、本改良FEMによる要素方程式は次のようになります。

$$\mathbf{S}_\sigma V = \lambda^\sigma \mathbf{M}_\sigma V \quad (3.8)$$

ここで、 $V = [V_{(1,1)}, V_{(2,1)}, V_{(1,2)}, V_{(2,2)}]^T$ に用いられる。

$$\mathbf{S}_\sigma = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(2+\sigma) & -(1+2\sigma) & -(1+2\sigma) & -2(1-\sigma) \\ -(1+2\sigma) & 2(2+\sigma) & -2(1-\sigma) & -(1+2\sigma) \\ -(1+2\sigma) & -2(1-\sigma) & 2(2+\sigma) & -(1+2\sigma) \\ -2(1-\sigma) & -(1+2\sigma) & -(1+2\sigma) & 2(2+\sigma) \end{bmatrix}_{\text{sym.}} \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{M}_\sigma = \frac{\pi^2}{36} \begin{bmatrix} (2+\sigma)^2 & (1-\sigma)(2+\sigma) & (1-\sigma)(2+\sigma) & (1-\sigma)^2 \\ (1-\sigma)(2+\sigma) & (2+\sigma)^2 & (1-\sigma)^2 & (1-\sigma)(2+\sigma) \\ (1-\sigma)(2+\sigma) & (1-\sigma)^2 & (2+\sigma)^2 & (1-\sigma)(2+\sigma) \\ (1-\sigma)^2 & (1-\sigma)(2+\sigma) & (1-\sigma)(2+\sigma) & (2+\sigma)^2 \end{bmatrix}_{\text{sym.}} \quad (3.9b)$$

ここで、しゃ断波数は $\lambda_\sigma = (\lambda^\sigma)^{1/2}$ となる。

本改良FEMは、当然摂動パラメータ $\sigma = 0$ と $W(x, y) = V(x, y)$ となる、つまり、双一次要素を用いて従来のFEMヒー致している。以下、前章で明らかに述べたように、改良FEMは従来のFEMとFDMの補間法でもある。この結果を直接に拡張するならば、1次3角形要素 $\Omega_i^{(1)}$ (図6(b)) を用いて改良FEMも考えらるよう。その場合、次のようになる。

れば質量行列を作ることができる。式(3.8)下の方々、 $V = [V_1, V_2, V_3]^t$ とすると、

$$S_\sigma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10a)$$

$$M_\sigma = \frac{\hbar^2}{24} \begin{bmatrix} 2(1+\sigma) & 1-\sigma & 1-\sigma \\ 1-\sigma & 2(1+\sigma) & 1-\sigma \\ 1-\sigma & 1-\sigma & 2(1+\sigma) \end{bmatrix} \quad (3.10b)$$

ただし、便宜上要素寸法は $\hbar_1 = \hbar_2 = \hbar$ として、これで、式(3.10a)より式(3.9a)と異なり、 σ には全く依存していない。この式(3.10b)の結果と一致する。また、 $\sigma = 0.0$ とし、式(3.8)の式(3.10)の従来の1次3角形要素を用いてFEMによる要素方程式、 $\sigma = 1.0$ とし、FDMにおける、よく知られる3点差分公式とする。

3.3 対例. まず、誤差解釈を同時にとて、厳密値の既知な矩形断面 ($= (0, 1) \times (0, 1)$) を有する中空導波管を取り扱う。図7に、解(しゃ断

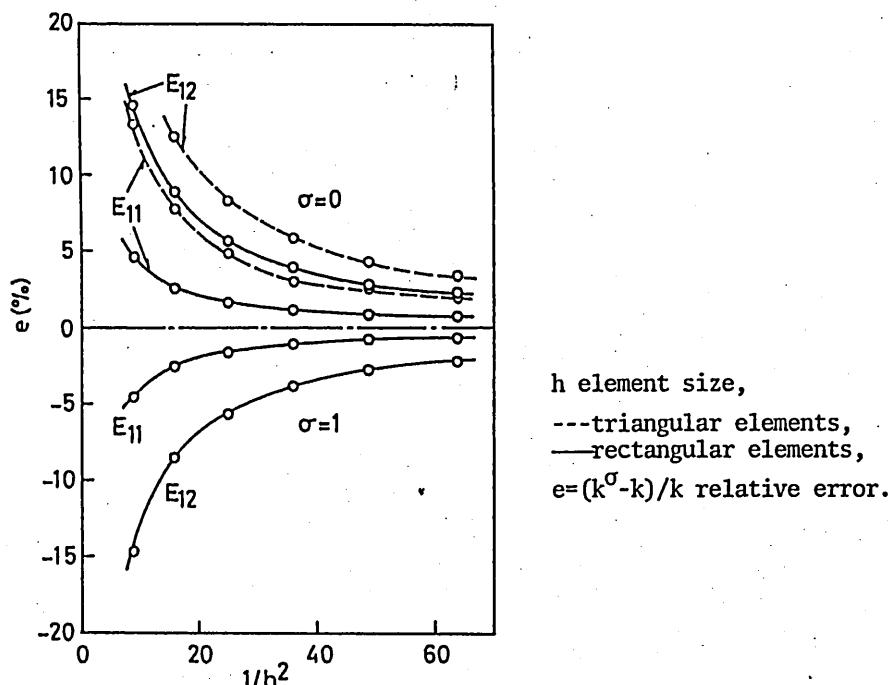


Fig.7-Errors of computed cutoff wavenumbers.

波数)の誤差の振舞いを、擾動パラメータ $\sigma = 0$ (FEM) または $\sigma = 1$ (FDM) に対して示している。同図より、矩形要素(双1次要素)を用いた場合には $\sigma \approx 0.5$ 、1次3角形要素を用いた場合には $\sigma \approx 0.75$ 付近で $\sigma \approx 0$ となりうることが知られる。実際、矩形要素の場合には、図8に示す

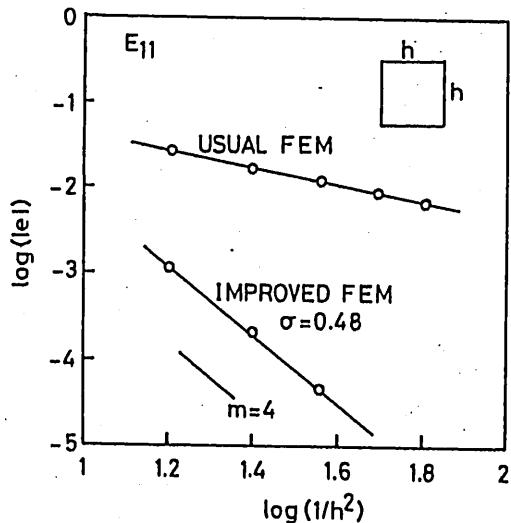


Fig. 8-Convergence characteristics(rectangular).

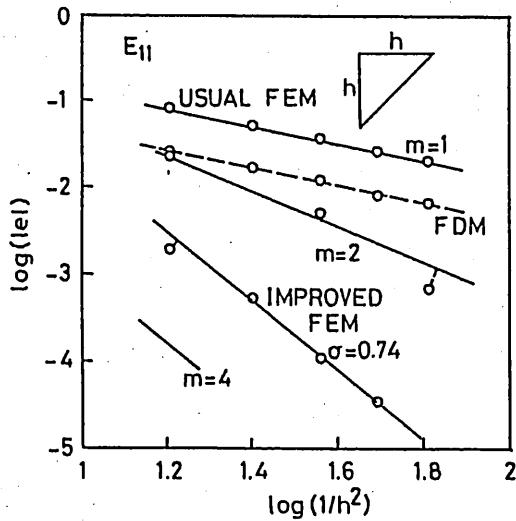


Fig. 9-Convergence characteristics(triangular).

じてようやく基本波 (E_{11} 波) が得られ、 $\sigma = 0.48$ を用いて本改良 FEM の 1 次元数学モデルにおける結果(図 5)と同様に、4 次要素 $\Omega_i^{(4)}$ ($m = 4$) を用いて従来の FEM と同程度の収束特性をもつていることが窺い出せる。また、図 9 に 3 角形要素を用いた場合の結果を示しておこう。3 角形要素の場合と同様の良好な結果が得られている。

次に、本改良 FEM の応用例として、屈曲形断面中空導波管(図 10)を取り扱う。屈曲度角をパラメータとすることによって、断面は凸なら非凸

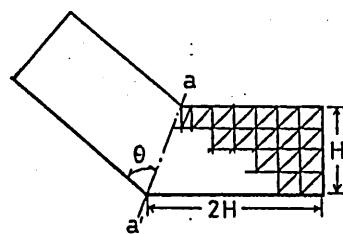


Fig.10-Symmetrical structure of hollow waveguide.
 $H=\pi$, $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.

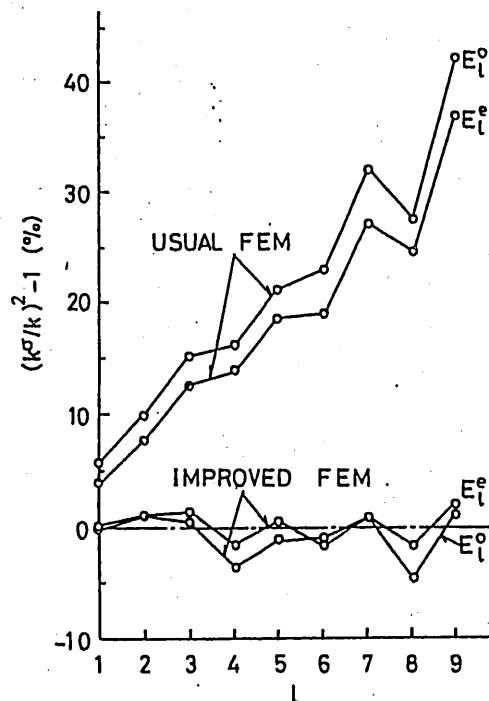
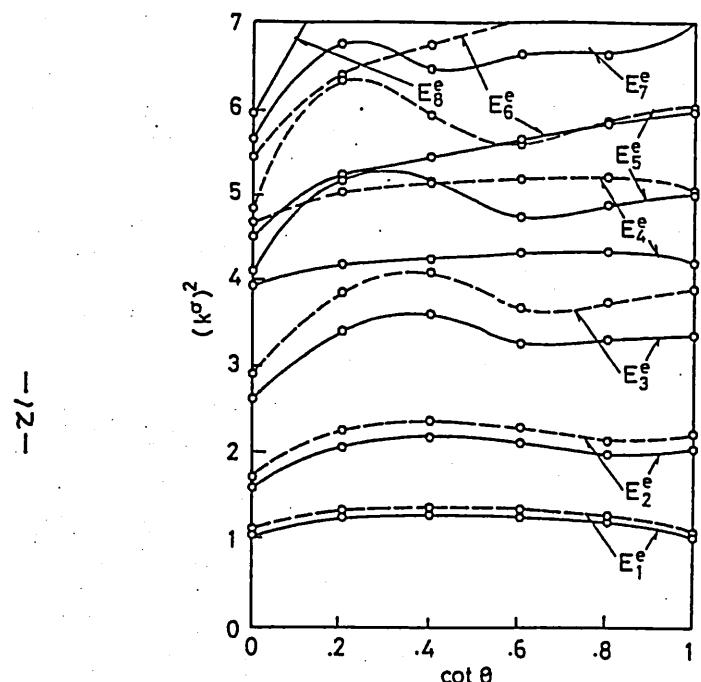
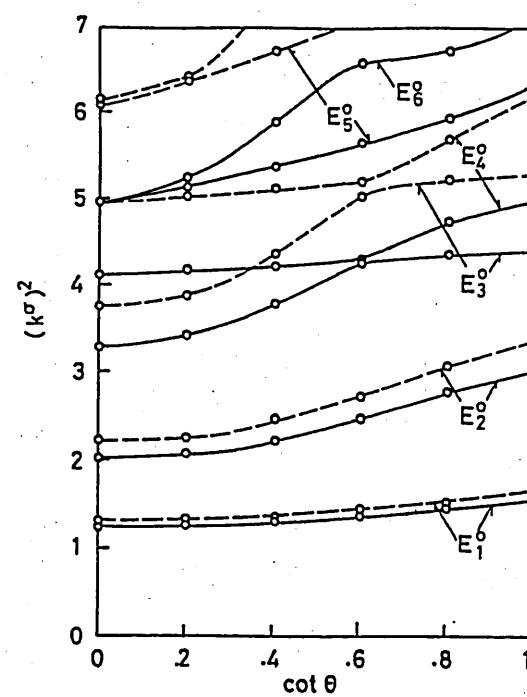


Fig.12-Convergence characteristics ($\theta=\pi/2$).
 $\sigma=0.648$ for E_1^0 waves, $\sigma=0.630$ for E_1^e waves.



(a) even E waves (E_e^e)
 $\sigma=0.630$



(b) odd E waves (E_o^o)
 $\sigma=0.648$

Fig.11-Behaviors of computed cutoff wavenumbers.

— improved FEM, ---usual FEM.

構造まで変化する。この対称構造(軸 $a-a'$)では、伝搬モードとして偶数奇正波、H波が考えられる。図11(a)および(b)に、偶E波、奇E波(を表す, E_x^0 , E_y^0 , E_z^0 で表す)の屈曲度 θ に関するしゃ断波数の変化を示す。同図より、1次3角形要素を用いて改良FEMは、従来のFEMを著しく改善していると考えられる。なお、当該 θ を増えていくにつれて、高次波間(下とえは, E_3^0 および E_4^0)に縮退が現れる。また、図12に示すように、改良FEMでは低次および高次を問わず(どちらか、次数 m に依存せぬ), 一様に高い高精度の解が得られる。このようないくつかの収束特性は、 m 次要素を用いて従来のFEM, FDMなどでは、決してみられないものである。

4.あとがき。

以上、1次矩形要素および3角形要素を用いて改良有限要素法(改良FEM)の理論と中空導波管問題への応用例を示した。本改良FEMの重み関数は偶関数から成る、試験関数の運動形式を用いている。特に、3次運動関数およびその1次非適合運動関数(図3(a), (b))は、新たに構成されたものである。こゝに示すように、従来の m 次要素を用いてFEMよりも疎で、かつ小規模な行列が導びかれ、更に低次および高次モードを問わず、それらのしゃ断波数を高精度に計算できる(図12)ことを明らかにした。しかも、その収束特性は従来の4次要素($m=4$)を用いてFEMに相当する(図3(a)および(b))ことが証明された。

なお、本改良FEMの理論的妥誤差解析、とりわけ運動パラメータ(θ および r_0)との関係を考察すること、今後の課題の一つであろう。また、新たに運動関数の構成、更には他の分野の問題への応用も重要な課題となる。

謝辞。末筆ながら、本論文の著者が在学中の世話を下さり、立命館大学井上和夫教授に謝意を表します。

文献

- [1] F.L.Ng,:Tabulation of methods for the numerical solution of the hollow waveguide problem, IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.MTT-22, pp.322-329, 1974.
- [2] 小西良弘監修, 電磁波問題へのアタッフの仕方, 電子通信学会, 1977.
- [3] 飯島恭藏監修, 電磁界の近似解析法, 電子通信学会, 1979.
- [4] M.V.K.Chari and P.P.Silvester ed.,:Finite elements in electrical and magnetic field problems, John Wiley & Sons, 1980.
- [5] 池内, 井上, 沢宣, 仁木, 导波管問題の有限要素解析における新しい取り扱い, 信管論(A), vol. 61-A, pp. 782-783, 1978.

-
- [6] 池内, 井上, 渡見, 仁木, α 法による中空導波管の解析, 信学論(A), vol. 62-A, pp. 224-231, 1979.
- [7] M. Ikeuchi and K. Inoue,:Finite-element method with the artificial stiffness coefficients in one-dimensional field problems ,Memoirs of the Research Institute of Science and Engineering .Ritsumeikan Univ., no.37, pp.19-27, 1979.
- [8] M. Ikeuchi, K. Inoue, H. Sawami and H. Niki,:Arbitrarily shaped hollow waveguide analysis by the alpha-interpolation method, J. SIAM Appl.Math., to appear.
- [9] R.S.Anderssen and A.R.Mitchell,:Analysis of generalized Galerkin methods in the numerical solution of elliptic equations, Math. Meth. in the Appl. Sci., vol.1, pp.3-15, 1979.
- [10] A.R.Mitchell and D.F.Griffiths,:The finite difference method in partial differential equations, John Wiley & Sons, 1980.

輻射科学研究会資料

運動円柱プラズマの表面波励振について

中川 紀美雄

(岡山理科大学)

於 大阪大学産業科学研究所

1980年9月26日

運動円柱プラズマの表面波動振について

中川 紀美雄（岡山理科大学）

1. まえがき

宇宙通信、あるいは電子プラズマビームと電磁波の相互作用の問題、^{(1), (2)} プラズマ円柱による平面波^{(3), (4)} は双極子場の散乱の問題^{(5), (6)} 等に關連して波源とプラズマ媒質との相互作用の問題が重要に行なってきるようと思われる。波源が運動媒介内に存在するとき、しばしつて表面波電力が非常に大きくなる。下り、あるいは放射電力を表面波電力が個々に解説されることは多く反射波に対する表面波電力の比 α アントナ理論⁽⁷⁾ が陽のう意味があるが、これら二つの電力の間の関係の詳しい報告はまだ思われない。

そこで、ニラシド問題の一例として運動プラズマ円柱の外部に二種類の波源の場合(A. ループ状電流波源とB. ループ状磁流波源)が存在する場合の放射の問題を取り扱い、表面波の励振の条件を求め、放射電力と表面波励振率について数値計算例を挙げ、反射電力と表面波電力の関係を明らかにする。

2. プラズマ円柱内外の電磁界

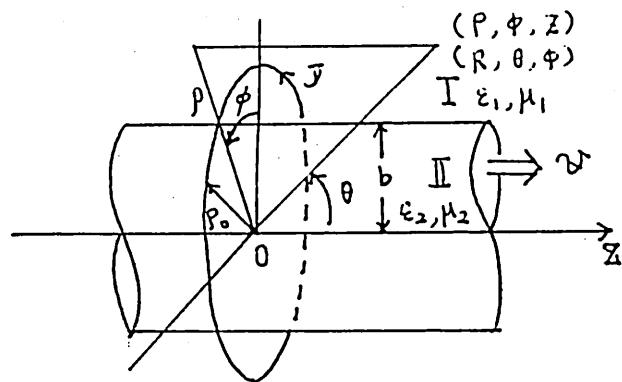
同じ形状の電流波源と磁流波源による放射の解析は互によく似てなる。すなはち、前者の解析により得られた電磁界を H とすると後者の電磁界 H' 、 H' は前者の結果の式において誘電率 ϵ と透磁率 μ を交換し $H \rightarrow H'$ 、 $H \rightarrow -H'$ と置きかえることによつて磁流源の場合の結果の式が得られる。そこで、まず最初ループ状電流波源の場合について解析を行なう。

図1. 以下で領域IIは、 Z の正の方向に $\hat{H} = \hat{H}_z \hat{z}$ (\hat{z} = Z 軸方向の単位ベクトル) すなはち一定速度で運動する半径 R の円柱状プラズマで、領域Iはこの円柱プラズマを囲む静止プラズマ領域とする。また ω は領域における誘電率、透磁率 μ のように与えられるものとする。

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2}\right), \quad \mu_1 = \mu_0 \quad (1a, b)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega'^2}\right), \quad \mu_2 = \mu_0 \quad (2a, b)$$

以下、領域I、IIにおける電磁界諸量に、 α と β を添字₁、₂を付けて表めることにする。上式における ω_{p1} 、 ω_{p2} は領域Iのプラズマ媒質の周波数を表す、 ω' は領域IIのプラズマ媒質の静止座標系における波源の周波数を表す。 $Z=0$ 面上 $P=P_0$ の位置に存在するループ状電流波源IIは ω' のようによく表される。



$$\mathcal{J} = \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{J} \delta(p - p_0) \delta(z) / 2\pi p$$

--- (3)

ここで“電磁界の時間変化を $e^{i\omega t}$ と仮定すれば”，領域II ($0 < p < b$), すなはち運動記述 \vec{A} の複数中での電磁界は次式により決定される。

図1. 構成図

$$(\nabla - j\omega \vec{E}_2) \times \vec{H}_2 = -j\omega \mu_2 \vec{\alpha} \cdot \vec{H}_2 \quad (4.a)$$

$$(\nabla - j\omega \vec{E}_2) \times \vec{H}_2 = j\omega \epsilon_2 \vec{\alpha} \cdot \vec{E}_2 \quad (4.b)$$

$$(\nabla - j\omega \vec{E}_2) \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{E}_2 = 0 \quad (4.c)$$

$$(\nabla - j\omega \vec{E}_2) \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{H}_2 = 0 \quad (4.d)$$

$\vec{E}_2 = \vec{E}_0$,

$$\vec{E}_0 = \frac{(n^2 - 1) \vec{V}}{(1 - n^2 \beta^2) C^2} = \frac{(n^2 - 1) \beta}{(1 - n^2 \beta^2) C} \vec{E}_0 = \vec{Q} \vec{E}_0, \quad \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \frac{1 - \beta^2}{1 - n^2 \beta^2}, \quad \beta = \frac{V}{C}, \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5)$$

式(4.d)よりベクトルポテンシャル \vec{V}/A_2 を ϕ_2 のように導入するといかで？

$$\vec{H}_2 = \vec{\alpha}^{-1} \cdot [(\nabla - j\omega \vec{E}_0) \times (\vec{\alpha}^{-1} \cdot \vec{A}_2)] \quad (6)$$

したがって、スカラポテンシャル ϕ_2 を用いてすれば \vec{E}_2 は式(4.a)から

$$\vec{E}_2 = -j\omega \mu_2 \vec{\alpha}^{-1} \cdot \vec{A}_2 - (\nabla - j\omega \vec{E}_0) \phi_2 \quad (7)$$

とかけろ。式(6), (7)を式(4.b), (4.c)に代入し，テーテー方程式

$$(\nabla - j\omega \vec{E}_0) \cdot \vec{A}_2 + j\omega \epsilon_2 \alpha^2 \phi_2 = 0 \quad (8)$$

を用いて，ベクトルポテンシャル \vec{A}_2 に関する波动方程式

$$(\nabla - j\omega \vec{E}_0) \cdot \vec{\alpha} \cdot (\nabla - j\omega \vec{E}_0) \vec{A}_2 + \alpha^2 \vec{k}_z^2 \vec{A}_2 = 0 \quad (9)$$

を得る。以下、

$$\kappa_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{W_{p_2}^2}{\omega^2} \right) \quad (10)$$

式(3)より、 ζ を用いて問題を解くと、外側から $A_{2\phi}$ の円周方向成分 $A_{2\phi}$ を持つ ζ は、式(9)の ζ のようになります。

$$\left[\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial P} \left(P \frac{\partial}{\partial P} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2j\omega\Xi}{a} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\omega^2\Xi^2}{a} + \kappa_2^2 a \right] A_{2\phi} = 0 \quad (11)$$

また、電磁界成分は式(6)~(8)を用いて ζ のようになります。

$$E_{2\phi} = - \frac{j\omega\mu_2}{a} A_{2\phi} \quad (12a)$$

$$H_{2P} = - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} - j\omega\Xi \right) A_{2\phi} \quad (12b)$$

$$H_{2z} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{P} \right) A_{2\phi} \quad (12c)$$

ζ に、領域 I ($b < P < \infty$)、すなはちプラスマ円柱外部の電磁界は領域 II の場合と同様にして波动方程式

$$\left[\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial P} \left(P \frac{\partial}{\partial P} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa_1^2 \right] A_{1\phi} = -j\delta(P-P_0)\delta(z)/2\pi P \quad (13)$$

$\zeta = \zeta''$,

$$\kappa_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{W_{p_1}^2}{\omega^2} \right) \quad (14)$$

を満足するベクトルポテンシャル $A_{1\phi}$ を用いて、 ζ のようにはめます。

$$E_{1\phi} = - j\omega\mu_1 A_{1\phi} \quad (15a)$$

$$H_{1P} = - \frac{\partial}{\partial z} A_{1\phi}, \quad H_{1z} = \left(\frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{P} \right) A_{1\phi} \quad (15b, c)$$

ζ に、波动方程式(11)および(13)を解くことを得る。式(11), (13)を Fourier 変換することでより次式を得る。

$$\left[\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial P} \left(P \frac{\partial}{\partial P} \right) + \xi_2^2 \right] \overline{A}_{2\phi} = 0 \quad (16)$$

$$\left[\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial P} \left(P \frac{\partial}{\partial P} \right) + \xi_1^2 \right] \overline{A}_{1\phi} = -j\delta(P-P_0)/2\pi P \quad (17)$$

以下、

$$\xi_2^2 = \kappa_2^2 - h^2, \quad \xi_1^2 = \kappa_1^2 - h^2 \quad (18a, b)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_{1\phi} \\ \overline{A}_{2\phi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \overline{A}_{1\phi} \\ \overline{A}_{2\phi} \end{bmatrix} e^{-jhz} dh \quad (19a)$$

$$\left[\begin{array}{c} \bar{A}_{1\phi} \\ \bar{A}_{2\phi} \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{array}{c} A_{1\phi} \\ A_{2\phi} \end{array} \right] e^{j k z} dz \quad (19.b)$$

以下、式(16)を導出するまで、導方性運動方程式の中で成り立つ関係式

$$\frac{1}{a} \left\{ (R + w\Omega)^2 - a^2 k_e^2 \right\} = h^2 - k_e^2 \quad (20)$$

を用いて、

$$k_e^2 = w^2 \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{w_p^2}{w^2} \right) \quad (21)$$

式(12), (15)を用いて円柱表面における境界条件を考慮して、領域I, および領域IIにおけるベクトル電場テンソルを求めるために式(22)を用いる。

$$A_{1\phi} = \begin{cases} -j \frac{J}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\xi_1, p_0) \left\{ J_0(\xi_1 p) - \frac{P(h)}{A(h)} H_0^{(2)}(\xi_1, p) \right\} e^{-jkz} dh & (p_0 < p) \\ -j \frac{J}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\xi_1, p) \left\{ J_0(\xi_1 p_0) - \frac{P(h)}{A(h)} H_0^{(2)}(\xi_1, p_0) \right\} e^{-jkz} dh & (p < p_0) \end{cases} \quad (22.a)$$

$$A_{2\phi} = -j \frac{J}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\xi_1, p_0) \frac{j \frac{2a}{\pi b}}{A(h)} J_0(\xi_2 p) e^{-jkz} dh \quad (22.b)$$

$\therefore T''$,

$$P(h) = \left\{ \xi_2 J_1(\xi_2 b) - \frac{1}{b} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_0(\xi_2 b) \right\} J_0(\xi_1 b) - \xi_1 J_1(\xi_1 b) J_0(\xi_2 b) \quad (24)$$

$$A(h) = H_0^{(2)}(\xi_1 b) \left\{ \xi_2 J_1(\xi_2 b) - \frac{1}{b} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_0(\xi_2 b) \right\} - \xi_1 H_1^{(2)}(\xi_1 b) J_0(\xi_2 b) \quad (25)$$

$$\xi_1 = \begin{cases} \sqrt{k_e^2 - h^2} & (k_e > h) \\ -j \sqrt{h^2 - k_e^2} & (k_e < h) \end{cases} \quad (26.a)$$

$$(26.b)$$

$$\xi_2 = \begin{cases} \sqrt{k_e^2 - h^2} & (k_e > h) \\ j \sqrt{h^2 - k_e^2} & (k_e < h) \end{cases} \quad (27.a)$$

$$(27.b)$$

以下、 $H_n^{(2)}$ および J_n は n 次の第2種Hankel関数およびBessel関数を表す。

3. 表面波電力

ベクトルで表すと A_{1d}, A_{2d} の表面波入射電力は、式(22), (23)に
ある複積分関数。留数計算可とすればよい。求める式は、 $\xi_1 = -j\sqrt{k_s^2 - k_1^2}$
($k_1 < h$), $\xi_2 = j\sqrt{k_s^2 - k_2^2}$ ($k_2 < h$) とき $\Delta(h)$ の値を k_s が
表面波の伝播定数を与える。したがって表面波の分散関係式(25)より
つぎのように表される。

$$\begin{aligned} K_o(MNP_1) \{ P_2 I_1(MNP_2) + \frac{1}{b} (1 - \frac{\mu_2}{P_1}) I_0(MNP_2) \} \\ + P_1 K_1(MNP_1) I_0(MNP_2) = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

$T = K^* V$,

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \sqrt{k_s^2 - (1 - \alpha^2 N^{-2})}, \quad P_2 = \sqrt{k_s^2 - (1 - N^{-2})} \\ k_s &= \frac{hs}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{正規化表面波伝播定数} \\ M &= \frac{\omega_{p2}}{c} b = \text{正規化半径} \\ N &= \frac{\omega}{\omega_{p2}} = \text{正規化周波数} \\ \alpha^2 &= \left(\frac{\omega_{p1}}{\omega_{p2}} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$\therefore T$, I_n や K_n が n 次の第1種正規第2種虚数Bessel関数を表す。

A. $11 - 7^\circ$ 打電流波源の場合

この場合式(1), (2)より表面波分散関係式(28)の式(2)に相当する。

$$P_2 I_1(MNP_2) K_o(MNP_1) + P_1 K_1(MNP_1) I_0(MNP_2) = 0 \quad (30)$$

これが成立するためには式(30)を満足するような k_s の実数値が存在しなければならない。すなはち、 $11 - 7^\circ$ 打電流波源の場合表面波の伝播定数が存在しない。

B. $11 - 7^\circ$ 打磁流波源の場合

表面波分散関係式(28)に式(2) $\xi_2 \approx \mu_2$, $\xi_1 \approx \mu_1$ を代入して交換すれば
 $11 - 7^\circ$ 打磁流波源の場合の表面波分散関係式がつぎのように得られる。

$$\begin{aligned} MN(N^2 - \alpha^2)(1 - \beta k_s)^2 \{ K_o(MNP_1) P_2 I_1(MNP_2) + P_1 K_1(MNP_1) I_0(MNP_2) \} \\ + \{ (1 - \beta^2) - (1 - \beta k_s)^2 \alpha^2 \} K_o(MNP_1) I_0(MNP_2) = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

表面波が励振されると、必要条件は、 ζ のように表される。

$$(N^2 - \alpha^2) \{ (1 - \beta^2) - (1 - \beta h_s)^2 \alpha^2 \} < 0 \quad \dots \quad (32)$$

ベクトル方程式で、 N 表面波への寄与は極にかけた個数を計算するときに用いられる。これを求めるとき、 $\zeta > 0$ の領域にて、 ζ のように表される。

$$A_{1\phi}^+ = - \frac{J_m}{\pi^2} \frac{P(h_s)}{\Delta'(h_s)} K_0(k_0 p_1 p_0) K_0(k_0 p_1 p) e^{-j k_s z} \quad (33)$$

$$A_{2\phi}^+ = - \frac{J_m}{\pi^2} \frac{a}{b \Delta'(h_s)} K_0(k_0 p_1 p_0) I_0(k_0 p_1 p) e^{-j k_s z} \quad (34)$$

ここで、 $\Delta'(h_s)$ は $\Delta(h)$ の $h = h_s$ での微分を表す、 $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ とする。

また、 $E_1 E$ の方向に伝搬する表面波によると、電場の電力は P_s^+ とすれば、式(33)にて次式で表される。

$$P_s^+ = P_{s1}^+ + P_{s2}^+ \quad (35)$$

ここで、

$$P_{s1}^+ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_b^\infty E_{1p}^+ H_{1\phi}^{+\ast} 2\pi p dp \right] \quad (36)$$

$$P_{s2}^+ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_0^b E_{2p}^+ H_{2\phi}^{+\ast} 2\pi p dp \right] \quad (37)$$

ここで、 Re は実数部を表す操作を表す、 \ast は複素共役を表す。上式(36)に含まれる E_{1p}^+ , $H_{1\phi}^+$ は式(15)に(33)を用いてつきのように表される。

$$E_{1p}^+ = j \frac{h_s J_m}{\pi^2} \frac{P(h_s)}{\Delta'(h_s)} K_0(k_0 p_1 p_0) K_0(k_0 p_1 p) e^{-j k_s z} \quad (38a)$$

$$H_{1\phi}^+ = j \frac{\omega J_m}{\pi^2} \epsilon_0 \left(1 - \frac{w_{p1}^2}{\omega^2} \right) \frac{P(h_s)}{\Delta'(h_s)} K_0(k_0 p_1 p_0) K_0(k_0 p_1 p) e^{-j k_s z} \quad (38b)$$

同様に E_{2p}^+ , $H_{2\phi}^+$ は式(12)に(34)を用いてつきのように表される。

$$E_{2p}^+ = -j \frac{J_m}{2\pi^2} \frac{1}{ab} (h_s + \omega \Omega) \frac{1}{\Delta'(h_s)} K_0(k_0 p_1 p_0) I_0(k_0 p_2 p) e^{-j k_s z} \quad (39a)$$

$$H_{2\phi}^+ = -j \frac{\omega J_m}{2\pi^2} \frac{1}{b} \left(1 - \frac{w_{p2}^2}{\omega^2} \right) \frac{1}{\Delta'(h_s)} K_0(k_0 p_1 p_0) I_0(k_0 p_2 p) e^{-j k_s z} \quad (39b)$$

したがって、 P_{s1}^+ , P_{s2}^+ はそれぞれつきのように表される。

$$P_{s1}^+ = \frac{1}{2} \left[\frac{J_m^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{w_{p2}}{c} \right)^2 \right] N^2 (N^2 - \alpha^2) k_s M^2 \frac{G^2}{D^2} K_0^2(LNP_1)$$

$$\times [K_1^2(MNP_1) - K_0^2(MNP_1)] \quad (40)$$

$$P_{s2}^+ = \frac{1}{2} \left[\frac{J_m^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{w_{p_2}}{c} \right)^2 \right] \frac{1}{a} \left(N^2 - \frac{1-\beta^2}{(1-\beta k_s)^2} \right) \cdot \frac{K_0^2(LNP_1)}{D^2} (k_s + \frac{R}{c}) \\ \times [I_0^2(MNP_2) - I_1^2(MNP_2)] \quad (41)$$

で式(41),

$$G = \left\{ P_2 I_1(MNP_2) - \frac{1}{MN} \frac{(1-\beta^2) - \alpha^2(1-\beta k_s)^2}{(N^2 - \alpha^2)(1-\beta k_s)^2} I_0(MNP_2) \right\} \\ \times I_0(MNP_1) - P_1 I_1(MNP_1) I_0(MNP_2) \quad (42.a)$$

$$D = \frac{(1-\beta^2) - \alpha^2(1-\beta k_s)^2}{(N^2 - \alpha^2)(1-\beta k_s)^2} \frac{k_s}{P_1} \{ K_1(MNP_1) I_0(MNP_1) - K_0(MNP_1) I_1(MNP_1) \} \\ + \frac{2\beta(1-\beta^2)}{MN(N^2 - \alpha^2)(1-\beta k_s)^3} K_0(MNP_1) I_0(MNP_1) \quad (42.b)$$

ここで、Zの負の方向に伝搬する表面波によると進行する3電力は、Zの正の方向に伝搬する表面波によると進行する3電力を表す式に付けてβを-βに置き換えておいたに等しい。したがって式(42.b)が成立する。

$$P_s^-(\beta) = P_s^+(-\beta) = P_{s1}^+(-\beta) + P_{s2}^+(-\beta) \quad (43)$$

よって、Zの表面波により進行する全表面波電力はつぎのように表される。

$$P_s = P_s^+ + P_s^- = P_s^+(\beta) + P_s^+(-\beta) \quad (44)$$

4. 放射電力

ベクトルJ⁰テンシャルの空間放射波に対する導出はあん部要法によると式(22)によって与えられる。またJ⁰テンシャルA₁₄の空間放射波に対する導出はつぎのように求められる。

$$A_{14} = \frac{-jJ}{4\pi} \left\{ J_0(X) - C_{01} H_0^{(2)}(X) \right\} \frac{e^{-jk_1 R}}{R} \quad (45)$$

ここで、

$$X = LN(1-\alpha^2 N^2) \cos \theta, Y = MN(1-\alpha^2 N^2) \cos \theta, Z = MN\lambda, \quad (46)$$

$$\lambda = \sqrt{(1-\alpha^2 N^2) \sin^2 \theta - (1-N^2)} \quad (46)$$

$$C_{01} = \frac{\left\{ \lambda J_1(Z) - \frac{1}{b} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_0(Z) \right\} J_0(Y) - \cos \theta J_1(Y) J_0(Z)}{\left\{ \lambda J_1(Z) - \frac{1}{b} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_0(Z) \right\} H_0^{(2)}(Y) - \cos \theta H_1^{(2)}(Y) J_0(Z)} \quad (47)$$

$i = \theta^{\circ}$, Z, R 方向への遠距離放射電力はつぎのように表す。

$$\begin{aligned} S_R &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E_{1\phi} H_{10}^{\pm}] \\ &= \frac{J^2}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^2 \frac{F(\theta)}{4\pi R^2} \end{aligned} \quad (48)$$

ここで, $F(\theta)$ は次式で表される。

$$F(\theta) = \frac{N^2 P^2}{D_1^2 + D_2^2} \quad (49)$$

$\theta = 7^{\circ}$,

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \lambda J_1(Z) - \frac{1}{b} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_0(Z) \right\} \left\{ J_0(X) N_1(Y) - N_0(X) J_1(Y) \right\} \\ &\quad - \cos \theta J_0(Z) \left\{ J_0(X) N_1(Y) - N_0(X) J_1(Y) \right\} \end{aligned} \quad (50a)$$

$$D_1 = \left\{ \lambda J_1(Z) - \frac{1}{b} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_0(Z) \right\} J_0(Y) - \cos \theta J_1(Y) \quad (50b)$$

$$D_2 = \left\{ \lambda J_1(Z) - \frac{1}{b} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_0(Z) \right\} N_0(Y) - \cos \theta N_1(Y) J_0(Z) \quad (50c)$$

放射電力 P_R は次式で表される。

$$\hat{P}_R = \left[\frac{J}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} \right) \right]^{-1} P_R = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\theta) \cos \theta d\theta \quad (51)$$

$\theta = 7^{\circ}$ の \hat{P}_R は正規化放射電力を表す。磁流源の場合, 上の結果と式 $J \rightarrow J_m$ を用いて P_R を求めると、この領域で置いた下式より得られる。

$$\eta = \frac{P_R}{P_s + P_R} \quad (52)$$

しかし α 、数値計算例は当日会場で発表する。

文 献

[1] 堀沢 俊之: "相手輸の電子ビームによる高導電率散乱", 信学論(C), 63, 5, p. 279 (MAY 1980).

[2] 森川 良厚, 沢田 博: "電子ビーム-電離層界面分離現象の保存則", 信学論(B), 59, 6, p. 309 (JUNE 1971).

[3] SESHADRI, S. R.: "Radiation in a Warm Plasma from an Electric Dipole with a Cylindrical Column of Insulation", IEEE Trans., AP-, p. 613, (July 1965)

[4] FRIEDMAN, B. and Williams, W. E.: "Excitation of Surface Wave", IEE, p. 252, (Jan. 1958)

[5] Brown, J. and Stachera, H. S.: "The Launching of an Axial Cylindrical Surface wave", IEE, p. 18 (July 1961).

輻射科学研究会資料

光導波路の曲り部損失の一軽減法

下代 雅啓 汐 新之輔

(愛媛大学 工学部)

昭和 55 年 11 月 28 日

(於 中央電気クラブ)

1. まえがき

誘電体で構成された光線路が無損失で導波モードでエネルギーを伝送できるのは伝送軸が直線である場合に限られており、曲り部を伝搬する導波モードは曲率半径や横断面内の線路構造に依存する各モード固有の損失(以後, *pure bending loss*と称す)を被る。更に、曲率半径が変化する場所では、固有モードの違ひに起因するモード交換損失(以後, *transition loss*と称す)が生じる。特殊な場合を除いて、これらの損失は少ないと想定され、この軽減化は実用上の重要な問題であると考えられる。従来, *pure bending loss*のみの解析や*transition loss*のみの解析など、個々の損失については、種々の線路を対象にかなり詳しく解明されていようある^{1)~4)}。又, *pure bending loss*と*transition loss*を含むとした総合的な損失(以後, *total loss*と称す)に対する検討もスラブ線路や光ファイバについていくつかなされてい⁵⁾⁶⁾。しかししながら、筆者らの知る限りでは、線路の曲り部における*total loss*を軽減しようとする試みや提案はこれまであまりなされていないようである。

ところで、各々の損失特性が線路構造に強く依存していることはすでによく知られており、このことより曲り部での線路構造の適当な制御が特性改善の有力な手段となり得ると考えられる。薄膜線路に基づく光IC線路は、製作過程における構造の制御が容易であり、従って、この方法による損失軽減化の可能性を持つところ。例えば、Single Material Fiber(以後, SMFと称す)

する)。では、コア部の両側に位置するサポートスラブの厚さを非対称にすることによって損失の軽減が期待される。^{7), 8)} 又、同様の考察から、光ストリップ線路やRib線路などにつけても非対称構造を導入することで損失を少なくするなどが不可能である。

そこで、本報告では、光IC線路の基本であるスラブ線路を取り上げ、曲り部での total loss を軽減するための一つの方法として、屈折率分布の非対称構造について検討する。すなはち、一定の曲率半径を持つ円形曲り部が直角部分に接続された場合の total loss の構造依存性を調べ、軽減化を數値的に検討する。また、本方法の一つの適応例として、SMFに対する数値的検討結果も含めて示すこととする。

2. Pure bending loss

曲率半径 R で曲った3層スラブ線路は、図1に示すように円柱座標系で表すのが便利である。但し、曲りの中心軸と座標系の Z 軸が一致している。このような系における Maxwell 方程式の解はベッセル関数で表され、⁹⁾ 1ホーリガラ、この系を伝搬する電磁波モードを完全に記述するには、更に、三つの領域でのベッセル関数の振幅係数と位相を決定しなければならず、そ

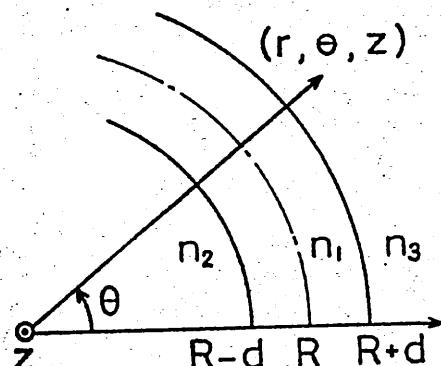


図1 3層スラブの円形曲り部

のためには、問題に応じた境界条件を適用する必要がある。これは、古くより固有値問題の典型として論じられており、導波モードの伝搬定数は、固有値として複素超越方程式の解で与えられる。又、振幅係数は固有値に属する固有ベクトルとして与えられる。伝搬定数は複素数となり、虚部が pure bending loss を与える。

現在では、大型電子計算機を用いれば複素超越方程式を解くのはさほど困難なことではない。更に、より簡単な近似解法もすでに幾つか報告されて^{1)~3)}いる。そこで、本報告では、近似解法の中で最も簡便な方法であると思われる Marcuse の近似を用いて²⁾、非対称 3 層スラブの pure bending loss を解析する。

ここで、結果だけを引用すれば、単位長さ当たりの pure bending loss 2α は

$$2\alpha = \frac{2\delta k^2 e^{2\delta d} e^{-\tau}}{(n_1^2 - n_3^2) k^2 \beta (2d + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta R})} \quad (1)$$

で与えられる。但し、

$$\tau = \left\{ \frac{\beta}{\gamma} \ln \left[\frac{1 + \frac{\delta}{\beta}}{1 - \frac{\delta}{\beta}} \right] - 2 \right\} \delta R \quad (2)$$

$$k^2 = n_1^2 k^2 - \beta^2 \quad (3)$$

$$\gamma^2 = \beta^2 - n_3^2 k^2 \quad (4)$$

$$\delta^2 = \beta^2 - n_2^2 k^2 \quad (5)$$

であり、 K 、 β 、 δ は超越方程式

$$\tan 2Kd = \frac{K(\gamma + \delta)}{K^2 - \gamma \delta} \quad (6)$$

の解でなければならぬ。又、 d をひには、スラブ線路の半幅と線路中心部の曲率半径である。そして、 n_1 、 n_2 、 n_3 、 k は、各領域の屈折率及び自由空間での波数を表す。尚、式(1)は TE モードに対する近似式であり、以下の議論は、全て TE モードに関するものに限ることにする。

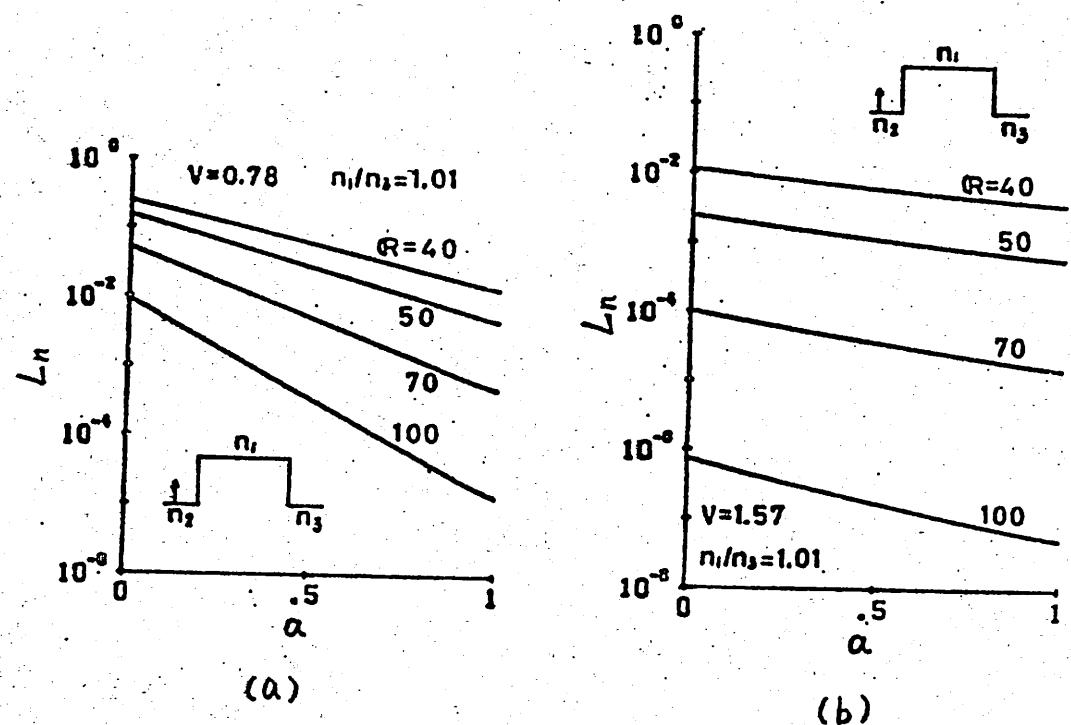


図2. Pure bending Loss

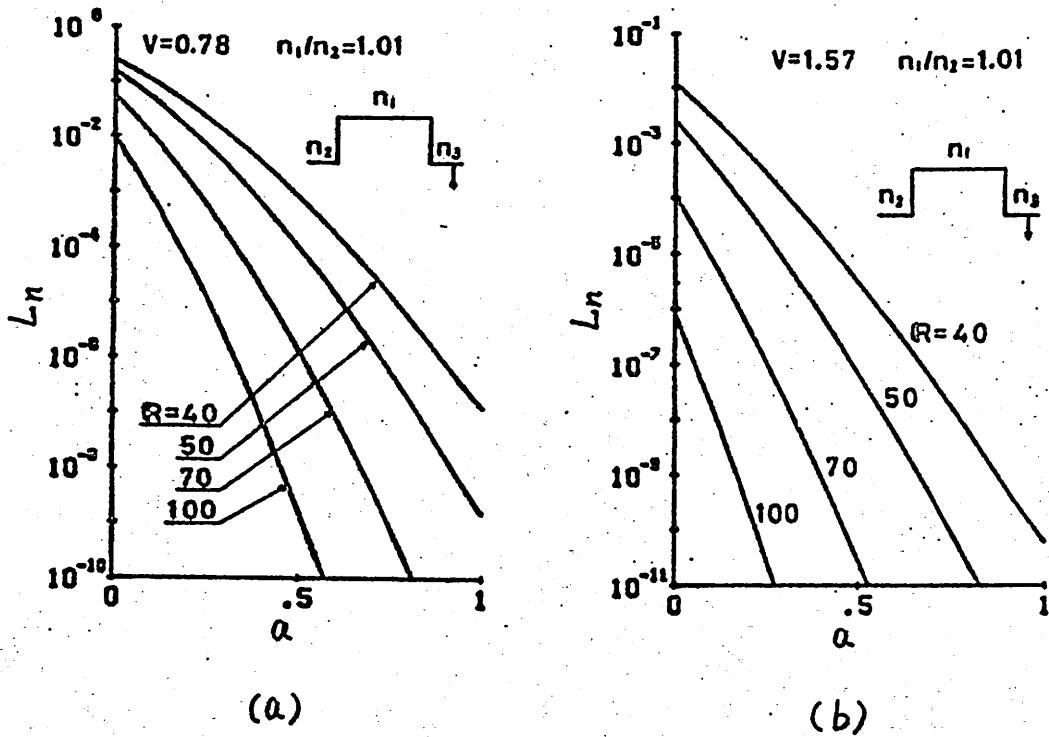


図3. Pure bending loss

之で、式(1)を用いて、曲りの内側又は外側の屈折率、すなまち、 n_2 又は n_3 を変化させた場合の pure bending loss を計算し、非対称構造に対する損失特性の依存性を数値的に検討する。

図2, 3は基本モードの特性を示している。縦軸及び横軸は、それぞれ、1ラジアン当たりの規格化損失

$$L_n = \alpha R \sqrt{\frac{n_i^2 - n_f^2}{n_i^2}} \quad (6)$$

$$n_f = f_i \times (n_2, n_3) \quad (7)$$

及び屈折率分布の非対称定数

$$\alpha = \frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (8)$$

である。但し、 $\text{fix}(A, B)$ は、両者のうち変化しない方を採用することを意味する。又、同図中、パラメータ R 及び V は、規格化曲率半径

$$R = 2n_1 k \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^{\frac{3}{2}} R \quad (9)$$

及び規格化周波数

$$V = kd \sqrt{n_1^2 - n_3^2} \quad (10)$$

である。図2は、 $n_1 = 1.01$, $n_3 = 1 \times 1$ で、曲りの内側の屈折率を $n_2 = 1$ から徐々に上げていった場合の特性を示している。逆に、図3は、 $n_1 = 1.01$, $n_2 = 1 \times 1$ で曲りの外側の屈折率を $n_3 = 1$ から徐々に下げた場合の特性を示している。両図共に、(a)では $V = \pi/4$, (b)では $V = \pi/2$ であり、規格化周波数は单一モード導波領域である。

図2及び3より、曲率半径が大きい程、又、規格化周波数が高くなる程 pure bending loss は少々小さくなることがある。更に、一定の曲率半径を保った場合には、屈折率分布の非対称定数が大きくなる程損失が少々小さくなることが表されている。ところで、図2と3では損失の軽減率に大きな差があり、曲りの外側の屈折率を制御する方が効率が良いことがわかる。式(1)によると、曲

りの外側の境界での屈折率差が損失に直接関与したり、図2と3の差はpure bending loss の本質を良く表している。

3. Transition loss

曲率半径の異なる2線路や構造の異なる2線路が接続されている場合、一方の線路を伝搬して来た導波モードは、接続部で他方の伝搬可能な固有モード(放射モードも含む)に適く変換される。接続部を通過した直後、電磁界は複雑な変動を示す。しかし、この変動は伝搬距離とともに小さくなり、やがて電磁界は定常的な分布を示すようになる。そして、この定常電磁場で運ばれる電力が接続部を通過した電力である。接続部への入射電力と接続部からの透過電力の差が放射モードに変換された電力であり、これが transition loss である。ここで取り扱っていようとする単一モード線路の場合、透過電力を求めるここと transition loss を求めることは等価である。そして、電力透過係数は、いわゆる weakly guiding 線路では

$$T = \frac{\left(\int E \cdot E' dx \right)^2}{\int E^2 dx \cdot \int E'^2 dx} \quad (11)$$

で非常に簡単に求めることができる。⁵⁾ 但し、 $E(x)$, $E'(x)$ は二つの線路の基本モードに対する波動関数であり；積分は横断面全体にわたって行うものである。又、曲

リ部での波動関数は摂動法による解を用いる。⁹⁾

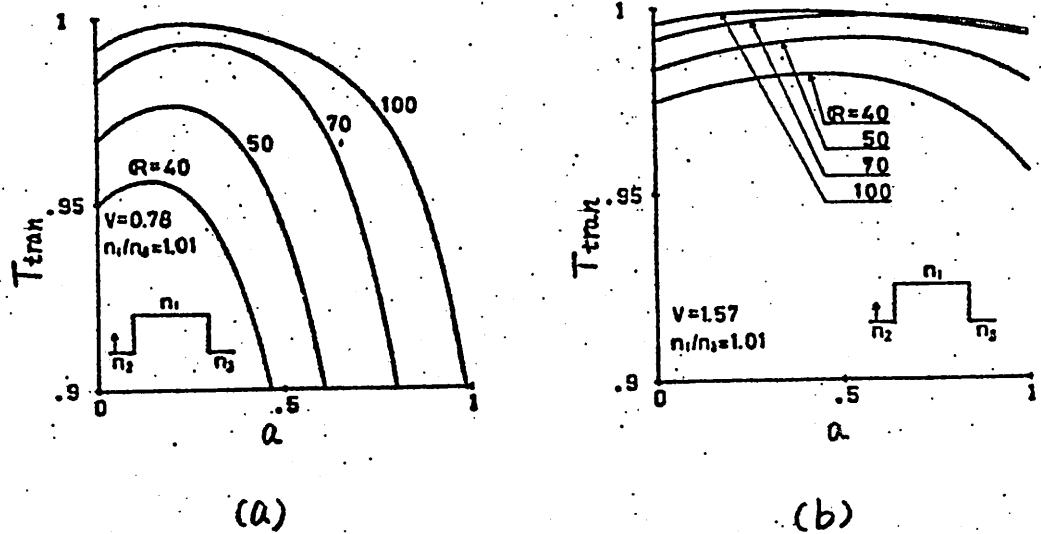


図4. Transition loss.

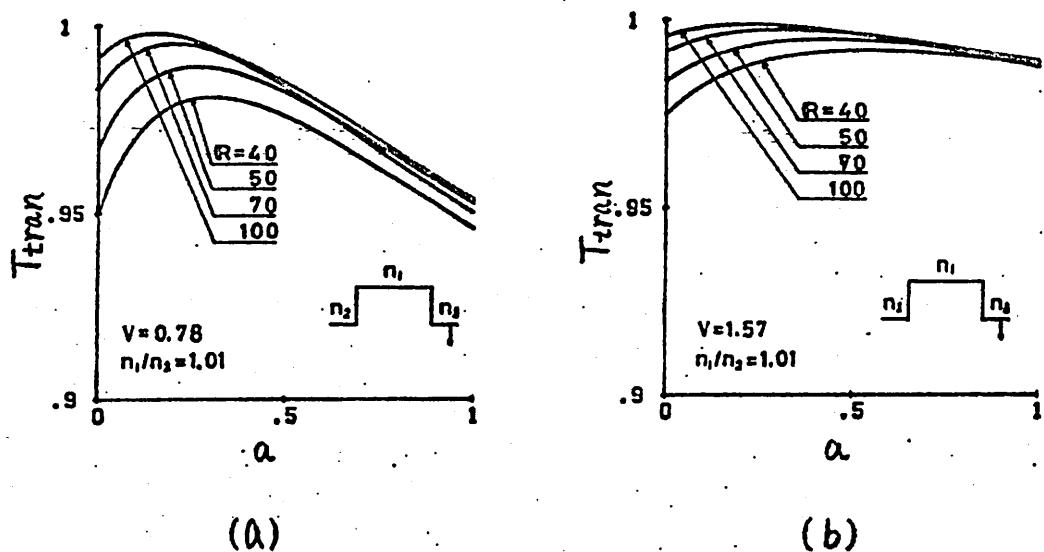


図5. Transition loss

図4及び5は、 $n_1=1.01$, $n_2=n_3=1$ なる対称構造の直角な線路に、 $n_1=1.01$, $n_2 \neq n_3$ なる非対称な線路の円形曲り部を接続された場合の電力透過係数を示している。縦軸は電力透過係数 T_{tran} , 横軸は屈折率分布の非対称定数 α である。図4は、曲りの内側の屈折率を $n_2=1$ から徐々に上げた場合に対応し、図5は、曲りの外側の屈折率を $n_3=1$ から1だけ下げていった場合を示している。又、両図共、(a) T は $V=\pi/4$, (b) T は $V=\pi/2$ である。

これらの図は、曲率半径をパラメータとして示しているが、いわゆる曲率半径に対する transition loss を最少にするような非対称定数が存在する。その点での電磁界分布は、曲りによる外側へのずれと非対称構造による内側へのずれがほぼ相殺し、直線部を構成する対称線路の電磁界と最も良く似ているものと思われる。曲率半径が小さい程電磁界の外側へのずれが大きくなり、それを打ち消すためにはより大きな非対称性が必要となる。図5がこのことを明確に表している。

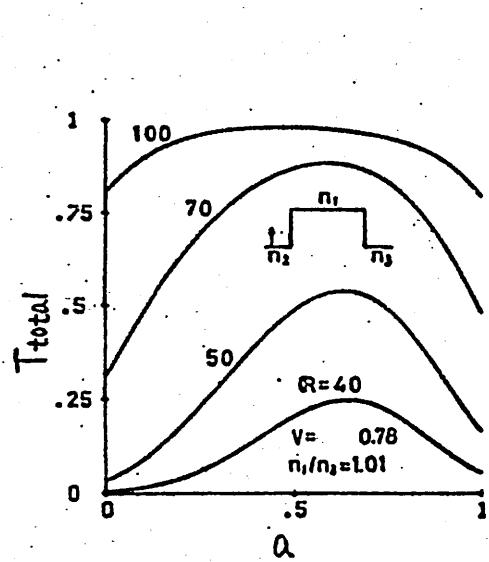
4. Total loss

非対称線路から成る曲率半径 R の円形曲り部が、両端で、対称構造の直角な線路に接続されており、両端の直線部が同じ線路である場合を考える。曲り部の入口と出口が完全に同一構造であるなら、入口での電力透過係数を出口の電力透過係数として使うことは可能である。そして、pure bending loss と transition loss

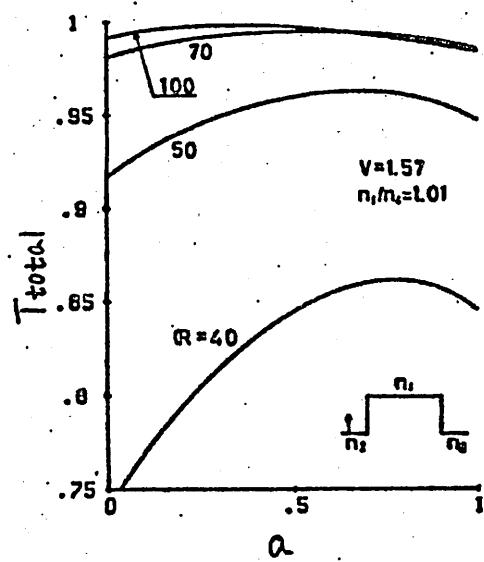
の間に加法が成立するならば、曲り部を通過したて来る電力の全体の透過係数 T_{total} は、

$$T_{total} = T_{tran} \cdot \exp[-2\alpha R \theta] \cdot T_{tran} \quad (12)$$

で与えられる⁵⁾。但し、内形曲り部の回転角はθラジアンである。



(a)



(b)

図 6. Total Loss

図 6 及び 7 は、 $\theta = \pi/2$, $n_1 = 1.01$, $n_2 \neq n_3$ の 3 非対称線路から成る内形曲り部か、両端で、 $n_1 = 1.01$, $n_2 = n_3 = 1$ たり 3 対称で直線ぐる線路に接続されていゝ場合の電力透過係数を示していゝ。縦軸は電力透過係数 T_{total} 、横軸は屈折率分布の非対称定数 α である。

図 6 は、曲りの内側の屈折率を $n_2 = 1$ から徐々に上げていゝた場合の total loss を、又、図 7 は、曲りの外側の屈折率を $n_3 = 1$ から 1 に下げていゝた場合に対する

する total loss を表してある。又、両図共、(a) については $V = \pi/4$, (b) では $V = \pi/2$ であり、規格化周波数は单一モード導波領域である。

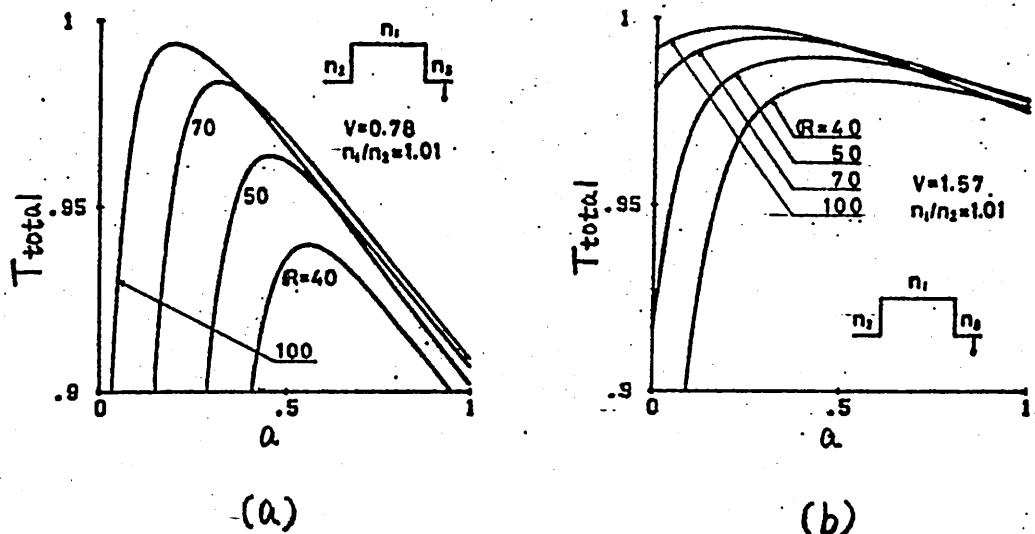


図7. Total loss

図6 及びより、このような曲率半径に対する、total loss を最少にするような非対称定数が存在する事が明らかである。すなはち、与えられた曲率半径に対する、total loss を最少にするような最適な非対称構造が必ず存在する。又、両図より、同一曲率半径に対する、total loss を最少にするような非対称定数は、transition loss を最少にするような値よりも少しだけ大きい方へずれる。又して、それ方は曲率半径が小さくなるほど大きい。これは、曲率半径及び非対称定数が小さくなる程 pure bending loss の影響を強く受けるためである。これらの結果から引き出せる重要な結論の一つは、線

路の曲り部を非対称構造にすれば、左とえそれが最適値より少々ずれていても、対称方より曲げた場合に比べて total loss を大幅に軽減できることがある。

次に、曲りの内側の割御と外側の割御を比べると、一見して後者が優れていることは明らかである。図6-(a)の場合には、 $R=40$ で電力透過係数は最大で約0.25程度まで1から上がらないのに對して、図7-(a)の $R=40$ では、最大で約0.94、 $a=0.4 \sim 0.9$ の範囲で0.9以上の電力透過係数を得られる。1からがら、線路の種類によつては、曲りの外側の割御が難いものもある。例えば光ストリップ線路である。そのような線路では、曲りの外側を割御した場合と同程度の電力透過係数を得るためにには、曲率半径に対する制限を少しづつ緩めてやる必要がある。

5. Single Material Fiber について

SMFは図8-(a)に示すように、構造上曲りの外側を割御する方が比較的簡単なようである。ここでは、光IC線路の代表例として取り上げて、簡単に検討してみる。

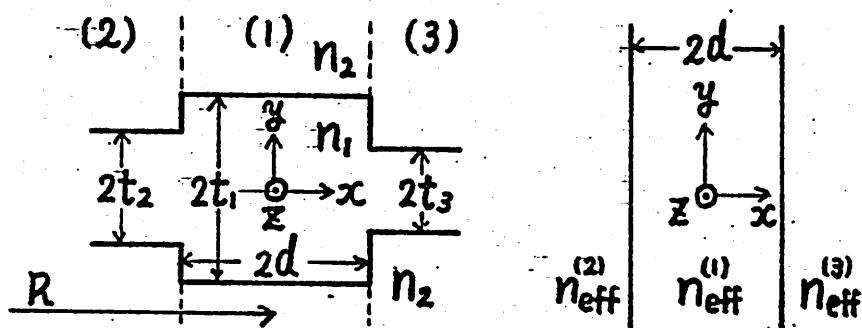


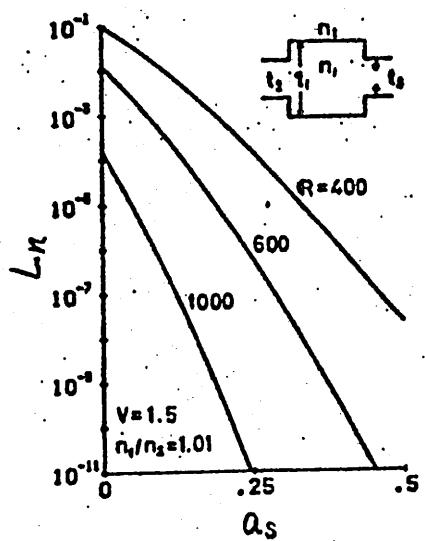
図8-(a) Single Material Fiber

図8-(b) 等価3層スラブ

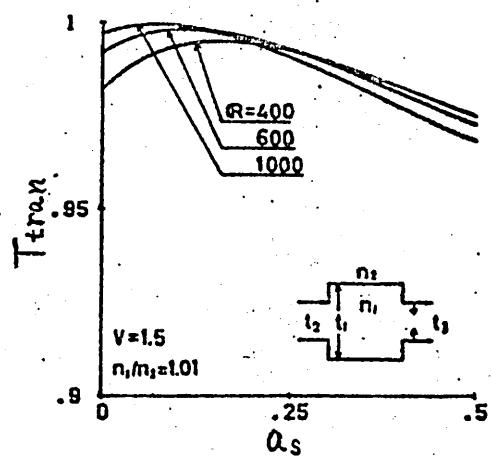
SMFのコア部の縦と横は、それぞれ、 $2t_1$ 及び $2d$ 、領域(2)と(3)のサポートスラブの厚さは、それぞれ、 $2t_2$ 及び $2t_3$ である。又、媒質の屈折率は、 $n_1=1.01$ 、 $n_2=1$ とする。SMFは図8-(a)のままで解析が困難であるため、ここでは、等価屈折率法を用いて図8-(b)に示すような3層スラブに変換する⁽¹⁰⁾。図8-(b)における各領域の等価屈折率の求め方は、ここでは割愛する。そこで、各領域の等価屈折率を得られたとすれば、これまでの議論と全く同様に pure bending loss, transition loss そして total loss を求めることができる。数値計算の一例を示すと図9のようになる。縦軸は、それぞれ、 α_s で定義されてある量であり、(a)は 1 ラジアン当たりの規格化 pure bending loss, (b)は T_{tran} , そして(c)は T_{total} である。但し、図中の V 及び R は、式(7)の n_2 を $n_2/2$ 代入すればからかい。横軸は両サポートスラブの厚さの非対称率であり

$$\alpha_s = \frac{t_2 - t_3}{t_2} \quad (13)$$

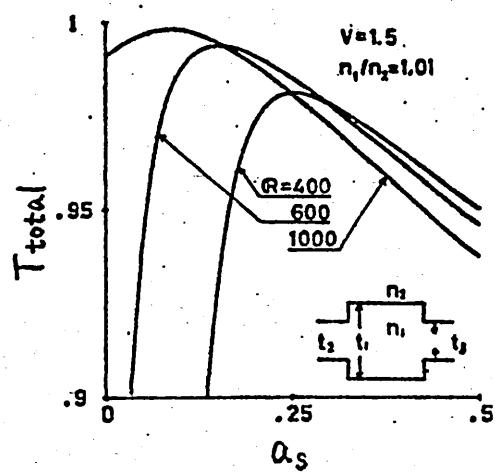
で定義される。線路の断面形状は、 $t_1=d$ 、 $t_1=2t_2$ としてあり、 $V=1.5$ である。ここで示したSMFの特性は、スラブ線路の曲りの外側を制御したものとほとんど同じである。ただ曲率半径だけが10倍程度大きくになっているだけである。これは、スラブ線路に比べて SMFでは電磁界の束縛が弱いためであり、スラブ線路と同程度の特性を得るためにには、曲率半径を大きくせざるを得ないのである。



(a) Pure bending loss



(b) Transition loss



(c) Total loss

図9. Single Material Fiberの
損失特性

6. むすび

本報告では、誘電体光線路の曲り部における損失の軽減方法を提案した。pure bending loss & transition loss の間に加法が成立するとし、まずスラブ線路について検討を行った。そして、曲り部での線路構造を非対称にすることが一つの有効な手段であることを示した。すなはち、曲りの内側の屈折率を高くするか、又は、外側の屈折率を低くすれば、直線部の線路をそのまま曲げた場合に比べ大幅な損失の軽減が可能となることを明らかにし、更に、曲率半径を一定にしたとき、損失を最少にするような最適の屈折率分布が存在することを指摘した。尚、屈折率分布が最適値よりずれた場合の損失特性の変化は比較的ゆるやかであるため、本方法による損失軽減化は実用的価値も備えていると考えられる。最後に、SMFを等価屈折率法で解析した教示計算例を示し、スラブ線路で得た結果が怎んぞ修正方針に光IC線路にも適用できることを明らかにした。

文 献

- 1) E.A.J. Marcatili, "Bends in optical dielectric guides", Bell Syst. Tech. J., 48, 7, p. 2103 (Sept. 1969)
- 2) D. Marcuse, "Bending losses of the asymmetric slab waveguide", Bell Syst. Tech. J., 50, 8, p. 2551 (Oct. 1971)

- 3) S. Kawakami, et.al., "Bending losses of dielectric slab waveguide with double or multiple claddings", Appl. Opt., 14, 11, p. 2588 (Nov. 1975)
- 4) H.F. Taylor, "Power loss at directional change in dielectric waveguides", Appl. Opt., 13, 3, p. 642 (March 1974)
- 5) M. Heiblum, "Analysis of curved optical waveguides by conformal transformation", IEEE J., AE-11, 2, p. 95 (Feb. 1975)
- 6) W.A. Gambling, et.al., "Measurement of radiation loss in curved single-mode fibres", Microwaves, Opt. & Acoust., 2, 4, p. 134 (July 1978)
- 7) 沢新之輔ら, "非対称サポートスラブを持つ Single-Material Fiber の解析", 信学論(C), J61-C, 10, p. 651 (昭53-10)
- 8) 下代雅裕ら, "Single Material Fiber の円形曲り損失", 昭55年度電気通信学会四国支部連合大会, 4-5 (昭55-11)
- 9) 読摩勇悦ら, "説電体スラブ線路の曲げ損失の新しい公式", 信学技報, DQE 80-78 (昭55-10)
- 10) W.J. McLevige, et.al., "New waveguide structure for millimeter-wave and optical integrated circuits", IEEE Trans., MTT-23, 10, p. 108 (Oct. 1975)

輻射科学研究会資料

開放形共振器による
サブミリ波帯誘電体定数の測定

辻 幹男 辻本一郎

繁沢 宏 滝山 敬

(同志社大学工学部)

1980年 11月 28日

1 はじめに

サブミリ波帯における誘電体材料走数の測定は、干渉計を用いたフーリエ分光法⁽¹⁾が現在主として使用されてる。一方、ミリ波帯などで用いられるコピート開放形共振器による方法⁽²⁾⁽³⁾は手順が複雑で精度が低い。そこで、簡単な手順な方法を検討した。周波数、波長共に共振器長を依存する方法ではこの方法が最も精度が高いものである。本論文ではこの方法について述べた。周波数、波長共に共振器長を依存する方法ではマイクロ波、ミリ波帯での実現することを検討した。共振器長を掃引するには共振器長を掃引する方法を用いる。そこで、まずはじめに共振器長を得る。そこで、まずはじめに共振器長を得る。そこで、まずはじめに共振器長を得る。そこで、まずはじめに共振器長を得る。

2 理論

2.1 開放形共振器の基本式

図1に示す凹面鏡と平面鏡からなる共振器においてはTEM波が存在し、そのTEM₀₁₀モードの界分布は次式で与えられる。⁽⁴⁾

$$\psi = (\sqrt{2} \frac{r}{w})^l L_p^l (2 \frac{r^2}{w^2}) \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right) \times \sin \left[k z + \frac{kr^2}{2R(z)} - (2p+l+1) \tan^{-1}\left(\frac{2z}{kw_0^2}\right) \right] \quad (2-1)$$

ここで L_p^l はラゲールの多項式であり、 p, l は径方向、周方向のモード番号、 ϑ は軸方向のモード番号を示す。また $w(z)$, w_0 , $R(z)$ はガウス波のスポット径、ビーム半径、波面の曲率半径であり、次式で与えられる。

$$w(z) = w_0 \left\{ 1 + \left(\frac{2z}{kw_0^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-2)$$

$$w_0^2 = \frac{2}{k} \left\{ D_{plg} (R_0 - D_{plg}) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-3)$$

$$R(z) = z \left\{ 1 + \left(\frac{kw_0^2}{z} \right)^2 \right\} \quad (2-4)$$

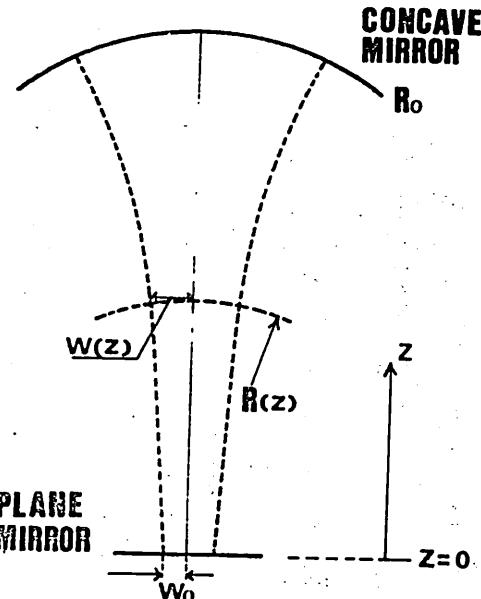


図1 開放形共振器

ただし、 k は自由空間の波数、 D_{plg} は TEM_{plg} モードの共振器長、 R_0 は凹面鏡の曲率半径である。さて波数 k が与えられた場合、この共振器中の TEM_{plg} モードが共振するための共振器長 D_{plg} は (2-1) 式の位相項を考慮すると次式より求めることができることとなる。

$$q\pi = \left\{ k D_{plg} - (2p+l+1) \tan^{-1} \left(\frac{D_{plg}}{R_0 - D_{plg}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2-5)$$

実際に共振器により材料走査の測定を行なうには電力が軸中心附近に集中する TEM_{00g} モードを使用するが、以後はこのモードを対象として解析を進めることにする。なお TEM_{00g} モードの界分布は周知のごとく次式で示せる。

$$E_r = A \left(\frac{w_0}{w(z)} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{w(z)^2} \right) \sin \left[k_z + \frac{kr^2}{2R(z)} - \tan^{-1} \left(\frac{2z}{k w_0^2} \right) \right] \quad (2-6)$$

2.2 屈折率と $\tan \delta$ の導出

開放形共振器で材料測定を行なう場合、試料の共振器内での設置場所が問題となる。Cullen⁽²⁾(10 GHz 帯) は、2つの凹面鏡からなる共振器の中心に試料を入れ、また Jones⁽³⁾(35 GHz 帯) は凹面鏡と平面鏡からなる共振器で平面鏡上に試料を置いて測定した。2つの凹面鏡を用いる場合には鏡の光軸合わせが容易、結合孔を鏡の中心に設けられるなど特徴を有するが、一方では試料の光軸合わせ、およびに試料の中心での軸方向モードの偶奇の判定が必要となる。サブミリ波帯では、波長がミリ波帯に比べ非常に短くなり、アーローブによる軸方向モードの判定が困難であることが、本文では凹面鏡と平面鏡により構成された共振器を用いることとする。

まず、図 2(a)の試料を平面鏡上に置いた場合の共振器に着目すると、屈折率 n は図中の A 点から上下をカウス波でみた回路系が次式に示す共振状態にあることより求められる⁽²⁾ (付録 I 参照)。

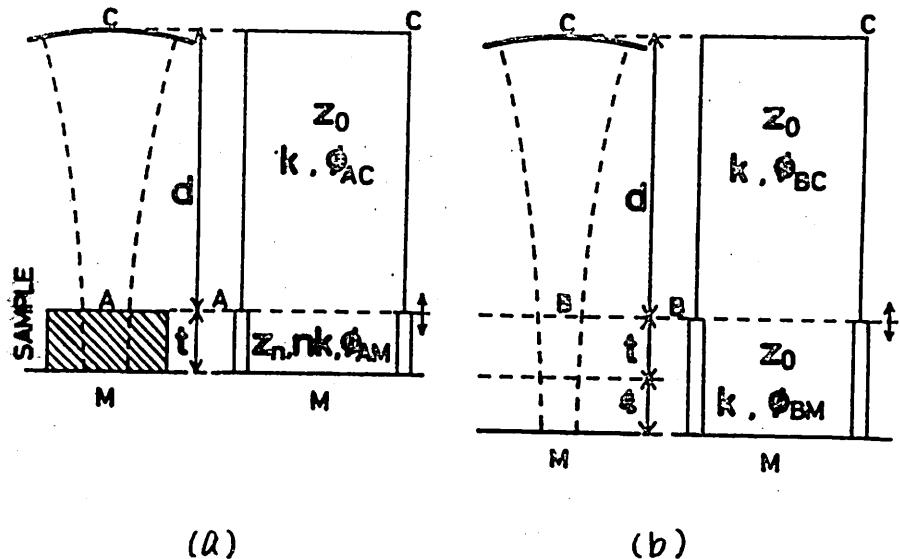


図2. 開放形共振器の等価回路

$$\frac{1}{n} \tan(nkt - \phi_{AM}) = -\tan(kd - \phi_{AC}) \quad (2-7)$$

たとえば

$$\phi_{AC} = \tan^{-1} \left\{ \frac{2(d + \frac{t}{n^2})}{k w_0} \right\} - \tan^{-1} \left\{ \frac{2t}{n^2 k w_0^2} \right\} \quad (2-8)$$

$$\phi_{AM} = \tan^{-1} \left(\frac{2t}{n k w_0^2} \right) \quad (2-9)$$

$$k w_0^2 = 2 \left\{ (d + \frac{t}{n^2}) (R_0 - d - \frac{t}{n}) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-10)$$

ここで ϕ_{AC} は ドーピングガウス波の A C 間の伝搬にかかる

ゆる位相項を示している。さて(2-7)式では値 κd に含まれる誤差、したがって d の測定誤差は波長の数10分の1以下とすることが要求されるが、これはサブミリ波帯では不可能である。そこで「試料を取り除いた」図2(b)の共振器中の TEM_{00g} モードの共振条件を導入しよう。この共振器の全長は、図2(a)のそれについてべき($\ll d$)だけずれたものである。その共振条件は次式で与えられる。

$$\tan(\kappa d - \phi_{BC}) = -\tan\{\kappa(t+\xi) - \phi_{BM}\} \quad (2-11)$$

ここで

$$\phi_{BC} = \tan^{-1}\left\{\frac{2(d+t+\xi)}{\kappa w_0'^2}\right\} - \tan^{-1}\left\{\frac{2(t+\xi)}{\kappa w_0'^2}\right\} \quad (2-12)$$

$$\phi_{BM} = \tan^{-1}\left\{\frac{2(t+\xi)}{\kappa w_0'^2}\right\} \quad (2-13)$$

$$\kappa w_0'^2 = 2\{D_f(R_0 - D_f)\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-14)$$

$t = D_f$ 、 D_f は TEM_{00g} モードの共振長である。

上式の関係を用いて(2-7)式を書き直すと結局 n の決定式として次式が得られる。

$$\frac{1}{n} \tan(n\kappa t - \phi_{AM}) = \tan\{\kappa(t+\xi) - \phi_{BM} + (\phi_{AC} - \phi_{BC})\} \quad (2-15)$$

この n の決定式では κd に依存する項がなくなり、 d に依存する項は ϕ_{AC} と ϕ_{BC} のみとなる。いま、

$\phi_{AC} \approx \phi_{BC}$ であるから $\phi_{AC} - \phi_{BC}$ とより、 d に含まれる測定誤差は(2-15)式では、 $\phi_{BC} - \phi_{AC}$ の項で相殺され n の測定精度に大きく影響しなくなる。このことは(2-15)式において $\phi_{AC} = \phi_{BC}$ とおいた場合には、その式が図2(a)のA点から下を見たインピーダンスと図2(b)のB点から下を見たインピーダンスとか等しいことを表わしていることからも理解される。

一方、試料の損失角 $\tan \delta$ は共振器内に蓄積されるエネルギーと試料で失なわれるエネルギーの割合より求めることができ、次式で与えられる(付録II参照)。

$$\tan \delta = \frac{1}{Q_d} \cdot \frac{W_{AC} + W_{AM}}{W_{AM}} \quad (2-16)$$

ここで W_{AC}, W_{AM} は図2(a)に示した領域AC, AM間の空間に蓄積されるエネルギーであり、 Q_d は誘電体損失のみによる Q 値である。たとえ $d \ll l$ を考慮して上式の計算を実行すると、最終的には $\tan \delta$ の決定式として次式を得る。

$$\tan \delta = \left\{ \frac{1}{Q_d} - \frac{(\eta+1)(d+t+\xi)}{2Q_{LO}(\eta t+d)} \right\} \frac{(\eta t+d)}{\eta t} \quad (2-17)$$

$$T = T' = 1$$

$$\eta = \frac{n^2}{n^2 \cos^2(nkt - \phi_{AM}) + \sin^2(nkt - \phi_{AM})} \quad (2-19)$$

ここで Q_{Ld}, Q_{Lo} はそれぞれ図 2(a)(b) の共振器における負荷 Q 値である。上式によれば、 $\tan \delta$ の測定精度に關係するのは d ではなく、 d とのものであり、したがって充分な精度で $\tan \delta$ の評価が可能である。

3. 共振器の設計

ここで測定の対象とする誘電体材料は、波長が数 $100 \mu\text{m}$ のサブミリ波帯で比較的損失の小さな HDPE や等である。これらの材料の損失角 $\tan \delta$ は $\lambda = 337 \mu\text{m}$ 附近で大略 10^{-3} 程度であり、これを共振器長を変化させて測定する場合、共振器長の掃引精度 ($0.1 \mu\text{m}$ 程度) を考慮して共振器の形状を決定する必要がある。またこの波長帯で実現できる試料の表面の精度、平行度等を考慮すれば、共振器中のガウス波のビーム半径に上限 (1 cm 程度) があること、さらにはこれによる測定されるビームパラメータが理論式誘導の前提となる条件 (後述) を充分満足していることなどに留意して、測定用共振器の設計をすべきである。以下これら諸点について簡単な検討を行なっていき、共振器の形状を決定していく。

3.1 理論の近似式の成立条件

開放形共振器における電磁界が、 $n, \tan \delta$ 算出の前提とした (2-1) 式に示すガウス波で書き表められるのは、又方例を伝搬軸として次の近似が成立

する場合である。⁴⁾

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \quad (3-1)$$

上式を書き直すと、結局波数 k とルーム半径 R_0 との間に次の関係が成立することが要求される。

$$1/k^2 R_0^2 \ll 1 \quad \text{あるいは} \quad k R_0^2 \gg 1/k \quad (3-2)$$

一方、付録Iで示すようにガウス波の伝搬にかかる位相項 ϕ を導出する際にも(3-2)式の条件を用いて(A-11)式の近似を行なっており、本文の算出式で n , $\tan \delta$ を求める場合 k , R_0 が(3-2)式の

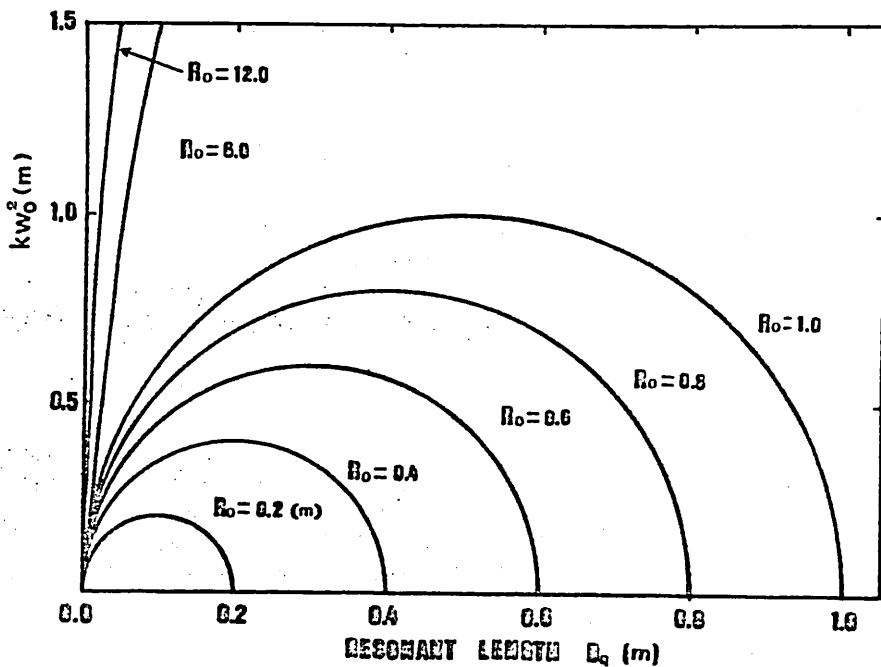


図3 ルーム半径 R_0 をパラメータとして取扱うときの $k R_0^2$

条件を満足していることが必要となる。いま(A-9)式に(1)でみると波長 $\lambda = 337 \mu\text{m}$ ($k = 18669$)、試料の厚さ $t = 1 \text{ mm}$ とし、 $k w_0^2 = 0.01$ とすれば、(A-9)式の右に 1 % の誤差が入る。以下ではさらに 1 衡小さい誤差を考え、 $k w_0^2 > 0.1$ を共振器構成のための条件とすることにした。図3は(2-3)式を用いて、 $k w_0^2$ と共振器長 D_g の関係を示したものであり、凹面鏡の曲率半径 R_o をパラメータにしている。図より $k w_0^2 > 0.1$ とするには、 $R_o > 0.15 \text{ m}$ が要求されることがわかる。

3.2 試料作成上の制約からくるビーム半径の上限

試料を製作する上で考慮すべき点は前述のごとくその表面精度、面の平行度などに径の大きさがある。表面精度に関しては、サブミリ波帯ではその波長から見て比較的良好なものが期待できるが、面の平行度は試料の半径が大きくなると悪くなる。また結晶性の材料なども測定対象とし、純度のよい試料を得ようとするれば、その径はあまり大きくできないことも考慮せねばならない。本文ではこのような試料製作上の理由より試料面上のビーム半径を 1 cm 以下とした。図4は平面鏡上でのビーム半径 w_0 と共振器長 D_g の関係を波長 $337 \mu\text{m}$ の場合に(1)で示したものであり、図3の場合と同じくパラメータには R_o をとっている。図によれば R_o が 1 m 以下では共振器長 D_g の選択が広い範囲で行えるのに反し、 R_o が 1 m 以上になれば D_g が小なりものしか使用できないことを示している。

3.3 共振器掃引精度と試料の $\tan\delta$

平面鏡の掃引精度が限界されることを考えると、あらかじめ測定しようとすると $\tan\delta$ の限度を仮定した上で、その $\tan\delta$ が精度良く求まらるようには共振器を構成しなければならぬ。本章では $\tan\delta = 10^{-3}$ 程度の材料を測定する場合を前提とした。いま、 $\tan\delta$ を与える (2-17) 式について、 $\eta \approx 1$ 、 t/d 、 $\xi/d \ll 1$ とすれば $\tan\delta$ は近似的に次式で表わすことができる。

$$\tan\delta \approx \left(\frac{1}{Q_{Ld}} - \frac{1}{Q_{L0}} \right) \frac{d}{t} = \frac{1}{Q_{L0}} \left(\frac{Q_{L0}}{Q_{Ld}} - 1 \right) \frac{d}{t} \quad (3-3)$$

共振器長を負荷比値 Q_{Ld} および Q_{L0} の半値幅をも

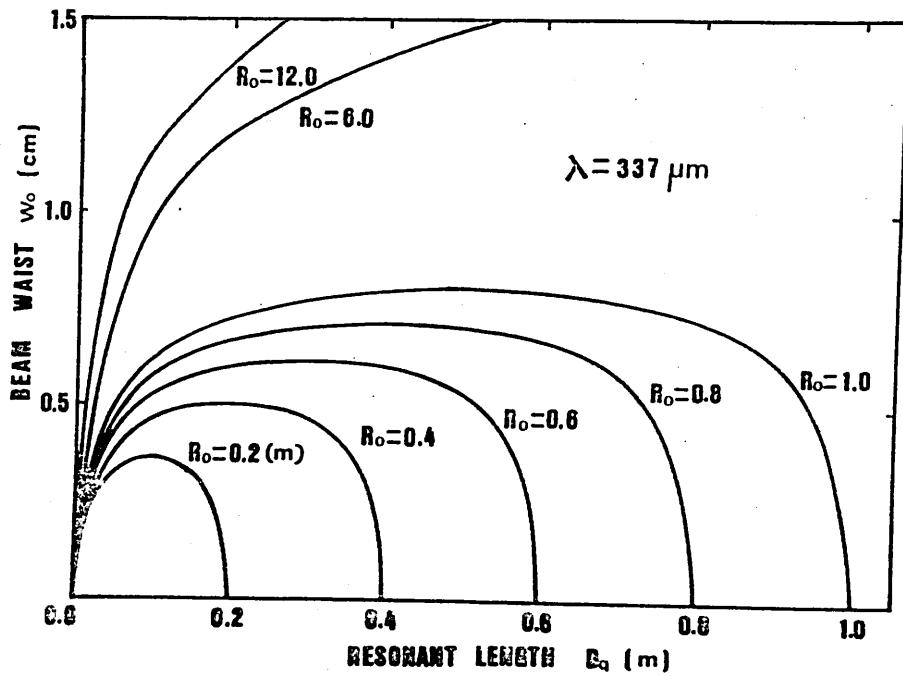


図4 曲率半径 R_0 をパラメータとした
ビーム waist 半径 w_0

れども Δ_{Ld} , Δ_{Lo} とするに上式は次式のように書き直せる。

$$\tan \delta \simeq \Delta_{Lo} \left(\frac{\Delta_{Ld}}{\Delta_{Lo}} - 1 \right) \frac{1}{\pi} \quad (3-4)$$

ここで我々の使用しようとする平面鏡の掃引機構

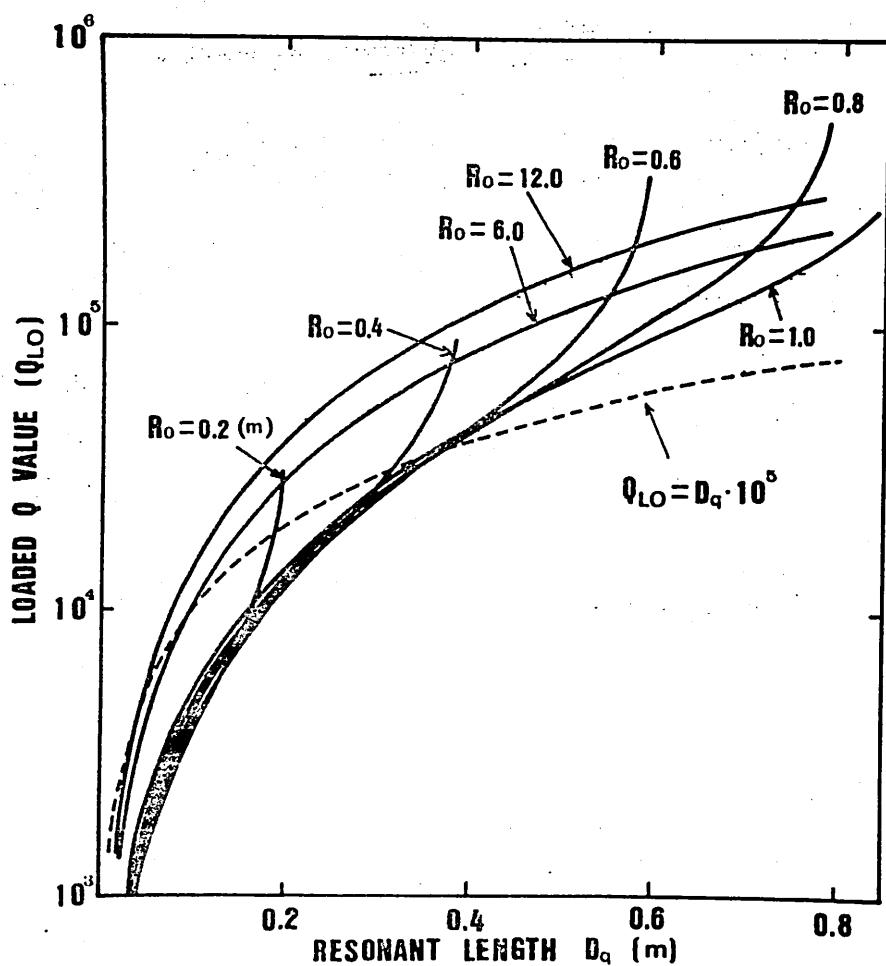


図 5 曲率半径 R_o をパラメータとし 11 ときの Q_{lo}

）掃引精度が $0.1 \mu\text{m}$ であることを考えると、 $\tan\alpha = 10^{-3}$ 程度の試料を用いた場合の試料を入前後の共振曲線の半値幅の差異 $\Delta L_d - \Delta L_0$ は大略 $1 \mu\text{m}$ 程度以上にする必要がある。一方、共振器の軸方向を一周の間隔はほぼ $\lambda/2$ となるから測定すれば半値幅 Δ はそれ ($\approx 150 \mu\text{m}$) よりも充分小さくなければならぬ。そこで試料の厚さ $a = 1 \text{ mm}$ とし、 $\Delta L_0 = 10 \mu\text{m}$ に達する ($3-4$ 式より $\Delta L_d - \Delta L_0 = 1 \mu\text{m}$ となり、上に述べた条件を満足することがわかる。いま、 Q_{L0} を用いて $\Delta L_0 = 10 \mu\text{m}$ という条件を書き直すと次式となる。

$$Q_{L0} = D_f \times 10^5 \quad (3-5)$$

さて、(3-5) 式に示した Q_{L0} は結合孔による漏出値 Q_h と鏡の金属損失による漏出値 Q_m とで表され次式のようになる。⁽³⁾

$$\frac{1}{Q_{L0}} = \frac{1}{Q_h} + \frac{1}{Q_m} \quad \text{すなはち} \quad Q_s = \frac{1}{2\delta_s}, \quad Q_h = \frac{\kappa D_f}{\gamma} \quad (3-6)$$

ここで δ_s は金属の表皮深さ、 γ は結合孔による透過率を表す。いまサブミリ波帯においては、発振器の出力が大きくなく、また結合効率も悪くなること、さらに鏡製作の技術的な問題から結合孔をあまり小さくできぬことなどから、半径 2 mm の結合孔を凹面鏡の中心に 6 mm の間隔で 2 個あけることを前提とした。この場合の Q_{L0} を求めたのが図 1 である。ただし山を求めるのに銅の導電

率 $\alpha = 5.8 \times 10^{-7} \text{ V/m}$ を、また Q_h を求めるのに 2 個の結合孔を面積の等しい 1 個の結合孔に書き換えた場合の透過率を仮定して計算を行なっている。

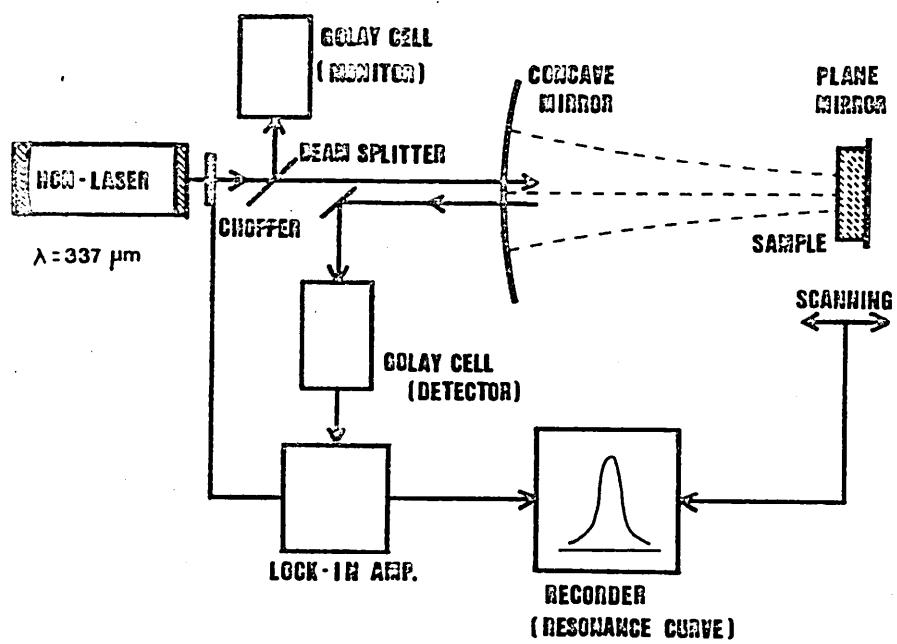
図中の破線は(3-5)式の条件、 $Q_{L0} = d \times 10^5$ を描いたものであり破線と実線との交点が $\Delta_{L0} = 10 \mu\text{m}$ の半値幅を得るために共振器長 D_0 および凹面鏡の曲率半径 R_0 を与える。

さて、以上の事柄を考慮すると R_0 が 6m , 12m と大きい場合には図 4, 図 5 の計算結果より $\Delta_{L0} = 10 \mu\text{m}$ となる共振器長において平面鏡上のビーム半径が 1cm 以上となるから、共振器には直さないことがわかる。そして R_0 としては 0.15m から 1m の範囲が妥当ということになるが、鏡の製作精度の点から考えて R_0 はなるべく大きい方が良く、ここで $R_0 = 2.5\text{m}$ とした。またそのときの共振器長は図 5 の曲線から妥当な値を導くことができ、かく 50cm 程度にすることにした。

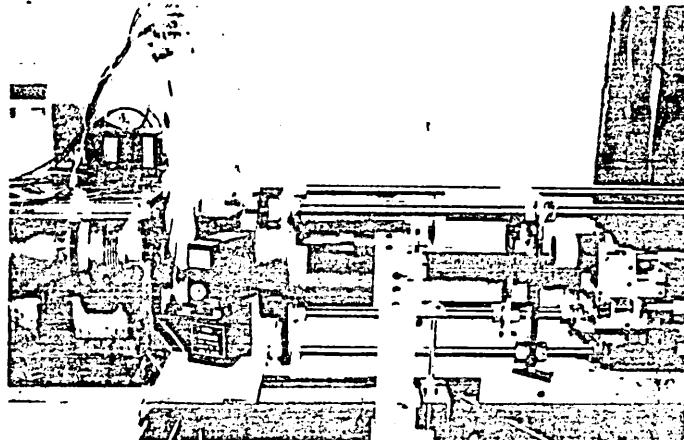
4. 実験

4.1 測定装置

図 6(a) は測定装置全体を示したものである。共振器は凹面鏡 ($12\text{cm} \varphi$, 曲率半径 80m), および平面鏡 ($3\text{cm} \varphi$) により成り、その間隔は 50cm を中心に可変できるものである。凹面鏡の中心には直径 $4\text{mm} \varphi$ の結合孔が 6mm の間隔で 2 個設けられている。発振源は波長 $337 \mu\text{m}$ の H-N レーザである。結合孔から出力は、ゴーレイセルで受光し、平



(a) 構成図



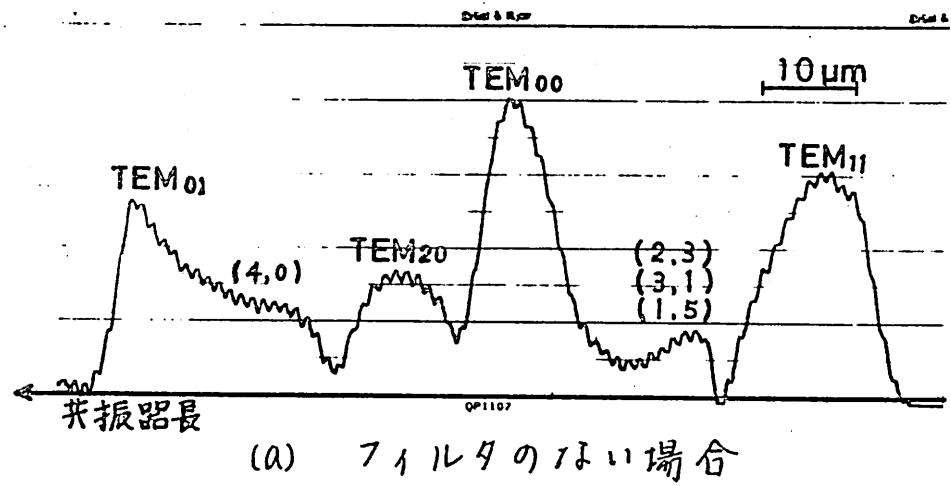
(b) 装置の外観

図 6 実験装置

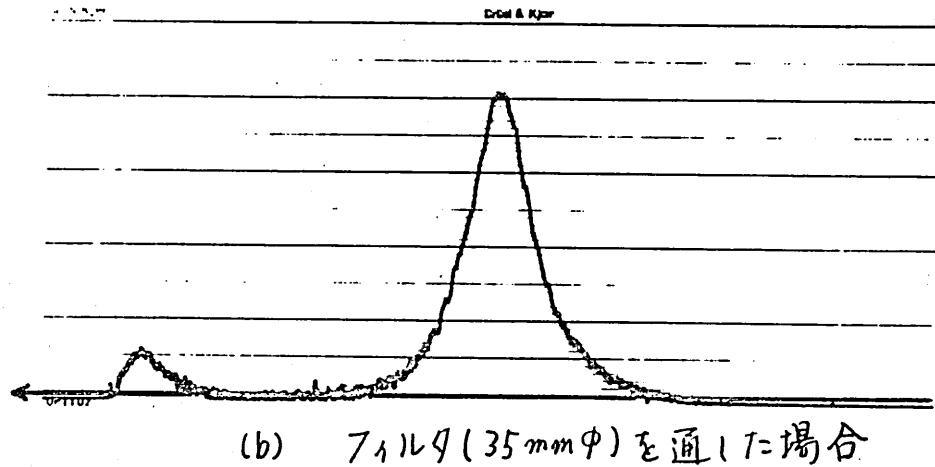
面鏡を掃引して共振曲線を得ている。掃引精度はストリーウ 1 mm にわたって約 $0.1\text{ }\mu\text{m}$ である。また、試料の装着は平面鏡表面と試料面とが密着するよう真空チャックで行なっている。図 6(b)に実際の装置の外観を示す。

4.2 共振特性

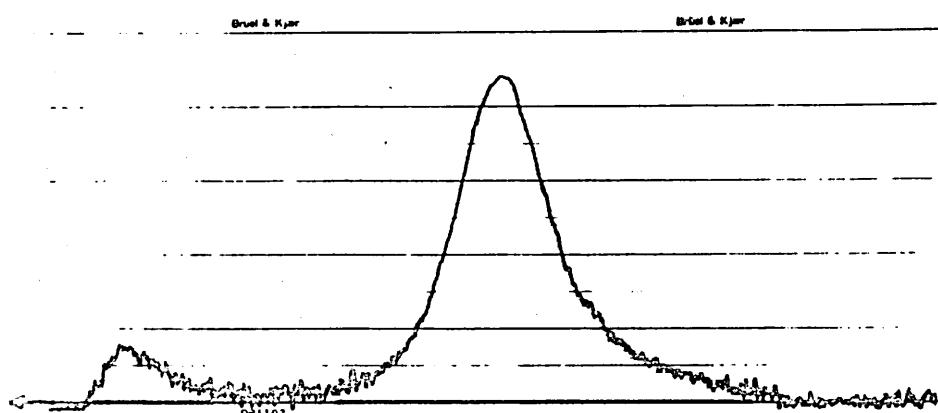
図 7(a)は共振器長変化に伴う共振特性である。種々の高次モードが共振し、干渉していることがわかる。図に示した高次モードの同定は(2-5)式'を用いて行なったものであり、縦モードのモード番号名はそれぞれ $\text{TEM}_{0,0,2861}$, $\text{TEM}_{0,1,2861}$, $\text{TEM}_{1,1,2860}$, $\text{TEM}_{2,0,2860}$ となる。実際の測定では、 $\text{TEM}_{0,0}$ モードと $\text{TEM}_{0,1}$ モードとの共振長の差異は(2-5)式'による理論値よりも約 $2.5\text{ }\mu\text{m}$ 短かくなる。この原因は結合孔による共振周波数の若干のずれが原因していると想われる。⁽⁹⁾さて、測定は $\text{TEM}_{0,0}$ モードを用いて行なうわけであるが、図 7(a)が示す状態では他の高次モードが $\text{TEM}_{0,0}$ モードに影響してあり、その影響を除く必要がある。いま、 $\text{TEM}_{0,0}$ モードのみを通して凹形開口のフィルタ(直径 35 mm)を凹面鏡上に設計したときの共振特性が図 7(b)であり、ほぼ单一モードで共振していることが確認できる。この共振器中の平面鏡上に試料(厚さ $496\text{ }\mu\text{m}$, 直径 3 cm のポリエチレン)をそう入した時の共振特性が図 7(c)であり、明らかに半値幅の差異が認められる。また図の(c)の $\text{TEM}_{0,0}$ モードの共振長のずれ、すなはち変位を測定すると $82.4\text{ }\mu\text{m}$ である。屈折率 n はこの変位より求められ、



(a) フィルタのない場合



(b) フィルタ(35 mmΦ)を通しての場合



(c) 試料をさう入した場合

図 7. 共振特性

$n = 1.509$ となる。一方、 $\tan \delta$ を求めるとには共振曲線の負荷 Q 値を算出する必要があり、ここで²は共振曲線が次式に示すローレンツ型によるものとして最小 2 乗法により Q 値を得ている。

$$I(\Delta D) = \frac{I_0}{1 + 4Q^2(\Delta D/D_g)} \quad (4-1)$$

ここで $\Delta D = D - D_g$ であり、 D は共振器長である。図 8 は図 7(b) の共振曲線を最小 2 乗法により算出し、そのローレンツ型共振曲線と実測値との比較を示したものである。この場合、負荷 Q 値は $Q_{LO} = 46300$ となり、ほぼ前章に示した設計値通りの共

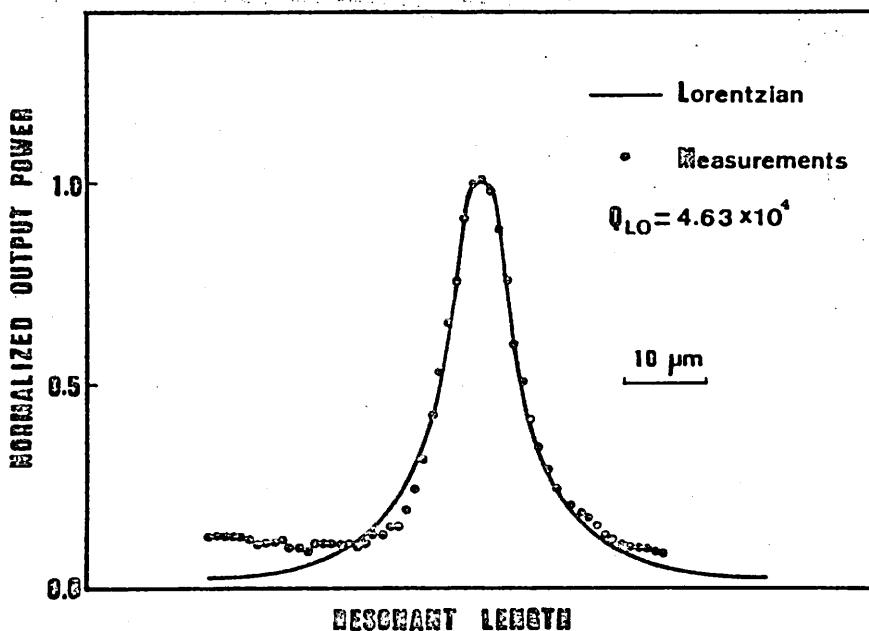


図 8 共振曲線と
ローレンツ型曲線近似

振曲線が得られて、また回りの試料をきり入れた場合のQ値を算出すると($Q_{Ld} = 3430$)あります。この試料の $\tan\delta$ が $\tan\delta = 3 \times 10^{-3}$ と計算できること。

4.3 測定結果および検討

サブミリ波帯での低損失材料として良く用いられるものにポリエチレン、ポリプロピレン、TPXおよび溶融水晶等がある。ここではこれらのが、 $\tan\delta$ を前節に述べた手順により測定した。表1にその結果をまとめて示した。なお他文献に発表されている方法(フーリエ分光法、挿入損失測定法など)による測定値も参考のために記載したが、主として $\tan\delta$ は添加物の種類により大きく異なるので、厳密な比較はできない。同一試料を多數回測定したときの屈折率のばらつきは、いずれの場合も1%以下であり、たゞ、 $\tan\delta$ のばらつきは

表1 各種誘電体接数の測定結果

試 料	開放形共振器による 測定値			他の方法による 測定値	
	厚さt(μm)	n	$\tan\delta$	n	$\tan\delta$
ポリエチレン (半透明)	496	1.509	3×10^{-3}	$1.461^{(5)}$	0.53×10^{-3}
ポリエチレン (不透明)	936	1.509	0.7×10^{-3}	$(1.518^{(8)})^*$	
ポリプロピレン	492	1.496	2×10^{-3}	$1.500^{(6)}$	0.96×10^{-3}
TPX(⁴ methyl pentene-1)	98	1.449	2×10^{-3}	$1.457^{(6)}$	1.10×10^{-3}
溶融水晶	1500	1.935	5×10^{-3}	$1.955^{(7)}$	7.4×10^{-3}

* 波長200μmにおける測定値

大きく、特に高分子材料でそれが目立つた。そこで同じ試料の $\tan\delta$ の測定を20回行はれ、その測定値に統計的処理を施したところ、試料が厚さ1mmのポリエチレンの場合には $\tan\delta$ の真値がその測定値の平均値を中心に $\pm 15\%$ の範囲で得られており確率が70%であるのに對し、厚さ1.5mmの溶融水晶の場合にはそれが96%であった。このように溶融水晶においてばらつきが小さく、信頼度の高い測定値が得られた主な原因は、光学研磨を施し良好な表面精度、およびに面の平行度を有する試料を用いたことと、その硬度のために真チャックによる試料装着の際のたわみが生じなかつたことが考えられる。これに反し市販の薄膜片を試料としたポリエチレンでは面の平行度が悪かつたこと、さらにその柔らかさによつて生じる装着時のたわみが $\tan\delta$ 測定値の信頼度を低下させたと考える。

5. むすび

ミリ波帯などでは用いられてきた開放形共振器による材料定数の測定をサブミリ波帯で実現した。この波長帯では固波数を連續的に掃引できる発振源が存在しないことから、屈折率、 $\tan\delta$ の測定には共振器長を掃引する手法を用いた。本文では、まずこの方法による定数導出の手順を並んで共振器設計の手順を示した。そしてその設計手順とともに開放形共振器を試作し、波長 $337 \mu m$ で各種

誘電体定数の測定を行なつた。その結果、測定精度は屈折率に対しては満足できるものであるが、 $\tan \delta$ に対しては測定値のはらつきが大きかった。これは主として試料装着部分の問題および試料面の平行度に問題があり、今後はこれらの点の改善などを検討していくとともに、周波数特性の測定へと進むつもりである。

参考文献

- (1) G. Vanasse and H. Sakai, Progress in Optics, 6, p261, 1967.
- (2) A.L. Cullen and P.K. Yu, Proc. R. Soc. A., 325, p493, 1971.
- (3) R.G. Jones, Proc. IEE, 123, p285, 1976.
- (4) H. Kogelnik and T. Li, Proc. IEEE, 54, p1312, 1966.
- (5) G.W. Chantry, J.W. Fleming, P.M. Smith, M. Cudby, and H. Willis, Chem. Phys. Lett., 10, p473, 1971.
- (6) G.W. Chantry, "Submillimetre spectroscopy", New York, Academic Press, 1971.

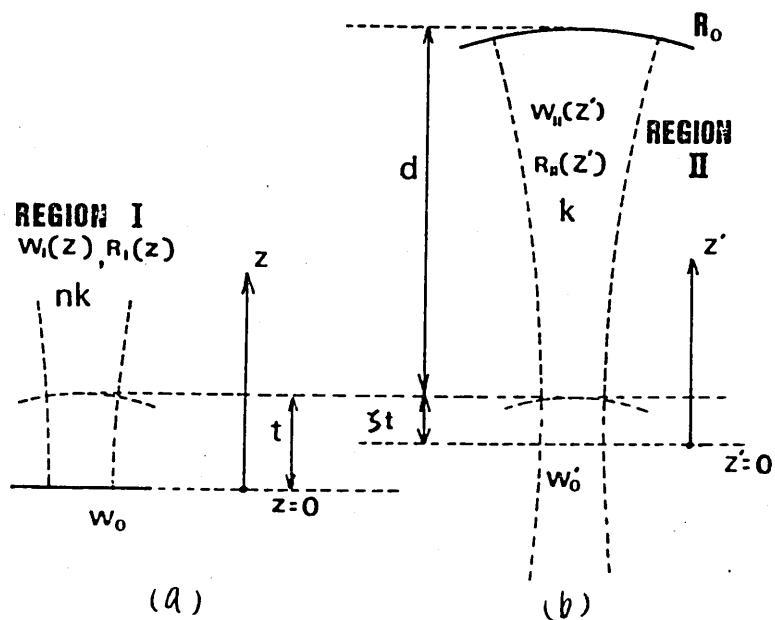
- (7) 工藤惠崇著「基礎物性圖表」共立出版
- (8) D.R. Smith and E.V. Loewenstein, Appl. Opt., 14, p1335,
1975.
- (9) M. Tsuji, H. Shigesawa, and K. Takiyama, Appl. Opt.,
18, p1334, 1979.

付録I (2-8) ~ (2-9) 式の導出

図2(a)の共振器において、試料部分AMとそれ以外の部分ACの領域(それぞれI, IIとする)ではビームパラメータの異なるガウス波が伝搬する。ガウス波の位相推移

$$\phi(z) = \tan^{-1}(2z/kw_0^2) \quad (A-1)$$

は、ビームが平面波となる $z=0$ の点を基準にして求められるので ϕ_{AC} を導出するには、領域IIのかウス波が平面波となる点を求める必要がある。
図A1(b)において点cから平面波となる $z'=0$ の点までの距離を $d+st$ とおけば図(a)(b)の領域I, II



図A1 共振器の座標系

にかけるレーベンハーマン式は次式で与えられる。

$$R_I(z) = z \left\{ 1 + \left(n k w_0^2 / 2z \right)^2 \right\} \quad (A-2)$$

$$w_I(z) = w_0^2 \left\{ 1 + \left(2z / n k w_0^2 \right)^2 \right\} \quad (A-3)$$

$$R_{II}(z) = z' \left\{ 1 + \left(k w_0'^2 / 2z' \right)^2 \right\} \quad (A-4)$$

$$w_{II}(z) = w_0'^2 \left\{ 1 + \left(2z' / k w_0'^2 \right)^2 \right\} \quad (A-5)$$

$$T = T'' \quad ,$$

$$w_0' = \frac{2}{k} \left\{ (d + \zeta t)(R_0 - d - \zeta t) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (A-6)$$

さて、試料面上 ($z = x$, $z' = \zeta t$) の境界条件

$$R_I(t) = R_{II}(\zeta t) \quad (A-7)$$

$$w_I(t) = w_{II}(\zeta t) \quad (A-8)$$

より、 ζ と w_0' を求めると次式を得る。

$$\zeta = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 + 4t^2/n^2 k^2 w_0^4}{1 + 4t^2/n^4 k^2 w_0^4} \quad (A-9)$$

$$w_0' = w_0^2 \left\{ 1 + \left(\frac{2t}{n k w_0^2} \right)^2 \right\} \quad (A-10)$$

ここで $k^2 w_0^2 \gg 1$ が成立するものとする。

$$\zeta \simeq \frac{1}{n^2} \quad (A-11)$$

$$w_0' = w_0 \quad (A-12)$$

となり、IとIIの領域で"のガウス波の位相推移
(2-8)式, (2-9)式が求められる。

付録II $\tan\delta$ の導出

試料の複素誘電率を $\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$ とするとき $\tan\delta$ は ϵ_r''/ϵ_r' で示されるが、これを次式のように書き直す。

$$\tan\delta = \frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'} = \frac{\frac{\omega_0}{2} \iiint \epsilon_0 \epsilon_r'' E_I^2 dv}{\omega_0 U_T} \cdot \frac{U_T}{\frac{1}{2} \iiint \epsilon_0 \epsilon_r' E_I^2 dv} \quad (A-13)$$

ただし、 ω_0 は共振固有振数、 U_T は共振器全体の蓄積エネルギー、 E_I は領域 I における電界を示している。いま領域 I, II での蓄積エネルギーをそれぞれ W_I , W_{II} として誘電体損失のみによる比値を Q_d とすれば

$$\tan\delta = \frac{1}{Q_d} \cdot \frac{W_I + W_{II}}{W_I} \quad (A-14)$$

となる。一方、領域 I, II の共振時の電界分布は次式で与えられる。

$$E_I(r, z) = A_1 \frac{w_0}{W_I(z)} \exp\left\{-\frac{r^2}{W_I^2(z)}\right\} \sin\left[nk\left\{z + \frac{r^2}{2R_I(z)}\right\} - \phi_I(z)\right] \quad (A-15)$$

$$E_{II}(r, z) = A_2 \frac{w_0}{W_{II}(z)} \exp\left\{-\frac{r^2}{W_{II}^2(z)}\right\} \sin\left[k\left(z-d-\frac{t}{n^2}\right) - \phi_I(z) + \phi_{II}(d+\frac{t}{n^2})\right] \quad (A-16)$$

$T = T'' = 1$

$$W_I(z) = w_0^2 \left\{ 1 + \left(\frac{2z}{nk w_0} \right)^2 \right\} \quad (A-17)$$

$$R_I(z) = z \left\{ 1 + \left(\frac{n k w_0^2}{2z} \right)^2 \right\} \quad (A-18)$$

$$\phi_I(z) = \tan^{-1} \left(\frac{2z}{nk w_0^2} \right) \quad (A-19)$$

ここで n_i ($i = 1$ のとき $n_1 = n$, $i = 2$ のとき $n_2 = 1$) とす
るものとする。したがって, E_I , E_{II} を用いて W_I ,
 W_{II} を計算し, $(2-17)$ 式を試料を入前後の負荷 Q 値 Q_{ld} ,
 Q_{lo} を用いて表わせば $(2-17)$ 式' $(2-18)$ 式'を得る。

輻射科学研究会資料

非線形振動回路の複素数による解法の試み

中島 将光， 池上 淳一

京都大学 工学部

昭和55年11月28日

1. はじめ

線形回路における交流現象の解析には複素表現を用いることは常識であるが、それは重畠の理が成立することおよびどうすることによって計算が著しく簡単化されるからである。一方、非線形回路では重畠の理が成立しないので、殆んど専ら、実数表現によって解析が行われているのが実状である。唯、一部には、実数量を一つの複素数との共役複素数との和として表し、見かけは複素数で実質的には実数表現と考えられるものが用いられる場合がある。非線形自動制御系において記述関数などを用いられてはいるが、ここでは、もう少し積極的な意味での非線形回路の複素解法について考察する。

図1に示すような L , C による共振回路および負コンダクタンス \tilde{g} から成る最も基本的な発振回路について考える。

負コンダクタンス
は発振周波数
の近傍で

$$\tilde{g} = -G + H|V|^2$$

なる形で表現でき
るものとする。

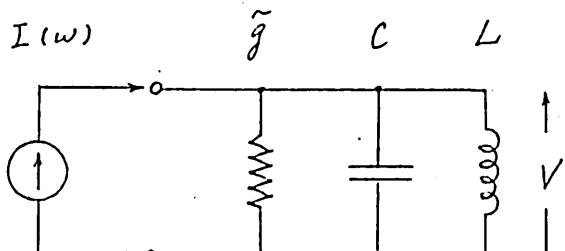


図1.

G と H が実数で正の場合、発振器の電圧振幅 $|V|^2$ の増大と共に負コンダクタンスが減少することを意味する。付録1に示すように、3次特性をもつ負性抵抗は考慮している交流周波数で上のような特性を示すことが専かれれる。発振器に外部回路と接続しないときは

$$(-G + H|V|^2 + j\omega C + 1/j\omega L) V = 0 \quad (1)$$

を満たす $\omega = \omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ および $|V|^2 = |V_0|^2 \equiv G/H$ で発振する。

以上の説明のように、電圧の瞬時値を直接問題にすることなく、交流電圧の振幅と位相、すなはち複素振幅という観点から、どこまで解析を押し進め得るかを考察するのか、この試みの目的である。

2. 複素振幅方程式

上述の発振回路に外部信号電流源 $I(\omega)$ を接続した場合の定常解は、(1)式の右辺に $I(\omega)$ をつけ加えたものから得られる。過渡解を求めるには、別の考慮が必要である。厳密にいえば、過渡状態は、単一の周波数では表現できないので、その周波数の近傍の無数の周波数を考えるか、或は回路の瞬時状態を記述する微分方程式（付録2参照）に戻らなければならぬ。しかし、回路状態の時間変化が緩やかな場合は、正弦電圧の振幅および位相が準静的に変動するものとして

$$\{ Y(j\omega, |V|^2) + Y_{j\omega} d/dt \} V = I \quad (2)$$

なる複素振幅に関する微分方程式を導くことができる[1]。ミニマム、

$$-G + H|V|^2 + j\omega C + 1/j\omega L = Y(j\omega, |V|^2) \quad (3)$$

とおいて表現を一般化してみる。(2)式の{}内の第一項は定常解 $YV = I$ からのずれを表すが、この項が

さて来たのは、電圧 V の振巾および位相が変動するとき、周波数が $j\omega$ から複素周波数 s だけずれるところによって、アドミタンスが $Y(j\omega, |V|^2)$ から $Y(j\omega+s, |V|^2)$ へと変化したためである。すなはち、 V の変動 s がやるやかでみるととして ($|s| \ll \omega$)、 Y をテイラー展開し、 s の零次の項と一次の項を残したものとみてよい。このとき複素周波数 s を微分演算子 d/dt におけるかえた言葉であるが、そのテイラー展開係数が $Y_{j\omega} = \partial Y / \partial (j\omega)$ に等しいとおき得たのは、 Y が周波数に関して正則である、つまり、ユーシー・リーマンの条件が成立するからに他ならない。(2)式における複素量の実部と虚部または振巾と位相は完全に独立ではなく、ユーシー・リーマンの微分方程式によつて互に糾合びつけられてゐるためには、 $Y_{j\omega} d/dt$ なる演算子によって V の(一次)変動が振巾と位相に関して同時に正しく記述できるのである。

ついでながら、(2)式を実部と虚部に分離すると、非線形理論でよく用いられる、振巾と位相に関する微分方程式が得られる(1)。

$$zC \frac{1}{|V|} \frac{d|V|}{dt} = \operatorname{Re} \frac{I}{V} + G - H |V|^2 \quad (4)$$

$$zC \frac{d\phi}{dt} = \operatorname{Im} \frac{I}{V} - \omega C + \frac{1}{\omega L} \quad (5)$$

ここに $V = |V| e^{i\phi}$ とおいてある。これら二つの式はしばしば簡約方程式とよばれるが、(2)式はそれを一つの複素表現にまとめたものと見てよいであろう。

3. 安定判別

(2) または (4), (5) 式で $d/dt = 0$ とおいたものから、得られる定常解が安定であるか否かを知るには、(4) および (5) 式から変分方程式を導き、変分が時間と共に発散するか否かを調べるのが普通である。

ここでは、(2)式の複素表示から直接それを行なうことを考える。上述の議論では、(4) および (5) 式の 2 つの式が 1 つにまとめられていて、一見変分方程式の数も半分となり、計算が通常の交流問題のように半減されるように思えるが、それは不可能である。

(2) 式において $j\omega$ を独立変数とみた場合は正則ではあっても、 $|V|^2$ なる項があるため電圧 V を独立変数とみると、同式は正則ではないからである。そこで次のように考える。

変数 V に関して、(2)式のような複素表現の実部と虚部との間にコーシー・リーマンの意味での従属関係がないので、両者は一応独立とみなすべきである。

しかし、単純にこうすると、実部と虚部が分離されて、結局、実数表現になってしまいます。従って、正則ではないのも、形式的に複素表現はそのままに予め許さなくてはならない。独立変数 V 自身も同様で意味での実部と虚部は独立に考えねばならないが、それを単純に分離して 2 变数として扱うと計算がより繁雑になるだけである。そこで新たな独立変数 V^* (V の共役複素数) を導入する。或いは式中に V^* がみ出れば、これを V とは独立な変数とみなすし、二つの独立変数 V と V^* とか V と V^* との二つの独立変数に変換されたと考えるのである。そうすると、(2)式を dV/dt に离して解き、その変分をとることによって、

$$\frac{d\delta V}{dt} = \frac{\partial F}{\partial V} \delta V + \frac{\partial F}{\partial V^*} \delta V^* \quad (6)$$

を得る ($|V|^2 = VV^*$)。 (2) 式を一般化するために

$$F = (I - YV) / Y_{j\omega}$$

とおいていふ。 (6) 式の複素共役式を用ひると変分の固有値方程式は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial V} - \lambda & \frac{\partial F}{\partial V^*} \\ \frac{\partial F^*}{\partial V} & \frac{\partial F^*}{\partial V^*} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

とかけよ。これは、一般に入 の実係数多項式となるので、ラウス・フルヴィフの判定基準により安定条件 ($\operatorname{Re} \lambda < 0$)

$$\operatorname{Re} \frac{\partial F}{\partial V} > 0, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial V} \right|^2 > \left| \frac{\partial F}{\partial V^*} \right|^2$$

を得る。定常状態 $I = YV$ の安定条件は上の式を用ひよとによつて

$$\operatorname{Re} Y_{j\omega}^* (Y_V V + I/V) > 0 \quad (7)$$

$$|Y_V V + I/V| > |Y_V V| \quad (8)$$

となる。ただし、 $Y_V = \partial Y / \partial V$ である。

実数計算の場合より結果は簡潔に表現され居り、幾何学的な解釈も可能となる。すなはち、(7) 式は、ベクトル $Y_{j\omega}$ と $Y_V V + I/V$ とが鋭角をなすべきことを示してゐる。^(注) 特に注入信号がない ($I = 0$) 自励系では、この条件は $Y_{j\omega}$ と $Y_V V = H/V$ とが鋭角をなすことを示す。この関係はリーチ線図

(注)

次頁、脚注参照。

に関連して経験的に知られていたようである。(1)式のよろ
な系で H が正実数である場合、 $Y_{jw} = \Re C$ であるか
らこの関係は満足されている。(8)の関係は、今まで
幾何学的意味は明らかであるが、特に入力信号が小
さいとき、

$$\Re (C Y_r V)^* (I/V) > 0 \quad (9)$$

と近似される。そのときは、(4)式の場合と同様にベ
クトル I/V が $Y_r V$ に対して鋭角であるべきことを示
している。

4. 応答曲線

外部信号による発振器の定常応答を幾何学的に
考察する。先づ、信号源電流 I が小さいとき、(2)式の
 $Y(jw, |V|^2)$ は無信号時の値 $Y(jw_0, |V_0|^2)$ から大き
くずれないはずであるから、その自由発振状態を中心
に泰勒展開して、1次の項までとると、

$$Y_{jw} \cdot j(\omega - \omega_0) + Y_{|V|} (|V|^2 - |V_0|^2) = I/V$$

[注] (前頁の脚注)

容易に確認みられるように、二つの複素ベクトルを A, B と
するととき、 $\Re A^* B$ の値は、 A および B を幾何学的空间に
おけるベクトルとみなしたときの内積 $A \cdot B$ に等しい。したが
って、二つのベクトルの交角を φ とすると、 $\Re A^* B = |AB| \cos \varphi$
とかけ子ので、これが正直であることは $|\varphi| < \pi/2$ を意味
する。因みに $\Im A^* B$ の値は外積 $A \times B$ の(その方向への)
値に等しい。

を得る。ただし、 $Y_{II} = \partial Y / \partial |V|$ である。式を図示すると図2のようになる。(3)式を $|V|$ で微分すれば、 $Y_{II} = 2H|V|$ となることから判るように、 Y_{II} は実数的(実部)に比して虚部は小さい)であるので、ベクトル $Y_{II} (|V| - |V_0|)$ は通常正の実軸に沿う方向を向く。また、(3)式によると $Y_{j\omega} (= 2C)$ も実数的であるから、

$Y_{j\omega} \cdot j(\omega - \omega_0)$ は大体虚軸に沿うベクトルである。図2から種々の性質を考察することができる。

入力信号の周波数 ω

が自由発振周波数 ω_0 に等しいとき、ベクトル E/V の向きは Y_{II} のそれに一致する。 Y_{II} が実数であれば、発振電圧 V の位相は信号電流 I と同位相になる。 Y_{II} が実数からずれるに従って I と V の位相もそれに応じてずれる。入力信号が小さいとき、 $|V| \approx |V_0|$ とみられるので、信号の強さ $|E/V| \approx |E/V_0|$ に比例して $|V| - |V_0|$ は増大する。

次に信号の周波数 ω が ω_0 よりずれると、ベクトル E/V は $Y_{j\omega} \cdot j(\omega - \omega_0)$ の方に化良く。 Y_{II} が実数のとき E/V が Y_{II} となす角のそのものが入力信号 I と発振電圧 V の位相を表す。安定条件(9)によれば、 $Y_{II} V = H|V|^2 = Y_{II} |V|/2$ であるからこの角が $\pi/2$ を越せば、同期がはずれることになる。

また、一般的に入力信号 E/V が大きくなれば

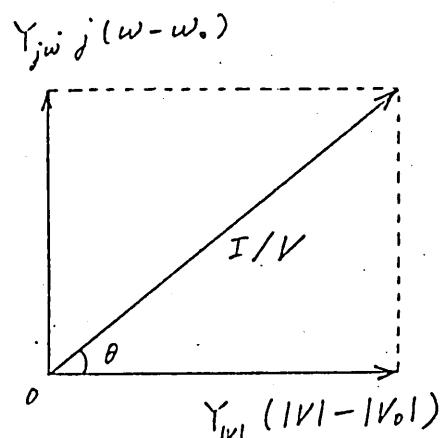


図2 周期応答の複素ベクトル表現

振巾 $|V|^2$ および同期範囲 $(\omega - \omega_0)$ も共に増大するこ
とも直ちに看取できる。

G, H が正の実数である場合について、(1)式から
得られる発振電圧振巾 $|V|^2$ と入力信号周波数 ω の
関係をプロットすると、図3のような応答曲線が得ら
れる。 (7)式から簡単に $|V|^2 > G/2H$ が出て来るので、

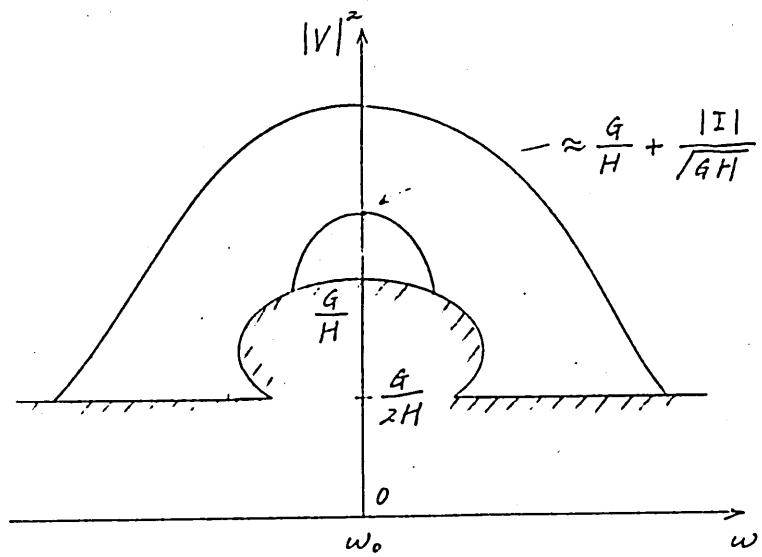


図3 (1)式の応答曲線

それによる安定範囲は $|V|^2 = G/2H$ なる水平線の上側
である。また (8)式の安定範囲は、同図に示すように
隋円の外側であることも容易に導ける。

入力信号が小さい場合、前述の如く、(9)式によ
て I の位相は $\pi/2$ より $\pi/2$ を越えて安定にならぬこ
とはない。ところが入力信号 $|I|/|V|$ を大きくして行くと、
(9)式より (8)式に近づくなければならないが、(8)式
のベクトル図を描いて見れば容易に判るように、
 I/V の位相は $\pi/2$ を越え得るようになる。つまり I が

$\sqrt{2}$ に対して $\pi/2$ 以上の位相差をもつても同期が保たれる範囲がある。しかし、入力信号をさらに大きくすると、今度は、(7)式から

$$\operatorname{Re} Y_{j\omega}^+ (I/V) > 0$$

が成立するようになり、 $Y_{j\omega} = \infty > 0$ であるから、上式によつて I/V の定常位相は再び $\pi/2$ に制限されるようになる。

まとめ

基礎的な振動回路を例にとって、変数を振幅と位相とに分離することなく、複素表示の形のままで、非線形回路を解析する方法について述べた。それによつて、線形回路の場合のように極端に計算が簡単化されないにしても、数式表現は簡潔で整った形になり、物理的意味の理解し易い形の結果が得られる。多數個の発振器系についても計算はかなり簡略化される。

いうまでもなく、複素表現に関する近似は行っていないので、上に得た結果は、通常の実数表現によるものと完全に一致している。それは簡単な計算によつて確かめることができます。

文献

- [1] M. Nakajima and J. Ikeno; locking phenomena in microwave oscillator circuits,
Int. J. Electronics, Vol. 44, No. 5, pp. 465-472;
(1978)

[2] 例えば, C. Hayashi; Nonlinear oscillators
in physical systems, McGraw-Hill Co.

1964

付録1 脈時(直流)非線形性と交流非線形性

非線形要素の瞬時特性がバイアス値 (V_b, I_b) を
中心として、3次特性

$$i - I_b = -g(v - V_b) + (z/3)H(v - V_b)^3 \quad (A1)$$

によって表わされる場合を考える。この要素に

$$\begin{aligned} v - V_b &= \sqrt{2}|V| \cos(\omega t + \phi) \\ &= (V e^{j\omega t} + V^* e^{-j\omega t}) / \sqrt{2} \end{aligned}$$

なる正弦交流電圧を印加すると、種々の周波数成分の電流が流れますが、その中の基本波成分

$$i - I_b = (I e^{j\omega t} + I^* e^{-j\omega t}) / \sqrt{2}$$

のみをとり、(A1)式に代入し、その両辺の係数を比較す
ると

$$I = -gV + H V^2 V^*$$

を得る。従って、この非線形要素は ω なる交流に対し

$$I/V = -g + H|V|^2$$

なるコンダクタンスを量すると考えることができる。

付録乙 本解析法と通常の非線形振動論との関係について

本文に示した方法と非線形振動論が通常行われてゐる方法との関連について述べておく。

振動に関する基本的な微分方程式を

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu f(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau)$$

と書き、その角字を

$$x = P \cos(\tau + \theta)$$

と仮定する。そのとき振幅 P および位相 θ を記述する微分方程式が

$$\frac{dP}{d\tau} = -\mu \frac{1}{2\pi} \oint f \sin(\tau + \theta) d\tau \quad (A2)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu \frac{1}{2\pi P} \oint f \cos(\tau + \theta) d\tau \quad (A3)$$

によつて与えられることは、平均法またはハーモニック・バランスの方法によつて導かれてゐる[2]。 $\oint d\tau$ は τ についての周期 ($\tau \sim \tau + 2\pi$) 積分することを意味する。

ここで、(A2)式に $e^{j\theta}$ を (A3)式に $jPe^{j\theta}$ をかけ加え合せ $Pe^{j\theta} = 2$ とおくと、2つの式は1つの複素表現形式

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{\mu}{2\pi j} \oint f e^{j\tau} d\tau$$

にまとめることはできる。この式は本文において回路論的に最初から複素形式で導出した(2)式に対応するものである。遂に本文の(4),(5)式は夫々(A2),(A3)式に対応している。

輻射科學研究會資料

任意断面形誘電体線路の導波モードを
解析する拡張境界条件の方法

桑 祐二 森田長吉

(大阪大学 工学部)

昭和 56 年 1 月 30 日

(於 中央電気クラブ)

1. まえがき

均質な任意断面形状の誘電体線路における導波モード解析の問題は、光線路のように weakly guiding の条件が使える場合は、変数分離解の求まる円および橿円形以外の形状においても種々の方法（点整合法、一般化伝送方程式による方法、変分原理による方法、有限要素法、モード整合法、モーメント法等）によって近似解析されている。扱われていい形状については、円以外では応用性の高いと思われる形状が多いようである。ところが、これらの手法は屈折率差が大きい場合を含む一般的な解法になりえないかまたは横断面全体の積分あるいは横断面全体にわたる未知数の集積が必要といったような能率が悪いものが多いう�うに思われる。

もともと線路問題は、同じ断面をもつ誘電体柱からの散乱問題と同種の問題と考えられるので、散乱問題に対する解法が有効に利用できるはずであるが、この観点に基づく解法はほとんど見当たらぬようである。最近ポテンシャル論に基づく解法が Eges らによって発表されたが⁽¹⁾、この解法は、境界線上の積分のみが主計算であって計算能率の良いものである。しかし、この手法も weakly guiding が前提であって、計算結果もそれに応じたものに限られている。

これに対して本報告で述べる手法は、電磁波あるいは音波の散乱問題で最近よく用いられる拡張境界条件の方法（Null-field method あるいは T マトリクス法とも呼ばれる）⁽²⁾に基づく解析法であり、次のようないくつかの利点がある。すなわち、本手法は屈折率差の大小に関係なく使える一般的な解法であり、かつかの精度より近似解法が導けること、また、演算領域が Eges の

方法と同じく一次元的なわち誘電体 α 境界周囲上の線積分のみでよく、従って波長に比べて断面が大きくなってしまっても時間をさほど費やさずに数値解析ができること、さらに、電磁界は横断面成分を独立な二つの基本界成分として選んでいいので、屈折率差 α 大きい場合も、光線路のようないくつかの式で表わせ直観的に理解しやすいこと、等である。

最後に数値例として、厳密解が容易に導ける円断面の場合およびこれまでによく取り上げられてきた方形断面の場合について主として分散曲線を従来の解との比較で示して検討し、本解析法の有効性を確認してみる。

2. 電磁界の積分表示

外部領域における電界 E は、境界線 C 上の電磁界 H 、 H を用いて次のように表わされる⁽³⁾。

$$E_f = -\frac{jW}{2\pi} \int_C [(\hat{e}_n' \times H) + j \frac{1}{W} (\hat{e}_n \times E) \times (\nabla_{\perp}' + j\bar{\beta}_{\perp})]$$

$$+ \{(\hat{e}_n' \times H) \cdot (\nabla_{\perp}' + j\bar{\beta}_{\perp})\} \cdot (\nabla_{\perp}' + j\bar{\beta}_{\perp})] \bar{Y}_f d\omega'$$

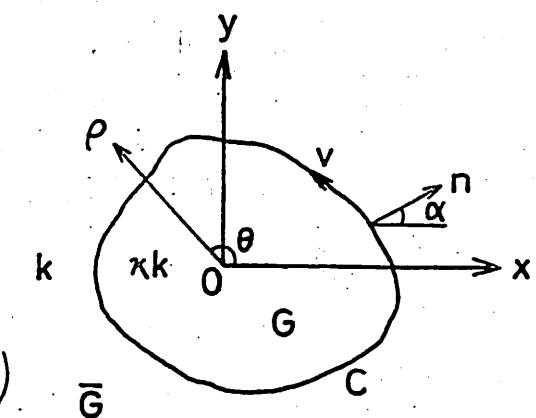


図1. 誘電体線路 α
断面図と座標

(1)

ここで、モードの伝搬定数を $k\sqrt{\epsilon}$ とし、電磁界は $\exp(j\omega t - j\bar{\beta}_{\perp} z)$ という項をもつものと仮定してある。(以後この項は省略する。)

その他の諸定数は次のようにならう。(図1参照)

C : 誘電体線路 α 内部領域 K と外部領域 G の境界線

n, v ; 境界上の一地点における法線および接線方向座標
 \vec{r}_a ; a 方向の単位ベクトル (a は x, y, z, n, v 等)
 α ; \vec{r}_n が z 軸の正方向となす角
 (ρ, θ, z) ; 円筒座標
 k ; \bar{G} における波数
 K ; G と \bar{G} の屈折率比
 W ; \bar{G} における波動インピーダンス ($= \sqrt{\mu/\epsilon}$)
 R ; 観測点と観分点 (C 上の点) 間の横断面内の距離

$$\nabla_t = \nabla - j\beta \frac{\partial}{\partial z}, \quad h_f = \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad h_d = \sqrt{k^2 - \beta^2}, \quad \bar{\Psi}_f = K_0(h_f R)$$

プライム記号 “'” はベッドセルおよび変形ベッドセル
 関数の肩に用いた場合は、引数全体に関する微分を表
 わし、その他の場合は積分点に関する座標であること
 を示す。また、添字 f , d はそれぞれ外 (外部 (\bar{G})), 内
 部 (G) 量であることを示し、長さに関する量は全
 て \bar{G} の波数 k 倍して規格化をはかつている。
 さて、式(1)より圧力 P_f の x, y 成分 E_{fx}, E_{fy} は次のよう
 次のように得られる。

$$E_{fx} = -\frac{jW}{2\pi} \int_C \left\{ H_z \sin \alpha' + \bar{\beta} \cos \alpha' \frac{E_z}{W} - j \sin \alpha' \frac{E_v}{W} \frac{\partial}{\partial n'} - j \cos \alpha' \frac{E_v}{W} \frac{\partial}{\partial v'} \right. \\ \left. - \left(H_z \frac{\partial}{\partial v'} - j \bar{\beta} H_v' \right) \left(\cos \alpha' \frac{\partial}{\partial n'} - \sin \alpha' \frac{\partial}{\partial v'} \right) \right\} \bar{\Psi}_f \, dv' \quad (2)$$

$$E_{fy} = -\frac{jW}{2\pi} \int_C \left\{ -H_z \cos \alpha' + \bar{\beta} \sin \alpha' \frac{E_z}{W} + j \cos \alpha' \frac{E_v}{W} \frac{\partial}{\partial n'} - j \sin \alpha' \frac{E_v}{W} \frac{\partial}{\partial v'} \right. \\ \left. - \left(H_z \frac{\partial}{\partial v'} - j \bar{\beta} H_v' \right) \left(\sin \alpha' \frac{\partial}{\partial n'}, + \cos \alpha' \frac{\partial}{\partial v'} \right) \right\} \bar{\Psi}_f \, dv' \quad (3)$$

次に式(2), (3)において電磁界の接線成分が連続といふ境界条件を適用し、若干の変形をほどこすと、次のようなくな外部電磁界を内部電磁界の境界上 α 値で表わす積分表現が得られる。

$$E_{fx} = -\frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial E_{dx}}{\partial n'} \bar{\psi}_f - E_{dx} \frac{\partial \bar{\psi}_f}{\partial n'} \right\} dv' + \frac{k^2-1}{2\pi} \int_C (E_{dx}' (\cos \alpha' + E_{dy}' \sin \alpha') \frac{\partial \bar{\psi}_f}{\partial x'} dv' \quad (4)$$

$(P \in \bar{G})$

$$E_{fy} = -\frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial E_{dy}}{\partial n'} \bar{\psi}_f - E_{dy} \frac{\partial \bar{\psi}_f}{\partial n'} \right\} dv' + \frac{k^2-1}{2\pi} \int_C (E_{dx}' (\cos \alpha' + E_{dy}' \sin \alpha') \frac{\partial \bar{\psi}_f}{\partial y'} dv' \quad (5)$$

$(P \in \bar{G})$

3. 特性方程式の導出と近似的解析法

拡張境界条件の方法によれば、式(4), (5)の積分表現は観測点 P が内部領域(G)にあるとき 0 にならなければならぬ。すなわち、

$$\text{式(4)の右辺} = 0 \quad (P \in G) \quad (6)$$

$$\text{式(5)の右辺} = 0 \quad (P \in G) \quad (7)$$

式(6), (7)の関係に、 $P < P'$ とき α $\bar{\psi}_f$ の変数分離表現

$$\bar{\psi}_f = \sum_{l=0} \epsilon_l K_l(\bar{h}_f p') I_l(\bar{h}_f p) \cos l(\theta' - \theta) \quad (8)$$

(ただし, $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_l (l \geq 1) = 2$)

および、未知電磁界の内部領域 G の波動関数による展開

$$E_{dx} = \sum_{s=0} J_s (\bar{h}_d P) \left\{ \begin{array}{l} C_s \cos s\theta \\ D_s \sin s\theta \end{array} \right. \quad (9)$$

$$E_{dy} = \sum_{s=0} J_s (\bar{h}_d P) \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_s \sin s\theta \\ \bar{D}_s \cos s\theta \end{array} \right. \quad (10)$$

等を用いれば、得られたフーリエ級数の係数の条件から特性方程式を求めることができる。式(9), (10)がθ変化に関しては上どうし、下どうしが対応するか。今
 E_{dx} がス軸対称 ($\cos s\theta$ 变化) の場合を選ぶ(上どうし)
と、次のような方程式が導出される。

$$\sum_{s=0} C_s (Q_{ls} + Q_{ls}^K) + \sum_{s=0} \bar{C}_s \bar{Q}_{ls} = 0 \quad (l=0, 1, 2, \dots) \quad (11)$$

$$\sum_{s=0} C_s T_{ls} + \sum_{s=0} \bar{C}_s (\bar{T}_{ls} + \bar{T}_{ls}^K) = 0 \quad (l=0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

ただし、

$$Q_{ls} = \int_C [P_1 \{ \bar{h}_d u_1 \cos(\theta' - \alpha') + \frac{s}{pr} t_2 \sin(\theta' - \alpha') \} - t_1 \{ \bar{h}_f g_1 \cos(\theta' - \alpha') + \frac{l}{pr} P_2 \sin(\theta' - \alpha') \}] d\alpha' \quad (13)$$

$$Q_{ls}^K = - \int_C (k^2 - 1) t_1 \cos \alpha' \{ \bar{h}_f g_1 \cos \theta' + \frac{l}{pr} P_2 \sin \theta' \} d\alpha' \quad (14)$$

$$\bar{Q}_{ls} = - \int_C (k^2 - 1) t_2 \sin \alpha' \{ \bar{h}_f g_1 \cos \theta' + \frac{l}{pr} P_2 \sin \theta' \} d\alpha' \quad (15)$$

$$\bar{T}_{ls} = \int_C [P_2 \{ \bar{h}_d u_2 \cos(\theta' - \alpha') - \frac{s}{pr} t_1 \sin(\theta' - \alpha') \} - t_2 \{ \bar{h}_f g_2 \cos(\theta' - \alpha') - \frac{l}{pr} P_1 \sin(\theta' - \alpha') \}] d\alpha' \quad (16)$$

$$\bar{T}_{LS}^K = - \int_C (K^2 - 1) \bar{x}_2 \sin \alpha' \left\{ \bar{h}_f \bar{\theta}_2 \sin \theta' + \frac{\ell}{P'} P_1 \cos \theta' \right\} d\sigma' \quad (17)$$

$$T_{LS} = - \int_C (K^2 - 1) \bar{x}_1 \cos \alpha' \left\{ \bar{h}_f \bar{\theta}_2 \sin \theta' + \frac{\ell}{P'} P_1 \cos \theta' \right\} d\sigma' \quad (18)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= K_e (\bar{h}_f P') \cos \ell \theta', \quad P_2 = K_e (\bar{h}_f P') \sin \ell \theta' \\ \bar{\theta}_1 &= K'_e (\bar{h}_f P') \cos \ell \theta', \quad \bar{\theta}_2 = K'_e (\bar{h}_f P') \sin \ell \theta' \\ \bar{x}_1 &= J_s (\bar{h}_d P') \cos s \theta', \quad \bar{x}_2 = J_s (\bar{h}_d P') \sin s \theta' \\ U_1 &= J'_s (\bar{h}_d P') \cos s \theta', \quad U_2 = J'_s (\bar{h}_d P') \sin s \theta' \end{aligned} \quad (19)$$

式(11), (12)は、電界 α 展開係数 C_s, \bar{C}_s を未知数とした無限次元同次一次方程式であり。展開項数を適当な数で打ち切り、係数行列の行列式を 0 と置けば、導波モードの伝搬定数を決める特性方程式が得られる。Ex. が Z 軸に関して反対称な場合 ($\sin s\theta$ 变化の場合) も同様にして、式(11), (12)に対応する式が得られるか、ここで省略する。次に近似的解析法をいくつか示す。

まず、Weakly guiding の条件を満足する線路に対しては LP モードが導波されると考えてよい。この場合、たとえば、主電界が Z 成分である LP モードの場合、 E_y は非常に小さく、オーダー的には、

$$E_y/E_x \propto (K^2 - \bar{\beta}^2)/\bar{\beta}^2 \quad (20)$$

程度である。(円形断面線路の場合、厳密に $E_y = 0$ 成立するモード表現が可能である(4)。)

そこで横断面内の電界を一成分だけと仮定すれば、式(4), (5) は分離し、式(4) は

$$E_{fx} = -\frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial E_{dx'}}{\partial n'} \bar{\psi}_f - E_{dx'} \frac{\partial \bar{\psi}_f}{\partial n'} - (K^2 - 1) E_{dx'} \cos \alpha' \frac{\partial \bar{\psi}_f}{\partial x'} \right\} d\sigma' \quad (21)$$

となる。この場合には、式(11)は近似的に次式となる。

$$\sum_{s=0} C_s (Q_{\ell s} + Q_{\ell s}^k) = 0 \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

さらには、 $k^2 - 1 \neq 0$ と仮定すれば、式(21)は完全にスカラ-近似の式

$$E_{fx} = -\frac{1}{2\pi} \int_C \left(\frac{\partial E_{dx}}{\partial n'} \bar{\psi}_f - E_{dx} \frac{\partial \bar{\psi}_f}{\partial n'} \right) d\sigma' \quad (23)$$

となり、式(22)は

$$\sum_{s=0} C_s Q_{\ell s} = 0 \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \quad (24)$$

と簡単化される。

また、電界成分を一つだけ（たとえば E_x ）選び、積分表現は、式(4), (5)の両方を用いるという近似も可能であり、この場合式(11), (12)は次のようになる。

$$\sum_{s=0} C_s (Q_{\ell s} + Q_{\ell s}^k) = 0 \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \quad (25)$$

$$\sum_{s=0} C_s T_{\ell s} = 0 \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

4. 円断面の場合

本節では、前節で述べた一般的な諸式が、円断面の場合どうなってくるかを調べてみる。

まず、最初に基本式(11), (12)に着目する。 $\ell = 0, 1$ の特殊な場合は省略し、 $\ell \geq 2$ の場合を見てみると、係数 Q , T は次のようになる。

$$Q_{ls} = \begin{cases} \pi a \left\{ \bar{h}_d J'_s(\bar{h}_d a) K_s(\bar{h}_f a) - \bar{h}_f J_s(\bar{h}_d a) K'_s(\bar{h}_f a) \right\} & (s=l) \\ 0 & (s \neq l) \end{cases}$$

$$Q_{ls}^k = \begin{cases} -(k^2-1) \frac{\pi}{4} a J_s(\bar{h}_d a) \left\{ \bar{h}_f K'_s(\bar{h}_f a) + \frac{k}{a} K_s(\bar{h}_f a) \right\} & (s=l-2) \\ -(k^2-1) \frac{\pi}{2} a \bar{h}_f J_s(\bar{h}_d a) K'_s(\bar{h}_f a) & (s=l) \\ -(k^2-1) \frac{\pi}{4} a J_s(\bar{h}_d a) \left\{ \bar{h}_f K'_s(\bar{h}_f a) - \frac{k}{a} K_s(\bar{h}_f a) \right\} & (s=l+2) \\ 0 & (\text{他の}s) \end{cases}$$

$$\bar{Q}_{ls} = \begin{cases} -Q_{ls}^k & (s=l-2) \\ -(k^2-1) \frac{k\pi}{2} J_s(\bar{h}_d a) K_s(\bar{h}_f a) & (s=l) \\ Q_{ls}^k & (\text{他}s) \end{cases}$$

$$\bar{T}_{ls} = Q_{ls}, \quad \bar{T}_{ls}^k = \begin{cases} -Q_{ls}^k & (s=l-2, s=l+2) \\ Q_{ls}^k & (\text{他}s) \end{cases}, \quad T_{ls} = \begin{cases} -\bar{Q}_{ls} & (s=l-2, s=l+2) \\ \bar{Q}_{ls} & (\text{他}s) \end{cases}$$

ただし、 a は 円断面の半径である。 (27)

これら Q , T を用い、式(11)と式(12)の和と差を作り、種々の変形を重ねていくと、結局、円断面誘電体線路の厳密な特性方程式として次式を得ることができる。

$$\left\{ \frac{x^2 J'_m(\bar{h}_d a)}{\bar{h}_d J_m(\bar{h}_d a)} + \frac{K'_m(\bar{h}_f a)}{\bar{h}_f K_m(\bar{h}_f a)} \right\} \left\{ \frac{J'_m(\bar{h}_d a)}{\bar{h}_d J_m(\bar{h}_d a)} + \frac{K'_m(\bar{h}_f a)}{\bar{h}_f K_m(\bar{h}_f a)} \right\} = \frac{m^2 \beta^2}{a^2} \left\{ \frac{\bar{h}_d^2 + \bar{h}_f^2}{\bar{h}_d^2 \bar{h}_f^2} \right\}^2 \quad (28)$$

$(m=0, 1, 2, \dots)$

ところで、この式における m と式(11), (12)における s との対応関係については後述する。

次に式(28)の近似から得られる特性方程式をみてみる。この場合、行列 Q_{ls} は対角化されているので、式(24)から簡単に次式を得る。

$$\frac{h_f K'_s(\bar{h}_f a)}{k_s(\bar{h}_f a)} = \frac{\bar{h}_d J'_s(\bar{h}_d a)}{J_s(\bar{h}_d a)} \quad (29)$$

これは、LPモードの特性方程式として種々の文献に示されている式に他ならず、スカラーレ解として知られており。従って屈折率比が1に極めて近いというweakly guidingの場合には、式(28)の根とよく一致していくが、屈折率比が1から離れてくると式(29)の根は式(28)の根の粗い近似でしかなくなる。

これに対して、式(25), (26)の近似は、式(29)や式(22)の近似よりも厳密な式に近い特性方程式を与えることが期待される。しかし、結局2つの式を連立して解かなければならなくなってしまう、他方の横断面界を無視しない式(11), (12)の手法（つまり厳密解）に近く、近似という観点からみると利点がない。

さて、式(22)の近似式において、通常のLPモードで仮定される電界表現

$$E_{dx} = C_s J_s(\bar{h}_d p) \cos s\theta \quad (30)$$

を用いると、次の特性方程式を得る。

$$\frac{h_f K'_s(\bar{h}_f a)}{k_s(\bar{h}_f a)} = \frac{\bar{h}_d J'_s(\bar{h}_d a)}{J_s(\bar{h}_d a)} - \frac{(k^2-1)}{2} \cdot \bar{h}_f \cdot \frac{k'_s(\bar{h}_f a)}{k_s(\bar{h}_f a)} \quad (31)$$

同じ式(22)を用いても電界表現を式(30)のように簡単にせず、いくつかの角度方向変化項の和として表現すれば、解はさらに改善されることが期待されるが実際にはあまり効果がない。その理由は次のとおりである。

例えば、基本モードの場合、

$$E_{dx} = C_0 J_0(\bar{h}_d p) + C_2 J_2(\bar{h}_d p) \cos 2\theta + C_4 J_4(\bar{h}_d p) \cos 4\theta + \dots \quad (32)$$

のように展開項数を増やす効果をみてみる。簡単のため C_0, C_2 項のみの場合を考えると、特性方程式は次の形になる。

$$(\Delta_{00} + \varepsilon_{00})(\Delta_{22} + \varepsilon_{22}) - \varepsilon_{02} \cdot \varepsilon_{20} = 0 \quad (33)$$

ここで Δ は Q_{es} , ε は Q_{es}^2 に相当する項で、 $\Delta \gg \varepsilon$ と考えられる。従って C_2 項を加える効果 ($\varepsilon_{02} \varepsilon_{20}$) は二次の微小量となり、結局 $\Delta_{00} + \varepsilon_{00} = 0$ からの解 (式(31)の場合) に対してあまり改善効果がないことがわかる。このことは円断面の場合に限らず一般的に言えることである。

さて、式(31)の特性方程式は、式(29)に対して右辺第二項が追加されただけであり、依然としてスカラー近似の範囲内にあるといえる。しかしよりにむかわらす。この式から得られる解は、従来から用いられている式(29)の単純なスカラー近似解よりも改善されたものである。特に HE₁₁ タイプのモードの場合、屈折率差が 1 から相当離れてても極めて精度の良い結果を与えることができる。このことは、図 2-図 5 の数値計算結果からも明らかである。

まず、図 2 に屈折率比 (k) が 1.5 の円断面誘電体線路の分散曲線を示す。横軸は半径、縦軸は伝搬定数であり、各曲線につけられてあるモード番号 i, j は D. Gloge が提案した LP モード⁽⁵⁾ に対応している。 i は周回方向に回転して観察したときの電界の変化の数、 j は i が与えられたときの小さい方から j 番目の根)。ところが、式(28)の厳密解における m と式(29)-(31)における n との対応は表 1 のようになつてゐる。

m	モード	s	モード
0	TM_{0j}	1	LP_{1j}
	TE_{0j}		
1	HE_{1j}	0	LP_{0j}
	EH_{1j}	2	LP_{2j}
2	HE_{2j}	1	LP_{1j}
	EH_{2j}	3	LP_{3j}
3	HE_{3j}	2	LP_{2j}
	EH_{3j}	4	LP_{4j}

表. 1
 m と s との対応

図2の点線は従来から用いられてゐるスカラ-近似の式(29)から得られる根である。図2の実線は、 LP_{0j} タイプのモードの場合は式(31)の根であるが、 LP_{2j} タイプのモードの場合は式(30)の電界表現を仮定して式(22)から得られる特性方程式

$$\frac{\bar{h}_f K'_1(\bar{h}_f a)}{K_1(\bar{h}_f a)} = \frac{\bar{h}_d J'_1(\bar{h}_d a)}{J_1(\bar{h}_d a)} - \frac{(k^2-1)\bar{h}_f}{4} \left\{ 3 \frac{K'_1(\bar{h}_f a)}{K_1(\bar{h}_f a)} + \frac{1}{\bar{h}_f a} \right\} \quad (34)$$

の根である。 LP_{0j} モードに対応する HE_{1j} モードの厳密解は実線とほぼ重なりグラフ上では区別できない。従って、式(21)の特性方程式は基本モードを含む HE_{1j} モード群に対して非常に厳密な解を与えることわかる。 LP_{2j} モード群は、表1のように厳密解の TM_{0j} , TE_{0j} , HE_{2j} の3つの中のモード群に対応するので単純な比較はできないが、 TM_{0j} を選ぶと(式(28)の左辺左側の $\{ \}=0$), 式(34)の曲線とほぼ一致し、グラフ上では区別できない。

図3は屈折率比が1.1と小さい場合の分散曲

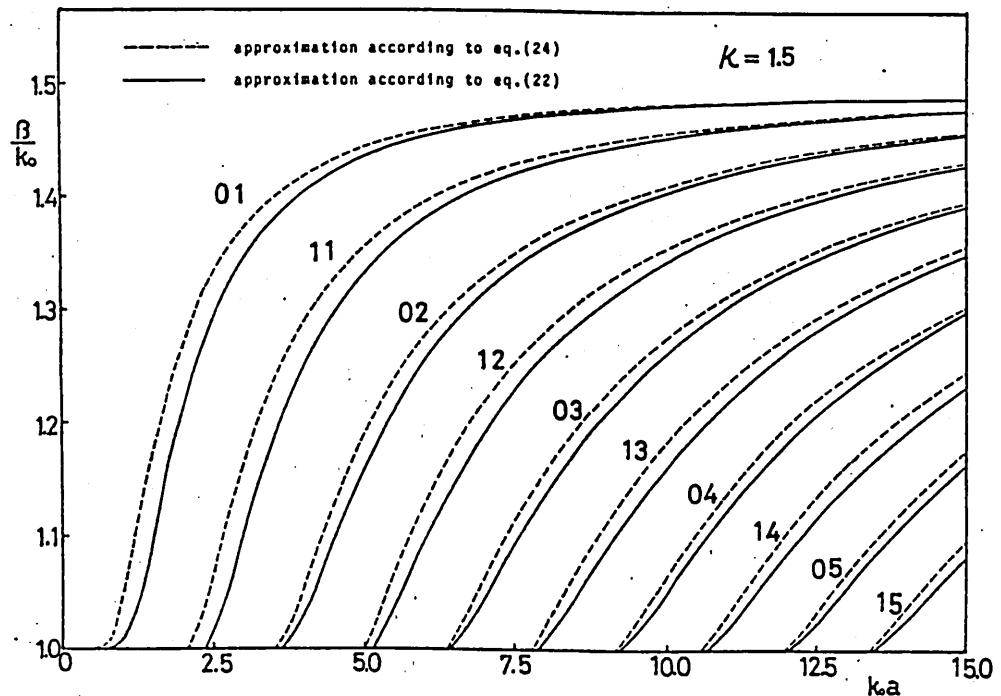


図2. 円断面誘電体線路の分散曲線 ($K = 1.5$)

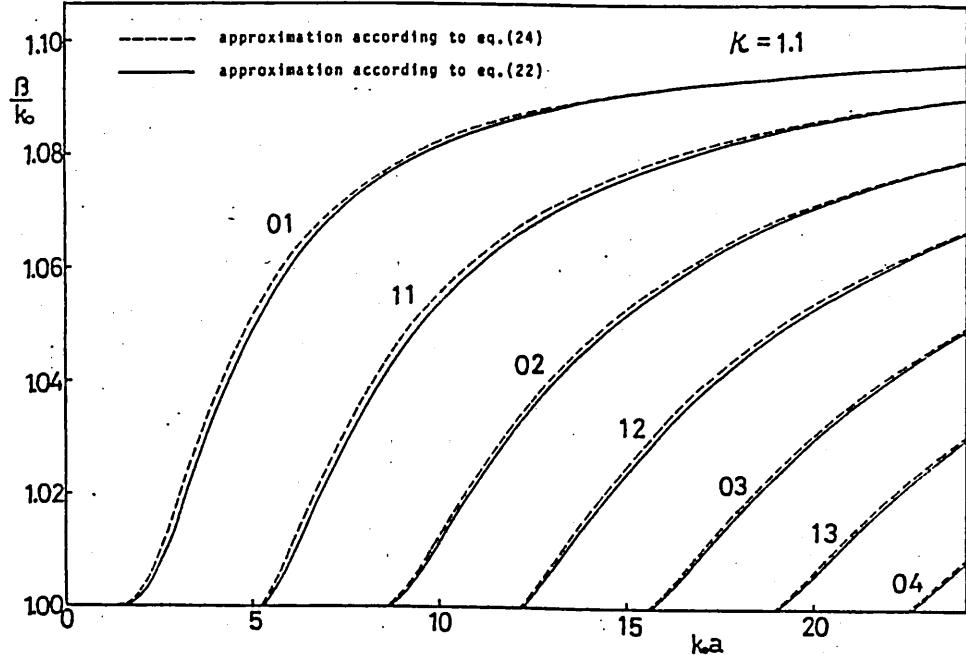


図3. 円断面誘電体線路の分散曲線 ($K = 1.1$)

線である。式(29)のスカラー近似による解と、式(31)あるいは式(34)の修正解（ほとんど厳密解に一致した）との差が少なくなつて来るこことがわかる。図4、図5は屈折率比 κ を横軸とし、厳密解に対するスカラー近似解および修正解の相対誤差 ER を縦軸としたグラフである。図4は LP_{01} モード、図5は LP_{11} モードから得た曲線であり、 κ が $\sqrt{k_0 \lambda R^2 - 1}$ を 2 よび 3 と固定してある。相対誤差 ER は、

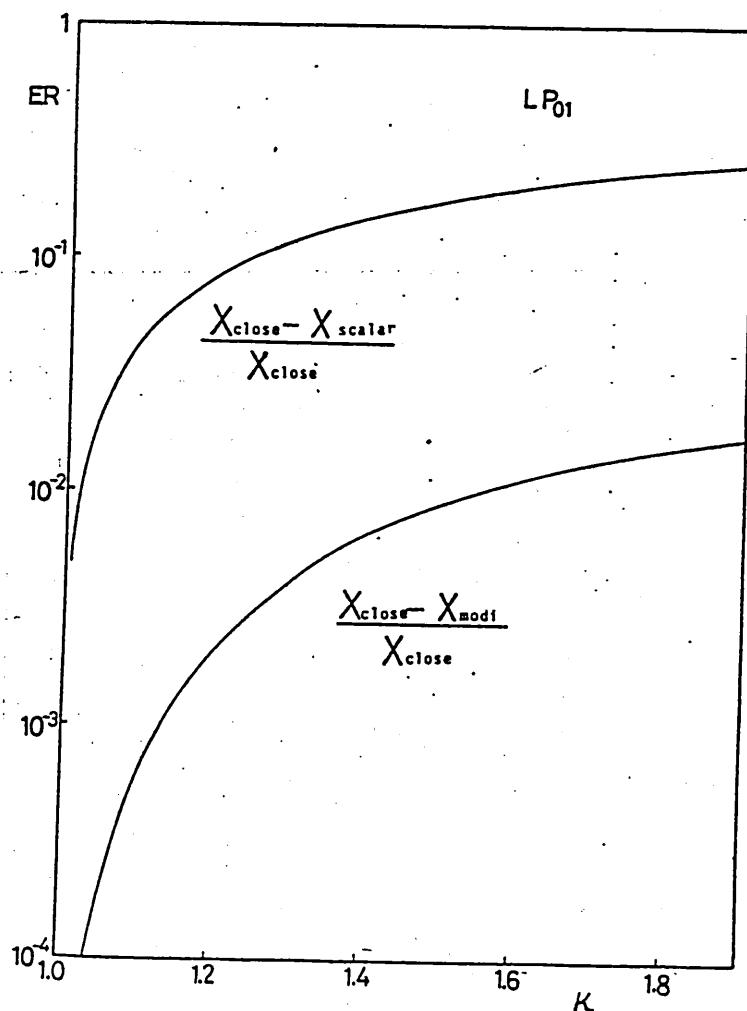


図4. 屈折率比に対する相対誤差 (LP_{01} モード)

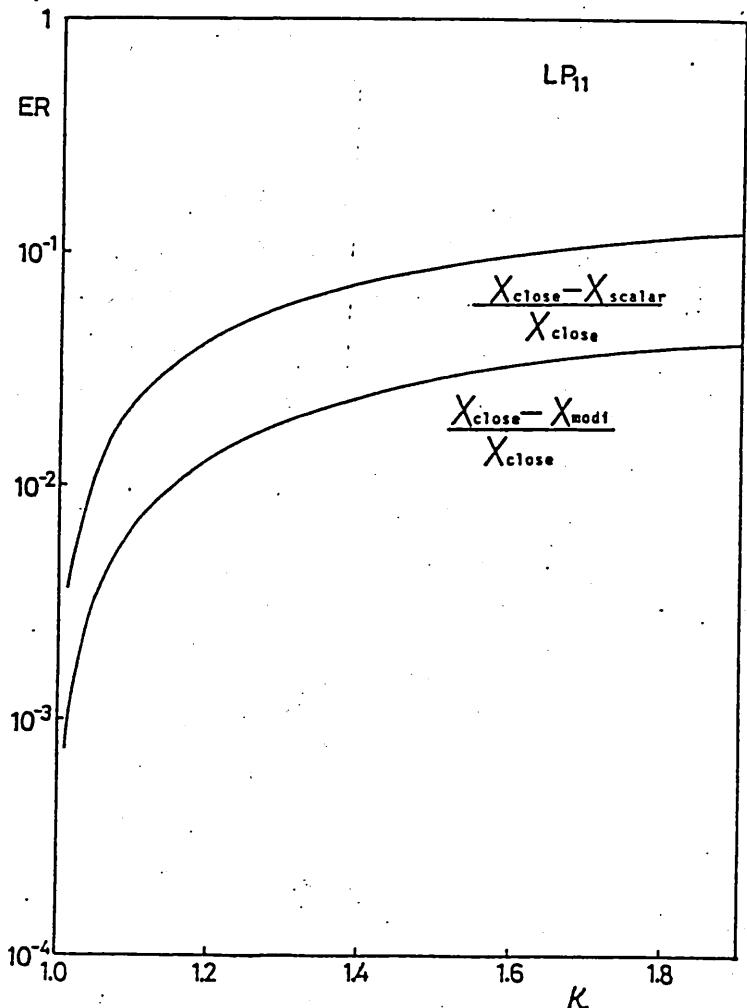


図5. 屈折率比に対する相対誤差(LP_{11} モード)

$$X = \frac{k^2 - (\beta/k_0)^2}{k^2 - 1} \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (35)$$

ヒューラパラメータを用いて評価してある。グラフの上側の曲線は厳密解に対するスカラー近似解の相対誤差、下側の曲線は厳密解に対する修正解の相対誤差をそれぞれ示している。例えば図4を見ると、この円断面の半径($k_0 a \sqrt{h^2 - 1} = 2$)においては、式(29)からのスカラー近似による解(LP_{01} モード)は、 $k \approx 1.02$ 以内なら、厳密解(HE_{11} モード)との相対誤差は1%以内であり、十

十分良い近似を与えるが、 $k \approx 1.25$ 以上になると誤差は 10% 以上になることを示している。ところが、式(31)からの修正解(LP_{11} モード)を用いると、 $k \approx 1.55$ まで、厳密解との誤差は 1% 以内であり、 k が大きくなつてもかなり良い近似を与えることがわかる。また図5を見ると、この円断面の半径 ($k_0 \sqrt{k^2 - 1} = 3$)においては、スカラーパスカルによる解(LP_{11} モード)は、 $k \approx 1.04$ 以内なら、厳密解(TM_{01} モード)との相対誤差は 1% 以内であり、十分良い近似を与えるが、 k が 1.6 以上になると相対誤差が 10% 以上になることがわかる。ところが、修正解(LP_{11} モード)も $k \approx 1.15$ 以内でないと厳密解との誤差が 1% 以内にならず、基本モードに比べて近似が悪くなる。これらことは、高次モードになると、式(30)のような単純な電界表現では近似が悪くなるからであると考えられる。

5. 方形断面の場合

方形断面の場合は、円の場合のように式が簡単にならず、特性方程式の係数を直接数値積分しなければいけない α で、計算時間も増加する。

図6 のように座標をとり、対称性を利用すれば、係数 Q , T は、次のようになる。

ただし主電界は x 成分とし、 x 軸対称($\cos \theta$)とした。

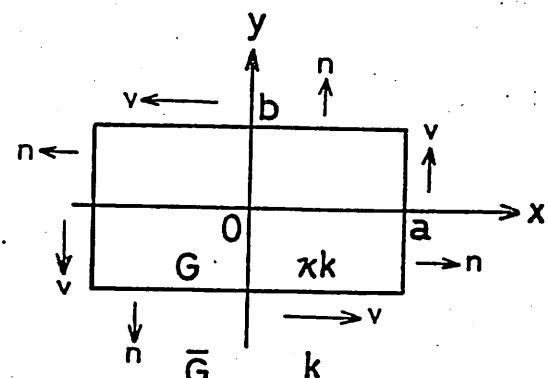


図6. 方形断面誘電体線路

$$Q_{LS} = \int_0^a \left\{ P_1 \left(\bar{h}_d u_1 \sin \theta' - \frac{s}{\sqrt{x^2+b^2}} t_2 \cos \theta' \right) - t_1 \left(\bar{h}_f g_1 \sin \theta' - \frac{\ell}{\sqrt{x^2+b^2}} P_2 \cos \theta' \right) \right\} dx' \\ + \int_0^b \left\{ P_1 \left(\bar{h}_d u_1 \cos \theta' + \frac{s}{\sqrt{a^2+y^2}} t_2 \sin \theta' \right) - t_1 \left(\bar{h}_f g_1 \cos \theta' + \frac{\ell}{\sqrt{a^2+y^2}} P_2 \sin \theta' \right) \right\} dy' \quad (36)$$

$$Q_{LS}^K = - \int_0^b (k^2 - 1) t_1 \left(\bar{h}_f g_1 \cos \theta' + \frac{\ell}{\sqrt{a^2+y^2}} P_2 \sin \theta' \right) dy' \quad (37)$$

$$\bar{Q}_{LS} = - \int_0^a (k^2 - 1) t_2 \left(\bar{h}_f g_1 \cos \theta' + \frac{\ell}{\sqrt{x^2+b^2}} P_2 \sin \theta' \right) dx' \quad (38)$$

$$\bar{T}_{LS} = \int_0^a \left\{ P_2 \left(\bar{h}_d u_2 \sin \theta' + \frac{s}{\sqrt{x^2+b^2}} t_1 \cos \theta' \right) - t_2 \left(\bar{h}_f g_2 \sin \theta' + \frac{\ell}{\sqrt{x^2+b^2}} P_1 \cos \theta' \right) \right\} dx' \\ + \int_0^b \left\{ P_2 \left(\bar{h}_d u_2 \cos \theta' - \frac{s}{\sqrt{a^2+y^2}} t_1 \sin \theta' \right) - t_2 \left(\bar{h}_f g_2 \cos \theta' - \frac{\ell}{\sqrt{a^2+y^2}} P_1 \sin \theta' \right) \right\} dy' \quad (39)$$

$$\bar{T}_{LS}^K = - \int_0^a (k^2 - 1) t_2 \left(\bar{h}_f g_2 \sin \theta' + \frac{\ell}{\sqrt{x^2+b^2}} P_1 \cos \theta' \right) dx' \quad (40)$$

$$T_{LS} = - \int_0^b (k^2 - 1) t_1 \left(\bar{h}_f g_2 \sin \theta' + \frac{\ell}{\sqrt{a^2+y^2}} P_1 \cos \theta' \right) dy' \quad (41)$$

ここで、被積分項に現れる θ' は、 x に関する積分のときは、 $\theta' = \tan^{-1}(b/x)$ 、 y に関する積分のときは、 $\theta' = \tan^{-1}(y/a)$ である。また、 ℓ, s が同じ偶奇性 a とき a と上 a 関係が成りたし、 ℓ, s の偶奇性が異なるときは、係数はすべて 0 である。

図 7 に、 $k^2 = 2.5$ の正方形断面誘電体線路の分散曲線を示す。モードの名称は、Marcatili による分類⁽⁶⁾を用いている。 $(E_{i,j}^x \text{ 且 } x \text{ は主電界方向, } i, j \text{ は } x, y \text{ 方向の極値の数。})$ 点線は式(24)から α スカラーリンジによる解を示し、実線は式(22)から α 修正解を示している。なお、式(24)からのスカラーリンジ解は、展開項数を 3 に選んだものである。(4 以上選んでも結果はあまり変わらないことを確かめている。) 式(22)からの解は円の場合と同じ理由により、対角項しか考慮していない。

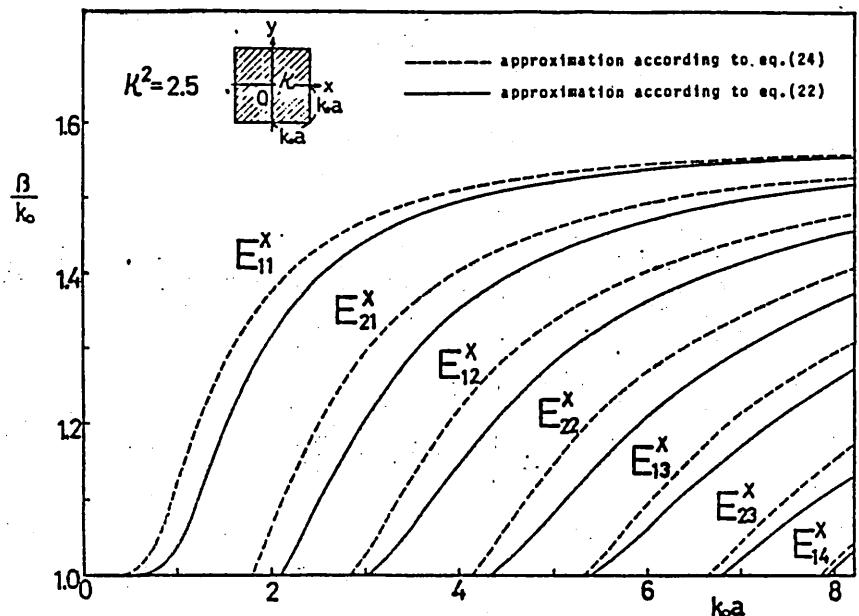


図7. 方形誘電体線路の分散曲線

11. 式(11), (12)を項数を十分と, て解けば、厳密解が得られると考えられるが、現実的には、十分な精度の得られる最小の展開項数がわかれればよい。

表2. 展開項数に対する伝搬定数 α の変化
(E_{11}^x モード, $k_0a = 3$)

展開項数	1	3	5	7	9
係数	C_0	$C_0 C_2 \bar{C}_2$	$C_0 C_2 \bar{C}_2 C_4 \bar{C}_4$	$C_0 C_2 \bar{C}_2 C_4 \bar{C}_4 C_6 \bar{C}_6$	$C_0 C_2 \bar{C}_2 C_4 \bar{C}_4 C_6 \bar{C}_6 C_8 \bar{C}_8$
$\frac{\beta}{k_0}$	1.4455	1.4524	1.4540	1.4542	1.4542

例えば E_{11}^x モードの $k_0a = 3$ と固定したときにおける伝搬定数 α の 3 から 9 までの展開項数に対する値を計算すると表2のようになる。なお、展開項数 1 のときの伝搬定数は、式(22)からの修正解にそのまま対応することになる。この表からわかるように、展開項数を小やしてい

ければ、伝搬定数も一定値に収束していくが、グラフの精度からもこの例の場合には、展開項数3で十分厳密解に近い解が求められるようである。そこで展開項数3にして厳密解を計算した結果は、図7の実線とあまり変わらないことが確かめられた。図8に、 E_{11}^x モードの場合について、式(24)の近似解、式(22)の近似解、および展開項数3の場合の式(11), (12)の解(厳密解に対応)を縦軸のスケールを拡大して示す。なお、小楠氏らの分散曲線⁽⁷⁾との比較は大変むづかしいが、グラフを読んで比べてみたところでは、小楠氏らの結果は図7の実線とほぼ一致している。

ところで、円の場合はでも用いた相対誤差の考え方について評価してみると、 k_0a が2から3の間では、式(22)の近似解の相対誤差は3~4%程度になっている。

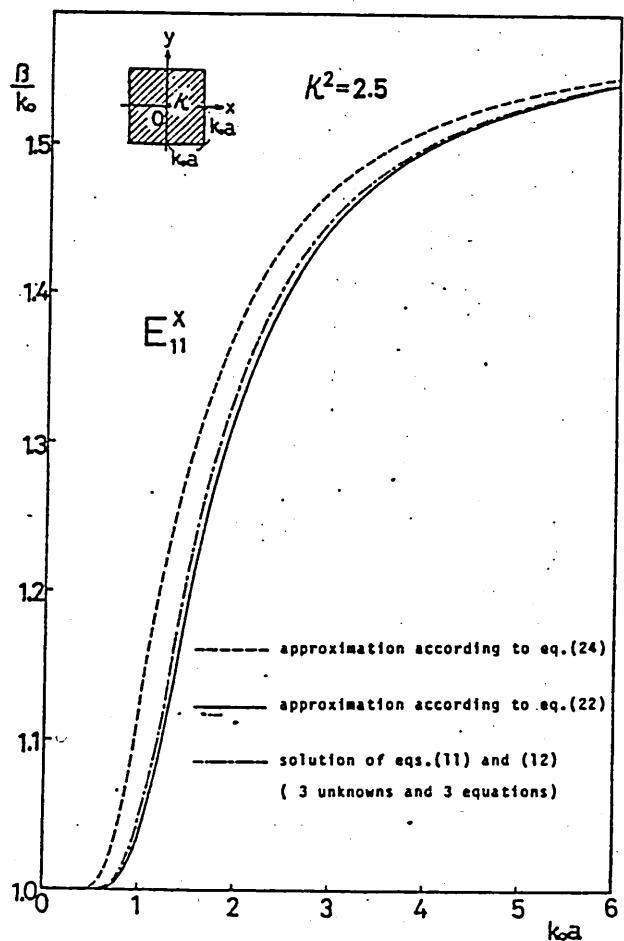


図8. 基本モードの分散曲線

6. むすび

本報告では、誘電体線路の導波モード解析の一つの手法として、拡張境界条件による解析手法を提案した。本手法は、weakly guidingの線路から屈折率差の大きい線路にまで適用できる一般的な解析法である。数値例として、円断面と方形断面の場合を取りあげ、本手法の有効性を確かめた。

なお、本解析法では電磁界の外部領域での積分表現を内部に拡張したが、これとは逆に、内部での表現を外部へ拡張しても同様に本題の解析法が得られるはずである⁽⁸⁾。しかしその場合は、境界上の電磁界の展開として、外部関数を採用することになるので、誘電体線路のように電磁界が比較的内部に集中していこうのような問題の場合には、本報告の方法よりも収束が悪くなると思われる。

参考文献

- (1) L.Eyges, P.Gianino and P.Wintersteiner, "Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape," J.Opt.Soc.Am., 69, 9, Sept.1979, pp.1226-1235
- (2) V.K.Varadan and V.V.Varadan, "Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering-Focus on the T-Matrix Approach," Pergamon Press, New York, 1980.
- (3) N.Morita, "Surface integral representations for electromagnetic scattering from dielectric cylinder," IEEE Trans., AP-26, 2, Mar. 1978, pp.261-266.
- (4) D.Marcuse, "Theory of Dielectric Optical Waveguides," Academic Press, New York, 1974, Chap.2.
- (5) D.Gloge, "Weakly guiding fibers", Appl.Opt., Vol.10, No.10, pp.2252-2258, Oct. 1971
- (6) E.A.J.Marcatili, "Dielectric rectangular waveguide and directional coupler for integrated optics", Bell Syst.Tech.J., 48, p 2079

- (7) 小楠和彦, 本郷広平, "一般化された伝送方程式による誘電体線路の
解析", 信学論, J60-B, 1, pp.9-16, 昭52年1月
- (8) N.Morita, "Another method of extending the boundary condition for
the problem of scattering by dielectric cylinders", IEEE Trans,
AP-27, 1, Jan. 1979, pp.97-99

輻射科学研究会資料

新しいモード整合法による
散乱電磁界の解析

西村 萬平
(舞鶴高専)

高松 修司 繁次 宏
(同志社大学 工学部)

1980年 1月 30日

1. はじめに

任意形状の物体からの回折、散乱界を数値解析する有力な手段として、モード整合法⁽¹⁾や Point Matching 法⁽²⁾が提案され、その有用性について広く議論されてきた。これらは、散乱界がみたすべき Helmholtz 方程式の解を、物体内部の一点に特異点をもつモード関数の高次項までをとり、それらの一次結合によって表わし、物体面上で入射波との整合を取り方である。ここでは、モード関数の特異点を物体内部に、その形状を考慮して多数分布させ、その各々の点を唯一の特異点とするよう Helmholtz 方程式の基本解（例えれば後述する 2 次元問題では 0 次第 2 種 Hankel 関数）の一次結合で表わされる近似波動関数を境界上で入射波と最小 2 乗法的に整合させることにより散乱電磁界を求める方法を述べる。通常、複雑な形状を有する散乱物体の（特性）寸法 D が波長と同程度もしくはそれより大きくなるような周波数帯 ($kD \gg 1$)においては、従来のモード整合法等を用いると、
 $H_n^{(2)}(kD) \approx H_{n+4m}^{(2)}(kD), m=1, 2, \dots$ なる縮退的な関係に従いされて高次のままで考慮しても精度の良い結果が得られないが、ここで述べる方法によれば、これまで用いられて来たモード整合法の手数よりも少ない展開項数で精度の良い計算ができるこことを、先ず楕円物体をとりあげて示す。
角柱物体についても、Point Matching 法により求められた散乱界よりも少ない展開項数で求められること、またさらに、2 角柱導体のような比較的複

雑な形をした物体についても、同一の手法により散乱波パターンが容易に求められることを示す。

2. 本法の理論

Z 軸方向に均一であり、 $x-y$ 平面上で任意の形状を有する導体柱による平面波の散乱を考える。図 1. に示すように、導体柱と自由空間との境界を Γ とし、導体柱の内部領域を S^- 、また外部領域と S^+ とする。いま Z 軸方向にのみ電界をもつ平面波 (H 波) が、 Z 軸と角度 θ_i をもって入射するとき、点 $P(x, y)$ の入射波は次式で与えられる。

$$E_z^i(P) = E_0 \{ jk(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) \} \quad (1)$$

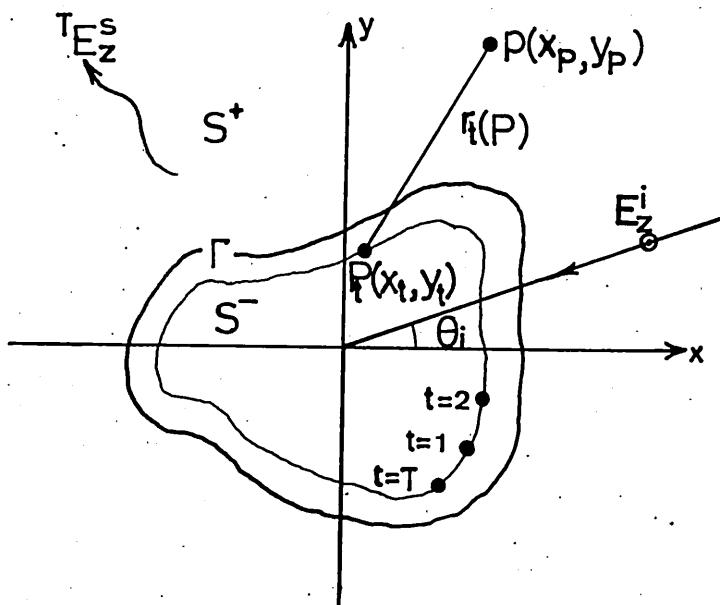


図 1. 散乱導体柱と座標系

ただし、 $\kappa = 2\pi/\lambda$, $P \in S^+$ であり、時間に関する項 $\exp(j\omega t)$ は省略した。次に、この入射波に対して、導体柱が発生する散乱波の電界もやはり S 成分のみであるから、これを $E_z^s(P)$ で表わせば、これは Helmholtz 方程式：

$$\nabla^2 E_z^s(P) + \kappa^2 E_z^s(P) = 0 \quad (2)$$

を満足し、かつ物体の境界上上のすべての点 $P_r(x_r, y_r)$ で境界条件、

$$E_z^s(P_r) + E_z^i(P_r) = 0 \quad (3)$$

を満足するような Dirichlet 問題の解である。このような条件をみたす散乱波を求めるにあたり、図 1 に示すように、物体内部にその形状にそって T 個の点 $P_t(x_t, y_t)$ ($P_t \in S^-$) を取り、その各々の P_t を唯一の特異点とし、かつ外向放射条件を満足する (2) の基本解：

$$\Psi_t(P) = H_0^{(2)}[k r_t(P)] \quad (4)$$

を考える。ここで、 $H_0^{(2)}(kr_t)$ は 0 次第 2 種の Hankel 関数であり、

$$r_t(P) = \sqrt{(x_p - x_{t'})^2 + (y_p - y_{t'})^2}$$

$$P(x_p, y_p) \in S^+$$

である。以下では近似された散乱波 $\Gamma E_z^s(P)$ を、(4)

で与えられるT個の Ψ_t の一次結合

$${}^T E_z^s(P) = \sum_{t=1}^T b_t \Psi_t(P) \quad (5)$$

を表わすことにする⁽⁷⁾。ここで b_t は t 番目の点 P での2次波源の強さを表わす展開係数で、特異点の数Tととの位置 P_t とによって変化する。

今、Tを有限値で打ち切った場合を考え、(3)式の境界条件に(5)を用いたときの相対2乗誤差を

$$\epsilon(T) = \int_P |{}^T E_z^s + E_z^i|^2 ds / \int_P |E_z^i|^2 ds \quad (6)$$

で定める。(3)と(5)を最小2乗法的に境界上で整合させるために、これまでのモード整合法と同様に⁽⁸⁾

$$\frac{\partial \epsilon(T)}{\partial b_l^*} = 0, \quad (=1, 2, \dots, T) \quad (7)$$

より、展開係数は連立方程式

$$\sum_{\substack{t=1 \\ l=1, 2, \dots, T}}^T (\Psi_l, \Psi_t) b_t = -(\Psi_l, E_z^i) \quad (8)$$

を解くことにより求まる。ただし

$$(\Psi_l, \Psi_t) = \int_P \Psi_l^*(s) \Psi_t(s) ds \quad (9)$$

$$(\Psi_\ell, E_z^i) = \int_{\Gamma} \Psi_\ell^*(s) E_z^i(s) ds \quad (10)$$

である。(8)を解いて求められた b_t と (5)により散乱波パターンが求められる。すなわち、極座標における七番目の特異点の位置を $P_t(r_t, \theta_t)$ 、観測点を $P(r, \theta)$ とすれば、Hankel 関数の近似式:

$$H_0^{(2)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\{-jkr - \frac{\pi}{4}\} \quad (11)$$

を用いることにより、十分遠方での散乱電界 ${}^T E_z^S(r, \theta)$ は、

$${}^T E_z^S(r, \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\{-jkr - \frac{\pi}{4}\} f(\theta) \quad (12)$$

ただし

$$f(\theta) = \sum_{t=1}^T b_t \exp\{jkr_t \cos(\theta - \theta_t)\} \quad (13)$$

で与えられる。したがって、微分散乱断面積 $\sigma(\theta)$ と全散乱断面積 σ_{total} は、

$$\sigma(\theta) = \frac{4}{k} |f(\theta)|^2 \quad (14)$$

$$\sigma_{total} = \frac{4}{k} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \quad (15)$$

で与えられる。

3. 特異点の分布(橢円物体の場合について)

前節で示した方法は、物体内部に分散配置した多数の特異点の位置の決め方で計算精度、収束の様子が変化する。そこで本節では図2に示す橢円物体を例にとり、近似散乱波 $E_z^s(P)$ に含まれる誤差の特異点分布に対する依存性について検討する。

まず、 $E_z^s(P)$ に対する展開項数、すなわち特異点の数 T を一定とし、物体と同じ形状の相似比 ρ ($\rho = a'/a$, $0 < a' < a$) で決まる閉曲線にそって等間隔にそれらを配列する。ここで ρ したがって a' を変化させた場合に、(6)で与えられる相対誤差の相似比 ρ に対する依存性を調べたのが図3である。

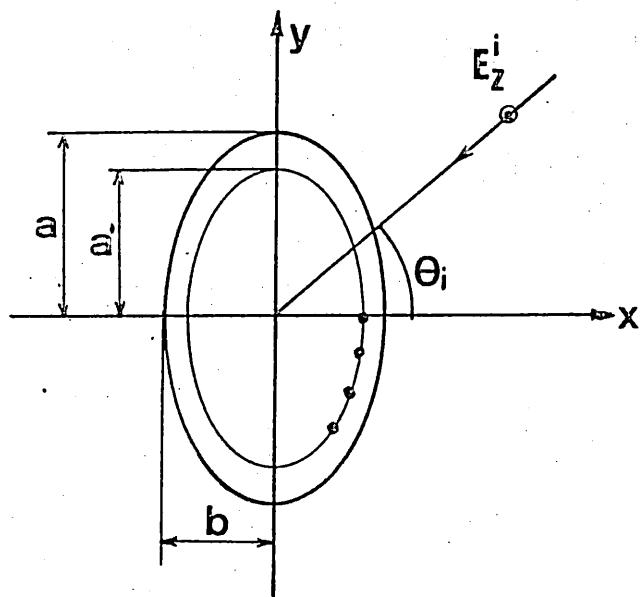
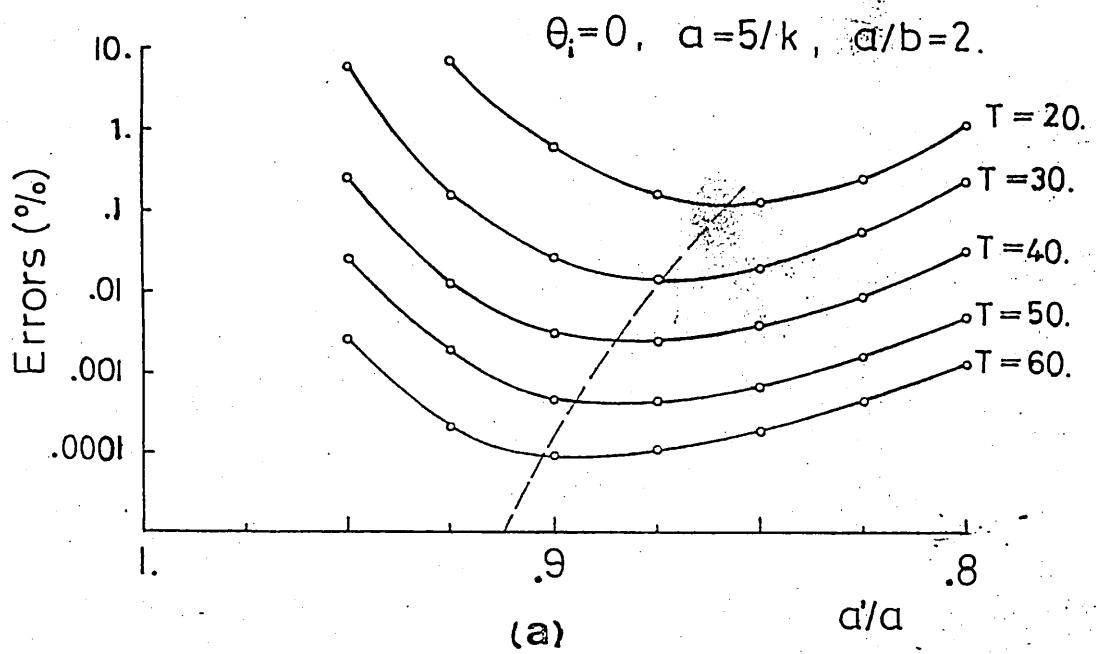
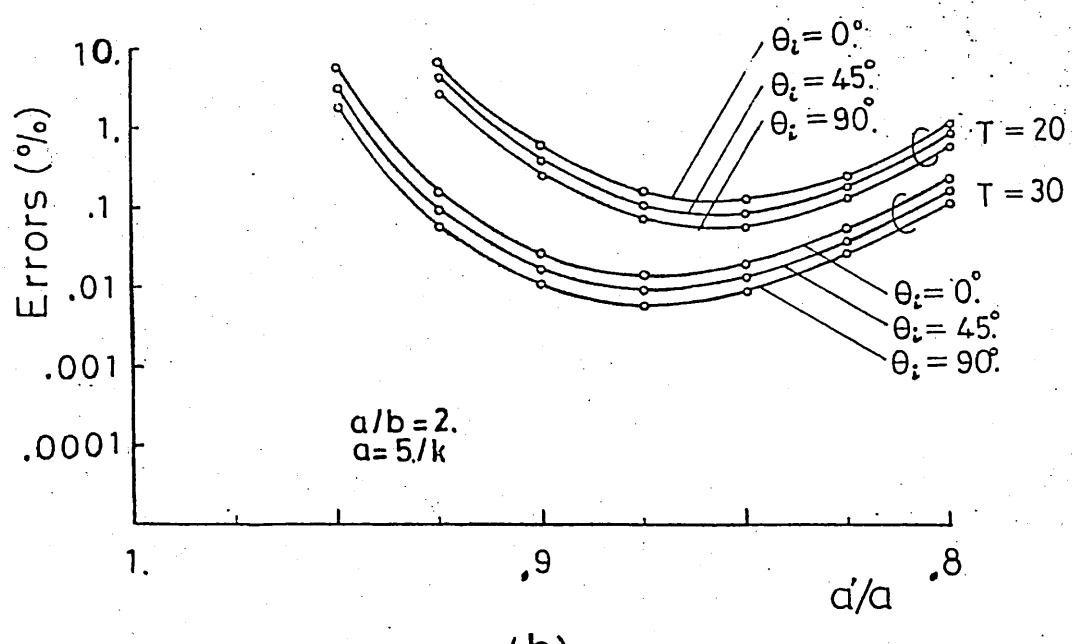


図2. 散乱橢円柱と特異点の配列



(a)



(b)

図3. 相対誤差の相似比 $\beta = a'/a$ 依存性
 (a). 形状一定で 特異実数 T を変化させた場合
 (b). 形状及び T 一定で 入射角 θ_i を変化させた場合

図3.(a)より、物体の大きさ、形状を一定として、 T の数を有限個ご打ち切った場合、誤差を最小とする相似比 ρ 、したがって特異点を配置すべき位置が存在することがわかる。また、特異点を等間隔に配置した場合に、誤差を最小とする相似比は入射波の方向 α に関係なく定まることも図3.(b)よりわかる。さらに、 T の数を増加させるにつれて、特異点の最適な位置はより境界に近く分布することがわかる。このことは、とりもなおさず $T \rightarrow \infty$ としたとき、 $\rho \rightarrow 1$ ($\alpha' \rightarrow \alpha$) となり、したがって(5)式は、Green関数 $G(S, P) = \frac{1}{4\pi} H_0^{(2)}(kr)$ (ただし L, r は Γ 上の S 点と観測点 P までの距離) を用いた散乱界の積分表現

$$E_z^s(P) = \int_{\Gamma} b(S) G(S, P) dS \quad (16)$$

に近づくことを数値実験的に示していると考えられる。

次に相対誤差の物体の形状の変化に対する依存性を示したのが図4である。曲線(a)は本方法によるもので、曲線(b)は従来から行なわれてきたモード整合法⁽¹⁾により求めたものである。従来のように物体内部の一点に特異点をもつ高次のモード関数を用いた近似散乱波に対して、その展開項数(モード数)を一定($M = 2N+1 = 21$)とした場合に、橢円の軸長比 a/b を変化させてゆくと、物体が円筒またはきわめて円筒に近い場合は、精度の良い演算を行うことができるが、軸長比 a/b が大きくなる

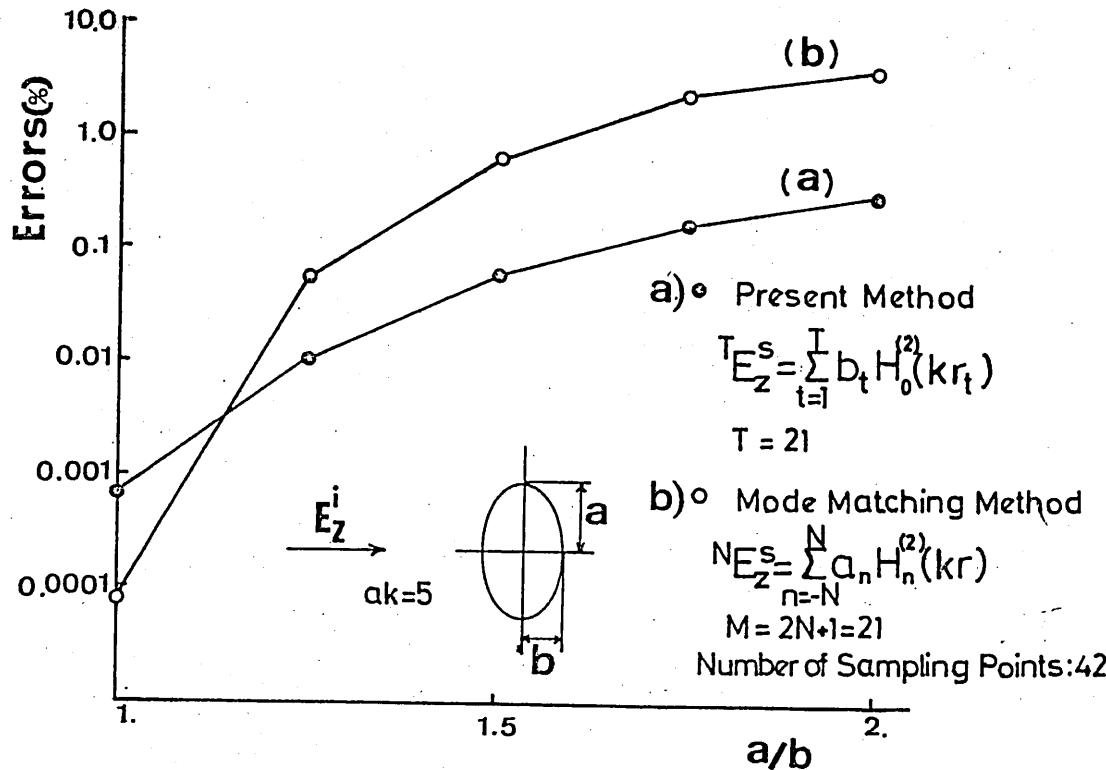


図4. 相対誤差の軸長比 a/b 依存性

なると急激に誤差が増大する。一方、本方法のように物体形状の変化に対して、特異点の分布もとの形状にそって配列するものは、軸長比の相当大きい、ストリップ状をした物体に対しても相対2乗平均誤差の増加をおさえられることが明確にあらわされている。

図5はモードマッチング法により求めた散乱波パターン⁽⁴⁾と、本論文の方法で計算した結果を比較したもので、両者の結果はきわめてよく一致している。このときの展開項数は $T = 30$ で、相対2乗平均誤差は $\epsilon(T) = 0.1\%$ である。

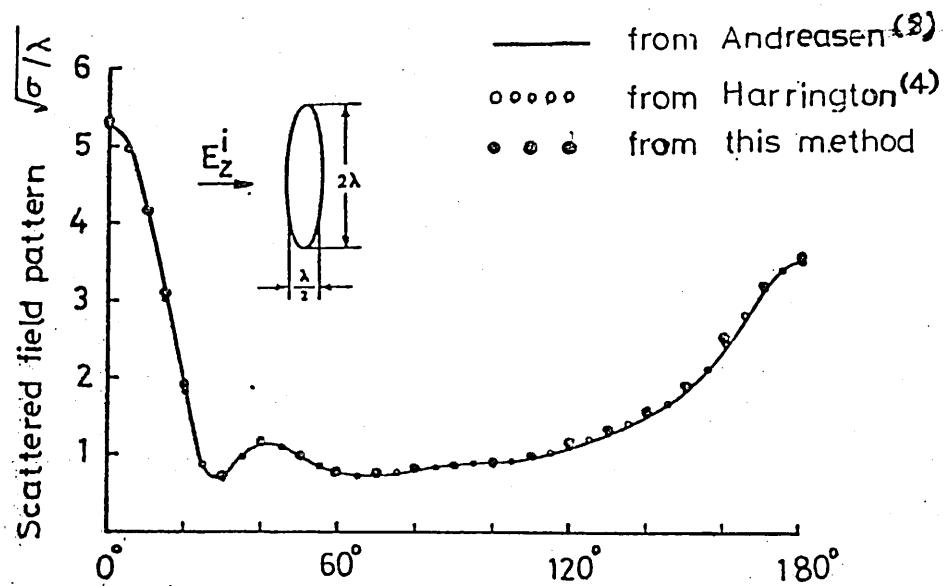


図5. 散乱波パターンの比較

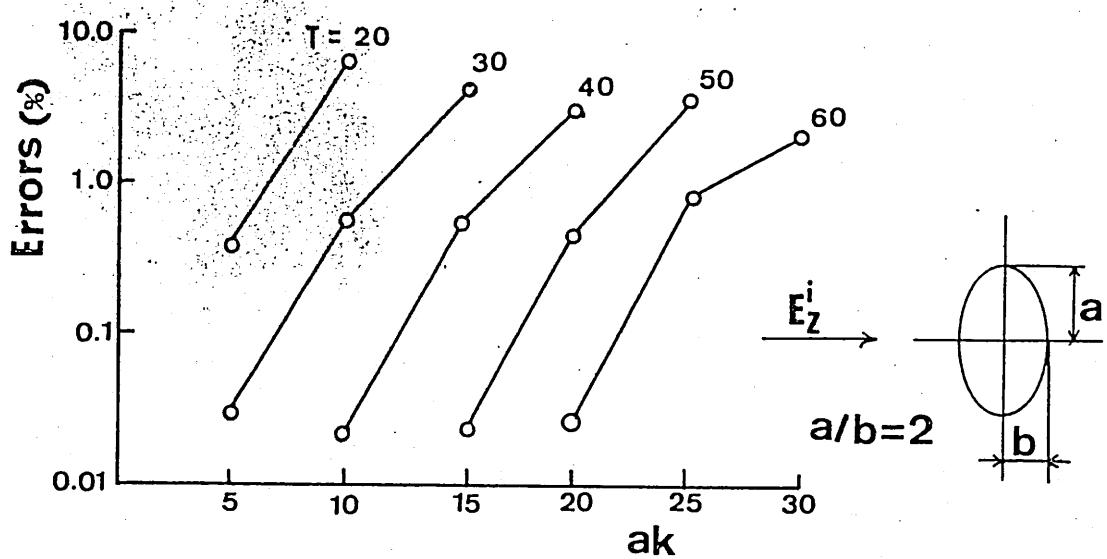


図6. 相対誤差の規格化寸法 ak 依存性

つぎに誤差の波数に対する物体の大きさと展開項数に対する依存性を示したのが図6である。これより物体の形状が大きくなつた場合も、その周長に比例して展開数を増やしてやれば十分であることがわかる。

また図7は、本方法により楕円の軸長比 $a/b = 1 \sim 10$ の場合に、後方散乱断面積 σ_{back} と全散乱断面積 σ_{total} を求めたものである。この場合、 $T=30$ に対する誤差限界を $\epsilon(T)=0.1\%$ としている。ここで、例えば σ_{total} についてみると、 $a/b = 1$ に対しては通常のモード展開法により求められた $\sigma_{\text{total}}/4a = 1.2$ と、また $a/b \rightarrow \infty$ のストリップでは Green関数法により求められた $\sigma_{\text{total}}/4a = 1.01$ とほとんど一致する結果が得られている。このことによ

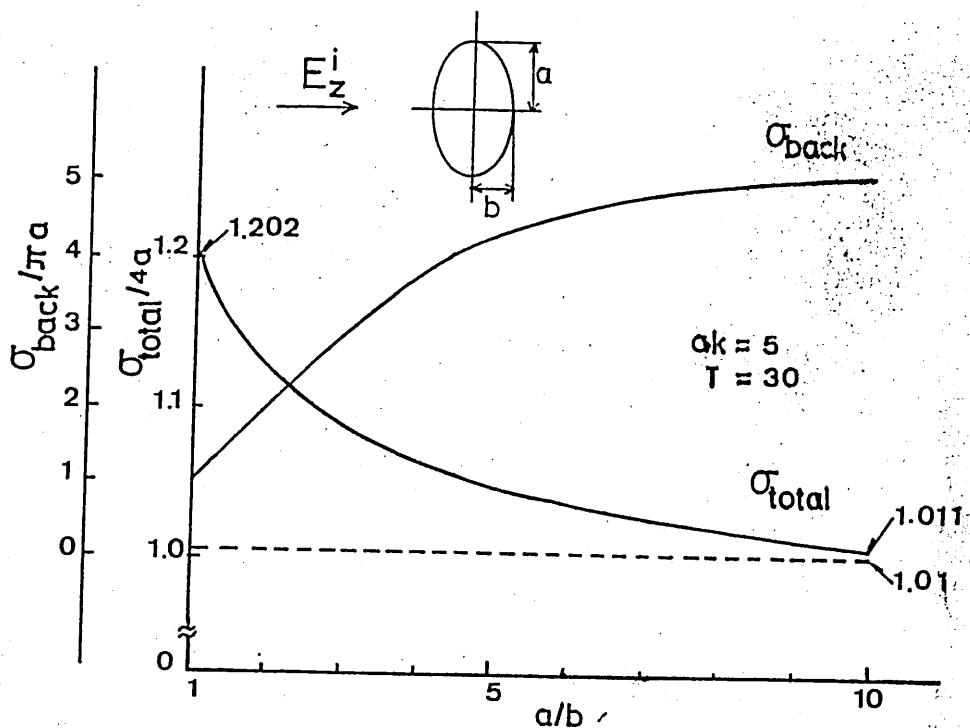


図7. 散乱楕円柱の散乱断面積

り、本方法は円筒物体からストリップ導体に近い物体までの散乱問題に及し、きわめて有効かつ統一的な数値解析の手段にはなりうることがわかる。

4. 角柱物体による散乱

図 8.(a)に示すような角柱物体からの散乱界を前節で行なった手法を用いることができる。この場合効率のよい算法として、 x 軸と y 軸に対する対称性を利用して、図 8.(b.1)～(b.4)に示されるような四つの入射モードを考える手法がある⁽²⁾。

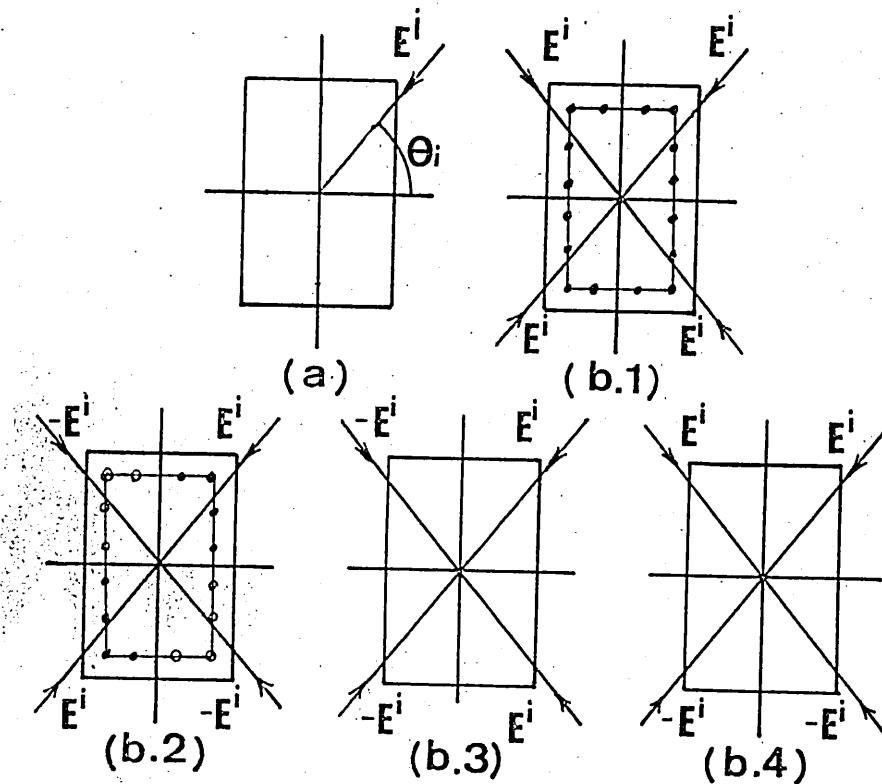


図 8. 散乱角柱 解析のための入射モード

すなわち、入射平面波を

$$\begin{aligned}
 E_z^i &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 b_n E_z^n \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 \left\{ I^n E_z^n(\theta_i) + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} E_z^n(\pi - \theta_i) \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} E_z^n(\pi + \theta_i) + (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} E_z^n(-\theta_i) \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

なる四つのモードの和の形におけるば、入射波の対称性より、各点における展開係数も四つの対称性をもつ値に分類することができる。すなわち、 $t=1, \dots, t=T/4$ までの展開係数を4回求めることにより、全ての展開係数 $b_t (t=1, 2, \dots, T)$ を求めることにする。

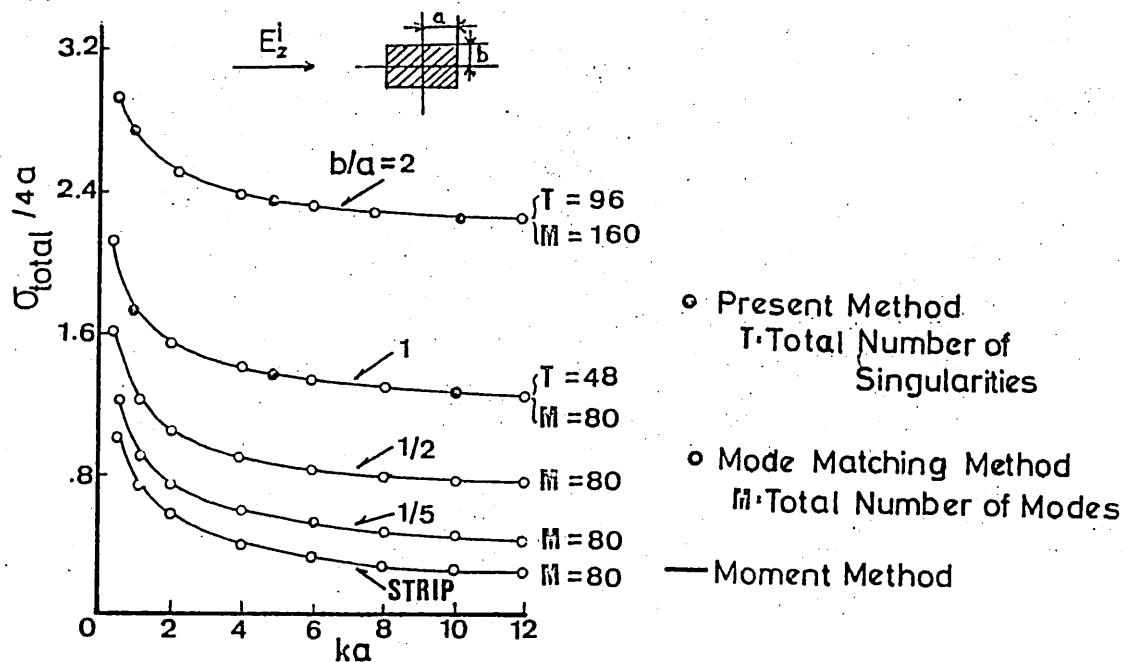


図9. 角柱の全散乱断面積

図9は、全散乱断面積について、文献(2)と(5)に示めされていいる結果と、本論文で示した方法で計算した結果を比較したものである。この図より明らかに、従来のPoint Matching法よりも少ない展開項数で、散乱界が同程度の精度で求まることがわかる。この場合2乗平均誤差は1%以下である。

図10は、任意の方向を向いた2角柱導体からの散乱波パターンを求めたものである⁽⁶⁾。このように、比較的複雑な形状による散乱も容易に数値解析できることがわかった。

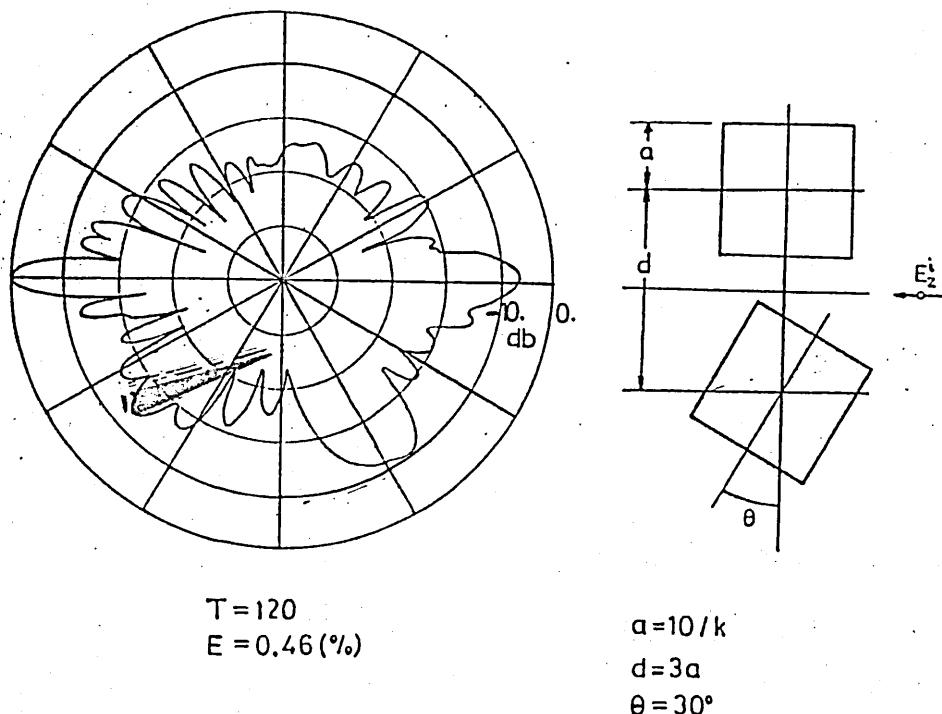


図10. 2角柱導体の散乱波パターン

5. むすび

散乱問題の数値解析上の諸問題、とくに数値計算における演算時間と演算誤差を改善する一手段として、Helmholtz方程式の基本解を用いて散乱界を展開する方法について述べ、その有用性を。

Dirichlet問題について示した。今後は Neumann問題や、誘電体柱のようなさうに一般的な境界値問題への応用ならびに実験的データとの比較検討をおこなう予定である。また 本論文ごとに手法ご問題となるのは、特異点の分布ごあり、現在との最適配置法についての理論的検討を行っており、その結果は別報ご報告させて貰く予定である。

未筆ながら、終始御指導、御梗概いただく同志社大学滝山敬教授に謝意を表します。

参考文献

- (1) 安浦他；電気学会：EMT-72-16(1972, 6)
- (2) 細野他；信学論誌；79/7, Vol. J62-B No. 7
- (3) 飯島他；電磁界の近代解析法，信学会編
- (4) Harrington；Field Computation by Moment Methods；Macmillan Company (New York)
- (5) Mei, Kk, et al; IEE Trans. Ap.-II Pt85 (1963)
- (6) 西村；昭55電気関係関西 GII-10
- (7) R. Mathon, et al; SIAM. J. Numer. Anal., Vol. 14, No. 4

輻射科学研究会資料

利得增加用誘電体板付
平面アンテナ

西村 貞彦 仲西 秀基

(大阪大学基礎工学部)

杉尾 嘉彦 牧本 利夫

(摂南大学工学部)

昭和56年1月30日

利得増加用誘電体板付平面アンテナ

西村貞彦・仲西秀基

(大阪大学 基礎工学部)

杉尾嘉彦・牧本利夫

(楢南大学 工学部)

I. まえがき

近年、高利得アンテナの小型、軽量化が注目され、マイクロストリップアンテナの研究が活発に行なわれている。この種のアンテナには、普通、マイクロストリップアンテナ⁽¹⁾、マイクロストリップラインスロットアンテナ⁽²⁾、マイクロストリップラインアンテナ⁽³⁾などがある。プリント基板は、軽量で加工が容易であり、薄型のアンテナを作ることができるという特徴がある。我々はこのうちのマイクロストリップラインアンテナについて、すでに研究、発表してきた。

また、高利得化をはかるために大、小反射板を取り入れた構造のショートバックファイアーアンテナ⁽⁴⁾がある。ショートバックファイアーアンテナが高利得であることを示すのに両反射板間の多重反射を考えアンテナ列を形成してこれより指向性の向上を示す方法⁽⁵⁾や開口面上の電磁界分布を用いて指向性の向上を示す方法⁽⁶⁾などがある。

本報告書では、ショードバックファイアーアンテナの構造に対比すると、大反射板、および波源に当たる部分にマイクロストリップラインアンテナを、小反射板に代わって誘電体板をもつ利得増加用誘電体板付平面アンテナについて、原理を説明し、あわせて実験した結果、良好なるアンテナが得られたので報告する。^④

2. 利得増加用誘電体板付平面アンテナ

ここでは、まず2.1.で平面波の誘電体の入射を考え、更に厚さの誘電体板への平面波の入射を考え、それぞれの場合に反射係数を求めている。2.2.で本アンテナの動作について述べている。

2.1. 反射係数

比誘電率 ϵ_r をもつ誘電体への平面波の入射を考えると界面における反射係数 R は、

$$R = (-1)^{\xi+1} \frac{\cos \theta_r - \epsilon_r^{\xi-\frac{1}{2}} \cos \theta}{\cos \theta_r + \epsilon_r^{\xi-\frac{1}{2}} \cos \theta}, \quad \xi = \begin{cases} 0 & (i=TE) \\ 1 & (i=TM) \end{cases} \quad (1)$$

と示される。ただし、 ι は添付された文字がTE波またはTM波に対応することを示す記号とする。 θ は入射角度を、 θ_r は誘電体内部での透過角度を示し図2のように定められる。

次に厚さ ϵ 、比誘電率 ϵ_r の誘電体板への平面波の

入射を考え、誘電体板内部での多重反射をも考慮した誘電体板の反射係数 ρ_i は、

$$\rho_i = \frac{2\Gamma_i}{(1+\Gamma_i^2) - j(1-\Gamma_i^2)\cot\phi} \quad (2a)$$

$$\phi = k\sqrt{\epsilon_r}t \cos\theta_r \quad (2b)$$

と示される。^[8]ただし、 k は自由空間における伝搬定数である。一般に Γ_i は θ の関数で複素数であり $|\Gamma_i| \leq 1$ である。

特に $t = \lambda_e / 4$ (λ_e : 誘電媒質波長を示すこととする。) の誘電体板を考え、平面波の垂直入射を考えると、 $\theta = \theta_r = 0$ で $\phi = \pi/2$ となるので偏波に無関係に

$$\Gamma_0 = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \quad (3a)$$

となり、誘電体板の反射係数 ρ_0 は、

$$\rho_0 = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \quad (3b)$$

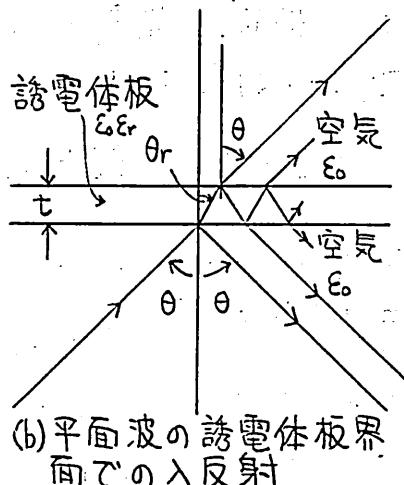
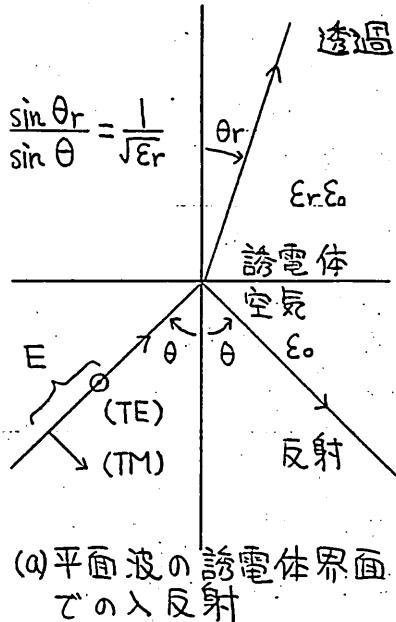


図 1. 平面波の入反射

(3)

となる。

以下の説明では、厚さ $\tau = \lambda_e / 4$ の誘電体板を考えることとし、入射角度 θ 、偏波に無関係に垂直入射における反射係数 P_0 で反射係数を表わすこととする。

2.2. 原理

図2(a)に示すようにプリント基板のストリップ導体は地導体によるイメージを考え図2(b)のように原点上に element factor として $\sin(ka \cos \theta)$ をもつ等価指向性放射導体 A_0 があると考えられる。ただし、プリント基板の誘電体を無視することとし、 $a \ll \lambda_e$ なので $ka \ll 1$ となり、

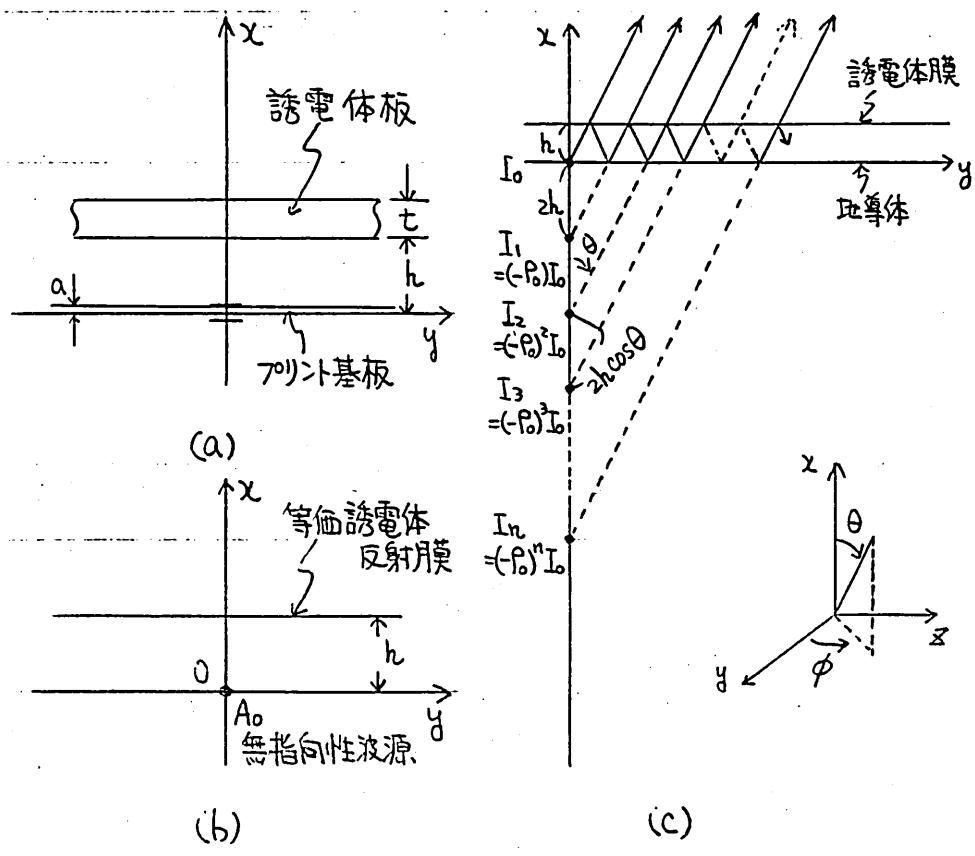
$$\sin(ka \cos \theta) \approx ka \cos \theta$$

とおきて、element factor は $\cos \theta$ となるが、簡単に原理を説明するため、ここでは無指向性の波源を原点におくことにする。

次に図2(a)に示す誘電体板に対して内部での多重反射を考慮した反射係数は、 $\tau = \lambda_e / 4$ のとき式(3 b)の P_0 で与えられる。これより、図2(a)に示す誘電体板は等価的に厚さ無限小の反射係数 P_0 をもつ反射膜として図2(b)のように置き代えられると仮定する。

いま、地導体も誘電体板も無限に大きいものとす

ると、等価放射導体 A_0 より放射された電磁波は、一部は等価反射膜を透過し、残りは反射し地導体で全反射し、再び一部は等価反射膜を透過し、残りは反射する。この過程を繰り返し電磁波は次々と等価反射膜を透過して、地導体と等価反射膜間で多重反射している電磁波はしだいに減衰していく。このとき等価反射膜の反射係数 P_0 が大きい程、多重反射の回数は多い。この多重反射の様子は図 2(C)に示され、指向性 D は等価放射導体 A_0 と等間隔 $2h$ で並んだ等価反射膜の反射係数 P_0 で定まるテール状に振幅分布



をもつ1次元アレーから求められる。

ここで、等価放射導体 A_0 の振幅を I_0 とすると各イ
ンピーダンス導体 A_n の振幅 I_n は、

$$I_n = (-\rho_0)^n I_0 \quad (4)$$

となる。このとき指向性 D は、

$$D = \frac{2F(\theta_0)F^*(\theta_0)}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta)F^*(\theta) \sin\theta d\theta} \quad (5a)$$

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^N I_n e^{jn\psi} \quad (5b)$$

$$\psi = 2kh \cos\theta \quad (5c)$$

と表められる。地導体と等価反射膜との間隔 h を $\lambda_0/2$ (λ_0 :自由空間波長とする) に選ぶこととする
と各素子間隔が $2h = \lambda_0$ となり、1次元アレーの指
向性 D は、 $\theta_0 = 0$ の正面方向で、

$$D = \frac{\left| \sum_{n=0}^N I_n \right|^2}{\sum_{n=0}^N |I_n|^2} = \frac{\left| \sum_{n=0}^N (-\rho_0)^n \right|^2}{\sum_{n=0}^N |(-\rho_0)^n|^2} = \frac{\{1 - (-\rho_0)^N\}^2 \{1 - (-\rho_0)\}}{\{1 - (-\rho_0)\}^2 \{1 - (-\rho_0)^{2N}\}} \quad (6)$$

とえられる。ただし、 $|\rho_0| < 1$ である。

いま、 N の大なる値に対して $(-\rho_0)^N \rightarrow 0$ となり、

$$D = \frac{1 - \rho_0}{1 + \rho_0} \quad (7)$$

(6)

となる。式(7)に式(3 b)を代入して

$$D = \epsilon_r \quad (8)$$

が得られる。

ここでは A_0 が無指向性であるが、実際には指向性波源であるので指向性は ϵ_r に比例して更に増す。結局、比誘電率 ϵ_r の大きい誘電体板を用いることでより高い指向性をもつアンテナを得ることになる。

3. アンテナの構造

ここで利得増加用誘電体板付平面アンテナの構造を図3に示す。マイクロストリップライン（線路インピーダンス $\epsilon_r = 50 \Omega$ ）のストリップ導体をクラシク状に折り曲げ、全体として1次元アレーインテナを構成し、その上部の利得増加用の誘電体板を用

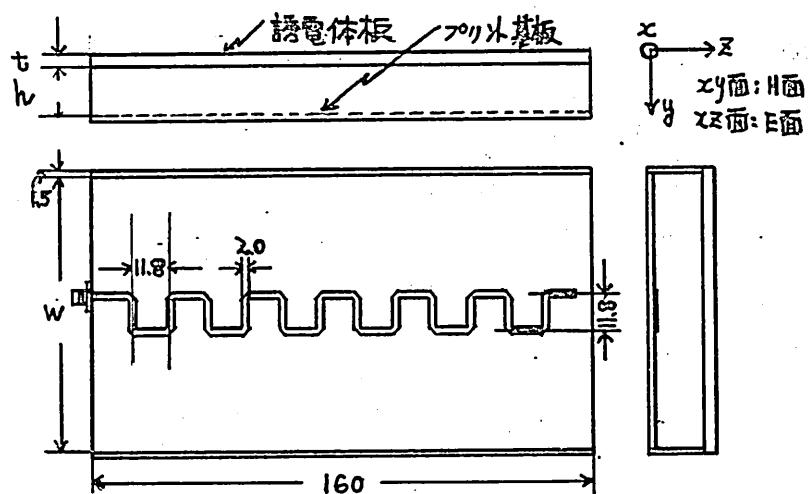


図3. 利得増加用誘電体板付平面アンテナ

(7)

側の金属板で支持している。このときクランプの1辺の長さを約半線路波長に選び、2方向の偏波のアンテナとして動作させている。ただし、図3は幅Wが90mm以下のときの図であり、無限大を想定して行なった実験では、160mm×900mmの地導体板、誘電体板を使用し、160mm×90mmのマイクロストリップラインアンテナを地導体板に取り付けて行った。また、誘電体板を支持するためには、両側の金属板の代わりにベーフライトで作ったスペーサーを用いた。

4. 実験結果

実験には、プリント基板REXOLITE1422($\epsilon_r=2.53$ 、厚さ0.8mm)を用いたマイクロストリップラインアンテナと誘電体板として市販のアクリル板とプラス板を用いた。また、誘電体板の比誘電率 ϵ_r は測定より、順に2.64、4.30であることがわかつた。まず、4.1.で幅W = 900mmのとき、2種類の誘電体板について厚さを、高さを種々変えてその指向特性をXバンドで測定した。4.2.では幅Wを90mmから58mmまで8mmづつ変えたときに同様な測定を行なった。

4.1. $W = 900\text{ mm}$

図4は高さを一定にしたときの厚さに対する

正面方向の動作利得で h をパラメータとして示している。(a), (b)はそれぞれ誘電体板にアクリル板, ガラス板を用いたときの図である。これより、厚さ t は約 $h/4$, 高さ h は約 $h/2$ のときに最も動作利得

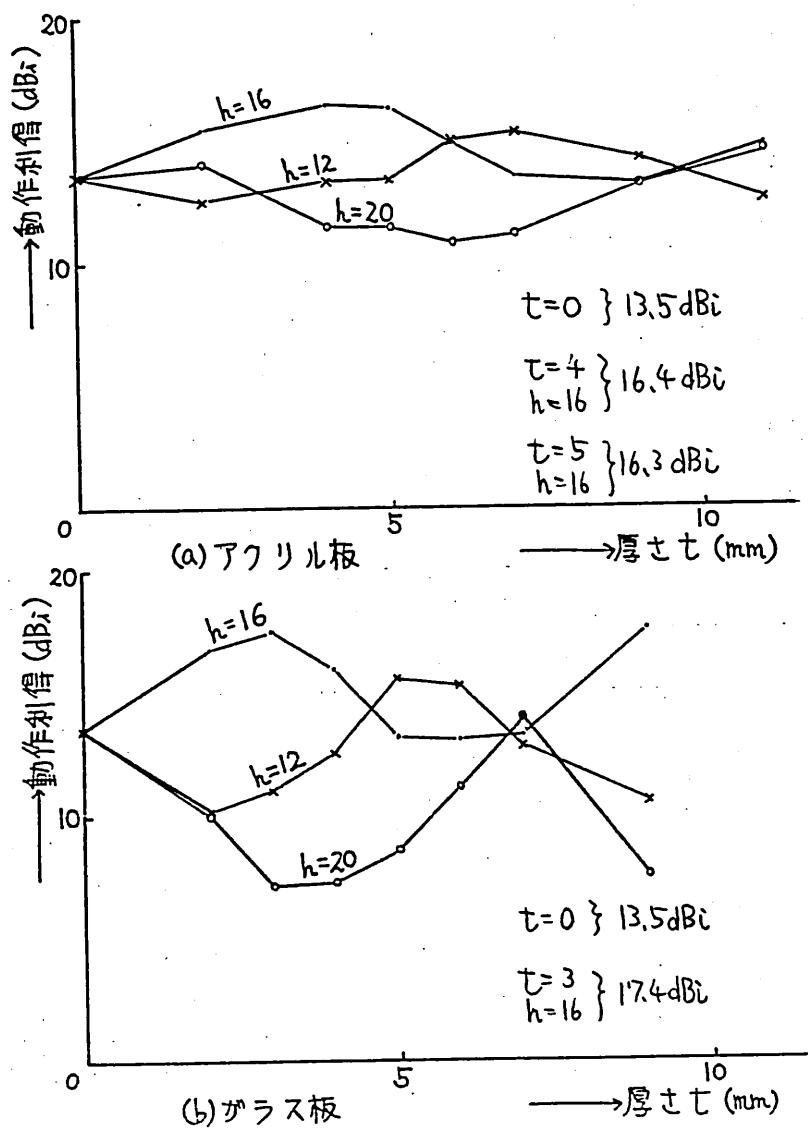


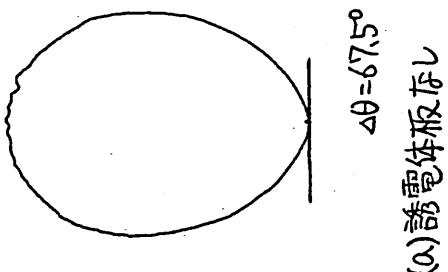
図4. 厚さ t , 高さ h と動作利得の関係
($W=900$ mm, $f=9.3$ GHz)

得の高い利得増加用誘電体板付平面アンテナが得られる。また、厚さ ϵ 、高さ h について動作利得が高くなる寸法に周期性があることがわかるが、厚さ ϵ に対しては約 $\lambda_e/4$ の奇数倍、高さ h に対しては約 $\lambda_e/2$ の整数倍である。図5はH面電界指向特性を示す。(a)は誘電体板をつけないときのものであり、(b), (c)はそれぞれアクリル板、ガラス板を誘電体板として用いたときの厚さ $\epsilon = \lambda_e/4$ と一定にしたときの高さ h に対する変化を示している。図6は高さ $h = \lambda_e/2$ と一定にしたときの厚さ ϵ に対するH面電界指向特性の変化を示し、(a)はアクリル板を使ったとき、(b)はガラス板を使ったときのものを示す。

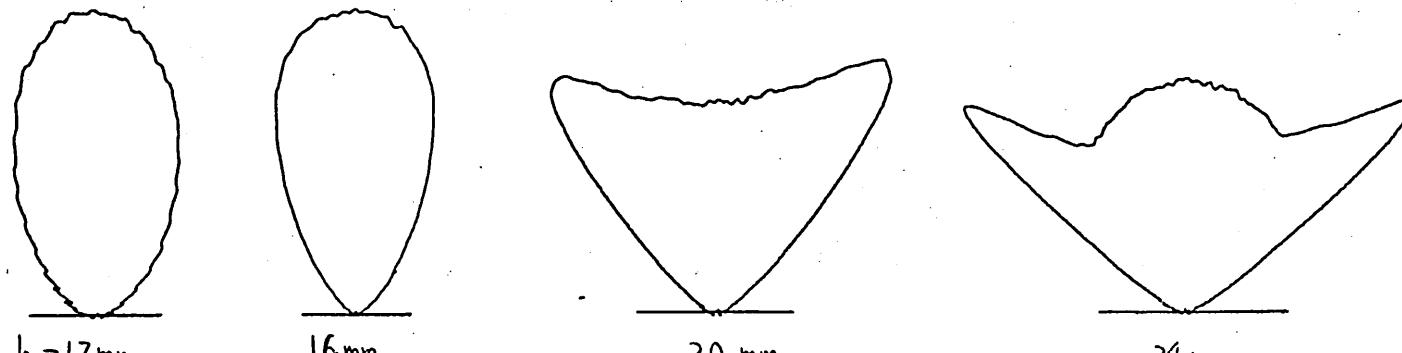
4.2. 幅Wを変えたとき

図7は幅Wを90mmから58mmまで8mmづつ狭くしたときの動作利得の変化を示す。(a)の図中の理論値は、開口面積から決まる値で $10 \log (4\pi A/\lambda_e^2)$, $A = 160 \times W (\text{mm}^2)$ で計算した値である。実験値をこの理論値で評価すると(b)のように示される。これは理論値に対する実験値の割合を%で示したものである。

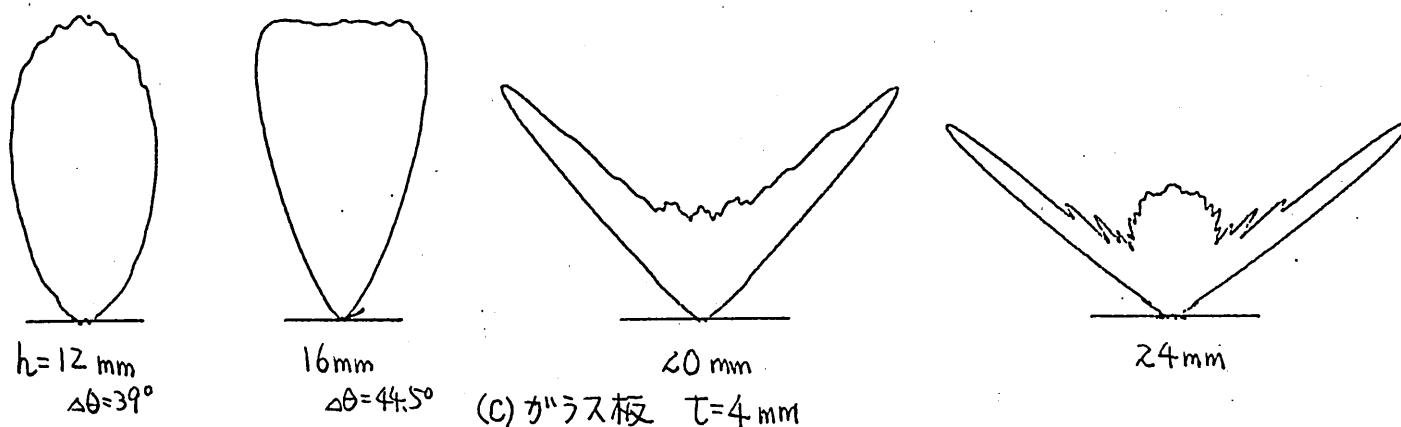
(a)より最大利得を示す幅Wつまり、アクリル板使用のときには $W = 74\text{mm}$, ガラス板使用のときには $W =$



(11)



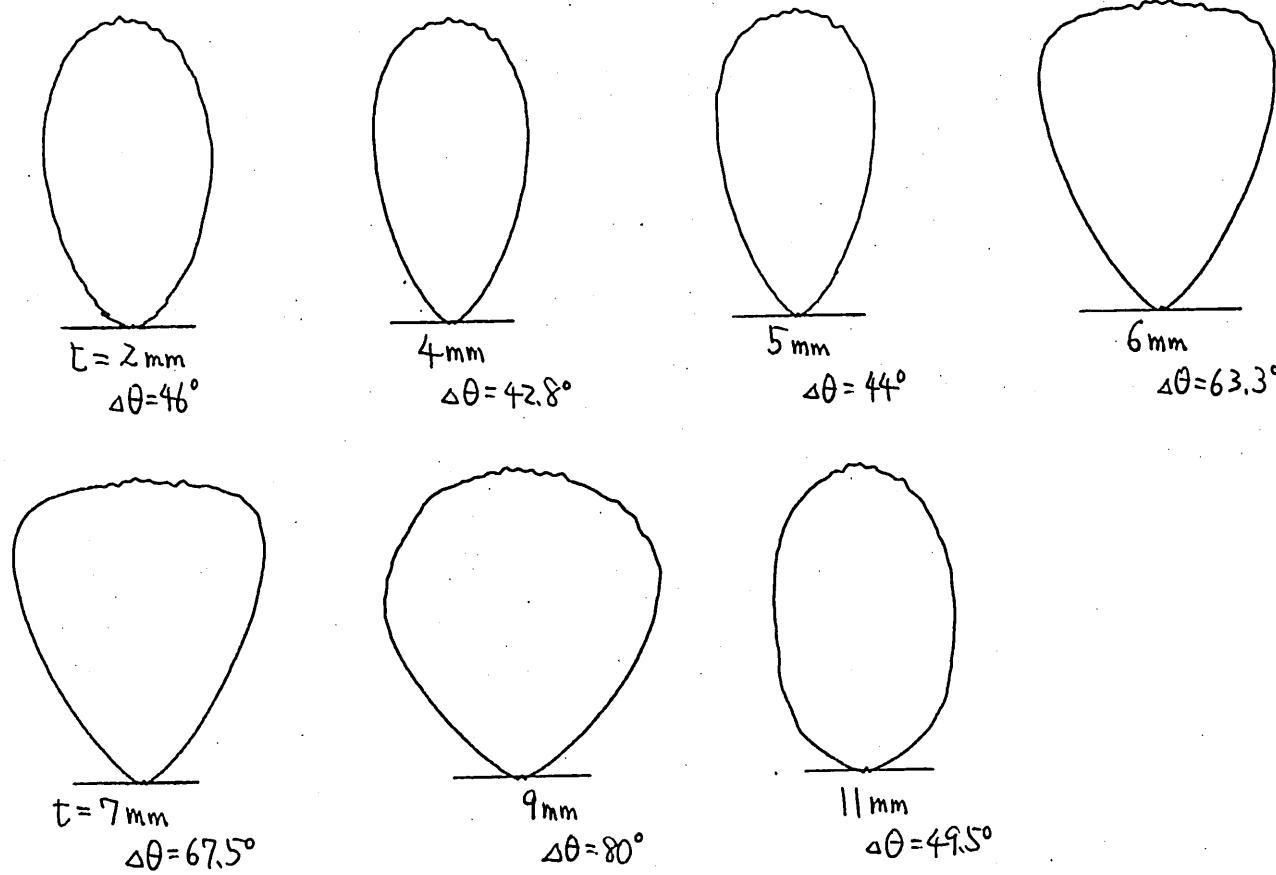
(b) アクリル板 $t = 5 \text{ mm}$



(c) ガラス板 $T = 4 \text{ mm}$

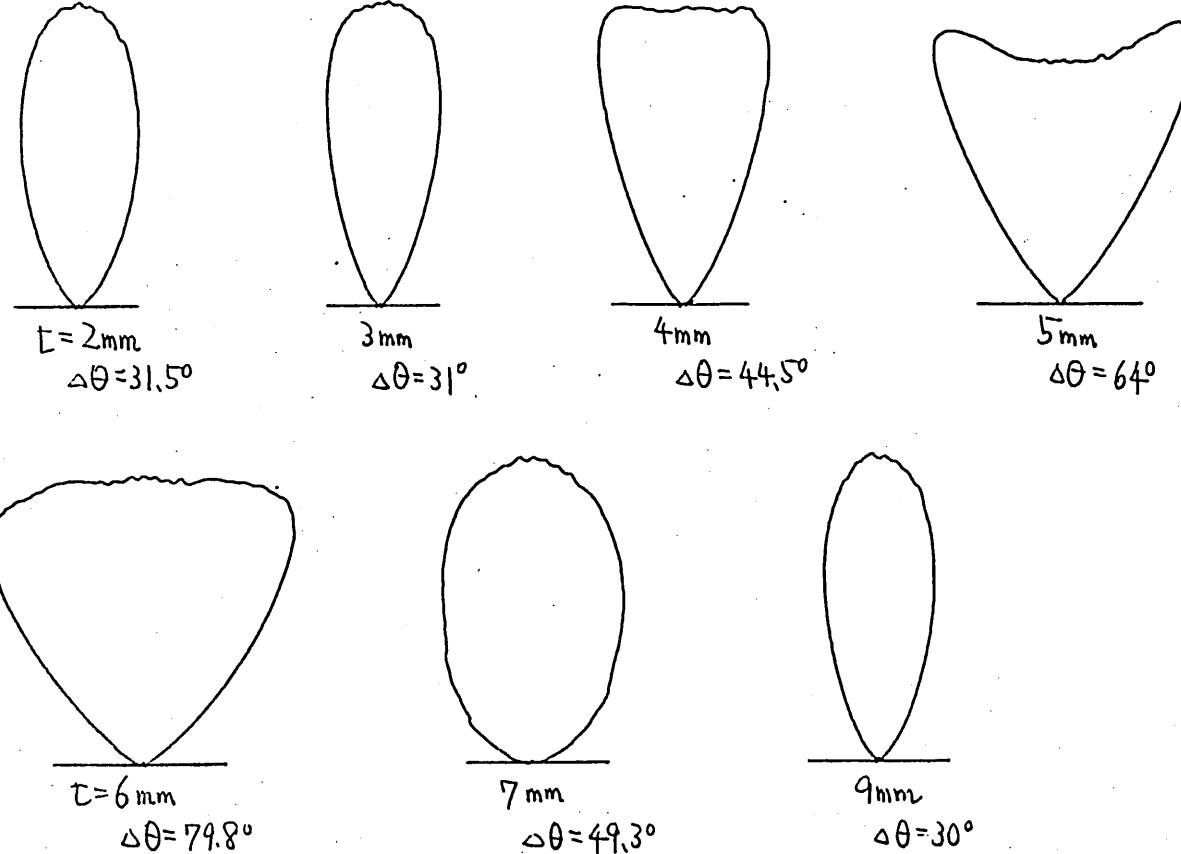
図5. H面電界指向特性 ($W = 900 \text{ mm}$, $f = 9.3 \text{ GHz}$)

(12)



(a) アクリル板 $h = 16 \text{ mm}$

(13)



(b) ク"ラス板 $h=16$ mm

図 6. H面電界指向特性 ($W=900$ mm, $f=9.3$ GHz)

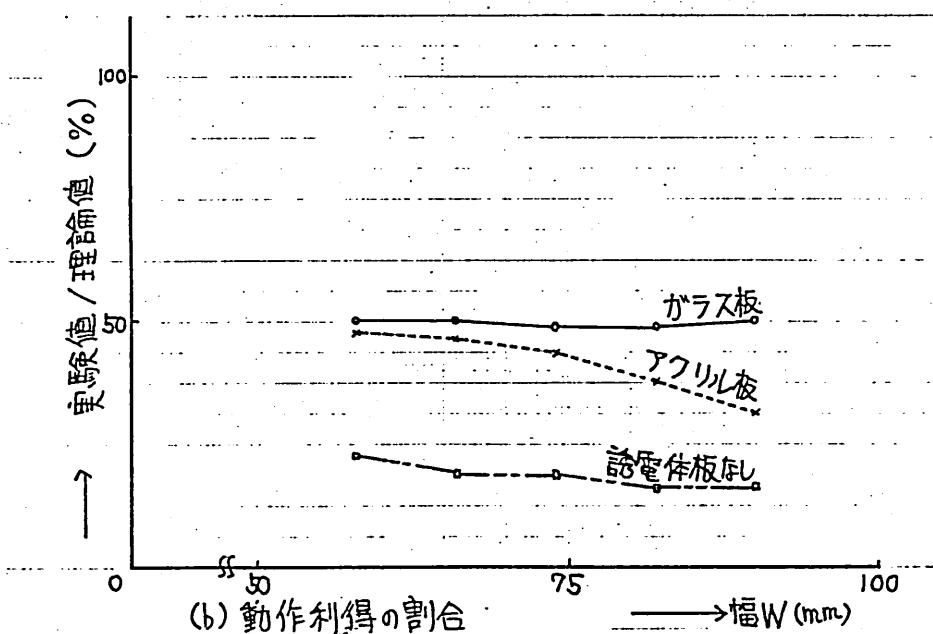
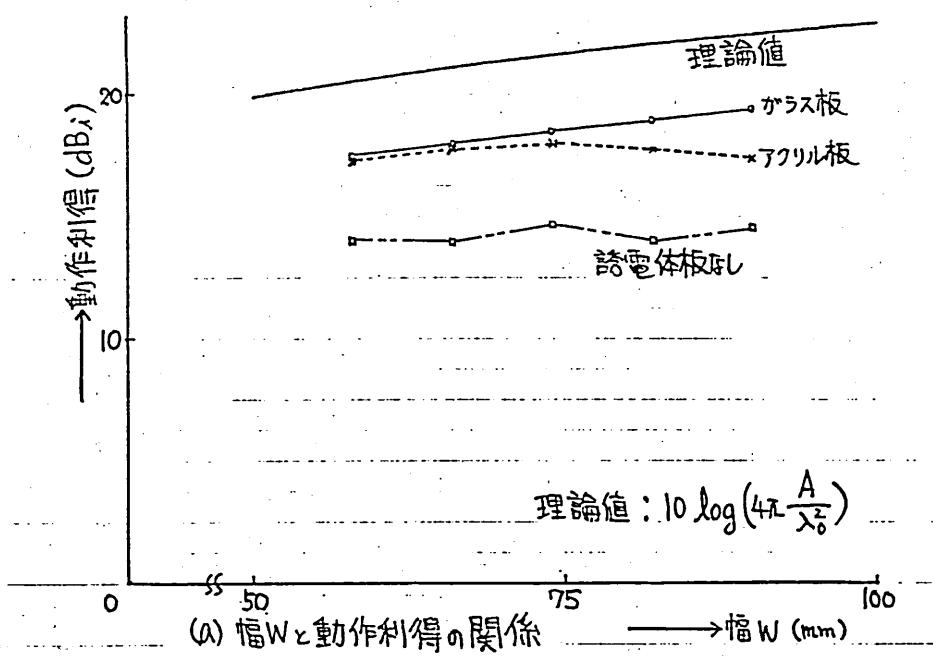


図7. 幅Wと動作利得の関係 ($f=9.3\text{GHz}$)

90 mm が求まる。図8は高さ t を一定にしたときの厚さ h に対する動作利得で h をパラメータとして示したものである。(a), (b)はそれぞれ誘電体板にアクリル板を用いた幅74 mmに対する変化、およびガラ

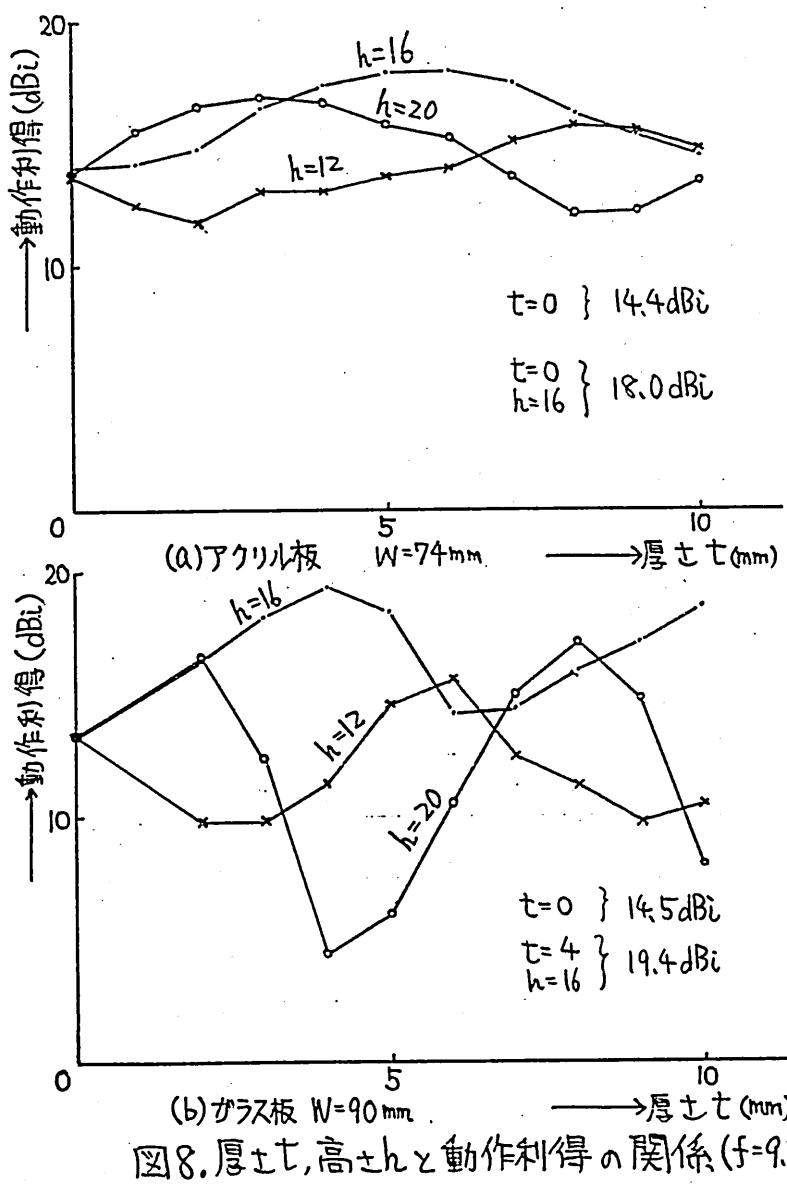


図8. 厚さ t , 高さ h と動作利得の関係 ($f=9.3 \text{ GHz}$)

ス板を用いた幅90mmに対する変化を示している。幅Wに無関係に高さ $h = \lambda_e / 2$, 厚さ $t = \lambda_e / 4$ で最大動作利得を示している。図9は幅W = 74mmに対してアクリル板をつけた場合とつけない場合、更に幅W = 90mmに対してガラス板をつけた場合とつけない場合のH, 正面電界指向特性を示す。

5. 考察

図4より誘電体板の厚さ t , 高さ h 、比誘電率 ϵ_r により動作利得が変化することがわかるが正面方向で動作利得が最大になるのは、比誘電率 ϵ_r に無関係に高さ $h = \lambda_e / 2$, 厚さ $t = \lambda_e / 4$ であることがわかる。更に高さ h 、厚さ t には動作利得が最大となる周期があり、高さ h が $\lambda_e / 2$ の整数倍付近、厚さ t が $\lambda_e / 4$ の奇数倍付近とみられる。

図5(b), (c)の $h = 20$, 24 mm のH面電界指向特性をみると正面方向でくぼみある角度で指向性最大となっている。これは一般に地導体と反射膜との距離 h が $\lambda_e / 2$ 以上になるとある角度 θ の方向に対しても進行する電磁波の同相条件が満足されることがある。つまり式(5c)より

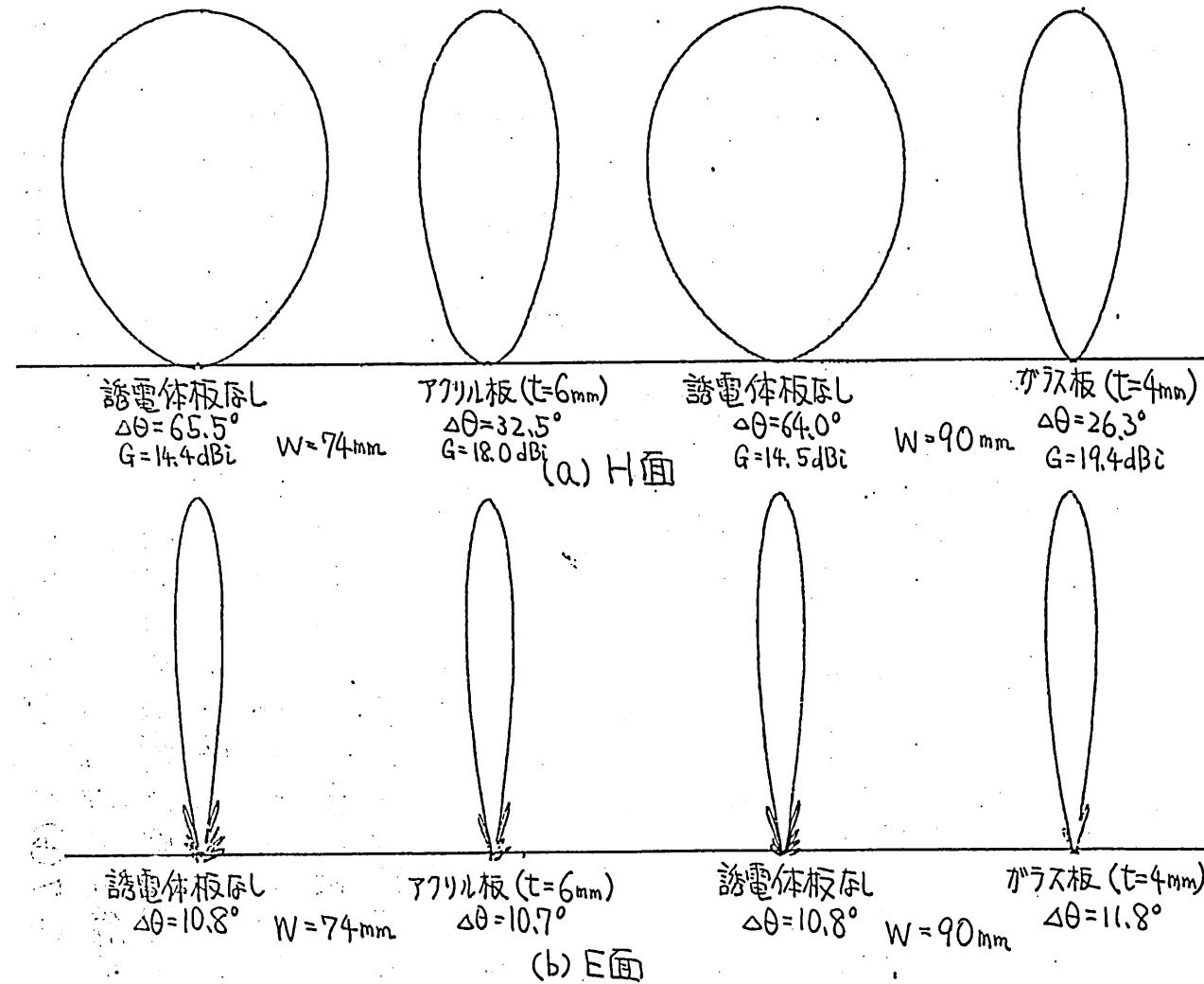
$$\psi = 2kh \cos \theta = 2n\pi \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (9)$$

とえられ、 $h = 20$, 24 mm のときの指向性最大の角度 θ_{20} , θ_{24} を(9)式から求め、実験結果と比べる

(16)

(17)

図9. 電界指向性 ($f = 9.3 \text{ GHz}$)



と右表のようになる。

次に幅Wについて考えると、図8より幅Wが

狭いときに幅 $W = 900\text{ mm}$ の動作利得に比べてより高い動作利得が得られたので幅Wについても適当な寸法があると考えられる。また最大動作利得の寸法は幅Wに無関係に高さ $h = \lambda_0/2$ 、厚さ $t = \lambda_0/4$ が保たれていることにも注目される。ガラス板を用いる場合には、 $W = 900\text{ mm}$ のときの最適寸法における動作利得が $W = 90\text{ mm}$ の場合より低くなること、図7(a)とを考えあわせて幅Wを 90 mm より広くすることで更に利得の高い利得増加用誘電体板付平面アンテナが得られるものと期待される。アクリル板を用いる場合には $W = 74\text{ mm}$ の幅で動作利得最大の利得増加用誘電体板付平面アンテナが得られた。

結局、幅W、比誘電率 ϵ_r に無関係に正面で動作利得最大のアンテナを得るために誘電体板の厚さ $t = \lambda_0/4$ 、高さ $h = \lambda_0/2$ の寸法が与えられ、幅Wの適当な寸法は比誘電率 ϵ_r により定められることが結論される。

図7(b)より1次元マイクロストリップラインアンテナを用いるときには開口面積から得られる利得の計算値に対してほぼ50%のアンテナが得られた。

図9より誘電体板の有無による電界指向特性の変化がわかる。また比誘電率が高い誘電体板を用いることにより一層H面電界指向特性が鋭くなることがわかり、結果として利得の増加をもたらしている。E面電界指向性は誘電体板の有無にかかわらずビーム幅の変化はあまりない。しかしながら広角度におけるサイドローブレベルが下がっている。誘電体板にはむやみにサイドローブを出すことなく簡単にビームをしづらせる効果(図(5), (6))があることからもうなづける。

6. むすび

利得増加を伴う誘電体レドームを被せた新しい構造の利得増加用誘電体板付平面アンテナを提案し、動作原理の説明および実験を行なった。その結果、誘電体板を用いて利得増加がはかることが確認された。本アンテナは、わずか1波長弱の薄形で利得増加が実現されるマイクロストリップ平面アンテナとして有効である。

参考文献

- [1] 三瀬、西村、牧本、信学技報 Vol.76, No.273, AP76-89 (1977-02)
- [2] 中畠、吉原、伊藤、松本、信学技報 Vol.77, No.26, AP77-9 (1977-05)
- [3] 西村、中野、牧本、昭54信学総全大 S6-1
- [4] H.W. Ehrenspeck, 'The Short-Backfire Antenna', Proc. IEEE, Vol.53, p1138, 1965
- [5] S.C. Loh and W.S. Leung 'The radiation field of the short backfire antenna,' Radio & Electron. Eng., 1970, 39, p198
- [6] K.M. Chen, D.P. Nyquist and J.L. Lin 'Radiation fields of the Short-Back-fire Antenna,' IEEE Trans. Ant and Prop, Vol. AP-16, 1968, p596
- [7] 西村、仲西、杉尾、牧本、信学技報 Vol. 80 No. 229, AP80-111 (1981-01)
- [8] R.J. Mailloux 'Synthesis of Spatial Filters with Chebyshev Characteristics,' IEEE Trans. Ant and Prop, Vol. AP-24, No. 2, 1976, p174