

RS 90 - 1

不規則円筒面による電磁波の散乱理論

— 水平偏波入射 —

小倉 久直、高橋 信行、桑原 幹夫

(京都大学 工学部)

1990年5月11日

(輻射科学研究会資料)

不規則円筒面による電磁波の散乱理論 — 水平偏波入射 —

小倉 久直、高橋 信行、桑原 幹夫
京都大学

1 序論

不規則面による電磁波の散乱、いわゆる乱反射の問題は普遍的な現象であって、電波領域では不規則な地表面、海面上の散乱・伝搬、レーダーエコー、レーダークラッタ、スペckルなどの問題、光領域では、乱反射、不規則界面による表面プラズモンの励起、光導波系の不規則面による散乱など種々の実際上の問題としてあらわれる。これらは理論的にも興味ある問題であり、今まで多くの研究者が取扱ってきたが、初等的な摂動法などによる通常の散乱理論は、多重散乱を含む場合に、いわゆる発散の困難を生じることによく知られている。確率的に不規則な境界面による散乱波動場は必然的に不規則面を表す確率場の汎関数、言い替えると不規則面により生成される確率変数である。これを取扱う実用的な汎関数解析学は少ないが、もとの確率場が Gauss 確率場の場合には Wiener の非線形汎関数解析^{[1]-[4]}を用いることが出来る。更に確率場の一様性または群論的対称性を考慮することにより確率平面波 (Floquet 定理)^[5]、確率球面波^[6]、確率円筒波などが導入できるので通常の波動と同様に平面波、球面波、円筒波などの合成、展開が可能となり、波動問題を容易に見通しよく取扱うことができる。著者らはこれらの方法を用いてランダム平面^{[7]-[14]}による散乱、放射、回折、ランダム円筒面 (2次元)^[15]、ランダム球面^[6]による散乱問題等を取扱い種々の散乱特性を明らかにして来た。本論文では最近取り上げられている円筒面による電磁波の散乱問題^[16]を確率汎関数法により取扱う。ランダム平面の場合には Wood anomaly に相当する異常散乱が存在することが明らかにされているが、これは平面に沿う伝搬波の多重散乱による現象で平滑平面による反射と決定的に異なる点であり、通常の摂動近似による解法では発散を起こす。一方、ランダム球面 (2、3次元) の場合には表面粗さが小さい場合には多重散乱効果は少なく通常の摂動近似または単一散乱近似で発散なしに取扱いうる。これは球面 (2、3次元) には実の共振がないためである。円筒面は軸方向に無限に延びているので散乱問題としては平面と球面の中間に位置するため、多重散乱効果がどのように現れるかは一つの興味ある問題であり、実用上必要な散乱特性とともにその性質を明らかにしようとするものである。

2 円筒面上の確率場

一様確率場と保測変換

円筒座標を (r, φ, z) で示す。ランダム円筒面を平均半径 a の一様確率場として

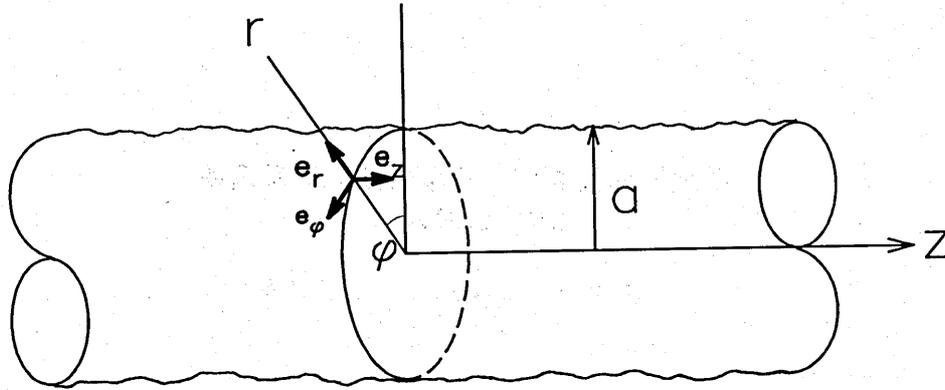


図 1: 不規則円筒面

$$r = a + f(\varphi, z; \omega) \quad (1)$$

$$\langle f(\varphi, z; \omega) \rangle = 0$$

で示す。ここに f は円筒面 $C(0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty)$ 上の一様確率場で $\omega \in \Omega$ は見本空間 Ω の見本点、 $\langle \rangle$ は Ω 上の確率平均を表す。C 上の一様確率場は運動、すなわち φ 方向の任意の回転、 z 方向の任意の移動に関し確率分布は不変であるから、次の Ω 上の保測変換 T^φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi, \text{mod } 2\pi$)、 T^z ($-\infty \leq z \leq \infty$) が定義される。

$$f(\varphi, z; \omega) \equiv f(0, 0; T^\varphi T^z \omega) \equiv f(T^\varphi T^z \omega) \quad (2)$$

$$f(\omega) \equiv f(0, 0; \omega)$$

この 2 種の保測変換は加法的で、

$$\begin{aligned} T^{\varphi_1} T^{\varphi_2} &= T^{\varphi_1 + \varphi_2} & [T^\varphi]^{-1} &= T^{-\varphi}, & T^0 &= I \text{ (恒等変換)} \\ T^{z_1} T^{z_2} &= T^{z_1 + z_2} & [T^z]^{-1} &= T^{-z}, & T^0 &= I \\ T^\varphi T^z &= T^z T^\varphi \end{aligned} \quad (3)$$

の性質をもつ。 T^φ は φ 方向の回転、 T^z は z 方向の移動に対応する 2 種の可換な保測変換群であるが、簡単のために 2 種の変換を同じ T を用いて変数 φ, z により区別することにする。

確率場の移動変換群

$\psi(\varphi, z; \omega)$ を f により生成された円筒面 C 上の任意の確率場とする。確率場 ψ に対する C 上の移動変換を

$$D^{\varphi_1} D^{z_1} \psi(\varphi, z; \omega) \equiv \psi(\varphi + \varphi_1, z + z_1; T^{-\varphi_1} T^{-z_1} \omega) \quad (4)$$

で定義する。同様に円筒上のベクトル確率場 $\psi(\varphi, z; \omega)$ 、 $\psi = \psi_r e_r + \psi_\varphi e_\varphi + \psi_z e_z$ に対する移動変換 D^φ 、 D^z も

$$D^{\varphi_1} D^{z_1} \psi(\varphi, z; \omega) \equiv g^{-\varphi_1} \psi(\varphi + \varphi_1, z + z_1; T^{-\varphi_1} T^{-z_1} \omega) \quad (5)$$

で定義する。 $g^{\varphi_1}\psi$ は (e_r, e_φ) で張られる 2次元ベクトル ψ の z 軸回りの角度 φ_1 の回転を表す。従って、 z 方向の移動 D^{z_1} に対しては (4) と同じスカラー変換を表す。移動変換 D^{φ_1} 、 D^{z_1} は別々に定義できて、(3) と同型の

$$\begin{aligned} D^{\varphi_1} D^{\varphi_2} &= D^{\varphi_1 + \varphi_2} & [D^\varphi]^{-1} &= D^{-\varphi}, & D^0 &= I \\ D^{z_1} D^{z_2} &= D^{z_1 + z_2} & [D^z]^{-1} &= D^{-z}, & D^0 &= I \\ D^\varphi D^z &= D^z D^\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

がなり立つ。(3)、(6) は円筒 C 上の運動 (回転、移動) 群の表現を与える。 D^φ 、 D^z 不変な円筒上の確率場 $u(\varphi, z; \omega)$ 、すなわち

$$D^{\varphi_1} D^{z_1} u(\varphi, z; \omega) \equiv u(\varphi + \varphi_1, z + z_1; T^{-\varphi_1} T^{-z_1} \omega) = u(\varphi, z; \omega) \quad (7)$$

は 1 つの円筒上の一様確率場であって、(2) と同形の

$$u(\varphi, z; \omega) \equiv u(T^\varphi T^z \omega), \quad u(\omega) \equiv u(0, 0; \omega) \quad (8)$$

の形の表現できる。

同様に変換 (5) で不変な確率場は、円筒上の一様ベクトル確率場を与える。 D^φ 、 D^z は加法群の表現でありかつ可換であるから同じ既約空間で 1 次元のユニタリ表現 (固有値: $e^{im\varphi_1 + iz_1}$)

$$\begin{aligned} D^{\varphi_1} D^{z_1} \psi_m(\varphi, z, \lambda; \omega) &= e^{im\varphi_1 + iz_1} \psi_m(\varphi, z, \lambda; \omega) \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad -\infty < \lambda < \infty \end{aligned} \quad (9)$$

をもつ。このような性質をもつ確率場は一般に

$$\psi_m(\varphi, z, \lambda; \omega) = e^{im\varphi + i\lambda z} u_m(\lambda; T^\varphi T^z \omega) \quad (10)$$

の形で表現できる。ここで $u_m(\lambda; T^\varphi T^z \omega)$ は $D^{\varphi_1} D^{z_1}$ 不変な (8) の形の一様確率場を表す。既約表現が 1 次元であるから、ベクトル確率場の場合も (10) と同様な形を持つ。(9)、(10) は以前にのべた確率的な Floquet の定理に相当する。一般に円筒面 C 上の確率場 $\psi(\varphi, z; \omega)$ は (10) の形の確率場の和で表すことができる (D^φ 、 D^z に関する既約分解):

$$\psi(\varphi, z; \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} u_m(\lambda; T^\varphi T^z \omega) d\lambda \quad (11)$$

ここで C 上の一様確率場 u_m は形式的に

$$u_m(\lambda; T^\varphi T^z \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 e^{-im\varphi_1 - i\lambda z_1} D^{\varphi_1} D^{z_1} \psi(\varphi, z; \omega) \quad (12)$$

により与えられる。

ランダム円筒面のスペクトル表現

C 上の一様確率場 $f(\varphi, z; \omega)$ は次の形のスペクトル表現をもつとする。

$$f(\varphi, z; \omega) \equiv f(T^\varphi T^z \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} F_m(\lambda) dB_m(\lambda, \omega) \quad (13)$$

ここで $dB_m(\lambda) \equiv dB_m(\lambda, \omega)$ 、 $\overline{dB_m(\lambda)} = dB_{-m}(-\lambda)$ 、 $\overline{F_m(\lambda)} = F_{-m}(-\lambda)$ とする (以下 ω は簡単のために省略する)。 $dB_m(\lambda)$ はランダムスペクトル測度で

$$\langle dB_m(\lambda) \rangle = 0 \quad (14)$$

$$\langle \overline{dB_m(\lambda)} dB_{m'}(\lambda') \rangle = \delta_{mm'} \delta_{\lambda\lambda'} d\lambda = \begin{cases} 0, & m \neq m', \text{ or } \lambda \neq \lambda' \\ d\lambda, & m = m', \lambda = \lambda' \end{cases} \quad (15)$$

の直交性をもつ。 f の相関関数は (13)、(15) より

$$R(\varphi, z) = \langle f(\varphi + \varphi', z + z') f(\varphi', z') \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} |F_m(\lambda)|^2 d\lambda \quad (16)$$

$$\sigma \equiv R(0, 0) = \langle |f|^2 \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_m(\lambda)|^2 d\lambda \quad (17)$$

で与えられ円筒上の 2 点の差 (φ, z) のみに依存する関数である。 $|F_m(\lambda)|^2$ は“電力スペクトル”で、特に“白色スペクトル” $|F_m(\lambda)|^2 = 1/(2\pi)^2$ の場合には f は C 上の白色雑音を表し、 $R(\varphi, z) = \delta(\varphi)\delta(z)$ となる。 σ^2 は f の分散で不規則表面の粗さのパラメタである。以下では簡単のために $f(\varphi, z; \omega)$ を Gauss 確率場とする。そのとき $dB_m(\lambda)$ は Gauss ランダム測度で、 m 、 λ が異なれば互いに独立な複素 Gauss 確率変数である。

$dB_m(\lambda)$ は移動変換 $D^{-\varphi}$ 、 D^{-z} または T^φ 、 T^z に関して

$$dB_m(\lambda, T^\varphi T^z \omega) = e^{im\varphi + i\lambda z} dB_m(\lambda, \omega) \quad (18)$$

の様に変換される。すなわち $dB_m(\lambda)$ は固有値 $e^{im\varphi + i\lambda z}$ をもつ固有ベクトルである。

3 外部円筒問題のベクトル波動関数

以下で用いるために円筒問題に現れるベクトル関数および記号を整理しておく。円筒座標単位ベクトルを e_r 、 e_φ 、 e_z で表す。

$$\text{位置ベクトル} \quad \mathbf{r} = (r_t, z) \equiv (r, \varphi, z) = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad (19)$$

$$\text{波数ベクトル} \quad \mathbf{k} = (k_t, \beta) \equiv (k_t, \alpha, \beta) = k_t\mathbf{e}_r + \beta\mathbf{e}_z \quad (20)$$

$$k_t \equiv k_t(\beta) = \sqrt{k^2 - \beta^2} \quad (21)$$

$$\text{水平偏波ベクトル} \quad \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \equiv \frac{k_t}{k} \times \mathbf{e}_z \quad (22)$$

$$\text{垂直偏波ベクトル} \quad \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) = \frac{\beta}{k} \frac{\mathbf{k}}{k_t} - \frac{k_t}{k} \mathbf{e}_z \quad (23)$$

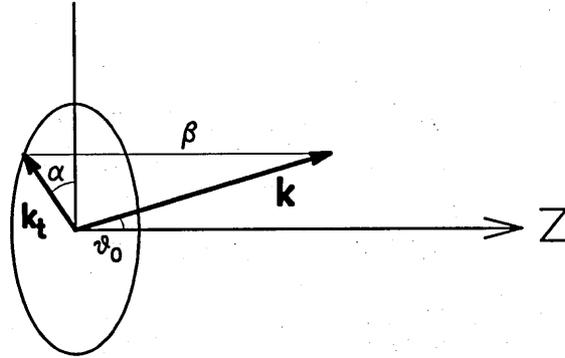


図 2: 各種ベクトル図

ベクトル円筒関数

ベクトル Helmholtz 方程式を満たす solenoidal なベクトル波動関数 ψ

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(r) = 0, \quad \nabla \cdot \psi = 0 \quad (24)$$

として、本論文の場合ベクトル円筒関数を次の様に定義する:

$$\left. \begin{array}{l} j_m^1(r, \beta) \\ h_m^1(r, \beta) \end{array} \right\} \equiv \zeta_m(r, \beta) \mathbf{e}_r + \eta_m(r, \beta) \mathbf{e}_\varphi \quad (25)$$

$$\left. \begin{array}{l} j_m^2(r, \beta) \\ h_m^2(r, \beta) \end{array} \right\} \equiv \eta_m(r, \beta) \mathbf{e}_r - \zeta_m(r, \beta) \mathbf{e}_\varphi + \psi_m(r, \beta) \mathbf{e}_z \quad (26)$$

$$\psi_m(r, \beta) \equiv \frac{k_t(\beta)}{k} \phi_m(r, \beta) \quad (27)$$

$$\zeta_m(r, \beta) \equiv \frac{\beta}{k} \frac{m}{k_t(\beta)r} \phi_m(r, \beta) = \frac{\beta}{2k} [\phi_{m-1}(r, \beta) + \phi_{m+1}(r, \beta)] \quad (28)$$

$$\eta_m(r, \beta) \equiv \frac{i\beta}{k} \dot{\phi}_m(r, \beta) = \frac{i\beta}{2k} [\phi_{m-1}(r, \beta) - \phi_{m+1}(r, \beta)] \quad (29)$$

$$(30)$$

ここで円筒関数 ϕ が

$$\phi_m(r, \beta) = \begin{cases} J_m(k_t(\beta)r) \\ H_m^{(1)}(k_t(\beta)r) \end{cases}, \quad \dot{\phi}_m(r, \beta) = \begin{cases} J_m(k_t(\beta)r) \\ \dot{H}_m^{(1)}(k_t(\beta)r) \end{cases} \quad (31)$$

であるに応じてベクトル円筒関数は j_m 、 h_m の記号を用いるものとする。

$$\text{TE 波 (放射モード)} \quad \mathbf{E}_m^{\text{TE}}(r) = h_m^1(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (32)$$

$$H_m^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{Z_{\text{TE}}} h_m^2(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (33)$$

$$Z_{\text{TE}} \equiv Z_{\text{TE}}(\beta) = \frac{k}{\beta} \zeta, \quad \zeta \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (34)$$

TM 波 (放射モード)

$$E_m^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = h_m^2(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (35)$$

$$H_m^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_{\text{TM}}} h_m^1(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (36)$$

$$Z_{\text{TM}} \equiv Z_{\text{TM}}(\beta) = \frac{\beta}{k} \zeta \quad (37)$$

4 不規則円筒面による散乱

境界条件 不規則円筒面上で電界は完全導体の境界条件を満たすものとする:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0: \quad r = a + f(\varphi, z; \omega), \quad \mathbf{n}: \text{外向法線} \quad (38)$$

表面粗さが微小で十分滑らかとし、 \mathbf{n} を次式で

$$\mathbf{n} \simeq \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (39)$$

で近似すれば、境界条件 (38) は円筒面 $r = a$ 上の \mathbf{e}_φ 、 \mathbf{e}_z 成分の近似境界条件に変換できる:

$$E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} f + E_r \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad (r = a) \quad (40)$$

$$E_z + \frac{\partial E_z}{\partial r} f + E_r \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (r = a) \quad (41)$$

以後この近似境界条件を不規則円筒面のモデルとして解析を進める。同様な境界条件は磁界についても書くことができるが、ここでは省略する。

水平偏波平面電磁波の TE 波展開 $\mathbf{k} = (k_t, \alpha, \beta)$ ($\beta = k \cos \theta_0$; 入射角 θ_0) 方向に進行する、円筒に対して水平偏波する平面電磁波は、TE 円筒波モード (32)、(33) で展開できる:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \zeta \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -Z_{\text{TE}} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= Z_{\text{TE}} \sum_m i^m j_m^1(r, \beta) e^{im(\varphi - \alpha) + i\beta z} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -\sum_m i^m j_m^2(r, \beta) e^{im(\varphi - \alpha) + i\beta z} \quad (43)$$

本論文では用いないが同様に垂直偏波平面波は TM 円筒波により展開できる:

垂直偏波平面電磁波の TM 波展開

$$E(r) = e_V(k)e^{ik \cdot r} = -\sum_m i^m j_m^2(r, \beta) e^{im(\varphi-\alpha)+i\beta z} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{1}{\zeta} e_H(k)e^{ik \cdot r} = -\frac{1}{\zeta} \frac{k}{k} \times E(r) \\ &= -\frac{1}{Z_{TM}} \sum_m i^m j_m^1(r, \beta) e^{im(\varphi-\alpha)+i\beta z} \end{aligned} \quad (45)$$

無摂動場 (1 次波) 半径 a の滑らかな金属円筒面 ($\sigma^2 = 0$) の場合、単独の TE 円筒波入射に対する外部電磁波は

$$E_m^0(r) = [j_m^1(r, \beta) + \alpha_m^{TE} h_m^1(r, \beta)] e^{im\phi+i\beta z} \quad (46)$$

$$H_m^0(r) = -\frac{1}{Z_{TE}} [j_m^2(r, \beta) + \alpha_m^{TE} h_m^2(r, \beta)] e^{im\phi+i\beta z} \quad (47)$$

$$\alpha_m^{TE} \equiv -\frac{\dot{H}_m^{(1)}(k_t a)}{J_m(k_t a)} \quad (48)$$

ここで α_m^{TE} は m 次 TE モードの散乱係数である。(27)~(29) に相当する成分関数を $\psi_m^*(r, \beta)$ 、 $\zeta_m^*(r, \beta)$ 、 $\eta_m^*(r, \beta)$ と書けば、これらは円筒関数 (31) の代りに

$$\phi_m^*(r, \beta) = J_m(k_t(\beta)r) + \alpha_m^{TE} H_m^{(1)}(k_t(\beta)r) \quad (49)$$

とおいたものである。

ここで特に注意すべきことは TE 円筒波 $E_m^0(r) = E_m^0(r, \varphi, z)$ (ω に無関係) は移動作用素 D^{φ_1} 、 D^{z_1} に関し

$$D^{\varphi_1} D^{z_1} E_m^0(r) \equiv g^{-\varphi_1} E_m^0(r, \varphi + \varphi_1, z + z_1) = e^{im\varphi_1+i\beta z_1} E_m^0(r) \quad (50)$$

の様に変換され、固有値 $e^{im\varphi_1+i\beta z_1}$ をもつ固有関数 (既約表現の基底) である。このことは磁界 $H_m^0(r)$ のみならず TM 円筒波 (35)、(36) に対しても云える。

摂動場 (2 次波) ランダム表面 ($\sigma^2 > 0$) の場合には TE 円筒波入射に対して全電磁界は

$$E_m(r) = E_m^0(r) + E_m^s(r, \omega) \quad (51)$$

$$H_m(r) = H_m^0(r) + H_m^s(r, \omega) \quad (52)$$

と書ける。 E_m^s 、 H_m^s はランダム表面による散乱電磁界である。ここで次のことに注意する。Maxwell 方程式、ランダム円筒面 (1) は (7) により移動作用素 D^φ 、 D^z のもとで不変である。入射波もまた 1 次波 $E_m^0(r)$ が (50) により $D^{\varphi_1} D^{z_1}$ の固有値 $e^{im\varphi_1+i\beta z_1}$ の固有関数であるから、散乱電磁界 $E_m^s(r, \omega)$ も D^{φ_1} 、 D^{z_1} に関し同じ変換をうけるのでなければならない:

$$\begin{aligned} D^{\varphi_1} D^{z_1} E_m^s(r, \varphi, z; \omega) &\equiv g^{-\varphi_1} E_m^s(r, \varphi + \varphi_1, z + z_1; T^{-\varphi_1} T^{-z_1} \omega) \\ &= e^{im\varphi_1+i\beta z_1} E_m^s(r, \varphi, z; \omega) \end{aligned} \quad (53)$$

$H_m^s(r, \omega)$ も同様である。

散乱電磁界の Wiener 展開 散乱電磁界は外向波を表す TE および TM 波モード (32)、(35) により展開できるが、それと同時に散乱波は Gauss ランダム表面 (13) の非線形汎関数であってかつ (53) の変換性を持たねばならない。非線形汎関数はランダム測度 $dB_m(\lambda)$ による Wiener 展開として表現できるから、その様な散乱電磁界は次の形に展開される:

$$\begin{aligned}
E_m^s(r; \omega) &= [A_0^m h_m^1(r, \beta) + B_0^m h_m^2(r, \beta)] e^{im\varphi + i\beta z} \\
&+ \sum_{m_1} e^{i(m+m_1)\varphi} \int [A_1^m(m_1, \lambda_1) h_{m+m_1}^1(r, \beta + \lambda_1) \\
&\quad + B_1^m(m_1, \lambda_1) h_{m+m_1}^2(r, \beta + \lambda_1)] e^{i(\beta+\lambda_1)z} dB_{m_1}(\lambda_1) \\
&+ \sum_{m_1} \sum_{m_2} e^{i(m+m_1+m_2)\varphi} \iint [A_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^1(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
&\quad + B_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^2(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] e^{i(\beta+\lambda_1+\lambda_2)z} \\
&\quad \times h_2[dB_{m_1}(\lambda_1), dB_{m_2}(\lambda_2)] \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{54}$$

ここで A_n^m 、 B_n^m は TE 波、TM 波の展開係数であり、 $n = 0, 1, 2, \dots$ は Wiener 展開の次数を示す。また、 h_n は複素 Wiener-Hermite 微分式を表す。これは n 変数 Hermite 多項式の変数に複素 Gauss ランダム測度 $dB_m(\lambda)$ の入ったものである。詳しくは [5] の Appendix または [17] を参照されたい。低次のものをいくつか示すと

$$\begin{aligned}
\hat{h}_0 &= 1 \\
\hat{h}_1[dB_m(\lambda)] &= dB_m(\lambda) \\
\hat{h}_2[dB_{m_1}(\lambda_1), dB_{m_2}(\lambda_2)] &= dB_{m_1}(\lambda_1) dB_{m_2}(\lambda_2) - \delta(\lambda_1 + \lambda_2) \delta_{m_1+m_2, 0} d\lambda_1 d\lambda_2 \\
\hat{h}_3[dB_{m_1}(\lambda_1), dB_{m_2}(\lambda_2), dB_{m_3}(\lambda_3)] &= dB_{m_1}(\lambda_1) dB_{m_2}(\lambda_2) dB_{m_3}(\lambda_3) \\
&\quad - [\delta(\lambda_1 + \lambda_2) \delta_{m_1+m_2, 0} d\lambda_1 d\lambda_2 dB_{m_3}(\lambda_3) \\
&\quad + \delta(\lambda_2 + \lambda_3) \delta_{m_2+m_3, 0} d\lambda_2 d\lambda_3 dB_{m_1}(\lambda_1) \\
&\quad + \delta(\lambda_3 + \lambda_1) \delta_{m_3+m_1, 0} d\lambda_3 d\lambda_1 dB_{m_2}(\lambda_2)]
\end{aligned} \tag{55}$$

ただし、 $\overline{dB_m(\lambda)} = dB_{-m}(-\lambda)$ のもとに変数として $\overline{dB_m(\lambda)}$ が入ることができる。

$$\psi_m^\nu(r, \beta) \equiv h_m^\nu(r, \beta) e^{im\varphi + i\beta z} \tag{56}$$

とおき Wiener-Hermite 微分式 $h_n[\]$ の変換則

$$\begin{aligned}
D^\varphi D^z h_n[dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)] &= e^{i(m_1+\dots+m_n)\varphi + i(\lambda_1+\dots+\lambda_n)z} \\
&\quad \times h_n[dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)]
\end{aligned} \tag{57}$$

に注意すれば

$$\psi_{m+m_1+\dots+m_n}^\nu(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) h_n[dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)], (\nu = 1, 2) \tag{58}$$

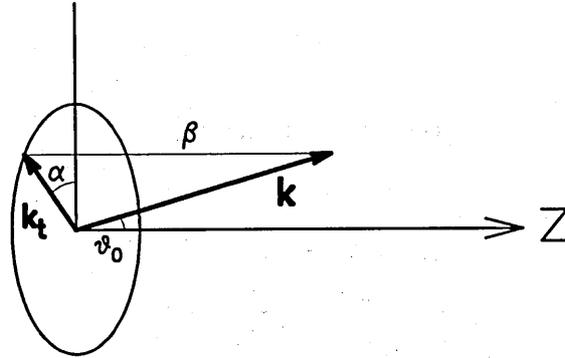


図 2: 各種ベクトル図

ベクトル円筒関数

ベクトル Helmholtz 方程式を満たす solenoidal なベクトル波動関数 ψ

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \cdot \psi = 0 \quad (24)$$

として、本論文の場合ベクトル円筒関数を次の様に定義する:

$$\left. \begin{array}{l} j_m^1(r, \beta) \\ h_m^1(r, \beta) \end{array} \right\} \equiv \zeta_m(r, \beta) \mathbf{e}_r + \eta_m(r, \beta) \mathbf{e}_\varphi \quad (25)$$

$$\left. \begin{array}{l} j_m^2(r, \beta) \\ h_m^2(r, \beta) \end{array} \right\} \equiv \eta_m(r, \beta) \mathbf{e}_r - \zeta_m(r, \beta) \mathbf{e}_\varphi + \psi_m(r, \beta) \mathbf{e}_z \quad (26)$$

$$\psi_m(r, \beta) \equiv \frac{k_t(\beta)}{k} \phi_m(r, \beta) \quad (27)$$

$$\zeta_m(r, \beta) \equiv \frac{\beta}{k} \frac{m}{k_t(\beta)r} \phi_m(r, \beta) = \frac{\beta}{2k} [\phi_{m-1}(r, \beta) + \phi_{m+1}(r, \beta)] \quad (28)$$

$$\eta_m(r, \beta) \equiv \frac{i\beta}{k} \dot{\phi}_m(r, \beta) = \frac{i\beta}{2k} [\phi_{m-1}(r, \beta) - \phi_{m+1}(r, \beta)] \quad (29)$$

$$(30)$$

ここで円筒関数 ϕ が

$$\phi_m(r, \beta) = \begin{cases} J_m(k_t(\beta)r) \\ H_m^{(1)}(k_t(\beta)r) \end{cases}, \quad \dot{\phi}_m(r, \beta) = \begin{cases} \dot{J}_m(k_t(\beta)r) \\ \dot{H}_m^{(1)}(k_t(\beta)r) \end{cases} \quad (31)$$

であるに応じてベクトル円筒関数は j_m 、 h_m の記号を用いるものとする。

$$\text{TE 波 (放射モード)} \quad \mathbf{E}_m^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = h_m^1(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (32)$$

$$H_m^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{Z_{\text{TE}}} h_m^2(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (33)$$

$$Z_{\text{TE}} \equiv Z_{\text{TE}}(\beta) = \frac{k}{\beta} \zeta, \quad \zeta \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (34)$$

TM 波 (放射モード)

$$E_m^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = h_m^2(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (35)$$

$$H_m^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_{\text{TM}}} h_m^1(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (36)$$

$$Z_{\text{TM}} \equiv Z_{\text{TM}}(\beta) = \frac{\beta}{k} \zeta \quad (37)$$

4 不規則円筒面による散乱

境界条件 不規則円筒面上で電界は完全導体の境界条件を満たすものとする:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0: \quad r = a + f(\varphi, z; \omega), \quad \mathbf{n}: \text{外向法線} \quad (38)$$

表面粗さが微小で十分滑らかとし、 \mathbf{n} を次式で

$$\mathbf{n} \simeq \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (39)$$

で近似すれば、境界条件 (38) は円筒面 $r = a$ 上の \mathbf{e}_φ 、 \mathbf{e}_z 成分の近似境界条件に変換できる:

$$E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} f + E_r \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad (r = a) \quad (40)$$

$$E_z + \frac{\partial E_z}{\partial r} f + E_r \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (r = a) \quad (41)$$

以後この近似境界条件を不規則円筒面のモデルとして解析を進める。同様な境界条件は磁界についても書くことができるが、ここでは省略する。

水平偏波平面電磁波の TE 波展開 $\mathbf{k} = (k_t, \alpha, \beta)$ ($\beta = k \cos \theta_0$; 入射角 θ_0) 方向に進行する、円筒に対して水平偏波する平面電磁波は、TE 円筒波モード (32)、(33) で展開できる:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \zeta \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -Z_{\text{TE}} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= Z_{\text{TE}} \sum_m i^m \mathbf{j}_m^1(r, \beta) e^{im(\varphi - \alpha) + i\beta z} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -\sum_m i^m \mathbf{j}_m^2(r, \beta) e^{im(\varphi - \alpha) + i\beta z} \quad (43)$$

本論文では用いないが同様に垂直偏波平面波は TM 円筒波により展開できる:

垂直偏波平面電磁波の TM 波展開

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e_V(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\sum_m i^m j_m^2(r, \beta) e^{im(\varphi-\alpha)+i\beta z} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\zeta} e_H(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{1}{\zeta} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{Z_{TM}} \sum_m i^m j_m^1(r, \beta) e^{im(\varphi-\alpha)+i\beta z} \end{aligned} \quad (45)$$

無摂動場 (1 次波) 半径 a の滑らかな金属円筒面 ($\sigma^2 = 0$) の場合、単独の TE 円筒波入射に対する外部電磁波は

$$\mathbf{E}_m^0(\mathbf{r}) = [j_m^1(r, \beta) + \alpha_m^{\text{TE}} h_m^1(r, \beta)] e^{im\phi+i\beta z} \quad (46)$$

$$\mathbf{H}_m^0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{Z_{\text{TE}}} [j_m^2(r, \beta) + \alpha_m^{\text{TE}} h_m^2(r, \beta)] e^{im\phi+i\beta z} \quad (47)$$

$$\alpha_m^{\text{TE}} \equiv -\frac{\dot{H}_m^{(1)}(k_t a)}{J_m(k_t a)} \quad (48)$$

ここで α_m^{TE} は m 次 TE モードの散乱係数である。(27)~(29) に相当する成分関数を $\psi_m^*(r, \beta)$ 、 $\zeta_m^*(r, \beta)$ 、 $\eta_m^*(r, \beta)$ と書けば、これらは円筒関数 (31) の代りに

$$\phi_m^*(r, \beta) = J_m(k_t(\beta)r) + \alpha_m^{\text{TE}} H_m^{(1)}(k_t(\beta)r) \quad (49)$$

とおいたものである。

ここで特に注意すべきことは TE 円筒波 $\mathbf{E}_m^0(\mathbf{r}) = E_m^0(r, \varphi, z)$ (ω に無関係) は移動作用素 D^{φ_1} 、 D^{z_1} に関し

$$D^{\varphi_1} D^{z_1} E_m^0(\mathbf{r}) \equiv g^{-\varphi_1} E_m^0(r, \varphi + \varphi_1, z + z_1) = e^{im\varphi_1+i\beta z_1} E_m^0(\mathbf{r}) \quad (50)$$

の様に変換され、固有値 $e^{im\varphi_1+i\beta z_1}$ をもつ固有関数 (既約表現の基底) である。このことは磁界 $H_m^0(\mathbf{r})$ のみならず TM 円筒波 (35)、(36) に対しても云える。

摂動場 (2 次波) ランダム表面 ($\sigma^2 > 0$) の場合には TE 円筒波入射に対して全電磁界は

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_m^0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_m^s(\mathbf{r}, \omega) \quad (51)$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_m^0(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_m^s(\mathbf{r}, \omega) \quad (52)$$

と書ける。 \mathbf{E}_m^s 、 \mathbf{H}_m^s はランダム表面による散乱電磁界である。ここで次のことに注意する。Maxwell 方程式、ランダム円筒面 (1) は (7) により移動作用素 D^φ 、 D^z のもとで不変である。入射波もまた 1 次波 $\mathbf{E}_m^0(\mathbf{r})$ が (50) により $D^{\varphi_1} D^{z_1}$ の固有値 $e^{im\varphi_1+i\beta z_1}$ の固有関数であるから、散乱電磁界 $\mathbf{E}_m^s(\mathbf{r}, \omega)$ も D^{φ_1} 、 D^{z_1} に関し同じ変換をうけるのでなければならない:

$$\begin{aligned} D^{\varphi_1} D^{z_1} \mathbf{E}_m^s(\mathbf{r}, \varphi, z; \omega) &\equiv g^{-\varphi_1} \mathbf{E}_m^s(r, \varphi + \varphi_1, z + z_1; T^{-\varphi_1} T^{-z} \omega) \\ &= e^{im\varphi_1+i\beta z_1} \mathbf{E}_m^s(\mathbf{r}, \varphi, z; \omega) \end{aligned} \quad (53)$$

$H_m^s(r, \omega)$ も同様である。

散乱電磁界の Wiener 展開 散乱電磁界は外向波を表す TE および TM 波モード (32)、(35) により展開できるが、それと同時に散乱波は Gauss ランダム表面 (13) の非線形汎関数であつてかつ (53) の変換性を持たねばならない。非線形汎関数はランダム測度 $dB_m(\lambda)$ による Wiener 展開として表現できるから、その様な散乱電磁界は次の形に展開される：

$$\begin{aligned}
E_m^s(r; \omega) &= [A_0^m h_m^1(r, \beta) + B_0^m h_m^2(r, \beta)] e^{im\varphi + i\beta z} \\
&+ \sum_{m_1} e^{i(m+m_1)\varphi} \int [A_1^m(m_1, \lambda_1) h_{m+m_1}^1(r, \beta + \lambda_1) \\
&\quad + B_1^m(m_1, \lambda_1) h_{m+m_1}^2(r, \beta + \lambda_1)] e^{i(\beta + \lambda_1)z} dB_{m_1}(\lambda_1) \\
&+ \sum_{m_1} \sum_{m_2} e^{i(m+m_1+m_2)\varphi} \iint [A_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^1(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
&\quad + B_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^2(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] e^{i(\beta + \lambda_1 + \lambda_2)z} \\
&\quad \times h_2[dB_{m_1}(\lambda_1), dB_{m_2}(\lambda_2)] \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{54}$$

ここで A_n^m 、 B_n^m は TE 波、TM 波の展開係数であり、 $n = 0, 1, 2, \dots$ は Wiener 展開の次数を示す。また、 h_n は複素 Wiener-Hermite 微分式を表す。これは n 変数 Hermite 多項式の変数に複素 Gauss ランダム測度 $dB_m(\lambda)$ の入ったものである。詳しくは [5] の Appendix または [17] を参照されたい。低次のものをいくつか示すと

$$\begin{aligned}
\hat{h}_0 &= 1 \\
\hat{h}_1[dB_m(\lambda)] &= dB_m(\lambda) \\
\hat{h}_2[dB_{m_1}(\lambda_1), dB_{m_2}(\lambda_2)] &= dB_{m_1}(\lambda_1) dB_{m_2}(\lambda_2) - \delta(\lambda_1 + \lambda_2) \delta_{m_1+m_2, 0} d\lambda_1 d\lambda_2 \\
\hat{h}_3[dB_{m_1}(\lambda_1), dB_{m_2}(\lambda_2), dB_{m_3}(\lambda_3)] &= dB_{m_1}(\lambda_1) dB_{m_2}(\lambda_2) dB_{m_3}(\lambda_3) \\
&\quad - [\delta(\lambda_1 + \lambda_2) \delta_{m_1+m_2, 0} d\lambda_1 d\lambda_2 dB_{m_3}(\lambda_3) \\
&\quad + \delta(\lambda_2 + \lambda_3) \delta_{m_2+m_3, 0} d\lambda_2 d\lambda_3 dB_{m_1}(\lambda_1) \\
&\quad + \delta(\lambda_3 + \lambda_1) \delta_{m_3+m_1, 0} d\lambda_3 d\lambda_1 dB_{m_2}(\lambda_2)]
\end{aligned} \tag{55}$$

ただし、 $\overline{dB_m(\lambda)} = dB_{-m}(-\lambda)$ のもとに変数として $\overline{dB_m(\lambda)}$ が入ることができる。

$$\psi_m^\nu(r, \beta) \equiv h_m^\nu(r, \beta) e^{im\varphi + i\beta z} \tag{56}$$

とおき Wiener-Hermite 微分式 $h_n[\]$ の変換則

$$\begin{aligned}
D^\nu D^z h_n[dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)] &= e^{i(m_1 + \dots + m_n)\varphi + i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)z} \\
&\quad \times h_n[dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)]
\end{aligned} \tag{57}$$

に注意すれば

$$\psi_{m+m_1+\dots+m_n}^\nu(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) h_n[dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)], (\nu = 1, 2) \tag{58}$$

は (53) の変換性を満足する。従って、Wiener 展開 (54) も (53) の変換性をもつことがわかる。Wiener 展開の 0 次の項は散乱電磁界の平均値 (コヒーレント部分) を表し、 $n \geq 1$ 次以上の展開項は平均値 0 のゆらぎ (インコヒーレント部分) を表す。散乱磁界も同様に展開できる。

TE 円筒波入射の散乱電界 以上をまとめると m -TE 波入射の場合の全電界を

$$E_m(\mathbf{r}, \omega) = E_m^0(\mathbf{r}) + E_m^s(\mathbf{r}; \omega) \quad (59)$$

$$= E_m^c(\mathbf{r}) + E_m^{ic}(\mathbf{r}; \omega), \quad \langle E_m^{ic} \rangle = 0 \quad (60)$$

$$E_m^c(\mathbf{r}) \equiv [j_m^1(r, \beta) + \alpha_m h_m^1(r, \beta) + B_0^m h_m^2(r, \beta)] e^{im\varphi + i\beta z} \quad (61)$$

$$\alpha_m \equiv \alpha_m^{TE} + A_0^m \quad (62)$$

$$\begin{aligned} E_m^{ic}(\mathbf{r}; \omega) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_n} \int \cdots \int \right. \\ &\quad \left[A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^1(\mathbf{r}, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \right. \\ &\quad \left. + B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^2(\mathbf{r}, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \right] \\ &\quad \left. \times h_n[dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)] \right\} \quad (63) \\ &= \sum_{m_1} \int [A_1^m(m_1; \lambda_1) h_{m+m_1}^1(r, \beta + \lambda_1) + B_1^m(m_1; \lambda_1) h_{m+m_1}^2(r, \beta + \lambda_1)] \\ &\quad \times e^{i(m+m_1)\varphi + i\beta\lambda_1 z} dB_{m_1}(\lambda_1) \\ &\quad + \sum_{m_1, m_2} \int \int [A_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^1(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\ &\quad + B_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^2(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] \\ &\quad \times e^{i(m+m_1+m_2)\varphi + i(\beta+\lambda_1+\lambda_2)z} h_2[dB_{m_1}(\lambda_1), dB_{m_2}(\lambda_2)] \\ &\quad + \cdots \quad (64) \end{aligned}$$

と書ける。 E_m^c は E_m 平均値 (コヒーレント部分)、 E_m^{ic} はゆらぎ部分 (インコヒーレント部分) を表す。 α_m はコヒーレント TE 散乱係数、 B_0^m はコヒーレント TM 散乱係数である。同様な式が散乱磁界に対してもえられる。

$$H_m(\mathbf{r}, \omega) = H_m^0(\mathbf{r}) + H_m^s(\mathbf{r}; \omega) \quad (65)$$

$$= H_m^c(\mathbf{r}) + H_m^{ic}(\mathbf{r}; \omega) \quad (66)$$

$$H_m^c(\mathbf{r}) \equiv \left\{ -\frac{1}{Z_{TE}(\beta)} [j_m^2(r, \beta) + \alpha_m h_m^2(r, \beta)] + \frac{B_0^m}{Z_{TM}(\beta)} h_m^1(r, \beta) \right\} e^{im\varphi + i\beta z} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} H_m^{ic}(\mathbf{r}; \omega) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_n} \int \cdots \int h_n[dB_{m_1}(\lambda_1) \cdots dB_{m_n}(\lambda_n)] \right. \\ &\quad \left[-\frac{A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^2(\mathbf{r}, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^1(\mathbf{r}, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{Z_{\text{TM}}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right\} \quad (68)$$

水平偏波平面波入射の散乱電磁界 入射波数ベクトル $\mathbf{k} \equiv (k_t, \alpha, \beta)$ の水平偏波平面波入射の場合は、(42)、(43)により上記の m -TE 波入射の解の重畳で与えられる:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}; \omega) \quad (69)$$

$$\equiv \mathbf{E}^c(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{\text{ic}}(\mathbf{r}; \omega) \quad \langle \mathbf{E}^{\text{ic}} \rangle = 0 \quad (70)$$

$$\mathbf{E}^c(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} \mathbf{E}_m^c(\mathbf{r}) \quad (71)$$

$$\mathbf{E}^{\text{ic}}(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} \mathbf{E}_m^{\text{ic}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (72)$$

同様に

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{H}^c(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^{\text{ic}}(\mathbf{r}; \omega) \quad (73)$$

$$\mathbf{H}^c(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} \mathbf{H}_m^c(\mathbf{r}) \quad (74)$$

$$\mathbf{H}^{\text{ic}}(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} \mathbf{H}_m^{\text{ic}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (75)$$

(42)(71)と比較すれば、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Z_{\text{TE}}(\beta) \mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ であるから、水平偏波平面電磁波 $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ の入射方向単位面積当りの電力流 P_{H} は

$$P_{\text{H}} = \frac{\zeta}{2} \frac{1}{Z_{\text{TE}}(\beta)^2} = \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{\beta}{k} \right)^2 = \frac{\cos^2 \theta_0}{2\zeta} \quad (76)$$

5 散乱電磁波の統計量

前節の TE、TM 円筒波による Wiener 展開の形で求めた散乱電磁界の表式において、展開係数 A_n^m 、 B_n^m が求められれば散乱電磁界の種々の統計量は単なる平均操作により容易に計算することが出来る。

コヒーレント散乱振幅 一般性を失うことなく入射平面波の方位角は $\alpha = 0$ とする。遠方 $r \rightarrow \infty$ における平均散乱電磁界すなわちコヒーレント散乱電磁界 \mathbf{E}_s^c の漸近形は

$$\mathbf{E}_s^c(\mathbf{r}) \equiv \sum_m i^m \left[\alpha_m h_m^1(\mathbf{r}, \beta) + B_0^m h_m^2(\mathbf{r}, \beta) \right] e^{im\varphi + i\beta z} \sim \frac{e^{ik_t r}}{\sqrt{k_t r}} e^{i\beta z} \mathbf{E}(\varphi) \quad (77)$$

$$E(\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \sum_m \left[-\frac{\beta}{k} B_0^m e_r - \frac{\beta}{k} \alpha_m e_\varphi + \frac{k_t}{k} B_0^m e_z \right] e^{im\varphi} \quad (78)$$

$$H_s^c(r) \equiv \sum_m i^m \left[\frac{-\alpha_m}{Z_{TE}(\beta)} h_m^2(r, \beta) + \frac{B_0^m}{Z_{TM}(\beta)} h_m^1(r, \beta) \right] e^{im\varphi + i\beta z} \sim \frac{e^{ik_t r}}{\sqrt{k_t r}} e^{i\beta z} H(\varphi) \quad (79)$$

$$H(\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \sum_m \left[\frac{\beta}{k} \frac{\alpha_m}{Z_{TE}(\beta)} e_r - \frac{\beta}{k} \frac{B_0^m}{Z_{TM}(\beta)} e_\varphi - \frac{k_t}{k} \frac{\alpha_m}{Z_{TE}(\beta)} e_z \right] e^{im\varphi} \quad (80)$$

ここで $E(\varphi)$ 、 $H(\varphi)$ (z に依存しない) は電界および磁界のコヒーレント散乱振幅 (ベクトル) に相当する。

コヒーレント電力流 m -TE 円筒波入射のコヒーレント電磁界 E_m^c 、 H_m^c による円筒単位長当りの r 方向への電力流は半径 r 上で角度に関し積分すれば得られる: 漸近形 (77)、(79) を用いれば容易に計算できて

$$\begin{aligned} S_m^c &\equiv r \int \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_m^c \times \overline{H_m^c})_r d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{Z_{TE}(\beta)} (-1 + |1 + 2\alpha_m|^2) + \frac{1}{Z_{TM}(\beta)} |2B_0^m|^2 \right] \frac{2\beta}{k^2} \end{aligned} \quad (81)$$

$$= \left[\frac{\operatorname{Re} \alpha_m + |\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \frac{2\beta}{k^2} \quad (82)$$

となる。ここで $(\)_r$ はベクトル r 成分を意味する。

水平偏波平面波入射のコヒーレント電磁界 E^c 、 H^c による電力流は

$$\begin{aligned} S^c &\equiv r \int \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E^c \times \overline{H^c})_r d\varphi \\ &= \sum_m S_m^c = \frac{2\beta}{k^2} \sum_m \left[\frac{\operatorname{Re} \alpha_m + |\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \end{aligned} \quad (83)$$

インコヒーレント電力流 以下に示すようにインコヒーレント電磁界 E_m^{ic} 、 H_m^{ic} による単位長当りの全電力流 S^{ic} は確率 1 で定数に等しい。したがって、定数はその平均値に等しい。

$$\begin{aligned} S_m^{ic} &\equiv \frac{r}{2} \int \langle (\operatorname{Re} E_m^{ic} \times \overline{H_m^{ic}})_r \rangle d\varphi \\ &= 2 \sum_{m_1} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1)^2} \left[\frac{|A_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1)} + \frac{|B_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1)} \right] \frac{\beta + \lambda_1}{k^2} d\lambda_1 \\ &\quad + 2 \cdot 2! \sum_{m_1} \sum_{m_2} \int \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1 + \lambda_2)^2} \left[\frac{|A_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{|B_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1 + \lambda_2)} \right] \\ &\quad \times \frac{\beta + \lambda_1 + \lambda_2}{k^2} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (84)$$

平面入射の場合

$$S_{ic} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m^{ic} \quad (85)$$

なお、単位面積当りの平面波入射電力を 1 に規格化する場合は、(76) により (83)(85) の右辺に $2Z_{TE}(\beta)^2/\zeta_0 = 2\zeta(k/\beta)^2$ を乗じる必要がある。

電力保存則 TE 円筒波入射の電磁界 E_m 、 H_m による電力流

$$P_m = \frac{1}{2} \text{Re} (E_m \times \overline{H_m}) \quad (86)$$

に対し不規則円筒面を含む半径 r 、軸長 ℓ の円筒面より出入する全電力流は保存則により確率 1 で (不規則面に拘らず) 0 である。特に ℓ を十分大きくとるとき円筒面上での平均値は

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \int_0^\ell dz \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Re} (E_m \times \overline{H_m}) \cdot e_r d\varphi = \langle P_m \rangle = 0 \quad (87)$$

$P_m = (P_m)_r$ は円筒面 C 上の一様確率場であってランダム表面 (Gauss 確率場) がエルゴード性をもつから、上式にエルゴード定理を適用すれば、円筒面上の平均値は確率平均 $\langle P_m \rangle$ に等しくなる。これから

$$S_m^c + S_m^{ic} = 0 \quad (88)$$

これを (81)(84) を用いて書直せば

$$\begin{aligned} 1 &= |1 + 2\alpha_m|^2 + \frac{Z_{TE}(\beta)}{Z_{TM}(\beta)} |2B_0^m|^2 \\ &+ 4Z_{TE}(\beta) \sum_{m_1} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1)^2} \left[\frac{|A_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1)} + \frac{|B_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1)} \right] \frac{\beta + \lambda_1}{\beta} d\lambda_1 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (89)$$

左辺を規格化した形に書いた。左辺は入射電力、右辺第 1、2 項は全コヒーレント散乱電力、第 3 項以下はインコヒーレント散乱電力に相当する。

水平偏波平面波入射の場合の保存則は (88) の m について和をとったもので

$$S_c + S_{ic} = 0 \quad (90)$$

で与えられる。これを (82)(84) を用いて表せば

$$\begin{aligned} \sum_m \left[\frac{\text{Re} \alpha_m + |\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \frac{2\beta}{k^2} \\ + 2 \sum_m \sum_{m_1} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1)^2} \left[\frac{|A_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1)} + \frac{|B_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1)} \right] \frac{\beta + \lambda_1}{k^2} d\lambda_1 \\ + \dots = 0 \end{aligned} \quad (91)$$

全散乱断面積 (83) の [] 内第 1 項の $\text{Re } \alpha_m$ を除いた項は、コヒーレント散乱電磁界 E_s^c による散乱電力 σ_c を表す。したがって、 σ_c と S_{ic} の和は円筒の単位長当りの全散乱断面積 S を与える:

$$\begin{aligned}
 S &= \sigma_c + S_{ic} \\
 &= \frac{2\beta}{k^2} \sum_m \left[\frac{|\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n! \sum_m \cdots \sum_{m_1 \cdots m_n} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)} \left[\frac{|A_n^m(m_1, \cdots, m_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_n)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{|B_n^m(m_1, \cdots, m_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_n)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)} \right] \frac{2(\beta + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)}{k^2} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \quad (92)
 \end{aligned}$$

光学定理 (78)(80) と (92) を用いれば、電力保存則 (91) は次の形に書ける:

$$S = \frac{\sqrt{2\pi}}{k} \text{Im} \left[\frac{H_r(0)}{\sqrt{i}} \right] \equiv -\frac{\sqrt{2\pi}}{k} \frac{1}{Z_{TE}(\beta)} \text{Im} \left[\frac{E_\varphi(0)}{\sqrt{i}} \right] \quad (93)$$

ランダム円筒面による散乱に対して成立つ光学定理であって、全散乱断面積 S が前方散乱電磁波の振幅の虚部によって表されることを意味している。

コヒーレント散乱角度分布 (コヒーレント散乱微分断面積) 平面波入射の散乱角度分布は角度 φ の関数として

$$\sigma(\varphi|\alpha)d\varphi = \frac{\beta}{k^2\pi} \left[\frac{1}{Z_{TE}(\beta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{Z_{TM}(\beta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_0^m e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 \right] d\varphi \quad (94)$$

$$\sigma_c = \int_0^{2\pi} \sigma_c(\varphi|\alpha)d\varphi = \frac{2\beta}{k^2} \sum_m \left[\frac{|\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \quad (95)$$

インコヒーレント散乱角度分布 (インコヒーレント散乱微分断面積) 入射角 (α, θ_0) 、散乱角 (φ, θ) に対するインコヒーレント散乱角度分布は

$$\begin{aligned}
 S_{ic}(\theta, \varphi|\theta_0, \alpha) &= \left[\sum_{m_1} \frac{1}{Z_{TE}(k \cos \theta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_1^m(m_1, k(\cos \theta - \cos \theta_0)) e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{Z_{TM}(k \cos \theta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_1^m(m_1, k(\cos \theta - \cos \theta_0)) e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 \right] \cos \theta \quad (96)
 \end{aligned}$$

$$S_{ic} \equiv \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_{ic}(\varphi, \theta|\alpha, \theta_0) d\varphi \sin \theta d\theta \quad (97)$$

ここで入射角 (α, θ_0) 、散乱角 (φ, θ) を極座標で示し

$$\begin{aligned}
 \beta &= k \cos \theta_0, & k_t(\beta) &= k \sin \theta_0 \\
 \beta + \lambda_1 &= k \cos \theta, & k_t(\beta + \lambda_1) &= k \sin \theta
 \end{aligned} \quad (98)$$

とおいた。 $\alpha = 0$ として一般性を失わない。水平偏波平面電磁波の単位面積当りの入射電力を1に規格化する場合は(76)により(94)(96)の右辺に $2\zeta(k/\beta)^2 = 2\zeta/\cos^2\theta_0$ を乗じる必要がある。

6 境界条件の近似解法

多変数複素 Hermite 多項式の性質 定義については以前の文献^{[1]~[5]}にゆずることにし、解法に必要な漸化式と直交性のみをあげておく。

$$\begin{aligned} dB_m(\lambda) \hat{h}_n [dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)] &= \hat{h}_{n+1} [dB_m(\lambda), dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)] \\ &+ \sum_{k=1}^n \hat{h}_{n-1} [dB_{m_1}(\lambda), \dots, dB_{m_{k-1}}(\lambda_{k-1}), dB_{m_{k+1}}(\lambda_{k+1}), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)] \\ &\times \delta_{m, -m_k} \delta(\lambda + \lambda_k) d\lambda d\lambda_k \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} &\left\langle \overline{\hat{h}_n [dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)]} \hat{h}_\ell [dB_{k_1}(\mu_1), \dots, dB_{k_\ell}(\mu_\ell)] \right\rangle \\ &= \delta_{n\ell} \delta_{ij}^n (\lambda_i - \mu_j) d\lambda_1 \dots d\lambda_n d\mu_1 \dots d\mu_n \end{aligned} \quad (100)$$

$$\delta_{ij}^n (\lambda_i - \mu_j) \equiv \sum_{\text{all pair } (i,j)} \prod \delta_{m_j k_j} \delta(\lambda_i - \mu_j) \quad (101)$$

ここで $\delta_{ij}^n (\lambda_i - \mu_j)$ の和は $i, j = 1 \dots n$ の値から作る対 (i, j) から出来るすべての異なる $\delta_{m_j k_j} \delta(\lambda_i - \mu_j)$ の積を可能な組合せについてとることを意味する。その様な組合せは $n!$ 項ある。

Wiener 係数の方程式 4でのべたように、散乱問題は TE 円筒波入射について各 m 毎に解くことができる。 φ 成分および z 成分の境界条件(40)(41)に(60)を代入し、上に示す多変数複素 Hermite 多項式の漸化式(99)および直交性(100)を用いると、Wiener 展開の係数 $A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 、 $B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (m , 固定)に対する階層方程式がえられる。簡単のために $n = 2$ までの Wiener 係数を考慮した階層方程式を $n = 0, 1, 2$ に対して以下に示す。実際の計算では $n = 3$ までを考慮した。

$n = 0$

[φ 成分]

$$\begin{aligned} &[A_0 \eta_m(a, \beta) - B_0 \zeta_m(a, \beta)] \\ &+ \sum_{m_1} \int k_t(\beta + \lambda_1) [A_1(m_1, \lambda_1) \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \\ &\quad - B_1(m_1, \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)] \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 \\ &- \sum_{m_1} \frac{im_1}{a} \int [A_1(m_1, \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \\ &\quad + B_1(m_1, \lambda_1) \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)] \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (102)$$

[z成分]

$$\begin{aligned}
& B_0 \psi_m(a, \beta) + \sum_{m_1} \int k_t(\beta + \lambda_1) B_1(m_1, \lambda_1) \dot{\psi}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 \\
& + \sum_{m_1} \int [A_1(m_1, \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \\
& + B_1(m_1, \lambda_1) \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)] \overline{(i\lambda_1) F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 = 0
\end{aligned} \tag{103}$$

$n = 1$

[\varphi成分]

$$\begin{aligned}
& [A_1(m_1, \lambda_1) \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) - B_1(m_1, \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)] \\
& + k_t(\beta) [\dot{\eta}_m^*(a, \beta) + A_0 \dot{\eta}_m(a, \beta) - B_0 \dot{\zeta}_m(a, \beta)] F_{m_1}(\lambda_1) \\
& + [\zeta_m^*(a, \beta) + A_0 \zeta_m(a, \beta) + B_0 \eta_m(a, \beta)] \frac{im_1}{a} F_{m_1}(\lambda_1) \\
& + 2 \sum_{m_2} \int k_t(\beta + \lambda_1 + \lambda_2) [A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \dot{\eta}_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& - B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \dot{\zeta}_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] \overline{F_{m_2}(\lambda_2)} d\lambda_2 \\
& + 2 \sum_{m_2} \int [A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \zeta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& + B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] \frac{im_2}{a} \overline{F_{m_2}(\lambda_2)} d\lambda_2 = 0
\end{aligned} \tag{104}$$

[z成分]

$$\begin{aligned}
& B_1(m_1, \lambda_1) \psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) + B_0 k_t(\beta) \dot{\psi}_m(a, \beta) F_{m_1}(\lambda_1) \\
& + [\zeta_m^*(a, \beta) + A_0 \zeta_m(a, \beta) + B_0 \eta_m(a, \beta)] i\lambda_1 F_{m_1}(\lambda_1) \\
& + 2 \sum_{m_2} \int B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) k_t(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \dot{\psi}_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \overline{F_{m_2}(\lambda_2)} d\lambda_2 \\
& + 2 \sum_{m_2} \int [A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \zeta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& + B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] i\lambda_2 \overline{F_{m_2}(\lambda_2)} d\lambda_2 = 0
\end{aligned} \tag{105}$$

$n = 2$

[φ 成分]

$$\begin{aligned}
& A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) - B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \zeta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ k_i(\beta + \lambda_1) \left[A_1(m_1, \lambda_1) \dot{\eta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) - B_1(m_1, \lambda_1) \dot{\zeta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \right] F_{m_2}(\lambda_2) \right. \\
& \quad \left. + k_i(\beta + \lambda_2) \left[A_1(m_2, \lambda_2) \dot{\eta}_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) - B_1(m_2, \lambda_2) \dot{\zeta}_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) \right] F_{m_1}(\lambda_1) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[A_1(m_1, \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) + B_1(m_1, \lambda_1) \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \right] \frac{i m_2}{a} F_{m_2}(\lambda_2) \right. \\
& \quad \left. + \left[A_1(m_2, \lambda_2) \zeta_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) + B_1(m_2, \lambda_2) \eta_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) \right] \frac{i m_1}{a} F_{m_1}(\lambda_1) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{106}$$

[z 成分]

$$\begin{aligned}
& B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \psi_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ B_1(m_1, \lambda_1) k_i(\beta + \lambda_1) \dot{\psi}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) F_{m_2}(\lambda_2) \right. \\
& \quad \left. + B_1(m_2, \lambda_2) k_i(\beta + \lambda_2) \dot{\psi}_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) F_{m_1}(\lambda_1) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[A_1(m_1, \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) + B_1(m_1, \lambda_1) \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \right] i \lambda_2 F_{m_2}(\lambda_2) \right. \\
& \quad \left. + \left[A_1(m_2, \lambda_2) \zeta_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) + B_1(m_2, \lambda_2) \eta_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) \right] i \lambda_1 F_{m_1}(\lambda_1) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{107}$$

但し、ここでは A_n^m, B_n^m を A_n, B_n と略記した。 $n=0$ の方程式 (102)(103) は方程式 (40)(41) の平均値部分である。ここでは不規則面の粗さは小さく $k\sigma \ll 1$ と仮定し近似解を求めた。 $F(\lambda)$ は $k\sigma$ のオーダーであるから A_0, B_0 は $(k\sigma)^2$ のオーダー、 $A_n, B_n (n \geq 1)$ は $(k\sigma)^n$ のオーダーである。したがって (107) より B_2 を B_1, A_1 に比例する項を求め、(106) に代入して A_2 を求める。これを (105) に代入して、 B_1 を近似的に求め、(104) より A_1 を求める。 A_1, B_1 を (102)(103) に代入すれば、 A_0, B_0 が求められるが、これを (104)(105) に逐次代入すれば、 A_1, B_1 の近似がよくなる。

粗い近似解 (単一散乱近似) 近似解の特徴を際立たせるために、まず最も粗い近似解 (単一散乱近似又は摂動近似相当) を書き下し、次にそれに補正を導入する形で近似解を求める。始めに、(104)(105) より A_0, B_0, A_2, B_2 を無視して A_1, B_1 を $k\sigma$ のオーダーつまり $F_{m_1}(\lambda_1)$ に比例する項を求めると

$$B_1(m_1, \lambda_1) \simeq \frac{-\zeta_m^*(a, \beta) i \lambda_1 F_{m_1}(\lambda_1)}{\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda)} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
A_1(m_1, \lambda_1) \simeq & \frac{\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} B_1(m_1, \lambda_1) \\
& - \frac{[k_i(\beta) \dot{\eta}_m^*(a, \beta) + \zeta_m^*(a, \beta) (i m_1/a)] F_{m_1}(\lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}
\end{aligned} \tag{109}$$

がえられる。ここで Bessel 関数の特異点 $k_t \rightarrow 0$ での漸近形

$$\psi_m(a, \nu) \equiv \frac{k_t}{k} H_m^{(1)}(k_t a) \sim \begin{cases} \frac{2}{i\pi} \frac{(m-1)!}{k a} \left(\frac{2}{k_t a}\right)^{m-1} & (m \geq 1) \\ i \frac{2}{\pi} \frac{k_t}{k} \log \left(\frac{k_t a}{2}\right) & (m = 0) \end{cases} \quad (k_t \equiv k_t(\nu) \rightarrow 0) \quad (110)$$

$$\zeta_m(a, \nu) \equiv \frac{\nu}{k} [H_{m-1}^{(1)}(k_t a) + H_{m+1}(k_t a)] \sim \begin{cases} \frac{-i}{2\pi} \frac{\nu}{k a} m! \left[\frac{2}{k_t a}\right]^{m+1} & (m \geq 1) \\ = 0 & (m = 0) \end{cases} \quad (k_t \rightarrow 0) \quad (111)$$

$$\eta_m(a, \nu) \equiv \frac{i\nu}{k} [H_{m-1}^{(1)}(k_t a) - H_{m+1}(k_t a)] \sim \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{\nu}{k a} m! \left[\frac{2}{k_t a}\right]^{m+1} & (m \geq 1) \\ -\frac{1}{\pi} \frac{\nu}{k} \frac{2}{k_t a} & (m = 0) \end{cases} \quad (k_t \rightarrow 0) \quad (112)$$

に注意する。(110)によれば TM 波の展開係数 $B_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似解 (108) は $\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) = 0$ となるときの、すなわち

$$m + m_1 = 0, \quad k_t(\beta + \lambda_1) \equiv \sqrt{k^2 - (\beta + \lambda_1)^2} = 0 \quad (114)$$

のときのみ $[k_t \log k_t]^{-1}$ の特異性をもつ。これは入射波と TEM モードとの一種の共振条件に相当する。一方 $A_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似解 (109) の第 1 項は (111) により $m + m_1 = 0$ で $\zeta_0 = 0$ となるので、 B_1 による特異性は消え、また第 2 項は (112) により $k_t \rightarrow 0$ で特異性を持たない。したがって、 $A_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似解 (109) は (114) においても特異性はないので近似解として使用することもできる。以上より多重散乱の効果を含まない摂動近似解 (108) は、如何に粗さが小さくとも特異点 (114) の近傍で発散して近似が悪くなる。また、これを用いた (102)(103) より求めるコヒーレント散乱係数 A_0 、 B_0 は発散する。

1 次 Wiener 係数 上の考察により、特異点 (114) において近似解が発散しないように高次の Wiener 係数 A_2 、 B_2 による寄与を取入れて B_1 の近似解 (108) を補正する必要がある。高次の方程式 (106)、(107) の解のすべての項を用いることは煩雑であるから、(114) の近傍で dominant な項 ((111)(112) により、 η_{m+m_1} を含む項) のみを用いて補正を求める。ここでは省略するが A_3 、 B_3 による寄与も考慮し、(106)、(107) より求める A_2 、 B_2 の近似解から $B_1(m_1, \lambda_1)$ に比例する項を取出すと ($B_1(m_2, \lambda_2)$ に比例する項の効果は少ないので無視できる。 $A_1(m_2, \lambda_2)$ に比例する項は (114) の近傍で消えるので無視する。)

$$B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \simeq \frac{-\frac{1}{2} \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) i \lambda_2 F_{m_2}(\lambda_2) B_1(m_1, \lambda_1)}{\psi_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) - \eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) M(m + m_1 + m_2 | \beta + \lambda_1 + \lambda_2)} \quad (115)$$

$$A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \simeq \frac{\zeta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)}{\eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)} B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) + \frac{[k_t(\beta + \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) - \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \frac{i m_2}{2}] F_{m_2}(\lambda_2)}{2 \eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)} B_1(m_1, \lambda_1) + \dots \quad (116)$$

(115) の分母に現れる $M(m|\lambda)$ は多重散乱の効果を表す mass operator である。これについては後にのべる。これら B_2 、 A_2 を (105) に用いて (108) に dominant な補正を行なった B_1 の近似解として

$$B_1(m_1, \lambda_1) \simeq \frac{1}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda)} \frac{-\zeta_m^*(a, \beta) i \lambda_1 F_{m_1}(\lambda_1) - N(m_1, \lambda_1)}{\frac{\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} - M(m + m_1 | \beta + \lambda_1)} \quad (117)$$

$$N(m_1, \lambda_1) \equiv \{B_0 k_t(\beta) \dot{\psi}_m(a, \beta) + [B_0 \eta_m(a, \beta) + A_0 \zeta_m(a, \beta)] i \lambda_1\} F_{m_1}(\lambda_1) \quad (118)$$

がえられる。分子の第1項は σ^1 のオーダーであるので、 σ^3 のオーダーである分子の補正項 N は近似的に無視することもできる。(117) の分母の補正項 $M(m + m_1 | \beta + \lambda_1)$ は (114) の近傍で効くので近似的に $M(0 | \pm k)$ とおいてもよい。(117) を (104) に代入し、 A_2 、 B_2 の寄与を無視すれば、 $A_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似式 (109) を補正できる:

$$A_1(m_1, \lambda_1) \simeq \frac{\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} B_1(m_1, \lambda_1) \frac{[k_t(\beta) \dot{\eta}_m^*(a, \beta) + \zeta_m^*(a, \beta) (im_1)/a] F_{m_1}(\lambda_1) + L(m_1, \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} \quad (119)$$

$$L(m_1, \lambda_1) \equiv A_0 [k_t(\beta) \dot{\eta}_m(a, \beta) + \zeta_m(a, \beta) (im_1)/a] F_{m_1}(\lambda_1) + B_0 [k_t(\beta) \dot{\zeta}_m(a, \beta) + \eta_m(a, \beta) (im_1)/a] F_{m_1}(\lambda_1) \quad (120)$$

A_1 、 B_1 は $k\sigma$ のオーダー、 L は $(k\sigma)^3$ のオーダーであるので A_1 の近似計算では L は無視してよい。近似解 (119) の第1項は (116) に $A_1(m_1, \lambda_1)$ に比例する項を含めて (104) の A_2 、 B_2 の積分の寄与を取り入れれば更により近似解に修正することができる。その時 (132)-(140) の様な多数の積分項が現れるが、煩雑なので省略する。 $A_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似解 (116) はもともと発散を含まないの、ここでは (119) の修正にとどめておく。同様に $B_1(m_1, \lambda_1)$ の近似解 (117) に無視した項の効果を入れる修正が可能であるが省略する。

(115)(117) の分母に現れる $M(m|\lambda)$ は mass operator に相当する項であって多重散乱の効果を表す。詳細は省略するが3次の Wiener 係数も考慮することにより次の mass operator の関係式

$$M(m|\lambda) \equiv \sum_{j=1}^4 M_j(m|\lambda) \quad (121)$$

$$M_1(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_t(\nu) \dot{\psi}_n(a, \nu) i(\nu - \lambda) |F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\eta_n(a, \nu) \left[\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} - M(n, \nu) \right]} d\nu \quad (122)$$

$$M_2(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\nu - \lambda) |F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\left[\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} - M(n, \nu) \right]} d\nu \quad (123)$$

$$M_3(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} i(\nu - \lambda) |F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2 d\nu \quad (124)$$

$$M_4(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\zeta_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} \right]^2 \frac{|i(\nu - \lambda)F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\left[\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} - M(n, \nu) \right]} d\nu \quad (125)$$

$$(126)$$

がえられる。これは $M(m|\lambda)$ にたいする一種の分散方程式である。 $M_1(m|\lambda)$ の右辺は $M(m|\lambda) \simeq 0$ と近似して計算できる。

$$\frac{k_t(\nu)\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} = \frac{k_t^2(\nu)}{i\nu} \quad (127)$$

$$\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} \sim \begin{cases} -\frac{a}{i\nu|n|} k_T^2(\nu), & n \neq 0 \\ \frac{a}{i\nu} k_T^2(\nu) \log \frac{k_t(\nu)a}{2}, & n = 0 \end{cases}, \quad (k_t^2 = k^2 - \nu^2 \rightarrow 0) \quad (128)$$

であるから、 $M_1(m|\lambda)$ の右辺は $M(m|\lambda) \sim 0$ と近似して積分ができる。また、 M_2 、 M_4 の積分については

$$1 + \left[\frac{\zeta_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} \right]^2 \begin{cases} \sim -4 \frac{a^2}{|n|(|n|-1)} k_t^2(\nu), & |n| \geq 2 \\ \sim -2 [k_t(\nu)a]^2 \log \frac{k_t(\nu)a}{2}, & |n| = 1 \\ = 1 & n = 0 \end{cases}, \quad (k_t(\nu) \rightarrow 0) \quad (129)$$

であるから、 $M_2 + M_4$ にまとめた積分し、各項は $n = 0$ 以外 $M(n|\nu) \simeq 0$ と近似して積分し、 $n = 0$ の $M(0|\nu)$ のみ方程式の逐次代入によって求めることができる。上にのべたように特に $\nu = \pm k$ での値 $M(0|\pm k)$ を計算すれば十分近似できる。

0 次 Wiener 係数 (103) の B_1 、 A_1 に (117)(119) を代入する。簡単のため B_0 、 A_0 を含む補正項 N 、 L は無視する。計算の結果

$$B_0 \simeq \frac{\zeta_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} M(m|\beta) + \frac{k_t(\beta)\dot{\eta}_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} M_5(m|\beta) \quad (130)$$

$$M(m|\beta) = \sum_{j=1}^4 M_j(m|\beta)$$

$$M_5(m|\beta) \equiv \sum_n \int \frac{\zeta_m(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} \overline{i(\lambda - \beta)} |F_m(\lambda - \beta)|^2 \lambda \quad (131)$$

がえられる。(102) の B_1 、 A_1 に (117)(119)、 B_1 に (130) に代入して同様の計算をすると

$$A_0 \simeq \frac{\zeta_m(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} B_0 + \frac{\zeta_m^*(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} \sum_{j=6}^{11} M_j(m|\beta) + \frac{k_t(\beta)\dot{\eta}_m^*(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} [M_{12}(m|\beta) + M_{13}(m|\beta)] \quad (132)$$

$$M_6(m|\beta) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_t(\lambda)\zeta_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} \frac{i(\lambda - \beta) |F_{n-m}(\lambda - \beta)|^2}{\frac{\psi_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (133)$$

$$M_7(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\lambda-\beta) |F_{n-m}(\nu-\lambda)|^2}{\frac{\psi_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (134)$$

$$M_8(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a,\lambda) k_t(\lambda) \dot{\eta}_n(a,\lambda)}{[\eta_n(a,\lambda)]^2} \frac{i(\lambda-\beta) |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2}{\frac{\psi_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (135)$$

$$M_9(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_t(\lambda) \dot{\eta}_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2 d\lambda \quad (136)$$

$$M_{10}(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\zeta_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} \right]^2 \frac{i(\lambda-\beta) |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2}{\frac{\psi_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (137)$$

$$M_{11}(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{i(n-m)}{a} \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2 d\lambda \quad (138)$$

$$M_{12}(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_t(\lambda) \dot{\eta}_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2 d\lambda \quad (139)$$

$$M_{13}(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2 d\lambda \quad (140)$$

M_7, M_{10} は $M_2 + M_4$ と同様に

$$M_7(m|\beta) + M_{10}(m|\beta) = \sum_n \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \left[\frac{\zeta_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} \right]^2 \right] \frac{i(\lambda-\beta) |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2}{\frac{\psi_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (141)$$

とおき、(128)、(129)により積分項 $n \neq 0$ 以外は $M(n|\lambda) = 0$ において積分ができる。

(130)の分母 $\psi_m(a,\beta)$ は $m = 0$ 、 $k_t(\beta) \rightarrow 0$ 、 $\beta \rightarrow \pm k$ で 0 となるが、 M, M_5 の係数は

$$\frac{\zeta_m^*(a,\beta)}{\psi_m(a,\beta)} \sim \begin{cases} (k_t a)^{2|m|-2}, & |m| \geq 1 \\ 0, & m = 0 \end{cases}, \quad k_t \rightarrow 0 \quad (142)$$

$$\frac{k_t(\beta) \dot{\eta}_m^*(a,\beta)}{\psi_m(a,\beta)} \sim \begin{cases} (k_t a)^{2|m|-2}, & |m| \geq 1 \\ 1/\log(k_t a) \rightarrow 0, & m = 0 \end{cases}, \quad k_t \rightarrow 0 \quad (143)$$

となり、 $\beta \rightarrow \pm k$ で有限である。 B_1 と同様に分母の $\psi_m(a,\beta)$ に mass operator による補正を入れるためには、 N, L も入れて計算し (103)(102) を A_0, B_0 の連立方程式として解けばよいが、非常に煩雑となるので上記の近似計算にとどめる。

参考文献

- [1] N. Wiener, *Nonlinear Problems in Random Theory* (MIT Cambridge, MA. 1958).
- [2] R. H. Camtron, and W. T. Martin, *Ann. Math.*, 48 385 (1947).
- [3] K. Ito, *J. Math. Soc. Japan*, 13 157 (1951).

- [4] K. Ito, *Jpn. J. Math.*, **22** 63 (1952).
- [5] H. Ogura, *Phys. Rev.*, **A11** 942 (1975).
- [6] H. Ogura and N. Takahashi, *J. Math. Phys.*, **31** 61 (1990).
- [7] J. Nakayama, H. Ogura, and B. Matsumoto, *Radio Sci.*, **15** 1049 (1980).
- [8] J. Nakayama, H. Ogura, and M. Sakata, *J. Math. Phys.*, **22** 471 (1981).
- [9] J. Nakayama, H. Ogura, and M. Sakata, *Radio Sci.*, **16** 831-847 (1981).
- [10] J. Nakayama, M. Sakata, and H. Ogura, *Radio Sci.*, **16** 847 (1981).
- [11] J. Nakayama, *Radio Sci.*, **17** 558 (1982).
- [12] H. Ogura and N. Takahashi, *J. Opt. Soc. Am.*, **A 2** 2208 (1985).
- [13] J. Nakayama, Ph. D dissertation, Kyoto University, Kyoto, Japan, 1982.
- [14] J. Nakayama, K. Mizutani, H. Ogura, and S. Hayashi, *J. Appl. Phys.*, **56**, 1465, (1984).
- [15] H. Ogura, and H. Nakayama, *J. Math. Phys.*, **29** 851 (1988).
- [16] C. Eftimin, *IEEE Trans. AP*, **236** 651-659 (1988).
- [17] 小倉 久直, 確率過程論, コロナ社 (1978).

イットリウム・鉄・ガーネット薄膜を用いた
帯域阻止フィルタ

The Waveguide Band Rejection Filter
using Yttrium-Iron-Garnet Films

大久保 賢祐 堤 誠

京都工芸繊維大学

1990年5月11日
於 大阪大学

あらまし

本報告は、イットリウム・鉄・ガーネット (YIG) 薄膜を導波管内に装荷した構造の帯域阻止フィルタを提案する。

まず、半無限 YIG 薄膜からの電磁波の反射および透過の問題を取扱う。次に等方性媒質を装荷した導波管内では TE_{10} モードの電磁波はこれらの平面電磁波の合成で表わせることに着目し、異方性媒質である YIG を装荷した場合の問題を平面波の合成として近似的に取扱い、加える直流磁界によって中心周波数が変化する帯域遮断特性を明らかにする。さらに YIG 薄膜を多段に装荷することで帯域阻止フィルタとして良好な特性が得られることを示す。

おわりに、X バンドで実験を行ない、その特性を実験的に確かめる。直流磁界 2812 Oe を加えた場合、中心周波数 10.0 GHz, 挿入損 1.0 dB, 帯域幅 144.7 MHz, 最大阻止量 60 dB 以上のフィルタ特性が観測された。

1. まえがき

ガドリニウム・ガリウム・ガーネット (GGG) 基板上に液相成長されたイットリウム・鉄・ガーネット (YIG) 薄膜は静磁波デバイスの媒体として用いられ、これを用いた静磁波フィルタの研究が活発に行われている。(1)(2)

しかしながら、YIG 薄膜を導波管に装荷した場合のフィルタ特性に関する研究は筆者らの知る限り見られない。

本報告は、YIG 薄膜を導波管内に装荷した構造の帯域阻止フィルタを提案する。まず、この問題を平面電磁波の反射および透過の問題として取り扱った後、導波管内での TE_{10} モードの電磁界がこれらの平面電磁波の合成で表わされることに着目し、理論的な検討を行なう。次に、YIG 薄膜を多段に装荷した場合の伝搬特性を明らかにし、これが良好なフィルタ特性を示すことを実験的に確かめる。

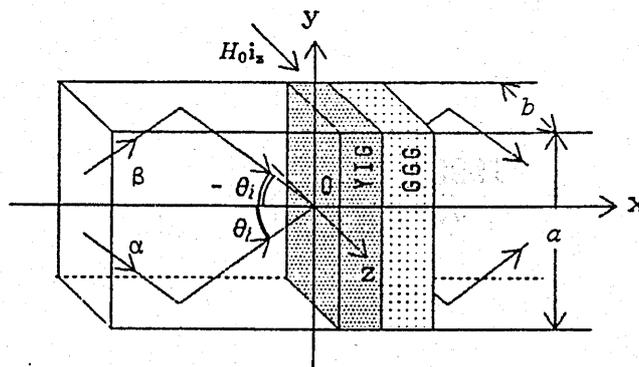


図1 導波管内に装荷された YIG 薄膜と平面波の軌跡

2. 理論

図1に本報告で提案する YIG 薄膜を装荷した導波管を示す。なお YIG 薄膜は単独に存在せず、作成上 GGG と対になっている。また磁界 H_0 は z 方向に加わっているものとする。

YIG は透磁率が異方性であるため、このような構造における電磁波の伝搬特性は簡単な解析手法では求めることはできない⁽³⁾。しかしながら YIG の透磁率が等方性であり、かつ導波管内の電磁界を TE_{10} モードに限ると解を厳密に求めることができる。さらにこの場合図1に示すように TE_{10} モードを2つの斜交する平面電磁波 α, β に分解し⁽⁴⁾ これらの平面電磁波が y 方向の固有値 π/a を有するものとして求めることができる。

ここでは図2に示すように y 方向に無限に広がる YIG 薄膜からの平面電磁波の反射および透過の問題をまず取扱い、異方性の効果を調べ、次に導波管における電磁波の伝搬特性を近似的に求める。なお YIG 薄膜の厚さは w 、GGG の厚さは h とし、直流磁界 H_0 を z 方向に印加するものとする。

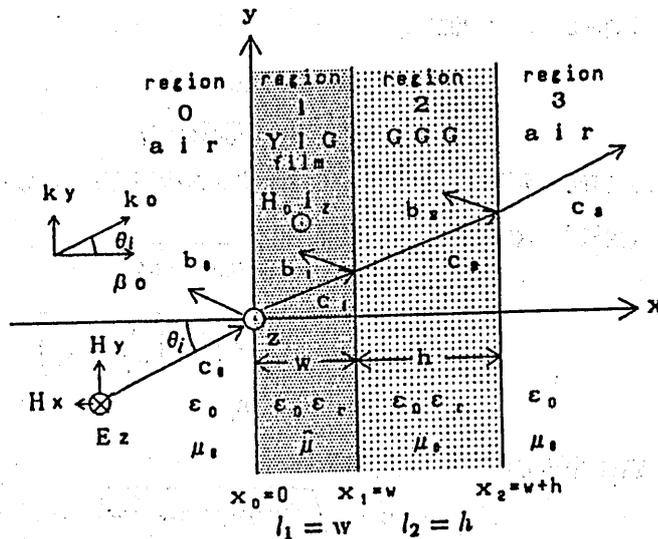


図2 問題の構成

YIG における透磁率テンソルは、

$$\hat{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & j\kappa & 0 \\ -j\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

であり、ここに μ, κ は

$$\mu = 1 + \frac{\omega_h \cdot \omega_m}{\omega_h^2 - \omega^2}, \quad \kappa = \frac{\omega \cdot \omega_m}{\omega_h^2 - \omega^2}$$

$$\omega_h = \gamma \mu_0 (H_0 + j \frac{\Delta H}{2}), \quad \omega_m = \gamma \mu_0 M$$

である。また、 ω は角周波数、 ΔH は YIG の損失を与える半値幅、そして M は飽和磁化 (=1730 Gauss)、 γ は磁気回転比 (= $1.76 \times 10^7 \text{ rad}/(\text{sec} \cdot \text{Oe})$) である⁽⁵⁾。図2に示すように

TE モードの平面波（入射面に対して垂直な電界成分を持たない）が入射角 θ_i で YIG 薄膜に入射するものとする。マクスウエル方程式で、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= 0, \\ E_{ix} &= 0, \quad E_{iy} = 0 \\ H_{iz} &= 0\end{aligned}$$

とおくと、各領域 $i = 1, 2, 3$ における電磁界の成分は、

$$E_{ix} = (c_i e^{-j\beta_i x} + b_i e^{j\beta_i x}) e^{-jk_y y} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} H_{ix} \\ H_{iy} \end{bmatrix} &= Y_i \begin{bmatrix} e^{-j\beta_i x} & 0 \\ 0 & e^{j\beta_i x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i \\ b_i \end{bmatrix} e^{-jk_y y} \\ H_{iz} &= 0\end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで c_i, b_i は入射波および反射波の振幅である。 y 方向の伝搬定数 k_y はスネルの法則より各領域で等しく、その値は、

$$\begin{aligned}k_y &= k_0 \sin \theta_i \\ &= \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sin \theta_i\end{aligned}$$

である。また x 方向の伝搬定数 β_i およびアドミタンス行列 Y_i は各領域では以下の通りである。

領域 0, 3（空气中）では、

$$\begin{aligned}\beta_i &= \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - k_y^2} \\ Y_i &= \begin{bmatrix} Y_{i1} & Y_{i2} \\ Y_{i3} & Y_{i4} \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega \mu_0} \begin{bmatrix} k_y & k_y \\ -\beta_i & \beta_i \end{bmatrix} \\ & \quad i = 0, 3\end{aligned} \quad (4)$$

領域 1（YIG 中）では、

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \sqrt{\omega^2 \mu_0 \mu_{eff} \epsilon_0 \epsilon_r - k_y^2} \\ Y_1 &= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{13} & Y_{14} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega \mu_0 (\mu^2 - \kappa^2)} \begin{bmatrix} \mu k_y + j\kappa \beta_1 & \mu k_y - j\kappa \beta_1 \\ -\mu \beta_1 + j\kappa k_y & \mu \beta_1 + j\kappa k_y \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (5)$$

ここで、

$$\mu_{eff} = \frac{\mu^2 - \kappa^2}{\mu}$$

領域 2（GGG 中）では、

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r - k_y^2} \\ Y_2 &= \begin{bmatrix} Y_{21} & Y_{22} \\ Y_{23} & Y_{24} \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega \mu_0} \begin{bmatrix} k_y & k_y \\ -\beta_2 & \beta_2 \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (6)$$

である。

次に、電磁界の接線成分が各領域の境界 $x = x_i$ で連続であるという境界条件は(2),(3)式より、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_{i3} & Y_{i4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\beta_i x_i} & 0 \\ 0 & e^{j\beta_i x_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i \\ b_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_{i+13} & Y_{i+14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\beta_{i+1} x_i} & 0 \\ 0 & e^{j\beta_{i+1} x_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i+1} \\ b_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x_i = \sum_{k=1}^i l_k$ である。なお l_k は領域の長さである。これより、領域 i と $i+1$ の界の振幅の関係は、

$$\begin{bmatrix} c_i \\ b_i \end{bmatrix} = A_{i,i+1} \begin{bmatrix} c_{i+1} \\ b_{i+1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

と表わせる。ここに、

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} &= \begin{bmatrix} e^{-j\beta_i x_i} & 0 \\ 0 & e^{j\beta_i x_i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_{i3} & Y_{i4} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_{i+13} & Y_{i+14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\beta_{i+1} x_i} & 0 \\ 0 & e^{j\beta_{i+1} x_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

である。

図2に示す問題の構成の場合、領域0と領域3との間の界の振幅は、(7)式の関係を適用すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_0 \\ b_0 \end{bmatrix} &= A_{01} A_{12} A_{23} \begin{bmatrix} c_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

となり、媒質のパラメータによって決まるマトリックス $A_{i,i+1}$ の積によって関係づけられる。

いま領域3からの反射がないので、 $b_3 = 0$ とおいて、領域0および領域3で入射波と反射波の x 方向のポインティング電力を考慮して、電力反射係数 R および電力透過係数 T を求めると、(9)式より、

$$R = \frac{|b_0|^2}{|c_0|^2} = \frac{|A_{21}|^2}{|A_{11}|^2} \quad (10)$$

$$T = \frac{|c_3|^2}{|c_0|^2} = \frac{1}{|A_{11}|^2} \quad (11)$$

となる。

図3は透過電力の周波数依存性を入射角の正負をパラメータとして、(11)式から求まる理論値 T_α, T_β で示したものである。この場合、YIGの厚さ w は $40 \mu\text{m}$ 、 ΔH は 1 Oe 、GGGの厚さ h は $400 \mu\text{m}$ 、入射角 θ_i は 41.18 deg 、直流磁界 H_0 は 2808 Oe である。また添字 α, β は入射角 θ_i が正および負であることを意味している。同図から、YIGが異方性媒質であるため入射方向 α, β によって透過特性が異なり、非可逆性が生じることがわかる。また鋭い遮断特性が現れている。

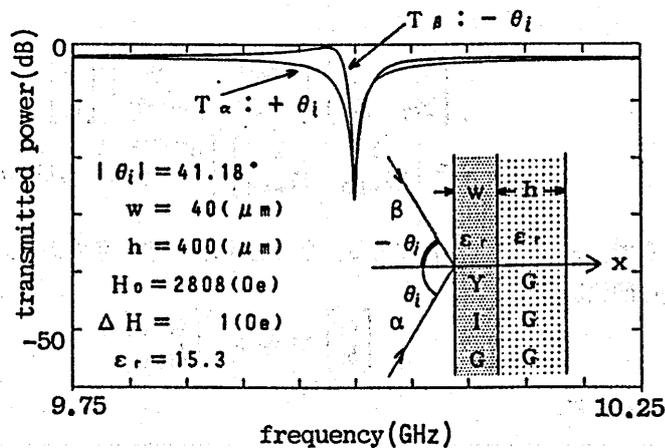


図3 入射角の正負に対する透過電力の周波数依存性

次に、図1に示すようにYIG薄膜を導波管内に装荷した場合の電磁波の反射および透過の問題を考える。すでに述べたごとく導波管にTE₁₀モードが入射した場合、媒質が等方性であるなら入射角 θ_i を

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{\pi/a}{\sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - (\pi/a)^2}} \quad (12)$$

と求めて求めた平面波の電力反射係数 R_α, R_β および電力透過係数 T_α, T_β は、導波管内での電力反射係数 R_g および透過係数 T_g に等しく、 $R_g = R_\alpha = R_\beta$ 、 $T_g = T_\alpha = T_\beta$ となる。なお、(12)式の a は図1に示す導波管の幅である。

ところが、YIG薄膜の透磁率は異方性であるので、図3に示すように T_α と T_β とは異なる。しかしながらそれらの量は遮断特性の特徴を与える-10 dB以下ではそれほど大きくない。そこで、 T_α と T_β の差が十分小さければ、YIG薄膜を装荷した導波管におけるTE₁₀モードの電力透過係数 T_g との間に

$$T_g = \frac{T_\alpha + T_\beta}{2} \quad (13)$$

なる関係が近似的に成り立つものとして、この問題を取り扱う。一方、電力反射係数 R_g についても同様に、

$$R_g = \frac{R_\alpha + R_\beta}{2} \quad (14)$$

と定義する。

図4はGGGの厚さ h が400 μm 、の場合の透過係数の周波数依存性をYIGの厚さ w をパラメータとして(13)式から求まる導波管内での理論値で示したものである。同図からYIGを厚くすると遮断特性が広がることがわかる。図5は損失 ΔH をパラメータとした場合の同じく導波管内での透過係数 T_g の周波数依存性であり、この場合 ΔH が大きくなると最大阻止量が小さくなることがわかる。

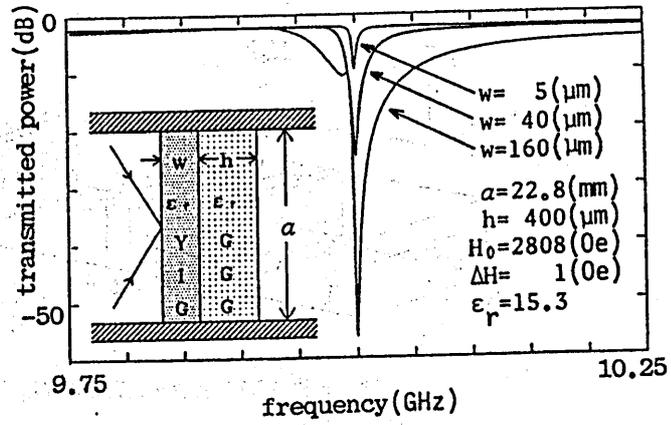


図4 TE₁₀モード導波管における透過電力の周波数依存性

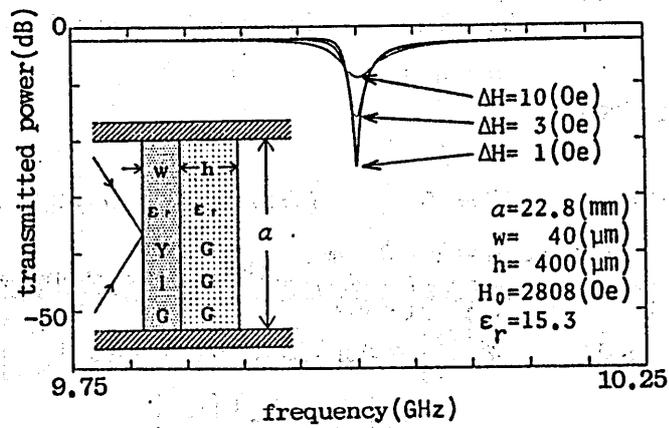


図5 損失を変化させた場合の透過電力

次に図6に示すように YIG 薄膜と GGG を間隔 d の空隙をあけて n 段に縦続接続する場合を考える。この場合、領域は 0 から $3n$ まで存在し、それぞれの領域における x 方向の伝搬定数 β_i 、アドミタンス行列 Y_i 、そして領域の長さ l_i は、

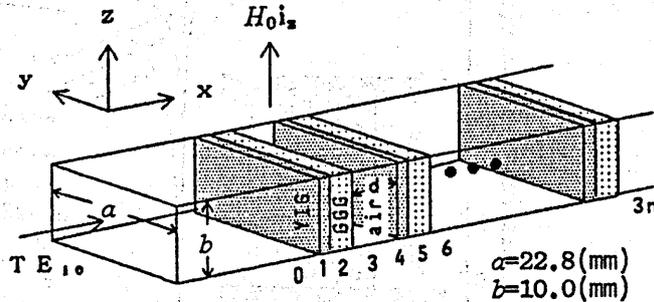


図6 n 枚の YIG 薄膜を装荷した導波管

空气中では、

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta_0 = \beta_3 & i &= 3m, & m &= 2, 3, \dots, n \\ Y_i &= Y_0 = Y_3 \\ l_i &= d & i &= 3(m-1), & m &= 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

YIG 中では、

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta_1 \\ Y_i &= Y_1 & i &= 3m-2, & m &= 2, 3, \dots, n \\ l_i &= l_1 = w \end{aligned}$$

GGG 中では、

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta_2 \\ Y_i &= Y_2 & i &= 3m-1, & m &= 2, 3, \dots, n \\ l_i &= l_2 = h \end{aligned}$$

である。また、領域 0 と領域 $3n$ の界の関係は 1 段の場合の (9) 式と同様に (7) 式より、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_0 \\ b_0 \end{bmatrix} &= A_{01} A_{12} A_{23} \dots A_{3n-1, 3n} \begin{bmatrix} c_{3n} \\ b_{3n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{3n} \\ b_{3n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。領域 $3n$ からの反射がないので $b_{3n} = 0$ において電力反射係数 R 、透過係数 T を求めると

$$R = \frac{|b_0|^2}{|c_0|^2} = \frac{|A'_{21}|^2}{|A'_{11}|^2} \quad (16)$$

$$T = \frac{|c_{3n}|^2}{|c_0|^2} = \frac{1}{|A'_{11}|^2} \quad (17)$$

となる。次に導波管における電力反射係数 R_g および透過係数 T_g を 1 枚の YIG 薄膜の場合と同様に平均の形で定義し、数値的に評価したものを図示すると図7および図8のようになる。こ

のような周期構造でブラッグ反射が起きる周波数とフィルタの中心周波数とが一致するように間隔 $d (= 15 \text{ mm})$ を選ぶと遮断特性が悪くなる。したがってブラッグ条件をはずした形で d を選び遮断特性の最適化を計り、結果として $d = 5 \text{ mm}$ に選んでいる。このように、試料を多段に装荷すると1枚の場合と比較して帯域幅が広くなるとともに挿入損が小さくなり、最大阻止量も大きくなるのがわかる。

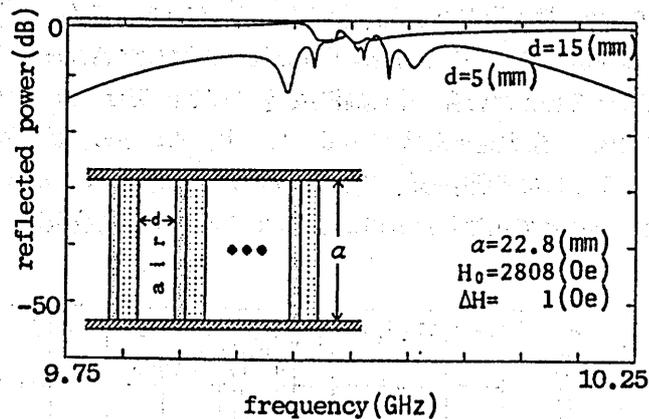


図7 6枚のYIG薄膜を装荷した場合の反射電力の理論値

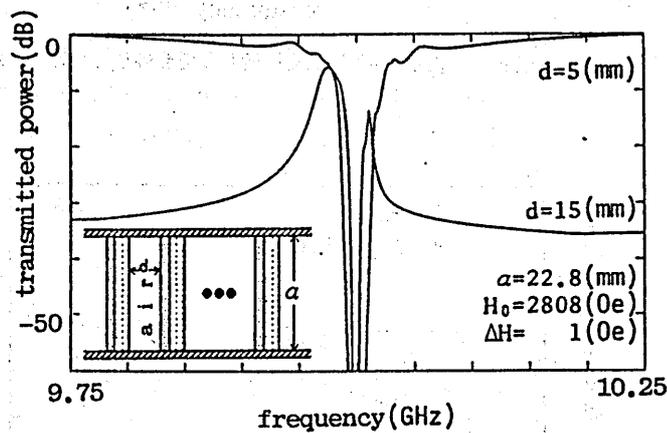


図8 6枚のYIG薄膜を装荷した場合の透過電力の理論値

3. 実験

2章で行った理論的考察を確かめるために厚さ $h = 400\mu\text{m}$ の GGG 基板上に、厚さ $w = 40\mu\text{m}$ の YIG 薄膜を成長させた寸法 $9.9\text{mm} \times 22.0\text{mm}$ の試料を用いて、Xバンドで実験を行った。なおこの寸法はXバンド用導波管の断面の寸法 $10.0\text{mm} \times 22.8\text{mm}$ に縦横それぞれ 0.1mm , 0.8mm 以内の精度で一致する。また、使用した YIG 薄膜の損失 ΔH は 1Oe である。試作された装置は図6と同じ構造である。図9は1枚の YIG 薄膜を導波管内に装荷した場合の透過特性の実験結果である。同図から直流磁界 $H_0 = 2817\text{Oe}$ を加えた場合、遮断中心周波数 f_0 が 9.98GHz で、挿入損が 2.3dB 、帯域幅 Δf が 28.3MHz (-3dB)、最大阻止量が 27.5dB であることがわかる。また、この場合理論値は図5に示した $\Delta H = 1\text{Oe}$ の特性である。直流磁界 $H_0 = 2808\text{Oe}$ を加えた場合、中心周波数 f_0 が 10.0GHz 、挿入損は 2.4dB 、帯域幅 Δf は 33.8MHz (-3dB)、最大阻止量は 22.4dB であり、これらの値は実験値と類似している。これをより明確にするために遮断中心周波数 f_0 および帯域幅 Δf (-3dB) の直流磁界 H_0 への依存性を理論値と実験値とで比較したものが図10である。中心周波数については実験値はほぼ理論

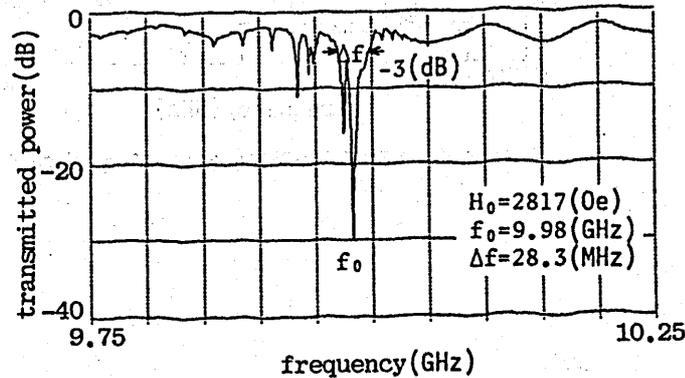


図9 1枚の YIG 薄膜を装荷した場合の透過電力の測定値

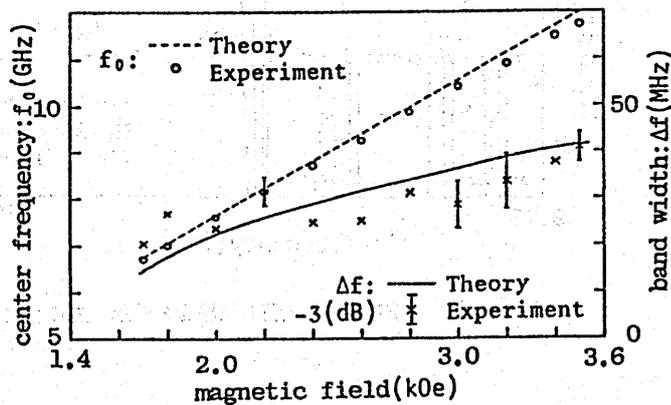


図10 遮断中心周波数 f_0 と帯域幅 Δf に関する理論値と実験値との比較

値と一致し、帯域幅については -3 dB の値では大きな誤差が現れるものと考えられるのだが、すでに述べたごとく測定誤差以内で理論値と一致している。なお図 9 に示す実験結果ではいくつかのリップルが観測されている。これは YIG が y 方向に有限であるために生じる定在波によるものであると考える。

次に YIG 薄膜試料 6 枚を間隔 d を 5 mm として導波管内に装荷して実験を行なった。図 11 および図 12 にその実験結果を示す。なお図 12 は図 11 の周波数帯域を拡大して測定したものである。観測された特性は、直流磁界 $H_0=2817$ Oe を加えた場合、中心周波数 f_0 が 9.98 GHz、挿入損が 0.0 dB、帯域幅 Δf が 183.9 MHz(-3 dB), 35.9 MHz(-20 dB) である。これは図 8 に示す理論値が、中心周波数が 10.0 GHz、挿入損が 0.0 dB、帯域幅が 93.1 MHz(-3 dB), 28.8 MHz(-20 dB) であるから、-3 dB での帯域幅を除いて実験値は理論値にほぼ一致している。ま

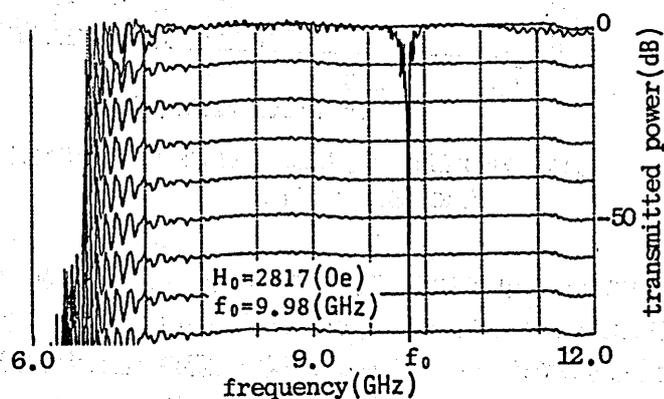


図 11 6枚の YIG 薄膜を装荷した場合の透過電力の測定値

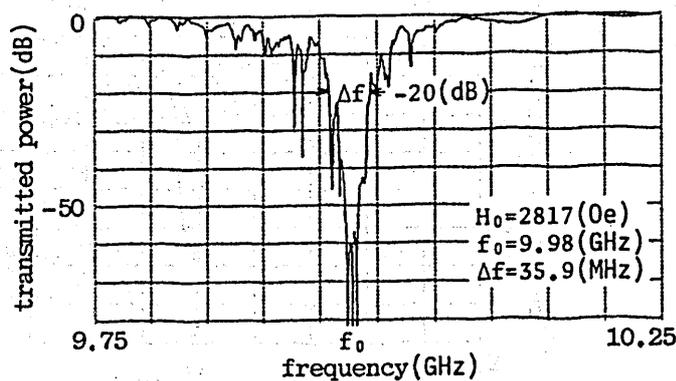


図 12 6枚の YIG 薄膜を装荷した場合の透過電力の測定値
(図 11 の周波数拡大)

た図13は6段接続した場合の遮断中心周波数 f_0 および帯域幅 Δf (-20 dB 減衰の値) の直流磁界 H_0 への依存性を理論値と実験値とで比較したものである。同図から測定精度を考えると、中心周波数はほぼ理論値に近く、帯域幅(-20 dB)はいくらか変動があるものの理論値に近い。

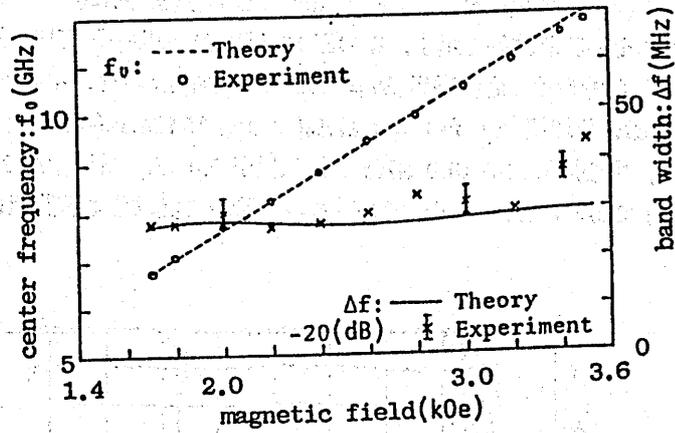


図13 遮断中心周波数 f_0 と帯域幅 Δf に関する理論値と実験値との比較 (YIG 薄膜6枚の場合)

この実験において用いた磁石の磁極の直径は 50 mm であるが、均一磁界を得るために必要な有効直径は 20 mm であり、6枚の YIG 薄膜を装荷した場合の x 方向の全長 27.64 mm に比べて十分大きなものではない。したがって不均一磁界が特性に大きな影響を与えているものと考えられる⁽⁶⁾。図14は磁極の形状を工夫し磁界を均一に調整して測定された透過電力特性である。この場合磁界の強さ $H_0=2812$ Oe で中心周波数 f_0 が 10.0 GHz、挿入損が 1.0dB、帯域幅 Δf が 144.7 MHz(-3 dB), 31.4 MHz(-20 dB) ときわめて良好な帯域阻止フィルタ特性が得られて

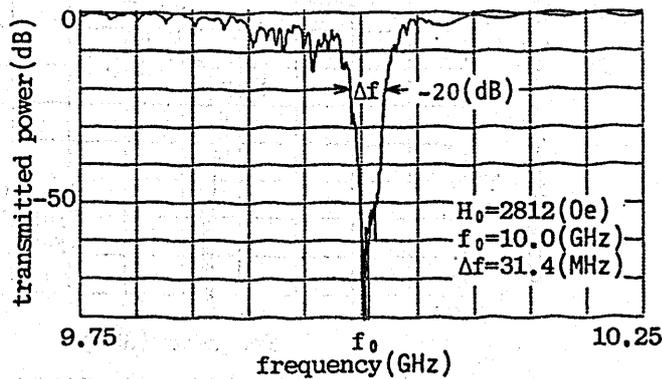


図14 フィルタ特性

いる。また図15はこのフィルタの位相特性の実験結果であり、位相特性は現在のところ満足すべきものではない。図12および図14に示した実験結果から YIG 薄膜の間隔および磁界の不均一性などを最適化すれば、本構造は導波管形帯域阻止フィルタとして有効な特性を持たす事ができ、かつこのようなフィルタはきわめて小型化できるのでミリ波帯においてより有用なものになるであろう。

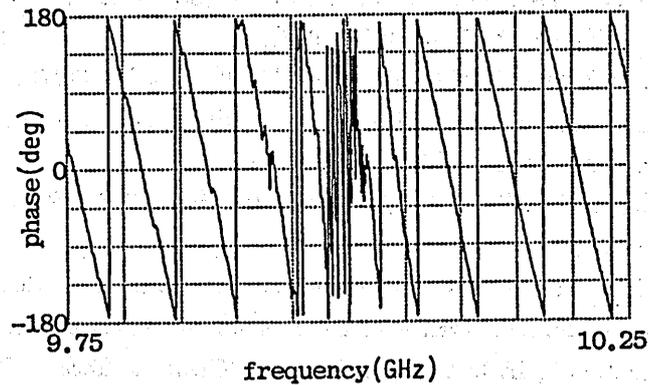


図15 位相特性

4. むすび

YIG 薄膜を装荷した導波管における電磁波の反射および透過の問題を、 TE_{10} モードの電磁波は斜交する2組の平面波に分解できることに着目し、半無限 YIG 薄膜媒質からの電磁波の反射および透過の問題として近似的に取り扱い、その諸特性を理論的に明らかにした。

また YIG 薄膜試料を多段に装荷することで帯域阻止フィルタとして良好な特性が現れることを理論的ならびに実験的に明らかにした。

本報告で提案した YIG 薄膜を用いた導波管形帯域阻止フィルタは、すでに明らかにされている多結晶フェライトを用いたフィルタ⁽⁷⁾に比べて特性の最適化がはかれるとともに小型化が可能である。これはミリ波帯においてより有効なものになるであろう。

謝辞 本研究において常日頃お世話になっている村田製作所の関係各位に深謝する。

文 献

- (1) Waguih S. Ishak : "Magnetostatic wave technology : a review", Proc. IEEE, 76, 2, pp. 171-185 (Feb.1988).
- (2) 官寧, 八代健一郎, 大川澄雄 : " 数値計算による 静磁モード円形金属端反射型共振器のモード同定", 平元信学秋全大, SC-9-2(Sep.1989).
- (3) 日浦 滋, 堤 誠, 熊谷 信昭 : " フェライトスラブ線路の不連続部における電磁波の反射および透過", 信学技報, MW86-33(Jul.1986).
- (4) 藤澤和男 : " 改版マイクロ波回路", pp. 15-80, コロナ社(1972).
- (5) B. Lax and K.J. Button : "Microwave ferrites and ferrimagnetics", pp. 145-196, McGraw-Hill, New York (1962).
- (6) 大久保 賢祐, 堤 誠 : " YIG 薄膜を装荷した導波管形フィルタ", 平2信学春全大, C-110 (Mar. 1990).
- (7) Jaroslaw Uher, Fritz Arndt, Jens Bornemann : "Computer-aided design and improved performance of tunable ferrite-loaded E -plane integrated circuit filters for millimeter-wave applications", IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., MTT-36, 12, pp. 1841-1849 (Dec.1988).

輻射科学研究会資料

RS90-3

導波構造をもつ（もたない）

非線形媒質中の定常伝搬モード

摂南大学・工学部・電気工学科

大家 重明

大阪大学・医療技術短期大学部

梅田 徳男

大阪府立大学・工学部・電気工学科

張 吉夫

1990年 7月 7日

目	次	頁
1. まえがき	1
2. 多重量子井戸 (MQW) 構造を用いた非線形光導波路	2
2.1 MQW光導波路の三層スラブ導波路近似理論	4
2.1.1 MQW光導波路構造	4
2.1.2 界分布	4
2.1.3 三層スラブ導波路近似	6
2.2 MQW非線形光導波路	6
2.2.1 室温励起子による非線形屈折率	6
2.2.2 MQW非線形光導波路の導波特性	7
3. 線形／非線形・光導波路構成	12
3.1 多層分割法による数値解析法	12
3.2 線形／非線形・表面伝搬モード	15
3.3 線形／MQW非線形・表面伝搬モード	15
3.4 線形／非線形・光導波路構成における定常伝搬モード	17
3.4.1 解析的検討	17
3.4.2 非線形／線形／非線形・三層構造における非線形表面伝搬 モード	18
4. 導波構造をもたない非線形媒質中の定常伝搬モード	20
4.1 線形 (非線形) / 非線形・周期的多層構造光導波路	22
4.1.1 屈折率が異なる場合	22
4.1.2 屈折率が同じ場合	23
4.2 線形 (非線形) / 非線形・周期的多層構造における等価非線形 屈折率	25
4.3 均質な非線形媒質中の光波伝搬	25
5. むすび	26

1. ま え が き

屈折率が光強度に比例して変化する非線形媒質を含む光導波路の伝搬特性については、すでに多くの報告例があり¹⁾⁻⁸⁾、近年、活発に研究がなされている分野である。これまで研究の対象となっている大部分は、非線形/線形/非線形(または線形)の媒質構造を有する三層スラブ光導波路である。同じ三層構造でも、線形/非線形/線形の媒質構造に比べて、この構造の方が誘電体境界面に沿って伝搬する非線形表面波など⁷⁾興味深い特異な現象を呈しうるからである。

しかし、非線形光導波路構成においては線形光導波路のように三層構造である必要はなく、線形/非線形の二層構成でも線形/非線形境界面に沿って伝搬する定常的導波モードは、十分存在可能である⁷⁾⁸⁾。このモードは線形/非線形・単一境界面によって維持されているからである。また、このような二層構造の片側、非線形媒質を多重量子井戸(線形/非線形多層構造、以下、MQWと称する)構造を用いて検討を行うことも可能である。すなわち、線形/MQW非線形・構成⁹⁾である。MQW構造を用いて実際に二層構造境界面に沿う伝搬を試みた例はこれまでにないが、光波伝搬に際しては、線形/非線形・構成における振舞いが予想される。

また、MQW層そのものも本質的に多層構造であり、しかも室温エキシトンの存在により、井戸層であるGaAs層(GaAs-AlGaAs MQW構造において)がエキシトンライン近傍で非線形部分であるとみなせるので、MQW構成のみでも安定な定常解(定常伝搬モード)が存在すると考えられる。従って、もはや線形導波路構成のようなクラッド、コアの区別もなく、MQW層のみで十分光導波路構成が可能となる。線形/非線形(MQW非線形も含めて)・二層構成の場合、このモードは単一境界面によって維持され、光強度分布のピーク位置は光強度に依存して移動するが、MQW層のみの場合の定常モードはこれら二層構造の定常モードと異なり、入射光強度分布のピーク位置にトラップされたままとなる。しかし、

このような線形／非線形・周期的多層構造の取り扱いは複雑で¹⁰⁾
¹¹⁾、数値計算に頼らざるを得なくなる。

線形光導波路構成において、MQW層は井戸層、バリアー層の各層厚が薄い場合、これを一層近似し得ることはすでに述べたが¹²⁾、本論文では、更に、線形（非線形）／非線形・周期的多層構造（MQW非線形層も含む）全体を一層近似することが可能であることを指摘する。これらの一層近似を用いれば、線形（非線形）／非線形・周期的多層構造光導波路については、構造的に全く境界面をもたない（導波構造をもたない）均質な非線形材料中における光波伝搬問題に帰着することになる¹³⁾。しかし、このような導波構造を全くもたない非線形媒質中の定常伝搬モードについては、あまり取り扱われていない。

このような観点から本論文では、導波構造をもつ ①線形／MQW非線形／線形の三層構成 ②線形／非線形（MQW非線形）の二層構成、及び、③全く導波構造をもたない非線形媒質中の定常伝搬モードについて述べる。

2. 多重量子井戸（MQW）構造を用いた非線形光導波路

近年、多重量子井戸（以下、MQWと称する）構造ないし超格子構造の有する光学特性が注目されている。これは励起子遷移による光学的非線形性や電界を印加した場合の光吸収特性の変化などが種々の光デバイスに応用できると考えられるからである。MQW構造の光学的非線形性には非線形吸収効果と非線形屈折率効果とがある¹⁴⁾。MQW構造中の室温励起子による非線形吸収は半導体レーザー程度の光強度で観測され、これに伴って、非線形屈折率も励起子吸収ピーク波長付近で観測される。

まず、このMQW構造をコアに用いた場合について、その導波特性がMQW構造を構成する半導体の混晶比や層厚によってどのように変化するかを示す^{15,16)}。さらに、MQW構造の持つ上述したよ

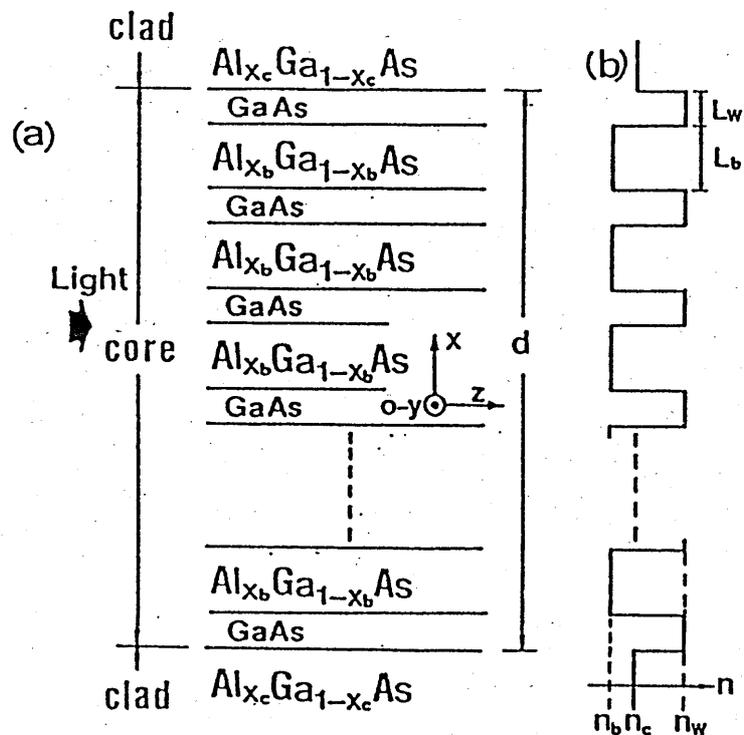


図1 MQW光導波路。
(a)構造 (b)屈折率分布。

表1 計算に用いたパラメータ

REFRACTIVE INDEX	$n_c = 3.53$	$n_w = 3.61$	$n_b = 3.49$
COMPOSITION RATIO	$x_c = 0.18$	-----	$x_b = 0.30$
THICKNESS RATIO	$L_w / L_b = 7 / 13$		
NUMBER OF QW PAIRS	$N = 4.5, 9.5, 19.5, 49.5, 99.5$ (symmetrical Configuration)		
CORE THICKNESS	$d = 2 \mu\text{m}$		
WAVELENGTH	$\lambda = 800 \text{ nm}$		

うな光学的非線形性に着目し、室温励起子の存在によって強調された非線形屈折率を利用した非線形導波路の特性について実験的検討を行っているので紹介したい。

2.1. MQW光導波路の三層スラブ導波路近似理論

2.1.1 MQW光導波路構造

図1にGaAs-AlGaAs MQW光導波路構造の一例を示す。コア部分はGaAs-AlGaAs周期的多層構造であり、クラッド部分は通常、コア部分と異なる混晶比をもつAlGaAs層である。図1の例では、コアMQW層の両端がGaAs層となっており、全体として対称構造の場合を示しているが、一般には種々の構成が考えられる。光波は図1のように、このMQW層に平行に入射するものとする。図中の L_w , L_b はそれぞれ、井戸の部分とバリアーの部分の厚さ、 n_w , n_b はそれぞれの部分の屈折率、そして、 n_c はクラッド層の屈折率である。

2.1.2 界分布

MQW構造を有する光導波路の導波特性は、図1の各々の界面における電磁界成分の連続性を考慮して得られる固有方程式を解くことにより求めることができる^{15,16)}。図2(a)、(b)に、TEモードにおける $|E_y(X)|^2$ 分布、並びに、TMモードにおける $|H_y(X)|^2/n_i^2$ 分布を示す^{16,17)}。これらは共に、光強度分布に相当するもので、この図においては比較を容易とするために光強度は規格化しており、すべての分布波形における占有面積は一定とした。この計算に用いたパラメータを表1に示した。膜厚に対して層数 N （井戸層、バリアー層のペア数）が増加してゆくにつれ（コア部分が対称構造であることに対応して、層数 N は半整数にとっている）、TE、TM両モード共に単一モード化する。図中、破線で示した分布は、それぞれコア部分の屈折率を各層の構成材料の屈折率から決まる単一の値、言い換えれば、均一な単層コア部を有する導波路として近

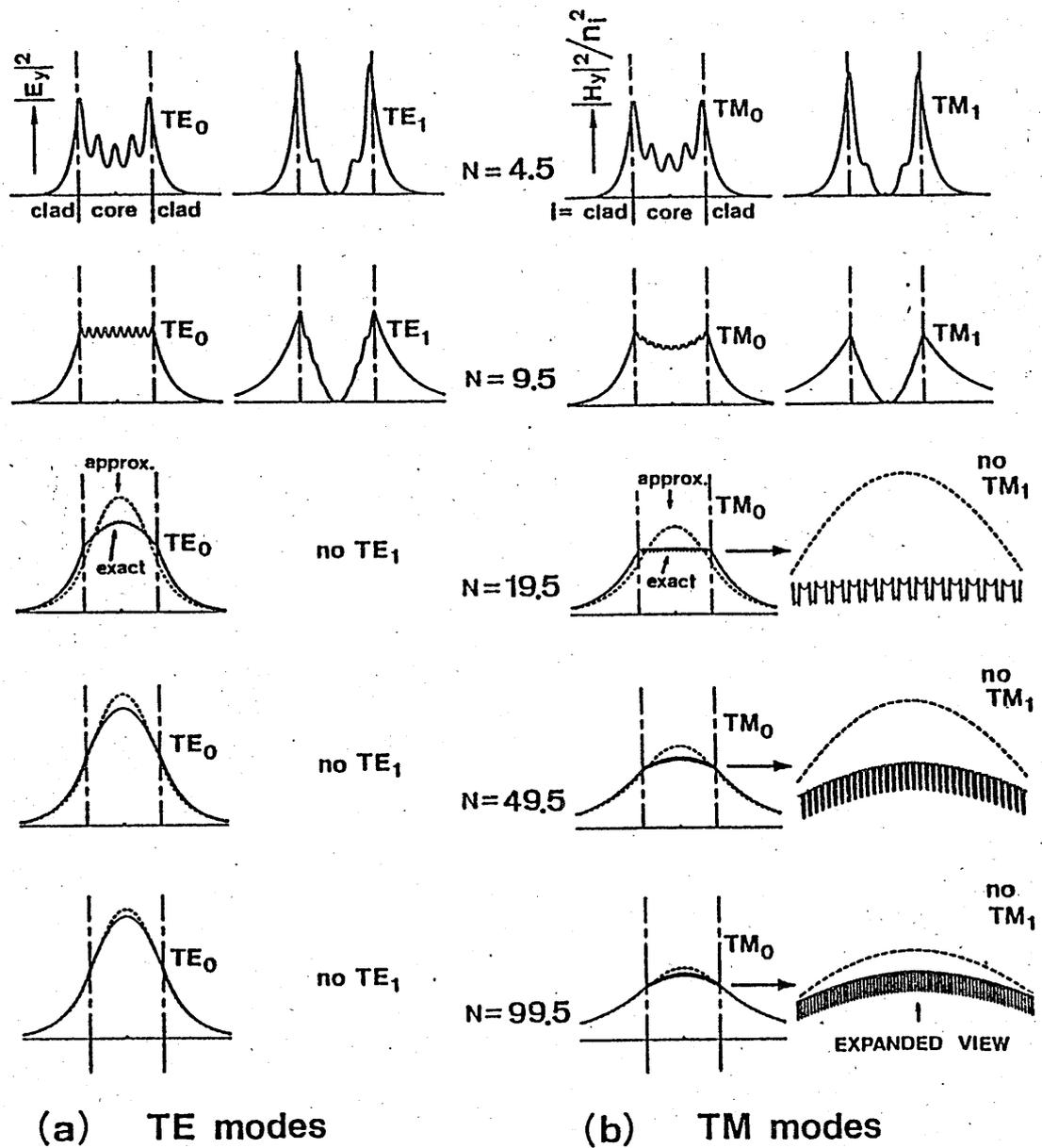


図 2 M Q W 光 導 波 路 に お け る 光 強 度 分 布 .
 (a) T E モ ー ド (b) T M モ ー ド .
 井 戸 層 、 バ リ ア ー 層 の ペ ア 数 N に 対 す る T
 E モ ー ド 、 T M モ ー ド の 光 強 度 波 形 を 示 す .
 実 線 は 多 層 構 造 固 有 方 程 式 、 破 線 は 三 層 ス
 ラ ブ 導 波 路 近 似 に よ る .

似（三層スラブ導波路近似）した結果である。Nが49.5以上になると、多層構造の固有方程式からの結果（実線）と良い一致を示すことがわかる。

2.1.3 三層スラブ導波路近似

前説で述べたTE、TM両モードにおける層数Nの大きい場合のMQW層の三層スラブ導波路近似式は、多層構造固有方程式を構成する個々の（各層に対応する）構成マトリクスを級数展開近似することにより容易に得ることができる。すなわち、MQWコア部は、TE、TM両モードに対して、それぞれ次の単層屈折率値を持つ均一層と見なせる^{15,16)}。

$$n_{TE} \sim \{(n_w^2 L_w + n_b^2 L_b) / (L_w + L_b)\}^{1/2} = \text{RMS (二乗平均根値)} \quad (1)$$

$$n_{TM} \sim \{(L_w + L_b) / (L_w / n_w^2 + L_b / n_b^2)\}^{1/2} \quad (2)$$

このように、コア層の呈する平均的屈折率がTE、TMの両モードで異なることから、MQW光導波路は光学的異方性を有し、複屈折性が存在することがわかる。この複屈折性はMQW構造が光導波路材料として層状構造を持つことから光学特性として当然予想されることであるが、この特性はMQW構造が非線形光学デバイスのみならず、導波形光変調器やモードフィルタなどの線形光デバイス¹⁸⁾としても種々の構成法で応用可能なことを示唆している。

2.2. MQW非線形光導波路

2.2.1 室温励起子による非線形屈折率

MQW構造における室温励起子の振舞い^{19,20)}は、その大きな光非線形性と高速応答性により注目を集めている。MQW構造中の室温励起子による非線形吸収を利用すれば、光-光スイッチのような光デバイスを構成することもできるが、以下には、非線形吸収に伴う屈折率の非線形性を利用した非線形光導波路について述べる。

共鳴吸収スペクトルにおいて、吸収係数と屈折率には一般に、クラマース・クローニッヒの関係式が成立する。したがって、非線形

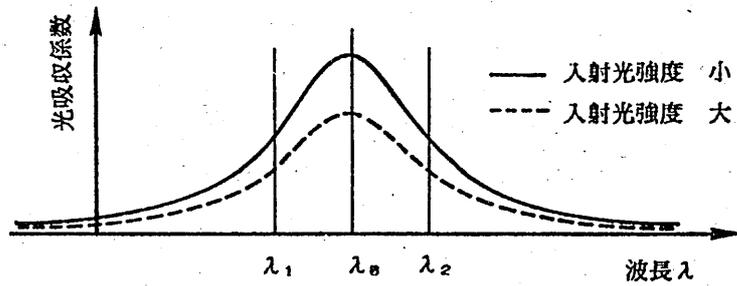
性により、入射光強度に依存して吸収係数が図3(a)のように変化するとき、屈折率も変化する。MQW構造のヘビーホール励起子吸収は半導体レーザー程度のパワーレベルでも、十分に絞り込めば、顕著な飽和が見られる^{21,22)}。したがって、励起子吸収線の屈折率も光強度に依存して図3(b)のように変化する。すなわち、励起子吸収線に伴う屈折率変化は励起子吸収ピーク波長 λ_0 を境界として、正、負いずれの符号をもとり得る。励起子共鳴線形状関数としてローレンツ型を仮定すれば、この離調に伴う屈折率の変化は吸収係数の変化に比べて緩やかであるから、適当な離調を保てば、吸収を比較的低くおさえつつ、屈折率変化を利用することができ、かつ、離調の方向を選択することにより非線形屈折率の符号を選択することができる。したがって、非線形光導波路を入射光依存光閉じ込めに用いるか、同光発散に用いるかの目的に応じて、離調の符号、MQWをコアに用いるか、クラッドに用いるかなどを使い分ければよいことになる。以下には、特に、MQW構造をコアに用いた場合について検討を行う。

2.2.2 MQW非線形光導波路の導波特性

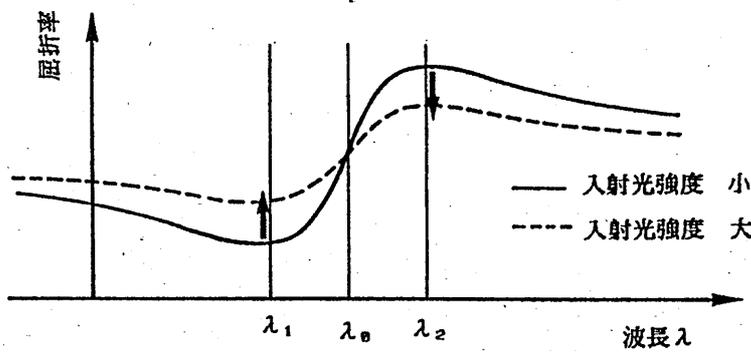
MQW構造を光導波路に用いれば、前述したように励起子吸収ピーク波長 λ_0 の短波長側では入射光強度の増加に対して屈折率は増大し、逆に、長波長側では低下する。このような観点から、GaAs-AlGaAs MQW構造光導波路について、室温励起子光吸収スペクトルを測定し、さらに、入射光強度を変化させた場合の出射端光強度分布の変化を観察した。

この導波実験に用いたMQW光導波路の概略形状は図1とほぼ同じものである。ここでの実験に用いたMQW構造試料の層厚・組成構造を図4に示す。

表1の場合とA1の組成(X_c , X_b)や d が若干異なるのは、室温励起子光吸収特性の測定実験や導波実験に際して、半導体レーザーを用いた場合の屈折率変化などを考慮したためである。図5にこの



(a) 吸収係数



(b) 屈折率

図 3 吸収係数ならびに屈折率の入射光強度依存性。
励起子吸収ピーク波長 (λ_0) より短波長側
(たとえば、 λ_1) では入射光強度の増加に
対して屈折率は増大する。逆に、長波長側
(たとえば、 λ_2) では入射光強度の増加に
対して屈折率は低下する。

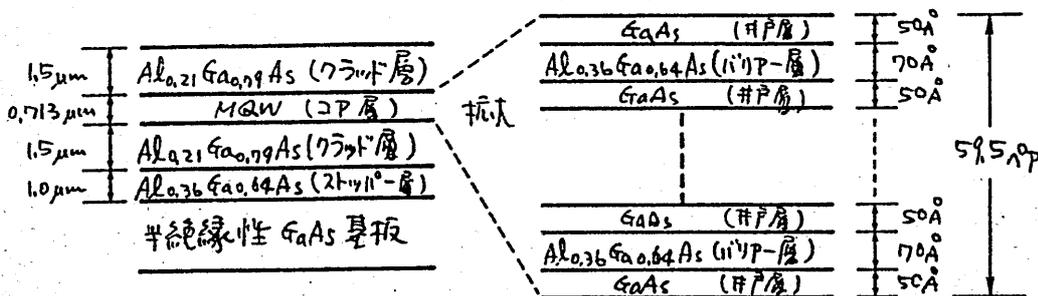


図 4 実験に用いた MQW 光導波路の断面構造。

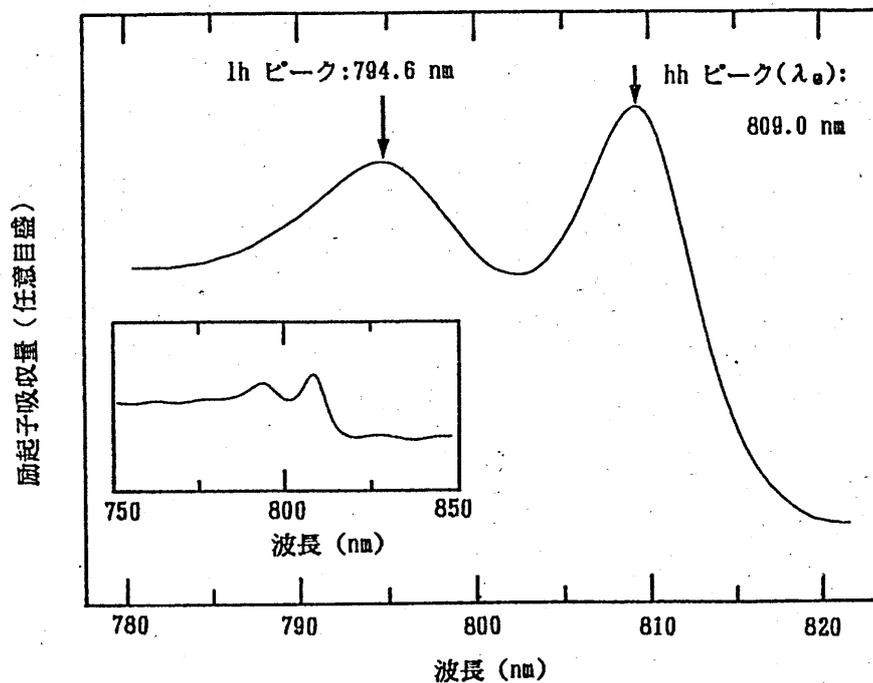


図 5 励起子吸収の測定。
 ヘビーホール (hh) 励起子による吸収ピーク波長は 809.0 nm、ライトホール (lh) 励起子による吸収ピーク波長は 794.6 nm である。グラフ中の挿入図は広範囲な波長変化に対するスペクトルを示す。

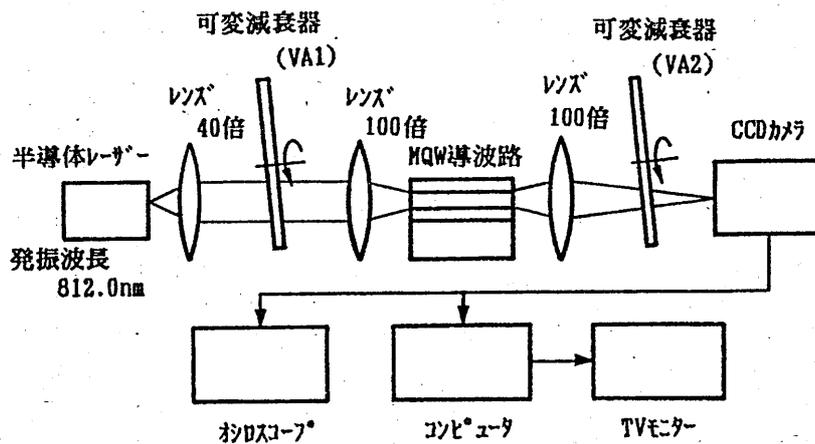
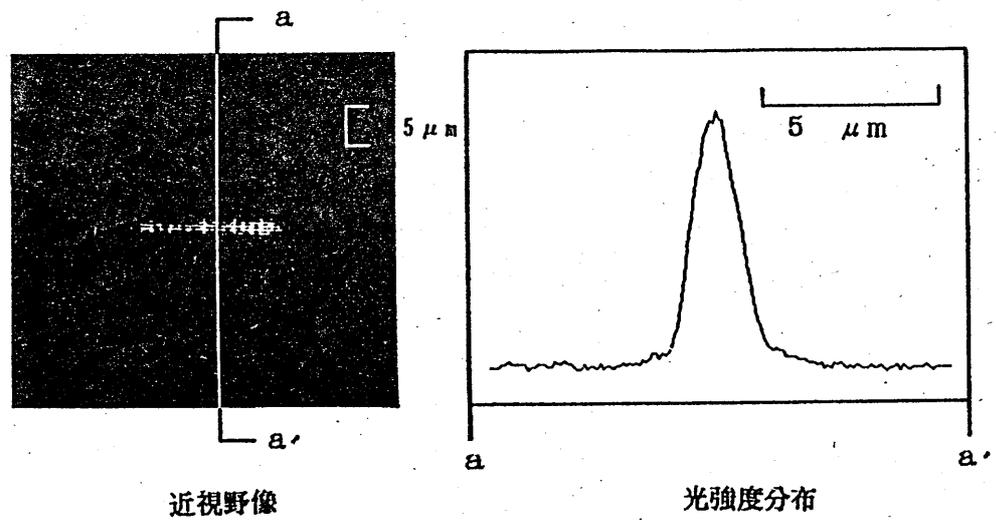


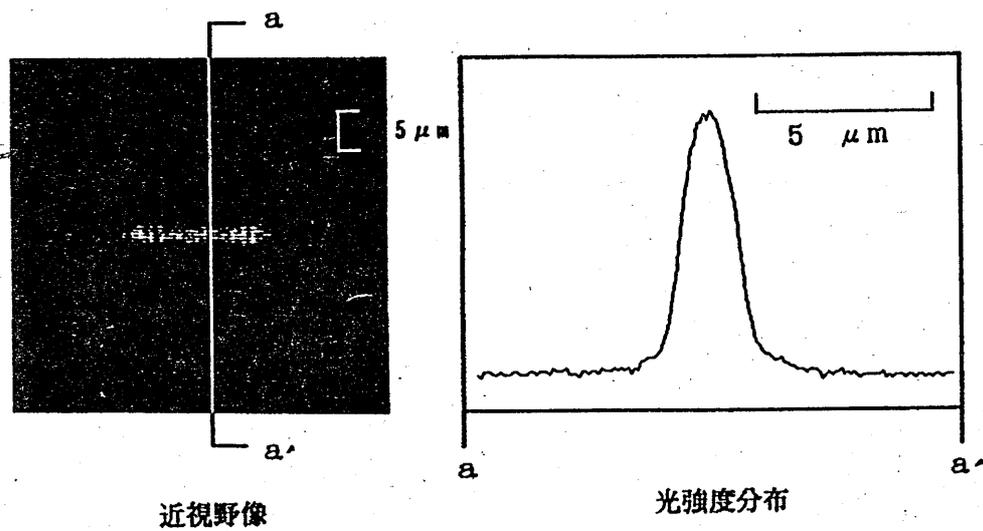
図 6 光導波路測定系。

MQW試料の光吸収スペクトル（室温）の測定結果を示す。これより室温励起子による2重吸収ピークの存在と波長の位置がわかる。ヘビーホール(hh)励起子による吸収ピーク波長(λ_0)は、809.0 nm、ライトホール(lh)励起子による吸収ピーク波長は、794.6 nmである。図6は、このMQW試料の入射光強度変化に対する出射端光強度分布の変化を観察する光導波路測定系である。光源として半導体レーザーを使用し、対物レンズを用いて、へき開面よりの端面結合を行っている。なお、半導体レーザーの発振波長は試料の励起子光吸収ピーク波長 λ_0 (809.0 nm)から長波長側に離調されており、812.0 nmである。半導体レーザーからの入射光ビームは対物レンズにより平行光とし、可変減衰器(VA1)により、試料への入射光強度を変化できるようにしてある。出射端対物レンズはMQW導波路端面での出射光パターン、いわゆる近視野像をへき開面の形状をも含めてテレビモニター上にて観察するためのものである。さらに、モニター上の光強度分布をデータ処理できるようにコンピュータ画像処理系を備えている。

図7はこの測定系を用いることにより得られた図4のGaAs-AlGaAs MQW光導波路(導波路長約5 mm)端面での出射光パターンの観察結果とその光強度分布である。光波は、約 $0.7\mu\text{m}$ のMQWコア部分を中心に閉じ込められており、クラッド層を含めた約 $3\mu\text{m}$ の広がりを見せている。図7(a)は低入射光強度の、(b)は高入射光強度の場合をそれぞれ示している。入射光強度の変化に対して、測定パターンの強度分布を常に測定用CCDカメラの受光感度直線範囲内に保つため、図6に示すように、試料出射後、可変減衰器(VA2)を用いて、CCDカメラに入射するパターンのハイライト部ピーク値を常に一定に保った。このように(a)、(b)に関して光強度分布のピーク値が等しく保たれているので、光強度分布曲線は真の光強度分布関数を与えることとなる。(a)、(b)両光強度分布曲線を比較して、(b)の分布の半値全幅が若干広がっているのが見られる。したがって、光強度の増大に対して光閉じ込めが弱くなる傾向のあ



(a) 入射光強度：小



(b) 入射光強度：大

図 7. MQW 非線形光導波路の導波特性。
 (a) 入射光強度：小 (b) 入射光強度：大。
 近視野像と a-a' 線上の光強度分布を示す。
 入射光強度小 → 大の変化に対して若干ではあるが光閉じ込めが弱くなっている。

ることがわかる。これは前述したように、光吸収ピーク波長よりわずかに長波長側では、入射光強度の増加に対して導波路の光波閉じ込め効果が低下することによるものである。

現段階ではスラブ導波路構成であるが、今後さらに、MQW構造への効率の良いパワー集中を行うため、横方向も含めて2次元光閉じ込めを行う予定である。

3. 線形 / 非線形・光導波路構成

これまで、GaAs-AlGaAs MQW構造をコア（もしくはクラッド）にもつ非線形光導波特性について、MQW層を一層近似し、全体を三層構造とする「三層スラブ導波路近似解析」を用いて理論的に検討を行ってきた。しかし、非線形媒質を有する構造においては、通常的光導波路のように三層構造である必要はなく、線形 / 非線形の二層構造においても非線形表面に沿って伝搬する定常的導波モードが存在することを、1981年にMaradudinは報告している⁷⁾。一方、MQW層も井戸層、バリア層の各層厚が薄い場合、これを一層近似し得ることはすでに示したが、このような二層構造の片側、非線形媒質をMQW層で構成することも十分可能であると考えられる。

3.1 多層分割法による数値解析法

図8(a)のような線形 / 非線形構成の光導波路に光波を入射すると、非線形領域においては光強度に応じて屈折率が変化する。この屈折率変化の分布は図8(b)に示すように均質な屈折率 n_{21}, n_{22}, \dots を有する多層構造で近似することができる。この時、線形領域における電磁界成分は、

$$E_y(x) = E_c \cdot \exp\{\gamma_c(x-x_0)\} \quad (3)$$

$$H_z(x) = (\gamma_c/k) \cdot E_c \cdot \exp\{\gamma_c(x-x_0)\} \quad (4)$$

と表される。但し、 x 方向の伝搬定数は γ_c は、 $\gamma_c = k \cdot (n_{eff}^2 - n_1^2)^{1/2}$ 、 k は真空中の波数、 x_0 はそれぞれの境界面に選ぶ。非線形領域は、こ

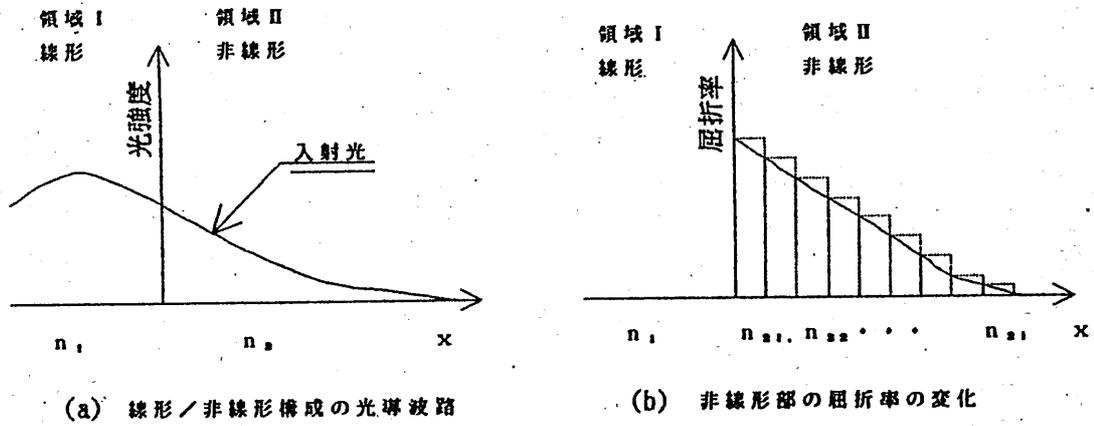


図8 多層分割法による数値解析

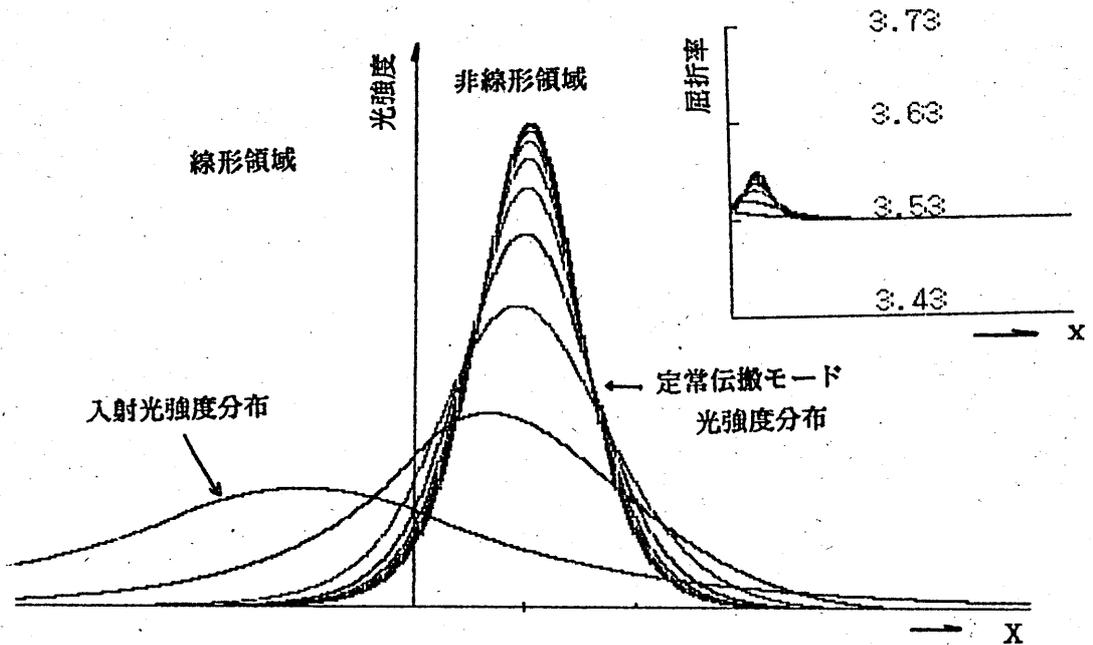


図9 線形/非線形・表面伝搬モード

初期光強度分布のピーク値は線形領域にあるように設定したが、非線形領域部の屈折率の上昇とともに光強度のピーク値は非線形領域へ移動する。右上には非線形領域の屈折率の変化を示す。

れをN分割し、各分割層内部の屈折率は一定とする。各分割層における屈折率は非線形性により、光強度に応じて、

$$n_{21} = n_0 + \alpha I_1 \quad (5)$$

と表すことができる。ここで、 α は非線形定数である。従って、非線形領域の電磁界成分は、

$n_{21} \geq n_{eff}$ の時、

$$E_y(x) = E_y(x_0) \cdot \cos\{\gamma_1(x-x_0)\} - \frac{k}{\gamma_1} H_z(x_0) \cdot \sin\{\gamma_1(x-x_0)\} \quad (6)$$

$$H_z(x) = \gamma_1/k \cdot E_y(x_0) \cdot \sin\{\gamma_1(x-x_0)\} - H_z(x_0) \cdot \cos\{\gamma_1(x-x_0)\} \quad (7)$$

となり、 $n_{21} \leq n_{eff}$ の時、

$$E_y(x) = E_y(x_0) \cdot \cosh\{\gamma_1(x-x_0)\} - \frac{k}{\gamma_1} H_z(x_0) \cdot \sinh\{\gamma_1(x-x_0)\} \quad (8)$$

$$H_z(x) = -\gamma_1/k \cdot E_y(x_0) \cdot \sinh\{\gamma_1(x-x_0)\} - H_z(x_0) \cdot \cosh\{\gamma_1(x-x_0)\} \quad (9)$$

但し、 $\gamma_1 = k \cdot |n_{eff}^2 - n_{21}^2|^{1/2}$

となる。各々の多層分割界面における電磁界成分の連続性により、次式のような固有方程式を得ることができる。

$$A - (\gamma_c/k) \cdot B - (k/\gamma_c) \cdot C + D = 0 \quad (10)$$

ここで、A, B, C, Dは各分割層に対する次のようなマトリクス
の積で表される。非線形領域では、個々の分割層に対して、(11)、
(12)式を選択することとなる。

$n_{21} \geq n_{eff}$ の時、

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_1 \cdot \Delta d) & -(k/\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_1 \cdot \Delta d) \\ (\gamma_1/k) \cdot \sin(\gamma_1 \cdot \Delta d) & \cos(\gamma_1 \cdot \Delta d) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$n_{21} \leq n_{eff}$ の時、

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_1 \cdot \Delta d) & -(k/\gamma_1) \cdot \sinh(\gamma_1 \cdot \Delta d) \\ -(\gamma_1/k) \cdot \sinh(\gamma_1 \cdot \Delta d) & \cosh(\gamma_1 \cdot \Delta d) \end{bmatrix}$$

但し、 Δd は多層分割に対する個々の層厚 (12)

従って、分割数 N に対してこれらの式を用いることにより、種々の屈折率分布を有する光導波路の導波特性の解析が可能となる。本数値解析法は、こうして求めた光強度分布から非線形領域における屈折率分布を求め直し、この屈折率分布に対して、再び、光強度分布を計算する。-----以下、この工程を繰り返し収束するまで行うものである。

3.2 線形／非線形・表面伝搬モード

ここでは、線形／非線形・二層構造における定常伝搬モードについて、3.1で示した多層分割法を用いて検討を行う。多層分割法は数値解法とならざるを得ないため、一例として、真空中の波長 $0.8\mu\text{m}$ 、線形領域の屈折率 3.531、非線形領域の屈折率 ($n_{21}=n_0+\alpha I_1$)、 $n_0=3.53$ の数値を用いて、定常伝搬モード解析を行った。非線形領域の非線形屈折率の光強度依存が正である場合、光強度に応じて、屈折率が上昇する。反復計算による定常伝搬モードの数値解析の結果を図9に示す。この場合、初期光強度波形のピーク値は線形領域にあるように設定したが、非線形部の屈折率の上昇にともない、光強度のピーク値は非線形部へ移動し、計算の反復により、一定の伝搬モードに落ち着くことがわかる。図9右上に非線形領域の屈折率分布の変化も合わせて示している。本計算においては、多層分割に対する個々の層厚は 5\AA である均質媒質を仮定した。なお、種々の計算例によれば、定常伝搬モードは全光強度一定であると仮定すると、当然ながら、初期光強度の位置及び、その波形には依存せず、常に一定の位置に収束することが明かとなっている。また、その時の電界波形は文献(7)において解析的に求められた分布、sech-exp形(後述3.4参照)と一致する。

3.3 線形／MQW非線形・表面伝搬モード

上述したように線形／非線形の二層構造による定常導波特性は、sech-exp形となる。ここでは、この二層構造の一方の非線形媒質に

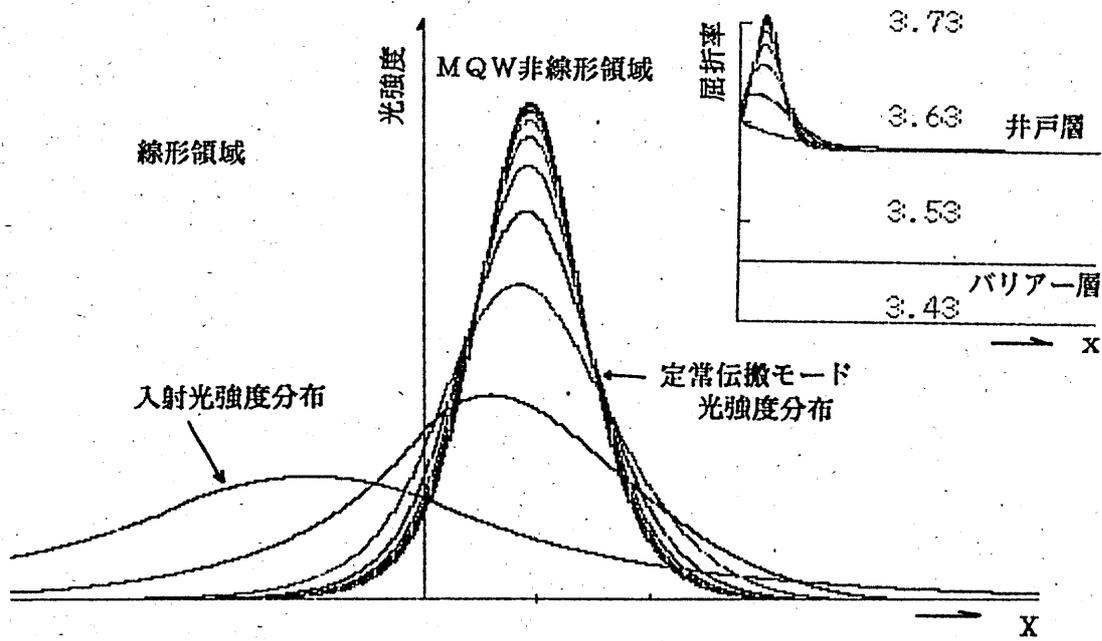


図 10 線形/MQW・表面伝搬モード

右上の非線形領域の屈折率が2つの値をとっているように見えるが、これはMQW層の構造周期が小さいためである。この場合、井戸層(70Å)のみ屈折率が変化し、バリアー層(130Å)は変化しない。

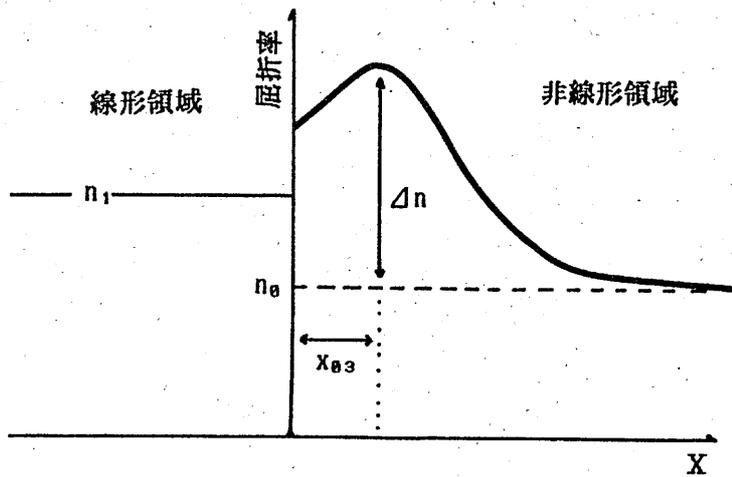


図 11 線形/非線形・光導波路構成

MQW層を用いた構成について検討を行う。この構造においては解析解を得るのはもはや容易ではないが、上述の多層分割法を用いた数値解析が有効となる。すなわち、MQWの細部構造をも考慮にいたした上で、光強度分布と屈折率分布とを交互に補正し、定常な安定解を求める方法である。図10に入射光分布とそれに対する定常伝搬モードの一例を示す。

図10は図9と対比するため、非線形領域であるMQW層（井戸層70Å、バリアー層130Å）のRMS近似屈折率が図9の非線形領域の屈折率と等しい場合を想定した。また、非線形係数以外のその他のパラメータも図9の場合と同じである。この時、非線形係数の値は全く異なるが、図9と図10はほぼ一致していることがわかる。これは、線形の場合のみならず、MQW構造のような非線形周期的多層構造においては、非線形係数に対しても、等価的な非線形係数を考えるからである。（このことについては後述（4）する）。従って、大局的には線形／非線形・二層構成と同じ取り扱いが可能となる。

3.4 線形／非線形・光導波路構成における定常伝搬モード

3.4.1 解析的検討

図11のような線形／非線形構成に対して、(13)式のような波動方程式を考える。

$$d^2E_y(x)/dx^2 = (\beta^2 - n(x)^2 k^2) \quad (13)$$

この時、線形部 ($x \leq 0$) において、

$$E_y(x) = A \cdot \exp(px)$$

$$\text{但し、 } p = k(n_{\text{eff}}^2 - n_1^2)^{1/2} \quad (14)$$

$$n(x) = n_1 \quad (\text{線形部の屈折率})$$

非線形部 ($x \geq 0$) において、

$$E_y(x) = B \cdot \text{sech}\{\gamma(x - x_{03})\}$$

$$\text{但し、 } n(x) \sim n_0 + \Delta n \cdot \text{sech}^2\{\gamma(x - x_{03})\} \quad (15)$$

(Δn は非線形性による最大屈折率変化)

の定常導波モードが見いだされる。この時、 $x=0$ における $E_y(x)$ 及び、 dE_y/dx の連続性から

$$p = \gamma \cdot \tanh(\gamma \cdot x_{03}) \quad (16)$$

また、 $\beta = n_{\text{eff}} \cdot k$ であり、 $x \geq 0$ のすべての x について(15)式が成り立つためには

$$\begin{aligned} n_{\text{eff}}^2 &= n_0^2 + n_0 \cdot \Delta n \\ \gamma &= k(n_0 \cdot \Delta n)^{1/2} \end{aligned} \quad (17)$$

が導かれる。

一方、(17)式より、(16)式は

$$(n_{\text{eff}}^2 - n_1^2)^{1/2} = (n_0 \cdot \Delta n)^{1/2} \cdot \tanh\{k(n_0 \cdot \Delta n)^{1/2} \cdot x_{03}\} \quad (18)$$

となる。この式は文献(7)の(15)式と同一の内容のものである。これより、非線形表面波のピークの非線形部への変位は

$$x_{03} = \log_e \left[\left\{ \frac{(n_0 \cdot \Delta n)}{(n_1^2 - n_0^2)} \right\}^{1/2} + \left\{ \frac{(n_0 \cdot \Delta n + n_0^2 - n_1^2)}{(n_1^2 - n_0^2)} \right\}^{1/2} \right] / \{k \cdot (n_0 \cdot \Delta n)^{1/2}\} \quad (19)$$

となり、また、(18)式より、

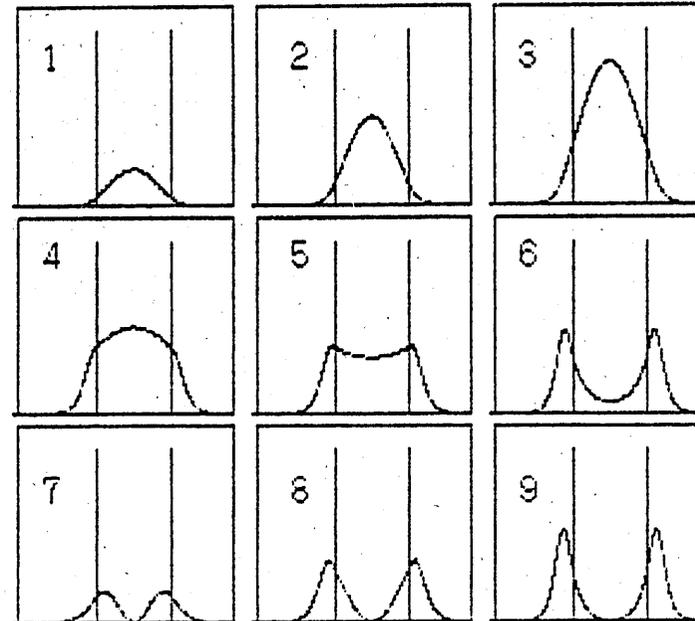
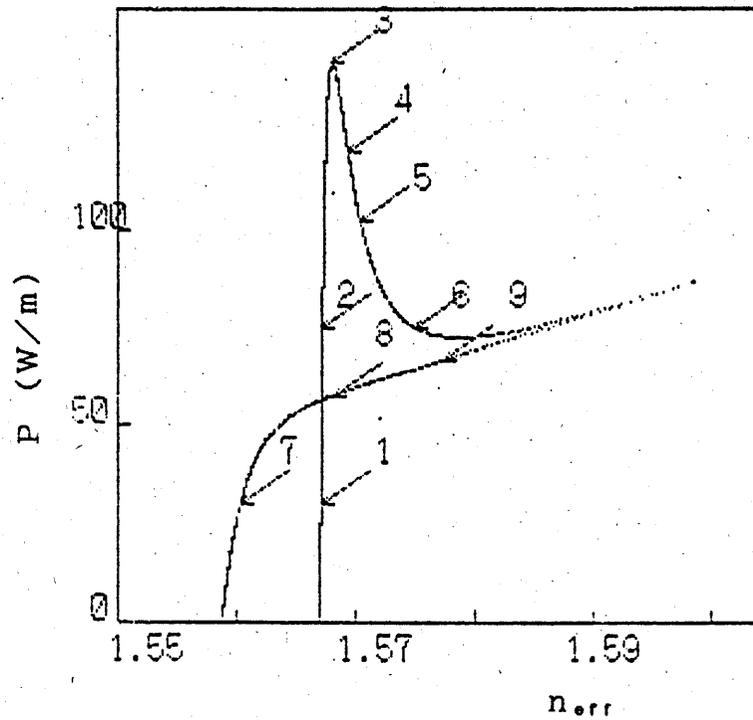
$$\begin{aligned} \Delta n &\geq (n_1^2 - n_0^2) / n_0 \\ n_0 &< n_1 \end{aligned} \quad (20)$$

という条件式が得られる。

この(20)式は以下のことを意味している。すなわち、線形／非線形構成において、定常伝搬モードが存在するためには、線形部の屈折率は非線形部のゼロ強度の屈折率より大きくなければならない。また、上昇した非線形部の屈折率は線形部の屈折率より大きくなければならない。これは、実効屈折率が線形部の屈折率より大きく、かつ上昇した非線形部の屈折率より小さくなければならないから当然のことである。

3.4.2 非線形／線形／非線形・三層構造における非線形表面伝搬モード

線形／非線形構成では定常的には光強度分布のピークが光強度に依存して、(19)式で示されるように非線形部へ移動することとなる。



(a) 全電力Pに対する実効屈折率 n_{eff}

(b) 指点の光強度分布

図12 非線形(1.55)/線形(1.57)/非線形(1.55)・三層対称構造光導波路の
非線形表面伝搬モード

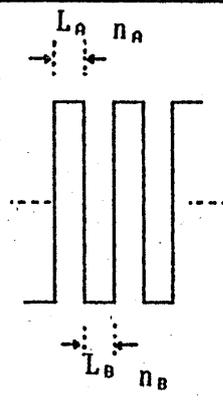
このような非線形表面波の現象は二層構成に限ったことではなく、非線形／線形／非線形の三層構成においても光強度分布のピークが光強度に依存してスラブの外側へ移動して行く。

一例として、里村が行った²³⁾²⁴⁾非線形($n_1=1.55$)／線形($n_2=1.57$)／非線形($n_3=1.55$)の対称構造について検討を行う。従って、その時のパラメータはすべて、文献(23)(24)と同じである。図12(a)は、 TE_0 、及び TE_1 モードのそれぞれについて全電力 P の変化に対する導波路の実効屈折率 n_{eff} の変化の様子である(この図は文献(24)の図3(a)、図4(a)の対称モードの場合に完全に一致している)。ある電力以上で2つの異なる実効屈折率が存在するのは、そのうちのひとつが、先ほどの非線形表面伝搬モードだからである。図12(b)には、この時の各指点における光強度分布波形を示す。例えば、図12、2と6はほぼ同じ電力であるが、6はピーク値がすでに非線形部へ移動している。この非線形部への移動は実効屈折率 n_{eff} が中央の線形部屈折率 n_2 を越える(すなわち、非線形部の屈折率が非線形性によって n_2 の値を越える)ことによって生ずる。ピークが非線形部へ移動すればするほど、線形中央部で波形は2つに分離する。この時、 TE_0 モード、 TE_1 モードは(b)図に見られるように光強度分布(6と9との比較)に関しても、(a)図で見られるように実効屈折率(両モードの収束)に関しても、区別がつかなくなる。また、この時、もはや三層構造とはいえず、線形／非線形の二層構造と同等となる。この図には示していないが(詳しくは文献(23)(24)参照)電力としては、その時の半分のところに非対称モードが存在することとなる。また、この時の光強度のピークの境界面からの変位は先の(19)式より計算したものと一致する。

4. 導波構造をもたない非線形媒質中の定常伝搬モード

3.3において、線形／非線形構成における定常伝搬モードと線形／MQW非線形構成における定常伝搬モードがほぼ一致する場合について検討を行ったが、ここでは、このMQW層のような線形(また

表2 計算に用いた周期的多層構造非線形光導波路のパラメータの一例

周期的多層構造	分類	各層の厚さ	屈折率(ゼロ強度)	図番号
	① 4.1.1	$L_A=700 \text{ \AA}$ $L_B=1300 \text{ \AA}$	$n_A=3.6013$ $n_B=3.49$	1 3
		$L_A=70 \text{ \AA}$ $L_B=130 \text{ \AA}$	$n_A=3.603$ $n_B=3.49$	1 4
	② 4.1.2	$L_A=70 \text{ \AA}$ $L_B=130 \text{ \AA}$	$n_A=3.53$ $n_B=3.53$	1 5

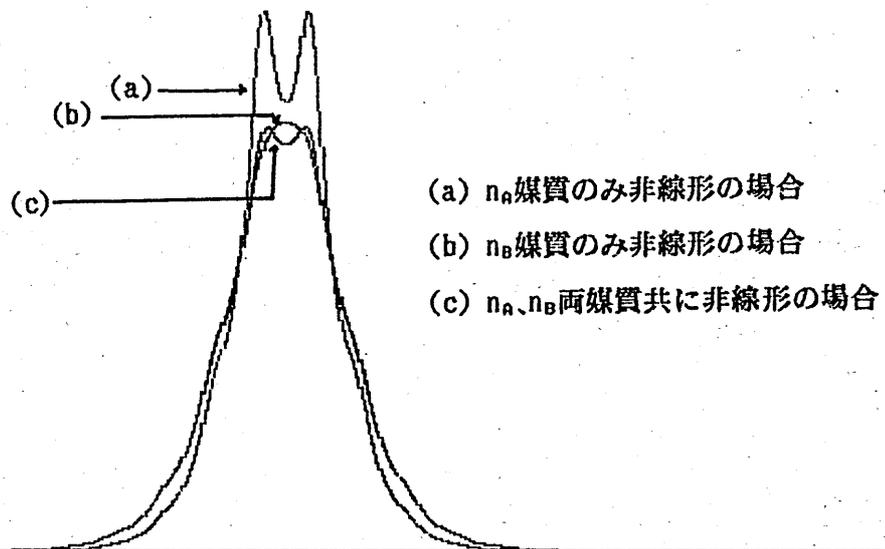


図13 線形(非線形)/非線形・周期的多層構造光導波路の定常伝搬モード。

($L_A=700\text{\AA}$ 、 $L_B=1300\text{\AA}$ 、 $n_A=3.6013$ 、 $n_B=3.49$)

は非線形) / 非線形の境界面が無数に交互に存在し、無数の線形 (非線形) / 非線形の界面をもつ周期的多層構造における光波伝搬問題について取り扱う。この結果は構造的に全く境界面をもたない、すなわち、導波構造をもたない均質な非線形媒質構成における定常伝搬を示唆するものであり、更に、この導波構造をもたない均質な非線形媒質中の光波伝搬についても取り扱う。

4.1 線形 (非線形) / 非線形・周期的多層構造光導波路

3において、線形 / 非線形の単一界面に沿う光波伝搬について検討を行ったが、これに対して、線形 / 非線形界面が無数に存在する多層構造における光波の伝搬問題については、これまで考えられていない。このような非線形周期的多層構造に対してはこれまで行ってきた多層分割法が有効である。ここでは、線形 / 非線形のそれぞれの領域に対して、ゼロ強度での ① 屈折率が異なる場合、② 屈折率が同じ場合の2つの場合について検討した。尚、①、②の場合共にゼロ強度での屈折率値のRMS近似値は同一値(3.53)とした。これらの場合分けを表2に示す。また、この時、個々の非線形係数に対して次式が成立するように選んである。この式については後述する。

$$n_{2EQ} = \{n_{2A}(n_A^2 \cdot L_A) + n_{2B}(n_B^2 \cdot L_B)\} / (n_A^2 L_A + n_B^2 L_B) \quad (21)$$

但し、 n_A, n_B はそれぞれの領域に対する線形屈折率、 n_{2A}, n_{2B} は非線形屈折率、 L_A, L_B は各層厚、そして、 n_{2EQ} は全体としての等価非線形屈折率である。

4.1.1 屈折率が異なる場合

図13に、 $L_A=700\text{\AA}$ 、 $L_B=1300\text{\AA}$ の場合、(a) n_A 媒質のみ非線形、(b) n_B 媒質のみ非線形、(c) n_A, n_B 両媒質共に非線形の場合の光強度分布を示す。また、初期入射光は、 n_B 媒質中央部でピークをもつように入射すると仮定する。この時の L_A, L_B は図2の $N=10$ の場合に対応しており、非線形光導波路構成といえどもリップルが目立って

いる。

(a)の場合 n_A 媒質の屈折率が非線形性のため上昇するがピーク部付近の n_B 媒質の屈折率は変化しない。従って、中央部がより凹となっている。また、(b)では n_B 媒質の屈折率が非線形性のため上昇し、 n_A 媒質の屈折率に近づくため (n_A の屈折率を越えるまでには至っていない)、中央部では丸みをおびている。(c)では、 n_A, n_B 両媒質共に非線形媒質 (非線形係数も同じ n_{2EQ}) であるため、中央部はやや凸であるものの (a) に比べて落込みは小さい。

これに対して、図 14 では、 $L_A=70\text{\AA}$ 、 $L_B=130\text{\AA}$ で、図 2 の $N=100$ に対応しており、屈折率の凹凸によるリップルはほとんど目立たない。これは構造周期の減小に対する線形の場合と同じ傾向である。この結果、(a)、(b)、(c) ともにほぼ一致している。これは各場合に対して、非線形係数 (非線形屈折率) は異なるが、ここで用いた (21) 式がそれぞれの非線形係数 (非線形屈折率) を関係づけているからである。尚、図 9、図 10 においても波形がほぼ一致していたのもこの理由によるものである。すなわち、(21) 式を満たすように非線形係数を決めたからである。結局、周期的非線形多層構造において、各層厚が薄くなると (21) 式が全体としての等価非線形屈折率を与えうることを意味している。

4.1.2 屈折率が同じ場合

更に、線形 / 非線形・構成において、ゼロ強度での屈折率が全く等しい場合、すなわち、全く均一な屈折率を有する媒質が部分的に (周期的に) 異なる非線形係数をもつ場合の結果を図 15 に示す。この時、 $L_A=70\text{\AA}$ 、 $L_B=130\text{\AA}$ と図 14 に対応している。図 15 (c) は n_A, n_B 両媒質共に等しい非線形係数 (非線形屈折率) を有する場合であり、均質な非線形媒質に対応している。すなわち、非線形媒質においては導波構造は全くなくても定常伝搬モードが維持できることを示している。また、この図 15 は図 14 とほぼ一致するため、線形 (非線形) / 非線形ペアの周期が微細で、構造周期によるリッ

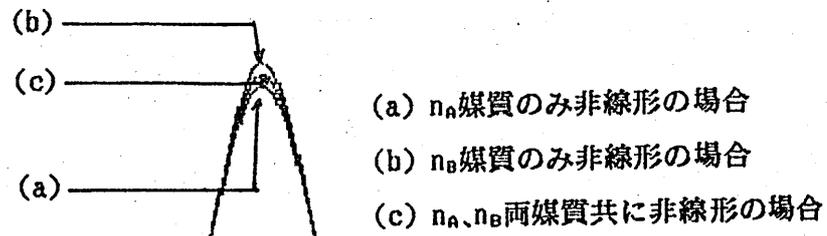


図 1 4 線形（非線形）／非線形・周期的多層構造光導波路の定常伝搬モード。
 ($L_A=70A$ 、 $L_B=130A$ 、 $n_A=3.603$ 、 $n_B=3.49$)

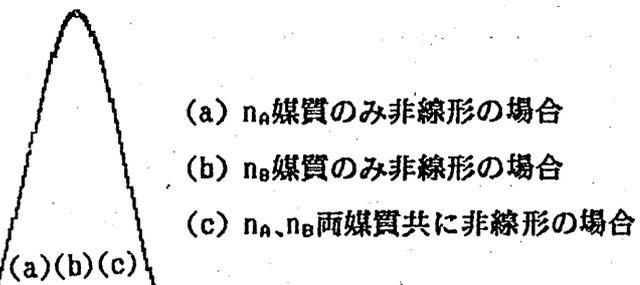


図 1 5 線形（非線形）／非線形・周期的多層構造光導波路の定常伝搬モード。
 ($L_A=70A$ 、 $L_B=130A$ 、 $n_A=3.53$ 、 $n_B=3.53$)

この場合、(a)(b)(c)が重なっている。

ブルが目立たない場合は、全く均質な非線形材料で近似できることになる。

4.2 線形（非線形）／非線形・周期的多層構造における等価非線形屈折率

線形（非線形）／非線形・周期的多層構造において、各層厚が薄くなると、全体としての等価非線形屈折率値 (n_{2EQ}) は (21) 式を再掲すると個々の層の非線形屈折率 (n_{2A}, n_{2B}) を用いて次のように表された。

$$n_{2EQ} = \{n_{2A}(n_A^2 \cdot L_A) + n_{2B}(n_B^2 \cdot L_B)\} / (n_A^2 L_A + n_B^2 L_B) \quad (21)$$

これは以下のように考察される。線形／線形・周期的多層構造は RMS 近似理論にしたがうので、ゼロ強度での屈折率は、

$$n_{RMS}^2 \cdot (L_A + L_B) = (n_A^2 \cdot L_A + n_B^2 \cdot L_B) \quad (22)$$

と表される。一方、非線形屈折率に対しては (22) 式から個々の層に対する屈折率の 2 乗と各層厚の積の平均的寄与を考えればよい。この場合、個々の層に対する屈折率の寄与は、 $n_A^2 \cdot L_A$ 、 $n_B^2 \cdot L_B$ である。それに対する非線形屈折率 (n_{2A}, n_{2B}) 的平均を考えれば (21) 式が導けるわけである。

これら (21)、(22) 式は周期的多層非線形光導波路構成において、各層厚が薄くなると、線形屈折率としては、 n_{RMS} を、また非線形屈折率としては n_{2EQ} を有する均質な非線形媒質構成として近似できる。次に、この均質な非線形媒質中の光波伝搬について検討を行う。

4.3 均質な非線形媒質中の光波伝搬

線形／非線形・界面に沿う光波伝搬については、これまで、前述の二層構造から多層構造にいたるまで種々の場合が考察されている。しかし、構造的に全く境界面をもたない均質な非線形材料中における波動伝搬問題については、あまり取り扱われていない。このような非線形媒質中においても光波自身により導波光の閉じ込めが可能である。特に、均質媒質中では、伝搬に垂直な断面内に構造をもたないから、スラブ状の光ビームを入射すれば、1次元閉じ込めが生

じ、ペンシル状の光ビームを入射すれば、2次元閉じ込めが生ずるものと考えられる。ここでは従来検討されている1次元閉じ込めを考えることとし、次式のような非線形波動方程式を満たす電界分布 $E_t(x, z)$ (伝搬方向に垂直な面内の) を求めることとする。

$$\begin{aligned} d^2 E_t(x) / dx^2 &= (\beta^2 - n(x)^2 \cdot k^2) E_t(x) \\ n(x) &= n_s + A \cdot E_t(x)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

但し、 n_s は線形屈折率、 A は非線形定数、 k は真空中の波数、 $\beta = n_{eff} \cdot k$ である。

非線形領域の非線形屈折率の光強度依存が正である場合、(23)式に対して、

$$E_t(x) \propto \operatorname{sech}(\gamma \cdot x) \quad (24)$$

の解が見いだされる。このことは自己束縛現象 (self trapping phenomenon) として古くから知られており、2次元では、円筒座標系を用いて数値解が求められている²⁵⁾。その結果 (文献(25)、Fig. 1) はかなりの精度で(24)式の sech 解に一致することが確認された。

(24)式の解は、(23)式の第2式を $n(x) = n_s + \Delta n \cdot \operatorname{sech}^2(\gamma \cdot x)$ と置くことを意味するが、その結果、この非線形光導波路の実効屈折率は、 $n_{eff} = (n_s^2 + n_s \cdot \Delta n)^{1/2}$ で与えられ、また、 $\gamma = k \cdot (n_s \cdot \Delta n)^{1/2}$ となる。

この結果は、1次元閉じ込め (スラブ構造に対応) の場合は、3で検討した二層構造の非線形部の解と一致する。実際の構造においては、2次元閉じ込めが必要となるが、この場合も、(24)式の結果が参考となる。

5. むすび

非線形光導波路構成としては二層構造から多層構造まで種々の場合が考察されている。しかし、周期的多層構成 (MQW構成も含めて) においては、層数が多くなり、各層厚が薄くなると、線形導波路の場合も非線形導波路の場合も一層近似することができる。このような場合 (各層厚が薄い)、多層構造導波路は通常の導波構造で

ある三層構造光導波路と同様の取り扱いが可能となるので、MQW構造の有する複屈折性をも簡単に説明することができる。一方、非線形導波路の場合、全領域が多層構造から成る導波路に関しては、導波構造をもたない均質な非線形媒質中の光波伝搬問題に帰着する。ここでは、MQW層を中心に導波構造をもつ場合、もたない場合、それぞれに対して、解析解、多層分割による数値解などを用いて比較検討を行い、それら相互の関係を明らかにした。

また、GaAs-AlGaAs MQW構造における非線形吸収飽和は半導体レーザーのパワーレベルで十分起こる程度のものである。このMQW構造は非線形光導波路の構成要素として十分な非線形屈折率を有しており、この非線形性を利用した非線形光導波路の一例を、コアにMQW構造を持つ非線形光導波路について、われわれは実験的な検討を行っている。現在、スラブ導波路構成であるため、理論的予測ほどの明瞭な非線形屈折率変化²⁶⁾を得るには至っていないが、非線形光閉じ込め効果を確認することができた。

謝 辞

本研究を行うにあたり、MQW試料を提供していただいた富士通研究所の和田修博士に感謝します。また、これまで光導波実験に協力いただいた大阪電気通信大学学生、朔晦正志君、吉森正則君、石元新悟君に感謝します。

文 献

- 1) Zdzislaw Jakubczyk, Hubert Jerominek, Sergiusz Patera, Real Tremblay and Claude Delisle, IEEE J. Quantum Electron. QE-23, 11(1987)1921.
- 2) Samir J. Al-Bader and Hasain A. Jamid, IEEE J. Quantum Electron. QE-23, 11, (1987)1947.
- 3) K. J. Blow, N. J. Doran, B. P. Nelson and David Wood, IEEE J. Quantum Electron. QE-21, 7, (1985)774.

- 4) G. I. Stegeman, C. T. Seaton and J. Ariyasu, Opt. Comm. Vol. 56 (1986) 365.
- 5) J. V. Moliney, J. Ariyasu, C. T. Seaton and G. I. Stegeman, Opt. Lett. Vol. 11 (1986) 315.
- 6) Colin T. Seaton, Jesus D. Valera, Richard L. Shoemaker, George I. Stegeman, John T. Chilwell and S. Sesmond Smith, IEEE J. Quantum Electron. QE-21, 7 (1985) 774.
- 7) A. A. Maradudin, Z. Phys. B-Condensed Matter., Vol. 41 (1981) 341.
- 8) Y. Satomura, Trans. IECE Japan (Section E), 70 (1987) 541.
- 9) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：第50回応用物理学関係連合講演会予稿集第3分冊 (1989-9) p. 887.
- 10) 大家重明、石元新悟、梅田徳男、張吉夫：第37回応用物理学関係連合講演会予稿集第3分冊 (1990-3) p. 972.
- 11) U. Trutschell, F. Lederer and M. Golz, IEEE J. Quantum Electron. Vol. 25. 2 (1989) 194.
- 12) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：輻射科学研究会 RS-88-3 (1988-5).
- 13) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：第51回応用物理学関係連合講演会予稿集第3分冊 (1990-9) 発表予定.
- 14) 久保寺憲一：応用物理 59 (1990) 155.
- 15) S. Ohke, T. Umeda and Y. Cho: Opt. Commun. 56 (1985) 235.
- 16) S. Ohke, T. Umeda and Y. Cho: Opt. Commun. 70 (1989) 92.
- 17) 大家重明、奥間啓二、吉森正則、梅田徳男、大久保利美、張吉夫：電子情報通信学会技術研究報告 OQE88-125 (1989-2)
- 18) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：電子情報通信学会技術研究報告 OQE87-123 (1987-11).
- 19) D. S. Chemla, D. A. B. Miller, P. W. Smith, A. C. Gossard and W. Wiegmann: IEEE J. Quantum Electron., QE-20 (1984) 265.

- 20) D. A. B. Miller, D. S. Chemla, T. C. Damen, A. C. Gossard, W. Wiegmann, T. H. Wood and C. A. Burrus: *Phy. Rev.*, B32 (1985)1043.
- 21) Il Jun Cha, S. Ohke, T. Umeda and Y. Cho: *Tech. Rec. 5th Meeting on Alloy Semicon Phy. & Electron.*, (1986)51.
- 22) Il Jun Cha, S. Ohke, T. Umeda and Y. Cho: *6th Sympo. Rec. of Alloy Semicon. Phys. & Electron.*, (1987)499.
- 23) 里村裕：輻射科学研究会資料 RS86-3 (1986-5).
- 24) 里村裕：電子通信学会(IECE)、光通信理論研究会 (1986).
- 25) R. Y. Chiao, E. Garmire and C. H. Townes: *Pys. Rev. Lett.*, Vol. 13, 15 (1964)479.
- 26) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：電子情報通信学会 C I 分冊投稿中。

輻射科学研究会資料

RS90-4

誘電体導波路不連続部における
透過界と反射界

大阪大学 工学部

森田長吉

平成2年7月7日
於 大阪大学工業会館

1. まえがき

誘電体導波路のような開放型導波路の不連続部に関する電磁界問題を精度良く解析するには、離散スペクトルをもつ導波モード界だけでなく連続スペクトルをもついわゆる”放射モード”界も含めて解析することが不可欠である。このため誘電体導波路の不連続部の解析には、遮蔽型導波路の不連続部の解析でよく用いられる種々の解析的技法がそのまま適用できることは少ない。しかし、最近では、この問題を数値解析する手法が種々工夫されるようになり、数値計算例も多数提供されるようになってきた。ところで、これまでになされた誘電体導波路不連続部の数値解析の結果を調べてみると、どのような構造の不連続の場合でも、入射した電力のうちのほとんどの電力が不連続部を透過し、反射される電力が極めて少ないという結果になっていることに気がつく。これは開放型導波路そのものの構造およびその不連続部の構造からみてある意味で当然の帰結といえよう。そうであれば、このような開放型導波路の不連続部を解析する場合、必ずしも透過界と反射界を同時に未知数として含め、厳密に解析するという方法にこだわる必要はないといえる。

このような観点から、本研究では、不連続部を透過する電力と不連続部で反射される電力を逐次的に交互に求めていく極めて簡単な解析的方法を提案する。この方法を用いると、透過界および反射界の値がほんの1回か2回の逐次計算だけで十分高い精度で求められる。

2. 透過界, 反射界の逐次的計算

コア部の厚みと屈折率がそれぞれ d^I, n_1^I および d^{II}, n_1^{II} で、クラッド部の厚みがともに n_2 であるスラブ導波路 I とスラブ導波路 II が図 1 のように面 S で接続されている場合を考える。この両導波路接続部に導波路 I 側から電磁界 E^i, H^i が入射したとき、導波路 II 側への透過電磁界が E^T, H^T 、導波路 I 側への反射電磁界が E^R, H^R であるとする。いま、導波路 II 側および I 側から面 S に無限に近づいた極限の面を考え、それぞれ S^{II} および S^I とする。すなわち、 S のすぐ右側に S^{II} 、 S のすぐ左側に面 S^I を考える。

面 S^{II} 上の電磁界の接線成分として入射電磁界の接線成分 E_t^i, H_t^i に等しい電磁界を仮定したとし、このときに得られる導波路 II 側への透過電磁界を 1 次透過電磁界と定義し、これを $E^{T(1)}, H^{T(1)}$ と表す。この $E^{T(1)}, H^{T(1)}$ の面 S 上での値が E^i, H^i の面 S 上での値に非常に近い値になれば、I 側への反射電磁界は非常に小さくなるはずであるが、もちろん一般にはこの両電磁界は異なっている。ここでは、この両電磁界の差の電磁界 $\delta E^{(1)}, \delta H^{(1)}$ が近似的に反射電磁界の源として働くと考える。面 S^{II} 上での電磁界の接線成分は S^I 上での電磁界の接線成分と等しいので、 $\delta E^{(1)}, \delta H^{(1)}$ の面 S に接する成分、すなわち

$$\delta E_t^{(1)} = E_t^{T(1)} - E_t^i, \quad \delta H_t^{(1)} = H_t^{T(1)} - H_t^i \quad (1)$$

は面 S^I 上の電磁界の接線成分と考えてよい。そこで、面 S^I 上に (1) の電磁波源を仮定し、これによって導波路 I 側に生じる電磁界 $E^{R(1)}, H^{R(1)}$ を 1 次反射電磁界と定義する。ところで、入射電磁界 E^i, H^i は I 側導波路の反射電磁界の源とはなりえないから、 $E^{R(1)}, H^{R(1)}$ に寄与するのは結局 (1) 右辺のうちの $E_t^{T(1)}, H_t^{T(1)}$ のみとなる。

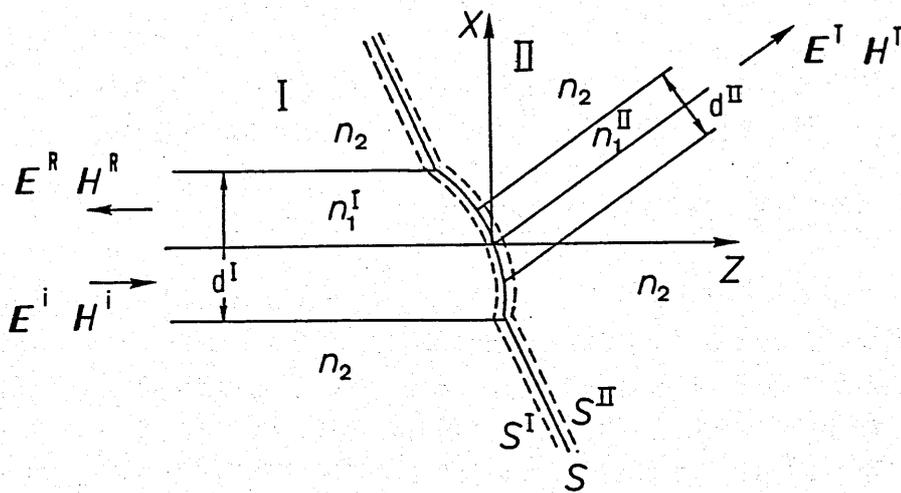


図1 誘電体スラブ導波路の不連続部

当然ながら，1次反射電磁界の面 S^I 上での接線成分は (1) の値とは一致しない．そこで，さらに $\mathbf{E}^{R(1)}, \mathbf{H}^{R(1)}$ の面 S 上での値と $\delta\mathbf{E}^{(1)}, \delta\mathbf{H}^{(1)}$ の面 S 上での値との差の電磁界を $\delta\mathbf{E}^{(2)}, \delta\mathbf{H}^{(2)}$ とし， $\delta\mathbf{E}^{(2)}, \delta\mathbf{H}^{(2)}$ の面 S に接する成分

$$\delta\mathbf{E}_t^{(2)} = \mathbf{E}_t^{R(1)} - \delta\mathbf{E}_t^{(1)}, \quad \delta\mathbf{H}_t^{(2)} = \mathbf{H}_t^{R(1)} - \delta\mathbf{H}_t^{(1)} \quad (2)$$

を面 S^{II} 上の電磁界の接線成分と仮定し，これによって導波路 II 側に生じる電磁界 $\mathbf{E}^{T(2)}, \mathbf{H}^{T(2)}$ を2次透過電磁界と定義する．ところで，(2) 中の $\delta\mathbf{E}_t^{(1)}, \delta\mathbf{H}_t^{(1)}$ を波源とする II 側への透過界はすでに1次透過電磁界の中に繰り込まれているから，結局 $\mathbf{E}^{T(2)}, \mathbf{H}^{T(2)}$ に寄与するのは (2) 中の $\mathbf{E}_t^{R(1)}, \mathbf{H}_t^{R(1)}$ のみである．以下同様の方法で n 次反射電磁界 $\mathbf{E}^{R(n)}, \mathbf{H}^{R(n)}$ ， $n+1$ 次透過電磁界 $\mathbf{E}^{T(n+1)}, \mathbf{H}^{T(n+1)}$ ($n=2, 3, \dots$) を定義する．このとき， $\mathbf{E}^{R(n)}, \mathbf{H}^{R(n)}$ に寄与するのは結局 S^I 上の $\mathbf{E}_t^{T(n)}, \mathbf{H}_t^{T(n)}$ のみであり， $\mathbf{E}^{T(n)}, \mathbf{H}^{T(n)}$ に寄与するのは結局 S^{II} 上の $\mathbf{E}_t^{R(n-1)}, \mathbf{H}_t^{R(n-1)}$ のみとなる．

さて， n 次透過電磁界は $n-1$ 次までの反射側と透過側の電磁界の間の面 S 上での接線成分のミスマッチ分を波源とする II 側の電磁界であり， n 次反射電磁界は $n-1$ 次までの反射側電磁界と n 次までの透過側電磁界との間の面 S 上での接線成分のミスマッチ分を波源とする I 側の電磁界と考えられるから，両者ともミスマッチ分の減少とともに急激に減少していく．従って，結局

$$\mathbf{E}_N^T = \sum_{n=1}^N \mathbf{E}^{T(n)}, \quad \mathbf{H}_N^T = \sum_{n=1}^N \mathbf{H}^{T(n)} \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_N^R = \sum_{n=1}^N \mathbf{E}^{R(n)}, \quad \mathbf{H}_N^R = \sum_{n=1}^N \mathbf{H}^{R(n)} \quad (4)$$

の形で与えた電磁界 $\mathbf{E}_N^T, \mathbf{H}_N^T$ および $\mathbf{E}_N^R, \mathbf{H}_N^R$ は， N が増えるとき急速に真の透過電磁界 $\mathbf{E}^T, \mathbf{H}^T$ および真の反射電磁界 $\mathbf{E}^R, \mathbf{H}^R$ に収束することになる．

であり、 Γ はクラッド領域における x 方向の波数スペクトルである。(5),(6)における右辺第1項は導波モードの和、第2項は放射モードの和である。 Γ の積分範囲は0から ∞ であるが、簡単のため省略する。以後も同様とする。また、 β_m^{II}, a_m および $\beta^{II}, b(\Gamma)$ はそれぞれ導波モードおよび放射モードの伝搬定数、展開係数である。

図2は接続部から右のII側導波路の一断面を示す。全構造は直角座標系 (x, y, z) の y 軸方向に一様であるとする。この断面内を通る面 S^{II} 上の曲線を C_0 、曲線 C_0 から右に適当な距離だけ離れた位置に x 軸に平行な直線 C_f をとり、 $x = +\infty$ および $x = -\infty$ の位置に z 軸に平行な直線 $C_{\infty}^{(+)}$ および $C_{\infty}^{(-)}$ をとる。なお、これらの路は図中の矢印のように方向をもっているとする。また、図2の断面において $C_{\infty}^{(+)}, C_0, C_{\infty}^{(-)}, C_f$ とスラブ導波路のコア・クラッド境界 $x = d^{II}/2$ および $x = -d^{II}/2$ によって仕切られた三つの領域を図のように $S^{(+)}, S_0, S^{(-)}$ とする。ここで、電磁界 $\mathbf{E}^{II}, \mathbf{H}^{II}$ とモード界 $\underline{\mathbf{E}}^{II}, \underline{\mathbf{H}}^{II}$ に対して $S^{(+)}, S_0, S^{(-)}$ の各領域でローレンツの相反定理を適用し、それらを加え合わせると、 $S^{(+)}, S_0, S^{(-)}$ 内には波源がないのでこれらの領域に関する面積分が消え、 $\mathbf{E}^{II}, \mathbf{H}^{II}$ についての $x = \pm d^{II}/2$ における境界条件および $x = \pm\infty$ における放射条件によって $x = \pm d^{II}/2$ および $C_{\infty}^{(+)}, C_{\infty}^{(-)}$ 上の線積分も消えるから、結局次式を得る。

$$\int_{C_f} (\underline{\mathbf{E}}^{II} \times \mathbf{H}^{II*} + \mathbf{E}^{II*} \times \underline{\mathbf{H}}^{II}) \cdot \mathbf{i}_n \, dl + \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}^{II} \times \mathbf{H}^{0*} + \mathbf{E}^{0*} \times \underline{\mathbf{H}}^{II}) \cdot \mathbf{i}_n \, dl = 0 \quad (9)$$

但し、 \mathbf{i}_n は領域の外を向く単位法線ベクトルであり、*は複素共役記号である。 β^{II} が虚数のときにはモード界 $\underline{\mathbf{E}}^{II}, \underline{\mathbf{H}}^{II}$ は z の負方向に進むものを選ぶものとする。

導波モードの規格化直交性

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n^*) \cdot \mathbf{i}_z \, dx = \delta_{mn} \quad (10)$$

および放射モードの規格化直交性

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{e}(\Gamma_p) \times \mathbf{h}^*(\Gamma_q)) \cdot \mathbf{i}_z \, dx$$

$$= \begin{cases} (\beta_p^*/|\beta_p|)\delta(\Gamma_p - \Gamma_q) & , \text{TE 放射モード} \\ (\beta_p/|\beta_p|)\delta(\Gamma_p - \Gamma_q) & , \text{TM 放射モード} \end{cases} \quad (11)$$

を用いると, (9) の第1項から展開係数が出てくるので, $\underline{\mathbf{E}}^{II}, \underline{\mathbf{H}}^{II}$ を導波モード界に選ぶと結局 (9) から

$$a_m = -\frac{1}{4} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}_m^{II*} \times \mathbf{H}^0 + \mathbf{E}^0 \times \underline{\mathbf{H}}_m^{II*}) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (12)$$

を得, $\underline{\mathbf{E}}^{II}, \underline{\mathbf{H}}^{II}$ を放射モード界に選ぶと β^{II} が実数のとき

$$b(\Gamma) = -\frac{1}{4} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}^{II}(\Gamma)^* \times \mathbf{H}^0 + \mathbf{E}^0 \times \underline{\mathbf{H}}^{II}(\Gamma)^*) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (13)$$

β^{II} が虚数のとき

$$b(\Gamma) = -\frac{ju_s}{4} \int_{C_0} (\bar{\underline{\mathbf{E}}}^{II}(\Gamma)^* \times \mathbf{H}^0 + \mathbf{E}^0 \times \bar{\underline{\mathbf{H}}}^{II}(\Gamma)^*) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (14)$$

を得る. 但し, u_s は $\underline{\mathbf{E}}^{II}(\Gamma), \underline{\mathbf{H}}^{II}(\Gamma)$ が TE モード界のとき +1, TM モード界のとき -1 である. $\bar{\underline{\mathbf{E}}}^{II}, \bar{\underline{\mathbf{H}}}^{II}$ 等における上横線は z の負方向へ進むモード界であることを意味する. 面 S のすぐ左側の面 S^I 上に電磁波源が与えられたときの導波路 I 側に生じる電磁界についてもそのモード展開形の展開係数を与える式は上の (12)-(14) と同様の形で得られる.

さて, いま C_0 上の電磁界の接線成分 $\mathbf{E}_t^0, \mathbf{H}_t^0$ が I 側の z の負方向に伝搬するモード界を用いて

$$\mathbf{E}_t^0 = \sum c_m \bar{\underline{\mathbf{E}}}_{tm}^I + \int g(\Gamma) \bar{\underline{\mathbf{E}}}_t^I(\Gamma) d\Gamma \quad (15)$$

$$\mathbf{H}_t^0 = \sum c_m \bar{\underline{\mathbf{H}}}_{tm}^I + \int g(\Gamma) \bar{\underline{\mathbf{H}}}_t^I(\Gamma) d\Gamma \quad (16)$$

と与えられたとする. 但し, 添字 t は接線成分を意味する. (15), (16) を (12)-(14) の右辺に代入すると次の (17)-(19) を得る.

$$a_m = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{m'} (a_{m'm}^{\prime I} + a_{m'm}^{\prime\prime I}) c_{m'} + \int (\bar{b}'_m(\Gamma)^I + \bar{b}''_m(\Gamma)^I) g(\Gamma) d\Gamma \right\} \quad (17)$$

β^{II} が実数のとき

$$b(\Gamma) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{m'} (b'_{m'}(\Gamma)^I + b''_{m'}(\Gamma)^I) c_{m'} \right. \\ \left. + \int (g'(\Gamma', \Gamma)^I + g''(\Gamma', \Gamma)^I) g(\Gamma') d\Gamma' \right\} \quad (18)$$

β^{II} が虚数のとき

$$b(\Gamma) = \frac{j u_s}{2} \left\{ \sum_{m'} (b'_{m'}(\Gamma)^{I,II} + b''_{m'}(\Gamma)^{I,II}) c_{m'} \right. \\ \left. + \int (g'(\Gamma', \Gamma)^{I,II} + g''(\Gamma', \Gamma)^{I,II}) g(\Gamma') d\Gamma' \right\} \quad (19)$$

但し,

$$a'_{mm'} = -\frac{1}{2} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}_{tm}^I \times \underline{\mathbf{H}}_{tm'}^{II*}) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (20)$$

$$a''_{mm'} = -\frac{1}{2} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}_{tm'}^{II*} \times \underline{\mathbf{H}}_{tm}^I) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (21)$$

$$b'_m(\Gamma) = -\frac{1}{2} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}_{tm}^I \times \underline{\mathbf{H}}_t^{II}(\Gamma)^*) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (22)$$

$$b''_m(\Gamma) = -\frac{1}{2} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}_t^{II}(\Gamma)^* \times \underline{\mathbf{H}}_{tm}^I) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (23)$$

$$\bar{b}'_m(\Gamma) = -\frac{1}{2} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}_t^I(\Gamma) \times \underline{\mathbf{H}}_{tm}^{II*}) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (24)$$

$$\bar{b}''_m(\Gamma) = -\frac{1}{2} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}_{tm}^{II*} \times \underline{\mathbf{H}}_t^I(\Gamma)) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (25)$$

$$g'(\Gamma, \Gamma') = -\frac{1}{2} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}_t^I(\Gamma) \times \underline{\mathbf{H}}_t^{II}(\Gamma')^*) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (26)$$

$$g''(\Gamma, \Gamma') = -\frac{1}{2} \int_{C_0} (\underline{\mathbf{E}}_t^{II}(\Gamma')^* \times \underline{\mathbf{H}}_t^I(\Gamma)) \cdot \mathbf{i}_n dl \quad (27)$$

であり, $a'_{m'm}$, $a''_{m'm}$ や $b'_{m'}(\Gamma)^{I,II}$, $b''_{m'}(\Gamma)^{I,II}$ 等の肩について I および II は, それがないときの式においてそれぞれ導波路 I 側モード界の伝搬定数 β^I および導波路 II 側モード界の伝搬定数 β^{II} の符号を変えることを意味する.

C_0 上の $\mathbf{E}_t^0, \mathbf{H}_t^0$ が, z の正方向に進行する振幅 $C_{m'}$ の m' 次導波モードの場合には (17)-(19) は簡単に

$$a_m = \frac{1}{2}(a'_{m'm} + a''_{m'm})c_{m'} \quad (28)$$

$$b(\Gamma) = \frac{1}{2}(b'_{m'}(\Gamma) + b''_{m'}(\Gamma))c_{m'} \quad , \beta^{II} \text{ が実数のとき} \quad (29)$$

$$= -\frac{j\alpha_s}{2}(b'_{m'}(\Gamma) - b''_{m'}(\Gamma))c_{m'} \quad , \beta^{II} \text{ が虚数のとき} \quad (30)$$

となる。面 S のすぐ左側にとった面 S^I 上で

$$\mathbf{E}_t^0 = \sum_m a_m \mathbf{E}_{tm}^{II} + \int b(\Gamma) \mathbf{E}_t^{II}(\Gamma) d\Gamma \quad (31)$$

$$\mathbf{H}_t^0 = \sum_m a_m \mathbf{H}_{tm}^{II} + \int b(\Gamma) \mathbf{H}_t^{II}(\Gamma) d\Gamma \quad (32)$$

という接線成分界をもつ波源を仮定した場合に導波路 I 側に生じる電磁界 $\mathbf{E}^I, \mathbf{H}^I$ も上述の方法と同様の方法で求めることができる。結果のみ示すと, モード展開形

$$\mathbf{E}^I = \sum_m c_m \bar{\mathbf{E}}_m^I + \int g(\Gamma) \bar{\mathbf{E}}^I(\Gamma) d\Gamma \quad (33)$$

$$\mathbf{H}^I = \sum_m c_m \bar{\mathbf{H}}_m^I + \int g(\Gamma) \bar{\mathbf{H}}^I(\Gamma) d\Gamma \quad (34)$$

に対する展開係数が

$$c_m = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{m'} (a'_{mm'} + a''_{mm'}) a_{m'} + \int (b'_m(\Gamma)^{I*} + b''_m(\Gamma)^{I*}) b(\Gamma) d\Gamma \right\} \quad (35)$$

$$g(\Gamma) = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{m'} (\bar{b}'_{m'}(\Gamma)^{I*} + \bar{b}''_{m'}(\Gamma)^{I*}) a_{m'} + \int (g'(\Gamma, \Gamma')^{I*} + g''(\Gamma, \Gamma')^{I*}) b(\Gamma') d\Gamma' \right\} \quad , \beta^I \text{ が実数} \quad (36)$$

$$g(\Gamma) = -\frac{j\alpha_s}{2} \left\{ \sum_{m'} (\bar{b}'_{m'}(\Gamma)^* + \bar{b}''_{m'}(\Gamma)^*) a_{m'} \right.$$

$$+ \int (g'(\Gamma, \Gamma')^* + g''(\Gamma, \Gamma')^*) b(\Gamma') d\Gamma' \} , \beta^I \text{が虚数} \quad (37)$$

と求まる。

4. ステップ型不連続部の数値計算例

本節では、コア、クラッド部の屈折率が n_1, n_2 である厚さ $2d$ および d の2つのスラブ導波路が、 $z = 0$ で図3のように接続されたステップ型不連続部を取り上げ、透過、反射電力等の値を数値計算した結果を示す。入射波はI側からの単位電力の TE_0 モードとする。表1は両導波路の屈折率がそれぞれ $n_1 = 1.01, n_2 = 1.0$ で、II側の厚みが k_2d 値で 5.0, 10.0, 20.0, 40.0 の4例の場合に対して得られた1次透過電力、1次反射電力、2次透過電力等の値を示し、表2は同様の電力値を両導波路の屈折率がそれぞれ $n_1 = 1.432, n_2 = 1.0$ 、II側の厚み k_2d が 0.5, 1.0, 2.0, 4.0 の場合に対して計算した値を示す。両表の最下欄の反射・透過全電力は1次反射電力と1次と2次の和の透過界の電力との合計の電力を意味する。表1の例では $k_2d = 40.0$ のときのみ、また表2の例では $k_2d = 4.0$ のときのみ、導波モードが2個存在する。屈折率差

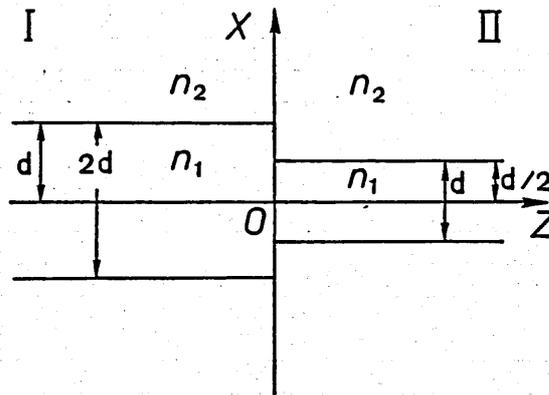


図3 ステップ型不連続

の小さい場合である表1の結果を見ると1次量の計算だけで5桁の精度でエネルギー関係式を満たす結果が得られることがわかる。これに対して屈折率差の大きい表2の例の場合には1次量の評価だけではコアの厚みが厚いとき ($k_2d = 4.0$ の場合), エネルギー関係式で2~3%の誤差を含む結果しか得られない。しかし, この場合でも透過界の2次量まで含めた計算をすると, 一挙に0.03%弱の誤差しかない良好な結果が得られることがわかる。

遠方界表現は反射側および透過側電磁界の放射モード展開の部分に鞍部点法を適用すれば容易に得られる。放射界パターンの例として, 図4, 図5にそれぞれ $n_1 = 1.01, n_2 = 1.0, k_2d = 20.0$ および $n_1 = 1.432, n_2 = 1.0, k_2d = 2.0$ の場合の放射電界 $|E_y(\phi)|$ のパターンを示す。これらはともに1次界を使って1°毎に計算した値から描いたパターンである。図4の場合, 反射側に放射される電力が極めて小さいので, 界パターンも透過側のみを示している。また, 図5で $\phi = 90^\circ$ の値にわずかに不連続が見られるのは, 2次以上の界を無視しているこ

表1 反射電力および透過電力 ($n_1 = 1.01, n_2 = 1.0$)

k_2d		5.0	10.0	20.0	40.0
1次透過電力	導波モード	0.94392	0.98995	0.95718	0.86334
	放射モード	0.56085×10^{-1}	0.10065×10^{-1}	0.42827×10^{-1}	0.13666
	合計	1.00001	1.00001	1.00001	1.00001
1次反射電力	導波モード	0.13486×10^{-5}	0.25987×10^{-5}	0.23507×10^{-5}	0.16739×10^{-5} 0.30990×10^{-5}
	放射モード	0.98447×10^{-5}	0.79565×10^{-5}	0.59923×10^{-5}	0.18661×10^{-5}
	合計	0.11193×10^{-4}	0.10555×10^{-4}	0.83430×10^{-5}	0.66390×10^{-5}
1次反射・透過電力の和		1.00002	1.00002	1.00002	1.00002
2次透過電力	導波モード	0.59260×10^{-10}	0.83594×10^{-10}	0.28565×10^{-10}	0.58026×10^{-11}
	放射モード	0.64853×10^{-9}	0.80739×10^{-9}	0.10126×10^{-8}	0.12346×10^{-8}
	合計	0.70779×10^{-9}	0.89099×10^{-9}	0.10412×10^{-8}	0.12404×10^{-8}
1次・2次 透過界の和 の電力	導波モード	0.94391	0.98993	0.95717	0.86334
	放射モード	0.56082×10^{-1}	0.10063×10^{-1}	0.42823×10^{-1}	0.13666
	合計	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
反射・透過全電力		1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

とよると思われる。ちなみに、放射電力を与える次式

$$P = 2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} |E_y(\phi)|^2 \right) k_2 r d\phi \quad (38)$$

を1°きざみで離散化して計算した透過側1次放射電力値と

表2 反射電力および透過電力 ($n_1 = 1.432, n_2 = 1.0$)

$k_2 d$		5.0	10.0	20.0	40.0
1次透過電力	導波モード	0.92325	0.97528	0.98732	0.90899
	放射モード	0.75691×10^{-1}	0.26752×10^{-1}	0.26601×10^{-2}	0.96803×10^{-1}
	合計	0.99894	1.00199	0.98998	1.00580
1次反射電力	導波モード	0.14826×10^{-2}	0.32399×10^{-2}	0.21542×10^{-2}	0.31563×10^{-2} 0.68104×10^{-2}
	放射モード	0.17909×10^{-2}	0.13133×10^{-2}	0.12396×10^{-2}	0.86474×10^{-2}
	合計	0.32735×10^{-2}	0.45532×10^{-2}	0.33938×10^{-2}	0.18614×10^{-1}
1次反射・透過電力の和		1.00221	1.00654	0.99338	1.02441
2次透過電力	導波モード	0.21357×10^{-5}	0.92822×10^{-5}	0.13693×10^{-4}	0.29406×10^{-4}
	放射モード	0.34411×10^{-5}	0.59777×10^{-5}	0.22633×10^{-4}	0.10180×10^{-2}
	合計	0.55768×10^{-5}	0.15260×10^{-4}	0.36326×10^{-4}	0.10475×10^{-2}
1次・2次 透過界の和 の電力	導波モード	0.92149	0.96936	0.99343	0.90026
	放射モード	0.75208×10^{-1}	0.26092×10^{-1}	0.31076×10^{-2}	0.81402×10^{-1}
	合計	0.99670	0.99545	0.99654	0.98166
反射・透過全電力		0.99997	1.00000	0.99994	1.00028

表3 透過放射界最大の角度

$n_1=1.01$	$k_2 d$	5.0	10.0	20.0	40.0
$n_2=1.0$	ϕ_{max}	3°	3°	8°	3°
$n_1=1.432$	$k_2 d$	0.5	1.0	2.0	4.0
$n_2=1.0$	ϕ_{max}	14°	22°	69°	37°

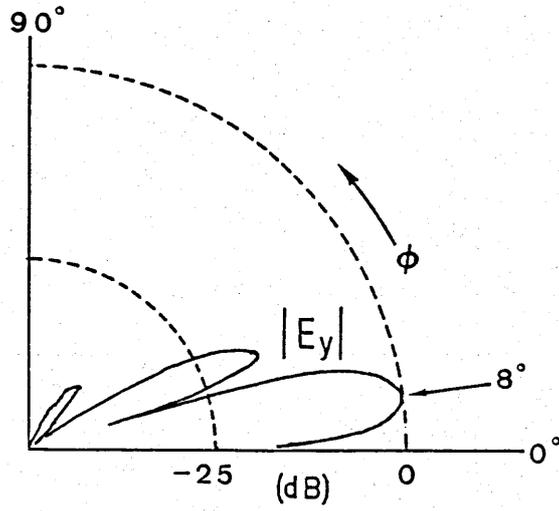


図4 透過側放射電界パターン ($n_1 = 1.01, k_2d = 20.0$)

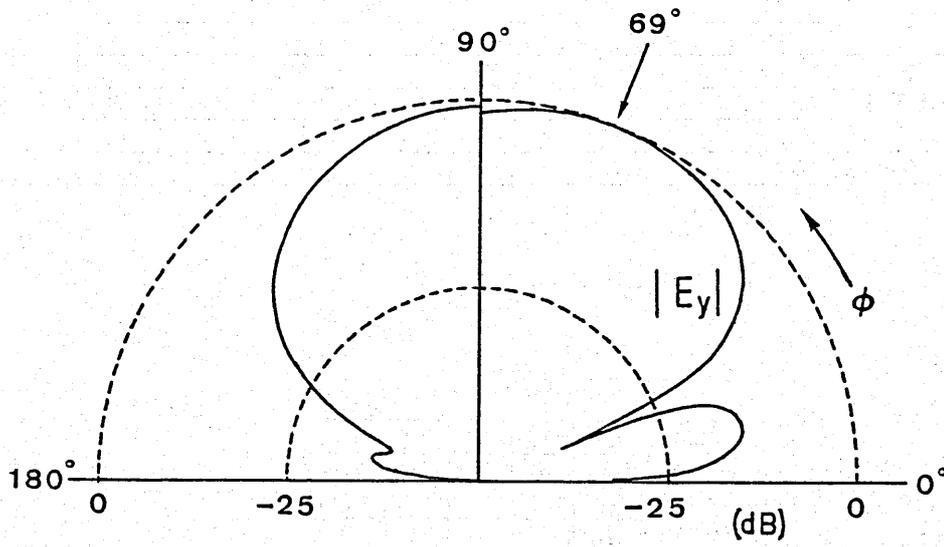


図5 透過側および反射側放射電界パターン ($n_1 = 1.432, k_2d = 2.0$)

$$P = \int_0^{n_2 k_0} |b(\Gamma)|^2 d\Gamma \quad (39)$$

から計算した1次透過放射モード電力値とは全例とも1.5%以内で一致することを確認している。なお、透過放射パターンの大きさが最大となる角度 ϕ_{max} を求めてみると表3のとおりとなった。

5. むすび

2つの誘電体スラブ導波路が直接接続された構造の不連続部における電磁界を逐次的に求めていく解析的方法を提案し、ステップ型の不連続部の場合について数値計算例を示した。この方法は入射電力のほとんどが透過し、反射電力が極めて小さくなる開放型導波路の場合に有効な方法と言えるが、理論的には反射電力が大きい場合でも適用可能なので、遮蔽型導波路の場合にも同様に有効な方法になり得ると考えられる。

準ミリ波帯衛星回線における 交差偏波識別度変動特性

前川 泰之 張 年錫 宮崎 昭
(大阪電気通信大学)

瀬川 哲郎
(株式会社CSK)

平成2年7月7日

目 次

第1章 序論	1
第2章 低減衰時のXPD劣化特性	4
2.1 発生時間率	4
2.2 XPD劣化に伴う等価CN比劣化	6
2.3 交差偏波位相の分布	8
2.4 差減衰・差位相の推定	10
2.5 XPD測定と直交二偏波レーダー観測の比較	13
2.6 むすび	13
第3章 XPD劣化の変動時間スケール	16
3.1 自己相関関数による解析	16
3.2 相関時間の分布	17
3.3 XPD劣化・降雨減衰の相関	20
3.4 むすび	22
第4章 氷晶効果の特性と補償改善度	23
4.1 降雨減衰とXPD劣化の季節的変動	23
4.2 氷晶効果と交差偏波位相の季節的変動	26
4.3 氷晶効果と交差偏波位相の降雨強度依存性	28
4.4 位相補償による改善度	31
4.5 むすび	33
第5章 雨滴によるXPD劣化の特性	34
5.1 減衰を伴うXPD劣化の交差偏波位相	34
5.2 降雨減衰量と交差偏波位相の関係	34
5.3 降雨強度との関係	38
5.4 雨滴粒径分布の測定例	40
5.5 むすび	43
第6章 結論	44
謝 辞	46

第 1 章 序論

实用通信衛星CS-3（さくら3号）が昭和63年2月および9月にそれぞれ打ち上げられたのに引続き、平成元年3月及び6月には民間衛星が打ち上げられるなど、我が国も本格的な衛星通信時代を迎えつつある⁽¹⁾。従来国際衛星通信でおもに用いられてきたCバンド（6/4GHz）やKuバンド（14/11GHz）のみならず、これらの国内衛星通信ではさらに高い準ミリ波帯と呼ばれるKaバンド（30/20GHz）も用いられており通信容量の増大が図られているが、この帯域では周波数とともに増加する降雨の影響が大きな問題となる。また今後の需要の増大に対して、準ミリ波帯での直交二偏波共用による周波数有効利用も重要な研究課題である。

大阪電気通信大学は㈱CSKと産学共同で郵政省主宰「衛星利用パイロット計画」に昭和60年度から62年度の間参画し、通信衛星2号を介してCSK東京世田谷局との間で種々のデータ伝送実験を行うとともに、交差偏波識別度（XP D）を含むCS-2衛星ビーコン波（19.45GHz、右旋、仰角49.5°）の精密な連続測定を行ってきた⁽²⁾、⁽³⁾。また平成元年度には、引続き郵政省主宰の「衛星通信高度利用パイロット計画」に今度は大阪電気通信大学が実験実施責任機関として㈱CSKとともに参加し、平成2年度から本格的にCS-3衛星を用いた高信頼・高効率なデータ伝送を目的とする高度利用実験を開始した⁽⁴⁾。またこの間CS-2及びCS-3衛星のビーコン波を継続して記録しており、これらのXP Dデータを用いて準ミリ波帯に適合した降雨時のXP D劣化補償法を検討していく事も、同高度利用実験の研究課題のひとつに含まれている。

降雨時の雨滴・氷晶等の降水粒子によるXP D劣化は、その長軸（ほぼ水平方向）と短軸（ほぼ鉛直方向）間の減衰量の差（差減衰；Differential Attenuation）と伝搬位相の差（差位相；Differential Phase Shift）が原因で生じる。Cバンド（6/4GHz）では雨滴においても差位相によるXP D劣化が主流であるのに対し、Kuバンド（14/11GHz）では差減衰の効果も無視できなくなりKaバンド（30/20GHz）においてはむしろ差減衰の方が優勢になる場合がある。従来RF帯の導波管装置では移相器の組合せによりXP D劣化補償が行われており、Cバンドの国際通信回線ではこの方法で差位相を打ち消すことより十分な補償効果を

あげている⁽⁵⁾。ところがKuやKaバンドでは移相器のみの補償では差減衰の増加にともなう交差偏波成分が依然として残留し⁽⁶⁾、特に減衰の著しいKaバンドの場合その影響は重大と予想される。

一方、上空の氷晶によるXPD劣化は氷晶自体が低損失であり本質的に差位相の効果のみで生じると考えてよく、移相器による補償がKaバンドにおいても効果があると期待される。ただし、その長軸の水平方向からの傾き角は一般に雨滴に比して大きいとされており、特に発雷時のように空中電界の作用を受けるときに傾き角の偏差が大きくなることが報告されている⁽⁷⁾。従ってこの様な場合は差位相の生じる偏波の方向に注意を要する。

また近年のデジタル衛星通信回線では、直交センシング法⁽⁸⁾等によりIF帯またはベースバンドにおいて信号処理上で交差偏波成分を干渉雑音の一種として除去する方法が提案されている。この方法はデジタル回線において変調方式や伝送速度が既知で一定の場合有効であり、この方式によれば伝搬路上でのXPD劣化の発生原因の詳細はもはや余り問われなくなる可能性もある。しかし一般に通信方式が様々でデジタル・アナログ信号が混在する場合には、依然としてRF帯での導波管装置による補償の方が情報伝送の中身や形態を問わず汎用的である。そしてKaバンドでは導波管装置を非常に小型化できる利点もある。また上記のデジタル信号処理法による場合においても、少なくとも、降雨時の雨滴や氷晶によるXPD劣化の発生時間率やXPD劣化が生じる偏波の方向を把握しておくことは意味のあることといえる。

本講では、第2章でおもに降雨減衰が5~10dB以下の場合において見られるXPD劣化の発生頻度とその変動特性について詳しく解析し、衛星回線の降雨マージン内の実用域と見なせる範囲でのXPD劣化補償の必要性と可能性について検討する。またXPD劣化及び偏波のチルト角を決める交差偏波位相の変動の時間スケールについて第3章で相関関数による検討を行う。次にこのような低減衰時(5~10dB以下)に主流をなす上空の氷晶によるXPD劣化の出現率をレーダ観測による降雨高度と関連して季節的に調べた結果を第4章で述べる。また降雨強度別に交差偏波位相の分布を明かにし、氷晶によって生じる過大なXPD劣化量(ΔXPD)と移相器により補償可能なXPD改善率の関係を示す。一方この交差偏波位相は、円偏波の場合差減衰と差位相の割合を評価する上で重要である。

差減衰はおもに雨滴によって生じ、移相器による補償後の残留XPDの原因となる。そこで最後に第5章では減衰の大きな場合においても交差偏波位相の分布について雨滴粒径分布との関連を述べ、XPD劣化補償を行った場合の改善率に関して検討を加えておく。

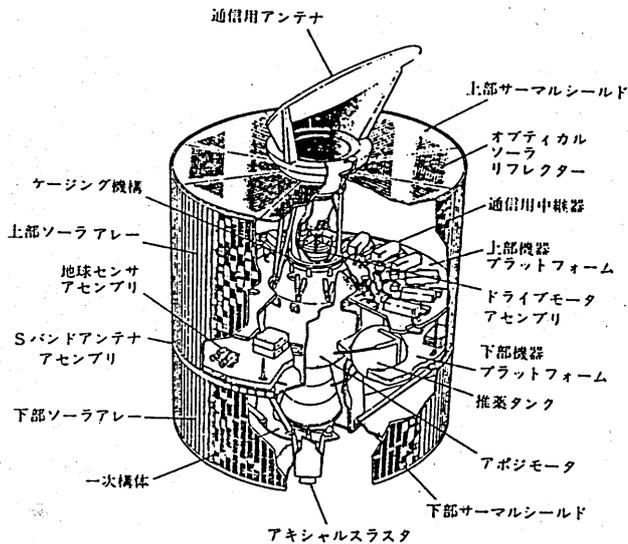


図 1. 1 通信衛星3号 (CS-3) の概観⁽¹⁾

参 考 文 献

- (1) "衛星通信ガイドブック"、郵政省通信政策局監修、オーム社 (1989)
- (2) 前川、張、宮崎、瀬川、信学論 (B)、J69-B,11,pp.1562-1566(昭61-11)
- (3) 前川、張、宮崎、瀬川、信学論 (B)、J71-B,4,pp.563-568(昭63-04)
- (4) "平成二年度衛星通信高度利用パイロット計画運用実験実施計画書"、郵政省・大阪電気通信大学・株式会社CSK、平成元年11月
- (5) 結城、稲垣、山田、馬場、遠藤、信学論 (B)、J64-B,1,pp.46-53(昭56-01)
- (6) 佐藤、遠藤、横山、松山、国際通信の研究、No.108,pp.87-119(April 1981)
- (7) O.Furuta, Ph.D Thesis, Kyoto University (1983)
- (8) 長木、貝塚、日高、信学技報、AP86-146(1987-02)

第2章 低減衰時のXPD劣化特性

2.1 発生時間率

図2.1に降雨減衰(A T T)と交差偏波識別度(X P D)の相関図の測定例を示す。同図(a)、(b)及び(c)はそれぞれ1986年9月、1987年8月及び12月に測定されたものであり、データ点はいずれも降雨時に1分間隔で得られたものである。図中の曲線は変型雨滴モデルによる理論計算値であり、 σ は雨滴傾斜角の標準偏差を示す⁽¹⁾。

図2.1(a)から明らかなようにXPD劣化には2つのタイプが存在する。ひとつは雨滴による理論カーブに沿った大きな減衰を伴うものでありもうひとつは減衰を余り伴わない(5dB程度以下)XPD劣化である。レーダー観測により前者ははっきりしたブライトバンド(上空の雪や氷晶が解けてレーダー反射が大きくなる高度範囲)を伴わない”対流性降雨(Cumulus)”で、後者はブライトバンドが明瞭に見られる”層状性降雨(Stratus)”で発生することが知られており^{(2)、(3)}、それぞれ、雨滴、氷晶がおもな発生原因とされている。同図(b)の1987年8月の例は最も著しいXPD劣化の測定例であり、Cumulus、Stratus両タイプとも15dB程度まで劣化が見られる。特にCumulusに関しては、雷雲による激しい降雨によるものである。一方同図(c)に示されるように、主として冬季には減衰を余り伴わないXPD劣化のみが頻繁に観測されることが多い。

衛星回線では一般にXPD劣化が25dB程度まで劣化すると交差偏波成分による干渉雑音は他の干渉雑音に比べても無視できなくなるが、この様な著しいXPD劣化がどの程度の降雨減衰を伴って出現するかを統計的にまとめたのが図2.2である。ここでは1986年の1年間について(a)XPD劣化30dB以下と(b)25dB以下の時のビーコン減衰量の条件付確率分布(ヒストグラムによる度数分布)とその累積確率分布(○印)をそれぞれ示す。またXPD劣化が30dB以下及び25dB以下となる年間時間率はそれぞれ約0.5%(4.38h)及び約0.1%(0.876h)である。

図2.2(a)よりXPD劣化の条件を30dB以下とするとそのほとんどは5~10dB以下の低減衰時に発生し、また同図(b)より25dB以下の条件においてもやはり約半数が低減衰時に集中することが分かる。この様に衛星回線の実用上問題とされる著しいXPD劣化時においても依然としておもに”層状性降雨”時に発生する

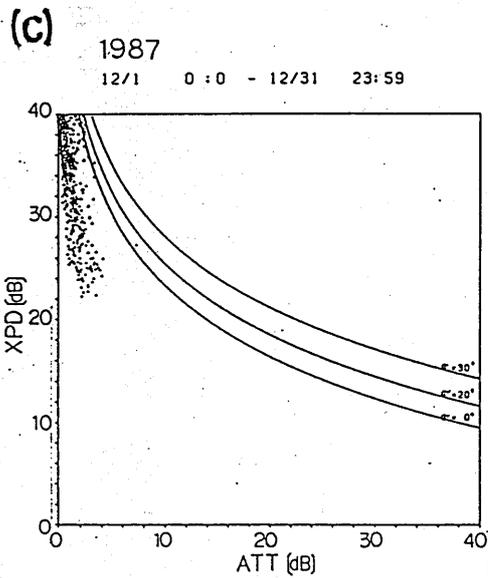
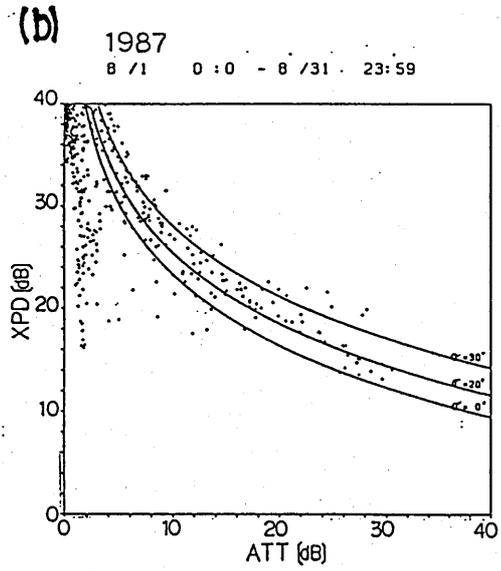
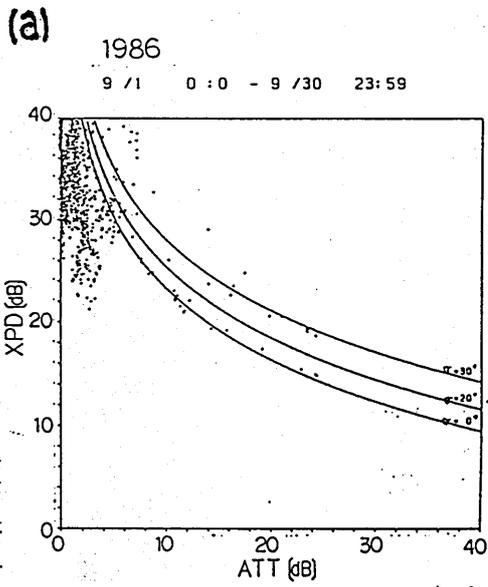


図 2. 1 降雨減衰と XPD 劣化の相関図

上空の氷晶等による低減衰のタイプが優勢である。この5～10dB程度の減衰量は通常の衛星回線の降雨マージン内にあり、一偏波ではまだ十分通信が可能な範囲であり、この範囲内では補償対策を講じることは意味のあることといえる。

2.2 XPD劣化に伴う等価CN比劣化

ここで、この種のXPD劣化によって直交二偏波共用回線を仮定した場合に生じる干渉雑音の大きさを見積っておく事が重要である。交差偏波成分の混入による等価的なCN比劣化量は、簡単な4相PSK変調方式を仮定した場合次式で与えられる⁽⁴⁾。

$$D = -20 \log_{10} [1 - \{CX / \sin(\pi/4)\}] \quad (2.1)$$

ただしCXはXPDの真値電圧値であり

$$CX = 10^{-XPD/20} \quad (2.2)$$

図2.3は1986から1989の間の降雨時に測定されたXPD値をもとに、上式により計算した直交二偏波間の干渉によって生じる等価CN比劣化量を、降雨減衰量に対して示したものである。データのサンプル間隔は同じく1分である。また図中の実線は雨滴に対するCN比劣化量の理論計算値であり、 σ は同様に雨滴傾斜角の標準偏差である⁽⁵⁾。同図より雨滴による理論カーブに沿った降雨減衰を伴うCN比劣化とともに、ほぼそれと同等数のCN比劣化が5dB以下の低減衰時にも発生することが示される。これらはそれぞれ”対流性”及び”層状性”の降雨時に対応するものであり、それらの場合の直交二偏波間の干渉によるCN比劣化の発生頻度は同程度であり、その大きさはいずれも5dB近くに達する場合があることが分かる。

ここで降雨時のCN比劣化量全体は降雨減衰量をA[dB]とすると

$$\Delta CN = A + D \quad (2.3)$$

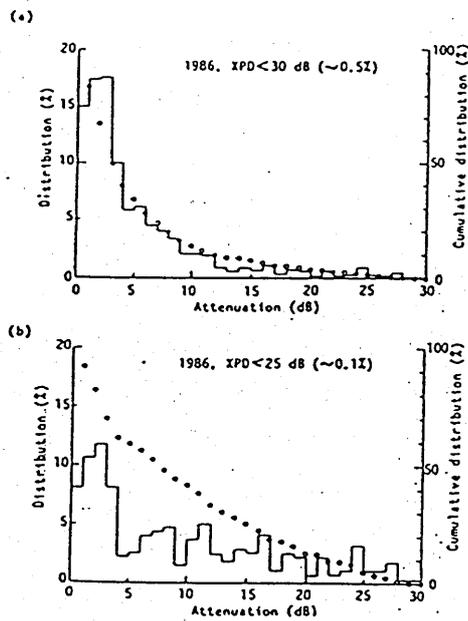


図 2. 2 降雨減衰の条件付確率分布(ヒストグラム)とその累積分布(○印)

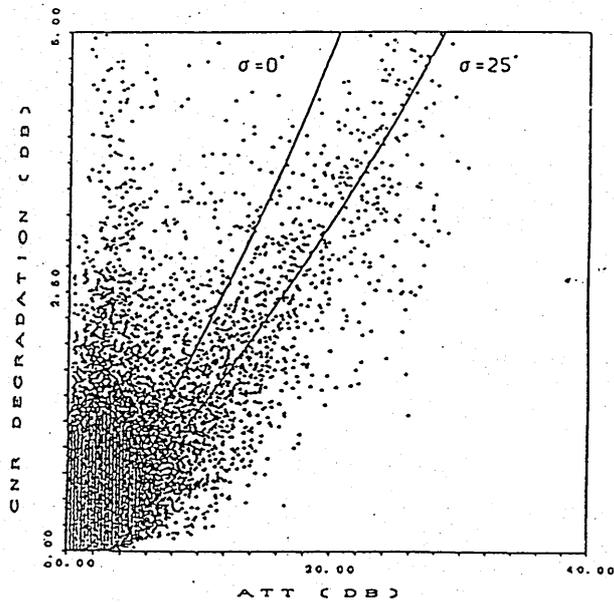


図 2. 3 XPD劣化による等価CN比劣化量の推定値

で与えられることに注意を要する。即ち、図2.3より”対流性降雨”では降雨減衰(A)の効果が圧倒的であり、5~10dB程度の降雨マージンでは一偏波でも二偏波でも関係なく降雨減衰そのものにより回線遮断に至るのに対し、”層状性降雨”では上式のAとDが同程度であり、直交二偏波回線での干渉雑音(D)の抑圧がまだ意味を持つことになる。

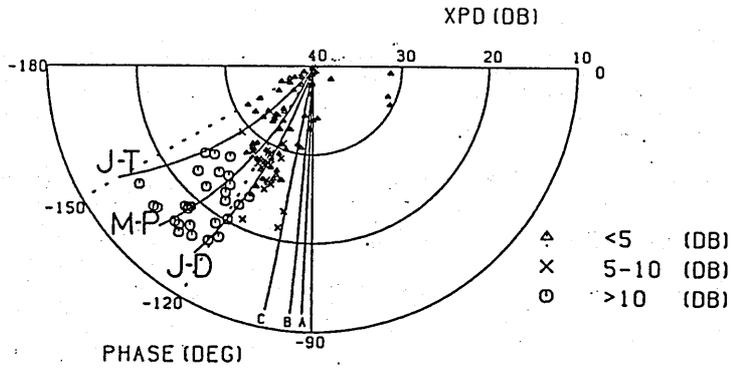
2.3 交差偏波位相の分布

降雨時の主偏波成分に対する交差偏波成分の位相差の測定値を図2.4にXPD測定値を半径として示す。図2.4(a)は1986年7月21日に観測された”対流性降雨”時の例で、(b)は1986年9月17日に観測された”層状性降雨”時の例である。図中のJ_t、MP及びJ_dの曲線はそれぞれ Joss-drizzle、Marshall-Palmer、及びJoss-thunderstormのタイプの雨滴粒径分布に対する理論計算値であり、同図(a)の”対流性降雨”の場合によい一致が見られる⁽⁶⁾。一方図中のA、B、及びCを付した曲線は氷晶に対する交差偏波位相の計算値であり、氷晶の前方散乱係数は(7)の文献によった。また氷晶の等価半径はそれぞれ0.25、0.50、及び0.75mmであり偏平率は同半径の雨滴と同様とした。同図(b)より”層状性降雨”時の交差偏波位相は氷晶モデルによる理論計算値に近づくことが分かる。

図2.4の2例はそれぞれ”対流性”及び”層状性”の降雨において、雨滴あるいは氷晶の効果が典型的に現れた例であるが、一般には両者の影響が混在し両方の理論計算値の間にわたって主として交差偏波位相の分布がみられる。1986年から1987年の間に30dB以下のXPD劣化が1時間程度連続して観測された降雨事象について、それらの交差偏波位相の分布をまとめたものが次の図2.5である。横軸は各降雨事象の降雨減衰量の平均値であり、データ点(○印)は交差偏波位相の平均値、エラーバーはそのまわりの標準偏差を示す。図2.5より減衰が平均5dB以下の低減衰時には交差偏波位相の平均値は-90°近辺に分布するのに対し、減衰が増大すると交差偏波位相の絶対値は増し、減衰10dB以上ではほぼ図2.4の雨滴による理論計算値の範囲にあることが示される。エラーバーで示される変動幅は概して±10dB前後であるが、発雷時にはより大きな変動が見られることもある。

(a)

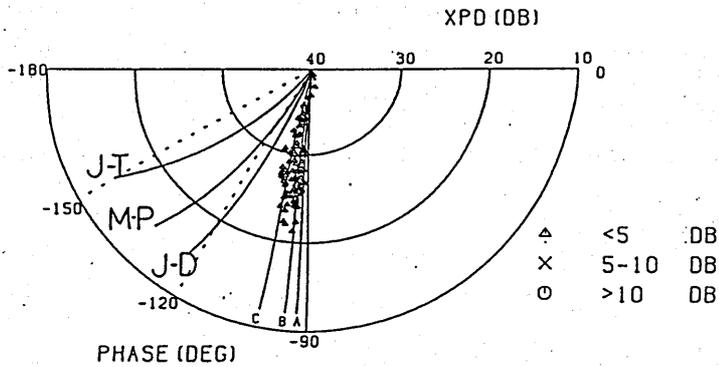
1986 7/21 5:00- 7/21 11:00 (1MIN)



J-T : Joss-Thunderstrom
M-P : Marshall-Palmer
J-D : Joss-Drizzle

(b)

1986 9/17 6:00- 9/17 12:00 (1MIN)



Radii of ice crystal A : 0.25 mm
B : 0.50 mm
C : 0.75 mm

図2. 4 交差偏波位相の測定例

2.4 差減衰・差位相の推定

円偏波の場合の交差偏波位相は伝搬媒質の差位相を p [rad/km]、差減衰を q [neper/km] とすると近似的に次式で与えられる⁽⁶⁾。

$$\psi = \arg(q - i p) \pm 2\phi \quad (2.4)$$

ここで、 ϕ は雨滴などの降水粒子の平均傾き角でその符号は偏波の旋回方向による。またいま考えている周波数帯及び降水強度の範囲では q は負値となり ψ の計算値は図 2.4 で示された通り常に第 3 象限 ($-90^\circ \sim -180^\circ$) に現れる。この事は測定データによっても裏付けされている。

発雷時などの特殊な場合を除き降水粒子は平均としてほぼ水平方向に長軸が配列すると仮定すると、(2.4) 式より交差偏波位相は差位相 $DPS(p)$ と差減衰 $DA(q)$ を図 2.6 に示すようにベクトルの的に合成したものと解釈できる。またこの関係を用いると、測定データから逆に $\phi = 0$ と仮定した場合の降水粒子の長軸・短軸間（即ち水平・垂直偏波間）の差位相と差減衰を見積ることが可能となる。

図 2.7(a) は 1989 年 2 月 16 日に観測された”対流性降雨”時の差減衰 DA [dB] と差位相 DPS [deg] を交差偏波位相の測定値から上記の方法により推定した結果である。いずれも横軸を減衰量 (ATT [dB]) として示してある。同図より最大 20dB 程度の減衰量に対し DA は 1.0dB、 DPS は 12° 程度生じることが示される。この時の XPD 劣化は最大 20dB 程度である。図中の曲線は同様に 3 種の雨滴粒径分布に対する理論計算値である⁽⁶⁾。

一方図 2.7(b) に 1989 年 1 月 20 日に観測された”層状性降雨”の場合の DA 及び DPS の推定値を示す。同図においては DA 、 ATT とも大きな値は検出されないが DPS に関しては”対流性降雨”の場合と同様最大 10° 程度まで検出される。この様に”層状性降雨”のおもに氷晶による XPD 劣化は差位相によって生じる現象でありこの事は前述のように交差偏波位相が -90° 付近に分布することから当然予測されることであるが、ここで見積られた 10° 程度の差位相の量は受信側の移相器で XPD 劣化補償を具体的にを行う場合に必要とされる移相量と考えられ、補償器の設計の際に考慮する必要がある。

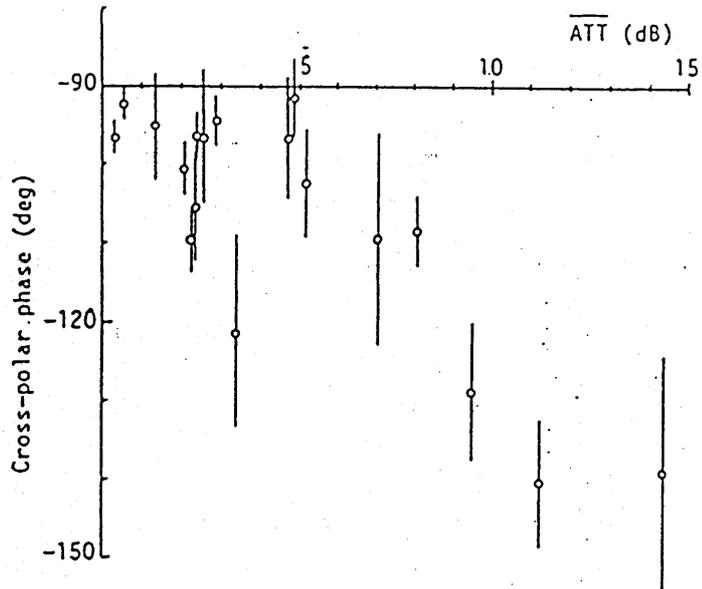


図2. 5 降雨事象毎の交差偏波位相の分布

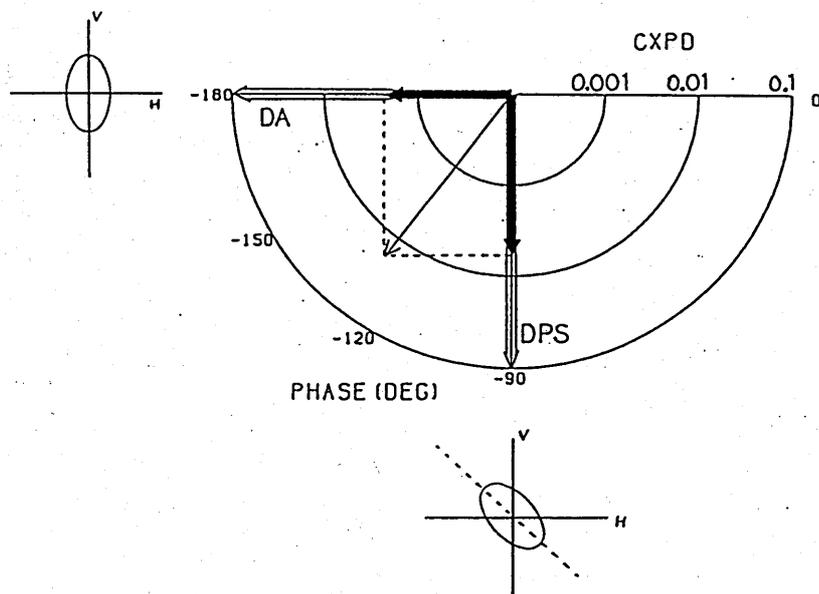
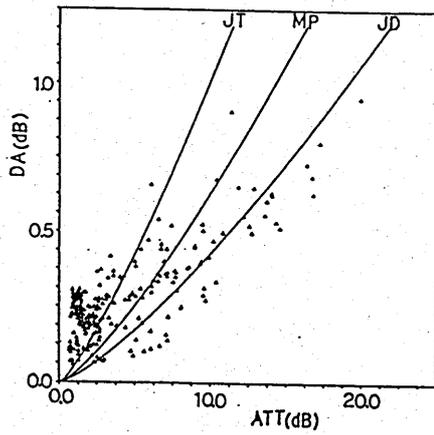
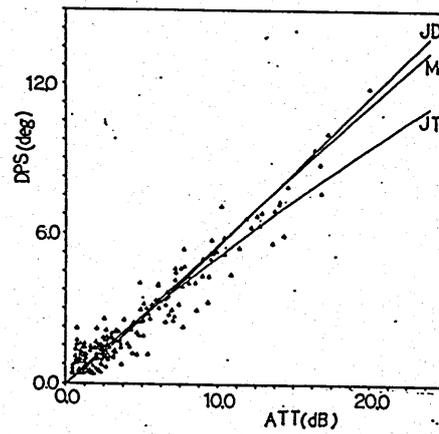


図2. 6 交差偏波位相と差減衰 (DA)・差位相 (DPS) の関係

(a)

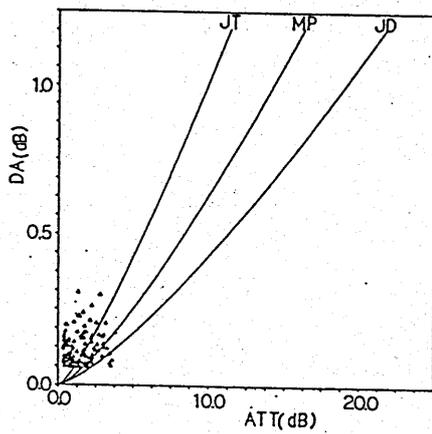


降雨減衰と差減衰の相関図 (2月16日)

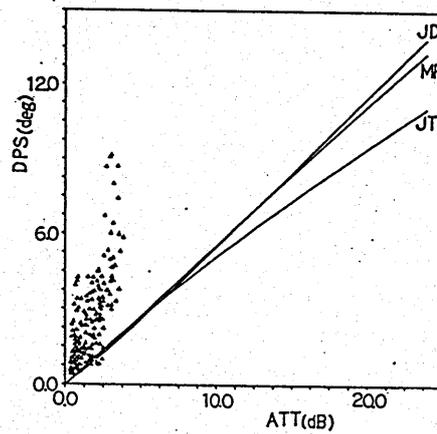


降雨減衰と差位相の相関図 (2月16日)

(b)



降雨減衰と差減衰の相関図 (1月20日)



降雨減衰と差位相の相関図 (1月20日)

図 2. 7 差減衰 (DA)・差位相 (DPS) の推定値

2. 5 XPD測定と直交二偏波レーダー観測の比較

以上のように低減衰時の氷晶によるXPD劣化では水平・垂直間の差位相が主な原因であることは、最近のCS-3衛星ビーコン波の測定と同時に行われたXバンド(9.41GHz)の直交二偏波レーダー観測においても確認することが出来る。図2.8に1990年1月29日のXPD測定とレーダー測定の比較を示す。レーダー測定は上空の衛星回線伝搬路付近の雨雲や雨滴を1分毎に水平方向と垂直方向に偏波面を切り換えて行った。同図の等高線はXPD測定(上側の実線)と同時刻に得られた水平偏波によるレーダー反射因子(Z_H)の高度分布をもとに描いたものである。高度分解能は183m、時間分解能は2分である。また同図の右側に、観測時間帯の水平偏波のレーダー反射因子(Z_H)、垂直偏波のレーダー反射因子(Z_V)及び両者の反射因子差(Z_{DR})の平均高度分布を示す。

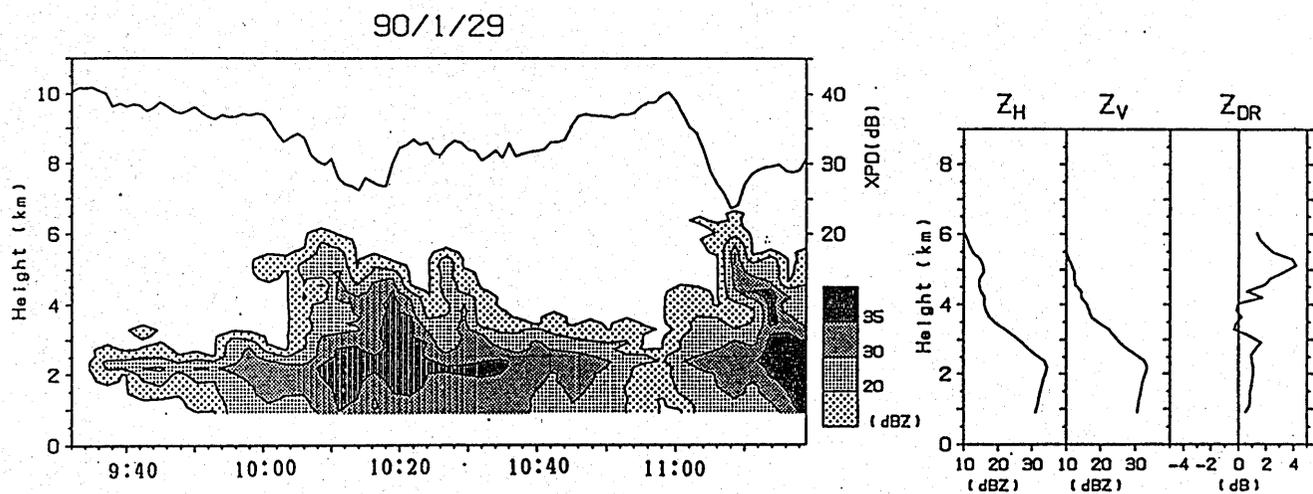
この時の降雨強度は1~2mm/h程度で降雨減衰は2dB以下であるが、XPD値は20dB近くまで劣化が見られることがある。またレーダー反射因子には高度2km付近にブライトバンドが検出されるが、その上空に氷晶が5km付近まで多く存在するときがちょうどXPD劣化が顕著な時に対応する(10:15及び11:00頃)。また右のレーダー反射の高度分布を見ると、高度5km付近では Z_V に比べ Z_H が極端に大きいことがわかる。ここでは Z_{DR} は4dB近くに達しており仰角が49.5°とかなり高いにも関わらず、過去の直交二偏波レーダーによる雲頂付近の氷晶の観測例⁽⁸⁾に近い値が得られている。

このようにレーダーによる上空の雨雲の同時観測により、この種の減衰を余り伴わないXPD劣化はおもに雲頂付近(本観測では高度5km)で発生する氷晶によって引き起こされ、そこでは水平偏波のレーダー反射の方が大きくなり Z_{DR} が優勢であることから、水平方向の伝搬位相定数の増大がその原因であることを直接確かめることが出来る。

2. 6 むすび

本章ではおもにCS-2衛星ビーコン波で測定された降雨時の準ミリ波帯円偏波のXPD特性を調べた結果、25dB以下の重大なXPD劣化においても依然として上空の氷晶による劣化がかなりの割合を占め、減衰量5~10dB以下の衛星回線実用域においても補償対策を講じる必要があることが示された。この時のXPD

図2. 8 XPD測定と直交二偏波レーダー観測の比較



劣化による等価C/N比劣化は5dBと減衰量による劣化と同程度であり、補償に必要なとされる移相器の移相量は 10° 程度であることが分かった。また劣化の原因となる差位相は、直交二偏波レーダの同時観測により主に上空の偏平な(Z_{DR} が異常に大きい)氷晶による水平方向の伝搬位相定数の増大からもたらされることが確認された。

参 考 文 献

- (1) T.Oguchi, Radio sci., Vol.12, pp.41-51 (1977)
- (2) H.Fukuchi, T.Kozu, K.Nakamura, J.Awaka, H.Inomata and Y.Otsu, IEEE Trans. Antennas & Propagat., AP-31, pp.603-613 (1983)
- (3) 前川, 張, 宮崎, 瀬川, 信学技報, AP88-1 (1988-04)
- (4) R.E.Castel and C.W.Bostian, IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., AES-15, pp.299-301 (1979)
- (5) 福地 一, 信学論(B), J69-B, 11, pp.1556-1561(昭61-11)
- (6) H.Fukuchi, J.Awaka and T.Oguchi, IEEE Trans. Antennas & Propagat., AP-33, pp.997-1002 (1985)
- (7) A.W.Dissanayake, D.P.Haworth and P.A.Watson, Ann.Telecommun., Vol.35, pp.398-404 (1977)
- (8) M.P.M.Hall, J.W.F.Goddard and S.M.Cherry, Radio Sci., Vol.19, pp. (1984)

第3章 XPD劣化の変動時間スケール

3.1 自己相関関数による解析

直交二偏波共用回線において交差偏波識別度(XPD)劣化を移相器等により補償する場合、降雨時に発生するXPD劣化、及び交差偏波位相(チルト角)の変動の時間スケールを明らかにしておくことが補償器の応答時間を考慮する上で重要である。本章では1986年から1987年にかけてCS-2衛星ビーコン波を用いて測定されたXPDデータに基づき、それらの時間的変動特性について考察を加える。本測定では、降雨強度、ビーコン減衰量、XPD劣化量及び交差偏波位相とも1分間隔でサンプルされているので、ここで議論する時間スケールはおもに1分のオーダーのものである。

図3.1は1986年9月17日に観測された降雨減衰(●)、XPD(X)、及び交差偏波位相(△)の自己相関関数をそれぞれ計算したものである。データはXPDがほぼ連続して30dB以下まで劣化した時間帯を選んであり、データ長は約6時間である。ここで各変動の時間スケールを評価するために、それぞれの自己相関関数が $1/e$ まで減少するラグ長(Time lag)を用いて"相関時間"定義した⁽¹⁾。図中の t_a 、 t_x 、及び t_p はそれぞれこの様にして得られた降雨減衰、XPD及び交差偏波位相の相関時間を示す。

図3.1から、降雨減衰、XPD及び交差偏波位相の自己相関関数は、それぞれ大きく異なった形状を持ち、その結果 t_a 、 t_x 、及び t_p はかなり違った時間スケールを示すことが分かる。即ち降雨減衰の相関時間に比べXPDの相関時間はずっと長いのに対し、交差偏波位相の相関時間はむしろ降雨減衰の場合より短くXPDと比較して半分程度になっている。一方、より低い周波数帯であるCバンド(6/4GHz)の測定例では、この種の相関時間は降雨事象毎に数分から数十分の範囲で変動するものの、同一降雨事象内では楕円偏波率(XPD)とチルト角(交差偏波位相)の相関時間はほぼ一致することが報告されている⁽¹⁾。またこれらの変動は基本的に伝搬路直下での降雨強度と相関があることが確認されている。ところが、Kaバンド(30/20GHz)では降雨減衰は通常降雨強度と相関の高い変動を示すものの、前章で述べたようにXPD劣化や交差偏波位相の変動は必ずしもそうではなく、特に低減衰時は氷晶の効果の方が著しい。従って、図3.1に

見られる各々の相関時間の不一致はこの様な雨滴と氷晶の影響が混在するKaバンド独特の現象である可能性がある。

3.2 相関時間の分布

次に図3.2に1986年から1987年の間の降雨事象について、降雨減衰(●)、XPD(×)、及び交差偏波位相(△)の相関時間を計算した結果を示す。降雨事象としては、30dB以上のXPD劣化が1時間以上連続して記録された時間帯を選んである。また同図の横軸は各降雨事象の平均減衰量である。図3.2よりいずれの相関時間も平均降雨減衰量の増大とともに20分から2分程度にまで減少し、概して激しい降雨ほどXPD劣化の変動時間スケールが短くなることが示される。ところが同図を詳しくみると、XPD劣化と交差偏波位相には平均減衰量2~5dBの低減衰の範囲にも、5分以下の短い相関時間を示すものが相当数存在する。

そこで降雨減衰の変動時間スケールとの関係を明らかにするために、各降雨事象についてXPD劣化あるいは交差偏波位相と降雨減衰の相関時間の比、即ち、 t_x/t_a と t_p/t_a をそれぞれ計算したものを図3.3(a)、(b)に示す。横軸は同様に平均減衰量である。同図より、 t_x/t_a 及び t_p/t_a は、かなりバラツキが大きいものの、降雨減衰の平均値が2~8dB当りの範囲で全般的に1以下となり、この減衰量の範囲ではXPD劣化と交差偏波位相の変動が降雨減衰に比べて相対的に速くなる傾向があることを意味する。

減衰2~8dBの範囲は前章でも調べた通り、氷晶あるいは雨滴だけの効果が優勢であるというよりもむしろ両者がちょうど混在する範囲である。まず減衰2dB以下ではほとんど純粹に氷晶のみの効果によるXPD劣化が発生していると考えられ、その変動時間スケールはわずかに存在する減衰量と同様に5~20分程度である。また減衰8dB以上ではほぼ雨滴のみによりXPD劣化特性が決まり、この場合も変動時間スケールは降雨減衰と同様になるが激しい降雨を反映して2~5分程度まで短くなっている。従って、これらの中間の減衰2~8dBで見られるXPD劣化、特に交差偏波位相の5分以下の速い変動は雨滴・氷晶両方の影響が組み合わさった結果と見ることが出来る。

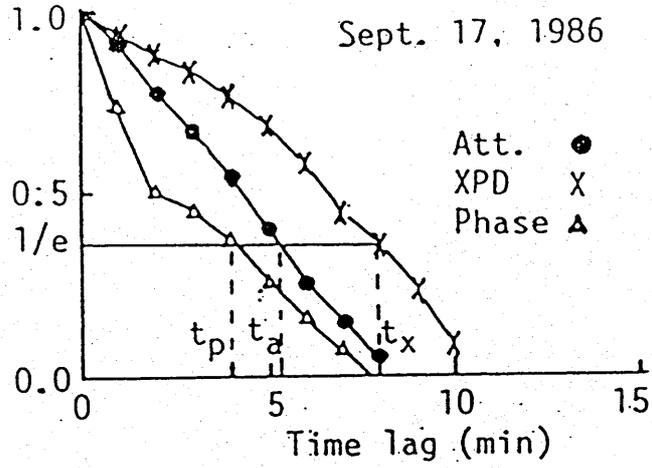


図3. 1 各測定データの自己相関関数と相関時間の推定例

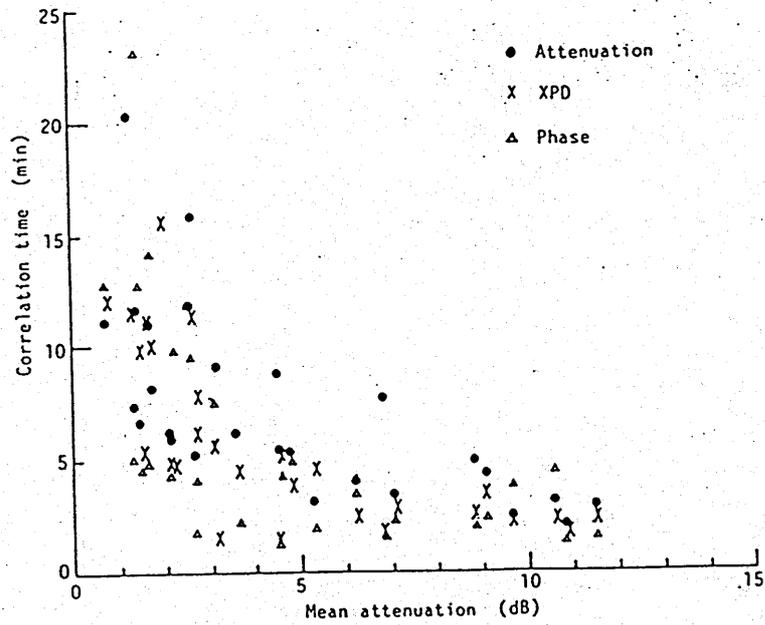


図3. 2 各降雨事象毎の相関時間（変動時間スケール）の分布

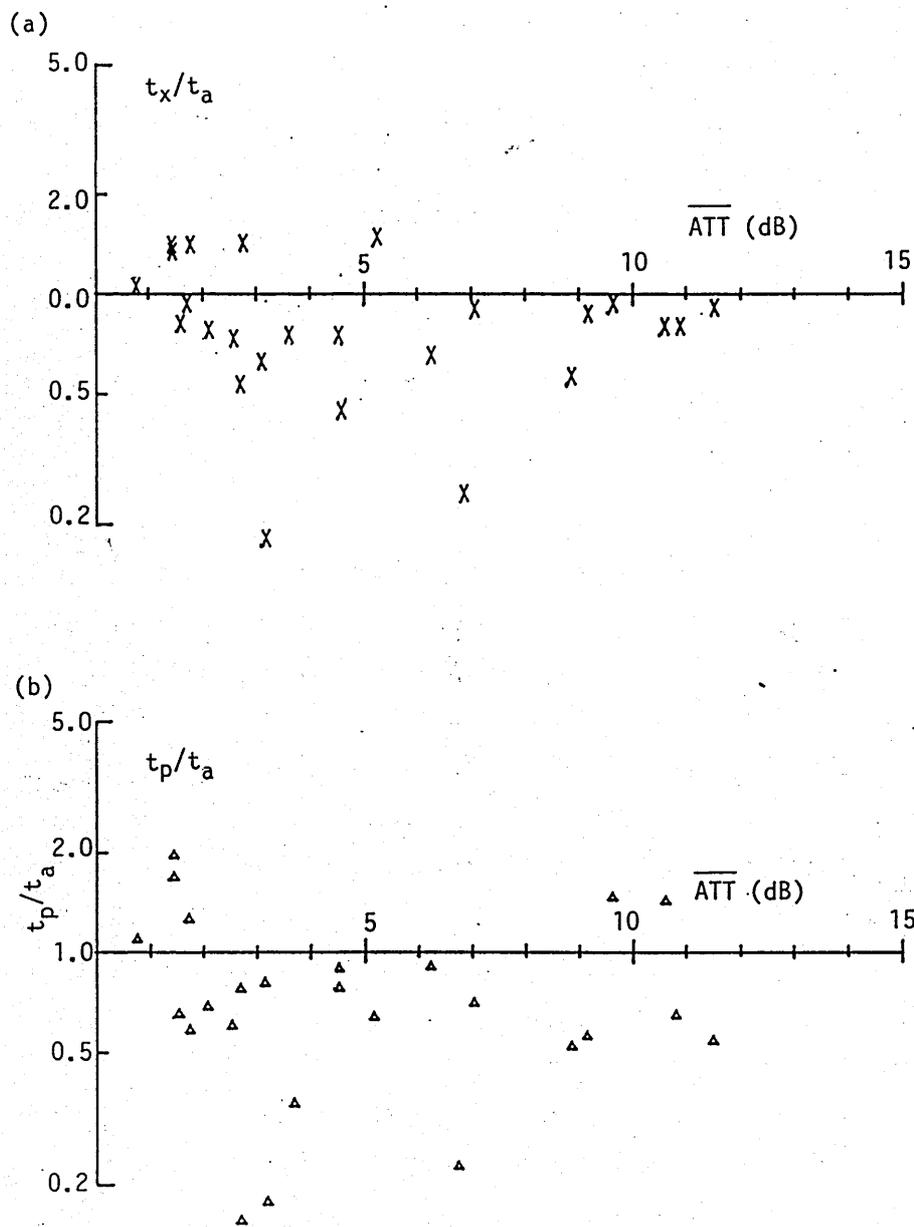


図 3. 3 XPD劣化(a)と交差偏波位相(b)の降雨減衰に対する変動時間スケールの割合

3.3 XPD劣化・降雨減衰の相関

図3.4は同じく1986年から1987年間のXPD劣化が顕著な各降雨事象について降雨減衰量とXPD劣化の相関係数を計算したものである。計算は自己相関関数の場合と同様にそれぞれのデータの1分測定値に基づき行った。同図より横軸の平均降雨減衰が10dB以下では徐々に両者の相関が減少し、降雨減衰とは独立は変動成分が増加することが分かる。また、この種の変動は上空の氷晶域からのレーダー反射エコーとむしろ相関が高くなることが別の観測で確かめられている⁽²⁾。

ここで、XPD劣化の測定値(XPD_{ob})について氷晶の効果を次式で評価する。

$$\Delta XPD = XPD_{ob} - XPD_{rain} \quad (3.1)$$

ただし XPD_{rain} は同時に得られた降雨減衰量から理論的に予測される雨滴によるXPD劣化分である⁽³⁾。 ΔXPD は氷晶の効果が存在する場合は負の値となる。図3.5は、図3.4と同様の1分測定値を用いて交差偏波位相と、上記の氷晶の効果による過剰なXPD劣化分(ΔXPD)との相関係数を各降雨事象毎に求めたものである。計算結果は同じく各事象の平均降雨減衰量を横軸にとって示す。図3.5より前述のように交差偏波位相の短い相関時間が見られた減衰2~8dBの範囲を中心に交差偏波位相と ΔXPD の間に高い相関が見られることが分かる。

この ΔXPD は(3.1)で示すように、“氷晶によるXPD劣化量”そのものの推定値ではなく、雨滴によるXPD劣化の理論的予測値に対して相対的に認められる“氷晶によるXPD劣化分”である。即ち、測定値(XPD_{ob})に含まれる氷晶の効果が卓越するほど ΔXPD の負値の絶対値は大きくなる一方、雨滴によるXPD劣化が増大すると相対的に ΔXPD の絶対値は小さくなる場合もある。従って、測定値の瞬時値から求めた ΔXPD の時系列データには氷晶・雨滴両方のXPD劣化の影響が含まれており、交差偏波位相が ΔXPD と高い相関を示すことは、これも雨滴・氷晶両方の効果を瞬時の変動において受けていることを意味する。この事が交差偏波位相の変動が複雑で変動時間スケールが短くなる原因といえる。

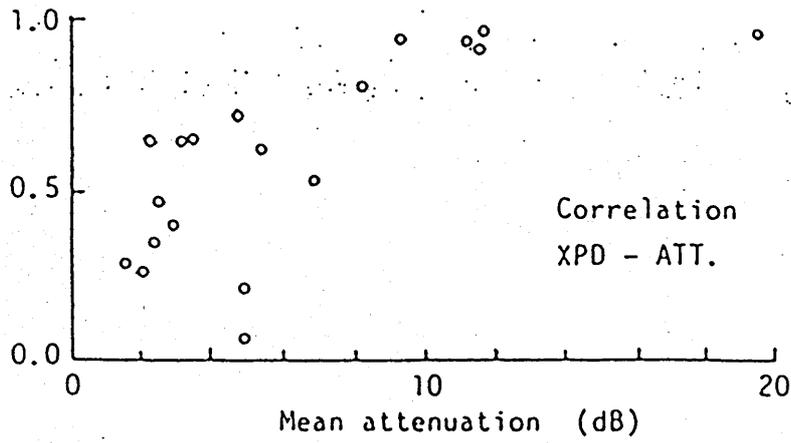


図 3. 4 XPD劣化と降雨減衰の相関

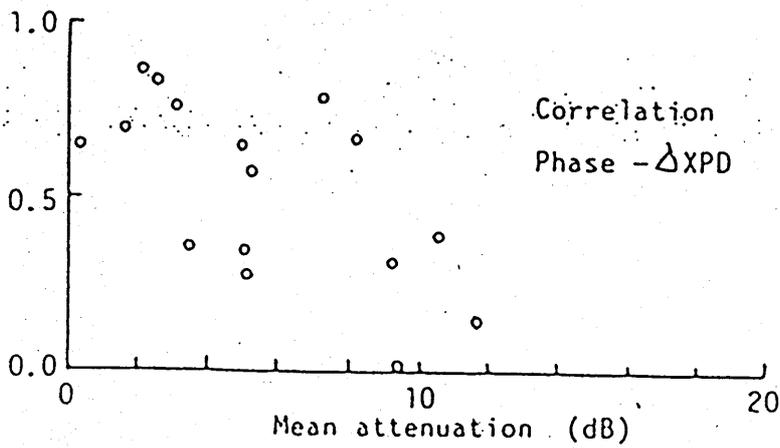


図 3. 5 交差偏波位相と Δ XPDの相関

この事は、第2章の図2.6で示した交差偏波位相の円グラフで、氷晶と雨滴の効果はそれぞれ約 -90° と $-120^\circ \sim -150^\circ$ の方向に独立に作用することから、これらの二つのベクトルの和で決まるXPD劣化と交差偏波位相の測定値には両方の変動特性が作用することからも理解できる。

3.4 むすび

XPD劣化と交差偏波位相の変動時間スケールを相関関数を用いた解析により詳しく調べた結果、概して降雨減衰の増大とともに20分程度から1~2分程度まで相関時間が減少することが分かった。しかし、減衰量2~8dBの実用域と見られる範囲でも2~5分程度の変動時間スケールが見られ、これは同時刻の降雨減衰自体の変動に比べてかなり短い。ここでは雨滴・氷晶両方の効果が作用しており、XPD劣化・交差偏波位相の変動特性が複雑にからみあっていることが示唆される。

参 考 文 献

- (1)O.Furuta, Ph.D Thesis, Kyoto University (1983).
- (2)前川、張、宮崎、瀬川、信学技報、AP88-34 (1988-07)
- (3)T.Oguchi, Radio Sci., Vo.12, pp.41-51 (1977)

第4章 氷晶効果の特性と補償改善度

4.1 降雨減衰とXPD劣化の季節的変動

第2章で述べたように、準ミリ波帯衛星回線の低減衰時の実用域（降雨マージン内）では上空の氷晶等雨滴以外の降水粒子による過剰なXPD劣化がむしろ問題となる。この種のXPD劣化はレーダー観測により”層状性降雨”に多発することが知られているが、季節的にどのような時季に多くみられるか調べておくことも必要である。

そこでまずビーコン減衰量とXPD劣化量の発生時間率を月別に計算して比較した結果を図4.1に示す。この時間率は1986年から1987年の間の同じ月に得られたものを平均したものである。ヒストグラムの黒棒は減衰量、白棒はXPD劣化をそれぞれ示す。(a)は減衰量が4dB以上・XPD劣化が30dB以下、(b)は減衰量が8dB以上・XPD劣化が25dB以下となる場合であり、(a)、(b)それぞれの年間時間率は約0.5%及び0.1%に対応する（図2.2参照）。同図より減衰量の月別発生時間率（黒棒）は(a)、(b)いずれの場合も降雨が集中する6～8月の夏季に集中することが分かる。XPD劣化にも全般的には同様の傾向がみられるが、減衰の場合に比べ夏季に集中する度合はいくぶん平坦であり、夏季以外においても減衰のように無視できない時間率を有することが示される。

次に図4.2に、降雨減衰量（ATT）とXPD劣化量（XPD）について、降雨事象毎の平均値を年間通して集計した結果を横軸を日付に取って示す。(a)は1986年、(b)は1987年にそれぞれ観測された事例である。降雨事象に関しては1日のうち1時間以上連続して10分間雨量が記録された場合を対象としている。また各データ点は平均降雨強度により大きさを区別してある。まず降雨減衰についてみると(a)、(b)いずれの年も図4.1から予想されるように平均5dB以上の大きな減衰を伴う事例は6～8月の夏季に集中している。また同じ降雨強度の範囲別にみても夏季の方が平均減衰量が増大していることが分かる。これは気温の上昇とともに降雨高度（ブライトバンド）が高くなり、雨域通路長が増大することと関連がある⁽¹⁾。一方XPD劣化は個々の降雨事象について見ると減衰量と関連のある変動を示すが、年間通して見ると夏季（6～8月）に集中する度合が減衰量に比べて少ない事が確かめられる。特に、(a)図の1986年にはほぼ1年間通して平

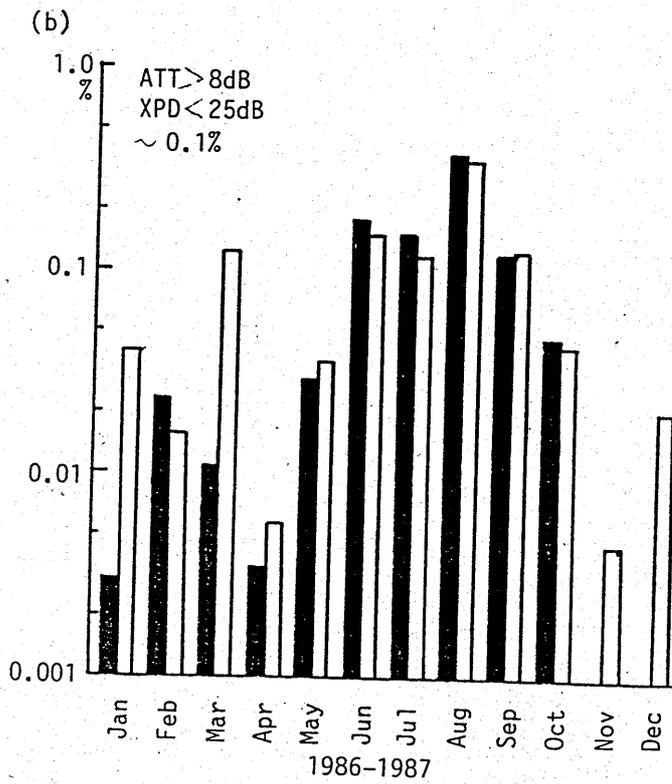
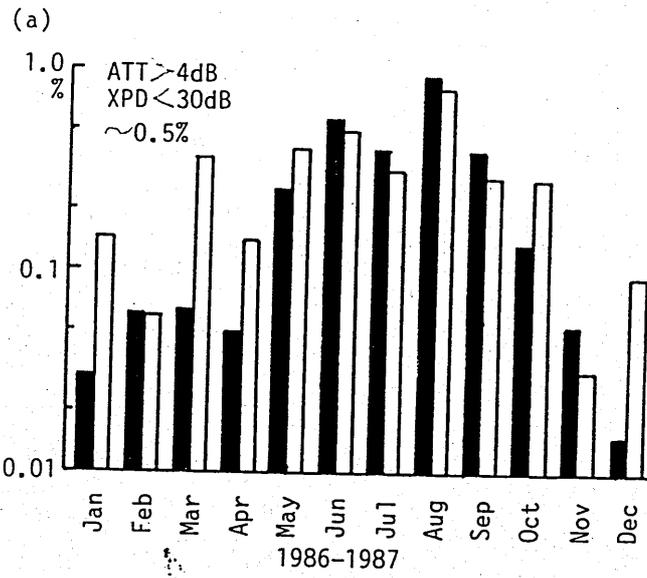
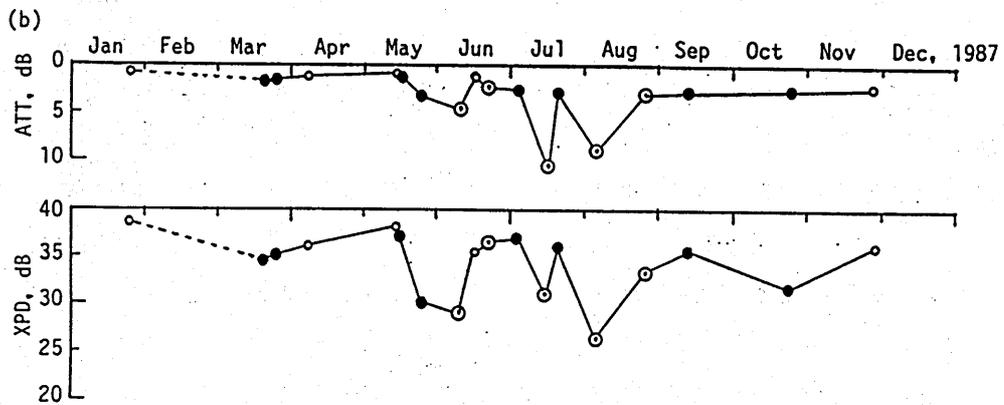
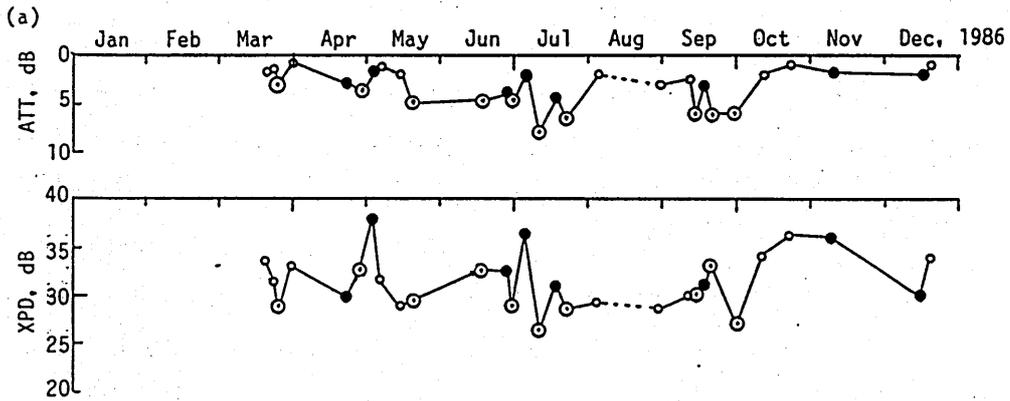


図4. 1 降雨減衰とXPD劣化の時間率の月別分布



- 3 ~ 5 mm/h
- 5 ~ 10 mm/h
- ⊙ 10 ~ mm/h

RAIN DURATION > 1 h

図4. 2 各降雨事象毎の降雨減衰とXPD劣化

均30dB以下の劣化が見られることに注意を要する。また(b)図の1987年においても、3月及び5月・10月にそれぞれ平均約35dB、30dB程度の劣化が記録されているが、この時の平均減衰量は2～3dBとほとんど問題とならない量である。

4. 2 氷晶効果と交差偏波位相の季節的変動

この様な降雨減衰とXPD劣化の降雨事象事にみられる変動特性の違いを詳しくみるために、図4. 3にXPDの測定値と降雨減衰から理論的に予測されるXPD値との間の偏差 ΔXPD について計算したものを1986年の例について示す⁽²⁾。 ΔXPD の負値は変型雨滴モデルによる理論的予測値⁽³⁾に比べてXPD劣化が過剰であること、即ち氷晶等の雨滴以外の要因によるXPD劣化の存在を意味する。同図よりこの様なXPD測定値の偏差に現れる氷晶の効果は、降雨減衰の場合とはちょうど逆に降雨強度が少なくかつ気温が低く雨域通路長が短いときほど顕著であることが示される。この特性が図4. 2で見られたXPD劣化の測定値自体の比較的平坦な年間の季節変化の原因と言える。また ΔXPD の変動は(b)の交差偏波位相との変動と極めて相関が高いことが見られる。

雨域通路長はレーダー観測によりブライトバンド高度を測定することにより直接得られるが、1987年にはほぼ全降雨事象にわたってレーダーによる雨域通路長の同時観測が行われている。図4. 4に ΔXPD 及び交差偏波位相と雨域通路長との比較を示す。同図より特に交差偏波位相との相関が高い事が分かる。この事は年間を通じて降雨高度は地上気温に応じて変化するものの、その上空にある一定の幅の氷晶の層がかなり定常的に存在することを示唆する。またそれを支持する氷晶域のレーダー観測結果も得られている⁽⁴⁾。

即ち、寒い時季では伝搬路において雨域に比して氷晶域の占める割合が大きくなるのに対し、逆に暖かい時季には雨域の増大につれて氷晶域の割合がたとえ同じ幅でも伝搬路全体に対しては相対的に小さくなるのに起因してこの様な氷晶効果(ΔXPD)の季節的な顕著な増減が見られるものと判断できる⁽⁵⁾。交差偏波位相に関しても同様に氷晶の効果が卓越する場合は -90° に近づき、逆に雨滴の影響が大きいときは $-120^\circ \sim -150^\circ$ に分布するという特性がこの様な雨域と氷晶域の割合の1年間に見られる変化に応じて現れているものと見なせる。

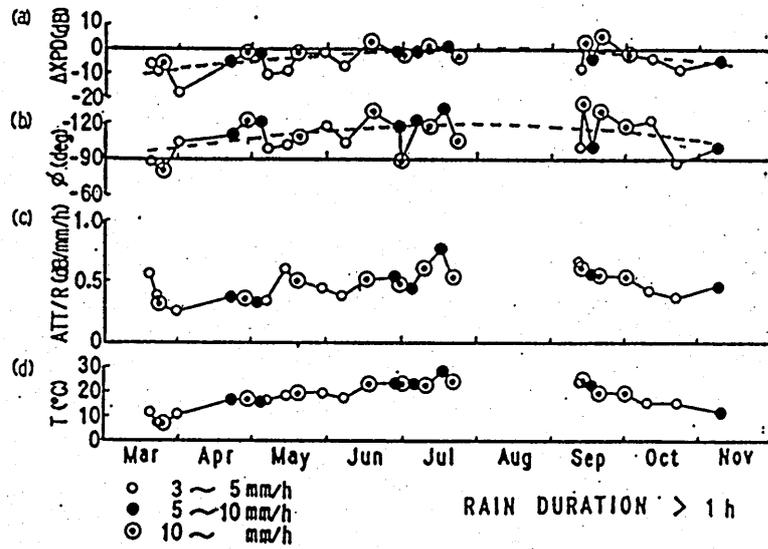


図4.3 1986年の降雨事象毎の ΔXPD (a)、交差偏波位相(b)他

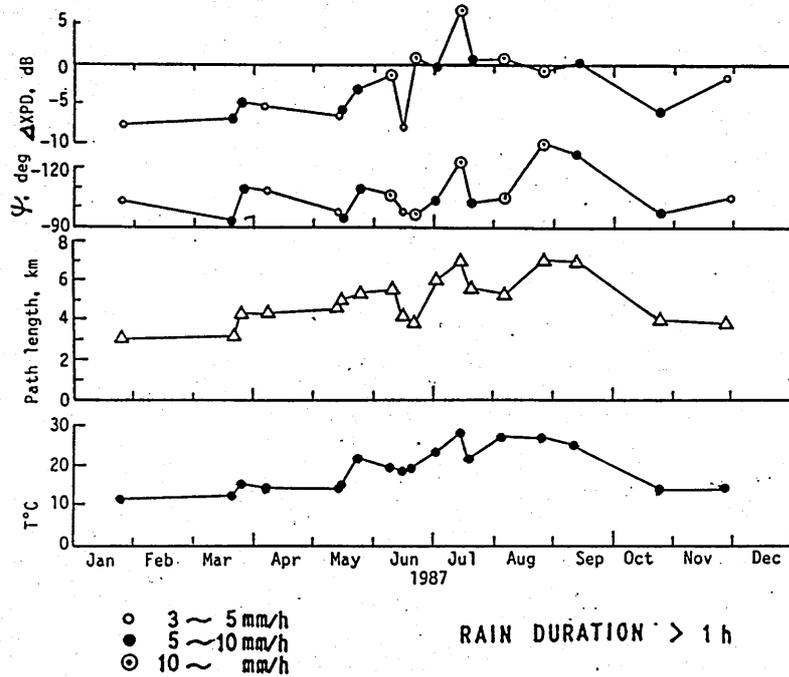


図4.4 1987年の降雨事象毎の ΔXPD (a)交差偏波位相(b)とレーダー観測による雨域通路長(c)地上気温(d)の比較

4.3 氷晶効果と交差偏波位相の降雨強度依存性

前節で述べたようにXPD劣化と交差偏波位相の特性を議論する場合雨滴の他に氷晶の効果も無視できない。ここでは降雨強度別に交差偏波位相と氷晶による過剰なXPD劣化量(ΔXPD)の度数分布を1986年から1987年の全観測期間について調べてみた。その結果を図4.5に示す。個々のデータのサンプルは降雨強度との対応関係を良くするために10分平均値に基づいている。図中の矢印は各雨滴粒径分布(Joss-drizzle、Marshall-Palmer、Joss-thunderstorm)による交差偏波位相の理論計算値であり⁽⁶⁾、降雨強度は各範囲の測定データの平均値(カッコ内の値)を用いてある。いずれの降雨強度の範囲においてもバラツキが大きいものの、降雨強度が10mm/h以上では交差偏波位相は雨滴による理論的予測値の付近に有り、この時の ΔXPD も正值を中心に分布することから、ほぼこれらの特性は雨滴により決められていると言える。一方、10mm/h以下の場合には交差偏波位相の分布の中心は雨滴による予測値を下回るようになり、 ΔXPD も負値の方が多くなる。この事は氷晶の効果の増大を意味し、降雨減衰時では大略5~10dB以下の低減減衰時の特性に相当する。

この様な降雨強度が比較的少なく氷晶の効果が大きい範囲において3mm/h毎の各降雨強度に対して交差偏波位相の測定値の平均値(ψ_{ob})を計算したものを表4.1に示す。各平均値のまわりの標準偏差は $\pm 10 \sim 15^\circ$ 程度である。また同降雨強度に対する交差偏波位相の理論計算値 ψ_{rain} 及び ΔXPD の平均値も同時に示してある。観測期間は同様に1986年から1987年の2年間である。

表4.1 交差偏波位相の平均値及び期待される改善度(1986-1987)

R, mm/h	$-\psi_{ob}, ^\circ$	IX_{ob}, dB	$-\psi_{rain}, ^\circ$	IX_{rain}, dB	$\Delta XPD, dB$	$-\Delta IX, dB$
3 \pm 1.5	99.27	15.85	113.98	7.82	-6.61	-8.03
6 \pm 1.5	106.43	10.97	118.76	6.35	-5.88	-4.62
9 \pm 1.5	109.41	9.57	121.82	5.56	-2.58	-4.01
12 \pm 1.5	117.77	6.63	124.10	5.03	-2.03	-1.60
15 \pm 1.5	123.40	5.20	125.93	4.63	1.51	-0.57

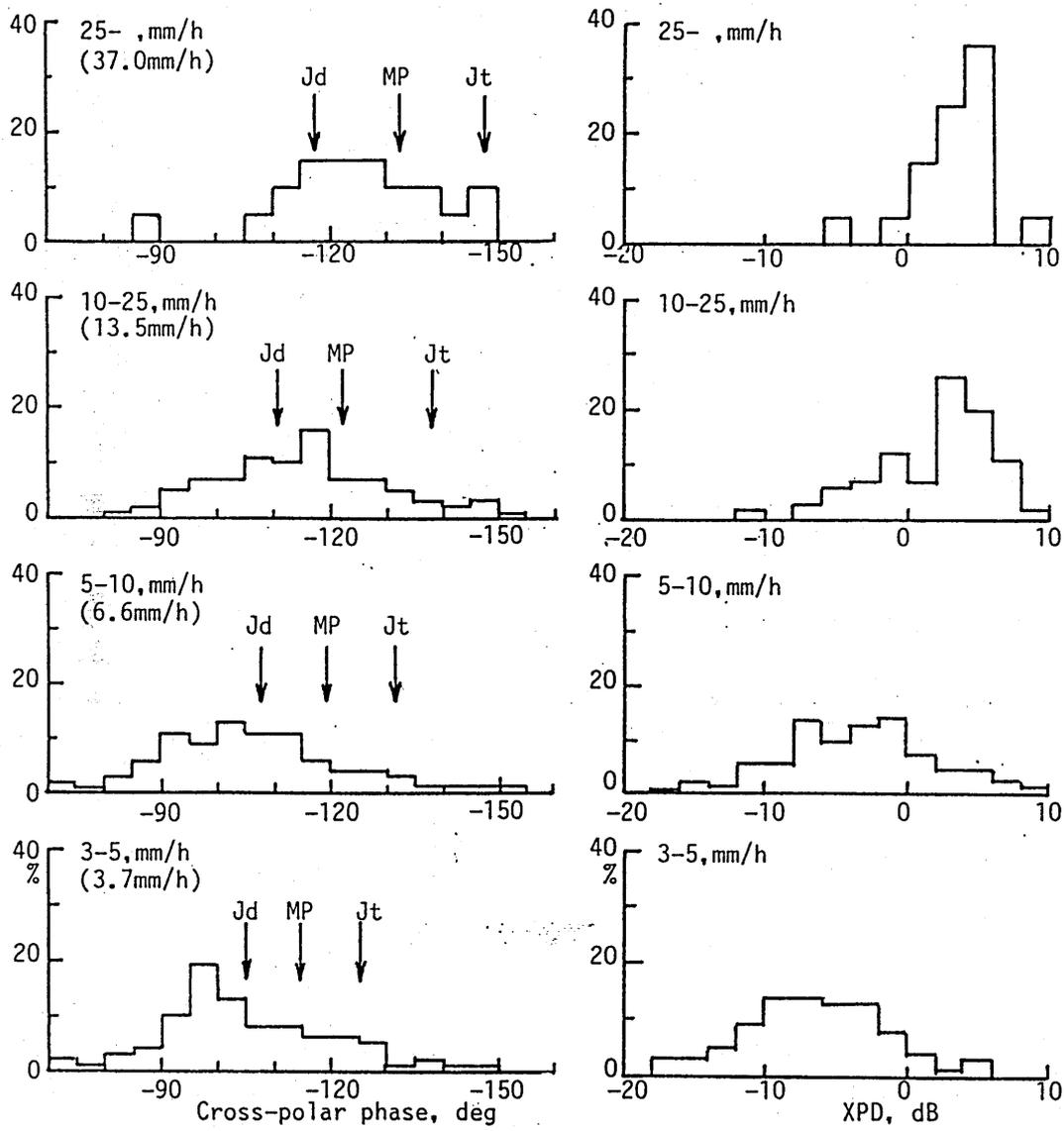


図4.5 交差偏波位相と ΔXPD の降雨強度別分布

ここで第2章で述べた交差偏波位相を示す複素平面上においてXPD測定値の真値電圧値を CX_{ob} 、雨滴及び氷晶による劣化の真値電圧値をそれぞれ CX_{rain} 、 CX_{ice} とすると、これらは ψ_{ob} 及び ψ_{rain} と図4.6に描いた様な関係にある。ここで雨滴及び氷晶は長軸が主として水平方向に配列し、傾き角の平均値は 0° に近いと仮定すると、(2.4)式において $\phi \approx 0$ となる。従って図2.6でも説明したように、差位相(DPS)は -90° 方向、差減衰(DA)は -180° 方向にそれぞれ働き、また氷晶による劣化 CX_{ice} はほとんどDPSのみからなるので -90° 方向のベクトルとなる。

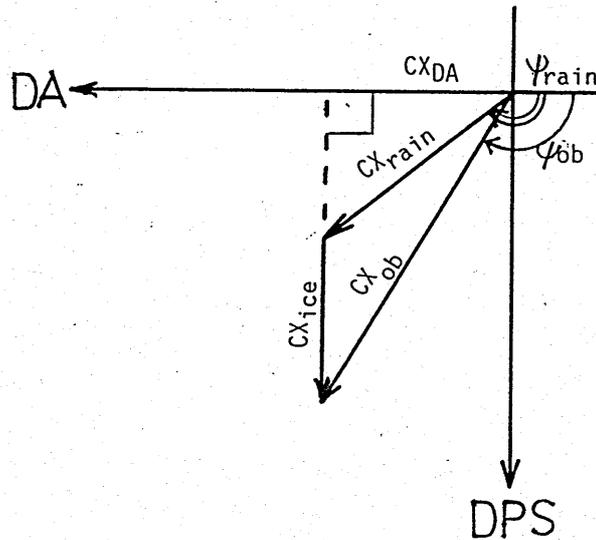


図4.6 XPDの測定値(CX_{ob})、雨滴による理論値の真値電圧値(CX_{rain})と各々の交差偏波位相(ψ_{ob} 及び ψ_{rain})、差減衰(CX_{DA})との関係

4.4 位相補償による改善度

次に移相器からなるXPD劣化補償器により、これらのXPD劣化の差位相(DPS)成分が理想的に打ち消された場合を考えると、図4.6から分かるようにCX_{ob}、CX_{rain}いずれの場合も残留する差減衰による成分はCX_{DA}となる。そこで、CX_{ob}及びCX_{rain}に対する補償器による改善度[dB]はそれぞれ

$$IX_{ob} = 20 \log_{10} (CX_{ob} / CX_{DA}) = -20 \log_{10} |\cos \psi_{ob}| \quad (4.1)$$

$$IX_{rain} = 20 \log_{10} (CX_{rain} / CX_{DA}) = -20 \log_{10} |\cos \psi_{rain}| \quad (4.2)$$

となる。表4.1のIX_{ob}、IX_{rain}は以上のようにして各降雨強度毎の交差偏波位相の測定値ψ_{ob}、及び雨滴に対する理論計算値ψ_{rain}からそれぞれXPD劣化の測定値、及び雨滴のみによる予測値に対して期待される位相補償後の改善度を求めたものである。一方、ここで氷晶の効果に対する相対的な改善度を考えると、IX_{ob}からその中に含まれる雨滴による分に対する改善度を除外したものであるから

$$\Delta IX = IX_{ob} - IX_{rain} \quad (4.3)$$

で評価することが出来る(表4.1参照)。

図4.7で以上に述べた交差偏波位相の測定値と理論値(a)、及びXPD劣化の測定値及び雨滴による理論値に対する改善度(b)を、降雨強度を横軸としてまとめて描く。また図4.7(b)の下部はΔIXを負値にとり、ΔXPDの測定結果と比較したものである。同図より-ΔIXとΔXPDは極めて近い値を示すことが分かる。このことは氷晶による過剰な劣化分であるΔXPDは、移相器によって十分補償可能であり、またΔXPDの大きさは、ちょうど雨滴による劣化分に対してなされる補償量を除いた場合の実質的な氷晶に対する改善度に相当することを意味する。この様に交差偏波位相の測定値と理論値から導いた相対的な改善度と、それとは独立にXPDの測定値と理論値から求めた劣化量の増分が良く一致することは大変意味深い。

またこれら ΔIX と ΔXPD の絶対値が本来一致するものであることは図4.6において(4.1)~(4.3)式を用いると

$$\begin{aligned}
 IX_{ico} &= 20 \log_{10} \left\{ (CX_{ob}/CX_{DA}) / (CX_{rain}/CX_{DA}) \right\} \\
 &= 20 \log_{10} (CX_{ob}/CX_{rain}) \\
 &= -XPD_{ob} + XPD_{rain} \\
 &= -\Delta XPD
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

となることから説明される。

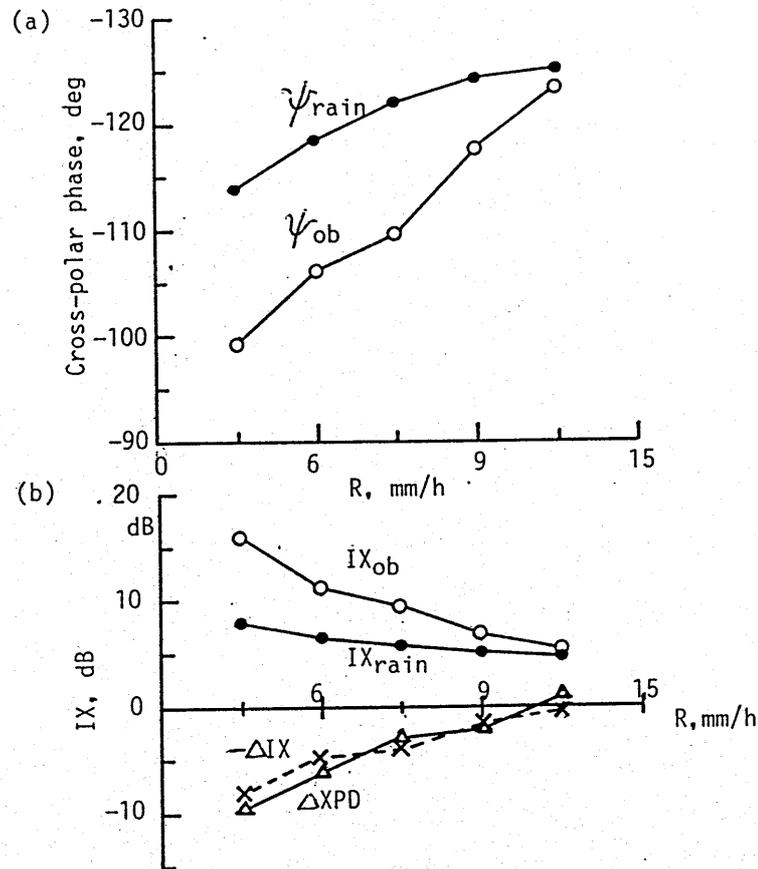


図4.7 交差偏波位相の測定値と雨滴による理論値(a)、及びXPD劣化の測定値と雨滴による理論値に対する改善度(b)。(b)の下部は ΔXPD の測定値と両者の改善度の差の比較

4.5 むすび

降雨減衰とXPD劣化の季節的な変動を調べた結果、著しい減衰や劣化やいずれも雨量が多い夏季に集中するが、XPD劣化の場合減衰量ほどその集中の割合は極端ではなく夏季以外にも無視できない劣化量が存在し、これは準ミリ波帯衛星回線の実用域である低減衰時のXPD劣化に関するひとつの要因であることが分かった。氷晶効果をXPD劣化の雨滴による理論的予測値からの偏差(ΔXPD)で評価すると、これは寒い時期の降雨事象ほど卓越しまた ΔXPD の季節変動は交差偏波位相の季節変動とも相関が深いことが示された。レーダー観測による雨域通路長の同時観測により年間の雨域と氷晶域の割合の変化がこの直接の原因であることが明らかになった。

氷晶の効果は差位相によるXPD劣化が主体であるので移相器により十分補償可能であり、交差偏波位相の測定値及び雨滴による理論値から計算した氷晶によるXPD劣化の実質的な改善度は3~12mm/hの降雨強度において ΔXPD の絶対値とよく一致することが示された。また、差減衰と差位相からなるXPD劣化を交差偏波位相を含めて複素平面上で考察することにより、この氷晶による劣化分に対する改善度が $-\Delta XPD$ と同一のものであることを理論的に説明した。

参 考 文 献

- (1)M.Fujita, K.Nakamura, T.Ihara and R.Hayashi, Electron. Lett., Vol.15, pp.654-655 (1979)
- (2)Y.Maekawa, N.S.Chang, A.Miyazaki and T.Segawa, 1987 IEEE AP-S International Symposium Digest, Blacksburg VA, USA, pp.444-447 (1987)
- (3)T.Oguchi, Radio Sci., Vol.12, pp.41-51 (1977)
- (4)前川、張、宮崎、瀬川、信学技報、AP88-34 (1988-07)
- (5)Y.Maekawa, N.S.Chang, A.Miyazaki and T.Segawa, Electron. Lett., Vol. 24, pp.703-705 (1988)
- (6)H.Fukuchi, J.Awaka and T.Oguchi, IEEE Trans. Antennas & Propagat., AP-33, pp.997-1002 (1985)

第5章 雨滴によるXPD劣化の特性

5.1 減衰を伴うXPD劣化の交差偏波位相

前章まではおもに降雨減衰5dB程度、降雨強度10mm/h程度以下の範囲、即ち現在の準ミリ波帯衛星通信回線の一般的な降雨マージン内でのXPD劣化、及び交差偏波位相の変動特性について議論してきた。ところが将来的には、人工衛星局の大型化による衛星送信電力の増大や、降雨時に臨時的に地球局送信電力を増加させる手法などの発達が見込まれ、雨滴によるかなり大きな減衰を伴う場合のXPD劣化特性についてもあらかじめ検討しておく必要が十分ある。

準ミリ波帯での雨滴によるXPD劣化は、第2章でも述べたように差位相(DPS)のみならず差減衰(DA)の効果も無視できなくなり(図2.4参照)、この傾向は一般に降雨強度あるいは降雨減衰の増大とともに顕著になる。また、各種のモデル計算によると、差減衰と差位相の割合は雨滴粒径分布によっても大きく異なることが示されており、これは図2.4に示した3種類の場合において、Joss-thunderstorm型等比較的大きな粒径を含むモデルほど位相が早く -180° に近づくことから分かる⁽¹⁾。

本章では主として降雨強度が10mm/h程度以上の減衰が大きい場合でのXPD劣化及び交差偏波位相の測定値について雨滴粒径分布に関連づけてそれらの変動特性を調べる。

5.2 降雨減衰量と交差偏波位相との関係

雨滴粒径分布は、交差偏波位相のみならず降雨減衰量A[dB]にも大きな影響を及ぼすことが早くから指摘されており⁽²⁾、実質的な減衰量はこの雨滴粒径分布の種類により同じ降雨強度、伝搬距離に対してもかなり異なってくる。一般に降雨減衰量と降雨強度R[mm/h]の関係は次式で与えられる。

$$A = aR^b L \quad (5.1)$$

これはいわゆる aR^b 関係式⁽²⁾と呼ばれるものであり、a、bはそれぞれ各種雨滴粒径分布のモデルに対して与えられる係数である。またL[km]は雨域等価通路長

である。 aR^b の項はしばしば減衰係数 ($\alpha^* = aR^b$; Specific Attenuation) として独立に取り扱われる。

ここで(5.1)式は、元来長期間の降雨強度及び減衰量の統計値(通常は累積確率分布の等確率値)同志の間に成り立つ関係式であり、前章で扱ったような個々の降雨事象の測定データに対して各々係数 a 、 b を評価することは困難である。ところが、前章までに交差偏波位相の理論計算値に関して用いてきた3種類の雨滴粒径分布MP、Jt、及びJdについて、(5.1)式のべき乗の係数 b を見ると、20GHzで0°Cの気温では1.106、0.934、及び1.123であり、幸いいずれもかなり1に近い。いま降雨強度が5~20mm/hの範囲で直線性を仮定した場合に、10mm/hの時の値を基準として直線性に対する誤差を調べると、いずれの粒径分布においてもずれは±10%以内である。従ってここでは便宜上(5.1)式を次のように近似する。

$$A = kRL \quad 5 \leq R \leq 20 \quad (5.2)$$

ここで係数 $k = A/R/L$ [dB/(mm/h)/km] は、“単位降雨強度・単位通路長当り”の降雨減衰量の概算を意味し、雨滴粒径分布を反映した伝搬路固有の性質を示すものといえる。

図5.1に1986年から1987年にかけておもに雨滴の影響が卓越する降雨事象において得られた上記の係数 k と交差偏波位相 ψ との相関図を示す。雨滴の影響に関しては $\Delta XPD > 0$ dBより判断した(3.1)式参照)。また降雨強度 R との対応や伝搬路の降雨分布の一様性を確保するために、降雨事象についてはほぼ1時間程度持続した事例を選んだ。一方伝搬路長 L は、地上気温 T [°C]より次式を用いて求めた。

$$L = H / \sin 49.5^\circ \quad (5.3)$$

$$H = 0.242T - 0.00189T^2 \quad (5.4)$$

(5.4)式は日本各地の高層気象データから地上気温 T と降雨高度 H [km] (0

°C高度)との関係を長年の統計値により導いたものである⁽³⁾。同図より交差偏波位相と上記の係数kはかなり相関の高い比例関係にあると見られ、平均降雨強度10mm/h前後の雨滴の影響が卓越する降雨事象においては、単位距離当りの減衰量が増加するにつれて-100°から-150°まで敏感に交差偏波位相が変化する傾向がみられる。

図5. 1の縦軸の交差偏波位相については(2. 4)式で示された通り単位距離当りの差減衰及び差位相によって決まる複素平面上の偏角(Argument)で与えられるものであり、本来伝搬路長Lに無関係である。また降雨強度Rとは

$$\psi = \tan^{-1}(\alpha R^{\beta}) - 180^{\circ} \quad (5. 6)$$

なる関係にあるが(α 、 β は各種雨滴粒径分布によって決まる係数)、Rが5~20mm/hの範囲での変化量はいずれの雨滴粒径分布においても計算上10°程度に過ぎない。一方、個々の降雨事象内で見られる交差偏波位相の変動幅は、第2章の図2. 5で示した通り高々±10°程度であり、図5. 1での-100°から-150°に及ぶ各降雨事象の平均値自体の変動は降雨強度や雨滴傾き角の変化だけでは説明できない。またこれらの分布の範囲は、図中の+印で示したように降雨強度10mm/hの時に各種雨滴粒径分布(Jt、MP、Jd)から予測される点の近傍に相当する。従ってここには上記の係数kとの相関から示されるように、事象毎の伝搬媒質の減衰量に関する本質的な性質の違いが関与していると考えられる。

ここで $\psi = -100^{\circ}$ 及び -150° の時に、移相器によって差位相のみを打ち消した場合においてXPD劣化補償による改善度を(4. 2)式から計算すると、それぞれ15.2dB及び1.25dBとなり、同程度の降雨強度に対しても改善度が決定的に異なってくる事が分かる。さらに図5. 2は1986年から1987年の間に測定されたデータの10分間平均値に対して同様の計算を行い、降雨強度10mm/h以上の場合についてXPD劣化補償の改善度IX[dB]の度数分布を調べたものである。この図より、おもに雨滴が原因のXPD劣化に対する改善度は、5dB当りを中心に2~10dBの範囲に広く分布することが分かる。この値は、表4. 1及び図4. 6で示した様に降雨強度10mm/h以下で氷晶の効果が卓越する場合の改善度(IX_{ob})が全体としてほぼ10dB以上得られるのに対し、かなり低い値である。

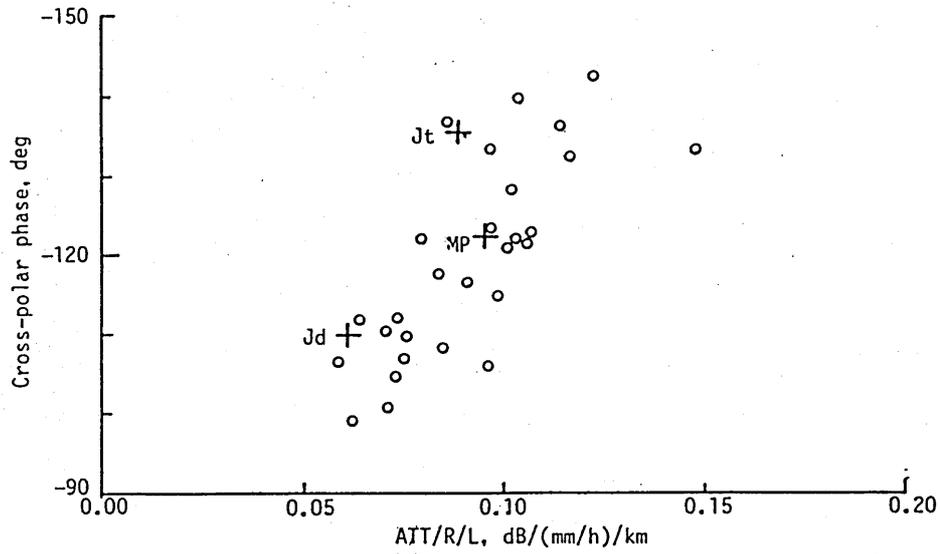


図5. 1 単位降雨強度・単位通路長当りの減衰量と交差偏波位相の相関

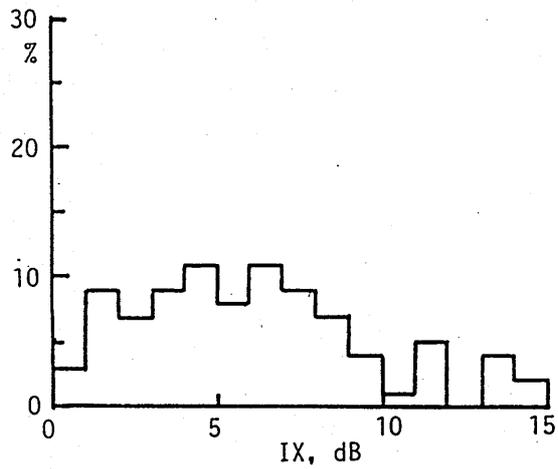


図5. 2 XPD劣化補償の改善度の度数分布

この様に雨滴によるXPD劣化を移相器によって補償する際には、残留XPDの原因となる差減衰を大きく左右する雨滴粒径分布が重要なパラメータとなる。この係数 k の増加に伴う交差偏波位相の絶対値の急激な増加は、いま考えている20GHz帯では、個々の雨滴の粒径の増大とともに差位相の増加はいったん飽和し逆に減少する傾向にあるのに対し（半径2mm以上）、差減衰の方は減衰量と同様にさらに増大する傾向にあることが原因と言える⁽⁴⁾。従ってこの様な差減衰が優勢な雨滴粒径が大きい範囲では、上記の移相器による改善効果は余り望めないことになる。

5.3 降雨強度との関係

次に図5.3は図5.1で示したのと同じ降雨事象について、交差偏波位相と降雨強度の関係を調べたものである。図中の実線は各種雨滴粒径分布に対して(5.5)式を用いて計算した予測値である。またこの図では持続時間が1時間に満たない降雨事象についても、少なくとも降雨強度と減衰との間に十分対応関係が見られる事例についてはデータ点に加えてある。図5.3より各降雨事象とも交差偏波位相の測定値はMP型を中心に3種の雨滴粒径分布で予測される値の付近に分布し、全体としては降雨強度の増加とともに絶対値が緩やかに増加する傾向にある。また季節的に見ると、雷雨が多発する夏季並びに9~10月にその名の通りJt (Joss-thunderstorm) タイプが多く見られる。また1987年の5月と7月についてはほとんど全ての事例がJdタイプの付近に分布する特徴がある。

そこで1987年の5月と7月の降雨については、それぞれ1ヶ月間の降雨強度と降雨減衰の累積確率分布を用いた方からも同時に雨滴粒径分布の影響に関して検証を行ってみた。図5.4は降雨強度と降雨減衰の累積確率分布の等確率値同志の関係を示したものであり、累積確率分布の計算は、測定値の10分平均値に基づいている。また図中の実線は(5.1)式による各種雨滴粒径分布に対する予測値であり、等価通路長 L [km]はそれぞれの月の降雨時平均気温から(5.3)式と(5.4)式を用いて算出した。同図(a)より1987年5月では降雨強度の大きい範囲で、また(b)より7月では全般的に降雨強度と降雨減衰の等確率値は、やはりJdタイプの予測値の近くに分布し、それらの月の交差偏波位相に見られた特徴と良く一致する。この様にJdタイプについては、雨滴粒径分布の影響が降雨減

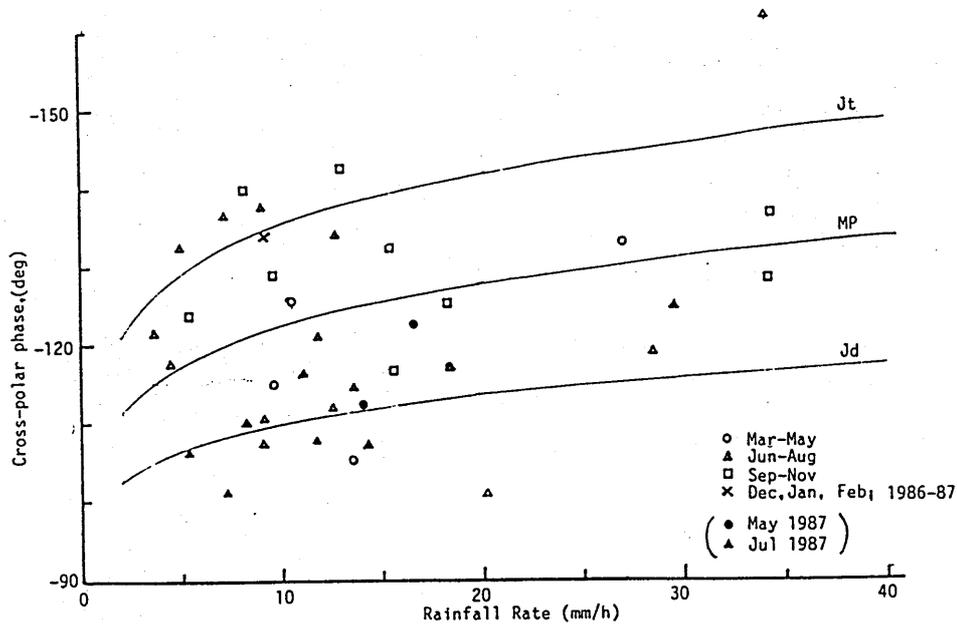


図5.3 交差偏波位相と降雨強度の関係

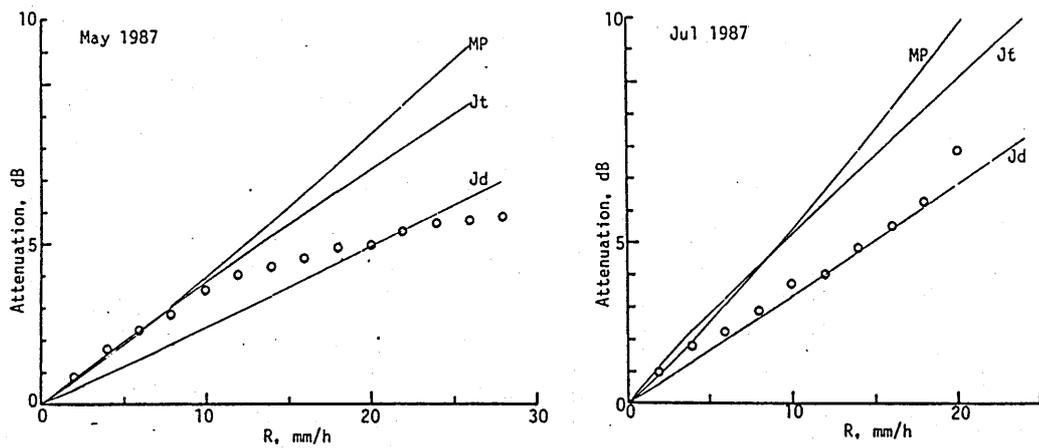


図5.4 降雨強度と降雨減衰の累積確率分布の等確率値同志の関係

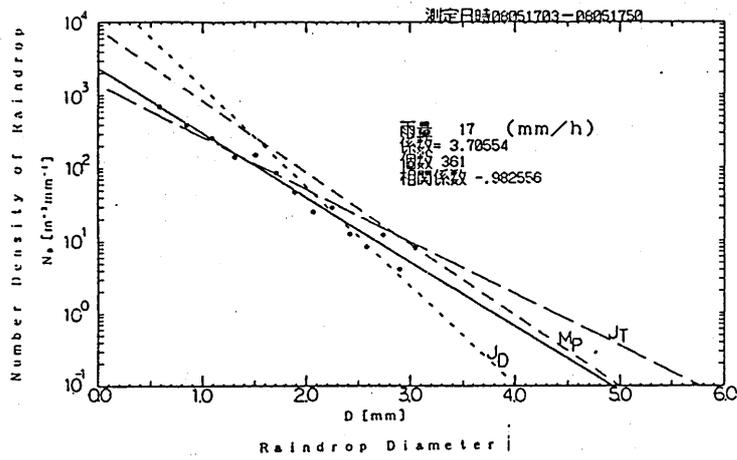
衰と交差偏波位相の両方に一貫して現れることが確かめられた。なおMPとJ tのタイプについては降雨減衰の予測値が図5.4から明かな様にいま考えている降雨強度の範囲では特性がクロスするため、降雨減衰による識別は容易ではない。

5.4 雨滴粒径分布の測定例

さらに1988年には、一部の降雨事象ではあるが、ろ紙を用いて雨滴粒径分布を地上で直接測定を行った事例があるので紹介する。図5.5(a)のデータ点は8月5日の降雨時のろ紙による測定値から雨滴粒径分布の空間分布を推定したものである。図中の実線はデータ点の回帰直線であり、各点線はこの時の平均降雨強度に対応する各種モデルの計算値である。本測定は1時間程度持続した降雨事象に対し、約10分毎に1分間程度ろ紙を校舎屋上で雨にさらすことを繰り返して行った。ろ紙に記録されるしみの大きさは、あらかじめ既知の粒径(体積)の水滴をスポイドにより落下させることにより同測定範囲において校正してある。またこの降雨事象時に得られたサンプル数は361点であり、回帰直線の相関係数は0.98である。

図5.5(a)よりこの時の雨滴粒径分布は、MPとJ tのタイプの間当りに相当することが分かる。また同図(b)はCS-3衛星による同時刻での交差偏波位相の測定値であるが、こちらもMPとJ tによる予測値のほぼ間に測定値が分布する。

同様の測定を1988年8月18日に行った結果を図5.6に示す。同図(a)よりこの時の粒径分布は直径2.3mm以下ではJ tタイプに近いが2.3mm以上ではJ dタイプに転じる様子が見られる。同図(b)の同時刻の交差偏波位相を見ると、減衰の小さい範囲(△、×印)ではJ tタイプに近いが、減衰が増大する範囲(○印)では同じくJ dタイプに近い値に変化する。この様に同一降雨事象内においても雨滴粒径分布の変化が敏感に交差偏波位相の変動に寄与していることが示唆される。しかしさらに詳しい体系的な解析はろ紙による初歩的な測定では限界があり、ディストロメータ(雨滴粒径分布自動測定器)等により継続してデータを蓄積する必要がある。また地上のみならず、伝搬路上空での雨滴の形状や粒径分布を、直交二偏波レーダー観測等により今後同時に調べる必要がある。



8/05 17:10- 8/05 17:50 (1MIN)

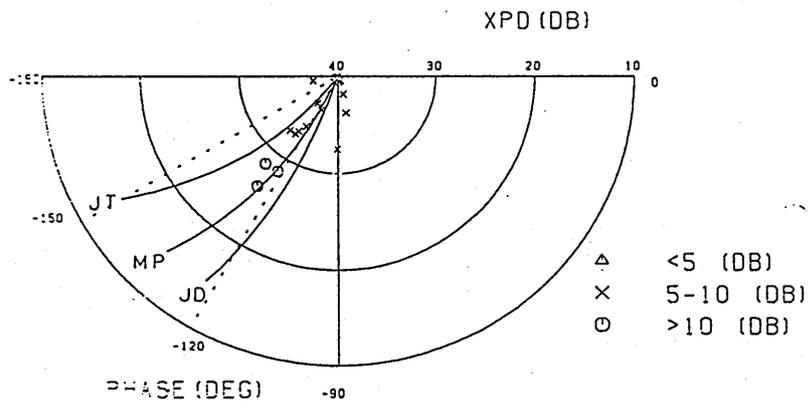


図5. 5 雨滴粒径分布の実測例(a)と同時刻の交差偏波位相(b): その1

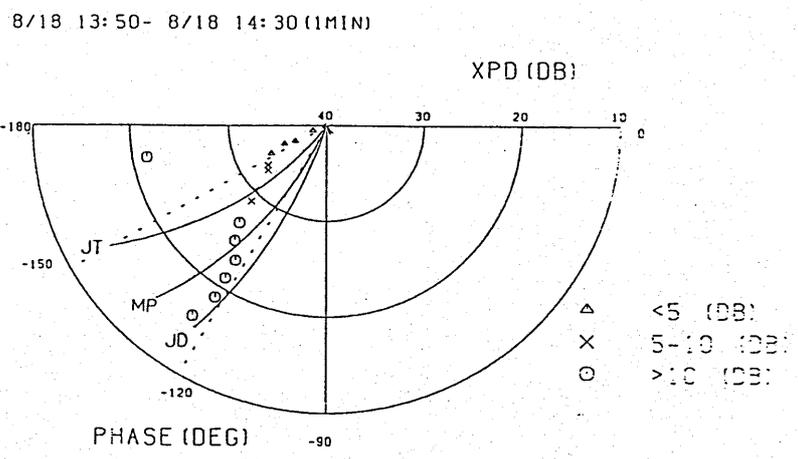
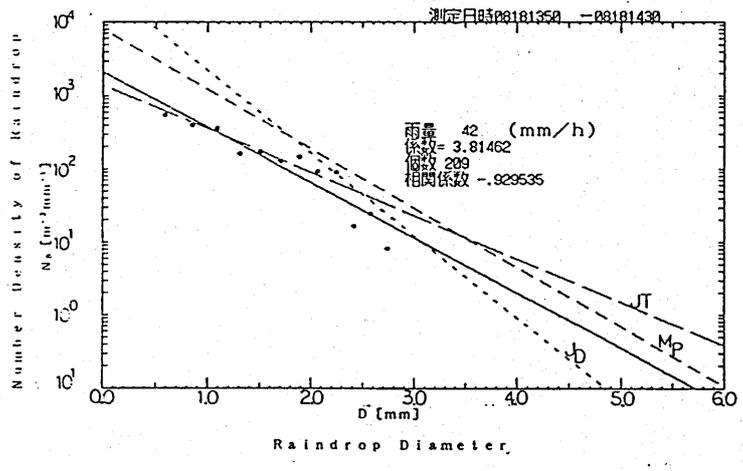


図5.6 雨滴粒径分布の実測例(a)と同時刻の交差偏波位相(b): その2

5.5 むすび

主に降雨強度10mm/h以上の場合について、降雨減衰をかなり伴うXPD劣化の特性を交差偏波位相の変動を中心に調べた結果、交差偏波位相の測定値は -100° \sim -150° の間に広く分布し、そこには降雨強度や雨滴傾斜角のみならず雨滴粒径分布のように伝搬媒質の差減衰を左右する要因が、降雨の種類により大きく働いていることが示された。この現象は、各降雨事象毎の”単位降雨強度・単位通路長当り”の減衰量との相関や、特定の月での降雨減衰の累積確率分布の特徴との対応にも見られ、さらに雨滴粒径分布を”ろ紙”によって実測することからもいくつかの降雨事象例について確かめられた。この様に雨滴の影響が主流のXPD劣化では移相器による補償の改善度は2~10dB程度であり、概して低減衰時の氷晶の場合に比べて半分程度しか望めないことが分かった。

参 考 文 献

- (1)H.Fukuchi, J.Awaka and T.Oguchi, IEEE Trans. Antennas & Propagat., AP-33, pp.998-1004 (1985)
- (2)R.L.Olsen, D.V.Rogers and D.B.Hodge, IEEE Trans.Antennas & Propagat., AP-26, pp.318-329 (1978)
- (3)佐藤孝平、信学論(B)、J66-B, pp.493-500 (昭58-04)
- (4)T.Oguchi, Radio Sci., Vol.12, pp.41-51 (1977)

第6章 結論

CS-2及びCS-3衛星ビーコン波(19.45GHz、右旋、仰角 49.5°)を用いて過去4年間にわたって測定を行った伝搬路上のXPDデータを解析し、移相器によってXPD劣化の補償を行う必要性及び可能性という観点から検討を行った結果、次のようなことが明らかになった。

- (1) 直交二偏波共用回線の実用上問題とされる大きなXPD劣化(25dB以下)の約半数は、降雨減衰5~10dB以下の一般的な衛星回線の降雨マージン内に相当する範囲で発生する。この時予想される偏波間の干渉雑音の増加による等価的なCN比の劣化量は最大5dBに達し、降雨減衰量自体による劣化量と同程度になるので、このような低減衰時ではXPD劣化補償を行う意義が認められる。
- (2) 低減衰時(5~10dB以下)のXPD劣化は上空の氷晶が主な発生源であり、この場合交差偏波位相が常に -90° 付近に現れることから差位相(DPS)の効果が優勢であることが分かる。従って、おそらく偏平な形状の氷晶による伝搬媒質の水平方向の伝搬位相定数の増加がXPD劣化の原因と言える。このことは、直交二偏波レーダーによる氷晶域の同時観測で、XPD劣化時に雲頂付近の反射因子差 Z_{DR} が非常に大きくなることから確認された。また、この差位相を補償するのに必要な移相量は 10° 程度である。
- (3) XPD劣化と交差偏波位相の変動時間スケールは最大20分程度から短いものは1~2分程度のもまで見られ、一般に降雨強度・降雨減衰が大きいほど短くなる。ただし平均減衰量2~8dBの範囲では、これらの変動スケールは降雨減衰自体の変動に比べてずっと短い場合が多く、雨滴・氷晶の両方の効果が複雑に関与していることが示された。
- (4) 減衰を伴うXPD劣化は雨量の多い夏季に集中するのに対し、減衰を余り伴わないXPD劣化は頻度としては逆に寒い時期ほど多くなる。これは、降雨高度が低下すると雨域通路長に対し相対的に氷晶域の割合が増加することと関係がある。また降雨強度別に見ると、氷晶の効果は10mm/h以下で顕著となる。この時の氷晶によるXPD劣化分に対し、移相器を用いた場合の劣化補償改善度を交差偏波位相の測定値と理論値から計算すると、この値は降雨

減衰量から理論的に予測されるXPD値からの過大な劣化量(ΔXPD)とよく一致する。

(5) 降雨強度が10mm/h以上では雨滴によるXPD劣化が主流である。その時の交差偏波位相は -100° ~ -150° の広い範囲に分布し、降雨事象毎の平均値はおもに雨滴粒径分布で決まることが分かった。この種のXPD劣化では移相器による改善度は2~10dB程度しか望めず、低減衰時の氷晶によるXPD劣化に対してはほぼ10dB以上期待できるのに比べて、概して低い値である。

以上のことから、準ミリ波帯衛星回線のダウンリンク(20GHz帯)については降雨マージンの範囲内においてもXPD劣化補償を行う必要性が生じる場合があり、またこの様な低減衰時のおもに氷晶によるXPD劣化に関しては移相器による差位相のみの補償で十分効果が上がることが分かった。

今回のXPD劣化補償に対する改善度の検討は概して降雨事象毎の平均値について行ったので、今後はさらにXPD劣化の測定値の瞬時値に関しても統計的なシミュレーション等の検証を進める必要がある。また変動の時間スケールに関しては、従来の1分間隔の測定値に基づく分単位の議論に留まらず、秒単位の測定も今後は頻繁に行い、発雷時等に見られるさらに速い変動についても細かい分析が望まれる。

最後に本研究は受信している衛星ビーコン波が右旋偏波であるので、あくまでも円偏波の場合のXPD劣化について考察を行ったが、これは降雨によるXPD劣化についてはほぼ最悪の場合に相当する。即ち、直交二偏波共用回線では水平・垂直二偏波を用いる方が一般にこの種のXPD劣化に関しては有利である。このことは理想的には偏波面が雨滴や氷晶の長軸(おもに水平)あるいは短軸(おもに垂直)にちょうど一致している限りその偏波面が保存されることから理解できる。準ミリ波帯衛星回線では電離層のファラデー回転の効果はほとんど無視できるので、直交二偏波共用通信が実現されるとすれば実用上ではおそらく水平・垂直偏波が用いられる可能性が高い。またKu帯(14/11GHz)では既に水平・垂直二偏波の共用が部分的に行われている事例(JCSAT)がある。従って本来円偏波の観測ではあるが、本測定データから何等かの形で水平・垂直間のXPD劣化に関しても出来れば見積っておくことが、将来的にはある意味において必要とされるであろう。

謝辞 日頃御指導を賜っている郵政省通信政策局及び衛星通信高度利用実験参加者協会の各位に深く感謝の意を表します。また本研究の一部は電気通信普及財団の援助で行われた。

輻射科学研究会

RS90-6

閉領域問題に対する有限要素法解析

岡田勉

(株)村田製作所技術管理部技術コンピュータ課

1990年9月14日

閉領域問題に対する有限要素解析

(株)村田製作所
岡田勉

あらまし 3次元導波路伝達問題に対する有限要素法の解析方法を提案している。導波路を伝搬するモードの解析と不連続部の解析にはヌデレック要素による有限要素を使用し、導波路と不連続部の接続境界ではガレルキン法を用いて電磁界を接続している。本手法により3次元任意形状の不連続部に対する散乱マトリックスを計算することができる。

1. まえがき

近年、電磁界の数値解析方法として有限要素法が広く使用されるようになり、導波路問題、共振問題、伝達問題および散乱問題など多方面に応用されている。本論文では、このなかで3次元伝達問題の解析方法を述べる。伝達問題は導波路と不連続部からなる系に存在する電磁界を解析することで、今までにもいろいろな解析方法が提案されているが^{[1]-[4]}、いずれも2次元解析であり一般の3次元解析についての報告はほとんどない。

一般に2次元解析の場合、不連続部の電磁界には有限要素法が使用され、不連続部に接続される導波路の電磁界には固有モード展開法が使用されている。このとき、導波路と不連続部との接続境界でいかに電磁界を接続するかが問題になる。小柴^[1]、Cendes^[2]らは点整合法による接続を、松原ら^{[3][4]}はガレルキン法による接続を提案している。ガレルキン法による接続は、接続境界上での有限要素法による解の展開基底数と固有モード展開法による解の展開モード数に特別な制約がなく、しかも散乱マトリッ

クスが直接求まるという特徴を持っている。

3次元解析の場合、導波路を伝搬する固有モードは2次元のように解析的に求めることは一般にはできず、この部分に対しても有限要素法で解を求める必要がある。この時、解の接続に松原らの方法^[4]を使用すれば、単に伝搬可能なモードだけを扱うだけでよく、計算時間が著しく短縮できる。

3次元不連続部と導波路は、電磁界の接続成分を未知数にしたヌデレック要素による有限要素法^{[5]-[8]}を使用することで、非物理的なスプリアスの問題^[9]から開放され安定した解を得ることができる。

2. 支配方程式とその離散化

まず、解くべき支配方程式を示し、これを有限要素法で離散化する手順を述べる。

2.1 支配方程式と境界条件

対象としている領域内に電流はないとし、電磁界は角周波数 ω の単振動をしているとすると、マックスウェルの方程式は次式で表わされる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{H} と \mathbf{E} は磁界と電界で、 ε と μ は誘電率と透磁率であり等方無損失媒質とする。この方程式を有限要素法で解く場合、 \mathbf{H} または \mathbf{E} を直接に未知数にする方法と、電磁界のベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル φ などの間接量を未知数にする方法の2通りあるが、ポテンシャルを未知数にした場合には次の欠点がある。

- (1) ポテンシャルの不定性を除くためのゲージを離散化方程式に組み込む処理が難しい。
- (2) \mathbf{E} または \mathbf{H} を求めるためにはポテンシャルを微分する必要がある、この行為は \mathbf{E} と \mathbf{H} の精度を低下させる。

ポテンシャルが連続量であるため、従来の有限要素の財産がそのまま利用できるという長所があるものの、上記欠点により \mathbf{E} または \mathbf{H} を未知数にした方がよい。 \mathbf{E} を未知数にしたときの支配方程式は式(2)を式(1)に代入して、 \mathbf{H} を消去することで得られる。

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \quad (3)$$

あるいは、逆に式(1)を式(2)に代入して \mathbf{E} を消去して \mathbf{H} を未知数にしてもよいが、ここでは式(3)を支配方程式として考えていく。

境界条件として次のものを考える。

$$\text{電気壁 } \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

$$\text{磁気壁 } \mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

$$\text{その他 } \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} = \text{連続} \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{n} は境界に垂直な単位方線ベクトルである。

2.2 ガレルキン法

対象としている領域を V とし、 V をかこむ閉曲面を ∂V とし、この面上で次の境界条件が与えられているものとする。

$$\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (7)$$

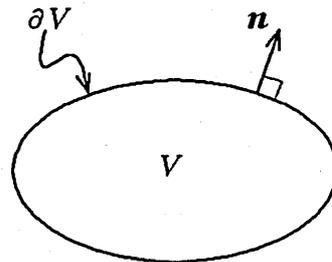


図1 領域 V と境界 ∂V

ただし、左辺第2項は ∂V 上で与えられたもので、 \mathbf{n} は図1に示すように ∂V に垂直で外向きに向いた単位方線ベクトルである。

ガレルキン法で式(3)と(7)を変形する。この方法は適当な重み付け関数 W を用いて、支配方程式(3)の V における残差と境界条件(7)の ∂V における残差を等しくおくことである。

すなわち、

$$\int_V W \cdot [\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times E - \omega^2 \epsilon E] dV$$

$$= \int_{\partial V} W \cdot [n \times \frac{1}{\mu} \nabla \times E - n \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \hat{E}] dS \quad (8)$$

次に式(8)の左辺第1項を部分積分して、 E に対する2階微分を1階にする。

$$\int_V \frac{1}{\mu} (\nabla \times W) \cdot (\nabla \times E) dV - \omega^2 \int_V \epsilon W \cdot E dV$$

$$= \int_{\partial V} (W \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \hat{E}) \cdot n dS \quad (9)$$

式(8)は単に数学的な式であるのに対して式(9)は物理的な意味を持つ。 W を E として眺めると、左辺は境界 V 内の磁界と電界エネルギーを表わし、右辺は境界 ∂V から流入するポインティングエネルギーを表わしている。

2.3 離散化

式(9)を離散化し、コンピュータで扱い易い形にしていく。領域 V をいくつかの小領域(要素) e に分割し、各要素内で電界を次式の区分的多項式で近似する。

$$E = \sum_{i=1}^n N_i E_i \quad (10)$$

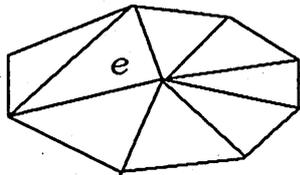


図2 要素に分割した領域 V

N_i はベクトル形状関数^{[5]-[8]}とよばれる多項式で E_i は要素の頂点、辺あるいは内部の適当な位置に n 個配置した電界の未知量である。重み付け関数 W をこの形状関数に選び、式(10)を式(9)に代入すると E_i を未知数にした離散化方程式が得られる。

$$[A] \{E\} - \omega^2 [B] \{E\} = \{F\} \quad (11)$$

$$A_{ij} = \sum_e \int_e \frac{1}{\mu} (\nabla \times N_i) \cdot (\nabla \times N_j) dV \quad (12)$$

$$B_{ij} = \sum_e \int_e \epsilon N_i \cdot N_j dV \quad (13)$$

$$F_i = \int_{\partial V} (N_i \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \hat{E}) \cdot n dS \quad (14)$$

ここで、 $[]$ はマトリックス、 $\{ \}$ はベクトルを意味し、添字はその要素を表わす。また、 $\{E\}$ は E_i を並べたベクトルである。式(14)に要素表面の面積分の項がないのは、式(6)より隣り合う要素の境界で互いに打ち消しあうからである。

式(11)の代数方程式は問題により連立1次方程式あるいは固有値問題となり、これを数値的に解くことで要素上の離散的な位置での電界が求まる。それを式(10)に代入すれば連続的な位置での電界が得られ、さらに式(2)から磁界が計算できる。

2.4 簡単な応用例

応用例として、回転対称の誘電体共振器のTEモードを考える。簡単のため回転方向の波数をゼロとし、周囲は電気壁に囲まれているものとする。この種の共振器は自動車電話のフィル

タなどに使用されている。

座標系は $r\theta$ 之の円筒座標系を使用し、要素として図3に示す三角形要素を用い、 r 之断面をこの要素に分割する。電界は回転方向の成分 E_θ だけを考慮すればよく、それらの離散化された未知数 $E_{\theta i}$ を頂点と辺の中央に6個配置する。

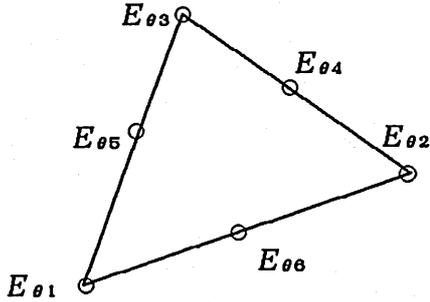


図3 三角形要素と未知数の配置

この要素内で E_θ を次式で補間する。

$$E_\theta = \sum_{i=1}^6 N_i E_{\theta i} \quad (15)$$

N_i は2次の多項式である^[10]。 N_i に高次の多項式を使用するほど計算精度が向上するが、メモリと計算時間がかかるため2次または3次が適当であると考えられる。式(15)を式(11)-(14)に代入すると次の一般化固有値問題となる。

$$[A] \{rE_\theta\} = \omega^2 [B] \{rE_\theta\} \quad (16)$$

ここで、 rE_θ は E_θ とその点での r 座標の積であり、また

$$A_{ij} = \sum_e \int \frac{1}{r\mu} \left[\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} \right. \\ \left. + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] dS \quad (17)$$

$$B_{ij} = \sum_e \int \frac{\epsilon}{e r} N_i N_j dV \quad (18)$$

計算例として図4に示す誘電体共振器の共振モードを計算する。中央に誘電率37.3の共振器を置き、それを熔融石英で支持し、まわりを電極でシールドしている。図5に要素分割図を示す。

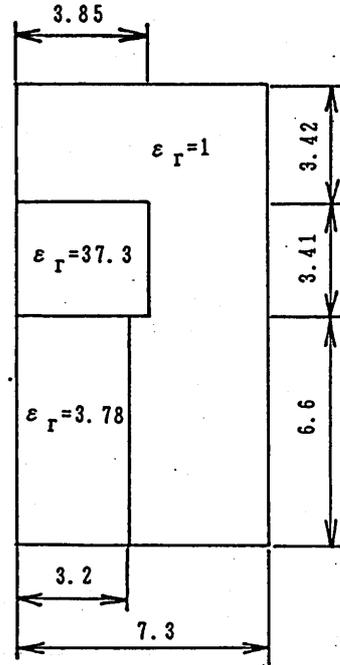


図4 誘電体共振器

表1 誘電体共振器の共振周波数

モード	測定値 GHz	計算値 GHz	誤差 %
TE ₀₁₃	6.943	7.015	1.04
TE ₀₁₁₊₃	11.316	11.398	0.72

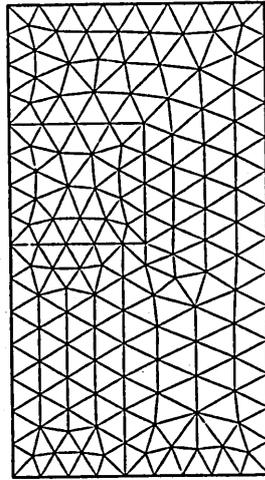


図5 誘電体共振器の要素分割図

表1に最低次2個の共振周波数を測定値と共に示す。1%程度の差はあるが、実験誤差を考えるときわめてよく一致しているといえよう。

3. 3次元伝達問題

次に、3次元導波路伝達問題の定式化について述べる。図6はその不連続部を示したもので、いくつかの導波路が不連続部に接続されている。ある導波路から周波数 ω のモードを入射したときの反射波、他の導波路から出ていく透過波および不連続部の電磁界を解析する。

この問題は周波数 ω で導波路を伝搬するモードの解析、3次元不連続部の解析および導波路と不連続部の接続境界での電磁界の接続という3つの問題からなっている。

3.1 導波路の解析

z 軸を伝搬軸に選び β を伝搬定数とすると、電界 E は z 方向の成分 E_z とそれに直交する成分 E_t とに分解できる。

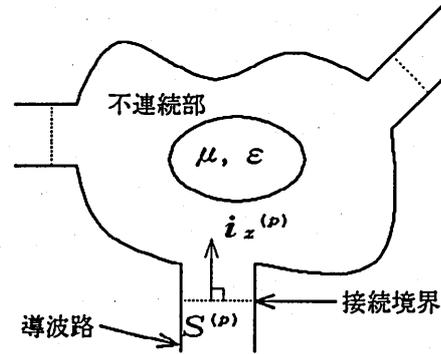


図6 導波路不連続部

$$E(x, y, z) = [E_t(x, y) + j i_z E_z(x, y)] \exp(-j\beta z) \quad (19)$$

ここで、 i_z は z 方向の単位ベクトルである。形状関数として E_t は2次多項式、 E_z は3次多項式を使用し、未知数の配置として、 E_z は通常のラグランジュ族^[10]と同じように10個の未知数を三角形の頂点、辺および重心に配置する。一方 E_t については辺に沿った成分を三角形の頂点に6個置き、各辺の中心に辺に沿った成分と向かい合う頂点に向いた成分12個配置する。図7はこの配置を示したもので、丸印が E_z を、矢印が E_t を表わしている。このようにすると隣合う要素間で電界の接線成分の連続性が満たされる。磁界に連続性については自然境界条件として自動的に満たされる。 E_t をこのように配置した要素をステレック要素とよび、境界条件が厳密に満たされているため、従来問題となっていた非物理的なスプリアス解が数値解に混在しないことが知られている^{[5][6]}。

離散化の手順は形状関数が異なることを除けば回転対称の誘電体共振器と同じであり、次に述べる3次元不連続部に対しても同様である。

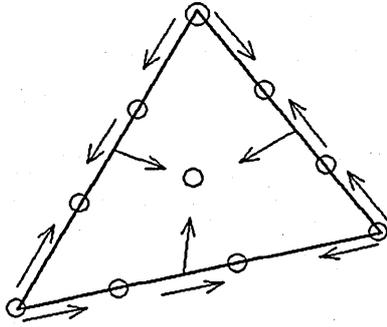


図7 要素と未知数の配置

要素内で E_t と E_z を次式で表わす。

$$E_t = \sum_{i=1}^{12} N_{ti} E_{ti} \quad (20)$$

$$E_z = \sum_{i=1}^{10} N_{zi} E_{zi} \quad (21)$$

式(20)、(21)を式(19)に代入し、さらに式(11)-(14)に代入すると、

$$[A_{tt}^{(1)}] \{E_t\} + \beta^2 [A_{tt}^{(2)}] \{E_t\} + \beta [A_{tz}] \{E_z\} - \omega^2 [B_{tt}] \{E_t\} = \{0\} \quad (22)$$

$$\beta [A_{tz}]^t \{E_t\} + [A_{zz}] \{E_{zz}\} - \omega^2 [B_{zz}] \{E_z\} = \{0\} \quad (23)$$

ここで

$$A_{tt}^{(1)}{}_{ij} = \sum_e \int_e \frac{1}{\mu} (\nabla_t \times N_{ti}) \cdot (\nabla_t \times N_{tj}) dS \quad (24)$$

$$A_{tt}^{(2)}{}_{ij} = \sum_e \int_e \frac{1}{\mu} N_{ti} \cdot N_{tj} dS \quad (25)$$

$$A_{tz}{}_{ij} = \sum_e \int_e \frac{1}{\mu} N_{ti} \cdot (\nabla_t N_{zj}) dS \quad (26)$$

$$A_{zz}{}_{ij} = \sum_e \int_e \frac{1}{\mu} N_{zi} N_{zj} dS \quad (27)$$

$$B_{tt}{}_{ij} = \sum_e \int_e \varepsilon N_{ti} \cdot N_{tj} dS \quad (28)$$

$$B_{zz}{}_{ij} = \sum_e \int_e \varepsilon N_{zi} N_{zj} dS \quad (29)$$

ただし、

$$\nabla_t \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0) \quad (30)$$

さて式(22)(23)は β を与えて ω を求める場合と、 ω を与えて β を求める場合とで固有値問題のマトリックスの形が異なる。前者の場合

$$[A] \{E\} = \omega^2 [B] \{E\} \quad (31)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{tt}^{(1)}] + \beta^2 [A_{tt}^{(2)}] & \beta [A_{tz}] \\ \beta [A_{tz}]^t & [A_{zz}] \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_{tt}] & [0] \\ [0] & [B_{zz}] \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \{E_t\} \\ \{E_z\} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

ω を与える場合は、

$$[A'] \{E_t\} = \beta^2 [B'] \{E_t\} \quad (35)$$

$$[A'] = [A_{tt}^{(1)}] - \omega^2 [B_{tt}] \quad (36)$$

$$[B'] = [A_{tz}] ([A_{zz}] - \omega^2 [B_{zz}])^{-1} [A_{tz}]^t - [A_{tt}^{(2)}] \quad (37)$$

式(35)の固有値は一般に複素数になる。これは与えられた周波数で伝搬できるモードが有限個であることによる。すなわち伝搬可能なモードのみ実数となりその他のモードは複素数になる。

複素固有値を持つ固有値問題の数値計算にはきわめて計算時間がかかる。一方、式(31)の左辺のマトリックスは対称非負定値、右辺は対称正定値マトリックスであるから固有値はゼロまたは正の実数であり、数値計算で扱い易い形である。しかし伝達問題を考える時は ω が既知で β は未知である。そこで式(31)から次のようにして与えられた ω に対して伝搬可能なモードを計算する。

まず適当な β に対する $[A]-\omega^2[B]$ をLDU分解して対角マトリックス D の要素の負の数を数える。この個数はその β で伝搬できるモードの内、周波数が ω より小さいモードの個数から $[A]$ のゼロ固有値の数を引いたものに等しい。このことから ω に対する β の存在範囲がわかる。したがって、2分法などを用いてその範囲をせまい区間に追い込んでいけばよい。

計算例として誘電体装荷導波管の伝搬特性を示す。図8は断面図と要素分割図で、左半分は誘電率2.25の誘電体を設け、右半分は真空である。周囲は電気壁でシールドされている。表2にLSMモードの伝搬特性を理論解と共に示す。表中の k_0 は真空の波数を表わしている。わずか16個の要素という荒い要素分割にもかかわらず0.3[%]以下で計算精度で一致している。

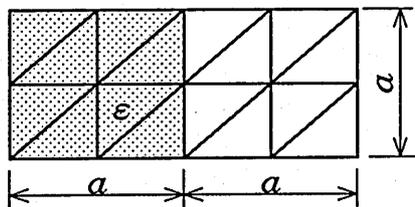


図8 誘電体装荷導波管

表2 LSMモードの伝搬特性

β/k_0	$k_0 a$		
	理論解	計算値	誤差(%)
0.2	2.289	2.296	0.31
0.4	2.356	2.363	0.30
0.6	2.481	2.488	0.28
0.8	2.695	2.701	0.22
1.0	3.068	3.073	0.16
1.2	3.829	3.833	0.10
1.4	6.447	6.449	0.03

3.2 不連続部の離散化

不連続部は3次元形状をしているため、図9に示す四面体(三角すい)要素を使用する。

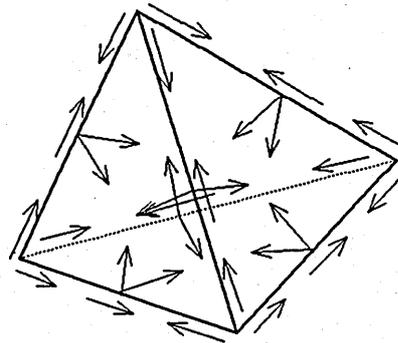


図9 四面体要素と未知数の配置

形状関数として2次式を使用し、4つの頂点に対して辺に沿った電界成分を配置し、6つの辺の中点に辺に沿った成分と面に沿った成分を配置する。1つの要素に対して30個に未知数がある。表面の三角形上の接線成分の位置が、導波路の三角形要素(図7)と一致するようにしている。

要素内の電界を次式で表わす。

$$E = \sum_{i=1}^{30} N_i E_i \quad (38)$$

式(11)-(14)に代入すると次式が得られる。

$$[A] \{E\} - \omega^2 [B] \{E\} = \{F\} \quad (39)$$

$$A_{ij} = \sum_e \int_e \frac{1}{\mu} (\nabla \times N_i) \cdot (\nabla \times N_j) dV \quad (40)$$

$$B_{ij} = \sum_e \int_e \varepsilon N_i \cdot N_j dV \quad (41)$$

$$F_i = \int_e (N_i \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \hat{E}) \cdot n dS \quad (42)$$

ここではまだ導波路と接続している境界上での E は未知で、式(42)の F_i が未知であるが、この処理については次節で説明する。

3.3 不連続部と導波路の接続

不連続部に P 個の導波路が接続され、各導波路で周波数 ω に対する伝搬可能なモードが 3.1 節にしたがってすでに計算されているものとする。 P 番目の導波路を伝搬する $M^{(p)}$ 個のモードのうち m 番目のモードの電界の伝搬方向の成分を $E_{zm}^{(p)}$ 、それに直交する成分を $E_{tm}^{(p)}$ とすると、電界 $E_m^{(p)}$ は次のように不連続部への入射波と反射波の和で表わされる。

$$E_m^{(p)} = a_m^{(p)} [E_{tm}^{(p)} + j i_z^{(p)} E_{zm}^{(p)}] \exp(-j \beta_m^{(p)} z) + b_m^{(p)} [E_{tm}^{(p)} - j i_z^{(p)} E_{zm}^{(p)}] \exp(j \beta_m^{(p)} z) \quad (43)$$

ここで、 $a_m^{(p)}$ と $b_m^{(p)}$ はそれぞれ入射波と反射波の振幅を表わし、 $i_z^{(p)}$ は不連続部と導波

路 P との接続境界に垂直な単位方線ベクトルである (図 6)。これを式(42)に代入すると

$$F_i = j \sum_{p=1}^P \sum_{m=1}^{M^{(p)}} [a_m^{(p)} - b_m^{(p)}] g_m^{(p)} i \quad (44)$$

$$g_m^{(p)} i = \int_e \frac{1}{\mu} N_{ti} \cdot [\nabla_t^{(p)} E_{zm}^{(p)} + \beta_m^{(p)} E_{tm}^{(p)}] dS \quad (45)$$

F_i に新たに反射波の振幅 $b_m^{(p)}$ が未知数として追加される。そこで接続境界面 $S^{(p)}$ での電界の接線成分の連続性に対する残差をゼロにする式を追加する。重み付け関数 W として系のマトリックスが対称になるように次式を使用する。

$$W_m^{(p)} = \frac{1}{\mu} [\nabla_t^{(p)} E_{zm}^{(p)} + \beta_m^{(p)} E_{tm}^{(p)}] \quad (46)$$

面 $S^{(p)}$ での残差は次式で表わされる。

$$\{g_m^{(p)}\}^t \{E^{(p)}\} - b_m^{(p)} = a_m^{(p)} \quad (47)$$

ただし電界の大きさは次式で規格化しているものとする。

$$\int_{S^{(p)}} W_i^{(p)} \cdot E_{tm}^{(p)} dS = \delta_{im} \quad (48)$$

式(39)-(47)を整理すると

$$[P] \{E\} + j [Q] \{b\} = j [Q] \{a\} \quad (49)$$

$$[Q]^t \{E\} - \{b\} = \{a\} \quad (50)$$

ここで

$$[P] = [A] - \omega^2 [B] \quad (51)$$

$$[Q] = [\{g_1^{(1)}\}, \dots, \{g_m^{(p)}\}, \dots] \quad (52)$$

$$\{a\} = \{a_1^{(1)}, \dots, a_m^{(p)}, \dots\} \quad (53)$$

$$\{b\} = \{b_1^{(1)}, \dots, b_m^{(p)}, \dots\} \quad (54)$$

上式から入射振幅 a に対する不連続部内の電界と反射波の振幅 b が計算できる。また散乱マトリックス $[S]$ は次式で求められる。

$$[S] = ([Q]^t [P]^{-1} [Q] - j [I])^{-1} ([Q]^t [P]^{-1} [Q] + j [I]) \quad (55)$$

ここで $[I]$ は単位行列を表わす。実際の数値計算では $[P]^{-1}[Q]$ を連立1次方程式を解く形で処理すれば、直接 $[P]$ の逆行列を計算する必要がなく、しかも $[P]$ のLDU分解は1回だけでよく、短時間少メモリで散乱マトリックスを計算することができる。

3.4 数値計算例

まず図10に示す直角コーナベンドの計算例を示す。コーナベンドと導波路の周囲は金属でシールドされており、厚みは幅 a に比べてかなり薄いとする、低い周波数においてTEモードだけが伝搬できる。この問題は2次元で解析することができ、すでに小柴^[1]や松原^[4]らにより計算されている。ここでは厚みを $0.1a$ として3次元で計算し彼らの結果と比較する。

不連続部を図11に示す4面体要素に分割し、導波路1からTE₁モードを入射させたときを考える。規格化した周波数 $k_0 a / \pi$ を1から3まで変化させたときの、導波路2から出ていく透過電力 $|S_{12}|^2$ を図12に示す。実線で示した松原らの結果と丸印で示した本手法による結果は一致していることがわかる。

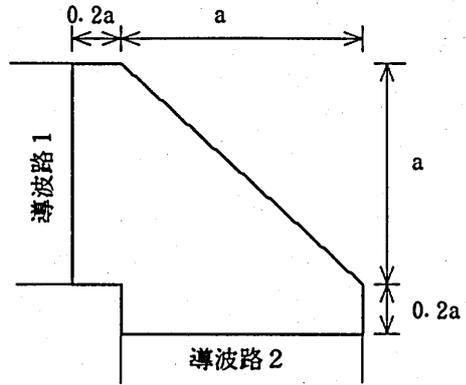


図10 直角コーナベンド

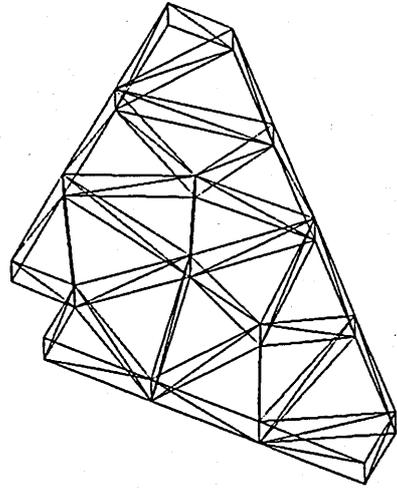


図11 直角コーナベンドの要素分割図

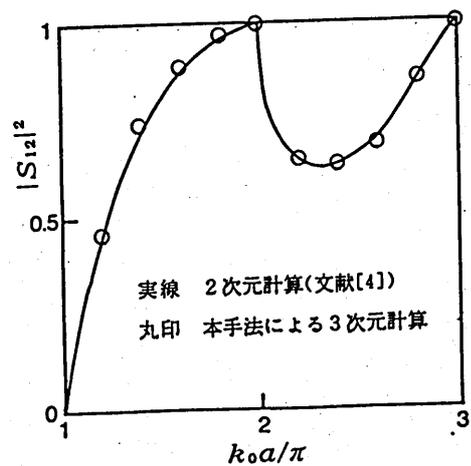


図12 直角コーナベンドの透過電力特性

次に不連続部が不均質媒質からなる例として、図13に示す誘電体装荷導波路形帯域フィルタを考える。幅 $0.5a$ の遮断導波路に比誘電率 2.62 の誘電体柱を挿入しており、周りは金属でシールドされている。この問題もやはり2次元として扱うことができ、小柴^[11]、松原^[4]らにより計算されている。コーナベンドと同様に厚みを $0.1a$ として3次元で計算する。図14に要素分割を示すが、対称性から上半分だけを計算する。図15は導波路1から単位電力のTE₁モードをしたとき、導波路2への透過電力 $|S_{12}|^2$ をデシベル表示したものである。実線で示した松原らの結果に一致していることがわかる。

以上の結果から本手法が有効であることが確認できる。

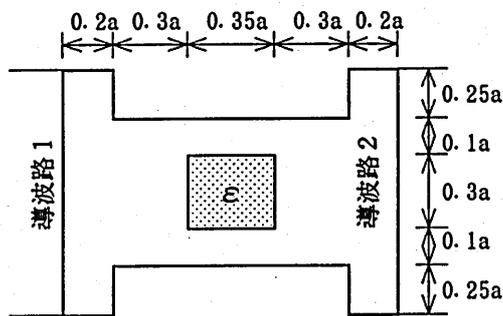


図13 誘電体装荷導波路形帯域フィルタ

4. むすび

3次元導波路伝達問題に対して、導波路を伝搬するモードの解析方法、不連続部の離散化方法および導波路と不連続部の接続境界での電磁界の接続方法を示した。また計算例として、直角コーナベンドと誘電体装荷導波路型帯域フィルタの透過電力特性を示し、解析方法の妥当

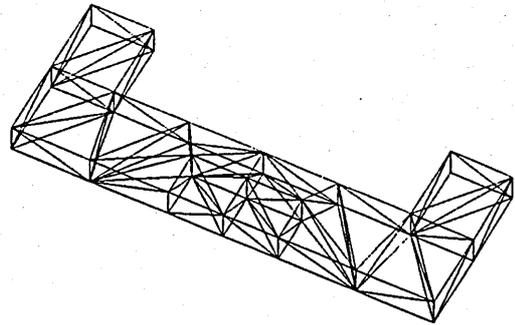


図14 誘電体装荷導波路形帯域フィルタの要素分割図

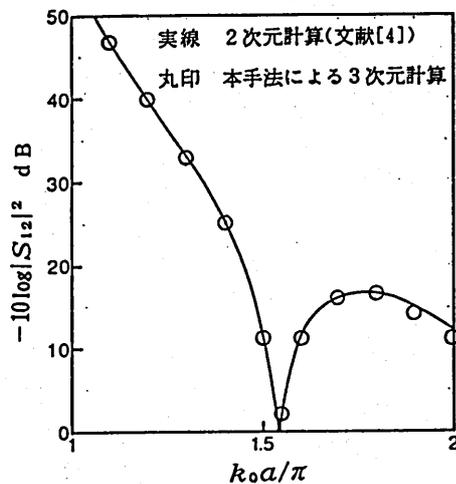


図15 誘電体装荷導波路形帯域フィルタの透過電力特性

性を確認した。本手法を用いたプログラムにより、3次元の任意形状の不連続部に対する散乱マトリックスが、電磁界の専門知識をなんら必要とせずに計算できる。

今後、実際のデバイスに対して計算を行ない、計算値と実験値と比較していく。

謝辞

日頃、電磁界の数値計算についてご指導頂いている大阪大学松原正則助教授に深謝します。

また、プログラムを作成するにあたり、連立1次方程式と固有値問題の数値計算プログラムを作成して頂いた村田製作所技術管理部五嶋制二氏に深謝します。

文献

- [1] 加川, 小柴, 池内, 鏡: "電気・電子のための有限/境界要素法—波動問題への応用—", オーム社(1984-10).
- [2] J. F. Lee and Z. J. Cendes: "An adaptive spectral response modeling procedure for multiport microwave circuits", IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., MTT-35, 12, pp. 1240-1247(1987).
- [3] 丸田, 松原: "伝達問題の有限要素法解析に関する一考察", 電学会電磁界理論研資, EMT-88-2(1988).
- [4] 丸田, 松原: "伝達問題の有限要素法解析—ガレルキン法による解の接続—", 信学論(C-1), J72-C-1, 10, pp. 577-582(1989).
- [5] 羽野: "新しい三角形要素を用いたベクトル有限要素法による異方性導波路の解析", 信学論(C), J70-C, 10, pp. 1329-1337(1987).
- [6] 松原, アンケーオ: "損失・利得のある導波系の有限要素法解析", 信学論(C), J71-C, 10, pp. 1398-1403(1988).
- [7] 羽野: "3次元共振器問題の有限要素法解析—四面体要素の場合—", 信学論(C), J71-C, 3, pp. 333-338(1988).
- [8] 松原: "電磁界の3次元有限要素法解析—, 電流励振による電磁界—", 電磁界理論研究会資料, EMT-88, 2, pp. 145-151(1988).
- [9] 小柴, 早田, 鈴木: "マイクロ波および光導波路の解析手法としての有限要素法—スプリアス解対策の現状—", 信学論(C), J69-C, 12, pp. 1477-1486(1986).
- [10] 鷺津, 宮本, 山田, 山本, 川井: "有限要素法ハンドブック I 基礎編", 培風館(1981).
- [11] M. Koshiha, M. Sato and M. Suzuki: "Application of Finite-element method to H-Plane waveguide discontinuities", Electron. Lett., 18, 9, pp. 364-365(1982)."

輻射科学研究会
資料番号RS90-7

マイクロ波共振器を用いた
重量・水分センサ

兵庫教育大学 中山 茂

〒673-14兵庫県加東郡社町下久米942-1
TEL0795-44-1101(内線438)
FAX0795-44-1061

平成2年9月14日
場所：村田製作所

1 はじめに

原料や製品の水分管理は、品質的にも價格的にも非常に重要である。たとえば、原料は通常重量で取り引きされるために、その原料の水分率が高いと水を買っているようなもので、水分率が数パーセント違うと價格が数パーセント違うことになる。また、原料の水分と重量とを同時に計測することは困難であったが、マイクロ波共振器を用いることによって可能である。

前回は、紙の重量と水分との同時計測センサ¹⁾について報告したが、今回は、木材と糸との重量・水分同時計測センサについて報告する。

木材の加工、利用において木材の水分管理は極めて重要で、製材工程で木材の全体の水分や水分の分布をモニタすることは、品質管理に必要で生産性を向上させるためにも重要である。

最も単純な水分測定の方法は乾燥法で、重量をはかり乾燥させてからまた重量をはかって水分量を求める。電気的方法として従来、木材の抵抗式水分計があり、木材に含まれている水が電離したイオンによって電気伝導度が増加することを利用して、木材に針状電極を刺して測定しているが、水の電離度が温度により大きく影響を受けたり、電極と木材との接触抵抗の変動があり精度が得られない。また、20~300MHz程度の高周波容量方式があり、木材片面に2つの細い長い平行平面電極をあててその間での静電容量の変動を測定して水分を測定している。しかし、板の厚み、密度などの影響があり高精度に測定できていない。さらに、水分分布まで測定するには、電極のサイズが大きいため適当な空間分解能が得られにくいと考えられる。

ここでは、今まで紙の重量(Basis weight)分布と含水量(Moisture content)分布との同時計測のためにマイクロ波共振器^{2)~7)}を利用して開発に成功してきたセンサを応用して、木材用の重量分布と含水率分布との同時計測のためにマイクロ波センサを報告する。

従来、紙の重量計と水分計とは別々に開発されていた。紙の重量計としては、 β 線や γ 線が利用されてきたが、放射能の危険性が指摘されている。さらに、紙の水分計としては、2、3波長赤外線が利用されてきたが、赤外線は試料の表面水分しか測定しないので木材水分計には適さない。また、 β 線の場合、長い時定数を持つ電子回路で平滑化するので瞬時測定は出来ないが、マイクロ波ではmsec以下の信号処理で測定できる。さらに、マイクロ波は木材の十数センチ程度浸透しているので、内部の水分が測定できる。そこで、異質と考えられていた重量計(B)と水分計(M)と一体にした、マイクロ波共振器による紙のBMセンサの開発を行ってきた。

マイクロ波による重量と含水率との同時計測センサは、マイクロ波帯にある水分の共鳴吸収を利用して感度良く水分を計測し、高いQ値の空洞共振器を用いて高感度水分測定を可能にした。同時に、板の厚みまたは板の単位面積当りの重量も計測できるようなマイクロ波BMセンサの開発を行った。このセンサは安価に制作でき、木材の加工の各分野に利用できる。また、マイクロ波共振器の

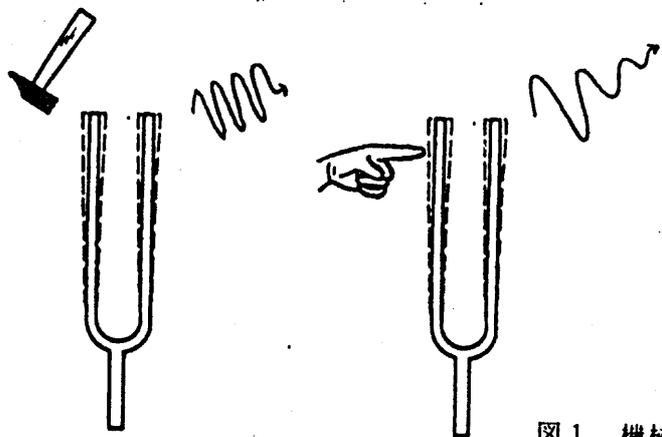


図1 機械式共振器である音叉の例

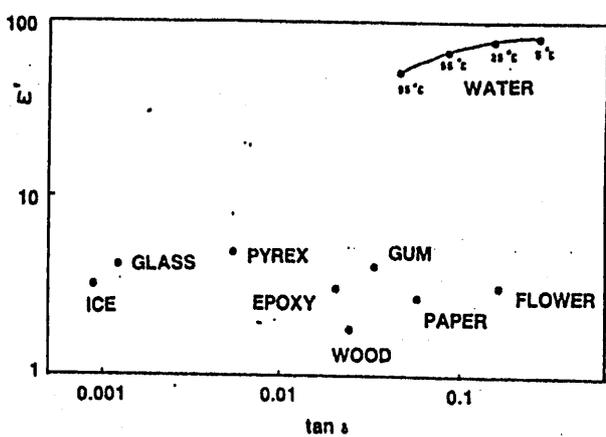


図2 3 GHz での各物質の誘電率

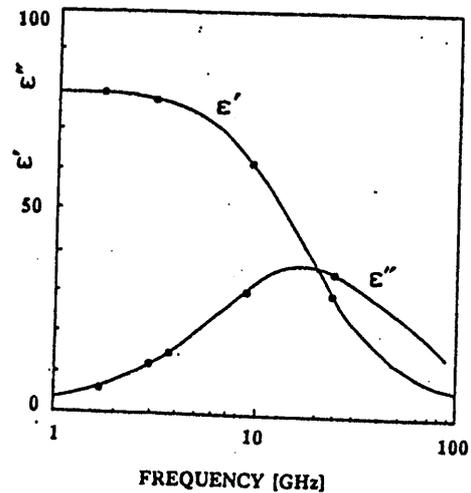


図3 マイクロ波帯での水の複素誘電率

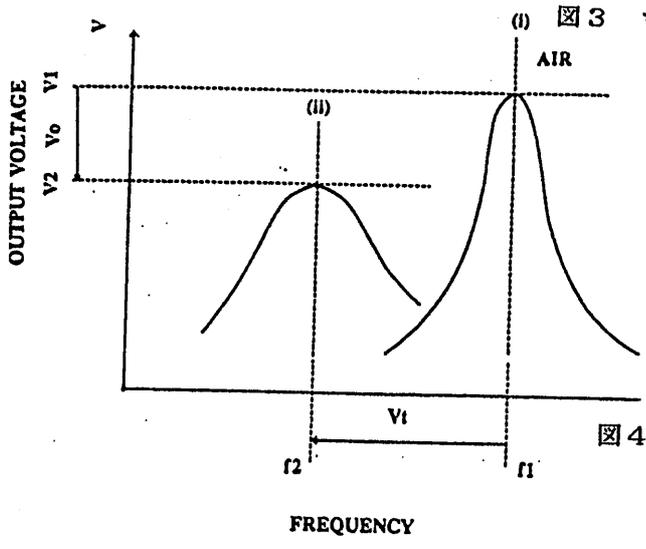


図4 共振器に試料を入れた場合の共振周波数の変化と共振ピーク電圧の変化

形状を変形し、いくつかの共振器を電子スキャンすることで「木材用重量グレーダー・水分グレーダー」として活用できるものとする。⁹⁾⁻¹⁰⁾

また、リエントラント型共振器を用いた糸状物質の重量と水分量との同時測定を行い、高い測定精度が得られた。

2 木材の重量と含水率とのマイクロ波同時計測センサーの原理

この木材の重量と含水率との同時計測の原理を音叉を例にして説明すると（図1参照）、振動している音叉を手で触れると、音叉の固有の周波数から周波数の低い方にずれ、さらに、振動が早く弱まる。この周波数のずれと振動の減衰から、2つの物理量（たとえば、音叉に付着した試料の重量）が計測できる。

そこで、マイクロ波共振器の場合も、空洞共振器内に木材を挿入した時、共振周波数がシフトし、共振ピーク値が減衰する。この周波数シフトは主に木材の重量に依存し、共振ピーク値の減衰量は主に含水量に依存する。周波数のシフト量と共振ピーク電圧の減衰量の2つの同時測定量から、木材の重量と含水量が計測できる。

2.1 木材と水分との混合物の誘電率

気乾木材は、全乾木材、結合水、自由水の異なった誘電率の媒質からなる複合体とみなせるが、結合水は分子の自由度が自由水より少なく誘電率は異なっているので、簡単のために二成分（結合水を含んだ全乾木材の誘電率 $\epsilon_p = \epsilon_p' - i\epsilon_p''$ と自由水の誘電率 $\epsilon_w = \epsilon_w' - i\epsilon_w''$ ）から成る混合体について考える。一般には混合体の誘電率は各成分誘電率の算術平均と考えられるが、比較的実験と一致する混合体の誘電率 ϵ は Lorentz-Lorentz の式と呼ばれる次式で与えられる。

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \delta_p \frac{\epsilon_p - 1}{\epsilon_p + 2} + \delta_w \frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w + 2} \quad (1)$$

ここで、 δ_p 、 δ_w は全乾木材、自由水の体積と混合体の体積比を表わし、 $\delta_p + \delta_w = 1$ なる関係がある。このために、混合体の誘電率 ϵ は δ_p と δ_w の非線形関数、近似的には多項式となる。図2で3GHzでの各物質での誘電率を示すが、木材は、紙よりも水との誘電率との差が大きいため分離しやすい。

図3のように水の誘電率は23GHz近くに共鳴線があり最も大きな吸収があり、この付近で計測するほうが水分検出には理想的であるが、操作し易い3GHz程度の周波数を用いる。

ここで、木材と水分との3GHzでの複素誘電率は、それぞれ非常に異なっているので分離してそれぞれの量を測定できる。注意すべき点は、水の誘電率は周波数だけに依存するのではなく、水が有極性分子のために温度にも大きく依存する。そのために、高精度測定には木材の温度測定が必要となる。

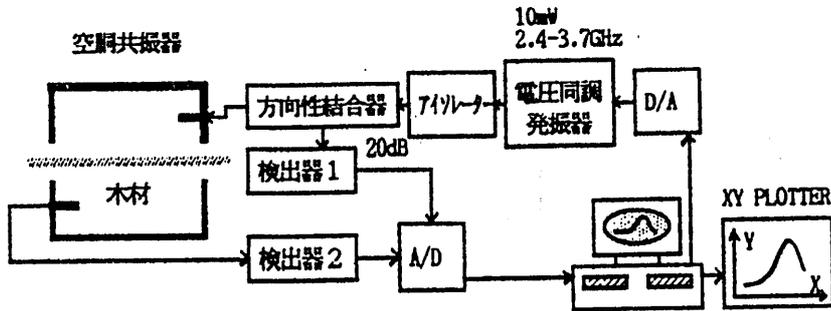
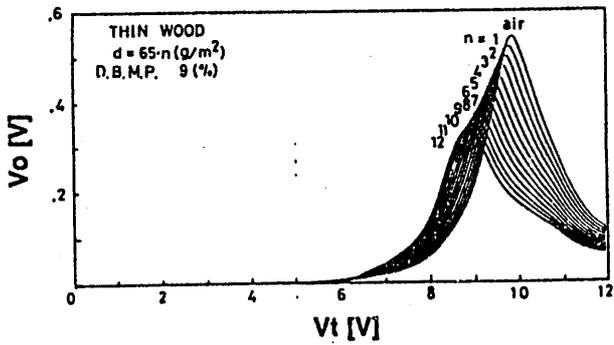
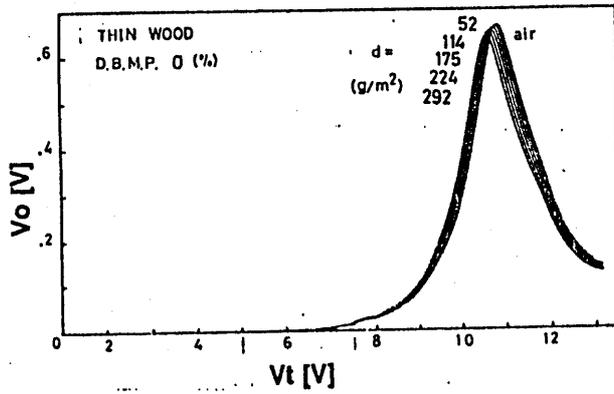


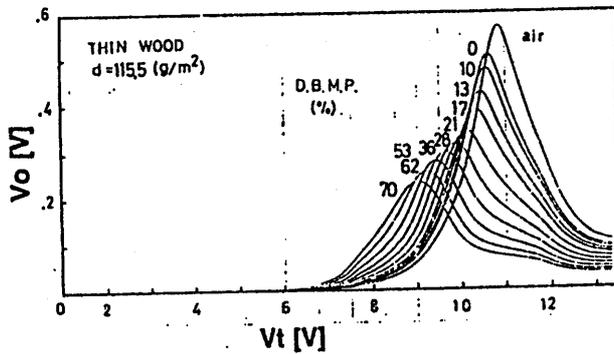
図5 空胴共振器をもちいた実験装置



66 [g/m²] の気乾木材
(水分パーセント9%)
を1枚から4枚まで変化
させたときの共振曲線



全乾木材を5枚まで変化
させたときの共振曲線



115.5 [g/m²] の気乾木材
の水分パーセントを変化
させたときの共振曲線

2.2 マイクロ波BM検出原理

マイクロ波コーンアンテナなどでマイクロ波の透過特性を見た場合、波は一度しか木材を通過しないが、共振器を用いると波は木材を何度も横切り透過特性に試料の影響が大きく現れ、感度が良くなるので、空洞共振器を用いる。

マイクロ波空洞共振器内に送信アンテナと受信アンテナをもおけて、試料を挿入すると空洞共振器内の試料の屈折率の大小により共振周波数が変化し（図4参照）、試料でのマイクロ波吸収のために透過マイクロ波の共振ピーク電圧が減衰する。なぜなら、空洞共振器をLCR共振回路と見なせば、試料の誘電率実部の変化でC(容量)が変化し共振周波数が変わり、試料の誘電率虚部の変化でR(抵抗)が変化し共振ピーク電圧が減衰する。つまり、空洞共振器内に木材を挿入すると空洞共振器の共振周波数と透過波の共振ピーク電圧（反射波の共振ピーク電圧）とが摂動を受け、図4のように共振周波数が f_1 から f_2 に減少し、共振ピーク電圧が V_1 から V_2 に減衰する。

この時の共振周波数のシフト量 V_s と共振ピーク電圧の減衰量 V_o を測定することにより、木材の重量 d_p [g/m²]と水分量 d_w [g/m²]とを求める。実測値と一致させるには

$$V_s = ad_p + bd_w \quad (2)$$

$$V_o = ed_w + fd_p \quad (3)$$

と考えられる。ここで、 a, b, e, f は比例定数である。Lorentz-Lorentzの式から予想できるように、また、検出器はその出力電圧が検出すべきマイクロ波入力電力に完全に比例しなかったり、マイクロ波発振器はマイクロ波周波数は共振電圧に完全に比例しなかったりするために、非線形項を含めることもある。式(3)の場合は d_p や d_w に対して解析的に解ける。

3 木材の重量と含水率との同時計測実験

方形型空洞共振器を用いた共振ピーク電圧の減衰量と共振周波数のシフト量の測定装置を図3に示す。用いた空洞共振器は方形型、円筒型、リエントラント型などで自作した。ここで、電圧同調発振器(Avantek社製VT0-8240:出力10mW、可調周波数2.4-3.5GHz)の電圧 V_{in} (0-30V)を掃引することによりマイクロ波の共振器内への透過強度をクリスタル・ダイオード(島田理科製1C920:検出感度約0.1V/1mW)またはショットキー・ダイオード(Herotek製DT2040)でマイクロ波電力をDC電圧 V_{out} に変換して検出して共鳴曲線を求めた。反射波による発振器破壊を防ぐためのアイソレータはMicrotek製C20S40A1を、発振器出力モニタのための方向性結合器はヒロセ電機製のHDH-03020G1Dを使用した。

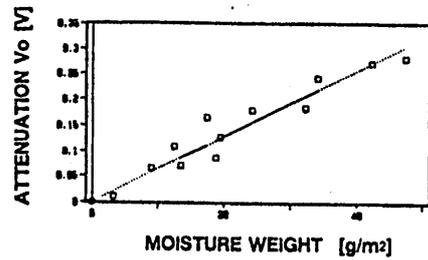
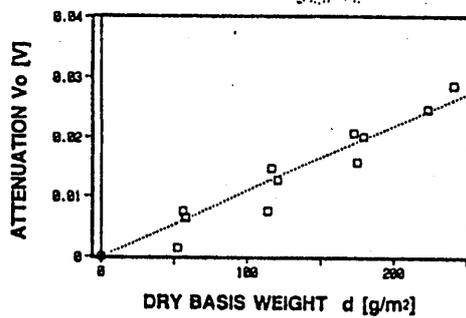
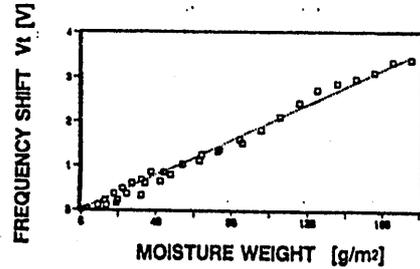
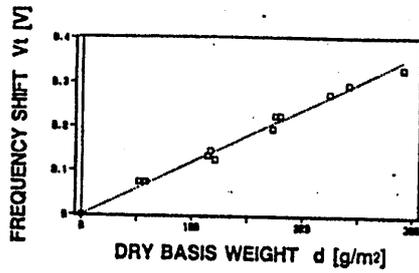
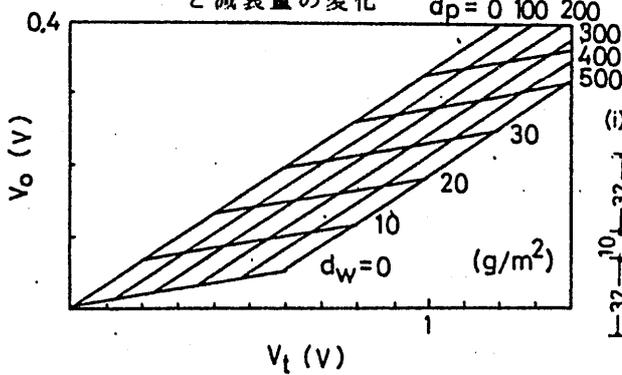


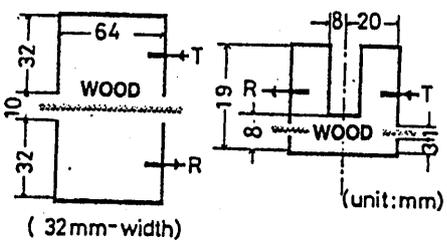
図9 全乾重量に対するシフト量と減衰量の変化

図10 水分量を変化させたときのシフト量と減衰量の変化

図11 シフト量と減衰量から全乾重量と水分量とを求めるチャート図

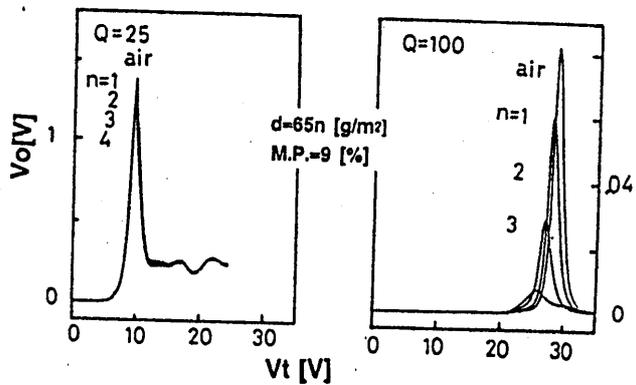


(i) Rectangular cav. (ii) Re-entrant cav.



方形型共振器とリエントラント型共振器とによる木材の共振曲線の比較。66 [g/m²] の気乾木材 (水分パーセント9%) を1枚から4枚まで変化

図12 させたときの共振曲線



3.1 方形型マイクロ波共振器

マイクロ波共振周波数約3GHzの方形型空洞共振器を用いた共振ピーク電圧の減衰量と共振周波数のシフト量の測定装置例を図5に示す。

木材の測定例を図6に示す。まず、空洞共振器内になにもない状態を測定し、次に重量65[g/m²]、水分 η -tent[9%]の薄い気乾木材を一枚一枚入れていった場合の共振曲線を求めた。供試材料には鳥取県産の杉(*Cryptomeria japonica D. Don*)材の心材正目を用いた。

ここで、共振ピーク電圧の減衰量 V_r [V]は水分量 d_w [g/m²]だけではなく木材の重量 d_p [g/m²]でも大きく減衰し、共振周波数のシフト量 V_s は木材の重量だけではなく水分量でも共振周波数がシフトする。

全乾木材の重量を変化させて、更にそれぞれ同じ木材について含水率を変化させたときの共振曲線の共振ピーク電圧の減衰量の測定結果を図7、8に示す。つまり、共振ピーク電圧の減衰は水分量だけではなく木材の重量でも大きく減衰する。また、同様に共振周波数のシフトは木材の重量だけではなく水分量でも共振周波数がシフトすることが理解できる。

全乾重量と水分量との変化による、周波数シフト量と減衰量との変化を図9、10に示すように、線形性がよい。最小自乗法による理論式と実測値との一致精度は標準偏差として木材の重量は ± 10 [g/m²]で水分量は ± 0.5 [g/m²]である。これらの大きな偏差は主に共振器に木材を入れるための大きなギャップがあることにより、Q値が小さいことによる。

共振ピーク電圧の減衰量 V_r と共振周波数のシフト量 V_s を測定すれば、予め実測しておいた定数 a, b, e, f から、式(2),(3)を用いて一意的に木材の重量と水分量とが求められる。実測データをもとにして共振周波数のシフト量を横軸に共振ピーク電圧の減衰量を縦軸にして、木材の重量と水分量とをパラメータにしてチャートを図11に示す。

3.2 リエントラント型マイクロ波共振器

方形型空洞共振器による木材の重量と含水量との同時計測センサーの基礎実験を行ったが、さらに測定精度が良くして、高感度の単位面積当りの重量である重量計(B)と水分計(M)と一体にした3.5GHzのリエントラント型マイクロ波共振器による高精度のBMセンサーの開発(図12参照)を行った。特にQ値の高いリエントラント型共振器を用いた木材の重量と水分量との同時測定を行い、高い測定精度が得られた。

高精度な測定のために、損失の少なくQ値の高い3.5GHzのリエントラント型マイクロ波共振器を用いてBM計測を行った。方形共振器とリエントラント型マイクロ波共振器との構造とそれぞれの共振器による共振曲線を図12に示す。Q値は約100と改善されて、半値幅は方形型の4分の1と狭く、共鳴線の波形の対称性がよく、シフト量と減衰量は4倍程よくなっている。これらの改善は主にリエントラント共振器の構造上Q値が高いため、方形型よりリエントラント型のほうが精度よく作れる。また、木材を入れるためのギャップも狭くしたのでQ値が高くなったと考える。そのため、標準偏

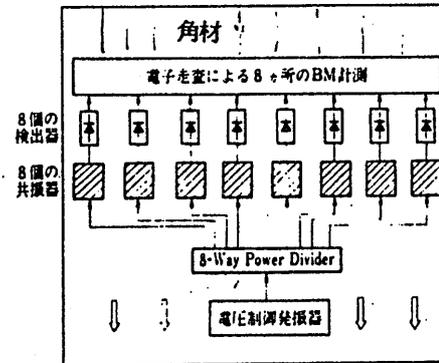
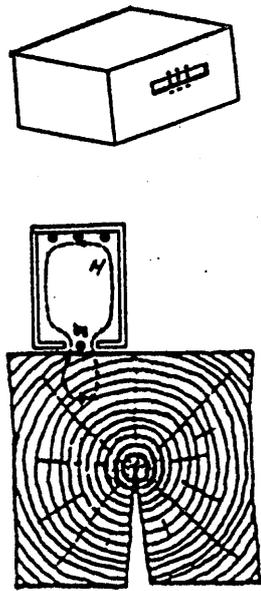
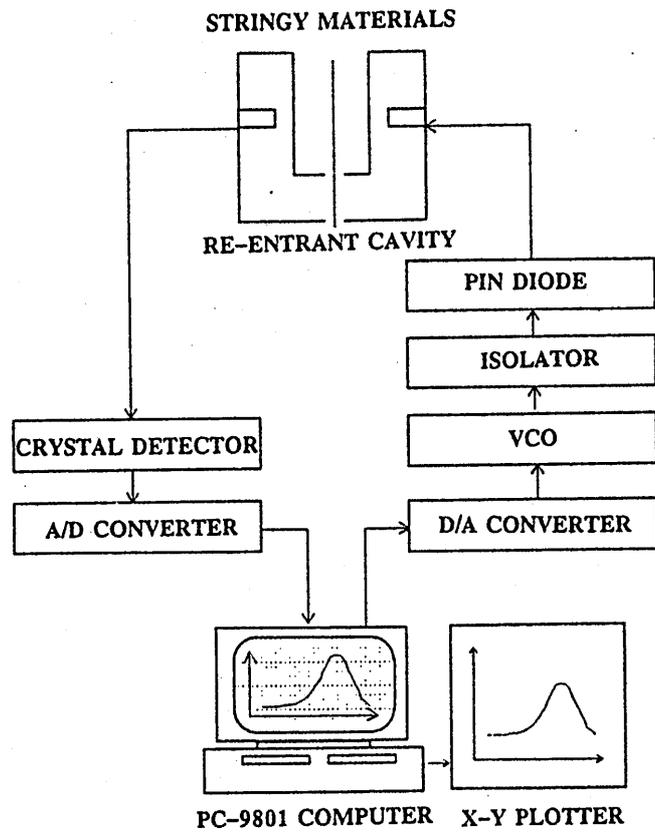


図13 スロット・アンテナ型共振器の 図14 電子スキャンによる角材の
角材の重量・水分測定 重量・水分グレーダの応用例



差として木材の重量は ± 2.5 [g/m²]で水分量は ± 0.125 [g/m²]ほど良くなった。

3.3 スロットアンテナ型マイクロ波共振器

木材をマイクロ波共振器内にいれるために、高水分の木材や低水分でも体積の大きな木材のマイクロ波BM計測には、共振器のギャップやサイズがおおきくできないために、不適當であった。

そこで、木材のような大きなものでもBM計測できるスロットアンテナ型マイクロ波共振器を考案した。図13に示すように、マイクロ波共振器に木材を入れるのではなく、マイクロ波共振器にスロットを設けて、そのスロットに木材を置くことにより、そこからのマイクロ波の洩れの程度を観測してBM計測する。そのために、片面で計測できるので、工場ラインに流れる木材のようなものも、BM計測でき、応用範囲は広範に渡る。また、スロットの形状により、角材の水分分布も測定可能で、1cm程度の空間分解能が得られる。

スロットアンテナ型共振器BMセンサーとは、共振器にある方向にスロット（細長い穴）を設け、マイクロ波が共鳴的に洩れることを利用したセンサーで、そのスロットの前に木材を置いて、共振周波数と共振ピーク電圧との変化を測定して、木材の重量と水分量を同時にBM計測するものである。

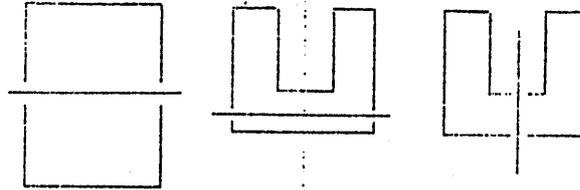
スロットアンテナ型マイクロ波共振器の原理とマイクロ波共振特性の変化を説明する。マイクロ波共振器からマイクロ波を漏らせるためには、共振器の壁を流れる高周波電流を切るようにスロットを設けるとよい。電流方向にスロットを設けてもマイクロ波は洩れない。つまり、共振器の壁に流れる高周波電流を切るようにスロットを設けると、溝の上下がコンデンサーのようになり、溝の上下に正負の電荷があらわれて、変位電流が流れて、磁界がその回りに発生して、マイクロ波が洩れる。電流に対して、斜め方向にスロットを設けても、 \sin の2乗変化で強度が変化する。スロットの長さは、長くすると洩れるマイクロ波は多くなり、2分の1波長で共鳴的に洩れる。

スロットアンテナ共振器のスロットの上に木材を置くと、共振器の共振周波数と共振ピーク電圧とが擾動を受ける。その変化分を測定することにより木材の重量と水分量を求めることが出来る。マイクロ波共振器内に木材をいれる方式では、高水分の木材や低水分でも体積の大きな木材のBM計測には、共振器のギャップやサイズがおおきくできないために、不適當であった。また、スロットの形状により、狭い領域でのBM計測が可能で、角材の重量分布計測・水分分布計測としても可能である。

3.4 木材の重量分布と含水分布のマイクロ波計測の応用例

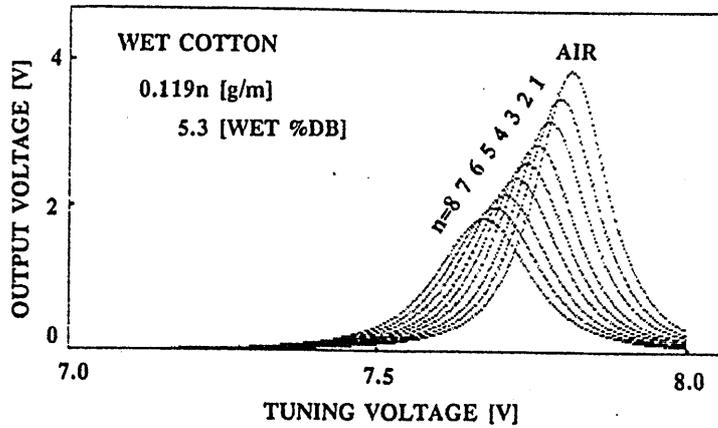
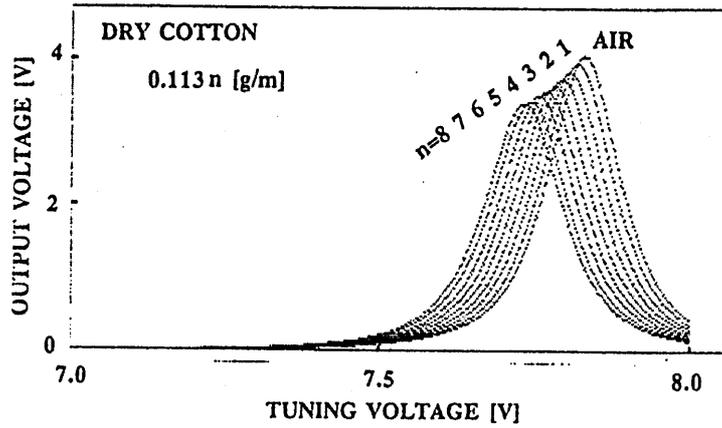
図14に角材上での電子走査マイクロ波BMセンサ例を示す。8分割器でマイクロ波電力を8等分して、適当な間隔で固定された8個の共振器に入れて、それぞれの検出器でマイクロ波の透過強度を検知し電子走査により、8ヶ所での木材の重量と水分量とを測定する。従来の機械的なセンサヘッドの走査より、高速測定、高精度、高安定性が期待できる。

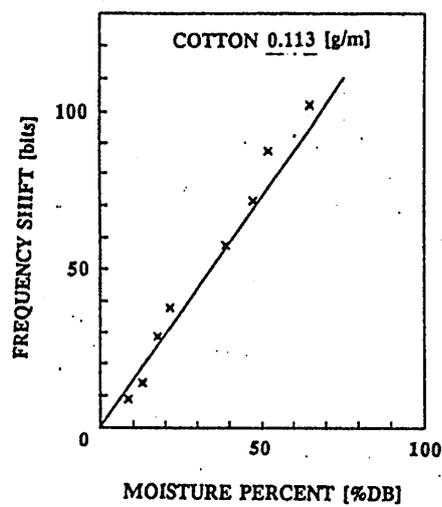
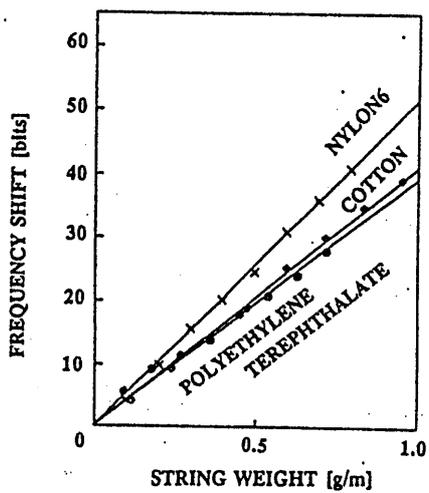
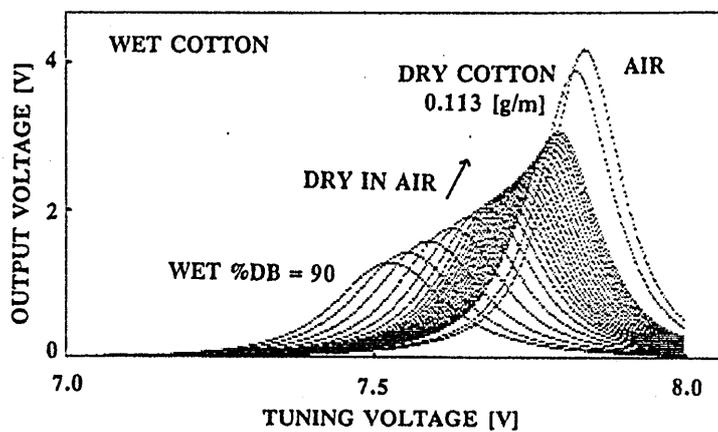
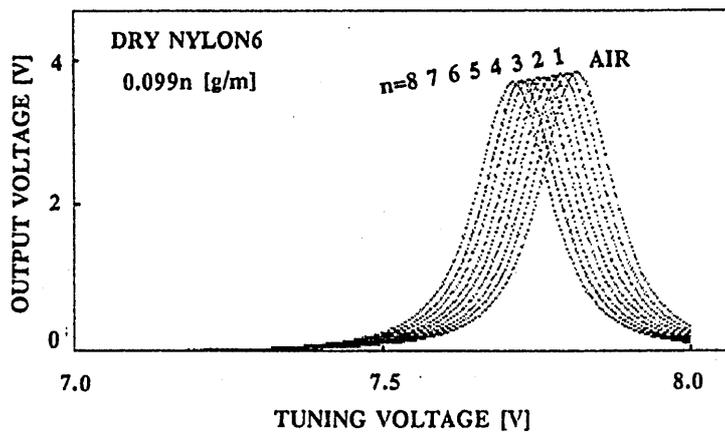
RECTANGULAR PRISM CAVITY RE-ENTRANT CAVITY



f=3.0 [GHz] f=3.59 [GHz] f=2.88 [GHz]
 Q=25 Q=100 Q=382

MATERIALS	SHEET	STRING
Q	LOW	HIGH
RESONANCE CURVE	ASYMMETRIC	SYMMETRIC





4 糸状物質の重量・水分同時計測センサ

シート状やブロック状の物質だけではなく、糸状の重量・水分の計測が可能である。糸一本を赤外線や β 線で測定することは困難であるが、マイクロ波共振器の形状を工夫すれば可能である。

ここでは、高感度にするために円筒共振器よりも、リエントラント型共振器を用い、軸上に糸を通した。それで、糸の物質の重量と水分量との同時測定を行い、高い測定精度が得られた。

5 おわりに

物質の重量計と水分計とは別々に開発されていたが、ここに異質な重量計と水分計と一体にしたマイクロ波BMセンサーの原理と実測結果を示した。重量と水分と切り離すことができず、水分パーセントを知るには重量を知る必要があり、気乾木材の重量から全乾木材の重量を知るには水分量を知る必要がある。

マイクロ波共振器だけで、あらゆる状態の物質の重量と水分量と同時に測定できることは、機器の構成を単純化し、瞬時に物質の全乾重量と水分量（又は水分パーセント）と気乾重量を表示しえることは操作性の能率化、容易化にもつながる。

参考文献

- 1) 中山 茂：輻射科学研究会 RS86-15 (1986)
- 2) 中山 茂：第47回応用物理学会講演会、28p-Y-10 (1986)
- 3) 中山 茂：第48回応用物理学会講演会、第1巻 (1986) 26
- 4) S. Nakayama: Jpn. J. Appl. Phys., 26 (1987) 1198
- 5) S. Nakayama: Jpn. J. Appl. Phys., 26 (1987) 1935
- 6) 中山 茂：センサー技術 Vol.8 No.2 (1988) 57
- 7) 中山 茂：兵庫教育大学研究紀要 第8巻 (1988) 161
- 8) 中山 茂，他：日本産業技術教育学会近畿支部第4回研究会資料
- 9) 中山 茂：「木材用水分グレーダーの開発」研究会報告 77-86 (1990)
日本木材加工技術協会 関西支部
- 10) 中山 茂：日本産業技術教育学会近畿支部第5回研究会資料

輻射科学研究会資料

RS90-8

機械的に中心周波数を可変
できるMSWフィルタ

石川容平、西川敏夫、岡田剛和、
新村 悟、鎌土恭秀、金谷文夫

(株式会社 村田製作所)

1990年9月14日

1. はじめに

静磁波 (Magnetostatic Wave: MSW) フィルタは、1 ~ 20 GHz にわたる広い周波数範囲で動作することや、この周波数範囲で直接信号処理できる⁽¹⁾ ことから通信機器の性能を向上させることのできるキーコンポーネントになるデバイスとして期待されている。MSW フィルタを実用化するためには挿入損失の低減、高次モードの抑圧、小型化することが必要である。我々はパラレルストリップトランスデューサを用いた低損失の静磁波フィルタを報告しているが、実験用電磁石を用いているため大型となっている。⁽²⁾ また市販されているほとんどのYIG球フィルタの外形寸法は、35 × 35 × 35 mm 以上であり通信機のマイクロ波回路用のコンポーネント (たとえば、ドロップイン型やオンボード型) として応用していくにはさらに小型化する必要がある。

これらの理由から、我々は小型のMSWフィルタを開発した。我々が開発した小型MSWフィルタは、メイン磁石ユニットに補助の磁石ユニット (サブ磁石ユニット) を付加した構造を持つ。我々はこの構造をコンバインド磁石ユニットと呼ぶ。この構造によって、YIG素子に均一な磁場を印加することを可能としている。さらに、メインユニットにYIG素子に印加される磁場の分布を最適化するための調整ネジをもうけこのネジによって磁場分布の最適化を行い挿入損失の低減と高次モードの抑圧を実現した。中心周波数のチューニングは、チューニングネジによって実現しており中心周波数を変化させても同じ周波数特性を保持している。

このフィルタのチューニング周波数範囲は2.5 ~ 2.75 GHz であり、挿入損失3 dBで帯域幅20 MHz がえられ、高次モードの抑圧は40 dB程度を実現している。このMSWフィルタの外形寸法は、20 × 20 × 20 mm でYIG球フィルタの1/5程度の容積になった。

2. MSWフィルタの構造

このMSWフィルタの構造を、図-1に示す。コンバインド磁石ユニットはメイン磁石ユニットとサブ磁石ユニットから構成されている。メイン磁石ユニットは2つの四角いフェライト永久磁石と2つの調整ネジから成る。この2つのネジは金属ケース下部の対角線上に位置しており、これらのネジによって挿入損失の低減と高次モードの抑圧を実現している。YIG素子は銅板上に位置しており、この銅板はAg印刷されたアルミナ基板とハンダ付けされており、接地されている。

YIG素子は、他方の対角線上にあり2つの調整ネジとは直角の関係にある。サブ磁石ユニットは金属ケースとディスク状のフェライト永久磁石を取り付けたチューニングネジから成る。

このチューニングネジの出し入れによって、メイン磁石ユニットの磁石2と磁石3間の磁場強度を変化させている。

MSWフィルタの断面図を図-2に示す。印加磁場はYIG素子面に垂直に印加される。これにより、静磁前進体積波(MSFVW)の伝搬を可能としている。入出力トランスデューサは、厚み50 μ mの銅板で作製され、アルミナ基板上のストリップラインを介してSMAコネクタに接続される。トランスデューサとYIG素子間には厚み0.5mmの誘電体スペーサが挿入されている。SMAコネクタは着脱可能としてある。このMSWフィルタの寸法は、20 \times 20 \times 20mmである。

図-3にYIG素子とパラレルトランスデューサの位置関係を示す。入出力トランスデューサはYIG素子に対し、直角になるように配置されている。このMSWフィルタを構成している主な部品の寸法を表-1に示す。

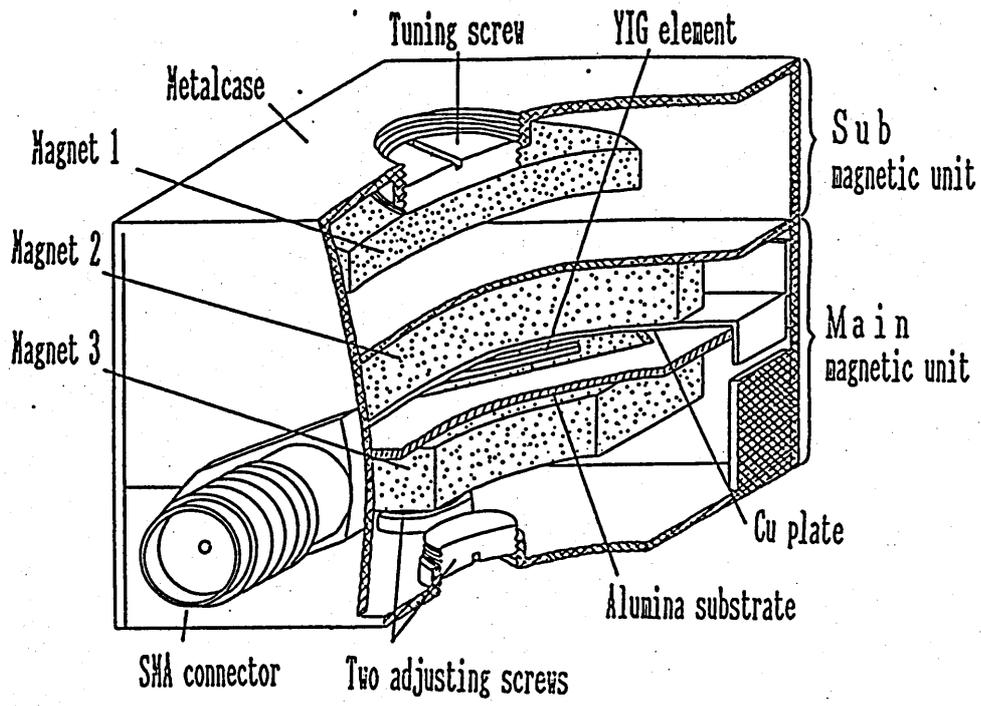


図-1 MSWフィルタの構造

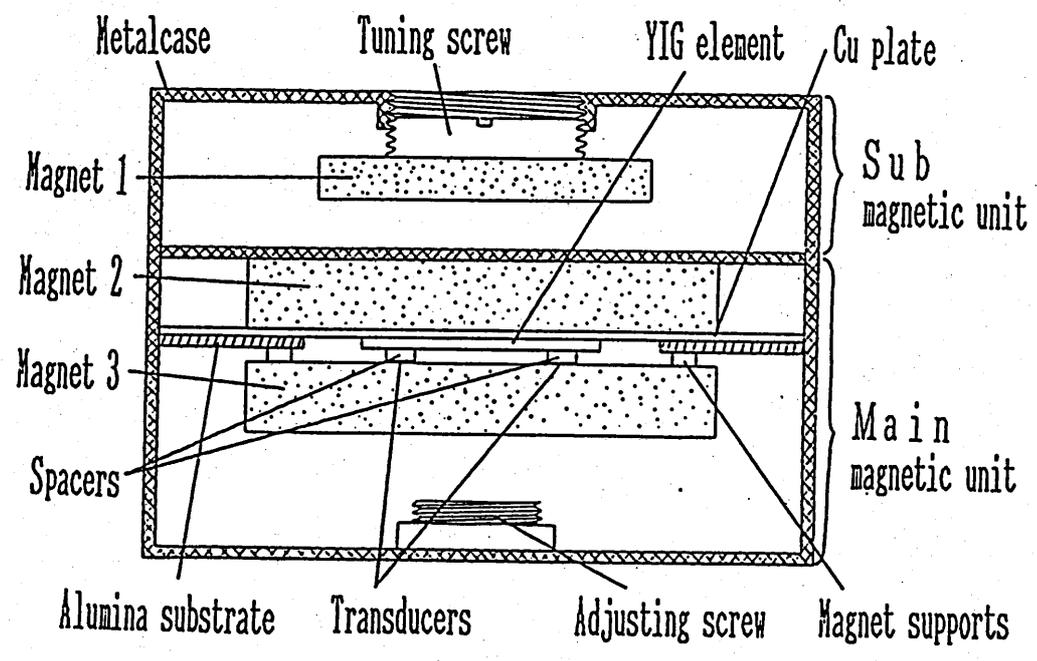


図-2 MSWフィルタの断面図

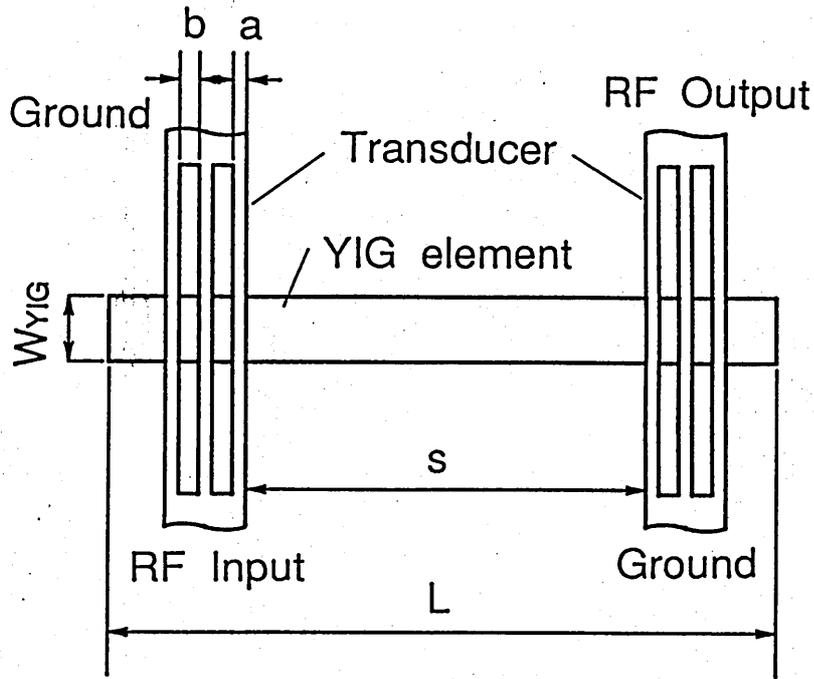


図-3 YIG素子とトランスデューサの関係

表-1 フィルタ構成部品の寸法

1. YIG素子	
幅 W_{YIG} (mm)	: 1
長さ L (mm)	: 10
YIGの厚み (μm)	: 113
GGGの厚み (μm)	: 500
2. トランスデューサ	
ストリップの本数 (本)	: 3
ストリップ幅 a (μm)	: 200
ストリップ間隔 b (μm)	: 30.0
トランスデューサ間距離 s (mm)	: 6
3. 磁石ユニット	
外形寸法 (mm)	: 20×20×20
磁石1の寸法 (mm)	: $\phi 14 \times 1.5$
磁石2と磁石3の寸法 (mm)	: 14×14×3.0
磁石2と磁石3の間隔 (mm)	: 1.3

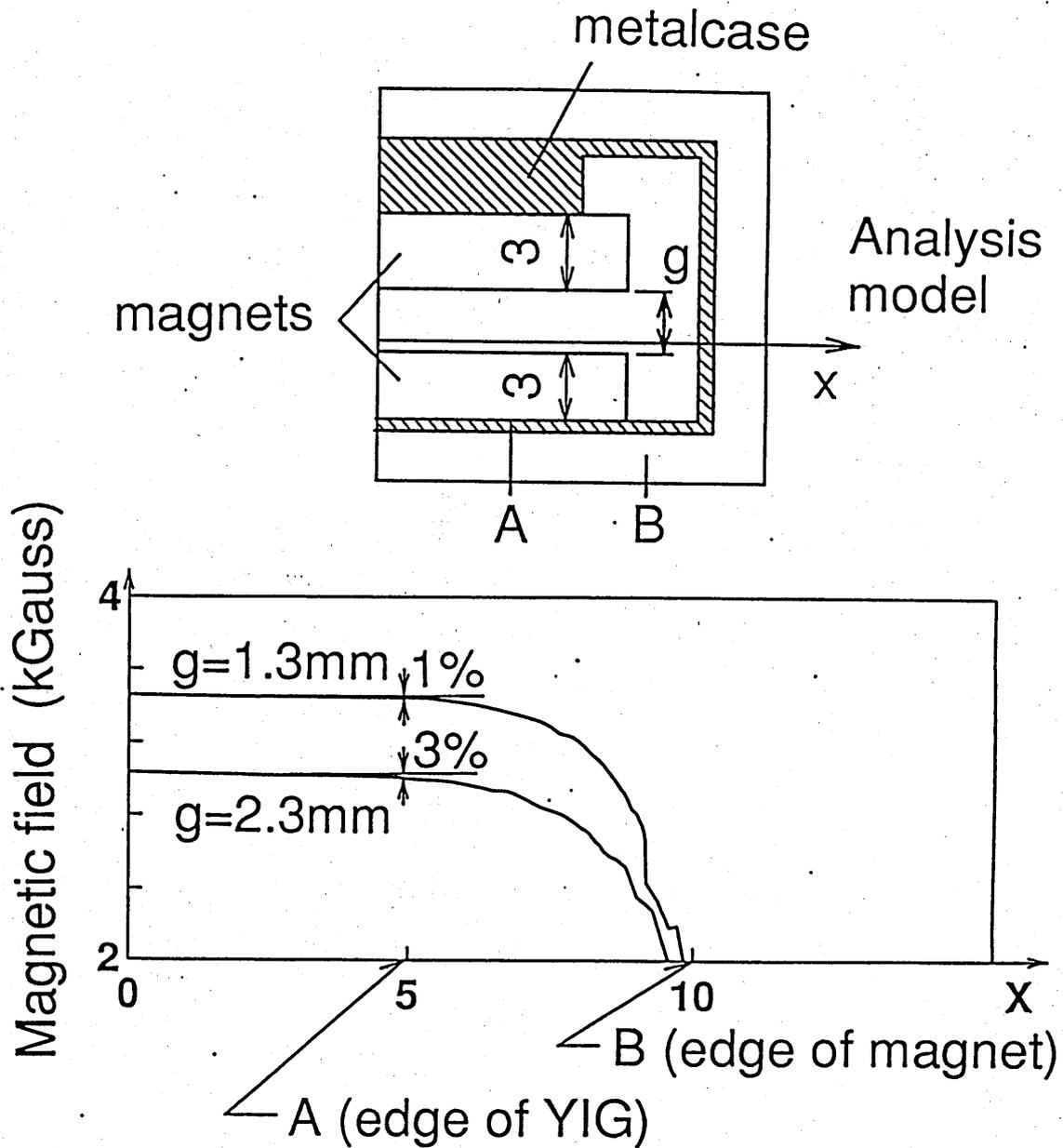
3. FEMによって計算した磁場分布

YIG素子に印加される磁場の分布は、有限要素法を用いた数値解析によって計算される。2次元の磁場はポアソン方程式で記述でき、この式を有限要素法により離散化しコンピュータを使って数値計算する。⁽⁴⁾

まず、金属ケース上下部に永久磁石を取り付けた磁石ユニットを考える。計算断面はYIG素子の位置する金属ケースの対角線である。計算するときには左右対称であるから右側のみを計算する。永久磁石間の磁場強度は上部永久磁石にチューニングネジを取り付け磁石間の間隔を変化させることで可変する。磁場の均一度は、図-4、5の点A（YIG素子端を表す）での磁場の減少度を計算することによって評価される。ここで磁場強度の基準点は、点O（YIG素子の中心）である。

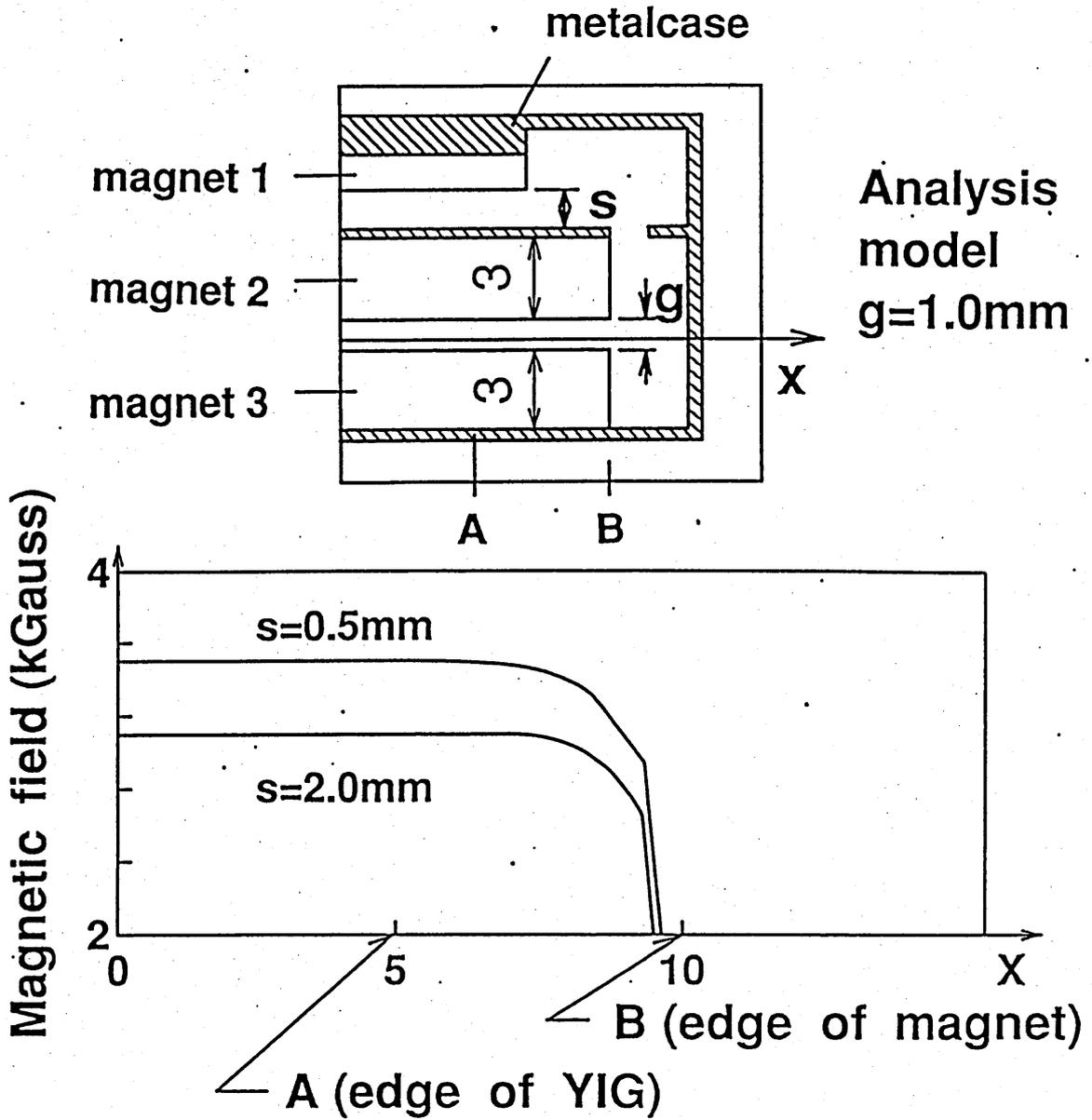
図-4にこの磁石ユニットの磁場分布を示す。磁場の減少度は $g = 1.3 \text{ mm}$ 、 2.3 mm でそれぞれ1%と3%である。ここで g は、磁石間の空隙である。1%と3%磁場減少度がフィルタの挿入損失にどのように影響するかを電磁石の上部磁極を加工しフィルタ特性を測定して評価した。1%の時5 dB、3%の時12 dBであった。一方、0%の時2 dBが得られた。このことからYIG素子へ印加する磁場の減少度は0%が好ましく、磁石間隔を変化させると磁場分布の減少度は大きくなり、フィルタの挿入損失は悪化する。したがって、減少度は0%かつ磁石間隔は一定のままである必要がある。そこで考案されたのがコンバインド磁石ユニットである。コンバインド磁石ユニットの磁場減少度の計算結果を図-5に示す。磁石2と3の間の距離 $g = 1.3 \text{ mm}$ とし $S = 0.5 \text{ mm}$ と 2.0 mm の磁場の強度の減少度は0%である。ここで S は磁石1と2の間の距離である。

これらの計算結果からコンバインド磁気ユニットは均一な磁場分



The distance from the center of metalcase (mm)

図-4 通常の磁石ユニットの磁場分布



The distance from the center of metalcase (mm)

図-5 コンバインド磁石ユニットの磁場分布

布を得るのに有効であることを示している。さらに磁場強度を変化させた時でさえこの均一度は保持されている。

4. デバイス特性

このMSWフィルタの周波数特性を図-6に示す。印加磁場分布は2つの調整ネジによって最適化されている。中心周波数2.5GHzで、挿入損失は通過帯域20MHzで3dBが得られた。中心周波数より300MHz離調した周波数での高次モードの抑圧度は40dBであった。

通過帯域の群遅延特性を図-7に示す。群遅延時間は通過帯域内で 32 ± 5 nsec. が得られている。図-6の周波数特性を逆フーリエ変換して得られた時間軸特性を図-8に示す。第1波の遅延時間は26 nsec. であり、TTE (Triple Transit Echo) は78 nsec. である。YIG素子の端からの反射波はない。TTEの抑圧度は-18 dBであった。TTEのような時間遅れのある波が、群遅延特性に影響を与えるため、TTEを含む時間軸での不要な信号は50 dB以上抑圧されていることが望ましい。

入出力電力特性を図-9に示す。1 dBコンプレッション点は、+9 dBmの入力電力の時であり、出力電力は、入力電力+11 dBmのときに飽和する。

図-10は、2.5~2.75 GHzの周波数範囲での周波数特性である。印加磁場の強度をチューニングネジによって調整し、それぞれの周波数特性と重ね書きしたものである。

今回、試作したフィルタの外観写真を図-11に示す。

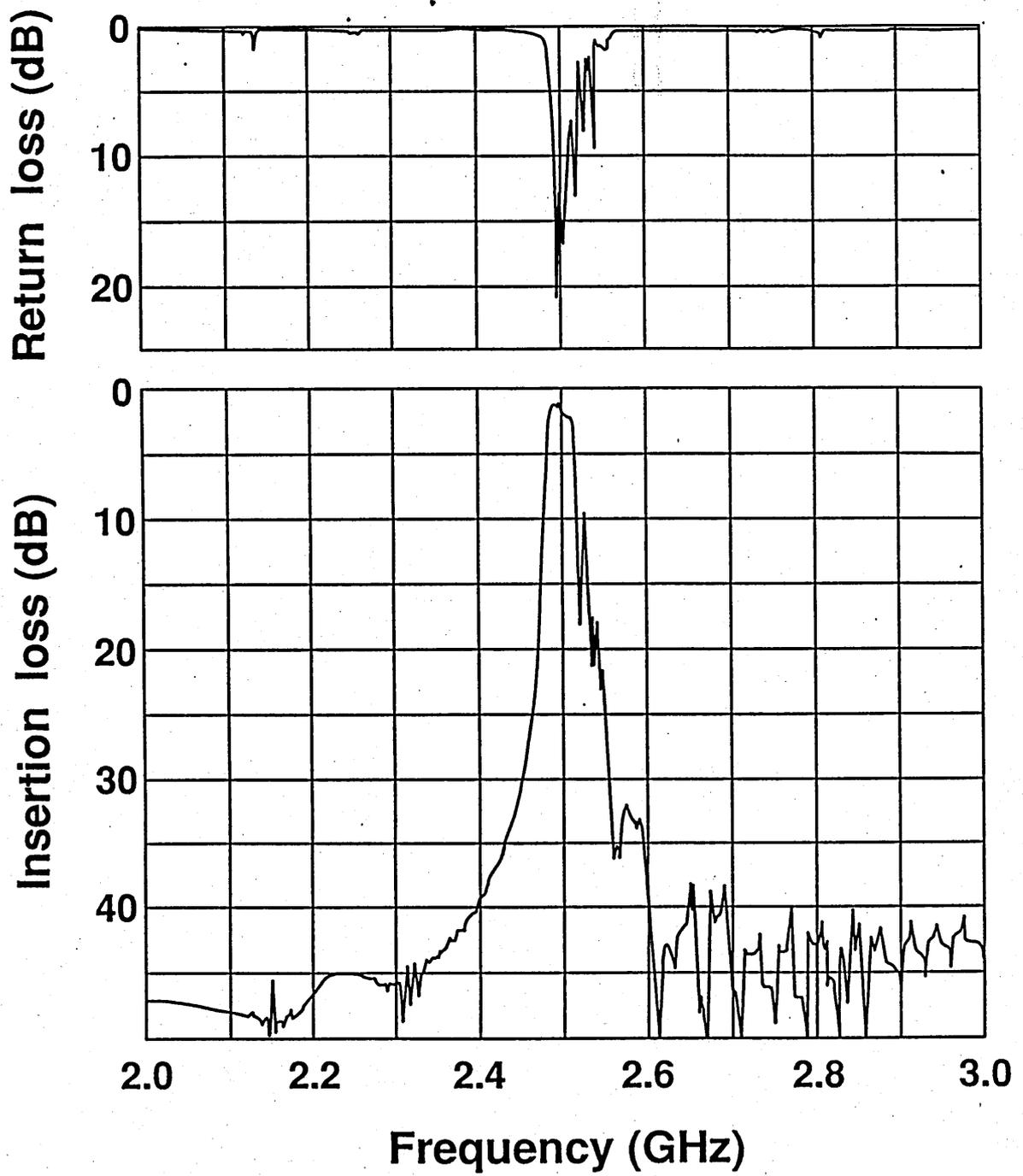
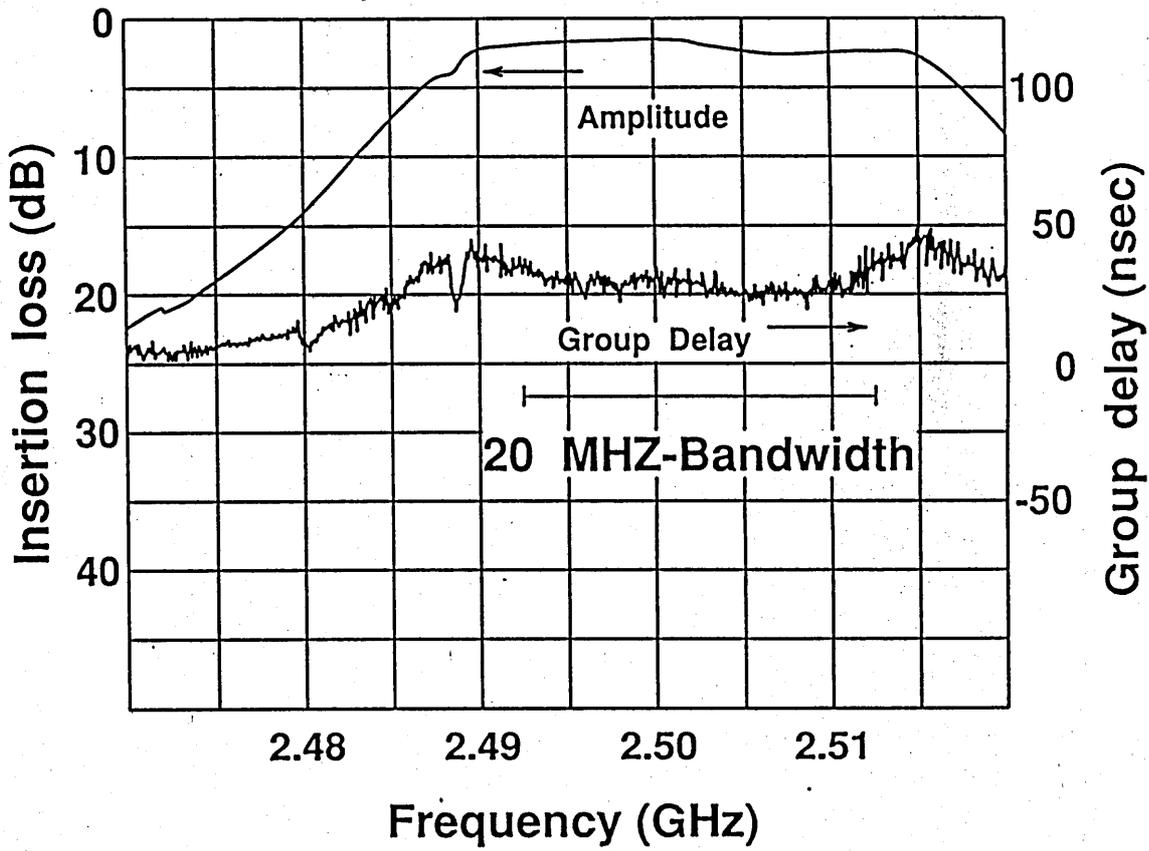
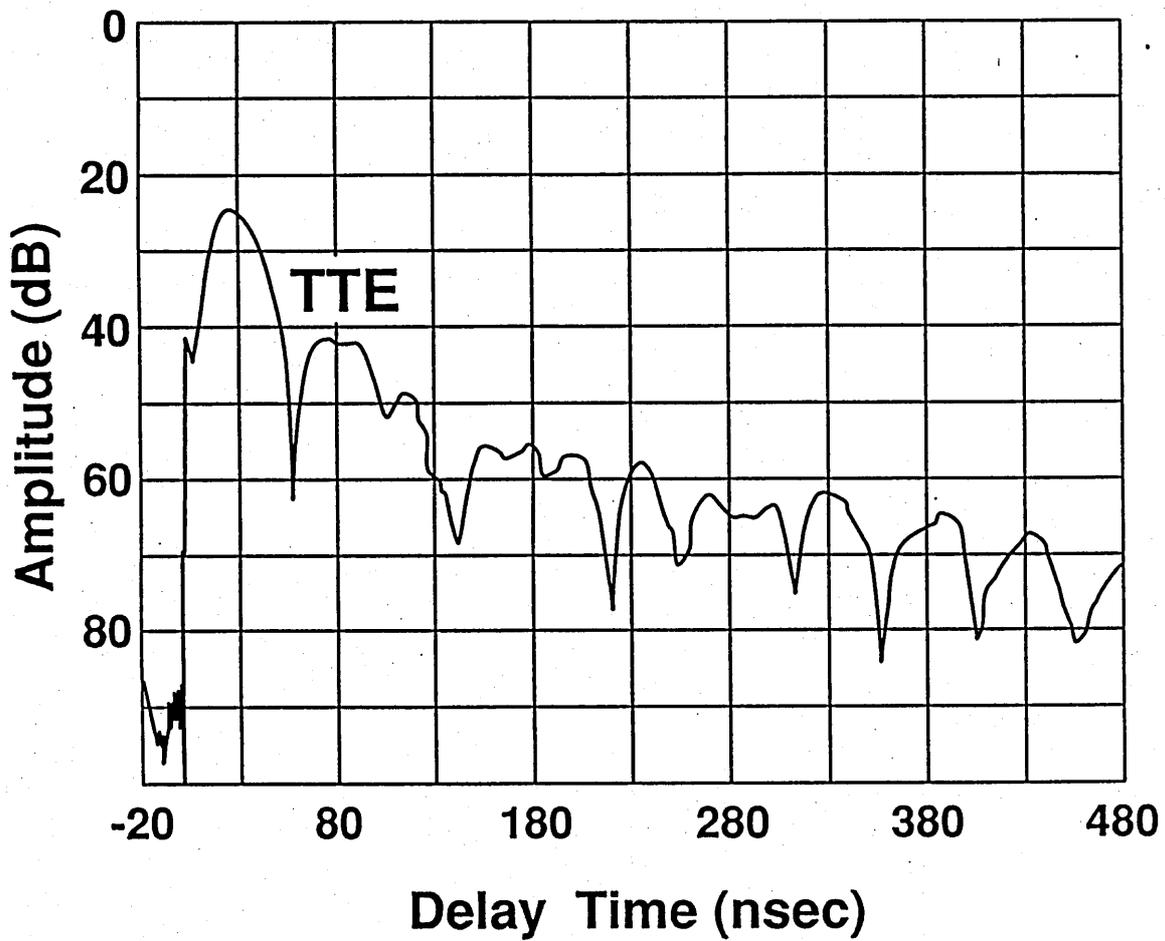


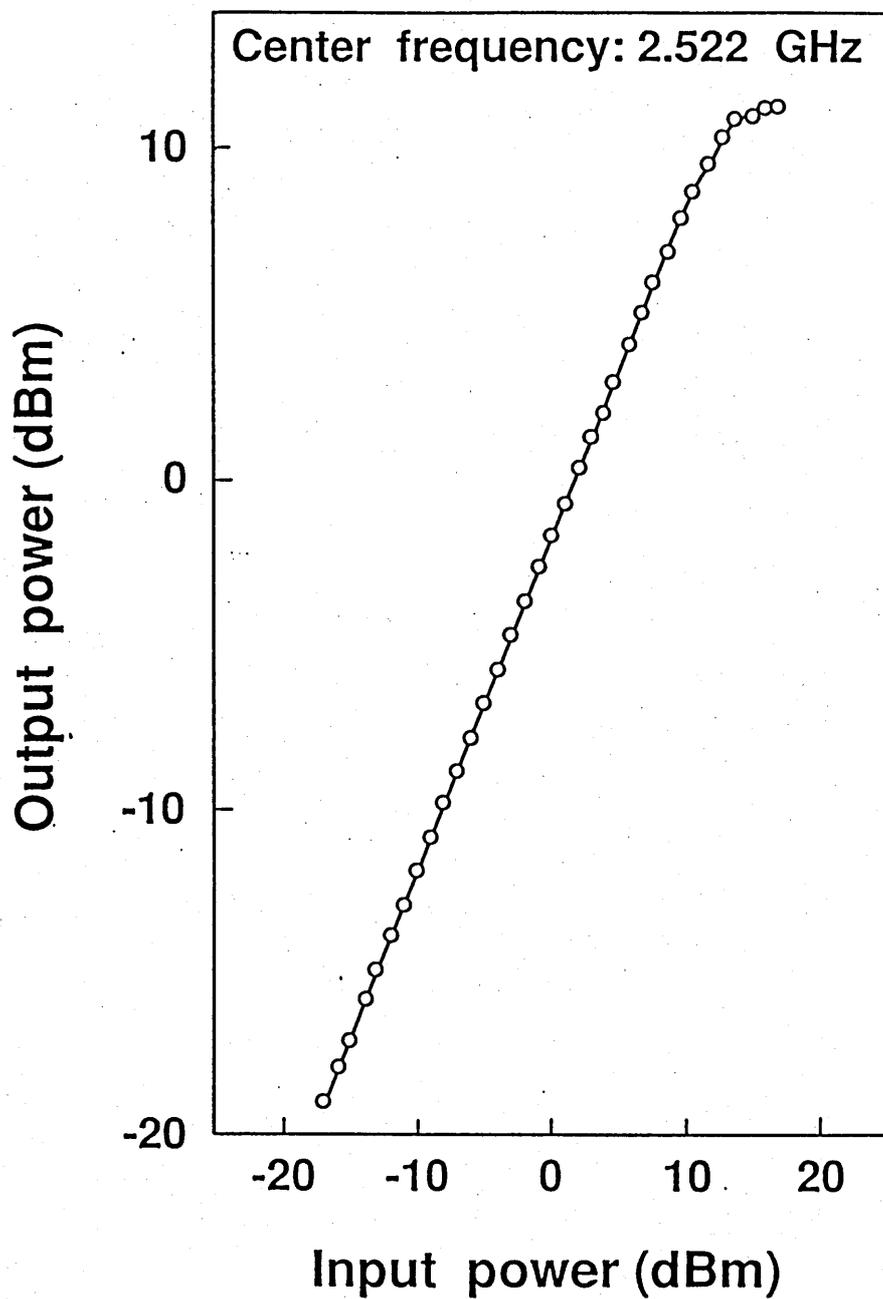
図-6 MSWフィルタの通過特性と反射特性



図一 7 群遅延と周波数の関係



図一 8 時間軸応答特性



図一 9 入出力電力特性

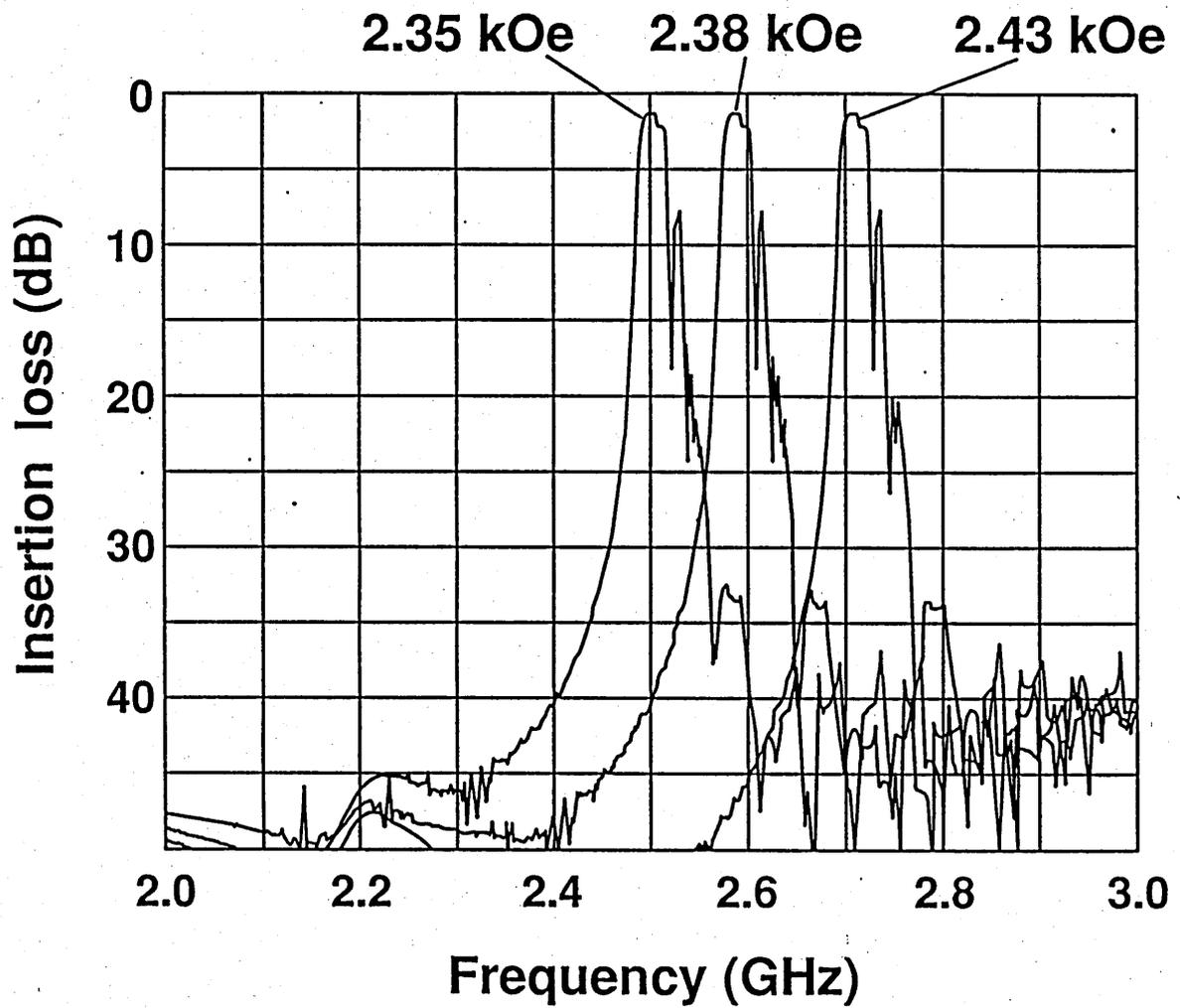


図-10 3つの違う磁場強度でのMSW
フィルタの通過特性

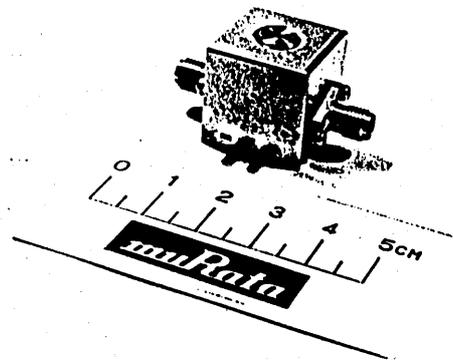


図-11 MSWフィルタの
外観写真

5. まとめ

我々は、YIG素子に磁場を印加するのに永久磁石を用い、 $20 \times 20 \times 20$ mmのMSWバンドパスフィルタを開発した。コンバインド磁石ユニットは均一な磁場分布を得るのに有効であり磁場強度が変化した時さえも、磁場の均一度は保持される。この理由によりチューニングネジによって中心周波数を可変した時でさえ、このMSWフィルタは、同じ周波数特性を保ったままである。

2つの調整ネジによって印加磁場分布を最適にすることによって、挿入損失は通過帯域20 MHzで3 dBが得られており、高次モードの抑圧度は40 dBが得られた。

このMSWフィルタは、小型であることと優れたフィルタ特性のため、高周波回路での信号処理に有用である。

謝辞 本研究を進める上で懇切なご指導をいただいた京都工芸繊維大学工学部 堤誠教授に感謝いたします。

参考文献

- (1) 内海 要三, 堤 誠, “静磁波(MSW)デバイスの動向”、テレビジョン学会誌, Vol. 38, No. 12, p.p. 1053~1062, (1984)
- (2) T. Nishikawa, K. Wakino, H. Tanaka, S. Shinmura and Y. Ishikawa, “A LOW-LOSS MAGNETOSTATIC WAVE FILTER USING PARALLEL STRIP TRANSDUCER”, 1989 IEEE MTT-S Digest, p. p. 153~156
- (3) Omniyig カタログ
- (4) 加川幸男, “電気電子のための有限要素法の実際”, オーム社, 昭57年

輻射科学研究会資料

RS90-9

レーザーの内部変調を利用した
光周波数変換

松島朋史 末田 正
(大阪大学 基礎工学部)

平成2年9月14日(金)
(於 株式会社 村田製作所)

1. まえがき

炭酸ガスレーザーは高効率、高出力であるため、計測、通信、医療、加工など広範囲な応用が考えられる。これらの応用に際して、レーザー光の周波数（波長）を精度良く、且つ広範囲にわたって可変できる周波数可変レーザーがしばしば要求される。特に、分光学および物質の種々の定数などの測定には有用である。

しかし、一般にレーザーは物質の固有なエネルギー準位内の遷移を利用しているため、遷移周波数は固定され、発振周波数は離散的なものとなっており、利得曲線によって決まる幅以上に発振周波数を変えることができない。

炭酸ガスレーザーの場合、発振スペクトル線は $9.6\mu\text{m}$ および $10.6\mu\text{m}$ 付近に数多く存在し、それぞれ、20 数本からなる P ブランチ、R ブランチに分けられる。そこで、このスペクトル線間の周波数を効率よく発生できる周波数可変炭酸ガスレーザーの実現が強く要望されている。

一般に周波数（波長）可変炭酸ガスレーザーは、レーザー共振器内に回折格子等の分散性媒質を挿入して特定の発振スペクトル線を選択するものと、利得曲線の幅内で共振器長を変えることにより、周波数を可変するものとに大別することができる。前者の場合は、離散的な発振波長（上述の各ブランチに相当）を選択するもので、その間隔は周波数に換算して約 55 GHz である。後者の場合は連続的に周波数を変えることができるが、その可変範囲は利得曲線の幅とレーザー共振器の縦モード周波数間隔によって制限される。縦モード間隔に

よる制限は、レーザー共振器長を短くするか、或はレーザー共振器内にモード選択素子を挿入することによって解決することができ、この場合には、周波数可変範囲はほぼ利得曲線の幅によって決まる。

しかし、通常の炭酸ガスレーザーでは利得曲線の幅は高々 50 MHz 程度に過ぎない。利得曲線の幅を拡げ、隣合う曲線を重なり合うようにする方法としては、衝突広がりを利用した高圧力動作（15 気圧以上）がある。しかし、高圧力でレーザー媒質を連続的に励起することは困難で、このような高圧力動作はパルス発振に限られる。

比較的高い圧力で連続動作が可能な炭酸ガスレーザーとしては導波形のものがある。この場合、管径を細くすることが出来るため、通常のレーザーに比べて高い圧力においてグロー放電の維持が容易で、また壁による冷却効果が効果的となり、高圧力での連続動作が可能となる。しかし、このレーザーにおいても連続動作が可能な圧力は 40 kPa 付近までで、周波数可変レーザーとして用いた場合、その周波数可変範囲は 1 GHz 程度となる。

そこで、さらに周波数可変範囲を拡大する方法として、レーザー光を変調して、側波帯を発生させ、その成分の一つをファブリペローエタロン等のフィルターによって取り出すことが考えられる。この方法の利点としては、連続発振動作のレーザーを用いるため、周波数および出力に対して、安定かつ再現性があることが挙げられる。この場合、変調には、高い周波数変調を可能にすることから電気光学効果を利用するのが妥当である。一方問題点としては、広い周波数可変範囲と大きな周波

数変換出力を得るためには、広帯域・高効率な変調器が要求されることである。

しかし、電気光学効果を用いる場合、同じ変調度を得るための変調電圧は波長に比例するため、炭酸ガスレーザー光のような長波長帯において、十分な周波数変換出力を得るには非常に大きな変調電圧が必要であり、何らかの工夫が必要となる。

さて、レーザー光の変調方式には、変調器を置く位置によって外部変調法と内部変調法とがある。外部変調法ではレーザー共振器の外部に変調器を置くため、大きな周波数変換出力を得るには、前述のように高い変調電圧が必要となる。内部変調法ではレーザー共振器内に変調器を置き、強い内部光を変調するため、外部変調法に比べて、同じ変調電圧で大きな側波帯成分が得られるという利点がある。その反面、出力の取り出しには工夫が必要となる。

本論文は、高効率周波数可変炭酸ガスレーザーの構成について、電気光学変調器をレーザー共振器内に置く内部変調方式を取入れ、出力ミラーとして周波数可変フィルターを用いる方法を提案し、その動作解析及び試作・実験結果について述べている。

解析では、レーザーの内部光強度に対する周波数変換出力、および変調周波数に対する周波数変換出力特性を求めた。実験では、VHF帯およびUHF光変調器を試作し、これらを用いて周波数可変レーザーを構成し、変調周波数150MHz、および1.45GHzの固定周波数で周波数変換実験を行い、動作確認を行った。

2. 動作原理及び解析

2.1 動作原理

内部変調法を利用して、周波数可変炭酸ガスレーザーを構成する場合、レーザー共振器内に発生した側波帯成分の一つをいかに効率よく、レーザー共振器から取り出すことができるかが重要なポイントとなる。Fig.1(a)に示すように、通常の部分透過ミラーを用いたレーザー共振器を構成して内部変調を行なうと、搬送波と複数の側波帯成分が出力光として取り出される。また、出力ミラーの透過率が大きくできないので、共振器内で生成された側波帯成分の一部分だけが周波数変換出力となる。

そこで、Fig.1(b)に示すように、出力ミラーとして、周波数選択性のある周波数可変フィルターを用いてレーザー共振器を構成することを考える。出力ミラーとしては、ファブリーペローエタロンの一方のミラーに圧電素子を取り付けた周波数可変干渉フィルターを想定している。この構成のフィルターは、圧電素子に印加する電圧によってファブリーペローエタロンのミラー間隔が変わり、搬送波に対しては高い反射率をもたせつつ、特定の側波帯に対して高い透過率をもたせることができる。これより、搬送波および他の側波帯成分は反射してレーザー媒質側に戻り、側波帯成分の一つだけを効率よくレーザー共振器から取り出すことができる。

この方法は、3枚のミラーでレーザー共振器を構成して、内部変調を行っているのので、内部変調3ミラー方式と呼ぶことにする。また、以後、着目した側波帯成分のレーザー光を周波数変換出力と呼ぶ。

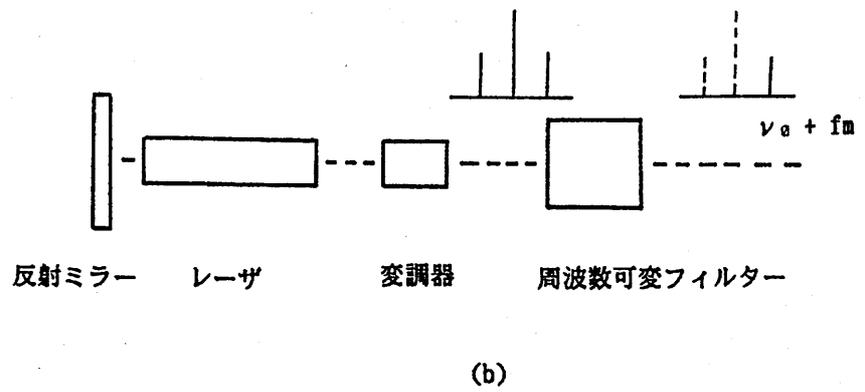
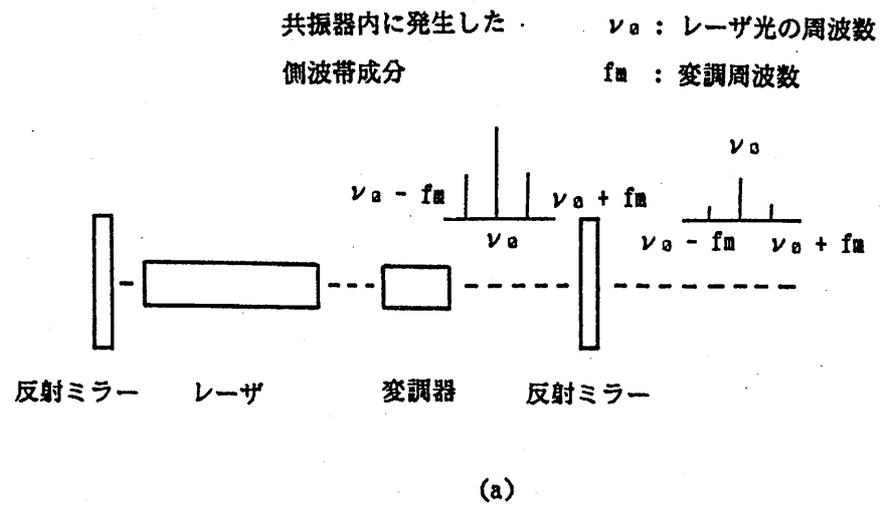


Figure. 1 通常の内部変調方式(a)と出力ミラーに周波数可変フィルターを用いた本方式の内部変調方式(b)

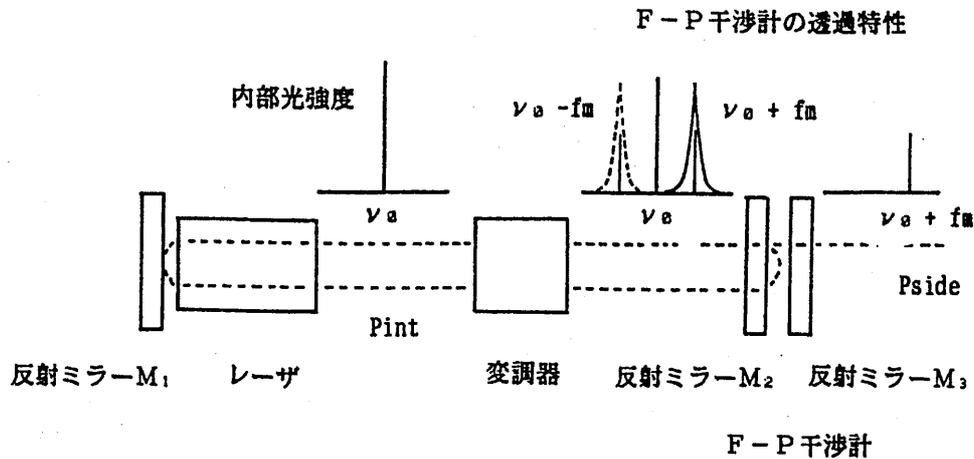


Figure. 2 内部変調3ミラー方式の原理図

この方式の動作原理図をFig.2 に示す。レーザー共振器はミラー M1, M2, 及び M3 で構成されている。ミラー M3 には圧電素子が取り付けられており、ミラー M2, M3 で周波数可変干渉フィルタとなっている。変調器はレーザー媒質とともにミラー M1, M2 間に挿入されている。この変調器によって、内部光を変調し側波帯成分 ($\nu_0 \pm n f_m$) を発生させる。 ν_0 は搬送波光周波数、 f_m は変調周波数、 n は整数である。今簡単のために、 $n = 1$ とすると、側波帯成分の周波数は $\nu_0 \pm f_m$ となる。そこで、フィルターの透過周波数が $\nu_0 + f_m$ (或は $\nu_0 - f_m$) になるように圧電素子に直流電圧を印加し同調をとれば、周波数 $\nu_0 + f_m$ (或は $\nu_0 - f_m$) の側波帯成分だけが周波数変換出力として取り出される。

周波数変換出力以外の周波数成分はフィルターによって反射され、レーザー共振器に戻る。特に、反射された搬送波は、再び変調され側波帯成分の

出力に寄与する。変換出力光の周波数は、変調周波数とフィルターの透過周波数を、同時に連動して変化させることにより変えることができる。周波数可変範囲は変調器の帯域によって決まる。

2.2 動作解析

一般に、内部変調によってレーザー共振器内に発生する側波帯成分は内部光強度に大きく依存する。また、変調周波数がレーザー共振器の縦モード周波数の整数倍付近では、側波帯成分が増大することが報告されている。そこで、内部変調3ミラー方式における内部光強度と周波数変換出力および変調周波数に対する周波数変換出力特性を求め

2.2.1 内部光強度と周波数変換出力

炭酸ガスレーザーのよう均質なレーザー媒質を用いたレーザー共振器内の内部光強度については Rigrod によって次式で与えられている¹⁾。

$$P_{int} = I_s A \frac{\sqrt{1-\alpha_1}}{(\sqrt{1-\alpha_1} + \sqrt{1-\alpha_2}) \{1 - \sqrt{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\}} \quad (1)$$

$$\times \{g_0 L + \ln \sqrt{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\}$$

ここで、 I_s は飽和パラメーター、 A はレーザービームの断面積、 g_0 は小信号利得、 L はレーザー媒質長、 α_1, α_2 はレーザー媒質からみた反射ミラー側の損失を表す。この(1)式を Fig.2 に示した内部変調3ミラー方式に適用する場合、 α_1, α_2 は次式で表される。

$$\alpha_1 = \alpha'_1, \quad (2)$$

$$\alpha_2 = \alpha'_2 + T_c + \{1 - J_0^2(\delta)\} \quad (3)$$

ただし、 α'_1, α'_2 は光学系の避けられない損失で、ミラーの反射損失、変調素子の回折損失、及び透過損失等である。 T_c は搬送波に対するフィルターの透過係数、 δ は変調器を一度通過したときに得られる位相変調指数である。また、変調は小振幅で行い、しかも変調周波数は十分高く、変調によって発生した側波帯成分はレーザーの利得曲線の外にあるものとする。 $J_0(\delta)$ は0次のベッセル関数である。フィルターから取り出される周波数変換出力 P_{cov} は次式で表される。

$$P_{cov} = P_{int} \cdot |J_n(\delta)|^2 \cdot T(nf) \quad (4)$$

$J_n(\delta)$ は n 次の第1種ベッセル関数、 $T(nf)$ は n 次の側波帯周波数 ($\nu_0 \pm nf_n$) に対するフィルターの透過係数である。同様に搬送波出力 P_c は、

$$P_c = P_{int} \cdot |J_0^2(\delta)|^2 \cdot T_c \quad (5)$$

となる。 T_c は搬送波に対する透過係数である。ここで、(1)式において

$$\gamma = g_0 L + \ln \sqrt{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \quad (6)$$

とおく。 γ はレーザーの利得と共振器内の損失の差を表している。 γ をパラメーターとして、位相変調指数 δ に対する1次の周波数変換出力、及び内部光強度の概形を Fig.3(a), Fig.3(b) に示す。Fig.3(a) より明らかなように、 δ が小さい場合、 δ の増加にともなって周波数変換出力も増大する。しかし、さらに δ を増加すると、 δ のある値において周波数変換出力は最大値をとり、それ以上 δ を増すと周波数変換出力は反対に減少し、最後には発振は停止する。これは Fig.3(b) に示すように δ が増すと、搬送波成分が側波帯成分に変換されるため、内部光強度が減少するためである。これらのことから、周波数変換出力が最大になる δ_{max} が存在する。さらに、 γ が大きい場合、周波数変換出力は増大し、発振停止点の δ の値及び δ_{max} も大きくなることを示している。逆に γ が小さい場合は発振停止点の δ の値が小さくなり、大きな変調を行うことができず、周波数変換出力も低下する。Fig.4 は、レーザーの利得をパラメーターとして、変調指数と周波数変換出力の関係の

一例を示したものである。これから分かるように、利得がある程大きくなると、利得を高くするだけで変調指数を大きくせずに周波数変換出力を増大させることができる。

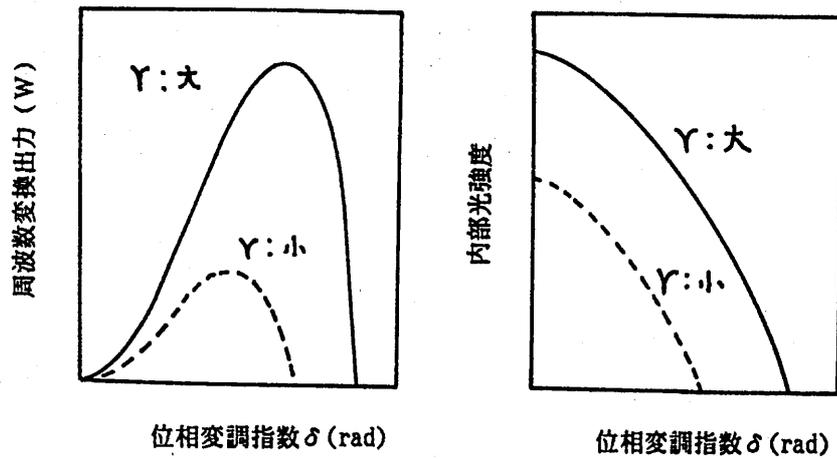


Figure. 3 γ に対する位相変調指数と周波数変換出力及び内部光強度の関係

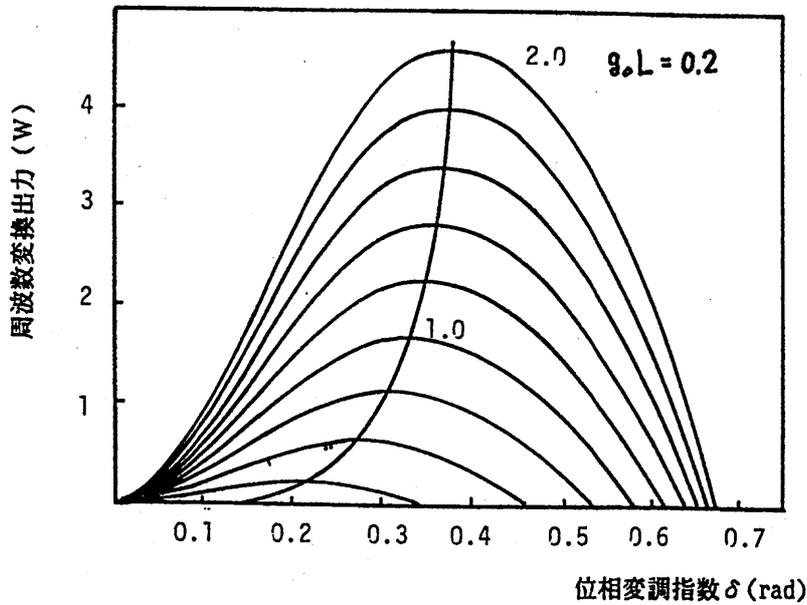


Figure. 4 レーザの利得をパラメータとした位相変調指数と周波数変換出力の関係

2.2.2 変調周波数に対する周波数変換出力特性

周波数変換出力特性として、変調周波数に対する側波帯成分と搬送波成分の出力比を求める。ここではW.R.Lee等²⁾が行った解析方法を用いた。この解析に於いては、位相変調指数 δ は小さいものとし、高次の側波帯は1次の側波帯に比べて小さく無視できるものとする。また内部に挿入する変調素子は十分薄く、変調素子を光が通過する間に変調波の位相は変化しないものとする。解析に用いたモデルを Fig.5(a), (b) に示す。Fig.5 (a)

は変調素子をF-P干渉計側に、fig.7(b)は反射ミラー側に置いた場合を示す。レーザ共振器内をレーザ媒質領域(領域1)とレーザ媒質以外の領域(領域2)に分け、それぞれの領域に於ける搬送波及び側波帯の伝搬常数を K_c, K_s (領域1), k_c, k_s (領域2) とする。領域1の長さを L_1 , 領域1から変調素子までを L_2 , 変調素子からF-P干渉計または反射ミラーまでを L_3 とする。Fig.5(a) および Fig.5(b) の場合における側波帯成分 E_s と搬送波成分 E_c の出力比は式(7),(8)となる。

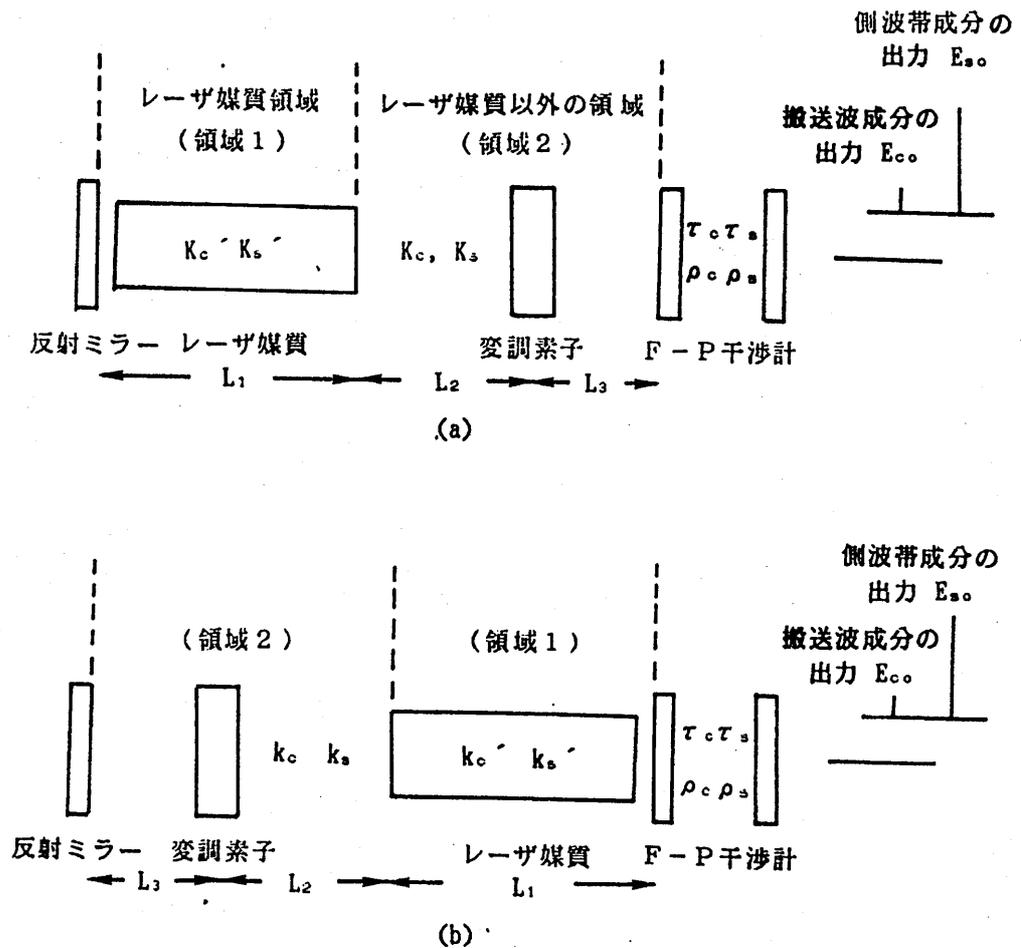


Figure 5(a),(b) 解析に用いたモデル

$$\frac{E_{s0}}{E_{c0}} = \frac{\tau_s}{\tau_c} \frac{J_1(\delta)}{J_2(\delta)} \exp\{-j(k_s - k_c)L_3\} \times \frac{1 + \exp[-2j\{(k_s' - k_c')L_1 + (k_s - k_c)L_2\}]}{1 - (\rho_s/\rho_c) \exp[-2j\{(k_s' - k_c')L_1 + (k_s - k_c) + (k_s - k_c)L_3\}]} \quad (7)$$

$$\frac{E_{s0}}{E_{c0}} = \frac{\tau_s}{\tau_c} \frac{J_1(\delta)}{J_2(\delta)} \exp\{-j[(k_s - k_c)L_1 + (k_s - k_c)L_2]\} \times \frac{1 + \exp[-2j(k_s - k_c)L_3]}{1 - (\rho_s/\rho_c) \exp[-2j\{(k_s' - k_c')L_1 + (k_s - k_c) + (k_s - k_c)L_3\}]} \quad (8)$$

ここで、 τ_s 、 τ_c 、および ρ_s 、 ρ_c は、それぞれF-P干渉計の複素振幅透過係数および反射係数、 L_d は干渉計のミラー間隔、 κ はミラーの損失で

$$\begin{aligned} \exp(-\Gamma) &= \rho_2 \rho_3 \exp(-2\kappa) \\ \theta_0 &= 2\pi f_0 L_d / C - (1/2) \arg(\rho_2 \rho_3) \\ \theta_n &= 2\pi f_n L_d / C \end{aligned}$$

とおけば、

(τ_s/τ_c) 、 (ρ_s/ρ_c) は次式で表される。

$$\frac{\tau_s}{\tau_c} = \exp(-j\theta_n) \frac{1 - \exp(-\Gamma - j\theta_0)}{1 - \exp\{-\Gamma - j(2\theta_0 + 2\theta_n)\}} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_s}{\rho_c} &= \frac{[1 - \exp(-\Gamma - 2j\theta_0)]}{[1 - \exp\{-\Gamma - 2j(\theta_0 + \theta_n)\}]} \\ &\times \frac{[1 - (1/R_2) \exp\{-\Gamma - 2j(\theta_0 + \theta_n)\}]}{[1 - (1/R_2) \exp(-\Gamma - 2j\theta_0)]} \quad (10) \end{aligned}$$

また $k_s' - k_c'$ は領域1での側波帯と搬送波の伝搬常数の差を示し、レーザが利得曲線の中心周波数で発振している場合、次式で表される。

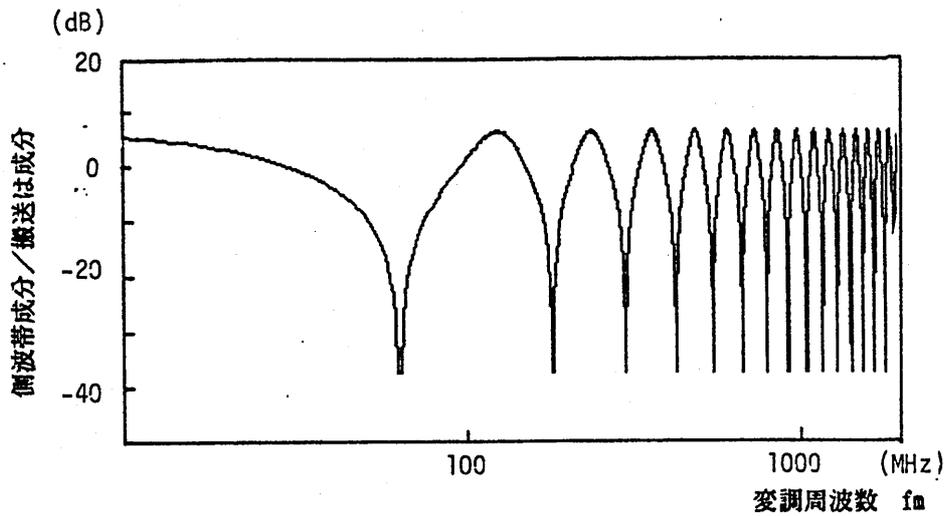
$$k_s - k_c = \frac{2\pi f_n}{C} + \frac{\alpha f_r}{\pi B (1 + 4f_n^2/B^2)} (1 - j2f_n/B) \quad (11)$$

ここで、 f_r はレーザのモード周波数($C/2L$)、 f_n は変調周波数、 α は共振器一巡の損失、 B は利得曲線幅である。

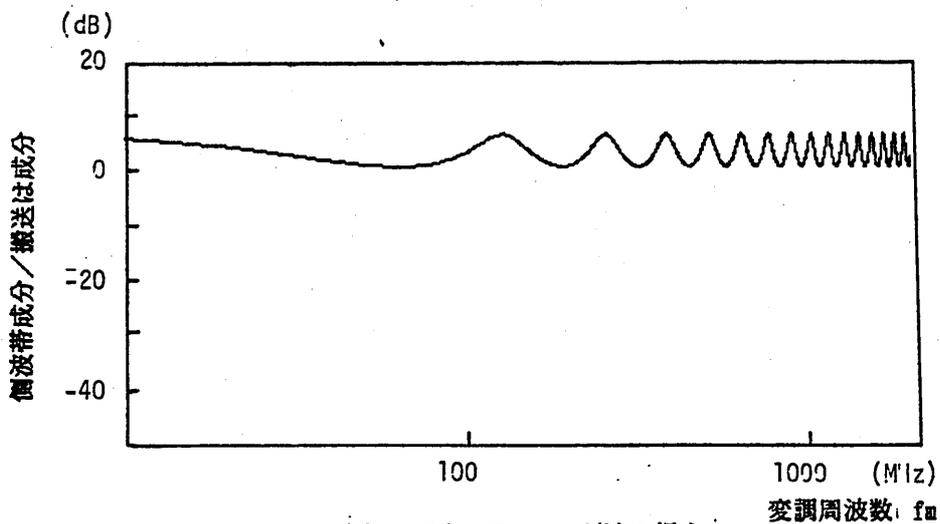
Fig.6(a),(b)は変調周波数に対する側波帯成分と搬送波成分の出力比を式(7)-(8)より求めた一例を示したものである。Fig.6(a)はFig.5(a)、

Fig.6(b)はFig.5(b)のモデルの場合である。但し、 (τ_s/τ_c) 、 (ρ_s/ρ_c) の値はF-P干渉計のミラー間隔 L_d を調整することにより、変調周波数に対して常に一定であるとする。この結果、Fig.5(b)の場合、Fig.5(a)の場合に比べて出力比の変調周波数に対して変化の割合が小さい。これは、変調器を反射ミラー側に置くことにより、変調器により変調された光波がレーザ共振器を一

逐し、再び変調される場合、変調電界の位相のずれによる影響が少ないためである。



(a) モデル Figure 5(a)の場合



(b) モデル Figure 5(b)の場合

Figure 6(a),6(b) 変調周波数に対する側波帯成分と搬送は成分の出力比
 $(\tau_s / \tau_c) = 0.34, (\rho_s / \rho_c) = 0.32, \alpha = 0.2, L_1 = 1m, L_2 = 0.2m$
 $L_3 = 0, B = 100MHz, \Gamma = 0.03.$

3. 周波数変換実験

前節で述べた新しい内部変調方式周波数可変レーザーの動作を確かめるため、UHF帯およびVHF帯光変調器を試作し、これらを用いて周波数可変炭酸ガスレーザーを構成し、 $10.6\mu\text{m}$ 光の周波数変換実験を行った。

3.1 VHF帯周波数変換実験

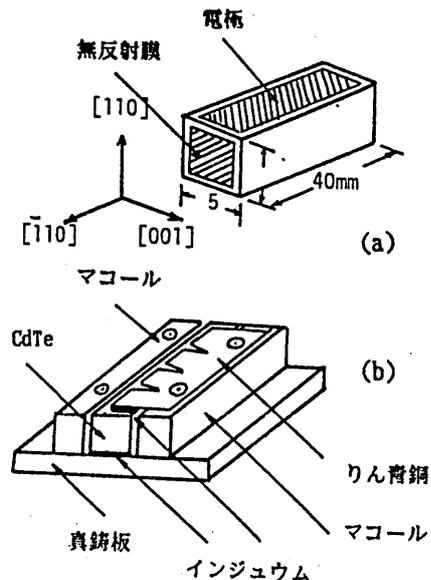
実験装置の構成をFig.7に示す。レーザ共振器は反射ミラー M_1 (平面), M_1' (曲率半径 70 cm), 部分反射ミラー M_2 (平面, 95% 反射), 及び M_3 (曲率 1 m, 95% 反射) で構成されている。ミラー M_1' はレーザ共振器を折り返し構成するために用いている。これによって変調素子 (CdTe結晶) に入射する光ビームの径を細くして回折損失を少なくすると共に、変調器を反射ミラー側に置くFig.5(b)の構成にするためである。

周波数可変干渉フィルターはミラー M_2, M_3 によって構成されている。ただし、Fig. 2 の原理図とは異なり、レーザ媒質にたいして変調器と反対側に取り付けられている。このフィルターの透過周波数は、 M_3 に付けられた圧電素子に印加する直流電圧を変化させることにより変えることができる。ミラー間隔はほぼ 10 cmである。変調器はミラー M_1 にできるだけ近付けて取り付けられている。フィルターから取り出される周波数変換出力のスペクトルは掃引形ファブリ・ペロー干渉計, Au:Ge 検出器及びオシロスコープを用いて観測される。またレーザーと掃引形干渉計とが干渉しないように両者間には 4 分の 1 波長板と偏光子が挿入されている。

レーザーとしては導波形式のものを用いた。そ

の理由は、通常のレーザーに比べて利得、飽和強度とも大きく、内部変調を行うのに適しているからである。実験に用いたレーザーの構造を Fig.8 に示す。導波路は内径 $3.2\text{mm}\phi$, 外径 $5.2\text{mm}\phi$, 長さ 380 mm のアルミナ管が用いられている。これに3カ所の穴があけられ、その位置にフランジが取り付けられている。またフランジはガスの出入口と電極を兼ねている。導波路の一方の端面には、ZnSe のブルスター窓が取り付けられている。冷却はアルミナ管に取り付けたガラス管に水を流して行われた。

また変調素子としては CdTe 結晶 ($5\times 5\times 40\text{mm}$) を用いた。Fig.9(a) は CdTe の結晶軸及び寸法を示す。CdTe 結晶の $(\bar{1}10)$ 面及び (110) 面は無反射コーティングを、 (110) 及び $(\bar{1}\bar{1}0)$ 面には金蒸着の電極が施こされている。Fig.9(b) は変調器の構造を示す。電極の一方はインジュウムと燐青銅板で、他の一方はインジュウムと真鍮板で押さえられている。また両側面はマコール (セラミクス) で挟み支持されている。



- 10 - Figure. 9 VHF帯変調周波数による周波数変換実験に用いたCdTe結晶(a)及び変調器(b)

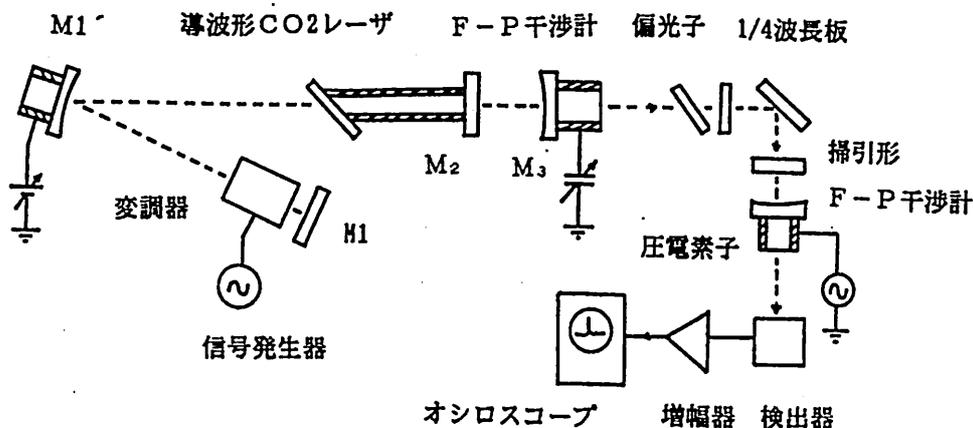


Figure. 7 VHF帯変調周波数による周波数変換実験装置

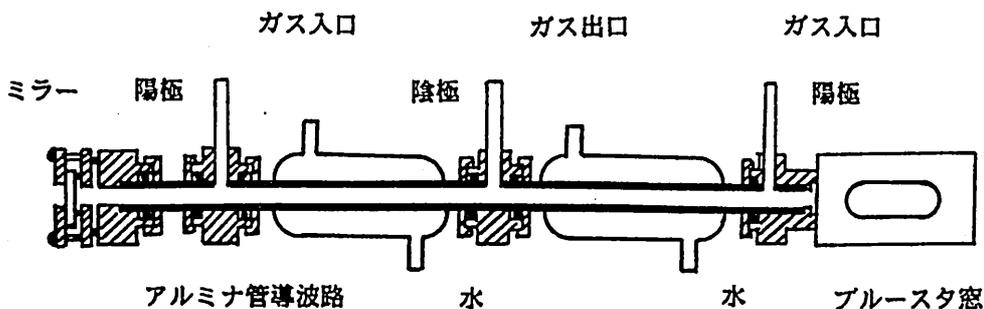


Figure. 8 導波形CO2レーザの構造

Fig.10 は変調電力および位相変調指数に対する周波数変換出力を示したものである。なお、変調電力による結晶の加熱を防ぐため、変調電源はパルス動作させている。丸印は測定値、実線は実験で得られた各パラメーターから算出した計算値である。

この結果から分かるように、変調周波数 150 MHz、変調電力 53 W において、最大周波数変換出力 1.5 W が得られた。

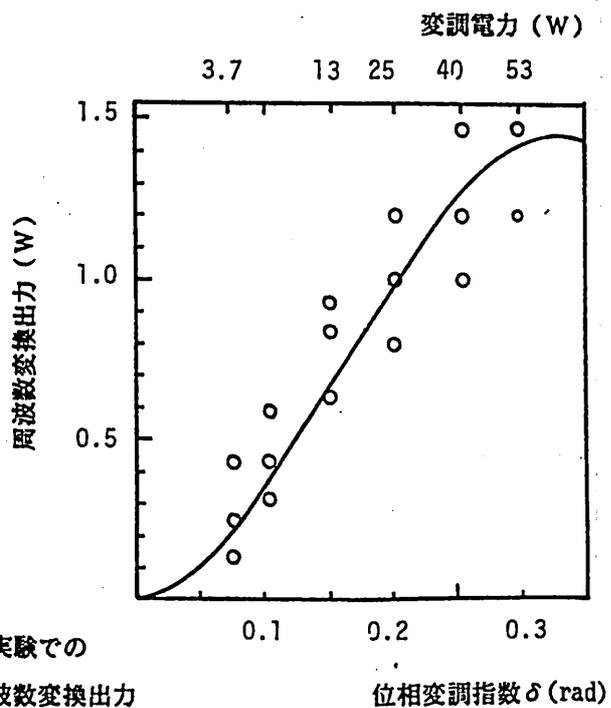
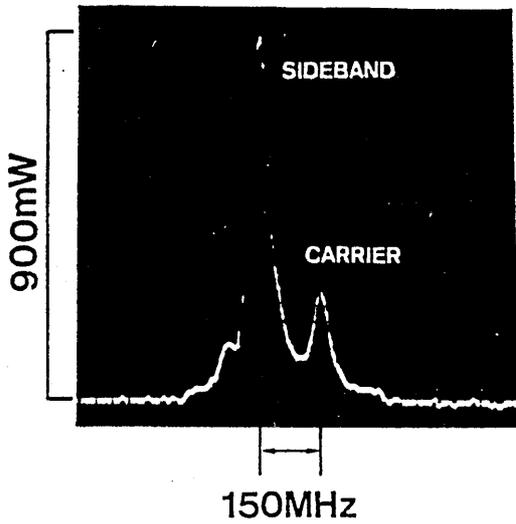


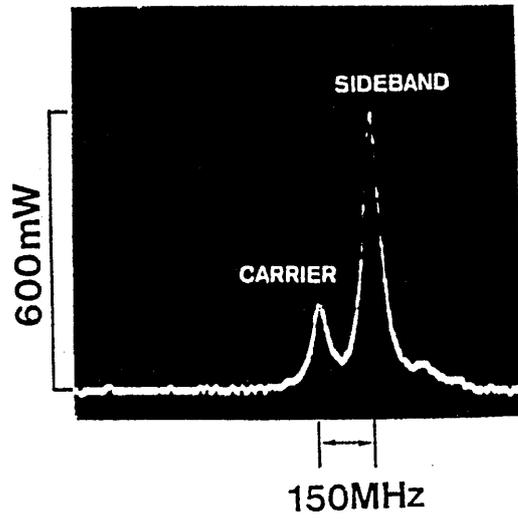
Figure. 10 VHF帯変調周波数による周波数変換実験での位相変調指数及び変調電力に対する周波数変換出力

位相変調指数 δ (rad)



(a)

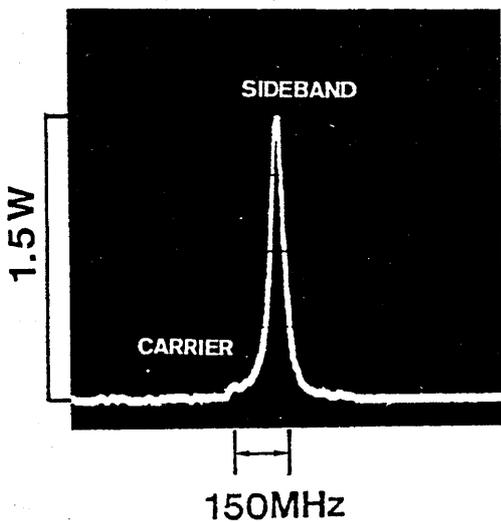
変調電力 13W



(b)

変調電力 13W

Figure. 11 VHF帯変調周波数(150MHz)による周波数変換スペクトル



(c)

変調電力 53W

Fig.11(a),(b),(c)は、実験で得られた周波数変換出力光のスペクトルの例を示す。fig.11(a),(b)はレーザ共振器から取り出された両側波帯の一つを、それぞれ示したものである。この場合、変調電力13Wにおいて、それぞれの側波帯出力は0.6W、及び0.9W、搬送波成分は0.2Wである。Fig.11(c)は、変調電力53Wにおいて最大周波数変換出力1.5Wを得た時のスペクトルを示す。Fig.12はミラーM₁の圧電素子に印加した直流電圧を連続的に変化させたときの出力光スペクトルの変化を示している。1次の上側波帯成分から搬送波成分、さらに1次の下側波帯成分の出力へと変化していく様子がよく分かる。

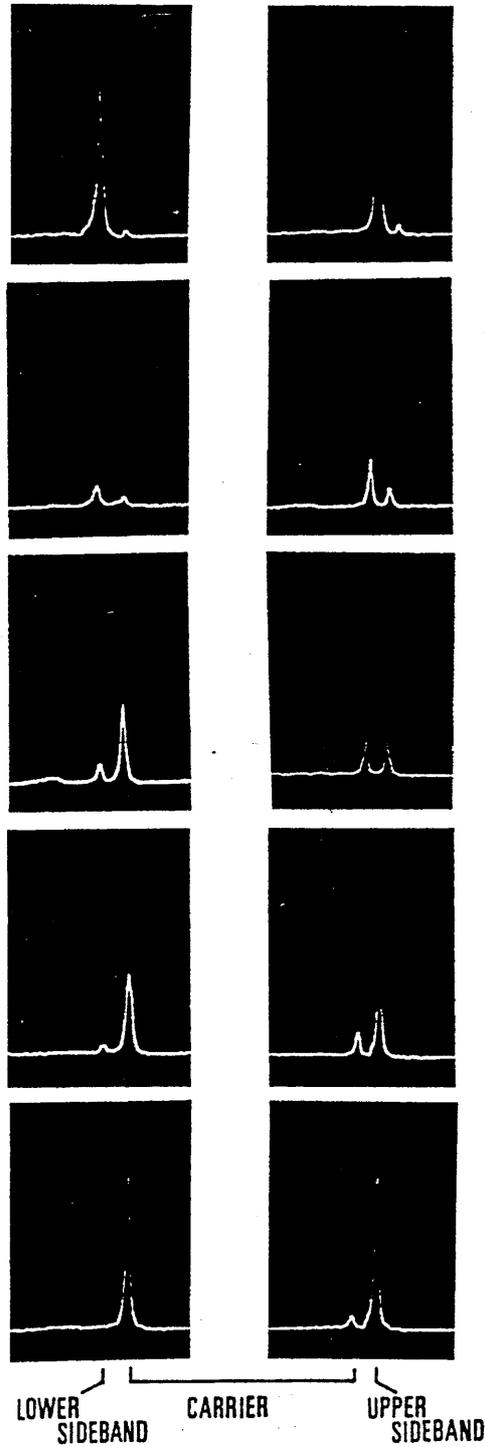


Figure.12

ミラー M3 の圧電素子に印加した直流電圧を連続的に変化させた場合における 1 次の側波帯成分及び搬送波成分、さらに他の 1 次の側波帯成分の出力へと順次取り出されていく様子を示している。

3.2 UHF帯周波数変換実験

UHF帯変調周波数での実験装置の構成をFig. 13に示す。レーザー管はVHF帯の実験に用いたものと同じであるが、レーザー管及びレーザー共振器を構成しているミラーがそれぞれインバー棒で固定されている。これは変換出力の周波数及び出力の安定性を得るためである。

レーザー共振器は反射ミラー M_1 (平面), レンズ (焦点距離 31.6 cm), 部分反射ミラー M_2 (平面, 95% 反射), 及び M_3 平面, 95% 反射) で構成されている。ミラー M_3 に圧電素子を取り付けられ, ミラー M_2, M_3 で周波数可変フィルターを構成している。変調器は半同軸型マイクロ

波共振器内に CdTe 結晶 (4x4x20 mm) を挿入して構成されている。Fig. 14 に変調器の構造を示す。変調電力としては信号発生器の出力を進行波管で増幅したものをを用いている。フィルターからの出力光スペクトルを, 前の実験と同様に掃引形干渉計で観測した。

Fig. 15 (a), (b) は, 変調周波数 1.43GHz, 変調電力 7.9 W の場合における周波数変換出力光のスペクトル観測例を示す。これより, 上及び下側波帯成分の周波数変換出力はそれぞれ 72 mW 及び 60mW である。尚 20 mW 程度の搬送波成分も観測されている。

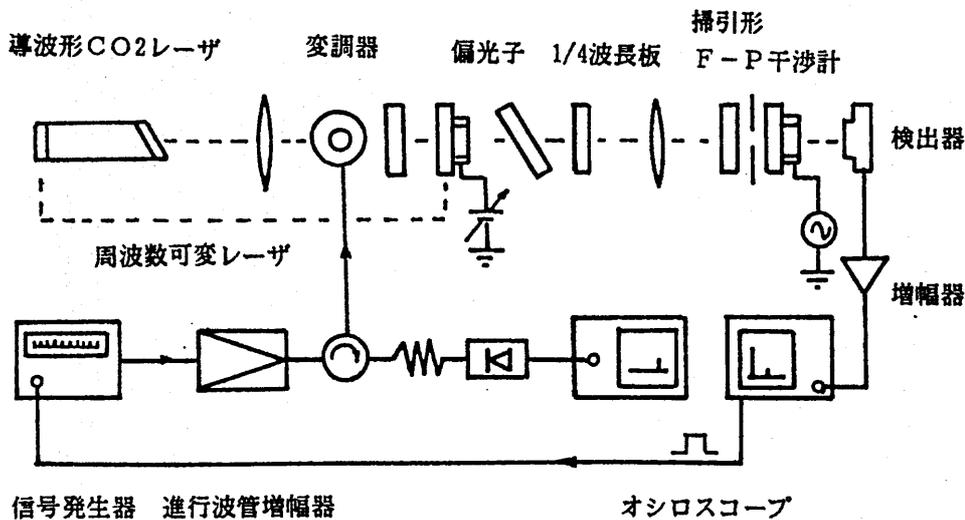


Figure. 13 UHF帯変調周波数による周波数変換実験装置

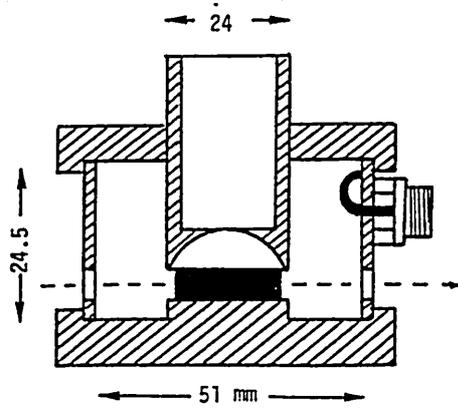


Figure. 14 UHF帯半同軸形光変調器

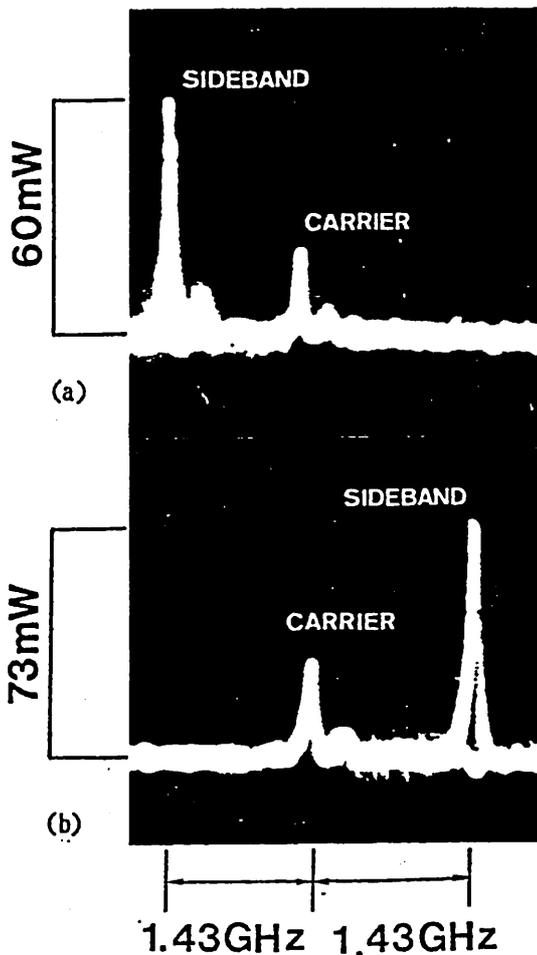


Figure. 15 UHF帯(1.43GHz)変調周波数による周波数変換スペクトル

4.3 SHF帯周波数変換についての考察

SHF帯変調周波数による周波数変換の可能性について考察する。SHF帯の周波数で変調を行う場合、上記のような共振器形変調器を用いると、光波が結晶中を走行している間に、変調電界が変化し、変調度が低下する。そこで、光波の結晶中の速度と変調波の速度を一致させる、いわゆる速度整合をとることが必要である。ここでは、導波管内に光変調用結晶を埋め込んだ進行波変調器を用いる場合について考察する。

以下、方形導波管の基本モードである TE_{10} モードについて考える。変調波の位相速度は、管内波長を λ_0 とすると

$$V_p = f_m \lambda_0 = f_m (\lambda_c^{-2} - \lambda^{-2})^{-1/2}$$

で与えられる。ただし、 $\lambda_c = 1/(2a)$ は遮断波長、 a は導波管の幅、 $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon}$ は媒質波長、 λ_0 は真空波長、 ϵ は結晶の比誘電率である。これが結晶中の光速 c/n_0 に等しいことから、速度整合条件を満たす導波管幅はこの場合の速度整合の条件は次式で与えられている⁵⁾。

$$a = \frac{c}{2f_m \sqrt{\epsilon - n_0^2}} \quad (12)$$

となる。ただし、 n_0 は結晶の屈折率である。

一方、伝送電力 P と変調電界強度の最大値 E_m との関係は、

$$P = \frac{ab}{4(\lambda_0 \eta / \lambda)} E_m^2 \quad (13)$$

で与えられる。ただし、 b は導波管及び結晶の高さ、 $\eta = \sqrt{(\mu/\epsilon \epsilon_0)}$ は結晶の固有インピーダンスである。

式(9)及び(10)を用いて、導波管形進行波光変調器を設計することができる。G.M.Carterは $5 \times 5 \times 50$ mm の CdTe 結晶を用い、この形式の変調器で外部変調を行い、変調周波数 16 GHz、変調電力 1 kW において、位相変調指数 $\delta = 0.3 \text{ rad}$ を得ている。⁵⁾

そこで、この変調器を利用し、VHF帯実験での構成を用いて、周波数変換を行えば、約 0.7 W の周波数変換出力が期待される。

同様に $3 \times 3 \times 20$ mm の CdTe 結晶を用いて変調器を構成した場合、レーザー光が結晶を透過する部分において変調電界の最大値が一様に結晶に印加されているとすると、速度整合される変調周波数は 28 GHz となり、変調電力 1 kW において、位相変調指数 δ は 0.33 rad となる。この場合、約 0.7 W の周波数変換出力が得られるものと思われる。この周波数変換出力を利用すると、レーザーの中心周波数に対して周波数シフトは ± 28 GHz となり、各発振線間の周波数間隔 (55 GHz) をカバーすることが可能である。

6. むすび

内部変調を用いた周波数可変レーザーの構成方法を提案し、導波管形炭酸ガスレーザーについて、動作解析、試作、及び実験を行い、その動作を確認した。VHF帯変調周波数での実験では、出力 4 W のレーザーを用いて、変調電力 55 W で、周波数シフト: ± 150 MHz、周波数変換出力: 1.5 W を得

た。UHF帯では、変調電力 7.9 W で、周波数シフト: ± 1.45 GHz、周波数変換出力: 70 mW を得た。また、SHF帯変調周波数による周波数変換出力について考察し、導波管形進行波変調器を利用することにより、変調電力 1 kW において、周波数変換出力約 0.7 W が得られる可能性を得た。これらの結果より本方式は、外部変調方式に比べて、少ない変調電力で効率よく周波数変換を行うことができる。このことより、炭酸ガスレーザーの離散的な発振スペクトル線間の周波数を効率よく発生し、 $9 - 11 \mu\text{m}$ の範囲にわたって連続的に可変できる周波数可変炭酸ガスレーザーが実現できる可能性を示している。

謝辞

本研究を行うにあたり、適切な助言を戴いた小林哲郎助教授、井筒雅之助教授に感謝致します。本研究に関する解析、計算、実験に携わった大阪大学基礎工学部、前田直樹、中尾雅俊君に感謝致します。本研究の一部は文部省科学研究費の援助を受けて行われたものである。関係各位に感謝致します。

文献

- (1) W.W.Rigrod, J. Appl. Phys., 36(1965)2487.
- (2) W.R.Leeb and A.L.Scholtz, IEEE J. Quantum Electron, vol. QE-13(1977)925.
- (3) 前田, 松島, 中島, 小林, 末田, 第 45 回 (秋季) 応物学会予稿集(1984)13P-N-4.
- (4) 中尾, 松島, 小林, 末田, 第 49 回 (秋季) 応物学会予稿集(1988)5a-ZB-2.
- (5) G.M.Carter, Appl. Phys. Lett., 32(1978)810.

付録

モデル Fig.5(a)の場合における E_{s0}/E_{c0}

Fig.A1に示すように、レーザ媒質長を L_1 、レーザ媒質から変調素子までを L_2 、変調素子から F-P 干渉計までの距離を L_3 とする。また F-P 干渉計における搬送波および側波帯の反射係数を ρ_0 、 ρ_s 、透過係数を τ_0 、 τ_s 、反射ミラー M_1 の反射係数を ρ_1 とする。

まず、搬送波成分について考える。反射ミラー M_1 より変調素子の直前まで来た搬送波の振幅を E_c とおくと、変調素子を通過し、F-P 干渉計で反射され、再び変調素子の直前では、搬送波の振幅 E_c' は

$$E_c' = E_c J_0(\delta) \rho_0 \exp(-2jk_c L_3) \quad (A-1)$$

となる。この搬送波の振幅 E_c' が変調素子を通り、反射ミラー M_1 で反射し、再び変調素子の直前の振幅 E_c'' は

$$\begin{aligned} E_c'' &= E_c' J_0(\delta) \rho_1 \exp\{-2j(k_c' L_3 + k_c L_2)\} \\ &= E_c J_0^2(\delta) \rho_1 \rho_0 \exp\{-2j(k_c' L_1 + k_c L_2 + k_c L_3)\} = E_c \end{aligned} \quad (A-2)$$

となる。これより、発振条件は

$$J_0^2(\delta) = \frac{1}{\rho_1 \rho_0 \exp\{-2j(k_c' L_1 + k_c L_2 + k_c L_3)\}} \quad (A-3)$$

となる。

つぎに、側波帯成分については、レーザ共振器

内では、Fig.A2に示すように、2カ所で側波帯成分 E_s 、 E_s' が生じ、 E_s 、 E_s' は、

$$E_s = E_c J_1(\delta) \quad (A-4)$$

$$\begin{aligned} E_s' &= E_c' J_1(\delta) = E_c J_0(\delta) \rho_0 \exp(-2jk_c L_3) \\ &\quad \times J_1(\delta) \\ &= E_s J_0(\delta) \rho_0 \exp(-2jk_c L_3) \end{aligned} \quad (A-5)$$

となる。F-P 干渉計直前での側波帯成分 E_{s0}' は次式で表される。

$$\begin{aligned} E_{s0}' &= E_s \exp\{-j(k_s L_3)\} \\ &\quad + \rho_1 E_s' J_0(\delta) \exp\{-j(2k_s L_1 + 2k_s L_2 + k_s L_3)\} \end{aligned}$$

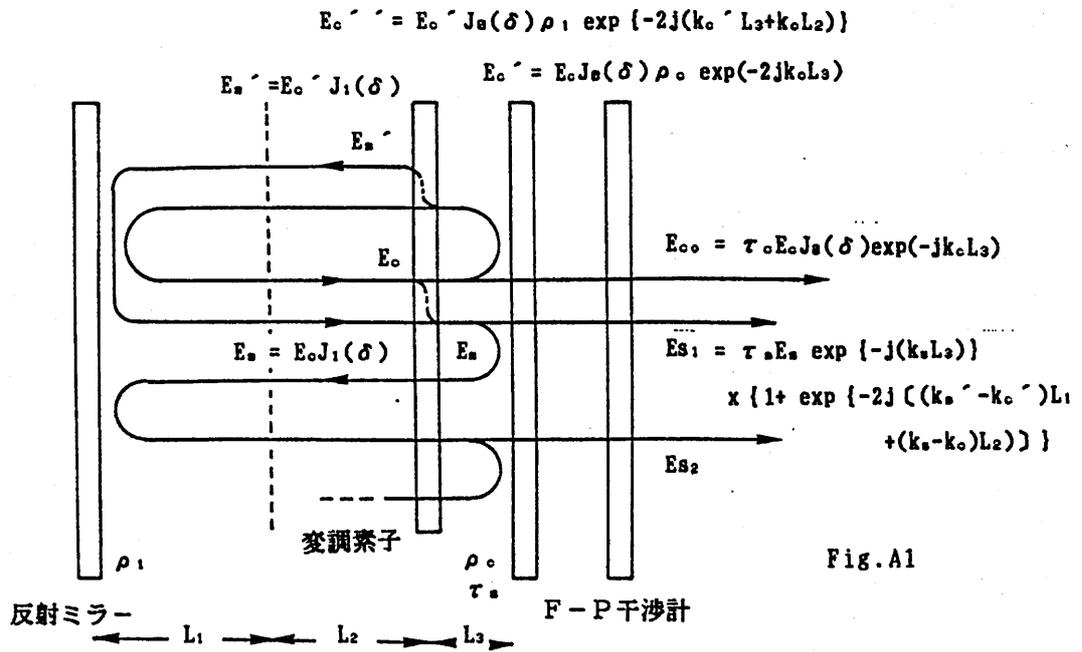
式(A-3)、(A-5)より、

$$\begin{aligned} E_{s0}' &= E_s \exp\{-j(k_s L_3)\} \\ &\quad \times \{1 + \exp\{-2j[(k_s' - k_c')L_1 + (k_s - k_c)L_2]\}\} \end{aligned} \quad (A-6)$$

となる。

E_{s0}' が共振器内部を多重反射し、F-P 干渉計より出力される部分の無限和 (E_{s1} , E_{s2} , ...) が周波数変換出力 E_{s0} となる。これより、 E_{s0} は

$$\begin{aligned} E_{s0} &= \tau_s E_s \exp\{-j(k_s L_3)\} \\ &\quad \times \{1 + \exp\{-2j[(k_s' - k_c')L_1 + (k_s - k_c)L_2]\}\} \\ &\quad \times \sum (\rho_1 \rho_s)^p J_0^{2p}(\delta) \exp\{-2jp(k_s' L_1 + k_s L_2 + k_s L_3)\} \end{aligned}$$



$$= \tau_s E_s \exp \{-j(k_s L_3)\}$$

$$\times \{1 + \exp \{-2j [(k_{s'} - k_c') L_1 + (k_s - k_c) L_2]\}\}$$

$$\times \frac{1}{1 - \rho_1 \rho_s J_0^2(\delta) \exp \{-2j(k_{s'} L_1 + k_s L_2 + k_s L_3)\}}$$

$$= \tau_s E_s \exp \{-j(k_s L_3)\}$$

$$\times \{1 + \exp \{-2j [(k_{s'} - k_c') L_1 + (k_s - k_c) L_2]\}\}$$

$$\times \frac{1}{1 - (\rho_s / \rho_c) \exp \left[\frac{-2j \{(k_{s'} - k_c') L_1 + (k_s - k_c) L_2 + (k_s - k_c) L_3\}}{(k_s - k_c) L_2 + (k_s - k_c) L_3} \right]} \quad (A-7)$$

式(A-7), (A-8)より, 搬送波と側波帯との出力比は次式となる.

$$\frac{E_{s0}}{E_{c0}} = \frac{\tau_s J_1(\delta) \exp \{-j(k_s - k_c) L_3\}}{\tau_c J_0(\delta)}$$

$$\times \{1 + \exp \{-2j [(k_{s'} - k_c') L_1 + (k_s - k_c) L_2]\}\}$$

$$\times \frac{1}{1 - (\rho_s / \rho_c) \exp \left[\frac{-2j \{(k_{s'} - k_c') L_1 + (k_s - k_c) L_2 + (k_s - k_c) L_3\}}{(k_s - k_c) L_2 + (k_s - k_c) L_3} \right]} \quad (A-9)$$

となる.

また, 搬送波成分の出力 E_{c0} は次式で表される.

$$E_{c0} = \tau_c E_0 J_0(\delta) \exp(-jk_c L_3) \quad (A-8)$$

モデル Fig.5(b)の場合における E_{s0}/E_{c0}

Fig.A2に示すように、レーザ媒質長を L_1 、レーザ媒質から変調素子までを L_2 、変調素子から反射ミラーまでを L_3 とする。またF-P干渉計における搬送波および側波帯の反射係数を ρ_c 、 ρ_s 、透過係数を τ_c 、 τ_s 、反射ミラー M_1 の反射係数を ρ_1 とする。

まず、搬送波成分について考える。反射ミラー M_1 より変調素子の直前まで来た搬送波の振幅を E_c とおくと、変調素子およびレーザ媒質を通過し、F-P干渉計で反射され、再び変調素子の直前では、搬送波の振幅 E_c' は

$$E_c' = E_c J_0(\delta) \rho_c \exp(-2jk_c L_1 - 2jk_c L_2) \quad (B-1)$$

となる。この搬送波の振幅 E_c' が変調素子を通り、反射ミラー M_1 で反射し、再び変調素子の直前の振幅 E_c'' は

$$\begin{aligned} E_c'' &= E_c' J_0(\delta) \rho_1 \exp(-2jk_c L_3) \\ &= E_c J_0^2(\delta) \rho_1 \rho_c \exp\{-2j(k_c L_1 + k_c L_2 + k_c L_3)\} = E_c \end{aligned} \quad (B-2)$$

となる。また、発振条件は

$$J_0^2(\delta) = \frac{1}{\rho_1 \rho_c \exp\{-2j(k_c L_1 + k_c L_2 + k_c L_3)\}} \quad (B-3)$$

となる。

つぎに、側波帯成分については、レーザ共振器

内では、Fig.A2に示すように、2カ所で側波帯成分 E_s 、 E_s' が生じ、次式で表される。

$$E_s = E_c J_1(\delta) \quad (B-4)$$

$$\begin{aligned} E_s' &= E_c' J_1(\delta) = E_c J_0(\delta) \rho_c \exp(-2jk_c L_1 - 2jk_c L_2) J_1(\delta) \\ &= E_s J_0(\delta) \rho_c \exp(-2jk_c L_1 - 2jk_c L_2) \end{aligned} \quad (B-5)$$

そこで、この E_s 、 E_s' がそれぞれ共振器内を伝搬し、F-P干渉計直前での側波帯成分 E_{s0}' は次式で表される。

$$\begin{aligned} E_{s0}' &= E_s \exp\{-j(k_s L_1 + k_s L_2)\} \\ &\quad + \rho_1 E_s' \exp(-2jk_s L_3) J_0(\delta) \\ &\quad \times \exp(-jk_s L_2 - jk_s L_1) \\ &= E_s \exp\{-j(k_s L_1 + k_s L_2)\} \\ &\quad + E_s \rho_1 \rho_c J_0^2(\delta) \exp\{-2j(k_c L_1 + k_c L_2)\} \\ &\quad \exp\{-j(jk_s L_2 + jk_s L_1 + 2k_s L_3)\} \\ &= E_s \exp\{-j(k_s L_1 + k_s L_2)\} \\ &\quad \times \{1 + \exp[-2j(k_s - k_c) L_3]\} \end{aligned} \quad (B-6)$$

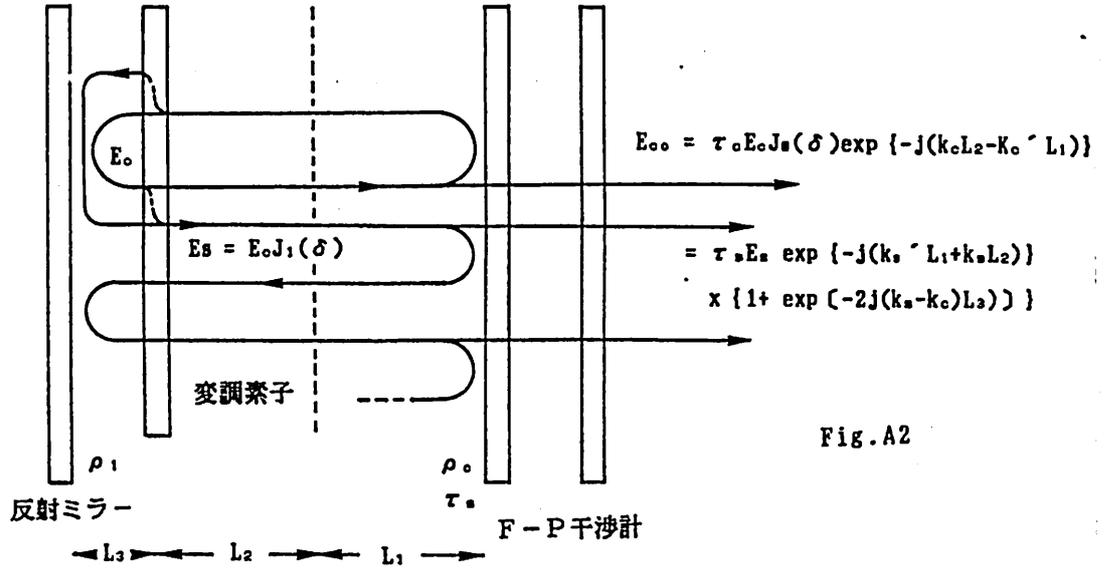
この E_{s0}' が共振器内部を多重反射し、F-P干渉計より出力される部分の無限和 (E_{s1} , E_{s2} , ...) が周波数変換出力 E_{s0} となる。これより、 E_{s0} は

$$\begin{aligned} E_{s0} &= \tau_s E_s \exp\{-j(k_s L_1 + k_s L_2)\} \\ &\quad \times \{1 + \exp[-2j(k_s - k_c) L_3]\} \\ &\quad \times \sum (\rho_1 \rho_s)^p J_0^{2p}(\delta) \\ &\quad \times \exp\{-2jp(k_s L_1 + k_s L_2 + k_s L_3)\} \\ &= \tau_s E_s \exp\{-j(k_s L_1 + k_s L_2)\} \\ &\quad \times \{1 + \exp[-2j(k_s - k_c) L_3]\} \\ &\quad \times \frac{1}{1 - \frac{\rho_1 \rho_s J_0^2(\delta)}{\exp\{-2j(k_s L_1 + k_s L_2 + k_s L_3)\}}} \end{aligned}$$

$$E_o' = E_o J_0(\delta) \rho_1 \exp(-2jk_c L_3)$$

$$E_s = E_o' J_1(\delta)$$

$$E_o' = E_o J_0(\delta) \rho_o \exp(-2jk_o' L_1 - 2jk_o L_2)$$



$$= \tau_s E_s \exp \{-j(k_s' L_1 + k_s L_2)\}$$

$$\times \{1 + \exp[-2j(k_s - k_c)L_3]\}$$

$$E_{s0} = \tau_s J_1(\delta) \exp \{-j(k_s' L_1 + k_s L_2)\}$$

$$E_{c0} = \tau_o J_0(\delta) \exp \{-j(k_o' L_1 + k_c L_2)\}$$

$$\times \frac{1}{1 - (\rho_s / \rho_c) \exp \left[\frac{-2j \{ (k_s' - k_c') L_1 + (k_s - k_c) L_2 + (k_s - k_c) L_3 \}}{(k_s - k_c) L_2 + (k_s - k_c) L_3} \right]}$$

(B-7)

となる。

また、搬送波成分の出力 E_{c0} は次式で表される。

$$E_{c0} = \tau_o E_o J_0(\delta) \exp \{-j(k_c L_2 - k_o' L_1)\}$$

(B-8)

$$\times \frac{1}{1 - (\rho_s / \rho_c) \exp \left[\frac{-2j \{ (k_s' - k_c') L_1 + (k_s - k_c) L_2 + (k_s - k_c) L_3 \}}{(k_s - k_c) L_2 + (k_s - k_c) L_3} \right]}$$

(B-9)

式(B-7), (B-8)より、搬送波と側波帯との出力比は次式となる。

輻射科学研究会資料 RS90-10

広帯域中心周波数可変形
帯域通過フィルタ

豊田 幸弘 里村 裕

大阪工業大学

大阪大学工学部

平成2年12月7日

広帯域中心周波数可変形 帯域通過フィルタ

Broad-Band Variable Center Frequency Band-Pass Filter

豊田 幸弘 里村 裕
Sachihiro TOYODA Yutaka SATOMURA
大阪工業大学 電気工学科
Osaka Institute of Technology

あらかし

この論文は新しい中心周波数可変形帯域通過フィルタについて述べている。このフィルタは平衡形混合器2個と局部発振器および帯域通過フィルタならびに低域通過フィルタを用いて構成している。局部発振器の発振周波数を変化させることにより、フィルタの中心周波数の変化範囲は3から18GHzまでの広い動作周波数範囲が得られた。

1. まえがき

マイクロ波帯のフィルタ、特に中心周波数可変形帯域通過フィルタの論文については数多く発表されている[1~3]。帯域通過フィルタの中心周波数を可変させるにはパラクタダイオードあるいはYIGを用いる方法がある。パラクタダイオードを用いて中心周波数を可変させる場合には、パラクタダイオードの接合容量の変化範囲が小さいのでフィルタの中心周波数を広帯域に可変することができないし、また、大きなQ値を得ることができない。一方、YIGフィルタは磁界を変化させて広帯域に中心周波数を可変させている。ところがこのように磁界を変化させる方法は大きな電流を必要とし、また磁界を作るためにコイルを巻いている関係から中心周波数を高速に変化させることが難しいという問題点がある。さらに両者の帯域通過フィルタの中心周波数を可変させたとき、周波数が高くなるにつれて表皮効果の影響でQ値が低下する。

これらの問題を解決するために、筆者はヘテロダイン方式を採用して広帯域性を有する中心周波数可変形帯域通過フィルタを新規に考案した。その回路

構成では、2個の平衡形混合器の間に中心周波数一定の帯域通過フィルタを接続し、後段の平衡形混合器の出力側には高調波成分を取り除くために低域通過フィルタを接続した。2個の平衡形混合器へ供給する局部発振器の周波数は同じ周波数を加えた。このような回路構成することによって入出力側の周波数は同じとなり、局部発振器の周波数を広範囲に変化させれば帯域通過フィルタの中心周波数も同様に広範囲に変化する。さらに周波数の変化に無関係に、すなわち表皮効果の影響なくフィルタの特性曲線とQ値は一定になるという優れた特性を有するようになる。以下、この回路系について述べる。

2. 中心周波数可変形帯域通過フィルタ

マイクロ波帯で中心周波数可変形帯域通過フィルタの論文については、文献1と2および3に報告されている。

文献1のフィルタは短絡伝送線路とパラクタダイオードを接続して並列共振回路を3個構成し、パラクタダイオードの接合容量を変化させることによってフィルタの中心周波数と帯域幅を変化させている。中心周波数の変化範囲は5.8から6.8GHzまで可変し、挿入損は0.4dBであった。

文献2のフィルタは並列ストリップ変換器の間にYIGを装荷して磁界強度を変化させて、中心周波数を0.7から5.2GHzまで可変させているが、挿入損は6dBと非常に大きい。

文献3のフィルタは薄い金属板に方形の穴をあけ、方形導波管の中央に装荷し、導波管の壁面にフェライトを装荷している。導波管の外部から磁界強度を

変化させて、中心周波数を1.3から1.7GHzまで可変させている。挿入損は1から3dBと大きい。

3種類のフィルタについて述べたが、バラクタダイオードを用いたものはダイオードの接合容量の変化範囲が小さいのでフィルタの中心周波数を広範囲に変化させることが出来ないし、YIGを用いたフィルタについては磁界強度を変化させるのに大きな電流を必要とし、周波数が高くなるにつれて表皮効果の影響からフィルタの特性曲線およびQ値が悪くなるという問題がある。

上述の問題を解決するために筆者は3から1.8GHzまで帯域通過フィルタの中心周波数が可変できる挿入損の少ない回路系を考案した。

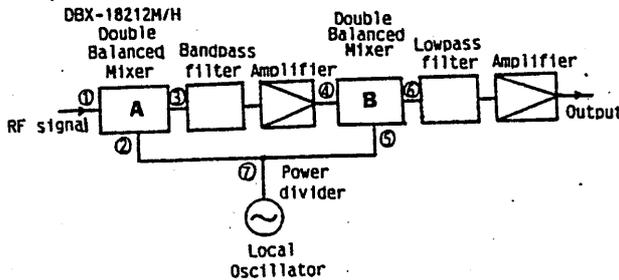


図1. 広帯域中心周波数可変帯域通過フィルタ
Fig.1 Block diagram of the broad-band variable center frequency band-pass filter.

中心周波数可変帯域通過フィルタの回路構成を図1に示す。平衡形混合器Aの端子①(RF)へは入力信号を供給する。帯域通過フィルタと増幅器を縦続接続して、帯域通過フィルタの入力端子を混合器Aの端子③(IF)へ、さらに増幅器の出力端子は混合器Bの端子④へ接続する。混合器Bの端子⑥からの出力は低域通過フィルタと広帯域増幅器に縦続接続する。ここで、混合器AおよびBの端子②および⑤には同一の周波数を供給しなければならない。そのために1個の局部発振器を電力分配器の入力端子⑦へ接続し、電力分配器の2個の出力端子を、それぞれ混合器AおよびBの端子②および⑤へ接続している。

図1に示す回路構成の動作を明らかにするために以下に示す解析でもって説明する。平衡形混合器Aの端子①へは入力信号周波数 f_i を供給し、また、端子②へは局部発振器 f_L を加える。そのとき、端子③には f_{IF} という信号が生じる。いま、平衡形混合器に用いているダイオードの非線形部の検波特性を

$$i_{IF} = k v_{in}^2 \quad (1)$$

とする。このとき、平衡形混合器へ供給する入力信号の電圧は

$$v_{in} = V_i \sin \omega_i t + V_L \sin \omega_L t$$

ただし $\omega_i = 2\pi f_i$ (2)

となる。したがって、端子③に生じる周波数成分を求めるために式(2)を式(1)に代入すると

$$i_{IF} = k v_{in}^2 = k (V_i \sin \omega_i t + V_L \sin \omega_L t)^2 = \frac{1}{2}k(V_i^2 + V_L^2) - \frac{1}{2}k(V_i^2 \cos 2\omega_i t + V_L^2 \cos 2\omega_L t)$$

$-kV_i V_L \cos(\omega_i + \omega_L)t + kV_i V_L \cos(\omega_L - \omega_i)t$ (3)となる。式(3)の右辺第1項は直流成分であり、第2項は入力信号周波数および局部発振器の周波数の2倍波($2\omega_i$ および $2\omega_L$)である。第3項および第4項にはそれぞれ局部発振器の発振周波数と入力信号周波数の和および差の周波数成分が生じていることがわかる。

図1に示すように、平衡形混合器の端子③と④の間に差の周波数成分($\omega_L - \omega_i$)のみが通過できる帯域通過フィルタを接続する。この帯域通過フィルタを接続することによって、式(3)に示す第1項と第2項および第3項の周波数成分は端子④のところには生じない。

一方、平衡形混合器Bに用いているダイオードの非線形部の検波特性を

$$i_o = K v_{IF}^2 \quad (4)$$

とする。このとき、混合器Bの入力電圧は

$$v_{IF} = \alpha k V_i V_L \cos(\omega_L - \omega_i)t + V_L \sin \omega_L t \quad (5)$$

ただし、 α :増幅定数

となり、したがって、端子⑥に生じる周波数成分を求めるために式(5)を(4)へ代入すると、

$$i_o = K v_{IF}^2 = K [\alpha k V_i V_L \cos(\omega_L - \omega_i)t + V_L \sin \omega_L t]^2 = \frac{1}{2}K V_L^2 (\alpha^2 k^2 V_i^2 + 1) + \frac{1}{2}K \alpha^2 k^2 V_i^2 V_L^2 \cos 2(\omega_L - \omega_i)t - \frac{1}{2}K V_L^2 \cos 2\omega_L t + K \alpha k V_i V_L^2 \sin(2\omega_L - \omega_i)t + K \alpha k V_i V_L^2 \sin \omega_i t \quad (6)$$

となる。式(6)の右辺第1項は直流成分であり、第2項は局部発振器の発振周波数および入力信号周波数の差、すなわち中間周波数の2倍波である。また、第3項は局部発振器の発振周波数の2倍波であり、さらに第4項は局部発振器の周波数の2倍波と入力信号周波数の差の周波数成分を示す。第5項は入力周波数成分と同じ周波数成分となる。

平衡形混合器Bの端子⑥と出力端子の間に低域通

過フィルタを接続すると高調波成分は除去され、式(6)に示す第5項の入力波と同じ周波数成分だけが得られることがわかる。

図1に示すように、2つの混合器の間に挿入する帯域通過フィルタの中心周波数が固定されていても、局部発振器の周波数を広範囲に変化させると帯域通過フィルタの中心周波数が可変しているのと同じことであり、高い周波数領域になっても表皮効果によるフィルタの特性曲線およびQ値になんら影響されないことがわかる。

3. 広帯域中心周波数可変形帯域通過フィルタの構成と実験結果

試作した中心周波数可変形帯域通過フィルタの写真を図2に示す。平衡形混合器はAvantek社のDBX-18212M/Hを用い、低域通過フィルタはK&L社のHL250-

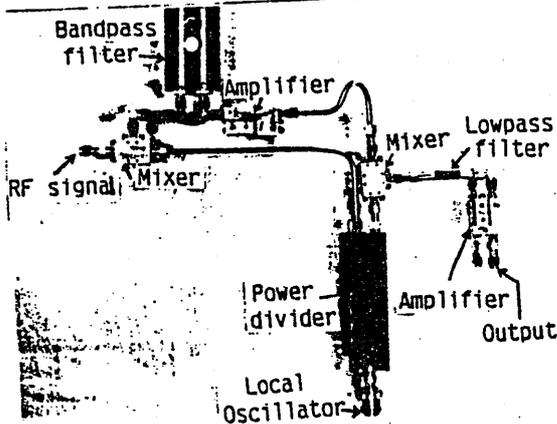


図2. 図1に示す中心周波数可変形帯域通過フィルタの写真
Fig.2 Photograph of the variable center frequency band-pass filter shown in Fig.1.

4000とHL250-6000およびHL250-18000の3種類を用いた。混合器の間に挿入する帯域通過フィルタは誘電体共振器を用いて構成し(以下、このフィルタをBFと略記する)、広帯域増幅器は富士通の製品を用いた。2章で述べたように、高調波成分など不要成分を取り除くための帯域通過フィルタBFの中心周波数、低域通過フィルタの遮断周波数、および局部発振器の可変周波数範囲については、目的とする動作周波数範囲に応じてそれぞれ選択する必要がある。以下にその構成例をあげる。

例えば、試作する帯域通過フィルタの中心周波数を2から4GHzまで可変させたいとき、入力波、ならびに2つの混合器より発生する各周波数成分、お

表3-1. 平衡形混合器A

入力周波数 f_1	局部発振器 f_L	$2f_L$	$2f_1$	f_1+f_L	f_L-f_1
2~4 GHz	5~7 GHz	4~8 GHz	10~14 GHz	7~11 GHz	3 GHz

平衡形混合器B

入力周波数 f_L-f_1	局部発振器 f_L	$2f_L-2f_1$	$2f_L$	$2f_L-f_1$	f_1
3 GHz	5~7 GHz	6 GHz	10~14 GHz	8~10 GHz	2~4 GHz

よび出力波については表3-1のようになる。表3-1からわかるように、平衡形混合器Aの端子③と平衡形混合器Bの端子④の間に接続する帯域通過フィルタBFの中心周波数は3GHzにする必要がある。なぜならば、 $2f_1$ と $2f_L$ および f_1+f_L を除去するためである。さらに、平衡形混合器Bの端子⑥に接続する低域通過フィルタにおいて $2(f_L-f_1)$ と $2f_L$ および $2f_L-f_1$ の周波数成分を取り除くために、遮断周波数を4.2GHzに選べばよい。この回路構成で実験した結果を図3に示す。

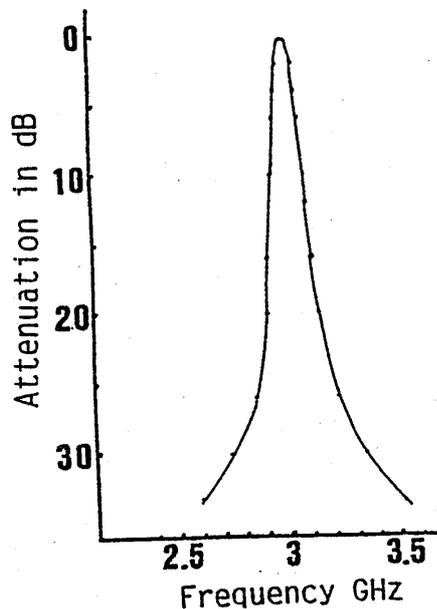


図3(a) 不要周波数成分阻止用帯域通過フィルタの周波数特性

Fig.3(a) Measured characteristics of band-pass filter for removing undesired frequency components.

図3-aは誘電体共振器を用いて試作した不要周波数成分阻止用帯域通過フィルタBFの周波数特性である。このフィルタを用いて局部発振器の周波数を5から7GHzまで変化させたとき、図1のように構成した帯域通過フィルタの中心周波数は2から4GHzまで可変した。その測定結果を図3-bに示す。挿入損は0dBであった。図1に示す回路構成で増幅器を用いた理由は、平衡形混合器の変換損が7.5dB程あるので、この損失を防ぐために用いたからである。

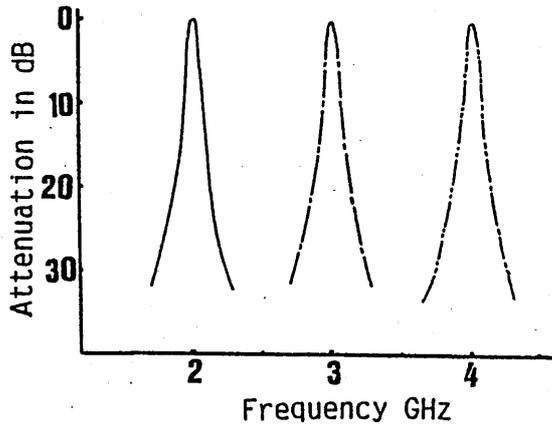


図3 (b). 2~4 GHz帯中心周波数可変形帯域通過フィルタの周波数特性
Fig.3(b) Measured characteristics of the 2~4 GHz band variable center frequency band-pass filter.

表3-2. 平衡形混合器A

入力周波数 f_i	局部発振器 f_L	$2f_i$	$2f_L$	$f_i + f_L$	$f_L - f_i$
4~8 GHz	10~14 GHz	8~16 GHz	20~28 GHz	14~22 GHz	6 GHz

平衡形混合器B

入力周波数 $f_L - f_i$	局部発振器 f_L	$2f_L - 2f_i$	$2f_L$	$2f_L - f_i$	f_i
6 GHz	10~14 GHz	12 GHz	20~28 GHz	16~20 GHz	4~8 GHz

次に、帯域通過フィルタの中心周波数を例えば4から8GHzまで変化させたいときには、表3-2からわかるように2つの混合器の間に挿入するフィルタBFの中心周波数を6GHzに、低域通過フィルタの遮断周波数を8.1GHzに選べば良い。このとき局部発振器の周波数を10から14GHzまで変化させたとき、作製したフィルタの中心周波数は4から8GHz

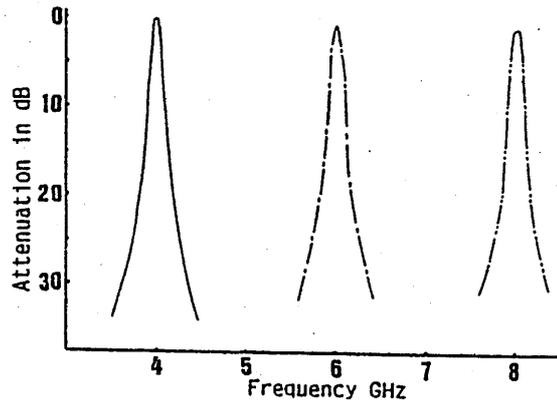


図4. 4~8 GHz帯中心周波数可変形帯域通過フィルタの周波数特性
Fig.4 Measured characteristics of the 4~8 GHz band variable center frequency band-pass filter.

まで可変した。図4は4~8GHz帯の中心周波数可変形帯域通過フィルタの出力特性の実測値である。挿入損は0dBであった。

表3-3. 平衡形混合器A

入力周波数 f_i	局部発振器 f_L	$2f_i$	$2f_L$
3~18 GHz	12~27 GHz	6~36 GHz	24~54 GHz

$f_i + f_L$	$f_L - f_i$
15~45 GHz	9 GHz

平衡形混合器B

入力周波数 $f_L - f_i$	局部発振器 f_L	$2f_L - 2f_i$	$2f_L$
9 GHz	12~27 GHz	18 GHz	24~54 GHz

$2f_L - f_i$	f_i
21~36 GHz	3~18 GHz

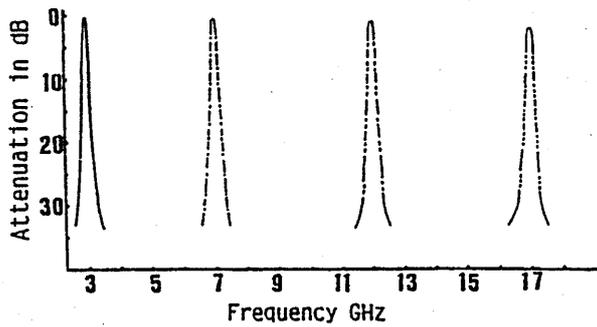


図5. 3~18GHz帯中心周波数可変形帯域通過フィルタの周波数特性

Fig.5 Measured characteristics of the 3~18 GHz band variable center frequency band-pass filter.

以上の2種類の方式では動作周波数範囲が狭いので、さらに広い動作周波数範囲、例えば3~18GHzの動作範囲を有する中心周波数可変形フィルタにするためには、表3-3に示すように帯域通過フィルタBFの中心周波数を9GHzに、低域通過フィルタの遮断周波数を18.1GHzに選べば良いことがわかる。図5に示した実測結果からわかるように、帯域通過フィルタの中心周波数の変化範囲が3から18GHzまでの広い範囲が得られた。17GHz付近で挿入損が約1.2dBになったのは、平衡形混合器の変換損が8.7dBと大きくなったからである。フィルタの中心周波数を3から18GHzまで広帯域に可変する場合に、入力周波数が4.5GHzのときだけ、 $f_L - f_1$ の他に $2f_1$ の周波数成分が9GHzとなって帯域通過フィルタを通過する。しかし、この9GHzの周波数成分は4.5GHzの周波数成分と同じであるので問題にならないことを確かめた。

3種類の中心周波数可変形帯域通過フィルタについて述べたが、局部発振器の周波数は基本波だけが出る信号発生器を用いる方が望ましいが、仮に基本波以外の高調波が出るものを用いても、表3-1と3-2および3-3に示したように高調波成分は帯域通過フィルタBFおよび低域通過フィルタで除去され、出力側は入力側と同じ周波数成分が得られることがわかる。

4. むすび

広帯域特性を有する中心周波数可変形帯域通過フィルタについて述べた。分布定数回路で構成した帯域通過フィルタ、あるいは分布定数回路に並列に可

変容量ダイオードを組み合わせたフィルタ、若しくはYIGを用いたフィルタでは中心周波数を広帯域に可変させることが出来ないし、周波数が高くなるにつれて表皮効果の影響でQ値が低下するという問題がある。この問題を解決するために図1に示すような回路構成を採用し、3~18GHz帯の広帯域特性を有する中心周波数可変形帯域通過フィルタが得られることを示した。回路系の中に接続した帯域通過フィルタの中心周波数は固定されていても、局部発振器の周波数を変化させることによって外部から見ると中心周波数可変形帯域通過フィルタとして動作することがわかる。使用する上で重要なことは、入力周波数と局部発振器の周波数を掃引する場合、その掃引速度を同期させなければならないことである。

文献

- [1] Sachihiro Toyoda: "Variable band-pass filters using varactor-diodes", IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., MTT-29, 4, pp.356-363 (April 1981).
- [2] T. Nishikawa, K. Wakino and H. Tanaka: "A low-loss magnetostatic wave filter using parallel strip transducer", 1989 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, C-4, pp.153-156.
- [3] J. Uher and W.J.R. Hofer: "Analysis and tuning efficiency optimization of magnetically tuned printed E-plane circuit filters", 1989 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, PP-42, pp.1273-1276.

輻射科学研究会資料
RS90-11

二次元電磁界の積分方程式解法
—横電磁界成分を用いる方法—

松原 正則, 中村 佳司

(大阪大学 工学部)

平成2年12月7日

1 まえがき

積分方程式法は実用性の高い数値解法の1つであり、境界要素法を用いることにより少ない計算量で容易に高い計算精度が得られる。また、開領域問題にも容易に対処でき電磁波散乱問題、電磁波導波路問題などに広く用いられている。

従来、二次元電磁波散乱問題および電磁波導波路問題を積分方程式を用いて解析する場合、電磁界の z 成分、すなわち、縦成分を未知量とする積分方程式が用いられてきた。しかしながら、この方法によると電磁波散乱問題^{(1)~(3)}ではある角周波数および縦方向伝搬定数において、物理的には唯一解が得られるべきであるにもかかわらず非物理的な不定解が得られるという困難があった。この困難を回避する方法として混合形積分方程式を用いる方法⁽¹⁾、内部条件を追加する方法⁽²⁾および拡張形積分方程式を用いる方法⁽³⁾がある。一方、導波路問題⁽⁴⁾⁽⁵⁾では物理的に妥当な解である導波モードとともに非物理的な解であるスプリアスモードが得られることがある。このようなスプリアスモードの混入は積分方程式の実用性を損なうことになる。この困難を回避する方法として電磁界縦成分の境界における接線微分量を未知量とする方法⁽⁵⁾がある。しかしながら、上述の困難回避策はいずれも技巧的かつ対症療法的である。

本報告において、我々は電磁界横成分を未知量とする積分方程式を提案し、この積分方程式が唯一解を持たないのは系の固有解においてのみであることを示す。したがって、電磁波散乱問題および導波路問題において生ずる従来の困難は、本報告で提案する積分方程式を用いる場合には全く生じない。

具体例として完全導体方形柱、方形導波管および方形誘電体導波路にこの積分方程式を適用し、その妥当性と有効性を検証する。

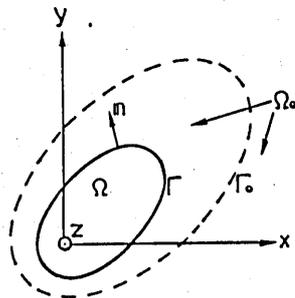


図1 二次元領域 Ω と Ω_0 を囲む境界 Γ

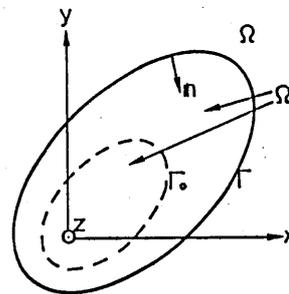


図2 無限遠を含む二次元領域 Ω

2 積分方程式による定式化

図1に示すような z 方向に一様な物体を考え、その横断面を Ω 、 Ω を囲む境界を Γ とする。 Ω_0 は Ω の補領域、 Γ_0 は Ω_0 内にとった任意の閉曲線、 \mathbf{n} は境界 Γ に立てた外向き単位法線ベクトルである。印加電流 \mathbf{J} 、電界 \mathbf{E} 、磁界 \mathbf{H} の z 依存性は $\exp(-j\beta z)$ であり、誘電率 ϵ および透磁率 μ は一定の実定数であるとすると、マクスウェルの方程式より次式が得られる。

$$\nabla_t \times \mathbf{e}_t + j\omega\mu\mathbf{h}_z = 0$$

$$\nabla_t \times \mathbf{h}_t - j\omega\epsilon\mathbf{e}_z = \mathbf{j}_z$$

$$\nabla_t \times \mathbf{e}_z - j\beta\mathbf{i}_z \times \mathbf{e}_t + j\omega\mu\mathbf{h}_t = 0$$

in Ω (1)

$$\nabla_t \times \mathbf{h}_z - j\beta\mathbf{i}_z \times \mathbf{h}_t - j\omega\epsilon\mathbf{e}_t = \mathbf{j}_t$$

ここで、 \mathbf{j}_t , \mathbf{e}_t , \mathbf{h}_t および \mathbf{j}_z , \mathbf{e}_z , \mathbf{h}_z は、それぞれ、 \mathbf{J} , \mathbf{E} , \mathbf{H} の z 軸に垂直な成分および z 軸に平行な成分であり次式で与えられる。

$$\mathbf{J} \triangleq (\mathbf{j}_t + \mathbf{j}_z)\exp(-j\beta z)$$

$$\mathbf{E} \triangleq (\mathbf{e}_t + \mathbf{e}_z)\exp(-j\beta z) \quad (2)$$

$$\mathbf{H} \triangleq (\mathbf{h}_t + \mathbf{h}_z)\exp(-j\beta z)$$

さて、式(1)に対する積分方程式を導くため放射条件を満足する二次元の自由空間グリーン関数

$$\psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = \begin{cases} \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - \beta^2} p) & , k^2 > \beta^2 \\ \frac{1}{2\pi} K_0(\sqrt{\beta^2 - k^2} p) & , k^2 < \beta^2 \end{cases} \quad \mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0 \quad (3)$$

を導入する。ここで、波数 k は $k \triangleq \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ であり、 \mathbf{p} は源点の位置ベクトル \mathbf{p} および観測点の位置ベクトル \mathbf{p}_0 を用いて $p \triangleq |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|$ で与えられる。また、 $H_0^{(2)}$ は零次の第2種ハンケル関数であり、 K_0 は零次の第2種変形ベッセル関数である。このとき式(1),(3)より次式が得られる。

(i) $\mathbf{p}_0 \in \Omega$ のとき

$$\mathbf{e}_t(\mathbf{p}_0) = \mathbf{e}_t^{inc}(\mathbf{p}_0) + \oint_{\Gamma} \mathbf{a}_t(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) d\mathbf{l} \quad (4)$$

$$\mathbf{h}_t(\mathbf{p}_0) = \mathbf{h}_t^{inc}(\mathbf{p}_0) + \oint_{\Gamma} \mathbf{b}_t(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) d\mathbf{l}$$

ここで

$$\mathbf{e}_t^{inc}(\mathbf{p}_0) \triangleq -\frac{1}{j2\omega\epsilon} \mathbf{j}_t(\mathbf{p}_0) + \oint_{\Omega} \mathbf{c}_t(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) d\mathbf{s} \quad (5)$$

$$\mathbf{h}_t^{inc}(\mathbf{p}_0) \triangleq \oint_{\Omega} \mathbf{d}_t(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) d\mathbf{s}$$

(ii) $p_0 \in \Gamma_0$ のとき

$$\oint_{\Gamma} a_t(p, p_0) dl = -e_t^{inc}(p_0) \quad (6)$$

$$\oint_{\Gamma} b_t(p, p_0) dl = -h_t^{inc}(p_0)$$

ここで

$$e_t^{inc}(p_0) \triangleq \int_{\Omega} c_t(p, p_0) ds \quad (7)$$

$$h_t^{inc}(p_0) \triangleq \int_{\Omega} d_t(p, p_0) ds$$

式(4)～(7)における a_t, b_t, c_t, d_t は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_t &\triangleq j\beta e_z(n\psi) - j\omega\mu h_z(t\psi) - \frac{1}{j\omega\epsilon}(t \cdot \nabla_t h_z + j\beta h_t) \nabla_t \psi - e_t(i_z \times \nabla_t \psi) \\ b_t &\triangleq j\beta h_z(n\psi) + j\omega\epsilon e_z(t\psi) + \frac{1}{j\omega\mu}(t \cdot \nabla_t e_z + j\beta e_t) \nabla_t \psi - h_t(i_z \times \nabla_t \psi) \end{aligned} \quad (8)$$

$$c_t \triangleq -j\omega\mu j_t \psi + \frac{1}{j\omega\epsilon} j_t \cdot \nabla_t \nabla_t \psi + \frac{\beta}{\omega\epsilon} (i_z \cdot j_z) (\nabla_t \psi)$$

$$d_t \triangleq j_z \times \nabla_t \psi - j\beta (i_z \times j_t) \psi$$

$$e_z \triangleq i_z \cdot e_z$$

$$h_z \triangleq i_z \cdot h_z$$

$$e_t \triangleq t \cdot e_t$$

$$h_t \triangleq t \cdot h_t$$

$$t \triangleq i_z \times n$$

上式において、 $e_z, h_z, e_t, h_t, j_t, j_z, n, t$ は p の関数であり、 a_t, b_t, c_t, d_t, ψ は p および p_0 の関数である。式(4)～(8)における積分及び微分はすべて p についての積分及び微分である。また、式(5)における積分 $\int ds$ は p_0 近傍を除いて積分することを表す。また、 e_t^{inc} および h_t^{inc} は入射波を表し、散乱問題では一般に既知量として与えられる。また、導波路問題では $e_t^{inc} = h_t^{inc} = 0$ である。

式(4)は Ω 内の任意の点 p_0 における電磁界 e_t, h_t が Γ 上の z 軸方向電磁界 e_z, h_z および Γ に接する接線電磁界 e_t, h_t を用いて決定できることを表している。 Γ 上の e_z, h_z, e_t, h_t は式(6)を用いて決定することができる。一般に式(6)は Ω 外の任意の点 p_0 において成立

するのであるが、 Γ 上の e_z, h_z, e_t, h_t を決定するには第3章で示すように、 Ω の外にとつた任意の閉曲線 Γ_0 上の任意の点 p_0 について式(6)が成立することを要請すれば十分である。従って、式(6)の p_0 は Γ_0 上にとるものとする。さらに Γ_0 を Γ に限りなく漸近させると式(6)は次のようになる¹。

$$\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{j\omega\epsilon} \mathbf{n}(\mathbf{t} \cdot \nabla_t h_z + j\beta h_t) - t e_t \right\}_{p=p_0} + \int_{\Gamma} a_t(\mathbf{p}, p_0) dl = -e_t^{inc}(p_0)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ +\frac{1}{j\omega\mu} \mathbf{n}(\mathbf{t} \cdot \nabla_t e_z + j\beta e_t) - t h_t \right\}_{p=p_0} + \int_{\Gamma} b_t(\mathbf{p}, p_0) dl = -h_t^{inc}(p_0)$$

$p_0 \in \Gamma \quad (9)$

式(9)における積分 $\int dl$ は p_0 近傍を除いて積分することを表す。式(6)及び式(9)が本報告で提案する積分方程式である。これまでは、図1に示すように閉領域 Ω について考察してきたが、図2に示すように Ω が開領域である場合においても、式(3)に示す放射条件を満たすグリーン関数を用いる限り、これまでに示したすべての関係式はそのまま成立する。

3 解の唯一性

散乱問題および導波路問題を従来の積分方程式を用いて解析する場合の大きな欠点は、いわゆる「スプリアス解の混入」である。本報告で提案する積分方程式(6)および式(9)には上述の欠点が存在しないことを、簡単のために境界 Γ が電気壁の場合について証明することにする。 Γ が電気壁であるので Γ 上において $e_z = e_t = 0$ となり式(6)の未知量は h_z, h_t のみとなる。

式(6)の解の唯一性を考察するために領域 Ω の補領域 Ω_0 における固有値問題

$$\nabla_t \times \mathbf{e}_t + j\omega\mu \mathbf{h}_z = 0$$

$$\nabla_t \times \mathbf{h}_t - j\omega\epsilon \mathbf{e}_z = 0$$

$$\nabla_t \times \mathbf{e}_z - j\beta \mathbf{i}_z \times \mathbf{e}_t + j\omega\mu \mathbf{h}_t = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \quad (10)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{h}_z - j\beta \mathbf{i}_z \times \mathbf{h}_t - j\omega\epsilon \mathbf{e}_t = 0$$

および

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{h}_t = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \quad (11)$$

を考察することにする。 Γ 上に任意の波源分布 \tilde{h}_z, \tilde{h}_t を仮想して式(10)の解が

¹閉曲線 Γ_0 の選び方には任意性があるが、積分方程式の解が数値的に安定であるためには Γ_0 は Γ に近接している必要がある。また、積分方程式を数値解析するとき必要となる数値積分は Γ_0 を Γ に漸近させたときに最も容易に求められる。

$$e_t(p_0) = \oint_{\Gamma} \tilde{a}_t(p, p_0) dl$$

$$h_t(p_0) = \oint_{\Gamma} \tilde{b}_t(p, p_0) dl$$

$$p_0 \in \Omega_0 \quad (12)^2$$

$$\tilde{a}_t \triangleq -j\omega\mu\tilde{h}_z(t\psi) - \frac{1}{j\omega\epsilon}(t \cdot \nabla_t \tilde{h}_z + j\beta\tilde{h}_t)\nabla_t\psi$$

$$\tilde{b}_t \triangleq j\beta\tilde{h}_z(n\psi) - \tilde{h}_t(i_z \times \nabla_t\psi)$$

とおけるものと仮定する。式(12)が式(10)を満足することは、直接の代入により容易に確かめられる。式(12)が式(11)を満足するためには

$$\oint_{\Gamma} \tilde{a}_t(p, p_0) dl = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \tilde{b}_t(p, p_0) dl = 0$$

$$p_0 \in \Gamma_0 \quad (13)$$

が成立せねばならない。式(13)は式(6)の同次形であり、従って、式(13)が唯一解 $\tilde{h}_z = \tilde{h}_t = 0$ を持つとき、式(6)も唯一解を持つことになる。

式(13)の解の唯一性は次のようにして間接的に証明される。まず、式(10)および式(11)は実は固有値問題ではなく、式(10)および式(11)の解は常に唯一解

$$e_t(p_0) = h_t(p_0) = 0 \quad p_0 \in \Omega_0 \quad (14)^3$$

である。従って、式(12)より

$$\oint_{\Gamma} \tilde{a}_t(p, p_0) dl = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \tilde{b}_t(p, p_0) dl = 0$$

$$p_0 \in \Omega_0 \quad (15)$$

となり、式(13)は式(15)に含まれることになる。式(15)が Ω_0 内のすべての p_0 について成立すべきことより、仮想波源分布 \tilde{h}_z, \tilde{h}_t が Ω の固有解に一致する場合を例外として、 $\tilde{h}_z = \tilde{h}_t = 0$ が結論される。すなわち、式(6)が唯一解を持たないのは Ω の固有解においてのみであるということになる。

式(6)が唯一解を持たない条件より Ω の固有解を求めることができ、従って、スプリアス解が混入することなく導波路問題を解くことができる。また、 Ω の固有解以外においては常に式(6)が唯一解を持つことになり、スプリアス解の混入を生ずることなく散乱問題を解くことができる。 Ω の固有解においては散乱問題そのものが成立しない。

²図1に示すように Ω_0 が開領域であっても、式(3)の放射条件を満たすグリーン関数を用いるときには、無限遠の境界上の波源は p_0 における電磁界に影響しない。

³図2に示すように Ω_0 が閉領域であり、かつ、 Γ_0 が半径 a の円周である場合には、 $e_r = h_\theta = 0$ in Ω_0 または、 $h_r = e_\theta = 0$ in Ω_0 なるモードが存在する。このとき、式(11)は単に $e_\theta = h_r = 0$ on Γ_0 または、 $h_\theta = e_r = 0$ on Γ_0 を与えることになり、式(10)および式(11)は固有値問題となる。従って、このときは式(14)は成立しない。このような例外は $J_1(\sqrt{k^2 - \beta^2}a) = 0$ を満たす k, β, a においてのみ生ずる。ここで、 J_1 は1次の第1種ベッセル関数である。

4 境界要素法による数値解析

第2章で示した積分方程式(6)および式(9)を境界要素法を用いて数値解析する。まず、境界要素法を適用するために閉曲線 Γ を N 個の辺、すなわち、要素からなる多角形で近似する。このとき、多角形の頂点、すなわち、節点において e_z および h_z は常に連続であるが、 e_t および h_t は必ずしも連続ではない。このことを考慮して、各要素における e_z, h_z, e_t, h_t を次式に示すように零次および1次の形状関数を用いて表すことにする。

$$\begin{aligned} e_z &\simeq \hat{e}_{z1}N_1^{(1)} + \hat{e}_{z2}N_2^{(1)} \\ h_z &\simeq \hat{h}_{z1}N_1^{(1)} + \hat{h}_{z2}N_2^{(1)} \\ e_t &\simeq \hat{e}_t N^{(0)} \end{aligned} \tag{16}$$

$$h_t \simeq \hat{h}_t N^{(0)}$$

ここで、 $\hat{\cdot}$ を付した量は未知パラメータであり、 $N^{(0)}$ は零次の形状関数、 $N_1^{(1)}, N_2^{(1)}$ は1次の形状関数である。すなわち、

$$\begin{aligned} N^{(0)} &= 1 \\ N_1^{(1)} &= (\xi_2 - \xi) / (\xi_2 - \xi_1) \\ N_2^{(1)} &= (\xi - \xi_1) / (\xi_2 - \xi_1) \end{aligned} \tag{17}$$

ただし、要素に沿って座標 ξ を定め、節点1および節点2の座標を ξ_1 および ξ_2 とした。従って、 \hat{e}_t, \hat{h}_t は要素における e_t, h_t であり、 $\hat{e}_{z1}, \hat{h}_{z1}$ および $\hat{e}_{z2}, \hat{h}_{z2}$ は節点1および節点2における e_z, h_z である。各要素における未知関数を式(16)で表し、それらを用いて多角形 Γ 全体の未知関数を構成することができる。

次に多角形 Γ と図心を共有し、その相似比が α である多角形 Γ_0 を考える。ただし、 α は1または1に近い定数である。 Γ_0 の各要素の midpoint に観測点を配置する。このとき、積分方程式(6)または式(9)は、行列方程式

$$A\phi = b \tag{18}$$

となる。ここで、 A は Ω の形状等を反映した行列、 ϕ は未知パラメータからなる列ベクトル、 b は入射波 e_i^{inc}, h_i^{inc} を表す列ベクトルである。行列方程式(18)を解いて未知列ベクトル ϕ 、すなわち、 Γ 上の未知関数 e_z, h_z, e_t, h_t を決定することができる。

式(18)の解の安定性は、条件数

$$\kappa(A) \triangleq \sqrt{\frac{A^*A \text{の最大固有値}}{A^*A \text{の最小固有値}}} \tag{19}$$

で評価される。ここで、 A^* は A の共役転置行列である。 $\kappa(A)$ が小さいとき解の安定性が高く、 $\kappa(A)$ が大きいとき解の安定性は低いのであるが、いずれの場合においても式(18)は唯一解を持つ。しかしながら、 $\kappa(A)$ が非常に大きいときには式(18)は唯一解をもたず不定解、すなわち固有解を持つ。

次に具体的な数値例を示すことにする。以下に示す具体例では式(9)を用い $\alpha = 1$ としている。また、要素数 N は120である。図3に完全導体方形柱における β/k と $\kappa(A)$ の関係を示す。ここで、方形柱の長辺 a および短辺 b を、それぞれ、 $ka = 8$ および $kb = 4$ とした。図3より $\kappa(A)$ は常に十分小さく式(9)は安定な唯一解をもつことがわかる。すなわち、従来問題であったスプリアス解の困難は生じていない。図4は完全導体にあけられた方形柱空洞、すなわち、方形導波管の場合である。ここで、 $ka = 8, kb = 4$ とした。 $\kappa(A)$ は $\beta/k = 0.920, 0.620, 0.484$ において非常に大きくなり式(9)は不定解、すなわち、固有解を持つ。ちなみにこの方形導波管の正確な固有値は $\beta/k = 0.9197, 0.6190, 0.4785$ である。すなわち、式(9)を解くことにより、十分正確に導波管固有値を得ることができる。また、従来問題であったスプリアス解の混入は生じていない。図5に方形誘電体柱の場合を示す。ここで、 $ka = 8, kb = 4, n_1 = 1.5, n_2 = 1$ である。図5より方形誘電体柱、すなわち、方形誘電体導波路の固有値は $\beta/k = 1.356, 1.321, 1.217, 1.061, 1.017$ であることがわかる。この結果はGoellの点整合法による解析結果⁽⁶⁾と良く一致している。また、従来問題であったスプリアス解の混入は生じていない。

以上具体的な数値例を用いて第3章に示した事項についての裏づけを行った。

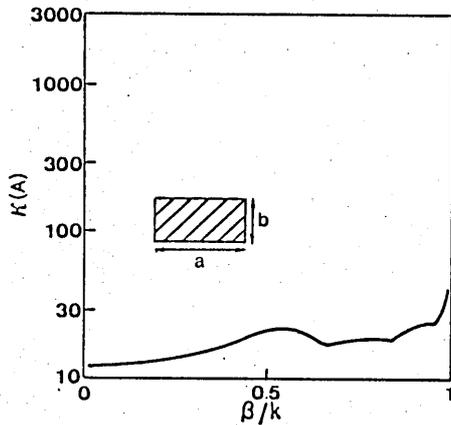


図3 完全導体方形柱の伝搬定数と条件数

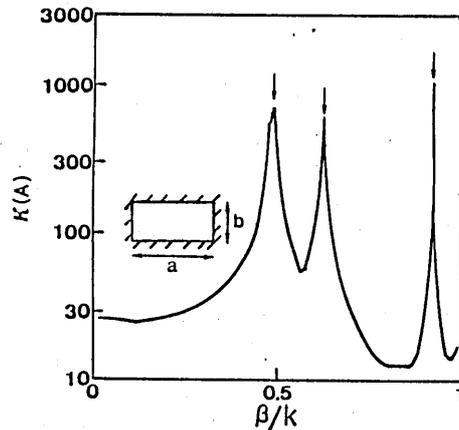


図4 方形導波管の伝搬定数と条件数

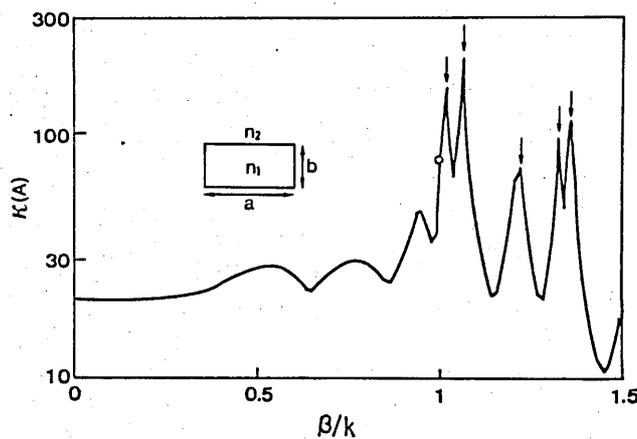


図5 方形誘電体導波路の伝搬定数と条件数

5 むすび

本報告では、電磁波散乱問題および電磁波導波路問題に対して、電磁界横成分を用いた積分方程式を境界要素法により数値解析する手法を示した。本手法で用いる積分方程式は散乱問題、導波路問題のいずれの場合においてもスプリアス解を混入させることなく、従って、実用的に優れた積分方程式である。また、完全導体方形柱、方形導波管及び方形誘電体導波路に本手法を適用し、本手法の妥当性と有効性を数値的に示した。

文献

- (1) A. J. Burton : "Numerical solution of scalar diffraction problems", in *Numerical Solution of Integral Equations*, L. M. Delves and J. Walsh eds., Clarendon Press, ch.21 (1974).
- (2) H. A. Schenck : "Improved integral formulation for acoustic radiation problems", *J. Acoust. Soc. Am.*, 44, pp.41-58 (Jan. 1968)
- (3) I. Toyoda, M. Matsuhara and N. Kumagai : "Extended integral equation formulation for scattering problems from a cylindrical scatterer", *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, AP-36, pp.1580-1586 (Nov. 1988).
- (4) 松原正則 : "偏波保存光ファイバーの境界要素法解析", *信学論 (B)*, J67-B, pp.968-973 (昭 59-09).
- (5) 佐野, 倉園 : "境界要素法による誘電体線路の解析", *信学論 (B)*, J68-B, pp.1419-1427 (昭 60-12).
- (6) J. E. Goell : "A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides", *Bell Syst. Tech. J.*, pp.2133-2160 (Sept. 1969).

不規則円筒面による電磁波の散乱理論-2

小倉 久直、高橋 信行、桑原 幹夫

(京都大学 工学部)

1990年 12月 7日

(輻射科学研究会資料)

不規則円筒面による電磁波の散乱理論

小倉 久直、高橋 信行、桑原 幹夫
京都大学

1 序論

不規則面による電磁波の散乱、いわゆる乱反射の問題は普遍的な現象であって、電波領域では不規則な地表面、海面上の散乱・伝搬、レーダーエコー、レーダークラッタ、スペckルなどの問題、光領域では、乱反射、不規則界面による表面プラズモンの励起、光導波系の不規則面による散乱など種々の実際上の問題としてあらわれる。これらは理論的にも興味ある問題であり、今まで多くの研究者が取扱ってきたが、初等的な摂動法などによる通常の散乱理論は、多重散乱を含む場合に、いわゆる発散の困難を生じることがよく知られている。確率的に不規則な境界面による散乱波動場は必然的に不規則面を表す確率場の汎関数、言い替えると不規則面により生成される確率変数である。これを取扱う実用的な汎関数解析学は少ないが、もとの確率場が Gauss 確率場の場合には Wiener の非線形汎関数解析^{[1]-[4]}を用いることが出来る。更に確率場の一様性または群論的対称性を考慮することにより確率平面波 (Floquet 定理)^[5]、確率球面波^[6]、確率円筒波などが導入できるので通常の波動と同様に平面波、球面波、円筒波などの合成、展開が可能となり、波動問題を容易に見通しよく取扱うことができる。著者らはこれらの方法を用いてランダム平面^{[7]-[14]}による散乱、放射、回折、ランダム円筒面 (2 次元)^[15]、ランダム球面^[6]による散乱問題等を取扱い種々の散乱特性を明らかにして来た。本論文では最近取り上げられている円筒面による電磁波の散乱問題^[16]を確率汎関数法により取扱う。ランダム平面の場合には Wood anomaly に相当する異常散乱が存在することが明らかにされているが、これは平面に沿う伝搬波の多重散乱による現象で平滑平面による反射と決定的に異なる点であり、通常の摂動近似による解法では発散を起こす。一方、ランダム球面 (2、3 次元) の場合には表面粗さが小さい場合には多重散乱効果は少なく通常の摂動近似または単一散乱近似で発散なしに取扱いうる。これは球面 (2、3 次元) には実の共振がないためである。円筒面は軸方向に無限に延びているので散乱問題としては平面と球面の中間に位置するため、多重散乱効果がどのように現れるかは一つの興味ある問題であり、実用上必要な散乱特性とともにその性質を明らかにしようとするものである。

2 円筒面上の確率場

一様確率場と保測変換

円筒座標を (r, φ, z) で示す。ランダム円筒面を平均半径 a の一様確率場として

$$\begin{aligned} r &= a + f(\varphi, z; \omega) \\ \langle f(\varphi, z; \omega) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

で示す。ここに f は円筒面 $C(0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty)$ 上の一様確率場で $\omega \in \Omega$ は見本空間 Ω の見本点、 $\langle \rangle$ は Ω 上の確率平均を表す。C 上の一様確率場は運動、すなわち φ 方向の

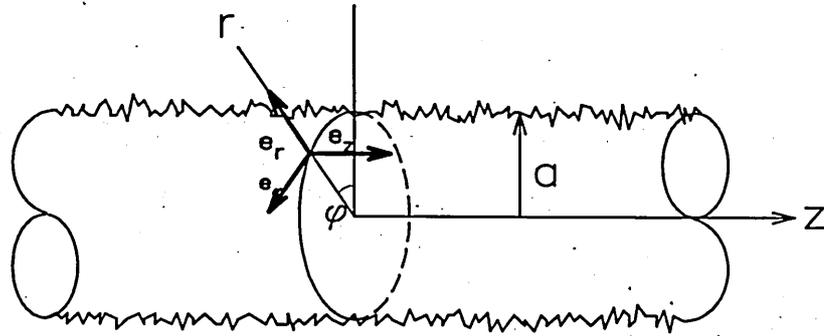


図 1: 不規則円筒面

任意の回転、 z 方向の任意の移動に関し確率分布は不変であるから、次の Ω 上の保測変換 T^φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi, \text{mod } 2\pi$)、 T^z ($-\infty \leq z \leq \infty$) が定義される。

$$\begin{aligned} f(\varphi, z; \omega) &\equiv f(0, 0; T^\varphi T^z \omega) \equiv f(T^\varphi T^z \omega) \\ f(\omega) &\equiv f(0, 0; \omega) \end{aligned} \quad (2)$$

確率場の移動変換群

$\psi(\varphi, z; \omega)$ を f により生成された円筒面 C 上の任意の確率場とする。確率場 ψ に対する C 上の移動変換を

$$D^{\varphi_1} D^{z_1} \psi(\varphi, z; \omega) \equiv \psi(\varphi + \varphi_1, z + z_1; T^{-\varphi_1} T^{-z_1} \omega) \quad (3)$$

で定義する。同様に円筒上のベクトル確率場 $\psi(\varphi, z; \omega)$ 、 $\psi = \psi_r e_r + \psi_\varphi e_\varphi + \psi_z e_z$ に対する移動変換 D^φ 、 D^z も

$$D^{\varphi_1} D^{z_1} \psi(\varphi, z; \omega) \equiv g^{-\varphi_1} \psi(\varphi + \varphi_1, z + z_1; T^{-\varphi_1} T^{-z_1} \omega) \quad (4)$$

で定義する。 $g^{\varphi_1} \psi$ は (e_r, e_φ) で張られる 2次元ベクトル ψ の z 軸回りの角度 φ_1 の回転を表す。

ランダム円筒面のスペクトル表現

C 上の一様確率場 $f(\varphi, z; \omega)$ は次の形のスペクトル表現をもつとする。

$$f(\varphi, z; \omega) \equiv f(T^\varphi T^z \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} F_m(\lambda) dB_m(\lambda, \omega) \quad (5)$$

ここで $dB_m(\lambda) \equiv dB_m(\lambda, \omega)$ 、 $\overline{dB_m(\lambda)} = dB_{-m}(-\lambda)$ 、 $\overline{F_m(\lambda)} = F_{-m}(-\lambda)$ とする (以下 ω は簡単のために省略する)。 $dB_m(\lambda)$ はランダムスペクトル測度で

$$\langle dB_m(\lambda) \rangle = 0 \quad (6)$$

$$\langle \overline{dB_m(\lambda)} dB_{m'}(\lambda') \rangle = \delta_{mm'} \delta_{\lambda\lambda'} d\lambda = \begin{cases} 0, & m \neq m', \text{ or } \lambda \neq \lambda' \\ d\lambda, & m = m', \lambda = \lambda' \end{cases} \quad (7)$$

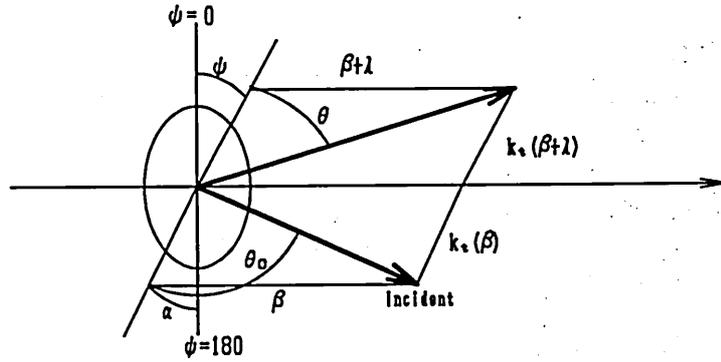


図 2: 各種ベクトル図

の直交性をもつ。 f の相関関数は(5)、(7)より

$$R(\varphi, z) = \langle f(\varphi + \varphi', z + z') f(\varphi', z') \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} |F_m(\lambda)|^2 d\lambda \quad (8)$$

$$\sigma \equiv R(0, 0) = \langle |f|^2 \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_m(\lambda)|^2 d\lambda \quad (9)$$

で与えられ円筒上の2点の差 (φ, z) のみに依存する関数である。 $|F_m(\lambda)|^2$ は“電力スペクトル”で、特に“白色スペクトル” $|F_m(\lambda)|^2 = 1/(2\pi)^2$ の場合には f はC上の白色雑音を表し、 $R(\varphi, z) = \delta(\varphi)\delta(z)$ となる。 σ^2 は f の分散で不規則表面の粗さのパラメタである。以下では簡単のために $f(\varphi, z; \omega)$ を Gauss 確率場とする。そのとき $dB_m(\lambda)$ は Gauss ランダム測度で、 m 、 λ が異なれば互いに独立な複素 Gauss 確率変数である。

$dB_m(\lambda)$ は移動変換 $D^{-\varphi}$ 、 D^{-z} または T^φ 、 T^z に関して

$$dB_m(\lambda, T^\varphi T^z \omega) = e^{im\varphi + i\lambda z} dB_m(\lambda, \omega) \quad (10)$$

の様に変換される。すなわち $dB_m(\lambda)$ は固有値 $e^{im\varphi + i\lambda z}$ をもつ固有ベクトルである。

3 外部円筒問題のベクトル波動関数

以下で用いるために円筒問題に現れるベクトル関数および記号を整理しておく。円筒座標単位ベクトルを e_r 、 e_φ 、 e_z で表す。

$$\text{位置ベクトル } \mathbf{r} = (r, z) \equiv (r, \varphi, z) = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad (11)$$

$$\text{波数ベクトル } \mathbf{k} = (k_t, \beta) \equiv (k_t, \alpha, \beta) = k_t\mathbf{e}_r + \beta\mathbf{e}_z \quad (12)$$

$$k_t \equiv k_t(\beta) = \sqrt{k^2 - \beta^2} \quad (13)$$

$$\text{水平偏波ベクトル } \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) \equiv \frac{k_t}{k} \times \mathbf{e}_z \quad (14)$$

$$\text{垂直偏波ベクトル } \mathbf{e}_V(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{e}_H(\mathbf{k}) = \frac{\beta}{k} \frac{k_k}{k_t} - \frac{k_t}{k} \mathbf{e}_z \quad (15)$$

ベクトル円筒関数

ベクトル Helmholtz 方程式を満たす solenoidal なベクトル波動関数 ψ

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(r) = 0, \quad \nabla \cdot \psi = 0 \quad (16)$$

として、本論文の場合ベクトル円筒関数を次の様に定義する:

$$\left. \begin{array}{l} j_m^1(r, \beta) \\ h_m^1(r, \beta) \end{array} \right\} \equiv \zeta_m(r, \beta) e_r + \eta_m(r, \beta) e_\varphi \quad (17)$$

$$\left. \begin{array}{l} j_m^2(r, \beta) \\ h_m^2(r, \beta) \end{array} \right\} \equiv \eta_m(r, \beta) e_r - \zeta_m(r, \beta) e_\varphi + \psi_m(r, \beta) e_z \quad (18)$$

$$\psi_m(r, \beta) \equiv \frac{k_i(\beta)}{k} \phi_m(r, \beta) \quad (19)$$

$$\zeta_m(r, \beta) \equiv \frac{\beta}{k} \frac{m}{k_i(\beta)r} \phi_m(r, \beta) = \frac{\beta}{2k} [\phi_{m-1}(r, \beta) + \phi_{m+1}(r, \beta)] \quad (20)$$

$$\eta_m(r, \beta) \equiv \frac{i\beta}{k} \dot{\phi}_m(r, \beta) = \frac{i\beta}{2k} [\phi_{m-1}(r, \beta) - \phi_{m+1}(r, \beta)] \quad (21)$$

$$(22)$$

ここで円筒関数 ϕ が

$$\phi_m(r, \beta) = \begin{cases} J_m(k_i(\beta)r) \\ H_m^{(1)}(k_i(\beta)r) \end{cases}, \quad \dot{\phi}_m(r, \beta) = \begin{cases} J_m'(k_i(\beta)r) \\ H_m^{(1)'}(k_i(\beta)r) \end{cases} \quad (23)$$

であるに応じてベクトル円筒関数は j_m 、 h_m の記号を用いるものとする。

$$\text{TE 波 (放射モード)} \quad E_m^{\text{TE}}(r) = h_m^1(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (24)$$

$$H_m^{\text{TE}}(r) = -\frac{1}{Z_{\text{TE}}} h_m^2(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (25)$$

$$Z_{\text{TE}} \equiv Z_{\text{TE}}(\beta) = \frac{k}{\beta} \zeta, \quad \zeta \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (26)$$

$$\text{TM 波 (放射モード)} \quad E_m^{\text{TM}}(r) = h_m^2(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (27)$$

$$H_m^{\text{TM}}(r) = \frac{1}{Z_{\text{TM}}} h_m^1(r, \beta) e^{im\psi + i\beta z} \quad (28)$$

$$Z_{\text{TM}} \equiv Z_{\text{TM}}(\beta) = \frac{\beta}{k} \zeta \quad (29)$$

4 不規則円筒面による散乱

境界条件 不規則円筒面上で電界は完全導体の境界条件を満たすものとする:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0: \quad r = a + f(\varphi, z; \omega), \quad \mathbf{n}: \text{外向法線} \quad (30)$$

表面粗さが微小で十分滑らかとし、 \mathbf{n} を次式で

$$\mathbf{n} \simeq \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi - \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (31)$$

で近似すれば、境界条件 (30) は円筒面 $r = a$ 上の e_φ 、 e_z 成分の近似境界条件に変換できる:

$$E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} f + E_r \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad (r = a) \quad (32)$$

$$E_z + \frac{\partial E_z}{\partial r} f + E_r \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (r = a) \quad (33)$$

以後この近似境界条件を不規則円筒面のモデルとして解析を進める。

TE 円筒波入射の散乱電界 m -TE 波入射の場合の全電界を Wiener 展開により

$$E_m(r, \omega) = E_m^0(r) + E_m^s(r; \omega) \quad (34)$$

$$= E_m^c(r) + E_m^{ic}(r; \omega), \quad \langle E_m^{ic} \rangle = 0 \quad (35)$$

$$E_m^c(r) \equiv [j_m^1(r, \beta) + \alpha_m h_m^1(r, \beta) + B_0^m h_m^2(r, \beta)] e^{im\varphi + i\beta z} \quad (36)$$

$$\alpha_m \equiv \alpha_m^{TE} + A_0^m \quad (37)$$

$$\begin{aligned} E_m^{ic}(r; \omega) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_n} \int \cdots \int \right. \\ &\quad \left[A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^1(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \right. \\ &\quad \left. + B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^2(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \right] \\ &\quad \times h_n[dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)] \Big\} \\ &= \sum_{m_1} \int [A_1^m(m_1; \lambda_1) h_{m+m_1}^1(r, \beta + \lambda_1) + B_1^m(m_1; \lambda_1) h_{m+m_1}^2(r, \beta + \lambda_1)] \\ &\quad \times e^{i(m+m_1)\varphi + i\beta\lambda_1 z} dB_{m_1}(\lambda_1) \\ &\quad + \sum_{m_1, m_2} \int \int [A_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^1(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\ &\quad + B_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^2(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] \\ &\quad \times e^{i(m+m_1+m_2)\varphi + i(\beta+\lambda_1+\lambda_2)z} h_2[dB_{m_1}(\lambda_1), dB_{m_2}(\lambda_2)] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

と書ける。 E_m^c は E_m 平均値 (コヒーレント部分)、 E_m^{ic} はゆらぎ部分 (インコヒーレント部分) を表す。 α_m はコヒーレント TE 散乱係数、 B_0^m はコヒーレント TM 散乱係数である。同様な式が散乱磁界に対してもえられる。

$$H_m(r, \omega) = H_m^0(r) + H_m^s(r; \omega) \quad (40)$$

$$= H_m^c(r) + H_m^{ic}(r; \omega) \quad (41)$$

$$H_m^c(r) \equiv \left\{ -\frac{1}{Z_{TE}(\beta)} [j_m^2(r, \beta) + \alpha_m h_m^2(r, \beta)] + \frac{B_0^m}{Z_{TM}(\beta)} h_m^1(r, \beta) \right\} e^{im\varphi + i\beta z} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} H_m^{ic}(r; \omega) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_n} \int \cdots \int h_n [dB_{m_1}(\lambda_1) \cdots dB_{m_n}(\lambda_n)] \right. \\ &\quad \left[\frac{A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^2(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right. \end{aligned}$$

$$+ \left. \frac{B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^1(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right\} \quad (43)$$

TM 円筒波入射の散乱電界 m -TM 波入射の場合も全電界を Wiener 展開により

$$E_m(r, \omega) = E_m^0(r) + E_m^s(r; \omega) \quad (44)$$

$$= E_m^c(r) + E_m^{ic}(r; \omega), \quad \langle E_m^{ic} \rangle = 0 \quad (45)$$

$$E_m^c(r) \equiv [j_m^2(r, \beta) + A_0^m h_m^1(r, \beta) + \alpha_m h_m^2(r, \beta)] e^{im\varphi + i\beta z} \quad (46)$$

$$\alpha_m \equiv \alpha_m^{TM} + B_0^m \quad (47)$$

$$\begin{aligned} E_m^{ic}(r; \omega) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_n} \int \cdots \int \right. \\ &\quad [A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^1(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \\ &\quad + B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^2(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)] \\ &\quad \times h_n[dB_{m_1}(\lambda_1), \dots, dB_{m_n}(\lambda_n)] \Big\} \quad (48) \\ &= \sum_{m_1} \int [A_1^m(m_1; \lambda_1) h_{m+m_1}^1(r, \beta + \lambda_1) + B_1^m(m_1; \lambda_1) h_{m+m_1}^2(r, \beta + \lambda_1)] \\ &\quad \times e^{i(m+m_1)\varphi + i\beta\lambda_1 z} dB_{m_1}(\lambda_1) \\ &+ \sum_{m_1, m_2} \int \int [A_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^1(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\ &\quad + B_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) h_{m+m_1+m_2}^2(r, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] \\ &\quad \times e^{i(m+m_1+m_2)\varphi + i(\beta + \lambda_1 + \lambda_2)z} h_2[dB_{m_1}(\lambda_1), dB_{m_2}(\lambda_2)] \\ &+ \cdots \quad (49) \end{aligned}$$

と書ける。 E_m^c は E_m 平均値 (コヒーレント部分)、 E_m^{ic} はゆらぎ部分 (インコヒーレント部分) を表す。 α_m はコヒーレント TM 散乱係数、 A_0^m はコヒーレント TE 散乱係数である。散乱磁界は

$$H_m(r, \omega) = H_m^0(r) + H_m^s(r; \omega) \quad (50)$$

$$= H_m^c(r) + H_m^{ic}(r; \omega) \quad (51)$$

$$H_m^c(r) \equiv \left\{ -\frac{A_0^m}{Z_{TM}(\beta)} h_m^2(r, \beta) + \frac{1}{Z_{TM}(\beta)} [j_m^1(r, \beta) + \alpha_m h_m^1(r, \beta)] \right\} e^{im\varphi + i\beta z} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} H_m^{ic}(r; \omega) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_n} \int \cdots \int h_n[dB_{m_1}(\lambda_1) \cdots dB_{m_n}(\lambda_n)] \right. \\ &\quad \left[-\frac{A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^2(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \psi_{m+m_1+\dots+m_n}^1(r, \beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right] \Big\} \quad (53) \end{aligned}$$

水平偏波平面波入射の散乱電磁界 入射波数ベクトル $k \equiv (k_t, \alpha, \beta)$ の水平偏波平面波入射の場合は、上記の m -TE 波入射の解の重畳で与えられる:

$$E(\mathbf{r}, \omega) = E^0(\mathbf{r}) + E^s(\mathbf{r}; \omega) \quad (54)$$

$$\equiv E^c(\mathbf{r}) + E^{ic}(\mathbf{r}; \omega) \quad \langle E^{ic} \rangle = 0 \quad (55)$$

$$E^c(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} E_m^c(\mathbf{r}) \quad (56)$$

$$E^{ic}(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} E_m^{ic}(\mathbf{r}, \omega) \quad (57)$$

同様に

$$H(\mathbf{r}, \omega) = H^c(\mathbf{r}) + H^{ic}(\mathbf{r}; \omega) \quad (58)$$

$$H^c(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} H_m^c(\mathbf{r}) \quad (59)$$

$$H^{ic}(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} H_m^{ic}(\mathbf{r}, \omega) \quad (60)$$

水平偏波平面電磁波 $E^0(\mathbf{r})$ の入射方向単位面積当りの電力流 P_H は

$$P_H = \frac{\zeta}{2} \frac{1}{Z_{TE}(\beta)^2} = \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{\beta}{k} \right)^2 = \frac{\cos^2 \theta_0}{2\zeta} \quad (61)$$

垂直偏波平面波入射の散乱電磁界 入射波数ベクトル $k \equiv (k_t, \alpha, \beta)$ の垂直偏波平面波入射の場合は、 m -TM 波入射の解の重畳で与えられる:

$$E(\mathbf{r}, \omega) = E^0(\mathbf{r}) + E^s(\mathbf{r}; \omega) \quad (62)$$

$$\equiv E^c(\mathbf{r}) + E^{ic}(\mathbf{r}; \omega) \quad \langle E^{ic} \rangle = 0 \quad (63)$$

$$E^c(\mathbf{r}) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} E_m^c(\mathbf{r}) \quad (64)$$

$$E^{ic}(\mathbf{r}; \omega) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} E_m^{ic}(\mathbf{r}, \omega) \quad (65)$$

同様に

$$H(\mathbf{r}, \omega) = H^c(\mathbf{r}) + H^{ic}(\mathbf{r}; \omega) \quad (66)$$

$$H^c(\mathbf{r}) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} H_m^c(\mathbf{r}) \quad (67)$$

$$H^{ic}(\mathbf{r}; \omega) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im\alpha} H_m^{ic}(\mathbf{r}, \omega) \quad (68)$$

垂直偏波平面電磁波 $E^0(\mathbf{r})$ の入射方向単位面積当りの電力流 P_E は

$$P_E = \frac{\zeta}{2} \frac{1}{Z_{TE}(\beta) Z_{TM}(\beta)} = \frac{1}{2\zeta} \quad (69)$$

5 散乱電磁波の統計量

前節の TE、TM 円筒波による Wiener 展開の形で求めた散乱電磁界の表式において、展開係数 A_n^m 、 B_n^m が求められれば散乱電磁界の種々の統計量は単なる平均操作により容易に計算することが出来る

コヒーレント散乱振幅 一般性を失うことなく入射平面波の方位角は $\alpha = 0$ とする。遠方 $r \rightarrow \infty$ における平均散乱電磁界すなわちコヒーレント散乱電磁界 E_s^c の漸近形は
TE 円筒波

$$E_s^c(\mathbf{r}) \equiv \sum_m i^m \left[\alpha_m h_m^1(r, \beta) + B_0^m h_m^2(r, \beta) \right] e^{im\varphi + i\beta z} \sim \frac{e^{ik_t r}}{\sqrt{k_t r}} e^{i\beta z} E(\varphi) \quad (70)$$

$$E(\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \sum_m \left[-\frac{\beta}{k} B_0^m e_r - \frac{\beta}{k} \alpha_m e_\varphi + \frac{k_t}{k} B_0^m e_z \right] e^{im\varphi} \quad (71)$$

$$H_s^c(\mathbf{r}) \equiv \sum_m i^m \left[\frac{-\alpha_m}{Z_{TE}(\beta)} h_m^2(r, \beta) + \frac{B_0^m}{Z_{TM}(\beta)} h_m^1(r, \beta) \right] e^{im\varphi + i\beta z} \sim \frac{e^{ik_t r}}{\sqrt{k_t r}} e^{i\beta z} H(\varphi) \quad (72)$$

$$H(\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \sum_m \left[\frac{\beta}{k} \frac{\alpha_m}{Z_{TE}(\beta)} e_r - \frac{\beta}{k} \frac{B_0^m}{Z_{TM}(\beta)} e_\varphi - \frac{k_t}{k} \frac{\alpha_m}{Z_{TE}(\beta)} e_z \right] e^{im\varphi} \quad (73)$$

TM 円筒波

$$E_s^c(\mathbf{r}) \equiv -\sum_m i^m \left[A_0^m h_m^1(r, \beta) + \alpha_m h_m^2(r, \beta) \right] e^{im\varphi + i\beta z} \sim \frac{e^{ik_t r}}{\sqrt{k_t r}} e^{i\beta z} E(\varphi) \quad (74)$$

$$E(\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \sum_m \left[\frac{\beta}{k} \alpha_m e_r + \frac{\beta}{k} A_0^m e_\varphi - \frac{k_t}{k} \alpha_m e_z \right] e^{im\varphi} \quad (75)$$

$$H_s^c(\mathbf{r}) \equiv \sum_m i^m \left[\frac{\alpha_m}{Z_{TM}(\beta)} h_m^1(r, \beta) - \frac{A_0^m}{Z_{TE}(\beta)} h_m^2(r, \beta) \right] e^{im\varphi + i\beta z} \sim \frac{e^{ik_t r}}{\sqrt{k_t r}} e^{i\beta z} H(\varphi) \quad (76)$$

$$H(\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \sum_m \left[-\frac{\beta}{k} \frac{A_0^m}{Z_{TE}(\beta)} e_r + \frac{\beta}{k} \frac{\alpha_m}{Z_{TM}(\beta)} e_\varphi + \frac{k_t}{k} \frac{A_0^m}{Z_{TE}(\beta)} e_z \right] e^{im\varphi} \quad (77)$$

ここで $E(\varphi)$ 、 $H(\varphi)$ (z に依存しない) は電界および磁界のコヒーレント散乱振幅 (ベクトル) に相当する。

コヒーレント電力流 m -TE 円筒波入射のコヒーレント電磁界 E_m^c 、 H_m^c による円筒単位長当りの r 方向への電力流は半径 r 上で角度に関し積分すれば得られる: 漸近形 (70)、(72) を用いれば容易に計算できて

$$\begin{aligned} S_m^c &\equiv r \int \frac{1}{2} \text{Re} \left(E_m^c \times \overline{H_m^c} \right)_r d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{Z_{TE}(\beta)} (-1 + |1 + 2\alpha_m|^2) + \frac{1}{Z_{TM}(\beta)} |2B_0^m|^2 \right] \frac{2\beta}{k^2} \end{aligned} \quad (78)$$

$$= \left[\frac{\text{Re} \alpha_m + |\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \frac{2\beta}{k^2} \quad (79)$$

となる。ここで $(\)_r$ はベクトル r 成分を意味する。

水平偏波平面波入射のコヒーレント電磁界 E^c 、 H^c による電力流は

$$\begin{aligned} S^c &\equiv r \int \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E^c \times \overline{H^c})_r d\varphi \\ &= \sum_m S_m^c = \frac{2\beta}{k^2} \sum_m \left[\frac{\operatorname{Re} \alpha_m + |\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \end{aligned} \quad (80)$$

m -TM円筒波入射の場合も漸近形(74)、(76)を用いて

$$\begin{aligned} S_m^c &\equiv r \int \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_m^c \times \overline{H_m^c})_r d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{Z_{TE}(\beta)} |2A_0^m|^2 \right] + \frac{1}{Z_{TM}(\beta)} (-1 + |1 + 2\alpha_m|^2) \frac{2\beta}{k^2} \end{aligned} \quad (81)$$

$$= \left[\frac{|A_0^m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{\operatorname{Re} \alpha_m + |\alpha_m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \frac{2\beta}{k^2} \quad (82)$$

となる。

垂直偏波平面波入射のコヒーレント電磁界 E^c 、 H^c による電力流は

$$\begin{aligned} S^c &\equiv r \int \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E^c \times \overline{H^c})_r d\varphi \\ &= \sum_m S_m^c = \frac{2\beta}{k^2} \sum_m \left[\frac{|A_0^m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{\operatorname{Re} \alpha_m + |\alpha_m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \end{aligned} \quad (83)$$

インコヒーレント電力流 以下に示すようにインコヒーレント電磁界 E_m^{ic} 、 H_m^{ic} による単位長当りの全電力流 S^{ic} は確率1で定数に等しい。したがって、定数はその平均値に等しい。TE、TM円筒波に対して同形で書け

$$\begin{aligned} S_m^{ic} &\equiv \frac{r}{2} \int \langle (\operatorname{Re} E_m^{ic} \times \overline{H_m^{ic}})_r \rangle d\varphi \\ &= 2 \sum_{m_1} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1)^2} \left[\frac{|A_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1)} + \frac{|B_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1)} \right] \frac{\beta + \lambda_1}{k^2} d\lambda_1 \\ &\quad + 2 \cdot 2! \sum_{m_1} \sum_{m_2} \int \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1 + \lambda_2)^2} \left[\frac{|A_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{|B_2^m(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1 + \lambda_2)} \right] \\ &\quad \times \frac{\beta + \lambda_1 + \lambda_2}{k^2} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (84)$$

平面入射の場合

$$S^{ic} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m^{ic} \quad (85)$$

なお、単位面積当りの平面波入射電力を1に規格化する場合、水平偏波入射の場合には(61)により(80)(85)の右辺に $2Z_{TE}(\beta)^2/\zeta_0 = 2\zeta(k/\beta)^2$ を、また垂直偏波入射の場合は(69)により(83)(85)の右辺に $2Z_{TE}(\beta)Z_{TM}(\beta)/\zeta_0 = 2\zeta$ を乗じる必要がある。

電力保存則 TE、TM 円筒波入射の電磁界 E_m 、 H_m による電力流

$$P_m = \frac{1}{2} \text{Re} (E_m \times \overline{H_m}) \quad (86)$$

に対し不規則円筒面を含む半径 r 、軸長 ℓ の円筒面より出入する全電力流は保存則により確率 1 で (不規則面に拘らず) 0 である。特に ℓ を十分大きくとるとき円筒面上での平均値は

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} \int_0^\ell dz \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Re} (E_m \times \overline{H_m}) \cdot e_r d\varphi = \langle P_m \rangle = 0 \quad (87)$$

$P_m = \langle P_m \rangle_r$ は円筒面 C 上の一様確率場であってランダム表面 (Gauss 確率場) がエルゴード性をもつから、上式にエルゴード定理を適用すれば、円筒面上の平均値は確率平均 $\langle P_m \rangle$ に等しくなる。これから

$$S_m^c + S_m^{ic} = 0 \quad (88)$$

TE 円筒波の場合、これを (78)(84) を用いて書直せば

$$\begin{aligned} 1 &= |1 + 2\alpha_m|^2 + \frac{Z_{TE}(\beta)}{Z_{TM}(\beta)} |2B_0^m|^2 \\ &+ 4Z_{TE}(\beta) \sum_{m_1} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1)^2} \left[\frac{|A_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1)} + \frac{|B_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1)} \right] \frac{\beta + \lambda_1}{\beta} d\lambda_1 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (89)$$

TM 円筒波の場合は、(81)(84) を用いて書直せば

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{Z_{TM}(\beta)}{Z_{TE}(\beta)} |2A_0^m|^2 + |1 + 2\alpha_m|^2 \\ &+ 4Z_{TM}(\beta) \sum_{m_1} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1)^2} \left[\frac{|A_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1)} + \frac{|B_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1)} \right] \frac{\beta + \lambda_1}{\beta} d\lambda_1 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (90)$$

左辺を規格化した形に書いた。左辺は入射電力、右辺第 1、2 項は全コヒーレント散乱電力、第 3 項以下はインコヒーレント散乱電力に相当する。

平面波入射の場合の保存則は (88) の m について和をとったもので

$$S_c + S_{ic} = 0 \quad (91)$$

で与えられる。水平平面波入射の場合、これを (79)(84) を用いて表せば

$$\begin{aligned} &\sum_m \left[\frac{\text{Re} \alpha_m + |\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \frac{2\beta}{k^2} \\ &+ 2 \sum_m \sum_{m_1} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1)^2} \left[\frac{|A_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1)} + \frac{|B_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1)} \right] \frac{\beta + \lambda_1}{k^2} d\lambda_1 \\ &+ \dots = 0 \end{aligned} \quad (92)$$

垂直平面波入射の場合、これを (82)(84) を用いて表せば

$$\begin{aligned} & \sum_m \left[\frac{|A_0^m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{\operatorname{Re} \alpha_m + |\alpha_m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \frac{2\beta}{k^2} \\ & + 2 \sum_m \sum_{m_1} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1)^2} \left[\frac{|A_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1)} + \frac{|B_1^m(m_1, \lambda_1)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1)} \right] \frac{\beta + \lambda_1}{k^2} d\lambda_1 \\ & + \dots = 0 \end{aligned} \quad (93)$$

全散乱断面積 (80)(83) の [] 内第 1 項の $\operatorname{Re} \alpha_m$ を除いた項は、コヒーレント散乱電磁界 E_s^c による散乱電力 σ_c を表す。したがって、 σ_c と S_{ic} の和は円筒の単位長当りの全散乱断面積 S を与える：

水平偏波平面波

$$\begin{aligned} S &= \sigma_c + S_{ic} \\ &= \frac{2\beta}{k^2} \sum_m \left[\frac{|\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} n! \sum_m \dots \sum_{m_1 \dots m_n} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \left[\frac{|A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right] \frac{2(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{k^2} d\lambda_1 \dots d\lambda_n \end{aligned} \quad (94)$$

垂直偏波平面波

$$\begin{aligned} S &= \sigma_c + S_{ic} \\ &= \frac{2\beta}{k^2} \sum_m \left[\frac{|A_0^m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|\alpha_m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} n! \sum_m \dots \sum_{m_1 \dots m_n} \int_{k^2 > (\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \left[\frac{|A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)|^2}{Z_{TE}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)|^2}{Z_{TM}(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right] \frac{2(\beta + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{k^2} d\lambda_1 \dots d\lambda_n \end{aligned} \quad (95)$$

光学定理 (71)(73) と (94) あるいは (75)(77) と (95) を用いれば、電力保存則 (92)(93) は次の形に書ける：

水平偏波平面波、垂直偏波平面波に関し

$$S = \frac{\sqrt{2\pi}}{k} \operatorname{Im} \left[\frac{H_r(0)}{\sqrt{i}} \right] \equiv -\frac{\sqrt{2\pi}}{k} \frac{1}{Z_{TE}(\beta)} \operatorname{Im} \left[\frac{E_\varphi(0)}{\sqrt{i}} \right] \quad (96)$$

ランダム円筒面による散乱に対して成立つ光学定理であって、全散乱断面積 S が前方散乱電磁波の振幅の虚部によって表されることを意味している。

コヒーレント散乱角度分布 (コヒーレント散乱微分断面積) 平面波入射の散乱角度分布は角

度 φ の関数として
水平偏波平面波

$$\sigma(\varphi|\alpha)d\varphi = \frac{\beta}{k^2\pi} \left[\frac{1}{Z_{TE}(\beta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{Z_{TM}(\beta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_0^m e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 \right] d\varphi \quad (97)$$

$$\sigma_c = \int_0^{2\pi} \sigma_c(\varphi|\alpha)d\varphi = \frac{2\beta}{k^2} \sum_m \left[\frac{|\alpha_m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|B_0^m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \quad (98)$$

垂直偏波平面波

$$\sigma(\varphi|\alpha)d\varphi = \frac{\beta}{k^2\pi} \left[\frac{1}{Z_{TE}(\beta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_0^m e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{Z_{TM}(\beta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 \right] d\varphi \quad (99)$$

$$\sigma_c = \int_0^{2\pi} \sigma_c(\varphi|\alpha)d\varphi = \frac{2\beta}{k^2} \sum_m \left[\frac{|A_0^m|^2}{Z_{TE}(\beta)} + \frac{|\alpha_m|^2}{Z_{TM}(\beta)} \right] \quad (100)$$

インコヒーレント散乱角度分布 (インコヒーレント散乱微分断面積) 入射角 (α, θ_0) 、散乱角 (φ, θ) に対するインコヒーレント散乱角度分布は、水平垂直偏波とも同形で

$$S_{ic}(\theta, \varphi|\theta_0, \alpha) = \left[\sum_{m_1} \frac{1}{Z_{TE}(k \cos \theta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_1^m(m_1, k(\cos \theta - \cos \theta_0)) e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{Z_{TM}(k \cos \theta)} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_1^m(m_1, k(\cos \theta - \cos \theta_0)) e^{im(\varphi-\alpha)} \right|^2 \right] \cos \theta \quad (101)$$

$$S_{ic} \equiv \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_{ic}(\varphi, \theta|\alpha, \theta_0) d\varphi \sin \theta d\theta \quad (102)$$

ここで入射角 (α, θ_0) 、散乱角 (φ, θ) を極座標で示し

$$\begin{aligned} \beta &= k \cos \theta_0, & k_t(\beta) &= k \sin \theta_0 \\ \beta + \lambda_1 &= k \cos \theta, & k_t(\beta + \lambda_1) &= k \sin \theta \end{aligned} \quad (103)$$

とおいた。 $\alpha = 0$ として一般性を失わない。水平偏波平面電磁波の単位面積当りの入射電力を1に規格化する場合は(61)により(97)(101)の右辺に $2\zeta(k/\beta)^2 = 2\zeta/\cos^2 \theta_0$ を、また垂直偏波波入射の場合は(69)により(99)(101)の右辺に $2Z_{TE}(\beta)Z_{TM}(\beta)/\zeta_0 = 2\zeta$ を乗じる必要がある。

6 境界条件の近似解法 (垂直偏波平面波入射)

Wiener係数の方程式 散乱問題はTM円筒波入射について各 m 毎に解くことができる。 φ 成分および z 成分の境界条件(32)(33)に(45)を代入し、多変数複素 Hermite多項式の漸化式および直交性を用いると、Wiener展開の係数 $A_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 、 $B_n^m(m_1, \dots, m_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (m , 固定)に対する階層方程式がえられる。簡単のために $n = 2$ までの Wiener係数を考慮した階層方程式を $n = 0, 1, 2$ に対して以下に示す。実際の計算では $n = 3$ までを考慮した。

$n = 0$

[φ 成分]

$$\begin{aligned}
& [A_0\eta_m(a, \beta) - B_0\zeta_m(a, \beta)] \\
& + \sum_{m_1} \int k_t(\beta + \lambda_1) [A_1(m_1, \lambda_1)\dot{\eta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \\
& \quad - B_1(m_1, \lambda_1)\dot{\zeta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)] \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 \\
& - \sum_{m_1} \frac{im_1}{a} \int [A_1(m_1, \lambda_1)\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \\
& \quad + B_1(m_1, \lambda_1)\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)] \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 = 0
\end{aligned} \tag{104}$$

[z 成分]

$$\begin{aligned}
& B_0\psi_m(a, \beta) + \sum_{m_1} \int k_t(\beta + \lambda_1) B_1(m_1, \lambda_1) \dot{\psi}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 \\
& + \sum_{m_1} \int [A_1(m_1, \lambda_1)\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \\
& \quad + B_1(m_1, \lambda_1)\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)] \overline{i\lambda_1 F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 = 0
\end{aligned} \tag{105}$$

$n = 1$

[φ 成分]

$$\begin{aligned}
& [A_1(m_1, \lambda_1)\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) - B_1(m_1, \lambda_1)\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)] \\
& + k_t(\beta) [-\dot{\zeta}_m^*(a, \beta) + A_0\dot{\eta}_m(a, \beta) - B_0\dot{\zeta}_m(a, \beta)] F_{m_1}(\lambda_1) \\
& + [\eta_m^*(a, \beta) + A_0\zeta_m(a, \beta) + B_0\eta_m(a, \beta)] \frac{im_1}{a} F_{m_1}(\lambda_1) \\
& + 2 \sum_{m_2} \int k_t(\beta + \lambda_1 + \lambda_2) [A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)\dot{\eta}_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& \quad - B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)\dot{\zeta}_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] \overline{F_{m_2}(\lambda_2)} d\lambda_2 \\
& + 2 \sum_{m_2} \int [A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)\zeta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& \quad + B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)\eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] \frac{im_2}{a} \overline{F_{m_2}(\lambda_2)} d\lambda_2 = 0
\end{aligned} \tag{106}$$

[z 成分]

$$\begin{aligned}
& B_1(m_1, \lambda_1)\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) + k_t(\beta) [\dot{\psi}_m^*(a, \beta) + B_0\dot{\psi}_m(a, \beta)] F_{m_1}(\lambda_1) \\
& + [\eta_m^*(a, \beta) + A_0\zeta_m(a, \beta) + B_0\eta_m(a, \beta)] i\lambda_1 F_{m_1}(\lambda_1) \\
& + 2 \sum_{m_2} \int B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) k_t(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \dot{\psi}_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \overline{F_{m_2}(\lambda_2)} d\lambda_2 \\
& + 2 \sum_{m_2} \int [A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)\zeta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& \quad + B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)\eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)] \overline{i\lambda_2 F_{m_2}(\lambda_2)} d\lambda_2 = 0
\end{aligned} \tag{107}$$

$n = 2$

[φ 成分]

$$\begin{aligned}
& A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) - B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \zeta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ k_t(\beta + \lambda_1) \left[A_1(m_1, \lambda_1) \dot{\eta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) - B_1(m_1, \lambda_1) \dot{\zeta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \right] F_{m_2}(\lambda_2) \right. \\
& \quad \left. + k_t(\beta + \lambda_2) \left[A_1(m_2, \lambda_2) \dot{\eta}_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) - B_1(m_2, \lambda_2) \dot{\zeta}_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) \right] F_{m_1}(\lambda_1) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[A_1(m_1, \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) + B_1(m_1, \lambda_1) \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \right] \frac{im_2}{a} F_{m_2}(\lambda_2) \right. \\
& \quad \left. + \left[A_1(m_2, \lambda_2) \zeta_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) + B_1(m_2, \lambda_2) \eta_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) \right] \frac{im_1}{a} F_{m_1}(\lambda_1) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{108}$$

[z 成分]

$$\begin{aligned}
& B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \psi_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ B_1(m_1, \lambda_1) k_t(\beta + \lambda_1) \dot{\psi}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) F_{m_2}(\lambda_2) \right. \\
& \quad \left. + B_1(m_2, \lambda_2) k_t(\beta + \lambda_2) \dot{\psi}_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) F_{m_1}(\lambda_1) \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left[A_1(m_1, \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) + B_1(m_1, \lambda_1) \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \right] i\lambda_2 F_{m_2}(\lambda_2) \right. \\
& \quad \left. + \left[A_1(m_2, \lambda_2) \zeta_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) + B_1(m_2, \lambda_2) \eta_{m+m_2}(a, \beta + \lambda_2) \right] i\lambda_1 F_{m_1}(\lambda_1) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{109}$$

但し、ここでは A_n^m, B_n^m を A_n, B_n と略記した。 $n = 0$ の方程式 (104)(105) は方程式 (32)(33) の平均値部分である。ここでは不規則面の粗さは小さく $k\sigma \ll 1$ と仮定し近似解を求めた。 $F(\lambda)$ は $k\sigma$ のオーダーであるから A_0, B_0 は $(k\sigma)^2$ のオーダー、 $A_n, B_n (n \geq 1)$ は $(k\sigma)^n$ のオーダーである。したがって (109) より B_2 を B_1, A_1 に比例する項を求め、(108) に代入して A_2 を求める。これを (107) に代入して、 B_1 を近似的に求め、(106) より A_1 を求める。 A_1, B_1 を (104)(105) に代入すれば、 A_0, B_0 が求められるが、これを (106)(107) に逐次代入すれば、 A_1, B_1 の近似がよくなる。

粗い近似解 (単一散乱近似) 近似解の特徴を際だたせるために、まず最も粗い近似解 (単一散乱近似又は摂動近似相当) を書き下し、次にそれに補正を導入する形で近似解を求める。始めに、(106)(107) より A_0, B_0, A_2, B_2 を無視して A_1, B_1 を $k\sigma$ のオーダーつまり $F_{m_1}(\lambda_1)$ に比例する項を求めると

$$B_1(m_1, \lambda_1) \simeq \frac{-[\eta_m^*(a, \beta) i\lambda_1 + k_t(\beta) \dot{\psi}_m^*(a, \beta)] F_{m_1}(\lambda_1)}{\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda)} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}
A_1(m_1, \lambda_1) & \simeq \frac{\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} B_1(m_1, \lambda_1) \\
& \quad - \frac{[k_t(\beta) \zeta_m^*(a, \beta) - \eta_m^*(a, \beta) (im_1/a)] F_{m_1}(\lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} \tag{111}
\end{aligned}$$

がえられる。ここで Bessel 関数の特異点 $k_t \rightarrow 0$ での漸近形

$$\psi_m(a, \nu) \equiv \frac{k_t}{k} H_m^{(1)}(k_t a) \sim \begin{cases} \frac{2}{i\pi} \frac{(m-1)!}{ka} \left(\frac{2}{k_t a}\right)^{m-1} & (m \geq 1) \\ i \frac{2}{\pi} \frac{k_t}{k} \log\left(\frac{k_t a}{2}\right) & (m = 0) \end{cases} \quad (k_t \equiv k_t(\nu) \rightarrow 0) \quad (112)$$

$$\zeta_m(a, \nu) \equiv \frac{\nu}{k} [H_{m-1}^{(1)}(k_t a) + H_{m+1}(k_t a)] \sim \begin{cases} \sim \frac{-i}{2\pi} \frac{\nu}{ka} m! \left[\frac{2}{k_t a}\right]^{m+1} & (m \geq 1) \\ = 0 & (m = 0) \end{cases} \quad (k_t \rightarrow 0) \quad (113)$$

$$\eta_m(a, \nu) \equiv \frac{i\nu}{k} [H_{m-1}^{(1)}(k_t a) - H_{m+1}(k_t a)] \sim \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{\nu}{ka} m! \left[\frac{2}{k_t a}\right]^{m+1} & (m \geq 1) \\ -\frac{1}{\pi} \frac{\nu}{k} \frac{2}{k_t a} & (m = 0) \end{cases} \quad (k_t \rightarrow 0) \quad (114)$$

に注意する。(112)によれば TM 波の展開係数 $B_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似解 (110) は $\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) = 0$ となるとき、すなわち

$$m + m_1 = 0, \quad k_t(\beta + \lambda_1) \equiv \sqrt{k^2 - (\beta + \lambda_1)^2} = 0 \quad (115)$$

のときのみ $[k_t \log k_t]^{-1}$ の特異性をもつ。これは入射波と TEM モードとの一種の共振条件に相当する。一方 $A_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似解 (111) の第 1 項は (113) により $m + m_1 = 0$ で $\zeta_0 = 0$ となるので、 B_1 による特異性は消え、また第 2 項は (114) により $k_t \rightarrow 0$ で特異性を持たない。したがって、 $A_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似解 (111) は (115) においても特異性はないので近似解として使用することもできる。以上より多重散乱の効果を含まない摂動近似解 (110) は、如何に粗さが小さくても特異点 (115) の近傍で発散して近似が悪くなる。また、これを用いた (104)(105) より求めるコヒーレント散乱係数 A_0, B_0 は発散する。

1 次 Wiener 係数 上の考察により、特異点 (115) において近似解が発散しないように高次の Wiener 係数 A_2, B_2 による寄与を取入れて B_1 の近似解 (110) を補正する必要がある。高次の効果を入れて A_2, B_2 を導出すると

$$B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \simeq \frac{-\frac{1}{2}\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) i \lambda_2 F_{m_2}(\lambda_2) B_1(m_1, \lambda_1)}{\psi_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) - \eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) M(m + m_1 + m_2 | \beta + \lambda_1 + \lambda_2)} \quad (116)$$

$$A_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2) \simeq \frac{\zeta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2) B_2(m_1, m_2; \lambda_1, \lambda_2)}{\eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{[k_t(\beta + \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) - \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \frac{i m_2}{2}] F_{m_2}(\lambda_2)}{2\eta_{m+m_1+m_2}(a, \beta + \lambda_1 + \lambda_2)} B_1(m_1, \lambda_1) + \dots \quad (117)$$

(116) の分母に現れる $M(m|\lambda)$ は多重散乱の効果を表す mass operator である。これら B_2, A_2 を (107) に用いて (110) に dominant な補正を行なった B_1 の近似解として

$$B_1(m_1, \lambda_1) \simeq \frac{1}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda)} - \frac{[\eta_m^*(a, \beta) i \lambda_1 + k_t(\beta) \psi_m^*(a, \beta)] F_{m_1}(\lambda_1) - N(m_1, \lambda_1)}{\frac{\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} - M(m + m_1 | \beta + \lambda_1)} \quad (118)$$

$$N(m_1, \lambda_1) \equiv \{B_0 k_t(\beta) \psi_m(a, \beta) + [B_0 \eta_m(a, \beta) + A_0 \zeta_m(a, \beta)] i \lambda_1\} F_{m_1}(\lambda_1) \quad (119)$$

がえられる。分子の第 1 項は σ^1 のオーダーであるので、 σ^3 のオーダーである分子の補正項 N は近似的に無視することもできる。(118) の分母の補正項 $M(m + m_1 | \beta + \lambda_1)$ は (115) の近傍で効くの

で近似的に $M(0|\pm k)$ とおいてもよい。(118)を(106)に代入し、 A_2 、 B_2 の寄与を無視すれば、 $A_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似式(111)を補正できる:

$$A_1(m_1, \lambda_1) \simeq \frac{\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} B_1(m_1, \lambda_1) \frac{[-k_i(\beta)\dot{\zeta}_m^*(a, \beta) + \eta_m^*(a, \beta)(im_1/a)] F_{m_1}(\lambda_1) + L(m_1, \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} \quad (120)$$

$$L(m_1, \lambda_1) \equiv A_0 [k_i(\beta)\dot{\eta}_m(a, \beta) + \zeta_m(a, \beta)(im_1/a)] F_{m_1}(\lambda_1) + B_0 [k_i(\beta)\dot{\zeta}_m(a, \beta) + \eta_m(a, \beta)(im_1/a)] F_{m_1}(\lambda_1) \quad (121)$$

A_1 、 B_1 は $k\sigma$ のオーダー、 L は $(k\sigma)^3$ のオーダーであるので A_1 の近似計算では L は無視してよい。近似解(120)の第1項は(117)に $A_1(m_1, \lambda_1)$ に比例する項を含めて(106)の A_2 、 B_2 の積分の寄与を取り入れれば更により近似解に修正することができる。その時(140)-(144)の様な多数の積分項が現れるが、煩雑なので省略する。 $A_1(m_1, \lambda_1)$ の粗い近似解(117)はもともと発散を含まないので、ここでは(120)の修正にとどめておく。同様に $B_1(m_1, \lambda_1)$ の近似解(118)に無視した項の効果を入れる修正が可能であるが省略する。

(116)(118)の分母に現れる $M(m|\lambda)$ は mass operator に相当する項であって多重散乱の効果を表す。詳細は省略するが3次の Wiener 係数も考慮することにより mass operator の関係式がえられる。 $M_1(m|\lambda)$ の右辺は $M(m|\lambda) \simeq 0$ と近似して計算できる。

$$\frac{k_i(\nu)\dot{\psi}_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} = \frac{k_i^2(\nu)}{i\nu} \quad (122)$$

$$\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} \sim \begin{cases} -\frac{a}{i\nu|n|} k_T^2(\nu), & n \neq 0 \\ \frac{a}{i\nu} k_T^2(\nu) \log \frac{k_i(\nu)a}{2}, & n = 0 \end{cases}, \quad (k_i^2 = k^2 - \nu^2 \rightarrow 0) \quad (123)$$

であるから、 $M_1(m|\lambda)$ の右辺は $M(m|\lambda) \sim 0$ と近似して積分ができる。また、 M_2 、 M_4 の積分については

$$1 + \left[\frac{\zeta_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} \right]^2 \begin{cases} \sim -4 \frac{a^2}{|n|(|n|-1)} k_i^2(\nu), & |n| \geq 2 \\ \sim -2 [k_i(\nu)a]^2 \log \frac{k_i(\nu)a}{2}, & |n| = 1 \\ = 1 & n = 0 \end{cases}, \quad (k_i(\nu) \rightarrow 0) \quad (124)$$

であるから、 $M_2 + M_4$ にまとめた積分し、各項は $n = 0$ 以外 $M(n|\nu) \simeq 0$ と近似して積分し、 $n = 0$ の $M(0|\nu)$ のみ方程式の逐次代入によって求めることができる。上にのべたように特に $\nu = \pm k$ での値 $M(0|\pm k)$ を計算すれば十分近似できる。

0次 Wiener 係数 (105)の B_1 、 A_1 に(118)(120)を代入する。簡単のため B_0 、 A_0 を含む項(σ^2 のオーダー)を無視すると

$$B_0 \psi_m(a, \beta) = - \sum_{m_1} \int [k_i(\beta + \lambda_1)\dot{\psi}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) + \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)i\bar{\lambda}_1] B_1(m_1, \lambda_1) \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 - \sum_{m_1} \int \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)i\bar{\lambda}_1 A_1(m_1, \lambda_1) \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 \quad (125)$$

A_1 として(120)を代入し、 A_0, B_0 を含む $L(m_1, \lambda_1)$ を無視すると

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{m_1} \int \left\{ k_t(a, \beta + \lambda_1) \psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \right. \\
&\quad \left. + \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \left[1 + \frac{\zeta_{m+m_1}^2(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}^2(a, \beta + \lambda_1)} \right] i\lambda_1 \right\} B_1(m_1, \lambda_1) \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 \\
&\quad + \sum_{m_1} \int \left[k_t(\beta) \dot{\zeta}_m^*(a, \beta) - \eta_m^*(a, \beta) (im_1/a) \right] \frac{\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} i\lambda_1 |F_{m_1}(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \quad (126)
\end{aligned}$$

更に B_1 として(118)を代入し A_0, B_0 及び $N(m_1, \lambda_1)$ を無視すると

$$\begin{aligned}
&= \sum \int \left\{ \frac{k_t(\beta + \lambda_1) \psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} + \left[1 + \frac{\zeta_{m+m_1}^2(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}^2(a, \beta + \lambda_1)} \right] i\lambda_1 \right\} \\
&\quad \times \frac{[\dot{\psi}_m^*(a, \beta) k_t(\beta) + \eta_m^*(a, \beta) i\lambda_1] |F_{m_1}(\lambda_1)|^2 d\lambda_1}{\frac{\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} - M(m+m_1|\beta + \lambda_1)} \\
&\quad + \sum \int \left[k_t(\beta) \dot{\zeta}_m^*(a, \beta) + \eta_m^*(a, \beta) (im_1/a) \right] \frac{\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} i\lambda_1 |F_{m_1}(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \quad (127)
\end{aligned}$$

したがって B_0 の近似として

$$\begin{aligned}
B_0 &\cong \frac{\eta_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} M(m|\beta) + \frac{\dot{\psi}_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} M'(m|\beta) \\
&\quad + \left[k_t(\beta) \dot{\zeta}_m^*(a, \beta) + \eta_m^*(a, \beta) \frac{im_1}{a} \right] M_5(m|\beta) \quad (128)
\end{aligned}$$

但し

$$M'(m|\lambda) \equiv \sum_{j=1}^4 M'_j(m|\lambda) \quad (129)$$

$$M'_1(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_t(\nu) \dot{\psi}_n(a, \nu) i(\nu - \lambda) |F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\eta_n(a, \nu) \left[\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} - M(n, \nu) \right]} d\nu \quad (130)$$

$$M'_2(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|i(\nu - \lambda) F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\left[\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} - M(n, \nu) \right]} d\nu \quad (131)$$

$$M'_3(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} i(\nu - \lambda) |F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2 d\nu \quad (132)$$

$$M'_4(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\zeta_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} \right]^2 \frac{|i(\nu - \lambda) F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\left[\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} - M(n, \nu) \right]} d\nu \quad (133)$$

がえられる。ここで、 $M_1 \sim M_5$ は後に示す(151)~(155)で定義される積分である。(128)の分母 $\psi_m(a, \beta)$ は $m=0$ 、 $k_t(\beta) \rightarrow 0$ 、 $\beta \rightarrow \pm k$ で0となるが、 M 、 M_5 、 M' 及び M'_5 の係数は

$$\frac{\zeta_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} \sim \begin{cases} (k_t a)^{2|m|-2}, & |m| \geq 1 \\ 0, & m = 0 \end{cases}, \quad k_t \rightarrow 0 \quad (134)$$

$$\frac{k_t(\beta) \dot{\eta}_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} \sim \begin{cases} (k_t a)^{2|m|-2}, & |m| \geq 1 \\ 1/\log(k_t a) \rightarrow 0, & m = 0 \end{cases}, \quad k_t \rightarrow 0 \quad (135)$$

となり、 $\beta \rightarrow \pm k$ で有限である。 B_1 と同様に分母の $\psi_m(a, \beta)$ に mass operator による補正を入れるためには、無視した N 、 L の表式 (119)(121) も入れて計算し (105)(104) を A_0 、 B_0 の連立方程式として解けばよいが、簡単のために $m = 0, k_i \rightarrow 0$ で dominant な項のみを残して B_0 の解の補正を行なえば、 A_0 の項は無視できるので、その結果 B_0 に対して (118) と同形の mass operator による補正が入った表式

$$B_0 \cong \left\{ \frac{\eta_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} M(m|\beta) \frac{\psi_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} M'(m|\beta) + \left[k_i(\beta) \dot{\zeta}_m^*(a, \beta) + \eta_m^*(a, \beta) \frac{im_1}{a} \right] M_5(m|\beta) \right\} \quad (136)$$

が得られる。(104) より

$$\begin{aligned} A_0 \eta_m(a, \beta) &= B_0 \zeta_m(a, \beta) + \sum_{m_1} \int \left[k_i(\beta + \lambda_1) \dot{\zeta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) + (im_1/a) \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \right] \\ &\quad \times B_1(m_1, \lambda_1) \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 \\ &+ \sum_{m_1} \int \left[-k_i(\beta + \lambda_1) \dot{\eta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) + (im_1/a) \zeta_{m+m_1}(\beta + \lambda_1) \right] \\ &\quad \times A_1(m_1, \lambda_1) \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 \quad (137) \end{aligned}$$

(120) の A_1 を代入し $L(m_1, \lambda_1)$ を無視すれば

$$\begin{aligned} &= B_0 \zeta_m(a, \beta) \\ &+ \sum_{m_1} \int \left\{ k_i(\beta + \lambda_1) \dot{\zeta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) - \frac{k_i(\beta + \lambda_1) \dot{\eta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{im_1}{a} \eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \left[1 + \frac{\zeta_{m+m_1}^2(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}^2(a, \beta + \lambda_1)} \right] \right\} B_1(m_1, \lambda_1) \overline{F_{m_1}(\lambda_1)} d\lambda_1 \\ &- \sum_{m_1} \int \left[-k_i(\beta) \dot{\zeta}_m^*(a, \beta) + \eta_m(a, \beta) \frac{im_1}{a} \right] \\ &\quad \times \left[-\frac{k_i(\beta + \lambda_1) \dot{\eta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} + \frac{im_1}{a} \frac{\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} \right] |F_{m_1}(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \quad (138) \end{aligned}$$

(118) の B_1 を代入し、 $N(m_1, \lambda_1)$ を無視すれば

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\zeta_m(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} B_0 \\ &- \frac{1}{\eta_m(a, \beta)} \sum_{m_1} \int \left\{ \frac{k_i(\beta + \lambda_1) \dot{\zeta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} - \frac{k_i(\beta + \lambda_1) \dot{\eta}_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1) \zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}^2(a, \beta + \lambda_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{im_1}{a} \left[1 + \frac{\zeta_{m+m_1}^2(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}^2(a, \beta + \lambda_1)} \right] \right\} \frac{[\psi_m^*(a, \beta) k_i(\beta) + \eta_m^*(a, \beta) i\lambda_1] |F_{m_1}(\lambda_1)|^2 d\lambda_1}{\frac{\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} - M(m + m_1|\beta + \lambda_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m_1} \int \left[-\frac{k_t(\beta)\zeta_m^*(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} + \frac{\eta_m^*(a, \beta)im_1}{\eta_m(a, \beta)a} \right] \\
& \quad \times \left[\frac{k_t(\beta + \lambda_1)\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} + \frac{im_1}{a} \frac{\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} \right] |F_{m_1}(\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \quad (139)
\end{aligned}$$

これを項別に見れば

$$\begin{aligned}
A_0 \cong & \frac{\zeta_m(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} B_0 + \frac{\eta_m^*(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} \sum_{j=6}^{11} M_j(m|\beta) + \frac{\psi_m^*(a, \beta)k_t(\beta)}{\eta_m(a, \beta)} \sum_{j=6}^9 M'_j(m|\beta) \\
& + \frac{\zeta_m^*(a, \beta)k_t(\beta)}{\eta_m(a, \beta)} [M_{12}(m|\beta) + M_{13}(m|\beta)] \quad (140)
\end{aligned}$$

$$M'_6(m|\beta) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_t(\lambda)\zeta_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} \frac{|F_{n-m}(\lambda - \beta)|^2}{\frac{\psi_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (141)$$

$$M'_7(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\frac{\psi_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (142)$$

$$M'_8(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a, \lambda)k_t(\lambda)\eta_n(a, \lambda)}{[\eta_n(a, \lambda)]^2} \frac{|F_{n-m}(\lambda - \beta)|^2}{\frac{\psi_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (143)$$

$$M'_9(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\zeta_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} \right]^2 \frac{|F_{n-m}(\lambda - \beta)|^2}{\frac{\psi_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (144)$$

$$(145)$$

但し、 $M_6 \sim M_{13}$ は(158)~(166)に示したTE波入射時の積分項を示す。 M'_7 、 M'_9 は $M_2 + M_4$ と同様に

$$M'_7(m|\beta) + M'_9(m|\beta) = \sum_n \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \left[\frac{\zeta_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} \right]^2 \right] \frac{|F_{n-m}(\lambda - \beta)|^2}{\frac{\psi_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (146)$$

とおき、(123)、(124)により積分項 $n \neq 0$ 以外は $M(n|\lambda) = 0$ とおいて積分ができる。数値計算上は(139)の形の方が容易である。(124)が成立つから、 $m + m_1 = 0$ 以外の積分では分母の $M(m + m_1|\beta + \lambda_1)$ を無視することができる。

7 境界条件の近似解法 (水平偏波平面波入射)

式の導出は文献^[19]にゆずりここでは結果のみを示す。1次Wiener係数 補正を行なった B_1 の近似解として

$$B_1(m_1, \lambda_1) \cong \frac{1}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda)} \frac{-\zeta_m^*(a, \beta)i\lambda_1 F_{m_1}(\lambda_1) - N(m_1, \lambda_1)}{\frac{\psi_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} - M(m + m_1|\beta + \lambda_1)} \quad (147)$$

$$N(m_1, \lambda_1) \equiv \{B_0 k_t(\beta)\psi_m(a, \beta) + [B_0 \eta_m(a, \beta) + A_0 \zeta_m(a, \beta)]i\lambda_1\} F_{m_1}(\lambda_1) \quad (148)$$

$A_1(m_1, \lambda_1)$ の補正近似式

$$A_1(m_1, \lambda_1) \simeq \frac{\zeta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} B_1(m_1, \lambda_1) - \frac{[k_i(\beta)\dot{\eta}_m^*(a, \beta) + \zeta_m^*(a, \beta)(im_1/a)] F_{m_1}(\lambda_1) + L(m_1, \lambda_1)}{\eta_{m+m_1}(a, \beta + \lambda_1)} \quad (149)$$

$$L(m_1, \lambda_1) \equiv A_0 [k_i(\beta)\dot{\eta}_m(a, \beta) + \zeta_m(a, \beta)(im_1/a)] F_{m_1}(\lambda_1) + B_0 [-k_i(\beta)\dot{\zeta}_m(a, \beta) + \eta_m(a, \beta)(im_1/a)] F_{m_1}(\lambda_1) \quad (150)$$

mass operator の関係式

$$M(m|\lambda) \equiv \sum_{j=1}^4 M_j(m|\lambda) \quad (151)$$

$$M_1(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_i(\nu)\dot{\psi}_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} \frac{i(\nu - \lambda)|F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\left[\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} - M(n, \nu)\right]} d\nu \quad (152)$$

$$M_2(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|i(\nu - \lambda)F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\left[\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} - M(n, \nu)\right]} d\nu \quad (153)$$

$$M_3(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} \overline{i(\nu - \lambda)|F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2} d\nu \quad (154)$$

$$M_4(m|\lambda) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\zeta_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)}\right]^2 \frac{|i(\nu - \lambda)F_{n-m}(\nu - \lambda)|^2}{\left[\frac{\psi_n(a, \nu)}{\eta_n(a, \nu)} - M(n, \nu)\right]} d\nu \quad (155)$$

0 次 Wiener 係数 B_0 の近似式

$$B_0 \simeq \frac{\zeta_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} M(m|\beta) + \frac{k_i(\beta)\dot{\eta}_m^*(a, \beta)}{\psi_m(a, \beta)} M_5(m|\beta) \quad (156)$$

$$M(m, \beta) = \sum_{j=1}^4 M_j(m|\beta)$$

$$M_5(m, \beta) = \sum_n \int \frac{\zeta_m(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} \overline{i(\lambda - \beta)|F_m(\lambda - \beta)|^2} d\lambda \quad (157)$$

A_0 の近似式

$$A_0 \simeq \frac{\zeta_m(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} B_0 + \frac{\zeta_m^*(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} \sum_{j=6}^{11} M_j(m|\beta) + \frac{k_i(\beta)\dot{\eta}_m^*(a, \beta)}{\eta_m(a, \beta)} [M_{12}(m|\beta) + M_{13}(m|\beta)] \quad (158)$$

$$M_6(m|\beta) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_i(\lambda)\dot{\zeta}_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} \frac{i(\lambda - \beta)|F_{n-m}(\lambda - \beta)|^2}{\frac{\psi_n(a, \lambda)}{\eta_n(a, \lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (159)$$

$$M_7(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\overline{i(n-m)}}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\lambda-\beta) |F_{n-m}(\nu-\lambda)|^2}{\frac{\psi_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (160)$$

$$M_8(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a,\lambda) k_t(\lambda) \dot{\eta}_n(a,\lambda) i(\lambda-\beta) |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2}{[\eta_n(a,\lambda)]^2 \frac{\psi_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (161)$$

$$M_9(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(n-m)}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_t(\lambda) \dot{\eta}_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2 d\lambda \quad (162)$$

$$M_{10}(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\overline{i(n-m)}}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\zeta_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} \right]^2 \frac{i(\lambda-\beta) |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2}{\frac{\psi_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} - M(n|\lambda)} d\lambda \quad (163)$$

$$M_{11}(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{i(n-m)}{a} \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2 d\lambda \quad (164)$$

$$M_{12}(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_t(\lambda) \dot{\eta}_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2 d\lambda \quad (165)$$

$$M_{13}(m|\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\overline{i(n-m)}}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_n(a,\lambda)}{\eta_n(a,\lambda)} |F_{n-m}(\lambda-\beta)|^2 d\lambda \quad (166)$$

8 計算結果

以上の結果より、いくつかのパラメータについて数値計算を行った。ランダム表面のパワースペクトルとして、gauss形スペクトル

$$|F_m(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2 L^2}{\pi \Theta} \exp \left[-\frac{(L\lambda)^2}{2} - \frac{(Km)^2}{2} \right] \quad (167)$$

を仮定した。但し、 Θ は m に関する規格化関数で

$$\Theta \equiv \Theta \left(\frac{K^2}{2\pi} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(Km)^2}{2} \right] \quad (168)$$

で定義される。ここで L は軸方向の相関距離を、 K は円周方向の相関距離を、また σ は表面の粗さを示すパラメータである。入射波は水平、垂直偏波面をもつ平面波とし、その入射角は $\theta = 30, 60$ 及び 90 とした。また入射波の波数 k に対して、ランダム円筒の平均半径を $ka = 2.0$ 、相関距離 $K = 2.0$ 、 $kL = 1.0, 1.8, 4.0$ とした。さて、以上のパラメータについて光学定理、コヒーレント散乱角度分布、インコヒーレント散乱角度分布をそれぞれ計算した。但し、(148)(150) 及び (119)(121) で示した補正項は無視した。また、mass operator については、まず $M_3(0|\pm k)$ を計算し、 $M(0|\pm k) \simeq M_3(0|\pm k)$ として逐次代入することで求めた。今回の計算では、2回逐次代入した。ハンケル関数の次数については、収束性を考慮し m, m_1 それぞれ ± 10 及び ± 6 までの和をとった。

著者らが提案した確率汎関数法では理論的にエルゴート性から系統的に光学定理 (96) が導かれる。したがって、近似計算においては光学定理により簡単な誤差評価ができる。図 3, 8 に光学定理の表面粗さに対する関係を示す。図において、 P_c, P_{ic} はそれぞれコヒーレント、インコヒーレント散乱電力を示しており、その和 S は全散乱電力を示す。またそれぞれの値は入射電力で規格化されており、全散乱電力 S と 1 との差が誤差となる。誤差の原因は (148)(150) 及び (119)(121)

で示した N, L 等の σ の高次数の項を近似計算時に省略したため、この例では、 $k\sigma \leq 0.3$ まで光学定理が成立している。さらに大きい $k\sigma$ に対しては省略した項もいれて計算すればよい。また、図に現われない誤差もある。表面の分布関数が Gauss 分布に従うならば空間周波数として高いものも含まれるが、ここでは (32)(33) に示した様に、近似境界条件を使った。例では、 σ も小さく、相関距離も比較的大きいので、1 次の近似で十分であるが、Taylor 展開の項数を増やすことで、近似度を向上できる。

図 4,9 にコヒーレント散乱角度分布を示す。これは入射角が 30,60,90 度の場合を同時に示したもので、破線は表面が滑らかな場合を示している。

図 5~7,10~12 にインコヒーレント散乱角度分布を示す。水平偏波、垂直偏波とも $\theta = 0, 180$ 付近でピークが生じている。この現象は Wood's anomaly と呼ばれている。一般にランダム面に波が当たったときに、波数ベクトルはランダム面より方向の変動を受ける。無限構造をもつ場合、その向きをもつ散乱波の蓄積すなわち共振が生じる。これが anomaly である。円筒の場合軸方向に無限構造が存在する。したがって円筒表面で軸方向に伝搬する TEM 波の共振が生じる。特に円筒の場合には、その発散が $\log k_t$ に比例し、散乱体が平面の場合の $1/k_t$ に比べると発散が小さく、anomaly の大きさも小さい。ガウス分布においては、波数の方向の変化の小さいものが主として出てくるので、結果的に共振モード付近 ($\theta \simeq 0, 180$) でピークが出ることになる。図を見ると相関距離 kL を変化により、anomaly のでかたは激しく変化する。ここには示していないが周方向の相関距離 K によって周方向のピークのでかたも激しく変化する。これは相関距離により、散乱波がランダム面からもらう波数の分布が変化するためである。また、鏡面反射方向付近にもピークの存在が見られる。これは、一般によく見られる乱反射の物理現象から、容易に予測できる現象である。

9 結論

本稿では不規則円筒面による電磁波の散乱について確率汎関数法によって解析を行った。この方法はガウス確率場による確率円筒波を定義し、それに用いて散乱波のウィーナ展開を行うものである。特にウィーナ展開では、各次数の項がそれぞれ独立であることから見通しよく境界条件を満たす解が得られる。結果としてランダム円筒面に電磁波が入射した場合、軸方向に伝搬する TM 波 (TEM 波) との結合が生じ anomaly が生じることがわかった。この現象は多重散乱を考慮することで初めて明らかになるものである。また 3 次以上のウィーナ係数の方程式を考慮することにより系統的に mass operator に相当する量を求め、anomaly の発散を抑えることができた。anomaly はランダム平面による散乱の場合 $1/k_t$ に比例する発散であったのに対し、円筒面では $\log k_t$ に比例しており、発散としては弱い。すなわち、軸方向のみの共振であるため入射波が軸方向に伝搬する TEM 波と結合しても、すぐに他のモードと結合して散乱されてしまう。

本解析法は確率方程式からのアプローチであるため、実際の現象が見えにくく、誤差評価も行いにくい。指標としてエネルギー保存則がある。そこで、数値計算により光学定理を示した。それによると、表面の粗さ σ が 0、すなわち滑らかな場合において散乱波はコヒーレント成分のみであるが、 σ の増加に従いインコヒーレント成分が増加している。また、その和はほぼ 1 に近く本手法の妥当性を示している。

実用上の問題などから、今後の課題としてガウスビームが入射した場合についても検討したい。

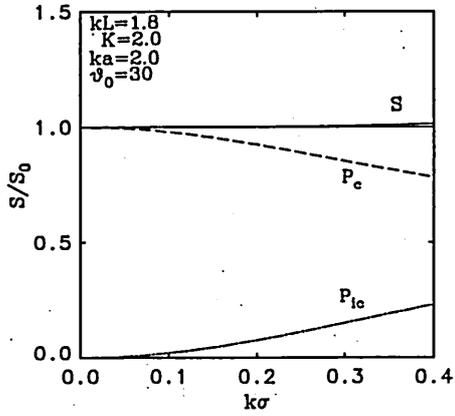


図3 光学定理の $k\sigma$ 依存性
 水平偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 1.0$ 、 $K = 2.0$ 、 P_c 、 P_{ic} はそれぞれ
 コヒーレント、インコヒーレント散乱電力。Sは
 全散乱電力で、誤差がない場合 $S = 1$ となる。

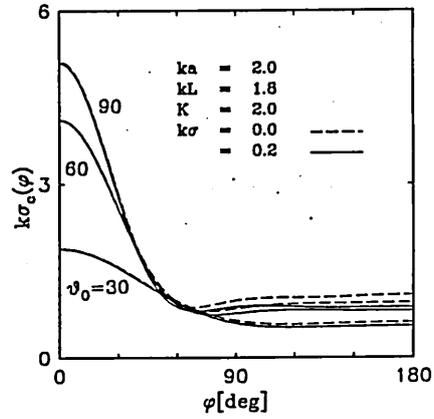


図4 コヒーレント散乱角度分布
 水平偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30, 60, 90$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 1.8$ 、 $K = 2.0$ 、表面の粗さ $k\sigma = 0.2$

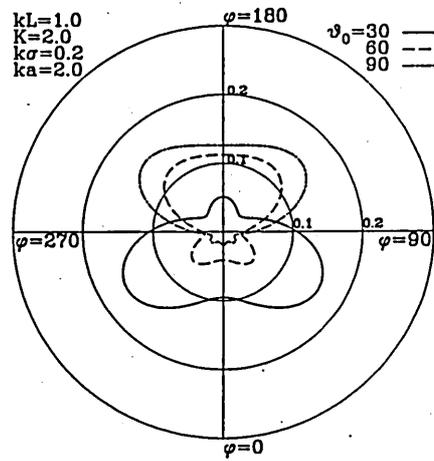
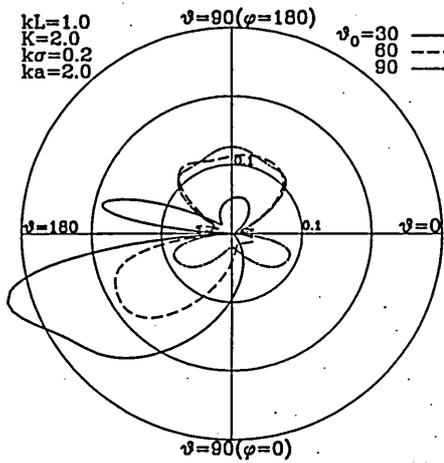


図5 インコヒーレント散乱角度分布
 水平偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30, 60, 90$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 1.0$ 、 $K = 2.0$ 、表面の粗さ $k\sigma = 0.2$

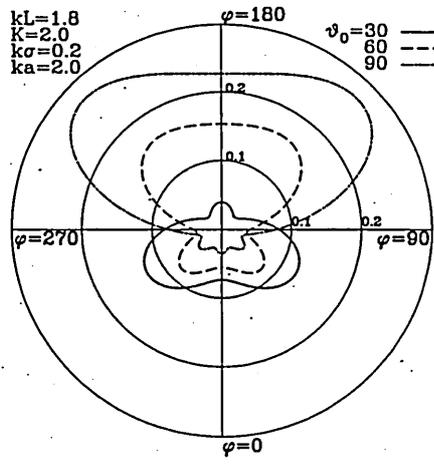
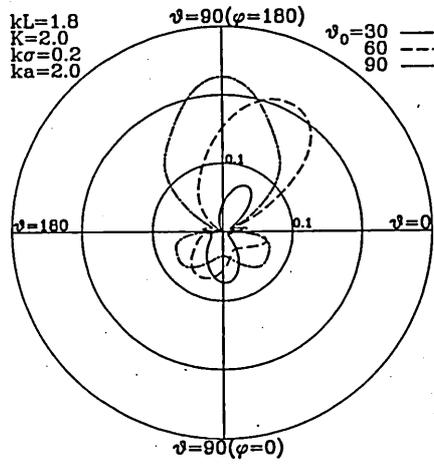


図6 インコヒーレント散乱角度分布
 水平偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30, 60, 90$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 1.8$ 、 $K = 2.0$ 、表面の粗さ $k\sigma = 0.2$

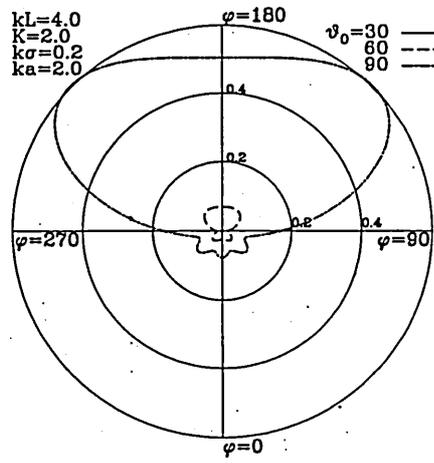
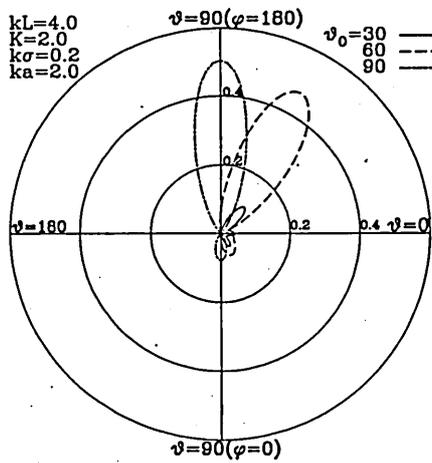


図7 インコヒーレント散乱角度分布
 水平偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30, 60, 90$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 4.0$ 、 $K = 2.0$ 、表面の粗さ $k\sigma = 0.2$

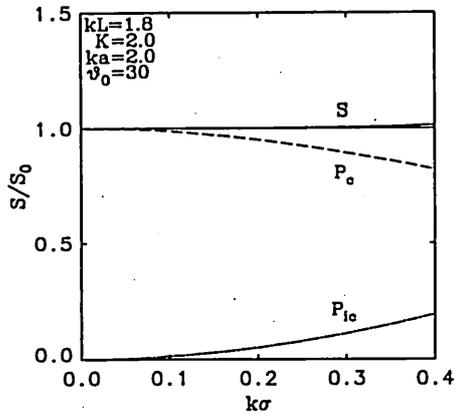


図8 光学定理の $k\sigma$ 依存性
 垂直偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 1.0$ 、 $K = 2.0$ 、 P_c, P_{ic} はそれぞれ
 コヒーレント、インコヒーレント散乱電力。Sは
 全散乱電力で、誤差がない場合 $S = 1$ となる。

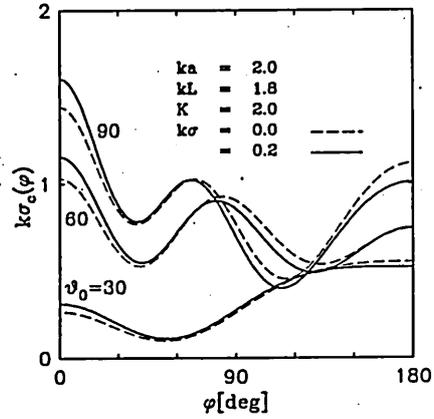


図9 コヒーレント散乱角度分布
 垂直偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30, 60, 90$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 1.8$ 、 $K = 2.0$ 、表面の粗さ $k\sigma = 0.2$

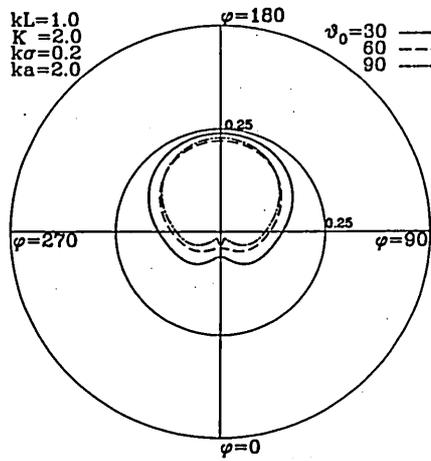
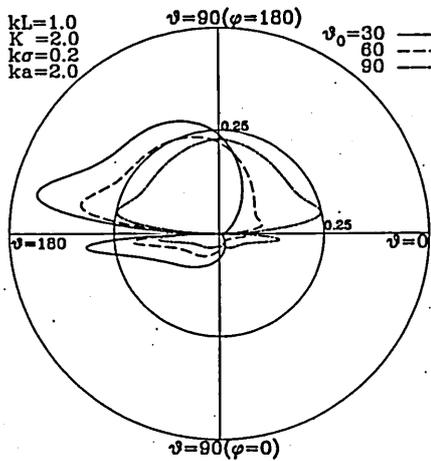


図10 インコヒーレント散乱角度分布
 垂直偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30, 60, 90$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 1.0$ 、 $K = 2.0$ 、表面の粗さ $k\sigma = 0.2$

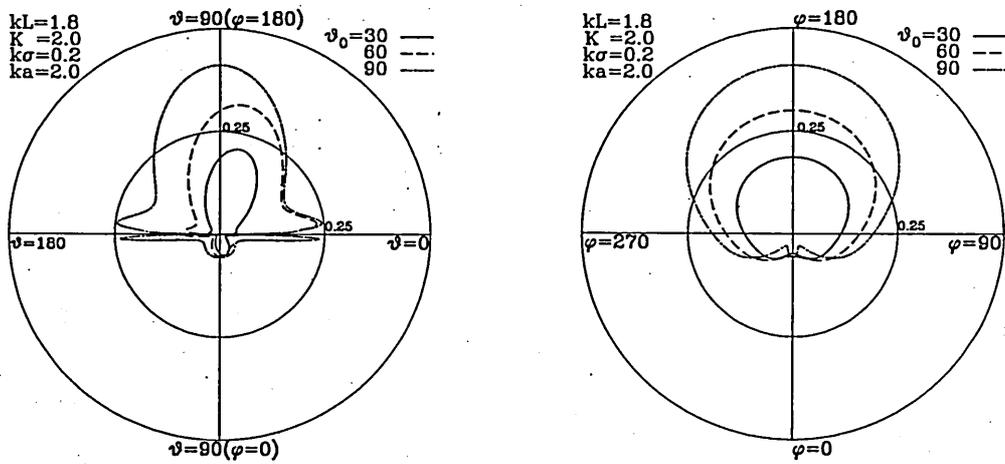


図11 インコヒーレント散乱角度分布
 垂直偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30, 60, 90$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 1.8$ 、 $K = 2.0$ 、表面の粗さ $k\sigma = 0.2$

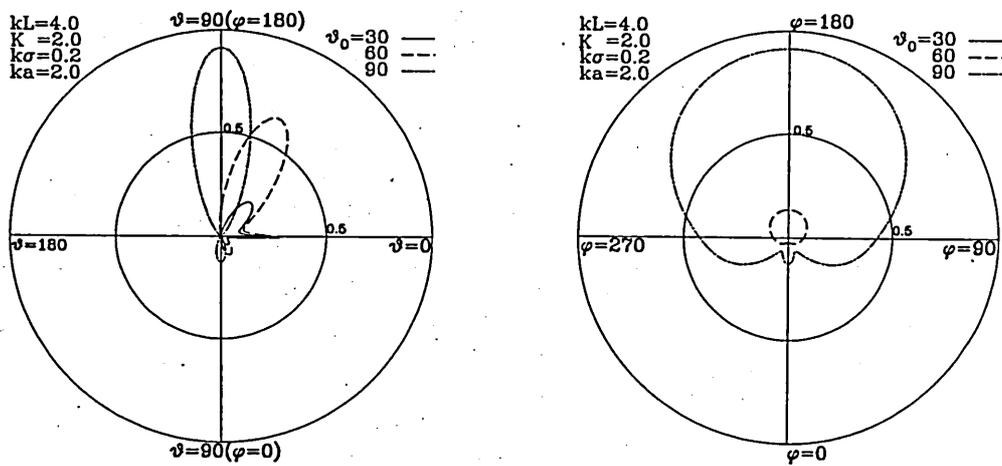


図12 インコヒーレント散乱角度分布
 垂直偏波平面波入射、入射角 $\theta_0 = 30, 60, 90$ 、 $ka = 2.0$ 、
 相関距離 $kL = 4.0$ 、 $K = 2.0$ 、表面の粗さ $k\sigma = 0.2$

参考文献

- [1] N. Wiener, *Nonlinear Problems in Random Theory* (MIT Cambridge, MA. 1958).
- [2] R. H. Camtrou, and W. T. Martin, *Ann. Math.*, 48 385 (1947).
- [3] K. Ito, *J. Math. Soc. Japan*, 13 157 (1951).
- [4] K. Ito, *Jpn. J. Math.*, 22 63 (1952).
- [5] H. Ogura, *Phys. Rev.*, A11 942 (1975).
- [6] H. Ogura and N. Takahashi, *J. Math. Phys.*, 31 61 (1990).
- [7] J. Nakayama, H. Ogura, and B. Matsumoto, *Radio Sci.*, 15 1049 (1980).
- [8] J. Nakayama, H. Ogura, and M. Sakata, *J. Math. Phys.*, 22 471 (1981).
- [9] J. Nakayama, H. Ogura, and M. Sakata, *Radio Sci.*, 16 831-847 (1981).
- [10] J. Nakayama, M. Sakata, and H. Ogura, *Radio Sci.*, 16 847 (1981).
- [11] J. Nakayama, *Radio Sci.*, 17 558 (1982).
- [12] H. Ogura and N. Takahashi, *J. Opt. Soc. Am.*, A 2 2208 (1985).
- [13] J. Nakayama, Ph. D dissertation, Kyoto University, Kyoto, Japan, 1982.
- [14] J. Nakayama, K. Mizutani, H. Ogura, and S. Hayashi, *J. Appl. Phys.*, 56, 1465, (1984).
- [15] H. Ogura, and H. Nakayama, *J. Math. Phys.*, 29 851 (1988).
- [16] C. Eftimin, *IEEE Trans. AP*, 236 651-659 (1988).
- [17] 小倉 久直, 確率過程論, コロナ社 (1978).
- [18] H. Ogura, N. Takahashi, and M. Kwahara, "Scattering of Wave from a Random Rough Cylindrical Surface -Scalar Wave Theory-", *EMT-90-55*(1990).
- [19] 小倉, 高橋, 桑原, "不規則円筒面による電磁波の散乱理論-水平偏波入射-", *RS-90-1*(1990).

140 GHz 帯におけるミリ波の光制御

Optical Control of Millimeter Wave at 140 GHz

アロキヤスワミ アルフォンス 堤 誠

Arokiaswami Alphones Makoto Tsutsumi

Department of Electronics and Information Science

Faculty of Engineering and Design

Kyoto Institute of Technology

Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto 606

1990年12月7日
於 大阪大学工学部

ABSTRACT

The dispersion characteristics of proposed image line containing the plasma dominated region has been analysed by the effective dielectric constant approximation and are evaluated as a function of plasma density. Experiments have been carried out at frequencies ranging from 90-170GHz using 5 K Ω .cm silicon image line illuminated by five light emitting diodes radiating at a wavelength of 820 nm. Experimental results reveal that optical control of millimeter waves can be achieved by the attenuation of wave resulting from the illumination of light. Wave attenuation of 10 dB was observed at 147 GHz for a line length of 30 mm, which is compared with theoretically estimated result.

1 INTRODUCTION

Laser controlled solid state or optoelectronic devices utilizing optically induced photoconductivity have gained much attention for high speed applications because of picosecond precision [1] and, since the controlling signal is optical and the controlled signal is electrical, an inherently high isolation will be obtained. Such devices have successfully been used for high speed switching and gating, generation of ultra-short kilovolt pulses, high frequency generation and picosecond high isolation sampling [2-4].

This paper analyses the propagation characteristics of millimeter waves in the proposed image line with plasma dominated region using the effective dielectric constant method, and the results are confirmed with experiment at 140 GHz (D band) using silicon image line illuminated by Light Emitting Diodes(LED).

2 THEORY

When the semiconductor waveguide is illuminated with the laser photon energy greater than the bandgap energy of the semiconductor, photons are absorbed; creating electron/hole pairs and resulting thin layer plasma region near the surface of the waveguide. The presence of electron-hole plasma in the semiconductor results in the modification of the conductive as well as the dielectric properties of the semiconductor material which is given by Drude-

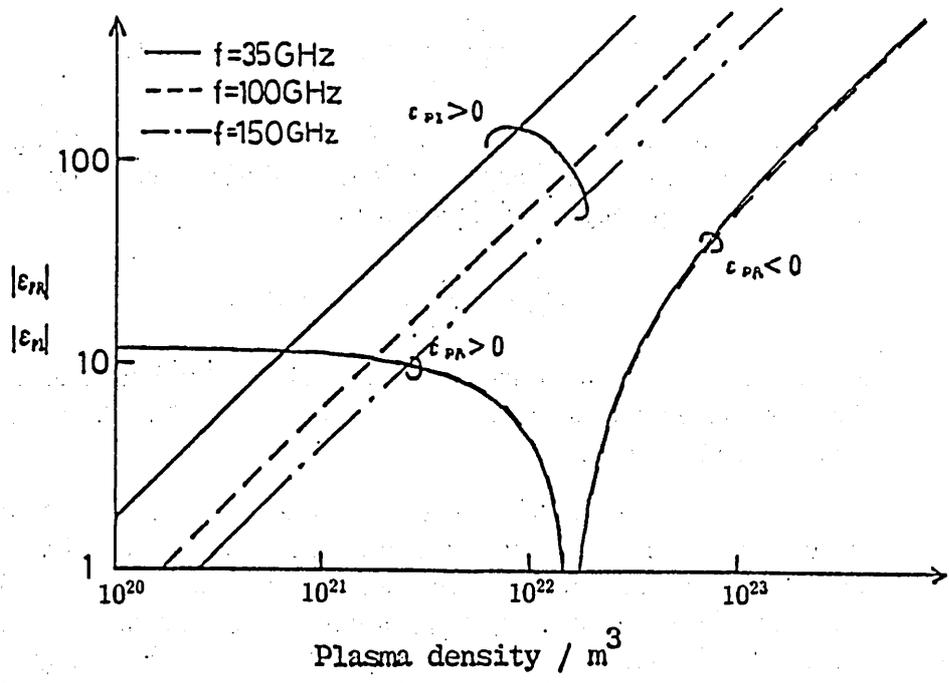


Fig.1. Variation of the complex permittivity of the plasma medium as a function of plasma density.

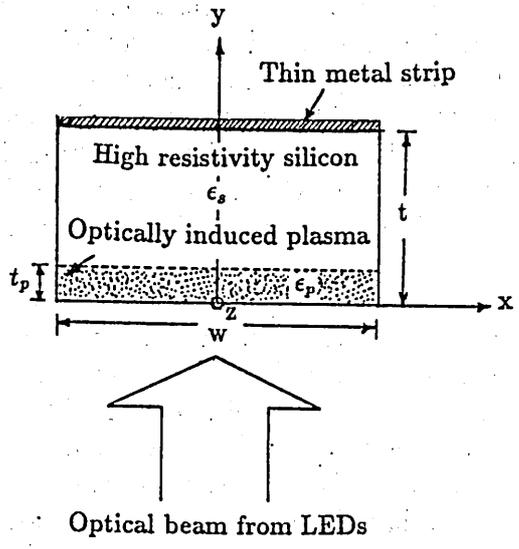


Fig.2. Cross section of the proposed image line.

Lorentz formula [5]

$$\epsilon_p = \epsilon_s - \sum_{i=e,h} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 + \gamma_i^2} \left(1 + j \frac{\gamma_i}{\omega}\right) = \epsilon_{pr} - j\epsilon_{pi} \quad (1)$$

where ϵ_s is the dielectric constant of the host lattice including the contribution of bound charges. γ_i is the collision frequency, ω_{pi} is the plasma frequency which is given by

$$\omega_{pi}^2 = \frac{n_i e^2}{\epsilon_0 m_i^*}, \quad i = e, h \quad (2)$$

here n_e is the electron concentration in the conduction band, n_h is the hole concentration in the valence band, and m_i^* is the effective mass of electron/hole.

The variation of the complex dielectric constant of plasma in a silicon material as a function of plasma density at D band has been numerically estimated and are shown in Fig.1. The real part of the permittivity (ϵ_{pr}) is not affected much by the low plasma density and it has a little dependence with frequency. But the imaginary part of the permittivity (ϵ_{pi}), i.e. conductivity, rises rapidly with plasma density. Also ϵ_{pi} at D band is found to be smaller by an order than at 35 GHz.

Fig.2 shows the cross-section of the image line which was proposed in this paper. It consists of silicon waveguide of thickness t and width of w , and is covered with a metal plate on the top surface. The optically induced plasma is assumed to be at the bottom surface of the guide and is uniform in the x -direction. To analyse the propagation characteristics of the line, Effective Dielectric Constant (EDC) approximation was used. The EDC method is a very simple and practical method for obtaining reasonable values of propagation constant of most open dielectric waveguides [6]. The refractive index in the plasma dominated region will differ from that of plasma unoccupied region, which results in the complex effective dielectric constant as given in Eq.(1) which leads to a complex eigenvalue problem. To obtain complex propagation constant $k_z' (= \beta - j\alpha)$, the dispersion equation has been solved by Müller's algorithm with deflation procedure which is quite efficient numerical technique in locating complex roots.

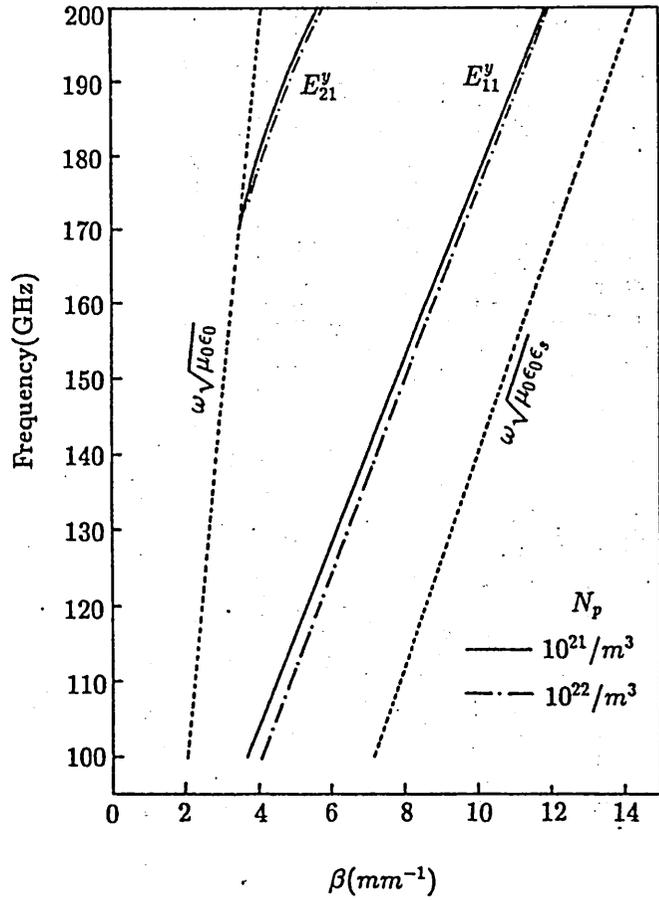


Fig.3. Phase constant of the image line at D band.

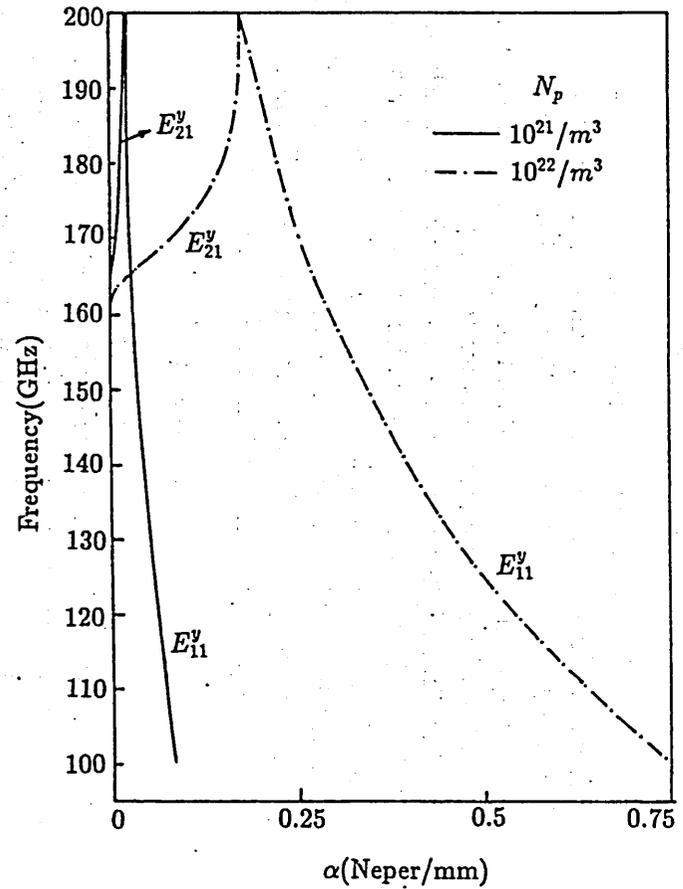


Fig.4. Attenuation constant of the image line at D band.

3 NUMERICAL RESULTS

The numerical computations were performed for three different widths of image line, $300\mu\text{m}$, $500\mu\text{m}$ and 1.4mm with the silicon substrate thickness of $400\mu\text{m}$. Dielectric constant of the silicon was assumed to be 11.8, and the plasma thickness as t_p . Fig.3 shows the dispersion characteristics $(\omega - \beta)$ of dominant E_{11}^y mode and the first higher order mode E_{21}^y for $300\mu\text{m}$ width line above 100GHz . Fig.4 shows the attenuation constant α for same $300\mu\text{m}$ width line. These calculations have been carried out for two plasma densities $10^{21}/\text{m}^3$ and $10^{22}/\text{m}^3$. To understand clearly the effect of plasma on the phase shift and attenuation of millimeter wave, the perturbed propagation constant $(\Delta\beta)$ is defined as

$$\Delta\beta = \text{Re}(k_z' - k_z) \quad (3)$$

where k_z is the propagation constant without plasma, and k_z' with plasma. $\Delta\beta$ and α have been calculated as a function of plasma density and are shown in Figs.5 and 6. In Fig.5 the phase shift $(\Delta\beta)$ per millimeter is plotted as a function of plasma density for the image line having cross-section $300\mu\text{m} \times 400\mu\text{m}$ with different thicknesses of plasma layer at 100GHz and the corresponding attenuation α is plotted in Fig.6. As the plasma density approaches $10^{22}/\text{m}^3$, more interactions between the plasma and the wave are taking place, and the wave will attenuate according to its penetration into the plasma layer which causes more propagation loss.

From the results of Figs. 3 to 6 it is found that phase shift is not so sensitive to the plasma density but the attenuation of wave is sensitive. The phase shift and attenuation characteristics as a function of guide width are numerically estimated for a plasma density-thickness product of $N_p t_p = 2 \times 10^{17}/\text{m}^2$ at D band and the results are shown in Figs.7 and 8. As the width of the image line increases, higher order modes such as E_{21}^y, E_{31}^y and E_{41}^y occur in the dispersion curves of Figs. 7 and 8. It is noted that in Fig.7, the phase shift $(\Delta\beta)$ of these higher order modes is larger than that of lower order modes (E_{11}^y) because these higher order modes exist closer to their cutoff frequency. Also, higher order modes have more loss than lower order modes which is shown in Fig.8. This may be due to the wide spread out of power distribution of higher order mode into the plasma layer of the line.

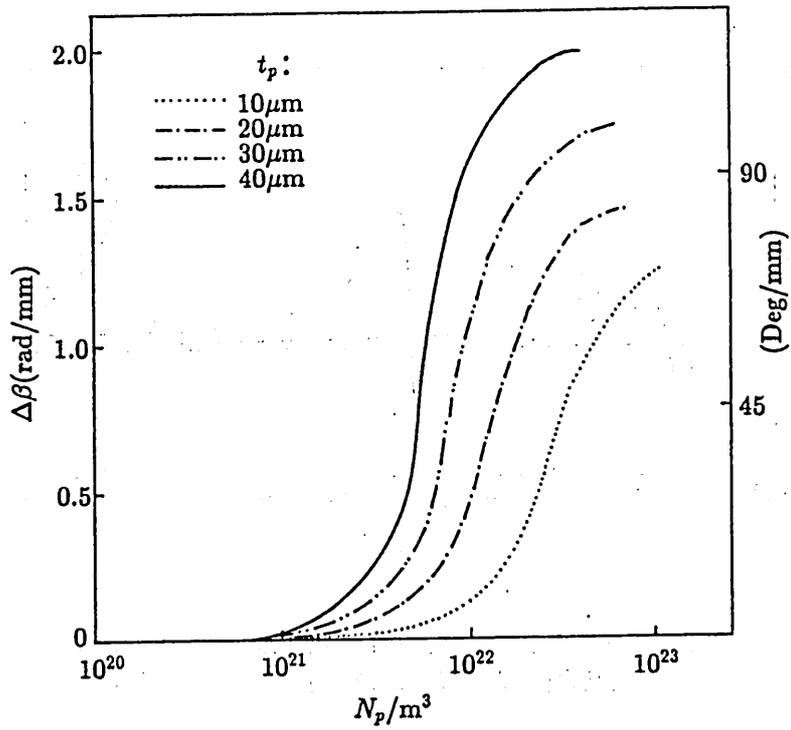


Fig.5. Phase shift as a function of the plasma density at 100GHz for different plasma layer thicknesses(t_p).

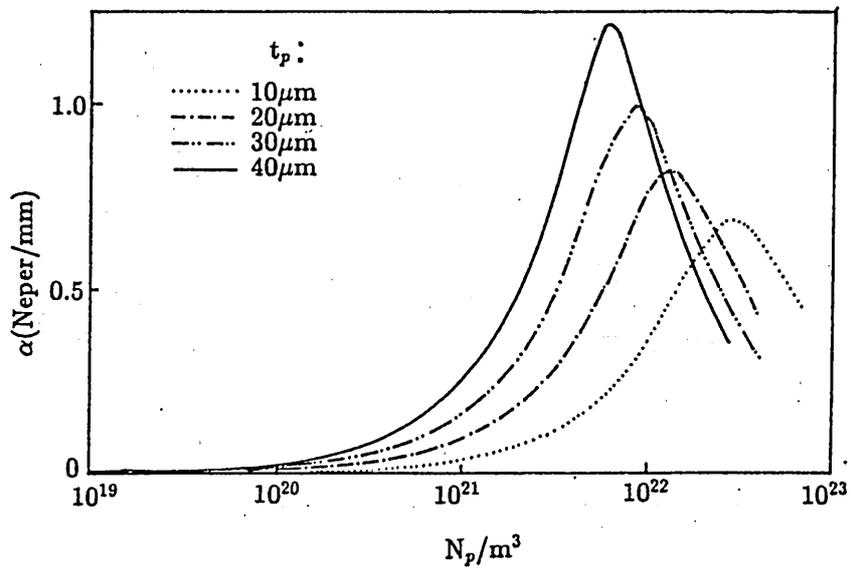


Fig.6. Attenuation constant of the image line as a function of the plasma density at 100GHz for various plasma thicknesses(t_p).

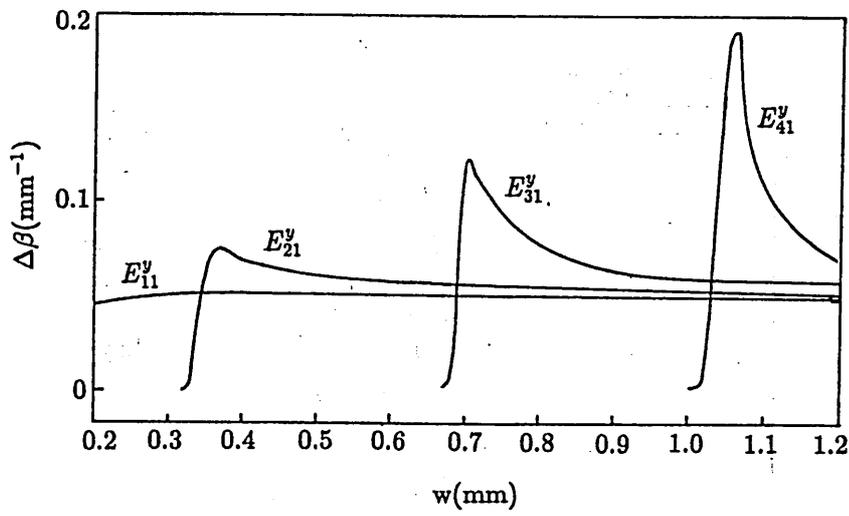


Fig.7. Phase shift as a function of image line width at 145GHz for $N_p.t_p=2 \times 10^{17}/\text{m}^2$.

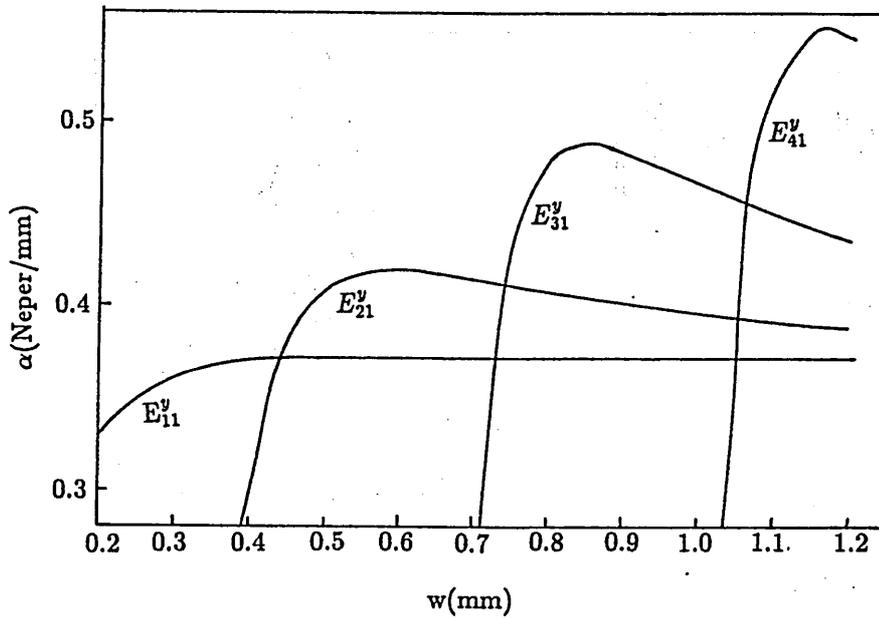


Fig.8. Attenuation constant versus guide width at 145GHz for $N_p.t_p=2 \times 10^{17}/\text{m}^2$.

4 EXPERIMENTAL RESULTS

Experiments have been carried out at frequencies ranging from W to D band, in the view of compact waveguide structure for optical control. The experimental setup to observe the optical control of millimeter wave is shown in Fig.9. The image line used in the experiment was made of high resistivity silicon having a resistivity of $5K\Omega.cm$ with the thickness t of $400\mu m$. Three different waveguides having width of $300\mu m$, $500\mu m$ and $1.4mm$ with each $30mm$ length were cut by a diamond scraper. The $1\mu m$ thick Aluminium was evaporated on the top surface of the silicon guide.

To excite the millimeter waves to the image line, ridge type waveguide transformer was fabricated within a tolerance of $\pm 10\mu m$ as shown in Fig.9. The millimeter wave source was the backward tube sweep oscillator ranging from $90-170GHz$ and the millimeter wave bridge was used to measure the transmission amplitude of the wave. By switching the bridge from the standard waveguide arm to the image line arm, the output signal was detected and the transmitted signals of both arms were compared to estimate the insertion loss including the excitation loss of two transformers, propagation and radiation losses.

Fig.10(a) shows the frequency response of the transmitted signal from $110-170GHz$ on the image line of $1.4mm$ width. Maximum insertion loss of $22.5dB$ was measured in the frequency range $110-170GHz$. Fig.10(b) shows the frequency response of transmitted power in the case of $300\mu m$ width image line. Maximum insertion loss of $26dB$ can be read from the figure. The large insertion loss may be due to the mismatching between ridge type transformers and the image line and also may be attributed from the large $\tan\delta$ value of the silicon material at D band.

Five LEDs having diameter of $5mm$ each were housed under the mount of the image line as shown in Fig.9. Optical output power of each LED was $30mW$ at a drive current of $250mA$, and the wavelength of irradiation was $820nm$. The plasma density thickness product $N_p.t_p$ was approximately estimated as $10^{16}/m^2$ [8].

The optical control of millimeter wave was confirmed by the attenuation of wave amplitude by means of ON-OFF be-

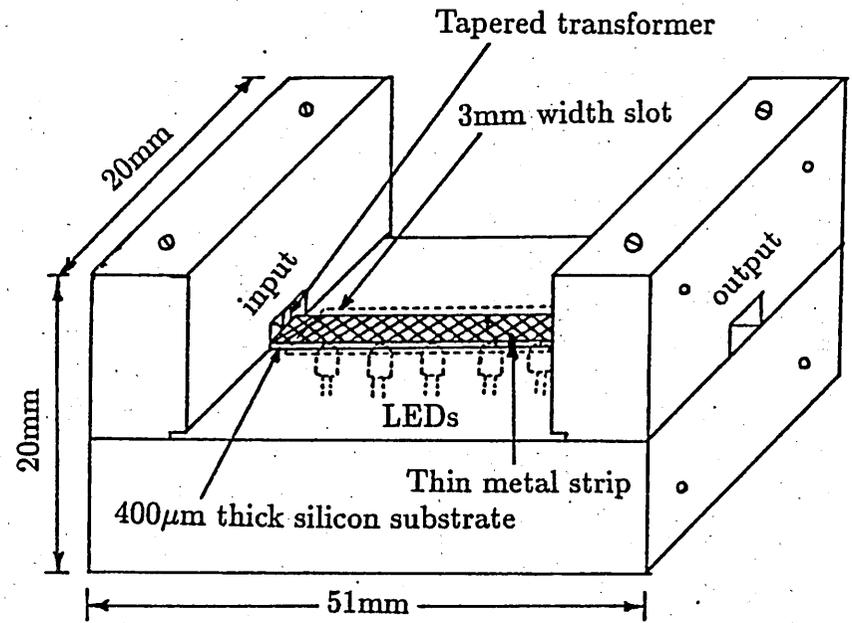


Fig.9. Schematic diagram of the mount and wavelauncher

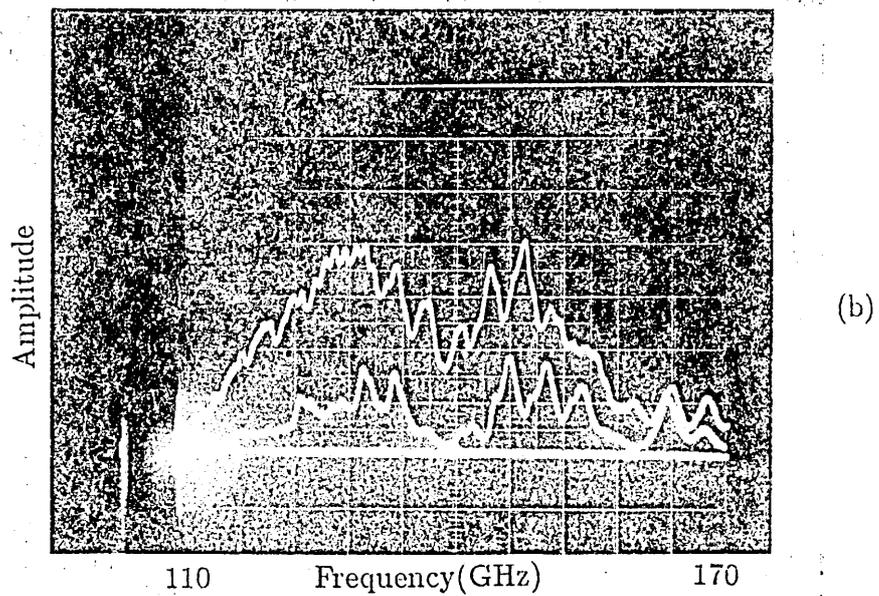
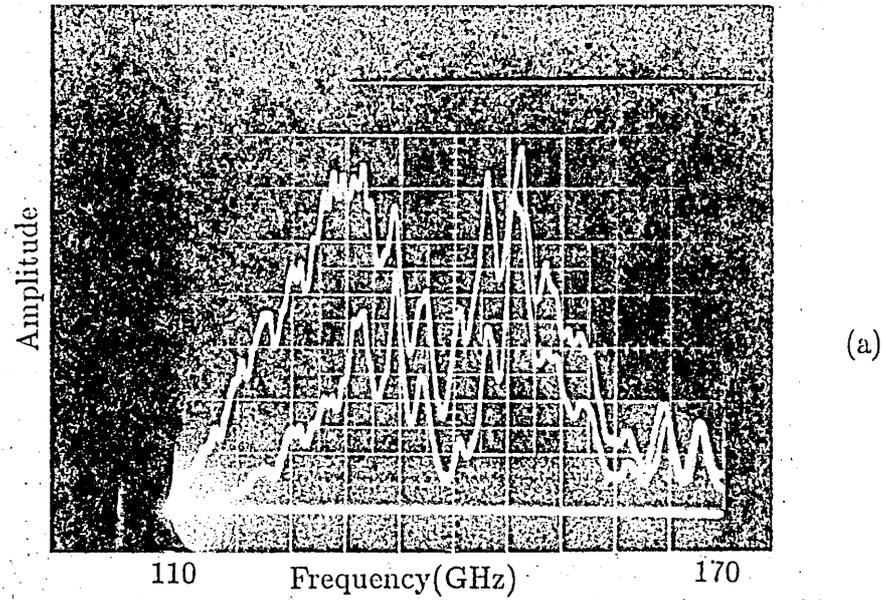


Fig.10. Frequency dependence of the image line :
 (a) upper trace is from the standard waveguide arm (scale 100mV/cm) and the lower trace is from the image line of 1.4mm width (scale 2mV/cm).
 (b) upper trace is from the standard waveguide arm (scale 200mV/cm) and the lower trace is from the image line of 300μm width (scale 2mV/cm).

haviour of LED. Fig.11(a) shows the typical optical control of millimeter wave in 1.4mm width image line, and Fig.11(b) shows that of 300 μ m image line. It can be seen that the change of wave amplitude is quite significant for 1.4mm line. Fig.12 shows the modulation index ($\Delta\bar{V}/\bar{V}_0$) of the wave amplitude on the frequency spectrum of 110-170GHz, which was obtained from ON-OFF behaviour of LEDs, where $\Delta\bar{V}$ is the change of wave amplitude due to the illumination of LEDs and \bar{V}_0 is the amplitude with OFF state of LEDs. The maximum modulation index obtained was 90percent which corresponds to wave attenuation of 10dB for 30mm length of the line. Assuming that the dominant mode has been excited to the guide, the theoretically calculated attenuation at 145GHz for 1.4mm line is 7.82 dB. The difference between experimentally observed and theoretically predicted result may be due to the EDC approximation and inadequate estimation of the $N_p.t_p$ product, in particular the plasma thickness.

To measure the dispersion characteristics of the proposed image line shown in Fig.2, standing wave measurement was made using a thin wire probe antenna of diameter 250 μ m along with the detector and a small cavity resonator. Fig.13 shows the observed typical resonance behaviour of small cavity in the frequency range 110-170GHz. However the measurement of standing wave pattern has not been succeeded because of the insufficient mechanical precision of positioner screw.

5 CONCLUSIONS

The propagation characteristics of millimeter waves in the image line containing the optically induced plasma region at D band have been investigated. Experiments were carried out to realise the optical control of millimeter waves at frequencies ranging from 90 -170GHz using high resistivity silicon substrate and light emitting diodes. The effect of optical control of the millimeter wave was confirmed by measuring the propagation loss induced by optical illumination, which produced an attenuation of \sim 10dB for a length of 30mm line. Experimental result was compared with theory. The results in this paper may be useful in finding applications of compact optical control devices such as phase shifters and attenuators at millimeter wave band.

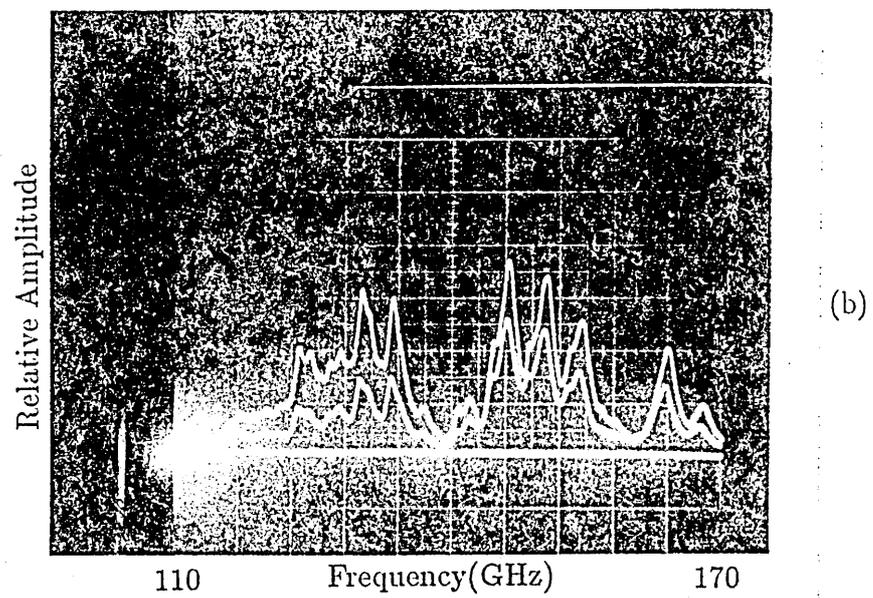
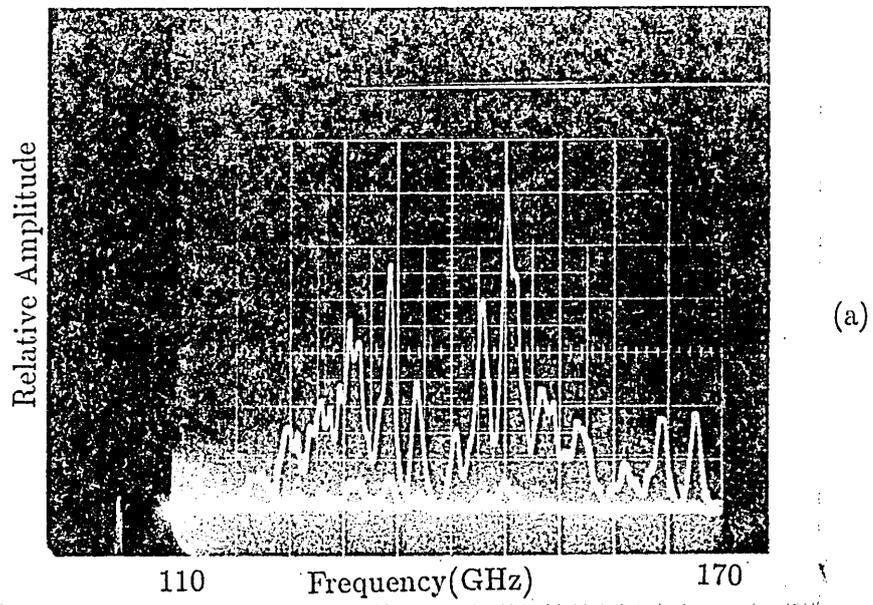


Fig.11 Frequency dependence of the optical control : upper trace is the response without illumination and the lower trace is with illumination of LEDs.
 (a) waveguide width of 1.4mm (b) width of 300 μ m.

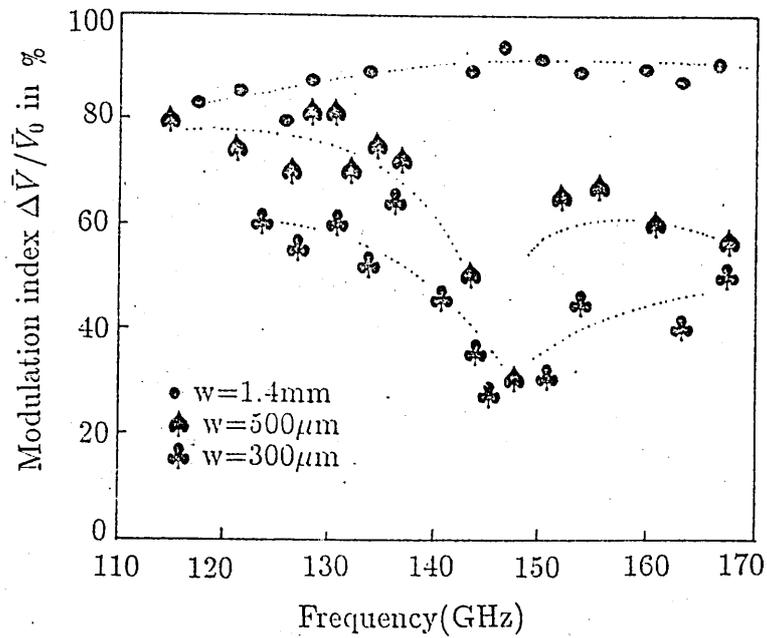


Fig.12. Measured modulation index as a function of frequency with optical illumination.

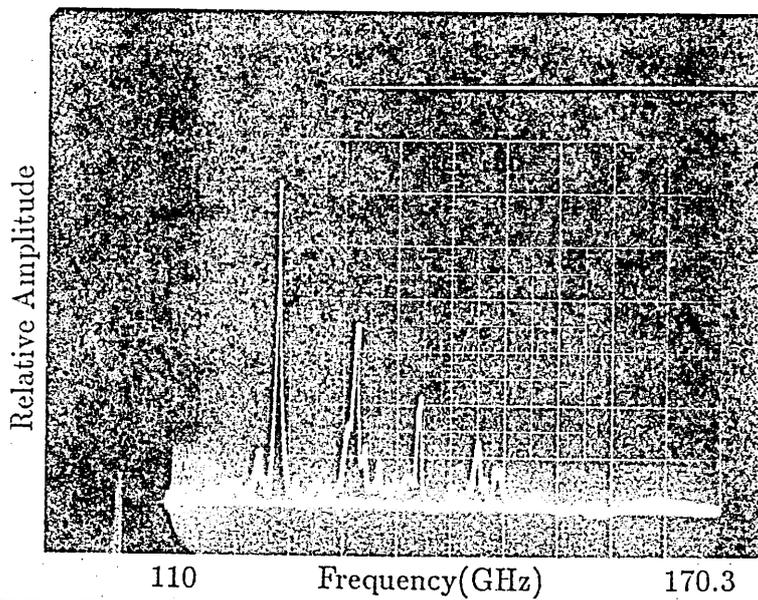


Fig.13. Millimeter wave resonance characteristics of the small cavity for VSWR measurement at D band.

ACKNOWLEDGEMENT

Most of the experiments of this paper have been undertaken at the University of Wales, School of Electrical, Electronics and Systems Engineering, Cardiff, U.K. under the supervision of Professor G.B.Morgan. We would like to thank the department for arrangement of the experimental facilities at D band and Dr.H.Shimasaki for useful discussions of the paper.

REFERENCES

1. C.H.Lee,"Picosecond optics and microwave technology",IEEE Trans.Microwave Theory Tech.,MTT-38,no.5,pp.596-607,1990.
2. D.H.Auston,"Picosecond optoelectronic switching and gating in silicon",Appl.Phys.Lett.,vol.26,pp.101-103,Feb.1975.
3. P.Paulus,W.Brinker, and D.Jäger,"Generation of microwave pulses by optoelectronically switched resonators",IEEE J. Quantum Electron., vol.QE-22, pp.108-111,1986.
4. D.H.Auston, A.M.Johnson, P.R.Smith, and J.C.Beam,"Picosecond optoelectronic detection,sampling,and correlation measurements in amorphous semiconductors",Appl.Phys.Lett.,vol.37,pp.371-373,Aug. 1980.
5. C.H.Lee,P.S.Mak,and A.P.DeFonzo,"Optical control of millimeter wave propagation in dielectric waveguides",IEEE J. Quantum Electron., vol.QE-16,no.3,pp.277-288,1980.
6. W.V.McLevige,T.Itoh, and R.Mitra,"New waveguide structures for millimeter wave and optical integrated circuits",IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.MTT-23, no.10,pp.788-794,1975.
7. G.B.Morgan,"Dielectric resonators for circuits at short millimeter wavelengths", Microwave Journal, vol.29, no.7, pp.107-115, July 1986.
8. S.Sugiyama and M.Tsutsumi,"Reflection and transmission of millimeter waves from the plasma induced semiconductor slab", Trans. of Inst. of Electronics and Information Engg.(Japan), vol.J-73 C-I, no.4,pp.173-178,Apr.1990.

輻射科学研究会資料（RS90-14）

等方性導波路と異方性導波路間
の突合せ結合の高効率化

沢 新之輔 下代 雅啓 兼武 春雄
（愛媛大学工学部）

平成2年12月7日
（於 大阪大学工学部）

1. まえがき

光集積回路を実現するための構成法が種々提案されているが、その実用化の前には未解決の問題がまだ数多く残されている。中でも、構造の異なる光導波路間の突合せ結合に関する検討は重要なものの一つである。

突合せ結合は、主に、光源と光ファイバの結合、光ファイバ間の接続、あるいは、光ファイバと光集積回路の接続等において広く用いられている。このような接続部では、横断面内での位置ずれ、伝送軸の傾き、端面間のギャップ等が僅かながら存在する。通常、光源と光ファイバの結合又は光ファイバ間の接続では、これらは結合効率の低下をもたらす要因となっている⁽¹⁾⁻⁽⁷⁾。一方、曲率の異なる曲り導波路間の接続では、構造の違いや位置ずれが結合効率の改善をもたらし得ることも指摘されている⁽⁸⁾。

以上のように、等方性導波路に関する検討はかなり詳しくなされてきているようであるが、実際には、光集積回路の基板材料として異方性結晶を用いることが多い。従って、実用的見地からは、異方性導波路に関する突合せ結合の評価はより重要な問題であると考えられるが、筆者らの知る限りでは、このような検討はこれまで殆どなされていないようである。特に、結晶の主軸系と導波路の座標系の間軸ずれが存在するような場合には、異方性導波路に特有の現象が現れるものと思われる。

そこで、本稿では、等方性導波路と異方性導波路間の突合せ結合の基本的特性を、単一モードスラブ導波路の場合について詳しく解析したのでその結果を報告する。異方性導波路には、伝送軸を含みスラブ面に垂直な面内での軸ずれが存在するものとしている。以下では、まず、解析の対象とする導波系の構造を説明し、次いで、結合効率の解析方法について述べる。そして、最後に、幾つかの数値計算例に基づいて導波路間のオフセット（位置ずれ又は傾き）に対する結合効率を評価し、その結果について検討を加える。

2. 導波系の構造

図1に示すような、幅 d_1 の等方性導波路と幅 d_2 の異方性導波路間の突合せ結合を考える。両導波路間には Δ なる位置ずれが存在し、両者の伝送軸は $x-z$ 面内で互いに θ なる角度をなすものとする。以下、この角を傾

き角と称する。 ϵ_{1p} は等方性導波路の各領域における誘電率を表す。又、 $\hat{\epsilon}_{2p}$ は異方性導波路の各領域におけるテンソル誘電率であり、光波は等方性導波路側から入射するものとする。添え字 p は、それが付された量が属する領域を明示しており、 c (コア) 又は d (クラッド) をとる。異方性導波路では、媒質の光学軸は $x-z$ 面内にあり、 z 軸と α なる角度をなすものとする。以下、この角を軸ずれ角と称する。

軸ずれ角の大きさがコアとクラッドの両領域で等しいものとするれば、異方性導波路における誘電率テンソルは次式で与えられる⁽⁹⁾。

$$\hat{\epsilon}_{2p} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xxp} & 0 & \epsilon_{xzp} \\ 0 & \epsilon_{yy p} & 0 \\ \epsilon_{xzp} & 0 & \epsilon_{zzp} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\epsilon_{xxp} = \epsilon_{op} \cos^2 \alpha + \epsilon_{ep} \sin^2 \alpha$$

$$\epsilon_{xzp} = (\epsilon_{ep} - \epsilon_{op}) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\epsilon_{zzp} = \epsilon_{op} \sin^2 \alpha + \epsilon_{ep} \cos^2 \alpha$$

$$\epsilon_{yy p} = \epsilon_{op} \quad (2)$$

但し、 ϵ_{op} および ϵ_{ep} は、それぞれ、常光および異常光に対する誘電率を表している。

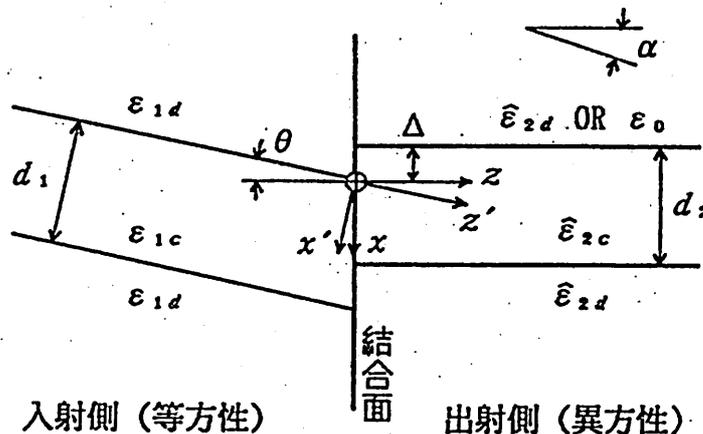


図1. 突合せ結合 (スラブ光導波路)

3. 解析方法

図1に示すような導波系では、異方性導波路の軸ずれの影響はTMモードのみに現れる。従って、ここでは解析の対象としてTMモードを取り上げることにする。入射側および出射側導波路が共に単一モード導波路であるとすれば、 $z=0$ 面における境界条件より次式が得られる。

$$\begin{aligned} H_y^{(i)} + r H_y^{(r)} + \int_0^\infty r(\rho_1) H_y^{(r)}(\rho_1) d\rho_1 \\ = t H_y^{(t)} + \int_0^\infty t(\rho_2) H_y^{(t)}(\rho_2) d\rho_2 \quad \text{at } z=0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} E_x^{(i)} + r E_x^{(r)} + \int_0^\infty r(\rho_1) E_x^{(r)}(\rho_1) d\rho_1 \\ = t E_x^{(t)} + \int_0^\infty t(\rho_2) E_x^{(t)}(\rho_2) d\rho_2 \quad \text{at } z=0 \end{aligned} \quad (4)$$

H_y および E_x は、それぞれ、磁界の y 成分および電界の x 成分を表しており、簡単のため、時間因子 $e^{j\omega t}$ は省略してある。添え字 (i) , (r) および (t) は、それぞれ、入射波、反射波および透過波を表すために用いられている。又、 ρ_1 および ρ_2 は、それぞれ、入射側および出射側導波路の放射モードの横方向波数を表す。そして、 ρ_1 又は ρ_2 の関数として与えられている係数は放射モードであり、その他は導波モードに属する。更に、 r , t , $r(\rho_1)$ および $t(\rho_2)$ は各々の波の振幅係数である。

式(3)および(4)において、入射側導波路の電磁界の $z=0$ 面に関する接線成分は、 (x', y', z') 座標系の電磁界成分を用いて次式のように表される。

$$H_y^{(i)} = H_y^{(i)} e^{-j\beta_1(-x \sin\theta + z \cos\theta)} \quad (5)$$

$$H_y^{(r)} = H_y^{(r)} e^{j\beta_1(-x \sin\theta + z \cos\theta)} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} E_x^{(i)} = E_x^{(i)} \cos\theta e^{-j\beta_1(-x \sin\theta + z \cos\theta)} \\ + E_x^{(i)} \sin\theta e^{-j\beta_1(-x \sin\theta + z \cos\theta)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E_x^{(r)} = E_x^{(r)} \cos\theta e^{j\beta_1(-x \sin\theta + z \cos\theta)} \\ + E_x^{(r)} \sin\theta e^{j\beta_1(-x \sin\theta + z \cos\theta)} \end{aligned} \quad (8)$$

但し、右辺の電磁界成分の (x, y, z) 座標系での表現式は付録Aに記す。

入射側および出射側の導波路間の屈折率差が小さい場合、フレネル反射特性を考慮すれば、 $r(\rho_1)$ は他の係数に比べて無視し得る程度に小さくなると思われる。そこで、入射側の放射モードに関する項を省略し、式(3)の両辺に $(1/\varepsilon_{xx})H_y^{(i)*}$ を、そして、式(4)の両辺に $H_y^{(i)*}$ を乗じ、更に、それぞれを x について無限積分する。その結果、出射側導波路における固有モード間の直交性⁽¹⁰⁾から右辺の放射モードに関する項が零となり、次式が導かれる。

$$\int \frac{1}{\varepsilon_{xx}} H_y^{(i)} H_y^{(i)*} dx + r \int \frac{1}{\varepsilon_{xx}} H_y^{(r)} H_y^{(i)*} dx = t \int \frac{1}{\varepsilon_{xx}} |H_y^{(t)}|^2 dx \quad \text{at } z=0 \quad (9)$$

$$\int E_z^{(i)} H_y^{(i)*} dx + r \int E_z^{(r)} H_y^{(i)*} dx = t \int E_z^{(t)} H_y^{(i)*} dx \quad \text{at } z=0 \quad (10)$$

但し、*は複素共役を意味する。ここで、マックスウェルの方程式を用いて電界成分を磁界成分で表現し、更に、弱導波近似を適用すれば、 t に関して解くことができる。

$$t = \frac{\frac{1}{\varepsilon_{1d}} \left\{ \int h_1 H_y^{(i)*} dx \int H_y^{(r)} H_y^{(i)*} dx - \int H_y^{(i)} H_y^{(i)*} dx \int h_2 H_y^{(t)*} dx \right\}}{\left\{ \frac{\varepsilon_{xxd}}{\eta_d} \int H_y^{(r)} H_y^{(i)*} dx \int h_3 H_y^{(i)*} dx + \beta_2 \frac{\varepsilon_{xxd}}{\eta_d} \int H_y^{(r)} H_y^{(i)*} dx \int |H_y^{(t)}|^2 dx - \frac{1}{\varepsilon_{1d}} \int h_2 H_y^{(i)*} dx \int |H_y^{(t)}|^2 dx \right\}} \quad \text{at } z=0 \quad (11)$$

を得る。但し、

$$\eta_d = \varepsilon_{xxd} \varepsilon_{zzd} - \varepsilon_{xxd}^2 \quad (12)$$

$$h_1 = -2j \sin \theta \cos \theta \frac{\partial H_y^{(u)}}{\partial x} + j (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial H_y^{(u)}}{\partial z} \quad (13)$$

$$h_2 = -2j \sin \theta \cos \theta \frac{\partial H_y^{(v)}}{\partial x} + j (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial H_y^{(v)}}{\partial z} \quad (14)$$

$$h_3 = j \frac{\partial H_y^{(u)}}{\partial x} \quad (15)$$

尚、式(13)および(14)の右辺に関する詳細は付録Bに記す。

結合面での透過係数 T を入射波電力に対する透過波電力の比で定義すると、 T は次式のように得られる。

$$T = |t|^2 \frac{\frac{\beta_2}{\epsilon_{xxd}} \int |H_y^{(u)}|^2 dx}{\frac{\beta_1}{\epsilon_{1d}} \int |H_y^{(u)}|^2 dx'} \quad \text{at } z=0 \quad (16)$$

本稿では、この透過係数 T を用いて二つの光導波路間の結合効率を評価する。

4. 解析結果

前節で述べた方法を用いて、導波路間のオフセット（位置ずれ又は傾き）に対する結合効率の依存性を求めた結果を示す。但し、以下の数値計算例では、自由空間波長を $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$ と定め、入射側導波路の各領域の屈折率を $n_{1c} = (\epsilon_{1c}/\epsilon_0)^{1/2} = 1.51275$ 並びに $n_{1d} = (\epsilon_{1d}/\epsilon_0)^{1/2} = 1.51$ としている。又、入射側および出射側導波路の幅をともに $d_1 = d_2 = 5\lambda_0$ とした。尚、出射側導波路の屈折率分布は、ステップ型と二乗型の2種類の分布を取り扱う。更に、それぞれの分布形状について、対称構造と非対称構造の2種類を検討する。以上、4つの場合について、それぞれ、位置ずれ、および、傾き角に対する透過係数の依存性を求めた。但し、式(11)~(16)中の入射側導波路に関する量は全て解析的に求め、出射側導波路に関する量は多層分割法⁽¹¹⁾を用いて数値的に求めた。そして、それらを式(16)に従って数値積分することにより透過係数 T を求めた。

4.1. 出射側導波路の屈折率分布が対称の場合

基板の表面から深い場所に導波路を形成すると、ほぼ対称な屈折率分布が得られる。ここでは、そのような場合の検討を行う。まず、図2(a)に、出射側導波路がステップ型の屈折率分布を持つ場合について、傾き角を $\theta = 0^\circ$ としたときの、位置ずれに対する透過係数の依存性を示す。但し、同図は軸ずれ角 α をパラメータとして描かれている。又、導波路の屈折率分布は次式で与えられる。

$$n_o(x) = \begin{cases} n_{od} & \text{for } x < 0 \\ n_{od} + \delta n_o & \text{for } 0 \leq x \leq d_2 \\ n_{od} & \text{for } d_2 < x \end{cases}$$

$$n_e(x) = \begin{cases} n_{ed} & \text{for } x < 0 \\ n_{ed} + \delta n_e & \text{for } 0 \leq x \leq d_2 \\ n_{ed} & \text{for } d_2 < x \end{cases} \quad (17)$$

ここで、 n_o および n_e は、それぞれ、常光および異常光に対する屈折率を表している。出射側導波路は代表的な異方性材料である LiNbO_3 からなるものとしており、各屈折率の値はそれぞれ

$$n_{od} = (\varepsilon_{od}/\varepsilon_o)^{1/2} = 2.272, \quad n_{ed} = (\varepsilon_{ed}/\varepsilon_o)^{1/2} = 2.187,$$

$$\delta n_o = \delta n_e = 0.002$$

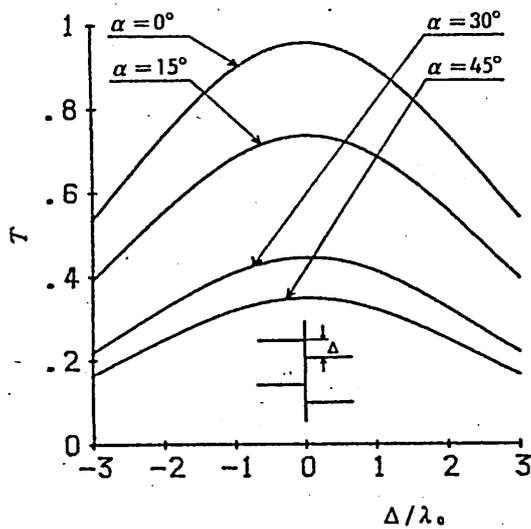
のように与えている。

図2(b)には、同じく α をパラメータとしたときの、傾き角に対する透過係数の依存性を示している。但し、同図においては、位置ずれ Δ は各々の α に対して透過係数が最大となるように与えられており、その値はそれぞれ図中に示されている。

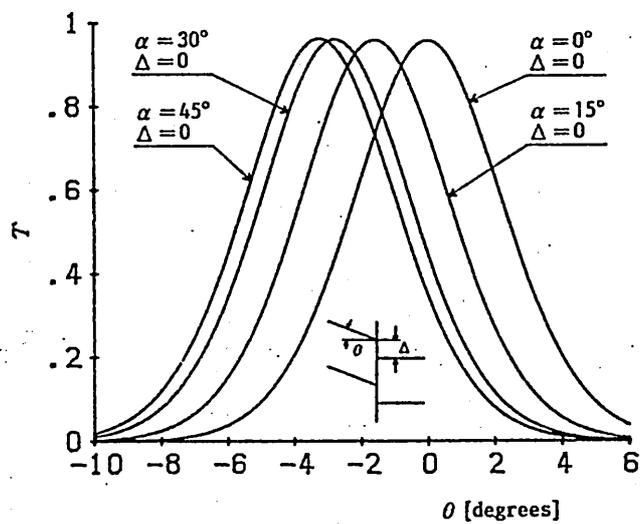
図3は、出射側導波路が

$$n_o(x) = \begin{cases} n_{od} & \text{for } x < 0 \\ n_{od} + \delta n_o \left[1 - \left(\frac{x - d_2/2}{d_2/2} \right)^2 \right] & \text{for } 0 \leq x \leq d_2 \\ n_{od} & \text{for } d_2 < x \end{cases}$$

$$n_e(x) = \begin{cases} n_{ed} & \text{for } x < 0 \\ n_{ed} + \delta n_e \left[1 - \left(\frac{x - d_2/2}{d_2/2} \right)^2 \right] & \text{for } 0 \leq x \leq d_2 \\ n_{ed} & \text{for } d_2 < x \end{cases} \quad (18)$$

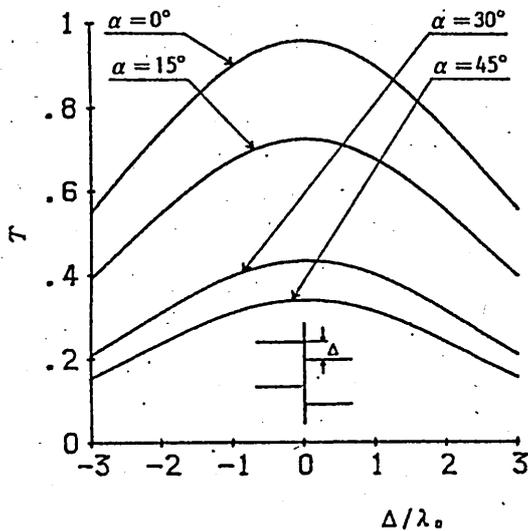


(a) 位置ずれに対する透過係数 ($\theta = 0^\circ$)

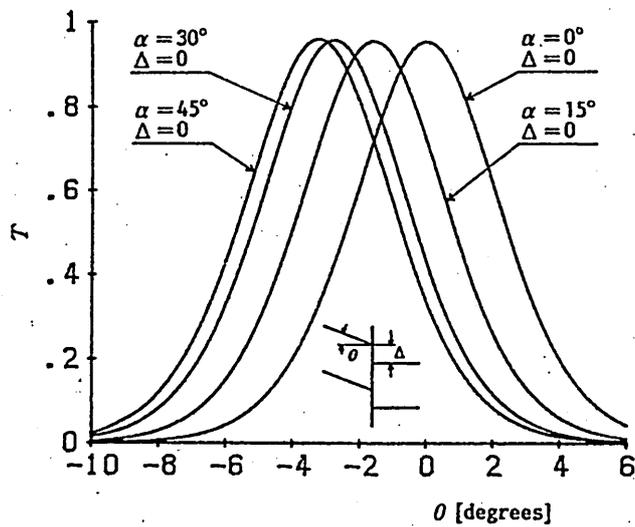


(b) 傾き角に対する透過係数

図2. 出射側の導波路が対称の場合の透過係数 (ステップ型)



(a) 位置ずれに対する透過係数 ($\theta = 0^\circ$)



(b) 傾き角に対する透過係数

図3. 出射側の導波路が対称の場合の透過係数 (二乗型)

で表されるような二乗型の屈折率分布を持つ場合について、同様の解析を行った結果を示している。

尚、式(17)および(18)は、位置ずれがないとき、即ち、 $\Delta = 0$ としたときの屈折率分布を表している。

図2(a)および3(a)より、両屈折率分布ともに、 $\theta = 0^\circ$ とした垂直入射の場合、軸ずれがなければ、位置ずれをなくすことにより95%程度の高い結合効率を得られることがわかる。又、軸ずれが存在すると結合効率は低下し、軸ずれ角が45度のときには最大値でも35%程度の結合効率しか得られないことがわかる。しかし、図2(b)および3(b)より、このような場合でも、入射側導波路に軸ずれの大きさに応じた適当な傾き角を与えることにより、軸ずれがない場合と同程度の高い結合効率を得られることがわかる。

4.2. 出射側導波路の屈折率分布が非対称の場合

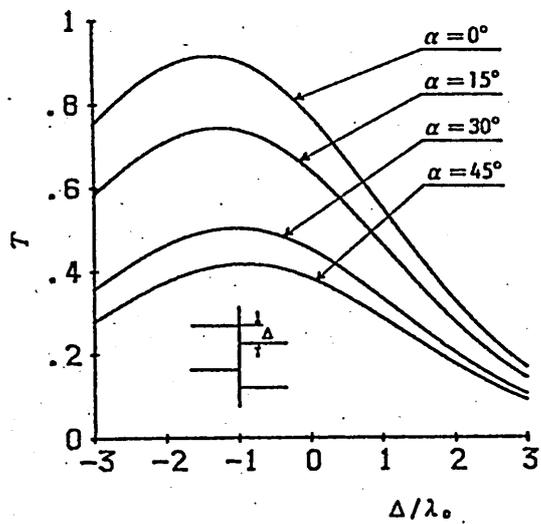
出射側導波路を基板材料の表面に形成すると、その屈折率分布にはかなり大きな非対称が現れる。ここでは、そのような場合の検討を行う。まず、出射側導波路が

$$\begin{aligned}
 n_o(x) &= \begin{cases} 1 & \text{for } x < 0 \\ n_{od} + \delta n_o & \text{for } 0 \leq x \leq d_2 \\ n_{od} & \text{for } d_2 < x \end{cases} \\
 n_e(x) &= \begin{cases} 1 & \text{for } x < 0 \\ n_{ed} + \delta n_e & \text{for } 0 \leq x \leq d_2 \\ n_{ed} & \text{for } d_2 < x \end{cases} \quad (19)
 \end{aligned}$$

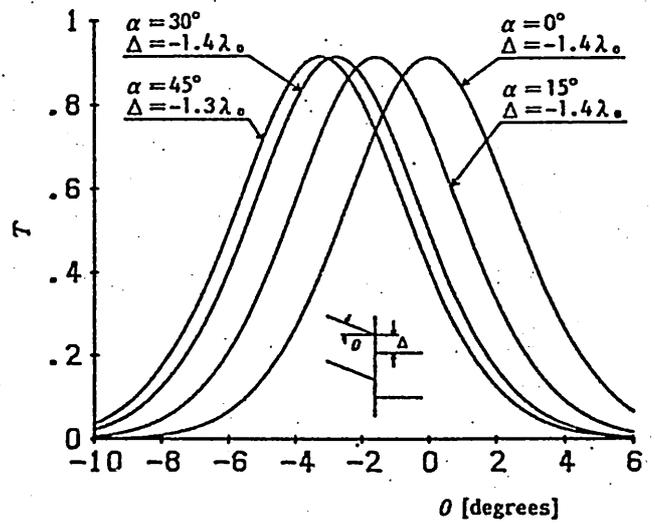
で表されるようなステップ型の屈折率分布を持つ場合について、前節と同様の解析を行った結果を図4に示す。

図5は、出射側導波路が

$$n_o(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 0 \\ n_{od} + \delta n_o [1 - (x/d_2)^2] & \text{for } 0 \leq x \leq d_2 \\ n_{od} & \text{for } d_2 < x \end{cases}$$

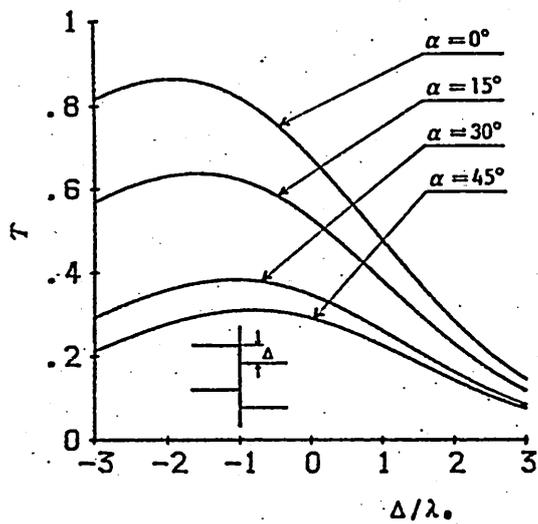


(a) 位置ずれに対する透過係数 ($\theta = 0^\circ$)

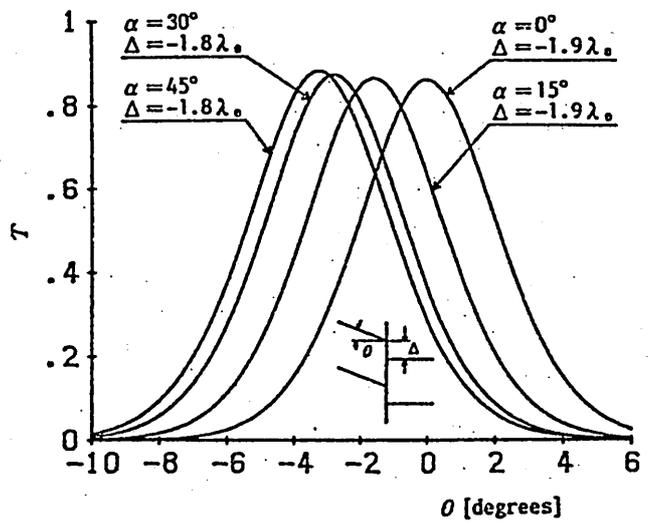


(b) 傾き角に対する透過係数

図4. 出射側の導波路が非対称の場合の透過係数 (ステップ型)



(a) 位置ずれに対する透過係数 ($\theta = 0^\circ$)



(b) 傾き角に対する透過係数

図5. 出射側の導波路が非対称の場合の透過係数 (二乗型)

$$n_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 0 \\ n_{ed} + \Delta n_e [1 - (x/d_2)^2] & \text{for } 0 \leq x \leq d_2 \\ n_{ed} & \text{for } d_2 < x \end{cases} \quad (20)$$

で表されるような二乗型の屈折率分布を持つ場合の結果を示している。但し、式(19)および(20)は、位置ずれがないとき、即ち、 $\Delta = 0$ としたときの屈折率分布を表しており、 $x < 0$ 以外の領域の各屈折率の値は先に述べた対称分布の場合と同じである。

これらの図より、全体的傾向として、出射側導波路の屈折率分布が非対称の場合、対称の場合よりも結合効率が幾分低下していることがわかる。これは、入射側導波路が対称構造であることによるものである。又、図4(a)および図5(a)より、非対称の場合もやはり、軸ずれが存在すると結合効率は低下することがわかる。そして、対称分布の場合と同様に、入射側導波路に軸ずれの大きさに応じた適当な傾き角を与えることにより、軸ずれがない場合と同程度の高い結合効率が得られることがわかる。しかし、対称分布の場合と異なる点は、ある軸ずれ角に対して、結合効率が最大となる位置ずれは零とはならず、軸ずれ角の大きさに応じて異なった値をとることである。

5. むすび

本稿では、等方性導波路と異方性導波路間の突合せ結合の基本的特性を、単一モードスラブ導波路の場合について詳しく解析した。異方性導波路には、伝送軸とスラブ面の垂線で定義される面内での軸ずれが存在するものとした。その結果、異方性導波路の軸ずれが大きくなると、垂直入射では十分な結合効率が得られないことがわかった。しかし、このような場合でも、軸ずれの大きさに応じて適当な傾き角や位置ずれを与えることにより高い結合効率が得られることがわかった。

今後の研究課題としては、より一般的なモデル（例えば、入射側および出射側の導波路間にギャップがある場合、導波路が横断面内で二次元の屈折率分布を持つ場合など）の解析があげられる。この点については現在検討中である。

謝辞 本研究に関し、貴重なご意見と多大のご支援を頂いた、住友電気工業株式会社研究開発本部の吉田健一、須川 毅、西江光昭、瀬村 滋の諸氏に深謝する。又、日頃から有益なご意見、ご検討を頂く、本学工学部助手堀田昌志氏に感謝する。

文 献

- (1) D.L.Bisbee, "Measurements of loss due to offsets and end separations of optical fibers," Bell Syst. Tech. J., vol.50, pp. 3159-3168, Dec.1971.
- (2) L.G.Cohen, "Power coupling from GaAs injection lasers into optical fibers," Bell Syst. Tech. J., vol.51, pp.573-594, Mar.1972.
- (3) J.S.Cook, W.L.Mammel, and R.J.Grow, "Effect of misalignments on coupling efficiency of single-mode optical fiber butt joints," Bell Syst. Tech. J., vol.52, pp.1439-1448, Oct.1973.
- (4) D.Gloge, "Offset and tilt losses in optical fiber splices," Bell Syst. Tech. J., vol.55, pp.905-916, Sept.1976.
- (5) C.M.Miller, "Transmission vs transverse offset for parabolic-profile fiber splices with unequal core diameters," Bell Syst. Tech. J., vol.55, pp.917-927, Sept.1976.
- (6) T.C.Chu and A.R.McCormick, "Measurements of loss due to offset, end separation, and angular misalignment in graded index fibers excited by an incoherent source," Bell Syst. Tech. J., vol.57, pp.595-602, Mar.1978.
- (7) K.Morishita, S.Inagaki, and N.Kumagai, "Analysis of discontinuities in dielectric waveguides by means of the least squares boundary residual method" IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.MTT-27, pp.310-315, Apr.1979.

- (8) M.Geshiro and S.Sawa, "A method for diminishing total transmission losses in curved dielectric optical waveguides," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.MTT-29, pp.1182-1187, Nov. 1981.
- (9) D.Marcuse, "Modes of a symmetric slab optical waveguide in birefringent media - part I: optical axis not in plane of slab," IEEE J. Quantum Electron., vol.QE-14, pp.736-741, Oct. 1978.
- (10) D.Marcuse, Light Transmission Optics. New York: Van Nostrand-Reinhold, 1972, Section 8.6.
- (11) Y.Suematsu and K.Furuya, "Propagation mode and scattering loss of a two-dimensional dielectric waveguide with gradual distribution of refractive index," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.MTT-20, pp.524-531, Aug.1972.

付録-A

座標系 (x', y', z') における入射側導波路のTMモードの磁界成分は、周知のとおり次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 H_{y'} &= A e^{\gamma_1 x'} && \text{for } x' \leq 0 \\
 H_{y'} &= A \cos(\kappa_1 x') + B \sin(\kappa_1 x') && \text{for } 0 \leq x' \leq d_1 \\
 H_{y'} &= [A \cos(\kappa_1 d_1) + B \sin(\kappa_1 d_1)] \\
 &\quad \cdot e^{-\gamma_1 (x' - d_1)} && \text{for } d_1 \leq x' \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= [n_{1c}^2 k_0^2 - \beta_1^2]^{1/2} \\
 \gamma_1 &= [\beta_1^2 - n_{1d}^2 k_0^2]^{1/2} \\
 k &= \omega (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

$$B = \frac{\gamma_1 n_{1c}^2}{\kappa_1 n_{1d}^2} A \quad (\text{A. 3})$$

$$\tan(\kappa_1 d_1) = \frac{2\kappa_1 \gamma_1 n_{1c}^2 n_{1d}^2}{\kappa_1^2 n_{1d}^4 - \gamma_1^2 n_{1c}^4} \quad (\text{A. 4})$$

ここで、回転に関する座標変換および微分に関する公式

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial z}$$

を式(A. 1)に適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} H_{y'} &= A e^{\gamma_1 (x \cos\theta + z \sin\theta)} && \text{for } x \leq 0 \\ H_{y'} &= A \cos[\kappa_1 (x \cos\theta + z \sin\theta)] \\ &\quad + B \sin[\kappa_1 (x \cos\theta + z \sin\theta)] && \text{for } 0 \leq x \leq d_1 / \cos\theta \\ H_{y'} &= [A \cos(\kappa_1 d_1) + B \sin(\kappa_1 d_1)] \\ &\quad \cdot e^{-\gamma_1 (x \cos\theta + z \sin\theta - d_1)} && \text{for } d_1 / \cos\theta \leq x \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

更に、電界と磁界の関係式

$$E_{x'} = \frac{j}{\omega \epsilon_{1p}} \frac{\partial H_{y'}}{\partial z'} = \frac{j}{\omega \epsilon_{1p}} \left(-\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} \right) H_{y'} \quad (\text{A. 6})$$

$$E_{z'} = \frac{-j}{\omega \epsilon_{1p}} \frac{\partial H_{y'}}{\partial x'} = \frac{-j}{\omega \epsilon_{1p}} \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial z} \right) H_{y'} \quad (\text{A. 7})$$

なる関係に式(A. 5)を代入すれば、 $E_{x'}$ および $E_{z'}$ の (x, y, z) 座標系での表現式が簡単に導出できる。

付録-B

$$\begin{aligned}
 h_1 &= [\beta_1 \cos \theta - j \gamma_1 \sin \theta] A e^{r_1 x \cos \theta} \\
 &\quad \cdot e^{j \beta_1 x \sin \theta} \quad \text{for } x \leq 0 \\
 h_1 &= \{ \beta_1 \cos \theta [A \cos(\kappa_1 x \cos \theta) + B \sin(\kappa_1 x \cos \theta)] \\
 &\quad - j \kappa_1 \sin \theta [-A \sin(\kappa_1 x \cos \theta) + B \cos(\kappa_1 x \cos \theta)] \} \\
 &\quad \cdot e^{j \beta_1 x \sin \theta} \quad \text{for } 0 \leq x \leq d_1 / \cos \theta \\
 h_1 &= [\beta_1 \cos \theta + j \gamma_1 \sin \theta] [A \cos(\kappa_1 d_1) + B \sin(\kappa_1 d_1)] \\
 &\quad \cdot e^{-r_1 (x \cos \theta - d_1)} e^{j \beta_1 x \sin \theta} \quad \text{for } d_1 / \cos \theta \leq x \quad (\text{B. 1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_2 &= [-\beta_1 \cos \theta - j \gamma_1 \sin \theta] A e^{+r_1 x \cos \theta} \\
 &\quad \cdot e^{j \beta_1 x \sin \theta} \quad \text{for } x \leq 0 \\
 h_2 &= \{ -\beta_1 \cos \theta [A \cos(\kappa_1 x \cos \theta) + B \sin(\kappa_1 x \cos \theta)] \\
 &\quad - j \kappa_1 \sin \theta [-A \sin(\kappa_1 x \cos \theta) + B \cos(\kappa_1 x \cos \theta)] \} \\
 &\quad \cdot e^{-j \beta_1 x \sin \theta} \quad \text{for } 0 \leq x \leq d_1 / \cos \theta \\
 h_2 &= [-\beta_1 \cos \theta + j \gamma_1 \sin \theta] [A \cos(\kappa_1 d_1) + B \sin(\kappa_1 d_1)] \\
 &\quad \cdot e^{-r_1 (x \cos \theta - d_1)} e^{-j \beta_1 x \sin \theta} \quad \text{for } d_1 / \cos \theta \leq x \quad (\text{B. 2})
 \end{aligned}$$

輻射科学研究会資料

RS90-15

チェレンコフ型光第二高調波発生モード解析

芳賀 宏 高田 勝浩 山本 錠彦

(大阪大学 基礎工学部)

平成2年12月7日

チェレンコフ型光第二高調波発生モード解析

芳賀 宏 高田 勝浩 山本 鏡彦

(大阪大学 基礎工学部)

1 はじめに

光導波路は、光閉込効果による高強度光電界および長い相互作用長といった非線形光学デバイスの高効率化に重要な特性を有する。この長い相互作用長を得るために必要な位相整合もモード分散を利用することによって実現できる。第二高調波発生 (SHG) を行う場合、基本波、高調波の両者に導波モードを用いる方法と他に導波モードの基本波から放射波として高調波を得るいわゆるチェレンコフ型の方法がある。前者では、位相整合を実現するためには厳密な導波路パラメータの設定が必要なのに対して、後者では、その条件が比較的緩やかであるという特徴を有する。

チェレンコフ型 SHG の実験は ZnS を用いた実験 [1] に始まり、最近では LiNbO₃ を用いた実験 [2,3] の他に、有機結晶コアファイバを用いた実験 [4,5,6] が活発に行われている。

一方、解析に関しても、モード解析 [3,7], 有限要素法を用いたもの [8], Green 関数を用いた解析 [9] およびビーム伝搬法を利用した例 [10] など種々の報告がある。有限要素法やビーム伝搬法のような数値計算による方法に比べてモード解析や Green 関数による方法は現象の物理的理解がしやすいという利点がある。また Green 関数による方法は基本的に遠方界を求める方法であり、任意の点での波動の振舞いを記述できない。また導波層基板間での境界の影響の補正の必要性がある。それに対し、モード解析では、境界条件を満足する界を用いて、任意の点での界の挙動が分かるという利点がある。

上に挙げたモード解析の文献では波動方程式を境界条件を用いて直接解析しているのに対して、以下では、より現象を理解しやすいように、放射モードの表現式がすでに文献 [11] に示してある、ステップインデックススラブ導波路および光ファイバを対象として、解析を行った結果を示す。

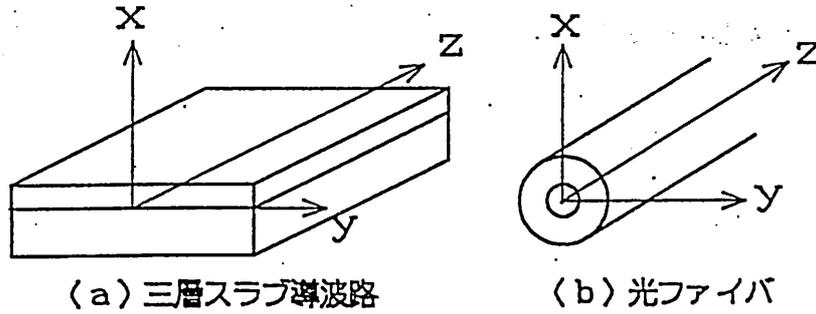


図 1: 解析対象となる光導波路とその座標系。(a) 三層スラブ導波路、(b) 光ファイバ。

2 基本式の導出

図 1 に示す三層スラブ導波路および光ファイバを解析の対象とする。材料は等方性で無損失とする。また、基板およびクラッドは無限に厚いものとする。基本波として TM モードを考える。すなわち、 $E_x^f, E_z^f, H_y^f \neq 0$, その他 $= 0$ であり、 $\partial/\partial y = 0$ である。また、 ω_f を基本波の周波数とする。媒質の有効な非線形光学定数は d_{xxx} のみとすると、基本波によって励起される非線形分極は、

$$P_x = \epsilon_0 d_{xxx} E_x^f E_x^f = \epsilon_0 d E_x^f E_x^f \quad (1)$$

$$P_y = P_z = 0 \quad (2)$$

d が十分小さく、基本波が進行方向で保存されると仮定すると基本波の電界 E_x^f および 2 次の非線形分極 P_x はそれぞれの位相定数を β_f 、 β_p とすると以下のように表される。

$$E_x^f = \frac{1}{2} E_x^f(x) e^{j(\omega_f t - \beta_f z)} + \text{c.c.} \quad (3)$$

$$P_x = \frac{1}{2} P_x(x) e^{j(\omega_p t - \beta_p z)} + \text{c.c.} \quad (4)$$

ただし、 $P_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 d (E_x^f)^2$, $\omega_p = 2\omega_f$, $\beta_p = 2\beta_f$ である。また、c.c. は複素共役をあらわす。このとき、非線形波動方程式

$$(\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{P}^{\text{NL}}) \quad (5)$$

の非線形項は

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{P}^{\text{NL}}) = -\frac{1}{2} \omega \beta_p P_x e^{j(\omega t - \beta_p z)} \mathbf{e}_y + \text{c.c.} \quad (6)$$

となる。ここで e_y は y 方向の単位ベクトルである。したがって、生じる磁界成分は H_y のみとなり、発生する高調波も TM モードとなる。ここで基本波の E_x^f と H_y^f との関係式 $E_x^f = \{\beta_f / (\omega_f \epsilon_f)\} H_y^f$ を用いると、第二高調波発生に寄与する非線形分極は

$$P_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 d \left(\frac{\beta_f}{\omega_f \epsilon_f} \right)^2 H_y^f{}^2 \quad (7)$$

となる。

与えられた導波構造では、高調波の周波数 $\omega (= 2\omega_f)$ を有する導波モードは分極波と位相整合が成立せず、放射モードとの結合が主となる場合を考える。界は、進行方向の変化が緩やかであるとすれば、

$$H_y(x, z, t) = \frac{1}{2} \int a(z; \rho) H_y(x; \rho) e^{-j\beta z} d\rho e^{j\omega t} + \text{c.c.} \quad (8)$$

と表される。 ρ は x 方向の位相定数で基板の屈折率 n_2 、波数 k を用いて β とを用いて、 $\rho = \sqrt{k^2 n_2^2 - \beta^2}$ で表される。積分範囲は放射モードの位相定数の取り得る全範囲である。ここで、 $H_y(x; \rho)$ は、放射モードの界で、規格化されている。また、 $a(z; \rho)$ はモード振幅である。

発生する高調波の界を求めるのは、式の各モード振幅を求めることに帰着する。代表的に $H_y(x, z, t) = \frac{1}{2} a(z) H_y(x, z) e^{j\omega t} + \text{c.c.}$ について考えると、

$$\begin{aligned} \nabla^2 H_y - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_y \\ &= \frac{1}{2} e^{j(\omega t - \beta z)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - 2j\beta \frac{\partial a}{\partial z} \right) H_y \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \right) H_y a \right\} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $(\partial^2 / \partial x^2 + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) H_y = 0$ であり、また $|\partial^2 a / \partial z^2| \ll |\beta \partial a / \partial z|$ の関係を仮定すると近似的に次式の関係が得られる。

$$\left(\nabla^2 - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_y = -j\beta \frac{\partial a}{\partial z} H_y e^{j(\omega t - \beta z)} + \text{c.c.} \quad (10)$$

よって、

$$j \int \beta \frac{\partial a(z; \rho)}{\partial z} H_y(x; \rho) e^{-j\beta z} d\rho = \frac{1}{2} \omega \beta_p P(x) e^{-j\beta_p z} \quad (11)$$

となり、Dirac の δ 関数を用いたモード間の直交性を表す次式

$$\frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} H_y(x; \rho) H_y^*(x; \rho') dx = \delta(\rho - \rho') \quad (12)$$

を用いると、式(11)から、各モード振幅は次の方程式を満たす。

$$\frac{\partial a(z; \rho)}{\partial z} = \frac{\varepsilon_0 \beta_p^3}{4j \omega^2} P_f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{\varepsilon \varepsilon_f^2} (H_y^f)^2 H_y^*(x; \rho) dx e^{j(\beta - \beta_p)z} \quad (13)$$

ただし、 H_y^f 、 P_f は基本波導波モードの規格化振幅およびパワーである。

$$\frac{\partial a(z; \rho)}{\partial z} = -jK(\rho) e^{j(\beta - \beta_p)z} \quad (14)$$

ここで、

$$K(\rho) = \frac{\varepsilon_0 \beta_p^3}{4 \omega^2} P_f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{\varepsilon \varepsilon_f^2} (H_y^f)^2 H_y^*(x; \rho) dx \quad (15)$$

式(14)が解析の基本式となり、式(15)が基本波から高調波への結合の大きさを表す。

光導波路上に、 $z = 0$ で基本波が入射した場合を考える。すなわち、境界条件 $a(0; \rho) = 0$ を用いて、式(14)を解くと

$$\begin{aligned} a(z; \rho) &= -jK(\rho) \int_0^z e^{j(\beta - \beta_p)\zeta} d\zeta \\ &= -j e^{j\frac{\beta - \beta_p}{2}z} z K(\rho) \operatorname{sinc} \frac{\beta - \beta_p}{2} z \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)を式(8)に代入すれば、高調波の界が求められる。

スラブ導波路での TE モードあるいは弱導波光ファイバにおいても、式(16)でモード振幅が表される。このとき、結合係数 K は次式で与えられる。

$$K(\rho) = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \omega^3}{4\beta^2} P_f \int ed(E_y^f)^2 E_y^*(x; \rho) dA \quad (17)$$

ただし、非線形光学定数 d は d_{yyy} のみが有効であるとする。また、積分領域は導波路全断面である。

発生した高調波は全ての放射モードの合成として、式(8)で表される。そこで、全合成波を次式のように一つの複素振幅 $H_y(x, z)$ でまとめて表記する。

$$H_y(x, z, t) = \frac{1}{2} H_y(x, z) e^{j\omega t} + \text{c.c.} \quad (18)$$

ただし、ここでの複素振幅 $H_y(x, z)$ は

$$H_y(x, z) = -jz \int K(\rho) \operatorname{sinc} \left(\frac{\beta - \beta_p}{2} z \right) e^{-j\frac{\beta - \beta_p}{2}z} H_y(x; \rho) d\rho \quad (19)$$

で表される。従って、与えられた導波路の基本波に対する導波モードおよび高調波に対する放射モードの表式が分かれば、式(15)から結合係数 $K(\rho)$ を、さらに式(19)から任意の点での高調波の界分布を求めることができる。

TE モードおよび電界主成分が E_y である光ファイバの場合は上式で $H_y(x)$ をそれぞれ、 $E_y(x)$ および $E_y(r, \phi)$ に置き換えればよい。

3 高調波パワー

発生した高調波のパワーは式(15)および式(19)を計算することによって求めることができるが、ここでは基本波と位相整合する放射モードに関する結合係数 $K(\beta_p)$ のみを求めると近似的に高調波パワーが求められることを示す。また、その結果より高調波の距離依存に関する説明を述べる。

Poynting vector の伝搬方向 (z) 成分は

$$S_z = \frac{1}{2} \text{Re}(E \times H^*) \cdot e_z \quad (20)$$

パワーは断面全てにわたって積分して得られる。今、スラブ導波路で y 方向に関して一様であるとしているので、 y 方向単位長当りのパワーは

$$P_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_x H_y^* dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\omega \epsilon} H_y H_y^* dx \quad (21)$$

さて、式(19)を見ると、全界は直交している放射モード $H_y(x; \rho)$ で展開されているわけだから、全パワーは各モードパワーの合計となる。各モードのパワーは H_y が規格化されていることを考慮して、

$$P_s(\rho) = \frac{1}{2} z^2 K^2(\rho) \text{sinc}^2\left(\frac{\beta - \beta_p}{2} z\right) \quad (22)$$

従って、全パワーは

$$P_s = \int P_s(\rho) d\rho = \frac{1}{2} z^2 \int K^2(\rho) \text{sinc}^2\left(\frac{\beta - \beta_p}{2} z\right) d\rho \quad (23)$$

積分変数を $d\rho = -(\beta/\rho)d\beta$ の関係を用いて β に変換すると、 P_s は次式で表される。

$$P_s = \int P_s(\rho) d\rho = \frac{1}{2} z^2 \int \frac{\beta}{\rho} K^2(\beta) \text{sinc}^2\left(\frac{\beta - \beta_p}{2} z\right) d\beta \quad (24)$$

$|(\beta - \beta_p)z| \gg 0$ では $\text{sinc}(\dots) \rightarrow 0$ となるので、実際には $\beta \sim \beta_p$ の場合を考えれば良い。従って、 $(\beta/\rho)K(\beta) \sim (\beta_p/\rho_p)K(\beta_p)$ と近似すると、式(23)は

$$P_s = \frac{1}{2} \frac{\beta_p}{\rho_p} z^2 K^2(\beta_p) \int \text{sinc}^2\left(\frac{\beta - \beta_p}{2} z\right) d\beta = \frac{\beta_p}{\rho_p} z K^2(\beta_p) \pi \quad (25)$$

となる。ここでは、 z が波長に比べて十分に大きい場合を考え

$$\int \text{sinc}^2\left(\frac{\beta - \beta_p}{2} z\right) d\beta \simeq \frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 x dx = \frac{2\pi}{z}$$

と近似している。また、基本波のパワー P_f の影響を明示するために、単位パワー入力の場合の結合係数を K_0 とおくと、発生する高調波パワーは

$$P_s = \frac{\beta_p}{\rho_p} z P_f^2 K_0^2(\beta_p) \pi \quad (26)$$

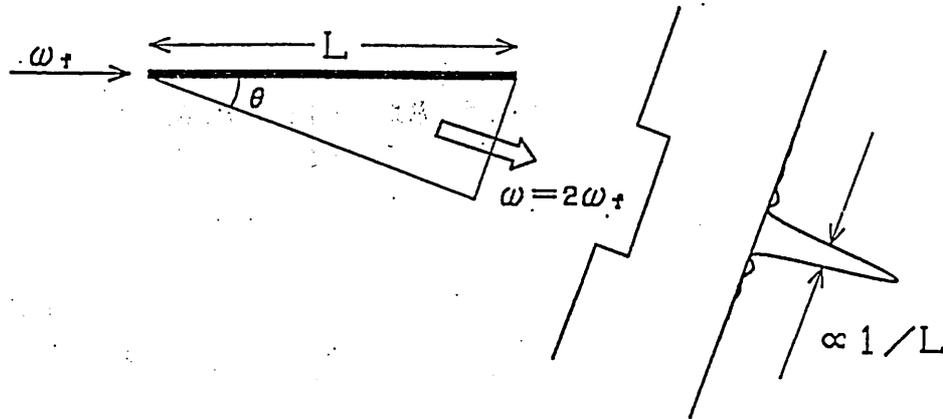


図 2: チェレンコフ型高調波発生の様子。

となる。高調波への交換効率 η は

$$\eta = \frac{P_s}{P_f} = \frac{\beta_p}{\rho_p} z P_f K_0^2(\beta_p) \pi \quad (27)$$

となる。式 (25) に示されるように、発生する高調波のパワーは距離 z に比例することになる。また、その大きさは基本波により励起された分極波とそれと位相整合する放射モードとの結合係数に依存する。

発生する高調波パワーの距離依存をもう少し詳しく述べる。図 2 に示したようにチェレンコフ型の第二高調波発生は光導波路を長さ L の分極アレイと見て、導波路側面からの放射を考えるのが最も容易に理解できる。導波路上の各点からの放射波は位相整合条件を満たす角度 θ の方向に放射され、最終的には矩形開口 (幅 $L \sin \theta$) から空間に放射される。従って、全パワーは開口の広さ $L \sin \theta$ に比例する、すなわち導波路長さに比例する。一方、遠視野分布 (空間周波数分布) の形は sinc 関数となり、周波数スペクトルの半値幅は $1/L$ に比例する。式 (23) を見ると物理的イメージが分かりやすい。式 (23) では $\beta = \beta_p$ であるモード、すなわち分極波と位相整合している放射モードのパワーは z^2 依存している。また、 z が大きくなるにつれ、 $\text{sinc}(\dots)$ が十分な値を持つ β の範囲が狭くなる。発生した高調波のパワースペクトルを見ると、図 3 に示したように、 z が大きくなるにつれて放射界の空間スペクトル幅が狭くなり、そのピークは z^2 、幅は $1/z$ に比例する。逆に、 xz 空間では、距離 z の増加に対し、ピークは一定で、その広がり z に比例する。従って、いずれの場合も、全パワーは z に比例することになる。

放射角度 θ は、位相整合する放射モードの位相定数 β_p と基板内での高調波の波数

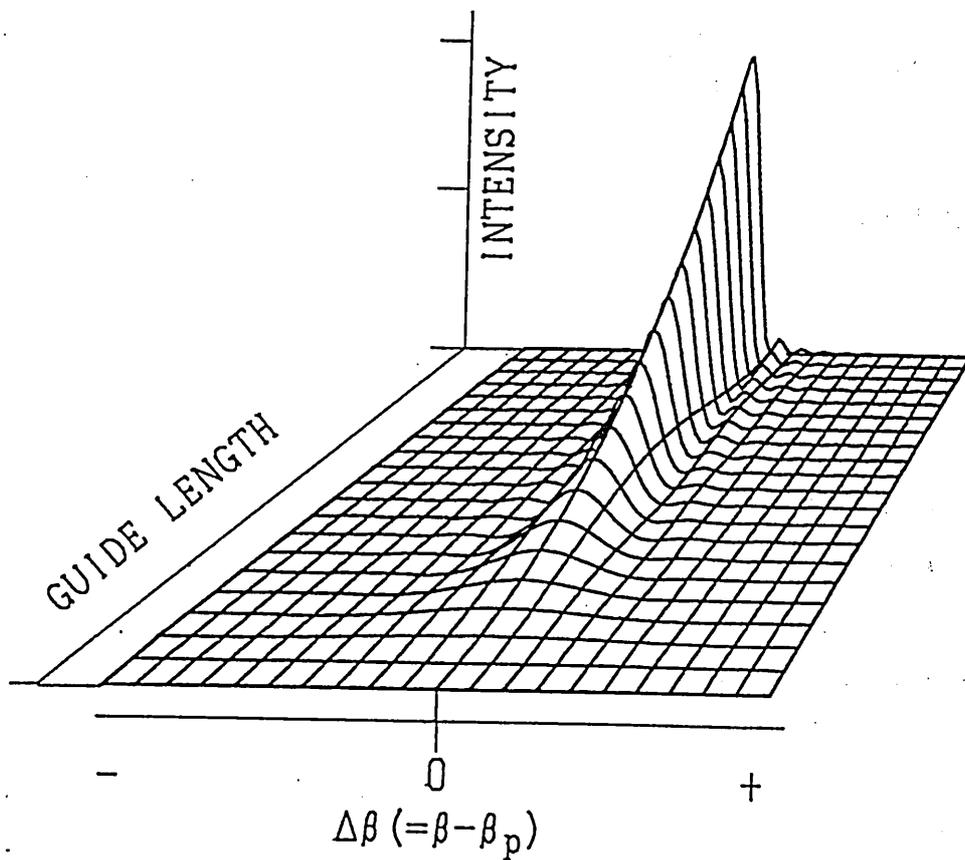


図 3: 高調波のパワースペクトル。相互作用長 (導波路長) が長くなるにつれその長さに反比例してスペクトル幅が狭くなり、位相整合しているスペクトルの強度は導波路長の二乗に比例して大きくなる。したがって、全パワーは長さに比例して増大する。

表 1: 計算に用いた導波路材料の光学定数

	導波層屈折率 n_1		基板屈折率 n_2		非線形光学定数 $d[\text{pm/V}]$
	1.064 μm	0.532 μm	1.064 μm	0.532 μm	
高分子導波路	1.501	1.523	1.480	1.513	6.4
LiNbO ₃	2.276	2.425	2.156	2.324	35.0

kn_2 (n_2 は高調波に対する基板の屈折率) との関係から

$$\cos \theta = \frac{\beta_p}{kn_2} = \frac{\beta_f}{k_f} \frac{1}{n_2} = \frac{N_f}{n_2} \quad (28)$$

と表される。ここで、 k_f および N_f は、それぞれ、基本波の波数および等価屈折率である。

4 ステップインデックス三層スラブ導波路の第二高調波発生

チェレンコフ型の第2高調波発生における高調波パワーおよび発生効率について、上部層は線形媒質で、導波層および基板に非線形性を有しているステップインデックス3層スラブ導波路で基本波が TM モードの場合について具体的に計算を行う。この場合、式 (15) は解析的に求めることができ、次のように表される。

$$K(\beta) = \frac{\epsilon_0 \beta_p^3}{4 \omega^2} \left\{ \frac{d_1}{\epsilon_1 \epsilon_{f1}^2} F + \frac{d_2}{\epsilon_2 \epsilon_{f2}^2} S \right\} P_f \quad (29)$$

ここで、 d_1 、 d_2 はそれぞれ導波層、基板の非線形定数で、 P_f は基本波のパワーである。係数 F 、 S の詳しい表現は付録に示した。

導波路材料としては、我々が素子作製を行っている高分子導波路 [12] およびよく用いられている LiNbO₃ を想定して行った。それぞれの光学定数を表 1 に示す。実際の材料は異方性であるが、以下では表に示した値を持つ等方性材料の光導波路に基本波として最低次の TM モードが入射した場合を考える。

まず、他の解析と比較するために、よく扱われている LiNbO₃ について計算した結果を図 4 に示す。この結果は異方性を無視しているため放射角度の正確さには問題があるが、高調波発生効率の導波路膜厚依存性は他の解析結果とよく一致している。

以下では、高分子導波路に対する解析結果について述べる。図 5 は高調波への結合効率および放射角度の導波路膜厚依存性を示したものである。パラメータとして非線形光学定数の分布をとっている。LiNbO₃ の場合と比較して、屈折率および屈折

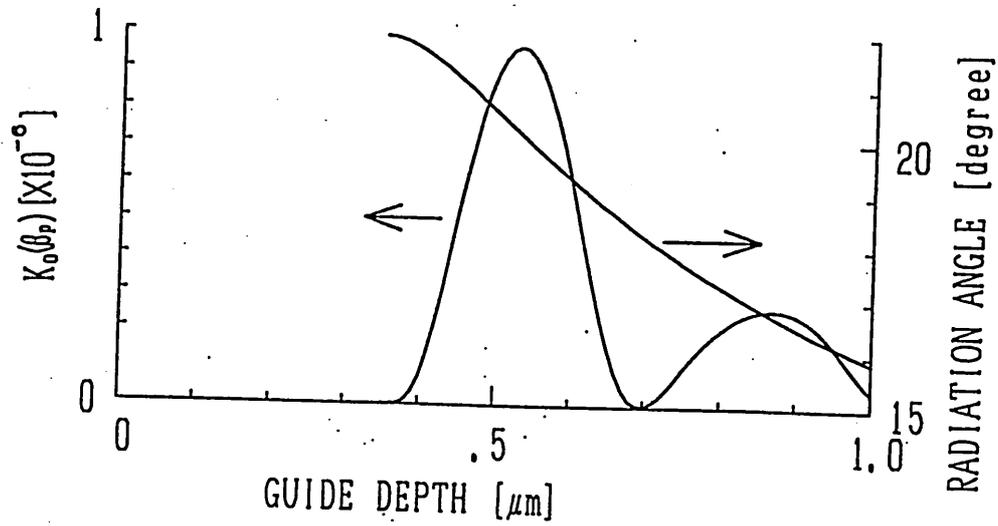


図 4: LiNbO₃の高調波への結合効率および放射角度の導波路膜厚依存性

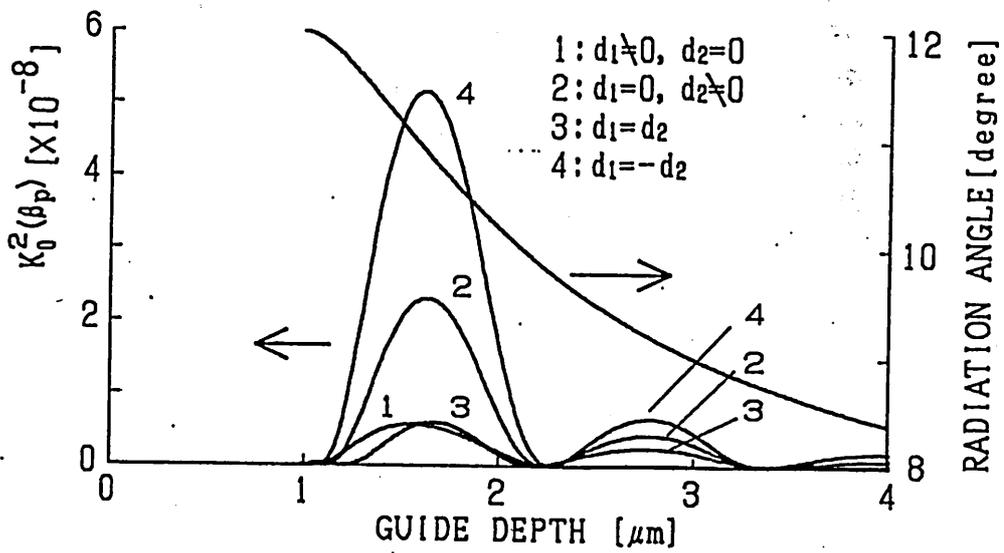


図 5: 高分子導波路における高調波への結合効率および放射角度の導波路膜厚依存性

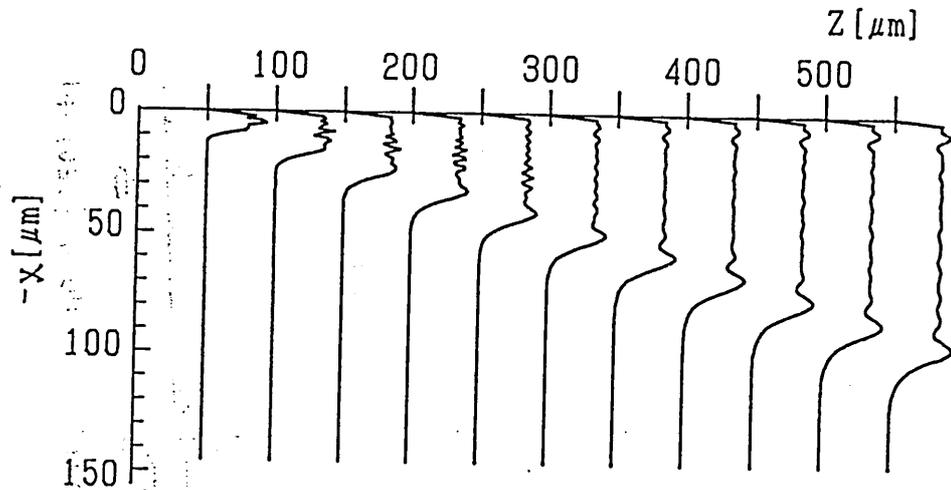


図 6: 高調波の導波路断面のパワー分布。基板にのみ非線形が存在する高分子導波路 (導波路厚 $1.6\mu\text{m}$)。

率差ともに小さいために、膜厚変化の広い範囲にわたり高調波が発生し、また膜厚依存性が緩和されているのが見られる。さらに、注目すべき点として、非線形光学定数の分布により、効率が大きく異なる点である。単純に考えると、基本波の強度が最も強くなる導波層内の非線形光学効果が高調波発生に最も寄与すると考えられるが、図 5 に示されるように導波層内のみ非線形性を有するものよりも基板のみに非線形性を有する導波路の方が大きな高調波を発生する。さらに、導波層と基板の非線形光学効果の符号を逆にするとより大きな高調波を発生できる¹。これらのことは導波モード間での結合による高調波発生と同様に、チェレンコフ型においても、基本波の導波モードにより励起された非線形分極波と高調波の放射モードとの分布関数の重なりを良好にすることの重要性を示している。

次に、基板内での高調波の発生の伝搬波形を計算したものを図 6 に示す。図は基板にのみ非線形が存在する高分子導波路において、導波路厚 $1.6\mu\text{m}$ の場合の例で、 $50\mu\text{m}$ ごとの進行方向垂直断面の高調波パワー分布を示している。チェレンコフ型高調波発生の伝搬波形の計算は、これまでも、波源から発生する高調波電界を平面波展開し、微小分割した伝搬方向に逐次摂動計算を行うビーム伝搬法を用いた例 [10] がある。本解析法では、式 (19) に示されるように、対象とする導波路の放射モードの形が分かれば任意の位置における界分布を即座に求めることができる。

¹この方法による高効率化に関しては文献 [13] に LiNbO_3 のドメイン反転による導波路を想定して解析している。

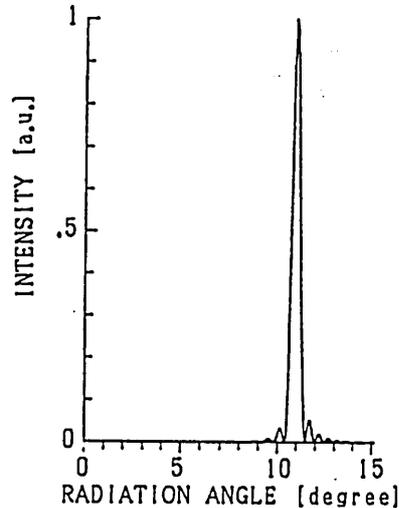


図 7: 高調波の遠視野像。図 7 の導波路で導波路長 $200\mu\text{m}$ の場合。

図 7 に遠視野パターンの計算例を示す。これは図 6 の計算に用いたものと同じ導波路において、導波路長 $200\mu\text{m}$ での界分布をフーリエ変換して得たものである。

5 ファイバ型第二高調波発生素子

チェレンコフ型の第二高調波発生素子として、光ファイバを用いたものが活発に研究されている。この背景には、発生する高調波の界分布が波面のそろった中心軸対称のドーナツ形となり、容易に微小スポットに集光できるという利点と、大きな結晶の得難い有機材料でもガラス毛细管中では容易に結晶が得られるという作製上の利点がある。

ここでは、クラッドが線形なガラス材料で、コアに非線形光学効果を有する有機結晶コアファイバにおける第二高調波発生を想定して、解析を行った結果を示す。ただし、通常の有機結晶は大きな光学異方性を有しているが、解析では等方性材料として扱う。また、計算を簡略化するためにコアとクラッドの屈折率差が十分小さい弱導波光ファイバとして扱う。

基本波として、主電界が y 方向を向く最低次の対称モードを考える。このとき、コア内で励起される非線形分極も対称分布となるため、発生する放射モードも対称モードのみを考慮すればよい。解析に必要な各モードの表現式は付録に示した。式

表 2: 光ファイバでの計算に用いた材料の光学定数

材料	MNA	SF6	SF11
屈折率 $n(1.064\mu\text{m})$	1.785	1.774	1.754
屈折率 $n(0.532\mu\text{m})$	2.0	1.816	1.795
非線形光学定数 $d[\text{pm/V}]$	230	0	0

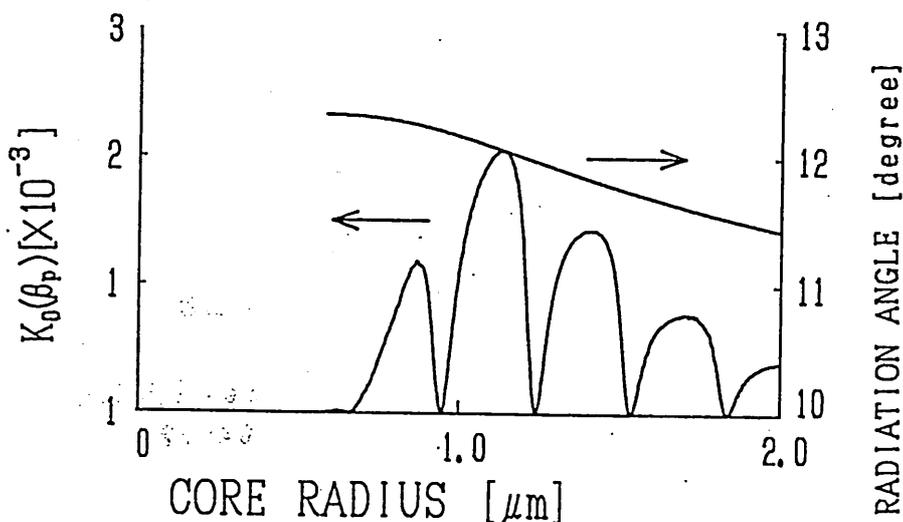


図 8: 高調波への結合効率。クラッド材料: SF6

(17) に示した結合係数 $K(\beta)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 K(\beta) &= \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^3}{4\beta^2} P_f \int_0^a \int_0^{2\pi} \epsilon_1 d \{E_y^j(r, \phi)\}^2 E_y^*(\beta, r, \phi) r dr d\phi \\
 &= A^2 B \frac{\pi^2 d}{2\lambda \eta_0} \int_0^a \{J_0(\kappa r)\}^2 J_0(\sigma r) r dr
 \end{aligned} \tag{30}$$

ここで、 a はコア半径、 A, B および κ, σ はそれぞれ導波モード、放射モードの規格化振幅および縦位相定数である。また、 J_0 は 0 次のベッセル関数である。

コアには有機材料として 2-methyl-4-nitroaniline(MNA)[14] を、クラッドには SF6 および SF11 の 2 種のガラスを想定して、結合係数の計算を行った。各材料の光学定数を表 2 に、計算結果を図 8 および図 9 に示す。

これまでのところ有機結晶コア光ファイバにおける高調波発生²の報告では、発生効率のコア径依存に関するものは見あたらない²が、図 8, 8 に見られるように、光ファ

²文献 [9] の有機結晶コアファイバの解析では顕著なコア径依存は示されていない

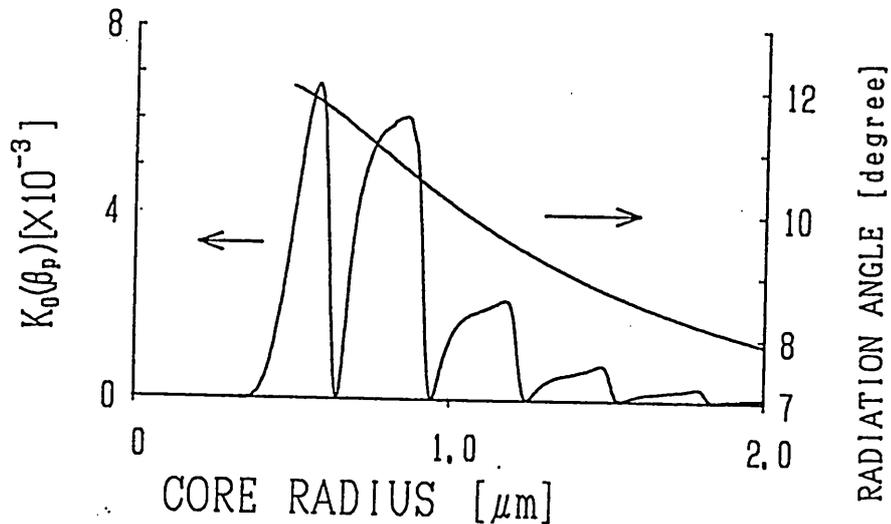


図 9: 高調波への結合効率。クラッド材料: SF11

イバにおける高調波発生も非対称スラブの場合の結果と同様、効率のよい第二高調波発生を行うには、精密なコア径の設定が重要なことが分かる。

6 むすび

チェレンコフ型の第二高調波発生についてモード解析を行った。ここでは、最も簡単な導波路として、ステップインデックススラブ導波路および光ファイバについて、全ての材料が等方性であるとして、単純化しているが、高効率化のための膜厚設定および膜厚あるいは屈折率等の導波路パラメータの効率への影響を見積るには十分であると考えられる。

高分子導波路の解析例に示したように、チェレンコフ型の SHG においては導波モード間での SHG と同様に非線形光学効果の分布を工夫することにより効率を向上できる。しかも、最も強度の大きな導波層に非線形光学効果を有するものよりも基板にのみ効果を有する構造の方が効率を高くできることは奇異な感じがするが、非線形分極波と放射モードの重なりを考えれば容易に理解できる。

参考文献

- [1] P. K. Tien, R. Ulrich, and R. J. Martin. Optical second harmonic generation in form of coherent Čerenkov radiation from a thin-film waveguide. *Appl.Phys.Lett.*, 17(10):447-450, November 1970.
- [2] T. Taniuchi and K. Yamamoto. Second harmonic generation by Čerenkov radiation in proton-exchanged Mg:LiNbO₃ waveguides. In *CLEO '86 Tech. Dig.*, 230-231, 1986. paper WR3.
- [3] N. A. Sanford and J. M. Connors. Optimization of the Čerenkov sum-frequency generation in proton-exchange Mg:LiNbO₃ channel waveguides. *J.Appl.Phys.*, 65:1429-1437, 1989.
- [4] J. L. Stevenson and R. B. Dyott. Optical-fibre waveguide with a single-crystal core. *Electron.Lett.*, 10:449-450, 1974.
- [5] D. S. Chemla and J. Zyss. *Nonlinear Optical Properties of Organic Molecules and Crystals*. Volume 1, Academic, 1986.
- [6] P. V. Vidakovic, M. Coquillay, and F. Salin. N-[4-nitrophenyl]-n-methylamino-aceto-nitrili: a new organic material for efficient second-harmonic generation in bulk and waveguide configurations. I. growth, crystal structure, and characterization of organic crystal-cored fibers. *J.Opt.Soc.Am.B*, 4(6):988-1012, June 1987.
- [7] Kazuya Hayata, Takeshi Sugawara, and Masanori Koshiha. Modal analysis of the second-harmonic electromagnetic field generated by the Čerenkov effect in optical waveguides. *Journal of Quantum Electron.*, 26(1):123-134, January 1990.
- [8] K. Hayata and M. Koshiha. Numerical simulation of guided-wave SHG light sources utilizing Čerenkov radiation scheme. *Electron.Lett.*, 25(6):376-377, March 1989.
- [9] Kiyofumi Chikuma and Shinsuke Umegaki. Characteristics of optical second-harmonic generation due to Čerenkov radiation type phase matching. *J.Opt.Soc.Am.B*, 7(5):768-775, May 1990.
- [10] 藤原 晃男, 井筒 雅之, 田辺 譲, 末田 正. チェレンコフ放射 SHG の解析. 電子情報通信学会光量子エレクトロニクス研究会資料, *OQE88-122*, :77-83, 1988.

- [11] Dietrich Marcuse. *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. Academic Press, 1974.
- [12] H. Haga and S. Yamamoto. Nonlinear optical waveguide using polymer film doped with 2-methyl-4-nitroaniline. In *NLO'90 Dig.*, pages 196-197, Kauai, Hawaii, July 1990. paper WP11.
- [13] K. Hayata, K. Yanagawa, and M. Koshiba. Enhancement of the guided-wave second-harmonic generation in the form of Čerenkov radiation. *Appl.Phys.Lett.*, 56(3):206-208, January 1990.
- [14] B. F. Levine, C. G. Bethea, C. D. Thurmond, R. T. Lynch, and J. L. Bernstein. An organic crystal with an exceptionally large optical second-harmonic coefficient: 2-methyl-4-nitroaniline. *J.Appl.Phys.*, 50(4):2523-2527, April 1979.

A 3層スラブ導波路のモード

導波構造は3層スラブ導波路で、 y 方向には一様で、 $-d \leq x \leq 0$ に導波層、 $x > 0$ および $x < -d$ にそれぞれ上部層および基板があるとする。導波層、基板、および上部層の屈折率をそれぞれ n_1 、 n_2 、および n_3 とする。

TM導波モード

$$H_y = A_f \begin{cases} e^{-\gamma_3 x} & x \geq 0 \\ \cos \kappa x - \frac{n_1^2 \gamma_3}{n_3^2 \kappa} \sin \kappa x & -d \leq x \leq 0 \\ \left\{ \cos \kappa d - \frac{n_1^2 \gamma_3}{n_3^2 \kappa} \sin \kappa d \right\} e^{\gamma_2(x+d)} & x \leq -d \end{cases}$$

ただし、

$$\gamma_3 = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_3^2}, \quad \kappa = \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}$$

ここで、 k は真空中での波数 $k = 2\pi/\lambda$ である。

導波するパワーを $P[W/m]$ とすると、係数 A_f は次式で表される。

$$A_f^2 = \left\{ \frac{4P\omega\epsilon_0 n_1^4 n_3^4 \kappa^2}{\beta(n_3^4 \kappa^2 + n_1^4 \gamma_3^2)} \right\} / \left\{ d + \frac{1}{\gamma_2} \frac{n_1^2 n_2^2 (\kappa^2 + \gamma_2^2)}{n_2^4 \kappa^2 + n_1^4 \gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_3} \frac{n_1^2 n_3^2 (\kappa^2 + \gamma_3^2)}{n_3^4 \kappa^2 + n_1^4 \gamma_3^2} \right\}$$

同様に放射モードについては以下の様に表される。

$$H_y = A_r \begin{cases} e^{-\Delta x} & x \geq 0 \\ \cos \sigma x - \frac{n_1^2 \Delta}{n_3^2 \sigma} \sin \sigma x & -d \leq x \leq 0 \\ \left(\cos \sigma d - \frac{n_1^2 \Delta}{n_3^2 \sigma} \sin \sigma d \right) \cos \rho_2(x+d) \\ + \left(\frac{n_2^2 \sigma}{n_1^2 \rho} \sin \sigma d - \frac{n_2^2 \Delta}{n_3^2 \rho} \cos \sigma d \right) \sin \rho(x+d) & x \leq -d \end{cases}$$

ただし、

$$\Delta = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_3^2}, \quad \sigma = \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}, \quad \rho = \sqrt{k^2 n_2^2 - \beta^2}$$

$$A_r^2 = \frac{4P\omega\epsilon_0 n_1^4 n_2^4 n_3^4 \rho^2 \sigma^2}{\pi\beta \{ n_1^4 \rho^2 (n_3^2 \sigma \cos \sigma d + n_1^2 \Delta \sin \sigma d)^2 + n_2^4 \sigma^2 (n_3^2 \sigma \sin \sigma d - n_1^2 \Delta \cos \sigma d)^2 \}}$$

B 3層スラブ導波路での結合係数

3層スラブ導波路で上部層には非線形性がなく、導波層および基板の非線形光学定数がそれぞれ d_1 、 d_2 であるとする。基本波から高調波への結合係数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{\varepsilon \varepsilon_f^2} H_y f^2 H^*(\beta) dx = \frac{d_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_{f1}^2} F + \frac{d_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_{f2}^2} S$$

ここで、

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^2}{(2\gamma_2)^2 + \rho^2} (2b\gamma_2 - c\rho) \\ 2F &= A_1 + A_2 \frac{\sin \sigma d}{\rho} - A_3 \frac{\cos \sigma d}{\rho} \\ &\quad + A_4 \frac{\sin(2\kappa + \sigma)d}{2\kappa + \sigma} + A_5 \frac{\sin(2\kappa - \sigma)d}{2\kappa - \sigma} \\ &\quad - A_6 \left\{ \frac{\cos(2\kappa + \sigma)d}{2\kappa + \sigma} - \frac{\cos(2\kappa - \sigma)d}{2\kappa - \sigma} \right\} \\ A_1 &= A_2 \frac{\Delta}{\sigma^2} + A_6 \left\{ \frac{1}{s\kappa + \sigma} - \frac{1}{s\kappa - \sigma} \right\} & A_2 &= (1 + (\frac{\varepsilon_1 \gamma_3}{\varepsilon_3 \kappa})^2) \\ & & & \frac{1 - (\frac{\varepsilon_1 \gamma_3}{\varepsilon_3 \kappa})^2}{\varepsilon_3 \kappa} - \frac{\Delta \varepsilon_1 \gamma_3}{\sigma \varepsilon_3 \kappa} \\ A_3 &= A_2 \frac{\Delta}{\sigma} & A_4 &= \frac{1 - (\frac{\varepsilon_1 \gamma_3}{\varepsilon_3 \kappa})^2}{2} \frac{\Delta}{\sigma} + \frac{\varepsilon_1 \gamma_3}{\varepsilon_3 \kappa} \\ A_5 &= \frac{1 - (\frac{\varepsilon_1 \gamma_3}{\varepsilon_3 \kappa})^2}{2} + \frac{\Delta \varepsilon_1 \gamma_3}{\sigma \varepsilon_3 \kappa} & A_6 &= \frac{1 - (\frac{\varepsilon_1 \gamma_3}{\varepsilon_3 \kappa})^2}{2} \frac{\Delta}{\sigma} + \frac{\varepsilon_1 \gamma_3}{\varepsilon_3 \kappa} \\ a &= \cos \kappa d - \frac{\varepsilon_1 \gamma_3}{\varepsilon_3 \kappa} \sin \kappa d & b &= \cos \sigma d + \frac{n_1^2 \Delta}{n_3^2 \sigma} \sin \sigma d \\ c &= \frac{n_2^2 \sigma}{n_1^2 \rho} \sin \sigma d + \frac{n_2^2 \Delta}{n_3^2 \rho} \cos \sigma d \end{aligned}$$

C 弱導波光ファイバのモード

計算に用いた

$$E_y = A \begin{cases} J_0(\kappa r) & 0 \leq r \leq a \\ \frac{J_0(\kappa a)}{K_0(\gamma a)} K_0(\gamma r) & r \geq a \end{cases}$$

ただし、

$$\kappa = \sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2}, \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k^2},$$

導波するパワーを P として、係数 A は次式で表される。

$$A = \left[\frac{2\eta_0 \gamma^2 P}{\pi a^2 n_1 (n_1^2 - n_2^2) k^2 \{J_1(\kappa a)\}^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

同様に放射モードについては以下の様に表される。

$$E_y = \begin{cases} BJ_0(\sigma r) & 0 \leq r \leq a \\ C\{H_0^{(1)}(\rho r) + DH_0^{(2)}(\rho r)\} & r \geq a \end{cases}$$

ただし

$$\sigma = \sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2}, \quad \gamma = \sqrt{n_2^2 k^2 - \beta^2},$$

$$B = \frac{2\sqrt{\eta_0 \rho P}}{a\sqrt{n\pi^3} |\rho J_0(\sigma a) H_1^{(1)}(\rho a) - \sigma J_1(\sigma a) H_0^{(1)}(\rho a)|}$$

$$C = \frac{j\pi a}{4} \{ \sigma J_1(\sigma a) H_0^{(2)}(\rho a) - \rho J_0(\sigma a) H_1^{(2)}(\rho a) \} B$$

$$D = -\frac{\sigma J_1(\sigma a) H_0^{(1)}(\rho a) - \rho J_0(\sigma a) H_1^{(1)}(\rho a)}{\sigma J_1(\sigma a) H_0^{(2)}(\rho a) - \rho J_0(\sigma a) H_1^{(2)}(\rho a)}$$

輻射科学研究会資料
(RS90-16)

非線形方向性結合器による光-光制御

村田 博司 井筒 雅之 末田 正

大阪大学 基礎工学部

平成2年12月7日

於 大阪大学附属図書館吹田分館

非線形方向性結合器による光－光制御

Light-by-light Controlling using Nonlinear Directional Couplers

村田 博司 井筒 雅之 末田 正
Hiroshi MURATA Masayuki IZUTSU Tadasi SUETA
大阪大学 基礎工学部
Faculty of Engineering Science, Osaka University

1. はじめに

近年、3次の非線形光学効果を用いた導波形光機能デバイスの研究が注目を集めている[1]。非線形光学効果を用いることにより、光波により光波を制御することが可能となり、かつ超高速応答も期待できる。また、光導波路では、その光閉じ込め効果のために高い光電力密度と大きな相互作用長を容易に得ることができる。したがって、非線形光学効果を利用する上で有利であり、高効率に光－光制御を行うことが可能となる。この非線形光導波路の特長を活かして、低いエネルギーで動作可能な導波形超高速光－光機能デバイスの実現を目指した研究が進められてきている。これまでに、いくつかの導波形光機能デバイスが提案されており[2][3]、動作実験の報告もなされてきている[4][5]。その一つに非線形方向性結合器[2]がある。

非線形方向性結合器[2]は、3次の非線形光学効果の一つである非線形屈折率効果（光カー効果）を有する媒質を用いて方向性結合器を構成したもので、次のような動作をすることが知られている。例えば結合部の長さが非線形性が弱いときの完全結合長に設定されていると、一方の導波路へ入力された光波は、その光強度が小さい時には導波路間の結合により他方の導波路から出力される。入力光強

度が大きくなると誘起屈折率変化のために光波の伝搬の様子が大きく変化し、出力導波路が切り替えられる。このように、入力光強度によって両ポートへの出力比を制御することができる。しかし、入力信号光自身がデバイスの動作を決める制御光を兼ねるため、このままでは応用範囲が限られてしまう。光スイッチ、光論理ゲート等を実現するためには、信号光と制御光とを分離して入力できることが望ましい。

この非線形方向性結合器に、同時に2つの光波を入力すれば、信号光と制御光を分離し、一方の光波の強度、位相等により他方の光波の出力を制御することが可能と考えられる。これにより、容易に光－光スイッチ、光論理ゲート等を実現することが期待できる。このような光－光制御についてはこれまでに若干の指摘、解析の報告があるものの[6][7]詳しい検討を行ったものはないようである。特に、信号光と制御光の波長が異なる場合や、モードの界分布、位相速度による効果について考察を行ったものは見当たらない。そこで我々は、非線形方向性結合器などの3次の非線形光学効果を有する2モード系による光－光制御において、2光波の波長が異なることの効果や光波モードの界分布、位相速度も考慮した新しい解析を行った[8]。

2. 非線形方向性結合器による光-光制御

非線形方向性結合器において光波による光波の制御を行う方式としては、図1に示すいくつかの構成が考えられる。(a)は2光波の伝搬方向が同じ場合、(b)は2光波の伝搬方向が反対の場合である。いずれの場合でも、一方の光波を制御光、他方の光波を信号光として制御光の強度、位相などにより信号光の出力ポートを切り替えることが可能である。

(a)の伝搬方向が同じ場合においては、2光波の波長が異なる場合は信号光と制御光を分離することが容易であり、波長が等しいときには信号光の増幅作用を得ることも可能と考えられる。(b)の場合では、両光波の波長は同一でも異なってもよく、信号光と制御光の分離が容易である。

以下では、誘起屈折率変化が導波路のコアとクラッドの屈折率差よりも十分小さい場合を考え、非線形光学効果によるモードの界分布の変化は無視できるものとする。そして、(a)の場合を中心に結合モード理論を用いて解析を進める。

非線形方向性結合器における結合モード解析では、方向性結合器を構成する各導波路の基底モード間の結合を考える場合と、方向性結合器の固有モード(偶モードおよび奇モード)間の結合を考える場合との2通りが考えられる。前者では導波路が隣接していることによる結合(線形結合)と非線形光学効果に基づく結合(非線形結合)の両方を考慮せねばならず、解析が煩雑になる。それゆえ、後者の方向性結合器の偶奇2つの固有モードを用いて解析を行う。

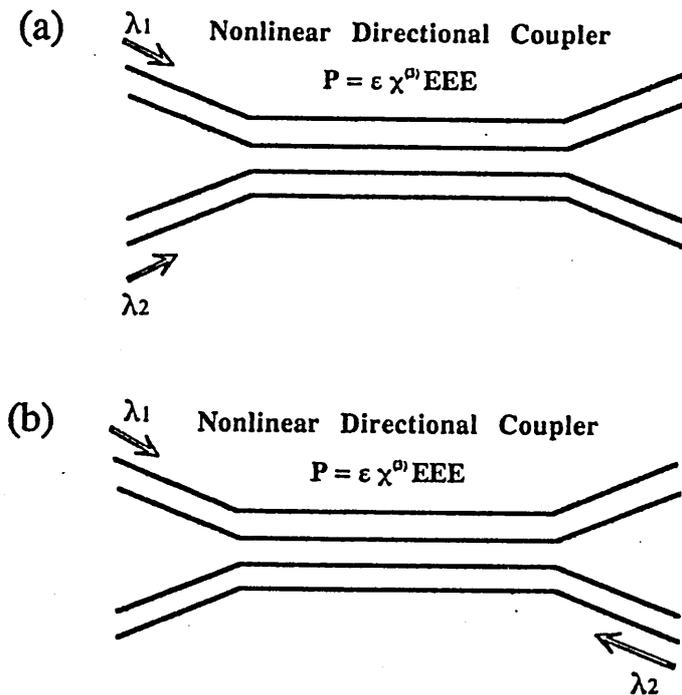


図1 非線形方向性結合器による光-光制御

3. 結合モード解析

3-1. 結合モード方程式

まず、図1(a)の伝搬方向が同じ2光波を非線形方向性結合器に入力し、光-光制御を行う場合について考える。反対方向に伝搬する2光波を用いる場合も同様に扱うことができる(付録参照)。方向性結合器は、2つの単一モード導波路からなるものとする。2モード系に波長の異なる2光波を入力するた

め、各波長につき2モード、合計4つのモードを考える必要がある。

図2に示すように3次の非線形光学効果を有する長さLの媒質中を、4つの光波が伝搬するものとする。各光波の伝搬方向を+z方向にとる。光波a, bは角周波数が ω_1 (波長 λ_1)、光波c, dは ω_2 (λ_2)であり、位相定数がそれぞれ $\beta_a, \beta_b, \beta_c, \beta_d$ 、複素振幅がA, B, C, Dであるとする。このとき、各光波の電界は次のように表わされる。

$$E_a = \frac{1}{2} A f_a(x,y) \exp [j (\omega_1 t - \beta_a z)] + c. c. \quad (1)$$

$$E_b = \frac{1}{2} B f_b(x,y) \exp [j (\omega_1 t - \beta_b z)] + c. c. \quad (2)$$

$$E_c = \frac{1}{2} C f_c(x,y) \exp [j (\omega_2 t - \beta_c z)] + c. c. \quad (3)$$

$$E_d = \frac{1}{2} D f_d(x,y) \exp [j (\omega_2 t - \beta_d z)] + c. c. \quad (4)$$

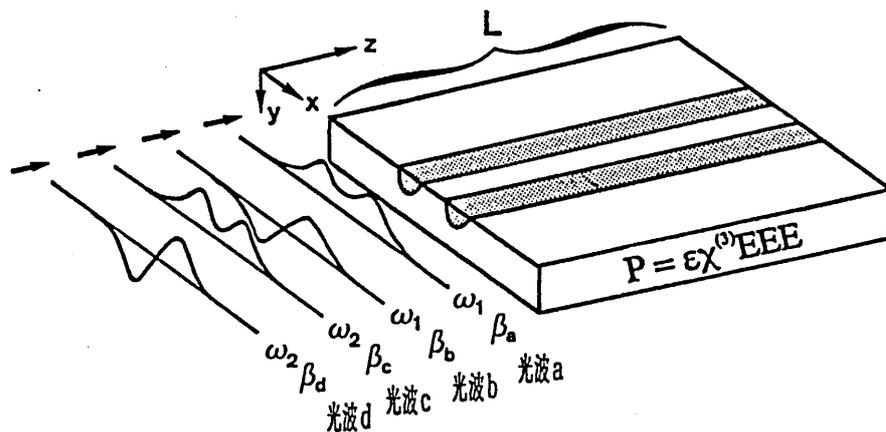


図2 同一方向に伝搬する2組の光波が入射する場合の結合モード解析

但し, $f_a(x,y)$, $f_b(x,y)$, $f_c(x,y)$,
 $f_d(x,y)$ は, モード分布関数, c. c. は複素
 共役項である.

媒質中の3次の非線形分極 $P^{(3)}$ は各光波
 電界の和 E を用いて次式で表わされる.

$$P^{(3)} = \epsilon_0 \chi^{(3)} : EEE \quad (5)$$

但し, ϵ_0 は真空の誘電率, $\chi^{(3)}$ は3次の非
 線形感受率である.

この3次の非線形光学効果により4つの光
 波間に相互作用が生じる. 光波間の相互作用
 により, 各光波の複素振幅が z についての緩
 やかな関数になるものとすれば, 非線形波動
 方程式より次の結合モード方程式が導かれる.

$$\begin{aligned} j \frac{dA}{dz} = & \{K_1 |A|^2 + 2K_3 |B|^2\} A \\ & + 2 \{K_7 |C|^2 + K_8 |D|^2\} A \\ & + K_9 A^* B B \exp(2j\Delta\beta_{ab}z) \\ & + 2K_{11} B C D^* \exp\{j(\Delta\beta_{ab} - \Delta\beta_{cd})z\} \\ & + 2K_{11} B C^* D \exp\{j(\Delta\beta_{ab} + \Delta\beta_{cd})z\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} j \frac{dB}{dz} = & \{2K_3 |A|^2 + K_2 |B|^2\} B \\ & + 2 \{K_9 |C|^2 + K_{10} |D|^2\} B \\ & + K_9 A B B^* \exp(-2j\Delta\beta_{ab}z) \\ & + 2K_{11} A C D^* \exp\{-j(\Delta\beta_{ab} + \Delta\beta_{cd})z\} \\ & + 2K_{11} A C^* D \exp\{-j(\Delta\beta_{ab} - \Delta\beta_{cd})z\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} j \frac{dC}{dz} = & 2 \{K_7 |A|^2 + K_9 |B|^2\} C \\ & + \{K_4 |C|^2 + 2K_6 |D|^2\} C \\ & + K_6 C^* D D \exp(2j\Delta\beta_{cd}z) \\ & + 2K_{11} A B^* D \exp\{j(\Delta\beta_{cd} - \Delta\beta_{ab})z\} \\ & + 2K_{11} A^* B D \exp\{j(\Delta\beta_{cd} + \Delta\beta_{ab})z\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
j \frac{dD}{dz} = & 2 \{K_8 |A|^2 + K_{10} |B|^2\} D \\
& + \{2K_6 |C|^2 + K_5 |D|^2\} D \\
& + K_6 C C D^* \exp(-2j \Delta \beta_{cd} z) \\
& + 2K_{11} A B^* C \exp\{-j(\Delta \beta_{cd} + \Delta \beta_{ab}) z\} \\
& + 2K_{11} A^* B C \exp\{-j(\Delta \beta_{cd} - \Delta \beta_{ab}) z\}
\end{aligned} \tag{9}$$

但し,

$$\Delta \beta_{ab} = \beta_a - \beta_b \tag{10}$$

$$\Delta \beta_{cd} = \beta_c - \beta_d \tag{11}$$

$$K_1 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_1^2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_1, \omega_1) |f_a(x, y)|^4 dx dy \tag{12}$$

$$K_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_1^2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_1, \omega_1) |f_b(x, y)|^4 dx dy \tag{13}$$

$$K_3 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_1^2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_1, \omega_1) |f_a(x, y) f_b(x, y)|^2 dx dy \tag{14}$$

$$K_4 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_2^2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_2, \omega_2) |f_c(x, y)|^4 dx dy \tag{15}$$

$$K_5 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_2^2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_2, \omega_2) |f_d(x, y)|^4 dx dy \tag{16}$$

$$K_6 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_2^2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_2, \omega_2) |f_c(x, y) f_d(x, y)|^2 dx dy \tag{17}$$

$$K_7 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_1 \omega_2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_1, \omega_2) |f_a(x, y) f_c(x, y)|^2 dx dy \tag{18}$$

$$K_8 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_1 \omega_2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_1, \omega_2) |f_a(x, y) f_d(x, y)|^2 dx dy \tag{19}$$

$$K_9 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_1 \omega_2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_1, \omega_2) |f_b(x, y) f_c(x, y)|^2 dx dy \tag{20}$$

$$K_{10} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_1 \omega_2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_1, \omega_2) |f_b(x, y) f_d(x, y)|^2 dx dy \tag{21}$$

$$K_{11} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega_1 \omega_2 \iint \chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega_1, \omega_2) f_a(x, y) f_b(x, y) f_c(x, y) f_d(x, y) dx dy \tag{22}$$

なお、簡単のために導波路はx方向には対称で、また、モードa, bの一方は偶モード、他方は奇モードであるとしている。ここで、 $K_1 \sim K_{11}$ は各モードの界分布と非線形光学定数により決まるパラメータで、 $\Delta \beta_{ab}$ はモードa, b間の、 $\Delta \beta_{cd}$ はモードc, d間の位相定数の差である。 $K, \Delta \beta_{ab}, \Delta \beta_{cd}$ が光波モードの界分布、位相速度に依存するため、

光波の結合も、界分布、位相速度によって変化することになる。

モードa, bとc, dの波長が異なるとしているので、 $\Delta \beta_{ab}, \Delta \beta_{cd}$ は必ずしも一致しない。結合モード方程式(6)~(9)の右辺第4項および第5項はzについて

$\exp\{j(\Delta \beta_{ab} \pm \Delta \beta_{cd})z\}$ の変化を示す。 $|\Delta \beta_{ab} \pm \Delta \beta_{cd}| \gg 1/L$ (L は相

相互作用長)であれば、これらの項はzに関して激しく振動し、光波の結合への寄与は小さくなる。一方、非線形性が無視できるときの完全結合長 l_c は、 $l_c = \pi / \Delta \beta$ で与えられるから、例えば両波長での完全結合長が等しいときには、これらの項からの寄与は大きくなるが予想され、波長の異なる光波間にも十分な結合の生じることが期待できる。

3-2. 結合における不変量

各光波の電界振幅は複素数であるから、3-1. で求めた結合モード方程式(6)~(9)式は、光波電界についての8つの変数を含んでいる。結合モード方程式の解析を進めると、これらの変数の間に初期条件で決まる一定の関係があることが導かれるため、各光波の変化の様子は3つの独立な変数により決まることがわかる。

まず、各光波の複素振幅を大きさとし位相成分とに分ける。各光波の複素振幅を次のように表わす。

$$A = |A| \exp(j\theta_a) \quad (23)$$

$$B = |B| \exp(j\theta_b) \quad (24)$$

$$C = |C| \exp(j\theta_c) \quad (25)$$

$$D = |D| \exp(j\theta_d) \quad (26)$$

さらに、各光波の電界振幅の大きさを結合パラメータと相互作用長を用いて規格化する。

$$a = |A| \sqrt{K_{11}} L \quad (27)$$

$$b = |B| \sqrt{K_{11}} L \quad (28)$$

$$c = |C| \sqrt{K_{11}} L \quad (29)$$

$$d = |D| \sqrt{K_{11}} L \quad (30)$$

a, b, c, dはそれぞれ光波a, b, c,

dの電界振幅の大きさを規格化したもので無次元である。

(23)~(30)式を結合モード方程式(6)~(9)に代入し、実部、虚部を等値して整理すると、光波の位相については、光波a, b間の位相差とc, d間の位相差が光波の結合を決めることがわかる。

$$\theta_{ab} = \theta_a - \theta_b - \Delta \beta_{ab} z \quad (31)$$

$$\theta_{cd} = \theta_c - \theta_d + \Delta \beta_{cd} z \quad (32)$$

θ_{ab} が+z方向に伝搬する波長 λ_1 の光波a, b間の位相差を、 θ_{cd} が-z方向に伝搬する波長 λ_2 の光波c, d間の位相差を表わす。

また、電界振幅の大きさについては、次の関係が得られる。

$$\frac{d}{dz} (|A|^2 + |B|^2) = 0 \quad (33)$$

$$\frac{d}{dz} (|C|^2 + |D|^2) = 0 \quad (34)$$

つまり、結合において、波長の等しい2組の光波a, bおよびc, dの光強度の和はそれぞれ一定に保たれる不変量である。(33)(34)式よりa, b, c, dの間には次の関係がある。

$$a^2 + b^2 = I_1 \quad (\text{定数}) \quad (35)$$

$$c^2 + d^2 = I_2 \quad (\text{定数}) \quad (36)$$

I_1, I_2 は波長 λ_1 , 波長 λ_2 の規格化光強度の和で、結合における不変量である。

(27)~(36)式を用いて、結合モード方程式は次の4式に変形される。

$$\frac{da}{d\zeta} = -\Omega_3 a b^2 \sin(2\theta_{ab}) - 4 b c d \sin(\theta_{ab}) \cos(\theta_{cd}) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{ab}}{d\zeta} = & (2\Omega_3 - \Omega_1) a^2 + (\Omega_2 - 2\Omega_3) b^2 \\ & + 2(\Omega_9 - \Omega_7) c^2 + 2(\Omega_{10} - \Omega_8) d^2 \\ & + \Omega_3 (a^2 - b^2) \cos(2\theta_{ab}) \\ & + 4(a/b - b/a) c d \cos(\theta_{ab}) \cos(\theta_{cd}) \\ & + \Delta\beta_{ab} L \end{aligned} \quad (38)$$

$$\frac{dc}{d\zeta} = -\Omega_6 c d^2 \sin(2\theta_{cd}) - 4 b c d \cos(\theta_{ab}) \sin(\theta_{cd}) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{cd}}{d\zeta} = & (2\Omega_6 - \Omega_4) c^2 + (\Omega_5 - 2\Omega_6) d^2 \\ & + 2(\Omega_8 - \Omega_7) a^2 + 2(\Omega_{10} - \Omega_9) b^2 \\ & + \Omega_6 (c^2 - d^2) \cos(2\theta_{cd}) \\ & + 4(c/d - d/c) a b \cos(\theta_{ab}) \cos(\theta_{cd}) \\ & - \Delta\beta_{cd} L \end{aligned} \quad (40)$$

但し、

$$\Omega_i = K_i / K_{11} \quad (i=1\sim 10) \quad (41)$$

$$\zeta = z/L \quad (42)$$

であり、Lは相互作用長である。(37)~(40)式において、 $\Delta\beta_{ab}L$ 、 $\Delta\beta_{cd}L$ 、 $\Omega_1\sim\Omega_{10}$ はモードの界分布、位相速度により定ま

るパラメータで、光波の相互作用がモードの界分布、位相速度に依存することを示している。

さて、これまでの4光波混合の結合モード解析においては、結合における不変量は2つのみであるとした報告が多い[9][10]。しかし、さらに解析を進めると以下に示すもう一つの不変量が存在することがわかる。

$$\begin{aligned} M = & \Omega_3 a^2 b^2 \cos(2\theta_{ab}) + c^2 d^2 \cos(2\theta_{cd}) \\ & + 8 a b c d \cos(\theta_{ab}) \cos(\theta_{cd}) \\ & + 2 \Omega_3 a^2 b^2 + (1/2) \Omega_1 a^4 + (1/2) \Omega_2 b^4 + \Delta\beta_{ab} L a^4 \\ & + 2 \Omega_6 c^2 d^2 + (1/2) \Omega_4 c^4 + (1/2) \Omega_5 d^4 + \Delta\beta_{cd} L c^4 \\ & + 2 \Omega_7 a^2 c^2 + 2 \Omega_8 a^2 d^2 + 2 \Omega_9 b^2 c^2 + 2 \Omega_{10} b^2 d^2 \end{aligned} \quad (43)$$

とおけば、(35)~(40)式より $dM/d\xi = 0$ となる。

例えば、 a, c, θ_{ab} の3つについて、それぞれの z に対する変化が知れば、各光波の伝搬に伴う変化の様子がわかる。また、同様の解析を行うことにより、例えば2種のモードを用いたコリニア縮退4光波混合における結合モード方程式[9][10]においてもこのような不変量が得られる。この第3の不変量の物理的意味等については、目下詳しい解析を継続中である。

4. 光-光スイッチング特性

先に求めた微分方程式(37)~(40)を解くことにより、非線形方向性結合器において、波長が異なる2光波を用いて光-光制御を行う場合の特性を求めることができる。例えば、

図1(a)の同一方向伝搬の2光波を用いた場合を考えると、波長 λ_1 の光波を信号光、波長 λ_2 の光波を制御光として、制御光の入力強度によって信号光の出力をコントロールできるものと予想される。

ここでは、簡単のために信号光(波長 λ_1)によって励振されるモード a, b による非線形性は無視できるとして、非線形結合パラメータ $K_1 \sim K_{11}$ を、

$$K_1 = K_2 = K_3 = 0 \quad (44)$$

$$K_7, K_8, K_9, K_{10}, K_{11} \ll K_4, K_5, K_6 \quad (45)$$

であるとし、制御光(波長 λ_2)によるモード c, d による非線形結合が支配的である場合を考える。このとき微分方程式(37)~(40)は、以下のようなになる。

$$\frac{da}{d\xi} = -4bcd \sin(\theta_{ab}) \cos(\theta_{cd}) \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{ab}}{d\xi} = & 2(\Omega_9 - \Omega_7)c^2 + 2(\Omega_{10} - \Omega_8)d^2 \\ & + 4(1/b - 1/a)cd \cos(\theta_{ab}) \cos(\theta_{cd}) \\ & + \Delta\beta_{ab}L \end{aligned} \quad (47)$$

$$\frac{dc}{d\xi} = -\Omega_6 cd^2 \sin(2\theta_{cd}) \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{cd}}{d\xi} = & \Omega_6 [(2 - \Gamma_1)c^2 + (\Gamma_2 - 2)d^2 \\ & + (c^2 - d^2) \cos(2\theta_{cd})] - \Delta\beta_{cd}L \end{aligned} \quad (49)$$

但し、

$$\Gamma_1 = \Omega_4 / \Omega_6 = K_4 / K_6 \quad (50)$$

$$\Gamma_2 = \Omega_5 / \Omega_6 = K_5 / K_6 \quad (51)$$

これらの式を解析的に解くことは難しいため、数値解析を行った。信号光を一方の導波路に、制御光を他方の導波路に入力するとし、 $z = 0$ における境界条件を、

$$a = b = I_1 / 2$$

$$\theta_{ab} = 0$$

$$c = d = I_2 / 2$$

$$\theta_{cd} = \pi$$

とした。

信号光の各導波路における規格化光強度 I_{11} 、 I_{12} は、光波 a 、 b の規格化電界振幅を用いて、次のように表わされる。

$$I_{11} = [a^2 + b^2 + 2ab \cos(\theta_{ab})] / 2 \quad (52)$$

$$I_{12} = [a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta_{ab})] / 2 \quad (53)$$

いくつかの制御光入力強度に対する I_{11} の伝搬に伴う変化の様子を図3に示す。制御光の入力強度を増していくと、信号光の伝搬の様子が大きく変化するのわかる。このような計算を繰り返して、制御光入力に対する信号光出力の特性を求めた。計算例を図4に示す。横軸は、(36)式で表わされる規格化制御光強度 I_2 であり、制御光による非線形相互作用の大きさを示す。計算においては、非線形性が弱いときの両波長における完全結合長は等しく、かつ結合部の長さも完全結合長であるとして、各パラメータを

$$\Delta\beta_{ab}L = \Delta\beta_{cd}L = \pi$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.1$$

$$\Omega_6 = \Omega_{10} = \Omega_{11} = \Omega_{12} = \Omega_{13} = 1.1$$

とした。制御光強度を増していくと信号光の出力が大きく変化する。信号光の出力ポートが切り替わる。これより光-光スイッチング動作が可能になることがわかる。

これらの特性はモードの界分布によって決まるパラメータ Γ に大きく依存する。 $\Gamma_1 = 1.5$ 、 $\Gamma_2 = 1.2$ とおいたときの特性を図5

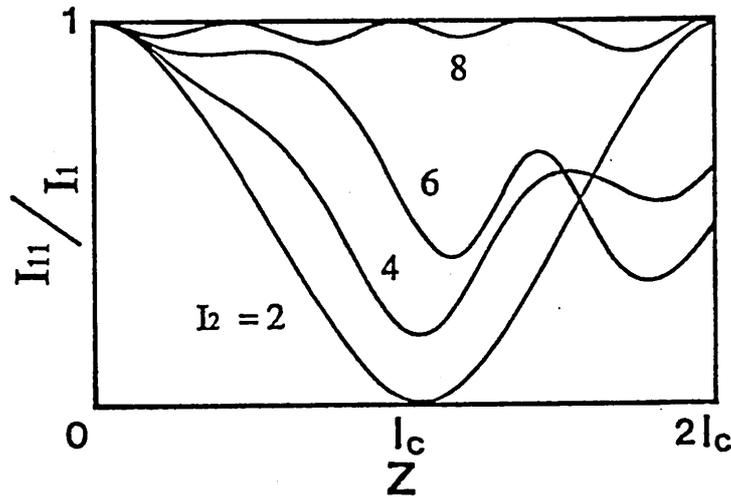


図3 信号光の伝搬の様子

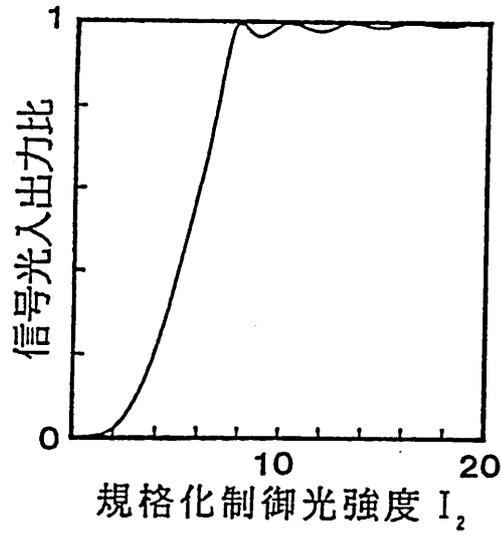


図4 光-光スイッチング特性1
 ($\Delta\beta_{ab}L = \Delta\beta_{cd}L = \pi$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.1$)

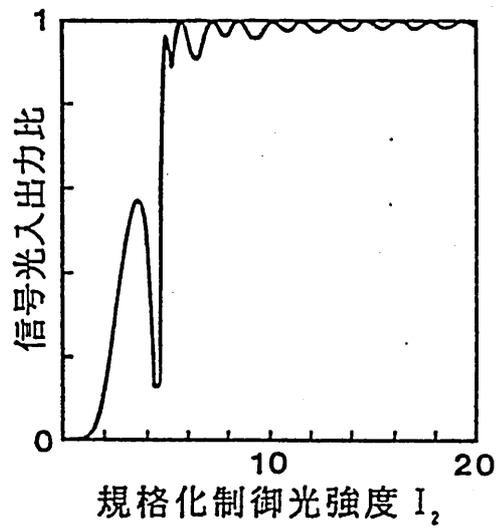


図5 光-光スイッチング特性2
 ($\Delta\beta_{ab}L = \Delta\beta_{cd}L = \pi$, $\Gamma_1 = 1.5$, $\Gamma_2 = 1.2$)

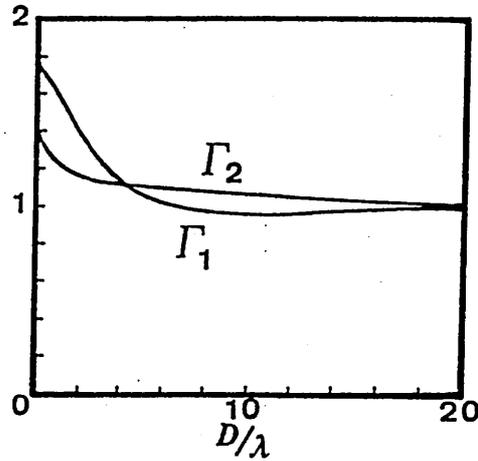


図6 非線形結合パラメータの導波路間隔に対する変化
(導波路幅 $W = 5\lambda$, $\Delta n = 0.005$)

に示す。 Γ は各モードにおける非線形相互作用の強さの比によって決まる。3次の非線形光学効果は光波電界の3乗に比例する非線形分極によって生じるため、光波間の相互作用は光波電界のピーク値が大きいほど強くなる。したがって、2つのモードにおける非線形相互作用は同じ伝送電力を持つモードでも、その電界のピーク値が大きいモードほど強く現われる。方向性結合器において、導波路の間隔に対するパラメータ Γ の変化の例を図6に示す。導波路間隔が大きくなると、偶モード、奇モードの電界のピーク値が等しくなり Γ_1 、 Γ_2 共に1に近づく。導波路間隔が小さくなると Γ の値はかなり変化する。図のように、ある導波路間隔において2つのパラメータの値が等しくなる。このことはデバイス設計上興味深い。図5では Γ_1 と Γ_2 が異なり、モードcにおける非線形相互作用がモードdよりも大きいため、方向性結合器の対称性が崩れ、やや複雑な特性を示しているものと推察され

る。

非線形材料として半導体ドープガラス（非線形屈折率 $n_2 = 10^{-15} [\text{m}^2/\text{W}]$ ）を用いたとして[11]、導波路幅 $3\mu\text{m}$ 、導波路間隔 $3\mu\text{m}$ 、 $\Delta n = 0.001$ 、相互作用長 1cm である方向性結合器を考え、信号光波長を 633nm （非線形性が無視できるときの完全結合長 7mm ）、制御光波長を 514nm （ 1cm ）とした場合の試算では、スイッチングに必要な光波電力は約 200mW である。また、非線形材料としてAlGaAs系のMQW（ $n_2 = 2 \times 10^{-8} [\text{m}^2/\text{W}]$ ）を用いたとすれば、スイッチング電力は数 μW と見積られる。

なお、2光波の伝搬方向が反対の場合についても、一方を信号光、他方を制御光として光-光スイッチングを行うことができる。特に、信号光の強度は制御光に比べて十分弱く、信号光による非線形性は無視できるとすれば、図3、図4と同じ特性を得ることができる。

5. むすび

非線形方向性結合器などの3次の非線形光学効果を有する2モード系を用いて、光波による光波の制御を提案し、その特性の解析を行った。波長の異なる2組の光波で光-光制御を行うことを提案し、2光波の伝搬方向が同じ場合、および反対の場合についてそれぞれ結合モード方程式を導出し、その特性を明らかにした。波長の異なる2光波を用いても、例えば非線形性が無視できるときの各波長での完全結合長を同じにすることにより効率よく光-光制御を行える可能性がある。また、非線形光学効果による光波間の相互作用の大きさは、光波電界のピーク値により決まるため、光波間の結合は、モードの界分布に大きく依存する。さらに、得られた結合モード方程式の数値解析を行い、予想される光-光スイッチング特性を示した。

謝辞

結合モード方程式の解析を手伝って頂いた本学大学院生の下村健吉君に感謝致します。

参考文献

- [1] G.I.Stegeman, E.M.Wright, N.Finlayson, R.Zanoni and C.T.Seaton, "Third Order Nonlinear Integrated Optics", *J.Lightwave Technol.*, vol.6, 6, pp.953-970 (1988)
- [2] S.H.Jensen, "The Nonlinear Coherent Coupler", *IEEE J.Quantum Electron.*, QE-18, pp.1580-1583 (1982)
- [3] H.Kawaguchi, "Proposal for a new all-optical waveguide functional device" *Opt.Lett.*, 10, 8, pp.412-414 (1985)
- [4] P.L.Kamwa, J.E.Sitch, N.J.Mason, J.S.Roberts and P.N.Robson, "All Optical Multiple-Quantum-Well Waveguide Switch", *Electro.Lett.*, 21, 1, pp.26-28 (1985)
- [5] N.Finlayson, W.C.Banyai, E.M.Wright, C.T.Seaton and G.I.Stegeman, "Picosecond switching induced by saturable absorption in a nonlinear directional coupler", *Appl.Phys.Lett.* 53, 26, pp.1144-1146 (1988)
- [6] S.Wabnitz, E.M.Wright, C.T.Seaton and G.I.Stegeman, "Instabilities and all-optical phase controlled switching in a nonlinear directional coupler", *Appl.Phys.Lett.*, 49, 6, pp.838-840 (1986)
- [7] S.Trillo, S.Wabnitz, G.I.Stegeman and E.M.Wright, "Parametric amplification and modulation instabilities in dispersive nonlinear directional couplers with relaxing nonlinearity" *J.Opt.Soc.Am.B*, 6, 5, pp.889-900 (1989)
- [8] 村田博司, 井筒雅之, 末田正, "非線形方向性結合器における光-光制御", 電子情報通信学会1990年秋季全国大会, C-166
- [9] 村田博司, 井筒雅之, 末田正, "光導波路におけるコリニア4光波混合", 信学技報, Vol.89, No.48, OQE89-11, PP.13-18 (1989)
- [10] R.Lytel, "Optical multistability in collinear degenerate four-wave mixing", *J.Opt.Soc.Am.B*, Vol.1, 1, pp.91-94 (1984)
- [11] T.J.Cullen, C.N.Ironside, C.T.Seaton and G.I.Stegeman, "Semiconductor-doped glass ion-exchanged waveguides", *Appl.Phys.Lett.*, 49, 24, pp.1403-1405 (1986)

☆ 付録 : 伝搬方向が反対の2光波を用いた場合の結合モード方程式

図1(b)に示すような、伝搬方向が反対の2光波を非線形方向性結合器に入力し、光-光制御を行う場合についての結合モード方程式を示す。

図2と同様に3次の非線形光学効果を有する長さLの媒質を考え、4つの光波間に相互作用が生じているものとする。但し、光波c、

dの伝搬方向を逆にとり、光波a、bは角周波数が ω_1 (波長 λ_1)で、+z方向に伝搬し、光波c、dは角周波数が ω_2 (λ_2)で、-z方向に伝搬する。位相定数、複素振幅は、それぞれ $\beta_a, \beta_b, \beta_c, \beta_d$ 、およびA、B、C、Dであるとすれば、各光波の電界は次の(a-1)~(a-4)式で表わされる。

$$E_a = \frac{1}{2} A f_a(x,y) \exp [j (\omega_1 t - \beta_a z)] + c. c. \quad (a-1)$$

$$E_b = \frac{1}{2} B f_b(x,y) \exp [j (\omega_1 t - \beta_b z)] + c. c. \quad (a-2)$$

$$E_c = \frac{1}{2} C f_c(x,y) \exp [j (\omega_2 t + \beta_c z)] + c. c. \quad (a-3)$$

$$E_d = \frac{1}{2} D f_d(x,y) \exp [j (\omega_2 t + \beta_d z)] + c. c. \quad (a-4)$$

3次の非線形光学効果によりこれらの4つの光波間に結合が生じるとすれば、3-1.

と同様にして、次の結合モード方程式が得られる。

$$\begin{aligned} j \frac{dA}{dz} = & \{K_1 |A|^2 + 2K_3 |B|^2\} A \\ & + 2 \{K_7 |C|^2 + K_8 |D|^2\} A \\ & + K_3 A^* B B \exp (2j \Delta \beta_{ab} z) \\ & + 2K_{11} B C D^* \exp \{j(\Delta \beta_{ab} + \Delta \beta_{cd}) z\} \\ & + 2K_{11} B C^* D \exp \{j(\Delta \beta_{ab} - \Delta \beta_{cd}) z\} \end{aligned} \quad (a-5)$$

$$\begin{aligned} j \frac{dB}{dz} = & \{2K_3 |A|^2 + K_2 |B|^2\} B \\ & + 2 \{K_9 |C|^2 + K_{10} |D|^2\} B \\ & + K_3 A B B^* \exp (-2j \Delta \beta_{ab} z) \\ & + 2K_{11} A C D^* \exp \{-j(\Delta \beta_{ab} - \Delta \beta_{cd}) z\} \\ & + 2K_{11} A C^* D \exp \{-j(\Delta \beta_{ab} + \Delta \beta_{cd}) z\} \end{aligned} \quad (a-6)$$

$$\begin{aligned}
-j \frac{dC}{dz} = & 2 \{K_7 |A|^2 + K_9 |B|^2\} C \\
& + \{K_4 |C|^2 + 2K_6 |D|^2\} C \\
& + K_6 C^* D D \exp(-2j\Delta\beta_{cd}z) \\
& + 2K_{11} A B^* D \exp\{-j(\Delta\beta_{cd} + \Delta\beta_{ab})z\} \\
& + 2K_{11} A^* B D \exp\{-j(\Delta\beta_{cd} - \Delta\beta_{ab})z\}
\end{aligned} \tag{a-7}$$

$$\begin{aligned}
-j \frac{dD}{dz} = & 2 \{K_8 |A|^2 + K_{10} |B|^2\} D \\
& + \{2K_6 |C|^2 + K_5 |D|^2\} D \\
& + K_6 C C D^* \exp(2j\Delta\beta_{cd}z) \\
& + 2K_{11} A B^* C \exp\{j(\Delta\beta_{cd} - \Delta\beta_{ab})z\} \\
& + 2K_{11} A^* B C \exp\{j(\Delta\beta_{cd} + \Delta\beta_{ab})z\}
\end{aligned} \tag{a-8}$$

式中のパラメータは、本文中の(10)~(22)式で定義される。先の場合の結合モード方程式と異なる点は、光波c, dの伝搬方向が逆であるため、光波c, dの方程式の左辺の符

号、および式中で $\Delta\beta_{cd}$ にかかる符号が正負逆になっていることである。

RS90-17

低電圧駆動・小型
バランスブリッジ形 LiNbO_3
光スイッチ

清本 浩伸 樋口 洋 春名 正光 西原 浩

大阪大学 工学部 電子工学科

1990年12月7日

輻射科学研究会

1. まえがき

LiNbO₃ (LN) を基板とする光 IC において、空間分割形の 2 × 2 光スイッチは重要な基本構成素子である。2 × 2 光スイッチとしては、これまで主としてステップ Δβ 方向性結合器形スイッチ〔1〕が用いられてきた。このタイプのスイッチは作製許容誤差が大きいという利点があるが、かなり高い駆動電圧を必要とする。3 インチ LN 基板を用いた波長 1.3 μm 帯 Non-blocking 4 × 4 光スイッチを例にとると、素子長 ~ 5 mm で、駆動電圧は 10 V 以上である。特にバー状態を得るための電圧 (V_{\ominus}) が大きいのが難点であり、バー状態のみ一様 Δβ としても $V_{\ominus} > 10$ V である〔2、3〕。

より低電圧で駆動できる 2 × 2 光スイッチとしてバランスブリッジ形がある。素子長および電極間隔が同一の場合で比較すると、原理的にバランスブリッジ形の駆動電圧は方向性結合器形の V_{\ominus} の $1/\sqrt{3}$ である。しかし、従来のバランスブリッジ形光スイッチのように、位相変調部を対称な導波路で構成した場合には、2 本の導波路間の結合を切るためにはその間隔を少なくとも 10 μm 以上とる必要があり、素子長 5 mm ではとても駆動電圧を 10 V 以下にすることはできない。

バランスブリッジ形光スイッチの位相変調部の導波路間隔を小さくする方法として、これまで 2 本の導波路間に溝を設ける〔4〕、導波路を互いに非対称にして導波路間のパワー移行率を最小化する〔5、6〕方法がある。ここで、後者の方法はドライエッチングを必要とせず、プレーナ技術で素子作製が可能という利点がある。

上述のこれまでの報告を踏まえて、我々は新たに 3 インチ LN 基板で 4 × 4 光スイッチを構成することを目的として、その構成素子である低

電圧駆動・小型バランスブリッジ形光スイッチについて理論的、実験的に検討したので報告する。素子長は入出力の3-dBカップラを含めて5 mm以下、駆動電圧は5 V以下を目標とした〔7〕。

2. 理論的検討

2. 1 素子の構造

図1に解析に用いた素子の構造を示す。素子は3-dBカップラと位相変調部により構成される。基板はZカットLNで、TMモードを使う。3-dBカップラの長さは約1 mmなので、素子長の制限（5 mm以下）から位相変調部を3 mmと決定し、この長さにおいて駆動電圧を5 V以下にすることを検討した。

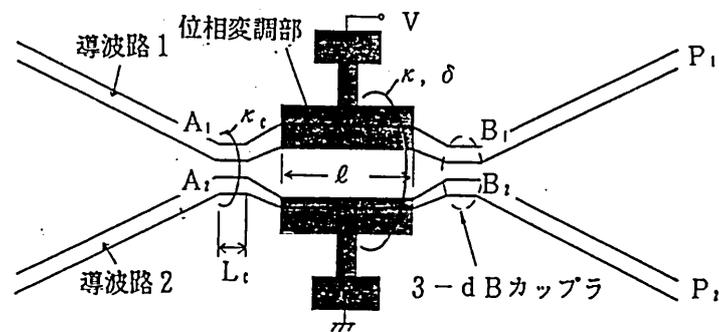


図1 解析に用いた素子の構造

2. 2 動作解析

ここでは、3-dBカップラの作製精度、および位相変調部での導波路の結合が動作にどのように影響するかを解析する。入力端における導波路1、および導波路2の複素電界振幅をそれぞれ A_1 、 A_2 、出力端における導波路1、および導波路2の複素電界振幅をそれぞれ B_1 、 B_2 とする。3-dBカップラの長さ、結合係数をそれぞれ L_c 、 κ_c 、位相変調部の長さ、結合係数をそれぞれ l 、 κ とし、入力3-dBカップラ出力端から位相変調部入力端までに生じる位相差を θ_1' 、位相変調部出力端から出力3-dBカップラ入力端までに生じる位相差を θ_2 とすると、

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & -j\sin\theta_c \\ -j\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\beta_b l + j\frac{\delta}{\beta_b} \sin\beta_b l & -j\frac{\kappa}{\beta_b} \sin\beta_b l \\ -j\frac{\kappa}{\beta_b} \sin\beta_b l & \cos\beta_b l - j\frac{\delta}{\beta_b} \sin\beta_b l \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_1'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_c & -j\sin\theta_c \\ -j\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

(1)

と表せる。ただし、

$$\theta_c = \kappa_c L_c \quad (2)$$

$$\beta_b = \sqrt{\kappa^2 + \delta^2} \quad (3)$$

である。ここで、 2δ は非称導波路の伝搬定数差である。また、印加電圧を V 、半波長電圧を $V\pi$ とすれば次式が成り立つ。

$$\begin{cases} \delta &= \delta_0 + \delta(V) \\ \delta(V) &= \frac{\pi}{2\ell} \cdot \frac{V}{V\pi} \end{cases} \quad (4)$$

いま、スイッチへの入力を $A_1 = 1$ 、 $A_2 = 0$ とすれば、導波路 1 からの出力光強度 P_1 は式 (1) より次式で表せる。

$$\begin{aligned} P_1 &= B_1 \times B_1^* \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_c \left[\sin \{2\beta_b \ell - (\theta_1 + \theta_2)\} \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{\kappa}{\beta_b}\right)^2 \sin^2 \beta_b \ell \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{\delta}{\beta_b}\right) \sin 2\beta_b \ell \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos^2 2\theta_c \left\{ \cos 2\beta_b \ell + 2 \left(\frac{\delta}{\beta_b}\right) \sin^2 \beta_b \ell \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \sin 4\theta_c \left\{ \left(\frac{\kappa}{\beta_b}\right) \sin 2\beta_b \ell (\sin \theta_1 - \cos \theta_2) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{\kappa}{\beta_b}\right) \left(\frac{\delta}{\beta_b}\right) \sin^2 \beta_b \ell (\cos \theta_1 + \sin \theta_2) \right\} \\ &\quad (但し、\theta_1 = \theta_1' - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (5)$$

2. 2 数値計算例

波長 $\lambda = 0.83 \mu\text{m}$ とし、位相変調部における幅 $5 \mu\text{m}$ と $3.5 \mu\text{m}$ の導波路の実効屈折率を等価屈折率法により求め、 $\delta_0 = 2.15 \times 10^{-4} k_0$ としている。一例として $\theta_1 = \pi/2$ 、 $\theta_2 = 0$ のときについて行った数値計算例を示す。

位相変調部で結合がある場合 ($\theta_c = \kappa_c L_c = \pi/4$ 、 $\kappa/\delta_0 \neq 0$) を考える。このとき式 (5) は、次のようになる。

$$P_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\sin\{2\beta_b l - (\theta_1 + \theta_2)\} - 2 \left(\frac{\kappa}{\beta_b}\right)^2 \sin^2 \beta_b l \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 - \left(1 - \frac{\delta}{\beta_b}\right) \sin 2\beta_b l \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (6)$$

図2に V/V_π に対する出力光強度 P_1 の変化の一例を示す。結合がない場合 ($\kappa/\delta_0 = 0$)、理想的な光変調特性を示し、消光比は無限大となる。結合 κ/δ_0 が大きくなるにしたがって消光比は劣化し、また、印加電圧の正負に対して非対称な光変調特性を示すことになる。

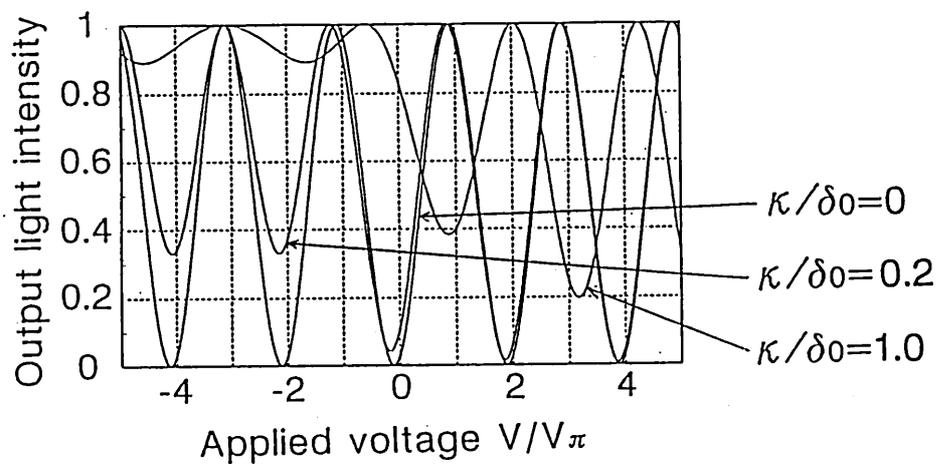


図2 κ/δ_0 による光変調特性の変化

3-dBカップラにおいて作製誤差がある場合 ($\theta_c = \kappa_c L_c \neq \pi/4$ 、 $\kappa/\delta_0 = 0$)、式(5)は、次のようになる。

$$P_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_c [\sin \{2\beta b l - (\theta_1 + \theta_2)\}] + \frac{1}{2} \cos^2 2\theta_c \{ \cos 2\beta b l + 2 \sin^2 \beta b l \} \quad (7)$$

光変調特性の一例を図3に示す。3-dBカップラの作製誤差の割合は $\Delta L_c / L_c$ で表している。作製誤差 (ΔL_c) が大きくなるにしたがって消光比は一様に劣化してしまう。

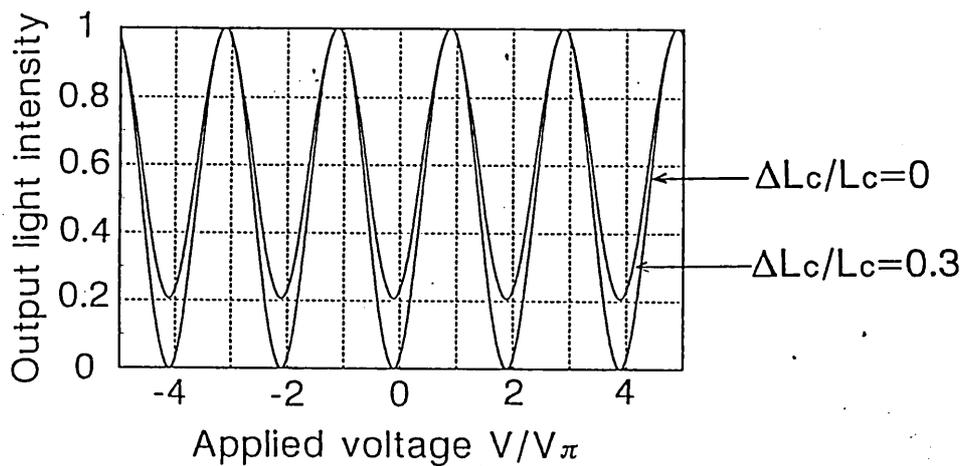


図3 3-dBカップラの作製誤差による光変調特性の変化

3-dBカップラの作製誤差と消光比の関係を図4に示す。ここで位相変調部での結合の度合を κ/δ_0 で表している。この図から、消光比-20dBを得るためには結合の全くない状態において ($\kappa/\delta_0 = 0$)、3-dBカップラを6.4%の精度で作製しなければならないことがわかる。

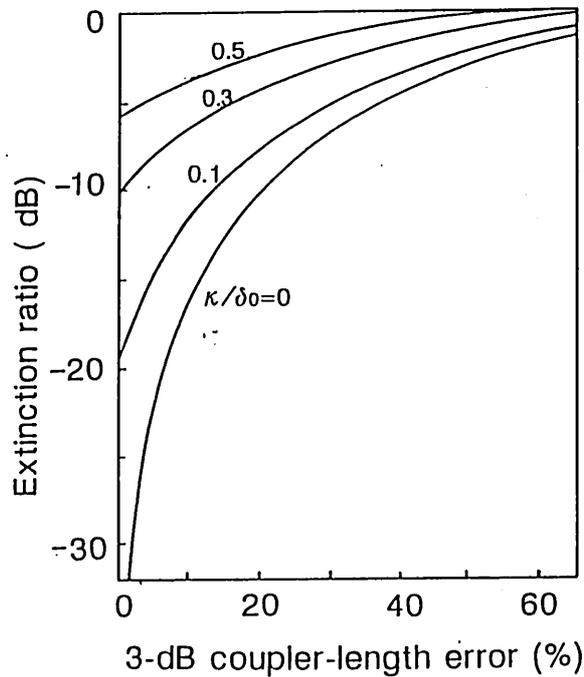


図4 3-dBカップラ作製許容誤差

3. 設計・作製のための基礎実験

3. 1 3-dBカップラ長の評価

導波路のパターニングには全てレーザービーム(LB)描画〔8、9〕を用いた。Ti膜厚 400 Å、幅 4 μm の 0.8 μm 帯単一モード導波路で、相互作用長が 60 μm ずつ異なる方向性結合器アレイを 13 本作製し、その出力光強度比を測定した。導波路間隔は 2 μm と 3 μm のものについて測定した。導波路間隔が 2 μm のときの測定結果を図 5 に示す。二本の導波路からの出力光強度を P_1 、 P_2 とし、 $\eta = P_2 / (P_1 + P_2)$ とおけば、 $\sin^{-1} \sqrt{\eta} = \kappa_c L + \Phi$ となり、この値が 45 度になる L が 3-dB カップラ長 L_c となる。測定点は最小 2 乗法を用いて直線近似をしてい

る。そして、そのばらつきを調べたところ最大で 4.8%であった。これは、LB 描画における作製精度が 4.8%以内であることを示している。この結果から導波路間隔が $2\ \mu\text{m}$ のとき $L_c = 0.56\text{mm}$ となる。また、導波路間隔が $3\ \mu\text{m}$ のときは $L_c = 1.24\text{mm}$ であった。

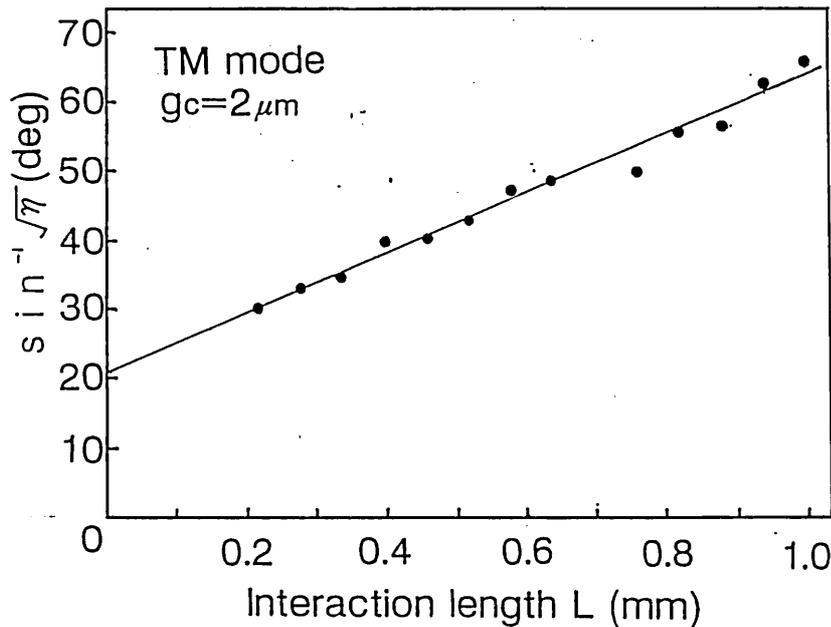


図5 3-dBカップラ長の評価

3. 2 位相変調部の導波路間隔の設定

導波路幅 $3.5\ \mu\text{m}$ 、 $4\ \mu\text{m}$ 、 $5\ \mu\text{m}$ のときの導波モードの界分布を図6に示す。Ti膜厚はいずれも $400\ \text{\AA}$ である。界分布の $1/e^2$ 全幅はそれぞれ $7.6\ \mu\text{m}$ 、 $7.0\ \mu\text{m}$ 、 $6.7\ \mu\text{m}$ であった。Ti膜厚一定のとき、導波路幅が増すにつれてモードの閉じ込めが良くなっているのが確認できる。導波路幅を $3.5\ \mu\text{m}$ 、 $5\ \mu\text{m}$ としたとき、界分布の全値全幅はいずれも約 $10\ \mu\text{m}$ なので、導波路の中心から中心を $10\ \mu\text{m}$ 以上離せば界分布は重ならず、結合が切れると考えられる。これらの検討より、導波路幅を $3.5\ \mu\text{m}$ 、 $5\ \mu\text{m}$ とし、導波路間隔を $6\sim 8\ \mu\text{m}$ と設定した。

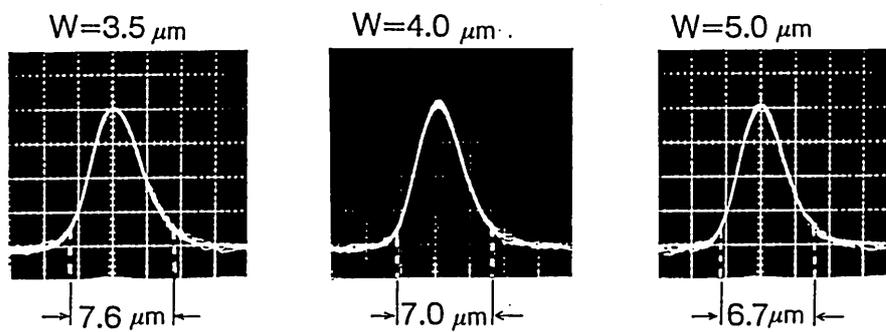


図6 導波モードの界分布

4. 作製および特性評価

4.1 作製した素子の構成

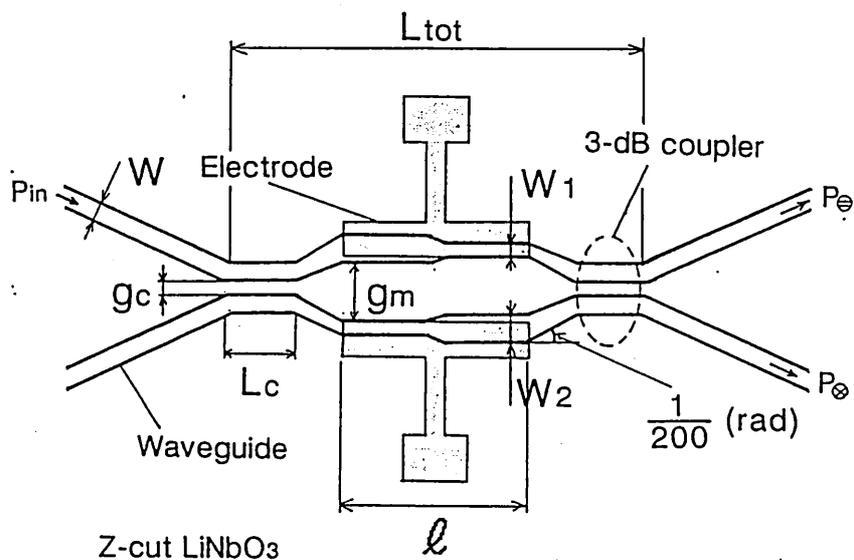


図7 素子の構成

作製した素子の構成を図7に示す。位相変調部では対称性を維持するために、入出力側から見て対称となるようにした。ここで $W = 4 \mu\text{m}$ 、 $W_1 = 3.5 \mu\text{m}$ 、 $W_2 = 5 \mu\text{m}$ であり、3-dBカップラについては g_c 。

= $2\ \mu\text{m}$ のものと $3\ \mu\text{m}$ のものを作製した。3-dBカップラと位相変調部をつなぐ折れ曲がり導波路の折れ曲がり角は、損失を小さく抑えるために $1/200\ (\text{rad})$ としている。作製した素子の過剰損失を測定したところ、幅 $4\ \mu\text{m}$ の直線導波路と比べて $1.0\sim 1.5\text{dB}$ の損失であった。

作製した導波路の顕微鏡写真を図8に示す。顕微鏡写真は $g_c = 2\ \mu\text{m}$ 、 $g_m = 6\ \mu\text{m}$ のものであるが、LB描画により設計どおり作製できていることが確認できる。

この構成をもつ素子に、厚さ $0.15\ \mu\text{m}$ の SiO_2 バッファ層、長さ $3\ \text{mm}$ の電極を装荷した。

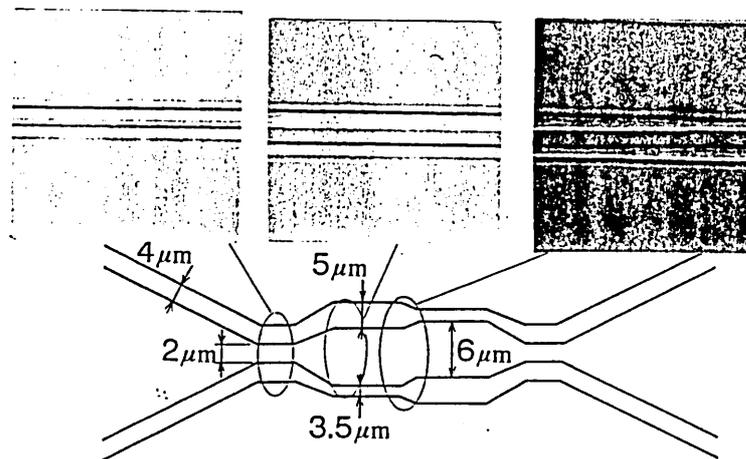


図8 導波路顕微鏡写真

4. 2 光変調特性

電極へ $\pm 20\ \text{V}$ 、 $100\ \text{Hz}$ の三角波状電圧を印加し、光変調特性を測定した。図9に示したのは、 $g_c = 3\ \mu\text{m}$ 、 $L_c = 1.24\ \text{mm}$ 、 $g_m = 6\ \mu\text{m}$ 、素子長 $L_{\text{tot}} = 6.12\ \text{mm}$ のスイッチの特性である。半波長電圧 $V_\pi = 7\ \text{V}$ 、消光比 $< -16\ \text{dB}$ を得た。しかし、 $g_c = 3\ \mu\text{m}$ では素子長 $5\ \text{mm}$ 以下を達成することはできなかった。なお二つの出力光レベルに違いがあるが、これは端面の欠陥によるものである。

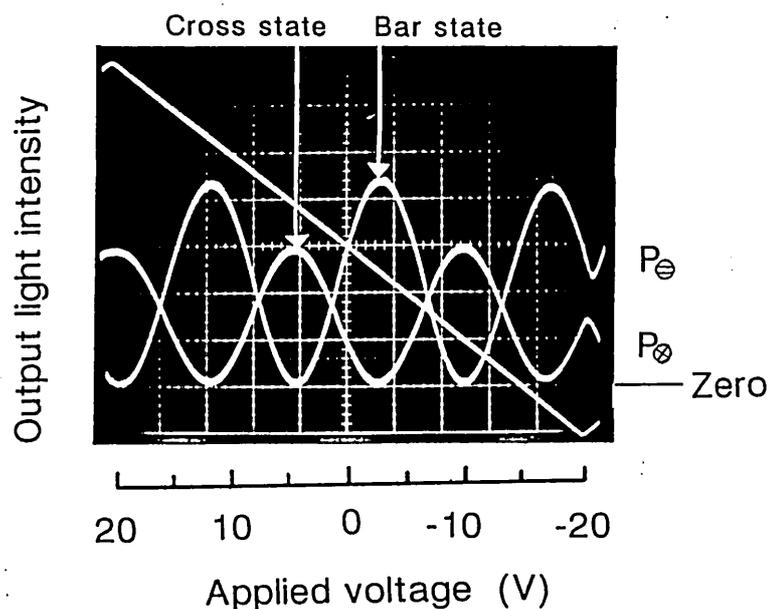


図9 光変調特性 ($g_c = 3 \mu\text{m}$)

また、図10に示したのは、 $g_c = 2 \mu\text{m}$ 、 $L_c = 0.32\text{mm}$ 、 $g_m = 6 \mu\text{m}$ 、 $L_{tot} = 4.48\text{mm}$ のスイッチの特性で、 $V\pi = 7\text{V}$ 、消光比 $< -18\text{dB}$ が得られた。 $g_c = 2 \mu\text{m}$ で、素子長 4.48mm と満足な値を得ることができた。描画時の作製誤差は4.8%以内なので、 L_c の値が3-dBカップラ長の評価のときと違っているのは、拡散条件のばらつきが原因と考えている。

どちらの光変調特性も印加電圧の正負に対して対称な特性を示している。従って、位相変調部において導波路幅が $3.5 \mu\text{m}$ と $5 \mu\text{m}$ のとき、導波路間隔 $6 \mu\text{m}$ で結合が切れていることが確認できる。

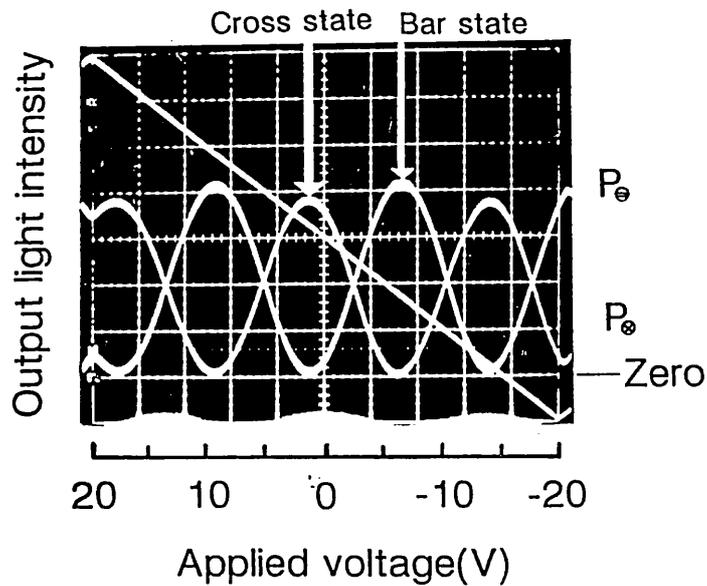


図10 光変調特性 ($g_c = 2 \mu m$)

5. まとめ

波長 $0.8 \mu m$ 帯 4×4 光スイッチの構成素子であるバランスブリッジ形スイッチについて設計、作製を行い、その特性評価を行った。入出力の $3-dB$ カップラを含めて素子長 $4.48 mm$ で、半波長電圧 $V_{\pi} = 7 V$ を得た。DC バイアス電圧を印加して動作させれば、これで駆動電圧 $5 V$ 以下を達成できる。また、位相変調部の導波路非対称性をさらに大きくして素子を最適設計すれば、 $V_{\pi} < 5 V$ とすることも可能であると考えている。

現在、3 インチ LN 基板の上に本素子を集積化して 4×4 光スイッチを作製中である。

謝辞：本研究は（財）大阪科学技術センター・高機能光デバイス研究会活動の一環として行っている。関係者諸氏に感謝する。

参考文献：

1. 西原, 春名, 栖原：「光集積回路」（オーム社, 1985）。
2. G.A.Bogert, E.J.Murphy and R.T.Ku：IEEE J.Lightwave Technol. LT-4, p.1542 (1986)。
3. M.Kondo, N.Takada, K.Komatsu and Y.Ohta：IOOC/ECOC'85, Proc. p.361 (1985)。
4. M.Minakata：Appl. Phys. Lett.35, p.40 (1988)。
5. J.L.Jackel and J.J.Johnson：IEEE J.Lightwave Technol. 6, p.1348 (1988)。
6. 久保田, 山根, 土居, 中沢, 並木, 女鹿田, 清野, 中島：
'90 春信学会全国大会 C-229 (1990)。
7. 清本, 樋口, 春名, 西原：'90 秋信学会全国大会 C-149 (1990)。
8. M.Haruna, S.Yoshida, H.Toda and H.Nishihara：Appl. Opt. 26 p.4587 (1987)。
9. 浜田, 春名, 西原：'90 春応物連合講演会 29p-F-14 (1990)。

量子サイズ構造デバイスにおける
電子波の輸送モデル

土屋 英昭
小川 真人
三好 旦六

神戸大学工学部電子工学科

平成2年12月7日

1. Wigner関数モデルによる量子輸送の記述
資料1. P. 2-P. 16
2. 共鳴トンネルダイオードの電子輸送シミュレーション
資料2. P. 17
3. InGaAs/InP長波長APDの正孔輸送シミュレーション
資料3. P. 18-P. 19

SIMULATION OF QUANTUM TRANSPORT IN QUANTUM DEVICES
WITH SPATIALLY VARYING EFFECTIVE MASS

H. Tsuchiya, M. Ogawa, Member, IEEE and T. Miyoshi, Member, IEEE
Department of Electronic Engineering, Kobe University
Rokko-dai, Nada-ku, Kobe 657, Japan

ABSTRACT

The precise simulation of quantum transport in quantum size structures has become more important with the recent progress of crystal growth technology. In this paper, we present some novel progress in the quantum mechanical simulation based upon the Wigner function model. An exact nonlocal formulation in the Wigner representation due to a spatially varying effective mass and its discretization for numerical calculation are discussed for the first time. To verify the validity of such a formulation, the current-voltage characteristics of resonant tunneling diodes are simulated to compare with the conventional Wigner function model. We also point out the importance of the self-consistent calculation in the electrostatic potential for precise device simulation. Finally, we emphasize that the Wigner function model is superior to the alternative method based upon the scattering theory even for the static simulation of quantum transport.

Correspondence:

Professor T. Miyoshi
Department of Electronic Engineering
Kobe University
Rokko-dai, Nada-ku, Kobe 657, Japan

1. INTRODUCTION

The precise simulation of quantum transport in quantum size structures has become more important with the recent progress of crystal growth technology. The Wigner function model has been a powerful method to analyze the dynamic behavior of quantum size optical and electronic devices[1]-[9]. However, there still remain some essential problems to be solved in the Wigner function model. In this paper, we will present some successful progress in the model taking the quantum-well resonant tunneling diode(RTD) as the prototype quantum size device. First, we will discuss an exact nonlocal formulation in the Wigner representation due to a spatially varying effective mass. When we permit the change of energy-band structure with position to be simulated by a spatially varying effective mass, the quantum Liouville equation governing the density matrix is readily derived from the effective mass Hamiltonian[10]. Performing a Fourier transform of the Liouville equation carefully, we will obtain the exact nonlocal Wigner function formulation for spatially varying effective mass mathematically. Furthermore, in the finite difference discretization for the Wigner representation, the current density is successfully defined to satisfy the discretized continuity equation. This is the crucial point in the numerical calculation. So far, a nonlocal formulation of the Wigner representation was discussed for the abrupt change of effective mass at a heterojunction based upon the classical consideration[11], where a step-like change of effective mass is considered to lead an additional impulsive force at the heterointerface that contributes to a classical driving term in the Liouville equation. Unfortunately, the paper was primarily concerned with the formulation of the problem and its solution was not discussed. To verify the validity of the novel formulation derived in this paper, the current-voltage characteristics of the RTD are simulated and compared with the conventional Wigner function model where the spatial variation of effective mass is neglected. It is found from the simulation that the positional variation of effective mass plays an important role in the transport characteristics of quantum devices. In addition, we also point out that the self-consistent calculation of the electrostatic potential should be included to model the space charge in a quantum well. To this end, the Poisson's equation is solved simultaneously.

In the latter part of this paper, we emphasize that even for the static simulation of quantum transport, the Wigner function model is superior to the alternative simulation of Tsu and Esaki[12] based upon the scattering theory. In the scattering theory, the transport characteristics are determined by the transmission probability of the electron plane wave assuming the equilibrium distribution of carriers over the electrodes. Consequently, the calculated characteristics never depend upon the dimension of the electrodes. On the other hand, in the Wigner function model the distribution function excited at one reservoir attached to the electrode is simulated spread in the k (wave number) space as it approaches a barrier through the electrode due to the barrier potential repulsion. Thus, the Wigner function method is more likely to be a powerful tool in the static and dynamic simulation of quantum transport in quantum size devices if the positional variation of effective mass is considered as discussed in this paper.

2. QUANTUM MECHANICAL LIOUVILLE EQUATION FOR SPATIALLY VARYING EFFECTIVE MASS

To simulate the quantum transport in quantum devices with a spatially varying effective mass, the exact nonlocal formulation in the Wigner representation is derived mathematically starting from the effective mass Hamiltonian.

Now, we consider the following effective mass Hamiltonian which guarantees probability current conservation at any position with variable effective mass[10].

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \right) + v(x), \quad (1)$$

where \hbar , $m(x)$ and $v(x)$ are the Planck's constant divided by 2π , the effective mass, and the potential, respectively. For the Hamiltonian, the quantum mechanical Liouville equation with respect to the density matrix is written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{j}{\hbar} (H - H') \rho \\ &= \frac{j}{\hbar} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \right) - \frac{d}{dx'} \left(\frac{1}{m(x')} \frac{d}{dx'} \right) \right\} \rho + \{v(x) - v(x')\} \rho \right], \end{aligned} \quad (2)$$

where ρ is the density matrix represented in the coordinates space and defined as[2]

$$\rho(x, x') = \sum_i P_i \varphi_i(x) \varphi_i^*(x'), \quad (3)$$

where $\varphi_i(x)$ represents the wave function in the i -state and P_i is the probability occupying the i -state.

When the independent variables are changed to $\chi = \frac{1}{2}(x + x')$ and $\xi = x - x'$, the Wigner function[13] is defined as a Fourier transform of the density matrix with respect to the relative coordinates ξ :

$$f(\chi, k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{jk\xi} \rho \left(\chi + \frac{1}{2}\xi, \chi - \frac{1}{2}\xi \right). \quad (4)$$

On the other hand, the density matrix is represented by the inverse Fourier transform of the Wigner function with respect to the momentum variable k :

$$\rho \left(\chi + \frac{1}{2}\xi, \chi - \frac{1}{2}\xi \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-jk\xi} f(\chi, k). \quad (5)$$

Performing the Fourier transformation of the Liouville equation (2), the following Liouville equation for the Wigner function is obtained.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{8\pi} M_1(\chi, k - k') \frac{\partial f(\chi, k')}{\partial \chi} - \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{4\pi} k' M_2(\chi, k - k') f(\chi, k') \\ &+ \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{16\pi} M_3(\chi, k - k') \left[\frac{\partial^2 f(\chi, k')}{\partial \chi^2} - 4k'^2 f(\chi, k') \right] \\ &- \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{4\pi} k' M_4(\chi, k - k') \frac{\partial f(\chi, k')}{\partial \chi} - \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} V(\chi, k - k') f(\chi, k'), \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$M_1(\chi, k - k') = 2 \int_0^\infty d\xi \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{m^-(\chi, \xi)} \right) \sin[(k - k')\xi] \quad (7)$$

$$M_2(\chi, k - k') = 2 \int_0^\infty d\xi \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{m^+(\chi, \xi)} \right) \cos[(k - k')\xi] \quad (8)$$

$$M_3(\chi, k - k') = 2 \int_0^\infty d\xi \frac{\sin[(k - k')\xi]}{m^-(\chi, \xi)} \quad (9)$$

$$M_4(\chi, k - k') = 2 \int_0^\infty d\xi \frac{\cos[(k - k')\xi]}{m^+(\chi, \xi)} \quad (10)$$

$$V(\chi, k - k') = 2 \int_0^\infty d\xi \left[v \left(\chi + \frac{1}{2}\xi \right) - v \left(\chi - \frac{1}{2}\xi \right) \right] \sin[(k - k')\xi], \quad (11)$$

$$\frac{1}{m^-(\chi, \xi)} = \frac{1}{m(\chi + \frac{1}{2}\xi)} - \frac{1}{m(\chi - \frac{1}{2}\xi)}, \quad \frac{1}{m^+(\chi, \xi)} = \frac{1}{m(\chi + \frac{1}{2}\xi)} + \frac{1}{m(\chi - \frac{1}{2}\xi)}. \quad (12)$$

In the derivation of the Liouville equation (6), the following relations are used to simplify the representation.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{m^-(\chi, \xi)} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{m^+(\chi, \xi)} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{m^+(\chi, \xi)} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{m^-(\chi, \xi)} \right). \quad (13)$$

It is readily found that the equation (6) includes the conventional Liouville equation for constant effective mass. If the effective mass is forced to the constant value of m , because $M_1(\chi, k - k')$, $M_2(\chi, k - k')$, and $M_3(\chi, k - k')$ are zero and $M_4(\chi, k - k')$ is simplified as $\frac{4\pi}{m}\delta(k - k')$, where $\delta(k - k')$ is the Dirac's delta function, the equation (6) leads to

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar k}{m} \frac{\partial f}{\partial \chi} - \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} V(\chi, k - k') f(\chi, k'). \quad (14)$$

The equation (14) is definitely identical with the conventional Liouville equation[2], and it is well known that it reduces to the Boltzmann transport equation in the classical limit.

As for the novel Liouville equation (6), it is found to correspond to the following transport equation in the classical limit.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{p}{m(\chi)} \frac{\partial f}{\partial \chi} + \left[\frac{\partial v}{\partial \chi} + \frac{p^2}{2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{m(\chi)} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial p} \quad (15)$$

It is worth noting that a new force term is added in equation (15) due to the variable effective mass as is expected through $\partial p / \partial t = -\partial H / \partial \chi$ and the effective mass Hamiltonian (1).

The Wigner function has the following relations with the carrier density $n(\chi)$ and the current density $j(\chi)$:

$$n(\chi) = \rho(\chi, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f(\chi, k) \quad (16)$$

$$j(\chi) = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\hbar k}{m(\chi)} f(\chi, k), \quad (17)$$

where e is the electron charge. Here, the carrier density $n(\chi)$ is found from the equation (5) and the current density $j(\chi)$ is defined so as to satisfy the continuity equation derived from the Liouville equation (6) by integrating with respect to k .

To include the self-consistency in potential, the following Poisson's equation must be solved simultaneously.

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left(\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right) = -e(\Gamma - n), \quad (18)$$

where ϵ denotes the spatially varying dielectric constant and Γ is the doping density. The Liouville equation (6) and the Poisson's equation (18) are mutually related through

$$v(\chi) = -[\chi_e(\chi) - \chi_e(0)] - e[\psi(\chi) - \psi(0)], \quad (19)$$

where χ_e is the electron affinity of semiconductor material.

According to Frensky[2], the boundary conditions for the Wigner function are given at the reservoirs attached to the quantum device as,

$$f(0, k) = f_l(k) \quad k > 0, \quad f(L, k) = f_r(k) \quad k < 0 \quad (20)$$

$$f_{l,r}(k) = \frac{m_{l,r} k_B T}{\pi \hbar^2} \ln \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{l,r}} - E_{f_{l,r}} \right) \right] \right\}, \quad (21)$$

where the subscripts l and r express the left-hand side and the right-hand side boundary, respectively, L is the device length, and k_B is the Boltzmann constant. $f_{l,r}(k)$ is derived by integrating the Fermi-Dirac distribution function represented by the carrier's quasi-Fermi level $E_{f_{l,r}}$ and temperature T over the transverse momenta. The above boundary conditions mean that the distribution of carriers injected into the device from a reservoir is characterized by the thermal equilibrium distribution of carriers at the reservoir, and all carriers impinging upon a reservoir from the device are absorbed by the reservoir. The carrier's quasi-Fermi level $E_{f_{l,r}}$ will be determined by the carrier densities $n(0)$ and $n(L)$ at the boundaries so as to satisfy the charge neutrality condition and $p(0)n(0) = n_i^2(0)$ and $p(L)n(L) = n_i^2(L)$, where n_i denotes the intrinsic carrier density.

On the other hand, the boundary conditions for potential are given for the bias condition V_b as[14]

$$\psi(0) = \frac{k_B T}{e} \ln \left[\frac{n(0)}{\omega(0)n_i(0)} \right], \quad \psi(L) = V_b + \frac{k_B T}{e} \ln \left[\frac{n(L)}{\omega(L)n_i(L)} \right] \quad (22)$$

where $\omega(\chi)$ is the band grading function introduced to represent the bandgap variation along distance and given by

$$\omega(\chi) = \sqrt{\frac{N_v(0)N_c(\chi)}{N_c(0)N_v(\chi)}} \exp \left[\frac{E_G(\chi) - E_G(0)}{2k_B T} \right] \exp \left[\frac{\chi_e(\chi) - \chi_e(0)}{k_B T} \right], \quad (23)$$

where N_c and N_v denote effective densities of states in conduction band and in valence band, respectively, and E_G the energy gap.

3. DISCRETIZATION OF THE LIOUVILLE EQUATION

The equations (6) and (18) will be solved numerically based upon the finite difference method.

When the position coordinates $\chi(0 \leq \chi \leq L)$ are represented by N_x mesh points with the uniform mesh spacing $\Delta_x (= L/(N_x - 1))$, the relative coordinates ξ are represented by N_ξ mesh points with the uniform mesh spacing $2\Delta_x$, and the k dimension ($-\pi/2\Delta_x \leq k \leq \pi/2\Delta_x$) is discretized into N_k mesh points with the uniform mesh spacing $\Delta_k = \pi/N_k\Delta_x$, the equations (6)-(11) are transformed into the following discretized equations.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(\chi, k)}{\partial t} &= \hbar \sum_{k'} \frac{M_1(\chi, k - k')}{\Delta_x} \times \begin{cases} f(\chi + \Delta_x, k') - f(\chi, k') & , k' < 0 \\ f(\chi, k') - f(\chi - \Delta_x, k') & , k' > 0 \end{cases} \\
 &- \hbar \sum_{k'} k' M_2(\chi, k - k') f(\chi, k') \\
 &+ \hbar \sum_{k'} \frac{M_3(\chi, k - k')}{\Delta_x^2} [f(\chi + \Delta_x, k') - 2(1 + 2\Delta_x^2 k'^2) f(\chi, k') + f(\chi - \Delta_x, k')] \\
 &- \hbar \sum_{k'} \frac{k' M_4(\chi, k - k')}{\Delta_x} \times \begin{cases} f(\chi + \Delta_x, k') - f(\chi, k') & , k' < 0 \\ f(\chi, k') - f(\chi - \Delta_x, k') & , k' > 0 \end{cases} \\
 &- \frac{1}{\hbar} \sum_{k'} V(\chi, k - k') f(\chi, k') \\
 &\equiv \mathcal{L} f(\chi, k),
 \end{aligned} \tag{24}$$

where

$$M_1(\chi, k - k') = \frac{1}{2N_k\Delta_x} \sum_{\xi} \sin[(k - k')\xi] \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{m^-(\chi, \xi)} - \frac{1}{m^-(\chi - \Delta_x, \xi)} & , k' < 0 \\ \frac{1}{m^-(\chi + \Delta_x, \xi)} - \frac{1}{m^-(\chi, \xi)} & , k' > 0 \end{array} \right\} \tag{25}$$

$$M_2(\chi, k - k') = \frac{1}{N_k\Delta_x} \sum_{\xi} \cos[(k - k')\xi] \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{m^+(\chi, \xi)} - \frac{1}{m^+(\chi - \Delta_x, \xi)} & , k' < 0 \\ \frac{1}{m^+(\chi + \Delta_x, \xi)} - \frac{1}{m^+(\chi, \xi)} & , k' > 0 \end{array} \right\} \tag{26}$$

$$M_3(\chi, k - k') = \frac{1}{4N_k} \sum_{\xi} \frac{\sin[(k - k')\xi]}{m^-(\chi, \xi)} \tag{27}$$

$$M_4(\chi, k - k') = \frac{1}{N_k} \sum_{\xi} \frac{\cos[(k - k')\xi]}{m^+(\chi, \xi)} \tag{28}$$

$$V(\chi, k - k') = \frac{2}{N_k} \sum_{\xi} \sin[(k - k')\xi] \left[v \left(\chi + \frac{1}{2}\xi \right) - v \left(\chi - \frac{1}{2}\xi \right) \right]. \tag{29}$$

In the discretized Liouville equation (24), the forward difference and the backward difference are used for $k' < 0$ and $k' > 0$, respectively, to satisfy the boundary conditions given by

the equations (20) and (21). When the current densities are defined at intervals between mesh points, we expect the discretized continuity equation to have the form:

$$\frac{\partial n(\chi)}{\partial t} = -\frac{1}{e} \frac{j(\chi + \frac{1}{2}\Delta_x) - j(\chi - \frac{1}{2}\Delta_x)}{\Delta_x}. \quad (30)$$

The above form of approximation for the current density is commonly used in the classical device simulation to improve the computational accuracy. If the carrier density is defined as

$$n(\chi) = \sum_k \frac{\Delta_k}{2\pi} f(\chi, k), \quad (31)$$

then the current density is successfully defined to satisfy the discretized continuity equation (30) that is derived from the discretized Liouville equation (24) by summing with respect to k :

$$j(\chi + \frac{1}{2}\Delta_x) = e \frac{\Delta_k}{2\pi} \left[\sum_{k<0} \frac{\hbar k}{m(\chi)} f(\chi + \Delta_x, k) + \sum_{k>0} \frac{\hbar k}{m(\chi + \Delta_x)} f(\chi, k) \right]. \quad (32)$$

It is easily found from the equation (30) that the current density is independent of χ for a steady-state solution using this definition of j .

Here, it is worth noting that the number of N_k is exactly limited to $2N_\ell$ from the requirement that the discretized equations (24)-(29) should be identical with the discretized equations of the conventional Liouville equation (14) when the effective mass is forced constant.

The discretization of the Poisson's equation (18) is straightforward. However, for the iterative calculation, the following transformed matrix equation describing the potential change $\delta\psi$ is required at each iteration.

$$\begin{aligned} & \eta_1(\chi)\delta\psi(\chi - \Delta_x) + \left\{ \eta_2(\chi) - \frac{e^2}{k_B T} n(\chi) \right\} \delta\psi(\chi) + \eta_3(\chi)\delta\psi(\chi + \Delta_x) \\ & = -\eta_1(\chi)\psi(\chi - \Delta_x) - \eta_2(\chi)\psi(\chi) - \eta_3(\chi)\psi(\chi + \Delta_x) - e[\Gamma(\chi) - n(\chi)], \end{aligned} \quad (33)$$

where

$$\begin{aligned} \eta_1(\chi) &= \epsilon(\chi - \frac{1}{2}\Delta_x)/(\Delta_x)^2, \quad \eta_3(\chi) = \epsilon(\chi + \frac{1}{2}\Delta_x)/(\Delta_x)^2 \\ \eta_2(\chi) &= - \left[\epsilon(\chi - \frac{1}{2}\Delta_x) + \epsilon(\chi + \frac{1}{2}\Delta_x) \right] / (\Delta_x)^2. \end{aligned} \quad (34)$$

In the numerical calculation, the Wigner function $f(\chi, k)$ is computed iteratively for each bias condition until the self-consistent solution is obtained. In this paper, the iteration is continued until the change of the potential energy $v(\chi)$ becomes less than 10meV at any position.

To obtain the transient response of a quantum size structure, the further discretization with respect to time is performed based upon the following approximation method with mesh spacing Δ_t ,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \simeq \frac{f(\chi, k, t + \Delta_t) - f(\chi, k, t)}{\Delta_t} = \frac{\mathcal{L}f(\chi, k, t + \Delta_t) + \mathcal{L}f(\chi, k, t)}{2}, \quad (35)$$

where \mathcal{L} is the operator defined in the equation (24). Since the matrix equation derived from the discretization of the Liouville equation is sparse, it is transformed into the block three diagonal matrix with $(N_k \times N_k)$ matrix blocks. Thus, the matrix equation will be solved by calculating only the $(N_k \times N_k)$ inverse matrices.

4. COMPARISON BETWEEN THE NOVEL METHOD AND THE CONVENTIONAL MODEL

To verify the validity of the novel formulation derived in this paper, the RTD are simulated as the prototype quantum size device.

The RTD model used in the simulation is shown in Fig.1, which consists of a 4.5nm wide GaAs quantum well and 2.8nm wide AlGaAs barrier layers. The GaAs electrode layers of 17.5nm are included on each side of the device. Outside the electrodes, the reservoirs characterized by the thermal equilibrium distribution of carriers are assumed. The conduction band discontinuity is taken to be 0.27eV. In the calculation, $N_x=81$, $N_k=60$, $N_l=30$, and the mesh spacing $\Delta_x=5.65\text{\AA}$, that is comparable to the atomic monolayer spacing, are used. The effective mass of electron are $0.067m_0$ in GaAs and $0.092m_0$ in AlGaAs, respectively, where m_0 is a free electron mass. The doping density in GaAs electrodes is given as $2 \times 10^{18}\text{cm}^{-3}$ and the barrier and well layers are assumed to be undoped. The relative dielectric constants are 12.9 in GaAs and 12.03 in AlGaAs, respectively. The scattering processes are neglected and all calculations are performed at a room temperature of 300K.

First, to study the effect of a spatially varying effective mass in quantum transport, the current-voltage characteristics of the RTD are simulated by solving the discretized Liouville equation (24) under the condition $\partial f/\partial t = 0$. The applied bias voltage is assumed to be dropped uniformly across the well and the barriers (the flat band model) as shown in Fig.1. The simulated results are shown in Fig.2, along with the curve simulated assuming the constant effective mass of $0.067m_0$ throughout the device. The solid and the broken lines correspond to the novel and conventional simulations, respectively. It is found from the figure that for the novel simulation method the resonance takes place at a lower bias voltage and the peak-to-valley ratio in current increases about 1.8 times larger. The above results mean that the positional variation of the effective mass plays an important role in the transport characteristics of quantum devices.

Next, to study the space charge effects, the discretized Liouville equation (24) and the discretized Poisson's equation (33) are solved self-consistently as shown in Fig.3. The solid line is the self-consistent solution and the dot and solid line is the solution under the flat band model. The calculated carrier distributions and the conduction band energy variations are shown in Fig.4 for the bias conditions (a)0V, (b)0.18V(peak current), and (c)0.24V(valley current). In the figure, the conduction band energy variations under the flat band model are also shown in dotted lines. It is found from Fig.4(b) that at resonance the electric field strength in the quantum well layer is reduced compared with that of the flat band model due to the carrier accumulation in the well. This is the reason why the resonance takes place at a higher bias voltage for the self-consistent solution in Fig.3. Further, when the bias voltage is applied, the carriers are found accumulated in the left electrode and depleted in the right electrode as shown in Fig.4(b) and (c). Due to such a space charge distribution, the electric fields are induced in the originally neutral electrodes to accelerate the electrons. Accordingly, the relatively higher current flows when the space charge effects are considered as shown in Fig.3. The above results mean that the space charge gives an important influence upon the characteristics of quantum

devices, and the self-consistent calculation in potential is required for precise device simulation.

5. COMPARISON BETWEEN THE WIGNER FUNCTION MODEL AND THE SCATTERING THEORY

As an alternative model to simulate the static behavior of quantum transport, the scattering theory[12] is known well. In the scattering theory, the transport characteristics are determined by the transmission probability of the electron plane wave. When the Fermi-Dirac distribution function is assumed in the electrodes, the current density is expressed by integrating over the transverse energies as[12]

$$j = \frac{emk_B T}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dE_x D(E_x, V_b) \ln \left\{ \frac{1 + \exp[(E_f - E_x)/k_B T]}{1 + \exp[(E_f - E_x - eV_b)/k_B T]} \right\}, \quad (36)$$

where $D(E_x, V_b)$ is the transmission probability in terms of the probability current as a function of the longitudinal energy E_x and the bias voltage V_b .

Fig.5 shows the simulated results for the equation (36) and the Wigner function model, where self-consistency in the electrostatic potential is not implemented, but the variable effective mass is assumed for both models. The solid and the broken lines correspond to the Wigner function model and the scattering theory, respectively. In the scattering theory, the assumed Fermi-Dirac distribution is kept constant along the electrode. In other words, the transport characteristics calculated by the scattering theory never depend upon the electrode dimension. On the other hand, in the Wigner function method the distribution function excited at one reservoir is found spread in the k space as it approaches a barrier due to the barrier potential repulsion even if the potential is uniform in the electrode as shown in Fig.6. Because of this spread of the distribution function, the average energy of electrons becomes higher. Consequently, electrons tunnel through the barriers for a lower bias voltage and a larger number of electrons flow over the barriers to contribute the higher current density. This is the reason for the discrepancy of the two curves in Fig.5.

6. CONCLUSION

A novel progress in the quantum mechanical simulation based upon the Wigner function has been presented. An exact nonlocal formulation in the Wigner representation due to a spatially varying effective mass is formulated for the first time. The validity of such a formulation is verified for the resonant tunneling diode model. We also point out that the self-consistent calculation of the electrostatic potential is important for precise device simulation. As a result, the Wigner function model is more likely to be a powerful tool in the simulation of quantum transport in quantum size devices. In this paper, we discussed only the quantum ballistic transport in quantum well devices. To make the Wigner function model practically useful, we will have to study the precise model including the scattering processes due to phonons, impurities, and inter-valley transitions on the basis of a firmer quantum well physics.

References

- [1] W. R. Frensley, "Transient response of a tunneling device obtained from the Wigner function," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, No. 22, pp. 2853-2856, Dec. 1986.
- [2] W. R. Frensley, "Wigner-function model of a resonant-tunneling semiconductor device," *Phys. Rev. B* 36, No. 3, pp. 1570-1580, July. 1987.
- [3] W. R. Frensley, "Quantum transport calculation of the small-signal response of a resonant tunneling diode," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 51, No. 6, pp. 448-450, Aug. 1987.
- [4] W. R. Frensley, "Quantum transport modeling of resonant-tunneling devices," *Solid-State Electron.*, vol. 31, No. 3/4, pp. 739-742, 1988.
- [5] U. Ravaioli, M. A. Osman, W. Pötz, N. Klusdahl, and D. K. Ferry, "Investigation of ballistic transport through resonant-tunneling quantum wells using Wigner function approach," *Physica* 134B, pp. 36-40, 1985.
- [6] A. M. Krivan, N. C. Klusdahl, and D. K. Ferry, "Scattering states and distribution functions for microstructures," *Phys. Rev. B* 36, No. 11, pp. 5953-5959, Oct. 1987.
- [7] N. C. Klusdahl, A. M. Krivan, C. Ringhofer, and D. K. Ferry, "Quantum tunneling properties from a Wigner function study," *Solid-State Electron.*, vol. 31, No. 3/4, pp. 743-746, 1988.
- [8] H. Tsuchiya, S. Shimizu, N. Fujino, M. Ogawa, and T. Miyoshi, "Quantum mechanical simulation of hole piling and transient response of long wavelength APD's," in *OEC'90 Tech. Dig.*, 1990, pp. 226-227.
- [9] H. Tsuchiya, M. Ogawa, S. Shimizu, N. Fujino, and T. Miyoshi, "Quantum mechanical simulation of long wavelength avalanche photo-diodes using Wigner-function," *Electrosoft 90* (Lowell, MA), Aug. 1990.
- [10] D. J. BenDaniel and C. B. Duke, "Space-charge effects on electron tunneling," *Phys. Rev.*, vol. 152, No. 2, pp. 683-692, Dec. 1966.
- [11] J. R. Barker, D. W. Lowe, and S. Murray, in *The Physics of submicron structures*, edited by H. L. Grubin, K. Hess, G. J. Iafrate, and D. K. Ferry (Plenum, New York, 1984), pp. 277-286.
- [12] R. Tsu and L. Esaki, "Tunneling in a finite superlattice," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 22, No. 11, pp. 562-564, June. 1973.
- [13] E. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium," *Phys. Rev.*, vol. 40, pp. 749-759, June. 1932.

- [14] M. Kurata and J. Yoshida, "Modeling and characterization for high-speed GaAlAs-GaAs n-p-n heterojunction bipolar transistors," *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. ED-31, No. 4, pp. 467-473, Apr. 1984.

FIGURE CAPTIONS

Fig.1 Resonant tunneling diode model used in the simulation.

Fig.2 Comparison between the novel and conventional simulation.

Fig.3 Self-consistent simulation of current-voltage characteristics.

Fig.4 Carrier distributions and conduction band energy variations for the bias condition (a)0V, (b)0.18V, and (c) 0.24V. 0.18V and 0.24V correspond to the peak and valley current of the current-voltage characteristics in Fig.3, respectively.

Fig.5 Comparison between the Wigner function model and the scattering theory. Self - consistency in potential is not implemented, but variable effective mass is assumed in both models.

Fig.6 Distribution of the Wigner function at resonance ($V=0.1V$).

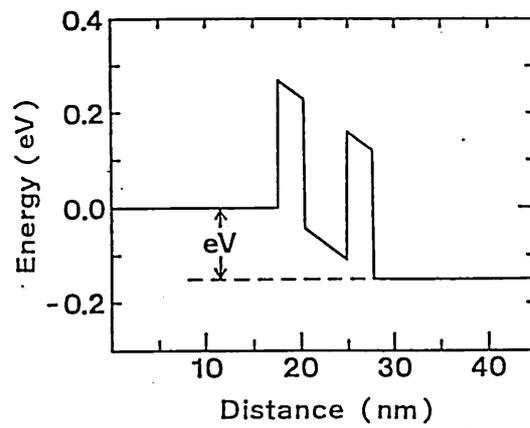


Fig.1

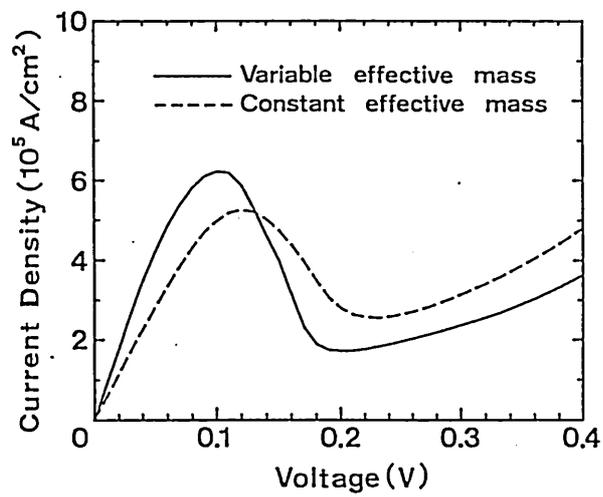


Fig.2

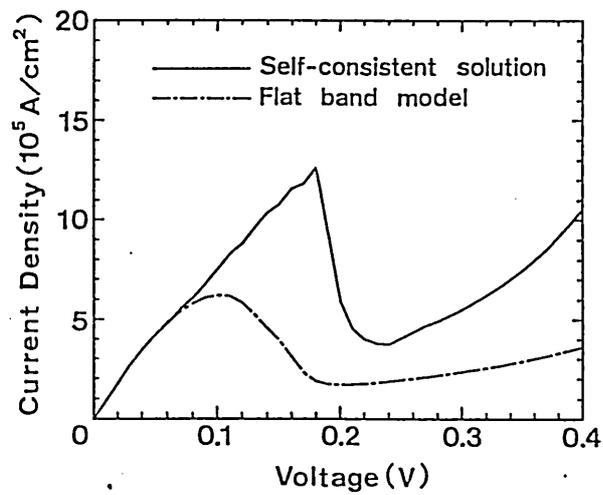


Fig.3

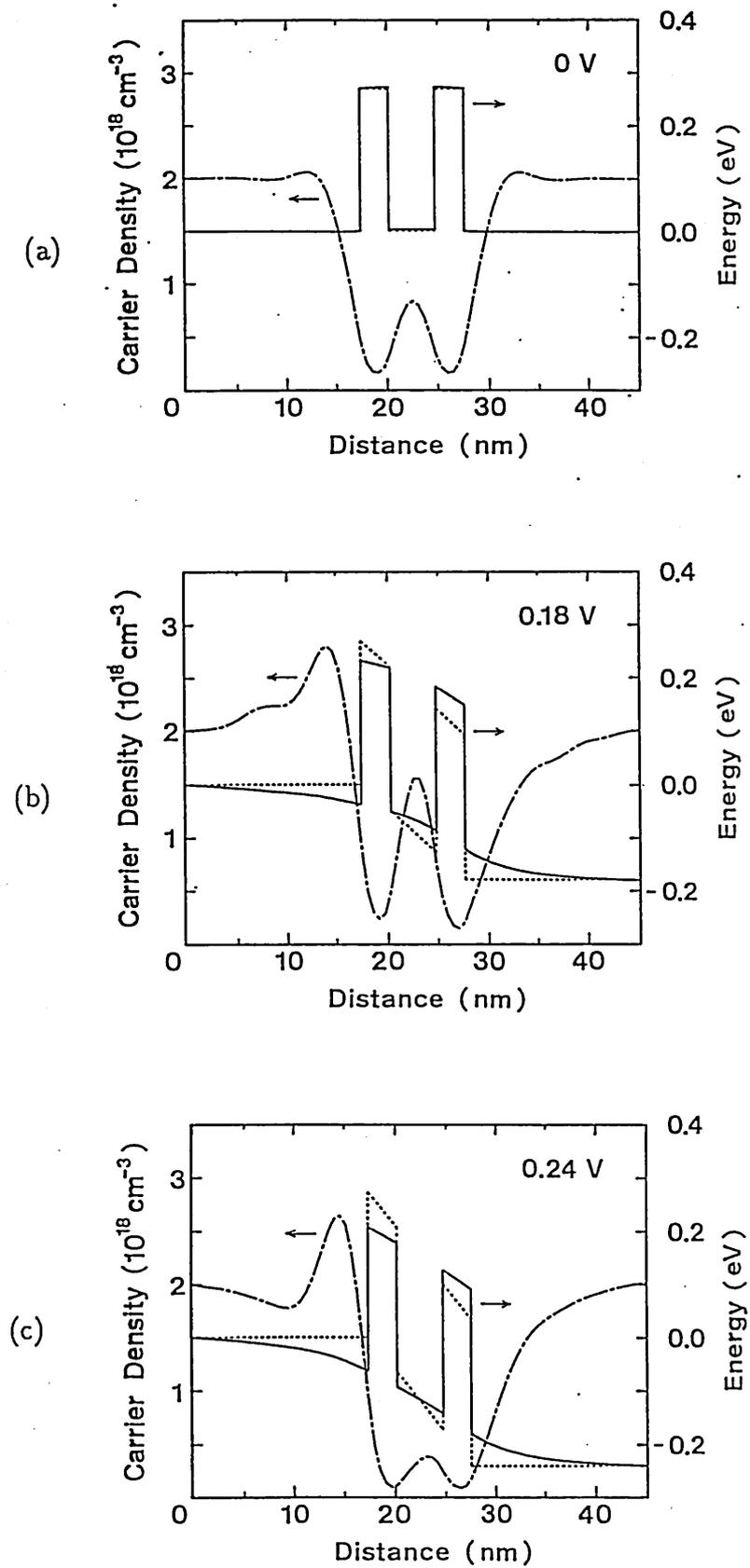


Fig.4

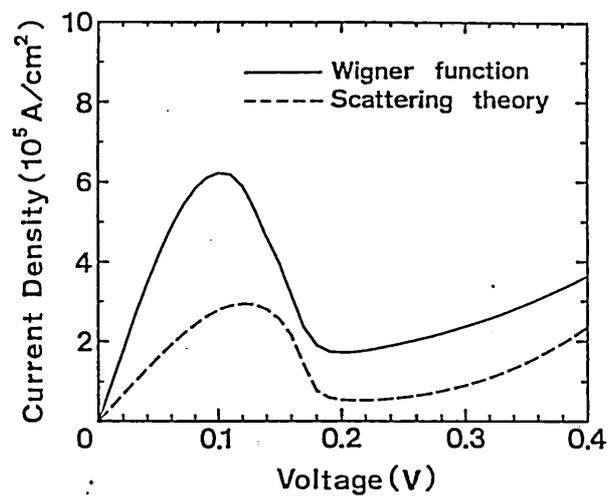


Fig.5

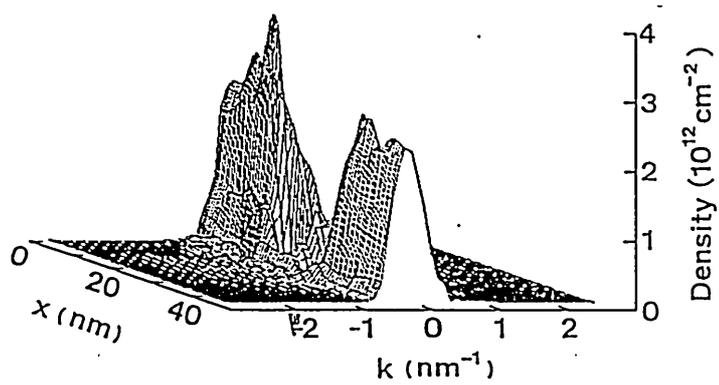


Fig.6

DYNAMIC SIMULATION OF ELECTRON TRANSPORT USING IMPROVED WIGNER FUNCTION MODEL

H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi
Department of Electronic Engineering, Kobe University
Rokko-dai, Nada-ku, Kobe 657, Japan
Phone:+81-78-881-1212 Ext 5108

ABSTRACT

The precise simulation of quantum transport in quantum size structures has become more important with the recent progress of crystal growth technology. The Wigner function model seems to be a powerful method to analyze the static and dynamic behavior of quantum size optical and electronic devices[1]-[4], because the Wigner function model could simulate the nonlocal effect such as a quantum repulsion due to barrier potential. However, there have been a number of essential problems left to apply the model to practical quantum devices. Recently, we have presented first an exact nonlocal formulation in the Wigner representation due to a spatially varying effective mass and shown that the positional variation of effective mass plays an important role in the transport characteristics of the double barrier resonant-tunneling diode(RTD). In addition, we have pointed out that the self-consistent calculation of electrostatic potential should be included to model the space charge in a quantum well[4]. Since our previous paper was primarily concerned with the formulation of the problem, only the static behavior of the RTD was presented. As a next step, the dynamic transport of the RTD will be studied using the improved Wigner function model. To discuss a large signal transient behavior, the device is switched from a bias at the peak of the I-V curve to the valley. So far, the oscillatory current transient and tremendous overshoot in current were reported for the abrupt bias switch. The transient response was explained based upon the different origins[3][5]. In this paper, to give a clear understanding of such an oscillatory behavior, not only the current response but the time varying electron densities in the devices are studied in detail. Two types of AlGaAs/GaAs symmetric double barrier RTD with the same configuration except for barrier thickness are simulated. The well width is 5.1nm and the barrier thickness for two models is 2.8nm and 5.1nm, respectively. They are all undoped. On each side of the device the 5.1nm undoped spacer layer and the 25.4nm doped electrode are assumed. For both models, the initial current overshoot and the subsequent undershoot take place in 0.4ps. After such a large initial response, the damped plasma oscillation with a period of 0.1ps follows. The period exactly corresponds to the doping density 10^{18}cm^{-3} of the electrodes. The current transient continues longer time for the thicker barrier model. From the examination of the time varying electron densities in the electrodes, the initial overshoot in current is found due to a rapid discharge of the electrode charge stored before switching. It is also found that the total electron charge trapped in the well decreases to the steady value with the oscillatory variation caused by the outside change. A slower decay and a longer lasting transient in charge are seen for the thicker barrier model. The decay time of the charge trapped in the well is estimated roughly 0.5ps for the 2.8nm barrier model, and 0.8ps for the 5.1nm barrier model.

REFERENCES

- [1]W. R. Frensley, "Wigner-function model of a resonant-tunneling semiconductor device," Phys. Rev. B36, pp. 1570-1580, 1987.
- [2]H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi, "Quantum mechanical simulation of hole piling and transient response of long wavelength APD's," OEC'90, 13B3-7, 1990.
- [3]N. C. Kluksdahl, A. M. Krivan, and D. K. Ferry, "Self-consistent study of the resonant-tunneling diode," Phys. Rev. B39, pp. 7720-7735, 1989.
- [4]H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi, to be published.
- [5]R. K. Mains and G. I. Haddad, "Time-dependent modeling of resonant-tunneling diodes from direct solution of the Schrödinger equation," J. Appl. Phys., 64, pp. 3564-3569, 1988.

HOLE TRANSPORT AT THE HETEROINTERFACES OF InGaAs/InP AVALANCHE PHOTODIODES

H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi

Department of Electronic Engineering, Kobe University
Rokko-dai, Nada-ku, Kobe 657, Japan

SUMMARY

The high speed response of avalanche photodiodes (APDs) is degraded by hole trapping at the heterointerface between the separated absorption and multiplication region. The photo-excited holes are trapped in a triangular quantum well formed at the heterojunction and escape from the quantum subbands only by thermionic emission. Practically, the insertion of a thin quaternary layer at the heterojunction (QI structure) has been successful in eliminating hole trapping. However, to design the proper transition region at the heterojunction, a quantum mechanical simulation model describing hole transport is required.

In this paper we discuss quantum transport in photonic devices for the first time based upon Wigner function model[1]. As a model of APD, a finite quantum size region is considered at the heterointerface as shown in Fig.1, where (a) is the conventional abrupt heterostructure, (b) the QI structure. The quaternary layer thickness t is variable. For modeling, the virtual electrodes are assumed on both ends of the model. In the simulation, the quantum mechanical Liouville equation for Wigner function and the Poisson's equation are solved simultaneously using the finite difference method with a mesh spacing of 0.5nm. The scattering process is treated by the introduction of a relaxation time of 0.1ps (collision length 15nm at 300K). Fig.2 shows the computed hole density distribution for a bias of 1.8V (average electric field 2×10^5 V/cm). In each illustration, the dotted line denotes the hole density for the abrupt heterostructure. Around the two heterointerfaces, hole pile-up is always found. However, the left accumulation is smaller than the right one and it decreases with the quaternary layer thickness. This is due to the fact that holes are accelerated traveling in such a thin quaternary layer. Fig.3 shows the variation of the total trapped holes as a function of quaternary layer thickness t . $t=0$ corresponds to the abrupt heterostructure. For reference, the hole accumulation of the InGaAsP/InP abrupt heterostructure is shown in horizontal dashed line, that gives the reduction limit of hole pile-up for the QI structure. The total hole accumulation is found to decrease as quaternary layer thickness and bias voltage increase. One exception is seen around $t=5$ nm at 0.9V due to quantum effect. It is worth noting that the reduction limit is realized by such a thin quaternary layer for the bias 1.8V.

REFERENCE

- [1] H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi, "Quantum mechanical simulation of hole piling and transient response of long wavelength APDs," OEC'90, 13B3-7, 1990.

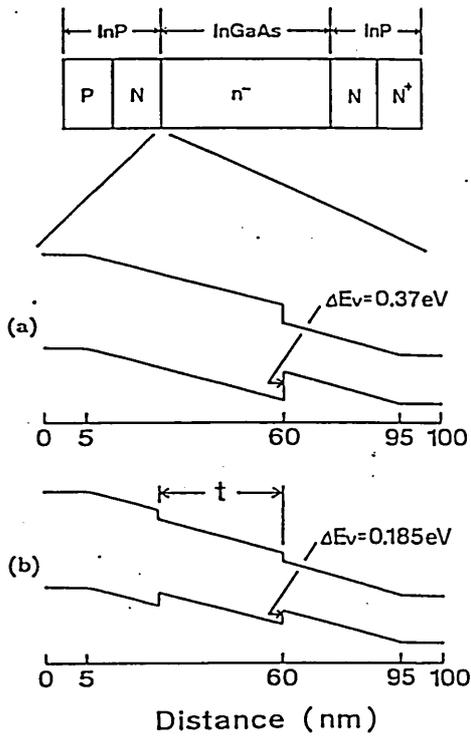


Fig.1 Simulation model of heterojunction. (a) Conventional abrupt heterostructure. (b) Quaternary layer inserted heterostructure (QI structure).

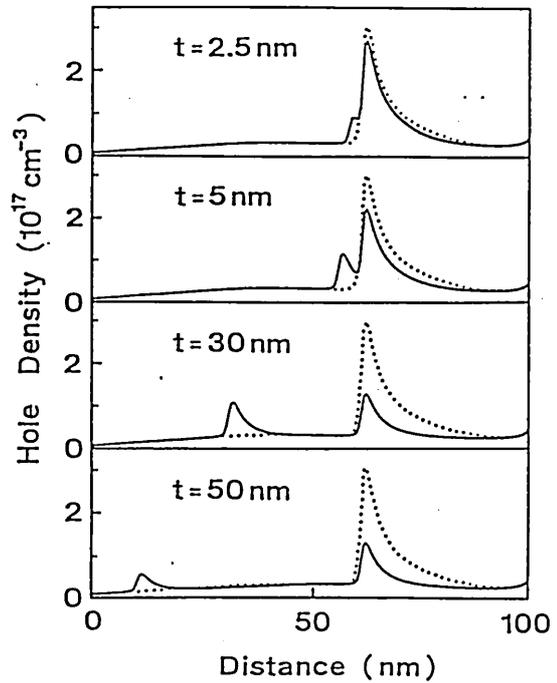


Fig.2 Quaternary layer thickness dependence of hole pile-up in the QI structure for bias 1.8V (average electric field 2×10^5 V/cm). Dotted line denotes the hole density for the abrupt heterostructure.

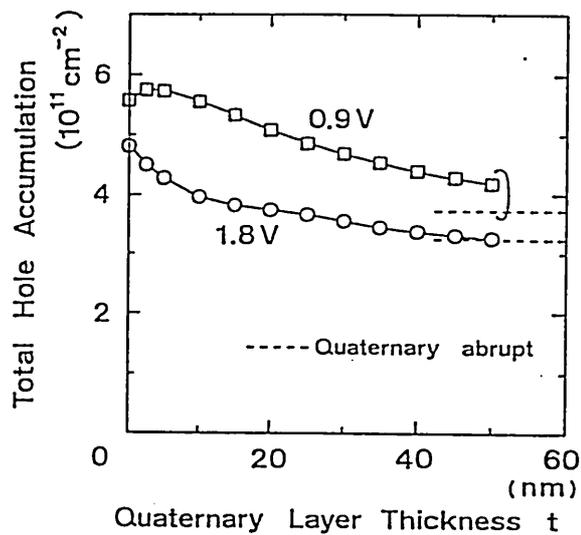


Fig.3 Quaternary layer thickness dependence of total hole accumulation. 0.9V and 1.8V correspond to the average electric fields of 1×10^5 V/cm and 2×10^5 V/cm, respectively.

輻射科学研究会資料 (RS90-19)

位相分割回路を用いた広帯域アクティブ電力分配器,
ハイブリッド結合器および結合量可変形方向性結合器

豊田幸弘・里村 裕
(阪工大)

平成3年3月9日 (土)

大阪工業会館

位相分割回路を用いた広帯域アクティブ
電力分配器，ハイブリッド結合器および
結合度可変方向性結合器

Broad-band Active Power Dividers, Hybrid Couplers
and Variable Coupling Directional Couplers Using
Phase Divider Circuits

豊田 幸弘 里村 裕
Sachihiro TOYODA Yutaka SATOMURA
大阪工業大学 電気工学科
Osaka Institute of Technology

あらまし この論文はアクティブ電力分配器と 180° ハイブリッド結合器および結合度可変方向性結合器について述べてある。回路構成についてはシングルゲートおよびデュアルゲートFETを用いて位相分割回路を形成しており，これを応用して2分配および4分配電力分配器と， 180° ハイブリッド結合器，および結合度可変方向性結合器を試作した。これらの動作周波数範囲はそれぞれ，0.3から4.5GHz，および0.5から4GHzまでを得た。

1. まえがき

マイクロ波帯での電力分配器と3dB 180° ハイブリッド結合器および結合度可変方向性結合器の論文については，すでにいくつか報告されている[1~3]。市販されている広帯域電力分配器[1]についてはウィルキンソン方式が採用されており，周波数が低くなると大型化になり，数100MHzの周波数領域になると集中定数回路で構成されている。また，電力分配器は分配数を増すと分配損が大きくなるという問題が生じる。一方，市販されている3dB 180° ハイブリッド結合器[2]の場合も周波数が低くなると大型になり，1MHz以下の周波数では集中定数回路で構成されている。そこでこれらの問題点を克服するために，最近，アクティブ電力分配器の開発の機運が高まり，研究成果が報告されている[4, 5]。

文献[4]は分布形増幅器の技術を用いて電力分配器を構成し，広帯域特性を得ている。しかし，入力端子から出力端子へ電力を伝送することは可能であるが，逆方向は不可能である。さらに分布形増幅器は低域通過フィルタを用いているので，高インピーダンスを実現させる

場合に帯域幅が劣化するという問題がある。

文献[5]はブリッジT形低域通過フィルタ回路を用いた分布形および抵抗形アクティブ電力分配器を構成している。この方式は文献[1]に比べて優れているところは，高インピーダンスにしても帯域幅の劣化がないので広帯域特性を得られる。しかし，電力の伝送は一方方向性で，逆方向には使用することが出来ない。文献[4]と[5]の問題点を解決するために，著者はシングルゲートおよびデュアルゲートFETを用いて位相分割回路を形成して，3種類の回路系を構成した。

まず最初は，電力分配器を考案した。この電力分配器は入力端子から出力端子へ，また逆方向へも電力を伝送できる2分配および4分配電力分配器となっている。また，2番目として 180° ハイブリッド結合器も考案した。両者の動作周波数範囲は0.3から4.5GHzまであり，分配損は0.4dBであった。また，アイソレーションは20dBを得た。3番目は文献[3]に示す結合度可変方向性結合器の回路構成を，シングルゲートおよびデュアルゲートFETを用いて構成した。動作周波数範囲は0.5から4.5GHzまでであり，結合度は+10dBから-40dBまで可変できた。また，アイソレーションは33dBであった。

以下，アクティブ電力分配器と 180° ハイブリッド結合器および結合度可変方向性結合器について詳しく述べる。

2. アクティブ電力分配器

2-1. アクティブ2分配電力分配器の回路構成

アクティブ電力分配器の回路構成を図1に示す。FET1からFET5までの回路構成は位相分割回路を形成している[6, 7]。端子1から電力が入射するとFET1

のドレインとソースから大きさが等しく逆位相の出力電力が得られる。FET 1のドレインから得られた出力電力はFET 2のゲートに供給され、ソースから出力電力が得られる。その出力電力は端子2へ送られる。

ここで端子2からFET 3を介して端子1へ出力電力が帰還しないようにするために、FET 2のドレインおよびソースから得られた出力電力をFET 3のゲート1と2へ供給する。ゲート1および2へ供給された電力の振幅が等しく逆位相であれば、FET 3のドレインとソースからは出力電力は生じない。

このとき、FET 3の2つのゲートへ供給する電力の振幅を等しくするには、 R_a の抵抗値を調節すれば良い。

一方、端子2から入射した電力は、FET 3を介して端子1へ送られる。端子1からFET 1を介してFET 2およびFET 4のゲートへ出力電力が送られないようにするために、FET 3のドレインとソースから得られる逆位相の振幅をFET 1のゲート1および2へ供給する。この逆位相の振幅を等しくするように R_c の抵抗値

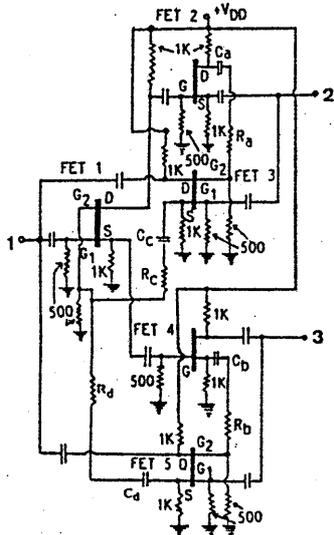


図1 アクティブ2分配電力分配器の構成図

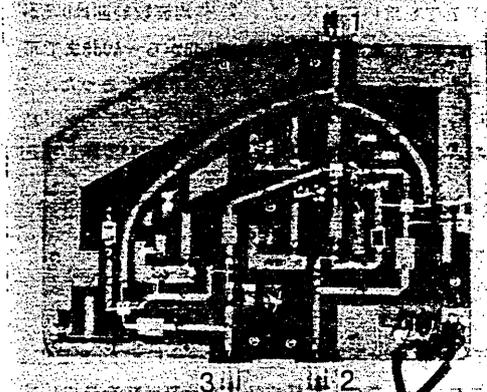


図2 図1に示す2分配電力分配器の写真

を調整すれば、FET 1のドレインおよびソースからは出力電力は生じない。このようにすることによって、端子2と3の間のアイソレーションが保たれることになる。ここでは、端子2および3には同相の出力が得られるような回路構成にしてある。FET 1のソースから得られた出力電力はFET 4を介して端子3へ送られる場合も上述の回路系の動作と同様である。

試作したアクティブ2分配電力分配器の写真を図2に示す。

2-2. 実験結果

図2に示す試作したアクティブ2分配電力分配器の周波数特性を図3に示す。この電力分配器の動作周波数範囲は0.3から4.5 GHzまでである。 S_{21} , S_{31} , S_{12} および S_{13} の挿入損は0.4dBであり、4 GHz以上の周波数では0.7dBであった。市販されているマイクロストリップ線路で構成した2分配電力分配器の分配損は3dBであるが、アクティブ電力分配器の方は0.4dBと非常に小さいことがわかる。端子2および3の位相差は周波数0.3から1GHzまで約 1° であり、1GHz以上の周波数では 1° から 5.5° まで変化した。

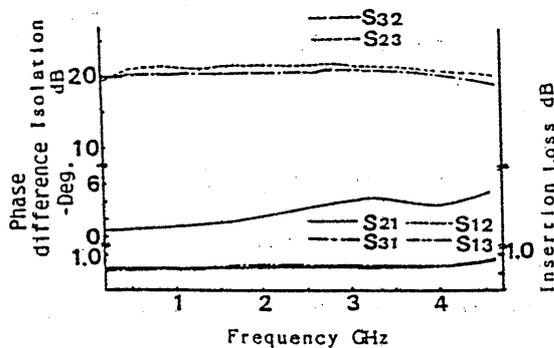


図3 図2に示す2分配電力分配器の周波数特性

電力分配器の出力側の端子2と3の間のアイソレーションについては、 R_a , R_b , R_c および R_d の抵抗値で決まる。アイソレーションの一番大きいときの抵抗値は約 2Ω であった。そのときの S_{32} および S_{23} のアイソレーションはそれぞれ22および20dBであった。

この電力分配器にFETを用いているにもかかわらず挿入損が0.4dBにした理由については、文献[7]に述べてある。

4.5GHz以上の周波数になると各々のFETのドレイン

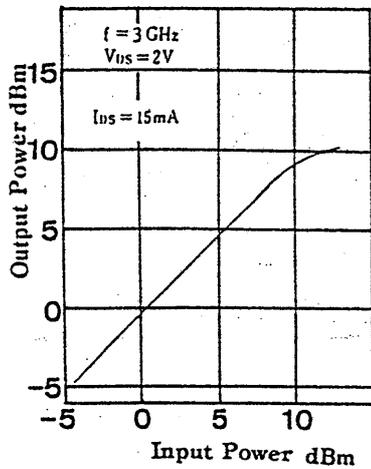


図4 入力電力対出力電力特性

とソース間の位相差が 180° 以下になって、S23およびS32のアイソレーションは低下することを実験結果から確かめた。図2に示した電力分配器の入出力特性を図4に示す。入力電力を9 dBm以上にすると出力電力は飽和することから、この電力分配器は入力電力9 dBmまで使用できることがわかった。

2-3. アクティブ4分配電力分配器の回路構成と実験結果

アクティブ4分配電力分配器の回路構成を図5に示す。2-1で述べた2分配電力分配器に比べて、11個のシングルおよびデュアルゲートFETを必要とした。動作原理については、2分配電力分配器の時と同様である。図5に示すような回路構成を用いると回路は複雑になるが、電力分配器の分配数を増加させても構成可能となる。試作した4分配電力分配器の周波数特性を図6に示す。この電力分配器の動作周波数範囲は0.3から4.7GHzまでである。4分配電力分配器の挿入損 S21, S31, S41およびS51は0.75dBであり、4GHz以上の周波数では0.9dBであった。2分配電力分配器の挿入損に比べて2倍近くになったのは、回路の構成上、3個のFETを縦続接続したためと考えられる。

それに比べて、出力側から入力側へ電力を伝送する場合のS12, S13, S14およびS15の挿入損は0.4dBで、4GHz以上の周波数では0.7dBであった。従来からあるストリップ線路で構成した4分配電力分配器の分配損は-6dBであるが、アクティブ4分配電力分配器では0.75dBと非常に小さい。

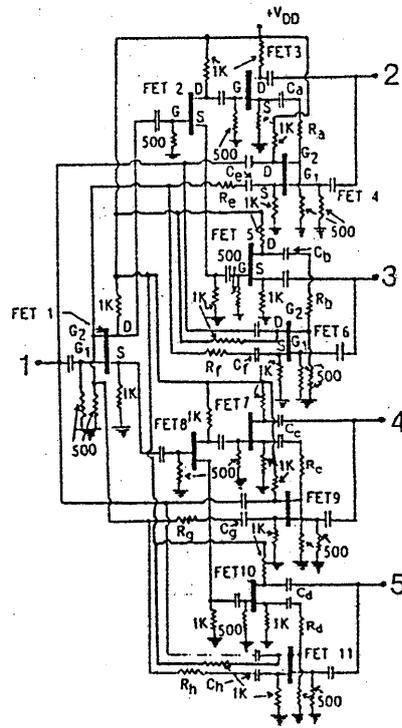


図5 アクティブ4分配電力分配器の構成図

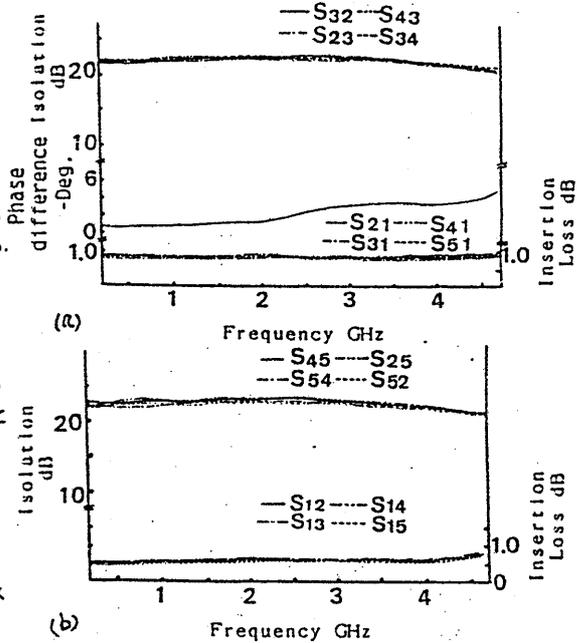


図6 図5に示す電力分配器の周波数特性

出力側の各端子間のアイソレーションについては、 R_a から R_b までの8個の抵抗値を調節して決める。アイソレーションの一番大きいところの抵抗値は 2Ω であった。図6(a)に示すS32, S43, S23およびS34のアイソレーションは23.5から24dBまでの間であった。図6(b)に示すS45, S54, S25およびS52のアイソレーションもそれぞれ24および25dBを得た。各端子間の位相差は、周波数0.3から1GHzまで約 1° である。1GHz以上の周波数では、 1° から 5° まで変化していることを観測した。

3. アクティブ 180° ハイブリッド結合器

アクティブ 180° ハイブリッド結合器の回路構成を図7に示す。このハイブリッド結合器は、2-1節で説明したアクティブ電力分配器の動作と同様であり、位相分割回路を応用したものである。試作した回路系は、マイクロストリップ線路で構成した3dB 180° ハイブリッド結合器と同様な動作をするように構成している。アクティブ電力分配器の回路と図7に示す

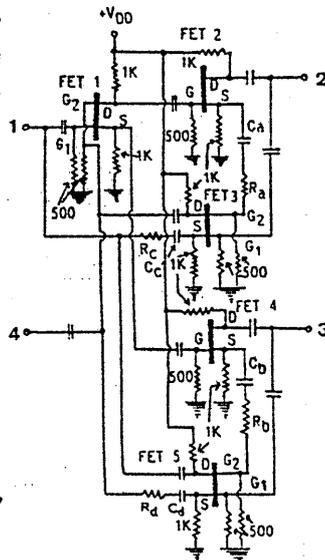


図7 アクティブ 180° ハイブリッド結合器の構成図

試作した回路系と異なるところは、端子2と3の間の位相差が 180° である点である。また、端子4は無反射終端にした。端子1から電力を供給すると、端子2と3に振幅が等しく逆

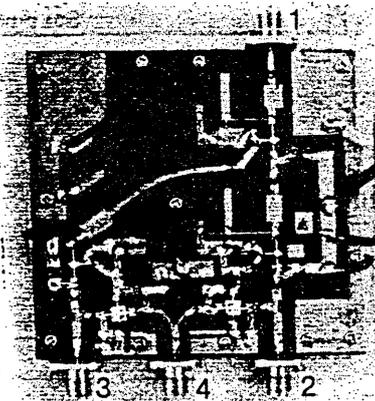


図8 図7に示す 180° ハイブリッド結合器の写真

位相の出力電力が生じる。一方、端子2および3から電

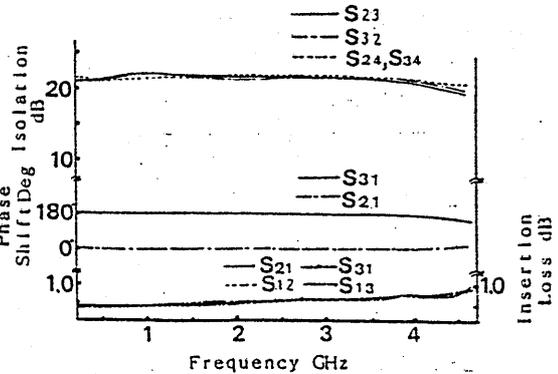


図9 図8に示す 180° ハイブリッド結合器の周波数特性

力を供給すると、端子1に出力電力が生じる。試作したアクティブ 180° ハイブリッド結合器の写真を図8に示す。

この 180° ハイブリッド結合器の動作周波数範囲は、図9から0.3から4GHzまでであることがわかる。S21, S31, S42およびS43の挿入損は1GHzまでは0.4dBであり、1から4GHzまでは0.4から0.65dBまで増加していることがわかる。端子2と3の間の位相差は、0.3から4GHzまでは 180° を得た。4GHz以上の周波数では 180° 以下になった。

アクティブ 180° ハイブリッド結合器のアイソレーションについては、 R_a と R_b の抵抗値で決まる。アイソレーションの一番大きい時の抵抗値は 2Ω であった。そのときのS23, S32, S24およびS34のアイソレーションは約2.2dBを得た。

4. アクティブ結合度可変形方向性結合器

この章では2種類のアクティブ結合度可変形方向性結

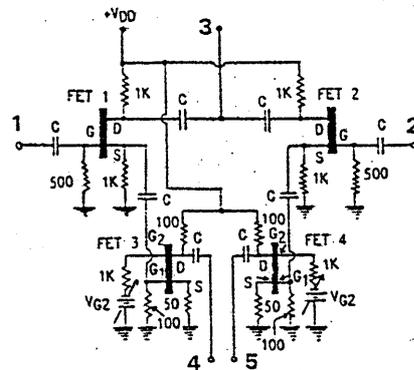


図10 アクティブ結合度可変形方向性結合器の構成図

合器について述べる。

最初のアクティブ結合度可変形方向性結合器の回路系を図10に示す。文献[3]に述べた結合度可変形方向性結合器の回路構成と同様な動作原理にするため、この回路系では新しくシングルおよびデュアルゲートFETを用いて方向性結合器を試作した。

端子1から入射した電力はFET1のゲートに供給され、ドレインとソースに出力電力が生じる。ドレインから得られた出力電力は端子3へ伝送される。一方、ソースから得られた出力電力はFET3のゲート1へ供給される。FET3のゲート2へ供給しているVG2のバイアス電圧を変化させることによって、端子4に生じる出力電力(結合度)を可変させることが出来る。このとき、端子2および5には出力電力は生じない。

一方、端子2から入射した電力は、FET2および4を介して出力電力が送られる。この動作については上述の動作と同様である。故に図10に示す回路は、結合度可変形方向性結合器と同じような動作をすることがわかる。

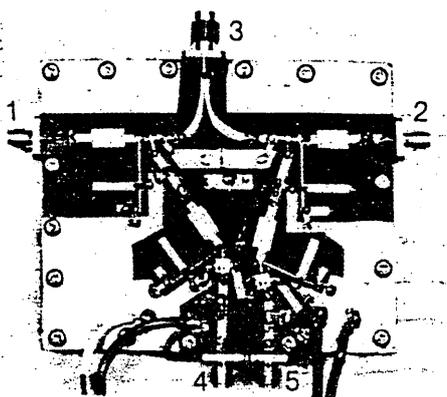
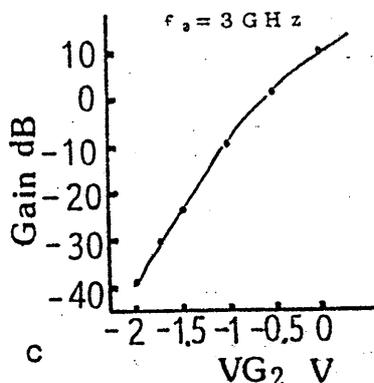
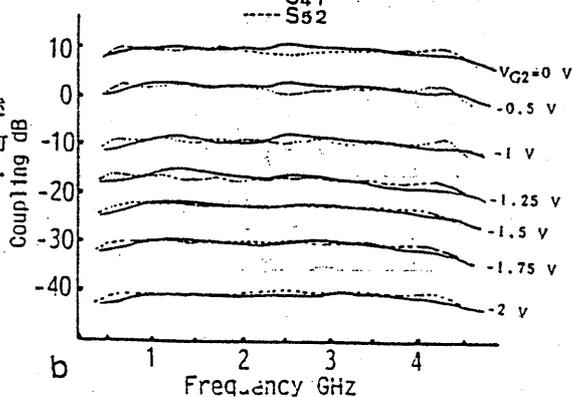
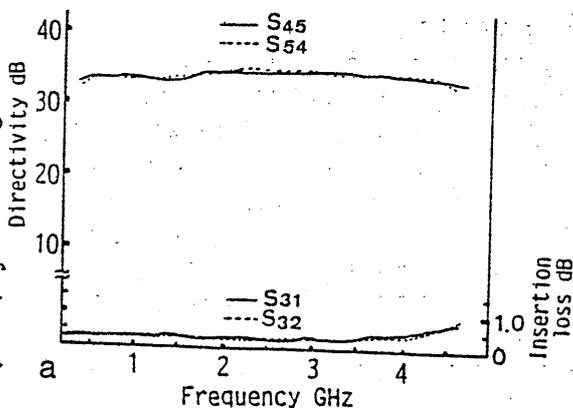


図11 図10に示す結合度可変形方向性結合器の写真

試作したアクティブ結合度可変形方向性結合器を図11に示す。また、その周波数特性を図12に示す。動作周波数範囲は0.5から4.5 GHzまでである。

端子1から入力電力を加えると、FET1のドレインから端子3へ出力電力が生じる。このときのS31の挿入損は図12(a)に示すように周波数が0.5から2.7GHzまでは0.5dBであり、2.7GHz以上の周波数では0.5から0.9dBまで増加した。

FET1のソースから得られた出力電力はFET3のゲートへ供給され、FET3を介して端子4へ送られる。このとき端子2および5には出力電力は生じていないことを実験結果から確かめた。



- (a) 挿入損および方向性
- (b) バイアス電圧VG2を変化させたときの結合度の変化
- (c) V_{G2} を変化させたときの利得変化

図12 結合度可変形方向性結合器の周波数特性

また、端子4の出力電力は、FET3のゲート2へ供給しているバイアス電圧を0Vから-2Vまで変化させることによって、図12(b)に示すように+10 dBから-

40dBまで可変した。

FET 3およびFET 4の回路系は増幅器として動作させ、ゲート2へ供給しているバイアス電圧を変化させて増幅器の利得を可変させている。別に増幅器でなくても、0.5から4.5GHzまでの帯域を持つ可変減衰器があればこれを用いればよい。周波数を3GHz一定にして、FET 3のゲート2のバイアス電圧を0Vから-2Vまで可変させたときの、増幅器の利得変化を図12(C)に示す。また、端子5の方向性は34dBを得た。一方、端子2から入射電力を加えた場合についても、上述の測定結果と同様であった。

2番目の結合度可変形方向性結合器の回路系を図13に示す。端子1から電

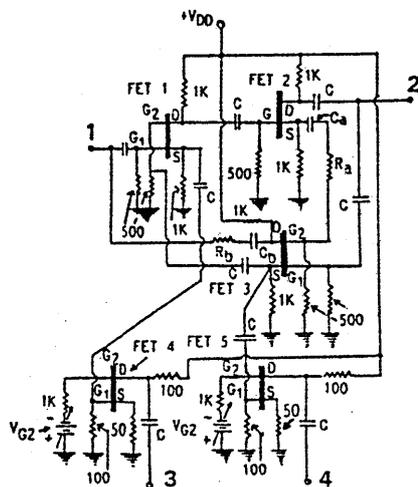


図13 アクティブ結合度可変形方向性結合器の構成図

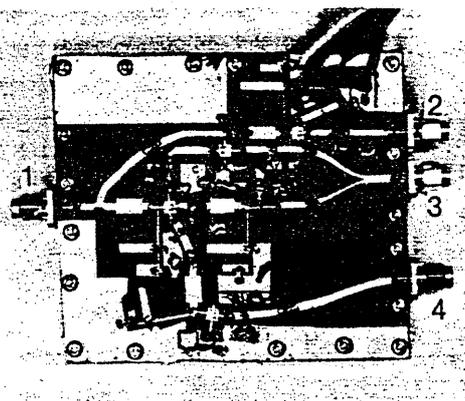


図14 図13に示す結合度可変形方向性結合器の写真

力が入射すると、FET 1のドレインから出力電力が得られる。その出力電力はFET 2を介して端子2へ送られる。ここで端子2から端子1へ出力電力が帰還しないように、FET 2のドレインとソースから得られた出力電力をFET 3の出力電力は生じない。

FET 1のソースから得られた出力電力はFET 4のゲート1へ供給され、端子3に出力電力が生じる。FET 4のゲート2のバイアス電圧を変化させたとき、端子3の出力電力を可変させることが出来る。このとき、端子4には出力電力は生じない。

一方、端子2から入射した電力は、FET 3および5を介して端子1および4へ送られる。この動作については上述の回路系の動作と同様である。

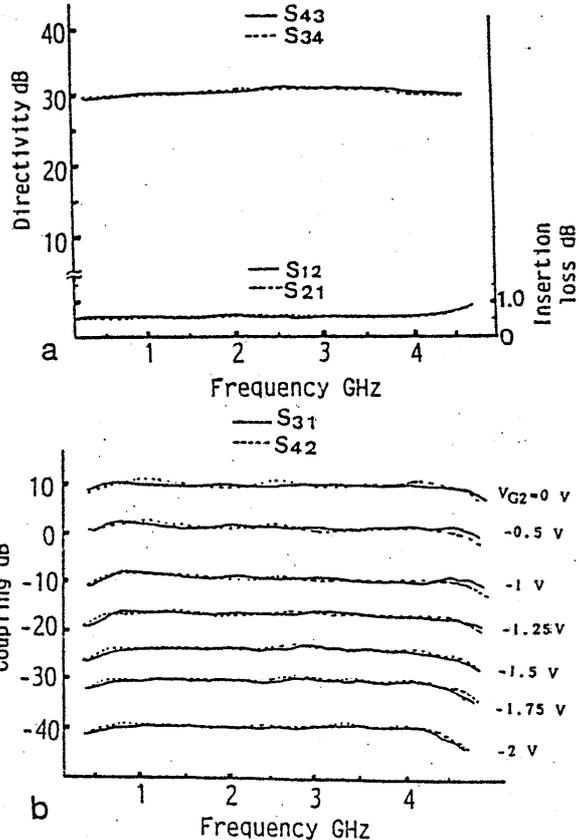


図15 結合度可変形方向性結合器の周波数特性

試作した結合度可変形方向性結合器を図14に示す。また、その周波数特性を図15に示す。動作周波数範囲は0.5から4.5GHzまでである。端子1に入射した電力がFET 1および2を介して端子2へ送られるときの挿入損S21は、図15(a)に示すように周波数0.5から4GHzまで0.5dBであり、4GHz以上の周波数では0.5から0.95dB

であった。FET4のゲート2のバイアス電圧を0Vから-2Vまで変化させたとき、端子3に生じる出力電力、即ち結合度S31は図15(b)に示すように+10から-40dBまで可変した。このとき、端子4には出力電力は生じない。また、端子4の方向性は30dBを得た。一方、端子2から入射電力を加えた場合についても、上述の測定結果と同様であった。

文献[3]で述べたように、ストリップ線路で構成した方向性結合器と位相器および電力分配器を用いて構成した結合度可変形方向性結合器は、低い周波数で動作させようとするとき大型化になる。それと比べると、図10および13に示す回路系を用いると小型化にすることが出来、挿入損およびアイソレーションならびに結合度の変化範囲も広くとることが出来た。

5. むすび

アクティブ2分配および4分配電力分配器、180°ハイブリッド結合器および2種類の結合度可変形方向性結合器についてそれぞれ述べた。これらの回路系は、シングルおよびデュアルゲートFETを用いた位相分割回路系を1芯用いて構成した。

市販されている電力分配器の分配損に比べて、アクティブ電力分配器の方は2分配のもので0.4dBであり、4分配で0.75dBと非常に小さい。また、アクティブ180°ハイブリッド結合器および結合度可変形方向性結合器も試作した。アクティブ180°ハイブリッド結合器の動作周波数範囲は0.3から4GHzまでであり、また結合度可変形方向性結合器の結合度の変化範囲は+10dBから-40dBまで可変出来た。

今後は、X帯まで使用できるアクティブ電力分配器と180°ハイブリッド結合器および結合度可変形方向性結合器を試作することが課題である。

文 献

- [1] E.J.Wilkinson:"An N-Way Hybrid Power Divider",IEEE Trans.MTT.,pp.116-118 (Jan. 1960).
- [2] J.K.Shinizu:"A Strip-Line 3dB Directional Coupler",Scientific Report 1,Contract AF 19 (604)1571,Stanford Research Institute,Menlo Park Calabasas,California(June,1957).

- [3] 豊田幸弘:"広帯域結合度可変形方向性結合器",信学論C-1,J73-C-1, 4,pp.184-188(1990年 4月).
- [4] D.Levy et al.:"A 2-18 GHz Traveling Wave Lossless Two-Port Combiner",IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest,pp.503-506(May 1986).
- [5] Yasushi Ito:"Distributed and Lossy Match Active Power Splitters Using Bridged-T Low-Pass Filter Networks", 1990 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, pp.1089-1092(1990).
- [6] 豊田幸弘:"0.5~2.4および5~18GHz帯アクティブサーキュレータ",信学論C-1, J72-C-1, 3,pp.204-207(1989年 3月).
- [7] 豊田, 里村:"広帯域アクティブサーキュレータ",信学論C-1,J73-C-1.10,pp.665-671(1990年10月).

輻射科学研究会資料

RS90-20

開放形導波路のベクトル有限要素法解析

柚木宏友 松原正則
(大阪大学 工学部)

平成3年 3月9日

1 まえがき

変分表現式を有限要素法を用いて数値解析する方法によって、任意の形状や構造をした導波路を解析する研究が活発に行われている。従来提案されている方法としては使用される変分表現式及び変分表現式中で用いられる試験関数の構成法の相違によって次のようなものがある。

- (I) 電界の横成分 e_t および縦成分 e_z の 3 成分, または, 磁界の横成分 h_t および縦成分 h_z の 3 成分を試験関数とし, 角周波数 ω を固有値とする方法. [1]-[4]
- (II) 電界の横成分 e_t および 磁界の横成分 h_t の 4 成分を試験関数とし, 伝搬定数 β を固有値とする方法. [5],[6]
- (III) 電束密度の横成分 d_t および磁界の縦成分 h_z , または, 磁束密度の横成分 b_t および電界の縦成分 e_z の 3 成分を試験関数とし, 伝搬定数 β を固有値とする方法. [7]

ところで, 方法 I には固有値として伝搬定数 β ではなく角周波数 ω が与えられるという本質的な欠点がある。方法 II は固有値として β が与えられるという長所を持つと共に, 異方性媒質や損失性媒質を含む導波路に対しても適用できるという汎用性を持っている。しかしながら, 等方性媒質や無損失性媒質のみからなる通常の導波路に対しては方法 II のように電磁界の 4 成分ではなく方法 I のように電磁界の 3 成分を試験関数とする方法がより望ましい。この要請を満足する方法として方法 III が提案されている。

本論文では, まず電界の 3 成分, または, 磁界の 3 成分を試験関数とし, 伝搬定数を固有値とする方法 (方法 IV) を提案する。方法 IV は方法 I の発展形であり, 方法 III に類似の特徴を有している。

一方, 有限要素法を開放形導波路に対しても適用しようと, いくつかの試みが行われている。これらの代表的なものとしては界が十分弱いと推定される導波路主要部の十分遠方に仮想境界をおく方法, [8]-[10] 無限要素と呼ばれる特殊な要素を用いる方法 [11]-[13] および等角写像を用いて考察する無限大領域全体を有限な領域に写像する方法 [14] があるが, それらは適用性の低さや適用の難しさがあり満足できるものとは言い難い。

そこで、本論文では方法IVを開放形導波路に適用する手法を提案する。すなわち、開放形導波路の全領域を導波構造の主要部分を含む有限な大きさの内部領域 S_1 とそれ以外の無限な大きさの外部領域 S_2 に分割する。ついで、後述する座標変換を用いて S_2 を有限な領域 \widehat{S}_2 に写像する。そして、 S_1 と S_2 にではなく、 S_1 と写像で得られた \widehat{S}_2 に対して有限要素法を適用する。一般に複雑な導波構造を有する S_1 は写像されていないので導波構造に適合するように容易に要素分割することができる。また、 S_2 は簡単な構造であり、従って、 \widehat{S}_2 を要素分割することも容易である。この方法により開放形導波路を閉鎖形導波路と同様に有限要素法を用いて容易に数値解析することができる。本論文で提案する方法の妥当性と有効性を検証するため、具体例として、方形誘電体導波路およびマイクロストリップ線路を数値解析している。

2 変分表現式

まず、導波路の横断面を有限個の要素に分割する。次に、 z 方向を向く単位ベクトル \mathbf{z} に垂直なベクトル $\mathbf{f}(x, y)$ およびスカラー $g(x, y)$ を用いて各要素内の電界 $\mathbf{E}(x, y, z)$ および磁界 $\mathbf{H}(x, y, z)$ を次式で表す。¹

$$\mathbf{E} = (\mathbf{f} + j\beta z g) \exp(-j\beta z) \quad (1)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \{j\beta z \times (\mathbf{f} + \nabla g) - \nabla \times \mathbf{f}\} \exp(-j\beta z)$$

このとき、次の微分方程式および境界条件が得られる。
要素内において成立する微分方程式：

$$k^2 \mathbf{f} - \mu \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{f} - \beta^2 (\mathbf{f} + \nabla g) = 0 \quad (2)$$

$$k^2 g + \mu \nabla \cdot \frac{1}{\mu} (\mathbf{f} + \nabla g) = 0$$

¹ $\mathbf{E} = (\mathbf{f} + jz g) \exp(-j\beta z)$ とおくと、 ω を固有値とする方法Iの変分表現式が得られる。

要素と要素との境界における境界条件：

$$\begin{aligned}z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}) &= \text{連続} \\ g &= \text{連続}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \frac{1}{\mu}(\mathbf{f} + \nabla g) &= \text{連続} \\ z \cdot \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{f} &= \text{連続}\end{aligned}$$

要素と電気壁との境界における境界条件：

$$z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}) = 0$$

(4)

$$g = 0$$

要素と磁気壁との境界における境界条件：

$$\mathbf{n} \cdot \frac{1}{\mu}(\mathbf{f} + \nabla g) = 0$$

(5)

$$z \cdot \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{f} = 0$$

ここで、 \mathbf{n} は要素の境界に立てた単位法線ベクトルであり、また k は波数で $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ である。

式(2)～式(5)より変分表現式

$$\beta^2(\mathbf{f}, g) = \int \frac{1}{\mu} (k^2 |\mathbf{f}|^2 - |\nabla \times \mathbf{f}|^2) dS / \int \frac{1}{\mu} (|\mathbf{f} + \nabla g|^2 - k^2 |g|^2) dS \quad (6)$$

が得られる。ここで、 $\int dS$ は導波路横断面全体にわたる面積分を表す。また、式(6)に用いられる試験関数 \mathbf{f} および g は次に示す強制境界条件を満足する必要がある。

要素と要素との境界における境界条件：

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}) &= \text{連続} \\ g &= \text{連続} \end{aligned} \tag{7}$$

要素と電気壁との境界における境界条件：

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}) &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

式(6)は我々の知る限りでは今までに公表されたことのない全く新しい変分表現式である。式(6)は ω を与えて β を求める形式の変分表現式であるとともに、 \mathbf{f} および g を試験関数とするところの、いわゆる、3成分で表された変分表現式である。

3 閉鎖形導波路と形状関数

閉鎖形導波路の場合には標準的な有限要素法の手法に従って導波路横断面を有限個の三角形要素に分割する。次に、各三角形要素内における \mathbf{f} および g を次式で展開表示する。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, y) &= \sum_{m=1}^6 \mathbf{N}_m^{(1)}(x, y) \phi_m \\ g(x, y) &= \sum_{m=1}^6 N_m^{(2)}(x, y) \psi_m \end{aligned} \tag{9}$$

ここで、 ϕ_m および ψ_m は展開係数である。 $\mathbf{N}_m^{(1)}$ は1次ベクトル形状関数であり、1次スカラー形状関数 $N_m^{(1)}$ を用いて次式で定義される。
[5]

$$N_{2i-1}^{(1)} = \frac{z \times a_k}{a_j \cdot (z \times a_k)} N_i^{(1)}(x, y) \quad (10)$$

$$N_{2i}^{(1)} = \frac{z \times a_j}{a_k \cdot (z \times a_j)} N_i^{(1)}(x, y)$$

ここで、 (i, j, k) は $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ であり、また、 a_m は辺 m (頂点 m に向き合う辺) の単位接線ベクトルである。

式 (9) における $N_m^{(2)}$ は 2 次スカラー形状関数である。 $N_m^{(1)}$ および $N_m^{(2)}$ の具体的な形は、例えば、有限要素法の代表的な教科書である文献 [15] に詳しく述べられているのでここでは省略する。

式 (9) を用いることにより境界条件の式 (7) および式 (8) を満足する試験関数を容易に構成することができる。それらを変分表現式 (6) に代入し、さらに変分表現式の停留性を用いて行列の一般化固有値問題

$$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\} \quad (11)$$

が得られる。ここで、 $[A]$ および $[B]$ は導波路の形状・構造を反映した実対称行列である。 $\{x\}$ は f および g の展開係数 ϕ_m および ψ_m を要素とする固有列ベクトルであり、 $\lambda (= \beta^2)$ は固有値である。式 (11) を解くことにより導波モードの伝搬定数 β および界分布 f, g を知ることができる。

4 開放形導波路と写像

有限要素法は基本的に閉鎖領域の問題に適合しており、開放形導波路に単純に有限要素法を適用することができない。本論文では、まず、開放形導波路の全領域 S を導波構造の主要部分を含む有限な大きさの内部領域 S_1 とそれ以外の無限に大きな外部領域 S_2 に分割する。次に、座標変換

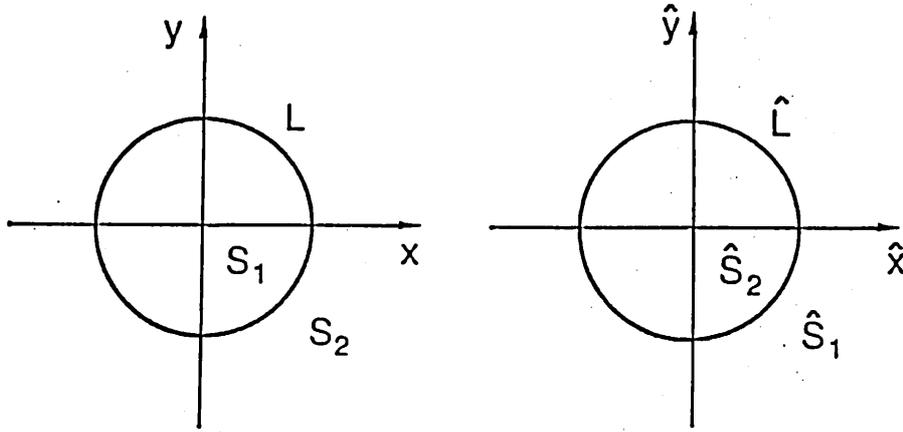


図 1: S_1, S_2 の \hat{S}_1, \hat{S}_2 への写像

$$\hat{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \hat{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

を導入する。このとき、図 1 に示すように S_1, S_2 は \hat{S}_1, \hat{S}_2 に写像される。

すなわち、座標変換式 (12) を用いることにより無限外部領域 S_2 を有限な領域 \hat{S}_2 に写像することができる。そこで本論文では S_1 と写像で得られた \hat{S}_2 に対して有限要素法を適用することにする。すなわち、 S_1 および \hat{S}_2 を三角形要素に分割し、 S_1 および \hat{S}_2 に於けるスカラー形状関数を用いることとする。さらに、1 次ベクトル形状関数 $N_m^{(1)}$ は S_1 においては式 (10) を使い、 \hat{S}_2 においては次式を用いることとする。

$$N_{2i-1}^{(1)} = \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{a}_k)} \frac{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}{\hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2} N_i^{(1)}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (13)$$

$$N_{2i}^{(1)} = \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{a}_j}{\mathbf{a}_k \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{a}_j)} \frac{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}{\hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2} N_i^{(1)}(\hat{x}, \hat{y})$$

ここで、 (\hat{x}_m, \hat{y}_m) は頂点 m の座標である。また、 $\mathbf{a}_m(x, y)$ は図 2 に示すように点 (\hat{x}, \hat{y}) を通り、辺 m に平行な \hat{S}_2 の直線 $\hat{A}\hat{B}$ を S_2 に写

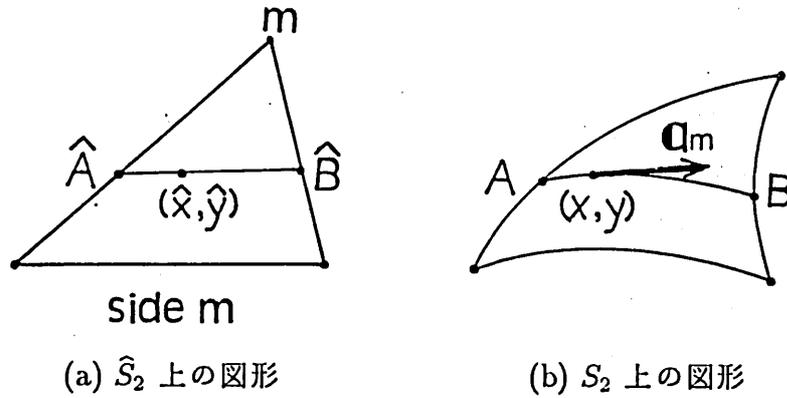


図 2: $a_m(x, y)$ の説明図

像して得られる円弧 AB 上の点 (x, y) における単位接線ベクトルである。このように、式 (10) における a_m の定義とは異なる a_m の定義を用いるのは、図 2 に示すように、 \hat{S}_2 上の三角形は S_2 上の 3 つの円弧で構成された図形に写像され、従って、要素の境界辺における単位接線ベクトルが定ベクトルとはならないからである。

5 数値計算例

具体的な数値計算例として、まず、方形誘電体線路の解析結果を図 3 に示す。ここで、 ϵ_1, ϵ_2 および ϵ_0 はコア、クラッドおよび真空の誘電率であり、 k_0 は真空の波数である。また、 a および b はコアの大きさである。 S_1 と S_2 の境界 L をコアの外接円とし、 S_1 および \hat{S}_2 をいずれも N 個のほぼ等しい大きさの三角形要素に分割する。ただし、実際の数値計算では対称性を利用して 4 分の 1 領域を解析し、 $N/4 = 104$ とした。図 3 に示す解析結果は Goell の選点法を用いた解析結果^[16]とよく一致している。

図 4 にマイクロストリップ線路の解析結果を示す。ここで、 ϵ_1 および ϵ_2 は誘電体基板および空気の誘電率であり、また、 h および w はストリップ導体と接地導体との間隔およびストリップ導体の幅である。この結果は Zhang らの時間領域差分法を用いた解析結果^[17]とよく一

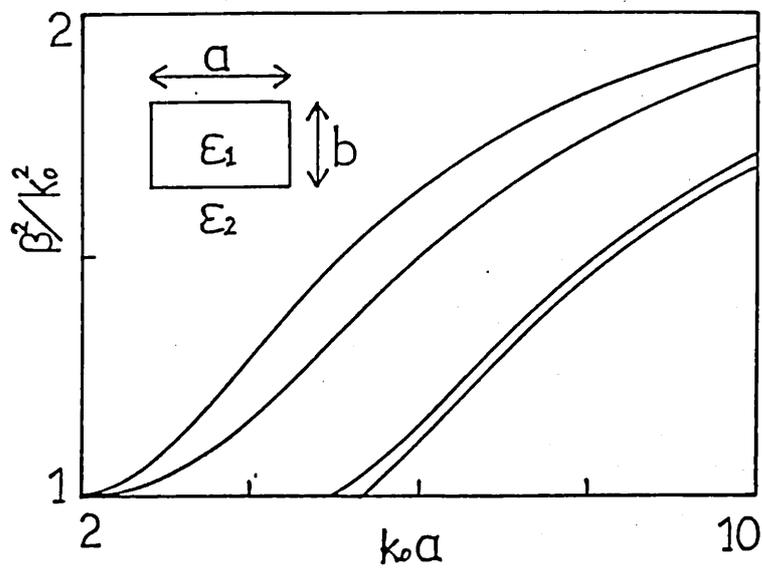


図 3: 方形誘電体線路の分散曲線 ($\epsilon_1 = 2.25\epsilon_0, \epsilon_2 = \epsilon_0, b = 0.5a$)

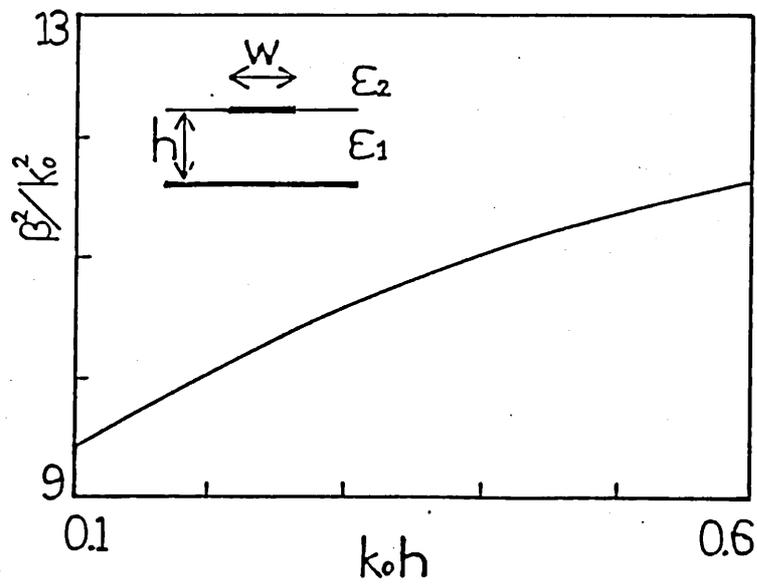


図 4: マイクロストリップ線路の分散曲線 ($\epsilon_1 = 13\epsilon_0, \epsilon_2 = \epsilon_0, w = 1.5h$)

致している。

以上に示した解析例などにより本論文で提案する方法の妥当性を確認することができる。

6 むすび

本論文では、まず、新たな変分表現式を提案した。この変分表現式は電界の3成分（または磁界の3成分）を試験関数として用い、角周波数 ω を与えて伝搬定数 β を求める形式の導波路解析に適合したものである。

次に、無限遠を含む導波路を有限要素法解析する手法を提案した。すなわち、無限遠を含む外部領域を有限な領域に写像し、この写像で得られた有限な領域に有限要素法を適用する手法である。

以上本論文で提案した2つの方法を用いることにより、開放形導波路を含む任意の構造の導波路を有限要素法を用いて容易に数値解析することができる。

参考文献

- [1] A.Konrad: "High-order triangular finite elements for electromagnetic waves in anisotropic media", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-25, pp.353-360(May 1977).
- [2] B.M.A.Rahman and J.B.Davies: "Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-32, pp.922-928(Aug. 1984).
- [3] M.Hano: "Finite-element analysis of dielectric-loaded waveguide", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-32, pp.1275-1279(Oct. 1984).
- [4] 小柴正則, 早田和弥, 鈴木道雄: "誘電体導波路の磁界の3成分を用いた有限要素法解析におけるスプリアス解に関する考察", 信学論(B), J67-B, pp.1333-1338 (昭59-12).
- [5] 松原正則, アンケーオ タプティム, 熊谷信昭: "導波路固有モードの有限要素法解析-電磁界横成分を用いる方法-", 信学論(C), J-69C, pp.548-553 (昭61-05).
- [6] 松原正則, アンケーオ タプティム: "損失・利得のある導波系の有限要素法解析", 信学論(C), J71-C, pp.1398-1403 (昭63-10).
- [7] 大高真人, 小林喬郎: "ベクトル有限要素法による導波路固有モードの解析-電界横成分と磁界縦成分による方法-", 信学論(CI), J72-C-I, (平1-04).
- [8] C.Yeh, S.B.Dong and W.Oliver: "Arbitrarily Shaped inhomogeneous optical fiber or integrated optical waveguides", *J.Appl.Phys.*, 46, pp.2125-2129(May 1975).
- [9] M.Ikeuchi, H.Sawami and H.Niki: "Analysis of open-type dielectric waveguides by the finite-element iterative method", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-29, pp.234-239(Mar. 1981).

- [10] N.Mabaya,P.E.Lagasse and P.Vandenbulcke: "Finite-element analysis of optical waveguides", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-29,pp.600-605(Jun. 1981).
- [11] C.Yeh,K.Ha,S.B.Dong and W.P.Brown: "Single-mode optical waveguides", *Appl.Opt.*, 18,pp.1490-1504(May 1979).
- [12] B.M.A.Rahman and J.B.Davies: "Finite-element analysis of optical and microwave waveguide problems", *IEEE Trans. Microwave theory and Tech.*, MTT-32,pp.20-28(Jan. 1984).
- [13] K.Hayata,M.Eguchi and M.Koshiba: "Self-consistent finite/infinite element scheme for unbounded guided wave problems", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-36,pp.614-616(Mar. 1988).
- [14] R.B.Wu and C.H.Chen: "A variational analysis of dielectric waveguides by the conformal mapping technique", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-33,pp.681-685(Aug. 1985).
- [15] O.C.Zienkiewicz: "The finite element method in engineering science", *McGraw-Hill*(1971).
- [16] J.E.Goell: "A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides", *Bell Syst.Tech.J.*, 48,pp.2133-2160(Sep. 1969).
- [17] X.Zhang,J.Fang,K.K.Mei and Y.Liu: "Calculations of the dispersive characteristics of microstrips by the time-domain finite difference method", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, MTT-36,pp.263-267(Feb. 1988).

波面法線光線を用いた幾何光学

橋本正弘

大阪電気通信大学 応用電子工学科

波面法線光線とは、幾何光学界の波面に垂直な法線ベクトルの軌跡であって、波動の進む方向を示す。これに対して、光のエネルギーが進む方向を示すエネルギー光線を、従来では、単に光線と呼んでいる。これら2つの光線は、異方性媒質では明らかに違っているが、等方性媒質では一致する。そのため、多くの人がこれらを混同して使用しているように見受けられる。しかし、2つの等方性媒質の境界面で波が透過、反射を受けるとき、両光線は自ずと異なってくる。

これまで、透過、反射光線は、後者の光線、即ちエネルギー光線に対して定義されており、教科書に載っている幾何光学はこの定義に基づいた光学である。その基本原理もハミルトンの変分原理であって、ハミルトン光学とも呼ばれている。一方、前者の光線に対して透過、反射を扱った例はこれまでにはない。本講演では、その波面法線光線の幾何光学について述べるとともに、応用例も示す。基本原理はモーペルチュイの変分原理であって、ハミルトンの原理ではないことを強調しておく。これらの詳細は講演時に述べられる予定である。

尚、本内容に関する参考文献は以下のとおりである。

- 1 M.Hashimoto:"Beam waves with sources at complex location",
Electron.Lett., vol.21,No.23,pp.1096-1097, November 1985.
- 2** M.Hashimoto:"Polarized-ray optics in fibers", J.Inst.Electron.
Telecommun.Engrs.(India), vol.32,No.4,pp.265-272, 1986.
- 3 M.Hashimoto:"On sources of complex ray at complex location----
Higher order beam waves----", Proc.Int.URSI Symp., Butapest,
Hungary, August 25-29, 1986, pp.101-103.
- 4 M.Hashimoto:"On sources of complex rays at complex locations:
Higher-order beam waves", Radio Sci., vol.22,No.6,pp.959-962,
November 1987.
- 5 **M.Hashimoto:"A new aspect of guided wave optics----the basic law
of action for modal-ray optics", Proc.Sino-Japanese Joint Meeting
on Optical Fiber Science and Electromagnetic Theory, Nanjing,
China, May 12-14, 1987, pp.31-33.
- 6 橋本正弘:"導波光学における波動の諸原理について"、電子情報通信
学会論文誌C, vol.J70-C,No.11,pp.1455-1465, November 1987.
- 7 橋本正弘、小見山彰:"波面法線光線の光線追跡"、電子情報通信学会
論文誌C, vol.J70-C,No.10,pp.1444-1446, October 1987;
訂正、vol.J71-C,No.1,p.163, January 1988.
- 8 橋本正弘:"Maupertuisの変分原理から光線方程式を直接導出することに

- ついて”、電子情報通信学会論文誌C, vol.J71-C, No.2, pp.324-326, February 1988.
- 9 小見山彰、橋本正弘：“不均質異方性媒質における波面法線光線の光線追跡”、電子情報通信学会論文誌C, vol.J71-C, No.2, pp.327-329, February 1988.
 - 10 橋本正弘：“導波モードの幾何光学界—振幅の幾何光学的解釈—”、電子情報通信学会論文誌C, vol.J71-C, No.4, pp.493-500, April 1988.
 - 11 小見山彰、橋本正弘：“波面法線光線を用いた光学におけるコースティック近傍の電磁界の表現”、電子情報通信学会論文誌C, vol.J71-C, No.6, pp.953-956, June 1988.
 - 12 橋本正弘、小見山彰：“2次元波の波面、波面法線光線および幾何光学界の光線追跡”、電子情報通信学会論文誌C, vol.J71-C, No.7, pp.980-985, July 1988.
 - 13 M.Hashimoto and A.Komiyama: "New ray tracing for waves in inhomogeneous anisotropic media", Proc.Int.Symp.Radio Propagat., Beijing, China, April 18-21, 1988, pp.93-96.
 - 14 橋本正弘：“波面法線光線に基づく幾何光学における全反射の法則”、電子情報通信学会論文誌C-I, vol.J72-C-I, No.3, pp.132-138, March 1989.
 - 15 M.Hashimoto: "Geometrical description for wave-normal rays in an optical waveguide--Geometrical optics for stationary waves--", Proc.Int.URSI Symp., Stockholm, Sweden, August 14-17, 1989, pp.303-305.
 - 16 橋本正弘：“湾曲した境界面における波面法線光線の全反射法則”、電子情報通信学会論文誌C-I, vol.J-72-C-I, No.9, pp.562-564, September 1989.
 - 17 M.Hashimoto and Xiao-Jun Zhou: "Geometrical optics analysis for the beam wave propagation in dielectric waveguides", Proc. Japan-China Joint Meeting on Optical Fiber Science and Electyromagnetic Theory, Fukuoka, Japan, October 12-14, 1990, pp.1-10.
 - 18 橋本正弘：“全反射された電磁波の波面法線幾何光学”、電子情報通信学会論文誌CI, vol.J73-CI, No.11, pp.738-740, November 1990.
 - 19 橋本正弘：“波面法線光線と反射係数について”、電子情報通信学会論文誌C-I、印刷中。
 - 20 M.Hashimoto and Xiao-Jun Zhou: "Geometrical optics analysis for the beam wave propagation in dielectric tapered waveguides", submitted.

1991.3.9. 於 大阪大学工業会館