

トンネル内施設入溝者計数システム

平成4年5月29日

村上虎一 (NTT)

芝野儀三 (住友電工)

大本勝美 (住友電工)

木村憲司 (住友電工)

樋口晴一 (住友電工)

トンネル内施設入溝者計数システム

1 まえがき

日本電信電話株式会社の都市部における通信ケーブル主要幹線は、ほとんどが地下に設けたトンネル内に布設されており、トンネル総長は日本全体で450 Km以上にも達している。これらのトンネルには、ケーブルの布設、接続作業や、日常の保守管理のために、多くの人々が入溝し、業務に従事している。

このため、トンネル内には照明、排気、排水等の設備が設置され、ガス発生監視装置等とも組合わせて、設備および溝内の状態監視、動作制御管理等を行ない、入溝者の安全、災害の検知等に万全を期す様にコンピューターによる日常の運用管理を行っている。(トンネル管理、運用システム)

これらに加えて、入溝者の人数、入溝位置の把握が重要な管理項目であると認識し、適切な手段を探索して来たが、このたび入溝者に I D 信号で変調された微弱電波を発生する携帯ターミナル(以降 I D T と略称)を所持させ、発生電波を検出することにより、入溝人数、入溝位置を把握する入溝者計数システムを前記運用管理システムのサブシステムとして開発した。このシステムは、入溝者のグロスな把握管理だけでなく、個体識別まで可能にしている。また異常発生時には、I D T の非常スイッチをオンすることにより、異常発生および発生位置を管理センターに認識させる機能も持たせている。

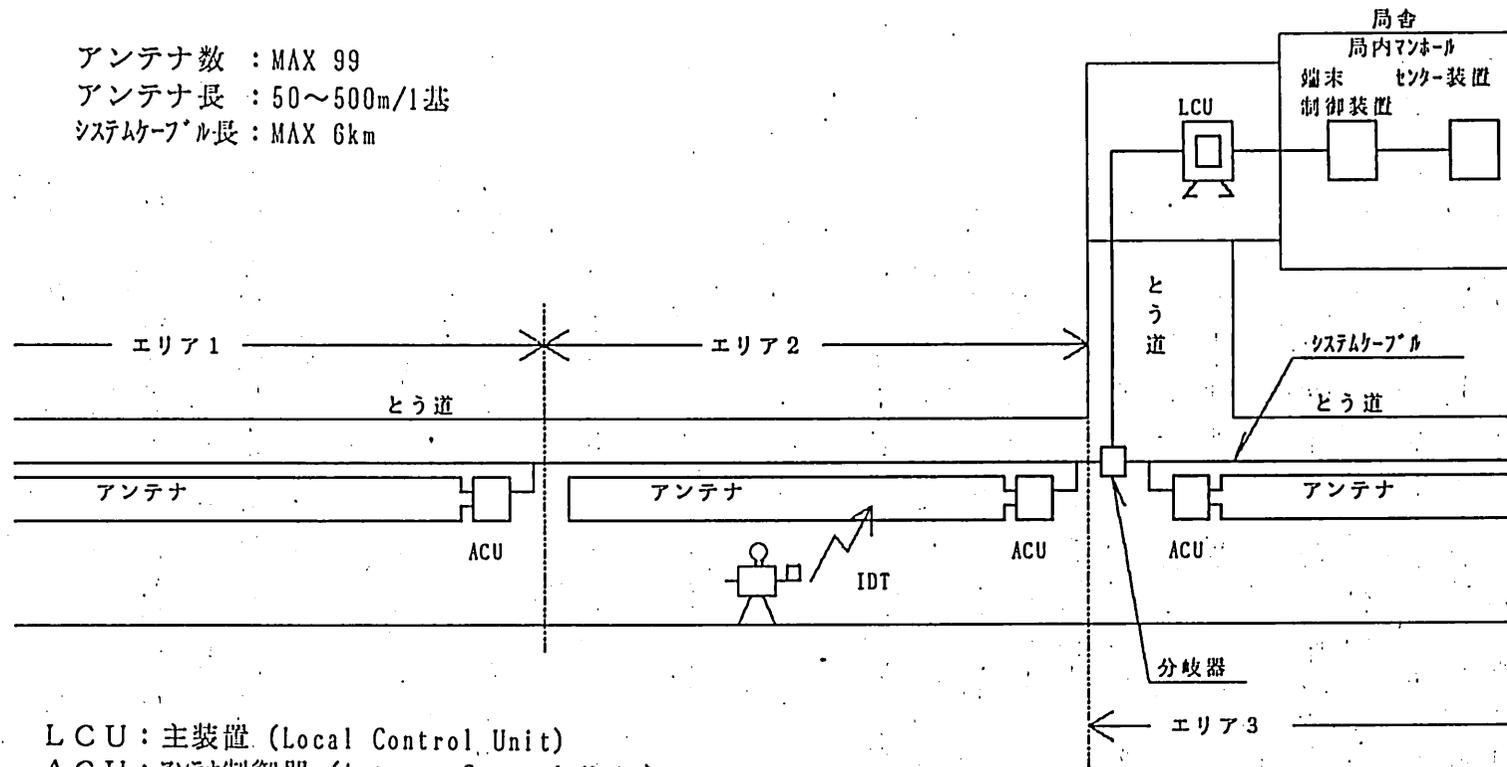
本文では、この入溝者計数システムの原理構成、施設・機器、システム性能および制御、管理、運用方法について紹介する。

2 システムの構成、動作原理

図-1に本システムの構成を示す。トンネルを適切な管理区分に分割し、夫々の管理区分に各一式のIDT発生電波受信用の検出アンテナを設置している。検出アンテナには、その給電点にアンテナ制御器(ACU… Antenna Control Unit)が接続されている。一方、管理センターには、計数制御装置LCU… Local Control Unit)が設置され、それよりコントロールケーブルが必要に応じてインピーダンス整合用分岐器により分岐されながら、トリー状に、トンネル内各部へ延びて行っている。コントロールケーブルは、ボーリングデータ伝送対、アックデータ伝送対、IDTデータ伝送用の2対(現用、バックアップ各1対)および将来の拡張に備えた2対、計6対の伝送線路よりなっており、夫々の伝送対の終端は、線路の特性インピーダンスにより整合されている。各ACUは、コントロールケーブルに並列接続されている。

各ACUに夫々の管理区分に応じたID番号を与えておき、LCUよりコントロールケーブルのボーリングデータ伝送線路へボーリング信号を送出する。全ACUが、このデータを受信し、ボーリングデータに含まれたID番号を認識して、そのIDと自己のIDとが異なる場合は、IDTデータ伝送線への出力ゲートを閉じてIDTデータがLCUへ出て行かない様にする。

アンテナ数 : MAX 99
 アンテナ長 : 50~500m/1基
 システムケーブル長 : MAX 6km



LCU : 主装置 (Local Control Unit)
 ACU : アンテナ制御器 (Antenna Control Unit)
 IDT : IDターミナル

図 1 入溝者計数システムの構成

ACUは、自己の管理区分内にIDTが存在して電波を出しているときは、それを検出してIDTの存在を認識する機能を有しており、内部に（自己管理区分内の）IDT有無のデータを蓄わえている。さらにACUに接続された検出用アンテナの状態を常に監視しており、アンテナの状態（正常、断線、短絡の異常）データも蓄わえている。

ポーリングデータ中のID番号と自己ID番号が一致したACUは、自己ID番号、検出用アンテナの正常/異常データ、IDT有/無のデータをアック信号伝送線路を経由してLCUへ送り返す。IDT信号を受信中の場合は、同時にIDTデータ伝送線路への出力ゲートを開いてIDT信号をLCUへ送り出す。

LCUはアック信号を受信認識し、検出アンテナの状態を記録表示すると共にアック信号にIDT有の信号が含まれている場合は、後述のロジックで定められる時間だけIDTデータ伝送線路を経由して送られて来るIDT信号を受信観察して、当該区分に存在するIDTの数（入溝者数）IDTのID番号（個体識別）を記録、表示する。IDT信号に非常信号が含まれておれば、その検出表示も行い適切な処理をうながす。アック信号中のIDT有/無データが無であれば、IDT信号受信をスキップして、直ちに次のポーリングに移り、システム監視のスピードアップを図っている。

IDTの発生電波の搬送周波数には、後述の様に20MHzを採用しており、これにIDTのID番号データ、状態データ（正常/異常）で変調を加えた信号を平均周期1秒のランダム（一様ランダム）な時間々隔で発生させている。このため同一区分内に複数のIDTが存在する場合のIDTからLCUへのアクセスはランダムアクセス方式になっている。

システムケーブルによるLCU-ACU間のデータ伝送は、長距離伝送による波形歪と低周波雑音によるデータ誤りの発生を避けるために、ベースバンド伝送を避け、ポーリングおよびアックに対しては60KHz、IDT信号に対しては100KHzの中間周波数によって行っている。IDT信号の100KHzへの変換はACU内部で行っている。RF伝送を避けたのは、システムケーブルに難燃性コントロールケーブルを使用しており、その高周波数域での伝送損失増加の影響を避けたものである。

3. システム機器及び施設

1) トンネル内アンテナ

トンネル内に入溝した入溝者が携帯するIDTの発生する電波を受信して、入溝者の位置確認を行うための設備で管理単位で敷設する。アンテナの敷設目的は、以下である。

- ①管理単位のトンネル内で行動する入溝者のすべてを認識できる
- ②隣接するアンテナとの干渉分離ができ、かつ管理単位の領域の一部を共有できる

以上の条件を満足するためにアンテナは、以下の条件を満足する構造を有し、適正に敷設されねばならない。

- ア) 現有するトンネルの最大寸法のものでも充分に入溝者を認識できる
- イ) トンネルの構造（たとえば、湾曲する）に適応できる
- ウ) 管理単位の敷設長さをカバーできる（最大敷設長 500m）
- エ) トンネル内の既存設備に影響を与えない（通信ケーブル等）
- オ) トンネル内の既存設備の影響を受けない（電力ケーブル、システムケーブル等）

これらの条件を満足できるアンテナ及び敷設方法を種々検討した結果、図3-1の構成を採用した。（標準モデル）

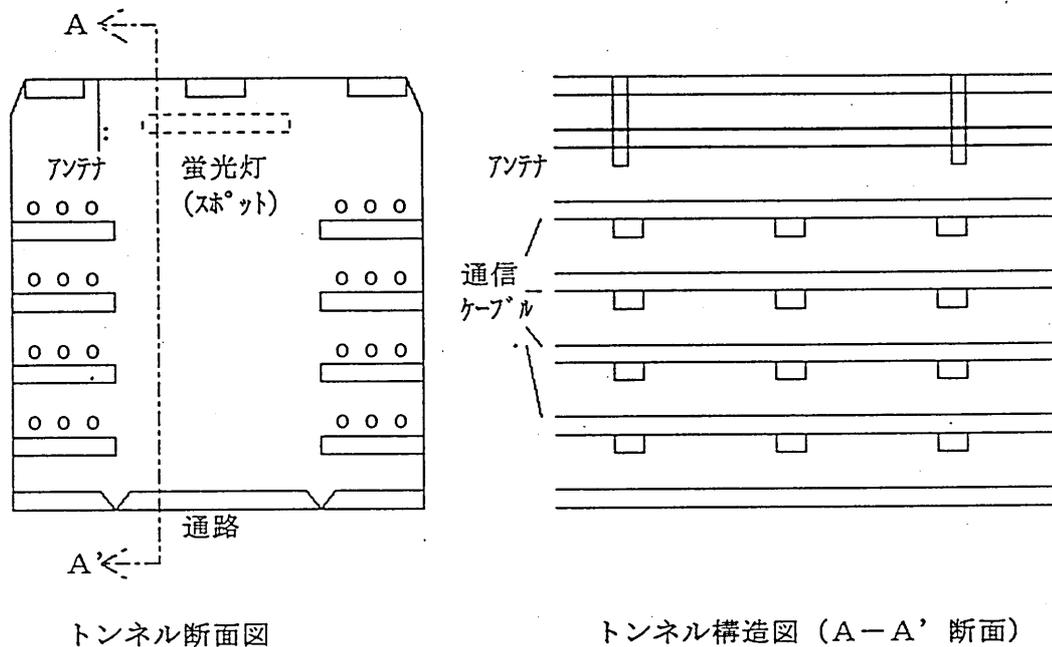
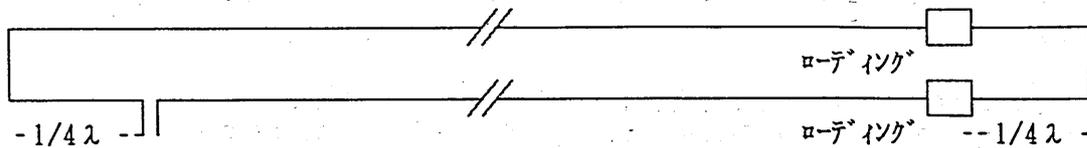


図3-1 トンネルアンテナ配置

トンネルアンテナの構成は、図3-2のごとき2線式のローディングアンテナでIDTが管理区域内を移動しても、その発生する20MHzの電波を一様に受信でき、かつアンテナの保守管理が容易にできる構成になっている。



アンテナ制御器へ 図3-2 トンネルアンテナ構成

本アンテナによるIDT信号の受信特性は、4.1)節で述べるごとくである。

2線式のローディングアンテナを採用したのは、アンテナがシステムが良好に作動する為の重要な設備であり、その状況を常時監視できること（アンテナ線の短絡・断線）を考慮したものである。

2) 入出溝検知アンテナ

本アンテナは、トンネルを利用する入溝者の出入りを管理する為のアンテナで、入溝者の監視登録または監視抹消を行うための設備に付帯されるものである。

3) アンテナ制御器 (ACU)

トンネル内に敷設されたアンテナの各々に接続設置され、入溝者の状況監視を行い、主装置 (LCU) の制御によりアンテナで受信されたIDT信号を100kHzへ周波数変換した後、転送制御する装置で、図3-3にACU外形図を示す。ACUの回路構成をブロック図で示すと図3-4のようになる。これらの動作機能を次に説明する。

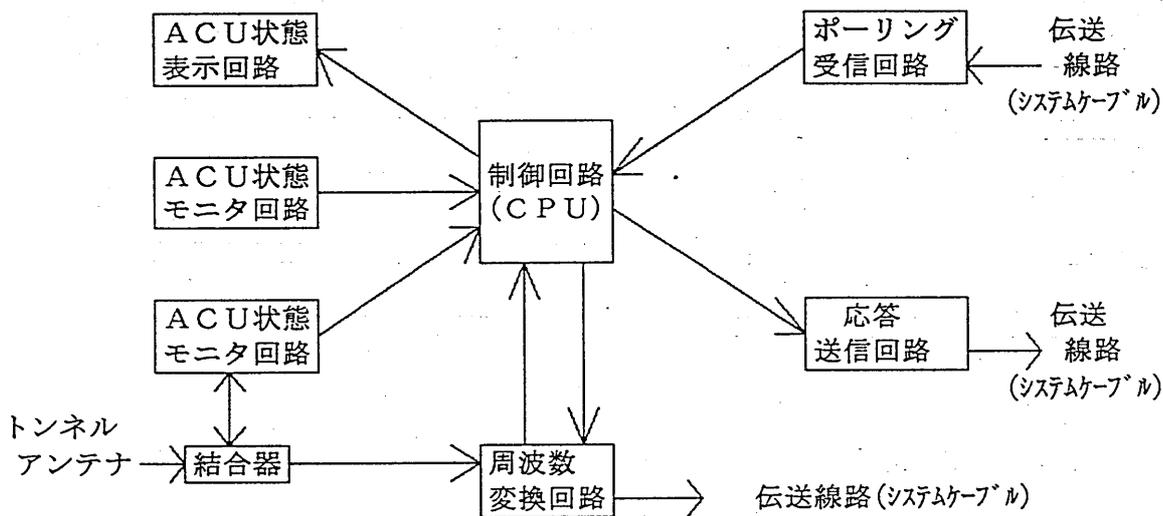


図3-4 ACU ブロック回路図

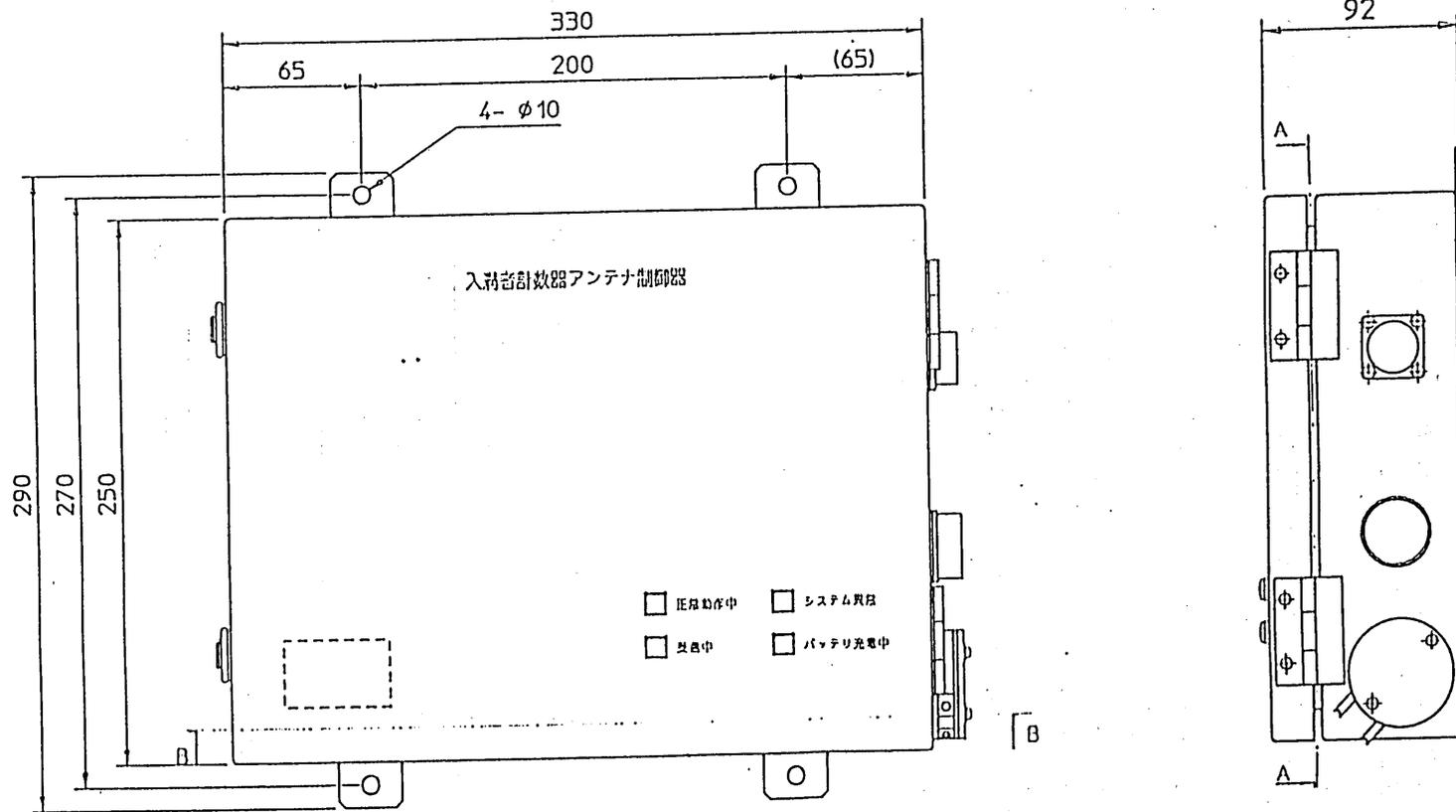


図 3 - 3 ACU外形図

結合器は、IDT信号の入力部であって、アンテナで受信した20MHzのIDTからの信号を減衰なく周波数変換回路へ導くとともに、アンテナモニタ回路からのモニタ電流を周波数変換回路に影響を与えることなくアンテナに流しモニタによるアンテナの状態監視を可能にしている。

周波数変換回路のブロックダイアグラムを図3-5に示す。この回路は、入力端子より入ってくる20MHzのIDTの発信信号を伝送線路(システムケーブル)で伝送可能な100kHzに変換しAGC増幅して信号を所定のレベルに整えた後(LCUからのポーリング信号で指定された場合に)指定された伝送線路を経由してLCUへ送り出すものである。

ポーリングでデータ伝送を指定されない場合は、出力段のスイッチが閉じたままであり、またバッファ増幅器も増幅器動作回路により非動作状態にされて、伝送線路へ回路雑音が出て行かないように二重にプロテクトされている。

IDT検出回路はポーリングで指定されている場合でもIDTからの信号を受けた場合のみにスイッチを開いて信号を出力し、IDT信号を受信していなければ、スイッチを閉じて回路雑音が出力されることを防いでいる。

また、IDT信号を受けた場合は、受信状態にあることを2秒間キープしておきポーリングに対する応答信号の中に、この状態を入れてLCUへ知らせ、IDT信号受信の観察の要、不要を判断せしめ得るようにしている。なお、2秒間の受信状態のキープは、IDTの信号発生時間間隔が最大2秒になり得るのに対応したものである。局発出力モニタ回路は局発出力レベルをCPUに提供し、正常/異常を判定し得るようにしている。

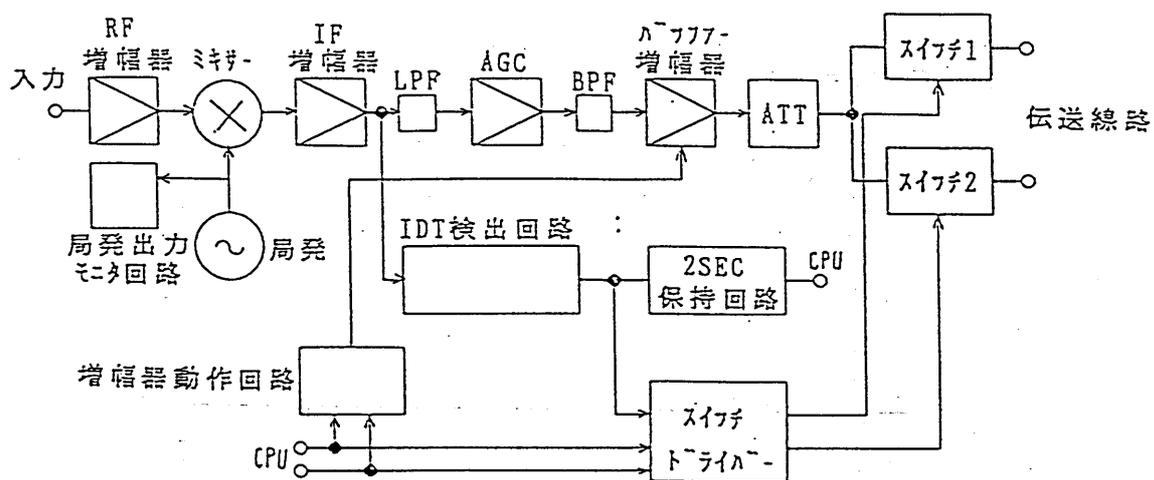


図3-5 周波数変換回路ブロック回路図

制御回路は、アンテナの状態、IDT信号の受信状態を観察し、ACU状態表示回路を駆動して、状態を装置表面に点灯表示する。さらに、LCUからのポーリング信号を受けてIDT信号受信状態、アンテナの正常/異常、ACUのID番号を含む応答信号を作成し、応答信号送信回路に変調を加えて、LCUへ送り出す。また、周波数変換回路のバッファ増幅器の動作/非動作及び、出力スイッチの開/閉動作の制御を行っている。(出力スイッチの開操作は、IDT信号の受信があった時にIDT検出回路の動作によりスイッチが開く状態にする。)

ACUは各々がID番号を持ち、LCUからのポーリングにより動作するものであるが、1システム内に収容できるACUの最大数は、99としている。

ACUの通信動作の詳細を以下に示す。

(1) アンテナ制御器(ACU)の機能概要

ACUの基本機能をまとめて表3-1に示す。

表3-1 入溝者計数システム:アンテナ制御器(ACU)の機能概要

No	機能名	機能概要記述
1	対上位通信機能	①LCUからのホッピング制御信号に対する応答機能。 *ホッピング信号を判別し個別または一斉応答モードで応答する。 ②LCUへのIDT情報及びシステム異常有無情報の通知。
2	モニタ機能	①LCUのホッピング信号に対し正常受信でLEDでランプ表示する。 ②アンテナ制御器のシステム異常をランプ表示する。 ③設置アンテナ内のIDT検知をランプ表示する。 ④アンテナ制御器のバッテリー状態(充電有無)をランプ表示する。
3	テスト機能	アンテナ制御器(ACU)が主装置(LCU)のホッピングに回答できるための必要な機能を自己チェックできる試験機能を持つ。 ①ACUアドレス設定確認機能 すべてのACUは1~99の自己アドレスを設定でき、設定のを8個のLEDランプモータを用いて確認することができる。 ②LCUホッピングシミュレーション機能 CPU内部でLCUのホッピング信号を疑似発生させてACU動作のを8個のLEDランプモータを用いて動作確認することができる。 ③モータチェック機能 ACUの持つモータ機能で以下の5つのシステムモータをデジタリ値(00H~FFH)でLEDランプモータを用いて確認することができる。 全モータ、アンテナモータ、IDTモータ、局部発信モータ、CPU電源モータ、バッテリーモータ その他(アンテナモータ規格上限設定値、下限設定値)

(2) 対上位(LCU)通信機能

ア) 概要

LCUからの制御伝文を解析し、伝文を正常受信した場合は、モニタランプのステップアップを行う。また制御アドレスが一致した場合は、アドレス情報に状態情報(システム状態、IDT受信)を付加し返送する。

イ) 対LCU通信仕様

表3-2に示す。

表3-2 通信仕様

項目	仕様
接続	60KHz搬送波マルチドロップ
通信方式	半二重 無手順方式
同期方式	キャラクタ同期式(SYN同期)
通信速度	4,800bps
誤り検出方式	水平パリティ

ウ) 制御コマンド

表3-3にLCUからの制御情報を示す。

表3-3 制御コマンド

コマンド・モード	制御内容	制御コード
一斉制御	すべてのACUを一括制御 ACUは自己のIDNo. をタイマーにしたタイミング で情報を返送する。	アドレス: 00
個別制御	ACUのID番号で制御 対応するACUは自己のID が奇数か偶数かでタイミング を選択し情報を返送する。	アドレス: 01~99

通信インターフェイス

対LCUインターフェイス

エ) 対ボーリング通信制御仕様

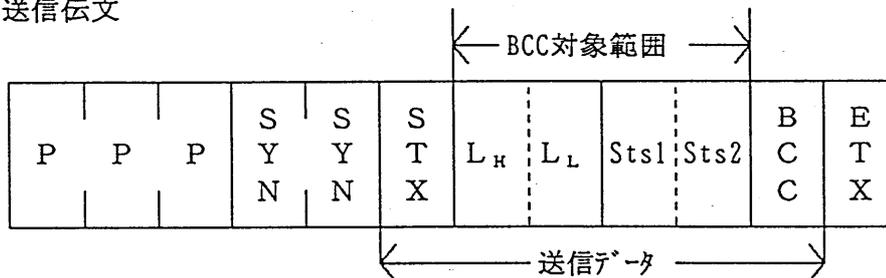
表3-4に通信仕様を示す。

表3-4 通信仕様

項目	仕様
同期方式	キャラクタ同期式 (SYN同期)
通信方式	半二重 無手順方式
通信速度	4,800bps
伝送コード	ASCII
伝送モード	非透過モード
伝文長	1テキスト=6バイト

ハ) 伝文フォーマット

① 送信伝文



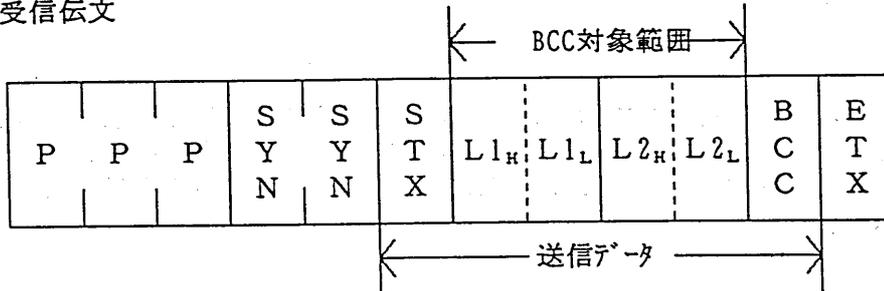
P : プリアンブル = 55H
 SYN : SYN(同期)コード = 16H
 LH : アンテナNo.(High)
 LL : アンテナNo.(Low)
 Sts1 : アンテナ状態ステータス ※₁
 Sts2 : IDT監視状態ステータス ※₂
 BCC : チェックサム値

※₁ 0 0 0 0 0 0 0 ACU

※₂ 0 0 0 0 0 0 0 IDT

ACU(アンテナ状態) 0:正常 1:異常
 IDT(IDT監視状態) 0:IDT未検知 1:IDT検知

②受信伝文



- P : プリアンブル = 55H
- SYN : SYN(同期)コード = 16H
- L1_H L2_H : アンテナNo. (High) ※₁
- L1_L L2_L : アンテナNo. (Low)
- BCC : チェックサム値

※₁ L1_H

0	SW	1	1	*	*	*	*
---	----	---	---	---	---	---	---

	ACUのID番号						
SW : IDTデータ送出	0	0	0	0	(0)	}	のいずれか
回線選択	0	0	0	1	(1)		
0:回線1	0	0	1	0	(2)		
1:回線2	0	0	1	1	(3)		
	0	1	0	0	(4)		
	0	1	0	1	(5)		
	0	1	1	0	(6)		
	0	1	1	1	(7)		
	1	0	0	0	(8)		
	1	0	0	1	(9)		

(3) モニタ機能

7) 概要

LCUに対して状態情報を返しており、アンテナ状態及びIDT存在検知の状態情報モニタを収集している。これは状態情報によりIDTの制御を円滑に行うことと遠隔でACUの状態監視を実施する。さらにLCUに対して返送しないがACUの状態を把握するためにモニタを持っている。

1) モニタ内容

表3-5にACUが持っているモニタ機能を示す。

表3-5 モニタ機能一覧

項目	モニタ内容	確認表示
IDT受信	設置アンテナ範囲内のIDTの電波(20MHz)を受信する	LCUへ情報返送 ランプ表示
アンテナ異常	設置アンテナ線に1kHzの信号を流し電流を監視する	LCUへ状態返送 ランプ表示
バッテリー状態	バッテリーの電圧を監視する	ランプ表示
局発異常	IDTデータをLCUへ返送するのに必要な局発送信(19.9MHz)電圧を監視する	テストモードで 表示確認
CPU電源	CPUに供給している電圧を監視する	テストモードで 表示確認

(4) ACU試験機能

ACUは、トンネル内に設置されるため装置の異常及び故障分析は、煩雑となる。しかしシステム上の役割は重要であり現場での状況解析は、必須であることから以下に述べる試験機能を付加している。

7) 設定アドレス確認

ACUは、現地据え付け後の配置替えや管理区分替えに対応できる様にアドレスの設定変更（デバッグスイッチによる）が可能となっており、変更時にCPUを使って確認を行うことができる。

1) アンテナ接続状態及び規格値のモニタ

監視機能と併せて、現地でのアンテナ設置状況をモニタすることができる。これにより、アンテナの施工や保守を円滑に行うことが可能となる。

2) バッテリー充電状態のモニタ

監視機能と併せて、状態をモニタすることができる。

3) 局部発信器の発信状態のモニタ

この局部発信器は、IDTの受信信号を周波数変換（20MHz→100KHz）するのに必要な発信器で発信状況を電圧でモニタすることができる。

4) CPU供給電源モニタ

CPUに供給させている電源電圧をモニタすることができる。

5) LCUポーリングシミュレーション機能

LCUからの制御（ポーリング）信号を疑似的に与え、ACUが正常に動作をすることをモニタできる。

(5) 異常対策

各異常項目について、

7) LCU通信制御の送信伝文情報で通知する (ACUはランプで状態表示)

表3-6に、異常項目を示す。

表3-6 異常項目

項目	対策
アンテナ異常	①発生時 表示ランプが赤色点灯し、LCU通信制御で通知 ②確認 テストモードでアンテナ線短絡/断線切り分けにより復旧を行う。 ③正常時 表示ランプが滅灯
ACU異常 a. 通信異常 CPU異常	①発生時 CPUのモニタランプの点灯がLCUの制御信号受信でステップアップしないで停止状態 ②解除 CPUをリセットする ③正常時 CPUのモニタランプの点灯がLCUの制御信号受信でステップアップする
b. IDT転送異常	①発生時 IDT受信のランプが転送しているがLCUにIDTデータが上がらない ②確認 テストモードで局発発信をチェックする
c. その他	①発生時 LCU通信が不能 ②確認 テストモードで切り分けし、ACUを予備機と交換する

(6) 情報の流れ

これまでに説明してきた諸機能に関連する情報の流れを図3-6のフローチャートで示す。

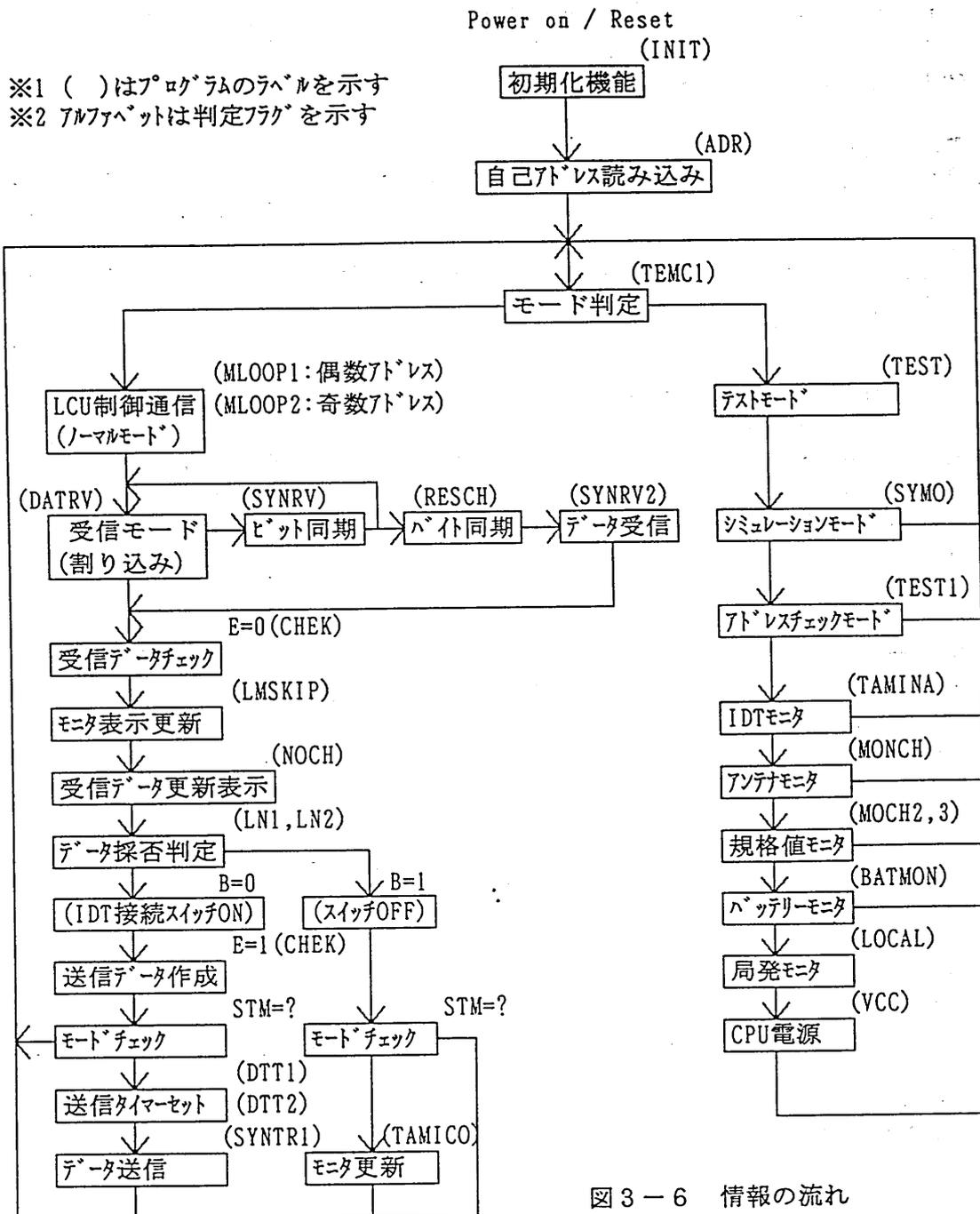


図3-6 情報の流れ

4) システムケーブル (分岐器、終端器含む)

1台のLCUと複数のACUを接続するケーブルで、以下の内容の信号線で構成されている。

- ① LCUからACUへポーリング信号を出す回線
- ② LCUのポーリング信号を受けて選択されたACUが応答信号を返す回線
- ③ アンテナで受けたIDT信号をACUで信号変換してLCUへ送出する回線
- ④ IDT信号をLCUへ送出する予備回線

これらの回線はトンネルの構造により分割管理されるアンテナ配置に応じて分岐器で2~4分割され接続され、分割されたシステムケーブルの末端は、インピーダンス整合を行うことで信号レベルを維持管理できる構成としている。図3-7に分岐器外形図例を示す。以下に、システムケーブルの代表的構成とレベル配分を示す。

なおシステムケーブルは、火災時でも30分間以上その機能を保つように難燃性構造を採用している。

7) レベル分配要素

レベル配分は下記要素からなっており、ACU及びLCUの装置入力の受信レベル変動範囲は、-30~-70 dBmで対応する仕様である。

システムケーブルレベルダイナミックレンジ	40	dB
システムケーブル	3	dB/km
2分岐器	4	dB/基
3分岐器	6	dB/基
4分岐器	8	dB/基

1) 施工方法

トンネルの規模、長さを想定しシステムケーブルの最大長は、6 kmまで対応できる仕様とした。下記に、レベル配分例を示す。

レベル配分例 1

システムケーブル	6 km	18	dB
2分岐器	5 基	20	dB
計		38	dB < 40 dB

レベル配分例 2

システムケーブル	6 km	18	dB
4分岐器	1 基	8	dB
2分岐器	3 基	12	dB
計		38	dB < 40 dB

レベル配分例 3

システムケーブル	3 km	9	dB
4分岐器	1 基	8	dB
2分岐器	5 基	20	dB
計		37	dB < 40 dB

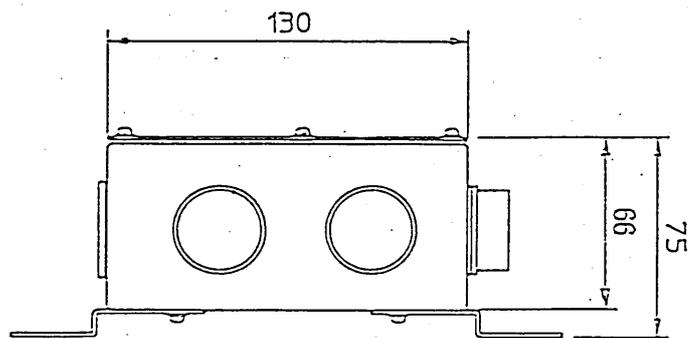
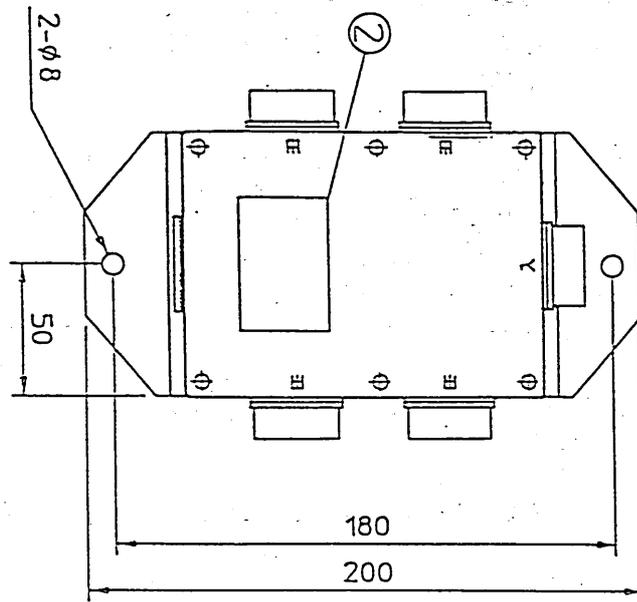


图 3-7 分岐器外形图 (4分岐)

5) 主装置 (LCU)

トンネル内の入溝者を計数する制御装置で、管理区間単位に敷設されたアンテナに対応して設置されたACUをポーリング制御することでIDT信号を収集管理することができる。基本機能を以下に示す。

- ①管理するACUに対して一斉または、個別に制御ができる。
 - ②ACUに対してポーリング信号を送出し、一度に2台の個別ACU（但し、ACUのアドレスは、奇数と偶数の組み合わせのみ）を制御できる。
 - ③ポーリング信号に対し制御したACUの応答信号でACUの状態情報とACUの管理するアンテナ内のIDT存在状況の認識を行う。
 - ④IDT信号の入手は、ポーリング信号を介してデータ回線または予備データ回線の指定ができる。
 - ⑤IDT信号の入手に際しては、IDTの台数に応じてモニタ時間を可変管理する。
 - ⑥ACUのポーリング信号を介して入手したACU異常情報を上位機器へ送出する。
 - ⑦入手したIDT信号により入溝者の計数を行い、計数情報を上位機器へ送出する。
 - ⑧入手したIDT信号から緊急情報を抽出し、上位機器へ通報する。
- 図3-8に、LCUの外観図を、表3-7にLCUの機能概要を示す。

6) IDターミナル (IDT)

トンネル内に入溝する入溝者が携帯し、携帯者の存在位置と状態を提供する機器である。トンネル内に設置したアンテナを介してLCUへ伝達され、管理者が認識することが可能となっている。図3-9にIDTの外観図を示す。また基本機能を、以下に示す。

- ①20MHzの微弱電波の出力を直交した2本のフェライトアンテナから送出することでトンネル内に敷設されたアンテナに対して、あらゆる方向で結合する。
- ②機器内に設けた4つのロータリースイッチで個体番号を設定できる。
- ③微弱電波で送出する信号は、他のIDTとの電波衝突をできるだけ回避できるように平均1秒間に20ミリ秒（1/50秒）の割合で乱数を用いて送出される。
- ④機器の表面に設けた緊急スイッチを入れることで緊急状態を通知できる。
- ⑤入溝者が入溝する際にIDTが正常に動作していることをLEDランプの点滅で（1秒間に1回）確認することができる。
- ⑥携帯性を確保するために軽量化を行い、汎用性を持たせるために単4乾電池6本で使用できる構造とした。

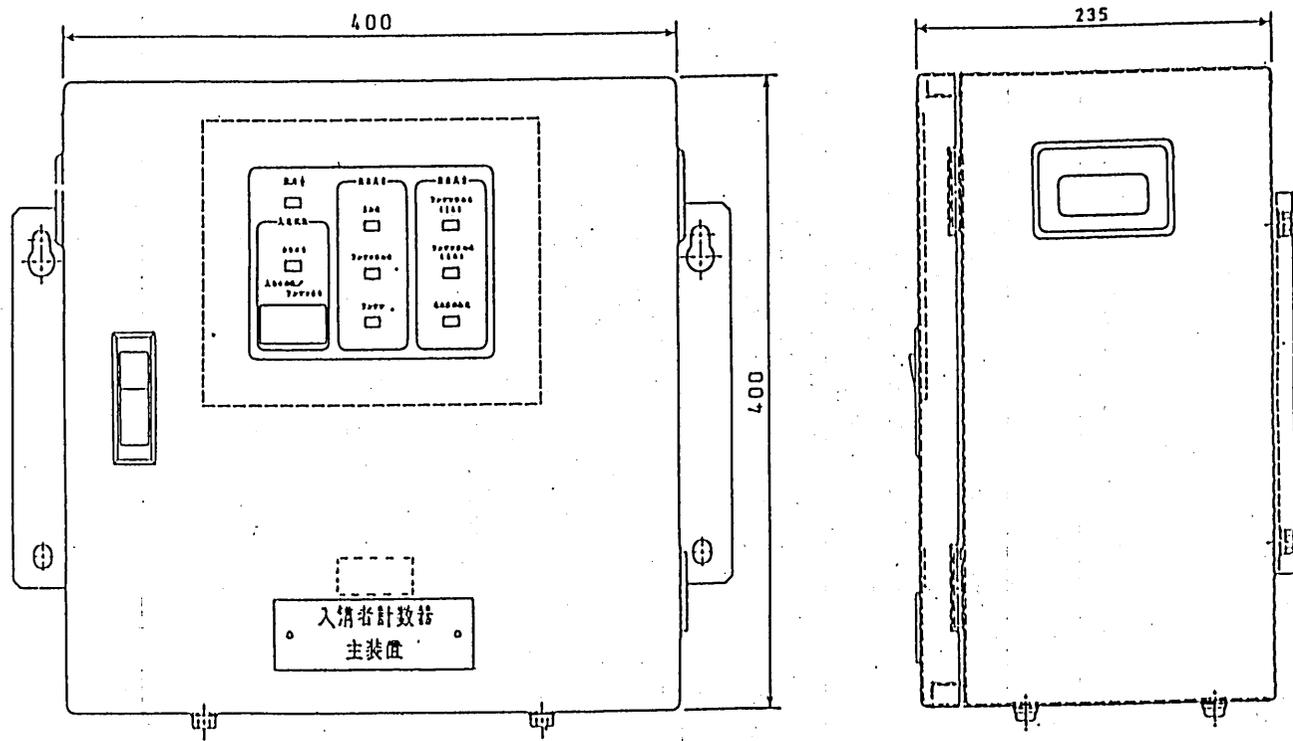


图 3-8 LCU 外觀圖

(1) 主装置(LCU)の機能概要

LCUの基本機能をまとめて表3-7に示す。

表3-7 入溝者計数システム:主装置(LCU)の機能概要

No	機能名	機能概要記述
1	初期化機能	①ファイルの初期化 ②アクティブACUの検索 ・LCUの立ち上げ時、LCUに接続されている全アクティブACUを認識し、以降、それらのACUに対してポーリングを実施する。
2	対上位通信機能	①TCE、コンソールへのACU情報の通知 ②TCE、コンソールからの伝文の解析
3	ACU制御機能	ACUよりIDTの情報を受信し、それを整理する。 ①各ACUのサーチ時間の増減: 前回認識した1ACU当たりのIDTの数に応じて、1ACUのサーチ時間を増減する。 ②IDTの移動の認識 前回と今回のIDT情報により、IDTのACU間の移動の状況を認識する。 アンテナが隣接する区域にて、複数のアンテナに同時に同一のID信号を受けた場合でも、前回以前の情報を基にIDTの移動の状況を認識する。 ③入出溝処理機能: 扉の近傍に設置登録されたACUに対して、WSからの入力により、入出溝の処理ができる。
4	表示機能	ACUからの情報を整理した結果をLCU前部のパネルに出力する。
5	機器の故障対応	接続される下位機種(LCUとACU間の伝送線、ACU、アンテナ)の故障に応じて、適切な処置と外部へその表示を出力する。

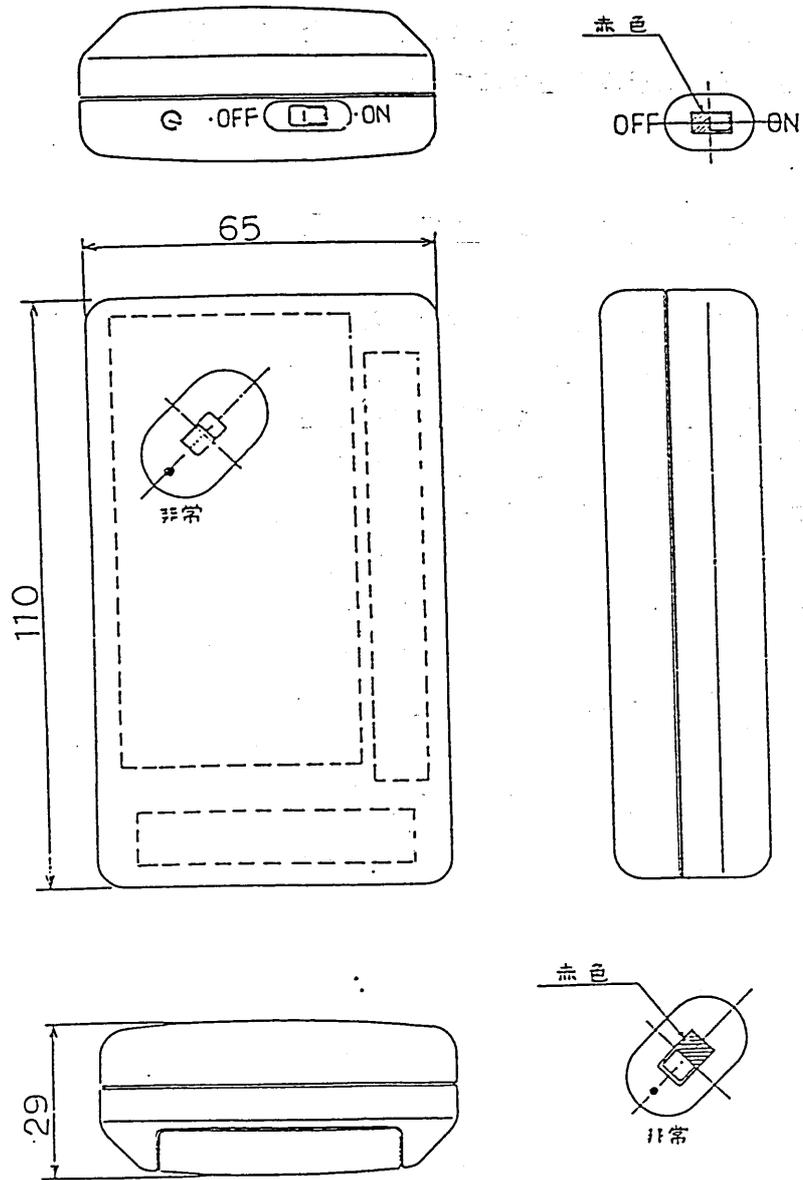


图 3-9 IDT 外觀圖

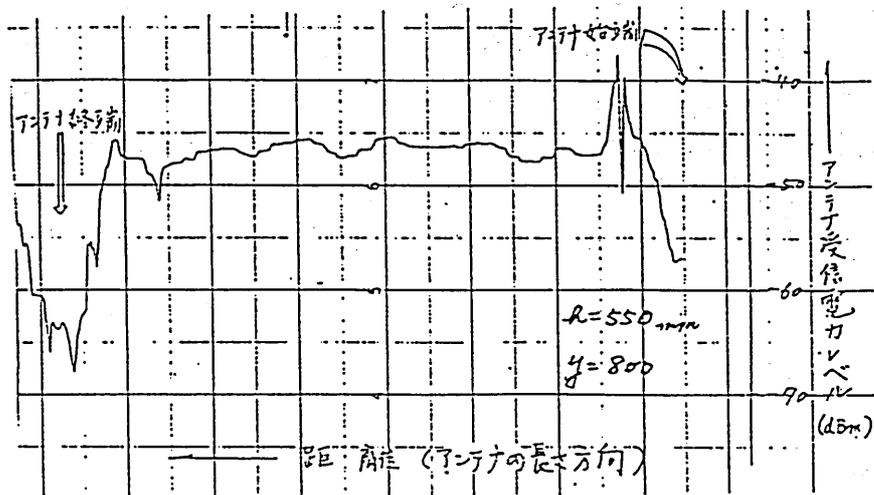
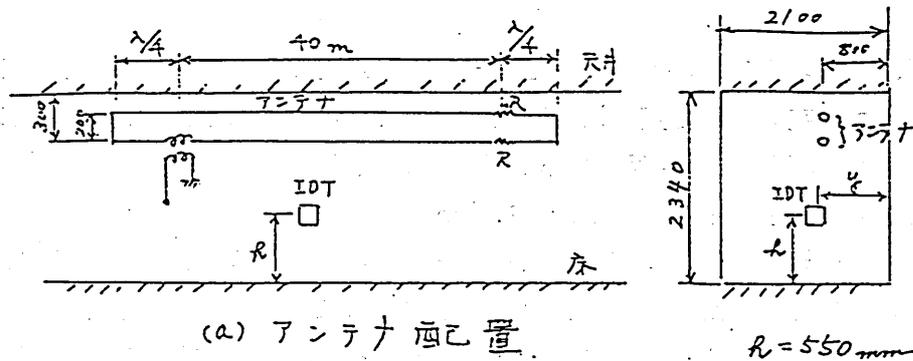
4 システム性能

前節に各機器の標準性能について述べた。本節ではこれらの機器により構成されるシステムの性能につき述べる。

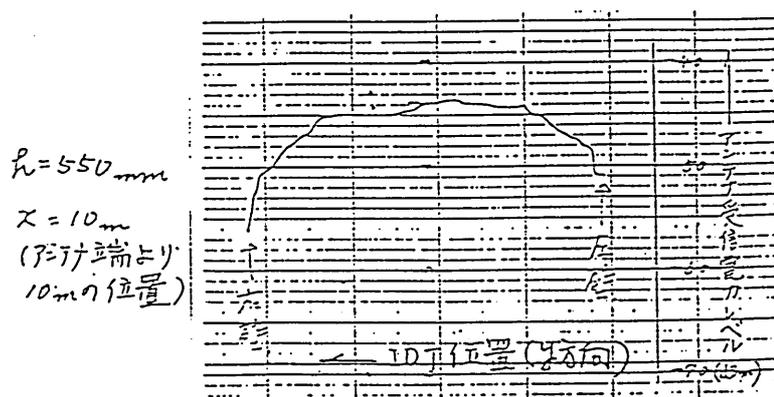
1) 入溝者検出性能（アンテナによるIDT信号ピックアップ性能）

本システムで、もっとも基本となる性能は、入溝者すなわち、トンネル中のIDTをどの程度の確率で検出出来るかということである。この検討は、理論的には困難なので実験的に行った。

図4-1に実験室の長さ40m程度の廊下に、3.1)で述べたトンネル内アンテナを布設し、誘導界レベルが微弱レベルであるIDTを持って移動したときのアンテナによる受信電力レベルを示す。同図a)は、アンテナの配置、b)には、IDTをアンテナの長さ方向に沿って移動したときの受信電力レベル、c)にはIDTを廊下の断面内で移動させた場合の受信電力レベルを示している。これらのデータにより、アンテナの長さ方向での受信電力変動は6dB、断面内での変動は-56~-43dBmで、変動幅13dB程度であることがわかる。



(b) 受信電力分布 -- アンテナの長さ方向

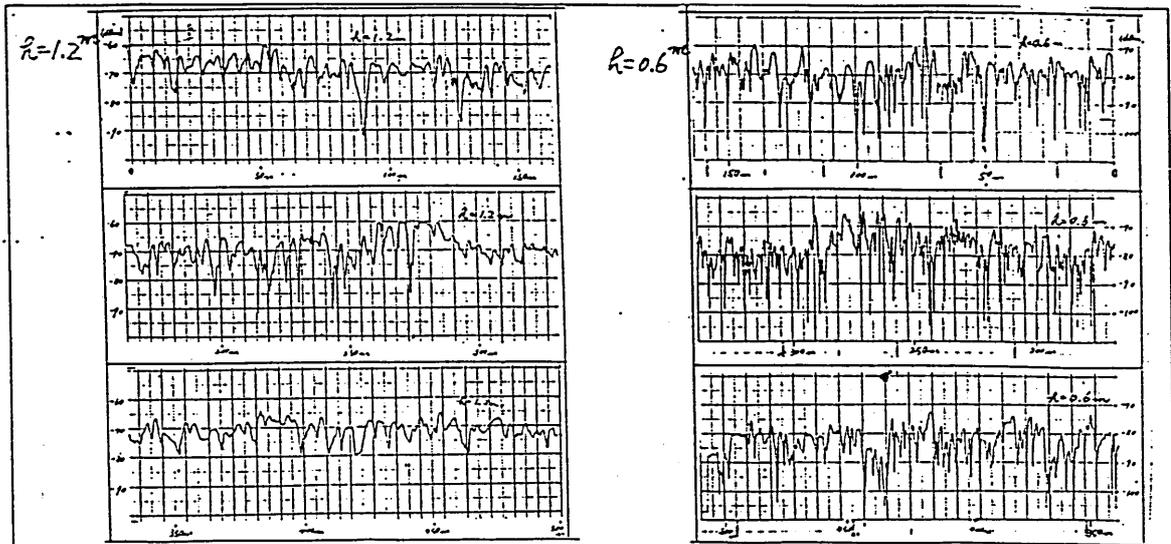


(c) 受信電力分布 ... 断面内分布

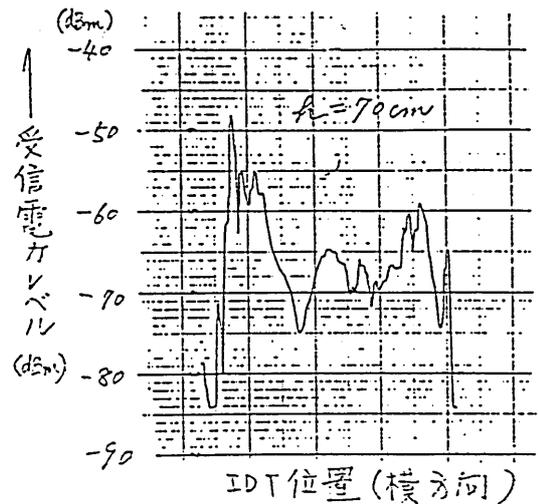
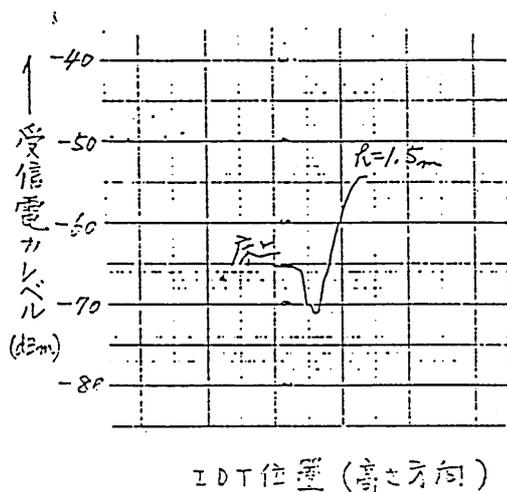
図 4-1. トネルアンテナによる IDT 信号受信レベル実験結果

実際のトンネルでは、内部に通信ケーブル布設用の架が設置され、多数のケーブルも存在するので実情は実験室の廊下より複雑である。またトンネル形状には大小何種類かが存在する。このため実際のトンネル内での性能を調べるためにField Testを行った。

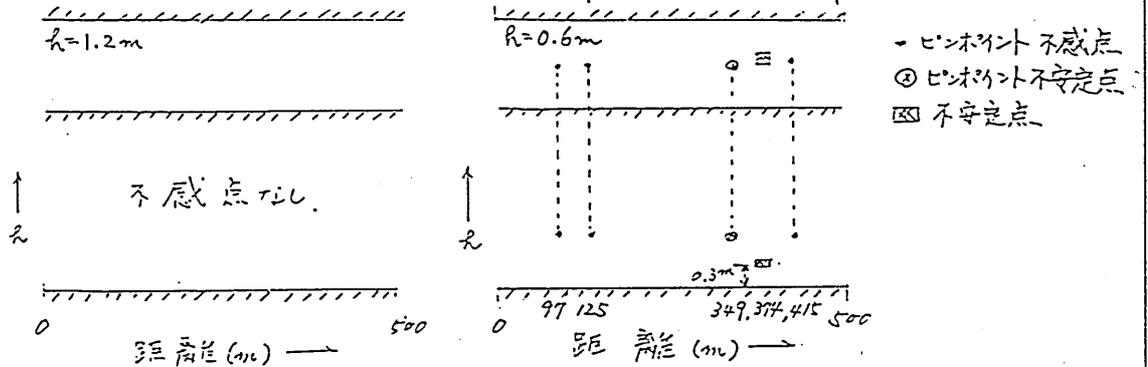
図4-2は標準トンネルでの実験結果を示す。トンネルの断面サイズは、約2.8m×2.9mであり、断面内には中央部に幅約80cm通路があり、その左右には床面から約2.3mの高さのところまで、通信ケーブルで充満された構造になっている。アンテナは、トンネル断面の床面上2.5mで壁面より約15cmのところに設置されている。図4-2 a)は、アンテナの長さ(500m)方向にIDTを持って通路上を移動した場合のアンテナによる受信電力を示している。IDTの床面からの高さは約1.2mと60cmである。b)にはIDTを通路断面内で移動させた場合の受信電力分布を示した。これにより、通路中央部の床面上60cm程度の高さのところが受信電力レベルのもっとも低いことがわかる。前述のアンテナの長さ方向の受信電力分布の測定において通路上60cmの高さを選んだのは、これによるものである。



(a) 受信電力分布 --- アンテナの長さ方向 ---



(b) 受信電力分布 --- 断面内分布 ---



(c) 通信試験結果

図4-2. トンネルアンテナによるIDT信号受信レベル分布 (500m アンテナの場合)

これらのデータより、アンテナ500mにわたる受信電力の平均的な低下は約10dB。給電的より470m程度の範囲では受信電力分は安定しているが、終端部30mの範囲では若干の変動が認められ、受信レベルの落込みは-95dBm程度に達している。

図4-2c)は、ACUのIDT信号検知レベル下限を-95dBmに設定したときの通信試験結果を示す。IDTより発生する電波をID番号を示す信号により変調しておき、IDTを持ってトンネル内を移動し、アンテナ給電点に接続されたACUとコミュニケーションアナライザによりIDT信号を検出し、検出信号が送出信号と一致しない点があれば、それを通信不良点あるいは不安定点としてマークしている。図より明らかな様に、アンテナ設置領域のほとんどの部分で通信は安定であり、500mの最後の部分にわずかの通信不安定点が孤立点として現われている。通信不安定点とは、その点にIDTを固定して置いておくと、時により伝送データに間違いが生ずることがある点である。トンネル内をIDTで詳細にスイープしたが、IDTをケーブルの裏側へまわしたり、ケーブル間に入れても十分な通信特性を得られることが確認されており、実用的には100%に近い検出が実現されている。

図4-3は、大型断面トンネルでの実験例である。トンネルの断面寸度は約4.5m×5mである。この場合、2つの通路が断面中央のやや左寄りと右寄りの部分に平行して走っており、夫々の通路の両側にケーブルラックが配置された構造になっている。

アンテナは、トンネル側壁の床面上約2.9m、壁面からの距離約30cmのところ設置されている。

図4-3のデータでは、アンテナを設置した壁面側の通路を中心とした領域では100%近い検出が行われているが、反対側通路領域では、検出率は0に近くなっている。このような場合は、両壁面にアンテナを設置して完全な検出を確保する。

以上に述べた様に本システムでは、実用上100%の検出性能を有しており、通路上に人が倒れた様な場合でも検出できる様に設計されている。

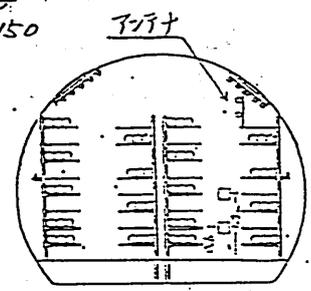
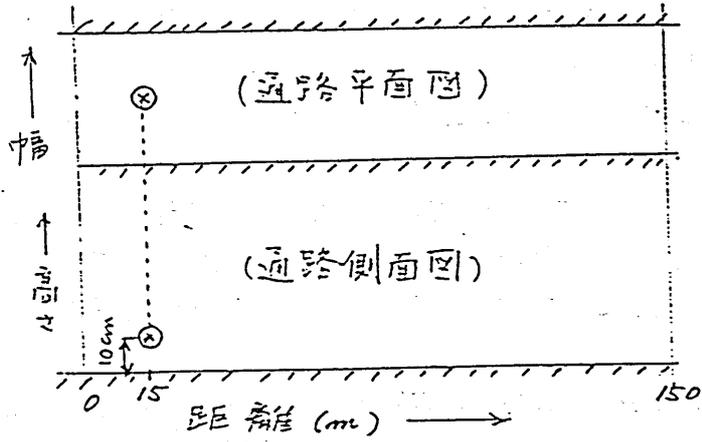
2) 入溝者数とサーチ時間

入溝者の数が増加するとIDTの発呼数密度が高くなるので、各IDTからの発呼の衝突確率が高くなり、LCUへのデータの有効伝達率の低下を招き、よってLCUによるデータの観測時間を長くして行く必要がある。システムとしては、一つの管理区分（トンネル内アンテナ）へ入溝し得る人員（IDT）の最大数（容量）を設定する必要があるので、観測時間を最大容量に合わせて設定すれば、システム内の多くの区分を観測するのに長時間を要し、入溝者数の各区分毎の分布の把握の即時性が悪くなって来る。このため、各区分の観測時間をそこに存在するIDTの推定数に応じて最適時間に設定し、区分毎の把握人員数の精度（即時性）の向上を図っている。

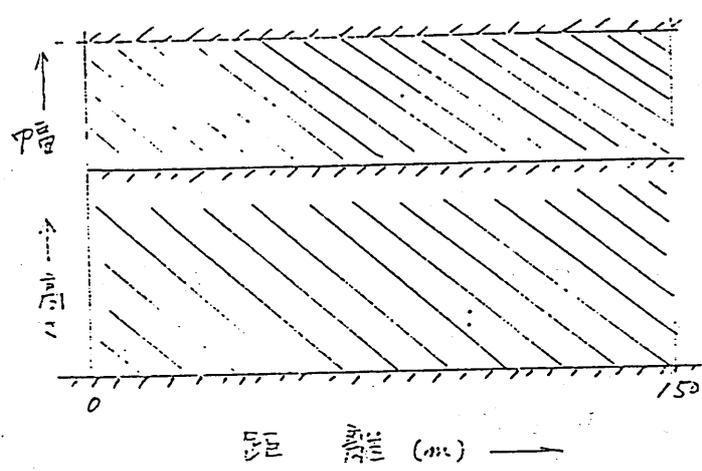
（詳細は第5節参照）

a) 通路 I

⊗ 不安定点
▨ 不感点



b) 通路 II



通路 II 通路 I

図 4-3. 通信試験結果
(大型断面トンネルの場合)

入溝者数と観測時間の関係は、コンピューターシミュレーションによって定めた。シミュレーションのフローチャートを図4-4に示す。シミュレーションの結果の1例を図4-5に示す。同図の横軸は、区分の観測時間、縦軸は1回の観測で検出出来たIDT数（図4-4で $I=1$ の場合の N_R ）を示している。ここでは観測区分内のIDT総数 N が5, 10, 25および50の場合について調べている。この結果より、1回の観測でのIDTの検出率90%以上、3回の観測では100%達成、さらにある区分で入溝者が零の状態から最大容量まで突然増加した場合でも動作が、この突然変化に追従して、すくなくとも3回の観測で全員を検出することを基準として、観測者数と観測時間の関係を表4-1のごとく定めた。なお、最大容量は50台としている。

表 4-1 IDT数と観測時間

IDT数 (台)	観測時間 (秒)	受信可能IDT数 (台)
0受信情報なし	0	—
0受信情報あり	3	20
1~5	3	20
6~10	5.5	29
11~25	11	40
26~50	20	50 以上

註：最大容量 50台

表4-1でIDT数0で受信情報なしの場合、観測時間を0としているのは、LCUがACUへポーリングをかけ返って来たACK信号の中にIDTの存在が含まれていない場合には、所定の区分内にIDTが存在しないこと

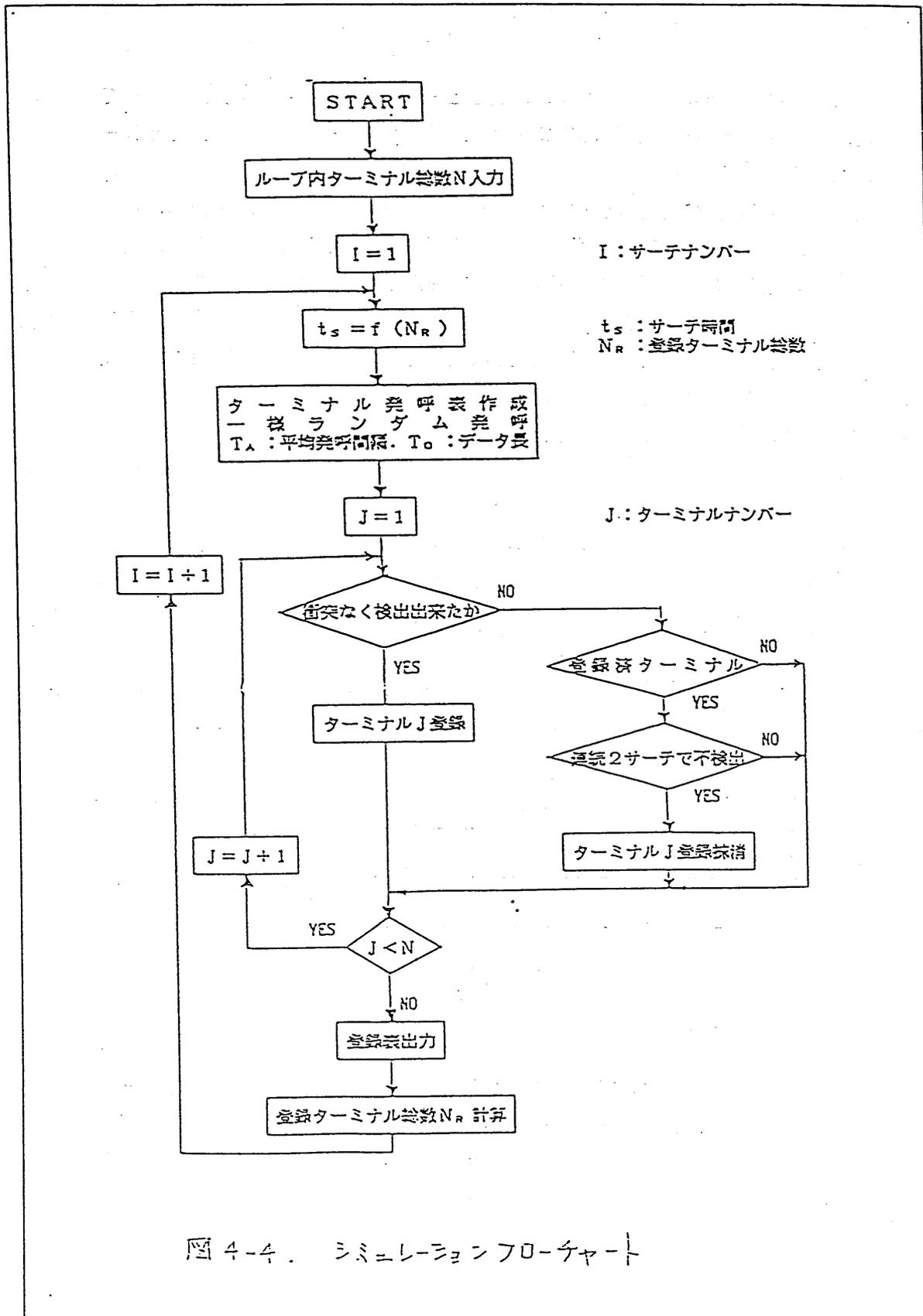


図 4-4. シミュレーションフローチャート

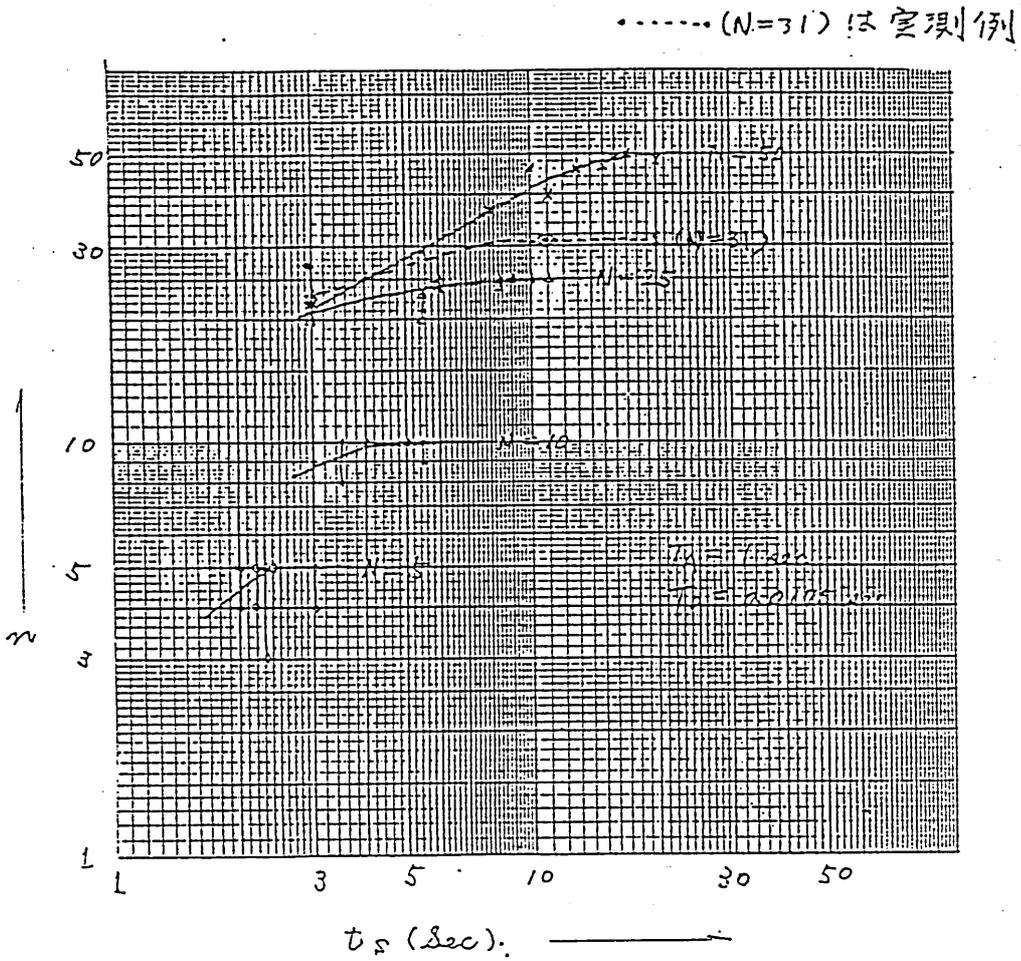


図 4-5. シミュレーション結果

が明確なので、その区分の観測をスキップすることを意味している。台数が零で受信情報ありの場合は、その区分内で以前に計測されたIDT数は零であるがACK信号の中にIDTの存在が示されているので、入溝者が当該区分へ入って来たものと判断し、3秒間の観測を行うものである。ACUでのIDT存在判別は、経済性の面でコード判別ではなく、受信レベル判別によっているので、トンネル内機器によるショットノイズ等によってもIDT存在の判断が下されることがあり、LCU側では信号到来を監視しており、2秒間以上信号到来が無ければ、雑音による誤動作と判断し（第3節で述べた様にIDTの発呼間隔は平均1秒の一様分布をするから、2秒間にはすくなくとも一回の発呼がある）、次の区域のボーリングへ進んで行く。この2秒ルールは、すべての場合に適用し、システム動作の高速化、即時性を高めている。

いま、1システムに10区分が存在し、8人が6人と2人に分れて夫々別の区分に入溝している場合を考えると表4-1に従って制御を行なうとシステム全体を観測し、入溝者数とその分布の確定は、

$5 \cdot 5 + 3 + (0.02 + 0.02) \times 10 = 8.9$ 秒で行われることになる。ここでは、ボーリング、ACKに夫々20msecを要するものとしている。もし、各区分の観測を最大容量20秒で行なうことにすると、 $20 \times 10 + (0.02 + 0.02) \times 10 = 200.4$ 秒を要することになり、前述の方法は20倍以上の高速化を達成していることになる。20秒観測に2秒ルールを適用すると、

$(5 \cdot 5 + 2) + (3 + 2) + 2 \times 8 + (0.02 + 0.02) \times 10 = 28.9$ 秒となり、かなり速くなるが、表-3の方法の3倍以上の時間を要することがわかる。

次に、ある区分に突然50台のIDTが入った場合を考察する。最初の観測では初期入溝者数が零であるから3秒間観測を行う。この時、受信可能IDT数は20台であるから、これに近い台数のIDTが検出される。よって表-3より2回目の観測時間は11秒となることがわかり、40台近い検出が行われる。よって3回目は20秒の観測が行われるので50台全数が検出される。すなわちシステムの動作は入溝者数の増加に追従している。

3) システム能力

これまで述べて来たシステム性能を表4-2にまとめる。

表4-2 入溝者計数システム システム性能

項 目	性 能
1] IDT検出 最大容量 区分の大きさ 最大区分数	50台(人)/区分 50~500m (クローズされた部屋に対しては別設計) 100 (最大トンネル長 6km)
2] データ・伝送方式 IDT発呼 IDTデータ ACU選択 ボーリングデータ アックデータ データレート	一様ランダム (平均周期1sec. データ長20msec) ID番号/状態 (正常or非常) ボーリング/アック方式 (ACUの) ID番号 (ACUの) ID番号/IDT受信状況 /トンネルアンテナ状況 4.8kbps
3] 装置、部品	LCU ACU/トンネルアンテナ システムケーブル/分岐器/終端器
4] 入溝者検出性能 検出率	ほぼ100%

5. システム動作

1) LCUの制御機能

LCUの機能には、大きく分けて次の2種類がある。

第一は、接続されている各ACUにポーリングをかけて検出アンテナからのIDTデータを収集し、ACUごとに検出したIDTデータを集計して、各ACUごとの管理区分（以下、「エリア」）に属するIDTの存在（IDNo.および人数）を把握する機能である。

第二は、ここで把握した入溝者状況を通信回線を介して上位の監視システムに通知する機能である。

(1) 入溝者計数機能

① 接続ACU数の把握

LCUは初期処理で接続ACUの確認を自動的におこない、ここで認識できたACUを以下のポーリングの対象とすることで、接続ACUの数にとられないシステム構築を可能にしている。

② IDTデータ検索・編集処理

ACUへのポーリング検索では、IDTデータを検知するごとにIDNo.テーブルを作成して行き、既に同一のIDNo.が登録されている場合はその内容を最新のもので更新することによって、各ACUのポーリング終了ごとに認識IDの数を集計してエリア内人数を求める。

ここで、各ACUへのポーリング時間の設定は以下の方式を採用している。

- ・ポーリング初期には全てのACUに対して基本の検索時間を設定する。
- ・ポーリングの終了毎に当該ACU内のID編集および人数集計を行い、人数に従って次回ポーリング時の検索時間を設定する。

例えば、基本時間（3秒）の検索時間内に収集できたID数が5人を超えた場合、次回検索時間を5秒に設定する。（このポーリング時間は、存在人数に応じた把握確率の高い設定時間を定数として設定している）

また、この処理の課程で、

ア) 入溝認識

前回までどのエリアにも認識されていなかったIDTデータを初めて検知した場合、

イ) 存在認識

前回に引き続きIDTデータを検知したエリアでは、そのIDTが移動していないとして存在確定認識を継続する。

ウ) 移動認識

検知したIDTデータが前回認識していたエリアとは異なるエリアで検知された場合、このIDTがエリア間を移動したとして存在確定エリアNo.を更新する。

エ) 出溝認識

前回まで認識されていたIDTデータがどのエリアでも検知されなかった場合、

ここでは、2回以上続けて同じエリアで検知しないかぎりそのエリア間を移動したとは認識しないようにして、確度を上げる工夫をしている。
の各認識処理をおこなっている。

(2) IDTデータ通知機能

① 入溝者人数通知

各ACUへのポーリング検索終了時にエリアごとの検知IDT数を集計してエリア別及び総人数を計算し、このとき、前回集計時との比較によってそのエリア内の人数変化を上位システムに通知する。

② IDTの存在エリア認識

IDTデータテーブルの検知IDNo.とポーリング対象エリアNo.から、個々のIDTの存在エリアを特定し、必要に応じて上位システムにその情報を提供することができる。

(3) 異常判定処理

① アンテナ異常

ポーリングに対するACUの応答ステータスをチェックし、異常ビットが立っていれば異常の認識をセットし、「アンテナ異常」と判定する。

② ACU異常

ポーリングに対する<ACK>応答がない場合は同一ACUに対して一定回数までポーリングを繰り返し、当該ACUの異常と判断する。

③ データ回線 (I/II系) 異常

全てのACUにおいて、ポーリング応答時に「IDTあり」を通知しながら1つのIDTデータも受信しなかった場合、当該データ回線系を異常と判断して他系に切り替え、データ収集の停滞を防いでいる。

2) IDTデータテーブルの基本的な操作方法の概要

(1) ACUの検索（ポーリング）～IDTデータの取り込み・処理

各ACUの検索後、IDTデータテーブル内に検知したエリアNo.を該当するIDNo.の「今回」値フィールドにセットする。

「前回」・「今回」・「確定」エリアNo.フィールドの内容をチェックし、いずれかのフィールドにでも検索対象ループNo.があるものについて、以下の処理をおこなう。

例1：[ACU<01>ポーリング前]

検知エリア <ID No.>	前回	今回	確定
001	1	0	1
002	2	0	2

「今回」値の内容を「前回」フィールドにコピーし、
検知エリア内容を「0」にしておく。

[ACU<01>ポーリング後]

検知エリア <ID No.>	前回	今回	確定
001	1	0	1
002	2	1	2
003	1	1	1

(入溝)

- ・検知したID No.に相当する「今回」値フィールドを検索したエリアNo.<01>で更新する
- ・初めて出現したIDNo.は無条件に検知したエリアNo.に存在すると認識する。

(2) IDの存在認識・エリア間移動認識

IDデータテーブルの検知IDと存在認識エリアNo.から、個々のIDTの存在エリアを特定する。

例2：[エリア<01>からエリア<02>への移動認識]

検知エリア <ID No.>	前回	今回	確定
001	1	0	1
002	2	0	1
003	2	0	2

検知ID No.

<001>
<002>
<003>

→

検知エリア <ID No.>	前回	今回	確定
001	1	2	1
002	2	2	2
003	2	2	2

(移動)

- ・検知したIDTが同一エリアで検知「前回」、「今回」と連続してされた場合、そのエリアに移動したと認識する。

(3) 人数集計

各ACUの検索終了毎にIDNo.に対する検索ACUNo.ごとに検知ID数を集計してエリア別及び、総人数を計算する。

このとき、前回集計時と異なる人数値がある場合、このエリアNo.とその人数を外部に通知することができる。

例3：[人数集計]

検知エリア <ID No.>	前回	今回	確定
001	1	2	1
002	2	2	2
003	2	2	2

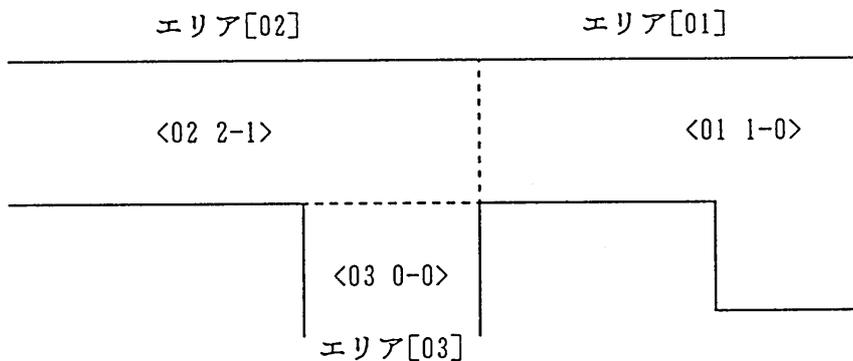
→

エリア 番号	前回	今回	増減	
001	2	1	-1	人数減
002	1	2	+1	人数増
003	1	1	0	変化無し

- ・IDTデータテーブルから、エリアNo.別の存在人数を計算し、「前回」、「今回」を比較して人数変化のあったエリアについて変化人数情報を通知する。

[IDのエリア間移動認識処理]

下図に上位監視システムにおけるトンネル内入溝者把握の様子（監視画面例）を示す。ここでは、トンネル内監視エリアをそれぞれ、[01],[02],[03]としている。ここでエリア[01]には外部から1人が入溝しており、エリア[02]では2人の入溝者のうち1人が非常信号を発している状態を示している。また、エリア[03]には入溝者は存在していない。
 (図中、— はトンネル構造(壁)を示し、
 --- はエリア境界を示す。)



2) 上位システムとの統合管理機能

本LCUの機能は、冒頭に触れたように、上位のトンネル内施設管理システムに結合させることによって、設備・入溝者を含めた統合管理システムとして有効な運用が可能になる。

トンネル内施設管理システムでは、トンネル内をいくつかの管理領域に分割し、各設備をこの領域ごとに振り分けて管理しているが、この設備管理領域と連携しながら、これとは別にトンネル内に設置されたACUの管理区分エリアごとに入溝者人数をリアルタイムで監視できる様になっている。

これによって、トンネル内入溝者の作業状況が常時把握できることで、災害の発生時における入溝者への誘導指示がスムーズにおこなえるようになると共に、避難状況をすばやく把握でき、施設への影響を最小限に食い止める素早い対応がとれることにつながる。

一方で、トンネル内への入溝に際しては入り口での入溝管理が不可欠であるが、従来入溝者の人数把握などが困難であったところ、このシステムの導入によって容易におこなえるようになり、入出溝管理がより正確にできるようになった。

この入出溝の情報は、上位システムで逐次記録され、同一IDの入溝者がいつどの場所から入溝し、どこから出溝したかを知ることができ、これを利用した入出溝管理履歴票を出力することができる。

このように、従来の上位の施設管理システムと融合することによって、さらに高度な監視システムとしての機能を持つシステムの構築が可能となった。

6 むすび

本文に述べたごとく、入溝者にIDターミナルを所持させ、トンネルを適当に区分して、区分毎に設置したアンテナによりIDターミナルの発生信号を検出し、入溝者のID番号、総数、区分毎の入溝者分布を知るシステムを開発出来た。

本システムは、現在、実用システムとして一式を建設中であり、それにより、実用管理上の有意性、問題点を調査し、その後、本格的な普及を図るべく計画している。

以 上

輻射科学研究会資料

R S 9 2 - 2

波 面 法 線 光 線 を 用 い た
幾 何 光 学

橋 本 正 弘

大 阪 電 気 通 信 大 学

平 成 4 年 5 月 2 9 日

(於 住 友 電 工 大 阪 支 店 4 0 2 号 会 議 室)

本論文は P I E R (Progress in Electromagnetic Research, Editor J.A.Kong)の特集号「New Theory and Numerical Techniques in Japan」編集者 立居場光生 の1章として書かれた原稿の写しである。

GEOMETRICAL OPTICS OF GUIDED WAVES IN WAVEGUIDES

Masahiro Hashimoto

1. Introduction
2. Historical Note
3. Variational Principles
 - a. Ray Concepts
 - b. Hamilton's Principle
 - c. Maupertuis' Principle and its Modified Version
4. Ray Tracing of Wave-Normal Rays and Wavefronts
5. Tracing of Ray Fields along Wave-Normal Rays
6. Total Reflection of Wave-Normal Rays upon a Dielectric Interface
7. Applications to Guided Wave Problems
8. Summary

References

1. Introduction

Since around 1970, the advent of low-loss optical fibers and their associated technologies added new aspects to the advance of Maxwell's wave optics. Some of them pertained to the mathematical development of the asymptotic theory of Maxwell's equations. In the early days of fiber optics, a lot of people were involved in complicated mathematical problems subject to the medium environment including inhomogeneous anisotropic materials. Design technologies therefore demanded simpler theories that describe the principal characteristics of modal waves propagating along multimode fibers [1]. The use of ray optics was very instructive for intending designers, beginners and experts, so that the ray-optical considerations contributed greatly to the establishment of the design theory of multimode optical fibers. Although the recent technology has shifted to the monomode fiber communications, the need for the establishment of the simplest theory in the monomode fiber system may perhaps remain unchanged. The ray approaches are still useful for understanding the propagation properties of guided light in a wider range of wavelength. However, certain questions may arise as to the ray tracing in an outer clad region where the ray field is evanescent and thus invisible because of its exponential decay.

For instance, the modal rays are associated with the modal waves and travel in zigzags between two dielectric interfaces. These rays give rise to the interference of two waves coming from upper and lower interfaces. This interference or resonance results in an eigenstate of the modal wave. If, however, the ray of a narrow beam wave is reflected upon the dielectric interface, the ray shift or the Goos-Hanchen shift takes place at the reflection point [2]. Nevertheless, no ray shift takes place when the modal rays mentioned above are reflected, as illustrated in standard text books. There are no inconsistencies between these two theories. The former deals with the dynamical rays whereas the latter deals with the stationary rays. These two rays become coincident in continuous isotropic media but different in anisotropic media or isotropic media including discontinuous interfaces. The stationary ray is defined as the locus of wave-normal vectors which are strictly perpendicular to the wavefronts, thus denoting the direction of propagation of the wave. On the other hand, the dynamical ray is defined as the path of a wavepacket. In this

Chapter, the dynamical ray and the stationary ray are called the energy ray and the wave-normal ray, respectively. The dynamical theory of geometrical optics is historically established by the ray tracing of energy rays [3]. Despite the most attractive features, however, Hamilton's dynamical approach fails at discontinuous boundaries such as an air-dielectric interface in a dielectric rod. To cope with this difficulty, the stationary optics has newly replaced the classical dynamical optics.

It is the purpose of the present Chapter to give a brief review of the recent development of the stationary optics described in terms of wave-normal rays [4-20], and thus it is not the purpose to give a self-contained paper that provides the full theory the readers can follow. The wave-normal ray description is useful for modal waves in visible and invisible regions. It is shown that the stationary theory of geometrical optics can be deduced from Maupertuis' variational principle. It is also shown that the conventional ray description, on the other hand, is obtained from Hamilton's variational principle. Comparisons between the two theories are given from a purely physical point of view. The contents to be presented here are partly based on an invited talk at the Seminar on Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, June 3-8, Adana, Turkey. Because of the limited space, only the main ideas is outlined. The interested reader should refer to the references cited or the more extended review paper "Geometrical Optics of Guided Waves: Stationary Optics for Modal Waves", which will be published in Chapter One of the book "Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory", edited by M. İdemen, M. Hashimoto, O.A. Tretyakov, Science House Co. Ltd., Tokyo.

2. Historical Note

In dynamics of a wavepacket of light, Professor Synge was primarily concerned with Hamilton's mathematical works collected in Mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton [21]. He studied Hamilton's variational principle [22] subject to the conservation law of energy $F(r, p, \omega) = 0$ where r is the position vector, p is the normalized wavevector ($|p| = \text{refractive index} (= n)$), and ω is the angular frequency. His variational principle was written in the form slightly different from the well-known form in nonrelativistic quantum mechanics. He then showed that all paths of energy rays are determined

from Hamilton's law written in Euler's form in which the independent variables of the Lagrangian function are $r, p,$ and ω . The variation of ω produces a wavepacket in space, so that the principle provides the path of the dynamical motion of a wavepacket. The theory is named Hamilton's optical work [23] or simply Hamiltonian optics. If we want further information on the wavefronts of the wave of light, we have to plot equiphase lines, drawing a number of energy rays in the neighborhood of the principal ray. The physical science based on this procedure is called geometrical optics. To distinguish it from others, we use the terminology "the conventional ray optics" or "the conventional geometrical optics".

The ray tracing of wave-normal rays is the technique of determining the wavefronts directly. The curvatures of the wavefronts are traced along the wave-normal ray [6,8,10,11]. When the ray impinges upon a certain discontinuous boundary and penetrates into another medium, the value of the curvature of the wavefront jumps to a different value. The successive tracing of the wavefronts is found to be equivalent to the tracing of a ray bundle of energy rays in space. In the first decade of the twentieth century, Gullstrand [24] first introduced this idea into classical optics, thereby establishing his theory of human eye [25]. After about twenty years, Hastings [26] applied the same idea independently to the design theory of optical lenses. Quite recently, Gullstrand's approach was restudied by several authors [27,28]. Stavroudis named it the generalized ray tracing [28] to extend the idea of ordinary ray tracing to include the calculation of wavefronts.

All of them, however, seem to have been unaware of the fact that the wave-normal rays they treated have other properties different from those that the energy rays have. This is because they were concerned with isotropic media in which all differences between two definitions to the rays disappear. If the value of ω is fixed in the dispersion equation $F(r,p,\omega)=0$, the variational principle by no means produces a wavepacket. Instead, it describes the motion of a stationary wave operated by a single frequency. The original expression of Maupertuis' principle was given in this style (refer to Subsection 3.c) and later altered in a complete style by Lagrange. In the beginning of the nineteenth century, Hamilton pointed out [22] that Maupertuis' principle of least action had a mathematical drawback when it applied to the dynamical system of motion of a particle. Since then, the

principle of least action seems to have lost its validity in physics. We point out that Maupertuis' principle becomes valid again for the stationary system of wavemotion such as the propagation of a wave of monochromatic light in isotropic/anisotropic inhomogeneous media.

3. Variational Principles

It has been shown that there are two ways of discussing the geometrical configurations of a wave in terms of two different rays. Each gives complete information on the wave mechanism of propagation in time-space domain. Basic rules that constitute different ray configurations in the medium environment are deduced from different variational principles [4,5]. These are outlined in this section.

a. Ray Concepts

Figure 1(a) shows a schematic of propagation of a plane wave in a homogeneous anisotropic medium. Since the wavefronts are plane, the directions of wave-normal rays are straightforward as indicated by bold lines with arrows. The energy ray is also a straight line (broken line), but it is directed toward the other direction. Figure 1(b) shows the case of propagation of a spherical wave. The direction of the energy ray constructed by a superposition of spherical wavelets remains unchanged. On the other hand, the wave-normal rays curve apparently according to the variations of the wavefronts, and thus, the ray directions are uniquely determined if the initial shape of the wavefront at an initial position from which the ray starts is given [6,8,10,11].

In inhomogeneous and anisotropic media, the ray pictures become more complicated. For example, in magneto-ionic media, the wave-normal pictures may exhibit curious curves that have "cusps" when a spherical wave moves keeping the same radius of curvature of the wavefronts (see Fig.2). These cuspidal curves of the wave-normal rays contrast well with the gentle curves of the energy rays indicating the paths of energy transport. Obviously, no physical anomalies occur at these cusps. Booker [29] concluded that only the tracing of energy rays is geophysically meaningful.

b. Hamilton's Principle

Hamilton's dynamical principle provides a systematic plan for

writing down the ray equations of dynamical motion of a wavepacket in any system. These ray equations describe the real paths of energy transport. The principle states that the integral of the Lagrangian L over the time axis has a stationary property when the ray moves apart from the real path [22]:

$$\delta \int L dt = 0 \quad (1)$$

The times of departure and arrival, however, are fixed, and further, the dispersion relation $H = 0$ is satisfied on the real path (see Fig.3). The function L is

$$L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_g - H, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} H &= H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ &= c(\mathbf{p}^2/n^2 - 1)/2 \end{aligned} \quad (3)$$

where \mathbf{v}_g is the ray velocity, n is the refractive index specified by a function of the position vector \mathbf{r} and the unit vector \mathbf{i}_p normal to the wavefront, \mathbf{p} is defined by $\mathbf{i}_p n$, and c is the velocity of light in vacuum. Letting the first variation of the integral with six degrees of freedom be zero, we obtain the ray equations

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{c}{n^2} \left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{p}} \right) \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{c}{2n^2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{r}} \quad (5)$$

which are basic equations in Hamiltonian optics.

In what follows, we consider a variation of the functional in a system with three degrees of freedom.

c. Maupertuis' Principle and its Modified Version

The ray equations for the wave-normal rays depicted in space are obtainable from Maupertuis' original statement "PRINCIPE GÉNÉRAL" reported in 1746 [30,p.36],

"Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible. La quantité d'action est le produit de la masse des corps, par leur vitesse & par l'espace qu'ils parcourent. Lorsqu'un corps est transporté d'un lieu dans un autre, l'action est d'autant plus grande que la masse est plus grosse, que la vitesse est plus rapide, que l'espace par lequel il est transporté est plus long."

His statement will be expressed in the form

$$\delta S = 0 \quad (6)$$

where

$$S = \int p \cdot dr \quad (7)$$

and the integration is carried out over the interval between the fixed starting and arriving points. Instead, the times of departure and arrival are *not* fixed (see Fig.4). Since ω is constant, the dispersion relation $F = 0$ between p , r and ω is reduced to the relation $H = 0$ which describes an ω -conservative system of motion. The two parameters, p and r , are thereby restricted by the conservation relation $H = 0$. The vector p is now regarded as a function of the vector r possessing three arbitrary components, provided that the unit wave-normal vector i_p is specified in space by $i_p(r)$. This means that our system of motion has been reduced to a system of three degrees of freedom. Then, taking variations for S with respect to r , we obtain [7]

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{N^2} p, \quad p = i_p N \quad (8)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{c}{N} \frac{\partial N}{\partial r} \quad (9)$$

where N is the refractive index represented as a function of the single parameter r , $N = n(r, i_p(r))$. The value of the refractive index written by N should be distinguished from the value of n . The (8) and (9) are the desired expressions for the ray equations of wave-normal rays. Comparisons with Hamilton's ray equations ((4) and (5)) are naturally more helpful in recognizing the difference between the stationary path and the dynamical path.

For two-dimensional cases, we obtain a set of the three equations from (8) and (9)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{n^2} P \quad (10)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{c}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{c}{n} \frac{\partial n}{\partial i_p} + i_p \frac{c}{n^2} \frac{\partial n}{\partial i_p} \cdot \left(\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial n}{\partial i_p} \right) \quad (11)$$

$$\frac{dR}{dt} = v_p + R^2 \frac{\partial^2 v_p}{\partial s^2} \quad \text{or} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{v_p}{R^2} = - \frac{\partial^2 v_p}{\partial s^2} \quad (12)$$

where R is the radius of curvature of the wavefront, v_p denotes the phase velocity c/n and s is the coordinate measured along the wavefront, as shown in Fig.5. The third equation describes the future events on the wavefront. The (10), (11) and (12) are mathematically the same with (8) and (9) in two dimensions. The advantage of using these expressions instead of (8) and (9) is that they present explicit formulas for the radius of curvature of the wavefront. This is very desirable for a systematic determination of the wavefront. In anisotropic media, these three equations are coupled with each other, and thus, the local nature of wavefronts affects not only the direction of the ray but also the position of the ray [10,11]. Therefore, the ray configurations for the wave-normal rays in anisotropic media depend on the initial shape of the wavefront. If, however, the medium is isotropic, (12) holds independently of the first and second equations, so that any ray path in an isotropic medium is uniquely determined irrespective of whether the shape of the wavefront is planar or spherical.

Another expression for Maupertuis' principle is often given as the principle of least action, containing the two independent parameters p and r with six degrees of freedom. It is worth noting that this variational expression of six arbitrary parameters leads to another goal, Hamilton's ray equations of dynamical motion, as is well-known in dynamics. The readers should be careful not to confuse this with (6).

Suppose, next, the ray is reflected at the discontinuous interface. The ray field undergoes the phase increment Φ at the reflection point. If the reflection boundary is the surface of the perfectly conducting material, the value of Φ is exactly equal to π . In most cases, however, the value of Φ decreases as the value of the (complementary) angle of incidence θ_i increases. For the most general cases when the value of Φ varies with θ_i , the validity of Maupertuis' principle mentioned above is quite unsatisfactory because it does not describe the influence of Φ in the phenomenon of reflection, which is characterized by the high order theory of wave optics. To extend his idea of least action, we subtract Φ/k from the action integral S . The exact value of Φ is unknown for ever unless we solve Maxwell's equations as a boundary value problem. However, since the value of Φ/k is of the order $1/k$, Φ can be approximated by the phase of Fresnel's reflection coefficient valid for the plane wave incidence upon a plane interface. This modified version of Maupertuis' principle

$$\delta S = 0 \quad (13)$$

with

$$S = \int p \cdot dr - \Phi/k \quad (14)$$

will be applied later to the reflection problems encountered frequently in waveguides.

4. Ray Tracing of Wave-Normal Rays and Wavefronts

The ray equations, (8) and (9) or (10), (11) and (12), can be solved efficiently by means of a digital computer, provided that the refractive index of the medium and the specific numerical initial data on the wavefront and the ray position are given [6,8,10]. For a few limited cases [19], we can find rigorous analytical solutions.

Figure 6(a) shows an illustrative example [10,11] of the ray tracing for an extraordinary wave in an inhomogeneous anisotropic calcite with

$$v_p = v_o \sqrt{\frac{1 + g \sin^2 \theta}{1 - by}} \quad (15)$$

where the optic axis and the inhomogeneity axis are assumed to be x and y, respectively, b is constant and θ is the angular coordinate measured in a counterclockwise sense. The initial wavefront contains convex and concave parts in the upper and lower sides, from which the diverging wavelets and the converging wavelets start upward. The converging ones are focused at the locations which are distributed in space. These distributed focusing points make a line called the caustic that is inaccessible by ray optics. The wavefront tracing as well as the ray tracing will cease on this line (probably placed below the Arabic numerals for S in Fig.6(a)).

Comparisons are given in Fig.6(b) for checking the validity of the method. A number of curved lines represent the energy rays starting with the initial ray directions on the initial wavefront. The cuts marked on the ray curves indicate equiphas planes (wavefronts). Some rays are found to intersect on the lower right corner; these intersects make an optically inaccessible caustic as has already been expected by tracing the wave-normal ray. Results based on the stationary optics (Fig.6(a)) and the dynamical optics (Fig.6(b)) are in excellent agreement.

5. Tracing of Geometrical Optics Fields along Wave-Normal Rays

The power of light passes through a tube of energy rays, conserving the total energy at any cross section. From this law of energy conservation, we obtain the expression for the intensity I of light along the wave-normal ray [10]

$$I = I_0 \frac{R_0}{R} e^{\int_{\eta_0}^{\eta} (\gamma - \tan \alpha \frac{\partial \ln(I R)}{\partial t}) d\eta} \quad (16)$$

where the subscript 0 denotes the quantities defined at the initial

position, α is the angle between the directions of the wave-normal ray and the energy ray (see Fig.5), ξ is the local coordinate measured along the wavefront and γ is the known quantity on η . The values of $\tan\alpha$ and γ are given by

$$\tan\alpha = (\partial v_p / \partial \theta) / v_p \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma(\xi, \eta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \tan\alpha + \frac{2 \tan\alpha}{v_p} \frac{\partial v_p}{\partial \xi} + \frac{R}{v_p} \frac{\partial^2 v_p}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (18)$$

respectively. The amplitude of the geometrical optics fields can therefore be obtained from (16). Since, in general, the direction of the wave-normal ray differs from that of the energy ray ($\tan\alpha \neq 0$), the field amplitude cannot be determined uniquely from the previous data on the wavemotion along the wave-normal ray. The method of field construction thus requires the additional information on the neighboring rays, or exactly speaking, we need to calculate the derivative of the curvature of the wavefronts with respect to ξ (see the second term in the integrand of (16)) [10]. This term describes a factor of coupling between the two wave-normal rays in anisotropic media. All neighboring rays are thereby coupled so that all initial data on the initial wavefront contribute to the local ray fields. The strength of coupling is diminished when the media are weakly anisotropic and vanishes absolutely when isotropic. Therefore, the rays are decoupled in isotropic media. A numerical example for calculating the ray fields in an inhomogeneous calcite by the present method is illustrated in Fig.7 where the field amplitude on the initial wavefront is assumed to be inhomogeneous and have a peak at a certain point. It is shown that a train of the peaks running away from

¹Differentiation with respect to s in (12) involved the two types of differential operations with respect to the position r and the direction i_p . The $\partial/\partial\xi$ indicates the first type of differential operation with respect to r , thus neglecting the variation of i_p with r . Hence, $\partial/\partial s = \partial/\partial\xi + (1/R)\partial/\partial\theta$. For any homogeneous media, we have $\partial/\partial\xi = 0$.

the initial point makes a line close to the expected path of energy transfer.

6. Total Reflection of Wave-Normal Rays upon a Dielectric Interface

The idea described so far is applied to monochromatic spherical waves emanating from point sources and totally reflected at a dielectric interface. Geometrical rules of total reflection for such waves having curved wavefronts differ from those for a plane wave. The modified version of Maupertui's principle provides the law of reflection for stationary waves [12,14]. This will be summarized below.

Figure 8 shows that a two-dimensional spherical wave (a cylindrical wave) starting from Point P is reflected at Point A and propagates toward the observation point Q. Point P' indicates the mirror point of Point P. Point P'' is the real image point of Point P, from which the reflected wave comes directly. The observer looks at Point P'' as an image source instead of the real source although the real propagation undergoes a phase increment ϕ by the total reflection. The value of ϕ is calculated from Fresnel's reflection formulas, and thus depends on the value of θ_i . Point P'' is located near Point P' as indicated in Fig.8 where primes denote differentiation with respect to θ_i and k is the wavenumber in free space. We note that, in general, the (complementary) angle of reflection θ_r is larger than θ_i . However, in the limit of a plane wave incidence where the radius of curvature of the wavefront at the incidence point is infinity, the value of θ_r becomes equal to the value of θ_i . We also note that the phase of the image source must be $\phi + \phi''$ when the phase of the original source is zero, and in addition to this, the amplitude of the image source must be equal to the amplitude of the original source, as referred to as the invariant principle [31].

The above geometrical rules for the location of the image source can again be stated equivalently as follows:

$$\cos\theta_i - \cos\theta_r = -\frac{\sin\theta_i}{kR_i} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_i} \quad (19)$$

and

$$R_r = R_i + \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad (20)$$

where R_i and R_r are the radii of curvature of the incident and reflected wavefronts at Point A, respectively ($\therefore R_i = \overline{PA}$, $R_r = \overline{P'A}$). The formula, (19), is simply derived by applying the variational principle to the "virtual rays" passing near the real path and the second formula, (20), is derived by applying (19) again to a ray adjacent to the relevant ray, both of which constitute a ray bundle diverging at Point P or Point P". Analytical details for these results are given in Ref.[12]. The mathematical evidence is exactly involved in the high order asymptotic theory of Maxwell's equations [32]. We do not give further explanation for this because it is beyond our scope.

The dynamical path of a wavepacket starting from Point P and arriving at Point Q should obey Hamilton's rules in the upper denser medium. However, these rules become invalid in the lower rarer medium because the wave of light is invisible, and therefore, there is no method of tracing the ray path. Although the dynamical principle fails for the case when the medium includes a discontinuous boundary between the two regions, the geometrical rules for dynamical waves can be deduced from the stationary rules obtained above. To show this, we first pay attention to the fact [5] that the path of a wavepacket coincides with the path of a beam wave which is a "spatial packet" of stationary wavelets. The path of this spatial packet is determined as follows by means of complex ray techniques [33-37]. Changing the position of the image source P" downward to the direction $Q \rightarrow A \rightarrow P''$ by the complex amount jb (see Fig.9), the reflected spherical wave represents, in real space, a Gaussian beam wave propagating along the path AQ. By letting P" move in complex space, Point P' (the mirror point of Point P) moves along a line parallel to AQ while Point P moves upside down. Then, the incident energy ray makes an angle θ_i with the interface, and as a result, it crosses the interface at Point A" that shifts to the left from Point A. This shift is called the ray shift or the Goos-Hanchen shift. The above simple rule for the location of the image source can be generalized as the "law of image sources" which holds valid in general inhomogeneous media [20]. The resulting rules summarized for the particular case in Fig.8 are

applicable to the general case when the incident ray curves in an inhomogeneous medium and is reflected upon the interface or when the curved incident ray passes through the minimum point at which the ray is reflected and does not impinge on the interface. However, the invariant principle of source amplitudes must be modified slightly [31].

7. Applications to Guided Wave Problems

First, we consider whispering gallery waves in a dielectric circular rod in which a progressive wave is incident upon the curved interface from the inside and is reflected backward, and is incident again upon the other part of the interface (see Fig.10). An infinite number of the wave-normal rays travel along the curved interface. Their envelope appearing in the rod is called the caustic or the distributed source plane from which the rays irradiate the interface. In familiar text books, the angles of incidence and reflections are shown to be equal. However, no answer to the question of why the angle of reflection must be equal to the angle of incidence is given. The present theory can explain why it is so [14]. In fact, we can obtain the reflection formulas for curved boundaries, instead of (19) and (20) (see Fig.14). The term on the right hand side of (19) should be replaced by $(1/k)(\partial\Phi/\partial l)$ where l is the coordinate along the curved boundary. Let an incident ray come from a certain source point located on the caustic (a circle), making an angle θ_i with the reflection boundary. If this boundary is circular, then the neighboring ray starting from the same source point impinges on the boundary, making the same angle θ_i with it at the neighboring point. This means that mathematically $\partial\theta_i/\partial l = 0$ or $\partial\Phi/\partial l = 0$. Therefore, we find $\theta_i = \theta_r$ from $\cos\theta_i - \cos\theta_r = 0$. The same argument cannot hold in dielectric elliptic rods.

Secondly, we apply the stationary theory to the analysis of dielectric tapered waveguides with the widths of the input end d_1 and the output end d_2 , the length L and the refractive index unity. For convenience, the refractive index of the surrounding medium is assumed to be 0.9954. Point P is located on the center of the input end and Point Q is located somewhere on the transverse axis perpendicular to the waveguide axis (the x axis) (see Fig.11).

There are a number of rays starting from Point P and arriving at Point Q. One is a straightforward ray and the others are all zigzag

rays; they are reflected at the upper and lower interfaces. These zigzag rays come from the image sources directly without receiving any reflection, as have been illustrated in Section 6. Figure 11 shows an example of the locations of the image sources. Such locations shift slightly when Point Q moves along the transverse axis, keeping close to the x axis. However, this shift does not have much effect on calculations of the field distribution unless Point Q moves beyond the range of interest. Therefore, the locations of the image sources are determined by setting Point Q on the x axis. They shift also when Point Q moves along the longitudinal axis (the x axis). The number of the image sources increases as the observer moves toward the right. This effect is nonnegligible. Geometrical optics fields are calculated as a sum of spherical waves coming from the real source and the image sources.

We omit partially reflected rays or refracted rays that describe a leakage of the wave since we are concerned with guided waves. However, when the observer looks at the image sources in complex space, he observes the complex refracted rays. These complex rays represent the evanescent waves in the rarer medium. The image sources of the complex refracted rays are located in complex space and their locations are determined uniquely [16]. Geometrical optics fields that represent the evanescent fields in the surrounding medium are calculated in a similar manner.

Letting Point P shift toward the left by a complex amount $jk\omega^2$, the image sources also shift toward the left by the same amount. The resulting complex rays represents in real space a Gaussian beam wave with $1/\sqrt{e}$ -waistsize w_0 [34,37]. Figure 12 shows numerical examples of beam wave propagation. The wavelength is $0.63 \mu\text{m}$, the values of d_1 and d_2 are, respectively, $20\mu\text{m}$ and $10\mu\text{m}$, and the value of L is $5000 \mu\text{m}$ or $3000\mu\text{m}$. In this waveguide, several modes are supported along the x axis so that some high order modes radiate from the interfaces between the input and output ends and a few low order modes remain at the final goal. An example of the fundamental mode excitation with $w_0 = 6.3\mu\text{m}$, $L = 5000\mu\text{m}$, $x = 4000 - 4500\mu\text{m}$ is given in Fig.12(a). For comparison purposes², the two examples of the multimode excitation with $w_0 = 2.3\mu\text{m}$, $L = 5000\mu\text{m}$, $x = 4000 - 4400\mu\text{m}$ and with $w_0 = 2.3\mu\text{m}$, $L = 3000\mu\text{m}$, $x = 2000 - 2650\mu\text{m}$ are given in Figs.12(b) and 12(c), respectively. It is also possible at the input end to excite the second or third taper mode which leaks out

from the waveguide.

²Those results were checked by comparing with the beam propagating method (BPM) solutions [38] based on paraxial wave optics, although such a comparison has no significance in testing the validity of the method because of their different bases of approximation. On the other hand, analytical comparisons with the wave solution [39] obtained from the geometrical optics solution by means of analytical continuation in a spectral domain are fully suggestive.

8. Summary

The theory of stationary optics for guided waves in waveguides has briefly been reviewed and various rules derived for the stationary ray which is called the wave-normal ray are discussed in comparison with the conventional dynamical optics rules. It has been mentioned that these two definitions are compatible in representing high frequency waves. The ray of light in the stationary optics indicates the direction of motion of stationary waves, which is perpendicular to the wavefronts, and in general, it does not indicate the direction of the transport of energy of a wave. We have made a clear distinction between the two descriptions of geometrical optics according as we have treated a monochromatic wave or a wavepacket. Figure 13 shows a schematic for the two ways of describing deduction optics. Both can be consistent with each other and perhaps present the same solution in continuous media. The prominent advantage of the stationary optics is that the ray traveling near the discontinuous interface can always be traced in the visible region if the phase increment due to the reflection is specified by a function of the angle of reflection; we need not calculate the complex ray path to evaluate the effects of the evanescent field in the invisible region. This is summarized in Fig.14.

The framed question marks denote unknown formulas which can never be derived from Hamilton's dynamical principle. The directions of arrows represent the directions of deduction where R_i or R_r is the radius of curvature of the wavefront of the incident or reflected wave

at Point A. The new dynamical theory of optics has been established by letting the source location in the stationary optics shift toward the complex location. The well known principle of equal angles for the incident and reflected dynamical waves has been explained in this way.

A close examination of the modified Maupertuis' principle from which the geometrical law for wave-normal rays are deduced supports the validity of the present theory within the range of the order $1/k$. We believe that the theory can hold valid for much more complicated configurations of motion of three-dimensional waves of which the wavefronts rotate around the principal ray.

Acknowledgments

This work was motivated by a discussion about the ray tracing of radio waves in ionosphere with Prof.I.Kimura, Kyoto University. The author also expresses his gratitude to Prof.H.Ogura, Kyoto University, for pointing out Prof. J.L.Synge's book that provides the logical rigor of Hamilton's mathematical theory.

References

- [1] For example, see D.Gloge, ed.:"Optical Fiber Technology", IEEE Press, New York, 1976.
- [2] H.Kogelnik:"Theory of dielectric waveguides", Chap.2 in "Integrated optics", edited by T.Tamir, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [3] J.A.Arnaud:"Beam and fiber optics", Academic Press, New York, 1976.
- [4] M.Hashimoto:"A new aspect of guided wave optics---the basic law of action for modal-ray optics", Proc. Sino-Japanese Joint Meeting on Optical Fiber Science and Electromagnetic Theory, Nanjing, China, May 12-14, 1987, pp.87-92.
- [5] M.Hashimoto:"Principles for modal waves in guided wave optics", Trans.IEICE, vol.J70-C,No.11,pp.1455-1465, November 1987.
- [6] M.Hashimoto and A.Komiyama:"Ray tracing of wave-normal rays", Trans.IEICE, vol.J70-C, No.10, pp.1444-1446, October 1987; erratum, vol.J71-C,No.1,p.163, January 1988.
- [7] M.Hashimoto:"On a direct derivation of ray equations from Maupertuis' variational principle", Trans.IEICE, vol.J71-C, No.2, pp.324-326, February 1988.
- [8] A.Komiyama and M.Hashimoto:"Ray tracing of wave-normal rays in an

- inhomogeneous anisotropic medium", Trans.IEICE, vol.J71-C, No.2, pp.327-329, February 1988.
- [9] M.Hashimoto:"The geometrical optics field of guided waves----A geometrical interpretation for the field amplitude----", Trans.IEICE, vol.J71-C, No.6, pp.953-956, June 1988.
- [10] M.Hashimoto and A.Komiyama:"Two-dimensional ray tracing for wavefronts, wave-normal rays and geometrical optics fields", Trans.IEICE, vol.J71-C, No.7, pp.980-985, July 1988.
- [11] M.Hashimoto and A.Komiyama:"New ray tracing for waves in inhomogeneous anisotropic media", Proc. Int. Symp. Radio Propagat., Beijing, China, April 18-21, 1988, pp.93-96.
- [12] M.Hashimoto:"The law of total reflection in geometrical optics based on wave-normal rays", Trans.IEICE, vol.J72-C-I, No.3, pp.132-138, March 1989.
- [13] Geometrical description for wave-normal rays in an optical waveguide---Geometrical optics for stationary waves---", Proc. Int. URSI Symp., Stockholm, Sweden, August 14-17, 1989, pp.303-305.
- [14] M.Hashimoto:"The geometrical law of total reflection for wave-normal rays on curved boundaries", Trans.IEICE, vol.J72-C-I, No.9, pp.562-564, September 1989.
- [15] M.Hashimoto and Xiao-Jun Zhou:"Geometrical optics analysis for the beam wave propagation in dielectric waveguides", Proc. Japan-China Joint Meeting on Optical Fiber Science and Electromagnetic Theory, Fukuoka, Japan, October 12-14, 1990, pp.1-10.
- [16] M.Hashimoto:"The geometrical optics of wave-normal rays for totally reflected electromagnetic waves", Trans.IEICE, vol.J73-C-I, No.11, pp.738-740, November 1990.
- [17] M.Hashimoto:"On the wave-normal rays and the reflection coefficients", Trans.IEICE, vol.J74-C-I, No.3, pp.97-99, March 1991.
- [18] M.Hashimoto and X.-J. Zhou:"Geometrical optics analysis for the beam wave propagation in dielectric tapered waveguides", Trans.IEICE, vol.E74, No.9, pp.2938-2940, September 1991.
- [19] M.Hashimoto:"Spotsizes of the beam waves propagating along a two-dimensional inhomogeneous medium", Trans.IEICE, vol.J75-C-I, No.1, pp.1-7, January 1992.
- [20] M.Hashimoto:"The geometrical law of total reflection for wave-normal rays on the discontinuous interfaces in inhomogeneous media", Trans.IEICE, vol.J75-C-I, No.4, pp.173-178, April 1992;---:"Supplement

to a paper on "The geometrical law of total reflection for wave-normal rays on the discontinuous interfaces in inhomogeneous media", Trans.IEICE, vol.J75-C-1, No.4, pp.197-199, April 1992.

[21] W.R.Hamilton:"The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton", vol.1, eds. A.W.Conway and J.L.Synge, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1931.

[22] W.R.Hamilton:"The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton", vol.2, eds. A.W.Conway and A.J.McConnell, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1940.

[23] J.L.Synge:"Geometrical mechanics and deBroglie waves", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1954.

[24] A.Gullstrand:"Die reelle optische Abbildung", Kungl. Svenska Vetenska. Handl., vol.41, No.3, pp.1-119, 1906.

[25] A.Gullstrand:"Das allgemeine optische Abbildungssystem", Kungl. Svenska Vetenska. Handl., vol.55, pp.1-139, 1915.

[26] C.S.Hastings:"New methods in geometrical optics", Macmillan Company, New York, 1927.

[27] J.A.Kneisly II:"Local curvatures of wavefronts in an optical system", J. Opt. Soc. Am., vol.54, No.2, pp.229-235, February 1964.

[28] O.N.Stavroudis:"The optics of rays, wavefronts, and caustics", Chap.9, Academic Press, New York, 1972.

[29] H.G.Booker:"Propagation of wave-packets incident obliquely upon a stratified doubly refracting ionosphere", Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol.A237, pp.411-451, 1938.

[30] P.L.M.Maupertuis:"Euvres", vol.4, Hildesheim, 1965, pp.3-28, "Accord de differentes lois de la nature" in 1744; pp.31-42, "Recherche des lois du mouvement" in 1746.

[31] M.Hashimoto:"On the magnitude of the image source of a spherical and nonspherical wave reflected upon an interface", Trans.IEICE, submitted.

[32] L.M.Brekhovskikh:"Waves in layered media", Chap.4, Academic Press, New York, 1960.

[33] J.B.Keller and W.Streifer:"Complex rays with an application to Gaussian beams", J. Opt. Soc. Am., vol.61, No.1, pp.40-43, January 1971.

[34] G.A.Deschamps:"Gaussian beam as a bundle of complex rays", Electron. Lett., vol.7, No.23, pp.684-685, 1971.

[35] L.B.Felsen and S.Y.Shin:"Rays, beams and modes pertaining to the

excitation of dielectric waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.MTT-23, No.1, pp.150-161, January 1975.

[36] V.Červený, M.M.Popov and I.Pšencík:"Computation of wave fields in inhomogeneous media---Gaussian beam approach", Geophys. J. R. Astr. Soc., vol.70, pp.109-128, 1982.

[37] M.Hashimoto:"Beam waves with sources at complex location", Electron. Lett., vol.21, No.23, pp.1096-1097, November 1985.

[38] R.Baets and P.E.Lagasse:"Calculation of radiation loss in integrated-optic tapers and Y-junction", Appl.Opt., vol.21, No.11, pp.1972-1978, June 1982.

[39] M.Cada, F.Xiang and L.B.Felsen:"Intrinsic modes in tapered optical waveguides", IEEE J. Quantum. Electron., vol.24, No.5, pp.758-765, May 1988.

Figure Captions

Figure 1 Energy rays (broken lines) and wave-normal rays (bold lines) in an anisotropic medium. The directions of wave-normal rays are defined to be perpendicular to the wavefronts. (From Hashimoto [5], by permission of the IEICE.)

Figure 2 Example of the wave-normal ray (solid line) and the energy ray (broken line) in an inhomogeneous magneto-ionic medium. (After Booker [29].)

Figure 3 Real path for a stationary wave traveling with ω and p from Point P to Point Q and its virtual path for another stationary wave with $\omega+\delta\omega$ and $p+\delta p$. The times of departure at Point P and arrival at Point Q are fixed. These two stationary waves produce a beat wave (dynamical wave) along the energy ray of which the path is independent of the values of $\delta\omega$. (From Hashimoto, loc. cit., by permission of the Science House Co., Ltd..)

Figure 4 Real path and virtual path for stationary waves traveling with the same value of ω from Point P to Point Q. The times of departure and arrival are not fixed. (From Hashimoto, loc. cit., by permission of the Science House Co., Ltd..)

Figure 5 Ray coordinates for a two-dimensional wave. The coordinate η ($s=0$) denotes the principal ray.

Figure 6 Ray tracing in an inhomogeneous anisotropic medium in which the phase velocity is given by (15) with $g=0.244[\text{mm}^{-1}]$, $b=0.04[\text{mm}^{-1}]$ and $v_0/c=0.603$ [10]. (a) Tracing of a wave-normal ray and associated wavefronts, (b) the paths of energy rays and their equiphases calculated by (4) and (5).

Figure 7 Geometrical optics fields along the wave-normal ray (η axis) calculated in Fig.6(a). The initial field on the initial wavefront is assumed to be Gaussian. A train of the peaks denoted by a dotted line indicates the path of the maximum intensity of light, which is very close to the energy ray. (Hashimoto and Komiyama [10], by permission of

the IEICE.)

Figure 8 Total reflection of a spherical wave on a plane interface. P is a location of the real source and P" is its image. $-\Phi''/k$ and $-\Phi/k$ indicates the shifts of the image source from the mirror point P' where primes denote differentiation with respect to θ_1 . (From Hashimoto and Zhou [18], by permission of the IEICE.)

Figure 9 Wave-normal ray, energy ray and ray shift. When the image source P" shifts to the direction A→P" in complex space, the reflected spherical wave takes the form of a beam wave whose beam axis coincides with the energy ray. The real source P then shifts upward to the direction A"→P in complex space, and thus the incident spherical wave also takes the form of a beam wave and this energy ray is directed toward Point A" making an angle θ_r equal to the angle of reflection. The shift $\overline{A''A}$ is called the ray shift. (From Hashimoto [12], by permission of the IEICE.)

Figure 10 Ray configurations of whispering gallery waves. Why is the angle of reflection equal to the angle of incidence upon a circular boundary and why does this not hold upon an elliptic boundary? To explain this, the reflection formulas for the radius of the reflected wavefront (refer to the framed equations in Fig.14) are applied to the incident spherical waves whose sources are distributed and located on a circular modal caustic [14].

Figure 11 Wave-normal rays in a dielectric tapered waveguide. The real source P is located at the center of the input end. A number of rays arrive at the observation point Q, passing along zigzag paths. Some rays leak out, and as a result, the remaining rays are observed as the guided rays whose sources are located equivalently at the points marked crosses. (From Hashimoto, loc. cit., by permission of the Science House Co., Ltd.,)

Figure 12 Geometrical optics fields calculated for the monomode and multimode propagation along tapered waveguides. (a) Monomode propagation; $w_0 = 6.3\mu\text{m}$, $L = 5000\mu\text{m}$, $x = 4000-4500\mu\text{m}$. (b) Multimode propagation; $w_0 = 2.3\mu\text{m}$, $L = 5000\mu\text{m}$, $x = 4000-4400\mu\text{m}$. (c) Multimode

propagation; $w_0 = 2.3\mu\text{m}$, $L = 3000\mu\text{m}$, $x = 2000-2650\mu\text{m}$. (From Hashimoto and Zhou [18], by permission of the IEICE.)

Figure 13 The two theories of deduction optics in continuous anisotropic media. The stationary theory is deduced from Maupertuis' principle whereas the dynamical theory is deduced from Hamilton's principle.

Figure 14 Flow diagram for the stationary theory of deduction optics, illustrating how to explain the phenomena of reflection and ray shift. The dynamical principle describing the geometrical features of energy rays in continuous media becomes invalid for the media that contain abrupt discontinuities such as an air-dielectric interface.

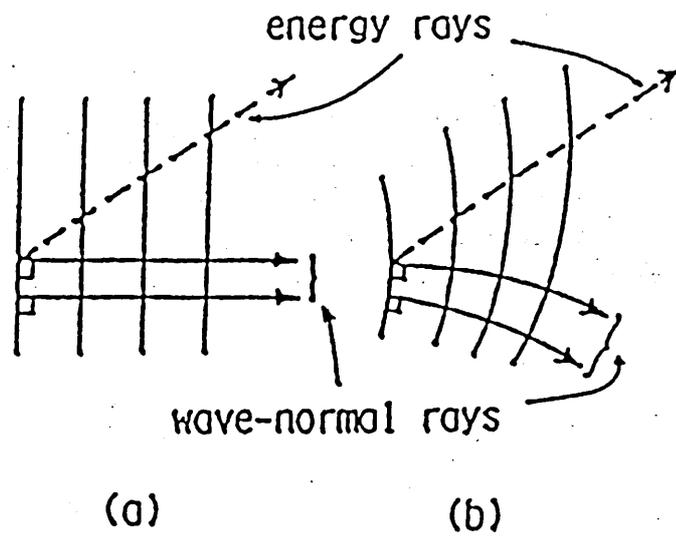


Fig. 1

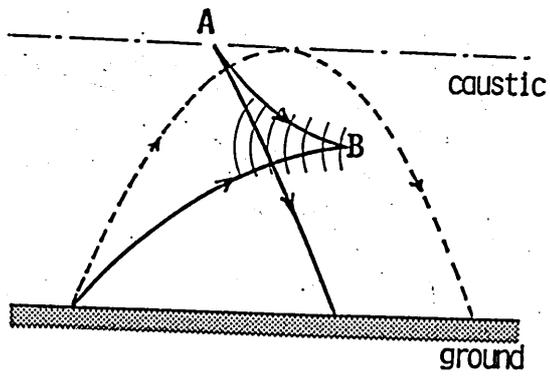


Fig. 2

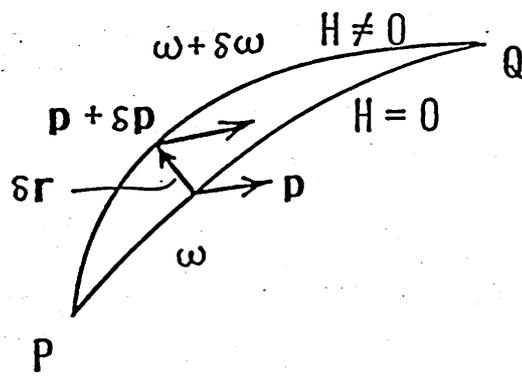


Fig. 3

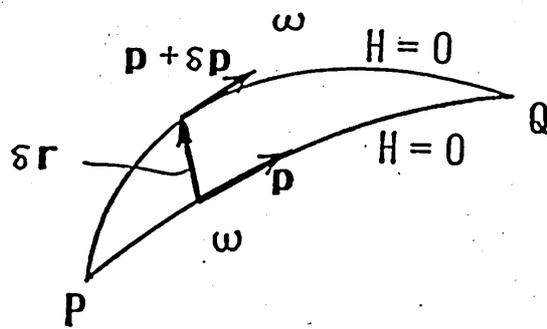


Fig. 4

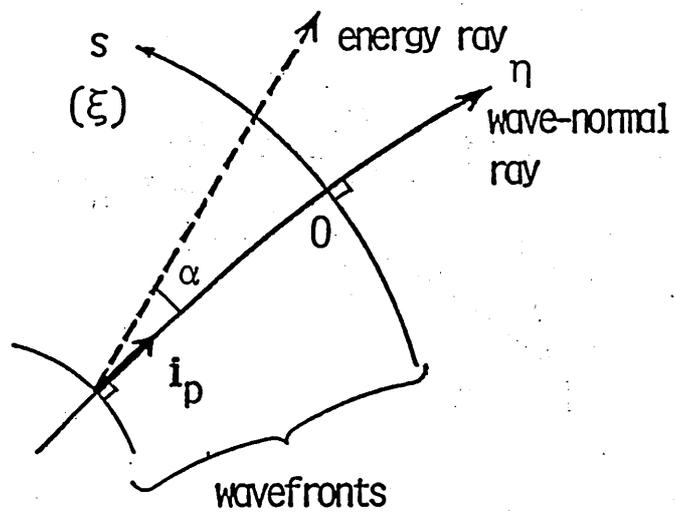
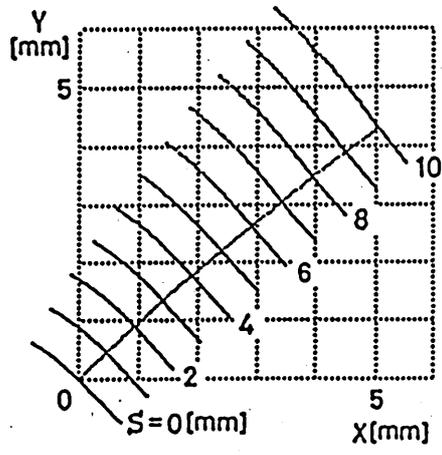
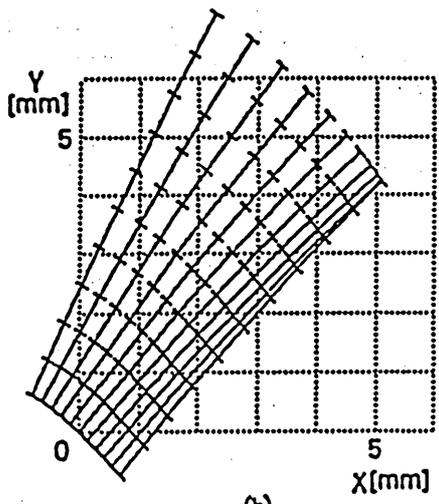


Fig. 5



(a)



(b)

Fig. 6

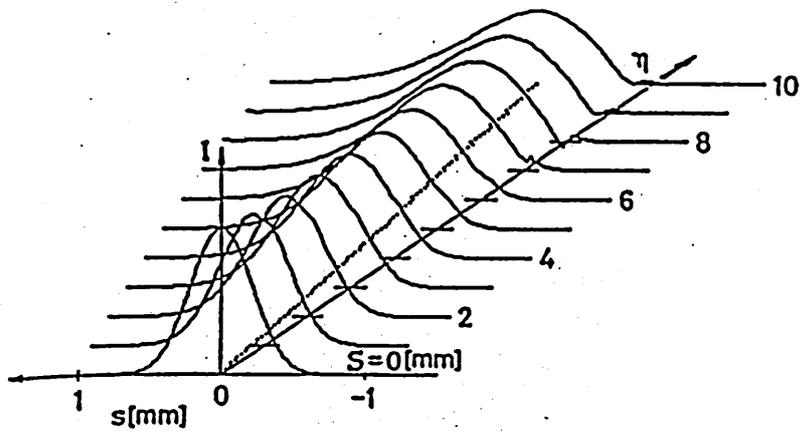


Fig. 7

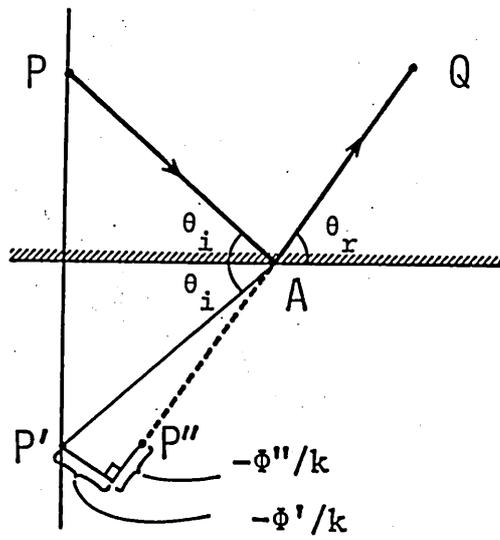


Fig. 8

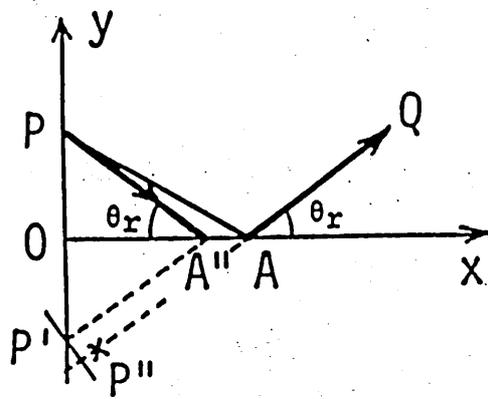
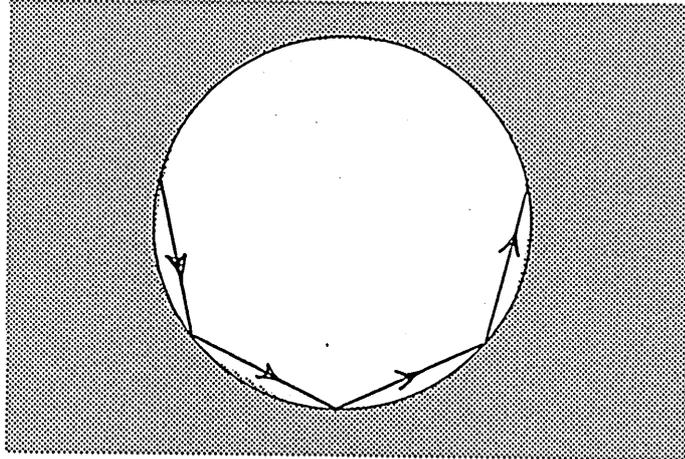
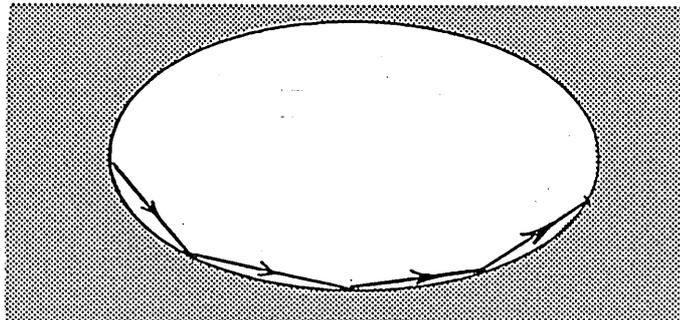


Fig. 9



whispering gallery wave
in a circular rod



whispering gallery wave
in an elliptic rod

Fig. 10

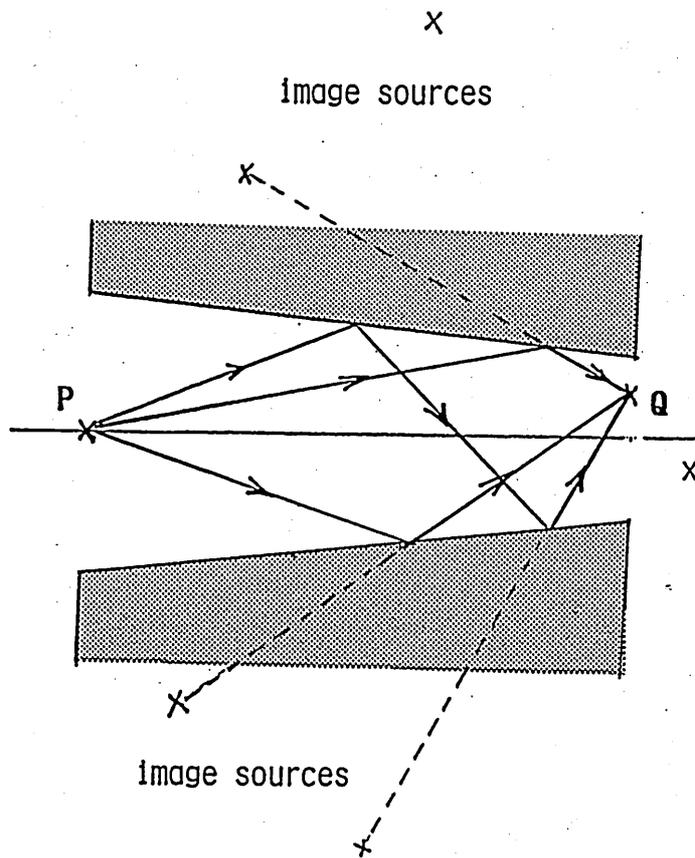


Fig. 11

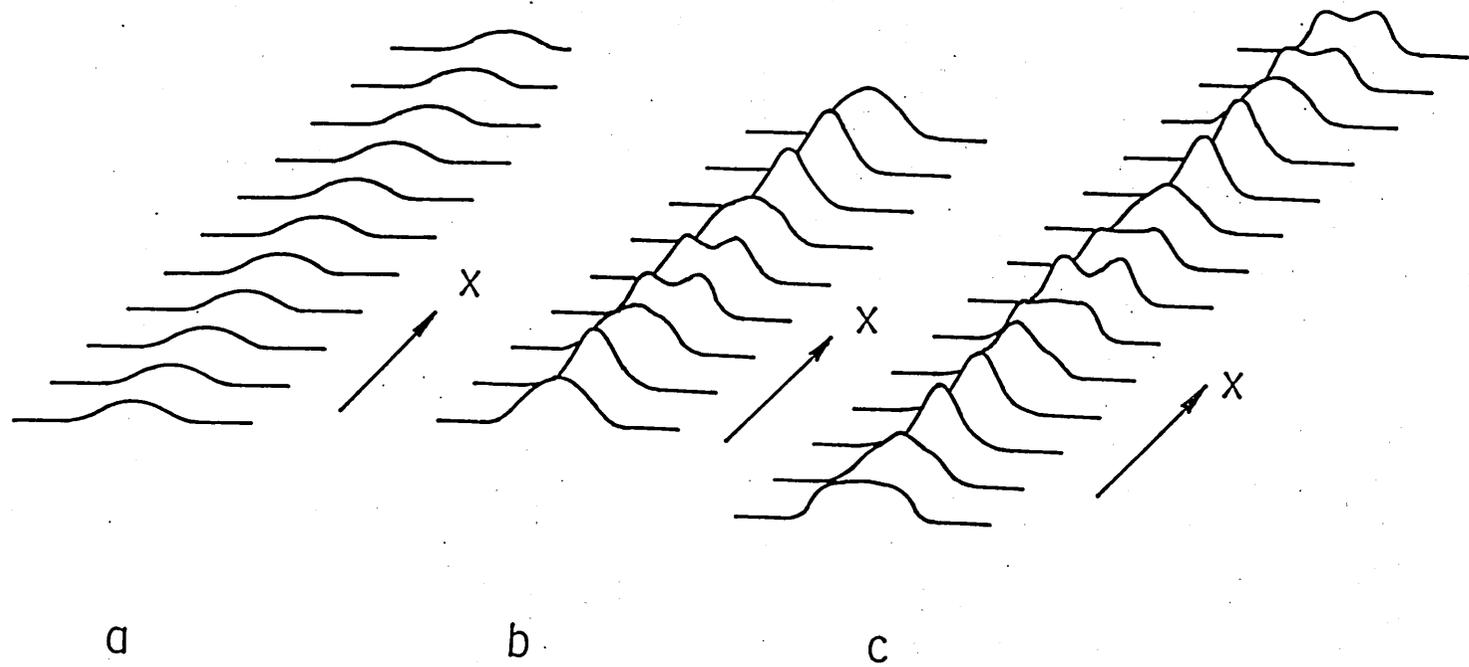
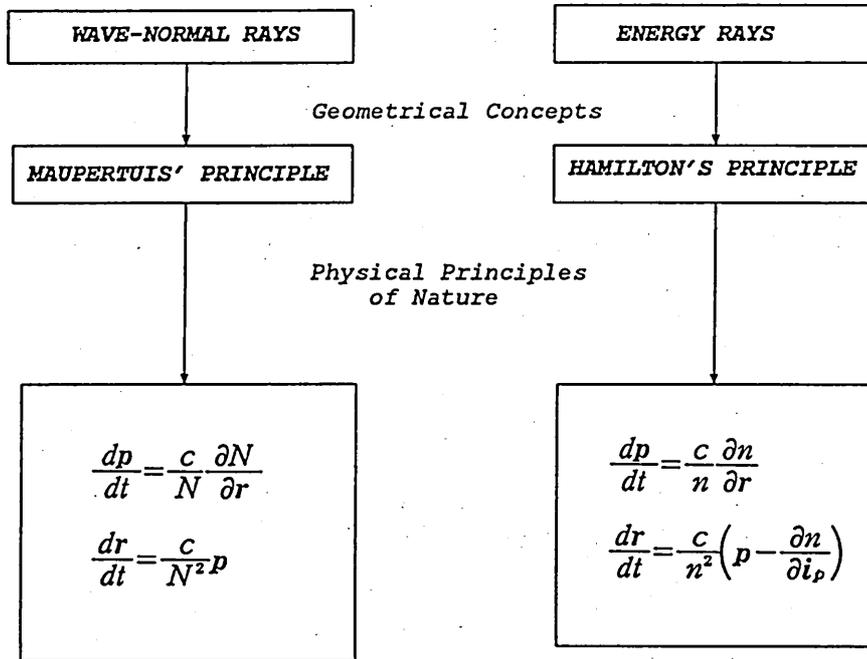


Fig. 12

GEOMETRICAL OPTICS



Equations of Motion

$N = n(\mathbf{r}, \mathbf{i}_p(\mathbf{r})) =$ refractive index,

$n = n(\mathbf{r}, \mathbf{i}_p) =$ refractive index,

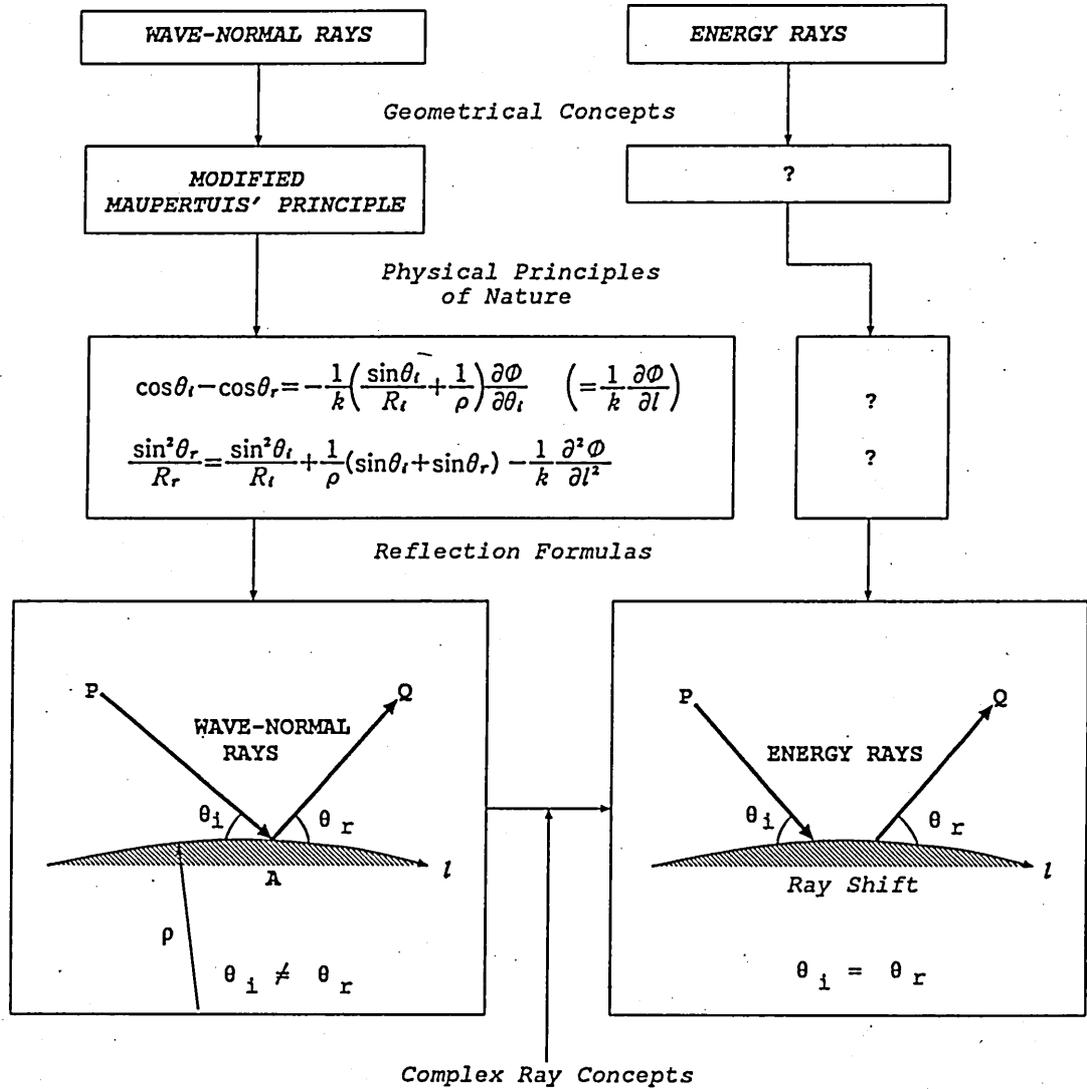
$\mathbf{i}_p =$ unit normal vector

$\mathbf{P} = n \mathbf{i}_p$

Fig. 13

GEOMETRICAL OPTICS

in the space containing discontinuous interfaces



where ρ and l are the radius of curvature of the curved interface and the coordinate measured along the interface, respectively.

Fig. 14

微分位相による距離計測

北 理英 中山純一

Masahide Kita, and Junichi Nakayama
(京都工芸繊維大学 工芸学部)

1992年5月29日

1 はじめに

連続波 (CW) を用いたレーダ/ソナーで、標的からの周波数応答 $H(f)$ が測定できれば、フーリエ変換によりインパルス応答 $R(\tau)$ が求められています。ここで、 f は周波数、 τ は波が媒質中を伝搬する遅延時間です。ステップ周波数法 [1] では、等間隔の周波数列 $f_0, f_2 \dots f_{N-1}$ に対して、周波数応答 $H(f_i)$ を計測し、そのデータを離散フーリエ変換 (DFT) して、インパルス応答 $R(\tau)$ を求めます。

ステップ周波数法には以下のような利点があります。周波数 f_i は、高精度で安定したものが得られるためインパルス応答 $R(\tau)$ の時間軸も高精度です。また、測定系の周波数特性が、DFT 処理の段階でソフトウェアで補正できるため、理想的なパルスが合成できます。更に、パルス合成をコンピュータのソフトウェアで容易に行えるので、測定系のハードウェアが簡単になります。

このような利点を生かして、地下探査レーダ [1]、ファイバの切断位置を検出する光レーダ [2]、短距離光レーダ [3] などへの応用が検討されています。

その一方、ステップ周波数法には、欠点があります。まず、運動している標的の計測は困難です。また、ダイナミックレンジを広くすることも困難です。パルスレーダ/ソナーでは、時間ゲート法によって、送信器から受信器への相互結合を抑圧でき、更に、受信器の利得を時間的に変化させることができます。しかし、CW法では、送信受信間の相互結合があるため広いダイナミックレンジを得ることが困難です。しかし、ダイナミックレンジに関しては微分周波数応答により大幅に改善することができます [4][5]。これは周波数応答 $H(f)$ の代わりにその微分 $dH(f)/df$ を測定しようとするものであり、これをフーリエ変換すると、遠方からのエコー信号強度が強調された時間応答を得ることができます。しかし、微分周波数応答は、距離計測精度を改善するものではありません。ステップ周波数法における離散フーリエ変換は、線形処理であるので、距離分解能と距離計測の精度は、時間と周波数に関する不確定原理で決定されます。すなわち、合成した周波数帯域幅を B とすると、時間分解能は $1/B$ です。従って、音速を C とすれば、距離分解能は $C/2B$ となります。一方、遅延時間を測定する別のアイデアとしては、線形システム理論における群遅延時間の概念があります。これは、位相 $\Phi(f)$ の微分

$$\tau = (1/2\pi)(d\Phi(f)/df)$$

から遅延時間 τ を求めるものです。媒質に分散性がなく、目標標的が真に単一であれば、 $H(f)$ の位相 $\Phi(f)$ から標的・ソナー間を往復するのに要する遅延時間 τ が求められます。

DFT と異なりこの方法の利点は、非線形信号処理であるため、原理的に不確定原理の制限を受けず、極めて高精度で τ が計測できる事です。しかし、通常は、送信受信間の相互結合による漏れ信号や、不要な反射体からのクラッタ・エコーが存在するため、このアイデアを用いるためには、新たな工夫が必要です。

そのような工夫として、筆者らは先に微分位相の方法 [6] を提案しました。これは、次の3つの手法の組み合わせからなっています。第一は、多数の標的を分離する単一化処理です。つまり、微分周波数応答を DFT 処理して、時間応答を変換したとき、時間領域での Window (単一化 Window) を乗じて目標標的からのエコーだけを取り出し、更にこれを

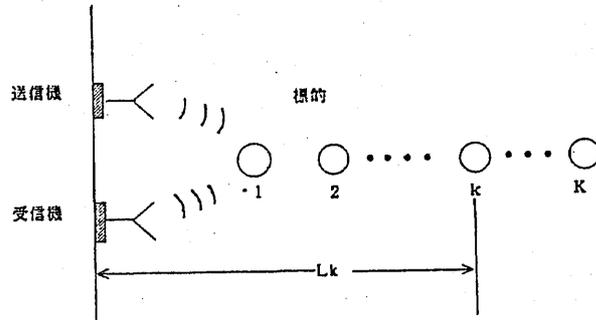


図 1: ソナーによる一次元距離測定

れを逆 DFT 処理をして、目標標的の寄与のみを含む微分周波数を得るものです。第 2 は、単一化処理された微分周波数応答に対して、位相 $\Phi(f)$ を求め、群遅延時間を計測します。第 3 の方法は、この計測の最小自乗法や最尤推定法などの統計的手法を用いて、位相の微分を推定することです。

以上の手法により、クラッタが存在する場合においても目標標的までの距離と遅延時間を高精度に測定できるものと考えられます。本論分では、単一化 Window の問題点を明らかにし、また、有限の SN 比の下で、どの程度の測定精度が得られるかについては、計算機シミュレーションで定量的検討を行いました。

2 ステップ周波数法と DFT 処理

図 1 の一次元測定モデルを用いて考察します。まず、簡単のために標的が単一の場合を考えます。標的までの距離を L_0 とすると、波の伝搬時間 τ_0 は、

$$\tau_0 = \frac{2L_0}{C} \quad (1)$$

となります。ここで、 C は音速です。

周波数応答 f の正弦波 $Re\{\exp(-j2\pi ft)\}$ を送信すると、受信される信号は、

$$Re\left[\frac{\Gamma}{L_0^2} \exp\{-j2\pi f(t - \tau_0)\}\right] \quad (2)$$

であり、従って周波数応答は $H(f)$ 、

$$H(f) = \frac{\Gamma}{L_0^2} \exp[j2\pi f\tau_0] \quad (3)$$

となります。これは、距離 L_0 の自乗に逆比例して $H(f)$ の振幅が減少する事を示します。実際の測定では雑音があるので、遠方の標的は、 S/N が悪くなります。

これを改善するアイデアは、 $H(f)$ の微分を求める事です。

$$\frac{dH(f)}{df} = j\left(4\pi\frac{L_0}{C}\right)\left[\frac{\Gamma}{L_0^2}\exp(j2\pi f\tau_0)\right] \quad (4)$$

$$= j\left(4\pi\frac{L_0}{C}\right) \cdot H(f) \quad (5)$$

右辺の第1因子は距離 L に比例し、遠方の標的を強調します。更に強調するには、2回微分、3回微分などを測定すれば良い事になります。

現実には、微分 $dH(f)/df$ を正確に測定する方法がありません。しかし、微分 $dH(f)/df$ の近似値は、周波数変調法で測定できます。それには、送信にFM変調波を用い、受信信号をキャリアで位相検波した後、更に変調信号で同期検波します。この結果、微分周波数応答 $D(f)$ が得られます。

$$D(f) = \Gamma \cdot \left[\frac{\exp\left(\frac{j2\pi fL_1}{C}\right)}{L_1}\right]^2 e_{FM}\left(\frac{2L_1}{c}\right) \quad (6)$$

$$e_{FM}(\tau) = J_1\left[\frac{2f_d}{f_s}\sin(\pi f_s\tau)\right]\cos(\pi f_s\tau) \quad (7)$$

ここで、 J_1 は1次のベッセル関数、 f はキャリア周波数、 f_s は変調周波数、 f_d は周波数偏位です。

標的が1個の場合を考えましたが、次に図1のように標的がK個ある場合を考えます。この場合、微分周波数応答の理論値は

$$D(f) = \sum_{k=1}^K \Gamma_k \left[\frac{\exp\left(\frac{j2\pi fL_k}{C}\right)}{L_k}\right]^2 e_{FM}\left(\frac{2L_k}{c}\right) \quad (8)$$

となります。

ステップ周波数法では、微分周波数応答 $D(f)$ を N 個のキャリア周波数

$$f_n = f_o + n\Delta f \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (9)$$

に対して測定します。ここで、 Δf は周波数増加分、 N はサンプリング数です。次に、時間応答 $R(\tau)$ を得るために $D(f_n)$ をFFTによりフーリエ変換します。

$$R(\tau_m) = \exp(-j2\pi f_o\tau_m) \sum_{n=0}^{N-1} D(f_n) \exp\left(-j\frac{2\pi n m}{N}\right) \quad (10)$$

ここで、 m はサンプリング番号です。これより、量子化された伝搬時間 τ_m と距離 L_m は、

$$\tau_m = \frac{m}{N\Delta f}, \quad L_m = \frac{Cm}{2N\Delta f}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (11)$$

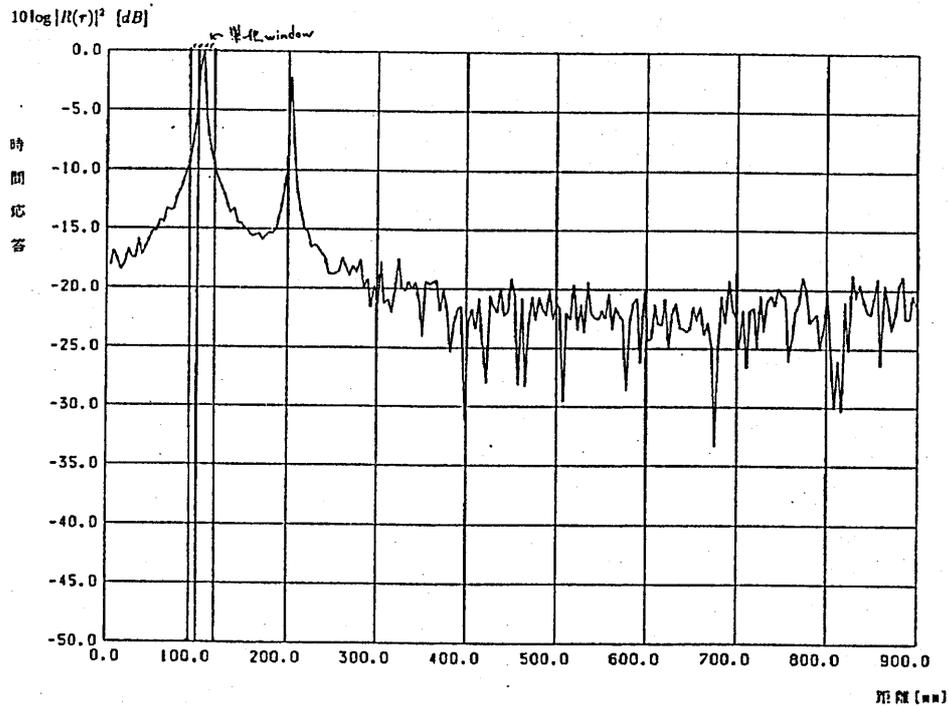


図 2: 時間応答 $R(\tau)$ のシミュレーション, 2 個の標的の位置は 100,200[mm]. $N=256$, $f_0 = 2.20875\text{MHz}$, $f_s = 100\text{Hz}$, $\Delta f = 750\text{Hz}$

と表されます。上式の C は水中での音速で ($C = 1500\text{m/sec}$) です。量子化距離 ΔL と、検出できる最大距離 L_{max} は、

$$\Delta L = \frac{C}{2N\Delta f}, \quad L_{max} = \frac{C(N-1)}{2N\Delta f} \quad (12)$$

と表されます。これより、これらの値は、帯域幅 $N\Delta f$ によって決まる事を表しています。

例えば、 $N = 256$ 、 $\Delta f = 750\text{Hz}$ の時、 $L_{max} = 996[\text{mm}]$, $\Delta L = 3.91[\text{mm}]$ となります。

図 2 は、微分周波数応答を用いたステップ周波数ソナーのシミュレーション例です。

3 微分位相の原理

FFT 処理で得られる分解能 (量子化距離) は、帯域幅 $N\Delta f$ で決まります。更に距離の計測精度をあげるため、非線形の信号処理として微分位相の概念を用います。

微分位相のアイデアは、反射波の位相が周波数と距離に比例する事を用いるものです。標的が 1 個の場合、微分周波数応答 $D(f)$ の位相 $\Phi(f_n)$ は明らかに、

$$\Phi(f_n) = \left(\frac{4\pi L_1}{c}\right) f_n + P_1 \quad (13)$$

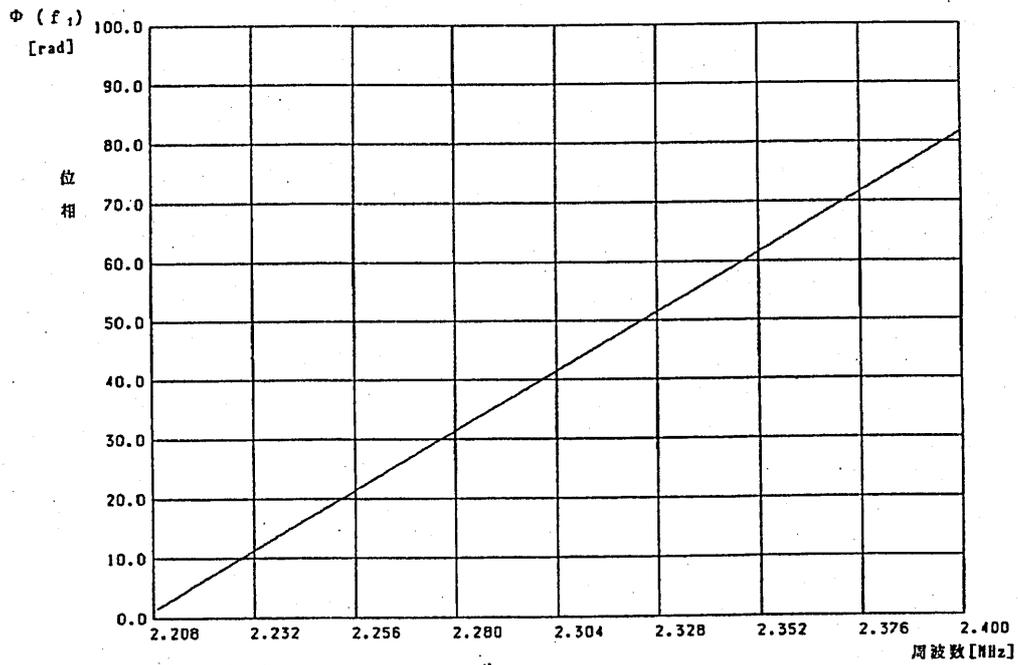


図 3: 位相と周波数の関係 (標的を 100.0[mm] に設置した場合)

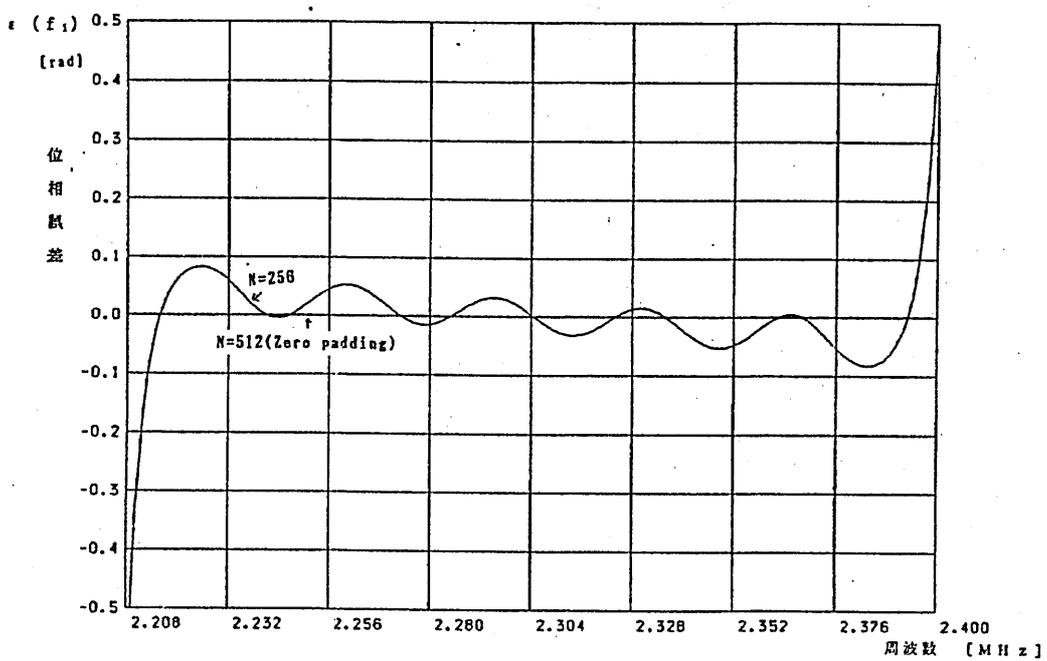


図 4: 単一化ウインドによる位相誤差 (標的を 100.0[mm] に設置した場合)

と表されます。 P_1 は、 Γ_1 による位相因子です。これより、距離 L_1 は、位相の微分

$$L_1 = \left(\frac{c}{2}\right) \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f_n)}{df_n}\right) \quad (14)$$

と表されます。実際のデータ処理は、最小自乗法や最尤推定法などの統計的手法で式 (13) の傾き ($4\pi L_1/C$) と位相 P_1 を推定します。統計的手法を用いると雑音の影響を減少させる事ができ、大幅に距離測定精度を向上させる事ができます。

3.1 標的が複数ある場合

標的が複数ある場合には、微分周波数応答 $D(f)$ の位相はもはや周波数 f や距離には比例しません。そこで、単一化処理を行い、特定の標的に関する微分周波数応答を導きます。単一化処理の手順は、以下のようなものです。

まず、式 (10) によって $D(f)$ の時間応答 $R(\tau_m)$ を計算し、 $|R(\tau_m)|^2$ が Peak 値をとっている位置を探します。その Peak 値に相当するスペクトル番号を m_1, m_2, \dots, m_K とします。他の標的からの影響を抑制し、 k 番目の標的の影響だけを含む微分周波数応答 $D_k(f_n)$ を得るため $R(\tau_m)$ に狭帯域 Window $W(m, \Delta)$ を掛けます。そして、逆FFTを計算します。

$$D_k(f_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} R(\tau_m) W(m - m_k, \Delta) \exp\left(j \frac{2\pi n m}{N}\right) \quad (15)$$

$$W(m, \Delta) = \begin{cases} 1 & (|m| \leq \Delta) \\ 0 & (|m| > \Delta) \end{cases} \quad (16)$$

この、 $W(m, \Delta)$ を単一化 Window と呼びます。 $(2\Delta + 1)$ が Window 幅となります。

この様に得られた $D_k(f_n)$ は、 k 番目の標的に関する微分周波数応答です。 k の値を変えて、この処理を繰り返すと複数の標的の微分周波数応答をそれぞれの標的の微分周波数応答に分解できます。この分解の後、微分位相の方法で距離を算出します。

但し、このような単一化処理ができる条件は、複数の標的が、分解能の数倍程度離れている事です。

4 最小自乗法による推定

4.1 単一標的の場合

まず標的の単一の場合を考えます。雑音の影響を考え、測定する微分周波数応答のモデルとして、

$$D'(f_n) = D(f_n) + W_n \quad (17)$$

$$= \left|\Gamma\left(\frac{1}{L_1}\right)\right|^2 e_{FM}\left(\frac{2L_1}{C}\right) \exp\left(j \frac{4\pi f_n L_1}{C} + j P_1\right) + W_n \quad (18)$$

とします。

ここで、 W_n は複素白色雑音で、平均値は零で分散は σ^2 とします。

$$W_n = W_n^r + jW_n^i \quad (19)$$

$$\langle W_n^r \rangle = \langle W_n^i \rangle = 0 \quad (20)$$

$$\langle W_n^r W_n^i \rangle = \frac{\sigma^2}{2} \delta_{nm} \quad (21)$$

$$\langle |W_n|^2 \rangle = \langle (W_n^r)^2 \rangle + \langle (W_n^i)^2 \rangle = \sigma^2 \quad (22)$$

信号対雑音比 (SNR) を次式で定義します。

$$\text{SNR} = \left[\frac{|\Gamma| \left(\frac{1}{L_1} \right)^2 e_{FM} \left(\frac{2L_1}{C} \right)}{\sigma} \right]^2 \quad (23)$$

つまり、

$$D'(f_n) = \sigma \cdot \sqrt{\text{SNR}} \cdot \exp\left(j \frac{4\pi f_n L_1}{C} + jP_1\right) + W_n \quad (24)$$

です。SNRの良い場合を考え

$$D'(f_n) = \sigma \cdot \sqrt{\text{SNR}} \cdot \exp\left(j \frac{4\pi f_n L_1}{C} + jP_1\right) + W_n \quad (25)$$

$$= \sigma \cdot \sqrt{\text{SNR}} \cdot \exp\left(j \frac{4\pi f_n L_1}{C} + jP_1\right) \left[1 + \frac{W_n \exp\left(-j \frac{4\pi f_n L_1}{C} - jP_1\right)}{\sigma \sqrt{\text{SNR}}} \right] \quad (26)$$

$$\cong \sigma \cdot \sqrt{\text{SNR}} \cdot \exp\left[j \left(\frac{4\pi f_n}{C} L_1 + P_1 + \phi_n \right)\right] \quad (27)$$

但し、

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{[W_n^i \cos\left(\frac{4\pi f_n}{C} L_1 + P_1\right) - W_n^r \sin\left(\frac{4\pi f_n}{C} L_1 + P_1\right)]}{[\sigma \sqrt{\text{SNR}} + W_n^r \cos\left(\frac{4\pi f_n}{C} L_1 + P_1\right) + W_n^i \sin\left(\frac{4\pi f_n}{C} L_1 + P_1\right)]} \quad (28)$$

$$\cong \frac{W_n^i \cos\left(\frac{4\pi f_n}{C} L_1 + P_1\right) - W_n^r \sin\left(\frac{4\pi f_n}{C} L_1 + P_1\right)}{\sigma \sqrt{\text{SNR}}} \quad (29)$$

近似的に、 ϕ_n は、平均値が零の白色雑音になります。

$$\langle \phi_n \rangle = 0, \quad \langle \phi_n \phi_m \rangle = \frac{1}{2\text{SNR}} \delta_{nm} \quad (30)$$

$D'(f_n)$ の位相を

$$\Phi(f_n) = \frac{4\pi L_1}{C} f_n + P_1 + \phi_n \quad (31)$$

$$= \hat{\alpha} f_n + \hat{\beta} \quad (32)$$

と置き、最小自乗法で、 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ を推定します。これより、 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ が求まれば、

$$L_1 = \frac{C\hat{\alpha}}{4\pi}, \quad P_1 = \hat{\beta} \quad (33)$$

となります。最小自乗法は

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{N-1} [\Phi(f_n) - (\hat{\alpha}f_n + \hat{\beta})]^2 \quad (34)$$

の Λ が最小になるような $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ を推定する事です。まず (34) 式を、 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ で偏微分すると、最確値の $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の連立方程式は

$$\sum_{n=0}^{N-1} (\Phi(f_n) - \hat{\alpha}(f_0 + n\Delta f) - \hat{\beta}) = 0 \quad (35)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (n\Phi(f_n) - n\hat{\alpha}(f_0 + n\Delta f) - n\hat{\beta}) = 0 \quad (36)$$

と表されます。この両式を解くと $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ は、

$$\hat{\alpha} = \frac{12}{N^2(N^2-1)\Delta f} \left\{ N \sum_{n=0}^{N-1} n\Phi(f_n) - P \sum_{n=0}^{N-1} \Phi(f_0) \right\} \quad (37)$$

$$\hat{\beta} = \frac{12}{N^2(N^2-1)\Delta f} \left\{ (Pf_0 + Q\Delta f) \sum_{n=0}^{N-1} \Phi(f_n) - (Pf_0 + P\Delta f) \sum_{n=0}^{N-1} n\Phi(f_0) \right\} \quad (38)$$

となる、ただし、 P, Q は、

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{(N-1)N}{2}, \quad Q = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} \quad (39)$$

です。

これらより、 $\hat{\alpha}, \alpha$ の共分散と、 $\hat{\beta}, \beta$ の共分散は、

$$E((\hat{\alpha} - \alpha)^2) = \frac{12}{N^2(N-1)(N+1)SNR} \left(\frac{1}{\Delta f} \right)^2 \quad (40)$$

$$E((\hat{\beta} - \beta)^2) = \frac{12}{N^2(N^2-1)\Delta f^2} \{ f_0^2 + Q\Delta f^2 + Pf_0\Delta f \} \frac{1}{SNR} \quad (41)$$

となります。

L_1 の標準偏差は、

$$\sqrt{\text{var}\{L_1\}} = \left(\frac{C}{2N\Delta f} \right) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{(N^2-1)SNR}} \quad (42)$$

となります。第1因子は、FFT処理による分解能です。第2因子の分だけ距離計測精度が向上する事が分かります。例えば、 $N=256$ 、 $SNR=10$ の場合

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{(N^2-1)SNR}} \cong 6.8 \times 10^{-4}$$

ですので、FFT処理に比べ、約1500倍 精度が向上する事が分かります。

5 単一化による位相周波数特性の歪とその改善法

単一標的の場合に微分位相を適用すれば距離測定精度が大幅に改善できる事が分かりました。さらに単一化処理を行えば、雑音電力が、

$$\left(\frac{2\Delta+1}{N}\right)\sigma^2 \quad (43)$$

に減少する事になります。ここで $(2\Delta+1)$ は単一化ウィンドウの幅です。従って、単一化処理により更に測定精度が向上するものと考えられます。

しかし、単一化処理は、巡回コンボリューションを計算する事になるので、 $D(f_n)$ の位相一周波数特性に歪を生じ図3に示すように位相は周波数には比例せず、リップル成分を持つ事になります。

$D(f_n)$ の位相 $\Phi(f_n)$ に対して、位相誤差

$$\epsilon(f_n) = \Phi(f_n) - (\hat{\alpha}f_n + \hat{\beta}) \quad (44)$$

を定義します。ここで、 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ は最小自乗法で決定した最確値です。

この様なリップルのため単一化処理後、微分位相で距離を推定すると、平均値が真値からずれる、すなわち偏差が生じます。

コンボリューションの巡回性を解消するため zero-padding を行います。

$D(f_n)$ のデータに対してゼロ点 N 個付加し処理を行います。すなわち

$$R'(\tau_m) = \sum_{n=0}^{2N-1} D(f_n) \exp\left(-j\frac{2\pi n m}{2N}\right) \quad (45)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} D(f_n) \exp\left(-j\frac{2\pi n m}{2N}\right), \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1) \quad (46)$$

これを単一化ウィンドを乗じて逆FFTを計算する

$$D_k(f_n) = \sum_{m=0}^{2N-1} R'(\tau_m) \exp\left(j\frac{2\pi n m}{2N}\right) W(m - m_k, \Delta), \quad (n = 0, 1, \dots, 2N-1) \quad (47)$$

$D_k(f_n)$ には $2N$ 個のデータがあるが、位相 $\Phi(f_n)$ の計算には $n = 0, 1, \dots, N-1$ までの N 個のデータを用い、 $n = N, N+1, \dots, 2N-1$ の N 個のデータを無視・破棄します。この様な処理をすると、位相誤差 ϵ_n が大幅に減少し、細かな振幅のリップルだけが残ります。

単一化ウィンドの効果を調べるため、計算機シュミレーションを行いました。一つのSNRに対して、正規乱数の種の値を61種類変えます。つまり、サンプル数は61個のサンプルについて、微分位相から距離を計算し、その平均値と分散を求めます。距離の推定値と真値とのずれ、すなわち偏差が零で、分散値が小さいものが理想的な推定値となります。しかし、計算機シュミレーションの結果、距離推定時の偏差と分散は、単一化しない場合と同程度になることが分かりました。(図5、図6参照) すなわち、単一化ウィンドを導入して雑音を除去し、測定精度を向上させる目的は成功してないこととなります。その原因としては、単一化ウィンドにより雑音が有色化され、最小自乗法では測定精度が向上しない事が考えられています。最尤推定法や、マルコフ推定を導入すれば、更に精度が向上する可能性があります。

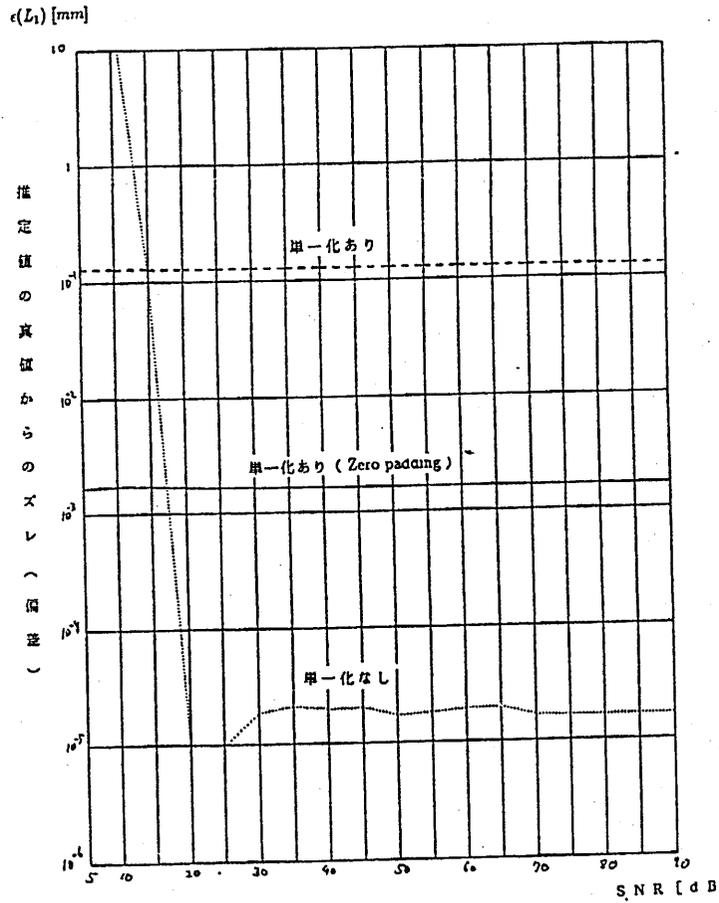


図5 SNRと偏差の関係(標的を100.0[mm]の設置した時)

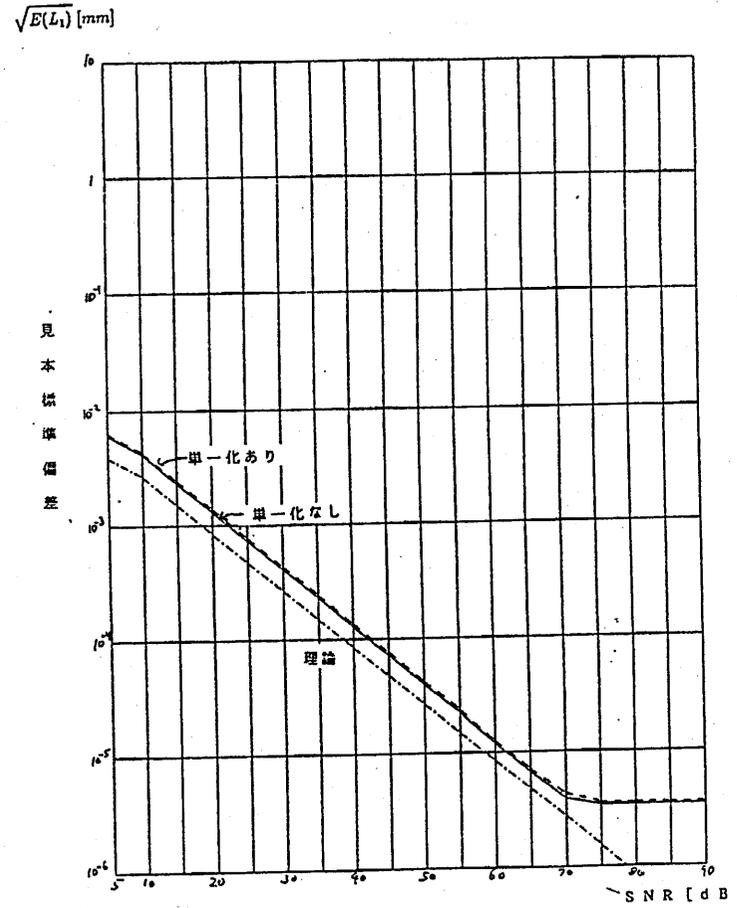


図6 SNRと見本標準偏差の関係(標的を100.0[mm]に設置した時)

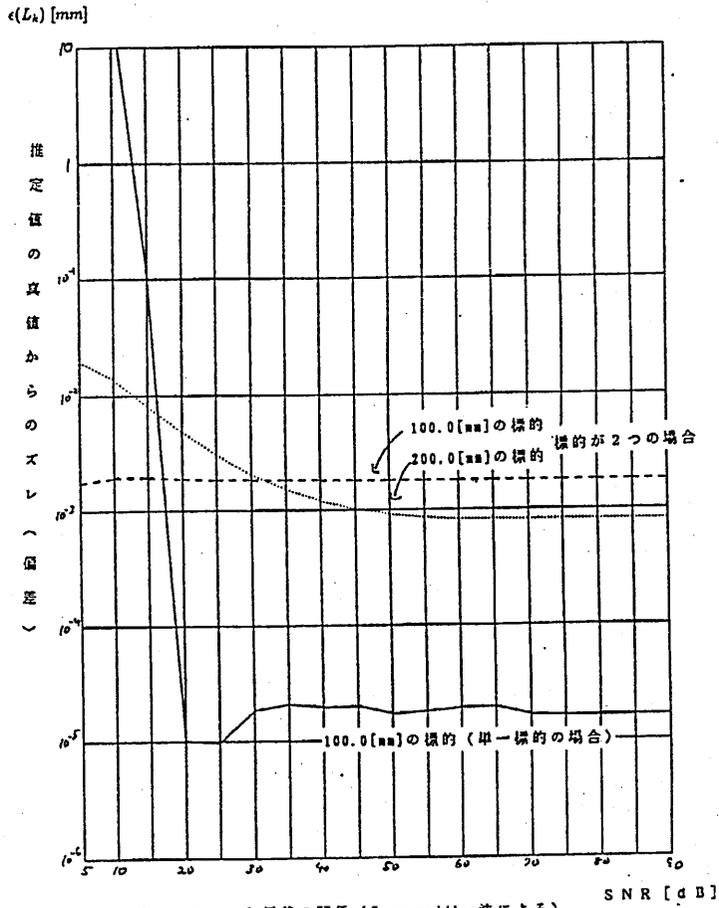


図7 SNRと偏差の関係 (Zero padding法による)

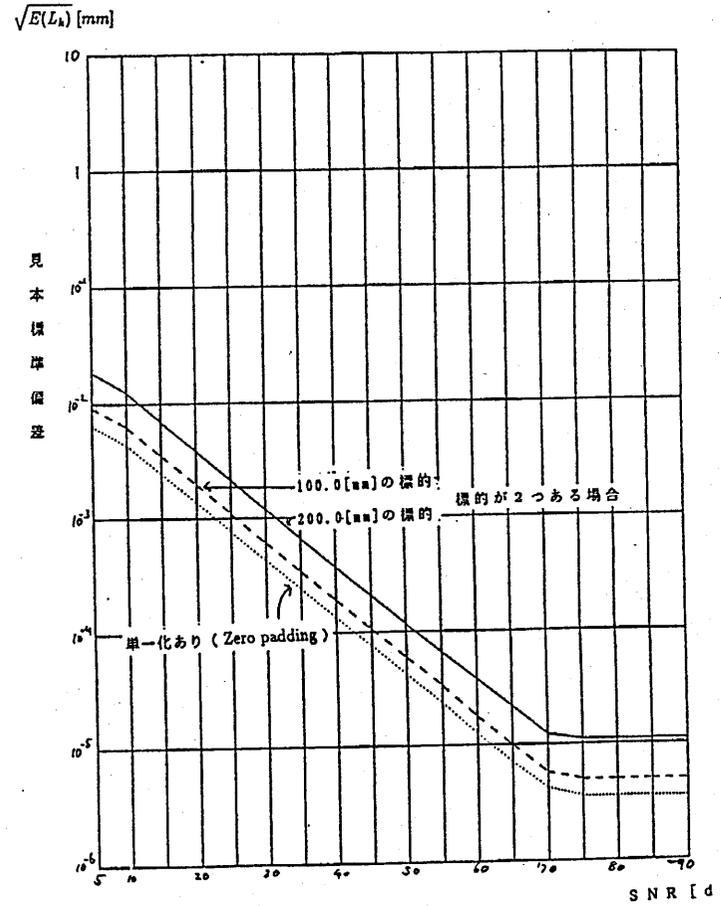


図8 SNRと見本標準偏差の関係 (Zero padding法による)

5.1 標的が2個の場合

次に標的が2個の場合を考えます。雑音を考慮し、微分周波数応答もモデルは、

$$D'(f_n) = \frac{|\Gamma_1|}{L_1^2} e_{FM}\left(\frac{2L_1}{C}\right) \exp\left(j\frac{4\pi f_n}{C} L_1 + jP_1\right) + \frac{|\Gamma_2|}{L_2^2} e_{FM}\left(\frac{2L_2}{C}\right) \exp\left(j\frac{2L_2}{C} L_2 + jP_2\right) + W_n \quad (48)$$

であるとし、ここに W_n は複素白色雑音で式 (19) から式 (21) で定義したものです。

信号の最大値の自乗と平均雑音電力の比で、SNRを定義します。

$$\text{SNR} = \frac{\left[\frac{|\Gamma_1|}{L_1^2} e_{FM}\left(\frac{2L_1}{C}\right) + \frac{|\Gamma_2|}{L_2^2} e_{FM}\left(\frac{2L_2}{C}\right) \right]^2}{\sigma^2} \quad (49)$$

5.2 シュミレーション

微分位相の方法が、どの程度正確に動作するかを調べるため、計算機シュミレーションを行いました。2個の標的の位置と反射係数を $L_1 = 100.0[\text{mm}]$, $L_2 = 200.0[\text{mm}]$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ に設定し、 $D_1(f_n)$ を計算しました。 $D_1(f_n)$ のデータは12ビットに量子化されているものとしてシュミレーションしました。図2は、時間応答の一例を示したものです。

微分位相の計算では、先ず、zero-paddingを行い、式(10)により時間応答 $R(\tau_m)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$) を計算し次に式(15)により位置 $100.0[\text{mm}]$ の標的に関する微分周波数応答 $D_1(f_n)$ と、位置 $200.0[\text{mm}]$ の標的に対する微分周波数応答 $D_2(f_n)$ を作ります。シュミレーションでは、単一化ウィンドの幅パラメータ Δ を10としました。次に、 $D_1(f_n)$ と $D_2(f_n)$ に対して、微分位相の方法を適用し、距離 L_1 と距離 L_2 を求めます。これを、雑音系列 W_n の61種類に対して行い、 L_1, L_2 の平均値と見本標準偏差を計算しました。この計算は倍精度で行いました。

その結果が、図7と図8です。この図から、平均値のズレ(偏差)は、 $1\mu \sim 10\mu\text{m}$ であることがわかります。これは、単一標的の場合の $10^{-5}[\text{mm}]$ に比べてかなり大きくなっています。

L_1 と L_2 の標準偏差は、SN換算で $7 \sim 8\text{dB}$ 単一標的の場合より劣化していることを示しています。しかし、単一標的の場合と標的が2個の場合では、SNRの定義と意味が異なるので直接の比較にはやや問題があります。

今回のシュミレーションにおいては、平均値のズレの方が問題である事がわかりました。

文献

- [1] Iizuka et al. 'Step-frequency radar', J. Appl. Phys. 56, pp. 2572-2583, (1984)
- [2] Nakayama et al. 'Optical fiber fault locator by the step frequency method', Appl. Optics, 26, 440-443, (1987)
- [3] Iizuka et al. 'Optical step-frequency reflectometer', J. Appl. Phys. 68, pp. 932-936, (1990)
- [4] Nakayama et al. 'Differential frequency response and its application to a step frequency sonar', Acoustical Imaging, 19, pp. 761-768, (1989).

[5] Nakayama et al. 'Application of differential hologram to acoustical imaging', Proc. ISNCR-89, pp. 154-159, (1989).

[6] Nakayama and Nakamura, 'Accurate target location by means of differential phase', Jap. J. Appl. Phys., 30 Suppl 30-1, pp. 65-67, (1991)

輻射科学研究会資料

資料番号 RS 92-4

ランダムストリップによる平面波の散乱

田村安彦 中山純一
(京都工芸繊維大学 工芸学部)

1992年5月29日

1 はじめに

自然界に存在する物体の表面は、時間的そして空間的にランダムな凹凸を持つことが多い。従って、波動の散乱に対するそのランダムさの影響を定性的かつ定量的に取り扱うことは実用的にも理論的にも重要であると言える。

本論文では J.Nakayama and T.Nishio(1991) によるランダム表面による半平面問題¹の発展型としてランダムな表面を持つ導体ストリップによる平面電磁波散乱問題を取り上げる。導体ストリップは極めて単純な形状であるが散乱、回折問題、また実用的にもアンテナ等の放射問題などの解析における基本構造と言えるものである。従って、表面がランダムな凹凸を持つ場合の解析は実用、応用上はもちろん、理論的にも解析的にも極めて興味深いと言える。K.Kobayashi により表面が正弦波状である格子による平面波の散乱問題^{7,8}が解かれているが今回の表面がランダムな場合はそのある種の拡張といえる。ここでは、表面の凹凸が定常確率過程論に基づく定常ランダム関数として表される場合²⁻⁴の解析を2次元問題として行う。

本論文では扱う散乱問題を具体的に定式化するため D^a -Fourier 変換を導入し、Maxwell 方程式及びストリップ上での境界条件を D^a -Fourier 変換領域で考察する。ここでは散乱場をストリップ表面の凹凸高さが入射平面電磁波の波長に比較して十分小さい、すなわち粗さが少ない場合を考えることによりランダム表面の高さをパラメータとする摂動展開を行う。そして0次の摂動項、1次の摂動項に着目して解析する。また、ストリップ上での境界条件も同様の条件下でランダム表面の高さをパラメータとする Taylor 展開による1次の項までを考慮した近似境界条件を適用する。これらは D^a -Fourier 変換領域で Wiener-Hopf 法⁵を適用することにより散乱問題の解を与える。このようにして求めた0次摂動項及び1次摂動項の解表現は厳密ではあるが形式的な解となる。そこで、更に、ストリップ幅が入射電磁波の波長に比較して十分大きな場合を仮定し漸近解を導く。このようにして得られた0次摂動漸近解と1次摂動漸近解は各々、表面が滑らかなストリップによる散乱場でありコヒーレントな成分、表面のランダムさからくるインコヒーレントな成分を与える。これらの解は共にランダム表面を持つ半無限平面における解を二つ重ね合わせ且つエッジが二つあることによる補正項の形で表現されることが示される。これら D^a -Fourier 変換領域での解に D^a -逆 Fourier 変換を施すことにより実領域での解表現を得ることが出来る。

なお、以下の解析では電磁界の時間因子を $e^{-i2\pi ft}$ として以下の記述からは全て省略しておくことにする。また、数式の表記として二つの添え字と複号を用いる場合があるがこれらは特にことわりのない限り同順とする。たとえば、 $U^{a,b} = V^{\pm c} \mp \beta_{1,2} W^{d,e}$ とあれば

$$\begin{cases} U^a = V^{+c} - \beta_1 W^d \\ U^b = V^{-c} + \beta_2 W^e \end{cases}$$

を意味する。

2 問題の定式化

自由空間上に幅 $2l$ で不規則な表面を持ち、厚みが無視できる完全導体からなるストリップを仮定する。このとき、図 1 のように 2 次元のモデルとして平面電磁波が入射角 θ_i ($|\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$) で入射したときの回折波について考える。ストリップ上の不規則な凹凸を

$$z = \sigma f(x, \omega) \quad (|x| \leq l, \omega \in \Omega) \quad (1)$$

とする。 ω は標本空間 Ω 内の見本点、 σ は凹凸の高さを表すパラメータである。 x -軸上の移動 $x \rightarrow x+a$ に対応して Ω 内の任意の見本点 ω を別の見本点 $T^a\omega$ へ移す保測変換 T^a を導入すると $f(x, \omega) \rightarrow f(x+a, T^a\omega)$ のように表面のランダムさの見本関数 $f(x, \omega)$ は変換される。この T^a は群をなし $T^0 = 1$, $T^a T^b = T^{a+b}$ ($a, b \in R$) である。この保測変換を用いるとストリップ表面のランダムさを表す関数 $f(x, \omega)$ は

$$f(x, \omega) = f(0, T^x\omega) \equiv f(T^x\omega) \quad (2)$$

と表される。

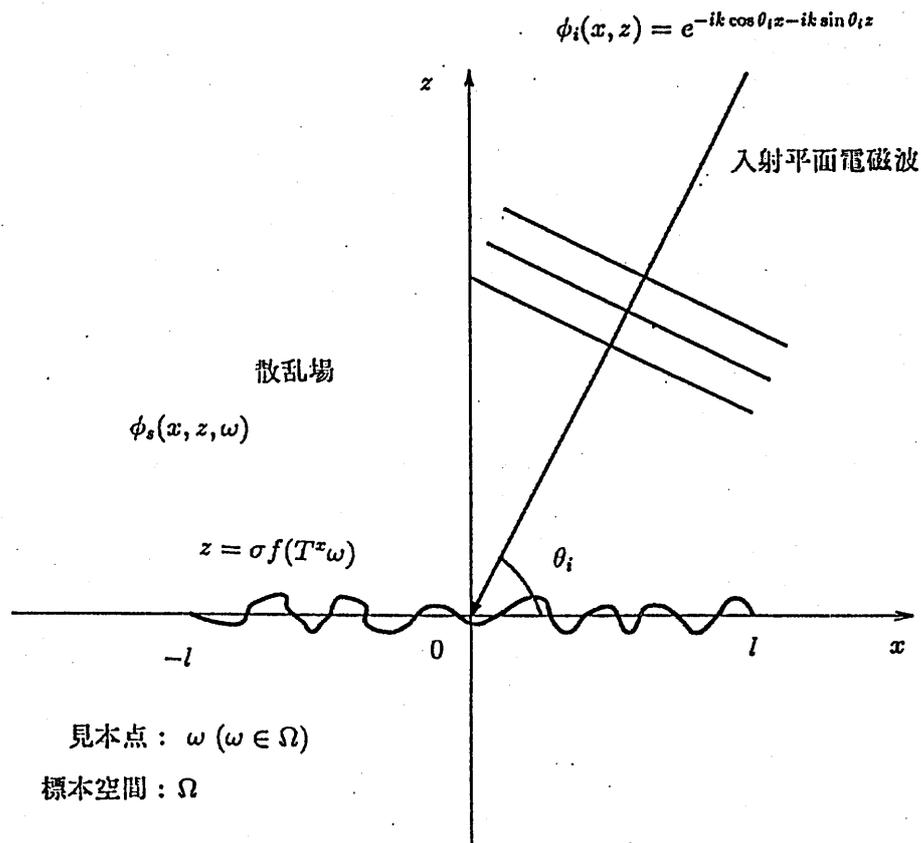


図 1. 問題の座標系

更に、ストリップ上の不規則な凹凸がガウス様確率場で記述できると仮定すればランダムストリップの表面を表す関数は Wiener 積分^{2,4} を用いて

$$z = \sigma f(T^x \omega) \quad (|x| \leq l, \omega \in \Omega) \quad , \quad f(T^x \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} F(\lambda) dB(\lambda, \omega) \quad (3)$$

と表される。

ここで $dB(\lambda, \omega)$ は実 λ 軸上の複素ガウスランダム測度^{3,4} であり、以下の性質をもつ。

$$\begin{aligned} dB^*(\lambda, \omega) &= dB(-\lambda, \omega) \quad , \quad dB(\lambda, T^a \omega) = e^{-i\lambda a} dB(\lambda, \omega) \\ \langle dB(\lambda, \omega) \rangle &= 0 \quad , \quad \langle dB(\lambda, \omega) dB^*(\lambda', \omega) \rangle = \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $\langle \quad \rangle$ は事象 ω に関するアンサンブル平均、 $*$ は複素共役をとることを表す。

(3) 式と (4) 式からストリップ平面の表面を表す関数 $f(T^x \omega)$ の平均と分散は各々

$$\langle z \rangle = 0 \quad , \quad \langle z^2 \rangle = \sigma^2 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = 1 \quad (5)$$

となる。ここで、 $|F(\lambda)|^2$ は正規化された表面の凹凸のパワースペクトル密度である。

入射平面波として TE 波入射の場合を考えることにする。全電界の y 成分 E_y をスカラー関数 $\phi(x, z, \omega)$ で表すことにすると $\phi(x, z, \omega)$ は次の 2 次元波動方程式を満たす。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \phi(x, z, \omega) = 0 \quad (6)$$

後の解析の都合上、媒質の微小損失を仮定し、波数 k を

$$k \equiv k_1 + ik_2 \quad , \quad (k_1 \gg k_2 > 0) \quad (7)$$

とおく。全電界 $\phi(x, z, \omega)$ は入射角 θ_i ($|\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$) の平面波 $\phi_i(x, z)$ とランダムストリップによる散乱波 $\phi_s(x, z, \omega)$ の和であるから

$$\phi(x, z, \omega) = \phi_i(x, z) + \phi_s(x, z, \omega) \quad , \quad \phi_i(x, z) = e^{-ik \cos \theta_i x - ik \sin \theta_i z} \quad (8)$$

とおける。零でない電磁界成分は $E_y = \phi(x, z, \omega)$ を用いて次の関係式

$$(E_y, H_x, H_z) = \left(\phi \quad , \quad \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} \phi \quad , \quad -\frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial x} \phi \right) \quad (9)$$

より求められる。次に、 $\phi(x, z, \omega)$ は完全導体からなるストリップ上での境界条件

$$\phi(x, z, \omega) \Big|_{z=\sigma f(T^x \omega)} = 0 \quad , \quad (|x| \leq l) \quad (10)$$

を満たすがストリップ表面の粗さが波長に比べて十分小さい場合 ($|k|\sigma \ll 1$) を仮定する。(10) 式に $z=0$ での Taylor 展開を施し σ について 2 次以降の項を無視すると次の近似境界条件を得る。

$$\phi(x, z, \omega) + \sigma f(T^x \omega) \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, z, \omega) \Big|_{z=\pm 0} = 0, \quad (|x| \leq l) \quad (11)$$

以降、この近似境界条件を用いることにする。

z について $\phi(x, z, \omega)$ と $\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, z, \omega) \equiv \phi'(x, z, \omega)$ (以下、プライム ' は z に関する微分を表すこととする) はともに $|x| \leq l$ で不連続、 $|x| > l$ で連続である。

ストリップ周囲の散乱界を考察して、散乱波成分 $\phi_s(x, z, \omega)$ は次の放射条件を満たすと仮定する。

$$|\phi_s(x, z, \omega)| < A(\omega) e^{-k_2 \cos \theta_i |x| - k_2 \sin \theta_i |z|}, \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad (12)$$

次に、表面の粗さを表す関数 $f(T^x \omega)$ が移動変換 $(x, \omega) \rightarrow (x+a, T^{-a} \omega)$ ($a \in R$) に対し不変であることから $\phi_s(x, z, \omega)$ に作用する移動オペレータ D^a を次のように定義する。

$$D^a \phi_s(x, z, \omega) = \phi_s(x+a, z, T^{-a} \omega) \quad (13)$$

この D^a は群をなす。すなわち $D^0 = 1$, $D^a D^b = D^{a+b}$ ($a, b \in R$) である。

ここで、 D^a -Fourier 変換 を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \{D^a \phi_s(x, z, \omega)\} da &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \phi_s(x+a, z, T^{-a} \omega) da = e^{-isx} \Phi_s(z, T^x \omega | s) \\ \Phi_s(z, T^x \omega | s) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \phi_s(x+a, z, T^{-a} \omega) da \end{aligned} \quad (14)$$

この D^a -Fourier 変換 は二つの意義をもつ。第 1 に、 x についての非定常過程である $\phi_s(x, z, \omega)$ を D^a -不変な定常過程に変換したことで、第 2 に $\phi_s(x, z, \omega)$ が複素 s -平面上の $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ へと写像されたことである。(12) の条件から $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ は複素 s -平面上の帯状領域 $|\operatorname{Im} s| < k_2 \cos \theta_i$ で正則な関数であることがわかるので、 D^a -逆 Fourier 変換 を次式で定義する。

$$\phi_s(x, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} e^{-isx} \Phi_s(z, T^x \omega | s) ds \quad (|\tau| < k_2 \cos \theta_i, \quad s = \sigma + i\tau) \quad (15)$$

磁界に関する境界条件を考え、差 $\phi'_s(x, +0, \omega) - \phi'_s(x, -0, \omega)$ に対して D^a -Fourier 変換 を施すと、

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} D^a \{ \phi'_s(x, +0, \omega) - \phi'_s(x, -0, \omega) \} da \\ &= e^{-isx} \int_{-l}^l e^{isa} \{ \phi'_s(a, +0, T^{-a} \omega) - \phi'_s(a, -0, T^{-a} \omega) \} da \\ &= e^{-isx} \{ \Phi'_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi'_s(-0, T^x \omega | s) \} \\ &\equiv e^{-isx} J(T^x \omega | s) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここで $J(T^x\omega|s)$ は D^a -Fourier 変換 領域における、ランダムストリップ上に誘起される電流密度を表す整関数であり、全複素 s -平面で正則である。(8),(11),(14) 及び (16) 式より

$$\Phi_s(+0, T^x\omega|s) - \Phi_s(-0, T^x\omega|s) = -\sigma J(T^x\omega|s) f(T^x\omega) \quad (17)$$

そして、 $z=0$ での $\phi_s(x, z, \omega), \phi'_s(x, z, \omega)$ の $x \geq l, x \leq -l$ における片側 D^a -Fourier 変換 を各々次のように定義する。

$$\int_{l-x}^{\infty} e^{isa} D^a \left\{ \begin{array}{l} \phi_s(x, 0, \omega) \\ \phi'_s(x, 0, \omega) \end{array} \right\} da = e^{-isx} \left\{ \begin{array}{l} e^{is'l} w^+(T^x\omega|s) \\ e^{is'l} w^{+'}(T^x\omega|s) \end{array} \right\} \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{-l-x} e^{isa} D^a \left\{ \begin{array}{l} \phi_s(x, 0, \omega) \\ \phi'_s(x, 0, \omega) \end{array} \right\} da = e^{-isx} \left\{ \begin{array}{l} e^{-is'l} w^-(T^x\omega|s) \\ e^{-is'l} w^{-'}(T^x\omega|s) \end{array} \right\} \quad (19)$$

この定義から

$$\left[\begin{array}{l} w^+(T^x\omega|s), w^{+'}(T^x\omega|s) : \text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i \\ w^-(T^x\omega|s), w^{-'}(T^x\omega|s) : \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i \end{array} \right]$$

で正則である。(8) 式を (11) 式に代入し $[-l-x, l-x]$ で D^a -Fourier 変換 を施し整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{i\{1 - ik \sin \theta_i \sigma f(T^x\omega)\}}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) = \\ & \Phi_s(+0, T^x\omega|s) + \sigma f(T^x\omega) \Phi'_s(+0, T^x\omega|s) \\ & - [e^{is'l} w^+(T^x\omega|s) + e^{-is'l} w^-(T^x\omega|s) + \sigma f(T^x\omega) \{e^{is'l} w^{+'}(T^x\omega|s) + e^{-is'l} w^{-'}(T^x\omega|s)\}] \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる。

いま、ストリップ表面の粗さが波長に比べて十分小さい場合 ($|k|\sigma \ll 1$) を仮定する。 $\Phi_s(z, T^x\omega|s), \Phi'_s(z, T^x\omega|s)$ に対し σ についての摂動展開を行うと、

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_s(z, T^x\omega|s) \\ \Phi'_s(z, T^x\omega|s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{s0}(z|s) \\ \Phi'_{s0}(z|s) \end{array} \right\} + \sigma \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{s1}(z, T^x\omega|s) \\ \Phi'_{s1}(z, T^x\omega|s) \end{array} \right\} + \dots \quad (21)$$

となる。また (6) 式に D^a -Fourier 変換 を施した D^a -Fourier 変換 領域での波動方程式

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2is \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (s^2 - k^2) \right\} \Phi(z, T^x\omega|s) = 0 \quad (22)$$

を散乱場 $\Phi_s(z, T^x\omega|s)$ が満足することと、無限遠方での放射条件を考慮して、 $\phi_s(x, z, \omega)$ がストリップ表面の凹凸を表す (3) 式の汎関数となることから $\Phi_s(z, T^x\omega|s)$ を次式のように摂動展開と Wiener 積分で表しておく。

$$\Phi_s(z, T^x\omega|s) = C_0^\pm(s) e^{-\gamma(s)|z|} + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} C_1^\pm(s, \lambda) e^{-\gamma(s+\lambda)|z| - i\lambda x} dB(\lambda, \omega) + \dots \quad (23)$$

ここで、 $C_0^\pm(s), C_1^\pm(s, \lambda)$ の肩の添え字の $+, -$ は z の正負に対応する。また、 $\gamma(s)$ の定義とその分岐は

$$\gamma(s) = \sqrt{s^2 - k^2}, \quad \gamma(0) = -ik \quad (24)$$

とする。また、 $w^\pm(T^x\omega|s), w^{\pm'}(T^x\omega|s), J(T^x\omega|s)$ に対しても同様に摂動展開と Wiener 積分で表しておく

$$\left\{ \begin{array}{l} w^\pm(T^x\omega|s) \\ w^{\pm'}(T^x\omega|s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} w_0^\pm(s) \\ w_0^{\pm'}(s) \end{array} \right\} + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} w_1^\pm(s, \lambda) \\ w_1^{\pm'}(s, \lambda) \end{array} \right\} e^{-i\lambda x} dB(\lambda, \omega) + \dots \quad (25)$$

$$J(T^x \omega | s) = J_0(s) + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} J_1(s, \lambda) e^{-i\lambda x} dB(\lambda, \omega) + \dots \quad (26)$$

その定義から

$$\begin{cases} w_0^+(s), w_1^+(s, \lambda), w_0^{+'}(s), w_1^{+'}(s, \lambda) : \text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i \\ w_0^-(s), w_1^-(s, \lambda), w_0^{-'}(s), w_1^{-'}(s, \lambda) : \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i \end{cases}$$

で正則と仮定する。 $J_0(s), J_1(s, \lambda)$ は全複素 s -平面で正則である。

D^x -Fourier 変換 領域における散乱場 $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ について 3 つの式、(16), (17) 及び (20) 式に (21), (25) 及び (26) 式を代入して整理すると σ についての恒等式とみて

σ についての 0 次の摂動項から

$$\begin{cases} \Phi_{s0}(+0|s) - \Phi_{s0}(-0|s) = 0 \\ \Phi_{s0}'(+0|s) - \Phi_{s0}'(-0|s) = J_0(s) \\ \Phi_{s0}(+0|s) - \{e^{is\lambda} w_0^+(s) + e^{-is\lambda} w_0^-(s)\} = \frac{i}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)\lambda} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)\lambda}) \end{cases} \quad (27)$$

σ についての 1 次の摂動項から

$$\begin{cases} \Phi_{s1}(+0, T^x \omega | s) - \Phi_{s1}(-0, T^x \omega | s) = -f(T^x \omega) J_0(s) \\ \Phi_{s1}'(+0, T^x \omega | s) - \Phi_{s1}'(-0, T^x \omega | s) = J_1(T^x \omega | s) \\ \frac{k \sin \theta_i \sigma f(T^x \omega)}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)\lambda} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)\lambda}) = \Phi_{s1}(+0, T^x \omega | s) + f(T^x \omega) \Phi_{s1}'(-0, T^x \omega | s) \\ \quad - [e^{is\lambda} w_1^+(T^x \omega | s) + e^{-is\lambda} w_1^-(T^x \omega | s) + f(T^x \omega) \{e^{is\lambda} w_0^{+'}(T^x \omega | s) + e^{-is\lambda} w_0^{-'}(T^x \omega | s)\}] \end{cases} \quad (28)$$

を得る。

よって、(25), (27), (28) 式から σ についての 0 次の摂動項として

$$\begin{cases} C_0^+(s) = C_0^-(s) (\equiv C_0(s)) \\ -\gamma(s) \{C_0^+(s) + C_0^-(s)\} = J_0(s) \\ C_0^+(s) - \{e^{is\lambda} w_0^+(s) + e^{-is\lambda} w_0^-(s)\} = \frac{i}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)\lambda} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)\lambda}) \end{cases} \quad (29)$$

σ についての 1 次の摂動項として

$$\begin{cases} C_1^+(s, \lambda) - C_1^-(s, \lambda) = -F(\lambda) J_0(s) \\ -\gamma(s + \lambda) \{C_1^+(s, \lambda) + C_1^-(s, \lambda)\} = J_1(s, \lambda) \\ \frac{k \sin \theta_i \sigma f(T^x \omega)}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)\lambda} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)\lambda}) = C_1^+(s, \lambda) - \gamma(s) F(\lambda) C_0(s) \\ \quad - e^{is\lambda} \{w_1^+(s, \lambda) + F(\lambda) w_0^{+'}(s)\} - e^{-is\lambda} \{w_1^-(s, \lambda) + F(\lambda) w_0^{-'}(s)\} \end{cases} \quad (30)$$

を得る。

以上より導出された (29), (30) 式を次節において Wiener-Hopf 法を用いて解く。

3 形式的厳密解

3.1 0次摂動項の形式的厳密解

(29)式から σ についての0次摂動項に関する Wiener-Hopf 方程式を得る。

$$e^{is|}W_0^+(s) + J_0(s)\bar{\gamma}^+(s)\bar{\gamma}^-(s) + e^{-is|}W_0^-(s) = 0 \quad (31)$$

上式は帯状領域 $|\text{Im } s| < k_2 \cos \theta_i$ で成立する。ここで、

$$W_0^\pm(s) = w_0^\pm(s) \pm \frac{i}{s - k \cos \theta_i} e^{\mp ik \cos \theta_i |} \quad (32)$$

$$\bar{\gamma}^\pm(s) = 2^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (k \pm s)^{-\frac{1}{2}}, \quad \bar{\gamma}^+(s)\bar{\gamma}^-(s) = \frac{1}{2\gamma(s)}, \quad \bar{\gamma}^+(-s) = \bar{\gamma}^-(s) \quad (33)$$

であり、

$$\begin{cases} W_0^+(s) : \text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i \\ W_0^-(s) : \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i \\ \bar{\gamma}^+(s) : \text{Im } s > -k_2 \\ \bar{\gamma}^-(s) : \text{Im } s < k_2 \end{cases}$$

$W_0^\pm(s)$ が $s = k \cos \theta_i$ での1位の極による特異性を持つことを除いていずれも以上の領域で正則である。

(31)式の両辺に $\frac{e^{\pm is|}}{\bar{\gamma}^\mp(s)}$ を乗じて分解操作を施し $|s| \rightarrow \infty$ での振舞いを考慮することより若干の計算を経て次の連立積分方程式を得る。

$$\begin{cases} \frac{W_0^-(s)}{\bar{\gamma}^-(s)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{e^{2it|} W_0^+(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t-s)} dt = 0 \\ \frac{W_0^+(s)}{\bar{\gamma}^+(s)} - \frac{ie^{-ik \cos \theta_i |}}{\bar{\gamma}^+(k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\tau}^{\infty-i\tau} \frac{e^{-2it|} W_0^-(t)}{\bar{\gamma}^+(t)(t-s)} dt = 0 \end{cases} \quad (34)$$

($|\tau| < k_2 \cos \theta_i$)

(34)の上の式に対して置換 $s \rightarrow -s$ 、下の式に対して変数変換 $t \rightarrow -t$ を施し両式の和と差を取ると

$$\frac{X_0^{a,s}(s)}{\bar{\gamma}^+(s)} - \frac{ie^{-ik \cos \theta_i |}}{\bar{\gamma}^+(k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{e^{2it|} X_0^{a,s}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)} dt = 0 \quad (35)$$

ここで、

$$X_0^{a,s}(s) = W_0^+(s) \pm W_0^-(-s) \quad (36)$$

であり、 $s = k \cos \theta_i$ での1位の極による特異性を除いて $\text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i$ で正則である。

(35)式の被積分関数中の $\bar{\gamma}^-(t)$ のブランチカットを分岐点 $t = k$ から $t = k + i\infty$ へ至る直線にとり積分路をブランチカットに沿うように変更する。この時、1位の極 $t = k \cos \theta_i$ による留数の寄与とブランチカットに沿う積分の評価に注意して、0次摂動項についての形式的厳密解表現を得る。

$$X_0^{a,s}(s) = \bar{\gamma}^+(s) \left\{ \frac{ie^{-ik \cos \theta_i |}}{\bar{\gamma}^+(k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} \pm \frac{ie^{ik \cos \theta_i |}}{\bar{\gamma}^-(k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} \pm \frac{1}{\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2it|} X_0^{a,s}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)} dt \right\} \quad (37)$$

この0次摂動項はストリップが滑らかな場合に対応し、例えば K.Kobayashi の有限幅正弦波状格子による平面電磁波の回折問題^{7,8}の複素 Fourier 変換領域での0次摂動項の解表現と本質的に同じものである。

3.2 1次摂動項の形式的厳密解

全く同様に (30) 式から σ についての1次摂動項に関する Wiener-Hopf 方程式を得る。

$$e^{is}W_1^+(s, \lambda) + J_1(s, \lambda)\bar{\gamma}^+(s + \lambda)\bar{\gamma}^-(s + \lambda) + e^{-is}W_1^-(s, \lambda) = 0 \quad (38)$$

上式は帯状領域 $|\text{Im } s| < k_2 \cos \theta_i$ で成立する。ここで、

$$W_1^\pm(s, \lambda) = w_1^\pm(s, \lambda) \pm F(\lambda)w_0^\pm(s) \pm \frac{k \sin \theta_i}{s - k \cos \theta_i} F(\lambda) e^{\mp ik \cos \theta_i} \quad (39)$$

であり、

$$\begin{cases} W_1^+(s, \lambda) : \text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i \\ W_1^-(s, \lambda) : \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i \\ \bar{\gamma}^+(s + \lambda) : \text{Im } (s + \lambda) > -k_2 \\ \bar{\gamma}^-(s + \lambda) : \text{Im } (s + \lambda) < k_2 \end{cases}$$

$W_1^\pm(s, \lambda)$ が $s = k \cos \theta_i$ での1位の極による特異性を持つことを除いていずれも以上の領域で正則である。

(38) 式の両辺に $\frac{e^{\pm is}}{\bar{\gamma}^\mp(s + \lambda)}$ を乗じて分解操作を施し $|s| \rightarrow \infty$ での振舞いを考慮することより若干の計算を経て次の連立積分方程式を得る。

$$\begin{cases} \frac{W_1^-(s, \lambda)}{\bar{\gamma}^-(s + \lambda)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ir}^{\infty + ir} \frac{e^{2it} W_1^+(t, \lambda)}{\bar{\gamma}^-(t + \lambda)(t - s)} dt = 0 \\ \frac{W_1^+(s, \lambda)}{\bar{\gamma}^+(s + \lambda)} - \frac{k \sin \theta_i F(\lambda) e^{-ik \cos \theta_i}}{\bar{\gamma}^+(\lambda + k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - ir}^{\infty - ir} \frac{e^{-2it} W_1^-(t, \lambda)}{\bar{\gamma}^+(t + \lambda)(t - s)} dt = 0 \end{cases} \quad (40)$$

($|\tau| < k_2 \cos \theta_i$)

(40) 式に対して

$$\begin{cases} s + \lambda = p \\ t + \lambda = q \end{cases} \quad (41)$$

と置換し、

$$\widehat{W}_1^\pm(p, \lambda) = e^{\mp i\lambda} W_1^\pm(p - \lambda, \lambda) \quad (42)$$

として整理すると

$$\begin{cases} \frac{\widehat{W}_1^-(p, \lambda)}{\bar{\gamma}^-(p)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ir}^{\infty + ir} \frac{e^{2iq} \widehat{W}_1^+(q, \lambda)}{\bar{\gamma}^-(q)(q - p)} dq = 0 \\ \frac{\widehat{W}_1^+(p, \lambda)}{\bar{\gamma}^+(p)} - \frac{k \sin \theta_i F(\lambda) e^{-i(\lambda + k \cos \theta_i)}}{\bar{\gamma}^+(\lambda + k \cos \theta_i)\{p - (\lambda + k \cos \theta_i)\}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - ir}^{\infty - ir} \frac{e^{-2iq} \widehat{W}_1^-(q, \lambda)}{\bar{\gamma}^+(q)(q - p)} dq = 0 \end{cases} \quad (43)$$

この (43) の上の式に対して置換 $p \rightarrow -p$ 、下の式に対して変数変換 $q \rightarrow -q$ を施し両式の和と差を取ると

$$\frac{X_1^{\alpha, \beta}(p, \lambda)}{\bar{\gamma}^+(p)} - \frac{k \sin \theta_i F(\lambda) e^{-i(\lambda + k \cos \theta_i)}}{\bar{\gamma}^+(\lambda + k \cos \theta_i)\{p - (\lambda + k \cos \theta_i)\}} \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ir}^{\infty + ir} \frac{e^{2iq} X_1^{\alpha, \beta}(q, \lambda)}{\bar{\gamma}^-(q)(q + p)} dq = 0 \quad (44)$$

ここで、

$$X_1^{\alpha, \beta}(p, \lambda) = \widehat{W}_1^+(p, \lambda) \pm \widehat{W}_1^-(p, \lambda) \quad (45)$$

であり、 $p = \lambda + k \cos \theta_i$ での 1 位の極による特異性を除いて $\text{Im } p > -k_2 \cos \theta_i$ で正則である。

0 次摂動項の場合と全く同様な積分評価を行うことで、1 次摂動項についての形式的厳密解表現を得る。

$$X_1^{a,s}(p, \lambda) = \bar{\gamma}^+(p) \left[\frac{k \sin \theta_i F(\lambda) e^{-i(\lambda + k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^+(\lambda + k \cos \theta_i) \{p - (\lambda + k \cos \theta_i)\}} \pm \frac{k \sin \theta_i F(\lambda) e^{i(\lambda + k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^-(\lambda + k \cos \theta_i) \{p + (\lambda + k \cos \theta_i)\}} \right. \\ \left. \pm \frac{1}{\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2iq'l} X_1^{a,s}(q, \lambda)}{\bar{\gamma}^-(q)(q+p)} dq \right]$$

(46)

4 漸近解

前の節では σ についての 0 次摂動項、1 次摂動項に関する Wiener-Hopf 方程式の形式的厳密解表現 (37), (46) 式を得た。しかし、各々の第 3 項は未知関数 $X_0^{\alpha, \beta}(s), X_1^{\alpha, \beta}(p, \lambda)$ を被積分関数に含む項を持ち、文字通りの形式的な解となっている。ところが、第 1 項と第 2 項は定数倍を除いてランダム半平面の Wiener-Hopf 方程式の解表現¹と一致あるいは座標系を変換した場合に一致する。従って、第 1 項と第 2 項がエッジがもたらす直接的な散乱項を表していると考えられることから、第 3 項はエッジが二つ存在することによる散乱波の相互作用による補正項であると解釈できる。このような補正項についてストリップの幅が波長に比べて十分大な場合を仮定する。この場合、第 1 項、第 2 項に比べて補正項の影響が小さくなると考えられる。そこで、 $|k| \rightarrow \infty$ の条件下での解の漸近的表現を導き出すことにする。

4.1 0 次摂動項の漸近解

補助的な関数 $W_0^{\alpha, \beta}(s)$ を次のように定義し $X_0^{\alpha, \beta}(s)$ 中の未知量を分離する。

$$W_0^{\alpha, \beta}(s) = w_0^+(s) \pm w_0^-(-s) \quad (47)$$

これと (32), (36) 式から

$$X_0^{\alpha, \beta}(s) = W_0^{\alpha, \beta}(s) + \frac{ie^{-ik \cos \theta_i l}}{s - k \cos \theta_i} \pm \frac{ie^{ik \cos \theta_i l}}{s + k \cos \theta_i} \quad (48)$$

を得るので未知量を $W_0^{\alpha, \beta}(s)$ に代表させる。次に、

$$\begin{aligned} I_0^{\alpha, \beta}(s) &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2itl} X_0^{\alpha, \beta}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)} dt \\ &= \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2itl} W_0^{\alpha, \beta}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)} dt + ie^{-ik \cos \theta_i l} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2itl}}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)(t - k \cos \theta_i)} dt \right. \\ &\quad \left. \pm ie^{ik \cos \theta_i l} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2itl}}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)(t + k \cos \theta_i)} dt \right\} \quad (49) \end{aligned}$$

とおく。この $I_0^{\alpha, \beta}(s)$ の第 2 項、第 3 項の積分は若干の計算により次のように厳密に表現できることが示される。

$$\int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2itl}}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)(t \pm k \cos \theta_i)} dt = -i\pi \cdot \eta_0^{u,d}(s) \quad (50)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \eta_0^{u,d}(s) &= \frac{e^{2ikl}}{\pi l^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\zeta_0\{-2i(s+k)l\} - \zeta_0\{-2i(1 \mp \cos \theta_i)kl\}}{s \pm k \cos \theta_i} \\ &= \frac{\xi(s) - \xi(\mp k \cos \theta_i)}{s \pm k \cos \theta_i} \quad (51) \end{aligned}$$

$$\xi(s) = \frac{e^{2ikl}}{\pi l^{\frac{1}{2}}} \zeta_0\{-2i(s+k)l\} \quad (52)$$

$$\zeta_n(s) = \int_0^\infty \frac{t^{n+\frac{1}{2}} e^{-t}}{t+s} dt \quad \left(n > -\frac{3}{2}, |\arg s| < \pi \right) \quad (53)$$

また、第1項の積分についてはブランチカット周囲の積分に関する漸近展開の補助定理⁶を適用すると

$$\int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2itl} W_0^{a,s}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)} dt \simeq 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{e^{i(2kl+\frac{\pi}{4})}}{(2l)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n c_n^{a,s}}{(2l)^n} \zeta_n\{-2i(s+k)l\}$$

$$c_n^{a,s} = \left. \frac{d^n}{dt^n} W_0^{a,s}(t) \right|_{t=k} \quad (|k|l \rightarrow \infty) \quad (54)$$

と、展開されるので主要項を取り出すことにより

$$I_0^{a,s}(s) \simeq \frac{e^{2ikl}}{\pi l^{\frac{1}{2}}} W_0^{a,s}(k) \zeta_0\{-2i(s+k)l\} - ie^{-ik \cos \theta_i} \eta_0^u(s) \mp ie^{ik \cos \theta_i} \eta_0^d(s) \quad (55)$$

を得る。よって(37),(48),(52),(55)式より

$$W_0^{a,s}(s) = \bar{\gamma}^+(s) [ie^{-ik \cos \theta_i} \{P_0^u(s) \mp \eta_0^u(s)\} \pm ie^{ik \cos \theta_i} \{P_0^d(s) \mp \eta_0^d(s)\} \pm W_0^{a,s}(k) \xi(s)] \quad (56)$$

ただし、

$$P_0^{u,d}(s) = \frac{1}{s \mp k \cos \theta_i} \left\{ \frac{1}{\bar{\gamma}^{\pm}(k \cos \theta_i)} - \frac{1}{\bar{\gamma}^{\pm}(s)} \right\} \quad (57)$$

とする。ここで、

$$\chi_0^{u,d}(s) = ie^{\mp ik \cos \theta_i} P_0^{u,d}(s) - ie^{\pm ik \cos \theta_i} \eta_0^{u,d}(s) \quad (58)$$

とおけば(56)式は

$$W_0^{a,s}(s) = \bar{\gamma}^+(s) \{ \chi_0^u(s) \pm \chi_0^d(s) \pm W_0^{a,s}(k) \xi(s) \} \quad (59)$$

と表現できる。(59)式で $s=k$ とおいて $W_0^{a,s}(k)$ について解き(55)式に代入し(52)式を考慮することで

$$I_0^{a,s}(s) \simeq \frac{\bar{\gamma}^+(k) \{ \chi_0^u(k) \pm \chi_0^d(k) \}}{1 \mp \bar{\gamma}^+(k) \xi(k)} \xi(s) - \{ ie^{-ik \cos \theta_i} \eta_0^u(s) \pm ie^{ik \cos \theta_i} \eta_0^d(s) \} \quad (60)$$

を得る。これにより $X_0^{a,s}(s)$ の第3項の $|k|l \rightarrow \infty$ の条件下での漸近値が求まったので(36),(37)式を考慮し若干の計算をすることにより $W_0^{\pm}(s)$ の漸近値は次のようになる。

$$W_0^{\pm}(s) \simeq \bar{\gamma}^+(s) \left\{ \pm \frac{ie^{\mp ik \cos \theta_i}}{\bar{\gamma}^{\pm}(k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} - ie^{\pm ik \cos \theta_i} \eta_0^{d,u}(\pm s) + B_0^{u,d} \xi(\pm s) \right\} \quad (61)$$

ただし、

$$B_0^{u,d} = \frac{\bar{\gamma}^+(k) \{ \chi_0^{d,u}(k) + \chi_0^{u,d}(k) \bar{\gamma}^+(k) \xi(k) \}}{1 - \{ \bar{\gamma}^+(k) \xi(k) \}^2} \quad (62)$$

(23),(27),(29),(31)式より散乱界の σ についての0次摂動項 $\Phi_{s0}(z|s)$ は

$$\Phi_{s0}(z|s) = C_0(s) e^{-\gamma(s)|z|} \quad , \quad C_0(s) = -\frac{J_0(s)}{2\gamma(s)} = e^{is} W_0^+(s) + e^{-is} W_0^-(s) \quad (63)$$

となるので D^4 -逆 Fourier 変換により実空間における散乱界の、 σ についての0次摂動項 $\phi_{s0}(x, z)$ は以下のよう求められる $|k|l \rightarrow \infty$ の条件下での漸近解を与える。

$$\begin{aligned} \phi_{s0}(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} e^{-isx} \Phi_{s0}(T^x \omega|s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \{ e^{is} W_0^+(s) + e^{-is} W_0^-(s) \} e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds \\ &\equiv \phi_{s01}(x, z) + \phi_{s02}(x, z) \quad , \quad |\tau| < k_2 \cos \theta_i \end{aligned} \quad (64)$$

ただし、

$$\phi_{s01}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \left\{ \frac{\bar{\gamma}^+(s) i e^{-ik \cos \theta_i l}}{\bar{\gamma}^+(k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} e^{isl} - \frac{\bar{\gamma}^-(s) i e^{ik \cos \theta_i l}}{\bar{\gamma}^-(k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} e^{-isl} \right\} e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \phi_{s02}(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} [\bar{\gamma}^+(s) \{-ie^{ik \cos \theta_i l} \eta_0^d(s) + B_0^u \xi(s)\} e^{isl} \\ &\quad + \bar{\gamma}^-(s) \{-ie^{-ik \cos \theta_i l} \eta_0^u(-s) + B_0^d \xi(-s)\} e^{-isl}] e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds \\ &\quad |\tau| < k_2 \cos \theta_i \end{aligned} \quad (66)$$

4.2 1次摂動項の漸近解

0次摂動項の場合と全く同じ手順で漸近表現を得ることができる。

$$W_1^{a,s}(p, \lambda) = e^{-i\lambda l} \{w_1^+(p - \lambda, \lambda) + F(\lambda)w_0^{+'}(p - \lambda)\} \pm e^{i\lambda l} \{w_1^-(p - \lambda, \lambda) + F(\lambda)w_0^{-'}(p - \lambda)\} \quad (67)$$

として、これと(39),(41),(42),(45)式から

$$X_1^{a,s}(p, \lambda) = W_1^{a,s}(p, \lambda) - ik \sin \theta_i F(\lambda) \left\{ \frac{ie^{-i(\lambda + k \cos \theta_i)l}}{p - (\lambda + k \cos \theta_i)} \pm \frac{ie^{i(\lambda + k \cos \theta_i)l}}{p + (\lambda + k \cos \theta_i)} \right\} \quad (68)$$

を得るので、未知量を $W_1^{a,s}(p, \lambda)$ に代表させる。次に0次摂動項の場合と同様に未知関数 $X_1^{a,s}(p, \lambda)$ を含む積分項を評価すると

$$\begin{aligned} I_1^{a,s}(p, \lambda) &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2iq'l} X_1^{a,s}(q, \lambda)}{\bar{\gamma}^-(q)(q+p)} dq \\ &\simeq \frac{e^{2ikl}}{\pi l^{\frac{1}{2}}} W_1^{a,s}(k, \lambda) \zeta_0 \{-2i(p+k)l\} \\ &\quad - ik \sin \theta_i F(\lambda) \{-ie^{-i(\lambda + k \cos \theta_i)l} \eta_1^u(p, \lambda) \mp ie^{i(\lambda + k \cos \theta_i)l} \eta_1^d(p, \lambda)\} \end{aligned} \quad (69)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \eta_1^{u,d}(p, \lambda) &= \frac{e^{2ikl}}{\pi l^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\zeta_0 \{-2i(p+k)l\} - \zeta_0 \{-2i\{k \mp (\lambda + k \cos \theta_i)\}l\}}{p \pm (\lambda + k \cos \theta_i)} \\ &= \frac{\xi(p) - \xi\{\mp(\lambda + k \cos \theta_i)\}}{p \pm (\lambda + k \cos \theta_i)} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\eta_1^{u,d}(p, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \eta_0^{u,d}(s) \quad (71)$$

に注意する。

0次摂動項の場合と同様な若干の計算により $W_1^{a,s}(k, \lambda)$ を求め(69)式に代入し(52)式を考慮すると

$$\begin{aligned} I_1^{a,s}(p, \lambda) &\simeq -ik \sin \theta_i F(\lambda) \left\{ \frac{\bar{\gamma}^+(k) \{\chi_1^u(k, \lambda) \pm \chi_1^d(k, \lambda)\}}{1 \mp \bar{\gamma}^+(k) \xi(k)} \xi(p) \right. \\ &\quad \left. - ie^{-i(\lambda + k \cos \theta_i)l} \eta_1^u(p, \lambda) \mp ie^{i(\lambda + k \cos \theta_i)l} \eta_1^d(p, \lambda) \right\} \end{aligned} \quad (72)$$

ただし、

$$\chi_1^{u,d}(p, \lambda) = ie^{\mp i(\lambda+k \cos \theta_i)l} P_1^{u,d}(p, \lambda) - ie^{\pm i(\lambda+k \cos \theta_i)l} \eta_1^{u,d}(p, \lambda) \quad (73)$$

$$P_1^{u,d}(p, \lambda) = \frac{1}{p \mp (\lambda + k \cos \theta_i)} \left\{ \frac{1}{\bar{\gamma}^\pm(\lambda + k \cos \theta_i)} - \frac{1}{\bar{\gamma}^\pm(p)} \right\} \quad (74)$$

こちらも

$$\chi_1^{u,d}(p, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \chi_0^{u,d}(s) \quad , \quad P_1^{u,d}(p, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = P_0^{u,d}(s) \quad (75)$$

に注意する。

これにより $X_1^{u,d}(p, \lambda)$ の第3項の $|k| \rightarrow \infty$ の条件下での漸近値が求まったので (45), (46) 式を考慮し若干の計算をすることにより $\widehat{W}_1^\pm(p, \lambda)$ の漸近値は次のようになる。

$$\begin{aligned} \widehat{W}_1^\pm(p, \lambda) \simeq & -ik \sin \theta_i F(\lambda) \bar{\gamma}^\pm(p) \left[\pm \frac{ie^{\mp i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^\pm(\lambda + k \cos \theta_i)(p - k \cos \theta_i)} \right. \\ & \left. - ie^{\pm i(\lambda+k \cos \theta_i)l} \eta_1^{d,u}(\pm p, \lambda) + B_1^{u,d}(\lambda) \xi(\pm p) \right] \quad (|k| \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (76)$$

更に (42) 式から

$$\begin{aligned} W_1^\pm(s, \lambda) \simeq & -ik \sin \theta_i F(\lambda) e^{\pm i\lambda l} \bar{\gamma}^\pm(s + \lambda) \left[\pm \frac{ie^{\mp i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^\pm(\lambda + k \cos \theta_i)\{s - (\lambda + k \cos \theta_i)\}} \right. \\ & \left. - ie^{\pm i(\lambda+k \cos \theta_i)l} \eta_1^{d,u}\{\pm(s + \lambda), \lambda\} + B_1^{u,d}(\lambda) \xi\{\pm(s + \lambda)\} \right] \\ \equiv & F(\lambda) \widetilde{W}_1^\pm(s, \lambda) \quad (|k| \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (77)$$

を得る。ただし、

$$B_1^{u,d}(\lambda) = \frac{\bar{\gamma}^+(k) \{\chi_1^{d,u}(k, \lambda) + \chi_1^{u,d}(k, \lambda) \bar{\gamma}^+(k) \xi(k)\}}{1 - \{\bar{\gamma}^+(k) \xi(k)\}^2} \quad (78)$$

であり、また (75) 式より

$$B_1^{u,d}(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = B_0^{u,d} \quad (79)$$

に注意する。

(23),(27),(30),(38) 式より散乱界の σ についての1次摂動項 $\Phi_{s1}(z, T^x \omega | s)$ は

$$\begin{aligned} \Phi_{s1}(z, T^x \omega | s) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_1^\pm(s, \lambda) e^{-\gamma(s+\lambda)|z| - i\lambda x} dB(\lambda, \omega) \\ C_1^\pm(s, \lambda) &= -\frac{J_1(s, \lambda)}{2\gamma(s+\lambda)} \mp \frac{1}{2} F(\lambda) J_0(s) \\ &= e^{i\lambda l} \{W_1^+(s, \lambda) \pm \gamma(s) W_0^+(s) F(\lambda)\} \\ &\quad + e^{-i\lambda l} \{W_1^-(s, \lambda) \pm \gamma(s) W_0^-(s) F(\lambda)\} \\ &= F(\lambda) [e^{i\lambda l} \{\widetilde{W}_1^+(s, \lambda) \pm \gamma(s) W_0^+(s)\} \\ &\quad + e^{-i\lambda l} \{\widetilde{W}_1^-(s, \lambda) \pm \gamma(s) W_0^-(s)\}] \end{aligned} \quad (80)$$

となるので、 D^a -逆 Fourier 変換により実空間における散乱界の、 σ についての 1 次摂動項 $\phi_{s1}(x, z, \omega)$ は

$$\begin{aligned}\phi_{s1}(x, z, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} e^{-isx} \Phi_{s1}(z, T^x \omega | s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \{e^{is1} \bar{W}_1^+(s, \lambda) + e^{-is1} \bar{W}_1^-(s, \lambda)\} e^{-i(s+\lambda)x - \gamma(s+\lambda)|z|} ds \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \gamma(s) \{e^{is1} W_0^+(s) + e^{-is1} W_0^-(s)\} e^{-i(s+\lambda)x - \gamma(s+\lambda)|z|} ds \right] dB(\lambda, \omega) \\ &\quad |\tau| < k_2 \cos \theta_i\end{aligned}\quad (81)$$

として求められ $|k| \rightarrow \infty$ の条件下での漸近解を与える。

(81) 式を少し整理すると、

$$\phi_{s1}(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \{(-ik \sin \theta_i) g_1(x, z, \lambda) \pm g_2(x, z, \lambda)\} dB(\lambda, \omega) \quad (82)$$

を得る。ただし、複号は z の正負に対応し、 $g_1(x, z, \lambda), g_2(x, z, \lambda)$ は

$$g_1(x, z, \lambda) \equiv \phi_{s11}(x, z, \lambda) + \phi_{s12}(x, z, \lambda) \quad (83)$$

$$g_2(x, z, \lambda) \equiv \phi_{s13}(x, z, \lambda) + \phi_{s14}(x, z, \lambda) \quad (84)$$

$$\begin{aligned}\phi_{s11}(x, z, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \left[\frac{\bar{\gamma}^+(s) i e^{-i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^+(\lambda+k \cos \theta_i) \{s - (\lambda+k \cos \theta_i)\}} e^{is1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{\gamma}^-(s) i e^{i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^-(\lambda+k \cos \theta_i) \{s - (\lambda+k \cos \theta_i)\}} e^{-is1} \right] e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds\end{aligned}\quad (85)$$

$$\begin{aligned}\phi_{s12}(x, z, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} [\bar{\gamma}^+(s) \{-i e^{i(\lambda+k \cos \theta_i)l} \eta_1^d(s, \lambda) + B_1^u(\lambda) \xi(s)\} e^{is1} \\ &\quad + \bar{\gamma}^-(s) \{-i e^{-i(\lambda+k \cos \theta_i)l} \eta_1^u(-s, \lambda) + B_1^d(\lambda) \xi(-s)\} e^{-is1}] e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds\end{aligned}\quad (86)$$

$$\begin{aligned}\phi_{s13}(x, z, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \left[\frac{i e^{-i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{2\bar{\gamma}^+(k \cos \theta_i) \bar{\gamma}^-(s-\lambda) \{s - (\lambda+k \cos \theta_i)\}} e^{is1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i e^{i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{2\bar{\gamma}^-(k \cos \theta_i) \bar{\gamma}^+(s-\lambda) \{s - (\lambda+k \cos \theta_i)\}} e^{-is1} \right] e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds\end{aligned}\quad (87)$$

$$\begin{aligned}\phi_{s14}(x, z, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \left[\frac{-i e^{ik \cos \theta_i l} \eta_0^d(s-\lambda) + B_0^u \xi(s-\lambda)}{2\bar{\gamma}^-(s-\lambda)} e^{i(s-\lambda)l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-i e^{-ik \cos \theta_i l} \eta_0^u\{-s-\lambda\} + B_0^d \xi\{-s-\lambda\}}{2\bar{\gamma}^+(s-\lambda)} e^{-i(s-\lambda)l} \right] e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds\end{aligned}\quad (88)$$

ここで、 σ についての 0 次摂動項は (74), (76) 式から

$$\phi_{s11}(x, z, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \phi_{s01}(x, z), \quad \phi_{s12}(x, z, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \phi_{s02}(x, z)$$

となるので

$$g_1(x, z, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \phi_{s0}(x, z) \quad (89)$$

を得る。

従って、実空間における散乱場は (21) 式の D^a -逆 Fourier 変換

$$\phi_s(x, z, \omega) = \phi_{s0}(x, z) + \sigma \phi_{s1}(x, z, \omega) \quad (90)$$

と (82), (89) 式を用いて

$$\phi_s(x, z, \omega) = g_1(x, z, 0) + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \{(-ik \sin \theta_i) g_1(x, z, \lambda) \pm g_2(x, z, \lambda)\} dB(\lambda, \omega) \quad (91)$$

と書き表せる。これにより散乱場の平均と分散は (4) 式の $dB(\lambda, \omega)$ の性質から容易に求められ

$$\langle \phi_s(x, z, \omega) \rangle = g_1(x, z, 0) \quad (92)$$

$$\langle |\phi_s(x, z, \omega) - \langle \phi_s(x, z, \omega) \rangle|^2 \rangle = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 |-ik \sin \theta_i g_1(x, z, \lambda) \pm g_2(x, z, \lambda)|^2 d\lambda \quad (93)$$

となる。(92) 式は散乱場の σ についての 0 次摂動項そのものであり、ストリップ表面が滑らかである場合の散乱場を与えるコヒーレントな成分を示す。(93) 式は σ についての 1 次摂動項すなわち、ストリップ表面にランダムな凹凸が存在する場合の散乱場の強度を与えるインコヒーレントな成分を示し、任意のランダムさのパワースペクトル密度 $|F(\lambda)|^2$ を与えることで求められる。

5 むすび

本論文ではランダムな表面を持つ導体ストリップによる平面電磁波散乱問題を取り上げた。表面のランダムさが定常ランダム関数として表される場合を仮定し、TE 波入射に対する二次元散乱問題を D^{α} -Fourier 変換 領域で定式化した。これを Wiener-Hopf 法と摂動法を用いてストリップ表面の粗さを表すパラメータについての 0 次の摂動項、1 次の摂動項を考え D^{α} -Fourier 変換 領域での形式的厳密解を求めた。また、ストリップ幅が入射波の波長に比べて十分大な場合について D^{α} -Fourier 変換 領域における漸近解表現を求めた。

今後は D^{α} -逆 Fourier 変換 による解表現のより具体的な表示を求め、散乱場の各種統計量を実際に計算することで散乱場の評価を行う予定である。

文献

- [1] J.Nakayama and T.Nishio,'Scattering from a randomly rough half-plane',IEEE AP-S Symposium digest, VOL.2.,pp.550-553(1991)
- [2] H.Ogura and J.Nakayama,'Initial-value problem of the one-dimensional wave propagation in a homogeneous random medium',Phys. Rev.,A-11,pp.958(1975)
- [3] J.Nakayama et al., 'A probabilistic theory of scattering from a random rough surface',Radio Sci.,15,pp.1050-1051,1056-1057(1980)
- [4] J.Nakayama,'Scattering from a random-surface:Linear equations for coefficients of Wiener-Hermite expansion of the wave field',Radio Sci.,21,pp.708-710,(1986)
- [5] B.Noble,'Methods based on the Wiener-Hopf technique',Pergamon(1958)
- [6] K.Kobayashi,'Plane Wave Diffraction by a Strip:Exact and Asymptotic Solutions',Phys.Soc.Jpn.,60,pp.1902-1905(1991)
- [7] 小林,'有限幅正弦波状格子による平面電磁波の回折(1)',電磁界理論研究会資料 EMT-89-24(1989)
- [8] 小林,'有限幅正弦波状格子による平面電磁波の回折(2)',電磁界理論研究会資料 EMT-89-38(1989)

輻射科学研究会資料

RS 92 - 5

2次元ランダム平面上の放射と伝搬問題

小倉久直、高橋信行

(京都大学 工学部)

1992年5月29日

輻射科学研究会

(住友電気工業株式会社)

2次元ランダム平面上の放射と伝搬問題

小倉久直、高橋信行

(京都大学 工学部 電子工学教室)

1 まえがき

以前に一樣な確率場で表される1次元ランダム表面上のGreen関数、すなわち表面上方に位置する点波源の放射場を、平面波入射の散乱波動場を合成することによりランダム表面を表す確率場の汎関数として具体的に求め、これを用いて表面から離れた遠方における波動場の漸近解を鞍部点法により評価し、コヒーレントおよびインコヒーレント波動部の単位角当たりの放射あるいは散乱電力流を求めた。更に、伝搬問題で重要な表面に沿う遠方における波動場の漸近形をも具体的に解析して種々の著しい結果をえた^[1-4]。更にその解析を拡張して2次元ランダム平面上のGreen関数すなわち表面上方に位置する点波源の作る3次元スカラー放射場の汎関数表現を求め、これを用いて遠方の波動場の漸近形を関数に解析した^[5, 6]。この際、2次元表面に沿う波動場の伝搬についての解析は、種々の困難のため行なわなかったが、今回はこれについて報告する。

2 2次元ランダム表面による平面波の散乱

はじめに平面波散乱の結果をまとめる。3次元位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y) = (x, y, z)$ を極座標および円筒座標

$$\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)_{\text{pol}} = (x, z)_{\text{cyl}} \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = (\rho, \phi)_{\text{cyl}}, \quad \rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \quad (2)$$

で表す。 \mathbf{x} は2次元平面 R_2 上の位置ベクトル、 ρ はその長さである。

2次元ランダム表面を一樣確率場

$$z = f(\mathbf{T}^{\mathbf{x}}\omega) = \int_{R_2} e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}} F(\lambda) dB(\lambda, \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad \mathbf{x} \in R_2 \quad (3)$$

で表す。 $dB(\lambda, \omega)$ は2次元複素 Gauss ランダム測度で

$$\langle dB(\lambda) \rangle = 0 \quad (4)$$

$$\langle \overline{dB(\lambda)} dB(\lambda') \rangle = \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' \quad (5)$$

の性質をもつ。 $\langle \rangle$ は平均を表す。ランダム表面は平均値0で相関関数

$$R(\mathbf{x}) = \langle \overline{f(\omega)} f(\mathbf{T}^{\mathbf{x}}\omega) \rangle = \int_{R_2} e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}} |F(\lambda)|^2 d\lambda, \quad \lambda \in R_2 \quad (6)$$

$$\sigma^2 \equiv R(0) = \int_{R_2} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (7)$$

ここで $|F(\lambda)|^2$ はランダム表面のスペクトル密度(電力スペクトル)であり、 σ^2 は分散で、表面粗さを表す。 $\sigma^2 = 0$ は平均面に対応する。3次元空間の波数ベクトル \mathbf{k} を(1)(2)に対応し、

$$\mathbf{k} = (k, \alpha, \beta)_{\text{pol}} = (\lambda, S(\lambda))_{\text{cyl}} \quad (8)$$

$$\lambda = (\lambda_x, \lambda_y) = (\lambda, \beta)_{\text{cyl}} \quad (9)$$

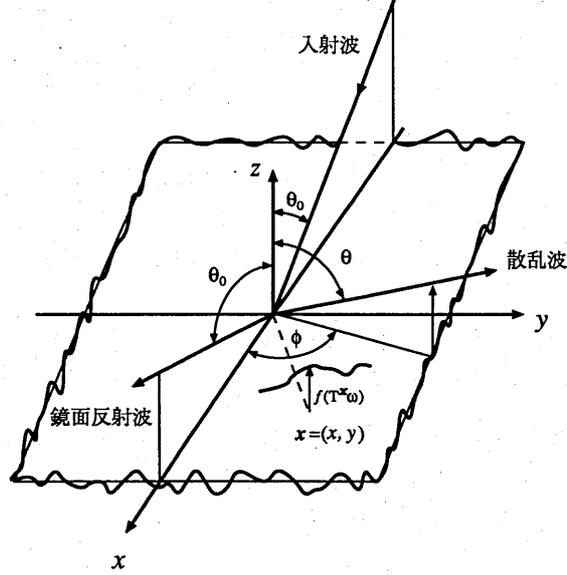


図 1: ランダム表面による平面波の散乱

で表す。ここで

$$\lambda = k \sin \alpha, \quad (10)$$

$$S(\lambda) \equiv \sqrt{k^2 - \lambda^2} = k \cos \alpha \quad (11)$$

$S(\lambda)$ の分岐は $\arg S = 0$, $k^2 > \lambda^2$, $\arg S = \pi/2$, $k^2 < \lambda^2$ の様にとるものとする。

特に入射および鏡面反射波の波数ベクトルを k'_0 , k_0 と書けば

$$k_0 = (k, \theta_0, \varphi_0)_{\text{pol}} = (\lambda_0, S(\lambda_0))_{\text{cyl}}, \quad (\text{reflection})$$

$$k'_0 = (k, \pi - \theta_0, \varphi_0)_{\text{pol}} = (\lambda_0, -S(\lambda_0))_{\text{cyl}}, \quad (\text{incidence}) \quad (12)$$

$$\lambda_0 = (k \sin \theta_0, \varphi_0)_{\text{cyl}}$$

ここで θ_0 は入射角、 φ_0 は方位角を示す。

波数ベクトル k'_0 の平面波が 2 次元ランダム表面上に入射するものとし、その場合の波動場 $\psi(x, z; \omega | \lambda_0)$ は波動方程式

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(x, z; \omega | \lambda_0) = 0, \quad z > f(T^x \omega), \quad x \in R_2 \quad (13)$$

を満足し、ランダム境界面 $z = f(T^x \omega)$ 上で境界条件 $\psi = 0$ (Dirichlet)、または $\partial \psi / \partial n = 0$ (Neumann) を満足し、遠方 $z \rightarrow \infty$ で放射条件を満たすものとする。これらの条件は平面 $z = 0$ 上で等価境界条件

$$\left[\psi + f \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad (\text{Dirichlet}) \quad (14)$$

$$\frac{1}{k} \left[-(\nabla f \cdot \nabla \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial z} + f \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]_{z=0} = 0 \quad (\text{Neumann}) \quad (15)$$

によって近似的に表現し、以下ではこれをランダム表面のモデルとみなす。

入射ベクトル k'_0 の平面波が一様なランダム平面に入射する場合、Floquet の定理の形の波動場は

$$\psi(\mathbf{x}, z; \omega | \lambda_0) = e^{i\lambda_0 \cdot \mathbf{x}} \left[e^{-iS(\lambda_0)z} \mp e^{iS(\lambda_0)z} \mp U(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega, z | \lambda_0) \right] \quad (16)$$

(\mp 記号は Dirichlet および Neumann 条件に対応) の形に書ける。ここで、第 1、第 2 項は $\sigma^2 = 0$ (無摂動) の場合の入射、反射平面波を表し、第 3 項は $\sigma^2 > 0$ (摂動) の場合の散乱波を表す。 $U(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega, z | \lambda_0)$ は R_2 上の一様確率場であって、一般に $dB(\lambda)$ の直交汎関数 U_n による Wiener-Itô 展開の形に展開できる:

$$U(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega, z | \lambda_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega, z | \lambda_0) \quad (17)$$

$$U_n(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega, z | \lambda_0) \equiv \int \dots \int_{R_2} e^{i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} + iS(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)z} \times A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \hat{h}_n [dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

ここで、 $A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)$ は n 次の Wiener 核で、 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に関し対称である。 U_n の直交性は次の形に書ける:

$$\langle \overline{U_n U_m} \rangle = \delta_{nm} n! \int \dots \int_{R_2} e^{-2i\text{Im}S(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)z} |A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)|^2 d\lambda_1 \dots d\lambda_n \quad (19)$$

$n, m = 0, 1, 2, \dots$

平面波入射に対する電流保存則は

$$\frac{S(\lambda_0)}{k} = \frac{S(\lambda_0)}{k} |1 + A_0(\lambda_0)|^2 + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n! \int \dots \int_{(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2 < k^2} S(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \times |A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)|^2 d\lambda_1 \dots d\lambda_n \quad (20)$$

の形に表せる。また Wiener 核 A_n が求まれば、インコヒーレント散乱各度分布、すなわち、入射角 $\Theta = (\theta_0, \varphi_0)$ に対し、単位表面面積より散乱角 $\Theta = (\theta, \varphi)$ 方向単位立体角当たりの平均電流が

$$S(\theta | \theta_0) = k^2 \cos \theta \left[|A_1(\lambda - \lambda_0 | \lambda_0)|^2 + 2! \int_{R_2} |A_2(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2 | \lambda_0)|^2 d\lambda_2 + \dots \right] \quad (21)$$

により求められる。ここに $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = (k \sin \theta, \varphi)_{cy1}$, $S(\lambda) = k \cos \theta$, $\lambda_0 = (k \sin \theta_0, \varphi_0)_{cy1}$ の関係があり、 $\lambda - \lambda_0$ は Bragg ベクトルに相当する。

僅かにランダムな表面の場合に境界条件 (14)(15) を解き、近似的に Wiener 核 $A_0(\lambda)$, $A_1(\lambda | \lambda)$, \dots を解くことができる。以下に近似解を列挙する。

Dirichlet 条件 [7]

$$A_0(\lambda) \equiv S(\lambda) a_0(\lambda) = -\frac{2Z_D(\lambda)}{1 + Z_D(\lambda)} \quad (22)$$

$$A_1(\lambda_1 | \lambda) \equiv S(\lambda) a_1(\lambda_1 | \lambda) \quad (23)$$

$$Z_D(\lambda) \equiv S(\lambda) \xi(\lambda) \quad (24)$$

$$a_0(\lambda) = -\frac{2\xi(\lambda)}{1 + S(\lambda)\xi(\lambda)} \quad (25)$$

$$a_1(\lambda_1 | \lambda) = \frac{-2iF(\lambda_1)}{[1 + S(\lambda)\xi(\lambda)][1 + S(\lambda + \lambda_1)\xi(\lambda + \lambda_1)]} \quad (26)$$

$$\xi(\lambda) \equiv \int_{R_2} \frac{S(\lambda') |F(\lambda' - \lambda)|^2}{1 + S(\lambda')\xi(\lambda')} d\lambda' \quad (27)$$

$$\simeq \int_{R_2} S(\lambda') |F(\lambda' - \lambda)|^2 d\lambda' \quad (28)$$

特に $\lambda = k$ において次式が成り立つ

$$Z_D(k) = 0, \quad A_0(k) = 0, \quad A_1(\lambda_1|k) = 0 \quad (29)$$

Neumann 条件

$$A_0(\lambda) \equiv -2 + S(\lambda)a_0(\lambda) = -\frac{2Z_N(\lambda)}{1 + Z_N(\lambda)} \quad (30)$$

$$A_1(\lambda_1|\lambda) \equiv S(\lambda)a_1(\lambda_1|\lambda) \quad (31)$$

$$Z_N(\lambda) \equiv \frac{\eta(\lambda)}{S(\lambda)} \quad (32)$$

$$a_0(\lambda) = \frac{2}{S(\lambda) + \eta(\lambda)} \quad (33)$$

$$a_1(\lambda_1|\lambda) = \frac{-2i [k^2 - (\lambda + \lambda_1) \cdot \lambda] F(\lambda_1)}{[S(\lambda) + \eta(\lambda)][S(\lambda + \lambda_1) + \eta(\lambda + \lambda_1)]} \quad (34)$$

$$\eta(\lambda) \equiv \int_{R_2} \frac{[k^2 - \lambda' \cdot \lambda]^2 |F(\lambda' - \lambda)|^2}{S(\lambda') + \eta(\lambda')} d\lambda' \quad (35)$$

$$\simeq \int_{R_2} \frac{[k^2 - \lambda' \cdot \lambda]^2 |F(\lambda' - \lambda)|^2}{S(\lambda')} d\lambda' \quad (36)$$

$$Z_N(k) = \infty, \quad 2 + A_0(k) = 0, \quad A_1(\lambda_1|k) = 0 \quad (37)$$

一般にいずれの境界条件のもとでも次の関係が成り立つ。

$$A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|k) = S(k)a_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|k) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

また A_0 の表式(22),(30)は同形であって

$$1 + A_0(\lambda) = \frac{1 - Z_i(\lambda)}{1 + Z_i(\lambda)}, \quad i = D, N \quad (39)$$

が成り立つ。 $1 + A_0(\lambda)$ は、コヒーレント波の反射係数であるから、 $Z_i, i = D, N$ をランダム表面の平均表面インピーダンスと解釈できる。

3 2次元ランダム表面上の Green 関数^[5,6]

波源の位置を $P_0: \mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0, \varphi_0)_{\text{pol}} = (x_0, z_0)_{\text{cyl}}$, 観測点の位置を $P: \mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)_{\text{pol}} = (x, y)_{\text{cyl}}, z, z_0 \geq 0$ とする。Green 関数 G (円筒座標表示)は波動方程式

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{x}, z|\mathbf{x}_0, z_0; \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(z - z_0), \quad z, z_0 > 0 \quad (40)$$

ならびに境界条件(14),(15)、放射条件を満たすものである。波源点 P_0 は $(0, z)$ すなわち z 軸上に位置するものとする。任意の波源位置 (\mathbf{x}_0, z) に対応する Green 関数は次の変換で容易に得られる:

$$G(\mathbf{x}, z|\mathbf{x}_0, z_0; \omega) = D^{-\mathbf{x}_0}G(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega) = G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, z|0, z_0; T^{\mathbf{x}_0}\omega) \quad (41)$$

はじめに表面が平温な鏡面($\sigma^2 = 0$)の場合の Green 関数 $G_0(\mathbf{x}, z|0, z_0)$ の表現を示しておく。

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(\mathbf{x}, z|0, z_0) = -\delta(\mathbf{x})\delta(z - z_0) \quad (42)$$

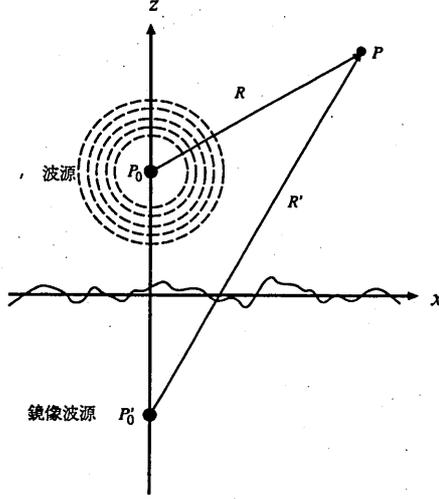


図 2: ランダム表面上の波源 P_0 , 鏡像波源 P'_0 , 観測点 P

$$\begin{aligned}
 G_0(\mathbf{x}, z|0, z_0) &= \frac{k}{4\pi} \left[h_0^{(1)}(kR) \mp h_0^{(1)}(kR') \right] \\
 &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} \frac{e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}}}{S(\lambda)} \left[e^{iS(\lambda)|z-z_0|} \mp e^{iS(\lambda)(z+z_0)} \right] d\lambda \quad (43)
 \end{aligned}$$

ここで $h_0^{(1)}(z)$ は第 1 種球 Hankel 関数、 R, R' はそれぞれ波源 $P_0 = (0, z)$, 鏡像 $P'_0 = (0, -z_0)$ から観測点 $P = (\mathbf{x}, z)$ までの距離を表す。複号 \mp は境界 $z = 0$ 上の Dirichlet, Neumann 条件に対応する。

Green 関数を $\sigma^2 = 0$ の primary wave G_0 とランダム表面による散乱波すなわち secondary wave G_0 の和で表す:

$$G(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega) = G_0(\mathbf{x}, z|0, z_0) \mp G_s(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega), \quad z, z_0 > 0 \quad (44)$$

ここで \mp は Dirichlet, Neumann 条件に対応する。ここで (16)(43)(44) を $z < z_0$ の領域で比較すれば、Green 関数は $z < z_0$ の領域で

$$G(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}} \left[e^{-iS(\lambda)z} \mp e^{iS(\lambda)z} \mp U(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega, z|\lambda) \right] \frac{e^{iS(\lambda)z_0}}{S(\lambda)} d\lambda, \quad z < z_0 \quad (45)$$

の形に求められる。領域 $z > z_0$ では (43) に従い、上式の第 1 項のみ z, z_0 を変換すればよい。従って、Green 関数の散乱部分 G_s は次の形に書ける:

$$G_s(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}} U(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega, z|\lambda) \frac{e^{iS(\lambda)z_0}}{S(\lambda)} d\lambda, \quad \mathbf{x} \in R_2, \quad z, z_0 > 0 \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{T}^{\mathbf{x}} \omega, z|\lambda) &= e^{iS(\lambda)z} A_0(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_2} \dots \int_{R_2} e^{i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot \mathbf{x} + iS(\lambda + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)z} \\
 &\quad \times A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|\lambda) h_n[dB(\lambda_1), \dots, dB(\lambda_n)], \quad z > 0 \quad (47)
 \end{aligned}$$

(47) により、散乱部分 G_s を更にコヒーレント (平均) 部分 g_c とインコヒーレント (変動) 部分 g_{ic} に分けて書く:

$$G_s(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega) \equiv g_c(\mathbf{x}, z|0, z_0) + g_{ic}(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega) \quad (48)$$

$$g_c(\mathbf{x}, z|0, z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} e^{i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x} + iS(\boldsymbol{\lambda})(z+z_0)} \frac{A_0(\boldsymbol{\lambda})}{S(\boldsymbol{\lambda})} d\boldsymbol{\lambda} \quad (49)$$

$$g_{ic}(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega) = \int_{R_2} K(\mathbf{x}, z, z_0|\boldsymbol{\lambda}_1) dB(\boldsymbol{\lambda}_1) + \dots \quad (50)$$

$$K(\mathbf{x}, z, z_0|\boldsymbol{\lambda}_1) \equiv \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} e^{i(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot \mathbf{x} + iS(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}_1)z + iS(\boldsymbol{\lambda})z_0} a_1(\boldsymbol{\lambda}_1|\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \quad (51)$$

$$= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} e^{i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x} + iS(\boldsymbol{\lambda})z + iS(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1)z_0} a_1(\boldsymbol{\lambda}_1|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1) d\boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{x} \in R_2, \quad z, z_0 > 0 \quad (52)$$

したがって、全コヒーレント部分 G_c は次の形に書ける:

$$\begin{aligned} G_c(\mathbf{x}, z|0, z_0) &\equiv G_0(\mathbf{x}, z|0, z_0) \mp g_c(\mathbf{x}, z|0, z_0) \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} \frac{e^{\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}}}{S(\boldsymbol{\lambda})} \left[e^{iS(\boldsymbol{\lambda})|z-z_0|} \mp (1 + A_0(\boldsymbol{\lambda})) e^{iS(\boldsymbol{\lambda})(z+z_0)} \right] d\boldsymbol{\lambda} \quad z, z_0 > 0 \end{aligned} \quad (53)$$

ここで、 $A_0(\boldsymbol{\lambda}), a_1(\boldsymbol{\lambda}, |\boldsymbol{\lambda}|)$ に対して (22), (25), (26), (30), (33), (34) を用いれば、ランダム境界条件を満足する Green 関数がえられたことになる。

(50) で与えられるインコヒーレント場 g_{ic} は、ランダム表面 (3) が一様等方の場合、 R_2 上波源の位置する原点 $\mathbf{x} = 0$ のまわりの回転に関して等方な確率場であることが示される。

コヒーレント放射に関しては、ランダム表面下に分布する等価波源を定義することができる。実際 (49) で与えられる g_c は、因子 $e^{iS(\boldsymbol{\lambda})z_0} A_0(\boldsymbol{\lambda})$ を取り除けば自由空間の Green 関数 g_0 に帰着するから、次の形に書き直される:

$$g_c(\mathbf{x}, z|0, z_0) = \int_{R_2} g_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}', z - z') Q_c(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (54)$$

ここで $Q_c(\mathbf{r}), \mathbf{r} = (\mathbf{x}, z)$ は分布波源で

$$Q_c(\mathbf{r}) \equiv \delta(z + z_0) q_c(\mathbf{x}) \quad (55)$$

$$q_c(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R_2} e^{i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}} A_0(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \quad (56)$$

すなわち $q_c(\mathbf{x})$ は鏡像と同じ深さ $z = -z_0$ に分布して、コヒーレント波 g_c を放射する波源を表す。

4 Green 関数の漸近形 - 表面に沿う遠方の波動場 -

放射問題では波源より離れた遠方の波動場が必要である。波源の位置 P_0 が表面から遠くない位置に固定した場合、観測点 P が波源および表面より遠方にある場合の Green 関数の漸近形、すなわち上方への放射については以前報告した^{[5], [6]}。ここでは、遠方の観測点 P の位置が表面から遠くない時の Green 関数の漸近形、すなわち表面に沿う放射、伝搬について考察するが、1次元ランダム表面に対する方法^{[3], [4]}を以下の様に2次元ランダム表面の場合に拡張適用する。

4.1 Green 関数のコヒーレント部分の漸近形

コヒーレント部分 Green 関数のコヒーレント部分 G_c の漸近形を求める。簡単のためにランダム表面は等方とすれば、 $F(\boldsymbol{\lambda}) = F(\lambda)$, $A_0(\boldsymbol{\lambda}) = A_0(\lambda)$, $\lambda \equiv |\boldsymbol{\lambda}| = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$ が成り立つ。一般性を失うことなく観測位置 (\mathbf{x}, z) , $\mathbf{x} \equiv (\rho, \varphi)_{\text{cyl}}$, $\rho \equiv |\mathbf{x}|$ の方向角は $\varphi = 0$ とする。(49) より2次波のコヒーレント部分 g_c は、 $\rho \rightarrow \infty$ の場合に

$$g_c(\mathbf{x}, z|0, z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{R_2} e^{i\lambda \rho \cos \alpha + iS(\lambda)(z+z_0)} \frac{A_0(\lambda)}{S(\lambda)} \lambda d\lambda d\alpha \quad (57)$$

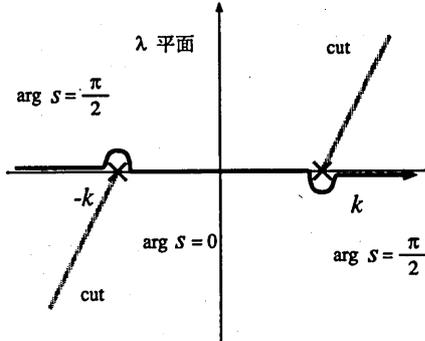


図 3: λ 平面分岐カットと積分路

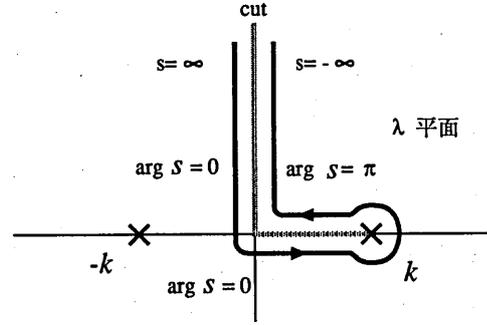


図 4: λ 平面積分路の変形

$$= \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) e^{iS(\lambda)(z+z_0)} \frac{A_0(\lambda)}{S(\lambda)} \lambda d\lambda \quad (58)$$

$$\sim \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi\rho\lambda}} \cos\left(\lambda\rho\frac{\pi}{4}\right) e^{iS(\lambda)(z+z_0)} \frac{A_0(\lambda)}{S(\lambda)} \lambda d\lambda \quad (59)$$

$$= \frac{i}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\lambda\rho}}{\sqrt{i\lambda\rho}} e^{iS(\lambda)(z+z_0)} \frac{A_0(\lambda)}{S(\lambda)} \lambda d\lambda \quad (60)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{i}{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda(s)\rho + iS(\lambda)(z+z_0)} \frac{A_0(\lambda(s))}{\sqrt{\lambda(s)}} ds \quad (61)$$

(60) では Bessel 関数 $J_0(\lambda\rho)$ の漸近形を用いたが、停留位相法によっても同様の結果が得られる。図 3 の積分路を図 4 の様に変形し、次の変数変換

$$s = (k^2 - \lambda^2)^{1/2}, \quad \lambda(s) = (k^2 - s^2)^{1/2}, \quad \lambda d\lambda = -s ds \quad (62)$$

を行えば (61) がえられる。この変換は分岐点 $\lambda = k$ が鞍部点と一致するため、 λ 平面の分岐点近傍の 2 価性を 1 価性に変換するためである。このことは G_0 の表式 (43) に対しても同様に行ないうるから、したがって、全てのコーヒレント部分の漸近形に対しては次の積分表式がえられる:

$$G_c(x, z|0, z_0) \sim \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{i}{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda(s)\rho} f(s) ds \quad (63)$$

$$f(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda(s)}} \left\{ e^{-is(z-z_0)} \mp e^{is(z+z_0)} [1 + A_0(\lambda(s))] \right\} \quad (64)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda(s)}} \left\{ e^{-is(z-z_0)} - e^{is(z+z_0)} [1 \pm s a_0(\lambda(s))] \right\} \quad (65)$$

$$a_0(\lambda) = -\frac{2\xi}{1 + s\xi}, \quad (\text{Dirichlet}) \quad (66)$$

$$a_0(\lambda) = \frac{2\eta}{s + \eta}, \quad (\text{Neumann}) \quad (67)$$

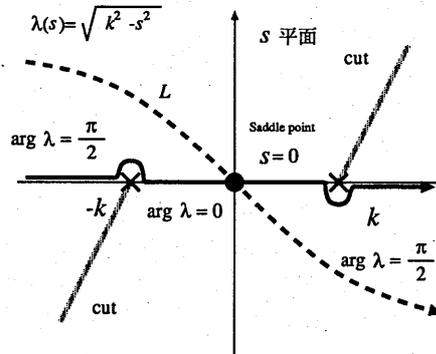


図 5: s 平面分岐カットと積分路、鞍部点と最急勾配路

鞍部点法による漸近形 この積分は $\rho > 0$ に対して成立ち、この形ではもはや $z \leq z_0$ の如何によらないことに注意する。因子 $e^{i\lambda(s)\rho}$, $k\rho \rightarrow \infty$, に対し鞍部点法^[8]を適用する。

$$\lambda'(s) = -s\sqrt{k^2 - s^2} = 0 \quad (68)$$

より鞍部点は $s = 0$ ($\lambda(0) = k$) である。最急勾配路への変数変換 $s \rightarrow t$:

$$\begin{aligned} i\lambda(s) &\equiv \sqrt{s^2 - k^2} = ik - t^2, \quad -\infty < t < \infty \\ s &\equiv s(t) \equiv t\sqrt{t^2 - 2ik} \end{aligned} \quad (69)$$

を行なえば、

$$s \cong \sqrt{-2ikt} = e^{-i\pi/4}\sqrt{2kt} \quad (t \cong 0) \quad (70)$$

より、最急勾配路 L は s 平面上で鞍部点 $s = 0$ を角度 $\pi/4$ で通過する (図 5)。積分を書直せば次の漸近展開がえられる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(s)\rho} f(s) ds = e^{ik\rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\rho} F(t) dt \quad (71)$$

$$\sim \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(2n)}(0) \Gamma(n + \frac{1}{2})}{(2n)! \rho^n} = \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}} \left[\sqrt{\pi} F(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{4\rho} F''(0) + \dots \right] \quad (72)$$

ただしここで、

$$F(t) \equiv f(s) \frac{ds}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} t^n \quad (73)$$

$$F(0) = f(0)\sqrt{-2ik} \quad (74)$$

$$F''(0) = f''(0)[-2ik]^{3/2} + f(0)\frac{3}{\sqrt{-2ik}}, \dots$$

(63) の鞍部点における漸近評価には、(65) より

$$f(0) = 0 \quad (75)$$

であるから、漸近展開 (72) の第 1 項は消え、第 2 項が必要である。(65)、(74) を用いれば

$$G_c(x, z|0, z_0) \sim \frac{1}{8\pi} \sqrt{k} k^3 f''(0) \frac{e^{ik\rho}}{(k\rho)^2} \quad (76)$$

$$f''(0) = \frac{2}{\sqrt{k}} \left[2zz_0 \mp i(z+z_0)a_0(k) \mp \frac{\partial}{\partial s} a_0(k) \Big|_{s=0} \right] \quad (77)$$

となる。ここで、第 3 項の微分は a_0 が $a_0(\lambda, s)$ の形で s にも依存することをを用いた。更に $a_0(k)$ に (25)(33) を代入すると次式をうる。

$$f''(0) = \frac{4}{\sqrt{k}} \{ zz_0 + i(z+z_0)\xi(k) - \xi^2(k) \} \quad (\text{Dirichlet}) \quad (78)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{k}} \left\{ zz_0 + i(z+z_0) \frac{1}{\eta(k)} - \frac{1}{\eta^2(k)} \right\} \quad (\text{Neumann}) \quad (79)$$

$$\xi(k) \simeq \int_{R_2} S(\lambda) |F(|\lambda - k|)|^2 d\lambda \quad (80)$$

$$\eta(k) \simeq \int_{R_2} \frac{[k^2 - \lambda \cdot k]^2}{S(\lambda)} |F(|\lambda - k|)|^2 d\lambda \quad (81)$$

したがって、これらを (76) に代入すれば、表面に沿う遠方におけるコヒーレント波の漸近形

$$G_c(x, z|0, z_0) \sim \frac{k^3}{2\pi} \frac{e^{ik\rho}}{(k\rho)^2} [zz_0 + i(z+z_0)\xi(k) - \xi^2(k)] \quad (\text{Dirichlet}) \quad (82)$$

$$\sim \frac{k^3}{2\pi} \frac{e^{ik\rho}}{(k\rho)^2} \left[zz_0 + i(z+z_0) \frac{1}{\eta(k)} - \frac{1}{\eta^2(k)} \right] \quad (\text{Neumann}) \quad (83)$$

$$k\rho \gg |k/\eta|^2 \simeq 1/(k\sigma)^4$$

がえられる。ただし、(83) に付された条件は以下で説明する。

“中距離”における漸近形 (Neumann 条件、鞍部点への極の影響) Neumann 条件の場合、 $a_0(\lambda(s))$ は (67) により $s = -\eta$ に極を持つ。 η は $(k\sigma)^2$ のオーダーの量であるからランダム表面が平坦 $k\sigma \rightarrow 0$ になれば極は鞍部点 $s = 0$ に接近する。鞍部点における評価式 (76) においては、(71) の $e^{-t^2\rho}$ の鞍部点 $t = 0$ より極までの距離 $|\eta|/\sqrt{2k}$ は、 $e^{-t^2\rho}$ の鞍部の幅 $\Delta t = 1/\sqrt{\rho}$ より十分大きい、

$$|\eta|/\sqrt{2k} \gg 1/\sqrt{\rho} \quad (84)$$

とみなした。 η は $(k\sigma)^2$ のオーダーであるからこの条件は

$$k\rho \gg |k/\eta|^2 \sim 1/(k\sigma)^4 \quad (85)$$

と書いてもよい。これが (83) の条件である。逆に比較的近距离の場合は、また $|\eta|$ が十分小さく表面の粗さ $k\sigma$ が十分小さい場合には、極が鞍部点の幅 Δt 内に入るため、上の鞍部点評価は以下の様に変更をうける^[6]。表面に沿う遠方の観測点の位置が、波源と鏡像の距離 $z + z_0$ に関して Fraunhofer 領域にあるが、

$$[k(z+z_0)]^2 \ll k\rho \ll |k/\eta|^2 \simeq 1/(k\sigma)^4 \quad (86)$$

を満たす場合をここでは“中距離”とよび、 $k\rho \gg |k/\eta|^2$ の場合を“遠距離”として区別することにする。Neumann 条件の中距離の場合、 $f(s)$ として (64) の表式を用いる:

$$f(s) = f_0(s) + f_1(s) \quad (87)$$

$$f_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda(s)}} \left\{ e^{-is(z-z_0)} + e^{is(z+z_0)} \right\} \quad (88)$$

$$f_1(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda(s)}} e^{is(z+z_0)} A_0(\lambda(s)) = -2\eta \frac{1}{\sqrt{\lambda(s)}} e^{is(z+z_0)} \frac{1}{s+\eta} \quad (89)$$

簡単のために $\eta = \eta(k)$ とおき、 η を鞍部点 $\lambda = k$ の値に固定する。 $f_1(s)$ の積分に変数変換(69)(70)を行なえば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(s)\rho} f_1(s) ds = -2\eta \int_L e^{i\lambda(s)\rho} \frac{e^{is(z+z_0)}}{\sqrt{\lambda(s)} s + \eta} ds \quad (90)$$

$$\cong -2\eta \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\rho} e^{(1+i)\sqrt{k}(z+z_0)t} \frac{1}{t + \eta_0} dt \quad (91)$$

$$\cong -2\eta \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\rho} \left[1 + (1+i)\sqrt{k}(z+z_0)t + O(t^2) \right] \frac{1}{t + \eta_0} dt \quad (92)$$

$$= -2\eta \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\rho} \left\{ (1+i)\sqrt{k}(z+z_0) + \frac{1}{t + \eta_0} \left[1 - \eta_0(1+i)\sqrt{k}(z+z_0) \right] \right\} dt \quad (93)$$

$$= -2\eta \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k}} \left\{ (1+i)\sqrt{k}(z+z_0) \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} + \left[1 - \eta_0(1+i)\sqrt{k}(z+z_0) \right] I(\rho) \right\} \quad (94)$$

となる。ここで

$$\eta_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{-2ik}} \eta = \frac{1}{2\sqrt{k}} (1+i)\eta \equiv p + iq \quad (95)$$

$$I(\rho) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\rho} \frac{dt}{t + \eta_0} \equiv I_1(\rho) - iI_2(\rho) \quad (96)$$

$$I_1(\rho) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\rho} \frac{t + p}{(t + p)^2 + q^2} dt \quad (97)$$

$$I_2(\rho) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\rho} \frac{q}{(t + p)^2 + q^2} dt \quad (98)$$

とおいた。したがって、2次波のコヒーレント部分 g_c の漸近形として

$$g_c(x, z|0, z_0) \sim \frac{i}{8\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi}{i\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(s)\rho} f_1(s) ds \quad (99)$$

$$\sim -\eta \frac{i}{2\pi} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} (z + z_0) - \eta \frac{1+i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{k\rho}} e^{ik\rho} [1 - i\eta(z + z_0)] I(\rho) \quad (100)$$

が、更に1次波 G_0 を含む全コヒーレント部 G_c の漸近形は、

$$G_c(x, z|0, z_0) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} [1 - i\eta(z + z_0)] - \eta \frac{1+i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{k\rho}} e^{ik\rho} [1 - i\eta(z + z_0)] I(\rho) \quad (101)$$

$$[k(z + z_0)]^2 \ll k\rho \ll |k/\eta|^2$$

の形に求められる。

表面粗さ η が大きい場合には、(96)は

$$I(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\rho} \frac{dt}{t + \eta_0} = \frac{1}{\eta_0} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \left[1 + \frac{1}{\eta_0^2} \frac{1}{2\rho} + \dots \right] \quad (102)$$

の様に展開できる。この場合、(92)の展開は t^2 の項まで取り、更に G_0 の漸近形は第2項まで用いると、第1項は g_c の $I(\rho)$ の第1項から出る部分と打消す。結果として、 G_0 の第2項、 $I(\rho)$ の第2項の寄与が残るので、 $G_c = G_0 + g_c$ の漸近形は再び(83)に帰着することが示される。始めにのべたように、 η が大きい場合の漸近形は $f(s)$ として(65)と用いる方が容易に求められる。

無摂動 Green 関数の漸近形 Green 関数の primary wave(無摂動部)、つまり平面が平坦($\sigma^2 = 0$)な場合の波動場は(43)で与えられる。Dirichlet 条件の場合 $k\rho \rightarrow \infty$ での漸近形は(77)の第1項を(76)に代入して

$$G_0(x, z|0, z_0) \sim \frac{k^3}{2\pi} \frac{e^{ik\rho}}{(k\rho)^2} z z_0 \quad (\text{Dirichlet}) \quad (103)$$

で与えられる。Dirichlet 条件では表面 $z = 0$ 上で波動場が 0 となるため $1/k\rho$ で減衰する単一波源の波動場が打消されて、 $1/(k\rho)^2$ に比例して早く減衰する漸近形をもつ。一方、Neumann 条件の場合は (64) で $A_0 \equiv 0$ とおいた時の漸近形であるから、(72) の第 1 項を用いて容易に

$$G_0(\mathbf{x}, z|0, z_0) \sim \frac{k}{2\pi} \frac{e^{ik\rho}}{k\rho} \quad (\text{Neumann}) \quad (104)$$

で与えられる。これは自由空間 Green 関数の 2 倍に相当し、波源および鏡像からの放射が重畳、倍加したもので漸近展開の第 1 項は z, z_0 に依らない。

コヒーレント Green 関数の漸近形の振舞い 表面がランダム ($\sigma^2 > 0$) な場合、Dirichlet 条件に対する表面に沿う、中、遠距離における漸近形は (82) で与えられ、Neumann 条件の場合は、遠距離の漸近形は (83) で、中距離の漸近形は (101) で与えられる。

(82) の第 1 項は 1 次 Green 関数 (103) に相当し、第 2、第 3 項がランダム表面による摂動部分で、 $\rho \rightarrow \infty$ で全体の振幅は $1/\rho^2$ の因子により減少する。これに反し、Neumann 条件の場合、(101) により中距離においては、ランダム表面の粗さ η または $(k\sigma)^2$ が小さいとき、 G_0 の漸近形 (104) と同様な $1/\rho$ の減衰項が支配的であるが、 $\eta, (k\sigma)^2$ の大きさに応じて (101) の第 2 項が効果をもつ。(85) で示す遠距離の場合には、(83) に示すように Dirichlet 条件の場合と同様な減衰因子 $1/\rho^2$ をもつ。このことは、遠方ではランダム表面はあたかも Dirichlet 表面の如く見えることを意味している。すなわち Neumann 条件の場合、遠方においては平坦面 ($\sigma = 0$) とランダム表面 ($\sigma > 0$) とは著しく性質を異にすることがわかる。

4.2 Green 関数のインコヒーレント部分の漸近形

Wiener 核の漸近形 インコヒーレント部分 (50)

$$g_{ic}(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega) = \int_{R_2} K(\mathbf{x}, z, z_0|\lambda_1) dB(\lambda_1) + \dots \quad (105)$$

の漸近形は Wiener 核 $K(\mathbf{x}, z, z_0|\lambda_1)$ の $k\rho \rightarrow \infty$ での漸近形を求めればよい。そのため、パラメタ λ_1 の定義領域 R_2 を後に示す 2 つの領域 D_1, D_2 に分別し、 λ_1 の領域 D_1, D_2 に応じてそれぞれ K の積分表式 (51), (52) を用いる:

$$K(\mathbf{x}, z, z_0|\lambda_1) = \frac{i}{8\pi^2} e^{i\lambda_1 \cdot \mathbf{x}} \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\rho \cos\alpha + iS(\lambda+\lambda_1)z + iS(\lambda)z_0} a_1(\lambda_1|\lambda) d\alpha, \quad \lambda_1 \in D_1 \quad (106)$$

$$= \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\rho \cos\alpha + iS(\lambda)z + iS(\lambda-\lambda_1)z_0} a_1(\lambda_1|\lambda - \lambda_1) d\alpha, \quad \lambda_1 \in D_2 \quad (107)$$

ただしここで (26), (34) により

$$a_1(\lambda|\lambda - \lambda_1) = a_1(-\lambda_1|\lambda) \quad (108)$$

の関係がある。一般性を失うことなく、 \mathbf{x} の方向角は $\varphi = 0$ とする: $\mathbf{x} = (\rho, 0)_{\text{cyl}}$ 。 $k\rho \rightarrow \infty$ の場合に、まず α の積分を停留位相法で評価する。停留点は $\alpha = 0, \pi$ であるから、2 つの寄与を合わせて

$$K(\mathbf{x}, z, z_0|\lambda_1) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{i}{2\pi\rho}} e^{i\lambda_1 \cdot \mathbf{x}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda\rho} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[e^{iS(\lambda+\lambda_1)z + iS(\lambda)z_0} a_1(\lambda_1|\lambda) \right]_{\alpha=0} \lambda d\lambda, \quad \lambda_1 \in D_1 \quad (109)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{i}{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda\rho} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[e^{iS(\lambda)z + iS(\lambda-\lambda_1)z_0} a_1(\lambda_1|\lambda - \lambda_1) \right]_{\alpha=0} \lambda d\lambda, \quad \lambda_1 \in D_2 \quad (110)$$

と書ける。まず (109) において、 $a_1(\lambda_1|\lambda)$ も含めて、 λ 平面上の分岐を調べる。 $S(\lambda) = S(\lambda) = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$ の分岐点は $\lambda = \pm k$ であり、 $S(\lambda + \lambda_1)$ の分岐点 $\lambda = \lambda_\pm$ は

$$|\lambda + \lambda_1|^2 - k^2 = \lambda^2 + \lambda_1^2 + 2\lambda\lambda_1 \cos\alpha_1 - k^2 = 0 \quad (111)$$

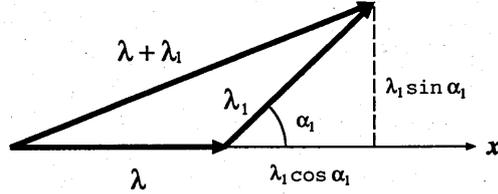


図 6: λ

を解いて

$$\lambda_{\pm} = -\lambda_{1x} \pm \sqrt{k^2 - \lambda_{1y}^2} \quad (112)$$

$$\lambda_{1x} \equiv \lambda_1 \cos \alpha_1, \quad \lambda_{1y} \equiv \lambda_1 \sin \alpha_1$$

となる。従って λ 平面上の cut は図 7 ($\text{Re } \lambda_+ < k$ の場合) の様にとり、 λ の実軸に沿う積分路が定義される。ここで、 λ_1 の領域 D_1 は図の様に λ_+ が常に k の左側にある: すなわち

$$D_1: \text{Re } \lambda_+ < k \quad (113)$$

となる様にとれば、積分路は分岐点 $\lambda = k$ 近傍で図 4 の様に変形でき、 G_c と同様に鞍部点法が適用できる。(113) は、 $\lambda_1 = (\lambda_{1x}, \lambda_{1y})$ 平面上で

$$(\lambda_{1x} + k)^2 + \lambda_{1y}^2 > k^2, \quad |\lambda_{1y}| < k \quad (114)$$

$$\lambda_{1x} > -k, \quad |\lambda_{1y}| > k$$

となる領域 (図 8 の斜線部) を意味する。 D_1 の R_2 上の補集合を D_2 で表す。同様にして (110) の λ 平面上の分岐点を求めれば

$$\lambda'_{\pm} = \lambda_{1x} \pm \sqrt{k^2 - \lambda_{1y}^2} \quad (115)$$

となり

$$\text{Re } \lambda'_+ < k \quad (116)$$

となる。 λ_1 平面上の領域は (110)(108) より $D'_1 = \{-\lambda_1, \lambda_1 \in D_1\}$ となるが、明らかに、 $D_2 \subset D'_1$ である。したがって上のそれぞれの領域でコヒレント部 (61) の評価と同様に (109)(110) において変数変換

$$s = \sqrt{k^2 - \lambda^2}, \quad \lambda(s) = \sqrt{k^2 - s^2} \quad (117)$$

を行なえば、 λ_1 の影響なしに鞍部点 $s = 0$ ($\lambda = k$) は s 平面上の他の分岐点からはずれるので、(76) と同様な鞍部点における漸近評価ができる: (108) の関係を用いると

$$K(x, z, z_0 | \lambda_1) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{i}{2\pi\rho}} e^{i\lambda_1 \cdot x} \int_L e^{i\lambda(s)\rho} f(s|z, z_0 | \lambda_1) ds, \quad \lambda_1 \in D_1 \quad (118)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{i}{2\pi\rho}} \int_L e^{i\lambda(s)\rho} f(s|z_0, z | -\lambda_1) ds, \quad \lambda_1 \in D_2 \quad (119)$$

ただしここで

$$f(s|z, z_0 | \lambda_1) \equiv e^{i\mu(s)z + isz_0} \hat{a}_1(s | \lambda_1) \frac{s}{\sqrt{\lambda(s)}} \quad (120)$$

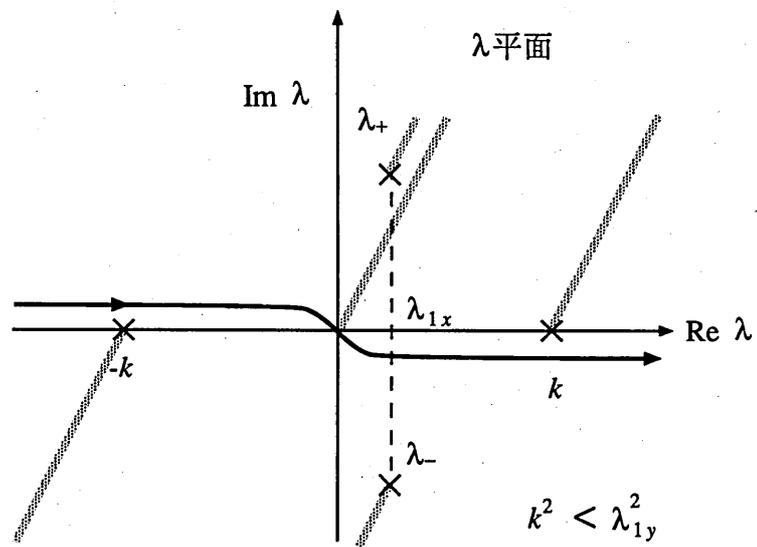
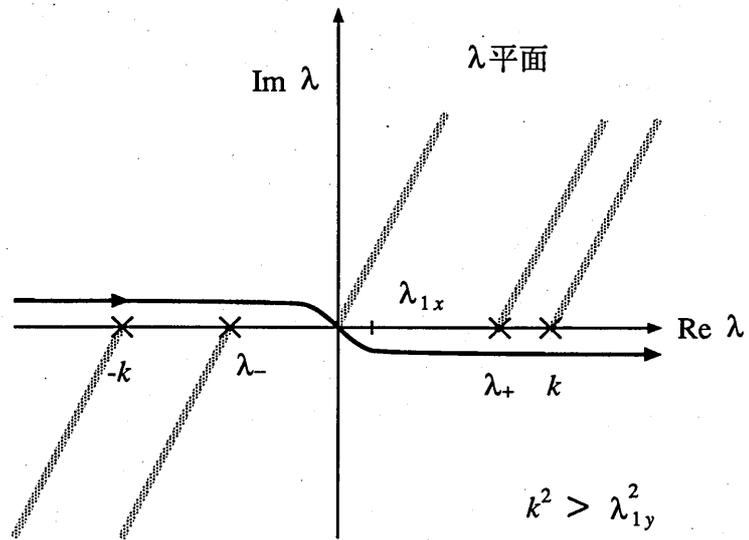


図 7: λ平面上の分岐カットと積分路

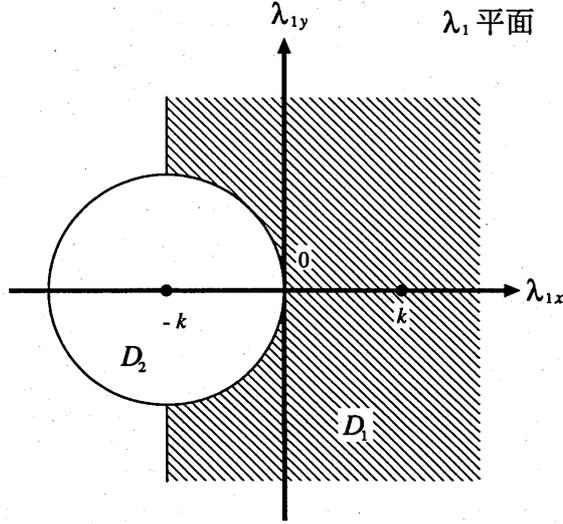


図 8: λ_1 平面の領域 D_1, D_2

$$\mu(s) \equiv S(\lambda + \lambda_1) \equiv \sqrt{k^2 - (\lambda + \lambda_1)^2} = \sqrt{s^2 - \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda \cos \alpha_1} \quad (121)$$

$$|\lambda + \lambda_1| = \sqrt{k^2 - \mu^2(s)} = \sqrt{k^2 - s^2 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda(s) \cos \alpha_1} \quad (122)$$

$$\hat{a}_1(s|\lambda_1) = -2iF(\lambda_1) \frac{1}{[1 + s\xi(\lambda(s))][1 + \mu(s)\xi(\sqrt{k^2 - \mu^2(s)})]} \quad (\text{Dirichlet}) \quad (123)$$

$$= -2iF(\lambda_1) \frac{s^2 - \lambda(s)\lambda_1 \cos \alpha}{[s + \eta(\lambda(s))][\mu(s) + \eta(\sqrt{k^2 - \mu^2(s)})]} \quad (\text{Neumann}) \quad (124)$$

とおいた。更に、(124) の分子は

$$k^2 - (\lambda + \lambda_1) \cdot \lambda = s^2 - \lambda(s)\lambda_1 \cos \alpha_1 \quad (125)$$

を用いた。上で $\lambda_1 \rightarrow -\lambda_1$ の置換は $\lambda_1 \rightarrow -\lambda_1$ または $\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + \pi$ を意味する。

Wiener 核の漸近形の鞍部点評価 鞍部点 $s = 0$ ($\lambda = k$) において (120) は

$$f(0|z, z_0|\lambda_1) = 0 \quad (126)$$

となるから、(118)(119) の漸近形として、(76) と同様の評価がえられる:

$$K(\mathbf{x}|z, z_0|\lambda_1) \sim \frac{1}{8\pi} \sqrt{k} k^3 f''(0|z, z_0|\lambda_1) \frac{e^{i(\lambda_1+k)\cdot\mathbf{x}}}{(k\rho)^2} \quad \lambda_1 \in D_1 \quad (127)$$

$$\sim \frac{1}{8\pi} \sqrt{k} k^3 f''(0|z_0, z|-\lambda_1) \frac{e^{ik\cdot\mathbf{x}}}{(k\rho)^2} \quad \lambda_1 \in D_2 \quad (128)$$

$$\rho \equiv |\mathbf{x}|, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k\rho$$

ただしここで

$$f''(0|z, z_0|\lambda_1) = \frac{2}{\sqrt{k}} e^{-\sqrt{\lambda_1^2 + 2k\lambda_1 \cos \alpha_1} z} \left\{ iz_0 \hat{a}_1(0|\lambda_1) + \frac{\partial}{\partial s} \hat{a}_1(s|\lambda_1) \Big|_{s=0} \right\} \quad \lambda_1 \in D_1 \quad (129)$$

$$f''(0|z_0, z|-\lambda_1) = \frac{2}{\sqrt{k}} e^{-\sqrt{\lambda_1^2 - 2k\lambda_1 \cos \alpha_1} z_0} \left\{ iz \hat{a}_1(0|-\lambda_1) + \frac{\partial}{\partial s} \hat{a}_1(s|-\lambda_1) \Big|_{s=0} \right\} \quad \lambda_1 \in D_2 \quad (130)$$

とおいた。ここで

$$\mu(0) \equiv S(\mathbf{k} + \lambda_1) = i\sqrt{\lambda_1 \cdot (\lambda_1 + 2\mathbf{k})}, \quad \mu'(0) = 0 \quad (131)$$

$$\lambda_1 \cdot (\lambda_1 + 2\mathbf{k}) = \lambda_1^2 + 2k\lambda_1 \cos \alpha_1 > 0 \quad \lambda_1 \in D_1 \quad (132)$$

$$-\lambda_1 \cdot (-\lambda_1 + 2\mathbf{k}) = \lambda_1^2 - 2k\lambda_1 \cos \alpha_1 > 0 \quad \lambda_1 \in D_2 \quad (133)$$

なることに注意する。更にここで (123)(124) を用いると、

$$f''(0|z, z_0|\lambda_1) \cong \frac{4}{\sqrt{k}} [z_0 + i\xi(k)] e^{-\sqrt{\lambda_1^2 + 2k\lambda_1 \cos \alpha_1} z} F(\lambda_1) \quad (\text{Dirichlet}) \quad (134)$$

$$\cong \frac{4i}{\sqrt{k}} \frac{1}{\eta(k)} \left[z_0 + i \frac{1}{\eta(k)} \right] e^{-\sqrt{\lambda_1^2 + 2k\lambda_1 \cos \alpha_1} z} F(\lambda_1) \quad (\text{Neumann}) \quad (135)$$

がえられる。ここで $|\xi|, |\eta| \ll 1$ を用いて近似を行なった。

Wiener 積分核 K の漸近形 (127)(128) を次の様にまとめて書いておく:

$$K(\mathbf{x}, z, z_0|\lambda_1) \sim \frac{e^{i(\mathbf{k} + \lambda_1) \cdot \mathbf{x}}}{(k\rho)^2} h_1(z, z_0|\lambda_1) \quad \lambda_1 \in D_1 \quad (136)$$

$$\sim \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(k\rho)^2} h_2(z, z_0|\lambda_1) \quad \lambda_1 \in D_2 \quad (137)$$

$$k\rho = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \infty, \quad z, z_0 > 0$$

$$h_1(z, z_0|\lambda_1) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{k} k^3 f''(0|z, z_0|\lambda_1) \quad (138)$$

$$h_2(z, z_0|\lambda_1) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{k} k^3 f''(0|z_0, z|-\lambda_1) = h_1(z_0, z|-\lambda_1) \quad (139)$$

インコヒーレント波の漸近形・表面波部分と伝搬部分 以上よりインコヒーレント波の漸近形は

$$g_{ic}(\mathbf{x}, z|0, z_0; \omega) = \int_{D_1 + D_2} K(\mathbf{x}, z; z_0|\lambda_1) dB(\lambda_1) + \dots \quad (140)$$

$$\sim g_{ic}^s(\mathbf{x}, z|0, z_0) + g_{ic}^p(\mathbf{x}, z|0, z_0) \quad (141)$$

$$g_{ic}^s(\mathbf{x}, z|0, z_0) = \frac{1}{(k\rho)^2} \int_{D_1} e^{i(\mathbf{k} + \lambda_1) \cdot \mathbf{x}} h_1(z, z_0|\lambda_1) dB(\lambda_1) \quad (142)$$

$$g_{ic}^p(\mathbf{x}, z|0, z_0) = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(k\rho)^2} \int_{D_2} h_2(z, z_0|\lambda_1) dB(\lambda_1) \quad (143)$$

の形に Wiener 積分で表すことができる。ここで、 g_{ic}^s は λ_1 に関して連続スペクトルをもつ表面波部分で、 h_1 は指数的に z 方向に減衰する因子 $e^{-\sqrt{\lambda_1^2 + 2k\lambda_1 \cos \alpha_1} z}$ を含む。 g_{ic}^p は線スペクトルをもつ伝搬部分で伝搬因子 $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ をもつ。いずれも $k\rho \rightarrow \infty$ と共に $1/(k\rho)^2$ に比例して減衰する。(142)(143) は Wiener 積分で g_{ic} の Wiener 展開の第 1 項であるが、その分散および共分散は

$$\langle |g_{ic}^s|^2 \rangle = \frac{1}{(k\rho)^4} \int_{D_1} |h_1(z, z_0|\lambda_1)| d\lambda_1 \quad (144)$$

$$\langle |g_{ic}^p|^2 \rangle = \frac{1}{(k\rho)^4} \int_{D_2} |h_2(z, z_0|\lambda_1)| d\lambda_1 \quad (145)$$

$$\langle g_{ic}^s g_{ic}^p \rangle = 0$$

で与えられる。すなわち、表面波部分と伝搬部分は無相関である。(134)(135)より明らかのように、 g_{ic}^s は表面波だから受信点の高さ z が増せば減少し、 g_{ic}^p は逆に送信点の高さ z_0 が増せば減少する。

表面に沿う ρ 方向の平均電力流は

$$\begin{aligned} P_{ic} &\equiv \frac{1}{k} \text{Im} \left\langle \overline{g_{ic}} \frac{\partial g_{ic}}{\partial \rho} \right\rangle = P_{ic}^s + P_{ic}^p \\ &= \frac{1}{(k\rho)^4} \left\{ \int_{D_1} \frac{k + \lambda_1 \cos \alpha_1}{k} |h_1(z, z_0|\lambda_1)|^2 d\lambda_1 + \int_{D_2} |h_2(z, z_0|\lambda_1)|^2 d\lambda_1 \right\} \end{aligned} \quad (146)$$

となり、第1項は表面波、第2項は伝搬波による平均電力流を表す。

中距離における漸近形 (Neumann 条件、鞍部点への極の影響) Neumann 条件の場合は、コヒーレント部分と同様に、“中距離” $|k/\eta(k)|^2 \gg k\rho (\gg [k^2(z+z_0)]^2)$ の場合に、(118)(119)の評価は鞍部点 $s=0$ に接近する極 $s \simeq -\eta(k)$ の影響を考慮する必要がある。その時 (120) を (124) を用いて

$$f(s|z, z_0|\lambda_1) \equiv \frac{1}{s+\eta} g(s|\lambda_1) s = g(s|\lambda_1) - \eta \frac{g(s|\lambda_1)}{s+\eta} \quad (147)$$

$$g(s|\lambda_1) \equiv -2iF(\lambda_1) e^{i\mu(s)z + iz_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda(s)}} \frac{s^2 - \lambda(s)\lambda_1 \cos \alpha_1}{\mu(s) + \eta(\sqrt{k^2 - \mu^2(s)})} \quad (148)$$

とおく。更に、 g または ηg を $s=0$ の近傍で1次まで展開し、

$$\begin{aligned} g(s|\lambda_1) &\simeq g(0|\lambda_1) + g'(0|\lambda_1)s \\ \mu(0) &= S(k + \lambda_1) = i\sqrt{\lambda_1 \cdot (\lambda_1 + 2k)} = i\sqrt{\lambda_1^2 + 2k\lambda_1 \cos \alpha_1} \\ \mu'(0) &= 0, \quad \lambda(0) = k, \quad \lambda'(0) = 0 \end{aligned} \quad (149)$$

等を考慮すれば、積分は (90) の計算と同様にして

$$\begin{aligned} &\int_L e^{i\lambda(s)\rho} f(s|z, z_0|\lambda_1) ds \\ &= \int_L e^{i\lambda(s)\rho} g(s|\lambda_1) ds - \int_L e^{i\lambda(s)\rho} \frac{\eta g(s|\lambda_1)}{s+\eta} ds \end{aligned} \quad (150)$$

$$\sim \sqrt{\frac{2\pi k}{i\rho}} g(0|\lambda_1) e^{ik\rho} - \eta(k) \int_L e^{i\lambda(s)\rho} \frac{[g(0|\lambda_1) + g'(0|\lambda_1)s]}{s+\eta} ds \quad (151)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi k}{i\rho}} [g(0|\lambda_1) - \eta(k)g'(0|\lambda_1)] e^{ik\rho} - \eta(k) [g(0|\lambda_1) - \eta(k)g'(0|\lambda_1)] \int_L e^{i\lambda(s)\rho} \frac{1}{s+\eta} ds \quad (152)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi k}{i\rho}} [g(0|\lambda_1) - \eta(k)g'(0|\lambda_1)] e^{ik\rho} - \eta(k) [g(0|\lambda_1) - \eta(k)g'(0|\lambda_1)] I(\rho) e^{ik\rho} \quad (153)$$

$$= g(0|\lambda_1) [1 - iz_0\eta(k)] \left\{ \sqrt{\frac{2\pi k}{i\rho}} - \eta(k)I(\rho) \right\} e^{ik\rho} \quad (154)$$

ここで

$$g(0|\lambda_1) = 2iF(\lambda_1) \frac{1}{\sqrt{k}} e^{i\mu(0)z} \frac{k\lambda_1 \cos \alpha_1}{\mu(0) + \eta(|k + \lambda_1|)} \quad (155)$$

$$g'(0|\lambda) = iz_0 g(0|\lambda_1) \quad (156)$$

$$I(\rho) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2\rho} \frac{1}{t + \eta_0} dt, \quad \eta_0 \equiv \eta/\sqrt{-2ik} = p + iq \quad (157)$$

を用いた。

以上より K の漸近形は

$$K(x, z, z_0 | \lambda_1) \sim \left[\frac{1}{k\rho} - \frac{\eta(k)}{k} \sqrt{\frac{i}{2\pi k\rho}} I(\rho) \right] e^{i(k+\lambda_1 \cos \alpha_1)\rho} J_1(z, z_0 | \lambda_1) \quad \lambda_1 \in D_1 \quad (158)$$

$$\sim \left[\frac{1}{k\rho} - \frac{\eta(k)}{k} \sqrt{\frac{i}{2\pi k\rho}} I(\rho) \right] e^{ik\rho} J_2(z, z_0 | \lambda_1) \quad \lambda_1 \in D_2 \quad (159)$$

$$J_1(z, z_0 | \lambda_1) \equiv \frac{\sqrt{k}}{4\pi} kg(0 | \lambda_1) [1 - iz_0 \eta(k)] \quad (160)$$

$$= \frac{1}{2\pi} k^2 F(\lambda_1) \frac{\lambda_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{\lambda_1 \cdot (\lambda_1 + 2k) - i\eta(k)}} e^{-\sqrt{\lambda_1 \cdot (\lambda_1 + 2k)} z} [1 - iz_0 \eta(k)] \quad (161)$$

$$J_2(z, z_0 | \lambda_1) \equiv \frac{1}{2\pi} k^2 F(\lambda_1) \frac{-\lambda_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{\lambda_1 \cdot (\lambda_1 - 2k) - i\eta(k)}} e^{-\sqrt{\lambda_1 \cdot (\lambda_1 - 2k)} z_0} [1 - iz_0 \eta(k)] \quad (162)$$

$$= J_1(z_0, z | -\lambda_1) \quad (163)$$

ただしここで、 $\lambda_1 \cdot (\lambda_1 + 2k) = 0$ に対しては $\eta(k + \lambda_1) = \eta(k)$ であるから、右辺の分母で $\eta(k + \lambda_1) \cong \eta(k)$ により近似した。

以上より Neumann 条件の中距離の場合、インコヒーレント波 (140) の表面波部分、伝搬部分の漸近形 (142)(143) に対応して

$$g_{ic}^s(x, z | 0, z_0; \omega) = \left[\frac{1}{k\rho} - \frac{\eta(k)}{k} \sqrt{\frac{i}{2\pi k\rho}} I(\rho) \right] \int_{D_1} e^{i(k+\lambda_1 \cos \alpha_1)\rho} J_1(z, z_0 | \lambda_1) dB(\lambda_1) \quad (164)$$

$$g_{ic}^p(x, z | 0, z_0; \omega) = \left[\frac{1}{k\rho} - \frac{\eta(k)}{k} \sqrt{\frac{i}{2\pi k\rho}} I(\rho) \right] e^{ik\rho} \int_{D_2} J_2(z, z_0 | \lambda_1) dB(\lambda_1) \quad (165)$$

同様にして

$$\langle |g_{ic}^s|^2 \rangle = \left| \frac{1}{k\rho} - \frac{\eta(k)}{k} \sqrt{\frac{i}{2\pi k\rho}} I(\rho) \right|^2 \int_{D_1} |J_1(z, z_0 | \lambda_1)|^2 d\lambda_1 \quad (166)$$

$$\langle |g_{ic}^p|^2 \rangle = \left| \frac{1}{k\rho} - \frac{\eta(k)}{k} \sqrt{\frac{i}{2\pi k\rho}} I(\rho) \right|^2 \int_{D_2} |J_2(z, z_0 | \lambda_1)|^2 d\lambda_1 \quad (167)$$

$$\langle \bar{g}_{ic}^s g_{ic}^p \rangle = 0 \quad (168)$$

また表面に沿う ρ 方向の平均電流は

$$\begin{aligned} P_{ic} &\equiv \frac{1}{k} \text{Im} \left\langle \frac{\partial g_{ic}}{\partial \rho} \right\rangle = P_{ic}^s + P_{ic}^p \\ &= \left| \frac{1}{k\rho} - \frac{\eta(k)}{k} \sqrt{\frac{i}{2\pi k\rho}} I(\rho) \right|^2 \left\{ \int_{D_1} \frac{k + \lambda_1 \cos \alpha_1}{k} |J_1(z, z_0 | \lambda_1)|^2 d\lambda_1 + \int_{D_2} |J_2(z, z_0 | \lambda_1)|^2 d\lambda_1 \right\} \quad (169) \end{aligned}$$

η が小さいとき、中距離においては電流は距離と共に、 $1/(k\rho)^2$ による減衰が支配的であるが、遠距離においては $1/(k\rho)^4$ による減衰をうける。

参考文献

- [1] 小倉、水谷、高橋: ランダム表面上の Green 関数と輻射問題 I, 電気学会 EMT 研資 EMT-83-20 (1983.7)
- [2] 小倉、水谷、高橋: ランダム表面上の Green 関数と輻射問題 II - 表面から離れた遠方での波動場 -, 電気学会 EMT 研資 EMT-83-67 (1983.10)

- [3] 小倉、水谷、高橋: ランダム表面上の Green 関数と輻射問題 III - 表面に沿う遠方での波動場, 電気学会 EMT 研資 EMT-83-68 (1983.10)
- [4] H.Ogura, N.Takahashi: Green function and radiation over a random rough surface, J-Opt.Soc.Amer.A, vol.2, No.12, pp.2208-2224. (Dec.1985)
- [5] 小倉、高橋: 2次元ランダム表面上の Green 関数と放射問題, 電気学会 EMT 研資 EMT-84-39 (1984.9)
- [6] H.Ogura, N.Takahashi: Green function and radiation over two-dimensional random surface, Proceedings. ISAP'85, pp.695-698 (1985)
- [7] J.Nakayama, H.Ogura, M.Sakata: Scattering of a scalar wave from a slightly random surface, J.Math.Phys., vol.22, pp.471-477 (1981)
- [8] L.B.Felsen, N.Marcuvitz: Radiation and Scattering of Waves, Prentice Hall (1973)

— 幾何光学回析理論 —
Woodレンズ及び球レンズの焦点
近傍界分布の解析

本郷 廣平
(東邦大学 理学部)

輻射科学研究会資料 (1992、7、10)

第3章 Maslov の方法による Caustic 近傍の界分布の解析

3.1 はじめに

Maslov の方法は幾何光学の理論と Fourier 変換理論を組み合わせて全ての領域で界表示が求められるようにしたものといえる。幾何光学は反射波、透過波を求める時の最も有力な高周波近似の一つであるが、回折波を含む領域、或いは光線が重なる caustic 領域には適用することができない。また幾何光学を Hamilton 方程式で表せば光線は空間座標のほかに波数ベクトルで特徴づけられる。caustic 領域では空間座標でみれば光線が重なるが波数ベクトルの空間でみれば特異性はない[2],[3]。一方波動においてはよく知られているように空間座標と波数ベクトルは Fourier 変換によって関係づけられている。そこで caustic 領域の光線は波数ベクトルを使って表し Fourier 変換を使って空間座標に戻してやれば有限の界分布が得られることが期待される。これが Maslov の方法の一つの直感的な意味である。ここでは Maslov の方法を使って種々の集束系の表示式を導出し、いくつかの数値結果をもとに検討した。このような集束系は Huygens-Kirchhoff の方法を使って解析することもでき、Maslov の方法は従来解決できない問題を解決するものではない。しかし一つの問題に複数の解析法があることは大切なことである。Maslov の方法は弾性波、地震波、プラズマ波などへの適用が精力的に研究されているが電磁波、音波への適用については[1],[2],[3]に概観が与えられている。

3.2 Hamilton の方程式[2],[4],[5]

2a. アイコナル

波動方程式

$$\nabla^2 u + k^2 n^2(\mathbf{r})u = 0 \quad (1)$$

の解を

$$u \sim \exp[-jkS(\mathbf{r})] \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\mathbf{r})(-jk)^{-n} \quad (2)$$

と展開すると S, Z_m は

$$(\nabla S)^2 = n^2 \quad (3a)$$

$$2\nabla S \cdot \nabla Z_0 + Z_0 \nabla^2 S = 0 \quad (3b)$$

$$2\nabla S \cdot \nabla Z_m + Z_m \nabla^2 S = -\nabla^2 Z_{m-1} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3c)$$

の解として与えられる。アイコナル方程式 (3a) は特性帯の理論を使って求めることができる (付録)。 $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ $\mathbf{p} = \nabla S$ とすると特性方程式は

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla_{\mathbf{p}} H \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}} H \quad \frac{dS}{dt} = \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H \quad (4)$$

と表すことができる。ここで $\nabla_{\mathbf{p}}, \nabla_{\mathbf{r}}$ は $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z), \mathbf{r} = (x, y, z)$ に関する微分演算子である。また H は Hamiltonian である。(4) は光線の方程式または Hamilton の方程式と呼ばれる。(4) の最後の式 dS/dt を積分すると

$$S = S_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H dt \quad (5)$$

が得られる。ここで $S_0 = S(t_0)$ はアイコナルの初期値であり、積分は $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ で表される光線に沿って行う。パラメータ t は光線に沿った距離 σ に関係づけることができる。(4) から $(d\mathbf{r})^2 = (\nabla_{\mathbf{p}} H)^2 (dt)^2$ であり、一方 $(d\mathbf{r})^2 = (d\sigma)^2$ であるから

$$dt = d\sigma / |\nabla_{\mathbf{p}} H| \quad (6)$$

が得られる。光線方程式はアイコナルに対応した Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}[\mathbf{p}^2 - n^2(\mathbf{r})] \quad \mathbf{p} = \nabla S \quad (7)$$

を用いると次のようにもっと具体的な表示式になる。

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{p} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2} \nabla n^2(\mathbf{r}) \quad (8)$$

(8) から dr/dt は光線の接線であり、モーメント $\mathbf{p} = \nabla S$ に平行である。即ち等方性媒質ではモーメント \mathbf{p} はアイコナル S の勾配に平行、またはアイコナルの等位面 $S = \text{一定}$ (波面) に垂直である。アイコナル S は

$$S = S_0 + \int_{t_0}^t p^2 dt = S_0 + \int_{t_0}^t n^2[r(t)] dt \quad (9)$$

となる。Hamiltonian (7) に対してはパラメータ t は光線の弧長 σ と

$$dt = d\sigma/p = d\sigma/n \quad (10)$$

の関係があり、(9) は

$$S = S_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} n d\sigma \quad (11)$$

と書くことができる。

2b. 振幅

振幅は (3) のトランスポート方程式の解として与えられる。以後の議論では振幅の 0-次近似についてだけ考えることにする。振幅は第 2 章のように求めることもできるがここでは Hamilton の方程式に基づいて考えることにする。方程式 $dr/dt = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ が解 $\mathbf{r} = \mathbf{R}(u, v, t)$ を持つとすると次の関係式が成立する。

$$\frac{d}{dt} [\ln D(t)] = \nabla_r \cdot \mathbf{F} \quad D(t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} \quad (12)$$

この定理は $D(t)$ を直接微分し関係式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{dx_k}{dt} \right) = \frac{\partial F_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial T} + \frac{\partial F_k}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial T} + \frac{\partial F_k}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial T} \quad (13)$$

を利用することにより示すことができる[例 3-1]。ここで $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ であり、 T は u, v, t のいずれかを表す。Hamilton の方程式 $dr/dt = \mathbf{p}$ は $\mathbf{F} = \mathbf{p}$, $\nabla_r \cdot \mathbf{F} = \nabla_r^2 S$ とおくとこの微分方程式の形になり次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} [\ln D(t)] = \nabla_r^2 S \quad (14)$$

トランスポート方程式は

$$\frac{d}{dt} [\ln(A_0^2)] = -\nabla_r^2 S \quad (15)$$

で与えられるから (14) と (15) を比較することにより $A_0^2 = 1/D$ または

$$A_0(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}_0) J^{-1/2} \quad J = D(t)/D(0) \quad (16)$$

となる。ここで $\mathbf{r}_0 = (u, v, 0)$ である。以上のように幾何光学の 0-次近似解 $W(\mathbf{r})$ は次式で与えられる。

$$W(\mathbf{r}) = W_0(u, v) J^{-1/2} \exp[-jk \int_0^t \epsilon(\mathbf{r}(t)) dt] \quad W_0(u, v) = A_0(u, v) \exp[-jkS(u, v)] \quad (17)$$

複数の光線が観測点 \mathbf{r} を通るときは解 $W(\mathbf{r})$ は全ての光線の寄与を加え合わせたもので与えられる。

3.3 Maslov の漸近理論

3a. 1次元の caustic

既に示したように光線上の座標 \mathbf{r} 及び波数ベクトル \mathbf{p} は Hamilton の方程式を満足する。通常は光線の軌跡は空間座標で考えるが波数空間を含めた 6次元空間で考えることもできる。空間座標の表示式は 6次元空間の座標空間への投影であると考えられる。6次元空間で表した光線は互いに重ならないことを示すことができる[1]-[3]。いま空間座標の一部と波数ベクトル空間の一部からなる混合座標空間を考えるとこの空間へ投影したものは互いに重なり合わないことが期待される。一方波動関数を Fourier 変換で表して鞍部点法 (または停留点法) を適用したときに界の空間座標と波数ベクトルは Hamilton の方程式で

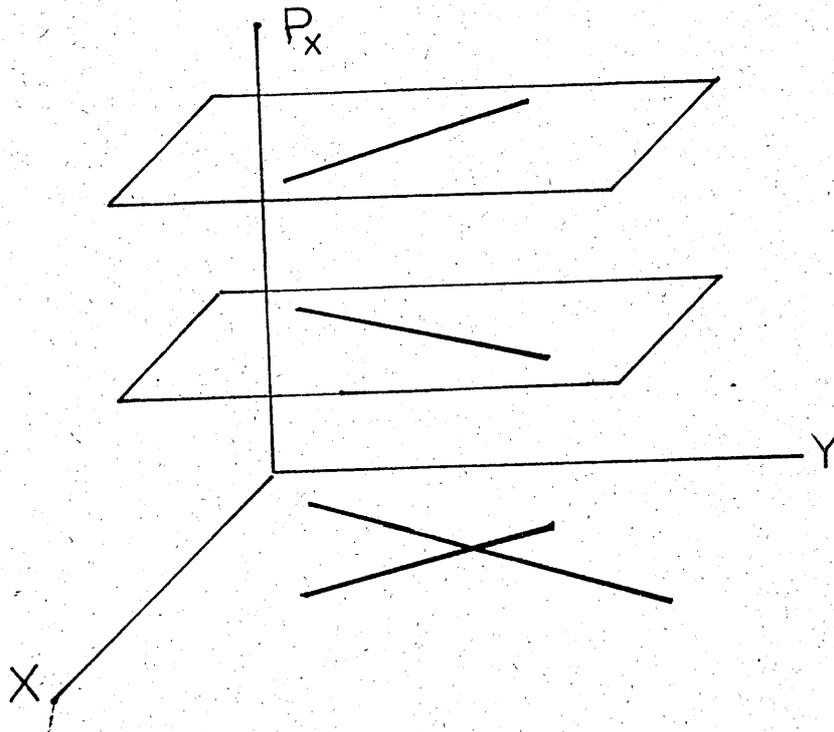


図1. 空間座標と波数ベクトルの空間内で表した光線は重ならないが空間座標に投影したものは caustic では重なる。

与えられるものと同じ関係式になることは良く知られている。この性質を利用すれば混合座標空間に投影したものを空間座標の表示式に戻すことができる。

以下具体的な適用法について述べる。波動関数 $W(\mathbf{r})$ は Fourier 逆変換を使って

$$W(x, y, z, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(p_x, y, z) \exp[-jkp_x x] dk_x \quad (18a)$$

と表される。Fourier 変換は

$$U(p_x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y, z, k) \exp[jkp_x x] dx \quad (18b)$$

で与えられる。これらの定義に基づくと微係数に対する Fourier 変換は次式で与えられる[例 3.2-3.4 参照]。

$$-jkp_x U(\mathbf{Y}; k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial x} \exp[jkp_x x] dx \quad (19a)$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{Y}; k)}{\partial p_x} = \int_{-\infty}^{\infty} (jkx) W \exp[jkp_x x] dx \quad (19b)$$

$$f\left[\frac{\partial}{jk\partial p_x}\right] U(\mathbf{Y}; k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) W \exp[jkp_x x] dx \quad (19c)$$

ここで (19c) の左辺の関数 f の引き数は微分演算子である。また $\mathbf{Y} = (p_x, y, z)$ は混合座標系を表す。 $f(x)$ がべき級数で表される場合には (19c) は容易に示すことができる (例題 3.2 参照)。 (18), (19) を波動方程式 $\nabla^2 W + k^2 W = 0$ に適用すれば

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 \left[\epsilon \left(\frac{\partial}{jk\partial p_x}, y, z \right) - p_x^2 \right] U = 0 \quad (20)$$

となる。(20)は混合座標系 \mathbf{Y} の波動方程式と見なすことができる。この方程式の漸近解を形式的に求めることができる。この方程式の解を次のように仮定する。

$$U(\mathbf{Y}; k) \simeq [B_0(\mathbf{Y}) + (-jk)^{-1}B_1(\mathbf{Y}) + \dots] \exp[-jkT(\mathbf{Y})] \quad (21)$$

(21)は周波数と微分演算子の関数を含んでおり、高次の項まで求めるのは困難である。以後の議論では(21)の主要項だけを考慮することにする。(21)の主要項を(18)に代入すれば

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(p_x, y, z) \exp[-jk\{T(p_x, y, z) + p_x x\}] dp_x \quad (22)$$

が得られる。(22)の積分を停留点法で計算すると幾何光学の方法で求めた(17)の形になることを示す。停留点は(22)の位相部から

$$\left[\frac{\partial T}{\partial p_x} + x \right]_{p_x=p_{xs}} = 0 \quad x_s = x_s(p_{xs}, y, z) \quad (23)$$

と求められる。(23)を利用すると指数部の2次の微係数は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} (T + xp_x) \right]_{p_x=p_{xs}} = \frac{\partial}{\partial p_x} \left(\frac{\partial T}{\partial p_x} \right) \Big|_{p_x=p_{xs}} = - \frac{\partial x_s}{\partial p_x} \Big|_{p_x=p_{xs}} \quad (24)$$

となる。以上の結果を利用すれば積分の停留点法による近似解は

$$W(x, y, z) \simeq \left(\frac{j}{2\pi k} \right)^{1/2} B_0(p_{xs}, y, z) \left[\frac{\partial x_s}{\partial p_x} \right]^{-1/2} \exp[-jk\{T(p_{xs}, y, z) + p_{xs} x_s\}] \quad (25)$$

と求められる。(25)はcausticを除く領域の波動の幾何光学近似を与えるものである。(25)と(17)を比較すると次式が得られる。

$$B_0(p_{xs}, y, z) = \left[\frac{2\pi k}{j} \right]^{1/2} A_0(u, v) J^{-1/2} \left[\frac{\partial x_s}{\partial p_x} \right]^{1/2}, \quad S(u, v) + \int_0^t \epsilon(t) dt = T(p_{xs}, y, z) + p_{xs} x_s \quad (26)$$

上式で u, v, t, x は混合座標 (p_x, y, z) で表さなければならない。(26)は幾何光学の解と停留点でだけ完全に一致するがこの関係式は全ての p_x で成立するものと仮定する。このように仮定すれば $B_0(p_x, y, z), T(p_x, y, z)$ の具体的な表示式が決定されることになる。この点ではこの考えは高周波回折理論の1つである等価電磁流法(ECM)に非常に類似している。以上の結果から(18a)の波動関数は

$$W(x, y, z) = \sqrt{\frac{k}{j2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(u, v) \left[J \frac{\partial p_x}{\partial x} \right]^{-1/2} \exp \left[-jk \left\{ S(u, v) + \int_0^t \epsilon(t) dt - x_s(p_x) p_x + x p_x \right\} \right] dp_x \quad (27)$$

と表される。ここで x_s は停留点における x の値であり、被積分関数の変数 (u, v, t) と共に混合座標系 (p_x, y, z) を用いて表さなければならない。(27)で $J(\partial p_x / \partial x)$ はもっと簡単に関係式

$$J \frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{1}{D(0)} \frac{\partial(p_x, y, z)}{\partial(u, v, t)} \quad (28)$$

から計算できる。(28)の導出は例3.3に示してある。議論を均質媒質に限定すれば(27)に類似の表示式はFourier変換を使って直接求めることもできる。

議論を簡単化するために、2次元の波動関数とそのFourier変換について考えてみよう。波動関数はスペクトラム $U(p)$ を重みとして次のように表される。

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(p) \exp[-jpx - \sqrt{k^2 - p^2} dp] \quad (29)$$

変数変換 $x = r \cos s$ $y = r \sin s$ $p = k \cos t$ を行えば(29)は

$$\begin{aligned} W(r, s) &= -\frac{k}{2\pi} \int_{C_0} U(t) \sin t \exp[-jkr \cos(s-t)] dt \\ &= -\frac{k}{2\pi} \int_C U(t+s) \sin(t+s) \exp[-jkr \cos t] dt \end{aligned} \quad (30)$$

と書き直すことができる。ここで C_0, C は積分路であり $C_0: [\pi + j\infty, -j\infty], C: [\pi - s + j\infty, -s - j\infty]$ である。(29) に停留点の方法を適用すれば結果は次式ようになる。

$$W(r, s) \simeq jkg(kr)U(s) \sin s \quad g(kr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} \exp[-j(kr + \pi/4)] \quad (31)$$

(31) は回折波の波動関数であり、影境界または caustic 近傍では成立しない。影境界または caustic 近傍でも成立する表示式を得るためには (30) の積分を高次の停留点法を適用しもっと正確に計算するか数値積分を実行する必要がある。Maslov の方法は上述のように幾何光学の結果から波動の表示式を導出するものである。これに関連して何らかの方法によって求めた回折波の表示式から影境界、caustic 近傍で成立する表示式が得られるかどうかの問題がおこる。簡単な問題として楔による回折問題について考える。楔による回折波は次式で与えられる。

$$W(r, s) = jg(kr)U(s), \quad U(s) = \frac{p \sin p\pi}{\cos p\pi - \cos ps} \quad p = \frac{\pi}{\phi_w} \quad \phi_w: \text{楔の開き角} \quad (32)$$

(32) を (30) に代入すれば楔による回折波の厳密な表示式が得られる。しかしもっと複雑な問題に適用できるかどうかは個別に検討する必要がある問題である。

3b. 2次元の caustic

一般に集束系の反射鏡やレンズに対しては2次元の caustic が関係する。これらはヤコビアン J の2次の零点に対応し光線の束の断面は点になったり、線になったりする。混合座標 Y の領域ではヤコビアンの1つの零点は取り除くことができるが点は Y 領域ではやはり特異点である。正則は漸近解を得るには2次元の変換が必要になる。理論は1次元の場合の自然な一般化である。この場合には次式で定義されている2次元の Fourier 変換対を利用する。

$$W(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(p_x, p_y, z) \exp[-jk(p_x x + p_y y)] dp_x dp_y \quad (33a)$$

$$U(p_x, p_y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y, z) \exp[jk(p_x x + p_y y)] dx dy \quad (33b)$$

Fourier 変換 $U(p_x, p_y, z)$ は次の方程式を満足することを示すことができる (例 3.4 参照)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 \left[\epsilon \left(\frac{\partial}{jk \partial p_x}, \frac{\partial}{jk \partial p_y}, z \right) - p_x^2 - p_y^2 \right] U = 0 \quad (34)$$

U に対する近似解は

$$U(p_x, p_y, z) = C(p_x, p_y, z) \exp[-jkT(p_x, p_y, z)] \quad (35)$$

と与えられる。(35) を (33) に代入すると

$$W(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(p_x, p_y, z) \exp[-jk\{T(p_x, p_y, z) + p_x x + p_y y\}] dp_x dp_y \quad (36)$$

となる。これは停留点法を適用して漸近的に求めることができる。停留点 p_{xs}, p_{ys} は次式から決定される。

$$\frac{\partial T}{\partial p_x} + x \Big|_{(p_{xs}, p_{ys})} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial p_y} + y \Big|_{(p_{xs}, p_{ys})} = 0 \quad (37a)$$

これに対応した空間座標の停留点は

$$x_s = x(p_{xs}, p_{ys}, z) \quad y_s = y(p_{xs}, p_{ys}, z) \quad (37b)$$

と表される。停留点法では (36) の指数部の2次の微係数が必要になる。これは (37a) の関係式を利用して次のように表される。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial p_x^2} = -\frac{\partial x_s}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial p_x \partial p_y} = -\frac{\partial y_s}{\partial p_x} = -\frac{\partial x_s}{\partial p_y}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial p_y^2} = -\frac{\partial y_s}{\partial p_y} \quad (37c)$$

停留点法の標準的な方法を適用すれば漸近解は次式のようにになる。

$$W(x, y, z) = \frac{2\pi}{k} C(p_x, p_y, z) \exp[-jkL(x, y, z)] [\det(Q_{ij})]^{-1/2} \exp[-j(\pi/4)\text{sign}(Q_{ij})] \quad (38a)$$

ここで

$$\det(Q_{ij}) = \frac{\partial x}{\partial p_x} \frac{\partial y}{\partial p_y} - \frac{\partial x}{\partial p_y} \frac{\partial y}{\partial p_x} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(p_x, p_y)} \quad (38b)$$

$$L(x, y, z) = T(p_x, p_y, z) + p_x x + p_y y$$

である。ここで $\text{sign}(Q_{ij})$ は符号関数であり、 $Q_{ij} > 0$ のときは $\text{sign}(Q_{ij}) = 1$; $Q_{ij} < 0$ のときは $\text{sign}(Q_{ij}) = -1$ である。(38a) と (17) を比較すると

$$C(p_x, p_y, z) = 2\pi k A_0(u, v) J^{-1/2} \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(p_x, p_y)} \right]^{1/2} \quad (38c)$$

が得られる。(38) は停留点でだけ成立するのであるが、この段階ですべての p_x, p_y に対して成立するものと仮定する。この時 (36) は次式のようにになる。

$$W(x, y, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(u, v) \left[J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} \right]^{-1/2} \exp \left[-jk \left\{ \int_0^t \epsilon(t) dt - x(p_x, p_y, z) - y(p_x, p_y, z) + p_x x + p_y y \right\} \right] dp_x dp_y \quad (39a)$$

ここで $J\partial(p_x, p_y)/\partial(x, y)$ は次式のように表すことができる。

$$J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{D(0)} \frac{\partial(p_x, p_y, z)}{\partial(u, v, t)} \quad (39b)$$

(39b) の導出は例 3.4 に示してある。

例として導体平板による球面波の反射について考える。問題の構成は図 2 に示してある。入射波及び反射波の波動ベクトル \mathbf{p}, \mathbf{q} は次式で与えられる。

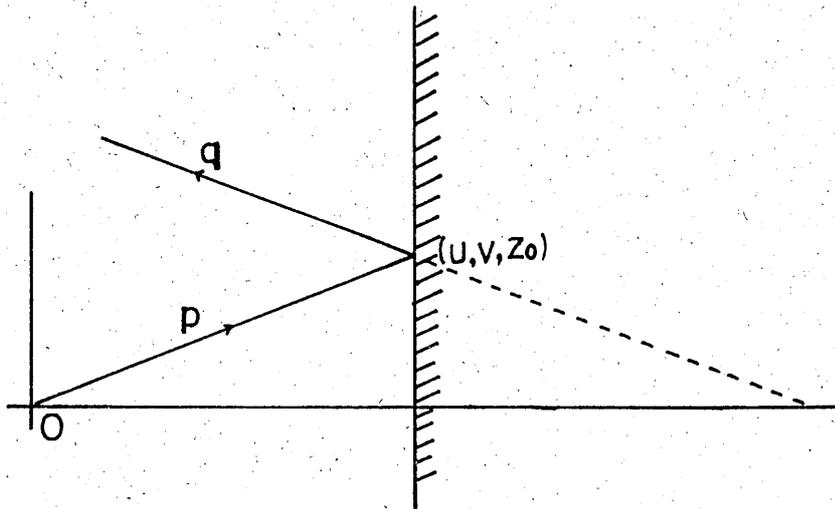


図 2. 球面波の平板による反射

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{i}_x + p_y \mathbf{i}_y + p_z \mathbf{i}_z \quad p_x = \frac{u}{R} \quad p_y = \frac{v}{R}, \quad p_z = \frac{z_0}{R}, \quad R = \sqrt{u^2 + v^2 + z_0^2} \quad (40a)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = p_x \mathbf{i}_x + p_y \mathbf{i}_y - p_z \mathbf{i}_z \quad (40b)$$

この場合 (38a) の被積分関数は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} &= \frac{1}{D(0)} \frac{\partial(p_x, p_y, z)}{\partial(u, v, t)} = \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(u, v)} = \frac{z_0^2}{R^4} \\
 A_0(u, v) &= \frac{\exp[-jkR]}{R} \quad R = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-z_0)^2} \\
 T(p_x, p_y, z) + p_x x + p_y y &= t - x(p_x, p_y, z) - y(p_x, p_y, z) + p_x x + p_y y \\
 &= \frac{z-z_0}{p_z} - p_x \left[u + p_x \frac{z-z_0}{p_x} \right] - p_y \left[v + p_y \frac{z-z_0}{p_y} \right] + p_x x + p_y y \\
 &= p_x(x-u) + p_y(y-v) + p_z(z-z_0)
 \end{aligned} \tag{41}$$

となる。従って (38) は

$$\begin{aligned}
 W(x, y, z) &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R}{z_0} \exp[-jkR - jk\{p_x(x-u) + p_y(y-v) + p_z(z-z_0)\}] dp_x dp_y \\
 &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p_z} \exp[-jk(p_x x + p_y y + p_z z)] dp_x dp_y
 \end{aligned} \tag{42}$$

ここで関係式 $p_z = z_0/R$, $R = p_x u + p_y v + p_z z$ を利用した。(41) は Debye の表示式である。以下種々の簡単な問題に対してその適用法について考えていく。

3.4 位相板による回折 - 2次元の問題[1]

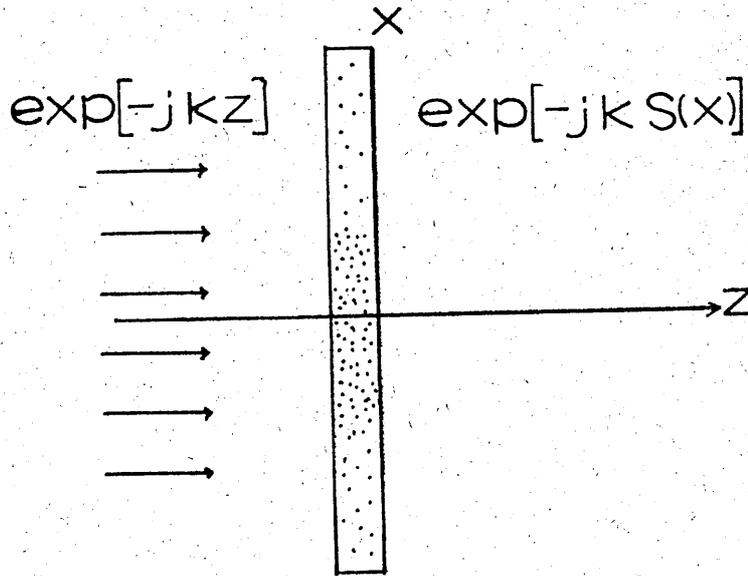


図3. 位相板による電磁波の集束

図3に示すように平面波 $U(x, z) = \exp(-jkz)$ が位相板 $z=0$ に入射した場合について考える。位相板によって位相が $S = S_0(x)$ のように変調を受けたとすると位相板の後部の界分布は $U(x, 0) = \exp[-jkS_0]$ となる。初期条件

$$x(0) = u, \quad z(0) = 0, \quad p_x(0) = S_0'(u), \quad p_z(0) = \sqrt{1 - S_0'^2} \tag{43a}$$

のもとで Hamilton の方程式を解くと次式のようになる

$$x(t) = u + tS_0'(u), \quad z(t) = \sqrt{1 - S_0'^2} t, \quad p_x(t) = S_0'(u), \quad p_z(t) = p_z(0) \tag{43b}$$

点 (x, z) を通る光線に相当したパラメータ u, t は (42b) を考慮することにより

$$\frac{x-u}{z} = S_0'(u)[1 - S_0'^2]^{-1/2}, \quad t = \sqrt{(x-u)^2 + z^2} \tag{44a}$$

となる。位相関数 S は

$$S = S_0 + t \quad (44b)$$

で与えられる。座標変換に関するヤコビアンは次式のように求められる。

$$\begin{aligned} J = \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, t)} &= \begin{vmatrix} S_0'(u) & [1 - S_0'^2(u)]^{1/2} \\ 1 + S_0''(u)t & -S_0'(u)S_0''(u)[1 - S_0'^2(u)]^{-1/2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1 - S_0'^2(u) + S_0''(u)t}{\sqrt{1 - S_0'^2(u)}} = \sqrt{1 - S_0'^2(u)} \left[1 + \frac{S_0''(u)t}{1 - S_0'^2(u)} \right] \end{aligned} \quad (44c)$$

従って電磁界分布の幾何光学近似は

$$U(x, z) = A_0(u) \left[1 - \frac{t}{R(u)} \right]^{-1/2} \exp[-jk(S_0(u) + t)] \quad \frac{1}{R(u)} = -S_0''(u)[1 - S_0'^2(u)]^{-3/2} \quad (45)$$

で与えられる。もしスクリーン上の初期の分布が $U_0 = \exp[-jkgu]$ ($g > 1$) (遅波) のときは $S_0(u) = gu$ を (44a), (44b) に代入することにより

$$u = x - j \frac{gx}{\sqrt{g^2 - 1}} \quad t = -jz\sqrt{g^2 - 1}S = gx - jz\sqrt{g^2 - 1} \quad (46a)$$

が得られる。これは z -方向に減衰しながら x -方向に伝搬している表面波

$$\exp[-jkgx - k\sqrt{g^2 - 1}z] \quad (46b)$$

を表している。caustic の近傍では (45) は成立しなくなる。この場合は前述のように混合座標 (p_x, z) を用いる。 u, t, x, p_x を (p_x, z) で表せば次式のようになる。

$$\begin{aligned} S_0'(u) &= p_x, \quad p_x = \sqrt{1 - p_x^2}, \quad x = u(p_x) + p_x\sqrt{1 - p_x^2}z, \\ t &= \sqrt{(x - u)^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \frac{(x - u)^2}{z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - p_x^2}}, \\ \frac{\partial x}{\partial p_x} &= \frac{\partial u}{\partial p_x} + z[1 - p_x^2]^{3/2} = \frac{1}{S_0''(u)} + z[1 - p_x^2]^{3/2}, \quad J = 1 + zS_0''(u)[1 - p_x^2]^{-3/2} \\ T &= S_0(u) + \int_0^t \epsilon(t)dt - x(p_x)p_x = S_0(u) + \frac{z}{\sqrt{1 - p_x^2}} - p_xu - \frac{p_x^2z}{\sqrt{1 - p_x^2}} = S_0(u) + z\sqrt{1 - p_x^2} - up_x \end{aligned} \quad (47a)$$

これらの結果を利用すれば波動関数 $U(x, z)$ は

$$U(x, z) = \frac{k}{j2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(u)[S_0(u)]^{-1/2} \exp[-jk\{S_0(u) + \sqrt{1 - p_x^2}z + p_x(x - u(p_x))\}] dp_x \quad (47b)$$

と表される。特別な場合として

$$S_0(u) = -\frac{u^2}{2b} \quad (48a)$$

を考える。この時

$$p_x = -\frac{u}{b}, \quad p_x = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{b}\right)^2}, \quad x = p_x t + u, \quad z = t \left[1 - \left(\frac{u}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (48b)$$

となり波動関数は次式のようになる。

$$U(x, z) = \sqrt{\frac{b^2 - u^2}{b^2 - u^2 - bt}} \exp \left[jk \frac{u^2}{2b} - jk\sqrt{(x - u)^2 + z^2} \right] \quad (48c)$$

上の表示式は caustic $b^2 - u^2 - bt = 0$ の近傍では成立しない。 x, z を混合座標で表せば x, z は

$$\begin{aligned} x &= p_x t + t = -\frac{u(b^2 - u^2)}{b^2} + u = \left(\frac{u}{b}\right)^3 \\ z &= t \sqrt{\left[1 - \frac{u^2}{b^2} \right]} = b \left[1 - \left(\frac{u}{b}\right)^2 \right]^{3/2} \end{aligned} \quad (49a)$$

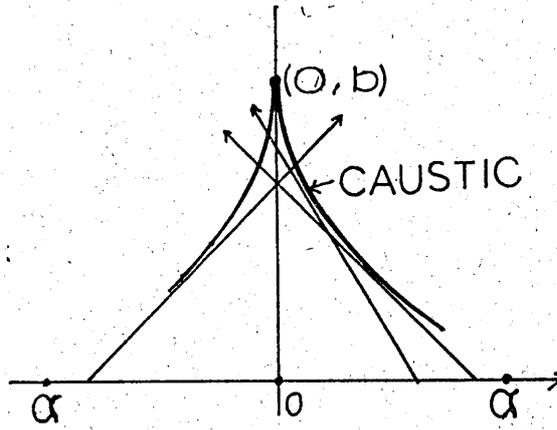


図4. caustic 曲線 (49b)

となる。それ故、caustic は方程式

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{b}\right)^{2/3} = 1 \quad (49b)$$

を満足する。この様子は図4に示してある。

次に caustic 近傍の界の振る舞いについて検討する。(47b) は

$$U(x, z) = \sqrt{\frac{jk b}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(-bp_x) \exp[-jkT(p_x)] dp_x \quad (49c)$$

と書くことができる。ここで

$$T(p_x) = \frac{p_x^2 b}{2} + \sqrt{1 - p_x^2} z + p_x x \quad (49d)$$

である。停留点は

$$bp_x + x - \frac{p_x z}{\sqrt{1 - p_x^2}} = 0 \quad (49d)$$

から決定され $p_x = -u/b$ とおき標準的な停留点法を適用すれば (48c) に一致することを示すことができる。caustic 近傍では (49c) はもっと高次の停留点法または数値積分により計算することができる。cusp 点から離れた最も次数の低い caustic では2個の停留点が重なるだけであり、この近傍の界は Cester, et. al[6]の方法を使って求めることができる。Chester の方法に従えば (49c) を次のような基準形に変換する。

$$I(\mathbf{r}) = \int E(s) \exp[-jkT(\mathbf{r}, s)] ds \quad (50a)$$

ここで位相関数は

$$T(\mathbf{r}, s) = R_0 + R_1 s - \frac{s^3}{3} \quad (50b)$$

と表す。位相関数 T の停留点は $s_{1,2} = \pm\sqrt{R_1}$ である。従って

$$T(\mathbf{r}, p_{x1}) = R_0 + \frac{2}{3} R_1^{3/2}, \quad T(\mathbf{r}, p_{x2}) = R_0 - \frac{2}{3} R_1^{3/2}$$

となるから、パラメータ R_0, R_1 は caustic から離れた点の停留点における値を使って

$$R_0 = \frac{1}{2} [T(\mathbf{r}, p_{x1}) + T(\mathbf{r}, p_{x2})] \quad R_1 = \left[\frac{3}{4} [T(\mathbf{r}, p_{x1}) - T(\mathbf{r}, p_{x2})] \right]^{2/3} \quad (50c)$$

から求める。また振幅は

$$E(s) = A_0 [-bp_x(s)] \frac{\partial p_x}{\partial s} \quad (50d)$$

で与えられる。(50a)の主要項は

$$I_0(r) = \sqrt{2\pi b} k^{1/6} \exp[-j(kR_0 + \pi/4)] \left[-\frac{2}{T'''(r, p_{x0})} \right]^{1/3} A_0(u) Ai[-k^{2/3} R_1] \quad (51a)$$

となる。ここで $p_{x0} = (p_{x1} + p_{x2})/2 = -u/b$ であり、 $Ai(x)$ は Airy 関数である。この種の caustic に特有な周波数依存性 $k^{1/6}$ が予想どおり得られた。最後に cusp 近傍の界を求める。cusp 近傍では3本の光線は全て重なり $T' = T'' = T''' = 0$ となる。積分(49c)はこの場合も(50a)の形に変換するが位相関数は $T(r, s)$ のかわり

$$F(r, s) = R_0 + R_1 s + \frac{1}{2} R_2 s^2 + \frac{s^4}{4} \quad (51b)$$

とおく。問題が z -軸に対して対称であることを考慮すると $R_1 = 0$ である。停留点は $s^3 + R_2 s = 0$ から $s = 0, s = \pm j\sqrt{R_2}$ である。これから $F(r, 0) = R_0, F(r, p_{x1}) = R_0 - \frac{1}{4} R_2^2$ が得られる。これを R_2 について解けば次式が得られる。

$$R_2 = 2\sqrt{F(r, 0) - F(r, p_{x1})} \quad R_0 - \frac{R_2^2}{8} = \frac{1}{2}[F(r, 0) + F(r, p_{x1})] \quad (51c)$$

z -軸に沿った漸近解の主要項は

$$U(0, z) \simeq \sqrt{\frac{b}{2}} k^{1/4} \exp[-jk(R_0^2 - \frac{R_2^2}{8}) + j\frac{\pi}{8}] \left[-\frac{3}{F^{(4)}(0, z, 0)} \right]^{1/4} A_0(0) D_{-1/2} \left[\sqrt{\frac{jk}{2}} R_2 \right] \quad (51d)$$

ここで

$$D_\mu(w) = 2 \exp\left[\frac{w^2}{4}\right] [\Gamma(\mu)]^{-1} \int_0^\infty t^{2\mu-1} \exp[-(w^2 + t^2)^2/2] dt \quad (51e)$$

は放物筒関数である。また周波数特性は予測通り $k^{1/4}$ に比例している。実際は数値積分によって計算してもそれほど時間はかからない。

3.5 位相板による回折界 - 3次元問題[1]

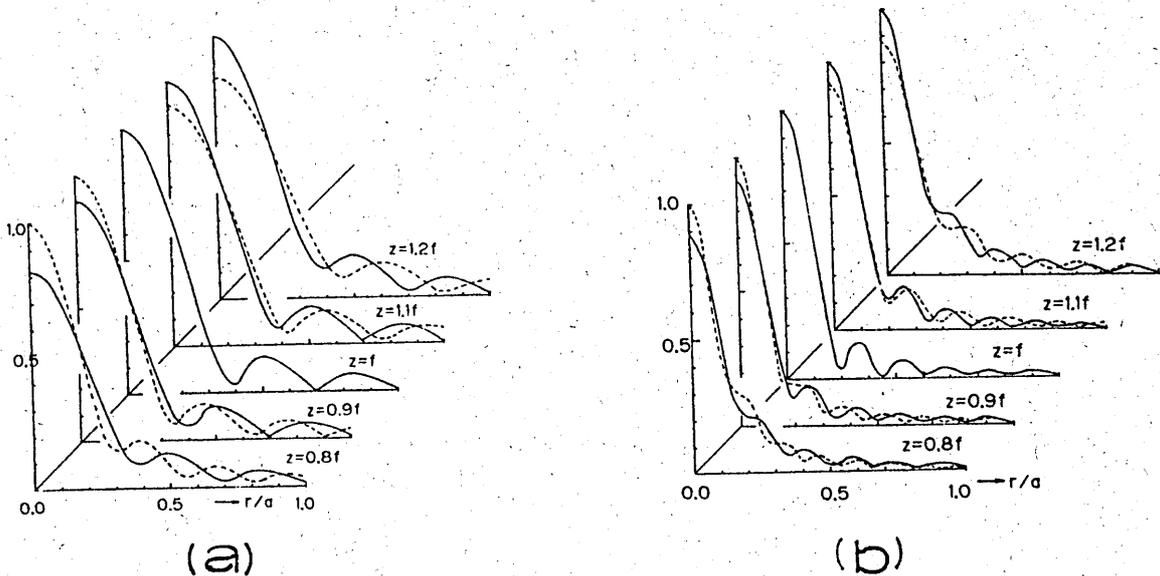


図5. 焦点近傍領域における Maslov の方法による結果と Huygens-Kirchhoff による結果の比較。

ここでは前節の議論を3次元問題に一般化する。位相板によって位相が $P = P_0(u, v)$ に変調されたとすると位相板の後端の界分布は $U(x, y, 0) = \exp[-jkP_0(u, v)]$ となる。ここで (u, v) は位相板の表面 $z=0$ の (x, y) 座標である。Hamilton 方程式の解は容易に次のように求められる。

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x0} = P_u, & p_y &= p_{y0} = P_v, & p_z &= p_{z0} = \sqrt{1 - P_u^2 - P_v^2} \\ x &= u + p_{x0}t, & y &= v + p_{y0}t, & z &= \sqrt{1 - p_{x0}^2 - p_{y0}^2}t \end{aligned} \quad (52a)$$

ここで P_u, P_v は $P_0(u, v)$ の u, v に関する偏微分、即ち $P_u = \partial P_0 / \partial u, P_v = \partial P_0 / \partial v$ である。座標 (x, y, z) から (u, v, t) への変換に関するヤコビアンは

$$D(t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = \begin{vmatrix} 1 + P_{uu}t & P_{uv}t & -Q^{-1}[P_u P_{uu} + P_v P_{vv}]t \\ P_{uv}t & 1 + P_{vv}t & -Q^{-1}[P_u P_{uv} + P_v P_{vv}]t \\ P_u & P_v & Q \end{vmatrix} \quad (52b)$$

$$= \frac{P_{uu}P_{vv} - P_{uv}P_{uv}}{Q} t^2 + [(P_{uu} + P_{vv})Q + \frac{P_u^2 P_{uu} + P_v^2 P_{vv} + 2P_u P_v P_{uv}}{Q}] t + Q$$

と求められる。ここで $Q = \sqrt{1 - P_u^2 - P_v^2}$ である。これから幾何光学界は

$$U(x, y, z) = J^{-1/2} \exp[-jk(P_0 + t)], \quad J = \frac{D(t)}{D(0)} \quad (52c)$$

と表すことができる。特別の場合として

$$P_0(u, v) = -\frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{R_1} + \frac{v^2}{R_2} \right) \quad (53a)$$

を考える。この場合のヤコビアンは (52b) から直ちに

$$J = \left[1 - \frac{u^2}{R_1} - \frac{v^2}{R_2} \right]^{-1/2} \left[\frac{t^2}{R_1 R_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{u^2 + v^2}{R_1 R_2} \right) t + 1 \right] \quad (53b)$$

と求められる。位相板の中心から出発した光線は上式で $u = v = 0$ と置く事により

$$U(x, y, z) = \left[\left(1 - \frac{t}{R_1} \right) \left(1 - \frac{t}{R_2} \right) \right]^{-1/2} \exp[-jk(P_0 + t)] \quad (53c)$$

と求められる。これは非点収差光線の典型的な表現である。caustic $t = R_1$ または $t = R_2$ の近傍では上の幾何光学界は無限大に発散する。次に caustic 近傍でも成立する表示式を (39) に従って導出しよう。このためには、まず $J \partial(p_x, p_y) / \partial(x, y)$ を計算しなければならない。結果は

$$J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \Delta, \quad \Delta = P_{uu} P_{vv} - P_{uv}^2 \quad (54a)$$

となる。(54a) の導出は例 3-6 に示してある。位相関数は

$$S = P_0(u, v) + t - x(p_x, p_y, z)p_x - y(p_x, p_y, z)p_y \quad (54b)$$

で与えられる。ここで

$$x(p_x, p_y, z) = u + \frac{p_x}{Q} z, \quad y(p_x, p_y, z) = v + \frac{p_y}{Q} z, \quad t = \frac{z}{Q} \quad Q = \sqrt{1 - P_u^2 - P_v^2} \quad (54c)$$

である。これから位相関数は

$$S(p_x, p_y, z) = P_0(u, v) - up_x - vp_y - \frac{z}{Q} - \frac{(p_x^2 + p_y^2)z}{Q} = P_0(u, v) - up_x - vp_y + \sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2} z \quad (54d)$$

と求められる。これらの結果を利用すると波動関数 $U(x, y, z)$ は

$$U(x, y, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(u, v) \Delta^{-1/2} \exp[-jk\{P_0(p_x, p_y) + p_x(x - u) + p_y(y - v) + \sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2} z\}] dp_x dp_y \quad (55a)$$

となる。積分変数を (p_x, p_y) から (u, v) に変換すれば (55a) は

$$U(x, y, z) = \frac{k}{2\pi} \int \int A_0(u, v) \Delta^{1/2} \exp[-jk\{P_0(P_u, P_v) + P_u(x - u) + P_v(y - v) + \sqrt{1 - P_u^2 - P_v^2} z\}] dudv \quad (55b)$$

となる。さらに特別の場合として $P_0(u, v), A_0(u, v)$ が

$$P_0(u, v) = -\frac{u^2 + v^2}{2f}, \quad A_0(u, v) = 1 \quad (55c)$$

で与えられている場合について考えると (55b) は

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{k}{f} \int_0^a J_0\left(\frac{kr r_0}{f}\right) \exp\left[jk\left\{-\frac{r_0^2}{2f} - z\left(1 - \frac{r_0^2}{f^2}\right)^{-1/2}\right\}\right] r_0 dr_0 \\ &= \frac{k}{f} \exp(-jkz) \int_0^a J_0\left(\frac{kr r_0}{f}\right) \exp\left[-jk\frac{r_0^2}{2f}\left(1 - \frac{z}{f}\right)\right] r_0 dr_0 \end{aligned} \quad (55c)$$

となる。ここで座標変換 $u = r_0 \cos \theta, v = r_0 \sin \theta$ を行い、また第2式を求めるときには条件 $f \gg a$ を用いた。

上式を Huygens-Kirchhoff の積分表示式と比較する。これは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{k}{2\pi} \iint \frac{\exp[-jkR]}{R} A_0(u, v) \exp[-jkP_0(u, v)] dudv \\ &= \frac{k}{z} \exp\left[-jk\left(z + \frac{x^2 + y^2}{z}\right)\right] \int_0^a J_0\left(\frac{kr r_0}{f}\right) \exp\left[-jk\frac{r_0^2}{2f}\left(1 - \frac{f}{z}\right)\right] r_0 dr_0 \end{aligned} \quad (55d)$$

ここで $R = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2}$ であり第2式を求めるときに条件 $z \gg a$ を用いた。(55c) と (55d) は焦点を含む面 $z = f$ では一致するがそれ以外では異なった表示式である。焦点領域では (55c) は平面波のように振る舞うが (55d) は球面波の性質を持つ。焦点領域から離れるに従ってどのように違いがでてくるかを示すため図5に $ka^2/f = 100, ka^2/f = 20$ の場合の数値結果を示す。各々の図では比較に便利のように最大値は規格化してある。

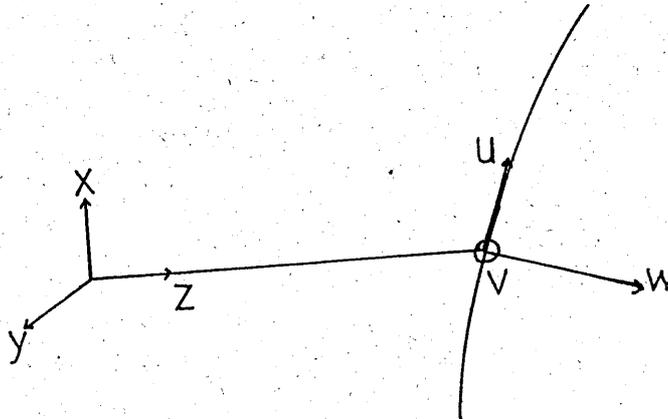


図6. 直角座標と光線固定座標

3.6 曲面による非点収差波に反射および透過[7],[8],[9]

6a. 反射

曲面の境界面に非点収差の波が入射したときの反射波の波面の主曲率半径を Hamilton 光学を使って求めることができることを示す。この問題は光線の波面を2次曲面で近似する方法を使ってすでに求められている[7],[8],[9]。しかし異なった方法による解は曲率の変化の機構を異なった観点から理解する上で有用である。問題の構造を図6に示す。直角座標 (x, y, z) および (u, v, w) を導入する。 w -軸の方向は曲面に垂直にとる。

(x, y, z) と (u, v, w) の関係は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (56)$$

で与えられる。反射面は

$$w = \frac{u^2}{2R_{c1}} + \frac{v^2}{2R_{c2}} \quad (57a)$$

で表されるものとする。ここで R_{c1}, R_{c2} は曲面の主曲率半径である。反射点を座標の原点 $u = v = w = 0$ にとる。反射点近傍の曲面の単位法線ベクトル \mathbf{n} は次式のように求められる。

$$\mathbf{n} = -\frac{u}{R_{c1}}\mathbf{i}_u - \frac{v}{R_{c2}}\mathbf{i}_v + \mathbf{i}_w + O(u^2, v^2) \quad (57b)$$

また入射波の波面を表す位相関数は

$$S = z + \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} \quad (57c)$$

で表されるとする。ここで R_1, R_2 は入射波の波面の主曲率半径である。従って入射波の波数ベクトル $\mathbf{p} = \nabla S$ は

$$\mathbf{p} = \mathbf{i}_z + \frac{x}{R_1}\mathbf{i}_x + \frac{y}{R_2}\mathbf{i}_y \quad (57d)$$

と求められる。反射波の波数ベクトルは

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (58a)$$

から次のように計算される。

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{\cos \theta \cos \phi}{R_1} [u \cos \theta \cos \phi - v \cos \theta \sin \phi - w \sin \theta] + \frac{\sin \phi}{R_2} [u \sin \phi + v \cos \phi] + \frac{2u \cos \theta}{R_{c1}} + \sin \theta \cos \phi \\ q_v &= -\frac{\cos \theta \sin \phi}{R_1} [u \cos \theta \cos \phi - v \cos \theta \sin \phi - w \sin \theta] + \frac{\cos \phi}{R_2} [u \sin \phi + v \cos \phi] + \frac{2v \cos \theta}{R_{c2}} - \sin \theta \sin \phi \\ q_w &= \frac{\sin \theta}{R_1} [u \cos \theta \cos \phi - v \cos \theta \sin \phi - w \sin \theta] + \frac{2u \sin \theta \cos \phi}{R_{c1}} - \frac{2v \sin \theta \sin \phi}{R_{c2}} - \cos \theta \end{aligned} \quad (58b)$$

ここで u^2, v^2, w の程度の量および高次の微小量は無視した。光線上の点の直角座標 (x, y, z) は \mathbf{q} を用いて

$$x = u + q_u t, \quad y = v + q_v t, \quad z = w + q_w t \quad (58c)$$

と表される。座標変換に伴うヤコビアン J の反射点 $u = v = w = 0$ における値は

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial q_u}{\partial u} t & \frac{\partial q_v}{\partial u} t & \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial q_w}{\partial u} t \\ \frac{\partial q_u}{\partial v} t & 1 + \frac{\partial q_v}{\partial v} t & \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial q_w}{\partial v} t \\ \frac{\partial q_u}{\partial t} & \frac{\partial q_v}{\partial t} & \frac{\partial q_w}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + B_{11}t & B_{12}t & B_{13}t \\ B_{21}t & 1 + B_{22}t & B_{23}t \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} \quad (58d)$$

ここで

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{R_1} + \frac{\sin^2 \phi}{R_2} + \frac{2 \cos \theta}{R_{c1}} & B_{12} &= \left(-\frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \sin \phi \cos \phi \\ B_{13} &= \left(\frac{\cos \theta}{R_1} + \frac{2}{R_{c1}}\right) \sin \theta \cos \theta & B_{21} &= \left(-\frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \sin \phi \cos \phi \\ B_{22} &= \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{R_1} + \frac{\cos^2 \phi}{R_2} + \frac{2 \cos \theta}{R_{c2}} & B_{23} &= -\left(\frac{\cos \theta}{R_1} + \frac{2}{R_{c2}}\right) \sin \theta \sin \phi \\ B_{31} &= \sin \theta \cos \phi & B_{32} &= -\sin \theta \sin \phi & B_{33} &= -\cos \theta \end{aligned} \quad (58e)$$

である。(58d) のヤコビアンは次のように書く事ができる。

$$J = A_1 + A_2 t + A_3 t^2 = A_1 \left(1 + \frac{t}{r_1}\right) \left(1 + \frac{t}{r_2}\right) \quad (59a)$$

容易に分かるように $1/r_1, 1/r_2$ は $A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$ の根である。ここで A_1, A_2, A_3 の具体的な表示式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos \theta \\ A_2 &= \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{\cos \theta} \left\{ \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{R_1} + \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{R_2} \right\} \right] \cos \theta \\ A_3 &= \left[\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{4}{R_{c1} R_{c2}} + \frac{2 \cos \theta}{R_1} \left\{ \frac{\sin^2 \phi}{R_{c1}} + \frac{\cos^2 \phi}{R_{c2}} + \frac{2 \cos^2 \phi}{R_2 \cos \theta R_{c1}} + \frac{\sin^2 \phi}{R_{c2}} \right\} \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (59b)$$

また $1/r_1, 1/r_2$ に対する解は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{1,2}} = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] + \frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{R_1} + \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{R_2} \right] \\ & \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \frac{4}{\cos^2 \theta} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{\cos^2 \phi - \cos^2 \theta \sin^2 \phi}{R_{c1}} + \frac{\sin^2 \phi - \cos \theta \cos^2 \phi}{R_{c2}} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{4}{\cos^2 \theta} \left\{ \frac{\cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi}{R_{c1}} + \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \theta \cos^2 \phi}{R_{c2}} \right\}^2 - \frac{16}{R_{c1} R_{c2}} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (59c)$$

これは文献[8],[9]の結果と一致する。特別の場合として波面が球の場合、即ち $R_1 = R_2 = R$ の場合には上式は次のように簡単化される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{1,2}} = & \frac{1}{R} + \frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{R_{c1}} + \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{R_{c2}} \right] \\ & + \left[\frac{1}{\cos^2 \theta} \left\{ \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{R_{c1}} + \frac{\cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \phi}{R_{c2}} \right\}^2 - \frac{4}{R_{c1} R_{c2}} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (59d)$$

いま

$$Q_{11} = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u = \cos \theta \cos \phi, \quad Q_{12} = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_v = -\cos \theta \sin \phi, \quad Q_{21} = \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_u = \sin \phi \quad (60a)$$

$$Q_{22} = \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_v = \cos \phi$$

$$\cos \theta_1 = \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_u = \sin \theta \cos \phi, \quad \sin^2 \theta_1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \quad (60b)$$

$$\cos \theta_2 = \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_v = -\sin \theta \sin \phi, \quad \sin^2 \theta_2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi \quad (60c)$$

とおくと (59) は文献[8]の結果と一致する。

6b. 透過波

次に異種媒質の境界面に非点収差の光線が入射したときの透過の問題について考える。曲面の方程式、法線ベクトル、位相関数、直角座標 (x, y, z) と (u, v, w) の変換公式および波数ベクトル \mathbf{p} は (57) で与えられている。透過波の波数ベクトルを \mathbf{q} とすればこれは次式から求められる。

$$n\mathbf{q} = \mathbf{p} + \sqrt{n^2 - 1 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{N})^2} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} \quad (61a)$$

ここで n は相対屈折率、 \mathbf{N} は法線ベクトルである。光線上の点の直角座標成分は波数ベクトル \mathbf{q} を使えば次式で与えられる。

$$x = u + nq_u t, \quad y = v + nq_v t, \quad z = w + nq_w t \quad (61b)$$

ここで屈折点近傍の波数ベクトルの成分は前節の場合と同じように計算できる。結果は

$$\begin{aligned} nq_u = & \sin \theta \cos \phi + \frac{x}{R_1} \cos \theta \cos \phi + \frac{y}{R_2} \sin \phi + \frac{u}{R_{c1}} [K - \cos \theta] \\ nq_v = & -\sin \theta \sin \phi - \frac{x}{R_1} \cos \theta \sin \phi + \frac{y}{R_2} \cos \phi + \frac{v}{R_{c1}} [K - \cos \theta] \\ nq_w = & K + H \left[\frac{x}{R_1} \sin \theta + \frac{u}{R_{c1}} \sin \theta \cos \phi - \frac{v}{R_{c2}} \sin \theta \sin \phi \right] \end{aligned} \quad (61c)$$

となる。ここで

$$K = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}, \quad H = 1 - \frac{\cos \theta}{K} \quad (61d)$$

である。振幅をきめるヤコビアンは (58d) から反射の問題と同じように求めることができ、この場合の A_i, B_{ij} は次式のようになる。

$$\begin{aligned} nB_{11} = & -\frac{K - \cos \theta}{R_{c1}} + \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2} & nB_{12} = nB_{21} = & \left(-\frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sin \phi \cos \phi \\ nB_{13} = & H \left(\frac{1}{R_{c1}} + \frac{\cos \theta}{R_1} \right) \sin \theta \cos \phi & nB_{22} = & -\frac{K - \cos \theta}{R_{c2}} + \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{R_1} + \frac{\cos^2 \phi}{R_2} \\ nB_{23} = & H \left(-\frac{1}{R_{c2}} + \frac{\cos \theta}{R_1} \right) \sin \theta \cos \phi & nB_{31} = & \sin \theta \cos \phi \quad nB_{32} = -\sin \theta \sin \phi, \quad nB_{33} = -\cos \theta \end{aligned} \quad (62a)$$

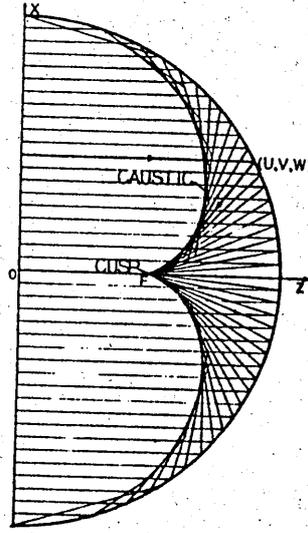


図7. 球面反射鏡の構造

$$\begin{aligned}
 nA_1 &= K \\
 n^2 A_2 &= -H \left[\frac{n^2 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{R_{c1}} + \frac{n^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{R_{c2}} \right] + K \left[\frac{n^2 \cos^2 \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \\
 n^3 A_3 &= \frac{n^2 \cos^2 \theta}{KR_1 R_2} + \frac{n^2 H^2 K}{R_{c1} R_{c2}} - n^2 H \left[\frac{1}{R_{c1}} \left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{R_1} + \frac{\cos^2 \phi}{R_2} \right) + \frac{1}{R_{c2}} \left(\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{R_1} + \frac{\sin^2 \phi}{R_2} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (62b)$$

これらの結果を利用すると透過波の波面の主曲率半径は

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{1}{2n} (Q + D) \quad (62c)$$

と表すことができる。ここで

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{n^2 \cos^2 \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{H}{K} \left[\frac{n^2 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{R_{c1}} + \frac{n^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{R_{c2}} \right] \\
 D^2 &= \left[\frac{n^2 \cos^2 \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)R_1} + \frac{1}{R_2} \right]^2 - \frac{4n^2 H^2}{R_{c1} R_{c2}} + \left(\frac{H}{K} \right)^2 \left[\frac{n^2 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{R_{c1}} + \frac{n^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{R_{c2}} \right]^2 \\
 &+ \frac{2H}{KR_{c1}} \left[\frac{n^2 \cos^2 \theta (n^2 - \sin^2 \theta) \sin^2 \phi - n^2 \cos^2 \phi}{R_1 (n^2 - \sin^2 \theta)} + \frac{n^2 \cos^2 \phi - (n^2 - \sin^2 \theta) \sin^2 \phi}{R_2} \right] \\
 &+ \frac{2H}{KR_{c2}} \left[\frac{n^2 \cos^2 \theta (n^2 - \sin^2 \theta) \cos^2 \phi - n^2 \sin^2 \phi}{R_1 (n^2 - \sin^2 \theta)} + \frac{n^2 \sin^2 \phi - (n^2 - \sin^2 \theta) \cos^2 \phi}{R_2} \right]
 \end{aligned} \quad (62d)$$

特別の場合として球面の境界に平面波が入射した場合を考える。この場合は ($R_1 = R_2 \rightarrow \infty, R_{c1} = R_{c2} = R_c$) であるから

$$r_1 = \frac{KR_c}{nH} \quad r_2 = \frac{nR_c}{HK} \quad (62e)$$

となる。もう1つの例として球面波が平面境界に入射した場合は ($R_1 = R_2 = R, R_{c1} \rightarrow \infty, R_{c2} \rightarrow \infty$) であるから

$$r_1 = nR \quad r_2 = \frac{n^2 - \sin^2 \theta}{n \cos^2 \theta} R \quad (62f)$$

となる。これらの結果は James[9]の結果と一致する。

3.7 球面反射鏡アンテナの焦点領域の電磁界分布[10]

7a. 電磁界表示式の導出

直線偏波の平面波 $E = \exp[-jkz]$ が凹面の球面反射鏡に入射した場合の反射波の表示式を求める。問題の構成は図7に示してある。

球面反射鏡による平面波の反射についての幾何光学的な性質については Spencer and Hyde[11]の詳細で素晴らしい概説がある。ここでは幾何光学的な表示式と焦点（焦線）近傍でも成立する積分表示式を導出する。半径 a の球面反射鏡の方程式は

$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2 \quad \mathbf{n} = \sin A \cos B \mathbf{i}_x + \sin A \sin B \mathbf{i}_y + \cos A \mathbf{i}_z \quad (63a)$$

で与えられる。ここで (u, v, w) は反射鏡の上の点の直角座標であり (a, A, B) は対応する球座標であり、両者は

$$u = a \sin A \cos B, \quad v = a \sin A \sin B, \quad w = a \cos A \quad (63b)$$

の関係がある。反射波の波数ベクトルを $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i}_x + p_y \mathbf{i}_y + p_z \mathbf{i}_z$ とするとこれは

$$p_x = -\sin 2A \cos B, \quad p_y = -\sin 2A \sin B, \quad p_z = -\cos 2A \quad (63c)$$

で与えられる。(63c) は反射に際して光線は捻れないことを表している。即ち反射は B = 一定の平面内でおこる。反射波の電界の直角座標成分は $\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_i + 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i)\mathbf{n}$ から次のように求められる。

$$E_{rx0} = -\cos^2 A + \sin^2 A \cos 2B \quad E_{ry0} = \sin^2 A \sin 2B \quad E_{rz0} = \sin 2A \cos B \quad (63d)$$

反射波の光線表示式は Hamilton の方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_x & \frac{dy}{dt} &= p_y & \frac{dz}{dt} &= p_z \\ \frac{dp_x}{dt} &= 0 & \frac{dp_y}{dt} &= 0 & \frac{dp_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (64a)$$

の解から求めることができる。ここで媒質は均質で等方性であると仮定した。また t は光線に沿った長さを表すパラメータである。(64a) を初期条件 $x = u, y = v, z = w, p_x = p_{x0}, p_y = p_{y0}, p_z = p_{z0}$ のもとで解く。ここで $(u, v, w), (p_{x0}, p_{y0}, p_{z0})$ は (63b), (63c) に与えてある。結果は

$$x = u + p_{x0}t, \quad y = v + p_{y0}t, \quad z = w + p_{z0}t \quad (64b)$$

となる。反射波の幾何光学的な表示式は (64b) から次のように求められる。

$$\mathbf{E}_r = E_{r0}(u, v) J^{-1/2} \exp[-jk(S + t)] \quad (64c)$$

ここで $S = w$ である。ヤコビアン J は座標 (x, y, z) から (u, v, w) への座標変換であり、 J に対する表示式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} J &= \frac{D(t)}{D(0)} \\ D(t) &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial p_x}{\partial u} & \frac{\partial p_y}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial p_z}{\partial u} \\ \frac{\partial p_x}{\partial v} & 1 + \frac{\partial p_y}{\partial v} & \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial p_z}{\partial v} \\ \frac{\partial p_x}{\partial t} & \frac{\partial p_y}{\partial t} & \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p_z}{\partial t} \end{vmatrix} \\ &= -\left(\frac{2t}{a} - \cos A\right) \left(\frac{2t}{a} - \frac{1}{\cos A}\right) \end{aligned} \quad (64d)$$

(64d) の導出は 7e 節に示してある。幾何光学の表示式は

$$t = t_{tan} = \frac{a}{2} \cos A \quad t = t_{sag} = \frac{a}{2 \cos A} \quad (65a)$$

の近傍では正しくなくなる。ここで t_{tan}, t_{sag} はそれぞれ tangential, sagittal focal length である。 t_{tan} と t_{sag} が等しくならないために非点収差波になる。(64d) を 0 とする点の座標は t_{tan} に対しては

$$x_c = a \sin^3 A \cos B, \quad y_c = a \sin^3 A \sin B, \quad z_c = a \cos A - \frac{a}{2} \cos 2A \cos A \quad (65b)$$

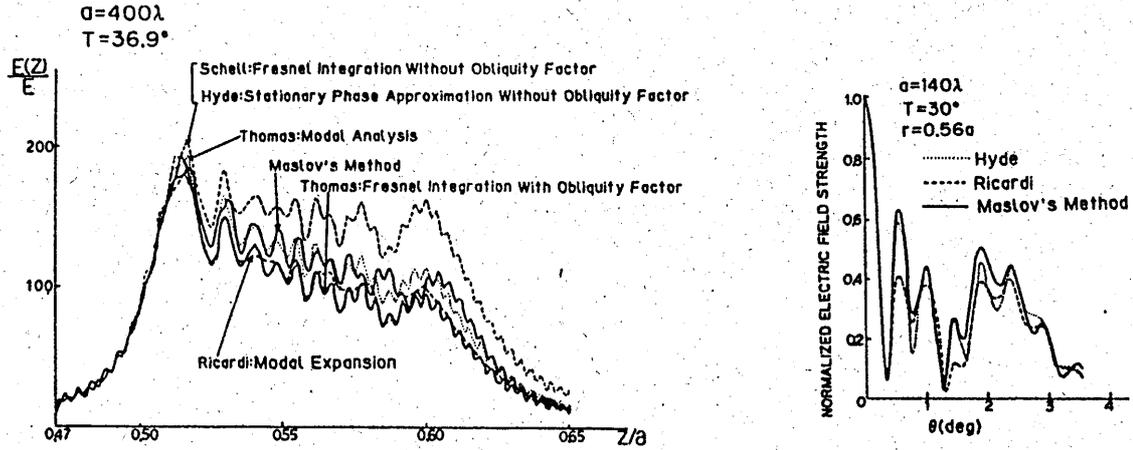


図8. 焦点近傍の界分布：(a) 軸上の分布、(b) 軸に垂直な面上の分布

となり、 t_{zag} に対しては

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = \frac{a}{2 \cos A} \quad (65c)$$

となる。

Caustic 近傍でも成立する表示式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{r0} \left[J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} \right]^{-1/2} \exp[-jk(t - x_0 p_x - y_0 p_y + x p_x + y p_y)] dp_x dp_y \quad (66a)$$

から求められる。ここで x_0, y_0 は (64b) の値を混合座標系 (p_x, p_y, z) で表したものである。 $J \partial(p_x, p_y) / \partial(x, y)$ の値は

$$J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \frac{4}{a^2} \cos^2 2A \quad (66b)$$

と求められる。導出は 7e 節に示してある。

積分変数を (p_x, p_y) から (u, v) に変換し更に (u, v) から (A, B) に変換すると (66a) の積分は

$$E_r(x, y, z) = \frac{jka}{2\pi} \int_0^T \int_0^{2\pi} E_{r0} \sin 2A \exp[-j2ka \cos A + jkr(\sin \theta \sin 2A \cos(\phi - B) + \cos \theta \cos 2A)] dA dB \quad (66c)$$

となる。ここで関係式

$$\begin{aligned} w - up_x - vp_y - wp_z &= 2a \cos A, & (x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta) \\ xp_x + yp_y + zp_z &= r \sin \theta \sin 2A \cos(\phi - B) + r \cos \theta \cos 2A \end{aligned} \quad (66d)$$

を利用した。(66c) で T は球面反射鏡の端部の座標の原点から見た開き角である。 B に関する積分は実行することができ、Bessel 関数の積分表示式を利用すれば次式のようになる。

$$\begin{aligned} E_{rx} &= -jka[P(r, \theta) + Q(r, \theta) \cos 2\phi] \\ E_{ry} &= -jkaQ(r, \theta) \sin 2\phi \\ E_{rz} &= -jkaR(r, \theta) \cos \phi \end{aligned} \quad (67a)$$

ここで $P(r, \theta), Q(r, \theta), R(r, \theta)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P(r, \theta) &= \int_0^T \cos^3 A \sin 2A J_0(kr \sin \theta \sin 2A) \exp[-j2ka \cos A - jkr \cos \theta \cos 2A] dA \\ Q(r, \theta) &= \frac{1}{2} \int_0^T \sin^2 A \sin 2A J_2(kr \sin \theta \sin 2A) \exp[-j2ka \cos A - jkr \cos \theta \cos 2A] dA \\ R(r, \theta) &= \int_0^T \sin^2 2A J_1(kr \sin \theta \sin 2A) \exp[-j2ka \cos A - jkr \cos \theta \cos 2A] dA \end{aligned} \quad (67b)$$

7b. 停留点法による解析

ここでは(66)で与えた表示式に停留点法を適用して近似解を求めたとき幾何光学解に帰着するかどうかについて確かめる。(66c)の位相部を

$$S = 2a \cos A - \sin \theta \sin 2A \cos(\phi - B) + \cos \theta \cos 2A \quad (68a)$$

とおくと停留点は $\partial S/\partial A = 0, \partial S/\partial B = 0$ の条件から

$$a \sin A - r \sin(2A - \theta) = 0, \quad \phi - B = 0 \quad (68b)$$

と求められる。停留点の2次微係数は

$$S_{AA} = -2a \cos A + 4r \cos(2A + \theta) = 2a \cos A - 4t, \quad S_{BB} = r \sin \theta \sin 2A = \left[\frac{a}{2 \cos A} - t \right] \sin^2 2A \quad (68c)$$

で与えられる。ここで関係式

$$r \cos(2A \mp \theta) = a \cos A - t \quad \pm r \sin \theta = \left[\frac{a}{2 \cos A} - t \right] \sin 2A$$

を利用した。標準的な停留点法を適用すれば幾何光学解になることは容易に確かめることができる。

7c. Maslovの方法と Huygens-Kirchhoffの方法の関係

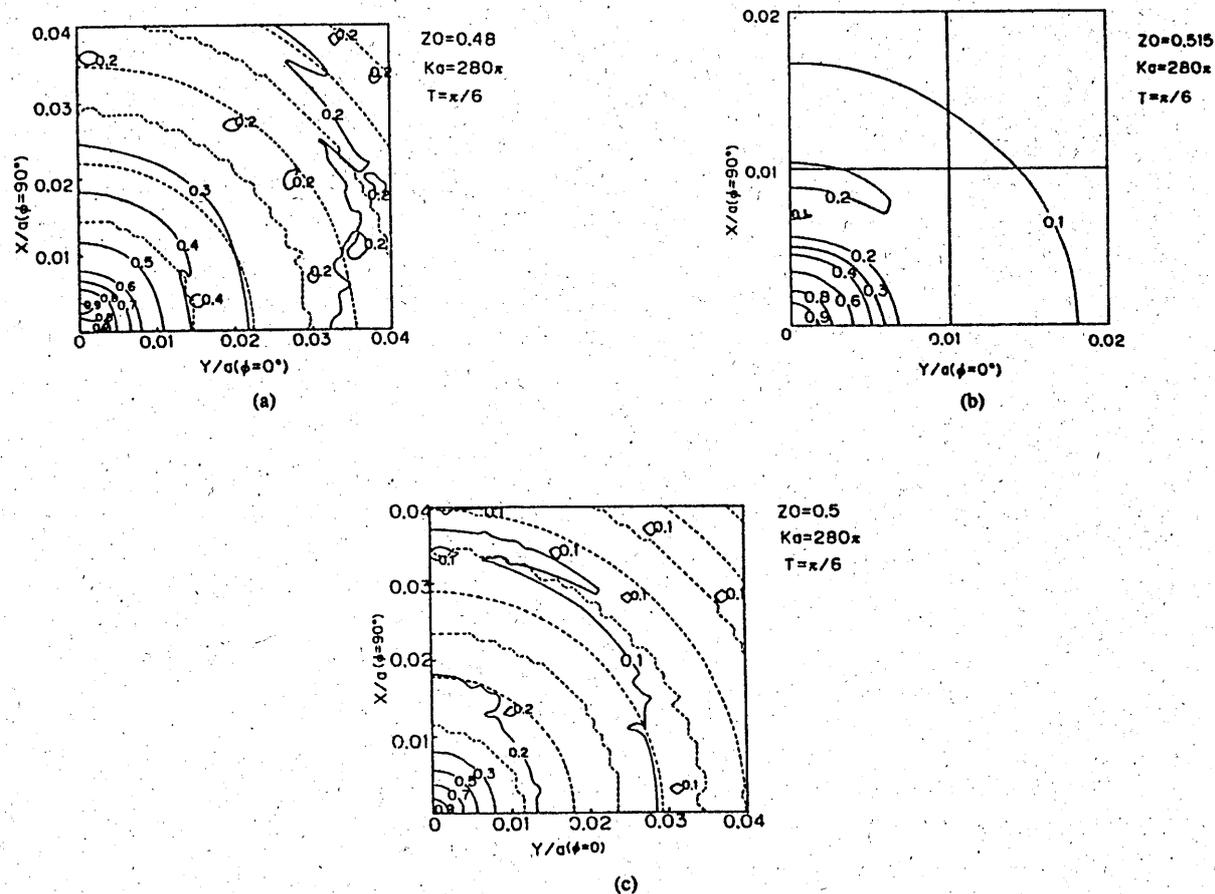


図9. 焦点近傍の軸に垂直な面内の界の等振幅線 (a) cuspの前 $z = 0.48a$; (b) cuspの後 $z = 0.515a$; (c) cusp $z = 0.5a$

Maslovの方法による結果と Huygens-Kirchhoff[K-H法]の方法による結果は焦点では一致することについてはすでに述べた。ここではこの問題について検討する[12]。K-H法による解は

$$F(x, y, z) = \frac{k}{2\pi z} \exp[-jkz] \int_S f(u, v) \exp\left[-jk \frac{(x-u)^2}{2z} - jk \frac{(y-v)^2}{2z}\right] dudv \quad (69a)$$

で与えられる。一方波動関数は Fourier 変換を使って次のように表す事ができる。

$$F(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(p_x, p_y, z) \exp[-j(p_x x + p_y y)] dp_x dp_y \quad (69b)$$

ここで $G(p_x, p_y, z)$ は波動関数の平面 $z=z$ における Fourier 変換であり、基準平面 $z=0$ における値とは

$$G(p_x, p_y, z) = G(p_x, p_y, 0) \exp[-j\sqrt{k^2 - p_x^2 - p_y^2} z] \quad (69c)$$

の関係がある。(69c) に paraxial 近似を行うと

$$G_{pa}(p_x, p_y, z) \simeq G(p_x, p_y, 0) \exp\left[-jkz + j\frac{p_x^2 + p_y^2}{2k} z\right] \quad (69d)$$

となる。(69d) を (69b) に代入し停留点法を適用すると

$$F_{far}(x, y, z) \simeq \frac{jk}{2\pi z} \exp(-jkz) G_{pa}\left[\frac{kz}{z}, \frac{ky}{z}, 0\right] \exp\left[-jk\frac{x^2 + y^2}{2z}\right] \quad (69e)$$

が得られる。 $G(p_x, p_y, 0)$ は基準面 $z=0$ の $f(u, v)$ の Fourier 変換であり、

$$G(p_x, p_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \exp[j(p_x u + p_y v)] dudv \quad (70a)$$

の関係がある。(69d) を (69b) に代入すると

$$F(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \exp(-jkz) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(p_x, p_y, 0) \exp\left[j\frac{p_x^2 + p_y^2}{2k} z - j(p_x x + p_y y)\right] dp_x dp_y \quad (70b)$$

となる。例として

$$f(u, v) = \exp\left[jk\frac{u^2 + v^2}{2f}\right] \quad u^2 + v^2 < a^2 \quad f(u, v) = 0 \quad u^2 + v^2 > a^2 \quad (71a)$$

の場合を考えよう。この時は

$$\begin{aligned} G(p_x, p_y, 0) &\simeq \frac{j2f\pi}{k} \exp\left[-j\frac{p_x^2 + p_y^2}{2k} f\right] & p_x^2 + p_y^2 < (ka/f)^2 \\ G_{pa} &= 0 & p_x^2 + p_y^2 > (ka/f)^2 \end{aligned} \quad (71b)$$

$$F(x, y, z) = \frac{f}{2\pi k} \exp(-jkz) \int_{p_x^2 + p_y^2 < (ka/f)^2} \int \exp\left[j\frac{p_x^2 + p_y^2}{2k} z - j\frac{p_x^2 + p_y^2}{2k} f - j(p_x x + p_y y)\right] dp_x dp_y \quad (71c)$$

となる。ここで変数の変換 $p_x \rightarrow kp_x/f, p_y \rightarrow kp_y/f$ を行った。(71c) は Maslov の方法で求めた結果と同じ物である。次に (69a) が (70b) から導出されることを示す。(69d), (70a) を (69b) に代入すると

$$F(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int \int f(U, V) \exp\left[j\frac{p_x^2 + p_y^2}{2k} z - jp_x(x-U) - jp_y(y-V)\right] dp_x dp_y dU dV \quad (71d)$$

となる。ここで関係式

$$\int \exp\left[j\frac{p_x^2}{2k} z - jp_x(x-U)\right] dp_x \simeq \left(\frac{k}{z}\right)^{1/2} \exp\left[-jk\frac{(x-U)^2}{2z} + j\frac{\pi}{4}\right] \quad (71e)$$

を利用すれば (70b) は K-H の表示式 (60a) になることは容易に示すことができる。

7d. 数値結果

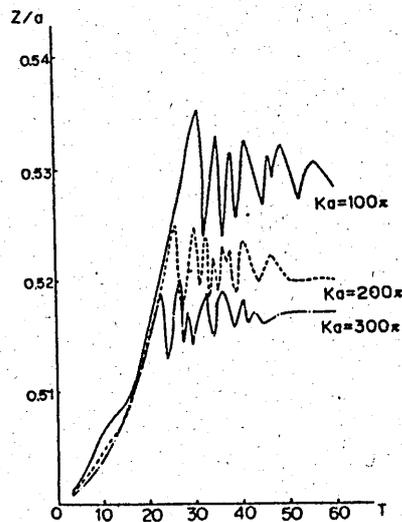


図10. 開き角によるピーク値の位置の変化

表示式の妥当性を確かめるためにいくつかの数値計算を行った。図8aはアンテナ軸に沿った界分布を示した。この問題は既に何種類かの方法によって計算されている[13],[14],[15]。最もレベルの高い値は粗い近似によるものであり、それ以外は大体同じ程度の結果になっている。図8bには軸に垂直な面内の分布を示している。これについても他の方法による結果と比較しており、おおよそ一致している。図9にはz軸に垂直な面内の界分布の等位線を示している。また図10は開口の大きさによって界のピーク値がどのように変化するかを示したものである。開き角が小さくなるに従ってピーク値は焦点(cusp点)に近づく様子がわかる。

7e. ヤコビアンの導出

球面反射鏡による反射波の発散係数 DF は次式で与えられることを示す。

$$DF = D(t)^{-1/2} = \left[\frac{2t}{a} - \cos A \right]^{-1/2} \left[\frac{2t}{a} - \frac{1}{\cos A} \right]^{-1/2}$$

また $J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \frac{4}{a^2} \cos^2 2A$ となることを示そう。

$$p_x = -\sin 2A, \quad p_y = -\sin 2A \sin B, \quad p_z = -\cos 2A, \quad \tan A = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{W}, \quad \tan B = \frac{V}{U}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial U} &= -\frac{\sin A \cos B}{\cos A}, & \frac{\partial W}{\partial V} &= -\frac{\sin A \sin B}{\cos A}, & \frac{\partial A}{\partial U} &= \frac{\cos B}{a \cos A}, & \frac{\partial A}{\partial V} &= \frac{\sin B}{a \cos A} \\ \frac{\partial B}{\partial U} &= -\frac{\sin B}{a \sin A}, & \frac{\partial B}{\partial V} &= \frac{\cos B}{a \sin A}, & \frac{\partial p_x}{\partial U} &= -\frac{2}{a} \left(\cos A - \frac{\sin^2 A \cos^2 B}{\cos A} \right) \\ \frac{\partial p_y}{\partial U} &= \frac{1 \sin^2 A \sin 2B}{a \cos A}, & \frac{\partial p_z}{\partial U} &= \frac{2 \sin 2A \cos B}{a \cos A}, & \frac{\partial p_x}{\partial V} &= \frac{1 \sin^2 A \cos 2B}{a \cos A} \\ \frac{\partial p_y}{\partial V} &= -\frac{2}{a} \left(\cos A - \frac{\sin^2 A \cos^2 B}{\cos A} \right), & \frac{\partial p_z}{\partial V} &= \frac{2 \sin 2A \sin B}{a \cos A} \end{aligned}$$

なる関係式を利用すれば求める結果を得る。つぎに $J \partial(p_x, p_y) / \partial(x, y)$ を計算する。関係式 $U = U(p_x, p_y)$, および $V = V(p_x, p_y)$ を U, V で微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial U} + \frac{\partial U}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial U} &= 1, & \frac{\partial U}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial V} + \frac{\partial U}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial V} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial U} &= 0, & \frac{\partial V}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial V} + \frac{\partial V}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial V} &= 1 \end{aligned}$$

これを $\partial U/\partial p_x$, $\partial V/\partial p_x$, $\partial U/\partial p_y$, $\partial V/\partial p_y$ について解くと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial p_x} &= \frac{1}{Q} \frac{\partial p_y}{\partial V} = -\frac{a}{2 \cos 2A} \left[\cos A - \frac{\sin^2 A \sin^2 B}{\cos A} \right], & \frac{\partial V}{\partial p_x} &= -\frac{1}{Q} \frac{\partial p_y}{\partial U} = \frac{\partial U}{\partial p_y} = -\frac{a \sin^2 A \sin 2B}{4 \cos A \cos 2A} \\ \frac{\partial V}{\partial p_y} &= \frac{1}{Q} \frac{\partial p_x}{\partial U} = -\frac{a}{2 \cos 2A} \left[\cos A - \frac{\sin^2 A \cos^2 B}{\cos A} \right], & Q &= \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(U, V)} = \frac{4}{a^2} \cos 2A \end{aligned}$$

これらの結果を利用すると次の関係式を得る。

$$J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{D(0)} \frac{\partial(p_x, p_y, z)}{\partial(U, V, t)} = \frac{4}{a^2} \cos^2 2A$$

3.8 パラボラ反射鏡による平面波の反射：垂直入射[16],[17]

前節の球面反射鏡と類似の問題を考える。平面波 $\mathbf{E}_i = \mathbf{i}_x \exp[-jkz]$ が

$$u^2 + v^2 = -4f(w - f) \quad (72a)$$

で表される回転放物面（パラボラ）に入射した場合の反射波について考える。ここで (u, v, w) は反射鏡上の点の直角座標であり、 f は焦点距離である。Hamilton 方程式の解は前節と同じように求められ、結果は

$$p_x = p_{x0}, \quad p_y = p_{y0}, \quad p_z = \sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2} \quad (72b)$$

$$x = u + p_x t, \quad y = v + p_y t, \quad z = w + \sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2} t \quad (72c)$$

となる。反射面の単位法線ベクトル \mathbf{n} は

$$\mathbf{n} = \frac{(u\mathbf{i}_x + v\mathbf{i}_y + 2f\mathbf{i}_z)}{\sqrt{u^2 + v^2 + 4f^2}} = \sin A \cos B \mathbf{i}_x + \sin A \sin B \mathbf{i}_y + \cos A \mathbf{i}_z \quad \left\{ \tan A = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2f} \quad \tan B = \frac{v}{u} \right\} \quad (72d)$$

で与えられる。反射波の波数ベクトル $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i}_x + p_y \mathbf{i}_y + p_z \mathbf{i}_z$ は次の2つの関係式から求められる。

$$\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{i}_z \times \mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{n} \quad (73a)$$

結果は

$$p_x = -\sin 2A \cos B, \quad p_y = -\sin 2A \sin B, \quad p_z = -\cos 2A \quad (73b)$$

となる。座標 (x, y, z) から (u, v, t) への変換に関係したヤコビアンは

$$J = \frac{D(t)}{D(0)} \quad D(t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = -\left[\frac{\cos^2 A}{f} t - 1 \right]^2 \quad (73c)$$

で与えられる。(73c)の導出は8a節に示してある。反射波の初期値（基準開口面上の値）は Snell の法則

$$\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_i + 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_i) \mathbf{n} \quad (74a)$$

から求められ、その直角座標成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E_{rx0} &= -\cos^2 A + \sin^2 A \cos 2B \\ E_{ry0} &= \sin^2 A \sin 2B \\ E_{rz0} &= \sin 2A \cos B \end{aligned} \quad (74b)$$

この結果幾何光学の表示式は

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r0} \left[1 - \frac{\cos^2 A}{f} t \right]^{-1} \exp[-jk(2f - \tau)] \quad (74c)$$

となる。(74c)の表示式は焦点 $t = f / \cos^2 A$ の近傍では正しくなくなる。焦点近傍の表示式を(39)から導出するのに必要な $J\partial(p_x, p_y)/\partial(x, y)$ に対する結果は

$$J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \frac{\cos^2 2A \cos^4 A}{f^2} \quad (75a)$$

となる。(75a)の導出は8a節に示してある。位相関数は

$$\begin{aligned} T &= S_0(u, v) + t - x(p_x, p_y, z)p_x - y(p_x, p_y, z)p_y \\ &= S_0(u, v) + \frac{z-w}{\sqrt{1-p_x^2-p_y^2}} - p_x u - p_y v - \frac{(p_x^2+p_y^2)(z-w)}{\sqrt{1-p_x^2-p_y^2}} \\ &= w - p_x u - p_y v + \sqrt{1-p_x^2-p_y^2}(z-w) \end{aligned} \quad (75b)$$

と求められる。関係式 $w - p_x u - p_y v - p_z w = w - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0 = 2f$ を利用すると反射波の表示式は

$$\begin{aligned} E_{r,i} &= \frac{k}{2\pi} \exp[-j2kf] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{r,i0} \left[\frac{\cos^2 2A \cos^4 A}{f^2} \right]^{-1/2} \exp[-jk(xp_x + yp_y + zp_z)] dp_x dp_y \\ &= \frac{k}{2\pi} \exp[-j2kf] \int_S E_{r,i0} \left[\frac{\cos^2 2A \cos^4 A}{f^2} \right]^{-1/2} \left[\frac{\cos^4 A \cos 2A}{f^2} \right] \exp[-jk(xp_x + yp_y + zp_z)] dudv \end{aligned} \quad (75c)$$

ここで $(i = x, y, z)$ であり、また関係式 $\partial(p_x, p_y)/\partial(u, v) = \cos^4 A \cos 2A / f^2$ を利用した。座標 (u, v) から角度 (A, B) に変数変換しさらに観測点を直角座標 (x, y, z) から球座標 (r, θ, ϕ) に置き換えると(75c)は

$$E_{r,i0} = \frac{j2kf}{\pi} \exp[-j2kf] \int_0^H \int_0^{2\pi} E_{r,i0} \exp[-jkr\{\sin \theta \sin 2A \cos 2A \cos(\phi - B) + \cos \theta \cos 2A\}] dAdB \quad (75d)$$

となる。ここで $H = \tan^{-1}(a/2f)$ であり、また $dudv = (4f^2 \sin A / \cos^3 A) dAdB$ を利用した。積分変数 B に関する積分は実行でき結果は次式のようになる。

$$\begin{aligned} E_{r,x} &= jkf \exp[-j2kf] [P(r, \theta) + Q(r, \theta) \cos 2\phi] \\ E_{r,y} &= jkf \exp[-j2kf] Q(r, \theta) \sin 2\phi \\ E_{r,z} &= 2kf \exp[-j2kf] R(r, \theta) \cos \phi \end{aligned} \quad (75e)$$

ここで

$$\begin{aligned} P(r, \theta) &= \int_0^{2H} J_0(kr \sin \theta \sin A) \exp[-jkr \cos \theta \cos A] \sin AdA \\ Q(r, \theta) &= \int_0^{2H} \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} J_2(kr \sin \theta \sin A) \exp[-jkr \cos \theta \cos A] \sin AdA \\ R(r, \theta) &= \int_0^{2H} \frac{\sin A}{1 + \cos A} J_1(kr \sin \theta \sin A) \exp[-jkr \cos \theta \cos A] \sin AdA \end{aligned} \quad (75f)$$

である。パラボラ反射鏡における焦点近傍の界表示については Minet and Thomas[16] および Ghobrial[17] により誘起電流に基づいた表示式が与えられているが(75)は彼らの結果と全く一致している。

8a. ヤコビアン の 導 出

波数ベクトル (p_x, p_y, p_z) および直角座標 (x, y, z) は次式で与えられる。

$$p_x = -\sin 2A \cos B, \quad p_y = -\sin 2A \sin B, \quad p_z = -\cos 2A, \quad \tan A = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{2f}, \quad \tan B = \frac{V}{U} \quad (76a)$$

$$x = U + p_x t, \quad y = V + p_y t, \quad z = W + p_z t \quad (76b)$$

これから次の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial U} &= -\frac{U}{2f} = -\tan A \cos B, & \frac{\partial W}{\partial V} &= -\frac{V}{2f} = -\tan A \sin B, & \frac{\partial A}{\partial U} &= \frac{1}{2f} \cos^2 A \cos B \\ \frac{\partial A}{\partial V} &= \frac{1}{2f} \cos^2 A \sin B, & \frac{\partial B}{\partial U} &= -\frac{1}{2f} \cot A \sin B, & \frac{\partial B}{\partial V} &= \frac{1}{2f} \cot A \cos B \end{aligned} \quad (76c)$$

さらにこれらの関係式を利用すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_x}{\partial U} &= -\frac{1}{f} \cos^2 A [\cos 2A \cos^2 B + \sin B], & \frac{\partial p_x}{\partial V} &= \frac{\partial p_y}{\partial U} = \frac{1}{4f} \sin^2 2A \sin 2B, \\ \frac{\partial p_y}{\partial V} &= -\frac{1}{f} \cos^2 A [\cos 2A \cos^2 B + \cos B] & \frac{\partial p_z}{\partial U} &= \frac{1}{f} \sin 2A \cos^2 A \cos B, \\ \frac{\partial p_z}{\partial V} &= \frac{1}{f} \sin 2A \cos^2 A \sin B\end{aligned}\quad (76d)$$

これらの関係式をヤコビアン の定義式に代入すると次式が得られる。

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(U, V, t)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial p_x}{\partial U} t & \frac{\partial p_y}{\partial U} t & \frac{\partial W}{\partial U} + \frac{\partial p_z}{\partial U} t \\ \frac{\partial p_x}{\partial V} t & 1 + \frac{\partial p_y}{\partial V} t & \frac{\partial W}{\partial V} + \frac{\partial p_z}{\partial V} t \end{vmatrix} = -\left[\frac{t}{f} \cos^2 A - 1\right]^2 \quad (76e)$$

また

$$\frac{1}{D(0)} \frac{\partial(p_x, p_y, z)}{\partial(U, V, t)} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(U, V)} = \frac{\cos^4 A \cos^2 2A}{f^2} \quad (76f)$$

である。次に $J(\partial(p_x, p_y)/\partial(x, y))$ の値を求める。(76b) を (x, y) が (p_x, p_y) の関数として x で微分すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial U}{\partial p_x} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_x} + \frac{1-p_y^2}{p_z^2}(z-W)\right] \frac{\partial p_x}{\partial x} + \left[\frac{\partial U}{\partial p_y} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_y} + \frac{1-p_x p_y}{p_z^2}(z-W)\right] \frac{\partial p_y}{\partial x} &= 1 \\ \left[\frac{\partial V}{\partial p_x} - \frac{p_y}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_x} + \frac{1-p_x p_y}{p_z^2}(z-W)\right] \frac{\partial p_x}{\partial x} + \left[\frac{\partial V}{\partial p_y} - \frac{p_y}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_y} + \frac{1-p_x^2}{p_z^2}(z-W)\right] \frac{\partial p_y}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (76g)$$

ここで $p_z = \sqrt{1-p_x^2-p_y^2}$ である。これから $\partial p_x/\partial x, \partial p_y/\partial x$ に対する表示式が得られる。同じようにして (76b) を y で微分すれば $\partial p_x/\partial y, \partial p_y/\partial y$ に対する表示式が得られる。結果は

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_x}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\partial V}{\partial p_y} - \frac{p_y}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_y} + \frac{(1-p_x^2)}{p_z^2} t \right], & \frac{\partial p_y}{\partial x} &= -\frac{1}{\Delta} \left[\frac{\partial V}{\partial p_x} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_x} + \frac{p_x p_y}{p_z^2} t \right] \\ \frac{\partial p_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\Delta} \left[\frac{\partial U}{\partial p_y} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_y} + \frac{p_x p_y}{p_z^2} t \right], & \frac{\partial p_y}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\partial U}{\partial p_x} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_x} + \frac{(1-p_y^2)}{p_z^2} t \right]\end{aligned}\quad (76h)$$

ここで

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[\frac{\partial V}{\partial p_y} - \frac{p_y}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_y} + \frac{(1-p_x^2)}{p_z^2} t \right] \left[\frac{\partial U}{\partial p_x} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_x} + \frac{(1-p_y^2)}{p_z^2} t \right] \\ &\quad - \left[\frac{\partial V}{\partial p_x} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_x} + \frac{p_x p_y}{p_z^2} t \right] \left[\frac{\partial U}{\partial p_y} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_y} + \frac{p_x p_y}{p_z^2} t \right]\end{aligned}\quad (76i)$$

である。これから直ちに

$$\frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial p_x}{\partial x} \frac{\partial p_y}{\partial y} - \frac{\partial p_x}{\partial y} \frac{\partial p_y}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \quad (76j)$$

となることわかる。(U, V, W) を (p_x, p_y) を使って表すと

$$(U, V, W) = -2f \frac{[1-p_z]}{\sqrt{p_x^2+p_y^2}} (p_x, p_y, -p_z) \quad p_z = \sqrt{1-p_x^2-p_y^2} \quad (76k)$$

となり、これから次式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial p_x} &= f \frac{2 \sin^2 A \sin^2 B - 1}{\cos^2 A \cos 2A}, & \frac{\partial U}{\partial p_y} &= -f \frac{\sin^2 A \sin 2B}{\cos^2 A \cos 2A}, & \frac{\partial V}{\partial p_x} &= -f \frac{\sin^2 A \sin 2B}{\cos^2 A \cos 2A} \\ \frac{\partial V}{\partial p_y} &= -f \frac{2 \sin^2 A \cos^2 B - 1}{\cos^2 A \cos 2A}, & \frac{\partial W}{\partial p_x} &= f \frac{\sin A \cos B}{\cos^3 A \cos 2A}, & \frac{\partial W}{\partial p_y} &= f \frac{\sin A \sin B}{\cos^3 A \cos 2A} \\ \frac{\partial U}{\partial p_x} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_x} &= -f \frac{\cos^2 2A \sin^2 B + \cos^2 B}{\cos^2 A \cos 2A}, & \frac{\partial V}{\partial p_y} - \frac{p_y}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_y} &= -f \frac{\cos^2 2A \cos^2 B + \sin^2 B}{\cos^2 A \cos 2A} \\ \frac{\partial V}{\partial p_x} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_x} &= -f \frac{\sin^2 A \sin 2B(1 + \cos 2A)}{\cos^2 A \cos 2A}, & \frac{\partial U}{\partial p_y} - \frac{p_x}{p_z} \frac{\partial W}{\partial p_y} &= -f \frac{\sin^2 A \sin 2B(1 + \cos^2 A)}{\cos^2 A \cos 2A}\end{aligned}\quad (76l)$$

これから Δ の値は

$$\Delta = \frac{f^2}{\cos^4 A \cos^2 2A} - \frac{2ft}{\cos^2 A \cos^2 2A} + \frac{t^2}{\cos^2 2A} = \frac{f^2}{\cos^2 2A \cos^4 A} J \quad (76m)$$

となり、結局

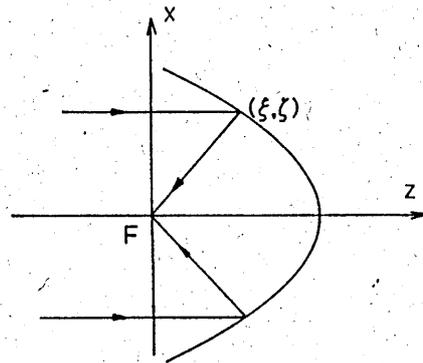
$$J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \frac{J}{\Delta} = \frac{\cos^2 A \cos^4 A}{f^2} \quad (76n)$$

が得られる。

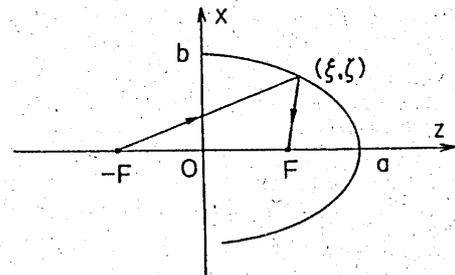
3.9 筒状表面からの反射波：垂直入射[18]

y-軸に無限に長い2次元の導体曲面による反射波について考える。曲面の方程式は $w = g(u)$ で表されているものとする。ここでは4種類の問題について考える。

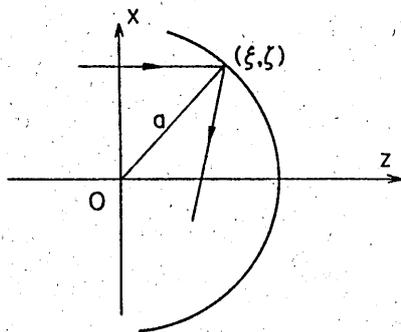
- | | | | |
|---------|-----|---------------------------|------------------------|
| case A: | 放物筒 | $w = f - u^2/4f$ | による平面波の反射 |
| case B: | 円筒 | $w = \sqrt{a^2 - u^2}$ | による平面波の反射 |
| case C: | 楕円筒 | $w = a\sqrt{1 - (u/b)^2}$ | による円筒波の反射 |
| case D: | 双曲筒 | $w = a\sqrt{1 + (u/b)^2}$ | による円筒波の反射 (波源を焦点においた時) |



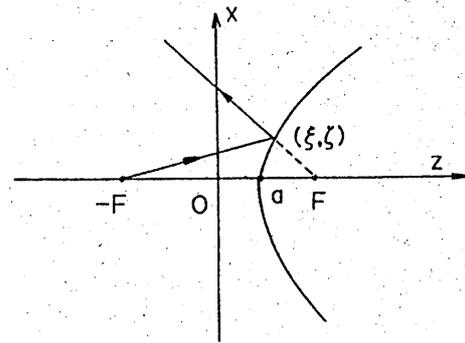
(a) parabolic cylinder



(c) elliptic cylinder



(b) circular cylinder



(d) hyperbolic cylinder

図11. ここで考えている筒状反射鏡の構造

ここで (u, w) は曲面上の点の直角座標である。case A, case Bの問題はすでに Kay and Keller[19]が停留点法を用いて焦点近傍でも成立する表示式を求めている。case Dは集束を含まない問題であるが負の caustic を含むのでここで取り上げることにする。入射波として考える平面波および円筒波は次式で与えられるものとする。

$$E_i = \exp[-jkz] \quad \text{平面波} \quad E_i = \frac{1}{j^4} H_0^{(2)}[k\sqrt{(z+f)^2 + x^2}] \quad \text{円筒波} \quad (77a)$$

曲面の単位法線ベクトル \mathbf{n} は

$$\mathbf{n} = \sin P \mathbf{i}_x + \cos P \mathbf{i}_z \quad \sin P = -\frac{g'(u)}{\sqrt{1+g'^2(u)}} \quad \cos P = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2(u)}} \quad (77b)$$

で与えられる。各々の場合についてもっと具体的に示すと次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \text{case A:} & \quad \cos P = \frac{2f}{\sqrt{u^2+4f^2}} \quad \sin P = \frac{u}{\sqrt{u^2+4f^2}} \\ \text{case B:} & \quad \cos P = \frac{w}{a} \quad \sin P = \frac{u}{a} \\ \text{case C:} & \quad \cos P = \frac{bw}{a\sqrt{R_1 R_2}} \quad \sin P = \frac{au}{b\sqrt{R_1 R_2}} \\ \text{case D:} & \quad \cos P = \frac{bw}{a\sqrt{R_1 R_2}} \quad \sin P = \frac{-au}{b\sqrt{R_1 R_2}} \end{aligned} \quad (77c)$$

ここで R_1, R_2 はそれぞれ曲面上の点 (u, w) から焦点 $z = -f, z = f$ までの距離である。
反射波の波数ベクトル $\mathbf{p} = p_{rx} \mathbf{i}_x + p_{ry} \mathbf{i}_y$ は次の関係式から求められる。

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{p}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{p}_r \times \mathbf{n} \quad (78a)$$

入射波の波数ベクトルを

$$\mathbf{p}_i = \sin A \mathbf{i}_x + \cos A \mathbf{i}_z \quad (78b)$$

と表すと \mathbf{p}_r は

$$\mathbf{p}_r = -\sin(2P - A) \mathbf{i}_x - \cos(2P - A) \mathbf{i}_z \quad (78c)$$

で与えられる。ここで平面波の垂直入射に対しては $A = 0$ であり、円筒波入射に対しては

$$\cos A = \frac{w+f}{\sqrt{(w+f)^2+u^2}} = \frac{w+f}{R_1} \quad \sin A = \frac{u}{R_1} \quad (78d)$$

である。この場合 Hamilton 方程式の解は

$$p_x = p_{x0}, \quad p_z = p_{z0}, \quad x = u + p_x t, \quad z = w + p_z t \quad (79a)$$

で与えられる。これらの表示式で $(p_{x0}, p_{z0}), (u, w)$ はそれぞれ $(p_x, p_z), (x, z)$ の初期値である。また t は光線に沿った長さを表すパラメータである。位相関数は

$$S = S_0 + t \quad t = p_x(x-u) + p_z(z-w) = \sqrt{(x-u)^2 + (z-w)^2} \quad (79b)$$

で与えられる。各々の場合の位相関数をもっと具体的に表せば次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \text{case A:} & \quad S = w + t \\ \text{case B:} & \quad S = a \cos P + t \\ \text{case C:} & \quad S = 2a - L_e \\ \text{case D:} & \quad S = 2a + L_h \end{aligned} \quad (79c)$$

ここで

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad L_{e,h} = \sqrt{(z - f_{e,h})^2 + x^2}, \quad f_{e,h} = \sqrt{a^2 \mp b^2} \quad (79d)$$

である。座標 (u, t) から (x, z) への変換のヤコビアンは

$$D(t) = \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, t)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial p_x}{\partial u} t & \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial p_z}{\partial u} t \\ p_x & p_z \end{vmatrix} = -\frac{\cos(P-A)}{\cos P} + \frac{\partial(2P-A)}{\partial u} t \quad (80a)$$

で与えられる。規格化したヤコビアンの場合の具体的な表示式および幾何光学の表示式を以下に列記する。

$$\begin{aligned}
 \text{case A: } & J = 1 - \frac{\cos^2 t}{f} = \frac{r}{r+t} & u(x, z) &= \sqrt{\frac{r+t}{r}} \exp[-jk(2f-r)] \\
 \text{case B: } & J = 1 - \frac{2t}{f} = \frac{a \cos P - 2t}{a \cos P} & u(x, z) &= \sqrt{\frac{a \cos P}{1-2t}} \exp[-jk(a \cos P + t)] \\
 \text{case C: } & J = 1 - \frac{t}{R_2} & u(x, z) &= \left(1 - \frac{t}{R_2}\right)^{-1/2} \exp[-jk(2a - L_e)] \\
 \text{case D: } & J = 1 + \frac{t}{R_2} & u(x, z) &= \left(1 + \frac{t}{R_2}\right)^{-1/2} \exp[-jk(2a - L_h)]
 \end{aligned} \tag{80b}$$

ここで r, L_e, L_h は (79d) で定義されている。

(80b) に示した幾何光学表示式は caustic 近傍では正しくなくなる。caustic で成立する表示式を (39) から得るには混合座標系 (x, p_z) を利用する。他の変数を次のようにこの混合座標で表す。

$$z(x, p_z) = w(x, p_z) - \frac{p_z}{\sqrt{1-p_z^2}} [x - u(x, p_z)], \quad p_x = -\sqrt{1-p_z^2}, \quad t = -\frac{x-u}{\sqrt{1-p_z^2}} \tag{81a}$$

また被積分関数 $J(\partial p_z / \partial z)$ を計算しなければならない。これは別の関係式 $[\partial(x, p_z) / \partial(u, t)] / D(0)$ から計算することもできる。両者から計算すれば結果の確認に有効である。いま

$$Q = J \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{1}{D(0)} \frac{\partial(x, p_z)}{\partial(u, t)} \tag{81b}$$

とおくと各々の場合の Q の値は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \text{case A: } & Q = \frac{1}{f} \sin^2 2P \cos^2 P \\
 \text{case B: } & Q = \frac{2}{w} (1-p_z^2) = 2 \frac{\sin^2 2P}{a \cos P} \\
 \text{case C: } & Q = \frac{\sin^2(2P-A)}{\cos(P-A)} \frac{d(2P-A)}{du} \cos P
 \end{aligned} \tag{81c}$$

case D は集束系ではないので考えていない。これらの結果を使えば caustic で成立する表示式は次のように求められる。

case A:

$$\begin{aligned}
 u(x, z) &= \sqrt{\frac{k}{j2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{1/2} [1-p_z^2]^{-3/4} \exp[-jk(2f + \sqrt{1-p_z^2}x + zp_z)] dp_z \\
 &= 2 \sqrt{\frac{2kf}{\pi}} \exp[-j2kf - j\pi/4] \int_{-D/2}^{D/2} \sec P \exp[-jkr \cos(2P - \theta)] dP
 \end{aligned} \tag{82a}$$

ここで $x = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, $D = \tan^{-1}(a/2f)$ である。D は開口の端に開き角を表わしている。

case B:

$$\begin{aligned}
 u(x, z) &= \sqrt{\frac{k}{j2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{w}{2(1-p_z^2)} \right]^{1/2} \exp[-jk(G + a \cos P)] dp_z \\
 &= \sqrt{\frac{ka}{\pi}} \int_{-D/2}^{D/2} \sqrt{\cos P} \exp[-jk(G + a \cos P)] dP
 \end{aligned} \tag{82b}$$

ここで $G = \sqrt{(z - a \cos P)^2 + (x - a \sin P)^2}$ である。

case C:

$$\begin{aligned}
 u(x, z) &= \sqrt{\frac{k}{j4\pi}} \exp[-j2ka] \int_{-\infty}^{\infty} \left[R_1 \sin^2(2P-A) \frac{d(2P-A)}{du} \frac{\cos P}{\cos(P-A)} \right]^{-1/2} \exp[-jk(xp_x + (z-f)p_z)] dp_z \\
 &= \sqrt{\frac{1}{j4\pi}} \exp[-j2ka] \int_{-X_0}^{X_0} \left[R_1 R_2 \left(1 - \frac{u^2}{b^2}\right) \right]^{-1/2} \exp[-jkr \cos(2P-A-\theta)] dP
 \end{aligned} \tag{82c}$$

ここで

$$x = r \sin \theta, \quad z - f = r \cos \theta, \quad dp_z = \sin(2P - A) \frac{d(2P - A)}{du}$$

$$\frac{d(2P - A)}{du} = \frac{1}{R_2 w}, \quad \frac{\cos P}{\cos(P - A)} = \frac{a}{w}$$

である。case A, case B の表示式は Kay and Keller[19] の求めたものと一致する。case A, case B の数値結果は [19] により与えられているのでここでは case C の場合に限定する。図 1 2 には z 軸、x 軸に沿った界分布を示している。図の X_0 は開口の開き角であり、 $2b$ は楕円筒の短軸である。また横軸は座標軸を表す。即ち z 軸に沿った界分布に対しては z 座標、x 軸に沿った界分布に対しては x 座標を表す。

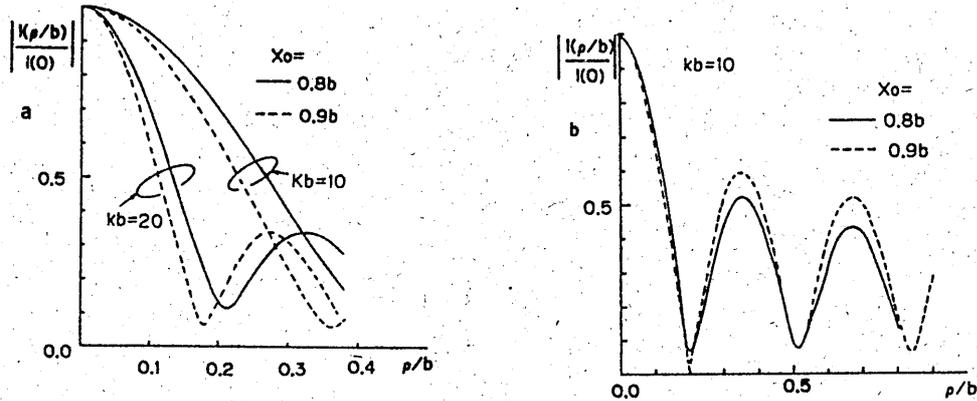


図 1 2. z 軸、x 軸に沿った界分布

3.10 放物筒および円筒による平面波の反射波：斜め入射[20]

10a. 幾何光学表示式

y 軸に無限に長い放物筒および円筒に平面波が斜めに入射した時の反射波の性質について調べる。反射面の方程式は前節でも与えてあるが便宜上改めて示す事にする。

case A:	$w = f - \frac{u^2}{4f}$	放物筒	(83)
case B:	$w = \sqrt{a^2 - u^2}$	円筒	

ここで (u, w) は曲面上の点の直角座標である。入射波は次式で表されるものとする。

$$E_i = \exp[-jk(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)] \quad (84a)$$

従って入射波の波数ベクトルは $\mathbf{p}_i = \sin \theta_0 \mathbf{i}_x + \cos \theta_0 \mathbf{i}_z$ となる。曲面の単位法線ベクトル \mathbf{n} は

$$\mathbf{n} = \sin P \mathbf{i}_x + \cos P \mathbf{i}_z \quad \sin P = -\frac{g'(u)}{\sqrt{1+g'^2(u)}} \quad \cos P = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2(u)}} \quad (84b)$$

で与えられる。各々の場合についてもっと具体的に示すと次式のようなになる。

case A:	$\cos P = \frac{2f}{\sqrt{u^2 + 4f^2}}$	$\sin P = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4f^2}}$	(84c)
case B:	$\cos P = \frac{w}{a}$	$\sin P = \frac{u}{a}$	

反射波の波数ベクトル $\mathbf{p} = p_{rx} \mathbf{i}_x + p_{ry} \mathbf{i}_y$ は次の関係式から求められる。

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{p}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{p}_r \times \mathbf{n} \quad (85a)$$

結果は

$$\mathbf{p}_r = -\sin(2P - \theta_0) \mathbf{i}_x - \cos(2P - \theta_0) \mathbf{i}_z \quad (85b)$$

で与えられる。Hamilton 方程式の解は次式で与えられる。

$$p_x = p_{x0}, \quad p_z = p_{z0}, \quad x = u + p_x t, \quad z = w + p_z t \quad (86a)$$

各々の場合の位相関数を具体的に表せば次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \text{case A:} & \quad S = w + t \\ \text{case B:} & \quad S = a \cos P + t \end{aligned} \quad (86b)$$

座標 (u, t) から (x, z) への変換のヤコビアンは

$$D(t) = \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, t)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial p_x}{\partial u} t & \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial p_z}{\partial u} t \\ p_x & p_z \end{vmatrix} = -\frac{\cos(P - \theta_0)}{\cos P} + \frac{\partial(2P - \theta_0)}{\partial u} t \quad (87a)$$

で与えられるこれを使えば幾何光学表示式が得られる。各々の場合の幾何光学の表示式を以下に列記する。

$$\begin{aligned} \text{case A:} \quad E_r(x, z) &= \left[1 - \frac{t \cos^3 P}{f \cos(P - \theta_0)} \right]^{-1/2} \exp[-jk(2f - w) \cos(2P - \theta_0) - jkt] \\ \text{case B:} \quad E_r(x, z) &= \left[1 - \frac{2t}{a \cos(P - \theta_0)} \right]^{-1/2} \exp[-jka \cos(P - \theta_0) - jkt] \end{aligned} \quad (87b)$$

垂直入射の場合は前節と結果に帰着する。

10b. caustic 近傍の表示式

(80b) に示した幾何光学表示式は caustic 近傍では正しくなくなる。caustic で成立する表示式を得るには混合座標系 (x, p_z) を利用する。他の変数を次のようにこの混合座標で表す。

$$z(x, p_z) = w(x, p_z) - \frac{p_z}{\sqrt{1 - p_z^2}} [x - u(x, p_z)], \quad p_x = -\sqrt{1 - p_z^2}, \quad t = -\frac{x - u}{\sqrt{1 - p_z^2}} \quad (88a)$$

また被積分関数 $J(\partial p_z / \partial z)$ を計算しなければならない。いま

$$Q = J \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{1}{D(0)} \frac{\partial(x, p_z)}{\partial(u, t)} \quad (88b)$$

とおくと各々の場合の Q の値は次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \text{case A:} \quad Q &= \frac{-\sin^2(2P - \theta_0)}{f \cos(P - \theta_0)} \\ \text{case B:} \quad Q &= -2 \frac{\sin^2(2P - \theta_0)}{a \cos(P - \theta_0)} \end{aligned} \quad (89a)$$

位相関数を混合座標 (x, p_z) で表せば次式のようなになる。

$$\begin{aligned} T(x, p_z) &= S_0(u) + t - z(x, p_z) p_z = u \sin \theta_0 + w \cos \theta_0 - \frac{x - u}{\sqrt{1 - p_z^2}} - w p_z - p_z^2 \frac{(x - u)}{\sqrt{1 - p_z^2}} \\ &= u \sin \theta_0 + w \cos \theta_0 - [w p_z + \sqrt{1 - p_z^2} (x - u)] \\ &= \frac{2f \cos(P - \theta_0)}{\cos P} - \sqrt{1 - p_z^2} x \quad \text{放物筒} \\ &= 2a \cos(P - \theta_0) - \sqrt{1 - p_z^2} x \quad \text{円筒} \end{aligned} \quad (89b)$$

これらの結果を使えば caustic で成立する表示式は次のように求められる。

casA:

$$E_r(x, z) = \sqrt{\frac{2kf}{\pi}} \exp[-j2kf - j\pi/4] \int_{-D/2}^{D/2} \left[\frac{\cos(P - \theta_0)}{\cos^3 P} \right]^{-1/2} \exp[-jkr \cos(2P - \theta_0 - \theta) - j2kf \frac{\cos(P - \theta_0) - \cos P}{\cos P}] dP \quad (90a)$$

caseB:

$$E_r(x, z) = \sqrt{\frac{ka}{\pi}} \exp[-j\pi/4] \int_{-D/2}^{D/2} [\cos(P - \theta_0)]^{1/2} \exp[-jkr \cos(2P - \theta_0 - \theta) - j2ka \cos(P - \theta_0)] dP \quad (90b)$$

ここで $x = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, $D = \tan^{-1}(a/2f)$ である。D は開口の端に開き角を表わしている。観測点が caustic から十分離れているときは (90) に停留点法を適用すれば幾何光学表示式 (87) が得られる。(90) に類似した表示式は Huygens-Kirchhoff の原理に基づいて求める事ができる。結果は次式のようなになる。

caseA:

$$E_r(x, z) = f \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \exp[-j2kf - j\pi/4] \int_{-D/2}^{D/2} t^{-1/2} \left[\frac{\cos(P - \theta_0)}{\cos^3 P} \right]^{-1/2} \exp[-jkr \cos(2P - \theta_0 - \theta) - j2kf \frac{\cos(P - \theta_0) - \cos P}{\cos P}] dP \quad (91a)$$

caseB:

$$E_r(x, z) = a \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{-D/2}^{D/2} \left[\frac{\cos(P - \theta_0)}{\sqrt{t}} \right] \exp[-jkr \cos(2P - \theta_0 - \theta) - j2ka \cos(P - \theta_0)] dP \quad (91b)$$

放物筒の caustic $t = f \cos(P - \theta_0) / \cos^3 P$ の近傍では (91a) は (90a) に一致する。また円筒に対してはやはり caustic $t = (a/2) \cos(P - \theta_0)$ 近傍では (91b) は (90b) に一致する。

10c. caustic の方程式

caustic の方程式は幾何光学表示式の振幅の逆数を 0 とおくことにより直ちに求めることができる。結果は

$$t = f \frac{\cos(P - \theta_0)}{\cos^3 P} \quad \text{放物筒} \quad t = \frac{a}{2} \cos(P - \theta) \quad \text{円筒} \quad (92a)$$

Hamilton 方程式の解を利用すると放物筒に対する表示式は直角座標を使って

$$x = f \sin \theta_0 \frac{\cos(3P - \theta_0)}{\cos^3 P} \quad z = -f \sin \theta_0 \frac{\sin(3P - \theta_0)}{\cos^3 P} \quad (92b)$$

または円筒座標を使って

$$r = f \frac{\sin \theta_0}{\cos[(\pi/2 + \theta - \theta_0)/3]} \quad \left(-\frac{3D}{2} - \frac{\pi}{2} + \theta_0 < \theta < \frac{3D}{2} - \frac{\pi}{2} + \theta_0 \right) \quad (92c)$$

と表すこともできる。(92c) に相当した表示式は異なる方法により Scarborough[21] が導いているが両者が一致することを数値的に確かめてある。円筒の caustic 方程式は

$$x = \frac{a}{4} \{3 \sin P - \sin(3P - 2\theta_0)\} \quad z = \frac{a}{4} \{3 \cos P - \cos(3P - 2\theta_0)\} \quad (92d)$$

と表される。垂直入射 $\theta_0 = 0^\circ$ の場合は上式はもっと簡単な形

$$r = \frac{a}{2^{3/2}} [(1 - \cos \theta)^{1/3} + (1 + \cos \theta)^{1/3}]^{3/2} \quad (92e)$$

に表すことができる。導出は例 3-9 に示してある。cusp 点は $\partial[x^2 + z^2]/\partial P = 0$ から次のように求められる。

$$x = \frac{a}{2} \sin \theta_0, \quad z = \frac{a}{2} \cos \theta_0 \quad (92f)$$

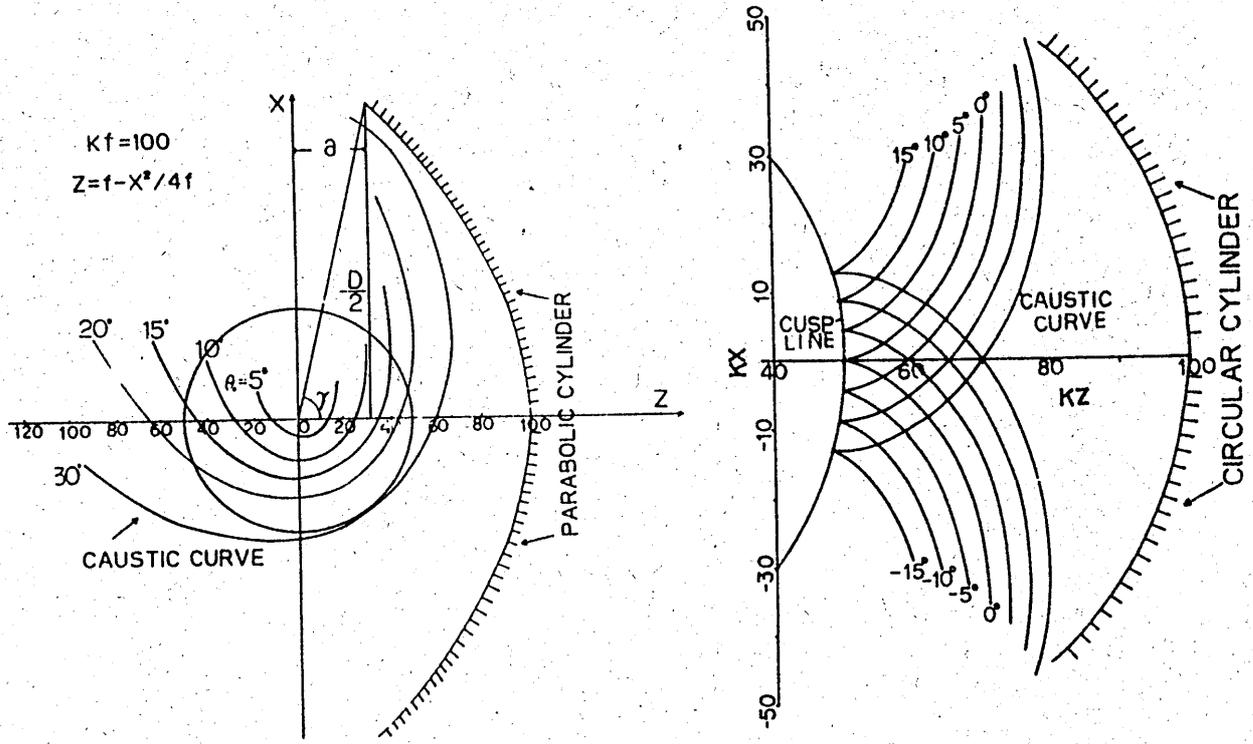


図 13. 放物筒および円筒に平面波が斜めに入射した時の caustic 曲線の変化

10d. (87) の停留点による解

ここでは (87) の積分を停留点法を適用して近似的に計算する。

case A:

(87) の指数部を

$$L(P) = r \cos(2P - \theta_0 - \theta) - 2f \frac{\cos(P - \theta_0)}{\cos P} \quad (93a)$$

とおくと停留点は

$$L'(P_s) = -2r \sin(2P_s - \theta_0 - \theta) - 2f \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 P_s} = 0 \quad (93b)$$

から求められる。停留点における L の値、および 2 次、3 次の微係数は次式ようになる。

$$\begin{aligned} L(P_s) &= -r \cos(2P_s - \theta_0 - \theta) - w \cos(2P_s - \theta) + 2f \sin(2P_s - \theta_0) \tan P \\ &= -(2f - w) \cos(2P_s - \theta_0) - t \\ L''(P_s) &= -4r \cos(2P_s - \theta_0 - \theta) - 4f \frac{\sin P_s \sin \theta_0}{\cos^3 P_s} = 4 \left[t - f \frac{\cos(P_s - \theta_0)}{\cos^3 P_s} \right] \\ L'''(P_s) &= -12f \frac{\sin \theta_0}{\cos^4 P_s} \end{aligned} \quad (93c)$$

caustic から離れた点では $L''(P_s) \neq 0$ であり、標準的な停留点法を適用することができる。結果は幾何光学表示式に一致する。caustic 上では $L''(P_s) = 0$ となり、この条件のもとで (87) を計算すると

$$Er = \sqrt{\frac{6}{\pi}} 2^{-1/3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) (kf)^{1/6} [\cos(P_s - \theta_0)]^{1/2} [\cos P_s \sin^2 \theta_0]^{-1/6} \exp[-j(2f - w) \cos(2P_s - \theta_0) - jkt] \quad (93d)$$

となる。

case B:

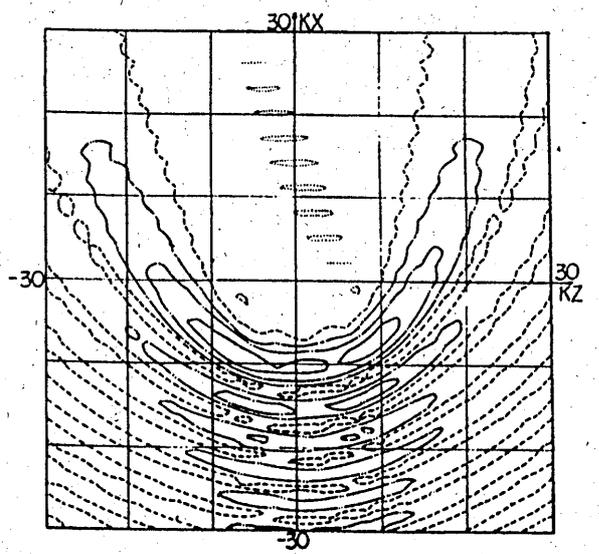
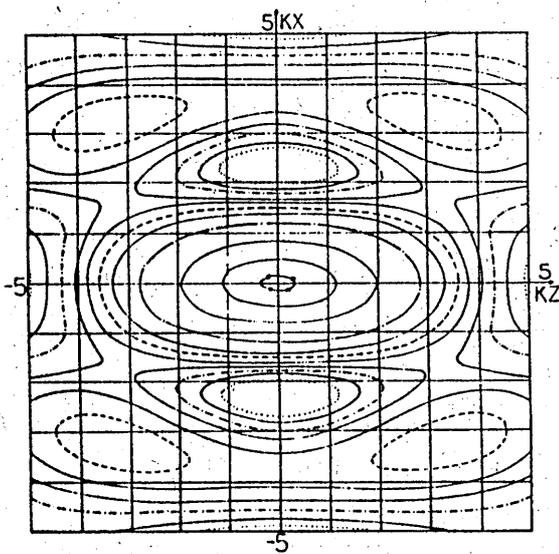
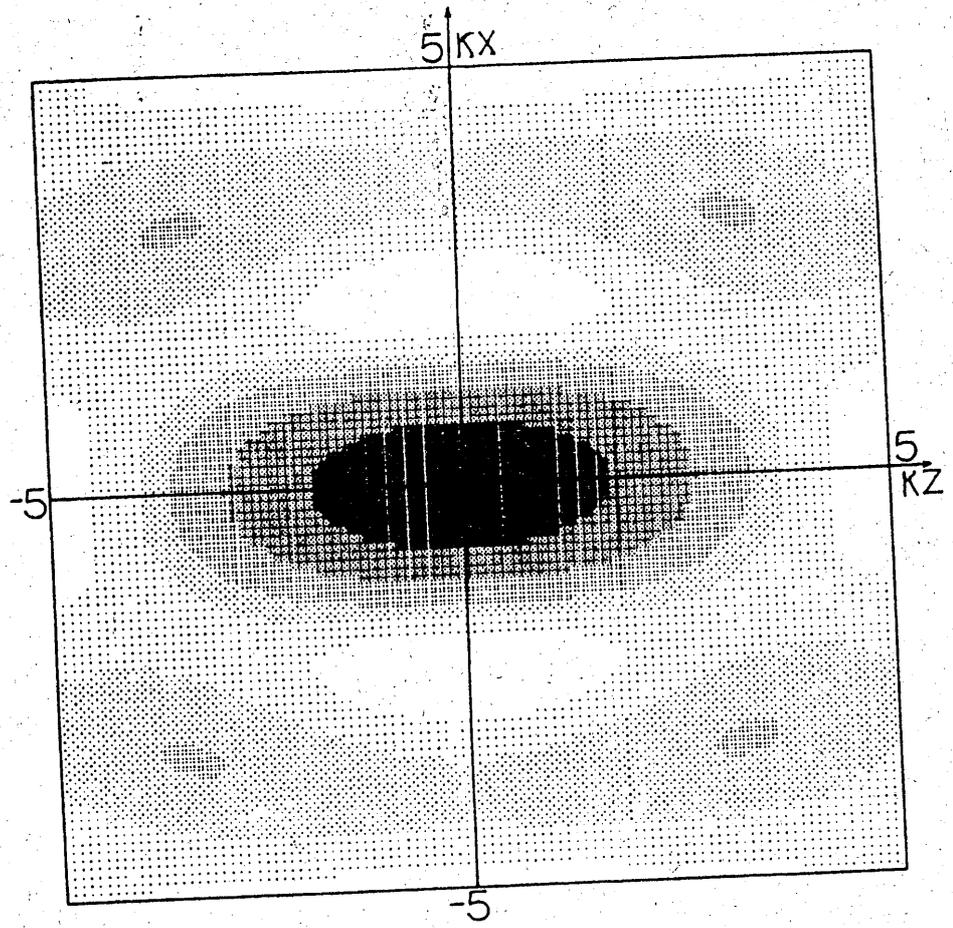


図14. 放物筒に平面波が斜めに入射した時の caustic 近傍の界分布

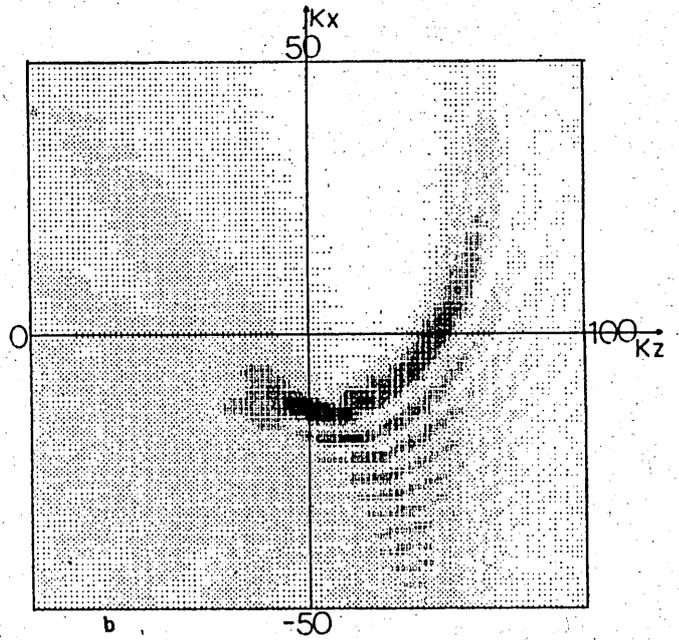
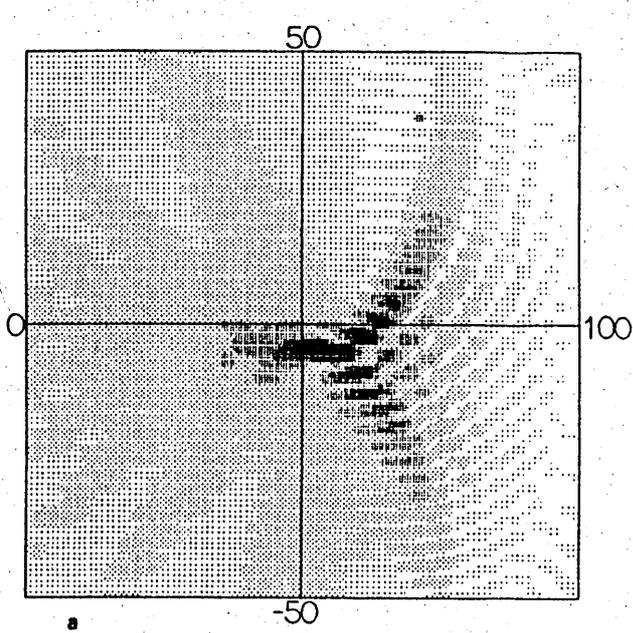
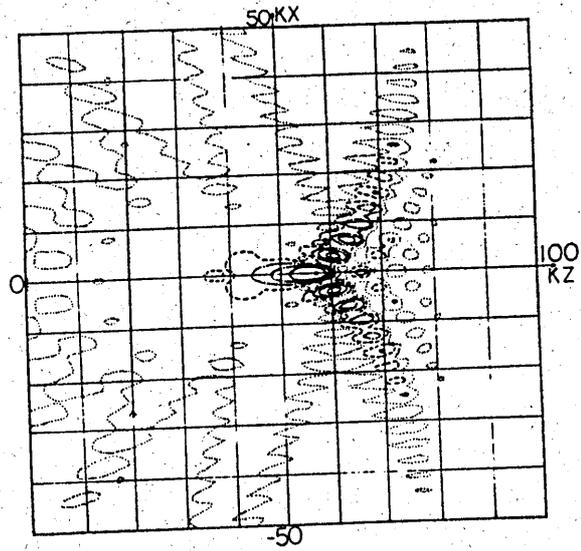


図15. 円筒に平面波が斜めに入射した時の caustic 近傍の界分布

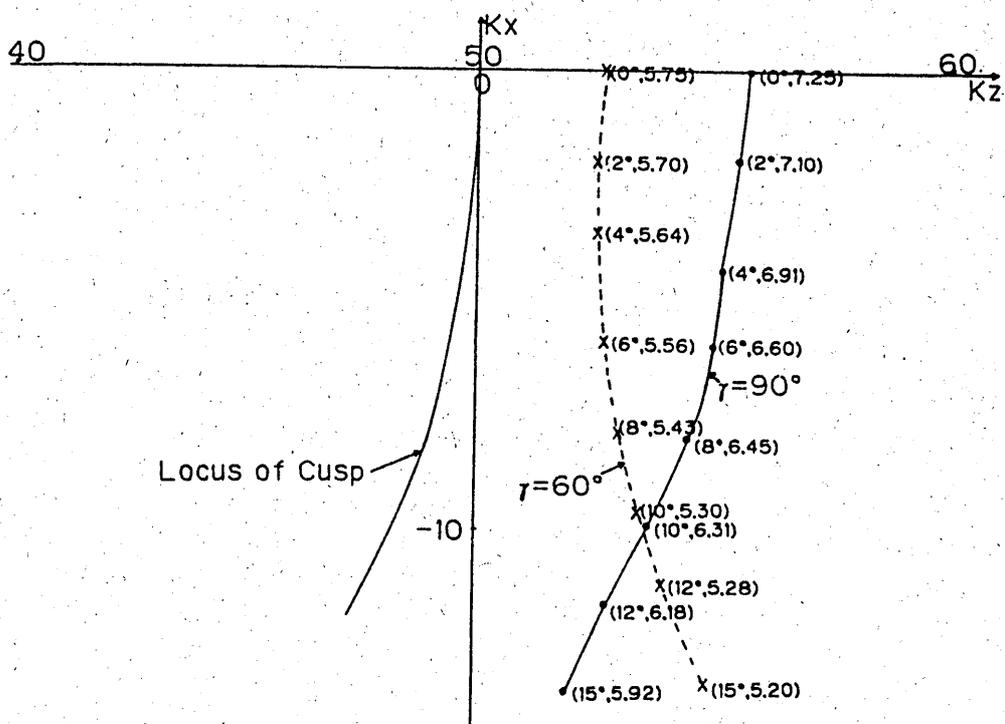
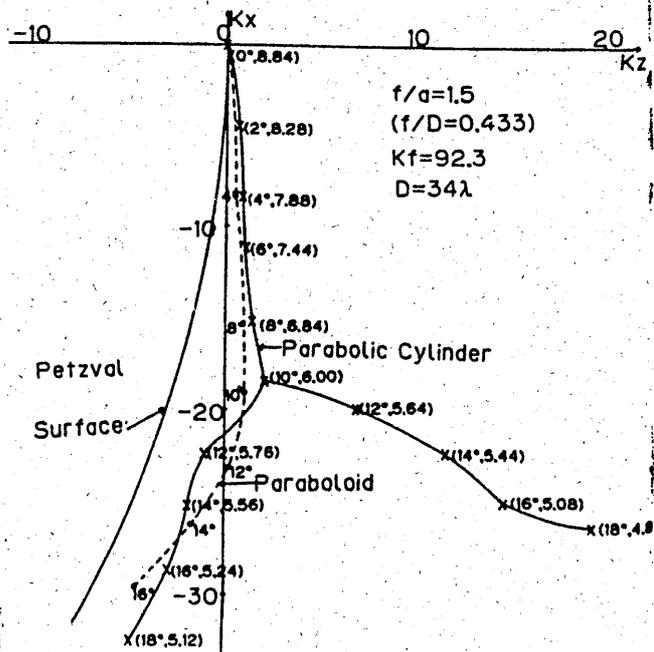
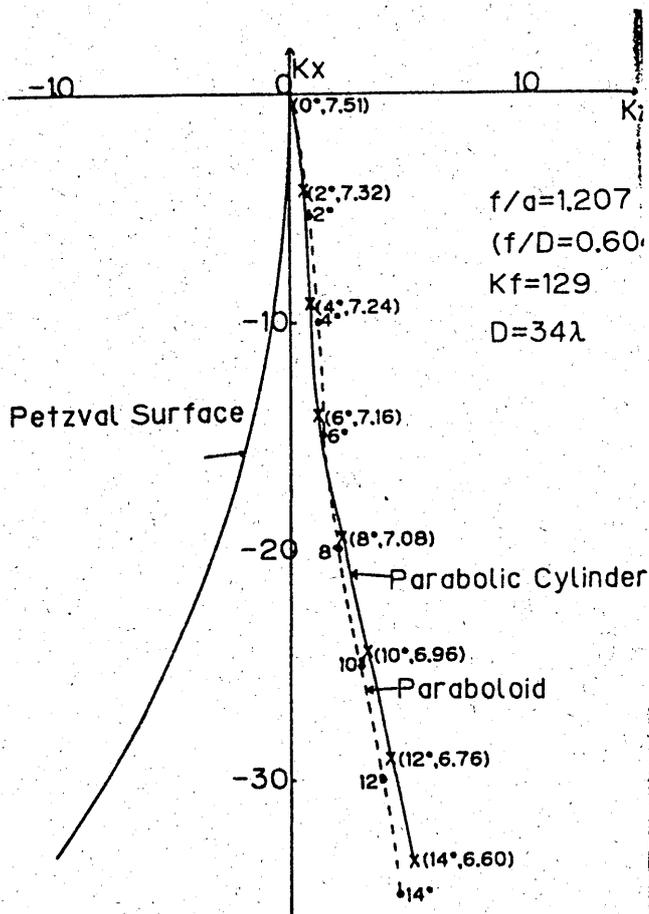


図16. 界のピーク値の入射角に対する変化

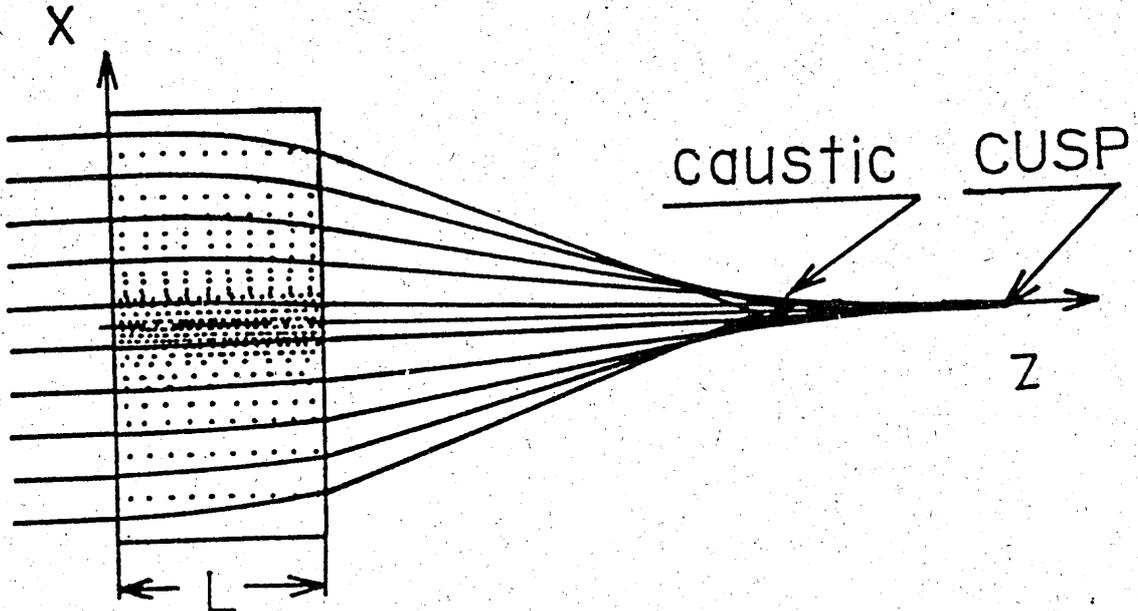


図 17. Wood レンズおよび平面波が入射した時の集束の様子

停留点における位相関数および微係数は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 L(P_s) &= r \cos(2P_s - \theta_0 - \theta) - 2a \cos(P_s - \theta_0) = -t - a \cos(P_s - \theta_0) \\
 L'(P_s) &= -2r \sin(2P_s - \theta_0 - \theta) + 2a \sin(P_s - \theta_0) = 0 \\
 L''(P_s) &= -4r \cos(2P_s - \theta_0 - \theta) - 2a \cos(P_s - \theta_0) = -4t + 2a \cos(P_s - \theta_0) \\
 L'''(P_s) &= -8r \sin(2P_s - \theta_0 - \theta) + 2a \sin(P_s - \theta_0) = -6a \sin(P_s - \theta_0) \\
 L^{(4)}(P_s) &= -16r \cos(2P_s - \theta_0 - \theta) + 2a \cos(P_s - \theta_0)
 \end{aligned} \tag{94a}$$

この場合も caustic から離れた点では停留点法による結果は幾何光学表示式に一致する。 $L''(P_s) = 0$, $L'''(P_s) \neq 0$ を満足する caustic 点では (87) の積分値は

$$\sqrt{\frac{3}{\pi}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) [\cos(P_s - \theta_0)]^{1/2} [\sin(P_s - \theta_0)]^{-1/3} \exp[-jkt - jka \cos(P_s - \theta_0) + j\pi/4] \tag{94b}$$

となる。cusp 点では $z = (a/2) \cos \theta_0$, $x = (a/2) \sin \theta_0$, $L'''(P_s) = 0$, $L^{(4)}(P_s) = -6$ であり、このときの積分値は

$$E_r = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) (ka)^{1/4} \exp\left[-j \frac{3ka}{2} - j \frac{3\pi}{8}\right] \tag{94c}$$

となる。Kay and Keller[19]は垂直入射の場合の結果を与えてあるが、その特別の場合は (94) の結果と一致する。また cusp における停留点法による結果は入射角に無関係になる。

10e. 数値結果

図 1 3 は放物筒、円筒に平面波が斜めに入射したときの caustic 曲線を示したものである。パラメータは入射角である。放物筒の場合は斜め入射の場合は焦点から離れた点に広い範囲に広がるようになる。垂直入射の場合は焦点になるがこれは caustic の特別の場合で非常に不安定であることがわかる。円筒の場合は caustic 曲線の入射角に対する依存性は比較的単純であり、cusp は半径 $r = a/2$ の円に沿って移動する。

図 1 4 は $kf = 100$, $D = \cos^{-1}[a/(2f - a)] = \pi/2$ の放物筒に平面波が垂直あるいは斜めに入射したときの caustic 近傍の界分布を等振幅線および濃淡のグラフで示したものである。図で暗い部分は界の強い部分である。円筒に対する対応した結果を図 1 5 に示してある。

図 1 6 は界のピーク値が入射角によってどのように変化するかを計算したものである (3次元の問題に対する議論は[22],[23]を参照のこと)。

3.11 Wood レンズの焦点近傍の界表示式

11a. 界表示式の導出[24]

Wood レンズは複写器械などに実用化されているが、その焦点近傍の界分布に対する性質についての研究はほとんどなされていない。ここではいままで述べてきた Maslov の考えを適用して焦点近傍の界分布も求め方および界分布の性質について議論する。また理論を確かめるために超音波による simulation[25]を行った。図 17 に示すような Wood レンズについて考える。レンズの誘電率分布は

$$\epsilon = \epsilon_c [1 - b^2(x^2 + y^2) + cb^4(x^2 + y^2)^2] \quad (95a)$$

で表されるものとする。レンズの厚さは L とする。パラメータ b, c はレンズの焦点距離に関係する。光線の軌跡を決める Hamilton の方程式は

$$\frac{dx}{dt} = p_x, \quad \frac{dy}{dt} = p_y, \quad \frac{dz}{dt} = p_z \quad (95b)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial y}, \quad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \quad (95c)$$

(95a) の分布で $c = 0$ の場合の (95c) の解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \psi, & y &= \eta \cos \psi, & z &= p_z t \\ p_x &= -\beta \xi \sin \psi, & p_y &= -\beta \eta \sin \psi, & p_z &= \sqrt{\epsilon_c - \beta^2 r_0^2}; & \psi &= \beta t \quad r_0^2 = \xi^2 + \eta^2 \end{aligned} \quad (95d)$$

パラメータ c が非常に小さいときは次の近似式が成立する。

$$\begin{aligned} x &= \xi[(1+g) \cos \psi - g \cos 3\psi], & y &= \eta[(1+g) \cos \psi - g \cos 3\psi], & z &= p_z t \\ p_x &= -\beta \xi[(1+g) \sin \psi - 3g \sin 3\psi], & p_y &= -\beta \eta[(1+g) \sin \psi - 3g \sin 3\psi], \\ p_z &= \sqrt{\epsilon_c(1 - b'^2 r_0^2 + c'b'^4 r_0^4)}, & g &= \frac{c'b'^2 r_0^2}{4}, & b' &= \lambda b, & c' &= \kappa c \end{aligned} \quad (95e)$$

上式で (ξ, η はレンズの前面の屈折点の直角座標である。パラメータ λ, κ は異なった方法によるもっと正確な解に近い解を与えるように調整するためのものである。これについては後で議論する。レンズの後面の屈折点の座標およびその点における波数ベクトルは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi \cos \psi_1, & \eta_1 &= \eta \cos \psi_1, & \zeta_1 &= L & \psi_1 &= \beta t_1 \\ p_{x0} &= -\beta \xi \sin \psi_1, & p_{y0} &= -\beta \eta \sin \psi_1, & p_{z0} &= \sqrt{\epsilon_c - \beta^2 r_0^2}, & p_{z0} t_1 &= L \end{aligned} \quad (96a)$$

レンズを過ぎた後は光線は直線に沿ってすすみ、これはつぎのように表される。

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 + p_{x1} t, & y &= \eta_1 + p_{y1} t, & z &= \zeta_1 + p_{z1} t \\ p_{x1} &= p_{x0}, & p_{y1} &= p_{y0}, & p_{z1} &= \sqrt{1 - p_{x1}^2 - p_{y1}^2} = \sqrt{1 - \beta^2 r_0^2 \sin^2 \psi_1} \end{aligned} \quad (96b)$$

ここで t はレンズの後面から出た光線に沿った長さを表すパラメータである。これらの関係式を利用して幾何光学表示式および caustic で成立する表示式を導くことができる。導出は今までの議論と同じなので結果だけを示す事にする。幾何光学表示式は

$$u(x, y, z) = [\Xi_2 J]^{-1/2} \exp[-jk(\Psi_0 + t)] \quad (97a)$$

ここで

$$J = \left(-\frac{\beta \sin \psi_1}{\cos \psi_1} t + 1 \right) \left[-\frac{\beta \cos \psi_1}{\Xi_2 p_{z1}^2} \left(\sin \psi_1 + \frac{\beta^3 L r_0^2}{p_{z0}} \cos \psi_1 \right) t + 1 \right] \quad (97b)$$

$$\Xi_2 = \cos^2 \psi_1 - \frac{\beta^3 r_0^2 L}{p_{z0}^3} \sin \psi_1 \cos \psi_1, \quad \Psi_0 = \epsilon_c \left(1 - \frac{b^2 r_0^2}{2} t_1 - \frac{\beta r_0^2}{4} \sin 2\psi_1 \right) \quad (97c)$$

である。caustic 近傍で成立する表示式は $c = 0$ の場合は

$$\begin{aligned} u(r, z) &= k \int_0^a T(r_0) \beta \sin \psi_1 \left[\sin \psi_1 + \frac{\beta^3 r_0^2 L}{p_{z0}^3} \cos \psi_1 \right]^{1/2} J_0(k\beta r r_0 \sin \psi_1) \exp[-jk\Psi_2] r_0 dr_0 \\ \Psi_2 &= \Psi_0 + \beta r_0^2 \sin \psi_1 \cos \psi_1 + \sqrt{1 - \beta^2 r_0^2 \sin^2 \psi_1} (z - L) \end{aligned} \quad (98a)$$

で与えられ、 c が小さいときの表示式は次式のようになる。

$$u(r, z) = k \int_0^a T(r_0) S^{1/2} J_0[k\beta(1+g)\sin\psi_1 - 3g\sin 3\psi_1] \exp[-jk\Psi_4] r_0 dr_0 \quad (98b)$$

$$\begin{aligned} S = & \frac{\beta^2}{\Xi_4^2} \left[(1+8g)\sin^2\psi_1 \cos^2\psi_1 - 4g\sin^2\psi_1 \cos\psi_1 \cos 3\psi_1 - 12g\sin\psi_1 \cos^2\psi_1 \sin 3\psi_1 \right. \\ & - \frac{\beta^3 L r_0^2}{p_{z0}^3} \left\{ (1-2g)(\sin^2\psi_1 - \cos^2\psi_1) - 2g(3\sin\psi_1 \sin 3\psi_1 - 5\cos\psi_1 \cos 3\psi_1) \right\} \\ & \quad \times (\sin\psi_1 \cos\psi_1 + 9\sin 3\psi_1 \cos 3\psi_1) \\ & + \frac{\beta^3 L r_0^2}{p_{z0}^3} \left\{ (1-6g)(\sin^2\psi_1 - 3\cos^2\psi_1) + 3g(\sin^2\psi_1 - \cos^2\psi_1) \right\} (\sin\psi_1 \cos 3\psi_1 + 3\sin 3\psi_1 \cos\psi_1) \\ & \quad - \frac{\beta^6 L^2 r_0^4}{p_{z0}^6} (1 - cb^2 r_0^2) \sin^2\psi_1 \cos^2\psi_1 \Big] \end{aligned} \quad (98c)$$

$$\Xi_4 = \Xi_2 + 4cb^2 r_0 \left(\sin\psi_1 + \frac{\beta^3 L r_0^2}{p_{z0}^3} \cos\psi_1 \right) \sin\psi_1 \cos^2\psi_1$$

$$\begin{aligned} \Psi_4 = & \Psi_0 + \beta r_0^2 \left[(1+g)\sin\psi_1 - 3g\sin 3\psi_1 \right] \left[(1+g)\cos\psi_1 - 3g\cos 3\psi_1 \right] \\ & + \left[1 - \beta^2 r_0^2 ((1+g)\sin\psi_1 - 3g\sin 3\psi_1)^2 \right]^{1/2} (z-L) + \frac{5}{2} \epsilon_c g t_1 - \frac{\beta^2 r_0 g}{8} \sin 4\psi_1 \end{aligned} \quad (98d)$$

ここで a はレンズの半径であり、また他のパラメータは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} T(r_0) = T_1 T_2 \quad T_1 = & \frac{2\sqrt{\epsilon_c - \beta^2 r_0^2}}{1 + \sqrt{\epsilon_c - \beta^2 r_0^2}}, \quad T_2 = \frac{2\sqrt{\epsilon_c - \beta^2 r_0^2} \cos^2\psi_1 \cos\theta_{i2}}{\cos\theta_{i2} + \sqrt{\epsilon_c - \beta^2 r_0^2} \cos^2\psi_1 \cos\theta_{i2}} \\ \theta_{i2} = \tan^{-1} \frac{\beta r_0 \sin\psi_1}{\sqrt{\epsilon_c - \beta^2 r_0^2}} \quad \theta_{t2} = \tan^{-1} \frac{\beta r_0 \sin\psi_1}{\sqrt{1 - \beta^2 r_0^2} \sin^2\psi_1} \quad t_1 = & \frac{L}{\sqrt{\epsilon_c - \beta^2 r_0^2}} \end{aligned} \quad (98e)$$

ここで θ_{i2}, θ_{t2} はレンズの後面から出る光線の入射角、屈折角である。

11b. 集束の弱いときの近似

Wood レンズの焦点距離が比較的大きいときは $b^2(\xi^2 + \eta^2) \ll 1$ が成立する。この条件を使うと積分の導出は簡単化される。導出の過程は省略して結果のみを示すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} u(r, z) = k\beta b L \exp[-jk(z-L)] \int_0^a T(r_0) (1 + b^2 r_0^2) J_0(k\beta b L r_0 r) \exp[-jk\Psi'] r_0 dr_0 \\ \Psi' = \sqrt{\epsilon_c} L \left[1 + \frac{b^2 r_0^2}{2} (1 - b^2 L^2) \right] - \frac{\beta^2 b^2 L^2 r_0^2}{2} (z-L) \end{aligned} \quad (99)$$

ここで $T(r_0)$ は (98e) で与えられている透過係数である。 $b^2 r_0^2$ に比例する項を無視すると $T(r_0), \Psi'$ は定数となり、この場合は (99) はよく知られた Airy-パターン $(k\beta b L) \exp[-jk(z-L)] J_1(k\beta b L r a) / r$ になる。

11c. 数値結果

caustic 曲線

幾何光学表示式は caustic で特異性を示す。caustic の方程式は (97a) のヤコビアンを 0 と置く事により得る事ができる。具体的な表示式は次式のようになる。

$$x_{c1} = 0, \quad y_{c1} = 0, \quad z_{c1} = L + \frac{\sqrt{1 - \beta^2 r_0^2} \sin^2\psi_1 \cos\psi_1}{\beta \sin\psi_1} \quad (100a)$$

$$x_{c2} = \xi \cos\psi_1 - p_{z1}^2 - Q p_{z1}^2 \xi \sin\psi_1, \quad y_{c2} = \eta \cos\psi_1 - Q p_{z1}^2 \eta \sin\psi_1 \quad z_{c2} = L + \frac{Q}{\beta} p_{z1}^3 \quad (100b)$$

$$Q = \frac{C}{D} \quad C = \cos\psi_1 - \frac{\beta^3 r_0 2L}{p_{z0}^3} \sin\psi_1, \quad DC = \sin\psi_1 + \frac{\beta^3 r_0 2L}{p_{z0}^3} \cos\psi_1 \quad (100c)$$

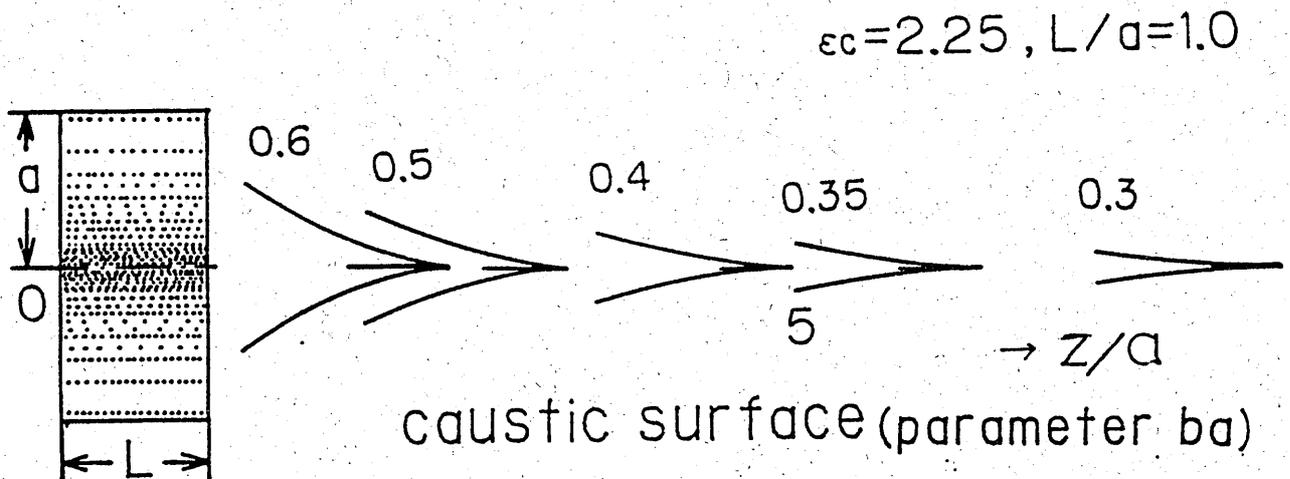


図18. Wood レンズの caustic 曲線

ここで $(x_{c1}, y_{c1}, z_{c1}), (x_{c2}, y_{c2}, z_{c2})$ はそれぞれ axial (または sagittal) caustic, tangential caustic の直角座標である。図18にはこの曲線の1例を示してある。これは光線の集束する位置を推定するのに有効である。

Huygens - Kirchhoff の表示式との比較

caustic で成立するいわゆる放射積分の妥当性を確かめるために Huygens-Kirchhoff の積分

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint \phi(x', y', z') \frac{\exp[-jkr]}{r} \cos \gamma dS, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (101a)$$

から計算した結果と比較する。ここで ϕ はレンズの後面の界分布であり $\cos \gamma$ は斜角係数である。焦点距離が比較的長い場合には Fresnel 近似を行うことができる。この場合角度座標の積分は実行することができ次のようになる。

$$u(r, z) = \frac{jk}{z-L} \exp\left[-jk\left(z-L + \frac{r^2}{2(z-L)}\right)\right] \int_0^a J_0\left(\frac{kr r_0 \cos \psi_1}{z-L}\right) \Xi^{-1/2} \exp\left[-jk\left(\Psi_0 + \frac{r_0^2 \cos^2 \psi_1}{2(z-L)}\right)\right] r_0 dr_0 \quad (101b)$$

図19に種々のパラメータに対する数値結果を示している。この計算では誘電率分布は

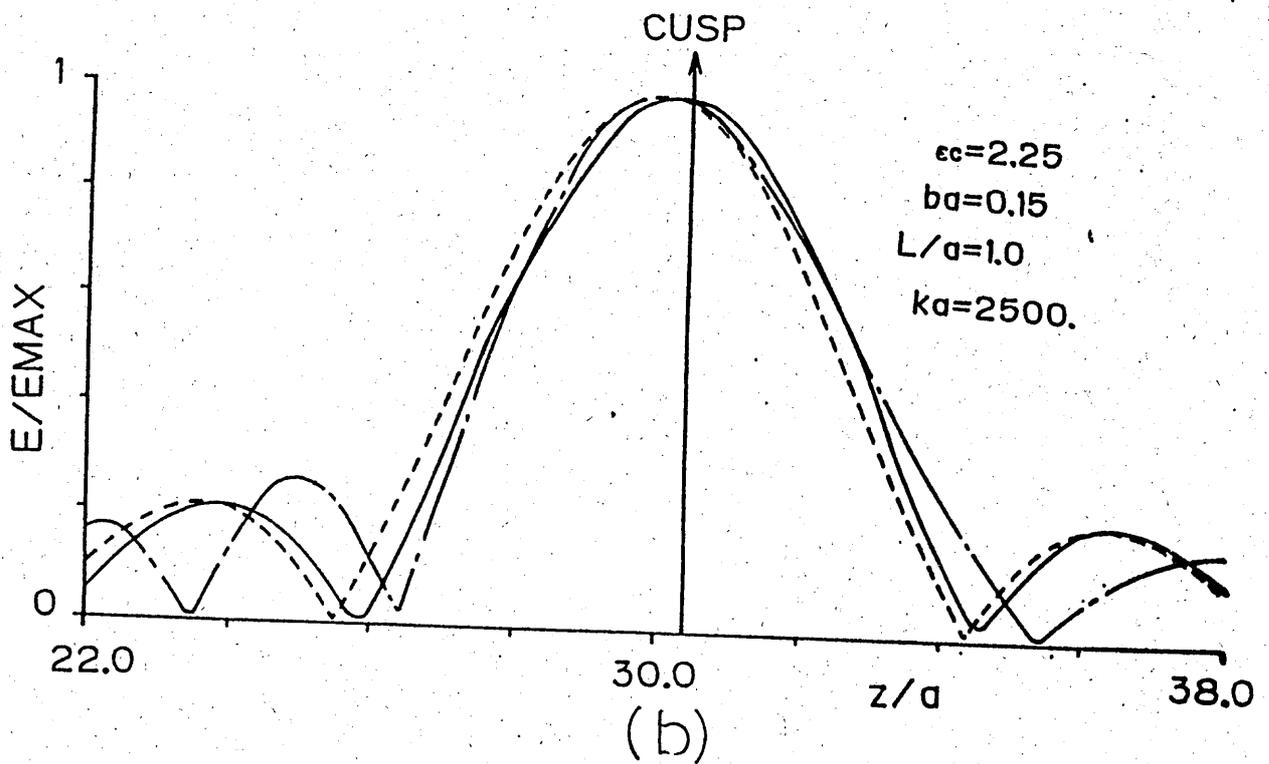
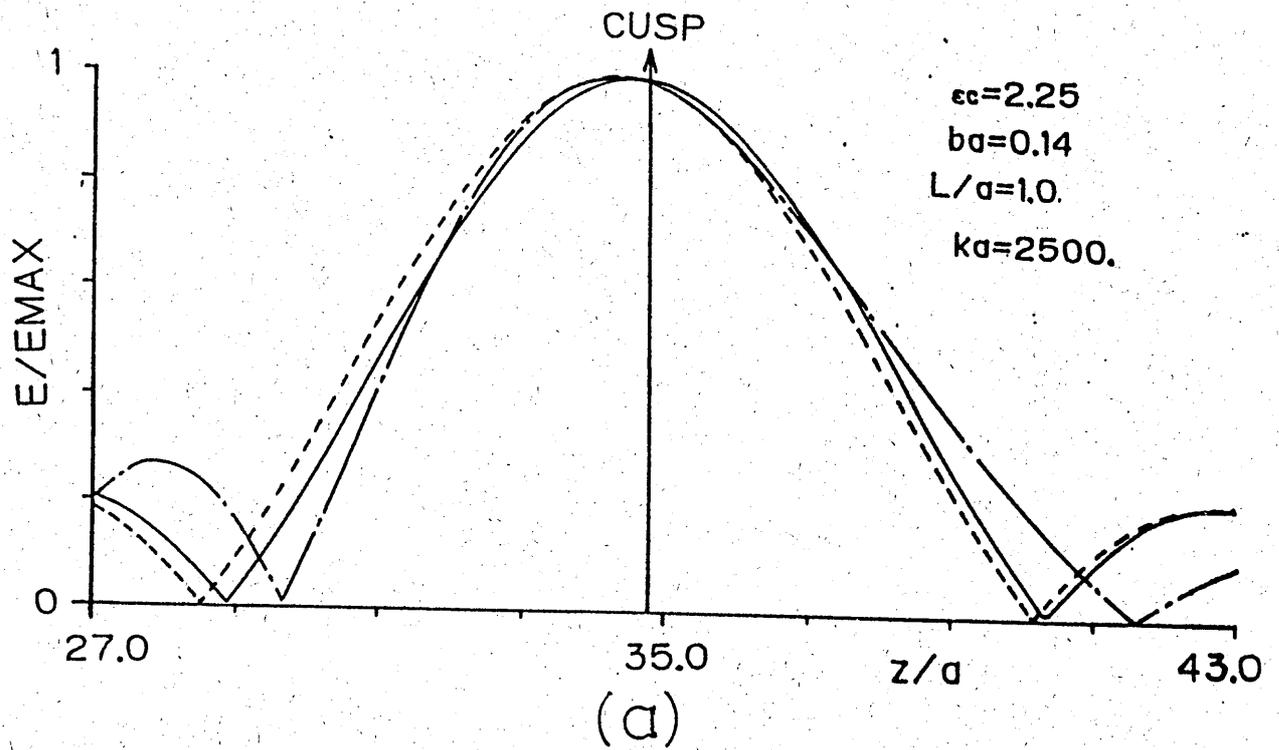
$$\epsilon = \epsilon_c [1 - b^2(x^2 + y^2)] \quad (102)$$

としている。図 a, b は比較的集束の度合いの弱い場合である。図の中の矢印は cusp 点を示している。この場合は近似結果も良く一致している。図 c, d にはもっと集束の度合いの強い場合の結果を示している。この場合は弱い集束近似の結果は他の2つの結果と一致しなくなる。図 e は軸に垂直な方向に沿った解分布を示している。

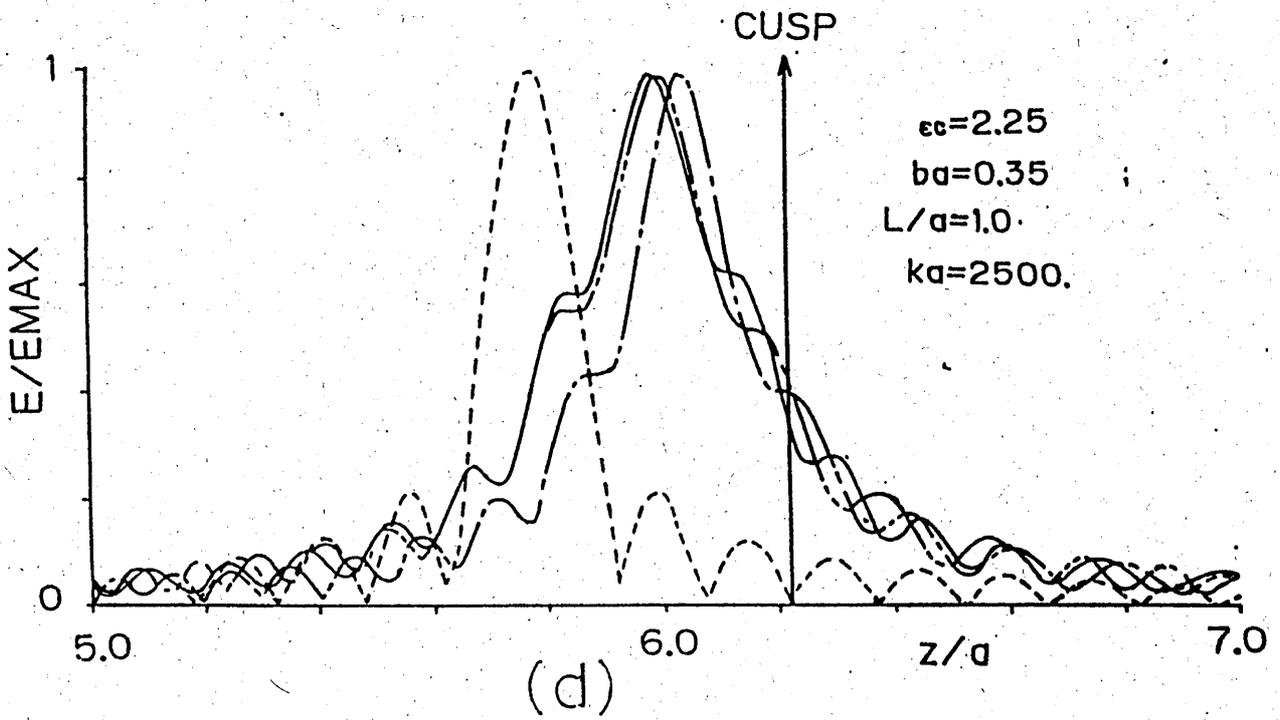
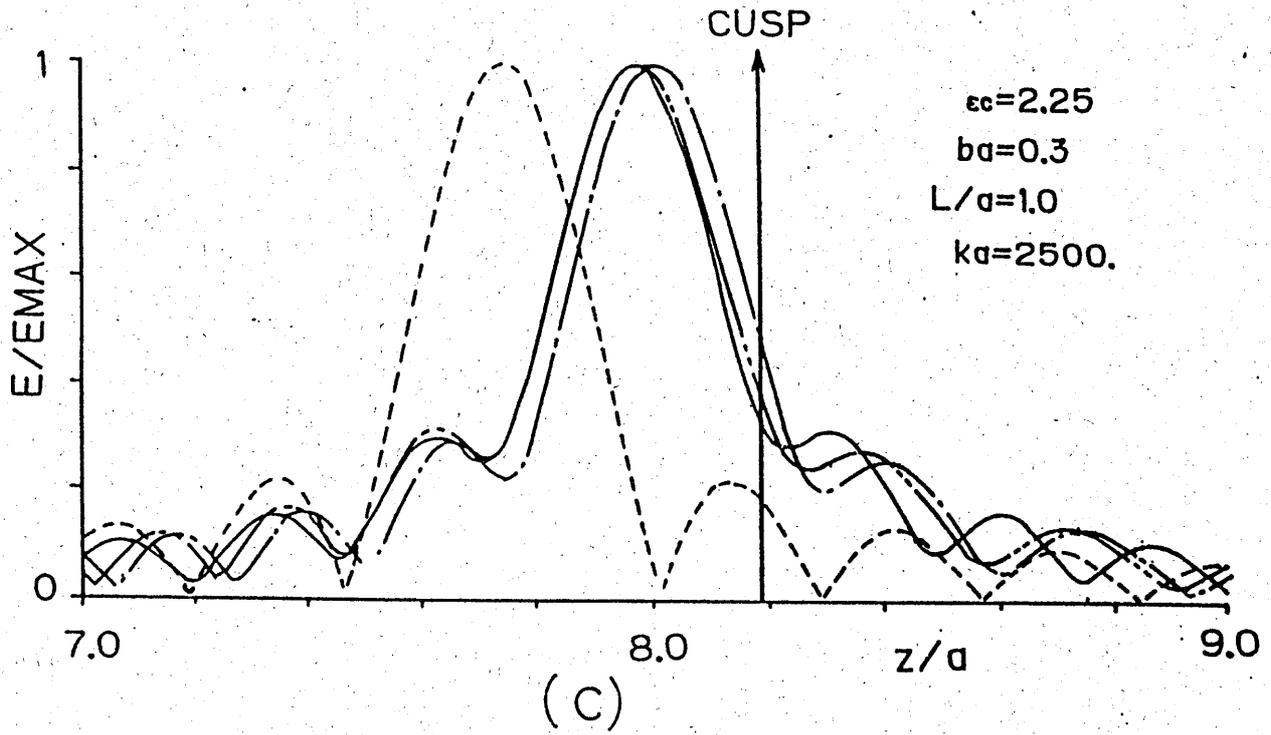
誘電率分布の4次の項の効果

まずはじめに Hamilton 方程式 (95b) の解 (95e) の妥当性について考える。(95b) は非同次の2階の微分方程式に帰着させることができ、繰返し法により近似解を求める事ができる。この方程式は異なる方法 [26] によって求めることもできる。この2つの方法による結果はここで考えているパラメータに対しては十分良く一致する。しかし繰返し法も [26] による方法も放射積分を作るのには表示式が複雑になりすぎて不適当である。そこで c が小さい場合の近似式 (95e) を使って放射積分を作る事にする。比較的大きな c の値に対しても (95e) の形の表示式が成立するものと仮定する。ただしパラメータ λ, κ を導入し (95e) による解ともっと正確な繰返し法による結果が一致するように λ, κ の値を調整する。図20は (95e) から計算した光線軌跡と繰返し法によって計算した結果を比較したものである。この場合は $\lambda = 0.99875, \kappa = 1.0045$ と選び $r_0/a = 0.5$ の点で両者の結果が一致するようにしている。数値実験から整合点の選び方は r_0/a が 0.8 を超えなければあまり整合点には敏感でないことがわかった。このパラメータの効果は界分布にどのように影響するかを調べたのが図18の結果である。

図22には誘電率分布の4次の項により界分布(集束の度合い)がどのように変化するかを示した。この図から c の値は集束に大きな影響を与えることがわかる。また効果的な集束を与える最適な c の値があることもわかる。これは [26] で示唆されている結果に非常に近い値を示す。



————— Maslov's method (rigorous)
 - - - - - Maslov's method (approximate)
 - · - · - Kirchoff's formula



- Maslov's method (rigorous)
- - - Maslov's method (approximate)
- · - Kirchhoff's formula (rigorous)
- - - Kirchhoff's formula (approximate)

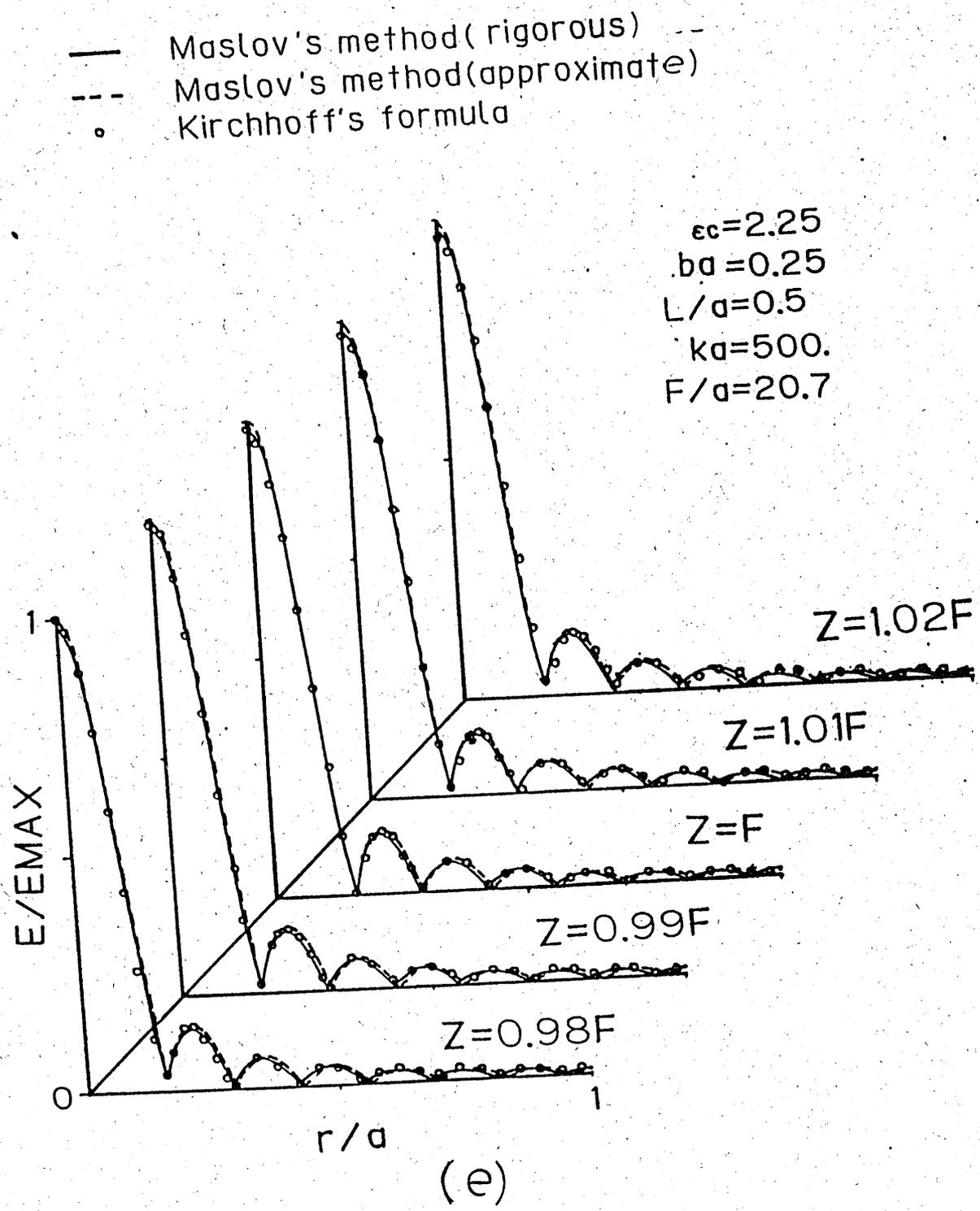


図19. Wood レンズの焦点近傍の軸に沿った界分布. Maslov の方法 (厳密解)、Maslov の方法 (弱い集束近似)、Huygens-Kirchhoff 積分の結果を比較している。

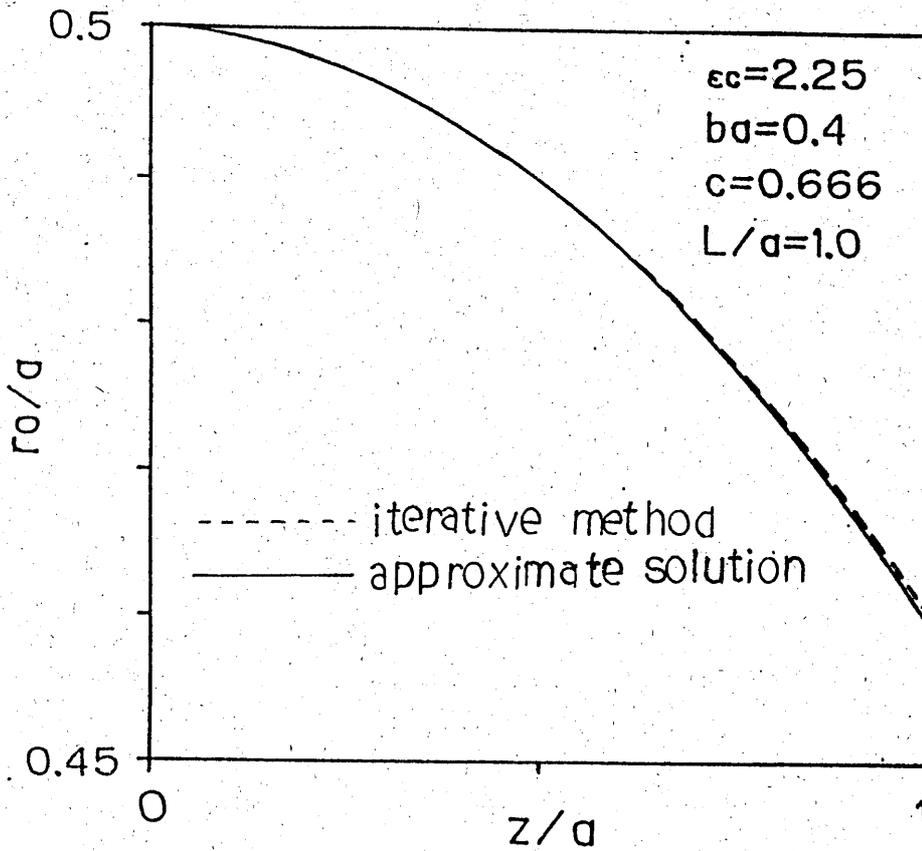


図20. 繰り返し法で計算した光線軌跡とパラメータを調整して近似式から計算した結果の比較。

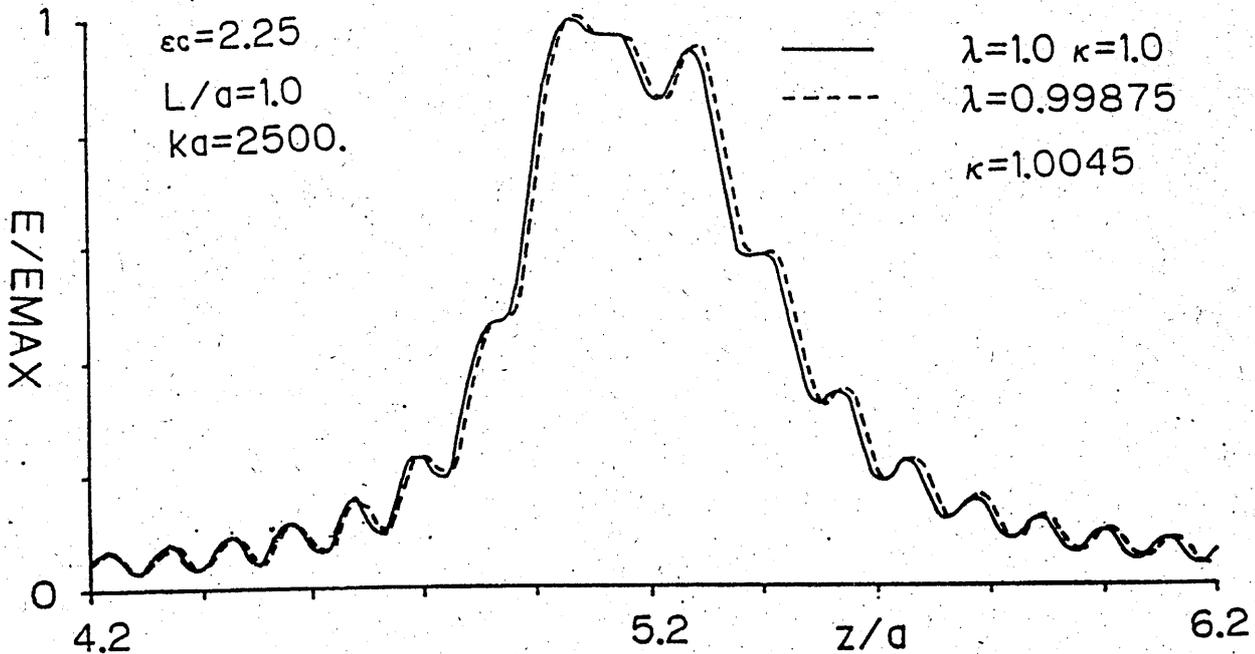


図21. パラメータの界分布に与える影響

simulation

解析の妥当性を確かめるために超音波 (SAW) を利用した simulation 実験を行った。SAW を使う利点の1つは解分布が簡単に測定できることである。図23は光プローブ法を用いた測定の構成である。表面波

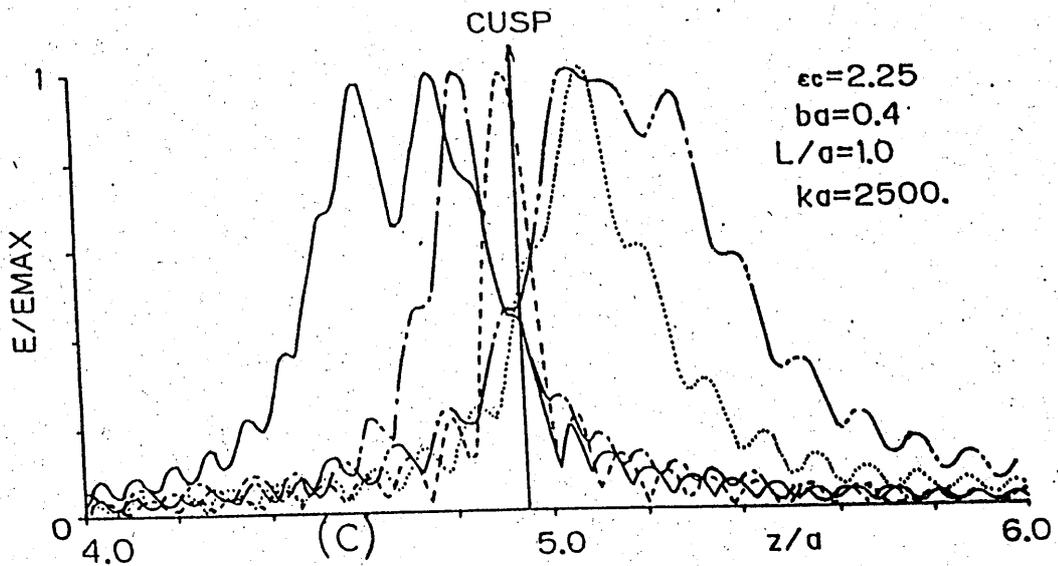
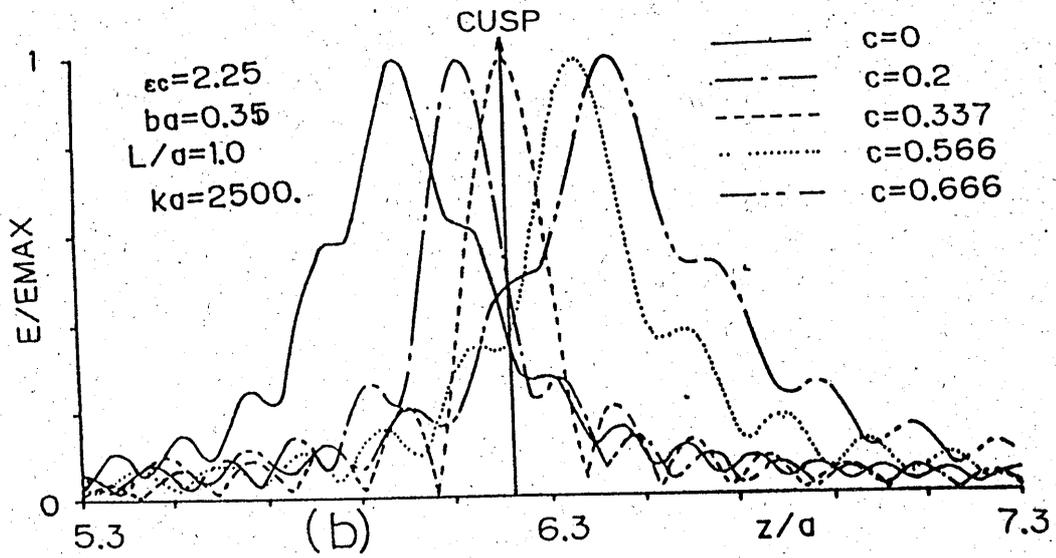
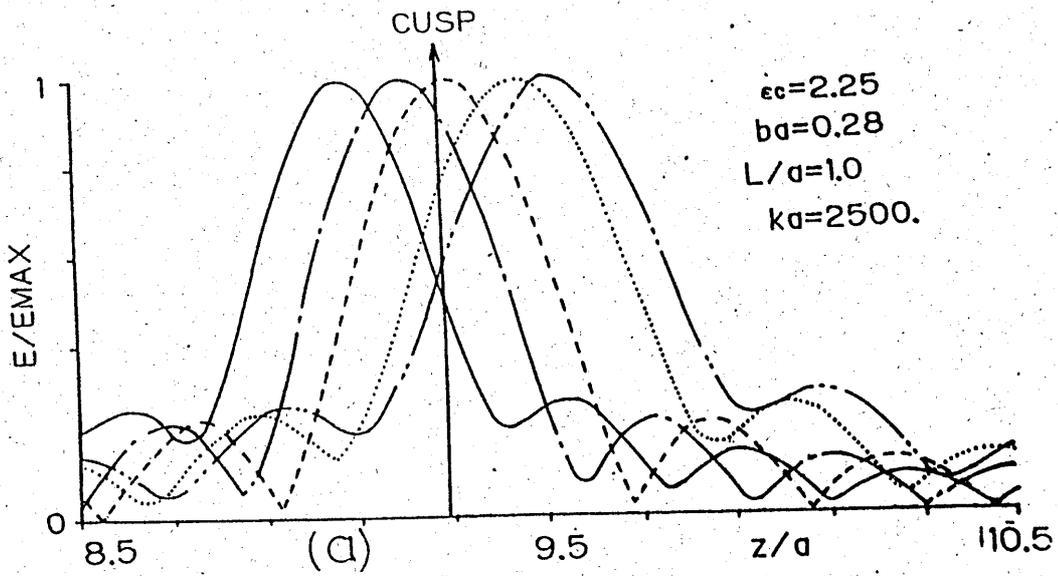


図 2 2 . 誘電率分布の 4 次 の 項 に よ る 界 分 布 の 変 化

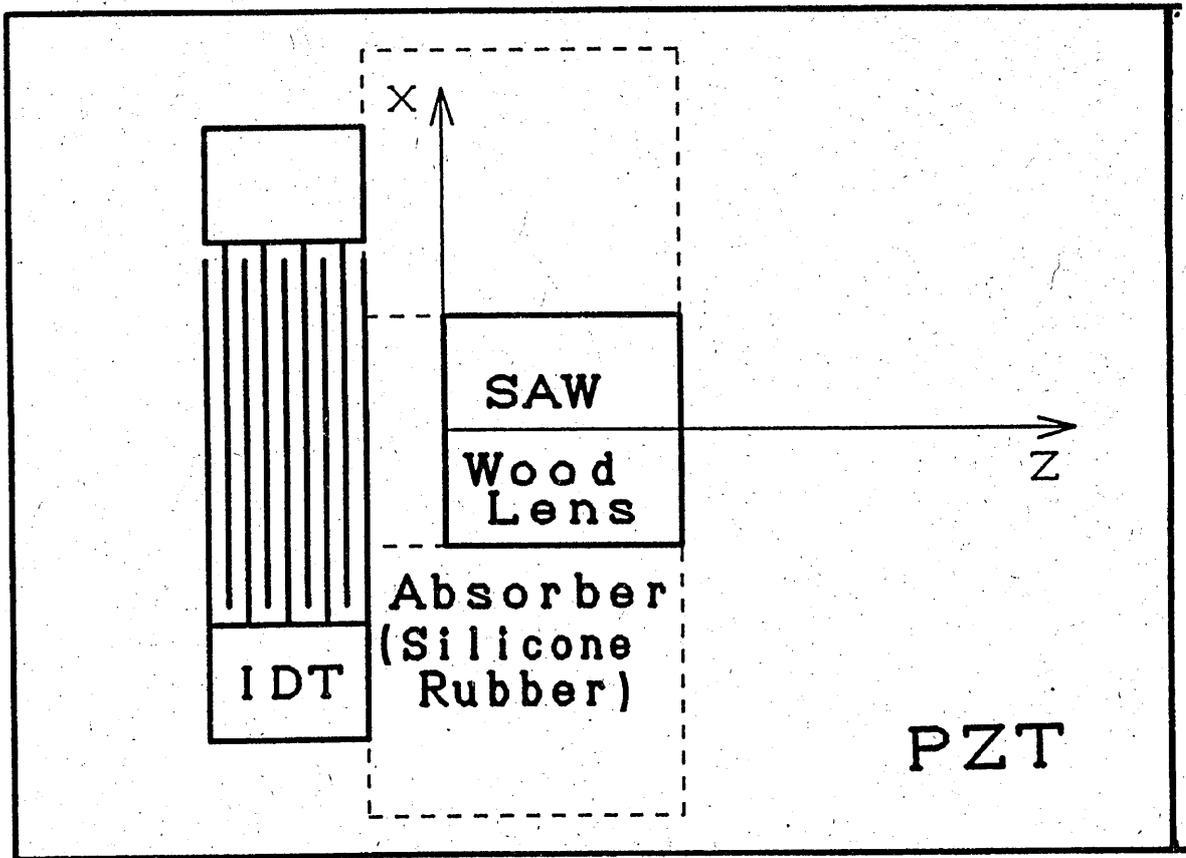
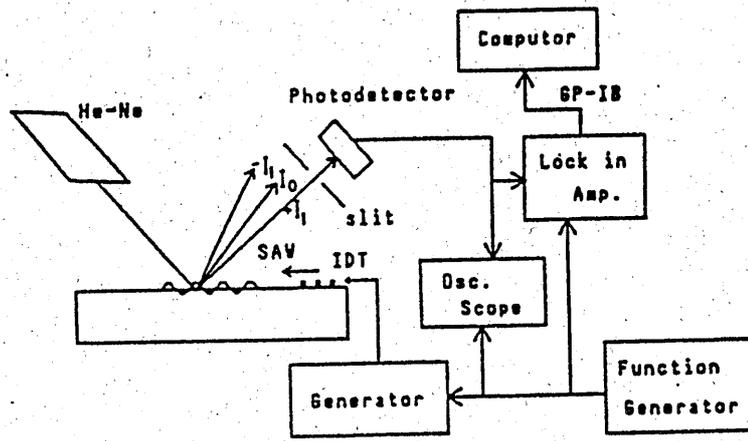


図 2 3 . (a):シミュレーションのための光プローブ法の測定構成図、(b):発振器、被測定体の配置

の振幅 A は 0-次、および 1-次の回折ビームの強度を I_0, I_1 としたとき

$$A = \frac{\lambda}{2\pi \cos \phi} \sqrt{\frac{I_1}{I_0}} \quad (103a)$$

から得る事ができる[27]。ここで λ は光の波長、 ϕ は入射角である。集束したレーザービームの waist は約 0.1mm である。Wood レンズは圧電材料に蒸着した金の x-方向の厚さを適当に変化させることにより実現した。SAW は圧電の基盤 PZT 上の IDT (Interdigital Transducer) により励振した。基盤の音速は 2430m/s である。IDT 対の数は 40, 幅は 10mm, 発振の中心周波数は 24.2MHz である。SAW の simulation もダイアグラムを図 2 3 に示した。IDT の端部からの不要な波の影響を除くために図 2 3 に示すように IDT の端部にシリコンゴムを置いた (図の点線部分)。質量負荷と電気的短絡による音速の変化分は摂動法により推定することができる。結果は

$$\frac{\Delta V}{V} = kfh\rho + \frac{K^2}{2} = 0.0476h + 0.01 \quad (103b)$$

となる[28]。ここで V は Rayleigh 波の速度、 k は SAW の物質定数、 f は励振周波数、 h は金薄膜の厚さ、 ρ は質量密度、 K は電気機械の結合係数である。音速の変化分と誘電率は次式により関係づけることができる。

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - 1 \quad (103c)$$

SAW は 2 次元波であるので解析モデルを変更する必要がある。誘電率層の誘電率分布は $\epsilon = \epsilon_c(1 - b^2x^2)$ と仮定する。解析は 3 次元の場合より簡単であり結果だけを示すと次式のようになる。

$$U = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \exp[-j\pi/4] \int_{-a}^a T^{1/2} \exp[-jk(\Psi_0 + p_{x1}(x - \xi) + p_{z1}(z - L))] d\xi$$

$$T = -\beta \left[\sin \psi_1 + \frac{\beta^3 \xi^2 L}{p_{z0}^3} \cos \psi_1 \right]$$

$$\Psi_0 + p_{x1}(x - \xi_1) + p_{z1}(z - L) = \epsilon_c \left(1 - \frac{b^2 \xi^2}{2} \right) t_1 + \frac{\beta \xi^2}{2} \sin \psi_1 \cos \psi_1 - \beta \xi \sin \psi_1 + (\epsilon_c - \beta^2 \xi^2)(z - L) \quad (104)$$

図 2 4 は測定結果と計算結果を比較したものである。比較に当たっては両者のピークの位置が一致するように b の値を決めた。焦点領域近傍では両者はよく一致している。

3.12 球面状の誘電体境界面の屈折波に対する表示式

図 2 5 に示すような半球のキャップをもつ誘電体円筒にキャップの左側から入射波が入射した場合の円筒内部の界分布について考える。

12a. 幾何光学表示式の導出

はじめに Hamilton 方程式の基づいて幾何光学表示式を求める。点 F の源から球面波は放射されたとする。と境界面における入射波は次のように表すことができる。

$$\mathbf{E}^i(R, \theta, \phi) = E_\theta^i \mathbf{i}_\theta + E_\phi^i \mathbf{i}_\phi \quad (105a)$$

ここで (R, θ, ϕ) は点 F を原点とした球座標である。また E_θ, E_ϕ はそれぞれ入射波の平行成分と垂直成分に相当する。幾何光学の理論から透過波の表示式を導くには波数ベクトルと境界面の法線ベクトルが必要でありこれらは次式で与えられる。

$$\mathbf{p} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{i}_y + \cos \theta \mathbf{i}_z \quad (105b)$$

$$\mathbf{N} = -\sin \alpha \cos \beta \mathbf{i}_x - \sin \alpha \sin \beta \mathbf{i}_y + \cos \alpha \mathbf{i}_z \quad (105c)$$

ここで (α, β) は球の中心を原点とした屈折点の球座標である。Snell の屈折の法則を適用すると透過波の波数ベクトルを容易に求めることができる。この直角座標成分は次式で与えられる。

$$nq_x = \sin \theta \cos \beta - KH \sin \alpha \cos \beta, \quad nq_y = \sin \theta \sin \beta - KH \sin \alpha \sin \beta, \quad nq_z = \cos \theta + KH \cos \alpha \quad (105d)$$

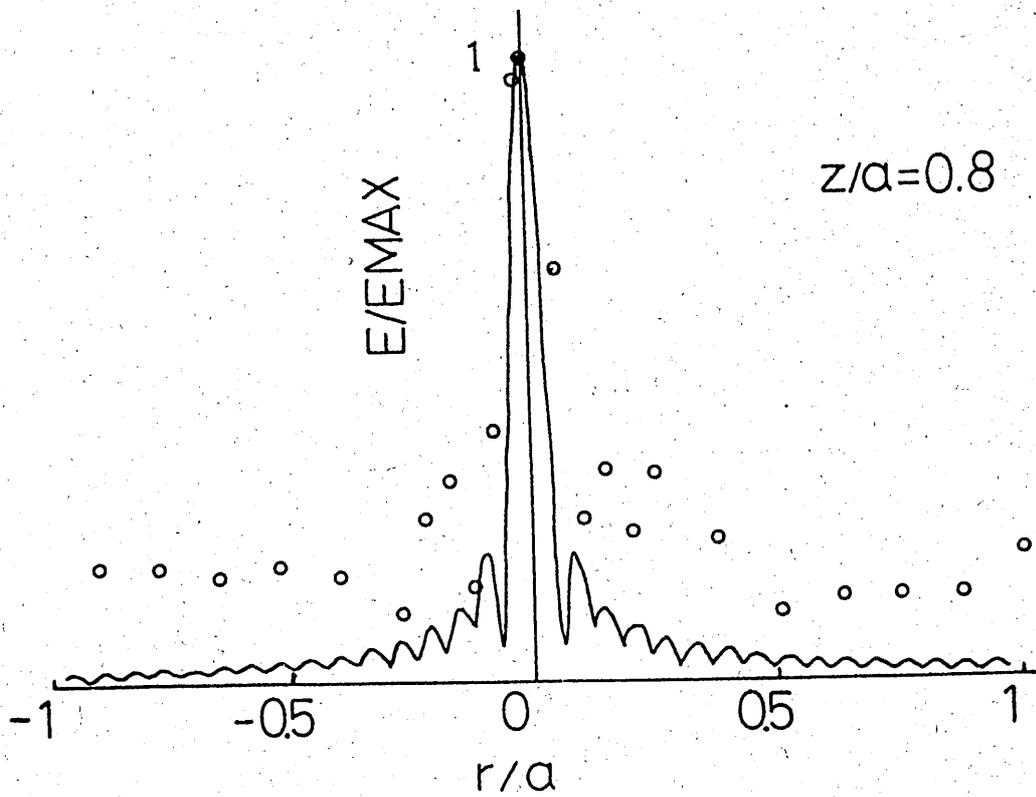
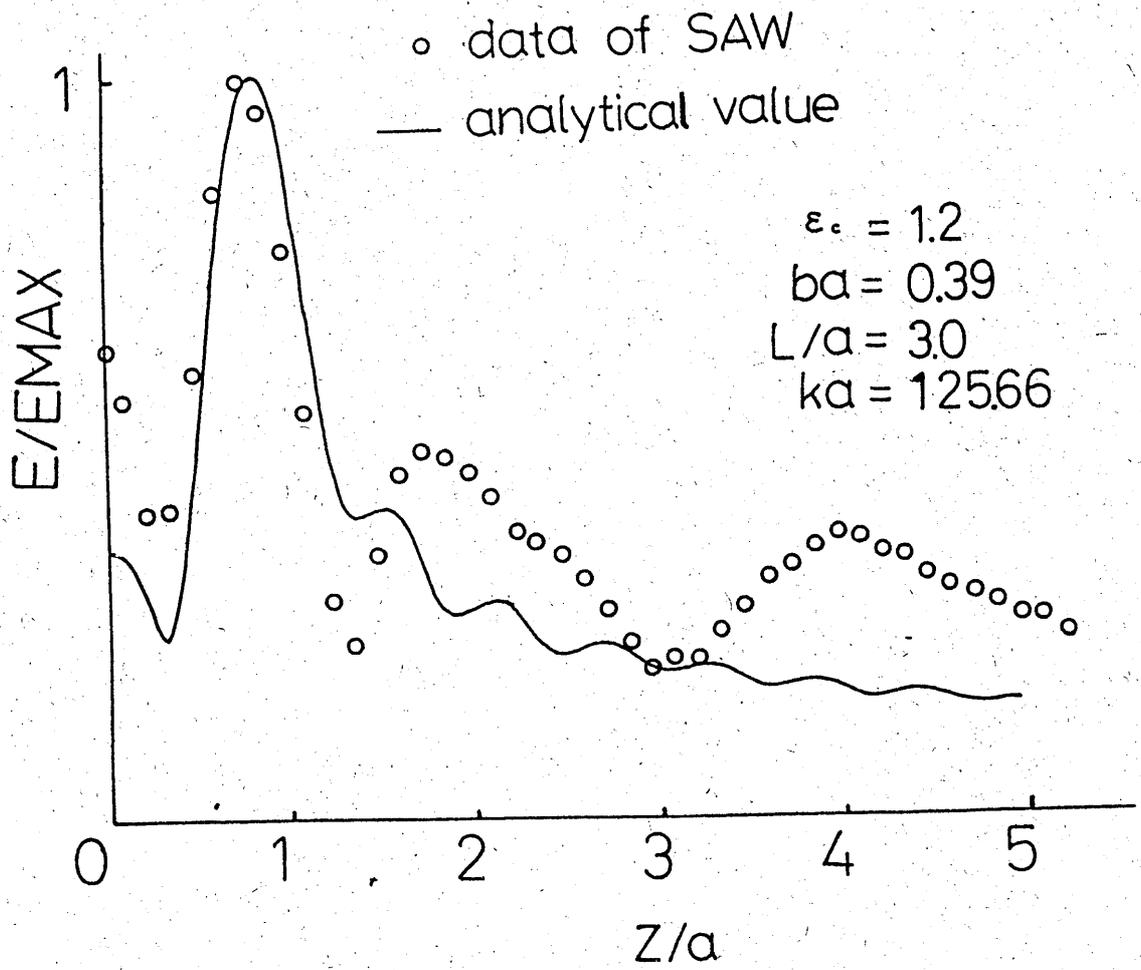


図24. 測定結果と計算結果の比較[29]

ここで

$$K = \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha + \theta)}, \quad H = 1 - \frac{\cos(\alpha + \theta)}{K} \quad (105e)$$

である。また n は誘電体の屈折率である。この波数ベクトルの成分を使えば光線上の点の直角座標 (x, y, z) は

$$x = \xi + nq_x t, \quad y = \eta + nq_y t, \quad z = \zeta + nq_z t \quad (106a)$$

で与えられる。領域 2 では t ではなく nt が光線に沿った距離を表す。直角座標から光線座標への変換に伴うヤコビアンは

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, t)} = \left(\frac{B}{a} t + \frac{K}{\cos \alpha} \right) \left(\frac{q^{xy}}{a \sin \alpha} t + 1 \right) \quad (106b)$$

ここで

$$B = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{dq^{xy}}{d\alpha} q^z - \frac{dq^z}{d\alpha} q^{xy} \right), \quad q^{xy} = \sin \theta - KH \sin \alpha, \quad q^z = \cos \theta + KH \cos \alpha \quad (106c)$$

である。また θ と α の間の微分関係

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{a}{R} \cos(\alpha + \theta) \quad (106d)$$

を利用している。(106b) の導出は 12e. 節に示してある。位相の初期値は $R - b$ であるから幾何光学表示式は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_T J^{-1/2} \exp[-jk(R - b + nt)] \quad (107a)$$

で与えられる。ここで \mathbf{E}_T は屈折波の初期値であり、誘電体のすぐ後ろの部分の値をとる。caustic では (107a) は無限大になる。境界から caustic までの距離は

$$\tau_1 = nt_1 = -\frac{naK}{B \cos \alpha} \quad (\text{tangential caustic}) \quad \tau_2 = nt_2 = -\frac{na \sin \alpha}{q^{xy}} \quad (\text{sagittal caustic}) \quad (107b)$$

となる。この結果は異なった方法[30]で求めた結果と一致する。

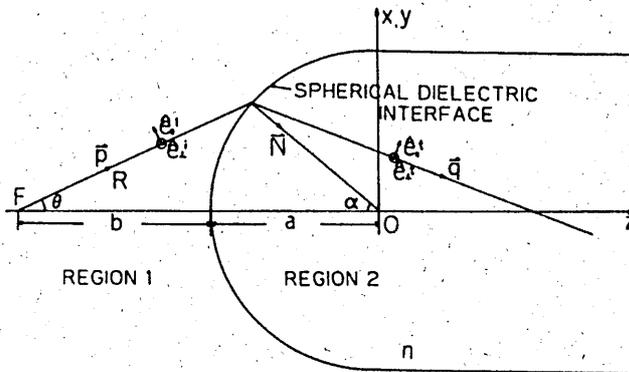


図 25. 球面状の境界面をもつ異種媒質への透過の問題

12b. Caustic 近傍の界表示式の導出

前節までと全く同じ過程により caustic 近傍で成立する表示式を求めることができる。結果は

$$\mathbf{E}(r, p, q) = \frac{ka}{2\pi} \int_0^P \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_T G^{1/2} \exp[-jk\{\phi_0 + aK + rq^{xy} \sin p \cos(\beta - q) + rq^z \cos p\}] d\alpha d\beta \quad (108a)$$

で与えられる。ここで $G = Tq^{xy}K \sin \alpha / q^z$ であり、 P は球の境界面の縁の原点 O からの開き角である。これは grazing 入射の点に選んである。点 P 近傍の透過係数はほとんど 0 であるのでこの点近傍からの寄与は非常に小さい。(108a) の被積分関数 \mathbf{E}_T は入射波 \mathbf{E}_i を使って

$$\mathbf{E}_T = \bar{T} \cdot \mathbf{E}_i, \quad \bar{T} = U_{\parallel} \mathbf{i}_{\parallel} \mathbf{i}_{\parallel} + T_{\perp} \mathbf{i}_{\perp} \mathbf{i}_{\perp} \quad (108b)$$

単位ベクトル \mathbf{i}_\perp^i は入射面に垂直であり、 $\mathbf{i}_\parallel^i, \mathbf{i}_\parallel^t$ は入射面内にある。因子 T_\parallel, T_\perp は hard (Neumann 型の境界条件), soft (Dirichlet 型の境界条件) の偏波に対する透過係数であり、次式で与えられる。

$$T_\parallel = \frac{2n \cos \gamma}{n^2 \cos \gamma + \sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}}, \quad T_\perp = \frac{2 \cos \gamma}{\cos \gamma + \sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}} \quad (108c)$$

ここで $\gamma = \alpha + \theta$ は入射角である。(108a) の全透過波 \mathbf{E} はあらゆる方向に伝搬する平面波の重ね合わせと見なすことができる。この積分を実行するには $\mathbf{i}_\parallel^i, \mathbf{i}_\perp^i$ は変数 α, β に対して変化するので (108b) の平行成分、垂直成分を直角座標成分に分解する必要がある。関係式 $\mathbf{i}_\perp^i = (\mathbf{q} \times \mathbf{N})/|\mathbf{q} \times \mathbf{N}|, \mathbf{i}_\parallel^i = \mathbf{i}_\perp^i \times \mathbf{q}$ を利用すると

$$\mathbf{i}_\perp^i = \sin \beta \mathbf{i}_x - \cos \beta \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{i}_\parallel^i = \frac{1}{n} (-q^x \cos \beta \mathbf{i}_x - q^y \sin \beta \mathbf{i}_y + q^z \mathbf{i}_z) \quad (108d)$$

となる。以上のように caustic 近傍の界は入射波の具体的な表示式が与えられれば (108) から計算することができる。ここでは例として x-方向を向いたダイポールと直線偏波の平面波について考える。

12c. x-方向のダイポール界が入射した時の表示式

z-軸に置かれた x-方向のダイポールによる球面波の E_\parallel^i, E_\perp^i は

$$E_\parallel^i = -\frac{A_0}{R} \cos \theta \cos \phi, \quad E_\perp^i = \frac{A_0}{R} \sin \phi \quad (109a)$$

で与えられる。ここで A_0 は源の強さであり、位相は (108a) の中に ϕ_0 として含まれている。(109a) を (108) に代入し β に関する積分を実行すれば結果は次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} E_x(r, p, q) &= \frac{ka}{2} (I_0 - I_2 \cos 2q), \\ E_y(r, p, q) &= -\frac{ka}{2} I_2 \sin 2q, \\ E_z(r, p, q) &= -jka I_1 \cos q \end{aligned} \quad (109b)$$

ここで

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^P \frac{A_0}{R} \left(\frac{q^z}{n} \cos \theta T_\parallel + T_\perp \right) J_0(-rq^{xy} \sin p) G^{1/2} \exp[-jk(\phi_0 + aK + rq^z \cos p)] d\alpha \\ I_1 &= \int_0^P \frac{A_0}{R} \frac{q^{xy}}{n} T_\parallel J_1(-rq^{xy} \sin p) G^{1/2} \exp[-jk(\phi_0 + aK + rq^z \cos p)] d\alpha \\ I_2 &= \int_0^P \frac{A_0}{R} \left(\frac{q^z}{n} \cos \theta T_\parallel - T_\perp \right) J_2(-rq^{xy} \sin p) G^{1/2} \exp[-jk(\phi_0 + aK + rq^z \cos p)] d\alpha \end{aligned} \quad (109c)$$

である。 J_0, J_1, J_2 は第 1 種の Bessel 関数である。(109b), (109c) に類似した表示式はパラボラ、球面反射鏡、その他の集束系に対して導かれており、対称な集束系に特有の形になっている。(109c) の積分を実行するには θ を問題の構成図を利用して α で表しておく必要がある。

12d. 平面波入射に対する表示式

もう 1 つの例として平面波が入射した場合について考える。これは球面波の特別な場合である。しかし入射波が平面波と見なされる場合は実際に良く起こるのでべつに考えた方が引用に便利である。平面波入射に対しては (108a) は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, p, q) &= \frac{ka}{2\pi} \int_0^P \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_T H_0 K_0 \sin \alpha \exp[-jk\{a(1 - \cos \alpha + K_0) \\ &\quad + rK_0 H_0 \sin \alpha \sin p \cos(\beta - q) + rM \cos p\}] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (110a)$$

となる。ここで

$$K_0 = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}, \quad H_0 = 1 - \frac{\cos \alpha}{K_0}, \quad M = K_0 \cos \alpha + \sin^2 \alpha \quad (110b)$$

である。x-方向の平面波が入射した時の透過波は容易に求めることができ、結果は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T &= T_{\parallel} E_{\parallel}^i \mathbf{i}_{\parallel}^i + T_{\perp} E_{\perp}^i \mathbf{i}_{\perp}^i \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{M}{n} T_{\parallel} (1 + \cos 2\beta) + T_{\perp} (1 - \cos 2\beta) \right] \mathbf{i}_x - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{n} T_{\parallel} - T_{\perp} \right) \sin 2\beta \mathbf{i}_y + \frac{K_0 H_0 \sin \alpha}{n} T_{\parallel} \cos \beta \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (110c)$$

(110c) を (110a) に代入し β に関する積分を実行すると再び (109b) の形に帰着される。この場合の I_0, I_1, I_2 は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^P \left(\frac{M}{n} T_{\parallel} + T_{\perp} \right) J_0(-r K_0 H_0 \sin \alpha \sin p) \exp[-jk\{a(1 - \cos \alpha + K_0) + rM \cos p\}] d\alpha, \\ I_1 &= \int_0^P \frac{K_0^2 H_0^2 \sin^2 \alpha}{n} T_{\parallel} J_1(-r K_0 H_0 \sin \alpha \sin p) \exp[-jk\{a(1 - \cos \alpha + K_0) + rM \cos p\}] d\alpha, \\ I_2 &= \int_0^P \left(\frac{M}{n} T_{\parallel} - T_{\perp} \right) J_2(-r K_0 H_0 \sin \alpha \sin p) \exp[-jk\{a(1 - \cos \alpha + K_0) + rM \cos p\}] d\alpha \end{aligned} \quad (110d)$$

当然ながら (110d) に停留点法を適用すれば幾何光学の表示式がえられる。これは (110d) の妥当性を確認する 1 つの方法である。

12.e 数値結果および考察

caustic 近傍の界を前節で導いた表示式に基づいて計算する。平面波入射、球面波入射について別々に議論する。

平面波入射に対する結果

境界面上の屈折点と caustic までの距離は (107b) で与えられており、この場合は

$$t_1 = -\frac{a K_0}{n^2 H_0}, \quad t_2 = -\frac{a}{K_0 H_0} \quad (111a)$$

と簡単化される。

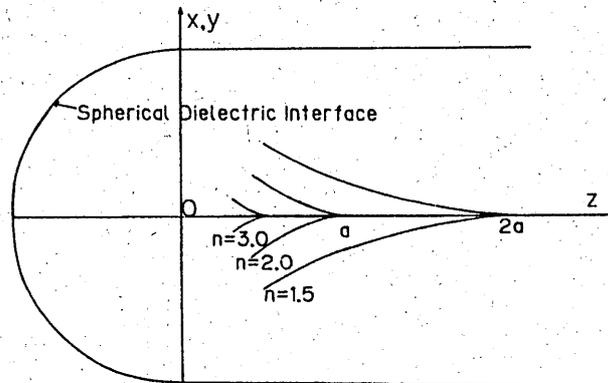


図 26. 球面境界も持つ誘電体への透過波の caustic 曲線

(111a) を Hamilton 方程式の解に代入すると tangential caustic の直角座標成分は次式で与えられる。

$$x_1 = a \sin \alpha \cos \beta \left(1 - \frac{K_0^2}{n^2} \right), \quad y_1 = a \sin \alpha \sin \beta \left(1 - \frac{K_0^2}{n^2} \right), \quad z_1 = -\frac{a K_0}{n^2 H_0} + a \cos \alpha \left(1 - \frac{K_0^2}{n^2} \right) \quad (111b)$$

同じように sagittal caustic の方程式は次式のようになる。

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = -\frac{a}{K_0 H_0} \quad (111c)$$

球面反射鏡に対しても類似の表示式になる。 $K_0 H_0$ を $-2 \cos A, K_0/n$ を $\cos A$ で置き換えれば球面反射鏡の結果 [10] に一致する。 $\alpha = \theta = 0$ のときは cusp 点の方程式が得られる。結果は

$$z_c = \frac{a}{n-1} \quad (111d)$$

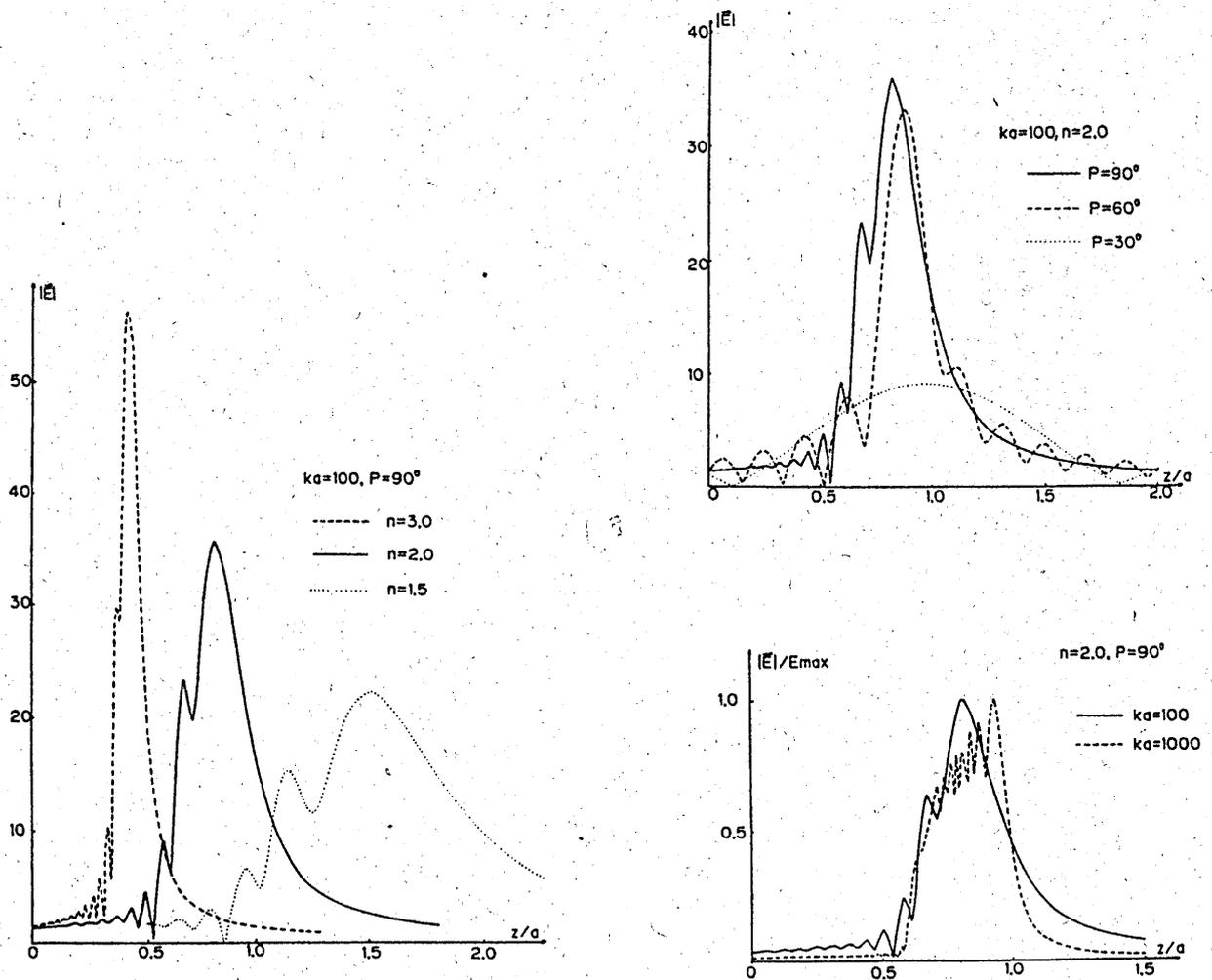


図 2.7. 軸上の界分布の変化。(a): n を変化したとき、(b): P を変化したとき、(c): ka を変化したとき。

となる。caustic 曲線を図 2.6 に示した。

図 2.7 にはパラメータを色々変えた時の z -軸上の界分布の変化を示した。屈折率 n が増加すると透過のエネルギーは小さい領域に集中し、さらにこの領域も球面境界に移動する。開き角 P が小さい場合は界分布は大体 cusp 点に対して対称になる。これは球面の軸の近傍では近似的に放物面と見なされることから予測できることである。球の規格化した半径 ka が大きくなるに従って分布の脈動が激しくなる。図 2.8 には focal shift と cusp 点近傍の界分布の等振幅線を示した。focal shift は界のピーク点と cusp 点の差を表している。図 2.8 a には屈折率 n に対する focal shift の変化を示した。図 2.8 b には cusp 点近傍の界分布の等振幅線を表している。 $ka = 300, P = 90^\circ$ に選んである。これから界は大体 z -軸に沿って集中していることがわかる。

球面波入射に対する結果

球面波入射に対する caustic 方程式は tangential caustic に対しては

$$x_1 = a \cos \beta \left[\sin \alpha - \frac{Kq^{xy}}{B \cos \alpha} \right], \quad y_1 = a \sin \beta \left[\sin \alpha - \frac{Kq^{xy}}{B \cos \alpha} \right], \quad z_1 = -a \cos \beta - \frac{aK(\cos \theta + KH \cos \alpha)}{B \cos \alpha} \quad (112a)$$

となり、sagittal caustic に対しては

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = -a \frac{\sin(\alpha + \theta)}{q^{xy}} \quad (112b)$$

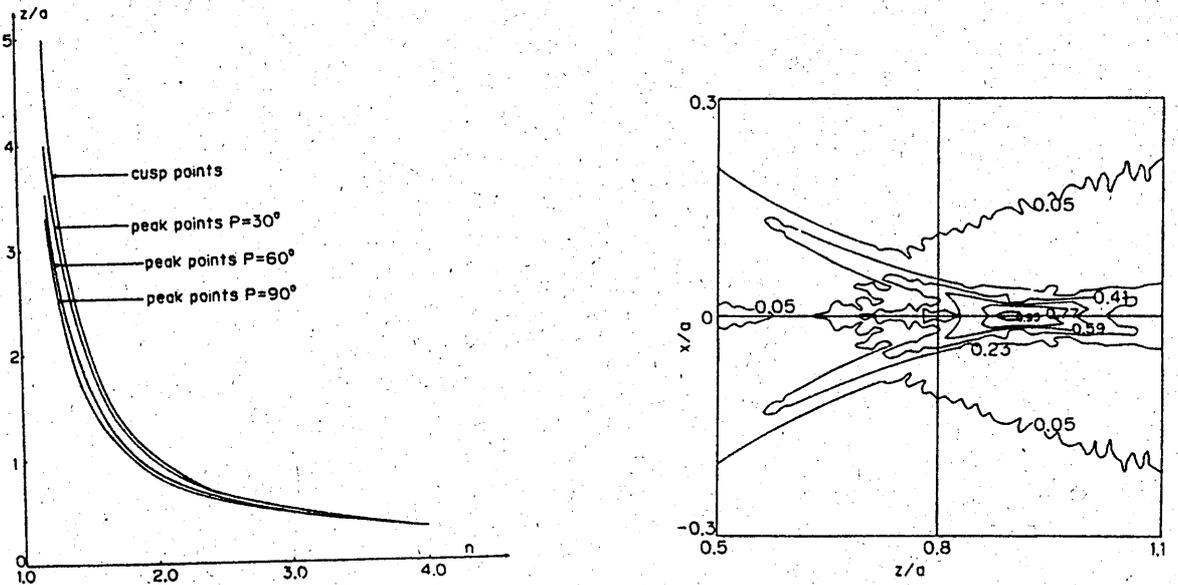


図 28. focal shift と cusp 近傍の等振幅線。(a):開き角 P を変化させた時の focal shift の屈折率に対する変化、(b):cusp 近傍の界の等振幅線, $ka = 300, P = 90^\circ$

となる。これは $\theta = 0$ とおけば平面波入射に対する結果に帰着する。cusp 点は

$$z_c = a \frac{a+b}{(n-1)b-a} \quad (112c)$$

となる。源点から球の境界面までの距離 b が $b = a/(n-1)$ を満足すれば、 z_c は無限大になる。これは caustic を生じない条件である。これは幾何光学でよく知られた性質である[5]。図 28 には caustic 曲線と cusp 点を示してある。 b が小さいときは z -軸から離れた点に新たな cusp 点を生ずる。これは球面反射鏡による球面波の反射波に対しても見られる性質である。

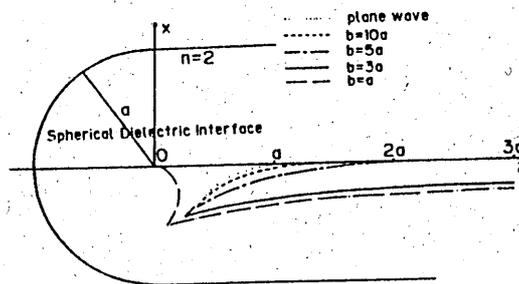


図 29. 球面波入射に対する透過波の caustic 曲線

図 30 には z -軸に沿った界分布、図 31 には等振幅線を示してある。 $ka = 300, P = 90^\circ, b = 5a$ に選んである。予測されるようにピーク点は波源に位置に大きく関係する。

12e. 式の導出

ここでは本文で結果だけを示したいいくつかの式の導出を示す。

ヤコビアン(109b)の導出

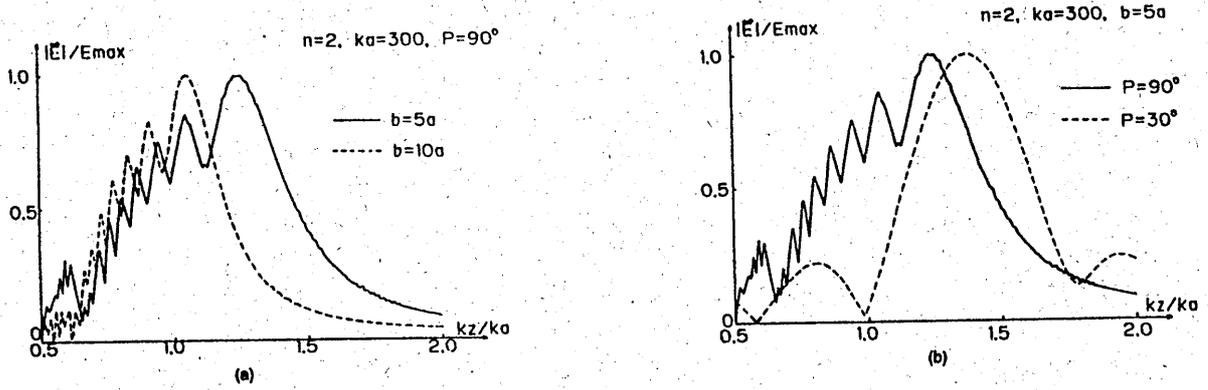


図30. 球面波が入射した時の透過波のz軸上の界分布。(a): 距離 b を変えた時、(b): 開き角を変えた時。

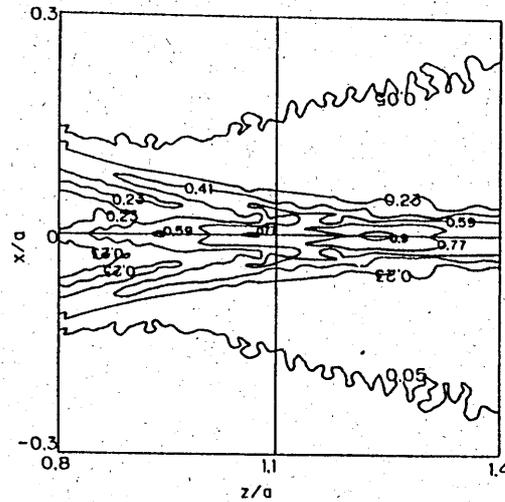


図31. 球面波が入射した時の透過波のxz-平面内の界の等振幅線。 $ka = 300, P = 90^\circ, b = 5a$ としている。

ヤコビアンを計算するために必要な関係式を示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} &= -\frac{\cos \beta}{a \cos \alpha} & \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} &= -\frac{\sin \beta}{a \cos \alpha} & \frac{\partial \beta}{\partial \xi} &= -\frac{\sin \beta}{a \cos \alpha} \\ \frac{\partial \beta}{\partial \eta} &= \frac{\cos \beta}{a \sin \alpha} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha} \end{aligned} \quad (113a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial nq_x}{\partial \xi} &= -\frac{\cos^2 \beta}{a \cos \alpha} \frac{dq^{xy}}{d\alpha} + \frac{\sin^2 \beta}{a \sin \alpha} q^{xy} & \frac{\partial nq_y}{\partial \xi} &= -\frac{\sin \beta \cos \beta}{a \cos \alpha} \frac{dq^{xy}}{d\alpha} - \frac{\sin \beta \cos \beta}{a \sin \alpha} q^{xy} \\ \frac{\partial nq_x}{\partial \eta} &= \frac{\partial nq_y}{\partial \xi}, & \frac{\partial nq_y}{\partial \eta} &= -\frac{\sin^2 \beta}{a \cos \alpha} \frac{dq^{xy}}{d\alpha} + \frac{\cos^2 \beta}{a \sin \alpha} q^{xy} \end{aligned} \quad (113b)$$

これらの関係式を使えばヤコビアンは

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, t)} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial nq_x}{\partial \xi} t & \frac{\partial nq_y}{\partial \xi} t & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial nq_z}{\partial \xi} t \\ \frac{\partial nq_x}{\partial \eta} t & 1 + \frac{\partial nq_y}{\partial \eta} t & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + \frac{\partial nq_z}{\partial \eta} t \\ \frac{\partial nq_x}{\partial t} & \frac{\partial nq_y}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial nq_z}{\partial t} t \end{bmatrix} = A + Bt + Ct^2 \quad (113c)$$

と求められる。

積分(109)の被積分関数の計算

ここでは caustic 近傍で成立する表示式 (109) を導出するのに必要な関係式を示す。

$$J \frac{\partial(nq_x, nq_y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(nq_x, nq_y, z)}{\partial(\xi, \eta, t)} = \frac{\partial nq_x}{\partial \xi} \frac{\partial nq_y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial nq_x}{\partial \eta} \frac{\partial nq_y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{q^{xy} q^z T}{a^2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (114a)$$

位相関数は次のように求められる。

$$\begin{aligned}\phi_0 &= R - b, & -\xi nq_x - \eta nq_y - \zeta nq_z &= aK, \\ x nq_x + y nq_y + z nq_z &= r q^{xy} \sin p \cos(\beta - q) + r q^z \cos p\end{aligned}\quad (114b)$$

ここで (r, p, q) は観測点の球座標であり直角座標と次の関係がある。

$$x = r \sin p \cos q, \quad y = r \sin p \sin q, \quad z = r \cos p \quad (114c)$$

変数 (nq_x, nq_y) から変数 (α, β) への変換は

$$d(nq_x)d(nq_y) = \frac{\partial(nq_x, nq_y)}{\partial(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta = T q^{xy} d\alpha d\beta \quad T = \frac{dq^{xy}}{d\alpha} \quad (114d)$$

で与えられる。

積分(110a)の停留点法による近似解

積分(110a)の被積分関数の指数部は

$$\Phi = a(1 - \cos \alpha + K_0) + r K_0 H_0 \sin \alpha \sin p \cos(\beta - q) + r M \cos p = \phi_0 + n^2 t \quad (115a)$$

と表される。右辺は幾何光学的な光路長で書いたものである。停留点は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0 \quad (115b)$$

から決定される。 β に関する偏微分から、直ちに

$$\beta - q = 0, \quad \pi \quad (115c)$$

が得られる。(115c)を(115a)に代入すれば α だけの関数

$$\begin{aligned}\Phi &= a(1 - \cos \alpha + K_0) + r K_0 H_0 \sin \alpha \sin p + r M \cos p \\ &= a(1 - \cos \alpha + K_0) + r K_0 \cos(\alpha - p) + r \sin \alpha \sin(\alpha - p) \\ K_0 &= \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}, \quad H_0 = 1 - \frac{\cos \alpha}{K_0}, \quad M = K_0 \cos \alpha + \sin^2 \alpha\end{aligned}\quad (115d)$$

が得られる。第2行はすでに与えられているが便宜上再記した。第1式を α で偏微分すれば

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = a H_0 \sin \alpha + H_0 \sin \alpha r \cos(\alpha - p) - K_0 H_0 r \sin(\alpha - p) = 0 \quad (115e)$$

となる。この2式から $r \sin(\alpha - p), r \cos(\alpha - p)$ を解くと

$$r \sin(\alpha - p) = -\sin \alpha \left(t - \frac{2aK_0}{n^2} \right), \quad r \cos(\alpha - p) = K_0 \left(t - \frac{a}{K_0} \right), \quad r \sin p = H_0 K_0 \sin \alpha \left[t - \frac{a}{K_0 H_0} \right] \quad (115f)$$

を得る。これらの関係式を利用すれば2次の微係数は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = -H_0^2 n^2 \left(t - \frac{aK_0}{n^2 H_0} \right), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = K_0^2 H_0^2 \sin^2 \alpha \left(t - \frac{a}{K_0 H_0} \right) \quad (115g)$$

となる。これから停留点法による解は直ちに求められる。(111)から caustic では2次の微係数は0となり漸近解(幾何光学解)は成立しなくなることがわかる。

積分(108a)の停留点法による近似解

この積分の停留点による近似を簡単な表示式で表すのは難しいので、ここでは幾何光学界の表示式と一部だけを比較することにする。この場合の位相関数は

$$\Phi = \phi_0 + aK + r q^{xy} \sin p \cos(\beta - q) + r q^z \cos p \quad (116a)$$

となる。βに関する停留点はβ - q = 0, πにあることは容易にわかる。このとき位相関数は

$$\Phi = \phi_0 + aK + rq^{xy} \sin p + rq^z \cos p = \phi_0 + aK + r \sin(\alpha + \theta) \sin(\alpha - p) + Kr \cos(\alpha - p) \quad (116b)$$

となる。これをαで偏微分すれば

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \phi_0}{\partial \alpha} + a \frac{\sin 2(\alpha + \theta)}{2K} \left(1 + \frac{d\theta}{d\alpha}\right) + r \sin p \frac{dq^{xy}}{d\alpha} + r \cos p \frac{dq^z}{d\alpha} = 0 \quad (116c)$$

となる。これから

$$r \sin p = -\frac{n^2 dq^z}{B d\alpha} (t - Q) \quad Q = \frac{aK}{n^2} - \frac{q^z}{n^2 (dq^z/d\alpha)} \left[\frac{d\phi_0}{d\alpha} a \frac{\sin 2(\alpha + \theta)}{2K} \left(1 + \frac{d\theta}{d\alpha}\right) \right] \quad (116d)$$

を得る。βに関する2次の微係数は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = -r \sin p q^{xy} = \frac{n^2 q^{xy} dq^z}{B d\alpha} (t - Q) \quad (116e)$$

と求められる。これは平面波入射の場合と同じ形になっている。幾何光学界の表示式から $Q = -a \sin \alpha / q^{xy}$ となることが予想されるがこれを解析的に示すのは困難であり、ここでは数値的に確かめた。

3.13 球レンズの焦点近傍の界分布

誘電体の球レンズは光集積回路ではカプラーとして使われておりその焦点近傍の界分布は大切な情報である。この問題は Kirchhoff-Huygens(K-H 法)の原理に基づいて解析することもできる。K-H 法は焦点距離の小さい問題に対しては Fresnel 近似を行うことが困難なために対称性を持つような問題に対しても2次元の数値積分を行わなければならない。これにたいして Maslov の方法は対称性を持つ場合には1次元の積分に帰着できる場合が多く実用上有効である。また球レンズの電磁界は古典的な問題であり、固有関数による展開式により、広く検討されてきた。良く知られているようにこの方法は低周波数近似であり、レンズの半径が波長にくらべて十分大きい場合には適用が困難かあるいは特別な工夫が必要になる。ここでは Maslov の方法に基づいてこの問題を検討する。

13a. 幾何光学表示式の導出

前節までの議論と同じように次のようにすすめることができる。

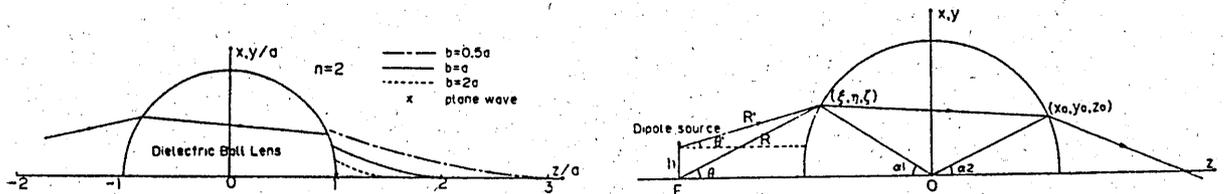


図3.2. 球レンズの透過波。(a):対称な場合、(b):非対称な場合

(1):球レンズの外部に透過した透過波の波数ベクトルの成分を求める。これは Snell の法則に従って求める事ができ、結果は次式のようになる。

$$\begin{aligned} p_x &= \sin \theta \cos \beta - KH(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \cos \beta, \\ p_y &= \sin \theta \sin \beta - KH(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \sin \beta, \\ p_{tz} &= \cos \theta + KH(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \end{aligned} \quad (117a)$$

ここで

$$K = \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \theta)}, \quad H = 1 - \frac{\cos(\alpha_1 + \theta)}{K} \quad (117b)$$

である。光線の軌跡の1例を図32に示してある。

(2): 光線上の点の直角座標は次式で与えられる。

$$u = x_0 + p_x t, \quad v = y_0 + p_y t, \quad w = z_0 + p_z t \quad (118a)$$

ここで (x_0, y_0, z_0) は初期値であり、今の場合球の右側の表面上の点の直角座標である。 t は光線に沿った長さを表すパラメータである。

(3): この関係式を利用すれば幾何光学表示式は

$$\begin{aligned} E(u, v, w) &= A_0(x_0, y_0) J^{-1/2} \exp\{-jk[\phi_0(x_0, y_0) + t]\} \\ J &= \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x_0, y_0, t)} = \left(\frac{B_c}{a} t + \frac{A_c}{\cos \alpha_2}\right) \left(\frac{q^{xy}}{a \cos \alpha_2} t + 1\right) \\ A_c &= \cos(\theta - \alpha_2) - \frac{2}{n^2} KH \sin^2(\alpha_1 + \theta), \quad q^{xy} = \sin \theta - KH(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \\ B_c &= \frac{1}{\cos \alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \left(\frac{dq^{xy}}{d\alpha_1} p_x - \frac{dp_x}{d\alpha_1} q^{xy}\right) \end{aligned} \quad (118b)$$

で与えられる。 α_1 と α_2 の間の関係は図32から求めることができる。これは微分形で次式で与えられる。

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{2}{K} \cos(\alpha_1 + \theta) \left[1 + \frac{a}{R} \cos(\alpha_1 + \theta)\right] \quad (118c)$$

(118b) の導出は 13e 節に示す。

(4): (3) で示した $E(u, v, w)$ は電界の直角座標成分を表していると考えられるので任意の電磁界の入射に対する透過波の幾何光学表示式は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_T J^{-1/2} \exp[-jk(R - b + nt_0 + t)] \quad (119a)$$

で与えられると考えることができる。

(5): (118b) の $J = 0$ から caustic までの距離を求めることができる。結果は tangential focal point に対する距離を t_1 , sagittal focal point に対する距離を t_2 とすると

$$t_1 = -a \frac{A_c}{B_c \cos \alpha_2}, \quad t_2 = -a \frac{\sin \alpha_2}{q^{xy}} \quad (119b)$$

と求められる。

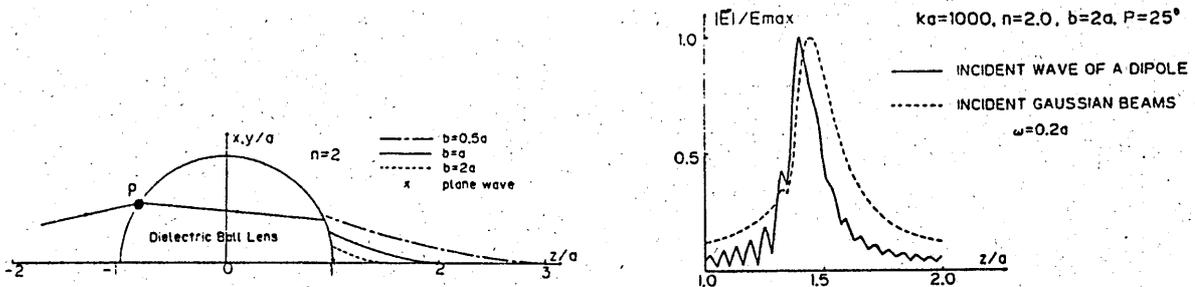


図33. (a): 球レンズの透過波の caustic 曲線、(b): ダイポールの球面波及びガウスビームの球面波が入射したときの透過波の界分布

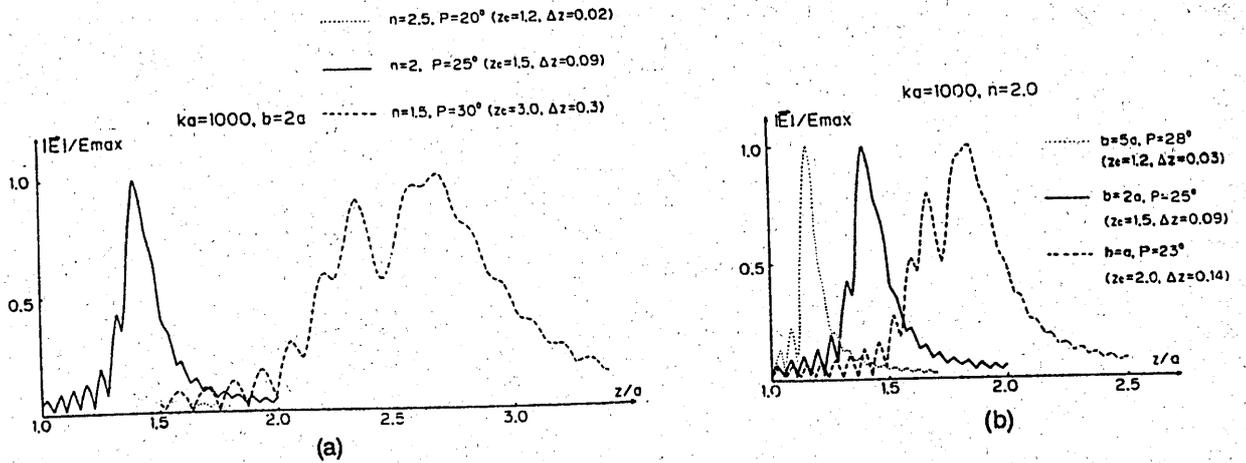


図 34. ダイボール界に対する界分布。(a): n を変化した時、(b): b を変化した時

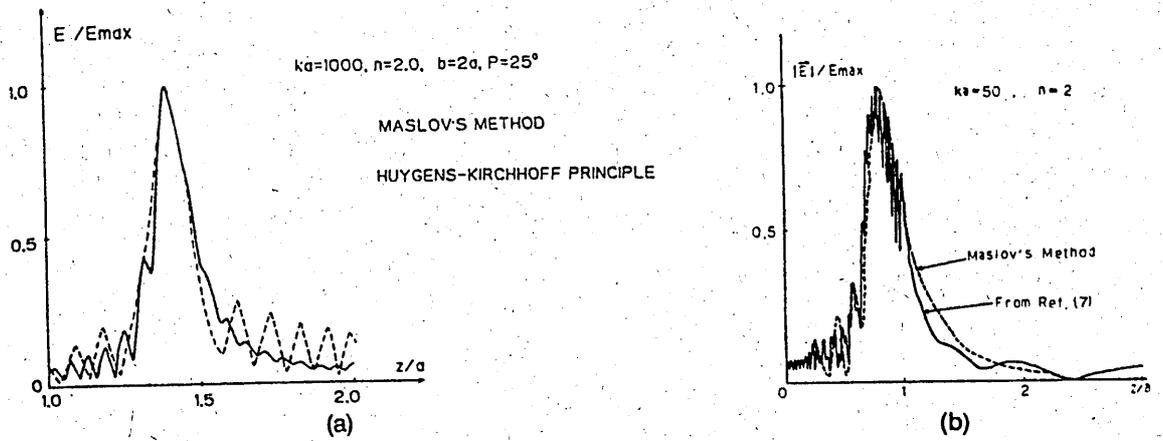


図 35. (a):Kirchhoff-Huygens 原理による結果との比較、(b) 固有関数展開による結果との比較。

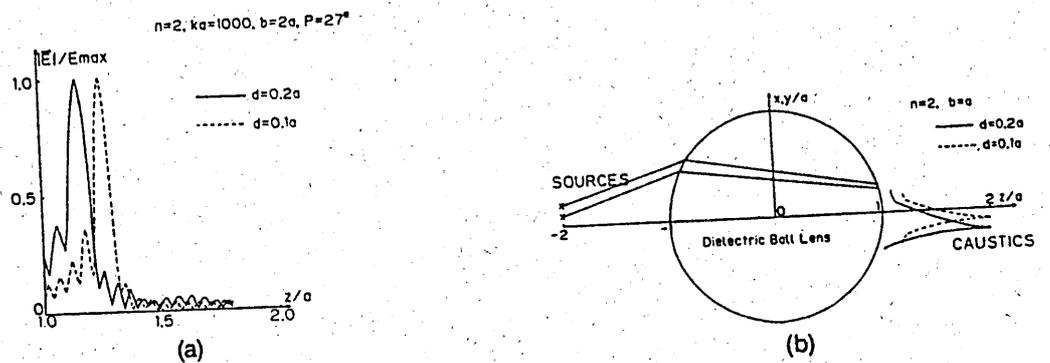


図 36. z -軸から離れた点にダイボールが置かれているときの界分布と caustic 曲線の様子。

13b. caustic 近傍で成立する表示式

Maslov 法に従えば caustic 近傍で成立する表示式は次の形で表される。

$$E(x, y, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x_0, y_0) \left[J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(u, v)} \right]^{-1/2} \exp\{-jk[\phi_0 + (x-x_0)p_x + (y-y_0)p_y + (z-z_0)p_z]\} dp_x dp_y \quad (120a)$$

ここで被積分関数は

$$J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(p_x, p_y, w)}{\partial(u, v, t)} = \frac{1}{q^{xy}} \frac{d\alpha_1}{dq^{xy}} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{p_z \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} \quad (120b)$$

と表す事ができる。導出は 12e 節に示してある。いま

$$x_0 p_x + y_0 p_y + z_0 p_z = aA, \quad x p_x + y p_y + z p_z = r q^{xy} \sin p \cos(\beta - q) + r p_z \cos p \quad (120c)$$

と置き、積分変数を波数ベクトル (p_x, p_y) から空間座標 (α_1, β) に変換すれば (120a) は

$$E(r, p, q) = \frac{ka}{2\pi} \int_0^P \int_0^{2\pi} E_T G^{1/2} \exp\{-jk[\phi_0 - aA + r q^{xy} \sin p \cos(\beta - q) + r p_z \cos p]\} d\alpha_1 d\beta \quad (121a)$$

$$G = A q^{xy} \frac{dq^{xy}}{d\alpha_1} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \frac{\sin \alpha_2}{p_z \cos \alpha_2}$$

となる。ここで (r, p, q) は観測点の球座標であり、直角座標と $x = r \sin p \cos q, y = r \sin p \sin q, z = r \cos p$ の関係がある。パラメータ A は初期位相であり、 a で規格化してある。積分の上限は P で打ち切っている。区間 $(0, P)$ に含まれる光線の束は球の右外側に在るが P の上側に入射してきた光線の束は球の内部に集まる事になる。被積分関数 E_T は球の内部の多重反射を無視すれば入射波と次式で関係づけられる。

$$E_T = \tilde{T} \cdot E_1 \quad (121b)$$

ここで \tilde{T} はダイアディックの透過係数であり、次式で与えられる。

$$\tilde{T} = T_{\parallel} i_{\parallel}^i i_{\parallel}^t + T_{\perp} i_{\perp}^i i_{\perp}^t \quad (121c)$$

ここで i_{\perp}^i は入射面に垂直、 $i_{\parallel}^i, i_{\parallel}^t$ はそれぞれ入射面、透過面に平行である。2面で屈折することを考慮すると透過係数の具体的な表示式は次式で与えられる。

$$T_{\parallel} = \frac{2n \cos \gamma}{n^2 \cos \gamma + \sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}} \times \frac{2n \cos \gamma}{\cos \gamma' + n \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \gamma'}} \quad (122a)$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \cos \gamma}{\cos \gamma + \sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}} \times \frac{2 \cos \gamma}{n \cos \gamma' + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \gamma'}}$$

ここで γ, γ' はそれぞれ左側、右側の境界面における入射角であり

$$\gamma = \alpha_1 + \theta, \quad \gamma' = \theta_1 = \sin^{-1} \left[\frac{\sin(\alpha_1 + \theta)}{n} \right] \quad (122b)$$

で与えられる。 $i_{\perp}^i, i_{\parallel}^i$ の具体的な表示式は次式のようにになる。

$$i_{\perp}^i = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{N}_2}{|\mathbf{p} \times \mathbf{N}_2|} = \sin \beta i_x - \cos \beta i_y, \quad i_{\parallel}^i = i_{\perp}^i \times \mathbf{p} = -p_z \cos \beta i_x - p_z \sin \beta i_y + q^{xy} i_z \quad (122c)$$

入射波として2種類の波を考える。1つはダイホールによる標準的な球面波であり、もう1つはガウス型のビーム波である。いずれの場合も透過波は次式のように書くことができる。

$$E_x(r, p, q) = \frac{ka}{2} (I_0 - I_2 \cos 2q) \quad E_y(r, p, q) = \frac{ka}{2} I_2 \sin 2q \quad E_z(r, p, q) = -jka I_1 \cos q \quad (123a)$$

各々の入射波に対する具体的な表示式は次式のようにになる。

(1): ダイポール界: $E_{\parallel} = -\frac{A_0}{R} \cos \theta \cos \phi$, $E_{\perp} = \frac{A_0}{R} \sin \phi$

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^P \frac{A_0}{R} (p_z \cos \theta T_{\parallel} + T_{\perp}) G^{1/2} J_0(-rq^{xy} \sin p) \exp[-jk(\phi_0 - aA + rp_z \cos p)] d\alpha_1 \\ I_1 &= \int_0^P \frac{A_0}{R} q^{xy} T_{\parallel} G^{1/2} J_1(-rq^{xy} \sin p) \exp[-jk(\phi_0 - aA + rp_z \cos p)] d\alpha_1 \\ I_2 &= \int_0^P \frac{A_0}{R} (p_z \cos \theta T_{\parallel} - T_{\perp}) G^{1/2} J_2(-rq^{xy} \sin p) \exp[-jk(\phi_0 - aA + rp_z \cos p)] d\alpha_1 \end{aligned} \quad (123b)$$

(2): Gaussビーム波: $E_{\parallel} = -\frac{A_0}{R} \exp\left[-\frac{r_g^2}{w_0^2}\right] \cos \theta \cos \phi$, $E_{\perp} = \frac{A_0}{R} \exp\left[-\frac{r_g^2}{w_0^2}\right] \sin \phi$

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^P \frac{A_0}{R} \exp\left[-\frac{r_g^2}{w_0^2}\right] (p_z \cos \theta T_{\parallel} + T_{\perp}) G^{1/2} J_0(-rq^{xy} \sin p) \exp[-jk(\phi_0 - aA + rp_z \cos p)] d\alpha_1 \\ I_1 &= \int_0^P \frac{A_0}{R} \exp\left[-\frac{r_g^2}{w_0^2}\right] q^{xy} T_{\parallel} G^{1/2} J_1(-rq^{xy} \sin p) \exp[-jk(\phi_0 - aA + rp_z \cos p)] d\alpha_1 \\ I_2 &= \int_0^P \frac{A_0}{R} \exp\left[-\frac{r_g^2}{w_0^2}\right] (p_z \cos \theta T_{\parallel} - T_{\perp}) G^{1/2} J_2(-rq^{xy} \sin p) \exp[-jk(\phi_0 - aA + rp_z \cos p)] d\alpha_1 \end{aligned} \quad (123c)$$

このように問題は3種類の積分の計算に帰着されたことになる。入射角 α_1 が小さいときは $p_z \rightarrow$ 定数, $q^{xy} \rightarrow -KH(1+2a?KR)\alpha_1$, $G \sim \alpha_1$ となり、 I_0, I_1, I_2 はそれぞれ $\int^u z J_0(z) dz$, $\int^u z^2 J_1(z) dz$, $\int^u z J_2(z) dz$ の形になり、 I_0 は予測通り Airy パターンとなる。この場合は I_1, I_2 は I_0 に比べて無視できるほど小さくなる。

13c. ダイポールがz軸から離れて置かれているときの表示式

今ダイポールがx-z平面内のz軸から離れた点に置かれている場合について考える。結果は $d\alpha_2/d\alpha_1$ を次式で置き換えるだけでz軸上に置かれている場合と同じ形になる。

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} &= \frac{2}{K} \cos(\alpha_1 + \theta') \left(1 + \frac{d\theta'}{d\alpha_1}\right) \\ \frac{d\theta'}{d\alpha_1} &= \frac{1}{a \sin \alpha_1 - h} \left[a \sin \theta \cos(\alpha_1 + \theta) - \cos \theta \left\{ (a+b) \sin \theta - \frac{R[a(a+b) \sin \alpha_1] - ah \cos \alpha \cos \alpha_1}{R'^2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (124a)$$

この場合初期位相は

$$\phi_0 = R' - [a + b - \sqrt{a^2 - h^2}] + 2aK \quad (124b)$$

となる。また h はz軸からのダイポールまでの距離である。この表示式の妥当性は相反の定理を使って確かめることができる。

13d. 数値結果および検討

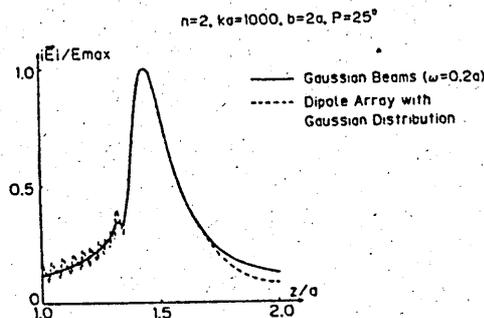


図38. ガウスビームのダイポールアレイによる近似

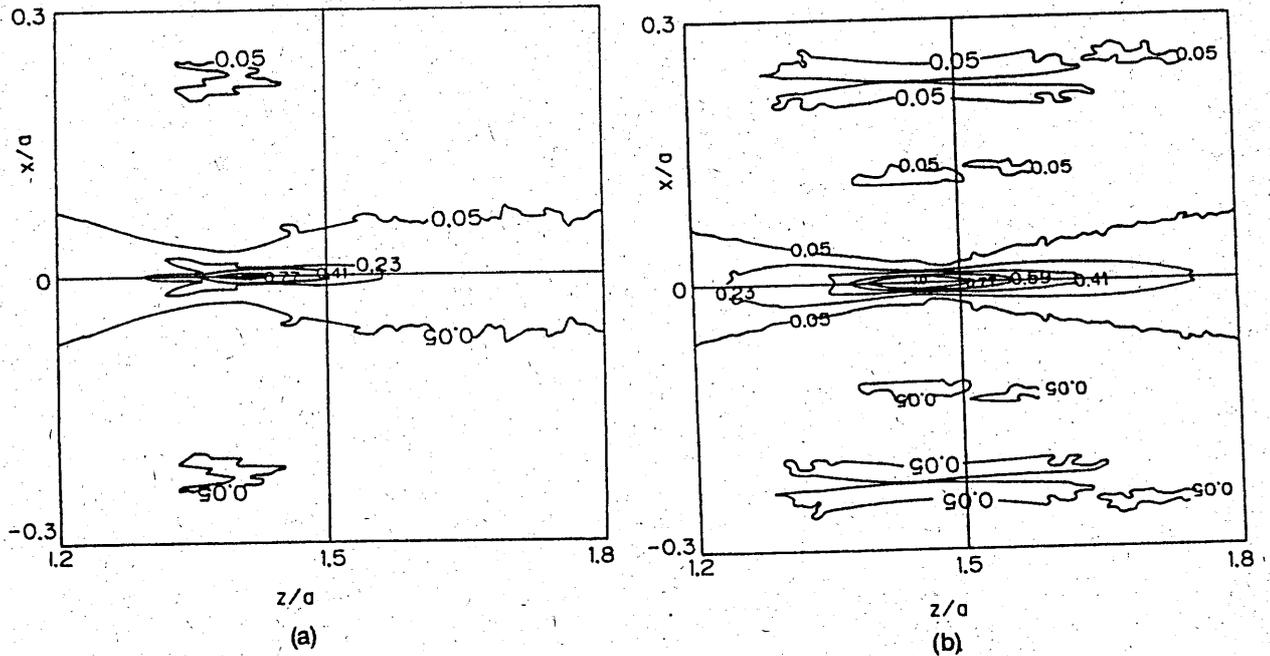


図3.7. x-z 平面内の界分布の等振幅線。ka = 1000, b = 2a, n = 2.0, P = 250 と選んである。(a):ダイポールによる球面波、(b):ガウスビーム波

(123a) に基づいて焦点領域の界分布について数値的に検討する。初めに界のおおよその様子を把握するのに有用な caustic 曲線について考える。(119b) を Hamilton 方程式の解に代入すれば、tangential focal point に対する表示式は

$$x_1 = a \cos \beta \left[\sin \alpha_2 - \frac{Aq^{xy}}{B \cos \alpha_2} \right], \quad y_1 = a \sin \beta \left[\sin \alpha_2 - \frac{Aq^{xy}}{B \cos \alpha_2} \right], \quad z_1 = -a \left[\cos \alpha_2 - \frac{Aq_z}{B \cos \alpha_2} \right] \quad (125a)$$

となり、sagittal focal point に対しては

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = \frac{a}{q^{xy}} [\sin(\theta - \alpha_2) - KH \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] \quad (125b)$$

となる。α₁ = θ = 0 のときは cusp 点が次のように求められる。

$$z_c = n \frac{1 + (a/b)}{2(n-1)[1 + (a/b)] - n(a/b)} \quad (125c)$$

caustic 曲線の様子を図3.3に示した。結果は前節で議論した単一の境界面の場合[29]と類似している。b が大きくなると caustic 曲線はレンズの境界面近傍に移動することがわかる。更に b を大きくすると光線はレンズの内部に集中しレンズ外部の caustic は消失する。

レンズの透過波の界分布をダイポールによる球面波とガウスのビーム波を入射した場合について図3.3に示した。パラメータは ka = 1000, n = 2.0, b = 2a, P = 25° と選んである。この図から界の集中度はここで選んだパラメータにたいしてはビーム波よりはダイポール界の方が強い。しかし、ピーク値の移動はパラメータの変化に対してビーム波の方が鈍感である。他のパラメータに対しても少し検討したがこの傾向は変わらなかった。

パラメータ b, n を変化させたときの界分布の様子を図3.4に示した。各々の場合について cusp 点の座標 z_c および focal shift δz を図中に示してある。n または b が大きくなるほどエネルギーの集中度は強くなり focal shift は小さくなる。図3.5には Kirchhoff-Huygens の原理(表示式は13e節に示してある)に基づいた計算結果および固有関数展開による結果[32]とを比較し、Maslov 法の妥当性を示した。図3.6はダイポールが z-軸から離れた点に置かれているときの結果を示したものである。図3.7には x-z 平面内の界分布の等振幅線を示した。ガウスビームによる結果を確認する1つの方法として16個の波源要素からなるダイポールアレイによる結果と比較した。ダイポールアレイによる具体的な界表示式は13e節に示してある。計算結果は図3.8に示してあり、両者はよく一致している。

13e. 式の導出

ヤコビアン計算

ヤコビアン計算に必要な微分関係式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_0} &= \frac{\cos \beta}{a \cos \alpha_2}, & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_0} &= \frac{\sin \beta}{a \cos \alpha_2}, & \frac{\partial \beta}{\partial x_0} &= -\frac{\sin \beta}{a \sin \alpha_2}, & \frac{\partial \beta}{\partial y_0} &= \frac{\cos \beta}{a \sin \alpha_2}, \\
 \frac{\partial z_0}{\partial x_0} &= -\frac{x_0}{z_0} = -\frac{\sin \alpha_2 \cos \beta}{\cos \alpha_2}, & \frac{\partial z_0}{\partial y_0} &= -\frac{y_0}{z_0} = -\frac{\sin \alpha_2 \sin \beta}{\cos \alpha_2}, \\
 \frac{\partial p_x}{\partial x_0} &= \frac{\cos^2 \beta}{a \cos \alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{dq^{xy}}{d\alpha_1} + \frac{\sin^2 \beta}{a \sin \alpha_2} q^{xy}, & \frac{\partial p_y}{\partial x_0} &= \frac{\partial p_x}{\partial y_0} = \frac{\sin \beta \cos \beta}{a \cos \alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{dq^{xy}}{d\alpha_1} - \frac{\sin \beta \cos \beta}{a \sin \alpha_2} q^{xy}, \\
 \frac{\partial p_y}{\partial y_0} &= \frac{\sin^2 \beta}{a \cos \alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{dq^{xy}}{d\alpha_1} + \frac{\cos^2 \beta}{a \sin \alpha_2} q^{xy}, & \frac{\partial p_z}{\partial x_0} &= \frac{\cos \beta}{a \cos \alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{dq^{xy}}{d\alpha_1}, \\
 \frac{\partial p_z}{\partial y_0} &= \frac{\sin \beta}{a \cos \alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{dq^{xy}}{d\alpha_1}
 \end{aligned} \tag{126a}$$

これらの関係式を利用すればヤコビアンは次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x_0, y_0, t)} &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial p_x}{\partial x_0} t & \frac{\partial p_y}{\partial x_0} t & \frac{\partial z_0}{\partial x_0} + \frac{\partial p_z}{\partial x_0} t \\ \frac{\partial p_x}{\partial y_0} t & 1 + \frac{\partial p_y}{\partial y_0} t & \frac{\partial z_0}{\partial y_0} + \frac{\partial p_z}{\partial y_0} t \\ \frac{p_x}{p_x} & \frac{p_y}{p_y} & \frac{p_z}{p_z} \end{bmatrix} \\
 &= A_c \cos \alpha_2 + \left(\frac{A_c q^{xy}}{a \sin \alpha_2 \cos \alpha_2} + \frac{B_c}{a} \right) t + \frac{B_c q^{xy}}{a^2 \sin \alpha_2} t^2
 \end{aligned} \tag{126b}$$

積分(121a)の停留点法による近似解

この積分の停留点による近似を簡単な表示式で表すのは難しいので、ここでは幾何光学界の表示式と一部だけを比較することにする。この場合の位相関数は

$$\Phi = \phi_0 - aA + r q^{xy} \sin p \cos(\beta - q) + r q^z \cos p \tag{127a}$$

となる。βに関する停留点はβ - q = 0, πにあることは容易にわかる。このとき位相関数は

$$\Phi = \phi_0 - aA + r q^{xy} \sin p + r q^z \cos p = \phi_0 - aA + r \sin(\alpha_1 + \theta) \sin(\alpha_1 - p) + K r \cos(\alpha_1 - p) \tag{127b}$$

となる。これをα₁で偏微分すれば

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \phi_0}{\partial \alpha_1} - a \frac{\sin 2(\alpha_1 + \theta)}{K} \left(1 + \frac{d\theta}{d\alpha_1} \right) + a \frac{dA}{d\alpha_1} + r \sin p \frac{dq^{xy}}{d\alpha_1} + r \cos p \frac{dq^z}{d\alpha_1} = 0 \tag{127c}$$

となる。これから

$$r \sin p = -\frac{1}{B} \frac{dq^z}{d\alpha_1} (t - Q) \quad Q = aA - \frac{q^z}{(dq^z/d\alpha_1)} \left[\frac{d\phi_0}{d\alpha_1} - a \frac{dA}{d\alpha_1} \right] \tag{127d}$$

を得る。βに関する2次の微係数は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = -r \sin p q^{xy} = \frac{q^{xy}}{B} \frac{dq^z}{d\alpha_1} (t - Q) \tag{127e}$$

と求められる。これは平面波入射の場合と同じ形になっている。幾何光学界の表示式から Q = -a sin α₂ / q^{xy} となることが予想されるがこれを解析的に示すのは困難であり、ここでは数値的に確かめた。

Kirchhoff - Huygensの積分公式

Kirchhoff-Huygensの原理に基づいた積分公式は次式で与えられる。

$$u(x, y, z) = -\frac{jk}{2\pi} \int_S \frac{\exp[-jkr]}{r} u(\xi, \eta) \exp[-jk\phi_0] d\xi d\eta \tag{128a}$$

ここでの問題に対しては

$$\begin{aligned} u_0(\xi, \eta) &= J^{-1/2}, \quad \phi_0 = R - b = nt_0 + t, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + a^2}, \\ t &= \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2} \end{aligned} \quad (128b)$$

であるから (128a) は

$$u(x, y, z) = -\frac{jk}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{1}{r} J^{-1/2} \exp[-jk(R - b + nt_0 + t) - jkr] d\xi d\eta \quad (128c)$$

となる。

ガウスビームのダイポールアレイによる近似

図 3 9 に示すように 25 個のダイポールが配列されている場合の界表示式について考える。簡単のため各々の振幅は

$$|A_0| = 1, \quad |B_i| = 0.72, |C_j| = 0.368, \quad (i = 1, 2, \dots, 8), (j = 1, 2, \dots, 16) \quad (129a)$$

で与えられるものとする。ダイポールからレンズまでの距離は遠方と見なされるから入射波の表示式は次式のようになる。

$$E_\theta = E_{\parallel 0} = -\frac{1}{R} \cos \theta \cos \phi \exp[jkd_m \cdot \mathbf{i}_R], \quad E_\phi = E_{\perp 0} = \frac{1}{R} \sin \phi \exp[jkd_m \cdot \mathbf{i}_R] \quad (129b)$$

ここで \mathbf{d}_m は z -軸からの変位を表すベクトルである。これらのダイポール界が球レンズに透過し、右側の表面に到達したときの大きさは

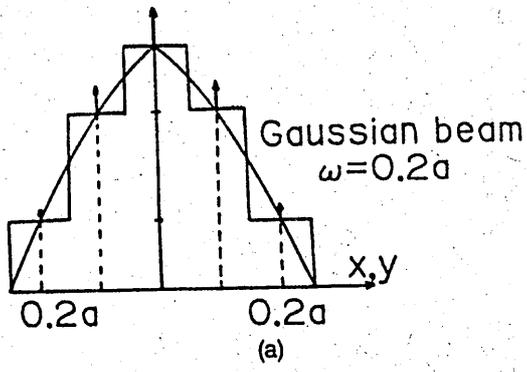
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T &= T_{\parallel} E_{\parallel}^i \mathbf{i}_{\parallel}^i + T_{\perp} E_{\perp}^i \mathbf{i}_{\perp}^i \\ &= \frac{1}{R} P(\theta, \phi) \left\{ \frac{1}{2} [T_{\parallel} p_z \cos \theta (1 + \cos \phi) + T_{\perp} (1 - \cos 2\phi)] \mathbf{i}_x + \frac{1}{2} [T_{\parallel} p_z \cos \theta - T_{\perp}] \sin 2\phi \mathbf{i}_y - q^{xy} T_{\parallel} \cos \phi \mathbf{i}_z \right\} \end{aligned} \quad (129c)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} P(\theta, \phi) &= 1 + 0.72 \{ \cos(d \sin \theta \cos \phi) + \cos(d \sin \theta \sin \phi) + 2 \cos(d \sin \theta \cos \phi) \cos(d \sin \theta \sin \phi) \} \\ &+ 0.368 \{ \cos(2d \sin \theta \cos \phi) + \cos(2d \sin \theta \sin \phi) + 2 \cos(d \sin \theta \cos \phi) \cos(2d \sin \theta \sin \phi) \\ &+ 2 \cos(2d \sin \theta \cos \phi) \cos(2d \sin \theta \sin \phi) + 2 \cos(2d \sin \theta \cos \phi) \cos(d \sin \theta \sin \phi) \} \end{aligned} \quad (129d)$$

であり、 d は隣接したダイポール間の距離を s としたとき $d = ks$ である。以上の結果を利用すれば界の表示式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} E_x(r, p, q) &= \frac{ka}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^P \frac{1}{R} P(\theta, \phi) [T_{\parallel} p_z \cos \theta (1 + \cos \beta) + T_{\perp} (1 - \cos 2\beta)] G^{1/2} \\ &\quad \exp\{-jk[\phi_0 - aA + rq^{xy} \sin p \cos(\beta - q) + rp_z \cos p]\} d\alpha_1 d\beta \\ E_y(r, p, q) &= \frac{ka}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^P \frac{1}{R} P(\theta, \phi) [T_{\parallel} p_z \cos \theta - T_{\perp}] G^{1/2} \\ &\quad \exp\{-jk[\phi_0 - aA + rq^{xy} \sin p \cos(\beta - q) + rp_z \cos p]\} d\alpha_1 d\beta \\ E_z(r, p, q) &= -\frac{ka}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^P \frac{1}{R} P(\theta, \phi) T_{\parallel} q^{xy} \cos \beta G^{1/2} \\ &\quad \exp\{-jk[\phi_0 - aA + rq^{xy} \sin p \cos(\beta - q) + rp_z \cos p]\} d\alpha_1 d\beta \end{aligned} \quad (130)$$



↑ x

C3	C4	C5	C6	C7
C2	B2	B3	B4	C8
C1	B1	A0	B5	C9
C16	B8	B7	B6	C10
C15	C14	C13	C12	C11

← y

(b)

例題

[例 3-1] (a) 連立の微分方程式

$$\frac{dx_k}{dt} = F_k(x_1, x_2, x_3) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1)$$

が解

$$x_k = G_k(u, v, t) \quad (2)$$

を持っているとする。この時次の関係式が成立することを示せ。

$$\frac{d}{dt} \log \left[\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, t)} \right] = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \quad (3)$$

(b) Hamilton の方程式は

$$\frac{dx_k}{dt} = p_k, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (4)$$

で与えられる。ここで ϵ は比誘電率である。平面 $x_3 = 0$ の位相分布 $S(x_1, x_2)$ が与えられているとき $p_k = \partial S / \partial x_k$ である。これを利用して

$$D(t) = \exp \left[- \int^t \nabla^2 S dt \right] \quad (5)$$

を示せ。

[解]

$$\frac{d}{dt} \log \left[\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, t)} \right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} & \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} \end{vmatrix} \quad (5)$$

(1) を u で微分すれば

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial u \partial t} = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} \quad (6)$$

が得られる。(1) を v, t で微分すれば同じ様な関係式が得られる。これらの関係式を (4) に代入すれば

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, t)} \right] = \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right] \left[\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, t)} \right] \quad (7)$$

が得られる。ここで関係式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, t)} \quad (8)$$

を利用した。(5) の第 2 項、3 項についても同様な関係式が得られる。

(b) $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \nabla S = \nabla^2 S$ であるから

$$\frac{d}{dt} \log[D(t)] = \nabla^2 S \quad \text{または} \quad D(t) = \exp \left[- \int^t \nabla^2 S dt \right] \quad (9)$$

が得られる。

[例 3-2] 関係式

$$f\left[\frac{\partial}{jk\partial p_x}\right]U(Y, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)W(\mathbf{r}, k) \exp[jkp_x x] dx$$

を示せ。ここで $U(Y, k)$ は $W(\mathbf{r}, k)$ の Fourier 変換である。

[解] $f(x)$ が x のべき級数で展開できるものとして、関係式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^n W(\mathbf{r}, k) \exp[jkp_x x] dx = (jk)^{-n} \left(\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^n U(Y, k)$$

を利用すれば求める関係式を示す事ができる。

[例 3-3] 不均質媒質の波動方程式 $\nabla^2 W + k^2 W = 0$ の Fourier 変換は

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial z^2} + k^2 \left\{ \epsilon \left[\frac{\partial}{jk\partial p_x} \right] - p_x^2 \right\} U = 0$$

を満足することを示せ。

[解] 誘電率が x のべき級数

$$\epsilon(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) x^n$$

で展開できるとすれば例 3-2 の結果を利用すれば求める結果を容易に示すことができる。

[例 3-4] 例 3-3 の近似解を $U = B \exp[-jkT]$ と仮定すると T と B は次式を満足することを示せ。

$$\begin{aligned} \nabla_t T - \epsilon + p_x^2 &= 0 \\ 2\nabla_t B \nabla_t T + B \nabla_t^2 T + \frac{\partial B}{\partial p_x} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial p_x} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで

$$\epsilon = \epsilon\left(-\frac{\partial T}{\partial p_x}, y, z\right) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \left[\frac{\partial \epsilon(x, y, z)}{\partial x} \right]_{x=-\partial T/\partial p_x} \quad (2)$$

である。

[解] 空間座標による微分は次式のように計算される。

$$\nabla_t^2 [B \exp(-jkT)] = \{ \nabla_t^2 B - j2k \nabla_t B \cdot \nabla_t T - jkB \nabla_t^2 T - k^2 B (\nabla_t T)^2 \} \exp(-jkT) \quad (3)$$

また例 3-3 の誘電率のべき級数の展開式を考慮すると

$$\epsilon\left[\frac{\partial}{jk\partial p_x}, y, z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) \left(\frac{\partial}{jk\partial p_x}\right)^n \quad (4)$$

なる関係式が得られる。これから

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) \left(\frac{\partial}{jk\partial p_x}\right)^n B \exp(-jkT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) \left[\left(\frac{\partial}{jk\partial p_x}\right)^n + \frac{n}{jk} \frac{\partial B}{\partial p_x} \left(\frac{\partial}{jk\partial p_x}\right)^{n-1} \right] \exp(-jkT) + O(k^{-2}) \\ &= U \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) \left(-\frac{\partial T}{\partial p_x}\right)^n - U \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) \frac{n(n-1)}{j2k} \left(-\frac{\partial T}{\partial p_x}\right)^{n-2} \frac{\partial^2 T}{\partial p_x^2} \\ & \quad + U \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) \frac{n}{jk} \frac{\partial B}{\partial p_x} \left(-\frac{\partial T}{\partial p_x}\right)^{n-1} \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) \left(-\frac{\partial T}{jk \partial p_x} \right)^n &= \epsilon \left(-\frac{\partial T}{\partial p_x}, y, z \right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) \frac{n(n-1)}{j2k} \left(-\frac{\partial T}{jk \partial p_x} \right)^{n-2} \frac{\partial^2 T}{\partial p_x^2} &= \frac{1}{j2k} \frac{\partial}{\partial p_x} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(y, z) \left(-\frac{\partial T}{jk \partial p_x} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{j2k} \frac{\partial}{\partial p_x} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \Big|_{x=-\partial T/\partial p_x} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, z) \frac{n}{jk} \frac{\partial B}{\partial p_x} \left(-\frac{\partial}{\partial p_x} \right)^{n-1} &= (-jk)^{-1} \frac{\partial B}{\partial p_x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} a_n(y, z) x^n \Big|_{x=-\partial T/\partial p_x} = (jk)^{-1} \frac{\partial B}{\partial p_x} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \Big|_{x=-\partial T/\partial p_x} \end{aligned}$$

これから求める結果は容易に示す事ができる。2次元にも容易に適用することができる。結果は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - \epsilon + p_x^2 + p_y^2 &= 0 \\ 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + B \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial B}{\partial p_x} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial p_y} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial p_x} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial p_y} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

[例 3-5] 次式を示せ

$$J \frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{1}{D(0)} \frac{\partial(p_x, y, z)}{\partial(u, v, t)} \quad J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{D(0)} \frac{\partial(p_x, p_y, z)}{\partial(u, v, t)}$$

[解] つぎの関係式を利用する。

$$D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} \quad \frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{\partial(p_x, y, z)}{\partial(x, y, z)}$$

これから次式が得られる。

$$D \frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} \frac{\partial(p_x, y, z)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(p_x, y, z)}{\partial(u, v, t)}$$

同じようにして

$$\left[\frac{\partial p_x}{\partial x} \frac{\partial p_y}{\partial y} - \frac{\partial p_y}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial y} \right] D = \frac{\partial(p_x, p_y, z)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = \frac{\partial(p_x, p_y, z)}{\partial(u, v, t)}$$

[例 3-6] 開口 $z=0$ における界分布が $U(x, y, 0) = \exp[-jkP_0(u, v)]$ で与えられている時次式を導出せよ。

$$J \frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \Delta, \quad \Delta = p_{xx} p_{yy} - p_z^2, \quad p_x = \frac{\partial P_0}{\partial u}, \quad p_y = \frac{\partial P_0}{\partial v}, \quad J = \frac{D(t)}{D(0)}, \quad D(t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} \quad (1)$$

[解] 光線上の点の直角座標 (x, y) は次式で与えられる。

$$x = u + \frac{p_x}{p_z} z, \quad y = v + \frac{p_y}{p_z} z, \quad t = \frac{z}{p_z}, \quad p_z = \sqrt{1 - p_x^2 - p_y^2} \quad (2)$$

x, y を x に関して微分すると次式が得られる。

$$\left[\frac{\partial u}{\partial p_x} + \frac{(1 - p_y^2)z}{p_z^3} \right] \frac{\partial p_x}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial p_y} + \frac{p_x p_y z}{p_z^3} \right] \frac{\partial p_y}{\partial x} = 1, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial p_x} + \frac{p_x p_y z}{p_z^3} \right] \frac{\partial p_x}{\partial x} + \left[\frac{\partial v}{\partial p_y} + \frac{(1 - p_x^2)z}{p_z^3} \right] \frac{\partial p_y}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

これから $\partial p_x / \partial x, \partial p_y / \partial x$ に対する表示式が求められる。同じようにして $\partial p_x / \partial y, \partial p_y / \partial y$ に対する表示式も求められる。 $\partial u / \partial p_x \sim \partial v / \partial p_y$ は $p_x = P_u, p_y = P_v$ を u, v で微分することにより求められる。結果は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p_x} P_{uu} + \frac{\partial v}{\partial p_x} P_{uv} &= 1, & \frac{\partial u}{\partial p_x} P_{uv} + \frac{\partial v}{\partial p_x} P_{vv} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial p_y} P_{uu} + \frac{\partial v}{\partial p_y} P_{uv} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial p_y} P_{uv} + \frac{\partial v}{\partial p_y} P_{vv} &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

関係式 (3),(4) を利用すると

$$\frac{\partial(p_x, p_y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial p_x}{\partial x} \frac{\partial p_y}{\partial y} - \frac{\partial p_x}{\partial y} \frac{\partial p_y}{\partial x} = \frac{\Delta}{J} \quad (5)$$

が得られる。ここで J は (1) で定義されている。 $J\partial(p_x, p_y)/\partial(x, y)$ の値は $[\partial(p_x, p_y, z)/\partial(u, v, t)]D^{-1}(0)$ から計算できる。

$$\frac{1}{D(0)} \frac{\partial(p_x, p_y, z)}{\partial(u, v, t)} = \frac{1}{D(0)} \begin{vmatrix} P_{uu} & P_{uv} & 0 \\ P_{vu} & P_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = \Delta \quad (6)$$

[例 3-7] 円筒の反射鏡の反射波の caustic 曲線の方程式は

$$x = \frac{3a}{4} \sin P - \frac{a}{4} \sin 3P, \quad z = \frac{3a}{4} \cos P - \frac{a}{4} \cos 3P \quad (1)$$

で与えられる。ここで P は $\tan P = u/w, u^2 + w^2 = a^2$ で定義される。caustic 曲線の曲座標表示は

$$r = 2^{-3/2} a [(1 - \cos \theta)^{1/3} + (1 + \cos \theta)^{1/3}]^{3/2} \quad (2)$$

で与えられることを示せ。ここで $x = r \sin \theta, z = r \cos \theta$ である。

[解] (1) は次のように書き直すことができる。

$$x = a \sin^3 P, \quad z = a \left[\cos^3 P - \frac{3}{2} \cos P \right] \quad (3)$$

関係式

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} = a \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 P} = a B^{3/2}, \quad \sin \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sin^3 P}{B^{3/2}} \quad (4)$$

$$\sin^2 P = \frac{4B^3 - 1}{3}, \quad \sin^2 P = B(\sin \theta)^{2/3}$$

を利用すると

$$B^3 - \frac{3}{4} B(\sin \theta)^{2/3} - 1 = 0 \quad (5)$$

となる。3次方程式 $y^3 + py + q = 0$ の解は

$$y = X + Y, \quad X = \left[-\frac{q}{2} + Q^{1/2} \right]^{1/3}, \quad Y = \left[-\frac{q}{2} - Q^{1/2} \right]^{1/3}, \quad Q = \left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \quad (6)$$

で与えられることを考慮すれば B は

$$B = \frac{1}{2} [(1 + \cos \theta)^{1/3} + (1 - \cos \theta)^{1/3}] \quad (7)$$

と求められ、(2) の結果が得られる。

参考文献

- [1] Y.A. Kravshov, Two new asymptotic methods in the theory of wave propagation in inhomogeneous media (review), Sov. Phys. Acous., vols.14(1), pp.1-17, 1968
- [2] Y.A. Kravtsov and Y.I. Orlov, Geometrical Optics of Inhomogeneous Media, Springer Verlag, 1990.
- [3] R.W. Ziolkowski and G.A. Deschamps, Asymptotic evaluation of high-frequency field near a caustic: An introduction to Maslov's

- method, *Radio Science*, vol.19, pp.1001-1025,1984.
- [4] R.K.Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, University of California Press, 1966
- [5] M. Kline and I.W.Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*, Interscience Pub., 1965
- [6] C.Chester, B.Friedmann and F.Ursell, An extension of the method of steepest descent methods, *Proc.Phil. Soc.*, vol.54,pp.599-611,1957
- [7] G.A. Deschamps, Ray technique in electromagnetics, *Proc. IEEE*,vol.60, pp.1022-1035,1972
- [8] P. H. Pathak and P.Kouyoumjian, An analysis of the radiation from aperture in curved surface by the geometrical theory of diffraction, *Proc., IEEE*, vol.62,pp.1438-1461,1974
- [9] G.L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*, Peter Peregrinus Ltd., 1976
- [10] K.Hongo and Y.Ji, Study of the field around the focal region of spherical reflector antenna, *IEEE. Trans.*, vol AP-36,pp.592-598,1988
- [11] G.Hyde and R.C.Spencer, Studies of the focal region of a spherical reflector, *Geometric optics*, *IEEE. Trans.* vol.AP-16,pp.317-324,646-656,1968
- [12] 橋本正弘、電磁界理論研究会メモ、Jan.31,1987.
- [13] A.C. Schell, The diffraction theory of large aperture spherical reflector antenna, *IEEE Trans.* vol. AP-7,pp.223-226,1959
- [14] B. MaCA Thomas, H.C.Minnett, and V. T. Bao, Field in the focal region of spherical reflector, *IEEE Trans.*, vol. AP-17, pp.229-232,1969
- [15] L. J. Ricardi, synthesis of the fields of transverse feed for a spherical reflector, *IEEE Trans.* vol. AP-19,pp.310-320,1971
- [16] H. C. Minnet and B. MaCA Thomas, Fields in the image space of symmetrical focusing reflector, *Proc. IEEE*, vol.115, pp.1419-1430,1968
- [17] S. I. Ghobrial, Co-polar and cross-polar diffraction images in the focal plane of paraboloidal reflector, A comparison between linear and circular polarization, *IEEE Trans.* vol.AP-24, pp.418-424,1976
- [18] K.Hongo, Y. Ji, and E. Nakajima, High-frequency expression for the field in the caustic region of a reflector using Maslov's method, *Radio Science*, vol.21, pp.911-919,1986.
- [19] I.Kay and J.B.Keller, Asymptotic evaluation of the field at a caustic, *J. Appl. Phys.*, vol. 23, pp.876-883, 1954.
- [20] K.Hongo, Y.Ji and E. Nakajima, High-frequency expression for the field in the caustic region of a cylindrical reflector using Maslov's method, *Radio Science*,vol. 22, no.3,pp.357-365,1987
- [21] J.B Scarborough, the caustic curve of a off-axis parabola, *Appl. Opt.*, vol.3, pp.1445-14446,1964.
- [22] W.V.T.Rusch and A.C.Ludwig, determination of the maximum scan-gain contours of a beam-scanning paraboloid and their relation to the Petzval surface, *IEEE Trans.*, vol. AP-21,pp.141-147,1973.
- [23] C.C. Huang and R. Mittra, Secondary pattern and focal region distribution on reflector antennas under wide angle scanning, *IEEE Trans.*, vol.AP-31, pp.756-763,1983
- [24] M.Sato., K.Hongo, and E. Nakajima, Analysis of the field in the focal region of Wood lens using Maslov's method , The 3rd,Japan-China Joint Meetinf on OFSET'90, EMT-90,p.145, Fukuoka, 1990.
- [25]佐藤初、塩川祥子、佐藤公彦、本郷廣平、SAW Wood レンズの提案とその集束音場の理論と実験、電子情報通信学会、超音波研究会、US91-8,5,1991
- [26]H.Nishi,H.Ichikawa,M.Toyama and I.Kitano, Graded-index objective lens for the compact disk system, *Applied Optics*, vol. 25,pp.3340,1986.
- [27] W. G. Mayer, G. B Lamers and D. C. Auth, Interaction of light and ultrasonic surface waves , *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 42, pp.1255-1257,1967
- [28] B.A. Auld, *Acoustic Field and Waves in Solids*, John Wiley, New York, vol.2, 1973.

- [29] Y.Ji and K.Hongo, Analysis of electromagnetic waves refracted by a spherical dielectric interface, J.Opt.Soc. of Am., vol.8, pp.541-548, 1991
 [30] S.W. Lee, M.S., Seshadri, V. Jamnejad and R. Mittra, Refraction at a curved dielectric interface, geometrical optics solutions, IEEE Trans., vol.MTT-30, pp.12-19, 1982.
 [31] Y.Ji and K.Hongo, Field in the focal region of a dielectric spherical lens, J. Opt. Soc. of Am.A, vol.8, pp.1721-1728, 1991
 [32] K.Nakai, M.Ooki, and S. Kozaki, Scattering electromagnetic wave by an inhomogeneous dielectric sphere, 電磁界理論研究会、桐生、群馬、3, 1991

付録 A Cauchy の特性帯の理論 [1],[2]

ここでは直感的に理解しやすいように2変数の関数について考える。1次の偏微分方程式

$$H(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1)$$

の解を求めることを考える。ここで $p = u_x, q = u_y$ は点 x, y における関数 u の接線である。この曲面の法線方向の成分は $(p_0, q_0, -1)$ で与えられる。この法線がわかればそれに垂直な接平面が定義される。この理由により5個の数 x, y, u, p, q の組 $D(x, y, u, p, q)$ を空間の平面要素とよぶ。(1)を形式てきに q について解くと

$$q = G(x, y, u, p) \quad (2)$$

と表される。これから (x, y, u, p) が既知であれば q を求めることができる。 x_0, y_0, u_0 を固定して p の値を変化させると、平面要素の集合 $\{x_0, y_0, u_0, p, G(x_0, y_0, u_0, p)\}$ が得られる。即ち p を変化させ、対応した q の値との組 (p, q) の方向を直線で表せば点 $P(x_0, y_0, u_0)$ を頂点とする円錐が得られる。このようにして得られた円錐を基本円錐とよぶ。次に方程式

$$u = g(x, y) \quad (3)$$

で表される曲面 S を考える。もし関数 $g(x, y)$ および1次偏微係数 $g_x(x, y), g_y(x, y)$ が或領域 R で連続であれば、 S の各々の点の接平面は平面要素

$$\{x_0, y_0, g(x_0, y_0), g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0)\} \quad (4)$$

を決定する。これは点 $\{x_0, y_0, g(x_0, y_0)\}$ における曲面 S の接平面要素とよぶ。この曲面が偏微分方程式の解となる必要十分条件は各々の点の接平面要素がその方程式の基本円錐と接触することである。パラメータ t で表される曲線

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad u = u(t) \quad (5)$$

はある区間の全ての t の値に対して

$$u(t) = g\{x(t), y(t)\} \quad (6)$$

を満足していれば曲面 S 上にある。今 $t = t_0$ における曲線 C 上の点を P_0 とすると曲線上の接線 P_0P_1 の方向は $\{x'(t_0), y'(t_0), u'(t_0)\}$ で与えられる。ここで $x'(t_0)$ は $t = t_0$ における dx/dt の値をあらわす。他の変数に対しても同様である。この接線は法線 $(p_0, q_0, -1)$ と直交するためには

$$u'(t_0) = p_0 x'(t_0) + q_0 y'(t_0) \quad (7)$$

である。従って

$$u'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t) \quad (8)$$

は曲線 C の点における帯 (strip) を与える。もしそのような帯が方程式 (1) を満足すれば (8) は (1) の解を与える。

(5)の曲線が各々の点で基本円錐に接触すればこの帯は特性帯という。この特性帯の方程式は次のようにして求められる。点 $(x+dx, y+dy, u+du)$ は

$$du = p dx + q dy \quad (10)$$

を満足すれば基本円錐に対して接平面上にある。ここで p, q は (1) を満足する。(10) を p で微分すると

$$0 = dx + \frac{dq}{dp} dy \quad (11)$$

が得られる。(1) から

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq}{dp} = F_p + F_q \frac{dq}{dp} = 0 \quad (12)$$

となる。これから

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dq}{dp} = \frac{F_p}{F_q} \quad \frac{du}{dx} = p + q \frac{dy}{dx} = p + q \frac{F_p}{F_q} \quad (13)$$

が得られる。これは

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} \quad (14)$$

と書くことができる。従って特性帯に沿っては $x'(t), y'(t), u'(t)$ は $F_p, F_q, pF_p + qF_q$ に比例しなければならない。パラメータ t を

$$\frac{dx}{dt} = F_p \quad \frac{dy}{dt} = F_q$$

となるように選んだとすると

$$\frac{du}{dt} = pF_p + qF_q$$

となる。特性帯に沿っては p は t の関数であり、

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} F_p + \frac{\partial p}{\partial y} F_q = \frac{\partial p}{\partial x} F_p + \frac{\partial q}{\partial x} F_q \quad (15)$$

となる。ここで $\partial p / \partial y = \partial q / \partial x$ を利用した。(1) を x で微分すると

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

となりこれを上式に代入すれば

$$\frac{dp}{dt} = -(F_x + pF_u) \quad (17a)$$

が得られる。同じようにして

$$\frac{dq}{dt} = -(F_y + qF_u) \quad (17b)$$

が得られる。以上の結果をまとめると特性帯を決定するための常微分方程式は

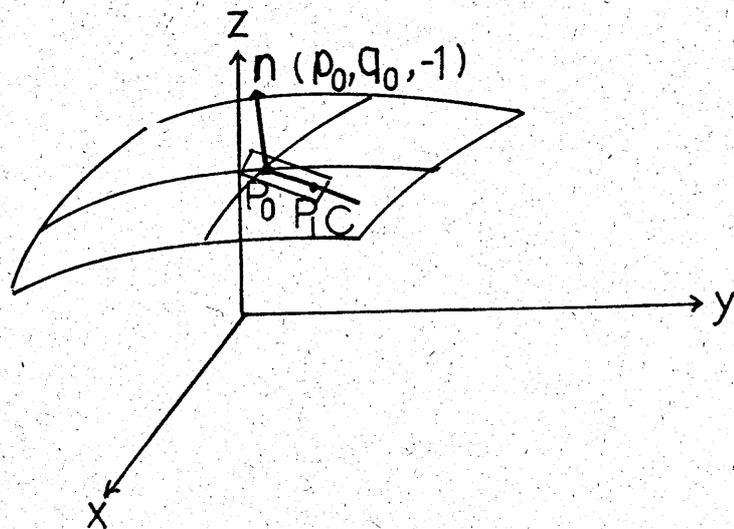
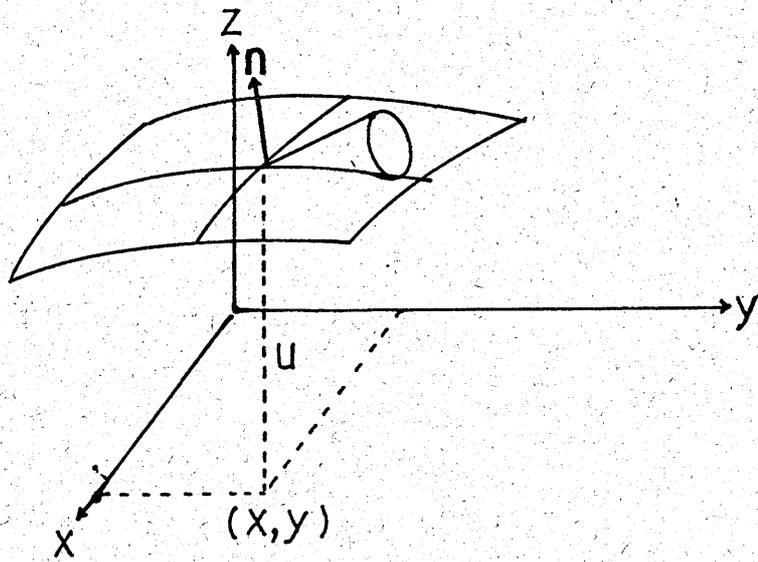
$$\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{du}{dt} = pF_p + qF_q \quad (18a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_u, \quad \frac{dq}{dt} = -F_y - qF_u \quad (18b)$$

で与えられる。

参考文献

- [1] I. Sneddon, Elements of Partial Differential Equations, McGraw-Hill International Book Co.
- [2] Y.A.Kravtsov and Y. I.Orlov, Geometrical Optics of Inhomogeneous Media Springer-Verlag, 1990.



輻射科学研究会
RS92-8

変調電子ビームからの Čerenkov 放射
を用いたコヒーレント光源

西田 英幸 小林 哲郎 森本 朗裕

大阪大学 基礎工学部

1992年 7月 10日

於 大阪大学

1 はじめに

Čerenkov 放射 (CR) は高エネルギー荷電粒子が媒質中を通過するときに生じる非常に鋭い指向性をもつ電磁波の放射で、赤外から紫外にかけて非常に広いスペクトル (\sim PHz) をもつ。また単一荷電粒子から放射される CR 光は、非常に短い (\sim subfs) “コヒーレント” な光パルスである¹。

従来、CR の広帯域性、鋭い指向性に着目した、マイクロ波から真空紫外にかけての光生成が数々報告されてはいるが [1]-[7]、これらの光生成は定常的な (一様な) 電子ビームを用いているため、その放射光は各電子からの放射光がランダムに重ね合わされインコヒーレントとなる。電子密度が変化している変調電子ビームを用いるとコヒーレントな CR 光の生成が可能であるが、変調電子ビームの生成が容易でないためコヒーレント放射光の生成はほとんど報告されていない。そこで我々は独自の方法で変調電子ビームの生成を検討し、これを用いたコヒーレント CR による光生成の研究に取り組んでいる [8]-[11]。

ここではまず CR の基本的な説明を行い、CR のコヒーレンス性を利用することにより従来の光生成に比べ非常に効率が良くなることを示し、変調電子ビームからのコヒーレント CR による遠赤外モノサイクルパルス生成、波長可変単色波生成の提案を行う。

2 点電荷からの Čerenkov 放射

荷電粒子が媒質中を通過するとき、電荷が媒質中の分極をゆすりこの結果双極放射が生じる。このとき荷電粒子の速度が小さければ各分極からの双極放射は打ち消し合うが、荷電粒子の速度が媒質中の光速より大きければ各分極からの双極放射はある特定の方向で強め合い、遠方に伝播する電磁波の放射が生じる。この電磁波の放射が CR であり、1930 年代に Frank と Tamm により理論的説明が与えられている [12,13]。ここでは、点電荷が誘電体中を通過するときの場の方程式を解くことにより CR の説明を行う。

電荷量 e をもつ点電荷が等速度 v で屈折率 n の誘電体中を運動しているとき、スカラーポテンシャルに対し

$$\Delta\phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{e}{\epsilon_0 n^2} \delta(x)\delta(y)\delta(z-vt) \quad (1)$$

が成り立つ。ただし ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空中の誘電率、透磁率であり、点電荷は z 軸に沿って運動し時刻 $t=0$ での位置を $z=0$ としている。またローレンツゲージを仮定しており、ベクトルポテンシャル A に対しても同様な式が成り立つ。こ

¹ここでコヒーレントとは、光波の位相、伝播方向にランダム性がないという意味で用いており、単色性が良いという意味ではない。

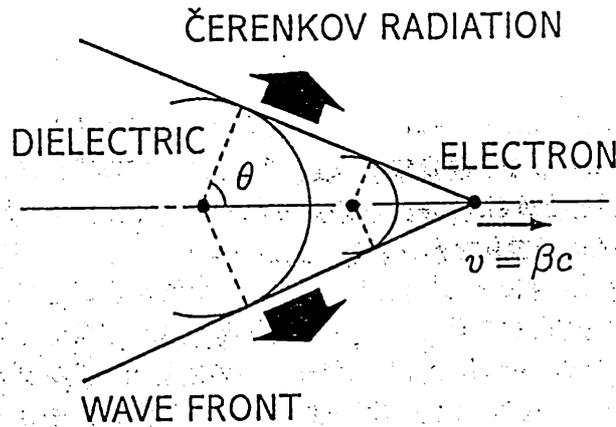


Fig. 1. 誘電体中を通過する電子によるCR.

の方程式は円筒座標系 (ρ, φ, z) で厳密に解くことができる。 ϕ を

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{-i\omega(t-z/v)} d\omega \quad (2)$$

という表式で求めると、 $\Phi(\omega)$ に対し

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{e}{4\pi^2 \epsilon_0 n^2 v} K_0(\sigma \rho) & (\beta n < 1) \\ i \frac{e}{8\pi \epsilon_0 n^2 v} H_0^{(1)}(u \rho) & (\beta n > 1) \end{cases} \quad (3)$$

を得る [13]。ここで $\beta = v/c$ (c は真空中の光速) で、 σ, u , はそれぞれ

$$\sigma = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2 n^2}, \quad u = \frac{\omega}{v} \sqrt{\beta^2 n^2 - 1} \quad (4)$$

であり、 K_0 は 0 次の変形ベッセル関数、 $H_0^{(1)}$ は 0 次の第 1 種ハンケル関数である。ベクトルポテンシャルのゼロでない成分は A_z のみで ϕ と同様な表式となり、場のゼロでない成分は、 ϕ と A_z が角度 φ に依存しないため、 E_ρ, E_z, H_φ となる。

$\beta n < 1$ では、 $\Phi(\omega)$ は $K_0(\sigma \rho)$ で ρ に依存しているため、場は急速に減衰するが、 $\beta n > 1$ では、 $\Phi(\omega)$ の ρ の依存性は $H_0^{(1)}(u \rho)$ であるため、エネルギーの流出が生じる。このエネルギー流が CR であり、放射条件は $\beta n > 1$ となる。

放射場はハンケル関数の重ね合わせで表わされるため Fig. 1 のように円錐状に広がり、 z 軸に対して

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} \quad (5)$$

で決まるチェレンコフ角 θ の方向に伝播する (これはポインティングベクトルの成分の比を計算することにより求まる) [12,13]。

点電荷による放射エネルギー W_1 は、点電荷の運動軸 (z 軸) を中心軸とした円柱表面を通過するエネルギー流を計算することにより求められる。点電荷の誘電

体中の走行距離が l のとき

$$W = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} \rho d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dt (-E_z H_\varphi) = \int_{\beta n > 1} I_1(\omega) d\omega \quad (6)$$

と求まる。ここで $I_1(\omega)$ は放射強度 (周波数区間 $d\omega$ に放射されるエネルギー) で

$$I_1(\omega) = \frac{e^2 l}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \omega \quad (7)$$

である。

CR は媒質が透明でかつ $\beta n > 1$ を満たす領域で観測される。このため媒質を適当に選べば真空紫外領域までの任意の周波数領域での光生成が可能である。また、赤外から紫外にかけて透明な熔融石英等の媒質を用いると、非常に広帯域 (\sim PHz) な光生成が可能で、単一電子からの放射光をパルス圧縮することによりサブフェムト秒の光パルス生成が可能だといわれている [11,14,15]。

3 変調電子ビームからのコヒーレント放射

単一電子からの CR 光は位相にランダム性をもたずコヒーレントであるが、その放射エネルギーは非常に弱い。例えば熔融石英中を速度 $0.9c$ の電子が通過するときの放射エネルギーは、電子の走行距離が 1 mm で高々 300 eV (光子数で約 100 個) にしかならない。そこでより強い放射光を得るために、多電子からなる電子ビームにより光生成が行われる。このとき、通常用いられている、一様な電子ビームからの放射光は、各電子からの放射電磁場の位相がランダムとなるためコヒーレンス性を失う。ところが電子ビームが変調を受けパルス状にバンチされていれば、それが 1 つの点電荷と見なせる長波長領域では、各電子からの放射電磁場の位相差が無視できるため合成電磁場はコヒーレンス性を保つ。また電子ビームの密度が周期的に変動している場合も、その変動周波数およびその高調波ではその放射光はコヒーレントとなる。

今 N 個の電子が等速度 v で z 軸上を運動している場合について考える。このとき電荷密度は

$$\rho = e \sum_{p=1}^N \delta(x)\delta(y)\delta\{z - v(t - t_p)\} \quad (8)$$

となる。ただし t_p は p 番目の電子が $z = 0$ の面を通過する時刻である。 p 番目の電子による CR の場のフーリエ成分は、 $z = 0$ を $t = 0$ で通過する電子による CR の場のフーリエ成分に対し位相が ωt_p だけずれるため、 N 個の電子からなるパルス電子ビームからの CR の放射強度は

$$I_N(\omega) = I_1(\omega) \left| \sum_{p=1}^N e^{i\omega t_p} \right|^2 = I_1(\omega) \sum_{p,q=1}^N e^{i\omega(t_p - t_q)} \quad (9)$$

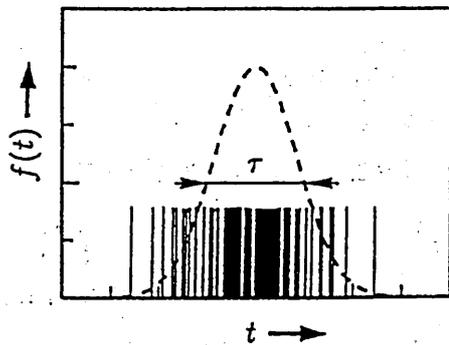


Fig. 2. パルス電子ビームの電子の分布関数 $f(t)$. 実線は電子 (点電荷) の分布関数で, 破線はそれを短時間で平滑化したものである.

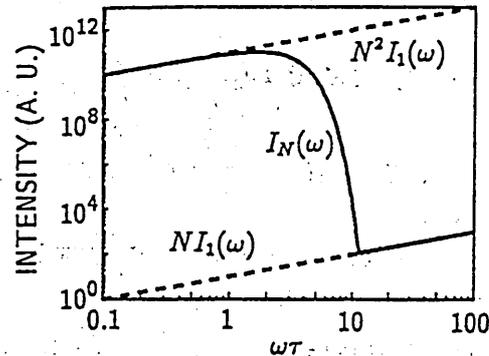


Fig. 3. パルス電子ビームによる CR の放射強度 $I_N(\omega)$. τ はパルス電子ビームのパンチ幅 (半値全幅) で, 電子数は 10^{10} .

と求まる. ここで電子ビームがパルス状にパンチされている場合について考える. パルス電子ビームのパンチ幅を τ とおくと $|t_p - t_q| \lesssim \tau$ となり

$$I_N(\omega) = \begin{cases} N^2 I_1(\omega) & (\omega\tau \ll 2\pi) \\ N I_1(\omega) & (\omega\tau \gg 2\pi) \end{cases} \quad (10)$$

が得られる. これはパルス電子ビームが1つの点電荷と見なせるコヒーレントな領域 ($\omega\tau \ll 2\pi$) では放射強度は N^2 に比例し, そうでない $\omega\tau \gg 2\pi$ の領域では放射強度は単に N に比例することを示している. このことは $\omega\tau \ll 2\pi$ では, 各電子からの放射電磁場がコヒーレントに重ね合わされ合成電磁場の大きさが単一電子の場合に比べ電子数倍だけ大きくなるが, $\omega\tau \gg 2\pi$ ではこのようなことが起こらないことで理解できる. 放射強度が N^2 に比例する領域の放射がコヒーレント放射と呼ばれているものである.

Eq. (9) を以下のように変形する:

$$I_N(\omega) = I_1(\omega) \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (11)$$

ここで $f(t)$ はパルス電子ビーム中の電子の分布関数で

$$f(t) = \sum_{p=1}^N \delta(t - t_p) \quad (12)$$

である. 電子分布関数 $f(t)$ は, Fig. 2 実線のように離散的であるが, これを短時間で平滑化し連続関数で近似する (Fig. 2 破線). これは電子ビームのマイクロな形状が問題とならない $\omega\tau \leq 2\pi$ の低周波数領域では十分良い近似を与える. この近似

のもとで $f(t)$ にガウス関数を用いると

$$I_N(\omega) = N^2 I_1(\omega) e^{-\omega^2 \tau^2 / 8 \ln 2} \quad (13)$$

を得る。ただし τ は半値全幅で、 $I_N(\omega)$ は $\omega = 2\sqrt{\ln 2}/\tau$ にピークをもちこれ以上、周波数が大きくなると急速に減衰する。 $N = 10^{10}$ のとき、式 (13) が適用できないインコヒーレントな高周波数領域での放射も考慮にいった $I_N(\omega)$ の振舞いを Fig. 3 に示す。これは $\omega\tau < 10$ のコヒーレント放射領域にエネルギーの放射が集中することを示している。

次に周期的に密度が変動する連続電子ビームの場合について考える。変動周期を T_0 とおくと、単位時間当たりの平均放射エネルギーは

$$P = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} I_1(p\omega_0) \left| \omega_0 \int_0^{T_0} f(t) e^{-ip\omega_0 t} dt \right|^2 \quad (14)$$

と求められる。ただし $\omega_0 = 2\pi/T_0$ で、 $I_1(\omega)$ は Eq. (7) で与えられる単一電子からの CR の放射強度である。また $f(t)$ は 1 周期に含まれる電子の分布関数 (Eq. (12)) であり、このとき N は 1 周期に含まれる電子数である。この式は変動周波数およびその高調波で放射が生じることを示しており、周期変動電子ビームから単色波生成、高調波生成が可能であることを表している。

今電子の分布関数が

$$f(t) = \frac{N}{T_0} (1 + \alpha \cos \omega_0 t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (15)$$

で与えられるような場合について式 (14) を計算すると

$$P = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha N}{T_0} \right)^2 I_1(\omega_0) \quad (16)$$

と求まる。これは電子ビームの変動周波数 ω_0 のみで放射が生じ、 P は単位時間当たりの変動電子数 $\alpha N/T_0$ の自乗に比例することを示している。このことは各電子からの放射電磁場の位相が周波数 ω_0 のときのみ一致し、合成電磁場がコヒーレントとなることを示している。

パルス電子ビーム、周期変動電子ビームによるコヒーレント放射は、一様な電子ビームからの放射 (強度は電子数に比例) と異なり、放射強度は電子数の自乗に比例する。このため単一電子当たりの放射強度は電子数に比例し、電子数を多くするほど効率が良くなり高効率高出力の放射が期待できる。

4 遠赤外モノサイクルパルス生成

コヒーレント放射生成に用いられるパルス電子ビームは、普通、大型線形加速器で生成され、サブミリ波領域でコヒーレント放射が観測されている [16,17]。これ

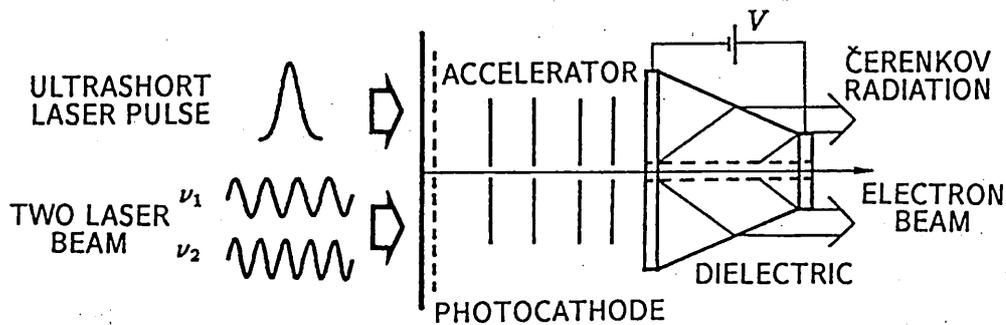


Fig. 4. 遠赤外コヒーレント CR 放射システムの基本構成. 光電面の照射光をフェムト秒レーザーパルスにすることによりモノサイクルパルスが, 2 レーザ光にすることにより差周波単色波光が生成される.

らのコヒーレント放射は, バンチ幅が 10 ps 程度のパルス電子ビームにより生成されている. より高い周波数 — 赤外, 可視, 紫外領域 — でのコヒーレント放射光を得ようとする, より短いバンチ幅をもつパルス電子ビームが必要となる. しかし通常の方法でのパルス電子ビーム生成では, バンチ幅をより短くするのは非常に困難である. そこで我々は, 高速応答光電面に超短レーザーパルスを照射することによりパルス電子ビームの生成を行うことを発案した [8,10].

光電子放出過程は超高速現象 (< 10 fs [18]) であるため, 超短レーザーパルスにより光電子放出を起こすことにより, 照射光のパルス幅程度のバンチ幅をもつパルス電子ビームが生成される. これによりサブピコ秒パルス電子ビームの生成ができ, 遠赤外領域でのコヒーレント放射光生成が可能となる. またこの方法ではパルス電子ビーム生成に必要な装置が少なく, 従来パルス電子ビームの生成法に比べ, 非常に小型で簡便な装置でのパルス電子ビームの生成が可能となる.

このような光電変換パルス電子ビームは超高速光検出の分野 (ストリークカメラ) で利用されており, すでに 270 fs のパルス電子ビームが実現されている [19]. 600 nm, 0.3 nJ のフェムト秒レーザーパルスを 1% の量子効率の光電面に照射することにより, 10^7 個の電子からなる 100 fs 程度のパルス電子ビームの生成が十分可能である.

Fig. 4 に放射システムの基本構成を示す. 遠赤外領域では高屈折率低分散の透明な媒質 (シリコン, サファイアなど) が存在するためパルス電子ビームの加速電圧は比較的小さくすむ (シリコンの場合最低 23 kV). 媒質中での電子の衝突散乱を防ぐため誘電体に中空円筒をあげ, これに光電変換パルス電子ビームを通しコヒーレント放射を起こす. この結果コヒーレント放射が遠赤外領域で生じる. この

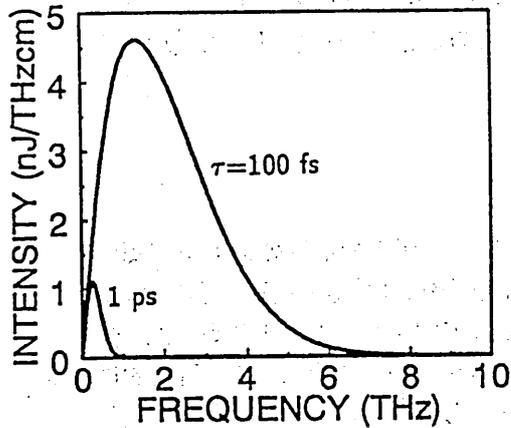


Fig. 5. 遠赤外モノサイクルパルス光の放射スペクトル. パルス電子ビームは電子数 10^7 , 加速電圧 100 keV, パンチ幅 0.1/1 ps で, 誘電体は半径 $10 \mu\text{m}$ の中空をあけた Si としている.

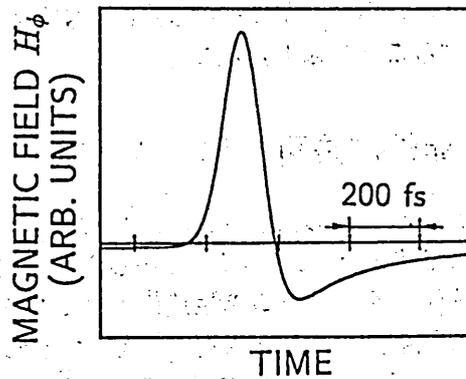


Fig. 6. モノサイクルパルス光の磁場 H_ϕ の瞬時波形. パルス電子ビームは電子数 10^7 , 加速電圧 100 keV, パンチ幅 100 fs で, 誘電体は半径 $10 \mu\text{m}$ の中空をあけた Si としている.

とき中空円筒の半径を $10 \mu\text{m}$ 程度以下にすれば, コヒーレント放射への影響はあまり生じない (付録参照).

Fig. 5 に, 電子数 10^7 , 100 keV のパルス電子ビームを Si におけた半径 $10 \mu\text{m}$ の中空に通過させたときに生じる CR の放射スペクトル (計算値) を示す. パルス電子ビームのパンチ幅が 100 fs のとき放射光は 1.2 THz にピークをもち, バンド幅は 2.2 THz と非常に広いものとなる. このときの磁場の瞬時波形を計算したものが Fig. 6 で, その放射光はモノサイクルパルスとなる (ただし遠赤外領域では Si の分散は非常に小さいので [20], これを無視した). 放射強度はパルス電子ビームの走行距離が 1 cm で約 1 MW にもおよぶ. このとき各電子の放射効率 (放射エネルギーと運動エネルギーの比) は 80 %/cm と非常に大きく, このことは放射が直ちに停止することを意味する. しかしこれは Fig. 4 にもあるように放射部にも加速電場を印加することで解決できる.

高出力モノサイクルパルス生成に必要な高密度のサブピコ秒パルス電子ビームは, 光電面にフェムト秒レーザーパルスを照射することにより比較的容易に生成できるが, 電子密度が大きいと電子間のクーロン反発力のために生じるパンチ幅広がり問題となる. このためストリークカメラでは電子数を $10^2 \sim 10^3$ 程度に制限している (この程度の電子数でも 10 mW ~ 1 W 程度のモノサイクルパルスが生成可能). パルス電子ビームのパンチ幅広がり時間は時間とともに大きくなるので, 短時間の間に電子ビームを大きな速度まで加速することが有効になる. 我々の試算によ

ると電子数が 10^7 の場合、1 MeV 程度まで電子ビームを加速することにより、電子ビームの走行距離が数 10 cm でパンチ幅広がりを 1 % 程度におさえることができる。またパルス電子ビームから放射されるモノサイクルパルスは誘電体の分散のためパルス幅が広がりその波形はくずれるが、このことはレーザパルス圧縮技術を利用することにより解決できよう。

5 遠赤外波長可変単色波生成

従来電子ビームの密度変調は、マイクロ波またはレーザ光で電子の速度を変調することにより行われている。しかしこの方法では変調度が大きい (Eq. (15) の α が 1 に近い) 電子ビームの生成は困難である。そこで我々は、Fig. 4 において、光電面への照射光に強度が周期的に変化する光ビームを用いることにより、周期的に変動する電子ビームの生成が可能であることを提案した [9,10]。この方法では変調度が大きい周期変動電子ビームの生成が可能で、数 THz 程度まで応答できる高速応答光電面を用いることにより数 THz で周期変動する電子ビームの生成ができる。この周期変動電子ビームを用いてコヒーレント放射を起こすことにより遠赤外単色波生成が可能となる。

数 THz で強度が変化する光ビームは、数 THz の周波数差をもつ 2 レーザ光を干渉させることにより容易に生成でき、この 2 レーザ光の差周波がコヒーレント放射の周波数となる。このときレーザ光の周波数を変化させることにより、放射光はチューナブルとなる。

Fig. 7 は、レーザ光のパワーと CR 光のパワーの関係を計算したもので、レーザ光の波長を 755 nm, 760 nm (周波数差 2.6 THz)、光電面の量子効率を 1 %、加速電圧を 100 kV とし、誘電体を Si とし中空の半径を 10 μm としている。図中のコヒーレント放射は 2 レーザ光の差周波での単色波であり、インコヒーレント放射は非常に広帯域なノイズ成分である (Fig. 8)。

インコヒーレント放射の放射強度はレーザ光の照射パワーに比例するのに対し、コヒーレント放射はその自乗に比例して放射され、照射レーザ光のパワーをそれぞれ 100 mW とすると電子ビームの走行距離が 1 cm で放射光は約 10 mW となる。

6 おわりに

変調電子ビームによるコヒーレント放射を利用することにより高効率高出力の光生成が可能となる。従来、変調電子ビームは大型の線形加速器により生成されているが、非常に大きな装置を必要とし、またその制御性はあまり良くない。そこで我々は、レーザ光を光電面に照射し光電子放出を起こし、この光電子を加速し電子ビームの生成を行うことを提案した。この結果電子ビームの変調は、非常に制御性のよいレーザ光により行われることになり、パルス電子ビーム生成が小型簡便な装

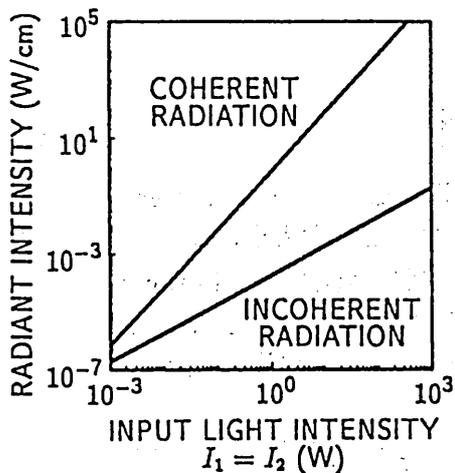


Fig. 7. 遠赤外単色光生成の入射光強度と放射光強度の特性。入射光は 755, 760 nm (差周波 2.6THz) で強度は等しく, 光電面の量子効率 は 1 %, 電子ビームの加速電圧は 100 kV, 誘電体は半径 10 μm の中空をあけた Si としている。

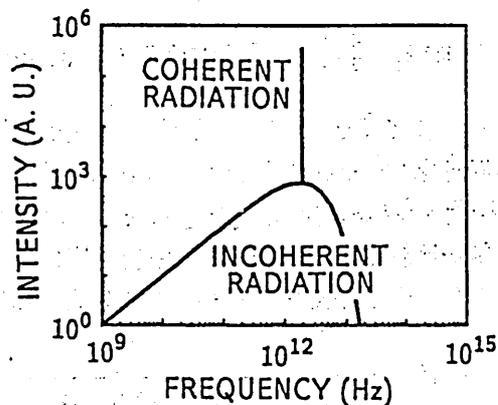


Fig. 8. 遠赤外単色波光の放射スペクトル。

置で可能となり, 光生成システムの小型化が図れる。このようにして生成された変調電子ビームを用いると, 従来非常に困難であった遠赤外領域でコヒーレント放射を起こすことができる。

このようにして生成された変調電子ビームを数 cm 誘電体中を通過させることにより, 数 THz にピークをもつ数 MW のモノサイクルパルス生成, および遠赤外領域でチューナブルな数 mW~数 W の単色波生成が可能となる。

電子ビームの横方向の広がりについての検討は行わなかったが, 放射光の波長程度の広がりなら放射光への影響がない。また光電子放出による電子ビームでは電子速度のばらつきは, 放射光の光子エネルギーと光電面の仕事関数の差で決まるため, 非常に小さく問題とならない。この点でも我々が考案した変調電子ビームの生成法は非常に有用である。

今後このような遠赤外光は, 物性分光分野, 光化学, エレクトロニクスなどの各分野で有用になろう。現在我々は放射システムの試作に取り組んでいるところである。

謝辞

本研究に際し御指導, 御討論頂いた霜田光一(東京大学名誉教授, および張吉夫(大阪府立大学工学部), 大脇成裕(大阪大学産業科学研究所) 諸先生方に謝意を表します。なお本研究の一部は文部省科学研究費補助金総合研究(A)0205006の援助を受

けて行われている。

付録 A 中空円筒誘電体でのČerenkov 放射

固体の誘電体で CR を起こすと電子の衝突散乱が問題となる。このため誘電体に中空円筒をあけ、そこに電子ビームを通し CR を起こすことが考えられる。

誘電体中にあけられた中空円筒を通過する電子による CR は、1947年に Ginzburg らにより解析されており、半径 a の中空円筒の中心を等速度で通過する電子による放射強度 $I_1(\omega; a)$ と中空円筒が存在しないときの放射強度 $I_1(\omega)$ との比 $\gamma(\omega; a)$ が

$$\gamma(\omega; a) = \frac{4}{\pi^2 a^2} \frac{1}{|BsI_1(sa)H_0^{(1)}(ua) + uI_0(sa)H_1^{(1)}(ua)|^2} \quad (17)$$

と求められている [21]。ここで $H_j^{(1)}, I_j$ は j 次の第 1 種ハンケル関数、変形ベッセル関数であり、 u, s, B はそれぞれ

$$u = \frac{\omega}{v} \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}, \quad s = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad B = \frac{1 - \beta^2 n^2}{(1 - \beta^2)n^2} \quad (18)$$

である。

Fig. 9 に $n = 3.42, \beta = 0.55/0.94$ としたときの $\omega a/v$ に対する $\gamma(\omega; a)$ の振舞いを示す。これは $\omega a/v$ が増加するにしたがい放射強度が急速に減衰することを示している。 $\gamma(\omega; a) = 1/2$ となる周波数は $\beta = 0.55$ (100 keV) のとき $9.0 \times 10^6/a$ Hz で (a の単位は m), $\beta = 0.94$ (1 MeV) のとき $2.5 \times 10^7/a$ Hz である。これより遠赤外領域の光生成では、中空円筒の半径を 10 μm 程度にすれば十分である。

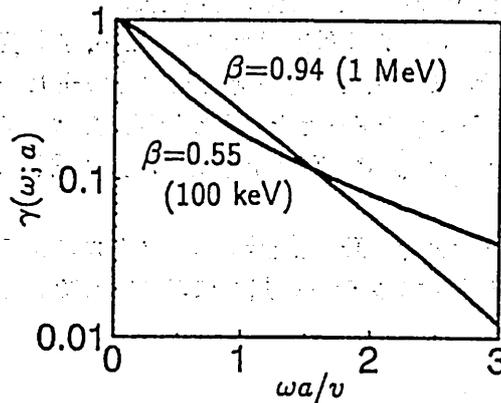


Fig. 9. 誘電体に中空円筒をあけたことによる CR の影響。 $\gamma(\omega; a)$ は中空が存在するときとそうでないときの CR の放射強度比である (a は中空の半径)。 $n = 3.42, \beta = 0.55/0.94$ としている。

参考文献

- [1] J. E. Walsh, T. C. Marshall, and S. P. Schlesinger: *Phys. Fluids* **20** (1977) 709.
- [2] K. L. Felch, K. O. Busby, R. W. Layman, D. Kapilow, and J. E. Walsh: *Appl. Phys. Lett.* **38** (1981) 601.
- [3] P. D. Coleman and C. Enderby: *J. Appl. Phys.* **31** (1960) 1695.
- [4] R. Ulrich: *Z. Physik* **199** (1967) 171.
- [5] M. A. Piestrup, R. H. Pantell, H. E. Puthoff, and G. B. Rothbart: *J. Appl. Phys.* **44** (1973) 5160.
- [6] M. A. Piestrup, R. A. Powell, G. B. Rothbart, C. K. Chen, and R. H. Pantell: *Appl. Phys. Lett.* **28** (1976) 92.
- [7] J. C. Sheppard, R. A. Gearhart, G. B. Rothbart, R. H. Pantell, and M. A. Piestrup: *J. Appl. Phys.* **56** (1984) 1277.
- [8] 西田 英幸, 小林 哲郎, 森本 朗裕: 第 38 回応用物理学会関係連合講演会予稿集 3 (1991 年, 春) p. 911.
- [9] 西田 英幸, 小林 哲郎, 森本 朗裕: 第 52 回応用物理学会学術講演会予稿集 (1991 年, 秋) p. 948.
- [10] 西田 英幸, 小林 哲郎, 森本 朗裕: 電子通信学会量子エレクトロニクス研究会資料, OQE (1992) (掲載予定).
- [11] 西田 英幸, 森本 朗裕, 小林 哲郎: レーザ研究 **20** (1992) (掲載予定).
- [12] I. Frank and Ig. Tamm: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **14** (1937) 107 [*C. R. de l' Acad. Sci. de l' USSR* **14** (1937) 109].
- [13] Ig. Tamm: *J. Phys. Acad. Sci. USSR* **1** (1939) 439.
- [14] 霜田 光一: 私信.
- [15] 小林 哲郎, 霜田 光一, 張 吉夫, 大脇 成裕: 第 37 回応用物理学会関係連合講演会予稿集 3 (1990 年, 春) p. 863.
- [16] J. Ohkuma, S. Okuda, and K. Tsumori: *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1967.
- [17] Y. Shibata, K. Ishi, T. Takahashi, F. Arai, M. Ikezawa, K. Takami, T. Matsuyama, K. Kobayashi, and Y. Fujita: *Phys. Rev.* **44** (1991) R3449.
- [18] E. K. Zavoisky and S. D. Fanchenko, *Appl. Opt.* **4** (1965) 1155.
- [19] K. Kinoshita, M. Ito, and Y. Suzuki: *Rev. Sci. Instrum.* **59** (1987) 932.
- [20] D. Grischkowsky, S. Keiding, M. v. Exter, and Ch. Fattinger: *J. Opt. Soc. Am. B* **7** (1990) 2006.
- [21] V. L. Ginzburg and I. M. Frank: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **56** (1947) 699.

輻射科学研究会資料
(RS92-9)

「電子導波路の量子輸送」

三好 旦六

(神戸大学 工学部)

平成4年7月10日

電子導波路の線形・非線形量子輸送特性

LINEAR AND NONLINEAR QUANTUM TRANSPORT
OF ELECTRON WAVEGUIDES土屋 英昭 小川 真人 三好 旦六
Hideaki TSUCHIYA Matsuto OGAWA Tanroku MIYOSHI

神戸大学工学部電子工学科

Department of Electronic Engineering, Kobe University

あらまし 本稿では、電子導波路の線形および非線形量子輸送特性を、量子力学的輸送モデルである Wigner 関数モデルを用いて検討する。電子導波路の線形輸送領域では、イオン化不純物散乱が量子化コンダクタンスに及ぼす影響を調べ、コンダクタンスの減少および量子化ステップの乱れについて議論する。また、非線形輸送領域では、電子導波路のコンダクタンスに現れる非線形性と、室温でのトランジスター動作の可能性について議論する。

[1]はじめに

電子導波路内では、電子波は、伝搬方向に垂直な二方向においてポテンシャル障壁によって閉じ込められており、光波・マイクロ波伝送線路と同様に、導波モードのみが伝搬する。現在では、高解像度電子線リソグラフィと MBE などを用いて、このような電子導波路の作製が可能となっており、二端子コンダクタンスが、導波路幅の関数として量子化されることが報告されている [1]-[3]。電子導波路のバリスティックな輸送特性の解析には、電子波の透過確率を用いて表現されるランダウ公式が主として用いられてきたが、ダイナミックな輸送特性や散乱過程を含んだ特性を、定量的に論じることはできなかった。最近、筆者らは、量子力学的輸送モデルである Wigner 関数モデルを、初めて電子導波路に適用することに成功した [13]。Wigner 関数モデルは、共鳴トンネルダイオードや量子井戸レーザ等の量子井戸デバイスの発展とともに、その輸送モデルとして、最近急速に研究が進み [4]-[12]、有用性が明らかになってきたモデルである。筆者らは、[13]では、モデルの妥当性を確かめるために、電子導波路のバリスティック輸送のみを論じたが、実際のデバイスの特性を論じるには、種々の散乱効果を取り入れた輸送モデルを作り上げる必要がある。特に、電子導波路が動作する極低温では、イオン化不純物による散乱が重要になってくると考えられる [14]。

本論文では、イオン化不純物散乱の影響を取り入れた電子導波路の Wigner 関数モデルについて検討を行う。一般

に、多体効果や散乱の効果を厳密に取り入れた形の量子力学的輸送方程式を表現することは可能であるが [8]、その複雑さのため、実際の計算は困難であり、未だ試みられたことはない。ここでは、電子の散乱過程を、現象論的な緩和時間近似を用いて取り入れることにする。緩和時間は、フェルミの黄金律に基づいて、各導波モードの電子に対して計算されるが、同一モード内の遷移だけでなく、他のモードとの結合で起こるモード間遷移過程も含む形で定式化を行った。シミュレーションの結果より、イオン化不純物散乱により、電子導波路のコンダクタンスが減少し、量子化のステップが乱れることが示されるが、特に、スプリット・ゲート HEMT 構造電子導波路の場合は、イオン化不純物の二次元的分布を考慮した現実的なモデルが測定結果をよく説明することを示す。イオン化不純物散乱が非常に強く起こっている場合には、コンダクタンスの量子化ステップがなくなり、古典的モデルから計算したコンダクタンスの値 [15] に近づくことを示す。

以上のような電子導波路のコンダクタンスの量子化は、印加電圧が非常に小さい線形輸送領域において観測される。本稿の後半では、大電圧が印加された場合の量子輸送特性について検討を行う。まず、絶対温度 0K でのコンダクタンスの非線形性 [16] について議論する。印加電圧による両電極間のポテンシャル差が電極部のフェルミエネルギー程度以上になると、コンダクタンスが量子化の値 $2e^2/h$ より小さくなり非線形性が現れることを示す。また、スプリッ

ト・ゲート構造電子導波路の大振幅電流・電圧特性が室温で飽和することを示し、その導波路幅依存性を調べることに、トランジスタ動作の可能性について議論する。

[2]電子導波路の Wigner 関数モデル

電子導波路の解析モデルとして、図 1 の構造を考える。電子波の伝搬方向 x に垂直な y, z 方向の閉じ込めには、無限大のポテンシャル障壁を仮定し、深さ方向には、基本モードのみを考慮する。電子導波路両端のコンタクトは、電子が熱平衡分布状態にある reservoir を仮定する。このような単純な構造を有する電子導波路の場合、量子輸送は、次に示す一次元の Wigner 関数に関する Liouville 方程式により解析することができる [13]。

$$\frac{\partial F_n(x, k_x)}{\partial t} = \frac{\hbar k_x}{m^*} \frac{\partial F_n(x, k_x)}{\partial x} - \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_x}{2\pi} V(x, k_x - k'_x) F_n(x, k'_x) \quad (1)$$

ここで、

$$F_n(x, k_x) = 2 \sum_{K_x} P(K_x, K_y^n, K_z^1) \int_{-\infty}^{\infty} du_x \varphi_x \left(x + \frac{u_x}{2}, K_x \right) \times \varphi_x^* \left(x - \frac{u_x}{2}, K_x \right) e^{jk_x u_x} \quad (2)$$

$$V(x, k_x - k'_x) = 2 \int_0^{\infty} du_x \left[v \left(x + \frac{u_x}{2} \right) - v \left(x - \frac{u_x}{2} \right) \right] \times \sin[(k_x - k'_x) u_x] \quad (3)$$

この一次元の Liouville 方程式 (1) は、三次元の Liouville 方程式と同じ形をしているが、新たに定義した分布関数 $F_n(x, k_x)$ の運動を記述している。分布関数 $F_n(x, k_x)$ は、 y 方向 n 次モードの Wigner 関数を横方向の運動量と空間座標に関して積分したものである。

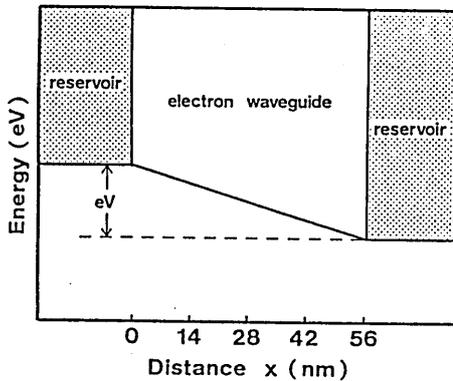


図 1. 電子導波路のシミュレーションモデル

散乱の効果は、次式に示す緩和時間を用いた衝突項を、式 (1) の右辺に現象論的に付け加えることによって取り入れる。

$$\left(\frac{\partial F_n(x, k_x)}{\partial t} \right)_C = - \frac{1}{\langle \tau_n(k_x) \rangle} \times \left[F_n(x, k_x) - F_n^0(x, k_x) \int dk'_x F_n(x, k'_x) \right] \quad (4)$$

ここで、 $F_n^0(x, k_x)$ は、規格化された熱平衡状態の分布関数である。 $\langle \tau_n(k_x) \rangle$ は、 n 次モードの電子に対する緩和時間であり、波数 k_x に関して平均されている。 $\tau_n(k_x)$ は、次式で定義される。

$$\frac{1}{\tau_n(k_x)} = \sum_m \frac{L_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x W(n, k_x; m, k'_x) \quad (5)$$

ここで、 L_x は、導波路の長さ、 $W(n, k_x; m, k'_x)$ は、モード n, m 間の遷移確率を表している。量子化コンダクタンスを問題にする場合には、電子導波路は低温で動作しているので、イオン化不純物による電子の遷移確率のみを考慮することにする。

導波路の長さ、幅および厚さを、それぞれ、 L_x, L_y, L_z とした時、 n 次モードの Wigner 関数に対する境界条件は、左右の境界において、次式で与えられる。

$$F_n(0, k_x) = 2f_{FD}(k_x, K_y^n, K_z^1), \quad k_x > 0 \quad (6)$$

$$F_n(L_x, k_x) = 2f_{FD}(k_x, K_y^n, K_z^1), \quad k_x < 0 \quad (7)$$

ここで、 f_{FD} は、フェルミエネルギー E_f と温度 T で決まるフェルミ・ディラック分布関数である。 $K_y^n = n\pi/L_y$ および $K_z^1 = \pi/L_z$ は、それぞれ、 y および z 方向の量子化された波数を表している。Wigner 関数に関する Liouville 方程式 (1) は、有限差分法を用いて数値解析される。有限差分法による離散化については、文献 [13] に詳しく議論されているので、参照されたい。Liouville 方程式 (1) を各モードの電子波に対して解き、次式を計算することによって、導波路を流れる全電流を求めることができる。

$$I = \sum_n I_n = \sum_n e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{\hbar k_x}{m^*} F_n(x, k_x) \quad (8)$$

[3]イオン化不純物散乱による電子緩和時間

図 2 に示すような、点 $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ にある一つのイオン化不純物との衝突による二モード間の遷移確率を考える。イオン化不純物による摂動ハミルトニアンは、

$$H' = \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \frac{\exp(-|r - r_0|/\lambda)}{|r - r_0|} \quad (9)$$

と書ける。ここで、 ϵ は、媒質の誘電率で、 λ は、スクリーニ

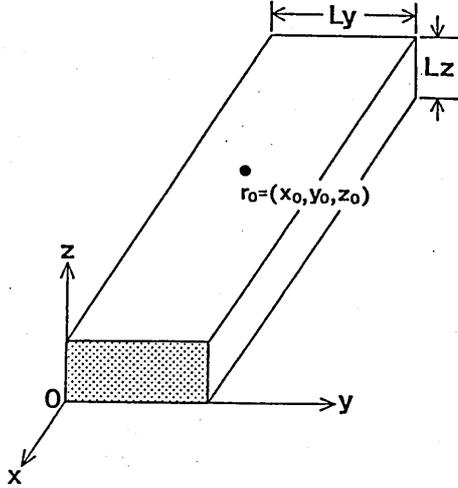


図 2. 電子導波路とイオン化不純物

ング長である。以下の議論においては、散乱確率は $|H'|^2$ に比例するため、不純物の電荷の符号による差は生じない。ハミルトニアン (9) をフーリエ変換すると、次式が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{e^2}{4\pi\epsilon|r-r_0|} \exp(-|r-r_0|/\lambda) \exp(j\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \frac{e^2 \exp(j\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_0)}{\epsilon q^2 + (1/\lambda)^2} \quad (10)$$

さらに、式 (10) を逆フーリエ変換して、遮蔽効果を無視すると ($\lambda \rightarrow \infty$)、 H' は次式のように書くことができる。

$$H' = \frac{e^2}{4\pi\epsilon|r-r_0|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{q} \frac{\exp[-j\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]}{q^2} = \frac{e^2}{8\pi^3\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \exp[-jq_x(x-x_0) - jq_y(y-y_0)] \times \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{\exp[-jq_z(z-z_0)]}{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} \quad (11)$$

ここで、 $\exp(-Q|z-z_0|)$ をフーリエ変換することによって導かれる関係式、

$$\frac{Q}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{\exp[-jq_z(z-z_0)]}{Q^2 + q_z^2} = \exp(-Q|z-z_0|) \quad (12)$$

を用いると、ハミルトニアン (11) は、次のように表すことができる。

$$H' = \frac{e^2}{4\pi\epsilon|r-r_0|} = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dQ \frac{\exp[-j\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)] \exp(-Q|z-z_0|)}{Q} \quad (13)$$

ただし、 $\mathbf{Q} = (q_x, q_y)$ 、 $\mathbf{R} = (x, y)$ および $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$ とおいた。

イオン化不純物散乱によるモード n 、 m 間の遷移確率 $W(n, k_x; m, k'_x)$ を計算するために、電子導波路内の電子の波動関数を横方向の固有関数を用いて次のように表す。

$$\psi_{n, k_x}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \exp(-jk_x x) \varphi_n(y) \phi_1(z) \quad (14)$$

ここで、

$$\varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \quad (15)$$

$$\phi_1(z) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{\pi}{L_x} z\right) \quad (16)$$

ハミルトニアン (13) と波動関数 (14) を用いると、行列要素 $M(n, k_x; m, k'_x)$ は、

$$M(n, k_x; m, k'_x) = \int_{-\infty}^{\infty} dr \psi_{m, k'_x}^*(\mathbf{r}) H' \psi_{n, k_x}(\mathbf{r}) = \frac{e^2 \exp[j(k'_x - k_x)x_0]}{4\pi\epsilon L_x} \times \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \frac{\varphi_{mn}(q_y, y_0) \phi_{11}(k'_x - k_x, q_y, z_0)}{\sqrt{(k'_x - k_x)^2 + q_y^2}} \quad (17)$$

ここで、

$$\varphi_{mn}(q_y, y_0) = \frac{2}{L_y} \int_{-\infty}^{\infty} dy \varphi_m(y) \varphi_n(y) \exp[-jq_y(y-y_0)] \quad (18)$$

$$\phi_{11}(k'_x - k_x, q_y, z_0) = \frac{2}{L_x} \int_{-\infty}^{\infty} dz \phi_1^2(z) \times \exp[-\sqrt{-(k'_x - k_x)^2 + Q_y^2} |z - z_0|] \quad (19)$$

となるので、フェルミの黄金律から遷移確率 $W(n, k_x; m, k'_x)$ は、以下のようなになる。

$$W(n, k_x; m, k'_x) = \frac{2\pi}{\hbar} |M(n, k_x; m, k'_x)|^2 \delta(E_{m, k'_x} - E_{n, k_x}) = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \frac{1}{L_x^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \frac{\varphi_{mn}(q_y, y_0) \phi_{11}(k'_x - k_x, q_y, z_0)}{\sqrt{(k'_x - k_x)^2 + q_y^2}} \right|^2 \times \delta(E_{m, k'_x} - E_{n, k_x}) \quad (20)$$

ここで、 E_{n, k_x} および E_{m, k'_x} は、それぞれ、始状態および終状態の電子エネルギーである。この遷移確率 (20) を式 (5) に代入すると、 n 次モードの電子に対する緩和時間が次式のように求まる。

$$\frac{1}{\tau_n} = \sum_m \frac{e^2 m^*}{16\pi^2 \epsilon^2 \hbar^3 |k'_x|} \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 dz_0 N_D(y_0, z_0) \times \left| \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \frac{\varphi_{mn}(q_y, y_0) \phi_{11}(k'_x - k_x, q_y, z_0)}{\sqrt{(k'_x - k_x)^2 + q_y^2}} \right|^2 \quad (21)$$

ここで、 $N_D(y_0, z_0)$ は、 $y-z$ 面での不純物分布を表す。

[4] 量子化コンダクタンスへのイオン化不純物散乱の影響

図 3(a) に示すように、不純物が直線状に存在する場合の電子導波路の二端子コンダクタンスを計算する。イオン化

不純物は、太い実線で示すように、導波路の下方に15nm離れた所に直線状に分布していると仮定する。導波路の厚みは30nmとしている。フェルミエネルギーは10meV、温度は0Kと仮定する。この場合、深さ方向には、基本モードのみが伝搬可能になる。電子導波路が線形輸送領域で動作するように、印加電圧 V は $50\mu\text{V}$ とする。図3(b)に、二端子コンダクタンスの計算結果を導波路幅の関数として示す。太い実線および破線は、それぞれ、不純物線密度 $N_D = 10^4\text{cm}^{-1}$ および $N_D = 5 \times 10^4\text{cm}^{-1}$ の場合に対応する。点線は、散乱の全くない理想的な量子化のステップを表している。図より、不純物散乱によってコンダクタンスが減少し、量子化のステップが崩れていることが分かる。また、不純物の密度が大きくなると、コンダクタンスの減少、ステップの劣化ともに顕著になっている。

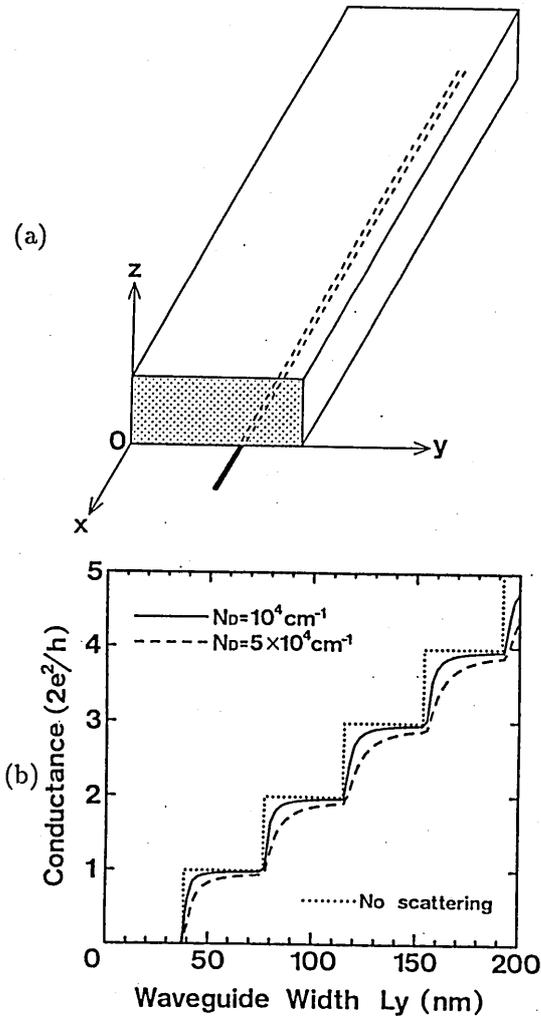


図3. (a) イオン化不純物直線状分布モデル
(b) 二端子コンダクタンスの計算結果

図3(b)の結果を見ると、導波路の幅が大きい場合にも、コンダクタンスステップは、ほとんど形を変えないことに注意されたい。一方、実験では、導波路が広くなるにつれて、量子化のステップの乱れが大きくなることが報告されている [3]。このような実験結果を説明するためには、図4(a)に示すような不純物分布を考えなければならないことを次に示す。図4(a)では、イオン化不純物は、黒のパターンで示しているように、導波路層に平行な平面に二次元的に分布していると仮定している。導波路の真下にある不純物層以外のイオン化不純物は、導波路を形成するために印加される負のゲート電圧によって中和されていると考える。図4(b)に、不純物面密度 $2.8 \times 10^{11}\text{cm}^{-2}$ に対して計算した二端子コンダクタンスを示す。導波路層と不純物層の距離 z_0 は、150nmと100nmである。導波路の幅が大きくな

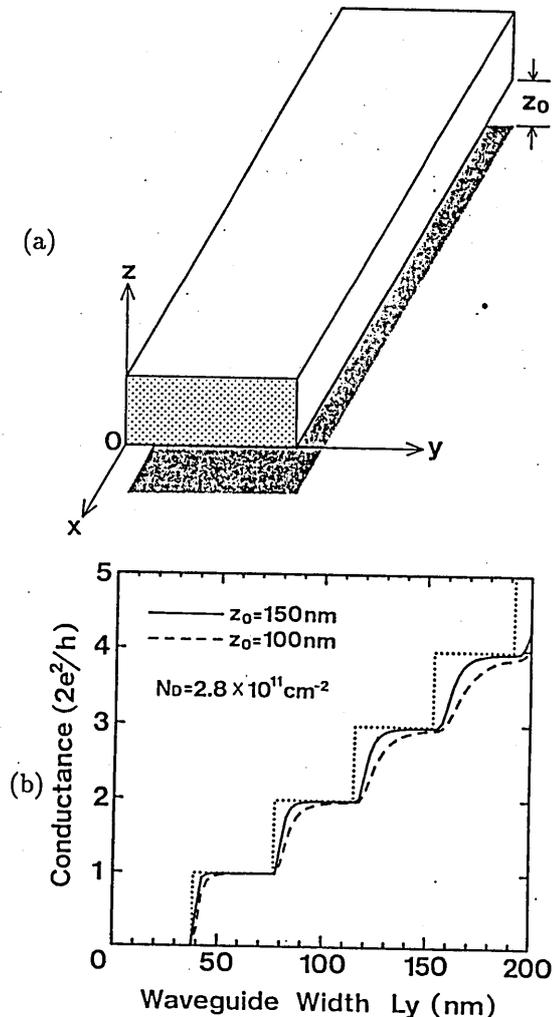


図4. (a) イオン化不純物平面状分布モデル
(b) 二端子コンダクタンスの計算結果

るにつれて、コンダクタンスの量子化ステップが徐々に崩れていく様子が得られている。これは、導波路幅の増加とともに、全不純物量が増えていくためである。図 4(b)の結果が、実験で観測された量子化ステップと良く一致していることから、実際のコンダクタンスの量子化ステップを説明するには、イオン化不純物の二次元分布を考慮したモデルが妥当なことが分かる。

次に、導波路の長さによるコンダクタンスの変化の様子を図 5 に示す。 z_0 は 100nm と固定して、導波路の長さ L_x を、56nm から 200nm に変化させている。長い導波路では、電子波が伝搬する距離が長くなるために、不純物による散乱を多く受け、量子化コンダクタンスの乱れがより顕著になることが分かる。導波路の長さを変えた実験においても、同様な結果が得られており [3]、我々の結果と良い一致をしている。以上、Wigner 関数の Liouville 方程式に現象論的に緩和時間近似を取り入れるモデルによって、初めて実験結果を説明することができた。

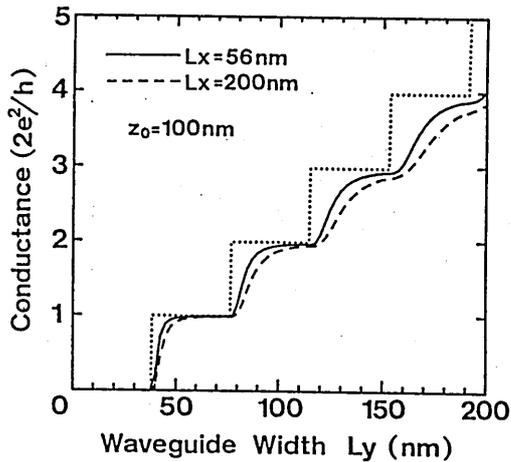


図 5. 導波路長による量子化コンダクタンスの変化

次に、移動度を用いた古典的モデルと、Wigner 関数による量子輸送モデルの比較を行う。古典的モデルでは、式 (21) より求まる緩和時間から移動度 μ_n を見積り、次式でコンダクタンスを計算する。

$$I = \sum_n \frac{N_n e \mu_n V}{L_x} \quad (22)$$

ここで、 N_n は、一次元電子密度で次式で与えられる。

$$N_n = \frac{\sqrt{2m^*}}{\pi \hbar} \sqrt{E_f - E_y^n - E_i^1} \quad (23)$$

ここで、 $E_y^n = (n\hbar\pi)^2 / (2m^*L_y^2)$ 、 $E_i^1 = (\hbar\pi)^2 / (2m^*L_y^2)$ である。上式 (22) から計算したコンダクタンスを図 6(a) に示す。不純物分布は、図 3(a) の線状分布を用い、線密度は、 $N_D = 10^5 \text{cm}^{-1}$ 、 10^6cm^{-1} および $4 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$ の三種類を与

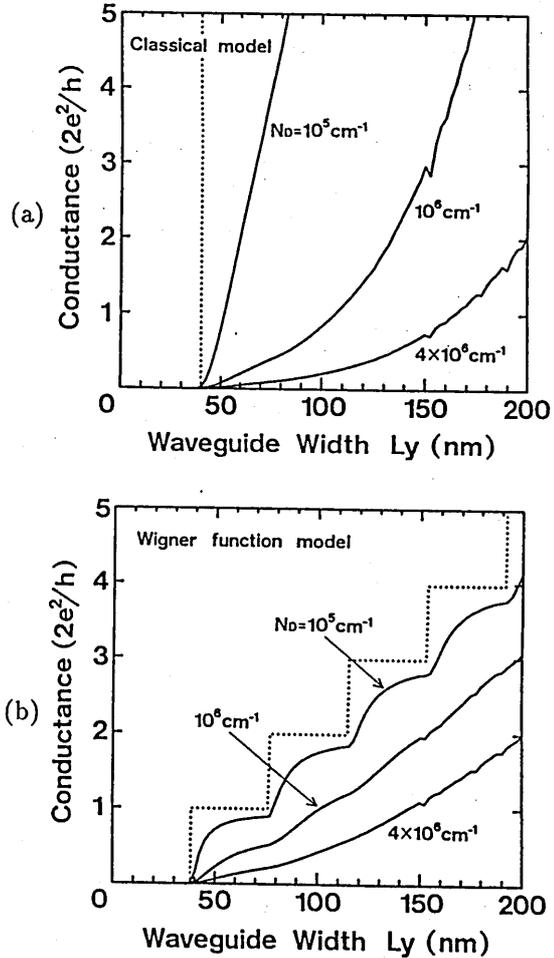


図 6. 古典的モデルと Wigner 関数モデルの比較

(a) 古典的モデルによるコンダクタンス

(b) Wigner 関数モデルによるコンダクタンス

えている。同図 (b) には、(a) と同じ不純物分布に対して、Wigner 関数モデルで計算したコンダクタンスを示している。図 6(a) では、不純物が少ないと移動度が非常に大きくなるため、コンダクタンスが発散しているのが分かる。これに対して、同図 (b) では、量子化のため、コンダクタンスの発散は起こらない。不純物密度が多くなると、両者ともにコンダクタンスが減少し、 $N_D = 4 \times 10^6 \text{cm}^{-1}$ の場合には、両者の曲線が近づいていることが分かる。Wigner 関数モデルにおいても、不純物散乱が強く起こるために、量子化のステップが消滅している。導波路幅が 150nm 以上で見られるコンダクタンスの落込みは、逆方向に伝搬する高次モードと結合する電子の数が増すためであると考えている。

[5]電子導波路の非線形量子輸送

まず、絶対温度 0K でのコンダクタンスの非線形性について議論する。図 4 の $z_0=100\text{nm}$ の場合について、導波路幅 L_y を最初のステップ付近で、81、80、60、44nm と変化させた場合の電流・電圧特性を図 7 に示す。点線は、完全なコンダクタンスの量子化が起こっている $I=(2e^2/h)V$ の関係を表わしている。いずれの導波路幅に対しても、電流・電圧特性は、電圧が増加していくにつれて点線から大きくずれていくのが分かる。 $L_y=44\text{nm}$ は、一つ目のステップの立ち上がりの部分に相当するで、コンダクタンスの値が小さくなる。一方、 $L_y=80\text{nm}$ 以上の導波路では、二つ目のモードが伝搬するようになるために、低電圧時のコンダクタンスは $2e^2/h$ よりも大きな値をとるが、電圧が増加するに従ってコンダクタンスが $2e^2/h$ より小さくなっていく。実験においても同様な結果が得られており [16]、Wigner 関数モデルが、電子導波路の非線形量子輸送の解析にも、充分適用できることが分かる。

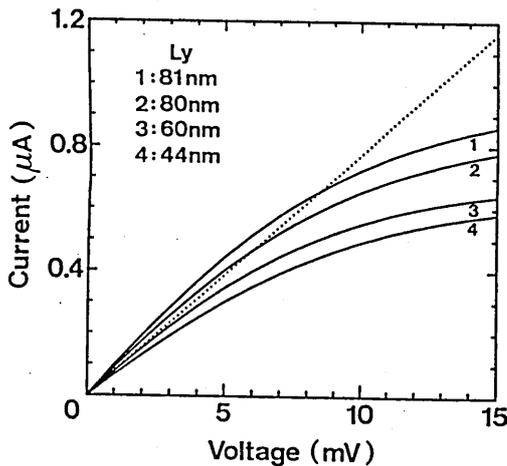


図 7. $T=0$ における電流・電圧特性

次に、実用上重要と考えられる、室温における電子導波路の電流・電圧特性について議論する。室温では、フォノン散乱等のイオン化不純物散乱以外の散乱過程を考慮した定式化が必要であるが、ここでは第一ステップとして、すべての導波路幅に対して、緩和時間を 0.1ps とした場合の計算結果を示すことにする。図 8 は、 $T=300\text{K}$ における電子導波路の電流・電圧特性の導波路幅依存性を示す。低電圧時には、両電極のフェルミエネルギーの差に比例して電流が流れるが、電子導波路にかかるポテンシャル差が電極のフェルミエネルギーよりもずっと大きくなると、導波路を流れる電流は陰極側の電子分布によって決まってくる [17]。その結果、 100mV よりも高い電圧で電流が飽和するように

なる。また、飽和電流は、導波路幅 L_y の増加とともに大きくなるのが分かる。これは、 L_y が大きくなると、 y 方向の量子化エネルギーが、 $E_y^n = \hbar^2(n\pi)^2/(2m^*L_y^2)$ という関係に従って小さくなるために、 x 方向に伝搬する電子の数が増えるためである。スプリット・ゲート構造では、導波路幅を外部のゲート電圧によって変化させることができるので、電子導波路においても、FET と同様なトランジスタ動作を期待することができる。

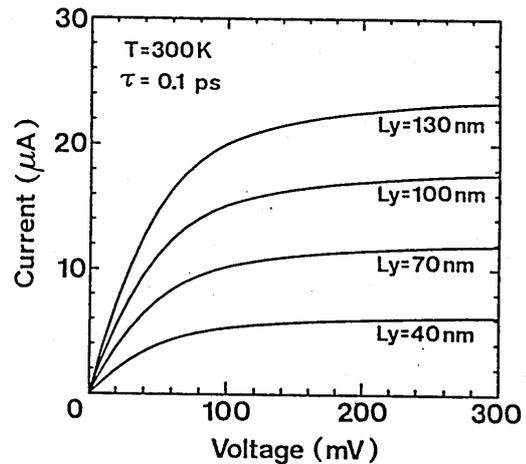


図 8. 室温における電流・電圧特性の導波路幅依存性

[6]まとめ

電子導波路の線形および非線形量子輸送特性を、一次元の Wigner 関数モデルを用いて検討した。線形輸送領域では、低温時の量子化コンダクタンスにおけるイオン化不純物散乱の影響を調べ、コンダクタンスの減少および量子化のステップの乱れについて議論した。また、非線形輸送領域では、量子化コンダクタンスの非線形性と、室温での電流・電圧特性の導波路幅依存性について検討し、電子導波路のトランジスタ動作の可能性について議論した。

このように、Wigner 関数モデルは、現象論的ではあるが、散乱効果を容易に取り入れることができることや、文献 [13] で議論したようなデバイスの過渡応答を計算できるなどの点で、電子導波路の解析モデルとしては、非常に有力な手法であると思われる。今後、より現実的な構造を有するデバイスに、Wigner 関数モデルを適用するためには、電子導波路とコンタクト電極との接続部分における電子波の反射の効果や、空間電荷の効果を取り入れることができる量子輸送モデルに発展させる必要があると考えている。

参考文献

- [1] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon, "Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, no. 9, pp. 848-850, Feb. 1988.
- [2] D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie, and G. A. C. Jones, "One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance," *J. Phys. C: Solid State Phys.*, vol. 21, pp. L209-L214, 1988.
- [3] G. Timp, in *Semiconductors and Semimetals*, edited by M. A. Reed (Academic, New York, 1990).
- [4] W. R. Frensley, "Wigner-function model of a resonant-tunneling semiconductor device," *Phys. Rev. B* 36, no. 3, pp. 1570-1580, July. 1987.
- [5] W. R. Frensley, "Boundary conditions for open quantum systems driven far from equilibrium," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 62, no. 3, pp. 745-791, July 1990.
- [6] N. C. Kluksdahl, A. M. Krivan, D. K. Ferry, and C. Ringhofer, "Self-consistent study of the resonant-tunneling diode," *Phys. Rev. B* 39, no. 11, pp. 7720-7735, Apr. 1989.
- [7] R. K. Mains and G. I. Haddad, "Wigner function modeling of resonant tunneling diodes with high peak-to-valley ratios," *J. Appl. Phys.* vol. 64, no. 10, pp. 5041-5044, Nov. 1988.
- [8] F. A. Buot and K. J. Jensen "Lattice Weyl-Wigner formulation of exact many-body quantum-transport theory and applications to novel solid-state quantum-based devices," *Phys. Rev. B* 42, no. 15, pp. 9429-9457, Nov. 1990.
- [9] K. J. Jensen and F. A. Buot, "The methodology of simulating particle trajectories through tunneling structures using a Wigner distribution approach," *IEEE Trans. on Electron Devices*, vol. ED-38, no. 10, pp. 2337-2347, Oct. 1991.
- [10] H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi, "Simulation of quantum transport in quantum devices with spatially varying effective mass," *IEEE Trans. on Electron Devices*, vol. ED-38, no. 6, pp. 1246-1252, June. 1991.
- [11] H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi, "Static and dynamic electron transport in resonant-tunneling diodes," to be published in *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 31, no. 3, March. 1992.
- [12] T. Miyoshi, H. Tsuchiya, and M. Ogawa, "Quantum hole transport at the heterointerfaces of long-wavelength avalanche photodiodes," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 28, no. 1, pp. 25-30, Jan. 1992.
- [13] H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi, "Wigner function formulation of quantum transport in electron waveguides and its application," *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 30, no. 12B, pp. 3853-3858, Dec. 1991.
- [14] C. S. Chu and R. S. Sorbello, "Effect of impurities on the quantized conductance of narrow channels," *Phys. Rev. B* 40, no. 9, pp. 5941-5949, Sep. 1989.
- [15] H. Sakaki, "Scattering suppression and high-mobility effect of size-quantized electrons in ultrafine semiconductor wire structures," *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 19, no. 12. pp. L735-L738, Dec. 1980.
- [16] L. P. Kouwenhoven, B. J. van Wees, C. J. P. M. Harman, J. G. Williamson, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, C. T. Foxon, and J. J. Harris, "Nonlinear conductance of quantum point contacts," *Phys. Rev. B* 39, no. 11, pp. 8040-8043, Apr. 1989.
- [17] C. S. Lent, S. Sivaprakasam, and D. J. Kirkner, "A two-dimensional hot carrier injector for electron waveguide structures," *Solid-State Electron.*, vol. 32, no. 12, pp. 1137-1141, 1989.

輻射科学研究会資料

RS 92-10

2 光子状態の非局所相関について

北野 正雄

(京都大学 工学部)

1992 年 7 月 10 日

輻射科学研究会

(於 大阪大学)

2 光子状態の非局所相関について¹

北野 正雄

(京都大学 工学部)

1 まえがき

レーザーの登場以来, 光と物質の相互作用の研究は飛躍的な進展を遂げた. しかし, レーザー光はよく知られているように, 古典電磁波でよく近似されるため光の量子性を見るには不向きな対象である. ところが近年, 非線形光学を利用して量子効果が顕著な非古典光を発生できるようになり, 光の量子性そのものを見直す研究が広く行われるようになってきた. 光の量子は90年前に文字どおり量子論発見の糸口となったものであるが, 自然が出題するパズルを解くためのキーワードとして再び活躍を始めたのである.

本稿では, パラメトリック過程を用いて作られる光子対を例にとり, 1光子あるいは2光子状態に関する研究について解説する. とくに2光子状態の持つ非局所的相関について詳しく述べる.

このような少数光子の状態を記述するには, あまり使われることのない光子に対するシュレディンガー方程式が便利である.

一般に電子の問題にはシュレディンガー方程式, 光子の問題には場の量子論が用いられる. これは, 光子数が物質との相互作用で容易に変化するためである. これに対し電子は日常的なエネルギーでは生成消滅はしないので, 粒子数を一定としたシュレディンガー方程式で十分取り扱うことができる. (ただし, 素励起の問題では, 準粒子が生成消滅するので, 場の量子論が用いられる.)

場の量子論は粒子の生成消滅を扱え, しかも粒子数0の状態, すなわち真空状態も正しく扱える包括的かつ強力な理論である. しかし, 初学者にとっては理解しがたい処方箋の集まりのように受け取られる懸念がある. また内容の高度さに比べその表現が簡潔であるため, 皮相的理解や誤解を招く可能性も多い. とくに, 光子の波動的側面を読み取る際に問題は顕在化するようである.

そこで本稿では, 場の量子論の使用をあえて避け, 代わりに光子に対するシュレディンガー方程式 [1-3] を利用しようと思う. 光子のシュレディンガー方程式はいろいろな場面で無意識のうちに利用はされているにも拘らず, 明示的に呼ばれることのない日陰者的存在である.

¹本稿は, 応用物理 第61巻6号 (1992) 掲載の解説論文に加筆, 変更を加えたものである.

シュレディンガー方程式を用いる場合は粒子数を問題に応じてアприオリに与えなければならない。また、実験では粒子数一定の状態の準備、検出に工夫が必要である。

2 光の方程式

2.1 シュレディンガー方程式と波動関数

マクスウェル方程式から、(1つの)光子にたいするシュレディンガー方程式を導出してみよう。自由電磁場にたいするマクスウェル方程式(MKSA)は

$$(1) \quad \operatorname{div} B' = 0, \quad \operatorname{div} E = 0,$$

$$(2) \quad -\operatorname{rot} E = \frac{1}{c} \frac{\partial B'}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} B' = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

ただし, $B' = cB$.

x -方向の平面波を考えよう。すなわち, $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ とすると,

$$(3) \quad \frac{\partial B'_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B'_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial B'_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

$$(5) \quad -\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B'_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial B'_y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

$$(6) \quad 0 = \frac{1}{c} \frac{\partial B'_x}{\partial t}, \quad 0 = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

となる。

よく知られているように、これらの方程式は2つずつ4つの組(モード)に分けることができる。そのうちの2組は、 B'_z, E_x に関するもので、それぞれ空間的に一様な静磁場、静電場を表している。残りの2組は $(E_x, B'_y), (E_y, B'_z)$ に関するもので、 x -方向に伝搬する z -偏光、 y -偏光のモードをそれぞれ表している。 $(E, B') \equiv (E_x, B'_y)$ あるいは $\equiv (E_y, -B'_z)$ と定義すれば、それぞれのモードの方程式はいわゆる電磁方程式になる;

$$(7) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B'}{\partial t}, \quad \frac{\partial B'}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

電場、磁場の Fourier 変換

$$(8) \quad E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_k e^{ikx} dk, \quad B'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B'_k e^{ikx} dk,$$

を導入し、さらに $\bar{B}_k \equiv \operatorname{sgn}(k) B'_k$ という量を導入すると、方程式は

$$(9) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}_k}{\partial t} = i|k| E_k, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial E_k}{\partial t} = i|k| \bar{B}_k.$$

のようになる。ここで、 $\text{sgn}(k)$ は k の正負に応じて $+1, -1$ をとる関数である。²
式を1つにまとめるため、次のような量を導入する。

$$(10) \quad f_k \equiv \frac{1}{2iN(k)}(E_k - \bar{B}_k), \quad g_k \equiv \frac{1}{2iN(k)}(E_k + \bar{B}_k).$$

$N(k) = N(-k)$ は規格化のための因子で、後で決定する。

$$(11) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial f_k}{\partial t} = -i|k|f_k, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial g_k}{\partial t} = i|k|g_k.$$

$E(x), B(x)$ が実数であることから、 $f_{-k}^* = -g_k, g_{-k}^* = -f_k$ が成り立つので、上の2つの式は互いに複素共役であることがわかる。したがって、一方の式、たとえば f_k に関する式のみ考えればよい。

これは、 $\hbar c|k| (= \hbar\omega_k)$ をハミルトニアン (エネルギー) H と見なせば、まさに運動量表示のシュレディンガー方程式

$$(12) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(k) = H \psi(k)$$

の形をしている。³

f_k を用いて E_k, \bar{B}_k は、それぞれ

$$(13) \quad E_k = iN(k)(f_k - f_{-k}^*), \quad \bar{B}_k = -iN(k)(f_k + f_{-k}^*),$$

と表すことが出来る。

f_k を波動関数と見なすためには、規格化因子 $N(k)$ を決めなければならない。そのために、電磁気学的エネルギー W_{EM} と量子力学的エネルギー W_{QM} を比較する。

W_{EM} は電磁界の全エネルギーで

$$(14) \quad \begin{aligned} W_{EM} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dx [E^2(x) + B'^2(x)] \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dx \int dk \int dk' (E_k E_{k'} - \bar{B}_k \bar{B}_{k'}) e^{i(k+k')x} \\ &= \pi\epsilon_0 \int dk (E_k E_{-k} - \bar{B}_k \bar{B}_{-k}) \\ &= 4\pi\epsilon \int N^2(k) f_k f_k^* dk \end{aligned}$$

²このような変数のとり方は、分散関係の ω が正(または負)の分枝を選んでいることに相当する。

³ここで、 \hbar を導入したことに関連して、以下のような反応が予想される。“もともと、 \hbar を含まない古典的なマクスウェル方程式を無理に量子的なシュレディンガー方程式に変形しようとするから、恣意的に \hbar を導入しなければならないのである。”しかし、詳しく調べてみると、逆にシュレディンガー方程式から \hbar を消去できることがわかる [5]. (2.2節参照)

と書ける。一方, W_{QM} はハミルトニアン $H = \hbar c|k|$ の期待値として

$$(15) \quad W_{QM} = \int f_k^* H f_k dk$$

のように書ける。これらを等置すると,

$$(16) \quad N(k) = \sqrt{\frac{\hbar c|k|}{4\pi\epsilon}}$$

となる。

このようにして, 規格化された f_k は (1つの) 光子に対する (波数表示の) 波動関数と見なすことできる。

偏光も考慮した 3次元の光子に対するシュレディンガー方程式は

$$(17) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha(k) = \hbar\omega \psi_\alpha(k), \quad \omega = c|k|$$

である。添字 $\alpha (= 1, 2)$ は偏光の自由度 (スピン) を表す。

なお, 1次元の場合には, t と x の役割を入れ換えることも可能であり, とくに異方性媒質内の伝播を取り扱うときに便利である。たとえば,

$$(18) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_\alpha(k) = - \sum_\beta \hbar k n_{\alpha\beta} \psi_\beta(k)$$

のような式がよく用いられる。ただし, $n_{\alpha\beta}$ は屈折率テンソルである。

このようにして, 波数空間, すなわち運動量空間における光子のシュレディンガー方程式が得られたので, これを逆フーリエ変換して座標空間でのシュレディンガー方程式を得たいと思うのが人情であるが, 残念ながらこれはうまく行かない [1, 2, 4].

波動関数 $\psi(k)$ の逆フーリエ変換 $\phi(x)$ と点 x における電場の間には, k -空間で因子 $N(k) \sim \sqrt{|k|}$ だけの違いがあるが, この違いは x -空間では局所的な関係で表すことができない。光子を点 x に見いだす確率はその点での電場の 2 乗に比例するが, $\phi(x)$ にも同じ性質を持たせることは不可能である。

このような事情により, 実空間での光子の波動関数につくれないのであるが, $N(k)$ が定数と見なせるような状況, すなわちスペクトルの広がり Δk がスペクトルの中心 \bar{k} にくらべて十分小さい場合は, $\phi(x)$ と電場を同一視できる。

2.2 質量のある光子

このように, 不完全ながらも光子に関するシュレディンガー方程式 というものが存在することがわかった。しかし, 無理に類似性をつけたのではないかと, いぶかるむきもあるので, もしも, 光子

に質量があったとしたら、普通のシュレディンガー方程式が上の手続きで自然に得られることを示す。

静止質量を m とすると、 k -空間での マクスウェル方程式は

$$(19) \quad \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] A(t, k) = 0$$

のようなクライン-ゴルドン型の方程式 [6] になる。(質量が 0 でない場合、電場や磁場は場の量として不適当なので、ベクトルポテンシャル A を使う。)

運動エネルギー $\hbar^2 k^2 / m$ が静止質量のエネルギー mc^2 より十分小さいと近似 (非相対論的近似) し、以下のような量を導入する。

$$(20) \quad 0 < \kappa \equiv \frac{mc}{\hbar} \left(1 + \frac{\hbar^2 k^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2} \simeq \frac{mc}{\hbar} \left(1 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^2 c^2} \right),$$

すると、式 (19) は

$$(21) \quad \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i\kappa \right) A(t, k) = 0,$$

$$(22) \quad \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i\kappa \right) A(t, k) = 0$$

のような、2つの式になる。このうち、式 (21) は、

$$(23) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A(t, k) = \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + mc^2 \right] A(t, k)$$

であり、普通のシュレディンガー方程式と同じ形をしている。ここで mc^2 は質量エネルギーに対応しているが、エネルギーの原点をとり直すことで、除くこともできる。

ところで、式 (22) は式 (21) の複素共役になっているが、これは、負エネルギーの解に対応し、いわゆる反粒子を表している。

また正規化因子 $N(k)$ はこの近似の範囲では k に依存しないので、 $A(x)$ と $\phi(x)$ の対応はよい。すなわち、実空間のシュレディンガー方程式

$$(24) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + mc^2 \right] \phi(x)$$

をつくることができる。

このようにもし光子が質量を持っていたとすると、非相対論近似により自然にシュレディンガー方程式に到達することが分かった。しかし、この場合でも、コンプトン波長 $2\pi\hbar/mc$ より小さい領域に波動を局在化させようとする、シュレディンガー方程式は破綻する。これは物理的にいうと粒子の生成消滅がおこるためであり、このような状況では場の量子論を使うべきである。

なお、電子の場合、クライン-ゴルドン方程式に相当するものは、ディラック方程式であるが、ここで、述べたのと同じ手続きで、シュレディンガー方程式に変形することが可能である。

3 2光子状態と対称性

3.1 2光子波動関数

2光子に対するシュレディンガー方程式は

$$(25) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2) = \hbar c(\omega_1 + \omega_2) \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2)$$

と書ける [2]. ただし, $\omega_i = c|k_i|$ ($i = 1, 2$). ここで $|\psi|^2$ は1つの光子を波数 k_1 , 偏光 α_1 にもう一つの光子を k_2, α_2 に見いだす確率を与える. 光子同士は直接は相互作用しないので, ハミルトニアンはそれぞれの光子に対するものの和になっている.

光子はボーズ粒子なので波動関数は粒子の置換に関して対称でなければならない. すなわち,

$$(26) \quad \psi_{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2) = \psi_{\alpha_2 \alpha_1}(k_2, k_1)$$

量子力学において同一の2粒子からなる系の状態は粒子の置換に対して対称または反対称でなければならないとされている. すなわち,

$$(27) \quad \Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_a(x_1)\phi_b(x_2) \pm \phi_b(x_1)\phi_a(x_2)]$$

のように表せる. これは粒子の無区別性から要請される.

このような記述はどの量子力学の教科書にもある. また, 2電子系であるヘリウム原子の振舞いは反対称化によってはじめて正しく導かれる. しかし, 対称化の意味, すなわち式(27)の意味は必ずしも明白ではない. 区別できないと言いながら, x_1, x_2 と区別しているのではないのか? 粒子の置換は具体的にはどのように行うのか? 遠く離れた粒子, 例えば月の電子と目の前の電子は本当に区別できないのか? 区別がつかないとしても, なぜ, そのような遠方のもの同士を対称化の対象にしなければならないのか? などの疑問が続出である.

3.2 Leinaas-Myrheim の対称化 [7]

Leinaas と Myrheim はこれらの疑問を解消するため興味深い考察を行っている. 彼らのモデルは非常に幾何学的なものであり, 2光子の問題に直感的見通しを与えるので, 紹介する.

まず, 最も簡単な1次元上の2粒子を考える. 古典的粒子の配置は平面上の点 (x_1, x_2) で表すことができる. ところが, 粒子が区別出来ないとすると, (x_1, x_2) と (x_2, x_1) は同一の配置を表していることになる. この冗長を避けるため, 全平面の代わりに, 半平面 $x_1 \geq x_2$ を可能な配置を表す空間と考えたほうが自然であろう (図1). 2つの粒子の衝突あるいはすりぬけはこの平面上の軌跡が境界壁 $x_1 = x_2$ で反射されることに対応している.

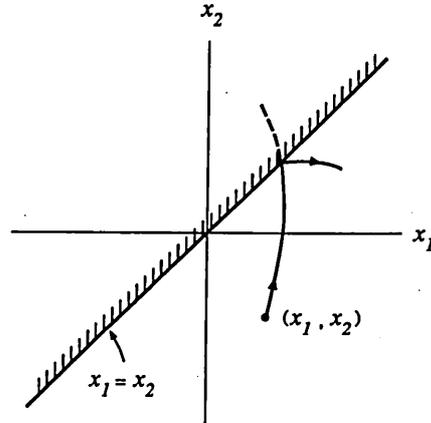


図 1: Leinaas-Myrheim の配置空間. 1次元上の区別できない2粒子の配置を $x_1 \geq x_2$ の半平面の点で表す.

このような区別できない2粒子(質量 m)を量子的に扱うには, 半平面上の波動関数 $\phi(x_1, x_2)$ とハミルトニアン

$$(28) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$$

を考えるのが自然であろう. 壁での境界条件を決めるため, 座標を重心座標 $x = (x_1 + x_2)/2$ と相対座標 $z = x_1 - x_2 (\geq 0)$ に変換し, 波動関数を $\bar{\phi}(x, z)$ で表す. すると, ハミルトニアンは

$$(29) \quad H = -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

となる. さて, 壁での損失がない, すなわち確率が保存されるためには,

$$(30) \quad \bar{\phi}^*(x, 0) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}(x, 0) - \frac{\partial \bar{\phi}^*}{\partial z}(x, 0) \bar{\phi}(x, 0) = 0$$

が成り立つ必要がある. この境界条件は

$$(31) \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}(x, 0) = \eta \bar{\phi}(x, 0)$$

と書くこともできる. ここで η は x に依存しない実数のパラメータである. η は系のすべての波動関数に対して一定でなければならない(超選択則). η の異なる関数の和は式(31)の形の境界条件を満足せず, 重ね合わせの原理に反するからである.

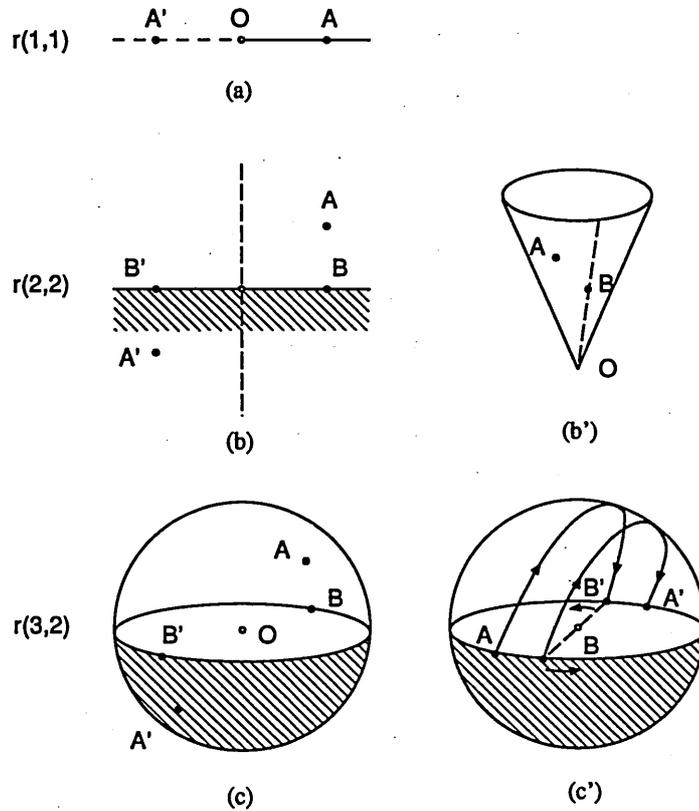


図 2: $r(n, N)$ の幾何学的構造

η は粒子が近づいたときの振舞い, すなわち多体効果あるいは統計性を決めるパラメータとい
うことができる. $\eta = 0$, すなわち $\partial\bar{\phi}/\partial z = 0$ がボソンに $\eta^{-1} = 0$, すなわち $\bar{\phi} = 0$ がフェルミオン
に対応していることは容易に理解できる.

全平面で波動方程式を解いてから, 壁での境界条件を満足する解 $\bar{\phi}(x, z) \pm \bar{\phi}(x, -z)$ をつくる
手順 (鏡像法) が通常対称化の手続きに他ならない.

Leinaas-Myrheim の方法は対称化の意味やその帰結を幾何学的に明らかにするものである.
(先に述べた対称化に関連した疑問がどのように解消されたかは, 各自チェックしてください.) さ
らにここでの例に見られるように, $\eta \neq 0, \eta^{-1} \neq 0$, すなわち, ボソンでもフェルミオンでもない
粒子の存在を示唆している.

さて, 空間次元が 1 次元以上の場合を考えよう. 一般に n -次元空間 \mathbb{R}_n に N 個の区別でき

ない粒子があるとしよう。 N -粒子の交換を表す置換群を S_N と表すと、配位空間は \mathbb{R}_n^N/S_N である。粒子系の重心座標は \mathbb{R}_n で表せるので、

$$\mathbb{R}_n^N/S_N = \mathbb{R}_n \times r(n, N)$$

のような分解が可能である。ここで、 $r(n, N)$ は N -粒子の相対位置を表す空間である。

$r(n, N)$ は局所的には \mathbb{R}_n^{N-1} と同型であるが、後に示すように大域的にはそうではない。

古典的な粒子は広がりがないので大域的な構造に影響を受けないが、量子力学の波動関数は本質的な影響を受ける。

2粒子 ($N = 2$) の場合を例に $r(n, N)$ を調べてみよう。 $r(1, 2)$ は既に示したように、半直線である (図 2(a))。なお、原点 O は特異点で波動方程式が成り立たないので、境界条件を別途考える必要があった。

$r(2, 2)$ は平面上の2粒子の相対位置であるから、一方の粒子を原点に固定した平面であることが容易にわかる (図 2(b))。しかし、原点について対称な点 (A, A') は同一の配置を表しているため、 $r(2, 2)$ は半平面になる。半平面の境界線上で、原点に関して対称な点 (B, B') は、やはり同一配置を表していることを考慮すると、結局、図 2(b') のような円錐が $r(2, 2)$ を表していることになる。

さて、ここで、2粒子を入れ換えるプロセスを考えよう。粒子の入れ換えは $r(2, 2)$ の閉曲線によって与えられる。(原点を通らない) 閉曲線は原点 O の回りを何回まわるか (winding number N_w) によって分類される (homotopy)。なお、粒子の入れ換えの操作は群をなすが、このような群は組紐群 (braid group) と呼ばれるものである。

閉曲線に沿って波動関数 ψ を一巡させると、

$$\psi \rightarrow e^{i\beta} \psi$$

のような位相変化を受けるが、 $\beta = N_w \xi$ となっていれば、閉曲線の分類とよい対応がつく (組紐群の表現)。 ξ は粒子 (表現) を特徴づけるパラメータになる。

また、ここに示した円錐は、無限長ソレノイドコイルに対するアハラノフ-ボーム効果におけるゲージ構造と全く同じであり、ソレノイドコイルの磁束を Φ とすれば、 $\xi = e\Phi/\hbar c$ なる関係が成り立つ。

$r(3, 2)$ は相対距離を固定すると見やすい。図に示すように、半球面で赤道上の共役点 (B, B') を同一視したものになる。この場合、閉曲線は2種類に分類される。たとえば、図 2(c') にしめす、 A から始まって $A (A')$ に戻る2巻きの曲線は、連続的に変形して1点に縮めることができる。(B, B' を矢印の方向に動かしてゆけばよい。) すなわち、 $N_w = 0, 1$ しか存在しないのである。この場合、 $\xi = 0$ 、または $\xi = \pi$ でなければならないことは、容易にわかる。

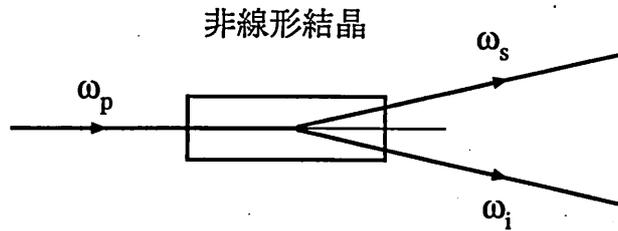


図 3: パラメトリック蛍光.

$\xi = 0$ は粒子の交換で符号が変わらないボゾンに, $\xi = \pi$ は符号が反転するフェルミオンに対応する. ところで, 既に見たように, 2次元の場合は ξ は任意の値が取れる. これは, 2次元ではボゾンでもフェルミオンでもない粒子が存在できることを意味する. このような粒子は ξ として任意の値がとれることからエニオン (anyon) と名付けられている.⁴

粒子の統計性といった基本的な性質が, 空間の幾何学に支配されていることは大変興味深いことである.

4 双子の光子 [8, 9]

4.1 パラメトリック蛍光

KDP などの2次の非線形性 ($\chi^{(2)}$) をもつ結晶に周波数 ω_p のポンプ光を入射すると,

$$(32) \quad \omega_s + \omega_i = \omega_p$$

という関係をみたすシグナル光 ω_s とアイドラー光 ω_i が発生する (図 3). これはポンプ光子が吸収され, 代わりにシグナル光子とアイドラー光子が同時に放出されたと考えることができる.⁵

これらの光子には以下のような性質がある.

- (1) 2つの光子はほぼ同時に発生する.
- (2) それぞれ光子の周波数 (エネルギー) は確定していないが, その和は一定 (ω_p) である.

⁴実際の空間は3次元なのでこのような議論は無意味に思われるかもしれないが, 固体中では電子の運動が2次元に制限されている場合があり, 電子 (の集合) などがエニオンとして振舞う可能性がある.

⁵パラメトリック増幅はポンプ光の存在下で, シグナル光を入射すると, 増幅される現象である. そのとき, 付随的にアイドラー光が発生する. パラメトリック蛍光は入射シグナル光がない状態で, ポンプ光子が2つに分裂する現象である. したがって, シグナル光とアイドラー光の役割は対称であり, 区別できないが, 便宜のため, そのような用語が用いられる.

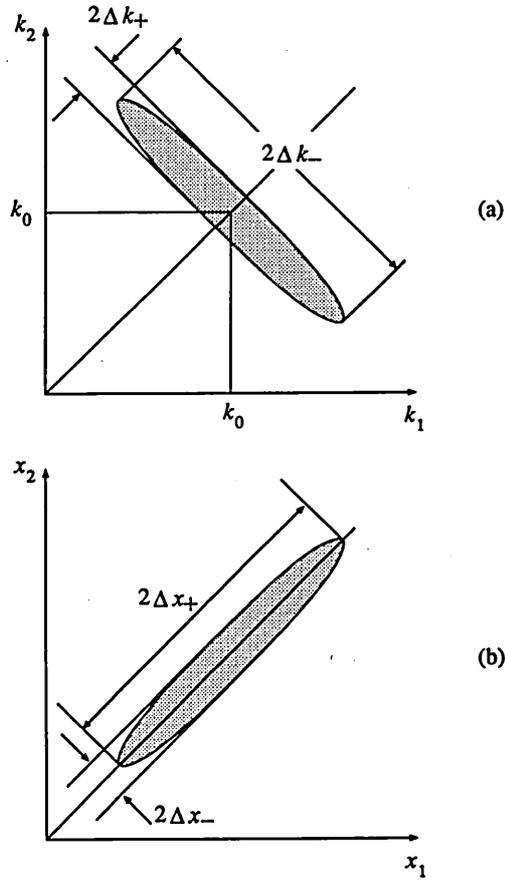


図 4: 双子光子の波動関数の広がり. (a) k -空間 (b) x -空間. $\Delta k_- \ll \Delta k_+$, $\Delta x_{\pm} = 2/\Delta k_{\pm}$.

(3) 位相整合の条件から, 2つの光子は異なった方向に放出される.

このように, 2つの光子の間には相関が見られるので, 双子の光子あるいは光子対 (photon pair) と呼ばれる.

4.2 2光子相関

双子の光子に対する波動関数 $\psi(k_1, k_2)$ を現象論的に求め, その特徴を調べよう. まず, スペクトルに関する性質 (2) から, 波動関数の広がりには図 3(a) のようになっていると考えられる. それぞれの光子の波数の広がり ($\Delta k_1 = \Delta k_2 \sim \Delta k_-/\sqrt{2}$) は大きい, 波数の和 ($k_1 + k_2$) は広がり

(Δk_+) が小さく、ほぼ一定 ($\omega_p/c = 2k_0$) である。 Δk_- は位相整合条件や検出器の前に置かれる干渉フィルターのバンド幅で決まり、 Δk_+ はポンプ光のスペクトル広がり、すなわちコヒーレンス長で決まる。

波数領域での波動関数をフーリエ変換すれば空間領域での波動関数 $\phi(x_1, x_2)$ が求まる。結果は図 4(b) に示すように、対角線方向に長い波束になる。波束の広がり $\Delta x_{\pm} = 2/\Delta k_{\pm}$ である。特徴的なのは、それぞれの光子は空間的に広がっているにも拘らず、一方の光子をある点に見いだすと、他方の光子は必ず対応する点の近傍の狭い範囲に見いだされることである。

時間軸でみればこれは双子の光子の同時性 (性質 (1)) を意味している。これは双子光子の持っている量子相関のうち最も重要なものである。この性質と性質 (3) を利用して、一方の光子を検出することにより、時間あるいは空間的に局在した 1 光子状態を準備することが可能となる [10]。これは、1 光子に対する Berry の位相の検証 [11] などに利用されている。

図 4(a) の波動関数は 1 光子の波動関数の積 $\psi_1(k_1)\psi_2(k_2)$ の形には書けない。このような状態は “もつれた状態” (entangled state) と呼ばれる。対称化の操作も “もつれ” (entanglement) をもたらす。

状態のもつれは 2 つ以上の部分系からなる系における状態の重ね合わせの帰結であるが、われわれの日常感覚 (たとえば局所的実在性) からは理解しにくい結果をもたらす。特に、部分系が相互作用のないほど空間的に離れている場合にその不可思議さは顕著である。

有名な Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) のパラドックスは状態のもつれに関するものである [12]。

先に述べたように、光子対の一方の位置を測定すると、他方の光子の位置を正確に (Δx_- の精度で) 確定することができる。日常感覚によれば、一方の光子に対する測定の影響が遠く隔たった他方の光子に及ぶはずはないと考えるのが自然である。つまり、測定には無関係に他方の光子の位置は確定していたと考えざるをえない。同様の議論から、波数も Δk_+ の精度で確定していたと考えなければならない。しかし、これらを認めると、 $\Delta x_- \Delta k_+ \ll 1$ であるため、不確定性原理と矛盾する結果が出る。

これが EPR のパラドックスである。

量子力学の標準的解釈では、他方の光子の位置あるいは波数が確定するのは、対応する測定を一方の光子について行なって結果を得た時点であるとして、矛盾を避けている。

4.3 Ghosh-Mandel の実験 [13]

双子の光子の見せる不思議な振舞いのうちもっとも簡単に理解できる例として Ghosh と Mandel の実験を取り上げよう。パラメトリック過程で発生させた 2 つの光ビームを図 6 のように交差させることを考える。ビーム a とビーム b にはそれぞれ光子がひとつずつ含まれている。また、そ

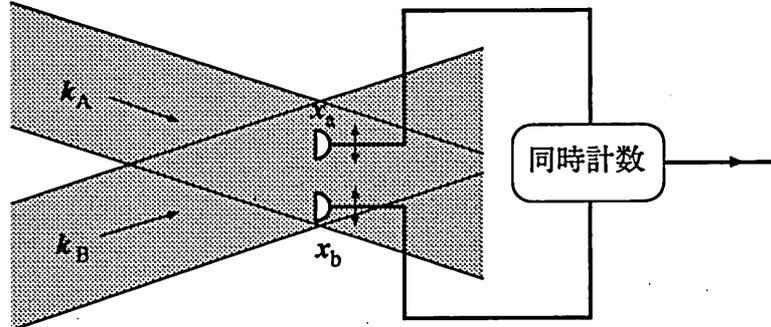


図 5: Ghosh-Mandel の実験. 2つの光子のビームが交差するところに, 検出器を2つにおいて同時計数を行なう.

それぞれのスペクトルは干渉フィルターを用いて単色と見做せるほど十分制限してあるものとする. (そのため, 光子対の同時性はかなり損なわれている.) すると2光子の対称化された波動関数は座標空間で

$$(33) \quad \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{i\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{x}_2} + e^{i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{x}_2}]$$

ここで $\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B$ はそれぞれのビームの波数ベクトルで $|\mathbf{k}_A| = |\mathbf{k}_B| = k_0$.
さて, 点 \mathbf{x}_a と点 \mathbf{x}_b で光子がそれぞれ1つずつ見いだされる確率は

$$(34) \quad |\phi(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)|^2 = 1 + \cos \mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)$$

に比例する. ただし, $\mathbf{K} = \mathbf{k}_A - \mathbf{k}_B$. この計算は全く簡単であるが, その結果の意味することは必ずしも単純ではない. 式の形は2つのコヒーレントなビームの普通の(2次の)干渉のように見える. しかし, 2つのビームの光子は別々のものなので (Dirac が言うように) 干渉はしない.

ここで問題にしている2光子の干渉は検出器を2つ用い同時計数 (coincidence) の事象を記録することにより測定される. (同時計数で得られる干渉は強度干渉あるいは4次の干渉に相当する.)

式(34)は検出器の相対位置を変化させると, 同時計数率が正弦波状に変化することを意味している. とくに, $\mathbf{K} \cdot (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) = n\pi$ (n : 奇数) となる位置ではそれぞれの検出器は同時に光子を検出することはない. つまり, \mathbf{x}_a で光子を見いだした時には, \mathbf{x}_b にもう1つの光子を見い出すことは決してない.

Leinaas-Myrheim の描像がこの 2 光子干渉の理解に役立つ。K 方向に x-軸をとり、

$$(35) \quad \begin{aligned} \mathbf{k}_A &= (k_x, k_y, k_z), \quad \mathbf{k}_B = (-k_x, k_y, k_z) \\ \mathbf{x}_1 &= (x_1, y, z), \quad \mathbf{x}_2 = (x_2, y, z) \end{aligned}$$

とおくと、式 (33) は

$$(36) \quad \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{e^{2i(k_y y + k_z z)}}{\sqrt{2}} \left[e^{ik_x(-x_1+x_2)} + e^{ik_x(x_1-x_2)} \right]$$

となり、 (x_1, x_2) -平面の波として表される。第 1 項と第 2 項は互いに逆方向に伝搬する平面波であるが、これは図 6(b) に示すように、境界 $x_1 = x_2$ での入射波 (I) と反射波 (II) と見なすことができる。なお、図 6(a) は k -空間での波動関数である。これら 2 つの波が干渉して定在波を生じている。

干渉しているのが 2 光子波動関数であること、そして、対称化の結果生じた波が干渉に寄与していることが興味深い点である。このようにして、Ghosh-Mandel の 2 光子干渉の直感的描像が得られ。しかし、2 次元配置空間という架空空間における波が、そこでの仮想的な壁で反射されたため生じたという意味では直感から遠いところの現象である。

4.3.1 古典的強度干渉との比較

双子の光子を使わない場合にも類似の 2 光子干渉が見られることに注意しよう。レーザーからの光を 2 つに分け、ビーム a, b を作ると、通常の 2 次の干渉縞

$$(37) \quad I(x; \xi) = 1 + \cos(Kx + \xi)$$

が見られる。 ξ はビーム間の位相差に対応する量である。 ξ がランダムにゆらいでいるとすると、平均化によって 2 次の干渉は消えるが、強度相関は

$$(38) \quad \langle I(x_1; \xi) I(x_2; \xi) \rangle_{\xi} = 1 + \frac{1}{2} \cos K(x_1 - x_2)$$

となり 4 次の干渉縞は残る。これは式 (34) と余弦関数の前の 1/2 を除いて同じである。つまり、干渉の鮮明度 (visibility) が 50% か 100% かの違いなのであるが、この差は重大である [14]。

この古典的な強度干渉を量子論で説明してみよう。図 7(a) のように、双子光子を用いた場合には、2 つのビームの光子の並び方にはよい相関があり、同時計数にはそれぞれのビームから 1 つずつの光子が寄与している。それに対し普通の光源の場合、図 7(b) に示すように、一方のビームからの 2 光子を計数する場合があります。これは干渉に寄与しない。そのため鮮明度が 50% に低下するのである。

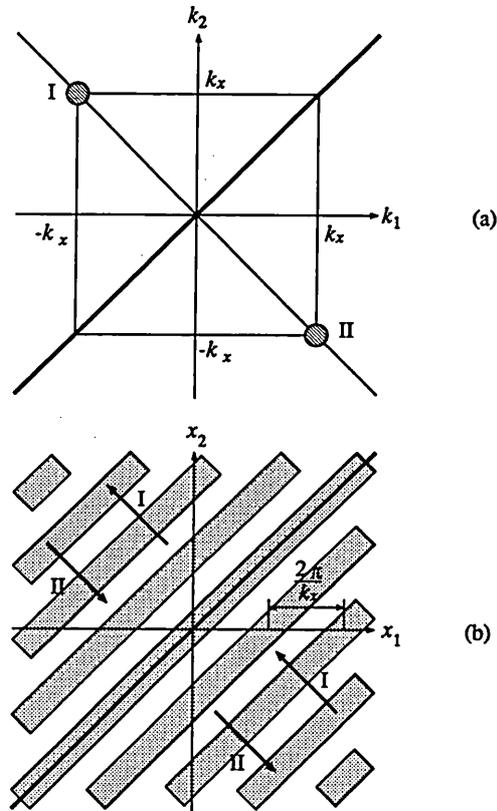


図 6: Ghosh-Mandel の 2 光子干渉における波動関数の様子: (a) k -空間では対称化の要請から 2 つのデルタ関数の重ね合わせになっている. (b) x -空間では 2 つの平面波が干渉して定在波となっている. 定在波は Leinaas-Myrheim の壁 ($x_1 = x_2$, 図 1) により作られたと考えることができる.

図 7(a) の場合, ND フィルターで一方のビームの光子を間引いても, 依然として 100% の鮮明度が得られることは興味深い.

双子光子を用いない図 7(b) の状況は, 本質的にもつれていないので, 古典モデルで説明可能なのである. しかし, もつれた状態に起因する鮮明度 100% の干渉に対する古典的解釈は存在しない. 逆にいえば, 古典的と思われている干渉も実は量子論に起源を求めることができるのである.

ところで, ボーズ粒子に対する壁での境界条件 $\partial\phi/\partial z = 0$ は, 壁面で干渉が強め合うようなものであったことを思いだそう. 一般に波数 K に広がりがあると, 干渉縞は消えてしまうが, 壁面 ($x_1 = x_2$) での強め合う干渉は残る. 通常の干渉における光路差 0 での白色干渉縞に相当するこの

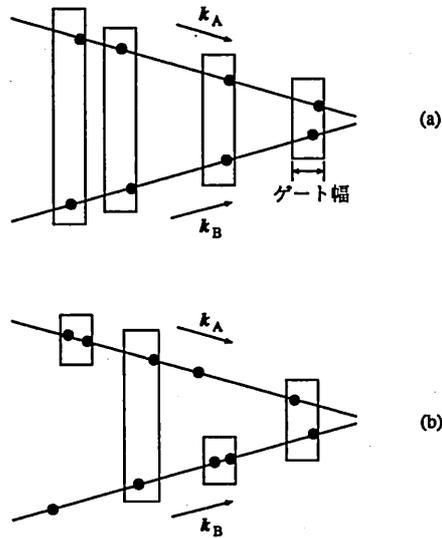


図 7: (a) Ghosh-Mandel の干渉と (b) 古典的強度干渉との比較. 同時計数される光子の対を囲ってある.

干渉は光子の集群 (bunching) に相当する [15].

5 2 光子干渉計

2 光子状態をさらに詳しく調べるには干渉計が必要である. 干渉計による波動関数の変化をまず 1 光子の場合について復習しておこう.

図 8 に示すようなマッハ-ツェンダー干渉計を考えると, 2 つのビーム a, b を考えればよいことがわかる. したがって, 波動関数を $\psi_\alpha(k)$ ($\alpha = a, b$) と表すことにする. 添字 α はビームを区別するものであるが, 形の上ではスピンあるいは偏光に対する添字と同じである. (実際, 干渉計の動作は回転群を用いて幾何学的に記述することができる [16].)

ビームスプリッターや, 干渉計内の光路差によってもたらされる変化は 2×2 のユニタリー行列 $U_{\alpha\beta}$ を用いて

$$(39) \quad \psi'_\alpha = \sum_\beta U_{\alpha\beta} \psi_\beta$$

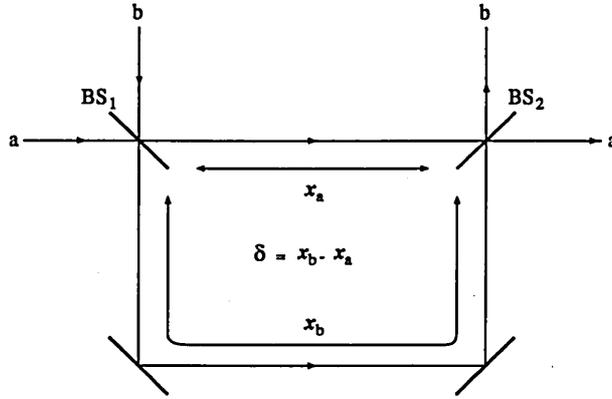


図 8: マッハツェンダー干渉計. ビームスプリッター BS_1, BS_2 , 光路差 δ の作用はユニタリー変換で表すことができる.

のように表される. 具体的に表すと, 1:1 のビームスプリッターは

$$(40) \quad \begin{bmatrix} \psi'_a \\ \psi'_b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix}$$

光路差は

$$(41) \quad \begin{bmatrix} \psi'_a \\ \psi'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ikx_a} & 0 \\ 0 & e^{ikx_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix}$$

のように表すことができる.

ポート a から $\psi(k)$ が入射した場合を考えると,

$$(42) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{BS_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\delta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{ikx_a} \\ e^{ikx_b} \end{bmatrix} \xrightarrow{BS_2} \frac{e^{ikx_a}}{2} \begin{bmatrix} 1 - e^{ik\delta} \\ 1 + e^{ik\delta} \end{bmatrix}$$

のように波動関数に変化する. 共通因子 $\psi(k)$ は省略した. ここで $\delta = x_b - x_a$ は光路差である.

これより, 出力 a, b で光子を検出する確率 P_a, P_b は

$$(43) \quad P_a = 1 - P_b = \frac{1}{2} \int |\psi(k)|^2 (1 - \cos k\delta) dk$$

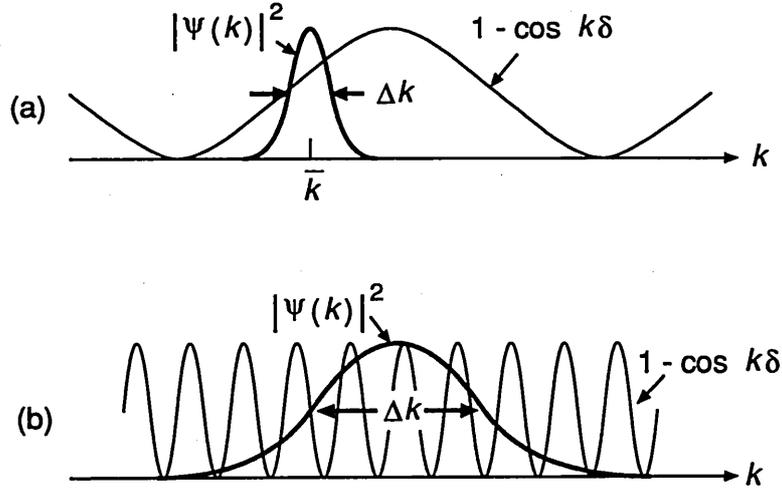


図9: 式(43)の被積分関数. (a) $\delta \ll \Delta k^{-1}$ の場合 (b) $\delta \gg \Delta k^{-1}$ の場合

となる.

図9から分かるように, この積分は光路差 δ が干渉長 Δk^{-1} より十分小さい場合は, $|\psi(k)|^2$ がアルタ関数 $\delta(k - \bar{k})$ と見做せて, $P_a = 1 - \cos \bar{k}\delta$ となり, δ の変化に応じて干渉が見える. 一方, $\delta \gg \Delta k^{-1}$ では $\cos k\delta$ が k について速く振動するので0と見做せて $P_a = \frac{1}{2}$ となり, 干渉は見られない.

2光子2ビーム系の波動関数は1光子の場合を参考にして $\psi_{\alpha_1\alpha_2}(k_1, k_2)$ ($\alpha_1, \alpha_2 = a, b$) と書ける.

系の変化は

$$(44) \quad \psi'_{\alpha_1\alpha_2} = \sum_{\beta_1} \sum_{\beta_2} U_{\alpha_1\beta_1} U_{\alpha_2\beta_2} \psi_{\beta_1\beta_2}$$

のように書ける. 具体的には, ビームスプリッターは

$$(45) \quad \begin{bmatrix} \psi'_{aa} \\ \psi'_{ab} \\ \psi'_{ba} \\ \psi'_{bb} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{aa} \\ \psi_{ab} \\ \psi_{ba} \\ \psi_{bb} \end{bmatrix}$$

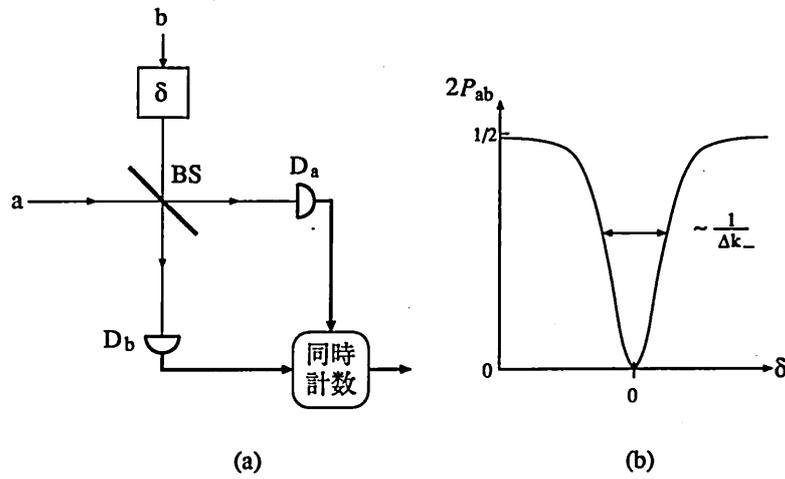


図 10: 双子光子の同時性の測定. (a) 実験装置. (b) 実験結果. 光路差 δ が 0 のとき a, b から 1 つずつ光子が入射すると, D_a, D_b で 1 つずつ検出する確率 P_{ab} は 0 である. δ で同時性を破ることで, P_{ab} が増加する.

と表され, 光路差は

$$(46) \quad \psi'_{\alpha\beta} = e^{i(k_1 z_a + k_2 z_\beta)} \psi_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = a, b)$$

となる.

以上の準備により 2 つの場合を調べてみよう. この 2 つの場合は, それぞれ, 図 4 の波動関数の $(k_1 - k_2)$ -軸, $(k_1 + k_2)$ -軸方向を調べることに対応している.

5.1 光子の時間差の測定 [17]

図 10(a) のような装置で, ポート a, b にひとつずつ光子が入った場合を考える. すなわち, 光路差 δ , ビームスプリッター BS により, 波動関数は

$$(47) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\delta} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{ik_2\delta} \\ e^{ik_1\delta} \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{BS} \frac{e^{ik_2\delta}}{2} \begin{bmatrix} -1 - e^{i(k_1 - k_2)\delta} \\ 1 - e^{i(k_1 - k_2)\delta} \\ -1 + e^{i(k_1 - k_2)\delta} \\ 1 + e^{i(k_1 - k_2)\delta} \end{bmatrix}$$

のように変化する. ただし, 共通因子 $\psi(k_1, k_2)/\sqrt{2}$ は省略した.

$\delta = 0$ の場合, 出力は $[-1, 0, 0, 1]^T \psi(k_1, k_2) / \sqrt{2}$ となる. (T は行列の転置を意味する.) これは 2 つの光子が a または b のチャンネルにかたよって検出されることを意味する. つまり, a, b における同時計数の確率 $P_{ab} = \int |\psi_{ab}|^2 dk_1 dk_2$ は 0 となる. しかし, 光路差 $|\delta|$ を増加させてゆくと, 同時計数の確率が次第にふえてゆき, 図 10(b) のようなデータがえられる. この曲線の幅は $\psi(k_1, k_2)$ の $k_1 - k_2$ 方向への広がり Δk_- に反比例する. 時間領域で考えると, これは 2 つの光子の同時性を計っていることになる. Hong ら [17] は, 100 fs というデータを得ているが, これは干渉フィルターのバンド幅とよい対応を示している.

なお, この時間幅は同時計数のためのゲート時間とは異なるものであることに注意しておく. 後者は異なる光子対を分離するため設定されるもので, 通常 ns のオーダーである (図 7 参照).

5.2 2 光子コヒーレンスの測定 [18, 19]

干渉計のポート a に 2 つの光子が入った場合を考える. すなわち, ビームスプリッターと光路差により

$$(48) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{BS_1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\delta} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{ik_2\delta} \\ e^{ik_1\delta} \\ e^{i(k_1+k_2)\delta} \end{bmatrix}$$

となる. 第 2 のビームスプリッター BS_2 により

$$(49) \quad \psi_{bb} = \frac{1}{4} [1 + e^{ik_2\delta} + e^{ik_1\delta} + e^{i(k_1+k_2)\delta}] \psi$$

となる. 光路差 δ が小さい間は $P_{bb} = \int |\psi_{bb}|^2 dk_1 dk_2$ は複雑な変化をするが, 1 光子の干渉長 (Δk_+^{-1}) より大きくなると,

$$(50) \quad P_{bb} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{2} \cos 2k_0\delta \right]$$

のような干渉が見られる. 式 (49) の第 1, 4 項の間のこの干渉は驚くべきことに, パラメトリック蛍光のポンプ光に対応する周期と干渉長さを持っている. 式の導出過程からわかるように, 第 1 項は 2 光子がともに通路 a を通る振幅, 第 4 項は通路 b を通る振幅に対応している. つまり, 2 光子がまとまりとして干渉したと考えることができる. そのため, 2 光子に分かれる前の情報を保持したまま干渉しているのである.

すこし注意すれば, 2 つの独立した干渉計にそれぞれ 1 つずつの光子を入れても, 全く同じ干渉が見られることがわかる (図 11). この興味深い干渉は EPR タイプの実験として, Franson [20, 21] によって提案されたものであるが, 実際に Kwiat ら [18], Ou ら [19] によって観測されている.

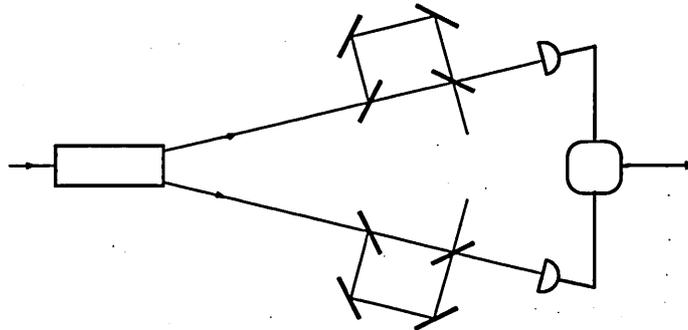


図 11: Franson の干渉計

6 むすび

これまでの例で見てきたように、双子の光子は互いに空間的に隔たっているにもかかわらず、相関を保持しており、2光子波動関数を用いて一体のものとして記述しないと説明のつかない振舞いをする。このことは古典的直観に反するため、2つの光子を独立したものとして記述しようという試みがなされてきた。いわゆる、“(局所的) 隠れた変数理論” と呼ばれるものである。しかし、このような試みは、2光子相関を用いた一連の実験によりその殆んどが却下されてきた [22-26]。最近、隠れた変数理論に対するさらに厳しいテストとして3光子の相関を用いた実験が提案されている [27, 28]。

量子論のもつ非局所的相関はその存在以上に、どういう場合にそれが消滅あるいは無視できるかがより微妙で根源的な問題であるように思われる。このような量子性の喪失あるいは古典性の回復の問題に対しても光を用いた実験が行われるようになるだろう。

ところで、近年、光と電子の類似性に着目した研究が盛んに行われるようになってきた。波動の局在 (localization), photonic band, 量子井戸, optical atom, Berry の位相, weak value の測定などがそうである。これらは表面的には シュレディンガー方程式と マクスウェル方程式の波動方程式としての共通性を利用しているだけとも言えるが、一方は量子的、他方は古典的方程式と言う点で対称性が悪い。しかし、本稿で述べた光子に対する シュレディンガー方程式 というものを考えれば、対称性が回復されるのみならず、光と電子のアナロジーにより深い意味を見いだせるのではないだろうか。

参考文献

- [1] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg: *Photons and Atoms*, p. 23 (Wiley,

- 1989).
- [2] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii: *Quantum Electrodynamics*, Chap. 1 (Interscience, 1965).
 - [3] M. Horne, A. Shimony and A. Zeilinger: *Quantum Coherence*, ed. J. A. Anandan, p. 356 (World Scientific, Singapore, 1990).
 - [4] T. D. Newton and E. P. Wigner: *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400 (1949).
 - [5] 高橋 康: 古典場から量子場への道, p. 80 (講談社, 1979).
 - [6] W. Greiner: *Relativistic Quantum Mechanics — Wave Equations*, Chap. 1 (Springer, 1990).
 - [7] J. M. Leinaas and J. Myrheim: *Nuovo Cimento* **37B**, 1 (1977).
 - [8] Z. Y. Ou and L. Mandel: *Quantum Opt.* **2**, 71 (1990).
 - [9] 松岡正浩: *光学* **20**, 332 (1991).
 - [10] E. R. Pike and S. Sarkar: *Quantum Opt.* **1**, 61 (1989).
 - [11] P. G. Kwiat and R. Y. Chiao: *Phys. Rev. Lett.* **66**, 588 (1991).
 - [12] A. Einstein, B. Podolski and N. Rosen: *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
 - [13] R. Ghosh and L. Mandel: *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1903 (1987).
 - [14] Z. Y. Ou and L. Mandel: *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2941 (1989).
 - [15] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss: *Proc. Roy. Soc.* **A242**, 300 (1957).
 - [16] B. Yurke, S. L. McCall and J. R. Klauder: *Phys. Rev. A* **33**, 4033 (1986).
 - [17] C. K. Hong, Z. Y. Ou and L. Mandel: *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
 - [18] P. G. Kwiat, W. A. Vareka, C. K. Hong, H. Nethel and R. Y. Chiao: *Phys. Rev. A* **41**, 2910 (1990).
 - [19] Z. Y. Ou, X. Y. Zou, L. J. Wang and L. Mandel: *Phys. Rev. Lett.* **65**, 321 (1990).
 - [20] J. D. Franson: *Phys. Rev. Lett.* **89**, 2205 (1989).
 - [21] J. D. Franson: *Phys. Rev. Lett.* **67**, 290 (1991).

- [22] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger: Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
- [23] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger: Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [24] Z. Y. Ou and L. Mandel: Phys. Rev. Lett. **61**, 50 (1988).
- [25] S. M. Tan and D. F. Walls: Opt. Commun. **71**, 235 (1989).
- [26] L. J. Wang, X. Y. Zou and L. Mandel: Phys. Rev. Lett. **66**, 1111 (1991).
- [27] D. M. Greenberger, M. H. Horne and Zeilinger: *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, ed. M. Kafatos, p. 69 (Kluwer Academic, Dordrecht, 1989).
- [28] B. Yurke and D. Stoler, Phys. Rev. Lett. **68**, 1251 (1992).

光ファイバによる表面波プローブの解析

梅田 充、小倉 久直、高橋 信行、北野 正雄

(京都大学 工学部)

1992 年 10 月 9 日

輻射科学研究会

(京都大学 工学部)

光ファイバによる表面波プローブの解析

梅田 充、小倉 久直、高橋 信行、北野 正雄
京都大学 工学部

1 序論

筆者らは走査トンネル顕微鏡 (STM)[1] に対応する走査型光顕微鏡の基礎研究を行ってきたが、STM が電子のトンネル効果を用いるのに対し、この光顕微鏡では誘電体の光プローブを走査することによって試料表面の evanescent 波を計測し、その形状を可視光の波長以下の分解能で観測しようとするものである [2, 3]。光プローブとしては光ファイバの先端部分を化学的エッチングにより細くしたものをを用いている。ここではその様な走査型光顕微鏡の中核を担う evanescent 波の光プローブの特性の解析を行う。

指数的に減衰する evanescent 波の電磁界の中に浸された、その様な誘電体プローブ棒が取り出し得る電力、プローブの形状・傾斜・偏波面等の変化によるその諸特性を調べることは、実用上重要でかつ理論的にも興味あることであるが、その理論解析は以外に容易でない。以前の報告 [4, 5] ではプローブのモデルとして楔形誘電体プローブを取り上げ、evanescent 電磁波の反射・屈折・透過則を利用して楔形表面波プローブの利得を近似的に評価する事ができた。しかしながら、その方法を本報告で取り扱う円筒形およびペンシル形誘電体プローブに適用することはまず困難を思われるので、ここでは電磁波の散乱の類似問題として再定式化することにする。表面波プローブをスカラ波の類似問題として近似できればその解析は非常に容易になるが、遮断波長を持たないファイバの主導波モードはスカラ対応の導波モードで記述出来ない。したがってここでは計算は複雑になるが問題を電

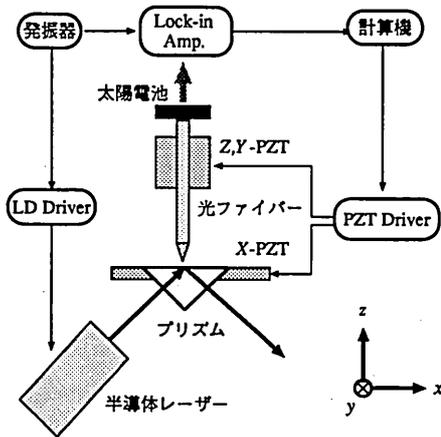


図 1: 走査型光顕微鏡

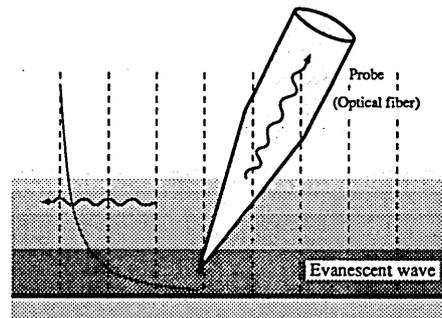


図 2: エバネセント波のファイバプローブ

磁界により記述し、外部からの evanescent 入射波による光ファイバブロープの導波モードの励振問題として、Kirchhoff 近似の考えに基づいて解析を行うことにする。

2 Green Dyadic 関数と導波電磁界モード展開¹

2.1 Green Dyadic 関数

電流密度 $J(\mathbf{r})$ 、磁流密度 $M(\mathbf{r})$ (電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$, 磁荷密度 $\rho_m(\mathbf{r})$) を励振源とする Maxwell 方程式 (時間因子 $e^{-i\omega t}$) は次のように書ける:

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{M} \quad (2)$$

$$\nabla(\epsilon\mathbf{E}) = \rho, \quad \nabla\mathbf{J} = i\omega\rho \quad (3)$$

$$\nabla(\mu\mathbf{H}) = \rho_m, \quad \nabla\mathbf{M} = i\omega\rho_m \quad (4)$$

J および M により励起される Maxwell 方程式の解 E, H は 4 種類の Green dyadic 関数により

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_V \mathcal{G}_{12}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_V \mathcal{G}_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_V \mathcal{G}_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (6)$$

と表される。(1)、(2) より、Green dyadic 関数の満たす方程式は次の様に書ける。

$$\nabla \times \mathcal{G}_{21} + i\omega\epsilon\mathcal{G}_{11} = \mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathcal{G}_{11} - i\omega\mu\mathcal{G}_{21} = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathcal{G}_{12} - i\omega\mu\mathcal{G}_{22} = -\mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9)$$

$$\nabla \times \mathcal{G}_{22} + i\omega\epsilon\mathcal{G}_{12} = 0 \quad (10)$$

あるいは、

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{G}_{11} - \omega^2\epsilon\mu\mathcal{G}_{11} = i\omega\mu\mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (11)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{G}_{22} - \omega^2\epsilon\mu\mathcal{G}_{22} = i\omega\epsilon\mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (12)$$

ただし、ここで \mathbf{I} は単位 dyadic

$$\mathbf{I} = \mathbf{a}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z\mathbf{a}_z \quad (13)$$

(\mathbf{a}_x, \dots はデカルト座標の単位ベクトル)、また、 $\mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は delta dyadic 関数であって連続なベクトル関数 $f(\mathbf{r})$ に対して

$$f(\mathbf{r}) = \int_V f(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (14)$$

の性質をもつ。

¹Felsen, Marcuvitz "Radiation and Scattering of Waves" (時間因子 $e^{-i\omega t}$) [6], Collin "Field Theory of Guided Waves" 2nd edition ($e^{i\omega t}$) [7]

2.2 導波電磁界モード²

Z 方向に一様な導波路 (誘電体円筒) に沿って z 方向に伝搬定数 $\Gamma_j (= i\beta_j + \alpha_j)$ で伝搬する導波モードの z 成分 (縦方向) 電磁界を $e_{jz}e^{\pm\Gamma_j z}$ 、 $h_{jz}e^{\pm\Gamma_j z}$ で表す。 e_{jz} 、 h_{jz} は z 方向ベクトル関数である。 z の正、負方向に進行する電磁導波モード E_j^\pm 、 H_j^\pm (時間因子は $e^{i\omega t}$) は

$$\left. \begin{aligned} E_j^+ &= (e_j + e_{jz})e^{\Gamma_j z} \\ H_j^+ &= (h_j + h_{jz})e^{\Gamma_j z} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} E_j^- &= (-e_j + e_{jz})e^{-\Gamma_j z} \\ H_j^- &= (h_j - h_{jz})e^{-\Gamma_j z} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

と書ける。ここで、 e_j 、 h_j は横方向 (同じ面内) のベクトル関数を表す。これらの関係は Maxwell 方程式を書直した次の式より得られる:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_t \times e_j &= -i\omega\mu h_{jz} \\ -\Gamma_j a_z \times e_j + \nabla_t \times e_{jz} &= -i\omega\mu h_j \\ \Gamma_j e_{jz} &= \nabla_t \cdot e_j \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_t \times h_j &= i\omega\epsilon e_{jz} \\ -\Gamma_j a_z \times h_j + \nabla_t \times h_{jz} &= i\omega\epsilon e_j \\ \Gamma_j h_{jz} &= \nabla_t \cdot h_j \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

あるいは (15) の表式で $\Gamma_n \rightarrow -\Gamma_n$ としてもよい。すなわち、 $e^{\Gamma z}$ 因子をもつ導波モードを $E_j = E_j(r, \Gamma_j)$ 、 $H_j = H_j(r, \Gamma_j)$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} E_j^+ &= E_j(r, \Gamma_j) \\ H_j^+ &= H_j(r, \Gamma_j) \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma_j > 0) \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} E_j^- &= E_j(r, -\Gamma_j) \\ H_j^- &= H_j(r, -\Gamma_j) \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma_j > 0) \quad (20)$$

である。これは (15)、(16) の形をもつことが示される³。

便宜上

$$N_j \equiv \int_S e_j \times h_j \cdot a_z dS \quad (21)$$

とおく。 N_j は規格因子である。モードは次の双直交条件を満たす:

$$\int_S e_j \times h_k \cdot a_z dS = 0, \quad \Gamma_j \neq \Gamma_k \quad (22)$$

通常 $j \neq k$ ならば $\Gamma_j \neq \Gamma_k$ であるが、縮退モード $\Gamma_j = \Gamma_k$ に対して別途直交化が必要である。

誘電体導波路には伝搬モードの他に放射モード E_R^\pm 、 H_R^\pm が存在する。導波モードは放射モードと直交する:

$$\int E_R^\pm \times h_j \cdot a_z dS = 0 \quad (23)$$

$$\int e_j^\pm \times H_R^\pm \cdot a_z dS = 0 \quad (24)$$

²Collin [7]

³(17)、(18) では (15) の右辺は $e_j - e_{jz}$ 、 $-h_j + h_{jz}$ の形も可能である (Collin [7]) が、後に定義するモードでは、(20) は (16) の形をとる。

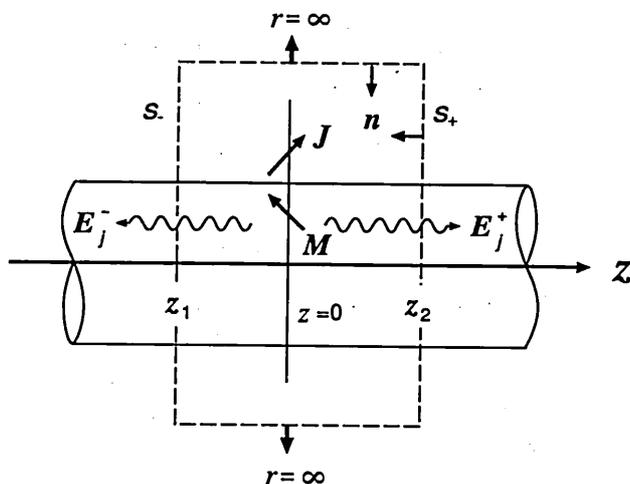


図 3: 円筒形積分面

2.3 導波モード展開

導波路の全電磁界は⁴

$$\left. \begin{aligned} E &= \sum_j a_j E_j^+ + E_R^+ \\ H &= \sum_j a_j H_j^+ + H_R^+ \end{aligned} \right\} \quad (z > 0) \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} E &= \sum_j b_j E_j^- + E_R^- \\ H &= \sum_j b_j H_j^- + H_R^- \end{aligned} \right\} \quad (z < 0) \quad (26)$$

の形に書ける。ここで、電磁流源 J, M は $z=0$ に集中する場合を示し、電磁界は $z < 0, z > 0$ の領域で z の正負方向に進行するモードで展開する。導波路を含む円筒面 S ($z = z_1, z_2$ における2つの円板 $S_-, S_+, r = \infty$ の円筒面、図3に対して Lorentz の相反定理を適用する。実際

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (E_j^\pm \times H - E \times H_j^\pm) &= H \cdot \nabla \times E_j^\pm - E_j^\pm \cdot \nabla \times H - H_j^\pm \cdot \nabla \times E + E \cdot \nabla \times H_j^\pm \\ &= -E_j^\pm \cdot J + H_j^\pm \cdot M \end{aligned} \quad (27)$$

両辺を積分すれば

$$\int_S (E_j^\pm \times H - E \times H_j^\pm) \cdot n dS = \int_V J \cdot E_j^\pm dV - \int_V M \cdot H_j^\pm dV \quad (28)$$

がえられる。ここで n は S の内向き法線ベクトル、 V は J, M の分布領域を表す。(15), (16), (22)-(26) などを用いて左辺を計算すれば...

$$\int_{S_-} (E_j^+ \times H - E \times H_j^+) \cdot a_z dS$$

⁴Collin [7] 11.7

$$= \sum_k b_k \int_{S_-} [\mathbf{E}_j^+ \times \mathbf{H}_k^- - \mathbf{E}_k^- \times \mathbf{H}_j^+] \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (29)$$

$$= b_j \int_{S_-} [\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_j - (-\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_j)] \cdot \mathbf{a}_z dS = 2N_j b_j \quad (z=0) \quad (30)$$

$$- \int_{S_+} (\mathbf{E}_j^+ \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \mathbf{H}_j^+) \cdot \mathbf{a}_z dS$$

$$= - \sum_k a_k \int_{S_+} [\mathbf{E}_j^+ \times \mathbf{H}_k^+ - \mathbf{E}_k^+ \times \mathbf{H}_j^+] \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (31)$$

$$= -a_j e^{2\pi\ell} \int_{S_+} [\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_j - \mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_j] \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (z=\ell) \quad (32)$$

$$\int_{S_-} (\mathbf{E}_j^- \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \mathbf{H}_j^-) \cdot \mathbf{a}_z dS$$

$$= \sum_k b_k \int_{S_-} [\mathbf{E}_j^- \times \mathbf{H}_k^- - \mathbf{E}_k^- \times \mathbf{H}_j^-] \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (33)$$

$$= b_j \int_{S_-} [-\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_j - (-\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_j)] \cdot \mathbf{a}_z dS = 0 \quad (34)$$

$$- \int_{S_+} (\mathbf{E}_j^- \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \mathbf{H}_j^-) \cdot \mathbf{a}_z dS$$

$$= - \sum_k a_k \int_{S_+} [\mathbf{E}_j^- \times \mathbf{H}_k^+ - \mathbf{E}_k^+ \times \mathbf{H}_j^-] \cdot \mathbf{a}_z dS \quad (35)$$

$$= -a_j \int_{S_+} [-\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_j - \mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_j] \cdot \mathbf{a}_z dS = 2N_j a_j \quad (36)$$

したがって、これらをまとめれば

$$2N_j a_j = - \int \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_j^- dV + \int \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_j^- dV \quad (37)$$

$$2N_j b_j = - \int \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_j^+ dV + \int \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_j^+ dV \quad (38)$$

$N_j = 1$ となる様に $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ が規格化してあれば、左辺の N_j は不要である。展開係数 a_j, b_j は、 \mathbf{J}, \mathbf{M} により励振されるものを分離して表せば

$$a_j \equiv a_{jJ} + a_{jM} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} 2N_j a_{jJ} &= - \int \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_j^- dV \\ 2N_j a_{jM} &= \int \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_j^- dV \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$b_j \equiv b_{jJ} + b_{jM} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} 2N_j b_{jJ} &= - \int \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_j^+ dV \\ 2N_j b_{jM} &= \int \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_j^+ dV \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

により計算される。

2.4 Green Dyadic 関数の導波モード展開

J により E を励起する Green dyadic \mathcal{G}_{11} ($r \neq r'$ として縦波部分は加えない。 $r \in V$ の場合は縦波部分が必要となる。) は

$$\mathcal{G}_{11}(r|r') = -\frac{1}{2} \sum_j E_{j\sigma}(r) E_{j\sigma}(r') + \mathcal{G}_{11}^R(r|r') \quad (43)$$

$$E_{j\sigma}(r) = \begin{cases} E_j^+(r), & z > z' \\ E_j^-(r), & z < z' \end{cases} \quad (44)$$

$$E_{j\sigma}(r') = \begin{cases} E_j^+(r'), & z > z' \\ E_j^-(r'), & z < z' \end{cases} \quad (45)$$

実際

$$\int_V \mathcal{G}_{11}(r|r') \cdot J(r') dV' = -\frac{1}{2} \sum_j E_{j\sigma}(r) \int_V E_{j\sigma}(r') \cdot J(r') dV' \quad (46)$$

$$= \begin{cases} \sum_j E_j^+(r) a_{jJ}, & z > z' \\ \sum_j E_j^-(r) b_{jJ}, & z < z' \end{cases} \quad (47)$$

同様にして M により励起する Green dyadic \mathcal{G}_{22} は

$$\mathcal{G}_{22}(r|r') = \frac{1}{2} \sum_j H_{j\sigma}(r) H_{j\sigma}(r') + \mathcal{G}_{22}^R(r|r') \quad (48)$$

$$= \frac{-1}{2(\omega\mu)^2} \sum_j \nabla \times E_{j\sigma}(r) \nabla' \times E_{j\sigma}(r') \quad (49)$$

$$= \frac{-1}{(\omega\mu)^2} \nabla \times \nabla' \times \mathcal{G}_{11}(r|r') \quad (50)$$

$$\int_V \mathcal{G}_{22}(r|r') \cdot M(r') dr' = \frac{1}{2} \sum_j H_{j\sigma}(r) \int_V H_{j\sigma}(r') \cdot M(r') dV' \quad (51)$$

$$= \begin{cases} \sum_j H_j^+(r) a_{jM}, & z > z' \\ \sum_j H_j^-(r) b_{jM}, & z < z' \end{cases} \quad (52)$$

同様にして M により E を誘起する Green dyadic \mathcal{G}_{12} は

$$\mathcal{G}_{12}(r|r') = \frac{1}{-i\omega\epsilon} \nabla \times \mathcal{G}_{22}(r|r') \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j E_{j\sigma}(r) H_{j\sigma}(r') \quad (54)$$

$$= \frac{1}{2i\omega\mu} \sum_j E_{j\sigma}(r) \nabla' \times E_j(r') \quad (55)$$

$$= -\mathcal{G}_{21}(r'|r) = \frac{1}{-i\omega\mu} \nabla' \times \mathcal{G}_{11}(r'|r) \quad (56)$$

$$\int_V \mathcal{G}_{12}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{2} \sum_j \mathbf{E}_{j\sigma}(\mathbf{r}) \int_V \mathbf{H}_{j\sigma}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (57)$$

$$= \begin{cases} \sum_j \mathbf{E}_j^+(\mathbf{r}) a_{jM}, & z > z' \\ \sum_j \mathbf{E}_j^-(\mathbf{r}) b_{jM}, & z < z' \end{cases} \quad (58)$$

\mathbf{J} により \mathbf{H} を誘起する Green dyadic \mathcal{G}_{21} は

$$\mathcal{G}_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad (59)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_j \mathbf{H}_{j\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{j\sigma}(\mathbf{r}') \quad (60)$$

$$= -\frac{1}{2i\omega\mu} \sum_j \nabla \times \mathbf{E}_{j\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{j\sigma}(\mathbf{r}') \quad (61)$$

$$= -\mathcal{G}_{12}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \quad (62)$$

$$\int_V \mathcal{G}_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\frac{1}{2} \sum_j \mathbf{H}_{j\sigma}(\mathbf{r}) \int_V \mathbf{E}_{j\sigma}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (63)$$

$$= \begin{cases} \sum_j \mathbf{H}_j^+(\mathbf{r}) a_{jJ}, & z > z' \\ \sum_j \mathbf{H}_j^-(\mathbf{r}) b_{jJ}, & z < z' \end{cases} \quad (64)$$

(5)、(6)を次のように \mathcal{G}_{11} のみで表すことも出来る:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_V \mathcal{G}_{12}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (65)$$

$$= \int_V \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \frac{1}{i\omega\mu} \int_V \nabla' \times \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (66)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_V \mathcal{G}_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_V \mathcal{G}_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (67)$$

$$= \frac{1}{i\omega\mu} \int_V \nabla \times \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \frac{1}{(\omega\mu)^2} \int_V \nabla \times (\nabla' \times \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (68)$$

特に $\mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ が $\mathcal{G}_{11}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ の形の場合、この積分核は

$$\nabla \times \nabla' \times \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla \times \nabla \times \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\omega^2 \epsilon \mu \mathcal{G}_{11} \quad (\text{if } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}') \quad (69)$$

とも書ける。

特に、電流、磁流が S 上の表面電流、表面磁流

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (70)$$

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}_s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (71)$$

の場合、上の公式は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) dS - \int_S \mathcal{G}_{12}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) dS \quad (72)$$

$$= \int_S \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) dS + \frac{1}{i\omega\mu} \int_S \nabla' \times \mathcal{G}_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) dS \quad (73)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_S \mathcal{G}_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) dS - \int_S \mathcal{G}_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) dS \quad (74)$$

$$= \frac{1}{i\omega\epsilon} \int_S \nabla' \times \mathcal{G}_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) dS - \int_S \mathcal{G}_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) dS \quad (75)$$

と書かれる。これらは Maxwell 方程式からも直接導かれる関係式である。

3 導波モードおよび入射 evanescent 波の電磁界 (まとめ)

以下の計算に必要な電磁界の表式を角度因子 $[\cos m\theta, \sin m\theta]$ (下添字 $[\pm]$ で区別) による表示を用いてまとめておく。詳細は付録 B, 付録 C をみられたい。

3.1 導波モードの電磁界

前進・後進モードの関係

$\pm\beta$ の符号 (上添字 \pm で区別) に対応して前進モード (上添字 $+$)、後進モード (上添字 $-$) の電磁界振幅が定まり、それらの横成分 $e_{m\pm}, h_{m\pm}$ と縦成分 $e_{m\pm z}, h_{m\pm z}$ の位相関係は次の形を取る (付録 B (B.42)–(B.45) 参照):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m\pm}^+(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{E}_{m\pm}(r, \theta; \beta) e^{i\beta z} \equiv [e_{m\pm} + e_{m\pm z}] e^{i\beta z} \\ \mathbf{E}_{m\pm}^-(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{E}_{m\pm}(r, \theta; -\beta) e^{-i\beta z} \equiv [-e_{m\pm} + e_{m\pm z}] e^{-i\beta z} \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{m\pm}^+(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{H}_{m\pm}(r, \theta; \beta) e^{i\beta z} \equiv [h_{m\pm} + h_{m\pm z}] e^{i\beta z} \\ \mathbf{H}_{m\pm}^-(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{H}_{m\pm}(r, \theta; -\beta) e^{-i\beta z} \equiv [h_{m\pm} + h_{m\pm z}] e^{-i\beta z} \end{aligned} \quad (77)$$

導波モードの電磁界

上の進行波モードの電磁界を付録 B (B.30), (B.35), (B.37), (B.40) および (B.42)–(B.45) によりまとめておく。ここではコア、外部ともに $\mathbf{E}_{m\pm}, \mathbf{H}_{m\pm}$ モードのいずれも横成分 (r, θ 成分) は実数、縦成分 (z 成分) は純虚数であるように係数を選んでいる。

コア内部 ($r < a$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m[\pm]}(r, \theta; \pm\beta) &= \mp i [\eta_m(\lambda r) - iP_m \zeta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \\ &\quad \mp [\zeta_m(\lambda r) + iP_m \eta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta - i\psi_m(\lambda r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{m[\pm]}(r, \theta; \pm\beta) &= \left[\frac{1}{Z_{TM}^1} \zeta_m(\lambda r) + iP_m \frac{1}{Z_{TE}^1} \eta_m(\lambda r) \right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \\ &\quad - i \left[\frac{1}{Z_{TM}^1} \eta_m(\lambda r) - iP_m \frac{1}{Z_{TE}^1} \zeta_m(\lambda r) \right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta \pm iP_m \frac{1}{Z_{TE}^1} \psi_m(\lambda r) \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (79)$$

外部 ($r > a$)

$$E_{m[\pm]}(r, \theta; \pm\beta) = \xi_m \left\{ \mp i[\eta'_m(\kappa r) - iP_m \zeta'_m(\kappa r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \right. \\ \left. \mp [\zeta'_m(\kappa r) + iP_m \eta'_m(\kappa r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta - i\psi'_m(\kappa r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \right\} \quad (80)$$

$$H_{m[\pm]}(r, \theta; \pm\beta) = \xi_m \left\{ \left[\frac{1}{Z_{TM}^2} \zeta'_m(\mu r) + iP_m \frac{1}{Z_{TE}^2} \eta'_m(\kappa r) \right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \right. \\ \left. - i \left[\frac{1}{Z_{TM}^2} \eta'_m(\kappa r) - iP_m \frac{1}{Z_{TE}^2} \zeta'_m(\kappa r) \right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta \pm iP_m \frac{1}{Z_{TE}^2} \psi'_m(\kappa r) \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \right\} \quad (81)$$

ここで P_m は (B.5) で定義されたモードにより定まる定数であり、 ψ_m, ψ'_m, ξ_m などは具体的に Bessel 関数、変形 Bessel 関数で次のように表わされる:

$$\left. \begin{aligned} \psi_m(\lambda r) &= \frac{\lambda}{k_1} J_m(\lambda r) \\ \zeta_m(\lambda r) &= \frac{\beta}{2k_1} [J_{m-1}(\lambda r) + J_{m+1}(\lambda r)] \\ \eta_m(\lambda r) &= i \frac{\beta}{2k_1} [J_{m-1}(\lambda r) - J_{m+1}(\lambda r)] \end{aligned} \right\}, \quad (0 < r < a) \quad (82)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi'_m(\kappa r) &= \frac{\kappa}{k_2} K_m(\kappa r) \\ \zeta'_m(\kappa r) &= \frac{\beta}{2k_2} [K_{m-1}(\kappa r) - K_{m+1}(\kappa r)] \\ \eta'_m(\kappa r) &= i \frac{\beta}{2k_2} [K_{m-1}(\kappa r) + K_{m+1}(\kappa r)] \end{aligned} \right\}, \quad (a < r < \infty) \quad (83)$$

$$\xi_m \equiv \frac{\lambda J_m(\lambda a)}{n\kappa K_m(\kappa a)} \quad (84)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \sqrt{k_1^2 - \beta^2}, \quad k_1 = nk, \quad Z_{TM}^1 = \frac{\beta}{kn^2} \zeta, \quad Z_{TE}^1 = \frac{k}{\beta} \zeta \\ \kappa &= \sqrt{\beta^2 - k^2}, \quad k_2 = k, \quad Z_{TM}^2 = \frac{\beta}{k} \zeta, \quad Z_{TE}^2 = \frac{k}{\beta} \zeta \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

$$\zeta \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \quad (86)$$

3.2 Evanescent 平面電磁波の円筒波展開

付録 C より必要な展開式を $[\cos m\theta, \sin m\theta]$ 表示 ($[\pm]$ 表示) で与える。複素波数ベクトル \mathbf{k}^* を持つ平面波を

$$e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} = e^{i\mu^* r \cos(\theta - \varphi) + i\gamma^* z} \quad (87)$$

$$\mathbf{r} \equiv (r, \theta, z)_{\text{cyl}}, \quad \mathbf{k}^* \equiv (\mu^*, \varphi, \gamma^*)_{\text{cyl}} \quad (88)$$

で表わす。ここで μ^*, γ^* は k^* の横成分および z 成分で、複素角 $\psi^* = \psi + i\chi$ を用いて

$$\mu^* = k \cos(\psi + i\chi) \equiv \mu + i\nu \quad (89)$$

$$\gamma^* = k \sin(\psi + i\chi) \equiv \gamma + i\alpha \quad (90)$$

$$\mu^{*2} + \gamma^{*2} = k^2 \quad (91)$$

で与えられ、 ψ は入射角に相当する ((C.9)-(C.13) 参照)。

TE 平面波

上に定義した複素波数ベクトル k^* をもつ水平偏波 (TE)evanescent 波の円筒波展開 ([±] 表示) 次式で与えられる ((C.19)-(C.26) 参照)

$$E_{TE}^0(\mathbf{r}) = \zeta a_H(k_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} = \zeta \frac{k}{\gamma^*} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_{m+}^1(\mu^* r, \theta - \varphi) e^{i\gamma^* z} \quad (92)$$

$$H_{TE}^0(\mathbf{r}) = a_V(k_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} = - \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_{m+}^2(\mu^* r, \theta - \varphi) e^{i\gamma^* z} \quad (93)$$

TM 平面波

同様に垂直偏波 (TM)evanescent 波の円筒波展開は

$$E_{TM}^0(\mathbf{r}) = \zeta a_V(k_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} = -\zeta \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_{m+}^2(\mu^* r, \theta - \varphi) e^{i\gamma^* z} \quad (94)$$

$$H_{TM}^0(\mathbf{r}) = -a_H(k_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} = -\frac{k}{\gamma^*} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_{m+}^1(\mu^* r, \theta - \varphi) e^{i\gamma^* z} \quad (95)$$

ただし $\epsilon_0 = 1, \epsilon_m = 2$ ($m \geq 1$) と置いた。上の展開式に現れる [±] 表示のベクトル円筒関数 $J_{m+}^{1,2}$ は、(A.6),(A.7) および (A.21), (A.22) により成分表示で表わせば

$$J_{m+}^1(\mu^* r) \equiv \zeta_m(\mu^* r) [i \sin m\theta] \mathbf{a}_r + \eta_m(\mu^* r) [\cos m\theta] \mathbf{a}_\theta \quad (96)$$

$$J_{m+}^2(\mu^* r, \theta) \equiv \eta_m(\mu^* r) [\cos m\theta] \mathbf{a}_r - \zeta_m(\mu^* r) [i \sin m\theta] \mathbf{a}_\theta + \psi_m(\mu^* r) [\cos m\theta] \mathbf{a}_z \quad (97)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

特に $J_{0+}^1(\lambda r) = \eta_0(\lambda r) \mathbf{a}_\theta, J_{0+}^2(\lambda r) = \eta_0(\lambda r) \mathbf{a}_r + \psi_0(\lambda r) \mathbf{a}_z$ である。

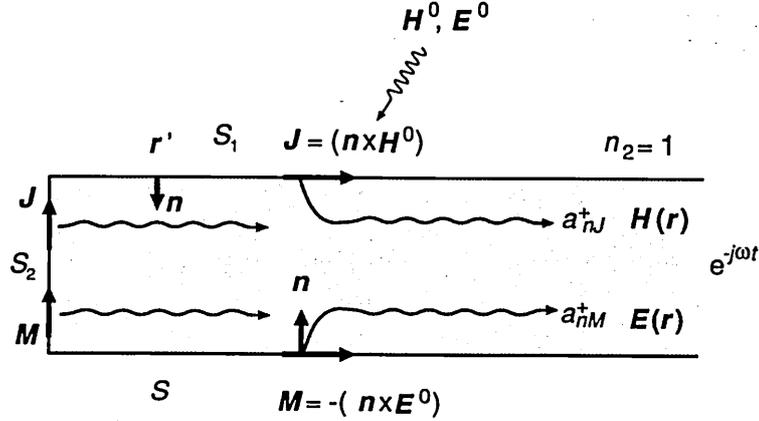


図 4: 半径 a の半無限誘電体円筒を包む側面 S_1 および底面 S_2

4 円筒形プローブによる導波モードの励起

4.1 励起モード振幅・表面積分

誘電体円筒(ファイバ)内の導波モードは TE_{0n} , TM_{0n} , HE_{mn} , EH_{mn} モードであるが、ファイバは十分細く、主モードである HE_{11} のみが伝搬可能で、他のモードはすべて遮断状態にあるものとする。また、ファイバの先端のむきだしのコアを細く円筒状にした部分が表面波のプローブとして動作するものとする。従って、以下の計算ではコア内部 ($r < a$) では屈折率は $n_1 = n$, クラッド(外部 $r > a$) では $n_2 = 1$ とする。外部入射波によりプローブ部分に励振された導波モードは、ファイバ内遠方 ($z \rightarrow \infty$) では HE_{11} モードのみが伝搬し、徐々に径が太くなって通常のシングルモードファイバの HE_{11} モードに移行するものとみなす。

図 4 の様な半径 a の半無限長誘電体円筒(ガラスファイバ)を包む側面 S_1 , 底面 S_2 で囲まれた円筒形領域に Green dyadic の公式 (72), (74) を適用し、壁面上の表面電流 $J = n \times H^0$ 、表面磁流 $M = -(n \times E^0)$ により内部の電磁界が励起されるものとする。壁面 S_1, S_2 上の表面電流、表面磁流は 1 次近似として外部入射場 $E^0(r), H^0(r)$ により励起されるものとする。Green dyadic 関数として無限長の誘電体円筒の Green dyadic 関数を用いる。端面 S_2 における反射を考慮することは必要ならば別途行うことができるが、今の近似では無視する。4 種の Green dyadic のモード展開 (43), (48), (54), (60) を再掲すれば

$$G_{11}(r|r') = -\frac{1}{2} \sum_j E_{j\sigma}(r) E_{j\sigma}(r') \quad (98)$$

$$G_{22}(r|r') = \frac{1}{2} \sum_j H_{j\sigma}(r) H_{j\sigma}(r') \quad (99)$$

$$G_{12}(r|r') = \frac{1}{2} \sum_j E_{j\sigma}(r) H_{j\sigma}(r') \quad (100)$$

$$G_{21}(r|r') = -\frac{1}{2} \sum_j H_{j\sigma}(r) E_{j\sigma}(r') = -G_{12}(r'|r) \quad (101)$$

連続固有値の放射モード部分 $G_{11}^R(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 等は以下の議論では用いないが形式上はモード量子数 j の和の中に含めておくものとする。観測点 \mathbf{r} は $\mathbf{r} \in S = S_1 + S_2$ より十分右方 ($z > z'$) とする。 \mathbf{r} における電磁界は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S G_{11}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r}')) dS - \int_S G_{12}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}')) dS \quad (102)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \sum_j \mathbf{E}_j^+(\mathbf{r}) \int_S \mathbf{E}_j^-(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r}')) dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_j \mathbf{E}_j^+(\mathbf{r}) \int_S \mathbf{H}_j^-(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}')) dS \end{aligned} \quad (103)$$

$$\equiv \sum_j (a_{jJ} + a_{jM}) \mathbf{E}_j^+(\mathbf{r}) \quad (104)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_S G_{21}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r}')) dS - \int_S G_{22}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}')) dS \quad (105)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \sum_j \mathbf{H}_j^+(\mathbf{r}) \int_S \mathbf{E}_j^-(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r}')) dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_j \mathbf{H}_j^+(\mathbf{r}) \int_S \mathbf{H}_j^-(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}')) dS \end{aligned} \quad (106)$$

$$\equiv \sum_j (a_{jJ} + a_{jM}) \mathbf{H}_j^+(\mathbf{r}) \quad (107)$$

これらの表面積分は表面電流 \mathbf{J} と表面磁流 \mathbf{M} による寄与からなるが、それは更に2つの表面 S_1 および S_2 に関する積分に分かれる。

以下の具体的な表面積分計算では便宜上2重縮退の角度量子数 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対応する角度因子 $\exp(im\theta)$ の代わりに、実の角度因子 $\cos m\theta, \sin m\theta$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) によるモード表示 $\mathbf{E}_{m\pm}, \mathbf{H}_{m\pm}$ を用い、これを簡単に $[\pm]$ 表示とよぶことにする。従って、入射 evanescent 波の円筒関数表示も、 $\cos m\theta, \sin m\theta$ による $[\pm]$ 表示を用いて計算を行なう。

HE _{m n} モードの場合、モード量子数は $j = (m, n, \pm)$ を記述するが、表面積分の角度 θ に関する積分においては、入射円筒波・導波モードは同一の角度モード (m, \pm) の組合せに対応する表面積分のみが残り、他の組合せによる積分は直交性により消える。以下では一般的に角度量子数 m に対して表面積分を計算する (HE₁₁ の場合は $m = 1$)。

4.2 S_1 側面上の表面積分

ここでは (40), (104) より励起モードの展開係数 $a_{jJ} + a_{jM}$ を与える表面積分のうち、側面 S_1 からの寄与

$$N_m a_{m\pm}^J = -\frac{1}{2} \int_{S_1} \mathbf{E}_{m\pm}^-(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r})) dS \quad (108)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S_1} (\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{m\pm}^-(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{a}_r dS, \quad (\mathbf{n} = -\mathbf{a}_r) \quad (109)$$

$$N_m a_{m\pm}^M = -\frac{1}{2} \int_{S_1} \mathbf{H}_{m\pm}^-(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r})) dS \quad (110)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S_1} (\mathbf{E}^0(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{m\pm}^-(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{a}_r dS, \quad (\mathbf{n} = -\mathbf{a}_r) \quad (111)$$

$$dS = dz d\theta, \quad (0 \leq z \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r = a)$$

を以下で計算する。ここで (21) の規格化因子

$$N_m = N_{m\pm} \equiv \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta (e_{m\pm} \times h_{m\pm})_z, \quad (\pm \text{に依存しない}) \quad (112)$$

は後節で計算する。

表面積分 (109) の z に関する積分からは、 $E_{m\pm}^-$ の z 因子 $e^{-i\beta z}$ 、 H^0 の z 因子 $e^{-i\gamma^* z}$ であることに注意すれば、

$$\int_0^\infty e^{-i\beta z + i\gamma^* z} dz = \frac{1}{i(\beta - \gamma^*)} \quad (\text{if } \alpha \equiv k \sinh \chi \cos \psi > 0 \text{ or } \chi > 0) \quad (113)$$

の因子が得られる。HE₁₁ モードの場合 ($m = 1$) が主として必要であるので、以下の計算では $m = 0$ の場合は省略する。

TE 波入射

$$N_m a_{m\pm}^{\text{TE,J}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dz (H^{\text{TE}} \times E_{m\pm}^-)_r d\theta \quad (114)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{i(\beta - \gamma^*)} \int_0^{2\pi} (H^{\text{TE}} \times E_{m\pm}^-)_r d\theta \quad (115)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \int_0^{2\pi} (J_{m+}^2 \times E_{m\pm}^-)_r d\theta \quad (116)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \int_0^{2\pi} ([J_{m+}^2]_\theta [E_{m\pm}^-]_z - [J_{m+}^2]_z [E_{m\pm}^-]_\theta) d\theta \quad (117)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \int_0^{2\pi} \left\{ -\zeta_m(\mu^* a) \sin m\theta \psi_m(\lambda a) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \right. \\ \left. - [\psi_m(\mu^* a, \gamma^*) \cos m\theta] [\zeta_m(\lambda a) + iP_m \zeta_m(\lambda a)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \right\} d\theta \quad (118)$$

$$= \frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \{ \zeta_m(\mu^* a) \psi_m(\lambda a) - \psi_m(\mu^* a) [\zeta_m(\lambda a) + iP_m \eta_m(\lambda a)] \} \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \quad (119)$$

$(a_{m+}^{\text{TE,J}} = 0)$

$$N_m a_{m\pm}^{\text{TE,M}} = -\frac{1}{2} \int_{S_1} H_{m\pm}^-(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times E^0(\mathbf{r})) dS \quad (120)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S_1} (E_0(\mathbf{r}) \times H_{m\pm}^-(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{a}_r dS, \quad (\mathbf{n} = -\mathbf{a}_r) \quad (121)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{i(\beta - \gamma^*)} \int_0^{2\pi} (E^{\text{TE}} \times H_{m\pm}^-)_r d\theta \quad (122)$$

$$= \frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \frac{\zeta k}{\gamma^*} \int_0^{2\pi} (J_{m+}^1 \times H_{m\pm}^-)_r d\theta \quad (123)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \frac{\zeta k}{\gamma^*} \int_0^{2\pi} ([J_{m+}^1]_\theta [H_{m\pm}^-]_z - [J_{m+}^1]_z [H_{m\pm}^-]_\theta) d\theta \quad (124)$$

$$= \frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \frac{\zeta k}{\gamma^*} \int_0^{2\pi} \left\{ \eta_m(\mu^* a) \cos m\theta \left[-iP_m \frac{1}{Z_{\text{TE}}^1} \psi_m(\lambda a) \right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} - 0 \right\} d\theta \quad (125)$$

$$= \frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \frac{\zeta k P_m}{\gamma^* Z_{TE}^1} \eta(\mu^* a) \psi_m(\lambda a) \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \quad (126)$$

($a_{m+}^{TE,M} = 0$), $1/Z_{TE}^1 = \beta/k\zeta$.

(TE 入射の場合 $a_{m-}^{TE,M}$ のみ 0 ではない)

TM 波入射

$$N_m a_{m\pm}^{TM,J} = \frac{1}{2} \frac{1}{i(\beta - \gamma^*)} \int_0^{2\pi} (\mathbf{H}^{TM} \times \mathbf{E}_{m\pm}^-)_r d\theta \quad (127)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \frac{k}{\gamma^*} \int_0^{2\pi} (\mathbf{J}_{m+}^1 \times \mathbf{E}_{m\pm}^-)_r d\theta \quad (128)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \frac{k}{\gamma^*} \int_0^{2\pi} ([\mathbf{J}_{m+}^1]_\theta [\mathbf{E}_{m\pm}^-]_z - [\mathbf{J}_{m+}^1]_z [\mathbf{E}_{m\pm}^-]_\theta) d\theta \quad (129)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \frac{k}{\gamma^*} \int_0^{2\pi} \left\{ \eta_m(\mu^* a) \cos m\theta (-i) \psi_m(\lambda a) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} - 0 \right\} d\theta \quad (130)$$

$$= \frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \frac{k}{\gamma^*} i \eta(\mu^* a) \psi_m(\lambda a) \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (131)$$

($a_{m-}^{TM,J} = 0$)

$$N_m a_{m\pm}^{TM,M} = \frac{1}{2} \frac{1}{i(\beta - \gamma^*)} \int_0^{2\pi} (\mathbf{E}^{TM} \times \mathbf{H}_{m\pm}^-)_r d\theta \quad (132)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \zeta \int_0^{2\pi} (\mathbf{J}_{m+}^2 \times \mathbf{H}_{m\pm}^-)_r d\theta \quad (133)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \zeta \int_0^{2\pi} ([\mathbf{J}_{m+}^2]_\theta [\mathbf{H}_{m\pm}^-]_z - [\mathbf{J}_{m+}^2]_z [\mathbf{H}_{m\pm}^-]_\theta) d\theta \quad (134)$$

$$= -\frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \zeta \int_0^{2\pi} \left\{ -\zeta_m(\mu^* a) i \sin m\theta \left[-i \frac{P_m}{Z_{TE}^1} \psi_m(\lambda a) \right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \right. \\ \left. - [\psi_m(\mu^* a) \cos n\theta] (-i) \left[\frac{\eta_m(\lambda a)}{Z_{TM}^1} - iP_m \frac{\zeta_m}{Z_{TE}^1} \right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \right\} d\theta \quad (135)$$

$$= \frac{i^m}{i(\beta - \gamma^*)} \zeta \left\{ \frac{P_m}{Z_{TE}^1} \zeta(\mu^* a) \psi_m(\lambda a) - i \psi_m(\mu^* a) \left[\frac{\eta(\lambda a)}{Z_{TM}^1} - iP_m \frac{\zeta_m(\lambda a)}{Z_{TE}^1} \right] \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \quad (136)$$

($a_{m-}^{TM,M} = 0$), $1/Z_{TM}^1 = kn^2/\beta\zeta$, $1/Z_{TE}^1 = \beta/k\zeta$

(TM 波に対しては a_{m+}^{TM} のみ 0 でない)

4.3 S_2 底面上の表面積分

($m = 0$ は省略、 HE_{11} モードの場合は $m = 1$ のみ必要)

$$N_m A_{m\pm}^J = -\frac{1}{2} \int_{S_2} \mathbf{E}_{m\pm}^-(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r})) dS \quad (137)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{S_2} (\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{m\pm}^-(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{a}_z dS, \quad (\mathbf{n} = \mathbf{a}_z) \quad (138)$$

$dS = r dr d\theta$, $(0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z = 0)$

TE 波入射

$$N_m A_{m\pm}^{\text{TE},\text{J}} = -\frac{1}{2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta (\mathbf{H}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{m\pm}^-(\mathbf{r}))_z \quad (139)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} ([\mathbf{H}^{\text{TE}}]_r [\mathbf{E}_{m\pm}^-]_\theta - [\mathbf{H}^{\text{TE}}]_\theta [\mathbf{E}_{m\pm}^-]_r) d\theta \quad (140)$$

$$= i^m \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} ([\mathbf{J}_{m+}^2]_r [\mathbf{E}_{m\pm}^-]_\theta - [\mathbf{J}_{m+}^2]_\theta [\mathbf{E}_{m\pm}^-]_r) d\theta \quad (141)$$

$$= i^m \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \left\{ \eta(\mu^* r) \cos m\theta [\zeta_m(\lambda r) + iP_m \eta_m(\lambda r, \beta)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \right. \\ \left. - [-\zeta(\mu^* r) i \sin m\theta] i [\eta(\lambda r) - iP_m \zeta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \right\} d\theta \quad (142)$$

$$= -i^m \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \int_0^a r dr \{ \eta(\mu^* r) [\zeta_m(\lambda r) + iP_m \eta_m(\lambda r)] \\ + \zeta_m(\mu^* r) [\eta_m(\lambda r) - iP_m \zeta_m(\lambda r)] \} \\ (A_{m+}^{\text{TE},\text{J}} = 0) \quad (143)$$

$$N_m A_{m\pm}^{\text{TE},\text{M}} = -\frac{1}{2} \int_{S_2} \mathbf{H}_{m\pm}^-(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r})) dS \quad (144)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{S_2} (\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{m\pm}^-(\mathbf{r}))_z dS, \quad (\mathbf{n} = \mathbf{a}_z) \quad (145)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta (\mathbf{E}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{m\pm}^-(\mathbf{r}))_z \quad (146)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta ([\mathbf{E}^{\text{TE}}]_r [\mathbf{H}_{m\pm}^-]_\theta - [\mathbf{E}^{\text{TE}}]_\theta [\mathbf{H}_{m\pm}^-]_r) \quad (147)$$

$$= -i^m \zeta \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr ([\mathbf{J}_{m+}^1]_r [\mathbf{H}_{m\pm}^-]_\theta - [\mathbf{J}_{m+}^1]_\theta [\mathbf{H}_{m\pm}^-]_r) \quad (148)$$

$$= -i^m \zeta \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \left\{ \zeta_m(\mu^* r) i \sin \theta (-i) \left[\frac{\eta_m(\lambda r)}{Z_{\text{TM}}^1} - iP_m \frac{\zeta(\lambda r)}{Z_{\text{TE}}^1} \right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \eta_m(\mu^* r) \cos \theta \left[\frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z_{\text{TM}}^1} + iP_m \frac{\eta(\lambda r)}{Z_{\text{TE}}^1} \right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \right\} \quad (149)$$

$$= -i^m \zeta \frac{k}{\gamma^*} \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \int_0^a r dr \left\{ \zeta_m(\mu^* r) \left[\frac{\eta_m(\lambda r)}{Z_{\text{TM}}^1} - iP_m \frac{\zeta(\lambda r)}{Z_{\text{TE}}^1} \right] \right. \\ \left. + \eta_m(\mu^* r) \left[\frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z_{\text{TM}}^1} + iP_m \frac{\eta(\lambda r)}{Z_{\text{TE}}^1} \right] \right\} \quad (150)$$

$$(A_{m+}^{\text{TE},\text{M}} = 0), \quad 1/Z_{\text{TM}}^1 = kn^2/k\zeta, \quad Z_{\text{TE}}^1 = \beta/k\zeta$$

(TE 入射の場合 A_{m-}^{TE} のみ)

TM 波入射

$$N_m A_{m\pm}^{\text{TM},\text{J}} = -\frac{1}{2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta (\mathbf{H}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{m\pm}^-(\mathbf{r}))_z \quad (151)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left([H^{TM}]_r [E_{m\pm}^-]_\theta - [H^{TM}]_\theta [E_{m\pm}^-]_r \right) \quad (152)$$

$$= i^m \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left([J_{m+}^1]_r [E_{m\pm}^-]_\theta - [J_{m+}^1]_\theta [E_{m\pm}^-]_r \right) \quad (153)$$

$$= i^m \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \zeta_m(\mu^* r) i \sin \theta [\zeta_m(\lambda r) + iP_m \eta(\lambda r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \eta_m(\mu^* r) \cos \theta (i) [\eta_m(\lambda r) - iP_m \zeta(\lambda r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \right\} d\theta \quad (154)$$

$$= i^{m+1} \frac{k}{\gamma^*} \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \int_0^a r dr \left\{ \zeta_m(\mu^* r) [\zeta_m(\lambda r) + iP_m \eta(\lambda r)] \right. \\ \left. - \eta_m(\mu^* r) [\eta_m(\lambda r) - iP_m \zeta(\lambda r)] \right\} \\ (A_{m-}^{TM,J} = 0) \quad (155)$$

$$N_m A_{m\pm}^{TM,M} = -\frac{1}{2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left([E^{TM}]_r [H_{m\pm}^-]_\theta - [E^{TM}]_\theta [H_{m\pm}^-]_r \right) \quad (156)$$

$$= i^m \zeta \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left([J_{m+}^2]_r [H_{m\pm}^-]_\theta - [J_{m+}^2]_\theta [H_{m\pm}^-]_r \right) \quad (157)$$

$$= i^m \zeta \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \eta_m(\mu^* r) \cos \theta (-i) \left[\frac{\eta_m(\lambda r)}{Z_{TM}^1} - iP_m \frac{\zeta(\lambda r)}{Z_{TE}^1} \right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \zeta_m(\mu^* r) i \sin \theta \left[\frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z_{TM}^1} + iP_m \frac{\eta(\lambda r)}{Z_{TE}^1} \right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \right\} \quad (158)$$

$$= i^{m-1} \zeta \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \int_0^a r dr \left\{ \eta_m(\mu^* r) \left[\frac{\eta_m(\lambda r)}{Z_{TM}^1} - iP_m \frac{\zeta(\lambda r)}{Z_{TE}^1} \right] \right. \\ \left. - \zeta_m(\mu^* r) \left[\frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z_{TM}^1} + iP_m \frac{\eta(\lambda r)}{Z_{TE}^1} \right] \right\} \\ (A_{m-}^{TM,M} = 0) \quad (159)$$

(TM波では $A_{m+}^{TM,J}$, $A_{m+}^{TM,M}$ のみ0でない。)

4.4 規格因子の計算

(112)の規格因子を計算する。(78)-(81)を代入すれば

$$N_{m\pm} \equiv \int (e_{m\pm} \times h_{m\pm})_z dS \quad (160)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr ([E_{m\pm}]_r [H_{m\pm}]_\theta - [E_{m\pm}]_\theta [H_{m\pm}]_r) \quad (161)$$

$$= \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ -[\eta_m(\lambda r) - iP_m \zeta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \left[\frac{\eta_m(\lambda r)}{Z_{TM}^1} - iP_m \frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z_{TE}^1} \right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \right. \\ \left. + [\zeta_m(\lambda r) + iP_m \eta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \left[\frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z_{TM}^1} + iP_m \frac{\eta_m(\lambda r)}{Z_{TE}^1} \right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \right\} \quad (162)$$

$$+ \xi_m^2 \int_a^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ -[\eta'_m(\kappa r) - iP_m \zeta'_m(\kappa r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \left[\frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z_{TM}^2} - iP_m \frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z_{TE}^2} \right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \right.$$

$$+[\zeta'_m(\kappa r) + iP_m \eta'_m(\kappa r)] \left[\begin{array}{c} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{array} \right] \left[\frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z_{TM}^2} + iP_m \frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z_{TE}^2} \right] \left[\begin{array}{c} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{array} \right] \quad (163)$$

$$= \left[\frac{\pi}{\pi} \right] \int_0^a r dr \left\{ -[\eta_m(\lambda r) - iP_m \zeta_m(\lambda r)] \left[\frac{\eta_m(\lambda r)}{Z_{TM}^1} - iP_m \frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z_{TE}^1} \right] \right. \\ \left. + [\zeta_m(\lambda r) + iP_m \eta_m(\lambda r)] \left[\frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z_{TM}^1} + iP_m \frac{\eta_m(\lambda r)}{Z_{TE}^1} \right] \right\} \quad (164)$$

$$+ \xi_m^2 \left[\frac{\pi}{\pi} \right] \int_a^\infty r dr \left\{ -[\eta'_m(\kappa r) - iP_m \zeta'_m(\kappa r)] \left[\frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z_{TM}^2} - iP_m \frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z_{TE}^2} \right] \right. \\ \left. + [\zeta'_m(\kappa r) + iP_m \eta'_m(\kappa r)] \left[\frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z_{TM}^2} + iP_m \frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z_{TE}^2} \right] \right\} \quad (165)$$

結局 ± に依存しないから以下では [] を省略すると

$$N_m = \pi \int_0^a r dr \left\{ - \left(\frac{1}{Z_{TM}^1} + \frac{P_m^2}{Z_{TE}^1} \right) \eta_m(\lambda r)^2 \right. \\ \left. + 2iP_m \left(\frac{1}{Z_{TM}^1} + \frac{1}{Z_{TE}^1} \right) \eta_m(\lambda r) \zeta_m(\lambda r) + \left(\frac{1}{Z_{TM}^1} + \frac{P_m^2}{Z_{TE}^1} \right) \zeta_m(\lambda r)^2 \right\} \\ + \pi \xi_m^2 \int_0^a r dr \left\{ - \left(\frac{1}{Z_{TM}^2} + \frac{P_m^2}{Z_{TE}^2} \right) \eta'_m(\kappa r)^2 + 2iP_m \left(\frac{1}{Z_{TM}^2} + \frac{1}{Z_{TE}^2} \right) \eta'_m(\kappa r) \zeta'_m(\kappa r) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{Z_{TM}^2} + \frac{P_m^2}{Z_{TE}^2} \right) \zeta'_m(\kappa r, \beta)^2 \right\} \quad (166)$$

$$\equiv \pi \int_0^a r dr \left\{ -S_1 \eta_m(\lambda r)^2 + 2iT_1 \eta_m(\lambda r) \zeta_m(\lambda r) + S_1 \zeta_m(\lambda r)^2 \right\} \\ + \pi \xi_m^2 \int_0^a r dr \left\{ -S_2 \eta'_m(\kappa r)^2 + 2iT_2 \eta'_m(\kappa r) \zeta'_m(\kappa r) + S_2 \zeta'_m(\kappa r)^2 \right\} \quad (167)$$

但しここで

$$S_1 \equiv \left. \begin{array}{l} \frac{1}{Z_{TM}^1} + \frac{P_m^2}{Z_{TE}^1} = \frac{\beta}{k\zeta} \left(P_m^2 + \frac{n^2 k^2}{\beta^2} \right) \\ T_1 \equiv P_m \left(\frac{1}{Z_{TM}^1} + \frac{1}{Z_{TE}^1} \right) = P_m \frac{\beta}{k\zeta} \left(1 + \frac{n^2 k^2}{\beta^2} \right) \end{array} \right\} \quad (168)$$

$$S_2 \equiv \left. \begin{array}{l} \frac{1}{Z_{TM}^2} + \frac{P_m^2}{Z_{TE}^2} = \frac{\beta}{k\zeta} \left(P_m^2 + \frac{k^2}{\beta^2} \right) \\ T_2 \equiv P_m \left(\frac{1}{Z_{TM}^2} + \frac{1}{Z_{TE}^2} \right) = P_m \frac{\beta}{k\zeta} \left(1 + \frac{k^2}{\beta^2} \right) \end{array} \right\} \quad (169)$$

と置いた。また

$$\left. \begin{array}{l} Z_{TM}^1 = \frac{\beta}{k_1} \zeta_1 = \frac{\beta}{kn^2} \zeta, \quad Z_{TE} = \frac{k}{\beta} \zeta \quad (n_1 = n) \\ Z_{TM}^2 = \frac{\beta}{k_2} \zeta_2 = \frac{\beta}{k} \zeta, \quad Z_{TE} = \frac{k}{\beta} \zeta \quad (n_2 = 1) \end{array} \right\} \quad (170)$$

である。更に

$$\left. \begin{aligned} \eta_m^2 &= -\frac{\beta^2}{4k_1^2}[J_{m-1} - J_{m+1}]^2 \\ \eta_m \zeta_m &= i\frac{\beta^2}{4k_1^2}[J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2] \\ \zeta_m^2 &= \frac{\beta^2}{4k_1^2}[J_{m-1} + J_{m+1}]^2 \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_m'^2 &= -\frac{\beta^2}{4k_1^2}[K_{m-1} + K_{m+1}]^2 \\ \eta_m' \zeta_m' &= i\frac{\beta^2}{4k_1^2}[K_{m-1}^2 - K_{m+1}^2] \\ \zeta_m'^2 &= \frac{\beta^2}{4k_1^2}[K_{m-1} - K_{m+1}]^2 \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

と書けることを用いると (167) は

$$\begin{aligned} N_m &= \pi \frac{\beta^2}{4k_1^2} \int_0^a r dr \{S_1[J_{m-1} - J_{m+1}]^2 - 2T_1[J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2] + S_1[J_{m-1} + J_{m+1}]^2\} \\ &\quad + \pi \xi_m^2 \frac{\beta^2}{4k^2} \int_a^\infty r dr \{S_2[K_{m-1} + K_{m+1}]^2 - 2T_2[K_{m-1}^2 - K_{m+1}^2] + S_2[K_{m-1} - K_{m+1}]^2\} \quad (173) \\ &= \pi \frac{\beta^2}{4k_1^2} \int_0^a r dr 2[(S_1 - T_1)J_{m-1}^2(\lambda r) + (S_1 + T_1)J_{m+1}^2(\lambda r)] \\ &\quad + \pi \xi_m^2 \frac{\beta^2}{4k^2} \int_a^\infty r dr 2[(S_2 - T_2)K_{m-1}^2(\kappa r) + (S_2 + T_2)K_{m+1}^2(\kappa r)] \quad (174) \end{aligned}$$

ここで次の公式

$$\int_0^a r dr \begin{bmatrix} J_{m-1}^2(\lambda r) \\ J_{m+1}^2(\lambda r) \end{bmatrix} = \frac{a^2}{2} \begin{bmatrix} J_{m-1}^2(\lambda a) - J_{m-2}(\lambda a)J_m(\lambda a) \\ J_{m+1}^2(\lambda a) - J_m(\lambda a)J_{m+2}(\lambda a) \end{bmatrix} \quad (> 0) \quad (175)$$

$$\int_a^\infty r dr \begin{bmatrix} K_{m-1}^2(\kappa r) \\ K_{m+1}^2(\kappa r) \end{bmatrix} = -\frac{a^2}{2} \begin{bmatrix} K_{m-1}^2(\kappa a) - K_{m-2}(\kappa a)K_m(\kappa a) \\ K_{m+1}^2(\kappa a) - K_m(\kappa a)K_{m+2}(\kappa a) \end{bmatrix} \quad (> 0) \quad (176)$$

を用い、更に

$$\xi_m \equiv \frac{1}{n} \frac{\lambda J_m(\lambda a)}{\kappa K_m(\kappa a)}, \quad (n_1 = n, n_2 = 1) \quad (177)$$

$$u \equiv \lambda a, \quad w \equiv \kappa a \quad (178)$$

と置けば、

$$\begin{aligned} N_m &= \pi a^2 \frac{\beta^2}{4k^2 n} \left\{ (S_1 - T_1)[J_{m-1}^2(u) - J_{m+1}^2(u)J_m(u)] \right. \\ &\quad + (S_1 + T_1)[J_{m+1}^2(u) - J_m(u)J_{m+2}(u)] + \left[\frac{uJ_m(u)}{wK_m(w)} \right]^2 [(S_2 - T_2)[K_{m+1}^2(w)K_m(w) - K_{m-1}^2(w)] \\ &\quad \left. + (S_2 + T_2)[K_m(w)K_{m+2}(w) - K_{m+1}^2(w)] \right\} \quad (179) \end{aligned}$$

となる。但しここで

$$S_1 \pm T_1 \equiv \frac{\beta}{k\zeta} \left[P_m^2 + \frac{n^2 k^2}{\beta^2} \pm P_m \left(1 + \frac{n^2 k^2}{\beta^2} \right) \right] \quad (180)$$

$$S_2 \pm T_2 \equiv \frac{\beta}{k\zeta} \left[P_m^2 + \frac{k^2}{\beta^2} \pm P_m \left(1 + \frac{k^2}{\beta^2} \right) \right] \quad (181)$$

である。特に弱導波近似 $P_m = [\pm]1$ のとき (複号同順)

$$S_1[\mp]T_1 = 0, \quad S_1[\pm]T_1 = \frac{2\beta}{k\zeta} \left(1 + \frac{n^2 k^2}{\beta^2} \right) \quad (182)$$

$$S_2[\mp]T_2 = 0, \quad S_2[\pm]T_2 = \frac{2\beta}{k\zeta} \left(1 + \frac{k^2}{\beta^2} \right) \quad (183)$$

となり、(179) は簡単になる。

4.5 導波モードの電力流

上の表示では、横ベクトル関数 $e_{m\pm}, h_{m\pm}$ は実数値成分のみを持ち、 $h_{m\pm} = h_{m\pm}^*$ (* 複素共役) と書けるから、規格化積分

$$\mathcal{P}^m = \frac{1}{2} \int (\mathbf{e}_{m\pm} \times \mathbf{h}_{m\pm}^*)_z dS = \frac{N_m}{2} \quad (184)$$

は正の実数で導波モードの伝送電力に等しい。
電力をコアと外部 (clad) に分けて表わせば

$$\mathcal{P}^m = \mathcal{P}_{core}^m + \mathcal{P}_{clad}^m \quad (185)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{core}^m = & \pi a^2 \frac{\beta^2}{8k^2 n} \left\{ (S_1 - T_1) [J_{m-1}^2(u) - J_{m-2}^2(u) J_m(u)] \right. \\ & \left. + (S_1 + T_1) [J_{m+1}^2(u) - J_m(u) J_{m+2}(u)] \right\} \end{aligned} \quad (186)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{clad}^m = & \pi a^2 \frac{\beta^2}{8k^2 n} \left[\frac{u J_m(u)}{w K_m(w)} \right]^2 \left\{ (S_2 - T_2) [K_{m-2}(w) K_m(w) - K_{m-1}^2(w)] \right. \\ & \left. + (S_2 + T_2) [K_m(w) K_{m+2}(w) - K_{m+1}^2(w)] \right\} \end{aligned} \quad (187)$$

弱導波近似 ($P_m = \pm 1$) の場合

$$\mathcal{P}_{core}^m = \pi a^2 \frac{\beta^2}{8k^2 n} \cdot \frac{2\beta}{k\zeta} \left(1 + \frac{n^2 k^2}{\beta^2} \right) [J_{m\pm 1}^2(u) - J_{m\pm 2}^2(u) J_m(u)] \quad (188)$$

$$\mathcal{P}_{clad}^m = \pi a^2 \frac{\beta^2}{8k^2 n} \left[\frac{u J_m(u)}{w K_m(w)} \right]^2 \frac{2\beta}{k\zeta} \left(1 + \frac{n^2 k^2}{\beta^2} \right) [K_{m\pm 2}(w) K_m(w) - K_{m\pm 1}^2(w)] \quad (189)$$

したがって

$$\frac{\mathcal{P}_{core}}{\mathcal{P}_{clad}} \simeq \left[\frac{w K_m(w)}{u J_m(u)} \right]^2 \frac{J_{m\pm 1}^2(u) - J_{m\pm 2}^2(u) J_m(u)}{K_{m\pm 2}(w) K_m(w) - K_{m\pm 1}^2(w)} \quad (190)$$

5 Evanescent 波による導波モードの励起

5.1 Evanescent TE 波によるモード励起

前節の結果より-モードのみが励起される。展開係数 a_{m-}^{TE} は次の4項の和からなる。(右辺で添字 TE を省略)

$$a_{m-}^{\text{TE}} = (a_{m-}^J + a_{m-}^M) + (A_{m-}^J + A_{m-}^M) \quad (191)$$

第1の()は側面 S_1 よりの、第2の()は底面 S_2 よりの励起項を表わす:

$$a_{m-}^J + a_{m-}^M = \frac{i^{m-1}\pi}{N_m(\beta - \gamma^*)} \left[\zeta_m^* \psi_m - \psi_m^* \zeta_m - iP_m \psi_m^* \eta_m + iP_m \frac{\beta}{\gamma^*} \eta_m^* \psi_m \right]_{r=a} \quad (192)$$

$$\begin{aligned} A_{m-}^J + A_{m-}^M &= -\frac{i^m \pi}{N_m} \int_0^a r dr \left\{ [\eta_m^* (\zeta_m + iP_m \eta_m) + \zeta_m^* (\eta_m - iP_m \zeta_m)] + \frac{k}{\gamma^*} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\zeta_m^* \left(\frac{kn^2}{\beta} \eta_m - iP_m \frac{\beta}{k} \zeta_m \right) + \eta_m^* \left(\frac{kn^2}{\beta} \zeta_m + iP_m \frac{\beta}{k} \eta_m \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{i^m \pi}{N_m} \int_0^a dr \left[\left(1 + \frac{k^2 n^2}{\beta \gamma^*} \right) (\eta_m^* \zeta_m + \zeta_m^* \eta_m) + iP_m \left(1 + \frac{\beta}{\gamma^*} \right) (\eta_m^* \eta_m - \zeta_m^* \zeta_m) \right] \end{aligned} \quad (193)$$

但し

$$\psi_m \equiv \psi_m(\lambda r), \zeta_m \equiv \zeta_m(\lambda r), \eta_m \equiv \eta_m(\lambda r) \quad (194)$$

$$\psi_m^* \equiv \psi_m(\mu^* r), \zeta_m^* \equiv \zeta_m(\mu^* r), \eta_m^* \equiv \eta_m(\mu^* r) \quad (195)$$

5.2 Evanescent TM 波によるモード励起

上と同様にして、+モードのみが励起される。展開係数 a_{m+}^{TM} は次の4項の和からなる。(右辺で添字 TM を省略)

$$a_{m+}^{\text{TM}} = (a_{m+}^J + a_{m+}^M) + (A_{m+}^J + A_{m+}^M) \quad (196)$$

第1の()は側面 S_1 よりの、第2の()は底面 S_2 よりの励起項を表わす:

$$\begin{aligned} a_{m+}^J + a_{m+}^M &= \frac{i^{m-1}\pi}{N_m(\beta - \gamma^*)} \left[\frac{k}{\gamma^*} i \eta_m^* \psi_m - \frac{kn^2}{\beta} i \psi_m^* \eta_m + P_m \frac{\beta}{k} (\zeta_m^* \psi_m - \psi_m^* \zeta_m) \right]_{r=a} \quad (197) \\ A_{m+}^J + A_{m+}^M &= \frac{i^{(m+1)}\pi}{N_m} \int_0^a r dr \left\{ \frac{k}{\gamma^*} [\zeta_m^* (\zeta_m + iP_m \eta_m) - \eta_m^* (\eta_m - iP_m \zeta_m)] \right. \\ &\quad \left. - \left[\eta_m^* \left(\frac{kn^2}{\beta} \eta_m - iP_m \frac{\beta}{k} \zeta_m \right) - \zeta_m^* \left(\frac{kn^2}{\beta} \zeta_m + iP_m \frac{\beta}{k} \eta_m \right) \right] \right\} \\ &= \frac{i^{(m+1)}\pi}{N_m} \int_0^a r dr \left[iP_m \left(\frac{k}{\gamma^*} + \frac{\beta}{k} \right) (\eta_m^* \zeta_m + \zeta_m^* \eta_m) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k}{\gamma^*} + \frac{kn^2}{\beta} \right) (\zeta_m^* \zeta_m - \eta_m^* \eta_m) \right] \end{aligned} \quad (198)$$

5.3 HE₁₁ モードの励起

十分細いファイバプローブでは HE₁₁ モードのみが伝搬し、他のモードは遮断されているから、遠方 ($z \rightarrow \infty$) では HE₁₁ モードの進行波電磁界

$$\mathbf{E}(r) \sim a_{1\pm} \mathbf{E}_{1\pm}(r, \theta; \beta) e^{i\beta z}, \quad \mathbf{H}(r) \sim a_{1\pm} \mathbf{H}_{1\pm}(r, \theta; \beta) e^{i\beta z} \quad (199)$$

がえられる。従って電力流は

$$P_1 = \frac{1}{2} |a_{1\pm}|^2 \quad (200)$$

で与えられ、 $a_{m\pm}$ は $m=1$ の HE₁₁ モードにたいしてのみ求めればよい。弱導波近似が成り立たずファイバの他のモードが遮断状態でない場合でも、シングルモードファイバに接続される地点では HE₁₁ モードのみを取り出すものとみなす。

厳密解

数値計算のためには、 $n_1, n_2, a/\lambda$ などを与えて、HE₁₁ モードの伝搬定数 $\beta_{11}, P_{11} (\simeq -1)$ を計算する必要がある。プローブ先端部分ではコアがむきだしになっているので、

$$n_1 = 1.5, \quad n_2 = 1, \quad a/\lambda = 0.5$$

とすれば、 v パラメタは

$$v = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} (2\pi a/\lambda) = \sqrt{(1.5)^2 - 1} \pi = 3.512$$

となる (弱導波近似の場合、シングルモードの条件は $v < 2.405$)。 $w = \sqrt{v^2 - u^2}$ ($v > u$) と置いて特性方程式より w を消去し、 $m=1$ の場合に図式解法により根 $u_{1n} (n=1)$ を求める (但し HE₁₁ モード: $P_{11} < 0$)。

$$u_{11} = \sqrt{(nk)^2 - \beta_{11}^2 a}$$

の関係より伝搬定数 $\beta = \beta_{11}$ が求まる。

近似解

弱導波近似の場合は HE _{m n} モードにたいしては $P_m = -1$ とおけばよい。この場合 v パラメタ $v = 3.512$ にたいして固有値は (宮城 p.80, 表 1)

$$u = 1.8486 = \lambda a, \quad w = 2.9857 = \kappa a$$

したがって

$$\beta a = \sqrt{(nka)^2 - u^2} = \sqrt{(1.5\pi)^2 - (1.8486)^2} = 4.334$$

これらの数値を表面積分の計算式にもちいる。

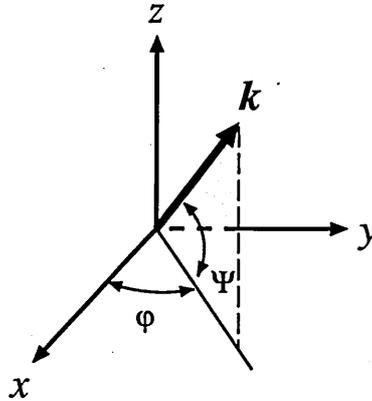


図 5: 入射波 k

入射波のパラメタ

ファイバ軸 (z 軸) に対し複素入射角

$$\psi^* \equiv \psi + i\chi \quad (201)$$

で入射する evanescent 波に対しては

$$\begin{aligned} \mu^* &\equiv \mu + i\nu \equiv k \cos(\psi + i\chi) \\ \gamma^* &\equiv \gamma + i\alpha \equiv k \sin(\psi + i\chi) \\ \mu &= k \cosh \chi \cos \psi, \quad \nu = -k \sinh \chi \sin \psi \\ \gamma &= k \cosh \chi \sin \psi, \quad \alpha = k \sinh \chi \cos \psi \end{aligned} \quad (202)$$

の関係を用いる。入射方位角は $\phi = 0$ として一般性を失わない。特に垂直入射 ($\psi = 0$) の場合は、 $\nu = 0, \gamma = 0$ となり

$$\begin{aligned} \mu^* &= \mu = k \cosh \chi \\ \gamma^* &= i\alpha = ik \sinh \chi \end{aligned} \quad (203)$$

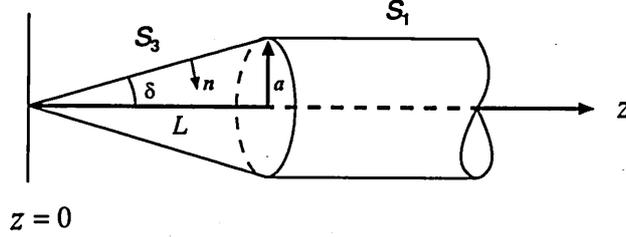


図 6: ペンシル形プローブ

6 ペンシル形プローブによる導波モードの励起

図のようにコアの先端部が長さ L , 軸となす角度 δ の尖ったペンシル形プローブによるファイバの導波モード励起を取り扱う。先端の円錐面を S_3 で表わせば S_3 上の法線ベクトル n は、 ϕ 成分は 0 であるから、次のように書ける:

$$n = (n_r, n_z) = -\cos \delta a_r + \sin \delta a_z \quad (204)$$

$$\tan \delta = a/L, \quad \cos \delta = L/\sqrt{a^2 + L^2}, \quad \sin \delta = a/\sqrt{a^2 + L^2} \quad (205)$$

$$r = \tan \delta \cdot z, \quad z = \cot \delta \cdot r \quad (206)$$

$$dS = r dr d\theta \frac{dz}{\cos \delta} = \frac{1}{\sin \delta} r dr d\theta \quad (207)$$

S_3 上の表面積分

$$\begin{aligned} N_m B_{m\pm}^J &\equiv -\frac{1}{2} \int_{S_3} (H^0(r) \times E_{m\pm}^-(r)) \cdot n dS \\ &= -\frac{1}{2} \int_{S_3} (H^0(r) \times E_{m\pm}^-(r)) \cdot (-\cos \delta a_r + \sin \delta a_z) dS \\ &= \frac{1}{2} \cot \delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (H^0 \times E_{m\pm}^-)_r - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (H^0 \times E_{m\pm}^-)_z \\ &\equiv I_1 \cot \delta - I_2 \end{aligned} \quad (208)$$

$$\begin{aligned} N_m B_{m\pm}^M &\equiv -\frac{1}{2} \int_{S_3} (E^0(r) \times H_{m\pm}^-(r)) \cdot n dS \\ &= \frac{1}{2} \cot \delta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (E^0 \times H_{m\pm}^-)_r - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (E^0 \times H_{m\pm}^-)_z \\ &\equiv I_3 \cot \delta - I_4 \end{aligned} \quad (209)$$

$\delta \rightarrow \pi/2, \cot \delta \rightarrow 0$ の場合、 S_3 上の積分は S_2 (底面 $z=0$) 上の積分に帰着する。 S_3 上の積分のみが励起に効果的な場合は、 $\gamma^* = \gamma + i\alpha$ とするとき、evanescent 波の広がりが L 以内であること、すなわち、 $|e^{i\gamma^* L}| = e^{-\alpha L} \ll 1, \alpha L \gg 1$ 、であることが必要である。広がりが $1/\alpha$ が L を越える、すなわち、 $\alpha L \ll 1$ 、となる場合には $z \geq L$ となる側面 S_1 上の積分も必要となる。逆に L が大きすぎて $\tan \delta \ll 1$ の場合には、反射波(後進波 b_m) が無視できないので、この近似ではペンシルの角度 δ は適当に大きいことも必要である。

TE 波入射

上に与えた積分 I_1, \dots, I_4 を計算する。この場合は -モードのみが励起される。

$$I_1^{TE} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (\mathbf{H}^{TE} \times \mathbf{E}_{m-}^-)_r \quad (210)$$

$$= -i^m \pi \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} (\mathbf{J}_{m+}^2 \times \mathbf{E}_{m-})_r \quad (211)$$

$$= -i^m \pi \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} ([\mathbf{J}_{m+}^2]_\theta [\mathbf{E}_{m-}]_z - [\mathbf{J}_{m+}^2]_z [\mathbf{E}_{m-}]_\theta) \quad (212)$$

$$= i^m \pi \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} [\zeta_m^* \psi_m - \psi_m^* \zeta_m - iP_m \psi_m^* \eta_m] \quad (213)$$

$$I_2^{TE} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (\mathbf{H}^{TE} \times \mathbf{E}_{m-}^-)_z \quad (214)$$

$$= -i^m \pi \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} (\mathbf{J}_{m+}^2 \times \mathbf{E}_{m-})_z \quad (215)$$

$$= -i^m \pi \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} ([\mathbf{J}_{m+}^2]_r [\mathbf{E}_{m-}]_\theta - [\mathbf{J}_{m+}^2]_\theta [\mathbf{E}_{m-}]_r) \quad (216)$$

$$= i^m \pi \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} [\eta_m^* \zeta_m + \zeta_m^* \eta_m + iP_m (\eta_m^* \eta_m - \zeta_m^* \zeta_m)] \quad (217)$$

$$I_3^{TE} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (\mathbf{E}^{TE} \times \mathbf{H}_{m-}^-)_r \quad (218)$$

$$= i^m \pi \zeta \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} (\mathbf{J}_{m+}^1 \times \mathbf{H}_{m-})_r \quad (219)$$

$$= i^m \pi \zeta \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} ([\mathbf{J}_{m+}^1]_\theta [\mathbf{H}_{m-}]_z - [\mathbf{J}_{m+}^1]_z [\mathbf{H}_{m-}]_\theta) \quad (220)$$

$$= i^m \pi \zeta \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} \left[\frac{iP_m}{Z_{TE}^1} \eta_m^* \psi_m \right] \quad (221)$$

$$= i^m \pi \frac{\beta}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} [iP_m \eta_m^* \psi_m] \quad (222)$$

$$I_4^{TE} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (\mathbf{E}^{TE} \times \mathbf{H}_{m-}^-)_z \quad (223)$$

$$= i^m \pi \zeta \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} ([\mathbf{J}_{m+}^1]_r [\mathbf{H}_{m-}]_\theta - [\mathbf{J}_{m+}^1]_\theta [\mathbf{H}_{m-}]_r) \quad (224)$$

$$= i^m \pi \zeta \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} \left[\frac{1}{Z_{TM}^1} (\zeta_m^* \eta_m + \eta_m^* \zeta_m) + i \frac{P_m}{Z_{TE}^1} (\eta_m^* \eta_m - \zeta_m^* \zeta_m) \right] \quad (225)$$

$$= i^m \pi \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} \left[\frac{k n^2}{\beta} (\zeta_m^* \eta_m + \eta_m^* \zeta_m) + iP_m \frac{\beta}{k} (\eta_m^* \eta_m - \zeta_m^* \zeta_m) \right] \quad (226)$$

TM 波入射

この場合は +モードのみが励起される。

$$I_1^{TM} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (\mathbf{H}^{TM} \times \mathbf{E}_{m+}^-)_r \quad (227)$$

$$= -i^m \pi \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} (\mathbf{J}_{m+}^1 \times \mathbf{E}_{m+})_r \quad (228)$$

$$= -i^m \pi \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} ([J_{m+}^1]_\theta [E_{m+}]_z - [J_{m+}^1]_z [E_{m+}]_\theta) \quad (229)$$

$$= i^m \pi \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} [i\eta_m^* \psi_m] \quad (230)$$

$$I_2^{TM} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (\mathbf{H}^{TM} \times \mathbf{E}_{m+}^-)_z \quad (231)$$

$$= -i^m \pi \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} ([J_{m+}^1]_r [E_{m+}]_\theta - [J_{m+}^1]_\theta [E_{m+}]_r) \quad (232)$$

$$= i^m \pi \frac{k}{\gamma^*} \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} [\zeta_m^* \zeta_m - \eta_m^* \eta_m + iP_m (\zeta_m^* \eta_m + \eta_m^* \zeta_m)] \quad (233)$$

$$I_3^{TM} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (\mathbf{E}^{TM} \times \mathbf{H}_{m+}^-)_r \quad (234)$$

$$= i^m \pi \zeta \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} ([J_{m+}^2]_\theta [H_{m+}]_z - [J_{m+}^2]_z [H_{m+}]_\theta) \quad (235)$$

$$= i^m \pi \zeta \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} \left[\frac{iP_m}{Z_{TE}^1} (\zeta^* \psi_m - \psi^* \zeta_m) - \frac{1}{Z_{TM}^1} i\psi_m^* \eta_m \right] \quad (236)$$

$$= i^m \pi \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} \left[P_m \frac{\beta}{k} (\zeta^* \psi_m - \psi^* \zeta_m) - \frac{kn^2}{\beta} i\psi_m^* \eta_m \right] \quad (237)$$

$$I_4^{TM} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (\mathbf{E}^{TM} \times \mathbf{H}_{m+}^-)_z \quad (238)$$

$$= -i^m \pi \zeta \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} ([J_{m+}^2]_r [H_{m+}]_\theta - [J_{m+}^2]_\theta [H_{m+}]_r) \quad (239)$$

$$= i^{m-1} \pi \zeta \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} \left[\frac{1}{Z_{TM}^1} (\eta_m^* \eta_m - \zeta_m^* \zeta_m) - \frac{iP_m}{Z_{TE}^1} (\eta_m^* \zeta_m + \zeta_m^* \eta_m) \right] \quad (240)$$

$$= i^{m-1} \pi \int_0^a r dr \exp^{i(\gamma^* - \beta) \cot \delta \cdot r} \left[\frac{kn^2}{\beta} (\eta_m^* \eta_m - \zeta_m^* \zeta_m) - iP_m \frac{\beta}{k} (\eta_m^* \zeta_m + \zeta_m^* \eta_m) \right] \quad (241)$$

S_1 上の表面積分

図のようにペンシル先端部の長さが L の場合、(113) の積分は

$$\int_L^\infty e^{-i\beta z + i\gamma^* z} dz = \frac{e^{-i(\beta - \gamma^*)L}}{i(\beta - \gamma^*)} \quad (242)$$

に置き換えられるから、(119),(126),(131), (136) の表面積分 $a_{m\pm}^J, a_{m\pm}^M$ にはすべて因子 $e^{-i(\beta - \gamma^*)L}$ が乗じられる。従って TE 波入射、TM 波入射における励起モードの展開係数(191),(196) はそれぞれ次式で置き換えられる:

$$a_{m-}^{TE} = (B_{m-}^J + B_{m-}^M) + e^{-i(\beta - \gamma^*)L} (a_{m-}^J + a_{m-}^M) \quad (243)$$

$$a_{m+}^{TM} = (B_{m+}^J + B_{m+}^M) + e^{-i(\beta - \gamma^*)L} (a_{m+}^J + a_{m+}^M) \quad (244)$$

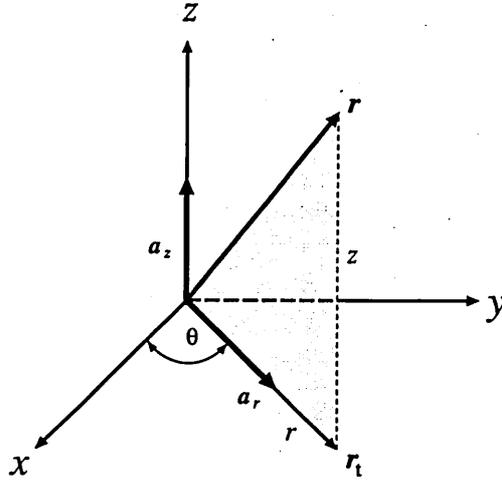


図 7: 円筒座標

付録 A ベクトル円筒関数とベクトル波動関数

本文で用いるために円筒問題に現れるベクトル関数および記号を整理しておく。円筒座標単位ベクトルを a_r, a_θ, a_z で表す。

$$\text{位置ベクトル} \quad \mathbf{r} = (r, z) \equiv (r, \theta, z)_{cyl} = r\mathbf{a}_r + z\mathbf{a}_z \quad (\text{A.1})$$

$$\text{波数ベクトル} \quad \mathbf{k} = (\mathbf{k}_t, \beta) \equiv (\lambda, \varphi, \beta)_{cyl} = \lambda\mathbf{a}_r + \beta\mathbf{a}_z \quad (\text{A.2})$$

$$\lambda \equiv k_t(\beta) \equiv \sqrt{k^2 - \beta^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\text{水平偏波ベクトル} \quad \mathbf{a}_H(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{k}_t}{\lambda} \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_\theta \quad (\text{A.4})$$

$$\text{垂直偏波ベクトル} \quad \mathbf{a}_V(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{a}_H(\mathbf{k}) = \frac{\beta}{k} \frac{\mathbf{k}_t}{\lambda} - \frac{\lambda}{k} \mathbf{a}_z \quad (\text{A.5})$$

A.1 ベクトル円筒関数

ベクトル Bessel 関数

本論文でベクトル Bessel 関数を次の様に定義する:

$$\left. \begin{array}{l} j_m^1(\lambda r) \\ h_m^1(\lambda r) \end{array} \right\} \equiv \zeta_m(\lambda r)\mathbf{a}_r + \eta_m(\lambda r)\mathbf{a}_\theta \quad (\text{A.6})$$

$$\left. \begin{array}{l} j_m^2(\lambda r) \\ h_m^2(\lambda r) \end{array} \right\} \equiv \eta_m(\lambda r)\mathbf{a}_r - \zeta_m(\lambda r)\mathbf{a}_\theta + \psi_m(\lambda r)\mathbf{a}_z \quad (\text{A.7})$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_m(\lambda r) &\equiv \frac{\lambda}{k} \phi_m(\lambda r) \\ \zeta_m(\lambda r) &\equiv \frac{\beta}{k} \frac{m}{\lambda r} \phi_m(\lambda r) = \frac{\beta}{2k} [\phi_{m-1}(\lambda r) + \phi_{m+1}(\lambda r)] \\ \eta_m(\lambda r) &\equiv \frac{i\beta}{k} \dot{\phi}_m(\lambda r) = \frac{i\beta}{2k} [\phi_{m-1}(\lambda r) - \phi_{m+1}(\lambda r)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.8})$$

$$\psi_{-m} = (-1)^m \psi_m, \quad \zeta_{-m} = (-1)^{m+1} \zeta_m, \quad \eta_{-m} = (-1)^m \eta_m \quad (\text{A.9})$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.10})$$

ここで、 $\lambda = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ であり、Bessel 関数 ϕ_m が

$$\phi_m(\lambda r) = \begin{cases} J_m(\lambda r) \\ H_m^{(1)}(\lambda r) \end{cases}, \quad \dot{\phi}_m(\lambda) = \begin{cases} J_m(\lambda r) \\ H_m^{(1)}(\lambda r) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

であるに応じてベクトル Bessel 関数は j_m 、 h_m の記号を用いるものとする。

また、 $\lambda = i\tau$, $\tau = \sqrt{\beta^2 - k^2}$ の場合は

$$k_m^\nu(\tau r) \equiv \frac{\pi i}{2} i^m h_m^\nu(i\tau r), \quad \nu = 1, 2 \quad (\text{A.12})$$

で表す。すなわち

$$\left. \begin{aligned} k_m^1(\tau r) &\equiv \zeta'_m(\tau r) \mathbf{a}_r + \eta'_m(\tau r) \mathbf{a}_\theta \\ k_m^2(\tau r) &\equiv \eta'_m(\tau r) \mathbf{a}_r - \zeta'_m(\tau r) \mathbf{a}_\theta + \psi'_m(\tau r) \mathbf{a}_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.13})$$

$$\left. \begin{aligned} \psi'_m(\tau r) &= \frac{\tau}{k} K_m(\tau r) \\ \zeta'_m(\tau r) &= -\frac{\beta}{k} \frac{m}{\tau r} K_m(\tau r) = \frac{\beta}{2k} [K_{m-1}(\tau r) - K_{m+1}(\tau r)] \\ \eta'_m(\tau r) &= -\frac{i\beta}{k} \dot{K}_m(\tau r) = \frac{i\beta}{2k} [K_{m-1}(\tau r) + K_{m+1}(\tau r)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.14})$$

$$\psi'_{-m} = \psi'_m, \quad \zeta'_{-m} = -\zeta'_m, \quad \eta'_{-m} = \eta'_m \quad (\text{A.15})$$

ここで、 $K_m(z)$ は、第 2 種の変形 Bessel 関数である：

$$K_m(\tau r) \equiv \frac{\pi i}{2} i^m H_m^{(1)}(i\tau r) \quad (\text{A.16})$$

$$m \frac{K_m(z)}{z} = -\frac{1}{2} [K_{m-1}(z) - K_{m+1}(z)] \quad (\text{A.17})$$

$$\dot{K}_m(z) = -\frac{1}{2} [K_{m-1}(z) + K_{m+1}(z)] \quad (\text{A.18})$$

$$K_m(z) = K_{-m}(z) \quad (\text{A.19})$$

ベクトル円筒関数

$\exp(im\theta)$ 表示

ベクトル Bessel 関数に角度因子 $e^{im\theta}$ を負荷したもの

$$\left. \begin{array}{l} j_m^1(\lambda r)e^{im\theta} \\ j_m^2(\lambda r)e^{im\theta} \end{array} \right\}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (\text{A.20})$$

を $e^{im\theta}$ 表示のベクトル円筒関数と名づける。 $h_m^\nu(\lambda r)$, $k_m^\nu(\lambda r)$ の場合も同様である。

$[\cos m\theta, \sin m\theta]$ 表示

これとは別に $\cos m\theta, \sin m\theta$, $m = 0, 1, 2, \dots$ による表示 ($[\pm]$ 表示と呼ぶ) のベクトル円筒関数 $J_{m\pm}^1$, $J_{m\pm}^2$ を次式で定義する:

$$\begin{aligned} J_{m\pm}^1(\lambda r, \theta) &= \frac{1}{2im} [j_m^1(\lambda r)i^m e^{im\theta} \pm j_{-m}^1(\lambda r)i^{-m} e^{-im\theta}] \\ &= \zeta_m(\lambda r) \begin{bmatrix} i \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r + \eta_m(\lambda r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} J_{m\pm}^2(\lambda r, \theta) &= \frac{1}{2im} [j_m^2(\lambda r)i^m e^{im\theta} \pm j_{-m}^2(\lambda r)i^{-m} e^{-im\theta}] \\ &= \eta_m(\lambda r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r - \zeta_m(\lambda r) \begin{bmatrix} i \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta + \psi_m(\lambda r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \\ & \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

特に $m = 0$ の場合は、

$$J_{0+}^1(\lambda r) = \eta_0(\lambda r) \mathbf{a}_\theta, \quad J_{0-}^1(\lambda r) \equiv 0 \quad (\text{A.23})$$

$$J_{0+}^2(\lambda r) = \eta_0(\lambda r) \mathbf{a}_r + \psi_0(\lambda r) \mathbf{a}_z, \quad J_{0-}^2(\lambda r) \equiv 0 \quad (\text{A.24})$$

また同様にして、 $\lambda = ir$ の場合は

$$K_{m\pm}^\nu(\tau r, \theta) = \frac{\pi}{2} H_{m\pm}^\nu(i\tau r, \theta), \quad \nu = 1, 2 \quad (\text{A.25})$$

と書ける。すなわち

$$\begin{aligned} K_{m\pm}^1(\tau r, \theta) &= \frac{1}{2} [k_m^1(\tau r)e^{im\theta} \pm k_{-m}^1(\tau r)e^{-im\theta}] \\ &= \zeta'_m(\tau r) \begin{bmatrix} i \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r + \eta'_m(\tau r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} K_{m\pm}^2(\tau r, \theta) &= \frac{1}{2} [k_m^2(\tau r)e^{im\theta} \pm k_{-m}^2(\tau r)e^{-im\theta}] \\ &= \eta'_m(\tau r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r - \zeta'_m(\tau r) \begin{bmatrix} i \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta + \psi'_m(\tau r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

A.2 ベクトル波動関数

円筒調和関数

ベクトル Helmholtz 方程式を満たすソレノイダルなベクトル円筒波 ψ_m はベクトル円筒関数と因子 $e^{i\beta z}$ の積で与えられる (ここではポテンシャル円筒波は用いないので省略する):

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_m(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \cdot \psi_m(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{solenoidal}) \quad (\text{A.28})$$

$$\nabla \times \nabla \times \psi_m(\mathbf{r}) = k^2 \psi_m(\mathbf{r}) \quad (\text{A.29})$$

$$\psi_m(r, \theta, z) = j_m^\nu(\lambda r)e^{im\theta+i\beta z}, \quad J_{m\pm}^\nu(\lambda r, \theta)e^{i\beta z} \quad (\text{内部}) \quad (\text{A.30})$$

$$= h_m^\nu(\lambda r)e^{im\theta+i\beta z}, \quad H_{m\pm}^\nu(\lambda r, \theta)e^{i\beta z} \quad (\text{外部}) \quad (\text{A.31})$$

$$= k_m^\nu(\mu r)e^{im\theta+i\beta z}, \quad K_{m\pm}^\nu(\lambda r, \theta)e^{i\beta z} \quad (\text{エバネセント}) \quad (\text{A.32})$$

$$\nu = 1, 2,$$

の形に表される。

円筒電磁波

円筒内部問題の円筒電磁波をベクトル Bessel 関数で表す。 $e^{im\theta}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ による表示で示せば

TE 波 (円筒内部)

$$E_m^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = j_m^1(\lambda r)e^{im\theta+i\beta z} \quad (\text{A.33})$$

$$H_m^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{Z_{\text{TE}}} j_m^2(\lambda r)e^{im\theta+i\beta z} \quad (\text{A.34})$$

$$Z_{\text{TE}} \equiv Z_{\text{TE}}(\beta) = \frac{k}{\beta}\zeta, \quad \zeta = \sqrt{\mu/\epsilon} \quad (\text{A.35})$$

TM 波 (円筒内部)

$$E_m^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = j_m^2(\lambda r)e^{im\theta+i\beta z} \quad (\text{A.36})$$

$$H_m^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_{\text{TM}}} j_m^1(\lambda r)e^{im\theta+i\beta z} \quad (\text{A.37})$$

$$Z_{\text{TM}} \equiv Z_{\text{TM}}(\beta) = \frac{\beta}{k}\zeta \quad (\text{A.38})$$

外部の放射場、エバネセント波はそれぞれベクトル Bessel 関数を $j_m^\nu \rightarrow h_m^\nu$, k_m^ν に置き換えればよい。また、 $\cos m\theta, \sin m\theta$ による表示は (A.30)-(A.32) により $J_{m\pm}^{1,2}$ などに置き換えればえられる。

A.3 平面電磁波の円筒波展開

TE 波 (水平偏波, 入射電力 $\zeta/2$)

$im\theta$ 表示および $[\pm]$ 表示の展開を示して置く:

$$\mathbf{E}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = \zeta \mathbf{a}_H(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.39})$$

$$= Z_{\text{TE}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m j_m^1(\lambda r, \beta) e^{im(\theta-\varphi)+i\beta z} \quad (\text{A.40})$$

$$= Z_{\text{TE}} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_{m+}^1(\lambda r, \theta - \varphi) e^{i\beta z} \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{H}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = \zeta \mathbf{a}_V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.42})$$

$$= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m j_m^2(\lambda r, \beta) e^{im(\theta-\varphi)+i\beta z} \quad (\text{A.43})$$

$$= - \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_{m+}^2(\lambda r, \theta - \varphi) e^{i\beta z} \quad (\text{A.44})$$

TM 波 (垂直偏波, 入射電力 $1/2\zeta$)

$$\mathbf{E}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = \zeta \mathbf{a}_V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.45})$$

$$= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m j_m^2(\lambda r) e^{im(\theta-\varphi)+i\beta z} \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{H}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\zeta} \mathbf{a}_H(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.47})$$

$$= -\frac{1}{Z_{\text{TM}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m j_m^1(\lambda r) e^{im(\theta-\varphi)+i\beta z} \quad (\text{A.48})$$

ただしここで $\mathbf{a}_H(\mathbf{k})$, $\mathbf{a}_V(\mathbf{k})$ は (A.4), (A.5) で定義される水平、垂直偏波ベクトルを表わし、 $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_m = 2$ ($m \geq 1$) と置いた。

ベクトル円筒波の平面波展開

$$\frac{k}{\beta} i^m j_m^1(\lambda r) e^{im\theta+i\beta z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_H(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{im\varphi} d\varphi, \quad (\text{TE 波}) \quad (\text{A.49})$$

$$-i^m j_m^2(\lambda r) e^{im\theta+i\beta z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{im\varphi} d\varphi, \quad (\text{TM 波}) \quad (\text{A.50})$$

付録 B 均一コア光ファイバの電磁界モード⁵

均一コア光ファイバの導波モードの電磁界を以下にまとめておく。コアの半径を a とし、内部 (コア) と外部 (クラッド) の屈折率と諸定数を次のように置く。ただし、透磁率は内外部 μ_0 一定とし、 $\zeta \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ とおく:

⁵宮城「光伝送の基礎」[8]、大越他「光ファイバ」[9]、藤沢「マイクロ波回路」[10]

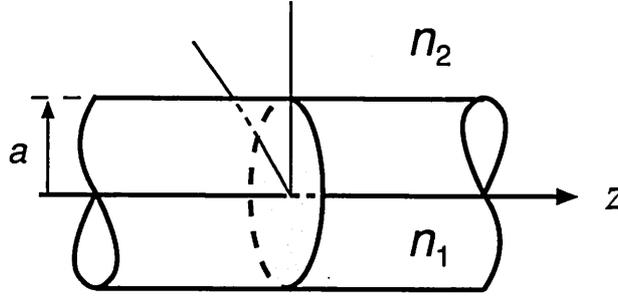


図 8: 均一コアファイバの屈折率 (内 n_1 , 外 n_2)

	屈折率	波数	誘電率	電波インピーダンス	動径波数
内部	n_1	$k_1 = n_1 k$	$\epsilon_1 = n_1^2 \epsilon_0$	$\zeta_1 \equiv \sqrt{\mu_0 / \epsilon_1}$	$\lambda = \sqrt{k_1^2 - \beta^2}$
外部	n_2	$k_2 = n_2 k$	$\epsilon_2 = n_2^2 \epsilon_0$	$\zeta_2 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_2}$	$\kappa = \sqrt{\beta^2 - k_2^2}$

B.1 導波モードの特性方程式⁶

導波モードはよく知られているように、 TE, TM の混成モードであり、その伝搬定数は次の特性方程式の根より定まる (u, w : 根):

$$\left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] \left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left[\frac{1}{u^2} + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{1}{w^2} \right] \quad (\text{B.1})$$

根 $u_{mn}, w_{mn}, n = 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

但しここでパラメタを次のようにおいた。

$$u^2 + w^2 = v^2, \quad (\text{B.2})$$

$$u \equiv \lambda a, \quad w \equiv \kappa a, \quad v^2 \equiv (k_1 a)^2 - (k_2 a)^2 = (n_1^2 - n_2^2)(ka)^2 \quad (\text{B.3})$$

$$\lambda \equiv \sqrt{k_1^2 - \beta^2}, \quad \kappa \equiv \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad (\text{B.4})$$

$$P = |m| \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) / \left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.5})$$

$$P = \begin{cases} 0; \text{TM}_{0n} \text{モード}, & m = 0 \\ \infty; \text{TE}_{0n} \text{モード}, & m = 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$P > 0 \text{ EH}_{mn} \text{モード}, \quad m \geq 1 \quad (\text{B.7})$$

$$P < 0 \text{ HE}_{mn} \text{モード}, \quad m \geq 1 \quad (\text{B.8})$$

⁶宮城 [8]

弱導波近似

$$\Delta \equiv \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1 \quad (\text{B.9})$$

の場合には特性方程式は分解されて簡単になる：

$$\frac{J_{m+1}(u)}{uJ_{m+2}(u)} = \frac{K_{m+1}(w)}{wK_{m+2}(w)}; \text{EH}_{mn} \text{モード} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{J_{m-1}(u)}{uJ_m(u)} = \frac{K_{m-1}(w)}{wK_m(w)}; \text{HE}_{mn} \text{モード} \quad (\text{B.11})$$

$$P = \begin{cases} 1; \text{EH}_{mn} \text{モード} \\ -1; \text{HE}_{mn} \text{モード} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

特に主モード HE₁₁モード (遮断波長なし) の場合が以下で必要である。

B.2 導波モードの電磁界 ($e^{im\theta}$ 表示)

ファイバの導波モードは TE 波 (A.42), (A.43) と (A.46), (A.47) の混成モードとして

コア内部 ($r < a$)

($e^{im\theta}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\mathbf{E}_m(r, \beta) = [j_m^2(\lambda r) - iP_m j_m^1(\lambda r)] e^{im\theta + i\beta z} \quad (\text{B.13})$$

$$= [(\eta_m - iP_m \zeta_m) \mathbf{a}_r - (\zeta_m + iP_m \eta_m) \mathbf{a}_\theta + \psi_m \mathbf{a}_z] e^{im\theta + i\beta z} \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{H}_m(r, \beta) = \left[\frac{1}{Z_{\text{TM}}^1} j_m^1(\lambda r) + iP_m \frac{1}{Z_{\text{TE}}^1} j_m^2(\lambda r) \right] e^{im\theta + i\beta z} \quad (\text{B.15})$$

$$= \left[\left(\frac{k_1}{\beta \zeta_1} \zeta_m + iP_m \frac{\beta}{k \zeta} \eta_m \right) \mathbf{a}_r + \left(\frac{k_1}{\beta \zeta_1} \eta_m + iP_m \frac{\beta}{k \zeta} \zeta_m \right) \mathbf{a}_\theta + iP_m \frac{\beta}{k \zeta} \psi_m \mathbf{a}_z \right] e^{im\theta + i\beta z} \quad (\text{B.16})$$

と書ける。ただしここで

$$\lambda = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \quad (\text{B.17})$$

$$Z_{\text{TM}}^1 \equiv Z_{\text{TM}}^1(\beta) \equiv \frac{\beta}{k_1} \zeta_1, \quad Z_{\text{TE}}^1 \equiv Z_{\text{TE}}^1(\beta) \equiv \frac{k_1}{\beta} \zeta_1 = \frac{k}{\beta} \zeta \quad (\text{B.18})$$

$$P_m \equiv m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) / \left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right], \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{B.19})$$

$$P_m = P \quad (m > 0), \quad P_m = -P \quad (m < 0) \quad (\text{B.20})$$

コア外部 ($r > a$)

($e^{im\theta}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\mathbf{E}_m(r, \beta) = \xi_m [k_m^2(\kappa r) - iP_m k_m^1(\kappa r)] e^{im\theta + i\beta z} \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{H}_m(r, \beta) = \xi_m \left[\frac{1}{Z_{\text{TM}}^2} k_m^1(\kappa r) + iP_m \frac{1}{Z_{\text{TM}}^2} k_m^2(\kappa r) \right] e^{im\theta + i\beta z} \quad (\text{B.22})$$

$$\kappa = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad (\text{B.23})$$

$$Z_{\text{TM}}^2 \equiv Z_{\text{TM}}^2(\beta) \equiv \frac{\beta}{k_2} \zeta_2, \quad Z_{\text{TE}}^2 \equiv Z_{\text{TE}}^2(\beta) \equiv \frac{k_2}{\beta} \zeta_2 = \frac{k}{\beta} \zeta \quad (\text{B.24})$$

$$\xi_m \equiv \frac{\lambda J_m(\lambda a) n_2}{\kappa K_m(\kappa a) n_1} \quad (E_z, H_z \text{の連続条件より}) \quad (\text{B.25})$$

これらの式で $\beta > 0$ としたものは前進波 E_m^+, H_m^+ 、また $\beta \rightarrow -\beta$ とおいたものは後進波 E_m^-, H_m^- を表す。

B.3 導波モードの電磁界 ($\sin m\theta, \cos m\theta$ 表示)

($\sin m\theta, \cos m\theta, m = 0, 1, 2, \dots$) 角度因子 $e^{im\theta}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を通常の教科書の様に $\cos m\theta, \sin m\theta, m = 0, 1, 2, \dots$ で表す。ここでは因子 $e^{i\beta z}$ を省略する。

ベクトル表示

コア内部 ($r < a$)

$$\mathbf{E}_{m\pm}(r, \theta; \beta) \equiv \mathbf{J}_{m\pm}^2(\lambda r, \theta) - iP \mathbf{J}_{m\pm}^1(\lambda r, \theta) \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{H}_{m\pm}(r, \theta; \beta) \equiv \frac{1}{A_{\text{TM}}^1} \mathbf{J}_{m\pm}^1(\lambda r, \theta) + iP \frac{1}{Z_{\text{TE}}^1} \mathbf{J}_{m\pm}^2(\lambda r, \theta) \quad (\text{B.27})$$

コア外部 ($r > a$)

$$\mathbf{E}_{m\pm}(r, \theta; \beta) \equiv \xi_m \left[\mathbf{K}_{m[\pm]}^2(\lambda r, \theta) - iP \mathbf{K}_{m[\pm]}^1(\lambda r, \theta) \right] \quad (\text{B.28})$$

$$\mathbf{H}_{m\pm}(r, \theta; \beta) \equiv \xi_m \left[\frac{1}{A_{\text{TM}}^2} \mathbf{K}_{m\pm}^1(\lambda r, \theta) + iP \frac{1}{Z_{\text{TE}}^2} \mathbf{K}_{m\pm}^2(\lambda r, \theta) \right] \quad (\text{B.29})$$

成分表示

下添 $[\pm]$ は $[\]$ 内の上下の角度因子に対応する。($\psi_{-m} = (-1)^m \psi_m, \zeta_{-m} = (-1)^{m+1} \zeta_m, \eta_{-m} = (-1)^m \eta_m$ の関係に注意)

コア内部 ($r < a$)

$$\begin{aligned} E_{m[\pm]}(r, \theta; \beta) &\equiv [\mathbf{J}_{m\pm}^2(r, \theta; \beta) - iP_m \mathbf{J}_{m\pm}^1(r, \theta; \beta)] \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} \left\{ [j_m^2(\lambda r) - iP j_m^1(\lambda r)] e^{im\theta} \right. \\ &\quad \left. \pm (-1)^m [j_{-m}^2(\lambda r) + iP j_{-m}^1(\lambda r)] e^{-im\theta} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned}
&= -i[\eta_m(\lambda r) - iP\zeta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \\
&\quad - [\zeta_m(\lambda r) + iP\eta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta - i\psi_m(\lambda r, \beta) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \quad (\text{B.31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta}{2k_1} [(1-P)J_{m-1}(\lambda r) - (1+P)J_{m+1}(\lambda r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \\
&\quad - \frac{\beta}{2k_1} [(1-P)J_{m-1}(\lambda r) + (1+P)J_{m+1}(\lambda r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta \\
&\quad - i\frac{\lambda}{k_1} J_m(\lambda r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \quad (\text{B.32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{m[\pm]}(r, \theta; \beta) &\equiv \left[\frac{1}{Z_{TM}^1} J_{m\pm}^1(r, \theta; \beta) + iP_m \frac{1}{Z_{TE}^1} J_{m\pm}^2(r, \theta; \beta) \right] \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} \left\{ \left[\frac{1}{Z_{TM}^1} j_m^1(\lambda r) + iP \frac{1}{Z_{TE}^1} j_m^2(\lambda r) \right] e^{im\theta} \right. \\
&\quad \left. \pm (-1)^m \left[\frac{1}{Z_{TM}^1} j_{-m}^1(\lambda r) - iP \frac{1}{Z_{TE}^1} j_{-m}^2(\lambda r) \right] e^{-im\theta} \right\} \quad (\text{B.33})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{Z_{TM}^1} \left\{ [j_m^1(\lambda r) e^{im\theta} \pm (-1)^m j_{-m}^1(\lambda r) e^{-im\theta}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{iP}{Z_{TE}^1} [j_m^2(\lambda r) e^{im\theta} \mp (-1)^m j_{-m}^2(\lambda r) e^{-im\theta}] \right\} \quad (\text{B.34})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{Z_{TM}^1} \zeta_m(\lambda r) + iP \frac{1}{Z_{TE}^1} \eta_m(\lambda r) \right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \\
&\quad - i \left[\frac{1}{Z_{TM}^1} \eta_m(\lambda r) - iP \frac{1}{Z_{TE}^1} \zeta_m(\lambda r) \right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta \\
&\quad quad + iP \frac{1}{Z_{TE}^1} \psi_m(\lambda r) \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \quad (\text{B.35}) \\
&\quad \left(Z_{TM}^1 \equiv \frac{\beta}{k_1} \zeta_1, \quad Z_{TE}^1 \equiv \frac{k_1}{\beta} \zeta_1 = \frac{k}{\beta} \zeta \right)
\end{aligned}$$

これらの表式では横成分 ($\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta$ の係数) が実数、縦成分 (\mathbf{a}_z の係数) が純虚数となるように定義している。そのために係数 $\begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix}$ が付されている。⁷ 特に弱導波性近似 ($P = \pm 1$) の場合 $E_m(r, \beta)$ の表式は簡単になる。

外部 ($r > a$)

$$\begin{aligned}
E_{m[\pm]}(r, \theta; \beta) &= \frac{\xi_m}{2} \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} \left\{ [k_m^2(\kappa r) - iP k_m^1(\kappa r)] e^{im\theta} \right. \\
&\quad \left. \pm (-1)^m [k_m^2(\kappa r) - iP k_m^1(\kappa r)] e^{-im\theta} \right\}
\end{aligned}$$

⁷宮城 [8]($e^{i\omega t}$) p.76-77 に一致する。

$$\pm[k_{-m}^2(\kappa r) + iP k_{-m}^1(\kappa r)]e^{i-m\theta} \quad (\text{B.36})$$

$$= \xi_m \left\{ -i(\eta'_m(\kappa r) - iP\zeta'_m(\kappa r)) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r - (\zeta'_m(\kappa r) + iP\eta'_m(\kappa r)) \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta \right. \\ \left. -i\psi'_m(\kappa r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \right\} \quad (\text{B.37})$$

$$= \xi_m \left\{ \frac{\beta}{2k_2} [(1-P)K_{m-1}(\kappa r) + (1+P)K_{m+1}(\kappa r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \right. \\ \left. - \frac{\beta}{2k_2} [(1-P)K_{m-1}(\kappa r) - (1+P)K_{m+1}(\kappa r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta \right. \\ \left. -i\frac{\kappa}{k_2} K_m(\kappa r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \right\} \quad (\text{B.38})$$

$$H_{m[\pm]}(r, \theta; \beta)$$

$$= \frac{\xi_m}{2} \begin{bmatrix} -i \\ -1 \end{bmatrix} \left\{ \left[\frac{1}{Z_{\text{TM}}^2} k_m^1(\kappa r) + iP \frac{1}{Z_{\text{TE}}^2} k_m^2(\kappa r) \right] e^{im\theta} \right. \\ \left. \pm \left[\frac{1}{Z_{\text{TM}}^2} k_{-m}^1(\kappa r) - iP \frac{1}{Z_{\text{TE}}^2} k_{-m}^2(\kappa r) \right] e^{-im\theta} \right\} \quad (\text{B.39})$$

$$= \xi_m \left\{ \left(\frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z_{\text{TM}}^2} + iP \frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z_{\text{TE}}^2} \right) \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \right. \\ \left. -i \left(\frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z_{\text{TM}}^2} - iP \frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z_{\text{TE}}^2} \right) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta + iP \frac{\psi'_m(\kappa r)}{Z_{\text{TE}}^2} \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \right\} \quad (\text{B.40})$$

$$= \xi_m \left\{ \frac{\beta}{2k_2} \left[\left(\frac{1}{Z_{\text{TM}}^2} - P \frac{1}{Z_{\text{TE}}^2} \right) K_{m-1}(\kappa r) - \left(\frac{1}{Z_{\text{TM}}^2} + P \frac{1}{Z_{\text{TE}}^2} \right) K_{m+1}(\kappa r) \right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_r \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2k_2} \left[\left(\frac{1}{Z_{\text{TM}}^2} - P \frac{1}{Z_{\text{TE}}^2} \right) K_{m-1}(\kappa r) + \left(\frac{1}{Z_{\text{TM}}^2} + P \frac{1}{Z_{\text{TE}}^2} \right) K_{m+1}(\kappa r) \right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_\theta \right. \\ \left. + iP \frac{\kappa}{k_2} \frac{1}{Z_{\text{TE}}^2} K_m(\kappa r) \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_z \right\} \quad (\text{B.41})$$

$$\left(Z_{\text{TM}}^2 \equiv \frac{\beta}{k_2} \zeta_2 = \frac{\beta}{k} \zeta, \quad Z_{\text{TE}}^2 \equiv \frac{k_2}{\beta} \zeta_2 = \frac{k}{\beta} \zeta \right) \quad (k_2 = k, n_2 = 1)$$

以上の導波モードはコア内、外部も含めて前進波(+)、後進波(-)の電磁界は次の関係式をみたすことが確かめられる。ここで e, h は横成分、 e_z, h_z は縦成分を表わす。

$$\mathbf{E}_m^+ \equiv E_{m[\pm]}(r, \theta; \beta) = e_m + e_{mz} \quad (\text{B.42})$$

$$\mathbf{E}_m^- \equiv E_{m[\pm]}(r, \theta; -\beta) = -e_m + e_{mz} \quad (\text{B.43})$$

$$\mathbf{H}_m^+ \equiv H_{m[\pm]}(r, \theta; \beta) = h_m + h_{mz} \quad (\text{B.44})$$

$$\mathbf{H}_m^- \equiv H_{m[\pm]}(r, \theta; -\beta) = h_m - h_{mz} \quad (\text{B.45})$$

付録 C 入射 Evanescent 波の円筒波展開

C.1 Evanescent スカラー波の展開

スカラー平面波の展開

(実波数ベクトル k)

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i\mu r \cos(\theta-\varphi) + i\gamma z} \quad (\text{C.1})$$

$$= \sum_n i^n J_n(\mu r) e^{in(\theta-\varphi)} e^{i\gamma z}, \quad \begin{cases} \mathbf{k} = (\mu, \varphi, \gamma)_{cyl} \\ \mathbf{r} = (r, \theta, z)_{cyl} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

$$k^2 \equiv \mu^2 + \gamma^2 = k^2 \quad (\text{C.3})$$

$$\mu = \sqrt{k^2 - \gamma^2} \equiv k \cos \psi, \quad \gamma = k \sin \psi \quad (\text{C.4})$$

ここで ψ は円筒軸 (z -軸) への入射角に対応する。

Evanescent 平面波

複素波数ベクトル k^* をもつ evanescent 平面波を

$$k^* \equiv k_r + ik_i, \quad e^{i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}} e^{-k_i\cdot\mathbf{r}} \quad \begin{cases} \mathbf{k}_r : \text{位相伝搬方向} \\ \mathbf{k}_i : \text{振幅減衰方向} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

で表わせば、

$$k^{*2} \equiv k_r^2 - k_i^2 + 2i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_i) = k^2 \quad (\text{C.6})$$

$$k_r^2 - k_i^2 = k^2, \quad (\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_i) = 0 \rightarrow \mathbf{k}_r \perp \mathbf{k}_i \quad (\text{C.7})$$

従って (C.7) により位相伝搬方向と振幅減衰方向は直交する。

複素入射角

簡単のため k_r, k_i は共に入射面内 (同じ方位角 φ) とする (図 9 参照。一般にはそうとは限らない)。実入射角 ψ の代わりに複素入射角 $\psi^* \equiv \psi + i\chi$ を導入する (*は複素数を示す)。その時 (C.4) の μ, γ は次のように置き換えられる:

$$k_t \rightarrow k_t^* \equiv k \cos(\psi + i\chi) = k \cosh \chi \cos \psi - ik \sinh \chi \sin \psi \quad (\text{C.8})$$

$$\equiv k_r \cos \psi - ik_i \sin \psi \equiv \mu + i\nu \quad (\text{C.9})$$

$$\gamma \rightarrow \gamma^* \equiv k \sin(\psi + i\chi) = k \cosh \chi \sin \psi + ik \sinh \chi \cos \psi \quad (\text{C.10})$$

$$\equiv k_r \sin \psi + ik_i \cos \psi \equiv \gamma + i\alpha \quad (\text{C.11})$$

$$k_r \equiv k \cosh \chi, \quad k_i \equiv k \sinh \chi \quad (\text{C.12})$$

従って

$$\mathbf{k}_r = k_r \cos \psi \mathbf{a}_r + k_r \sin \psi \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{k}_i = -k_i \sin \psi \mathbf{a}_r + k_i \cos \psi \mathbf{a}_z$$

と書けるから (C.7) を満たす。evanescent 平面波は

$$e^{i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{r}} = e^{i\mu^* r \cos(\theta-\varphi) + i\gamma^* z} = e^{(i\mu-\nu)r \cos(\theta-\varphi) + (i\gamma-\alpha)z} \quad (\text{C.13})$$

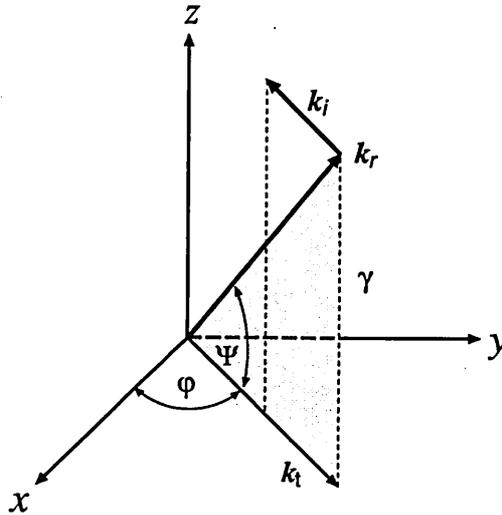


図 9: 複素入射角

Evanescent スカラ平面波の展開

(複素波数ベクトル k^*) 外部屈折率 $n_2 = 1$ 、 $k_2 = n_2 k = k$ 、複素波数ベクトル k^* とする。

$$e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} = e^{i\mu^* r \cos(\theta - \varphi) + i\gamma^* z} \quad (C.14)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\mu^* r) e^{im(\theta - \varphi) + (i\gamma - \alpha)z} \quad (C.15)$$

$$\mu^{*2} + \gamma^{*2} = k^2$$

C.2 Evanescent 平面電磁波波の円筒波展開

振幅減衰方向 (虚波数) ベクトル k_i が $\mathbf{a}_V(k_r)$ 方向とする:

$$k_i = -k_i \mathbf{a}_V(k_r), \quad k \equiv k_r + ik_i \quad (C.16)$$

スカラ波の場合と同じく TE、TM 円筒波の公式で

$$\gamma \rightarrow \gamma^* = \gamma + i\alpha \quad (C.17)$$

$$\lambda \rightarrow \mu^* = \mu + i\nu \quad (C.18)$$

とおけばよい。

ベクトル平面波

2種の偏波のベクトル平面波の展開式は

$$\mathbf{a}_V(k_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m j_m^2(\mu^* r) e^{im(\theta - \varphi) + i\gamma^* z} \quad (C.19)$$

$$= - \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_{m+}^2(\mu^* r, \theta - \varphi) e^{i\gamma^* z} \quad (\text{C.20})$$

$$a_H(\mathbf{k}_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} = \frac{k}{\gamma^*} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m^1(\mu^* r) e^{im(\theta - \varphi) + i\gamma^* z} \quad (\text{C.21})$$

$$= \frac{k}{\gamma^*} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_{m+}^1(\mu^* r, \theta - \varphi) e^{i\gamma^* z} \quad (\text{C.22})$$

これらの展開式を以下の evanescent TE, TM 平面波の表式に用いれば TE, TM 波の展開式が得られる: ((A.39)-(A.48) 参照)

TE 平面波

$$E_{\text{TE}}^0(\mathbf{r}) = \zeta a_H(\mathbf{k}_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{C.23})$$

$$H_{\text{TE}}^0(\mathbf{r}) = a_V(\mathbf{k}_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{C.24})$$

TM 平面波

$$E_{\text{TM}}^0(\mathbf{r}) = \zeta a_V(\mathbf{k}_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{C.25})$$

$$H_{\text{TM}}^0(\mathbf{r}) = -a_H(\mathbf{k}_r) e^{i\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{C.26})$$

参考文献

- [1] H. Röhler, G. Binning; *Rev. Mod. Phys.*, **59** (1987) p.615.
- [2] 高橋、渡部、古賀、北野、小倉: エバネセント波を用いた走査型顕微鏡, 輻射科学研究会資料 RS91-4 (1991).
- [3] 古賀、北野、高橋、小倉: エバネセント波を用いた走査型顕微鏡, 1990 年秋物理学会予稿集, 2a-M-3, p.374 (1990).
- [4] 梅田、小倉、高橋、北野: エバネセント波の屈折・反射・透過則と楔形光表面波プローブへの応用, 輻射科学研究会資料 RS91-15 (1991).
- [5] 梅田、小倉、高橋、北野: エバネセント波の屈折則と楔形光表面波プローブの利得, 電気学会電磁界理論研究会資料 EMT-92-42 (1992).
- [6] Felsen and Marcuvitz: *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice-Hall, (1973). (時間因子 $e^{-i\omega t}$)
- [7] Collin: *Field Theory of Guided Waves*, Second Edition, IEEE Press, (1991). (時間因子 $e^{i\omega t}$)
- [8] 宮城光信: 光伝送の基礎, 昭晃堂 (1991).
- [9] 大越, 岡本, 保立: 光ファイバ, オーム社, 昭和 58.
- [10] 藤沢和男: マイクロ波回路, コロナ社, 昭和 47 (改版).

輻射科学研究会資料

RS 92-12

導体厚みのある2, 3の
平面回路線路における
漏洩特性の解析

中井 孝至, 辻 幹男, 繁沢 宏

(同志社大学 工学部)

1992年10月9日(金)

1. はじめに

平面回路に用いられる線路の解析にはスペクトル領域法 [1]，改良されたスペクトル領域法 [2]，モード整合法 [3] など，様々な方法が用いられている。そして，従来のもものでは主として線路を構成する導体の厚みは無視されていた。しかしながら最近では，回路の小型化，動作周波数の高周波化により，導体厚みを考慮せざるを得ない状態になってきており，このことが実用回路の精度良い設計に際して極めて重要な問題となってきている。

ストリップ導体の厚みを考慮した解析法としては，例えば導体厚みに関わる部分の電磁界を表現するために，導体側壁を設け，その側壁とストリップ導体との間の電磁界をモード展開するもの [4] [5]，厚みのあるストリップ導体中を空気層で近似し，その上面と下面に厚みの無いストリップ電流を仮定してスペクトル領域法を適用するもの [6]，ストリップ導体側壁も含めた導体上の電流を未知量として積分方程式を解くもの [7] などがある。しかしながら，導体厚みを考慮して解析を行う場合には，厚みが零の場合とは異なって，ストリップ導体部分に存在する異なった性質の複数のエッジでの電磁界の特異性を如何に解析に取り込むかが計算の効率，ひいては解の精度を大きく左右する。事実，導体端近傍で特異となる電磁界を考慮していない [5]，[7] の方法では解の十分な収束を得るには相当量の計算が必要となっており，また，ストリップ導体をも空気層で置き換える [6] の方法では精度の良い解を得ることは到底期待できない。

筆者らはすでにストリップ導体でのエッジ条件をモード整合法に取り入れ，改良モード整合法として発表してきた [8] [9]。そして，この方法の更なる拡張として，ストリップ導体に厚みのある場合にも効率的で，かつ精度の良い解が得られる方法を述べてきた [10]。本論文ではまずこの方法について概説した後，これを用いて導体厚みのある平面回路線路の特性，特に高周波帯で動作する

際に観測される漏洩現象について検討を行っていく。

この漏洩現象は1988年に筆者らによって初めて見いだされたものである[11]。それ以後、多くの理論的、実験的検討を加えて、これが超高周波、超高速パルス回路における特性劣化の大きな原因となることを指摘してきた[12] - [14]。例えば分散性の弱い一様な伝送線路を伝搬する超高速パルスに特異な波形歪が現れる[14]などは最も典型的な例である。

本論文では、マイクロストリップ線路とコプレーナストリップ線路について、ストリップ導体が有限の厚みを持つ場合について、その伝送特性と漏洩現象について検討を行っていく。

2. 改良モード整合法

改良モード整合法について、ここでは図1のマイクロストリップ線路を例にとって説明を行う。本法は導体カバープレートのみを必要とし、線路横方向の導体側壁についてはその有無に関わらず同様に解析できる。

ここではまずエッジ効果を考慮した改良モード整合法について概説し、次に有限の導体厚みを有する場合への拡張について述べる。さらに導体カバープレートを除去した開放形の線路を解析する場合における工夫についても述べることにする。これらの詳細は文献[15]にまとめてある。

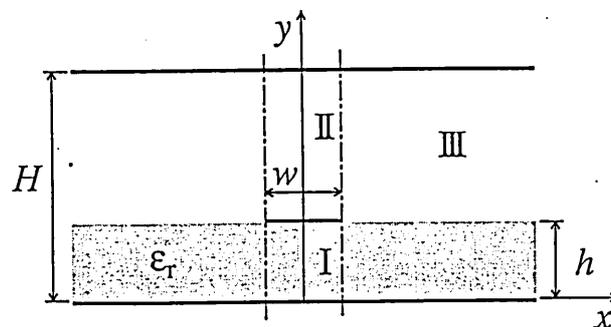


図1 マイクロストリップ線路

2. 1 エッジ効果を考慮した改良モード整合法

本方法の特徴は、導体エッジに対して垂直な平面内 ($x = \pm w/2$ の yz 平面) において、エッジ近傍で特異となる電磁界を開口関数として定義し、これを通常モード整合法に導入した点にある。図1の線路 (ただし導体厚み $t = 0$) を解析する場合の手順は以下の通りである。

- ① 線路断面を3領域 (図1参照) に分割し、各領域の電磁界成分を TM_y , TE_y 波 (y 方向にみて TM , TE 波であることを意味する) のモード関数で展開する。
- ② $x = w/2$ の yz 平面で上述した特徴を有する電磁界の y 成分の開口関数 E_{ya} , H_{ya} を定義する。
- ③ この開口関数を介して $x = w/2$ の yz 面における電磁界の y 成分の連続性を考える。
- ④ さらに $x = w/2$ の yz 平面での電磁界の z 成分に対する連続性については通常モード整合法の手法を適用することにより、開口関数 E_{ya} , H_{ya} に含まれる未知振幅係数に関する同次連立一次方程式を得、その係数行列の行列式が零となる条件により線路の位相定数 β を求める。

2. 2 有限の導体厚みを持つ線路への適用

ストリップ導体の厚みを考慮する場合にも上で述べた手順に本質的な変わりはない。しかし導体厚みが零 ($t = 0$) の場合とは異なり $x = w/2$ の yz 平面において $y = h$ には誘電体基板上に置かれた導体エッジ (コーナー角 90°)、また $y = h + t$ には空気中に置かれた導体エッジ (コーナー角 90°) が存在し、そこで界は特異となる [16] [17]。これらの異なる2つの導体エッジ条件を満足し、しかも $y = 0$, H の導体板、ストリップ導体側壁による短絡条件も満足する開口関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
E_{ya} = & \sum_{q=1}^{\infty} A_{1q} \frac{\cos\{(q-1)\pi y/h\}}{\{1-(y/h)^2\}^{1-\sigma}} & (0 < y < h) \\
& 0 & (h < y < h+t) \\
& \sum_{q=1}^{\infty} A_{2q} \frac{\cos\{(q-1)\pi(y-H)/(H-h-t)\}}{[1-\{(y-H)/(H-h-t)\}^2]^{1-\nu}} & (h+t < y < H)
\end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
H_{ya} = & \sum_{q=1}^{\infty} B_{1q} \frac{\sin\{(q-1/2)\pi y/h\}}{\{1-(y/h)^2\}^{1-\nu}} & (0 < y < h) \\
& \sum_{q=1}^{\infty} B_{3q} \frac{\cos\{(q-1)\pi(y-h-t)/t\}}{\{1-y/(h+t)\}^{1-\nu}\{y/h-1\}^{1-\nu}} & (h < y < h+t) \\
& \sum_{q=1}^{\infty} B_{2q} \frac{\sin\{(q-1/2)\pi(y-H)/(H-h-t)\}}{[1-\{(y-H)/(H-h-t)\}^2]^{1-\nu}} & (h+t < y < H)
\end{aligned} \quad (2)$$

ここで A_{jq} , B_{kq} ($j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$) は未知振幅係数, また ν , σ は導体エッジでの界の特異性を表すパラメータであり, エッジ条件 [16] [17] より $\nu = 2/3$, σ は

$$\tan(\sigma\pi) = -\varepsilon_r \tan(\sigma\pi/2) \quad (3)$$

を満足する最小の値 ($1/2 \leq \sigma \leq 2/3$) となる.

これらの開口関数を用いて前節で述べた手順にしたがって解析を行う. まず $x = w/2$ の yz 平面における y 成分の連続条件を考える. 一例として次式で与えられる領域 III の磁界の y 成分 H_{yIII} と (2) 式で与えられる開口関数との連続性を考える.

$$\begin{aligned}
H_{yI} = -\sum_{n=1}^N I_{nI} \frac{x}{|x|} \exp\{-jk_{xnI}(x-w/2)\} & \sin(\kappa_n y) & (0 < y < h) \\
& -\frac{\sin(\kappa_n h)}{\sin\{\rho_n(H-h)\}} \sin\{\rho_n(y-H)\} & (h < y < H)
\end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $I_{nII}(x)$ はモード電流振幅、 κ_n 、 ρ_n は領域Ⅲに相当する導波路の誘電体層（基板）および空気層における n 次TEモードの y 方向の波数であり、 k_{xnII} は x 方向の波数である。

(2)式が $x = w/2$ において(4)式と等しいとおき、(4)式中の y に関する関数の直交性を利用する。その際にあらわれる積分については、積分公式[18]

$$\int_0^u \frac{\cos(ax)}{(u^2-x^2)^{1/2-\nu}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2u}{a}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(au)$$

$$(a > 0, u > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2)$$

$$\int_0^u \frac{\sin(ax)}{x^{1-\mu}(u-x)^{1-\mu}} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{u}{a}\right)^{\mu-1/2} \sin\left(\frac{au}{2}\right) \Gamma(\mu) J_{\mu-1/2}\left(\frac{au}{2}\right) \quad (5)$$

$$(\operatorname{Re} \mu > 0)$$

$$\int_0^u \frac{\cos(ax)}{x^{1-\mu}(u-x)^{1-\mu}} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{u}{a}\right)^{\mu-1/2} \cos\left(\frac{au}{2}\right) \Gamma(\mu) J_{\mu-1/2}\left(\frac{au}{2}\right)$$

$$(\operatorname{Re} \mu > 0)$$

ただし、 Γ ：ガンマ関数、 J_ν ：第一種 ν 次ベッセル関数を用いれば、モード電流振幅 I_{nII} が未知振幅係数 B_{kq} により解析的に次のように表される。

$$\begin{aligned} I_{nII} = & \frac{h\sqrt{\pi}}{4P_{nII}} \sum_{q=1}^a B_{1q} F\left(\nu, \left(q - \frac{1}{2}\right)\pi, \kappa_n h\right) \\ & - \frac{(H-h-t)\sqrt{\pi}}{4P_{nII}} \frac{\sin(\kappa_n h)}{\sin\{\rho_n(H-h)\}} \sum_{q=1}^a B_{2q} F\left(\nu, \left(q - \frac{1}{2}\right)\pi, \rho_n(H-h-t)\right) \\ & + \frac{\{(h+t)h\}^{1-\nu} t^{2\nu-1} \sqrt{\pi}}{2P_{nII}} \frac{\sin(\kappa_n h)}{\sin\{\rho_n(H-h)\}} \\ & \quad \times \sum_{q=1}^a B_{3q} G\left(\nu, (q-1)\pi, \rho_n t, \rho_n(H-h-t)\right) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで

$$F(\nu, u, v) = 2^{\nu-1/2} \Gamma(\nu) \left\{ \frac{J_{\nu-1/2}(u+v)}{(u+v)^{\nu-1/2}} - \frac{J_{\nu-1/2}(u-v)}{(u-v)^{\nu-1/2}} \right\}$$

$$G(\nu, u, v, w) = \Gamma(\nu) \frac{\sin\{(u+v)/2+w\}}{(u+v)^{\nu-1/2}} J_{\nu-1/2}((u+v)/2) - \Gamma(\nu) \frac{\sin\{(u+v)/2-w\}}{(u-v)^{\nu-1/2}} J_{\nu-1/2}((u-v)/2)$$

P_{nI} : 領域Ⅲに相当する導波路の n 次 TE モードの規格化係数 [9]

同様の手順で他の領域Ⅰ, Ⅱにおけるモード電圧, 電流振幅が求まることは自明であり, その誘導は省略する。

以上により得られたモード電圧, 電流振幅を各領域の電磁界の z 成分に代入して $x = w/2$ の $y-z$ 平面における z 成分の連続条件を適用すれば, 未知振幅係数 A_{1q}, B_{kr} に関する同次連立一次方程式が得られる。簡単のために各領域で考慮するモード関数の数をすべて N , 開口関数の展開項数もすべて Q とすると次式のようなになる。

$$\sum_{q=1}^Q A_{1q} \left\{ \sum_{n=1}^N K_{1nq}(\beta) \right\} + \sum_{q=1}^Q A_{2q} \left\{ \sum_{n=1}^N K_{2nq}(\beta) \right\} + \sum_{q=1}^Q B_{1q} \left\{ \sum_{n=1}^N K_{3nq}(\beta) \right\} + \sum_{q=1}^Q B_{2q} \left\{ \sum_{n=1}^N K_{4nq}(\beta) \right\} + \sum_{q=1}^Q B_{3q} \left\{ \sum_{n=1}^N K_{5nq}(\beta) \right\} = 0 \quad (7)$$

$$s = 1, \dots, Q, \quad r = 1, \dots, 5$$

ここで, 各 r に対応する K の値はそれぞれ z 成分の各部分における連続条件, すなわち $E_{zI} = E_{zII}$ ($0 < y < h$), $E_{zI} = E_{zIII}$ ($h + t < y < H$), $E_{zII} = 0$ ($h < y < h + t$), $H_{zI} = H_{zII}$ ($0 < y < h$), $H_{zI} = H_{zIII}$ ($h + t < y < H$) から導かれることを意味する。従って, (7) 式の係数行列の行列式の値が零となる条件により線路の位相定数 β が求まる。ここで注目すべきは (7) 式によって与えられる行列の次数は, 開口関数の展開項数 Q のみに依存し, 各領域のモード数 N には無関係であることから relative convergence による問題を起こさないことである。また (5) 式の関係により行列の各要素

は数値積分を含まない形で得られ、数値解析が極めて効率的に実行できることである。一方、マイクロストリップ線路の導体側壁の有無は等価回路で考えるとx方向にみた各モードの伝送線路がある距離で短絡されているか、あるいは無限にのびているかの違いであり、各場合に依じたモード電圧とモード電流との関係式を用いれば、各々の構造に対する解析が容易に行える利点もある。さらに本法ではストリップ幅wの変化に対しても等価回路的にみればx=0で開放端を持つ伝送線路の長さw/2が変わるだけであり、位相定数βのストリップ導体幅wに対する依存性の計算は極めて短時間でできる特徴も有している。

2. 3 開放形線路への適用

本法は図1に示すような導体カバープレートをもつ平面回路を解析することを念頭において考えてきたものである。しかし、より一般的にはカバープレートのない開放形の線路の特性を知る必要も多い。そのような線路に対しては、導体カバープレートをストリップ導体面から十分に遠く離れた線路の解析結果によって近似することが通常である。ところが、ここで述べたモード整合法をそのような方法で用いるとすると開口関数が緩やかに変化することになり、非常に計算効率が悪くなる。そこでストリップ導体周辺に集中している電磁界分布を表現するために、 $h+t < y < H$ の開口関数に以下で与えられる重み関数を乗じることを考える。重み関数 $W(y)$ としてはこれを開口関数 E_{ya} 、 H_{ya} に乗じてモード電圧、電流振幅を求める際の積分が依然として解析的に解けるものであること、また $y=H$ の導体カバープレートの短絡条件を満たすものであることが必要であり、これらを考慮して次のものを採用する。

$$W(y) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{y-2H+h+t}{\eta h}} + e^{-\frac{y-h-t}{\eta h}} \right) = e^{-\frac{H-h-t}{\eta h}} \cosh \left(\frac{y-H}{\eta h} \right) \quad (8)$$

ここで η はカバープレートの位置によって選ぶパラメータである。この重み関数(8)を開口関数(1),(2)に乗じて y 成分の連続条件を適用したときにあらわれる積分は積分公式(5)を適用して解析的に解くことができるので数値積分を含まないという本法の利点の1つが失われることはない。

3. マイクロストリップ線路の解析

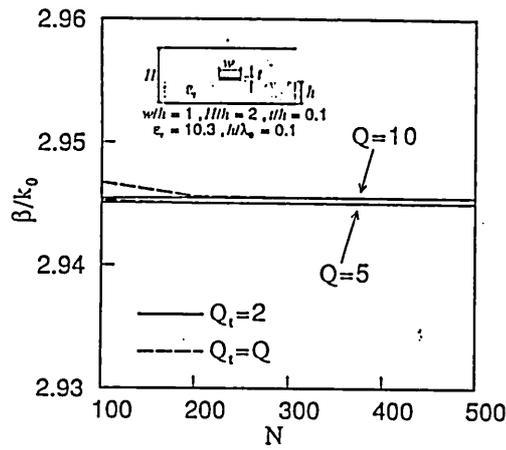
ここではまず、2節で述べた方法による計算効率、解の収束性などをマイクロストリップ線路についてについて検討を行った後に、その分散特性、漏洩特性について解析、検討を行っていく。

3. 1 厚みを考慮した場合の解の収束性

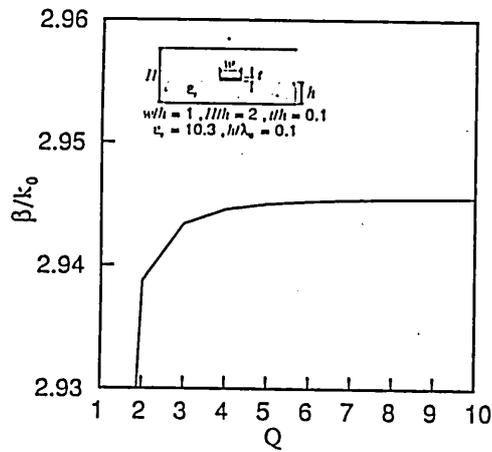
図1のマイクロストリップ線路において $t/h = 0.1$, $\epsilon_r = 10.3$ (等方性)の場合について、解の収束性を検討する。導体エッジでの特異性を表すパラメータ σ , ν は(3)式から求められ、次式に示す値となる。

$$\sigma = 0.528, \quad \nu = 0.667 \quad (9)$$

まず、開口関数の展開項数 Q を固定($Q = 5, 10$)したときの各領域で考慮するモード数 N に対する解の収束状況を図2(a)に示す。ここでは、 $h < y < h + t$ における磁界の開口関数 H_{y_a} に注目し、その展開項数を Q_t として、これが他の開口関数の展開項数に等しい $Q_t = Q$ とした場合と展開項数を減らして $Q_t = 2$ とした場合に対する収束状況を示してある。これは、一般にストリップ導体は空気層ならびに誘電体基板の厚さに比べて非常に薄いので、 $h < y < h + t$ での磁界(y 成分)は $y = h, h + t$ で特異となる以外は単純な界分布をしていると考えられ、その開口関数 H_{y_a} の展開項数は数個で十分であると予測できるからである。図2(a)の結果



(a) モード関数の項数 N に対する変動



(b) 開口関数の項数 Q に対する変動

図2 展開項数に対する解の変動

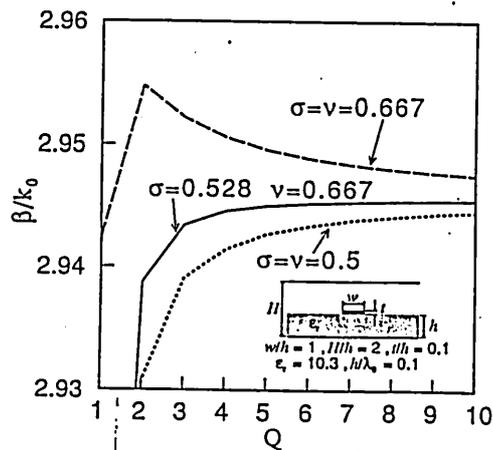


図3 エッジ特異性を表す σ , ν に対する変動

より、 $Q_t = 2$ と $Q_t = Q$ における収束値は等しく、 $Q_t = 2$ で十分に $h < y < h + t$ における界を表せていることがわかる。また、 $Q_t = 2$ の場合の方が $Q_t = Q$ の場合よりも速く収束している。これは $h < y < h + t$ ($x = w / 2$)の磁界の開口関数の展開項数を多くとると、非常に狭い範囲で変化の激しい高次の関数を領域Ⅲのモード関数で表現することが必要となり、満足な収束を得るにはモード関数の項数 N を非常に多く必要とするためである。

次に、上の結果より各領域で考慮するモード数 N を十分な収束が得られる $N = 500$ 、また $Q_t = 2$ として、開口関数の展開項数 Q に対する収束状況を示したのが図2 (b)である。図より $Q \geq 5$ で十分収束している。なお、 t / h を変化させた場合でもこのような収束の状況はほぼ同じであることを確かめている。

さて、本法においては導体エッジでの特異性を表すパラメータ σ 、 ν は(9)式の値を用いてストリップ導体上面($y = h + t$)と下面($y = h$)で異なる値を用いているが、導体厚みが存在する場合でも厚みが零($t = 0$)に対する特異性 $\sigma = \nu = 0.5$ を用いた例[4][6]もあり、ここで用いた σ 、 ν の値の有効性を確認しておく必要がある。そこで、 σ 、 ν を本法で用いた値、厚みが零の場合の $\sigma = \nu = 0.5$ 、さらに空気中に置かれた導体エッジ(コーナー角 90°)のみを考慮した $\sigma = \nu = 0.667$ とした場合について、それぞれの収束状況を調べたのが図3である。 σ 、 ν として本法による(9)式の値を取った場合の収束が最も速いことがわかる。これより、ストリップ導体上面の空気中での導体エッジ(コーナー角 90°)と下面での空気・誘電体境界面での導体エッジ(コーナー角 90°)をそれぞれ正確に考慮することが収束性の点で有利であることが明かとなった。

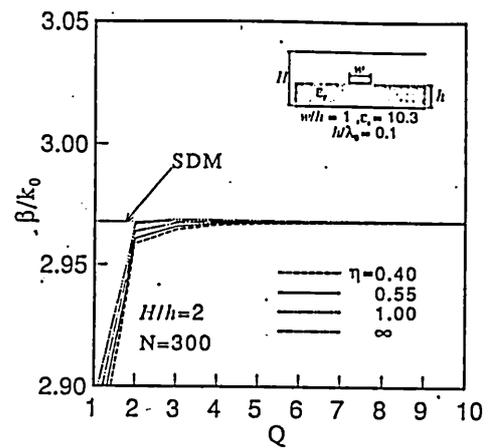
3. 2 重み関数 $W(y)$ の効果

ここではカバープレートの位置が遠く離れても正確な解が別の解法により容易に計算できる導体厚み $t = 0$ の場合について検討する。

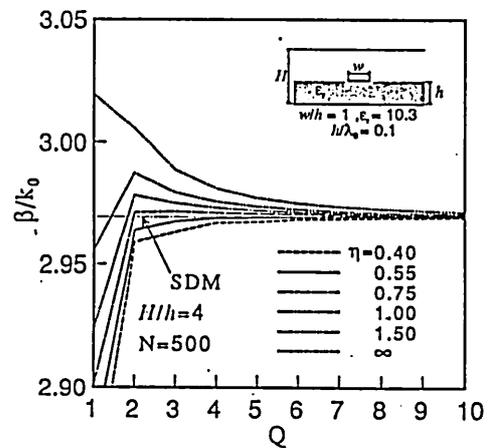
ここでは $H/h = 2, 4, 8$ の3つの場合について解の収束性を調べた。図4にその結果を示す。ここで $\eta = \infty$ の場合は $W(y)$ が定数となり、重み関数を導入しない従来の方法に相当する。また、図中の一点鎖線はスペクトル領域法 [1] (SDM) による計算結果を示している。同図より H/h の値が大きくなるにつれて $\eta = \infty$ の場合の収束は悪くなるが、 $\eta = 0.55$ として重み関数を導入すれば、良好な収束が得られることがわかる。これよりカバープレートを離れた線路を解析する場合、重み関数を導入することにより、取り扱う行列の次数を格段に小さくすることができ、開放形の線路の近似解の導出に対しても本法が有効となることがわかる。なお、ストリップ導体に厚みがある場合にも同様の重み関数が使用できることは先の2.3節の議論から明らかである。

3.3 マイクロストリップ線路の分散特性

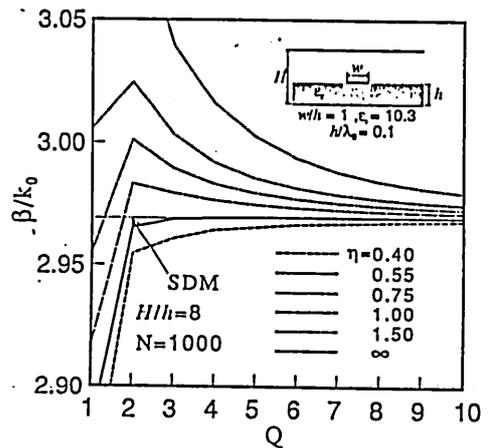
以上の検討をもとにして、遮閉形マイクロストリップ線路の分散特性を求めたのが図5である。図では本法による計算結果(実線)および文献[4]の方法による結果(破線)を示している。本法による結果は $\sigma = 0.525$, $\nu = 0.667$, $N = 100$, $Q = 5$, Q_c



(a) $H/h = 2$



(b) $H/h = 4$



(c) $H/h = 8$

図4 重み関数に対する解の変動

$= 2$, $\eta = 0.5$ として求めた。また文献 [7] による開放形マイクロストリップ線路の分散特性の計算結果と本法による結果を比較したのが図6である。実線は本法による計算結果，破線は文献 [7] の方法による結果である。本法による結果は $\sigma = 0.530$, $\nu = 0.667$, $N = 100$, $Q = 5$, $Q_t = 3$, $\eta = 1.5$ として求めた。これらの結果はよく一致しており，本法の有用性が確かめられた。

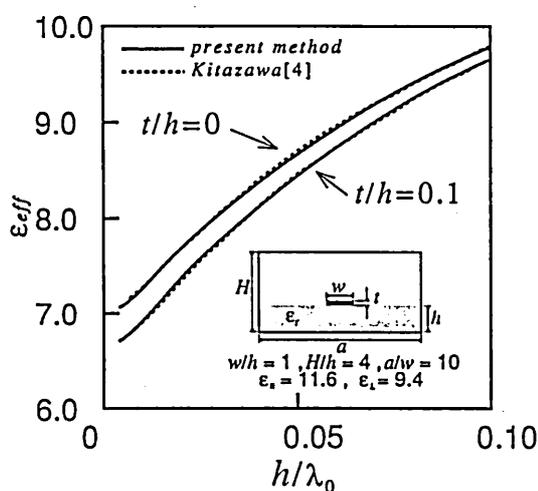


図5 遮閉形マイクロストリップ線路の分散特性

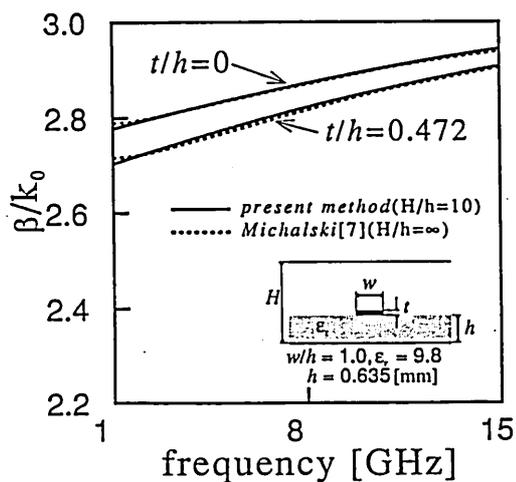


図6 開放形マイクロストリップ線路の分散特性

3.4 マイクロストリップ線路の漏洩特性

3.4.1 定性的検討 [19] [20]

マイクロストリップ線路に用いられる誘電体基板に異方性のものがある。この場合，[19]で指摘したように適当な条件のもとで高周波域において漏洩現象が生じる。この漏洩現象は等方性基板からなるコプレーナ線路[21]，スロット線路[11]においても生じ，以下の議論はすべてこれらにも当てはめられるが，ここではこれまでの議論の進め方からマイクロストリップ形の線路について検討を加えることにする。

さて，図1は異方性基板を持つマイクロストリップ線路を示している。ただし，基板の結晶主軸はy方向と一致しているものとする。このとき，y方向に電界成分を持たないTE_y波及び磁界成分を持たないTM_y波の波数関係を求めると，異方性基板の場合には次式で与えられる。

$$(k_z/k_0)^2 = \epsilon_1 - (k_y/k_0)^2 \quad \text{TE}_y \text{波} \quad (10)$$

$$(k_z/k_0)^2 = \epsilon_1 - (\epsilon_1/\epsilon_2)(k_y/k_0)^2 \quad \text{TM}_y \text{波} \quad (11)$$

ここで，各波の高周波域，すなわち $k_0 \rightarrow \infty$ における k_z の漸近値を考えると，TE_y波では $k_z/k_0 \rightarrow \sqrt{\epsilon_1}$ ，またTM_y波では $k_z/k_0 \rightarrow \sqrt{\epsilon_1}$ にそれぞれ近づくことがわかる。いま，図1のマイクロストリップ線路の基本モードの漏洩現象を考えると，漏洩に関係する表面波モードは，厚さhの導体基板付きスラブ導波路上を全周波数にわたって伝搬するTM₀モードと，ある遮断周波数以上で伝搬可能となるTE₁モードの2つである。ところで，マイクロストリップ線路の基本モードとTM₀表面波の偏波方向は主としてy方向であり，TE₁表面波のそれは主としてxz平面にそっているから，各モードの位相定数は(10)，(11)式に従って変化し，高周波域においては前者では $\sqrt{\epsilon_1}$ に，後者では $\sqrt{\epsilon_1}$ へと互いに異

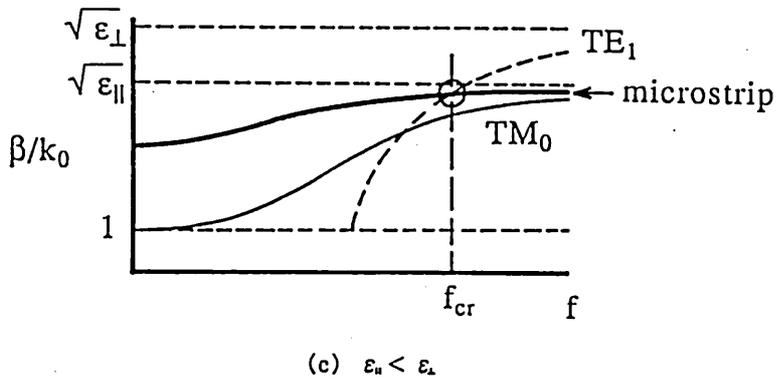
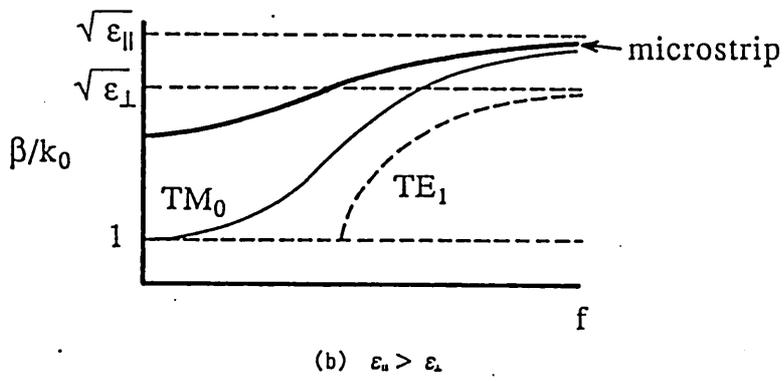
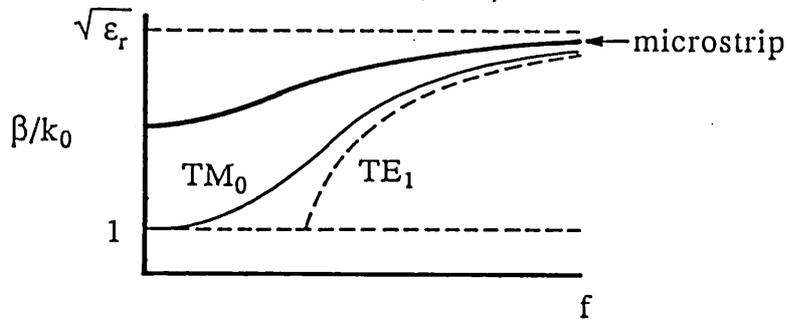


図7 マイクロストリップ線路と表面波の分散曲線

なった値に漸近していくことになる。このことを念頭において、図7(a), (b), (c)に等方性の場合 ($\epsilon_1 = \epsilon_1$), $\epsilon_1 > \epsilon_1$ となる異方性の場合および $\epsilon_1 < \epsilon_1$ となる異方性の場合について、マイクロストリップ線路の基本モード, TM_0 表面波, TE_1 表面波の三者の分散特性の大ざっぱな関係を示した。同図(a)の等方性の場合にはマイクロストリップ線路の基本モードと両表面波の分散曲線は互いに交差することなく、漏洩現象は如何なる周波数においても生じないことが分かる。次に(b)は $\epsilon_1 > \epsilon_1$ なる異方性基板を持つ場合であり、図から明らかのように、この場合にも漏洩は発生しないことが分かる。最後に(c)は $\epsilon_1 < \epsilon_1$ なる異方性基板を持つ場合である。このとき、マイクロストリップ線路の基本モードの位相定数は $\sqrt{\epsilon_1}$ に、また TE_1 表面波モードの伝搬定数は $\sqrt{\epsilon_1}$ に漸近することから、両者は必ずある周波数 f_{cr} で交差し、それよりも高周波側では、マイクロストリップ線路の基本モードは基板に沿った横方向にある角度で伝搬する表面波の形によるエネルギー放射を伴う漏洩モードになる。

3. 4. 2 漏洩現象の解析

ここでいう漏洩現象とは、基本モードがある固有の複素数を持つ漏洩モードになって、そのエネルギーの流れに線路横方向の成分が生じることを意味する。このことは、漏洩現象が本法では横(x)方向の等価伝送線路の複素波数による共振問題として取り扱うことができることを意味しており、漏洩の生じない場合と全く同様にして効率的な計算を行うことができることになる。

さて、漏洩現象が生じる場合には線路の基本モードは複素波となり、そのz方向波数は位相定数 β と減衰定数 α を持つ複素数 ($k_z = \beta - j\alpha$ ($\alpha, \beta > 0$)) となる。このとき、横方向の波数、すなわち横方向の等価伝送線路の伝搬定数 k_x も次式の関係により当然複素数となる。

$$k_x^2 = k_0^2 - k_z^2 \quad (12)$$

ここで k_0 は導体基板付きスラブ導波路（外部誘電体基板部分）における TM_y, TE_y 表面波の波数であり、実数である。ここで、 α と β がともに正であることより k_x の実部と虚部は同符号となる。これらの符号（正・負）の選択に若干の注意を払えば、漏洩現象がある、なしに関わらず、(7) 式の連立方程式の各係数が複素数の和となると考えれば良く、本質的に先に述べたと同様の解法が適用できることになる。

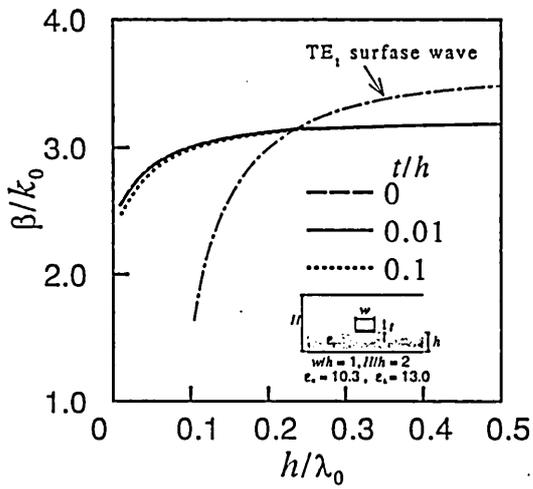
ところで、スペクトル領域法を用いてこの漏洩現象を解析しようとする、漏洩現象に関わる表面波の根が被積分関数の極となることから、複素平面上でその極を取り囲んで数値積分を行う必要があり [2] [22]、解析が複雑となが、本法では波数 k_x の符号の問題だけで漏洩現象の有無に関わらず同一の解析法が適用できる。このことは超高周波帯にまでおよぶ線路の特性解析にとっては一つの大きな利点である。

3. 4. 3 漏洩現象の解析結果

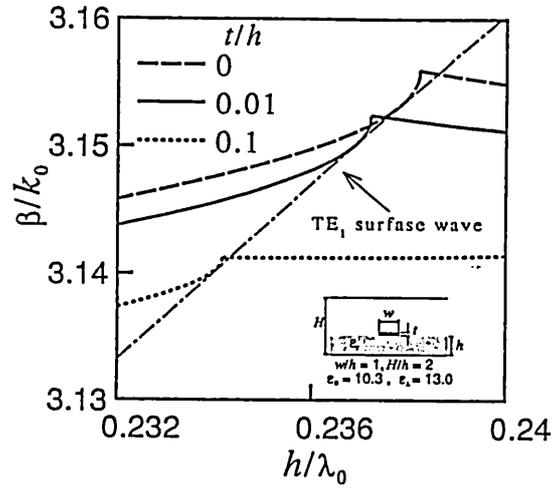
異方性基板を有するマイクロストリップ線路についてその漏洩特性を計算した。ここでは導体カバープレートは基板厚みの2倍の高さにおいて解析を行ったが、漏洩現象の生じる周波数帯においては、この導体版の影響はないことについても既に確かめている [9]。

漏洩特性の計算結果を図12に示す。線路の異方性基板としては $\text{Epsilam10} (\epsilon_1=10.3, \epsilon_2=13.0)$ とし、導体厚みは $t/h = 0.01, 0.1$ の2通りの場合について計算を行った。

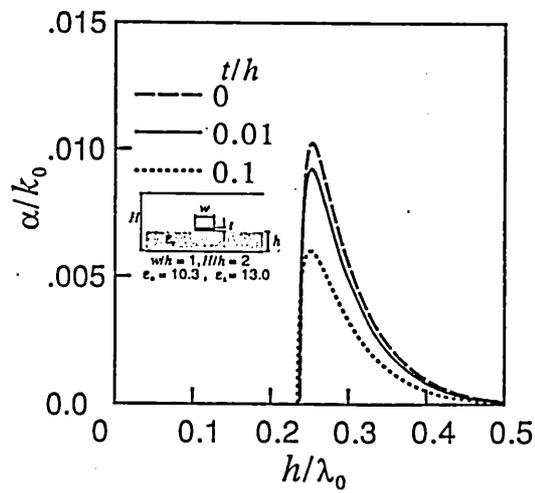
この解析結果について、まず図8(a)(b)に示す位相定数 β の特性を見てみると、厚みを考慮したことにより、 β が小さくなり、そのためにその分散曲線が、表面波の分散曲線と交差する周波数が低い方に移動した以外には導体厚みが零の場合と同様の特性を示し



(a) 位相定数



(b) 位相定数 (拡大図)



(c) 減衰定数

図8 マイクロストリップ線路の分散特性

ていることが分かる。図8(c)に示した減衰定数 α の特性についてもその特性曲線が低周波側に移動していることが分かる。これらのことは大まかにいって、厚みを考慮したことにより、ストリップ導体の端部静電容量が増し、実効的にストリップ導体の幅が広がったと考えれば説明がつく。マイクロストリップ線路ではストリップ幅が増すとその減衰定数 α の最大値は小さくなることは先に確かめている[23]。

4. コプレーナストリップ線路の漏洩現象

図9にコプレーナストリップ線路を示す。解析はマイクロストリップ線路の時と同様に改良モード整合法を用いる。その場合、考慮するエッジの形状はマイクロストリップ線路の場合と同じであり、横(x)方向の伝送線路の取り扱いが若干変わるだけで、先に示したマイクロストリップ線路と同様の手順で解析できる。収束性その他についてはマイクロストリップ線路の場合と同様であるので省略する。

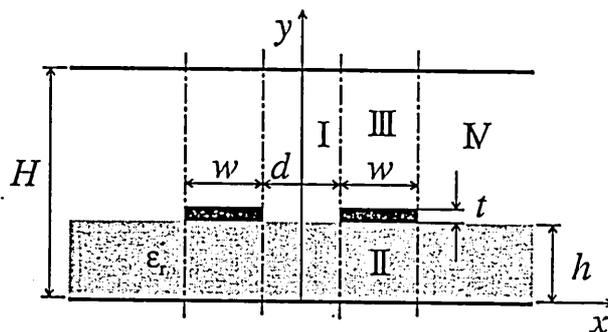


図9 コプレーナストリップ線路

4. 1 定性的検討

図9に示すコプレーナストリップ線路では漏洩現象は以下で述べるように等方性基板においても生じる[24]. この線路の漏洩現象には導体基板付きスラブ導波路上の基本表面波である TM_0 モードが漏洩に関与し, その波数 k_0 は周波数や誘電率によって大きく変化する. しかし, 一般的に高周波になると $k_z < k_0$ となる周波数が存在し, 漏洩現象を生じる可能性を持つことになる. この漏洩現象が生じるか否かは線路の構造による. つまり, 図4に示すコプレーナストリップ線路において, $d \rightarrow 0$ と $d \rightarrow \infty$ という極限の構造を考える. コプレーナストリップ線路の基本モード動作で $d \rightarrow 0$ とすると導体幅が $2w$ のマイクロストリップ線路の第一次高次モード動作となり, 一方 $d \rightarrow \infty$ では線路を構成する2枚のストリップ導体が独立にあるとみてよく, 導体幅が w のマイクロストリップ線路の基

本モード動作になると考えてよい. そのためコプレーナストリップ線路の基本モードの分散特性は図10のように上述の2種のマイクロストリップ線路の各モードの分散特性の間であって, これは導体幅 w に依存する. このとき $d \rightarrow 0$ としたときの分散特性は図10(a), (b)の2つの場合が考えられる. つまり同図(a)においては $d \rightarrow 0$ の曲線が, TM_0 表面波モードのそれより上にあるから, $\beta > k_0$ が成立し漏洩が生じることはない. 一方, 同図(b)ではその逆となり, ある周波数以上で $\beta < k_0$ の漏洩条件が成立することになる.

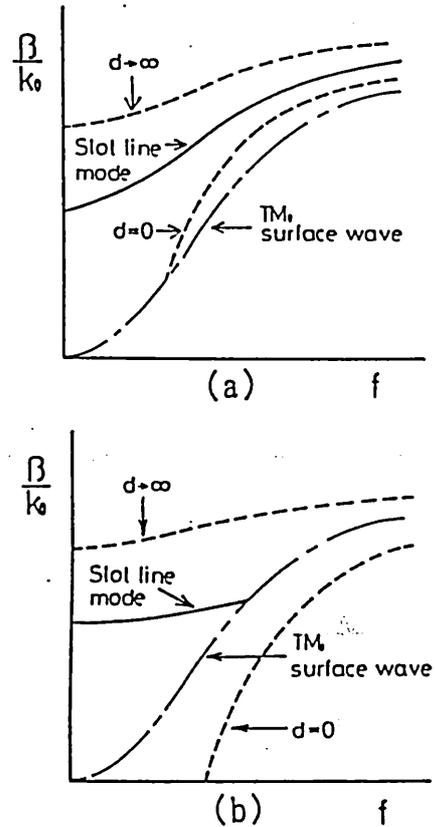


図10 コプレーナストリップ線路の分散曲線の概略

4. 2 漏洩特性の解析

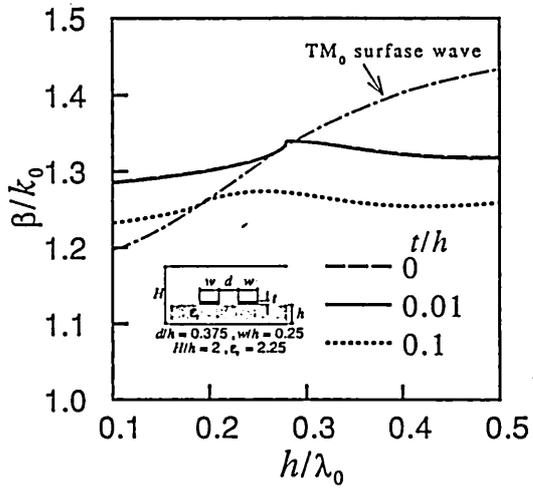
マイクロストリップ線路の場合と同様に導体カバープレートは基板厚みの2倍の高さにおいて解析を行った。

漏洩特性の計算結果を図11に示す。基板としては $\epsilon_r = 2.25$ のポリエチレンを仮定し、導体厚みは前述と同様、2通りの場合について計算を行った。

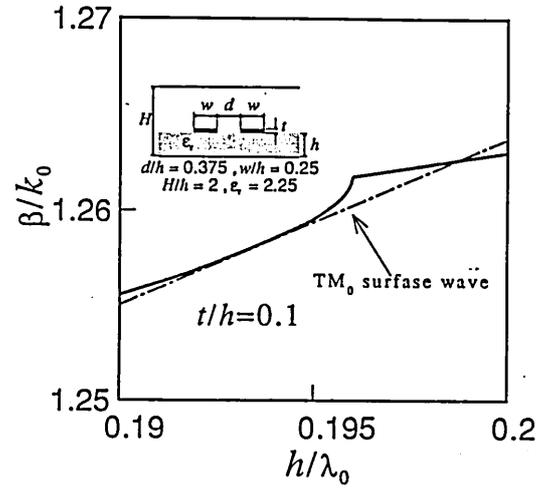
この解析結果について、図11(a)(b)に示す位相定数 β の特性を見てみると、厚みを考慮したことにより、 β が小さくなり、そのためにその分散曲線が、表面波の分散曲線と交差する周波数が低い方に移動した以外には導体厚みが零の場合と同様の特性を示していることが分かる。図11(c)に示した減衰定数 α の特性についてもその特性曲線が低周波側に移動していることが分かる。これらの結果についてはマイクロストリップ線路の場合と同様の説明がつく。コプレーナストリップ線路では2枚のストリップ幅が増してその間の隙間が小さくなると減衰定数 α が大きくなることは上の検討から容易に想像できる。

5. むすび

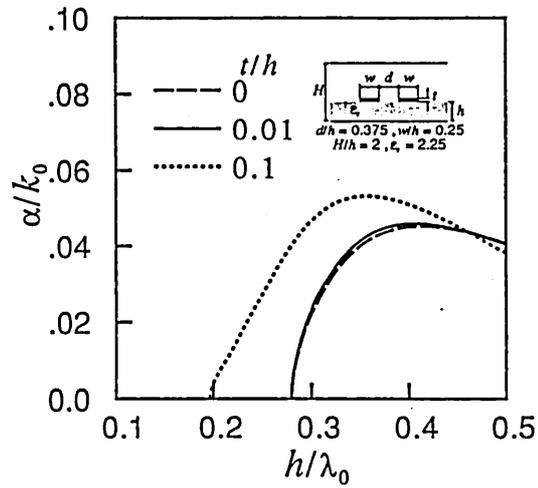
ストリップ導体の厚みを考慮したマイクロストリップ線路の一解析法を提案し、その漏洩特性について解析を行った。本法は筆者らが先に提案したエッジ効果を考慮した改良モード整合法をさらに発展させたものであり、ストリップ導体端近傍で特異となる複雑な電磁界を開口関数の形で正確に考慮している。本法で提案した開口関数を用いれば解析過程で数値積分を一切含まず、非常に効率的に計算が行える。この点において本法は計算時間を要する数値積分を必要とするスペクトル領域法よりも優れている。また、双曲線関数を重み関数として導入すれば、開放形の線路に対する近似解が上述した有効性を失うことなく本法により求められることも数値計算により明らかにした。さらに、漏洩現象の存在する線路の解析においても、上述の有効性を失うことなく、漏洩現象の生じない場合と同様



(a) 位相定数



(b) 位相定数 (拡大図)



(c) 減衰定数

図 1 1 コプレーナストリップ線路の分散特性

に解析できることを示した。具体例に対する計算結果を他の文献の結果と比較する事により本法の有用性を確かめ、マイクロストリップ線路、コプレーナストリップ線路の2種の線路についてその漏洩特性の解析を行い、その特性は位相定数が小さくなるが、ストリップ幅が実効的な増加したと考えれば厚みが零の場合とほぼ同様であることを示した。このことは、物理的に考えても当然予測できることであるが、非漏洩波から漏洩波に移行する狭い周波数領域（スペクトラルギャップ）における波数の振る舞いはそれがわずかな変化であっても超高速パルス回路での伝送特性への影響は無視できない。そのためにはSD (steepest descent) 面上での根の振る舞いを検討すべきである。これについては、ストリップ導体に厚みがある場合の漏洩特性についての実験的検討、さらにはストリップ導体に損失がある場合の検討とあわせて別の機会に報告する予定である。

謝辞 本研究の一部は、同志社大学学術奨励研究費にて行った。

参考文献

- [1] Itoh T. and Mittra R.: "Spectral-domain approach for calculating the dispersion characteristics of microstrip lines", IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., Vol. MTT-21, No. 7, pp496-499 (1973).
- [2] Shigesawa H., Tsuji M. and Oliner A. A.: "Dominant mode power leakage from printed-circuit waveguides", Radio Science, 26, (1991).
- [3] Mittra R. and Lee S. W.: "Analytical Techniques in Theory of Guided Waves", New York: Macmillan, (1971).
- [4] Kitazawa T.: "Metallization thickness effect of striplines with anisotropic media: quasi-static and hybrid-mode analysis", IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., Vol. MTT

-37, No. 4, pp769-775(1989).

- [5] Zhu L. and Yamashita E.:"Accurate analysis of various planar transmission lines with finite metallization thickness using eigen-function weighted boundary integral equation method", IEICE Trans. Electron., Vol. E75-C, No. 2 (1992).
- [6] Kollipara T.R. and Tripathi K.V.:"Dispersion characteristics of moderately thick microstrip lines by the spectral domain method", Microwave and Guided wave Lett., Vol. 2, pp.100-102(1992).
- [7] Michalski A.K. and Zheng D.:"Rigorous analysis of open microstrip lines of arbitrary cross section in bound and leaky regimes", IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., Vol. MTT-37, No. 12, pp. 2005-2010(1989).
- [8] Tsuji M. and Shigesawa H.:"Printed-circuit analysis by a new mode-matching based on the edge-effect theory", Proc. of the 1990 European Microwave Conf., Paper A8.5(1990).
- [9] Tsuji M. and Shigesawa H.:"Edge-effect theory in mode-matching method for analysis of printed-circuit waveguides", IEICE Trans., Vol. E74, No. 8(1991).
- [10] 中井, 辻, 繁沢:" 導体厚みを考慮したマイクロストリップ線路の解析", 信学会秋季大会 C-94, (1992).
- [11] Shigesawa H., Tsuji M. and Oliner A.A.:"Conductor-backed slot line and coplanar waveguide:Dangers and full-wave analyses", Digest of 1988 IEEE/MTT-S International Microwave Symposium, vol. 1(1988).
- [12] Tsuji M., Shigesawa H. and Oliner A.A.:"Printed-circuit waveguides with anisotropic substrates : a new leakage effect", IEEE/MTT-S Intern'l Microwave Symp. Digest, pp. 783-786(1989).

- [13] Tsuji M., Shigesawa H. and Oliner A. A.: "Transition region behavior of a new leakage effect on microstrip lines with anisotropic substrates", IEEE/AP-S/URSI International Symp. Digest, Session-70, (1990).
- [14] Tsuji M., Taniguchi M. and Shigesawa H.: "The feature of the narrow-pulse transmission on conventional coplanar waveguides when power leakage is present", IEEE Trans. Microwave Theory Tech. (to be published).
- [15] 中井, 辻, 繁沢: " 導体厚みのあるマイクロストリップ線路の改良モード整合法による解析", 電気学会電磁界理論研資, EMT-92-77, (1992).
- [16] Meixner J.: "The behavior of electromagnetic fields at edges", IEEE Trans. Antennas & Propag., Vol. AP-20, No. 4, pp. 442-446 (1972).
- [17] Bradel V. J.: "Field singularities at metal-dielectric wedge", IEEE Trans. Antennas & Propag., Vol. AP-33, No. 4, pp. 450-455 (1985).
- [18] Gradshteyn S. I. and Ryzhik M. I., Table of Integrals, Series, and Products, pp. 427, ACADEMIC PRESS (1965).
- [19] 原, 辻, 繁沢: " 異方性誘電体基板を持つ平面回路 (マイクロストリップおよびスロット線路) における基本モードの漏洩現象", 電気学会電磁界理論研資, EMT-89-58 (1989).
- [20] Tsuji M., Shigesawa H. and Oliner A. A.: "Dominant mode leakage from printed-circuit waveguides with anisotropic substrates", Radio Science Meeting, Digest, p. 164, (1989).
- [21] Shigesawa H., Tsuji M. and Oliner A. A.: "Power leakage from the dominant mode on coplanar waveguides with finite or infinite width", the 1990 URSI Radio Science Meeting, Dallas (1990).

[22]Nghiem D. Williams T.J. and Jackson R. D.:"Proper and improper modal solutions for inhomogeneous stripline", 1991 IEEE/MTT-S Intern.Symp.Digest,Boston,MA,pp.567-570, (1991).

[23]原："マイクロストリップ線路の基本伝送モードにおける漏洩現象"，同志社大学修士論文（1990）。

[24]清水，辻，繁沢："ミリ波平面回路（スロットおよびコプレーナ線路）における電力漏洩現象と分散特性"，電気学会電磁界理論研資，EMT-89-57，（1989）。

RS 92 - 14

**NEW METHODS OF OPTICAL-MICROWAVE
COMBINED INTERFACES**

Tibor Bercei
Technical University of Budapest, Hungary
Presently guest professor at Osaka University
Faculty of Engineering Science
Osaka, Japan

October 9, 1992

KYOTO UNIVERSITY, JAPAN

NEW METHODS OF OPTICAL-MICROWAVE COMBINED INTERFACES

Tibor Berceci*
Technical University of Budapest, Hungary

SUMMARY

In this summary some new methods for optical-microwave combined interfaces are presented illustrated by a few application examples.

Microwave modulation of semiconductor lasers

The goal is to obtain a wide transmission band with a high linearity. To design a matching circuit in accordance with this goal, an accurate equivalent circuit for the microwave input impedance of a semiconductor laser has been derived. The microwave input impedance has been measured in a wide frequency band at several laser bias currents. A typical result obtained at 300 MHz is plotted in Fig. 1. Based on the measured data, a six element equivalent circuit has been derived which is presented in Fig. 2. The two parasitic elements are constant, while the other elements are level dependent. E.g. Fig. 3 shows the level dependence of R_1 and C_1 .

The nonlinear input impedance of the laser contributes significantly to the nonlinearity of the modulation characteristics if the usual passive matching technique is applied. Therefore, a new active matching technique has been developed resulting in a better linearity. The linearity has been checked by the two-tone mixing effect. A 350 MHz signal with 0 dBm served as a constant, high level modulating signal, and the level of a 140 MHz modulating signal was varied. The result is presented in Fig. 4. The mixing product at 210 MHz is extremely small indicating a very low nonlinearity.

The illuminated FET

The effect of illumination can be considered as a modification of the existing FET models. The light affects every element of the FET equivalent circuit and these effects are different in each cases. Here the drain-source current will be investigated under illumination. In Fig. 5 the drain-source current I_d is plotted as a function of the gate-source voltage V_g with and without light. The two curves are very similar and therefore both of them can be described by the same relationship if the curve with light is shifted to the right in order to coincide with the original curve without light. The voltage difference needed for that shift is called the light induced voltage V_{li} representing the photovoltaic effect. The dependence of the light induced voltage V_{li} on the incident light intensity L is plotted in Fig. 6 which shows a logarithmic behavior.

Optical tuning of microwave oscillators

For optical tuning of microwave oscillators the illumination of the FET device can be utilized efficiently. The investigation of a microwave FET oscillator with an inductive feedback has shown that the variation of the gate-source capacitance under illumination has the most pronounced effect on the oscillation frequency. To get a maximum tuning

* Presently guest professor at Osaka University, Faculty of Engineering Science
by the support of the Japan Society for the Promotion of Science

range the photovoltaic capacitance variation has to be utilized which can be maximized by applying a high external gate-source resistance. The capacitance has the highest effect if it forms part of a series resonant circuit. The measured results of a 1 GHz GaAs FET oscillator are presented here. In Fig. 7 the oscillation frequency is shown as a function of the illuminating light power P_{opt} with 780 nm wavelength, and the parameter of the curves is the drain voltage V_d . The tuning range is remarkable.

Lightwave-microwave phase detection

The block diagram of a new lightwave-microwave phase detector is presented in Fig. 8. Both the lightwave and the microwave signals have to be splitted into two equal parts. However, there is no need for a phase shift in the optical range what is a big advantage. In one of the branches, a microwave amplifier is used with unity gain and 180° phase shift. The FETs have the advantage of being sensitive to optical illumination. Thus FETs are used as combined devices detecting both microwaves and lightwaves.

Optical stabilization of microwave phase locked oscillators

The optical control of microwave phase locked oscillators is well applicable for improving the frequency stability as shown in Fig. 9. The intensity of the lightwave is modulated by the reference microwave signal. The devices in the phase detector are illuminated by the modulated light thus delivering the reference signal for phase detection. The phase locked loop (PLL) serves for stabilizing the oscillation frequency. The low-pass filter in the loop has a low cut-off frequency preventing the oscillator from the higher frequency noise components of the relative intensity noise (RIN) originating in the fiber optic link, mainly in the laser. In this arrangement the phase of the carrier can also be optically controlled by illuminating the comparator circuit.

Optical beam forming of phased array antennas

The optical beam forming of phased array antennas is a very promising technique. In this case one of the most important tasks is the carrier distribution for the T/R modules. The base of the new carrier distribution method is the combined lightwave-microwave phase detector what is used in the phase locked loop of the microwave oscillator generating the carrier frequency. The complete block diagram of an optically controlled MMIC T/R module is depicted in Fig. 10.

Improvements in optical TV transmission systems

In the presently used optical television (TV) transmission systems the signals of the individual TV channels are up-converted into the 0,4 - 0,9 GHz frequency band. In this arrangement the crucial problem is the linearity of the laser. With increasing number of the channels to be transmitted, the linearity requirements are enhanced. However, they can be less stringent when a more appropriate modulation method is used. The QPSK (quadrature phase shift keying) modulation offers a good transmission for digitalized TV signals because it is not sensitive to the nonlinearities.

In our experiments, the optical transmission of a pseudo-random QPSK signal with a bit rate of 34 Mbit/s was investigated concerning the interference effects. The impairment in the bit error rate was measured as a function of the distorting signal level obtained from other signals via the nonlinear conversion. That is shown in Fig. 11 where the bit error rate is plotted as a function of the relative distorting signal level. As seen in this Figure the distorting signal is already at a very high level when the impairment in the bit error rate is noticeable.

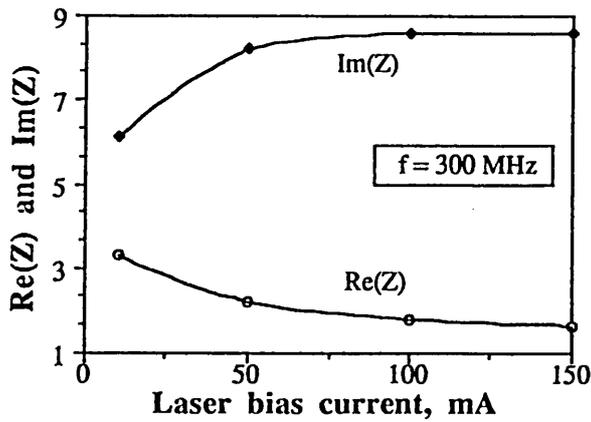


Fig. 1 The real and imaginary parts of the microwave input impedance of a laser versus the laser bias current

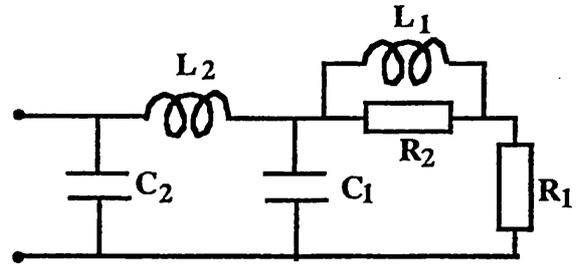


Fig. 2 Equivalent circuit with six elements for the laser microwave input

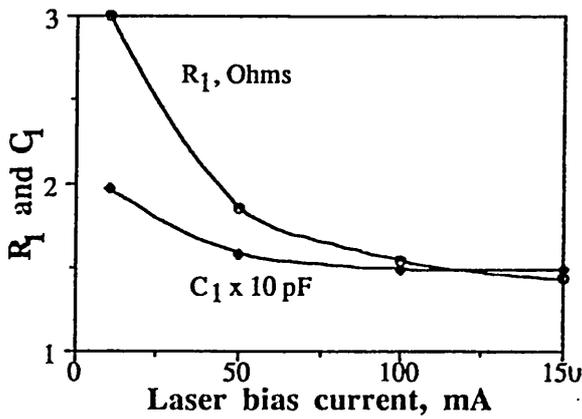


Fig. 3 The R_1 and C_1 elements of the equivalent circuit versus the laser bias current

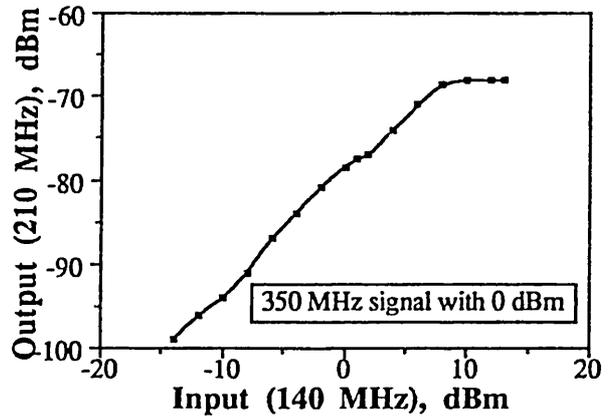


Fig. 4 The mixing product in case of two modulation signals on the laser

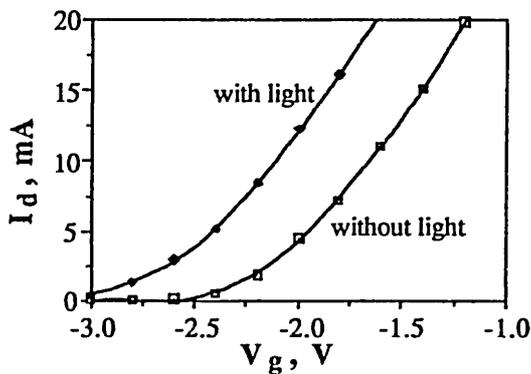


Fig. 5 The drain-source current versus gate-source voltage with and without light

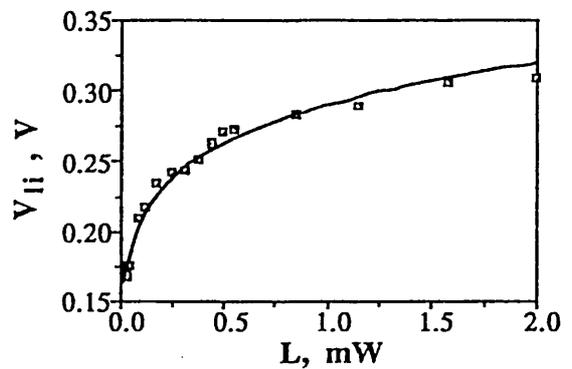


Fig. 6 The light induced voltage V_{li} versus the incident light intensity L

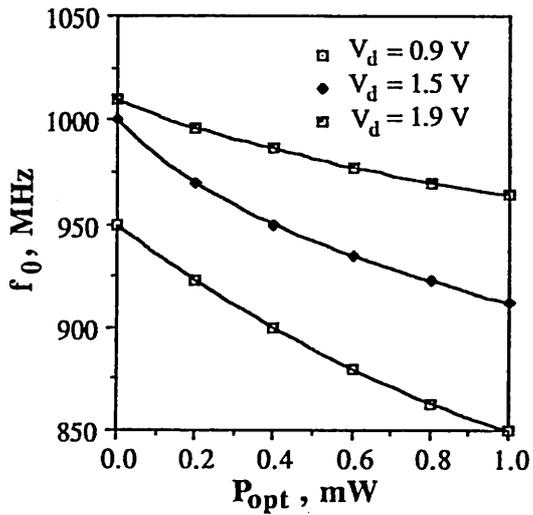


Fig. 7 Oscillation frequency versus incident optical power with different drain voltages

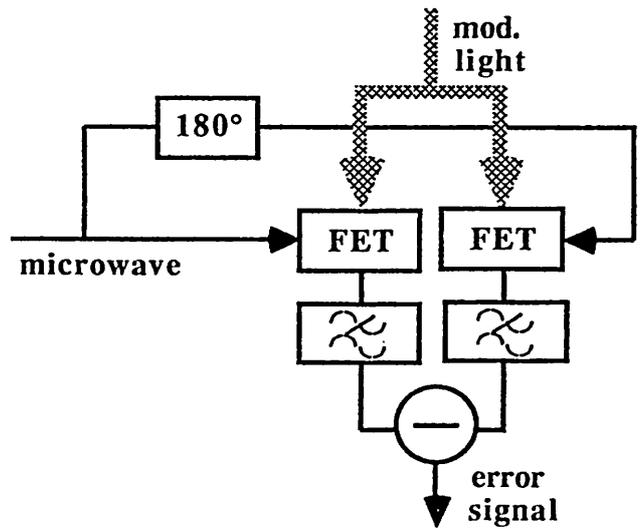


Fig. 8 Block diagram of the combined lightwave-microwave phase detector

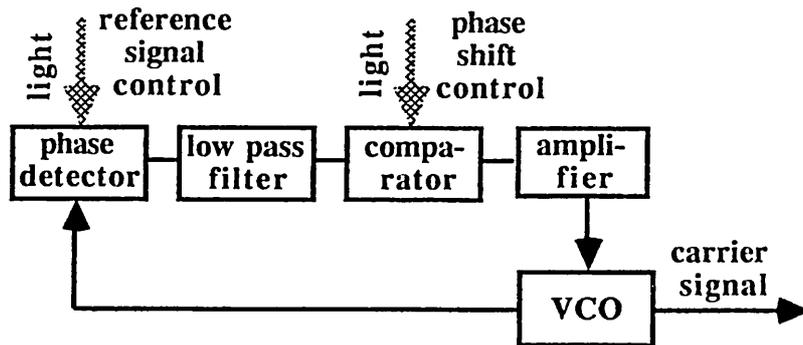


Fig. 9 Optical stabilization of microwave phase locked oscillators

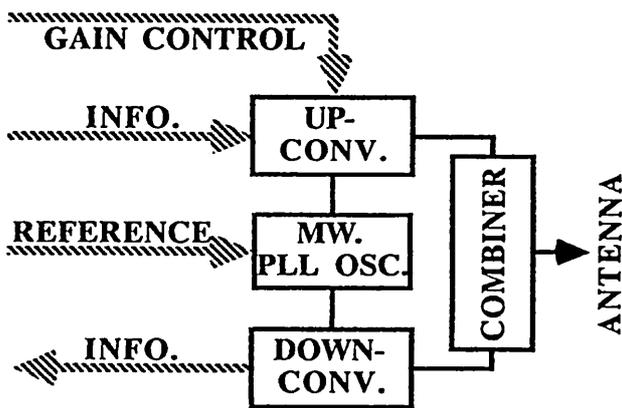


Fig. 10 Optically controlled T/R module of a phased array antenna containing a PLL local oscillator

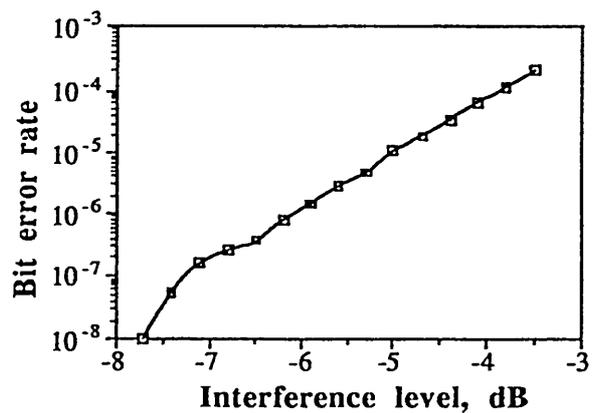


Fig. 11 Bit error rate as a function of the relative distorting signal level

References

- T. Berceli: "Optical-Microwave Phase Detection," Proc. of IEE, Part I, October 1992.
- T. Berceli: "New MMIC Compatible Optical Signal Distribution Methods for Phased Array Antennas," Int. Symp. on Antennas and Prop., Sapporo, Japan, Sept. 1992.
- T. Berceli, K. Schünemann, M. Daas, R. Knöchel, F. Nilkes: "Optical Milli-meter Wave Generation by Superharmonic Injection Locking," 22nd European Microwave Conference (EuMC), Helsinki, Finland, August 1992.
- S. Malone, A. Paoella, P. R. Herczfeld, and T. Berceli: "MMIC Compatible Lightwave-Microwave Mixing Techniques," IEEE MTT Int. Micr. Symp., USA, June 1992.
- T. Berceli, I. Frigyes, P. Gottwald, P. R. Herczfeld, F. Mernyei: "Improvements in Fiber-Optic Transmission of Multi-Carrier TV Signals," IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., vol. MTT-40, May 1992.
- T. Berceli: "A MMIC based new lightwave-microwave phase detector", Proc. of the 21st European Microwave Conference, Stuttgart, Germany, pp. 1311-1316, Sept. 1991.
- T. Berceli: "New potentials in microwave optoelectronics", Proc. of the 21st European Microwave Conference Workshop, Stuttgart, Germany, pp. 1-7, September 1991.
- T. Berceli, I. Frigyes, P. Gottwald, P. R. Herczfeld, and F. Mernyei: "Performance improvements in fiber-optic links for multi-carrier TV transmission", IEEE MTT International Microwave Symposium, Boston, USA, June 1991.
- T. Berceli, W. D. Jemison, P. R. Herczfeld, A. S. Daryoush, and A. Paoella: "A Double-Stage Injection-Locked Oscillator for Optically Fed Phased Array Antennas", IEEE Trans. Micr. Theory and Tech., vol. MTT-39, pp. 201-208, Feb. 1991.
- T. Berceli, I. Frigyes, P. R. Herczfeld, B. Molnár, and I. Pacher: "Optical control of microwave phase detectors and phase locked oscillators", 20th European Microwave Conference, Budapest, Hungary, September 1990.
- R. Saedi, A. S. Daryoush, and T. Berceli: "Optically controlled 24 GHz oscillator", 20th European Microwave Conference, Budapest, Hungary, pp. 579-583, Sept. 1990.
- W. D. Jemison, T. Berceli, A. Paoella, P. R. Herczfeld, D. Kassemset, and A. W. Jacomb-Hood: "Optical control of a digital phase shifter", IEEE MTT International Microwave Symposium, Dallas, USA, pp. 233-236, May 1990.
- T. Berceli, R. Saedi, A. S. Daryoush, and P. R. Herczfeld: "Optical control of a microwave oscillator", IEEE MTT Int. Microwave Symp., Dallas, USA, May 1990.
- T. Berceli, P. R. Herczfeld, A. S. Daryoush, and A. Rosen: "Performance Optimization of Optically Controlled Phased Array Antenna T/R Modules", 19th European Microwave Conf., London, U.K., Sept., 1989
- P. R. Herczfeld, A. S. Daryoush, A. Rosen, T. Berceli, and A. Paoella: "Optically Controlled Beamforming of Phased Array Antennas -- New Results", Symp. Proc. of SBMO Int. Microwave Symp. / Brazil, Sao Paulo, pp. 39-46, July 1989.
- T. Berceli, A. S. Daryoush, P. R. Herczfeld, W. D. Jemison, and A. Paoella: "A MMIC Based Injection Locked Oscillator for Optically Fed Phased Array Antennas", IEEE MTT-S Int. Microwave Symp., pp. 131-134, Long Beach, USA, June 1989.
- A. S. Daryoush, T. Berceli, R. Saedi, P. R. Herczfeld, and A. Rosen: "Theory of Subharmonic Synchronization of Nonlinear Oscillators", Symposium Digest of IEEE/MTT-S International Microwave Symposium, Long Beach, June 1989.
- T. Berceli and A. Chapman: "Improved linearity of MESFET amplifiers with optical illumination", Proc. of 17th Eu. Micr. Conf., pp. 814-819, Rome, Italy, Sept. 1987.

負の非線形係数を持つ光導波路

摂南大学・工学部・電気工学科

大家 重明

大阪工業大学・工学部・電気工学科

里村 裕

大阪大学・医療技術短期大学部

梅田 徳男

大阪府立大学・工学部・電気工学科

張 吉夫

目 次

	頁
1. まえがき	---- 1
2. 非線形光導波路の分類	---- 2
3. 多層分割法による数値解析法	---- 3
3.1 非線形領域における屈折率変化	---- 4
3.2 クラッドが正の非線形係数を持つ光導波路への応用	---- 6
4. クラッドが負の非線形係数を持つ光導波路	---- 8
4.1 対称構造3層光導波路(非線形/線形/非線形・構造)	-- 8
4.2 非対称構造3層光導波路(非線形/線形/線形・構造)	-- 10
4.3 実効屈折率(界分布)の新しい解法	---- 13
4.4 実効屈折率の新しい解法の非線形導波路への適用	---- 16
5. コアが負の非線形係数を持つ光導波路	---- 17
5.1 負の非線形屈折率に基づく波面操作による光波の整形	-- 18
5.2 光波伝搬による界分布整形作用	---- 18
5.3 負の光非線形係数を用いた多モード-基本モード導波路間の 接続	---- 20
6. むすび	---- 22
文 献	---- 23

1. 認 考 考 察

光非線形性をもつ材料の光デバイス応用を目指した研究が盛んになりつつある。しかし、それらの研究は、従来、非線形係数の符号を問題にしないか、または、正の場合を想定しているのが一般であった。これに対して、非線形係数が負である材料、すなわち、屈折率が光強度に比例して減少する非線形材料中での光波の振る舞いについては、従来あまり研究されておらず、そのデバイス応用についても、ほとんど報告がなされていなかった。そこで、本研究では、非線形係数が負であるごとき材料について、光波の振る舞い、ならびに、そのデバイス応用について研究を進めていくことを目的とする。

負の非線形係数材料としては半導体多重量子井戸（以下、MQWと称する）構造などが考えられる。MQW構造における室温励起子の振る舞いは、その大きな非線形性と高速応答性により注目を集めている。共鳴吸収スペクトルにおいて、吸収係数と屈折率には、一般に、クラマース・クローニツヒの関係式が成立する。光非線形係数も励起子吸収ピーク波長を境界として、正、負いずれの符号も取り得る。特に、透明領域である長波長側においては、負値を取ることで、負の非線形係数を持つ光導波路構成として利用することができる。

このような負の非線形係数材料をクラッドに用いた光導波路においては、入射光強度に応じて、クラッドの屈折率が低下するため、光導波作用をより促進するものと予想されるが、理論的には全く逆の現象を呈し、ある光強度以上では導波モードは存在せず、カットオフされる。この現象は、光リミッタ、光スイッチなど光制御デバイスへの応用が期待される。

また、このような負の非線形係数材料をコアに用いた場合、負の非線形光学材料は光波の伝搬に対して、従来、正の非線形係数に一般であった「自己集束効果」とは逆に「自己発散効果」を与える。導波路化した構造においては、光強度分布に対する屈折率変化分の

分布は、変化分を相殺する形で作用するため、種々の光強度分布波形のコヒーレントな整形に対しても分布平坦化効果をもつものと考えられる。これは、「光波界分布整形装置」として応用できる。

本論文では、このようなコアまたはクラッドが負の光非線形係数を持つ光導波路において、光波が如何に伝搬していくのかを、界分布を基礎とした数値計算によって明らかにする。

2. 非線形光導波路の分類

屈折率が光強度に比例して変化する非線形媒質を含む光導波路の伝搬特性については、すでに多くの報告例があり^{1)~10)}、近年、活発に研究がなされている分野である。これら非線形光導波路をその構造ないし構成において分類すれば、下記のように大別される。

● 正の非線形係数を持つ光導波路

- ① 非線形／線形／非線形（もしくは、線形）
- ② 線形／非線形／線形
- ③ 線形／非線形
- ④ 非線形（導波構造をもたない）

● 負の非線形係数を持つ光導波路

- ⑤ 非線形／線形／非線形（もしくは、線形）
- ⑥ 線形／非線形／線形

このうち、非線形領域の非線形屈折率の光強度依存性が正である場合の非線形光導波路構成において、これまで研究の対称となっている大部分は、①の非線形／線形／非線形（または線形）の媒質構造を有する3層スラブ光導波路である。これは、同じ3層構造でも、②の線形／非線形／線形の媒質構造に比べて、この構造の方が誘電体境界面に沿って伝搬する非線形表面波（界面に沿うモードであるが慣例に従って表面波と呼ぶこととする）など^{7)~10)}興味深い特異な現象を呈し得るからである。

また、非線形領域の非線形屈折率の光強度依存性が正である場合の非線形光導波路構成においては、線形光導波路のように3層構造である必要はなく、③のような線形/非線形の2層構成でも線形/非線形境界面に沿って伝搬する定常的導波モードは、十分存在可能である⁷⁾⁹⁾。さらには、MQW構造のような多層構造、そして、④のような、全く導波構造を持たない均質な非線形媒質中においても定常伝搬モードが存在し、その界分布が、*soch*形となることなど、これらについては、すでに報告した^{11)~14)}。

一方、これに対して、屈折率が光強度に比例して減少する負の非線形係数を持つ光導波路の導波特性については、非線形材料そのものの検討もあまりなされておらず、これまでほとんど報告されていない⁶⁾。また、そのデバイス応用に対しても、わずかに、GaAs-AlGaAs MQWで、負の光非線形性を光方向性結合器の接近した導波路間媒質として利用した理論解析論文¹⁵⁾があるのみである。

本研究は、非線形領域の非線形屈折率依存性が負である場合の非線形光導波路構成、言い替えれば、⑤ 非線形/線形/非線形（もしくは、線形）、⑥ 線形/非線形/線形における光導波路の導波特性について、次に述べる多層分割法を用いて検討を行ったものである。

3. 多層分割法による数値解析法

一般に、非線形光導波路構成においては、非線形部の屈折率が光強度に依存して変化するため、通常、定常伝搬においても、解析解を求めるのは容易ではない。一方、光波進行方向に対する垂直断面内で、非線形領域を多層分割して、数値計算を行う手法は、その構造ならびに、偏波（TE波、TM波）にかかわらず、定常解を求めることが可能であり、既に、有効な手段の一つとなっている^{6)16)~20)}。本論文では、この多層分割法による数値解法を用いて、解析的に解き得ない非線形光導波路の導波特性について検討を行う。

3.1 非線形領域における屈折率変化

一般に、図 1 (a) のような線形 / 非線形構成の光導波路に光波を照射すると、非線形領域においては光強度に応じて屈折率が変化する。この屈折率変化の分布は図 1 (b) に示すように均質な屈折率 n_{01}, n_{02}, \dots を有する多層構造で近似することができる。この時、線形領域における電磁界成分は、

$$E_y(x) = E_c \cdot \exp(\gamma_c(x - x_{0i})) \quad (1)$$

$$H_x(x) = (\gamma_c/k) \cdot E_c \cdot \exp(\gamma_c(x - x_{0i})) \quad (2)$$

と表される。但し、 x 方向の伝搬定数 γ_c は、 $\gamma_c = k \cdot (n_{eff}^2 - n_1^2)^{1/2}$ 、 k は真空中の波数、 n_{eff} は実効屈折率である。非線形領域は、これを N 分割し、各分割層内部の屈折率は一定とする。各分割層における屈折率は非線形性により、光強度（光パワー密度）に応じて、

$$n_{0i} = n_0 + n_2 I_i \quad (3)$$

と表すことができる。ここで、 n_2 は非線形屈折率であり、 I_i は分割層中の光強度である。従って、非線形領域の電磁界成分は、

$n_{0i} \geq n_{eff}$ の時、

$$E_y(x) = E_y(x_{0i}) \cdot \cos(\gamma_i(x - x_{0i})) - \quad (4)$$

$$k/\gamma_i \cdot H_x(x_{0i}) \cdot \sin(\gamma_i(x - x_{0i}))$$

$$H_x(x) = \gamma_i/k \cdot E_y(x_{0i}) \cdot \sin(\gamma_i(x - x_{0i})) -$$

$$H_x(x_{0i}) \cdot \cos(\gamma_i(x - x_{0i})) \quad (5)$$

となり、 $n_{0i} \leq n_{eff}$ の時、

$$E_y(x) = E_y(x_{0i}) \cdot \cosh(\gamma_i(x - x_{0i})) -$$

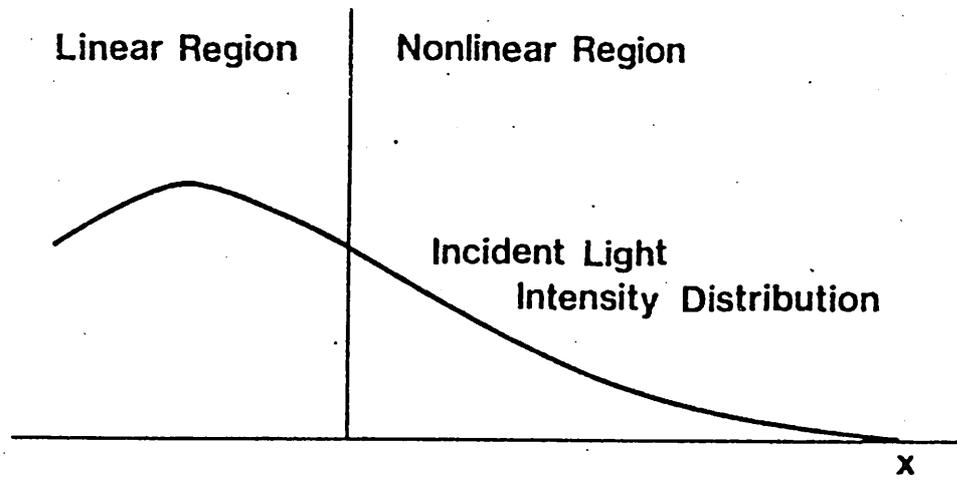
$$k/\gamma_i \cdot H_x(x_{0i}) \cdot \sinh(\gamma_i(x - x_{0i})) \quad (6)$$

$$H_x(x) = -\gamma_i/k \cdot E_y(x_{0i}) \cdot \sinh(\gamma_i(x - x_{0i})) -$$

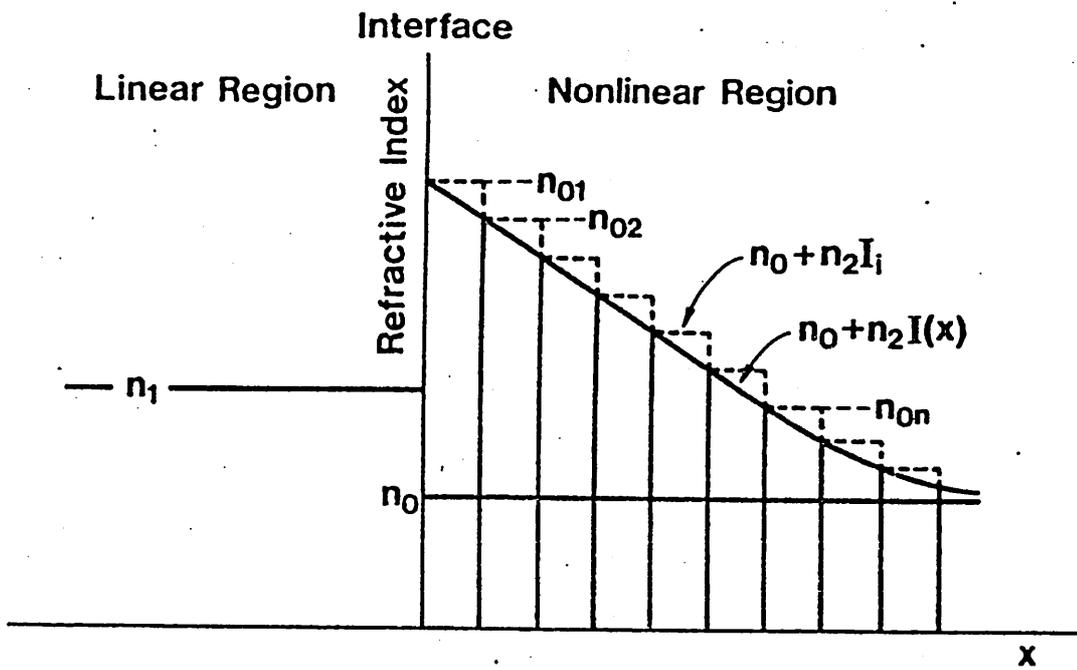
$$H_x(x_{0i}) \cdot \cosh(\gamma_i(x - x_{0i})) \quad (7)$$

但し、 $\gamma_i = k \cdot |n_{eff}^2 - n_{0i}^2|^{1/2}$

となる。 x_{0i} を各々の多層分割界面に選び、各界面における電磁界成分が満足すべき連続性により、次式のような固有方程式を得ることができる。



(a) Optical waveguiding structure comprised of single linear-nonlinear interface



(b) Variation of refractive index distribution due to light illumination

図1 多層分割法による数値解析

Fig. 1 Multi-segment numerical calculation scheme.

$$A - (\gamma_c/k) \cdot B - (k/\gamma_c) \cdot C + D = 0 \quad (8)$$

ここで、 A, B, C, D は各分割層に対する次のようなマトリクスの積で表される。非線形領域では、個々の分割層に対して、(9)、(10)式を選択することとなる。

$n_{0i} \geq n_{eff}$ の時、

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i \cdot \Delta d) & -(k/\gamma_i) \cdot \sin(\gamma_i \cdot \Delta d) \\ (\gamma_i/k) \cdot \sin(\gamma_i \cdot \Delta d) & \cos(\gamma_i \cdot \Delta d) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$n_{0i} \leq n_{eff}$ の時、

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_i \cdot \Delta d) & -(k/\gamma_i) \cdot \sinh(\gamma_i \cdot \Delta d) \\ -(\gamma_i/k) \cdot \sinh(\gamma_i \cdot \Delta d) & \cosh(\gamma_i \cdot \Delta d) \end{bmatrix} \quad (10)$$

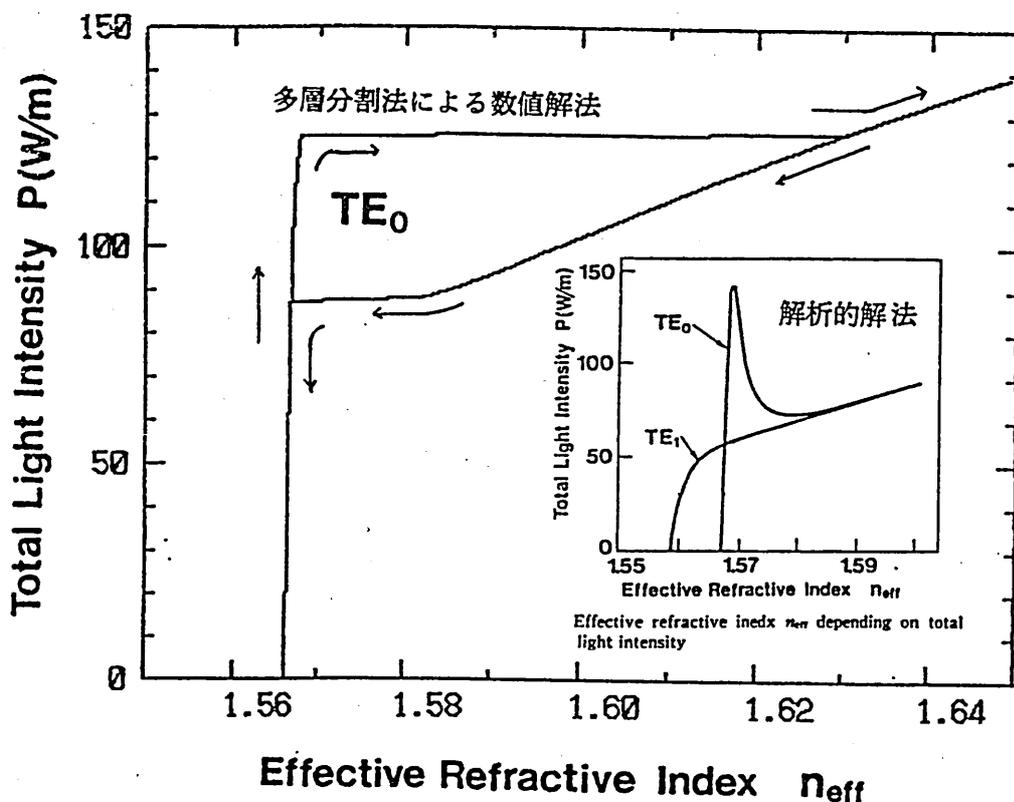
但し、 Δd は多層分割に対する個々の層厚である。従って、分割数 N を適宜選び、これらの式を適用することにより、種々の屈折率分布を有する光導波路の導波特性の解析が可能となる。本数値解析法は、こうして求めた光強度分布から非線形領域における屈折率分布を再び(3)式を用いて求め直し、この屈折率分布に対して、再び、光強度分布を計算する。----以下、このステップを電界分布（従って、また屈折率分布）が収束するまで繰り返すものである。

3.2 クラッドが正の非線形係数を持つ光導波路への応用

非線形光導波路構成において、正の非線形係数を持つ非線形/線形/非線形の3層構造のスラブ導波路については、すでに解析解も得られており、種々検討がなされている^{9) 11) 21) ~ 23)}。

一例として、文献21)22)ですでに解析的に検討されている、非線形 ($n_0=1.55$) / 線形 ($n_0=1.57$) / 非線形 ($n_0=1.55$) の3層対称構成（すでに、2の④として分類した）について、ここでは、多層分割法を用いて計算を行った。但し、非線形係数 $n_2=10^{-9} \text{ m}^2/\text{W}$ 、コア厚 $d=2 \text{ } \mu\text{m}$ とした。

図2は、多層分割法を用いて計算したもので、TE₀モードについて、



Effective refractive index n_{eff} depending on total light intensity

図2 非線形(1.55)-線形(1.57)-非線形(1.55)・3層対称構造光導波路の非線形表面伝搬モード

全光強度 P の変化に対する導波路の実効屈折率 n_{eff} の変化の様子である。全光強度が小さい場合は、 n_{eff} の大きさはほとんど変化せず直線的であるが、ある光強度のピークを越えてから実効屈折率がもとのコアの屈折率を超えるため、特異な変化を示す。図2中口内は、比較のため、解析的解法による結果を示したもので、ある光強度以上で、3個の異なる実効屈折率が存在するのが見られる。この時、現れる非線形表面伝搬モードの振る舞いについてはすでに文献3)1)に詳細に示している。多層分割法を用いて計算した本図におい

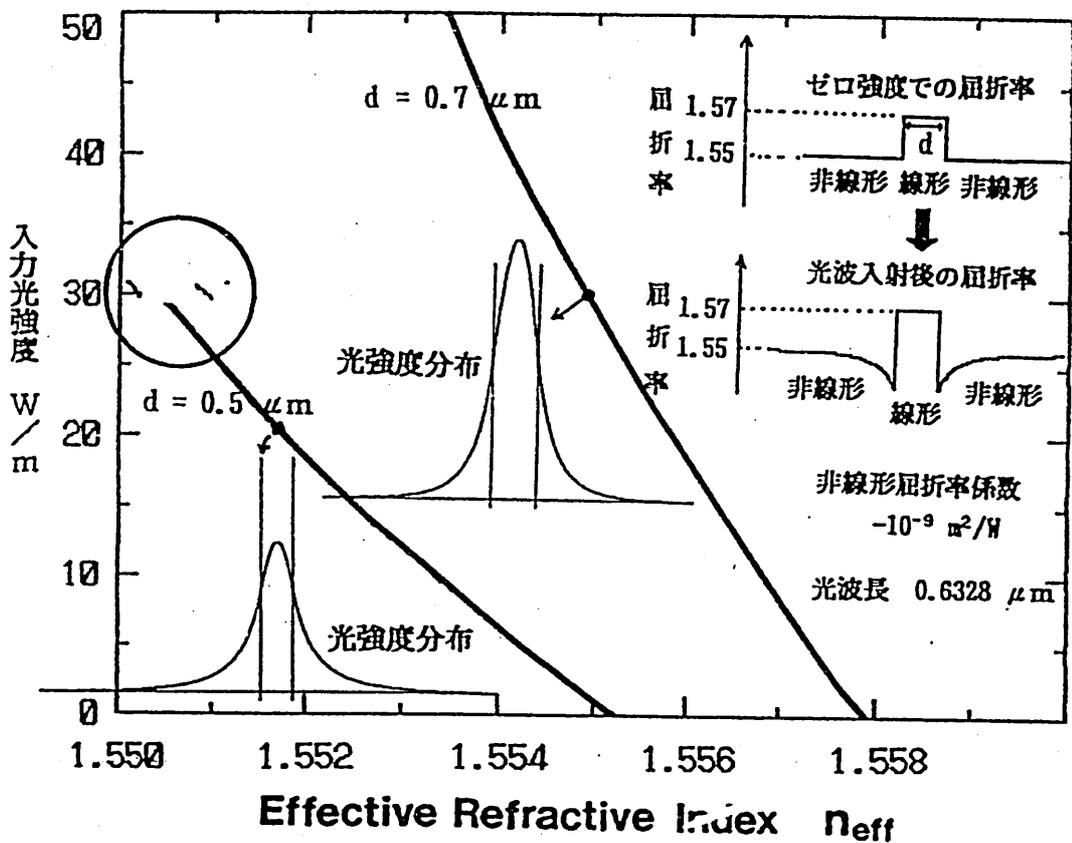
ては、ピーク光強度の値については、文献21)22)の解析解による図と若干のずれは生じているが、基本的特性は一致している。また、多層分割法においては、履歴現象が顕著であり、解析的解法における不安定解(図2中、□内右下がりの曲線部分)は計算されていない。このことは多層分割法による数値解法の有効性を示している。以下、負の光非線形係数を持つ光導波路の光波伝搬特性の解析には、この多層分割法を用いて検討を行うものとする。

4. クラッドが負の非線形係数を持つ光導波路

前述したように、クラッドが自己集束形の正の非線形係数を持つ、非線形/線形/非線形の3層スラブ構造光導波路のもつ非線形(双安定)特性については種々報告されている。これに対して、負の非線形係数を持つ光導波路の導波特性については、これまでほとんど報告されていない⁶⁾。ここでは、クラッドが負の光非線形係数を持つ光導波路の導波特性について報告する²⁴⁾。

4.1 対称構造3層光導波路(非線形/線形/非線形・構造)

図3に、クラッドが負の非線形媒質で構成される非線形/線形/非線形の3層スラブ光導波路の入力光強度(Total Light Intensity) - 実効屈折率(n_{eff})の関係の計算結果の一例を示す。この計算に用いたパラメータは図中に示してある。この図によれば、光強度の増大と共に導波路に対する実効屈折率は次第に低下し、そして、ある光強度以上では導波モードは存在せず、カットオフされることがわかる。この傾向は、コアである線形部分の厚さ(d)が薄いほど顕著である。クラッドが負の非線形媒質で構成されるこの導波路においては、入射光強度に応じて、クラッドの屈折率は低下するため、光導波路としては、光導波作用をより促進するものと予想されるが、それに反して全く逆の現象を呈している。これについては、詳細は



Effective refractive index n_{eff} depending on total light intensity

図3 クラッドが負の光非線形係数をもつ光導波路の導波特性

後述する(4.3参照)が以下のように説明できる。実効屈折率は、界分布と屈折率分布との重なり積分に関係があり、導波路における光強度分布(図中に2例示す)のクラッドへのしみ出しが大きく、それが実効屈折率を引き下げていることによる。言い換えれば、屈折率の低下する非線形媒質部分にかなりの界分布が存在することによるものである。また、図中カットオフ近辺の○内の領域は入射光強度分布に依存し、本計算では、不規則な変化を示している。これについてはなお検討中であるが、同じ計算を、新しい解法(4.3参照)を用いて行った図9では、この不規則な変化は見られないため、この

計算手法による影響であると推論される。

図4は、この非線形光導波路において、コア厚(d)をパラメータとする入力光強度(Total Light Intensity)に対するパワー閉じ込め占有率(Power Confinement Factor)の関係を示す。これを見れば、光強度の増大に対して、実効屈折率は低下するにもかかわらず、全般的に、光強度分布としては、コア内への閉じこめが促進されていることがわかる。これは、非線形性により、コア近辺のクラッドの屈折率がより低下するため、相対的に屈折率の高いコア内へパワー集中が起こることによる。このことは、コアとクラッドの間にクラッドよりもさらに屈折率の低いクラッド(2重クラッド構造)を持つ線形W型光導波路の特性^{25)~27)}と似た傾向を示すものである。比較のため、さらに種々のコア厚をもつ($d=0.5\sim 0.8\ \mu\text{m}$)線形W型光導波路のコア内パワー占有率も合わせて(破線で示す)、図5に示す。W型光導波路は線形導波路であるため、実効屈折率(n_{eff})の大きさは光強度の影響を受けず直線的である。ゼロ強度での閉じこめ率と比較すればわかるが(この場合、線形での3層光導波路として考えた場合に相当)、 $d=0.5\ \mu\text{m}$ 以外の場合は、W型光導波路の方が導波路の閉じこめが良くなっていることがわかる。しかし、 $d=0.5\ \mu\text{m}$ の場合、そして、非線形導波路の入力光強度の大きな場合は、逆にコア内閉じこめが悪くなる傾向が見える。これは、この非線形導波路がカットオフに近づいてくる影響であり、非線形クラッドに界分布がかなりしみ出すためである。

4.2 非対称構造3層光導波路(非線形/線形/線形・構造)

図6は、非線形/線形/線形の非対称構造3層光導波路における入力光強度(Total Light Intensity)ー実効屈折率(n_{eff})の関係の計算結果の一例である。この時、ゼロ光強度においては、対称構造(屈折率分布 1.55/1.57/1.55)とした。片側クラッドのみ非線形媒質であるこの図6の結果は、光強度の増加に対して、次第に実効屈折率が低下する図3の両側クラッド非線形媒質の場合の傾向と一致

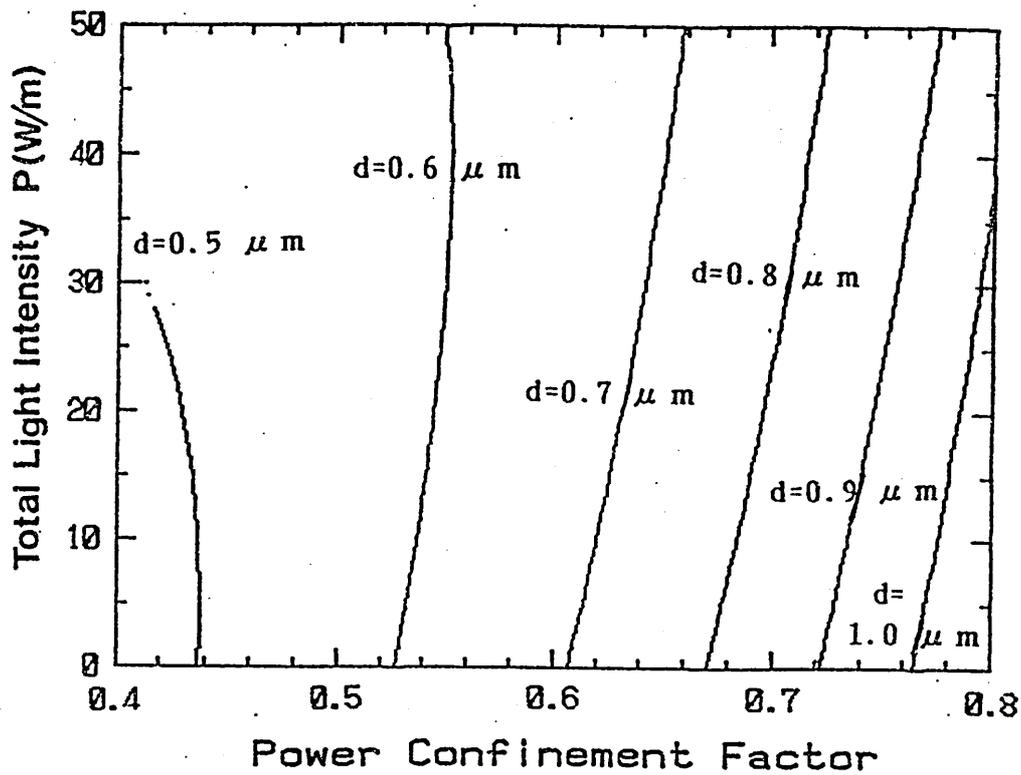


図4 3層対称構造非線形光導波路のパワー占有率

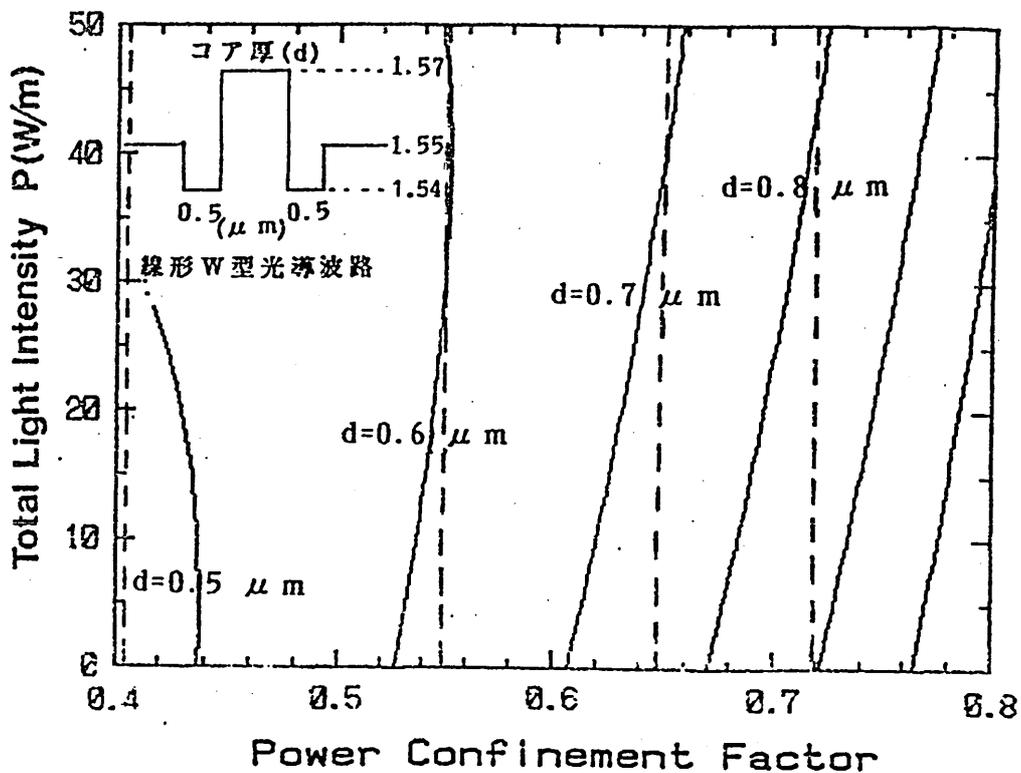
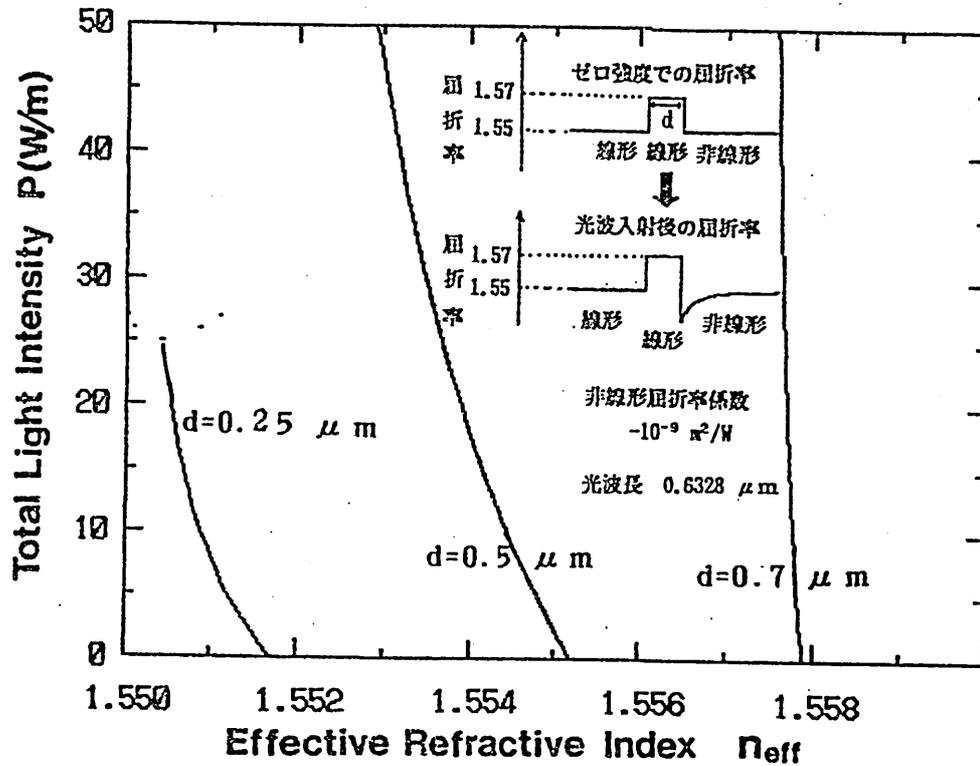


図5 線形W型光導波路に対するパワー占有率の追記



Effective refractive index n_{eff} depending on total light intensity

図6 非線形(1.55)-線形(1.57)-線形(1.55)-3層非対称構造光導波路

している。カットオフ近辺では、光強度の増大に対して、実効屈折率の乱れが生じているが（図6、 $d=0.25 \mu m$ の場合、顕著）、この現象は、特に、初期入射光強度分布に大きく依存し、さきの図3、○内の不規則な変化と相通じると思われ、本計算手法に基づくものであると推論される。特に、このような非対称光導波路に多層分割法を適用する場合、計算過程により、微細構造の接続による微小な誤差が蓄積される可能性があり、本計算におけるその影響についても、なお検討中である。

4.3 実効屈折率（界分布）の新しい解法

4.1で、実効屈折率は、界分布と屈折率分布との重なり積分に関係があることを述べた。このことは、線形、非線形を問わず光導波路全般に成立するものと考えられる。ここでは、実効屈折率及び界分布の新しい計算手法について述べる。

一般に、スラブ光導波路に対して、光波の電磁界成分（ E_y, H_x, H_x ）を持つTE波、と（ H_y, E_x, E_x ）を持つTM波においては、下記のような関係式が成立する。

表1 実効屈折率の新しい解法

TE 偶モード	$n_{eff} = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x) \cdot n(x)^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x) dx} \right\}^{\frac{1}{2}}$	(11)
TM 偶モード	$1/n_{eff} = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} H_y(x) \cdot \frac{1}{n(x)^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} H_y(x) dx} \right\}^{\frac{1}{2}}$	(12)

すなわち、TE(偶)モードに対しては、実効屈折率が、屈折率二乗の界分布平均根となっており、TM(偶)モードに対しては、実効屈折率の逆数が、屈折率の逆数の二乗の界分布平均根となっている。

この式の持つ意味は重要で、実効屈折率（の近似値）は、導波路の屈折率分布（ $n(x)$ の分布）がわかれば、固有方程式を解かなくても決定し得ることを示している。

一例として、図7のような、簡単な3層スラブ光導波路について（TE波）の数値計算例の結果を表2に示す（但し、この時、光波長； $1 \mu\text{m}$ 、 $d=8 \mu\text{m}$ 、 $n_1=3.53$ 、 $n_2=3.54$ 、 $n_3=3.53$ とする）。

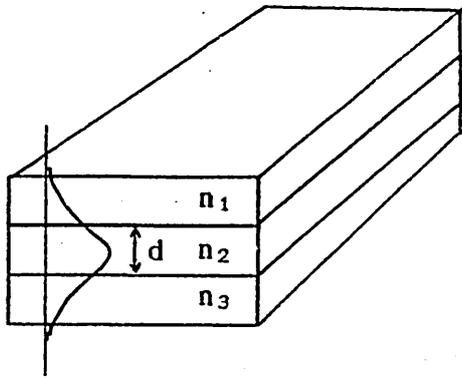


図7 3層スラブ光導波路構成

表2 対称形光導波路の計算結果例 (光波長; $1 \mu\text{m}$ 、 $d=8 \mu\text{m}$ 、 $n_1=3.53$ 、 $n_2=3.54$ 、 $n_3=3.53$)

モード番号	固有方程式の解 n_{eff}	(11)式 n_{eff}
0	3.539583296793799	3.539583296792657
1	3.538342762790752	—————
2	3.536313094416932	3.536313094411898
3	3.533584541613079	—————
4	3.530509006178726	3.530509006177139

この導波路には、5つの伝搬モード (モード番号, 0~4) が存在する。表2からわかるように、この例のような対称形光導波路においては、偶モードについては、(11)式と固有方程式を解いて得られる実効屈折率は、かなりの精度で一致していることがわかる。しかし、モード番号1のような奇モードでは、 $\int E_y dx=0$ となるので全

く計算不能となる（奇モードに対する解法は現在検討中である）。
 一般に、実効屈折率や界分布の計算に際して、対称光導波路構成（屈折率分布が既知）における、偶モード伝搬については、最初にある n_{eff} を仮定し、界分布を仮定することにより、図8のようなフローを用いて導波特性を比較的容易に求めることができる。この手法は、収束精度及び、解法のテクニックにもよるが、固有方程式を計算するよりも、約10倍～数百倍程度計算時間の短縮となる。

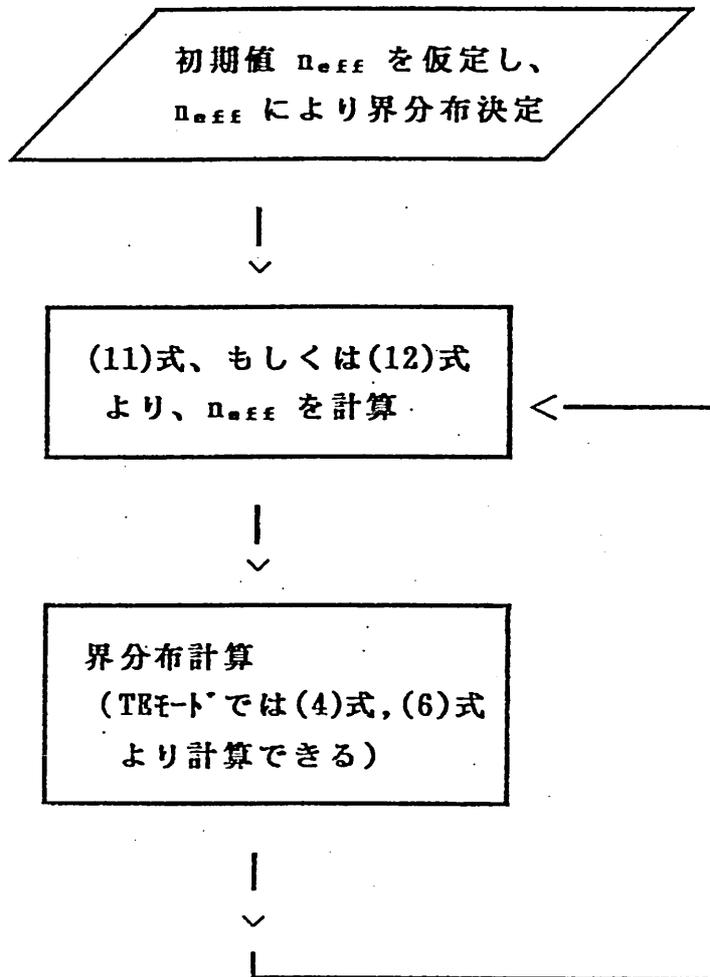
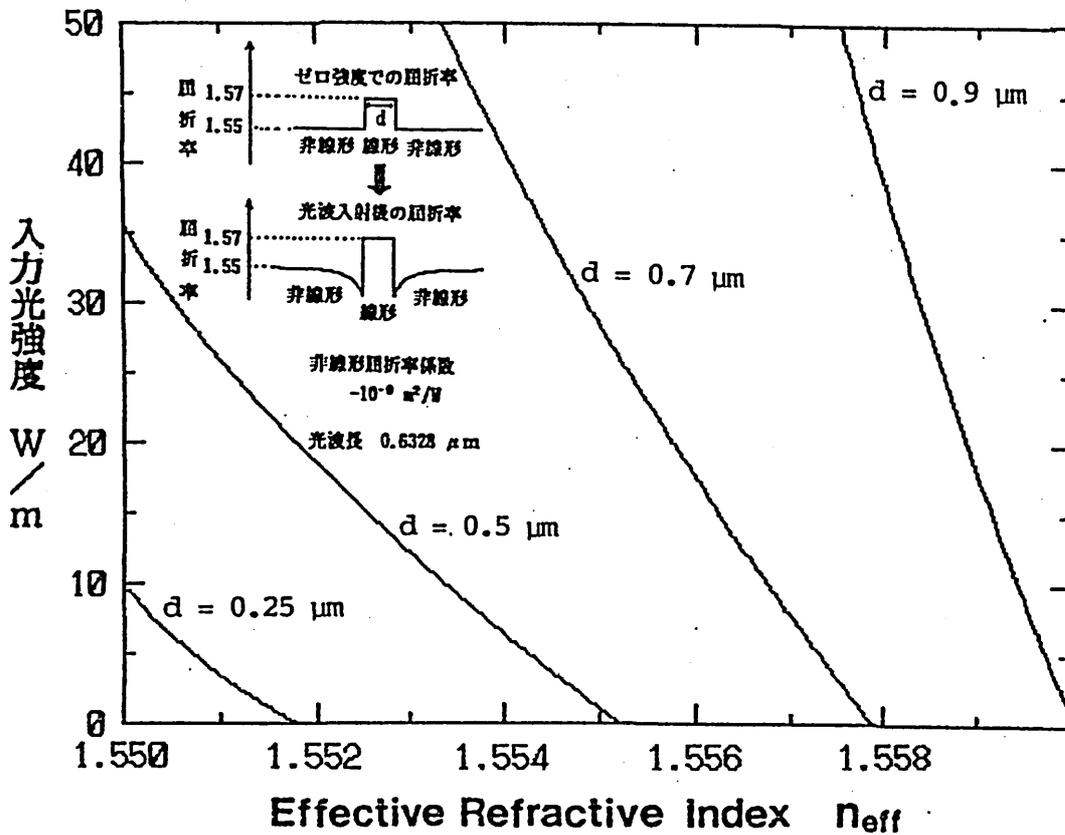


図8 実効屈折率（及び界分布）計算フロー

本計算例では、線形光導波路の場合であったが、この計算手法は、これまで検討を行ってきた非線形光導波路構成においても十分適用できる。次にその適用例について述べる。

4.4 実効屈折率の新しい解法の非線形導波路への適用

4.3 で述べた実効屈折率や界分布に対する新しい解法は、図8に明らかなように、非線形導波路の解析においては、(4)式、(6)式、を選択的に用いる多層分割法の一つである。しかし、分割数に依存



Effective refractive index n_{eff} depending on total light intensity

図9 新しい実効屈折率の計算法
入力光強度 - 実効屈折率の関係 (図3に対応)

した行列の積から導かれる固有方程式を解かず、界分布を求めることができるため、導波特性を比較的容易に求めることができる。

図9に、4.1において検討した、非線形/線形/非線形・3層光導波路構成（非線形係数負の場合）に対して、固有方程式を解かず、図8のフローにしたがって行った計算結果を示す。この場合、図3と全く同じ結果が得られていることがわかる。しかも、図3で、不規則な変化を示した（図3、○内）カットオフ近傍まで、かなり詳しく計算可能であることがわかる。さらに、この計算においては、図3の計算と比べて、約百倍程度、計算時間が短縮された。従って、この(11)式、(12)式に基づく計算手法はかなり強力かつ有効な解析手法となり得るものであることがわかる。

5. コアが負の非線形係数を持つ 光導波路

負の非線形係数材料は光波の伝播に対して、従来、正の非線形係数に一般であった「自己集束効果」とは逆に「自己発散効果」を与えるものと考えられる。この効果は、たとえば、ハイパワー用のアレイ形半導体レーザーからのアレイ状空間分布を平坦化し、単純な単峰分布に変換・整形するのに役立つものと期待できる^{29)~30)}。

個別レーザー（もしくは半導体レーザーアレイ）を空間フィルター（波面整形するもの）等を用いて共通の位相にロックする装置は、'90年のCLEOにおいて2件報告されている³¹⁾³²⁾。しかしながら、いずれの場合も、外部共振器や空間フィルター、レンズ等の光学素子が必要となり全体の寸法が大きなものとなっているのが現状である。一方、ハイパワー用の小型CWレーザーとしてアレイ形の半導体レーザーが注目されているが、このレーザーアレイからの出力光は、個々のレーザー出力の位相が逆相で、種々のモードが混在するため³³⁾、全体としては、不均一な光波電界分布を有している。

本章では、このような観点から、単純かつ小型な構成によって、

負の光非線形性を用いて波面操作することにより、不均一な振幅界分布を均一化しようとするものであり、アレイ光源からの多峰分布光波を単純な単峰または、平坦分布に整形することについて述べる。

5.1 負の非線形屈折率に基づく波面操作による光波の整形

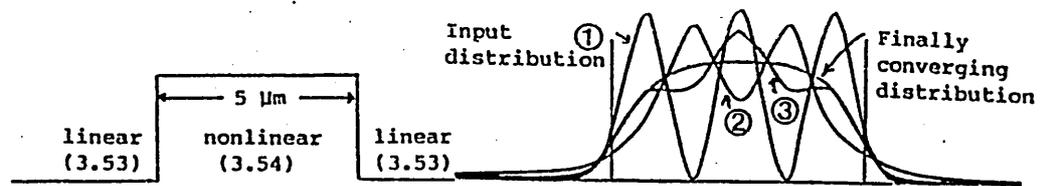
まず、負の光非線形屈折率に基づく波面操作によって、光波が如何に整形、再配分されるかを、多層分割法を用いて以下に示す。

一例として、図10にコアが負の非線形係数を持つ光導波路構成を示す。ゼロ光強度での屈折率分布を(a)のようなものとし、多モード導波が可能な光導波路とする。この光導波路へ(b)のような光強度分布を持つ多峰分布（この例では3峰）の光波が入射したと仮定する。但し、各峰の界分布は、簡単のため同相であるとする。この時、光強度分布に応じて、コアの屈折率は変化し、それに伴って、この光導波路系における光強度分布も再配分されることになる。すなわち、光強度分布波形としては、(c)のように、①、②、③---と変化し、次第に光強度の空間分布が平坦化されたものとなる。(d)は、この時の繰り返し計算の後の収束後の屈折率分布であり、屈折率分布は平凹分布となる。もちろん、このような光波界分布整形作用は、当然のことながら初期屈折率分布（すなわち、初期光閉じ込め構造）と非線形係数の値に依存することになり、一義的な光強度分布を決定するものではないが、半導体レーザーアレイ等の出力に応じて適宜設定可能であり、この例では、負の光非線形性によって多モード導波路の光強度分布が単純な単峰分布に変換・整形されていることがわかる。

5.2 光波伝搬による界分布整形作用

このような負の非線形屈折率によって光波がその伝搬過程で如何に整形されるかを数値計算によってさらに示す。

一例として、コアが負の非線形係数を持つ光導波路に、 TE_0 と TE_1 モードが（偶モード伝搬を仮定） ± 1 で（逆相）混合された



(a) Refractive index distribution at zero light intensity (c) Converging process of light intensity distribution for stable propagation modes



(b) Multi-peaked intensity distribution Three peaks are assumed to be in-phase in the field. (d) Obtained steady-state refractive index distribution

図 1 0 負の非線形係数を有する光導波路における定常導波モード

Three-layer slab optical waveguide structure associated with the negative nonlinear coefficient in the core on which multiple modes can propagate.

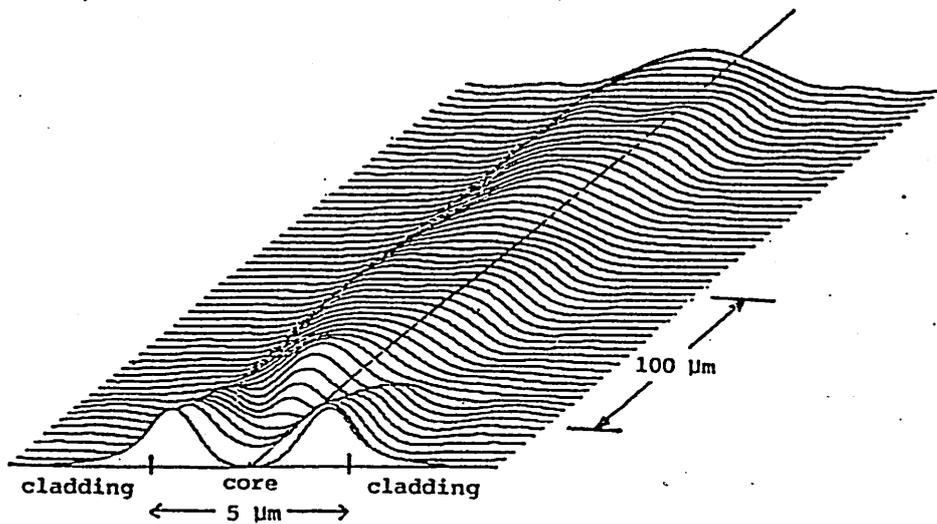


図 1 1 負の非線形係数を有する光導波路における過渡伝搬特性

Intensity distribution along the light propagation as one of the propagation transient behaviors. In this figure, light wavelength is $0.8 \mu\text{m}$, light intensity is 10 W/m , MQW core layer thickness is $5 \mu\text{m}$ and nonlinear refractive index is $10^{-9} \text{ m}^2/\text{W}$.

多峰電界分布（この例では2峰）の光波が入射したとする。この計算では、非線形コアの厚さ； $5 \mu\text{m}$ 、光波長； $0.8 \mu\text{m}$ の光波が入射したと仮定している。この時、前述したように光強度分布に応じて、コアの屈折率は変化し、それに伴って、この光導波路系における電界分布も再配分されることになる。

図11に、この時の光波の過渡伝搬特性（光強度分布で示してある）の計算結果の一例を示す。この例では、光波伝搬とともに、数 $100 \mu\text{m}$ の距離で、光強度分布が単純な単峰分布に変換・整形されていることがわかる。尚、図11において入射光強度は、 $10 \text{ W}/\mu\text{m}^2$ 、非線形屈折率の値は、 $-10^{-9} \text{ m}^2/\text{W}$ （この値は、MQW構造においては、十分妥当な大きさ^{34)~36)}である）とした。

5.3 負の光非線形係数を用いた多モード—基本モード導波路間の接続

通常の線形材料を用いた種々の導波路形光デバイスにおいて、このような単純な単峰または、平坦分布光を利用するためには、基本モードのみ通過可能な光導波路サイズへ断面を縮小しなければならない。そこで、非線形光導波路で得られた単純な単峰または、平坦分布を保ったまま、この光強度分布を、緩やかなテーパ導波路区間を用いて線形基本モード光導波路の基本モードへと変換することとなる。

図12は、このような意図のもとで、半導体レーザーアレイとこの光波界分布整形部分を一体化したもの（光波界分布整形装置）の概略図である。図のような半導体レーザーアレイ（本図では、4個となっているが、アレイの個数には無関係である）からの出力光を、半導体レーザーアレイと一体化して構成した負の非線形係数を持つ非線形導波路中に入射したとする。この時、半導体レーザーアレイからの出力光は、電界として隣同士が逆相となっており、光強度分布としては、多峰分布となっている。従って、非線形導波路へは、この多峰分布（本例では4峰）の光波が入射するわけである。そし

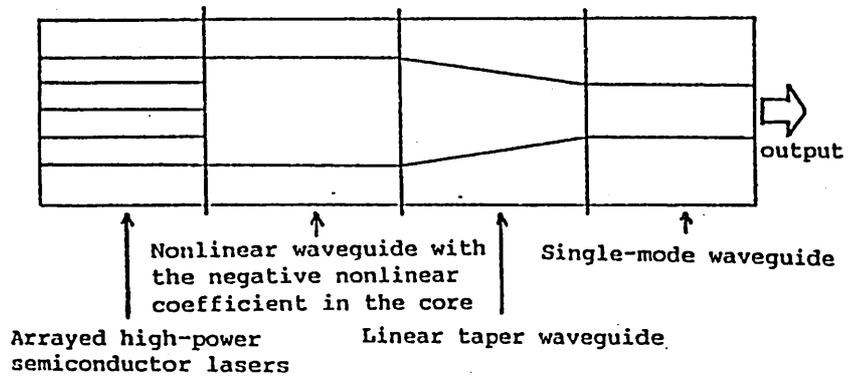


図12 半導体レーザーアレイと一体化した光波分布整形装置で、さらに、テーパ導波路区間を用いて、光強度分布を線形光導波路の基本モード分布へと変換する装置の概略図

Outline drawing of a field redistribution/mode-reduction device which is integratable with arrayed high-power semiconductor lasers.

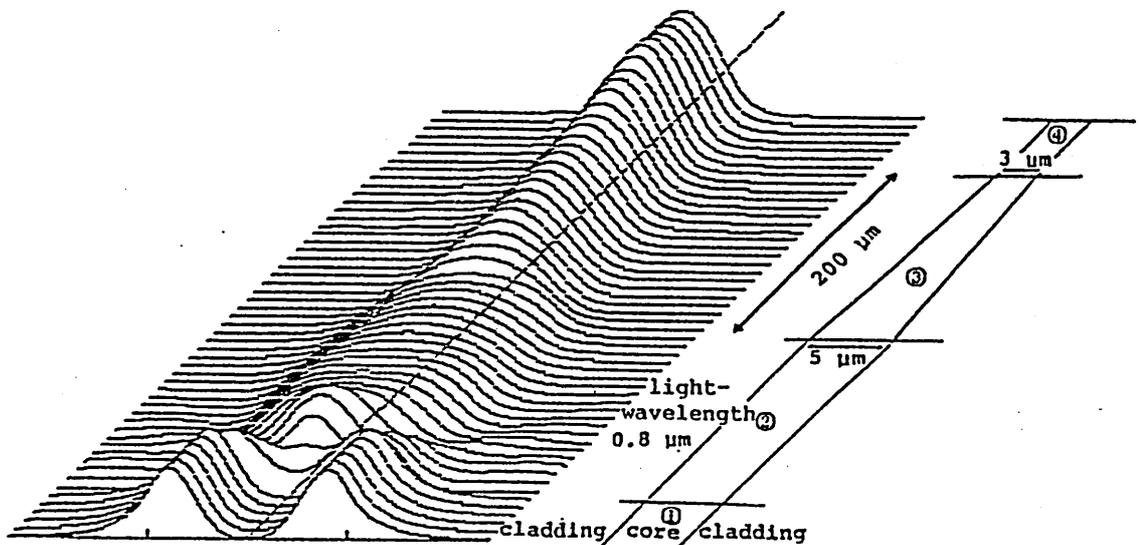


図13 負の非線形係数を用いた多モード-基本モード導波路間の接続(光強度分布の変換過程)

Waveguiding behavior of the device of Fig.12.

- ① is a multi-peaked distribution (in this figure, 2-peaked stable distribution) section.
- ② is a field redistribution section.
- ③ is a linear taper waveguide mode-reduction section.
- ④ is a single-mode section.

て、負の非線形屈折率に基づく光波界分布整形後、同一導波路内に形成されたテーパ部（線形）に光波は導かれる。この時、コア厚は緩やかに変化しているので、光波は基本モードへと変換され、さらに、基本モード導波路へと導かれる。

図13に、この光波界分布整形装置の強度分布変換の有り様を示す。数値計算には、図11と同一の条件の光導波路系を仮定した。光波伝搬に対して、図12と対比するため、図13中、光強度分布の変換過程を、① 多峰状空間分布領域、② 光波界分布整形領域、③ 線形テーパ領域、④ コア厚一定領域、で示した。このように、光波界分布整形後、緩やかなテーパ部を通過することにより、単峰性を保ったまま、効率よく基本モード導波路に接続することが可能であることが示された。

6. 結 語

非線形3層光導波路構成において、コア、または、クラッドの非線形係数が負である場合の光導波特性について、一解析手法である多層分割法を用いて検討を行った。

負の非線形係数材料をクラッドに用いた光導波路の場合、入射光強度に応じて、クラッドの屈折率は低下するため、光導波作用をより促進するものと予想されるが、理論的には、ここで示したように全く逆の現象を呈する。すなわち、光強度の増大と共に導波路に対する実効屈折率は次第に低下し、そして、ある光強度以上では導波モードは存在せず、カットオフされる。この現象は、導波路の実効屈折率を、界分布と屈折率分布との重なり積分に関係づけることにより説明できる。すなわち、屈折率の低下する非線形部分（この場合、クラッド）にかなりの界分布が存在することにより、それが実効屈折率を引き下げているためである。また、実効屈折率に対するこの解釈を用いて、導波特性に対する新しい解法を明らかにした。

また、負の非線形係数材料をコアに用いた光導波路の場合、光波

の伝搬に対して、「光波界分布整形作用」が存在する。本報告では、種々の光強度分布をもつ光波を、非線形導波路中において、コヒーレントに合成した場合の伝搬特性について示した。

このような負の非線形係数を持つ光導波路をデバイスとして積極的に利用した例は、これまで他に全くなく、クラッドが負の非線形係数を持つ光導波路においては、上述のように通常の導波作用促進の予想に反し、光リミッタ、光スイッチなどの光制御デバイス、また、コアが負の非線形係数を持つ光導波路においては、ここで検討した光波界分布整形装置など種々の光制御デバイスへの応用などが期待できる。



- 1) Z. Jakubczyk, H. Jerominek, S. Patera, R. Tremblay and C. Delisle, IEEE J. Quantum Electron. QE-23, 11(1987)1921.
- 2) S. J. Al-Bader and H. A. Jamid, IEEE J. Quantum Electron., QE-23, 11, (1987)1947.
- 3) K. J. Blow, N. J. Doran, B. P. Nelson and D. Wood, IEEE J. Quantum Electron. QE-21, 7, (1985)774.
- 4) G. I. Stegeman, C. T. Seaton and J. Ariyasu, Opt. Commun. Vol. 56 (1986)365.
- 5) J. V. Moliney, J. Ariyasu, C. T. Seaton and G. I. Stegeman, Opt. Lett. Vol. 11 (1986)315.
- 6) Colin T. Seaton, Jesus D. Valera, Richard L. Shoemaker, George I. Stegeman, John T. Chilwell and S. Sesmond Smith, IEEE J. Quantum Electron. QE-21, 7, (1985)774.
- 7) W. J. Tomlinson, Opt. Lett., 5, 7, (1980)523

- 8) A.A.Maradudin, Z.Phys. B-Condensed Matter., Vol.41
(1981)341.
- 9) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：信学論 (C-I)、J75-C-I、
6 (1992)444.
- 10) Y.Satomura, Trans. IECK Japan (Section E), 70(1987)541.
- 11) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：輻射科学研究会 RS-90-3
(1990-7).
- 12) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：第51回秋季応物予稿集第3分冊
(1990-9).
- 13) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：第38回春季応物予稿集第3分冊
(1991-3).
- 14) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：1991信学春季全大、S C-1
- 15) M.Cada, R.C.Gauthier, B.E.Paton and J.Chrostowski, Appl.
Phys.Lett., 49, 29, (1986)755.
- 16) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：信学論 (C-I)、J73-C-I、
9, (1990)573.
- 17) S.Ohke, T.Umeda and Y.Cho: Opt.Comm. 56 (1985)235.
- 18) S.Ohke, T.Umeda and Y.Cho: Opt.Comm. 70 (1989)92.
- 19) K.Hayata, M.Nagai and M.Koshiba, IEEE Trans.Microwave
Theory & Tech., 36, 7, (1988)1207.
- 20) K.Okamoto and E.A.J.Marcatili, IEEE J.Lightwave Technol.,
7, 12 (1989)1988.
- 21) 里村裕：輻射科学研究会資料 RS86-3 (1986-5).
- 22) 里村裕：電子通信学会(IECK)、光通信理論研究会 OCT-86-24
(1986-8).
- 23) B.M.A.Rahman, J.R.Souza and J.B.Davies, IEEE Photo.
Tech. Lett., 2, 4, (1990)265
- 24) 大家重明、里村裕、梅田徳男、張吉夫：第53回秋季応物予稿集
第3分冊 (1992-9).
- 25) 大高洋一、川上彰二郎、西田茂徳：信学論(C)、57, 6,

- (1974)187.
- 26) 川上彰二郎、西田茂穂：信学論(C)、57, 9, (1974)304.
 - 27) 川上彰二郎：“光導波路”、第6章「二重クラッド型伝送路」，朝倉書店(1980).
 - 28) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：第52回秋季応物予稿集第3分冊(1991-10).
 - 29) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：第39回春季応物予稿集第3分冊(1992-3).
 - 30) S. Ohke, T. Umeda and Y. Cho: 11th Sympo. Rec. of Alloy Semicon. Phys. & Electron., (1992)551.
 - 31) J.R. Leger, G.J. Swanson and M. Griswold: CLEO 90, CFQ1, (1990-5).
 - 32) C. Corcoran and R.H. Rediker: CLEO 90, CFQ3, (1990-5).
 - 33) J-M. Verdiell and R. Frey, IEEE J. Quantum Electron., Vol. 26, 2, (1990)270.
 - 34) Il Jun Cha, S. Ohke, T. Umeda and Y. Cho: Tech. Rec. 5th Meeting on Alloy Semicon Phy. & Electron., (1986)51.
 - 35) Il Jun Cha, S. Ohke, T. Umeda and Y. Cho: 6th Sympo. Rec. of Alloy Semicon. Phys. & Electron., (1987)499.
 - 36) 久保寺憲一：応用物理 59 (1990)155.

輻射科学研究会資料
(RS 92-16)

半導体ドーピングガラス光導波路の作製と 非線形吸収特性の測定

村田博司 下村健吉 井筒雅之 末田 正

大阪大学 基礎工学部

平成4年12月11日

於：三菱電機株式会社 中央研究所

半導体ドーパガラス光導波路の作製と非線形吸収特性の測定

Fabrication and Measurement of Saturable Absorption of Semiconductor-doped Glass Waveguides

村田博司 下村健吉* 井筒雅之 末田 正

Hiroshi MURATA, Kenkichi SHIMOMURA, Masayuki IZUTSU, Tadasu SUETA

大阪大学 基礎工学部

Faculty of Engineering Science, Osaka University

1. はじめに

非線形光学効果による光波間の相互作用を利用すれば、光信号を光信号によって制御するデバイスを構成できる。このような非線形光機能デバイスでは、その信号処理、情報処理能力に光波が本来持っている高速性、広帯域性を十分発揮させることが可能となり、将来の高速・大容量通信、情報処理システムへの応用が期待されている。

一方、光導波路においては、光波は狭い領域に閉じ込められたままで回折広がりなく伝搬する。それゆえ、高い光電力密度と大きな相互作用長を容易に得ることができるので、非線形相互作用を利用する上で有利と言える。このような利点を持つ非線形光導波路を利用した光機能デバイスの研究が関心を集めてきている[1]。

非線形光学材料としては、従来より半導体や有機材料などが有力視されてきているが、近年新しい非線形光学材料として半導体ドーパガラス（半導体微粒子分散ガラス）が注目を集めている。半導体ドーパガラスは、大きな3次の非線形光学係数（ $\chi^{(3)} = 10^{-8} \sim 10^{-9}$ esu）を持ち、その応答速度も速い（ $\tau \sim 10$ ps）ことが報告されて以来[2]、光学的非線形性の生じるメカニズムやデバイス応用についての研究[3][4]がなされてきている。しかし、これを用いて光導波路を作製し、導波特性や導波路における非線形光学特性について考察した報告はほとんどない[5]。今回、新たにソーダライム系の半導体ドーパガラスを用いて単一モード光導波路を作製し[6]、その導波特性と光学的非線形性の評価[7][8]を行なったので報告する。

2. 半導体ドーパガラス

半導体ドーパガラスとして、大阪眼鏡硝子（株）製のシャープカットカラーフィルターガラスを使用した。これは、母材ガラス中に半導体、硫化カドミウムセレン

*現在、三菱電機（株）

($\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}$) をドーブした後、再加熱処理（色だしアニール）によってガラス中に $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}$ を粒径 10nm 程度の微粒子として析出させたものである。ドーバントである $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}$ の硫黄とセレンの組成比により吸収端の波長を広い範囲にわたって変えることができる。

ドーブガラスの光学的非線形性は、光吸収量によってかなり変化することが予想されるので、今回の実験では波長 480~520 nm に吸収端のある Y-48、Y-50、Y-52 の3つのタイプのガラスを用いた。それぞれのドーブガラス（厚さ 1 mm）の光吸収スペクトルを図 1 に示す。波長に対して吸収量が急峻に変化することがわかる。型番 Y-48 のドーブガラスについては、光源として Ar^+ レーザの波長 488.8 nm の光波を、型番 Y-50 および Y-52 については 514.5 nm の光波を用いて導波特性と光学的非線形性の評価を行なうことにした。この組み合わせでは、Y-52 のドーブガラスの場合が最も光吸収量が多く、以下 Y-48、Y-50 の順で吸収量が少なくなる。

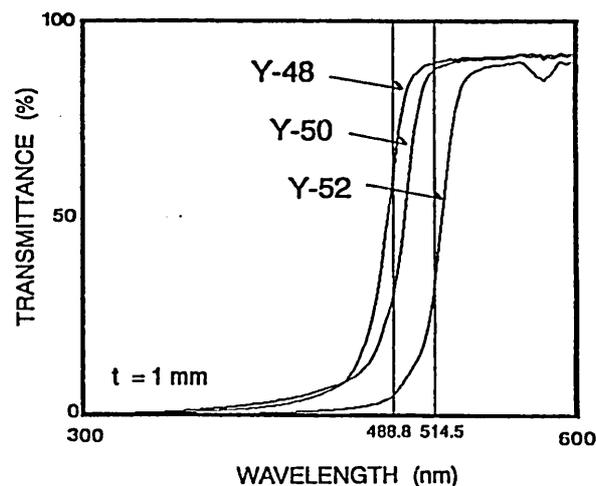


図 1 半導体ドーブガラスの光吸収スペクトル

表 1 母材ガラスの特性

組成比	Na_2O : 8.25 wt%
	K_2O : 12.7 wt%
屈折率	1.510 ($\lambda = 587.6 \text{ nm}$)
	1.513 ($\lambda = 514.5 \text{ nm}$)

また、Y-48、Y-50、Y-52の母材ガラスの特性を表1に示す。これからわかるように母材ガラスはソーダ石灰ガラスであり、 Na^+/K^+ イオン交換法を用いて光導波路を作製することにした。

3. 光導波路の作製

まず、イオン交換による屈折率変化と交換深さの大きさを調べるために、スラブ形導波路を作製した。370℃に熱した硝酸カリウムの熔融塩中にドープガラスを一定時間浸すことにより、ガラス表面に高屈折率層が形成されスラブ形光導波路が得られる。イオン交換時間を幾つか変えて導波路を作製し、交換時間と導波路の等価屈折率との関係を求めた。等価屈折率の測定にはプリズム結合法を用いた。Y-50で作製したスラブ導波路についての、波長514.5nmでの測定結果を図2に示す。屈折率分布がステップ形と近似して測定データに対してフィッティングを行なった結果が図中の実線である。これより、イオン交換条件を370℃、30分間とした場合には波長514.5nmにおける表面屈折率変化がおよそ0.008、等価膜厚は約3 μm であることがわかった。

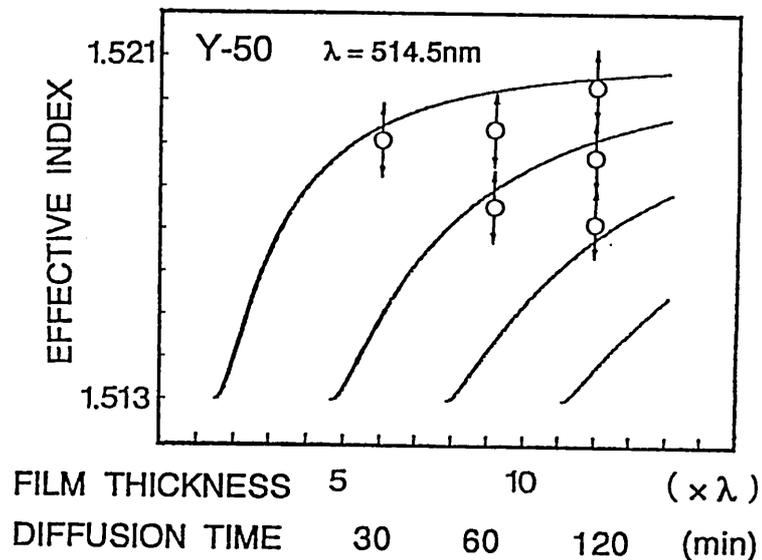


図2 スラブ導波路の等価屈折率と交換時間

次に、ガラス基板上にAl薄膜を蒸着し、フォトリソグラフィによるパターンニングによってマスクを作製した後、イオン交換を行うことによりチャンネル光導波路を作製した。チャンネル導波路の単一モード条件を求めるために、導波路幅を変えて方向性結合器を幾つか作製した。2本の単一モード導波路を隣接させた方向性結合器では、一方の導波路に入射された光波は、導波路間の結合のために伝搬に伴って他方の導波路へと完全に移行する。しかし、それぞれの導波路が多モード導波路である方向性結合器の場合には、一般にモードにより位相速度が異なるために完全な光波パワーの移行は生じない。各導波路の幅が $2\mu\text{m}$ 、間隔が $10\mu\text{m}$ の方向性結合器について、伝搬に伴う両導波路間の光パワーの移行を測定した結果を図3に示す。結合部分の長さが $8\mu\text{m}$ ではほぼ100%の光パワーの移行が生じており、両導波路共に単一モードとなっていることがわかる。さらに導波路の幅などの作製条件を変えて方向性結合器を作り、測定を行なうことにより、イオン交換温度 370°C 、交換時間30分の場合では、導波路幅が $2.3\mu\text{m}$ 以下で単一モード導波路が得られることがわかった。

更に、カットバック法によりY-48、Y-50、Y-52それぞれのチャンネル導波路の伝搬損失を測定した。型番Y-48のドープガラスで作製した導波路では波長 488.8nm において、Y-50およびY-52を用いた場合には波長 514.5nm において測定を行なった。幅 $2\mu\text{m}$ の単一モード導波路での測定結果を表2に示す。

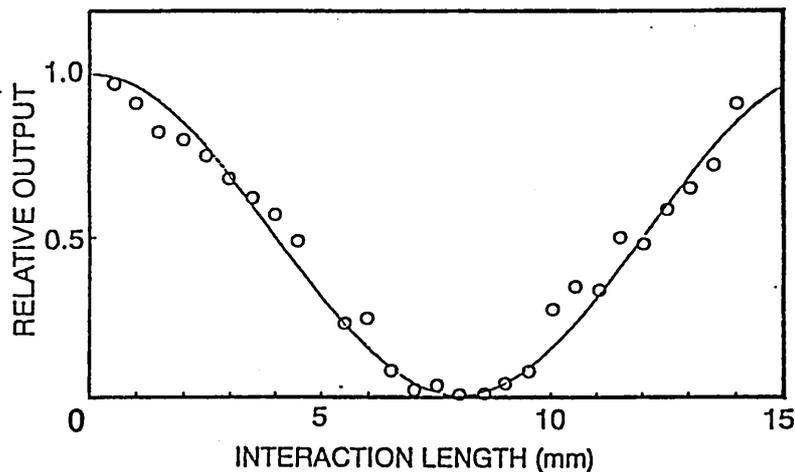


図3 方向性結合器の出力特性測定結果
(導波路幅 $2\mu\text{m}$ 、導波路間隔 $10\mu\text{m}$)

表2 チャネル導波路の伝搬損失

	導波路幅	測定波長	伝搬損失
Y-50	2 μm	514.5 nm	1.9 dB/cm
Y-48	2 μm	488.8 nm	6.9 dB/cm
Y-52	2 μm	514.5 nm	36.6 dB/cm

4. 非線形吸収特性の測定

作製した単一モードチャネル導波路の光学的非線形性の評価を行った。今回は、光強度に対する導波特性、特に吸収特性の変化を測定した。測定系を図4に示す。光源にはCW Ar⁺ レーザの波長 514.5 nm と 488.8 nm の光を用いた。熱による導波路の劣化を避けるために、レーザ光をA/O 偏向器で幅 1ms 以下の光パルスにして導波路に入射した。

型番Y-52 のドープガラスで作製した単一モード直線導波路（導波路幅 2 μm 、長さ 6mm）に波長 514.5nm、パルス幅 6 μs 、ピークパワー 700mW のパルスを入力したときの、出力光強度の測定例を図5に示す。導波路からの出力光パルスの幅が入

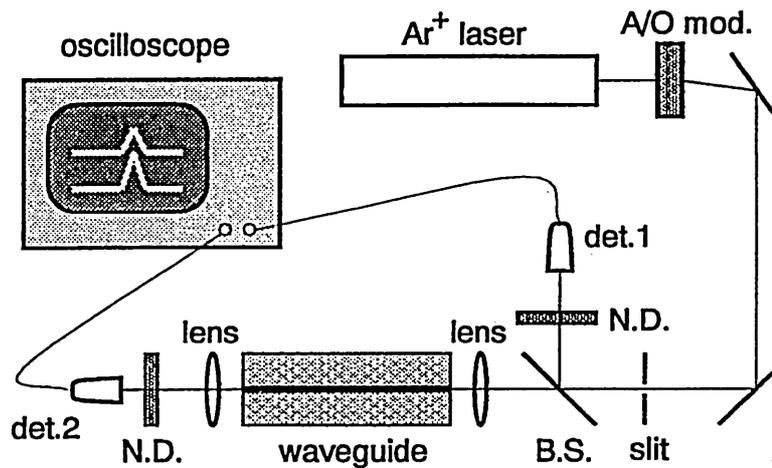


図4 導波路入出力特性の測定系

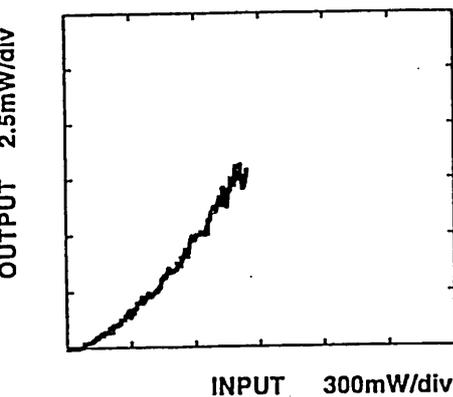
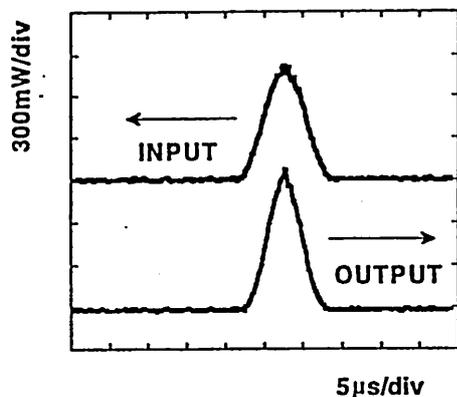


図5 チャンネル導波路の入出力特性1
(Y-52, 入力パルス幅 $6 \mu s$)

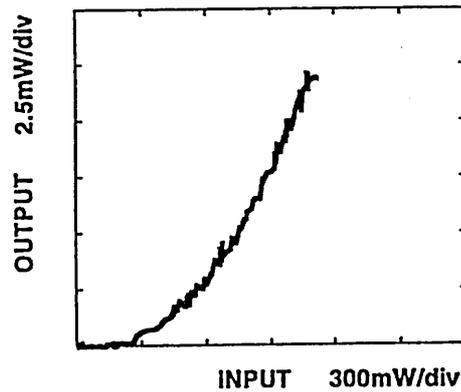
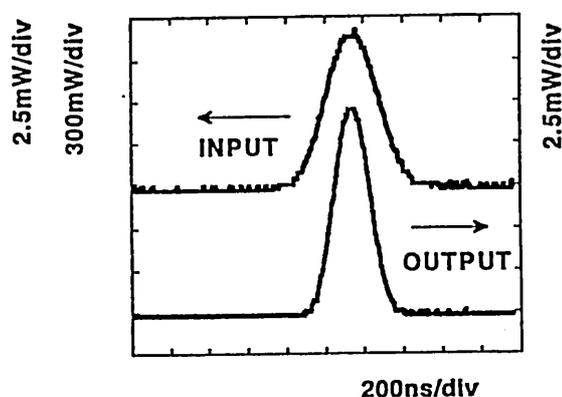


図6 チャンネル導波路の入出力特性2
(Y-52, 入力パルス幅 $300 ns$)

力に比べて短くなっており、光吸収の飽和が明瞭に観測された。また、入力パルス幅を $300 ns$ と短くすると、より強い吸収の飽和が観測された(図6)。吸収の飽和のために見かけ上の導波路の挿入損失は約 $10 dB$ 減少した。

また、型番 Y-48 のガラスを用いた単一モード直線導波路(導波路幅 $2 \mu m$ 、長さ $16 mm$) に波長 $488.8 nm$ の光を入射した場合には、導波路に光パルスを入力するごとに出力光パルスの波形が変化する現象が観測された。特に、出力パルスと入力パルスとの間に時間遅れが見られた(図7)。シングルショットパルス光(パルス幅

300ns、ピークパワー 300mW) を数秒以上の時間間隔をあけて導波路に入射した場合、出力光パルスのピークが入力パルスのピークに対して時間的に遅れるようになり、出力パルスの波形は光パルスを入射する毎に変化した。そして、数回にわたり光パルスを入射すると、入出力パルス間の時間遅れが消えて、吸収の飽和だけが見られるようになり、出力光のパワーが最初にパルスを入射した場合の約2倍となった。この現象は Y-48 のドーブガラスで作製したいくつかの直線導波路で再現性よく観測された。

Y-50 で作製した単一モード導波路に波長 514.5 nm の光波を入力した場合には、入力光パワー 2 W 以下で入出力光強度の関係に非線形性はみられなかった。

5. 非線形光学係数の評価

測定した飽和吸収特性をもとに、光波の導波路中の減衰を考慮して、導波路の吸収係数と光強度の関係を求めた。通常の半導体ドーブガラスでは、ガラス中の半導体微粒子の粒径がそろっていないために、微粒子へのキャリアの閉じ込めに起因する共鳴吸収周波数が広がりを持つことが報告されている[4]。このため、吸収端付近では不均一広がりを持つ系の飽和吸収特性を示すものと考えられ、ドーブガラスの吸収係数 α は光

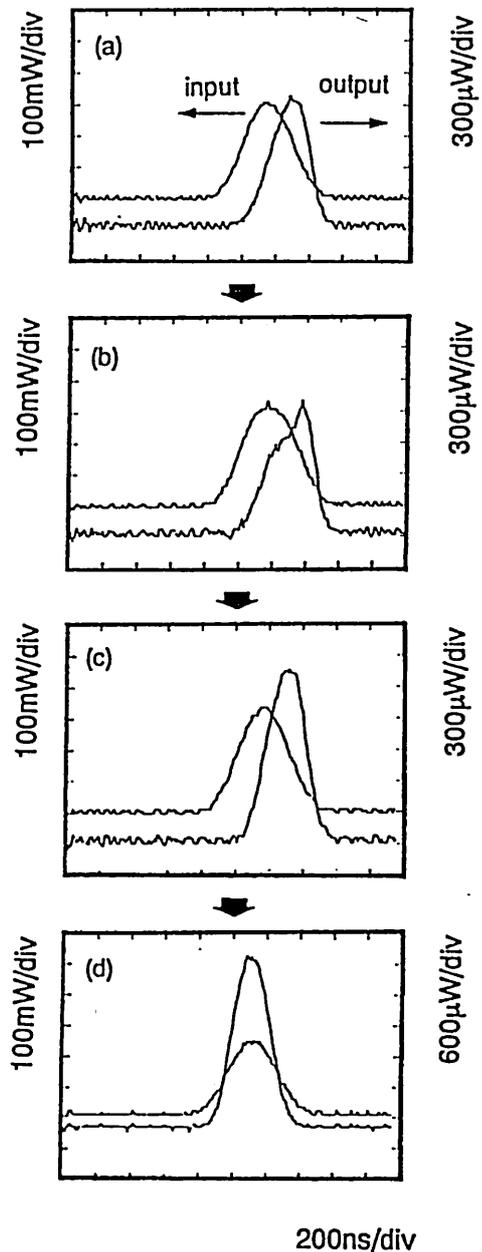


図7 チャンネル導波路の入出力特性3 (Y-48, 入力パルス幅 300 ns)

- (a) 1回目
- (b) 2回目
- (c) 3回目
- (d) 4回目以降

強度 I に対して次式のような変化を示すことが予想される[9]。

$$\alpha = \alpha_0 - \Delta\alpha / (1 + I_0 / I)^{1/2}$$

ここで、 I_0 は飽和光強度、 α_0 は飽和が生じないときの吸収係数、 $\Delta\alpha$ は吸収係数の最大変化量である。これをもとにして、直線導波路の入力光強度と出力光強度の関係を計算した。 α_0 は伝搬損失の測定結果より算出した。また光波モードの界分布の吸収による乱れは十分小さいとして無視した。Y-52 のドープガラスで作製した導波路の測定データに対する計算結果を図 8 に示す。計算値と実験値がよく合致しているのがわかる。Y-48 のドープガラスで作製した導波路の吸収特性についても同様な計算を行なうことにより、Y-52 および Y-48 のドープガラスの $\Delta\alpha$ 、 I_0 は表 3 のように求められた。

Y-48 のドープガラスで作製した導波路で見られた入力パルスと出力パルスの時間遅れについては、その発現機構等について現在考察を進めている。

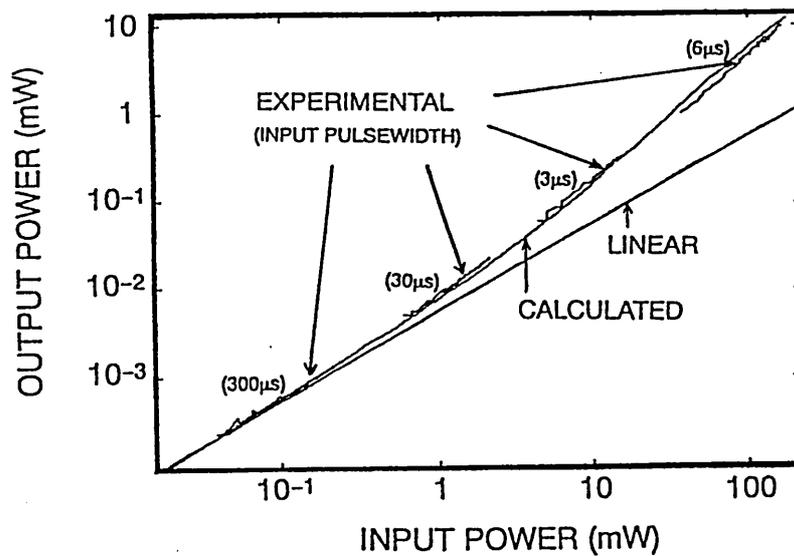


図 8 Y-52 を用いた単一モード導波路の入出力特性

表 3 チャンネル導波路の吸収係数変化量と飽和光強度

	α_0 [cm^{-1}]	$\Delta\alpha$ [cm^{-1}]	I_0 [kW/cm^2]
Y-52	8.3	4.8	120
Y-48	1.6	0.6	50

6. むすび

ソーダライム系の新しい半導体ドープガラスを用いて光導波路を作製し、その光学的非線形性を測定した。Na⁺/K⁺イオン交換法によって光導波路を作製し、単一モード条件を求めた。作製した単一モード導波路にAr⁺レーザ光を入射すると、導波路の入出力特性に著しい非線形性があらわれ、光吸収の飽和が観測された。測定結果から導波路の光吸収係数と光強度との関係を求めたところ、不均一広がり系の飽和吸収特性とよく一致することがわかった。これは、ガラス中の半導体微結晶の粒径が不均一であることを示しているものと思われる。また、入力光パルスと出力光パルスの時間遅れも観測された。今後は、さらに光強度による屈折率変化の評価を行い、この光導波路を用いた新しい光信号処理デバイスの試作、実験を行ってきたい。

参考文献

- [1] G.I.Stegeman, E.M.Wright, N.Finlayson, R.Zanoni, and C.T.Seaton, *IEEE J.Lightwave Technol.*, 6, No.6, pp.953-970 (1988).
- [2] R.K.Jain and R.C.Lind, *J.Opt.Soc.Am.*, 73, No.5, pp.647-653 (1983).
- [3] P.Roussignol, D.Ricard, J.Lukasik, and C.Flytzanis, *J.Opt.Soc.Am.B*, 4, No.5, pp.5-13 (1987).
- [4] D.W.Hall and N.F.Borrelli, *J.Opt.Soc.Am.B*, 5, No.8, pp.1650-1654 (1988).
- [5] N.Finlayson, W.C.Banyai, C.T.Seaton, G.I.Stegeman, M.O'Neill, T.J.Cullen, and C.N.Ironside, *J.Opt.Soc.Am.B*, 6, No.4, pp.675-684 (1989).
- [6] 村田博司, 下村健吉, 井筒雅之, 末田正, 第38回応用物理学会春季全国大会, 28a-SF-18, p.950 (1991).
- [7] 村田博司, 下村健吉, 井筒雅之, 末田正, 第53回応用物理学会秋季全国大会, 18p-X-14, p.977 (1992).
- [8] K.Shimomura, H.Murata, M.Izutsu, and T.Sueta, *Jpn. J. Appl. Phys.* 投稿中.
- [9] P.N.Butcher and D.Cotter, "The Elements of Nonlinear Optics", Cambridge University Press (1990).

RS 92-17

YIG薄膜を用いた磁気光学・磁界センサーについて

堤 誠

ウシュヌ プリエ

Makoto TSUTSUMI

Vishnu Priye

京都工芸繊維大学

1 まえがき

YIG (Yttrium Iron Garnet)における磁気光学効果(Magneto optic effect)を用いた光・磁気センサは電力システム系統の電流の観測・制御などに広く使われている。⁽¹⁾ しかしながらこれらの多くはバルク状・YIG単結晶を用いたセンサであり、YIG薄膜を用いたこの種のセンサの研究はあまり見られない様である。一方、薄膜構造では磁気光学導波路(Gyro tropic Waveguides)としての研究が主である。^{(2)~(4)}

本稿では磁気光学導波路を用いたファラデー回転形磁気センサの機能について薄膜の厚みの観点から理論的に考察する。次に実験結果について述べ、特にセンサの高速応答、マイクロ波応答について述べる。

2 理論

問題の構成を図1に示す。厚さdのYIG薄膜がGadolinium Gallium Garnet (GGG)上に液相成長されているものとする。センサとして機能を有効にするため光の伝搬方向、Z方向に磁界を印加し、ファラデー回転形センサを考慮する。

Z方向に直流磁界を印加した磁気光学媒質、YIGにおける誘電率テンソルは

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_g & -j\epsilon' & 0 \\ j\epsilon' & \epsilon_g & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

で与えられる。⁽²⁾ (1)に示すテンソルで電磁界の進む方向がZ方向であれば、界はハイブリッドモードである。ここではハイブリッドモードを厳密に取り扱わず、TEとTMモードが分離した形をもとに結合モード理論⁽⁵⁾により近似的に取り扱う。

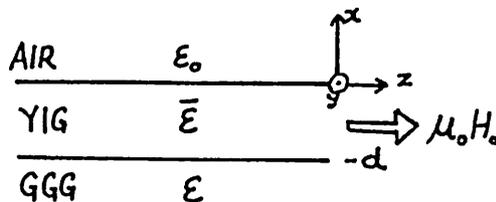


図1 問題の構成

$\frac{\partial}{\partial y} = 0$ と仮定した二次元の磁気光学導波路におけるTEおよびTMモードの電磁界を境界条件を考慮し、

直交関係：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\beta_{TE}}{\omega \mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_y|^2 dx &= 1, \\ \frac{1}{2} \frac{\beta_{TM}}{\omega \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H_y|^2}{\epsilon_g} dx &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

を用いると、TEモードの振幅AとTMモードの振幅Bとの間の関係を与えるモード結合方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} &= K_{TE-TM} B e^{j\Delta z}, \\ \frac{\partial B}{\partial z} &= K_{TM-TE} A e^{-j\Delta z}, \quad \Delta = \beta_{TE} - \beta_{TM} \end{aligned} \quad (3)$$

を得る。ここに β_{TE} 、 β_{TM} は(1)のテンソルの非対角項成分 ϵ' を零と置いた場合に求まるTEおよびTMモードの伝搬定数である。そして結合係数 K は

$$K_{TE-TM} = \frac{j\beta_{TM}}{4} \int_{-d}^0 \frac{j\epsilon'}{\epsilon_g} H_y E_y dx \quad (4a)$$

$$K_{TM-TE} = \frac{j\beta_{TE}}{4} \int_{-d}^0 \frac{-j\epsilon'}{\epsilon_g} H_y E_y dx \quad (4b)$$

となる。ここに K_{TE-TM} はTEモードからTMモードに結合する大きさを、 K_{TM-TE} はTMモードからTEモードに結合する大きさを与える係数である。

式(4)からファラデー回転角 ϕ は L を Z 方向の長さとする

$$\phi \simeq \kappa L \quad (5)$$

で与えられる。⁽⁵⁾ この様に ϕ は χ の関数すなわち薄膜の厚みに関連し、従来のTEモードからのファラデー回転角度の定義⁽¹⁾とは薄厚が関係する点で異なる事になる。

図2はGGGの誘電率 $\epsilon = 4.89$ ($n=2.21$), YIGの $\epsilon_g = 5.23$ ($n=2.28$), $\epsilon_r = 5.0$ と仮定し, 結合モード方程式(3)を数値的に評価して求めたTEおよびTMモードの分散曲線である。同図は基本モードと1次の高次モードのみを描いているが(1)の非対角項成分 ϵ' , すなわち両モード間の結合により, 曲線が変化する事が分かる。また, 高次のTMモードの曲線とTEモードの基本モードとが交叉する事は興味深い。(2)

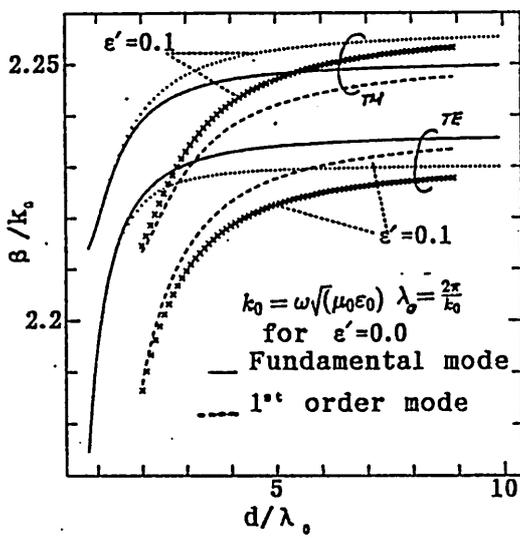


図2 分散曲線

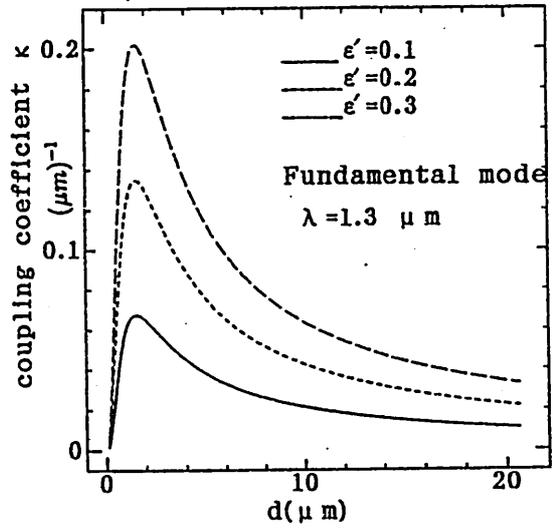


図3 結合係数の膜厚依存性

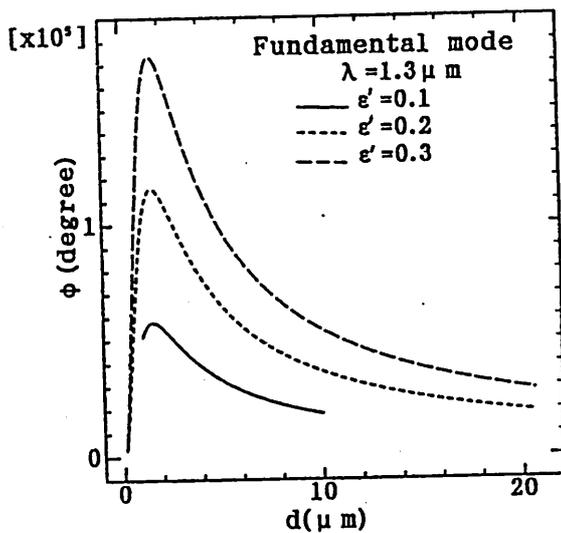


図4 ファラデー回転角の膜厚依存性

図3は(4)の結合係数を基本モードにたいして数値的に厚みの関数として評価したものである。同図から結合は厚みに依存し、かつ θ によって大きく変化する。

図4は薄膜の厚みを変えて求めたファラデ回転角 ϕ の数値計算例である。なお、この場合YIG薄膜の長さは $L=15\text{mm}$ と固定し、かつ基本モードのみにたいしての評価である。同図から薄膜が $5\mu\text{m}$ 以下になると、ファラデ回転角は大きくなる事が分かる。この事はまたTEモードとTMモードの間の結合は膜厚が薄いほど大きくなる事に関連する。

3 実験

実験に用いたYIG薄膜は厚さ $100\mu\text{m}$ 、幅 5mm ×長さ 15mm のものである。このYIG薄膜はいくらかのBiがドーパされているものの主に静磁波デバイス用に作成されたものである。⁽⁵⁾

図5はこの測定系のブロックダイアグラムを示す。なおこのブロックダイアグラムは後に述べるマイクロ波応答に関する実験のブロックダイアグラムも含めている。光源は最大 15mW で波長は $1.33\mu\text{m}$ のレーザダイオードである。両端を光学研磨したYIG薄膜にエッジカップリングの形で光を入射させ、アナライザを通じてゲルマニウムダイオード光検波器に应答する信号を検出する。 3mW の光入力信号にたいして光検波器に現れる電圧はYIG薄膜が無い場合、 2V である。なおYIG薄膜による挿入損は約 13dB である。磁界の印加には2つのコイルを用いる。1つのコイルは商用周波数磁界を加えるためのコイルで他はバイアス用のコイルである。

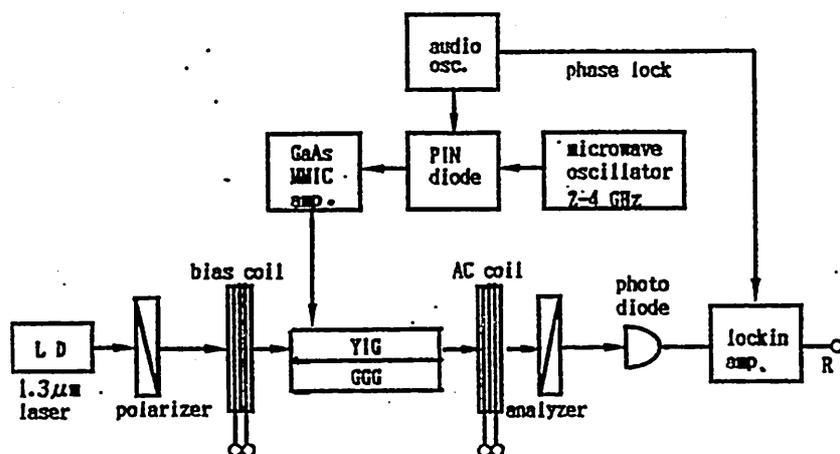


図5 測定系のブロックダイアグラム

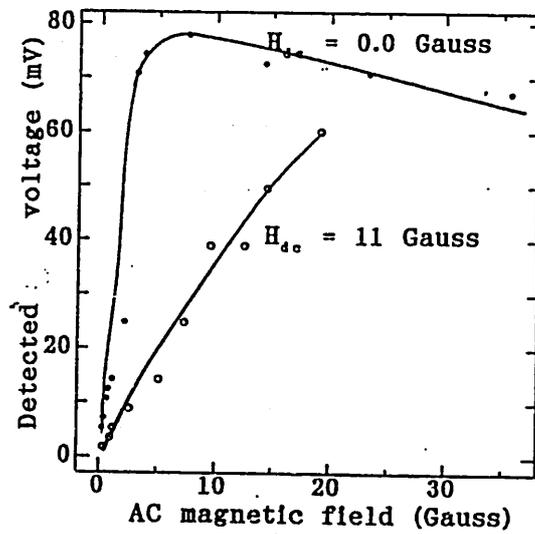


図6 商用周波数
磁界の応答特性

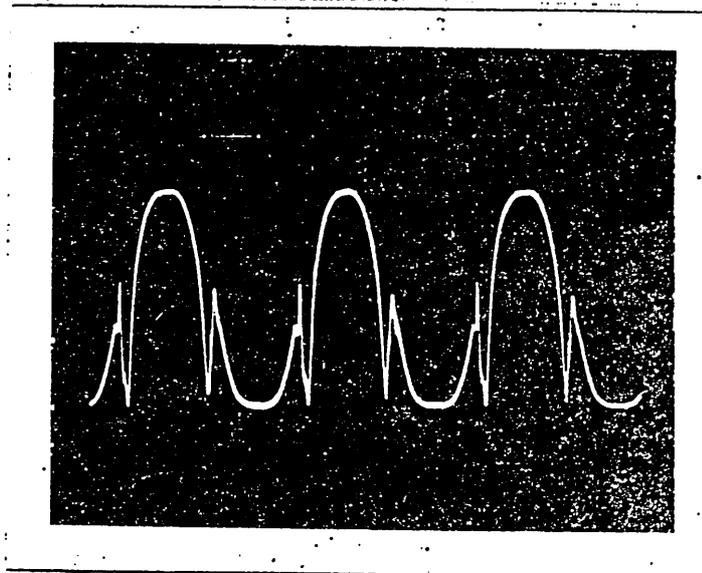


図7 零バイアスでの
商用周波数の磁界波形

図6に60 Hzの商用周波数磁界を用いた場合の磁界の応答特性を示す。零バイアスの場合、場合最小0.5 Gaussまで応答があり、かなり磁界に対する応答が敏感である。しかしながら零バイアスの場合は図7に示す様に歪んだ磁界の波形となる。一方、バイアス磁界を11 Gauss加えた場合の応答特性も図6に示す。この場合の波形は正弦波となり歪みは無くなるが感度はいくらか低下する。なおこれらの実験から求まるYIG薄膜のヴェルデ定数は3位である。

次にこのセンサの応答速度を知るためにマイクロ波磁界を印加する実験を試みた。従来まで磁界に対する応答速度は数MHz以下と遅いものと考えられていたが、最近、この応答は1GHzまである事が報告されている。⁽⁸⁾⁽⁹⁾ この場合問題となる点はマイクロ波磁界を印加するための回路構造にある。ここでは図8に示すような2つの方法、1つは短絡された線状アンテナによる方法、他は短絡されたマイクロストリップ線路である。なお線状アンテナの場合、作られる磁界を簡単な形で評価すると、50Ω負荷で約200mwのマイクロ波電力の印加で0.2Gauss位の磁界となり、この値は本実験装置で検出可能な値である。

実験方法は図5に示すブロックダイアグラムで新しくマイクロ波発振器そしてGaAs増幅器さらに信号検出の感度を上げるためにPIN変調器およびロックイン増幅器が加わる。10³Hzでマイクロ波をPIN変調器により振幅変調し、光の強さを5.5mwと12.1mwとに変えて測定された本装置における磁気センサの2GHzから4GHzにおける周波数応答特性を図9に示す。この場合の特性は短絡された線状アンテナによるものであるが、マイクロ波入力電力150mwで検出される信号は数mV位であり、きわめて弱い信号である。しかしながら実験結果から4GHzまで磁気光学効果は応答する事が分かる。図10はこの応答のバイアス磁界の依存性を周波数を2.1GHzと固定して求めたものである。同図からバイアス磁界が強くなると応答が無くなる事が分かる。したがってこの応答は数100Gauss以上の強い磁界で見られる静磁波と光との相互作用によるものではなく、⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾磁壁そのものの動きがマイクロ波まで応答する事を意味し⁽⁹⁾きわめて興味深い。

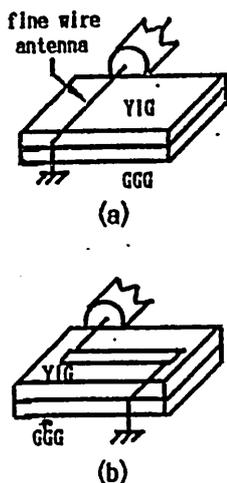


図8 短絡線状アンテナと
マイクロストリップ線路

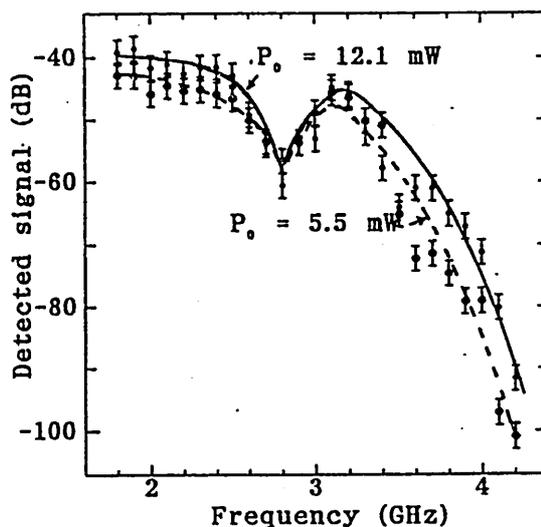


図9 磁気センサの
マイクロ波応答特性

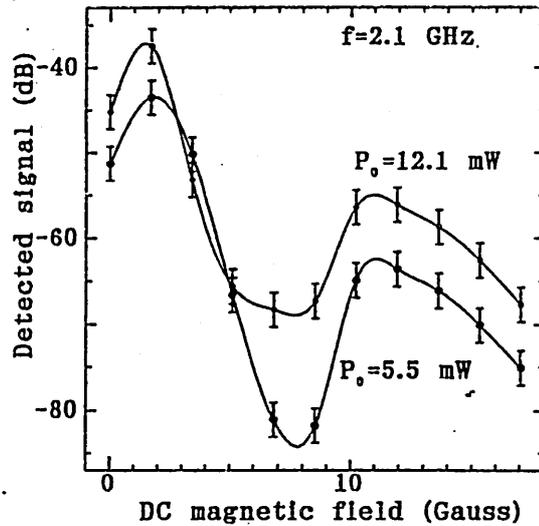


図10 マイクロ波応答の
バイアス磁界依存性

次に図8の(b)に示す短絡されたマイクロストリップ線路を用いて同様な実験を行ったところ図9に示す実験結果と同じ周波数特性を示したが検出感度が10 dB (ファラデ回転角)程増加した。しかしながら信号の増加に伴い検出信号の振幅が不安定となるなどの現象が現れ、これに関しては現在検討中である。

4 むすび

結合モード理論によりYIG薄膜における磁気光学効果によるファラデ回転角を薄膜の厚みの関数として評価し、最適な薄膜の厚みがある事が明らかにした。一方、実験は現在のところ100 μ mの厚さの薄膜を用いて行われ、理論値との対比は行えなかったが、磁気センサとして十分な機能が得られた事、さらにマイクロ波まで応答があるなど興味ある結果を得た。特にマイクロ波応答は磁気光学媒質を通じて光とマイクロ波との相互作用を与える事を意味し、センサは無論、高速光信号処理などへの応用への期待が大きい。

謝辞 レーザダイオードなどの作成でお世話になった大阪産業大学の中西卓二教授およびNTT光エレクトロニクス研究所の中野秀男氏に感謝の意を表す。

文献

- 1) 沢 武司 黒沢 潔; 光CT・PTの開発
電気学会誌 Vol 110,2.pp.120~123 (1990).

- 2) S.Yamamoto Y.Koyamada and T.Makimoto;
 "Normal-mode analysis of anisotropic and gyrotropic thin-film waveguides for integrated optics"
 J.Appl Phys. 43,12 pp.5090-5097 (Dec. 1972).
- 3) J.Harner;
 "Non reciprocal magneto optic waveguides"
 IEEE Trans.on Microwave Theory & Tech,
 MTT-23,1,pp.70-78, (Jan.1975).
- 4) V.Priye & M.Tsutsumi;
 "Non-reciprocal leaky behaviour in multi-layered gyrotropic waveguide"
 電気学会 電磁界理論研究会資料 EMT-92-70 (Oct.1992).
- 5) A.Yariv;
 "Coupled-mode theory for guided optics"
 IEEE Journal of Quantum Electronics QE-9
 NO.9 pp.919-933 (Sept.1973).
- 6) 堤 誠; "静磁波のマイクロ波デバイスへの応用"
 電子情報通信学会誌 74,12. pp.1292-1297 (Dec.1991).
- 7) 阿部正紀 下里 学 小塚義成 今枝美能留;
 ベルテ定数と光源強度に感度が依存しない磁気光学・電流・磁界センサ,
 日本応用磁気学会誌 14 pp.391~394 (1990).
- 8) M.N Deeter,A.H.Rose and G.W.Day;
 "Fast,Sensitive magnetic field sensors based on the Faraday effect in YIG" J.of Light wave Tech,8.N012 pp.1838-1842 (Dec.1991).
- 9) R.Wolfe,E.M.Gyorgy, R.A.Lieberman V.J.Fratello and S.J.Licht
 M.N.Deeter and G.W.Day;
 "High frequency magnetic field sensors based on the Faraday effect in garnet films"
 Appl.Phys.Lett.,60(17),27 pp.2048-2050 (April 1992).
- 10) D.D.Stancil;
 "Optical-magnetostatic wave coupled-mode interactions in Garnet Heterostructures"
 IEEE Journal of Quantum Electronics 27,1 pp.61-69 (Jan.1991).

輻射科学研究会資料番号 (RS 92-18)

結合量子井戸 $p-i-p-i-n$ 構造を用いた
全光学的光双安定素子

阿部雄次, 徳田安紀, 塚田紀昭

三菱電機株式会社 中央研究所

1. はじめに

情報システムの高機能化・多機能化の要求はますます強まっており、それに対して光の持つ並列処理や高速性などの特徴を利用しようという研究が注目されている。光双安定素子は、光スイッチングや光メモリなどの機能を有し、次世代光情報処理におけるキーデバイスになると考えられ広く研究が進められている。^{1, 2)}

これまでの光双安定素子は、2つのタイプに大別される。ひとつは材料の非線形光学効果を利用するもので、もうひとつは電気光学効果を利用するものである。前者の代表として、非線形エタロン素子^{1, 2)}があげられる。これは非線形光学材料を光共振器中に挿入したものであり、外部に何も接続しないで全光学的に動作するという特徴を持つ。しかし、材料の非線形光学効果は極めて小さいのでスイッチングに大きな入力光強度を必要とし、熱的な問題などがある。また、共振器構造が必要であるため、作製上の困難さも伴う。

一方、電気光学効果を利用した代表的なものとして、SEED (self-electro-optic effect device) と呼ばれる素子^{3, 4)}があげられる。この素子は、量子井戸構造の電界変化による励起子吸収ピークシフト、いわゆる量子閉じ込めシュタルク効果 (QCSE)⁵⁾ と電気光学的フィードバック効果とを組み合わせたものであり、小さな入力光強度で動作するという特徴を持つ。しかしながら、一般に、SEEDは逆バイアス印加用の電源を必要とし、さらに二次元集積化を考えた場合、素子分離した1つ1つにフィードバック用の電気部品を接続する必要がある。

本研究では、外部電気部品を必要とせず、全光学的に機能し、かつ低入力で動作する光双安定素子を作製する方法について検討した。以下、2節では、まず無バイアスでも量子井戸間の結合効果を用いれば量子井戸フォトダイオードを双安定動作させることができることについて述べる。3節では、さらにその構造を基本にして、電気光学効果を素子内部で生じさせることにより低入力動作する全光学的双安定素子が実現できることを示し、4節

でまとめを行う。

2. 非対称結合量子井戸フォトダイオードの無バイアス光双安定特性

ここでは、外部電源で逆バイアスを印加しなくても非対称結合量子井戸における電子準位の共鳴結合を用いればビルトイン電界にフィードバックを与えるだけで光双安定動作が可能であることについて述べる。

通常のSEEDは、真性領域に光吸収層として量子井戸を含んだ*p-i-n*フォトダイオードにフィードバック用の抵抗を介して逆バイアスを印加する構成をしている。ここで、QCSEにより逆バイアスを印加することで励起子吸収ピークが長波長側にシフトする。これにより、ある適当な波長の光を入射するとき、図1(a)に示すようなピーク構造をもつ光電流/印加電圧特性が得られる。ここで、フィードバックエレメントとして直列抵抗*R*を用いた系の応答は、電圧軸とバイアス電圧*V₀*で、電流軸と*V₀*/*R*で交差する負荷直

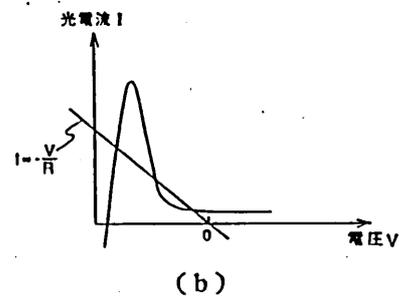
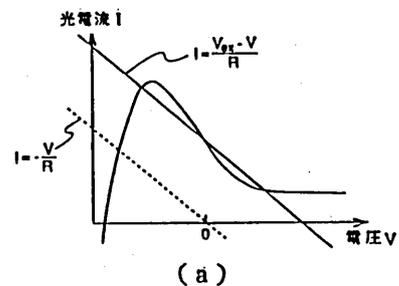


図1. (a):通常のSEEDの双安定動作を説明する図, (b):無バイアスで双安定特性を得るための条件を説明する図

線とこの特性曲線との交点から予測できる。すなわち、図1(a)の実線のようにピーク構造を利用して3点で交わる場合、双安定動作が得られる。

しかしながら、バイアスをかけない場合 ($V_{bias} = 0V$) は負荷特性は破線のように原点を通る直線になるため(a)のような応答特性では双安定動作は得られないことが分かる。従って、無バイアスでも双安定動作を得るためには図1(b)に示すように順バイアス領域で鋭いピークをもつ特性が必要となる。すなわち、順バイアス領域で印加電圧の変化に対してより大きな励起子吸収特性の変化が必要となる。

このような大きな電界吸収特性を得るために、我々は量子井戸間の結合効果⁶⁻⁸⁾を利用することを考えた。図2(a)に示すようなバンド構造をもつ非対称結合量子井戸(左が広い井戸、右が狭い井戸)に電界を印加する場合、(b)に示すように2つの井戸の電子準位をある電界の近傍で共鳴結合させることができる。このとき、井戸間結合が十分強ければエネルギー準位の反発が生じ、それらの準位に関係した励起子吸収ピークは(c)の実線のような反交差特性を示す。一方、結合が弱い場合はエネルギー準位の反発も生じないため点線のような電界依存性が予想されるが、実際に観測され利用できるのはQCS Eに支配された変化の小さい遷移のみである。このように結合量子井戸構造を用いれば通常のQC

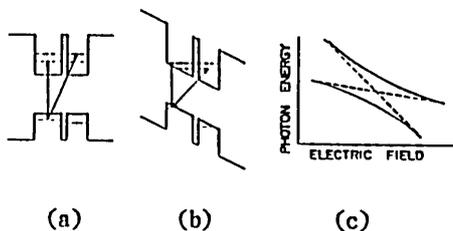


図2. 非対称結合量子井戸のバンド図((a):電界なし、(b):電界あり)および励起子吸収ピークの電界依存性(c)

SEより大きな吸収ピークのレッドシフトが得られることが分かる。またこれに加えて交差電界近傍では振動子強度も大きく変化することが期待できる⁸⁾。

これらを確認するために、真性領域に非対称結合量子井戸を含む*p-i-n*フォトダイオードの励起子吸収ピーク波長と振動子強度の印加電圧依存性を調べた。図3に光電流スペクトルの測定から得られた結果を示す。井戸間の結合の強さに対する依存性をみるために、結合量子井戸としては、100Åと60ÅのGaAs井戸を8Å(図3の白丸)あるいは21Å(図3の黒丸)のAlAsトンネル障壁層で仕切った2種類について調べた。真性領域の厚さは、ともに約3000Åとし、ここに4ペアの結合量子井戸を挿入した。なお、21Åの障壁層をもつ素子に対しては光電流スペクトルの最長波長のピークについて、8Åの障壁層をもつ素子に対してはピーク波長の変化はエッジ付近の2つのピークについて、強度の変化は最長波長のピークに対してのみ示した。障壁層が21Åの素子では、2つの井戸の結合の効果は観測されず、通常のQCS Eに基づく励起子吸収ピーク波長と振動子強度の印加電圧依存性が観測された。(図2(c)の破線の場合に対応する)。それに対し障壁層が8Åの素子では、顕著な反交差特性(図2(c)の実線の場合に対応する)が観測され、長波長側の励起子吸収ピークは波長および振

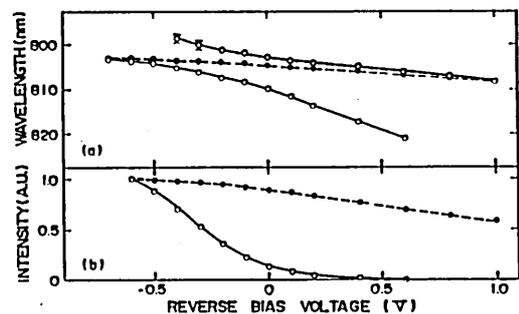


図3. トンネル障壁層が8Å(白丸)と21Å(黒丸)の場合の励起子吸収ピークの波長(a)および振動子強度(b)の電圧依存性

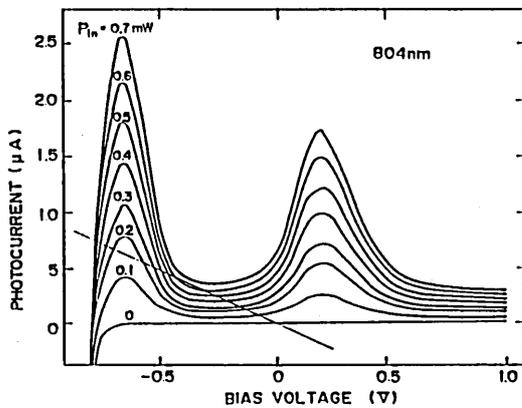


図4. 非対称結合量子井戸フォトダイオードの光電流/電圧特性および100kΩの抵抗の負荷特性

動子強度とともに21Åのものより大きく変化していることがわかる。また、順バイアス領域で大きな電界吸収効果が得られるように準位の交差が0バイアスより若干順バイアス側で生じるように、2つの井戸の厚さを設計した。このように吸収ピークの波長と強度の変化の相乗効果により図1(b)に示す双安定条件を満たすものと期待される。

図4に、8ÅのAlAsトンネル障壁層を持つ*p-i-n*フォトダイオードに波長804nmの光の強度 P_{in} を0から0.7mWに変化させて入射させた場合の77Kにおける光電流/電圧特性を示す。観測された2つのピークは、図3から反交差特性によることがわかる。すなわち、順バイアス領域にあるピークは準位が交差する前の吸収ピークに、逆バイアス領域にあるピークは準位が交差した後の吸収ピークに対応するものである。予想されたように、順バイアス領域のピークは井戸間結合の効果により非常に鋭く、例えば、図中に示した100kΩの直列抵抗のみをフォトダイオードに接続した場合の負荷特性と入力光の強度が0.2から0.6mWの範囲で3つの交点を持ち、その領域で双安定動作することがわかる。

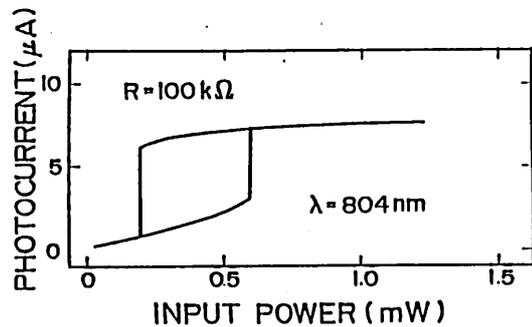


図5. 非対称結合量子井戸フォトダイオードの無バイアス光双安定特性(波長804nm, 抵抗100kΩ, 77K)

図5に、波長804nmの入力光の強度を変化させた場合の光電流の特性を測定したものを示す。直列抵抗は、100kΩである。図4から予想されるように、0.2から0.6mWの入力光強度の範囲で明瞭な双安定特性が観測された。また、この双安定特性は波長802から806nmの範囲で観測された。

以上のように、*p-i-n*フォトダイオードの光吸収層として非対称結合量子井戸を用いることにより、逆バイアスを印加しなくても(外部電源なしで)抵抗を接続するのみで光双安定特性が得られることが分った。これより、この様な構造に抵抗体などのフィードバックエレメントを積層集積できれば、外部に何も電気部品を接続しないで(機能的に全光学的に)動作する光双安定素子が得られることが期待できる。

3. 全光学的光双安定素子

以上の結果を踏まえ、図6(a)に示すように非対称結合量子井戸*p-i-n*フォトダイオードの*p-AlGaAs*($x=0.33$)層中に、*i-AlAs*層を挿入した、*p-i-p-i-n*構造を作製した。*i-AlAs*抵抗層の厚さは1000Åとし、約3000Åの光吸収層に100Åと60ÅのGaAs量子井戸を4ÅのAlAsトンネル障壁層で仕切った非対称結合量子井戸を12ペア入れた。こ

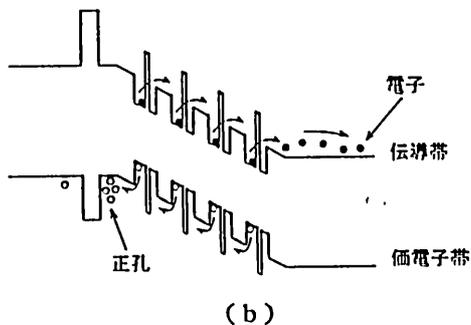
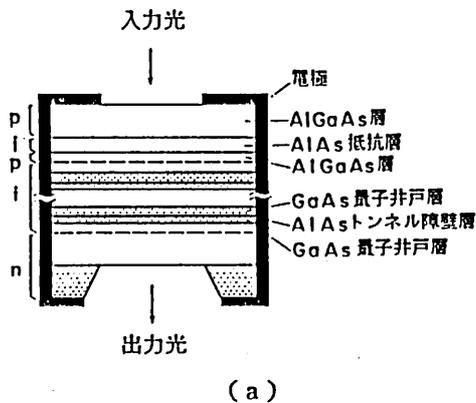


図6. 全光学的な光双安定素子の構造図(a), およびバンド図(b)

ここで、(b)のバンド構造からも分るように、 p -AlGaAs層中に挿入した i -AlAs層は、正孔にとって障壁となるため抵抗体として働くことが期待できる。上部には直径 $800\mu\text{m}$ の光入射用窓を開け、さらに、出力光(透過光)強度を直接観測するために、GaAs基板を選択エッチング液で一部除去した。また、上下にオーミック電極を形成し、図のように側面で短絡した。

図7に、この素子に波長 800nm の光を入力したときの 77K における光入出力特性を示す。 $17.5\mu\text{W}$ から $25\mu\text{W}$ の入力光強度範囲で明瞭な双安定特性が観測された。これは、 p -AlGaAs層中の i -AlAs層が抵抗的なフィードバックエレメントとして有効に機能したためであると考えられる。ここで、入射ビ

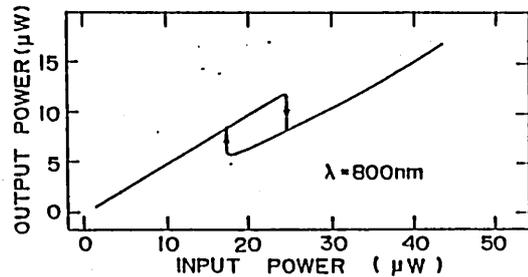


図7. 全光学的な光双安定素子の光入出力特性 (波長 800nm , 77K)

ーム径は約 $500\mu\text{m}$ であるので、双安定動作させるのに必要な入力光強度の面密度は、約 $10\text{mW}/\text{cm}^2$ と換算され、外部に何も接続する必要のない全光学的な光双安定素子としては、非常に低入力強度で動作する素子が得られたということがわかる。本素子では光双安定特性は、 799nm から 804nm の入力光に対して観測された。

なお、今回作製した素子は、 77K での動作に対して構造を最適化したため、室温において光双安定動作を示さなかったが、原理的には室温動作は可能であると考えられる。

4. まとめ

光吸収層として非対称結合量子井戸構造を真性領域に含んだ p - i - n フォトダイオードの p -AlGaAs層中に、 i -AlAs抵抗層をさらに挿入した p - i - p - i - n 構造素子において、外部電気部品を必要としない全光学的な光双安定特性が、極めて低い入力光強度で得られることを示した。これらの特長に加え、本素子は光入力により生じたキャリアの拡散距離程度の空間分解能を持つと考えられるので、通常のSEEDのような素子間分離が不要であり、二次元光情報処理に適した構造である。また、フィードバックエレメントとして共鳴トンネルダイオードなどの負性抵抗を示す素子²⁾を積層集積すれば、より双安定動作が得られ易く、高速化も可能となると考えられる。

参考文献

- 1) H. M. Gibbs et al., Phys. Rev. Lett. 36, 1135 (1976).
- 2) D. J. Goodwill et al., Electron. Lett. 28, 1599 (1992).
- 3) D. A. Miller et al., IEEE J. Quantum Electron., QE-21, 1462 (1985).
- 4) A. L. Lentine et al., IEEE J. Quantum Electron., QE-25, 1921 (1989).
- 5) D. A. Miller et al., Phys. Rev. Lett. 53, 2173 (1984).
- 6) E. E. Mendez et al., Phys. Rev. Lett. 60, 2426 (1988).
- 7) I. Bar-Joseph et al., Appl. Phys. Lett., 55, 1232 (1989).
- 8) Y. Tokuda et al., Appl. Phys. Lett., 54, 1232 (1989).
- 9) H. Sakaki et al., Electron. Lett. 24, 1 (1988).

RS-92-19

輻射科学研究会資料

平成4年12月11日

電子デバイスにおける新しいビーム応用技術

御福 英史, 高田 充幸, 松川 文雄, 布下 正宏

三菱電機株式会社 材料デバイス研究所
表示・電子デバイス開発部

1. 緒言

レーザを初めとするビームはそのエネルギー密度が通常の熱源に比べて大きいので、各種の加工や改質などに積極的に利用されている。産業加工分野だけではなく、医療、計測、通信においてもレーザ利用の進展が著しい。いわゆるマイクロエレクトロニクスの分野において、デバイスの開発、評価、製造の各段階でレーザを使用する必要性が益々高まっている。レーザは他の代表的なエネルギービームである電子ビームと比較すると、エネルギーの担い手が荷電粒子ではないから、大気中での照射が容易である。光学的な手法によってレーザビームは目標とする対象物に正確に照射される。照射された材料はレーザのパワーとエネルギーの関係において、例えば溶融、除去、改質などの様々な現象を引き起こす。これらの物理現象は結果として材料の性質に直接的に影響する。材料は固有の波長分散を有する光の吸収係数を持つから、レーザエネルギーを多層構造の中である特定の層だけに吸収させることが可能である。特にパルスレーザにおいて、照射時の熱的な過程が急速加熱と引き続く急速冷却である点に着目すると、材料の高温状態を室温で凍結することができる。

この講演では筆者らが回路基板と液晶ディスプレイパネルに対して、レーザを適用した事例について紹介する。尚、詳細については引用文献を参照されたい。

2. RuO₂-厚膜抵抗体のパルスNd:YAGレーザによる抵抗値の調整

三菱電機材料デバイス研究所ではセラミック基板上に銅とポリイミドの薄膜を多層に形成して、小型、高密度の回路基板を開発した。この基板には抵抗素子として厚膜抵抗体を印刷、焼成プロセスにより形成する。通常、焼成したままの厚膜抵抗体は膜厚分布や温度履歴の不安定さのために、設計値に対して抵抗値が約20%変動する。このた

め、レーザにより抵抗体の一部を除去し、抵抗値を調整する手法が広く採用されている。この技術をレーザトリミングと呼ぶ。レーザトリミングには余分な切りしろが必要であるから、微細な抵抗体の調整には自ずと限界がある。筆者は、厚膜抵抗体の構造が硼珪酸鉛ガラスのマトリクスにRuO₂粒子が分散した構造である点に着目して、Nd:YAGパルスレーザ ($\lambda = 1.06 \mu\text{m}$) を照射することにより抵抗体を改質し、ガラス中の電気伝導を変化させた。レーザトリミングでは抵抗値が増加するに対し、改質による手法では逆に抵抗値は減少する。抵抗値の減少率はレーザパルスの照射回数に依存する。レーザを照射する過程で、抵抗値を測定し、所定の抵抗値に達した段階で次のパルスの投入を中止すれば、所望の抵抗値を有する抵抗体が得られる。

レーザで改質すると、抵抗体表面の一部が溶融、混合する。この溶融物は高いRu不純物を含む。この状態はレーザパルスの急峻な立ち下がり凍結され、室温において過飽和固溶したガラスを生成する。XPSとXRDによるガラスの状態分析や極低温における抵抗値の温度依存性の測定結果から、抵抗値の減少はガラス中の伝導電子の増加に基づいていると考えられる。

上記の薄膜多層基板では、厚膜抵抗体はポリイミド膜中に内蔵されている。ノーマルモード発振するパルスレーザ (パルス幅: 50 μs) をポリイミド膜を介して抵抗体に照射すると、そのエネルギーはポリイミド膜で吸収されることなく透過し、抵抗体表面を溶融すると共に蒸発させる。このため、抵抗体とポリイミド膜の間に高い内圧を有する小さな空隙が生じ、ポリイミド膜は破裂、剥離する。熱伝導理論から、レーザのパルス幅を抵抗体表面が蒸発を開始する時間以下にすれば、抵抗体表面は蒸発を伴うことなく溶融することを予測した。実際にはパルス幅 5 ns のQスイッチパルスによって、ポリイミド膜に損傷を与えることなく、抵抗値が調整できる。

3. 液晶ディスプレイパネルのエキシマレーザによる分解

薄膜トランジスタ (TFT) で各画素を駆動する液晶ディスプレイ (LCD) はすでに基本的な製造技術が確立され, 市場投入が始まっている。市場の要求は高画質と低価格を同時に実現することである。このためには, 製造歩留まりの向上が極めて重要な課題である。LCDはTFTをアレイ状に形成したガラス基板と対向基板 (通常カラーフィルタとなる) の間に液晶を封入した構造を有する。基板相互はその周辺部において高分子接着剤で接合されている。TFTの特性異常に起因する画像欠陥は最終の点灯検査ではじめて検出される。製造工程に対して適切なフィードバックをとるためには, この画像欠陥とTFT特性を関係づける必要がある。TFT特性の評価にはパネルを機械的にも電気的にもダメージなく分解する必要があるが, LCDパネルの接合部は極めて強固であり, 容易に分解できない。

1982年にSrinivasan [Appl. Phys. Lett., 41 (1982) 576; J. Am. Chem. Soc., 104 (1982) 6784] が紫外域に発振波長を持つエキシマレーザが高分子材料に及ぼす効果を発表して以来, この効果は特にポリイミドなどの回路基板に用いられる高分子材料のアブレーション加工に応用されている。筆者はこのレーザエネルギーの光化学的な作用を接合界面の劣化に適用することを試みた。ガラス基板の光吸収係数を同時に考慮し, レーザの発振波長を最適化した。具体的には, 接合部の接着剤 (エポキシ) にガラスを介してXeClエキシマレーザ ($\lambda = 308 \text{ nm}$) を照射する。照射過程において, エポキシは薄い赤みのかかったオレンジ色の蛍光を発する。エポキシとガラスの接合界面のなんらかな化学的な結合が切れ, この結果, LCDパネルはダメージなく分離される。FTIR分光により, レーザを照射したエポキシのバルク部において, 高分子の主構造変化は認められない。光化学的な反応は接合界面の極く近傍に限られるものと考えられる。

分離工程の後, 画像欠陥に対応するTFT特性が検査される。以上の結果, 最終の点灯検査の結果は製造工程へ迅速にフィードバックできるようになる。

4. まとめ

電子デバイスを開発するために, 筆者らがレーザを利用した新しい事例を紹介した。レーザなどの高エネルギービームはデバイスが実現すべき機能を達成する上で, 有益な手法となる。回路基板と液晶ディスプレイについて取り上げたが, 適用範囲はこれらに留まらないことは明らかであろう。

引用文献

- [1] H. Takasago, M. Takada, K. Adachi, A. Endou, K. Yamada, T. Makita, E. Gofuku, and Y. Onishi, Transaction of IEEE, CHMT-10, 3(1987)425
- [2] H. Takasago, E. Gofuku, M. Takada, and Y. Morihira, Journal of Electronic Materials, 18, 5(1989)651
- [3] E. Gofuku, T. Ogama, and H. Takasago, Journal of Applied Physics, 66, 22(1989)6126
- [4] E. Gofuku, Y. Toyoda, Y. Uehara, M. Kohara, and M. Nunoshita, Applied Surface Science, 48/49 (1991)343
- [5] E. Gofuku, T. Ohnawa, M. Kohara, and M. Nunoshita, IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology (unpublished)
- [6] E. Gofuku, T. Ohnawa, M. Takada, F. Matsukawa, and M. Nunoshita, Applied Surface Science (to be published in next issue)
- [7] E. Gofuku, M. Takada, Y. Morihira, M. Kohara, H. Takasago, and M. Nunoshita, Proceedings of International Microelectronics Conference (1990)587, Tokyo, Japan
- [8] E. Gofuku, Y. Kawashima, M. Takada, M. Kohara, and M. Nunoshita, Proceedings of Electronic Components & Technology Conference (1991)524, Atlanta, USA
- [9] T. Ohnawa, E. Gofuku, F. Matsukawa, M. Nunoshita, K. Inouye, T. Tobita, and H. Takasago, Proceedings of Japan Display '92 (1992)799, Hiroshima, Japan

電子デバイスにおける新しいビーム応用技術

三菱電機株式会社 材料デバイス研究所 表示・電子デバイス開発部

御福 英史、高田 充幸、松川 文雄、布下 正宏

1. 回路基板に搭載する厚膜抵抗体の表面改質による抵抗値の調整
2. 液晶ディスプレイパネルの分解



レーザーの特長

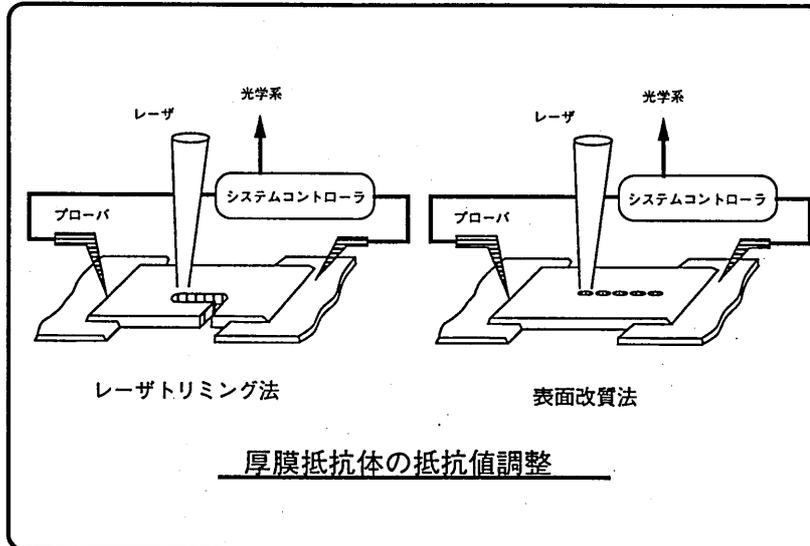
時間的にも空間的にもコヒーレントである

適当な光学系で、エネルギーの輸送、集光が可能

エネルギー密度が高い

大気中での照射が可能

パワー、エネルギー（振動数）の選択範囲が広い



レーザートリミングの特徴

抵抗値増加

切削溝形成

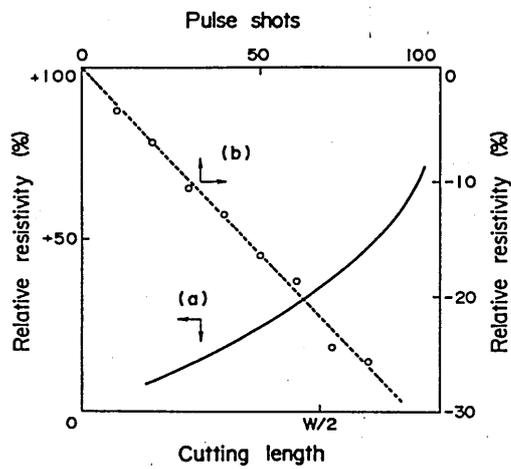
微細抵抗体 (< 300 μm) 適用困難

表面改質法の特長

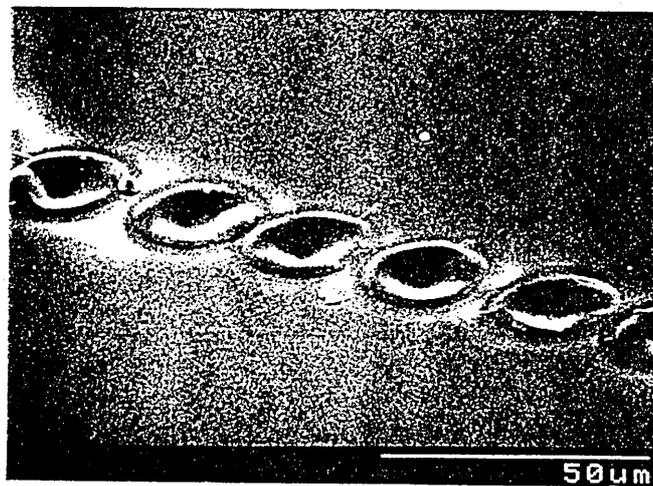
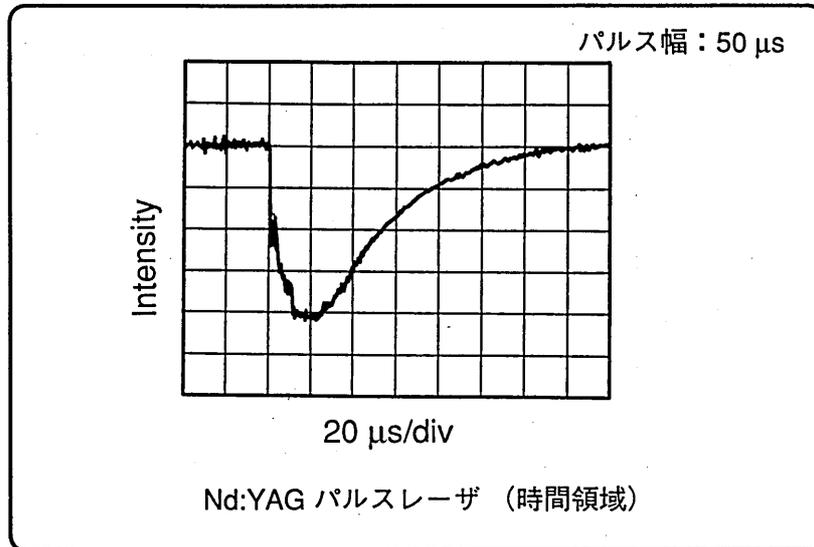
抵抗値減少

切削溝形成しない

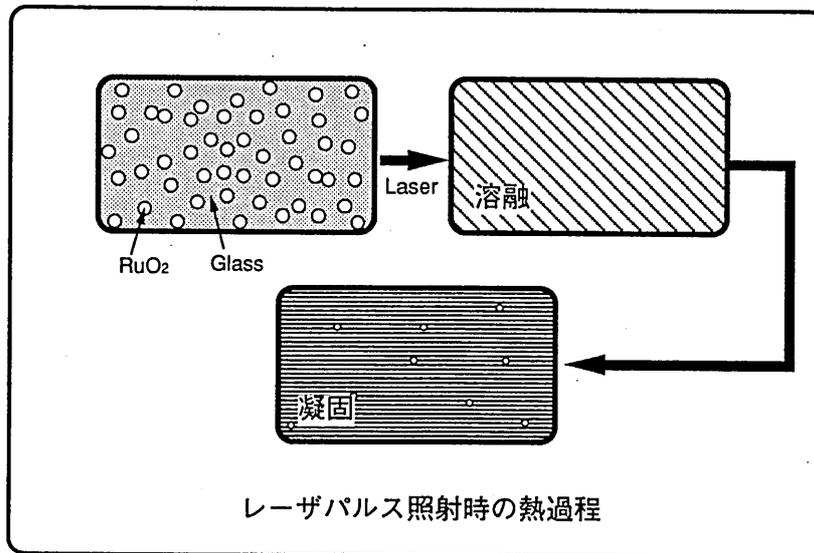
微細抵抗体に適用可能

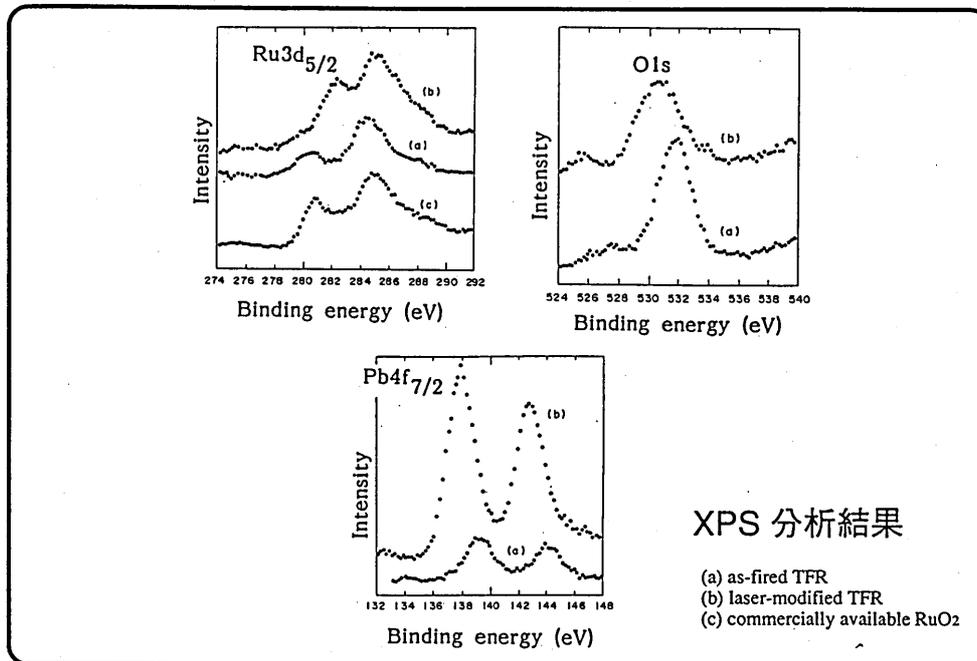


抵抗値とレーザーパルス数の関係



Surface-modified TFR (SEM image)





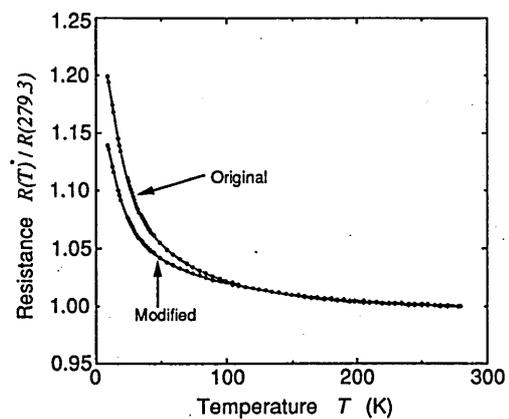
Pb-B-SiO₂ + RuO₂ 非晶質

化合物の生成 (構造の同定困難)

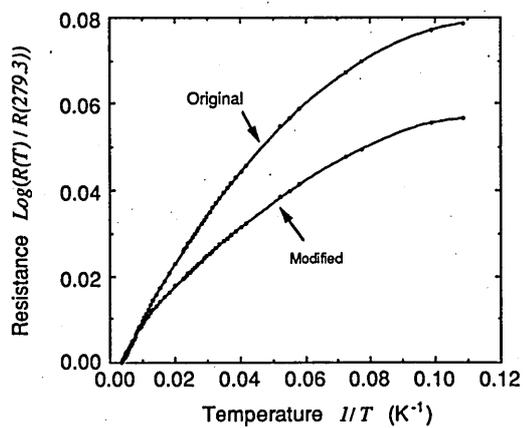
比抵抗 8ケタ-9ケタ 減少

伝導電子の増加

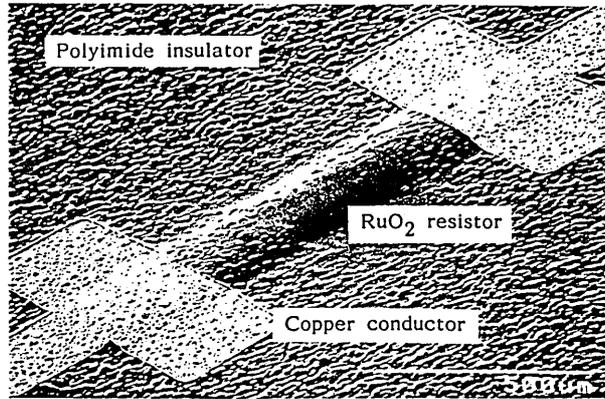
非極在化の可能性あり



厚膜抵抗体の抵抗値温度依存性



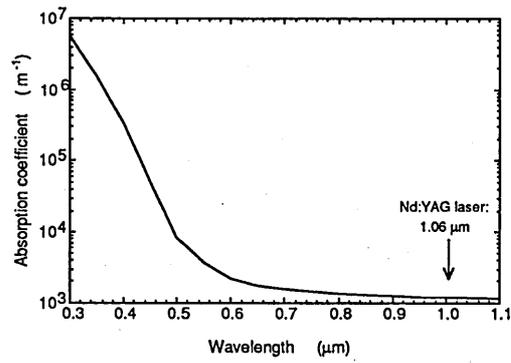
厚膜抵抗体の抵抗値温度依存性



銅めっきで両端を接続した厚膜抵抗体

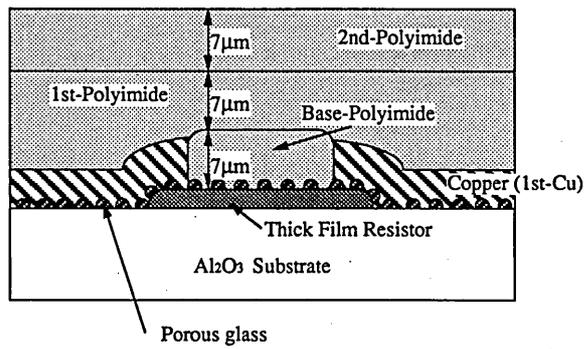


めっきで形成した銅の微細配線



ポリイミドの光吸収係数

Mitsubishi Copper Polyimide Hybrid (MCPH)



ポリイミドフィルムに埋設した厚膜抵抗体

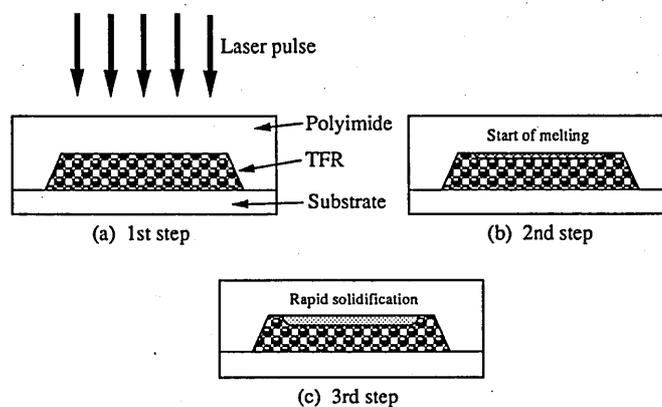
Linear heat conduction for finite radius
(Heating with phase change)

$$\rho C \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = K \nabla^2 T(x,y,z,t) + H(x,y,z,t),$$

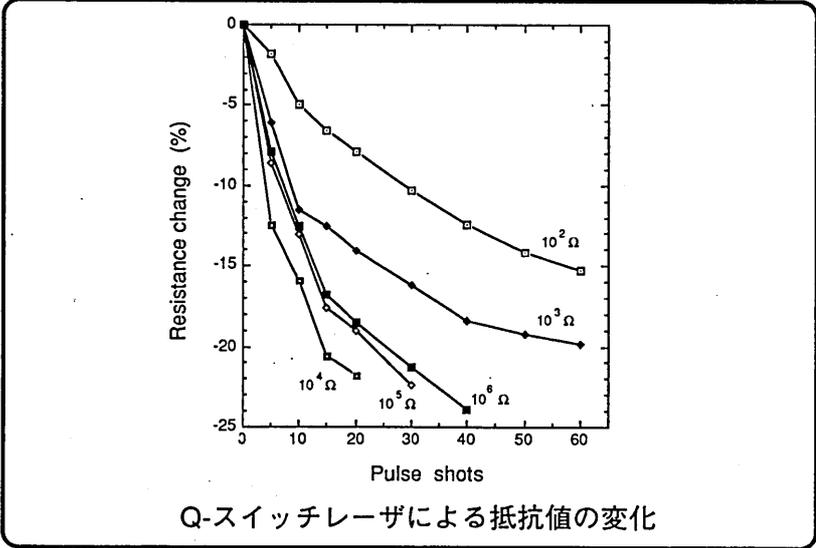
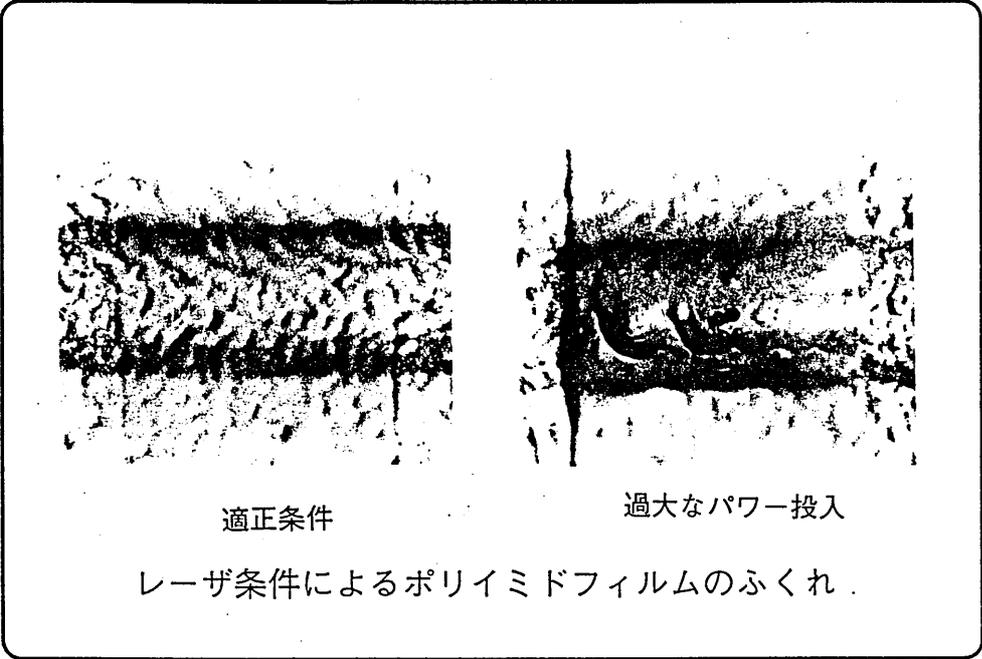
$$T(z,t) = \frac{2AI_0}{K} (\kappa t)^{1/2} \text{ierfc}\left(\frac{z}{2(\kappa t)^{1/2}}\right),$$

$$t_m = \frac{\pi}{\kappa_S} \left(\frac{\kappa_S T_m}{2A_S I_0}\right)^2, \quad t_v = \frac{\pi}{\kappa_L} \left(\frac{\kappa_L T_v}{2A_L I_0}\right)^2 + t_m.$$

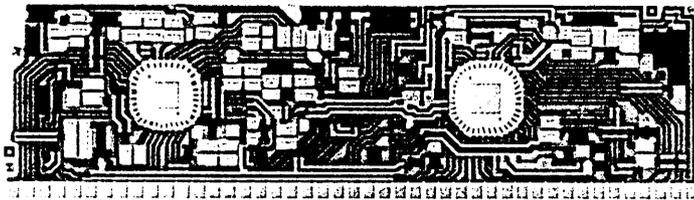
 ρ: material density, C: specific heat, K: heat conductivity,
 T: temperature, H: heat source, t: time, I₀: beam intensity,
 A: absorption rate, κ ≈ K/ρC.



Q-スイッチレーザ (パルス幅 5 ns) による熱過程



Mitsubishi Copper Polyimide Hybrid (MCPH)



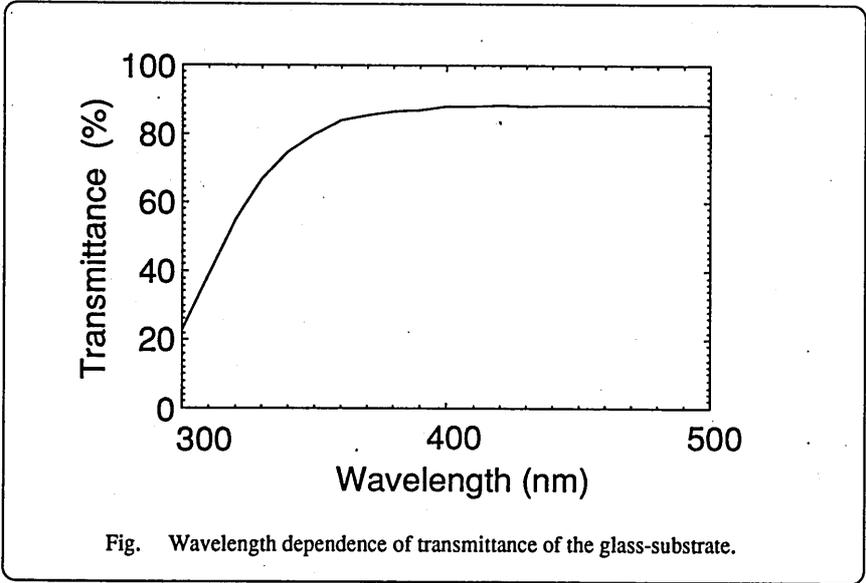
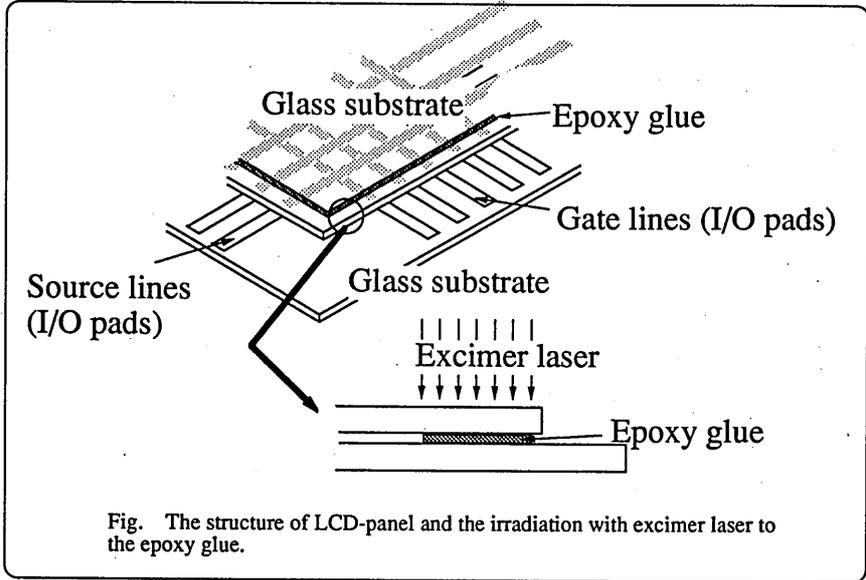
厚膜ハイブリッドIC基板



MCPH



従来の厚膜ハイブリッドICとMCPH



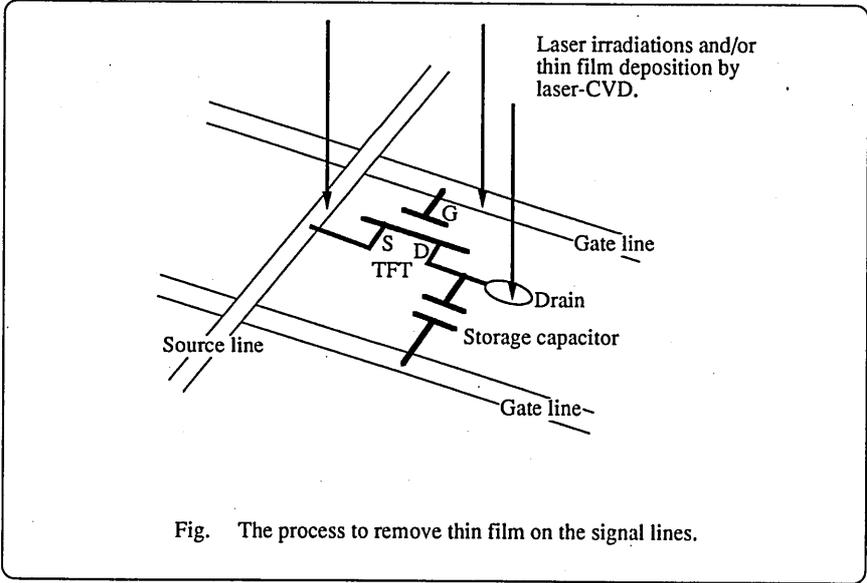
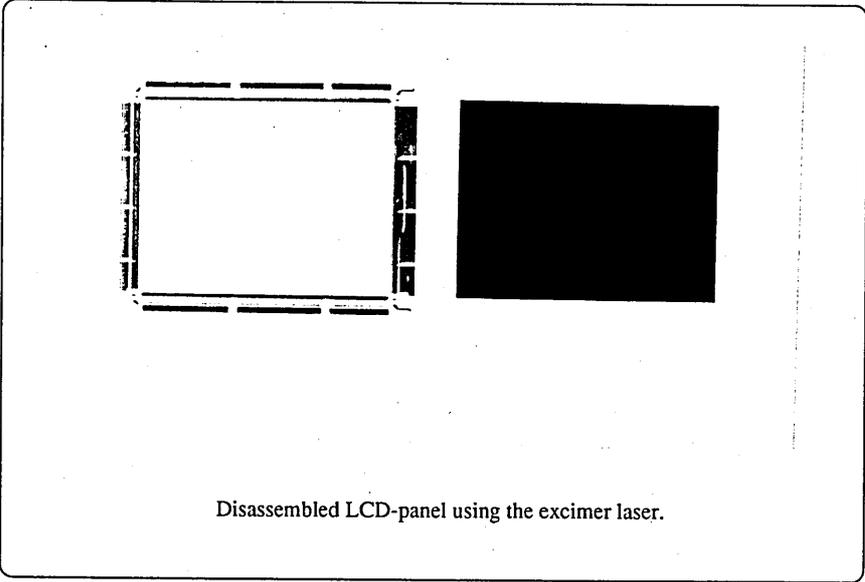
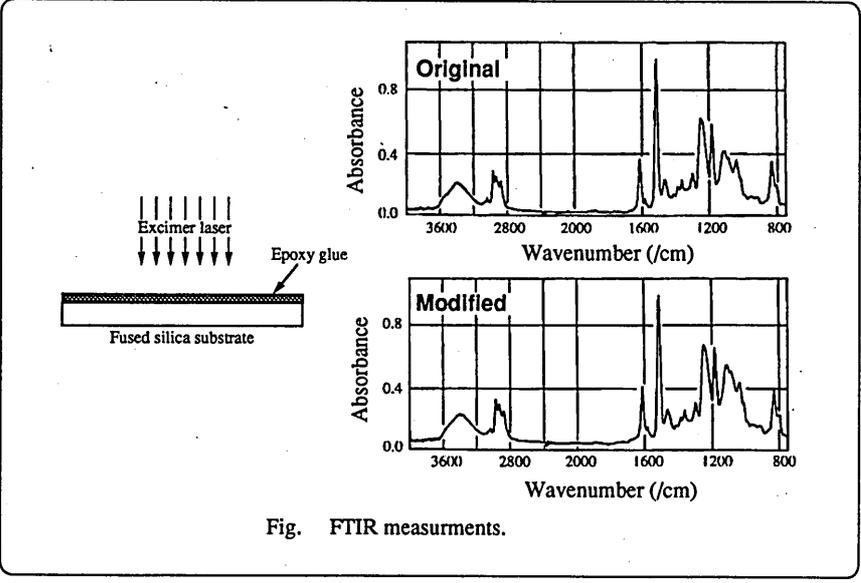
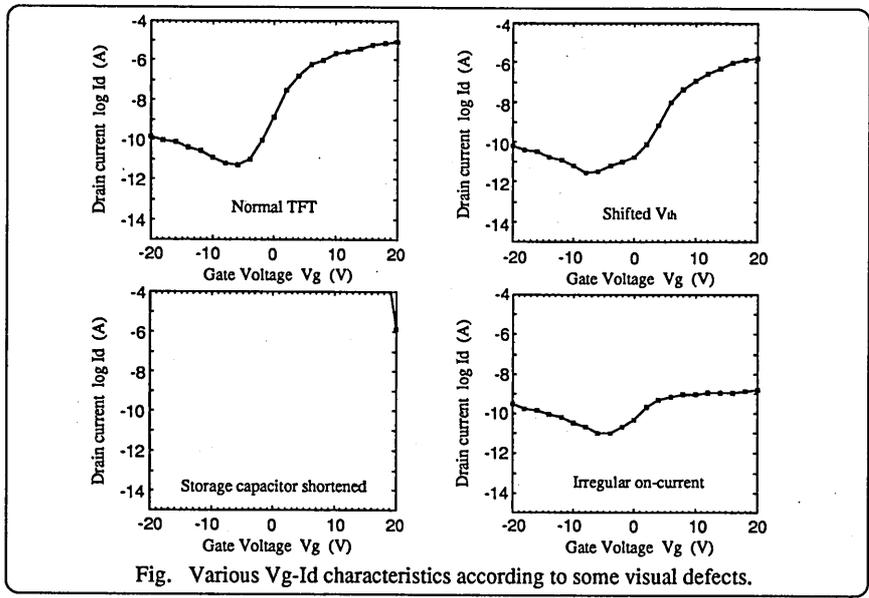


Fig. The process to remove thin film on the signal lines.



まとめ

電子デバイス開発とレーザ応用技術

光エネルギーの適切な利用
材料に対する作用の把握
新規機能を付加

例えば、厚膜抵抗体、液晶ディスプレイ

境界領域 (学際的)

輻射科学研究会資料

資料番号	RS 92-20
------	----------

ランダムストリップによる平面波の散乱 II

田村安彦 中山純一

(京都工芸繊維大学 工芸学部)

1993年3月5日

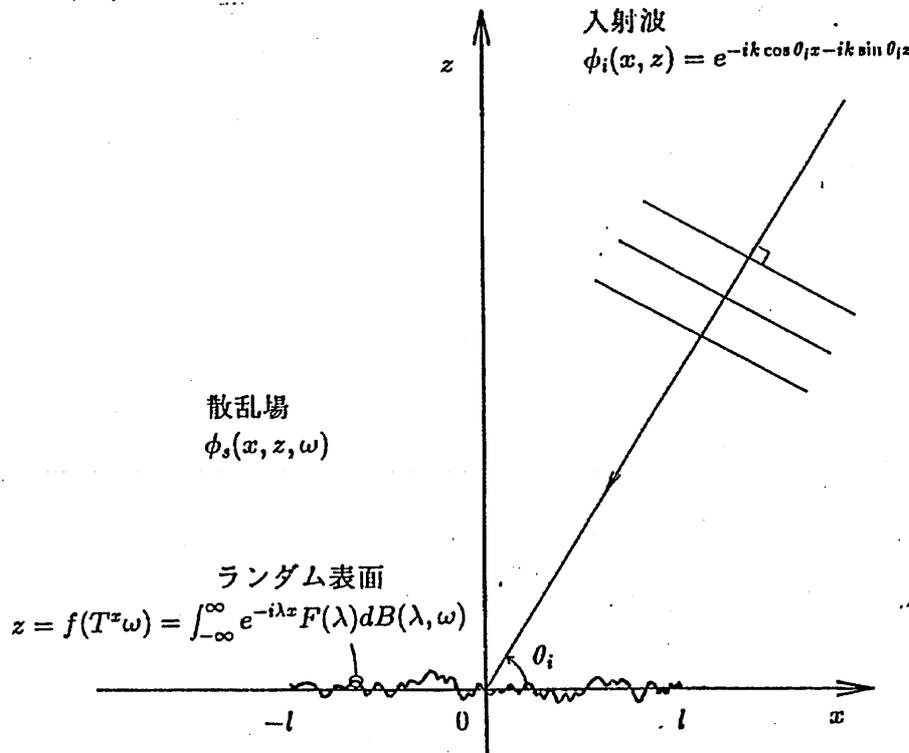
輻射科学研究会
(於 ATR 光電波通信研究所)

1 はじめに

ランダム表面に対する波動散乱問題は現在まで多くの研究者によってなされてきた。この種の問題ではその殆どが無限に広いランダム平面を対象にしている。しかしながら現実の散乱体はしばしば有限の大きさを持ち、且つエッジのような鋭い構造を持つ場合が多い。奇妙なことではあるがランダム境界値問題において有限の構造を扱った例は少なく、H.Ogura 等による確率汎函数法を用いたランダム円筒面^[16]、ランダム球面の解析^[17]がある以外には我々の知る限り報告例は無い。またエッジを持つ構造によるランダム境界値問題については殆ど報告例が無く、我々が行なったランダム半平面問題 (Dirichlet^[5, 6])があるに過ぎないという状況である。エッジを考慮したランダム境界値問題は理論上また解析上の興味が有り、工学的観点からは、例えば、アンテナ表面の微小な凹凸による指向性等への影響、ランダムな凹凸を持つ壁やビル等の建造物からの回折及び散乱、切り立った崖や山脈等による電磁波の散乱、あるいは金属疲労や地面に生じたランダムなひび割れ等のリモートセンシングでの応用と言った事が挙げられる。前回の報告 (Dirichlet^[4])に引き続き今回もランダムな表面を持つストリップによる平面波散乱を取り扱う。導体ストリップは極めて単純な形状であるが、二つのエッジが引き起こす多重回折効果が現れ、散乱及び回折問題、アンテナ等の放射解析の基本構造となるため、表面がランダムな凹凸を持つ場合の解析は理論的、解析的に極めて興味深い。我々は特に二つのエッジによる多重回折効果とランダム表面によって生じる多重回折効果との重畳効果について興味がある。なお波動場の時間因子を $e^{-i2\pi ft}$ として省略する。

2 散乱問題の定式化

自由空間中に幅 $2l$ でランダムな表面を持ち、厚みが無視できて完全導体からなるストリップを想定し、直交座標系 (x, z) を図1のようにとる。



ストリップ上の1次元ランダム表面を定常ランダム関数(強定常過程) $z = f(T^x \omega)$ で表し一般性を失うことなく統計的性質を

$$\langle z \rangle = 0, \quad \langle z^2 \rangle = \sigma^2 \quad (2.1)$$

として平均面が平坦面 $z = 0$ に一致するものとする。 $f(x, \omega)$ は $x \in R$ で定義されており、 ω は標本空間 Ω 内の一見本点である。 $\langle \rangle$ は事象 ω に関するアンサンブル平均とする。 T^a は Ω 内の確率測度を変えない保測変換である。この T^a は加法群をなす。すなわち $T^0 \equiv 1$, $T^a T^b = T^{a+b}$ ($a, b \in R$) である。 σ^2 は表面のランダムな凹凸の分散を与える。その標準偏差 σ (> 0) は長さの次元を持ちランダム表面の粗さ(もしくは高さ)のパラメータとみなすことができる。 $\sigma^2 = 0$ (もしくは $\sigma = 0$) は表面が平坦で滑らかな場合に相当する。 $f(T^x \omega)$ は Gauss 一様確率場であると仮定し次のように Wiener 積分^[8, 9] でスペクトル表現する。

$$z = f(T^x \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} F(\lambda) dB(\lambda, \omega) \quad (2.2)$$

ここで、 $dB(\lambda, \omega)$ は実 λ 軸上の複素 Gauss ランダム測度^[8, 9] であり、以下の性質を持つ。

$$\begin{aligned} dB^*(\lambda, \omega) &= dB(-\lambda, \omega), \quad dB(\lambda, T^a \omega) = e^{-i\lambda a} dB(\lambda, \omega) \\ \langle dB(\lambda, \omega) \rangle &= 0, \quad \langle dB(\lambda, \omega) dB^*(\lambda', \omega) \rangle = \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' \end{aligned} \quad (2.3)$$

ただし、* は複素共役、 δ は Dirac デルタを表す。

(2.2) 式と (2.3) 式からランダムなストリップ表面の相関関数は次のようになる。

$$R(a) = \langle f(T^x \omega) \cdot f^*(T^{x+a} \omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 e^{-i\lambda a} d\lambda \quad (2.4)$$

$|F(\lambda)|^2$ はランダム表面のパワースペクトル密度である。

2次元問題であるから全波動場をスカラー関数 $\phi(x, z, \omega)$ で表す。全波動場は入射波 $\phi_i(x, z)$ とランダムなストリップによる散乱場 $\phi_s(x, z, \omega)$ の和 $\phi(x, z, \omega) = \phi_i(x, z) + \phi_s(x, z, \omega)$ となる。ここでは、入射波として波数 k の次の単色平面波を仮定する。

$$\phi_i(x, z) = e^{-ik \cos \theta_i x - ik \sin \theta_i z} \quad \left(0 < |\theta_i| < \pi/2 \right) \quad (2.5)$$

全波動場 $\phi(x, z, \omega)$ は自由空間中で次の2次元波動方程式を満たす。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \phi(x, z, \omega) = 0 \quad (2.6)$$

ただし、解析手法の都合上、波数 k に媒質の微小損失を仮定し次の様にする。

$$k \equiv k_1 + ik_2, \quad k_1 \gg k_2 > 0 \quad (2.7)$$

このような k の下で解析し最後に $k_2 \rightarrow +0$ として本来の結果を得ることとする。

次に、 $\phi(x, z, \omega)$ は完全導体からなるランダムなストリップ上での境界条件 $\phi(x, z, \omega) = 0$ (Dirichlet) もしくは $\partial \phi(x, z, \omega) / \partial n = 0$ (Neumann) を満たすと仮定する。しかし、厳密に境界条件を取り扱うのは特にランダム境界値の場合は容易ではない。そこで僅かにランダムな場合(ストリップ表面の粗さが波長に比べて十分小さい) $|k|\sigma \ll 1$ を仮定し、次の平坦面(平均面) $z = 0$ 上での等価 Dirichlet 条件及び等価 Neumann 条件を用いて $|x| \leq l$ におけるランダム境界値のモデルとする。

$$\phi(x, z, \omega) + f(T^x \omega) \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, z, \omega) \Big|_{z=\pm 0} = 0 \quad : \text{Dirichlet} \quad (2.8)$$

$$-\frac{d}{dx} f(T^x \omega) \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, z, \omega) + \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, z, \omega) + f(T^x \omega) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(x, z, \omega) \Big|_{z=\pm 0} = 0 \quad : \text{Neumann} \quad (2.9)$$

以下、プライム'は z に関する偏微分、バックプライム'は x に関する偏微分を表すことにする。 z について $\phi(x, z, \omega), \phi'(x, z, \omega), \phi''(x, z, \omega), \phi_s(x, z, \omega)$ は $z=0$ において $|x| \leq l$ で不連続、 $|x| > l$ で連続である。

ストリップ周囲の波動場を考察して、散乱場 $\phi_s(x, z, \omega)$ は遠方 $|x| \rightarrow +\infty$ で次の実効的な放射条件を満たすと仮定する。

$$\phi_s(x, z, \omega) = A_R(\omega) O(e^{-k_2 \cos \theta_i |x| - k_2 |\sin \theta_i z|}) \quad (|x| \rightarrow +\infty) \quad (2.10)$$

次にエッジを持つ構造に対する散乱問題では(2.6)式の解の一意性を保証するための拘束条件が必要である。散乱場 $\phi_s(x, z, \omega)$ はエッジの近傍 $|z - f(T^{\pm l} \omega)| \rightarrow +0$, $|x \pm l| \rightarrow +0$ でエッジ条件を満たすが近似的に平坦面 $z=0$ 上で次の等価エッジ条件を仮定する。

$$\begin{aligned} \phi_s(x, 0, \omega) &= A_{E_1}(\omega)(1 + O((x \mp l)^{\frac{1}{2}})) \quad (x \rightarrow \pm l \pm 0) \\ \phi_s'(x, z, \omega) \Big|_{z=\pm 0} &= A_{E_2}(\omega) O((x \mp l)^{-\frac{1}{2}}) \quad (x \rightarrow \pm l \mp 0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

定常ランダム関数 $f(T^x \omega)$ が同時移動変換 $(x, \omega) \rightarrow (x+a, T^{-a} \omega)$ ($a \in R$)に対し不変であることからランダム関数 $\phi_s(x, z, \omega)$ に作用する移動オペレータ D^a [9, 12]を次のように定義する。

$$D^a \phi_s(x, z, \omega) \equiv \phi_s(x+a, z, T^{-a} \omega) \quad (2.12)$$

T^a が加法群であることから D^a も加法群をなす。すなわち $D^0 \equiv 1$, $D^a D^b = D^{a+b}$ ($a, b \in R$)である。

ここで、 D^a を用いて D^a -Fourier変換^[7]を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isa} \{D^a \phi_s(x, z, \omega)\} da &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{isa} \phi_s(x+a, z, T^{-a} \omega) da \\ &= e^{-isx} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_s(a, z, T^x \omega) da \\ &= e^{-isx} \Phi_s(z, T^x \omega | s) \end{aligned} \quad (2.13)$$

すなわち、ランダム関数に対して D^a を施しそのパラメータ a についての複素 Fourier 変換を取る形で定義する。 D^a -Fourier 変換は二つの意義を持つ。第1に、 x について非定常過程である散乱場 $\phi_s(x, z, \omega)$ を複素パラメータ s を持つ D^a -不変な x についての定常過程に変換したこと(これによって $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ は R 上の一様確率場となる)と、第2に $\phi_s(x, z, \omega)$ を複素 s -平面上の $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ へと写像したことである。(2.10)の条件から $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ は複素 s -平面上の帯状領域 $|\text{Im } s| < k_2 \cos \theta_i$ で正則な関数であることがわかるので、 D^a -逆 Fourier 変換を次式で定義する。

$$\phi_s(x, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} e^{-isx} \Phi_s(z, T^x \omega | s) ds \quad (|\tau| < k_2 \cos \theta_i) \quad (2.14)$$

上式は散乱場の形を与える。このような非定常過程の表現は一様ランダム媒質中の波動関数の表現^[7]として用いられている。同様に、 $\phi_s'(x, z, \omega), \phi_s''(x, z, \omega), \phi_s^*(x, z, \omega)$ について D^a -Fourier 変換を以下のように定義する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{isa} D^a \left\{ \begin{array}{l} \phi_s'(x, z, \omega) \\ \phi_s''(x, z, \omega) \\ \phi_s^*(x, z, \omega) \end{array} \right\} da = e^{-isx} \left\{ \begin{array}{l} \Phi_s'(z, T^x \omega | s) \\ \Phi_s''(z, T^x \omega | s) \\ \Phi_s^*(z, T^x \omega | s) \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

この定義により $\Phi_s'(z, T^x \omega | s), \Phi_s''(z, T^x \omega | s), \Phi_s^*(z, T^x \omega | s)$ は $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ と同じく $|\text{Im } s| < k_2 \cos \theta_i$ で正則な関数となる。

ここで Dirichlet 条件については差 $\phi_s'(x, +0, \omega) - \phi_s'(x, -0, \omega) \equiv j(x, \omega)$ を、Neumann 条件については差 $\phi_s(x, +0, \omega) - \phi_s(x, -0, \omega) \equiv j(x, \omega)$ (物理量としてこれらはともにランダムなストリップ上に誘起さ

れる平坦面 $z = 0$ 上での等価電流密度を表す。) を D^a -Fourier 変換する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{isa} D^a \begin{Bmatrix} \phi'_s(x, +0, \omega) - \phi'_s(x, -0, \omega) \\ \phi_s(x, +0, \omega) - \phi_s(x, -0, \omega) \end{Bmatrix} da = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isa} D^a j(x, \omega) da$$

$$e^{-isz} \begin{Bmatrix} \Phi'_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi'_s(-0, T^x \omega | s) \\ \Phi_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi_s(-0, T^x \omega | s) \end{Bmatrix} = e^{-isz} J(T^x \omega | s)$$

すなわち、

$$J(T^x \omega | s) \equiv \begin{cases} \Phi'_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi'_s(-0, T^x \omega | s) & : \text{Dirichlet} \\ \Phi_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi_s(-0, T^x \omega | s) & : \text{Neumann} \end{cases} \quad (2.16)$$

ここで、実質上閉区間 $[-l-x, l-x]$ での D^a -Fourier 変換となるので $J(T^x \omega | s)$ は整関数となり、全複素 s -平面上で正則である。次に Dirichlet 条件については差 $\phi_s(x, +0, \omega) - \phi_s(x, -0, \omega)$ を D^a -Fourier 変換するが (2.8) 及び (2.16) 式より次式を、

$$\Phi_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi_s(-0, T^x \omega | s) = -f(T^x \omega) J(T^x \omega | s) \quad (2.17)$$

同様に Neumann 条件については差 $\phi'_s(x, +0, \omega) - \phi'_s(x, -0, \omega)$ を D^a -Fourier 変換し (2.9) 及び (2.16) 式より次式を得る。

$$\frac{d}{dx} f(T^x \omega) \{ \Phi_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi_s(-0, T^x \omega | s) \} =$$

$$\{ \Phi'_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi'_s(-0, T^x \omega | s) \} + f(T^x \omega) \{ \Phi''_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi''_s(-0, T^x \omega | s) \} \quad (2.18)$$

また $z = 0$ での境界値 $\phi_s(x, z, \omega)$, $\phi'_s(x, z, \omega)$, $\phi''_s(x, z, \omega)$, $\phi_s(x, z, \omega)$ に対する $x \geq l$, $x \leq -l$ における片側 D^a -Fourier 変換を各々次のように定義する。

$$\int_{l-x}^{\infty} e^{isa} D^a \begin{Bmatrix} \phi_s(x, 0, \omega) \\ \phi'_s(x, 0, \omega) \\ \phi''_s(x, 0, \omega) \\ \phi_s(x, 0, \omega) \end{Bmatrix} da = e^{-isz} \begin{Bmatrix} e^{is^l} w^+(T^x \omega | s) \\ e^{is^l} w^{+'}(T^x \omega | s) \\ e^{is^l} w^{+''}(T^x \omega | s) \\ e^{is^l} w^{+ \cdot}(T^x \omega | s) \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\int_{-\infty}^{-l-x} e^{isa} D^a \begin{Bmatrix} \phi_s(x, 0, \omega) \\ \phi'_s(x, 0, \omega) \\ \phi''_s(x, 0, \omega) \\ \phi_s(x, 0, \omega) \end{Bmatrix} da = e^{-isz} \begin{Bmatrix} e^{-is^l} w^-(T^x \omega | s) \\ e^{-is^l} w^{-'}(T^x \omega | s) \\ e^{-is^l} w^{-''}(T^x \omega | s) \\ e^{-is^l} w^{- \cdot}(T^x \omega | s) \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

この定義から次の領域で正則である。

$$\begin{cases} w^+(T^x \omega | s), w^{+'}(T^x \omega | s), w^{+''}(T^x \omega | s), w^{+ \cdot}(T^x \omega | s) : \text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i \\ w^-(T^x \omega | s), w^{-'}(T^x \omega | s), w^{-''}(T^x \omega | s), w^{- \cdot}(T^x \omega | s) : \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i \end{cases}$$

波動場についての境界条件を閉区間 $[-l-x, l-x]$ で D^a -Fourier 変換し、(2.13), (2.15), (2.19) 及び (2.20) 式を用いて整理すると D^a -Fourier 変換領域での等価 Dirichlet 条件を得る。よって、(2.16), (2.17) 式も合わせて Dirichlet 条件について次のような 3 組の連立方程式を得る。

$$\Phi'_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi'_s(-0, T^x \omega | s) = J(T^x \omega | s) \quad (2.21)$$

$$\Phi_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi_s(-0, T^x \omega | s) = -f(T^x \omega) J(T^x \omega | s) \quad (2.22)$$

$$\frac{i[1 - ik \sin \theta_i f(T^x \omega)]}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) =$$

$$\Phi_s(\pm 0, T^x \omega | s) + f(T^x \omega) \Phi'_s(\pm 0, T^x \omega | s)$$

$$- [e^{is^l} w^+(T^x \omega | s) + e^{-is^l} w^-(T^x \omega | s) + f(T^x \omega) \{ e^{is^l} w^{+'}(T^x \omega | s) + e^{-is^l} w^{-'}(T^x \omega | s) \}] \quad (2.23)$$

同様に Neumann 条件についても (2.13), (2.15), (2.19) 及び (2.20) 式を用いて整理し D^a -Fourier 変換領域での等価 Neumann 条件を得る。よって、(2.16), (2.18) 式も合わせて Neumann 条件について次のような 3 組の連立方程式を得る。

$$\Phi_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi_s(-0, T^x \omega | s) = J(T^x \omega | s) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(T^x \omega) \{ \Phi_s(+0, T^x \omega | s) - \Phi_s(-0, T^x \omega | s) \} = \\ \{ \Phi_s'(+0, T^x \omega | s) - \Phi_s'(-0, T^x \omega | s) \} + f(T^x \omega) \{ \Phi_s''(+0, T^x \omega | s) - \Phi_s''(-0, T^x \omega | s) \} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{k \{ \sin \theta_i - df(T^x \omega)/dx - ik \sin^2 \theta_i f(T^x \omega) \}}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)x} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)x}) = \\ \Phi_s'(\pm 0, T^x \omega | s) + f(T^x \omega) \Phi_s''(\pm 0, T^x \omega | s) - \frac{d}{dx} f(T^x \omega) \Phi_s'(\pm 0, T^x \omega | s) \\ - \{ e^{isx} w^+(T^x \omega | s) + e^{-isx} w^-(T^x \omega | s) \} + f(T^x \omega) \{ e^{isx} w^{+''}(T^x \omega | s) + e^{-isx} w^{-''}(T^x \omega | s) \} \\ - \frac{d}{dx} f(T^x \omega) \{ e^{isx} w^{+'}(T^x \omega | s) + e^{-isx} w^{-'}(T^x \omega | s) \} \end{aligned} \quad (2.26)$$

以上、 D^a -Fourier 変換領域における解くべき方程式が得られた。

2.1 摂動法による解法

前節ではランダムなストリップによる散乱場が D^a -Fourier 変換領域で満たすべき連立方程式を得た。これらを厳密に解くのは困難であるが、僅かにランダムな場合 $|k|\sigma \ll 1$ を仮定しているため近似的には解き得る。そこで散乱場スペクトル関数 $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ に対し σ についての摂動展開を行なう。

$$\Phi_s(z, T^x \omega | s) = \Phi_{s0}(z | s) + \Phi_{s1}(z, T^x \omega | s) + \dots + \Phi_{sn}(z, T^x \omega | s) + \dots \quad (2.27)$$

散乱場スペクトル関数 $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ は (2.2) 式の汎函数 (すなわち $dB(\lambda, \omega)$ の汎函数) かつ R 上の一様確率場であったから (2.27) 式の各摂動項も (2.2) 式の汎函数かつ R 上の一様確率場とならなければならない。従って各摂動項は次のように Wiener 積分でスペクトル表現できる。

$$\begin{aligned} \Phi_{s0}(z | s) = u_0(z | s) \\ \Phi_{sn}(z, T^x \omega | s) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u_n(z, \lambda_1, \dots, \lambda_n | s) e^{-i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} dB(\lambda_1, \omega) \dots dB(\lambda_n, \omega) \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

ここで、 $u_n(z, \lambda_1, \dots, \lambda_n | s)$ は n 次の Wiener 積分核であり σ^n のオーダーである。散乱場 $\phi_s(x, z, \omega)$ に関する (2.6) 式と (2.10) の放射条件の要請から Wiener 積分核の z 依存性を次の形に限る。

$$u_n(z, \lambda_1, \dots, \lambda_n | s) = C_n^\pm(s, \lambda_1, \dots, \lambda_n) e^{-\gamma(s + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)|z|} \quad (2.29)$$

ただし、 $C_n^\pm(s, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ の肩の添え字の \pm は z の正負に対応し、 $\gamma(s)$ の定義及びその分岐は次のように定める。

$$\gamma(s) = \sqrt{s^2 - k^2}, \quad \gamma(0) = -ik \quad (2.30)$$

(2.27), (2.28) 及び (2.29) 式から散乱場スペクトル関数 $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$ は次のようにおける。

$$\begin{aligned} \Phi_s(z, T^x \omega | s) \\ = \Phi_{s0}(z | s) + \Phi_{s1}(z, T^x \omega | s) + \dots \\ = C_0^\pm(s) e^{-\gamma(s)|z|} + \int_{-\infty}^{\infty} C_1^\pm(s, \lambda) e^{-\gamma(s + \lambda)|z| - i\lambda x} dB(\lambda, \omega) + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

また、 $w^\pm(T^x\omega|s)$, $w^{\pm'}(T^x\omega|s)$, $w^{\pm''}(T^x\omega|s)$, $w^{\pm\cdot}(T^x\omega|s)$, $J(T^x\omega|s)$ に対しても同様に摂動展開と Wiener 積分により次のように表示する。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w^\pm(T^x\omega|s) \\ w^{\pm'}(T^x\omega|s) \\ w^{\pm''}(T^x\omega|s) \\ w^{\pm\cdot}(T^x\omega|s) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} w_0^\pm(T^x\omega|s) \\ w_0^{\pm'}(T^x\omega|s) \\ w_0^{\pm''}(T^x\omega|s) \\ w_0^{\pm\cdot}(T^x\omega|s) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_1^\pm(T^x\omega|s) \\ w_1^{\pm'}(T^x\omega|s) \\ w_1^{\pm''}(T^x\omega|s) \\ w_1^{\pm\cdot}(T^x\omega|s) \end{Bmatrix} + \dots \\ &= \begin{Bmatrix} w_0^\pm(s) \\ w_0^{\pm'}(s) \\ w_0^{\pm''}(s) \\ w_0^{\pm\cdot}(s) \end{Bmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} w_1^\pm(s, \lambda) \\ w_1^{\pm'}(s, \lambda) \\ w_1^{\pm''}(s, \lambda) \\ w_1^{\pm\cdot}(s, \lambda) \end{Bmatrix} e^{-i\lambda x} dB(\lambda, \omega) + \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} J(T^x\omega|s) &= J_0(s) + J_1(T^x\omega|s) + \dots \\ &= J_0(s) + \int_{-\infty}^{\infty} J_1(s, \lambda) e^{-i\lambda x} dB(\lambda, \omega) + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

Wiener 積分核 $w_0^\pm(s)$, $w_1^\pm(s, \lambda)$, $w_0^{\pm'}(s)$, $w_1^{\pm'}(s, \lambda)$, $w_0^{\pm''}(s)$, $w_1^{\pm''}(s, \lambda)$, $w_0^{\pm\cdot}(s)$, $w_1^{\pm\cdot}(s, \lambda)$, \dots はその定義から次の領域で正則と仮定する。

$$\begin{cases} w_0^+(s), w_1^+(s, \lambda), w_0^{+'}(s), w_1^{+'}(s, \lambda), w_0^{+''}(s), w_1^{+''}(s, \lambda), w_0^{+\cdot}(s), w_1^{+\cdot}(s, \lambda), \dots : \text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i \\ w_0^-(s), w_1^-(s, \lambda), w_0^{-'}(s), w_1^{-'}(s, \lambda), w_0^{-''}(s), w_1^{-''}(s, \lambda), w_0^{-\cdot}(s), w_1^{-\cdot}(s, \lambda), \dots : \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i \end{cases}$$

また Wiener 積分核 $J_0(s)$, $J_1(s, \lambda)$, \dots は全複素 s -平面で正則である。

散乱場スペクトル関数 $\Phi_s(z, T^x\omega|s)$ についての方程式、(2.21), (2.22) 及び (2.23) 式 (Dirichlet 条件) もしくは (2.24), (2.25) 及び (2.26) 式 (Neumann 条件) から摂動展開の各オーダー毎の式として整理する。本論文では 2 次以上のオーダーは十分小さいとして無視し、0 次摂動 (無摂動) と 1 次摂動として整理する。よって以下の議論ではランダム表面として 1 次の散乱までを扱うことになる。

まず、Dirichlet 条件については、 σ^0 の項から

$$\begin{cases} \bullet \Phi_{s,0}(+0|s) - \Phi_{s,0}(-0|s) = 0 \\ \bullet \Phi'_{s,0}(+0|s) - \Phi'_{s,0}(-0|s) = J_0(s) \\ \bullet \Phi_{s,0}(\pm 0|s) - \{e^{is'l} w_0^+(s) + e^{-is'l} w_0^-(s)\} = \frac{i}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) \end{cases} \quad (2.34)$$

σ^1 の項から次の関係式を得る。

$$\begin{cases} \bullet \Phi_{s,1}(+0, T^x\omega|s) - \Phi_{s,1}(-0, T^x\omega|s) = -f(T^x\omega) J_0(s) \\ \bullet \Phi'_{s,1}(+0, T^x\omega|s) - \Phi'_{s,1}(-0, T^x\omega|s) = J_1(T^x\omega|s) \\ \bullet \frac{k \sin \theta_i f(T^x\omega)}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) = \Phi_{s,1}(\pm 0, T^x\omega|s) + f(T^x\omega) \Phi'_{s,0}(\pm 0|s) \\ \quad - [e^{is'l} w_1^+(T^x\omega|s) + e^{-is'l} w_1^-(T^x\omega|s) + f(T^x\omega) \{e^{is'l} w_0^{+'}(s) + e^{-is'l} w_0^{-'}(s)\}] \end{cases} \quad (2.35)$$

Neumann 条件の場合は σ^0 の項から

$$\begin{cases} \bullet \Phi_{s,0}(+0|s) - \Phi_{s,0}(-0|s) = J_0(s) \\ \bullet \Phi'_{s,0}(+0|s) - \Phi'_{s,0}(-0|s) = 0 \\ \bullet \Phi'_{s,0}(\pm 0|s) - \{e^{is'l} w_0^{+'}(s) + e^{-is'l} w_0^{-'}(s)\} = \frac{k \sin \theta_i}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) \end{cases} \quad (2.36)$$

σ^1 の項から次の関係式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \Phi_{s,1}(+0, T^x \omega | s) - \Phi_{s,1}(-0, T^x \omega | s) = J_1(T^x \omega | s) \\ \bullet \Phi'_{s,1}(+0, T^x \omega | s) - \Phi'_{s,1}(-0, T^x \omega | s) + f(T^x \omega) \{ \Phi''_{s,0}(+0 | s) - \Phi''_{s,0}(-0 | s) \} = \\ \quad \frac{df(T^x \omega)/dx \{ \Phi_{s,0}(+0 | s) - \Phi_{s,0}(-0 | s) \}}{s - k \cos \theta_i} \\ \bullet \frac{k \{ \cos \theta_i df(T^x \omega)/dx + ik \sin^2 \theta_i f(T^x \omega) \}}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) = \\ \quad \Phi'_{s,1}(\pm 0, T^x \omega | s) + f(T^x \omega) \Phi''_{s,0}(\pm 0 | s) - df(T^x \omega)/dx \Phi_{s,0}(\pm 0 | s) \\ \quad - [\{ e^{is l} w_1^+(T^x \omega | s) + e^{-is l} w_1^-(T^x \omega | s) \} + f(T^x \omega) \{ e^{is l} w_0^{+''}(s) + e^{-is l} w_0^{-''}(s) \}] \\ \quad - df(T^x \omega)/dx \{ e^{is l} w_0^+(s) + e^{-is l} w_0^-(s) \} \end{array} \right. \quad (2.37)$$

よって、Dirichlet 条件については (2.31), (2.32), (2.33), (2.34) 及び (2.35) 式から直ちに Wiener 積分核の間の関係式として 0 次摂動から

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet C_0^+(s) = C_0^-(s) \\ \bullet -\gamma(s) \{ C_0^+(s) + C_0^-(s) \} = J_0(s) \\ \bullet C_0^\pm(s) - \{ e^{is l} w_0^+(s) + e^{-is l} w_0^-(s) \} = \frac{i}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) \end{array} \right. \quad (2.38)$$

1 次摂動から次の関係式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet C_1^+(s, \lambda) - C_1^-(s, \lambda) = -F(\lambda) J_0(s) \\ \bullet -\gamma(s + \lambda) \{ C_1^+(s, \lambda) + C_1^-(s, \lambda) \} = J_1(s, \lambda) \\ \bullet \frac{k \sin \theta_i F(\lambda)}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) = C_1^\pm(s, \lambda) \mp \gamma(s) F(\lambda) C_0^\pm(s) \\ \quad - e^{is l} \{ w_1^+(s, \lambda) + F(\lambda) w_0^+(s) \} - e^{-is l} \{ w_1^-(s, \lambda) + F(\lambda) w_0^-(s) \} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

同様に Neumann 条件についても、(2.31), (2.32), (2.33), (2.36) 及び (2.37) 式から直ちに Wiener 積分核の間の関係式として 0 次摂動から

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet C_0^+(s) - C_0^-(s) = J_0(s) \\ \bullet -\gamma(s) \{ C_0^+(s) + C_0^-(s) \} = 0 \\ \bullet \mp \gamma(s) C_0^\pm(s) - \{ e^{is l} w_0^{+'}(s) + e^{-is l} w_0^{-'}(s) \} = \frac{k \sin \theta_i}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) \end{array} \right. \quad (2.40)$$

1 次摂動から次の関係式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet C_1^+(s, \lambda) - C_1^-(s, \lambda) = J_1(s, \lambda) \\ \bullet -\gamma(s + \lambda) \{ C_1^+(s, \lambda) + C_1^-(s, \lambda) \} + F(\lambda) \{ s(s + \lambda) - k^2 \} \{ C_0^+(s) - C_0^-(s) \} = 0 \\ \bullet \frac{ik \{ \lambda \cos \theta_i - k \sin^2 \theta_i \} F(\lambda)}{s - k \cos \theta_i} (e^{i(s-k \cos \theta_i)l} - e^{-i(s-k \cos \theta_i)l}) = \\ \quad \mp \gamma(s + \lambda) C_1^\pm(s, \lambda) + F(\lambda) \{ s(s + \lambda) - k^2 \} C_0^\pm(s) \\ \quad - [e^{is l} \{ w_1^+(s, \lambda) + F(\lambda) w_0^{+''}(s) + i \lambda F(\lambda) w_0^+(s) \} \\ \quad + e^{-is l} \{ w_1^-(s, \lambda) + F(\lambda) w_0^{-''}(s) + i \lambda F(\lambda) w_0^-(s) \}] \end{array} \right. \quad (2.41)$$

3 形式的厳密解

3.1 0 次摂動の形式的厳密解

(2.38) 式 (Dirichlet) 及び (2.40) 式 (Neumann) より帯状領域 $|\operatorname{Im} s| < k_2 \cos \theta_i$ で成立する 0 次摂動に関する Wiener-Hopf 方程式を得るが、両境界条件とも表式は同形で次式となる。

$$e^{is l} W_0^+(s) + J_0(s) \bar{\gamma}^+(s) \bar{\gamma}^-(s) + e^{-is l} W_0^-(s) = 0 \quad (3.1)$$

ただし、 $W_0^\pm(s)$ は

$$W_0^\pm(s) = \begin{cases} w_0^\pm(s) \pm \frac{i}{s - k \cos \theta_i} e^{\mp ik \cos \theta_i l} & : \text{Dirichlet} \\ w_0^{\pm'}(s) \pm \frac{k \sin \theta_i}{s - k \cos \theta_i} e^{\mp ik \cos \theta_i l} & : \text{Neumann} \end{cases} \quad (3.2)$$

$\bar{\gamma}^\pm(s)$ は核関数の積形式への分解であり分解関数とも呼ばれ次のように定義する。

$$\bar{\gamma}^\pm(s) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} (k \pm s)^{-\frac{1}{2}} & : \text{Dirichlet} \\ 2^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} (k \pm s)^{\frac{1}{2}} & : \text{Neumann} \end{cases} \quad (3.3)$$

$W_0^\pm(s)$ が $s = k \cos \theta_i$ で 1 位の極による特異性を持つことを除いて $W_0^\pm(s), \bar{\gamma}^\pm(s)$ は以下の領域で正則である。

$$\begin{cases} W_0^+(s) : \text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i, & \bar{\gamma}^+(s) : \text{Im } s > -k_2 \\ W_0^-(s) : \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i, & \bar{\gamma}^-(s) : \text{Im } s < k_2 \end{cases}$$

なお、 $\bar{\gamma}^\pm(s)$ の定義を (3.3) 式としたのは解析の便宜上、次の対称性を持たせるためである。

$$\bar{\gamma}^+(-s) = \bar{\gamma}^-(s), \quad \bar{\gamma}^+(s)\bar{\gamma}^-(s) = \frac{1}{2\gamma(s)} : \text{Dirichlet}; \quad \bar{\gamma}^+(s)\bar{\gamma}^-(s) = \frac{1}{2}\gamma(s) : \text{Neumann} \quad (3.4)$$

Wiener-Hopf 方程式の解法 [4, 10, 14] は定石化されており、(3.1) 式もそれに沿って (2.11) のエッジ条件を考慮した分解操作を施し、評価を行なうことで両境界条件について同形な 0 次摂動についての形式的厳密表現を得る。

$$X_0^{a,s}(s) = \bar{\gamma}^+(s) \left\{ \frac{c_0 i e^{-ik \cos \theta_i l}}{\bar{\gamma}^+(k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} \pm \frac{c_0 i e^{ik \cos \theta_i l}}{\bar{\gamma}^-(k \cos \theta_i)(s + k \cos \theta_i)} \pm \frac{1}{\pi i} \int_k^{k+ico} \frac{e^{2it} X_0^{a,s}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)} dt \right\} \quad (3.5)$$

ただし、因子 c_0 及び関数 $X_0^{a,s}(s)$ は

$$c_0 = \begin{cases} 1 & : \text{Dirichlet} \\ -ik \sin \theta_i & : \text{Neumann} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$X_0^{a,s}(s) = W_0^+(s) \pm W_0^-(-s) \quad (3.7)$$

である。この (解) $X_0^{a,s}(s)$ は $s = k \cos \theta_i$ で 1 位の極による特異性を除いて $\text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i$ で正則である。0 次摂動解はストリップ表面が滑らかで平坦である場合の散乱場に相当する。

3.1.1 1 次摂動の形式的厳密解

0 次摂動の場合と同様に (2.39) 式 (Dirichlet) 及び (2.41) 式 (Neumann) より帯状領域 $|\text{Im } s| < k_2 \cos \theta_i$ で成立する 1 次摂動に関する Wiener-Hopf 方程式を得る。

$$e^{is'l} W_1^+(s, \lambda) + J_1(s, \lambda) \bar{\gamma}^+(s + \lambda) \bar{\gamma}^-(s + \lambda) + e^{-is'l} W_1^-(s, \lambda) = 0 \quad (3.8)$$

ただし、

$$W_1^\pm(s, \lambda) = \begin{cases} w_1^\pm(s, \lambda) + F(\lambda) w_0^{\pm'}(s) \pm \frac{k \sin \theta_i}{s - k \cos \theta_i} F(\lambda) e^{\mp ik \cos \theta_i l} & : \text{Dirichlet} \\ w_1^{\pm'}(s, \lambda) + F(\lambda) w_0^{\pm''}(s) + i\lambda F(\lambda) w_0^{\pm'}(s) \\ \pm \frac{k(i\lambda \cos \theta_i + ik \sin^2 \theta_i)}{s - k \cos \theta_i} F(\lambda) e^{\mp ik \cos \theta_i l} & : \text{Neumann} \end{cases} \quad (3.9)$$

である。 $W_1^+(s, \lambda)$ が $s = k \cos \theta_i$ で 1 位の極による特異性を持つことを除いて $W_1^\pm(s, \lambda), \bar{\gamma}^\pm(s + \lambda)$ は以下の領域で正則である。

$$\begin{cases} W_1^+(s, \lambda) : \text{Im } s > -k_2 \cos \theta_i & , \quad \bar{\gamma}^+(s + \lambda) : \text{Im } (s + \lambda) > -k_2 \\ W_1^-(s, \lambda) : \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i & , \quad \bar{\gamma}^-(s + \lambda) : \text{Im } (s + \lambda) < k_2 \end{cases}$$

0 次摂動の場合と同様に (3.8) 式に対して分解操作を施すが、その前に (3.8) 式に対して次の変数変換と置換

$$p = s + \lambda, \quad \widehat{W}_1^\pm(p, \lambda) = e^{\mp i \lambda l} W_1^\pm(p - \lambda, \lambda), \quad \widehat{J}_1(p, \lambda) = J_1(p - \lambda, \lambda) \quad (3.10)$$

を行なう。 λ が実数であるためこの変数変換と置換で $\widehat{W}_1^\pm(p, \lambda), \widehat{J}_1(p, \lambda)$ は正則な領域を変えない。従って、帯状領域 $|\text{Im } p| < k_2 \cos \theta_i$ で成立する次のような Wiener-Hopf 方程式となる。

$$e^{i p l} \widehat{W}_1^+(p, \lambda) + \widehat{J}_1(p, \lambda) \bar{\gamma}^+(p) \bar{\gamma}^-(p) + e^{-i p l} \widehat{W}_1^-(p, \lambda) = 0 \quad (3.11)$$

この表式は 0 次摂動の場合と同形になるので全く同様に評価して 1 次摂動について次の形式的厳密解表現を得る。

$$X_1^{a,s}(p, \lambda) = \bar{\gamma}^+(p) \left[\frac{c_1(\lambda) F(\lambda) i e^{-i(\lambda + k \cos \theta_i) l}}{\bar{\gamma}^+(\lambda + k \cos \theta_i) \{p - (\lambda + k \cos \theta_i)\}} \pm \frac{c_1(\lambda) F(\lambda) i e^{i(\lambda + k \cos \theta_i) l}}{\bar{\gamma}^-(\lambda + k \cos \theta_i) \{p + (\lambda + k \cos \theta_i)\}} \right. \\ \left. \pm \frac{1}{\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{2i q l} X_1^{a,s}(q, \lambda)}{\bar{\gamma}^-(q)(q + p)} dq \right] \quad (3.12)$$

ただし、因子 $c_1(\lambda)$ 及び関数 $X_1^{a,s}(p, \lambda)$ は

$$c_1(\lambda) = \begin{cases} -ik \sin \theta_i & : \text{Dirichlet} \\ -\{k \cos \theta_i (\lambda + k \cos \theta_i) - k^2\} & : \text{Neumann} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$X_1^{a,s}(p, \lambda) = \widehat{W}_1^+(p, \lambda) \pm \widehat{W}_1^-(p, \lambda) \quad (3.14)$$

である。 $X_1^{a,s}(p, \lambda)$ は $p = \lambda + k \cos \theta_i$ で 1 位の極による特異性を除いて $\text{Im } p > -k_2 \cos \theta_i$ で正則である。

4 漸近解

(3.5) 式及び (3.12) 式は厳密解ではあるがこれは形式的な意味に過ぎない。これは表式から明らかなように未知関数である $X_0^{a,s}(s)$ や $X_1^{a,s}(p, \lambda)$ を第 3 項の積分に含む再帰的な解構造となっており s や p についての陽な形の関数ではない。これはストリップの表面を伝搬する表面波により 2 つのエッジを介して無限回の回折が引き起こされるからである。すなわち第 3 項の再帰積分は多重回折効果を記述している。ここでは実際の評価のために高周波漸近解あるいはストリップの幅が波長に比べて十分大である場合、即ち、 $|k|l \rightarrow +\infty$ の条件下で (3.5) 式及び (3.12) 式の漸近的表現を導く。

0 次摂動は通常の平坦なストリップの場合である。通常のストリップは単純な構造ではあるが散乱及び回折問題における基本的な問題であり解析的手法は勿論、特に数値解析手法における規範的問題として多くの研究者によって既に比較的详细な研究がなされている。Wiener-Hopf 法を用いた解析は 2 次元問題として平面波入射の場合には E 及び H-偏光とも K.Kobayashi により詳細な研究^[13]がなされている。そこで D.S.Jones^[10] が最初に行ない K.Kobayashi が整理且つ拡張して用いている手法で両境界条件ともエッジによる 2 次の回折までを、即ち、エッジ間の距離の $\frac{1}{2}$ 乗のオーダーまでを精密に評価する。1 次摂動に対してもこの手法を適用する。ここでは具体的な導出過程 (Dirichlet^[4]) は省略し結果のみを列挙するにとどめる。

4.1 0次摂動の漸近解

$W_0^\pm(s)$ については $|k|l \rightarrow +\infty$ の条件下で次のような漸近形 (Dirichlet [4]) を持ち、両境界条件とも同形である。

$$W_0^\pm(s) \simeq c_0 \bar{\gamma}^\pm(s) \left\{ \pm \frac{ie^{\mp ik \cos \theta_i l}}{\bar{\gamma}^\pm(k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} - ie^{\pm ik \cos \theta_i l} \eta_0^{d,u}(\pm s) + B_0^{u,d} \xi(\pm s) \right\} \quad (4.1)$$

ただし、(4.1) 式において第1項と第2項は厳密項であり各々、エッジによる1次と2次の回折効果を表す。第3項は漸近項でありエッジによる3次以上の回折効果について2次の回折効果を用いて記述した補正項を表す。これは未知関数の積分評価について $|k|l \rightarrow +\infty$ の条件下でブランチカット周囲の積分に関する漸近展開の補助定理 [13] を適用して得た漸近展開の主要項である。なお、(4.1) 式中の関数 $\eta_0^{u,d}(s)$ 及び定数 $B_0^{u,d}$ は次の特別の場合である。

$$\eta_1^{u,d}(p, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \eta_0^{u,d}(s), \quad B_1^{u,d}(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = B_0^{u,d} \quad (4.2)$$

ここで、 $\eta_1^{u,d}(p, \lambda), \xi(s), B_1^{u,d}(\lambda)$ なる関数は以下で定義される。

$$\eta_1^{u,d}(p, \lambda) = \frac{\xi(p) - \xi\{\mp(\lambda + k \cos \theta_i)\}}{p \pm (\lambda + k \cos \theta_i)} \quad (4.3)$$

$$\xi(s) = \begin{cases} \frac{e^{2ikl}}{\pi l^{\frac{1}{2}}} \zeta_0\{-2i(s+k)l\} & : \text{Dirichlet} \\ -\frac{2l^{\frac{1}{2}} e^{2ikl}}{\pi} \zeta_{-1}\{-2i(s+k)l\} & : \text{Neumann} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\zeta_n(\alpha) = \int_0^\infty \frac{t^{n+\frac{1}{2}} e^{-t}}{t+\alpha} dt \quad \left(n > -\frac{3}{2}, \quad |\arg \alpha| < \pi \right) \quad : \text{変形 } \Gamma \text{ 関数} \quad (4.5)$$

$$B_1^{u,d}(\lambda) = \frac{\bar{\gamma}^+(k) \{ \chi_1^{d,u}(k, \lambda) + \chi_1^{u,d}(k, \lambda) \bar{\gamma}^+(k) \xi(k) \}}{1 - \{ \bar{\gamma}^+(k) \xi(k) \}^2} \quad (4.6)$$

また、 $\chi_1^{u,d}(p, \lambda), P_1^{u,d}(p, \lambda)$ なる関数は次のように定義する。

$$\chi_1^{u,d}(p, \lambda) = ie^{\mp i(\lambda+k \cos \theta_i)l} P_1^{u,d}(p, \lambda) - ie^{\pm i(\lambda+k \cos \theta_i)l} \eta_1^{d,u}(p, \lambda) \quad (4.7)$$

$$P_1^{u,d}(p, \lambda) = \frac{1}{p \mp (\lambda + k \cos \theta_i)} \left[\frac{1}{\bar{\gamma}^+\{\pm(\lambda + k \cos \theta_i)\}} - \frac{1}{\bar{\gamma}^+(p)} \right] \quad (4.8)$$

4.2 1次摂動の漸近解

$\widehat{W}_1^\pm(p, \lambda)$ について $|k|l \rightarrow +\infty$ の条件下での漸近形を求め $W_1^\pm(s, \lambda)$ の漸近形 (Dirichlet [4]) を得る。両境界条件とも同形で次式となる。

$$\begin{aligned} W_1^\pm(s, \lambda) &\simeq c_1(\lambda) F(\lambda) e^{\pm i\lambda l} \bar{\gamma}^\pm(s + \lambda) \left[\pm \frac{ie^{\mp i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^\pm(\lambda + k \cos \theta_i)(s - k \cos \theta_i)} \right. \\ &\quad \left. - ie^{\pm i(\lambda+k \cos \theta_i)l} \eta_1^{d,u}\{\pm(s + \lambda), \lambda\} + B_1^{u,d}(\lambda) \xi\{\pm(s + \lambda)\} \right] \\ &\equiv F(\lambda) \widehat{W}_1^\pm(s, \lambda) \end{aligned} \quad (4.9)$$

0次摂動の場合と同様、(4.9) 式で第1項と第2項は厳密項であり第3項が同様な積分評価を行なった漸近項である。以上により0次摂動及び1次摂動の漸近解表現を得た。これらを用いて Wiener 積分核 $C_0^\pm(s), C_1^\pm(s, \lambda)$ が求められる。

4.3 D^a -Fourier 変換領域における漸近解

0次摂動の Wiener 積分核 $C_0^\pm(s)$ は (2.38) 及び (2.40) 式より Dirichlet 条件については次のように与えられる。

$$C_0^\pm(s) = -\frac{J_0(s)}{2\gamma(s)} = e^{is'l}W_0^+(s) + e^{-is'l}W_0^-(s) \quad (4.10)$$

Neumann 条件については

$$C_0^\pm(s) = \pm \frac{J_0(s)}{2} = \mp \frac{1}{\gamma(s)} \{e^{is'l}W_0^+(s) + e^{-is'l}W_0^-(s)\} \quad (4.11)$$

となる。 D^a -Fourier 変換領域での散乱場の 0次摂動は

$$\Phi_{s,0}(z|s) = C_0^\pm(s)e^{-\gamma(s)|z|} \quad (4.12)$$

で与えられているので D^a -逆 Fourier 変換により実空間での散乱場の無摂動部分、即ちストリップ表面が滑らかで平坦な場合の散乱場 $\phi_{s,0}(x, z)$ が次のように与えられる。

$$\phi_{s,0}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} e^{-isx} \Phi_{s,0}(z|s) ds \quad (|\tau| < k_2 \cos \theta_i) \quad (4.13)$$

1次摂動の Wiener 積分核 $C_1^\pm(p, \lambda)$ は (2.39) 及び (2.41) 式より Dirichlet 条件については次のように与えられる。

$$\begin{aligned} C_1^\pm(s, \lambda) &= -\frac{J_1(s, \lambda)}{2\gamma(s+\lambda)} \mp \frac{1}{2}F(\lambda)J_0(s) \\ &= e^{is'l}W_1^+(s, \lambda) + e^{-is'l}W_1^-(s, \lambda) \pm F(\lambda)\gamma(s)\{e^{is'l}W_0^+(s) + e^{-is'l}W_0^-(s)\} \\ &= F(\lambda)[e^{is'l}\widetilde{W}_1^+(s, \lambda) + e^{-is'l}\widetilde{W}_1^-(s, \lambda) \pm \gamma(s)\{e^{is'l}W_0^+(s) + e^{-is'l}W_0^-(s)\}] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Neumann 条件については

$$\begin{aligned} C_1^\pm(s, \lambda) &= \pm \frac{1}{2}J_1(s, \lambda) + \frac{F(\lambda)}{2\gamma(s+\lambda)} [(\gamma(s))^2 + s\lambda]J_0(s) \\ &= \pm \frac{1}{\gamma(s+\lambda)} \{e^{is'l}W_1^+(s, \lambda) + e^{-is'l}W_1^-(s, \lambda)\} \\ &\quad - F(\lambda) \frac{\{s(s+\lambda) - k^2\}}{\gamma(s+\lambda)\gamma(s)} \{e^{is'l}W_0^-(s) + e^{-is'l}W_0^+(s)\} \\ &= F(\lambda) \left[\pm \frac{1}{\gamma(s+\lambda)} \{e^{is'l}\widetilde{W}_1^+(s, \lambda) + e^{-is'l}\widetilde{W}_1^-(s, \lambda)\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\{s(s+\lambda) - k^2\}}{\gamma(s+\lambda)\gamma(s)} \{e^{is'l}W_0^-(s) + e^{-is'l}W_0^+(s)\} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。よって、 D^a -Fourier 変換領域での散乱場の 1次摂動は

$$\Phi_{s,1}(z, T^x\omega|s) = \int_{-\infty}^{\infty} C_1^\pm(s, \lambda) e^{-\gamma(s+\lambda)|z| - i\lambda x} dB(\lambda, \omega) \quad (4.16)$$

で与えられているので D^a -逆 Fourier 変換により実空間での散乱場の 1次摂動部分、即ちストリップ表面のランダムな凹凸による散乱場の擾乱 $\phi_{s,1}(x, z, \omega)$ を次のように与える。

$$\phi_{s,1}(x, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} e^{-isx} \Phi_{s,1}(z, T^x\omega|s) ds \quad (4.17)$$

上式を整理して両境界条件で同形な次の表式を得る。

$$\phi_{s,1}(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \{g(\lambda)g_2(x, z, \lambda) + g_2(x, z, \lambda)\} dB(\lambda, \omega) \quad (4.18)$$

ただし、 $g_1(x, z, \lambda), g_2(x, z, \lambda)$ は1次摂動における最終的な Wiener 積分核である。その具体形は後に示すが $g_1(x, z, \lambda)$ に係る因子 $g(\lambda)$ は次のように定義する。

$$g(\lambda) = \begin{cases} -ik \sin \theta_i & : \text{Dirichlet} \\ \frac{k \cos \theta_i (\lambda + k \cos \theta_i) - k^2}{\gamma(\lambda + k \cos \theta_i)} & : \text{Neumann} \end{cases} \quad (4.19)$$

Neumann 条件の場合 $g(\lambda)$ はその分母に $\gamma(\lambda + k \cos \theta_i)$ を持つが $k_2 > 0$ である限りは問題はない。ただし、 $k_2 = 0$ の場合には $\gamma(\lambda + k \cos \theta_i) = 0$ となる場合があり得りこれは後に議論する。Wiener 積分核 $g_1(x, z, \lambda)$ は次のような性質を持つ。

$$g_1(x, z, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \phi_{s0}(x, z) \quad (4.20)$$

4.4 散乱場の漸近表現

実空間における散乱場 $\phi_s(x, z, \omega)$ は $|k|\sigma \ll 1$ 及び $1 \ll |k|l$ の条件下で両境界条件について最終的に次のように表される。

$$\phi_s(x, z, \omega) = g_1(x, z, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \{g(\lambda)g_1(x, z, \lambda) + g_2(x, z, \lambda)\} dB(\lambda, \omega) \quad (4.21)$$

ここで、両境界条件とも Wiener 積分核 $g_1(x, z, \lambda), g_2(x, z, \lambda)$ を以下のように分離して書く。

$$g_1(x, z, \lambda) \equiv \phi_{s11}(x, z, \lambda) + \phi_{s12}(x, z, \lambda) \quad (4.22)$$

$$g_2(x, z, \lambda) \equiv \phi_{s13}(x, z, \lambda) + \phi_{s14}(x, z, \lambda) \quad (4.23)$$

(4.22), (4.23) 式のように表すと $\phi_{s11}(x, z, \lambda), \phi_{s13}(x, z, \lambda)$ はエッジによる1次回折効果による散乱場を記述する厳密項であり、 $\phi_{s12}(x, z, \lambda), \phi_{s14}(x, z, \lambda)$ は2つのエッジに起因する多重回折効果による散乱場を記述する条件 $1 \ll |k|l$ 下での漸近項である。具体的な表式は Dirichlet 条件については以下の通りである。

$$\phi_{s11}(x, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \left[\frac{\bar{\gamma}^+(s) i e^{-i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^+(\lambda+k \cos \theta_i) \{s - (\lambda+k \cos \theta_i)\}} e^{is l} - \frac{\bar{\gamma}^-(s) i e^{i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^-(\lambda+k \cos \theta_i) \{s - (\lambda+k \cos \theta_i)\}} e^{-is l} \right] e^{-\gamma(s)|z|-isx} ds \quad (4.24)$$

$$\phi_{s12}(x, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \left[\bar{\gamma}^+(s) \{-i e^{i(\lambda+k \cos \theta_i)l} \eta_1^d(s, \lambda) + B_1^u(\lambda) \xi(s)\} e^{is l} + \bar{\gamma}^-(s) \{-i e^{-i(\lambda+k \cos \theta_i)l} \eta_1^u(-s, \lambda) + B_1^d(\lambda) \xi(-s)\} e^{-is l} \right] e^{-\gamma(s)|z|-isx} ds \quad (4.25)$$

$$\phi_{s13}(x, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \text{sgn}(z) \left[\frac{i e^{-i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{2\bar{\gamma}^+(k \cos \theta_i) \bar{\gamma}^-(s-\lambda) \{s - (\lambda+k \cos \theta_i)\}} e^{is l} - \frac{i e^{i(\lambda+k \cos \theta_i)l}}{2\bar{\gamma}^-(k \cos \theta_i) \bar{\gamma}^+(s-\lambda) \{s - (\lambda+k \cos \theta_i)\}} e^{-is l} \right] e^{-\gamma(s)|z|-isx} ds \quad (4.26)$$

$$\phi_{s14}(x, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \text{sgn}(z) \left[\frac{-i e^{ik \cos \theta_i l} \eta_0^d(s-\lambda) + B_0^u \xi(s-\lambda)}{2\bar{\gamma}^-(s-\lambda)} e^{i(s-\lambda)l} + \frac{-i e^{-ik \cos \theta_i l} \eta_0^u\{-s-\lambda\} + B_0^d \xi\{-s-\lambda\}}{2\bar{\gamma}^+(s-\lambda)} e^{-i(s-\lambda)l} \right] e^{-\gamma(s)|z|-isx} ds \quad (4.27)$$

($|\tau| < k_2 \cos \theta_i$)

また、Neumman 条件については以下の通りである。

$$\phi_{s11}(x, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} -\operatorname{sgn}(z) \left[\frac{\bar{\gamma}^-(\lambda + k \cos \theta_i) i e^{-i(\lambda + k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^-(s) \{s - (\lambda + k \cos \theta_i)\}} e^{isl} - \frac{\bar{\gamma}^+(\lambda + k \cos \theta_i) i e^{i(\lambda + k \cos \theta_i)l}}{\bar{\gamma}^+(s) \{s - (\lambda + k \cos \theta_i)\}} e^{-isl} \right] e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds \quad (4.28)$$

$$\phi_{s12}(x, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} -\operatorname{sgn}(z) \gamma(\lambda + k \cos \theta_i) \left[\frac{-ie^{i(\lambda + k \cos \theta_i)l} \eta_1^d(s, \lambda) + B_1^u(\lambda) \xi(s)}{2\bar{\gamma}^-(s)} e^{isl} + \frac{-ie^{-i(\lambda + k \cos \theta_i)l} \eta_1^u(-s, \lambda) + B_1^d(\lambda) \xi(-s)}{2\bar{\gamma}^+(s)} e^{-isl} \right] e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds \quad (4.29)$$

$$\phi_{s13}(x, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} -\frac{\{s(s-\lambda) - k^2\}}{\gamma(s)} (-ik \sin \theta_i) \left[\frac{ie^{-i(\lambda + k \cos \theta_i)l}}{2\bar{\gamma}^+(k \cos \theta_i) \bar{\gamma}^-(s-\lambda) \{s - (\lambda + k \cos \theta_i)\}} e^{isl} - \frac{ie^{i(\lambda + k \cos \theta_i)l}}{2\bar{\gamma}^-(k \cos \theta_i) \bar{\gamma}^+(s-\lambda) \{s - (\lambda + k \cos \theta_i)\}} e^{-isl} \right] e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds \quad (4.30)$$

$$\phi_{s14}(x, z, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} -\frac{\{s(s-\lambda) - k^2\}}{\gamma(s)} (-ik \sin \theta_i) \left[\frac{-ie^{ik \cos \theta_i l} \eta_0^d(s-\lambda) + B_0^u \xi(s-\lambda)}{2\bar{\gamma}^-(s-\lambda)} e^{i(s-\lambda)l} + \frac{-ie^{-ik \cos \theta_i l} \eta_0^u\{-s-\lambda\} + B_0^d \xi\{-s-\lambda\}}{2\bar{\gamma}^+(s-\lambda)} e^{-i(s-\lambda)l} \right] e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds \quad (4.31)$$

($|\tau| < k_2 \cos \theta_i$)

ただし、 $\operatorname{sgn}(z)$ は符号関数であり次のように定義する。

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} 1 & (z > 0) \\ 0 & (z = 0) \\ -1 & (z < 0) \end{cases} \quad (4.32)$$

(4.21) 式のように散乱場を表現すれば複素 Gauss ランダム測度 (2.3) 式の性質により散乱場の統計量が容易に求まる。例として平均を計算すると

$$\langle \phi_s(x, z, \omega) \rangle = g_1(x, z, 0) \quad (4.33)$$

となりコヒーレント成分として 0 次摂動が得られ、散乱の平均場を与える。分散を計算すると

$$\langle |\phi_s(x, z, \omega) - \langle \phi_s(x, z, \omega) \rangle|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 |g(\lambda) g_1(x, z, \lambda) + g_2(x, z, \lambda)|^2 d\lambda \quad (4.34)$$

が得られる。これはインコヒーレント成分として 1 次摂動の強度、即ち散乱場の揺らぎを与える。このように任意の統計量が簡単に得られ具体的な関数の形で求められる。

Dirichlet, Neumman 条件とも最終的な散乱場の具体的な表式を得た。摂動法を用いてもランダム球面や 2 次元ランダム円筒面の円周方向については発散を引き起こすような解析上の困難を生じないことが報告 [16, 17] されている。(ただし、ランダム円筒面の場合は軸方向については anomaly を生じる [16]。ストリップも 3 次元問題として扱えば当然この方向には anomaly を生じると思われる。) 奇妙なことであるがストリップのような有限の構造に対し表面が凹凸を持つ場合 Neumman 条件及び電磁波の場合にも anomaly を生じることとはグレーティング方面の研究においても報告例がないようである。言うまでも無くランダム表面の場合も例は無い。波数 k には Wiener-Hopf 法を適用する都合上微小な媒質損失を仮定しているが本来の問題としては $k_2 \rightarrow +0$ とする。このとき Neumman 条件の場合の 1 次摂動は因子 $g(\lambda)$ の分母が $\gamma(\lambda + k \cos \theta_i) = 0$ となる λ 即ち Rayleigh 波数を与える λ について発散する。これは構造が有限な x 軸方向について起こる。そして積分評価としての散乱場の分散が発散する。 $g_1(x, z, \lambda)$ については表式どおり明確な形で発散因子が

現れるが $g_2(x, z, \lambda)$ についても少し表現を書き直すことで同様な形の因子が (s の関数として) 現れる。このような発散はエッジによる1次回折効果に対して生じ得るので二つのエッジを介した多重回折についても発生することになる。これは無限平面に対する場合と同様に Rayleigh 波数を与える Bragg ベクトル λ について振動展開の収束が悪い、即ち λ について一様な近似を与えないことによるものと考えられる。このような λ についての特異性はランダム無限平面における振動解析による特異性と全く同じである。このことから考えて、ストリップのような有限の構造に対しても anomaly が存在し得ることを示唆していると思われ興味深い。これは今後の研究課題としたい。

4.5 散乱場の表式 (実空間)

実空間における散乱場を D^a -逆 Fourier 変換を用いた形で表したが角スペクトル表現で記述すると $k_2 \rightarrow +0$ とした本来の問題に対し特にエッジによる1次の回折効果については明確に書ける。0次振動は $g_1(x, z, 0)$ から得られるので一般の λ に対して Wiener 積分核 $g_1(x, z, \lambda), g_2(x, z, \lambda)$ を解析すればよい。(Neumann 条件では解析上の困難を持つのが $g_1(x, z, \lambda)$ 自体は求めることが出来る [1]。) 次の変数変換及びエッジを中心とする円筒座標系を導入する。

$$s = -k \cos w \quad (w \in \mathbb{C}) \quad (4.35)$$

ここで、 \mathbb{C} は図2に示す複素 w -平面上の集合である。

$$\begin{cases} x = r_1 \cos \phi_1 + l \\ z = r_1 \sin \phi_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = r_2 \cos \phi_2 - l \\ z = r_2 \sin \phi_2 \end{cases} \quad (4.36)$$

$$(r_1, r_2 > 0, |\phi_1|, |\phi_2| \leq \pi)$$

$\phi_{1,2}$ は観測角 (見方を変えて散乱角と言ってもよい) である。

さて、特に入射角 θ_i を Bragg ベクトル $\lambda (\in \mathbb{R})$ を取り入れたある種の複素角 $\theta_i(\lambda) (\in \mathbb{C})$ として扱うと解析に都合がよい。これは等価的な入射角もしくは反射角でありランダム表面の Bragg ベクトルにより入射波の波動ベクトルが変化することの別表現である。そこで複素角 $\theta_i(\lambda)$ を等価入射角と呼びその定義を次で与える。

$$\theta_i(\lambda) = \begin{cases} 0 + i \log(d + \sqrt{d^2 - 1}) & (k(1 - \cos \theta_i) \leq \lambda) \\ \cos^{-1} d & (-k(1 + \cos \theta_i) < \lambda < k(1 - \cos \theta_i)) \\ \pi - i \log(-d + \sqrt{d^2 - 1}) & (\lambda \leq -k(1 + \cos \theta_i)) \end{cases}, \quad d = \frac{\lambda}{k} + \cos \theta_i \quad (4.37)$$

$\theta_i(\lambda)$ が複素角となる場合は z 軸方向に減衰するエバネセント波を表現する。

明らかに $\cos \theta_i(0) = \cos \theta_i$, $\theta_i(0) = \theta_i$ である。

$g_1(x, z, \lambda)$ の $\phi_{s11}(x, z, \lambda)$ はエッジによる1次の回折効果を記述する。すなわち以前 J.Nakayama の行ったランダム半平面問題における1次振動解の Wiener 積分核 $g_1(x, z, \lambda)$ (Dirichlet [5, 6]) と本質的に同じでありこの項のみが厳密に表現出来る。結果のみを述べるが Dirichlet 条件 [1, 3] では

$$\begin{aligned} \phi_{s11}(x, z, \lambda) &= \phi_{s11}(r_1; r_2, \phi_1; \phi_2, \lambda) \\ &= -e^{-ikl \cos \theta_i(\lambda)} \{ D_1(|\phi_1|, \theta_i(\lambda), r_1) + D_1(|\phi_1|, -\theta_i(\lambda), r_1) \} \end{aligned}$$

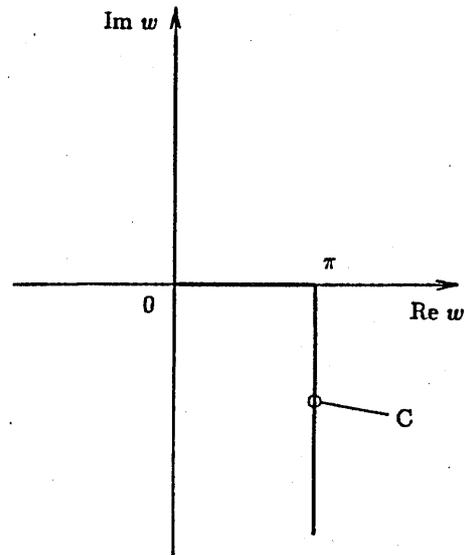


図2 複素 w -平面上の集合 \mathbb{C}

$$+e^{ikl\cos\theta_i(\lambda)}\{D_1(|\phi_2|, \theta_i(\lambda), r_2) - D_1(|\phi_2|, -\theta_i(\lambda), r_2)\} \quad (4.38)$$

Neumann 条件^[1]では

$$\begin{aligned} \phi_{s11}(x, z, \lambda) &= \phi_{s11}(r_1; r_2, \phi_1; \phi_2, \lambda) \\ &= -\operatorname{sgn}(\phi_1)e^{-ikl\cos\theta_i(\lambda)}\{D_1(|\phi_1|, \theta_i(\lambda), r_1) - D_1(|\phi_1|, -\theta_i(\lambda), r_1)\} \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\phi_2)e^{ikl\cos\theta_i(\lambda)}\{D_1(|\phi_2|, \theta_i(\lambda), r_2) + D_1(|\phi_2|, -\theta_i(\lambda), r_2)\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

となる。ただし、関数 $D_1(\phi, Z, r)$ はエッジによる 1 次回折効果を記述するもので次のように定義される。

$$D_1(\phi, Z, r) \equiv \frac{i}{4\pi} \int_C \frac{1}{\cos \frac{\omega \pm Z}{2}} e^{ikr \cos(\omega - \phi)} d\omega \quad (Z \in \mathbb{C}, r > 0, |\phi| \leq \pi) \quad (4.40)$$

なお、この関数の引数に制限は無く一般の複素数を取ることが出来る。ただし、物理的意味を持つのは引数が上記の場合である。 Z は等価入射角とする。

関数 $D_1(\phi, Z, r)$ は Sommerfeld 型の積分の一種であり引数 Z (等価入射角) が実数角の場合には Fresnel 積分を用いた表現となる。これは従来から知られている性質である。しかしながら表面が x 軸方向に波長程度以下のピッチで凹凸を持つ場合、等価入射角は (4.37) 式で述べているような複素角になる場合があり、平坦な構造では起こり得ないがランダム表面の場合は起こり得る。非常に奇妙なことであるがこのような複素角を考えた場合の解析は過去の研究においても筆者の知る限り報告例が無い。これはランダム表面に限らずグレーティングでも起こり得るが考察の対象とはなっていない様である。(たとえば、文献 [15] においても実数角に限った場合の解析である。) 筆者らは等価入射角が複素角となる場合の解析を試み、複素数を引数とする拡張された Fresnel 積分 (以下、拡張 Fresnel 積分と呼ぶ) を用いて従来と同形の結果を得た^[3]。(これはエッジを考慮したランダム境界値問題の一つの成果と言える。)

$$D_1(\phi, Z, r) = e^{-ikr \cos(\phi + Z)} F\left(\sqrt{2kr} \cos \frac{\phi + Z}{2}\right) \quad (4.41)$$

ただし、 $F(\alpha)$ は拡張 Fresnel 積分^[1, 3]である。(その定義と簡単な性質については付録 A を参照。)

$g_2(x, z, \lambda)$ の $\phi_{s13}(x, z, \lambda)$ についてはエッジによる 1 次の回折効果を分離することでその一部を $D_1(\phi, Z, r)$ を用いて書くことが出来る^[3]。残りの多重回折効果については厳密な解析は困難であるが積分路を最急降下路上の経路に書き直すことで数値的に評価出来る形にはなる^[1, 3]。(ただし、Neumann 条件では解析上の特異性のため形式的に書くのに過ぎない^[1]。)

4.6 数値計算

直交座標系 (x, z) を原点を中心とする円筒座標系 (r, ϕ) に書き換え $kr \rightarrow +\infty$ の条件下で鞍部点法^[11]を適用し無限遠方での漸近形を得る。

$$\phi_s(r, \phi, \omega) \simeq g_1^U(r, \phi, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{g(\lambda)g_1^U(r, \phi, \lambda) + g_2^U(r, \phi, \lambda)\} dB(\lambda, \omega) \quad (4.42)$$

$$= \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{2\pi^{\frac{1}{2}}\sqrt{2kr}} \left[G_1(\phi, \theta_i, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{g(\lambda)G_1(\phi, \theta_i, \lambda) + G_2(\phi, \theta_i, \lambda)\} dB(\lambda, \omega) \right] \quad (4.43)$$

となる。ただし、 $G_1(\phi, \theta_i, \lambda)$, $G_2(\phi, \theta_i, \lambda)$ は部分波の散乱振幅に相当する。原点に単位線波源を想定する。この時の波動場は自由空間中の 2 次元 Green 関数 $G(kr)$ で記述され

$$G(kr) = \frac{i}{4\pi} H_0^{(1)}(kr) \quad (4.44)$$

である。ただし、 $H_0^{(1)}(kr)$ は 0 次の第 1 種 Hankel 関数である。その $kr \rightarrow +\infty$ に対する漸近形は

$$H(kr)_0^{(1)} \simeq e^{i(kr - \frac{\pi}{2})} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \quad (4.45)$$

であるから $G(kr)$ の無限遠方での漸近形は

$$G(kr) \simeq \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{2\pi^{\frac{1}{2}} \sqrt{2kr}} \quad (4.46)$$

となる。この $G(kr)$ を用いて散乱場 $\phi_s(r, \phi, \lambda)$ を規格化し (散乱振幅を考える)、遠方 $kr \rightarrow +\infty$ での強度 (自乗平均) を考えることにする。そこで、散乱場のコヒーレント強度の角度分布 $I_{Sc}(\phi, \theta_i)$ 、インコヒーレント強度の角度分布 $I_{Sic}(\phi, \theta_i)$ 及び全散乱場の強度の角度分布 $I_S(\phi, \theta_i)$ を次のように定義する^[1, 2]。

$$\begin{aligned} I_{Sc}(\phi, \theta_i) &\equiv \lim_{kr \rightarrow +\infty} 10 \log_{10} \frac{|\langle \phi_s \rangle|^2}{|G(kr)|^2} \\ &= 10 \log_{10} |G_1(\phi, \theta_i, 0)|^2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} I_{Sic}(\phi, \theta_i) &\equiv \lim_{kr \rightarrow +\infty} 10 \log_{10} \frac{\langle |\phi_s - \langle \phi_s \rangle|^2 \rangle}{|G(kr)|^2} \\ &= 10 \log_{10} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 |g(\lambda) G_1(\phi, \theta_i, \lambda) + G_2(\phi, \theta_i, \lambda)|^2 d\lambda \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} I_S(\phi, \theta_i) &\equiv \lim_{kr \rightarrow +\infty} 10 \log_{10} \frac{\langle |\phi_s|^2 \rangle}{|G(kr)|^2} \\ &= \lim_{kr \rightarrow +\infty} 10 \log_{10} \frac{\langle |\phi_s \rangle|^2 + \langle |\phi_s - \langle \phi_s \rangle|^2 \rangle}{|G(kr)|^2} \\ &= I_{Sc}(\phi, \theta_i) + I_{Sic}(\phi, \theta_i) \end{aligned} \quad (4.49)$$

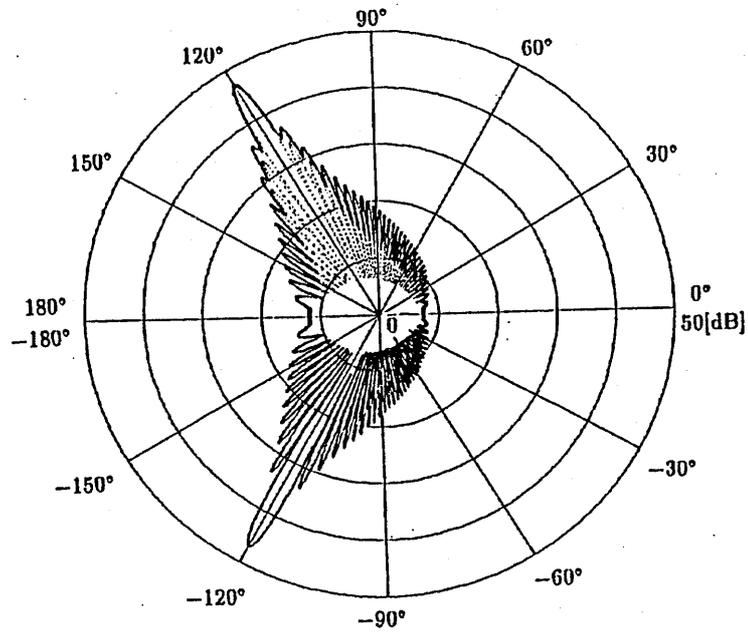
ここでは Dirichlet 条件に対する数値計算例を示す。計算例として入射角を $\theta_i = 60^\circ$ 、ストリップ幅を $2l = 20$ [波長単位] ($kl = 20\pi$) とした場合のコヒーレント強度の角度分布 $I_{Sc}(\phi, \theta_i)$ 及び全散乱場強度の角度分布 $I_S(\phi, \theta_i)$ の結果を図 3 に示す。 I_S の計算にはランダム表面のパワースペクトル密度 $|F(\lambda)|^2$ を与える必要があるが次の Gauss 型を用いた。

$$|F(\lambda)|^2 = \sigma^2 \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}} e^{-\kappa^2 \lambda^2} \quad (4.50)$$

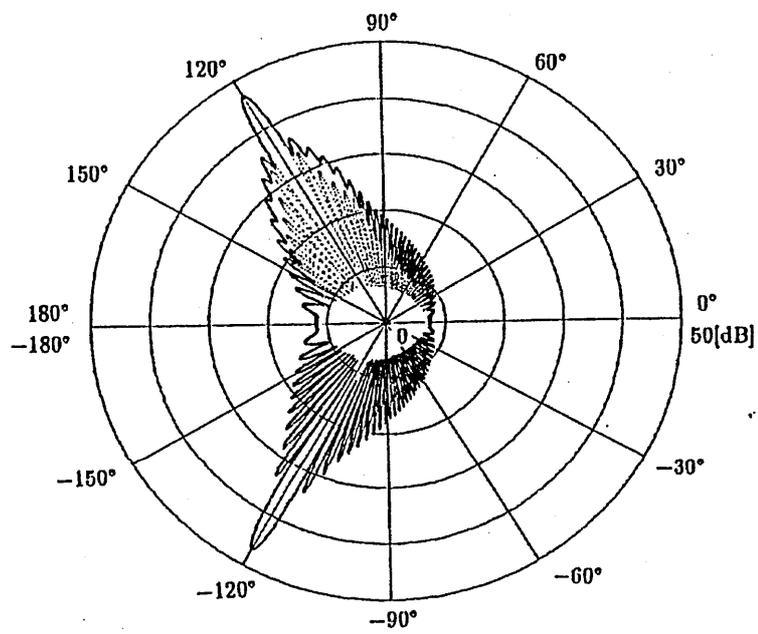
ここで、 κ はランダム表面の相関距離のパラメータである。計算では $\kappa = 1.0, 2.0$ [波長単位] ($k\kappa = 2\pi, 4\pi$)、 $\sigma = 0.05$ [波長単位] ($k\sigma = \pi/10$) としている。

5 むすび

本論文では 1 次元ランダム表面を持つ導体ストリップによる平面波散乱問題を取り上げた。確率過程の手法を用いて 2 次元散乱問題として D^2 -Fourier 変換領域で考察した。境界条件としては Dirichlet 及び Neumann 条件を取り扱った。僅かにランダムな場合について散乱場を摂動法により近似的に扱い粗さのパラメータについての 0 次摂動及び 1 次摂動に関する Wiener-Hopf 型の関数方程式を導いた。これを Wiener-Hopf 法を適用してこの方程式に関する形式的な厳密解の表現を得た。高周波極限すなわちストリップ幅が入射波の波長に比べて十分大な場合には D.S.Jones 及び K.Kobayashi の手法を用いて漸近的に解を導出でき D^2 -逆 Fourier 変換により実空間での解表現を得た。Dirichlet 条件については得られた近似解解について可能な限り具体的な表示の導出を試み 1 次摂動解についてエッジによる 1 次の回折効果が複素数を引数とする拡張された Fresnel 積分を用いて書けることを示した。また、遠方の漸近形を求めより簡便な散乱場の表示を得た。特に一様漸近形を用いて散乱場の強度の角度分布を計算しストリップ表面のランダムな僅かな凹凸が散乱特性に与える影響を議論した。一方 Neumann 条件の解に対しては Rayleigh 波数を与える散乱の Bragg ベクトルについて 1 次摂動解が発散する不合理な解となっていることがわかった。このような発散は僅かにランダムな無限平面に対する散乱において生じる anomaly を摂動法を用いて解析した場合の振る舞いと似ている。これは有限な散乱体であるストリップに対しても表面がランダムな凹凸 (勿論グレーティングのような



(a) $k\kappa = 4\pi$



(b) $k\kappa = 2\pi$

図3 散乱強度の角度分布 ($kl = 20\pi, k\sigma = \pi/10, \theta_i = 60^\circ$)

—— $I_s(\phi, \theta_i)$
 $I_{sc}(\phi, \theta_i)$

整った形でも)のために anomaly が生じ得ることを示すもので極めて興味深い。摂動法による困難さはランダム表面としての多重散乱効果を適切に扱っていないことによるものと考えられる。

今後はランダム表面の多重散乱の効果を適切に扱いかつ Neumann 条件での解析上の困難を回避するために確率汎関数法を用い Wiener-Itô 展開による定式化と解析を行なう必要がある。これらは次回の報告としたい。ただし、Wiener-Hopf 法は本質的に幾何学的に整った形状しか扱えない。多重散乱を扱うことは実質的に凹凸の構造を扱うことであるので Wiener-Hopf 法とは相性が良くないように思える(実際そうである)。

謝辞

文献 [13] を提供して頂いた中央大学理工学部の小林一哉先生に感謝致します。

文献

- [1] 田村安彦, “ランダムなストリップによる波動散乱理論”, 修士学位論文, 1993.2.17
- [2] 田村安彦, 中山純一, “Plane wave scattering from a randomly rough strip II(ランダムなストリップによる平面波の散乱 II)”, A-P92-140, EMT 93-21(1993.2.12)
- [3] 田村安彦, 中山純一, “ランダムなストリップによる平面波の散乱”, 電磁界理論研究会資料, EMT 92-58(1992.10.13)
- [4] 田村安彦, 中山純一, “ランダムストリップによる平面波の散乱”, 輻射科学研究会資料, RS 92-4(1992.5.29)
- [5] 中山純一, 田村安彦, “Plane wave scattering from a randomly rough half-plane(ランダムな半平面による平面波の散乱)”, 電磁界理論研究会資料, EMT 92-55 (1992.10.13)
- [6] J.Nakayama and T.Nishio, “Scattering from a randomly rough half-plane”, IEEE AP-S Symposium digest, VOL.2., pp.550-553(1991)
- [7] H.Ogura and J.Nakayama, “Initial-value problem of the one-dimensional wave propagation in a homogeneous random medium”, Phys. Rev., A-11, pp.958(1975)
- [8] J.Nakayama, H.Ogura and B.Matsumoto, “A probabilistic theory of scattering from a random rough surface”, Radio Sci., 15, pp.1050-1051, 1056-1057(1980)
- [9] J.Nakayama, “Scattering from a random-surface: Linear equations for coefficients of Wiener-Hermite expansion of the wave field”, Radio Sci., 21, pp.708-710, (1986)
- [10] B.Noble, “Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of the Partial Differential Equations”, Pergamon(1958)
- [11] L.B.Felsen and N.Marcuvitz, “Radiation and Scattering of Waves”, Prentice Hall(1973)
- [12] 小倉久直, “物理・工学のための確率過程論”, コロナ社 (1978)
- [13] K.Kobayashi, “Plane Wave Diffraction by a Strip: Exact and Asymptotic Solutions”, Phys.Soc.Jpn., 60, pp.1902-1905(1991)
- [14] 小林一哉, “有限幅正弦波状格子による平面電磁波の回折 (1)”, 電磁界理論研究会資料 EMT-89-24(1989)
- [15] 小林一哉, “有限幅正弦波状格子による平面電磁波の回折 (2)”, 電磁界理論研究会資料 EMT-89-38(1989)
- [16] H.Ogura, N.Takahashi and M.Kuwahara, “Scattering of waves from a random cylindrical surface”, WAVE MOTION, Vol.14, No.13, pp.273-295(1991)
- [17] H.Ogura and N.Takahashi, “Scattering of waves from a random spherical surface-Mie scattering”, MATH.PHYS., Vol.31, No.1, pp.61-75(1990)

付録 A 拡張 Fresnel 積分の定義と性質

拡張 Fresnel 積分は指数が実数である通常の Fresnel 積分を複素数の指数を取るように拡張したものであり、その定義は

$$F(\alpha) \equiv \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\alpha}^{+\infty+i0} e^{iz^2} dz \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \quad (\text{A.1})$$

である。(A.1) 式の積分路は図 A.1 の様に定める。引数 α が実数の場合は通常の Fresnel 積分に一致する。表式的な意味ではなんら通常の Fresnel 積分と変わらないが (A.1) 式は本質的にはエバネセントモードに対するエッジの 1 次回折効果を記述する関数 $D_1(\phi, Z, r)$ の解析^[1] における要請から定義された。拡張 Fresnel 積分の性質として重要なものを以下に述べる。

$$F(\alpha) + F(-\alpha) = 1 \quad : \text{拡張 Fresnel 積分の反転公式} \quad (\text{A.2})$$

これにより

$$F(0) = \frac{1}{2} \quad (\text{A.3})$$

である。

$$F(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{3/2}} e^{-i\pi/4} \text{Fi}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\right) \quad : \text{計算式} \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Fi}(\alpha) \equiv \int_0^\alpha e^{i\pi/2 z^2} dz \quad : \text{数学的拡張 Fresnel 積分} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Fi}(-\alpha) = -\text{Fi}(\alpha) \quad (\text{A.6})$$

この性質により $\text{Fi}(\alpha)$ は奇関数である。これにより (その定義より明らかであるが)

$$\text{Fi}(0) = 0 \quad (\text{A.7})$$

拡張 Fresnel 積分は複素数を引数とする。今回の数値計算では用いながったが研究^[1] の副産物としてこの関数の計算を計算機上で実現した。そこで簡単な計算例^[1]を示す。

計算としては拡張 Fresnel 積分 $F(\alpha)$ ではなく (A.5) 式の数学的拡張 Fresnel 積分 $\text{Fi}(\alpha)$ について行なう。 $\text{Fi}(\alpha)$ は全複素 α -平面上で正則な関数ではあるがその定義式からわかるように α が第 1 及び第 3 象限の複素数の時は $\alpha \rightarrow \infty$ においても有限値であるが第 2 及び第 4 象限の複素数の時は $\alpha \rightarrow \infty$ に対して発散する。このように無限遠点においては特異な性質を持つ。これを立体図及び等高線図で示そう。計算は $-2 \leq \text{Re } \alpha, \text{Im } \alpha \leq 2$ の範囲で行なった。図 A.3(a) は $\text{Re } \text{Fi}(\alpha)$ の等高線図、図 A.3(b) は $\text{Im } \text{Fi}(\alpha)$ の等高線図、図 A.3(c) は $|\text{Fi}(\alpha)|/\sqrt{2}$ の等高線図である。また図 A.3(d) は $|\text{Fi}(\alpha)|/\sqrt{2}$ の立体図である。これらの図からわかるように第 2 及び第 4 象限特に $\alpha = te^{-i\pi/4}, t \in R$ となる経路では急激に増加する。これは (A.5) 式から明らかで

$$\text{Fi}(\alpha) = \int_0^\alpha e^{i\pi/2 u^2} du = e^{-i\pi/4} \int_0^t e^{\pi/2 s^2} ds \quad (s \in R) \quad (\text{A.8})$$

となるからである。逆に $\alpha = te^{i\pi/4}, t \in R$ なる経路では

$$\text{Fi}(\alpha) = \int_0^\alpha e^{i\pi/2 u^2} du = e^{i\pi/4} \int_0^t e^{-\pi/2 s^2} ds \quad (s \in R) \quad (\text{A.9})$$

となり Gauss の積分となる。また図 A.3(c) を見るとわかるように $\text{Fi}(\alpha)$ は $\alpha = 0$ を含めて五つの零点を持つ。 $\alpha = 0$ を除く四つの零点の詳細な位置は現在未確定である。次に図 A.2 に示す経路を考えて次の変数変換を行なう。

$$\alpha = te^{i\phi} \quad (|\phi| \leq \pi, t \in R) \quad (\text{A.10})$$

これにより経路の角度パラメータ ϕ の違いによる軌跡をプロットする。これを図 A.4 に示す。図 A.4(e) の $\phi = 0^\circ$ の場合の図が有名なコルニユの螺旋である。その他の角度を見るとまず $\phi = 45^\circ$ の Gauss の積分に近付くにつれて螺旋が縮小していくのがわかる。これは減衰の方が螺旋の回転よりも早く起こるからである。逆に負の角度にすると外側に広がっていく螺旋となる。 $\phi = -45^\circ$ の最急上昇経路に近付くにつれてこちら螺旋が縮小する。

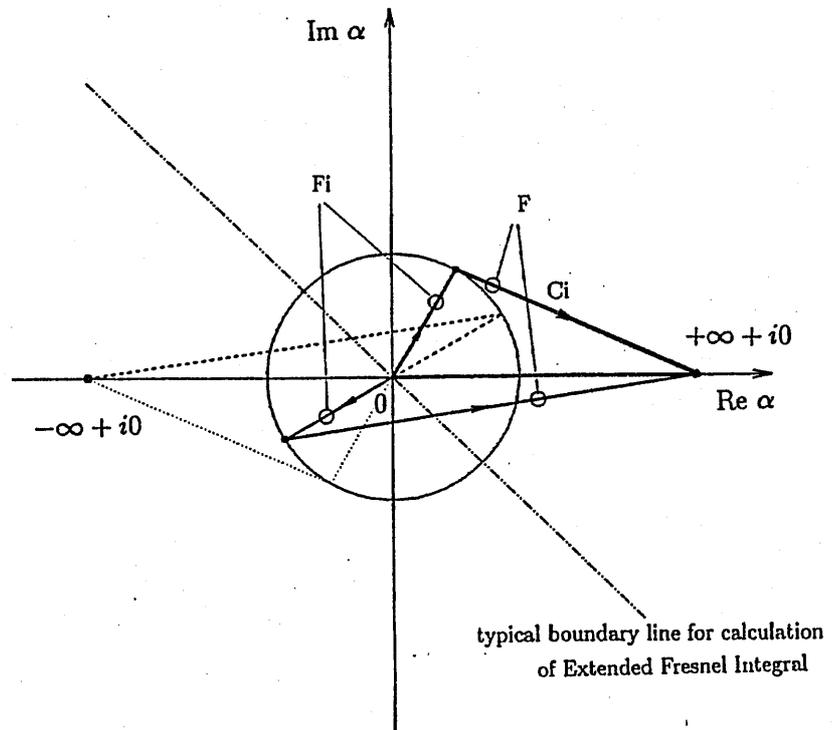


図 A.1 拡張 Fresnel 積分の積分路

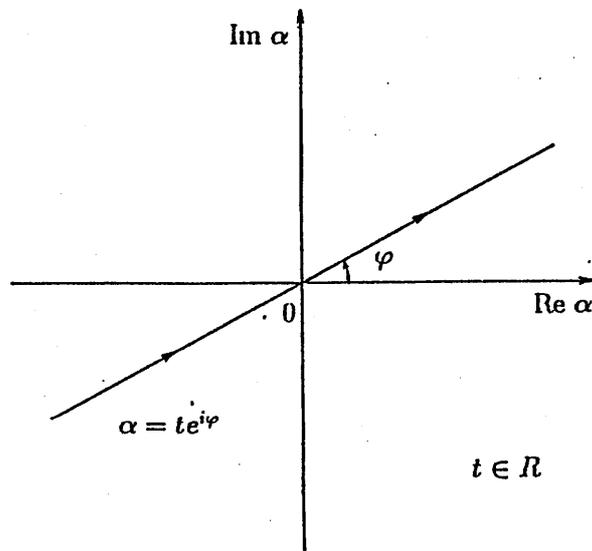


図 A.2 計算のための経路

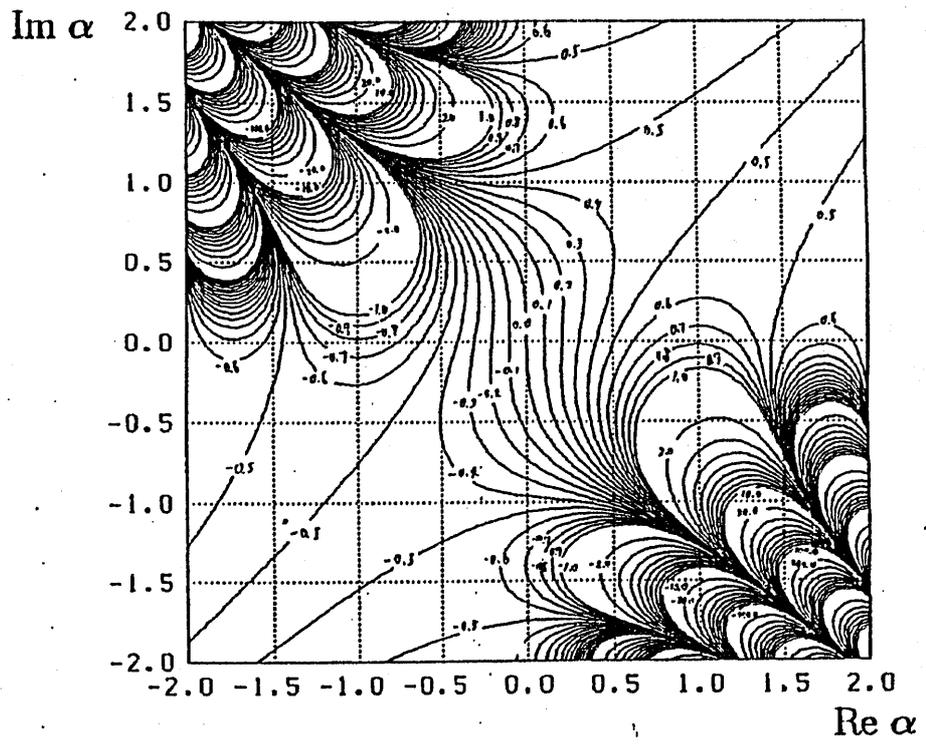


図 A.3(a) $\text{Re } F_i(\alpha)$ 等高線図

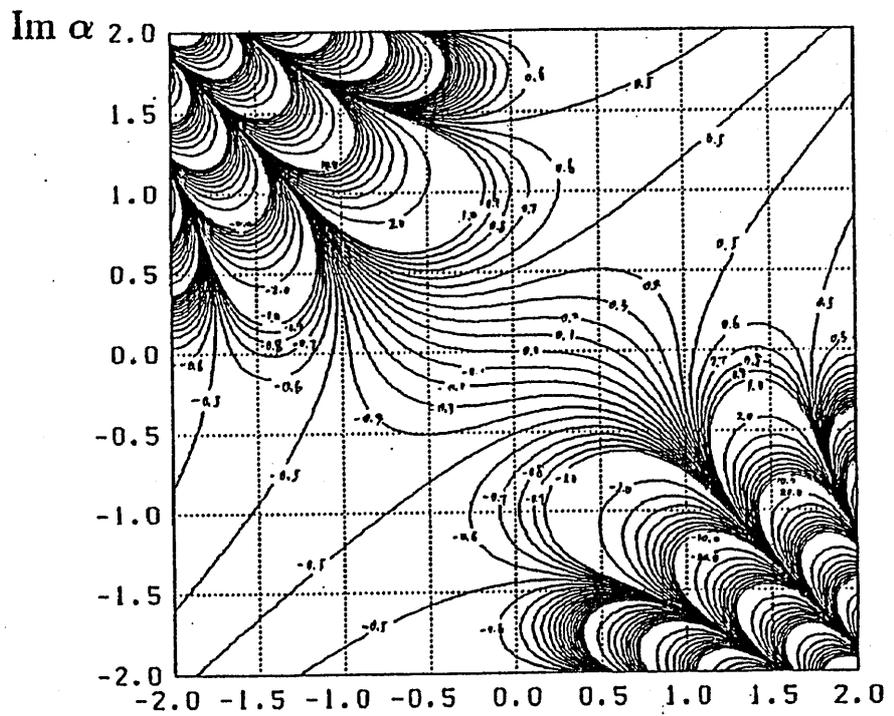
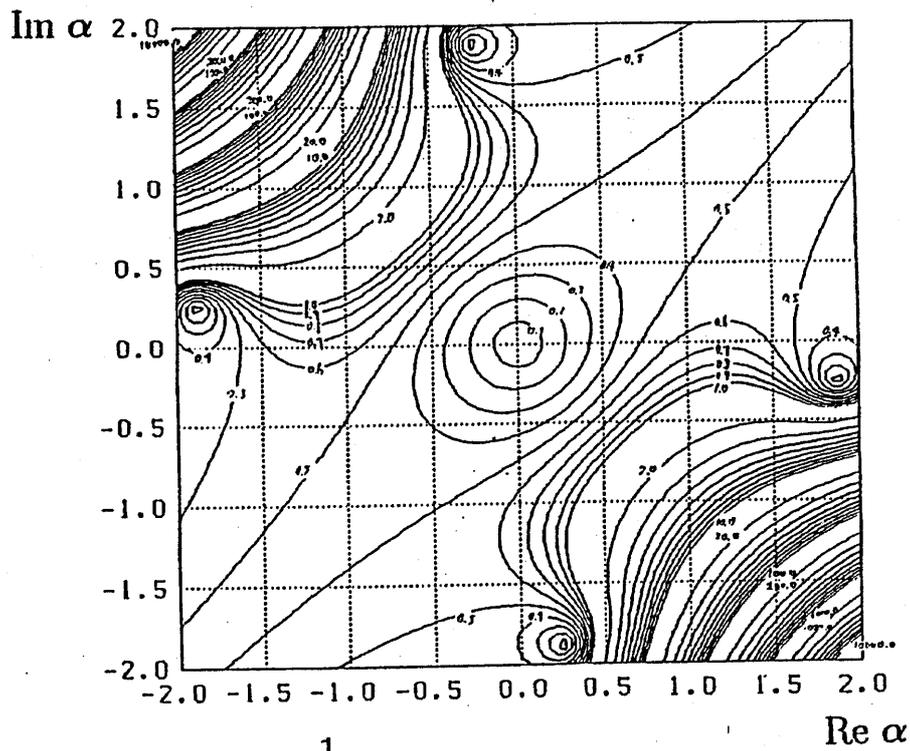
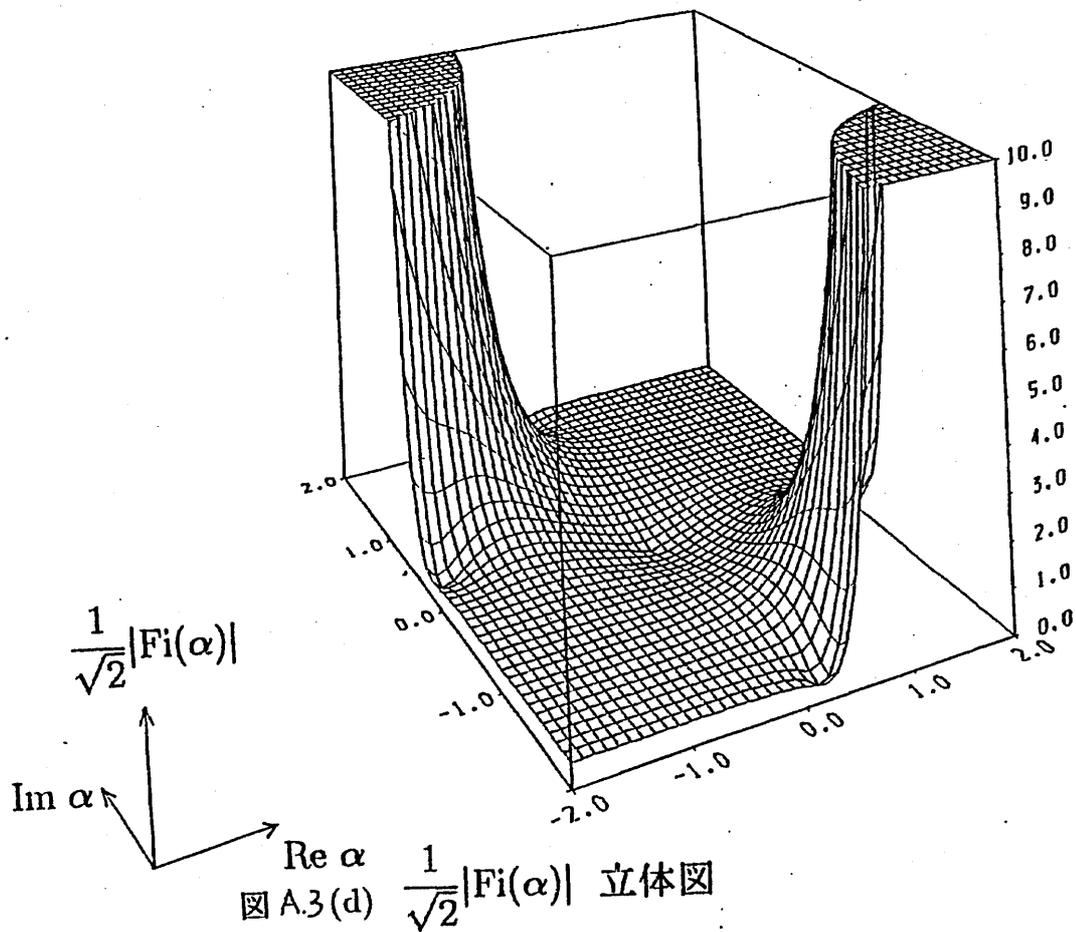


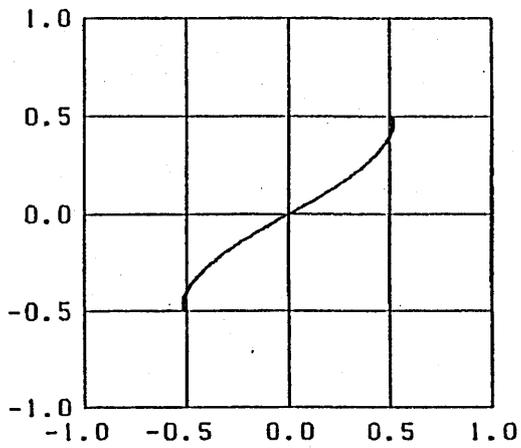
図 A.3(b) $\text{Im } F_i(\alpha)$ 等高線図



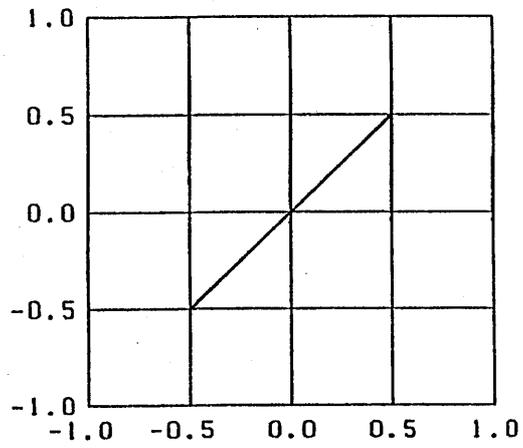
図A.3(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}|F_i(\alpha)|$ 等高線図



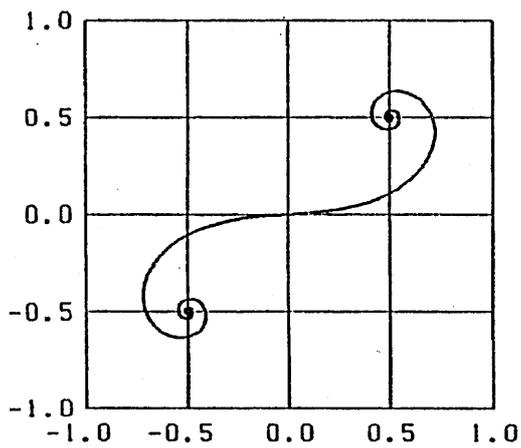
図A.3(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}|F_i(\alpha)|$ 立体図



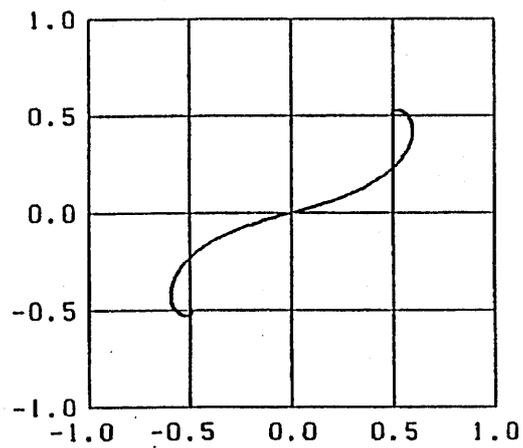
(a) $\varphi = 30^\circ$



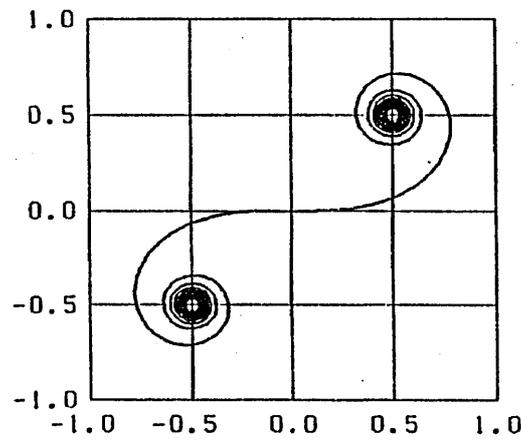
(b) $\varphi = 45^\circ$



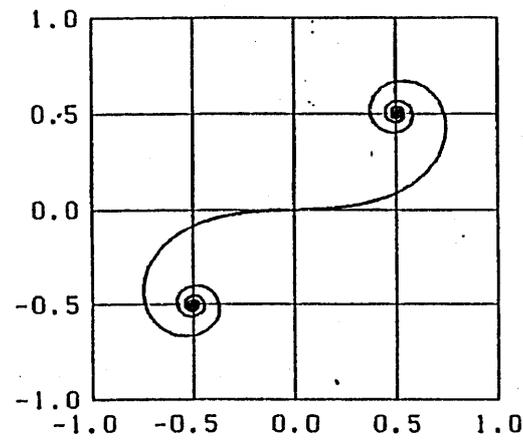
(c) $\varphi = 4^\circ$



(d) $\varphi = 8^\circ$



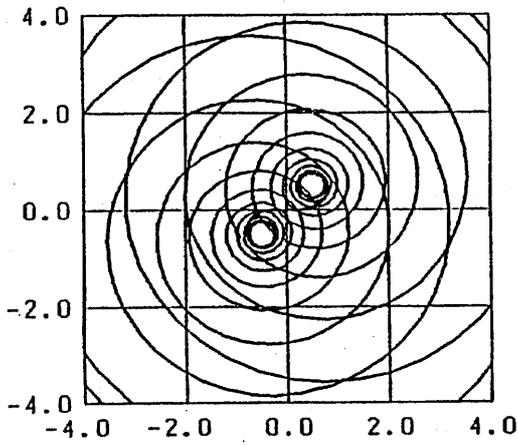
(e) $\varphi = 0^\circ$



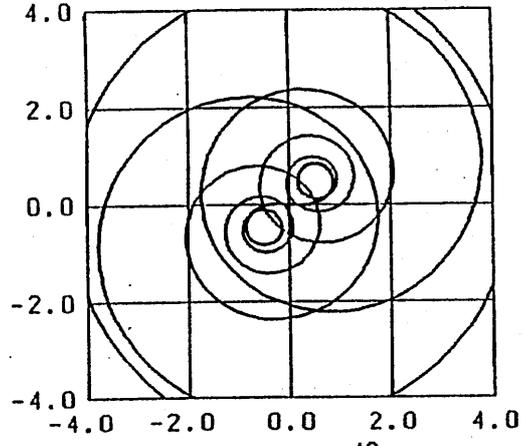
(f) $\varphi = 2^\circ$

Cornu の螺旋

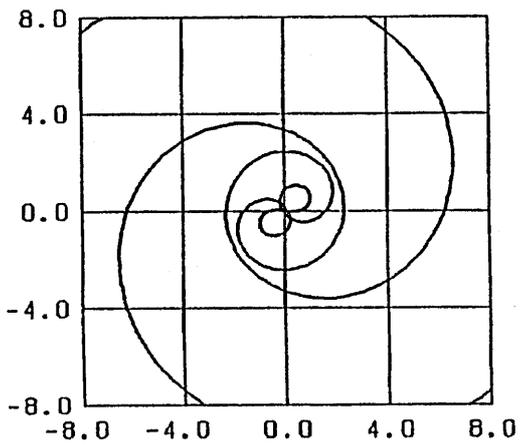
図 A.4 数学的拡張 Fresnel 積分の軌跡



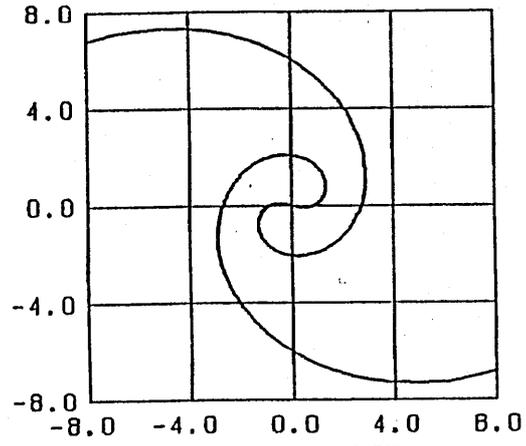
(g) $\varphi = -2^\circ$



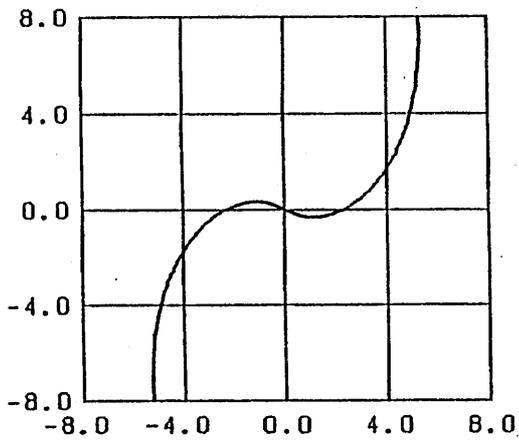
(h) $\varphi = -4^\circ$



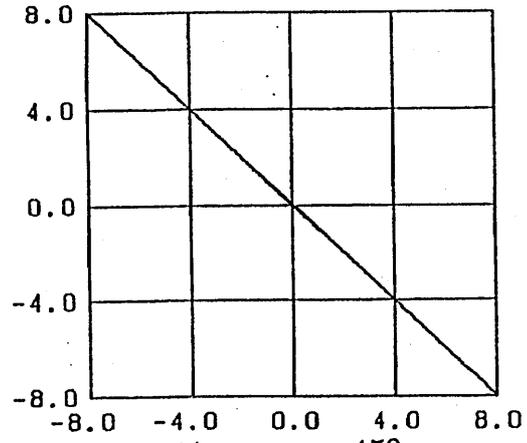
(i) $\varphi = -8^\circ$



(j) $\varphi = -16^\circ$



(k) $\varphi = -30^\circ$



(l) $\varphi = -45^\circ$

図 A.4 数学的拡張 Fresnel 積分の軌跡

輻射科学研究会資料
RS92-21

ビーム伝搬法を用いた拡散型光導波路の 解析と実験

佐藤 稔[†] 中島 将光

([†]岡山大学 工学部) (京都大学 工学部)

平成5年3月5日

1 まえがき

光導波路は導波型光デバイスの中で最も重要な構成要素であり、その伝搬特性を把握しておく必要がある。導波路の中で最もよく用いられているものの一つに基板の上に付けたストライプ状の不純物を熱により拡散する3次元導波路がある。この拡散型3次元導波路の解析法として、等価屈折率法^[1]のような近似解法や変分法^[2]、有限要素法^[3]のような数値解法がある。近似解法はシングルモード領域やカットオフ近傍では誤差が大きく、数値解法は計算手続きが面倒であるという欠点があった。

最近、導波路の解析方法としてビーム伝搬法^{[4]-[6]}が提案された。この方法は導波路の屈折率変化が小さいという仮定が必要であるが、計算手続きが簡単であることから広く用いられるようになった。ビーム伝搬法は入射波が導波路に沿ってどのように伝搬するかを計算する方法であるが、伝搬方向に一様な導波路を伝搬する光波の計算結果から固有モードの伝搬定数と界分布を求めることができる^{[7][8]}。しかし、この方法では計算に手間がかかるので、行列の固有値問題に帰着する定式化が示され、2次元導波路に関しては計算が行われた^{[9][10]}。本研究では行列の要素のより簡単な求め方を示し、屈折率分布としてある関数を仮定し、拡散型3次元導波路に適用する。その場合に規格化を行い、一般的な特性を求める。

導波路の解析結果から設計を行うと実際に導波路を製作することになる。このとき導波路の寸法や屈折率を測定し、設計値通りになっているかどうかを確かめる必要がある。測定方法は大きく2つに分けられる。一つは直接測定する方法で、干渉顕微鏡で干渉縞を観測して、それから求めたり^[11]、導波路の組成を測定し、それから屈折率等を求める方法^[12]がある。もう一つは導波モードの伝搬定数を測定し、それから規格化分散曲線を用いて屈折率等を計算する方法である。前者は特殊な装置が必要であったり、測定が面倒であったりする。後者は間接的な測定法であるが、導波モードの伝搬定数は比較的容易に精度よく測定できるので、手軽にできる利点があるが、これまで2次元導波路にしか用いらていない。本研究では3次元

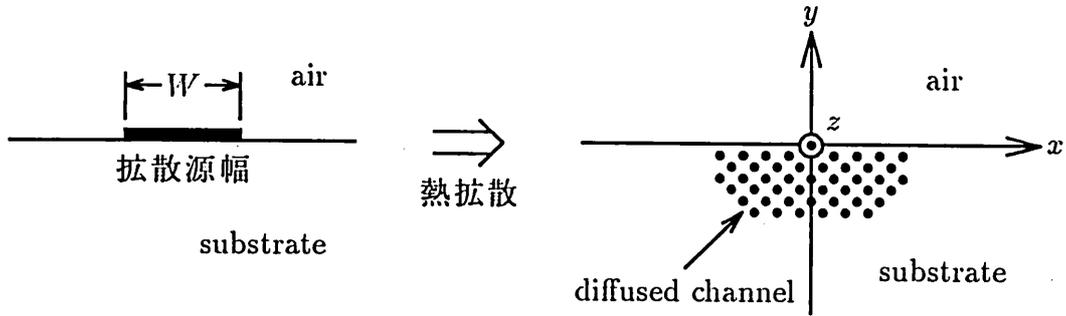


図1 拡散型3次元導波路

導波路においても導波モードの伝搬定数から導波路の寸法及び屈折率を求める方法を提案する。

2 拡散型3次元導波路

図1のように基板上にストライプ状に付けた不純物を熱拡散して作製した導波路の屈折率分布は拡散方程式の解として、次の式で表されるような形であると考えられている。

$$n(x, y) = \begin{cases} n_a & (y > 0) \\ n_s + \Delta n f(x)g(y) & (y < 0) \\ (0 \leq f(x)g(y) \leq 1) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{W}{2d_x}\left(1 + \frac{2x}{W}\right)\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{W}{2d_x}\left(1 - \frac{2x}{W}\right)\right)}{2\operatorname{erf}\left(\frac{W}{2d_x}\right)} \quad (2)$$

$$g(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{d_y^2}\right) \quad (3)$$

ここで、 W は拡散源の幅、 d_x は横方向拡散長、 d_y は厚み方向拡散長であり、 $\operatorname{erf}(x)$ は誤差関数である。 n_a は空気の屈折率、 n_s は基板屈折率、 Δn は拡散による最大屈折率変化であるが、 Δn は n_a や n_s に比べて充分小さいと仮定する。その場合には空気の部分には電磁界がほとんどないので、基板と空気の境界面が完全導体であると仮定できる。この時の伝搬モードは基板と空

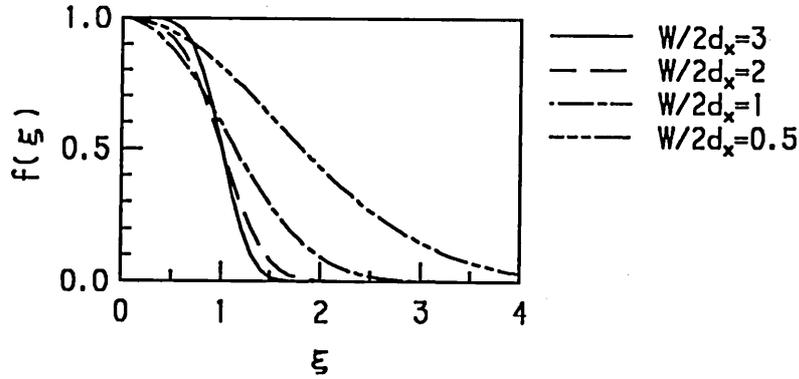


図2 (5)式で表される横方向屈折率分布関数 $f(\xi)$ の形状の拡散源幅 W と x 方向拡散長の比 ($W/2d_x$) による変化 — 横軸は拡散源幅 W で規格化 ($\xi = 2x/W$)

気の境界面で対称な屈折率分布を持つ導波路のモードの中で界分布が反対称なモードに対応する。そこで、

$$n(x, y) = n_s + \Delta n f(x) g(y)$$

という屈折率分布を持った導波路の y 方向には反対称なモードを考える。ここで、座標変換

$$\xi = \frac{2x}{W}, \quad \eta = \frac{y}{d_y} \quad (4)$$

を行うと (2), (3) 式は

$$f(x) = \frac{\operatorname{erf}\left\{\frac{W}{2d_x}(1+\xi)\right\} + \operatorname{erf}\left\{\frac{W}{2d_x}(1-\xi)\right\}}{2\operatorname{erf}\left(\frac{W}{2d_x}\right)} \equiv f\left(\xi; \frac{W}{2d_x}\right) \quad (5)$$

$$g(y) = \exp(-\eta^2) \equiv g(\eta)$$

となる。(5)式で表される $f(\xi)$ の形状を図2に示す。横方向拡散長 d_x が小さい場合はステップ状であるが、大きくなるとガウス分布に近づく。

3 ビーム伝搬法による解析

前節で述べた屈折率分布を持つ導波路を解析するのであるが、 Δn が小さいので屈折率変化が小さく、スカラー波動方程式を解析するスカラー近似が十分な精度を持っている。解析法としてはビーム伝搬法を用いる。ビーム伝搬法にもいろいろな種類があるが、ここでは最も簡単な近軸波動方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{j}{2n_s k_0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 (n^2 - n_s^2) \right\} \phi \quad (6)$$

を解析する方法を用いる。ここで、 k_0 は真空中の平面波の伝搬定数である。ただし、近軸波動方程式を解いて得られる固有モードの伝搬定数を n'_{eff} 、波動方程式を解いて得られる固有モードの伝搬定数を n_{eff} とすると両者の間には

$$n_{\text{eff}} = \sqrt{n_s (n_s + 2n'_{\text{eff}})} \quad (7)$$

という関係^[14]があり、また両者の界分布は等しい。よって、近似式を解析しても厳密に解析したのと同等になる。

2次元導波路の場合^[15]と同様に規格化周波数 V と規格化伝搬定数 b を次のように定義する。

$$V = k_0 d_y \sqrt{2n_s \Delta n} \quad (8)$$

$$b = \frac{n_{\text{eff}}^2 - n_s^2}{2n_s \Delta n} \quad (9)$$

ここで、導波路の幅として y 方向の幅 d_y を用いる。また、導波路の縦と横の幅の比 (アスペクト比) として a_s を

$$a_s = \frac{W}{2d_y}$$

と定義する。(4) 式のような座標変換を行うと (6) 式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -jk_0 \Delta n \left\{ \frac{1}{V^2} \left(\frac{1}{a_s^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + f \left(\xi; \frac{W}{2d_x} \right) g(\eta) \right\} \phi \quad (10)$$

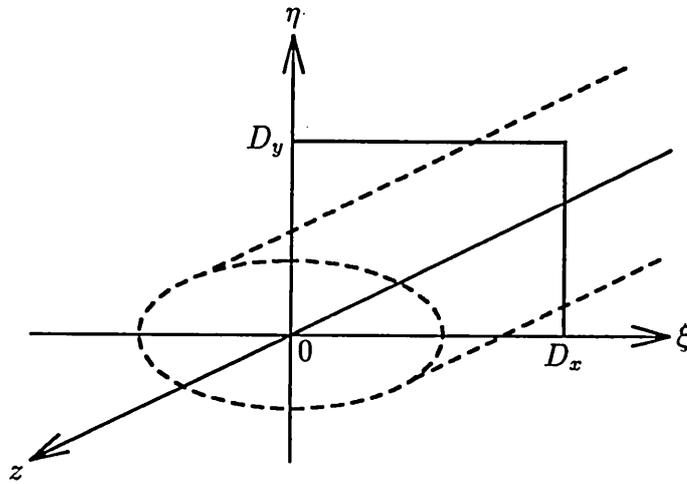


図3 3次元導波路の解析モデル

となる。この式の左辺の小括弧の中の第1項を計算する場合にはフーリエ変換を用いる。 ϕ の2次元フーリエ変換を

$$\mathcal{F}\phi = \Phi(\rho_x, \rho_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, \eta) \exp(j(\rho_x \xi + \rho_y \eta)) d\xi d\eta$$

$$\mathcal{F}^{-1}\Phi = \phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\rho_x, \rho_y) \exp(-j(\rho_x \xi + \rho_y \eta)) d\rho_x d\rho_y$$

とおくと、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = \mathcal{F}^{-1}\{-\rho_x^2 \Phi\}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \mathcal{F}^{-1}\{-\rho_y^2 \Phi\}$$

が成り立つ。よって、(10)式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -jk_0 \Delta n \left\{ \frac{1}{V^2} \mathcal{F}^{-1} \left(-\frac{\rho_x^2}{a_s^2} - \rho_y^2 \right) \mathcal{F} + f \left(\xi; \frac{W}{2d_x} \right) g(\eta) \right\} \phi \quad (11)$$

となる。数値計算する場合には2次元離散フーリエ変換を用いることになるので、閉領域問題として取り扱うことになる。導波路は本来開放系であるが、界分布がほぼ0とみなせるところに閉領域の境界をもってくれば、それほど大きな誤差にはならない。 $f \left(\xi; \frac{W}{2d_x} \right)$ が $\xi = 0$ に対して対称なので、

図3に示すように4分の1区画の矩形の閉領域を考え、 x 方向に N_x 等分割し、 y 方向に N_y 等分割する。選点の座標を (ξ_{m_x}, η_{m_y}) とし、これとフーリエ変換によって対応する横方向波数を $(\rho_{x,n_x}, \rho_{y,n_y})$ とする。離散フーリエ変換は行列の形にかけるので、その行列を F とし、逆フーリエ変換を表わす行列を F^{-1} として、

$$F \equiv [f_{n_x n_y, m_x m_y}], \quad F^{-1} \equiv [f'_{n_x n_y, m_x m_y}]$$

とおく。 (ξ_{m_x}, η_{m_y}) における ϕ の値を $\phi_{m_x m_y}$ とすると $\phi = (\phi_{11}, \dots, \phi_{N_x N_y})^T$ を用いることにより、(11)式が離散化されて

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -jk_0 \Delta n \left[\frac{1}{V^2} F^{-1} B F + C \right] \phi \quad (12)$$

となる。ここで、

$$B \equiv [b_{n_x n_y, m_x m_y}], \quad C \equiv [c_{n_x n_y, m_x m_y}]$$

とおくと B, C の成分 $b_{n_x n_y, m_x m_y}, c_{n_x n_y, m_x m_y}$ は

$$\begin{aligned} b_{n_x n_y, m_x m_y} &= \left(-\frac{\rho_{x,n_x}^2}{a_s^2} - \rho_{y,n_y}^2 \right) \delta_{n_x m_x} \delta_{n_y m_y} \\ c_{n_x n_y, m_x m_y} &= f \left(\xi_{m_x}; \frac{W}{2d_x} \right) g(\eta_{m_y}) \delta_{n_x m_x} \delta_{n_y m_y} \end{aligned}$$

となる。

$$A = \frac{1}{V^2} F^{-1} B F + C \equiv [a_{n_x n_y, m_x m_y}]$$

とおくと行列 A の成分 $a_{n_x n_y, m_x m_y}$ は

$$\begin{aligned} a_{n_x n_y, m_x m_y} &= \frac{1}{V^2} \sum_{k_x, k_y} \left(-\frac{\rho_{x,k_x}^2}{a_s^2} - \rho_{y,k_y}^2 \right) f'_{n_x n_y, k_x k_y} f_{k_x k_y, m_x m_y} \\ &\quad + f \left(\xi_{m_x}; \frac{W}{2d_x} \right) g(\eta_{m_y}) \delta_{n_x m_x} \delta_{n_y m_y} \end{aligned} \quad (13)$$

である。(12)式は z に関する線形連立微分方程式であるので、 $-jk_0 \Delta n A$ の固有値がモードの伝搬定数 $-jk_0 n'_{\text{eff}}$ となる。(7)式と(9)式より A の固有値が

規格化伝搬定数 b となる。なお、導波モードに関しては、 $0 < b < 1$ であるので、0 から 1 の間にある固有値だけを計算すればよい。規格化周波数 V を与えて、規格化伝搬定数 b を求めれば規格化分散曲線を書くことができる。しかし、今の場合 a_s や $\frac{W}{2d_x}$ をパラメータとして含むことになる。

解析例として光の波長を 6328\AA 、 $d_y = 1.72\mu\text{m}$ に設定して、拡散源の幅が $W = 10\mu\text{m}$ と $W = 5\mu\text{m}$ の 2 種類の場合のビーム伝搬法で計算された規格化分散曲線を、 d_x をパラメータとして $W = 10\mu\text{m}$ の場合を図 4 に、 $W = 5\mu\text{m}$ の場合を図 5 に示す。図 4 は $a_s = 2.91$ で横幅が広い場合、図 5 は $a_s = 1.45$ で横幅がやや狭い場合に対応する。ここで、モードの次数は mn モードと表し、 m は x 方向、つまり横方向の次数を表し、 n は y 方向、つまり厚み方向の次数を表している。ただし、最低次を 0 としている。なお、カットオフに非常に近い場合には誤差が大きいので、図には書いていない。また、次数がかなり高いモードは界分布の変化が激しいが、選点間隔がそれに比べて大きいと誤差が大きくなるので、図には書いていない。計算に際しては計算機の容量を考えて、 $N_x = 16$ 、 $N_y = 32$ とし、 $D_x = 4$ 、 $D_y = 8$ または $D_x = 8$ 、 $D_y = 16$ に設定して計算した。カットオフに近いような場合には後者に設定し、そうでない場合は前者に設定した。その見極めは境界壁付近の界分布の値により行い、ある程度の値である場合には後者にし、十分小さい場合には前者にした。ここで、 N_y のほうが大きいのは計算した条件では y 方向の閉じ込めが弱く、 D_y を大きくしなければならなかったからである。

図 4、図 5 の 2 つの規格化分散曲線を比較すると導波路の横幅が制限されるにしたがって伝搬定数が小さくなっているのがわかる。そして、横幅が広い場合には横方向に多数のモードがたつ。たとえば、図 4 においては図には書いてないが、40 モード、50 モード以上も存在する。しかし、横幅が狭くなると少なくなり、シングルモードとなる領域が広がる。さて、 d_x を変化させた場合の伝搬定数の変化をしてみる。図 4 においては d_x を大きくすると伝搬定数は小さくなっているが、図 5 においては d_x が小さい間は d_x を大きくすると伝搬定数は小さくなっているが、 d_x がある程度以上大きくすると逆に伝搬定数は大きくなっている。これは $f(\xi)$ の形状に関係あ

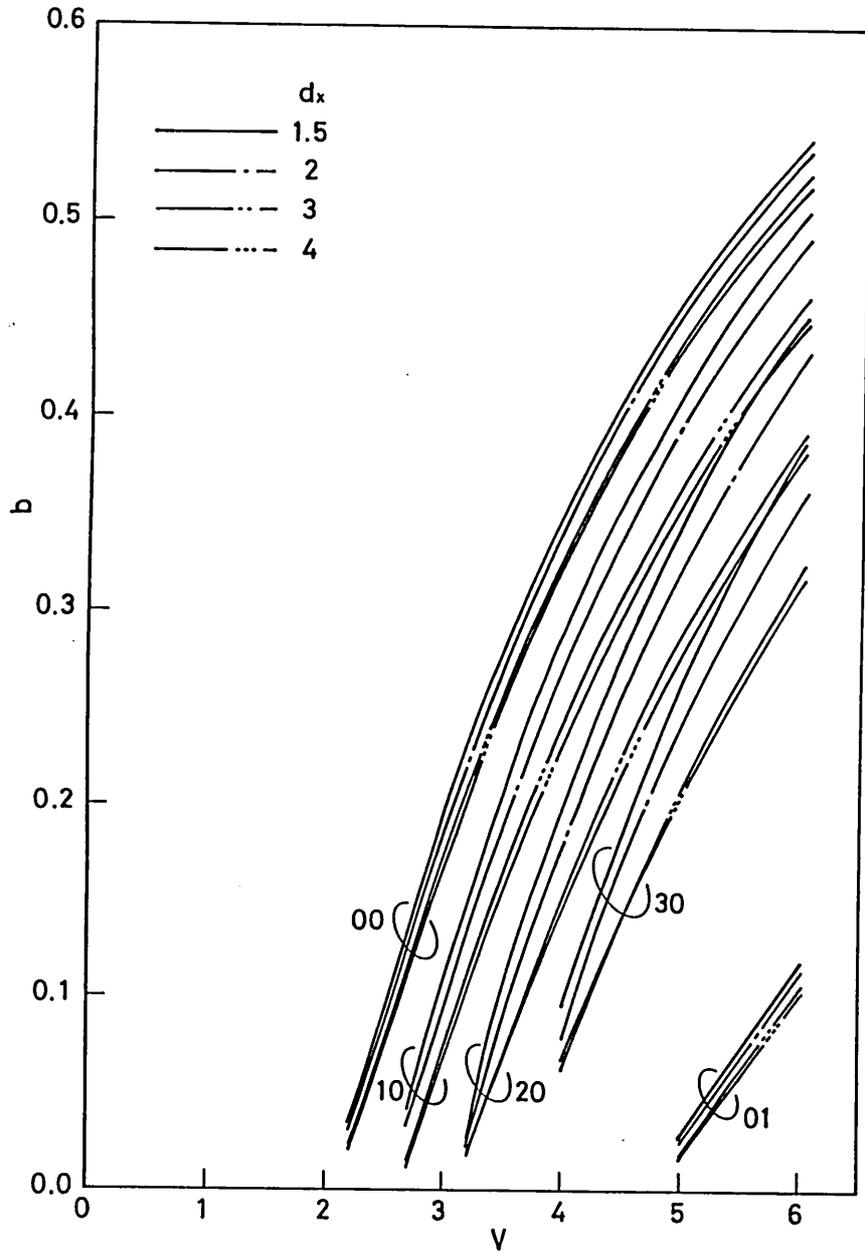


図4 拡散源幅 $W = 10\mu\text{m}$, y 方向拡散長 $d_y = 1.72\mu\text{m}$ の場合の拡散型導波路の規格化周波数 V と規格化伝搬定数 b の関係を x 方向拡散長 d_x (単位は μm) をパラメータにして表わした規格化分散曲線

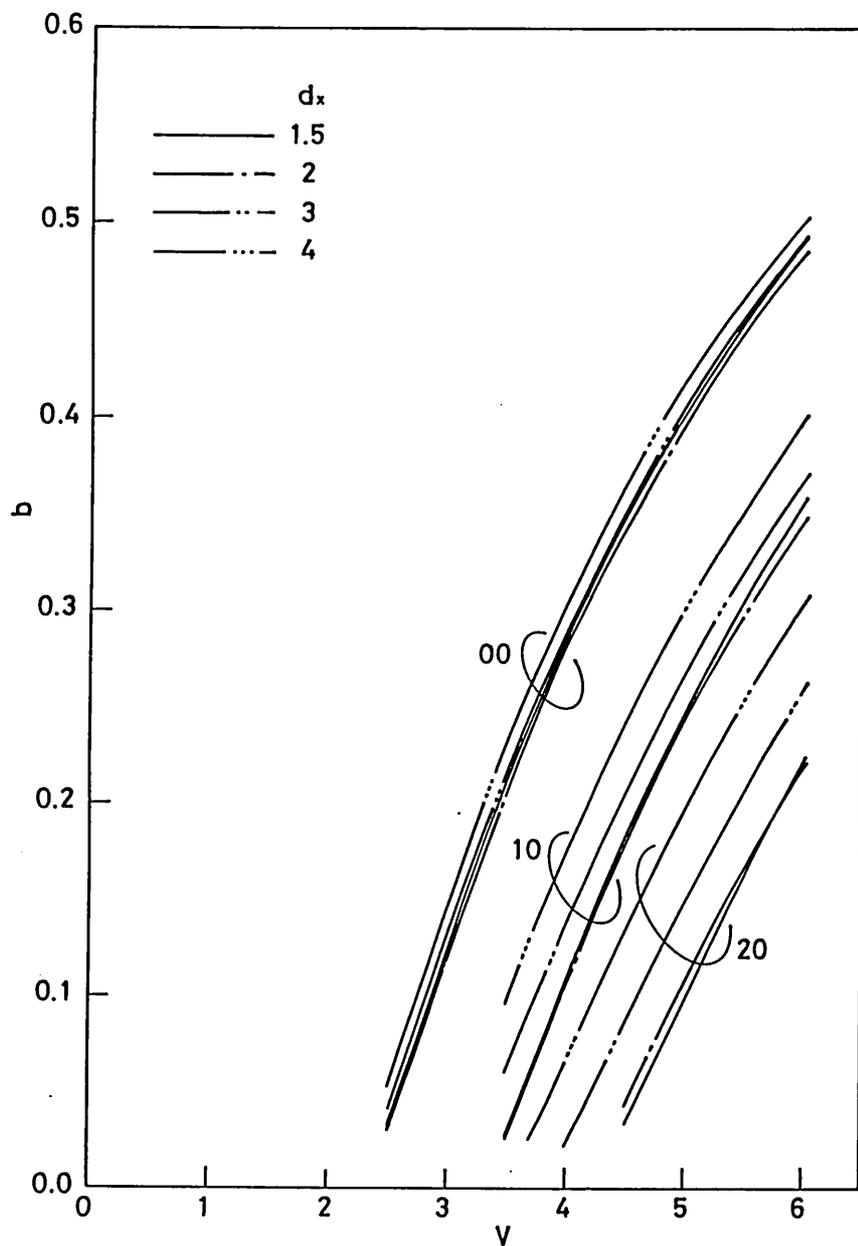


図5 拡散源幅 $W = 5\mu\text{m}$, y 方向拡散長 $d_y = 1.72\mu\text{m}$ の場合の拡散型導波路の規格化周波数 V と規格化伝搬定数 b の関係を x 方向拡散長 d_x (単位は μm) をパラメータにして表わした規格化分散曲線

るものと考えられる。 $\frac{W}{2d_x}$ が小さい場合には $f(\xi)$ はステップ状に近かったのが d_x を大きくすると変化が滑らかになり、光の閉じ込めが悪くなるような形になるために、伝搬定数が小さくなっていくものと考えられる。これが図4や図5の d_x の小さい場合に対応する。 $\frac{W}{2d_x}$ がある程度以上大きくなると $f(\xi)$ はガウス分布に近くなり、 d_x を大きくすると導波路幅が広がるような形になるために伝搬定数が大きくなるものと考えられる。これが図5の d_x の大きい場合に対応する。特に横方向のモード次数が大きい場合に影響が大きく、基本モードの場合は影響が少ない。基本モードでは導波路の中心部に電磁界が集中しているので、周辺部の屈折率分布の変化にはあまり影響されないものと考えられる。

4 導波路の製作と構造パラメータの推定

実際に導波路を製作して、構造パラメータの推定を行う例として、ここではX-cut LiTaO₃にNbを熱拡散したY方向伝搬の導波路を取り上げる。拡散は温度1200°Cのもとで3時間行った。作製する導波路は2次元導波路、拡散源幅が10 μ m及び5 μ mの3次元導波路の合計3種類で、Nb膜厚を変えて作製した。作製した導波路の基板屈折率 n_s をプリズム結合法^[16]で導波モードの等価屈折率 n_{eff} をSynchronous angle法^[17]で測定した。LiTaO₃は一軸異方性を持っているが、ここでは異常光屈折率のみを問題にする。よって、測定はTEモード(3次元導波路では E^x モード)についてのみ行った。測定結果を図6に示す。図では等価屈折率と基板屈折率の差($n_{\text{eff}} - n_s$)を示した。これは基板屈折率の値が 2.1835 ± 0.0004 の範囲にあって試料によって、異なったためである。

作製した導波路の等価屈折率の測定結果から構造パラメータを推定するのであるが、今回作製した導波路では導波モードは多くても三つしかないので、屈折率分布関数は(1)式であると仮定し、厚み方向拡散長、横方向拡散長、最大屈折率変化を推定する。また、二つの拡散長はどの導波路でも同じであると仮定する。

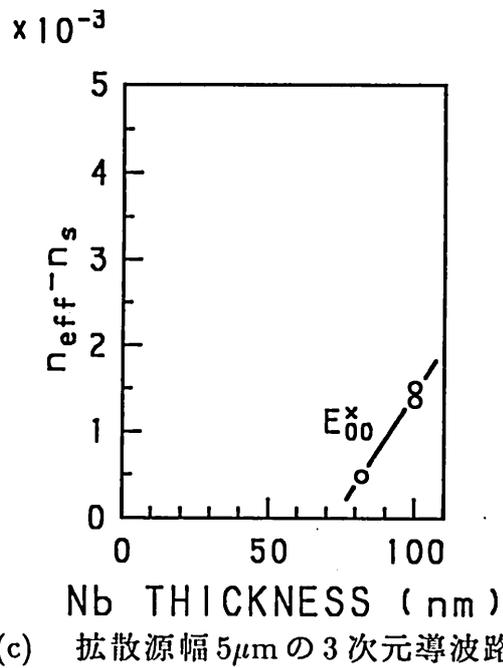
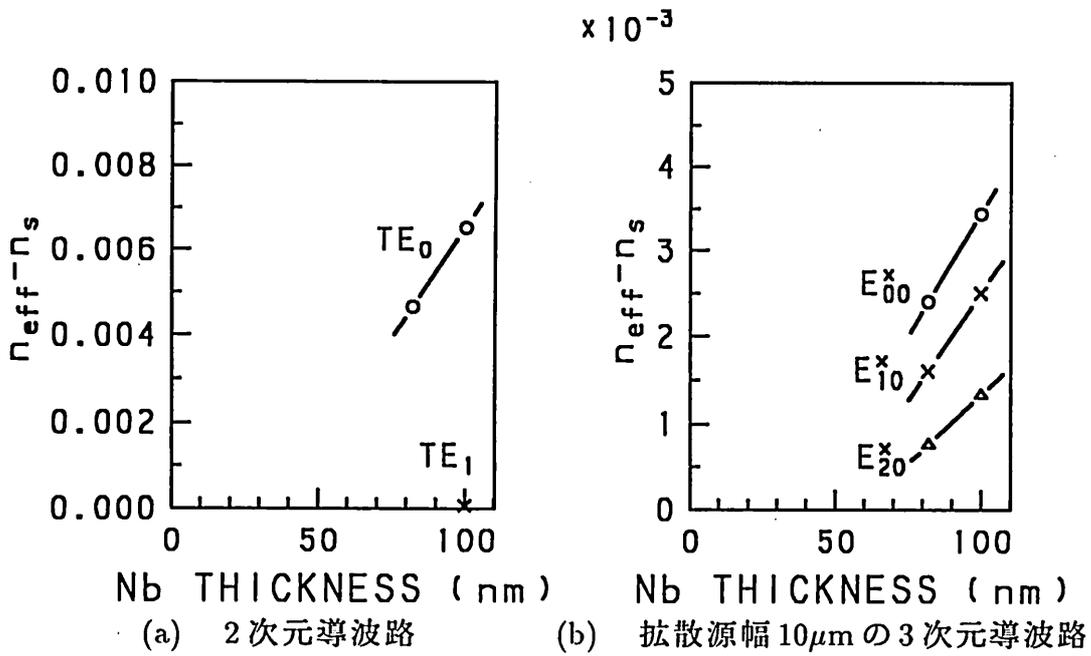


図 6 Nb 膜厚に対する等価屈折率 n_{eff} と基板屈折率 n_s との差

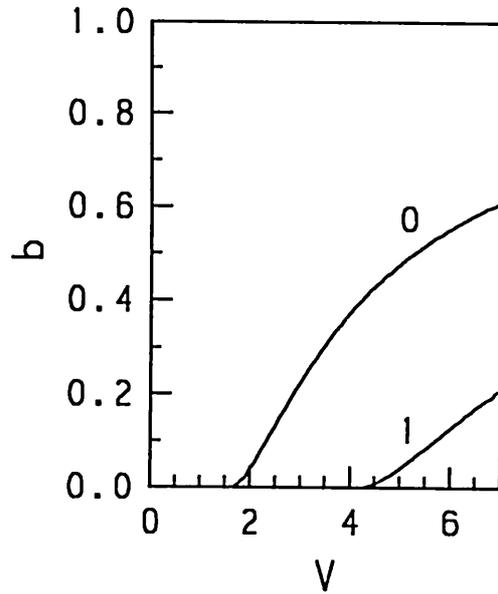


図7 ガウス分布2次元拡散型導波路における0,1次モードの規格化周波数 V と規格化伝搬定数 b の関係を表わす規格化分散曲線

まず、厚み方向拡散長の推定から行うが、これには2次元導波路の測定結果を用いる。この時には屈折率分布関数は(5)式において $f\left(\xi; \frac{V}{2d_x}\right) = 1$ とした形で、 y 方向にはガウス分布である。このときの規格化周波数 V と規格化伝搬定数 b の関係を表わす規格化分散曲線は横共振法^[18]を用いて図7のようになる。導波モードが二つ存在する場合には等価屈折率の測定結果を規格化分散曲線にあてはめることにより、拡散長 d_y と最大屈折率変化 Δn を求めることができる。以下にその方法を具体的に述べる。0次モードの測定された等価屈折率を $n_{\text{eff},0}$ 、1次モードの等価屈折率を $n_{\text{eff},1}$ とすると(9)式より

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{n_{\text{eff},1}^2 - n_s^2}{n_{\text{eff},0}^2 - n_s^2}$$

となるが、右辺は測定結果から定まる。ここで、 b_0 、 b_1 は0次、1次モードの規格化伝搬定数である。これを分散曲線にあてはめると V 、 b_0 、 b_1 の個々の

値が求まる。これから

$$\Delta n = \frac{n_{\text{eff},i}^2 - n_s^2}{2n_s b_i} \quad (i = 0, 1) \quad (14)$$

$$d_y = \frac{V}{k_0 \sqrt{2n_s \Delta n}} \quad (15)$$

により Δn , d_y が求まる。今の場合 Nb の膜厚が 100nm の場合に二つのモードが存在しているので Δn , d_y を求めることができる。推定された拡散長は 1.72 μm であった。

次に横方向拡散長の推定を行うが、拡散源幅 10 μm の 3次元導波路の測定結果を用いる。拡散源幅が 10 μm で厚み方向拡散長が 1.72 μm である場合の規格化分散曲線は図 4 に示されているが、これを用いて推定する方法を以下に述べる。あるモードについて

$$V^2 b = k_0^2 d_y^2 (n_{\text{eff}}^2 - n_s^2) \quad (16)$$

を計算する。規格化分散曲線から (16) 式を満足する規格化周波数 V が求められるが、規格化分散曲線は横方向拡散長 d_x をパラメータとして含んでいるので、 V は d_x の関数として求められる。別のモードについても V を d_x の関数として求める。拡散源幅が 10 μm の場合には E_{00}^x , E_{10}^x , E_{20}^x の三つのモードが導波しているが、 E_{00}^x , E_{10}^x の二つのモードの等価屈折率を用いて上に述べたことを行う。Nb の膜厚が 100nm の場合の E_{00}^x モードにおける V と d_x の関係と E_{10}^x におけるそれを図 8 に示す。二つの曲線の交点から横方向拡散長 d_x が求められ、同時にこの時の V の値が定まる。これと (14) 式から Δn が求められる。推定された横方向拡散長 d_x は 2.3 μm であった。Nb の膜厚が 82nm の場合の推定結果を 100nm の場合と共に表 1 に示す。また、 $d_x = 2.3\mu\text{m}$ とした場合の規格化分散曲線と測定値から求められた規格化伝搬定数を図 9 に示す。Nb 膜厚が 100nm の場合と 82nm の場合を比べると d_x において 0.2 μm の差があるが、規格化分散曲線上ではあまり差がなく。この程度の誤差を含んでいると考えられる。 E_{20}^x モードについては規格化分散曲線とは少し異なっているが、これは測定誤差の他に実際の屈折率分布関数が仮定したものとは多少異なっていることが考えられる。

表1 拡散源幅 W が $10\mu\text{m}$ の場合の最大屈折率変化 Δn 及び x 方向拡散長 d_x の推定結果

Nb 膜厚 (nm)	Δn	d_x (μm)
82	0.0092	2.1
100	0.0111	2.3

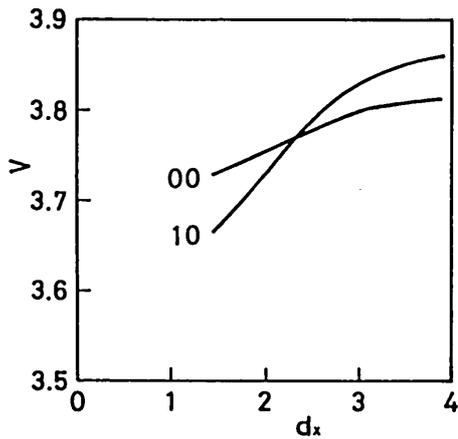


図8 拡散源幅 $W = 10\mu\text{m}$ の場合の規格化分散曲線より求めた規格化周波数 V と x 方向拡散長 d_x との関係

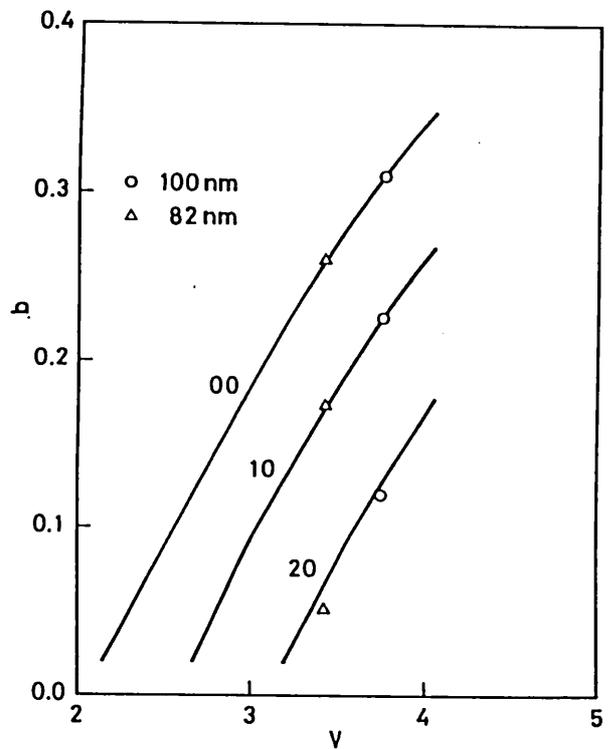


図9 拡散源幅 $W = 10\mu\text{m}$, 横方向拡散長 $d_x = 2.3\mu\text{m}$, 厚み方向拡散長 $d_y = 1.72\mu\text{m}$ の場合の規格化周波数 V と規格化伝搬定数 b の関係を表わす規格化分散曲線と測定値

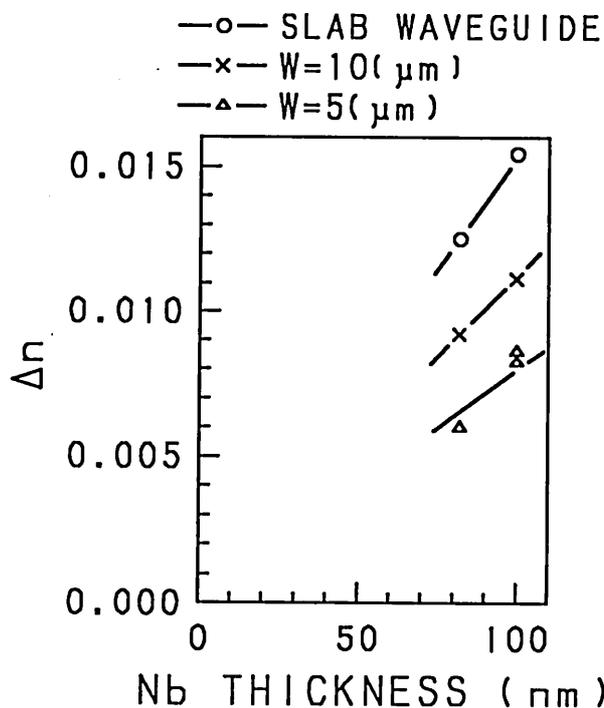


図10 拡散源幅 W を変えた場合の導波路の Nb 膜厚に対する最大屈折率変化 Δn

導波モードが一つしかない場合でも、拡散長が確定したので、3次元導波路の場合にも規格化分散曲線が一意に決まり、分散曲線を用いて最大屈折率変化を求めることができる。ただし、横方向拡散長はカットオフからより遠い Nb 膜厚 100nm のときの値 $2.3\mu\text{m}$ を用いることにする。等価屈折率の測定結果から (16) 式を計算し、規格化分散曲線から規格化周波数 V と規格化伝搬定数 b を求めると (14) 式から最大屈折率変化 Δn が求められる。この方法により、拡散源幅 $5\mu\text{m}$ の 3次元導波路の最大屈折率変化を求め、他の場合と共に図10に示す。Nb 膜厚が厚い方が屈折率変化が大きくなっている。また、Nb 膜厚が同じでも拡散源幅が狭い方が屈折率変化が小さくなっているが、これは横方向拡散のためである。

5 むすび

本研究では拡散型3次元導波路の解析と製作した導波路の構造パラメータの推定を行った。まず、ビーム伝搬法による光導波路のモード解析を行列の固有値問題に帰着させて行った。3次元導波路における行列の要素を示したが、規格化を行い、 V, b に加えて導波路の縦と横の幅の比 a_s で表した。屈折率分布関数を仮定し、3次元拡散型導波路について計算し、規格化分散曲線を求めた。

次に X -cut LiTaO_3 に Nb を 1200°C で3時間拡散して、2次元導波路及び拡散源幅が $10\mu\text{m}$, $5\mu\text{m}$ の2種類の3次元導波路を作製し、導波モードの伝搬定数を測定した。その結果と規格化分散曲線の計算結果を用いて、導波路定数の推定を行い、厚み方向拡散長及び横方向拡散長を求めた。また、異常光屈折率に対する最大屈折率変化と拡散源厚さとの関係を求めた。

今後の課題は解析面では近似を少なくして、精度を上げることである。実験面では測定精度を向上させ、色々な条件で作製した導波路の構造パラメータの推定を行うだけでなく、屈折率分布関数をも推定する手法を確立することである。

参考文献

- [1] G. B. Hocker and W. K. Burns : "Mode dispersion in diffused channel waveguides by effective index method", *Appl. Opt.*, **16**, 1, 113-118 (1977).
- [2] H. F. Taylor : "Dispersion characteristics of diffused channel waveguides", *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-12**, 12, 748-752 (1976).
- [3] C. Yeh, K. Ha, S. B. Dong, and W. P. Brown : "Single-mode optical waveguides" *Appl. Opt.*, **18**, 10, 1490-1504 (1979).
- [4] M. D. Feit and J. A. Fleck, Jr. : "Light propagation in graded-index optical fibers", *Appl. Opt.*, **17**, 24, 3990-3998 (1978).
- [5] C. Yeh, W. P. Brown, and R. Szejn : "Multimode inhomogeneous fiber couplers", *Appl. Opt.*, **18**, 4, 489-495 (1979).

- [6] J. Van Roey, J. van der Donk, and P. E. Lagasse : "Beam propagating method : analysis and assesment", *J. Opt. Soc. Am.*, **71**, 7, 803-810 (1981).
- [7] M. D. Feit and J. A. Fleck, Jr. : "Computation of mode eigenfunctions in graded-index optical fibers by the propagating beam method", *Appl. Opt.*, **19**, 13, 2240-2246 (1980).
- [8] M. D. Feit and J. A. Fleck, Jr. : "Comparison of calculated and measured performance of diffused channel-waveguide couplers", *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 10, 1296-1304 (1983).
- [9] 小野, 沢 : "Propagating beam method に基づく誘電体光導波路の正規モードの解析", *信学論 (C)*, **J68-C**, 2, 145-146 (昭和 60 年).
- [10] 小野, 沢 : "Propagating beam method に基づく誘電体導波路の正規モードの解析", *電学会電磁界理論研資*, **EMT85-77** (昭和 60 年).
- [11] W. E. Martin : "Refractive index profile measurements of diffused optical waveguides", *Appl. Opt.*, **13**, 9, 2112-2116 (1974).
- [12] M. Minakata, S. Saito, M. Shibata, and S. Miyazawa : "Precise determination of refractive-index changes in diffused LiNbO₃ optical waveguides", *J. Appl. Phys.*, **49**, 9, 4677-4682 (1978).
- [13] J. M. White and P. F. Heidrich : "Optical waveguide refractive index profile determined from measurement of mode indices : a simple analysis", *Appl. Opt.*, **15**, 1, 151-155 (1976).
- [14] M. D. Feit and J. A. Fleck, Jr. : "Calculation of dispersion in graded-index multimode fibers by beam-propagation method", *Appl. Opt.*, **18**, 6, 2843-2851 (1979).
- [15] G. B. Hocker and W. K. Burns : "Modes in diffused optical waveguides arbitrary index profile", *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-11**, 6, 270-276 (1975).
- [16] H. Onodera, I. Awai, and J. Ikenoue : "Refractive index measurement of bulk materials : prism coupling method", *Appl. Opt.*, **22**, 8, 1194-1197 (1983).

- [17] R. Ulrich and R. Torge : "Measurement of thin film parameters with a prism coupler", *Appl. Opt.*, **12**, 12, 2901-2908 (1973).
- [18] 柴沼, 小野寺, 粟井, 中島, 池上 : "任意の屈折率分布を有する光薄膜導波路の新しいモード解析法について", *信学技報*, MW81-72 (昭和 56 年).

移動体衛星通信用アクティブアレーアンテナ

中條 渉 (ATR光電波通信研究所)

1. まえがき

衛星を介した移動体衛星通信では、移動体の位置や形状にかかわらず常に衛星を高速で捕捉追尾する必要がある。これを実現するために、小さな多数のアンテナ素子で構成されるアレーアンテナを用いて、各アンテナ素子の励振係数を電子的に制御し所望の方向にビームを向けるフェーズドアレーアンテナが有効となる。図1に移動体衛星通信用アクティブアレーアンテナの構成を示す。アクティブアレーアンテナはアンテナ素子を複数配置するのみならず、さらに増幅や周波数変換等の能動的な機能を有するアクティブ素子をアンテナ素子毎に配置したアレーアンテナである。パッシブアレーでは、電力増幅器や低雑音増幅器といったアクティブ素子とアンテナ素子の間にビーム形成回路が挿入されるため、回路部分における給電損失を極少に抑える必要がある。これに対してアクティブアレーでは、アンテナ素子毎にアクティブ素子を配置することで、両者の距離を可能な限り近づけることができるため、アクティブ素子で送信や受信の回路損失を補償できる。従って、回路の部分にデジタル信号処理等の技術を積極的に導入することが可能となり、将来は回路の小形化、軽量化、更には高機能化が可能となる。アクティブアレーアンテナは従来、レーダの分野において主として研究がなされてきている。本稿ではこのアクティブアレーアンテナを移動体衛星通信に適用する場合の諸問題を取りあげる。

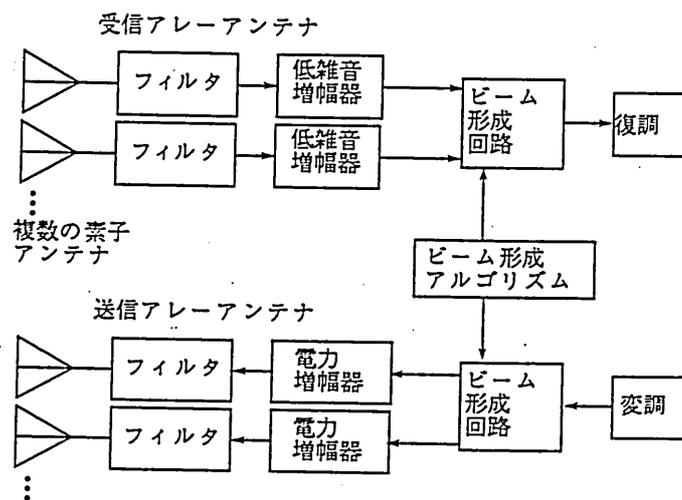


図1 移動体衛星通信用アクティブアレーアンテナの構成

2. ダイプレクシング機能を有する素子アンテナ

まず、移動体衛星通信ではレーダと異なり送信と受信を同時に行う必要がある。従って、送信信号が受信回路に回り込むのを抑えるために、アンテナ素子とアクティブ素子である増幅器の間にフィルタが必要となる。アクティブアレーでは各素子アンテナ毎にフィルタが必要となり、システム全体に占めるフィルタの割合が大きくなるため、小形化は不可欠である。これを解決する手段として送受のアンテナ素子を分離して、アンテナ自身にフィルタリング機能を持たせるセルフダイプレクシングアンテナが有効である⁽¹⁾。

図2に2層構造セルフダイプレクシングアンテナの構成を示す。上層誘電体基板に送信用としての円形パッチアンテナ、下層誘電体基板に受信用としての円環パッチアンテナがプリントされ、両者を重ねた構造である。円環パッチの特徴は円形パッチの中央部にショートピンで短絡された円筒を有していることである。円環パッチの円筒は電氣的に短絡されているので、容易に上層の円形パッチアンテナに給電することができる。図2に示すように、送信アンテナから受信アンテナへ回り込む電波は逆旋円偏波となるためアイソレーションが確保できることになる。セルフダイプレクシングアンテナで最終的に50dBの送受間アイソレーションを実現し、これによりフィルタの重量を大幅に軽減できる。

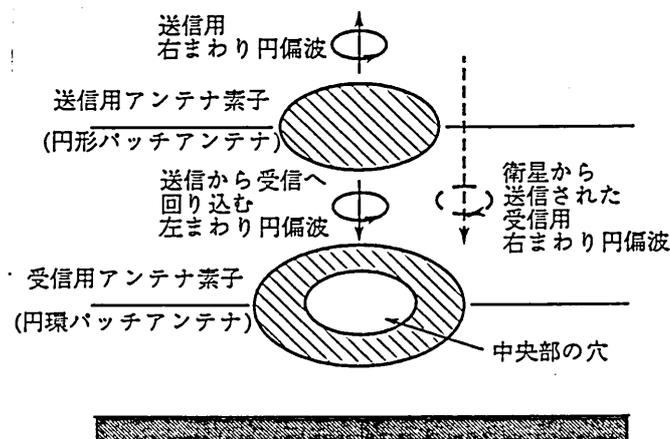


図2 2層構造セルフダイプレクシングアンテナの構成

3. コンフォーマルアレー

移動体衛星通信用アレーでは広角走査に適した特性を持つとともに自動車のルーフなど滑らかにカーブした面に取り付けるために、移動体に適合したアンテナ形状を持たせるコンフォーマルアレー技術が必要となる。図3はコンフォーマルアレーの曲率を調整することにより放射特性の改善をはかった正20面体配列の16素子部分球面アレーである⁽²⁾。図4に試作部分球面アレーを0°、30°、60°とビーム走査した場合の円偏波放射特性を示す。比較のために、同一の基板材料、

基板厚、同一の素子アンテナを用いて試作した19素子平面アレーの相対利得をあわせて点線で示す。これより19素子平面アレーと遜色のないビーム走査特性が得られ、移動体衛星通信用コンフォーマルアレーの有効性を確認することができる。

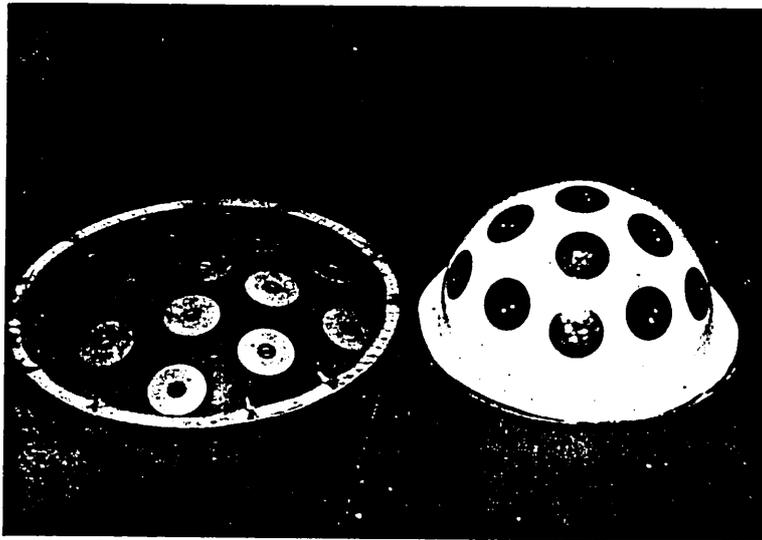


図3 試作コンフォーマルアレーの外観

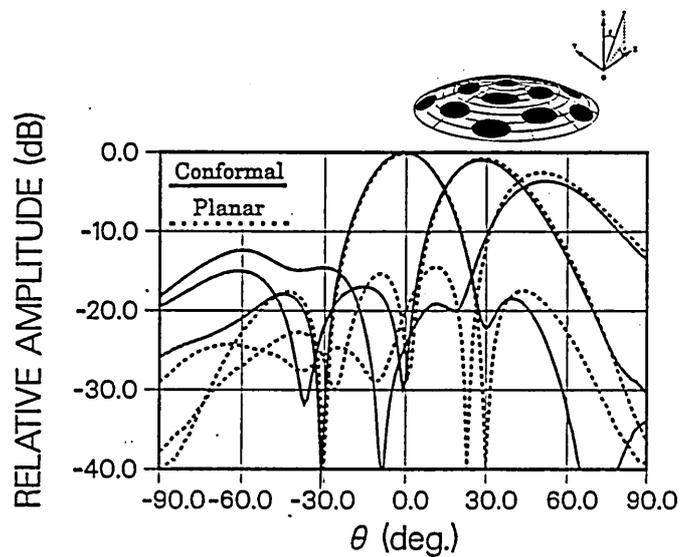


図4 コンフォーマルアレーの放射特性

4. デジタルビームフォーミング回路

デジタルビームフォーミング(DBF)回路はこれまでレーダ用受信アレーで用いられてきている。受信信号は各アンテナ素子毎に検出された後、デジタル信号処理によりビーム形成が行われる。通常、マイクロ波移相器を用いてアナログビーム形成を行う際はアレーの合成信号としてのみしか出力を取り出せないが、デジタルビーム形成では各素子アンテナ毎の信号として出力を保存できるため、任意の加工がSN比の劣化なしに可能となる。これに加えてデジタル信号処理のもつ高精度・柔軟性といった特徴を活かすことができる。DBF回路を移動体衛星通信に用いるためには、レーダでは必要のない送信用DBF回路の構成が問題となる。さらに、通信では送受間で異なる搬送波を用いるため、受信用DBF回路においては搬送波再生、クロック再生が必要となり、デジタルビーム形成部と復調部の整合性が問題となる⁽³⁾。

図5にデジタルシグナルプロセッサ(DSP)を用いて試作した、16チャンネル制御可能な受信用DBFアンテナの構成を示す。受信用DBFアンテナはL帯マイクロストリップアンテナ、IF帯へのダウンコンバータ、波形整形用のアナログLPFおよび受信用DBF回路からなる。図6に電波暗室内での受信用16素子DBFアレーのビーム走査特性を示す。ここでは素子アンテナを除いた各チャンネルの較正は全てDBF回路で行った。図から、計算値によく対応したビーム走査特性が

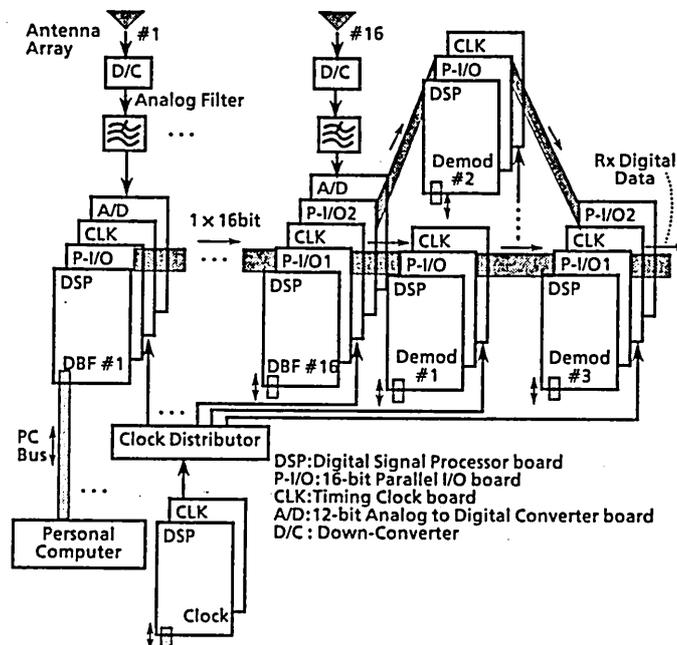


図5 試作受信用DBFアンテナの構成

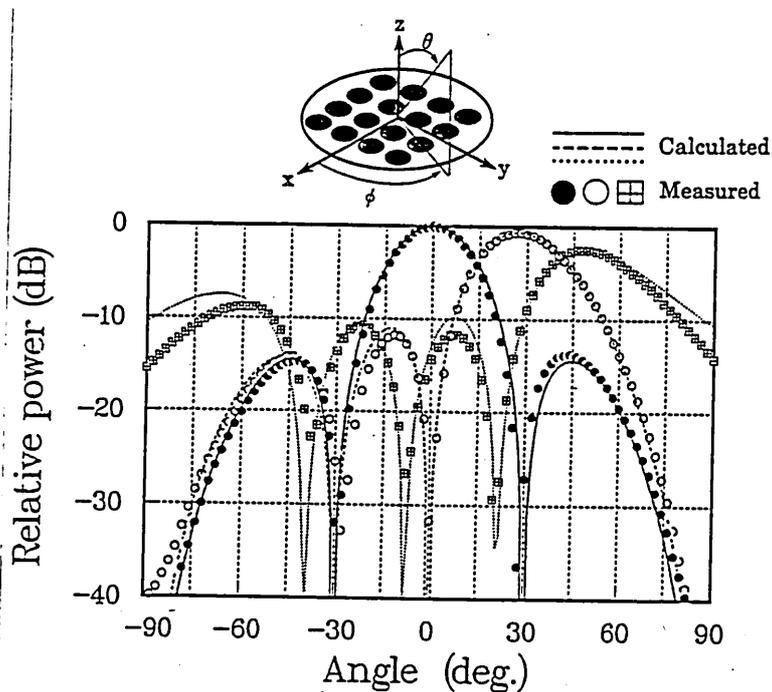


図6 受信用DBFアンテナのビーム走査特性

得られており、本受信用DBFアンテナにより精度よくビームの制御ができてい
ることが確認された。

今後は、このようなDBFアンテナの特徴を活かしたアルゴリズム開発が望ま
れる。また、実際の移動体に本システムを適用していくためには特にDBF回路の
小形化が必要である。

参考文献

- (1) Chujo W., Fujise M., Nakano M., Arai H. and Goto N. : "A two-layer self-diplexing antenna using a circularly polarized ring patch antenna", IEICE Trans., E74, 10, pp.3261-3267 (Oct. 1991).
- (2) 中條 渉, 小西義彦, 大滝幸夫, 藤瀬雅行: "移動体衛星通信用コンフォーマルアレーの設計と特性", 信学論(B-II), J75-B-II, 8, pp.547-555 (1992-08).
- (3) 大滝幸夫, 中條 渉, 上原清彦, 藤瀬雅行: "移動体衛星通信用DBFアンテナの試作", 信学技報, AP92-32 (1992-05).

ワニエ・シュタルク効果を利用した半導体光素子：SEED

ATR光電波通信研究所 細田 誠, 富永 浩司, 渡辺 敏英

1. はじめに

非線形電界吸収効果を利用したSelf-Electro-optic Effect Device (SEED) 素子¹⁾は小型集積化可能、高感度、低スイッチング・パワーという特徴を持ち、全光型データ処理システムにおける主要素たる、ロジック・ゲート、ラッチ、メモリー等に使用されてゆく潜在能力を有している。SEEDは通常、2個の同等のSEED素子を直列に接続したS-SEED(Symmetric-SEED)構成で使用され、光双安定特性を示す。その動作の基となっているのは電界吸収効果として知られている現象である。電界吸収効果としては、量子井戸中のエキシトン準位のシュタルク・シフトを使用したQCSE効果(Quantum Confined Stark Effect)がよく知られているが、我々は薄いバリアーによる短周期超格子中に生じる電子のミニバンドが、電界によって各量子井戸の個別の準位に戻るワニエ・シュタルク局在効果^{3),4)}(Wannier Stark Localization effect)を利用してSEED素子を実現し、それらの特性、及び物性を研究している。

2. ワニエ・シュタルク型SEEDにおける電界吸収効果

ワニエ・シュタルク局在効果(以後、WSL効果と略。)による電界吸収効果はQCSE効果によるものとは、その電界吸収効果の成因が大きく異なっている。図

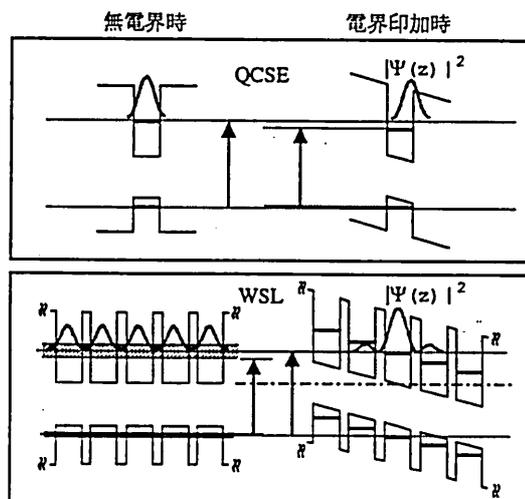


図1 電界吸収効果の成因

1に示すようにQCSEではバリア幅の厚い孤立した量子井戸の集合を用い、量子井戸中に閉じ込められたサブバンドにおけるエキシトンのシュタルク・シフトによる吸収ピークのずれを印加電界によって生じさせる。これにより、図2に示すように光吸収端はレッド・シフトする。通常、光変調器ではこのずれた吸収端を利用するが、それと異なり、SEEDにおいては負性抵抗によって正帰還をかけて双安定特性を出すために、図2に示したような印加電界が弱くなった時に光吸収が増すといった波長で、このQCSE効果を利用する。以上のQCSE効果とは異なり、WSL効果においてはバリア幅の薄い量子井戸(結合量子井戸)の集合を用い、各、量子井戸中の互いのサブバンド・レベル間のトンネリングの干渉に

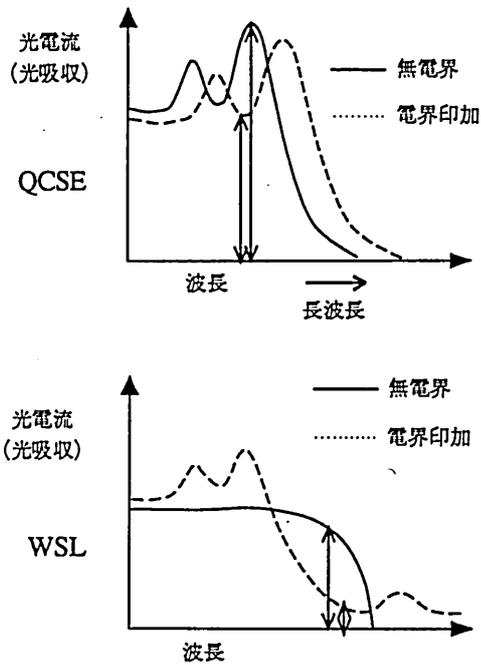


図2 電界吸収効果の差

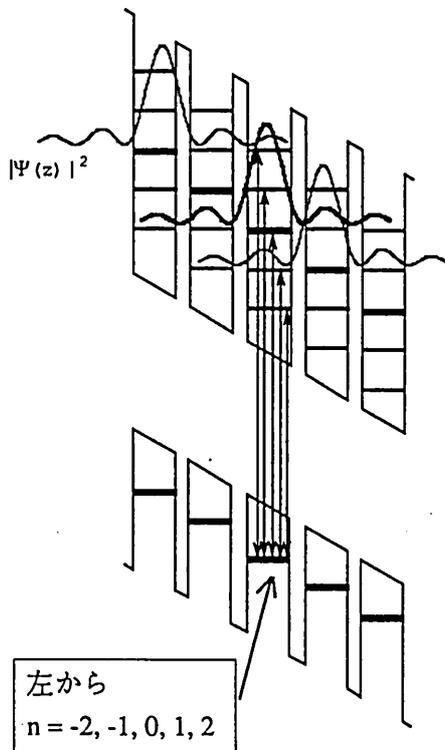


図3 シュタルク階段準位

よるパウリの排他律から、全体としてミニバンドと呼ばれるバンドができる。印加電界がない場合、光吸収は図1のようにこのバンド内の最低エネルギー準位集団に属する励起子によって起こり、単一の孤立した量子井戸のサブバンド・レベルよりも低いエネルギー（長波長側）で吸収端が生じる。電界をある程度かけると、各量子井戸のサブバンド・エネルギーは図1のように干渉しなくなるためミニバンドは破れ、もとの単一量子井戸のサブレベルに戻る。その時、波動関数は超格子全体に渡ってバンド中に分布していたものが、各量子井戸中へ局在していく。すなわち、これをワニエ・シュタルク・局在^{3,4)}と呼ぶ。以上の物理的な原因により、WSL効果の場合は電界によってブルー・シフトが起こり、図2.に示すように吸収端は短波長側にシフトする。

またWSL効果においては薄いバリアを使用しているため、サブバンド準位に分裂した後も各量子井戸内の各々の波動関数は図3に示すようにトンネリングによって近傍の量子井戸中へしみだしている。これらの準位は eFD (e :電子の単位電荷、 F :電界強度、 D :超格子の基本周期)の等間隔をもった階段状の準位、シュタルク階段準位⁴⁾を形成する。これらの波動関数のしみだしに対し、下のホール準位（ヘビーホールは有効質量が重く、ほとんどトンネルせず井戸中に局在する。）から遷移が生じるため、エネルギーの低い側 (ex. $n=-1,-2$ etc.) にも光吸収が生じる。従って特に非常に薄いバリアを用いた場合、各次数のシュタルク階段準位の吸収ピークが印加電界によって吸収波長を移動して現われるため、フォトカレントの波長依存性は印加電圧に対し複雑な変化を示すようになる。⁵⁾ このような超格子をpinダイオード構造中

のi-層に埋め込んでSEEDを作製した場合、入射波長を適度を選択すると、これらの各n次のシュタルク階段ピークが印加電圧によって次々とその波長を横切っていくため、多峰的i-Vカーブを示すSEED素子を得ることもできる。^{5,6)} このように複数のピークをi-V特性に持つということは、すなわち複数の負性抵抗領域を持っているということであり、単峰的i-Vカーブを持つQCSE型と異なり、WSL-SEEDにおいてはこれまで種々のバラエティーに富んだSEED動作が実証されてきた。⁷⁾

3. S-SEED回路の動作解析 (ポテンシャル関数法)

以上述べてきたようなi-V特性を持つSEED素子をS-SEED接続とした場合について、微分方程式の安定性理論を用いて解析することにより、そのスイッチング動作を容易に視覚的に説明できる。図4に示すS-SEED接続において、各々のSEEDの電流バランスを考えることにより、以下の微分方程式を得る。

$$Pc1(V_0 - V) + \frac{dQ1}{dt} = Pc2(V) + \frac{dQ2}{dt} \quad (1)$$

(Pc1, Pc2 = SEED のフォトカレント、Q1, Q2 = SEED素子の容量, C/2に溜まっている電荷。)

従って、SEEDダイオード、D1, D2の中点の電圧Vの時間変化は

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} [Pc1(V_0 - V) - Pc2(V)] \equiv \frac{1}{C} \Delta Pc(V)$$

(2)式。

Vの時間変化を運動方程式とみなし、あるポテンシャル関数によって記述できると仮定する。このようにすることにより、微分方程式の大域的安定性やVの時間変化はポテンシャル関数Uの形状の解析に

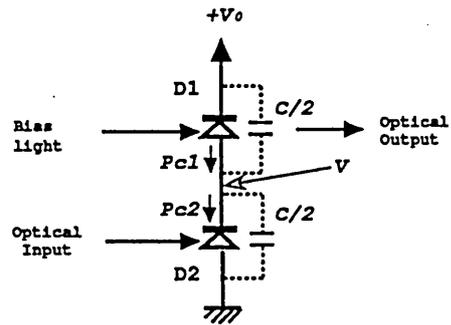


図4 S-SEED回路

帰結する。⁹⁾ すなわち、

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial V} = -\frac{1}{C} [Pc2(V) - Pc1(V_0 - V)] \quad (3)$$

より、

$$U(V) = \frac{1}{C} \int_0^V [Pc2(V') - Pc1(V_0 - V')] dV'$$

(4)式

というポテンシャル関数が求まり、この形状を見れば安定点が一目で分かり、今、非安定点にある点がどちらに動くのかがすぐ分かる。

以上より、(4)式を実際のSEEDのi-Vカーブに即して数値積分によりU(V)を求め、その極小値をとるVを見つければS-SEEDの安定点が分かり、そして不安定点からどちらの安定点に移動するかも分かる。この例をまず一般的な、単峰的i-Vカーブを持つS-SEEDに関して示したのが図5である。フォトカレント、Pc(V)の大きさは入射光強度に比例するので、図5では図4のSEEDダイオード1(D1)に一定強度の光を入れておき、ダイオード2(D2)に入射する光強度を変えていったときに負荷曲線図とそれに対応するポテンシャル曲線がどのように変化するかを模式的に示してある。この図において以下のことが分かる。(D1, D2の入射光強度

を各々 I_1, I_2 とする。)

1) $I_1 \gg I_2$ なる条件(図5の"A")においてはポテンシャルの極小点は"a"点しかなく、S-SEED系はこの中点電圧配分をもって止まっている。D2の光強度を条件"A","B","C"の順で増していくと、ポテンシャル関数は変形していき、"C"の状態では"a"点は不安定点となり、分配電圧、 V は新しい極小点、"c"に移動する。2) 上記

(1)において、"a"から"c"に V が移動する速さ、 dV/dt は式(2)にあるように ΔP_c に比例する。その遷移時間は両ダイオードのフォトカレント差、 ΔP_c の電流源で素子のコンデンサー、 C をチャージ/ディスチャージする時間となる。3) 遷移中は過渡的に図5(a)の負荷曲線における $P_{c1}(V_0-V)$ と $P_c(V)$ は安定点に至るまで交差しない。これはD1とD2が直列接続されているため一見矛盾するように思えるが、じつは余剰の電流、 ΔP_c は素子容量の充放電に使用されている。この充放電によって $V=Q/C$ により分配電圧が変化できる。極論すれば、S-SEEDシステムはデバイス容量があって初めて状態遷移が可能となっている。4) 初期条件を"A"として、もしD2への光入射を"C"となるようにしてパルス状に一定時間入れた後、"B"の条件に戻した場合、"B"のポテンシャル障壁を越えていなければ分配電圧は"a"点へ戻ってしまう。反対に"C"の遷移中に V が、"B"に戻したときのポテンシャルの山を越えているまで移動していれば、"B"に戻した後も自動的に"c"の安定点に移動していく。

4. WSL-SEEDにおける種々の安定特性

ワニエ・シュタルク効果を使用したWSL-SEEDにおいては使用波長を選択することにより、前述したシュタルク階段準位によって種々のi-V特性を得ることができる。また、WSL型SEEDのi-V特性はそ

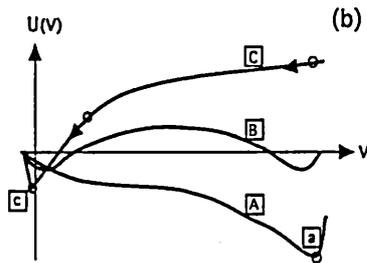
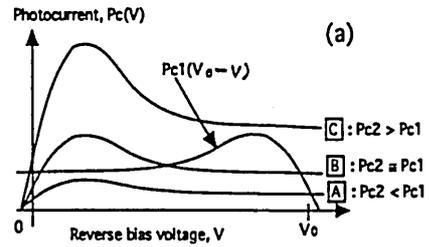


図5 双安定特性とそのポテンシャル関数

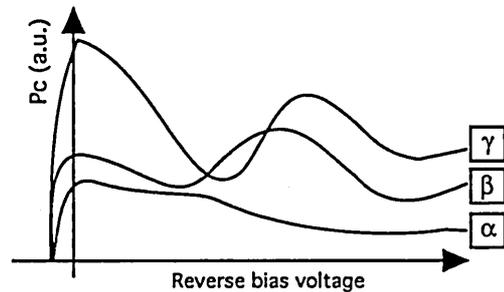


図6 種々のi-V特性(模式図)

の超格子のバリア幅等のパラメーターによっても種々の特性を現出させることができる。図6にそれらを模式的に示す。"α"は単峰特性であり、これまで説明してきたのと同じ特性を示す。"β"は多峰性のi-V特性を持ったSEEDによってS-SEED構成をとった場合には安定点が複数でてくる。例示したものは3重安定特性を示すものであり、光入力をDC的に変化させていくことにより、3つの

安定点の間でスイッチする。” γ ”はDC的光入力に対しては双安定特性のみを示すが、前に説明したように、パルス光による励起によりポテンシャル関数,”C”の中途までVを遷移させた後、”B”の状態に戻してやることにより、ポテンシャル関数,”B”上のみ現われる極小点（準安定状態, Meta-stable state）にVを落とすことのできるものである。

このような準安定状態はある光強度におけるi-V特性にのみ現われ、DC的入射光の変化によっては到達できず、パルス光励起によってのみ到達可能な孤立した安定点であり、S-SEED系においては初めて観測されたものである。DC的光入力によって到達できないことは透過率（またはその逆の吸収率）のヒステリシス・カーブの形状によってもその差が明瞭に現われる。図7に模式的に示したヒステリシス・カーブにおいて、ヒステリシスの中に書いた点線は一種の折り畳まれた等ポテンシャル面、マニフォールド（多様体）を表わし、簡単なカストロフイー的外観を与えている。” α ”の双安定に関しては説明するまでもなく、与えられた光強度に対応する切辺に相当する透過率へ遷移が起こるため、突然に低透過率と高透過率間のジャンプが起こり、マニフォールドの形状より、双安定となる。” β ”の三重安定に関しても同様である。ところが、” γ ”のように真ん中の折り畳まれた部分はその上の折り畳みの傘よりも、はり出していない場合には準静的、DC的にゆっくりと遷移させた場合にはその中間の折り畳み点で止まらず、単に双安定特性が得られるのみであり、真ん中の折り畳みに相当する準安定点は準静的変化に対し孤立している。

5. 準安定状態の観測

以上述べてきたように変わった性質を

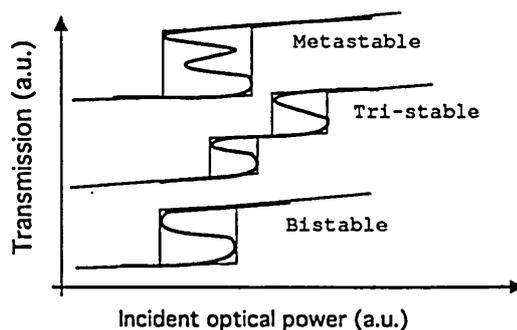


図7 種々のヒステリシス・カーブ

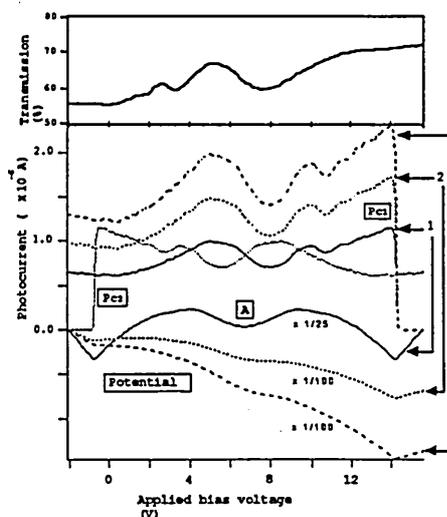
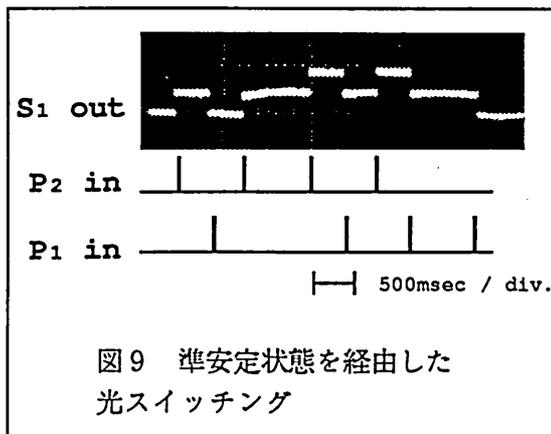


図8 準安定状態を示すWSL-SEEDの実際のi-V特性とポテンシャル関数 ($\lambda = 770 \text{ nm}$)

示す準安定状態を観測するためには、S-SEED構成において各々のSEEDダイオード,D1,D2にDCバイアス光を照射して図8のポテンシャル関数左端の安定状態としておき、D1,D2各々にパルス光を入力して一旦ポテンシャル関数の形を”1”~”3”へと変え、分配電圧,Vの移動が準安定状態”A”に対応するVになったときにパルス光を切ってポテンシャルを”1”の状態に戻してやればよい。以上により次のことが実現できる。

- 1) 双安定状態にリセットされたWSL-



S-SEED系において、D2のSEEDに適度なパルス光を一つ入れると"A"の準安定状態に遷移する。もう一つパルスを入れると、次の双安定状態に遷移する。

- 2) その後D1に一つパルスを入れるごとに逆方向に順次リセットされていく。
- 3) 準安定状態にある時は光パルスが入らないかぎり時間的に安定である。

以上を実験によって示したのが図9である。図中C1,C2はSEEDダイオードD1,D2への光パルス入射タイミングを示す。図より、準安定状態を経由したセット/リセット動作が起こっていることがわかる。

6. まとめ

以上述べたように、ワニエ・シュタルク局在効果型SEED素子はQCSE型SEEDにない特徴を持ち、種々の光処理ファンクションを容易に実現できる可能性を有する。

7. 謝辞

本研究を進めるにあたり、その機会を与えていただきましたATR光電波通信研究所の古濱社長に感謝いたします。

参考文献

- 1) A.L.Lentine et al., IEEE J. Quantum electron. QE-25, 1928 (1989).
- 2) D.A.B.Miller et al., Phys. Rev.B32, 1043 (1985).
- 3) G.H.Wannier, Rev. Mod. Phys. 34, 645 (1962)
- 4) E.E.Mendez et al.,Phys. Rev. Lett. 60, 2426 (1988)
- 5) K.Kawashima et al., Jpn. J. Appl. Phys. 30, L793 (1991)
- 6) K.Kawashima et al., Jpn. J. Appl. Phys. 30, L1542 (1991)
- 7) K.Kawashima et al., Appl. Phys. Lett. 60, 1679 (1992)
- 8) D.A.B.Miller et al., IEEE J. Quantum Electron. QE-21, 1462 (1985)
- 9) H.Haken, Synergetics (Springer-Verlag, New York, 1978) 2nd ed.