多数の誘電体球からなる媒質の等価誘電率

立居場 光生

（九州大学 工学部 情報工学科）

1．まえがき

多数の散乱体から構成される離散的なランダム媒質中の等価誘電率 (Effective dielectric constant) の精密な解析は，リモートセンシング[1],[2]や高速通信[3]の分野で重要な問題となっている．一般に，ランダム媒質中の等価誘電率 ε_{eff} は，媒質中の等価的な波数 K を用いて，$\varepsilon_{eff} = Re[K^2/k^2]$ (k : 自由空間中の波数, $Re \equiv$ "real part of") として与えられる．従って，ε_{eff} を得るためには K を求めればよい．これまでの研究において，特に波長に対して十分小さいサイズの散乱体からなる媒質中の等価的な波数は，準静的近似 (Quasi-Static Approximation) としてよく知られている MGA (Maxwell-Garnett Approximation) や EMA (Effective-Medium Approximation) を用いて解析することができ，これらに基づいた解析や実験が盛んに行われている[4],[5]．MGA 及び EMA は，散乱体間に生じる波の多重散乱が無視できるような光路長 (Optical path length) の小さい媒質中の等価波数の解析を精度良く行うことができる．しかし，散乱体間の多重散乱が無視できないような光路長の大きな媒質中では K は複素数となるが，そのような場合の解析には適さない．そこで，散乱体間に生じる多重散乱を考慮し，K の虚部をも計算できる精密な解析法として，EFA (Effective Field Approximation, Foldy's Approximation), QCA (Quasicrystalline Approximation), QCA-CP (Quasicrystalline Approximation and Coherent Potential) が用いられてきた[2]．EFA は，媒質中の波がほとんど前方多重散乱するとみなせるような粗な分布の散乱体からなる媒質について有効な等価波数 K を精密に求めることができるが，分布が密になると散乱体間に生じる後方多重散乱が無視できなくなり，有効な結果が得られない．一方，QCA 及び QCA-CP は，散乱体間に生じる後方散乱を一部取り入れたより精密な解析法である．よって，散乱体分布が粗である場合は EFA と一致し，密である場合についても形式的に計算することが可能となる．しかし，QCA 及び QCA-CP は密な分布への適用の妥当性は保証されてなく，また，各散乱体の持つ誘電率が非常に大きい場合，つまり散乱体間の後方多重散乱が非常に強い場合への適用は難しいと考えられる．

こうした中で，数年前，散乱体が周期的な分布からランダムに位置変動することにより生じ

る散乱を解析の基とする新しい多重散乱理論が提案された[7]．この理論によると，散乱体が密な分布になるとランダム変動が小さくなり，従って変動に伴う散乱も小さくなることとなり，解析が可能になる．また，散乱体の持つ誘電率の大きさに束縛されることなく媒質中の等価波数 K を精密に計算することができる[8]．

本稿では，この新しい多重散乱理論に基づいて定式化を行い，散乱体分布が密である場合にも適用できる界の表現式に基づいて，多数の誘電体球から構成されるランダム媒質中の等価的な波数を導出し，等価誘電率 ε_{eff} を求める．更に EFA，QCA，QCA-CP による ε_{eff} との比較を行い，本解析法の妥当性を示す．

2．定式化

N個の散乱体によるスカラ波散乱問題を考える．図－1に示すように，散乱体の存在する空間 V における n 番目の散乱体の中心位置を$\boldsymbol{r}_n$ ($n = 1, 2, \cdots, N$) とし，これを確率ベクトル変数とする．更に，$\boldsymbol{r}_n$の平均値及び分散をそれぞれ次式で定義する．

$$\boldsymbol{a}_n = \langle \boldsymbol{r}_n \rangle = (m_x a_x, m_y a_y, m_z a_x) \quad , \quad \sigma_r^2 = \left\langle (\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{a}_n)^2 \right\rangle \tag{1}$$

ここで，$<\cdot>$ は集合平均を表し，また，m_x，m_y，m_z は各散乱体を指示する任意の整数，a_x，a_y，a_z はそれぞれ x，y，z 方向の散乱体の平均間隔を表す．

多数の散乱体からなる媒質への入射波を u_{in}，散乱波を u_s とすると，それらの和 $u = u_{in} + u_s$ は次の積分方程式の解として与えられる．

$$u(\boldsymbol{r}) = u_{in}(\boldsymbol{r}) + \int_V G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') k^2 \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(\boldsymbol{r}') u(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' \tag{2}$$

ここで，k は自由空間における波数，$G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ は自由空間におけるグリーン関数，$\varepsilon_n(\boldsymbol{r})$ は j 番目の散乱体の比誘電率と周りの自由空間の比誘電率との差を表す．

理論の展開を分かり易くするために，本稿では，散乱体の形状，サイズ，向きが同一で，位置 $\boldsymbol{r}_j$ のみがランダムであるとする．よって，各散乱体の中心位置を中心とするベクトルを $\boldsymbol{r}_0$ とすると，$\varepsilon_j(\boldsymbol{r}) = \varepsilon(\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{r}_0)$ となる．また，各散乱体の周期的配置からのランダム変位は確率的に独立であるとする．つまり，

$$\langle \exp[-i\boldsymbol{\kappa} \cdot (\boldsymbol{r}_n + \boldsymbol{r}_m)] \rangle = \langle \exp[-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{r}_n] \rangle \langle \exp[-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{r}_m] \rangle, \; n \neq m$$

を仮定する．

文献 [7] によると，式 (2) における入射波が波源分布 $f_s(\boldsymbol{r})$ を用いて

$$u_{in}(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') f_s(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' \tag{3}$$

で与えられ，かつ，N が十分大きい場合，式 (2) の平均解（コヒーレント界）$\langle u(\boldsymbol{r}) \rangle$ は近似的に次式で与えられる．

$$\langle u(\boldsymbol{r})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle \widehat{G}(\boldsymbol{\kappa})\rangle \widehat{f}_s(\boldsymbol{\kappa}) \exp[i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}]d\boldsymbol{\kappa} \quad ; \tag{4}$$

$$\langle \widehat{G}(\boldsymbol{\kappa})\rangle = \langle \widehat{G}_1(\boldsymbol{\kappa})\rangle + \widehat{S}(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa})\langle \widehat{G}_1(\boldsymbol{\kappa})\rangle \tag{5}$$

ここで，$\widehat{}$はフーリエ変換を表し，$\langle \widehat{G}(\boldsymbol{\kappa})\rangle$ は散乱体の存在する空間の平均グリーン関数を表す．また，$\widehat{S}(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa}')$ は，以下の式で定義される $\boldsymbol{\kappa}'$ から $\boldsymbol{\kappa}$ への散乱作用素である．

$$\begin{aligned}\widehat{S}(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa}') = \langle \widehat{G}_1(\boldsymbol{\kappa})\rangle a_v^{-3}\cdot \Bigg(& k^2\left[\widehat{\varepsilon}(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}') - \widehat{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}')\right] \\ & + \sum_{n=2}^{\infty}(2\pi)^{-3(n-1)}\int d\boldsymbol{\kappa}_1\cdots\int d\boldsymbol{\kappa}_{n-1}\cdot\Big\{\langle \widehat{G}_1(\boldsymbol{\kappa}_1)\rangle\cdots\langle \widehat{G}_1(\boldsymbol{\kappa}_{n-1})\rangle k^{2n} \\ & \cdot\left[\widehat{\varepsilon}(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}_1)\cdots\widehat{\varepsilon}(\boldsymbol{\kappa}_{n-1}-\boldsymbol{\kappa}') - \widehat{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}_1)\cdots\widehat{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\kappa}_{n-1}-\boldsymbol{\kappa}')\right]\Big\}\Bigg)\ ;\end{aligned} \tag{6}$$

$$\widehat{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\kappa}) = \widehat{\varepsilon}(\boldsymbol{\kappa})\exp[-Q(\boldsymbol{\kappa})] \tag{7}$$

$$\widehat{\varepsilon}(\boldsymbol{\kappa}) = \int \varepsilon(\boldsymbol{r})\exp[-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}_0]d\boldsymbol{r}_0 \tag{8}$$

$$P(\boldsymbol{\kappa}) = \sum_{n=1}^{N}\exp[-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{a}_n] \tag{9}$$

$$\exp[-Q(\boldsymbol{\kappa})] = \langle \exp[-i\boldsymbol{\kappa}\cdot(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{a}_n)]\rangle \tag{10}$$

但し，$a_v^3 = a_x a_y a_z$，$P(\boldsymbol{\kappa})$ は散乱体の周期的配置を示すパラメータ，$Q(\boldsymbol{\kappa})$ は散乱体の周期的配置からのランダムな変位の程度を示すパラメータで $(\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{a}_n)$ のキュムラントである．また，$\widehat{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\kappa})$ は，各散乱体の持つ比誘電率が，各散乱体のランダムな位置変動によって，周りの自由空間になめされた状態における実効的な散乱体の比誘電率を表し，実空間においては，各散乱体の分布過程を表す確率密度関数 $f(\boldsymbol{r})$ ，即ち $\exp[-Q(\boldsymbol{\kappa})]$ の逆フーリエ変換を用いて $\varepsilon_e(\boldsymbol{r}) = \int \varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$ で定義される．また，$\langle \widehat{G}_1(\boldsymbol{\kappa})\rangle$ は次式を満たす $\langle \widehat{G}_0(\boldsymbol{\kappa})\rangle$ を使って表されるプロパゲータである．

$$\langle \widehat{G}_0(\boldsymbol{\kappa})\rangle = \widehat{G}(\boldsymbol{\kappa}) + \widehat{G}(\boldsymbol{\kappa})(2\pi)^{-3}\int d\boldsymbol{\kappa}_1\Big(k^2\widehat{\varepsilon}(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}_1)\exp[-Q(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}_1)]P(\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}_1)\langle \widehat{G}_0(\boldsymbol{\kappa}_1)\rangle\Big) \tag{11}$$

本稿では，散乱体分布がランダムである場合を扱うので，文献[7]によると，$\langle \widehat{G}_1(\boldsymbol{\kappa})\rangle \simeq \langle \widehat{G}_0(\boldsymbol{\kappa})\rangle$ が成り立つ．$\widehat{S}(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa}')$ が表す "散乱" とは，散乱体の周期的配置からのランダム変位によってのみ生じるものを意味し，通常の散乱とは異なる．よって，周期的配置（ $\sigma_r^2 = 0$ ）においては，$\exp[-Q(\boldsymbol{\kappa})] = 1$，$\widehat{S}(\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa}) = 0$ となり散乱は生じない．このとき，平均グリーン関数は $\langle \widehat{G}(\boldsymbol{\kappa})\rangle = \langle \widehat{G}_1(\boldsymbol{\kappa})\rangle = \langle \widehat{G}_0(\boldsymbol{\kappa})\rangle$ となり，コヒーレント界 $\langle u(\boldsymbol{r})\rangle$ は $P(\boldsymbol{\kappa})$ のみに依存する $\langle \widehat{G}_0(\boldsymbol{\kappa})\rangle$ により表現される．一方，もし $\langle \widehat{G}_0(\boldsymbol{\kappa})\rangle$ における $P(\boldsymbol{\kappa})$ の高次の項が無視でき，定数となるならば，$\langle \widehat{u}(\boldsymbol{\kappa})\rangle$ 中に分布の周期性が含まれないことになる．よって，この場合，散乱体の配置はランダム分布となる．式(7)において，散乱体の完全なランダム分布，つまり $\sigma_r^2 \to \infty$ ならば，

$Q(\kappa) \to \infty$ となり，$\langle \widehat{G}_0(\kappa) \rangle = \widehat{G}(\kappa)$ 及び

$$\widehat{S}(\kappa,\kappa) = \widehat{G}(\kappa) a^{-3} \sum_{n=2}^{\infty} (2\pi)^{-3(n-1)} \int d\kappa_1 \cdots \int d\kappa_{n-1} \cdot \left\{ \widehat{G}(\kappa_1) \cdots \widehat{G}(\kappa_{n-1}) k^{2n} \widehat{\varepsilon}(\kappa - \kappa_1) \cdots \widehat{\varepsilon}(\kappa_{n-1} - \kappa) \right\}$$

を得る．このとき，式 (4) の $\langle u(r) \rangle$ が Foldy 近似におけるコヒーレント界と一致する．なお，有限のσ_r^2 に対しても，$\langle u(r) \rangle$ にとってランダム分布とみなせるための条件を得ている[12]．

$\langle \widehat{G}_1(\kappa) \rangle$ は，散乱体分布がランダムである場合，近似的に次式で与えられる[11]-[14]．

$$\left\langle \widehat{G}_1(\kappa) \right\rangle = \frac{1}{\kappa^2 - k_e^2} \quad ; \tag{12}$$

$$k_e = k(1+\varepsilon_{av})^{1/2} \quad , \quad \varepsilon_{av} = \frac{1}{a_v^3} \int \varepsilon(r_0) dr_0 \tag{13}$$

ここで，k_e は，全空間が比誘電率 $[1+\varepsilon_{av}]$ の媒質で占められているときの波数であり，$[1+\varepsilon_{av}]$ は規格化空間 $a_v^3 = a_x a_y a_z$ に 1 個の散乱体を置いたときの規格化空間全体の平均的な比誘電率である．

式 (5) の散乱作用素 $\widehat{S}(\kappa,\kappa)$ を，次式で定義されるような T作用素：$\widehat{T}(\kappa,\kappa)$ を用いて表現する．

$$\widehat{S}(\kappa,\kappa) \left\langle \widehat{G}_1(\kappa) \right\rangle \equiv \left\langle \widehat{G}_1(\kappa) \right\rangle \widehat{T}(\kappa,\kappa) \left\langle \widehat{G}(\kappa) \right\rangle \; ; \tag{14}$$

$$\widehat{T}(\kappa,\kappa) = \frac{1}{a_v^3} \left\{ \widehat{T}_1(\kappa,\kappa) - \widehat{T}_2(\kappa,\kappa) \right\} \tag{15}$$

ここで，式 (5)，(6)，(12)，(13)，(14)，(15) より明らかなように，$\left\langle \widehat{G}_1(\kappa) \right\rangle \widehat{T}_1(\kappa,\kappa) \left\langle \widehat{G}(\kappa) \right\rangle$ は波数 k_e の空間に存在する比誘電率 $[1+(k^2/k_e^2)\varepsilon(r)]$ の 1 つの散乱体における平面波入射の場合の前方散乱界を，$\left\langle \widehat{G}_1(\kappa) \right\rangle \widehat{T}_2(\kappa,\kappa) \left\langle \widehat{G}(\kappa) \right\rangle$ は同様の空間中に存在する比誘電率 $[1+(k^2/k_e^2)\varepsilon_e(r)]$ の 1 つの散乱体における平面波入射の場合の前方散乱界をそれぞれ表している．ここで，$\varepsilon_e(r)$ は，式 (7) のフーリエ逆変換である．

式 (5)，(12)，(14) より，媒質中の平均グリーン関数は，次式で与えられる．

$$\left\langle \widehat{G}(\kappa) \right\rangle = \frac{1}{\kappa^2 - K^2} \quad , \quad K^2 = k_e^2 + \widehat{T}(\kappa,\kappa) \tag{16}$$

ここで，K は多数の散乱体からなる媒質中の等価的な波数を表す．これより，媒質中の等価誘電率 ε_{eff} は次式で与えられる．

$$\varepsilon_{eff} = Re[K^2/k^2] \tag{17}$$

3．多数の誘電体球からなる媒質の等価誘電率

これ以降，各散乱体を半径 b_0，比誘電率（$1+\varepsilon$）の均質誘電体球とする．また，各散乱体の平均間隔の等方性 $a_x = a_y = a_z = a_0$ 及び周期的配置からの位置変動の等方性$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma_0^2$ を仮定する．散乱体の位置変動の程度を示すパラメータ $\exp[-Q(\kappa)]$ は，各散乱体の位置変動として，各散乱体の平均位置（周期的配置）を中心とするガウス分布を仮定しているので，$\exp[-Q(\kappa)] = \exp[-(1/2)\sigma_0^2\kappa^2]$ となる．このとき，$\varepsilon_e(r)$ は，次式で与えられる．

$$\varepsilon_e(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \widehat{\varepsilon}_e(\kappa)\exp[i\kappa\cdot r]\,d\kappa = \int \varepsilon(r-r')f(r')dr' = \varepsilon W(r,\sigma_0)\,; \tag{18}$$

$$W(r,\sigma_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{r\sigma_0}\cdot\exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}\right]\cdot\int_0^{b_0}\exp\left[-\frac{r_1^2}{2\sigma_0^2}\right]\sinh\left[\frac{rr_1}{\sigma_0^2}\right]r_1dr_1 \tag{19}$$

但し，$W(r,\sigma_0)$ は $0 \le W(r,\sigma_0) \le 1$ を満たし，r，σ_0 に関して，$\sigma_0 > 0$ の範囲で単調減少関数である．$\sigma_0 = 0$ においては，$\varepsilon_e(r) = \varepsilon(r)$ となる．散乱体のランダム分布の条件[12]下において，プロパゲータ$\left\langle \widehat{G}_1(\kappa)\right\rangle$ は式 (12) で与えられ，式 (13) の k_e は，この場合次式で与えられる．

$$k_e = k(1+f\varepsilon)^{1/2}\,,\ f = \frac{[4\pi b_0^3/3]}{a_0^3} \tag{20}$$

ここで，f は，誘電体球が a_0^3 の規格化空間中に占める体積の割合 (Volume fraction) を表している．よって，$f=1$ を満たす b_0，つまり $a_0^3 = 4\pi b_0^3/3$ を満たす b_0 は，$b_0 \simeq 0.63a_0$ となる．

式 (15) の $\widehat{T}_1(\kappa,\kappa)$ は，この場合，波数 k_e の空間中に置かれた半径 b_0，比誘電率 $[1+(k/k_e)^2\varepsilon]$ の均質誘電体球による平面波入射における前方散乱振幅 $f_1(i,i)$（但し i は平面波の入射方向単位ベクトル）と$\widehat{T}_1(\kappa,\kappa) = 2\pi f_1(i,i)$ の関係になるため，均質誘電体球による平面波散乱についての周知の結果[13]を遠方界近似することにより，次式で与えられる．

$$\widehat{T}_1(\kappa,\kappa) = -i\frac{4\pi}{k_e}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(a_n^{(1)}+b_n^{(1)}\right)\right\}\ ; \tag{21}$$

$$a_n^{(1)} = -\frac{j_n(k_sb_0)[k_eb_0j_n(k_eb_0)]' - j_n(k_eb_0)[k_sb_0j_n(k_sb_0)]'}{j_n(k_sb_0)[k_eb_0h_n^{(1)}(k_eb_0)]' - h_n^{(1)}(k_eb_0)[k_sb_0j_n(k_sb_0)]'} \tag{22}$$

$$b_n^{(1)} = -\frac{j_n(k_eb_0)[k_sb_0j_n(k_sb_0)]' - (1+\varepsilon)j_n(k_sb_0)[k_eb_0j_n(k_eb_0)]'}{h_n^{(1)}(k_eb_0)[k_sb_0j_n(k_sb_0)]' - (1+\varepsilon)j_n(k_sb_0)[k_eb_0h_n^{(1)}(k_eb_0)]'} \tag{23}$$

ここで，$k_s = k_e\left[1+(k^2/k_e^2)\varepsilon\right]^{1/2}$ であり，式中の $'$ は引数における微分を示す．また，式中の $j_n(k_eb_0)$，$h_n^{(1)}(k_eb_0)$ は，それぞれ球ベッセル関数，第１種球ハンケル関数である．

他方，$\widehat{T}_2(\kappa,\kappa)$ は，誘電体球の位置変動の確率過程に依存した誘電率分布 $[1+(k^2/k_e^2)\varepsilon_e(r)]$ を持つ不均質誘電体球の前方散乱界を精密に解くことによって与えられる．本稿では，文献 [14] の手法に基づいて，不均質誘電体球を図－２に示すような t 層の多層球で近似することにより，その前方散乱振幅を計算し，$\widehat{T}_2(\kappa,\kappa)$ を求めている．

$$\widehat{T}_2(\kappa,\kappa) = -i\frac{4\pi}{k_e}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(a_n^{(2)}+b_n^{(2)}\right)\right\} \ ; \tag{24}$$

$$a_n^{(2)} = -D_n^{(5)}(x_t)\frac{m_t H_n^a(m_t x_t) - D_n^{(1)}(x_t)}{m_t H_n^a(m_t x_t) - D_n^{(3)}(x_t)} \tag{25}$$

$$b_n^{(2)} = -D_n^{(5)}(x_t)\frac{H_n^b(m_t x_t) - m_t D_n^{(1)}(x_t)}{H_n^b(m_t x_t) - m_t D_n^{(3)}(x_t)} \tag{26}$$

ここで，$x_t = k_e r_t$，$m_t = \sqrt{1+(k/k_e)^2\varepsilon_e[(r_t+r_{t-1})/2]}$，であり，$H_n^a$，$H_n^b$，$D_n^{(l)}$，$l=1,2,\cdots,5$ は，以下の式で与えられる．

$$H_n^a(m_j x_j) = \frac{D_n^{(4)}(m_j x_j)D_n^{(1)}(m_j x_j) - A_n^{(j)}D_n^{(2)}(m_j x_j)}{D_n^{(4)}(m_j x_j) - A_n^{(j)}} \tag{27}$$

$$A_n^{(j)} = \begin{cases} 0 & ,j=1 \\ D_n^{(4)}(m_j x_{j-1})\cdot\dfrac{m_{j-1}H_n^a(m_{j-1}x_{j-1}) - m_j D_n^{(1)}(m_j x_{j-1})}{m_{j-1}H_n^a(m_{j-1}x_{j-1}) - m_j D_n^{(2)}(m_j x_{j-1})} & ,j=2,3,\cdots,t \end{cases} \tag{28}$$

$$H_n^b(m_j x_j) = \frac{D_n^{(4)}(m_j x_j)D_n^{(1)}(m_j x_j) - B_n^{(j)}D_n^{(2)}(m_j x_j)}{D_n^{(4)}(m_j x_j) - B_n^{(j)}} \tag{29}$$

$$B_n^{(j)} = \begin{cases} 0 & ,j=1 \\ D_n^{(4)}(m_j x_{j-1})\cdot\dfrac{m_j H_n^b(m_{j-1}x_{j-1}) - m_{j-1} D_n^{(1)}(m_j x_{j-1})}{m_j H_n^b(m_{j-1}x_{j-1}) - m_{j-1} D_n^{(2)}(m_j x_{j-1})} & ,j=2,3,\cdots,t \end{cases} \tag{30}$$

$$D_n^{(l)}(z) = \frac{1}{(n/z) - D_{n-1}^{(l)}} - \frac{n}{z} \quad , l=1,2,3 \tag{31}$$

$$D_n^{(4)}(z) = D_{n-1}^{(4)}\cdot\frac{[D_n^{(2)}(z)+n/z]}{[D_n^{(1)}(z)+n/z]} \tag{32}$$

$$D_n^{(5)}(z) = D_{n-1}^{(5)}\cdot\frac{[D_n^{(3)}(z)+n/z]}{[D_n^{(1)}(z)+n/z]} \tag{33}$$

但し，$x_j = k_e r_j$, $m_j = \sqrt{1+(k/k_e)^2\varepsilon_e([r_j+r_{j-1}]/2)}$ であり，$D_0^{(l)}$, $l=1,2,\cdots,5$, は次式で与えられる．

$$D_0^{(1)}(z) = \frac{\cos z}{\sin z},\ D_0^{(2)}(z) = -\frac{\cos z}{\sin z},\ D_0^{(3)}(z) = i \tag{34}$$

$$D_0^{(4)}(z) = \frac{\sin z}{\cos z},\ D_0^{(5)}(z) = \frac{\sin z}{\sin z - i\cos z} \tag{35}$$

$\widehat{T}_2(\kappa,\kappa)$ の物理的意味は，誘電体球の比誘電率 $[\,1+(k/k_e)^2\varepsilon\,]$ が，ランダムな位置変動のために広く空間に滑され，実効的な比誘電率 $[\,1+(k/k_e)^2\varepsilon_e(r)]$ ($\varepsilon_e(r)\le\varepsilon(r)$) の不均質誘電体球による平面波の前方散乱界を表している．よって，誘電体球に位置変動が無い場合 ($\sigma_r^2=0$)，$\widehat{T}_2(\kappa,\kappa)=\widehat{T}_1(\kappa,\kappa)$ となる．

波の波長が誘電球のサイズに比べて十分長い場合 (低周波の場合)，式 (15) の $\widehat{T}_1(\kappa,\kappa)$，$\widehat{T}_2(\kappa,\kappa)$ は，式 (21)~(35) をレイリー近似することにより，次式で与えられる．

$$\frac{1}{a_0^3}\widehat{T}_1(\kappa,\kappa)\simeq k_e^2\frac{3\varepsilon f}{\varepsilon+3(1+\varepsilon f)} \tag{36}$$

$$\frac{1}{a_0^3}\widehat{T}_2(\kappa,\kappa)\simeq k_e^2\frac{3\varepsilon f}{\varepsilon W(0,\sigma_0)+3(1+\varepsilon f)}\quad ; \tag{37}$$

ここで，$W(0,\sigma_0)$ は次式で与えられる．

$$W(0,\sigma_0)=\lim_{r\to 0}W(r,\sigma_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_0^3}\cdot\int_0^{b_0}\exp\left[-\frac{r_1^2}{2\sigma_0^2}\right]r_1^2dr_1 \tag{38}$$

式 (15)~(17) 及び式 (36)~(38) より，媒質中の等価誘電率 ε_{eff} は次式で与えられる．

$$\varepsilon_{eff}\simeq 1+\varepsilon f+\frac{3\varepsilon^2 f(1+\varepsilon f)[W(0,\sigma_0)-1]}{[\varepsilon+3(1+\varepsilon f)][\varepsilon W(0,\sigma_0)+3(1+\varepsilon f)]} \tag{39}$$

式 (39) は，$kb_0\le 0.2$ であれば，レイリー近似を用いずに計算した ε_{eff} と比較して 10% 以下の誤差で計算できる．

文献 [2] より，EFA, QCA, QCA-CP による ε_{eff} は，低周波においてそれぞれ次式で与えられる．

1. EFA

$$\varepsilon_{eff}\simeq 1+\frac{3\varepsilon}{\varepsilon+3}f \tag{40}$$

2. QCA

$$\varepsilon_{eff}\simeq 1+\frac{3\varepsilon}{\varepsilon+3}\cdot\frac{f}{1-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+3}f} \tag{41}$$

3. QCA-CP

$$\varepsilon_{eff}\simeq 1+\frac{3\varepsilon f\varepsilon_{eff}}{3\varepsilon_{eff}+\varepsilon(1-f)} \tag{42}$$

式 (39)~(42) は，次節で数値例により比較される．

誘電体球のサイズと平均位置からのランダムな位置変動の関係は，b_0 が大きくなるにつれて σ_0 が小さくなるような関数$\sigma_0=h(b_0,a_0)$ (図－3 参照) を用い，式 (41) を計算している．この $\sigma_0=h(b_0,a_0)$ は，$f\ll 1$ (粗な分布) のとき，球は大きく位置変動することが可能 (σ_0

が大）であるが，$f \simeq 1$（密な分布）のときは球同志の衝突が生じるためランダムな位置変動に制約を受けるという表現となっている．図－3に示すように，$\sigma_0 = h(b_0, a_0)$ を変化させると図－4に示すように ε_{eff} の f に対する振舞いも変化する．特に，図－3の(B)を選ぶと，我々の求めたε_{eff} はQCA及びQCA-CPによる ε_{eff} と非常によく似た振舞いをする．しかし，この $\sigma_0 = h(b_0, a_0)$ は媒質の物理的状態に依存し，これを定めることは一般に難しく別の問題である．ここでは，

$$\sigma_0 = -1.92 b_0 + 1.21 a_0 \tag{43}$$

を仮定して計算を行なっている．

4．数値例

文献[2]に示されているEFA，QCA，QCA-CPによる等価誘電率の数値例と比較を行うために，マイクロ波リモートセンシングの分野において代表的な雪のパラメータ：球の半径1[mm]，比誘電率3.2 [2] を用いて，5[GHz]の波に対する等価誘電率 ε_{eff} の f（volume fraction）に対する変化を数値計算により求めた．図－5にその数値例を示す．我々の求めた ε_{eff} は，粗な分布（$f \ll 1$）において，他の方法(EFA, QCA, QCA-CP)とよく一致し，分布がある程度密になると他の方法との一致はみられなくなる．$f = 1$ の極限においては，QCA，QCA-CPと再び一致する．但し，$f \simeq 1$ は誘電体球間の重なりまたは球の変形を無視した結果であり，物理的には考え難い結果である．よって，図－5において物理的に意味があるのは $0 < f \simeq 0.5 \sim 0.7$ の範囲と考えられる．

また，$f = 0.1, 0.3, 0.5$ の媒質の，5[GHz]の波に対する等価誘電率 ε_{eff} を，誘電体球の比誘電率をパラメータとして数値計算を行った．図－6～図－8にその数値例を示す．まず，f が小さい場合について考える．図－6では，誘電体球の比誘電率が小さいところでは全ての結果は一致する．しかし，誘電体球の比誘電率が大きくなるにつれてEFA，QCA及びQCA-CPによる ε_{eff} は飽和する傾向がある．これは，球の誘電率が大きくなっても媒質中の等価誘電率は影響を受けないことになり，非物理的な結果であると考えられる．これに対して我々の求めた ε_{eff} は，球の誘電率の増加に伴い ε_{eff} も増加しており，物理的に妥当なものとなっている．次に，f が大きい場合について考える．図－7と図－8では，誘電体球の比誘電率が小さいところでは全ての結果は一致し，誘電体球の比誘電率が大きくなるにつれてEFA，QCAによる ε_{eff} は飽和する．QCA-CPは f の増加と共に我々の結果に近づいていく傾向がある．f が大きい場合，我々の結果及びQCA-CPの結果は，物理的に妥当であると考えられる．

ε_{eff} は ε と f の関数であって，誘電体球による多重散乱を正確に計算することによって決められるべきものである．通常，大きな ε と大きな $f(> 0.1)$ に対しては，後方多重散乱が重要となり，その評価は容易でない．前方多重散乱を的確に取入れたEFAを，大きな f に対しても適

用できるように拡張したのが QCA である．即ち，所謂対分布関数 (pair distribution function) を導入した．しかし，大きな ε に対する後方多重散乱の評価が必ずしも充分でなかったため，上記のような非物理的な結果が生じたものと考えられる．

当方の方法は，結果として，この後方多重散乱を大きな ε と大きな f に対してもより正確に取入れたことになるが，方法の特徴はコヒーレントな波からみて物体の配置がランダム (周期性が無視できる) か否かで等価誘電率が定まり，f や ε の大小に基づいてそれが定まるように理論が展開されていない点にある．

5．ま と め

多数の誘電体球と自由空間から成るランダム媒質の等価誘電率を新しい多重散乱理論に基づいて求めた．そして，他の方法 (EFA，QCA，QCA-CP) により求められた等価誘電率との比較を行った．その結果，誘電体球の分布が粗である場合，球の比誘電率が小さければ他の方法により求められた等価誘電率と我々の求めた等価誘電率はよく一致する．また，比誘電率が大きくなっても，他の方法による等価誘電率は必ずしも大きくならず非物理的な振舞いを呈するが，我々の求めた等価誘電率は妥当であることが明らかにされた．また，分布が密である場合，EFA 及び QCA による等価誘電率は分布が粗である場合と同様に非物理的な性質を示すが，我々の求めた等価誘電率と QCA-CP による等価誘電率は，大きな誘電率の球の場合でも妥当であることが明らかになった．

謝辞　本研究発表の機会を与えて頂いた 京都大学 小倉久直教授と大阪電気通信大学 橋本正弘教授に感謝します．また，数値計算と本原稿作成に協力頂いた 佐世保高専 南部幸久講師に深謝します．

参 考 文 献

[1] Ulaby F. T., Moore R. K. and Fung A. K. : “ Microwave Remote Sensing ”, **3**, Artech House (1986).

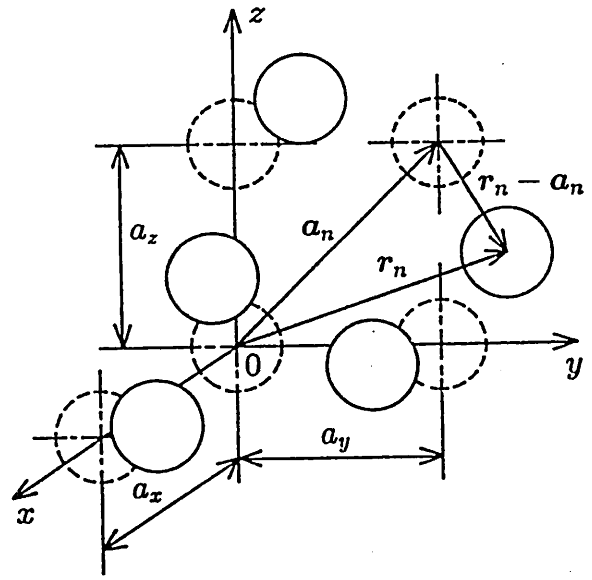
[2] Tsang L., Kong J. A. and Shin R. T. : “ Theory of Microwave Remote Sensing ”, John Wiley & Sons (1985).

[3] Karp S., Gagliardi R. M., Moran S. E. and Stotts L. B.: “ Optical Channels ”, Plenum (1988).

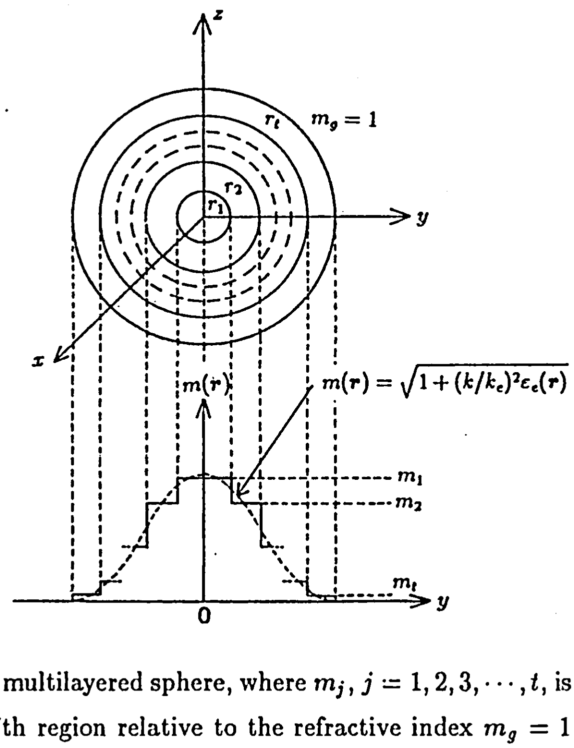
[4] Stroud D. and Pan F. P. : “ Self-consistent approach to electromagnetic wave propagation in composite media : application to model granular metals ”, Physical Rev. B, **17**, 4, 1602-1610 (Feb. 1978).

[5] Koh G. : “ Effective Dielectric constant of a medium with spherical inclusion ”, IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, **30**, 1, 184 - 186 (Jan. 1992).

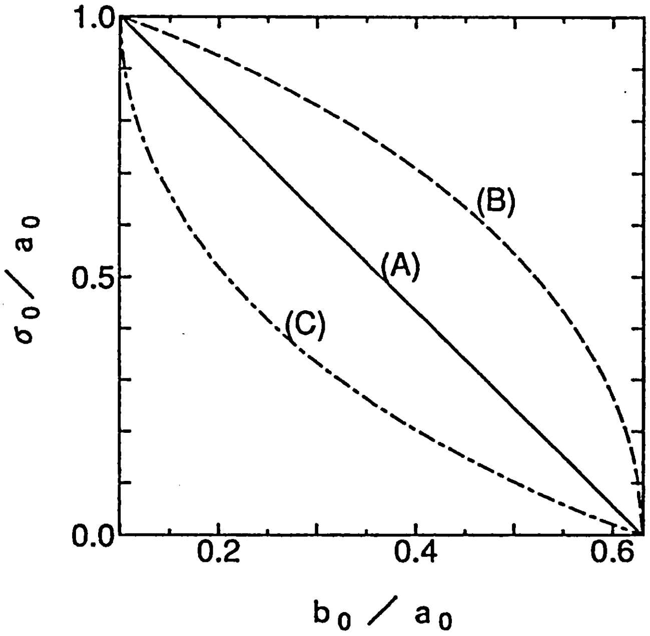
[6] Ishimaru A. : " Wave Propagation and Scattering in Random Media ", 2, Academic (1978).
[7] Tateiba M. : " A new approach to the problem of wave scattering by many particles ", Radio Sci., 22, 6, 881 - 884 (Nov. 1987).
[8] Tateiba M., Nanbu Y. and Oe T. : " Analysis of the effective dielectric constant of random media composed of many dielectric sheres and free space " Proc. ISAP' 92 (Sept. 1992).
[9] Tateiba M. and Nanbu Y. : " The condition for the distribution of dielectric cylinders to be random — the derivation from the Analysis of Coherent Fields — ", IEICE Trans., E 74, 5, 1055-1058 (May 1991).
[10] 立居場 光生, 南部 幸久 : " コヒーレント界において多数の誘電体円柱の配置がランダムとみなせるための条件の数値解析 ", 九大工学集報, 64, 5, 463-469 (Oct. 1991).
[11] 立居場 光生, 南部 幸久, 高山 一生 : " コヒーレント界において多数の誘電体円柱の配置がランダムとみなせるための条件の補足 ", 九大工学集報, 65, 3, 225-230 (Jun. 1992).
[12] Nanbu Y., Takayama K., Tateiba M. : " The condition for the distribution of many dielectric spheres to be random for coherent fields", Proc. URSI '92 on EM Theory (Aug. 1992); to be published in the special issue of Radio Science.
[13] Stratton J. A. : " Electromagnetic Theory ", McGraw-Hill (1941).
[14] Wu Z. S. and Wang Y. P. : " Electromagnetic scattering for multilayered sphere : Recursive algorithms", Radio Sci., 26, 6, 1393 - 1401 (Nov. 1991).



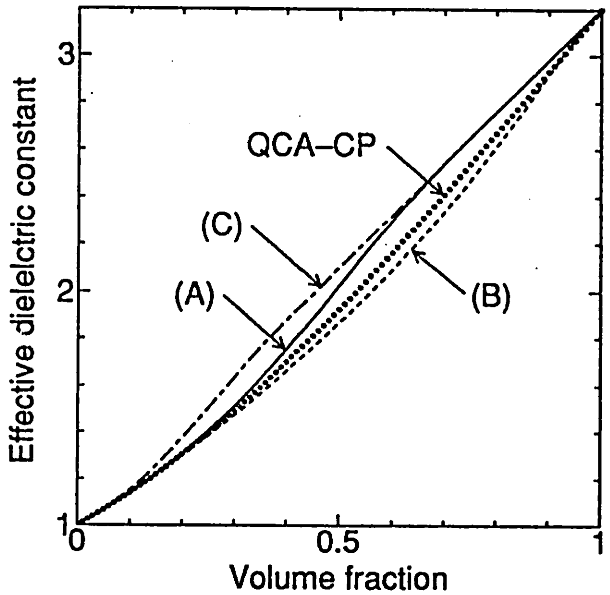
図－1　The coordinate system, where the real circles are scatterers dislocated randomly from a periodic distribution shown by the dotted circles.



図－2　Geometry of a multilayered sphere, where m_j, $j = 1, 2, 3, \cdots, t$, is the refractive index of the material in the jth region relative to the refractive index $m_g = 1$ of the surrounding medium, in which the sphere is embedded and the r_j is the various radii.



図－3　The relation of σ_0, b_0 and a_0. Each line is expressed as the following equations:
(A) : $\sigma_0/a_0 = -1.92b_0/a_0 + 1.21$ [Eq.(42)]　　(B) : $\sigma_0/a_0 = 1 - \sqrt{c_1 - \{(b_0/a_0) - c_2\}^2}$
(C) : $\sigma_0/a_0 = \sqrt{c_1 - \{(b_0/a_0) - c_3\}^2}$
where $c_1 = 1.46022$, $c_2 = 1.30840$ and $c_3 = 0.57840$.



図－4　The effective dielectric constant ε_{eff} as a function of the volume fraction of spheres $f = [4\pi b_0^3/3]/a_0^3$ for changing the relation of σ_0, b_0 and a_0 as shown in Fig.3.

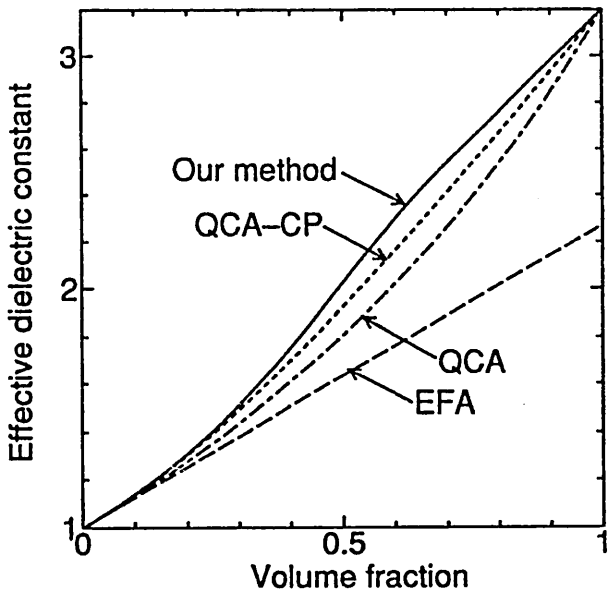


図 − 5　The effective dielectric constant ε_{eff} as a function of the volume fraction of spheres f. The results of our method, EFA, QCA, and QCA-CP are compared.

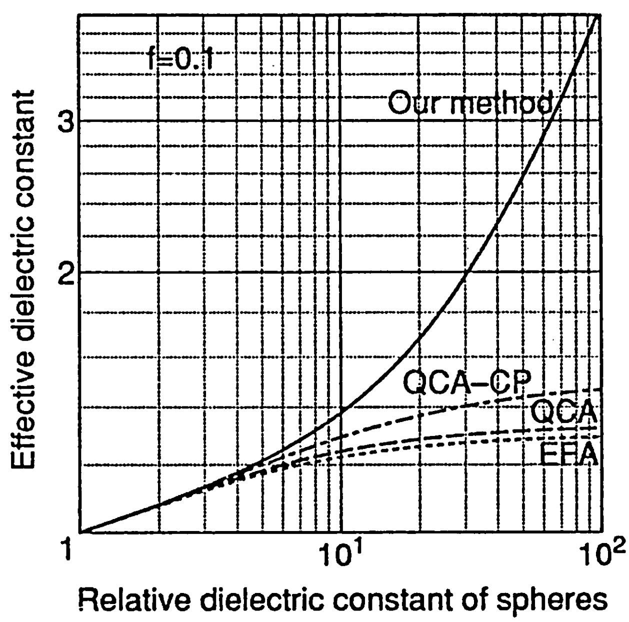
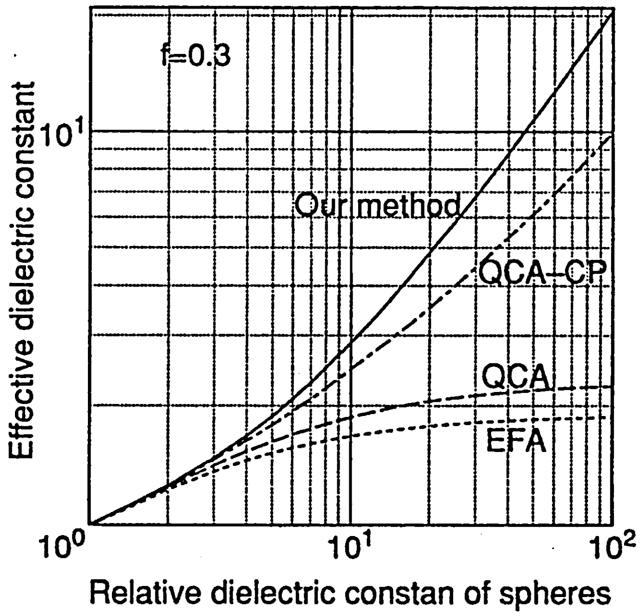
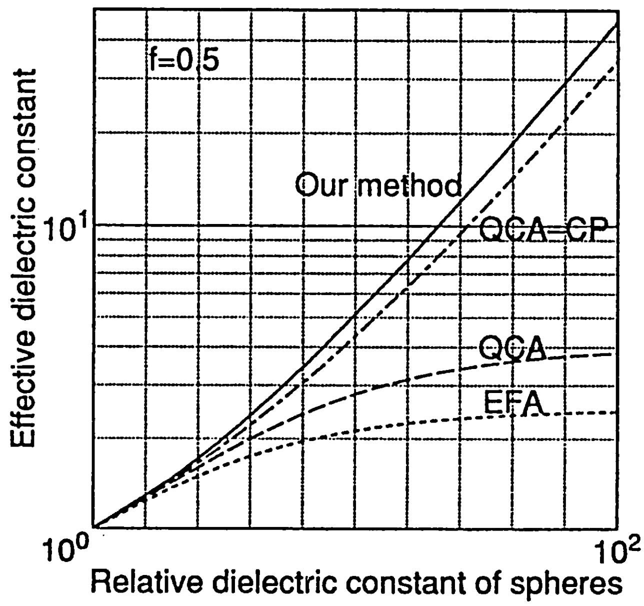


図 − 6　The effective dielectric constant ε_{eff} as a function of relative dielectric constant of spheres for frequency = 5[GHz], radius of spheres = 1[mm] and volume fraction of spheres $f = 0.1$.



図－7　The effective dielectric constant ε_{eff} as a function of relative dielectric constant of spheres for $f = 0.3$.



図－8　The effective dielectric constant ε_{eff} as a function of relative dielectric constant of spheres for $f = 0.5$.

RS 93-2

拡張光線理論とその電磁波散乱問題への応用

生野浩正
(熊本大学工学部)

1993年5月28日
輻射科学研究会

拡張光線理論とその電磁波散乱問題への応用

生野浩正（熊本大学工学部）

1. まえがき

複雑な形状をした物体による電磁波散乱問題が計算機の進歩に伴い、数値解析的に比較的手軽に解けるようになり、様々な興味ある散乱データが広い周波数帯域に渡って得られるようになって来ている。また同時に、マイクロ波リモートセンシング技術の進歩にともない、地上の建造物や植栽等による膨大な散乱データが得られるようになって来ている。この様にして得られた散乱データの中には種々の興味がある散乱現象が含まれているはずである。このため、得られた散乱データから散乱体の形状や材質を推定しようとする研究もさかんに行なわれている。しかしながら、上記の二つの課題、新しい散乱現象の発見や散乱体の形状や材質の推定に関する研究は十分とは言えず、これからの研究の中で解決されるべき重要な課題を数多く含んでいる。これらの研究課題の中で、散乱データを分析し、散乱データと散乱体の関係を明かにすること、即ち、これらの現象を散乱体と電磁波の相互作用の立場から合理的に説明することは重要な研究課題の一つである。

電磁波の散乱現象は反射現象、屈折現象または回折現象により記述される。例えば、幾何光学[1]は散乱現象の中で入射波により照射されている領域での反射現象と屈折現象を幾何光学光線を用いて解析する理論である。また、幾何光学的回折理論[2]は、回折光線を導入して、幾何光学の欠陥を取りき、散乱体の照射領域での幾何光学による散乱界を精密化しただけでなく影の領域でも散乱界の評価を可能にした。この結果、すべて領域での散乱界は幾何光学光線と回折光線を取り扱う幾何光学的回折理論により評価できるはずであった。この理論が幾何光学的回折理論と呼ばれているのはこのためであるが、ここでは後の便利のため、幾何光学的回折理論を光線理論と呼ぶことにする。ところが、種々の散乱問題が光線理論で解析されるようになってこの理論にも欠陥があることがわかってきた。この欠陥は光線理論で取り扱う実の光線だけでは散乱界の構成が困難である領域が存在することに起因している。

本稿では、光線理論のこのような欠陥を取り除くため、我々が新たに提案した拡張光線理論について概説し、その有用性を電磁波散乱問題を例として検証する。ここでは、例として、滑らかな境界をもつ完全導体柱や誘電体柱からの散乱問題を拡張光線理論で解析し、この理論が首尾一貫した漸近理論の一つであることを示す。

2. 幾何光学と物理光学

さて、電磁波散乱問題を考えよう。ここでは、簡単のため、散乱体は十分に滑らかとし、遠方散乱界のみを取り扱う。任意の形状をした物体からの電磁波散乱現象を分析するため、光線追跡を行ってみると、幾何光学光線の照射領域に焦線や焦点[3],[4]と呼ばれる光線の振幅が発散する線や点が現れる（図1参照）。例えば、焦線がある場合を考えてみよう。このとき、照射領域の中に焦線を境にして実の光線が存在しない領域ができる。従って、この領域の散乱界は実光線しか取り扱わない幾何光学では評価できない。また、この領域での散乱電磁界を数値実験により検証すると、この領域には散乱界の振幅が偏波にほとんど依存せず、焦線から影の領域に深く入れば入るほどこの散乱界の振幅が小さくなる散乱電磁界があることが分かる。この散乱電磁界は回折現象としても説明できない。

次に、物理光学法による散乱問題の解析について考えてみよう。端点をもたない完全導体からなる物体による遠方散乱電磁界は、高周波の領域では、物理光学近似の下で得られる回折積分により表現されているが、正確には、以下のように修正された回折積分を用いなけらばならない。上記の回折積分の被積分関数は積分領域の上限及び下限で不連続であるため、スプリアス解を含んでいる。このスプリアス解は回折積分の積分領域を形式的に無限領域に拡張した回折積分を用いれば取り除かれる[5]。従って、散乱電磁界は上記の様に修正して得られる回折積分で与えられる。以下では、この積分を回折積分と呼ぶことにする。

この回折積分を数値的に評価すると、その結果は回折積分の停留位相法により評価とよく一致し、又これは幾何光学によるそれとよく一致することが分かっている。ところで、回折積分を停留位相法により評価するとき、積分領域を複素空間に拡張し、積分を鞍部点法で評価すると、その結果はこの回折積分の数値積分法によるものとよい一致をする。従って、この場合、遠方散乱界には、一般に、複素停留点からの寄与があることが分かる[6]。この結果は複素の幾何光学光線を考慮して計算された散乱界と焦線の影の領域を含めて一致する[7]。このようにして、幾何光学の欠陥の一つが取り除かれる。

3. 光線理論と拡張光線理論

いま、例えば、誘電体からの散乱問題を考えると、幾何光学は物理光学に比べて使い勝

手がよい。このため、光線理論が広く利用され、更にこれは拡張光線理論へと発展していった。前に述べたように、光線理論は有力な漸近解析法の一つであるが、それには理論的な欠陥があった。この欠陥を取り除くために、前節で述べたように、複素光線を考慮に入れることが考えられる。前節では、複素の幾何光学光線を考慮したが、回折光線も複素のそれが考えられるから、これらの2種類の光線に対しても複素光線を考え、それらを取り扱えるように光線理論を拡張し、これを拡張光線理論[8]と呼ぶことにする。先に述べた光線理論の困難はこのようにして解消されるから、拡張光線理論は、原理的には、散乱問題を完全に記述する理論の一つとなる。この結果として、数値解析で得られた未知の散乱現象は拡張光線理論を用いればその散乱過程の分析が容易となり、散乱現象が直感的に把握できるようになるし、また、数値解析法ではその解析が難しい大きく歪んだ散乱体からの散乱界も拡張光線理論を用いて計算できるようになる。

さて、散乱体を含む複素空間[7,12-15]を考えよう。実空間で入射方向と観測方向を指定し、それらの方向に入射及び出射する実の光線、幾何光学光線または回折光線、を考えると、反射の法則とスネルの法則を満足する散乱中心が求まり、光線の軌跡が定まる。ここで、散乱中心は散乱体上の反射点(または屈折点)及び回折点を意味する。散乱中心の具体的な計算では、後述する素過程[9]ごとに、反射の法則とスネルの法則をもちいて観測方向対入射点に関するチャートを作成し、そのチャートから、散乱界に寄与する散乱中心の位置を見積もる。散乱中心がすべて実数の点であるとき、これらの散乱中心を経由する光線は実光線であり、それらの中に複素の散乱中心が一つでもあると、その光線は複素光線となる。ここで、計算上は複数個の複素解が求まるが、この中で複素の散乱中心となるのは、後述する素過程[9]ごとに決定され、位相に関する適切な選択則を満足するもののみである[8]。光線の光路長の実数部は光線の位相を与え、その虚数部は減衰項を与える。ここで、回折光線の伝搬定数は規範問題のクリーピング波の伝搬定数を用いる。規範問題の反射係数、透過係数及び回折係数とエネルギー保存則から決まるヤコビアンを用いて、光線の振幅が決まり、光線理論[10,11]と同一の手続きにより散乱界が計算される。

ところで、散乱された電磁界の拡張光線理論による再構成は焦線や焦点やそれらの近傍で破綻する。しかしながら、拡張光線理論に一様漸近理論[3,4]を併用すれば、焦線や焦点をも含めて、考察する全領域で有効な理論となるので、この種の困難は容易に回避でき、その結果、拡張光線理論の適用範囲は著しく拡大する。

4.電磁波散乱問題への応用

ここでは、拡張光線理論の応用として、完全導体柱、誘電体柱や柱状の泡による電磁波散乱問題を解析しよう。滑らかな柱体における電磁波の散乱過程は光線理論によれば、反射、屈折及び回折からなる6個の素過程により記述できる。それぞれの素過程を光線追跡により作成された幾何光学光線と回折光線に関する2種類のチャート[9](図2参照)を用意して分析すると散乱界に寄与するすべての光線が複素光線を含めて抽出できる。散乱界に寄与する各光線の振幅と位相は上述したように散乱中心での規範問題の散乱係数と二つの散乱中心間で計算されるヤコビアンにより計算できる。その結果、散乱電磁界に寄与するすべての光線の振幅と位相が求まり、散乱電磁界が拡張光線理論により系統的に計算できることが分かる。実際、誘電体からの電磁波の散乱は極めて複雑な振舞いをするが、それらも、三つの基本現象、反射、屈折及び回折現象を介して、拡張光線理論により合理的に説明される。散乱体が誘電体であったり、完全導体であっても散乱体の表面に凹凸があったりすると、散乱体の外部に焦線ができる。これらの焦線は幾何光学光線だけでなく回折光線に対しても現れる。このような場合、散乱電磁界への複素光線からの寄与は無視できない。

これらのことを数値的に確認するために、拡張光線理論により、境界に凹凸がある完全導体柱及び柱状の泡による電磁波散乱問題を解析した。問題の座標系を図3に示す。電磁波の散乱過程の分析の結果及び散乱電磁界を拡張光線理論により再構成した結果を図4及び5に示す。これらの図には、参照解による電磁界も比較のため示されている。両者はよい一致を示している。

ここで、この解析で得られた結果をまとめてみよう。ここで示した例では、散乱中心が3個以上となり、散乱電磁界に寄与する光線は3本以上となる。加えて、焦線が散乱体の外部に形勢され、複素光線の寄与が無視できない。この結果、純粋な幾何光学光線や回折光線に加えて、幾何光学光線と回折光線で作られた混成の光線が散乱界に寄与し、しかも複素光線が寄与するため、複雑な形状をした完全導体や誘電体による電磁波の散乱現象を複雑なものとしている。しかしながら、これらの現象も拡張光線理論を用いることにより、完全導体柱による散乱界に見られる幾何光学光線と回折光線との干渉現象に加えて、幾何光学光線間の干渉や幾何光学光線と幾何光学光線と回折光線で作られた混成光線との干渉

[6-9]として合理的に説明できることを幾つかの典型的な数値例で示した。この様な現象[12,16-17]は3次元の球状の誘電体や泡による散乱問題の中にもみられる。

5.あとがき

複雑な形をした散乱体からの電磁波の散乱現象を拡張光線理論により系統的に分析し、散乱電磁界を量的に評価し、その結果として、電磁波の散乱過程が拡張光線理論により明白に説明できることを示した。ここでは、散乱体を2次元の滑らかな物体に限ったが、境界に端点を持つ物体の場合も同様な議論ができよう。また、拡張光線理論を3次元問題へ適用することの意義はもっと大きい。

拡張光線理論は光線理論の範疇にあるから、焦線とか焦点そしてそれらの近傍で解が発散し、この理論では散乱界の計算ができない。この欠陥は一様漸近解法[3-4,18]を用いて克服できよう。

参考文献

[1] S.Silver, Microwave antenna theory and design, McGraw-Hill, New York, 1949.

[2] J.B.Keller, J. Opt. Soc. Am., 52,116-130, 1962.

[3] J.J.Stamnes, Waves in focal regions, Adam-Hilger, Bristol, U.K., 1986.

[4] P.H.Pathak and M.C.Liang, IEEE, AP-38, 1192-1203, 1990.

[5] I.J.Gupta, C.W.I.Pistorus, and W.Burnside, ibid., AP-35, 1426-1435, 1987.

[6] H.Ikuno, ibid., AP-27,199-202, 1979; H.Ikuno and M.Nishimoto, ibid., AP-39, 585-590, 1991.

[7] H.Ikuno and L.B.Felsen, ibid., AP-36, 1260-1271, 1988; ibid., AP-36, 1272-1280, 1988; Radio Sci., 22,952-958,1987.

[8] H.Ikuno, M.Nishimoto,and K.Matsumoto, Proc. URSI Int. Symp. on Electromagnetic Theory, Stockholm, 178-180,1989.

[9] H.Ikuno, T.Ohmori, and M.Nishimoto, Proc.URSI Int. Symp. on Electromagnetic Theory, Sydney, Australia,519-521,1992.

[10] Y.M.Chen, J. Math. Phys., 5, 820-832, 1964.

[11] H.M.Nussenzveig, ibid.,10, 125-176, 1969.

[12] -----, J. Opt. Soc. Am., 69, 1068-1079, 1979.

[13] F.J.Wright, J. Phys. A: Math. Gen., 13, 2913-2927, 1980.

[14] Yu.A.Kravtsov and Yu.I.Orlov, Geometrical Optics of Inhomogeneous Media, Springr, Berlin, 1990.

[15] P.L.Marston, Geometrical and Catastrophe Optics Methods in Scattering, in Physical Acoustics XXI, 1992.

[16] E.A.Hovenac and J.A.Lock, J. Opt. Soc. Am. A, 9,781-795, 1992.

[17] N.Fiedler-Ferrari, H.M.Nussenzveig, and W.J.Wiscombe, Phys. Rev., A, 43,1005-1038, 1991.

[18] Y.A.Kravtsov, Soviet Phys.-Acous., 1, 1-17, 1968.

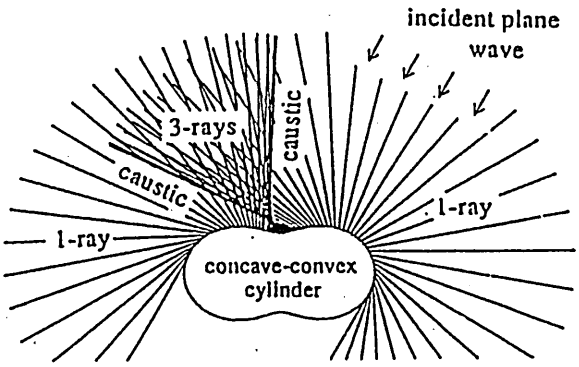


図1 散乱問題の光線追跡

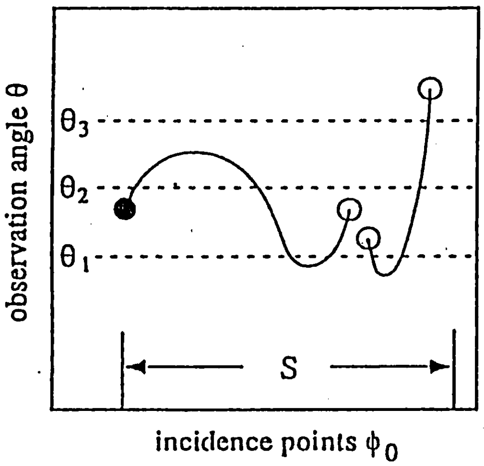


図2 各素過程において電磁波散乱界に寄与する光線を抽出するためのチャート

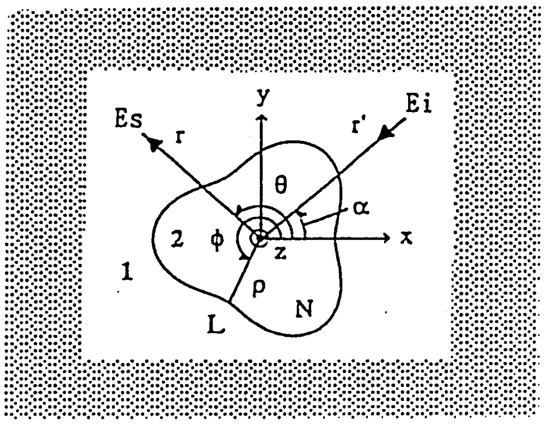


図3 問題の座標系

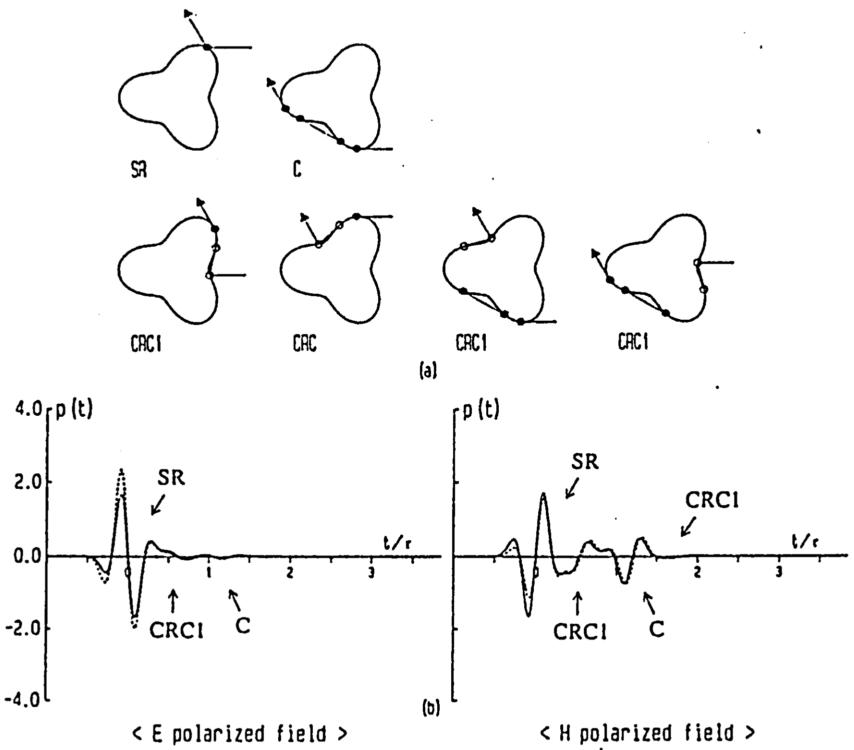


図 4　完全導体柱による散乱
点線：参照解，実線：拡張光線理論による解

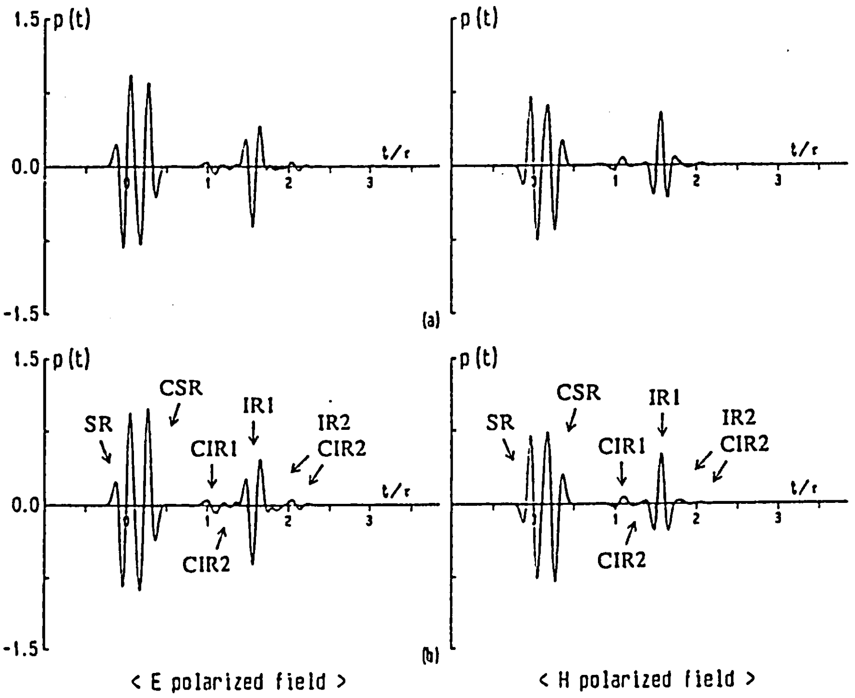


図 5　柱状の泡による散乱
(a)：参照解，(b)：拡張光線理論による解

輻射科学研究会資料
RS93－3

インピーダンス平行平板導波路の端面によるエバネセント波の回折

－導波路に沿う表面波モードの励振－

石堂能成　斎藤俊幸　秋葉龍郎　西本昭男　角井嘉美
（電子技術総合研究所　大阪ライフエレクトロニクス研究センター）

1993年5月28日（金）

輻射科学研究会
（於　大阪電気通信大学）

インピーダンス平行平板導波路の端面によるエバネセント波の回折

ー導波路に沿う表面波モードの励振ー

石堂能成　斎藤俊幸　秋葉龍郎　西本昭男　角井嘉美
（電子技術総合研究所　大阪ライフエレクトロニクス研究センター）

１．まえがき

レーザ光マニピュレーション、近視野光走査顕微鏡（ＮＳＯＭ）あるいはフォトンＳＴＭ（ＰＳＴＭ）など近視野域におけるレーザ光応用の技術が盛んに研究されている。[1-5] それに伴い、近視野域での光のふるまいあるいは光と回折限界以下の対象との相互作用についての検討も報告されている。[6-9] しかしながら具体的なデバイス、例えば透過型ＮＳＯＭの様な微小開口を持つプローブと入射光との相互作用を波動論の立場から精密に解析した報告例はない。この場合、試料を照らすエバネセント波あるいは近傍界（ニアフィールド）が微小開口にあたることに依って生じる回折光がプローブの形状によって決まる導波モードを励振し、このモードを通して光エネルギーが伝搬すると考えられる。特にBetzigらの集光型ＮＳＯＭ[3]で用いられたピペットプローブにおいては、表面波モードが励振されると考えられるが、最低次の表面波モードはカットオフを持たないため開口径が波長以下の場合でも励振される可能性がある。以上の考察をふまえ、本報告では２枚の薄い誘電体板により構成されたピペットプローブに対し、垂直な方向に伝搬するエバネセント波が入射するという２次元モデルを考え、プローブ端面における回折により励振される表面波の電力について波動論の立場による厳密な解析を行う。

解析手法としては、厚さのない半無限境界を持つ系における波動の散乱・回折問題に対する自己無撞着な厳密解法として知られるウィーナー・ホップ法[10,11]をもちいる。従来この手法を応用した解析はマイクロ波、ミリ波を想定したものが中心でありまた系のサイズが波長に比べ大きい場合を対象としてきた。[12-14] ここでは系のサイズが波長に比べ小さい場合が対象であるため、まずピペットの表面波モードの分散曲線からこの解析の適用範囲を評価し、いわゆる高周波近似は考慮しない。また入射波がエバネセント波の場合その波数は複素数となるため、ウィーナー・ホップ法の適用に際し若干の拡張を行っている。

２．モデルと定式化

図１にモデルを示す。ピペットプローブはｙ軸に沿って配されており、誘電率εr、厚さｔの２枚の誘電体板により構成される。誘電体板の間隔は２ｂとする。

入射波はｘ軸正方向に伝搬し、ｙ軸方向に指数的に減衰するＥ偏波のエバネセント波であり、そのＥｚ成分ϕiは次式で表される。なお振幅の大きさはｙ＝０で

１であるとする。また以下では時間因子はｅｘｐ（ｊωｔ）とし省略する。

$$\phi_i = e^{-h_y y} e^{-j k_x x}$$

（１）

ここで、ｋｘはｘ方向の波数ベクトル、－ｊｈｙはｙ方向の波数ベクトルである。

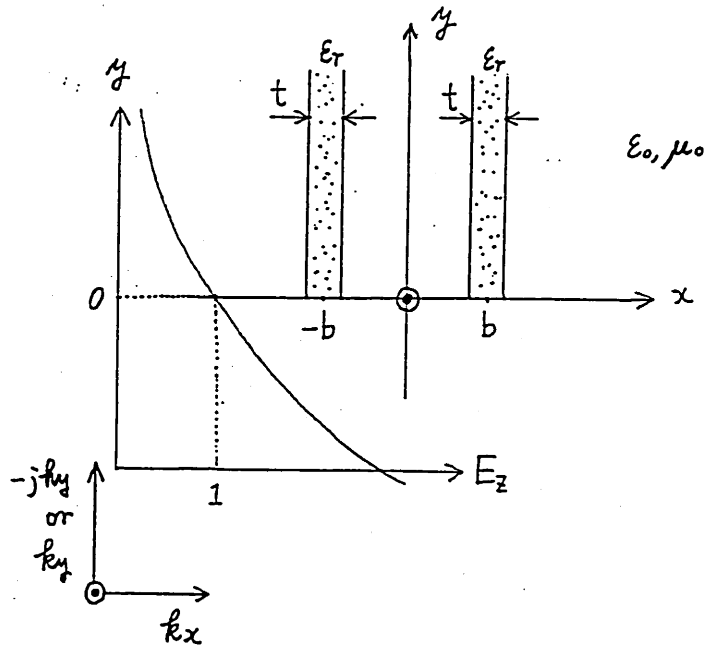


図１．モデルと座標系

このモデルにおいて生ずる二次波（Ｅ波）を以下のように定義する。

$$E_z = \phi(x, y)$$

$$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$H_y = \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

（２）

さて、物理量はｚ方向に一様とすればφのみたす波動方程式は次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + k^2\right)\phi = 0$$

（３）

また二次波がみたすべき境界条件は以下のようである。

［b．c．1］　$-\infty < y < \infty$、$x = \pm b$で二次波のEz成分連続

$$E_z(\pm b \pm 0, y) - E_z(\pm b \mp 0, y) = 0$$

［b．c．2］　$-\infty < y < 0$、$x = \pm b$で二次波のHy成分連続

$$H_y(\pm b \pm 0, y) - H_y(\pm b \mp 0, y) = 0$$

［b．c．3］　$0 < y < \infty$、$x = \pm b$でインピーダンス境界条件(15)

$$H_y(\pm b \pm 0, y) - H_y(\pm b \mp 0, y) = \pm jBE_z(\pm b, y)$$

ただしBはサセプタンス分で以下のようになる。

$$B = \omega t \varepsilon_0 \chi = \omega t \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)$$

［b．c．4］　外向き放射条件

$$E_z \sim \begin{cases} e^{-j\beta x} & x > 0 \\ e^{j\beta x} & x < 0 \end{cases} \qquad \mathrm{Im}\{\beta\} < 0$$

［b．c．5］　エッジ条件(A.1)

$$\lim_{\rho \to 0} E_z \sim O(\rho^{\frac{1}{2}}) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

従って本解析は波動方程式（３）および境界条件［b．c．1］～［b．c．5］を一意かつ自己無撞着に満たすϕを決定し誘電体板上でのϕの大きさを求める問題に帰着する。

３．界のフーリエ成分と方程式の導出

ウィーナー・ホッフ法を適用するに当たり、まずy軸方向に関するフーリエ変換および逆変換を以下のように定義する。

$$\Phi(x, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) e^{j\zeta y} dy$$

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \zeta) e^{-j\zeta y} d\zeta \tag{4}$$

このときζの物理的意味はy方向の複素波数であると解釈できる。

さてここでは解析の都合上、真空中にわずかな損失（$\mathrm{Im}\{k\} < 0$）を仮定し、計算結果は損失が０に近付くときの極限値とする。このとき逆変換の積分路Cは複素波数ζの面図２において領域D内にある。

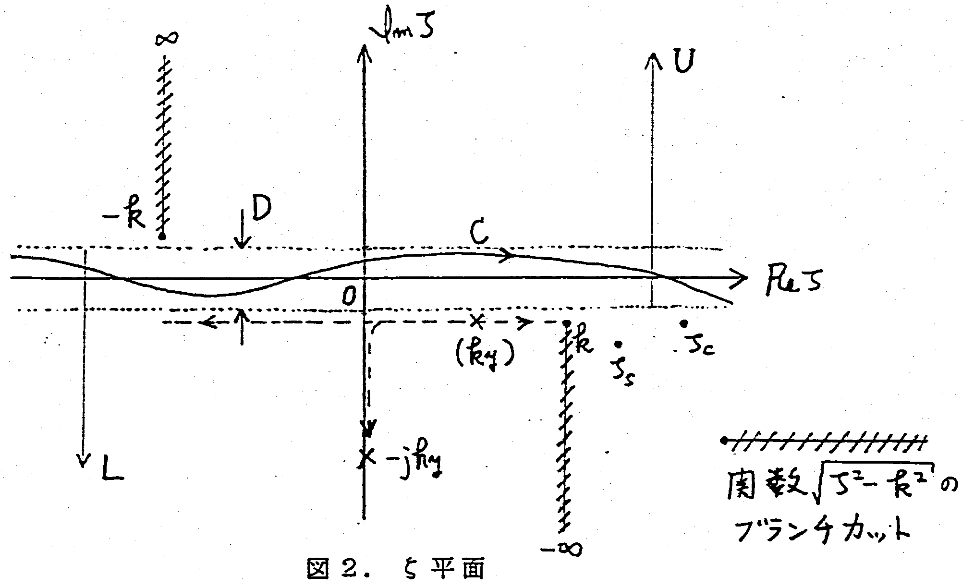


図２．ζ平面

まず、入射波φiのフーリエ変換を考える。式（１）からわかるように、エバネセント波の場合、ｙ－＞－∞においてφi－＞∞となり、通常の意味では変換不可能である。しかしながら、入射波を考慮するのは０＜ｙ＜∞におけるインピーダンス境界条件［ｂ．ｃ．３］においてであるから、この領域においてのみ定義できるようにすればよい。そこで、ｙ＞０で１、ｙ＜０で０をとなるステップ関数ｕ（ｙ）を定義し、これを使って入射波を

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i(x, y)\, u(y) \tag{5}$$

と書き換えると、φiは｜ｙ｜－＞∞でφi－＞０かつ区分的になめらかであることからフーリエ変換が求まり、

$$\tilde{\varphi}_i = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, j}\frac{e^{-jk_x x}}{\zeta + jh_y} \tag{6}$$

となる。これはｙ＞０における平面波 $\tilde{\varphi}_p = e^{-j(k_x x + k_y y)}$ に対するフーリエ変換

$$\tilde{\varphi}_p = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, j}\frac{e^{-jk_x x}}{\zeta - k_y} \tag{7}$$

においてｙ方向の波数ｋｙを－ｊｈｙに拡張した形となっている。

さて波動方程式（３）にフーリエ変換を施すと次式のようになる。

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \gamma^2\right)\Phi(x, \zeta) = 0 \quad \gamma = \sqrt{\zeta^2 - k^2} \tag{8}$$

領域ｘ＜－ｂ、ｘ＞ｂにおいて外向き放射条件［ｂ．ｃ．４］を考慮するとこの方程式の満たす解は領域ｘ＜－ｂ、｜ｘ｜＜ｂ、ｘ＞ｂそれぞれについて

$$
\phi(x,\zeta)=\begin{cases} A(\zeta)\,e^{-\gamma(x-b)} & x>b \\ \dfrac{B(\zeta)\sinh\gamma(x+b)-D(\zeta)\sinh\gamma(x-b)}{\sinh 2\gamma b} & |x|<b \\ F(\zeta)\,e^{\gamma(x+b)} & x<-b \end{cases}
$$

(9)

とおける。ここでＡ（ξ）、Ｂ（ξ）、Ｄ（ξ）およびＦ（ξ）はξに関する未知関数である。式（９）に［b. c. 1］～［b. c. 3］を適用することにより、これら未知関数を決定することができる。

ところで［b. c. 2］および［b. c. 3］をフーリエ成分で表すと、次のようになる。

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}\left\{H_y(\pm b\pm 0,\zeta)-H_y(\pm b\mp 0,\zeta)\right\}e^{-j\zeta y}d\zeta=0
$$

(10)

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}\left\{H_y(\pm b\pm 0,\zeta)-H_y(\pm b\mp 0,\zeta)\mp jBE_z(\pm b,\zeta)\right\}e^{-j\zeta y}d\zeta=0
$$

(11)

ここで界成分は無限遠でたかだか有限であり、従ってそのフーリエ成分の大きさは無限遠でξ^{-1}のオーダとなることから式（10）および（11）における積分路Ｃにそれぞれ上半平面、下半平面における半径∞の円弧Ｃ∞、Ｃ-∞をくわえて閉積分路とすることができる。このことから式（10）および（11）が成立するには各々の｛｝内がそれぞれ図２の領域Ｕ、領域Ｌで正則であれば良いことになる。以上のことから式（９）に境界条件［b. c. 1］～［b. c. 3］を適用すると次のようになる。

$$
A(\zeta)-B(\zeta)=0
$$

$$
F(\zeta)-D(\zeta)=0
$$

(12)

(13)

$$
-\frac{\gamma}{j\omega\mu}A(\zeta)-\frac{\gamma}{j\omega\mu}\left\{\frac{A(\zeta)\cosh 2\gamma b-F(\zeta)}{\sinh 2\gamma b}\right\}=\mathcal{U}(b,\zeta)
$$

(14)

$$
\frac{\gamma}{j\omega\mu}F(\zeta)-\frac{\gamma}{j\omega\mu}\left\{\frac{A(\zeta)-F(\zeta)\cosh 2\gamma b}{\sinh 2\gamma b}\right\}=\mathcal{U}(-b,\zeta)
$$

(15)

$$-\frac{\gamma}{j\omega\mu}A(\zeta)-\frac{\gamma}{j\omega\mu}\left\{\frac{A(\zeta)\cosh 2\gamma b-F(\zeta)}{\sinh 2\gamma b}\right\}-jB\left\{A(\zeta)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}j}\frac{e^{-jk_x b}}{\zeta+jk_y}\right\}=\mathcal{L}(b,\zeta) \tag{16}$$

$$\frac{\gamma}{j\omega\mu}F(\zeta)-\frac{\gamma}{j\omega\mu}\left\{\frac{A(\zeta)-F(\zeta)\cosh 2\gamma b}{\sinh 2\gamma b}\right\}-jB\left\{F(\zeta)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}j}\frac{e^{jk_x b}}{\zeta+jk_y}\right\}=\mathcal{L}(-b,\zeta) \tag{17}$$

ここで$\mathcal{U}$（＊，ξ）、$\mathcal{L}$（＊，ξ）はξ面においてそれぞれ領域U、Lにて正則な関数を表す。さて式（12）～（17）を変形することにより以下のようなウィーナー・ホッフ方程式が得られる。

$$\left(1-\frac{k^2 t\chi}{\gamma}e^{-\gamma b}\cosh\gamma b\right)\mathcal{U}(-,\zeta)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega t\varepsilon_0\chi\frac{\cos k_x b}{\zeta+jk_y}-\mathcal{L}(-,\zeta)=0 \tag{18}$$

$$\left(1-\frac{k^2 t\chi}{\gamma}e^{-\gamma b}\sinh\gamma b\right)\mathcal{U}(+,\zeta)+j\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega t\varepsilon_0\chi\frac{\sin k_x b}{\zeta+jk_y}-\mathcal{L}(+,\zeta)=0 \tag{19}$$

但し、

$$\mathcal{U}(\pm,\zeta)=\mathcal{U}(b,\zeta)\pm\mathcal{U}(-b,\zeta)$$
$$\mathcal{L}(\pm,\zeta)=\mathcal{L}(b,\zeta)\pm\mathcal{L}(-b,\zeta) \tag{20}$$

である。従ってこの問題は方程式（18）、（19）を解くことにより、未知関数$\mathcal{U}$（＋，ξ）、$\mathcal{U}$（－，ξ）、$\mathcal{L}$（＋，ξ）、$\mathcal{L}$（－，ξ）を決定することに帰着する。

4．核関数の物理的意味と解析の適用範囲

式（18）、（19）の核関数はそれぞれ

$$\mathcal{K}_c(\zeta)=1-\frac{k^2 t\chi}{\gamma}e^{-\gamma b}\cosh\gamma b \tag{21}$$

$$\mathcal{K}_s(\zeta)=1-\frac{k^2 t\chi}{\gamma}e^{-\gamma b}\sinh\gamma b \tag{22}$$

である。完全導体による平行平板や厚みのある誘電体板においては核関数＝０がそれぞれの伝搬モードを表す固有方程式となることが知られている。[11,13] そこで本節では核関数（21）、（22）の物理的意味について考察する。そのため、まず図３に示す厚さｔの２枚の誘電体板により構成される導波路の伝搬モードについて、厚さも考慮した厳密な固有方程式を導出する。

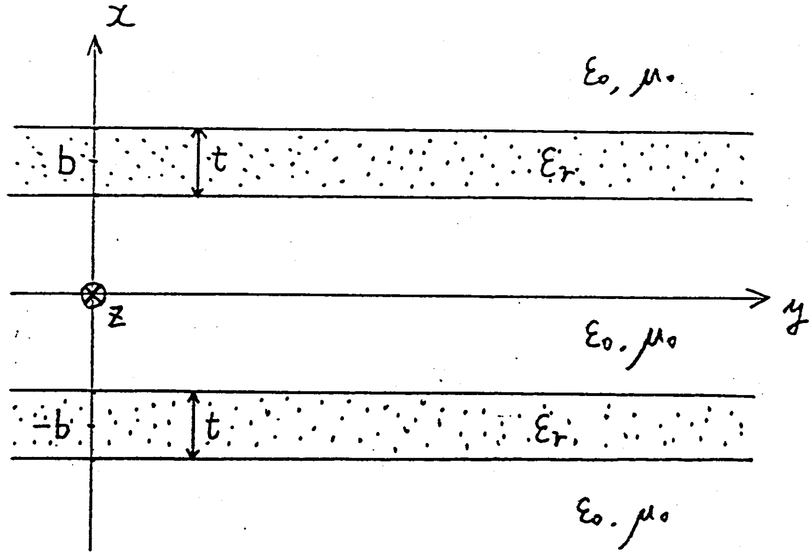


図３．厚さｔの２枚の誘電体板による導波路

ここではＥ波を考えているため、基礎となるマクスウェルの方程式は式（２）で表される。但し、媒質定数εは誘電体板中で$\varepsilon_r\varepsilon_0$、それ以外で$\varepsilon_0$である。また、ｂ＞ｔ／２である。このことからこの方程式の解は次のようにおける。

$|x| < b - t/2$

$$\phi = A\cosh\gamma x + B\sinh\gamma x$$

$b - t/2 < x < b + t/2$

$$\phi = C\cos p(x-b) + D\sin p(x-b)$$

$b + t/2 < x < \infty$

$$\phi = F e^{-\gamma(x-b-\frac{t}{2})}$$

$-b - t/2 < x < -b + t/2$

$$\phi = C'\cos p(x+b) + D'\sin p(x+b)$$

$-\infty < x < -b - t/2$

$$\phi = F' e^{\gamma(x+b+\frac{t}{2})} \qquad p = \sqrt{k^2\varepsilon_r - \zeta^2} \qquad (23)$$

解（23）に誘電体板表面で電磁界の接線成分連続という境界条件を考慮すると伝搬モードについての固有方程式が得られ、次のようになる。

$$\sinh\gamma(2b-t)\left[\frac{p}{\gamma}\sin pt-\cos pt-\left\{\coth\gamma(2b-t)+\frac{1}{\sinh\gamma(2b-t)}\right\}\left(\cos pt+\frac{\gamma}{p}\sin pt\right)\right]$$

$$\times\left[\frac{p}{\gamma}\sin pt-\cos pt-\left\{\coth\gamma(2b-t)-\frac{1}{\sinh\gamma(2b-t)}\right\}\left(\cos pt+\frac{\gamma}{p}\sin pt\right)\right]$$

$$=0 \qquad (24)$$

が得られる。式（24）から明らかなように、固有方程式は偶モードについての

$$\frac{p}{\gamma}\sin pt-\cos pt-\left\{\coth\gamma(2b-t)-\frac{1}{\sinh\gamma(2b-t)}\right\}\left(\cos pt+\frac{\gamma}{p}\sin pt\right)=0 \qquad (25)$$

および奇モードについての

$$\frac{p}{\gamma}\sin pt-\cos pt-\left\{\coth\gamma(2b-t)+\frac{1}{\sinh\gamma(2b-t)}\right\}\left(\cos pt+\frac{\gamma}{p}\sin pt\right)=0 \qquad (26)$$

の二つに因数分解されることがわかる。よってこの導波路では偶モード、奇モードの二つが独立に伝搬可能であることがわかる。

さて、次に厚さｔが薄い場合の固有方程式について検討する。ここでは紙面の都合上、偶モードについてのみ考える。さて厳密な固有方程式（25）において、厚さｔが薄い条件ｐｔ＜＜1、γｔ＜＜１を考える。まずｐｔ＜＜１からsinｐｔ～ｐｔ、cosｐｔ～１とし変形すると次式が得られる。

$$k^2t\chi-\gamma\frac{e^{\gamma b}}{\cosh\gamma b}(1+\gamma t)=0 \qquad (27)$$

式（27）に条件γｔ＜＜１を考慮すると式（28）が得られる。

$$1-\frac{k^2t\chi}{\gamma}e^{-\gamma b}\cosh\gamma b=0 \qquad (28)$$

この式は核関数（21）＝０を表している。すなわちウィーナー・ホッフ方程式（18）は偶モードに関する式である。同様にして、核関数（22）＝０は奇モードの固有方程式を表し、方程式（19）は奇モードに関する式であることがわかる。

以上の考察から核関数（21）、（22）は誘電体板の厚さｔが薄い（ｐｔ＜＜1、γｔ＜＜１）場合の伝搬モードの固有方程式を表すことがわかったが、本報告ではさらに解析の適用範囲を定量的に見積るため、厳密な固有方程式（25）及び（

26）と核関数（21）及び（22）より与えられる固有方程式の表す分散曲線を示して検討する。図４にその分散曲線を示す。なお、縦軸を導波路間隔ｂで規格化した真空中の波数、横軸を同じくｂで規格化したｙ方向波数としそれぞれ２πでわった値を用いている。これはそれぞれｂ／λ、ｂ／λyを意味している。ここでλは入射波の自由空間波長、λyは表面波のもつｙ方向の波長である。またｔ／ｂ＝１とした。

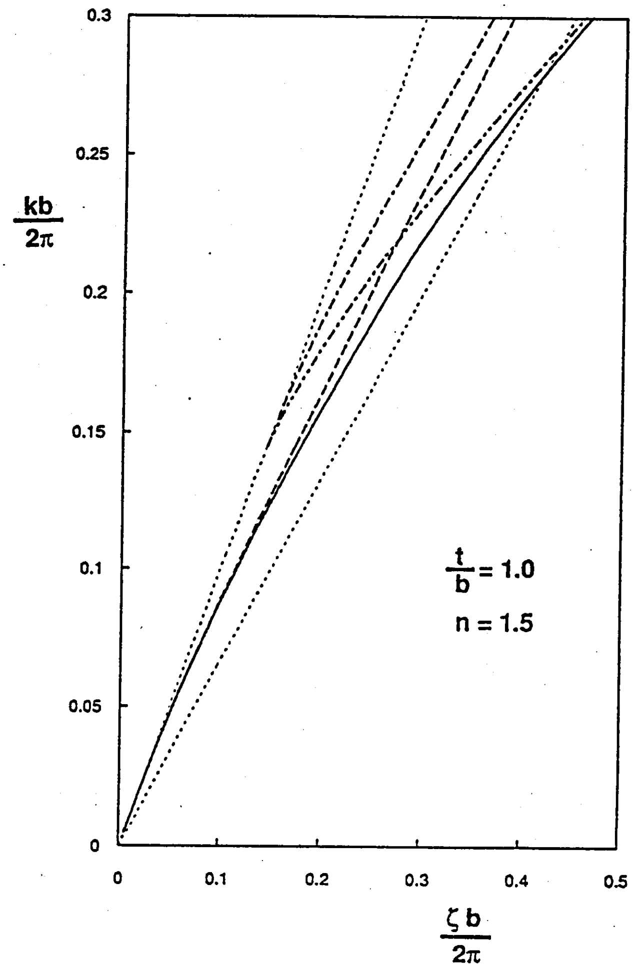


図４．分散曲線

図中で、厳密解の分散曲線（偶モード ······ 奇モード -------- ）はそれぞれ最低次のみを表す。この図から、偶モードにはカットオフが存在しないことがわかる。また、核関数による分散曲線（偶モード —— 奇モード -------- ）はｋｂ＜＜１のもとでそれぞれのモードに対する厳密解の分散曲線に漸近していることがわかる。また奇モードではカットオフも存在している。以上のことからも核関数による固有方程式が誘電体板が薄い場合の厳密な固有方程式の近似となっていることがわかる。さて次にふたつの固有方程式の違いを定量的に明らかにする。図４からわかるとおり、ｋｂが大きくなるに連れ、両者の示す分散曲線のず

れは大きくなる。そのずれをｙ方向波数ξｂ／２πの差であらわすことにすればｋｂ／２π＝０．１４で３．０％、ｋｂ／２π＝０．２で７．２％程度となる。そこで今回示す数値例では、ｋｂ／２π＝０．１４とし、誘電体の厚さはｔ／ｂ＝１～２、ｎ＝$\sqrt{\varepsilon r}$～１．５（ガラス）とした。また奇モードはｋｂ／２π～０．１４付近ではカットオフであることからここでは偶モードの励振のみを考えることとする。

５．表面波の電力を表す式と数値例

さて、ウィーナー・ホッフ方程式（18）、（19）を解くことにより、導波路端面におけるエバネセント波の回折による励振される表面波の大きさを得るためには、核関数（21）、（22）の因数分解を行うことが必要である。その形は以下のようになる。なお、具体的な導出については附録（Ａ．２）に示した。

$$\mathcal{K}_q(\zeta)=\mathcal{K}_q^U(\zeta)/\mathcal{K}_q^L(\zeta)=\mathcal{K}_q^U(\zeta)\mathcal{K}_q^U(-\zeta)$$
$$\mathcal{K}_q^L(\zeta)=1/\mathcal{K}_q^U(-\zeta)$$
$$\lim_{\zeta\to\infty}\mathcal{K}_q^U(\zeta)\sim O(\zeta^{-\frac{1}{2}})\qquad(q=c,s)$$

（29）

但し、$\mathcal{K}^U{}_q$（ξ）、$\mathcal{K}^L{}_q$（ξ）はそれぞれξ平面（図２）の領域Ｕ、Ｌで正則な関数である。式（29）をつかえば式（18）は以下のように変形される。

$$\mathcal{K}_c^U(\zeta)\,\mathcal{U}(-,\zeta)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{K}_c^L(-jh_y)\frac{B\cos k_x b}{\zeta+jh_y}$$
$$=\mathcal{K}_c^L(\zeta)\,\mathcal{L}(-,\zeta)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{K}_c^L(\zeta)\frac{B\cos k_x b}{\zeta+jh_y}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{K}_c^L(-jh_y)\frac{B\cos k_x b}{\zeta+jh_y}$$

（30）

左辺、右辺はそれぞれ領域Ｕ、Ｌで正則なので、解析接続により左辺＝右辺＝整関数がいえる。またエッジ条件［ｂ．ｃ．５］からアーベルの定理（ワトソンの補助定理）により界成分のフーリエ成分（例えばＢ（ξ））のξ－＞∞における ふるまいがわかることから、左辺および右辺のξ－＞∞における振舞いが以下のようになることがわかる。

$$\text{左辺}\sim O(\zeta^{-1})$$
$$\text{右辺}\sim O(\zeta^{0})$$

（31）

これよりリウビルの定理から整関数はゼロになり、未知関数$\mathcal{U}$（±，ξ）、$\mathcal{L}$（±，ξ）を一意的に決定することができる。これより界成分をあらわす関数Ｂ（ξ）（＝Ａ（ξ））およびＤ（ξ）（＝Ｆ（ξ））は次のようになる。

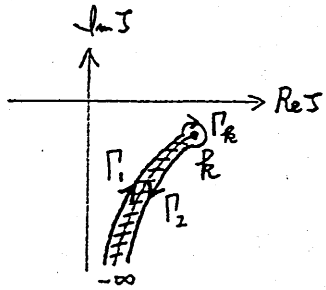
$$B(\zeta)=jk\frac{e^{-\gamma b}}{\sqrt{2\pi}\,\gamma}\frac{\tilde{B}}{\zeta+jk_y}\left\{\frac{\cos k_x b\cosh\gamma b}{K_c^u(jk_y)K_c^u(\zeta)}+j\frac{\sin k_x b\sinh\gamma b}{K_s^u(jk_y)K_s^u(\zeta)}\right\}$$

$$D(\zeta)=jk\frac{e^{-\gamma b}}{\sqrt{2\pi}\,\gamma}\frac{\tilde{B}}{\zeta+jk_y}\left\{\frac{\cos k_x b\cosh\gamma b}{K_c^u(jk_y)K_c^u(\zeta)}-j\frac{\sin k_x b\sinh\gamma b}{K_s^u(jk_y)K_s^u(\zeta)}\right\};\ \tilde{B}=Z_0B=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}B$$

（32）

さて、y＞0におけるすべてのz方向界成分を表す関数ϕ_{total}は表面波モードのy方向伝搬定数を偶モード、奇モードそれぞれζ_c、ζ_sとすると次のように表される。

$$\phi_{total}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{total}(x,\zeta)e^{-j\zeta y}d\zeta$$
$$=\sqrt{2\pi}\,j\,\mathrm{Res}(\phi_{total}e^{-j\zeta y},-jk_y)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Gamma_k+\Gamma_1+\Gamma_2}\phi_{total}e^{-j\zeta y}d\zeta$$
$$+\sqrt{2\pi}\,j\,\mathrm{Res}(\phi_{total}e^{-j\zeta y},\zeta_s)+\sqrt{2\pi}\,j\,\mathrm{Res}(\phi_{total}e^{-j\zeta y},\zeta_c)$$



（33）

但し、Res（f，ζ_0）は関数fの、ζ_0での留数をあらわす。

さて、式（33）の第1項は入射波を、第2項は散乱波をあらわし、表面波は第3項および第4項である。kb／2πが奇モードのカットオフより小さい場合、Im{ζ_s}＜0となるため奇モードを表す第3項は、$\sim e^{-\mathrm{Im}\{\zeta_s\}y}$、すなわち減衰モードとなることがわかる。そこで以下では偶モードを表す第4項を考察する。

以上に式（9）を考慮すれば、誘電体板上、すなわちx＝±bにおける電磁界成分を求めることが出来、以下のようになる。

$$E_z(\pm b,y)=\sqrt{2\pi}\,j\lim_{\zeta\to\zeta_c}(\zeta-\zeta_c)\left\{\begin{matrix}B(\zeta)\\D(\zeta)\end{matrix}\right\}e^{-j\zeta y}$$

$$H_x(\pm b,y)=\sqrt{2\pi}\,j\lim_{\zeta\to\zeta_c}(\zeta-\zeta_c)\frac{\zeta}{\omega\mu}\left\{\begin{matrix}B(\zeta)\\D(\zeta)\end{matrix}\right\}e^{-j\zeta y}$$

（34）

式（34）に式（32）を代入し、附録（A．2）にあげた核関数の因数分解の具体的な形を考慮することにより各成分の大きさが求まり、これを使って誘電体中を伝搬する表面波の電力が以下のように求められる。

$$\eta_c=\frac{\hat{B}}{b}\frac{\zeta_c}{\zeta_c^2+k_y^2}\frac{e^{-\gamma_c b}|\cos k_x b\cosh\gamma b|^2}{e^{-\gamma_c b}+\frac{\cosh\gamma_c b}{\gamma_c b}}\left|K_c(-jk_y)\right|^{-1}\cdot\left|\frac{k+\zeta_c}{k-\zeta_c}\right|^{-\frac{1}{2}}$$
$$\cdot\exp\left[\frac{\hat{B}kb}{\pi}\left\{\int_0^{kb}\frac{(1+\hat{B}kb)\cos^2\xi+\xi\sin 2\xi}{\xi^2+\xi\hat{B}kb\sin 2\xi+\{\hat{B}kb\cos\xi\}^2}\ln\left|\frac{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}-\zeta_c b}{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}+\zeta_c b}\right|d\xi\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_{kb}^{\infty}\frac{(1+\hat{B}kb)\cos^2\xi+\xi\sin 2\xi}{\xi^2+\xi\hat{B}kb\sin 2\xi+\{\hat{B}kb\cos\xi\}^2}\ln\left|\frac{(\xi^2-k^2b^2)^{\frac{1}{2}}-k_y b}{(\xi^2-k^2b^2)^{\frac{1}{2}}+k_y b}\right|d\xi\right\}\right]$$

（35）

但し、誘電体中を伝搬する電界振幅1の平面波の電力で規格化してある。

式（35）はエバネセント波入射の場合に励振される表面波の電力を表す式であり、すなわちNSOMのピックアップ効率を表わしていると考えられる。

最後に、式（35）の－ｊｈｙをｋｘ（＜ｋ）に置き換えることにより、平面波入射の場合の励振を表す式を求めることができる。複素対数関数の取り扱いに注意しながら変形すると、次式のようになる。

$$\eta_c = \frac{\tilde{B}}{b}\frac{\zeta_c}{\zeta_c^2-k_y^2}\frac{e^{-\gamma_c b}\left|\cos k_x b\cosh\gamma_c b\right|}{e^{-\gamma_c b}+\dfrac{\cosh\gamma_c b}{\gamma_c b}}\cdot\left|\frac{(k-k_y)^{\frac{1}{2}}}{(k+k_y)^{\frac{1}{2}}}-\frac{k\tilde{B}e^{-\gamma_i b}\cosh\gamma_i b}{j(k+k_y)}\right|^{-1}\left|\frac{k+\zeta_c}{k-\zeta_c}\right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\exp\left[\frac{\tilde{B}kb}{\pi}\left\{\int_0^{kb}\frac{(1+\tilde{B}kb)\cos^2\xi+\xi\sin 2\xi}{\xi^2+\xi bk\tilde{B}\sin 2\xi+\{\tilde{B}kb\cos\xi\}^2}\ln\left|\frac{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}-\zeta_c b}{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}+\zeta_c b}\frac{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}+k_y b}{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}-k_y b}\right|d\xi\right\}\right]$$

$$\gamma_i = j\sqrt{k^2-k_y^2} \qquad (36)$$

以下では式（35）および（36）をもとにし、入射光のｘ方向波数に対する表面波電力の特性を数値例として示す。これは、微小開口による回折波の電力（角度）スペクトラム分布に対応するものである。[(5)]

数値計算に際し、式（35）および式（36）では対数特異性をもつ数値積分が存在する。これらの計算は既存のパッケージ（IMSL）を用い、ワークステーション（ss2）を用いて行った。また式（35）では半無限積分がある。この積分の被積分関数Ｉ（ξ）は、ξ－＞∞のときＩ（ξ）－＞Ｏ（ξ^{-2}）であり積分の収束は遅い。本研究では積分範囲を（ｋｂ，ｋｂ＋Ｍ）とし、有限積分に直して計算した。但し、Ｍ＝１００とした。この程度で計算値の収束は十分である。

図５はｋｂ／２π＝０．１４、ｔ／ｂ＝１およびｎ＝１．５の場合の、入射光のｘ方向波数に対する表面波電力特性を示したものである。

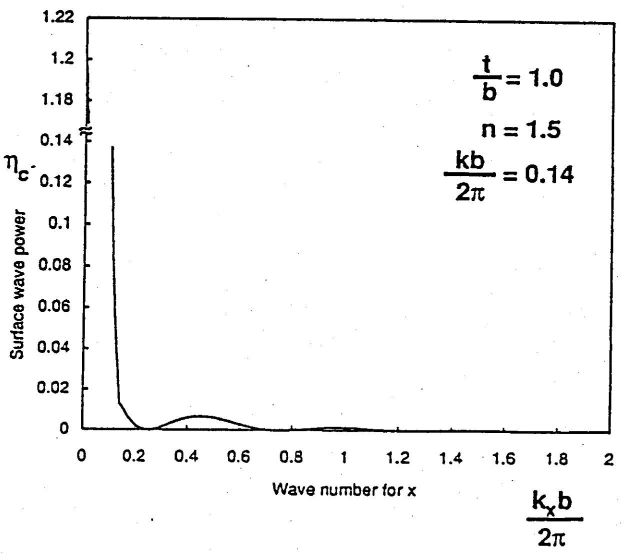


図５．入射光のｘ方向波数に対する表面波電力（ピックアップ効率）特性

図において、ｋｘｂ／２π＜０．１４の領域は入射光が平面波となる領域であり、＞０．１４はエバネセント波となる領域である。図からエバネセント波に対しても表面波電力が得られていることがわかる。すなわち超解像が得られることが分かる。その電力は、平面波の２００分の１以下になっている。しかしながら実際のデバイスは図６のように側面に金属を蒸着させているため、側面から侵入する電力成分は遮断される。したがって平面波（伝搬光）に対するピックアップ効率はずっと低いと考えられる。一方エバネセント波の場合では、端面から離れるにしたがい側面にあたる電力成分は速やかに消失し、その効果は小さい。

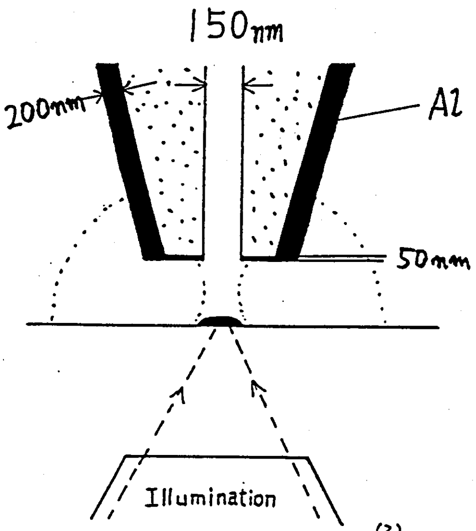


図６．集光型ＮＳＯＭ(3)

さらに、エバネセント波に対する表面波電力は横軸ｋｘｂ／２πに対し周期的にゼロとなっている。これは式（35）からもあきらかである。微小開口からの回折波の電力スペクトラム分布（＝sinc関数）との比較から、このことはプローブにおいても同様に電力の開口径依存性があることを示していると考えられる。これは集光型ＮＳＯＭの実験報告とも一致する。なおｋｘｂ／２π＝０．１４でグラフが微分不可能となっているが、これは平面波とエバネセント波ではＥz成分に対するＨy成分の位相がπ／２ずれていることによるものと思われる。

最後に２つのパラメータ、すなわち誘電体の屈折率ｎと誘電体の厚さｔに対する依存性を図７に示す。但し、横軸はｋx／ｋとしている。すなわち１より小さい領域が平面波を、１より大きい領域がエバネセント波を表す。ｎが大きいと、エバネセント波に対する表面波電力も大きくなっている。これは［ｂ．ｃ．３］のサセプタンス分が大きくなり、プローブの“吸引力”が増すためである。厚さｔが大きい場合でも表面波電力が大きくなっているが、これは厚さの増加による界分布変化の影響ではなく、この場合もｎの場合と同じくサセプタンス分が大きくなったために過ぎない。したがってこのことをもって一般にプローブの誘電体層の幅が大きいほどピックアップ効率が増すとはいえない。

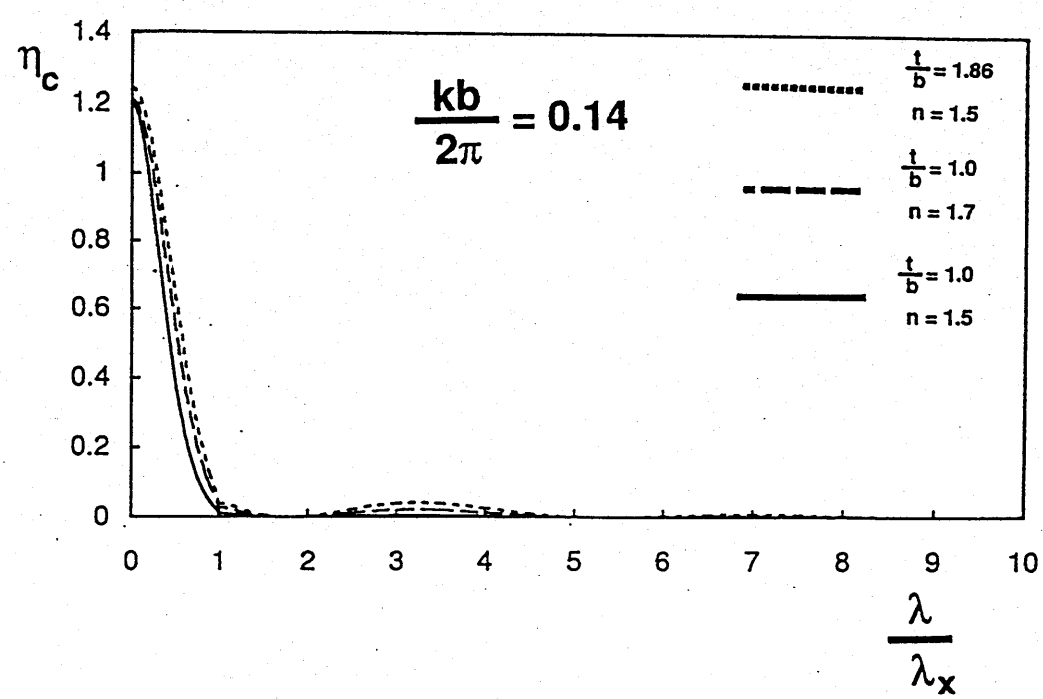


図７．　誘電体の屈折率ｎおよび厚みｔの影響

６．むすび

本報告では、ニアフィールド光学において問題となっているエバネセント光と微小プローブの相互作用の自己無撞着なモデルによる解析法として２枚の薄い誘電体板により構成された導波路端面によるエバネセント波の回折のウィーナー・ホッフ法による解法を提案した。回折によって励振される表面波電力を表す式を解析的に導き、この式が微小プローブによるピックアップ効率を表すことをいくつかの数値例により示した。誘電体プローブ、[21] 金属プローブ[22]によるＮＳＯＭなど

では本質的に３次元となるがこれらの場合においてもプローブの径が十分小さいとすれば同様の解析的取り扱いが可能であると考えられる。

ところで、プローブ表面の金属蒸着を考慮したモデルとして、誘電体板の外側と内側の表面インピーダンスが異なる場合のモデルが考えられる。このモデルにおいても本報告と同様にウィーナー・ホッフ方程式を導くことができるが、この方程式では核関数が行列の形となる。この場合の解法は筆者の知る限り未だ知られていない。[20] 今後の課題である。

文　献

1) Kawata S. and Sugiura T., Opt. Lett., 17, 772(1992).
2) Dürig U., Pohl D. and Rohner F., J. Appl. Phys., 59, 3318(1986).
3) Betzig E., Isaacson M. and Lewis A., Appl. Phys. Lett.,51,2088(1987).
4) Jiang S., Tomita N., Ohsawa H. and Ohtsu M., Jpn. J.Appl. Phys., 30, 2107(1991).
5) 河田　聡, 光学, 21, 766(1992).
6) Leviatan Y., J. Appl. Phys., 60, 1577(1986).
7) Betzig E., Harootunian A., Lewis A. and Isaacson M., Appl. Opt., 25, 1890(1986).
8) Girard C. and Courjon D., Phys. Rev., B42, 9340(1990).
9) 堀　裕和, 応用物理, 61, 612(1992).
10)Noble B., Methods Based on the Wiener-Hopf Technique, Chelsea(1988).
11)小林一哉, Wiener-Hopf法とその散乱・回折問題への応用, 応用数理への道, 堀内和夫編著, コロナ社(1989).
12)飯島泰蔵, 電試研報, 518(1950), 531(1952), 541(1954).
13)Uchida K. and Aoki K., IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., MTT-32, 11(1984).
14)Kobayashi K. and Inoue T., IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-36, 1424(1988).
15)Anderson I., IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-27, 584(1979).
16)Bladel J., IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-33, 450(1985).
17)Mittra R. and Lee S., Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan(1971).
18)Bates C. and Mittra R., IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-17, 102(1969).
19)内田一徳, 青木和男, 九大工学集報, 52, 29(1979).
20)Daniele V., Radio Sci., 19, 1173(1984).
21)梅田充, 小倉久直, 高橋直行, 北野正雄, 電学研資, EMT-92-42(1992).
22)井上康志, 杉浦忠男, 河田　聡, 1993年春季応物, 30a-ZA-2, 889(1993).

謝　辞

日頃ごべんたついただく南條基大阪ﾗｲﾌｴﾚｸﾄﾛﾆｸｽ研究ｾﾝﾀｰ長に深謝する。また熱心に御討論いただいている大阪大学工学部河田聡先生ならびに杉浦忠男氏に深謝する。

附　録

（A．1）エッジ条件

エッジ条件については多くの研究があり、誘電体の場合では、

$$\lim_{\rho \to 0} E_z \sim O(\rho^{\nu}),\ \frac{1}{2} < \nu < 1$$

完全導体の場合では

$$\lim_{\rho \to 0} E_z \sim O(\rho^{\frac{1}{2}})$$

となることが知られている[16]。集光型ＮＳＯＭではプローブ先端に金属を蒸着させていることからここでは完全導体の場合を［b．c．5］として採用した。

（A．2）核関数の因数分解

核関数の因数分解については文献（17）による方法がよく知られている。ここでもその線によっているが、筆者らはこの文献を入手できなかったため、直接的には文献（18）および（19）によった。その具体的な形は以下の様である。

$$\mathcal{K}_c^{U}(\zeta) = \sqrt{\left(\frac{k+\zeta}{k-\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{k\tilde{B}e^{-\gamma b}\cosh\gamma b}{j(k-\zeta)}}\left(\frac{\zeta_c-\zeta}{\zeta_c+\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\tilde{B}kb}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1+\tilde{B}kb)\cos^2\xi+\xi\sin 2\xi}{\xi^2+\xi\tilde{B}kb\sin 2\xi+\{\tilde{B}kb\cos\xi\}^2}\ln\left\{\frac{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}-\zeta b}{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}+\zeta b}\right\}d\xi\right]$$

$$\mathcal{K}_s^{U}(\zeta) = \sqrt{1 - \frac{k\tilde{B}e^{-\gamma b}\sinh\gamma b}{\gamma}}\left(\frac{\zeta_s-\zeta}{\zeta_s+\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\tilde{B}kb}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1+\tilde{B}kb)\sin^2\xi-\xi\sin 2\xi}{\xi^2-\xi\tilde{B}kb\sin 2\xi+\{\tilde{B}kb\sin\xi\}^2}\ln\left\{\frac{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}-\zeta b}{(k^2b^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}+\zeta b}\right\}d\xi\right]$$

輻射科学研究会資料
RS93-4

希釈硝酸カリウム拡散による方向性結合器の特性

岸岡　清、　田中　正俊、　峯松　哲也

大阪電気通信大学･応用電子工学科

於　大阪電気通信大学
平成５年５月２８日（金）

１．まえがき

カリウムイオン拡散光導波路は伝搬損失が低いことに加えて、ファイバとの屈折率整合性が良いという理由からしばしば受動性光集積回路素子に用いられており、目的に応じて今までに数多くの特性評価が行われている [1]-[3]。イオン源として希釈した KNO_3を用いた拡散では [2],[4],[5]、希釈 $AgNO_3$を用いた銀イオン拡散導波路 [6],[7] と同様、その希釈度によって導波路の屈折率を調整することが可能であることが示されている。さらに、希釈 KNO_3を用いた拡散では、拡散層のカリウムイオンによるストレスが減少するため、導波路の複屈折の低減が可能であることも指摘されている [5]。100%KNO_3を用いた拡散では、大きな複屈折 ($\sim 1.5 \times 10^{-3}$) が存在し [3],[8]-[10]、この事が従来から、偏波無依存の素子の実現に大きな妨げとなっていた。希釈 KNO_3を用いることにより、導波路の屈折の範囲が広がり [11]、これにより素子の設計が容易になると共に、偏波依存性の小さい素子が実現できると期待される [12],[13]。

本報告では、希釈 KNO_3で作られた方向性結合器に現れる２つの興味深い特性；(１）低偏波依存特性、(２）拡散深さに対する低依存特性について述べられる。重量比で 50%に $NaNO_3$で希釈された KNO_3を用いて作られた方向性結合器に於て、ＴＥ、ＴＭ両モードの結合係数が測定され、その差は 3%と、従来の 100%KNO_3を用いた場合の 15%に比べて極めて小さいことが報告される。拡散深さに対する低依存性に関しては、導波路幅と間隔がある一定の条件を満足すると、結合長が拡散の深さ（拡散時間）に依存しなくなる事を示し、その実験結果が報告される。さらに、この特性は、横方向拡散 [14] によって起こる横方向の屈折率分布の拡散時間に対する特異な変化に起因していることを示している。また、素子の設計に必要な拡散パラメータの $NaNO_3$の希釈濃度に対する依存性の測定結果 [5] も報告される。

２．拡散パラメータの測定値

結合器の特性について述べる前に、この節では、$NaNO_3$で希釈された KNO_3で作られた平板導波路に於ける表面屈折率 n_sと K^+イオンの拡散係数 D_eの測定値が報告される。拡散層の複屈折の $NaNO_3$濃度に対する依存性を知るために、測定はＴＥ、ＴＭ両モードについて行われる。また、比較のために 100%KNO_3によって作られた導波路についてのパラメータの値も測定されている。

厚さ 1mm、屈折率 1.5124($\lambda = 0.6328\mu m$) のソーダライム·マイクロスライドグラス（松浪ガラス製）が基板として使用され、拡散は 385°Cの溶融塩中に基板を浸す事により行われた。拡散パラメータの値を決定するため、各濃度の塩について拡散時間を変えて複数個の導波路が作られた。図１ (a)-(d) に作られた導波路の等価屈折率 n_{eff}の測定値が拡散時間 t の平方根に対してプロットされている。測定はプリズム結合器による m-line 法 [15] によって行われた。光

源には波長 0.6328μm H e − N e ガスレーザが用いられた。図中の実線と破線は、それぞれ、n_{eff}の測定値から決定される n_sと D_eの値を用いてWKB法により計算されたTE、TMモードの理論値である。

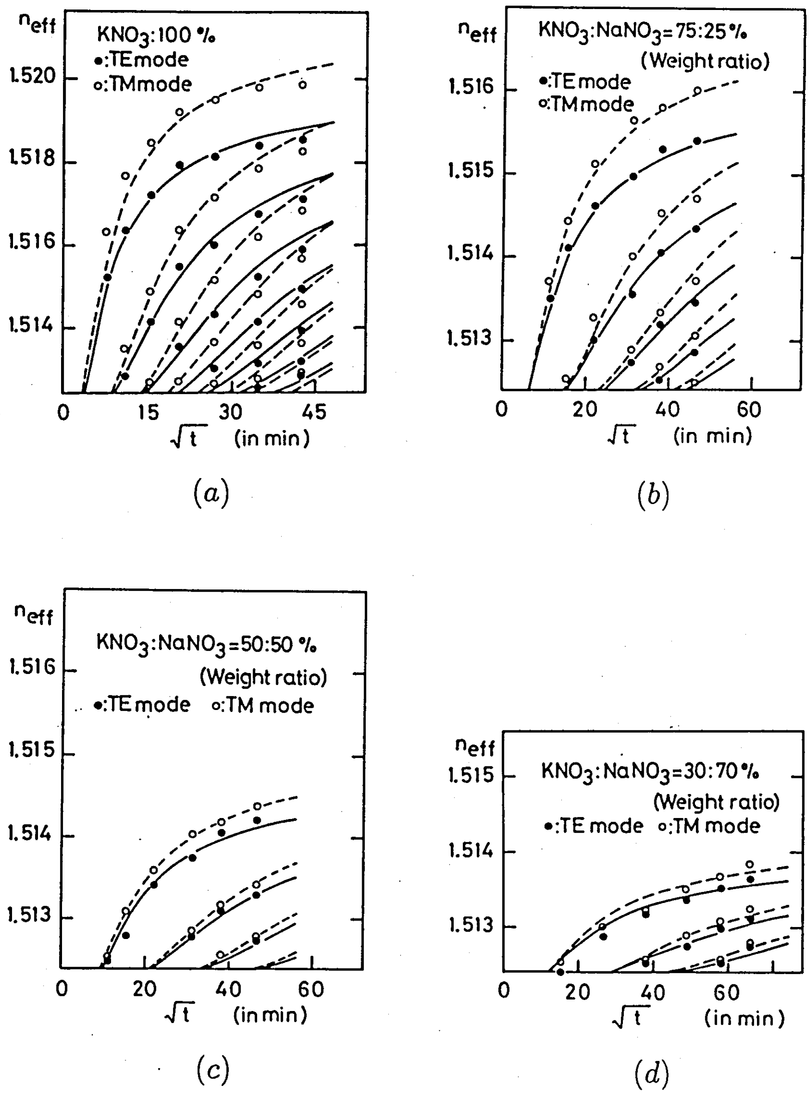


図1 希釈塩で作られた平板導波路の n_{eff}の測定値
(a)KNO_3;100% (b)KNO_3;75% (c)KNO_3;50% (d)KNO_3;30%

$\sqrt{t}$が増加し、拡散の深さが深くなると、n_{eff}の値は拡散層内に生じた複屈折率のためにTE、TMモードで異なった値に収束している。これらの収束値が各モードに対する n_sの値である。収束値は $NaNO_3$の濃度に依存しており、$NaNO_3$の濃度が大きくなるに伴って小さくなっている。さらに、TEとTMモードに対する n_sの差も $NaNO_3$の濃度が増すにつれて減少することが解る。正確な n_sの値は後に D_eの値と共に決定される。n_{eff}の測定精度は、モードの励振角の測定精度より$\pm 1 \times 10^{-4}$と見積られる。

n_sと D_eの値は文献 [3] の方法に従ってWKB法で得られた分散関係式を用いて、n_{eff}の測定値より決定される。深さ方向（x 方向）の屈折率分布として、文献 [2] のソーダライムガラス基板中に作られた導波路の K^+イオンの濃度分布の測定結果に基づいて、ここでも、$n(x) = n_b + (n_s - n_b)\exp[-(x/D)^2]$ の Gauss 分布を仮定している。この分布は文献 [16] に与えられている数値計算結果とも一致している。n_b, Dはそれぞれ、基板の屈折率と拡散の深さを表している。但し、ここでは文献 [3] の式（4）の分子に現れる $(m+\frac{3}{4})\pi$の代わりに、$\phi+(m+\frac{1}{4})\pi$が用いられている。m はモード次数を、ϕは基板表面と空気層との境界面での全反射に伴う位相推移をそれぞれ表している。ϕは $\tan^{-1}[n_s^{\nu}\sqrt{\frac{n_{eff}^2-1}{n_s^2-n_{eff}^2}}]$、$\nu = 0$（TEモード）、$\nu = 2$（TMモード）で与えられる。表1に n_sと Dの測定値が与えられている。また、表中にはTEとTMモードの n_sの差δn も示されている。例えば、50%の希釈塩では、屈折率の増加$\Delta n = n_s - n_b$は 100%の KNO_3の場合に比べて、$\frac{1}{3}$に減少している。さらに、複屈折$\delta n = \Delta n_{TM} - \Delta n_{TE}$は$\frac{1}{5}$にも減少している。拡散の深さ Dと拡散時間 t とは $D = \sqrt{D_e t}$によって関係付けられている [3]。

図2には、Δn の測定値が $NaNO_3$の濃度について文献 [2] と [4] の測定結果と共にプロットされている。本報告では、従来の結果と比べて KNO_3の濃度が低い領域での測定結果が与えられている。この領域ではΔn は $NaNO_3$の濃度に逆比例して減少するが、$NaNO_3$濃度が低い領域（$< 30\%$ wt）に折れ点が

表1 n_sと D_eの測定値

KNO_3 weight ratio		100 %	75 %	50 %	30 %
TE mode	n_s	1.5200	1.5162	1.5149	1.5140
	$D_e(\times 10^{-16} m^2/s)$	15.51	11.44	9.13	7.89
TM mode	n_s	1.5215	1.5169	1.5152	1.5142
	$D_e(\times 10^{-16} m^2/s)$	14.98	10.48	8.86	7.62
δn	$(\times 10^{-4})$	15	7	3	2

存在し、この点より$NaNO_3$濃度が低い領域では$NaNO_3$濃度が高い領域に比べて、Δn の$NaNO_3$濃度に対する依存性は大きくなる。100%KNO_3の場合のδnの測定値は文献 [10] の値と一致している。さらに、文献 [2] に於て、応力を基に計算された理論値 0.0019 あるいは、文献 [3] と [9] に与えられている測定値 (0.0014-0.0021) にも良く一致している。

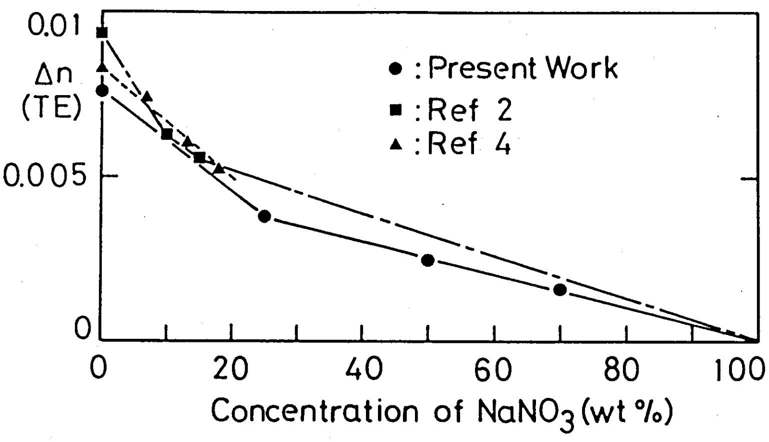


図2 Δn の$NaNO_3$濃度に対する依存性

以下に、測定された拡散パラメータの値を基にして求められたチャネル導波路のシングルモード動作領域が示される。希釈塩を用いた導波路の製作では、屈折率の上昇が小さく抑えられるため、長時間の拡散が必要となり、そのため、横方向への拡散 (Side-way Diffusion) の影響が無視できなくなる。その結果、横方向 (y方向) にも屈折率分布が現れ、ステップ状とは大変異なった屈折率分布形状となる。計算では、導波路断面の屈折率分布を文献 [14] に従って、$n(x,y) = n_b + (n_s - n_b)f(\frac{x}{D})g(\frac{2y}{W})$, $f(\frac{x}{D}) = \exp[-(\frac{x}{D})^2], g(\frac{2y}{W}) = \frac{1}{2}\{erf[\frac{W}{2D}(1+\frac{2y}{W})]+erf[\frac{W}{2D}(1-\frac{2y}{W})]\}$ としている。ここで、Wは基板上に作られる蒸着金属薄膜マスクのスリットの幅である。また、Dは今考えているチャネル導波路と同一の拡散時間で作られる平板導波路の拡散深さを表している。表2に、Dの幾つかの値に対して計算されたWのシングルモード領域が示されている。Wの上限及び下限の値は、等価屈折率法 [14] によって導かれるグレーデッド·インデックスを有する等価平板導波路の第2モードと第1モードの Cutt-off 条件から数値的に求められている。表中の b_0は $b_0 = (n_{eff}^2 - n_b^2)/(n_s^2 - n_b^2)$ で定義される深さ Dの平板導波路の規格化伝搬定数を表し、Cutt-off の計算で使

表２ Wのシングルモード領域

Concentration of KNO_3 (wt%)	b_0	$D(\mu m)$	Single-mode range of $W(\mu m)$
100	0.1	1.6	5.1-11.7
	0.2	1.9	3.7-8.3
	0.3	2.3	2.9-6.6
	0.4	2.7	2.3-5.4
75	0.1	2.2	7.3-16.6
	0.2	2.7	5.3-11.8
	0.3	3.2	4.1-9.4
	0.4	3.9	3.3-7.6
50	0.1	2.8	9.1-20.7
	0.2	3.4	6.5-14.7
	0.3	4.0	5.1-11.7
	0.4	4.9	4.1-9.5
30	0.1	3.5	11.2-25.6
	0.2	4.2	8.1-18.2
	0.3	5.0	6.4-14.4
	0.4	6.1	5.1-11.7

われた。

３．希釈塩で作られた方向性結合器の偏波依存特性

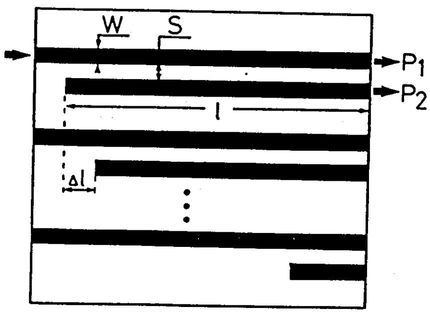


図３ 結合係数測定用基板

この節では、$NaNO_3$で重量比50%に希釈されたKNO_3を用いて作られた方向性結合器の結合係数がＴＥ、ＴＭ両モードについて測定される。結合係数の測定のために、図３に示すように同一基板上に９個の相互作用長 lのみが異なった結合器が作られた。拡散は 385°Cで 223 分間行われた。拡散の深さ Dは 3.5μm である。導波路幅 W（フォトマスクのスリット幅）、導波路間隔 S（導波路の内側境界間の間隔）及び、相互作用長の差Δlはそれぞれ、7.0, 6.6μm, 1mm に設計されている。拡散の後、光の入射と測定を容易に行うために、結合器の入力及び出力端面は光学研磨された。

光は対物レンズで絞られて各結合器の入射端面に順次入力され、その出力端の近視野像がＴＶカメラによって観測される。ＴＶカメラと出力端面の間には像を拡大するために対物レンズが、また、所望の偏光を得るために、素子の両側に偏光板が各々置かれている。出力面での光パワーはＴＶカメラに接続されたオシロスコープによるラスタ・スキャンによって測定される。光源には波長 0.6328μm のＨｅ－Ｎｅガスレーザが用いられる。

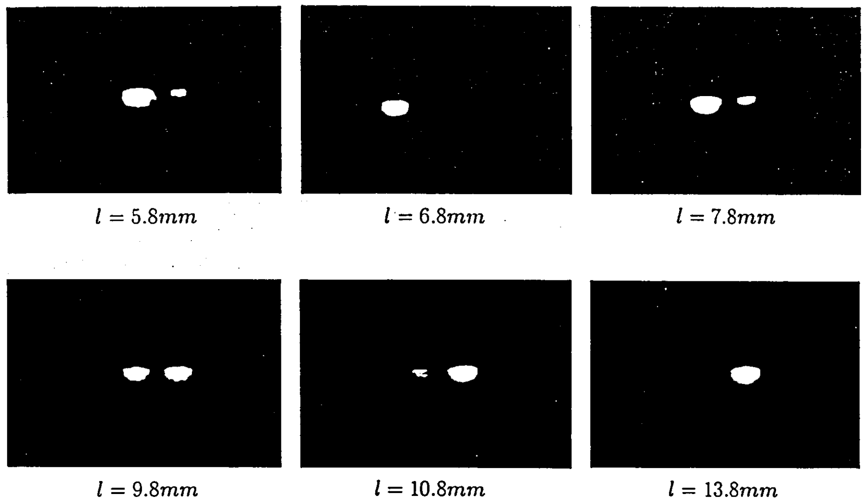


図４ 結合器の出力端面の近視野像の写真

図4に、TEモードが励振された場合の出力面の近視野像のTVモニタの写真が示されている。各写真には、結合器からの出力光が2つの明るいスポットとして基板と空気層との境界面上に映っている。ここで、上の半面が空気層である。また、各写真の右側のスポットが光を入力した側の導波路からの出力光に対応している。相互作用長 l によって、結合器の2つの導波路の出力光強度の比が変化しているのが見られる。図5に、全出力光パワーで規格化された各導波路の出力光パワーの l に対する変化がプロットされている。ここで、P_1, P_2 は各導波路の光パワーを表している（図3参照）。図中の曲線は後で測定される結合係数を基にして計算されたTEモードに対する理論値である。TMとTEの差は小さく曲線が重なるので、ここではTMモードについての理論値は省略されている。

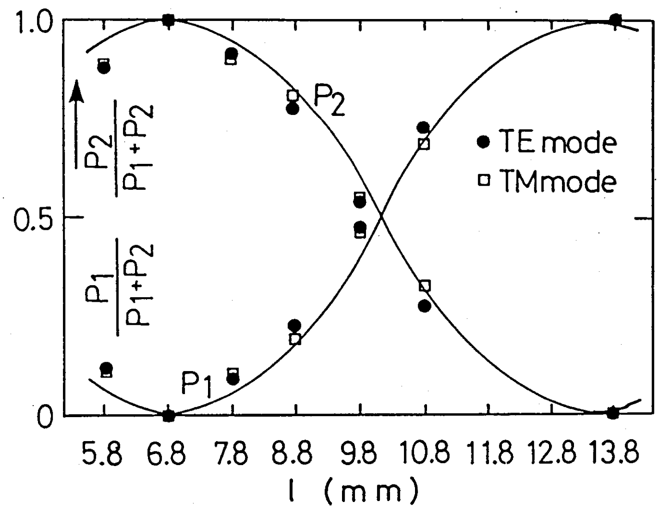


図5 出力光パワーの l に対する変化

以下では、出力光のパワー比の測定結果から結合係数 C の値が決定される。図6に、$\sin^{-1}\sqrt{\frac{P_2}{P_1+P_2}}$ の値が l に対してプロットしてある。$Cl = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P_2}{P_1+P_2}}$ の関係が成立するので、C の値はプロットされた直線の傾きから求めることが出来る [17]。この様にして測定された C の値はTE、TMモードについて、それぞれ、0.238 及び、0.231 mm^{-1} であった。その差は 3%と予想通り小さい。また、2節で与えた拡散パラメータの値を用いてBPM（Beam Propagation Method）によって求めた C の値をTEモードについて比べると、その差は3%以内と小さく、拡散パラメータ及び C の測定値の妥当性が確認できる。

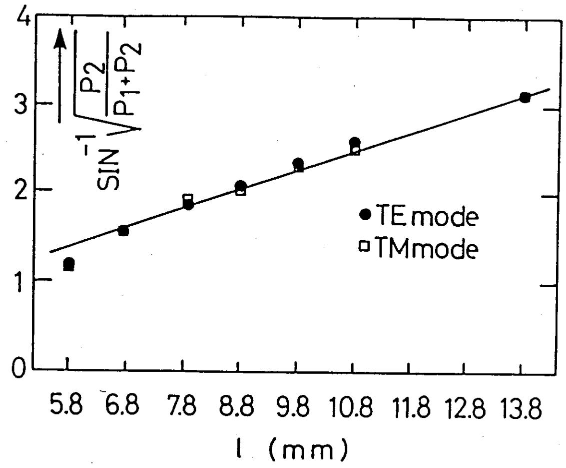


図6 希釈塩で作られた結合器の $\sin^{-1}\sqrt{\frac{P_2}{P_1+P_2}}$ の l に対する変化（ＴＥモード）

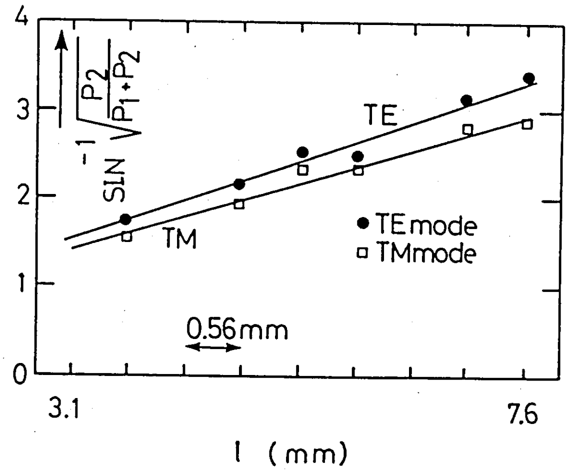


図7 100%KNO_3で作られた結合器の $\sin^{-1}\sqrt{\frac{P_2}{P_1+P_2}}$ の l に対する変化

比較のために、100%KNO_3で作られた結合器についても $\sin^{-1}\sqrt{\frac{P_2}{P_1+P_2}}$ のプロットが図７に示されている。ＴＥとTMモードでは直線の傾きに差が現れており、大きな偏波依存性が在ることが解る。傾きより測定されたCの値はＴＥ、Ｔ

Mモードについて、それぞれ、0.413及び、0.349 mm^{-1}であり、両者には15%以上の差が存在している。測定に使用された結合器（100%KNO_3）の各部のパラメータの値は次の通りである。$W = 4.7\mu m$, $S = 2.9\mu m$, $D = 2.0\mu m(t = 43$分)。

4．結合長の拡散深さに対する依存性

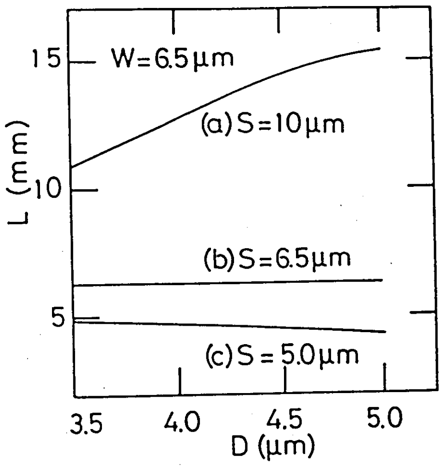


図8 希釈塩で作られた結合器に於ける結合長の拡散深さに対する依存性

図8に、3つの異なる値について計算された拡散深さDに対する結合長Lの変化が示されている。計算は50%の希釈塩によって作られた結合器について行われている。Wの値はいづれの場合も6.5 μmに設定されており、図に示されているDの範囲は$W = 6.5\mu m$の時のシングルモード領域を殆どカバーしている。図中（b）の場合（$S = 6.5\mu m$）では、Lの値は殆どDには依存していない。さらに、（c）の場合（$S = 5.0\mu m$）では、LはDの増加にともなって減少している。100%KNO_3で作られる結合器でも（b）と同様なDに対する依存性が現れるが、この様な依存性が現れる導波路パラメータの範囲は狭く、しかもこの領域はモードのCutt-off領域に近いため、強い結合が起こり、両導波路間で完全なパワーの移行が起こらない。一般的に、100%KNO_3で作られる結合器で、十分大きなパワー移行を達成できる条件下では、Lは（a）の様な依存性を示す。一方、希釈塩を用いると、（b）や（c）の様なDに対する依存性が比較的広いパラメータの範囲で現れる。しかも、完全なパワー移行も達成される。図9には、LがDに無関係となる条件を満足するSとWの値

がプロットされている。線上の Sと Wの値に対して L は Dに依存せず、曲線より上の領域の Sと Wの値に対しては L は Dの増加に伴って増加する。反対に、下の領域では（c）の様に Dの増加に伴って減少する。表３には、Dに依存しない条件を満たす幾つかの Sと Wの値についての Lの値が与えられている。

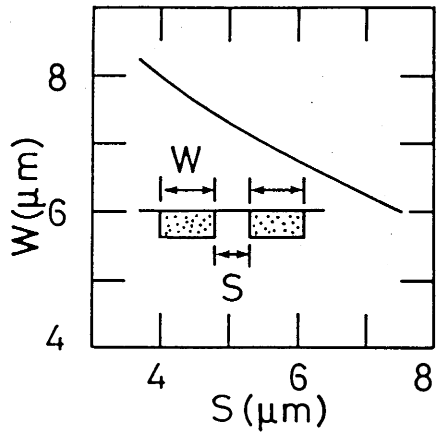


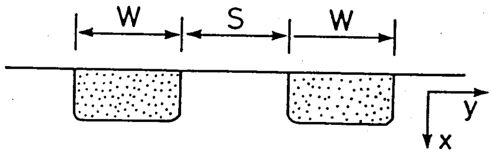
図９ lが Dに依存しない条件を満足する Wと Sの関係

表３ Lの Dに対する無依存値

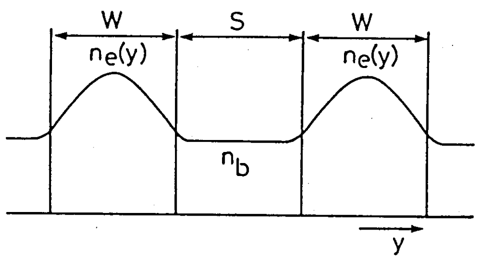
$W(\mu m)$	$S(\mu m)$	$L(mm)$
6.0	7.5	6.9
6.5	6.5	6.3
7.0	5.5	5.8
8.0	4.0	5.3

Lの値は等価屈折率法 [14] によって計算された。図１０に結合器の断面と等価屈折率法によって得られる等価な結合平板導波路が示されている。それぞれの平板導波路の屈折率分布 $n_e(y)$ は、チャネル導波路の yに沿った各点で、x方向の屈折率分布；$n_b+(n_s-n_b)g(\frac{2y}{W})\exp[-(\frac{x}{D})^2]$ と同じ屈折率分布をもつ平板導波路を考えて、その導波路の等価屈折率をWKＢ法によって計算することによって得られる。$g(\frac{2y}{W})$ は横方向拡散のために生じる y方向の屈折率変

化を与える関数で、これにより、yの各点で異なった表面屈折率が与えられる。具体的な関数形はすでに2節に与えられている。次いで、図10 (b) に示す等価結合導波路内を伝搬する偶、奇両モードの伝搬定数β_eとβ_oが計算される。β_eとβ_oの値より L は $L = \pi/(\beta_e - \beta_o)$ により得られる。β_eとβ_oの計算は多層分割法により行われた。計算は E^yモード (TE－ like mode) について、波長0.6328 μm に於て行われた。多層分割法に於けるきざみ幅は 0.02 μm とした。



(a)

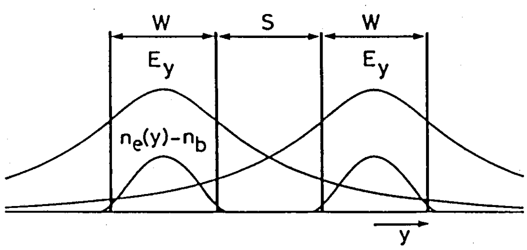


(b)

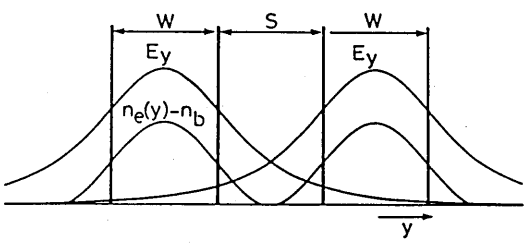
図10 結合器の断面と Graded-index を持つ等価結合平板導波路
(a) 結合器の断面 (b) 等価結合平板導波路

希釈塩で作られる結合器に於ける L の Dに対する無依存特性は、等価な結合平板導波路を使って各導波路のモード界と屈折率変化 $n_e(y) - n_b$の重なり積分を基にして説明できる。図11 (a)、(b) には、$n_e(y) - n_b$と伝送パワーで規格化されたモード界 E_yが2つの Dの値について示されている。Wと Sの値は図8の（c）と同じに設定されている。Dの値が増加すると、図11 (b) に示されている様に、界は各々の導波路内に強く閉じ込められるため、界同士の重なりは減少する。しかしながら、一方、$n_e(y) - n_b$の分布は横方向拡散による金属マスクの下への K^+イオンの浸出しによって、導波路の外部へと広がる。そのため、この領域での $n_e(y) - n_b$と界との重なりは逆に増加する。これが界同士の重なりの減少分を補正し、界と $n_e(y) - n_b$との重なり積分の値は全体として、一定に保たれる。図8の（a）と（c）の場合でも、同じ理由で重なり積分の Dに対する変化は 100%KNO_3 を用いた場合に比べて小さく抑えられて

いる。上で述べた様に L の Dに対する変化の緩和には横方向拡散による金属マスクの下の屈折率の変化が重要な役割を果たしているが、100%KNO_3を使用した場合には、横方向拡散による屈折率分布の広がりは小さく、屈折率分布は殆どスッテプ状になる。このため、Dの増加に伴う界の導波路内への集中により重なり積分の値は急激に減少することになる。従って、Cの値は Dに対して大きな依存性を持つことになる。



(a)



(b)

図１１ 希釈塩で作られた結合器内の屈折率分布とモード界の Dに対する変化
$W = 6.5\mu m$ $S = 6.5\mu m$ (50%$NaNO_3$ wt) (a)$D = 3.5\mu m$ (b)$D = 5.0\mu m$

L の Dに対する変化を測定するために、Dの値が異なった４種類の結合器が同一のフォトマスクを用いて作られた。Dの値は、4.0、4.25、4.5 及び、5.0 μm に設定されている。フォトマスクの Wと Sの値は各々6.4 及び、5.8 μm で、これらは図８の（ｂ）の場合のパラメータの値に近いものである。図１２に測定結果がプロットしてある。測定には３節で述べた方法が適用された。ＴＭモードとＴＥモードの測定値の差は小さいので、ＴＭモードについてのプロットは省略されている。表４には両モードの測定結果が示されている。測定され

た L の値は僅かに Dに対する依存性を持っている。この理由は、製作された結合器の Sの値が設計値 6.5μm より小さかった事によると思われる。それでも、その依存性は 100%KNO_3の場合に比べてはるかに小さくなっている。

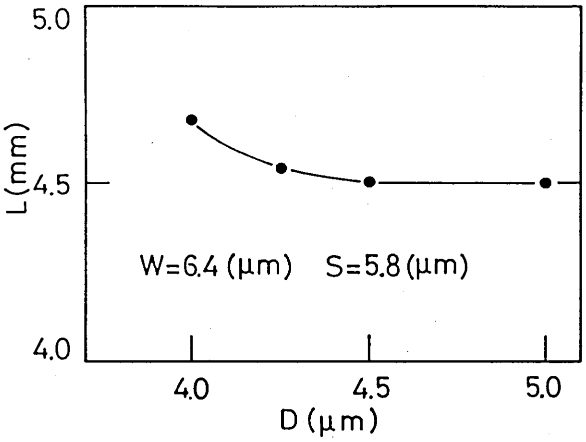


図１２ 希釈塩で作られた結合器の Dに対する L の変化の測定値 (50%$NaNO_3$ wt) $W = 6.4\mu m$、$S = 5.8\mu m$

表４ L の Dに対する変化

D (μm)	4.0	4.25	4.5	5.0
$L(TE)$ (mm)	4.67	4.54	4.50	4.50
$L(TM)$ (mm)	4.51	4.46	4.35	4.34

$W = 6.4\mu m$　$S = 5.8\mu m$

５．希釈塩により作られた導波路の偏波保持特性

100%KNO_3で作られたチャネル導波路に於いては、大きな複屈折率のためＴＥ、ＴＭ両モードはよく分離して伝搬する事が指摘されている [2],[3]。さらに、偏波保持特性が典型的なチャネル導波路で測定されており、非偏波保持成分は 1%以下であることが報告されている [18]。

ここでは、50%の希釈塩によって作られたチャネル導波路の偏波保持特性が測定される。測定では、導波路長 l_G、導波路幅 W及び、拡散深さ Dの異なっ

表５ 希釈塩で作られた導波路の偏波保持特性

Waveguide number	Exciting mode	Output power ratio (dB)	$l_G(cm)$ / $D(\mu m)$
1	TE	-28.4	1.7
	TM	-26.8	4.0
2	TE	-28.0	1.9
	TM	-34.6	4.0
3	TE	< -40	1.9
	TM	-34.5	3.5

た３つの導波路が使用される。光源にはやはり波長 0.6328 μm のＨｅ－Ｎｅガスレーザが用いられる。入射及び出射光の偏波方向を選択するために導波路の両側に偏光板が置かれている。ＴＥ及びＴＭモード入射に対する偏波保持特性は $10\log(P_{TM}/P_{TE})$ 及び、$10\log(P_{TE}/P_{TM})$ で評価された。ここで、P_{TE}、P_{TM}は各々ＴＥ及びＴＭモードの出力光パワーである。表５に測定結果が示されている。測定結果では、およそ -30 dB の偏波保持特性が得られ、希釈塩により作られた導波路でも優れた偏波保持特性を示すことが解る。

６．まとめ

低偏波依存特性を有する方向性結合器を希釈 KNO_3で作られた拡散導波路を用いることにより実現した。50%に $NaNO_3$で希釈された KNO_3を用いて作られた結合器では、ＴＥ、ＴＭモード間の結合係数の差は 3%と、100%KNO_3で作られた場合に比べて極めて小さいことが確認された。さらに、希釈塩で作られた結合器は、拡散深さに無依存な特性を有することも示された。

参考文献

[1] R.V.Ramaswamy and R.Srivastava;"Ion-exchanged glass waveguides: A review", J. Lightwave Tech., **6**, pp.984-1002(1988).

[2] A.Miliou, H.Zhenguang, H.C.Cheng, R. Srivastava and R.V.Ramaswamy; "Fiber-compatible K^+-Na^+ ion-exchanged channel waveguides: Fabrication and characterization", IEEE J.Quantum Electron., **25**, pp.1889-1897(1989).

[3] G.L.Yip and J.Albert;"Characterization of planar optical waveguides by K^+-ion exchange in glass", Opt., Lett., **10**, pp.151-153(1985).

[4] S.I.Najafi;"Optical behavior of potassium ion-exchanged glass waveguides",

Appl. Opt., **27**, pp.3728-3731(1988).
[5] K.Kishioka;"Characterization of ion-exchange waveguide made with diluted KNO_3", Proc. SPIE Conf., **1583**, pp.19-26(1991).
[6] G.Chartier, P.Collier, A.Guez, P.Jaussaud and Y.Won; "Graded-index surface or buried waveguides by ion exchange in glass", Appl., Opt., **19**, pp.1092-1095(1980).
[7] 沢、小野、山崎;"希釈硝酸銀融液を用いた単一モード拡散型チャネル光導波路の2段階拡散法による製作"、信学論誌、**J71-C**、pp.1179-1187 (1988).
[8] 岸岡、橋本;"イオン拡散光導波路の複屈折"、昭58信学総全大会、1077.
[9] J.Albert and G.L.Yip;"Stress-induced index change for K^+-Na^+ ion exchange in glass", Electron. Lett., **23**, pp.737-738(1987).
[10] K.Tsutsumi, H.Hirai and Y.Yuba;"Relation between the ordinary and extraordinary index profiles of ion-exchanged glass waveguides", Opt. Lett., **13**, pp.416-418(1988).
[11] 岸岡、落合;"テーパ状バッファ層を用いた積層形光分波器"、電磁界理論研資、EMT-92-81、pp.59-68 (1992).
[12] 田中、岸岡;"希釈硝酸カリウム拡散によって作られた方向性結合器の特性"、平4年電気系関西支部大会、G11-3 (1992).
[13] 田中、岸岡;"3導波路結合器を用いたマッハツェンダー形光フィルタ"、1993年信学会春季大会、C-229 (1993).
[14] G.B.Hocker and W.K.Burns;"Mode dispersion in diffused channel waveguides by the effective index method", Appl. Opt., **16**, pp.113-118(1977).
[15] T.Tamir, Ed.;"Integrated optics", Springer, pp.223-231(1975).
[16] J.Albert and G.L.Yip;"Refractive-index profiles of planar waveguides made by ion-exchange in glass", Appl. Opt., **24**, pp.3692-3693(1985).
[17] M.D.Feit, J.A.Fleck, Jr. and L.McCaughan;"Comparison of calculated and measured performance of diffused channel-waveguide couplers", J.Opt., Soc. Am., **73**, pp.1296-1304(1983).
[18] J.L.Jackel, K.Y.Lee and F.J.Favire;"Do glass waveguides depolarize ?", J. Lightwave Tech., **LT-3**, pp.818-819(1985).

輻射科学研究会資料
RS93-5

Fibre Loop Polarisers Using a Fused Taper Couplers

Katsumi MORISHITA and Kiyoshi ASO
森 下 克 己　　　　麻 生 潔

Graduate Course of Electronics and Applied Physics
Osaka Electro-Communication University
大阪電気通信大学
大学院工学研究科 総合電子工学専攻

1993年5月28日(金)
於 大阪電気通信大学

Fibre Loop Polarisers Using a Fused Taper Coupler

Katsumi MORISHITA and Kiyoshi ASO*
森 下 克 己　　　麻 生 潔

Graduate Course of Electronics and Applied Physics
Osaka Electro-Communication University
大阪電気通信大学 大学院工学研究科 総合電子工学専攻

Abstract

All-fibre polarisers using a fused taper coupler are presented. The polarisers are fabricated by constructing a fibre loop joining the output ports of a fused taper coupler. Input light splits into two linearly-polarised modes which are reflected and transmitted by the polarisers, respectively. The transmitted and the reflected lights become linearly-polarised. The demonstrated polariser shows extinction ratio of −20.0dB.

I. INTRODUCTION

Fibre type optical devices are currently of great interest in optical communications and fibre sensor systems. Polarisers are one of important components in coherent lightwave systems. Several types of structure have been proposed to provide polarisation-selective characteristics, including a birefringent crystal [1], [2] or a metal [3], [4] placed close to the fibre core, a highly birefringent fibre coil [5], [6], and a thin-film polarisation-splitting chip embedded in a single-mode fibre [7].

In this paper, we present a novel fibre-optic polariser which divides optical wave into two linear polarisation parts. The polariser is fabricated by constructing a fibre loop joining the output ports of a fused coupler. This structure is reported as a fibre loop reflector [8]. The polarisation properties of fused taper couplers are affected by cross-sectional shapes at the coupler waist [9]. The polarisation characteristics of a constituent fused coupler are adjusted by changing cross-sectional shapes and elongation lengths so that input light splits into two linearly-polarised modes. One is reflected by the polariser, and the other is transmitted. Consequently the transmitted and the reflected lights become linearly-polarised. To get the significant polarisation dependence of the constituent coupler, the proposed polarisers are much longer than conventional fused couplers. They, therefore, are wavelength-sensitive, and operate satisfactorily only over a small

---

* He is now with Hitachi Cable, Ltd.

range of wavelengths. They may be useful particularly for all-fibre polarising reflectors of linearly-polarised fibre lasers.

II. PRINCIPLE OF FIBRE LOOP POLARISERS

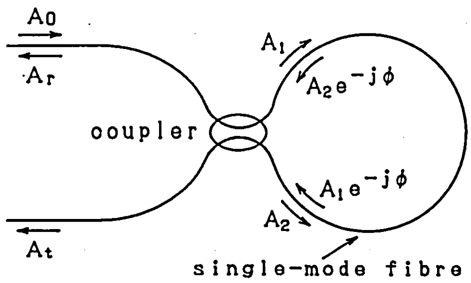


Fig.1 A fibre loop polariser configuration.

A fibre loop polariser is shown schematically in Fig.1. The output ports of a directional coupler are connected with each other. We consider a coupler constructed with two identical fibres. The relation between input and output amplitudes of the component coupler with polarisation dependence is expressed using the coupling mode theory as follows:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = exp^{-j\beta L} \begin{bmatrix} cos(C_{x,y}L) & -jsin(C_{x,y}L) \\ -jsin(C_{x,y}L) & cos(C_{x,y}L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

where β is a propagation constant of the fundamental mode, C_x and C_y are the coupling coefficients for the x- and the y-polarised fundamental modes, and L is the effective coupler length, respectively. The two counterrotating light components undergo the same phase change ϕ through the loop, and incident back to the coupler again. The reflected and the transmitted amplitudes, A_r and A_t, are given by

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_t \end{bmatrix} = exp^{-j\beta L} \begin{bmatrix} cos(C_{x,y}L) & -jsin(C_{x,y}L) \\ -jsin(C_{x,y}L) & cos(C_{x,y}L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 exp(-j\phi) \\ A_1 exp(-j\phi) \end{bmatrix} \tag{2}$$

The reflected and the transmitted powers, P_r and P_t, can be derived by using (1) and (2) as follows:

$$P_r = A_r A_r^* = P_{in} \cos^2(2C_{x,y}L) \tag{3}$$

$$P_t = A_t A_t^* = P_{in} \sin^2(2C_{x,y}L) \tag{4}$$

where the input power is $P_{in}=A_0A_0^*$, and * denotes the complex conjugate. The polarisation properties of the fibre loop reflector can be adjusted by changing cross-sectional shapes and elongation lengths so that the coupling coefficients and the coupler lengths satisfy the following equations.

$$2C_xL=M\pi, \quad 2C_yL=(N+0.5)\pi \tag{5}$$

or

$$2C_yL=M\pi, \quad 2C_xL=(N+0.5)\pi \tag{6}$$

where M and N are integers. In the case where a fibre loop reflector satisfies (5), the x-polarised mode is completely reflected, and the y-polarised mode is perfectly transmitted. In case of (6), conversely the x- and the y-polarised modes are transmitted and reflected, respectively. We, therefore, can obtain linearly-polarised light by using the proposed fibre loop polariser.

III. EXPERIMENTAL RESULTS

Fibre loop polarisers are fabricated using a manufacturing apparatus of fused taper couplers. While a flame is scanning back and forth, fused fibres are tapered slowly by pulling the fibres. The width of the heating zone is controlled by moving the flame. The scan length is 7mm. Butane and oxygen gas flows are 2.8ml/min and 16ml/min, respectively. The pull speed of each stage fixing fibres is 15μm/s. During polariser formation, the transmitted power is monitored in real time. We use a laser diode operating at 1.3μm wavelength with a line width of 1.86nm to observe the transmitted light through the polariser under fabrication. The fibre employed in the polariser (SS10A, Mitsubishi Cable Industries, Ltd.) is a conventional single-mode fibre with mode field diameter of 9.9μm at 1.3μm wavelength, relative index difference of 0.35%, second mode cutoff wavelength of 1.29μm, and fibre diameter of 125μm.

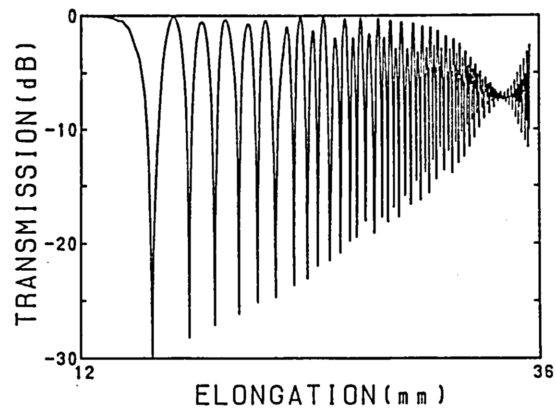


Fig.2 A typical transmitted power against elongation.

Fig.2 shows a typical transmitted power against elongation. Input light is reflected where the splitting ratio of the constituent coupler is 50 percent. As the constituent coupler is elongated further, polarisation effect becomes larger little by little, and the minimum and the maximum transmitted powers gradually increase and decrease, respectively. The difference between the minimum and the maximum transmitted powers becomes smallest in the vicinity where (5) or (6) is satisfied. Therefore we stop elongation and fusion of the component coupler at the time when fluctuation of monitored power gets smallest, and obtain a fibre loop polariser. If the x- and the y-polarised parts of input light are unequal, the smallest difference is relatively large. The fluctuation increases again according as the composing fused coupler is expanded further.

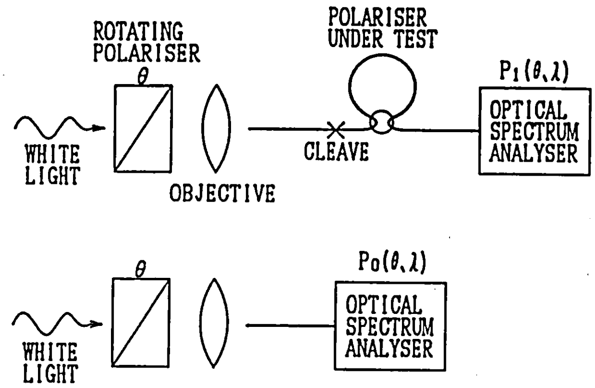


Fig.3 Experimental setup for measuring the spectral polarisation characteristics of fibre loop polarisers.

Fig.3 shows the experimental setup for measuring the spectral polarisation characteristics of fibre loop polarisers. White light from a tungusten halogen lamp is launched into the input fibre through a rotating polariser with extinction ratio of -50dB and an objective. An optical spectrum analyser which is set up to provide a resolution of 1nm is used to measure the spectral transmitted power, $P_1(\theta, \lambda)$, through the manufactured polariser under test. Subsequently the input fibre is cleaved without changing the incident condition, and the input power spectrum, $P_0(\theta, \lambda)$, is measured. The spectral transmissions for the x- and the y-polarised modes are calculated.

Fig.4 shows the spectral transmitted power of a fibre loop polariser for the x- and the y-polarised modes. Inset schematically indicates the cross-sectional shape of a constituent coupler. The elongation is 34.8mm long. The highest and the lowest transmissions are -6.8dB at 1.421μm and -19.0dB at 1.595μm for the x-polarised mode, and are -5.8dB at 1.503μm and -27.0dB at 1.419μm for the y-polarised mode. We can get good fibre loop polarisers when the transmitted powers for the x- and the y-polarised modes become maximum and minimum at the same

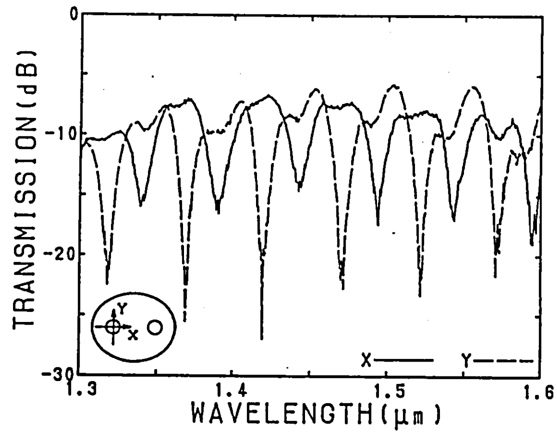


Fig.4 The spectral transmitted power of a fibre loop polariser for the x- and the y-polarised modes.

wavelength. The demonstrated polariser shows the maximum and the minimum transmissions for both orthogonally-polarised modes at a little different wavelengths. The transmissions are -6.9dB and -27.0dB for the x- and the y-polarised modes at 1.419μm, respectively. The period of spectral transmitted power is approximately 50nm. The minimum transmissions are relatively large for the x-polarised mode. At these wavelengths for the minimum transmissions, the transmitted power for the y-polarised mode is reduced. This may be caused by the mode conversion between the x- and the y-polarised modes. The conversion seems to result from stress birefringence of a constituent coupler, the form of the cleaved fibre end, pressure fixing fibres, and bending of fibres.

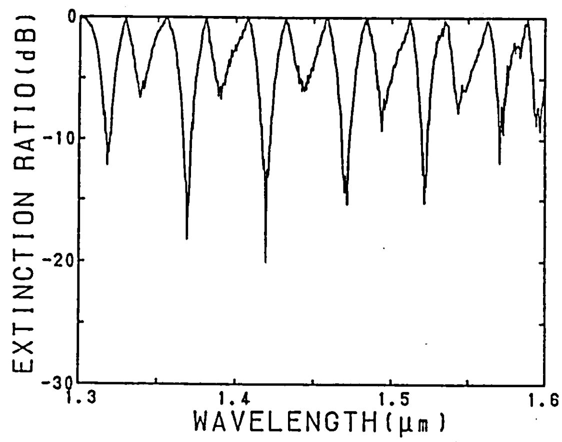


Fig.5 The extinction ratio of transmitted light against wavelength.

Fig.5 shows the extinction ratio of transmitted light against wavelength. The extinction ratio is computed from the difference between transmissions for the x- and the y-polarised modes. If randomly polarised light is launched into the fibre loop polariser, the transmitted light indicates the extinction ratio shown in Fig.5. The minimum extinction ratio is −20.0dB at 1.419μm. Therefore the transmitted wave at 1.419μm is the x-polarised light with extinction ratio of −20.0dB, and the insertion loss for the x-polarised mode is 6.9dB. The insertion loss is much larger than for conventional couplers, and can be reduced by reforming the coupler production apparatus. The transferred wave becomes the x- and the y-polarised modes by turns as operating wavelength grows longer. The period of spectral extinction ratio is about 50nm, and can be changed by the degree of fusion [9].

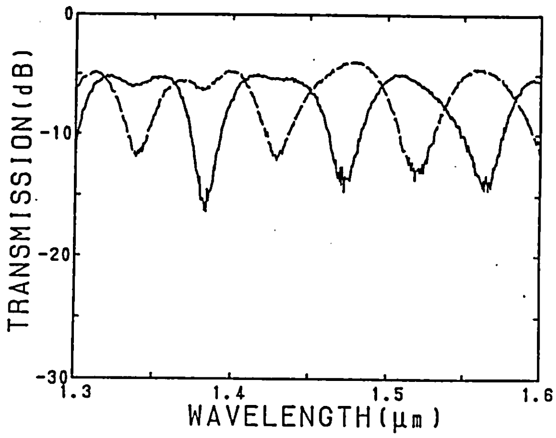


Fig.6 The spectral transmitted power of a fibre loop polariser fused strongly for two linearly-polarised modes.

Fig.6 shows the spectral transmitted power of a fibre loop polariser fused strongly for two linearly-polarised modes. The solid and the broken lines are the spectral transmissions for two orthogonally-polarised modes, respectively. However, we were not able to know which of them was the x-polarised mode, because the constituent coupler twisted a little. The elongation is 27.5mm long. The transmission is −4.1dB and −14.6dB for two orthogonally-polarised modes at 1.472μm wavelength. The fibre loop polariser indicates the extinction ratio of −10.5dB and the insertion loss of 4.1dB at 1.472μm. The insertion loss is less than that of the previous fibre loop polariser shown in Fig.4. However, the extinction ratio is worse because of mode conversion at the wavelengths for the minimum transmissions. The period of spectral transmission is about 90nm, and is 1.8 times longer than that shown in Fig.4.

Since fibre loop polarisers have long coupling region, they are very wavelength-sensitive and can operate only over a narrow wavelength range. One of orthogonally-polarised modes is reflected back along the input fibre, and the other is transmitted. Therefore the presented fibre polarisers may be useful for polarising reflectors of all-fibre linearly-polarised lasers and polarisation-selective filters.

IV. CONCLUSIONS

All-fibre polarisers using a fused taper coupler are presented. The polarisers are fabricated by constructing a fibre loop joining the output ports of a fused taper coupler. The polarisers divide optical wave into two linear polarisation modes. One is reflected back along input fibre, and the other is transmitted along output fibre. The transmitted and the reflected lights become linearly-polarised. The demonstrated fibre loop polarisers show extinction ratio of -20.0dB and -10.5dB and insertion loss of 6.9dB and 4.1dB, respectively. The period of spectral extinction ratio is about 50nm and 90nm, and can be changed by the degree of fusion of the constituent coupler. As the insertion loss is much larger than for conventional couplers, it seems to be reduced by improving the coupler production process. Since fibre loop polarisers can operate as polarising reflectors only over a narrow wavelength range, they may be effective particularly for polarising reflectors of all-fibre linearly-polarised lasers.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by the Nikko Kyodo Co., Ltd. The authors would like to thank H. Tanaka of Mitsubishi Cable Industries Ltd. for providing the single-mode fibres.

REFERENCES

[1] R. A. Bergh, H. C. Lefevre, and H. J. Shaw, "Single-mode fibre-optic polarizer", *Opt. Lett.*, vol.5, no.11, pp.479-481, November 1980.

[2] R. Kashyap, C. S. Winter, and B. K. Nayar, "Polarization-desensitized liquid-crystal overlay optical-fiber modulator", *Opt. Lett.*, vol.13, no.5, pp.401-403, May 1988.

[3] W. Eickhoff, "In-line fibre-optic polariser", *Electron. Lett.*, vol.16, no.20, pp.762-764, September 1980.

[4] L. Li, G. Wylangowski, D. N. Payne, and R. D. Birch, "Broadband metal/glass single-mode fibre polarisers", *Electron. Lett.*, vol.22, no.19, pp.1020-1022, September 1986.

[5] M. P. Varnham, D. N. Payne, A. J. Barlow, and E. J. Tarbox, "Coiled-birefringent-fiber polarizers", *Opt. Lett.*, vol.9, no.7, pp.306-308, July 1984.

[6] K. Okamoto, T. Hosaka, and J. Noda, "High-birefringence polarizing fiber with flat cladding", *J. Lightwave Technol.*, vol.LT-3, no.4, pp.758-762, August 1985.

[7] H. Yanagawa, T. Ochiai, H. Hayakawa, and H. Miyazawa, "Miniature fibre optic polariser", *Electron. Lett.*, vol.24, no.10, pp.596-597, May 1988.

[8] I. D. Miller, D. B. Mortimore, P. Urquhart, B. J. Ainslie, S. P. Craig, C. A. Millar, and D. B. Payne, "A Nd^{3+}-doped cw fiber laser using all-fiber reflectors", *Appl. Opt.*, vol.26, no.11, pp.2197-2201, June 1987.

[9] K. Morishita and K. Takashina, "Polarization properties of fused fiber couplers and polarizing beamsplitters", *J. Lightwave Technol.*, vol.9, no.11, pp.1503-1507, November 1991.

輻射科学研究会資料

RS 93-6

静磁波遅延線の非線形特性
－静磁波ソリトンの観測－

堤　誠
ウシュヌ　プリエ
京都工芸繊維大学　電子情報工学科

平成５年７月９日

あらまし

非線形項を含む透磁率テンソルを基に体積前進静磁波の分散特性をマルチプルスケール法により解析し，ＹＩＧ薄膜の厚みの関数として分散特性を数値的に評価した。次に非線形による分散特性の変化を遅延線の形で評価し，これを実験により確かめた。一方，付随して現われる静磁波ソリトンを実験的に調べられ，３GHzで150mw　0.1μsec幅のマイクロ波パルスが0.015μsecまでソリトンによりパルス圧縮される事を観測した。

I　まえがき

ＹＩＧ薄膜における静磁波のマイクロ波機器への応用としてフイルタや共振器そして遅延線などがある。[1][4] これらのマイクロ波機器はいずれも線形の静磁波の動作に関連している。一方、非線形な静磁波の応用として S/N 比エンハンサなどがあるが、[3] 最近では、この非線形の静磁波に見られるソリトンの研究が活発化している。[4][5]

本稿では非線形な静磁波が及ぼす分散特性の変化について摂動法を用いて理論的に明らかにし、[6][7] 遅延線の実験結果からこれを確かめる。次に付随して現れる静磁波ソリトンの観測結果について述べる。

II　理論

スピンの運動方程式において、高周波磁化および磁界の積の項を無視しないで求まる透磁率テンソルは†

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & j\chi & 0 \\ -j\chi & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ただし

$$\mu = 1 + \frac{\omega_h \bar{\omega}_M}{\omega_h^2 - \omega^2}$$

$$\chi = \frac{\omega \bar{\omega}_M}{\omega_h^2 - \omega^2}$$

$$\bar{\omega}_M \simeq \omega_M \left\{ 1 - \frac{1}{4} \frac{\gamma^2 \mu_0^2}{(\omega_h^2 - \omega^2)^2} \left[(\omega_h^2 + \omega^2)(|h_x|^2 + |h_y|^2) \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2j\,\omega_h \omega (h_x^* h_y - h_x h_y^*) \right] \right\}$$

$$\omega_h = \gamma \mu_0 H_0, \quad \omega_M = \gamma \mu_0 M_0$$

†湯川によって導出された。

となる。ここに$\bar{\omega}_H$の第二項が非線形を与える高周波磁界の自乗に関連する項である。ただし、この場合、非線形は小さいものと仮定し、4次の項は無視している。

この様な非線形媒質を含む電磁界問題を解くには摂動法が有効で、ここでもこの方法を採用する。

非線形項が小さいものとし、これをδの要素で表現すると、(1) 式は

$$\hat{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu + \delta\bar{\mu} & j(\chi + \delta\bar{\chi}) & 0 \\ -j(\chi + \delta\bar{\chi}) & \mu + \delta\bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

と置ける。ここに$\bar{\mu}, \bar{\chi}$ は場所の関数である。 問題の構成を図1に示す。この場合，厚さSのＹＩＧ薄膜の薄面に垂直に直流磁界$\mu_0 H_0$が加えられている。したがっ

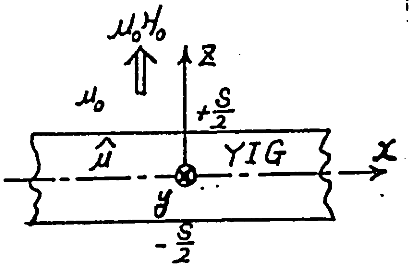


図1 問題の構成

てこの場合に現れる静磁波のモードは体積前進静磁波 (ＭＳＦＶＷ) である[1]。

y方向に波動が依存しないものとすると、x 方向の演算子 はマルチプルスケール法に従って[6][7]

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \delta \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad (3)$$

と、微小項δの一次で展開できる。静磁条件、$\nabla \times H = 0$ から求まる磁位ϕを (3) 式と同様に

$$\phi = \phi_0 + \delta \phi_1 \qquad (4)$$

とδの一次の項で展開し、$\nabla \cdot B = 0$と (2)，(3)，(4) 式から、ＹＩＧ中で

$$\mu\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2}=0 \qquad \delta^0$$

(5)

$$\mu\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}=-2\mu\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial\phi_0}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\bar{\mu}\frac{\partial\phi_0}{\partial x_0}\right), \qquad \delta^1$$

の微分方程式を得る。ここに

$$\bar{\mu}=a\left|\frac{\partial\phi_0}{\partial x_0}\right|^2$$

$$a=-\frac{1}{4}\frac{\omega_h\omega_M(\omega^2+\omega_h^2)\delta^2\mu_0^2}{(\omega_h^2-\omega^2)^3}$$

一方、空気中では磁位を$\bar{\phi}$とすると

$$\frac{\partial^2\bar{\phi}_0}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\bar{\phi}_0}{\partial z^2}=0 \qquad \delta^0$$

$$\frac{\partial^2\bar{\phi}_1}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\bar{\phi}_1}{\partial z^2}=-2\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial\bar{\phi}_0}{\partial x_1} \qquad \delta^1 \qquad (6)$$

の微分方程式を満足する。

磁界の接線成分が$z=\frac{S}{2}$で連続である境界条件は

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial x_0}=\frac{\partial\bar{\phi}_0}{\partial x_0} \qquad \delta^0$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x_0}+\frac{\partial\phi_0}{\partial x_1}=\frac{\partial\bar{\phi}_1}{\partial x_0}+\frac{\partial\bar{\phi}_0}{\partial x_1} \qquad \delta^1 \qquad (7)$$

であり、磁束密度の法線方向が連続の境界条件は

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial z}=\frac{\partial\bar{\phi}_0}{\partial z} \qquad \delta^0$$

(8)

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=\frac{\partial\bar{\phi}_1}{\partial z} \qquad \delta^1$$

である。

δ^0, 零次の界を

$$\phi_0=A_0\cos k_z z\, e^{-j\beta x_0} \quad \text{(YIG中)}$$

$$\bar{\phi}_0=C_0 e^{-\bar{\gamma}(z-\frac{S}{2})}e^{-j\beta x_0} \quad \text{(空気中)}$$

(9)

と置けば, (5), (6) の零次の微分方程式から

$$k_z=\sqrt{-\mu}\,\beta \quad , \quad \bar{\gamma}=\beta$$

の関係を得る。（9）式と零次の境界条件，（7），（8）式から分散関係式

$$\beta = \frac{2}{s\sqrt{-\mu}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{-\mu}} \tag{10}$$

を得る。

一方，（9）式の零次界を（5），（6）式のδの一次の微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + k_2^2 \phi_1 = P_3 \cos k_2 z + \frac{P_2}{4} \cos 3k_2 z \\ &P_3 = P_1 + \frac{3}{4} P_2 \\ &P_1 = 2j\beta\mu \frac{\partial A_0}{\partial x_1} \\ &P_2 = \beta^4 a A_0 |A_0|^2 , \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \bar{\phi}_1}{\partial z^2} - \bar{\gamma}^2 \bar{\phi}_1 = P_4^0 e^{-\bar{\gamma}(z - \frac{s}{2})} \\ &P_4^0 = 2j\beta \frac{\partial C_0}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{12}$$

を得る。

（11）式の解は

$$\phi_1 = \left\{ \frac{P_3}{2k_2} z \sin k_2 z - \frac{P_2}{32 k_2^2} \cos 3k_2 z + A_1 \cos k_2 z \right\} e^{-j\beta x_0} \tag{13}$$

であり，（12）式の解は

$$\bar{\phi}_1 = \left\{ -\frac{P_4^0}{2\bar{\gamma}} z e^{-\bar{\gamma}(z - \frac{s}{2})} + C_1 e^{-\bar{\gamma}(z - \frac{s}{2})} \right\} e^{-j\beta x_0} \tag{14}$$

である。（13），（14）式におけるA_1, C_1は未知定数である。

（13），（14）式の界と（9）式の零次界をδの一次の境界条件，（7），（8）式に代入し，分散関係式（10）式を用いて，定数A_1, C_1を消去すると，

$$Q_2 + \bar{\gamma} Q_1 = 0 \tag{15}$$

$$Q_1 = \frac{s}{4k_2} P_3 \sin k_2 \frac{s}{2} - \frac{P_2}{32 k_2^2} \cos 3k_2 \frac{s}{2} + \frac{P_4^0}{4\bar{\gamma}} s$$

$$Q_2 = \frac{P_3}{2k_2}\left(\sin k_2\frac{S}{2} + \frac{S}{2}k_2\cos k_2\frac{S}{2}\right) + \frac{3P_2}{32k_2}\sin 3k_2\frac{S}{2} + \frac{P_4}{2\bar{\gamma}}\left(1 - \frac{\bar{\gamma}S}{2}\right)$$

を得る。(15) 式はまた，零次界の振幅 A_0 で

$$\frac{\partial A_0}{\partial x_1} = j\eta\,|A_0|^2 A_0 \qquad (16)$$

$$\eta = \frac{\beta^3 a\left\{\frac{1}{32k_2}\eta_1 + \frac{3}{8}\eta_2\right\}}{2\left\{\frac{\mu}{2k_2}\left(1+\frac{S\bar{\gamma}}{2}\right)\sin k_2\frac{S}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{S}{2}\mu + \frac{1}{\bar{\gamma}}\right)\cos k_2\frac{S}{2}\right\}}$$

$$\eta_1 = 3\sin 3k_2\frac{S}{2} - \frac{\bar{\gamma}}{k_2}\cos 3k_2\frac{S}{2}$$

$$\eta_2 = \frac{1+\frac{S}{2}\bar{\gamma}}{k_2}\sin k_2\frac{S}{2} + \frac{S}{2}\cos k_2\frac{S}{2}$$

と表現できる。

(16) 式の解は

$$A_0 = C\,e^{j\eta|C|^2 x_1}$$
$$\beta_1 = \eta\,|C|^2 \qquad (17)$$

で与えられる。[6]

この様に非線形によって変化する伝搬定数 β_1 は A_0 の振幅の自乗 $|C|^2$ に比例する。いま，β_1 の値を周波数の関数として数値的に評価し，さらに (10) 式の非摂動界の伝搬定数の数値計算結果と併して図示すると，図２のごとくなる。同図では薄膜の厚さ S をパラメータとして描いている。また，$|C|^2$ は 0.01 に選んでいる。
なお，図中の一点鎖線は本摂動法の限界を与える量で，物理的な意味を持たない。

この様に非線形により分散性が弱まり，その変化は薄膜の厚さ S が薄い程著しい。この関係をより明確にするために，遅延 τ_g を

$$\tau_g = \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \qquad (18)$$

から数値的に評価し，求めた結果を図３に示す。これから遅延は非線形により小さくなり，さらに大きさは $|C|^2$ に比例する事になる。

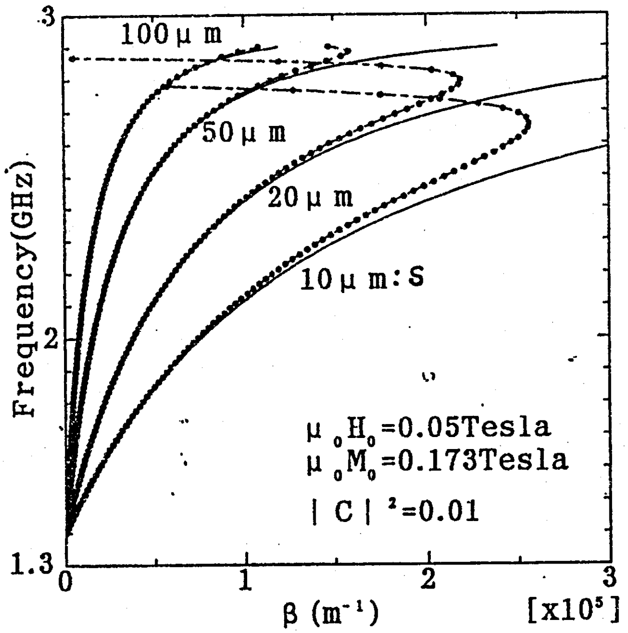


図2　分散特性

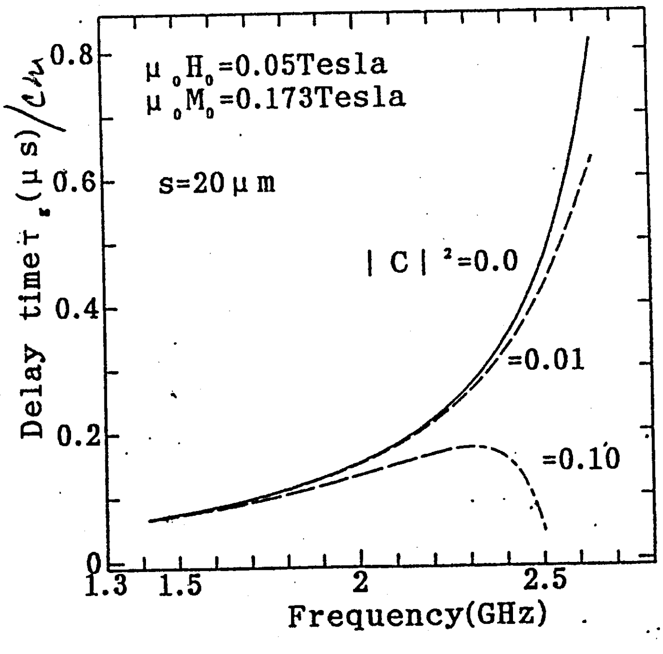


図3　遅延特性

ここで，$|C|^2$ の値にたいして具体的に静磁波の電力から評価する。$|C|$ は（9）式のϕ_0の振幅A_0に関連するから，静磁波のポインティング電力P_xは

$$P_x = 2 \times \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} j\omega \, \phi^* B_x \, dz \right\} \tag{19}$$

で，P_xが１Ｗとし，(19) 式に（９）式を代入して求まる振幅A_0は

$$|A_0|^2 = \frac{2}{-\omega\mu_0 \left\{ \cos^2 k_2 \frac{s}{2} + \frac{\mu B}{2k_2} \left(\sin k_2 s + k_2 s \right) \right\}}$$

で与えられる。

$|A_0|^2$の値をＭＳＦＶＷの帯域で数値的に評価し，描くと，図４のごとくなる。同図から平均して$|A_0|^2$の値は2×10^{-4}の値であり，この値は図３および図４に示した $|C|^2$ の値に比べて100分の１である。

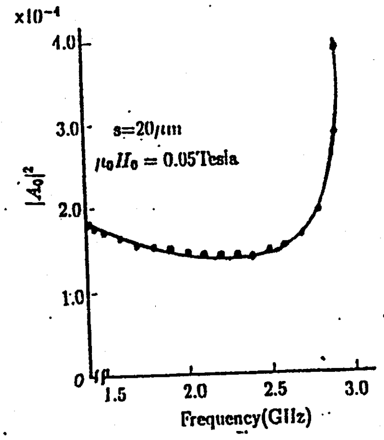


図４　電力の周波数依存性

Ⅲ　実験結果

実験に用いたＹＩＧ薄膜は100μmと20μmの厚さのもので，寸法は５mm×20mmである。このＹＩＧ上に入出力の線状アンテナを設置し，かつ直流磁界を薄面に垂直に印加し，静磁波遅延線を図５に示すように構成する。なお，遅延線の損失を減らすために磁極は凹形に削り，ＹＩＧ薄膜を不均一に磁化する。[8]入力マイクロ波信号はGaAs 増幅器により増幅し，最大電力は４５０ｍｗである。

図６は１００μｍ厚のＹＩＧ薄膜における静磁波遅延線の電力依存性を示す。また図７は20μｍ厚の場合である。いずれも入力電力の大きさは数ｍｗから数100 ｍｗであるが，電力が大きくなると，遅延は小さくなる傾向を示し，特に厚みの薄い，20μm の場合はその傾向は著しい。

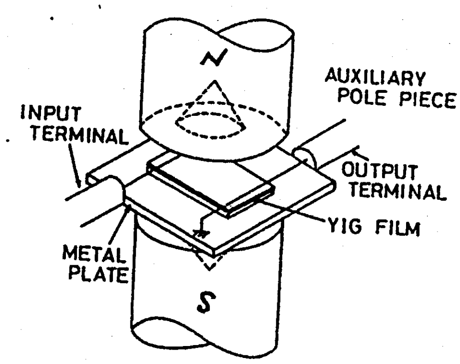


図5　実験装置

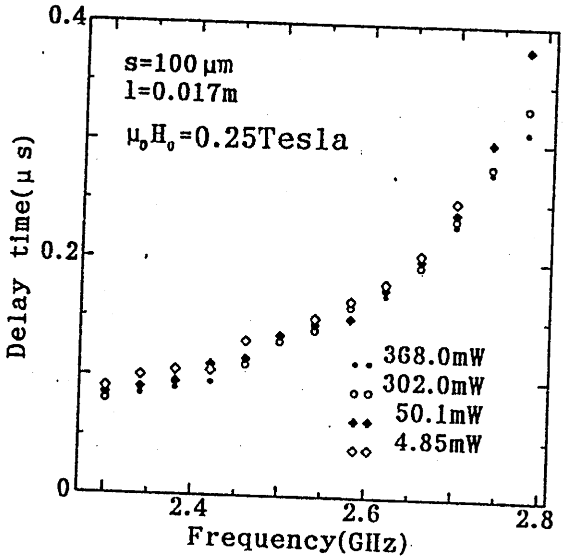


図6　100μm厚のＹＩＧにおける 遅延線の電力依存性

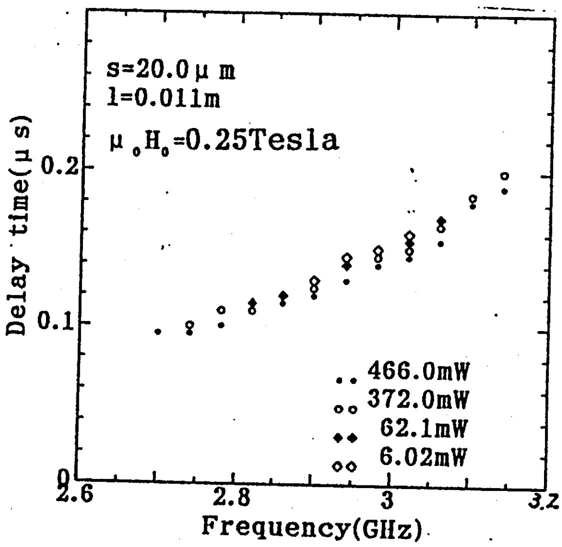


図7　20μm厚のＹＩＧにおける 遅延線の電力依存性

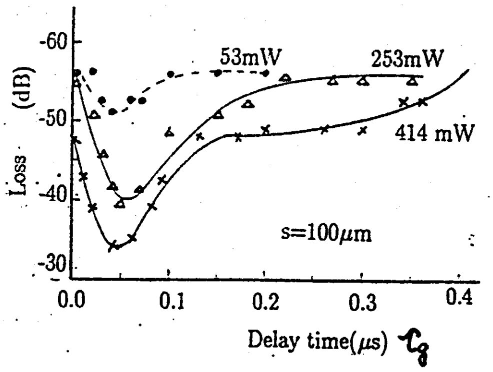


図８　伝搬損の電力依存性

図８は100μm厚のＹＩＧ薄膜にたいする遅延と損失（伝搬損と励振損の和）との関係を電力を変えて測定したものである。電力の大きさに関係なく損失は0.05μsecの遅延にたいして最小となるが，大きさは３２dBとかなり大きい。なおこの場合入力電力が変化しているので、電力の違いによる損失の変化はあまり意味をもたない。

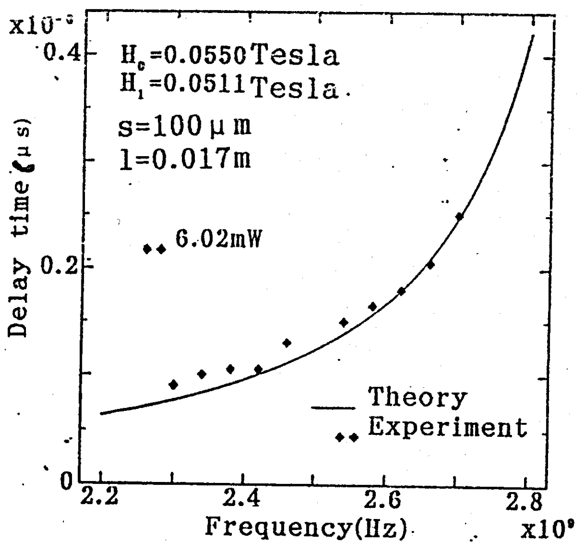
図９は図６に示す4.85ｍｗの場合の遅延の実験結果にたいして理論値を描いている。この場合，理論値は（13）式で与えられるが，実験結果の場合，磁界が薄膜の中央に弱く，両端で強い形でＹＩＧ薄膜を不均一に磁化しているため，（18）式を

$$\tau_g = \int_0^l \frac{\partial \beta}{\partial \omega}\, dy \tag{20}$$

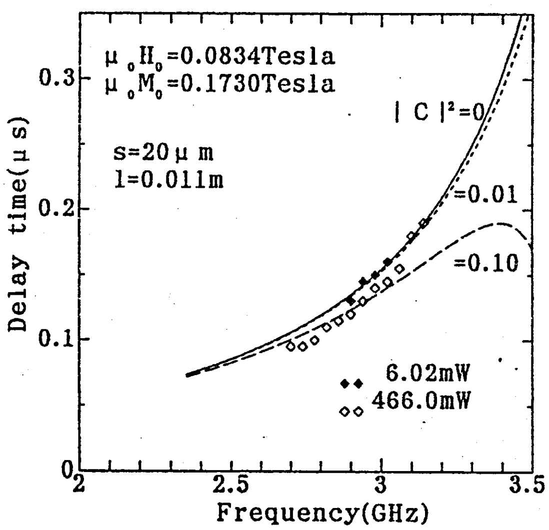
と積分の形で評価する。(8) ここに l は薄膜の長さである。磁界が７％中央部で弱いとして求まる遅延の理論値を実線で図９の（ａ）に示している。同図から実験値と理論値とは一致する事が分かる。

次に20μｍ厚の薄膜の場合の理論値を図９の（ｂ）に示す。この場合，電力が6.02ｍｗの場合の実験値と理論値との比較であるが，両者は良く一致する。なお不均一磁界の分布は３％と仮定している。また，図９の（ｂ）には図７に示す電力が４６６ｍｗの場合の遅延の実験結果も示している。ここで図３に示した非線形における遅延の理論結果と比較する必要がある。この場合，$|C|$ の値によって理論値は大幅に変化する。参考のために図９の（ｂ）には $|C|^2=0.01$ での遅延の値を描いている。この場合，実験値との一致は見られないが，実験値に一致させて考えると，$|C|^2=0.1$ 位になる。この値は図４に示す $|\Lambda_0|^2$ の値に比べて二桁以上大きい。この違いは（１）式の非線形項を小さく見積もったことと，不均一磁界による非線形効果が助長された事によるものと考える。

この様に透磁率の非線形性により静磁波の分散性が弱まる事が明らかになったが，これに関連して非線形により遅延線のパルス圧縮作用，ソリトンが観測される。



(a)　　100μm厚の場合



(b)　　20μm厚の場合

図９　実験値と理論値との比較

図10のa，b，cは周波数を 2.6GHzに固定し，電力を３８mwから４００mw迄変えた場合の遅延線のパルス信号の波形である。一方，図11のa，b，cは電力を400mwに保ち，周波数を2.48GHzから 2.655GHzまで変えた場合の遅延の振幅特性である。図10で電力が数100mw以上になると，同時に示す入力パルスの波形に比べてパルス圧縮され，ソリトン状になる事が分かる。一方，図11からある遅延になると，パルスは圧縮され，ソリトンが現れ，遅延量とソリトン形成との間に何らかの関係がある事が分かる。図12はパルス幅と電力との関係を示すが，この結果からパルス信号は５分の１に圧縮されるが，150 mw位で圧縮は飽和される。

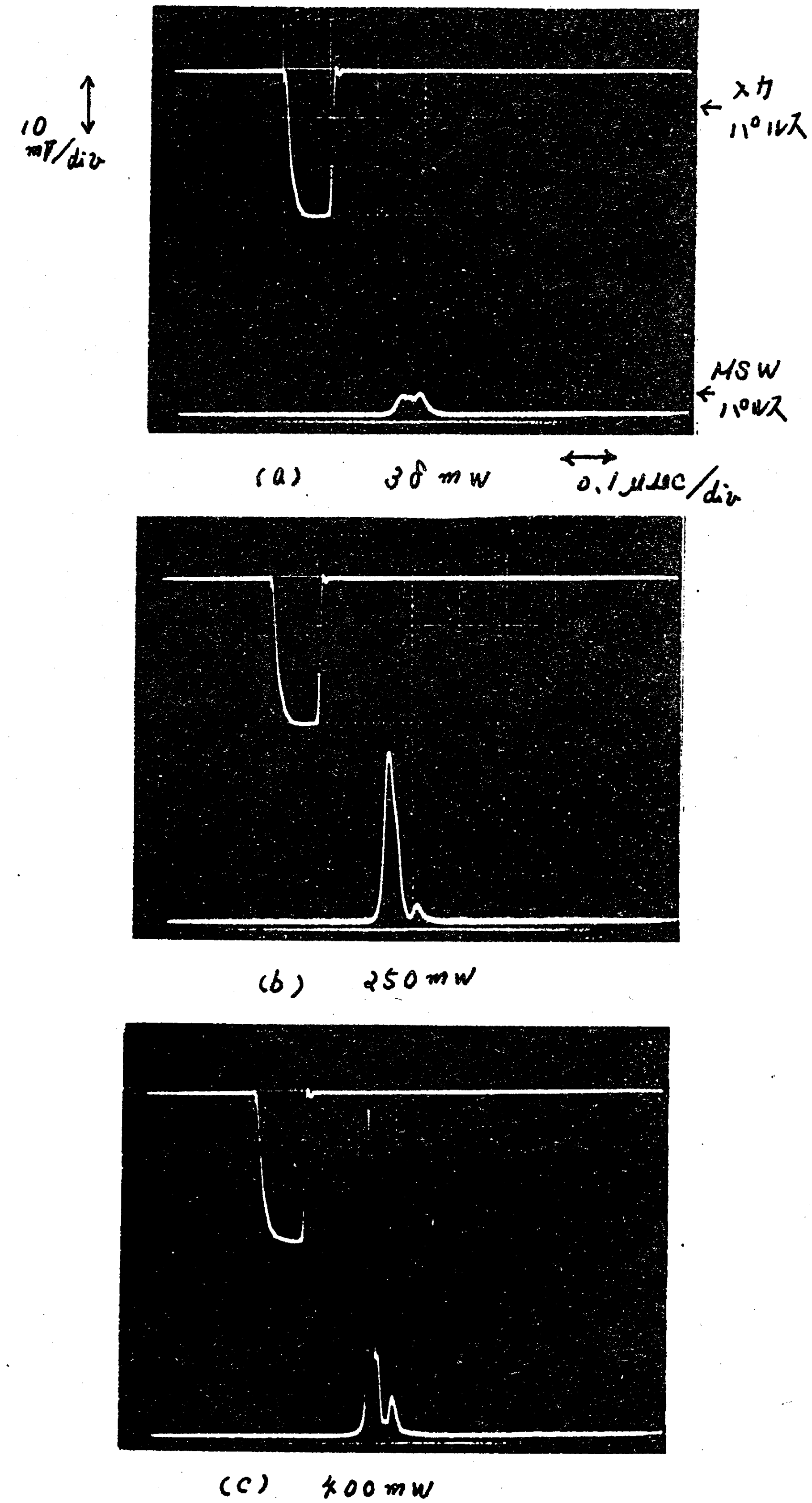
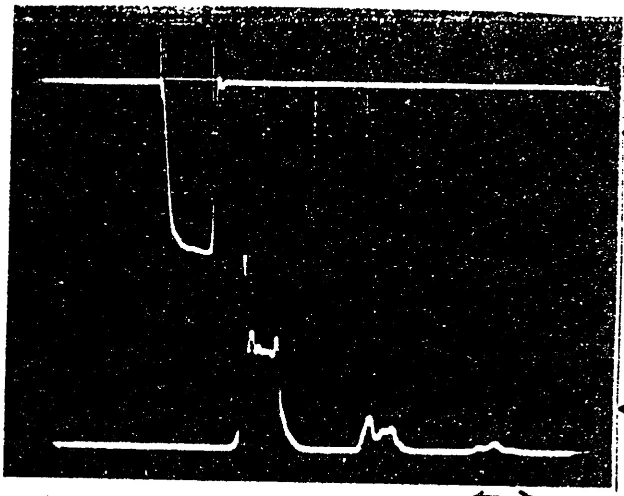


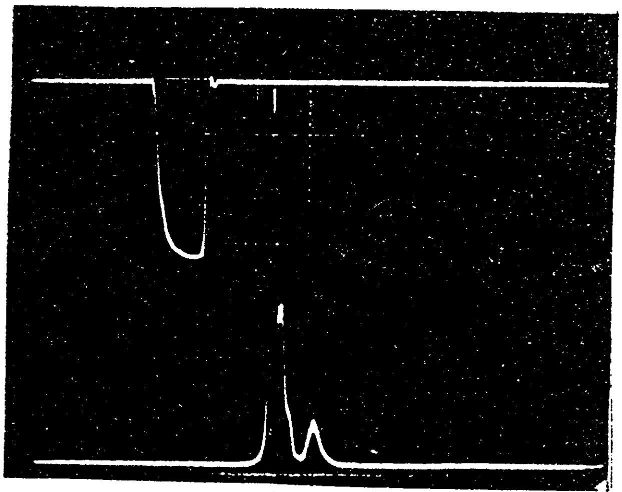
図10　パルス信号の電力依存性



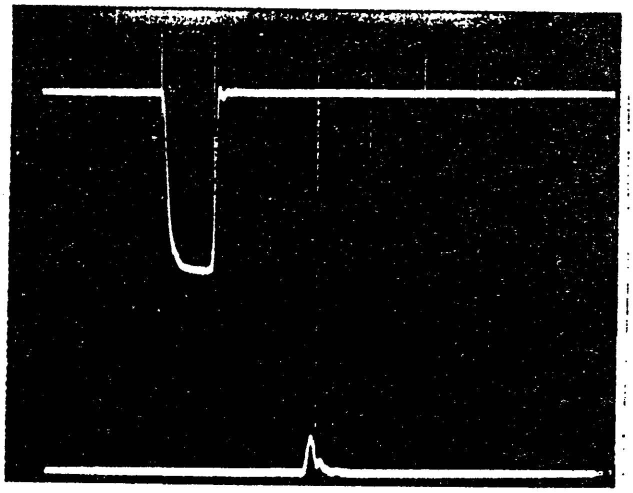
← 入力パルス

←MSW パルス

(a)　2.48 GHz　0.1μsec/div



(b)　2.6 GHz



(c)　2.655 GHz

図11　周波数の変化によるパルス圧縮

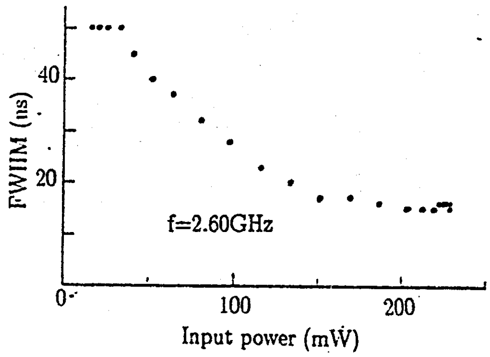
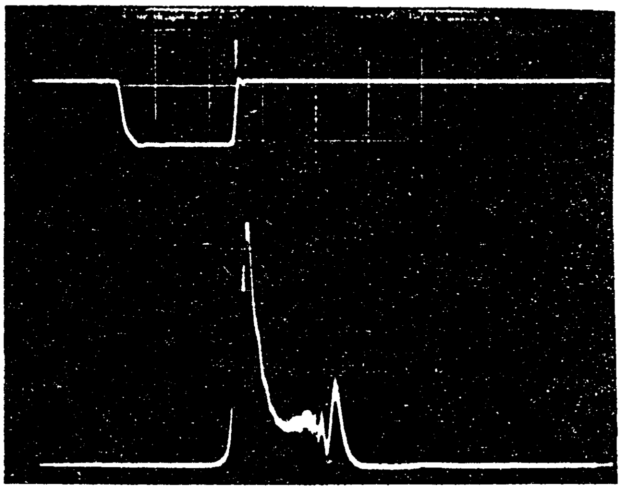


図12　パルス圧縮の特性

一方，図13は周波数を 2.596GHzに固定しパルス幅を広くした場合の特性である。この場合，入力電力は 450mwである。この様にパルス幅の増加で不安定現象，一種のカオス現象が生じる事になる。



f: 2.596 GHz
P: 450 mW

図13　遅延パルスの不安定現象　0.1μsec/div

以上ソリトンの観測結果を示したが，これらの結果は Kalinikov らによって報告されたパルス圧縮特性と類似するが，(4) 不均一磁界を用いているため．数mwのかなり弱い電力でソリトンが現れる。

ソリトンの発生については分散特性のみから論じる事ができず，非線形のシュレデインガの方程式の解に関連するが，(9) これに関しては今後検討する予定である。一方，静磁波ソリトンのパルス圧縮作用はレーダ信号などの処理に応用可能である。

Ⅳ むすび

非線形を含む透磁率テンソルを基に体積前進静磁波の分散特性をマルチプルスケール法により導出し，ＹＩＧ薄膜の厚みの関数として数値的に評価した。次に非線形による分散特性の変化を遅延の形で評価し，実験によりこれを確かめた。一方，付随して現れる静磁波ソリトンを実験的に調べられ，３GHzで 0.1 μsecのパルス幅が５分の１程度，圧縮される事を観測した。

以上，非線形の効果が理論値よりも実験的にきわめて顕著に現れる事が分かった。これに関しては非線形を含む透磁率テンソルを不均一に磁化された状態でより詳しく評価する必要がある。また，ソリトンに現れるパルス圧縮作用をレーダ信号処理などに応用してゆく事も一つの研究課題である。

謝辞

静磁波の非線形現象に関して常日頃御討論いただく岐阜大学教育学部の湯川敏信助教授ならびにＹＩＧ薄膜の提供などでお世話になっている村田製作所の関係各位に感謝の意を表す。

文 献

１） 堤 誠
"静磁波のマイクロ波デバイスへの応用"
電子情報通信学会誌. 74, 12, pp. 1292-1297
(1991年12月).

２） M. Tsutsumi
"Application of magnetostatic wave to microwave devices"
Microwave Workshop Digest
pp. 231-236 (Sept. 1992).

３） 松下吉広，野本俊裕
"ＭＳＷ飽和過渡応答特性改善のための一検討"，電子情報通信学会春季大会
2-577 (1993年3月).

４） B. A. Kalinikos, N. G. Kovshikov and A. N. Slavin
"Effect of magnetic dissipation on propagation of dipole spin-wave envelope soliton in Yttrium Iron Garnet films",
IEEE Trans Magnetics, 28, 5, pp. 3207-3209,
(Sept. 1992).

５） P. De Gasperis, R. Marcelli and G. Miccoli, "Microwave solitons in magnetic garnet films"
J. of Apple Phys. 63, (8), 15
pp. 4136-4140 (April 1988).

6） 横川光広，安元清俊
“非線形フイルムを持つ３層スラブ導波路におけるＴＭ波の解析”
電子情報通信学会，光量子エレクトロニクス研究会資料 OQE90-1441(1991年1月)
7） M. Tsutsumi, T. Ohira, T. Yamaguchi and N. Kumagai
“Reflection of millimeter waves by a corrugated dielectric slab waveguids”
Proc. IEEE, 68, 6. pp. 783-734(June 1981).
8）堤 誠，田中勝之，熊谷信昭
“ＹＩＧ薄膜を用いた静磁波遅延線の損失の軽減化について”
電子情報通信学会誌 J68-B, 12, pp. 1444-1450 (1985年12月).
9）M. chen, J. M. Nash, and E. Patton
"A numerical study of nonlinear schrödinger equation solutions for microwave solitons in magnetic thin films"
J. of Appl Phys 73(8) pp. 3906-3909 (15 April 1993).

輻射科学研究会資料

ＲＳ９３－７

高温超伝導薄膜の伝送線路共振器および フィルタへの応用

榎原　晃，瀬恒謙太郎

（松下電器産業株式会社　中央研究所）

平成５年７月９日

高温超伝導薄膜の伝送線路共振器およびフィルタへの応用

榎原　晃，瀬恒謙太郎

（松下電器産業株式会社　中央研究所）

1．はじめに

近年，高温超伝導材料をエレクトロニクスの分野に積極的に応用しようとする研究が盛んに行われている．マイクロ波，ミリ波領域の高周波素子においても，高温超伝導体の利用がその高性能化に有効であるものと期待されている．

このような超伝導体の高周波応用では，超伝導体自身の低損失・低分散性を生かして，フィルタなどの受動素子に利用するもの[1-16]と，超伝導体特有のジョセフソン効果を利用して能動素子を作製しようとするものとに分けることができる．後者の例としては，高周波ミキサー[17,18]や検出器[19]などにおいて，半導体材料では実現不可能な高性能素子を実現できる可能性があるが，高温超伝導体を用いて高品質のジョセフソン接合を作製するには現状では多くの困難があり，今後の進展のためにはプロセス技術の更なる発展が必要である．これに対して，前者の受動素子では素子作製上の困難は比較的少ないことから，早期の実用化への期待が高まってきている．

超伝導体を高周波受動素子に応用する利点としては，１つには言うまでもなく，超伝導体の低損失性によって，損失が問題となるような素子の特性改善を図ることができる点にあるが，さらに，もう一つの利点として，マイスナー効果による影響がある．超伝導体では電磁場の侵入深さは磁場

侵入長（magnetic penetration depth）に依存し，通常，それは電磁場の周波数にほとんど影響されない．したがって，超伝導体で形成した伝送線路では，線路の内部インダクタンスの周波数変化が非常に少なく，高周波の伝搬速度の周波数分散がほとんどなくなる．そのため，分散特性が問題となる長距離・高密度のパルス伝送においても良好な特性を示すものと期待される．これに対し，通常の金属で伝送線路を構成した場合，侵入深さ（表皮深さ：skin depth）は表皮効果のために周波数の平方根に反比例して変化することから，周波数分散が問題となる場合がある．

このように，超伝導体を用いれば，超低損失・超低分散の理想的な伝搬特性を実現できる可能性がある．そのため，損失や分散がその性能を制限しているような高周波受動素子において，超伝導体利用の有効性が特に高いものと考えられる．さらに，高温超伝導材料を用いて液体窒素温度程度での動作が可能になれば，素子冷却に対する負担を大きく低減させることができる．実際に，共振器[1–5]，フィルタ[6–9]，遅延線路[10,11]，アンテナ[12,13]，さらには，光変調素子の変調電極[14–16]などにおいて，高温超伝導体を応用しようとする研究がなされている．

本報告では，このような高温超伝導体の高周波受動素子への応用について述べる．まず，高温超伝導薄膜を用いて伝送線路共振器を作製し，超伝導薄膜の高周波特性の評価を行った結果について述べ[5]，つぎに，小型化により適した構造を有する小型ヘア・ピン共振器[20,21]を基本に構成されたフィルタ[9]を試作し，その特性について検討した結果について述べる．さらに，最後に付録として，超伝導体の高周波特性について理論的な面から検討する．

2．伝送線路共振器

超伝導体を高周波素子に利用する場合，本材料の高周波での特性を検討する必要がある．特に高温超伝導体は，その超伝導メカニズム自体も明らかにされていないことから，高周波特性評価は，高温超伝導体の高周波応

用の有効性を確かめる上で重要であるとともに，その伝導メカニズム解明の手がかりを与える可能性もある．

超伝導体のような高周波損失が極めて小さいと予想される材料に対する高周波特性の評価には，同材料を用いて共振器を構成し，その共振特性から高周波特性を検討する方法が適している．この様な目的のために，空洞共振器[22,23]，あるいは，伝送線路共振器[1,3–5]の利用が考えられる．この中で，伝送線路共振器は薄膜超伝導体の評価に利用することができ，さらに，線路を基板上で曲げることによって，小さな基板上にでも比較的広い周波数範囲の共振器を構成できる．これは，空洞共振器が共振周波数の半分程度の大きさの試料が必要なことに対して有利な点である．伝送線路として一般的に良く利用される代表的な構造のものには，ストリップ線路，マイクロストリップ線路，そして，コプレナー線路の３種がある．その中で，コプレナー線路では，中心線路とグランドプレーンが基板片面に構成されるのに対して，他の線路ではグランドプレーンは基板の裏面に形成する必要がある．通常，基板両面に良質の高温超伝導薄膜を形成することは困難であることから，コプレナー線路は容易に高温超伝導体だけで線路を構成できる利点がある．以下では，高温超伝導薄膜を用いてコプレナー線路共振器を作製し，高周波特性の評価を行った結果について述べる．

２－１．超伝導薄膜の作製

実験には，高周波マグネトロンスパッタンリグ法によって作製した，$GdBa_2Cu_3O_x$，および，$Bi_2Sr_2CaCu_2O_x$（低T_c相）超伝導薄膜を利用した．作製条件を表１および２に示す．膜の化学組成は，ＩＣＰ定量分析により化学量論比に対して 10％ の範囲内にあり，また，結晶学上の c 軸は膜表面に垂直であることを確認した．両薄膜は表面状態を良好に保つために，作成後の高温アニールなどは行わずに用いた．as-grown での超伝導転移温度（T_c）は，GBCO が 78〜82 K，BSCCO が約 58 K であった．

表１　$GdBa_2Cu_3O_x$超伝導薄膜の作製条件

基板	(100) MgO 単結晶
ターゲット組成	Gd:Ba:Cu=1:2:4.5
ターゲット径	100 mmϕ
スパッタガス	Ar:O_2=4:1
ガス圧	0.5 Pa
高周波電力	150 W
基板温度	600～650℃
堆積率	14 nm/min

表２　$Bi_2Sr_2CaCu_2O_x$超伝導薄膜の作製条件

基板	(100) MgO 単結晶
ターゲット組成	Bi:Sr:Ca:Cu=2.1:1:0.5:1
ターゲット径	100 mmϕ
スパッタガス	Ar:O_2=1:5
ガス圧	0.5 Pa
高周波電力	150 W
基板温度	600℃
堆積率	15 nm/min

2－2．実験

図1にコプレナー線路共振器の回路パターンを示す．中心線路幅は 200 μm，グランドプレーンとの間隔は 80 μmとし，線路長 26.7 mm で，線路両端では，20 μm 間隔のギャップによって引き出し線路と結合させている．MgO 基板の誘電率が 9.2 とすると，線路の特性インピーダンスは約 50 Ω となる．実験には，先に述べた条件により作製した GBCO（ 450 nm 厚）および BSCCO （ 610 nm 厚）超伝導薄膜を使用した．超伝導薄膜のパターン化には，ネガ型フォトレジストＯＭＲ（東京応化）を用いたフォトリソグラフィーと Ar イオンビームエッチング法を利用した．エッチングの際のイオン加速電圧は 550 V に設定し，約 30 分間のエッチングによりパターン化が完了した．作成後の素子は，銅製の冶具内に固定し，ヘリウムガス循環式の冷却器によって冷却，および，温度制御を行った．高周波特性の測定には HP-8510B ネットワークアナライザを用いた．

図2には，基本共振モードで測定した負荷Q (Q_L)，および，挿入損失 L_0 [dB] と Q_L とから求まる無負荷Q (Q_0)の温度変化，および，比較のために作製した金薄膜（200 nm 厚）からなる同構造の共振器の Q_0 を示す．ここで，本共振器のような2ポートの共振器の Q_0，外部Q (Q_e)，および，L_0の間には以下のような関係が成り立つ．[20]

$$Q_0=L_0/[\Omega_1(L_0-1)]$$

$$Q_e=2L_0/\Omega_1$$

ここで，

L_0 :共振周波数での減衰量

$$\Omega_1=|\omega_1/\omega_0-\omega_0/\omega_1|$$

ω_0 : 共振角周波数，　ω_1 : 減衰量が L_0+3dB となる角周波数

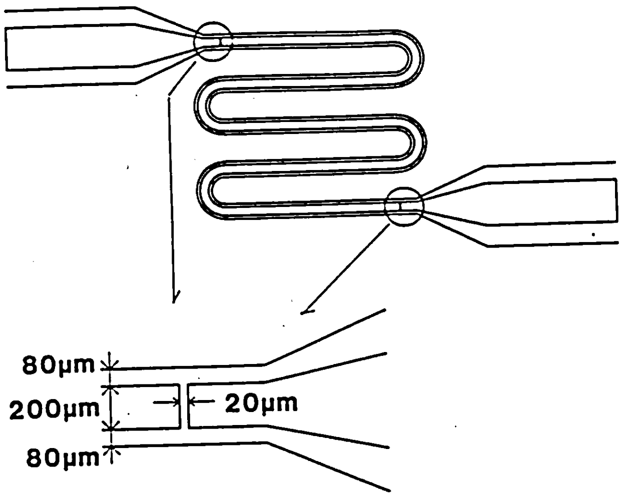


図１　コプレナー線路共振器のパターン

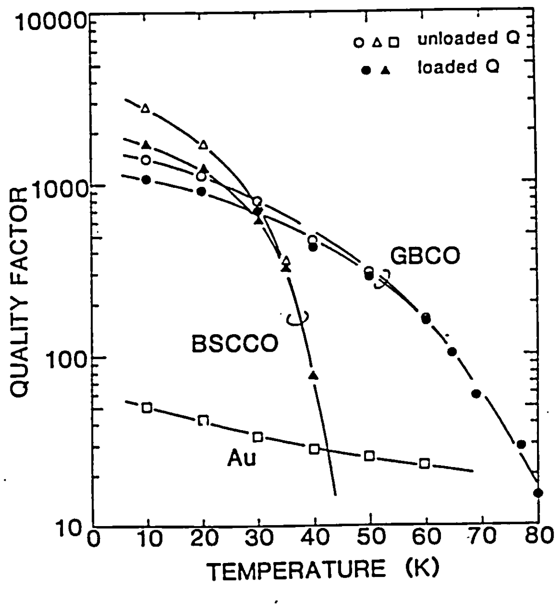


図２　Q 値の温度変化

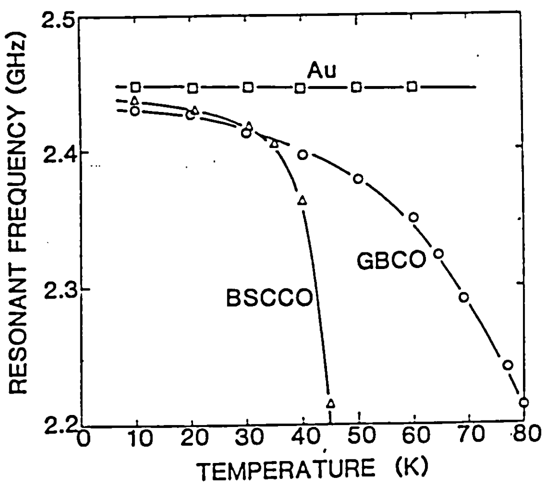


図３　共振周波数(f_0)の温度変化

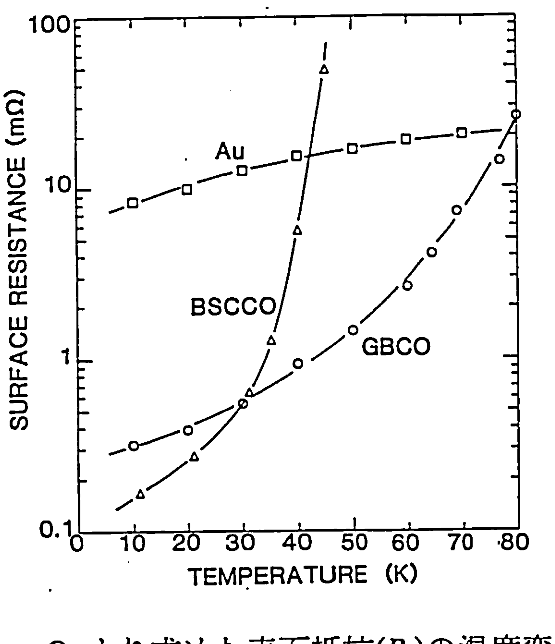


図４　Q_0より求めた表面抵抗(R_s)の温度変化

図２からもわかるように，10 K での Q_0 値については，GBCO が 1340, BSCCO が 2710, 金が 50 である．高温超伝導薄膜による共振器の Q 値は金属の共振器の Q 値に比べ，超伝導状態においてはかなり大きいことがわかる．また，図３は基本共振モードでの中心周波数（f_0）の温度依存性を示す．超伝導体では，T_c 近傍の温度では磁場侵入長 λ が増加し，力学的インダクタンスの影響で高周波の伝搬速度が減少するため，共振周波数低下するものと考えられる．[24]

伝送線路共振器の Q_0 は，損失の要因によって以下のように分けて表すことができる．

$$1/Q_0=1/Q_c+1/Q_r+1/Q_d$$

但し，Q_c, Q_r, Q_d は，それぞれ，線路の導体損失，放射損失，基板の誘電損失に関する Q 値である．ここで本共振器について考えてみると，$1/Q_0$ は，図２の結果からもわかるように，超伝導共振器および金の共振器でそれぞれ 10^{-3} および 10^{-2} のオーダーである．これに対して，$1/Q_d$ は基板材料の $\tan\delta$ に等しく，MgO結晶の場合は 77 K で 10^{-5} 以下と言われている[25]．また，$1/Q_r$ は Ghione らによる計算結果[26]を参考に試算すると，本共振器の場合 10^{-5} 程度と見積もられる．したがって，上式で，$1/Q_r$ と $1/Q_d$ は $1/Q_0$ に比べて十分小さく，共振器内の損失は線路の導体損失（Q_c）が支配的，つまり，$Q_c \fallingdotseq Q_0$ としても差し支えないと考えられる．また，Q_c の値は，線路構造と線路材料の表面抵抗に依存するため，Q_0 の測定値から線路材料の表面抵抗を逆算することが可能である．

図４は，図２の Q_0 から見積もった超伝導薄膜の表面抵抗 R_s の温度特性を示したものである（算出方法は文献[27]による）．図からわかるように，10 K, 2.43 GHzでの R_s は，GBCO 薄膜で 320 μΩ, BSCCO 薄膜が 160 μΩ, 金が 8.2 mΩ という結果が得られた．

２－３．まとめ

高温超伝導薄膜共振器は，超伝導体の低い表面抵抗のために，通常の金属共振器に比べて非常に高い Q を実現できることが確認できた．高温超伝導体の利用はフィルタをはじめとした高周波受動素子の低損失化を可能にするものと期待できる．

本実験結果の表面抵抗の値は，付録の式(10)より導かれる値よりも２～３桁程度大きな値である．これは，表面抵抗が，表面状態や結晶の不完全性等に大きく依存するため，実際の超伝導体ではこのような材料的な要因に表面抵抗の値が影響され易いことを示している．さらに，本実験で採用したコプレナー線路共振器では，電流分布が極めて不均一なため，電流が線路のエッジ部分に集中し，最も電流密度の高いところで臨界電流密度を越えて超電導性が破壊されてしまっている可能性がある．高温超伝導薄膜の結晶性の向上等によって，さらなる Q 値の向上が可能であるものと考えられる．

3．小型ヘア・ピン共振器フィルタ

高温超伝導薄膜による共振器の高い Q を利用することによって，高周波フィルタの高性能化が期待できる．この様な Q の高い共振器によってフィルタを構成する場合，特に狭帯域なフィルタにおいて，通常の金属に比較して大幅な低損失化が実現でき，超伝導体応用の有効性が顕著に現れるものと考えられる．

しかしながら，回路パターンについて考えてみると，狭帯域のフィルタを通常の直線線路による半波長共振器の平行結合型構造を用いて設計すると，線路の結合間隔が広くなるとともに，伝搬方向の寸法が波長や段数の増加に従って非常に大きくなる．これらは，作製プロセスにおいて大面積でかつ均一な特性の薄膜を要求するだけでなく，フィルタ形状の小型化の要求に対しては致命的な問題である．特に，超伝導フィルタは液体窒素温度程度あるいはそれ以下に冷却する必要があるため，形状が大きくなると冷却にかかる負担が非常に大きくなる．したがって，超伝導体を用いるこ

とによって，フィルタの高性能化を考える場合，小型化に適した新たなフィルタ構造を利用することが極めて重要である．そこで，ここでは，小型化により適した構造を有する小型ヘア・ピン共振器を用いて設計した高温超伝導薄膜フィルタについて述べる．

3－1．小型ヘア・ピン共振器の基本構成

小型ヘア・ピン共振器の構成を図５に示す．これは，平行結合線路部とそれに接続された単一線路部からなっており，それぞれのインピーダンスを変化させることによって，共振器長を 1/2 波長よりも短く設計することが可能となる．そのうえ，スリット幅 S を狭くし，平行結合線路部の結合を強くすると，平行結合線路のインピーダンスが更に低くなるため，よりいっそうの小型化が可能になる．この共振器の共振条件は，以下に示す各線路パラメータを用い， ABCD マトリックスを導出し，入力アドミタンスを計算することによって求めることができる．[20]

$$(Z_{pe} Z_{po} \cot\theta_{pe} \cot\theta_{po} - Z_s^2) \sin\theta_s$$
$$+ Z_s (Z_{pe} \cot\theta_{pe} + Z_{po} \cot\theta_{po}) \cos\theta_s$$
$$Z_s (Z_s \cot\theta_{pe} + Z_{po} \cot\theta_{po}) = 0$$

Z_s ：単一線路部分の特性インピーダンス
Z_{pe}, Z_{po} ：平行結合線路部分の偶および奇モードのインピーダンス
θ_s ：単一線路部分の電気長
θ_{pe}, θ_{po} ：平行結合線路部分の偶および奇モードの電気長

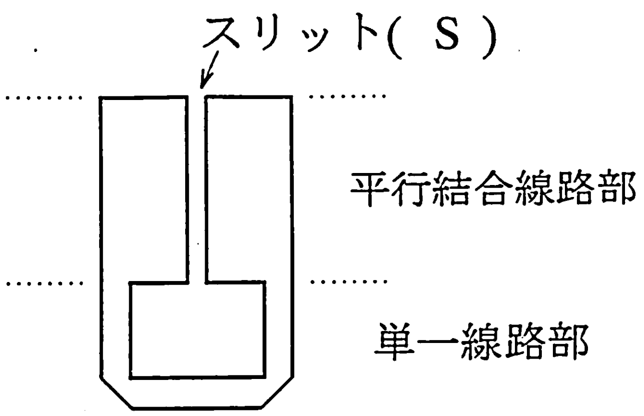


図５　小型ヘア・ピン共振器の構成

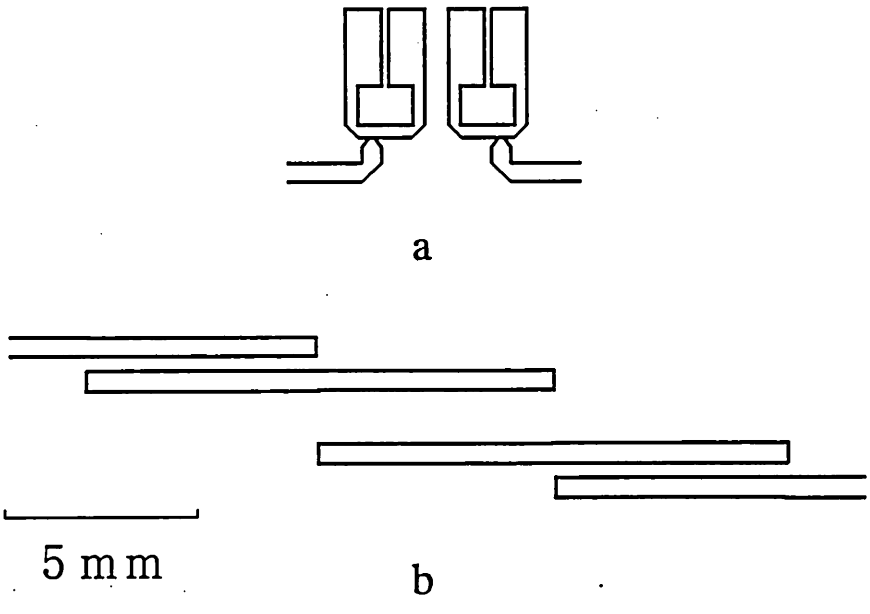


図６　２段帯域通過フィルタの構成
a：小型ヘア・ピン共振器フィルタ
b：従来の平行結合型フィルタ

3－2．2段バンドパスフィルタへの応用

実際に，マイクロストリップ線路構造による小型ヘア・ピン共振器を2段のバンドパスフィルタに適用した．設計したフィルタの仕様は，中心周波数 f_0 : 5 GHz，通過帯域幅 W : 25.7 MHz （比帯域：0.5 %），$f_0 \pm 100$ MHz での減衰量：20 dB とした．これをもとに計算した結果，必要な入出力結合度は $Q_e = 115.56$，段間結合度は $k = 0.00939$ となった．

このフィルタの概形を 図6(a)に示す．共振器のスリット幅は，小型化を考慮し 60 μm とした．この2つの小型ヘア・ピン共振器を間隔 0.56 mm で同方向に平行に並べることで，必要な段間結合度を実現している．入出力には，必要な Q_e 値が比較的小さいことから，図のようなタップによる磁界結合を利用した．共振器間隔およびタップ位置の最適条件は，汎用回路解析シミュレータを用いて算出した．また，この特性と同様の特性を有する平行結合型フィルタの構造を同じ縮尺で描いたものを 図6(b)に示す．ここでは，基板は厚さ 0.5 mm，比誘電率 9.2 の MgO 単結晶基板を想定している．図からわかるように，小型ヘア・ピン共振器の占有面積は 5×5 mm^2 以下で，伝搬方向の長さは従来の平行結合型フィルタの 1/3 以下であり，本フィルタ構造は小型化に非常に有効であることがわかる．また，平行結合型フィルタでは，このような狭帯域の場合，所望の入出力および段間結合度を実現するためには線路間隔は非常に広くなり（同特性のフィルタでは 1.37 mm），大きさだけでなく，放射や他の線路との結合等，動作の安定性の面でも問題となる可能性がある．このフィルタの通過帯域での挿入損失 L_0 は，設計パラメータより，$L_0 = 937/Q_0$ と見積もられる．但し，Q_0 は共振器自身の無負荷 Q である．

図7は，$GdBa_2Cu_3O_x$ 超伝導薄膜（膜厚：680 nm）および同構造の金薄膜（膜厚：800 nm）からなるフィルタの，温度 20 K，および，室温（金フィルタ）での周波数特性を示したものである．実験で使用した薄膜の作製条件および素子の作製およびその測定系は先の実験と同様である．また，基板裏面には，グランドプレーンとして金薄膜（膜厚：800 nm）を真空蒸着により形成した．図から，通過帯域での挿入損失 L_0 は，20 K の超伝導

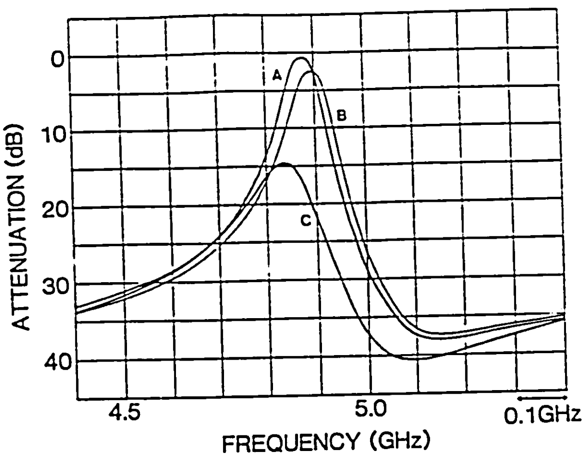


図７　小型ヘア・ピン共振器フィルタの周波数応答
A：GBCO 超伝導フィルタ，B：参照用金フィルタ(20K)，C：参照用金フィルタ（室温）

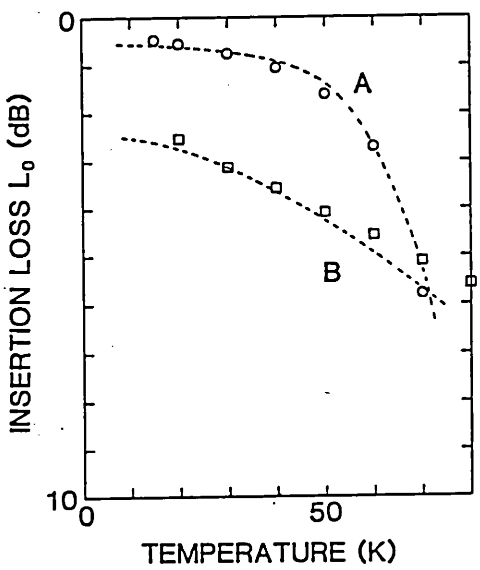


図８　挿入損失の温度変化
A：GBCO 超伝導フィルタ，B：参照用金フィルタ

フィルタで，0.5 dB，金薄膜によるフィルタでは，20 K で 2.4 dB，室温では 14.5 dB である．超伝導薄膜の利用によって，同じ温度の金によるフィルタに比べ 1.9 dB，室温の場合に対しては，14 dB 損失が改善されていることがわかる．図 8 は，L_0 の温度変化を測定したものである．また，同図の中の点線は，フィルタ中の共振器と同構造の共振器単体で測定した Q_0 の値から求めた L_0 の計算値である．共振器自身の Q_0 は，温度 20 K においては，GBCO および金からなる共振器で，それぞれ，1550，および，330 であった．超伝導体をこのような狭帯域フィルタに用いた場合，共振器の Q が高いので，挿入損失が顕著に改善されることがわかる．

3－3．まとめ

高温超伝導薄膜を用い，小型化に適した構造を有する小型ヘア・ピン共振器フィルタを作製し，その特性を検討した．設計したフィルタは，中心周波数 5 GHz，比帯域 0.5 % の 2 段バンドパスフィルタで，実際に，$GdBa_2Cu_3O_x$ 超伝導薄膜を用いて作製した．実験結果より，通過帯域での挿入損失は 0.5 dB であり，同構造の金薄膜によるフィルタに比べ，同じ温度では 1.9 dB，室温の場合に対しては，14 dB 改善されることがわかった．本フィルタは，同様の特性を有する通常の平行結合型フィルタに比べて 1/3 以下の長さで，約 5×5 mm^2 の範囲内に構成できるため，実用の際には不可欠な冷却器に対する負担を低減できる．高温超伝導薄膜を用いた小型ヘア・ピン共振器フィルタは，狭帯域フィルタの低損失化および小型化の実現に有効であることが確認された．

4．おわりに

高温超伝導薄膜を伝送線路共振器およびフィルタに応用し，その有効性を確認した．高温超伝導薄膜は通常の金属に比較してはるかに低損失であり，高周波での導体損失が深刻な問題となる他の受動素子においても，そ

の特性を飛躍的に改善できるものと期待できる．

しかし，今後の超伝導体の高周波応用研究の更なる進展のためには，解決すべき多くの課題が残されているのが現状である．たとえば，本実験では，通常の回路シミュレータを用い，通常の金属導体を仮定してフィルタ回路パターンの設計を行ったが，実際には，超伝導体は通常の金属とは多くの点で異なる電気特性を示すため，正確な回路設計は困難である．超伝導体の電気伝導特性に関して，マイスナー効果，力学的インダクタンスの影響（特に T_c 近傍の温度で），電流集中による超伝導性破壊の問題等を正確に把握し，これによって，超伝導体により適した高周波回路設計手法の確立が重要である．また，そのためには，超伝導体中の高周波電流の伝導メカニズムについても詳しく検討する必要がある．（例えば，直流電流では重要な役割を演ずるピンニングセンタが，高周波の交流電流に対してはどう振る舞うか等）

また，超伝導素子を実際に実用化する際には，冷却方法についても考慮しなければならない．本実験では，極めて大がかりな冷却装置を用いているが，冷却器に関しても小型化・高性能化する必要がある．現在，スターリングサイクルクーラーをはじめとして，このような要求に応えるべき小型冷却器の開発が急がれており，今後の冷却器開発の進展に期待したいところである．

謝辞

本研究にご協力頂いた佐川守一氏，牧本三夫氏（松下電器産業，ＡＶ＆ＣＣシステム研究開発センター）に深謝いたします．

付録：　超伝導体の高周波特性

高温超伝導体は現在その超伝導メカニズム自体も解明されていないことから，高温超伝導体の電気的特性についても不明な点も多い．ここでは，従来の金属系超伝導体と同様の伝導メカニズムを有するものと仮定し，高温超伝導体の高周波特性について考えてみる．

A－1．超伝導体への場の侵入

超伝導体の電気特性の中で，抵抗ゼロの物体として便宜上考えられる完全導体の特性ともっとも異なる点は，超伝導体にはいかなる状況でも表面から厚さ λ（磁場侵入長）の部分を除いて，それりも内部には電磁場が侵入できないことが挙げられる．これは，マイスナー効果と呼ばれていて，原理的には直流電流でさえも表面付近のみに集中して流れることになる．λ は，超伝導体中の場と電流の関係を記述するロンドンの方程式を利用すると次にように表される[28].

$$\lambda=m/(\mu_0 n_s e^2) \tag{1}$$

ここで，m，e，n_s はそれぞれ電子の質量，電荷，超伝導電子密度である．n_s は近似的に，温度 T の関数として，

$$n_s/n=1-(T/T_c)^4 \tag{2}$$

で表される．但し，n は全伝導電子密度，T_c は臨界温度である．したがって，λ は超伝導材料の物性値以外では温度のみに依存するだけで，電磁場の振動周波数等には依存しない．

ここで示した，ロンドンの方程式から導かれる λ はロンドンの磁場侵入長と呼ばれ，必ずしも実測値と一致するわけではなく，実際の λ は超伝導体中の不純物や結晶の不完全性などに依存する．YBCO 系超伝導体で

は 140 nm という実測値が報告されているが[29]，通常測定される値は，もう少し大きい値である．いずれにせよ，式(1),(2)からわかるように，金属などの良導体での表皮効果における侵入長，つまり，表皮厚さ δ が電界の周波数に依存するのに対して，超伝導体の λ は周波数に関係なく，直流から一定であると考えて差し支えない．この特性は，超伝導体で伝送線路を作製すれば，周波数分散の影響のない線路が実現できる可能性を示している．

A－2．超伝導体の高周波損失

超伝導体中では，２個の伝導電子が１組になったクーパー対が形成され，この対電子が運動エネルギーを失うことなく移動することによって，電気抵抗ゼロで電荷が運ばれることはよく知られている．しかしながら，実際には，直流電流は超伝導体中を全く抵抗なく流れることができるが，交流電流に対しては必ずしも無損失ではない．絶対零度以上の有限温度においては，超伝導体中の全ての伝導電子がクーパー対電子（以後，対電子と呼ぶ）としては存在しておらず，幾分かの割合で対を成していない常伝導状態の電子（以後，不対電子と呼ぶ）が存在する．超伝導体に交流電界を印加すると，超伝導体内部でその電界の侵入を防ぐように対電子が移動するが，対電子の慣性のために電界変化に追従できずに相殺しきれない電界が超伝導体内に侵入する．この電界によって加速された不対電子がフォノン散乱によってエネルギーを失い，電力損失の原因となる．

このような，対電子と不対電子の混合状態での振舞いについては，２流体モデルと呼ばれる考え方を利用すれば，簡単に説明でき，また，実測値と比較的よい一致をすることが知られている．この理論では，対電子流体と不対電子流体の２種の流体が混在しているとし，それぞれの流体を別々の運動方程式で記述する．ここで，対電子は衝突には感じないものとし，不対電子については衝突による運動量緩和の影響を取り入れる．これによると，電界Eの中での，対電子および不対電子の運動方程式は，

$$m(dv_s/dt)=-e\,E \tag{3}$$

$$m(dv_n/dt)+mv_n/\tau=-e\,E \tag{4}$$

但し，v_sおよび v_nはそれぞれ対流体，不対流体の粒子速度．τ は運動量の緩和時間．ここで，対および不対電子の粒子密度をそれぞれ n_s，n_nとすれば，両流体に対応する電流密度 J_s, J_n は，$J_s=n_sev_s$，$J_n=n_nev_n$で与えられる．

ここで交流理論に従い，各式の変数は複素表示されているものとする．時間微分を $j\omega$ で置き換え，全電流密度と電界の関係を，$J=J_s+J_n=\sigma_eE$，として，式(3)，(4)から実効導電率 σ_e を求めると，

$$\sigma_e=\sigma_1-j\sigma_2 \tag{5}$$

但し，

$$\sigma_1=n_ne^2\tau/[m(1+\omega^2\tau^2)] \tag{6}$$

$$\sigma_2=n_se^2/(m\omega)+n_ne^2\omega^2\tau^2/[m\omega(1+\omega^2\tau^2)] \tag{7}$$

となり，導電率として複素数を導入することによって，交流電界と電流の関係が表される．ここで，σ_2は両流体の，σ_1は不対電子流体のみの寄与である．$\omega^2\tau^2<<1$の低周波（f=10^{12} Hz 程度）では式(5) は，常伝導状態での伝導率 $\sigma_n=ne^2\tau/m$ および式(1) の関係を利用して，

$$\sigma_e=\sigma_nn_n/n-j(1/\omega\mu_0\lambda^2) \tag{8}$$

と簡単化できる．

A－3．超伝導体の表面インピーダンス

さきに述べたように，超伝導体はマイスナー効果によって電磁場の存在が表面付近に限られる．このような場合の電磁波に対する特性を求めるに

は，表面インピーダンス Z_s を考えた方が便利である．式(8)の複素導電率を，通常の良導体の表面インピーダンスの式，$Z_s=(j\omega\mu_0/\sigma)^{1/2}$，に代入し，２項展開をして整理すると，

$$
\begin{aligned}
Z_s &= R_s + j\omega L_s \\
&= \omega^2\mu^2\lambda^3 n_n\sigma_n/(2n) + j\omega\mu_0\lambda \qquad (9)
\end{aligned}
$$

実部 R_s（表面抵抗）は高周波電流の表面損失に対応する．ここで興味深いことは，通常の金属においては，場の侵入長（表皮深さ）および導電率が小さいと損失が増加するのに対して，式(9) からわかるように，超伝導体ではそれとは逆に場の侵入長 λ および常伝導状態での導電率 σ_n が小さい方が，高周波損失も小さくなる．したがって，酸化物超伝導体は，通常の金属系超伝導体に比べてキャリア密度が低いため，室温での導電率は低いが，このことは超伝導状態での高周波損失をむしろ小さくする方向に働くことになる．式(9)に，温度 77 K での YBCO 系超伝導体の各物性値を代入すると，

$$R_s=2.72\times10^{-26}f^2 \qquad (10)$$

のようになる．R_s は周波数 f の２乗に比例して増加する．この式から導かれる R_s の値は，10 GHzにおいて$10^{-6}\sim10^{-5}\Omega$で，通常の金属よりも数桁ほど低い値である．原理的には，超伝導体は高周波域において極めて低損失であることがわかる．

参考文献

[1] M.S.DiIorio, A.C.Anderson and B.Y.Tsaur, *Phys.Rev. B*, **38**, 7019 (1988).

[2] J.H.Takemoto, F.K.Oshita, H.R.Fetterman, P.Kobrin and E.Sovero, *IEEE Trans.MTT*, **37**, 1650 (1989).

[3] A.A.Valenzuela and R.Russer: "High Q coplanar transmission line resonator of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ on MgO," *Appl.Phys.Lett.*, **55**, 4, pp.1029–1031.

[4] T.Konaka, M.Sato, H.Asano, S.Kubo and Y.Nagai: "High–*Tc* superconducting high–Q coplanar resonator made on MgO," *IEEE MTT–S Digest*, pp.1337–1340, 1991.

[5] 榎原，瀬恒，和佐：" 伝送線路共振器法による酸化物超伝導薄膜の高周波特性の測定，" 信学技報，SCE91–29, 1991.

[6] W.G.Lyons, et al: "High–Tc superconductive microwave filters," *IEEE Trans. Mag.*, **27**, 2, pp.2537–2539, 1991.

[7] F.Suginoshita, K.Imai, N.Yazawa, K.Suzuki, S.Fujio, T.Takenaka and K.Nakao: "13.3 GHz YBCO microstrip bandpass filter," *Electron. Lett.*, **28**, 4, pp.355–357, 1992.

[8] H.S.Newman, D.B.Chrisey, J.S.Horwitz, B.D.Weaver and M.E.Reeves: "Microwave devices using $YBa_2Cu_3O_{7-d}$ films made by laser deposition," *IEEE Trans. Mag*. **27**, 2 pp.2540–2543, 1991.

[9] A.Enokihara, K.Setsune, K.Wasa, M.Sagawa and M.Makimoto: "High–Tc bandpass filter using miniaturized hairpin resonator," *Electron. Lett.*, **28**, 20, pp.1925–1927, 1992.

[10] Z,–Y.Shen, et al: "High–Tc superconduction coplanar delay line with long delay and low insertion loss," *IEEE MTT–S Digest*, pp.1235–1238, 1991.

[11] Y.Nagai, N.Suzuki, K.Itoh and O.Michikami: "Properties of superconducting delay line using EuBaCuO films on MgO(100)," *Proceedings of ISS '91*, pp.949–952, 1991.

[12] T.Ohmura, T.Kuroko, Y.Tanaka, Y.Matsumura and A.Marumoto: "Advanced high Tc superconducting active antennas," *Proceedings of ISS '91*, pp.937–940, 1991.

[13] K.Itoh, O.Ishii, Y.Koshimoto and K.Cho: "Small helical antennas made of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ceramics," *Proceedings of ISS '91*, pp.941–944, 1991.

[14] K.Yoshiara, F.Uchikawa, T.Mizuochi, T.Kitayama, K.Imada, I.Kawamata, S.Matsuno and S.Utsunomiya: "A study on $LiNbO_3$ light modulator using the resonant YBaCuO superconducting electrode," *IEICE Trans. Electron.*, **E75–C**, 1, pp.65–69, 1992.

[15] K.Yoshida, K.Ikeda and Y.Kanda: "$LiNbO_3$ optical modulator using superconducting electrodes," *IEICE Trans. Electron.*, **E75-C**, 8, pp.894-899, 1992.

[16] A.Enokihara, H.Higashino, K.Setsune and K.Wasa: "Characteristics of traveling wave optical modulators with superconducting electrodes," *Trans. IEICE,* pp.71-78 (June 1990).

[17] Y.Fukumoto, H.Kajikawam, R.Ogawa and Y.Kawate: "Properties of Josephson mixer using high-Tc YBaCuO film," *Proceedings of ISS '91*, pp.973-976.

[18] H.K.Olsson, W.R.McGrath, T.Claeson, S.Eriksson and L.G.
Johansson: "A millimeter wave Josephson mixer employing a high-Tc GdBaCuO point contact," *J.Appl.Phys.* **62**, 12, (1987) 4923.

[19] Y.Yoshisato, N.Niki, M.Takai and T.Ikemachi: "High-Tc superconducting microwave detector," *MWE'92 Microwave Workshop Digest*, pp.217-221 (Sep. 1992).

[20] M.Sagawa, K.Takahashi and M.Makimoto: "Miniaturized hairpin resonator filters and their application to receiver front-end MIC's," *IEEE Trans. MTT*, **37**, 12, pp.1991-1997, 1989.

[21] 遠藤，佐川，牧本：電子情報通信学会1989年秋季全国大会，C-389, 1989.

[22] T.Venkatesan et al., *ISEC'89*,KNA-1(1989).

[23] 加屋野，小林，信学技報，SCE91-12(1991).

[24] T.Van Duzer and C.W.Turner: *"Principles of superconductive devices and circuits,"* New York: Elsevier North Holland Inc., 1981.

[25] H.Tamura, H.Matsumoto and K.Wakino: "Low temperature properties of microwave dielectrics," *Jpn.J.Appl.Phys.*, **28**, pp.21-23, 1989.

[26] G.Ghione, C.Naldi and R.Zich: "Q-factor evaluation for coplanar resonator," *Alta Frequenza*, **52**, pp.191-193, 1983.

[27] K.C.Gupta, R.Garg and I.J.Bahl: *"Microstrip lines and slotlines,"* MA: Artech House Inc., 1979.

[28] T.Van Duzer and C.W.Turner 著：" 超伝導デバイスおよび回路の原理"，コロナ社, (1983).

[29] A.C.D.Chaklader, W.N.Hardy, S.R.Kreitzman, G.M.Luke, D.R.Noakes and M.Senba: *Phys.Rev.*, **B36**, (1987) 2386.

輻射科学研究会資料
RS 93－8

光ファイバによる表面波プローブの解析 II
－ ペンシル形プローブ －

梅田 充、小倉 久直、高橋 信行、北野 正雄
(京都大学 工学部)

1993年7月9日

輻射科学研究会
（京都工芸繊維大学）

光ファイバによる表面波プローブの解析 II
ー ペンシル形プローブ ー

梅田 充、小倉 久直、高橋 信行、北野 正雄
京都大学 工学部

1 序論

筆者らは走査形トンネル顕微鏡 (STM)[1] に対応する走査型光顕微鏡の基礎研究を行ってきたが、STM が電子のトンネル効果を用いるのに対し、この光顕微鏡では誘電体の光プローブを走査することによって試料表面の evanescent 波を計測し、その形状を可視光の波長以下の分解能で観測しようとするものである [2, 3]。光プローブとしては光ファイバーの先端部分を化学的エッチングにより細くしたものを用いている。ここではその様な走査型光顕微鏡の中枢を担う evanescent 波の光プローブの特性の解析を行う。

指数的に減衰する evanescent 波の電磁界の中に浸された、その様な誘電体プローブ棒が取り出し得る電力、プローブの形状・傾斜・偏波面等の変化によるその諸特性を調べることは、実用上重要でかつ理論的にも興味あることであるが、その理論解析は意外に容易でない。以前の報告 [4, 5] ではプローブのモデルとして楔形誘電体プローブを取り上げ、evanescent 電磁波の反射・屈折・透過則を利用して楔形表面波プローブの利得を近似的に評価する事ができた。また前回の報告 [6] では、問題を

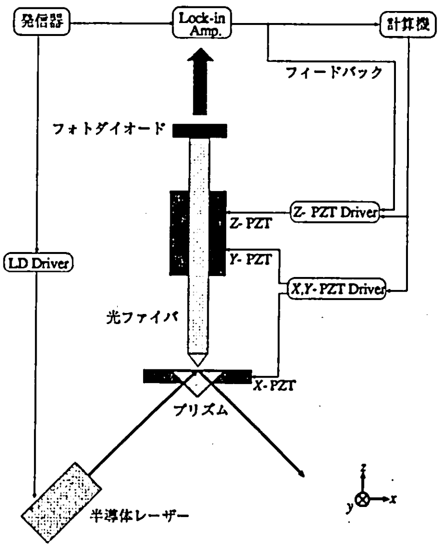


図 1: 走査型光顕微鏡

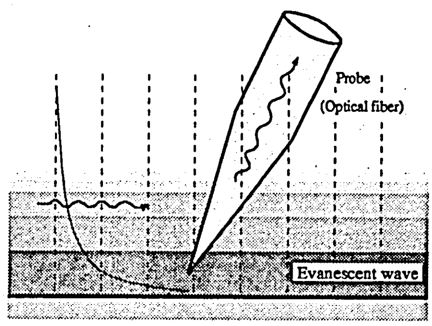


図 2: エバネセント波のファイバプローブ

電磁界により記述し、外部からのevanescent入射波による光ファイバプローブの導波モードの励振問題として、Kirchhoff近似の考えに基づいて定式化し、円筒形およびペンシル形誘電体プローブに適用した。

本報告では、前回の提案をもとに実際に円筒形およびペンシル形誘電体プローブの利得を評価し、各モデルの相違について考察することにする。

2　導波電磁界モード展開

2.1　導波モード電磁界

z 方向に一様な導波路に沿って、伝搬定数 $\Gamma_m = \alpha_m + \mathrm{i}\beta_m$ で z 方向に伝搬する導波モードの電磁界 $\boldsymbol{E}_m^{\pm}, \boldsymbol{H}_m^{\pm}$ を

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{E}_m^{+} = (\boldsymbol{e}_m + \boldsymbol{e}_{mz})\mathrm{e}^{\Gamma_m z} \\ \boldsymbol{H}_m^{+} = (\boldsymbol{h}_m + \boldsymbol{h}_{mz})\mathrm{e}^{\Gamma_m z} \end{array}\right\} \quad (+z\text{方向}), \qquad \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{E}_m^{-} = (-\boldsymbol{e}_m + \boldsymbol{e}_{mz})\mathrm{e}^{-\Gamma_m z} \\ \boldsymbol{H}_m^{-} = (\boldsymbol{h}_m - \boldsymbol{h}_{mz})\mathrm{e}^{-\Gamma_m z} \end{array}\right\} \quad (-z\text{方向}) \tag{1}$$

と記述する。ただし、$\boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{h}_m$は横方向(同じ断面内)のベクトル関数、$\boldsymbol{e}_{mz}, \boldsymbol{h}_{mz}$は、$z$方向のベクトル関数を表す。

ここで、次のように規格化因子

$$N_m \equiv \int_S (\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{h}_m) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2}$$

を定める(S：円筒断面)。この導波モードは次の双直交条件

$$\int_S (\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{h}_k) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad , \quad \Gamma_m \neq \Gamma_k \tag{3}$$

を満し、放射モード$\boldsymbol{E}_R^{\pm}, \boldsymbol{H}_R^{\pm}$と直交する。

$$\int_s (\boldsymbol{E}_R^{\pm} \times \boldsymbol{h}_m) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \quad \int_s (\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{H}_R^{\pm}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{4}$$

2.2　導波モード展開

導波モード電磁界の励振源が電流密度 $\boldsymbol{J}$, 磁流密度 $\boldsymbol{M}$ である場合を考える。$\boldsymbol{J}, \boldsymbol{M}$ が $z=0$ に集中する時、導波路の全電磁界は

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{E} = \sum_m a_m \boldsymbol{E}_m^{+} + \boldsymbol{E}_R^{+} \\ \boldsymbol{H} = \sum_m a_m \boldsymbol{H}_m^{+} + \boldsymbol{H}_R^{+} \end{array}\right\} (z > 0), \qquad \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{E} = \sum_m b_m \boldsymbol{E}_m^{-} + \boldsymbol{E}_R^{-} \\ \boldsymbol{H} = \sum_m b_m \boldsymbol{H}_m^{-} + \boldsymbol{H}_R^{-} \end{array}\right\} (z < 0) \tag{5}$$

で表される。図3のように導波路を含む円筒面 S ($z = z_1, z_2$ における2つの円筒板 $S_-, S_+, r = \infty$ の円筒面) に対して Lorentz の相反定理を適用すると [8]、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{E}_m^{\pm} \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_m^{\pm}) &= \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}_m^{\pm} - \boldsymbol{E}_m^{\pm} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_m^{\pm} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H}_m^{\pm} \\ &= -\boldsymbol{E}_m^{\pm} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{H}_m^{\pm} \cdot \boldsymbol{M} \end{aligned} \tag{6}$$

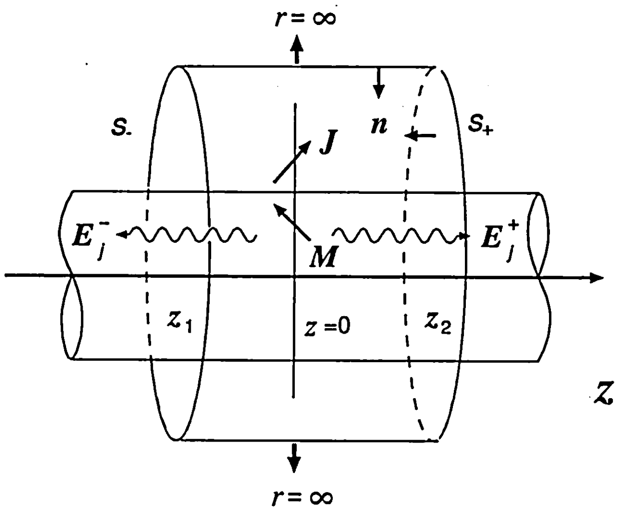


図 3: 円筒形積分面

となる。ここで、S の内向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{J}, \boldsymbol{M}$ の分布領域を V として式 (6) の両辺を積分すれば、

$$\int_S (\boldsymbol{E}_m^{\pm} \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_m^{\pm}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iint_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_m^{\pm} \mathrm{d}V - \iint_V \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{H}_m^{\pm} \mathrm{d}V \tag{7}$$

となる。

(1), (2)-(5) などを用いて左辺を計算すれば…

$$\int_{S_-} (\boldsymbol{E}_m^+ \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_m^+) \cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S$$

$$= \sum_k b_k \int_{S_-} [\boldsymbol{E}_m^+ \times \boldsymbol{H}_k^- - \boldsymbol{E}_k^- \times \boldsymbol{H}_m^+] \cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S \tag{8}$$

$$= b_m \int_{S_-} [\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{h}_m - (-\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{h}_m)] \cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S = 2N_m b_m \quad (z = z_1) \tag{9}$$

$$-\int_{S_+} (\boldsymbol{E}_m^+ \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_m^+) \cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S$$

$$= -\sum_k a_k \int_{S_+} [\boldsymbol{E}_m^+ \times \boldsymbol{H}_k^+ - \boldsymbol{E}_k^+ \times \boldsymbol{H}_m^+] \cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S \tag{10}$$

$$= -a_m \mathrm{e}^{2\Gamma_m z_2} \int_{S_+} [\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{h}_m - \boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{h}_m] \cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S = 0 \quad (z = z_2) \tag{11}$$

$$\int_{S_-} (\boldsymbol{E}_m^- \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_m^-) \cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S$$

$$= \sum_k b_k \int_{S_-} [\boldsymbol{E}_m^- \times \boldsymbol{H}_k^- - \boldsymbol{E}_k^- \times \boldsymbol{H}_m^-] \cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S \tag{12}$$

$$= \quad b_m e^{-2\Gamma_m z_1} \int_{S_-} [-e_m \times h_m - (-e_m \times h_m)] \cdot a_z \mathrm{d}S = 0 \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &-\int_{S_+} (E_m^- \times H - E \times H_m^-) \cdot a_z \mathrm{d}S \\ &= \; -\sum_k a_k \int_{S_+} [E_m^- \times H_k^+ - E_k^+ \times H_m^-] \cdot a_z \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{14}$$

$$= \quad -a_m \int_{S_+} [-e_m \times h_m - e_m \times h_m] \cdot a_z \mathrm{d}S = 2N_m a_m \tag{15}$$

したがって、これらをまとめれば

$$2N_m a_m \quad = \quad \iint_V M \cdot E_m^- \mathrm{d}V - \iint_V M \cdot H_m^- \mathrm{d}V \tag{16}$$

$$2N_m b_m \quad = \quad \iint_V J \cdot E_m^+ \mathrm{d}V - \iint_V M \cdot H_m^+ \mathrm{d}V \tag{17}$$

展開係数 a_m, b_m は、J, M により励振されるものを分離して表せば

$$a_m \equiv a_m^J + a_m^M \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} 2N_m a_m^J &= \iint_V J \cdot E_m^- \mathrm{d}V \\ 2N_m a_m^M &= -\iint_V M \cdot H_m^- \mathrm{d}V \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$b_m \equiv b_m^J + b_m^M \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} 2N_m b_m^J &= \iint_V J \cdot E_m^+ \mathrm{d}V \\ 2N_m b_m^M &= -\iint_V J \cdot H_m^+ \mathrm{d}V \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

により計算される。

3 導波モードおよび入射 evanescent 波の電磁界 (まとめ)

以下の計算に必要な電磁界の表式を角度因子 $[\cos m\theta, \sin m\theta]$ (下添字 $[\pm]$ で区別) による表示を用いてまとめておく。詳細は付録 B, 付録 C をみられたい。

3.1 導波モードの電磁界

前進・後進モードの関係

$\pm\beta$ の符号 (上添字 $\pm$ で区別) に対応して前進モード (上添字 $+$)、後進モード (上添字 $-$) の電磁界振幅が定まり、それらの横成分 e_m, h_m と縦成分 e_{mz}, h_{mz} の位相関係は次の形を取る (付録 B (B.42)-(B.45) 参照):

$$\begin{array}{lllll} E_{m\pm}^+(r) & \equiv & E_{m[\pm]}(r,\theta;\beta)e^{i\beta z} & \equiv & [e_m + e_{mz}]e^{i\beta z} \\ E_{m\pm}^-(r) & \equiv & E_{m[\pm]}(r,\theta;-\beta)e^{-i\beta z} & \equiv & [-e_m + e_{mz}]e^{-i\beta z} \\ H_{m\pm}^+(r) & \equiv & H_{m[\pm]}(r,\theta;\beta)e^{i\beta z} & \equiv & [h_m + h_{mz}]e^{i\beta z} \\ H_{m\pm}^-(r) & \equiv & H_{m[\pm]}(r,\theta;-\beta)e^{-i\beta z} & \equiv & [h_m - h_{mz}]e^{-i\beta z} \end{array} \tag{22}$$

導波モードの電磁界

上の進行波モードの電磁界を付録B.(B.31),(B.35),(B.37), (B.40) および(B.42)-(B.45) によりまとめておく。ここではコア、外部ともに $\boldsymbol{E}_{m\pm}$, $\boldsymbol{H}_{m\pm}$ モードのいずれも横成分 (r,θ 成分) は実数、縦成分 (z 成分) は純虚数であるように係数を選んでいる。

コア内部 ($r < a$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{m[\pm]}(r,\theta;\pm\beta) &= -\mathrm{i}[\eta_m(\lambda r) - \mathrm{i}P_m\zeta_m(\lambda r)]\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\\ &\quad -[\zeta_m(\lambda r) + \mathrm{i}P_m\eta_m(\lambda r)]\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta - \mathrm{i}\psi_m(\lambda r)\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{m[\pm]}(r,\theta;\pm\beta) &= \left[\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}}\zeta_m(\lambda r) + \mathrm{i}P_m\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\eta_m(\lambda r)\right]\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\\ &\quad -\mathrm{i}\left[\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}}\eta_m(\lambda r) - \mathrm{i}P_m\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\zeta_m(\lambda r)\right]\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta + \mathrm{i}P_m\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\psi_m(\lambda r)\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z \end{aligned} \tag{24}$$

外部 ($r > a$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{m[\pm]}(r,\theta;\pm\beta) &= \xi_m\left\{-\mathrm{i}[\eta'_m(\kappa r) - \mathrm{i}P_m\zeta'_m(\kappa r)]\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\right.\\ &\quad \left.-[\zeta'_m(\kappa r) + \mathrm{i}P_m\eta'_m(\kappa r)]\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta - \mathrm{i}\psi'_m(\kappa r)\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z\right\} \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{m[\pm]}(r,\theta;\pm\beta) &= \xi_m\left\{\left[\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TM}}}\zeta'_m(\mu r) + \mathrm{i}P_m\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\eta'_m(\kappa r)\right]\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\right.\\ &\quad \left.-\mathrm{i}\left[\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TM}}}\eta'_m(\kappa r) - \mathrm{i}P_m\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\zeta'_m(\kappa r)\right]\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta + \mathrm{i}P_m\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\psi'_m(\kappa r)\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z\right\} \end{aligned} \tag{26}$$

ここで P_m は(B.5) で定義されたモードにより定まる定数であり、ψ_m, ψ'_m, ξ_m などは具体的にBessel関数、変形Bessel関数で次のように表わされる:

$$\left.\begin{aligned}\psi_m(\lambda r) &= \frac{\lambda}{k_1}J_m(\lambda r)\\ \zeta_m(\lambda r) &= \frac{\beta}{2k_1}[J_{m-1}(\lambda r) + J_{m+1}(\lambda r)]\\ \eta_m(\lambda r) &= \mathrm{i}\frac{\beta}{2k_1}[J_{m-1}(\lambda r) - J_{m+1}(\lambda r)]\end{aligned}\right\},\quad (0 < r < a) \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi'_m(\kappa r) &= \frac{\kappa}{k_2}K_m(\kappa r)\\ \zeta'_m(\kappa r) &= \frac{\beta}{2k_2}[K_{m-1}(\kappa r) - K_{m+1}(\kappa r)]\\ \eta'_m(\kappa r) &= \mathrm{i}\frac{\beta}{2k_2}[K_{m-1}(\kappa r) + K_{m+1}(\kappa r)]\end{aligned}\right\},\quad (a < r < \infty) \tag{28}$$

$$\xi_m \equiv \frac{\lambda J_m(\lambda a)}{n\kappa K_m(\kappa a)} \tag{29}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \sqrt{k_1^2 - \beta^2}, \quad k_1 = nk, \quad Z_{\rm TM}^1 = \dfrac{\beta}{kn^2}\zeta, \quad Z_{\rm TE}^1 = \dfrac{k}{\beta}\zeta \\ \kappa = \sqrt{\beta^2 - k^2}, \quad k_2 = k, \quad Z_{\rm TM}^2 = \dfrac{\beta}{k}\zeta, \quad Z_{\rm TE}^2 = \dfrac{k}{\beta}\zeta \end{array}\right\} \tag{30}$$

$$\zeta \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \tag{31}$$

3.2 Evanescent 平面電磁波の円筒波展開

付録Cより必要な展開式を $[\cos m\theta, \sin m\theta]$ 表示 ([±] 表示) で与える。複素波数ベクトル $\boldsymbol{k}^*$ を持つ平面波を

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^* r\cos(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{r} \equiv (r, \theta, z)_{\rm cyl}, \quad \boldsymbol{k}^* \equiv (\mu^*, \varphi, \gamma^*)_{\rm cyl} \tag{33}$$

で表わす。ここでμ^*, γ^*は$\boldsymbol{k}^*$の横成分およびz成分で、複素角$\psi^* = \psi + \mathrm{i}\chi$を用いて

$$\mu^* = k\cos(\psi + \mathrm{i}\chi) \equiv \mu + \mathrm{i}\upsilon \tag{34}$$

$$\gamma^* = k\sin(\psi + \mathrm{i}\chi) \equiv \gamma + \mathrm{i}\alpha \tag{35}$$

$$\mu^{*2} + \gamma^{*2} = k^2 \tag{36}$$

で与えられ、ψ は入射角に相当する ((C.9)-(C.13) 参照)。

TE 平面波

上に定義した複素波数ベクトル $\boldsymbol{k}^*$ をもつ水平偏波 (TE)evanescent 波の円筒波展開 ([±] 表示) 次式で与えられる ((C.19)-(C.26) 参照)

$$\boldsymbol{E}_{\rm TE}^0(\boldsymbol{r}) = \zeta \boldsymbol{a}_{\rm H}(\boldsymbol{k}_r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{r}} = \zeta\frac{k}{\gamma^*}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m \mathrm{i}^m \boldsymbol{J}_{m+}^1(\mu^* r, \theta-\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{37}$$

$$\boldsymbol{H}_{\rm TE}^0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}_{\rm V}(\boldsymbol{k}_r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{r}} = -\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m \mathrm{i}^m \boldsymbol{J}_{m+}^2(\mu^* r, \theta-\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{38}$$

TM 平面波

同様に垂直偏波 (TM)evanescent 波の円筒波展開は

$$\boldsymbol{E}_{\rm TM}^0(\boldsymbol{r}) = \zeta \boldsymbol{a}_{\rm V}(\boldsymbol{k}_r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{r}} = -\zeta\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m \mathrm{i}^m \boldsymbol{J}_{m+}^2(\mu^* r, \theta-\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{H}_{\rm TM}^0(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{a}_{\rm H}(\boldsymbol{k}_r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{r}} = -\frac{k}{\gamma^*}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m \mathrm{i}^m \boldsymbol{J}_{m+}^1(\mu^* r, \theta-\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{40}$$

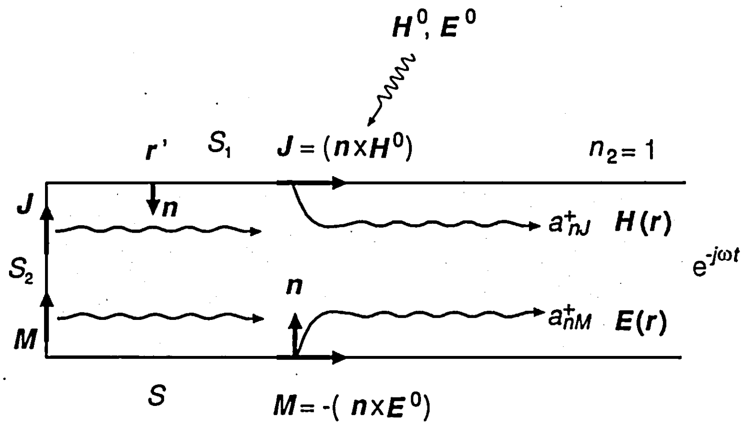


図 4: 半径 a の半無限誘電体円筒を包む側面 S_1 および底面 S_2

ただし　$\epsilon_0 = 1, \epsilon_m = 2 \quad (m \geq 1)$ と置いた。上の展開式に現れる [±] 表示のベクトル円筒関数 $\boldsymbol{J}^{1,2}_{m+}$ は、(A.21), (A.22) により成分表示で表わせば

$$\boldsymbol{J}^1_{m+}(\mu^* r) \equiv \zeta_m(\mu^* r)[\mathrm{i} \sin m\theta]\boldsymbol{a}_r + \eta_m(\mu^* r)[\cos m\theta]\boldsymbol{a}_\theta \tag{41}$$

$$\boldsymbol{J}^2_{m+}(\mu^* r, \theta) \equiv \eta_m(\mu^* r)[\cos m\theta]\boldsymbol{a}_r - \zeta_m(\mu^* r)[\mathrm{i} \sin m\theta]\boldsymbol{a}_\theta + \psi_m(\mu^* r)[\cos m\theta]\boldsymbol{a}_z \tag{42}$$

$$m = 0, 1, 2, \cdots$$

4　誘電体プローブによる導波モードの励起

誘電体円筒 (ファイバ) 内の導波モードは TE_{0n}, TM_{0n}, HE_{mn}, EH_{mn} モードであるが、ファイバは十分細く、主モードである HE_{11} のみが伝搬可能で、他のモードはすべて遮断状態にあるものとする。また、ファイバの先端のむきだしのコアを細くした部分が表面波のプローブとして動作するものとする。従って、以下の計算ではコア内部 $(r < a)$ では屈折率は $n_1 = n$, クラッド (外部 $r > a$) では $n_2 = 1$ とする。外部入射波によりプローブ部分に励振された導波モードは、ファイバ内遠方 ($z \to \infty$) では HE_{11} モードのみが伝搬し、徐々に径が太くなって通常のシングルモードファイバの HE_{11} モードに移行するものとみなす。

壁面上の表面電流 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}^0$、表面磁流 $\boldsymbol{M} = -(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}^0)$ により内部の電磁界が励起されるものとする。壁面上の表面電流、表面磁流は 1 次近似として外部入射場 $\boldsymbol{E}^0(r)$, $\boldsymbol{H}^0(r)$ により励起されるものとする。

以下の具体的な表面積分計算では、前章で述べた [±] 表示を用いる。従って、入射 evanescent 波の円筒関数表示も、$\cos m\theta, \sin m\theta$ による [±] 表示を用いて計算を行なう。

HE_{mn} モードの場合、モード量子数は $j = (m, n, \pm)$ を記述するが、表面積分の角度 θ に関する積分においては、入射円筒波・導波モードは同一の角度モード ($m, \pm$) の組合せに対応する表面積分のみが残り、他の組合せによる積分は直交性により消える。以下では一般的に角度量子数 m に対して表面積分を計算する (HE_{11} の場合は $m = 1$)。

4.1 円筒形プローブ

実験に使用しているプローブの先端は波長以下に尖らせてあるが、evanescent 波の広がりの範囲($\sim \ell$: 波長) では円筒形で近似できるものとする。そこで、図 4の様な半径 $a(< \ell)$ の半無限長誘電体円筒 (グラスファイバ) を包む側面 S_1, 底面 S_2 で囲まれた円筒形領域を考える。

S_1側面上の表面積分

ここでは (19) より励起モードの展開係数 $a_j^J + a_j^M$ を与える表面積分のうち、側面 S_1からの寄与

$$N_m a_{m\pm}^J = \frac{1}{2}\int_{S_1} \boldsymbol{E}_{m\pm}^-(\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}))\mathrm{d}S \tag{43}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{S_1} (\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}_{m\pm}^-(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}S, \quad (\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{a}_r) \tag{44}$$

$$N_m a_{m\pm}^M = \frac{1}{2}\int_{S_1} \boldsymbol{H}_{m\pm}^-(\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}))\mathrm{d}S \tag{45}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{S_1} (\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}_{m\pm}^-(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}S, \quad (\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{a}_r) \tag{46}$$

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta, \quad (0 \le z \le \infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r = a)$$

を以下で計算する。ここで (2) の規格化因子

$$N_m = N_{m\pm} \equiv \int_0^\infty r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta(\boldsymbol{e}_{m\pm}\times\boldsymbol{h}_{m\pm})_z, \quad (\pm\text{に依存しない}) \tag{47}$$

は後節で計算する。

表面積分 (44) の zに関する積分からは、$\boldsymbol{E}_{m\pm}^-$の z因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}$、$\boldsymbol{H}^0$の z因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^* z}$ であることに注意すれば、

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z+\mathrm{i}\gamma^* z}\mathrm{d}z = \frac{1}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)} \quad (\text{if } \alpha \equiv k\sinh\chi\cos\psi > 0 \text{ or } \chi > 0) \tag{48}$$

の因子が得られる。HE_{11}モードの場合 ($m = 1$) が主として必要であるので、以下の計算では $m = 0$ の場合は省略する。

TE 波入射

$$N_m a_{m\pm}^{\mathrm{TE},J} = -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\infty \mathrm{d}z(\boldsymbol{H}_{\mathrm{TE}}^0\times\boldsymbol{E}_{m\pm}^-)_r \tag{49}$$

$$= \frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{J}_{m+}^2\times\boldsymbol{E}_{m\pm}^-)_r\mathrm{d}\theta \tag{50}$$

$$= \frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\int_0^{2\pi}\left([\boldsymbol{J}_{m+}^2]_\theta[\boldsymbol{E}_{m\pm}^-]_z - [\boldsymbol{J}_{m+}^2]_z[\boldsymbol{E}_{m\pm}^-]_\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{51}$$

$$= \frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\int_0^{2\pi}\left\{-\zeta_m(\mu^* a)\sin m\theta\psi_m(\lambda a)\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\right.$$
$$\left. -[\psi_m(\mu^* a,\gamma^*)\cos m\theta][\zeta_m(\lambda a)+\mathrm{i}P_m\zeta_m(\lambda a)]\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\right\}\mathrm{d}\theta \tag{52}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\left\{\zeta_m(\mu^* a)\psi_m(\lambda a) - \psi_m(\mu^* a)[\zeta_m(\lambda a) + \mathrm{i}P_m\eta_m(\lambda a)]\right\}\begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$(a_{m+}^{\mathrm{TE},J} = 0)$$

$$N_m a_{m\pm}^{\mathrm{TE},M} = -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{d}z(\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}}^0 \times \boldsymbol{H}_{m\pm}^-)_r \tag{54}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\frac{\zeta k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{J}_{m+}^1 \times \boldsymbol{H}_{m\pm}^-)_r \mathrm{d}\theta \tag{55}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\frac{\zeta k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\left([\boldsymbol{J}_{m+}^1]_\theta[\boldsymbol{H}_{m\pm}^-]_z - [\boldsymbol{J}_{m+}^1]_z[\boldsymbol{H}_{m\pm}^-]_\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{56}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\frac{\zeta k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\left\{\eta_m(\mu^* a)\cos m\theta\left[-\mathrm{i}P_m\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^1}\psi_m(\lambda a)\right]\begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} - 0\right\}\mathrm{d}\theta \tag{57}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\frac{\zeta k}{\gamma^*}\frac{\mathrm{i}P_m}{Z_{\mathrm{TE}}^1}\eta_m(\mu^* a)\psi_m(\lambda a)\begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} \tag{58}$$

$$(a_{m+}^{\mathrm{TE},M} = 0), \quad 1/Z_{\mathrm{TE}}^1 = \beta/k\zeta$$

(TE 入射の場合 a_{m-}^{TE} のみ 0 ではない)

TM 波入射

$$N_m a_{m\pm}^{\mathrm{TM},J} = -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{d}z(\boldsymbol{H}_{\mathrm{TM}}^0 \times \boldsymbol{E}_{m\pm}^-)_r \tag{59}$$

$$= \frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\frac{k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{J}_{m+}^1 \times \boldsymbol{E}_{m\pm}^-)_r \mathrm{d}\theta \tag{60}$$

$$= \frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\frac{k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\left([\boldsymbol{J}_{m+}^1]_\theta[\boldsymbol{E}_{m\pm}^-]_z - [\boldsymbol{J}_{m+}^1]_z[\boldsymbol{E}_{m\pm}^-]_\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{61}$$

$$= \frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\frac{k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\left\{\eta_m(\mu^* a)\cos m\theta(-\mathrm{i})\psi_m(\lambda a)\begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} - 0\right\}\mathrm{d}\theta \tag{62}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\frac{k}{\gamma^*}\mathrm{i}\eta_m(\mu^* a)\psi_m(\lambda a)\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{63}$$

$$(a_{m-}^{\mathrm{TM},J} = 0)$$

$$N_m a_{m\pm}^{\mathrm{TM},M} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{d}z\left(\boldsymbol{E}_{\mathrm{TM}}^0 \times \boldsymbol{H}_{m\pm}^-\right)_r \tag{64}$$

$$= \frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\zeta\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{J}_{m+}^2 \times \boldsymbol{H}_{m\pm}^-)_r \mathrm{d}\theta \tag{65}$$

$$= \frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\zeta\int_0^{2\pi}\left([\boldsymbol{J}_{m+}^2]_\theta[\boldsymbol{H}_{m\pm}^-]_z - [\boldsymbol{J}_{m+}^2]_z[\boldsymbol{H}_{m\pm}^-]_\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{66}$$

$$= \frac{\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\zeta\int_0^{2\pi}\left\{-\zeta_m(\mu^* a)\mathrm{i}\sin m\theta\left[-\mathrm{i}\frac{P_m}{Z_{\mathrm{TE}}^1}\psi_m(\lambda a)\right]\begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix}\right.$$
$$\left. - [\psi_m(\mu^* a)\cos m\theta](-\mathrm{i})\left[\frac{\eta_m(\lambda a)}{Z_{\mathrm{TM}}^1} - \mathrm{i}P_m\frac{\zeta_m(\lambda a)}{Z_{\mathrm{TE}}^1}\right]\begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix}\right\}\mathrm{d}\theta \tag{67}$$

$$= \frac{-\mathrm{i}^m a}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)}\zeta\left\{\frac{P_m}{Z_{\mathrm{TE}}^1}\zeta_m(\mu^* a)\psi_m(\lambda a) - \mathrm{i}\psi_m(\mu^* a)\left[\frac{\eta_m(\lambda a)}{Z_{\mathrm{TM}}^1} - \mathrm{i}P_m\frac{\zeta_m(\lambda a)}{Z_{\mathrm{TE}}^1}\right]\right\}\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{68}$$

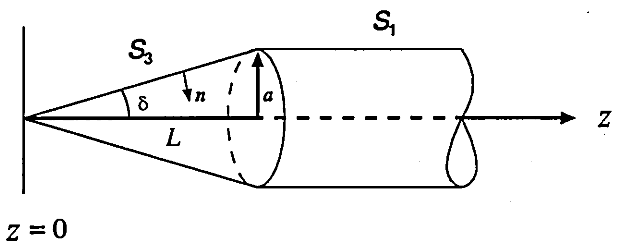


図 5: ペンシル形プローブ

$$(a_{m-}^{\mathrm{TM},M}=0),\quad 1/Z_{\mathrm{TM}}^1=kn^2/\beta\zeta,\quad 1/Z_{\mathrm{TE}}^1=\beta/k\zeta$$

(TM 波に対しては a_{m+}^{TM}のみ 0 でない)

S_2底面上の表面積分

底面 S_2からの寄与は、

$$\begin{aligned}
N_m A_{m\pm}^J &= \frac{1}{2}\int_{S_2} \boldsymbol{E}_{m\pm}^-(\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}))\mathrm{d}S && (69)\\
&= \frac{1}{2}\int_{S_2}(\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}_{m\pm}^-(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S,\quad (\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_z) && (70)\\
N_m A_{m\pm}^M &= \frac{1}{2}\int_{S_2} \boldsymbol{H}_{m\pm}^-(\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}))\mathrm{d}S && (71)\\
&= \frac{1}{2}\int_{S_2}(\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}_{m\pm}^-(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S,\quad (\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_z) && (72)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}S=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\quad (0\le r\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ z=0)$$

により計算できる。($m=0$ は省略、HE_{11}モードの場合は $m=1$ のみ必要)

4.2 ペンシル形プローブ

図 5のようにコアの先端部が長さ L, 軸となす角度δの尖ったペンシル形プローブを考える。先端の円錐面を S_3 で表わせば S_3 上の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は、θ 成分は 0 であるから、次のように書ける:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= (n_r,n_z)=-\cos\delta\,\boldsymbol{a}_r+\sin\delta\,\boldsymbol{a}_z && (73)\\
\tan\delta &= a/L,\quad \cos\delta=L/\sqrt{a^2+L^2},\quad \sin\delta=a/\sqrt{a^2+L^2} && (74)\\
r &= \tan\delta\cdot z,\quad z=\cot\delta\cdot r && (75)\\
\mathrm{d}S &= r\mathrm{d}\theta\frac{\mathrm{d}z}{\cos\delta}=\frac{1}{\sin\delta}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta && (76)
\end{aligned}$$

S_3 上の表面積分

$$N_m B_{m\pm}^J \equiv \frac{1}{2}\int_{S_3}(\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}_{m\pm}^-(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{n}dS$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{S_3}(\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{E}^-_{m\pm}(\boldsymbol{r}))\cdot(-\cos\delta\boldsymbol{a}_r+\sin\delta\boldsymbol{a}_z)\mathrm{d}S \\
&= -\frac{1}{2}\cot\delta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{H}^0\times\boldsymbol{E}^-_{m\pm})_r+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{H}^0\times\boldsymbol{E}^-_{m\pm})_z \\
&\equiv -I_1\cot\delta+I_2 \qquad (77)\\
N_m B^M_{m\pm} &\equiv \frac{1}{2}\int_{S_3}(\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^-_{m\pm}(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{n}dS \\
&= -\frac{1}{2}\cot\delta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{E}^0\times\boldsymbol{H}^-_{m\pm})_r+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{E}^0\times\boldsymbol{H}^-_{m\pm})_z \\
&\equiv -I_3\cot\delta+I_4 \qquad (78)
\end{aligned}
$$

$\delta\to\pi/2,\cot\delta\to 0$ の場合、S_3 上の積分は S_2 (底面 $z=0$) 上の積分に帰着する。S_3 上の積分のみが励起に効果的な場合は、$\gamma^*=\gamma+\mathrm{i}\alpha$ とするとき、evanescent 波の広がりが L 以内であること、すなわち、$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^* L}|=\mathrm{e}^{-\alpha L}\ll 1,\alpha L\gg 1$、であることが必要である。広がり $1/\alpha$ が L を越える、すなわち、$\alpha L\ll 1$、となる場合には $z\geq L$ となる側面 S_1 上の積分も必要となる。

TE 波入射

上に与えた積分 $I_1,\cdots,I_4$ を計算する。この場合は [±] 表示の−モードのみが励起される。

$$
\begin{aligned}
I_1^{\mathrm{TE}} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{H}^0_{\mathrm{TE}}\times\boldsymbol{E}^-_{m-})_r \qquad (79)\\
&= -\mathrm{i}^m\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}(\boldsymbol{J}^2_{m+}\times\boldsymbol{E}_{m-})_r \qquad (80)\\
&= -\mathrm{i}^m\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}([\boldsymbol{J}^2_{m+}]_\theta[\boldsymbol{E}_{m-}]_z-[\boldsymbol{J}^2_{m+}]_z[\boldsymbol{E}_{m-}]_\theta) \qquad (81)\\
&= \mathrm{i}^m\pi\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}[\zeta^*_m\psi_m-\psi^*_m\zeta_m-\mathrm{i}P_m\psi^*_m\eta_m] \qquad (82)\\
I_2^{\mathrm{TE}} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{H}^0_{\mathrm{TE}}\times\boldsymbol{E}^-_{m-})_z \qquad (83)\\
&= -\mathrm{i}^m\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}(\boldsymbol{J}^2_{m+}\times\boldsymbol{E}_{m-})_z \qquad (84)\\
&= -\mathrm{i}^m\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}([\boldsymbol{J}^2_{m+}]_r[\boldsymbol{E}_{m-}]_\theta-[\boldsymbol{J}^2_{m+}]_\theta[\boldsymbol{E}_{m-}]_r) \qquad (85)\\
&= \mathrm{i}^m\pi\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}[\eta^*_m\zeta_m+\zeta^*_m\eta_m+\mathrm{i}P_m(\eta^*_m\eta_m-\zeta^*_m\zeta_m)] \qquad (86)\\
I_3^{\mathrm{TE}} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{E}^0_{\mathrm{TE}}\times\boldsymbol{H}^-_{m-})_r \qquad (87)\\
&= \mathrm{i}^m\zeta\frac{k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}(\boldsymbol{J}^1_{m+}\times\boldsymbol{H}_{m-})_r \qquad (88)\\
&= \mathrm{i}^m\zeta\frac{k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}([\boldsymbol{J}^1_{m+}]_\theta[\boldsymbol{H}_{m-}]_z-[\boldsymbol{J}^1_{m+}]_z[\boldsymbol{H}_{m-}]_\theta) \qquad (89)\\
&= \mathrm{i}^m\pi\frac{\beta}{\gamma^*}\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}[\mathrm{i}P_m\eta^*_m\psi_m] \qquad (90)\\
I_4^{\mathrm{TE}} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{E}^0_{\mathrm{TE}}\times\boldsymbol{H}^-_{m-})_z \qquad (91)
\end{aligned}
$$

$$= \mathrm{i}^m\zeta\frac{k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}([\boldsymbol{J}^1_{m+}]_r[\boldsymbol{H}_{m-}]_\theta - [\boldsymbol{J}^1_{m+}]_\theta[\boldsymbol{H}_{m-}]_r) \tag{92}$$

$$= \mathrm{i}^m\pi\frac{k}{\gamma^*}\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}\left[\frac{kn^2}{\beta}(\zeta^*_m\eta_m + \eta^*_m\zeta_m) + \mathrm{i}P_m\frac{\beta}{k}(\eta^*_m\eta_m - \zeta^*_m\zeta_m)\right] \tag{93}$$

TM 波入射

この場合は + モードのみが励起される。

$$I_1^{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{H}^0_{\mathrm{TM}}\times\boldsymbol{E}^-_{m+})_r \tag{94}$$

$$= -\mathrm{i}^m\frac{k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}(\boldsymbol{J}^1_{m+}\times\boldsymbol{E}_{m+})_r \tag{95}$$

$$= -\mathrm{i}^m\frac{k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}([\boldsymbol{J}^1_{m+}]_\theta[\boldsymbol{E}_{m+}]_z - [\boldsymbol{J}^1_{m+}]_z[\boldsymbol{E}_{m+}]_\theta) \tag{96}$$

$$= \mathrm{i}^m\pi\frac{k}{\gamma^*}\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}[\mathrm{i}\eta^*_m\psi_m] \tag{97}$$

$$I_2^{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{H}^0_{\mathrm{TM}}\times\boldsymbol{E}^-_{m+})_z \tag{98}$$

$$= -\mathrm{i}^m\frac{k}{\gamma^*}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}([\boldsymbol{J}^1_{m+}]_r[\boldsymbol{E}_{m+}]_\theta - [\boldsymbol{J}^1_{m+}]_\theta[\boldsymbol{E}_{m+}]_r) \tag{99}$$

$$= \mathrm{i}^{m-1}\pi\frac{k}{\gamma^*}\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}[\zeta^*_m\zeta_m - \eta^*_m\eta_m + \mathrm{i}P_m(\zeta^*_m\eta_m + \eta^*_m\zeta_m)] \tag{100}$$

$$I_3^{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{E}^0_{\mathrm{TM}}\times\boldsymbol{H}^-_{m+})_r \tag{101}$$

$$= -\mathrm{i}^m\zeta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}([\boldsymbol{J}^2_{m+}]_\theta[\boldsymbol{H}_{m+}]_z - [\boldsymbol{J}^2_{m+}]_z[\boldsymbol{H}_{m+}]_\theta) \tag{102}$$

$$= \mathrm{i}^m\pi\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}\left[P_m\frac{\beta}{k}(\zeta^*\psi_m - \psi^*\zeta_m) - \frac{kn^2}{\beta}\mathrm{i}\psi^*_m\eta_m\right] \tag{103}$$

$$I_4^{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r(\boldsymbol{E}^0_{\mathrm{TM}}\times\boldsymbol{H}^-_{m+})_z \tag{104}$$

$$= -\mathrm{i}^m\zeta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}([\boldsymbol{J}^2_{m+}]_r[\boldsymbol{H}_{m+}]_\theta - [\boldsymbol{J}^2_{m+}]_\theta[\boldsymbol{H}_{m+}]_r) \tag{105}$$

$$= \mathrm{i}^{m+1}\pi\int_0^a r\mathrm{d}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma^*-\beta)\cot\delta\cdot r}\left[\frac{kn^2}{\beta}(\eta^*_m\eta_m - \zeta^*_m\zeta_m) - \mathrm{i}P_m\frac{\beta}{k}(\eta^*_m\zeta_m + \zeta^*_m\eta_m)\right] \tag{106}$$

S_1 上の表面積分

図のようにペンシル先端部の長さが L の場合、(48) の積分は

$$\int_L^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z+\mathrm{i}\gamma^* z}\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)L}}{\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)} \tag{107}$$

に置き換えられるから、(53),(58),(63), (68) の表面積分 $a^J_{m\pm}$, $a^M_{m\pm}$ にはすべて因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)L}$ が乗じられる。従って TE 波入射、TM 波入射における励起モードの展開係数は、次のように書ける。

$$a^{\mathrm{TE}}_{m-} = (B^J_{m-} + B^M_{m-}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)L}(a^J_{m-} + a^M_{m-}) \tag{108}$$

$$a^{\mathrm{TM}}_{m+} = (B^J_{m+} + B^M_{m+}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta-\gamma^*)L}(a^J_{m+} + a^M_{m+}) \tag{109}$$

4.3 規格因子の計算

(47) の規格因子を計算する。(23)-(26) を代入すれば

$$
\begin{aligned}
N_{m\pm} &\equiv \int (\boldsymbol{e}_{m\pm} \times \boldsymbol{h}_{m\pm})_z \mathrm{d}S && (110)\\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} r\mathrm{d}r ([\boldsymbol{E}_{m\pm}]_r [\boldsymbol{H}_{m\pm}]_\theta - [\boldsymbol{E}_{m\pm}]_\theta [\boldsymbol{H}_{m\pm}]_r) && (111)\\
&= \int_0^{a} r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \Bigg\{ -[\eta_m(\lambda r) - \mathrm{i}P_m\zeta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \left[\frac{\eta_m(\lambda r)}{Z^1_{\mathrm{TM}}} - \mathrm{i}P_m \frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \\
&\quad + [\zeta_m(\lambda r) + \mathrm{i}P_m\eta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \left[\frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z^1_{\mathrm{TM}}} + \mathrm{i}P_m \frac{\eta_m(\lambda r)}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \Bigg\} && (112)\\
&\quad + \xi_m^2 \int_a^{\infty} r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \Bigg\{ -[\eta'_m(\kappa r) - \mathrm{i}P_m\zeta'_m(\kappa r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \left[\frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z^2_{\mathrm{TM}}} - \mathrm{i}P_m \frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \\
&\quad + [\zeta'_m(\kappa r) + \mathrm{i}P_m\eta'_m(\kappa r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \left[\frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z^2_{\mathrm{TM}}} + \mathrm{i}P_m \frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \Bigg\} && (113)\\
&= \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \end{bmatrix} \int_0^{a} r\mathrm{d}r \Bigg\{ -[\eta_m(\lambda r) - \mathrm{i}P_m\zeta_m(\lambda r)] \left[\frac{\eta_m(\lambda r)}{Z^1_{\mathrm{TM}}} - \mathrm{i}P_m \frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\right] \\
&\quad + [\zeta_m(\lambda r) + \mathrm{i}P_m\eta_m(\lambda r)] \left[\frac{\zeta_m(\lambda r)}{Z^1_{\mathrm{TM}}} + \mathrm{i}P_m \frac{\eta_m(\lambda r)}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\right] \Bigg\} && (114)\\
&\quad + \xi_m^2 \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \end{bmatrix} \int_a^{\infty} r\mathrm{d}r \Bigg\{ -[\eta'_m(\kappa r) - \mathrm{i}P_m\zeta'_m(\kappa r)] \left[\frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z^2_{\mathrm{TM}}} - \mathrm{i}P_m \frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\right] \\
&\quad + [\zeta'_m(\kappa r) + \mathrm{i}P_m\eta'_m(\kappa r)] \left[\frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z^2_{\mathrm{TM}}} + \mathrm{i}P_m \frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\right] \Bigg\} && (115)
\end{aligned}
$$

結局 $\pm$ に依存しないから以下では [ ] を省略すると

$$
\begin{aligned}
N_m &= \pi \int_0^a r\mathrm{d}r \Bigg\{ -\left(\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}} + \frac{P_m^2}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\right) \eta_m(\lambda r)^2 \\
&\quad + 2\mathrm{i}P_m \left(\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}} + \frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\right) \eta_m(\lambda r)\zeta_m(\lambda r) + \left(\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}} + \frac{P_m^2}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\right) \zeta_m(\lambda r)^2 \Bigg\} \\
&\quad + \pi\xi_m^2 \int_0^a r\mathrm{d}r \Bigg\{ -\left(\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TM}}} + \frac{P_m^2}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\right) \eta'_m(\kappa r)^2 + 2\mathrm{i}P_m \left(\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TM}}} + \frac{1}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\right) \eta'_m(\kappa r)\zeta'_m(\kappa r) \\
&\quad + \left(\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TM}}} + \frac{P_m^2}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\right) \zeta'_m(\kappa r, \beta)^2 \Bigg\} && (116)\\
&\equiv \pi \int_0^a r\mathrm{d}r \left\{ -S_1\eta_m(\lambda r)^2 + 2\mathrm{i}T_1\eta_m(\lambda r)\zeta_m(\lambda r) + S_1\zeta_m(\lambda r)^2 \right\} \\
&\quad + \pi\xi_m^2 \int_a^{\infty} r\mathrm{d}r \left\{ -S_2\eta'_m(\kappa r)^2 + 2\mathrm{i}T_2\eta'_m(\kappa r)\zeta'_m(\kappa r) + S_2\zeta'_m(\kappa r)^2 \right\} && (117)
\end{aligned}
$$

但しここで

$$\left.\begin{aligned} S_1 &\equiv \frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}}+\frac{P_m^2}{Z^1_{\mathrm{TE}}}=\frac{\beta}{k\zeta}\left(P_m^2+\frac{n^2k^2}{\beta^2}\right) \\ T_1 &\equiv P_m\left(\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}}+\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\right)=P_m\frac{\beta}{k\zeta}\left(1+\frac{n^2k^2}{\beta^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

$$\left.\begin{aligned} S_2 &\equiv \frac{1}{Z^2_{\mathrm{TM}}}+\frac{P_m^2}{Z^2_{\mathrm{TE}}}=\frac{\beta}{k\zeta}\left(P_m^2+\frac{k^2}{\beta^2}\right) \\ T_2 &\equiv P_m\left(\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TM}}}+\frac{1}{Z^2_{\mathrm{TE}}}\right)=P_m\frac{\beta}{k\zeta}\left(1+\frac{k^2}{\beta^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

と置いた。また

$$\left.\begin{aligned} Z^1_{\mathrm{TM}}=\frac{\beta}{k_1}\zeta_1=\frac{\beta}{kn^2}\zeta,\quad Z^1_{\mathrm{TE}}=\frac{k}{\beta}\zeta\quad (n_1=n) \\ Z^2_{\mathrm{TM}}=\frac{\beta}{k_2}\zeta_2=\frac{\beta}{k}\zeta\quad,\quad Z^2_{\mathrm{TE}}=\frac{k}{\beta}\zeta\quad (n_2=1) \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

である。更に

$$\left.\begin{aligned} \eta_m^2 &= -\frac{\beta^2}{4k_1^2}[J_{m-1}-J_{m+1}]^2 \\ \eta_m\zeta_m &= \mathrm{i}\frac{\beta^2}{4k_1^2}[J_{m-1}^2-J_{m+1}^2] \\ \zeta_m^2 &= \frac{\beta^2}{4k_1^2}[J_{m-1}+J_{m+1}]^2 \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_m'^2 &= -\frac{\beta^2}{4k_2^2}[K_{m-1}+K_{m+1}]^2 \\ \eta_m'\zeta_m' &= \mathrm{i}\frac{\beta^2}{4k_2^2}[K_{m-1}^2-K_{m+1}^2] \\ \zeta_m'^2 &= \frac{\beta^2}{4k_2^2}[K_{m-1}-K_{m+1}]^2 \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

と書けることを用いると (117) は

$$\begin{aligned} N_m &= \pi\frac{\beta^2}{4k_1^2}\int_0^a r\mathrm{d}r\left\{S_1[J_{m-1}-J_{m+1}]^2-2T_1[J_{m-1}^2-J_{m+1}^2]+S_1[J_{m-1}+J_{m+1}]^2\right\} \\ &\quad +\pi\xi_m^2\frac{\beta^2}{4k^2}\int_a^\infty r\mathrm{d}r\left\{S_2[K_{m-1}+K_{m+1}]^2-2T_2[K_{m-1}^2-K_{m+1}^2]+S_2[K_{m-1}-K_{m+1}]^2\right\} \quad (123) \\ &= \pi\frac{\beta^2}{4k_1^2}\int_0^a r\mathrm{d}r2[(S_1-T_1)J_{m-1}^2(\lambda r)+(S_1+T_1)J_{m+1}^2(\lambda r)] \\ &\quad +\pi\xi_m^2\frac{\beta^2}{4k^2}\int_a^\infty r\mathrm{d}r2[(S_2-T_2)K_{m-1}^2(\kappa r)+(S_2+T_2)K_{m+1}^2(\kappa r)] \end{aligned} \tag{124}$$

ここで次の公式

$$\int_0^a r\mathrm{d}r\begin{bmatrix} J_{m-1}^2(\lambda r) \\ J_{m+1}^2(\lambda r)\end{bmatrix} = \frac{a^2}{2}\begin{bmatrix} J_{m-1}^2(\lambda a)-J_{m-2}(\lambda a)J_m(\lambda a) \\ J_{m+1}^2(\lambda a)-J_m(\lambda a)J_{m+2}(\lambda a)\end{bmatrix}\quad (>0) \tag{125}$$

$$\int_a^\infty r\mathrm{d}r \begin{bmatrix} K_{m-1}^2(\kappa r) \\ K_{m+1}^2(\kappa r) \end{bmatrix} = -\frac{a^2}{2}\begin{bmatrix} K_{m-1}^2(\kappa a) - K_{m-2}(\kappa a)K_m(\kappa a) \\ K_{m+1}^2(\kappa a) - K_m(\kappa a)K_{m+2}(\kappa a) \end{bmatrix} \quad (>0) \tag{126}$$

を用い、更に

$$\xi_m \equiv \frac{1}{n}\frac{\lambda J_m(\lambda a)}{\kappa K_m(\kappa a)}, \quad (n_1 = n, n_2 = 1) \tag{127}$$

$$u \equiv \lambda a, \quad w \equiv \kappa a \tag{128}$$

と置けば、

$$\begin{aligned} N_m = {} & \pi a^2 \frac{\beta^2}{4k^2n^2}\Big\{(S_1 - T_1)[J_{m-1}^2(u) - J_{m-2}(u)J_m(u)] \\ & +(S_1+T_1)[J_{m+1}^2(u) - J_m(u)J_{m+2}(u)] + \left[\frac{uJ_m(u)}{wK_m(w)}\right]^2 \Big[(S_2 - T_2)[K_{m-2}(w)K_m(w) - K_{m-1}^2(w)] \\ & +(S_2+T_2)[K_m(w)K_{m+2}(w) - K_{m+1}^2(w)]\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{129}$$

となる。但しここで

$$S_1 \pm T_1 \equiv \frac{\beta}{k\zeta}\left[P_m^2 + \frac{n^2k^2}{\beta^2} \pm P_m\left(1 + \frac{n^2k^2}{\beta^2}\right)\right] \tag{130}$$

$$S_2 \pm T_2 \equiv \frac{\beta}{k\zeta}\left[P_m^2 + \frac{k^2}{\beta^2} \pm P_m\left(1 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)\right] \tag{131}$$

である。

HE_{11} モードの励起

十分細いファイバプローブでは HE_{11} モードのみが伝搬し、他のモードは遮断されているから、遠方 $(z \to \infty)$ では HE_{11} モードの進行波電磁界

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \sim a_{1\pm}\boldsymbol{E}_{1\pm}(r,\theta;\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}, \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \sim a_{1\pm}\boldsymbol{H}_{1\pm}(r,\theta;\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z} \tag{132}$$

がえられる。従って電力流は

$$\mathcal{P}^{1\pm} = \frac{1}{2}|a_{1\pm}|^2 N_1 \tag{133}$$

で与えられ、$a_{m\pm}$ は $m=1$ の HE_{11} モードにたいしてのみ求めればよい。

4.4 数値計算

数値計算を行うには、付録B にあげたパラメータに対して、値を与える必要がある。

コア内部の屈折率 n およびコアの半径と波長の比 a/ℓ (ℓ:波長) を決めると、

$$v = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}(2\pi a/\ell) == \sqrt{n^2-1}(2\pi a/\ell) \tag{134}$$

により、vが決定できる。$w = \sqrt{v^2-u^2}$ $(v > u)$ と置いて特性方程式 (B.1) より u が求まる。そして、(B.5) から P_mを求める。

円筒形プローブ

複素入射角 $\psi^* = \psi + i\chi$ に対して式 (133) を用いてプローブの利得を解析した結果を図 7(TE 波入射)、図 8(TM 波入射) に示す。但し、コアの屈折率を $n = 1.5$ と置き、$\chi = 0.1, a/\ell = 0.5, 0.7, 0.9$ (波長 ℓ, 半径 a) の場合について実入射角$-30° \leq \psi \leq 30°$の範囲で計算を行なった。また、実入射角 ψ とプローブの位置との関係を図 6 に示す。図 7,8においては入射電力を試料表面から高さ 0.1ℓ の点における単位面積当たりの電力 ($\zeta/2$) を 1 として規格化を行なった。以下で取り扱うペンシル形プローブでも同様の規格化を行なっている。

ペンシル形プローブ

複素入射角 $\psi^* = \psi + i\chi$ に対して式 (133) を用いてプローブの利得を解析した結果を図 9,11(TE 波入射)、図 10,12(TM 波入射) に示す。但し、$n = 1.5, a/\ell = 9.0$ (波長 ℓ, 半径 a) の場合について実入射角$-30° \leq \psi \leq 30°$の範囲で計算を行なった。このとき

$$\alpha L = kL \sinh\chi \cos\psi \tag{135}$$

$$= \frac{ka}{\tan\delta} \sinh\chi \cos\psi \tag{136}$$

$$\simeq 32.12 \times \cos\psi \tag{137}$$

であるから、$-30° \leq \psi \leq 30°$の範囲では$\alpha L \gg 1$ の条件を満たしており、S_3 上の積分のみが励起に効果的であるといえる。

比較のために、以前報告した楔形プローブにおける検出利得を図 13, 図 14に示す。図 9,10 からプローブ先端の開き角 δ が大きいほど利得が大きいといえる。これは楔型モデルによる解析とも一致する。また、実入射角 ψ が大きくなると利得が大きくなる点も楔型モデルにおよび物理的イメージと合致する。

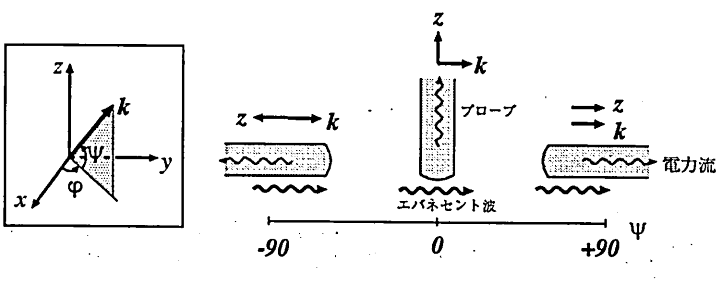


図 6: 実入射角 ψ とプローブの位置

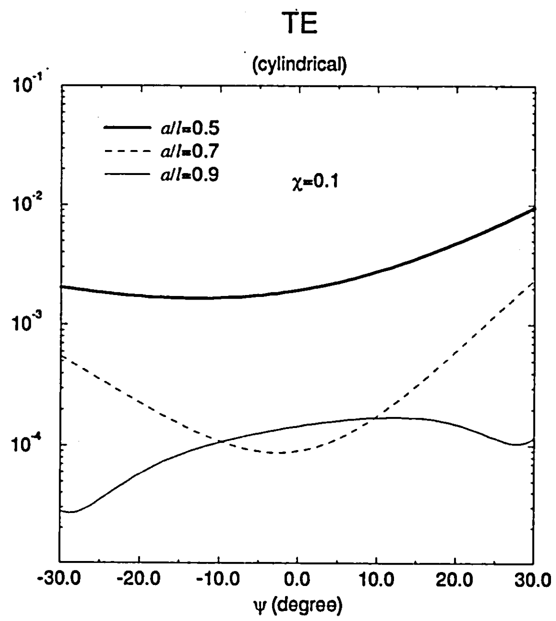


図 7: 利得 (TE 波入射) [円筒形]

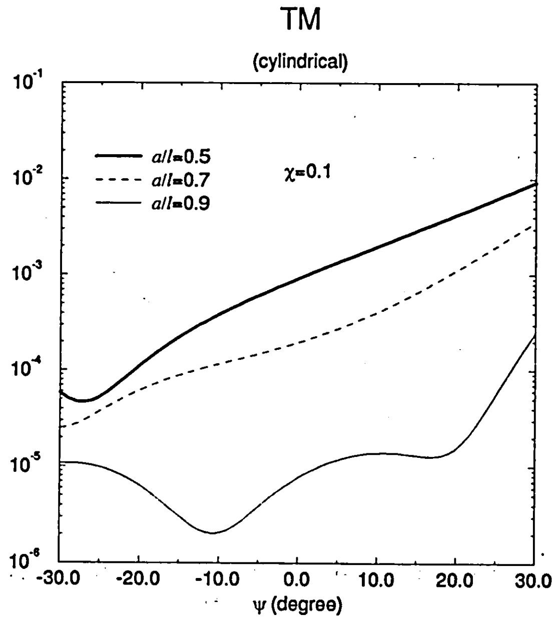


図 8: 利得 (TM 波入射) [円筒形]

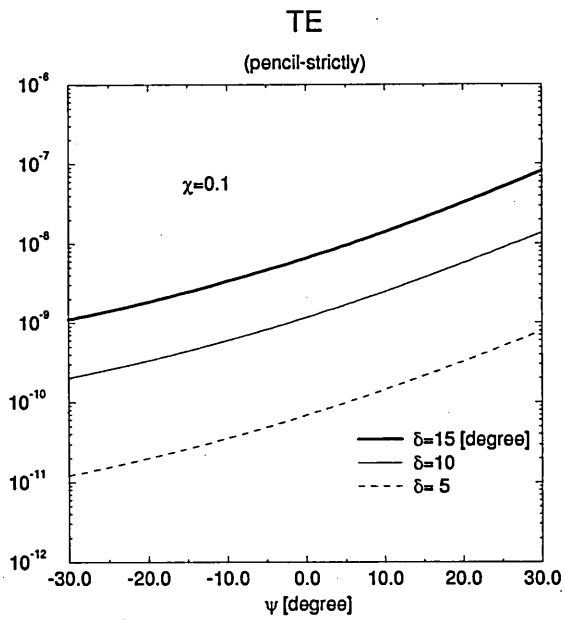


図 9: 利得 (TE 波入射) [ペンシル形]

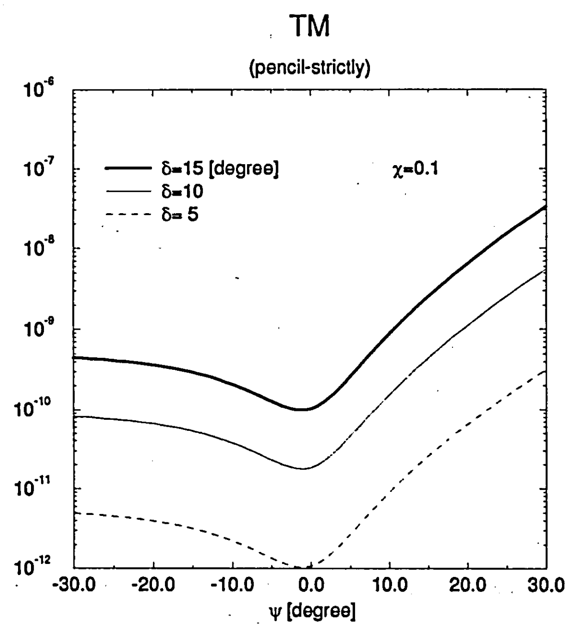


図 10: 利得 (TM 波入射) [ペンシル形]

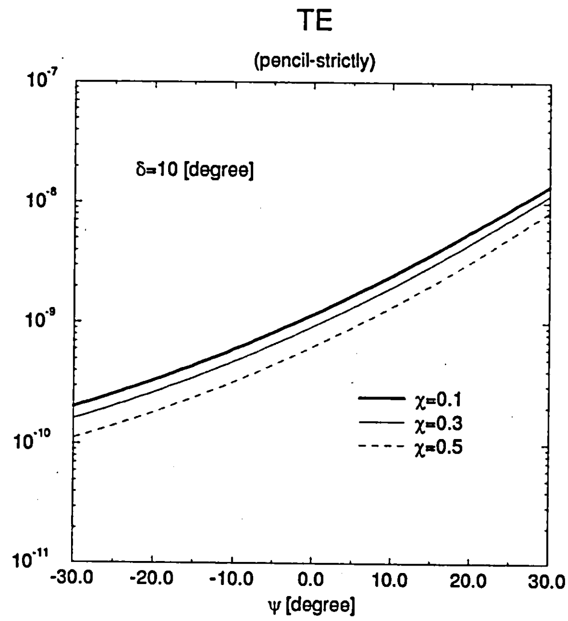


図 11: 利得 (TE 波入射) [ペンシル形]

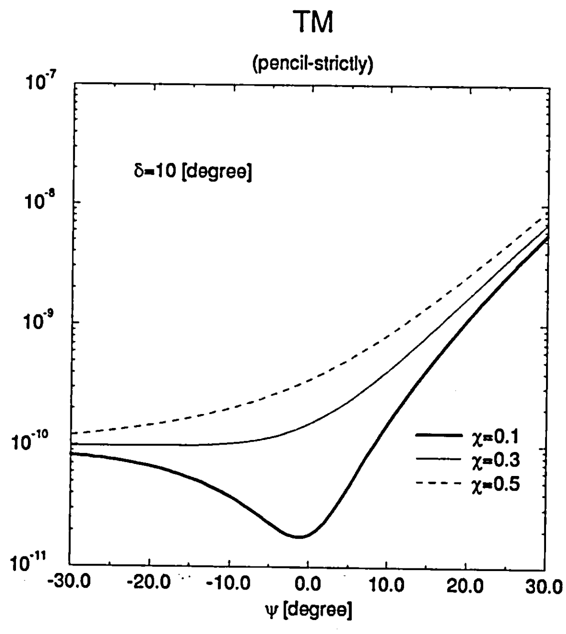


図 12: 利得 (TM 波入射) [ペンシル形]

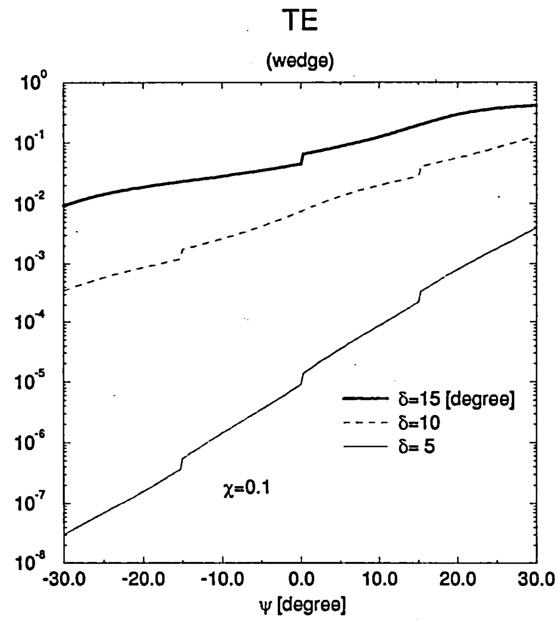


図 13: 利得 (TE 波入射) [楔形]

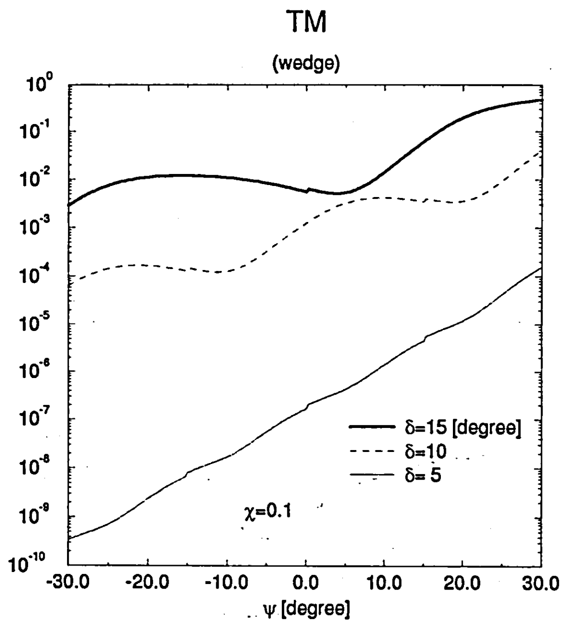


図 14: 利得 (TM 波入射) [楔形]

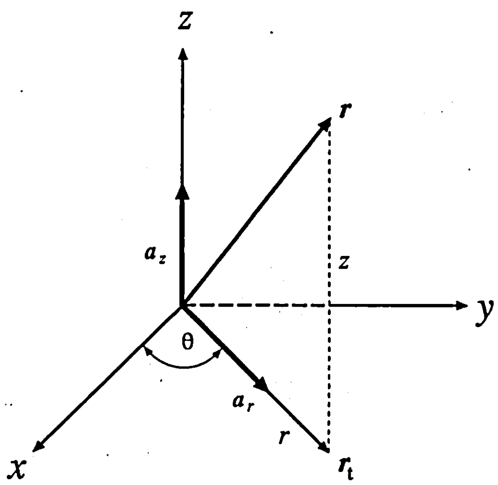


図 A.1: 円筒座標

付録 A　ベクトル円筒関数とベクトル波動関数

本文で用いるために円筒問題に現れるベクトル関数および記号を整理しておく。円筒座標単位ベクトルを$\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{a}_\theta$, $\boldsymbol{a}_z$ で表す。

位置ベクトル　$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_\mathrm{t}, z) \equiv (r, \theta, z)_\mathrm{cyl} = r\boldsymbol{a}_r + z\boldsymbol{a}_z \tag{A.1}$$

波数ベクトル　$$\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k}_\mathrm{t}, \beta) \equiv (\lambda, \varphi, \beta)_\mathrm{cyl} = \lambda\boldsymbol{a}_r + \beta\boldsymbol{a}_z \tag{A.2}$$

$$\lambda \equiv k_\mathrm{t}(\beta) \equiv \sqrt{k^2 - \beta^2} \tag{A.3}$$

水平偏波ベクトル　$$\boldsymbol{a}_\mathrm{H}(\boldsymbol{k}) \equiv \frac{\boldsymbol{k}_\mathrm{t}}{\lambda} \times \boldsymbol{a}_z = -\boldsymbol{a}_\theta \tag{A.4}$$

垂直偏波ベクトル　$$\boldsymbol{a}_\mathrm{V}(\boldsymbol{k}) \equiv \frac{\boldsymbol{k}}{k} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{H}(\boldsymbol{k}) = \frac{\beta}{k}\frac{\boldsymbol{k}_\mathrm{t}}{\lambda} - \frac{\lambda}{k}\boldsymbol{a}_z \tag{A.5}$$

A.1　ベクトル円筒関数

ベクトル Bessel 関数

本論文でベクトル Bessel 関数を次の様に定義する:

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{j}_m^1(\lambda r) \\ \boldsymbol{h}_m^1(\lambda r) \end{matrix}\right\} \equiv \zeta_m(\lambda r)\boldsymbol{a}_r + \eta_m(\lambda r)\boldsymbol{a}_\theta \tag{A.6}$$

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{j}_m^2(\lambda r) \\ \boldsymbol{h}_m^2(\lambda r) \end{matrix}\right\} \equiv \eta_m(\lambda r)\boldsymbol{a}_r - \zeta_m(\lambda r)\boldsymbol{a}_\theta + \psi_m(\lambda r)\boldsymbol{a}_z \tag{A.7}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_m(\lambda r) &\equiv \frac{\lambda}{k}\phi_m(\lambda r)\\ \zeta_m(\lambda r) &\equiv \frac{\beta}{k}\frac{m}{\lambda r}\phi_m(\lambda r) = \frac{\beta}{2k}\left[\phi_{m-1}(\lambda r)+\phi_{m+1}(\lambda r)\right]\\ \eta_m(\lambda r) &\equiv \frac{\mathrm{i}\beta}{k}\dot{\phi}_m(\lambda r) = \frac{\mathrm{i}\beta}{2k}\left[\phi_{m-1}(\lambda r)-\phi_{m+1}(\lambda r)\right]\end{aligned}\right\} \tag{A.8}$$

$$\psi_{-m} = (-1)^m\psi_m,\ \zeta_{-m} = (-1)^{m+1}\zeta_m,\ \eta_{-m} = (-1)^m\eta_m \tag{A.9}$$

$$m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots \tag{A.10}$$

ここで、$\lambda = \sqrt{k^2-\beta^2}$ であり、Bessel 関数ϕ_mが

$$\phi_m(\lambda r) = \begin{cases} J_m(\lambda r) \\ H_m^{(1)}(\lambda r)\end{cases},\quad \dot{\phi}_m(\lambda) = \begin{cases} \dot{J}_m(\lambda r) \\ \dot{H}_m^{(1)}(\lambda r)\end{cases} \tag{A.11}$$

であるに応じてベクトル Bessel 関数は $\boldsymbol{j}_m$、$\boldsymbol{h}_m$ の記号を用いるものとする。
また、$\lambda = \mathrm{i}\tau,\ \tau = \sqrt{\beta^2-k^2}$ の場合は

$$\boldsymbol{k}_m^\nu(\tau r) \equiv \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\mathrm{i}^m\boldsymbol{h}_m^\nu(\mathrm{i}\tau r),\quad \nu = 1,2 \tag{A.12}$$

で表す。すなわち

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{k}_m^1(\tau r) &\equiv \zeta_m'(\tau r)\boldsymbol{a}_r + \eta_m'(\tau r)\boldsymbol{a}_\theta\\ \boldsymbol{k}_m^2(\tau r) &\equiv \eta_m'(\tau r)\boldsymbol{a}_r - \zeta_m'(\tau r)\boldsymbol{a}_\theta + \psi_m'(\tau r)\boldsymbol{a}_z\end{aligned}\right\} \tag{A.13}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_m'(\tau r) &= \frac{\tau}{k}K_m(\tau r)\\ \zeta_m'(\tau r) &= -\frac{\beta}{k}\frac{m}{\tau r}K_m(\tau r) = \frac{\beta}{2k}[K_{m-1}(\tau r)-K_{m+1}(\tau r)]\\ \eta_m'(\tau r) &= -\frac{\mathrm{i}\beta}{k}\dot{K}_m(\tau r) = \frac{\mathrm{i}\beta}{2k}[K_{m-1}(\tau r)+K_{m+1}(\tau r)]\end{aligned}\right\} \tag{A.14}$$

$$\psi_{-m}' = \psi_m',\quad \zeta_{-m}' = -\zeta_m',\quad \eta_{-m}' = \eta_m' \tag{A.15}$$

ここで、$K_m(z)$ は、第 2 種の変形 Bessel 関数である:

$$K_m(\tau r) \equiv \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\mathrm{i}^m H_m^{(1)}(\mathrm{i}\tau r) \tag{A.16}$$

$$m\frac{K_m(z)}{z} = -\frac{1}{2}[K_{m-1}(z)-K_{m+1}(z)] \tag{A.17}$$

$$\dot{K}_m(z) = -\frac{1}{2}[K_{m-1}(z)+K_{m+1}(z)] \tag{A.18}$$

$$K_m(z) = K_{-m}(z) \tag{A.19}$$

ベクトル円筒関数

exp(i$m\theta$) 表示

ベクトル Bessel 関数に角度因子 $e^{im\theta}$ を付加したもの

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{j}^1_m(\lambda r)e^{im\theta} \\ \boldsymbol{j}^2_m(\lambda r)e^{im\theta} \end{array}\right\}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{A.20}$$

を $e^{im\theta}$ 表示のベクトル円筒関数と名づける。$\boldsymbol{h}^\nu_m(\lambda r)$, $\boldsymbol{k}^\nu_m(\lambda r)$ の場合も同様である。

[$\cos m\theta$, $\sin m\theta$] 表示

これとは別に $\cos m\theta$, $\sin m\theta$, $m = 0, 1, 2, \cdots$ による表示 ([±] 表示と呼ぶ) のベクトル円筒関数 $\boldsymbol{J}^1_{m\pm}$, $\boldsymbol{J}^2_{m\pm}$ を次式で定義する:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}^1_{m\pm}(\lambda r, \theta) &= \frac{1}{2i^m}[\boldsymbol{j}^1_m(\lambda r)i^m e^{im\theta} \pm \boldsymbol{j}^1_{-m}(\lambda r)i^{-m}e^{-im\theta}] \\ &= \zeta_m(\lambda r)\begin{bmatrix} i\sin m\theta \\ \cos m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r + \eta_m(\lambda r)\begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i\sin m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}^2_{m\pm}(\lambda r, \theta) &= \frac{1}{2i^m}[\boldsymbol{j}^2_m(\lambda r)i^m e^{im\theta} \pm \boldsymbol{j}^2_{-m}(\lambda r)i^{-m}e^{-im\theta}] \\ &= \eta_m(\lambda r)\begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i\sin m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r - \zeta_m(\lambda r)\begin{bmatrix} i\sin m\theta \\ \cos m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta + \psi_m(\lambda r)\begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i\sin m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z \\ &\qquad m = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{A.22}$$

特に $m = 0$ の場合は、

$$\boldsymbol{J}^1_{0+}(\lambda r) = \eta_0(\lambda r)\boldsymbol{a}_\theta, \qquad \boldsymbol{J}^1_{0-}(\lambda r) \equiv 0 \tag{A.23}$$

$$\boldsymbol{J}^2_{0+}(\lambda r) = \eta_0(\lambda r)\boldsymbol{a}_r + \psi_0(\lambda r)\boldsymbol{a}_z, \qquad \boldsymbol{J}^2_{0-}(\lambda r) \equiv 0 \tag{A.24}$$

また同様にして、$\lambda = i\tau$ の場合は

$$\boldsymbol{K}^\nu_{m\pm}(\tau r, \theta) = \frac{\pi i}{2}i^m \boldsymbol{H}^\nu_{m\pm}(i\tau r, \theta), \quad \nu = 1, 2 \tag{A.25}$$

と書ける。すなわち

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}^1_{m\pm}(\tau r, \theta) &= \frac{1}{2}[\boldsymbol{k}^1_m(\tau r)e^{im\theta} \pm \boldsymbol{k}^1_{-m}(\tau r)e^{-im\theta}] \\ &= \zeta'_m(\tau r)\begin{bmatrix} i\sin m\theta \\ \cos m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r + \eta'_m(\tau r)\begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i\sin m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta \end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}^2_{m\pm}(\tau r, \theta) &= \frac{1}{2}[\boldsymbol{k}^2_m(\tau r)e^{im\theta} \pm \boldsymbol{k}^2_{-m}(\tau r)e^{-im\theta}] \\ &= \eta'_m(\tau r)\begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i\sin m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r - \zeta'_m(\tau r)\begin{bmatrix} i\sin m\theta \\ \cos m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta + \psi'_m(\tau r)\begin{bmatrix} \cos m\theta \\ i\sin m\theta \end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z \end{aligned} \tag{A.27}$$

A.2 ベクトル波動関数

円筒調和関数

ベクトル Helmholtz 方程式を満たすソレノイダルなベクトル円筒波 ψ_m はベクトル円筒関数と因子 $e^{i\beta z}$ の積で与えられる (ここではポテンシャル円筒波は用いないので省略する):

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{\psi}_m(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_m(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{(solenoidal)} \tag{A.28}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi}_m(\boldsymbol{r}) = k^2 \boldsymbol{\psi}_m(\boldsymbol{r}) \tag{A.29}$$

$$\boldsymbol{\psi}_m(r,\theta,z) = \boldsymbol{j}^{\nu}_m(\lambda r) e^{im\theta + i\beta z}, \quad \boldsymbol{J}^{\nu}_{m\pm}(\lambda r,\theta) e^{i\beta z} \quad \text{(内部)} \tag{A.30}$$

$$= \boldsymbol{h}^{\nu}_m(\lambda r) e^{im\theta + i\beta z}, \quad \boldsymbol{H}^{\nu}_{m\pm}(\lambda r,\theta) e^{i\beta z} \quad \text{(外部)} \tag{A.31}$$

$$= \boldsymbol{k}^{\nu}_m(\mu r) e^{im\theta + i\beta z}, \quad \boldsymbol{K}^{\nu}_{m\pm}(\lambda r,\theta) e^{i\beta z} \quad \text{(エバネセント)} \tag{A.32}$$

$$\nu = 1, 2,$$

の形に表される。

円筒電磁波

円筒内部問題の円筒電磁波をベクトル Bessel 関数で表す。$e^{im\theta}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ による表示で示せば

TE 波 (円筒内部)

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}}_m(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}^1_m(\lambda r) e^{im\theta + i\beta z} \tag{A.33}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{TE}}_m(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}} \boldsymbol{j}^2_m(\lambda r) e^{im\theta + i\beta z} \tag{A.34}$$

$$Z_{\mathrm{TE}} \equiv Z_{\mathrm{TE}}(\beta) = \frac{k}{\beta}\zeta, \quad \zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon} \tag{A.35}$$

TM 波 (円筒内部)

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{TM}}_m(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}^2_m(\lambda r) e^{im\theta + i\beta z} \tag{A.36}$$

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{TM}}_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}} \boldsymbol{j}^1_m(\lambda r) e^{im\theta + i\beta z} \tag{A.37}$$

$$Z_{\mathrm{TM}} \equiv Z_{\mathrm{TM}}(\beta) = \frac{\beta}{k}\zeta \tag{A.38}$$

外部の放射場、エバネセント波はそれぞれベクトル Bessel 関数を $\boldsymbol{j}^{\nu}_m \to \boldsymbol{h}^{\nu}_m$, $\boldsymbol{k}^{\nu}_m$ に置き換えればよい。また、$\cos m\theta, \sin m\theta$ による表示は (A.30)-(A.32) により $\boldsymbol{J}^{1,2}_{m\pm}$ などに置き換えればえられる。

A.3 平面電磁波の円筒波展開

TE 波 (水平偏波, 入射電力 $\zeta/2$)

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$ 表示および [±] 表示の展開を示して置く:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}}(\boldsymbol{r}) &= \zeta \boldsymbol{a}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} && \text{(A.39)}\\
&= Z_{\mathrm{TE}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \boldsymbol{j}^1_m(\lambda r, \beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\beta z} && \text{(A.40)}\\
&= Z_{\mathrm{TE}} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \mathrm{i}^m \boldsymbol{J}^1_{m+}(\lambda r, \theta-\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z} && \text{(A.41)}\\
\boldsymbol{H}^{\mathrm{TE}}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} && \text{(A.42)}\\
&= -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \boldsymbol{j}^2_m(\lambda r, \beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\beta z} && \text{(A.43)}\\
&= -\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \mathrm{i}^m \boldsymbol{J}^2_{m+}(\lambda r, \theta-\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z} && \text{(A.44)}
\end{aligned}$$

TM 波 (垂直偏波, 入射電力 $\zeta/2$)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{\mathrm{TM}}(\boldsymbol{r}) &= \zeta \boldsymbol{a}_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} && \text{(A.45)}\\
&= -\zeta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \boldsymbol{j}^2_m(\lambda r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\beta z} && \text{(A.46)}\\
\boldsymbol{H}^{\mathrm{TM}}(\boldsymbol{r}) &= -\boldsymbol{a}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} && \text{(A.47)}\\
&= -\frac{\zeta}{Z_{\mathrm{TM}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \boldsymbol{j}^1_m(\lambda r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\beta z} && \text{(A.48)}
\end{aligned}$$

ただしここで $\boldsymbol{a}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{k})$ は (A.4),(A.5) で定義される水平、垂直偏波ベクトルを表わし、$\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_m = 2\ (m \geq 1)$ と置いた。

ベクトル円筒波の平面波展開

$$\frac{k}{\beta}\mathrm{i}^m \boldsymbol{j}^1_m(\lambda r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta+\mathrm{i}\beta z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{a}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}\varphi, \quad (\text{TE 波}) \tag{A.49}$$

$$-\mathrm{i}^m \boldsymbol{j}^2_m(\lambda r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta+\mathrm{i}\beta z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{a}_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}\varphi, \quad (\text{TM 波}) \tag{A.50}$$

付録B 均一コア光ファイバの電磁界モード[1]

均一コア光ファイバの導波モードの電磁界を以下にまとめておく。コアの半径を a とし、内部(コア)と外部(クラッド)の屈折率と諸定数を次のように置く。ただし、透磁率は内外部μ_0 一定とし、$\zeta \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ とおく:

[1]宮城「光伝送の基礎」[9]、大越他「光ファイバ」[10]、藤沢「マイクロ波回路」[11]

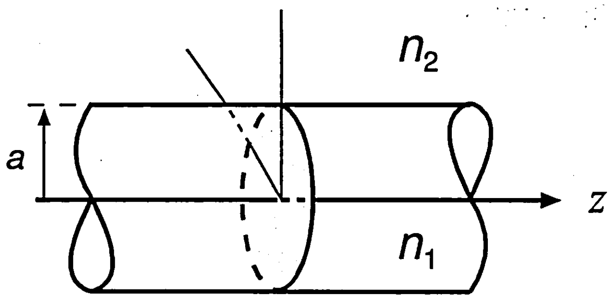


図 B.1: 均一コアファイバの屈折率 (内 n_1, 外 n_2)

	屈折率	波数	誘電率	電波インピーダンス	動径波数
内部	n_1	$k_1 = n_1 k$	$\epsilon_1 = n_1^2 \epsilon_0$	$\zeta_1 \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_1}$	$\lambda = \sqrt{k_1^2 - \beta^2}$
外部	n_2	$k_2 = n_2 k$	$\epsilon_2 = n_2^2 \epsilon_0$	$\zeta_2 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_2}$	$\kappa = \sqrt{\beta^2 - k_2^2}$

B.1 導波モードの特性方程式[2]

導波モードはよく知られているように、TE 波,TM 波の混成モードであり、その伝搬定数は次の特性方程式の根より定まる (u、w :根) :

$$\left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)}\right]\left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)}\right] = m^2\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{w^2}\right)\left[\frac{1}{u^2} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{w^2}\right] \tag{B.1}$$

$$\text{根 } u_{mn}, w_{mn},\ n = 1, 2, \cdots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

但しここでパラメタを次のようにおいた。

$$u^2 + w^2 = v^2, \tag{B.2}$$

$$u \equiv \lambda a, \quad w \equiv \kappa a, \quad v^2 \equiv (k_1 a)^2 - (k_2 a)^2 = (n_1^2 - n_2^2)(ka)^2 \tag{B.3}$$

$$\lambda \equiv \sqrt{k_1^2 - \beta^2}, \quad \kappa \equiv \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \tag{B.4}$$

$$P_m = |m|\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{w^2}\right) \Big/ \left[\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)}\right], \quad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{B.5}$$

$$P = \begin{cases} 0\ ;\ \mathrm{TM}_{0n}\text{モード}, \\ \infty\ ;\ \mathrm{TE}_{0n}\text{モード}, \end{cases} \quad m = 0 \tag{B.6}$$

$$P > 0 \quad \mathrm{EH}_{mn}\text{モード}, \quad m \geq 1 \tag{B.7}$$

$$P < 0 \quad \mathrm{HE}_{mn}\text{モード}, \quad m \geq 1 \tag{B.8}$$

[2] 宮城 [9]

弱導波近似

$$\Delta \equiv \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1 \tag{B.9}$$

の場合には特性方程式は分解されて簡単になる：

$$\begin{aligned}
\frac{J_{m+1}(u)}{uJ_{m+2}(u)} &= \frac{K_{m+1}(w)}{wK_{m+2}(w)};\ \mathrm{EH}_{mn}\text{モード} && \text{(B.10)}\\
\frac{J_{m-1}(u)}{uJ_m(u)} &= \frac{K_{m-1}(w)}{wK_m(w)};\ \mathrm{HE}_{mn}\text{モード} && \text{(B.11)}\\
P &= \begin{cases} 1\ ;\ \mathrm{EH}_{mn}\text{モード} \\ -1\ ;\ \mathrm{HE}_{mn}\text{モード} \end{cases} && \text{(B.12)}
\end{aligned}$$

特に主モード HE_{11}モード (遮断波長なし) の場合が以下で必要である。

B.2 導波モードの電磁界 ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$表示)

ファイバの導波モードはTE波 (A.33), (A.34) とTM波 (A.36), (A.37) の混成モードとして

コア内部 ($r < a$)

($\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r},\beta) &= \left[\boldsymbol{j}_m^2(\lambda r) - \mathrm{i}P_m\boldsymbol{j}_m^1(\lambda r)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta+\mathrm{i}\beta z} && \text{(B.13)}\\
&= [(\eta_m - \mathrm{i}P_m\zeta_m)\boldsymbol{a}_r - (\zeta_m + \mathrm{i}P_m\eta_m)\boldsymbol{a}_\theta + \psi_m\boldsymbol{a}_z]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta+\mathrm{i}\beta z} && \text{(B.14)}\\
\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r},\beta) &= \left[\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^1}\boldsymbol{j}_m^1(\lambda r) + \mathrm{i}P_m\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^1}\boldsymbol{j}_m^2(\lambda r)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta+\mathrm{i}\beta z} && \text{(B.15)}\\
&= \left[\left(\frac{k_1}{\beta\zeta_1}\zeta_m + \mathrm{i}P_m\frac{\beta}{k\zeta}\eta_m\right)\boldsymbol{a}_r + \left(\frac{k_1}{\beta\zeta_1}\eta_m + \mathrm{i}P_m\frac{\beta}{k\zeta}\zeta_m\right)\boldsymbol{a}_\theta + \mathrm{i}P_m\frac{\beta}{k\zeta}\psi_m\boldsymbol{a}_z\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta+\mathrm{i}\beta z} && \text{(B.16)}
\end{aligned}$$

と書ける。ただしここで

$$\begin{aligned}
\lambda &= \sqrt{k_1^2 - \beta^2} && \text{(B.17)}\\
Z_{\mathrm{TM}}^1 &\equiv Z_{\mathrm{TM}}^1(\beta) \equiv \frac{\beta}{k_1}\zeta_1, \quad Z_{\mathrm{TE}}^1 \equiv Z_{\mathrm{TE}}^1(\beta) \equiv \frac{k_1}{\beta}\zeta_1 = \frac{k}{\beta}\zeta && \text{(B.18)}\\
P_m &\equiv m\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \Big/ \left[\frac{J_m'(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K_m'(w)}{wK_m(w)}\right], \quad m = \pm1, \pm2, \cdots && \text{(B.19)}\\
P_m &= P\ \ (m > 0), \quad P_m = -P\ \ (m < 0) && \text{(B.20)}
\end{aligned}$$

コア外部 ($r > a$)

($\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$)

$$\boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r},\beta) = \xi_m\left[\boldsymbol{k}_m^2(\kappa r) - \mathrm{i}P_m\boldsymbol{k}_m^1(\kappa r)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta+\mathrm{i}\beta z} \tag{B.21}$$

$$
\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r},\beta) = \xi_m\left[\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^2}\boldsymbol{k}_m^1(\kappa r)+\mathrm{i}P_m\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\boldsymbol{k}_m^2(\kappa r)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta+\mathrm{i}\beta z} \tag{B.22}
$$

$$
\kappa=\sqrt{\beta^2-k_2^2} \tag{B.23}
$$

$$
Z_{\mathrm{TM}}^2\equiv Z_{\mathrm{TM}}^2(\beta)\equiv\frac{\beta}{k_2}\zeta_2,\quad Z_{\mathrm{TE}}^2\equiv Z_{\mathrm{TE}}^2(\beta)\equiv\frac{k_2}{\beta}\zeta_2=\frac{k}{\beta}\zeta \tag{B.24}
$$

$$
\xi_m\equiv\frac{\lambda J_m(\lambda a)}{\kappa K_m(\kappa a)}\frac{n_2}{n_1}\quad (E_z,H_z\text{の連続条件より}) \tag{B.25}
$$

これらの式で$\beta>0$としたものは前進波$\boldsymbol{E}_m^+,\boldsymbol{H}_m^+$、また$\beta\to-\beta$とおいたものは後進波$\boldsymbol{E}_m^-,\boldsymbol{H}_m^-$を表す。

B.3 導波モードの電磁界 ($\sin m\theta$, $\cos m\theta$ 表示)

($\sin m\theta$, $\cos m\theta, m=0,1,2,\cdots$) 角度因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$, $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$を通常の教科書の様に $\cos m\theta$, $\sin m\theta$, $m=0,1,2,\cdots$で表す。ここでは因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}$を省略する。

ベクトル表示

コア内部 ($r<a$)

$$
\boldsymbol{E}_{m\pm}(r,\theta;\beta) \equiv \boldsymbol{J}_{m\pm}^2(\lambda r,\theta)-\mathrm{i}P\boldsymbol{J}_{m\pm}^1(\lambda r,\theta) \tag{B.26}
$$

$$
\boldsymbol{H}_{m\pm}(r,\theta;\beta) \equiv \frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^1}\boldsymbol{J}_{m\pm}^1(\lambda r,\theta)+\mathrm{i}P\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^1}\boldsymbol{J}_{m\pm}^2(\lambda r,\theta) \tag{B.27}
$$

コア外部 ($r>a$)

$$
\boldsymbol{E}_{m\pm}(r,\theta;\beta) \equiv \xi_m\left[\boldsymbol{K}_{m\pm}^2(\lambda r,\theta)-\mathrm{i}P\boldsymbol{K}_{m\pm}^1(\lambda r,\theta)\right] \tag{B.28}
$$

$$
\boldsymbol{H}_{m\pm}(r,\theta;\beta) \equiv \xi_m\left[\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^2}\boldsymbol{K}_{m\pm}^1(\lambda r,\theta)+\mathrm{i}P\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\boldsymbol{K}_{m\pm}^2(\lambda r,\theta)\right] \tag{B.29}
$$

成分表示

下添[±]は[ ]内の上下の角度因子に対応する。($\psi_{-m}=(-1)^m\psi_m$, $\zeta_{-m}=(-1)^{m+1}\zeta_m$, $\eta_{-m}=(-1)^m\eta_m$ の関係に注意)

コア内部 ($r<a$)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{m[\pm]}(r,\theta;\beta) &\equiv [\boldsymbol{J}_{m\pm}^2(r,\theta;\beta)-\mathrm{i}P_m\boldsymbol{J}_{m\mp}^1(r,\theta;\beta)]\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\\-1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\\-1\end{bmatrix}\Big\{[\boldsymbol{j}_m^2(\lambda r)-\mathrm{i}P\boldsymbol{j}_m^1(\lambda r)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\\
&\qquad \pm(-1)^m[\boldsymbol{j}_{-m}^2(\lambda r)+\mathrm{i}P\boldsymbol{j}_{-m}^1(\lambda r)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\Big\}
\end{aligned} \tag{B.30}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{i}[\eta_m(\lambda r) - \mathrm{i}P\zeta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\
&\quad -[\zeta_m(\lambda r) + \mathrm{i}P\eta_m(\lambda r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_\theta - \mathrm{i}\psi_m(\lambda r, \beta) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_z \quad \text{(B.31)} \\
&= \frac{\beta}{2k_1}[(1-P)J_{m-1}(\lambda r) - (1+P)J_{m+1}(\lambda r)] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\
&\quad -\frac{\beta}{2k_1}[(1-P)J_{m-1}(\lambda r) + (1+P)J_{m+1}(\lambda r)] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_\theta \\
&\quad -\mathrm{i}\frac{\lambda}{k_1}J_m(\lambda r) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_z \quad \text{(B.32)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{m[\pm]}(r,\theta;\beta) &\equiv \left[\frac{1}{Z^1_{TM}}\boldsymbol{J}^1_{m\pm}(r,\theta;\beta) + \mathrm{i}P_m\frac{1}{Z^1_{TE}}\boldsymbol{J}^2_{m\mp}(r,\theta;\beta)\right] \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \end{bmatrix} \left\{ \left[\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}}\boldsymbol{j}^1_m(\lambda r) + \mathrm{i}P\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\boldsymbol{j}^2_m(\lambda r)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \right. \\
&\quad \left. \pm(-1)^m \left[\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}}\boldsymbol{j}^1_{-m}(\lambda r) - \mathrm{i}P\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\boldsymbol{j}^2_{-m}(\lambda r)\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta} \right\} \quad \text{(B.33)} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \end{bmatrix} \left\{ \frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}}[\boldsymbol{j}^1_m(\lambda r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \pm (-1)^m \boldsymbol{j}^1_{-m}(\lambda r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathrm{i}P}{Z^1_{\mathrm{TE}}}[\boldsymbol{j}^2_m(\lambda r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \mp (-1)^m \boldsymbol{j}^2_{-m}(\lambda r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}] \right\} \quad \text{(B.34)} \\
&= \left[\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}}\zeta_m(\lambda r) + \mathrm{i}P\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\eta_m(\lambda r)\right] \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\
&\quad -\mathrm{i}\left[\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TM}}}\eta_m(\lambda r) - \mathrm{i}P\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\zeta_m(\lambda r)\right] \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_\theta \\
&\quad +\mathrm{i}P\frac{1}{Z^1_{\mathrm{TE}}}\psi_m(\lambda r) \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_z \quad \text{(B.35)} \\
&\quad \left(Z^1_{\mathrm{TM}} \equiv \frac{\beta}{k_1}\zeta_1, \quad Z^1_{\mathrm{TE}} \equiv \frac{k_1}{\beta}\zeta_1 = \frac{k}{\beta}\zeta \right)
\end{aligned}
$$

これらの表式では横成分 ($\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_\theta$の係数) が実数、縦成分 ($\boldsymbol{a}_z$の係数) が純虚数となるように定義している。そのために係数$\begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \end{bmatrix}$が付されている。[3] 特に弱導波性近似 ($P = \pm 1$) の場合$\boldsymbol{E}_m(r,\beta)$ の表式は簡単になる。

外部 ($r > a$)

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}_{m[\pm]}(r,\theta;\beta) \\
&= \frac{\xi_m}{2}\begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \end{bmatrix} \left\{ [\boldsymbol{k}^2_m(\kappa r) - \mathrm{i}P\boldsymbol{k}^1_m(\kappa r)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \right.
\end{aligned}
$$

[3] 宮城 [9]($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$) p.76–77 に一致する.

$$\pm[\boldsymbol{k}^2_{-m}(\kappa r)+\mathrm{i}P\boldsymbol{k}^1_{-m}(\kappa r)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\Big\} \tag{B.36}$$

$$=\xi_m\left\{-\mathrm{i}(\eta'_m(\kappa r)-\mathrm{i}P\zeta'_m(\kappa r))\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r-(\zeta'_m(\kappa r)+\mathrm{i}P\eta'_m(\kappa r))\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta\right.$$

$$\left.-\mathrm{i}\psi'_m(\kappa r)\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z\right\} \tag{B.37}$$

$$=\xi_m\left\{\frac{\beta}{2k_2}[(1-P)K_{m-1}(\kappa r)+(1+P)K_{m+1}(\kappa r)]\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\right.$$

$$-\frac{\beta}{2k_2}[(1-P)K_{m-1}(\kappa r)-(1+P)K_{m+1}(\kappa r)]\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta$$

$$\left.-\mathrm{i}\frac{\kappa}{k_2}K_m(\kappa r)\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z\right\} \tag{B.38}$$

$$\boldsymbol{H}_{m[\pm]}(r,\theta;\beta)$$

$$=\frac{\xi_m}{2}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\\ -1\end{bmatrix}\left\{\left[\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^2}\boldsymbol{k}^1_m(\kappa r)+\mathrm{i}P\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\boldsymbol{k}^2_m(\kappa r)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\right.$$

$$\left.\pm\left[\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^2}\boldsymbol{k}^1_{-m}(\kappa r)-\mathrm{i}P\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\boldsymbol{k}^2_{-m}(\kappa r)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\right\} \tag{B.39}$$

$$=\xi_m\left\{\left(\frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z_{\mathrm{TM}}^2}+\mathrm{i}P\frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\right)\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\right.$$

$$\left.-\mathrm{i}\left(\frac{\eta'_m(\kappa r)}{Z_{\mathrm{TM}}^2}-\mathrm{i}P\frac{\zeta'_m(\kappa r)}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\right)\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta+\mathrm{i}P\frac{\psi'_m(\kappa r)}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z\right\} \tag{B.40}$$

$$=\xi_m\left\{\frac{\beta}{2k_2}\left[\left(\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^2}-P\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\right)K_{m-1}(\kappa r)-\left(\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^2}+P\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\right)K_{m+1}(\kappa r)\right]\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_r\right.$$

$$+\frac{\beta}{2k_2}\left[\left(\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^2}-P\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\right)K_{m-1}(\kappa r)+\left(\frac{1}{Z_{\mathrm{TM}}^2}+P\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^2}\right)K_{m+1}(\kappa r)\right]\begin{bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_\theta$$

$$\left.+\mathrm{i}P\frac{\kappa}{k_2}\frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}^2}K_m(\kappa r)\begin{bmatrix}\sin m\theta\\ -\cos m\theta\end{bmatrix}\boldsymbol{a}_z\right\} \tag{B.41}$$

$$\left(Z_{\mathrm{TM}}^2\equiv\frac{\beta}{k_2}\zeta_2=\frac{\beta}{k}\zeta,\quad Z_{\mathrm{TE}}^2\equiv\frac{k_2}{\beta}\zeta_2=\frac{k}{\beta}\zeta\right)\quad(k_2=k,\ n_2=1)$$

以上の導波モードはコア内、外部も含めて前進波 (+)、後進波 (−) の電磁界は次の関係式をみたすことが確かめられる。ここで $\boldsymbol{e},\boldsymbol{h}$ は横成分、$\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{h}_z$ は縦成分を表わす。

$$\boldsymbol{E}^+_m \equiv \boldsymbol{E}_{m[\pm]}(r,\theta;\beta)=\boldsymbol{e}_m+\boldsymbol{e}_{mz} \tag{B.42}$$
$$\boldsymbol{E}^-_m \equiv \boldsymbol{E}_{m[\pm]}(r,\theta;-\beta)=-\boldsymbol{e}_m+\boldsymbol{e}_{mz} \tag{B.43}$$
$$\boldsymbol{H}^+_m \equiv \boldsymbol{H}_{m[\pm]}(r,\theta;\beta)=\boldsymbol{h}_m+\boldsymbol{h}_{mz} \tag{B.44}$$
$$\boldsymbol{H}^-_m \equiv \boldsymbol{H}_{m[\pm]}(r,\theta;-\beta)=\boldsymbol{h}_m-\boldsymbol{h}_{mz} \tag{B.45}$$

付録C　入射 Evanescent 波の円筒波展開

C.1　Evanescent スカラー波の展開

スカラー平面波の展開 (実波数ベクトル k)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu r\cos(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\gamma z} \tag{C.1}$$

$$= \sum_n \mathrm{i}^n J_n(\mu r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\varphi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma z}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{k} = (\mu,\varphi,\gamma)_{cyl} \\ \boldsymbol{r} = (r,\theta,z)_{cyl} \end{cases} \tag{C.2}$$

$$\boldsymbol{k}^2 \equiv \mu^2 + \gamma^2 = k^2 \tag{C.3}$$

$$\mu = \sqrt{k^2-\gamma^2} \equiv k\cos\psi, \quad \gamma = k\sin\psi \tag{C.4}$$

ここで ψ は円筒軸 (z -軸) への入射角に対応する。

Evanescent 平面波

複素波数ベクトル $\boldsymbol{k}^*$ をもつ evanescent 平面波を

$$\boldsymbol{k}^* \equiv \boldsymbol{k}_\mathrm{r} + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{r}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{k}_\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{r}} \begin{cases} \boldsymbol{k}_\mathrm{r}: \text{位相伝搬方向} \\ \boldsymbol{k}_\mathrm{i}: \text{振幅減衰方向} \end{cases} \tag{C.5}$$

で表わせば、

$$\boldsymbol{k}^{*2} \equiv k_\mathrm{r}^2 - k_\mathrm{i}^2 + 2\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_\mathrm{r}\cdot\boldsymbol{k}_\mathrm{i}) = k^2 \tag{C.6}$$

$$k_\mathrm{r}^2 - k_\mathrm{i}^2 = k^2, \quad (\boldsymbol{k}_\mathrm{r}\cdot\boldsymbol{k}_\mathrm{i}) = 0 \rightarrow \boldsymbol{k}_\mathrm{r} \perp \boldsymbol{k}_\mathrm{i} \tag{C.7}$$

従って (C.7) により位相伝搬方向と振幅減衰方向は直交する。

複素入射角

簡単のため $\boldsymbol{k}_\mathrm{r}, \boldsymbol{k}_\mathrm{i}$ は共に入射面内 (同じ方位角 φ) とする (図 C.1参照。一般にはそうとは限らない)。実入射角 ψ の代わりに複素入射角 $\psi^* \equiv \psi + \mathrm{i}\chi$ を導入する (*は複素数を示す)。その時 (C.4) の μ, γ は次のように置き換えられる:

$$\mu \rightarrow \mu^* \equiv k\cos(\psi+\mathrm{i}\chi) = k\cosh\chi\cos\psi - \mathrm{i}k\sinh\chi\sin\psi \tag{C.8}$$

$$\equiv k_\mathrm{r}\cos\psi - \mathrm{i}k_\mathrm{i}\sin\psi \equiv \mu + \mathrm{i}v \tag{C.9}$$

$$\gamma \rightarrow \gamma^* \equiv k\sin(\psi+\mathrm{i}\chi) = k\cosh\chi\sin\psi + \mathrm{i}k\sinh\chi\cos\psi \tag{C.10}$$

$$\equiv k_\mathrm{r}\sin\psi + \mathrm{i}k_\mathrm{i}\cos\psi \equiv \gamma + \mathrm{i}\alpha \tag{C.11}$$

$$k_\mathrm{r} \equiv k\cosh\chi, \quad k_\mathrm{i} \equiv k\sinh\chi \tag{C.12}$$

従って

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{r} = k_\mathrm{r}\cos\psi\boldsymbol{a}_r + k_\mathrm{r}\sin\psi\boldsymbol{a}_z$$

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{i} = -k_\mathrm{i}\sin\psi\boldsymbol{a}_r + k_\mathrm{i}\cos\psi\boldsymbol{a}_z$$

と書けるから (C.7) を満たす。evanescent 平面波は

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^* r\cos(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\gamma^* z} = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\mu-v)r\cos(\theta-\varphi)+(\mathrm{i}\gamma-\alpha)z} \tag{C.13}$$

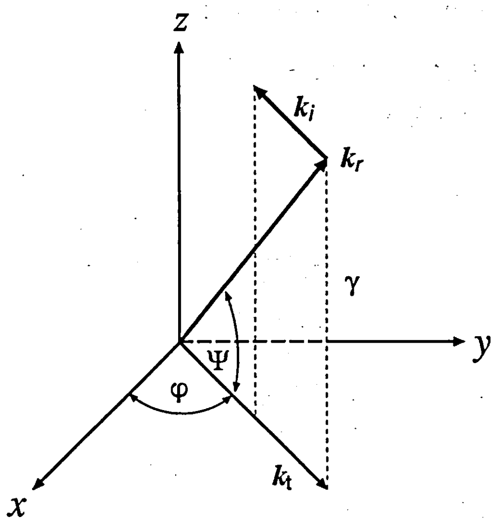


図 C.1: 複素入射角

Evanescent スカラ平面波の展開 (複素波数ベクトル k^*)

外部屈折率 $n_2 = 1$、$k_2 = n_2 k = k$、複素波数ベクトル$\boldsymbol{k}^*$とする。

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{r}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^* r\cos(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{C.14}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m J_m(\mu^* r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\varphi)+(\mathrm{i}\gamma-\alpha)z} \tag{C.15}$$

$$\mu^{*2} + \gamma^{*2} = k^2$$

C.2 Evanescent 平面電磁波波の円筒波展開

振幅減衰方向 (虚波数) ベクトル$\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$が$\boldsymbol{a}_\mathrm{V}(\boldsymbol{k}_\mathrm{r})$ 方向とする:

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{i} = -k_\mathrm{i}\boldsymbol{a}_\mathrm{V}(\boldsymbol{k}_\mathrm{r}), \quad \boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{k}_\mathrm{r} + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \tag{C.16}$$

スカラ波の場合と同じく TE、TM 円筒波の公式で

$$\gamma \to \gamma^* = \gamma + \mathrm{i}\alpha \tag{C.17}$$

$$\lambda \to \mu^* = \mu + \mathrm{i}v \tag{C.18}$$

とおけばよい。

ベクトル平面波

2 種の偏波のベクトル平面波の展開式は

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{V}(\boldsymbol{k}_\mathrm{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{r}} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \boldsymbol{j}_m^2(\mu^* r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{C.19}$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \mathrm{i}^m J_{m+}^2(\mu^* r, \theta - \varphi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{C.20}$$

$$a_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{r}} = \frac{k}{\gamma^*} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m j_m^1(\mu^* r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\theta-\varphi)+\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{C.21}$$

$$= \frac{k}{\gamma^*} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \mathrm{i}^m J_{m+}^1(\mu^* r, \theta - \varphi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^* z} \tag{C.22}$$

これらの展開式を以下の evanescent TE,TM 平面波の表式に用いれば TE,TM 波の展開式が得られる: ((A.39)-(A.48) 参照)

TE 平面波

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}}^0(\boldsymbol{r}) = \zeta a_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{r}} \tag{C.23}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{TE}}^0(\boldsymbol{r}) = a_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{r}} \tag{C.24}$$

TM 平面波

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TM}}^0(\boldsymbol{r}) = \zeta a_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{r}} \tag{C.25}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{TM}}^0(\boldsymbol{r}) = -a_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{r}} \tag{C.26}$$

参考文献

[1] H. Röhrer, G. Binning; *Rev. Mod. Phys.*, **59** (1987) p.615.

[2] 高橋、渡部、古賀、北野、小倉: エバネセント波を用いた走査型光顕微鏡, 輻射科学研究会資料 RS91-4 (1991).

[3] 古賀、北野、高橋、小倉: エバネセント波を用いた走査型光顕微鏡, 1990 年秋物理学会予稿集、2a-M-3, p.374 (1990).

[4] 梅田、小倉、高橋、北野: エバネセント波の屈折・反射・透過則と楔形光表面波プローブへの応用, 輻射科学研究会資料　RS91-15 (1991).

[5] 梅田、小倉、高橋、北野: エバネセント波の屈折則と楔形光表面波プローブの利得, 電気学会電磁界理論研究会資料　EMT-92-42 (1992).

[6] 梅田、小倉、高橋、北野: 光ファイバによる表面波プローブの解析, 輻射科学研究会資料　RS92-11 (1992).

[7] Felsen and Marcuvitz: *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice-Hall,(1973). (時間因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$)

[8] Collin: Field Theory of Guided Waves, Second Edition, IEEE Press, (1991). (時間因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$)

[9] 宮城光信: 光伝送の基礎, 昭晃堂　(1991).

[10] 大越, 岡本, 保立: 光ファイバ, オーム社, 昭和 58.

[11] 藤沢和男: マイクロ波回路, コロナ社, 昭和 47 (改版).

輻射科学研究会資料
RS93-9

色素分散形ポールドポリマーの非線形光学特性測定と導波形素子への応用

杉原 隆嗣　　芳賀 宏　　山本 錠彦

(大阪大学 基礎工学部)

平成５年７月９日

色素分散形ポールドポリマーの
非線形光学特性測定と導波形素子への応用

杉原 隆嗣　　芳賀 宏　　山本 錠彦

(大阪大学　基礎工学部)

1　はじめに

光計測や光メモリなどの分野ではレーザー光源の発振波長範囲の拡大が強く求められており，非線形光学効果を用いた波長変換素子の役割が非常に重要視されている．

波長変換材料については，無機材料が有機材料に先行する形で研究されてきたが，これは言うまでもなく，利用しやすい大きさと品質を備えた単結晶が比較的容易に得られたからである．また最近では，無機材料に比べ高い性能 (非線形光学係数が大きく，光損傷閾値が高い) を示す有機材料の開発が活発になっている [1]-[3]．しかし，非線形有機材料では，分子の持つ大きな非線形分子分極率を最大限に活用した結晶を作製するのは困難であるので，2 次の非線形性を発現させる分子を高分子中に分散させ，外場によって配列させて用いる方法をとることがある．これが色素分散形ポールドポリマーである．

また，高効率な第 2 高調波発生 (SHG) 素子として光導波路を用いる場合 [4]，位相整合が非常に重要となるが，最近活発に研究されている方法の一つに擬似位相整合法がある．この方法を用いた場合の欠点は，作製誤差などに対して非常に許容度が小さいということである．

そこで，色素分散形ポールドポリマーと光導電性材料を組み合わせて，擬似位相整合周期を外部から調節することが可能な構造を持つ SHG 素子を考案した [5]．

以下では，2 次の非線形性を持つ色素分子 MNA を高分子 PMMA 中に分散させた材料の非線形光学特性を調べている．さらに，この非線形材料と光導電性材料を組み合わせ，外部から 2 光波の干渉縞を用いて，非線形材料を周期的に配向できることを調べた．

2 色素分散形ポールドポリマー

2.1 有機非線形光学材料

ここでは，有機非線形光学材料に関して簡単に述べることにする．

有機非線形材料においては，その非線形応答が本質的に電子の寄与によるもののみで，格子振動の影響を受けるものではない為，高速応答が期待でき，さらに光損傷に強いという特徴がある．しかし，結合が分子間力による為に安定した大きな結晶が得にくく，また機械的なダメージに弱いという欠点がある．さらに，分子自体が大きな非線形性を持つ場合でも，常に，それを最大限に生かす様に分子配列を制御して結晶成長をさせるのは困難である．

そこで，2次の非線形性を有する分子(主に色素分子)を高分子中に分散させ，外場によって分子の向きを揃えて配列させた材料が色素分散形ポールドポリマーである．

ポールドポリマーの特徴としては次のものがあげられる．

- 高分子中に様々な色素分子を組み込むことができる．
- 加工性が容易で，厚みの均一な薄膜を作製し易い．
- 有機結晶として用いるよりも機械的強度が増す．
- 熱的緩和などにより脱配向が起きる．

ここで，色素分子を分散させた高分子材料が2次の非線形性を示す為には，その材料が反転対称性を欠いていなければならない．そのため高分子にただ非線形分子を分散させるだけでなく，次に述べるように，配向処理を行って反転対称性を崩す必要がある[6]-[8]．

2.2 配向処理と非線形光学係数

2次の非線形性を持つ(分子が2次の分極率βを持つ)色素分子を高分子中に分散させた場合を考える．外部から電界を印加した時に非線形分子に生じる双極子モーメントは

$$p_i = \mu_i + \alpha_{ij}E_j + \beta_{ijk}E_jE_k + \cdots \tag{1}$$

となる．ここで，μは分子の持つ永久双極子モーメント，αは分子の持つ線形な分極率，βは2次の非線形分極率である．

材料全体でみた場合には，各分子が大きなβを持っていても，全体として反転対称性を持っていれば2次の非線形性は現れない．そこで，次に示すように電界配向を行うことにより，材料に2次の非線形性を発現させることができる(図1)．

1. 最初電界が印加されていないときは，分子はランダムな方向に向いている．
2. 高分子をガラス転移温度以上に温めて粘性を小さくし，非線形分子が動きやすい状態にする．

3. この状態の時に外部から電界を印加すると，分子は永久双極子モーメントを持つために，電界方向に揃おうとする．

4. 最後に電界を印加したまま高分子を冷却し，分子を配向させた状態で固定すると，材料に2次の非線形性が現れる．

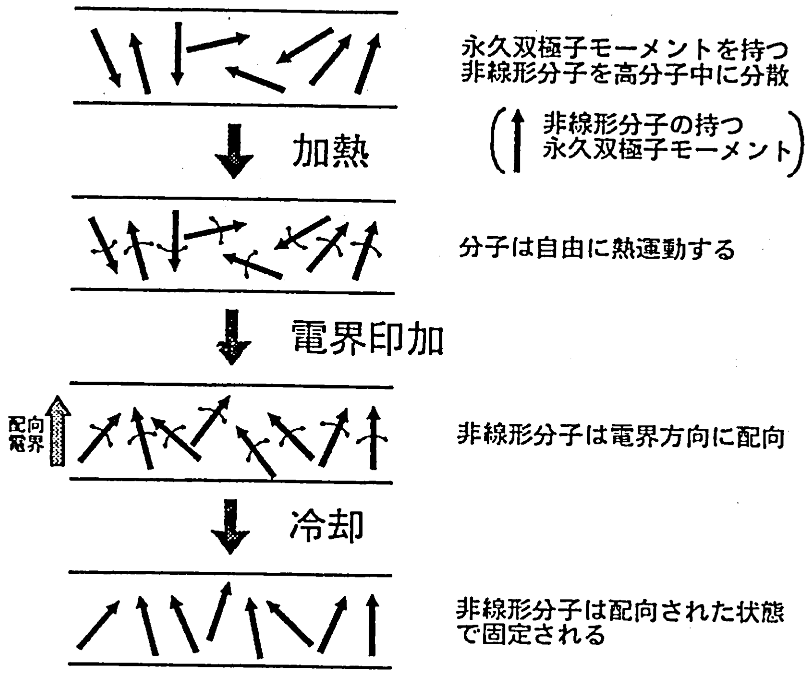


図1　配向処理

この時に，材料が持つ2次の非線形光学係数 d は，

$$d \propto N\frac{\beta\mu E_p}{kT} \tag{2}$$

と表せる．ここに N は高分子中の非線形分子密度，k はボルツマン定数，T は配向時の温度，E_p は配向電界である．これより，ポールドポリマーの示す d 係数を大きくするには高分子中に分散させる色素分子数密度を増やし，配向電界をあげればよいことが分かる．

そこで，以下では非線形分子 MNA を高分子 PMMA 中に分散させた材料の非線形光学特性について考える．そして，この材料において，配向後も常温で電界を印加し続けることにより，配向緩和の問題を解決できることを確かめた．更に，常温でポールドポリマーに外部から電界を印加した時に，非線形分子が電界に追随して運動する為に生じる材料の d 係数の変化を調べた．次章ではこれら各測定について述べる．

3 非線形光学特性測定

3.1 色素分散形ポールドポリマーの光学特性

今回，用いている色素分散形ポールドポリマーは，2次の非線形性を示す色素分子 MNA(2-methyl-4-nitroaniline) を高分子 PMMA(poly-methyl methacrylate) に分散させた材料である．そこでまず，この色素分散形ポールドポリマー (MNA/PMMA) の持つ光学特性の配向電界依存性について述べる [9]．

まず，MNA と PMMA を重量比 9:25 で混合した材料について，配向電界と屈折率の関係をプリズム結合で測定した結果を図 2 に示す．

図 2 より屈折率は電界の増加につれて若干ではあるが増加している．これは電界が大きくなるにつれて分子配向が良くなる為である．図から，各波長に対する屈折率は 1.52(0.532μm)，1.51(0.633μm)，1.50(1.064μm) である．

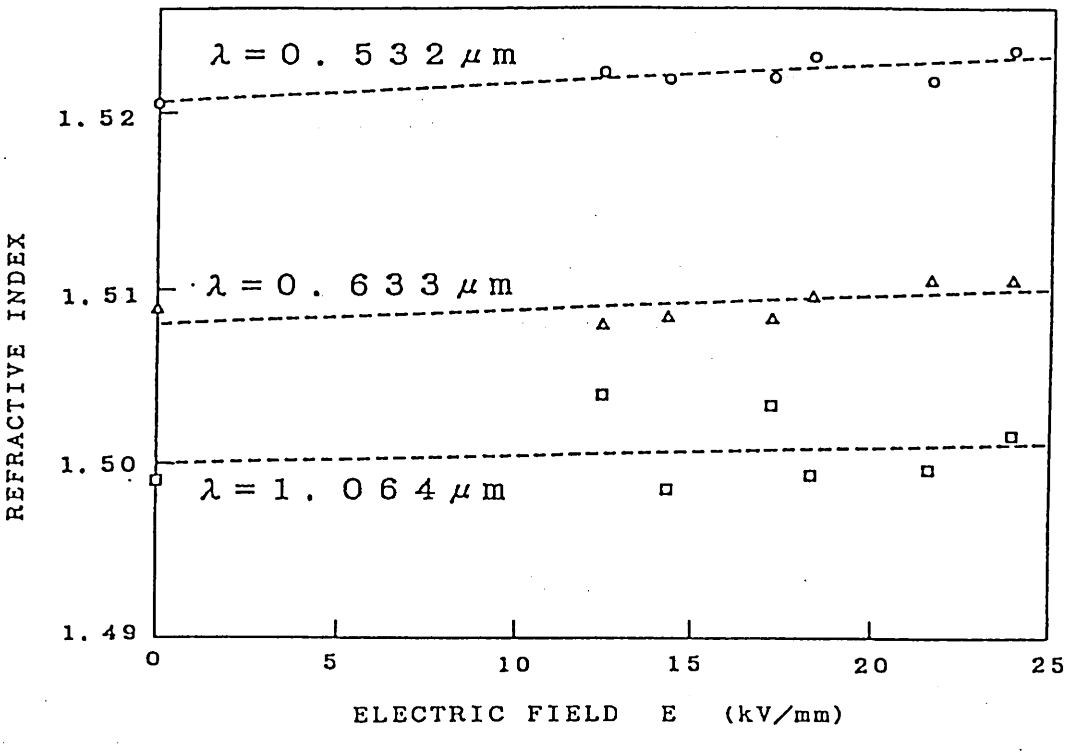


図 2 屈折率の電界依存性

次にこの材料の持つ d 係数で最大の成分 d_{33} と配向電界の関係を $LiNbO_3$ をリファレンスに用いた Maker-fringe 法で測定した．配向時の温度は 80°C で測定波長は 1.064μm ある．

図 3 より，印加電界に比例して d 係数が増加していることが分かる．ここで得られた最大の値は 24kV/mm で $d_{33} \approx 0.19 d_{33}(LN)$ であり，$d_{33}(LN)$=34.4pm/V とした場合には，$d_{33} \approx$7pm/V 程度である．また，分散する非線形分子数を増やしたり配向電界をあげたりすれば，更に大きな d 係数を得ることも可能である．

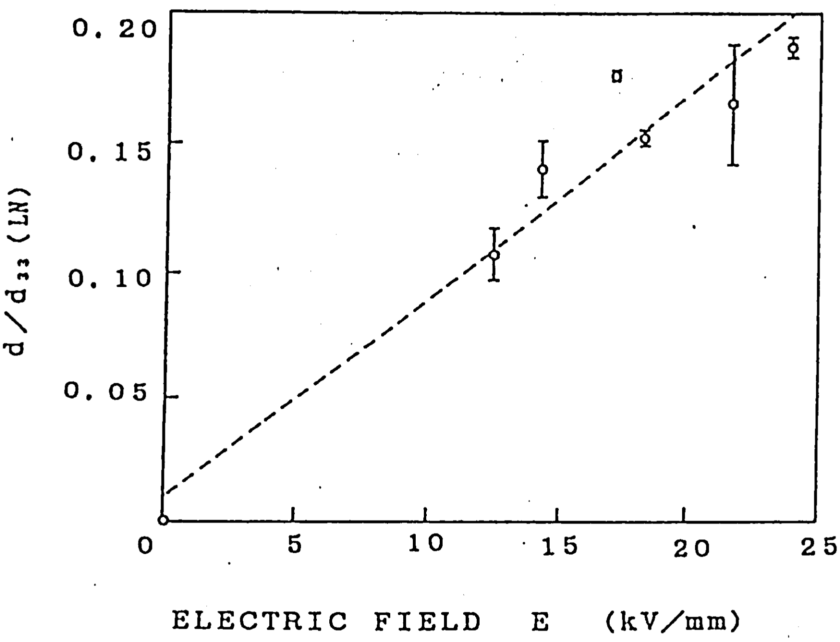


図 3 d 係数の電界依存性

3.2 非線形光学効果の安定化

ポールドポリマーは，本来アモルファスな状態のものなので，配向処理後電界を取り除くと，室温においても熱平衡状態である配向前の状態に戻ろうとし，材料の非線形性は次第に低下していく (配向緩和)．

ここでは，配向後も電界を印加し続けて，配向緩和を抑制することを試みた [10]．

用いる材料は，MNA を PMMA 中に分散させたものである．測定に用いたサンプルの構成は図 4 に示す．配向用の電極としては 35μm 間隔のコプレーナ形電極を，ガラス基板上にクロム蒸着により作製した．非線形層 (MNA/PMMA) としては，溶媒 MIBK(methyl-iso-bthyle-ketone)9cc に高分子 PMMA を 595.8mg，有機非線形分子 MNA を 119.2mg(対 PMMA 重量比 20%) 溶かし，4 回スピンコート (2000rpm, 30sec) したものを用いた．なお

スピンコートの後は毎回 10^{-3}Torr で減圧乾燥を行った．この結果得られた非線形層の膜厚は約 3μm であった．

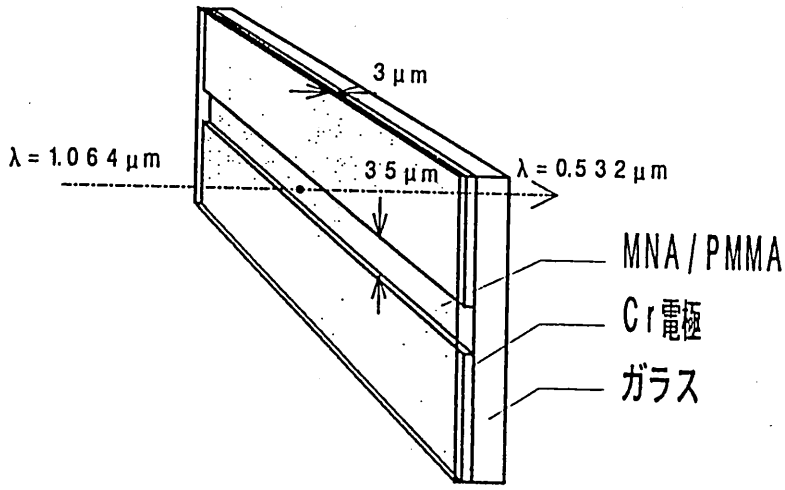


図 4　サンプル構成図

測定時には，まずサンプルを 80°C に加熱して，8.6kV/mm の電界 (電圧 300V) で 10 分間配向を行い，電界を印加したままサンプルを室温まで冷やした．さらに，冷却後も電界を取り去らずに 5.7kV/mm の電界 (電圧 200V) を印加し続けた．そして，このサンプルに印加電界方向の偏波成分を持つ，1.064μm の光を入射し，0.532μm の第 2 高調波 (SHG) パワーを測定した．測定した結果を図 5 に示す．縦軸には SHG パワーの自乗根をとることで d 係数の値を任意単位で示している，また，図中には冷却後すぐに電界を取り除いた場合についても示してある．電界を印加し続けた場合のデータにおいて，最初に d 係数が小さくなっているのは，配向後に加える電圧を 300V から 200V に変化させたためである．それ以降に関しては，1 ヶ月間 d 係数は維持されていることが分かる．

この結果から，配向後もポールドポリマーに電界を印加し続けることによって，d 係数を安定化できる (配向緩和を抑える) ことが分かった．

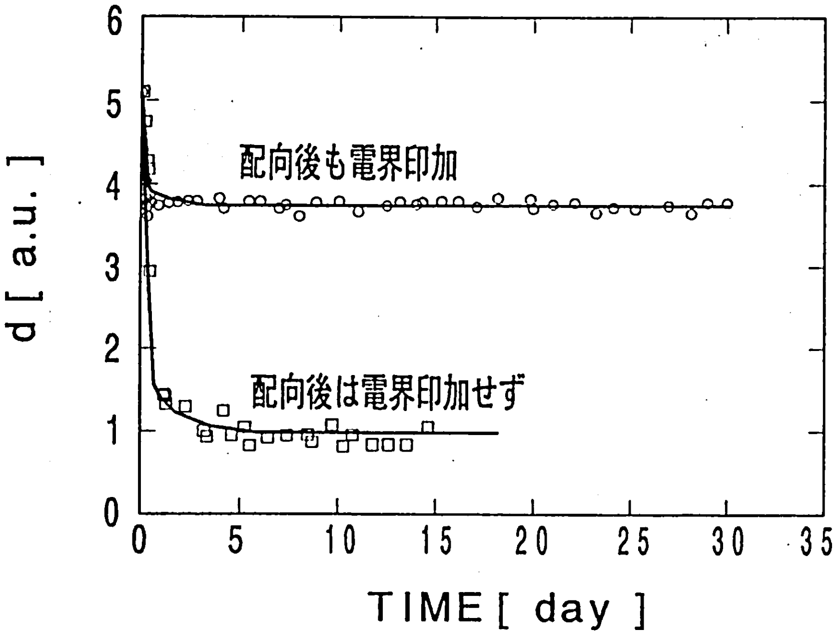


図 5　直流電界の有無による d 係数の変化

3.3　常温での非線形光学特性の外部電界依存性

先の測定から，ポールドポリマー中の非線形分子の配向状態は，常温で外部電界に影響されることが分かった．

そこで，実際に常温で非線形分子の配向状態が，外部電界の変化にどの程度応答できるかを調べる．

まず最初に，前節と同じサンプルで配向処理していないものにおいて，外部から交流電界 ($8.6kV_{p\text{-}p}/mm$) を印加した時に生じる屈折率変化を調べた．その結果得られる周波数特性が図 6 である．図中の水平偏波は印加電界方向の偏波成分を持つもので，垂直偏波はそれと垂直な方向の偏波を持つものである．

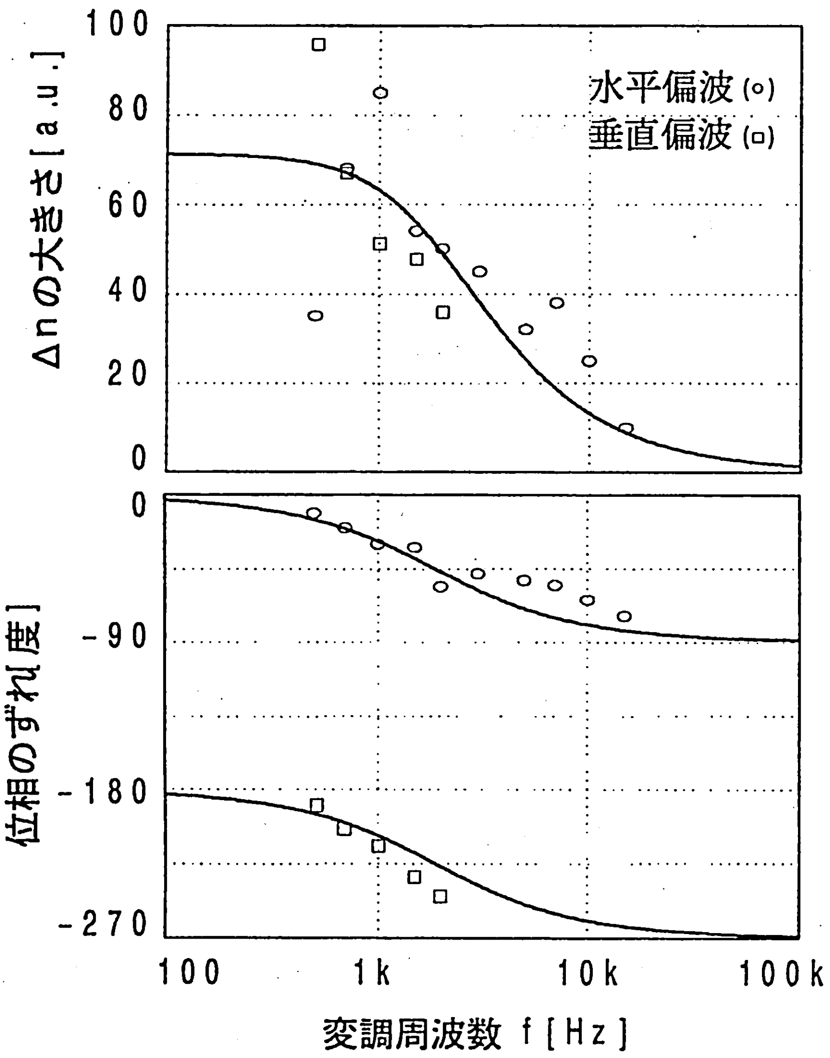


図6　外部電界による屈折率変化の周波数特性

配向していない材料は，本来電気光学効果を示さないはずであるが，ここでは，印加電界の2倍の周波数で屈折率変化が生じていた．また，周波数が高くなるにつれて，電界に対する屈折率変化の位相遅れが大きくなり，変化量自体も小さくなっている．このことから，外部電界により，非線形分子は高分子中で粘性を受けながら配向状態を変えているものと考えられる．

次に，配向処理した材料を用いて，常温における d 係数の外部電界に対する応答を調べ

た [10].

測定に用いたサンプルとその配向プロセスは前節と同様である．そして，配向終了後に直流電界 4.3kV/mm + 交流電界 8.6kV$_{\text{p-p}}$/mm (直流電圧 150V+交流電圧 300V$_{\text{p-p}}$) を外部から印加した．

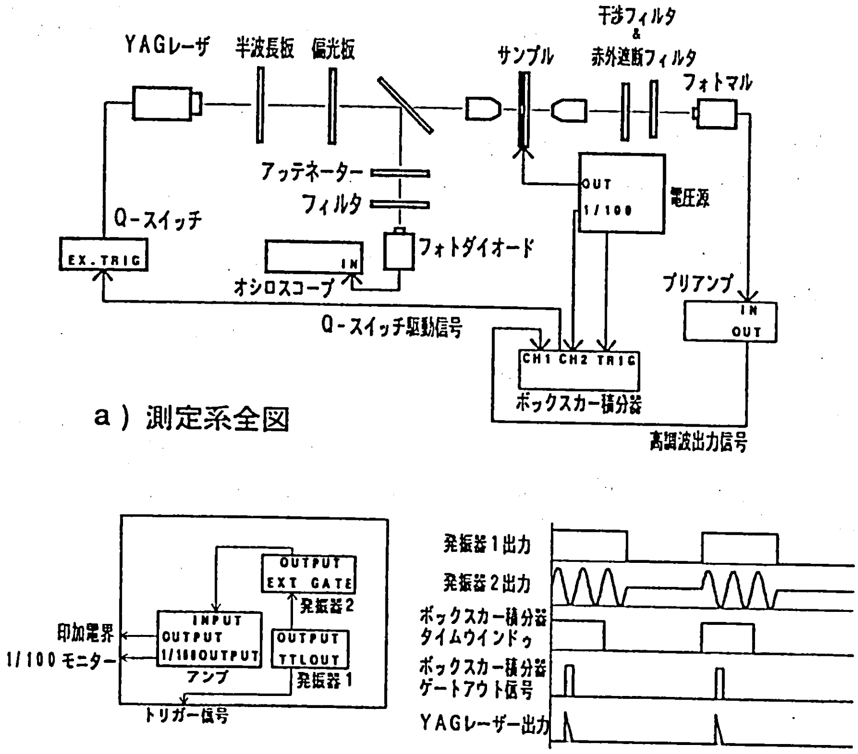
測定系と印加電界と入射光との関係を図 7 に示す．

このとき，得られた結果として周波数が a)50Hz，b)1kHz の交流電界をサンプルに印加した場合の SHG 出力の波形を図 8 に示す．これより，SHG 出力が外部交流電界により変調を受けていることが分かる．また，印加電界の周波数によって，SHG の変化の大きさ (Δa) と印加電界に対する位相遅れ ($\Delta\phi$) が変化しているのが分かる．そこで，10Hz から 20kHz まで交流電界の周波数を変化させた場合に，Δa，$\Delta\phi$を測定して得られた周波数特性を図 9 に示す．この図中で実線で示した曲線は，2 次の非線形光学係数 d を

$$d \propto \frac{A}{1+j\frac{f}{f_c}} + B \tag{3}$$

という一次遅れ系の式で表せると仮定してあてはめたもので，A =0.33，B =0.31，f_c = 48.2Hz，となった．(3) 式第 1 項目は，カットオフ周波数を f_cとし，それより低い周波数で印加電界に追随できる成分を表している．そして，第 2 項目は周波数に関係なく印加電界に追随できる成分を表している．これらから印加電界の周波数が低い領域では，分子の配向状態が外部電界に追随して変化し，その結果 d 係数が変化することが分かる．

以上の結果から，常温においても，外部電界に応じて非線形分子の配向状態を変化させることが可能であり，d 係数の大きさを制御できることが分かる．



b）電圧源構成図　　c）タイミングチャート

図７　測定系

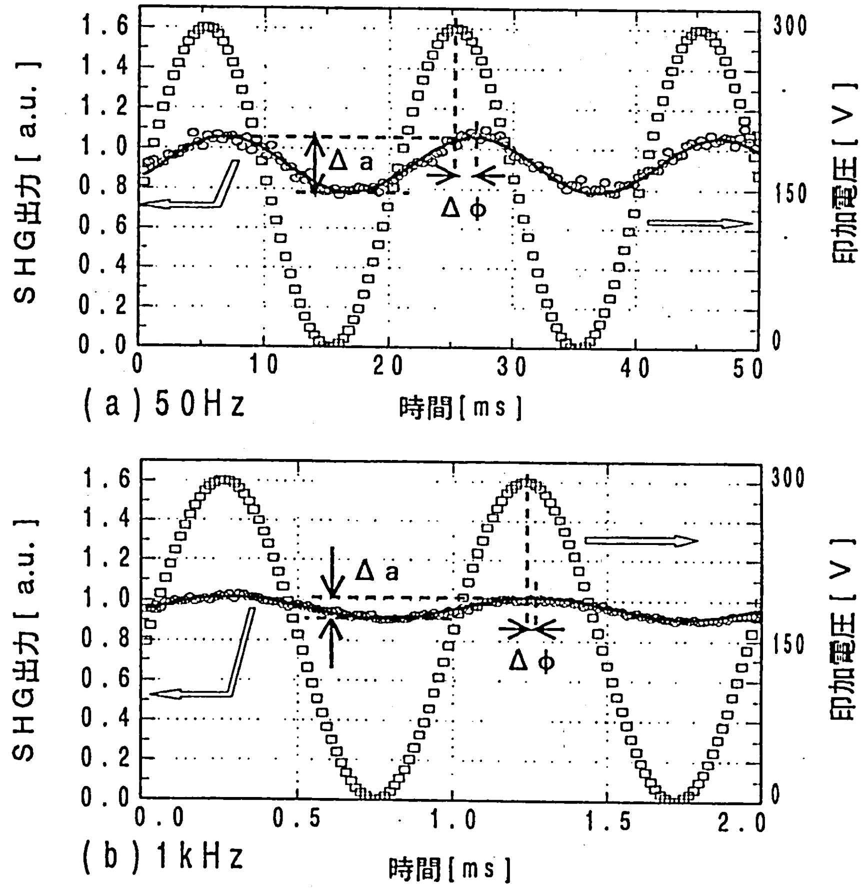


図 8　印加電圧の変化による SHG 出力の変化

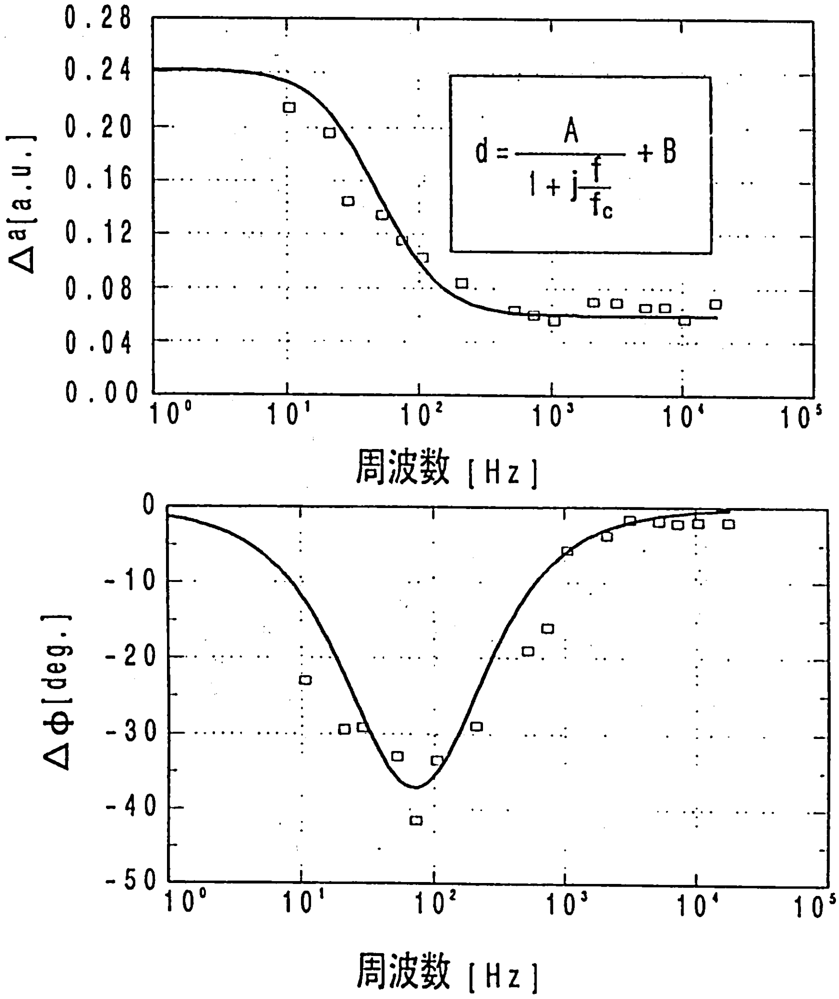


図９　印加電圧に対する d 係数の周波数特性

4　導波形第2高調波発生素子

4.1　高分子光導波路

高効率波長変換素子をめざす場合には，良質の導波路を容易に作製できることが重要な条件となる．色素分散形ポールドポリマーを用いた導波路の特徴としては次のものがある．

- 高分子と有機分子との混合比を変えることにより，屈折率の値などをある程度自由に設定できる．
- フォトリソグラフの技術を用いてパターン化が可能である．
- 基板にも高分子材料を用いて全高分子形とすると端面加工が容易となる．
- 非線形分子の配向を制御することにより周期構造の導入が可能である．

実際に，図10の工程で作製した高分子光導波路の写真を図11に示す．

良質な全高分子光導波路を用いた波長変換素子としては，チェレンコフ放射形SHG素子[11]や，周期電界配向による擬似位相整合形SHG素子が作製されている[14]．次節では，擬似位相整合形SHG素子について述べることにする．

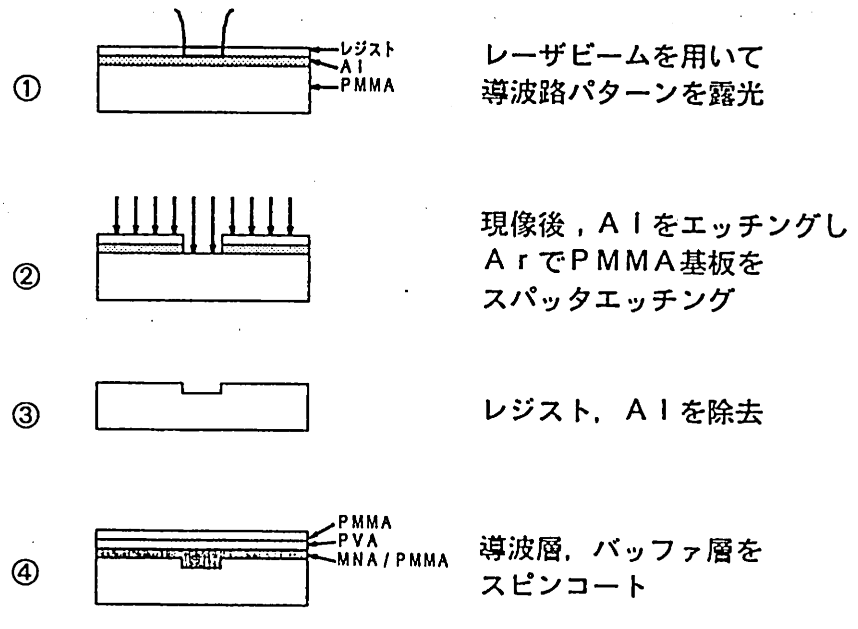


図10　高分子光導波路の作製法

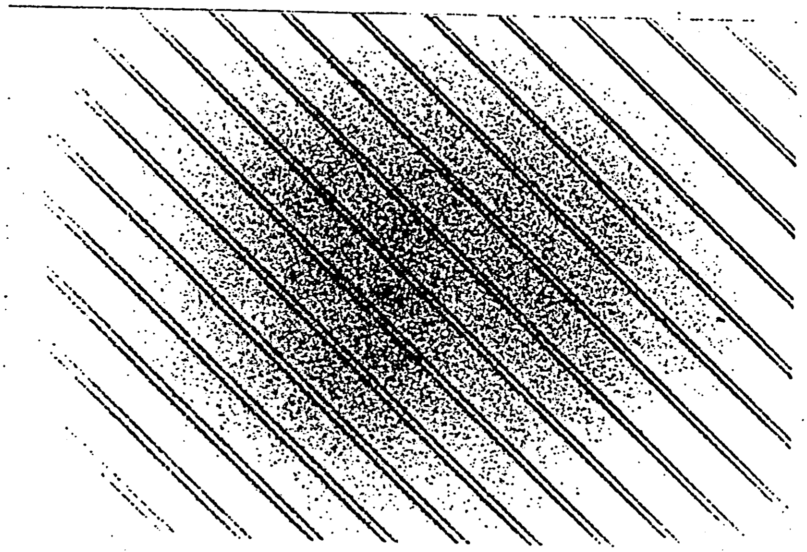


図 11　PMMA 基板上に作製した導波路パターン

4.2　導波形擬似位相整合第 2 高調波発生素子

最初に擬似位相整合法 [12][13] について簡単に述べる．

位相整合が完全にとれている状態では SHG 出力パワーは相互作用長の 2 乗に比例する．また位相不整合の場合には，基本波，高調波の屈折率が異なるので，基本波が媒質中を伝搬するにつれて発生する高調波の位相は少しずつずれていく．その結果，入射光が伝搬するにつれて最初の内は，高調波は重なり合って強め合うが，コヒーレンス長を過ぎると逆に高調波同士が干渉して打ち消し合うことにより強度は低下していく (図 12)．そこで，高調波強度が低下し始めたところで分極方向を反転させると，干渉して打ち消し合っていたところが，逆に強め合うようになり，相互作用長が伸びても高調波強度は増加していく．この方法では，結晶で用いることのできないような，大きなテンソル成分を有効に用いることができ，また材料が透明な波長域であれば，反転周期を調節することによって広い波長範囲で変換が可能である．しかし，設定周期に対する作製誤差，屈折率変化，波長の変化などの許容度は非常に小さく，許容度の拡大が大きな課題である．

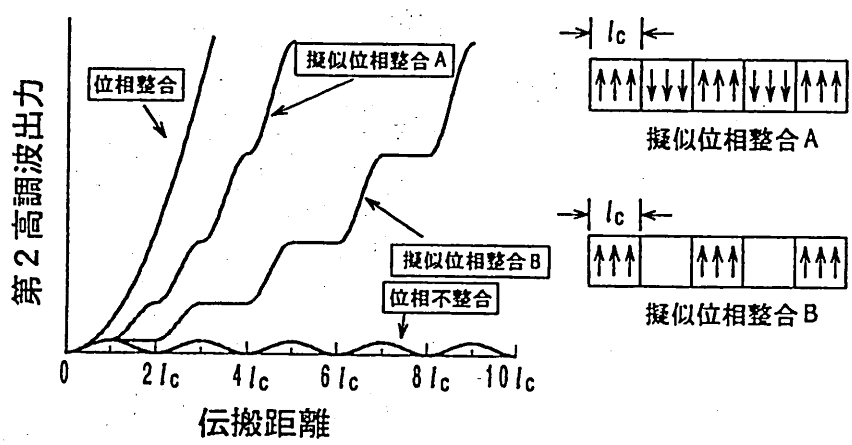


図 12　位相整合法による SHG 強度の伝搬距離に対する変化
(l_c: コヒーレンス長)

ポールドポリマーを用いた場合には，電界により配向を周期的に行うことで周期分極反転を形成し，擬似位相整合を達成する事ができる．

例えば，図 11 に示した光導波路では，コヒーレンス長は導波路幅 3∼5μm に対して 9.0∼9.2μm となっているので，図 13 に示す様な周期配向用の櫛状電極 (電極周期 18μm) を用いて，非線形層を周期配向することができる．

また，第 3 章で示したように，ポールドポリマーは常温で外部電界により配向状態を調節できる．そのため，作製後に分子配向の周期を調節することが可能な素子を考えることができる．これは，無機材料が現在のところ分極反転を一度作ってしまうと，その調節はほとんど不可能であるのに比べると，非常に大きな利点である．そして，これにより擬似位相整合の帯域の狭さが克服できる可能性がある．

そこで，2 光波の干渉による周期的な光強度の分布を光導電性材料によって電界の分布に変換し，それによってポールドポリマーを周期的に配向させることを試みた．この場合，干渉縞の周期を 2 光波の交差角度で変化させることによって分極の周期を調節できる．

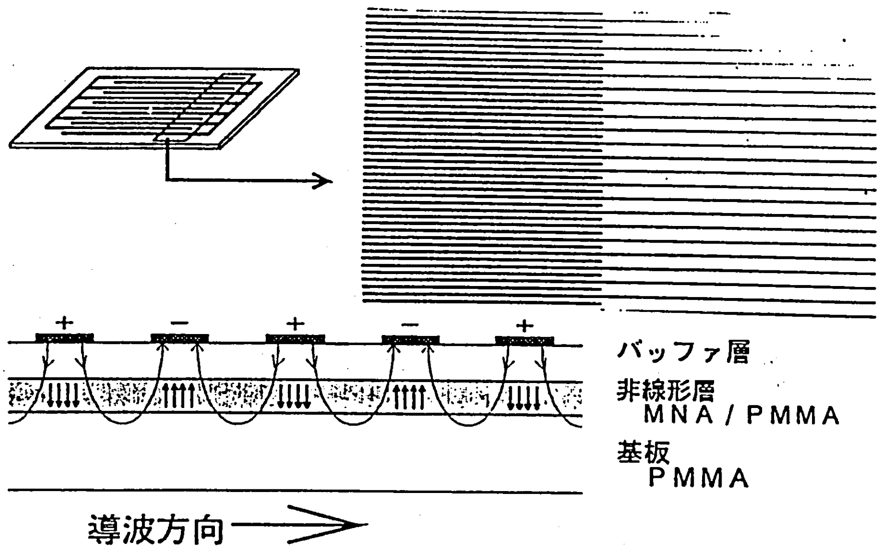


図 13　櫛状電極による周期電界配向の様子

4.3　光導電性材料を用いた擬似位相整合周期の調節

ここで考案した素子の構成を図 14 に示す．素子は光導電性材料による感光体，光導電性材料によって発生したキャリアを逃がす電極，非線形層，コロナ放電に対する電極とにより構成されている．またこの素子において，非線形層の非線形光学係数が変化する様子を図 15 に示す．

まず，コロナ放電により感光体表面が正帯電するとポールドポリマーに電界がかかり図中の向きに非線形性が生じる．ここに，光を照射したとき感光体面で正のキャリアが発生する．このキャリアは先にコロナ放電でできた正電荷による電界のために，フリーキャリアとなり対極に向かって移動する．この結果，フリーキャリアになれなかった負の電荷とコロナ放電による正の電荷が相殺されて，その下のポールドポリマーにかかる電界は小さくなる．コロナ放電が常に行われていると励起光が照射されたとき，その光のあたる部分でポールドポリマーの d 係数の変化が現れる．但し，常に電界がかかっているため，ポールドポリマーにかかっている電界がなくなることは有り得ない．また，図 15 からも明らかなようにキャリアを逃すための電極の端から感光体膜厚程度の領域でしか d 係数の変化は現れないので，この領域を導波路として利用する必要がある．

そこで，実際に素子を作製し周期配向を行ったのでその測定について述べる．

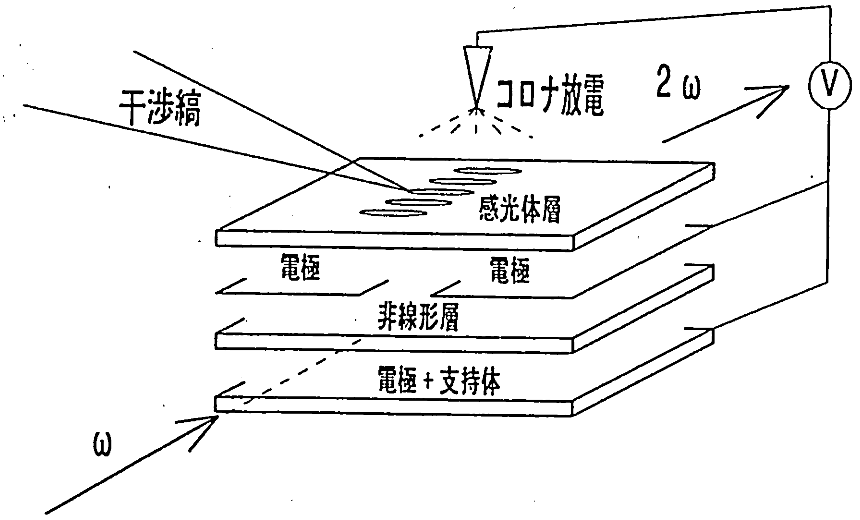
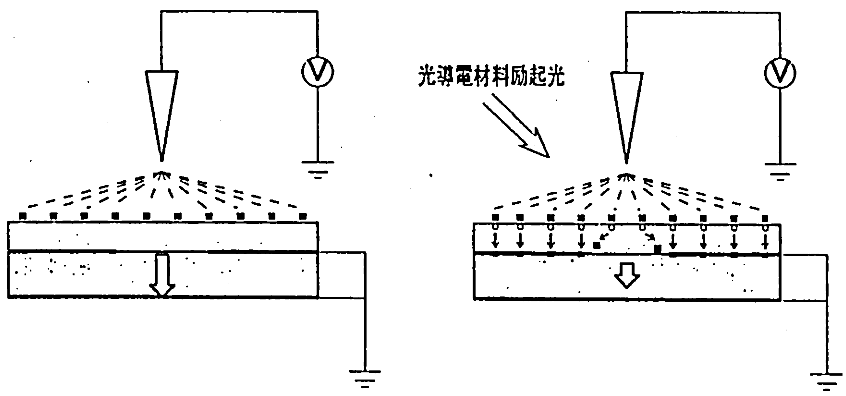


図 14　素子構成図



a) コロナ放電により光導電材料表面が正帯電（▪ は＋チャージを表す）し非線形層に電界がかかる.

b) 光照射により発生した＋キャリアが電極に逃げ, 残った－チャージ（∘）により非線形層にかかる電界が変化する

図 15　素子の動作原理

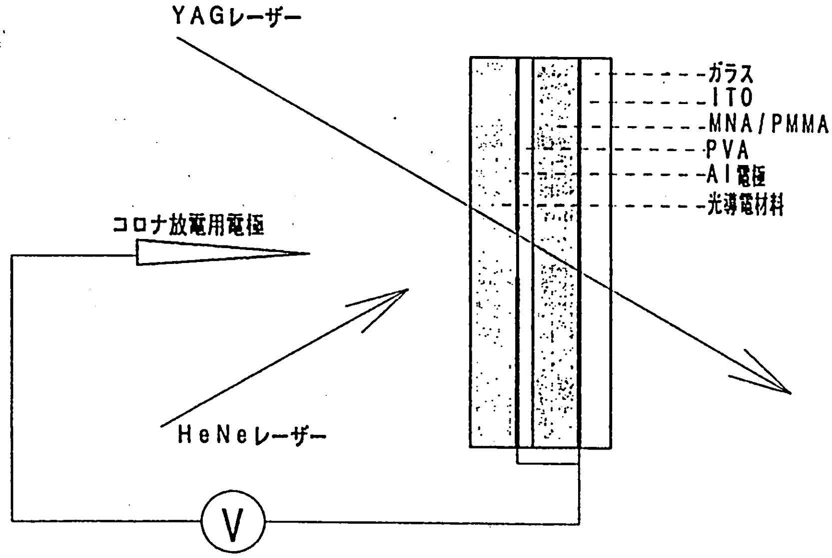


図 16　感光体特性評価用サンプル

図 16 は感光体の特性を調べるために作製したサンプルである．透明電極 ITO(Indium Tin Oxide) を蒸着した上に非線形層を成膜し，その上に感光体を形成した．非線形層としては溶媒 MIBK9cc に高分子 PMMA を 595.8mg，有機非線形分子 MNA を 119.2mg 溶かしたものをスピンコート (2000rpm, 30sec) し，その後 10^{-3}Torr で減圧乾燥する．この工程を 4 回繰り返すことにより，導波層の膜厚は約 3μm となった．この上に 5cc の水に PVA(poly-vinylalchole)300mg を溶かしたものをスピンコート (3000rpm, 30sec) する．これは次にスピンコートする光導電性材料が非線形層に溶けないようにするためである．この PVA の層の上に Al 電極を真空蒸着した後，感光体を成膜する．感光体としては溶媒トルエン，THF(tetrahydrofuran) 各 2.5cc にスチレンポリマー 439mg(溶媒に対して重量濃度 10 %)，電荷発生物質 H_2Pc 87.8mg(スチレンに対して重量比 20 %)，電荷輸送物質 DCBQ26.3mg(H_2Pc に対して重量比 30 %) を溶かしたものをスピンコート (3000rpm, 30sec) し，その後 10^{-3}Torr で減圧乾燥した．最後に Al 電極と ITO 電極を銀ペーストでショートして，シリカゲルの入ったデシケーターで一日乾燥する．これは PVA が水溶性である為に，PVA に隣接する感光体が水分を含み易く，その結果感光体の帯電保持性が悪くなり，光導電特性が悪化するのを防ぐ為である．

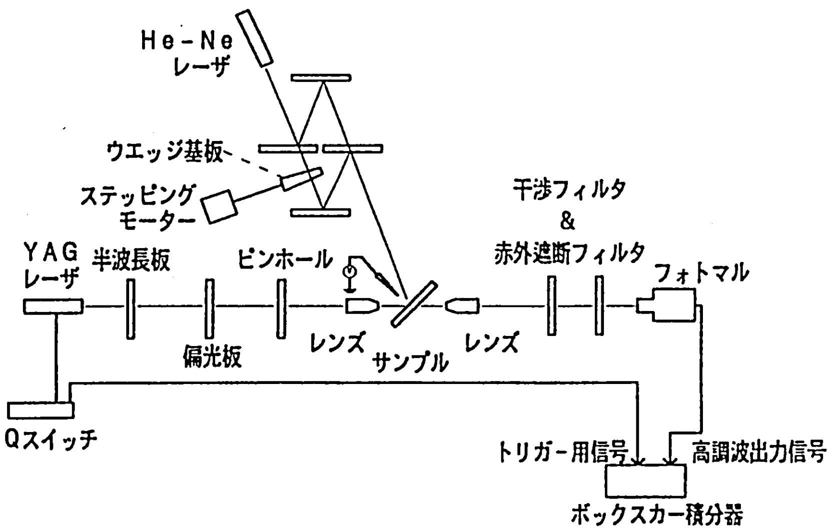


図 17　測定系

次に，このサンプルで，2 光波の干渉縞を用いて非線形層が周期電界配向されるかどうかを調べた．この時の測定系は図 17 に示す通りである．サンプルにはマッハ・ツェンダー干渉計を用いて，He-Ne レーザー ($0.6328\mu m$) による干渉縞 (約 $12\mu m$ 周期) を照射している．そしてウェッジ基板を用いて干渉計の一方の腕の光路長を変えることにより，干渉縞を移動させ，その時の SHG 出力の変化を観測した．このとき He-Ne 照射光が強すぎると，干渉縞の明るい部分の散乱光によって暗い部分が反応してしまうので注意する必要がある．

ここで得られた結果を図 18 に示す．図の横軸は干渉縞の変位，縦軸は SHG パワーを任意単位でプロットしている．この結果から，コロナ放電を行ったままの状態のところに干渉縞を照射することで，ポールドポリマーの d 係数を変化させ，周期分極構造を形成できることが分かった．今回得られた周期は $12\mu m$ であるが，前節で示したように，実際の導波路で擬似位相整合をとるためには $18\mu m$ 程度の周期で d 係数を変化させれば良い．従って，この手法を用いて擬似位相整合可能な周期構造を形成できることが分かった．

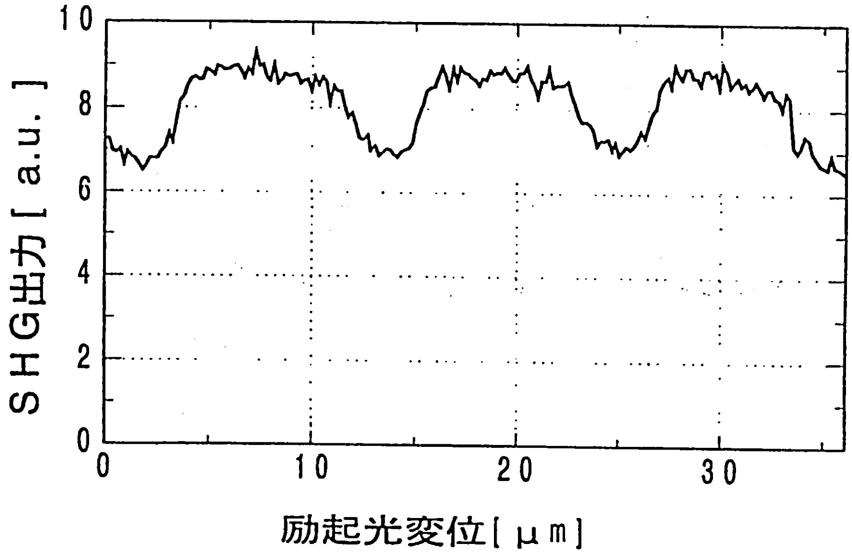


図 18　感光体分解能測定結果

5　むすび

色素分散形ポールドポリマーにおける非線形光学特性の外部電界依存性を測定することにより，常温で非線形分子の配向状態が変化し，非線形光学係数の大きさを制御できることが分かった.

そこで，色素分散形ポールドポリマーと，光導電性材料を用いた感光体とを組み合わせて，外部から非線形光学係数の分布を制御できる素子を考案した．この素子では，2光束干渉計を用いて得られる干渉縞を感光体に照射することにより，光強度の分布を電界の分布に変換し，電界の分布をポールドポリマーにおいて非線形光学係数の分布に変換する．実際に干渉縞を用いた非線形光学特性の制御性を調べた結果，非線形光学係数の値を 12μm 周期で変化させることができた.

これにより最終的に導波形擬似位相整合 SHG 素子への応用が可能であることが示せた.

参考文献

[1] 加藤政雄, 中西八郎: 有機非線形光学材料, 株式会社 シーエムシー, (1985).

[2] D. S. Chemla and J. Zyss, eds.: *Nonlinear Optical Properties of Organic Molecules and Crystals,* vol.1, Academic Press, (1986).

[3] 日本化学会編: 非線形光学のための有機材料 [季刊 化学総説 No.15], 学会出版センター, (1992).

[4] Daniel B. Ostrowsky and Raymond Reinisch, eds.: *Guided Wave Nonlinear Optics,* Kluwer Academic Publishers, (1991).

[5] 米谷昭範, "電界配向高分子材料を用いた導波形光第 2 高調波発生における位相整合調整法", 修士学位論文, (1993)

[6] David J. Williams: "Organic polymeric and non-polymeric materials with large optical nonlinearities", Angew. Chem. Int. Ed. Engl. **23**, pp. 690–703 (1984).

[7] Kenneth D. Singer, Mark G. Kuzyk, and John E. Sohn: "Second-order nonlinear-optical processes in orientationally ordered materials: relationship between molecular and macroscopic properties", J. Opt. Soc. Am. B 4(6), pp. 968-976 (1987).

[8] C. P. J. M. van der Vorst and S. J. Picken: "Electric field poling of acceptor-donor molecules", J. Opt. Soc. Am. B 7(3), pp. 320-325 (1990).

[9] 矢田晴彦, "電界配向による有機薄膜光導波路の作製とその非線形光学効果の測定", 修士学位論文, (1990)

[10] 米谷昭範, 芳賀宏, 山本錠彦, "色素分散型ポールドポリマーにおける非線形光学特性安定化の為の電気的手法", 第 39 回応用物理学関係連合講演会 講演予稿集, 28p-P-3, (1992)

[11] 高田勝浩, "全高分子光導波路を用いたチェレンコフ型第二高調波発生", 修士学位論文, (1991)

[12] G. Khanarian, R. A. Norwood, D. Haas, B. Feuer, and D. Karim: "Phase-matched second-harmonic generation in a polymer waveguide", Appl. Phys. Lett. 57(10), pp. 977–979 (1990).

[13] R. A. Norwood and G. Khanarian: "Quasi-phase-matched frequency doubling over 5mm in periodically poled polymer waveguide", Electron. Lett. 26(25), pp. 2105–2107 (1990).

[14] 田中宏典 他, "MNA ドープ PMMA 周期配向全高分子導波路を用いた位相整合 SHG 素子", 第 38 回応用物理学関係連合講演会 講演予稿集, 28p-PA-11, (1991)

輻射科学研究会資料
RS93-10

中空光導波路に関する一考察

井 筒 雅 之, 谷 口 昌 弘
大阪大学 基礎工学部

平成５年７月９日
京 都 工 芸 繊 維 大 学

中空光導波路に関する一考察

井筒雅之，谷口昌弘
大阪大学　基礎工学部

1．まえがき

光集積回路構造を用いることによって，さまざまな光デバイスやエレメント，さらにはそれらを幾つか組み合わせた光回路を，コンパクトに固体化して実現することが出来る．従来のレンズや反射鏡を用いた光回路はもとより，いわゆるマイクロオプティクスに比べても，はるかに小型で安定な光回路が得られることになる．

ただし，通常の光導波路では，屈折率をわずかに（高々数％）大きくした部分にそって，光波が全反射の原理によって伝搬する現象を用いているので，断面は光波長の数倍のサイズとなる．また，屈折率変化が小さいので，進路変更などのために導波路の方向をわずかに変化しても大きな損失となる．回路のレイアウトに際しては，出来る限り，導波路曲がりを緩やかにする必要がある．

従って，電子回路を集積する場合とは異なり，光集積回路のサイズは実際のところかなり大きなものである．最近の例を挙げれば，６４の２×２光スイッチを一枚のシリコン基板上に集積した８×８光スイッチでは，基板サイズが５～６cm角となっ

ている．もちろん，これを従来型の光回路で構成すれば巨大な光学定盤が必要になると考えられるし，また，光ファイバとマイクロオプティクスで実現するにしても，かなり大がかりなラックが必要と予想されるのに比べれば，非常にコンパクトで，かつ安定な光回路が実現されていると云える．それでも，電子回路との対比からすれば，まだまだ大きいと云わざるを得ず，光集積回路の小型化は，これからの重要課題である．

本稿では，この様な光集積回路をさらに小型化するものとして，中空光導波路の利用を考え，その基礎として，中空光導波路の伝搬特性を考察するものである．これまでの，誘電体の屈折率不連続部における全反射を用いた光導波路は，低損失ではあるが，閉じ込め効果が小さく，光回路の今以上の小型化には限界があることは明白である．

光波を一層小さな部分に閉じ込めるには，より大きな屈折率不連続の利用が必要と考えられる．屈折率変化が大きければ，曲がりや分岐を小型化することができる．また，光波のエネルギーをより狭い領域に集中できるので，変調／スイッチなどの制御デバイスの特性がさらに改善できる可能性もある．ただし，界面の精度が損失に大きく影響すると考えられる．

光回路のより一層の微細化は，材料の微細加工法の飛躍的な進歩とも相まって，最近，徐々に注目を集めつつある分野である[1,2]．光エレクトロニクスがさらなる飛躍を目指す上で，光導波路構成法の再検討が，今や不可欠と云える．

2．中空光導波路

図1はここで考える中空光導波路である．厚さd，屈折率n_1の媒質が，屈折率n_2，n_3の媒質に挟まれている．x方向に3層を成し，光波はz方向に伝搬する．簡単のためy軸方向には変化のない2次元（3層スラブ導波路）構造とする．中空導波路であるので，n_1は本来n_2，n_3に比べて小さいのであるが，ここでは，議論にさらに一般性を持たせるため，3つの屈折率は，それぞれ複素数で与えられるとする．

この様な，構造では通常のとおり，モードがTEおよびTMの2種に分類される[3]．

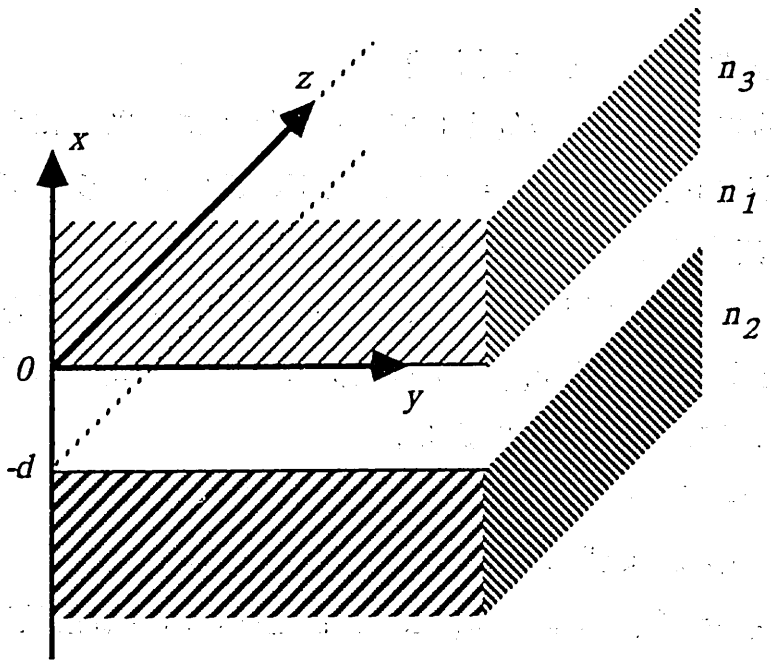


図1．2次元3層スラブ導波路

両モードの界分布，分散方程式などは，通常の無損失の３層スラブ導波路の場合と，形式的には，同一であるので，詳細省略し，結果のみを巻末にまとめて示す．

本稿では，n_1，n_2，n_3に実際的な値を代入し，数値計算によって，モードの界分布，位相定数，減衰定数などを算出した結果を示す．半導体材料を基板として使用することを念頭に，中空光導波路構造において，（１）材料の損失が無視できる場合，（２）損失を考慮に入れた場合，および，（３）境界界面を金属材料によってコーティングした場合，の３つの場合につき，導波特性を比較している．

３．無損失３層中空光導波路

具体的な光導波路の例として，まず始めに，図１において，中空部が自由空間（$n_1 = 1$），上下の誘電体クラッド材料がGaAs（無損失，n_2，$n_3 = 3.6$）の場合を考える．

図２は，正規化層厚 d/λ_0（λ_0は，自由空間における波長）に対する等価屈折率 n_{eff}，伝搬損失 L（dB/μm）の計算例である．ここで，伝搬定数 β は，

$$\beta = \beta_r - j\alpha \quad (\beta_r,\ \alpha \text{ は実数})$$

であり，n_{eff}およびLとは，以下の関係がある．

$$n_{eff} = \beta_r / k_0 \quad (k_0 \text{ は，自由空間における波数}),$$

$$L\ (\mathrm{dB}/\mu\mathrm{m}) = 8.7 \times 10^{-6}\, \alpha\ (\mathrm{NP/m}).$$

また，図３および図４に，それぞれ，TEおよびTMの低次モードについて，１波長分にわたって，界分布の瞬時値を示す．

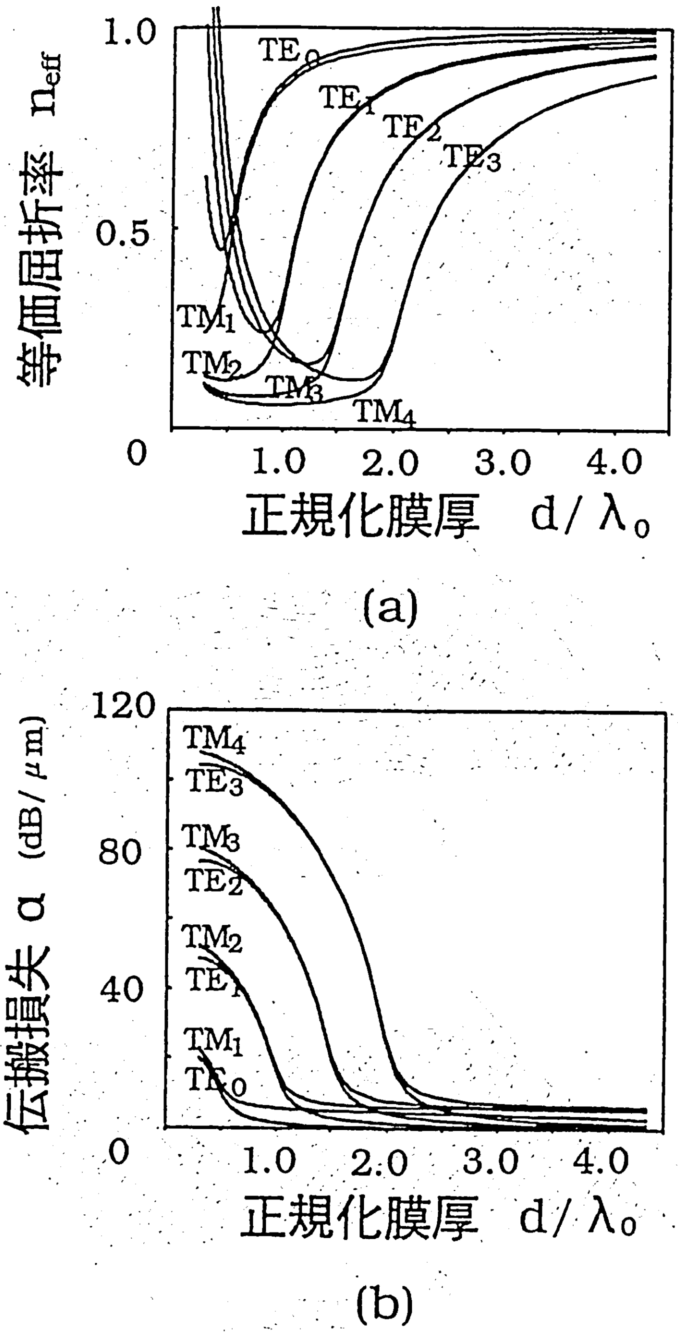


図２．正規化層厚 d/λ_0 に対する (a)等価屈折率 n_{eff}，および (b) 伝搬損失 L （dB/μm）．

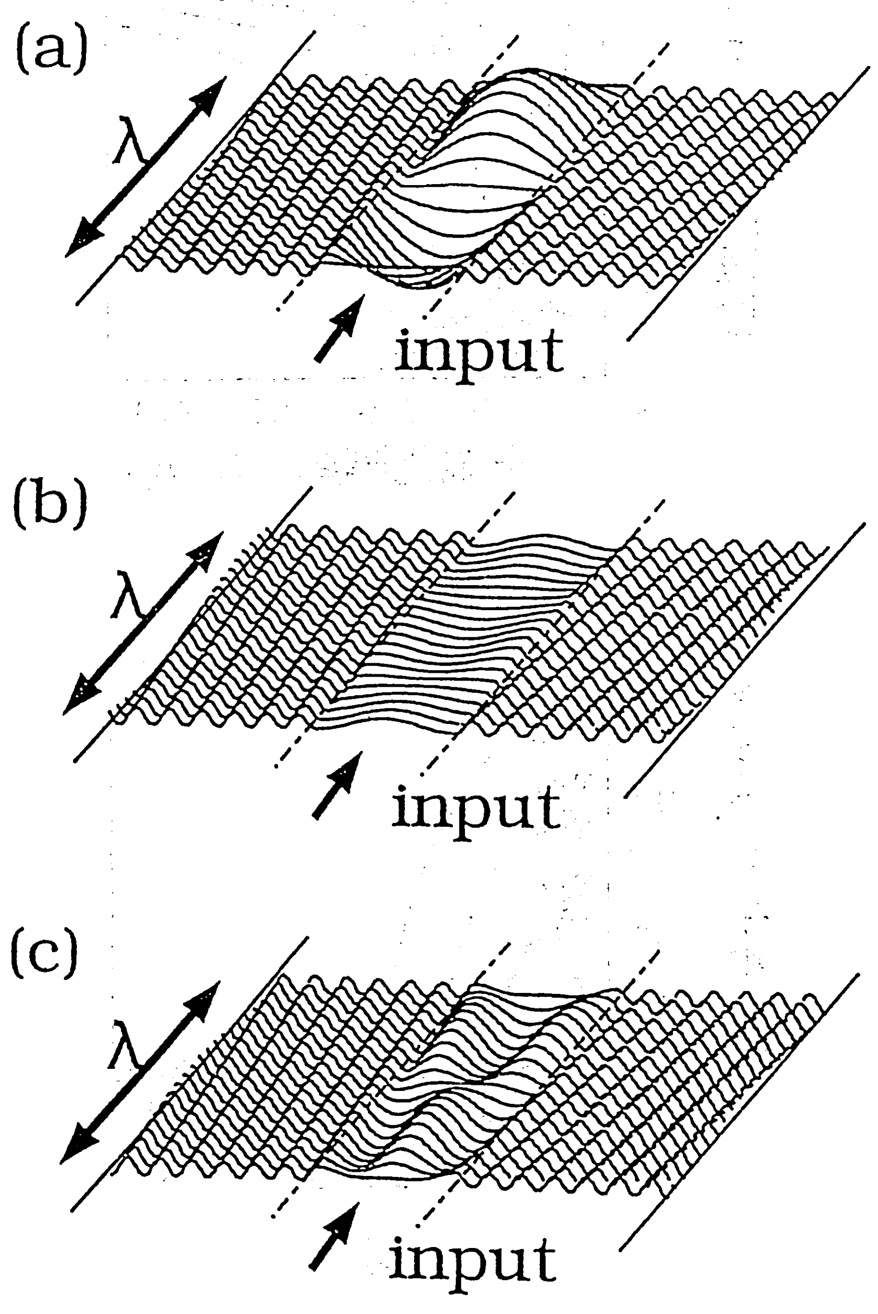


図3. TE モード電界 (E_y) 分布. (a) TE-0 モード, (b) TE-1モード, (c) TE-2 モード.

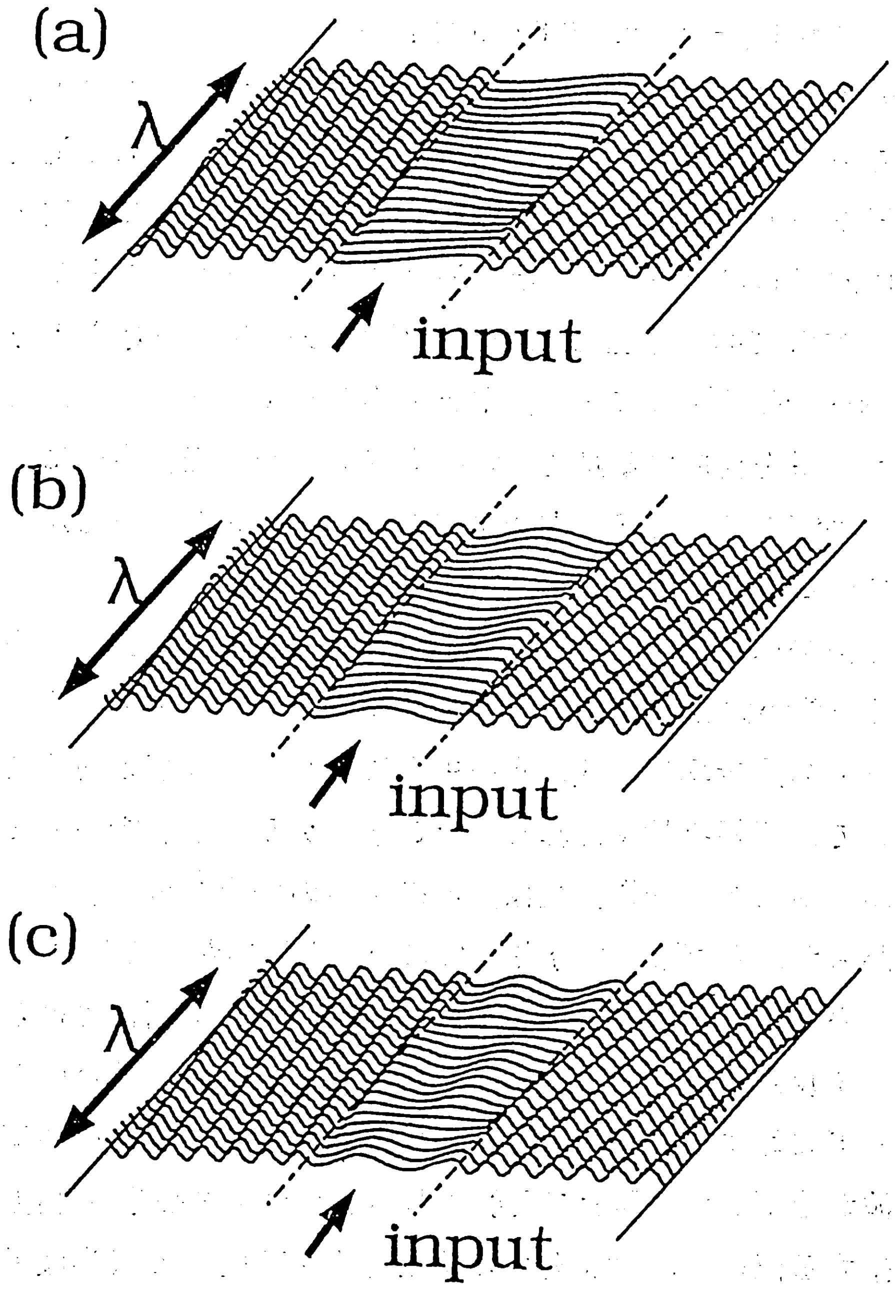


図4. TM モード磁界（H_y）分布. (a) TM-1 モード, (b) TM-2 モード, (c) TM-3 モード.

ただし，$d/\lambda_0 = 1\mu m / 0.8\mu m$ である．

このような系は，いわゆる閉じ込め効果のない，漏れ導波路構造であり，伝搬する波動は，一定の界分布を保持して進行する正規モードではない．図３，４でも見られるように，電力を外部に放射しながら進む『漏れ波（リーキー波）』である．ただし，本稿では，便宜のため，通常のモードとの対応より，TE-0 モード，TM-2 モード，などと名付けている．また，この例では，系を構成する媒質は無損失であるが，伝搬定数に虚数部 α が存在し，伝搬損失が生じている．つまり，電力が放射されていることを示している．

伝搬損失は，クラッドの屈折率が大きく，コアとクラッドとの屈折率差が大きい程，小さく抑えられると考えられる．実際，クラッドの屈折率を，３．６を中心に±０．２程度の範囲で変化させて，伝搬特性を計算したところ，クラッド屈折率の１％の増加に対して，伝搬損失は，ほぼ１％の割合で低下することが分かった．ただし，界分布にはほとんど違いが見られない．

リーキー波では，光波のコアとクラッドとの界面における反射は，全反射ではない．にもかかわらず，リーキー波がいわゆるモードに準ずるような性質（準離散的な固有値）を持つ理由は，波が上下２つの界面で反射されされつつ１波長分 z 軸方向に伝搬する際の，x 軸に対する位相変化が丁度 $n\pi$（半波長分の整数倍）となるような場合に，リーキー波が対応しているからであると考えられる．図３，４より，TE-0モード，TM-1モードでは $n = 1$，TE-1 モード，TM-2 モードでは $n = 2$ などで

あることが分かる.

尚，ここでは，TM-0 モードを導出できていない．このモードでは n = 0 であり，コア内における界分布は，*cosh* 関数型と予想されるので，伝搬損が非常に大きく，かつ，特定の位相定数に対して伝搬損が極小値を取ることが無い（準離散的固有値は存在しない）と推察される.

4．損失のある3層中空光導波路

クラッドに損失を持たせることで，中空光導波路の伝搬損失低減の可能性が期待できる．この予想に基づいて，数値計算を行った．前節と同じくクラッド層をGaAsとする．ただし，今回は材料の損失を考慮して，屈折率が虚部 n"を持つ（複素屈折率 $n_2, n_3 = 3.6 - j n''$）ものとする.

図5は，正規化層厚 d/λ_0 に対する等価屈折率 n_{eff}，伝搬損失 L（dB/μm）の計算例である．ただし，n" = 0.1 とした．この値は，不純物濃度 10^{-18}／cm^3 程度の GaAs における，波長 λ_0 = 0.8μm 付近に対する値を念頭に仮定したものである.

図6，図7は，前節と同じく，それぞれ，TE および TM の低次モードについて，1波長分にわたる界分布の瞬時値を示している．ただし，先と同様に $d/\lambda_0 = 1\mu m/0.8\mu m$ である.

図6，図7を，前節の無損失クラッドによる中空導波路に対する計算例（図3，4）と比較すると，クラッド層における界の状態が，かなり異なっていることが分かる．すなわち，無損失の場合では，放射界は コアから離れるに従って増大してゆく

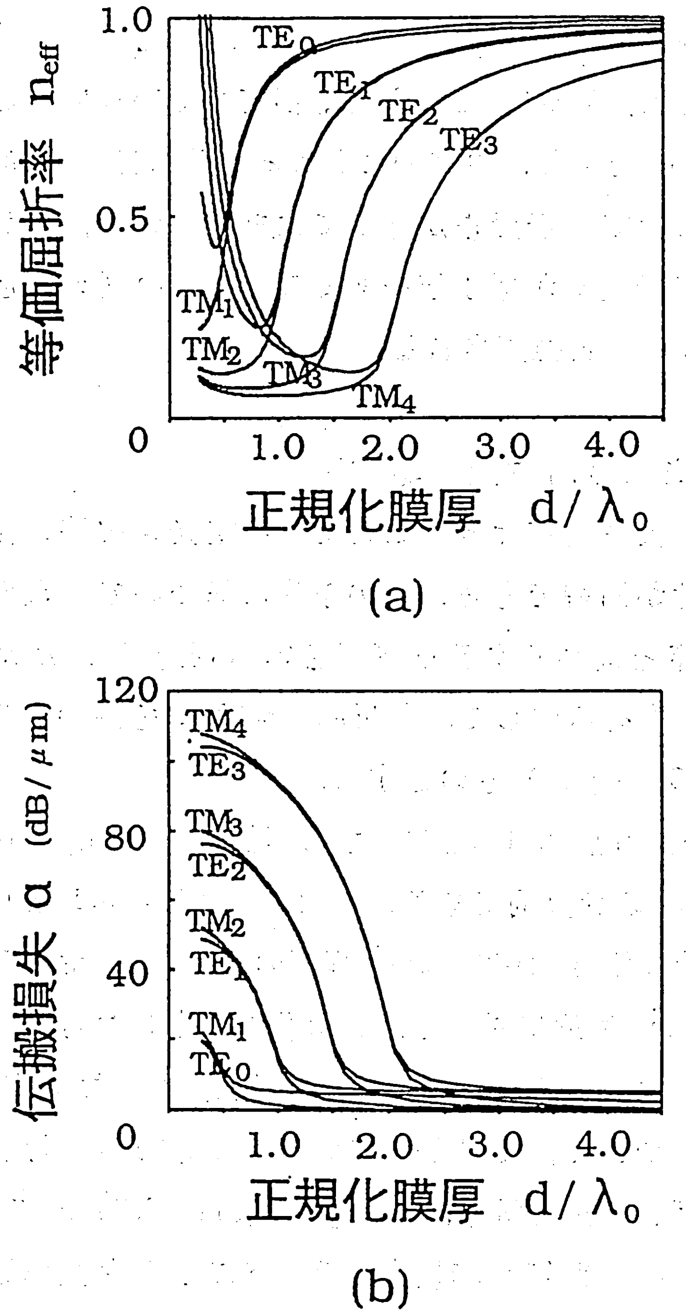


図５．正規化層厚 d/λ_0 に対する (a)等価屈折率 n_{eff}，および (b) 伝搬損失 L（dB/μm）．（損失のある場合）

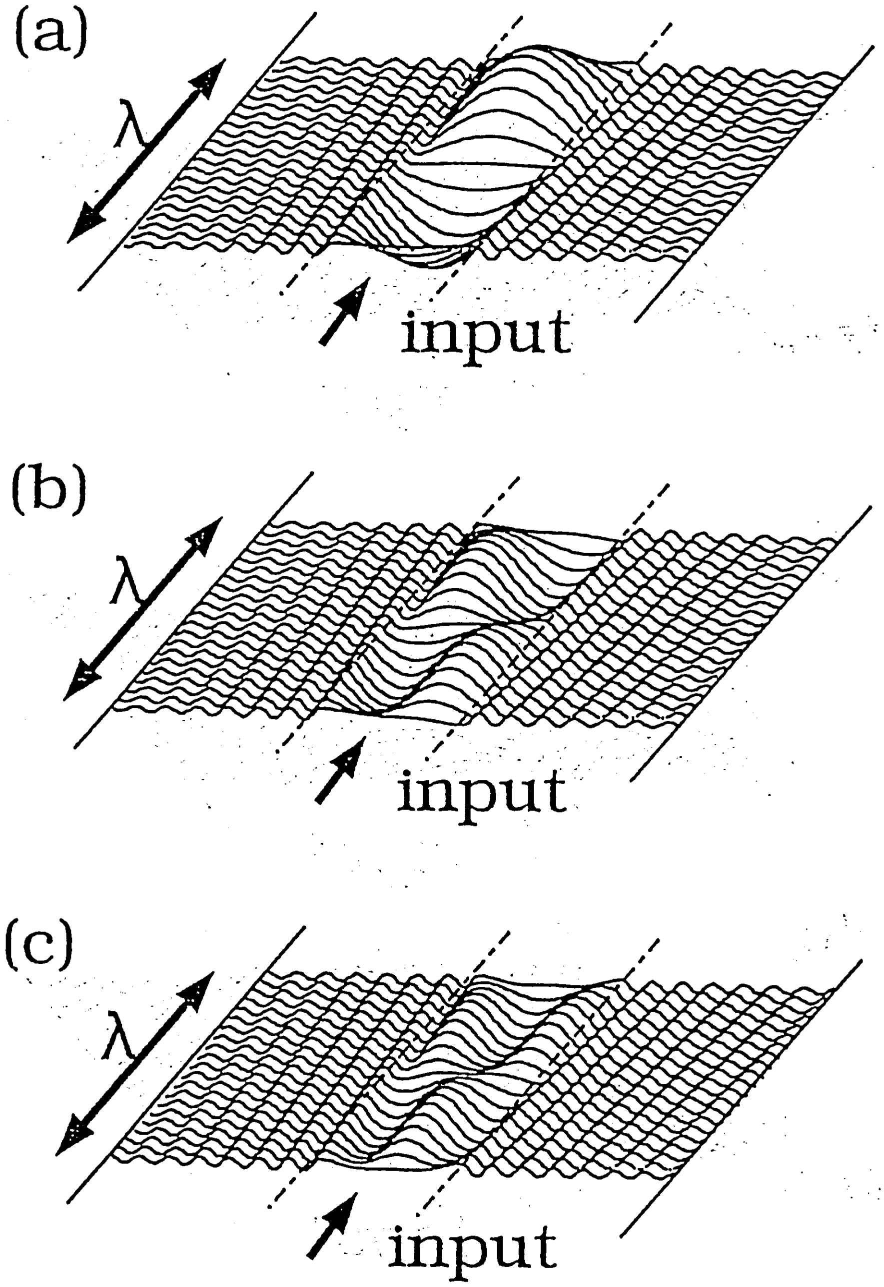


図6．TE モード電界（E_y）分布．(a) TE-0 モード，(b) TE-1モード，(c) TE-2 モード．（損失のある場合）

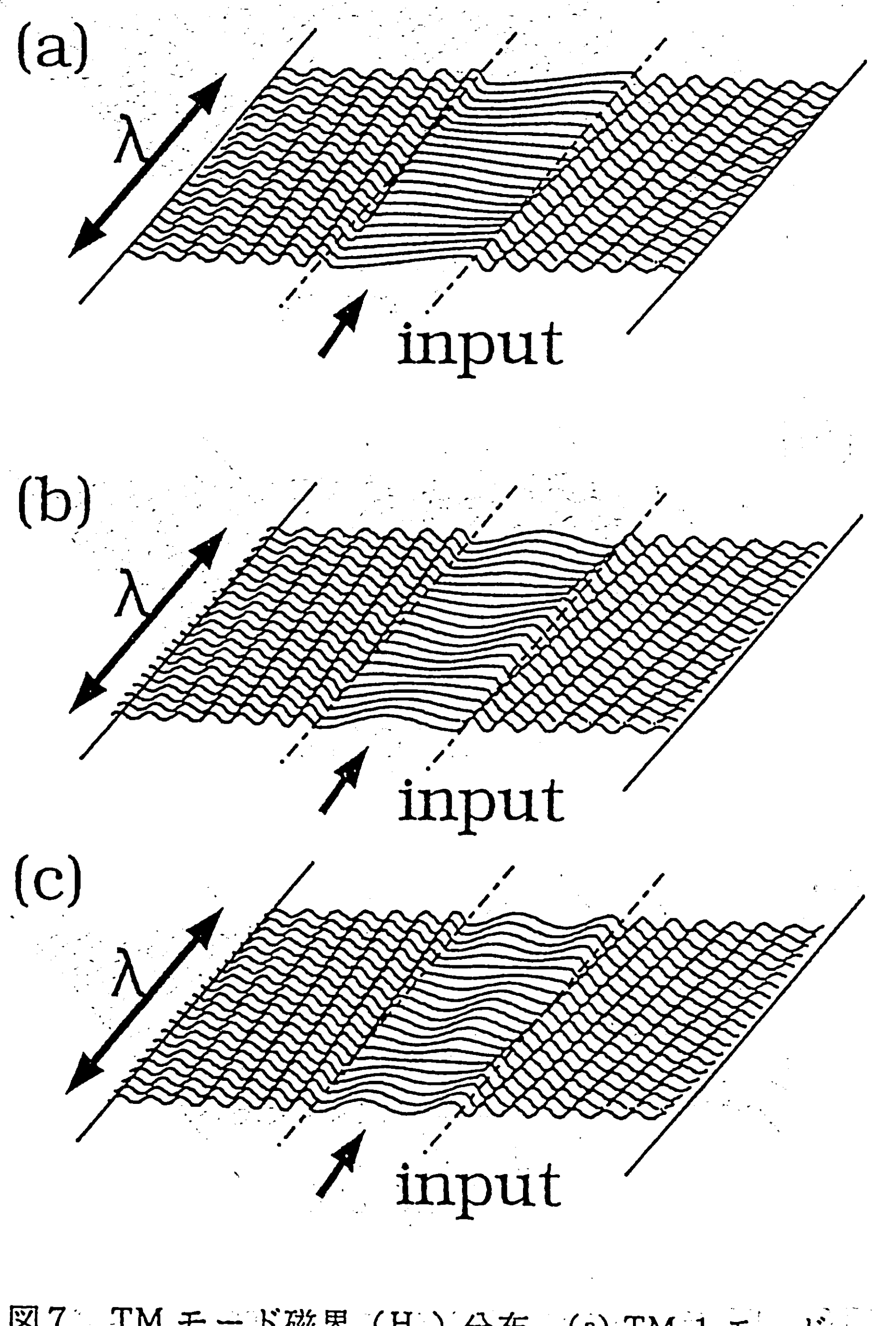


図7. TMモード磁界 (H_y) 分布. (a) TM-1 モード, (b) TM-2モード, (c) TM-3 モード. (損失のある場合)

のに対し，クラッドに損失を与えると，コアから離れるに従って，界が減衰するようになる．ただし，ここに示した例では，分散曲線（図２，図５）には，損失がある場合と無損失の場合とで，大きな違いが現われていない．

図８は，n" の値を変化させた場合の，界分布の様子である．n" が，0.01 から 0.1，1 と大きくなるにつれて，クラッド層への放射界の減衰が，急速に大きくなっていることがわかる．また，図９は，この場合の減衰定数変化の様子である．n" が大きくなるにつれ，伝搬損が急速に低下している．

このように，d と λ_0 とが同程度の場合では，n" の値が，0（すなわち無損失），あるいは，0.01 から 0.1 程度では，高々数波長分の伝搬距離で，伝搬光は数 dB の減衰を受ける．これに対して，クラッド層の複素屈折率の実部 n' と虚部 n" とが同程度の大きさとなると，損失が急速に低減される可能性があることが分かる．

5．金属クラッド中空光導波路

以上の数値例から，クラッド層を金属とすることによって，低損失な中空光導波路を構成できる可能性のあることが分かる．

ここで考えているような波長領域では，クラッド層に GaAs を用いるとすると，$\sim 10^{20}$ 程度の高不純物濃度の場合でも，複素屈折率の虚部 n" は，実部 n' の 1/10 程度にしかならず，導波路の低損失化には限界がある．これに対して，金属材料では，可視あるいは近赤外領域において，複素屈折率の 虚部 n"

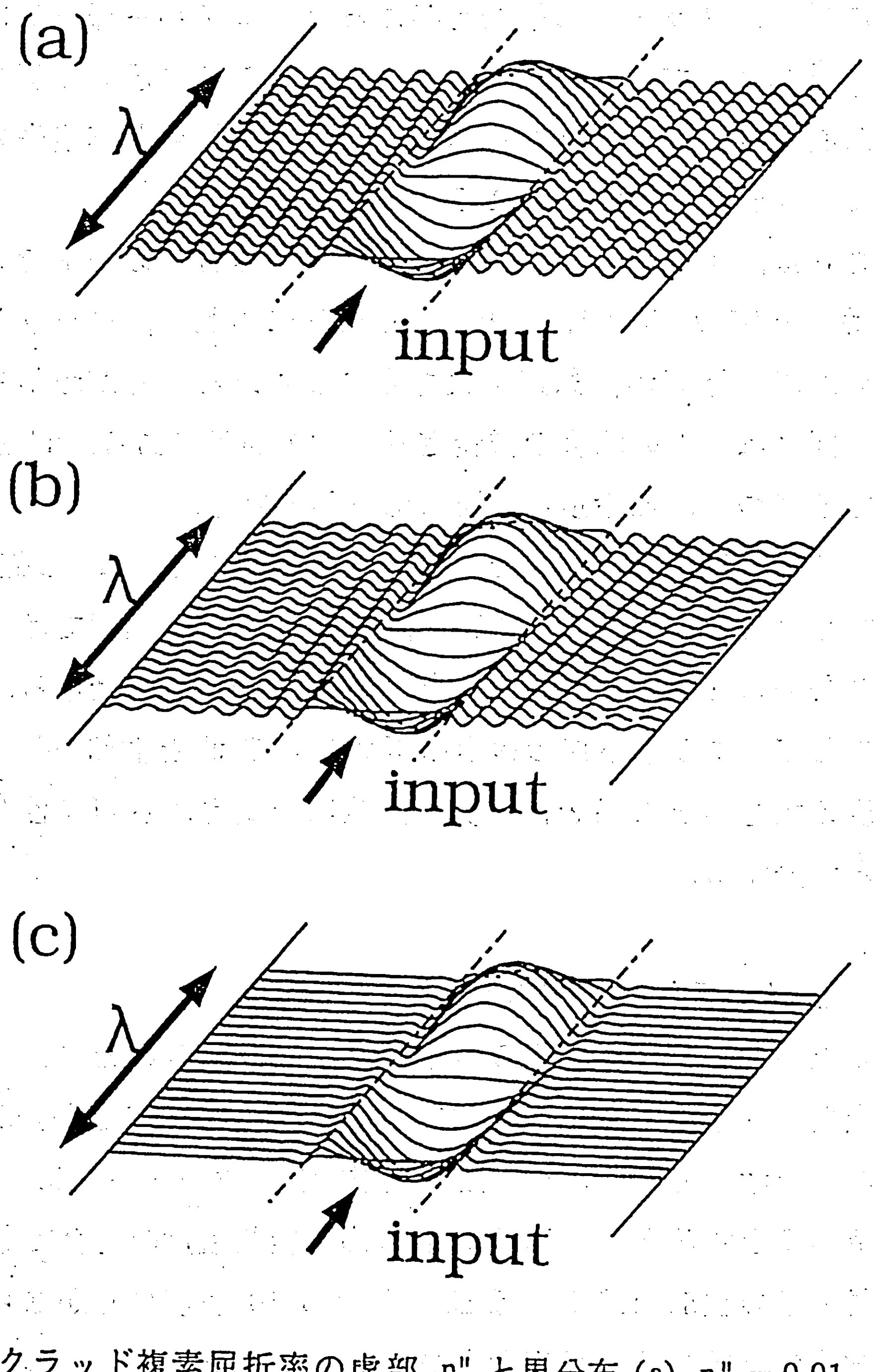


図8．クラッド複素屈折率の虚部 n'' と界分布 (a) n'' ＝0.01, (b) n'' ＝ 0.1, (c) n'' ＝ 1.（TE-0 モード）

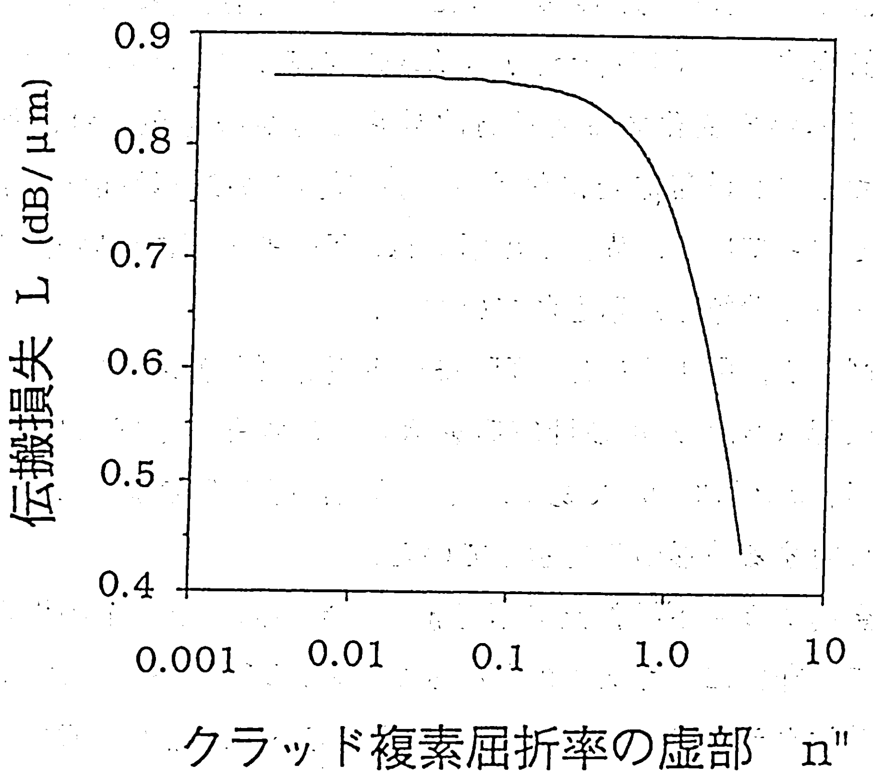


図9．クラッド複素屈折率の虚部n" に対する
伝搬損失 L (dB/μm).

は，実部 n' と同程度か，あるいはさらに大きな値となる．

以下では，代表的な金属材料として，金（Au）を考えることとし，数値計算を行って，導波路低損失化の可能性を探る．

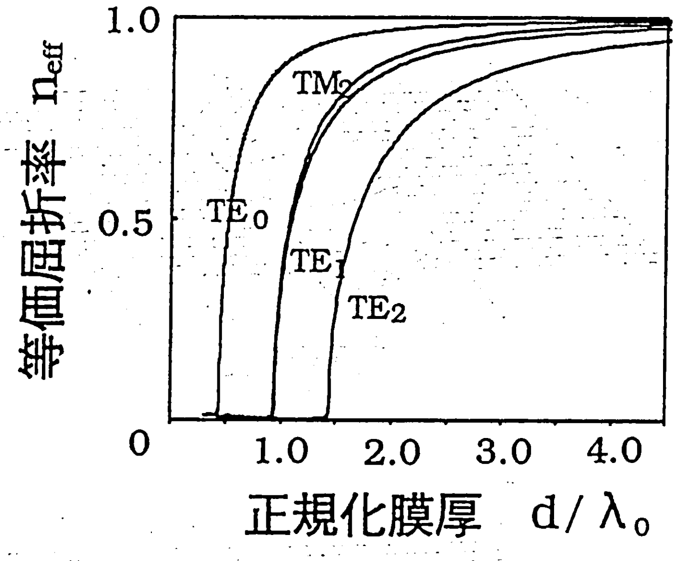
波長 $\lambda_0 = 0.8\,\mu$m における Au の屈折率は n = 0.188 + j 5.39 [4]と与えられている．これより，表皮厚さは 12 nm と計算され，たとえば，半導体基板表面に厚さ数 100 nm の金薄膜を蒸着すれば，十分に金属クラッドとして使用できる．

図１０は正規化層厚 d/λ_0 に対する 等価屈折率 n_{eff}, および伝搬損失 L （dB/μm）の計算例である．分散曲線には，等価屈折率が急変化する遮断周波数らしきものも現われ，通常の（マイクロ波帯などにおける）金属導波系の分散曲線に類似の形となっている．尚，この図では，TM モードについて，TM-2 モードの曲線しか示されていない．

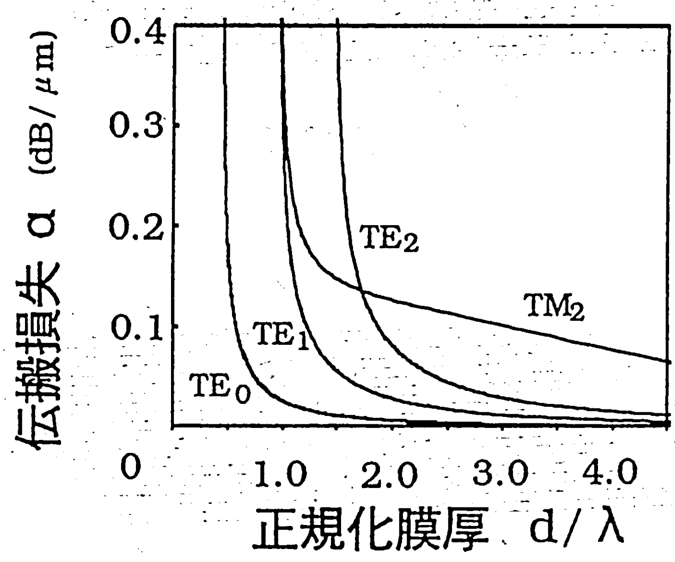
図１１，図１２には，TE モード電界（E_y）および TM モード磁界（H_y）分布の計算例を示す．これまでと同様に，d/λ_0 = 1μm／0.8μm である．先と同様に図１２では，TM-2 モードに対する波形のみを示している．

金属クラッド導波路の伝搬損は，半導体クラッドの場合に比べて，非常に小さなものとなっている．TE モードの損失は，半導体クラッドの場合の 1/100 程度である．また，TM モードでも，計算が不十分ではあるが， 1/10 程度までの低減は期待できる．コア層の厚さ d を 1μm とすると，TE 最低次モードでは，100 μm の伝搬距離に対して，損失が 2 ～ 3 dB 程度と見積もられる．

TM モードに関する計算が不十分な現状にある理由は，TM-0 および TM-1 モードが，いわゆるプラズマ波[5]に対応し，本論で使用した計算法では，それらに対応仕切れないからと推察される．これら２つのモードがプラズマ波であるとすると，コアにおける界分布が，０次モードでは *cosh* 関数，１次モードでは *sinh* 関数，クラッドではどちらの場合でも，指数関数的に減衰するものと予想される．



(a)



(b)

図１０．正規化層厚 d/λ_0 に対する (a)等価屈折率 n_{eff}, および (b) 伝搬損失 L （dB/μm）．金属クラッド．

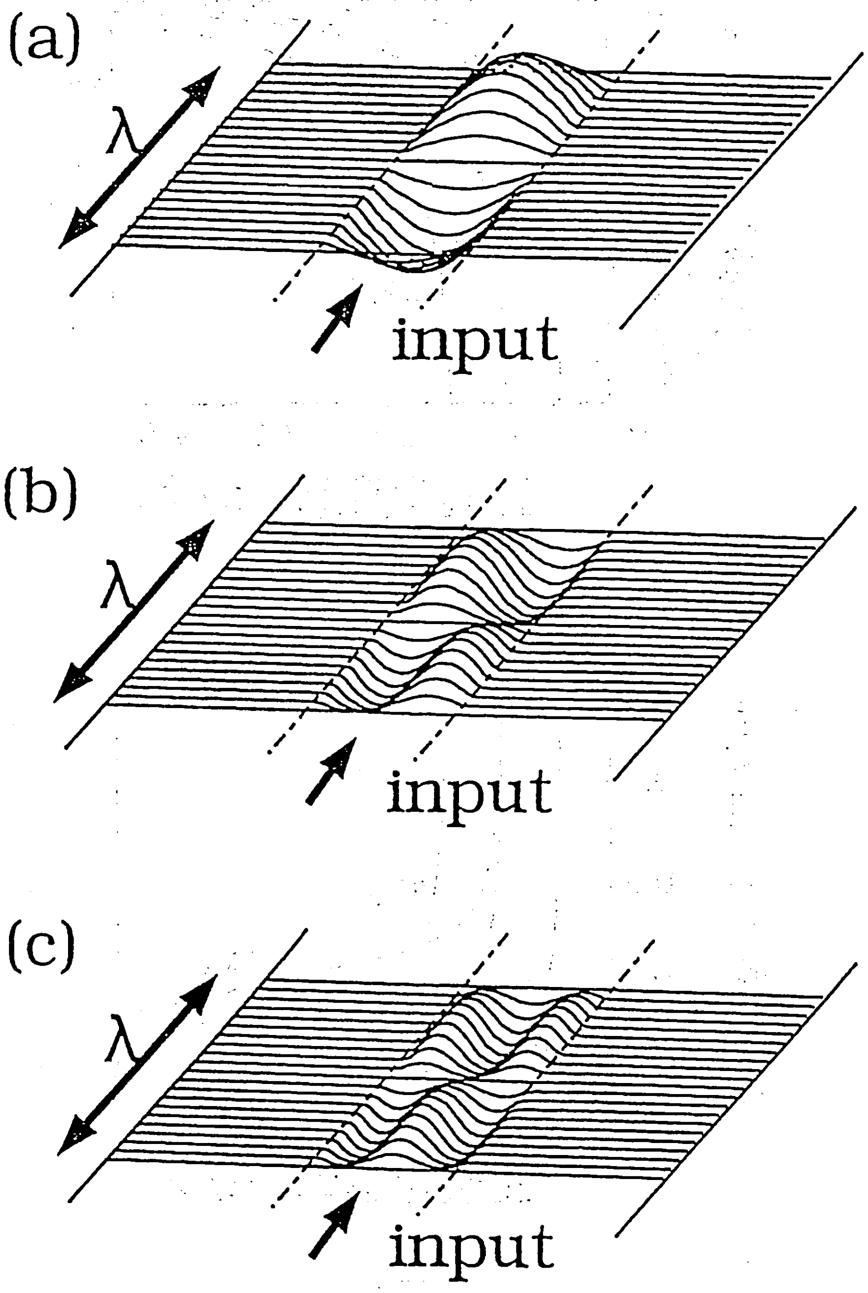


図１１．TE モード電界（E_y）分布．(a) TE-0 モード，(b) TE-1モード，(c) TE-2 モード．（金属クラッド）

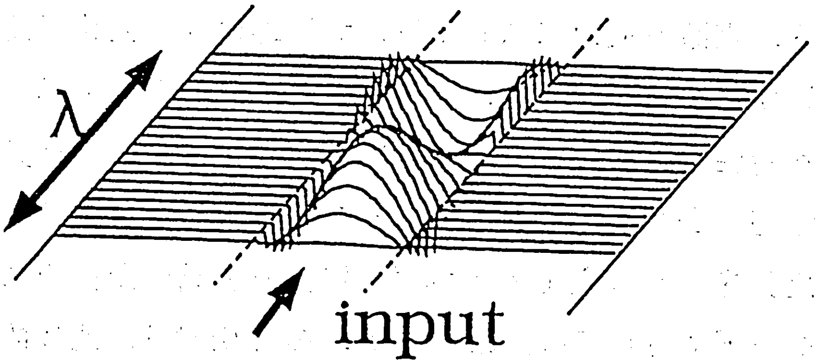


図１２．TM-2モード磁界（H_y）分布．（金属クラッド）

６．むすび

中空光導波路における光伝搬特性について，基礎的な数値解析を行った．（１）クラッド層が無損失の場合，（２）クラッドに小さな損失（複素屈折率に小さな虚部）がある場合，（３）金属材料をクラッド層に用いる（複素屈折率の虚部が実部に比べて大きい）場合，の３つを比較した．

本計算の結果，損失がある場合のリーキー波の特徴が，かなり鮮明になったと云える．金属導波路モードへの移行の様子も，概略が示された．計算が不十分なまま残されている部分を，早急に解決し，伝搬の状況を統一的に把握できるようにすることが重要である．

３種のクラッド材料に関する計算の結果，金属クラッドが最も低損失であることがわかった．金属クラッド光導波路は，TE

モードを用いれば，数 100 μm の光伝送には十分使用可能と考えられる．実際の使用に際しては，導波路の3次元化（断面の方形化）が重要と考えられ，方形断面の金属クラッド光導波路に関する特性解析が，今後の課題である．ただし，本計算結果から，短辺の長さを光波長程度としても，断面のアスペクト比（縦横比）を2～3以上とすれば，電界の主成分が長辺に平行な偏波モードに対しては，数 100 μm の光伝搬は，比較的容易に実現できると予想される．

今後の研究の方向としては，まず第1に，試作／導波実験によって伝送特性を確認することが不可欠である．さらには，このような導波路を用いた各種光エレメントの考案および特性解析，デバイス構成の可能性追及，あるいは，真空マイクロエレクトロニクスなどへの適用など，さまざまな展開の可能性が期待される．

謝辞

本研究を進めるにあたり，有益な御教示を頂いた末田 正教授に深謝する．なお，本研究の一部には，文部省科学研究費補助金（04228105）の援助を受けた．

参考文献

[1] F.E.Vermeulen, C.R.James and A.M.Robinson,"Hollow microstructural waveguides for propagation of infra-red radiation",J.Lightwave Tech.,vol.9,no.9,pp.1053/

1060,Sept.1991.
[2] 小林哲郎, "光伝送線路", 特許広報, 平3-20724.
[3] D.Marcuse:"Theory of Dielectric Optical Waveguides",Academic Press, New York,1972.
[4] E.D.Palik,(Ed),"Handbook of Optical Constants of Solids",FL:Academic,Orlando,1985.
[5] T.Tamir and A.A.Oliner,"The spectrum of electromagnetic waves guided by a plasma layer",Proc.IEEE, vol.??,no.??,pp317/331,Feb.1963.

付録. 分散方程式および界分布

1 TEモード

分散方程式：

$$\tan \kappa d = \frac{\kappa(\gamma+\delta)}{\kappa^2-\gamma\delta}$$

界分布：

$$\begin{aligned}
E_y &= \frac{j\omega\mu_0}{\delta} A \exp(-\delta x) && (x > 0) \\
&= -\frac{j\omega\mu_0}{\kappa} A(\sin \kappa x - \frac{\kappa}{\delta}\cos \kappa x) && (-d < x < 0) \\
&= -\frac{j\omega\mu_0}{\gamma} A(\cos \kappa d - \frac{\kappa}{\delta}\sin \kappa d)\exp\{\gamma(x+d)\} && (x < -d) \\
H_x &= -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \\
H_z &= \frac{j}{\omega\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial x}
\end{aligned}$$

2　ＴＭモード

分散方程式：

$$\tan \kappa d = \frac{n_1^2 \kappa (n_3^2 \gamma + n_2^2 \delta)}{n_2^2 n_3^2 \kappa^2 - n_1^4 \gamma \delta}$$

界分布：

$$
\begin{aligned}
H_y &= -\frac{j\omega\varepsilon_0 n_3^2}{\delta} C \exp(-\delta x) & (x > 0) \\
&= \frac{j\omega\varepsilon_0 n_1^2}{\kappa} C \left(\sin \kappa x - \frac{n_3^2 \kappa}{n_1^2 \delta} \cos \kappa x\right) & (-d < x < 0) \\
&= \frac{j\omega\varepsilon_0 n_2^2}{\gamma} C \left(\cos \kappa d - \frac{n_3^2 \kappa}{n_1^2 \delta} \sin \kappa d\right) \exp\{\gamma(x+d)\} & (x < -d) \\
E_x &= \frac{\beta}{n^2 \omega \varepsilon_0} H_y \\
E_z &= -\frac{j}{n^2 \omega \varepsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial x}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\kappa &= \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \\
\gamma &= \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} \\
\delta &= \sqrt{\beta^2 - n_3^2 k_0^2}
\end{aligned}
$$

輻射科学研究会資料
RS 93 – 11

ランダム表面による波動散乱

— 相反定理と後方強調散乱 —

小倉 久直、高橋 信行
(京都大学 工学部)

1993 年 9 月 3 日

輻射科学研究会
(京都大学 工学部)

Scattering of Wave from Random Rough Surface

— Reciprocal Theorem and Backscattering Enhancement —

Hisanao Ogura and Nobuyuki Takahashi

Department of Electronics, Kyoto University

1 Introduction

The present article intends to give a more elaborate treatment of the scattering from a two-dimensional random surface than the authors' previous works based on the stochastic functional approach [1–6], demonstrates the reciprocal theorems to hold in the representation of a stochastic wave field and in the incoherent scattering distribution (bistatic cross-section), and shows that the stochastic wave solution involves the backscattering enhancement in the case of a slightly random Neumann surface.

We note first of all that our scattering problem is a stochastic boundary value problem, and accordingly that the wave field satisfying the boundary condition is a stochastic functional of the random surface. We assume for simplicity that the two-dimensional (2D) random surface is described by a homogeneous Gaussian random field; however, it could be a non-Gaussian field generated by Gaussian random measure, if necessary. Then the scattered wave field can be regarded as a nonlinear functional of the Gaussian random surface, and a nonlinear functional of a Gaussian random field can be handled by means of the Wiener-Itô theory [7–12].

Another feature of the present theory is that the formulation is based on a group-theoretic consideration connected with the homogeneity of the random surface, where the random field is said to be homogeneous if its probability measure is invarinat under a group of translations on the surface. This homogeneity leads to a "stochastic Floquet theorem" [13], which is an analogue to the Floquet theorem for a periodic surface, and which is of great help in representing the stochastic solution.

Thus, the scattered wave field in the presence of an incident wave, is given in the form of the "stocastic Floquet solution", and is represented as a Wiener-Itô expansion in terms of the orthogonal functionals, which is completely described by the expansion coefficients called Wiener kernels $A_n, n = 0, 1, 2, \cdots$. The Wiener kernels are obtained by solving the stochastic boundary condition on the random surface. From the stochastic representation, various statistical quantities of the scattered wave field can be easily calculated by means of the averaging; coherent scattering amplitude, surface impedance, incoherent scattering distribution, power conservation, and so on. We derive from Green's formula a new reciprocal theorem for the Wiener kernels A_n's in connection with the incident direction and the scattered direction of a stochastic partial wave described by A_n. The reciprocal relations for the Wiener kernels immediately leads to the reciprocity of the incoherent scattering distribution (bistatic cross-section). The approximate solutions for A_0, A_1, A_2 which are solved more carefully than the previous work are shown to satisfy reciprocal relations and so is the incoherent scattering distribution. The multiple scattering effect and the backscattering enhancement are automatically involved in the solutions obtained in this manner. Particularly the multiple scattering effect gives rise to the anomalous scattering from the Neumann random surface closely connected to the presence of an unstable propagating mode along the surface [1, 2, 4]. Such multiple scattering effect can be mostly described by the term due to A_1, We should note that the divergence difficulty arising in the multiple scattering theory is automatically circumvented by the present method without recourse to the renormalization technique: this largely owes to the stochastic Floquet theorem and Wiener-Itô calculus.

On the other hand, the enhanced backscattering mathematically comes from A_2, which was ignored in calculating the scattering distribution in the previous work. By rewriting A_2 in terms of A_1, the backscattering enhancement due to the second Wiener kernel can be physically interpreted as an interference of the two "double" scattering processes composed of the twofold "single" scattering processes described by A_1's, which could be interpreted as a "dressed' scattering process. This interpretation bears some similarity to the backscattering enhancement in the presence of the surface plasmon mode [15], which will be discussed in detail in the last section.

2 Representation of Stochastic Wave Field for Plane Wave Incidence

Random Surface Let the two dimensional (2D) plane be denoted by R_2, a position vector by $\boldsymbol{x} = (x, y)$, and the probability space be (Ω, P) where (Ω: the sample space, P: the probability measure, $\omega \in \Omega$: the sample point, $\langle\ \rangle$: average with respect to P).

We assume the random surface $z = f(\boldsymbol{x}, \omega)$ to be a homogeneous Gaussian random field and express it by a spectral representation,

$$z = f\left(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega\right) = \int_{R_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{\lambda})\mathrm{d}B\left(\boldsymbol{\lambda}, \omega\right), \quad \overline{F(\boldsymbol{\lambda})} = F(-\boldsymbol{\lambda}) \tag{1}$$

where $f(\omega) \equiv f(0, \omega)$. The shift $\mathrm{T}^{\boldsymbol{a}}$ denotes a measure-preserving transformation {on Ω representing the invariance of the probability measure P with respect to the translation on R_2 and is assumed to be ergodic. $\mathrm{d}B\left(\boldsymbol{\lambda}\right)$ denotes the 2D complex Gaussian random measure with the property: $\left\langle \overline{\mathrm{d}B\left(\boldsymbol{\lambda}\right)}\mathrm{d}B\left(\boldsymbol{\lambda}'\right)\right\rangle = \delta(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}')\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}'$. where the probability parameter ω is suppressed for brevity. The correlation function can be

$$R(\boldsymbol{x}) = \left\langle \overline{f(\omega)} f(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega)\right\rangle = \int_{R_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}} |F(\boldsymbol{\lambda})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{x} \in R_2 \tag{2}$$

$$\sigma^2 \equiv R(0) = \int_{R_2} |F(\boldsymbol{\lambda})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \tag{3}$$

where $| F(\boldsymbol{\lambda}) |^2$ denotes the spectral density and σ^2 the variance, namely, the surface roughness. For numerical calculation we employ the isotropic Gaussian spectral density (ℓ : correlation distance):

$$R(\rho) \;=\; \sigma^2 \mathrm{e}^{-\rho^2/(4\ell^2)}, 0 \le \rho < \infty, \quad | F(\lambda) |^2 = \sigma^2 \frac{\ell^2}{\pi} \mathrm{e}^{-\ell^2\lambda^2}, \quad 0 \le \lambda < \infty \tag{4}$$

Coordinate System and Wave Vectors Let 3D position vector $\boldsymbol{r}$ and the wave vector $\boldsymbol{k}$ be denoted, in the polar and cylindrical coordinates, respectively, by

$$\boldsymbol{r} \;=\; (r, \theta, \varphi)_{\text{pol}} = (\boldsymbol{x}, z)_{\text{cyl}}, \quad \boldsymbol{x} = (\rho, \phi)_{\text{cyl}}, \quad \rho = r \sin\theta, \quad z = r\cos\theta \tag{5}$$

$$\boldsymbol{k} \;=\; (k, \alpha, \beta)_{\text{pol}} = (\boldsymbol{\lambda}, S(\boldsymbol{\lambda}))_{\text{cyl}}, \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \beta)_{\text{cyl}}, \quad \lambda = k \sin\alpha, \quad S(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \sqrt{k^2 - \lambda^2} = k\cos\alpha \tag{6}$$

The wave vectors for the incident and specularly reflected waves (θ_0:incident angle, φ_0 :azimuth angle) are then written $\boldsymbol{k}_0 = (k, \pi - \theta_0, \varphi_0)_{\text{pol}} = (\boldsymbol{\lambda}_0, -S(\boldsymbol{\lambda}_0))_{\text{cyl}}$ (incidence), $\boldsymbol{k}_0' = (k, \theta_0, \varphi_0)_{\text{pol}} = (\boldsymbol{\lambda}_0, S(\boldsymbol{\lambda}_0))_{\text{cyl}}$ (reflection).

Stochastic Floquet Theorem for the Plane Wave Incidence Denote by $\psi(\omega)$ a functional generated by the random measure $\mathrm{d}B(\boldsymbol{\lambda}, \omega)$, and denote by $L^2[\Omega]$ the Hilbert space of such functionals with finite varaince. The scattered wave field is considered as a stochastic functional of the random surface, and hence a functional in $L^2[\Omega]$.

Let $\psi(\boldsymbol{x}, z; \omega \mid \boldsymbol{\lambda}_0)$ denote the stochastic wave field for the plane wave incidence with the wave vector $\boldsymbol{k}_0'$. Then we assume that the wave field satisfy the wave equation,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\boldsymbol{x}, z; \omega \mid \boldsymbol{\lambda}_0) \;=\; 0, \quad z > f(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega), \quad \boldsymbol{x} \in R_2 \tag{7}$$

and either of the boundary conditions on the random surface,

$$\psi(\boldsymbol{x}, z; \omega \mid \boldsymbol{\lambda}_0) \;=\; 0, \quad z = f(T^{\boldsymbol{x}}\omega) \quad \text{(Dirichlet))} \tag{8}$$

$$\partial\psi(\boldsymbol{x}, z; \omega \mid \boldsymbol{\lambda}_0)/\partial n \;=\; 0, \quad z = f(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega) \quad \text{(Neumann))} \tag{9}$$

together with the radiation codition. In the case of a plane wave incidence, we write the primary field (unperturbed field) as

$$\psi_\iota(\boldsymbol{x}, z|\boldsymbol{\lambda}_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\boldsymbol{x}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S(\boldsymbol{\lambda}_0)z} \mp \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\boldsymbol{\lambda}_0)z}\right], \quad \iota \doteq \mathrm{D}, \mathrm{N} \tag{10}$$

where $\mp$ and $\iota = D, N$ refer to Dirichlet or Neumann condition. Then, it was shown in [1] that, by virtue of the homogeneity of the random surface, the total wave field can be generally written in the following form:

$$\psi(\boldsymbol{x}, z; \omega|\boldsymbol{\lambda}_0) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\boldsymbol{x}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S(\boldsymbol{\lambda}_0)z} \mp \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\boldsymbol{\lambda}_0)z} \mp U(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega, z|\boldsymbol{\lambda}_0)\right] \tag{11}$$

where $\psi_s \equiv \mp e^{i\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\boldsymbol{x}} U(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega, z|\boldsymbol{\lambda}_0)$ represents the scattered field (secondary or perturbed field) due to the random surface. The wave solution in this form represents a "stochastic Floquet theorem" [13] for the homogeneous random surface, where U is a homogeneous random field on R_2.

Wiener-Itô Expansion of Random Wave Field The scattered wave field is a stochastic functional of the Gaussian random surface, and the homogeneous random field $U(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega, z \mid \boldsymbol{\lambda}_0)$, as a L^2-functional, can be represented by a Wiener-Itô expansion[13, 9, 11, 12]:

$$U(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega, z \mid \boldsymbol{\lambda}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega, z \mid \boldsymbol{\lambda}_0) \tag{12}$$

$$U_n(\mathrm{T}^{\boldsymbol{x}}\omega, z \mid \boldsymbol{\lambda}_0) \equiv \int \cdots \int_{R_2} e^{i(\boldsymbol{\lambda}_1+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n)\cdot\boldsymbol{x}+iS(\boldsymbol{\lambda}_0+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n)z} \times A_n(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n|\boldsymbol{\lambda}_0)\hat{h}_n\left[\mathrm{d}B(\boldsymbol{\lambda}_1), \cdots, \mathrm{d}B(\boldsymbol{\lambda}_n)\right], \; n = 0, 1, 2, \cdots \tag{13}$$

$A_n(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n \mid \boldsymbol{\lambda}_0)$ represents n-order symmetric Wiener kernel, and h_n the n-th order complex Wiener-Hermite differential which satisfies the orthognality relation:

$$\left\langle \overline{\hat{\mathrm{h}}_n\left[\mathrm{d}B(\boldsymbol{\lambda}_1), \cdots, \mathrm{d}B(\boldsymbol{\lambda}_n)\right]}\hat{\mathrm{h}}_m\left[\mathrm{d}B(\boldsymbol{\mu}_1), \cdots, \mathrm{d}B(\boldsymbol{\mu}_m)\right] \right\rangle = \delta_{nm}\delta_{ij}^n \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1 \cdots \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_n \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_1 \cdots \mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_n \tag{14}$$

$$\delta_{ij}^n \equiv \sum_{\text{all pair }(i,j)} \prod \delta(\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\mu}_j) \tag{15}$$

Thus, U_n, a n-tuple complex Wiener integral[12], belongs to the orthognal subspace $L_n^2[\Omega]$ in $L^2[\Omega]$.

Reciprocal Theorem for the Wiener Kernel

Let the two solutions for different incident angles be $\psi_1 = \psi(\boldsymbol{x}, z; \omega \mid \boldsymbol{\lambda}_0)$ and $\psi_2 = \psi(\boldsymbol{x}, z; \omega \mid \boldsymbol{\lambda}_0')$. Integrating the equality $\nabla\cdot[\psi_1\nabla\psi_2 - \psi_2\nabla\psi_1]/k = 0$ over the cylindrical volume placed on the random surface (Fig.1), we obtain the equality

$$\frac{1}{k}\int_{S_t+S_c}\left[\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial n} - \psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right]\mathrm{d}S = 0 \tag{16}$$

for almost all realizations, where S_t stands for the top surface of the cylinder at the height z with radius ρ, and S_c the cylindrical surface. The contribution to the integral from the bottom surface vanishes due to the boundary condition (8) or (9). Since the top and the side areas are proportional to ρ^2 and ρ, respectively, we obtain the following equality for almost all realizations,

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\pi\rho^2 k}\int_{S_t}\left[\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \tag{17}$$

where $\pi\rho^2$ is the area of S_t. From this equality we can derive the reciprocal theorem for the Wiener kernels. To avoid lenthy mathematical manipulations, we briefly describe the outline of its the derivation as follows. We substitute into (17) the Wiener-Itô expansions (11)-(13) for $\psi_1 = \psi(\boldsymbol{x}, z; \omega \mid$

λ_0) and $\psi_2 = \psi(x, z; \omega \mid \lambda_0')$. Then [ ] in (17) is written as the sum over m, n of terms in the following form:

$$[\;]_{mn} \equiv [\psi_1]_m[\psi_{2z}]_n - [\psi_{1z}]_m[\psi_2]_n, \quad m, n = 0, 1, 2, \cdots \tag{18}$$

which consist of the product of m- and n-tuple Wiener integrals, $[\psi]_n$ indicating the component of ψ in $L_n^2[\Omega]$. Integrating the sum termwise over x, and using the relation,

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\pi\rho^2} \int_{S_t} e^{i(\lambda-\lambda')\cdot x} dx = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{19}$$

gives nonvanishing terms when $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m + \lambda_0' + \lambda_1' + \cdots + \lambda_n' = 0$ is satisfied. Then we find that all terms of the form, $[\;]_{mn} + [\;]_{nm}$ with $m \geq 1, n \geq 1$, vanish identically, that the term $[\;]_{00}$ yields the recirocity (22) for A_0 below, and that the term $[\;]_{0n} + [\;]_{n0}$, by virtue of the orthogonality of Wiener-Hermite differentials, gives the equality:

$$S(\lambda_0)A_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n \mid \lambda_0') - S(\lambda_0')A_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n \mid \lambda_0) = 0 \tag{20}$$

$$\lambda_0' + \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots \lambda_n = 0 \tag{21}$$

which implies the reciprocity for A_n. To summarize we have obtained the reciprocal relations for the Wiener kernels in the following form:

$$A_0(\lambda_0) = A_0(-\lambda_0) \tag{22}$$

$$a_1(\lambda_1 \mid \lambda_0) = a_1(\lambda_1 \mid -\lambda_0 - \lambda_1) \tag{23}$$

$$a_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n \mid \lambda_0) = a_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n \mid -\lambda) \tag{24}$$

$$\lambda \equiv \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{25}$$

where $A_n, n \geq 1$ can be put in the form

$$A_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n \mid \lambda_0) \equiv S(\lambda_0)a_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n \mid \lambda_0), \quad n = 1, 2, \cdots \tag{26}$$

We note here that the reciprocity does hold for $\lambda_0' = -\lambda \equiv -(\lambda_0 + \cdots + \lambda_n)$, where, in view of (13), λ gives the scattering direction of partial waves for the incident direction λ_0. The reciprocal relation (24) implies that the partial wave amplitude for the scattering process $\{\lambda_0 \to \lambda\}$ equals that of $\{-\lambda \to -\lambda_0\}$, where $-\lambda$ gives the the reciprocal incident direction, and $-\lambda_0$ the reciprocal scattering direction.

3 Statistical Quantities of the Scattered Wave Field

The stochastic wave field $\psi(x, z; \omega \mid \lambda_0)$ is expressed by (11)-(13) in terms of the Wiener kernels A_n's and the random measure. Therefore, once the kernels are obtained, we can even draw a spatial realization of the stochastic wave field corresponding to a given realization of the random surface.

However, various statiastical quantities of the random wave field can be easily calculated by means of averaging procedure as follows. We only show here the coherent and incoherent scattering characteristics. For more details and other charactersitics, see e.g., [1–5].

Coherent Scattering Amplitude By taking the average of (11) using (12), we obtain the coherent field

$$\langle\psi(\boldsymbol{x}, z; \omega \mid \boldsymbol{\lambda}_0)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_0\cdot\boldsymbol{x}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S(\boldsymbol{\lambda}_0)z} \mp (1 + A_0(\boldsymbol{\lambda}_0))\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\boldsymbol{\lambda}_0)z}\right] \tag{27}$$

where the constant $A_0(\boldsymbol{\lambda}_0)$ is the 0-th order Wiener kernel. Apparently the coherent scattering takes place into the direction of specular reflection, and $(1 + A_0)$ is the reflection coefficient of the random surface.

Angular Distribution of Incoherent Scattering By $P(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0)$ we denote the angular distribution of the incoherent scattering, that is, the average power scattered incoherently from unit surface area into unit solid angle of the direction $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \varphi)_{pol}$ when the angle of incidence is $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_0, \varphi_0)_{pol}$. Let P_{ic} describe the incoherent power flow in the z direction per unit area, which equals the integral of $P(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0)$ over 2π steradians:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{ic}} &= \int_{2\pi} P(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \\ &= \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} n! \int\cdots\int_{(\boldsymbol{\lambda}_0+\boldsymbol{\lambda}_1+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n)^2<k^2} S(\boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n) \mid A_n(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n \mid \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1 \cdots \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_n \end{aligned} \tag{28}$$

where $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \equiv \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ and $A_n \equiv S(\boldsymbol{\lambda}_0)a_n$ by (26). The vector $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n = (k\sin\theta, \varphi)_{\mathrm{cyl}}$ can be interpreted as a scattering vector. Therefore, putting $\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \lambda\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\phi = k^2\cos\theta\ \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}, S(\boldsymbol{\lambda}) \equiv k\cos\theta$, $\boldsymbol{\lambda}_0 = (k\sin\theta_0, \varphi_0)_{\mathrm{cyl}}$, we obtain

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0) \\ &= k^4\cos^2\theta\cos^2\theta_0\left[\mid a_1(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0 \mid \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2 + 2!\int_{R^2} \mid a_2(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0 - \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_2 \mid \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_2 + \cdots\right] \end{aligned} \tag{29}$$

where $P_n(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0)$ represents the contribution from A_n. If the angular distribution of incoherent scattering is observed with a lens or a parabola with a fixed aperture which is directed toward the scattering surface at an angle θ, the observed scattering area is then increased by a factor $1/\cos\theta$. Therefore, the angular distribution $S(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0)$, such as adopted in [1], is related to $P(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0)$ by the equation,

$$S(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0) = P(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}_0)/\cos\theta \tag{30}$$

Reciprocal Theorem for Angular Scattering Distribution As mentioned earlier, the reciprocal relation (25) for a_n holds when the boundary condition (8) or (9) is satisfied, and the partial wave amplitude of the scattering process $\{\lambda_0 \to \lambda\}$ equals to that of the reciprocal scattering process $\{-\lambda \to -\lambda_0\}$ (c.f. Fig.2(a)). Therefore, it follows from (29) and (24) that $P(\theta \mid \theta_0)$ has the reciprocity also:

$$P(\theta \mid \theta_0) = P(\theta_0 \mid \theta) \tag{31}$$

4 Approximate Solution for the Wiener Kernel

The foregoing argument is applicable to any homogeneous random surface. To obtain concrete solutions for the scattering problem here, we limit ourselves to the case of small roughness, where the Wiener-Itô functional calculus can be very effectively used as shown below. In the case of very rough surface, however, the boundary condition and the stochastic functional calculus has to be dealt with somewhat differently, which the authors intend to discuss elsewhere.

Effective Boundary Condition We assume that the 2D random surface has small roughness relative to the wavelength and is smooth enough, namely, $k^2 \langle f^2 \rangle \ll 1$ and $\langle \mid \nabla f \mid^2 \rangle \ll 1$. We expand the boundary condition (8) and (9) in terms of f and ∇f:

$$\begin{aligned} [\psi]_{z=f} &= \left[\psi + f\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_{z=0} = 0 \quad \text{(Dirichlet)} &(32)\\ -\frac{1}{kn_z}[\boldsymbol{n} \cdot \nabla \psi]_{z=f} &= \frac{1}{k}\left[\frac{\partial \psi}{\partial z} - (\nabla f \cdot \nabla \psi) + f \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right]_{z=0} = 0 \quad \text{(Neumann)} &(33)\end{aligned}$$

where we have kept the terms up to the first-order in f for simplicity, although higher-order terms could be added if necessary. These simplified equations represent the effective boundary conditions for a slightly random surface.

Substituting (11)-(13) into (32) or (33), the boundary condition is cast into the hierarchy of functional equations in the orthogonal space $L_n^2[\Omega], n = 0, 1, 2, \cdots$.

The functional equations can be approximately solved for the Wiener kernels A_0, A_1 and A_2, using the equations up to $n = 4$. In the present paper, the equations are more carefully handled here than the preceeding works [1, 5] in order to obtain the correct approximate solutions that satisfy the reciprocal relations (22)-(26). Omitting the details of calculations, we summarize the approximate solutions as follows:

Dirichlet Condition

$$\begin{aligned} A_0(\lambda) &\equiv S(\lambda)a_0(\lambda) = -\frac{2Z_D(\lambda)}{1 + Z_D(\lambda)} &(34)\\ A_1(\lambda_1|\lambda) &\equiv S(\lambda)a_1(\lambda_1|\lambda) &(35)\\ A_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda) &\equiv S(\lambda)a_2(\lambda_1, \lambda_2|\lambda) &(36)\\ Z_D(\lambda) &\equiv S(\lambda)\xi(\lambda) &(37)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_0(\boldsymbol{\lambda}) &= -\frac{2\xi(\boldsymbol{\lambda})}{1+S(\boldsymbol{\lambda})\xi(\boldsymbol{\lambda})} && (38)\\
a_1(\boldsymbol{\lambda}_1|\boldsymbol{\lambda}) &= \frac{-2\mathrm{i}F(\boldsymbol{\lambda}_1)[1-\xi^*(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda})]}{[1+S(\boldsymbol{\lambda})\xi(\boldsymbol{\lambda})]\,[1+S(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)\xi(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)]} && (39)\\
a_2(\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2|\boldsymbol{\lambda}) &\simeq -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{S(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)a_1(\boldsymbol{\lambda}_1\mid\boldsymbol{\lambda})F(\boldsymbol{\lambda}_2)+S(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_2)a_1(\boldsymbol{\lambda}_2\mid\boldsymbol{\lambda})F(\boldsymbol{\lambda}_1)}{1+S(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2)\xi(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2)} && (40)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi(\boldsymbol{\lambda}) &\equiv \int_{R_2}\frac{S(\boldsymbol{\lambda}_1)|F(\boldsymbol{\lambda}_1-\boldsymbol{\lambda})|^2}{1+S(\boldsymbol{\lambda}_1)\xi(\boldsymbol{\lambda}_1)}\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1 && (41)\\
&\simeq \int_{R_2} S(\boldsymbol{\lambda}_1)|F(\boldsymbol{\lambda}_1-\boldsymbol{\lambda})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1 && (42)\\
\xi^*(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}_0) &\simeq \int_{R_2} S(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)S(\boldsymbol{\lambda}_0+\boldsymbol{\lambda}_1)|F(\boldsymbol{\lambda}_1)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1 && (43)
\end{aligned}
$$

Neumann Condition

$$
\begin{aligned}
A_0(\boldsymbol{\lambda}) &\equiv -2+S(\boldsymbol{\lambda})a_0(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{2Z_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\lambda})}{1+Z_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\lambda})} && (44)\\
A_1(\boldsymbol{\lambda}_1|\boldsymbol{\lambda}) &\equiv S(\boldsymbol{\lambda})a_1(\boldsymbol{\lambda}_1|\boldsymbol{\lambda}) && (45)\\
A_2(\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2|\boldsymbol{\lambda}) &\equiv S(\boldsymbol{\lambda})a_2(\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2|\boldsymbol{\lambda}) && (46)\\
Z_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\lambda}) &\equiv \frac{\eta(\boldsymbol{\lambda})}{S(\boldsymbol{\lambda})} && (47)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0(\boldsymbol{\lambda}) &= \frac{2}{S(\boldsymbol{\lambda})+\eta(\boldsymbol{\lambda})} && (48)\\
a_1(\boldsymbol{\lambda}_1|\boldsymbol{\lambda}) &= \frac{-2\mathrm{i}F(\boldsymbol{\lambda}_1)\,[k^2-(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)\cdot\boldsymbol{\lambda}-\eta^*(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda})]}{[S(\boldsymbol{\lambda})+\eta(\boldsymbol{\lambda})]\,[S(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)+\eta(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)]} && (49)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_2(\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2\mid\boldsymbol{\lambda})\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{[(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_2)\cdot(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2)-k^2]a_1(\boldsymbol{\lambda}_2|\boldsymbol{\lambda})F(\boldsymbol{\lambda}_1)+[(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)\cdot(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2)-k^2]a_1(\boldsymbol{\lambda}_1|\boldsymbol{\lambda})F(\boldsymbol{\lambda}_2)}{S(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2)+\eta(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2)} \qquad (50)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta(\boldsymbol{\lambda}) &\equiv \int_{R_2}\frac{[k^2-\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}]^2\,|F(\boldsymbol{\lambda}_1-\boldsymbol{\lambda})|^2}{S(\boldsymbol{\lambda}_1)+\eta(\boldsymbol{\lambda}_1)}\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1 && (51)\\
&\simeq \int_{R_2}\frac{[k^2-\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}]^2\,|F(\boldsymbol{\lambda}_1-\boldsymbol{\lambda})|^2}{S(\boldsymbol{\lambda}_1)}\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1 && (52)\\
\eta^*(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}_0) &= \int_{R_2}\frac{[k^2-(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)\cdot\boldsymbol{\lambda}]\,[k^2-(\boldsymbol{\lambda}_0+\boldsymbol{\lambda}_1)\cdot\boldsymbol{\lambda}_0]}{[S(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)+\eta(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)]\,[S(\boldsymbol{\lambda}_0+\boldsymbol{\lambda}_1)+\eta(\boldsymbol{\lambda}_0+\boldsymbol{\lambda}_1)]}\\
&\quad\times\left[k^2-(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}_1)\cdot(\boldsymbol{\lambda}_0+\boldsymbol{\lambda}_1)\right]|F(\boldsymbol{\lambda}_1)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_1 && (53)\\
& && (54)
\end{aligned}
$$

Although η appearing in the denominator of (48) and (49) plays a crucial role of making A_0 and A_1 finite, η^* in the numerator of (49) is only a corrective term that could be neglected for practical application. The quantities $\xi(\lambda)$ and $\eta(\lambda)$ represent the effect of multiple scattering and can be also obtained by a renormalization technique in the multiple scattering theory.

If the random surface is homogeneous and isotropic such that $F(\boldsymbol{\lambda}) = F(\lambda)$, $\lambda \equiv \mid \boldsymbol{\lambda} \mid$, it can be shown that Z_D, Z_N, ξ and η depend only on λ.

Average Surface Impedance It should be noticed that the righthand members of (34) and (44) have the same form in Z's and satisfy the relation,

$$1 + A_0(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1 - Z_\iota(\boldsymbol{\lambda})}{1 + Z_\iota(\boldsymbol{\lambda})}, \quad \iota = \mathrm{D}, \mathrm{N} \tag{55}$$

By (27) $1 + A_0$ gives the amplitude of the coherent reflection occuring in the direction of specular reflection. Therefore, the equation (55) enables us to interprete $Z_\iota, \iota = \mathrm{D}, \mathrm{N}$, as the average surface impedance of the random surface for each boundary condition. $\mathrm{Re}(Z_\iota)$ represents equivalent energy dissipation due to incoherent scattering, and $\mathrm{Im}(Z_\iota)$ suggests the reaction due to the surface wave.

The equation (41) or (51) can be considered as a dispersion equation determining $\xi(\boldsymbol{\lambda})$ (or $\eta(\boldsymbol{\lambda})$). These equations can be rewritten in the form of integral equations for the surface impedance,

$$Z_D(\boldsymbol{\lambda}) = S(\boldsymbol{\lambda}) \int_{R_2} \frac{S(\boldsymbol{\lambda}')|F(\boldsymbol{\lambda}' - \boldsymbol{\lambda})|^2}{1 + Z_D(\boldsymbol{\lambda}')} \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}' \quad \text{(Dirichlet)} \tag{56}$$

$$Z_N(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{S(\boldsymbol{\lambda})} \int_{R_2} \frac{[k^2 - \boldsymbol{\lambda}' \cdot \boldsymbol{\lambda}]^2 |F(\boldsymbol{\lambda}' - \boldsymbol{\lambda})|^2}{S(\boldsymbol{\lambda}')[1 + Z_N(\boldsymbol{\lambda}')]} \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}' \quad \text{(Neumann)} \tag{57}$$

The above integral equation for Z_ι can be solved by the iteration method, starting from the first solution given in terms of (42) or (52), that is, n-th solution is obtained by substituting $n-1$-th solution into the righthand side; however, the first or the second solution is good enough for small roughness.

We note here that the above integral equations for the surface impedance (56) and (57) perfectly agree with the ones obtained by S.Ito [16], who derived them from the Dyson equation for the first-order moment of the Green function within the frame work of multiple scattering theory.

5 Scattering Characteristics

Coherent Scattering Amplitude The coherent scattering amplitude is given by 0-Wiener kernel A_0,

$$A_0(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{2Z_\iota(\boldsymbol{\lambda})}{1 + Z_\iota(\boldsymbol{\lambda})}, \quad \iota = \mathrm{D}, \mathrm{N} \tag{58}$$

where Z_ι is the surface impedance given by (56) or (57). The amplitude and phase of the coherent scattering amplitude $1 + A_0$ are plotted againt the incident angle θ in Fig.3 (Dirichlet) and Fig.4

(Neumann) for the surface roughness $k\sigma = \pi/10$. In the enlarged portion of Fig.4 we notice the anomalous behavior of $1 + A_0$ near the grazing angle θ =90°, which is due to the multiple scattering along the Neumann surface. The surface impedance can be readily calculated from A_0.

Angular Distribution of Incoherent Scattering The angular distribution $P(\theta, \phi \mid \theta_0, \phi_0)$ given by (29) can be calculated using the approximate solutions for the Wiener kernels. Using A_1 and A_2 given by (35),(36), (45) and (46), we obtain the following:

$$\begin{aligned} P(\theta,\phi \mid \theta_0,\phi_0) &= P_1(\theta,\phi \mid \theta_0,\phi_0) + P_2(\theta,\phi \mid \theta_0,\phi_0) \\ &\equiv k^4 \cos^2\theta \cos^2\theta_0 \Big[\mid a_1(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0 \mid \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2 \\ &\quad +2 \int_{R^2} \mid a_2(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_0 \mid \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2 d\boldsymbol{\lambda}_1 \Big] \end{aligned} \tag{59}$$

where P_1, the contribution from A_1, is given by

$$P_1(\theta,\phi \mid \theta_0,\phi_0) = \frac{4k^4 \cos^2\theta \cos^2\theta_0 \mid 1 - \xi^*(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2 \mid F(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2}{\mid [1 + S(\boldsymbol{\lambda}_0)\xi(\boldsymbol{\lambda}_0)][1 + S(\boldsymbol{\lambda})\xi(\boldsymbol{\lambda})] \mid^2}, \quad \text{(Dirichlet)} \tag{60}$$

$$= \frac{4k^4 \cos^2\theta \cos^2\theta_0 \mid k^2 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}_0 - \eta^*(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2 \mid F(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2}{\mid [S(\boldsymbol{\lambda}_0) + \eta(\boldsymbol{\lambda}_0)][S(\boldsymbol{\lambda}) + \eta(\boldsymbol{\lambda})] \mid^2}, \quad \text{(Neumann)} \tag{61}$$

with

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \phi)_{\rm cyl}, \quad \boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_0, \phi_0)_{\rm cyl} \tag{62}$$

$$\lambda = k\sin\theta, \ S(\lambda) = k\cos\theta, \quad \lambda_0 = k\sin\theta_0, \ S(\lambda_0) = k\cos\theta_0 \tag{63}$$

$$\mid \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0 \mid = k\sqrt{\sin^2\theta + \sin^2\theta_0 - 2\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi - \phi_0)} \tag{64}$$

and P_2, the contribution from A_2, is written approximately

$$\begin{aligned} &P_2(\theta,\phi \mid \theta_0,\phi_0) \\ &= \frac{k^4\cos^2\theta\cos^2\theta_0}{2 \mid 1 + S(\boldsymbol{\lambda})\xi(\boldsymbol{\lambda}) \mid^2} \int_{R_2} \mid S(\boldsymbol{\lambda}_1) a_1(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_0 \mid \boldsymbol{\lambda}_0) F(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1) \\ &\quad + S(\boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1) a_1(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1 \mid \boldsymbol{\lambda}_0) F(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2 d\boldsymbol{\lambda}_1 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4k^4\cos^2\theta\cos^2\theta_0}{\mid [1 + S(\boldsymbol{\lambda}_0)\xi(\boldsymbol{\lambda}_0)][1 + S(\boldsymbol{\lambda})\xi(\boldsymbol{\lambda})] \mid^2} \int_{R_2} \left\{ \left| \frac{S(\boldsymbol{\lambda}_1)}{1 + S(\boldsymbol{\lambda}_1)\xi(\boldsymbol{\lambda}_1)} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathrm{Re}\left[\frac{\overline{S(\boldsymbol{\lambda}_1)}}{1 + \overline{S(\boldsymbol{\lambda}_1)\xi(\boldsymbol{\lambda}_1)}} \frac{S(\boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1)}{1 + S(\boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1)\xi(\boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1)} \right] \right\} \\ &\quad \times \mid F(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_0) F(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1) \mid^2 d\boldsymbol{\lambda}_1 \quad \text{(Dirichlet)} \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} &P_2(\theta,\phi \mid \theta_0,\phi_0) \\ &= \frac{k^4\cos^2\theta\cos^2\theta_0}{2 \mid S(\boldsymbol{\lambda}) + \eta(\boldsymbol{\lambda}) \mid^2} \int_{R_2} \mid [k^2 - \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda}] a_1(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_0 \mid \boldsymbol{\lambda}_0) F(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1) \\ &\quad + [k^2 - (\boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot \boldsymbol{\lambda}] a_1(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1 \mid \boldsymbol{\lambda}_0) F(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_0) \mid^2 d\boldsymbol{\lambda}_1 \end{aligned} \tag{67}$$

$$
\begin{aligned}
= & \frac{4k^4\cos^2\theta\cos^2\theta_0}{|[S(\lambda_0)+\eta(\lambda_0)][S(\lambda)+\eta(\lambda)]|^2}\int_{R_2}\left\{\left|\frac{[k^2-\lambda_1\cdot\lambda][k^2-\lambda_1\cdot\lambda_0]}{S(\lambda_1)+\eta(\lambda_1)}\right|^2\right. \\
& \left.+\mathrm{Re}\left[\frac{[k^2-\lambda_1\cdot\lambda][k^2-\lambda_1\cdot\lambda_0]}{\overline{S(\lambda_1)}+\overline{\eta(\lambda_1)}}\cdot\frac{[k^2-(\lambda_0+\lambda-\lambda_1)\cdot\lambda][k^2-(\lambda_0+\lambda-\lambda_1)\cdot\lambda_0]}{S(\lambda_0+\lambda-\lambda_1)+\eta(\lambda_0+\lambda-\lambda_1)}\right]\right\} \\
& \times|F(\lambda_1-\lambda_0)F(\lambda-\lambda_1)|^2\,\mathrm{d}\lambda_1 \quad \text{(Neumann)} \qquad (68)
\end{aligned}
$$

In the above equations, ξ, ξ^*, η and η^* are calculated by (42),(43),(52) and (53), respectively, and ξ^* and η^* are neglected to simplify the approximate equations for P_2.

We should notice that our approximate solutions for $P(\theta \mid \theta_0)$ satisfy the reciprocity relation (31). We can show that the power expansion of $P(\theta \mid \theta_0)$ up to the second power of $k\sigma$ lead to the correct second-order perturbation solutions, where the Neumann case gives rise to a divergent result as expected.

Furthermore, the above scattering formula for 2D random surface can be easily specialized to the case of a 1D random surface $z = f(T^x\omega)$:

$$
\begin{aligned}
P(\theta \mid \theta_0) &= P_1(\theta \mid \theta_0) + P_2(\theta \mid \theta_0) \\
&\equiv k^3\cos^2\theta\cos^2\theta_0\left[|a_1(\lambda-\lambda_0 \mid \lambda_0)|^2 + 2\int_{-\infty}^{\infty}|a_2(\lambda-\lambda_1, \lambda_1-\lambda_0 \mid \lambda_0)|^2\,\mathrm{d}\lambda_1\right] \qquad (69)
\end{aligned}
$$

where $\lambda = k\sin\theta, \lambda_0 = k\sin\theta_0, S(\lambda) = k\cos\theta, S(\lambda_0) = k\cos\theta_0, \mathrm{d}\lambda = k\cos\theta\mathrm{d}\theta$, and so on.

Figs.5 - 6 show the zenithal distributions of $P(\theta \mid \theta_0)$ on the plane of incidence with $\phi = 0°, 180°$, and on the plane across with $\phi = 90°, 270°$, for three incident angles $\theta_0 = 0°$, $30°$, $60°$, with $\phi_0 = 0°$.

The presence of the factor $1/\mid [S(\lambda_0)+\eta(\lambda_0)][S(\lambda)+\eta(\lambda)] \mid^2$ in (61) and (68) of the Neumann case, implies that the anomalous scattering occurs at the incident or scattering angle close to the grazing angle θ_0 or $\theta \simeq 90°$, where $S(\lambda_0)$ or $S(\lambda) \simeq 0$ [2, 3]; this phenomenon is analogous to the well known Wood's anomaly in the grating scattering. In the profile of $P(\theta \mid \theta_0)$ shown in Fig.6, such an anomaly appears nearly cancelled by the factor $\cos^2\theta_0\cos^2\theta$. However, the anomaly is clearly observed in the practical scattering distribution $S(\theta \mid \theta_0)$ defined by (30), as shown in Fig.7, where a sharp scattering occurs in the direction close to the surface. Such anomalous scattering becomes sharper as $k\ell$ increases.

6 Enhanced Backscattering

As shown in Fig.6, on a broad distribution of the diffused scattering, a small peak juts out in the backward scattering direction satisfying

$$\lambda + \lambda_0 = 0 \qquad (70)$$

This is the phenomenon of the enhanced backscattering from a slightly random Neumann surface, whereas the enhancement is hardly observable in the case of a slightly random Dirichlet surface (see Fig.5). The enhancement appears for suitable combinations of the spectral parameters $k\sigma$ and $k\ell$.

Similar profiles can be obtained for the scattering from 1D random Neumann surface as shown in Fig.8. Figs.8 and 9 show how the backscattering profile (vertical incidence $\lambda_0 = \lambda = 0$) changes according to the values of spectral parameters $k\sigma$ and $k\ell$. Usually the enhancement is more conspicuous in the 1D case.

Although the backscattering enhancement has been studied for a very rough surface [14] and for a random metal surface [15] where the surface plasmon mode is excited, the enhancement of the backscattering takes place on a slightly random Neumann surface. This can be explained in the following manner.

First, from P_1 in (59), we may interprete the first Wiener kernel $a_1(\lambda - \lambda_0 \mid \lambda_0)$ as describing a "renormalized" or "dressed" single scattering process which we express sympolically as $\{\lambda_0 \to \lambda\}$ (see Fig.2 (a)). It should be noted that a "dressed" single scattering process already involves multiple scattering processes in it. Second, we emphasize that the enhancement comes from P_2 given by the integral of the second kernel a_2, which is composed of two terms involving a_1 as in (65) or (67). Using (39) and (49), we can rewrite a_2 in (59) in terms of a_1 in the following way:

$$
\begin{aligned}
& a_2(\lambda - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_0 \mid \lambda_0) \\
&= \frac{1}{4}\{S(\lambda_1)[1 + S(\lambda_1)\xi(\lambda_1)]a_1(\lambda - \lambda_1 \mid \lambda_1)a_1(\lambda_1 - \lambda_0 \mid \lambda_0) \\
&\quad + S(\lambda_0 + \lambda - \lambda_1)[1 + S(\lambda_0 + \lambda - \lambda_1)\xi(\lambda_0 + \lambda - \lambda_1)]a_1(\lambda - (\lambda_0 + \lambda - \lambda_1) \mid \lambda_0 + \lambda - \lambda_1) \\
&\quad \times a_1((\lambda_0 + \lambda - \lambda_1) - \lambda_0 \mid \lambda_0)\} \quad \text{(Dirichlet)} \qquad (71) \\
&= \frac{1}{4}\{[S(\lambda_1) + \eta(\lambda_1)]a_1(\lambda - \lambda_1 \mid \lambda_1)a_1(\lambda_1 - \lambda_0 \mid \lambda_0) \\
&\quad + [S(\lambda_0 + \lambda - \lambda_1) + \eta(\lambda_0 + \lambda - \lambda_1)]a_1(\lambda - (\lambda_0 + \lambda - \lambda_1) \mid \lambda_0 + \lambda - \lambda_1) \\
&\quad \times a_1((\lambda_0 + \lambda - \lambda_1) - \lambda_0 \mid \lambda_0)\} \quad \text{(Neumann)} \qquad (72)
\end{aligned}
$$

where the correcting terms ξ^* and η^* are neglected for simplicity. They can be more concisely cast into an approximate equation,

$$
\begin{aligned}
& a_2(\lambda - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_0 \mid \lambda_0) \\
&\simeq \frac{1}{4}[S(\lambda_1)a_1(\lambda - \lambda_1 \mid \lambda_1)a_1(\lambda_1 - \lambda_0 \mid \lambda_0) \\
&\qquad + S(\lambda_0 + \lambda - \lambda_1)a_1(\lambda - (\lambda_0 + \lambda - \lambda_1) \mid \lambda_0 + \lambda - \lambda_1)a_1((\lambda_0 + \lambda - \lambda_1) - \lambda_0 \mid \lambda_0)] \quad (73)
\end{aligned}
$$

Now, with the interpretation for a_1 in mind, we may reinterprete the decomposition of a_2 into the products of a_1's as follows: The process described by a_2 is composed of two "double scattering" processes: the first one gives the "double scattering" process, $\{\lambda_0 \to \lambda_1 \to \lambda\}$, and the second is $\{\lambda_0 \to \lambda + \lambda_0 - \lambda_1 \to \lambda\}$ (see Fig.2(b)). Thus, P_2 in (59) consists of the integration over intermediate states.

In the case of backscattering, that is, $\lambda + \lambda_0 = 0$, however, the two "double scattering" processes, $\{\lambda_0 \to \lambda_1 \to \lambda\}$ and $\{\lambda_0 \to -\lambda_1 \to \lambda\}$, can interfere with each other to enhance the backscattering amplitude (Fig.2(c)). The reason that the enhancement is more conspicuous in the Neumann case than in Dirichlet is attributable to the anomalous scattering that occurs in the Neumann case for both incident and scattering angles close to the grazing angles [3](cf. Fig.7). And the anomalous scattering, closely related to the propagating mode along the Neumann random surface, can produce a fairly large amplitude for the "double scattering" process where such propagating modes appear as intermediate states. Therefore, on integrating over such intermediate states, the contribution to the integral largely comes from such anomalous, propagating modes with $\lambda_1 \simeq k$, and as a result, the enhanced interference takes place in the backward direction, $\lambda + \lambda_0 = 0$.

We note that there is some similarity between the enhanced backscattering from a slightly random Neumann surface and that of a metal random surface where the surface plasmon mode takes part in the scattering process [4, 15].

It is rather tough a task to keep the uniform accuracy for the 2D numerical integration of the interfering terms like (68), but the 1D integration in (69) can be made with enough accuracy to compare various scattering profiles as in Figs.8 and 9. The enhanced backscattering from a 1D random surface is somewhat more conspicuous than 2D case: this is explained by the fact that less cancellation occurs in the 1D integral of interfering terms appearing in (69).

Usually, the backscattering enhancement is explained as the enhanced interference of two "ordinary" double-scattering processes occuring in the reciprocal directions on a smoothly undulating, very rough surface, and numerical calculations are made using the Kirchhoff approximation by Ishimaru et. al [14]. The present paper has theoretically showed that the enhanced backscattering can occur even from a slightly rough Neumann surface due to the enhanced interference of the two "dressed" double-scattering processes, and that such enhancement, largely dependent on the spectral form or the roughness and correlation length of the random surface [14], can be predicted by the behavior of the integral in (68) or (69).

References

[1] J.Nakayama, H.Ogura, and M.Sakata, *J. Math. Phys.* Vol.22, 471-477, 1981.

[2] J.Nakayama, *Radio Sci.* Vol.17, 558-564, 1982.

[3] J. Nakayama, H.Ogura and M.Sakata, *Radio Sci.* Vol.16, 831-847, 847-853, 1981.

[4] H.Ogura and N.Takahashi, *J. Opt. Soc. Amer.* Vol.A2, 2208-2224, 1985.

[5] H.Ogura and H.Nakayama, *J. Math. Phys.* Vol.29, 851-860, 1988.

[6] J.Nakayama, K.Mizutani,H.Ogura and S.Hayashi, *J. Appl. Phys.* Vol.56, 1465-1472, 1984.

[7] N. Wiener, Nonlinear Problems in Random Theory, MIT Cambridge, MA. 1958.

[8] R. H. Cameron, and W. T. Martin, "The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals", *Ann. Math.* Vol.48, 385-392, 1947.

[9] K. Ito, "Multiple Wiener integrals", *J. Math. Soc. Japan*, Vol.13, 157-169, 1951.

[10] K. Ito, "Complex multiple Wiener integrals", *Jpn. J. Math.* Vol.22, 63-86, 1952.

[11] H.Ogura, Theory of Stochastic Processes, Corona, Tokyo, 1978.

[12] H.Ogura, "Orthogonal functionals of the Poisson process" *IEEE Trans. IT*, Vol.18, 473-481, 1972.

[13] H. Ogura, "Theory of waves in a homogeneous random medium", *Phys. Rev.* Vol.A11, 942-956 (1975).

[14] A.Ishimaru, J.S.Chen, P.Phu and K.Yoshitomi, *Waves in Random Media*, Vol. 1, 91-107, 1991.

[15] V.Celli, A.A.Maradudin, A.M.Marvin and A.R.McGurn, *J. Opt. Soc. Am.* A Vol.2, 2225-2239, 1985.

[16] S.Ito, *Radio Sci.* Vol.20, 1-12, 1985.

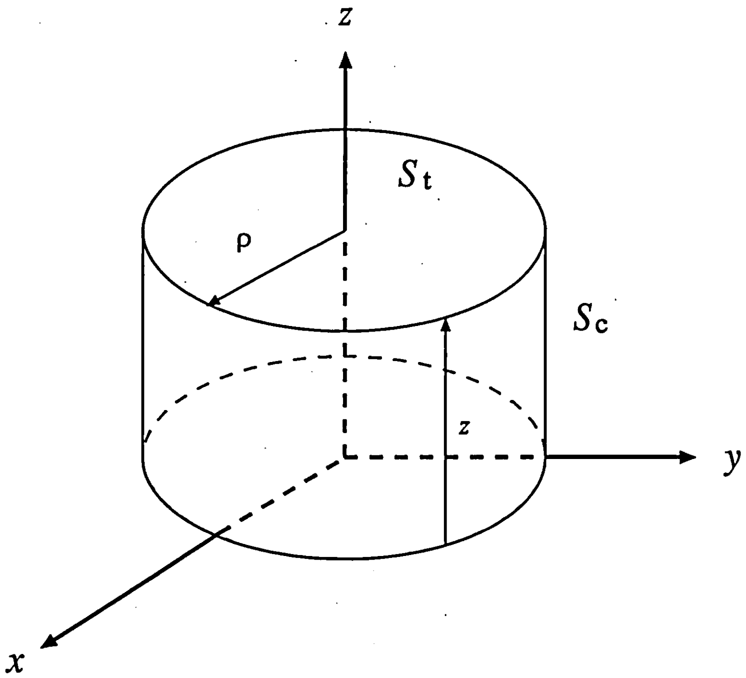


Figure 1: Cylindrical Surface for Divergence Theorem

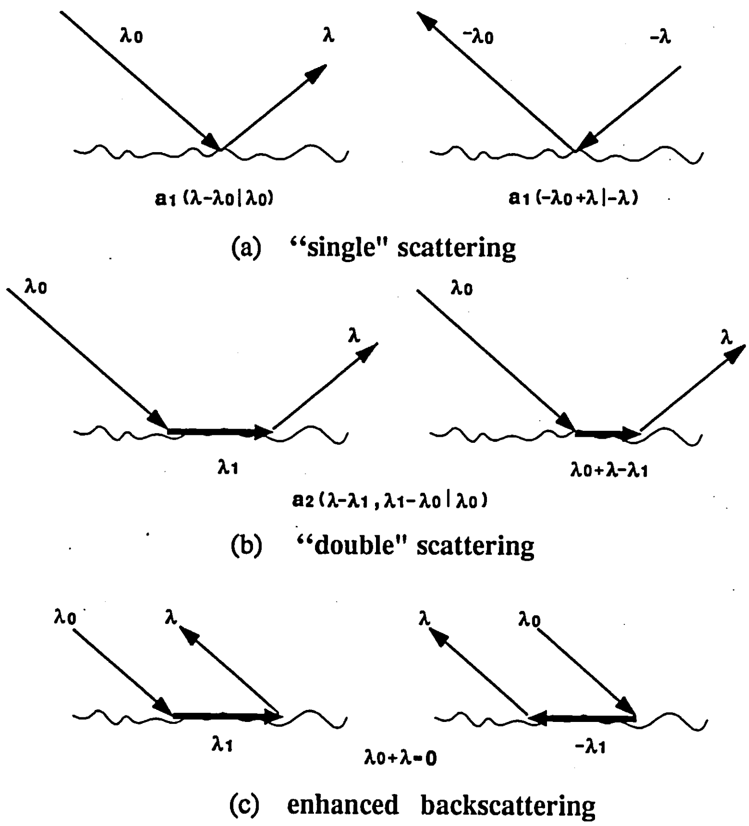


Figure 2: Scattering diagrams for "single" and "double" scattering processes.
(a) "single" scattering process $\{\lambda_0 \rightarrow \lambda\}$ described by a_1 and its reciprocal process $\{-\lambda \rightarrow -\lambda_0\}$
(b) two "double" scattering processes described by a_2. A thick arrow shows an intermediate state.
(c) enhanced "double" scattering processes for the backward direction with $\lambda_0 + \lambda = 0$.

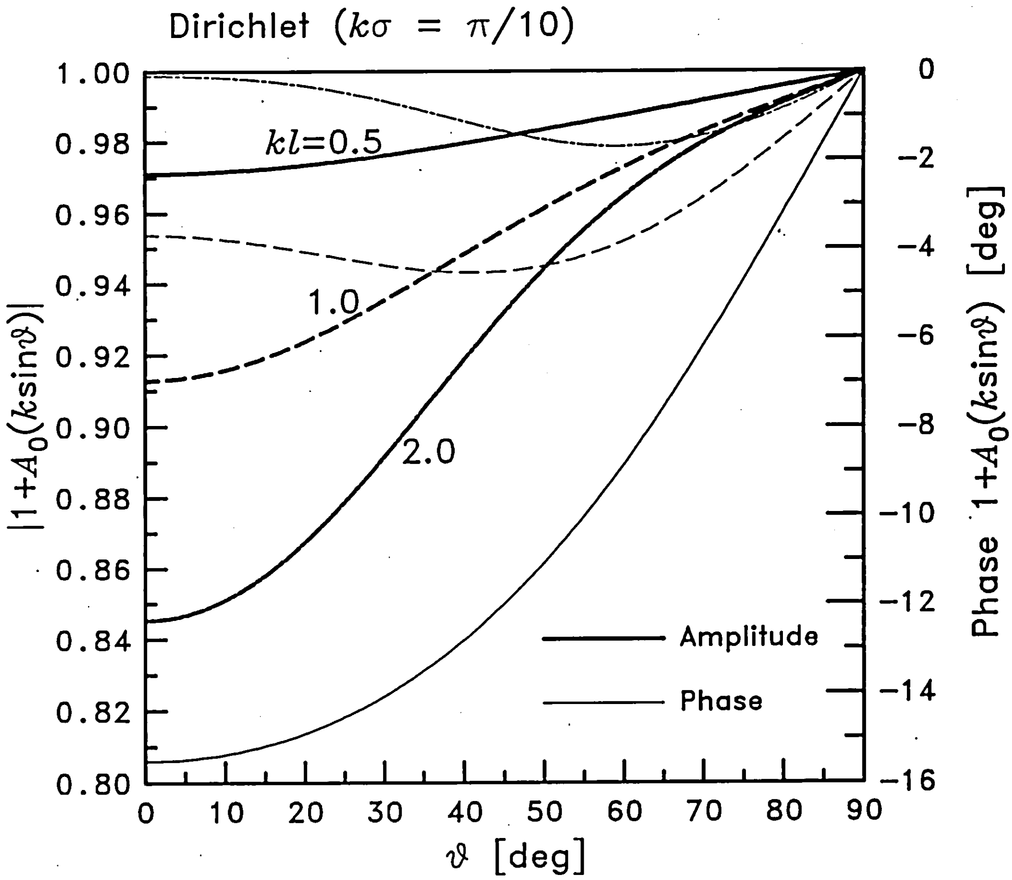


Figure 3: Coherent scattering amplitude $1+A_0$ versus incident angle (Dirichlet). $k\sigma = \pi/10$, $k\ell = 0.5$ (solid line), 1.0 (broken line), 2.0 (chain line); amplitude (thick line), phase (thin line)

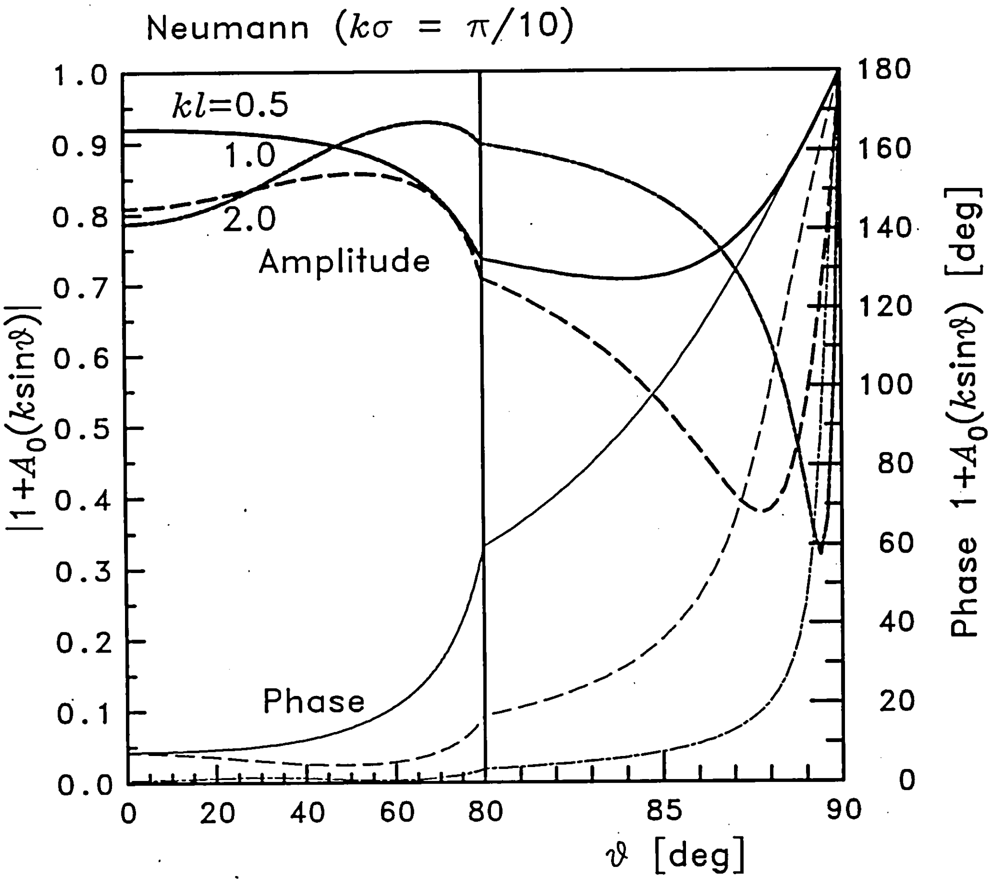


Figure 4: Coherent scattering amplitude $1 + A_0$ versus incident angle (Neumann). $k\sigma = \pi/10$, $k\ell = 0.5$ (solid line), 1.0 (broken line), 2.0 (chain line); amplitude (thick line), phase (thin line).

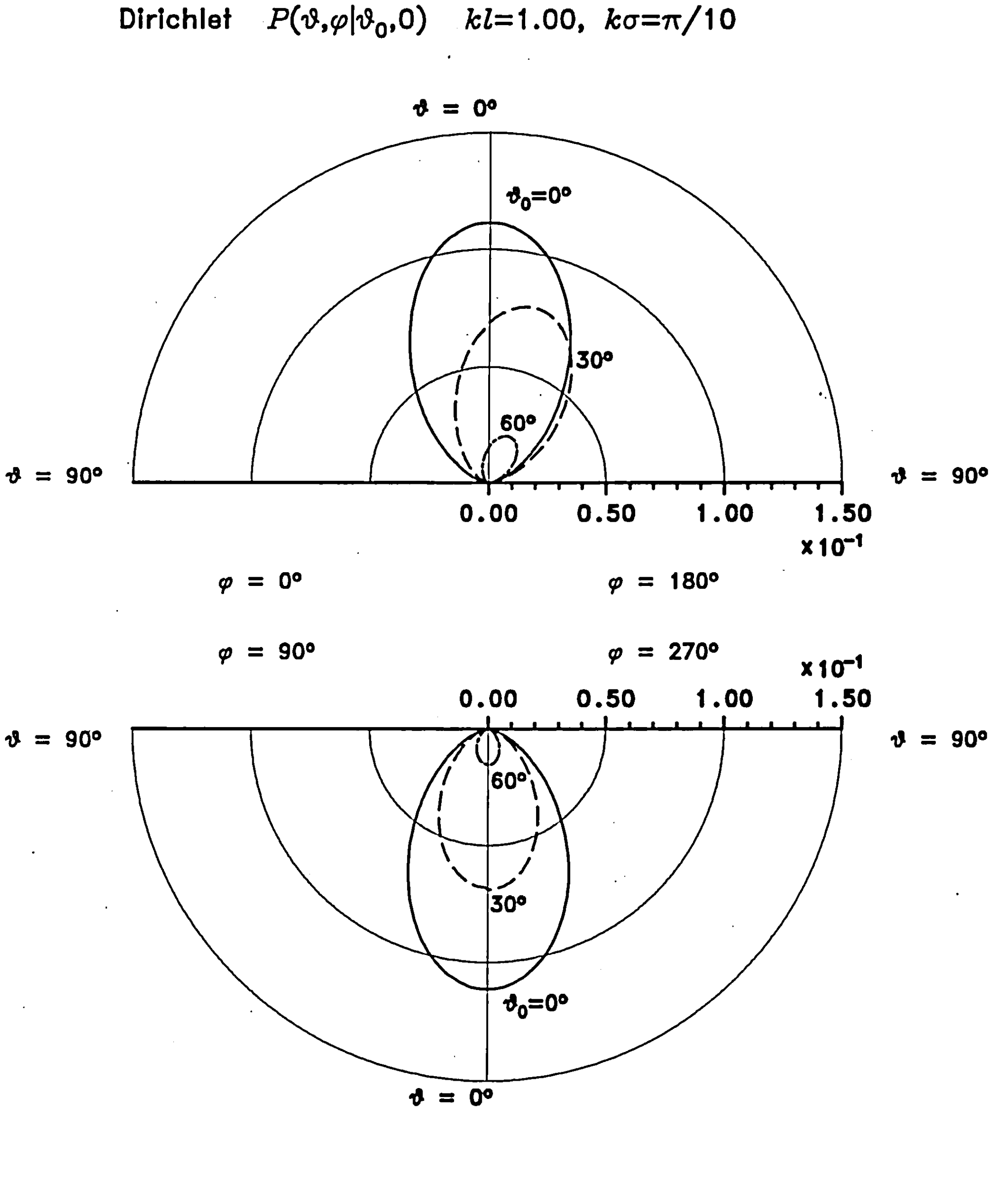


Figure 5: Angular distribution of incoherent scattering $P(\theta,\phi \mid \theta_0,0)$ (Dirichlet). $k\ell = 1.0$. The upper half shows the distribution on the incident plane, $\phi = 0°$, 180°and the lower half the crossing plane, $\phi = 90°$, 270°. $\theta_0 = 0°$(solid line), 30°(broken line), 60°(chain line).

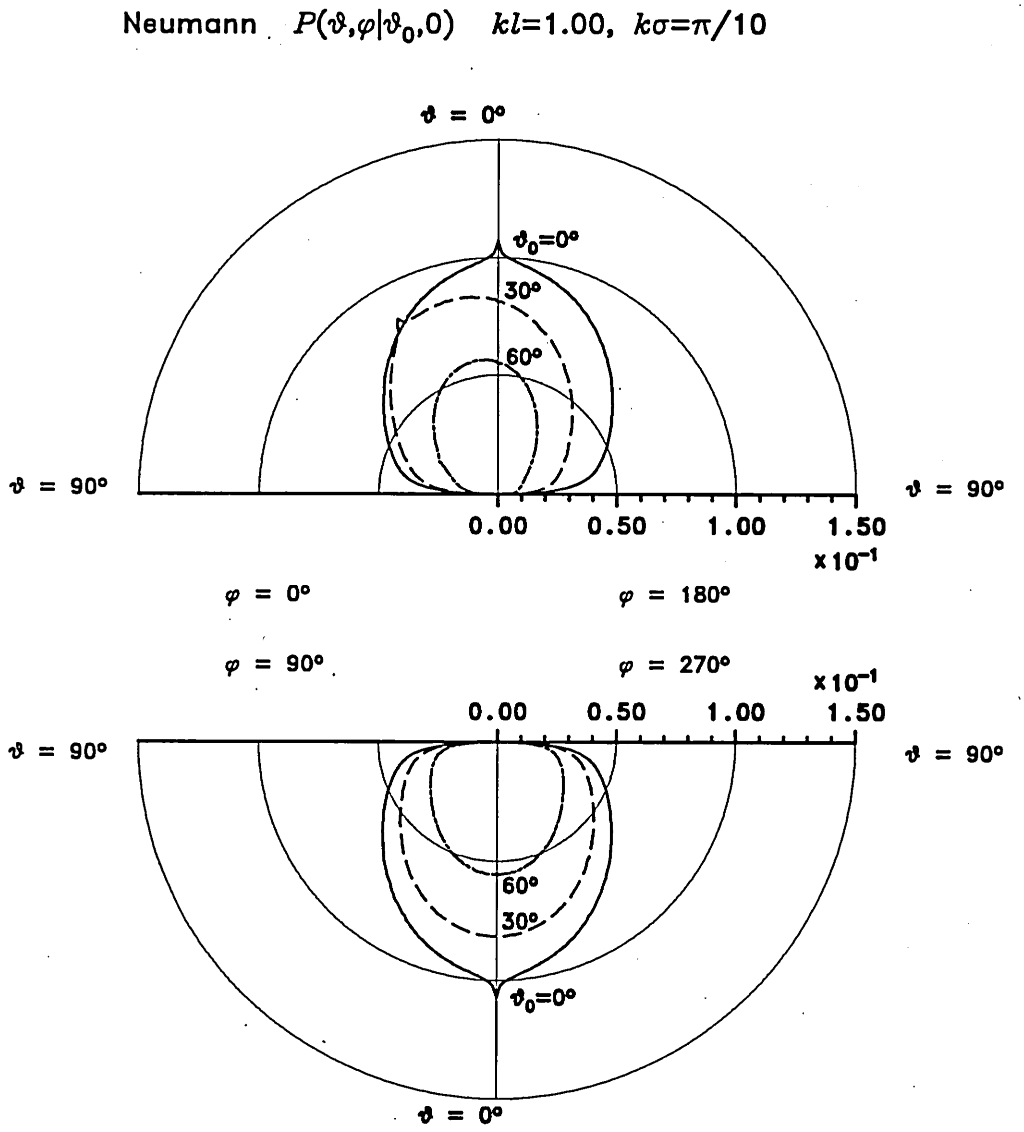


Figure 6: Angular distribution of incoherent scattering $P(\theta, \phi \mid \theta_0, 0)$ (Neumann). $k\ell = 1.0$.

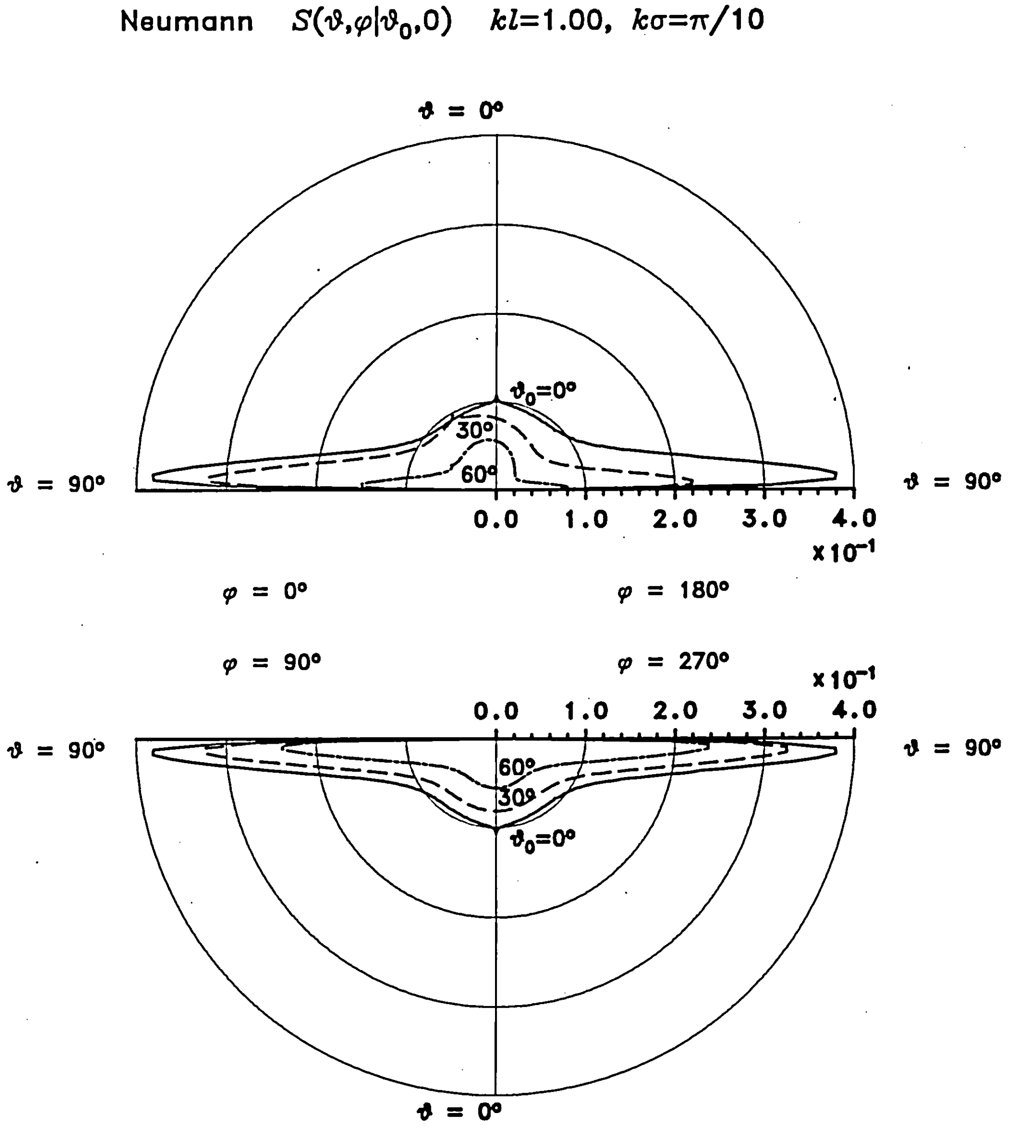


Figure 7: Angular distribution of incoherent scattering $S(\theta, \phi \mid \theta_0, 0)$ (Neumann). $k\ell = 1.0$.

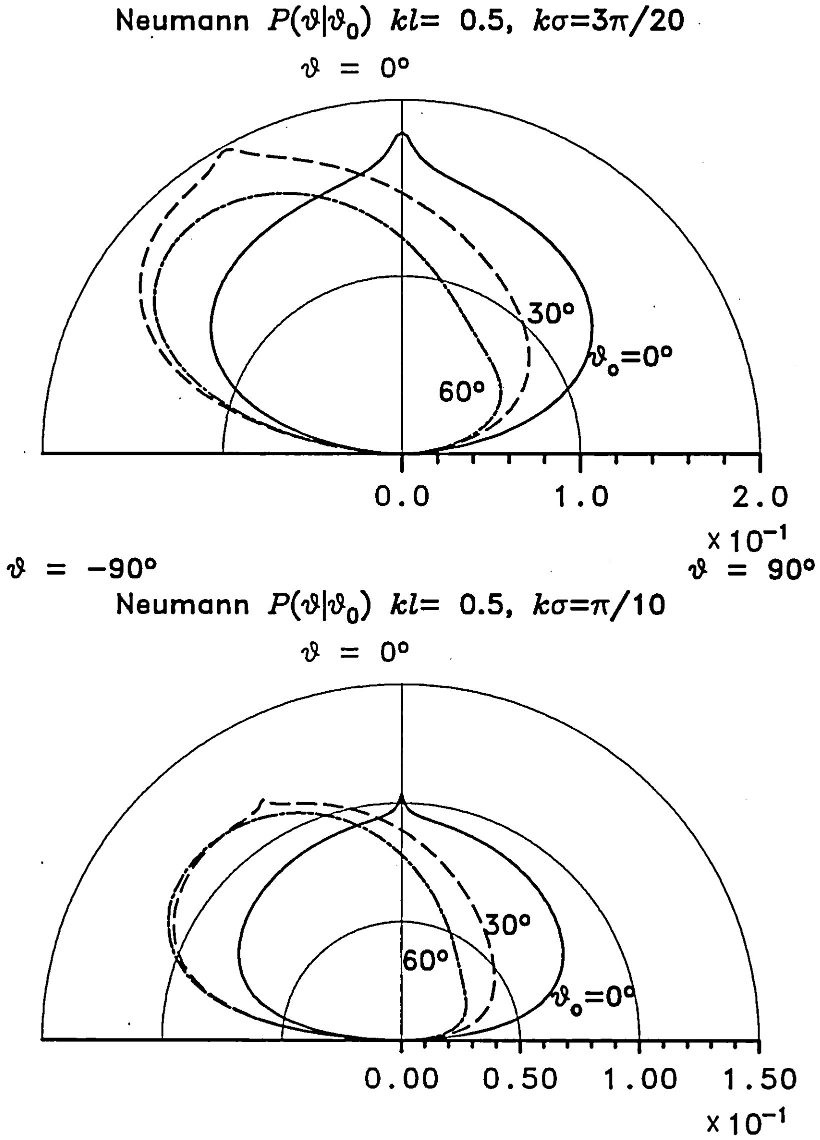


Figure 8: Angular distribution of incoherent scattering $P(\theta|\theta_0)$ for 1D random surface (Neumann). $k\ell = 0.5$. The upper half shows the distribution with $k\sigma = 0.15\pi$ and the lower half $k\sigma = 0.1\pi$. θ_0 = 0°(solid line), 30°(broken line), 60°(chain line).

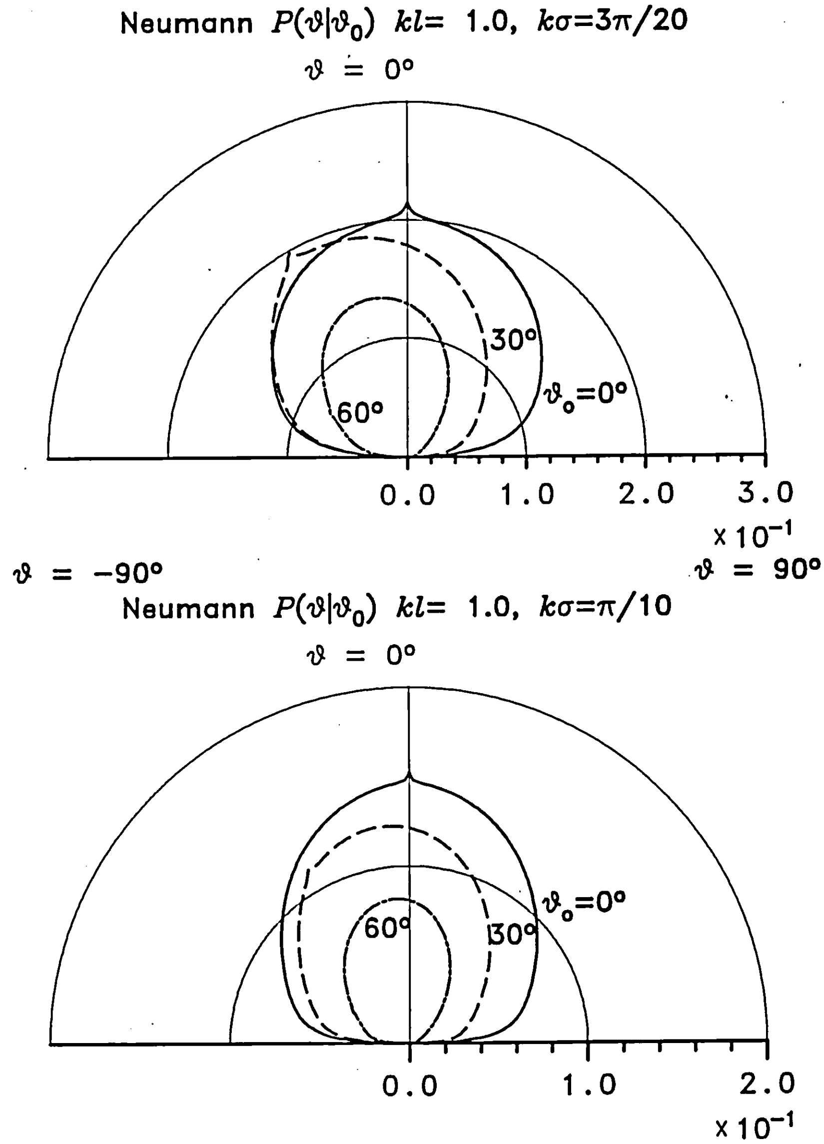


Figure 9: Angular distribution of incoherent scattering $P(\theta|\theta_0)$ for 1D random surface (Neumann). $k\ell = 1.0$. The upper half shows the distribution with $k\sigma = 0.15\pi$ and the lower half $k\sigma = 0.1\pi$. θ_0 = 0°(solid line), 30°(broken line), 60°(chain line).

平成5年9月3日
輻射科学研究会(RS-93-12)

DEPOLARIZATION OF BACKSCATTERED MILLIMETER PULSE WAVES DUE TO MULTIPLE SCATTERING IN RAIN

Shigeo Ito
(Toyo University, Kujirai, Kawagoe-shi, Saitama 350, Japan)
Tomohiro Oguchi
(Tokyo Metropolitan Inst. Tech. Asahigaoka, Hino, Tokyo 191, Japan)
Toshio Iguchi and Hiroshi Kumagai
(Communications Research Lab., Ministry of Posts and Telecom.
Nukui-Kitamachi, Koganei-shi, Tokyo 184, Japan)

ABSTRACT

The effect of multiple scattering on dual-polarization radar rainfall measurement is investigated. In theoretical calculations, the radiative transfer equation approach is used with the assumption that rain-drops are spherical. It was shown that, even for realistic rainfall rates, the calculated depolarization ratios often reach very high values. These values are compared with those obtained recently by an air-borne radar rainfall measurement.

INTRODUCTION

In dual-polarization radar rainfall measurements, both co- and cross-polarized radar returns for a transmitted radar pulse are received, and their ratio is used as a measure of estimating rainfall rate. The theoretical basis of estimating rainfall rate is the conventional polarimetric radar equation, which only takes account of the first-order scattering contribution from distorted raindrops. A known drop-size versus deformation relation is also assumed.

When we use millimeter wave regions for rain measurements and the rainfall rate is high, however, the effects of multiple scattering in rain cannot be ignored. In the present paper, the radiative transfer equation is solved by an analytical-numerical procedure for circularly polarized incident wave case[1] to examine how multiple scattering is responsible for the depolarization ratio of reflected incoherent intensities for spherical raindrops.

For the linearly polarized incident wave case, the depolarization ratio is calculated based on the second-order multiple scattering theory.

These depolarization ratios are compared with those obtained recently by an air-borne dual-polarization radar during the CaPE (Convective and Precipitation/Electrification) experiment in Florida, USA.[2]

THEORETICAL CALCULATIONS

1. Circularly Polarized Incident Wave Case

Assume that a train of plane wave pulses is normally incident on the boundary of a semi-infinite region containing spherical raindrops with uniform drop density. The polarization of the incident wave is left-hand circular. The Stokes vector of the pulse train is represented by a Fourier series expansion, then the components of the Fourier series for incoherent wave are given by the solution of the vector two-frequency radiative transfer equation. We solve this equation by the same analytical-numerical technique as was used in solving the continuous wave case.

We consider a train of Gaussian pulses with a half-power width of 0.5μs. Numerical calculation of the pulse shapes was made in a previous paper[1] using carrier frequencies of 16 and 34.8 GHz, and 12.5 and 150 mm/h for the rainfall rates. A Laws and Parsons' drop-size distribution was used. Circular depolarization ratios (CDRs) are then calculated from the co- and cross-polarized radar return pulses as a function of time (or pulse penetration depth in the rain region).

Fig.1 is extracted from the previous paper.[1] The frequency is 34.8 GHz and the rainfall rate is 12.5 mm/h. The dashed curve is the CDR values for Pruppacher-Pitter type distorted raindrops, calculated by the first-order theory. This figure shows that the effect of multiple scattering predominates over the effect of drop distortion. The CDR values up to -5 dB can be obtained by multiple scattering process.

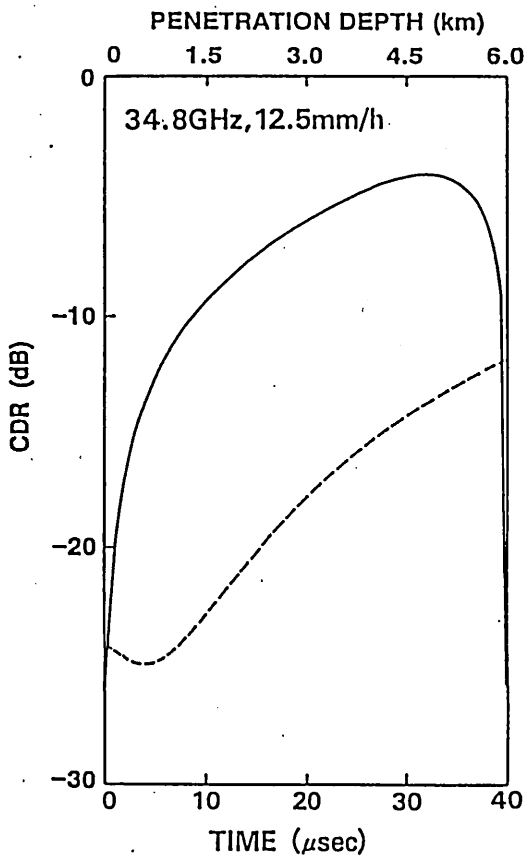


Fig.1 Circular depolarization ratio (CDR) of reflected pulse as a function of time (or penetration depth). Solid curve is based on multiple scattering calculations for spherical drops, and dashed curve is calculated by the first-order theory for distorted drops.

2. Linearly Polarized Incident Wave Case

To evaluate multiple scattering effects on the linear depolarization ratios (LDRs), we examine the second-order solution of the time-dependent radiative transfer equation for linearly polarized waves incident upon a slab with the thickness 3 km. The drop-size distribution is the same as that in the circularly polarized case, and a single Gaussian pulse with the same half-power width is considered to be transmitted.

The LDRs calculated at carrier frequencies 16 and 34.8 GHz for 12.5 mm/h rainfall rate are shown as a function of time in Fig.2. The backscattered pulse wave calculated by the first-order solution has no depolarization component for spherical raindrops, and therefore the LDRs are produced by the second-order multiple scattering. The calculated LDRs increase with time or penetration depth and the value at 34.8 GHz exceeds that at 16 GHz by about 10 dB. The rapid increase in both LDR values reaching a level of -4.5 dB occurs near the rear edge of the rain cell, since the major co-polarized component vanishes beyond the rear edge.

The circularly polarized incident wave case is also treated by this technique to examine the validity of this solution. The results are in fair agreement with those of the numerical technique, although the higher-order multiple scattering contributions are disregarded.

COMPARISON WITH MEASUREMENTS

Thunderstorm structures were measured by a 10/34.5 GHz air-borne radar in the CaPE experiment in Florida, USA, in July 1991.[2] The radar has two linear polarization channels.

Fig. 3 shows an example of the rain echo from convective storms. A heavy rain region exists between 3 and 6 km from aircraft. The middle panel of this figure shows the LDR values at 10 and 34.5 GHz as a function of radar range.

The LDR value at 34.5 GHz increases with distance in the rain cell. The maximum of LDR value was a few decibels below 0 dB. The LDR value at 10 GHz suddenly increases when the incident pulse comes near to the rear edge of the rain cell. We note that the behavior of the LDR in this figure is quite similar to that in Fig.2. All these suggest that the multiple scattering process really exists in the rain cell, and its effect is more significant at 34.5 GHz.

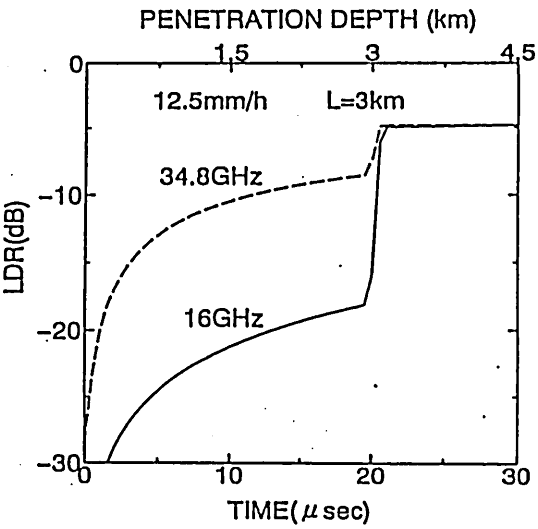


Fig.2 Linear depolarization ratio (LDR) of reflected pulse as a function of time (or penetration depth). LDR is calculated by the second-order multiple scattering theory for spherical drops. The rain layer is assumed to be 3km and the rain rate to be 12.5mm/h.

REFERENCES

1. T. Oguchi and S. Ito, Radio Sci., 25(3) (1990), 205.
2. T. Iguchi, R. Meneghini and H. Kumagai, Proc. IGARSS'92, Texas, (May 1992), 1728.

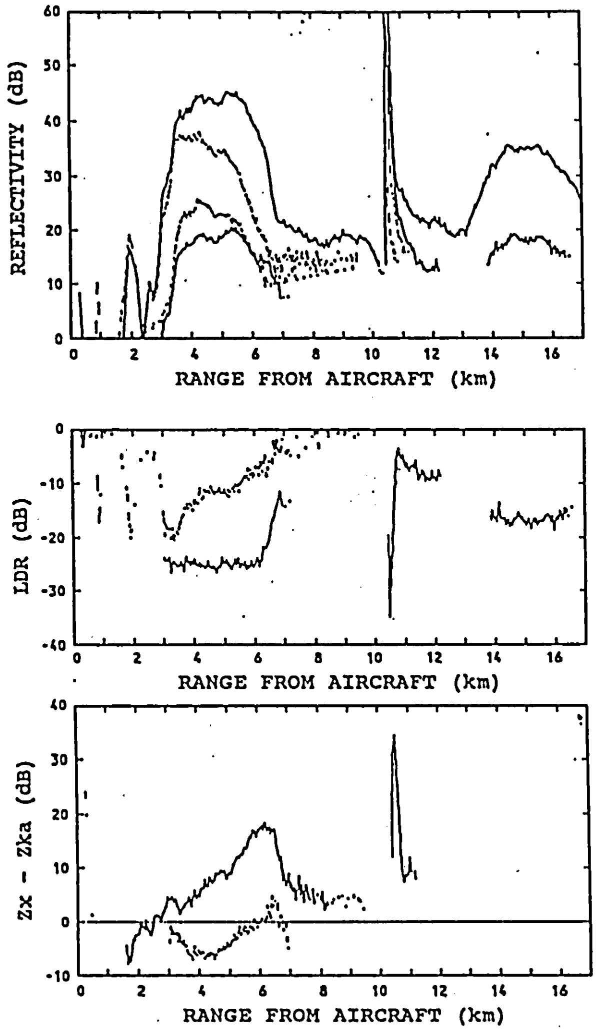


Fig.3 An example of the vertical profile of reflectivities, LDR, and Zx-Zka in convective storms. The solid lines represent X-band data and the broken lines Ka-band data. The larger values in reflectivity profiles are radar reflectivities of co-pol components and the smaller values are of cross-pol components.

輻射科学研究会　　　摂南大学　1993年12月3日　　　資料番号(RS93-15)

重核原子のパリティ非保存分光

兵庫教育大学・電気工学教室　中山　茂

電磁相互作用（パリティ保存）と弱い相互作用（パリティ非保存）との統一理論(Standard Model)を検証するために，素粒子の高エネルギーの加速器実験で調べられているが，加速器を用いないで，低エネルギーの原子の世界でも弱い相互作用を観測できる。原子に直線偏光のレーザーを照射すると，原子に弱い相互作用のパリティの非保存による微弱な光学活性が誘導されるために，レーザーの偏光面が（μrad程度）回転する。ここでは，外部共振器による波長可変な単一モードの半導体レーザーを用いて，Tl原子とPb原子の重核原子での回転角を計測することにより，統一理論を検証する。

§1　はじめに

レーザーによる原子分光の実験によって，素粒子物理の難しい問題の一つである弱い相互作用と電磁相互作用とを一つの統一理論に結ぶことが正しいかどうかを厳密に検証することが本研究の目的である。今日まで進められている多くの実験とWeinberg-Salamによる統一理論は原子を構成している粒子，即ち，電子，陽子，中性子間の弱い相互作用の存在を予言しているが，これらの相互作用は弱い相互作用結合定数G_Fのオーダーで，原子単位（$e=\hbar=m_e=1$）では　$G_F=2\times10^{-14}$と非常に弱い。

最初の予想ではG_Fが非常に小さい値なので実験と理論とを直接に比較することは明らかに不可能と考えられ，実験的に検証することは不可能と思われた。しかし，弱い相互作用がパリティを保存せず，電磁相互作用がパリティを保存させるということを利用すれば，非常に大きなパリティ保存の背景で非常に小さなパリティ違反の効果を探すためのいくつかの実験方法が考えられる。

パリティ非保存相互作用は原子のｓ状態とｐ状態との間でのみ零でない値を持つ。そこで，主量子数nが変化しないとき，ｓ－ｓ遷移では磁気双極子遷移(M1)が許されるが，その遷移確率は非常に小さい。パリティ非保存相互作用がそれぞれのｓ状態に近接するｐ状態との間で働くので，ｓ－(ｐ)－ｓ遷移，つまり，パリティ非保存相互作用をともなった電気双極子遷移(E1)も許されることになる。この遷移確率はM1遷移よりももっと小さい。パリティ非保存相互作用をともなった電気双極子遷移(E1)は原子に光学活性を誘起し，入射光に対して旋光性や二色性を示す[1]。

また，主量子数nが変化するとき，ｓ－ｓ遷移では磁気双極子遷移(M1)が許されないが，静電場を加えると，Stark誘起の電気双極子遷移(E1)が許される。同様に

パリティ非保存相互作用がそれぞれのｓ状態に近接するｐ状態との間で働くので，ｓ－(ｐ)－ｓ遷移，つまり，パリティ非保存誘起の電気双極子遷移(E1)も許されることになる。Stark誘起の電気双極子遷移(E1)とパリティ非保存誘起の電気双極子遷移(E1)との干渉を利用することによって，パリティ非保存効果を観測することが可能である。

従来の研究では，Bi原子(原子番号83)やSm原子(原子番号62)が行われていたが，ここでは，Pb原子(原子番号82)とTl原子(原子番号81)のM1遷移を利用した実験を行い，パリティ非保存誘起の電気双極子遷移(E1)による入射光の旋光性，つまり，光学回転(Parity回転) を測定し，Weinberg-Salamの統一理論との比較を行う。

§２　電磁相互作用と弱い相互作用

パリティ非保存の研究の歴史について述べる。1956年にLeeとYangが弱い相互作用においてパリティが保存しないことを予言し，翌年，Wuらによって極低温状態に冷却した放射性原子^{60}Coを磁場中に置いてスピン配列する。そこで，^{60}Co核が^{60}Niにβ崩壊するときの電子の角分布を計測した結果，電子は^{60}Coのスピンの向きと逆に多数出てきた。このような非対称性から弱い相互作用においてパリティが保存しないことが実験的に確認された。

1959年にZel'dovichによって原子においても弱い相互作用が検出できる可能性があることを示した。更に，1967年にWeinbergによって，1968年にSalamによって光子（γ）交換による電磁相互作用とベクトルボゾン（Z^0，W^+，W^-）交換による弱い相互作用との統一理論（電弱相互作用）が提案された。いろいろなくりこみ可能なゲージ理論が提案されたが，特にWeinberg-Salam理論は優れており，唯一つのパラメータ，即ち４つの粒子の混合を制御するWeinberg角θ_wだけが含まれている。

図１は電磁相互作用と弱い相互作用とを示すファイマンダイアグラムである。最初のダイアグラムは，電子と核子との間の光子の交換を示しており，光子は質量がないために長距離の電磁相互作用を表している。他方は，電子と核子との間のZ^0ボソンの交換を示しており，Z^0ボソンは質量があるために短距離の弱い相互作用を表している。Z^0ボソンは荷電のない中性粒子なので，Z^0ボソンによる弱い相互作用は，中性カレントと呼ばれる。また，荷電W^-ボゾンの交換による荷電の弱い相互作用もあるが，単位電荷はダイアグラムの片側から他の側へ移動し，安定した原子では荷電カレントはG_Fの２次で起こるために，非常に小さく無視できる。電磁力と強い力とは今までパリティを保存することが解っているが，Wuらの実験は弱い相互作用のパリティ非保存の性質を最初に明らかにしたものである。

Weinberg-Salam理論の重要性は，中性ベクトルボゾンによる中性の弱いカレントが存在していることを予言していることである。1973年にCERNのGargamelleとその共同実験者と1974年にFermi実験室とによると電子とμニュートリノまた核子とμニュートリノの散乱実験は，弱い中性カレントの存在を正当化し，Weinberg-Salam理論に大きな示唆を与えた。

原子物理では，この発見は触発されて，原子においても離散対称性である鏡映対称性の破壊（パリティの非保存）を計測する望みが出てきた。1974年にBouchiatとBouchiatは核子と電子との間の弱い中性カレントの効果は，大きな原子番号Zを持った原子（重核原子）において容易に検出できることを理論的に示した。即ち，その効果は約Z^3に比例することを示した。

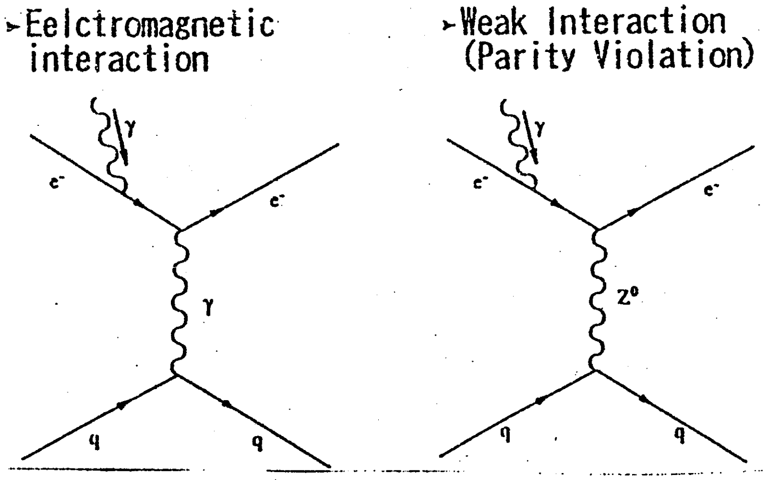


図1　電弱相互作用

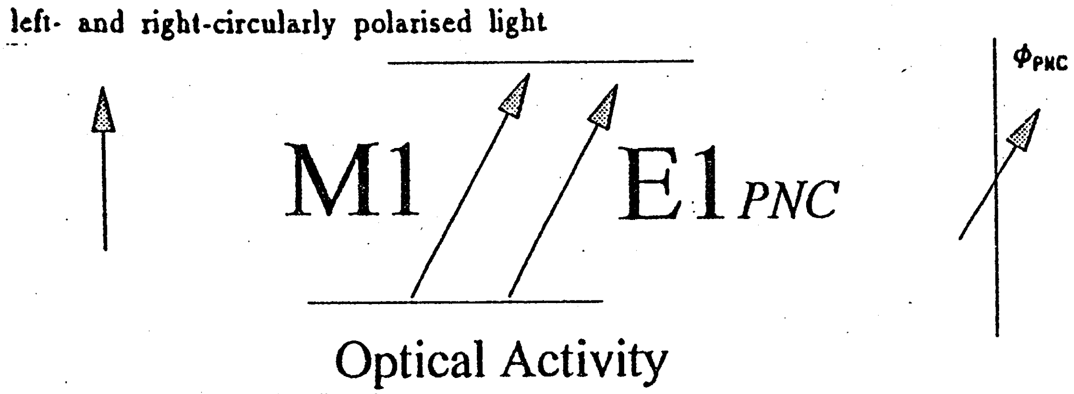


図2　原子のパリティ非保存によるＥ１遷移での光学活性

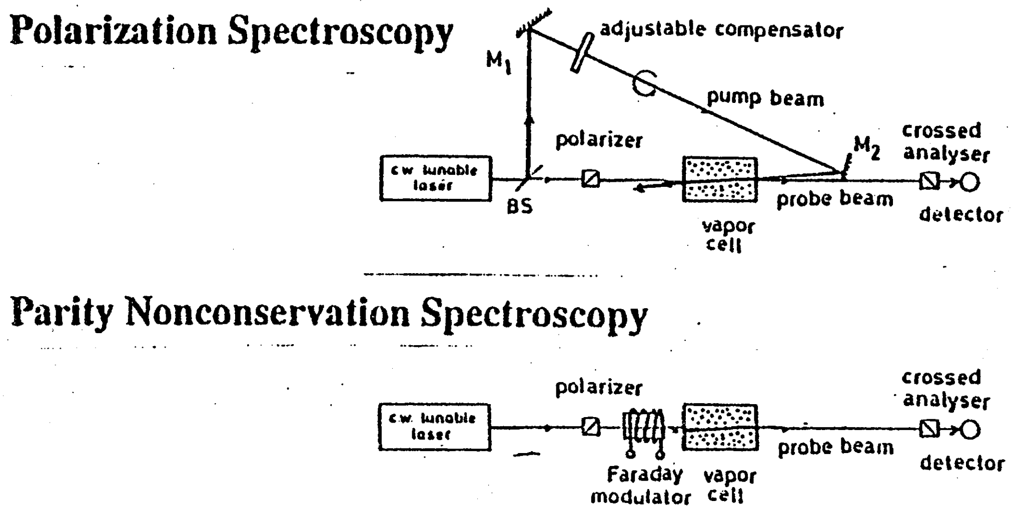


図3　偏光分光とパリティ非保存分光

中性カレント　$\propto$　Z^3

特に，そのような弱い中性カレントが存在するなら，反対のパリティ状態の混合が，例えば，図２のように電気双極子遷移（Ｅ１）と磁気双極子遷移（Ｍ１）との間での干渉によって観測できることを示した。つまり，パリティ非保存により，右回りと左回りとの非対称性を利用する。パリティの非保存によって誘導された光学活性（旋光性と二色性）により，左右円偏光の吸収率と屈折率との違いが引き起こされる。これらの違いは小さいので，弱い磁気双極子遷移を観測しながら，非常に弱いパリティ非保存による強い電気双極子遷移の効果を調べると，パリティの非保存効果は大きく観測される。

光学活性　$\propto$　$\mathrm{Im}(E1^{PNC}/M1)$

原子スペクトルにおいてＭ１遷移はＥ１遷移より約10^{-4}（$\sim\alpha^2$，αは微細構造定数）だけ小さい確率をもつ。

従来，648nmと876nm付近に同調されたレーザー光の偏光面の小さな回転を探すために，^{209}BiのＭ１遷移を研究していた[2]。回転の大きさはレーザー波長によって変化するが，そのピーク値は，Weinberg-Salam理論より，原子の一吸収長あたり，それぞれ，-9.1×10^{-8}と-10.9×10^{-8}ラディアンで，実験値と一致している。このビスマス遷移が選ばれた理由は，648nmと876nmとは狭帯域幅の連続発振色素レーザーから容易に得られること，ビスマスは原子番号が大きくスケール因子Z^3のためにパリティ非保存効果が大きくこと，ある程度の温度1400Kで十分なビスマス蒸気圧数torrが得られることなどである。

§３　パリティ非保存検出の実験方法

3.1　原子の光学活性

原子のパリティの保存するＭ１遷移に，パリティ非保存によるＥ１遷移が混ざると，原子に光学活性が誘起される。つまり，光学活性のある原子中に，右回りの円偏光の光と左回りの円偏光の光とが通過すると，それぞれの光吸収強度が異なったり楕円偏光になったり，それぞれの位相がずれるために偏光面が回転する。

原子での左右円偏光によるＭ１とＥ1_{PNC}との遷移確率I_{+}は，

$$I_{\pm}=|\Sigma\langle f|-\mu\cdot B_{\pm}-d\cdot E_{\pm}|i\rangle|^2$$

で，偏極率は，

$$(I_{+}-I_{-})/(I_{+}+I_{-})=2\mathrm{Im}(\langle E1_{PNC}\rangle\langle M1\rangle)/(|\langle E1_{PNC}\rangle|^2+|\langle M1\rangle|^2)$$

$$=2\mathrm{Im}(\langle E1_{PNC}\rangle/\langle M1\rangle)\qquad(\langle E1_{PNC}\rangle \ll \langle M1\rangle\text{より})$$

となり，$E1_{PNC}$遷移とM1遷移との干渉項Rはつぎのようになる。

$$\boxed{R=\mathrm{Im}(\langle E1_{PNC}\rangle/\langle M1\rangle)}$$

このRが計測できれば，パリティの非保存効果を知ることができる。そこで，偏極率は，$n\sim n_+\sim n_-$で，

$$(I_+-I_-)/(I_++I_-)=-(n_+-n_-)/(n-1)=4R$$

つまり，

$$(n_+-n_-)=-4(n-1)R$$

となる。

3.2　偏光子と検光子の効果

図3のように，光学活性を検出する方法には，偏光子と検光子を用いることが効果的である。従来，原子の高分解能分光としての偏光分光を行ってきたが，これは原子の光学活性（復屈折と二色性）を利用した分光方法であった[3]。つまり，光学活性のある原子を偏光子と検光子との間に入れてその透過光を計測するものである。

つまり，直線偏光の入射波I_0に対して検光子が角度θだけ傾斜したときの透過信号[4]は

$$I=I_0[\theta^2+(f+f^*)\theta+ff^*]$$

となり、ここで、fは原子の光学活性による散乱要素$f=\phi+i\delta$で，

$$\phi=(n_+-n_-)kl/2 \qquad \leftarrow \text{複屈折（分散型）}$$
$$\delta=(\alpha_+-\alpha_-)l/4 \qquad \leftarrow \text{二色性（吸収型）}$$

である。ここで，直交した検光子($\theta=0$) を用いるとつぎのように簡単になる。

$$I=I_0ff^*=I_0[\phi^2+\delta^2]$$

となる。

直線偏光した波長λのレーザー光が長さlの非線形媒質(左円偏光に対する屈折率n_+，右円偏光に対する屈折率n_-)を通過するとき，偏光面が回転する（パリティ回転）。そこで，複屈折率ϕと偏極率の比Rとはつぎのような関係になる。

$$\phi=(n_+-n_-)kl/2$$

$$\boxed{\phi=-(4\pi l/\lambda)(n-1)R} \quad \rightarrow \quad 0.1\,\mu\mathrm{rad}$$

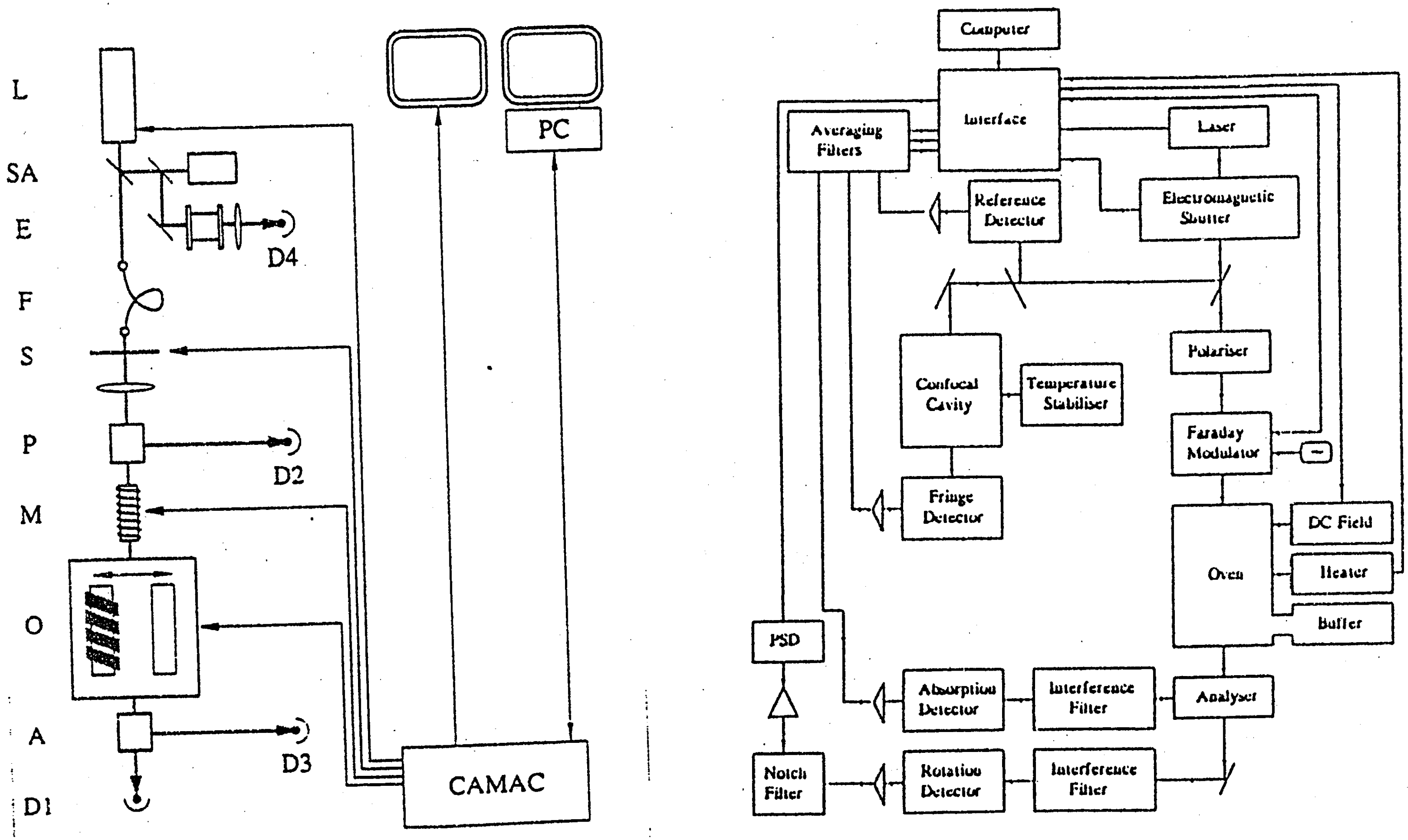


図4　Laser Polarimeterの実験と信号処理

透過光の強度Iの計測から複屈折率ϕを測り，Rを求めることができる。
この複屈折率は，光の偏光面を回転させる効果があり，Weinberg-Salamの理論から計算されたパリティ非保存によるRは，ϕ（パリティ回転）にして0.1μradである。これは，偏光子の消光比10^{-7}とほぼ同じで，検出は不可能である。

3.3 Laser Polarimeterの原理

そこで，図4のように，サブμradの光回転を計測するためには，偏光子と検光子との間にファラデー変調器を入れて，入射波の直線偏光の偏光面を変調し，その信号を同期検波することによりS／N比を3桁ほど改善することができる。
そうすれば，透過信号[5]は，ファラデー変調($\phi_m\cos\omega_m t$：ピーク角度変調ϕ_m～10^{-3}rad)により

$$I=I_0[(\phi_{pnc}+\phi_m\cos\omega_m t)^2+\delta^2]\exp(-k_a l)$$

$$=I_0[\phi_{pnc}^2+2\phi_{pnc}\phi_m\cos\omega_m t+(\phi_m^2(\cos2\omega_m t+1)/2)+\delta^2]\exp(-k_a l)$$

となり、位相検波するとﾌｧﾗﾃﾞｰ変調偏光分光信号は

ω_mで同期検波	→	$I\propto 2I_0\phi_{pnc}\phi_m\exp(-k_a l)$	:分散
$2\omega_m$で同期検波	→	$I\propto I_0(\phi_m^2/2)\exp(-k_a l)$	:吸収

§4　パリティ非保存実験

4.1　近赤外線レーザー源

Bi原子での638nmに近い狭帯域幅レーザー（ｽﾍﾟｸﾄﾙ幅約10MHz）は，アルゴンイオンレーザー(164型，波長514.5.488.476nm，TEM_{00}ﾓｰﾄﾞ、出力4W）で励起されたローダミンB(ｴﾁﾚﾝｸﾞﾘｺｰﾙ中に濃度5×10^{-3}ﾓﾙ)の色素レーザー(SP580A)から得られ，876nmに近い狭帯域幅レーザー（約1MHz）は，クリプトンイオンレーザー(CR3000K SG,4W)で励起されたHITC(Hexacyanine3)の色素レーザー(CR599)から30mWの出力が得られた。
しかし，Tl原子（波長1.283μm）やPb原子（波長1.279μm）のレーザー源には，半導体レーザーを使用した。Tl原子（波長1.283μm：233660GHz）ではDFB（分布帰還型）レーザーを使用し，Pb原子（波長1.279μm：234415GHz）では外部共振器によるQuantum Well（量子井戸型）レーザーを用いた[7]。
DFBレーザーの特徴は，半値幅25MHzの単一モードで発振し，出力5mW程度で，図5のように，電流同調(-500MHz/mA)で波長を可変できる。温度では，+13.1GHz/Kで可変できる。このレーザーの欠点は，Tl原子にあった波長が得にくいことである。
図6のように，外部共振器によるQuantum Well（量子井戸型）レーザーは，レーザーの波長が原子の波長に多少合わなくても，レーザーの外部にとりつけた回折格子で波長が大きく可変でき，出力2mW程度で，半値幅10KHz程度の単一モード

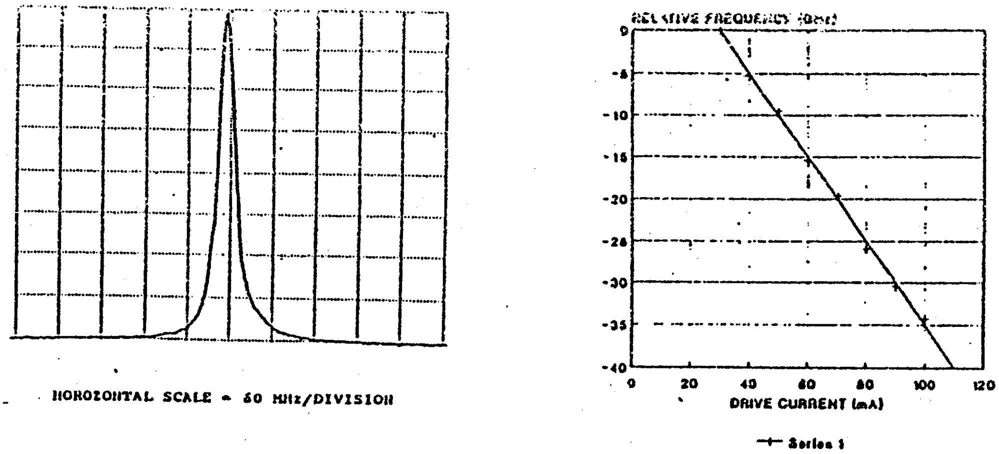


図5　ＤＦＢレーザーのスペクトルと周波数・電流特性

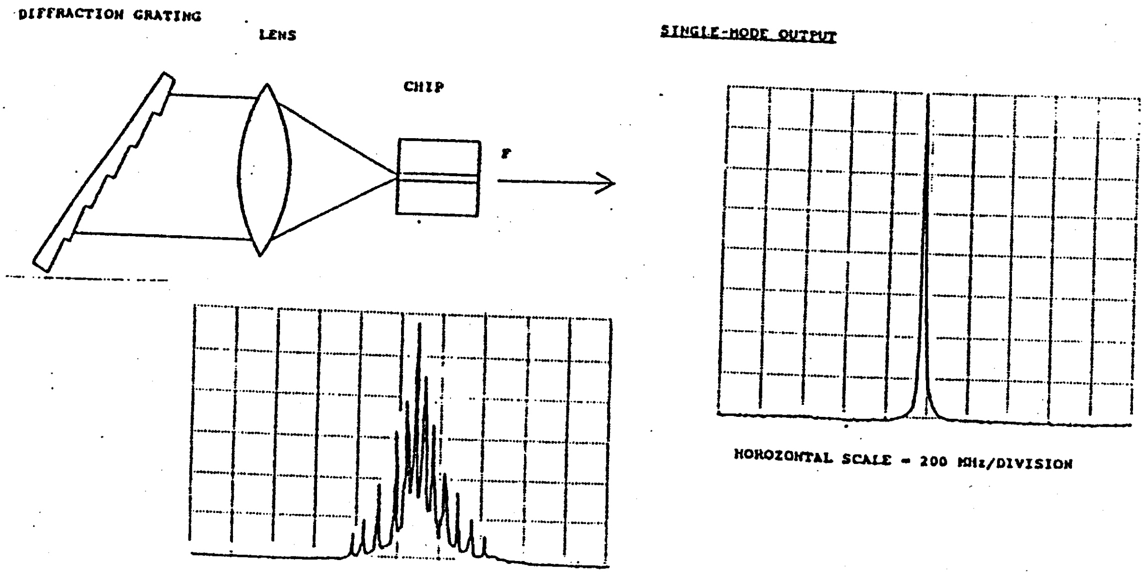
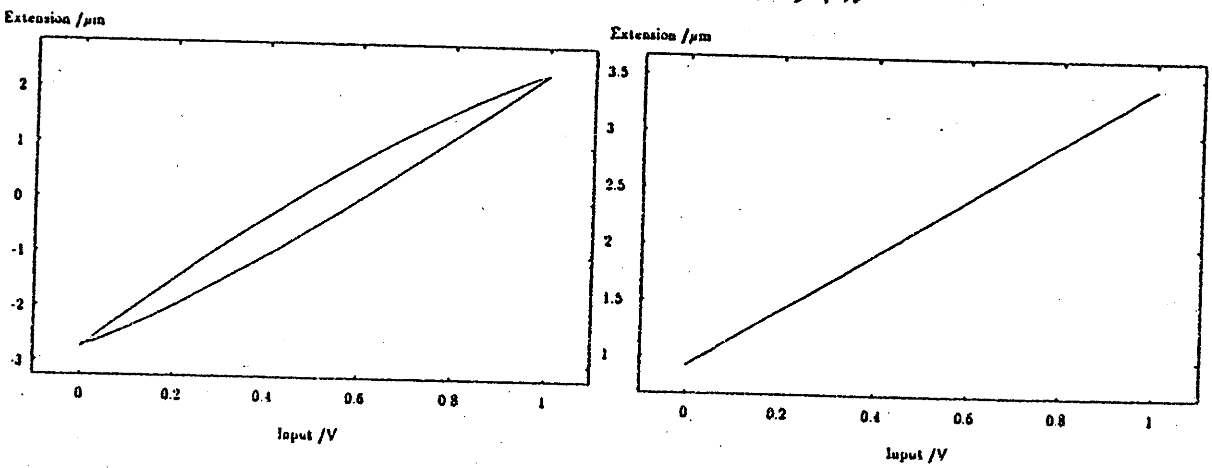


図6　外部共振レーザーの構造とそのスペクトル



Hysteresis in the Extension of Piezos

Output from stabilised piezos

図7　位置センサー付きPiezoの変位特性

透過光の強度Iの計測から複屈折率ϕを測り，Rを求めることができる。
この複屈折率は，光の偏光面を回転させる効果があり，Weinberg-Salamの理論から計算されたパリティ非保存によるRは，ϕ（パリティ回転）にして0.1μradである。これは，偏光子の消光比10^{-7}とほぼ同じで，検出は不可能である。

3.3 Laser Polarimeterの原理

そこで，図4のように，サブμradの光回転を計測するためには，偏光子と検光子との間にファラデー変調器を入れて，入射波の直線偏光の偏光面を変調し，その信号を同期検波することによりS／N比を3桁ほど改善することができる。
そうすれば，透過信号[5]は，ファラデー変調($\phi_m\cos\omega_m t$：ピーク角度変調ϕ_m～10^{-3}rad)により

$$I=I_0[(\phi_{pnc}+\phi_m\cos\omega_m t)^2+\delta^2]\exp(-k_a l)$$

$$=I_0[\phi_{pnc}^2+2\phi_{pnc}\phi_m\cos\omega_m t+(\phi_m^2(\cos 2\omega_m t+1)/2)+\delta^2]\exp(-k_a l)$$

となり、位相検波するとﾌｧﾗﾃﾞｰ変調偏光分光信号は

ω_mで同期検波	→	$I\infty 2I_0\phi_{pnc}\phi_m\exp(-k_a l)$	:分散
$2\omega_m$で同期検波	→	$I\infty I_0(\phi_m^2/2)\exp(-k_a l)$	:吸収

§4 パリティ非保存実験

4.1 近赤外線レーザー源

Bi原子での638nmに近い狭帯域幅レーザー（ｽﾍﾟｸﾄﾙ幅約10MHz）は，アルゴンイオンレーザー(164型，波長514.5.488.476nm，TEM_{00}ﾓｰﾄﾞ、出力4W）で励起されたローダミンB(ｴﾁﾚﾝｸﾞﾘｺｰﾙ中に濃度5×10^{-3}ﾓﾙ)の色素レーザー(SP580A)から得られ，876nmに近い狭帯域幅レーザー（約1MHz）は，クリプトンイオンレーザー(CR3000K SG,4W)で励起されたHITC(Hexacyanine3)の色素レーザー(CR599)から30mWの出力が得られた。
しかし，Tl原子（波長1.283μm）やPb原子（波長1.279μm）のレーザー源には，半導体レーザーを使用した。Tl原子（波長1.283μm：233660GHz）ではDFB（分布帰還型）レーザーを使用し，Pb原子（波長1.279μm：234415GHz）では外部共振器によるQuantum Well（量子井戸型）レーザーを用いた[7]。
DFBレーザーの特徴は，半値幅25MHzの単一モードで発振し，出力5mW程度で，図5のように，電流同調(-500MHz/mA)で波長を可変できる。温度では，+13.1GHz/Kで可変できる。このレーザーの欠点は，Tl原子にあった波長が得にくいことである。
図6のように，外部共振器によるQuantum Well（量子井戸型）レーザーは，レーザーの波長が原子の波長に多少合わなくても，レーザーの外部にとりつけた回折格子で波長が大きく可変でき，出力2mW程度で，半値幅10KHz程度の単一モード

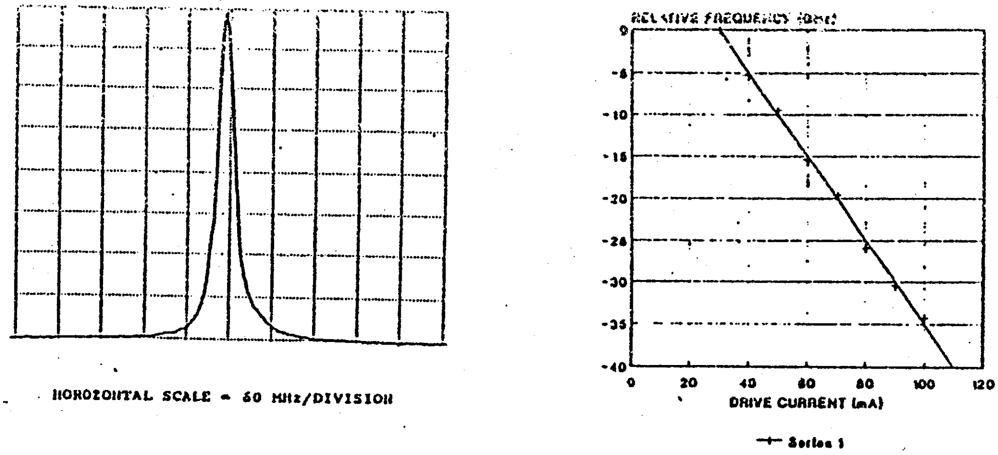


図5　ＤＦＢレーザーのスペクトルと周波数・電流特性

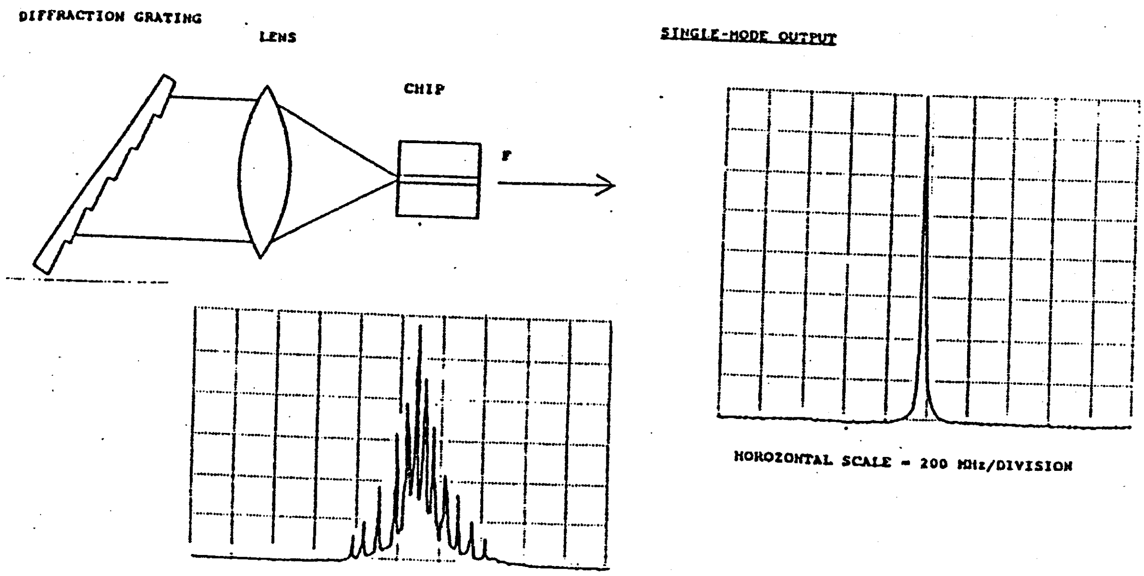


図6　外部共振レーザーの構造とそのスペクトル

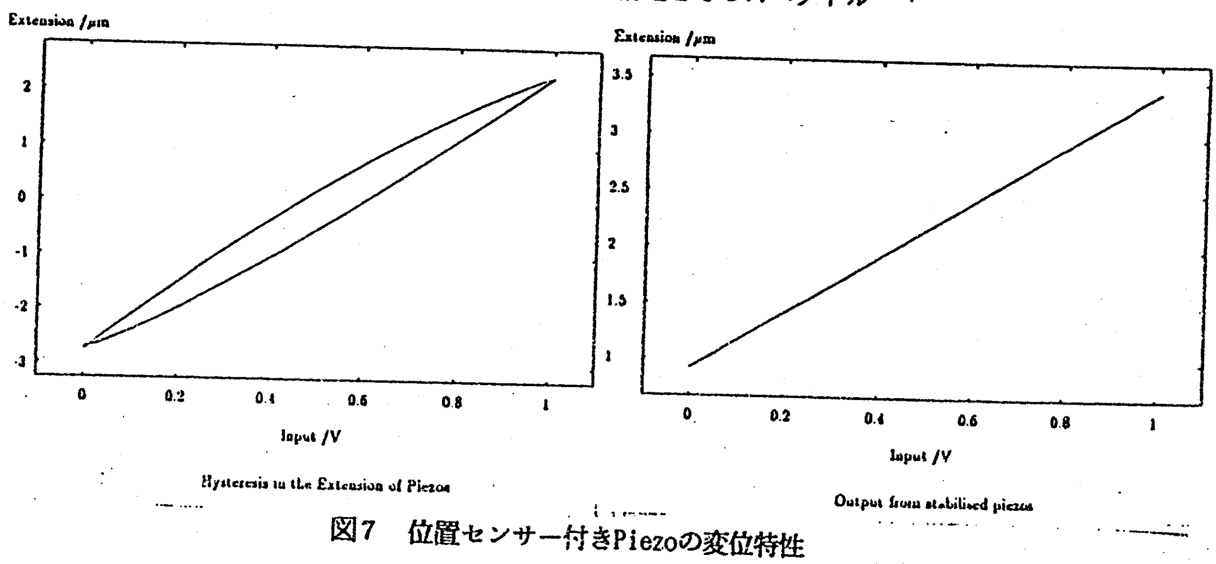


図7　位置センサー付きPiezoの変位特性

が得られる。そのために，電流と温度を固定して，回折格子をPiezo素子で動かすことにより，波長が可変できる。このレーザーの欠点は，Piezo素子に熱によるヒステリシスがあり，UP走査とdown走査で位置が異なり，波長校正が取りにくいことにある。

しかし，位置センサー付きのPiezoドライバーを使用すると，図7のように，ヒステリシスを補正することができた。同調波長も均等になった。

半導体レーザーは出力が数mW程度なので，現在，高出力の固体レーザーを開発中である。Crイオンがドーピングされたforsterite結晶（三井金属製）を用いて，発振波長1.1μm～1.7μmの近赤外域で単一モードで発振させるものである。

4.2 Laser Polarimeterの装置

半導体レーザーから出たレーザーは，ビーム位置が微妙に変動するために，その変動を無くすために，光ファイバーに通す。その光ファイバーからの出力光を偏光子に通して直線偏光とする。この偏光子は，二つの分離した空気ギャップのあるcalcite結晶でできており，結晶内での多重反射を防止するために空気ギャップが設けられている。この消光比は10^{-7}以下で，8GHz走査で2μradに相当する。

つぎに，保谷硝子のFR-5結晶でできたファラデー変調器(磁場強度75×10^{-4}[T/A]，最大回転角6×10^{-4}[rad])を通かし，数百度のTl蒸気またはPb蒸気を含んだオーブンに行く。オーブンを通過したレーザーは，検光子でその垂直成分だけが通かし光ダイオードで検出し，同期検波器で復調し解析する。

図4のように，実験では，原子蒸気の入ったオーブンとダミーのオーブンとで差を検出し，オーブンの窓などの光学活性をキャンセルする。原子蒸気の含まれたチャンネルを測定するときは，オーブンをきり，μメタルで地球磁場を３重に遮蔽し，磁場コイルで補正することにより，ファラディ回転の振幅を10^{-8}ﾗﾃﾞｨｱﾝ程に小さく出来る。オーブンは40秒毎にスイッチをon-offする。

レーザーの掃引は，UP掃引とDOWN掃引とで20秒づつ行い，ダミー管に切り替えて同じ測定を行い，その差を記録し，さらに，同じ操作を２回から２０回ほど繰り返しスペクトルの平均を取り，UPデータとDOWNデータとして２つのデータの組が１セットできる。

4.3 Pb原子

図８に示すように，Pb原子で，基底状態$6p^2$ $^3P_0$から励起状態$6p^2$ $^3P_1$へのＭ１遷移を利用する。Pb原子には，４つのアイソトープがあり，^{207}Pb(核スピンI=1/2)には超微細構造があるために，この1.279μmの波長には，5つのＭ１遷移がある。その信号例として，吸収の場合と軸磁場を加えたFaraday回転の場合を図９に示す。この図の連続曲線は，非線形最小自乗法の標準となったLevenberg-Marquardt法によるcurve fittingで曲線近似されている。この最小自乗法により，回転角を計算する。

4.4 Tl原子

図10に示すように，Tl原子で，基底状態$6p_{1/2}$から励起状態$6p_{3/2}$へのＭ１遷移を利用する。Tl原子には，２つのアイソトープがあり，それぞれ核スピンI=1/2をもつために超微細構造がある。この1.283μmの波長には，6つのＭ１遷移がある。

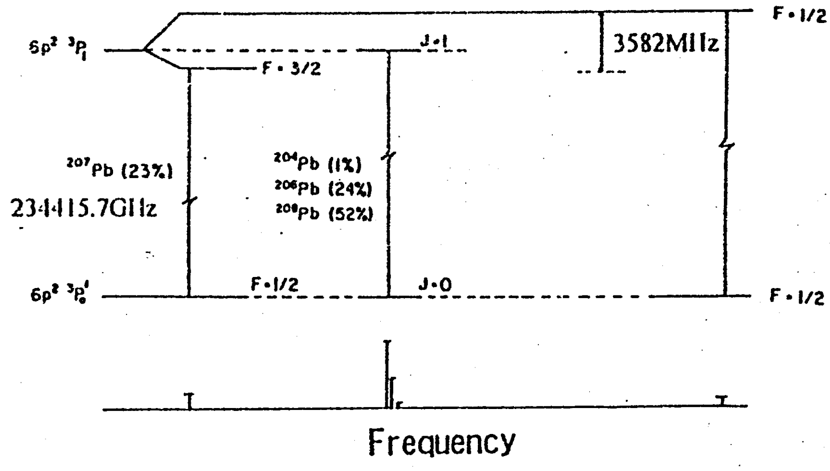


図8　Pb原子のエネルギー準位

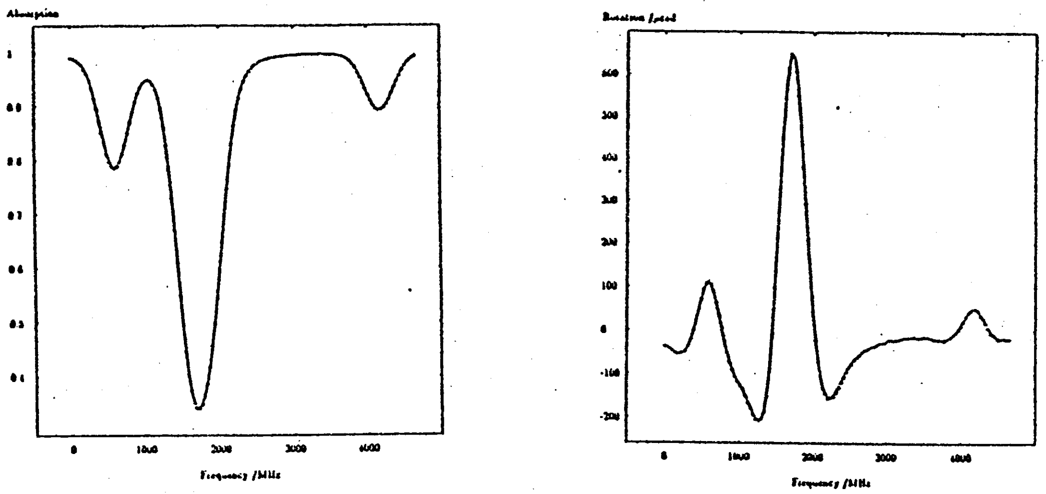


図9　Pb原子の吸収線とFaraday回転

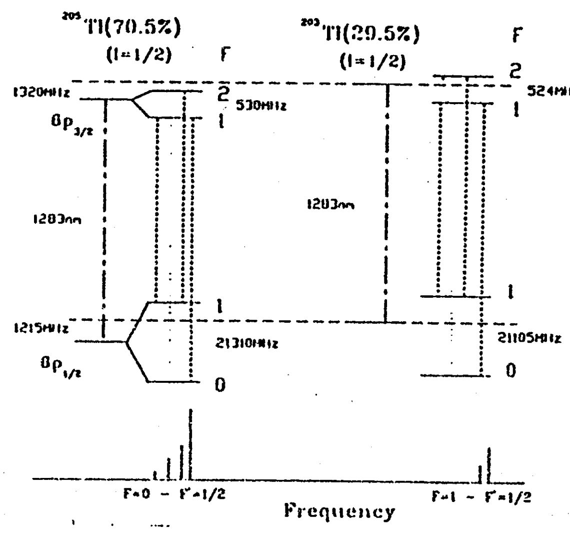


図10　Tl原子のエネルギー準位

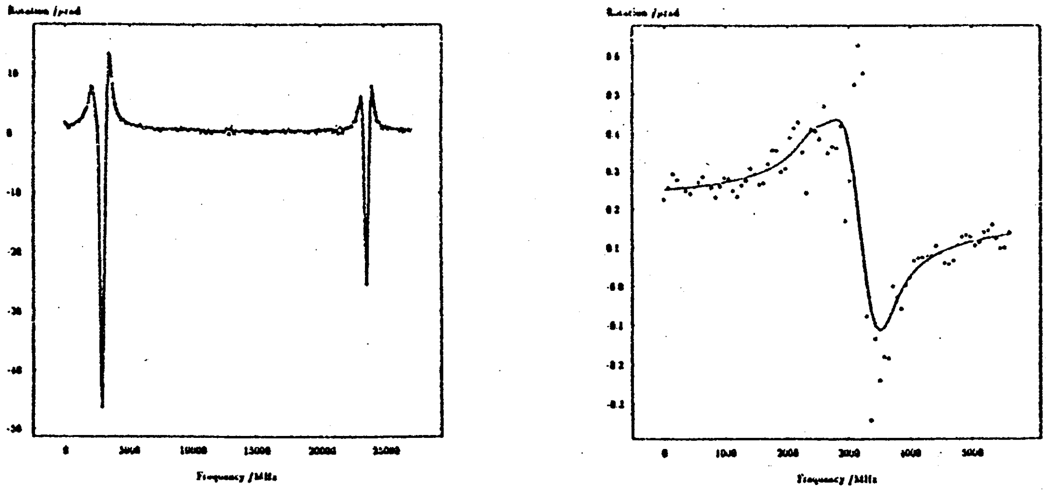


図11　Tl原子のFaraday回転とParity回転

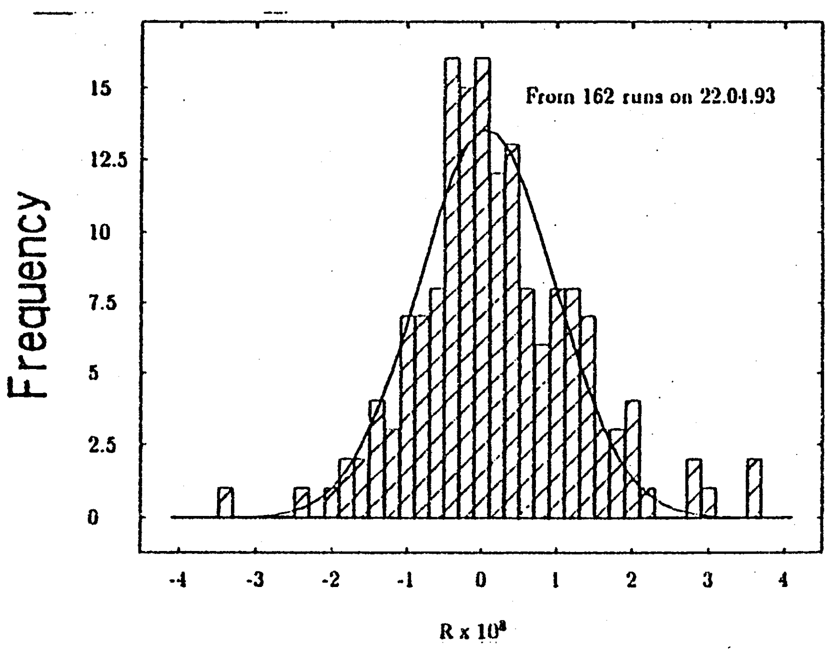


図12　Pb原子のR値

その信号例として，軸磁場を加えたFaraday回転と１日のデータを最小自乗法で信号処理をしてFaraday回転を除去してパリティ回転だけを合わせたスペクトルを図11に示す。このパリティ回転のpeak-to-peakを求めてϕ_{pnc}を得る。

§5　実験結果と理論との比較

今回の実験で，Pb原子の実験がある程度まとまり，パリティ非保存の光学回転ϕ_{pnc}を測定して，$E1_{pnc}$遷移とM1遷移との干渉項Rを実測した。その結果，図12のような分布になり，Gauss分布で最小自乗法で近似した。そのピーク値とばらつきは

$$R=(-6\pm7)\times10^{-8}$$

となった。また，最新の理論計算[8]によると

$$R=(-10.4\pm0.8)\times10^{-8}$$

となり，今回の実験と最新の理論計算とはほぼ一致した。現在，さらに，実験データの蓄積が行われている。

§6　おわりに

現在，原子におけるパリティ非保存の存在は実験によって十分に確認された。更に，この実験結果はパリティ非保存による光回転の理論値と一致している。さらに，実験値の精度を上げるために，もっとデータの蓄積が行われている。このような一致が回転角の原子計算から考えると，Weinberg-Salam理論は原子での弱い中性カレントの記述に対して適当と思われる。

更に，離散対称性として，時間反転(T)に対して対称でないとき，原子に外部から電場をあて逆転させると屈折率の差が発生する。また，パリティ(P)が保存せず，時間反転(T)に対しても対称でないとき，つまり，PT同時破壊が起きると，原子のエネルギー準位のずれが起こり電気的に中性な素粒子や原子は非常に小さな永久電気双極子モーメントが発生する。現在，レーザー分光法を用いて，このようなT破壊による屈折率の違いやPT同時破壊によるこの小さな永久電気双極子モーメントを測定する実験が行われている。

参考文献

[1] S. Nakayama: Annual Report of the Murata Science Foundation, No.2 (1988) 98-104
[2] 中山　茂: 兵庫教育大学研究紀要，第10巻 (1992) 137-152
[3] S. Nakayama: J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 609-614
[4] 中山　茂: 応用物理，第50巻，第9号 (1981) 943-950
[5] S. Nakayama and P.E.G. Baird: Jpn. J. Appl. Phys. 26 (1987) 1756-1767
[6] M.W.Fleming and A. Mooradian: IEEE QE-17 (1981) 44-59
[7] T.D. Wolfenden: DPhil thesis, University of Oxford (1991)
[8] V.A. Dzuba, V.V.Flambaum, P.G. Silvestrov and O. Sushkov: Europhys. Lett. 7 (1988) 413-418

輻射科学研究会資料
RS 93-16

非線形クラッド層をもつ光導波路での導波光の励振の解析

青木英児，堤 喜代司，平井 宏
(京都工芸繊維大学 工芸学部)
弓場芳治
(岡山県立大学 情報工学部)

平成5年12月3日
摂南大学

非線形クラッド層をもつ光導波路での導波光の励振の解析

青木英児, 堤 喜代司, 平井 宏
(京都工芸繊維大学 工芸学部)
弓場芳治
(岡山県立大学 情報工学部)

1. はじめに

光導波路に3次の非線形光学効果をもつ非線形媒質を用いると，光の強度により特性が変化するため種々の興味ある信号処理が実現できるものと期待される[1][2]. このような導波路を利用するには，どのような導波光が励振されるかを知る必要がある. 非線形媒質を用いた導波路における導波光の励振についてはいくつかの報告[3][4][5][6]がなされている. 本報告では，非線形クラッド層をもつスラブ導波路で励振される導波光を，境界壁ステップ近似を用いて数値解析により明らかにする.

2. 非線形クラッドをもつスラブ導波路

3次の非線形光学効果をもつ非線形媒質は，光の強度に比例してその屈折率が変化する[1]. 屈折率は次式で与えられる.

$$n = n_0 + n_I \times I$$

ここで，n_0は非線形効果が無視出来る程度の光のときの屈折率，n_Iは非線形効果の比例定数，Iは光の強度である. 今回考えた非線形媒質は液晶のＭＢＢＡで，$n_0 = 1.55$，$n_I = 10^{-9}$ [m^2/W]である.

導波路構造は図1に示すようなスラブ型の導波路である.

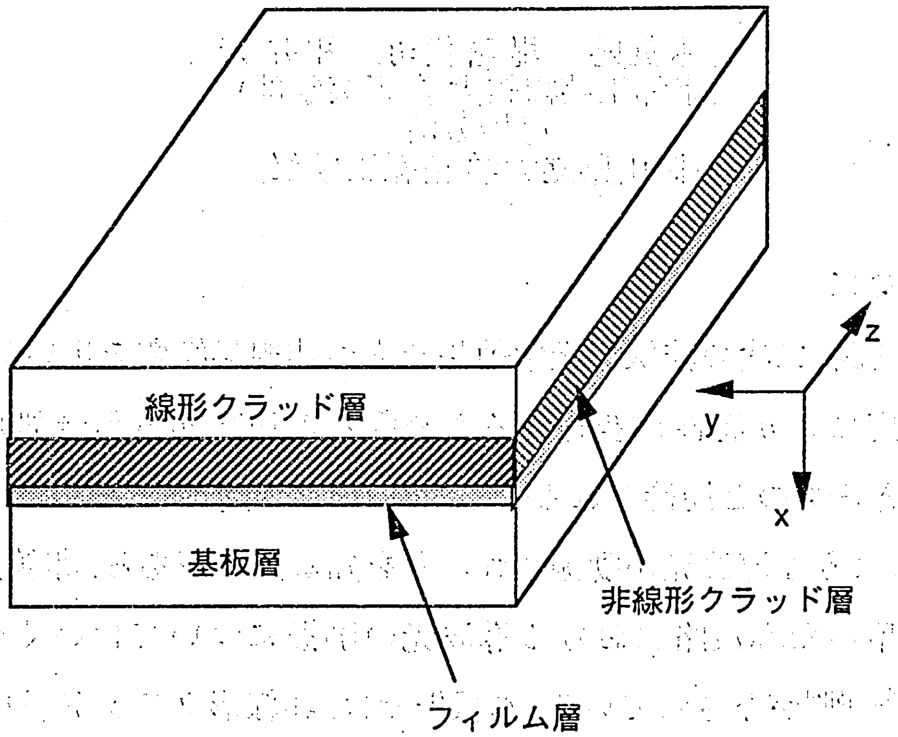


図1 非線形クラッドをもつスラブ導波路

3. 解析方法

3.1 境界壁ステップ近似[7]

モード展開をして計算を行うため，放射モードを離散化して計算する．そのために導波路の上下に境界壁を設け，閉じた導波路構造に近似する(境界壁近似)．次に非線形媒質の屈折率は光の強度で変化するので，屈折率分布は光の強度分布に比例した形，すなわちグレイデッドな分布になる．そこで非線形層を複数の層に分割し，ステップ状の屈折率分布に近似する．さらに光が伝搬するにつれて光と屈折率の分布の形が変化するので，伝搬方向の微

小区間では屈折率変化が無視できるとして，短い導波路が多数つながっているものと近似する(ステップ近似). 以上のように近似した導波路構造を図2に示す.

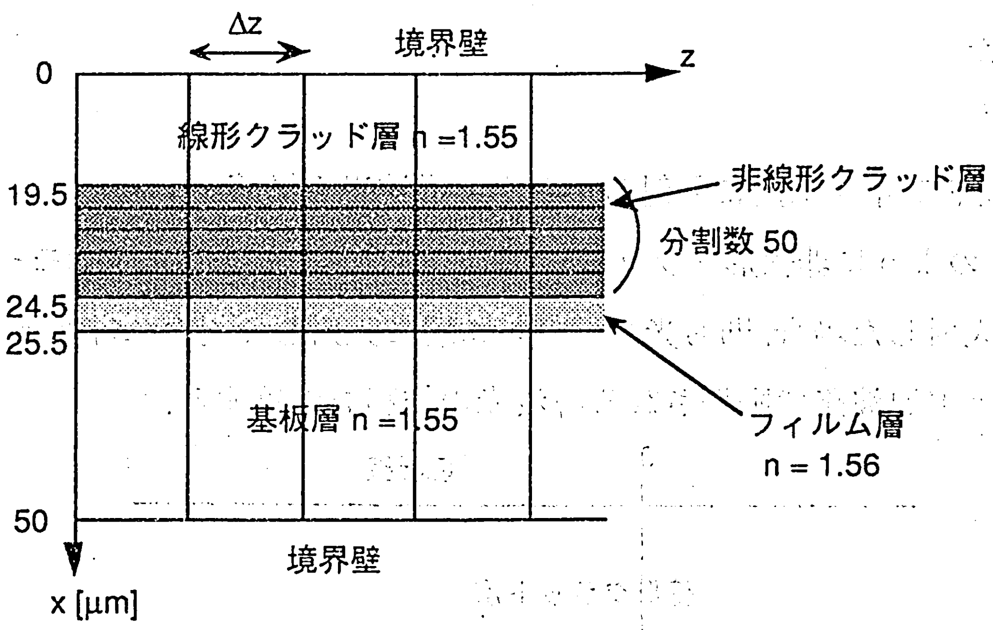


図2 境界壁ステップ近似した導波路構造

3.2 計算手順

計算の手順としては，ある区間において，(1)入射してきた光の界分布から屈折率を計算し[8][9]，(2)その屈折率分布を用いてその区間に励振されるモードを求め，(3)そのモードと入射光の界分布との間でモード整合を取り，その区間での界分布を求める. これが次の区間の入射光となる. これを繰り返して光が伝搬していく過程を計算する.

4. 解析結果

導波路の各層の屈折率, 寸法などの設定は図2中の値とする. この設定では非線形層の屈折率変化のないときは単一モード導波路である. 入射光の波長は0.515[μm], x方向の計算間隔は0.05[μm]とした.

4.1 光をフィルム層に入射したときの導波光の推移

図3のように非線形クラッド層がない場合に励振されるTE0モードを入射した場合, 即ち光をフィルム層に入射した場合に非線形クラッド導波路で励振される導波光の推移を計算する.

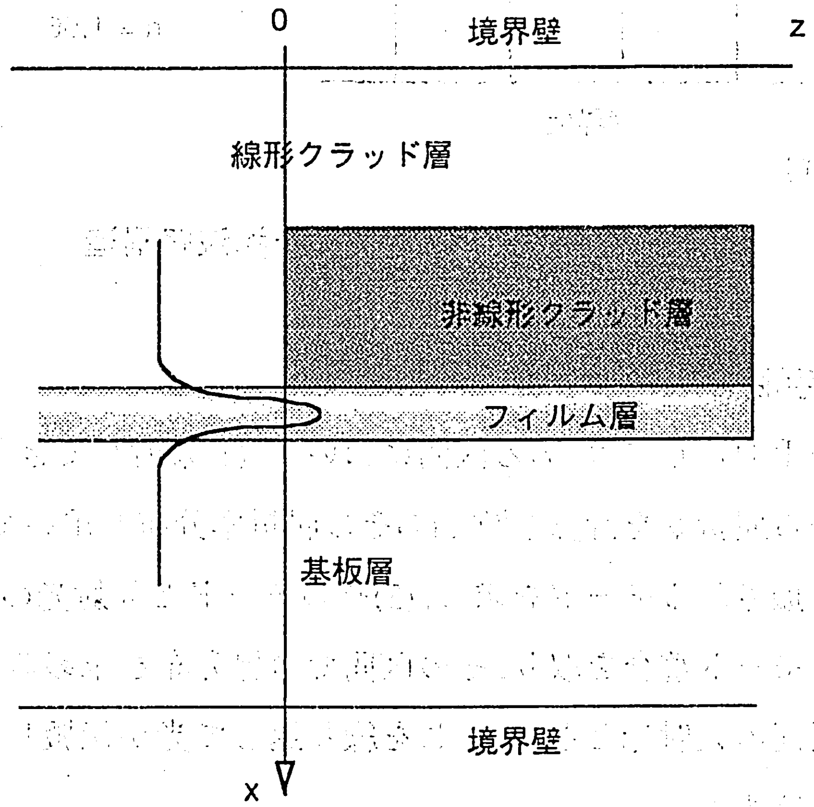
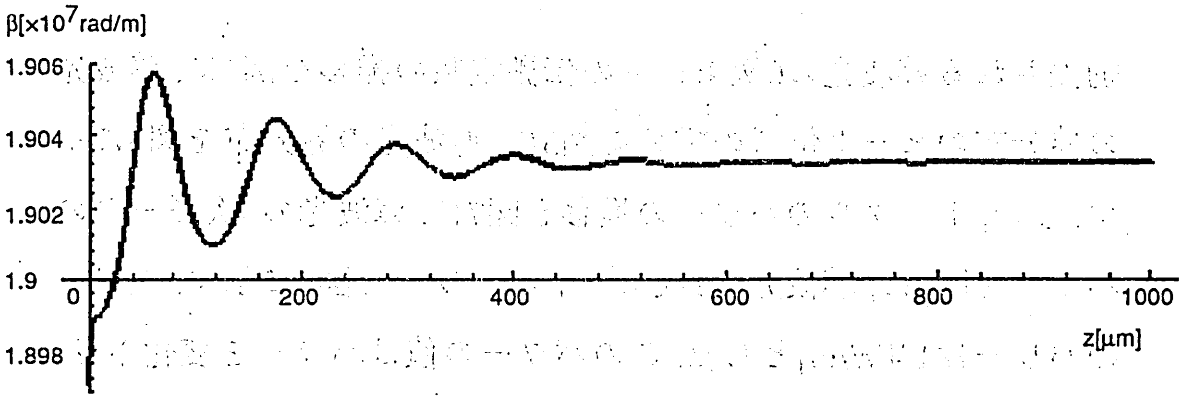


図3 非線形層がない場合のTE0モードの入射光

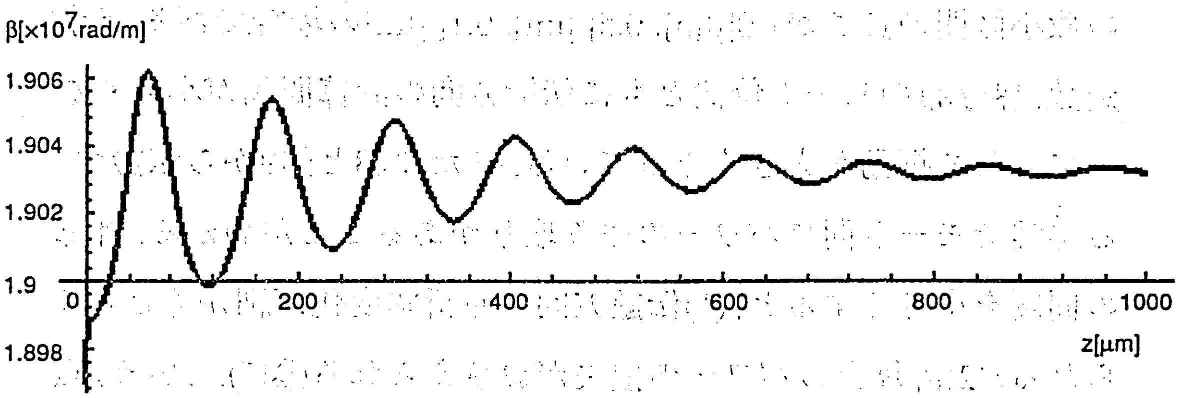
励振される導波光の0次モードの伝搬定数の推移を図4に，導波光の界分布のピーク位置の推移を図5に，導波光の界分布を図6に示す．また，トータルのパワーの推移を図7に，導波光の0次モードのパワーを図8に，導波光の1次モードのパワーを図9に示す．入射光のパワーは14[W/m]とした．このパワーの値はパワーを変化させたとき，導波光のピークの集束位置が線形層から非線形層へ移っていくしきい値的な値である．図4, 5ともに(a)から順に伝搬方向の微小区間の長さが1.0[μm], 0.5[μm], 0.1[μm]の場合である．伝搬定数，界分布のピーク位置ともに伝搬方向の計算間隔が小さくなるにつれて振動が大きくなっている．また，図8と図9から伝搬する過程でモード間でパワーのやり取りがあることがわかる．計算の間隔を小さくすると，(1)伝搬方向の屈折率変化が細かくとらえられる，(2)計算上のパワーの損失がおさえられる(図7)，という2点から計算の精度が高いと判断できる．このことから入射パワーが14[W/m]のときの伝搬定数，界分布のピーク位置は，パワーの損失がなければ振動し続けるものと思われる．そこで，安定した導波光を励振する方法を考える．

4.2 入射光のピーク位置をずらしたときの導波光の推移

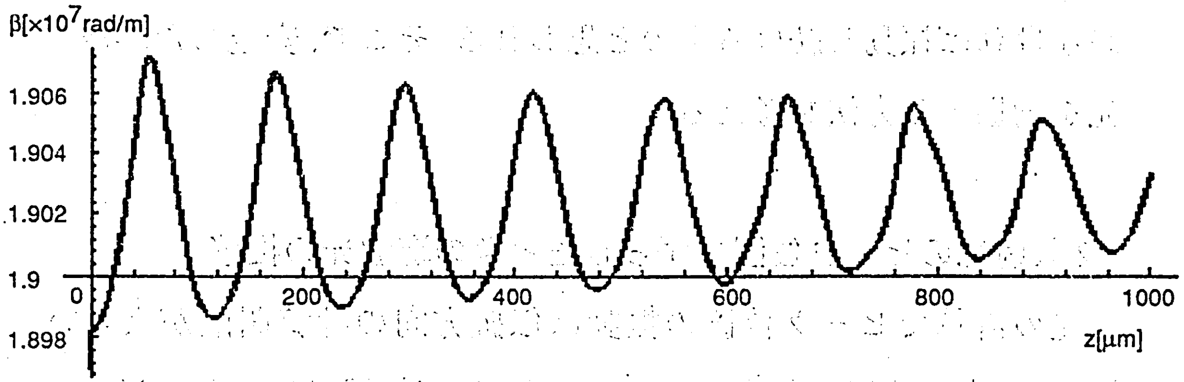
先の計算でピーク位置の振動は伝搬方向の計算間隔が大きい場合，一定の位置に集束している．その集束位置付近に入射光の中心をずらして入射すると安定した導波光が励振されるものと思われる．そこで，非線形層がなく，フィルム層の位置を非線形ク



(a) Δz = 1.0 [μm] の場合

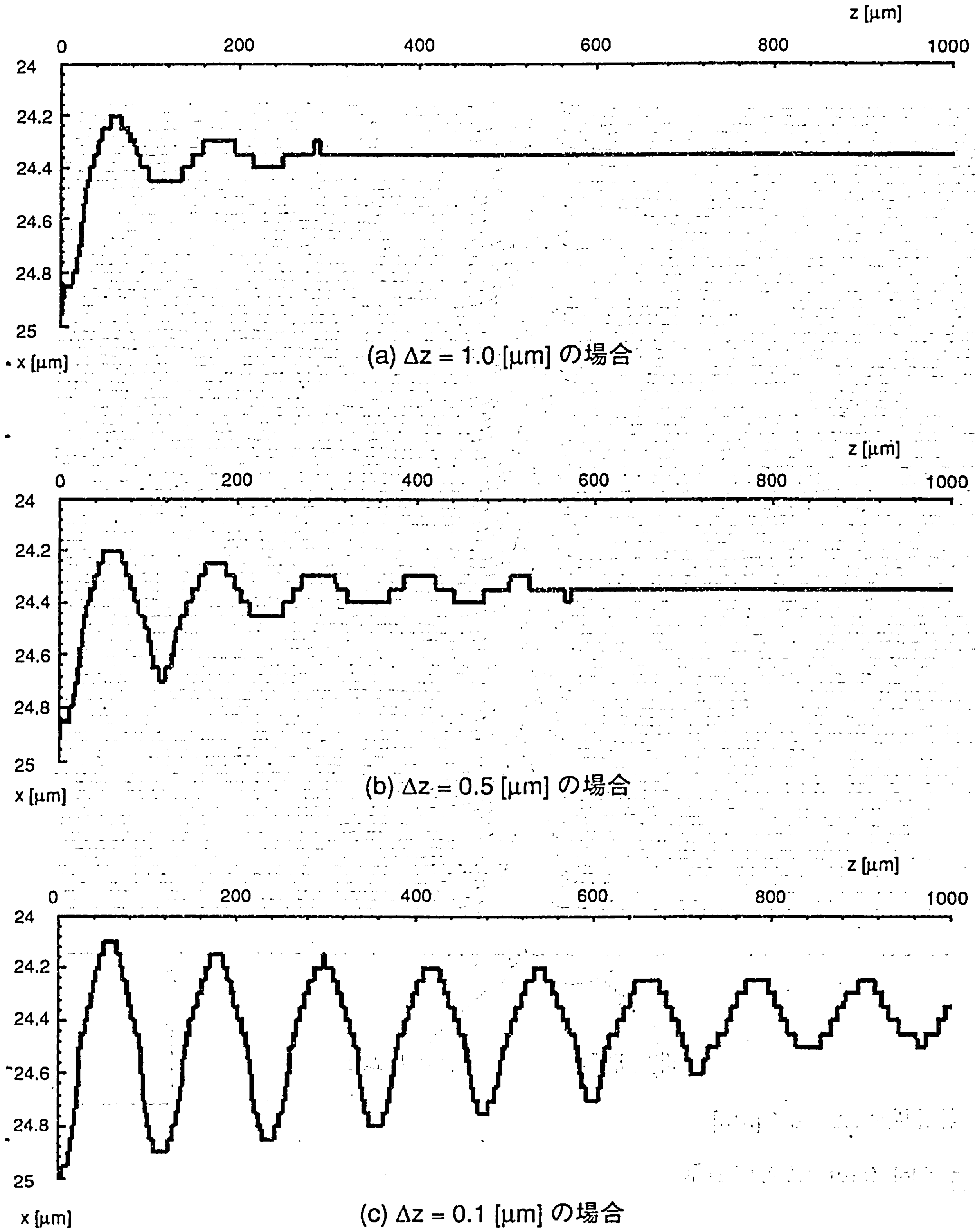


(b) Δz = 0.5 [μm] の場合



(c) Δz = 0.1 [μm] の場合

図4 導波光の0次モードの伝搬定数の推移



(a) Δz = 1.0 [μm] の場合

(b) Δz = 0.5 [μm] の場合

(c) Δz = 0.1 [μm] の場合

図5 導波光の界分布のピーク位置の推移

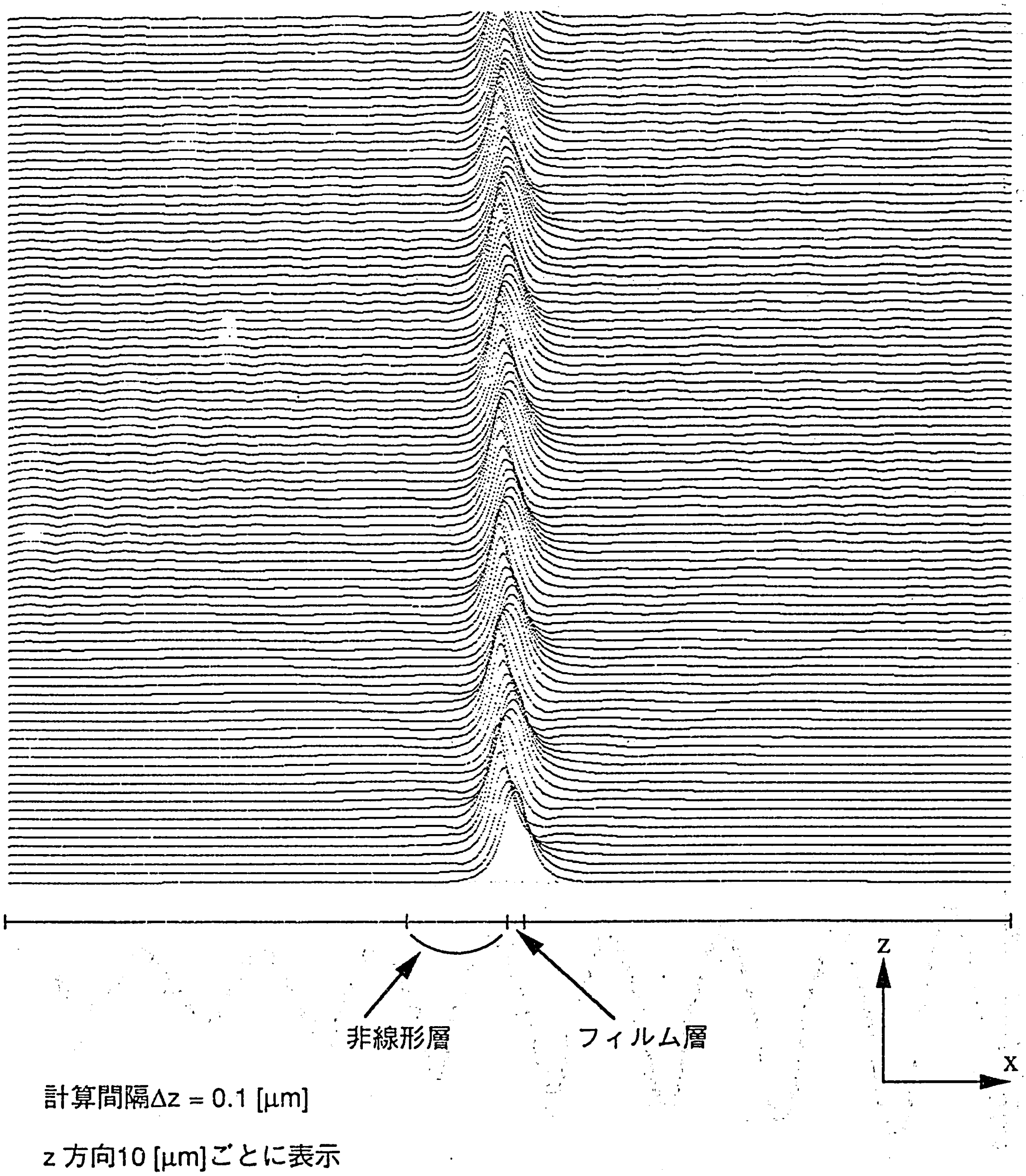
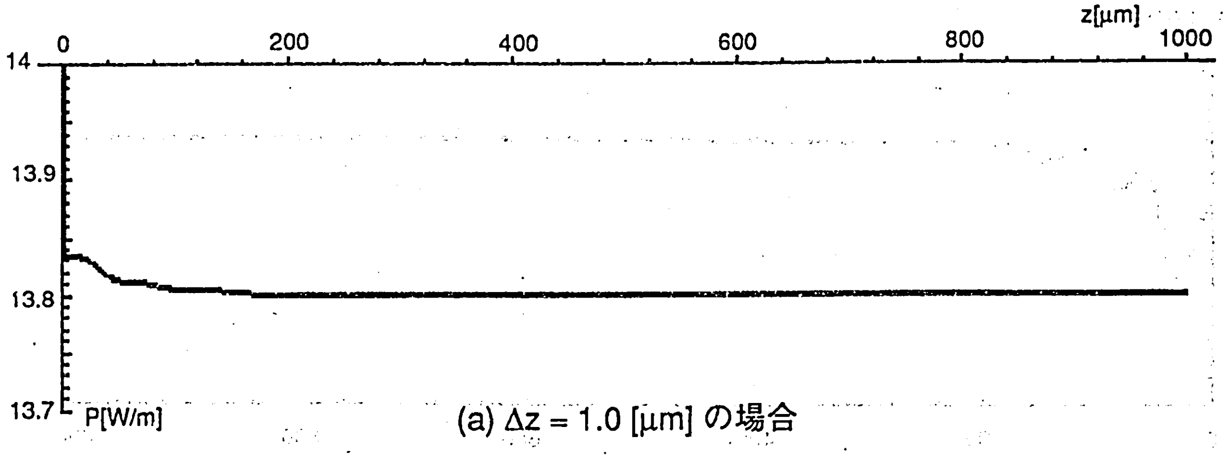
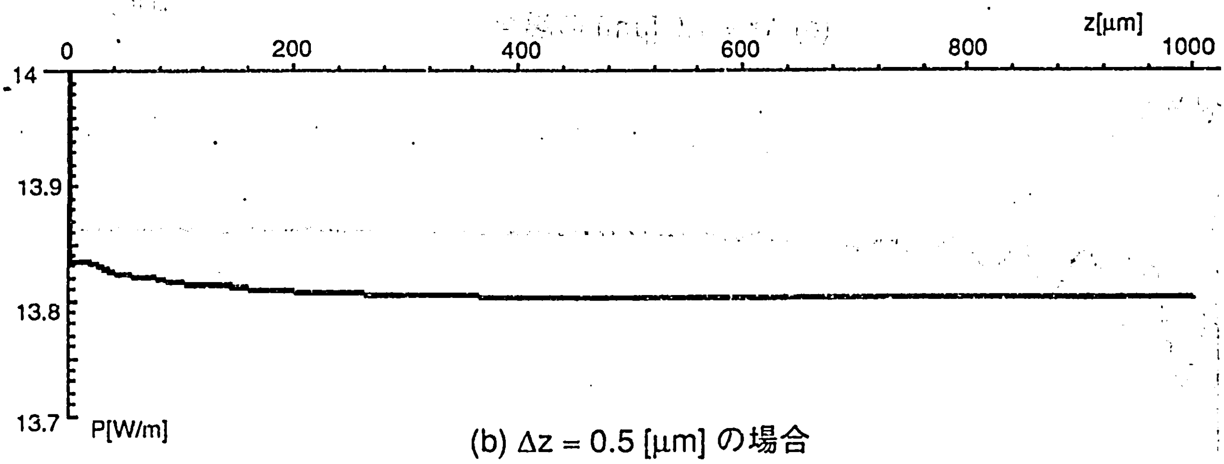


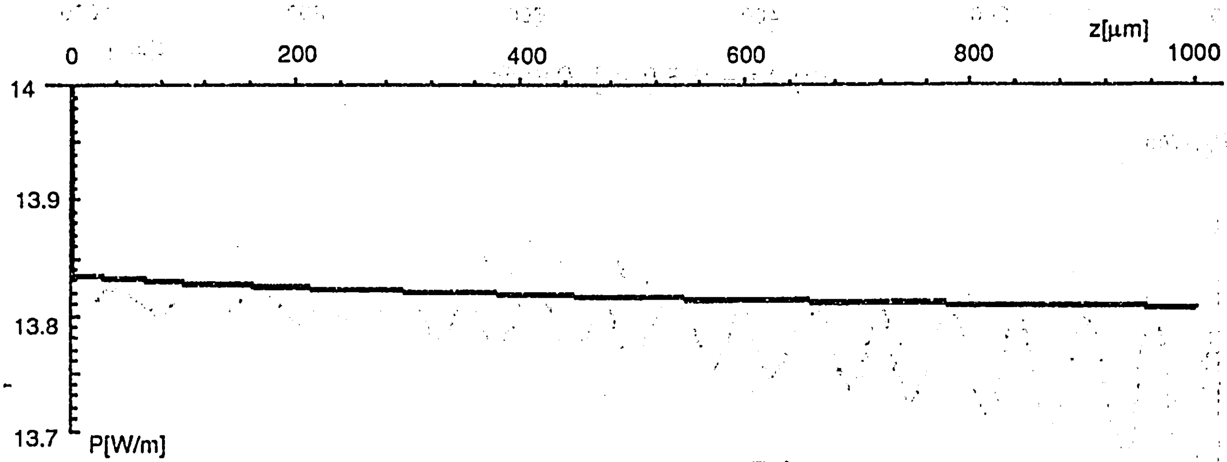
図6 導波光の界分布の推移



(a) Δz = 1.0 [μm] の場合

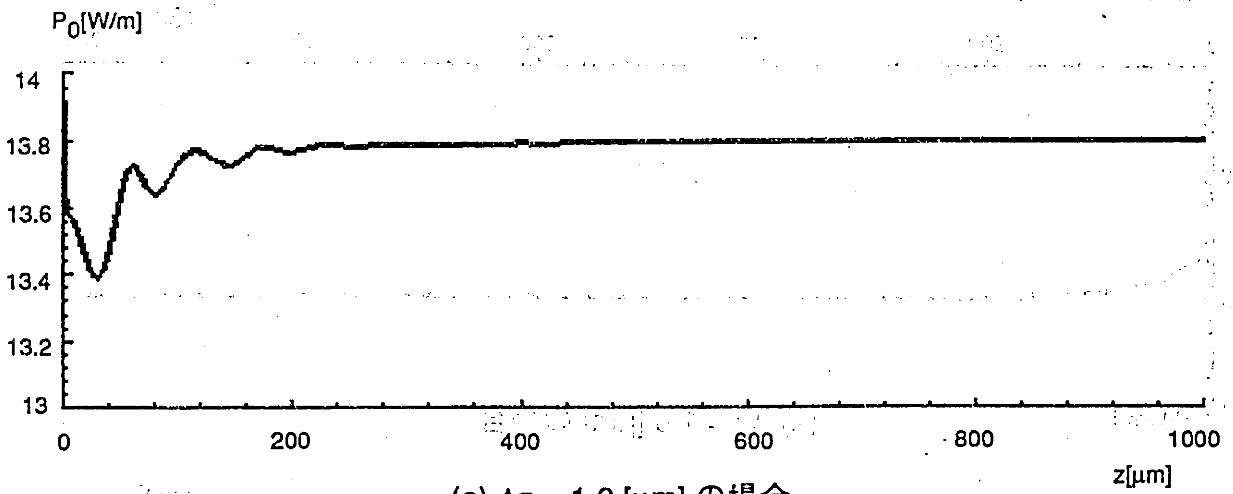


(b) Δz = 0.5 [μm] の場合

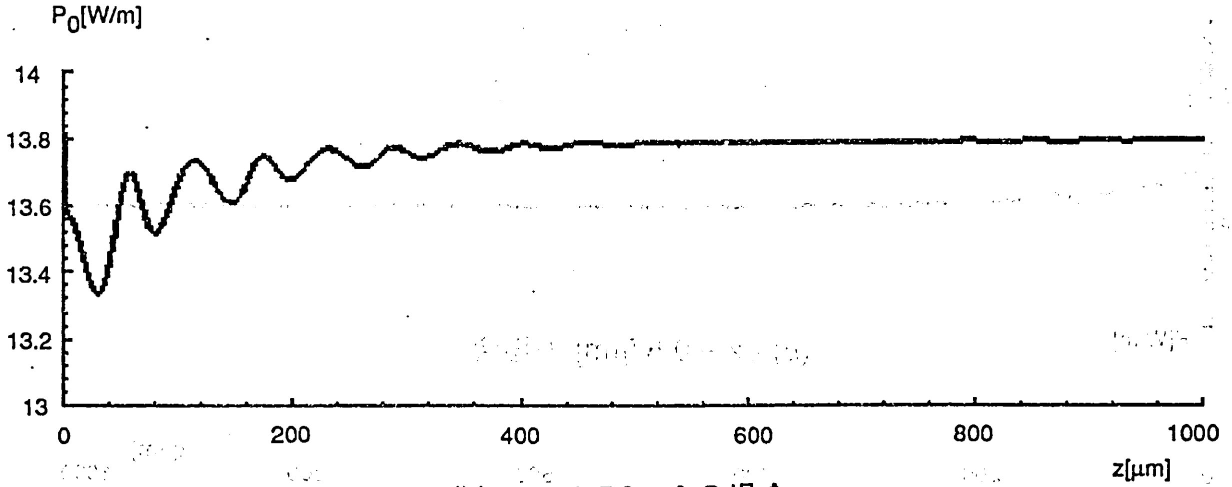


(c) Δz = 0.1 [μm] の場合

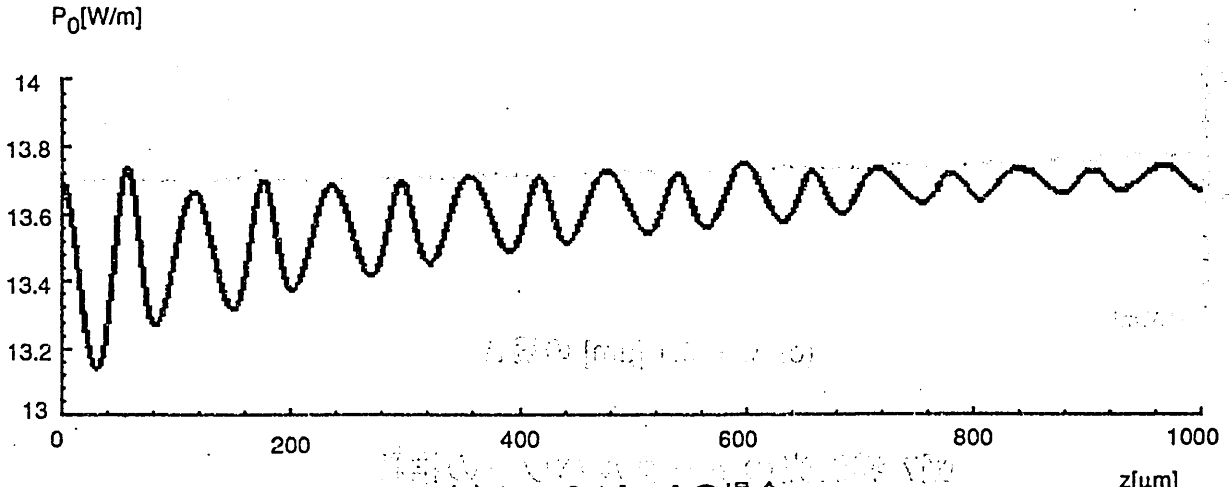
図7 導波光のトータルパワーの推移



(a) Δz = 1.0 [μm] の場合

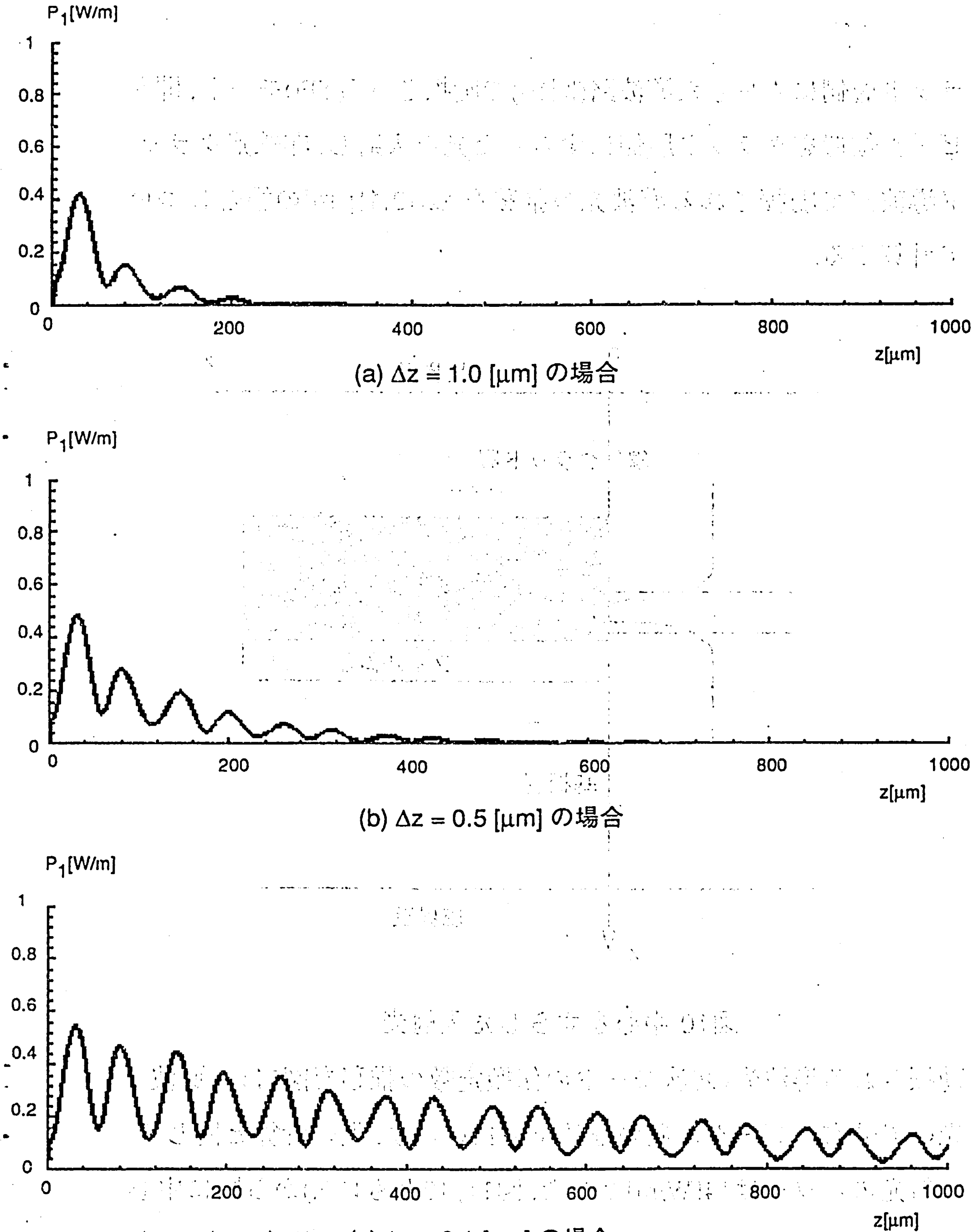


(b) Δz = 0.5 [μm] の場合



(c) Δz = 0.1 [μm] の場合

図8 0次モードのパワーの推移



(a) Δz = 1.0 [μm] の場合

(b) Δz = 0.5 [μm] の場合

(c) Δz = 0.1 [μm] の場合

図9 1次モードのパワーの推移

ラッド層側にずらした導波路(図10)で励振されるTE0モード，即ちピーク位置をクラッド層側にずらした光を入射し，非線形クラッド導波路で励振される導波光の推移をΔz=0.1[μm]の場合について計算する．

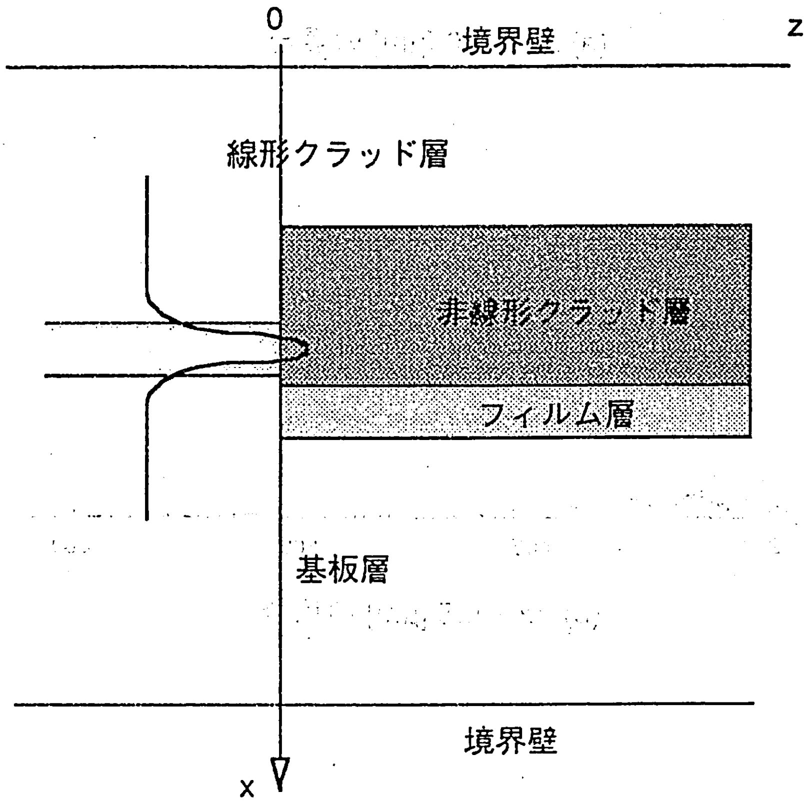
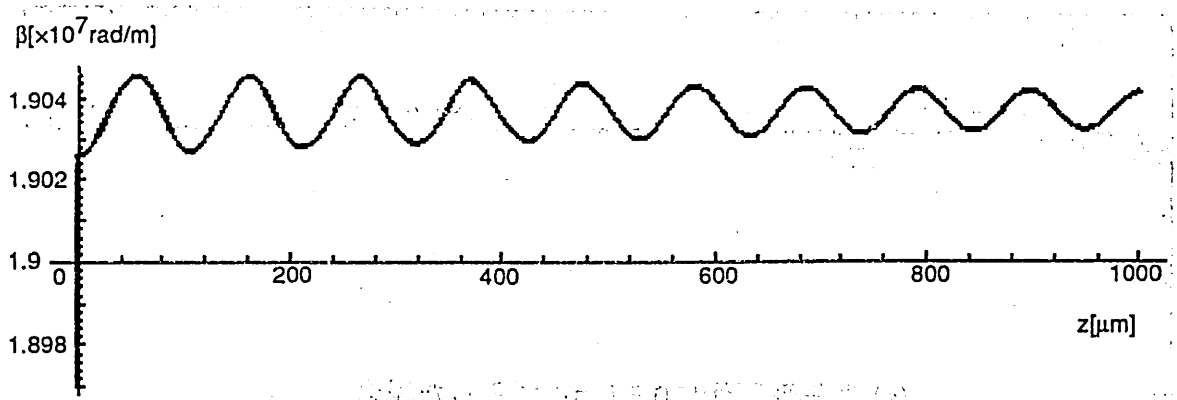
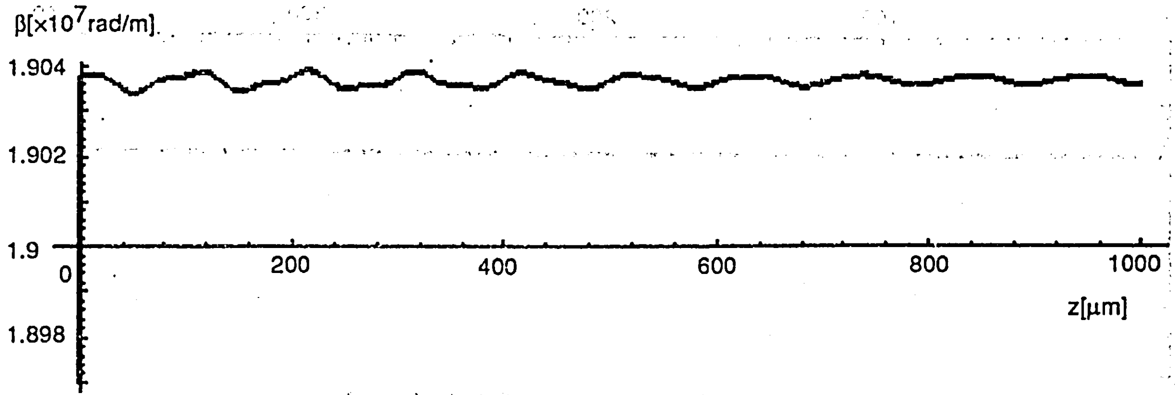


図10 中心をずらした入射光

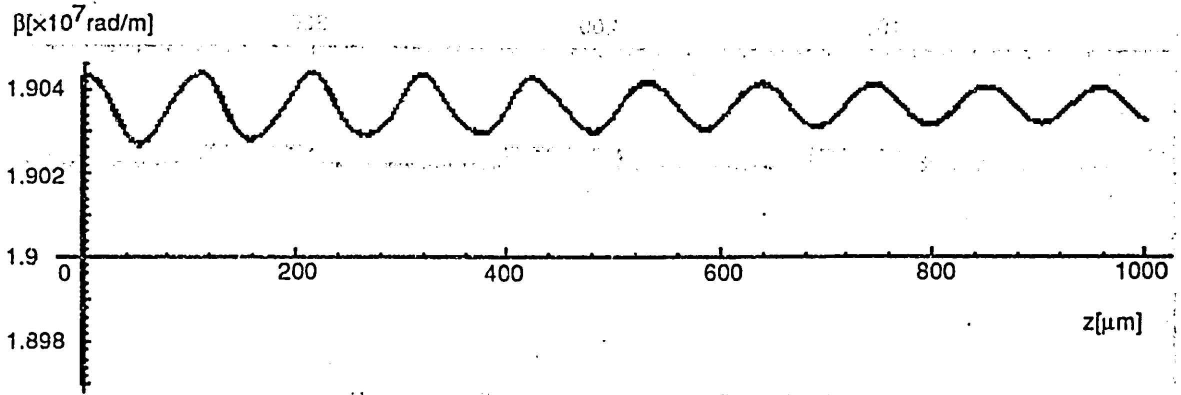
励振される導波光の0次モードの伝搬定数の推移を図11に，導波光の界分布のピーク位置の推移を図12に示す．先の計算と同じく入射光のパワーは14[W/m]とした．図11, 12ともに(a)から順に中心をクラッド側に0.5[μm], 0.6[μm], 0.65[μm]ずらした場合である．伝搬定数は小さく振動し続けているが，



(a) 非線形層側に0.5 [μm] ずらした場合

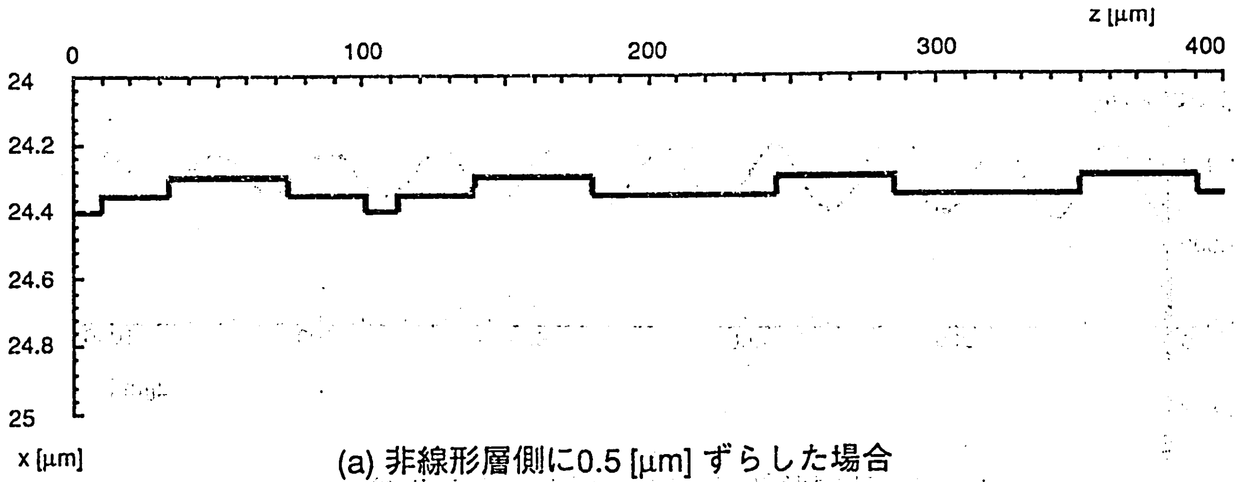


(b) 非線形層側に0.6 [μm] ずらした場合

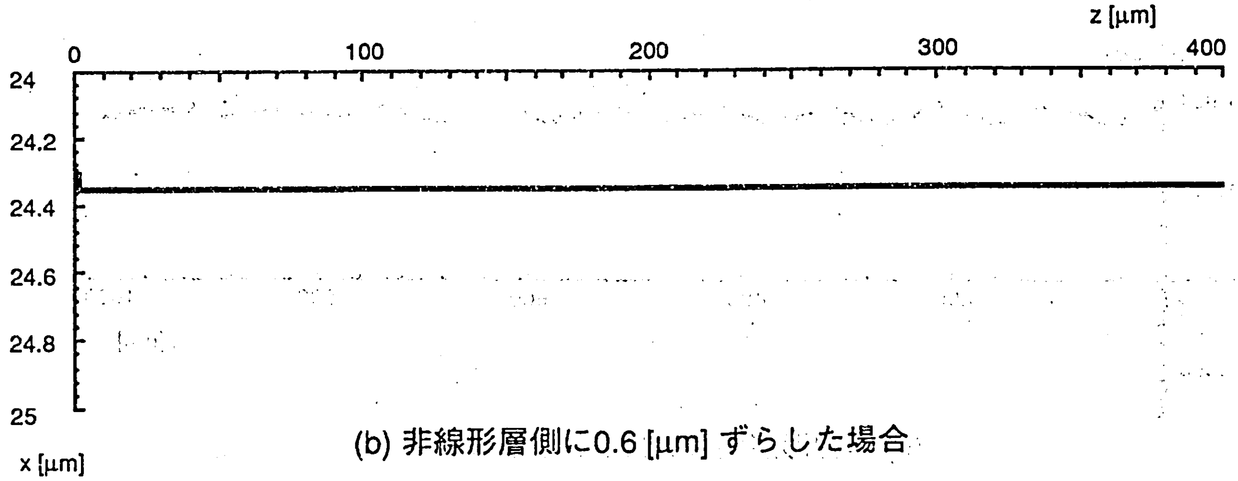


(c) 非線形層側に0.65 [μm] ずらした場合

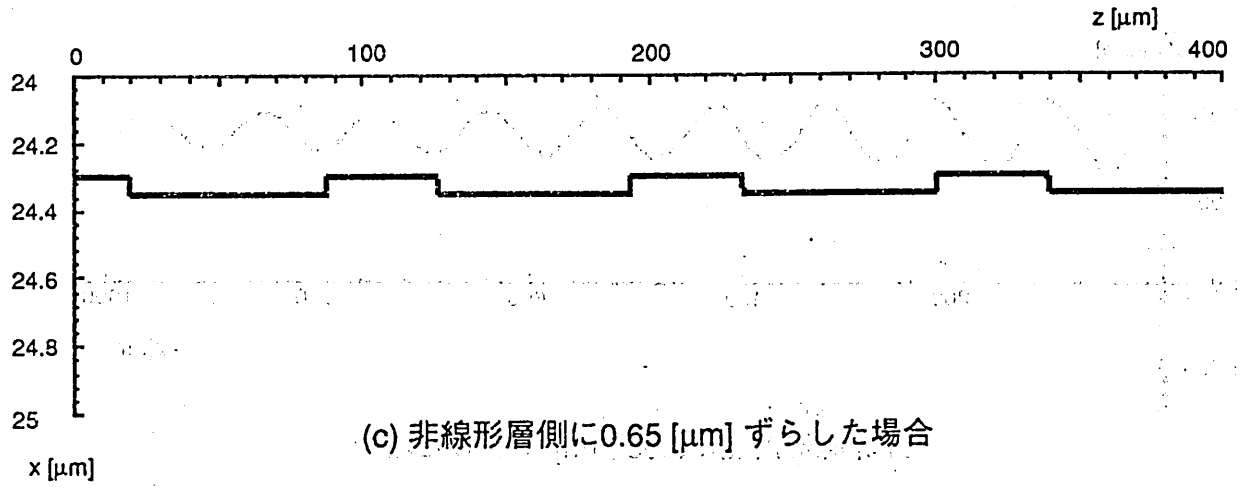
図11 入射位置をずらした場合の0次モードの伝搬定数の推移



(a) 非線形層側に0.5 [μm] ずらした場合



(b) 非線形層側に0.6 [μm] ずらした場合



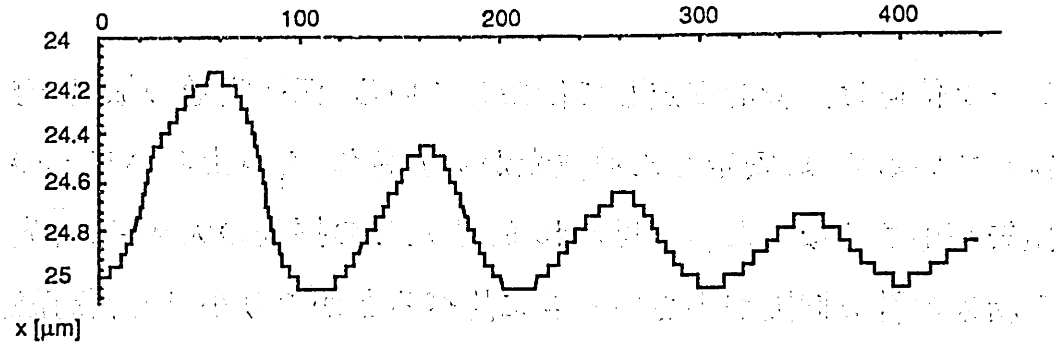
(c) 非線形層側に0.65 [μm] ずらした場合

図12 入射位置をずらした場合の界分布のピーク位置の推移

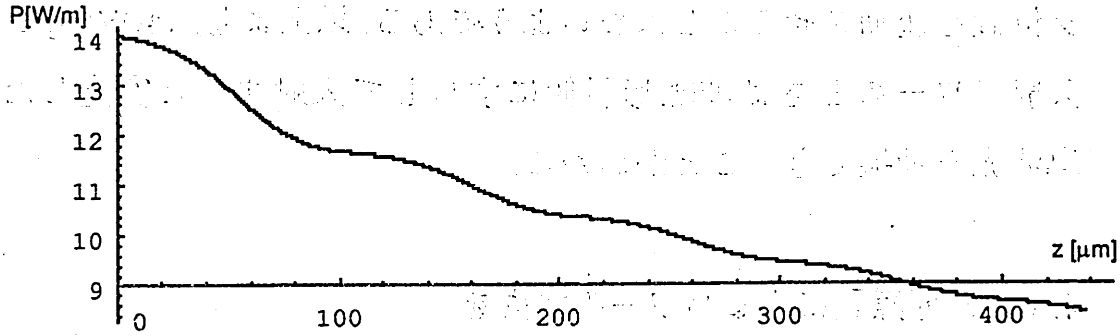
ピーク位置は比較的安定して伝搬している. 伝搬定数の振動が持続しているのは, 安定した導波光が励振され, 計算上のパワーの損失が小さくなるためと思われる. またこの振動の大きさは, 先の結果の計算間隔が小さいときに比べるとかなり小さく, 伝搬定数の小さな振動は図4(b)と図5(b)などからもわかるようにピーク位置を変動させることはないようである. 以上より, 14[W/m]の入射パワーのときは非線形層側にずらして入射すると安定した導波光を励振できることがわかる.

4.3 非線形媒質によるパワーの損失を考慮に入れた時の導波光の推移

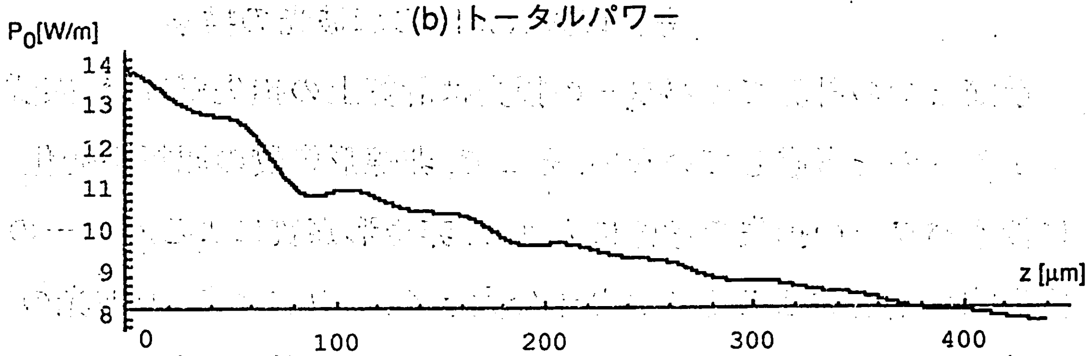
前節までの計算でのパワーの損失は計算上の損失だけで, 媒質によるものを考慮していない. そこで, 非線形媒質の屈折率変化に伴うパワーの損失を考慮に入れる. 非線形媒質によるパワーの損失[1]は, 計算によるものより十分大きく, これにより, 導波光の推移も変わってくるものと思われる. 非線形媒質の吸収係数は20 [cm^{-1}], 入射光はフィルム層に入射した場合と同じである. 励振される導波光の界分布のピーク位置, トータルパワー, 0次, 1次モードのパワーを図13に示す. $\Delta z=0.1[\mu m]$とした. パワーの損失があるため, トータルのパワーが下がっていき, 屈折率変化が小さくなって, ピークの位置の振動もフィルム層の中に収束してくものと思われる.



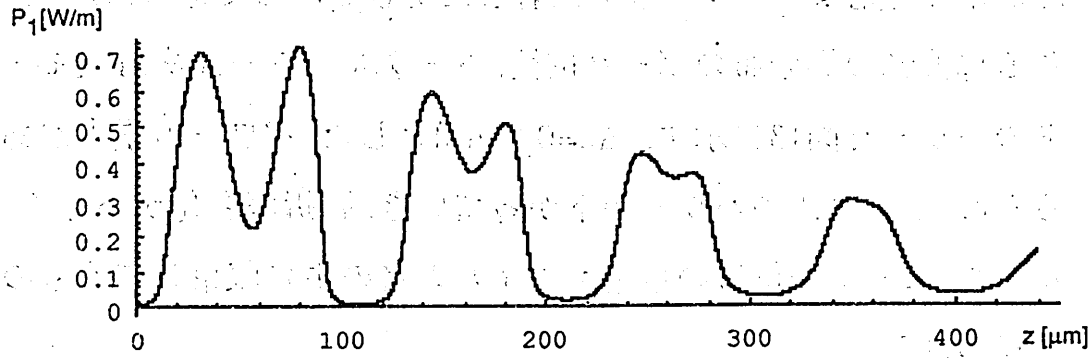
(a) 導波光の界分布のピーク位置の推移



(b) トータルパワー



(c) 導波光の0次モードのパワー



(d) 導波光の1次モードのパワー

図13 非線形層での損失を考慮した場合

5. むすび

非線形クラッド層をもった光導波路での導波光の励振について数値解析を行った. (1)入射光を非線形クラッド層がない場合のＴＥ0モードとした場合, (2)入射光の中心を非線形クラッド層側にずらした場合, (3)非線形媒質のパワーの損失を考慮に入れた場合の3つの場合における導波光の伝搬の様子を示した. これらの結果から, 14[W/m]の入射パワーのとき, 媒質によるパワーの損失がなく, 計算による損失が小さいと, 励振される界分布のピーク位置は振動して伝搬することがわかった. さらに, ピーク位置が安定した導波光を励振するには, 入射光の中心を非線形クラッド層側にずらして入射すればよいことがわかった. また, 非線形媒質によるパワーの損失を考慮した場合, トータルのパワーが大きく減衰していくため, 屈折率変化が小さくなっていき, ピーク位置の振動もフィルム層の中に収束していくことがわかった.

今回の解析はいずれも入射パワーが14[W/m]の場合しか行っていない. 大きな入射パワーの場合の計算は, まだ十分な計算が行えておらず, 今後の課題である.

参考文献

[1] D.Mihaleche et al. : Progress in Optics 27, chap. 4 (North-Holland, 1989)

[2] G.I.Stegeman et al. : IEEE Journal of Lightwave Technology, vol. 6, pp. 953-970 (1988)

[3] L. Leine et al. : Journal Optical Society of America, B, vol. 5, no. 2, pp. 547-558 (1988)

[4] 小野和雄 他 : 電子情報通信学会春季大会講演論文集, C-49 (1992)

[5] K. Ono et al. : IEEE Photonics Technology Letters, vol. 4, no. 4, pp. 381-384 (1992)

[6] 横田浩久 他 : 電子情報通信学会技術研究報告, vol. 93, no.203, OQE93-63 (1993)

[7] K. Tsutsumi et al. : IEEE Journal of Lightwave Technology, vol. 6, pp. 590-600 (1988)

[8] 大家重明 他 : 電子情報通信学会論文誌, vol. J73-C-I, no. 9, pp. 573-579 (1990)

[9] 大家重明 他 : 電子情報通信学会論文誌, vol. J75-C-I, no. 6, pp. 444-451 (1992)

RS93-17

擬似位相整合用グレーティングの位相反転変調による導波路第２高調波発生デバイスの波長受容幅拡大

Tuning bandwidth enhancement in a waveguide second harmonic generation device using a phase-reversed quasi-phasematching grating

藤村 昌寿* マイケル·L·ボルツ マーティン·M·フェヤー
Masatoshi Fujimura, Michael L. Bortz, Martin M. Fejer

スタンフォード大学 ギンズトン研究所 *)大阪大学工学部
Ginzton Lab., Stanford Univ. on leave from Osaka Univ.

1. まえがき

赤外半導体レーザ光の第2高調波発生(Second Harmonic Generation:SHG)は、短波長小型コヒーレント光源実現の手法として期待されている。図1に示す様な、強誘電体基板上に擬似位相整合(Quasi-PhaseMatching:QPM)用の分極反転グレーティングと光チャネル導波路を集積化したSHGデバイスは、高効率が期待できる，出射第2高調波（SH波）の集光が容易，グレーティング周期の設定により位相整合波長を選択できる、などの特長を持つため、現在活発に研究が行なわれている[1]。SHGデバイス実用化のための課題として、高いSHG変換効率，広い波長/温度受容幅の達成などがある。これまでは、主に高効率化を対象とした研究がなされており、LiNbO3[2],LiTaO3[3],KTiOPO4 [4]などを基板として用いたデバイスで10%以上の高い変換効率が達成されている。しかし、それらのデバイスの典型的な波長受容幅は1Å以下、温度受容幅は数℃程度であり、半導体レーザをポンプ光光源として用いるには不十分である。本論文では、高い変換効率を保ちつつ波長/温度受容幅を拡大する技術を理論的及び実験的に検討している。

SHGデバイスの波長/温度受容幅拡大のためにはいくつかの方法が考えられる。そのひとつは、SHGの相互作用長を短縮して受容幅を広げる方法である。しかし、これは同時に著しいSHG変換効率の低下を招く。また、光波の伝搬方向に沿ったQPM用グレーティングの周期[5]、あるいは導波路実効屈折率の変化[6]により、受容幅を拡大することができることが理論的に示されているが、作製許容誤差が厳しく実現には工夫を要する[7]。一方、基本波とSH波の結合の極性を部分的に反転させることによる受容幅拡大の可能性が示唆されており[8]、この原理に基づいた進行波型電気光学変調器の広帯域化の実験結果が報告されている[9]。我々は、さらに理論的検討を加えて、変換効率の低下を小さく抑えつつ受容幅を拡大できる極性反転構造を設計した。また、この極性反転をQPM用グレーティングの位相反転により実現したデバイスを作製し、その特性評価を行なった[10]。

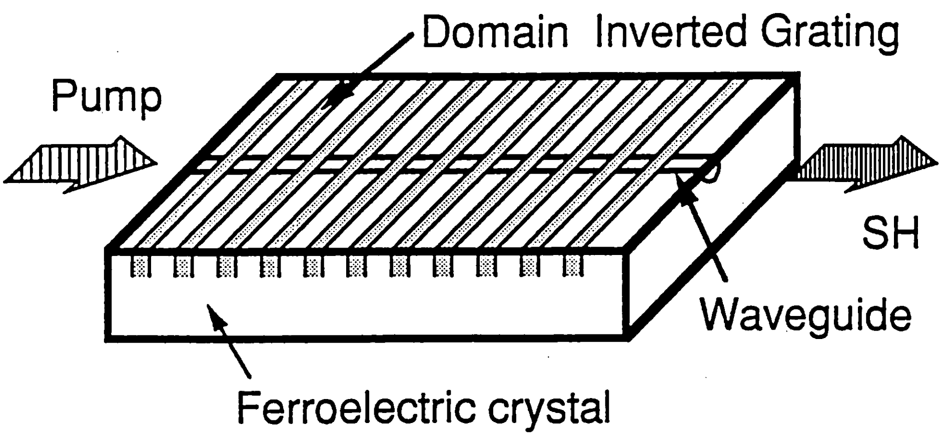


図1 擬似位相整合導波路第2高調波発生デバイス

2. 極性反転SHG

2.1 チューニングカーブ形状の解析[8]

基本波とSH波の結合極性を部分的に反転させたSHG（極性反転SHG）での変換効率の位相不整合量依存性（チューニングカーブ）を求める。簡単化のため、x方向に伝搬する周波数ω、光波長λの平面波（複素振幅:E^{ω}）からSH波（複素振幅:$E^{2\omega}$）が発生する場合をスカラ近似を用いて考える。この場合、SHGを記述する方程式は次式の様に表される。

$$\frac{dE^{2\omega}}{dx} = j\omega\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} d(x)E^{\omega}E^{\omega *}\exp(-j\Delta x) \qquad (1)$$

ここで、εはSH波に対する誘電率を、Δは式(2)で定義される基本波とSH波の位相不整合量を、d(x)は非線形媒質中でのSHG係数のx方向分布を表す。SHG相互作用長をL、0<x<L以外の範囲ではd(x)=0とする。

$$\Delta = \beta^{2\omega} - 2\beta^{\omega} \qquad (2)$$

β^{ω},$\beta^{2\omega}$はそれぞれ基本波,SH波の伝搬定数を表す。SHG変換効率がそれほど大きくなく、基本波の減衰が無視できるとして式(1)を積分すると、式(3)を得る。

$$E^{2\omega} = j\omega\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} E^{\omega}E^{\omega *}\int_{-\infty}^{+\infty} d(x)\exp(-j\Delta x)\, dx \qquad (3)$$

式(4)右辺の積分項は、SHG係数の空間分布d(x)のフーリエ変換である。式(3)より、SHG変換効率のチューニングカーブは式(4)で表されることがわかる。

$$\eta(\Delta) = \frac{I^{2\omega}}{I^{\omega}} = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega^2}{(N^{\omega})^2 N^{2\omega}} I^{\omega} |F(d(x))|^2 \qquad (4)$$

ここで、$F(d(x))$はd(x)のフーリエ変換を、N^{ω},$N^{2\omega}$は基本波とSH波に対する屈折率を表すとする。式(4)は、チューニングカーブの形状がSHG係数の分布d(x)を変えることで制御可能であることを意味している。相互作用長Lの通常の均一な結合によるSHGでは、d(x)はLの幅を持つ矩形関数で表されるので、チューニングカーブは式(5)で表される様に、そのフーリエ変換であるsinc^{2}形となる。

$$\eta(\Delta) = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 d^2}{(N^{\omega})^2 N^{2\omega}} I^{\omega} L^2 \mathrm{sinc}^2(\Delta L/2) \qquad (5)$$

また、分極反転グレーティングを用いた擬似位相整合の場合、d(x)は有限長の周期的関数であり、sinc^2形を保ちつつもその中心が$\Delta=0$から$\Delta=2\pi/\Lambda$（Λはグレーティング周期）にシフトする。

式(5)からわかる様に、相互作用長Lの短縮によって位相不整合量受容幅は拡大できる。例えば、相互作用長を1/Nにすれば受容幅はN倍になる。しかし、ピーク変換効率は$1/N^2$になってしまう。ここでは別の受容幅拡大方法として、SHG相互作用領域をN個の長さの等しいセグメントに分割し、各セグメント毎の結合極性、すなわち、SHG係数の符号をNビットの符号列gm（gm=+1または-1）に従って反転させた場合を検討する。この場合のd(x)は、幅L/Nの矩形関数とアレイ要素a(x)の合成積で表される（式(6)）。

$$d(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{xN}{L}\right) \otimes a(x) \tag{6}$$

但し、アレイ要素a(x)と符号列gmは次式で関係づけられる。

$$a(x) = \sum_{m=0}^{N-1} g_m\, \delta\left(x-m\frac{L}{N}\right) \tag{7}$$

式(6)を式(4)に代入すると式(8)の位相不整合量依存性が得られる。

$$\eta(\Delta) = 2\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega^2 d^2}{(N^\omega)^2\, N^{2\omega}}\, I^\omega\, L^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta L}{2N}\right) \mathit{DFS}\,(g_m \bigstar g_m) \tag{8}$$

ここで、*DFS*は離散フーリエ変換を、★は相関を表す。これより、チューニングカーブの形状は適当なgmを選ぶことにより変形できることがわかる。式(8)では、sinc^2項の引数が式(5)の1/Nになっていることから、極性反転SHGでは通常の均一極性SHGに比べてN倍の位相不整合量受容幅を持つことが期待できる。ただし、フーリエ変換項によりピーク変換効率が低下するので、受容幅・ピーク効率積をN倍にすることはできない。式(4)に示した様に、チューニングカーブ形状がSHG係数分布d(x)のフーリエ変換の２乗で与えられることから、極性反転SHGのチューニングカーブの下になる部分の面積はいかなるd(x)を用いても、$gm=\pm1$である限り、保存される。従って、最適な場合として、チューニングカーブの形が矩形に近くなる様なビットパターンgmを探して用いれば、受容幅・ピーク効率積を保存したままで約N倍の受容幅拡大を実現できる。

2.2 広波長/温度受容幅SHGデバイスの設計

2.1において述べた様に、極性反転SHGにより比較的高いピーク変換効率を維持しつつ受容幅を拡大するには、ビット列gmのフーリエ変換で与えられるチューニングカーブの形が矩形に近い必要がある。自己相関関数のサイドローブが小さいビット列がそのようなフーリエ変換形を与えることが知られており、スペクトル拡散通信において用いられる[11]。自己相関関数のサイドローブが最小（+1または-1）となるビット列はBarkerコードと呼ばれている。現在までに知られている最長のbarkerコードは（+,-,+,-,+,+,-,-,+,+,+,+,+)の13ビットのものである。この13ビットBarkerコードを用いた極性反転SHGのチューニングカーブ形状を式(8)を用いて計算した。その結果を図2中に破線で示す。同じ相互作用長の通常の均一極性SHGのチューニングカーブ（図2中点線）に比べてると、約14倍のパスバンド幅が得られているおり、ピーク変換効率低下は約1/5に抑えられている。しかし、パスバンド内において約7dBのリップルが生じており、3dB受容幅はあまり広がっていない。

このリップルを抑えるため、我々は、セグメント長を各セグメント毎に変化させる方法を試みた。図3中の破線は全て等しいセグメント長を持つ場合の極性反転SHGの光波伝搬軸に沿ったSHG係数分布を表している。SHG係数の符号が13ビットBarkerコードに従って変化している。我々は、図3 の実線で示されるように、第i番目と第i+1番目（i=1～12）のセグメントの境界位置をΔiだけシフトさせた。様々なΔiの組み合せを試した結果、図2中の実線で示す様なリップル2.5dB以下のチューニングカーブを与えるΔiの組み合せを見出した。このチューニングカーブを均一SHGのものと比べると、約15倍の3dB受容幅拡大を約1/11のピーク変換効率の低下で達成している。これと同等の受容幅拡大を通常の均一極性SHGの相互作用長短縮により得た場合には、ピーク変換効率が1/225になる。なお、以上の計算において、屈折率の波長分散はLiNbO3バルク結晶の異常光の分散を用いた。[12]

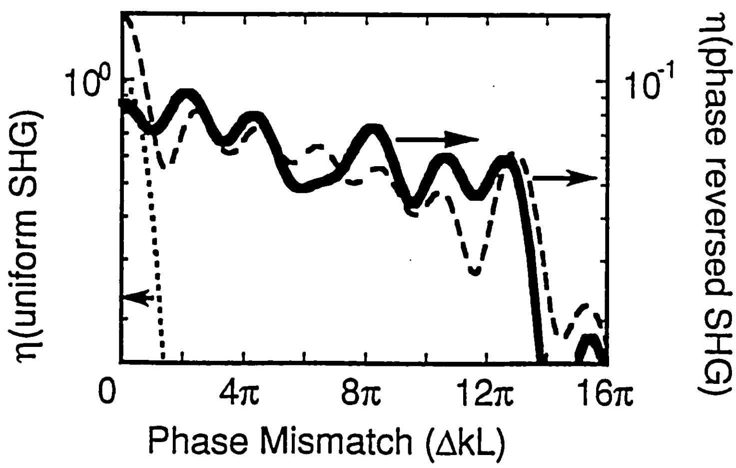


図2　極性反転SHGのチューニングカーブ計算例

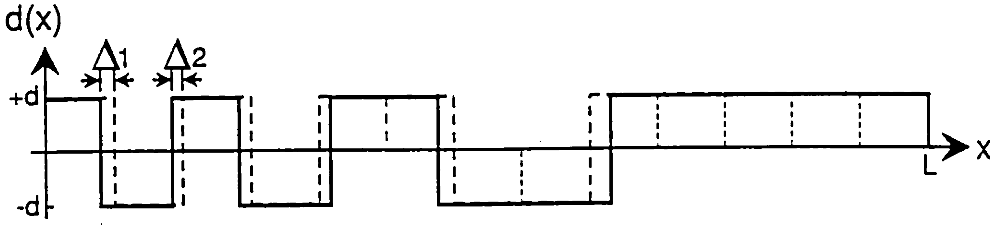


図3　セグメント境界位置シフトによるSHG係数分布変化

表1　広帯域SHGのセグメント境界位置シフト量

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Δi (x L /1000)	-12	-11	-5	13	0	-8	0	13	0	0	0	0

3. デバイスの作製と評価

3.1 擬似位相整合用グレーティングの位相反転変調

擬似位相整合(QPM)SHGデバイスでの極性反転SHGは、図4の様にQPM用グレーティングの位相を部分的に反転することで実現できる。図4(a)は均一なQPM用分極反転グレーティングでのSHG係数の符号分布を、図4(b)は極性反転SHGに必要なSHG係数分布d(x)を示している。極性反転QPM-SHGデバイスのSHG係数分布は、図4(c)に示す様に、図4(a)と図4(b)を重ね合わせた符号分布となり、d(x)の符号に応じてQPM用グレーティングの位相が反転変調される。

この様な構造は、従来のQPM-SHGデバイス作製技術を用いて簡単に作製できる。

3.2 デバイス作製

+Z板LiNbO3基板上に、2.2で設計した位相反転変調QPM用グレーティングを用いた極性反転QPM-SHGデバイスを試作した。厚さ100ÅのTi膜をリフトオフでグレーティングパターン化した後、基板をLiNbO3粉末と共にるつぼ内に入れ、1050℃,3分の熱処理によるTi熱拡散で分極反転グレーティングを作製した[13]。位相反転変調QPM用グレーティングの周期は4μm、相互作用長3.9mmとした。同一基板上に均一なQPM用のグレーティング（相互作用長1.95mmおよび3.9mm）も同時に作製した。

光チャネル導波路はプロトン交換とアニールにより作製した。プロトン交換マスクとして、化学エッチングで5μm幅の導波路パターンを転写したSiO2膜（厚さ1000Å）を用いた。プロトン交換は160℃の純粋安息香酸中に100分浸して行ない、さらに空気中で333℃,6時間のアニールを行ない、基本波に対し単一モードの導波路を得た。

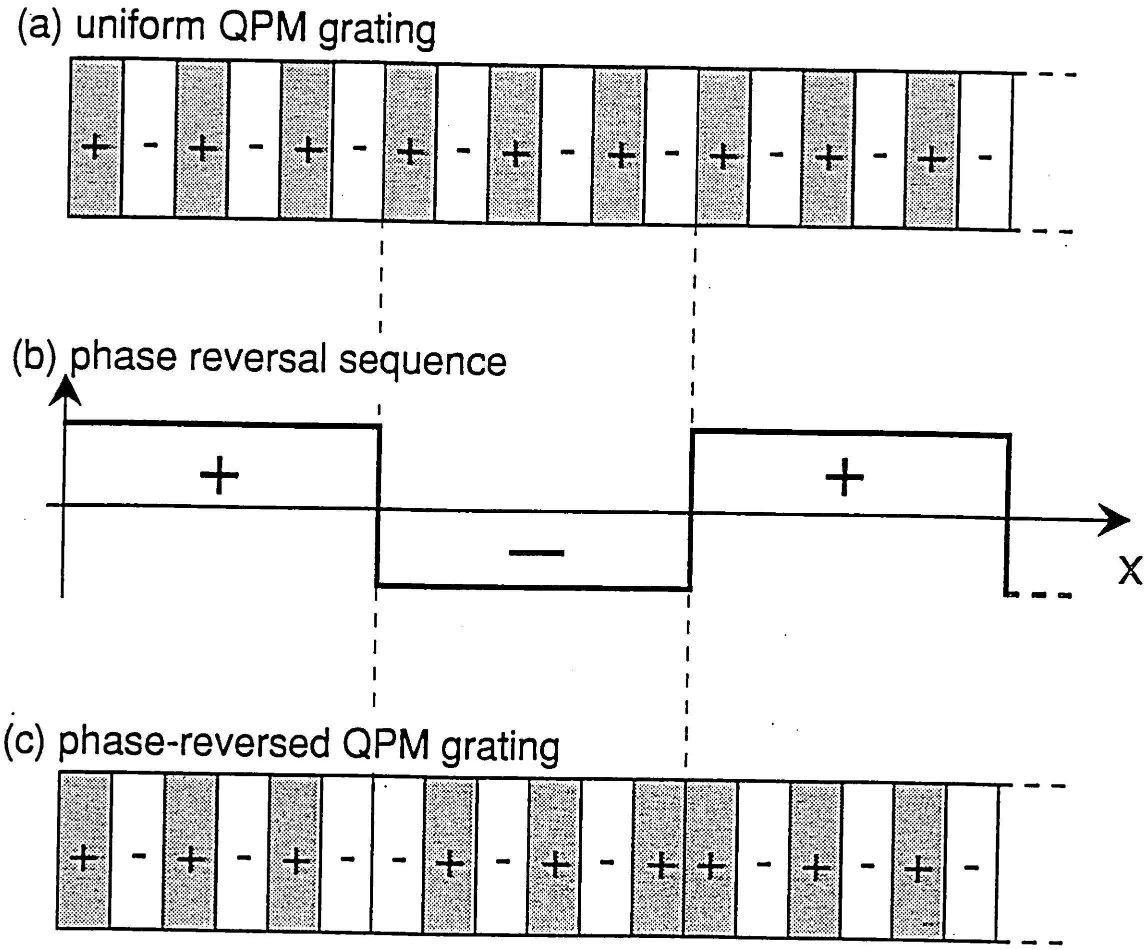


図4　位相反転変調による極性反転QPM-SHG実現

3.3効率の基本波波長依存性測定

作製した極性反転QPM-SHGデバイスの位相不整合受容幅拡大の効果を調べるため、波長可変Ti:Al2O3レーザを基本波光源として用い、導波路内にTM-like基本モードを励振して、SHG変換効率の基本波波長依存性を測定した。Ti:Al2O3レーザ発振波長をスキャンしたときの基本波波長、出射基本波パワー、出射SH波パワーを同時測定して、図5,図6(b)のチューニングカーブを得た。図5は均一なQPM用グレーティングを持つ導波路内でのSHGチューニングカーブを示している。式(6)から予想された様に、黒丸で示した相互作用長1.95mmの場合の3dB波長受容幅は、白丸で示した相互作用長3.9mmの場合に比べると、2倍に広がっているが、ピークSHG変換効率は1/4になっていることがわかる。図6(a)は、計算により求めた極性反転QPM-SHGの理論チューニングカーブ（実線）と、それと同じ相互作用長を持つ均一極性のQPM-SHGの理論チューニングカーブ（点線）を示しており、図2と同じものである。図6(b)は、実験により得たチューニングカーブである。極性反転QPM-SHGデバイスの波長受容幅の測定値は38Å、均一極性の時は2.5Åで、約15倍波長受容幅拡大が実現できた。ピーク波長の低下は1/11程度に抑えられている。これらの値は2.2で述べた理論値と完全に一致してい

る。また、図6(a)と比較すると、チューニングカーブの形状も理論予測と良く一致している
ことがわかる。ただし、パスバンド内のリップルが7dB程度と理論予測（<2.5dB）より大き
くなっている。実験により得られた特性を表2にまとめる。

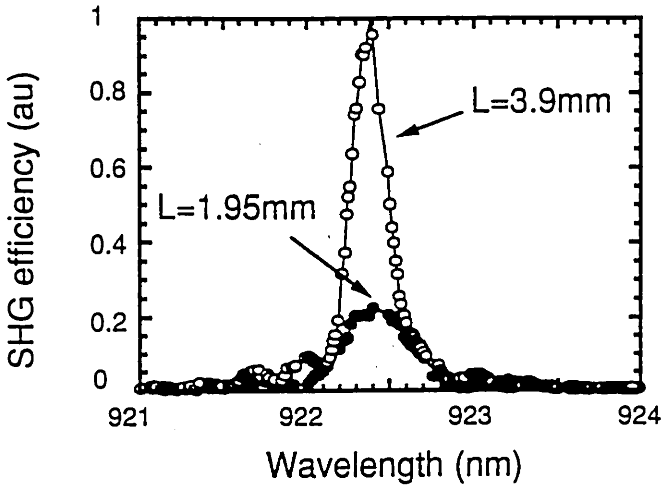


図5　均一極性SHGでのチューニングカーブ測定結果

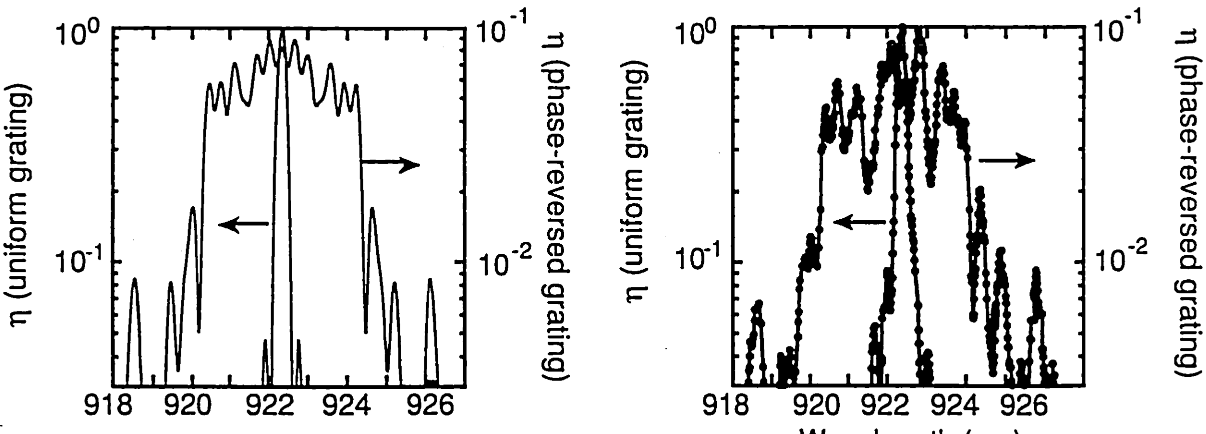


図6　極性反転SHGでのチューニングカーブ
(a)理論予測，(b)実験結果

表2　作製したデバイスの効率,波長受容幅の比較

Grating type	Uniform		Phase reversed
Interaction length (mm)	3.9	1.95	3.9
SHG efficiency　(%/W)	18	4	1.6
Wavelength bandwidth (Å)	2.5	5	38

4. むすび

導波路SHGデバイスの位相整合誤差受容幅を拡大するために、部分的に非線形結合の極性を反転させる方法を検討した。理論検討の結果、ピーク変換効率の低下を最小限に抑えつつ受容幅を15倍拡大できる結合極性分布を見出した。非線形結合の極性反転をQPM用グレーティングの位相反転により実現して、極性反転QPM-SHGデバイスを作製、SHG効率の基本波波長依存性を測定した。実験結果と理論予測は非常に良く一致した。しかし、パスバンド内に7dB程度のリップルが生じた。このリップルの原因は、導波路作製時の誤差による導波路屈折率の不均一さ、あるいは、Ti拡散により作製した分極反転グレーティングの構造不均一さであると考えており、現在これらの不均一さを考慮した時のチューニングカーブ形状について理論計算を行なっている。

謝辞　本研究は、スタンフォード大学ギンズトン研究所において、藤村昌寿の短期滞在中に行なわれた。スタンフォード大学訪問の機会を与えてくださった、大阪大学工学部教授西原浩先生，助教授栖原敏明先生に感謝します。

参考文献

[1] 栖原敏明, 藤村昌寿, 西原浩:"擬似位相整合による導波形SHG素子," 電子情報通信学会誌, Vol.76, No.6, pp.597-601 (June 1993).

[2] M.Yamada, N.Nada, M.Saitoh, and K.Watanabe:"First-order quasi-phase matched LiNbO3 waveguide periodically poled by applying an external field for efficient blue second-harmonic generation," Appl. Phys. Lett., Vol.62, No.5, pp.435-436 (Feb. 1993).

[3] K.Yamamoto and K.Mizuuchi:"Blue-light generation by frequency doubling of a laser diode in a periodically domain-inverted LiTaO3 waveguide," IEEE Photon. Tech. Lett., Vol.4, No.5, pp.435-437 (May 1992).

[4] J.D.Bierlein:"Second harmonic generation and sum frequency generation in optical systems," Compact Blue-Green Lasers, Santa Fe, New Mexico, FC2-1 (Feb. 1992).

[5] T.Suhara and H.Nishihara:"Theroretical analysis of waveguide second-harmonic generation phase matched with uniform and chirped gratings," IEEE J. Quantum Electron., Vol.26, No.7, pp.1265-1276 (July 1990).

[6] 亀岡真紀子, 芳賀宏, 山本錠彦:"テーパ形光導波路を用いた広帯域QPM-SHG素子," 応用物理学会秋期講演会, 18a-X-3 (Sep. 1992).

[7] 水内公典, 山本和久, 加藤誠, 佐藤久直:"分極反転型LiTaO3 SHG素子の許容度向上(II)," 応用物理学会秋期講演会, 18a-X-7 (Sep. 1992).

[8] M.Nazarathy and D.W.Dolfi:"Spread-spectrum nonlinear-optical interactions: quasi-phase matcing with pseudorandom polarity reversals," Opt. Lett., Vol.12, No.10, pp.823-825 (Oct. 1987).

[9] M.Nazarathy, D.W.Dolfi, and R.L.Jungerman:"Velocity-mismatch compensation in traveling-wave modulators using pseudorandom switched-electrode patterns," J. Opt. Soc. Am. A., Vol.4, No.6, pp.1071-1079 (June 1987).

[10] M.Fujimura, M.L.Bortz, and M.M.Fejer:"Tuning bandwidth enhancement in LiNbO3 waveguide SHG device using a variable-spaced phase-reversed quasi-phasematching grating," Opt. Soc. Am. Annual meeting, Toronto, Canada, PDP-11 (Oct. 1993).

[11] R.C.Dixon, *Spread Spectrum Systems* (Wiley, New York, 1953).

[12] G.J.Edwards and M.Lawrence:"A temperature dependent dispersion equation for congruently grown lithium niobate," Optic. Quantum Electron., Vol.16, No.4, pp.373-374 (July 1984).

[13] E.J.Lim, M.M.Fejer, and R.L.Byer,"Second harmonic generation of green light in periodically poled lithium niobate waveguide," Electron. Lett., Vol.25, No.11 pp.731-732 (May 1989).

輻射科学研究会資料
（ＲＳ９３－１８）

誘電体装荷パッチアンテナの入力インピーダンス

津川哲雄+ 平岡一剛+ ウドム・バンヤッパシル++ 杉尾嘉彦++
大阪工業大学+ 摂南大学++

日時：１９９３年１２月３日
会場：摂南大学寝屋川学舎７号館７Ｆ
第３会議室

誘電体装荷パッチアンテナの入力インピーダンス

津川哲雄[+] 平岡一剛[+]　ウドム・バンヤッパシル[++] 杉尾嘉彦[++]
大阪工業大学[+]　　　　　　　　　　摂南大学[++]

1．まえがき

グランド板を具備した波源、例えばグランド板を取り付けた開放導波管を波源として、これに低誘電率の誘電体を装荷することにより能率の高いアンテナが得られる。(1)(2)　このような誘電体を円偏波マイクロストリップパッチアンテナに装荷して素子とし、これをアレイにして高利得な衛星放送受信用平面アンテナが得られることを報告したが(3)(4)、パッチアンテナに誘電体を装荷した場合の入力インピーダンスについては充分な検討がなされていない。

本報告は図１の様にマイクロストリップパッチアンテナに誘電体を装荷した場合の共振周波数と、パッチのインピーダンスが誘電体の装荷の仕方によってどの様に変化するかを実験的に調べた結果について報告するものである。

パッチアンテナに角柱状または円柱状の誘電体を装荷した場合のインピーダンスと利得の変化は、パッチアンテナ近傍の等価誘電率の変化に伴う変化のみならず、パッチに近い誘電体の面、及び遠い面からの反射波の影響により変化する。グランド板から誘電体の遠い面までの電気長が１／４波長の奇数倍においてパッチのインピーダンスは低下し、利得は極大値となる。

2．測定の方法について

パッチアンテナを構成する基板は発泡ポリエチレン基板（厚み：０．８ｍｍ、ε_r＝１．７９）を用い、測定は次の二種類の方法で行

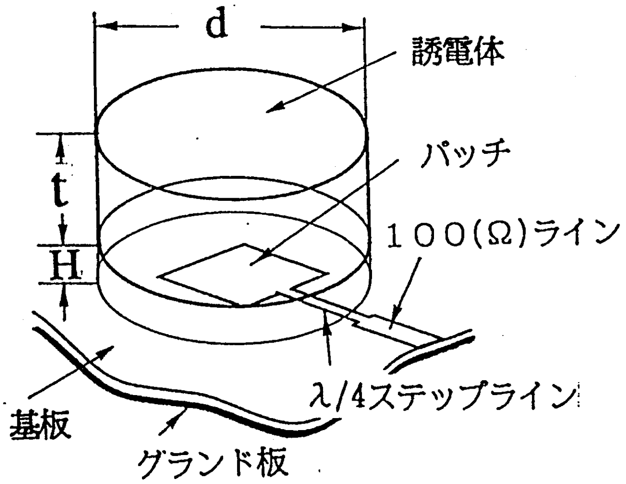


図1 パッチアンテナの誘電体装荷構造図

うこととした。

第一の方法は、図1の様に給電線路を50（Ω）の同軸線路から特性インピーダンスが50（Ω）のストリップ線路に変換し、更にテーパーラインで100（Ω）に変換して方形のパッチアンテナに給電し、各誘電体の装荷条件に対してネットワークアナライザーで給電線路とパッチの接続部から見たインピーダンスを測定する方法と、これに対して第二の方法はパッチの端のインピーダンス、即ち、誘電体装荷によりパッチの入力インピーダンスがZp に変化するとして、100（Ω）のマイクロストリップ線路に特性インピーダンスZm （Ω）の1／4波長整合用ステップラインを多数製作してこれらを介して給電した場合について測定し、最もよく整合がとれるZm の値からパッチの入力インピーダンスZp を得る方法である。

このように二つの測定方法をとった理由は、第一の方法の様にパッチに100（Ω）ラインで給電する場合と、実際に整合したラインで給電する場合とではパッチの給電部分における電流分布が異なるため、パッチそのもののインピーダンスも異なっているものと思われるからである。即ち、100（Ω）のラインで給電する事によ

りパッチのインピーダンスを測定した場合の結果に基づいて整合ラインを構成しても、多少の不整合が生ずるものと思われるからである。

装荷に用いられる誘電体はポリプロピレン(ε_r=2.3) で図１の様に直径ｄを２５．３(mm)（ｆo=11.85GHzの１波長）とする円盤ないし円柱状のものとし、その厚みｔを１(mm)から３０(mm)まで１(mm)おきに厚くし、基板表面と誘電体間隔Ｈをパラメーターとして、１(mm)から５(mm)まで１(mm)おきに広げた場合と、１２(mm)の場合のインピーダンスとリターンロスをネットワークアナライザーで調べた。利得についてもＨが１(mm)の場合について測定した。

３．実験結果

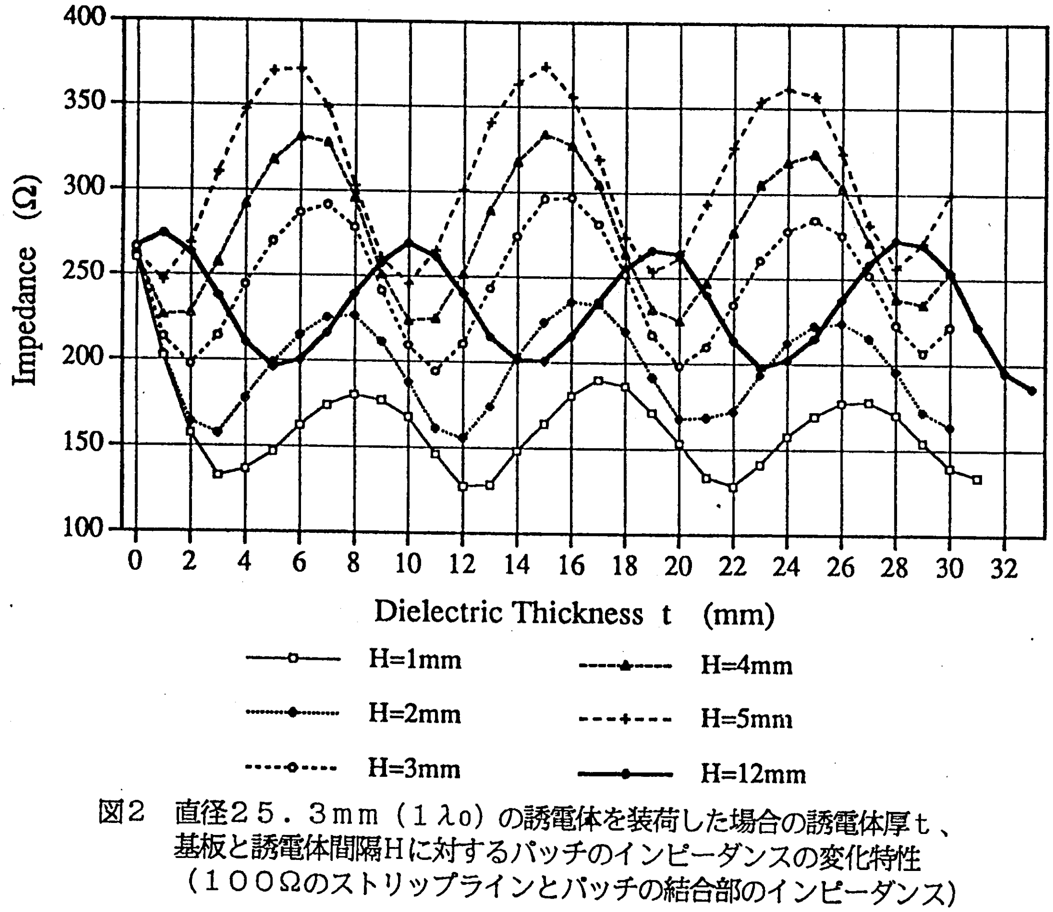


図2　直径２５．３ｍｍ（１λo）の誘電体を装荷した場合の誘電体厚ｔ、基板と誘電体間隔Ｈに対するパッチのインピーダンスの変化特性（１００Ωのストリップラインとパッチの結合部のインピーダンス）

図２は上記の第一の方法、即ち、１００（Ω）のマイクロストリップで方形パッチアンテナを給電し、装荷誘電体の基板表面との間隔Ｈをパラメーターとして誘電体の厚みｔを変化させながらネットワークアナライザーでパッチと給電線路との接合部分のインピーダンスを測定したものである。間隔Ｈが１(mm)の場合のインピーダンスは、誘電体の厚みｔに対して誘電体を装荷しない場合に較べて低いところで振動しており、間隔が広くなって１／４波長に近い５(mm)では逆に高いところで振動していることが分かる。更に広くして１／２波長に近い１２(mm)では再び低くなっていることが分かる。これらの特性図から、グランド板から誘電体の遠い面までの電気長

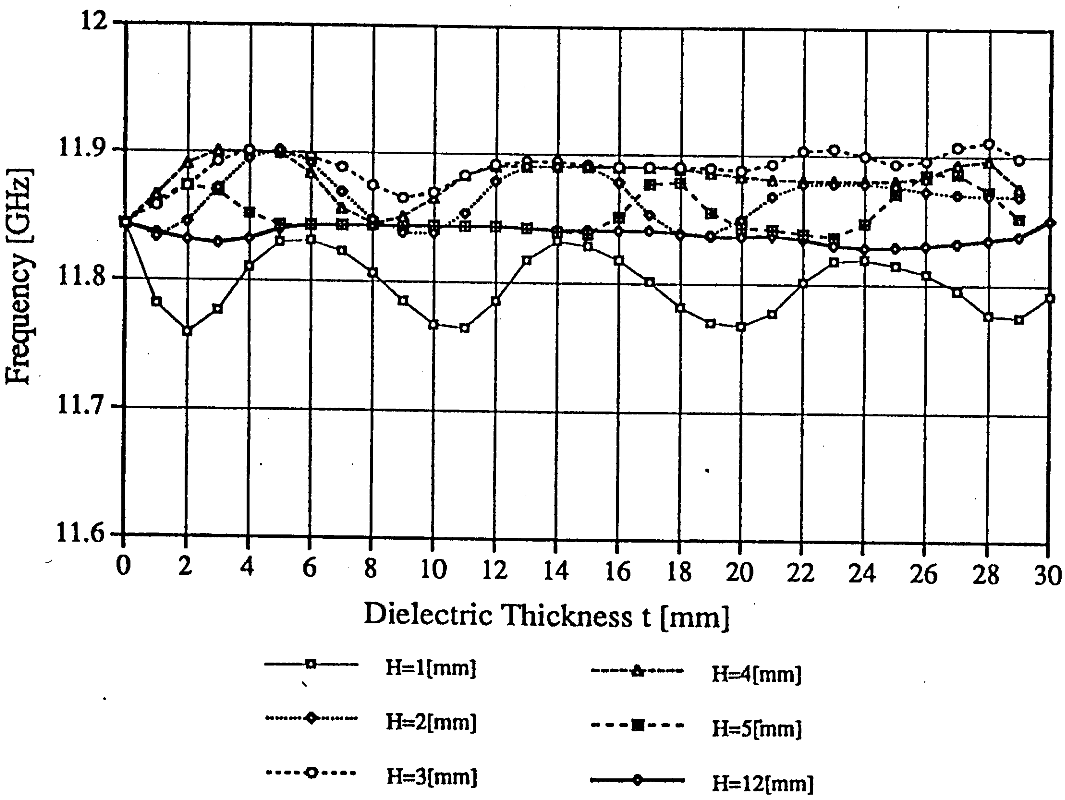


図3　直径25．3mm（1λ_0）の誘電体を装荷した場合の誘電体厚ｔ、基板と誘電体間隔Ｈに対する共振周波数の変化特性

が１／４波長の奇数倍において周期的に極小値となっており、その極小値はそれぞれの間隔Ｈにたいして一定の値をとる。

なお、この場合の装荷誘電体の内部の波長は、誘電体の直径が多少小さいために、充分直径が大きい場合に較べて約１．０８倍になっている。

また、各々の誘電体の厚みにおいてリターンロスが最小になる周波数をプロットしたものが図３である。この場合も間隔Ｈが１(mm)における周波数は低いところで振動している。これはパッチの近傍の等価誘電率の値が誘電体の接近により大きくなっているからと思われる。しかし、２(mm)になると寧ろその周波数は高くなり、間隔が開くにしたがって、誘電体を装荷しない場合の周波数に近づき、１２(mm)になると誘電体の厚みに関係せず、ほぼ誘電体を装荷しない場合の周波数となっていることが分かる。

図４の（ａ）は、直径２５．３(mm)（１波長）の誘電体(P.P.)の厚みｔが、間隔１(mm)で装荷することによりリターンロスの最小になる値において、パッチと１００（Ω）の給電線路の間に１／４波長整合ラインを入れて整合させたパッチアンテナを用い、これに厚みｔを１(mm)から３４(mm)までの誘電体を装荷して得た利得特性である。

図４の（ｂ）は図２のＨ＝１(mm)のインピーダンス特性を（ａ）の利得特性に対比するためのものである。これから明かなように利得の極大値においてインピーダンスは極小値になっていることが分かる。従って利得が高くなる誘電体厚のものを装荷するためには極小値のインピーダンスの値になるとしてパッチの入力インピーダンスを考えれば良いことになる。Ｈが２(mm)以上の場合でもインピーダンスが極小になる値で利得は極大値をとる。

図４の（ｃ）は図３のＨが１(mm)の周波数の変化特性を対比する

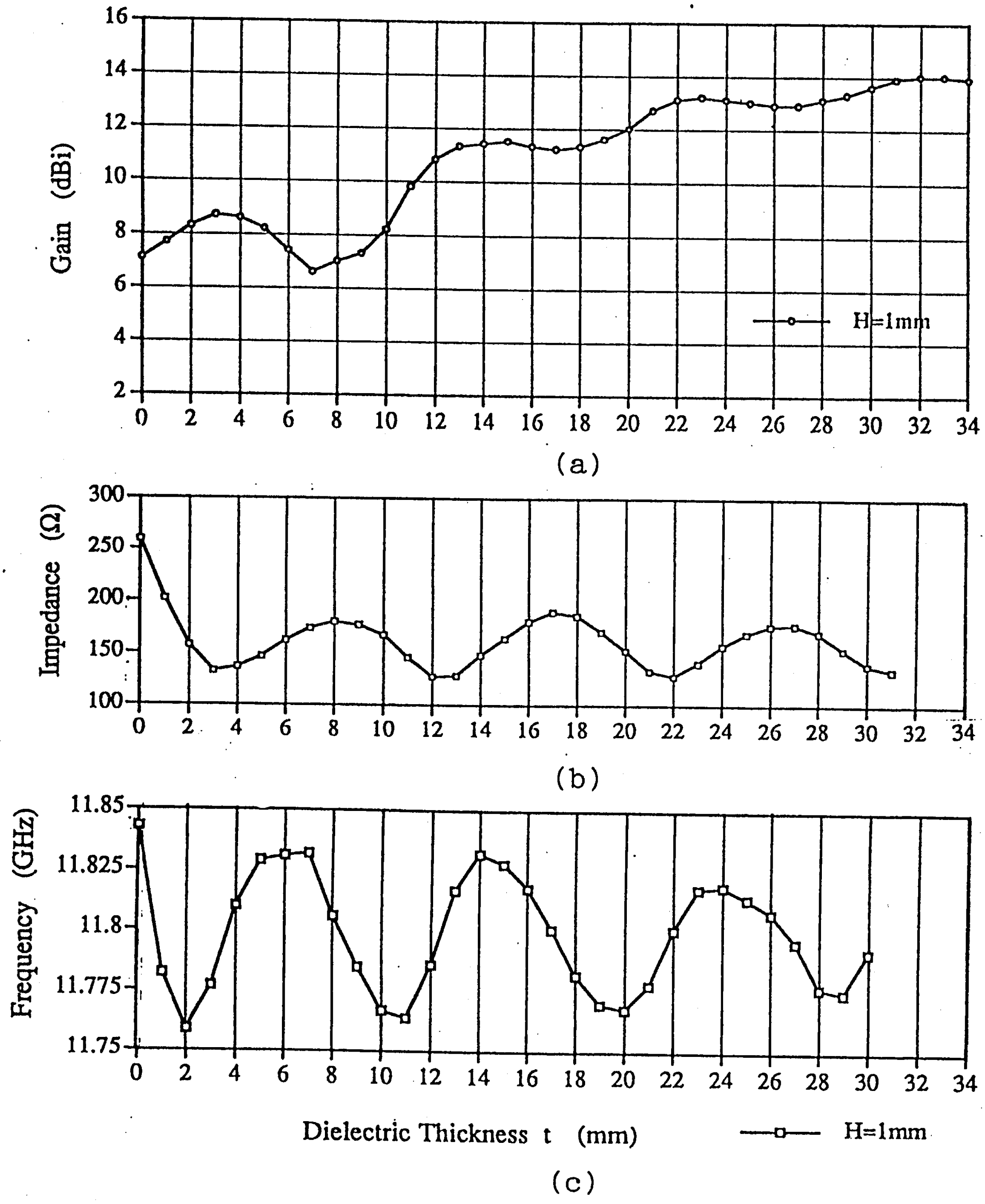


図4　H＝１ｍｍにおける誘電体厚ｔに対する利得、
インピーダンス、周波数の変化特性

ためのものであるが、極値になる厚みが少しずれている。

図５から図１０は、誘電体を装荷することにより、パッチのインピーダンスがＺp になると仮定して給電用マイクロストリップ線路とパッチの間にそれぞれ特性インピーダンスＺm の整合用１／４波長ステップラインを入れ製作し、誘電体を装荷したときのリターンロスを縦軸にとり、Ｚp を横軸にとったものである。パラメーターとなっている誘電体の厚みｔは図２におけるインピーダンスの極小値になる場合の厚みの値に対応している。従って、このグラフにおいてリターンロスが最小になる場合のインピーダンスＺp が求めるパッチのインピーダンスとなる。

なお、図８のＨ＝４(mm)の特性を見るとあたかも２８０（Ω）位になっているかの様に見えるが、図７の２８０（Ω）付近に小さなディップが見られる。Ｈを４(mm)にする事によりこれが何らかの原因で強調され、みだれたものと思われるので再度測定条件を変えて測定する必要がある。

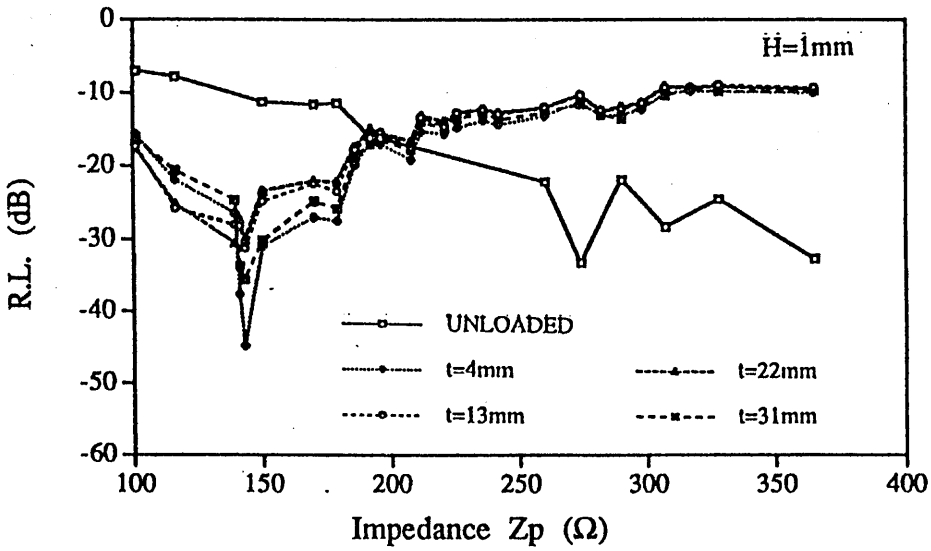


図５　基板表面と誘電体の間隔Ｈが１ｍｍにおける場合の仮想インピーダンスZp に対するリターンロス特性

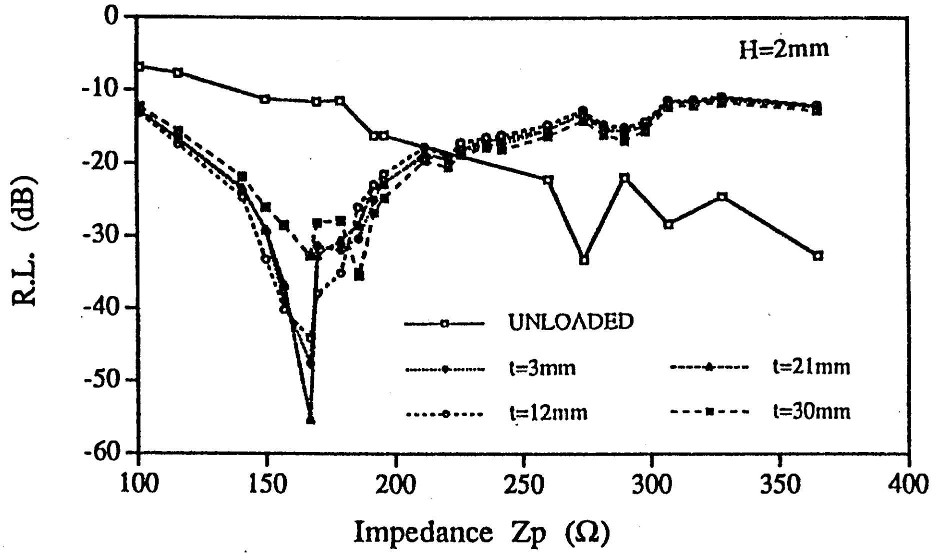


図6　基板表面と誘電体の間隔Hが２ｍｍにおける場合の仮想インピーダンスZp に対するリターンロス特性

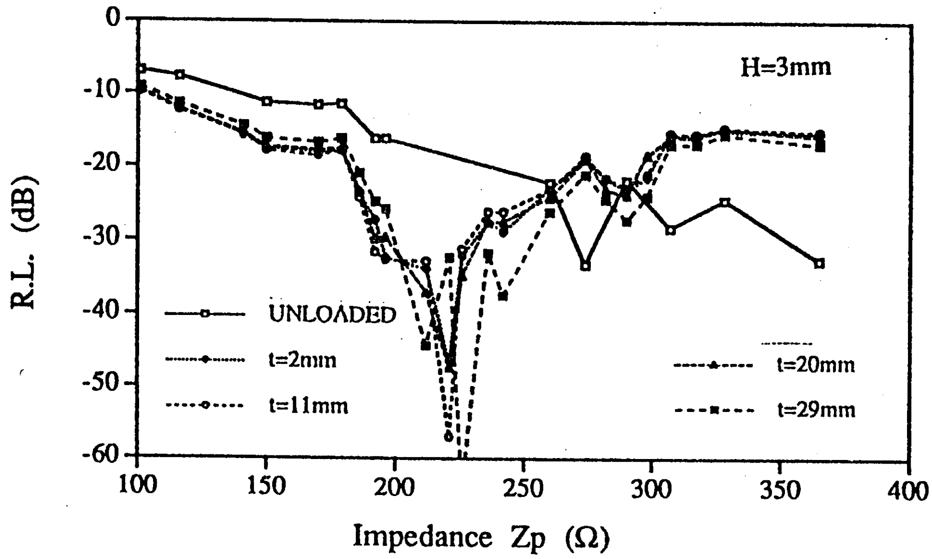


図7　基板表面と誘電体の間隔Hが３ｍｍにおける場合の仮想インピーダンスZp に対するリターンロス特性

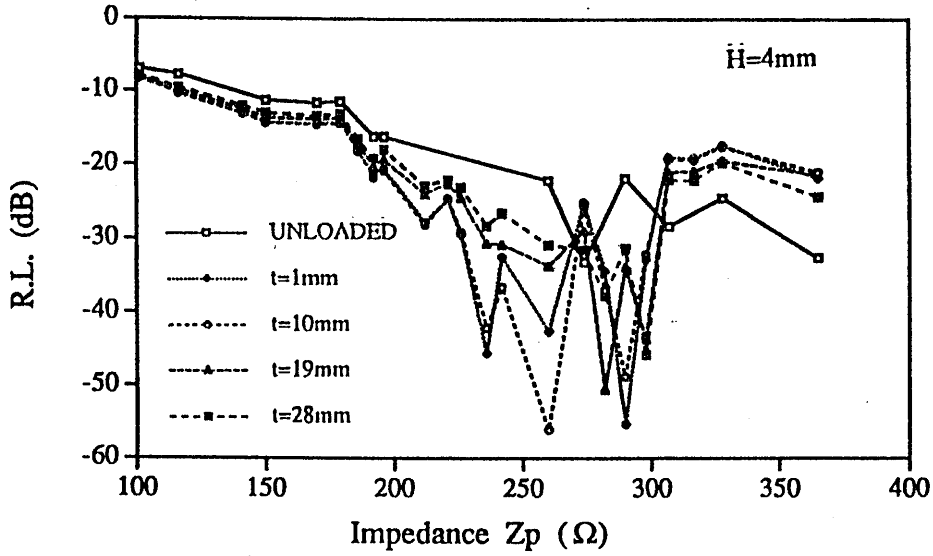


図８　基板表面と誘電体の間隔Ｈが４ｍｍにおける場合の仮想インピーダンスＺｐ に対するリターンロス特性

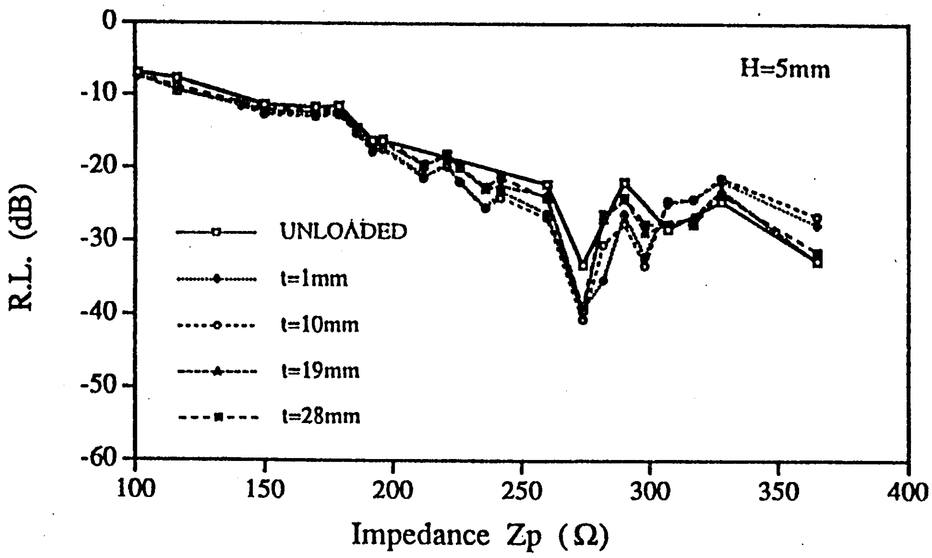


図９　基板表面と誘電体の間隔Ｈが５ｍｍにおける場合の仮想インピーダンスＺｐ に対するリターンロス特性

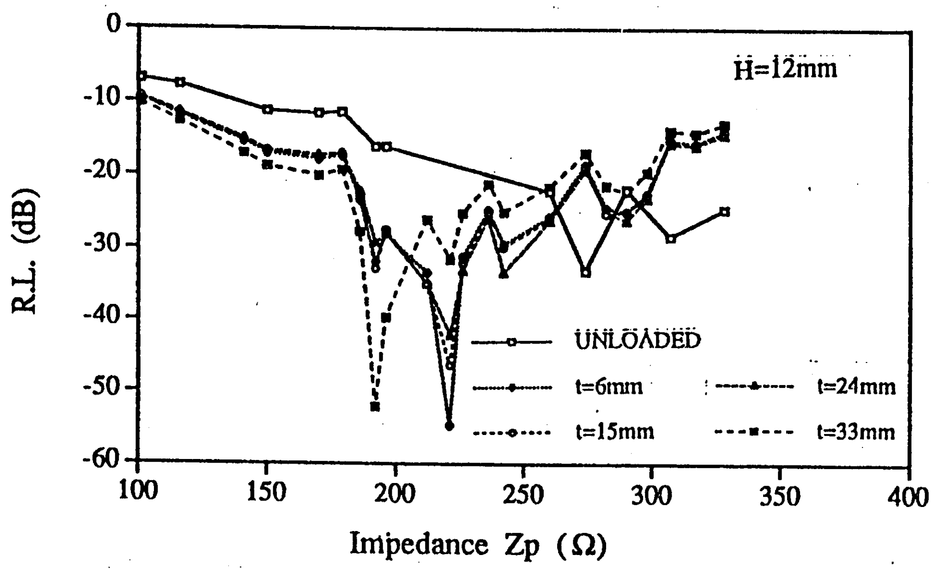


図１０　基板表面と誘電体の間隔Hが１２ｍｍにおける場合の仮想インピーダンスZp に対するリターンロス特性

以上、二つの測定法により得た誘電体装荷パッチアンテナの入力インピーダンスを比較してみると表１の様になる。

表1　１００（Ω）のマイクロストリップラインで給電してネットワークアナライザーで見た入力インピーダンスと、１／４波長ステップラインで整合させて求めた入力インピーダンスの比較表

基板の表面と誘電体の間隔	１００（Ω）のマイクロストネップラインで給電してネットワークアナライザーで見た入力インピーダンス	１／４波長ステップラインで整合させて求めた入力インピーダンス
H（mm）	Z　（Ω）	Zp（Ω）
0	250	270
1	130	140
2	160	160
3	200	220
4	230	250
5	250	270
12	200	220

この表によれば１００（Ω）ラインで給電するよりも実際に整合した給電線路で給電した場合に得た値の方が１０乃至２０（Ω）高くなっていることが分かる。

なお、図１１は利得の極値における指向性図をＥ面方向、Ｈ面方

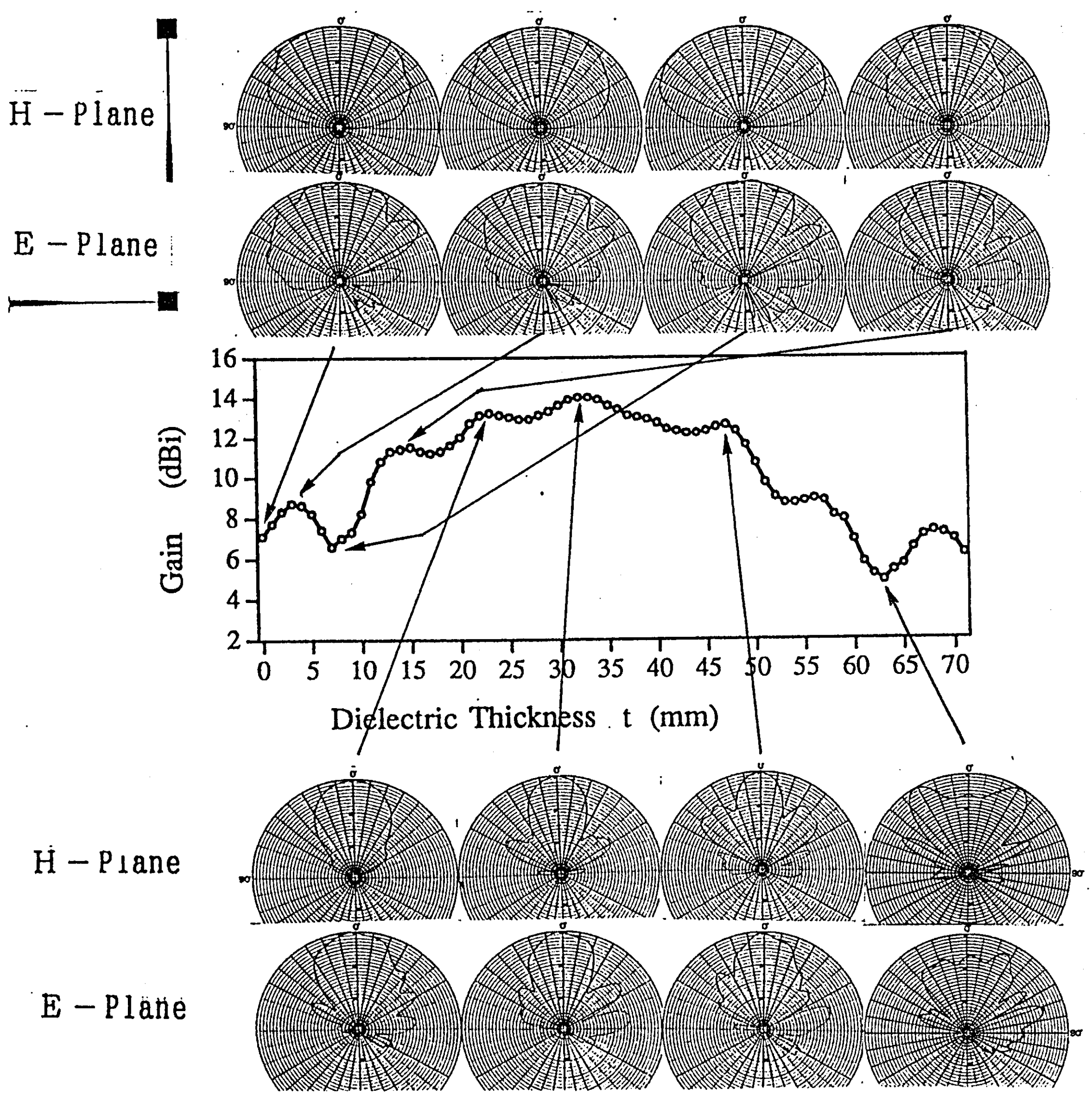


図 11　各厚みにおける指向性図（ｄ＝１λ_0，　Ｈ＝１mm，　Ｐ．Ｐ．）

向について測定したものであるが、利得の極大値における指向性は正面方向に強調されており、極小値においては横方向に多少強調されている。極大値は上記の様にグランド板から電気長において１／４波長の奇数倍において生ずると言うことは、誘電体カバードアンテナ[5]においてグランド板と誘電体板間隔が１／２波長の偶数倍で、誘電体の厚さｔが１／４誘電体内波長の奇数倍であることから、誘電体のグランド板から遠い面までの電気長が１／４波長の奇数倍になっていることに一致している。

４．まとめ

低誘電率の誘電体をマイクロストリップパッチアンテナに装荷した場合の入力インピーダンスについて、基板と誘電体との間隔Ｈをパラメーターとして誘電体の直径、誘電体の高さに対する入力インピーダンスの変化、周波数の変位等、誘電体装荷アンテナの設計資料を得た。

参考文献

(1)津川、杉尾、牧本、1992、信学春季全大、
(2)T.Tsugawa, Y.Sugio, T.Makimoto, Trans. IECE, Vol.E73,No.1 Jan.1990
(3)津川、杉尾、牧本、1992、信学論文誌、VOL.J75-B-II、NO.3
(4)津川、杉尾、牧本、1992、信学春季全大、B-121
(5)杉尾、牧本、西村、仲西、1981、電子通信学会、アンテナ・電波伝搬研究会資料、AP-80-112

輻射科学研究会
RS 93-19

ステップ型単一モード光ファイバーの構造パラメータの逆解析による推定

寺澤　一彦，藪　哲郎，沢　新之輔
大阪府立大学　工学部

平成5年12月3日

ステップ型単一モード光ファイバーの構造パラメータの逆解析による推定

寺澤　一彦，藪　哲郎，沢　新之輔
大阪府立大学　工学部

1．まえがき

光ファイバーの屈折率分布を推定するための1つの方法として，従来より，光ファイバーの伝搬モードの近傍界を用いることが考えられており，いくつかの方法が既に提案されている[(1)-(3)]．このうち，測定した光強度分布を直接波動方程式に代入して屈折率分布を求める方法では，パーソナルコンピューターを用いて容易に屈折率分布を計算することができ，2次元のチャネル導波路についても実測した結果を用いて屈折率分布の推定が行われている[(3)]．しかし，この手法では推定量である界強度分布の2階導関数を計算する，すなわち微分処理をする必要がある．このため，一般にノイズの影響を受けやすいという難点があり，ノイズを除去するために測定値に対し平滑化等の処理を必要とする．これに対し，逆解析法と命名された方法がある[(4)-(6)]．すなわち屈折率分布を適当に仮定して波動方程式を解き，界強度分布を計算し，その結果を測定された界強度分布と比較し，両者の差がなくなるまで屈折率分布の修正と波動方

方程式の求解の手順を繰り返すという方法である．この方法では，測定された界強度分布に対する微分演算を全く必要としないので従来の方法における上記の難点を避けることができる．また少なくとも原理的には，単一モードのファイバーであればチャネル導波路のような２次元の任意屈折率の導波路についても適用可能である．しかし，この手法で提案されている最適化法[4]においては，仮定した屈折率分布の修正を非線形最適化問題として取り扱うため初期値の設定に注意する必要がある．

本稿では，ステップ型単一モード光ファイバーについて，光強度分布の測定によりコア屈折率，コア半径，クラッド屈折率，クラッド半径の４つの変数を求める問題を取り上げる．まず初めに４つの構造パラメータについて検討し，パラメータの特徴を明らかにする．次にシミュレーションによりパラメータ空間を調べ，正しい解を得るための資料を得る．次に測定値としてノイズのない界強度分布を与えた場合とノイズ含む場合についてシミュレーションを行い本手法の有効性と耐ノイズ性について検討する．最後に光ファイバーの近傍界を実測した結果について実際に屈折率分布の推定を行い，その結果について検討を行う．

2．逆解析に用いる構造パラメータに関する検討

前章でも述べた通り，本稿ではステップ型光ファイバーを対象として測定した光強度分布よりファイバーの屈折率分布を逆解析的に推定する問題を取り上げる．ステップ型光ファイバーの屈折率分布は図１のようにコア屈折率：n_1，コア半径：r_1，クラッド屈折率：n_0，クラッド半径：r_0で表される．以上の４つの構造パラメータが決定されると，計算により光強度分布を求めることができる．この手法においては，任意の初期屈折率分布から計算される光強度分布と実測した光強度分布とを比較し両者の差が小さくなるように屈折率分布を修正し，この操作を両者が一致するまで繰り返す．このとき，計算した光強度分布と実測した光強度分布との一致の程度を表す評価基準としては，次式のような評価値εを用いる[6]．

$$\varepsilon(n_1, n_0, r_1, r_0)=\sum_{i=1}^{M}|P_m(x_i)-P_c(x_i)|^2$$

ここで$P_m(x_i)$および$P_c(x_i)$は，それぞれ位置x_iにおける光強度分布の実測値および計算値を表し，Ｍは光強度分布の標本点の総数である．ステップ型光ファイバーの場合，前述のようにn_1，n_0，r_1，r_0の４つが屈折率分布を決める変数となるため，εは４変数の関数と考えられる．このときεを最小となるように屈折率分布を修正するという操作は，目的関数としてのεを最小とする変数を求めるという最適化問題に帰着する[6]．つまりεの最小値を与える変数を求めることで，屈折率

分布の推定ができる．本稿で取り扱う非線形最適化問題では，真の値$\overline{n}_1, \overline{n}_0, \overline{r}_1, \overline{r}_0$が異なると，評価関数$\varepsilon$は異なる形状をとる．真の値がいかなる場合に於いても正しい解に到達するには様々な工夫が必要となることが考えられる．そこで４つの構造パラメータについて検討する．なお，以下のシミュレーションにおいては，真の値とした光強度分布を得るための変数の値を”真の値”，仮定した光強度分布を得るための変数の値を”仮定した値”，屈折率分布が真の値をとるときの光強度分布を”測定値”，屈折率分布が仮定した値をとるときの光強度分布を”推定値”とする．またシミュレーションにおいては差を計算する点として，中心から波長の１０倍に長さの間に４０点をサンプル点としてとった．

最初にクラッド半径について考察する．図２．１（ａ）は，クラッド半径：１２５．０μｍのときの界分布，（ｂ）は，クラッド半径：１００．０μｍのときの界分布を示す．このようにクラッド半径の長さを変えても界分布の変化は無いので，光強度分布を測定するのに用いた入力画像から測定するのが良いと思われる．すなわち，推定を行う際には無視できる変数である．

次に，コア屈折率，及びクラッド屈折率について考察する．図２．２は，真の値に対しコア半径とクラッド半径が等しくコア屈折率とクラッド屈折率の異なる屈折率分布を仮定し，そのときの光強度分布（推定値）と測定値の差の２乗の和の大きさを等高線で描いたもので，縦軸はコア屈折率，横軸はクラッド

屈折率を示す．ここで真の値はコア屈折率：１．５１４，コア半径：１．０μm，クラッド屈折率：１．５１０，クラッド半径は無限大で計算対象を中心から６．０μmとしており，図中に○印で示されている．コア屈折率がクラッド屈折率より小さい値を取るときは，通常の光ファイバーとしては機能しないので図では黒く示している．これらの結果より，屈折率差が真の値と等しい０．００４の点では，差の２乗和はほぼ等しく，測定値と推定値との差の２乗和は，1.0×10^{-14}から1.0×10^{-7}程度の小さな差がでる範囲に留まった．また別の条件においても等高線図を描いたが同様の結果を得た．このことは参考文献（７）で示されるように，コア屈折率とクラッドの屈折率を一意に求めることが出来ないことを示している．すなわち測定値より推定できるのは屈折率差であり，コアの屈折率かクラッドの屈折率のいずれかが既知である場合でないと解が求められない．したがって，本論文では，クラッドの屈折率は既知であると仮定し，界分布よりコアの屈折率とコア半径の２つの変数を求める問題を取り扱う．

次に，解の存在範囲について検討する．図２．３に推定に用いる領域を示す．ただし，この図ではクラッド屈折率を１．５１０と仮定しており，縦軸はコア屈折率，横軸はコア半径を入力光の波長で規格化している．図中で白い部分が解の存在する領域である．この領域は，実際に用いられている単一モードファイバーのニアフィールドパターンを測定することによりパラメータの推定を行うことを前提としている．この前提により，考える領域は１つのモードを励振する場合のみであることや，

クラッドへの界の漏れが小さなものであることなどの制約が生じる．この制約から，規格化周波数によりモードを２つ以上励振する領域を除き（領域Ａ），またファイバーの中心より波長の１０倍の場所における界の大きさが界の最大値の１０％を超える領域を除いた（領域Ｂ）．図２．３の範囲での界分布を図２．４に示した．図中で界の大きさは最大値で正規化している．同図で界分布が空白であるものは領域Ａに属するものであり，点線の界分布は領域Ｂに属するものである．

真の値がいかなる場合でも，正しく解を求めるためには，初期値の選び方に注意する必要がある．これを検討するために，真の値を表２．１の（ａ）～（ｆ）に設定し，それぞれの場合について，”パラメータがある値を取るときの推定値”と”測定値”の差の２乗和の平方根の等高線を描く．ただし縦軸はコア屈折率，横軸はコア半径を入力光の波長で規格化したものとした．また，クラッド屈折率を１．５１０と仮定し，ファイバーの中心より波長の１０倍の場所までの部分を評価の対象とする．なお差を計算する点としてファイバーの中心から波長の１０倍に長さの間に４０点をサンプル点としてとった．その結果を図２．５～図２．１０に示す．等高線は評価値として測定値と推定値の差の２乗和の平方根を用い，等高線の間隔は０．０１ごとにとり，０．０５，０．１，０．２を境界として色分けしている．最も黒い部分はモードが２つ以上存在する領域を表す．

これらの図より，コア屈折率：１．５１２５，コア半径：波

長×３．５を最初の初期値すると，真の値がいかなる値であっても，少ない反復で真の解に収束することが期待される．

εの最小値を求めるアルゴリズムとしては最も一般的な共役勾配法を用いる．３章では本手法が有効に働くことをシミュレーションによって検証し，４章では実際に測定した光強度分布による推定を行う．

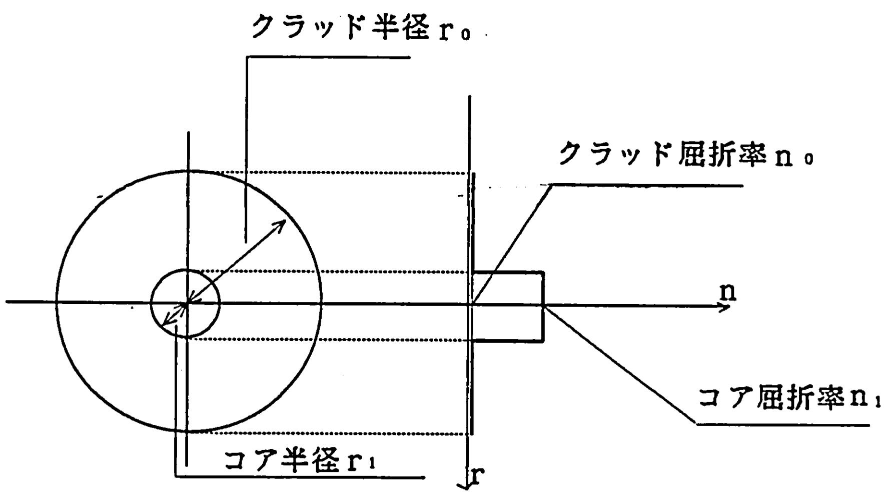


図１　構造パラメータ

コア屈折率　　＝１．５１３
コア半径　　　＝１．５μｍ
クラッド屈折率＝１．５１０

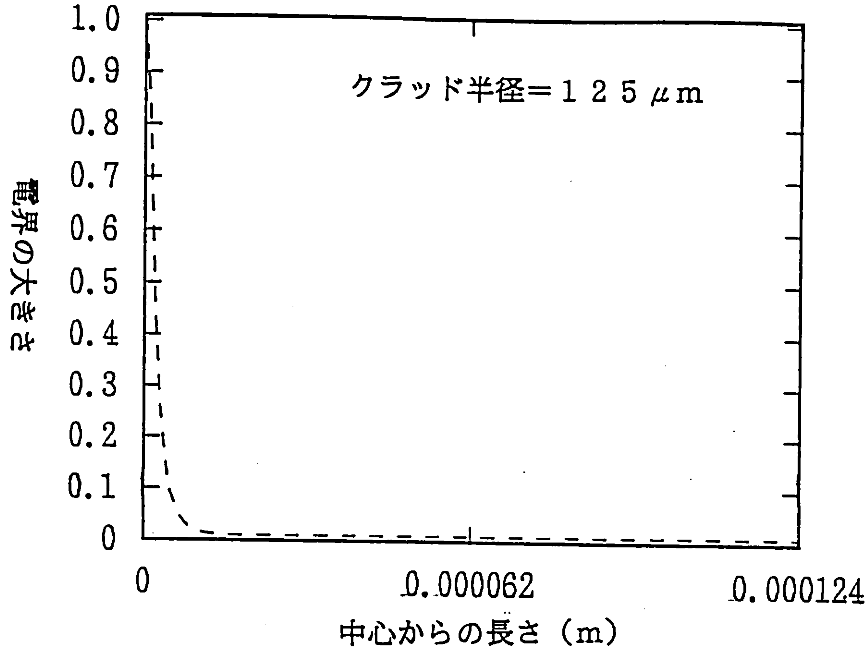


図２．１（ａ）クラッド半径による界分布の変化（１）

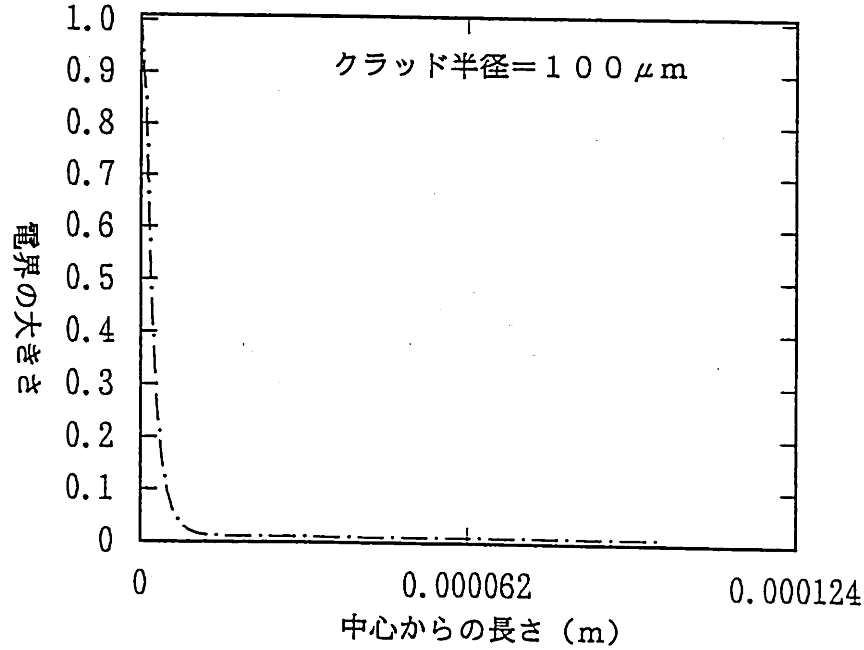


図２．１（ｂ）クラッド半径による界分布の変化（２）

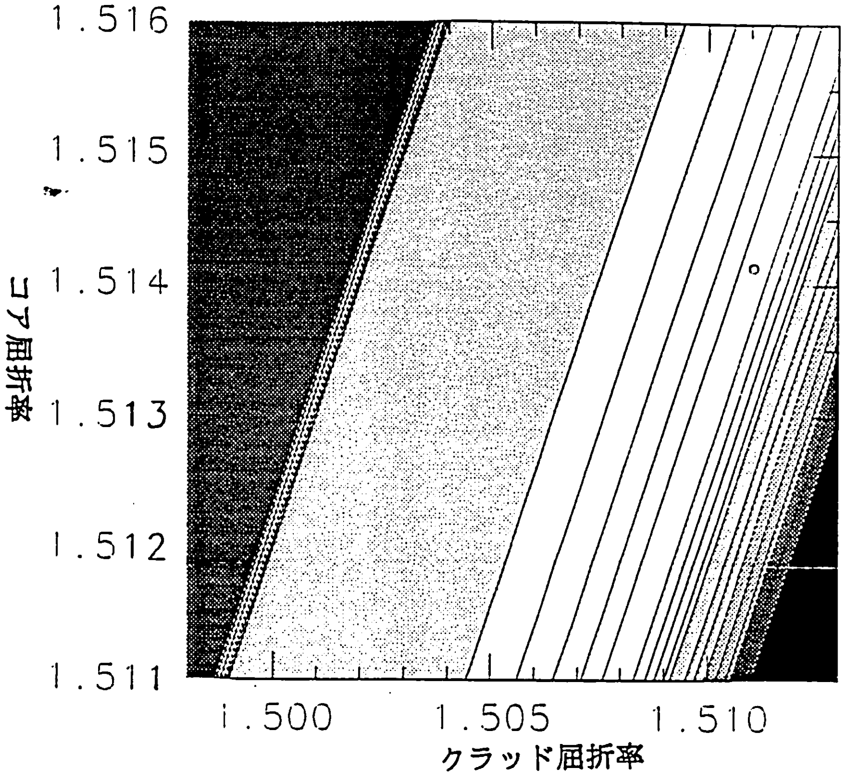


図2．2コア屈折率とクラッド屈折率についての考察

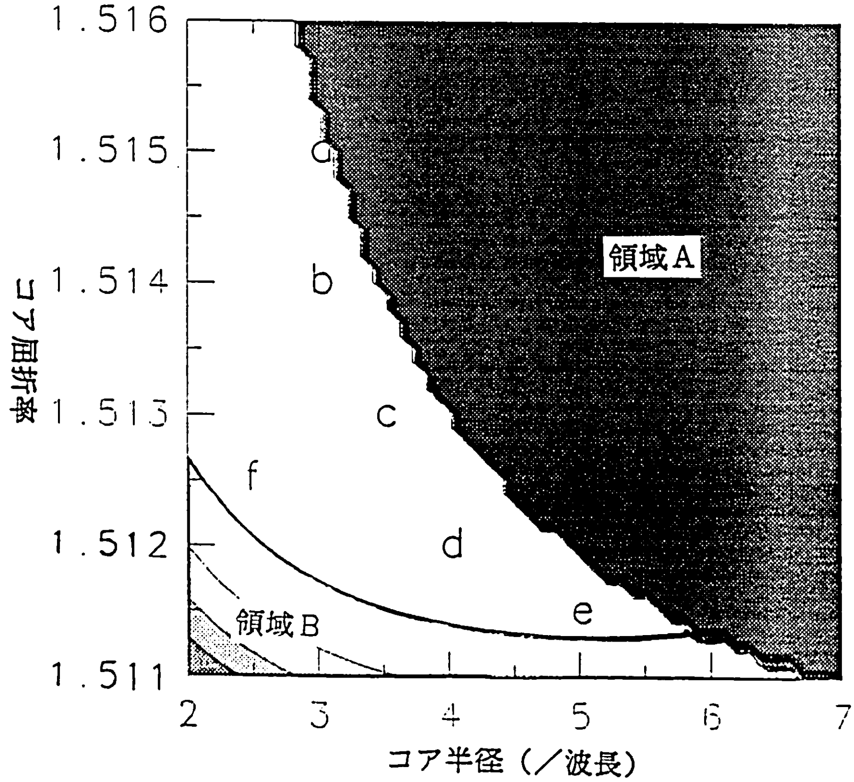


図2．3推定に用いる領域（1）

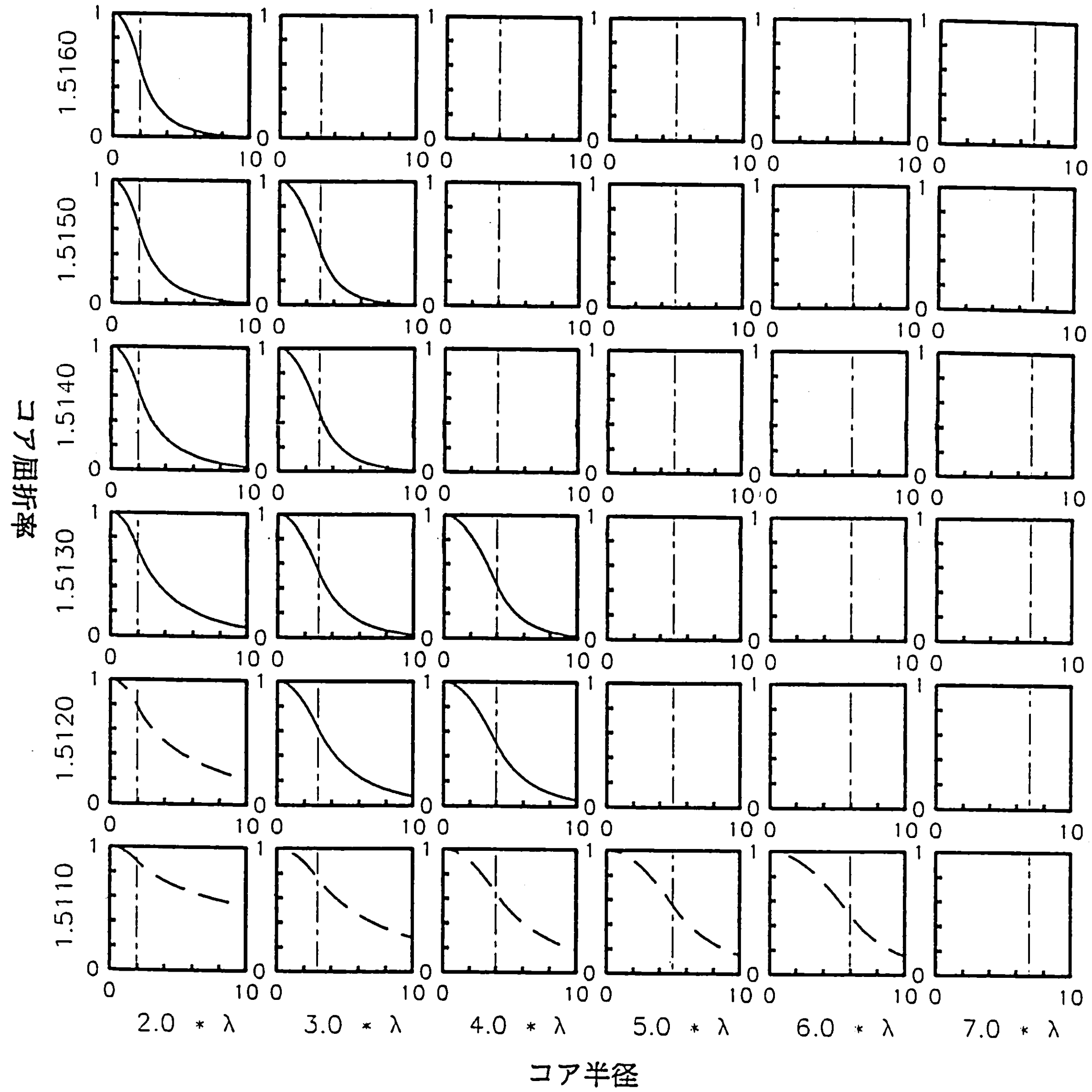


図２．４推定に用いる領域（２）

表２．１　２章で用いられる真の値の一覧表

No.	コア屈折率	コア半径（／波長）	図
a	１．５１５０	３．０	２．５
b	１．５１４０	３．０	２．６
c	１．５１３０	３．５	２．７
d	１．５１２０	４．０	２．８
e	１．５１１５	５．０	２．９
f	１．５１２５	２．５	２．１０

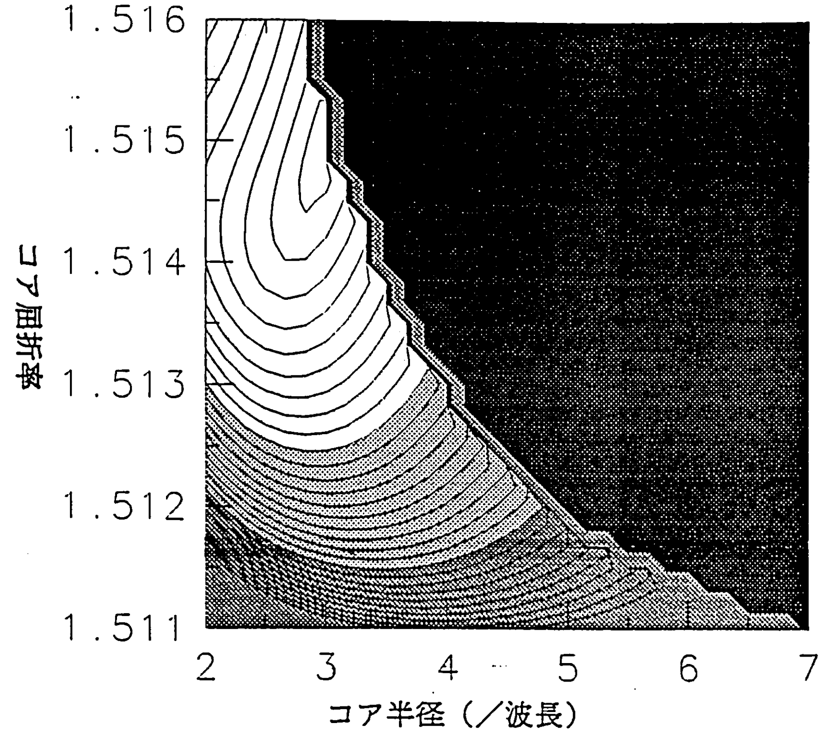


図２．５コア屈折率とコア半径についての考察（ａ）

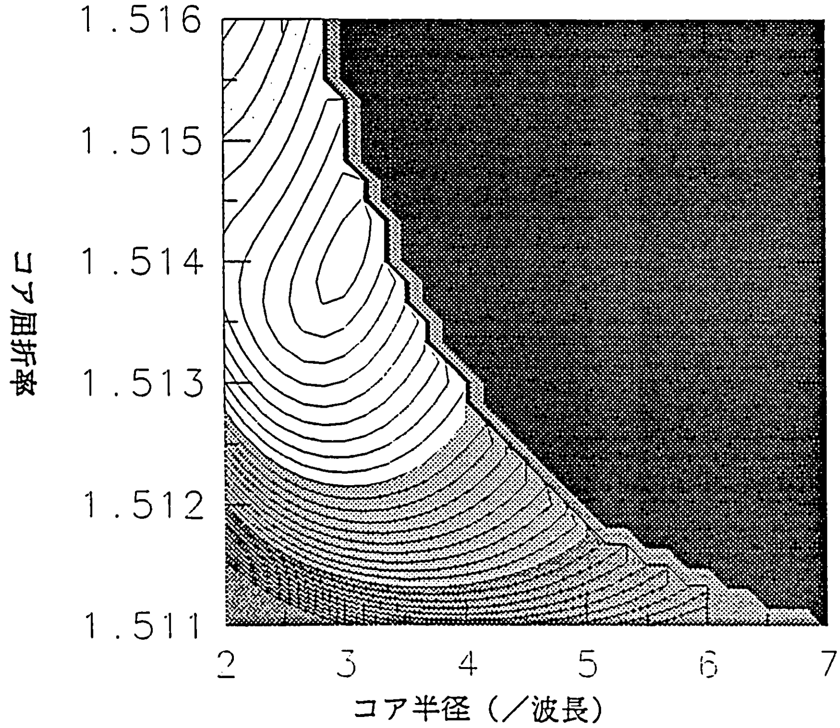


図２．６コア屈折率とコア半径についての考察（ｂ）

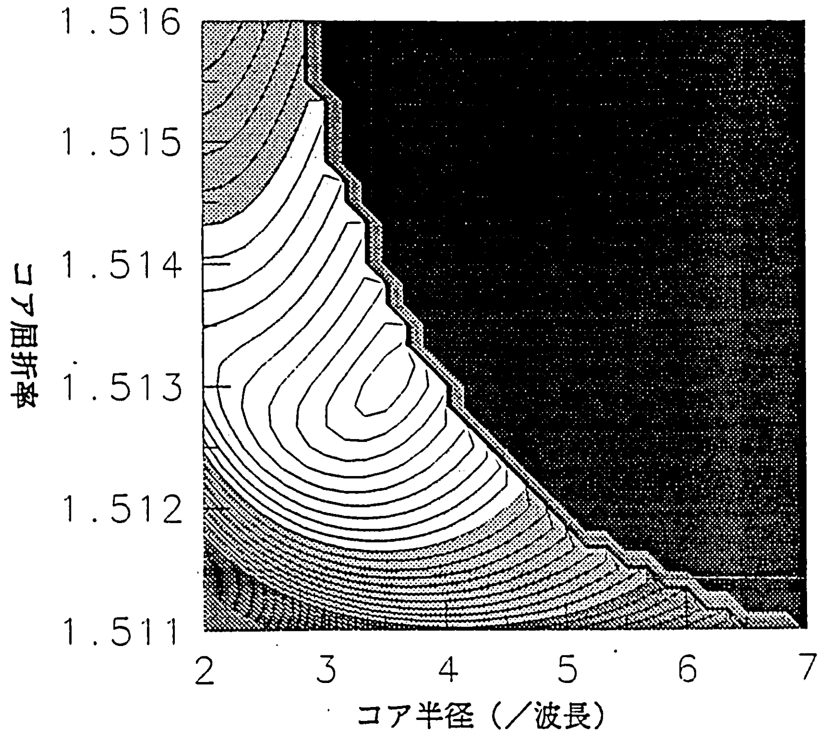


図２．７コア屈折率とコア半径についての考察（ｃ）

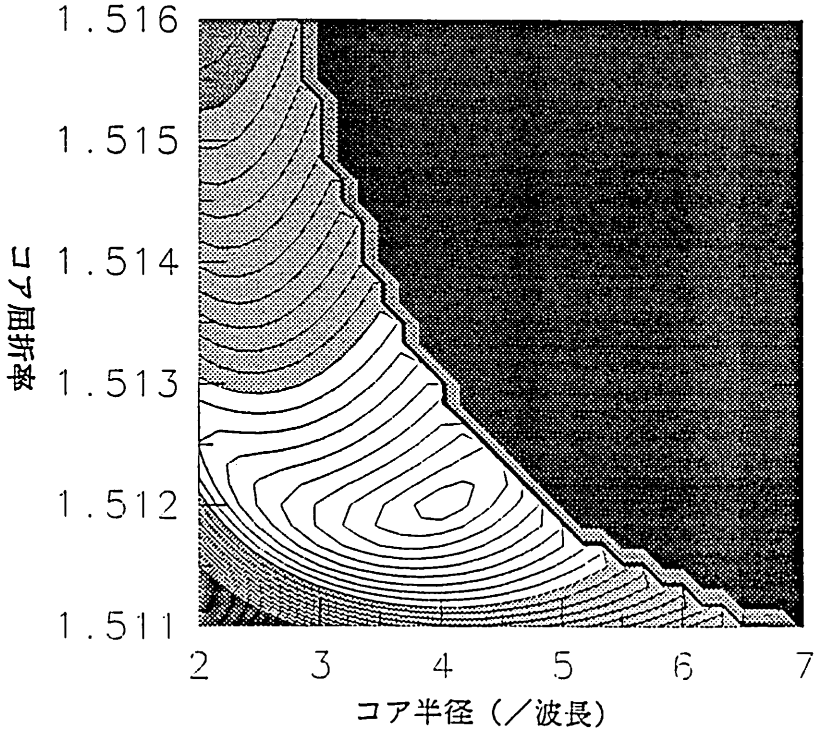


図２．８コア屈折率とコア半径についての考察（ｄ）

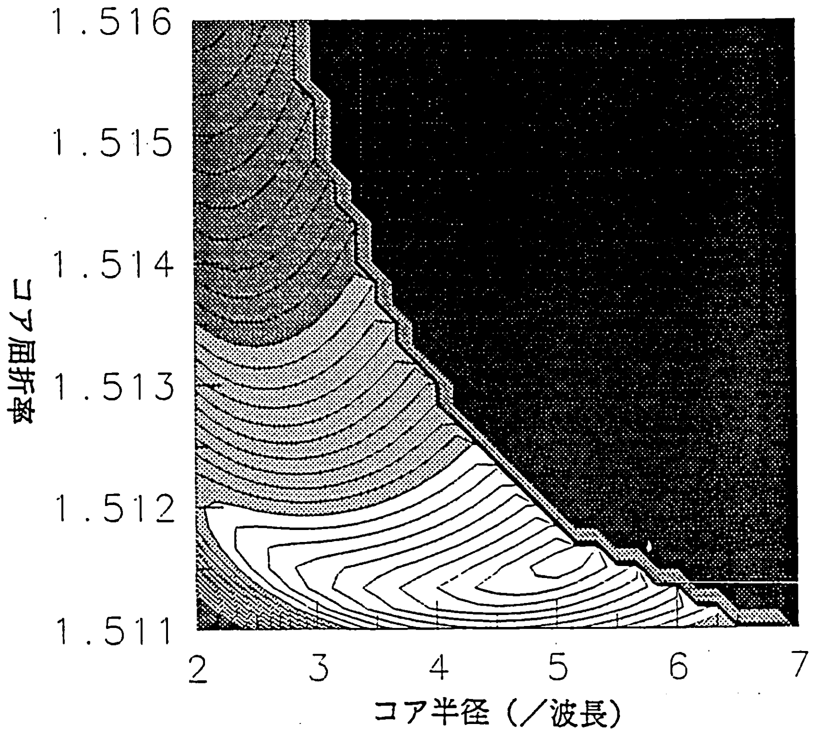


図2．９コア屈折率とコア半径についての考察（ｅ）

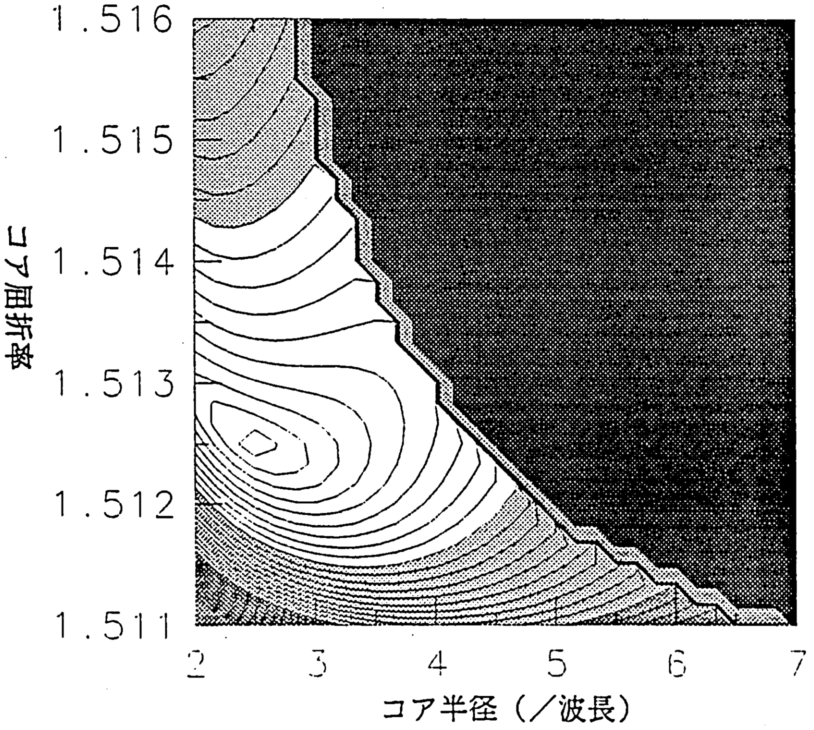


図2．１０コア屈折率とコア半径についての考察（ｆ）

３．本手法のシミュレーションの結果について

前章では，測定値と推定値との差の２乗和を，等高線を描いて検討し，非線形最適化問題を解くための初期値の選び方を提案した．本章ではその手法が有効に働くことを検証するためにシミュレーションを行う．

まず最初に測定値にノイズの無い場合を想定していくつか測定値を仮定し，屈折率差とコア半径の推定を前章で示したアルゴリズムに従い推定を行った．その過程を図３．１に，その結果を表３．１に示す．同表には真の値と最適化終了後の推定値を得たときの変数の値，測定値と推定値との差の２乗和をポイント数で割ったものの平方根を示す．これよりノイズの無い場合，測定値と推定値は非常に良く一致していることがわかる．

次に測定値にノイズを加えた場合を想定して屈折率差とコア半径の推定を行った．ただし，ノイズは平均値が零で標準偏差が５．０×１０$^{-3}$および２．０×１０$^{-2}$のガウスノイズを想定し，このノイズを正規化した光強度分布に加えた．ノイズの入った界分布を図３．２に示し，推定の結果を表３．２に示す．この結果を表３．１と比較すると，測定値と推定値との差の２乗和をポイント数で割ったものの平方根の大きさは大きくなるが最終的な推定値を得たときの変数の値はノイズの無い場合と同程度の値となっており，正しく推定が行われていることがわかる．

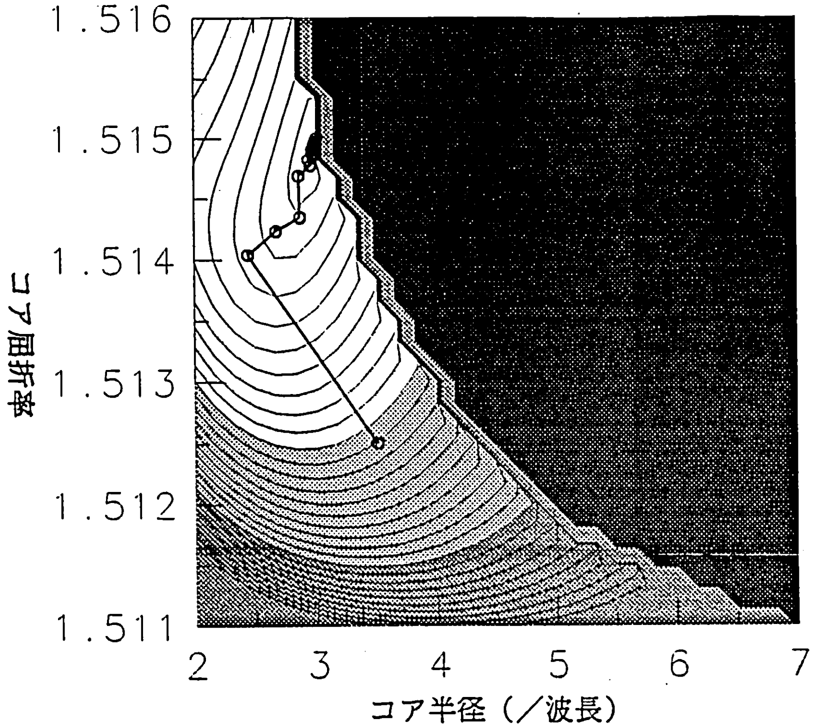


図3．1真の値に対する推定の過程

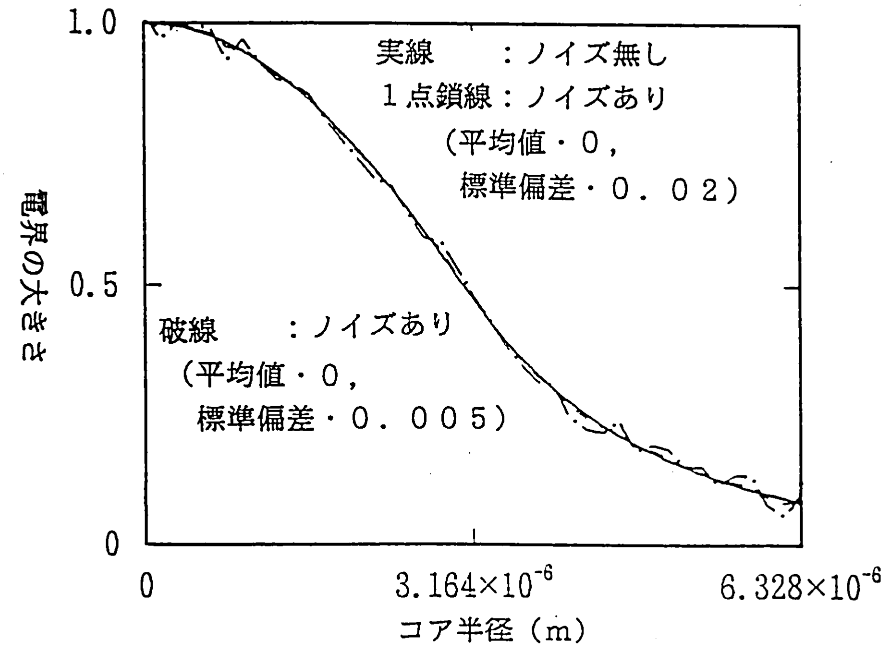


図3．2ノイズの入った界分布

表３．１　　推定結果（ノイズ無し）

no.	真の値		推定結果		誤　差
	屈折率	半径	屈折率	半径	
a	1.5150	3.0	1.51500	2.999	3.3076e-8
b	1.5140	3.0	1.51399	2.999	4.4418e-8
c	1.5130	3.5	1.51300	3.500	1.0646e-7
d	1.5120	4.0	1.51200	4.000	6.4718e-8
e	1.5115	5.0	1.51149	4.999	2.5927e-7
f	1.5125	2.5	1.51249	2.499	9.5684e-8

（ただし，半径は波長で正規化している）

表３．２　推定結果（ノイズあり）

no.	真の値		推定結果		誤　差
	屈折率	半径	屈折率	半径	
n 0	1.5115	5.0	1.51149	4.999	2.5927e-7
n 1	1.5115	5.0	1.51150	4.990	4.4295e-3
n 2	1.5115	5.0	1.51150	4.961	1.7718e-2

ただし，ｎ０はノイズ無し

ｎ１は平均値が零，標準偏差５．0×10^{-3}

ｎ２は平均値が零，標準偏差２．0×10^{-2}

のガウスノイズを加えた．

４．本手法の実測データに対する適用について

最後に実際に規格のわかっているステップ型単一モード光ファイバーのニアフィールドパターンを測定し，この測定値を用いて推定を行った．図４．１にニアフィールドパターンの測定系を示す．レーザーはＨｅ－Ｎｅレーザーを用いファイバーからの出射光を顕微鏡で拡大しＣＣＤカメラで画像処理装置に取り込んだ．取り込んだニアフィールドパターンはクラッド半径を測定した後，コア付近の部分のみをさらに画像的に拡大し平滑化フィルターをかけた．この画像のおいてニアフィールドパターンの中心からパターンの強度が零となる地点までを，４５度間隔に８方向にわたって測定し，平均をとった結果を測定値とした．表４．１に測定したファイバーの規格とその推定値を示す．図４．２で示すように測定値と規格から実際に求められる界分布と比較して誤差を持っているが，推定値と規格から得られる界分布の形状はほぼ一致していると見ることができる．

以上のことからノイズを含んだ実際の光ファイバーのニアフィールドパターンから屈折率分布を推定することができることがわかった．

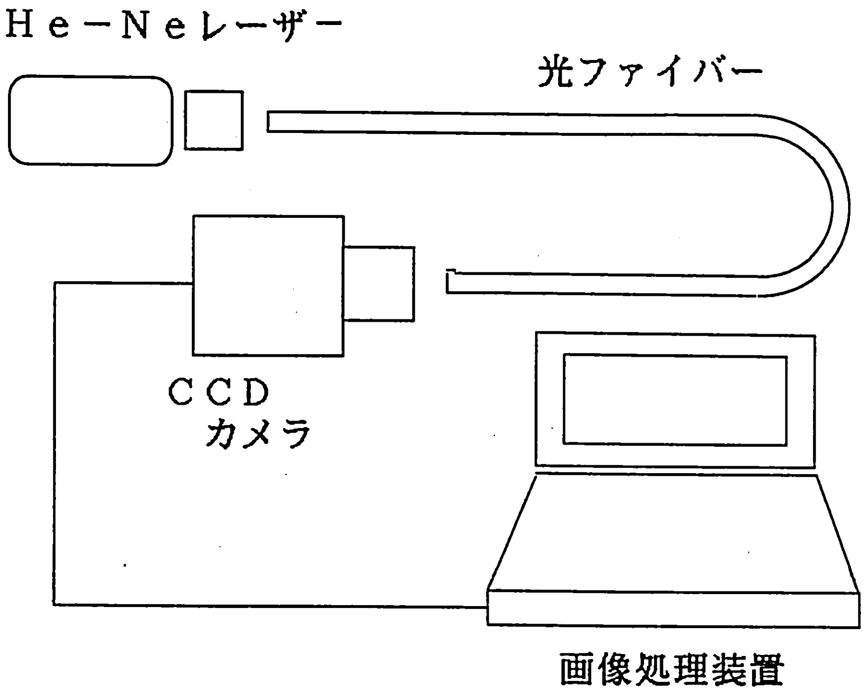


図４．１　測定系

表４．１　規格値と推定結果の比較

	屈折率差	コア半径(μｍ)
規格値	０．００２	２．７
推定結果	０．００２２３３６	２．７５００６

規格値と推定結果の誤差：２．４０５５ｅ－２

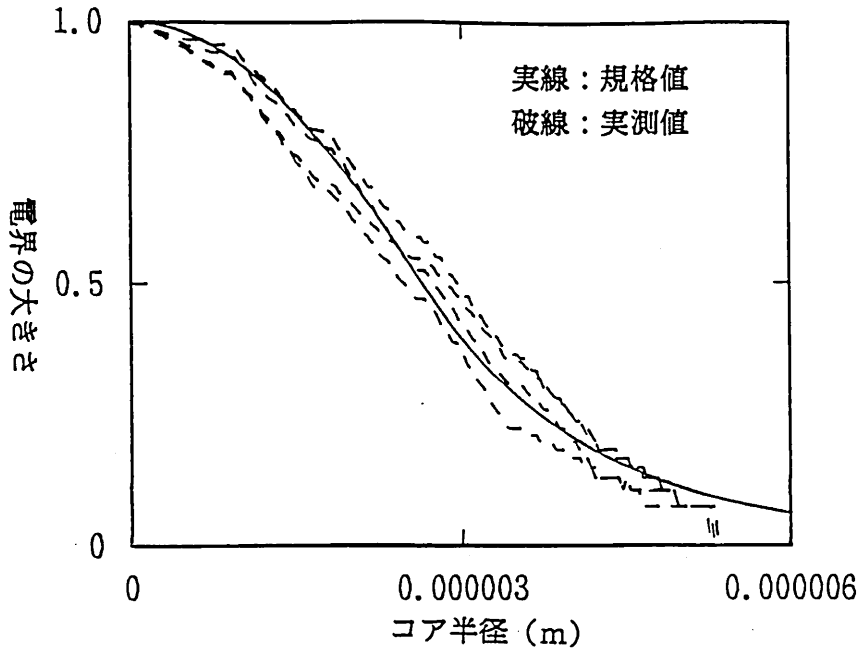


図４．２（a）実測値と規格値

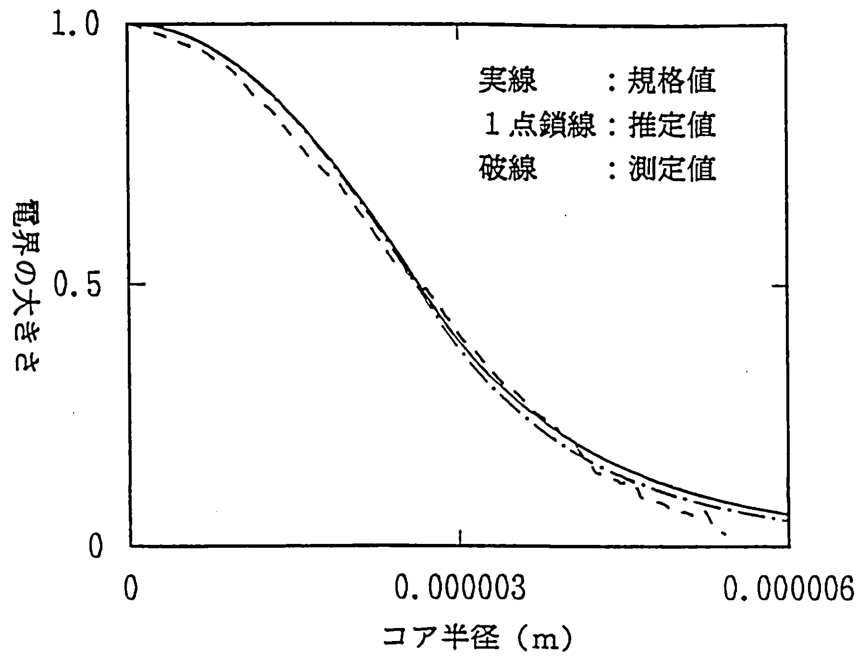


図４．２（b）規格値と測定値と推定値

5．むすび

本稿ではステップ型単一モード光ファイバーについて，その構造パラメータであるコア屈折率，コア半径，クラッド屈折率，クラッド半径の4つの変数を逆解析法を用いて推定する方法について検討した．4つの構造パラメータに関する検討の結果，クラッド半径が無視できること，コア屈折率とクラッド屈折率は一意に決定できないこと，クラッドの屈折率を既知と仮定することによりコア屈折率とコア半径の2変数を求める問題を解くことになることがわかった．この場合の測定値と推定値の差の2乗和の大きさを，測定値の値を変えて検討し，最小値探索を行う際の過程についての資料を得た．その結果を用いて最適な初期値を選び単一モードの範囲内すべてについて正確に推定を行う方法を導いた．また，以上の検討から得た方法を用いてノイズのある場合と無い場合に付いてのシミュレーションを行い，その有効性を確かめた．さらに実際に光ファイバーのニアフィールドパターンを測定して推定を行い，規格値に近い，正しい結果を求めることができた．

今後の課題としてグレーディッド型単一モード光ファイバーを初めとした各種の光導波路に対する逆解析などがあげられる．

6．参考文献

（１）G.Coopa,P.Di Vita and U.Rossi:"Characterization of single mode fibers by near-field measurement" Electron.Lett.,19,8,pp.293-294(April 1983).

（２）K.Morishita :" Measuerment of refractive-index profile of single-mode optical fibers by the propagation-mode near-field method",IEEE J.Lightwave Technol.,LT-3,2,pp.244-247(April 1985).

（３）K.Morishita:"Index profiling of three-dimensional optical waveguides by propagation mode near-field method",IEEE J.Lightwave Technol.,LT-4,8,PP1120-1124(Aug. 1986).

（４）沢，小野，乗松，掛水：”光導波路の伝搬モードの近傍解を用いた屈折率分布の計算機推定法”，信学論(c)Ｊ７１－Ｃ，２，ｐｐ．２２９－２３７（昭６３－０２）

（５）沢，小野，乗松：”光導波路の屈折率分布の一推定法”，電学会電磁界理論研資,ＥＭＴ－８７－１３２（昭６２－１２）

（６）沢，小野，高橋：”ノイズを含む伝搬モードの近傍解に基ずく光導波路の屈折率分布の逆解析”，電子情報通信学会論文誌Ｃ－１,Ｖｏｌ．Ｊ７２－Ｃ－１．Ｎｏ．９．ｐｐ５３５－５４２（平元－９）

（７）森下：”伝搬モードの光強度分布を用いた光ファイバーの屈折率分布測定”，電学会電磁界理論研資，ＥＭＴ－８３－４５（昭和５８－０９）

輻射科学研究会
RS 93-20

階層型ニューラルネットワークを用いた光導波路の構造パラメータの推定

島廻　勤，藪　哲郎，沢　新之輔
大阪府立大学　工学部

平成５年１２月３日

階層型ニューラルネットワークを用いた光導波路の構造パラメータの推定

島廻　勤　　藪　哲郎　　沢　新之輔

（大阪府立大学）

1．まえがき

最近，ニューラルネットワークの応用についての研究が活発に行われている．ニューラルネットワークは，生体の神経細胞をモデルとしたユニットをネットワーク化した並列分散情報処理システムであり，そのネットワークの構成によって階層型と相互結合型に分けられる．階層型ニューラルネットワークは静的な認識問題としては文字認識，動的な対象としては時系列データ処理などに応用されている．階層型ニューラルネットワークの応用における特徴は，入出力関係の学習が成功すれば非線形性の強い写像を構築できるという簡便性，さらに，学習が終了すれば，積和演算を行うだけでその補間機能により未学習の入力値に対しても妥当な値を出力する汎化能力，および迅速性である．

本研究では，以下の推定問題に対し，階層型ニューラルネットワークの適用を検討した．

1．端面反射法によって得られる平滑化された屈折率分布（測定データ），もとの屈折率分布を推定する問題

2．光ファイバーからの近傍界より光ファイバーの構造パラメータを推定する問題

これらの問題は最適化を用いた数値的解法により解くことも可能であるが，非線形問題であるため，適切な初期値を与えないと収束しなかったり，局所的最小値に陥ってしまう場合があり，うまく解けないことが多い．そこで，本研究では（1）においては，平滑化された屈折率分布ともとの屈折率分布，（2）においては，光ファイバーの近傍界と構造パラメータ，の関係をニューラルネットワークに学習させ，ニューラルネットワークにより屈折率分布を求める手法を提案する．そして，ニューラルネットワークによって求めた解を最適化を用いた数値解法への初期値として採用し，推定値の精度を向上させることを試みる．

2．端面反射法に関する検討および階層型ニューラルネットワークの適用について

光導波路の屈折率分布の測定には数多くの方法が提案されているが，その中で端面反射法は最も直接的な測定法に属し，簡便で精度の高い測定法として期待される[1]．端面反射法はレンズ系によって光ビームを集束するが，光の回折現象によりその強度分布は測定上好ましいデルタ形とならず波長0.78(μm)の場合，数マイクロ・メートルの広がりもったガウス形となる．そのため，マイクロ・オーダーの光導波路の屈折率分布を測定するには精度が不十分であり，測定結果はガウス形の特性をもつローパスフィルタを通したもの（平滑化されたもの）となる．したがって，測定結果から真の屈折率分布を推定することは，いわゆる悪条件問題（ill-conditioned problem）または不良設定問題（ill-posed problem）となる．

パワースペクトル密度分布により，高周波成分の情報の欠落を示すと図２のようになる．図からわかるように測定結果には真の屈折率分布に含まれていた高周波成分が失われている．

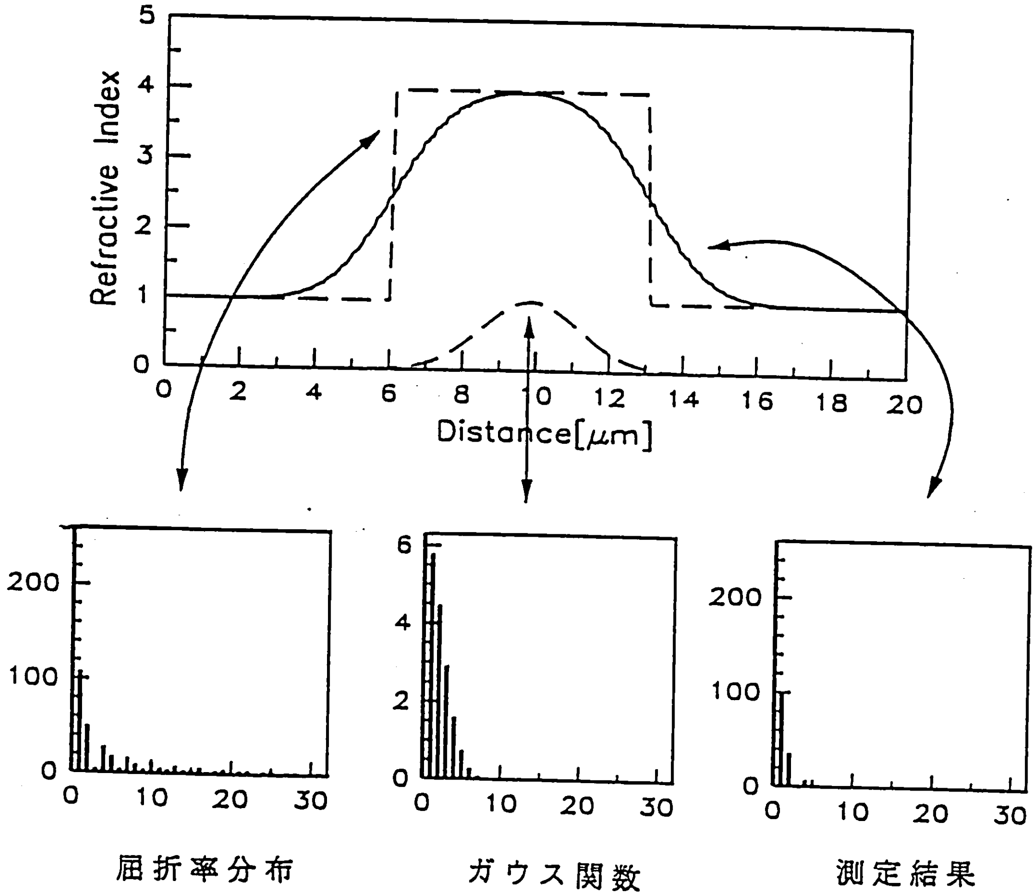


図２．パワースペクトル密度分布による
高周波成分の情報の欠落の様子

不良設定問題での大きな問題点の一つは，情報の欠落によって，解の一意性がなくなることである．すなわち，同じ測定データを与える屈折率分布が幾つも存在することになる．解を得るためには先験的な知識に基づく拘束条件が必要となり，しかも適切な拘束条件を選ばなければ意味のある解を求めることはできない．拘束条件を用いた様々な最適化アルゴリズムが提案されているが，問題によっては膨大な計算量を必要とし，さらに，局所的最小値にはまり込みやすい．そこで，本研究では，階層型ニューラルネットワークに平滑化された屈折率分布と真の屈折率分布の写像関係を構築することにより，屈折率分布の推定を行う．

3. 階層型ニューラルネットワーク

3・1 ネットワークの構成

ニューラルネットワークは生体の神経細胞をモデルとした多入力・1出力の素子であるユニットを基本素子としたネットワークである．本研究では，信号が入力層から出力層へ，一方向に流れるfeedfoward型3層ニューラルネットワークを採用した．

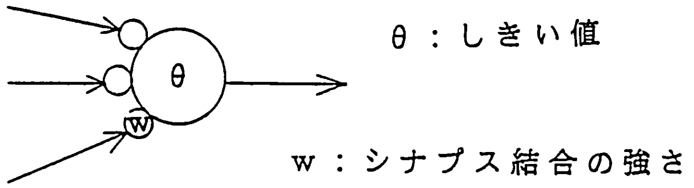


図3．1　ユニット

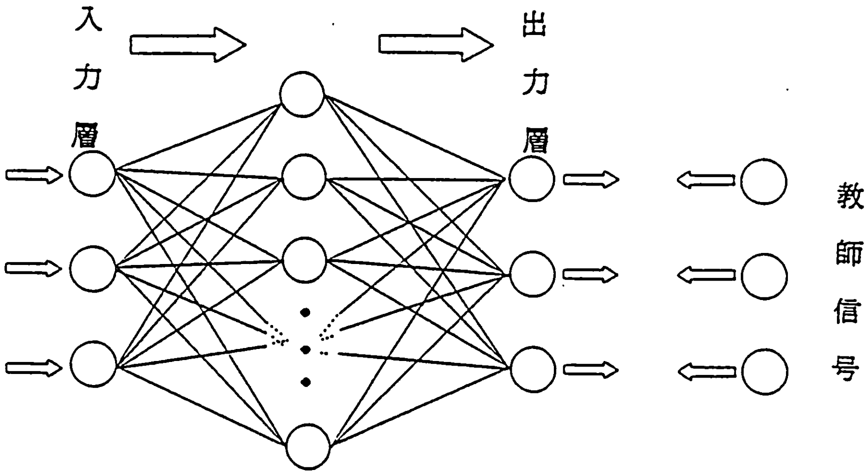


図3．2　階層型ニューラルネットワークの概略図

図のようなネットワークに対して，入出力関係の組を用意し，学習を行うことにより，その入出力関係をネットワークに構築する．

3・2学習アルゴリズム

学習アルゴリズムとしては，ネットワークの出力層で望むべき値が教師として与えられる教師付き学習則であるバックプロパゲーション法（Back Propagation 以下，BP法と称す）[2]を用いる．シナプス結合が予め与えられていない未学習のネットワークは無意味な値を出力するため，出力信号と教師信号との出力誤差に基づき結合の強さ，およびしきい値を徐々に変更し，誤差が十分小さくなるまで繰り返す．BP法はこの考えをそのままアルゴリズムとして与えたもので，極値探索アルゴリズムである最急降下法により，教師信号と出力信号の二乗誤差が最小になるように，層間のシナプスの結合の強さ，およびしきい値の更新をしていく．考慮する二乗誤差によって，逐次型と一括型に分類される[3]．逐次型BP法のほうが微調整が効き非線形性の強い連続写像の学習に有効である[3]ので，本研究では，全て逐次型BP法により学習をおこなった．本研究では，学習の高速化を図るため慣性項を導入したアルゴリズムを採用した．以下に，学習方程式を示す．

$$E=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(T_{pk}-O_{pk})^2$$

$$W_{ji}(t+1)=W_{ji}(t)+\Delta W_{ji}(t)$$

$$\Delta W_{ji}(t)=-\alpha\frac{\partial E}{\partial W_{ji}}+m\Delta W_{ji}(t-1)$$

$$\Delta\theta_j(t) = -\beta\frac{\partial E}{\partial\theta_j} + m\Delta\theta_j(t-1)$$

E　：p番目の学習パターンに対する二乗誤差

T_{pk}：p番目の学習パターンにおけるk番目の出力ユニットの教師信号

O_{pk}：p番目の学習パターンにおけるk番目の出力ユニットの出力信号

n　：出力ユニット数

W_{ji}：ユニットiからユニットjへの結合係数

θ_j　：j番目のユニットのしきい値

$\cancel{W_{ji}(t)}$　~~：tステップにおける結合係数~~

$\Delta W_{ji}(t)$　：tステップにおける結合係数の修正量

$\theta_j(t)$　：tステップにおけるしきい値

$\Delta\theta_j(t)$　：tステップにおけるしきい値の修正量

α：結合係数に関する最急降下法の係数

β：しきい値に関する最急降下法の係数

m：モーメント係数 $(0<m<1)$

ただし，本研究では，$\alpha=\beta$ として設定した．

4．端面反射射法への階層型ニューラルネットワークの導入

この章で，階層型ニューラルネットワークを用いて平滑化された分布（すなわち，測定データ）より，屈折率分布の推定をを行う．階層型ニューラルネットワークは，離散的な入出力関係を学習させるだけで任意の連続写像を任意の精度で近似でき（適用の簡便性），学習パターンにより未学習の入力に対して妥当な値を出力し（汎化能力），一度学習が終了すれば積和演算を行うだけで出力が得られる（応用時の迅速性）という特徴をもつ．階層型ニューラルネットワークは学習により連続写像が構築できるが，望む適切な写像を構築するには，適切な教師用データの作成，さらに適切なネットワークの構成が必要である．ネットワークの構成は経験によって決定しなければならない．このようなことから学習により望む適切な連続写像を構築することは困難である．けれども，大まかな推定値はニューラルネットワークによって得ることが可能である．一方，最適化アルゴリズムは初期値設定が難しい．そこで，本研究では階層型ニューラルネットワークにより大まかな推定を行い，その推定値を反復法を用いた最適化アルゴリズムでの初期値として採用し，推定値の信頼性の向上をはかる．最適化アルゴリズムとしては，本研究ではマルカート法を用いた．マルカート法で10回程度反復試行を行うことにより推定値は真の値と完全に一致する．

マルカート法は，Ｎ個のデータ点（x_i，y_i）（$i=1,2,\ldots,N$）を未知パラメータa_k（$k=1,2,\ldots,m$）に非線形に依存するモデルで当てはめることを考えたとき，このモデルは独立変数xと従属変数yの間の関数関係を与え，

$$y(x)=y(x;a_1,a_2,\ldots,a_m)$$

このとき，a_1，a_2，．．．，a_mについて

$$\sum_{i=1}^{N}[y_i-y(x_i;a_1,a_2,\ldots,a_m)]^2$$

を最小化するという非線形最小２乗問題解法においてはよく用いられるアルゴリズムである．

推定過程は以下の４フェーズで行われる．第１フェーズ，第２フェーズは応用のための準備であり，一度だけ行えばよい．したがって，応用時は第３フェーズ，第４フェーズだけ行う．

第１フェーズ

数値計算により教師用データを作成する．

第２フェーズ

ＢＰ法により（屈折率分布を教師信号，それを平滑化した分布を入力信号とし）学習を行い，階層型ニューラルネットワークに連続写像を構築する．

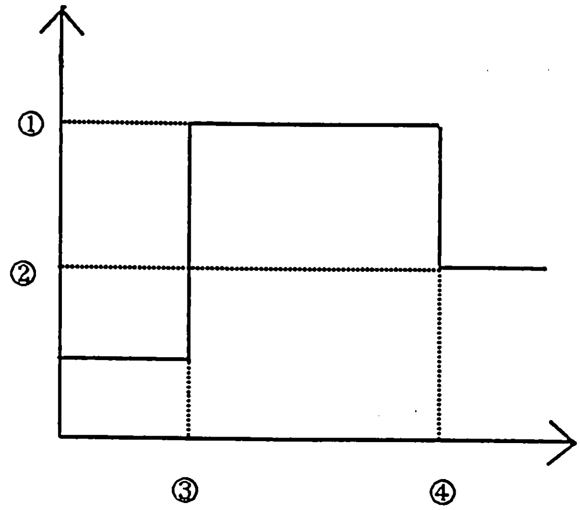
第３フェーズ

平滑化されたデータを階層型ニューラルネットワークに入力する．

第４フェーズ

階層型ニューラルネットワークの出力をマルカート法の初期値として入力し，推定値の微調整を行うとともに推定値の信頼性の向上をはかる．

今回推定の対象とした屈折率分布は反射法による測定により最も情報の欠落が多いステップ型とした．したがって，推定するパラメータは以下の４パラメータとした．基板部は予め屈折率がわかっていると考えて，今回は固定値とした．



①：コアの屈折率

②：クラッドの屈折率

③：ステップの始まり

④：ステップの終わり

図４．１　推定パラメータ

入力数は２０（すなわち，測定点数２０）とした．ネットワークの規模は入力層２０ユニット，隠れ層２０ユニット，出力層４ユニットとした．図４．２(ａ)，(ｂ)に今回ニューラルネットワークの学習の際に与えた教師データの分布と推定の結果の様子を記し，表１に推定結果を示す．

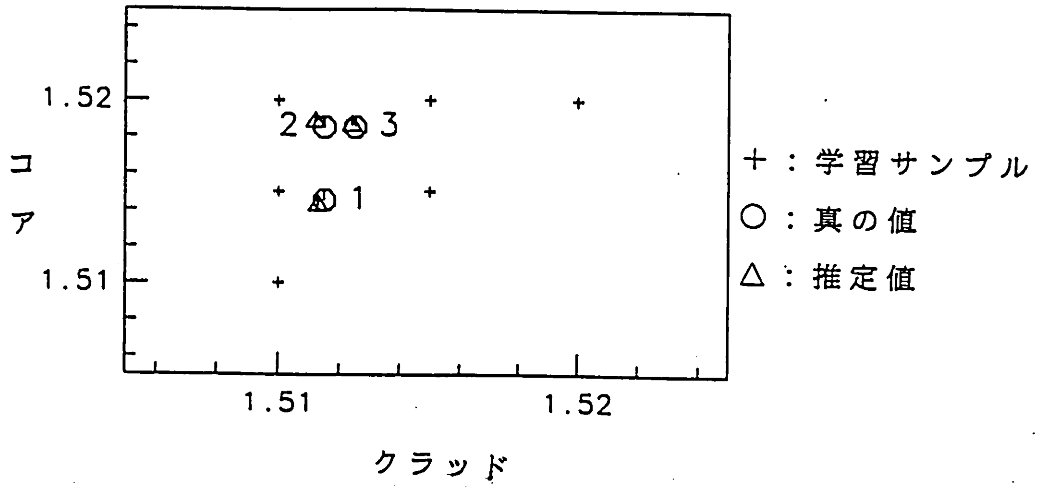


図４． ２(a) コアの屈折率，クラッドの屈折率の分布の様子

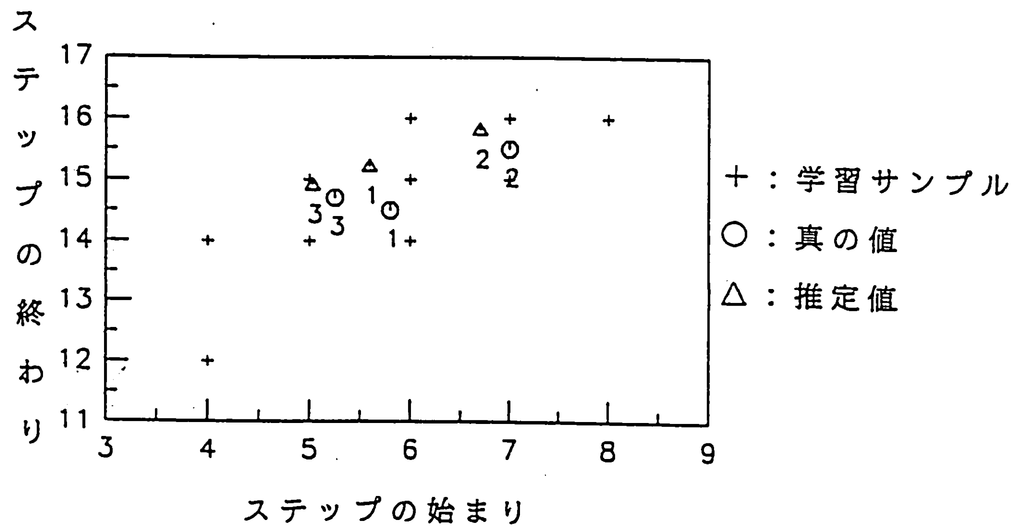
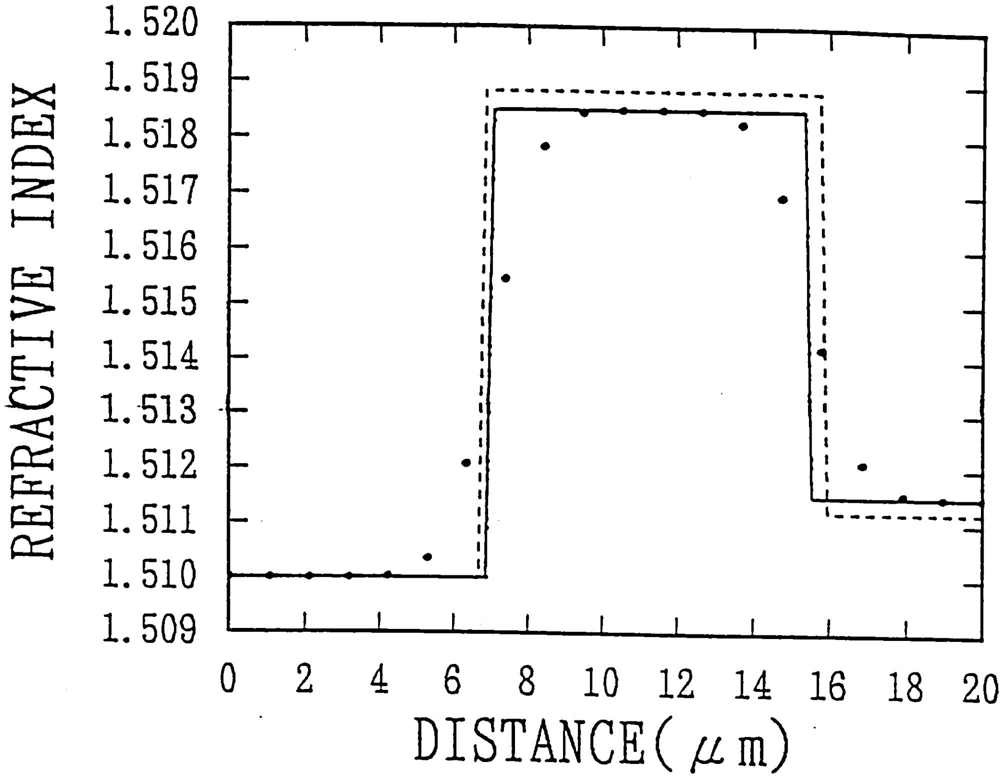


図４． ２(b) ステップの始まりと終わりの分布の様子

表１．屈折率分布の推定結果

	test 1	test 2	test 3
真のコア屈折率	1.5145	1.5185	1.5185
コア屈折率の推定値	1.5142	1.5188	1.5186
真のクラッド屈折率	1.5115	1.5115	1.5125
クラッド屈折率の推定値	1.5113	1.5112	1.5124
真のステップの始まり	5.8000	7.0000	5.2500
ステップの始まりの推定値	5.5932	6.7034	5.0324
真のステップの終わり	14.500	15.500	14.750
ステップの終わりの推定値	15.202	15.811	14.956

図４．３に，test2の屈折率分布の形状の復元の様子を示す．



実線　：真の屈折率分布

点　：平滑化された分布

破線　：ニューラルネットワークによる推定値

二点鎖線：マルカート法で微調整した結果

図４．３　屈折率分布の復元

5．ステップ型光ファイバーの構造パラメータの推定

光ファイバーの屈折率分布を推定する問題に対し，光ファイバーの伝搬モードの近傍界を利用する方法が提案されている．この近傍界を利用してステップ型光ファイバーの構造パラメータを求める問題に対し，非線形最適化アルゴリズムを用いた推定法が提案されているが[4]，このような問題は一般に，初期値の設定が難しい．本研究では，階層型ニューラルネットワークにより解に極めて近い初期値を求めることによりこの問題点の改善をはかる．

ステップ型光ファイバーの構造パラメータとしては，コアの屈折率，クラッドの屈折率，コアの半径，クラッドの半径（ファイバーの半径）の４つが考えられる．このうち，クラッドの半径は近傍界の界分布に影響しない[4]．また，コアの屈折率とクラッドの屈折率を独立に求めることは出来ず，その差しか求めることが出来ない[4]．従って，ここではクラッドの屈折率を固定値（１．４５５）とした．よって，推定するパラメータはコアの屈折率，およびコアの半径の２つとなる．

階層型ニューラルネットワークにより初期値を求めるために，数値計算により近傍界の分布の形状を求め，これを入力信号とし，そのときのコアの屈折率およびコアの半径を教師信号として学習を行う．ネットワークの規模は入力層１０ユニット，隠れ層１０ユニット，出力層２ユニットの３層階層型ネットワークとした．最適化アルゴリズムとしては４章に記したマルカー

図5．1にニューラルネットワークの学習の際に与えた教師データの分布および推定結果の様子を，図5．2に教師データの近傍界の形状を記し，表2に推定結果を示す．

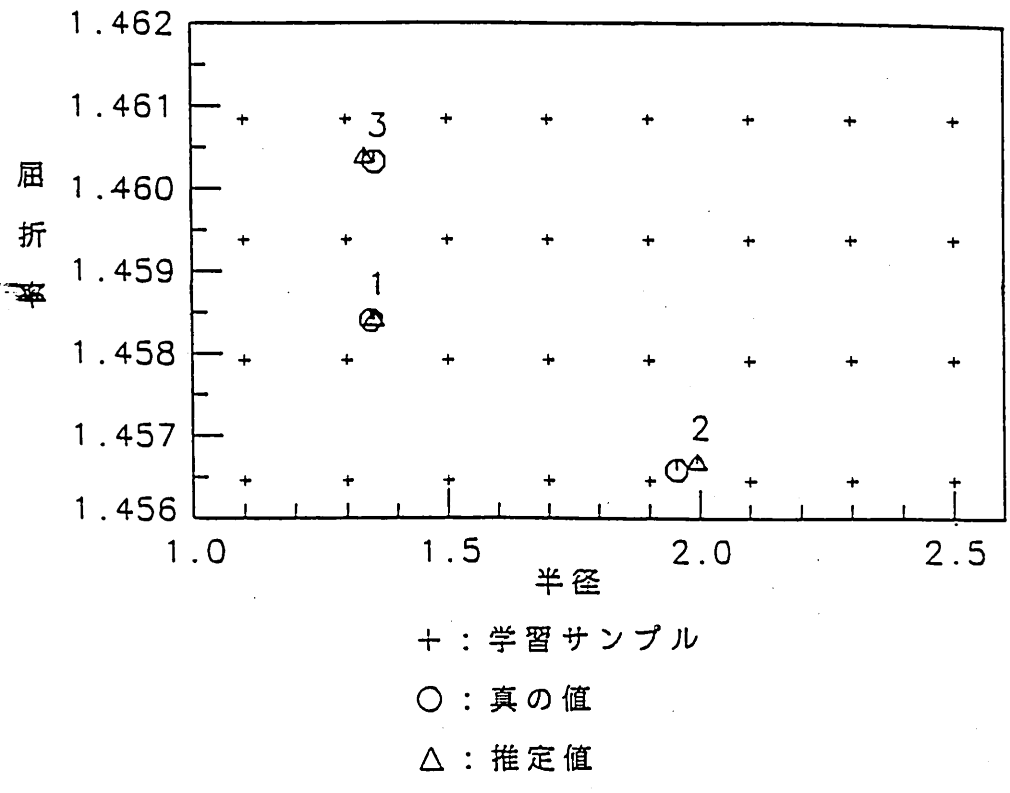


図5．1屈折率と半径の分布の様子

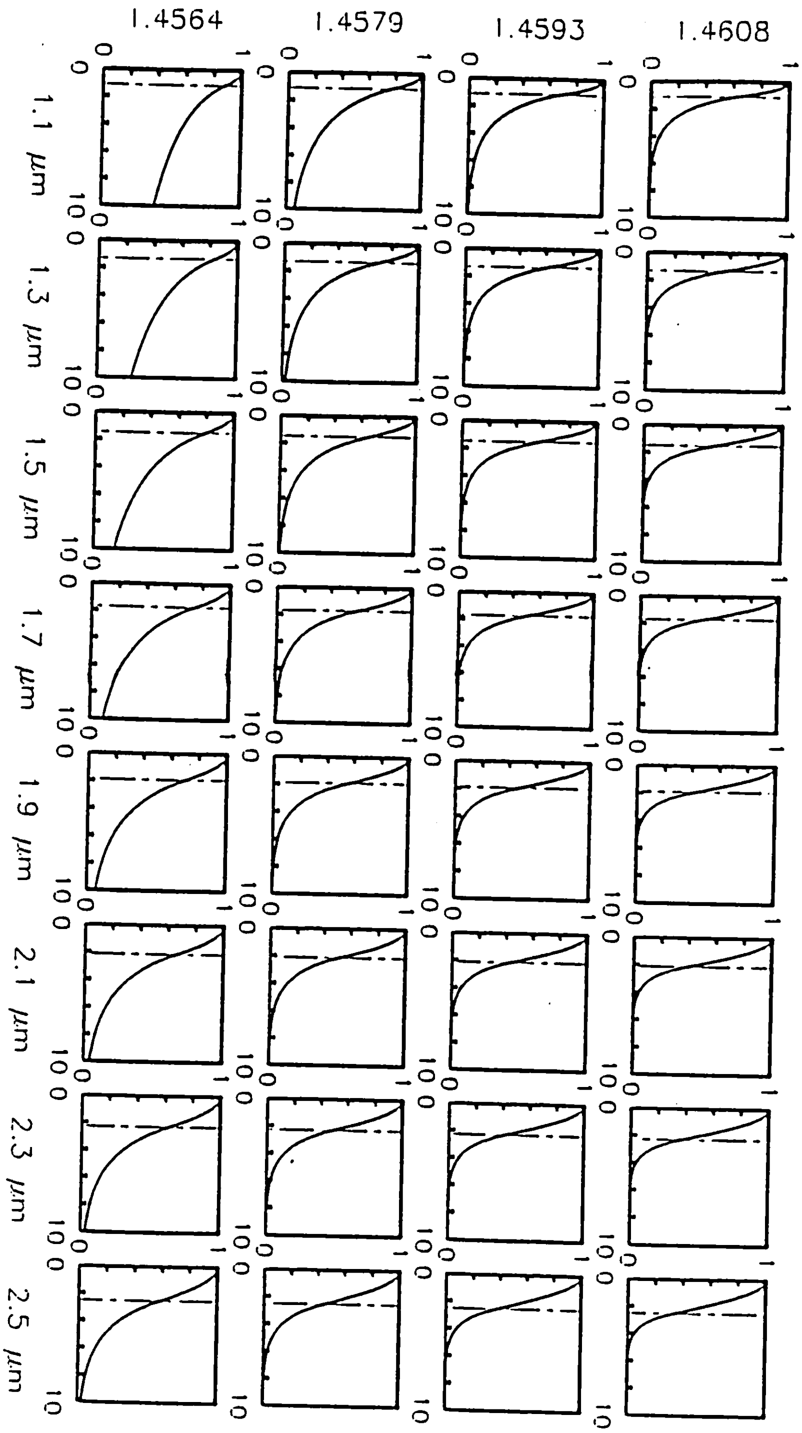


図５．２　教師用データの形状

表2．ステップ型光ファイバーの構造

パラメータの推定結果

	test1	test2	test3
真の屈折率	1.458436	1.456587	1.460325
屈折率の推定値	1.458401	1.456669	1.460378
marquardt	1.458436	1.456587	1.460325
真の半径（μm）	1.348360	1.953250	1.356780
半径の推定値	1.354190	1.993820	1.336560
marquardt	1.348355	1.953244	1.356789

6．むすび

光導波路（光ファイバー）の構造パラメータの推定という問題に対し，階層型ニューラルネットワークの適用を試みた．階層型ニューラルネットワークに構築した写像関係では精密な推定値を得ることは難しいため，本研究では，ニューラルネットワークの推定値を反復法を用いた最適化アルゴリズムの初期値として採用し，推定値の微調整を行い，精度および信頼性の向上をはかった．その結果，精度の高い推定結果が得られた．

今後の課題としては，実際の測定データへの適用や，グレーデッド型のような任意の屈折率分布の推定への適用，また，階層型ニューラルネットワークと最適化アルゴリズムを組み合わせた本手法を他の推定問題へ適用することが考えられる．

参考文献

[1] 沢，小野，野本：" 端面反射法による拡散形ガラス製光導波路の屈折率分布の測定"，信学論（C），J-73-C-1,No.1,PP.19-24(1990-1)

[2] David E.Rumelhalt,Geoffrey E.Hilton & Ronald J.Williams;Learning representations by back-propagation errors,*Nature* 323,pp.533-536 (1986-10)

[3] 中野編著，ニューロコンピュータの基礎(1990),コロナ社

[4] 寺澤，藪，沢：" ステップ型単一モード光ファイバーの構造パラメータの逆解析による推定"，輻射科学研究会,RS 93-19,(1993-12)

輻射科学研究会
ＲＳ９３－２１

複数導波路のＢＰＭ解析における標本化の検討
－解析結果の誤差とその低減－

橋口 伸樹、堤 喜代司、平井 宏
（京都工芸繊維大学工芸学部）
弓場 芳治
（岡山県立大学情報工学部）

平成６年３月７日

正誤表

誤	正
○P.2　5行目	
微小な距離ごとに	微小な距離Δｚごとに
○P.2　11行目	
相当する各周波数	相当する各空間周波数
○P.2　19行目	
最高各週波数	最高空間角周波数
○P.2　(4), (5)式	
$\frac{p^2}{\Delta z} \gg \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot \lvert\Delta n\rvert_{\max}}{n_s^{\,2}}$　(4)	$\frac{\Delta z}{p} \ll \frac{1}{\pi \cdot \tan\theta}$　(4)
$\frac{p^2}{\Delta z} \gg \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot \lvert\Delta n\rvert_{\max}}{n_s^{\,2}}$　(5)	$\frac{(\Delta z)^2}{p} \ll \frac{\lambda}{2\pi \cdot \tan\theta \cdot \lvert\Delta n\rvert_{\max}}$　(5)
○P.3　1行目	
$\lvert \Delta n_{max} \rvert$	$\lvert \Delta n \rvert_{max}$
○P.3　2行目	
θは主な伝搬光波の	θは伝搬光波の
○P.3　6行目	
$\Delta x < 1/2u_{max}$	$\Delta x < 1/(2u_{max})$
○P.4　9行目	
変化するのかから、	変化するかにより、
○P.4　20〜23行目	
基板屈折率 $n\,s$＝1.520、波長λ＝0.6328[μm] 導波層への入射光はTE_0とする。また本節では、導波層の屈折率 $n\,d$＝1.521、導波路の長さL＝500[μm]とした場合の結果を表す。なお、以下の数値計算に用いた計算機はSUN S PARCstation	基板屈折率 n_s＝1.520、波長λ＝0.6328[μm]、導波層への入射光はTE_0とする。また本節では、導波層の屈折率 n_d＝1.521、導波路の長さL＝500[μm]とした場合の結果を示す。なお、以下の数値計算に用いた計算機はSUN SPARCstation
○P.5　6行目	
そこからΔz_n	そこからΔz_c
○P.5　(8)式	
$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^{M} \left(\beta_{cn} - \langle\beta_c\rangle\right)^2}$	$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{1}{M} \cdot \sum_{n=1}^{M} \left(\beta_{cn} - \langle\beta_c\rangle\right)^2}$
○P.5　22行目〜23行目	
標本点をどのように配置するによって、導波層での標本点の個数が1点多いか、あるいは1点少ないかで決まる。	標本点をどのように配置するかによって、導波層での標本点の個数が1点多いか、あるいは1点少ないかが決まる。

○P.5 24行目～P.5 26行目

図２（b）の左側の境界からずれることになる。例えば、図２（b）の左側の境界は導波層の内側へ後退している。

図２（b）のように計算上の導波層の境界は、本来の導波層の境界からずれることになる。例えば、図２（b）の左側の境界は基板層側へ進出しており、右側の境界は導波層の内側へ後退している。

○P.6 図２のキャプション

（b） 計算での導波層の厚さの差δ

図２ 導波層での標本点数の違いにより生じる計算上のずれ

（b） 計算上の導波層の厚さ

図２ 導波層での標本点の配置

○P.7 1行目～2行目

そこで、計算上の導波層の厚さｄｃと本来の導波層の厚さｄの差をδ＝（ｄｃ－ｄ）／ｄで表すものする。標本点の配置により、導波層での標本点の個数が１点だけ異なり、δの値を正あるいは負の値をとることになる。

そこで、計算上の導波層の厚さd_cと本来の導波層の厚さｄの差をδ＝（d_c－ｄ）／ｄで表すものとする。標本点の配置により、導波層での標本点の個数が１点だけ異なり、δの値は正あるいは負の値をとることになる。

○P.7 8行目

標本点の配置が

標本点の配置を

○P.8 図３のキャプション

図３ Δｚに対する$<\beta_c>$のσ_βの変化（δが負の場合）

図３ Δｚに対する$<\beta_c>$とσ_βの変化（δが負の場合）

○P.11 2行目～3行目

Δｚが２波長程度より小さくなると、伝搬定数の平均値<βc>も標準偏差σ_βのばらつきも、やはり大きいる。

くなっている。

Δｚが２波長程度より大きくなると、伝搬定数の平均値<βc>がばらつき、標準偏差σ_βが大きくなって

○P.11 5行目

振動しながら近くづいて

振動しながら近づいて

○P.11 14行目

伝搬方向での位置＝ｍ、F_n=入射波

ｍ＝伝搬方向での位置、F_1=入射波

○P.11 16行目

N=FFTの標本点であり

N=横方向の標本点数であり

○P.11 19行目

伝搬されている

伝搬している

○P.11 22行目

0.2935[μｍ]程度必要である

0.2935[μｍ]程度にする必要がある

○P.12 図６の説明とキャプション

＜β＞

$<\beta_c>$

○P.13 図８のキャプション

解析に用いた導波層が４本の複数導波路の形状

導波層が４層の複数導波路の形状

○P.17 5行目

nd=1.523、基板屈折率ns=1.520

n_d=1.523、基板屈折率n_s=1.520

○P.26 14行目

Areas in Comunications,

Areas in Communications,

複数導波路のＢＰＭ解析における標本化の検討
－解析結果の誤差とその低減－

橋口 伸樹、堤 喜代司、平井 宏
（京都工芸繊維大学工芸学部）
弓場 芳治
（岡山県立大学情報工学部）

1　はじめに

導波路中を伝搬する光波の解析法にビーム伝搬法（ＢＰＭ）がある[1]-[3]。この手法は、弱導波条件を満たす種々の屈折率分布に一律に適用でき、導波光と放射波を一括して扱えるのが特徴である。最近では、光デバイスや光集積回路などの複雑な導波路構造に、ＢＰＭを用いる試みもなされている[4]-[6]。数値計算にあたって、伝搬方向の計算きざみΔｚと横方向の標本点間隔Δｘをどのような値にするかが得られた結果の精度を左右する。これらの計算パラメータΔｚ、Δｘの値の設定について、グレーディッド形の屈折率分布を対象として、いくつかの報告がある[3],[7]。ＢＰＭでは離散フーリエ変換（ＤＦＴ）を用いるので、導波路の屈折率分布は、標本点で離散化して表される。このため、ステップ形の屈折率分布の場合、屈折率変化が急峻な導波路の境界が確定せず[8]、導波路の幅が計算上曖昧になるものと考えられる。またこれは、グレーディッド構造であっても屈折率差が大きければ、当然、生じる問題でもある。にもかかわらず、このような問題についての定量的な考察は、あまり見受けられないようである。

本研究では、まずスラブ構造の直線導波路にＴＥ０次の固有モードを入射した場合、計算パラメータΔｘ、Δｚに対して、ＢＰＭではどのように異なる結果が得られるかを明らかにする。伝搬過程の位相変化から伝搬定数を算出して、導波層に対する標本点の配置いいかえると導波層での標本点数が結果に影響することを明らかにする。また、固有モードの界分布と伝搬毎の複素界分布との相関係数を求め[9]、屈折率分布の離散化が界形状へ及ぼす影響を調べる。

次に、複数の導波路を並べた場合を考え、各導波路での標本点の配置の違いが解析結果を左右することを明らかにする。

最後に、導波層での標本点数が揃うように、横方向の計算区間を移動する方法やステップの屈折率分布にわずかだけ平滑化処理を行う方法などを提案する。

2 ＢＰＭでの計算パラメータに関する条件

ビーム伝搬法（ＢＰＭ）は光波の伝搬方向ｚで微小な距離ごとに

（１）光波の各空間周波数成分ごとに、基板の屈折率 n_s の媒質中を $\Delta z/2$ だけ進行させる。

（２）導波層での屈折率の増加 $\Delta n = n(x) - n_s$ の分だけ位相を変化させる。

（３）（１）と同様の計算を行う。

を繰り返すものである。（１）および（３）で平面波に相当する各周波数成分を求めるために離散フーリエ変換（ＤＦＴ）を行い、（２）では位相変化を導波層内での光波に与えるために離散フーリエ逆変換により、光波の空間的な分布（界分布）を求めなければならない。

ＢＰＭでは導波路構造を解析する上でいくつかの近似が用いられている。このため適用には次のような制限があることがＪ．Ｖ．Ｒｏｅｙらによって、明らかにされている。屈折率分布（スラブ導波路の場合は $n(x)$）が横方向で緩やかな変化をしていることを条件に、伝搬方向ｚでの計算きざみ Δz および、Δn^2 の最高各週波数の逆数ｐに関して、以下の５つの式が導かれる。

$$\Delta z \langle\langle \frac{\lambda}{|\Delta n|_{max} \cdot \sin^2 \theta} \tag{1}$$

$$p \rangle\rangle \sqrt{2} \cdot \frac{\lambda}{n_s} \tag{2}$$

$$\frac{p^2}{\Delta z} \rangle\rangle \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot |\Delta n|_{max}}{n_s{}^2} \tag{3}$$

$$\frac{p^2}{\Delta z} \rangle\rangle \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot |\Delta n|_{max}}{n_s{}^2} \tag{4}$$

$$\frac{p^2}{\Delta z} \rangle\rangle \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot |\Delta n|_{max}}{n_s{}^2} \tag{5}$$

ここで、$|\Delta n_{max}|$は導波路の屈折率差の最大値（$\Delta n = n(x) - n_s$、$\Delta n^2 = n^2(x) - n_s^2$）、$\theta$は主な伝搬光波の角度スペクトルのうちの主な光波に対する最大角度である。λは波長、n_sは基板での屈折率、pは屈折率分布の最高空間周波数u_{max}の逆数に比例し、$p = 2\pi/u_{max}$で表される。上記から、Δzはできるだけ小さくpはできるだけ大きくする必要がある。屈折率分布を正確に表現するために$\Delta x < 1/2u_{max}$より$\Delta x < p/(4\pi)$の条件が必要であり、屈折率の変化が急であれば（u_{max}が高ければ）、Δxも小さくしなければならない。グレーディッド形の導波路であれば、上記の条件を満たすように計算パラメータΔx、Δzを設定すればよいが、ステップ形の導波路では、屈折率分布の最高空間周波数が有限ではないので、上記の条件をそのまま適用できないと考えられる。従って、ＢＰＭをステップ形導波路に適用する際のΔx、Δzの設定について、検討する必要がある。

3　ステップ形導波路での計算パラメータの設定

ＢＰＭによる解析の精度をしらべるには、何らかの方法で真値あるいは真値に近いと思われる値を得ておく必要がある。導波路の固有モードの光波はそのままの形で位相だけ伝搬定数に従って変化して伝搬していく。従って固有モードの光波を導波路に入射したものとして、各伝搬距離でどのような複素界振幅が得られるかを調べれば、ＢＰＭによる解析の精度をチェックできると考えられる。

導波路断面の１点での複素界振幅の位相が伝搬距離によってどのように変化するのかから、伝搬定数の値を求めることができる。固有モードの光波を入射するものとして、各伝搬距離での複素界振幅の位相から伝搬定数を求めると、この値はＢＰＭの計算において感じられる伝搬定数と考えられる（これを計算上の伝搬定数と呼ぶ）。伝搬方向の各点ここではある距離Δz_cごとに計算上の伝搬定数の値を求めるものとする。また、伝搬過程での界振幅の形状が固有モードの界分布とどれだけ一致しているかを見るため、相関係数の値を伝搬方向の各点で求める。ＢＰＭでの計算パラメータΔxとΔzの値を変えるとステップ形導波路の解析結果がどのように変化するかを上記の２点から調べるものとする。

図１はここで用いる直線導波路構造である。簡単のため、ｙ方向に構造が一様な、ステップ形でシングルモードのスラブ導波路を考える。横方向の計算区間Ｗは150[μ m]、導波層の厚さ$d=3$[μ m]、基板屈折率$n_s=1.520$、波長$\lambda=0.6328$[μ m]導波層への入射光はTE_0とする。また本節では、導波層の屈折率$n_d=1.521$、導波路の長さ$L=500$[μ m]とした場合の結果を表す。なお、以下の数値計算に用いた計算機はSUN S　PARCstation 10であり、倍精度計算により求めたものである。

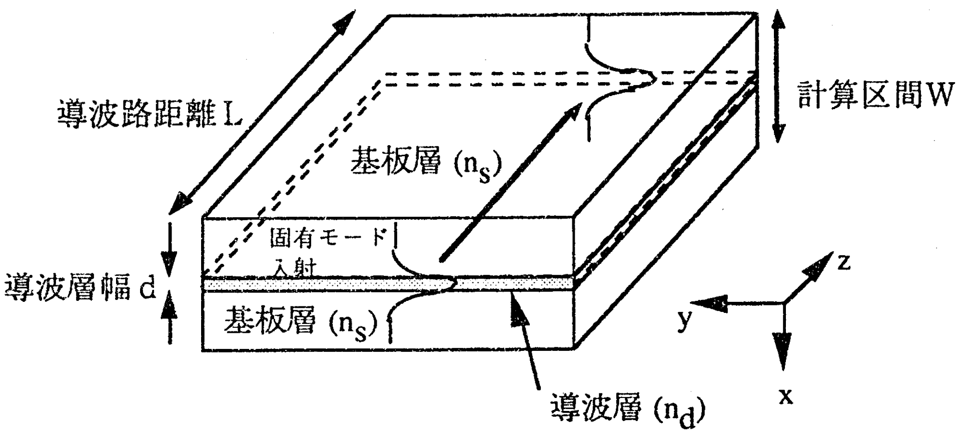


図１　解析で用いた直線導波路

3．1　計算上の伝搬定数β_c

まず、ＢＰＭの計算上の伝搬定数を割り出す。最初に伝搬距離Δz_cごとに伝搬方向ｚ軸で光波の位相変化$\Delta\phi$を求める。ある空間座標(x_1, z_1)での複素界振幅$E_{11}(x_1, z_1)$の実数部$\mathrm{Re}\ E_{11}(x_1, z_1)$、虚数部$\mathrm{Im}\ E_{11}(x_1, z_1)$から偏角$\tan^{-1}(\mathrm{Im} E_{11}/\mathrm{Re}\ E_{11})$を求める。伝搬方向に対し横方向での位置$x_1$を固定して、そこから$\Delta z_n$伝搬後の空間座標$(x_1, z_2)$での偏角$\tan^{-1}(\mathrm{Im}\ E_{12}/\mathrm{Re}\ E_{12})$までの位相変化$\Delta\phi_1$を求める。この$\Delta\phi_1$を$\Delta z_c$で割って、その区間での計算上の伝搬定数$\beta_{c1}$とし、順次、区間を変えて$\Delta\phi_n$を求める。固有モードを入射していることから、固有モードの（本来の）伝搬定数β_0と、このβ_{cn}は近い値となるはずである。

$$\beta_{cn} = \frac{\Delta\phi_n}{\Delta z_c}\ (n = 1,\ 2 \ldots M) \qquad (6)$$

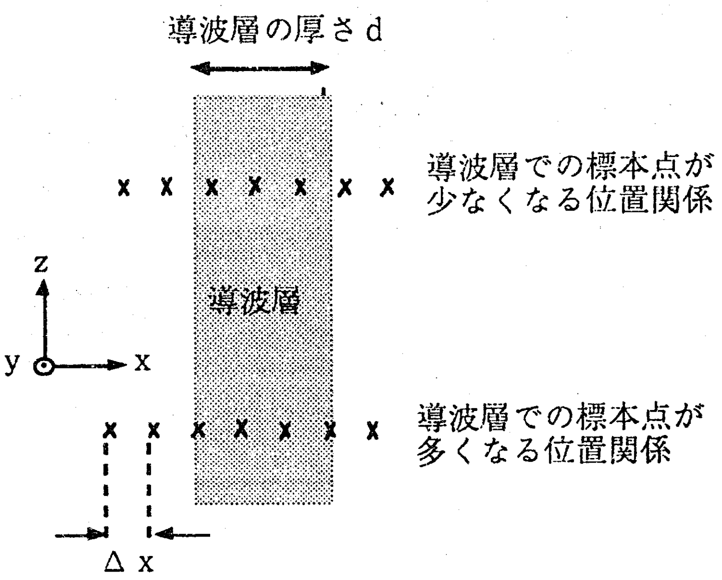
式（6）より求めた計算上の０次の伝搬定数β_{cn}は、伝搬距離Ｌに対して変動するので、その平均値$<\beta_c>$及びβ_{cn}の変動を示す偏差σ_βを求めて入射したモードのβ_0と比較する。

ここで、Δz_cは一律10[μm]、β_{cn}のサンプル数Mは５０として求めた。ＢＰＭの計算パラメータは、伝搬方向の計算きざみΔz =0.5[μm]で計算している。

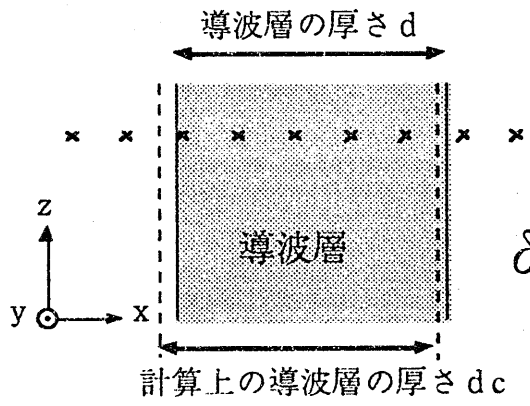
$$\langle\beta_c\rangle = \frac{1}{M}\cdot\sum_{n=1}^{M}\beta_{cn} \qquad (7)$$

$$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{1}{M}\cdot\sum_{m=1}^{M}\left(\beta_{cn} - \langle\beta_c\rangle\right)^2} \qquad (8)$$

ＢＰＭでは、離散フーリエ変換を行うので、屈折率分布を標本点により離散化することになる。導波層での標本点の配置の概要図を図２（a）に示す。標本点をどのように配置するによって、導波層での標本点の個数が１点多いか、あるいは１点少ないかで決まる。導波層を挟む標本点の中央に計算上の導波層の境界があるものとみなすと、図２（b）の左側の境界からずれることになる。例えば、図２（b）の左側の境界は導波層の内側へ後退している。



(a) 導波層での標本点数の違い



$$\delta = \frac{d - d_c}{d}$$

(b) 計算での導波層の厚さの差δ

図2 導波層での標本点数の違いより生じる計算上のずれ

そこで、計算上の導波層の厚さdcと本来の導波層の厚さdの差をδ＝（dc－d）／dで表すものする。標本点の配置により、導波層での標本点の個数が1点だけ異なり、δの値を正あるいは負の値をとることになる。

計算上の伝搬定数の平均値$<\beta_c>$は、パワーのピーク位置である導波層の中央での位相変化から求めるものとする。

横方向での計算きざみ$\Delta x=0.2935[\mu m]$での、伝搬方向の計算きざみΔzに対する、伝搬定数の平均値$<\beta_c>$、偏差σ_βの変化を図3、図4に示す。図3、4でΔxが同じであってもδが異なるのは、標本点の配置が僅かにずらせているためある。図3からΔzが2波長程度より小さくなると、伝搬定数の平均値$<\beta>$がある値に収束する傾向が見られた。Δzが2波長以上となると、平均や偏差もバラつき、計算精度が悪くなっていると判断できる。Δzが小さいときの平均値$<\beta_c>$の値は、入射した固有モードの伝搬定数β_0の値ではなく、標本点の配置で決まることが分かる。つまり、ＢＰＭでは導波層と基板の境界を挟んだ2点の標本点間のほぼ中央に境界があるとみなされており、導波層の標本点数により得られる結果が異なる。

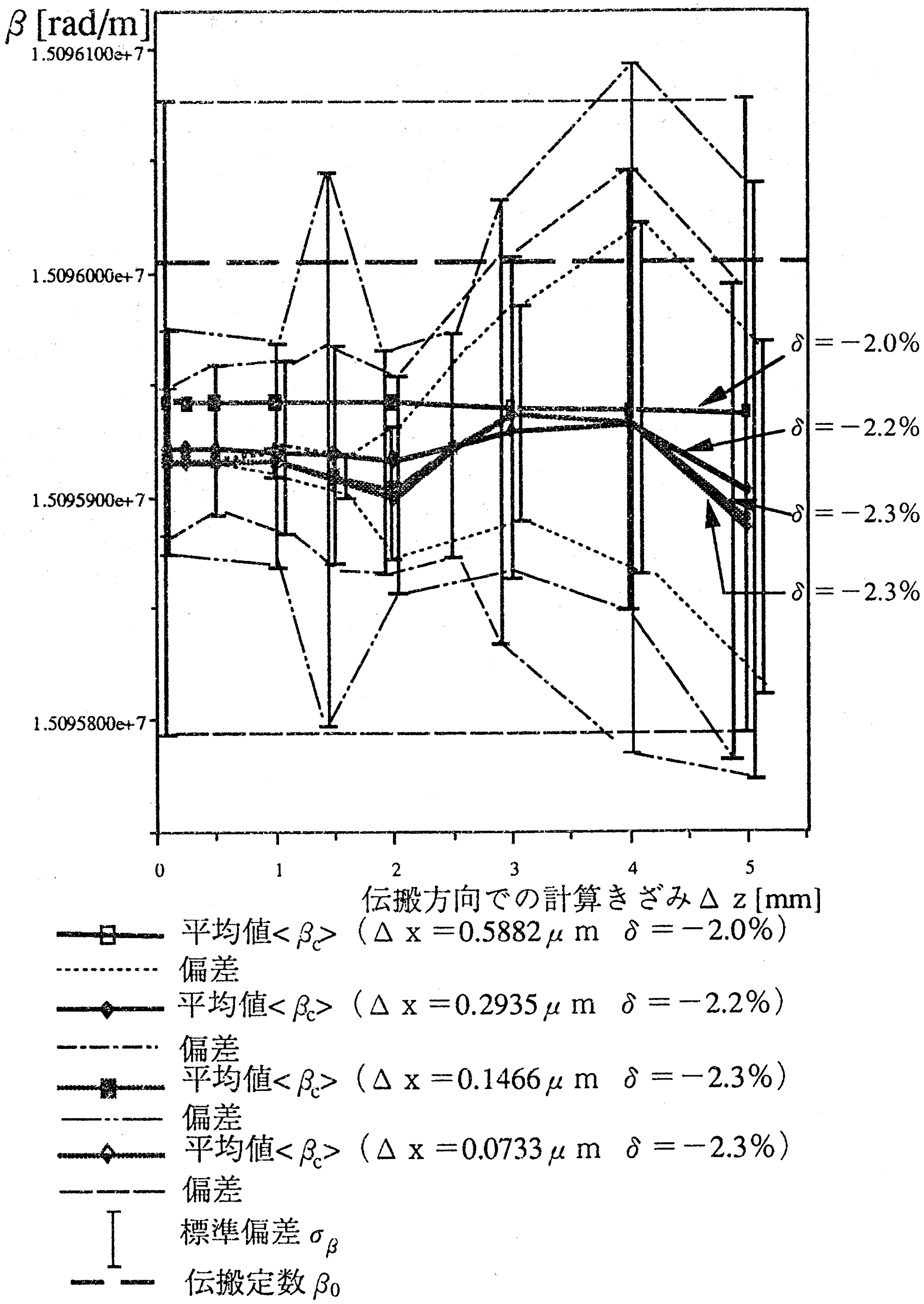


図3　Δ zに対する< β_c >の σ_β の変化（δが負の場合）

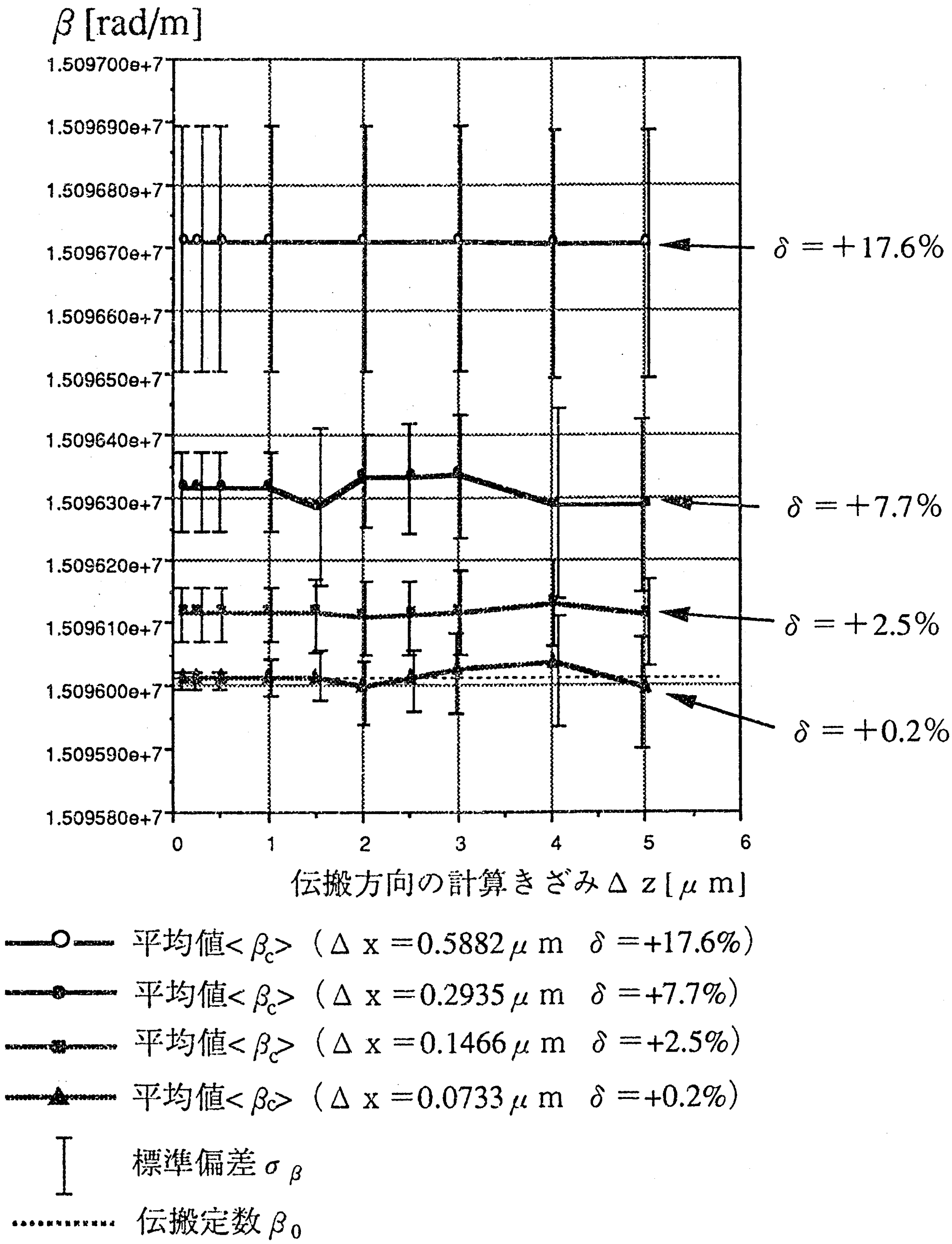


図4　Δ z に対する< β_c >と σ_β の変化（δ が正の場合）

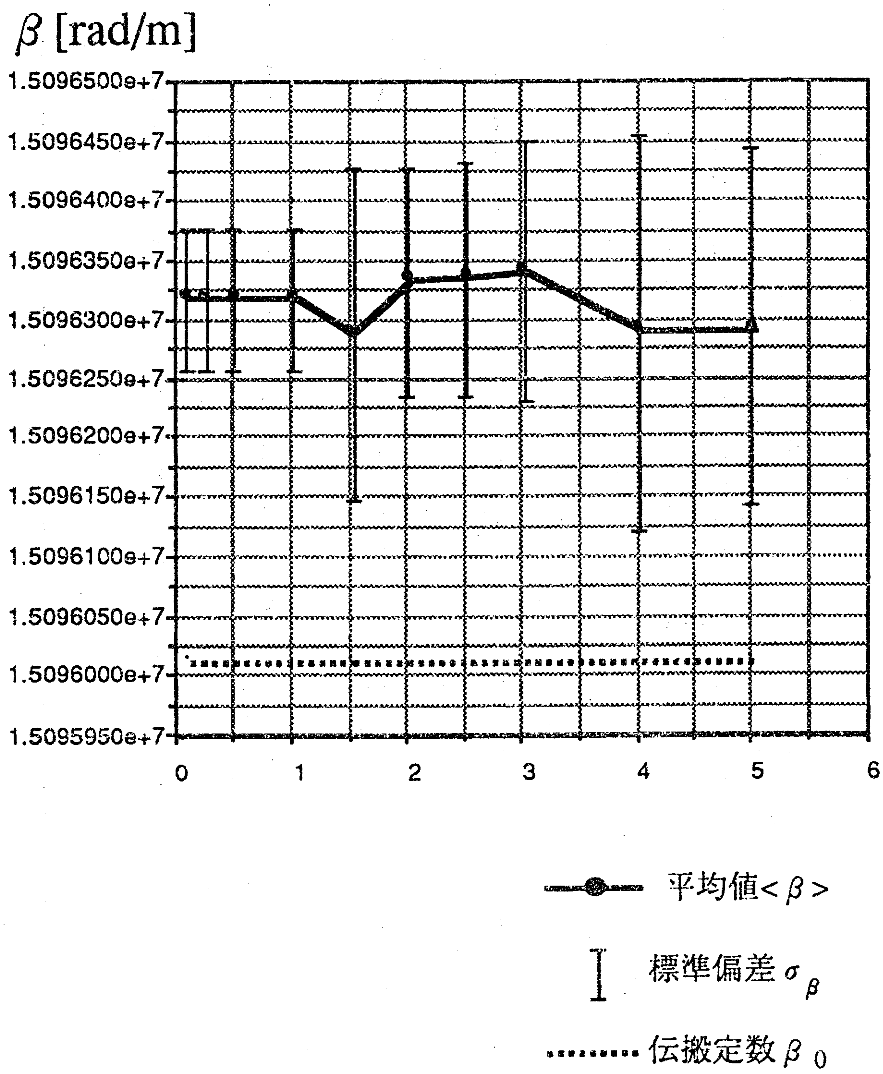


図５　Δ z に対する$<\beta_c>$とσ_βの変化（Δ x ＝0.2935[μ m]）

図4における$\Delta x=0.2935[\mu m]$での$<\beta_c>$とσ_βの変化をとり上げて、図5に改めて示す。Δzが2波長程度より小さくなると、伝搬定数の平均値$<\beta_c>$も標準偏差σ_βのばらつきも、やはり大きくなっている。

伝搬方向でのβ_{cn}の変化を図6に示す。固有モードが入射された直後を見ると、本来のβ_0から計算上の伝搬定数β_cに、振動しながら近くづいていくのが分かる。その後、伝搬距離$L=100[\mu m]$で計算上の伝搬定数β_cに落ち着くようである。Δzが大きくなると、このβ_{cn}の振動があまり収まらず、ばらつきが大きくなる。

3．2　複素界分布の相関係数r

伝搬過程での界分布と固有モードの界分布の相関係数r_mとその伝搬方向での平均値$<r_m>$を考える。

$$r_m = \frac{\sum_{l=1}^{N} F_l \cdot G_{lm}^*}{\sqrt{\sum_{l=1}^{N} |F_l|^2 \cdot \sum_{l=1}^{N} |G_{lm}|^2}} \tag{9}$$

$$\langle r_m \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{\sum_{l=1}^{N} F_l \cdot G_{lm}^*}{\sqrt{\sum_{l=1}^{N} |F_l|^2 \cdot \sum_{l=1}^{N} |G_{lm}|^2}} \tag{10}$$

ここで、l＝横方向での位置、伝搬方向での位置＝m、F_n＝入射波（固有モード）の複素界振幅成分、G_{lm}＝ある伝搬途中での複素界振幅成分、N＝FFTの標本点であり、Mは伝搬方向での界分布のサンプル数とする。

この相関係数r_mが1に近いほど固有モードの入射波が、そのままの形状で伝搬されていることになる。相関係数r_mは伝搬距離に対して変化するため、平均値$<r_m>$を求めて界形状の変化率として$1-<r_m>$を考える。Δxをパラメータとして、Δzに対する$1-<r_m>$の変化を図7に示す。

これから、Δzは2波長以内、Δxの値も$0.2935[\mu m]$程度必要であると思われる。

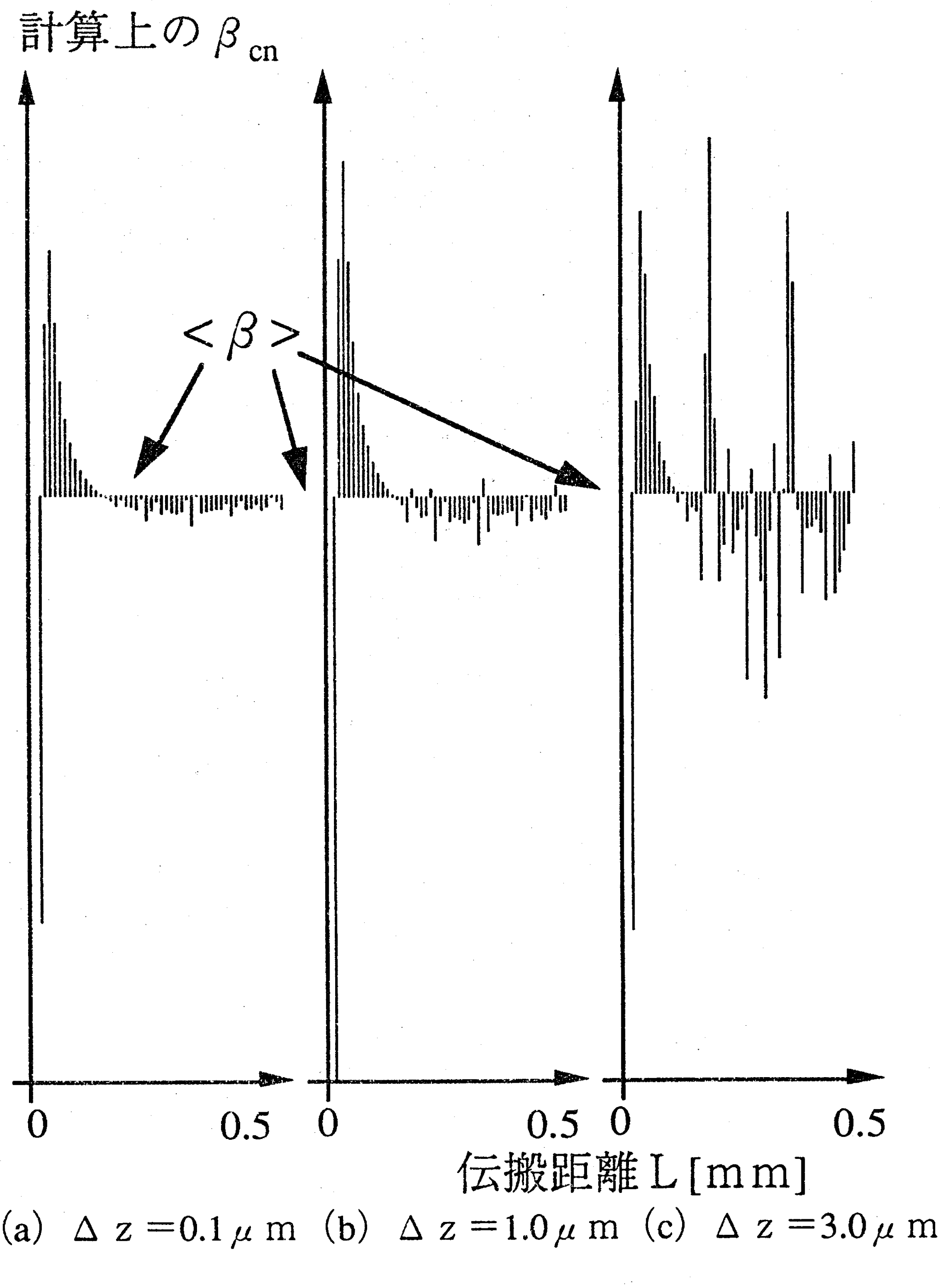


図6 Δz_cごとの計算上の伝搬定数β_{cn}とその平均値$<\beta>$

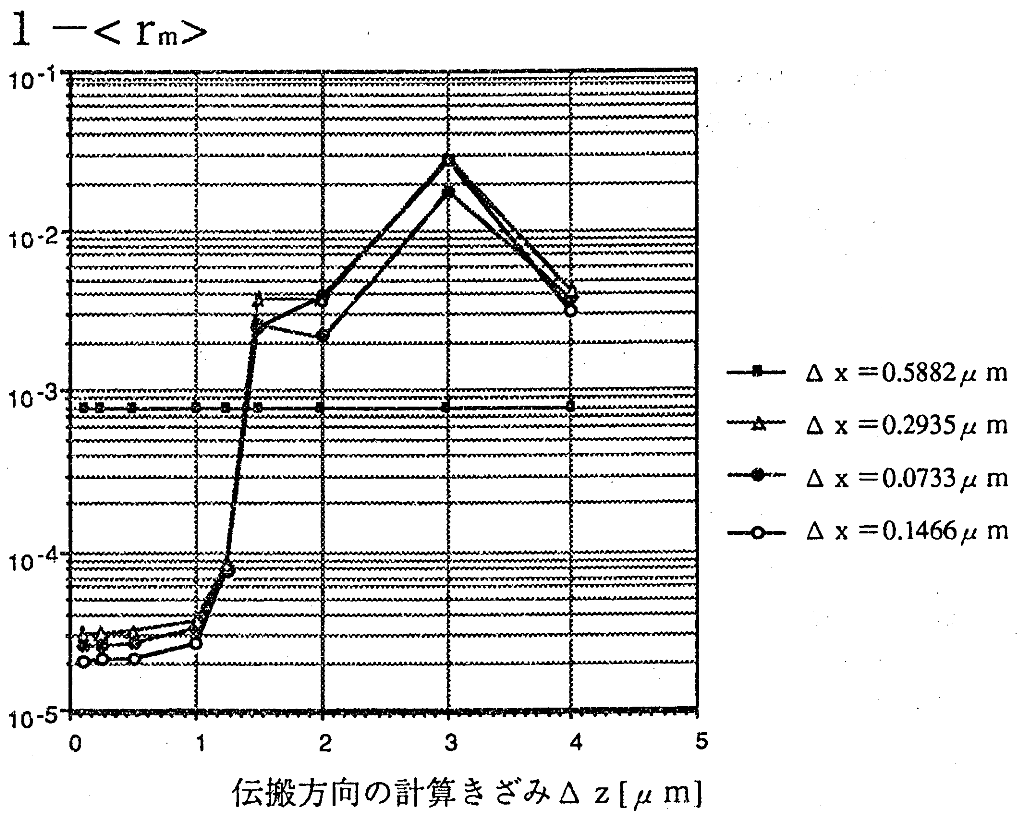


図7　Δ x をパラメータとしたΔ z に対する 1 −< r >の変化

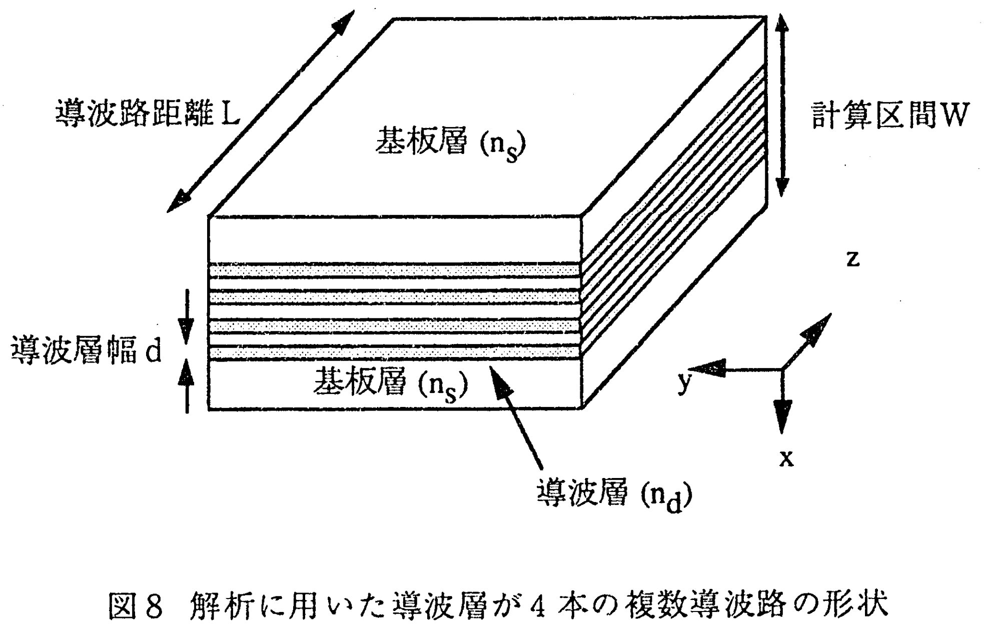


図8　解析に用いた導波層が 4 本の複数導波路の形状

4　複数導波路にＢＰＭを適用した際の問題

4．1　複数導波路での位相分布

設定した本来の導波層の厚さをｄとすると、標本点の配置により、計算上の導波路層の厚さd_cは

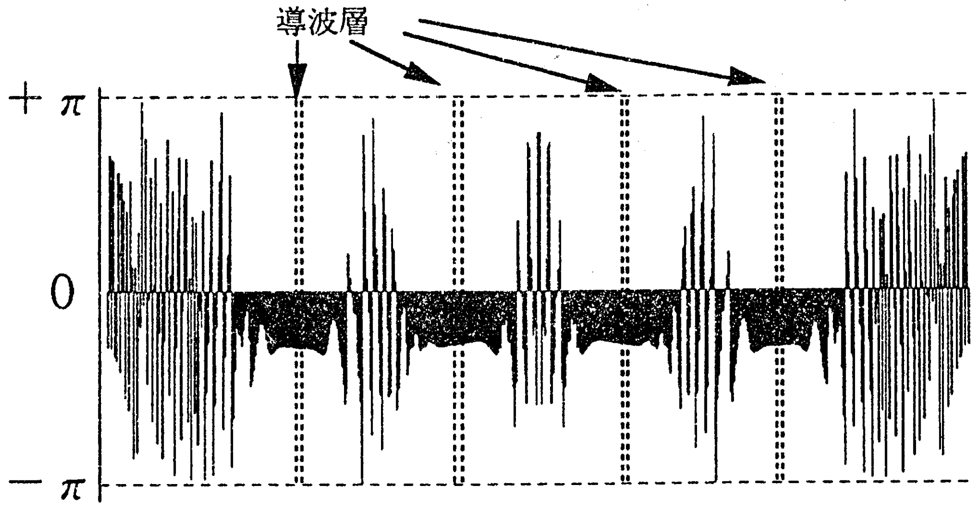
$$d_c=\left[\mathrm{int}\left(\frac{d}{\Delta x}\right)\right]\Delta x \ \text{ or } \ \left[\mathrm{int}\left(\frac{d}{\Delta x}\right)+1\right]\Delta x \qquad (1\ 1)$$

となる。なお、int（）は整数化を表す。このことにより、複数の導波層を並べた複数導波路においても、各導波層での計算上の伝搬定数β_cに差が生じることがある。

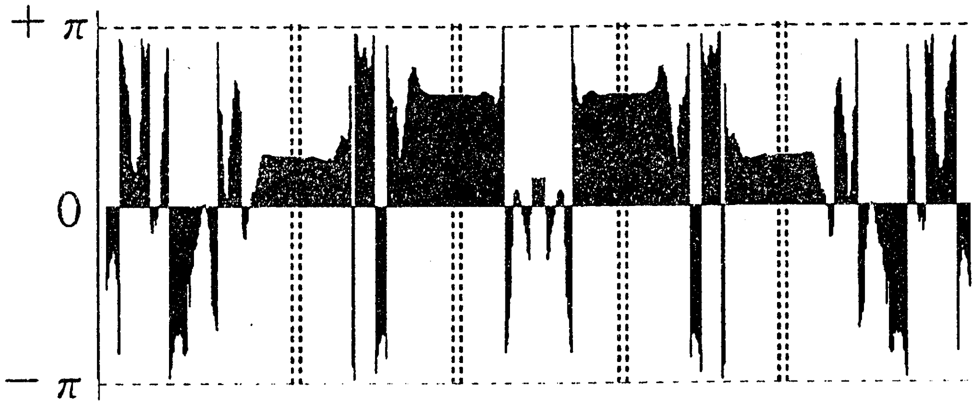
図８の４つの導波層をもつ構造での位相分布の様子を図９に示す。導波層の屈折率n_d＝1.523、基板屈折率n_s＝1.520、導波層の厚さｄ＝3[μ m]で、Δｘ＝0.2935[μ m]、Δｚ＝0.5[μ m]で計算している。この設定では、導波層での標本点数が、中央２層と両端２層で異なっており、位相のズレは大きいものとなっている。両端の導波層での$\langle\beta_c\rangle$は1.5096311e+7、σ_βは195、中央の導波層での$\langle\beta_c\rangle$は1.5095912e+7、σ_βは103である。本来の伝搬定数β_0は1.5096016e+7であるが、どちらも異なったβ_cで計算されていることになる。

入射した固有モードの界分布と伝搬毎の複素界分布との相関係数r_mが伝搬距離Ｌに対してどのように変化するかを図１０に示す。伝搬距離Ｌ＝2.70[ｍｍ]で、位相がほぼπ [rad]ずれてr_mが約0になる。

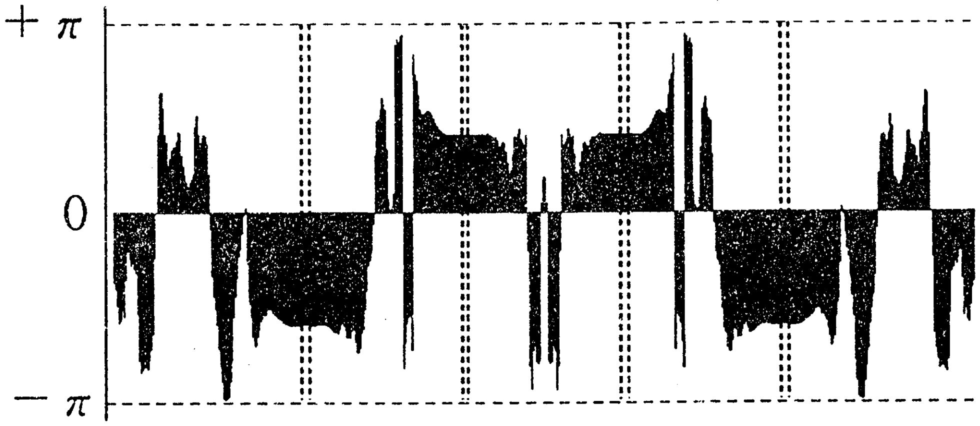
これらの問題は導波路の形状が直線だけでなく、緩やかに曲るＸ形やＹ形などの解析においても生じる。



(a)　伝搬距離 L＝0.05[mm]



(b)　伝搬距離 L＝1.00[mm]



(c)　伝搬距離 L＝2.70[mm]

図9　伝搬距離ごとの光波の位相分布

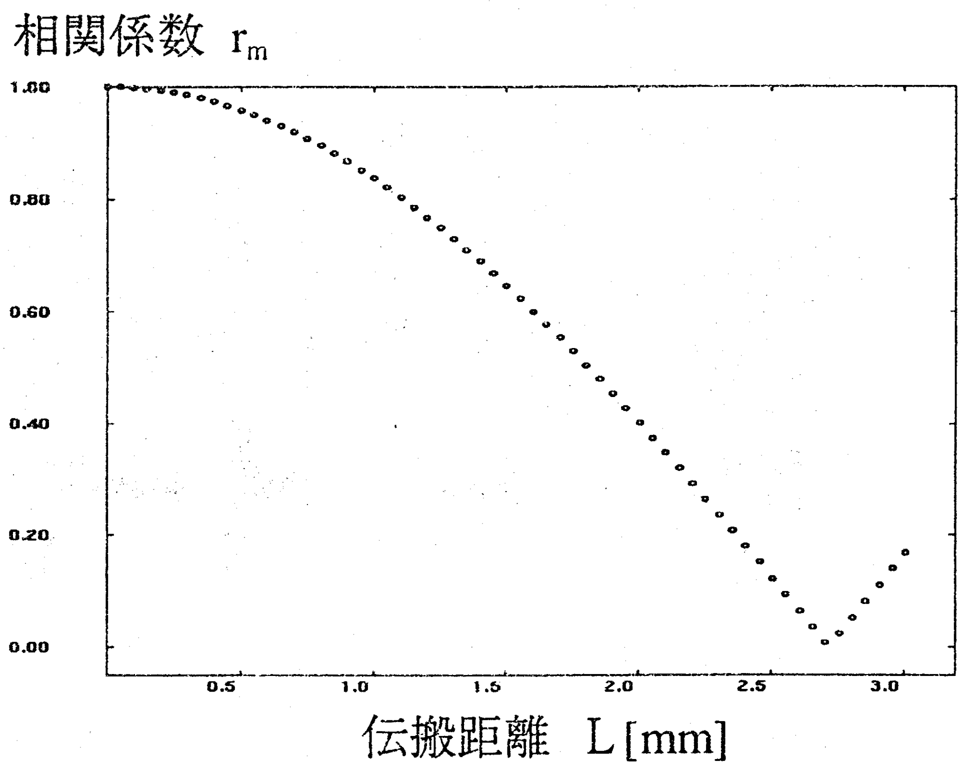


図１０　４つの導波層の場合の相関係数 r_m の変化

4．2　Y形導波路に適用した際の一例

標本点の配置に注意しないと計算精度が低下する場合として、伝搬光波の位相関係が重要な結合導波路や合流形導波路の解析などが考えられる。ここでは、図１１のようなY形導波路の一例を考える。導波層の屈折率nd＝1.523、基板屈折率ns＝1.520、導波層の厚さd＝3[μm]で、計算パラメータはΔx＝0.2935[μm]、Δz＝0.5[μm]で計算している。

2つの導波層へ同相のＴＥ０次モードを入射し、各導波層の直線部は2.7[mm]で、その後、分岐角0.01[ｒａｄ]で合流するものとする。ここでの標本点は、各導波層でそれぞれ11点と10点である。

50μmおきの界分布の移り変わりを図１２に示す。合流部において放射波が生じているが、これは最初の直線部において、２つの導波層での位相が計算上ほぼπ[ｒａｄ]ずれたためである。合流後の導波層にはわずかしか光波が残っていないことが分かる。なお、導波層の両側に吸収体を設けて放射波を減衰させている。

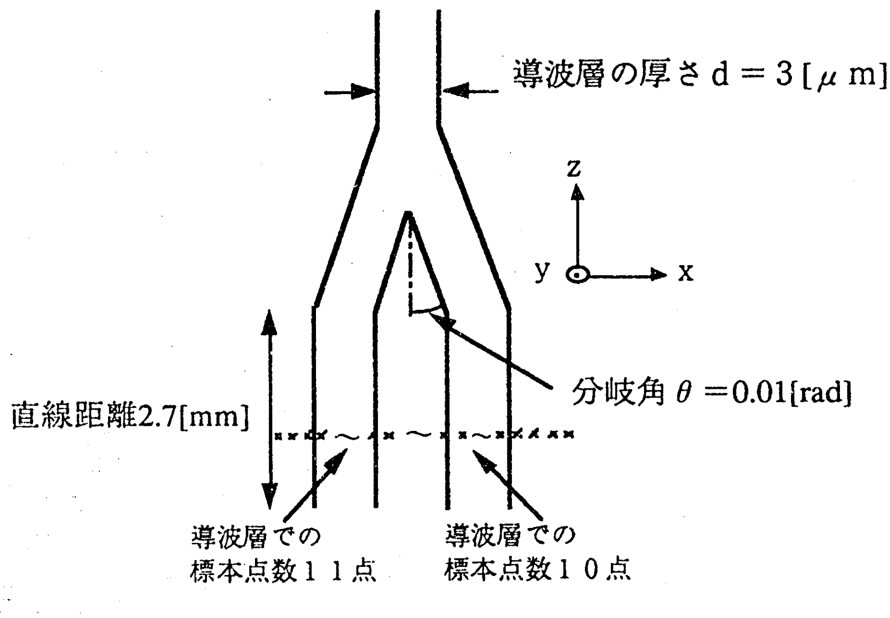


図１１　入射端で導波層での標本点数が異なるY形導波路

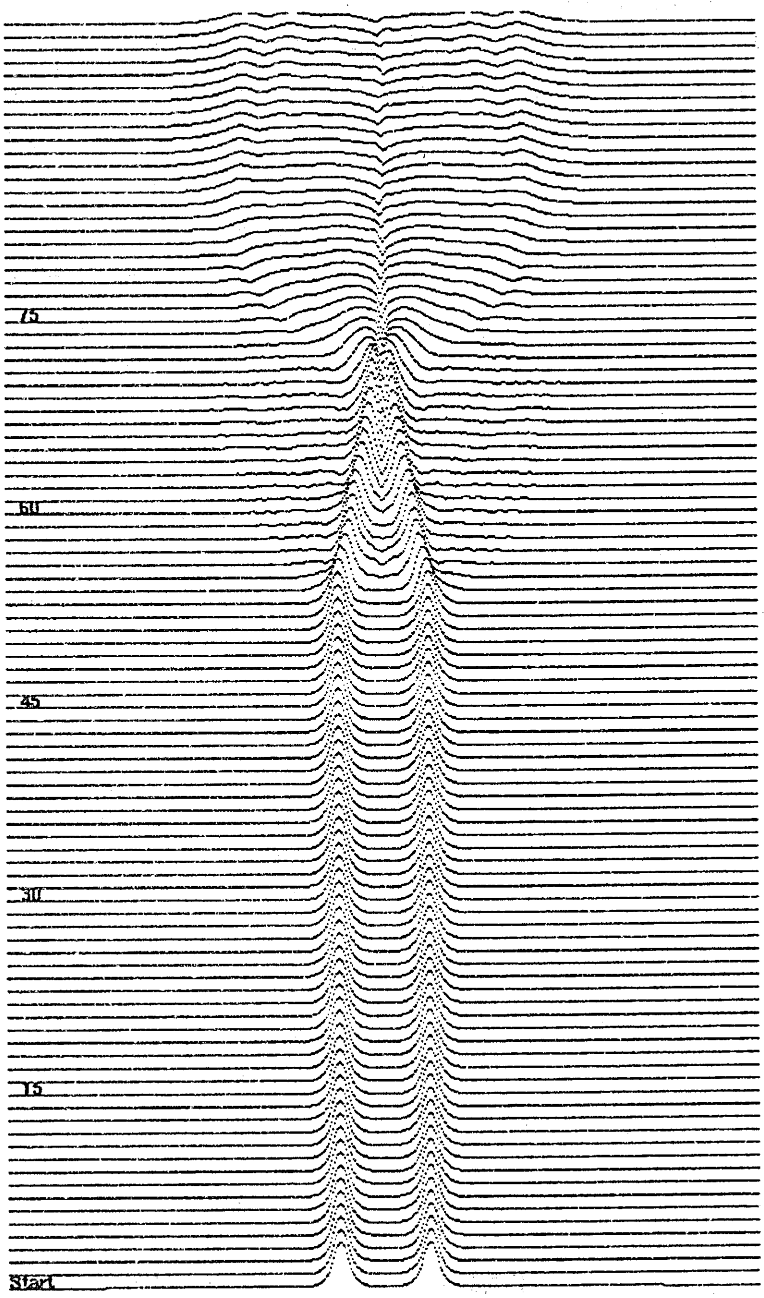


図１２　2.7[ｍｍ]の直線導波層を含むＹ形導波路での伝搬光波

5　計算誤差低減法の提案

ステップ形導波路での計算誤差を低減するには、導波層での標本点の配置が本来の導波層を表すように設定する必要がある。まず、導波層の移動の効果を示し、次に計算区間をずらせる方法を示す。更に、導波路境界を平滑化して、屈折率増加の総量をほぼ等しくする方法を示す。

5．1　導波層の移動の効果

導波層を横方向で僅かに移動して標本点の配置を変えることにより、複数導波路での伝搬定数の差を小さくすることが出来る。導波層での標本点数に差が生じた場合、導波層を移動して標本点数の差を無くす。形状変化による放射波を抑えるため、位置のシフトは微小な値にする必要がある。

4つの導波層がある場合に、途中で導波層の位置を全体にずらせた一例を示す。1 mm伝搬後に、導波層を横方向に導波層の厚さｄの3.2[%]だけずらせた場合の相関係数 r_m の変化を図１３に示す。相関係数 r_m の低下は１mm以降では、ほぼ止まっていることが分かる。また、図１４に示す伝搬光波の界分布より、この程度の移動であれば、形状変化による放射は僅かであると考えられる。

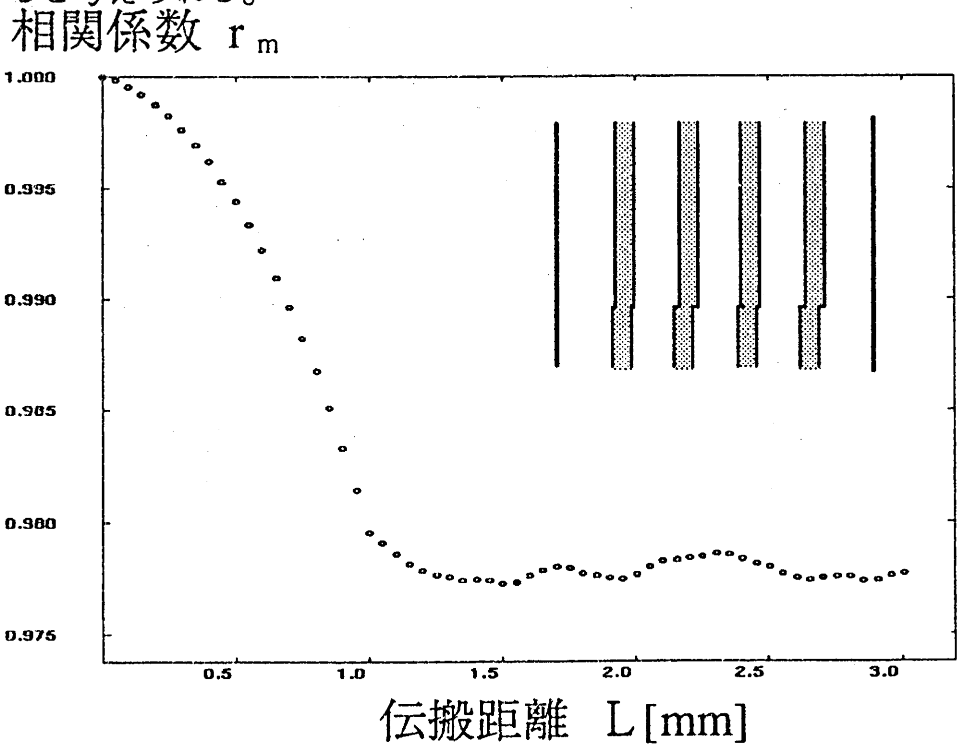


図１３　導波層の移動の効果

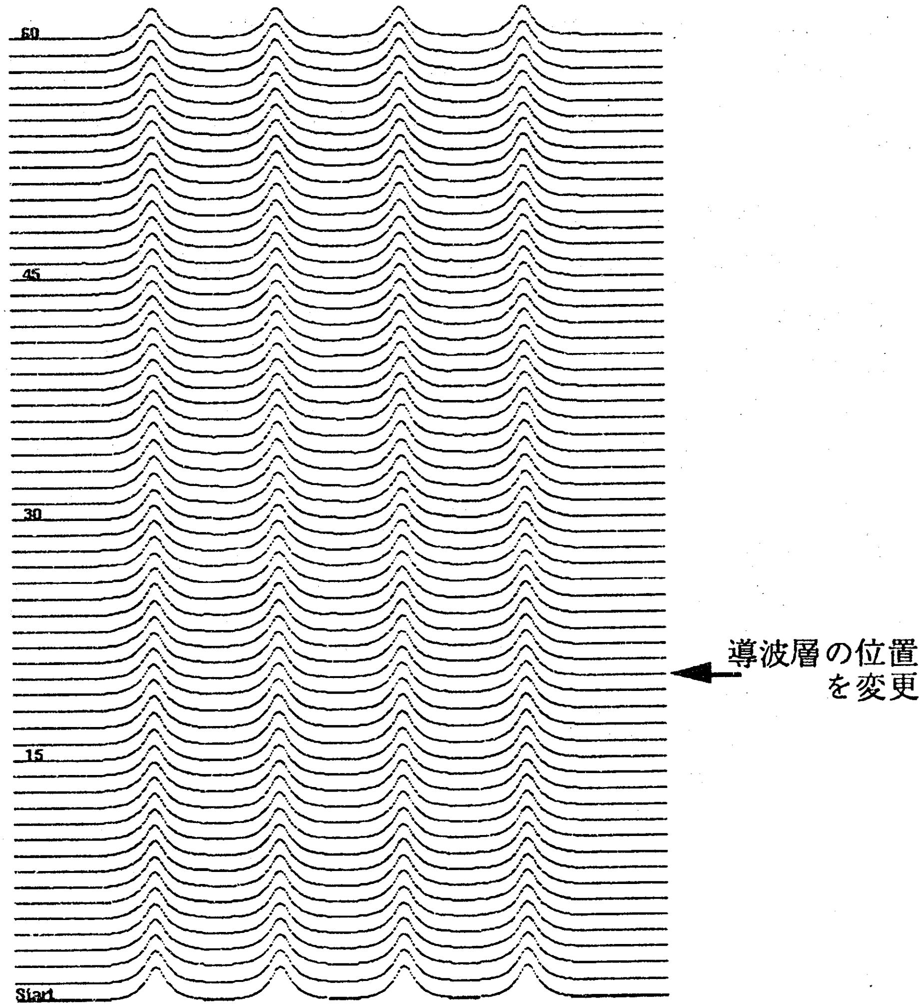


図１４　導波層の位置を途中で移動した場合の光波伝搬図

5．2　計算区間の移動

ＢＰＭでは、ある計算区間において等間隔の標本点で屈折率分布を離散化して表すから、導波層の位置はそのままにして、計算区間を横方向に移動しても、導波層の位置をずらせたのと同じ効果が得られる。

界分布ｈ（ｘ）の計算区間をx_0だけ移動すると、その時の界分布はｈ$(x+x_0)$で表せる。次の関係式

$$h(x + x_0) \Leftrightarrow H(u)\ \exp(j2\pi x_0 u) \qquad (1\,2)$$

より、周波数スペクトルH(u)にexp（ｊ$2\pi x_0 u$）を乗じれば良い。

導波層の屈折率n_dを1.521として、1mm伝搬後に計算区間をx_0＝0.75μｍずらせた場合の相関係数r_mの変化を図１５に示す。

伝搬距離Ｌ＝1.0[ｍｍ]のところで相関係数の低下が止まっており、導波路の構造に変化が無いため図１４に比べ1mm以降の相関係数r_mの値の変動が小さくなっている。

Ｙ形導波路などのように伝搬方向で導波路の形状が変化する場合は、同じ厚さの導波層では標本点数が同数になるように計算区間をずらせていけばよい。

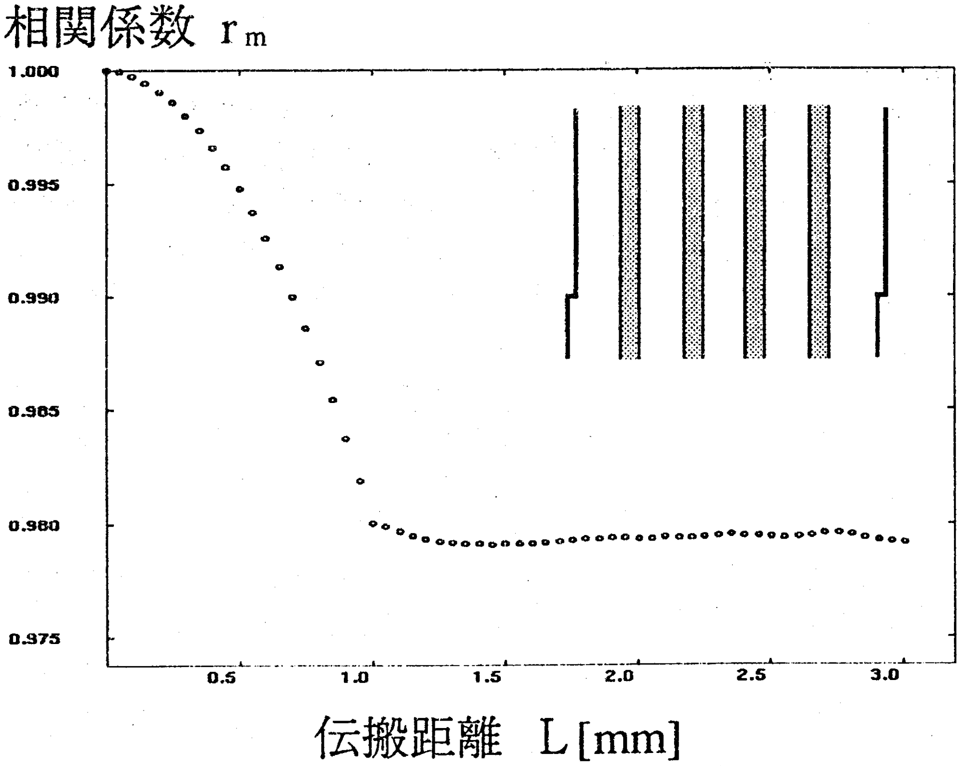


図１５　計算区間の移動の効果

５．３　導波層境界の平滑化

本来の導波路を表せるように、標本点数の配置を常に設定できるとは限らない。導波層での標本点は、屈折率が周囲からどれだけ大きいかを示し、更に屈折差増加の総量を表している。そこで、ステップ構造であることに影響を与えない程度で導波層境界を平滑化すれば、導波層の屈折率増加の総量を本来の導波層とほぼ同じにできるものと考えられる。

斜めに置かれた直線導波路をＢＰＭで解析する際の問題点が椎名らによって指摘され、その対策として、伝搬方向での導波路構造の変化を滑らかにするため、導波路構造の境界をローパスフィルタを用いて平滑化することが提案されている[10]。この導波路境界の平滑化により、標本点の配置の調整が不要となるものと考えられる。

但し、平滑化の度合が大きすぎると、その構造での固有モードがステップ構造での固有モードと異なってしまう。そこで、図１５に示すように、導波層境界付近の１点あるいは２点（高々導波層の厚さの10％以下の範囲）で平滑化を行う。

4．1で示した4つの導波層で、導波層の厚さ d＝3[μ m]の両端の境界において、平滑化領域幅を0.05 dとした場合の結果を表1に示す。平滑化処理前の<β_c>と平滑化処理後の<β_c>を本来のβ_0と比較している。導波層間の<β_c>の差および本来のβ_0との差も僅かとなっている。このことから、本来の導波層の厚さでの伝搬定数で、光波の伝搬が計算されていると考えられる。

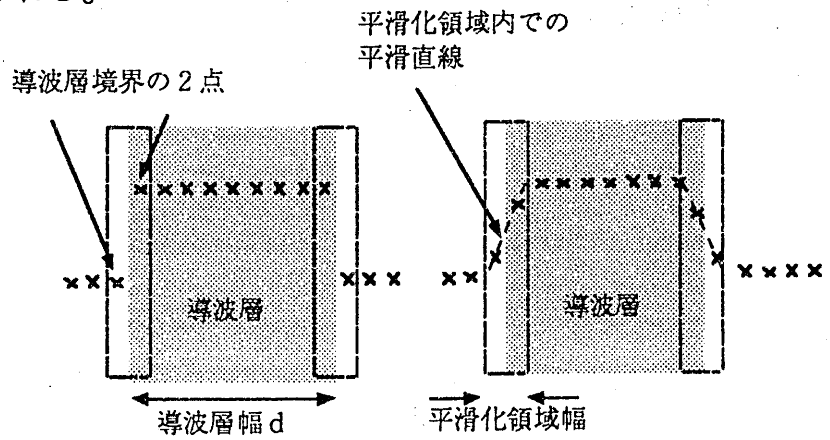


図１６　導波層境界での平滑化の様子

表1　平滑化処理による計算上のβ_c

本来の伝搬定数　β_0＝1.5096016e+7[rad/m]

平滑化を行わない場合（位相分布は図９）

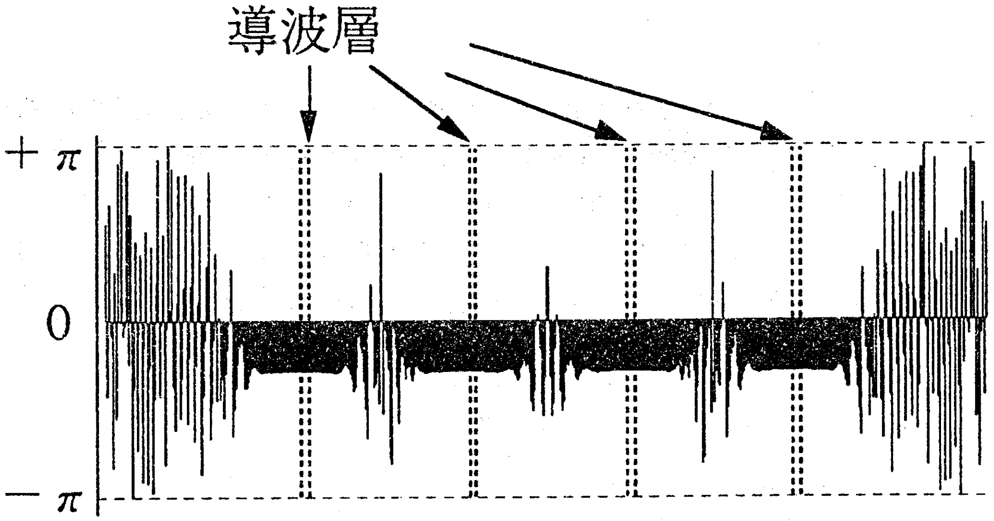
両端の導波層での<β_c>、σ_βは<β_c>＝1.5096311e+7[rad/m]　σ_β＝195

中央の導波層での<β_c>、σ_βは<β_c>＝1.5095912e+7[rad/m]　σ_β＝103

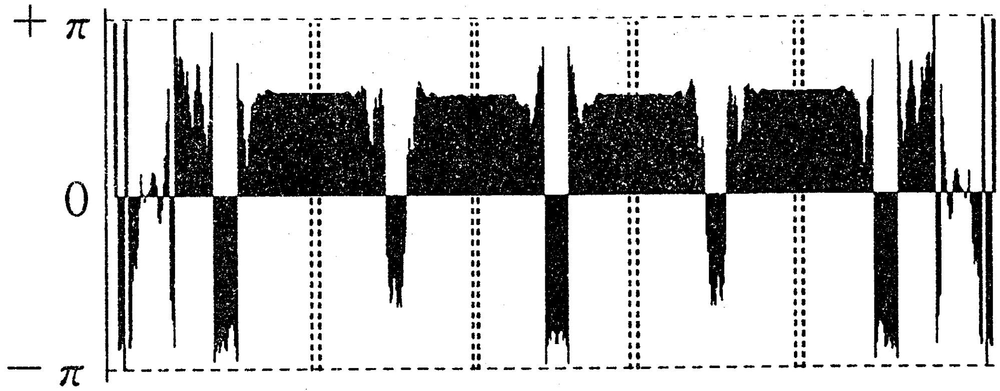
平滑化を行った場合（位相分布は図１７）

両端の導波層での<β_c>、σ_βは<β_c>＝1.5095984e+7[rad/m]　σ_β＝43.0

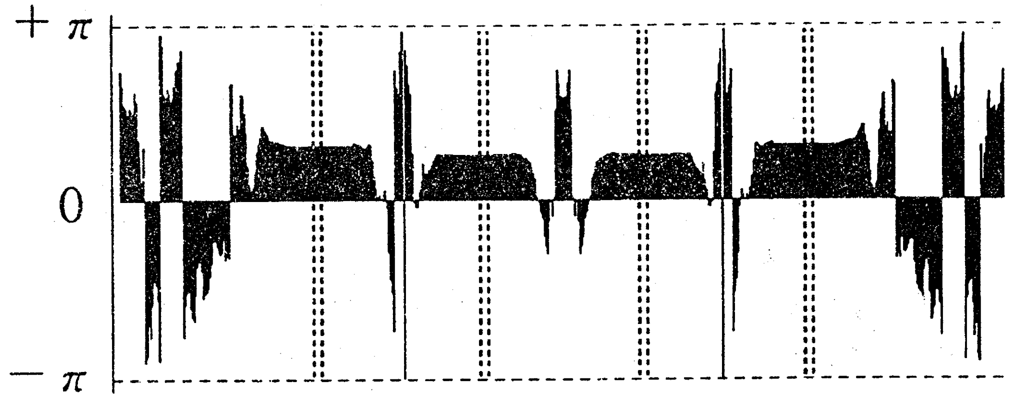
中央の導波層での<β_c>、σ_βは<β_c>＝1.5095995e+7[rad/m]　σ_β＝30.3



(a) 伝搬距離 L ＝0.05[μ m]



(b) 伝搬距離 L ＝1.00[μ m]



(c) 伝搬距離 L ＝2.70[μ m]

図１７　伝搬距離ごとの光波の位相分布

5．4　導波層境界の平滑化を行ったＹ形導波路の一例

4．2での図１１のＹ形導波路について、導波路境界付近の標本点に平滑化処理を施した場合の結果を図１８に示す。光波が合流して、パワーの大きい導波光が得られることが図から分かる。

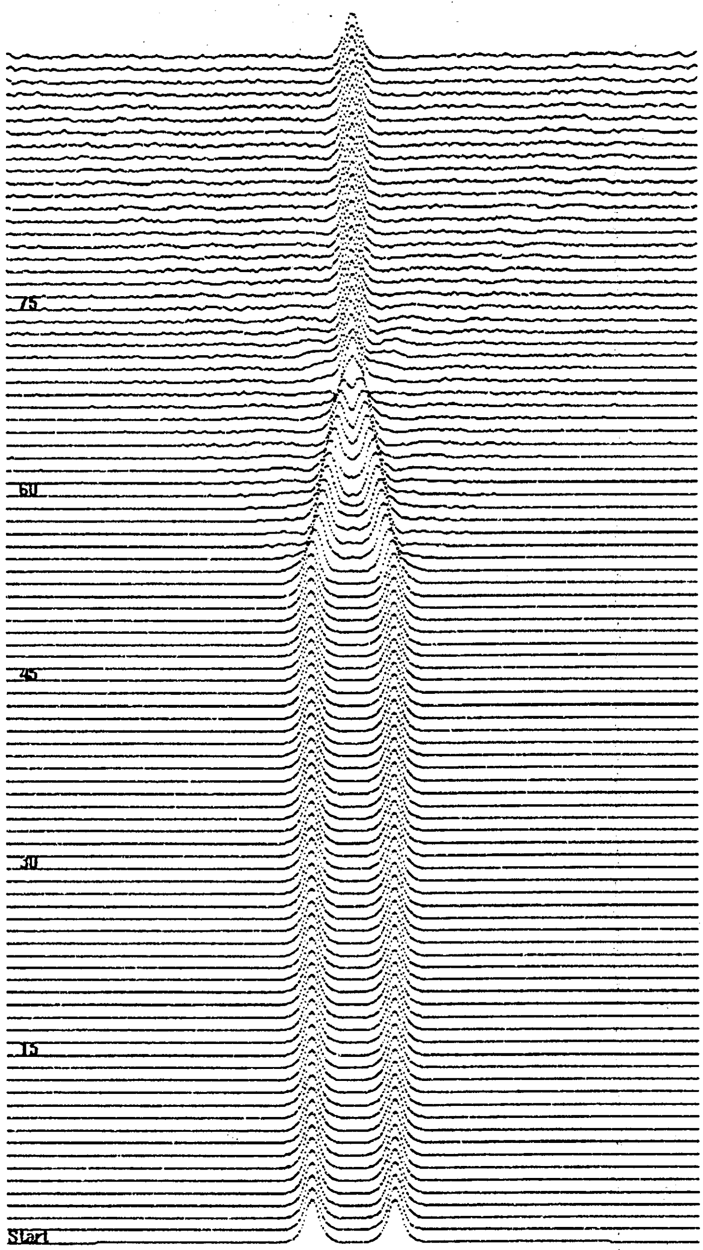


図１８ 導波路境界の平滑化処理を行ったＹ形導波路での光波伝搬図

6　むすび

ステップ形の直線導波路に固有モードの光波を入射した場合のＢＰＭ解析に基づいて、伝搬過程での伝搬定数と界分布の相関係数の値から、計算パラメータΔｘ、Δｚの設定について検討した。Δｚは波長λの２倍程度以下に設定する必要があり、Δｘはその値を小さくするだけでなく、標本点の配置を考慮する必要があることを明らかにした。導波層が複数の場合は、Δｘの適切な設定が難しくなるが、導波層境界に平滑化処理を施すなどの方法を提案し、精度の低下が改善されることを確認した。

参考文献

[1] M.D.Feit and J.A.Fleck,Jr.:Appl.Opt.,17,24,pp.3990-3998(1978)

[2] M.D.Feit and J.A.Fleck,Jr.:Appl.Opt.,18,16,pp.2843-2851(1979)

[3] J.Van Roey, J. van der Donk, and P.E.Lagasse:J.Opt.Soc.Am.,71,7,pp.803-810(1981)

[4] S.N.Radcliffe and T.P.Young:IEEE J. on Selected Areas in Comunications, 6,7,pp.1169-1177(1988)

[5] 法月　,バウーダ,後藤,中島: 1　993年電子情報通信学会秋季大会, S　C-2-2 (1993)

[6] 小柴正則:エレクトロニクス,38,10,.pp.59-61(1993)

[7] L.Thylen:Opt.Quantum Electron.,15,pp.433-439(1983)

[8] Z .Weissman, A.Hardy, a nd E .Marom:IEEE J .Quantum Electron., 25,6, pp.1200-1208 (1989)

[9] 橋口,堤,平井,弓場:1993年電子情報通信学会秋季大会,C-132(1993)

[10] 椎名,川上:1992年電子情報通信学会秋季大会,C-8(1992)

輻射科学研究会資料 (RS 93-22)

量子構造デバイスの非線形輸送領域における電子輸送モデリング

土屋　英昭

三好　旦六

神戸大学工学部電気電子工学科

ELECTRON TRANSPORT MODELING OF QUANTUM DEVICES IN NONLINEAR TRANSPORT REGIME

H. Tsuchiya, Member, IEEE and T. Miyoshi, Member, IEEE
Department of Electrical and Electronics Engineering, Kobe University
Rokko-dai, Nada-ku, Kobe 657, Japan

ABSTRACT

The modeling of nonlinear quantum transport in quantum devices is studied based on the Wigner function model. In particular, the phase-randomizing scatterings in contacts are carefully modeled in the quantum Liouville equation for the Wigner function by using the relaxation time approximation. Space-charge effects are also included by solving the Liouville equation for the Wigner function and the Poisson's equation self-consistently. As a simulation model, one-dimensional electron waveguide is considered. The current-voltage characteristics of electron waveguide is simulated at T=0K and 300K, and the simulation results are compared with the transmission coefficient method. In the nonlinear transport regime where the nonlinear conductance is observed, the space-charge significantly affects the current-voltage characteristics of the electron waveguide at the both temperatures.

Correspondence:

Professor T. Miyoshi
Department of Electrical and Electronics Engineering
Kobe University
Rokko-dai, Nada-ku, Kobe 657, Japan

1. INTRODUCTION

Recent advances in crystal growth and microfabrication technologies have allowed us to explore a new field of semiconductor device research. Instead of conventional devices described by the classical model, a variety of novel device concepts have been proposed based on the quantum mechanical features of carriers. As a preliminary modeling of quantum devices, the quantum mechanical modeling based on the Schrödinger equation, which leads to the so-called transmission coefficient(TC) method, has often been used because of its simplicity[1],[2]. One major problem of this model is the fact that we have to assume the statistical distribution of carriers in advance. Systems are usually treated as perfect conductors with no dissipation process, so this model can be applied only to completely ballistic systems close to thermal equilibrium. On the other hand, a quantum transport model based on the Wigner function, which is called as the Wigner function(WF) model, has been applied to the analysis of the transport problems including scattering effects and electron-electron interaction, and the dynamic properties[3]-[8]. The analogy between the two models is theoretically studied in the linear transport regime when the applied voltage is very small[9].

In this paper, the modeling of nonlinear quantum transport in quantum devices is studied based on the Wigner function model. In particular, the phase-randomizing scatterings in contacts are carefully modeled in the quantum Liouville equation for the Wigner function by using the relaxation time approximation. Space-charge effects are also included by solving the Liouville equation for the Wigner function and the Poisson's equation self-consistently. As a simulation model, one-dimensional electron waveguide is considered. The current-voltage characteristics of electron waveguide is simulated at T=0K and 300K, and the simulation results are compared with the transmission coefficient method. It is shown that in the nonlinear transport regime where the nonlinear conductance is observed, the space-charge significantly affects the current-voltage characteristics of the electron waveguide at the both temperatures.

2. WIGNER FUNCTION MODEL FOR ONE-DIMENSIONAL ELECTRON WAVEGUIDE

A. Quantum Liouville equation for Wigner function

In an electron waveguide with the split-gate HEMT structure, electron waves are confined by applying the negative bias voltage to the gate electrodes. As a result, the one-dimensional(1D) constriction of the electron waveguide gradually widens to embrace the two-dimensional(2D) contact as shown in Fig. 1 (a). In this paper, we assume that the gradual taper from the 2D contact to the 1D constriction is ideal, so that mode conversions and reflections at the interfaces are negligible. To model such an ideal 2D contact, the reservoirs are assumed to be attached to the 1D constriction as shown in Fig. 1 (b). For the infinite-confining potential in the transverse y and z directions, the following one-dimensional Liouville equation for the Wigner function is solved in the electron waveguide[7].

$$\frac{\partial F_W(x,k_x)}{\partial t} = -\frac{\hbar k_x}{m^*}\frac{\partial F_W(x,k_x)}{\partial x} - \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'_x}{2\pi}V(x,k_x-k'_x)F_W(x,k'_x) + \left(\frac{\partial F_W}{\partial t}\right)_C, \quad (1)$$

where

$$V(x, k_x - k_x') = 2\int_0^\infty du_x \left[v\left(x + \frac{u_x}{2}\right) - v\left(x - \frac{u_x}{2}\right)\right] \sin[(k_x - k_x')u_x], \tag{2}$$

where F_W is the Wigner function integrated over the transverse momenta and coordinates. The scattering term $(\partial F_W/\partial t)_C$ is added phenomenologically to describe the phase-randomizing effects in reservoirs and the resistive effects in the waveguide.

For an electron waveguide with the cross-sectional dimensions of L_y, and L_z, the following boundary conditions for the Wigner function are imposed to model infinitely wide contacts at the infinite left and the right ends.

$$F_W(-\infty, k_x) = 2\sum_n f_{FD}(k_x, k_y^n, k_z^1) \quad , \quad k_x > 0 \tag{3}$$

$$F_W(\infty, k_x) = 2\sum_n f_{FD}(k_x, k_y^n, k_z^1) \quad , \quad k_x < 0 \tag{4}$$

where f_{FD} is the Fermi-Dirac distribution function characterized by the Fermi level E_f and the temperature T. k_y^n and k_z^1 are the quantized wavenumbers in the y and z directions, respectively. The Liouville equation (1) is solved numerically based upon the finite-difference method as discussed in Ref. 7.

B. Modeling of reservoirs

Electron waves entering into a reservoir from a waveguide are phase-randomized in short time to reach the thermal equilibrium states. To describe such phase-randomizing scatterings in a reservoir phenomenologically, the following relaxation time approximation is introduced in our Wigner function model. Scattering process in reservoirs is schematically represented in Fig. 2. For simplicity, only the scattering process in the left reservoir is explained here.

When we assume that all left-going electron waves injected into the left reservoir from the device are absorbed without any reflection, the transitions from the left-going wave($k_x < 0$) to the right-going wave($k_x > 0$) can be neglected, and thus only the reverse coupling from the right-going wave to the left-going wave is considered in the left reservoir. The scattering term representing the above processes is written as

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_W}{\partial t}\right)_C &= \int_0^\infty dk_x' W(k_x', k_x) F_W(x, k_x') - \int_0^\infty dk_x' W(k_x, k_x') F_W(x, k_x) \\ &= \int_0^\infty dk_x' W(k_x', k_x) F_W(x, k_x') - F_W(x, k_x)\int_0^\infty dk_x' W(k_x, k_x'),\ k_x > 0\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_W}{\partial t}\right)_C &= \int_{-\infty}^\infty dk_x' W(k_x', k_x) F_W(x, k_x') - \int_{-\infty}^\infty dk_x' W(k_x, k_x') F_W(x, k_x) \\ &= \int_{-\infty}^\infty dk_x' W(k_x', k_x) F_W(x, k_x') - F_W(x, k_x)\int_{-\infty}^\infty dk_x' W(k_x, k_x'),\ k_x < 0\end{aligned} \tag{6}$$

Here, note that the lower limits of integration are different for $k_x > 0$ and $k_x < 0$ in the above representations. When the relaxation time τ_l is defined as

$$\frac{1}{\tau_l} = \int_0^\infty dk_x' W(k_x, k_x'), \tag{7}$$

the scattering term in the left reservoir is represented as

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_W}{\partial t}\right)_C &= -\frac{1}{\tau_l}\left[F_W(x,k_x) - \frac{F_{eq}(x,k)}{\displaystyle\int_0^\infty dk_x' F_{eq}(x,k_x)}\int_0^\infty dk_x' F_W(x,k_x)\right], k_x > 0 \\ &= -\frac{2}{\tau_l}\left[F_W(x,k_x) - \frac{F_{eq}(x,k)}{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty dk_x' F_{eq}(x,k_x)}\int_{-\infty}^\infty dk_x' F_W(x,k_x)\right], k_x < 0. \end{aligned} \tag{8}$$

In the right reservoir, the similar representations of the scattering term are obtained.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_W}{\partial t}\right)_C &= -\frac{1}{\tau_r}\left[F_W(x,k_x) - \frac{F_{eq}(x,k)}{\displaystyle\int_{-\infty}^0 dk_x' F_{eq}(x,k_x)}\int_{-\infty}^0 dk_x' F_W(x,k_x)\right], k_x < 0 \\ &= -\frac{2}{\tau_r}\left[F_W(x,k_x) - \frac{F_{eq}(x,k)}{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty dk_x' F_{eq}(x,k_x)}\int_{-\infty}^\infty dk_x' F_W(x,k_x)\right], k_x > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

where τ_r is defined as

$$\frac{1}{\tau_r} = \int_{-\infty}^0 dk_x' W(k_x, k_x'). \tag{10}$$

In the following simulation, we assume that the left and the right reservoirs have the same phase-breaking property.

Next, we will explain the physical meanings of the reservoir model mentioned above. Integrating the Liouville equation(1) with respect to k_x for each scattering term given by (8) or (9), the following continuity equations are derived in each reservoir.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e}\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{1}{\tau_l}[n_{21}(x) - n_{12}(x)] \tag{11}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{e}\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{1}{\tau_r}[n_{12}(x) - n_{21}(x)] \tag{12}$$

where $n_{21}(x)$ and $n_{12}(x)$ are the left-to-right and the right-to-left going electron densities, respectively, that are represented by

$$n_{21}(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{dk_x}{2\pi} F_W(x,k_x) \quad , \quad n_{12}(x) = \int_0^\infty \frac{dk_x}{2\pi} F_W(x,k_x). \tag{13}$$

Further, the total electron density per unit length and the current are given by

$$n(x) = n_{21}(x) + n_{12}(x) \quad , \quad J(x) = e\int_{-\infty}^\infty \frac{dk_x}{2\pi}\frac{\hbar k_x}{2m^*} F_W(x,k_x). \tag{14}$$

The equations (11) and (12) indicate that in the steady state, the current flows in the reservoirs unless $n_{21} = n_{12}$. In other words, at a deep inside of a reservoir beyond a phase-breaking length, there may be no current flow because $n_{21} = n_{12}$ is expected.

C. Space-charge effects

In the linear regime, the space-charge effects are not important because a small bias voltage induces a small charge imbalance in the device. On the other hand, in the nonlinear regime, a large amount of charge accumulation and depletion are expected to deform the potential profile significantly. Thus, to include the space-charge effects in the analysis of the exact nonlinear quantum transport of electron waveguide, the following Poisson's equation should be solved simultaneously with the Liouville equation for the Wigner function.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{e}{\varepsilon}[\Gamma(x, y, z) - n(x, y, z)] \tag{15}$$

where Γ is the doping density.

Next, we simplify the equation(15) to a quasi-one-dimensional problem by using the following approximation. When the bias voltage is removed, the solutions $\psi_0(x, y, z)$ and $n_0(x, y, z)$ satisfy

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = -\frac{e}{\varepsilon}[\Gamma(x, y, z) - n_0(x, y, z)] \tag{16}$$

because ψ_0 is uniform in the x-direction. When the both changes of ψ and n in the y and z direction are assumed to be negligibly small even after the bias voltage is applied, the quasi-one-dimensional Poisson's equation with respect to x-direction is derived from the equations(15) and (16).

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{e}{\varepsilon}[n_0(x, y, z) - n(x, y, z)] \tag{17}$$

Further, integrating the equation(17) with respect to y and z direction, the above quasi-one-dimensional Poisson's equation is rewritten by using the average electron density per unit volume $\bar{n}_0$ and $\bar{n}$.

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{e}{\varepsilon}[\bar{n}_0(x) - \bar{n}(x)] \tag{18}$$

where $\bar{n}_0$ and $\bar{n}$ are represented by

$$\bar{n}(x) = \frac{1}{L_y L_z}\int_{-L_z/2}^{L_z/2} dz \int_{-L_y/2}^{L_y/2} dy n(x, y, z) = \frac{n(x)}{L_y L_z} \tag{19}$$

$$\bar{n}_0(x) = \frac{1}{L_y L_z}\int_{-L_z/2}^{L_z/2} dz \int_{-L_y/2}^{L_y/2} dy n_0(x, y, z) = \frac{n_0(x)}{L_y L_z} \tag{20}$$

The Liouville equation (1) and the Poisson's equation (18) are mutually related through the electron densities(14), (19), (20) and

$$v(x) = -[\chi_e(x) - \chi_e(0)] - e[\psi(x) - \psi(0)], \tag{21}$$

where χ_e is the electron affinity of semiconductor material.

For the iterative calculation of Poisson's equation, the following transformed matrix equation describing the potential change $\delta\psi$ is required at each iteration.

$$\eta_1(x)\delta\psi(x - \Delta_x) + [\eta_2(x) - \delta\eta_2(x)]\,\delta\psi(x) + \eta_3(x)\delta\psi(x + \Delta_x)$$

$$= -\eta_1(x)\psi(x-\Delta_x) - \eta_2(x)\psi(x) - \eta_3(x)\psi(x+\Delta_x) - e[\bar{n}_0(x) - \bar{n}(x)], \tag{22}$$

where

$$\eta_1(x) = \epsilon(x - \frac{1}{2}\Delta_x)/(\Delta_x)^2 \quad , \quad \eta_3(x) = \epsilon(x + \frac{1}{2}\Delta_x)/(\Delta_x)^2$$

$$\eta_2(x) = -\left[\epsilon(x - \frac{1}{2}\Delta_x) + \epsilon(x + \frac{1}{2}\Delta_x)\right] \Big/ (\Delta_x)^2. \tag{23}$$

$\delta\eta_2$ is the carrier density change due to $\delta\psi$ and given as

$$\begin{aligned} \delta\eta_2(x) &= \frac{4em^*}{\pi^2\hbar^2\bar{n}(x)L_y^2L_z^2} \quad , \quad T = 0\mathrm{K} \\ &= \frac{e^2}{k_BT}\bar{n}(x) \quad , \quad T = 300\mathrm{K} \end{aligned} \tag{24}$$

In the equation(24), the following relations between the potential and the carrier density per unit length are used.

$$n = n_0\sqrt{1 + \frac{8em^*}{\pi^2\hbar^2n_0^2}(\psi - \psi_n)} \quad , \quad T = 0\mathrm{K} \tag{25}$$

$$n = n_0\exp[e(\psi - \psi_n)/k_BT] \quad , \quad T = 300\mathrm{K} \tag{26}$$

where n_0 and ψ_n denote the carrier density at thermal equilibrium and the quasi-Fermi potential, respectively. In the numerical calculation, the Wigner function $F_W(x, k_x)$ is computed iteratively for each bias condition until the self-consistent solution is obtained. In this paper, the iteration is continued until the change of the potential energy $v(x)$ becomes less than 0.1meV at any position.

3. NONLINEAR CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTICS OF ELECTRON WAVEGUIDES

A. Low temperature characteristics

First, the current-voltage characteristics of an electron waveguide are calculated at T=0K. Since the waveguide region is assumed to be perfectly ballistic, voltage drops are expected to exist only near the both ends of the constriction due to the so-called spreading resistance. Thus, as an initial potential distribution in the iterative calculation, a step potential drop as shown in Fig. 3 is employed. The Fermi energy E_f is taken as 10meV. The waveguide width L_y and the depth L_z are chosen as 50nm and 30nm, respectively, so that only one width mode can propagate in the wire. Fig. 4 shows the calculated current-voltage characteristics at T=0K, where the phase-breaking time is given as (a)10fs and (b)20fs. The dashed lines are the results neglecting the space-charge effects, and the dotted lines indicate the relation of the perfect quantization of conductance. First, at a small bias voltage less than 2mV, the conductance is perfectly quantized as $2e^2/h$. However, the $I-V$ curves are found to deviate from the dotted line as the bias voltage increases. Such a nonlinear behavior has been reported experimentally[10] and numerically[8]. In addition, when the bias voltage is larger than 10mV, the solid curve diverges from the dashed one as shown in both Fig. 4(a) and (b). These results mean that the space-charge effects play an important role, particularly, in the nonlinear transport regime.

Next, Fig. 5 shows the electron density, the potential and the current distributions calculated for τ_r =10fs and 20fs. First, it is found from Fig. 5(a) that the electron density oscillates inside the constriction because of the interference of coherent electron waves between the left and the right potential steps. In addition, the electrons are found to be accumulated in the reservoirs. This is due to the spreading resistance at the interfaces between the constriction and the contact. It is observed that as the τ_r decreases, a larger amount of electrons are accumulated in the cathod. Next, it is found from Fig. 5(b) that the abrupt voltage drops exist at the both ends of the constriction though the space-charge effects are considered. Further, it is clearly seen that the longer the phase-breaking time, the larger the voltage change in the reservoir. In addition, Fig. 5(c) shows that the current is constant inside the constriction and decreases to zero in the reservoirs within the phase-breaking length, which corresponds to the results reported in the linear transport regime[9].

B. Room temperature characteristics

Next, the current-voltage characteristics of the electron waveguide are calculated at T=300K. Since we have to consider the scatterings in the waveguide region at 300K, the voltage drop is expected to exist throughout the device. Thus, as an initial potential distribution in the iterative calculation, a linear potential profile is employed in the waveguide as shown in Fig. 6. Further, although the waveguide with the same dimensions as used at 0K is analyzed, we have to consider many higher order width modes in the waveguide because high energy electrons are excited in reservoirs at 300K. The Fermi energy is taken as 40meV.

Fig. 7 shows the calculated current-voltage characteristics at T=300K. The dashed lines denote the results neglecting the space-charge effects. As was found in the low temperature characteristics, when the bias voltage is larger than 40mV, the solid curve deviates from the dashed one in both Fig. 7(a) and (b), though they are identical at a small bias voltage. In addition, the solid curves gradually increase with the bias voltage, while the dashed curves saturate in current. Such a gradual increase of current in the nonlinear regime has been reported experimentally in the split-gate electron waveguide[11].

Next, Fig. 8 shows the electron density, the potential and the current distributions calculated for τ_r =10fs and 20fs at T=300K. In Fig. 8(a), the oscillation found in the electron density distribution inside the constriction at 0K disappears at 300K, because the interference of electron wave deteriorates due to the spread of electron energy spectrum at high temperature. In the reservoirs, the electrons are found to be accumulated as was found at T=0K. Further, it is found from Fig. 8(b) that although the voltage drops exists mainly within the waveguide region, the longer phase-breaking time makes the voltage drop in the reservoir larger. It is found from Fig. 8(c) that the current decay in the reservoir is slower than at T=0K, because a longer distance is required for high energy electrons to reach thermal equilibrium states.

4. COMPARISON BETWEEN WIGNER FUNCTION MODEL AND TRANSMISSION COEFFICIENT METHOD

As an alternative model to simulate the static behavior of quantum transport, the transmission coefficient method is known well[1][2]. In the TC method, the transport characteristics are determined by the transmission coefficient of the electron plane wave. The current flowing through the one-dimensional waveguide is given in the standard TC scheme as

$$I = \frac{2e}{h}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^\infty dE_x T_{ij}(E_x, V)[f_1(E_x) - f_2(E_x + eV)] \tag{27}$$

where $T_{ij}(E_x, V)$ denotes the transmission coefficient from the LHS j-th width mode to the RHS i-th width mode, which is usually computed from the one-electron Schrödinger equation assuming the phase-coherent transport through the device. N is the number of modes in the waveguide. $f(E_x)$ and $f(E_x + eV)$ are the Fermi-Dirac distribution function in the left and the right reservoir, respectively.

To compare the above TC method with the WF model, the $I - V$ curve is calculated at T=0K and 300K, where the self-consistency in potential is neglected. First, the results at T=0K are shown in Fig. 9, where as a simulation model, the step potential distribution shown in Fig. 3 is used. The dashed line indicates the result of the TC method. In the WF model, τ_r is chosen as 10fs and 20fs. At the small bias voltage less than 2mV, the TC method is found to coincide with the WF model. Since such a small voltage is regarded as a perturbation of potential, the distribution of electrons is not so much different from the thermal equilibrium state of the reservoirs as shown in Fig. 10(a). Consequently, the two models give almost the same current. The analogy between the two models theoretically proved[11] is verified in our numerical simulations. However, as the bias voltage increases, the TC method always gives smaller current than the WF model. In the TC method, the assumed Fermi-Dirac distribution is kept constant along the reservoir. In other words, the transport characteristics calculated by this method never depend upon the reservoir dimension. On the other hand, in the WF model the distribution function excited at a deep inside of one reservoir is found spread in the k space as it approaches a potential drop due to the barrier potential repulsion even if the potential is uniform in the contact as shown in Fig. 10(b). Because of this spread of the distribution function, the average energy of electrons becomes higher. Consequently, the higher current flows through the waveguide in the WF model. This is the reason for the discrepancy of the two curves in Fig. 9.

Next, the $I - V$ curves at T=300K is shown in Fig. 11, where as a simulation model, the linear potential distribution shown in Fig. 6 is used. As indicated at T=0K, the TC method coincides with the WF model at the small bias voltage less than 20mV. However, the TC method always gives smaller current than the WF model as the bias voltage increases because of the same reason described at T=0K.

5. CONCLUSIONS

The modeling of nonlinear quantum transport in quantum devices is studied based on the Wigner function model. In particular, the phase-randomizing scatterings in contacts are carefully modeled in the quantum Liouville equation for the Wigner function by using the relaxation time approximation. The reservoir model proposed is general and applicable to any quantum devices if the reasonable relaxation time is evaluated. In addition, space-charge effects are also included by solving the Liouville equation for the Wigner function and the Poisson's equation self-consistently. As a simulation model, one-dimensional electron waveguide is considered. The current-voltage characteristics of electron waveguide is simulated at T=0K and 300K. As a result, it is found that in the nonlinear transport regime, the space-charge significantly affects the current-voltage characteristics of the electron waveguide at the both temperatures. Further, the simulation results are compared with the transmission coefficient method.

References

[1] R. Tsu and L. Esaki, "Tunneling in a Finite Superlattice," Appl. Phys. Lett., Vol. 22, pp. 562-564, 1973.

[2] M. Büttiker, "Absence of Backscattering in the Quantum Hall Effect in Multiprobe Conductors," Phys. Rev. B, Vol. 38, pp. 9375-9389, 1988.

[3] W. R. Frensley, "Wigner-function model of a resonant-tunneling semiconductor device," Phys. Rev. B36, no. 3, pp. 1570-1580, July. 1987.

[4] N. C. Kluksdahl, A. M. Kriman, D. K. Ferry, and C. Ringhofer, "Self-consistent study of the resonant-tunneling diode," Phys. Rev. B39, no. 11, pp.7720-7735, Apr. 1989.

[5] K. J. Jensen and F. A. Buot, "The methodology of simulating particle trajectories through tunneling structures using a Wigner distribution approach," IEEE Trans. on Electron Devices, vol. ED-38, no. 10, pp. 2337-2347, Oct. 1991.

[6] H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi, "Static and dynamic electron transport in resonant-tunneling diodes," Jpn. J. Appl. Phys., vol. 31, no. 3, pp. 745-750, March. 1992.

[7] H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi, "Wigner function formulation of quantum transport in electron waveguides and its application," Jpn. J. Appl. Phys., vol. 30, no. 12B, pp. 3853-3858, Dec. 1991.

[8] H. Tsuchiya, M. Ogawa, and T. Miyoshi, "Quantum-mechanical simulation of electron waveguides in linear and nonlinear transport regimes," IEEE Trans. on Electron Devices, vol. ED-39, no. 11, pp. 2465-2471, Nov. 1992.

[9] M. J. McLennan, Y. Lee, and S. Datta, "Voltage drop in mesoscopic systems: A numerical study using a quantum kinetic equation," Phys. Rev. B43, no. 17, pp. 13846-13884, June. 1991.

[10] L. P. Kouwenhoven, B. J. van Wees, C. J. P. M. Harmans, J. G. Williamson, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, C. T. Foxon, and J. J. Harris, "Nonlinear conductance of quantum point contacts," Phys. Rev. B39, no. 11, pp. 8040-8043, Apr. 1989.

[11] M. J. Kelly, R. J. Brown, M. Pepper, D. G. Hasko, H. Ahmed, D. C. Peacock, J. E. F. Frost, D. A. Ritchie, and G. A. C. Jones, "Room temperature negative differential resistance in the quasi-one-dimensional ballistic resistor," Electron. Lett., vol. 26, no. 3, pp. 171-173, Feb. 1990.

FIGURE CAPTIONS

Fig. 1 Split-gate electron waveguide. (a)Configuration of the 1D constriction in the electron waveguide. The shaded patterns indicate the split-gate electrodes. (b)Simulation model of the electron waveguide with the reservoirs.

Fig. 2 Modeling of reservoirs.

Fig. 3 Initial potential distribution in the iterative calculation at T=0K.

Fig. 4 Calculated current-voltage characteristics of the electron waveguide at T=0K. τ_r is given as (a)10fs and (b)20fs. The dotted lines indicate the relation of the perfect quantization of conductance.

Fig. 5 (a)Electron density, (b)potential and (c)current distributions calculated for τ_r=10fs and 20fs.

Fig. 6 Initial potential distribution in the iterative calculation at T=300K.

Fig. 7 Calculated current-voltage characteristics of the electron waveguide at T=300K. τ_r is given as (a)10fs and (b)20fs.

Fig. 8 (a)Electron density, (b)potential and (c)current distributions calculated for τ_r=10fs and 20fs.

Fig. 9 Comparison between the Wigner function model and the transmission coefficient method. Temperature is 0K. The self-consistency in potential is neglected.

Fig. 10 Distributions of the Wigner function at (a)V=1mV and (b)V=20mV. τ_r is given as 10fs.

Fig. 11 Comparison between the Wigner function model and the transmission coefficient method. Temperature is 300K. The self-consistency in potential is neglected.

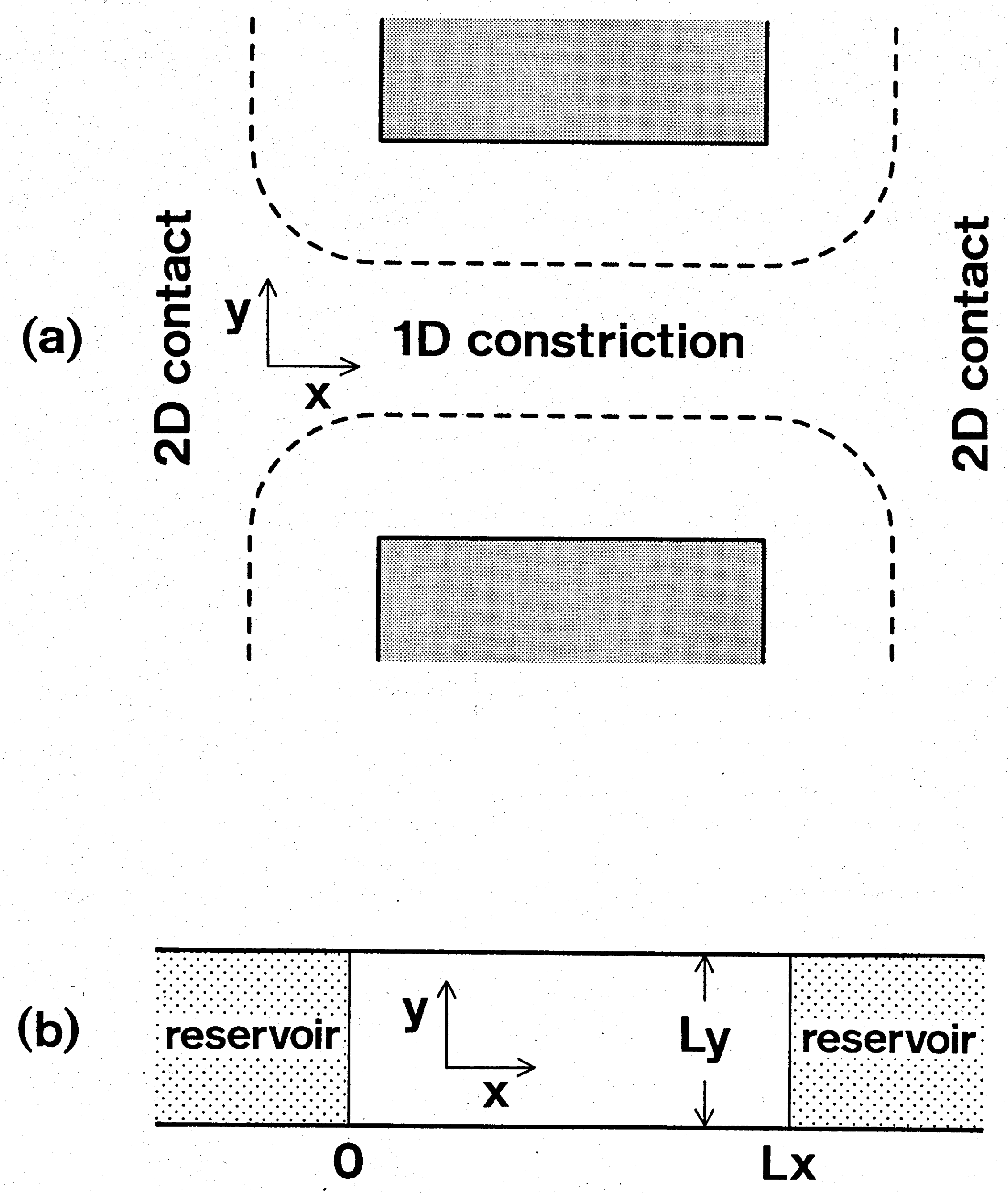

(a)
2D contact
y
x
1D constriction
2D contact
(b)
reservoir
y
x
Ly
reservoir
0
Lx

Fig. 1

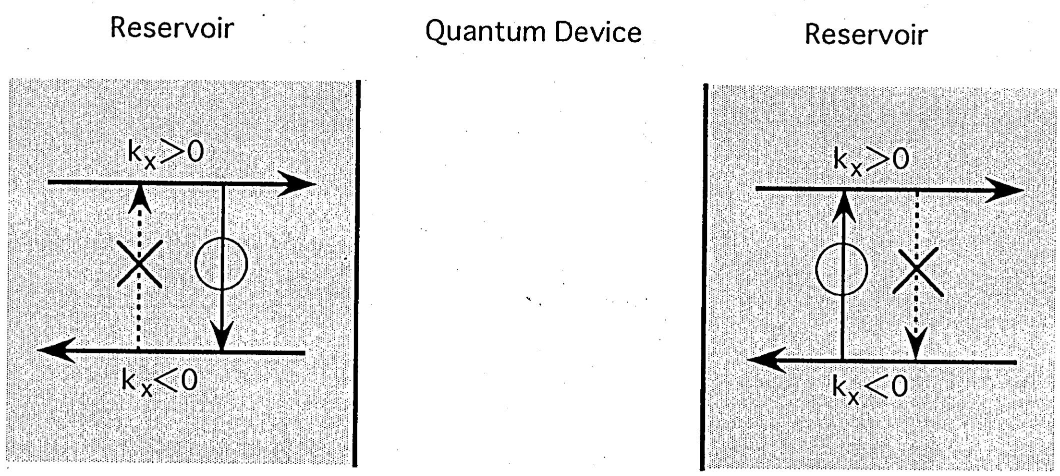


Fig. 2

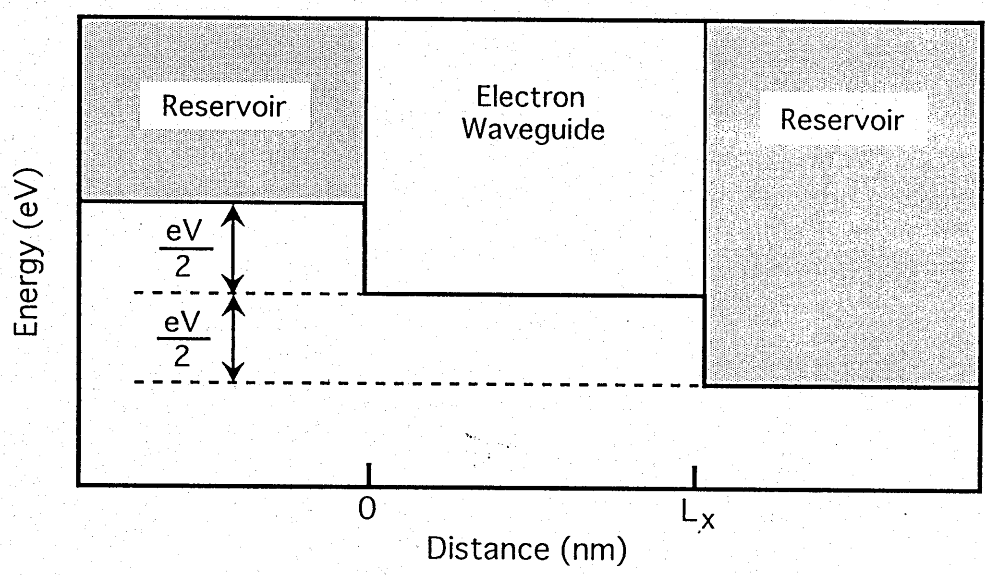
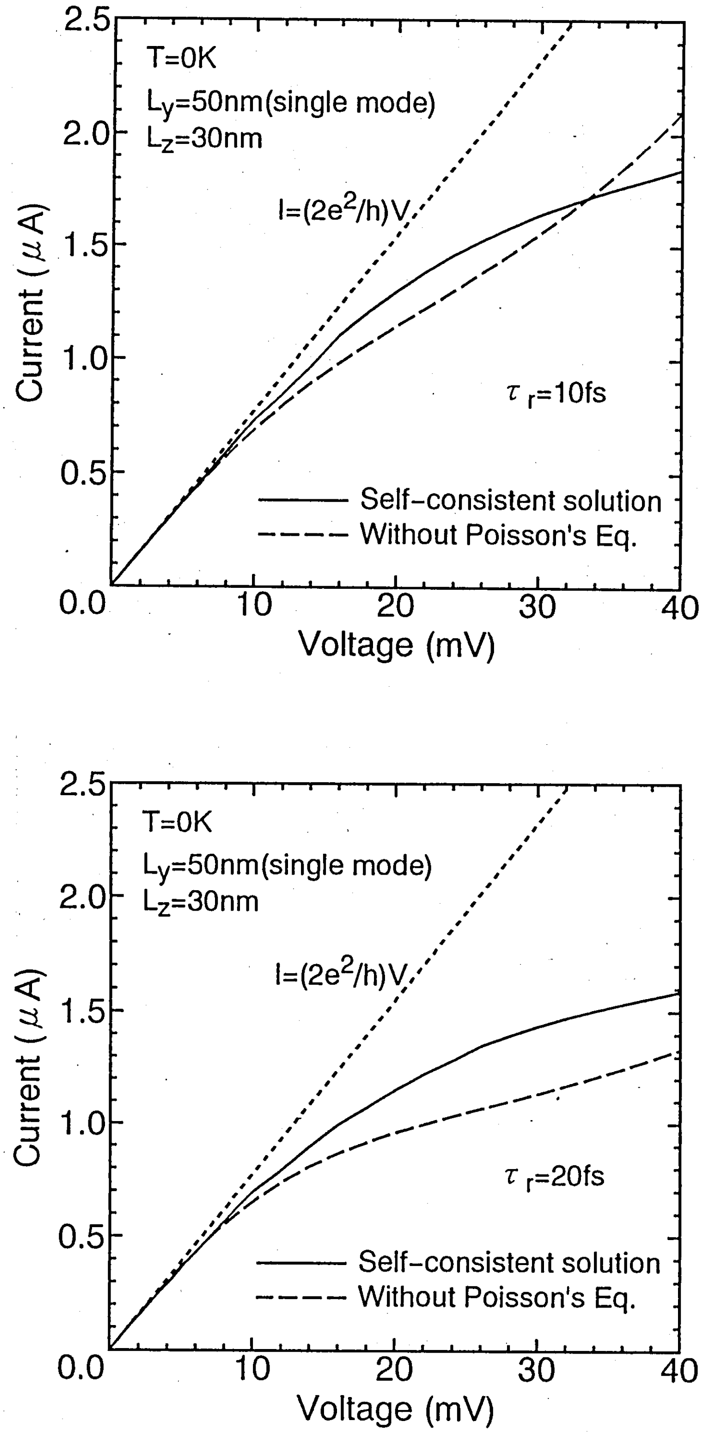

Reservoir
Electron Waveguide
Reservoir
Energy (eV)
eV/2
eV/2
0
Lx
Distance (nm)

Fig. 3

(a)

(b)



2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
10
20
30
40
Current (μA)
Voltage (mV)
T=0K
Ly=50nm(single mode)
Lz=30nm
I=(2e2/h)V
τ r=10fs
Self-consistent solution
Without Poisson's Eq.
T=0K
Ly=50nm(single mode)
Lz=30nm
I=(2e2/h)V
τ r=20fs
Self-consistent solution
Without Poisson's Eq.

Fig. 4

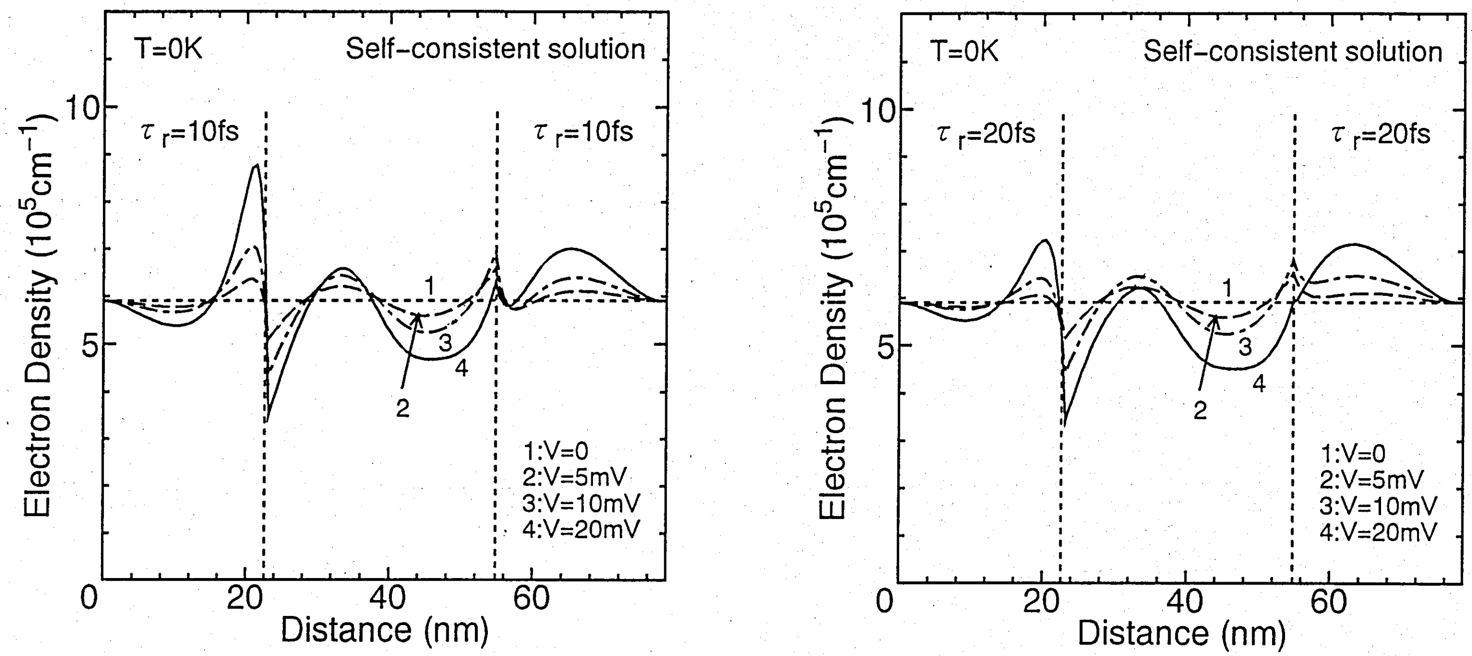

T=0K
Self-consistent solution
τ_r=10fs
τ_r=10fs
Electron Density (10^5cm^{-1})
Distance (nm)
1:V=0
2:V=5mV
3:V=10mV
4:V=20mV
T=0K
Self-consistent solution
τ_r=20fs
τ_r=20fs
Electron Density (10^5cm^{-1})
Distance (nm)
1:V=0
2:V=5mV
3:V=10mV
4:V=20mV

Fig. 5 (a)

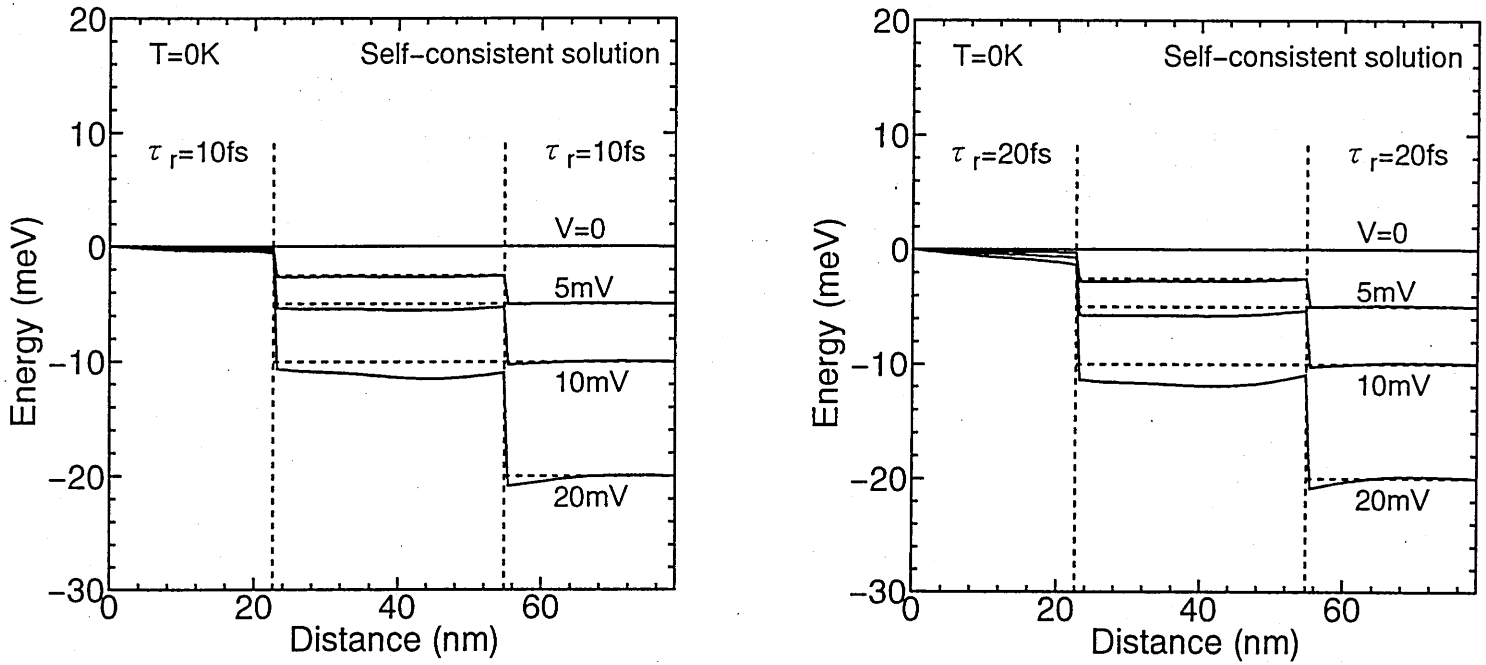
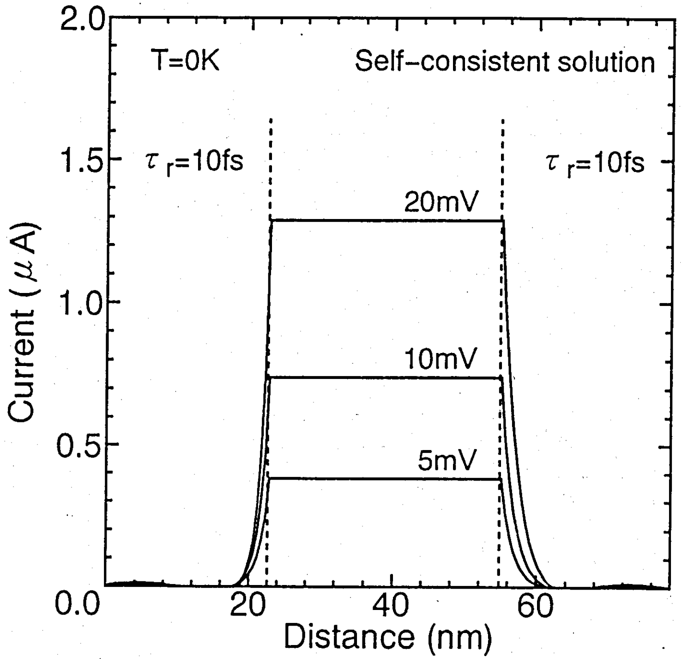

T=0K
Self-consistent solution
τ r=10fs
τ r=10fs
V=0
5mV
10mV
20mV
Energy (meV)
Distance (nm)
T=0K
Self-consistent solution
τ r=20fs
τ r=20fs
V=0
5mV
10mV
20mV
Energy (meV)
Distance (nm)

Fig. 5 (b)


T=0K
Self-consistent solution
τ_r=10fs
τ_r=10fs
20mV
10mV
5mV
Current (μA)
Distance (nm)
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
20
40
60

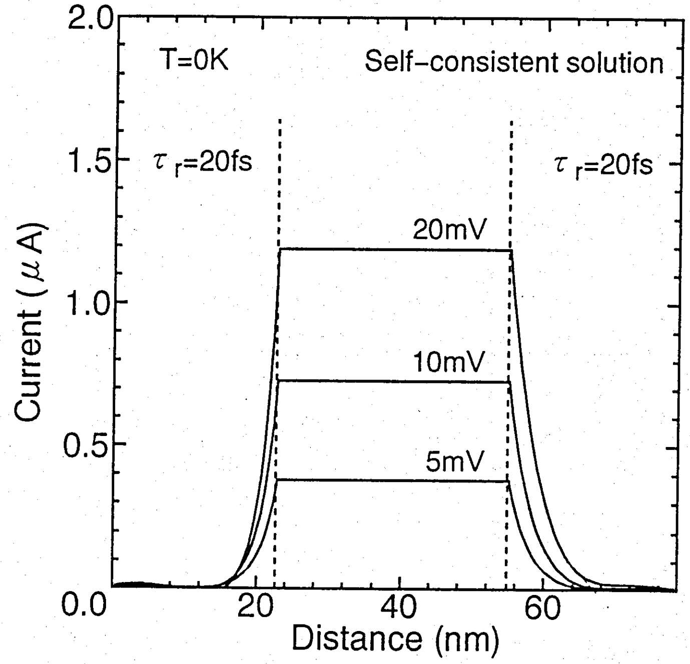

T=0K
Self-consistent solution
τ_r=20fs
τ_r=20fs
20mV
10mV
5mV
Current (μA)
Distance (nm)
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
20
40
60

Fig. 5 (c)

18

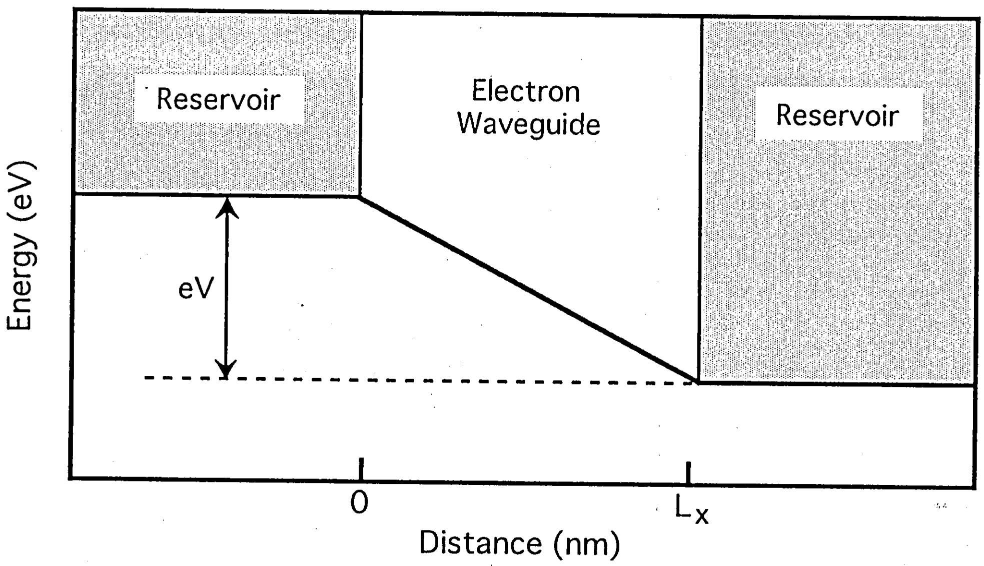
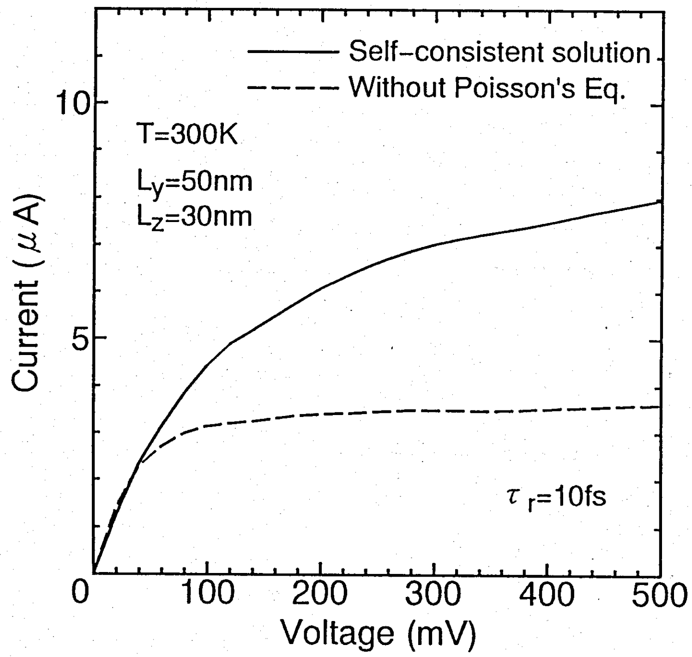

Reservoir
Electron
Waveguide
Reservoir
Energy (eV)
eV
0
L_x
Distance (nm)

Fig. 6

(a)


Self-consistent solution
Without Poisson's Eq.
T=300K
Ly=50nm
Lz=30nm
τ r=10fs
Current (μA)
Voltage (mV)
0
5
10
0
100
200
300
400
500

(b)

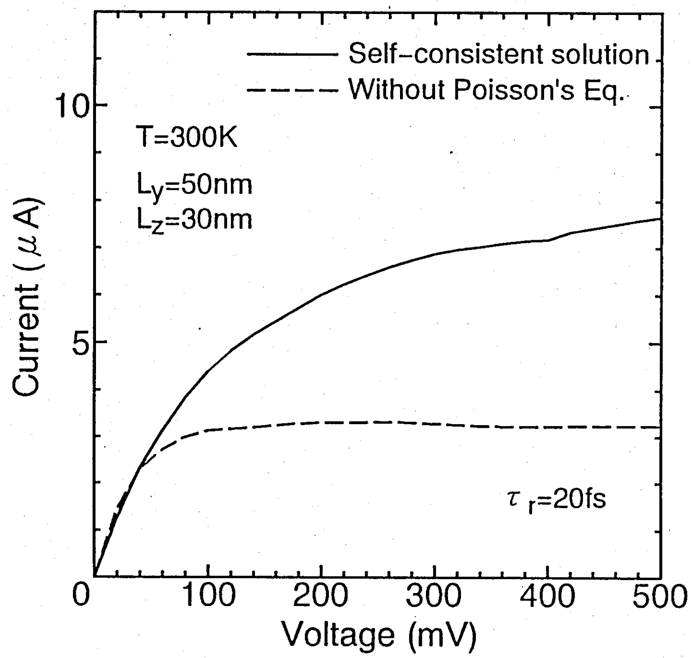

Self-consistent solution
Without Poisson's Eq.
T=300K
Ly=50nm
Lz=30nm
τ r=20fs
Current (μA)
Voltage (mV)
0
5
10
0
100
200
300
400
500

Fig. 7

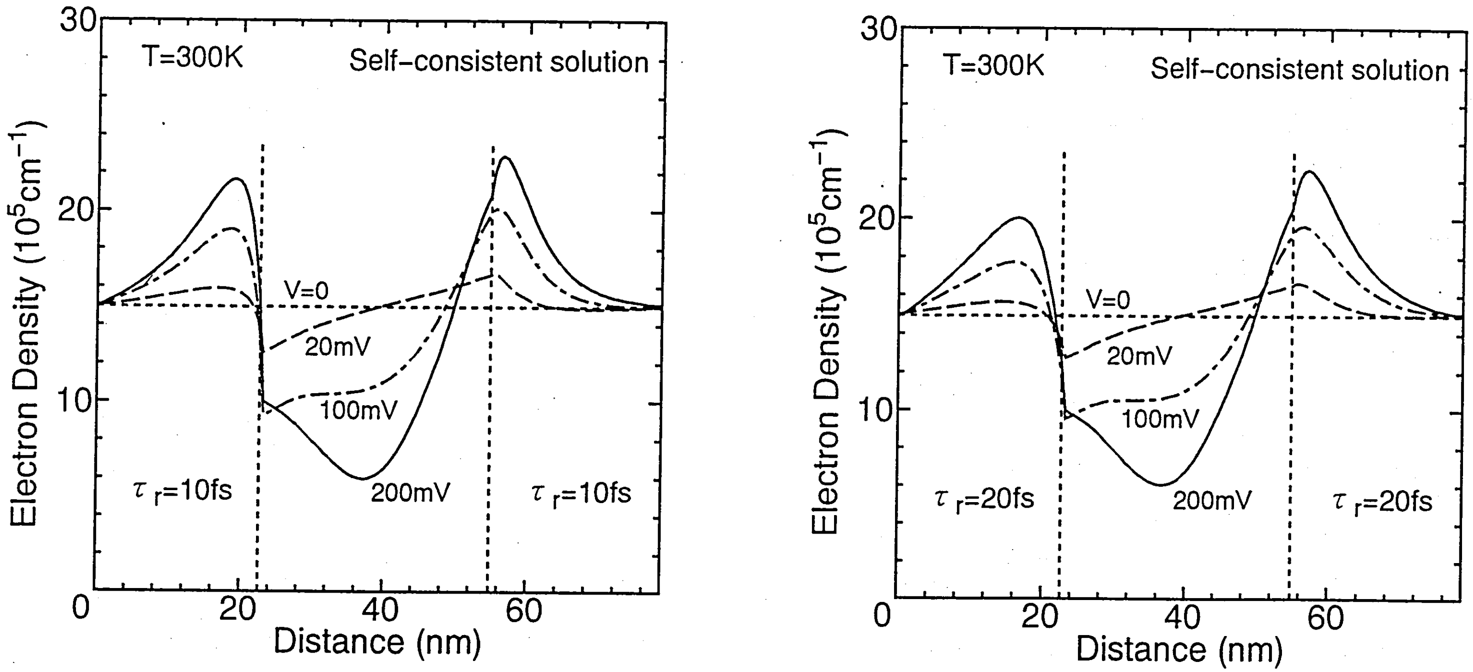

T=300K
Self-consistent solution
Electron Density (10^5cm^{-1})
V=0
20mV
100mV
200mV
τ_r=10fs
τ_r=10fs
Distance (nm)
T=300K
Self-consistent solution
Electron Density (10^5cm^{-1})
V=0
20mV
100mV
200mV
τ_r=20fs
τ_r=20fs
Distance (nm)

Fig. 8 (a)

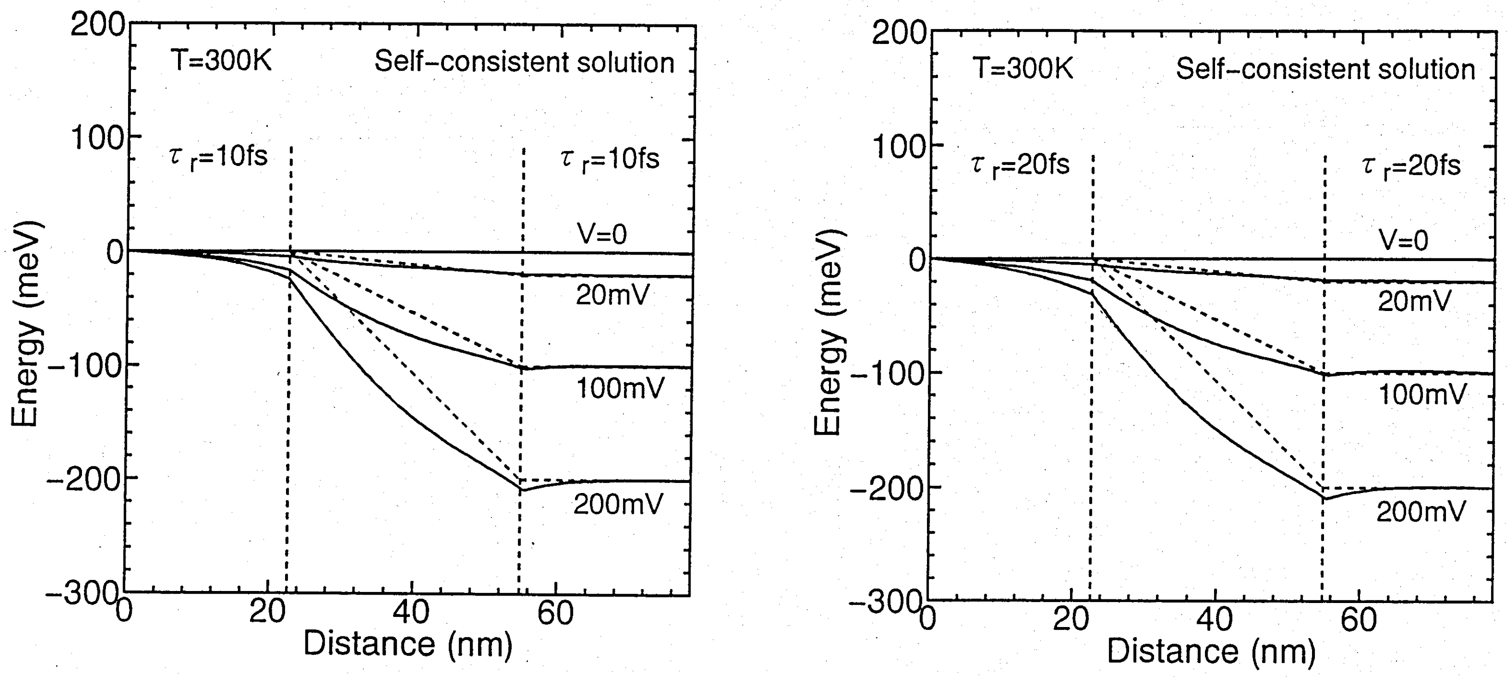
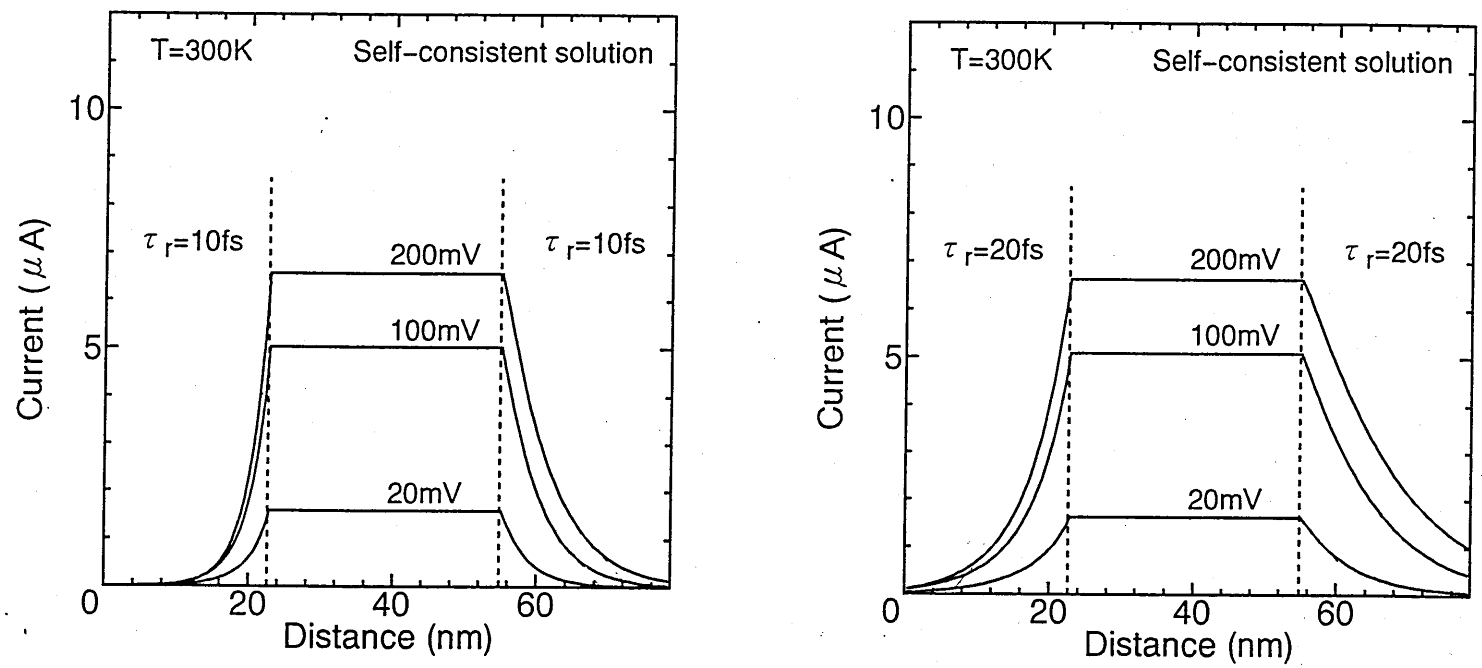
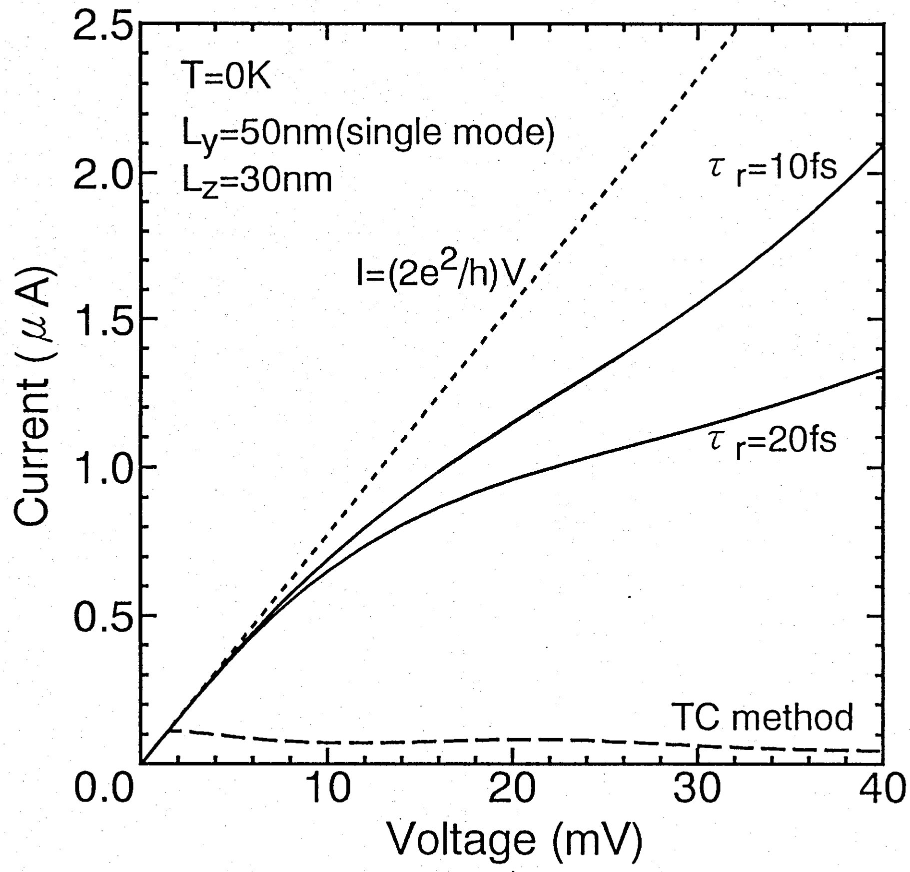

T=300K
Self-consistent solution
τ r=10fs
τ r=10fs
V=0
20mV
100mV
200mV
Energy (meV)
Distance (nm)
T=300K
Self-consistent solution
τ r=20fs
τ r=20fs
V=0
20mV
100mV
200mV
Energy (meV)
Distance (nm)

Fig. 8 (b)



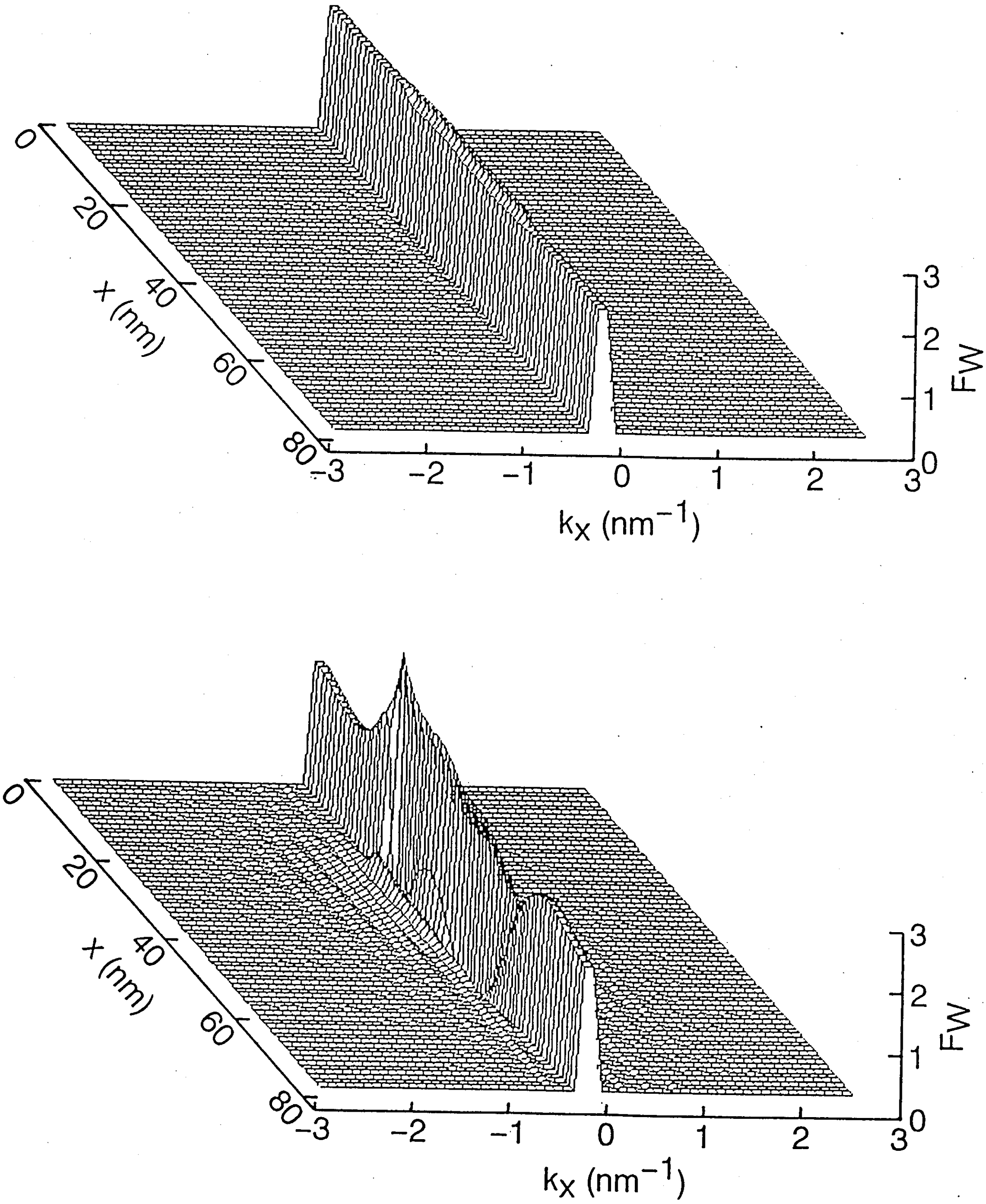
T=300K
Self-consistent solution
τ_r=10fs
τ_r=10fs
200mV
100mV
20mV
Current (μA)
Distance (nm)
0
5
10
20
40
60
T=300K
Self-consistent solution
τ_r=20fs
τ_r=20fs
200mV
100mV
20mV
Current (μA)
Distance (nm)
0
5
10
20
40
60

Fig. 8 (c)



T=0K
Ly=50nm(single mode)
Lz=30nm
I=(2e2/h)V
τ r=10fs
τ r=20fs
TC method
Current (μA)
Voltage (mV)
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
10
20
30
40

Fig. 9



0
20
40
60
80
x (nm)
-3
-2
-1
0
1
2
3
k_x (nm^{-1})
0
1
2
3
FW
0
20
40
60
80
x (nm)
-3
-2
-1
0
1
2
3
k_x (nm^{-1})
0
1
2
3
FW

Fig. 10

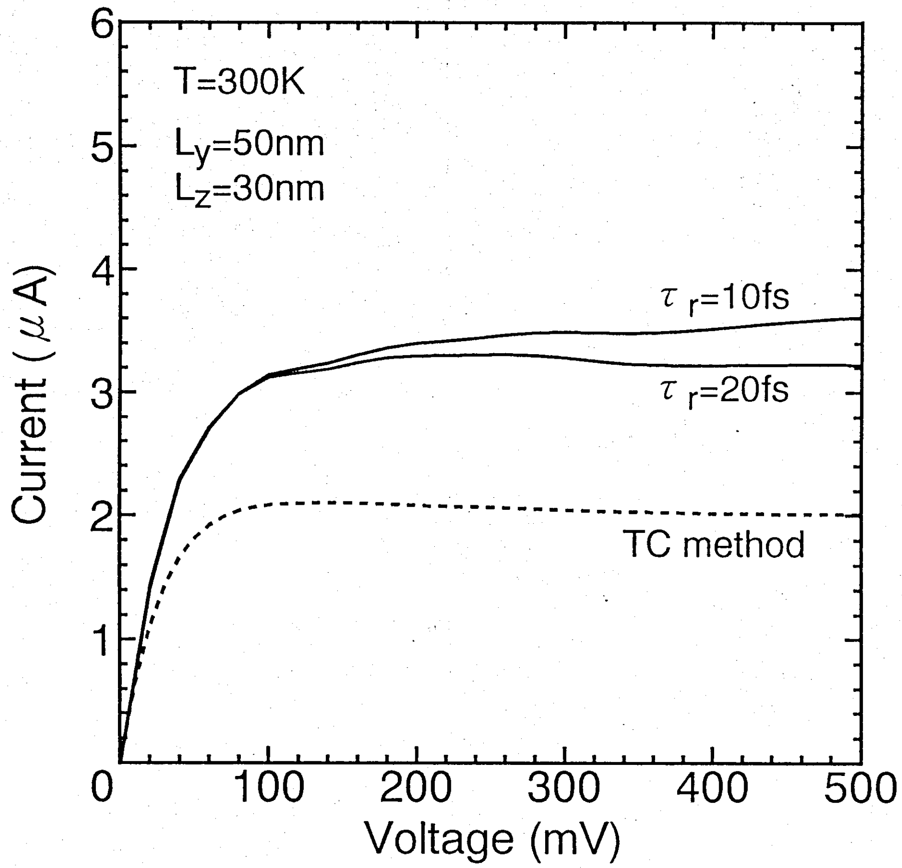

T=300K
Ly=50nm
Lz=30nm
τ r=10fs
τ r=20fs
TC method
Current (μA)
Voltage (mV)
0
1
2
3
4
5
6
100
200
300
400
500

Fig. 11

輻射科学研究会資料
RS 93-23

古典波と量子波のガリレイ変換

北野 正雄

(京都大学 工学部)

1994 年 3 月 7 日

輻射科学研究会
(於 松下電器 中央研究所)

Galilei Invariance of Quantum and Classical Waves

M. Kitano

Department of Electronics, Kyoto University

Kyoto 606-01, Japan

Abstract

A nontrivial phase change undergone by the wavefunction under a Galilei transformation has caused various discussions over the nature of wavefunctions. In the framework of nonrelativistic quantum mechanics, it is now legitimately understood that the phase change is intrinsically associated with a projective representation of the Galilean group. In order to give an alternative account for the nontrivial phase factor, we show that the envelope function of a relativistic classical wave undergoes exactly the same phase change in the nonrelativistic limit.

§1. INTRODUCTION

In his later paper [1], Landé claimed that the de Broglie relation between momentum and wavelength

$$p = h/\lambda, \tag{1}$$

is incompatible with Galilean invariance. The wavelength λ of an ordinary wave is unchanged, i.e., $\lambda' = \lambda$, under a Galilean transformation, while the momentum p apparently transforms

$$p' = p + mv, \tag{2}$$

where v is the velocity of moving frame and m is the particle mass. In order to hold both (1) and (2), the quantum wave has to violate the plain truth that "a snapshot of ocean wave taken from a lighthouse displays the same wavelength as one taken from an airplane [1]." Landé regarded this paradox as an evidence of incompleteness of quantum mechanics.

Soon after, it was pointed out [2] that the wavefunction is not an ordinary wave and may (or should) follow a different transformation law specific to the quantum mechanics. The transformation law, which associates a nontrivial phase factor, is determined so as to keep the Schrödinger equation invariant. The phase factor which accounts for the change of wavelength is related to the fact that the wavefunctions form a projective (or ray) representation of the Galilei group [3–5]. Thus the paradox was refuted.

In this note, another way to resolve Landé's paradox is presented. We will show that the transformation law for the quantum wave has the same form as that for the envelope function of a relativistic classical wave in the nonrelativistic limit [6]. Our classical approach would provide an alternative and complementary explanation of the paradox as well as a kinematic picture for the transformation law of the wavefunctions.

§2. GALILEAN TRANSFORMATION OF WAVEFUNCTIONS

Before proceeding, we shortly review how the phase factor is determined in the framework of nonrelativistic quantum mechanics [2,7]. We denote two reference frames as R and R', whose respective space-time coordinates are related by a Galilean transformation with velocity v:

$$x' = x + vt, \tag{3}$$
$$t' = t.$$

A classical wave can be represented in each frame by a (real or complex) function of the space-time coordinates, say, $\Psi(x,t)$ in R and $\Psi'(x',t')$ in R'. Those functions must satisfy the relation

$$\Psi(x,t) = \Psi'(x',t'), \tag{4}$$

since regardless of the reference frames the wave amplitude must be the same.

For a quantum mechanical wavefunction $\psi(x,t)$, however, we can't apply this naive relationship, because what should be conserved is not the probability amplitude but the probability density. Therefore we should use the relation

$$|\psi(x,t)|^2 = |\psi'(x',t')|^2, \tag{5}$$

or equivalently

$$\psi(x,t) = e^{-if(x,t)}\psi'(x',t'), \tag{6}$$

where f is a real function of coordinates. The form of phase function f must so determined that the Schrödinger equation is invariant under the Galilean transformation defined by Eqs. (3) and (6).

With some calculations [2,4,7], we have

$$f(x,t) = \hbar^{-1}(mvx + mv^2t/2), \tag{7}$$

which correctly accounts for the momentum relations as well as the energy relations between the R and R' systems. In fact, if we apply the result (6) and (7) to a plane-wave solution $\psi'(x',t') = \exp[i(k'x' - \hbar k'^2 t'/2m)]$ of the free Schrödinger equation in R', we get the perfectly consistent solution in R:

$$\psi(x,t) = \exp\left\{i\left[\left(k' - \frac{mv}{\hbar}\right)x - \frac{\hbar(k' - \hbar^{-1}mv)^2}{2m}t\right]\right\}, \tag{8}$$

or $k = k' - mv/\hbar$, which corresponds to Eqs. (1) and (2).

§3. CLASSICAL APPROACH

In order to present our classical approach, let us consider a classical (complex) wave $\Psi(x,t)$ which obeys the (relativistically invariant) Klein-Gordon equation,

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2}\right]\Psi(x,t) = 0, \tag{9}$$

where $\omega_0 = \mu c^2$ is the cutoff frequency. The parameter μ with dimension $\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}$ can be related to the rest mass $m = \hbar\mu$ of the corresponding quantum particle.

In order to consider the nonrelativistic limit [8,9], we split the time dependence of Ψ into two factors as

$$\Psi(x,t) = e^{-i\omega_0 t}\psi(x,t), \tag{10}$$

where the first factor represents the fast temporal oscillation at ω_0 and $\psi(x,t)$ represents the slowly-varying envelope, which satisfies the condition

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right| \ll \omega_0|\psi|. \tag{11}$$

This decomposition (10) is quite natural for waves having much smaller wavenumber k compared with $k_0 = 2\pi\lambda_0^{-1} = \omega_0/c$. In the long-wave limit $\epsilon = (k/k_0) \to 0$, the second term of (9) is small compared with the other two terms. The zeroth order solution is $\Psi_0(x,t) = e^{\pm i\omega_0 t}$ and the envelope $\psi(x,t)$ represents the deviation from Ψ_0.

Inserting Eq. (10) into (9), we have a classical wave equation

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \psi(x,t) = 0, \tag{12}$$

which corresponds to the Schrödinger equation for the free particle with mass $m = \hbar\mu$. (Owing to μ, we could spare the use of $\hbar$ in the classical equation.) At this point we can anticipate ψ might transform like a wavefunction.

Now we consider two reference frames. In stead of the Galilean transformation (3), we introduce the Lorentz transformation

$$\begin{aligned} x' &= (x + \beta ct)/\sqrt{1-\beta^2}, \\ t' &= (t + \beta c^{-1} x)/\sqrt{1-\beta^2}, \end{aligned} \tag{13}$$

with $\beta = v/c$. We will take the nonrelativistic limit later on.

In the frame R', $\Psi'(x', t')$ satisfies the Klein-Gordon equation (9) with primed variables x' and t', and the slowly-varying envelope ψ' is defined as

$$\Psi'(x', t') = e^{-i\omega_0 t'} \psi'(x', t'). \tag{14}$$

Since we are considering a classical wave, the naive relation (4) can safely be applied; from Eqs. (10), and (14), we see the envelope transforms as

$$\psi(x,t) = \exp[-i\omega_0(t'-t)]\psi'(x',t'), \tag{15}$$

which reminds us the quantum transformation rule (6), if we identify $\omega_0(t'-t)$ with $f(x,t)$. At first sight, however, $\omega_0(t'-t)$ seems to vanish in the nonrelativistic limit and to give no nontrivial phase factor. But due to the reason described later, up to the second order terms with respect to β in $(t'-t)$ of Eq. (15) must be retained, i.e.,

$$\begin{aligned} \omega_0(t'-t) &= \omega_0 \left\{ \left(t + \frac{\beta}{c}x\right)\left(1 + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^3)\right) - t \right\} \\ &\simeq \mu v x + \frac{\mu v^2}{2} t. \end{aligned} \tag{16}$$

Thus we have

$$\psi(x,t) = \exp[-i(\mu v x + \mu v^2 t/2)]\psi'(x+vt, t), \tag{17}$$

which perfectly coincides with the quantum transformation law (6).

The approximation in Eq. (16) can formally be achieved by replacing ω_0 with μc^2 and then taking the limit of $c \to \infty$. But in order to avoid the seeming arbitrariness of $\omega_0 = \mu c^2$ and the questionable limit operation for the variable with dimension, we will make a more careful analysis where c and ω_0 are kept constant.

We consider a typical solution to (12)

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \exp\left[i\left(kx - \frac{k^2}{2\mu}t\right)\right] \\
&= \exp\left[i\left(\epsilon\frac{\omega_0}{c}x - \frac{\epsilon^2}{2}\omega_0 t\right)\right],
\end{aligned}
\tag{18}
$$

where $\epsilon = ck/\omega_0$. The wavelength of ψ scales as $x_c \sim 2\pi\epsilon^{-1}(c/\omega_0)$ and the period as $t_c \sim 2\pi\epsilon^{-2}(2/\omega_0)$. We note x and t in Eq. (16) should scale as above, because x_c and t_c are the characteristic scales over which $\psi(x,t)$ varies substantially. For the nonrelativistic limit, we have to let $\epsilon \to 0$ together with β keeping $\epsilon/\beta \sim O(1)$. Then we see that the approximation used in Eq. (16) is of the lowest order with respect to ϵ and β. For more detail, see Appendix.

The first term of the exponent in Eq. (17), which corresponds to the momentum change, comes from the mixing of space coordinate into the time coordinate and the second term, which accounts for the energy change partly, comes from the time dilation induced by the Lorentz transformation. We should appreciate the subtle way how these purely relativistic effects sneak into the nonrelativistic realm.

For intuitive understanding of the argument, we present in Fig. 1 a schematic diagram of the fast temporal oscillation at ω_0 seen from two Lorentz frames.

§4. DISCUSSION

Now we know that the quantum transformation law (5) has a good correspondence to the classical transformation law (17) for the envelope function. This coincidence is not a superficial one. As is well known, in quantization of a relativistic, classical field, the amplitude for single-particle states can be interpreted as the relativistic wavefunction, which obeys the pre-quantized wave equation. The nonrelativistic wavefunction is obtained as the envelope function with the same procedure presented in this note.

Geometrical or gauge structures underlying this problem is also an interesting subject. Investigation along this line is now underway.

Although the problem raised by Landé had been mainly discussed in conceptual contexts or from fundamental viewpoints, we would like to stress that it is also important in the fields of down-to-earth physics [10]. Especially, owing to the recent development of laser cooling technique, we can create very slow atomic beams, whose de Broglie wavelength is as long as a few tenths of a micron, and can have easy access to their wave nature. Actually, various types of interferometers with laser-cooled atoms are successfully constructed [11]. In this sense it would be worth while revisiting to this old problem at the present time.

ACKNOWLEDGMENTS

The author is grateful to Professor S. Kamefuchi for sending a copy of Ref. [5] and to Professor Y. Aharonov for illuminateing discussions. This work is supported partly by the Ministry of Education, Science, and Culture in Japan, under a Grant-in-Aid for Scientific Research.

APPENDIX: LOW-VELOCITY LIMITS OF LORENTZ TRANSFORMATION

Even though a Galilei transformation is deemed just a simple limiting case of Lorentz transformations, a special care must be taken in the course of limit process.

Let us start with the Lorentz transformation expanded to second order with respect to $\beta = v/c$

$$\begin{aligned} t' &= (1 + \beta^2/2)t + \beta c^{-1} x, \\ x' &= (1 + \beta^2/2)x + \beta c t. \end{aligned} \tag{A1}$$

We will apply this transformation to the following three cases, in each of which different limit procedure is required.

a. Galilei transformation of the space-time coordinate A straightforward but rather formal limit of $c^{-1} \to 0$ gives the well-known Galilei transformation:

$$t' = t,$$
$$x' = x + vt.$$

We note the limit $\beta \to 0$ alone does not yield the result. In addition, the characteristic time t_c and length x_c must satisfy the relation $\epsilon = x_c/(ct_c) \sim \beta \ll 1$.

b. The transformation law for the envelope function As mentioned in the text, before applying Eq. (A1), a scale transformation which reflects for the space-time structure of long waves must be applied:

$$t = \frac{4\pi}{\epsilon^2 \omega_0}\tau, \quad x = \frac{2\pi c}{\epsilon \omega_0}\xi,$$

where τ and ξ are normalized coordinates and $\epsilon \sim \beta$ is a small parameter. Under this scaling, the transformation (A1) reads

$$\tau' = (1 + \beta^2/2)\tau + (\beta\epsilon/2)\xi,$$
$$\xi' = (1 + \beta^2/2)\xi + (2\beta/\epsilon)\tau. \tag{A2}$$

In the limit of $\beta \to 0$, $\epsilon \to 0$, $\epsilon/\beta \sim 1$, we have

$$\tau' = \tau,$$
$$\xi' = \xi + (2\beta/\epsilon)\tau,$$

and

$$\omega_0(t' - t) = \frac{4\pi}{\epsilon^2}(\tau' - \tau) = \frac{4\pi}{\epsilon^2}(\frac{\beta^2}{2}\tau + \frac{\beta\epsilon}{2}\xi).$$

With these relations, the envelope transformation law (17) can be derived from Eq. (15).

c. Doppler formulae for electromagnetic waves Consider a plane wave $e^{-i(\omega' t' - k' x')}$ in the R'-frame with $\omega'/k' = c$. Application of Eq. (A1) yields $e^{-i(\omega t - kx)}$ in the R-frame with

$$\omega = \omega' - \beta c k' + (\beta^2/2)\omega',$$
$$k = k' - \beta c^{-1}\omega' + (\beta^2/2)k',$$

Retaining the terms up to first and second order, we have the first and the second order Doppler formula, respectively. In either cases, we consider the limit of $\beta \to 0$ rather than $c^{-1} \to 0$, which would produce the contradicting result $\omega/k \neq c$. In the electromagnetic or massless cases, $\epsilon = x_c/ct_c \sim 1$.

REFERENCES

1) A. Landé, Am. J. Phys. **43** (1975), 701. See also A. Landé, Am. J. Phys. **37** (1969), 541.

2) J.-M. Lévy-Leblond, Am. J. Phys. **44** (1976), 1130.

3) V. Bargmann, Ann. Math. **59** (1954), 1.

4) J.-M. Lévy-Leblond, Riv. Nuovo Cimento **4** (1972), 99.

5) See also, M. Omote, S. Kamefuchi, Y. Takahashi, and Y. Onuki, Fortschr. Phys. **37** (1989), 933.

6) In terms of the Sagnac effect, a similar discussion has been shortly given by D. Dieks and G. Nienhuis, Am. J. Phys. **58** (1990), 650.

7) L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990), p. 78.

8) W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics — Wave Equations* (Springer, Berlin, 1990), p. 7.

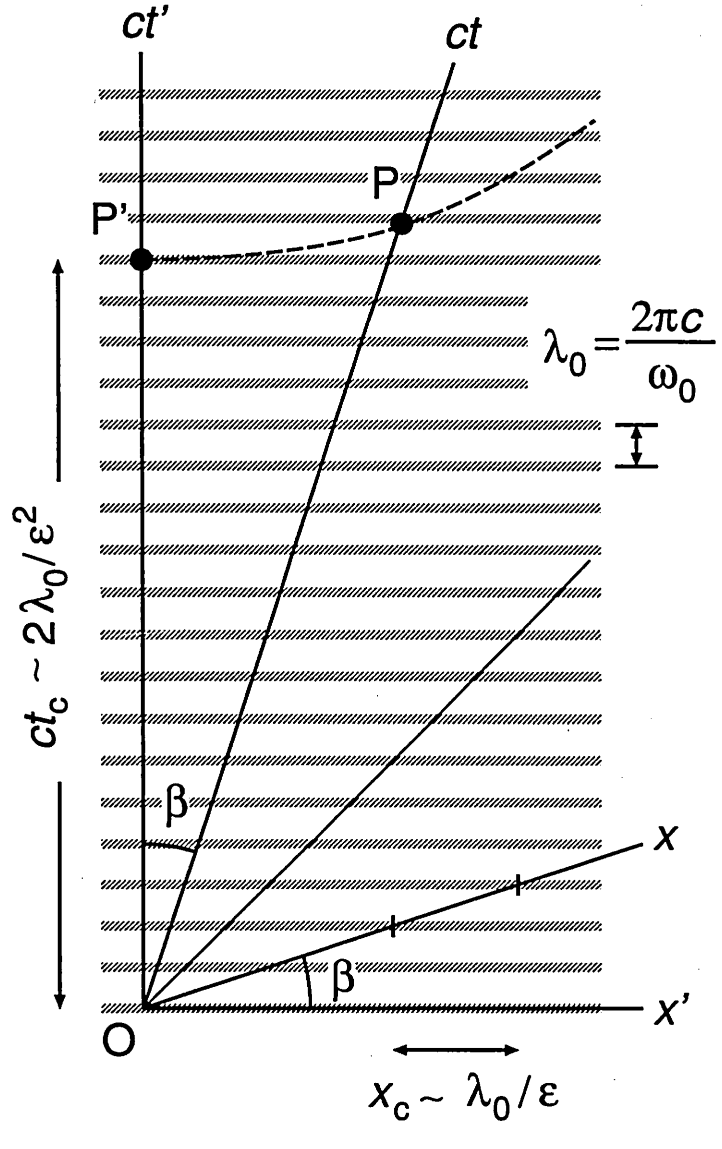
9) S. M. Flatté, Am. J. Phys. **54** (1986), 1088.

10) For example, see Z. Wu, T. G. Walker, and W. Happer, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), 1921. They correctly introduced the phase factor in their calculation of the spin-orbit interaction of the alkali-metal valence electron within the core electrons of the noble gas. Seen from the alkali-metal atom, the electron wavefunction of the noble gas, $\psi(\boldsymbol{r})$, is modified as $\psi(\boldsymbol{r})\exp(im\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar)$ due to the relative motion of the two nuclei. Before their analysis, the effect was overlooked and the agreement with experiments was somewhat poor.

11) See for example, F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma, Phys. Rev. **A 46**, (1992), R17.

FIGURE

FIG. 1. The horizontal stripes represent the resting wave $\Psi'(x', t') = e^{-i\omega_0 t'}$ in the R' frame. When viewed from a Lorentz frame R moving with relative velocity $v = \beta c$, it is modified as follows; (1) The spatial oscillation appears. (The x axis intersects the horizontal lines.) (2) The temporal frequency increases. (OP and OP' represent the same lapse of local time.) Even in the nonrelativistic limit, $\beta \rightarrow 0$, those changes persist because the characteristic length x_c and period t_c, over which the changes of ψ are to be estimated, increase according as $\epsilon \rightarrow 0$.



ct'
ct
P
P'
$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$
$ct_c \sim 2\lambda_0/\varepsilon^2$
β
x
β
O
x'
$x_c \sim \lambda_0/\varepsilon$

輻射科学研究会資料 RS93-24
（1994年3月7日）

$LiTaO_3$擬似位相整合ＳＨＧデバイス

松下電器産業（株） 材料デバイス研究所
山本和久、水内公典、北岡康夫、加藤誠

１．まえがき

光情報処理分野では短波長コヒーレント光源の実現が望まれている。光導波路を用いた擬似位相整合第２高調波発生（Quasi Phase Matched Second Harmonic Generation:ＱＰＭ－ＳＨＧ）[1,2]はコンパクトな青～紫色光源を実現するための有効な手段である。周期分極反転構造を用いた擬似位相整合法は、d_{33}、d_{22}等の複屈折位相整合法では利用することのできない大きな非線形光学定数を用いることができるうえに光導波路による閉じ込め効果を利用でき高効率である。また、ＳＨＧが導波路出力であるため集光が容易という利点もあり、各方面で盛んに研究されている[3-7]。

我々は光損傷に強く、かつ$LiNbO_3$に近い非線形光学効果を持つ$LiTaO_3$に着目し、ＱＰＭ－ＳＨＧデバイス化の検討を行ってきた[8]。この報告では$LiTaO_3$光導波路を用いた高効率ＱＰＭ－ＳＨＧデバイスおよび半導体レーザ光の紫色光への波長変換について述べる。

２．ＳＨＧ素子

図１にＱＰＭ－ＳＨＧデバイスの構成を示す。$LiTaO_3$基板に埋め込み光導波路と直交して周期的分極反転層が形成されている。分極反転層は部分的プロトン交換と熱処理により作製されている。また、光導波路はピロ燐酸を用いたプロトン交換[9]により形成されている。プロトン交換法は300℃以下の温度で光導波路が形成できるため、分極反転構造を破壊することはなく、ＱＰＭ－ＳＨＧデバイスへの光導波路形成法として有効な方法である。分極反転周期は１次のＱＰＭを行うため3.8～4.0 μmとした[10]。

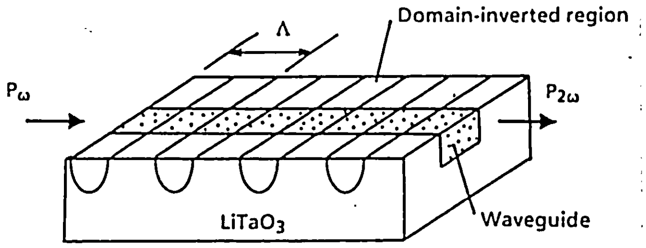


図１．ＱＰＭ－ＳＨＧデバイスの構造

2．1　SHG素子の作製

分極反転層の形成はプロトン交換と瞬間熱処理[11]により行った。部分的にプロトン交換されたところはキュリー点が低下する。この温度近傍で熱処理することによりプロトン交換層だけが反転される。分極反転層の形成工程を図2に示す。

$LiTaO_3$基板の－C面上に形成された厚み20nmの周期状のＴａマスクを用いて、ピロ燐酸中で260℃、20分プロトン交換を行い部分的にプロトン交換層を形成した。さらにＴａマスクを除去した後、545℃で30秒熱処理を行った。周期3.8～4.0μｍにて厚み 1.8～1.9μｍの分極反転層が形成されている。

次にこのように形成された分極反転層上に光導波路を作製する。図3に三次元光導波路作製工程を示す。均質な光導波路を形成するためにピロ燐酸によるプロトン交換法を用いた。最初に、20nmの厚みのTaマスクパターンを形成した。パターン形成にはフォトリソとＣF_4ガスによるドライエッチングを用いてスリット幅を±0.1μｍ以下に制御した。この基板をピロ燐酸中で260℃，14分プロトン交換処理を行った後、アニール処理した。アニール温度は420℃、処理時間は1分である。このようにして厚み1.9μｍ、幅4μｍの光導波路が分極反転層上に形成でき、分極反転層との充分なオーバーラップが可能となった。その後、保護膜としてSiO_2を400nmスパッタにより蒸着した。また、ポリッシング後SiO_2をEB蒸着により145nmの厚みで入出射面に付加した。この無反射コーティングにより基本波の反射を１％以下に抑えることができた。作製された三次元光導波路の伝搬損失を評価したところ、幅４μｍのシングルモード光導波路にて0.8dB/cmの損失であった。

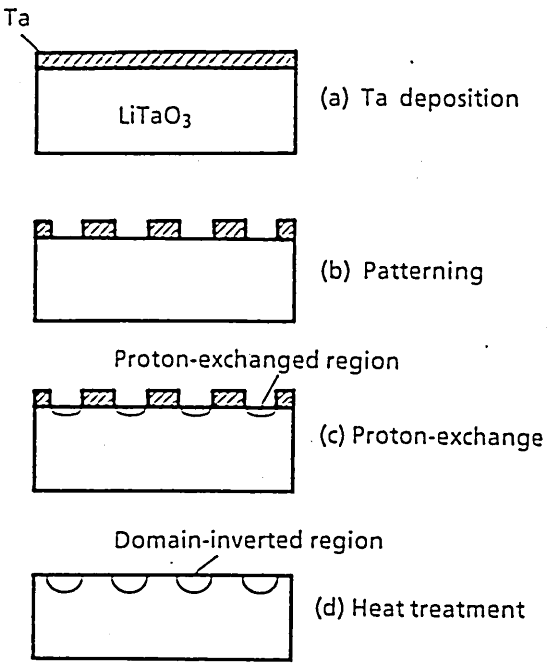


図2．分極反転層形成工程

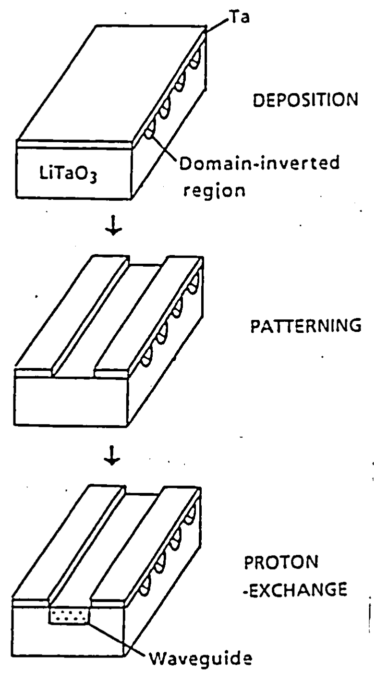


図3．光導波路作製工程

２．２　ＳＨＧ素子特性

作製されたＳＨＧ素子の基本特性を調べるために、波長を可変できるTi：サファイアレーザを光源に用いて評価を行った。分極反転層の周期3.8μｍに対して波長858nm、周期4μｍに対しては870nmでＳＨＧ出力の最大ピークが得られた。入射基本波出力は光導波路からの基本波出力より光導波路の伝搬損失0.8dB/cmを用いて換算し推定を行った。145mWに対し31mWのＳＨＧが変換効率21%で得られた。また、基本波の減衰を無視できる領域（50mW以下）での換算効率は220%/W である。

基本波波長に対するＳＨＧ出力の関係を調べた。ＳＨＧ出力の半値波長幅は0.12nmである。デバイスの質を波長許容幅から評価することができる。理論的な波長許容幅(0.1nm）に近く均質な光導波路が全体にわたって形成されていることがわかる。次に温度を変化させた場合のＳＨＧ出力を評価した。半値幅は2.5℃であり、従来の温度チューニングデバイスの0.1～0.3℃に比べ１桁程度広く実用的である。

３．半導体レーザ光の波長変換

ＳＨＧ素子の波長許容幅は0.1nm程度と小さいため、半導体レーザの発振波長制御および縦モードの安定化を図る必要がある。従来、半導体レーザを温度コントロールし、また素子にはＡＲコートによる戻り光防止を行い発振波長の安定化を図っていた[12)]。そのため、使用温度範囲は±0.5℃と狭くペルチエコントローラが必要であるうえ、位相整合波長近傍の発振波長を有する半導体レーザを選別する必要があった。以下、グレーティングフィードバック法を用いて半導体レーザの発振波長の制御および安定化を図った結果について述べる。

３．１　フィードバック方式の検討

グレーティングを用いた光フィードバックにより半導体レーザの縦モードをロックする方法[13)]が、光通信分野では実用化されようとしている。このグレーティングフィードバック法の特徴は半導体レーザの温度、電流が変化しても発振波長は一定であること、およびある範囲（20～30nm）の発振波長を持つ半導体レーザの波長を一定の波長に揃えることができることである。

しかし、半導体レーザの後面からフィードバックする方法は、基本波の損失を生じるため半導体レーザの出力は大幅に低下する。そのため、基本波出力を犠牲にできないＳＨＧには適さない。これに対して、図４に示す光導波路を介した光フィードバック方法を提案した[14)]。この方法は光導波路から出射された基本波をグレーティングで光導波路に返すことで、光はもとの光路を通って半導体レーザに帰還される。一方、ＳＨＧは波長選択ミラーにより外部に取り出される。特徴としては、光導波路外部にグレーティングを有するため基本波および高調波に影響を与えないことがある。光導波路を介したフィードバックにおいては、光導波路の伝搬損失が大きいと半導体レーザへの帰還光量が少なくなり問題となるが、ピロ燐酸プロトン交換を用いて形成された光導波路は低損失であり、この目的に適合している。

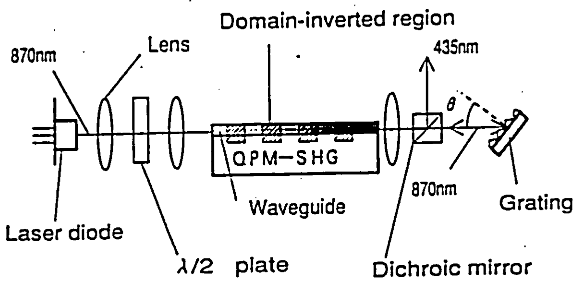


図４．グレーティングフィードバック実験光学系

３．２　半導体レーザへのグレーティングフィードバック

ＳＨＧ用半導体レーザとしては単一縦、横モード発振に加えて高出力ということが要求される。ここではシングルストライプAlGaAs高出力半導体レーザを用いて検討を行った。140mWの半導体レーザ光をNA0.55のレンズを用い平行化した後、NA0.45の集光レンズで素子端面に照射した。レンズ系での基本波の損失は20%である。伝送された114mWの基本波のうち72mWが光導波路に入射した。結合効率は63%であった。光導波路から出射された基本波をNA0.65のレンズで平行光にした後、グレーティング（1800本/mm）にて光導波路に返した。光導波路に入射した基本波は同じ光路を戻り半導体レーザに帰還される。図５にグレーティングの角度を変化させた時の、半導体レーザの発振波長との関係を示す。発振波長868nmの半導体レーザをグレーティング角度を変えることで、858nmから880nmまで、22nmの範囲で発振波長をスキャンすることができた。

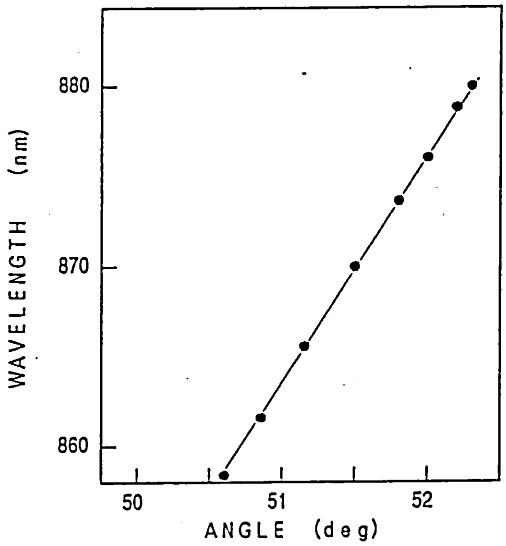


図５．グレーティング角度と発振波長
およびＳＨＧ出力

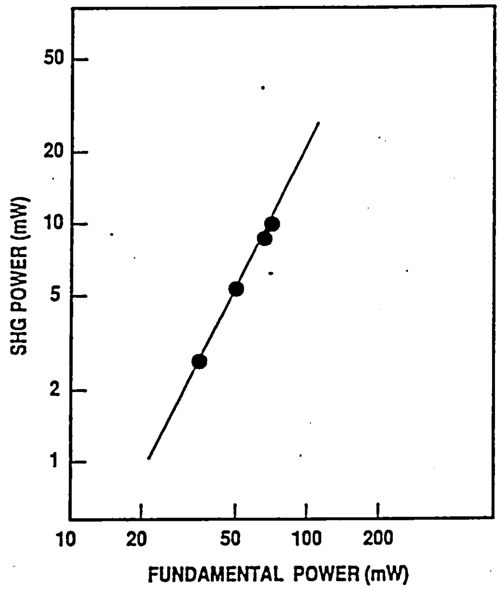


図６．基本波パワーに対するＳＨＧ出力

３．３　波長安定化半導体レーザのＳＨＧ特性

波長安定化された半導体レーザによるＳＨＧ光発生についての検討を行った。図６に基本波パワーに対するＳＨＧ出力の関係を示す。入射パワー72mWに対して、10mWの紫色光（フレネル損を除く）が14%の変換効率で得られた。次に半導体レーザの温度を変化させた（ＳＨＧ素子は温度一定、ＬＤ温度は15℃から40℃まで変化）。少なくとも半値幅は25℃以上であり、フィードバックなし(±0.5℃)に比べ大幅な改善が見られる。残された課題としては素子の温度特性（半値幅2.5℃）があるが、周期分割構造を用いて許容幅を広げる[15]ことで環境温度変化に対する出力の安定化が可能となる。また、温度一定条件下での時間変動としては±1.5%以下と安定であった。

４．まとめ

$LiTaO_3$によるＱＰＭ－ＳＨＧデバイスの高出力化、高効率化を図った。プロトン交換層を瞬間熱処理することで深い分極反転層を得た。さらに、ピロ燐酸を用いたプロトン交換とアニールにより、均質で低損失(0.8dB/cm)、閉じ込めの良い光導波路が形成できた。これにより、光導波路と分極反転層とのほぼ完全なオーバーラップを実現でき、Tiサファイアレーザの評価においても145mWの基本波から31mWのＳＨＧ光を得ることができた。

次に光導波路を介したグレーティングフィードバック法を用いて、半導体レーザの発振波長をロックし、$LiTaO_3$によるＱＰＭ－ＳＨＧデバイスを用いて波長変換を行い、安定かつ高出力第２高調波発生を実現した。半導体レーザを用いて、72mWの導波基本波より10mWの紫色光（波長:435nm）を得た。また、得られたＳＨＧ出力は半導体レーザの温度変化および時間変化に対して安定であった。

以上のように10mW程度の紫色光が市販の高出力半導体レーザを用いて安定に発生させることが可能となった。ＱＰＭ－ＳＨＧデバイスと半導体レーザとを組み合わせた紫色コヒーレント光源は光ディスク等の情報処理分野での応用が期待される。

参考文献

1) J.A.Armstrong, N.Bloembergen, J.Ducuing and P.S.Person: Phys. Rev. 127 (1962) 1918
2) S.Somekh and A.Yariv: Opt. Comm., 6 (1972) 301
3) G.Arvidsson: Proc. Compact Blue-Green Lasers Topical Meeting, FC1-1 (1992) 116
4) M.Yamada, N.Nada, M.Saitoh, and K.Watanabe: Appl. Phys. Lett.,62 (1993) 435
5) M.Fujimura, K.Kintaka, T.Suhara, and H.Nishihara: J. Lightwave Tech., 11 (1993) 1360
6) C.J. van der Poel, J.D.Bierlein, and J.B.Brown: Appl. Phys. Lett., 57 (1990)2074
7) K.Yamamoto, K.Mizuuchi,K.Takeshige, Y.Sasai, and T.Taniuchi:J.Appl.Phys 70(1991)1947
8) K.Mizuuchi and K.Yamamoto: Appl.Phys.Lett.,59(1991)1538

9) K.Yamamoto and T.Taniuchi: J.Appl.Phys., 70(1991)6663
10) 山本和久:レーザー研究, 21 (1993) 1089
11) K.Mizuuchi, K.Yamamoto and H.Sato: J.Appl.Phys., 75 (1994) 1311
12) K.Yamamoto and K.Mizuuchi: IEEE Photon. Technol. Lett. 4 (1992)435
13) H.D.Edmonds and A.W.Smith: IEEE J. Quantum Electron, QE-6 (1970) 356
14) K.Yamamoto, K.Mizuuchi, Y.Kitaoka, and M.Kato: Appl.Phys.Lett. 62 (1993) 2599
15) 水内公典、山本和久、加藤誠、佐藤久直:第53会応用物理学会学術講演会18a-x-7(1992)