輻射科学研究会資料
RS 94-2

辺要素混合使用による三次元導波路不連続問題の有限要素法解析

野村　美徳,　　辻　幹男,　　繁沢　宏
（同志社大学　工学部電子工学科）

1994 年　5 月　13 日　（金）

1 まえがき

最近、3次元電磁界の伝達問題の解法としてベクトル有限要素法が注目されているが、電界または磁界の3成分すべてを隣接要素間で連続として各々の成分を従来のスカラ形状関数を使って展開する方法（ベクトル化スカラ形状関数を用いる方法）を用いると、解析によって得られる応答界の分布にスプリアスモードの影響が必ず含まれ、3次元電磁界の伝達問題を正確に解くことが困難となる。このような3次元伝達問題有限要素法におけるスプリアス応答の除去法として、最初に提案されたのは、ベクトル化スカラ形状関数とペナルティ法を併用する手法である[1][2]。ペナルティ法はスプリアスモードが$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$または$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$を満足していないことに着目しこの条件を電界または磁界の3成分を用いた変分表現式に補助的に組み込む方法で、もともと導波路や3次元共振器の固有値問題のソルバーとして開発された。しかし、ペナルティ法を3次元伝達問題に適用すると概ね安定した応答界分布を得ることができても、変分表現式の修正が原因となって求めるべき物理量の精度は劣化することが報告されている[2]。また、ベクトル化スカラ形状関数を用いている限り導体くさびの角点が持つ界の特異性を適切に表現できないため導体くさびを含む一般的な導波路不連続問題には適用できない[3]。

一方、このようなベクトル有限要素法におけるスプリアス解の発生は形状関数のつくる関数空間が適切でないことに起因するのではないかという発想から、従来とはかなり異なる形状関数（ベクトル形状関数）を用いた辺要素[3]-[6]、接線要素[7]-[9]、共変要素[10][11]などのベクトル要素が開発され、電磁界固有値問題や静磁界解析に適用された。これらの要素はいずれも隣接要素間の界の接線方向成分のみが連続となるように構成されており、これらの要素を用いることにより要素の境界面で電磁界が満足すべき境界条件を容易に課すことができる。また、スプリアス解が発生しない妥当な要素の多くはこのようなベクトル要素のようである。なかでも一次辺要素[3][4][6][9]は、3次元伝達問題にも適用され、その妥当性が示されている[3][12]。前述のペナルティ法は$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$または$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$の条件を解析領域全体にわたって最小自乗法的に満足させる方法であったのに対し、一次辺要素を用いる方法は要素内でこの条件を満足するように形状関数を構成しスプリアス解を除去しようとするものである。現在3次元伝達問題に適用された実績のある一次辺要素は四面体[12]か直方体[3]に限られている。しかし、直方体要素は一般性に欠けるため任意の構造を有する不連続には適用できない欠点がある。一方、四面体要素の場合には任意の境界形状を近似できるが、対称性に欠けるので、不連続部の形状によっては、必要以上に要素分割数が多くなり計算機容量を圧迫する。このような場合、基本的には直方体要素を用い、直方体要素に適合しない境界部分は四面体要素を用いれば、効率的な要素分割が行えることになるが、直方体辺要素と四面体辺要素は互いに結合することができず、混合使用が不可能となっている。

以上の問題点を踏まえ、本論文では三角柱辺要素を用いたベクトル有限要素法を提案し、その3次元導波路不連続問題への適用について述べる。直方体辺要素や四面体辺要素と同様、三角柱辺要素の未知変数は、辺方向の界成分とし、また要素内で$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$または$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$の条件を満足するように形状関数を定義する。三角柱ベクトル要素としては、先に羽野が接線方向成分を未知変数とした要素を提案しているが[13]、これは上記の辺要素と結合することはできない。それに対して本論文の三角柱辺要素は、直方体辺要素あるいは四面体辺要素と結合できるので、これらを混合して使用することにより効率的な要素分割が可能となる。以下では三角柱辺要素を用いたベクトル有限要素法とその適用例について述べ、本法の有効性を明らかにしていく。

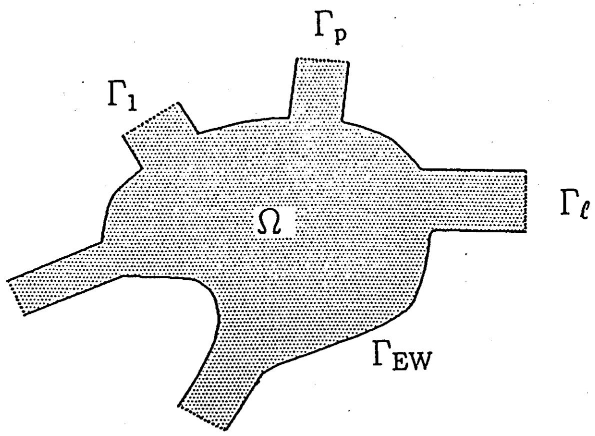


図1　3次元導波管不連続問題
Fig.1 Three-dimensional waveguide-discontinuity problem.

2　3次元導波管不連続問題に対する定式化

3次元電磁導波路不連続問題は不連続部の電磁界分布や回路定数を求めることに帰着するから、電磁界分布、回路定数を一度に計算できる定式化が望ましい。文献(2)(3)では電磁界分布を先に計算し半無限長一様導波路と接続される不連続部開口面の電磁界分布を用いて透過係数、反射係数を定めている。また、文献(12)ではインピーダンス行列（またはアドミタンス行列）を直接計算できる定式化を行っている。本論文ではガラーキン法に基づいて電磁界分布と透過係数、反射係数を一度に算出する定式化[14]を採用する。以下では3次元導波管不連続問題に限って述べるが、周囲が遮蔽されていれば同軸線路やフィンラインなどの不連続問題にも同じ考え方が適用できる。

図1に示すようなp個の半無限長導波管が接続された3次元導波管不連続問題において、不連続部は境界Γによって囲まれた内部領域Ωで表され、Γは導波管開口面$\Gamma_\ell(\ell = 1, ..., \mathrm{p})$および電気壁との境界$\Gamma_{EW}$から成っているとする。なお、解析する不連続領域に対称性がある場合には、対称面を等価的に電気壁境界Γ_{EW}または磁気壁境界Γ_{MW}として扱い、境界Γに含めて考える。このとき領域Ωにおける電界$\boldsymbol{E}$に対する支配方程式は、

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} - k_0^2 \epsilon_r \boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

となる。ただし$k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$は自由空間中の波数、$\omega$は角周波数、$\epsilon_0$、$\mu_0$はそれぞれ自由空間中の誘電率、透磁率であり、また$\epsilon_r$、$\mu_r$はそれぞれ$\Omega$内の比誘電率、比透磁率である。

領域Ωを$\mathrm{N_e}(\mathrm{N_e} = 6, 9, 12)$個の辺を有する辺要素を用いて分割し、各々の要素の内部領域をΩ_e、境界をΓ_eとする。いま要素内で定義されるベクトル形状関数$\boldsymbol{N}_i(i = 1, ..., \mathrm{N_e})$を式(1)に乗じ、解析領域全体にわたって体積積分を行うと、

$$\sum_e \iiint_{\Omega_e} \{(\nabla \times \boldsymbol{N}_i) \cdot (\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}) - k_0^2 \boldsymbol{N}_i \cdot \epsilon_r \boldsymbol{E}\} d\Omega_e$$
$$= -\sum_e \iint_{\Gamma_e} \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{n} \times \mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} d\Gamma_e \tag{2}$$

となる。ここで$\boldsymbol{n}$は境界Γ_eに立てた法線方向の単位ベクトル、$\sum_e$は要素についての和を表す。隣接する任意の要素a、要素bにおける媒質の比透磁率をμ_{ra}、μ_{rb}とし、共有する境界面のaからbに向かう法線方向単位ベクトルを$\boldsymbol{n}_{ab}$としたとき、各々の要素内の電界$\boldsymbol{E}_a$、$\boldsymbol{E}_b$、は境界面上で、

$$\boldsymbol{n}_{ab} \times \boldsymbol{E}_a = \boldsymbol{n}_{ab} \times \boldsymbol{E}_b \tag{3}$$

$$\boldsymbol{n}_{ab} \times \mu_{ra}^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}_a = \boldsymbol{n}_{ab} \times \mu_{rb}^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}_b \tag{4}$$

を満足するから、式(3)、式(4)を考慮すれば式(2)は、

$$\sum_e \iiint_{\Omega_e} \{(\nabla \times \boldsymbol{N}_i) \cdot (\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}) - k_0^2 \boldsymbol{N}_i \cdot \epsilon_r \boldsymbol{E}\} d\Omega_e$$
$$= - \iint_\Gamma \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{n} \times \mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} d\Gamma \tag{5}$$

となる。ただし、式(2)から式(5)への過程において、ベクトル形状関数$\boldsymbol{N}_i$には、隣接する2つの要素の境界面における接線方向成分の連続性が要求されることに注意する必要がある。

次に境界Γにおいて、電気壁境界Γ_{EW}上では、

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{6}$$

磁気壁境界Γ_{MW}上では、

$$\boldsymbol{n} \times \mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{7}$$

またℓ番目の導波管開口面Γ_ℓ上では、

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(x^\ell, y^\ell, 0) = \sum_m \sum_n (a_{\ell mn} + b_{\ell mn}) \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}_{\ell mn}$$
$$+ \sum_m \sum_n (c_{\ell mn} - d_{\ell mn}) \boldsymbol{n} \times \bar{\boldsymbol{e}}_{\ell mn} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{n} \times \mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}(x^\ell, y^\ell, 0) = j\omega\mu_0 \sum_m \sum_n (a_{\ell mn} - b_{\ell mn}) \boldsymbol{h}_{\ell mn} \times \boldsymbol{n}$$
$$+ j\omega\mu_0 \sum_m \sum_n (c_{\ell mn} + d_{\ell mn}) \bar{\boldsymbol{h}}_{\ell mn} \times \boldsymbol{n} \tag{9}$$

が成立する。ただし(x^ℓ, y^ℓ, z^ℓ)はℓ番目の導波管に属する局所座標系であり、$z^\ell = 0$は開口面を意味する。$a_{\ell mn}$、$b_{\ell mn}$はTE$_{mn}$モード、$c_{\ell mn}$、$d_{\ell mn}$はTM$_{mn}$モードのそれぞれ開口$\ell(\ell = 1, ..., \mathrm{p})$における反射波(ルート電力波)、入射波複素振幅である。$\boldsymbol{e}_{\ell mn}$、$\bar{\boldsymbol{e}}_{\ell mn}$は$\Gamma_\ell$上のTE$_{mn}$モード、TM$_{mn}$モードに対応する固有モード電界ベクトルであり、$\boldsymbol{h}_{\ell mn}$、$\bar{\boldsymbol{h}}_{\ell mn}$は各モードの磁界ベクトルである。TE$_{mn}$モード、TM$_{mn}$モードの特性界インピーダンスを$Z_{\ell mn}^H$、$Z_{\ell mn}^E$とすると、

$$\boldsymbol{e}_{\ell mn} = Z_{\ell mn}^H \boldsymbol{h}_{\ell mn} \times \boldsymbol{n} \tag{10}$$
$$\bar{\boldsymbol{e}}_{\ell mn} = Z_{\ell mn}^E \bar{\boldsymbol{h}}_{\ell mn} \times \boldsymbol{n} \tag{11}$$

なる関係がある。また、固有モードベクトルの規格化は次式にて行う。

$$\iint_{\Gamma_\ell}(e_{\ell m'n'}\times h^*_{\ell mn})\cdot n d\Gamma=\frac{Z^H_{\ell mn}}{|Z^H_{\ell mn}|}\delta_{m'm}\delta_{n'n} \tag{12}$$

$$\iint_{\Gamma_\ell}(\bar{e}_{\ell m'n'}\times \bar{h}^*_{\ell mn})\cdot n d\Gamma=\frac{Z^E_{\ell mn}}{|Z^E_{\ell mn}|}\delta_{m'm}\delta_{n'n} \tag{13}$$

ただし、*は複素共役を意味する。式(7)、(9)を考慮すれば式(5)は

$$\begin{aligned}
&\sum_e \iiint_{\Omega_e}\{(\nabla\times N_i)\cdot(\mu_r^{-1}\nabla\times E)-k_0^2 N_i\cdot\epsilon_r E\}d\Omega_e \\
&\quad= -j\omega\mu_0\sum_{\ell=1}^{P}\sum_m\sum_n(a_{\ell mn}-b_{\ell mn})\frac{1}{Z^H_{\ell mn}}\iint_{\Gamma_\ell}N_i\cdot e_{\ell mn}(x^\ell,y^\ell)d\Gamma \\
&\quad\quad -j\omega\mu_0\sum_{\ell=1}^{P}\sum_m\sum_n(c_{\ell mn}+d_{\ell mn})\frac{1}{Z^E_{\ell mn}}\iint_{\Gamma_\ell}N_i\cdot \bar{e}_{\ell mn}(x^\ell,y^\ell)d\Gamma \\
&\quad\quad\quad -\iint_{\Gamma_{EW}}N_i\cdot n\times\mu_r^{-1}\nabla\times E d\Gamma
\end{aligned} \tag{14}$$

となる。

次に式(8)を用いれば、$E_t(x^\ell,y^\ell,0)=n\times E(x^\ell,y^\ell,0)\times n$ に対して、

$$\frac{1}{Z^H_{\ell mn}}\iint_{\Gamma_\ell}E_t\cdot e^*_{\ell mn}d\Gamma=(a_{\ell mn}+b_{\ell mn})\frac{|Z^H_{\ell mn}|}{Z^H_{\ell mn}} \tag{15}$$

$$\frac{1}{Z^E_{\ell mn}}\iint_{\Gamma_\ell}E_t\cdot \bar{e}^*_{\ell mn}d\Gamma=(c_{\ell mn}-d_{\ell mn})\frac{|Z^E_{\ell mn}|}{Z^E_{\ell mn}} \tag{16}$$

が成立する。いま、未知電界分布Eをベクトル形状関数N_jを用いて

$$E=\sum_j E_j N_j \tag{17}$$

と展開することにする。このとき式(3)より隣接する要素の接合面で$n\times N_i$が連続となるようにベクトル形状関数を選ばなければならないことは、先に述べたことと同様である。また展開係数E_jは辺jに沿う方向の電界成分となるようにする。このことは次章にて述べる。式(17)を式(14)、(15)、(16)に代入し、行列方程式をつくると、2開口回路(p=2)の場合、

$$\begin{pmatrix}
[P]_{11} & [P]_{10} & [P]_{12} & [Q^H]_1^T & [Q^E]_1^T & [0] & [0] \\
[P]_{01} & [P]_{00} & [P]_{02} & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[P]_{21} & [P]_{20} & [P]_{22} & [0] & [0] & [Q^H]_2^T & [Q^E]_2^T \\
[Q^H]_1 & [0] & [0] & [I^H]_1 & [0] & [0] & [0] \\
[Q^E]_1 & [0] & [0] & [0] & [I^E]_1 & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [Q^H]_2 & [0] & [0] & [I^H]_1 & [0] \\
[0] & [0] & [Q^E]_2 & [0] & [0] & [0] & [I^E]_1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\{E\}_1\\ \{E\}_0\\ \{E\}_2\\ \{a\}_1\\ \{c\}_1\\ \{a\}_2\\ \{c\}_2\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}
[Q^H]_1^T & -[Q^E]_1^T & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [Q^H]_2^T & -[Q^E]_2^T \\
-[I^H]_1 & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [I^E]_1 & [0] & [0] \\
[0] & [0] & -[I^H]_2 & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [I^E]_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\{b\}_1\\ \{d\}_1\\ \{b\}_2\\ \{d\}_2\end{pmatrix} \tag{18}$$

となる。ただし、式(6)よりΓ_{EW}の電界成分に関する方程式は除外してある。$\{E\}_1$、$\{E\}_2$は開口1、2の面内節点電界成分よりなる列ベクトル、$\{E\}_0$はそれ以外の節点電界成分よりなる列ベクトル、$\{b\}_\ell$、$\{d\}_\ell$は開口$\ell(\ell=1,2)$のTE、TMモードの入射波複素振幅、$\{a\}_\ell$、$\{c\}_\ell$は開口$\ell(\ell=1,2)$のTE、TMモードの反射波複素振幅よりなる列ベクトルである。また、$[\,P\,]_{11}\ldots[\,P\,]_{22}$は

$$P_{ij}=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\sum_{e}\iiint_{\Omega_e}\{(\nabla\times N_i)\cdot(\mu_r^{-1}\nabla\times N_j)-k_0^2N_i\cdot\epsilon_r N_j\}d\Omega_e \tag{19}$$

で与えられる要素を有する行列$[\,P\,]$の小行列であり、$[Q^H]_\ell$、$[Q^E]_\ell(\ell=1,2)$は式(15)、(16)の左辺に対応する行列、$[I^H]_\ell$、$[I^E]_\ell(\ell=1,2)$は対角要素が-1か$-j$の対角行列である。なお、Tは転置を表す。

式(18)を解けば、一度に不連続部の電界分布、散乱行列（透過係数、反射係数）を得ることができる。

また、磁界Hに関しても上記と同様の定式化が可能である。

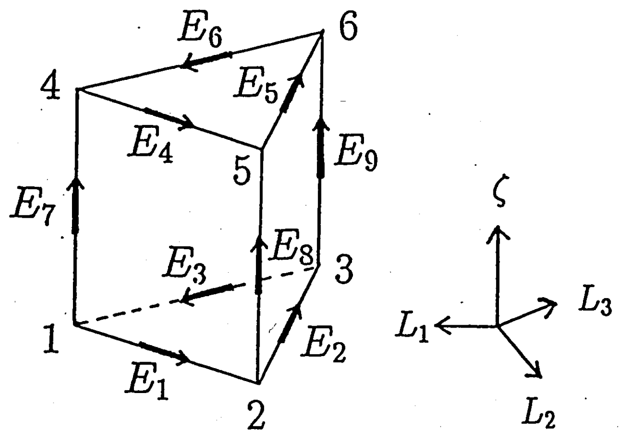


図2　三角柱辺要素と界成分

Fig.2 Triangular-prism edge element and its degrees of freedom.

3　辺要素とその混合使用

前章の定式化から各要素ごとに定義されるベクトル形状関数は隣接する要素間で接線方向成分が連続でなければならない。また、スプリアスモードを除去するために要素内の界分布Eは$\nabla\cdot E=0$を満足するように区分多項式で展開しなければならない。このような条件を満足するベクトル形状関数は、一次辺要素を構成することにより実現できる。しかしこのような辺要素のなかで3次元伝達問題に適用され、その妥当性が確認されているのは直方体[3]と四面体[12]のみであり、三角柱辺要素を用いた研究はみられない。そこでまず三角柱辺要素の構成法について述べその特徴を明らかにする。

図2に示す三角柱要素において、辺に沿う方向の界成分$E_i(i=1,...,9)$とそれに対応するベクトル形状関数N_iを定義し、要素内の界分布Eを、

$$E=\sum_{j=1}^{9}E_jN_j \tag{20}$$

のように表すことを考える。このとき$N_i(i=1,...,9)$は次のように構成すればよい。

$$\begin{aligned}
N_i &= b_i(N_{i1}\nabla L_{i2}-N_{i2}\nabla L_{i1}) && (i=1,2,3)\\
N_i &= b_i(N_{i1}\nabla L_{i2-3}-N_{i2}\nabla L_{i1-3}) && (i=4,5,6)\\
N_i &= \frac{b_i}{2}(N_{i1}+N_{i2})\nabla\zeta && (i=7,8,9)
\end{aligned} \tag{21}$$

ここで、ζは高さ方向の局所座標変数、$L_i(i=1,2,3)$は三角形面内の面積座標変数である。また、b_iは辺iの長さ、i_1、i_2は辺iの始点と終点の頂点番号である。$N_i(i=1,...,6)$は

$$\begin{aligned}
N_1&=\frac{1}{2}L_1(1-\zeta) & N_4&=\frac{1}{2}L_1(1+\zeta)\\
N_2&=\frac{1}{2}L_2(1-\zeta) & N_5&=\frac{1}{2}L_2(1+\zeta)\\
N_3&=\frac{1}{2}L_3(1-\zeta) & N_6&=\frac{1}{2}L_3(1+\zeta)
\end{aligned} \tag{22}$$

で表される一次ラグランジュ三角柱要素のスカラ形状関数である。

次に式(21)で定義したベクトル形状関数が本章のはじめで述べた条件を満足することを確かめる。a_iを辺iの接線方向単位ベクトルとする（例えば頂点1から頂点2に向かう単位ベクトルをa_1とする）と要素のすべてのベクトル形状関数N_jは辺i上で

$$a_i\cdot N_j=\delta_{ij} \tag{23}$$

を満たす。したがって、辺i上では

$$a_i\cdot E=\sum_{j=1}^{9}E_ja_i\cdot N_j=E_i \tag{24}$$

が成立し、展開係数E_iは辺iに沿う方向の界成分と一致する。

ベクトル形状関数N_iの発散をとると

$$\nabla\cdot N_i=0 \tag{25}$$

となり、要素内の界分布は$\nabla \cdot E = 0$を満足することが分かる。また式(21)で定義したベクトル形状関数は隣接要素間の接合面で接線方向成分が連続であり、ベクトル形状関数に必要な条件を満足する。

三角柱辺要素の一つの注目すべき特徴は他の一次辺要素（直方体要素や四面体要素）との結合が可能なことである。一般に異なる種類の要素の結合を考えたとき、単に結合面の形状が一致しているのみならず、結合面で界分布も整合がとれていなければならない。電界や磁界を用いた解析では、界の接線方向成分が連続であるという境界条件（式(4)）が結合面上のあらゆる点で満足されているときに限り結合が可能となる。三角柱辺要素の場合境界面上の接線方向界分布は面の周回に定義された展開係数（辺方向界成分）を用いて一義的に表しており、その形状関数は面上の局所直角座標の不完全一次多項式である。これは直方体辺要素や四面体辺要素にも共通する性質であり、したがって図3において、三角柱辺要素と四面体辺要素は三角形面を介して結合できる。このとき2要素間で結合面上の展開係数を一致させれば($E_1 = E_1'', E_2 = E_2'', E_3 = E_3''$)前述の接線方向成分の連続性は面上いたるところで満足することができる。三角柱辺要素と直方体辺要素の結合も同様に長方形面を介して行える（ただし$E_1 = E_1', E_4 = E_4', E_7 = E_7', E_8 = E_8'$)。

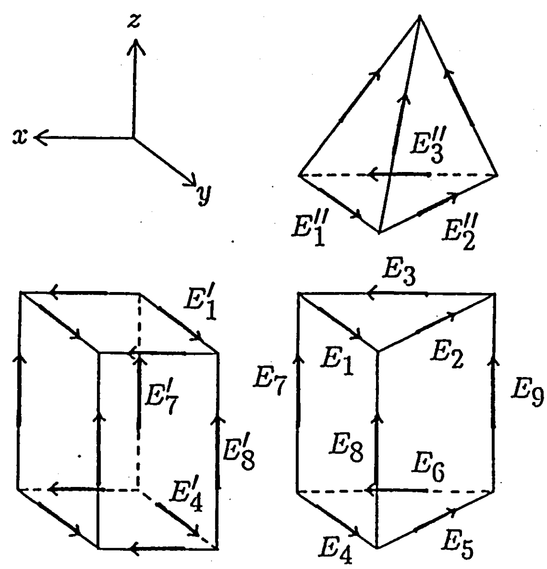


図3　相異なる辺要素の結合方法

Fig.3 Connection between two different edge elements.

4　数値解析例および検討

前述の解析法の妥当性を確かめるために、まず図4に示す誘電体装荷導波管フィルタを考える。導波管の寸法は 2b×b である。解析領域は系の対称性を考慮して全体の 1/4 を考え、三角柱辺要素を用いて分割する。基準参照面は誘電体散乱物体より距離 d = 0.8b だけ離れた断面に選ぶ。このとき回路の反射係数 S_{11} の大きさの周波数特性の計算結果を図5に示す（実線）。図5には H. Katzier のモード整合法による計算結果[15]も併せて示してある（破線）。2通りの解析法の解析結果はよく一致しており、三角柱辺要素を用いたベクトル有限要素法を3次元伝達問題に適用すれば、他の一次辺要素と同様にスプリアス解の発生しないことが検証された。なおこの回路に導体くさびは存在しないが、そのような不連続部の解析も難なく行える。

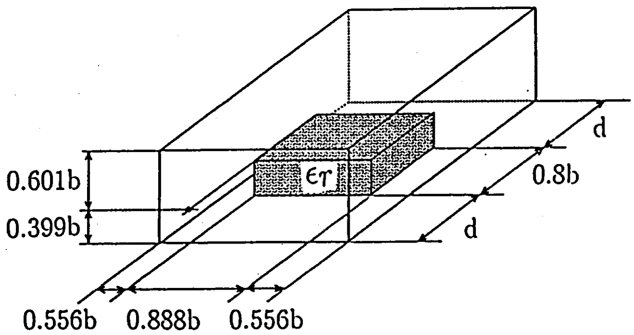


図4　誘電体装荷導波管フィルタ（$\epsilon_r = 6$）
Fig.4 Dielectric-loaded waveguide filter.

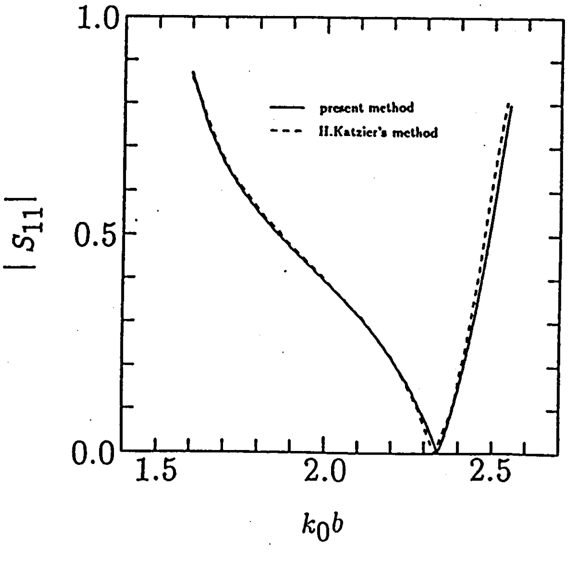


図5　誘電体装荷導波管フィルタの反射係数周波数特性（実線：三角柱辺要素、破線：H. Katzier [15]）
Fig.5 Characteristics of the reflection coefficient of the filter shown in Fig.4, as a function of the normalized frequency (solid line: calculated with triangular-prism edge elements, dashed line: calculated by H. Katzier[15]).

次に、本研究の主題である三角柱辺要素と他の一次辺要素を併用した要素分割による3次元導波路不連続問題の解析について述べる。

解析例として図6に示す方形アイリス結合円形導波管フィルタを取り上げる。解析領域は系の対称性を考慮して全体の1/8とし、2種類の辺要素（三角柱、直方体[3]）を混合して分割する。入力側の方形導波管と方形アイリスの部分は直方体辺要素を用いて近似良く境界形状を表現できるが、円形導波管の部分は直方体辺要素による境界近似が困難となるので、三角柱辺要素を併用した要素分割が必要である。図7に断面内の要素分割の様子を示す。このとき透過係数S_{21}の大きさの周波数特性の計算結果を図8に示す。R. Kellerらのモード整合法による結果[16]とほぼ一致していることがわかる。以上述べた混合要素分割に基づく解析方法を（A）とする。

次に（A）と他の単一要素による要素分割に基づく方法とを比較する。つまり、同じ解析領域を、三角柱辺要素のみ、四面体辺要素[5]のみ、または一般六面体辺要素[10]のみで要素分割する。このときそれぞれの方法を順に（B）、（C）、（D）とする。（B）の場合は（A）における直方体要素1個を三角柱要素2個に置き換え、（C）の場合は（B）における三角柱要素1個を四面体要素3個に置き換え、（D）の場合は（A）における三角柱要素2個を一

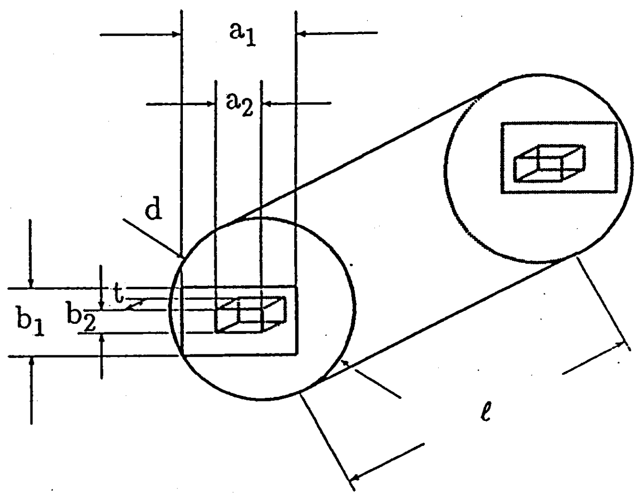
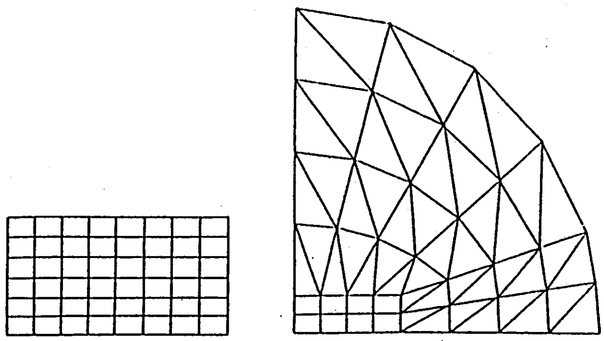


図6　方形アイリス結合円形導波管フィルタ（d=26.5 mm, ℓ=45 mm, a_1= 19.05 mm, b_1= 9.52 mm, a_2= 9.3 mm, b_2= 3 mm, t= 1 mm）
Fig.6 Rectangular-iris coupled circular-waveguide filter.



(a) Input waveguide. (b) Circular waveguide.

図 7　断面内の要素分割
Fig.7 Division of the transverse plane into the elements

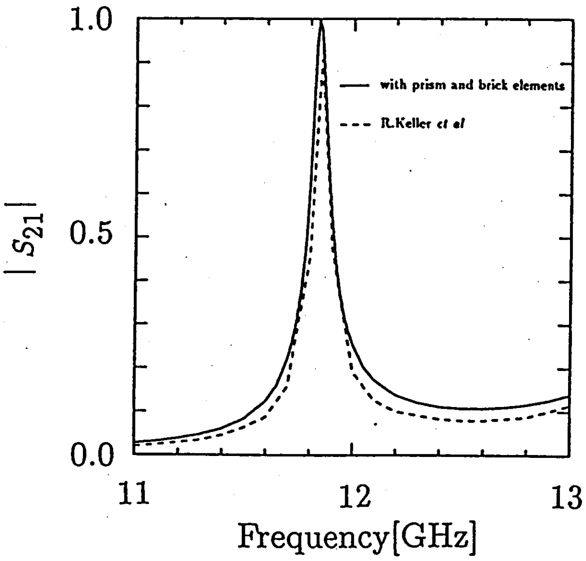
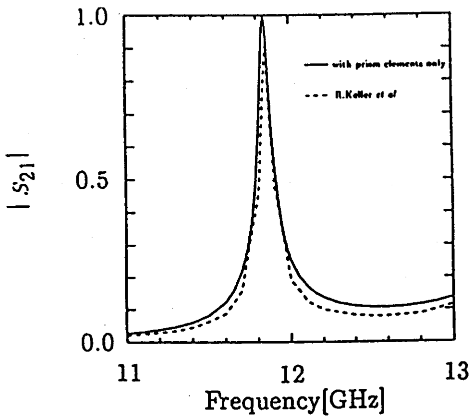
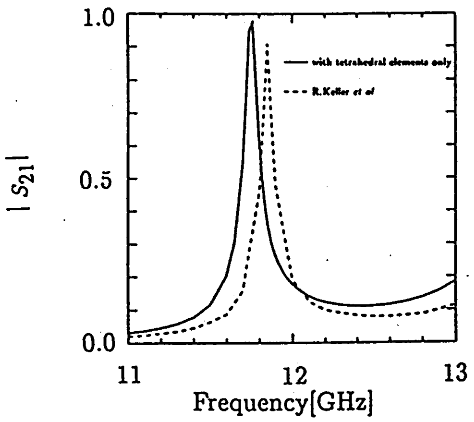


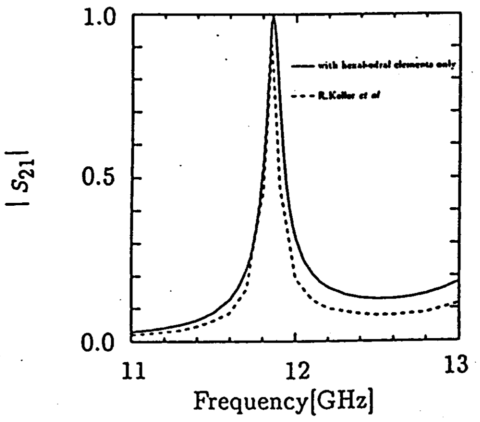
図 8　方形アイリス結合円形導波管フィルタの透過係数周波数特性（実線：本法、破線：R. Keller *et al* (16)）
Fig.8 Characteristics of the transmission coefficient of the filter shown in Fig.6, as a function of the frequency (solid line: calculated by present method, dashed line: calculated by R. Keller *et al* (16)).



(a) Triangular prism elements.



(b) Tetrahedral elements.



(c) Hexahedral elements.

図9　各種要素分割法による図6の回路の透過特性（破線はR. Kellerらの結果）

Fig.9 Comparison of the transmission characteristics of the filter shown in Fig.6, when different types of the edge element are used (dashed line by R. Keller *et al*).

表1　各種要素分割に対する要素数と未知節点数

	混合	三角柱	四面体	六面体
要素数	3440	5296	15888	2618
未知節点数	7948	9812	17536	7156

般六面体要素1個に置き換えることによって解析する。このような方法をとるのは（A）から（D）までの解析方法間の領域形状の近似をできるだけ一致させて電界分布の近似の差のみを浮かび上がらせたいからである。各種の要素分割に対する要素数と未知節点数（辺の数）を表1に示す。このとき（B）、（C）、（D）の方法で計算したときの結果を図9に示す。（B）の方法による解析結果は、（A）の混合要素分割法の解析結果とよく一致しており、三角柱辺要素を直方体で置換した影響は見られない。それに対し、（C）の方法による解析結果は、共振周波数の位置などにおいて、（A）、（B）や R. Keller らの結果との間にかなりの差異がみられる。三角柱辺要素や直方体辺要素と比べると四面体辺要素は界分布を低次の項のみからなる区分多項式で表現するため精度が悪くなっていると考える。（D）の方法による解析結果は（A）、（B）や R. Keller らの結果と概ね一致しているが、高周波側でやや異なっている。六面体辺要素は直方体辺要素の拡張型であり、直方体に限れば要素内で$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$を恒等的に満足する。しかし、円形導波管部分を占める要素の形状は直方体ではないからこの場合要素内で$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$を満足する保証はない。それに対し（A）や（B）の解析方法ではすべての要素内部で$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$の条件が厳密に満足されており、この違いが（D）と（A）、（B）で異なった解析結果を得る要因になっているのではないかと思われる。

また表1より、要素数と未知節点数は混合要素分割による（A）の場合、一般六面体辺要素による（D）の場合より若干多くなっているが、$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$を満足する辺要素を単独で用いる（B）、（C）の場合より大幅に減少していることが分かる。つまり辺要素を混合使用して要素分割を行うことにより、解析精度を下げず連立方程式の次数のみを下げることが可能である。このことは、とりわけ大次元の連立方程式を解かなければならない3次元導波路不連続問題に対して、本論文の方法が有効であることを示している。

5　むすび

3次元伝達問題の解析法として辺要素の混合使用による有限要素法を提案し、3次元導波管不連続問題に対する定式化を行った。また数値解析例から、本論文で提案した解析法は、スプリアス解の除去に対して有効であるとともに、要素分割の高効率化によって最終的に解くべき行列方程式のマトリクスサイズを大幅に低減できることを示した。以上より本法の3次元伝達問題への適用が有効であることを明らかにした。なお本研究の一部は平成6年度文部省科学研究費補助金（課題番号 06650431 ）によって行った。

文献

(1) Picon O. :"Three-dimensional finite-element formulation for deterministic waveguide problems," Microwave Opt. Technol. Lett., **1**, pp.170-172 (July, 1988).
(2) Ise K. , Inoue K. , and Koshiba M. :"Three-dimensional finite-element solution of dielecric scattering obstacles in a rectangular waveguide," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech, **38**, 9, pp.1352-1359 (Sept., 1990).
(3) Ise K. , Inoue K. , and Koshiba M. :"Three-dimensional finite-element method with edge elements for electromagnetic waveguide discontinuities," IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., **39**, 8, pp.1289-1295 (Aug., 1991).
(4) Nedelec J. C. :"Mixed finte elements in R^3," Numer. Math., **35**, pp.315-341 (1980).
(5) Barton M. L. and Cendes Z. J. : "New vector finite elements for three-dimensional magnetic field computation," J. Appl. Phys., **61**, 8, pp.3919-3921 (Apr., 1987).
(6) Bossavit A. :"Whitney forms: a class of finte elements for three-dimensional computation in electromagnetism," IEE Proc., **135**, A, 6, pp.493-500 (July, 1988).
(7) Mur G and de Hoop A. T. :"A finite-element method for computing three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media," IEEE Trans.Magn., **MAG-21**, 6, pp.2188-2191 (Nov., 1985).
(8) 松原正則, アンケーオ·タップティム："ベクトル形状関数を用いた3次元電磁界問題の有限要素解析,"信学論(C), **J-71-C**, 1, pp.160-161 (Jan., 1988).
(9) 羽野光夫："励振された電磁界の有限要素法解析,"電学会電磁界理論研資, **EMT-88-15**, pp135-144 (Feb., 1988).
(10) van Welij J. S. :"Calculation of eddy currents in terms of H on hexahedra," IEEE Trans.Magn., **MAG-21**, 6, pp.2239-2241 (Nov., 1985).
(11) Crowley C. W. , Silvester P. P. , and Hurwitz Jr H. : "Covariant projection elements for 3D vector field problems," IEEE Trans.Magn., **24**, 1, pp.397-400 (Jan., 1988).
(12) Wong M. F. , Picon O. , and Hanna V. F. :"Three dimensional finite element analysis of N-port waveguide junctions using edge-elements," IEEE MTT-S Microwave Symposium Digest, pp.417-420 (June,1992).
(13) 羽野光夫："ベクトル要素による3次元電磁界の有限要素法解析,"電学会電磁界理論研資, EMT-88-99, pp95-104 (Oct., 1988).
(14) 丸田章博, 松原正則："伝達問題の有限要素法解析－ガレルキン法による界の接続－,"信学論(C), J72-C-I, 10, pp.577-582 (Oct., 1989).
(15) Katzier H. :"Streuverhalten elektromagnetisher Wellen bei sprunghaften Übergängen geschirm-

ter dielektrischer Leitungen," Arch. Elek. Übertragung., 38, pp.290-296 (1984).
(16) Keller R. and Arndt F. :"Rigorous modal analysis of the asymmetric rectangular iris in circular waveguides," IEEE Microwave Guided Wave Lett., 3, 6, pp.185-187 (June, 1993).

輻射科学研究会資料（RS94-3）

多重反射形偏向器と導波形 CO_2 アレイレーザを組み合わせた $10.6\mu m$ 帯光の偏向

中村 好二
(奈良工業高等専門学校専攻科)
松島 朋史
(奈良工業高等専門学校電気工学科)
末田 正
(摂南大学工学部電気工学科)

1994年5月13日
(於 同志社大学)

目次

1 はしがき

CO_2レーザから放出される 10.6μm 帯のレーザ光は、大気中の透過度が極めて良いことから、レーザレーダ等に応用される。このような応用に際して、光ビームを偏向する装置がしばしば要求される。しかし、10.6μm 帯において、電気光学結晶を用いてレーザ光の偏向を行う場合、非常に高い電圧が必要となる。この問題を解決する装置の一つに多重反射形偏向器がある。この偏向器は、アレイ状の光ビーム間の位相差を変化させることにより、ファーフィールドでの光ビームを偏向することができる。この場合、偏向に必要な各光ビーム間の位相差は最大 2πでよく、小電力で偏向が行える点に特徴を持っている。しかし、その反面、複数のグレイティンググローブが生じるという特性も持っている。このため、レーザレーダに用いる場合、走査範囲は隣接するグレイティンググローブ間に制限される。又、この偏向器は、光ビームをミラー間で多重反射させるため、ミラー面での反射の際に各光ビームパターンおよび光強度の不均一性が生じ安い点がある。これは回折光ビームパターンの崩れの原因ともなる。前者の制限を取り除く方法の一つとして、2 波長の光波を利用して、グレイティンググローブ間隔以上に走査範囲を拡大する方法を提案してきた [1]。

ここでは、後者の問題点を取り除くため、この偏向器と導波形 CO_2アレイレーザ（以下アレイレーザ）を組み合わせた偏向方式 [2] について述べる。この方式は、アレイ状に配置された個々のレーザに偏向器からのビームを入射し、フェイズロックを行う。これにより、偏向器で作成された位相情報だけをアレイレーザに与え、出力は導波形 CO_2アレイレーザから放出される。この方法では、光ビームが多重反射形偏向器から直接放出される場合に比べ、高出力で波形の良好な光ビームの偏向を実現する事が期待できる。

2 多重反射形偏向器

2.1 多重反射形偏向器の動作原理

多重反射形偏向器は、図1に示すように、2枚のミラー間に電気光学結晶を挿入する方式と、PZTによりミラーを動かす方式がある。電気光学結晶を用いた場合、高速偏向が可能であるが、今回の研究では動作確認のためPZTを用いた方式を採用した。

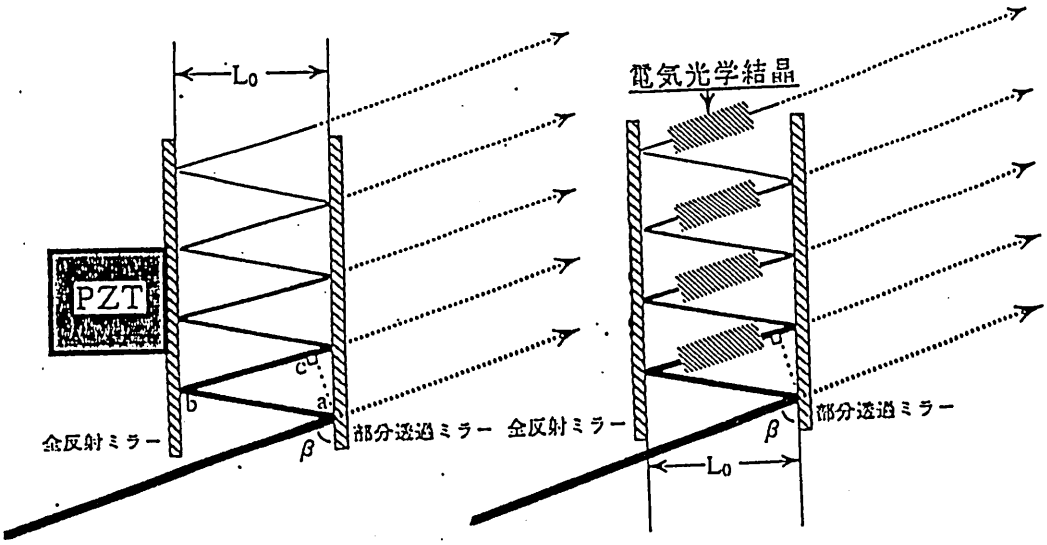


図 1: 多重反射形偏向器の構造

この偏向器は、2枚のミラーを間隔Lで平行に配置した構成になっている。ミラーは、片方が全反射ミラー、そしてもう片方が部分透過ミラーである。

ビームが2枚のミラー間に斜めに入射すると、ミラー間で多重反射する。その結果、部分透過ミラーから平行なビームが多重反射の回数分出力される。このとき、各透過光間の光路長差は、

$$\begin{aligned} \delta L &= ab + bc \\ &= 2L_0 \cos\beta \end{aligned} \tag{1}$$

である。ゆえに、各透過光ビーム間には、

$$\delta = \frac{2\pi\delta L}{\lambda} \tag{2}$$

の位相差が生じる。この位相差は、ミラー間隔 L に比例する。又、ファーフィールドにおける回折光ビームのパターンは、次式で表される。

$$
\begin{aligned}
I(x_2) &= \frac{2}{\pi}\frac{t^2 A}{l^2}\frac{(R\pi\omega)^2}{(\pi\omega^2)^2+(\lambda R)^2}\frac{(1-r^N)^2+4r^N\sin^2\{\frac{N}{2}(\delta-\frac{2\pi d x^2}{\lambda z_2})\}}{(1-r)^2+4r\sin^2\{\frac{1}{2}(\delta-\frac{2\pi d x^2}{\lambda z_2})\}} \\
&\quad \times exp\ -[\frac{2(R\pi\omega)^2}{(\pi\omega^2)^2+(\lambda R)^2}(\frac{x_2}{z_2})^2] \qquad (3)
\end{aligned}
$$

この式から、回折光ビームは、δにより変化する。故に、圧電素子によりミラー間隔を変化させれば、各透過光ビーム間の位相差を変化させ、フラウンフォーファ回折光ビームを偏向することができる。電気光学結晶を用いる場合は、結晶に印可する電圧を変化させることで、透過光間の位相差を変化させる。

2.2 多重反射形偏向器の指向特性

ここでは、この偏向器を動作させた時の回折像を計算により求める。
基本ガウス形開口の場合、基本ガウシアンビームは次式で表される。

$$
E(x,y,z) = \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-j(kz-\phi)} e^{-j\frac{\pi}{\lambda q}(x^2+y^2)} \qquad (4)
$$

ただし、式 (4) において、

$$
\begin{aligned}
\omega^2(z) &= \omega_0^2\left\{1+(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0})^2\right\} && (5)\\
q &= \frac{1}{R}-j\frac{\lambda}{\pi\omega^2} && (6)\\
\phi &= \tan^{-1}(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}) && (7)\\
R &= z\left\{1+(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z})\right\} && (8)
\end{aligned}
$$

$\omega(z)$: スポットサイズ
ω_0 : 最小のスポットサイズ
R : 曲率半径
q : 複素ビームパラメータ

である。式 (4) を単パワーの流れに正規化すると、次式のようになる。

$$
E_{so}(x,y,z) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-j(kz-\phi)} e^{-j\frac{\pi}{\lambda q}(x^2+y^2)} \qquad (9)
$$

さて、三次元空間におけるフラウンフォーファ回折像は次式で表される。

$$U_2(x_2, y_2) = \frac{je^{-jkz}}{\lambda z} e^{-jk\frac{x_2^2+y_2^2}{2l}} \iint U_1(x_1, y_1) e^{j\frac{2\pi(x_1x_2+y_1y_2)}{\lambda z_2}} dx_1 dy_1 \tag{10}$$

$U_1(x_1, y_1)$: $z = 0$ における複素振幅分布
$U_2(x_2, y_2)$: $z = z_2$ における複素振幅分布

x および y方向の広がりのみを考慮するものとして、式 (10) に座標変換を施して計算すると次式が得られる。途中の計算は 7節の付録に記載した。

$$U(r_2, \varphi_2) = A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_1}{\omega_1 z_2} e^{-jkz_2} e^{-jk\frac{r_2{}^2}{2z_2}} e^{j\frac{\pi q_1 r_2^2}{\lambda z_2^2}} \tag{11}$$

また、強度 $I(r_2, \varphi_2)$ は、$I(r_2, \varphi_2) = |U(r_2, \varphi_2)|^2$ より、

$$I(r_2, \varphi_2) = A^2 \frac{2}{\pi} \frac{(R_1\pi\omega_1/z_2)^2}{(\pi\omega_1^2)^2 + (\lambda R_1)^2} e^{-2\frac{(R_1\pi\omega_1)^2}{(\pi\omega_1^2)^2+(\lambda R_1)^2}(\frac{r_2}{z_2})^2} \tag{12}$$

となる。特に Rが十分大きいなら

$$I(r_2, \varphi_2) = A^2 \frac{2}{\pi} (\frac{\pi\omega_1}{\lambda z_2})^2 e^{-2(\frac{\pi\omega_1 r_2}{\lambda z_2})^2} \tag{13}$$

となる。

以上のことを用いて、ガウス形開口の場合の多重反射形偏向器の指向特性のパターンを求める。

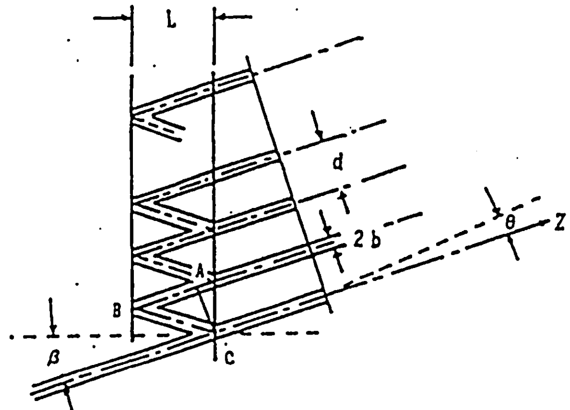


図 2: 多重反射形偏向器のモデル

図 2は、計算のために座標軸を設定したモデルである。このモデルにおいて、透過光の間隔は次式で表される。

$$d = 2L \sin\beta \tag{14}$$

このとき、式 (10) における $U_1(x_1, y_1)$ は、付録の式を用いて次のように表すことができる。

$$U_1(x_1, y_1) = tA\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\omega_{1n}}(re^{j\delta})^{n-1}e^{-j\frac{\pi}{\lambda q_m}[x_1+(n-1)d]} \quad (15)$$

但し

r	:	反射係数
t	:	透過係数
ω_{1n}	:	n 番目の透過光ビームのスポットサイズ
q_{1n}	:	n 番目の透過光の複素ビームパラメータ
δ	:	ミラー間 1 往復による、隣のビームとの位相差

ミラー 1 往復による位相差は、式 (1) から、

$$\delta = \frac{2\pi\delta L}{\lambda} = \frac{4\pi L\cos\beta}{\lambda} \quad (16)$$

となる。

式 (10) に、式 (15) を代入すると、式 (10) の積分は次式のように表される。

$$tA\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\omega_{1n}}(re^{j\delta})^{n-1}\iint e^{-j\frac{\pi}{\lambda q_m}[x_1+(n-1)d]}e^{j\frac{2\pi(x_1x_2+y_1y_2)}{\lambda z_2}}dx_1dy_1 \quad (17)$$

式 (44)~式 (11) を用いると、多重反射形偏向器によるフラウンフォーファ回折の光波分布は、

$$tA\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-jkz_2}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_1n}{\omega_{1n}z_2}\left[re^{j\left(\delta-\frac{2\pi dx_2}{\lambda z_2}\right)}\right]^{n-1}e^{\left(-jk\frac{r_2^2}{2z_2}+j\frac{\pi q_{1n}r_2^2}{\lambda z_2^2}\right)} \quad (18)$$

となる。但し、$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2$である。

多重反射によるビームの広がりおよび曲率の変化を無視すると、光波分布は式 (18) より次式で表される。

$$U_2(x_2, y_2) = tA\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-jkz_2}\frac{q}{\omega z_2}\frac{1-r^Nexp[jN(\delta-\frac{2\pi dx^2}{\lambda z_2})]}{1-rexp[j(\delta-\frac{2\pi dx^2}{\lambda z_2})]}e^{\left(-jk\frac{r_2^2}{2z_2}+j\frac{\pi q_{1n}r_2^2}{\lambda z_2^2}\right)} \quad (19)$$

$y_2 = 0$ の所での強度は、式 (19) より、

$$\begin{aligned} I(x_2) &= \frac{2}{\pi}\frac{t^2A}{l^2}\frac{(R\pi\omega)^2}{(\pi\omega^2)^2+(\lambda R)^2}\frac{(1-r^N)^2+4r^N\sin^2\{\frac{N}{2}(\delta-\frac{2\pi dx^2}{\lambda z_2})\}}{(1-r)^2+4r\sin^2\{\frac{1}{2}(\delta-\frac{2\pi dx^2}{\lambda z_2})\}} \\ &\quad \times exp-[\frac{2(R\pi\omega)^2}{(\pi\omega^2)^2+(\lambda R)^2}(\frac{x_2}{z_2})^2] \end{aligned} \quad (20)$$

となる。

式 (20) に基づいた計算結果を、図 3~図 4に示す。又、計算時に設定した値を表 1に示す。図 3~図 4において、図 [b] は、図 [a] の位相差を変化させた結果である。これらの結果から、各透過光ビーム間の位相差を変化させることにより、ファーフィールドパターンを偏向できることが分かる。

表 1: 計算時の設定値

定数	定数の意味	設定値
N	ビームの本数	11
d	開口間の間隔	$2.18 \times 10^{-3}m$
ω	スポットサイズ	$0.86 \times 10^{-3}m$

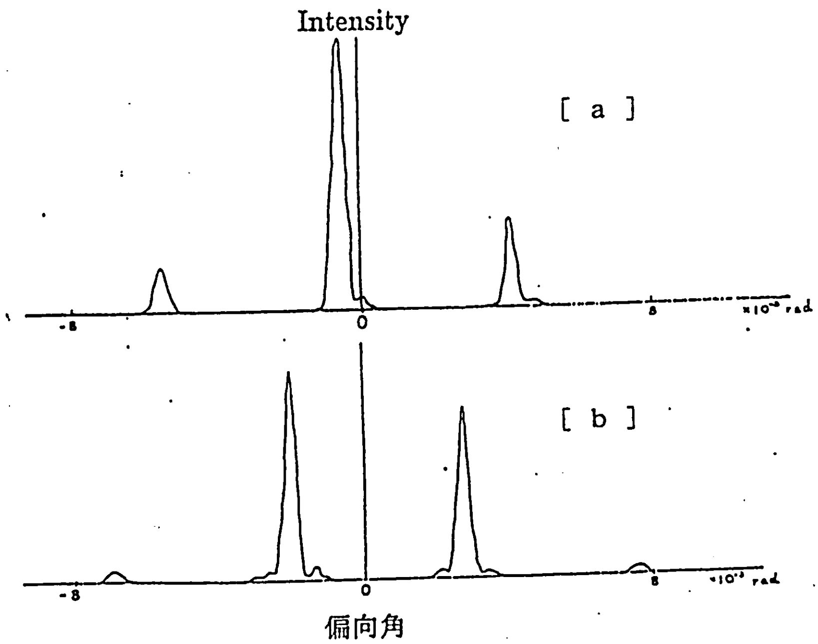


図 3: 理論値 ($10.6\mu m$)

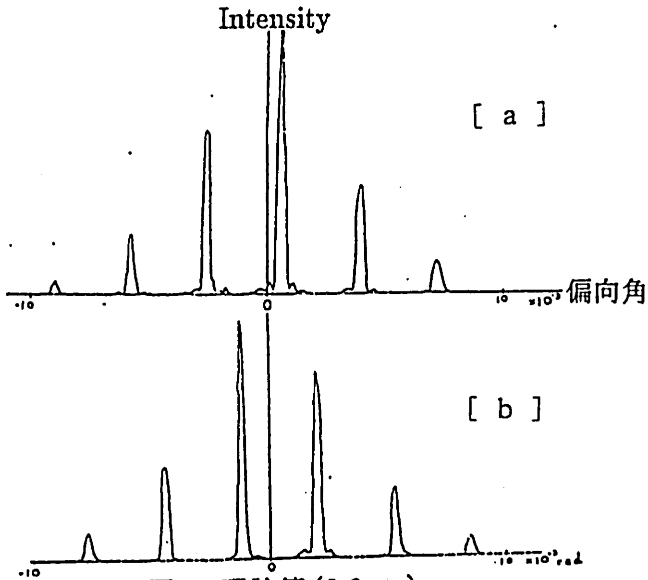


図 4: 理論値 (9.6μm)

2.3 実験結果

実験系を図 5に示す。偏向は、圧電素子に直接印可し、ミラー間隔を変化させ

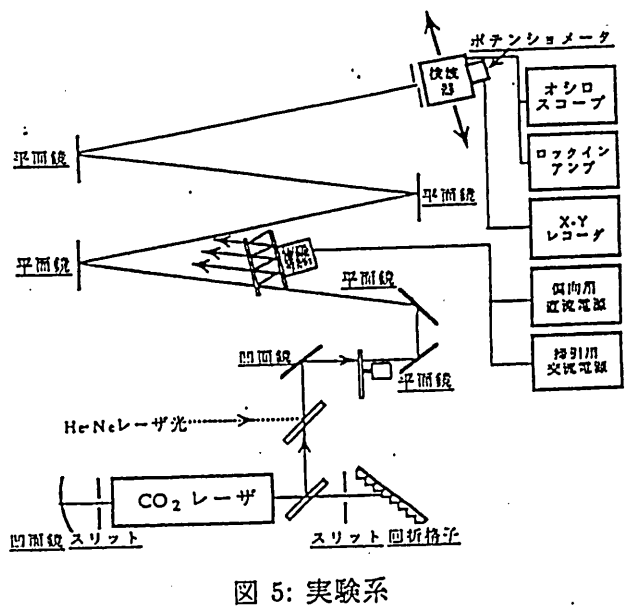


図 5: 実験系

て行った。ファーフィールドでの回折像の観測は平面鏡を用いて偏向器からの光ビームを多段に折り返しおこなった。又、検波器はリニアヘッドモータを用いて掃引した。検波器からの出力は、ロックインアンプと、チョッパとを用いて、$x-y$レコーダに記録した。

この実験系から得られた、波長 10.6μm と、9.6μm の場合の偏向実験結果を図 6~図 7に示す。

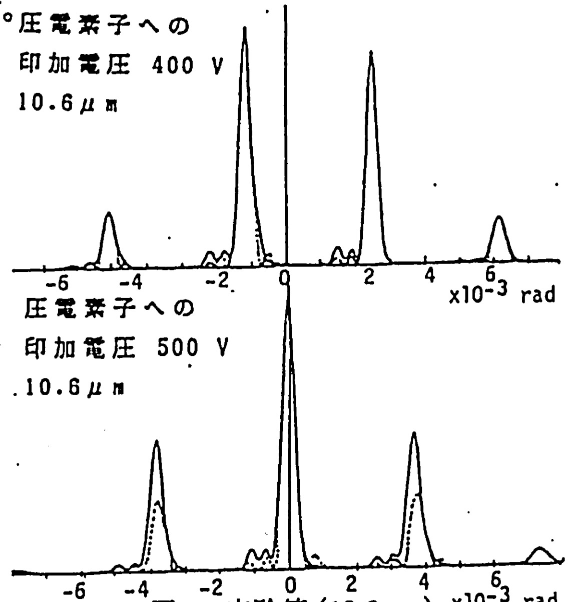


図 6: 実験値 (10.6μm)

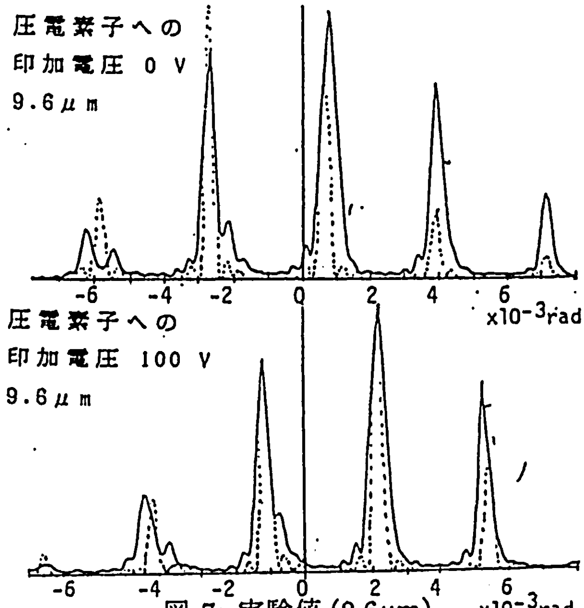


図 7: 実験値 (9.6μm)

3 多重反射形偏向器と導波形 CO_2 アレイレーザを組み合わせた偏向

今回は、高出力で、波形の崩れの少ない回折光ビームを偏向する目的で、導波形アレイレーザと、導波形 CO_2 アレイレーザを組み合わせた偏向方式について述べる。。

3.1 本システムの構成

本システムの構成図を図 8に示す。

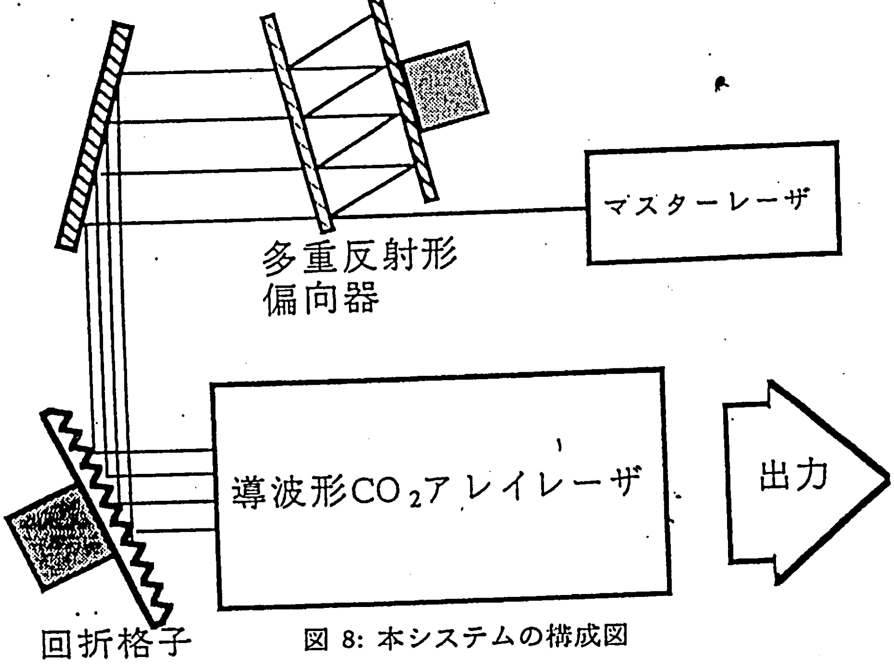


図 8: 本システムの構成図

本システムは、基本的に、信号源用のマスターレーザ、多重反射形偏向器、導波形アレイレーザから構成されている。マスターレーザおよび偏向器の構造は、前節で述べたものと同様である。導波形アレイレーザは、図 9のような構造にした。

導波路部分は、アルミナ基板 ($300mm \times 150mm \times 15mm$) 上に、17 本の平行中空導波路 ($3mm \times 3mm \times 300mm$) を作製し、それを一体化した。このような構造にすれば、各レーザの相対位置が変化せず安定した動作が期待できる。今回は、17 本の導波路の内、5 本を用いた。今回 5 本のみを使用したのは、現有のミラーのサイズに制限されたことと、残りの導波路を 2 波長動作 (4節) に用いる予定にしていることからである。

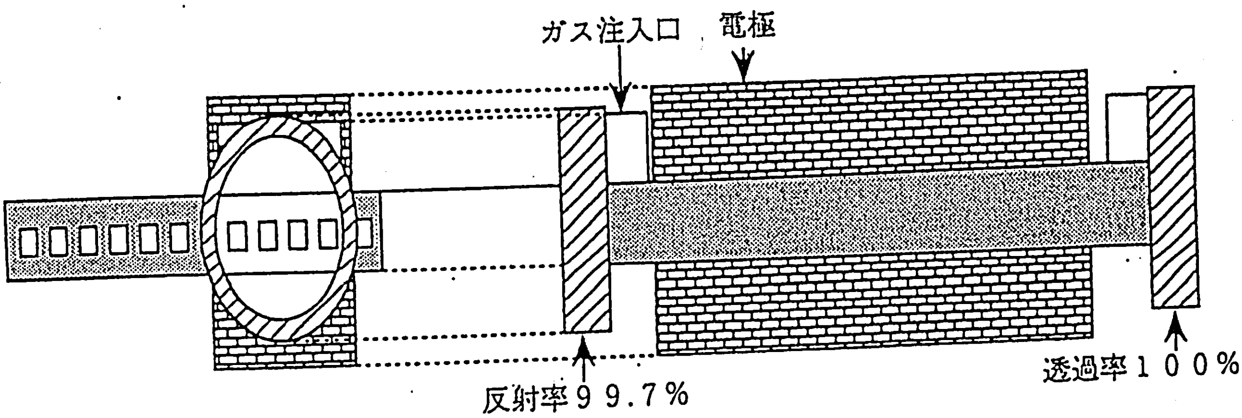


図 9: 導波形 CO_2アレイレーザの構造

電極には、アルミのブロックを用いた。この電極には、ラジエータの機能を持たせるために、ブロック内に水冷用の水路を設けた。この両電極間で 33.1MHz の高周波放電を行った。高周波放電を行う際には、反射を無くし効率よく励起電源のパワーを放電部に供給するために、インピーダンスマッチングをする必要がある。この問題を解決するために、インダクタンスを用いてインピーダンスマッチングを行った放電回路を図 10に示す。

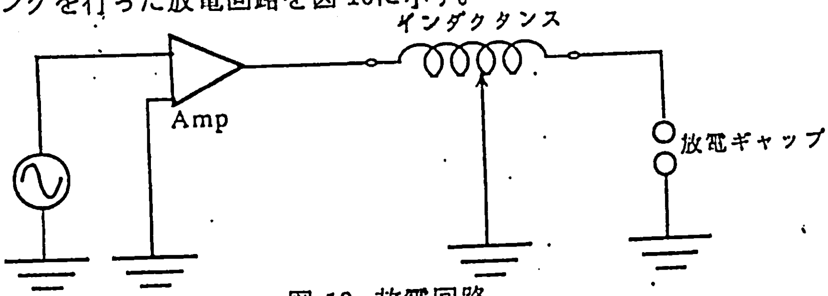


図 10: 放電回路

このような回路を構成しても、放電前と放電後でインピーダンスが著しく異なる。そこで実験では、適当な周波数で放電させ、放電を確認した後に発振器の周波数を変化して最も反射の少ない周波数にチューニングした。33.1MHzの周波数は、このチューニングの祭に、最も反射が少なかった周波数である。

レーザ共振器は、出力側には反射率 99.7%のミラーを、又もう一方には透過率 100%のミラーを設けた。発振しているレーザに外部からビームを入射すると、レーザ内部の位相が入射ビームの位相と等しくなる。この場合、入射ビームとレーザ内部の発振周波数がズレている場合でも、フェイズロックが起こることが知られている。しかし、それらの周波数は、少なくとも同一のブランチであることが必要である。

このため、フェイズロックを起こさせるには、マスターレーザととアレイレーザの発振ブランチを同一にする必要がある。このため、回折格子等を用いて発振ブランチを合わせるとフェイズロックが容易になる。

3.2 本システムの指向特性

導波形 CO_2レーザは、開口関数が cos 形であることが知られている。故にアレイレーザの開口関数を次式のように定義する。

$$U_1(x_1, y_1) = A\cos x_1 \cos y_1 \; e^{-j\Phi} \tag{21}$$

このときの観測面における光波分布は次式で表される。

$$U_2(x_2, y_2, z_2) = \int\int U_1(x_1, y_1)\frac{e-jk_0r}{r}dx_1dy_1 \tag{22}$$

$$\text{但し、} \quad r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + {z_2}^2} \tag{23}$$

特に、r が十分大きい場合には、

$$U_2(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{z_2}\int\int U_1(x_1, y_1)e^{-jk_0\frac{x_1x_2}{z_2}}e^{-jk_0\frac{y_1y_2}{z_2}}dx_1dy_1 \tag{24}$$

となる。

これより、本システムのファーフィールドパターンを求める。

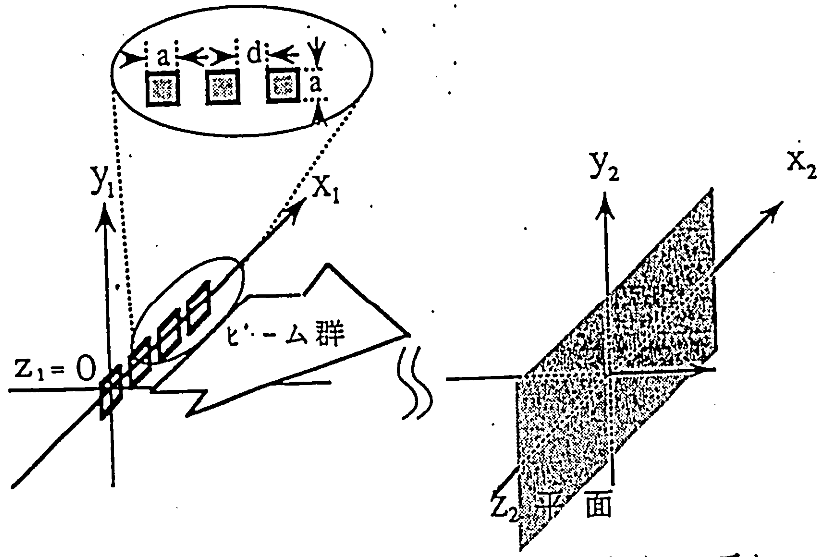


図 11: ファーフィールドパターン計算のためのモデル

図11に、計算のためのモデルを示す。図11において、アレイレーザの n 番目の開口関数を、式 (21) を用いて、次のように定義する。

$$U_{1n}(x_1, y_1) = A\cos(x_1 + \delta_n)\cos y_1\ e^{-j\Phi_n} \tag{25}$$

但し、

$$\begin{aligned} \delta_n &= 2a(n-1) \\ \phi_n &= \delta\phi(n-1) \\ \delta\phi &: \text{各レーザ間の位相差} \end{aligned}$$

である。

式 (25) を、式 (24) に代入すると、ファーフィールドの光波分布は次式のようになる。

$$U_2(x_2, y_2) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z_2}\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} U_1 n(x_1, y_1) e^{-jk_0\frac{x_1 x_2}{z_2}} e^{-jk_0\frac{y_1 y_2}{z_2}} dx_1 dy_1\right] \tag{26}$$

式 (26) の定積分を x 成分の変化のみに限定して計算すると、次式のようになる。

$$I(x_2, 0) = A_n^2\left[\{\sum_{n=1}^{N}\cos\alpha_n\}^2 + \{\sum_{n=1}^{N}\sin\alpha_n\}^2\right] \tag{27}$$

但し、

$$A_n = \left\{\frac{2\pi}{\lambda d z_2}\frac{\cos(\frac{d}{2}\omega_x)}{\frac{\pi}{d}^2 - \omega_x^2}\right\}$$

$$\alpha_n = k_0 z_2 + k_0\frac{x_2^2}{2z_2} - \Phi_n - n\omega_x d$$

式 (27) より、ファーフィールドのパターンを計算した結果を、図12に示す。また、計算時に設定した定数を表2に示す。

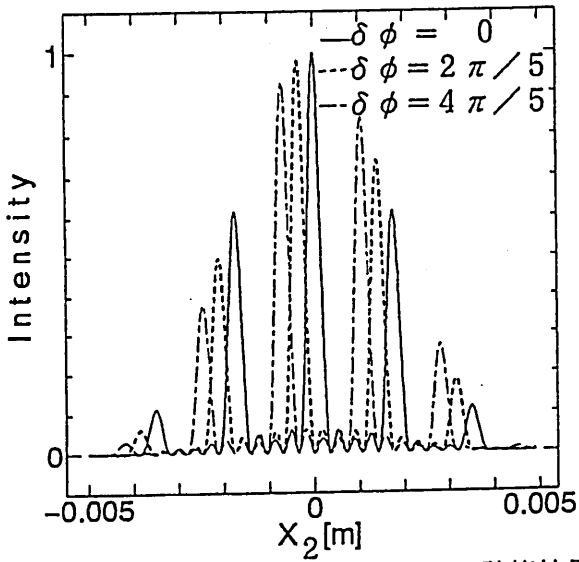


図 12: ファーフィールドパターンの計算結果

表 2: 計算時の設定値

定数	定数の意味	設定値
z_2	観測面までの距離	$100m$
λ	波長	$10.6 \times 10^{-6}m$
N	ビームの本数	5
d	開口間の間隔	$3 \times 10^{-3}m$
a	開口の幅	$3 \times 10^{-3}m$

3.3 実験方法

この節では、現在までに行った実験の経過と、今後行う実験の方法について述べる。

本研究における実験は、次のような順序で行う。

導波形 CO_2アレイレーザの製作。
⋮
多重反射形偏向器の製作。
⋮
フェイズロックの確認。
⋮
ファーフィールドパターンの観測。
⋮
2 波長動作の導入。

導波形 CO_2アレイレーザの製作は、3.1で述べたような構造のものを作製した。このレーザを動作させたところ、入力 180Wに対して、1 本当たり 1 ～ 1.5Wの出力で 5 本同時発振した。図 13に、感熱紙によって観測したアレイレーザの出力パターンを示す。

図 13: アレイレーザの出力パターン

多重反射形偏向器は、図 14に示すように、部分透過ミラーをミラーホルダーに、全反射ミラーを PZTにそれぞれ取り付けた構造になっている。CO_2レーザのビームは可視光でないので、このような光学系の調整時には、マスターレーザからの光ビームと、$H_e - N_e$レーザの光ビームの光軸を一致させ、$H_e - N_e$により、光軸のアライメントを行った。

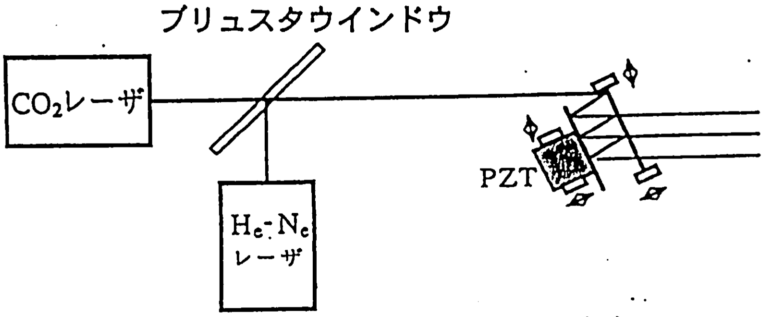


図 14: 多重反射形偏向器の設置方法

次に、マスターレーザ、偏向器、アレイレーザを動作させ、フェイズロックの確認を行った。測定装置を、図 15に示す。

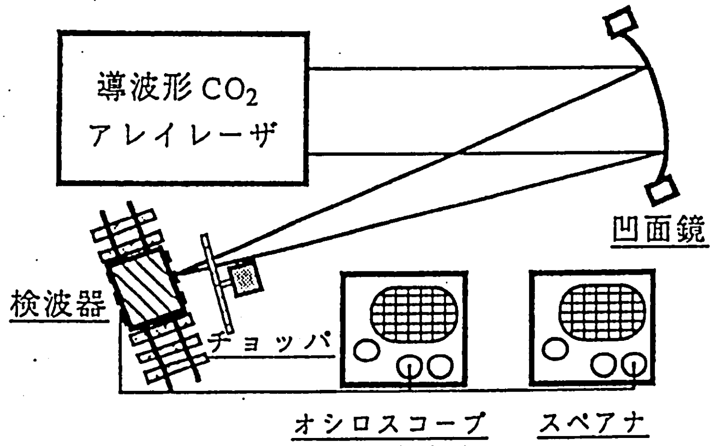


図 15: 測定装置

ファーフィールドパターンは、凹面鏡によりフーリエ変換を行い、フーリエ変換パターンを観測した。しかし、この場合、グレイティンググローブの幅より検波器の素子が大きくなり、パターンの観測ができなかった。ただ、グレイティンググローブの幅と検波器の素子の幅がある程度異なっている場合でも、偏向が行われていれば検波器の出力は変化するはずであると考え、この測定系でフェイズロックの確認を行うことにした。

PZTへの印加電圧を $0 \sim 10[\mathrm{v}]$ に変化させたところ、オシロスコープの波形の変化が確認できた。又、偏向器からの透過光ビームを遮って同じ操作を行ったところ、オシロスコープの波形に変化はみられなかった。このことから、PZTへの印加電圧と、検波器の出力の間に明らかに相関があることが読み取れた。

4　2波長動作

2波長動作は、多重反射型偏向器の特徴である複数のグレイティンググローブを利用し、分解能を向上させる方式である。

図16は、波長λ_1とλ_2の光で動作させた場合のファーフィールドパターンを簡略化したものである。

図16中、Aの方向に物体が存在すると仮定する。又、λ_1,λ_2共に2番目のグレイティンググローブが同一方向に存在するとする。この状態から$\Delta\theta_1$だけ偏向すると、λ_1とλ_2のグレイティンググローブが物体Aに当たる。しかし、物体がBの方向に存在する場合、λ_1のグレイティンググローブが物体に当たってからλ_2のグレイティンググローブが物体に当たるまでに、$\Delta\theta_2 - \Delta\varphi_2$の時間差が生じる。ゆえに、物体の当たったグレイティンググローブは、波長λ_1とλ_2の反射光の時間差で表され、走査範囲が次にグレイティンググローブが一致する点にまで拡大する。分解能は、走査範囲とグレイティンググローブの幅との比で表わされるので、この方式を用いることによりにより、分解能は飛躍的に増加する。

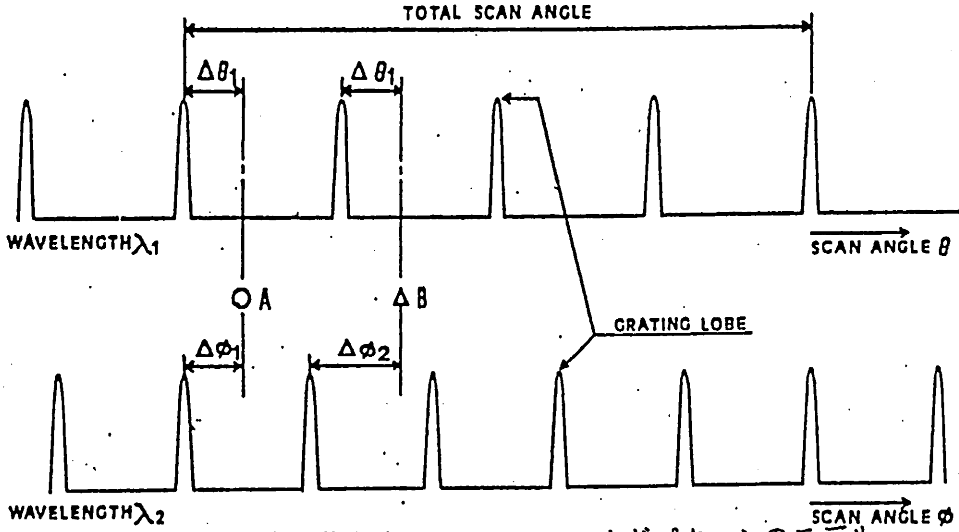


図 16: 2 波長動作時のファーフィールドパターンのモデル

グレイティンググローブを一致させるには、それぞれの偏向器の PZT に直流電圧を印加し、その電圧であらかじめ双方のグレイティンググローブをあわせておいて、その上に共通の交流成分を乗せて偏向すればよい。

図 17に、別個に測定した 10.6μm のパターンと、9.6μm のパターンを重ね合わせた結果を示す。

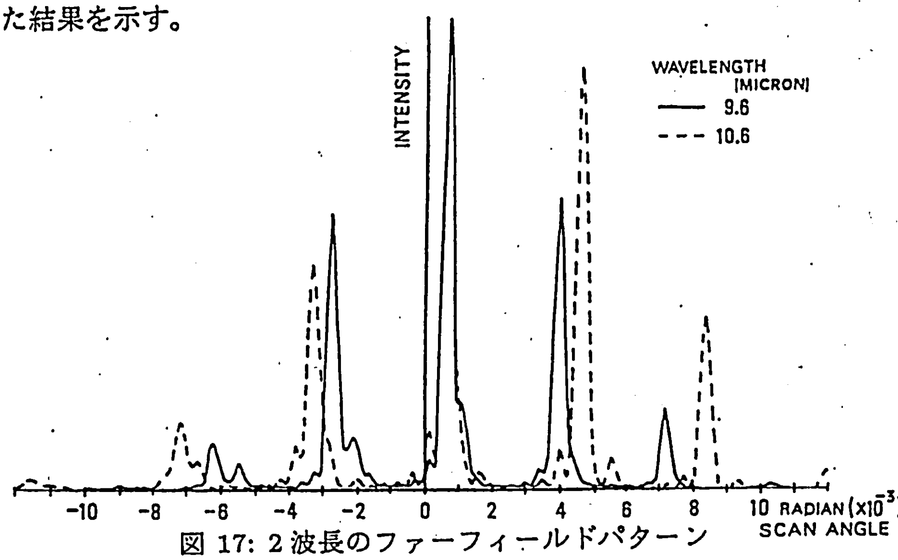


図 17: 2 波長のファーフィールドパターン

本システムにおいては、CO_2 レーザからでる 10.6μm の光と 9.6μm の光を用いて、図 18の様な構成で動作させる予定である。

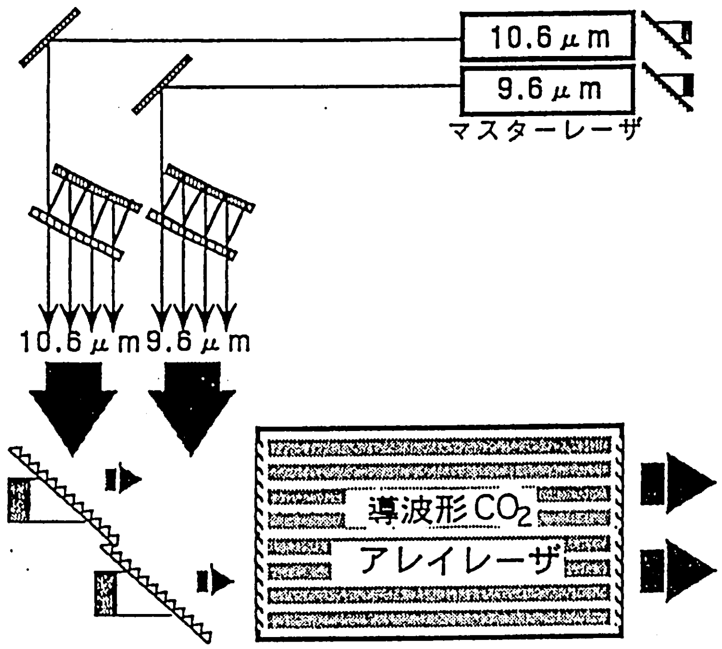


図 18: 2 波長動作を考慮したシステム構成

5　考察・検討

5.1　偏向速度

本システムをレーザレーダに応用する際に、偏向速度は重要な問題の一つである。ここでは、本システムの偏向速度についての考察を行う。

偏向器のミラー間隔を高速で変化させると、光ビームが 2 枚のミラー間を往復する間にミラーの間隔が変化する。この場合の、ファーフィールドパターンについて検討を行う。

図 19に示すように、$a \sim b$ に要する時間δt および、ミラー間隔 L は次式で表される。

$$\delta t = \frac{L}{c\sin\beta} \tag{28}$$

$$L = L_0 - v\delta t \tag{29}$$

この 2 式より、$a \sim b$ 間の距離 L_{ab}は、

$$L_{ab} = \frac{cL_0}{c\sin\beta + v} \tag{30}$$

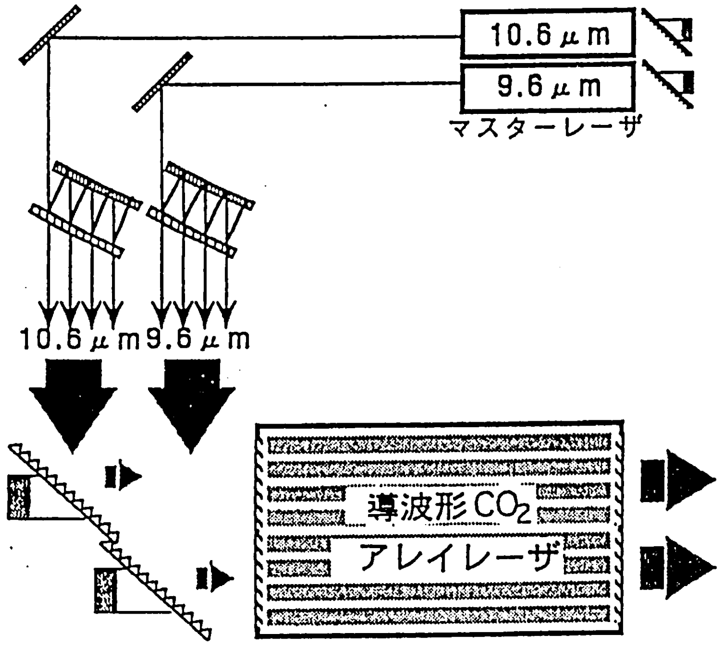


図 18: 2 波長動作を考慮したシステム構成

5 考察・検討

5.1 偏向速度

本システムをレーザレーダに応用する際に、偏向速度は重要な問題の一つである。ここでは、本システムの偏向速度についての考察を行う。

偏向器のミラー間隔を高速で変化させると、光ビームが 2 枚のミラー間を往復する間にミラーの間隔が変化する。この場合の、ファーフィールドパターンについて検討を行う。

図 19に示すように、$a \sim b$ に要する時間δt および、ミラー間隔 L は次式で表される。

$$\delta t = \frac{L}{c \sin \beta} \tag{28}$$

$$L = L_0 - v\delta t \tag{29}$$

この 2 式より、$a \sim b$ 間の距離 L_{ab}は、

$$L_{ab} = \frac{cL_0}{c \sin \beta + v} \tag{30}$$

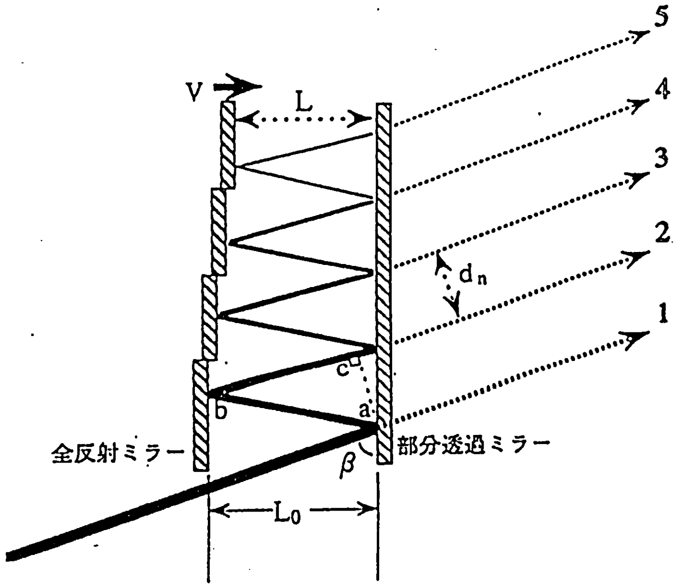


図 19: 偏向速度の影響

となる。又、$b \sim c$ 間の距離は、

$$L_{bc} = -L_{ab}\cos 2\beta \tag{31}$$

となる。ゆえに、1番目のビームと、2番目のビームの位相差$\delta\phi_1$は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta\phi_{12} &= \frac{2\pi}{\lambda}\{L_{ab} + L_{bc}\} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\frac{cL_0}{c\sin\beta + v}(1 - \cos 2\beta) \end{aligned} \tag{32}$$

同様に、n 番目と $n+1$ 番目の位相差は、

$$\delta\phi_n = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{(c\sin\beta - v)^{n-1}}{(c\sin\beta + v)^n}cL_0(1 - cos2\beta) \tag{33}$$

となる。

この結果をもとに、ファーフィールドのパターンが、ミラー間隔の変化のスピードによって、どのように変化するかを計算したものを図 20に示す。又、計算時に設定したパラメータを表 3に示す。

図 20に示すように、約 300MHz以上の周波数でミラー間隔を変化させると、グレイティングローブが識別できなくなることがわかる。

ここでは、偏向器の速度を問題にしたが、フェイズロックも偏向速度に対して影響を受ける。フェイズロックを起こさせるには、マスターレーザからの入射ビームが、レーザ共振器内を往復する必要がある。ゆえに、少なくとも、入

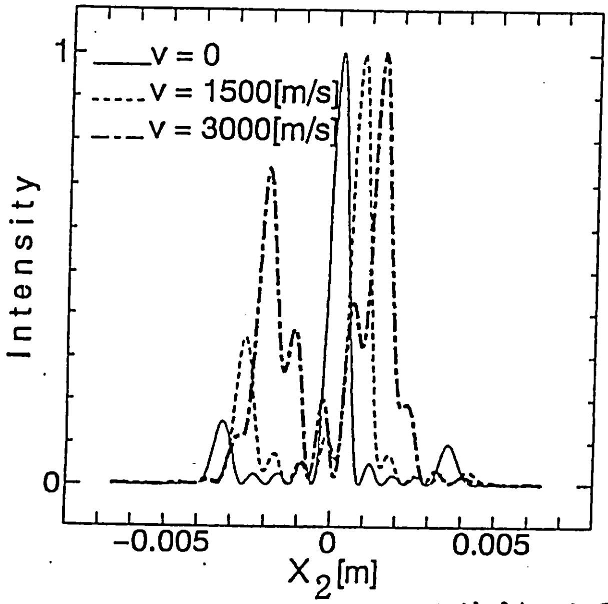


図 20: 偏向速度によるファーフィールドパターンの変化

表 3: 計算時の設定値

定数	定数の意味	設定値
L_0	初期ミラー間隔	$100m$
λ	波長	$10.6 \times 10^{-6}m$
N	ビームの本数	5
d	開口間の間隔	$3 \times 10^{-3}m$
a	開口の幅	$3 \times 10^{-3}m$

射ビームが共振器を 1 往復する間に位相が変化してはならない。ゆえに、数 $100MHz$程度の周波数になると、フェイズロックが困難になると考えられる。

これらのことから、本システムに PZTを用いた場合の偏向速度の限界は、数 $100MH_z$であると考えられる。

5.2 ミラーの平行度の影響[3]

多重反射型偏向器を構成するミラーは並行に配置することを前提にしてきたが、完全に並行に配置することは非常に困難である。そこで、平行度のズレがどの程度まで許されるかを検討する。

まず、図 21に示すように、ミラーが平行に対してαだけ傾いているときの指

向特性を求める。

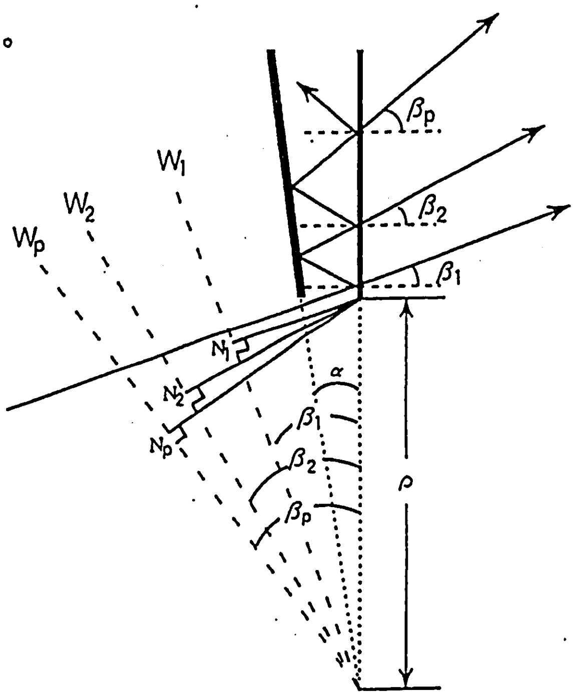


図 21: ミラーが平行でない場合の多重反射 [a]

入射角βでビームを入射し、p 番目の透過光が角度β_pで出ていくとすると、屈折及び反射の法則より、

$$\sin\beta_p = \sin\{\beta + 2(p-1)\alpha\} \tag{34}$$

となる。W_pは、p 番目の透過光の波面で、頂点 o から透過ミラーの端 P までの距離をρとする。このとき、1 番目の透過光と p 番目の透過光の光路差ΔL_pは、

$$\Delta L_p = \rho(\sin\beta_p - \sin\beta) \tag{35}$$

で与えられる。

反射による位相の変化がないものとすると、1 番目の透過光と、p 番目の透過光の位相差δ_pは、式 (34) 及び、式 (35) より次式で表される。

$$\begin{aligned} \delta_p &= \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L_p \\ &= \frac{4\pi h}{\lambda}\cos\beta\frac{\sin(p-1)\alpha}{\tan\alpha}\{\cos(p-1)\alpha - \tan\beta\sin(p-1)\alpha\} \qquad (36) \\ & \quad h = \rho\tan\alpha \ : \ p \text{ でのミラー間隔} \end{aligned}$$

次に、1 番目の透過光ビームと、p 番目の透過光ビームとの間隔 d_pを求める。

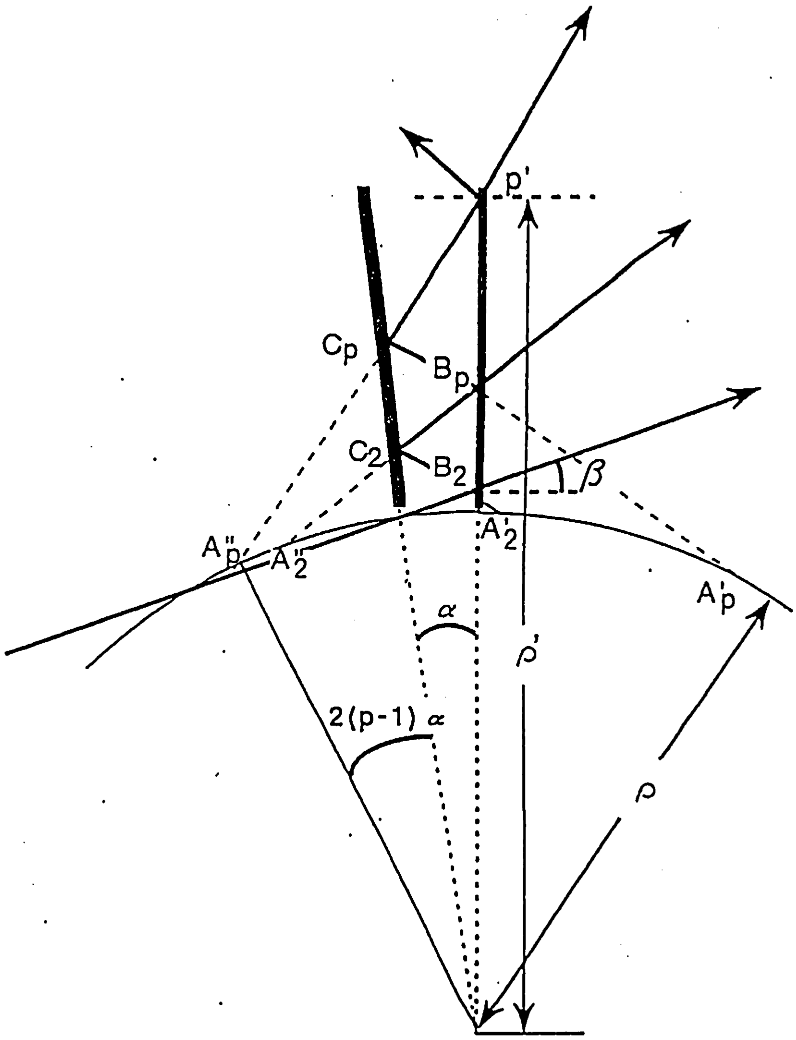


図 22: ミラーが平行でない場合の多重反射 [b]

図22において、$A_2^{'}, A_2^{''}, \ldots, A_p^{'}, A_p^{''}$は、両ミラー間で起こる連続的な反射に対応する$A_1$の虚像である。

今虚像は、頂点oを中心として半径$oA_1 = \rho$の円周上にある。ゆえに、$\angle A_1 o A_p^{''} = 2(p-1)\alpha$ である。

B_2での光が角度β で入射してきたとすると、$P^{'}$に達する時の入射角は$\beta + 2(p-1)\alpha$であるから

$$\begin{aligned} angle A_p^{''} P^{'} o &= \frac{\pi}{2} - \{\beta + 2(p-1)\alpha\} \\ angle P^{'} A_p^{''} o &= \frac{\pi}{2} + \{\beta - \alpha\} \\ \frac{\rho}{\cos\{\beta + 2(p-1)\alpha\}} &= \frac{\rho^{'}}{\cos(\beta - \alpha)} \end{aligned} \tag{37}$$

従ってミラーの端とp番目の透過光ビームの間隔は、

$$\Delta\rho = \rho^{'} - \rho = \frac{h}{\tan\alpha}\left\{1 - \frac{\cos\{\beta + 2(p-1)\alpha\}}{\cos(\beta - \alpha)}\right\} \tag{38}$$

となる。

故に、1番目の透過光ビームと、p番目の透過光ビームの間隔d_pは次式で表される。

$$d_p = \delta\rho_p - \delta\rho_1 = \frac{h}{\tan\alpha}\left\{\frac{\cos\beta}{\cos(\beta - \alpha)} - \frac{\cos\{\beta + 2(p-1)\alpha\}}{\cos(\beta - \alpha)}\right\} \tag{39}$$

この時のフラウンフォーファ回折による光波分布は、

$$U(x_2, y_2) = \sum_{k=1}^{N} r^{k-1} e^{i(\delta_k - \frac{2\pi\delta_k}{\lambda}\frac{x_2}{z_2})} A(x_2, y_2) \tag{40}$$

但し、$A(x_2, y_2)$: 窓関数

の形となる。

式(36)と、式(39)を用いると、$x_2 = 0$において正規化された光強度$I_0(\theta)$ $(\theta = x_2/l)$ は、次式で与えられる。

$$I_0(\theta) = \frac{\sum_{k,k'=1}^{N} r^{k+k'-2}\cos\left[(\delta_k - \delta_k^{'}) - \frac{2\pi}{\lambda}(d_k - d_k^{'})\theta\right]}{\sum_{k,k'=1}^{N} r^{k-1} r^{k'-1}} |A(\theta)|^2 \tag{41}$$

窓関数を、円開口であるとして

$$A(\theta) = \frac{2J_1(\frac{2\pi b}{\lambda}\theta)}{\frac{2\pi b}{\lambda}\theta} \tag{42}$$

但し、$J_1()$ は、第一次ベッセル関数である。

表 4: 計算時の設定値

定数	定数の意味	設定値
N	ビームの本数	8
β	入射角	$0.082rad$
$h = L$	ミラー間隔	$0.017m$
b	開口の半径	$0.73 \times 10^{-3}m$

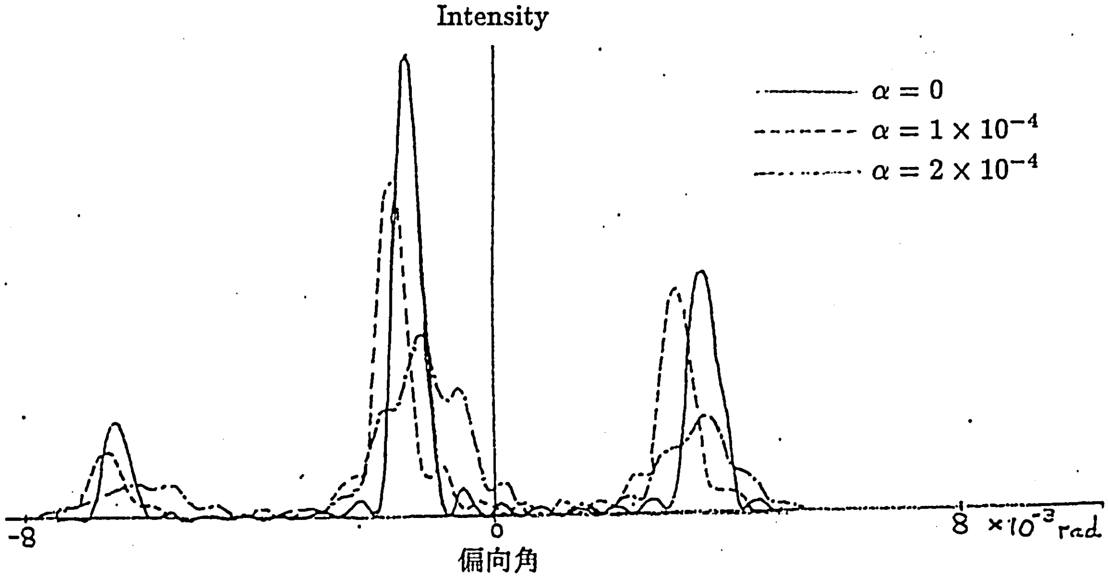


図 23: ミラーが平行からずれている場合のファーフィールドパターン

とおき、計算を行った結果を、図 23に、又計算時に設定した値を表 4に、それぞれ示す。

この計算結果から、平行からずれるに従って、サイドローブが大きくなり、グレイティンググローブの幅が広がっていくことが分かる。又、ミラーの平行度の精度として $5 \times 10^{-5} \sim 1 \times 10^{-4}[rad]$ 以内に誤差を抑える必要があると思われる。

しかし、今回述べたように、偏向器と導波形アレイレーザを組み合わせた場合には、出力光ビームの方向や間隔が変化しないので、これらの影響を少なくすることが期待できる。

6 まとめ

今回、多重反射形偏向器と導波形 CO_2 アレイレーザを組み合わせた $10.6\mu m$ 帯光の偏向のための、基礎実験を行った。現段階では、レーザの試作、動作確認、多重反射形偏向器の試作、フェイズロックの確認を完了した。

又、5.1の考察により、本システムの速度の限界が数 $100MH_z$ であることが分かった。この考察には、PZTの圧電効果の追従速度は考慮にいれていないが、PZTが追従しない場合には、2枚のミラー間に電気光学結晶を挿入し、それによって、各ビーム間の位相差を変える。

5.2の考察により、多重反射形偏向器においては、両ミラー間の平行度が重要であることが分かった。又、平行からのズレは、$5\times10^{-5}\sim1\times10^{-4}[rad]$ 以内に抑える必要がある。しかし、今回述べた偏向器と導波形アレイレーザを組み合わせる方式によりこれらの影響を少なくすることが期待できる。

今後の課題としては、ファーフィールドにおける測定系を整備し、偏向の確認を行うことと、2波長動作についての実験を行うことである。

7 付録

x および y 方向の広がりのみを考慮するものとして、式 (10) における $U_1(x_1,y_1)$ を、式 (9) を用いて

$$U_1(x_1,y_1) = AE_{so}(x_1,y_1) = \frac{A}{\omega_1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-j\frac{\pi}{\lambda q_1}(x^2+y^2)} \tag{43}$$

と表す。ただし、A は振幅の大きさである。このとき、式 (10) の積分は、

$$\frac{A}{\omega_1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\int e^{-j\frac{\pi}{\lambda q}(x^2+y^2)}e^{j\frac{2\pi(x_1x_2+y_1y_2)}{\lambda z_2}}dx_1dy_1 \tag{44}$$

となる。

さらに、$x_1=r_1\cos\varphi_1$, $y_1=r_1\sin\varphi_1$, $x_2=r_2\cos\varphi_2$, $y_2=r_2\sin\varphi_2$, の座標変換を施すと、式 (44) は次式のようになる。

$$\frac{A}{\omega_1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-j\frac{\pi r_1^2}{\lambda q_1}}e^{j\frac{2\pi r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{\lambda z_2}}r_1\,dr_1d\varphi_1 \tag{45}$$

式 (45) に、ベッセル関数の $Hansen$ の積分表示

$$J_n(x) = \frac{j^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{jx\cos\alpha}e^{jn\alpha}d\alpha \tag{46}$$

を適用すると、

$$\frac{A}{\omega_1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}2\pi e^{-j\frac{\pi r_1^2}{\lambda q_1}}J_0(\frac{2\pi r_1r_2}{\lambda z_2})r_1dr_1 \tag{47}$$

となり、式 *(47)* に、*Weber* の積分

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x J_0(bx)dx = \frac{e^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{2a^2} \tag{48}$$

を適用すると

$$-j\frac{A}{\omega_1}\lambda q_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{j\frac{q_1 r_2^2}{\lambda z_2^2}} \tag{49}$$

となる。

従って、基本ガウス形開口の場合のフラウンフォーファ回折の光波分布は次式で与えられる。

$$U(r_2, \varphi_2) = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{q_1}{\omega_1 z_2}e^{-jkz_2}e^{-jk\frac{r_2{}^2}{2z_2}}e^{j\frac{\pi q_1 r_2^2}{\lambda z_2^2}} \tag{50}$$

参考文献

[1] 田村　光夫, 末田　正: 大阪大学基礎工学部特別研究報告, *1980.*

[2] 松島他: 電子情報通信学会技術研究報告, *SANE87-39-48,1987.*

[3] Max Born,Emil Wolt: **"Principles of Optics"**, *PERGAMON PRESS,1987.*

輻射科学研究会資料
RS94-4

プリントダイポールアンテナの光制御

西村　和男　　　堤　誠
京都工芸繊維大学　工芸学部　電子情報工学科

平成6年5月13日

あらまし

本報告は，光プラズマが誘起された半導体を基板とするプリントダイポールアンテナの諸特性についてに論じたものである。

まず，スペクトル領域モーメント法を用いて，プラズマが誘起された半導体基板上のプリントダイポールアンテナの諸特性を解析し，プラズマ密度の範囲 $n_p t_p = 0 \sim 2.0 \times 10^{17} m^{-2}$で入力インピーダンス，放射パターンを計算した。その結果，光を照射すると等価的にアンテナに損失負荷が装荷された状態になるため，アンテナの入力インピーダンスが小さくなり，その放射パターンは光を照射しない状態の放射パターンに比べ減衰することがわかった。次にアンテナを試作し，光源としてクセノンアークランプを用いて実験を行い，理論値を確かめた。次に光源として赤外パルスレーザダイオードを用いて実験を行い，光パルスを照射しアンテナから放射される電磁波に変調をかけるという形でアンテナ特性が光によって制御されるのを確認した。

1. まえがき

半導体に禁止帯幅より大きなエネルギーを持つ光を照射すると電子-正孔対 (半導体プラズマ) が誘起され，半導体の複素誘電率が変化する。最近，この現象はマイクロ波・ミリ波の制御に利用され，スイッチ [1][2]，位相器 [3]，そしてこれらの特性を生かしてアンテナに応用されている [4] ~ [7]。また，この現象を用いたスイッチング動作は直流から，マイクロ波・ミリ波の発生にも応用される。すなわち，ピコセカンドレーザにより直流電源のみでアンテナにマイクロ波・ミリ波を放射させることが可能である [8]。

本報告では，光スイッチング素子の研究に関連してプラズマが誘起された半導体を基板とするプリントダイポールアンテナの諸特性を明らかにする。解析手法としてはスペクトル領域モーメント法 [9] ~ [11] を採用し，プリントダイポールアンテナの入力インピーダンス，放射パターンを求める。プラズマ密度の範囲 $n_p t_p = 0 \sim 2.0 \times 10^{17} m^{-2}$で数値計算を行い，光がアンテナ特性に与える影響を考察している。次に高抵抗シリコン基板を用いてプリントダ

イポールアンテナを作製し，光源としてクセノンアークランプを用いて実験により光がアンテナ特性に与える影響を確かめている。さらに光源として赤外パルスレーザダイオードを用いて実験を行い，光パルスを照射しアンテナから放射される電磁波に変調をかけるという形でアンテナ特性が光によって制御されるのを確かめている。

2. プリントダイポールアンテナの解析

2-1 スペクトル領域モーメント法による解析

図１に，プラズマが誘起された高抵抗半導体基板上に作製されたプリントダイポールアンテナの解析モデルを示す。基板は，上側 ($t_p \leq z \leq d$) の層を高抵抗半導体，下側 ($0 \leq z \leq t_p$) の層を光プラズマ層とした２層構造をなす。基板上のプリントダイポールの長さを l，幅を w とし，そしてダイポールの厚みを無視する。

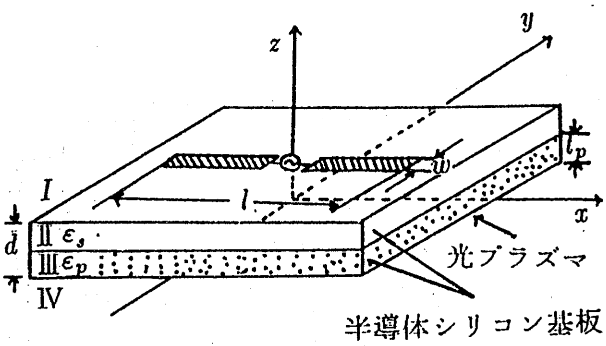


図１ 解析モデル

(A) プラズマ生成時の半導体の複素誘電率

プラズマ生成時の半導体の複素比誘電率ε_p は次式で与えられる。[3]

$$\varepsilon_p = \varepsilon_s - \sum_{i=e,h} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 + \nu_i^2}(1 + j\frac{\nu_i}{\omega}). \tag{1}$$

ここで,ε_sは光を照射しないときの半導体の比誘電率，ωはマイクロ波の角周

波数,$\nu_i(i=e,h)$ は電子及び正孔の衝突周波数である。また,$\omega_{pi}(i=e,h)$ は次式で与えられる電子および正孔のプラズマ角周波数である。

$$\omega_{pi}^2=\frac{n_pe^2}{m_i^*\varepsilon_0}\quad(i=e,h)$$

ここで,n_pはプラズマ密度,e は電子の電荷量,ε_0は真空の誘電率,$m_i^*(i=e,h)$ は電子及び正孔の有効質量をそれぞれ表している。

(B) スペクトル領域のグリーン関数

本構造に対するグリーン関数を以下に示す。二次元フーリエ変換対は,

$$A(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(k_x,k_y,z)e^{-j(k_xx+k_yy)}dk_xdk_y,\tag{2}$$

$$\tilde{A}(k_x,k_y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A(x,y,z)e^{j(k_xx+k_yy)}dxdy.\tag{3}$$

と定義される。x 方向の電流によって領域 I(上側の空気中) と領域 II(シリコン中) の境界 $(z=d)$ に生じる電界の接線成分は,

$$E_i(x,y,d)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{J}_x(k_x,k_y)\tilde{G}_{ix}(k_x,k_y,d)e^{-j(k_xx+k_yy)}dk_xdk_y\tag{4}$$

と書ける。$\tilde{G}_{ix}(k_x,k_y,d)(i=x,y)$ はスペクトル領域のダイアディックのグリーン関数の要素で,$\tilde{J}_x(k_x,k_y)$ は電流分布 $J_x(x,y)$ のフーリエ変換である。$\tilde{G}_{xx}(k_x,k_y,d)$, $\tilde{G}_{yx}(k_x,k_y,d)$ は,次のように書ける。

$$\tilde{G}_{xx}(k_x,k_y,d)=\frac{jZ_o}{k_o\beta^2}[\frac{\gamma k_dD_3(\beta)}{D_m(\beta)}k_x^2+\frac{k_o^2D_4(\beta)}{D_e(\beta)}k_y^2],\tag{5}$$

$$\tilde{G}_{yx}(k_x,k_y,d)=\frac{jZ_o}{k_o\beta^2}[\frac{\gamma k_dD_3(\beta)}{D_m(\beta)}-\frac{k_o^2D_4(\beta)}{D_e(\beta)}]k_xk_y,\tag{6}$$

ただし,

$$D_m(\beta)=k_dA_m\cos k_d(d-t_p)+B_m\sin k_d(d-t_p),\tag{7}$$

$$D_e(\beta)=k_dA_e\cos k_d(d-t_p)+B_e\sin k_d(d-t_p),\tag{8}$$

$$D_3(\beta) = k_p A_3 \cos k_d(d - t_p) - k_d B_3 \sin k_d(d - t_p), \tag{9}$$

$$D_4(\beta) = k_d A_4 \cos k_d(d - t_p) + k_p B_4 \sin k_d(d - t_p), \tag{10}$$

ここに

$$A_m(\beta) = \varepsilon_s(2\varepsilon_p \gamma k_p \cos k_p t_p + (\varepsilon_p^2 \gamma^2 - k_p^2) \sin k_p t_p),$$

$$B_m(\beta) = \varepsilon_p k_p(\varepsilon_s^2 \gamma^2 - k_d^2) \cos k_p t_p - \gamma(\varepsilon_p^2 k_d^2 + \varepsilon_s^2 k_p^2) \sin k_p t_p,$$

$$A_e(\beta) = -2\gamma k_p \cos k_p t_p + (k_p^2 - \gamma^2) \sin k_p t_p,$$

$$B_e(\beta) = k_p(k_d^2 - \gamma^2) \cos k_p t_p + \gamma(k_d^2 + k_p^2) \sin k_p t_p,$$

$$A_3(\beta) = \varepsilon_s(\varepsilon_p \gamma \cos k_p t_p - k_p \sin k_p t_p),$$

$$B_3(\beta) = \varepsilon_p(k_p \cos k_p t_p + \varepsilon_p \gamma \sin k_p t_p),$$

$$A_4(\beta) = k_p \cos k_p t_p + \gamma \sin k_p t_p,$$

$$B_4(\beta) = \gamma \cos k_p t_p - k_p \sin k_p t_p,$$

$$\gamma^2 = \beta^2 - k_o^2 \quad , \quad k_d^2 = \varepsilon_s k_o^2 - \beta^2,$$

$$k_p^2 = \varepsilon_p k_o^2 - \beta^2 \quad , \quad \beta^2 = k_x^2 + k_y^2,$$

$$k_o^2 = \omega^2 \varepsilon_o \mu_o \quad , \quad Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}.$$

である。

(C) モーメント法

ダイポールはデルタギャップジェネレータによって給電されていると仮定する [12][13]。ダイポールを N 等分し, ダイポール上の表面電流密度を基底関数$\bar{J}_n(x,y)$(区分正弦波関数) で展開する。

$$J_x(x,y) = \sum_{n=1}^{N-1} I_n \bar{J}_n(x,y) \tag{11}$$

I_n:未定係数，

$$\bar{J}_n(x,y) = \frac{1}{w} f_n(x) g_n(y), \tag{12}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin k_o(s - |x - x_n|)}{\sin k_o s} & |x - x_n| \le s \\ 0 & その他 \end{cases}, \tag{13}$$

$$g_n(y) = \begin{cases} 1 & |y| \le \frac{w}{2} \\ 0 & その他 \end{cases}, \tag{14}$$

$$s = \frac{l}{N}, \quad x_n = -\frac{l}{2} + ns,$$
N : 偶数, $n = 1, \cdots, N-1$.

ここで基底関数$\bar{J}_n$のフーリエ変換を

$$F_n(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{J}_n(x,y) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \tag{15}$$

と定義する。

デルタギャップジェネレータからの入射電界とダイポール上の電流によって生じる散乱電界の和の接線成分はダイポール上では0でなければならないという境界条件から得られる電界積分方程式は $I_n(n = 1, \cdots, N-1)$ に関する連立方程式に帰還される。すなわち,

$$[Z][I] = [V] \tag{16}$$

インピーダンス行列 [Z] 及び電圧ベクトル [V] の要素は

$$Z_{mn} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_m^*(k_x, k_y) \tilde{G}_{xx}(k_x, k_y) F_n(k_x, k_y) dk_x dk_y, \tag{17}$$

$$V_m = \begin{cases} 1 & m = N/2 \\ 0 & その他 \end{cases}. \tag{18}$$

である。起電力法により入力インピーダンスは

$$Z_{in} = \frac{1}{|I_{\frac{N}{2}}|^2}[I^*]^t[V] \tag{19}$$

で与えられる [13]。

(D) 遠方界表現

$z = d$ 上の任意の点 (x_o, y_o, d) に x 方向の微小電流源がある場合の電界成分の遠方界表現は停留位相法によって求まり,

$$E_\theta = -\frac{jZ_o}{2\pi r}e^{-jk_o r}\tilde{P}_{\theta x}e^{-j(k_x x_o + k_y y_o + j\gamma d)}, \tag{20}$$

$$E_\phi = -\frac{jZ_o}{2\pi r}e^{-jk_o r}\tilde{P}_{\phi x}e^{-j(k_x x_o + k_y y_o + j\gamma d)}, \tag{21}$$

となる。
ただし,

$$\tilde{P}_{\theta x} = \frac{k_o k_d D_3(\beta)}{D_m(\beta)}\cos\theta\cos\phi, \tag{22}$$

$$\tilde{P}_{\phi x} = j\frac{k_o^2 D_4(\beta)}{D_e(\beta)}\cos\theta\sin\phi, \tag{23}$$

で, 停留位相点は

$$k_x = k_o \sin\theta\cos\phi, \tag{24}$$

$$k_y = k_o \sin\theta\sin\phi. \tag{25}$$

である。

2-2 数値計算結果

数値計算結果を以下に示す。基板はシリコンとし, その厚みは $d = 0.4mm$, そして $t_p = 0.02mm$ がプラズマ層とする。シリコンに関する諸定数は,

$\varepsilon_s = 11.8$
$m_e^* = 0.259 m_0 (kg)$
$m_h^* = 0.380 m_0 (kg)$
$m_0 = 9.11 \times 10^{-31} (kg)$
$\nu_e = 4.52 \times 10^{12} (sec^{-1})$
$\nu_h = 7.71 \times 10^{12} (sec^{-1})$

を用いた。ダイポールの全長を $l = 5.0cm$, 幅を $w = 2.0mm$ とした。

なおプラズマ密度は単位面積当たりで表す。つまり, 単位体積当たりのプラズマ密度 n_p とプラズマ層の厚み t_p とを掛けた量 $n_p t_p$ をここではプラズマ密度と呼ぶ。これは, n_p が小さい場合にプラズマ層の厚み t_p がアンテナの諸特性にほとんど影響を与えない事と, 照射する光の照度と直接関係しているのは単位面積当たりのプラズマ密度 $n_p t_p$ であることによる。

図2は, プラズマ密度 $n_p t_p$ を $0 \sim 2.0 \times 10^{17} m^{-2}$ の範囲で変化させたときのダイポールアンテナの入力インピーダンスの周波数依存性を (19) 式から求め, 示したものである。プラズマ密度が $2.0 \times 10^{17} m^{-2}$ に近ずくにつれ入力インピーダンスの周波数に対する変化が小さくなる。これは, プラズマ密度が $n_p t_p = 2.0 \times 10^{17} m^{-2}$ までの範囲内では, プラズマ層は導体として動作するのではなく損失媒質として動作し, アンテナから放射される電力がこの層で吸収され等価的に損失負荷が装荷された状態になるためだと考える。さらに高いプラズマ密度を与えてやればプラズマ層が良導体となり, 基板が接地されている場合の入力インピーダンスに近づくと考える。以上のことから, プラズマ密度を誘起すれば, アンテナのレーダ断面積の縮小が可能であることが期待できる [9][10]。

図3は, プラズマ密度 $n_p t_p$ を $0 \sim 2.0 \times 10^{17} m^{-2}$ の範囲で変えた場合のダイポールアンテナの放射パターンの変化 ($|E_\theta|, \phi = 0°$) を (20) 式から求め図に示したものである。周波数は 2.2GHz とする。またプラズマ密度が 0 m^{-2} の場合のパターンの振幅の最大値を 0dB をとしている。

同図からプラズマ密度の増加するにつれ, パターンの形状は変化しないが,

放射電界の振幅がプラズマの損失により小さくなっていくことがわかる。これはまた, すでに述べたごとく光によってダイポールアンテナのレーダ断面積を可変できる事を意味する。

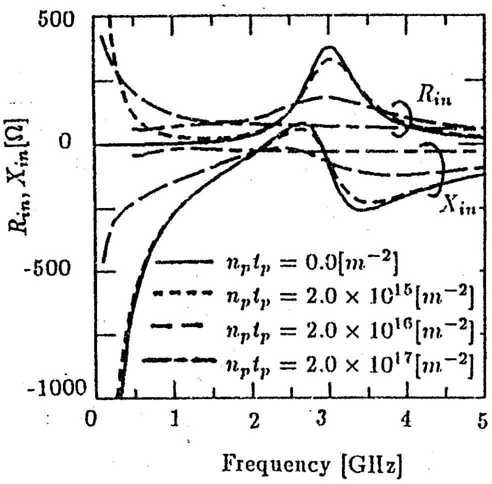


図 2 入力インピーダンス Z'_{in}の光プラズマ依存性

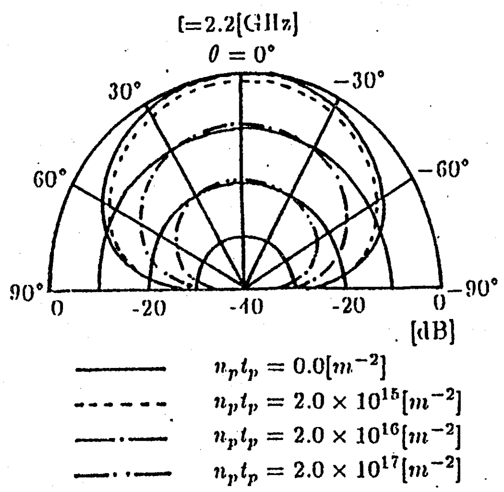


図 3 放射パターン (E 面) の理論値

3. 実験結果

試作したアンテナを図 4 に示す。基板は直径 10cm で抵抗率が約 5000 Ω・cm は $d = 0.4$mm のシリコンウェハーであり, その上に長さ 2.45cm, 幅 2mm にアルミニウムを約 1mm の間隔を置いて蒸着し, ダイポールアンテナを構成した。そして給電用線路には幅 1mm, 長さ 2.5cm のスリットを 2 つ加えてバランを附加した長さ 9.0cm, 内径 0.8mm, 外径 3.0mm の金属性の同軸ケーブルを用いた。同軸ケーブルは非常に長いので, 測定される入力インピーダンスは, 同軸ケーブルを含めたものとなる。したがって, 理論値でこれを考慮する必要がある。伝送線路理論により Z_{in}は次式で求まる。

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z'_{in} + jZ_o \tan kl_c}{Z_o + jZ'_{in} \tan kl_c}$$

ここで，

Z_{in}：同軸ケーブルを考慮した入力インピーダンス

Z'_{in}：ダイポールアンテナの入力インピーダンス

Z_o：同軸ケーブルの特性インピーダンス

k：同軸ケーブル内の波数

l_c：同軸ケーブルの長さ

である。また光源には光出力 2.2W のクセノンアークランプおよび 20W 赤外パルスレーザダイオード (浜松ホトニクス)L4356 を用いた。

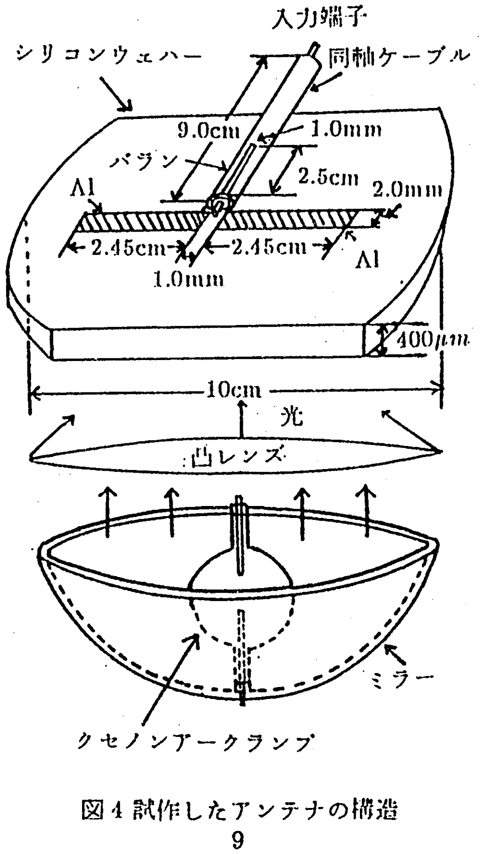


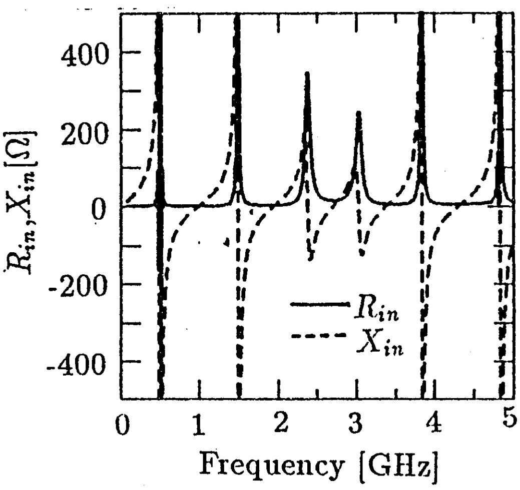
図 4 試作したアンテナの構造

3-1 光源がクセノンアークランプの場合

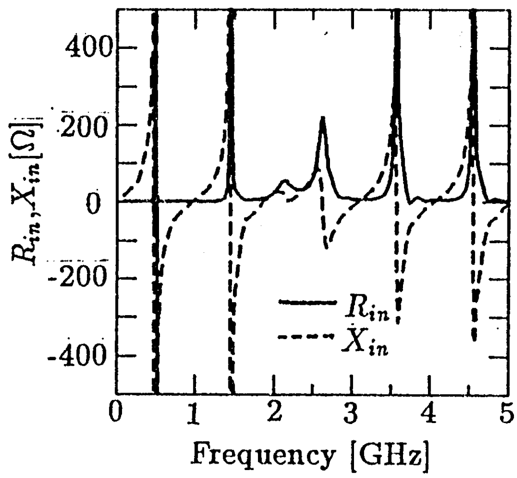
図 4 のように，クセノンアークランプをレンズで集光して試作したアンテナの裏面に径 1cm のスポットで照射した。そして 80MHz から 5GHz までの周波数帯域でアンテナの入力インピーダンスおよび放射パターンの測定を行った。光を照射しない状態における給電用の同軸線路をも含めた入力インピーダンス Z_{in} の測定結果と数値計算結果をそれぞれ図 5(a) 及び図 5(b) に示す。なお，図 5(a) に見られる f_{l1}=500MHz,f_{l2}=1.5GHz,f_{l3}=3.0GHz, f_{l4}=3.8GHz,f_{l5}=4.8GHz 付近のピークは給電用の同軸線路が有限長であるために生じたものと考える。図 5(a) で見られるピークが生じる周波数は図 5(b) の数値計算と若干のずれているものの，両者は類似の傾向を示す。

次に光を照射した状態における給電用の同軸線路をも含めた入力インピーダンスの測定結果と数値計算結果をそれぞれ図 6(a)，図 6(b) に示す。図 6(a) の実験結果から給電用の同軸線が有限長であるために生じたものと考えたピーク，共振周波数の位置は光を照射しない場合に比べほとんど変化しないものの，大きさは光を照射しない場合に比べ小さくなる。また図 5(a) と図 6(a) を比較すると，1.5GHz から 3.0GHz においてダイポールアンテナの入力インピーダンス光照射で 100Ω ほど変化することがわかる。図 6(b) はプラズマ密度を $n_pt_p = 1.0 \times 10^{17}m^{-2}$ に選んだときの入力インピーダンスの数値計算結果である。この図のピーク，共振周波数の位置，大きさは図 6(a) の共振周波数の位置，大きさなどにいくらか差異があるものの実験値と理論値は傾向が似ている。この結果により，光を照射するとアンテナに損失負荷が装荷された状態になることが実験的にも確認された。

図 7(a) は周波数が 2.1994GHz における光を照射しない場合と光を照射した場合の放射パターンの測定結果である。この図から光を照射した場合のパターンは光を照射しない場合のパターンに比べ,17dB 程度減衰している。これは図 7(b) に示す数値計算結果と一致しており，本実験でクセノンランプによって生じたプラズマ密度は $n_pt_p = 1.0 \times 10^{17}m^{-2}$ と推定できる。また，この値はシリコン導波路におけるプラズマ密度より 1 桁ほど大きい値である [14]。

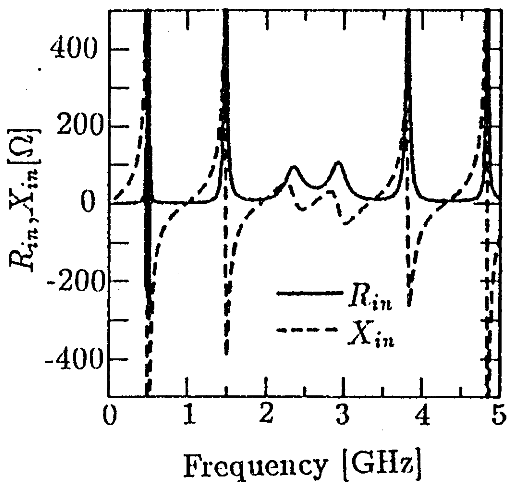


(a) 測定結果

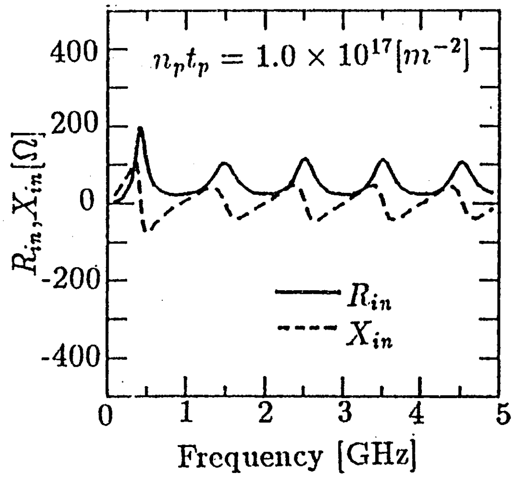


(b) 理論値

図 5 給電用同軸線路の長さを考慮し，光を照射しない場合の入力インピーダンス



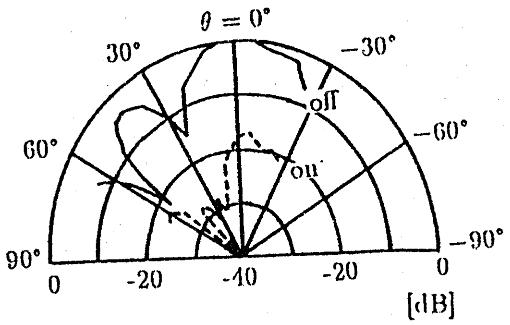
(a) 測定結果



(b) 理論値

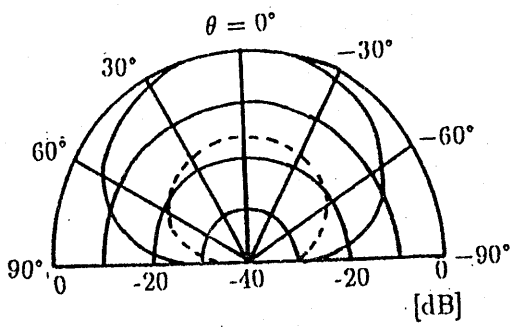
図 6 給電用同軸線路の長さを考慮し，光を照射した場合の入力インピーダンス

f=2.1994[GHz]



(a) 測定結果

f=2.2[GHz]



——— $n_p t_p = 0.0[m^{-2}]$
- - - - - $n_p t_p = 1.0 \times 10^{17}[m^{-2}]$

(b) 理論値

図 7 放射パターン

3-2 光源が赤外パルスレーザダイオードの場合

アンテナの特性がどの程度の速度の光によって制御されていることを確かめるために,図8にし示すようなブロックダイアグラムで実験を行った。発振器から周波数約2.750GHz,電力500mWの信号を試作したアンテナに入力し,

アンテナから送信した電磁波を約2.0m離れたところにある受信ダイポールアンテナで受け,スペクトラムアナライザーによって電力のスペクトラムを観測した。図9(a)は,赤外パルスレーザを裏面にスポット径1.0mmで照射し,その出力がOFFの場合の実験結果である。図9(b)は,赤外パルスレーザをONの場合すなわち光出力20W($\lambda = 880nm$)の実験結果である。図9(a),図9(b)を比較すると,光パルスによって試作したアンテナから放射される電磁波に変調がかかっていることがわかる。このことから,アンテナ特性がパルス光によっても制御されることが確認される。100$nsec$の入力パルス(繰り返し1kHz)信号にたいしてスペクトラムから判断される速度は数100 μsecである。この結果はシリコンを用いた場合現段階での光制御の速度は極めて遅い。なお,変調度はパルスの繰り返し周波数に対しては100%変調であった。

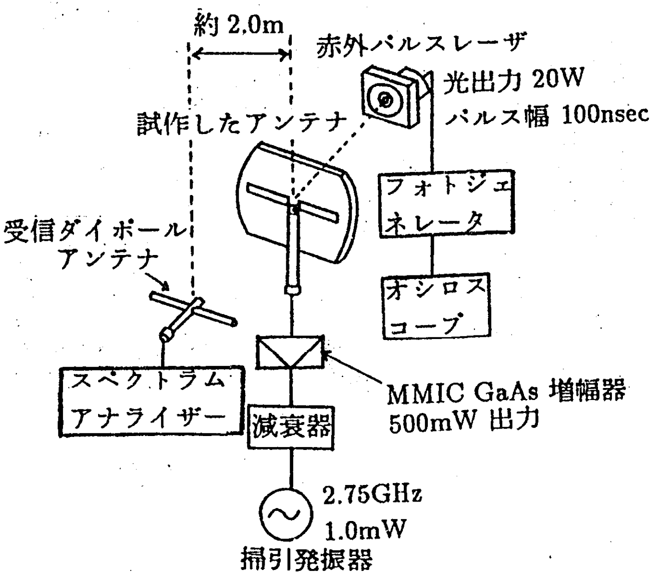
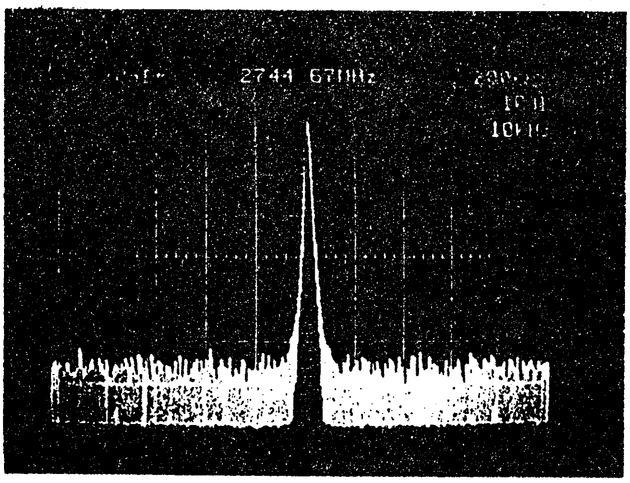
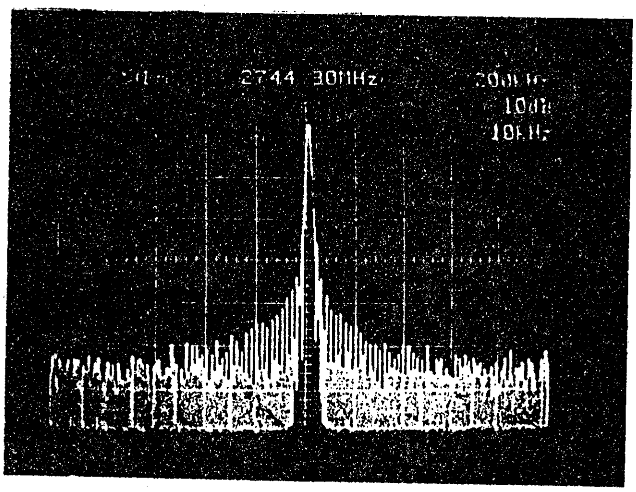


図8 測定のブロックダイアグラム
(赤外パルスレーザの場合)



(a) パルスレーザが OFF の場合



(b) パルスレーザが ON の場合

図 9 電力のスペクトラムの測定結果

4. むすび

プラズマが誘起されたシリコン基板のプリントダイポールアンテナの入力インピーダンス及び放射パターンをスペクトル領域モーメント法を用いて解析した。つぎにプラズマ密度の範囲が $n_p t_p = 0 \sim 2.0 \times 10^{17} m^{-2}$ に対して数値計算を行い，プラズマ密度に対するアンテナの入力インピーダンスの周波数依存性や放射パターンの変化を調べた。その結果，プラズマを誘起することによってアンテナに損失負荷が装荷された状態になるため，入力インピーダンスの変化が小さくなることがわかった。また放射パターンの場合，プラズマによりパターンの変化は現れず，振幅のみが減衰する事が分かった。次に実際にプリントダイポールアンテナを試作し，光源としてクセノンアークアンプを用いてその入力インピーダンスおよび放射パターンを測定した結果，理論と同様な特性を示す事が分かった。さらに光源として赤外パルスレーザダイオードを用いて実験を行い，光パルスを照射しアンテナから放射される電磁波に変調をかけるという形でアンテナ特性が光によって制御されるのを確認した。以上の結果は現在のところ光によりアンテナの入力インピーダンスの変化と放射パターンの振幅の変化を光プラズマが損失として働く範囲内で示したに過ぎないがプラズマ密度を更に増した場合あるいはダイポールアンテナの給電部のみに光を照射した場合を考え，アンテナのパターンそのものを光で制御する方法を明らかにする事，さらにピコセカンドパルスレーザにより直流からマイクロ波の励振などの問題を検討することは今後の大きな課題であるが，レーザ信号の高速化と光プラズマの寿命そして周波数との関係を調べる事も大きな課題である。

謝辞

常日頃御討論していただく本学島崎仁司講師に感謝の意を表します。

参考文献

[1] A.M.Johnson and D.H.Auston:"Microwave swiching by picosecond photoconductivity", IEEE J.Quantum Electron., **QE-11**,6,pp.283-287(June 1975).

[2] J.L.Freeman,S.Ray,D.L.West,and A.G.Thompson: "Optelectronic Devices for Unbiased Microwave Switching". IEEE MTT-S Int.Microwave Symp.Dig.pp673-676,1992.

[3] C.H.Lee,P.S.Mark and A.P.DeFonzo: "Optical control of millimeter-wave propagation in dielectric waveguides",IEEE J.Quantum Electron., **QE-16**,3,pp.277-288(May.1980).

[4] R.Karg and E.Kreutzer:"Light-controlled semiconductor waveguide antenna" ,Electron. Lett.,**13**,9,pp.246-247(April 1977).

[5] M.Matsumoto,M.Tsutsumi and N.Kumagai:"Radiation of millimeter waves from a leaky dielectric waveguide with a ligth-induced grating layer",IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.,MTT-35,no.11,pp. 1033-1042(Nov.1987).

[6] 島崎仁司,堤 誠,岡本卓二:"光制御スロット付マイクロストリップ線路の伝搬特性とアンテナへの応用",電子情報通信学会技術報告,**MW90-63** (1989年7月).

[7] J.L.Freeman ,B.J.Lambery and G.S.Andrews: "Optoelectronically reconfigurable monopole antenna",Electron.Lett.,30th, vol.28,no.16, pp.1502-1503(July 1992).

[8] 堤 誠:"光-マイクロ波相互作用とその応用", 平成5年レーザ学会学術講演会20周年記念(第13回)年次大会講演論文集招待論文 pp235-238

(1993年1月).

[9] D.M.Pozar : "Radiation and scattering from a microstrip patcth on a uniaxial substrates," IEEE Trans.Antenna Propagat.,vol.AP-35,pp613-621(June 1987).

[10] D.M.Pozar : "Radiation and scattering characteristics of microstrip antennas on normally biased ferrite substrates" IEEE Trans.Antenna Propagat.,vol.40,no.9,pp1084-1092(Sept 1992).

[11] T.Itoh,Ed., "Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures," John Wiley & Sons,New York,1989.

[12] I.E.Rana,N.G.Alexpoulos:"Current distribution and input impeadance of printed dipoles," IEEE Trans.Antenna Propagat.,vol.AP-29,no.1, pp99-105(Jan 1981).

[13] 丹靖, 澤谷邦男, 宇野亨, 安達三郎:"高誘電率基板上に作製されたアンテナの解析," 電磁界理論研究会資料,EMT-92-84,pp87-93(1992年10月).

[14] M.Tsutsumi and A.Alphones:"Optical Control of Millimeter Waves in the Semiconductor Waveguide" IEICE Trans. Electron.,vol.E76-C,pp175-182 (Feb 1993)

輻射科学研究会資料
ＲＳ９４－５

イメージファイバの漏話と電力結合方程式

小見山彰　　橋本正弘
大阪電気通信大学

１９９４年5月１３日
輻射科学研究会
(於同志社大学田辺校地)

COUPLED POWER EQUATIONS AND THE CROSSTALK IN AN IMAGE FIBER

Akira KOMIYAMA and Masahiro HASHIMOTO

SUMMARY In an image fiber containing a large number of cores, a certain class of crosstalk has been found to decrease with the distance along the fiber axis. This new class of crosstalk is absolutely distinguished from the usual crosstalk that increases with the distance. A theoretical model is presented based on the power transfer between three groups of modes supported by each core. The process of power transfer is described by coupled power equations. Values of the coupling coefficients can be determined from the measurement of the crosstalk. The equations are solved numerically for the transmission of a point image. The results are in good agreement with measurement results.

1. Introduction

Image fibers containing a large number of cores have been used to transmit optical images. The resolution of the transmitted image decreases by the leakage of light between cores, the so-called crosstalk. The resolving power of optical systems is usually estimated from the transmission characteristics of the image of a knife edge illuminated by spatially incoherent light.

Figures 1(a) and 1(b) are examples of the transmitted edge images through a long fiber and a short fiber, respectively. The right halves of the photographs correspond to the dark parts screened by the knives where arrows indicate locations of the edges. For the 10m fiber (see Fig.1(a)), the leakage observed is still localized near the edge. This *local crosstalk* increases with the fiber length and can be described by the theory[1] based on the Gloge's power transfer model[2]. For the 0.6m fiber (see Fig.1(b)), however, the leakage spreads in a large area on the background of the dark image, decreasing with the fiber length. This phenomenon of crosstalk is new and thus obeys a new rule different from that for the local crosstalk[3] mentioned above.

A rough sketch of crosstalk in an image fiber was first given by Hosono[4] using the weak coupling theory. The full wave theory was presented subsequently[5-7]. These authors did not deal with the irregularity of the cores although manufactured fibers have irregularities in size and arrangement.

In this paper, we present a power transfer model that describes this new class of crosstalk. We compute the crosstalk by the model, showing that the computed results are in good agreement with measurement results.

2. Modeling of the crosstalk

Common image fibers have narrow cores with diameters less than 5 μm to achieve high resolving power. The refractive index difference between core and cladding is approximately 0.02, which is much larger than that of the single-mode fiber used in optical communication systems. The cores can, therefore, support about ten modes at a wavelength of visible light. Each core differs to the degree of several percents in size; modes propagating along the cores differ slightly. The low-order modes contribute mainly to the transmission of the optical image. Such modes excited at the input end transmit the power to the output end. The high-order modes and near-cutoff modes (highest-order modes) give rise to the crosstalk. The near-cutoff modes are also excited at the input end. The excited modes couple with the neighboring near-cutoff modes and thereby the power leaks out into the neighboring cores. The leakage power spreads in a large area up to the boundary between the fiber and the coating. The power is completely absorbed into the coating.

The high-order modes result from the coupling with the near-cutoff modes. The power transfer between the high-order modes and the near-cutoff modes takes place more slowly than that between the near-cutoff modes. This power transfer progresses through two stages. In the first stage, the net power is transferred from the near-cutoff modes to the high-order modes and is accumulated there. The power of the high-order modes increases gradually with the fiber length, whereas the power of the near-cutoff modes decreases rapidly due to the absorption into the coating. The process is now shifted to the second stage as the energy flow between the near-cutoff modes and the high-order modes reaches the equilibrium state. In this stage, the accumulated power of the high-order modes is converted to the power of the near-cutoff modes and is lastly absorbed into the coating.

Since the high-order modes and the near-cutoff modes play different roles as groups of modes, we name them *mode b* and *mode c*, respectively.

In this paper, only the first-order effects of coupling between the modes in the nearest neighboring cores are taken into consideration. The strength of coupling is assumed to be independent of position and direction on the cross-section. Thus the coupling coefficients between mode cs and between modes c and b take constant values. They are denoted by d_c and d_g, respectively. The value of the coupling coefficient d_c is adequately large compared to that of d_g. The cores are arranged in a hexagonal latticed pattern of spacing h, as shown in Fig.2. The core positioned at (ih, jh) in the rectilinear coordinate system of which two axes cross at an angle of 60 degrees is labeled by (i, j). The powers of mode c and mode b transmitted along the core (i, j) are denoted by P_{cij} and P_{bij} , respectively. Then we obtain the following coupled power equations:

$$\begin{aligned}\frac{dP_{cij}}{dz} = \; & d_c\{(P_{ci-1j+1} - P_{cij}) + (P_{ci-1j} - P_{cij}) + (P_{cij-1} - P_{cij}) + (P_{ci+1j-1} - P_{cij}) \\ & +(P_{ci+1j} - P_{cij}) + (P_{cij+1} - P_{cij})\} + d_g(P_{bij} - P_{cij})\end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{dP_{bij}}{dz} = d_g(P_{cij} - P_{bij}) \tag{2}$$

where z is the distance along the fiber axis. The sum of the powers of mode c and mode b yields the crosstalk. In order to specify the condition of complete absorption by the coating, it is helpful to introduce dummy cores surrounding the outermost core of the fiber. The power on the dummy core is assumed to be zero. Only the mode c is excited at the input end, so that the initial power of mode b is zero at the input end.

At a short distance, the total leakage power P on the cross-section decreases with the fiber length in an exponential form (see Appendix)

$$P \propto e^{-\frac{3}{2}(2.4\frac{h}{a})^2 d_c z} \tag{3}$$

where a denotes the radius of the fiber and the value of 2.4 is a zero of the Bessel function J_0 . The value of the coupling coefficient d_c is determined from the attenuation rate of the power. At a long distance, the total leakage power P varies in a form (see Appendix)

$$P \propto e^{-d_g z} \tag{4}$$

The attenuation rate gives us the value of d_g.

3. Comparison with the measurement results

Image fibers used for the measurement have a diameter of 0.64mm, which are composed of about five thousand cores. Diameters of the cores are about 5 μm in average. Spacings between cores are about 8 μm . A photograph of the cross-section of the fiber is shown in Fig.3. The cores (white parts) are considerably unequal in size. We prepared three fibers with lengths of 0.6m, 1.5m and 10m, respectively.

The phenomenon of crosstalk can simply be observed by illuminating one of cores with the He-Ne laser operated at a wavelength of 0.633 μm . The illuminated core brightens strongly on the output end. The local crosstalk (usual crosstalk) is confined to the narrow area near the illuminated core. Nevertheless, the background of it in the surrounding area glimmers. The leakage of light can be generated more strongly by exciting high-order modes on the core. To do this, we adopt a tightly focused gaussian beam wave as a source of light; the diameter of the beam wave at the waist is about 1.4 μm . By this laser source, the input end of the fiber with a length of 0.6m is illuminated. Figure 4 shows the views of the output end of the fiber. Figure 4(a) is a photograph of the optical image corresponding to a point image observed when a central core is excited where luminous cores and dark cores are arranged in a mosaic pattern. A similar pattern is observable when a core near the coating is excited (see Fig.4(b)).

The total power of the crosstalk is measured. To this end, we obstruct the transmitted light and the local crosstalk, placing a small thin metallic plate in front of the optical power meter. The measured values vary depending on the positions of the illuminated cores because of their irregularities in size and arrangement. Illuminated cores are randomly chosen near the center of the cross-section and all measured values are plotted. Results are given in Fig.5. The crosstalk decreases with the fiber length. The slope of the curve is steep at a short distance and becomes gentle with increasing the distance. Their slopes give the following values of the coupling coefficients: d_c =130[1/m] and d_g =0.15[1/m]. The initial power of mode c is estimated to be about 80 μW as well. The total output power without the obstacle is about 1.8 mW in average. The dashed line in Fig.5 indicates the numerical solution of the coupled power equations (1) and (2).

The measured values of the crosstalk vary in a long range depending on the positions of the illuminated cores. The variation differs essentially from the short range variation due to the irregularities of the cores. Figure 6 shows the measurement results for the fiber with a length of 0.6m. The position of the illuminated core is denoted by a distance from the coating. Thus a short distance means that the core is located near the coating. The crosstalk decreases rapidly there.

The power distributions on the output end are measured. The power on each core varies randomly from core to core. To average the power in position, the total power on about ten cores is measured with a pinhole. Measurement results are shown in Fig.7. The position of the illuminated core is indicated by an arrow. Since the crosstalk originates from the illuminated core, the leakage power takes a large value near there and decreases in the transverse direction as expected for a short fiber (see Fig.7(a)). The peak can be also observed in Fig.7(b) despite the leakage of light over the distance of ten meters. The power distribution is similar to that for the short fiber in Fig.7(a). The numerical solutions (dashed lines) are in good agreement with the measurement results.

4. Conclusion

We have presented a model that describes a new class of crosstalk observed in a large area on the background of the transmitted image through a short image fiber. The model is constructed on the basis of the power transfer between three groups of modes supported by each core. The theory enables us to estimate the deterioration of quality of any transmitted images due to the crosstalk.

References

1. A.Komiyama and M.Hashimoto: "Crosstalk and mode coupling between the cores of image fibers", Electron.Lett., 25, pp.1105-1106, 1989.

2. D.Gloge:"Optical power flow in multimode fibers", Bell Syst.Tech.J., 51, pp.1767-1783, 1972.

3. A.Komiyama and M.Hashimoto: "New class of crosstalk in image fibers", Opt. Comm., 107, pp.49-53, 1994.

4. T.Hosono:"Transmission characteristics of image fiber", Trans.IECE Japan, J66-C, pp.843-850, 1983.

5. K.Mori, S.Yamaguchi, and T.Hosono: "Transmission characteristics of one-dimensional image fiber - Strong-coupling case -", *ibid.*, J67-C, pp.706-713, 1984.

6. T.Hosono, S.Yamaguchi, and K.Mori: "Improvement of crosstalk characteristics of image fiber", *ibid.*, J68-C, pp.270-277, 1985.

7. S.Yamaguchi, A.Shimojima, and T.Hosono:"Analysis of transmission characteristics of image fiber - Dependence on higher modes and wavelength -", Trans.IEICE, J71-C, pp.1274-1282, 1988.

Appendix

The coupled power equations (1) and (2) can be rewritten in a form of partial differential equations by introducing continuous coordinate variables associated with a pair of numbers (i,j). By choosing the radial coordinate ρ and the angular coordinate θ in the circular cylindrical coordinate system as the continuous variabes, we have the associated differential equations

$$\frac{\partial P_c}{\partial z} = D\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial P_c}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 P_c}{\partial \theta^2}\} + d_g(P_b - P_c) \tag{5}$$

$$\frac{\partial P_b}{\partial z} = d_g(P_c - P_b) \tag{6}$$

where

$$D = \frac{3}{2}h^2 d_c \tag{7}$$

P_c is subjected to the boundary condition at $\rho = a$:

$$P_c(a,\theta,z) = 0 \tag{8}$$

The initial condition corresponding to the transmission of a point image is expressed as

$$P_c(\rho,\theta,0) = \frac{P_0}{\rho}\delta(\rho)\delta(\theta) \tag{9}$$

$$P_b(\rho,\theta,0) = 0 \tag{10}$$

where P_0 is the input power.

An approximate solution of eqs.(5) and (6) can be obtained by the iterative method. The total power P as a function of z defined by

$$P(z) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \{P_c(\rho,\theta,z) + P_b(\rho,\theta,z)\}\rho d\rho d\theta \tag{11}$$

is given as follows:

$$P(z) = P_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{j_{0m}J_1(j_{0m})}\{(1 - \frac{d_g}{\alpha_m})e^{-\alpha_m z} + \frac{d_g}{\alpha_m}\}e^{-d_g z} \tag{12}$$

where

$$\alpha_m = (\frac{j_{0m}}{a})^2 D \tag{13}$$

j_{0m} is the mth zero of the Bessel function of order zero, J_1 is the Bessel function of order one and, the terms of higher order $d_g^2, d_g^3, d_g^4, \cdots$ are neglected.

The asymptotic expressions for $P(z)$ are given as follows, assuming $d_c \gg d_g$.

$$P(z) = P_0 \qquad \text{for } z < z_a, \tag{14}$$

$$P(z) = 1.60 P_0 e^{-(\alpha_1 + d_g)z} \qquad \text{for } z_a < z < z_e, \tag{15}$$

$$P(z) = 1.44 \frac{d_g}{\alpha_1} P_0 e^{-d_g z} \qquad \text{for } z_e < z, \tag{16}$$

where

$$z_a = \frac{0.47}{\alpha_1 + d_g} \tag{17}$$

$$z_e = \frac{ln(1.11\frac{\alpha_1}{d_g})}{\alpha_1} \tag{18}$$

The complete z dependence of the total power is illustrated (broken lines) in Fig.8 for the case of $d_c = 130(1/m)$ and $d_g = 0.15(1/m)$. The solid lines indicate the asymptotic solutions given by eqs.(14), (15) and (16). Values of z_a and z_e are 0.55 (m) and 2.34 (m), respectively.

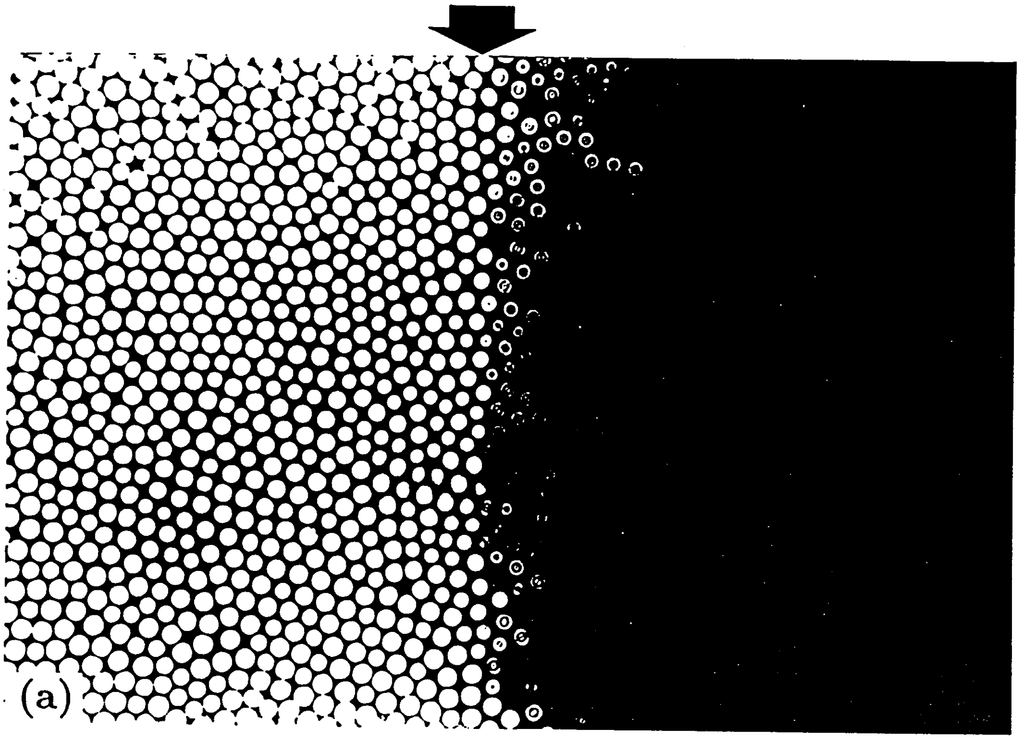


Fig.1 Transmitted edge images through fibers with lengths of (a)10m and (b)0.6m.

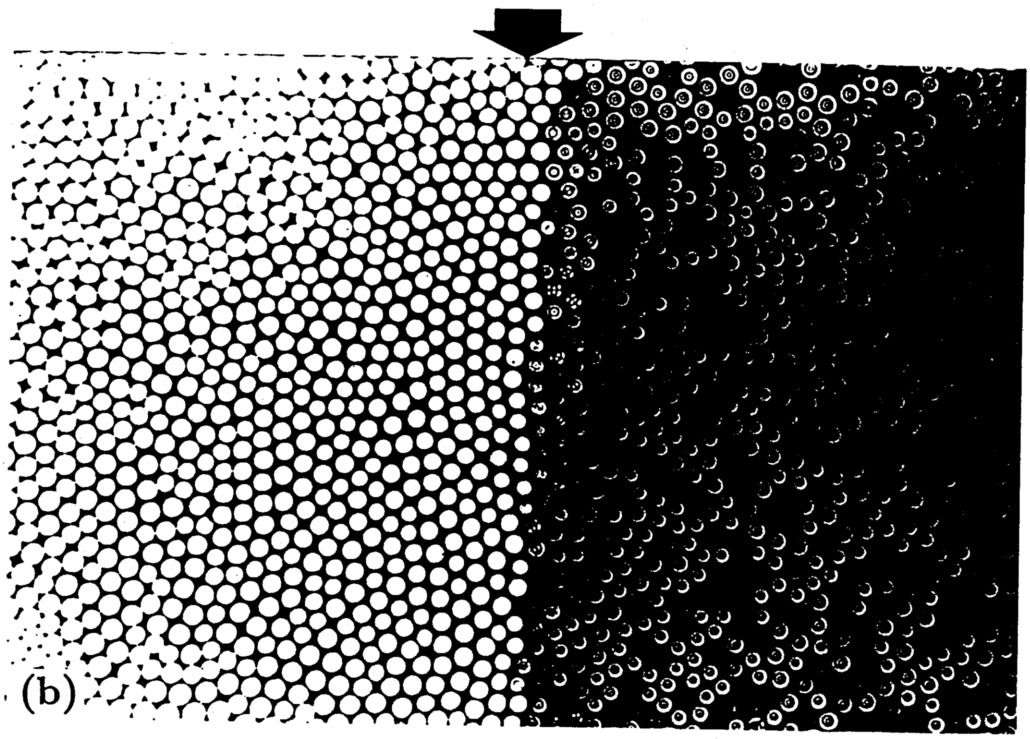


Fig.1 Transmitted edge images through fibers with lengths of (a)10m and (b)0.6m.

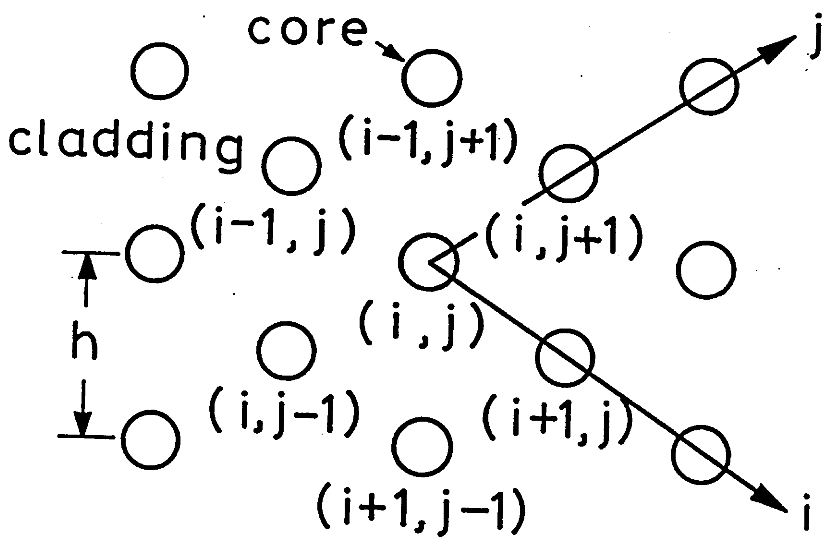


Fig.2 Arrangement of the cores.

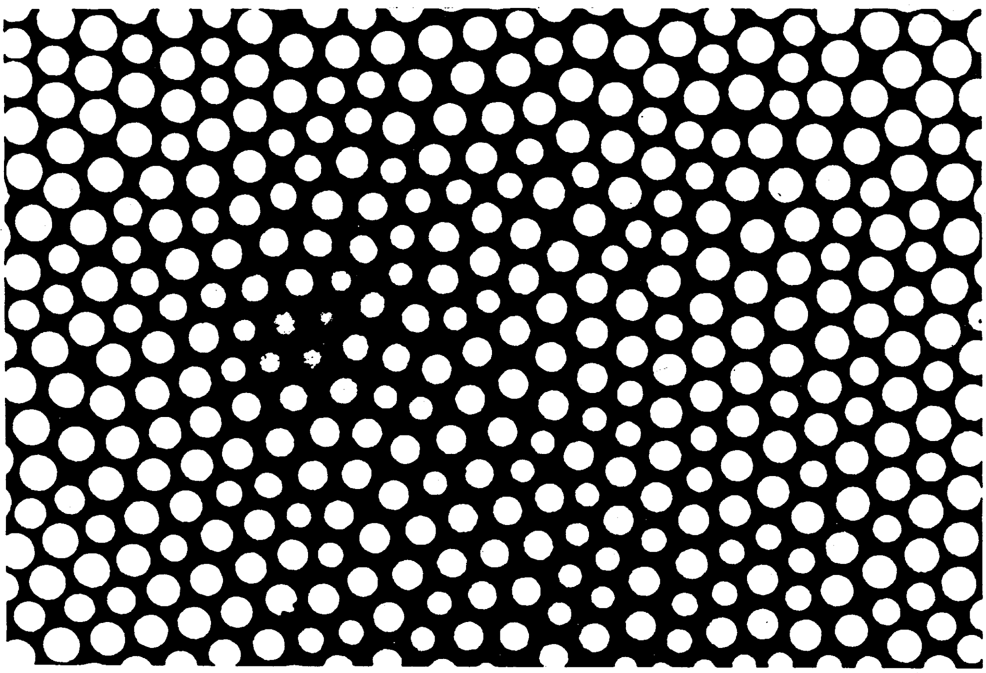


Fig.3 Photograph of the cross-section of the fiber.

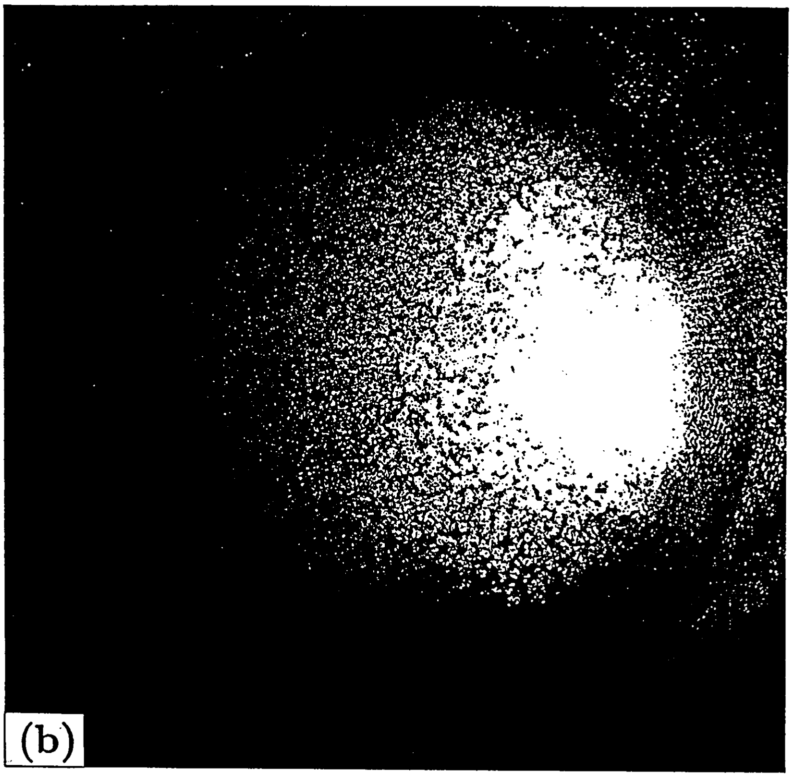


Fig.4 Views of the output end of the fiber with a length of 0.6m; (a) a central core 300 μm distant from the coating and (b) a core 100 μm distant from the coating are illuminated.

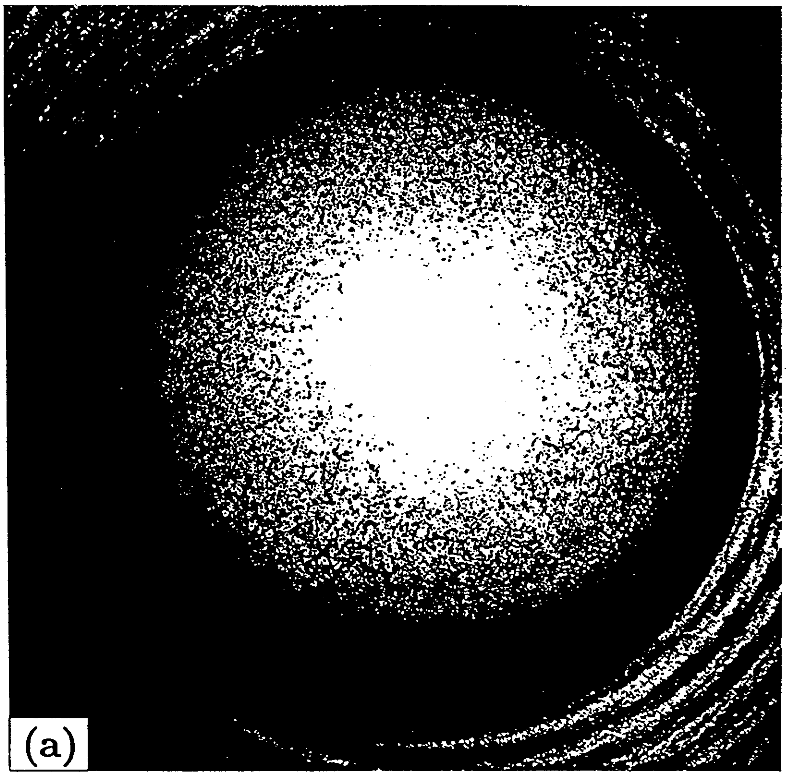


Fig.4 Views of the output end of the fiber with a length of 0.6m; (a) a central core 300 μm distant from the coating and (b) a core 100 μm distant from the coating are illuminated.

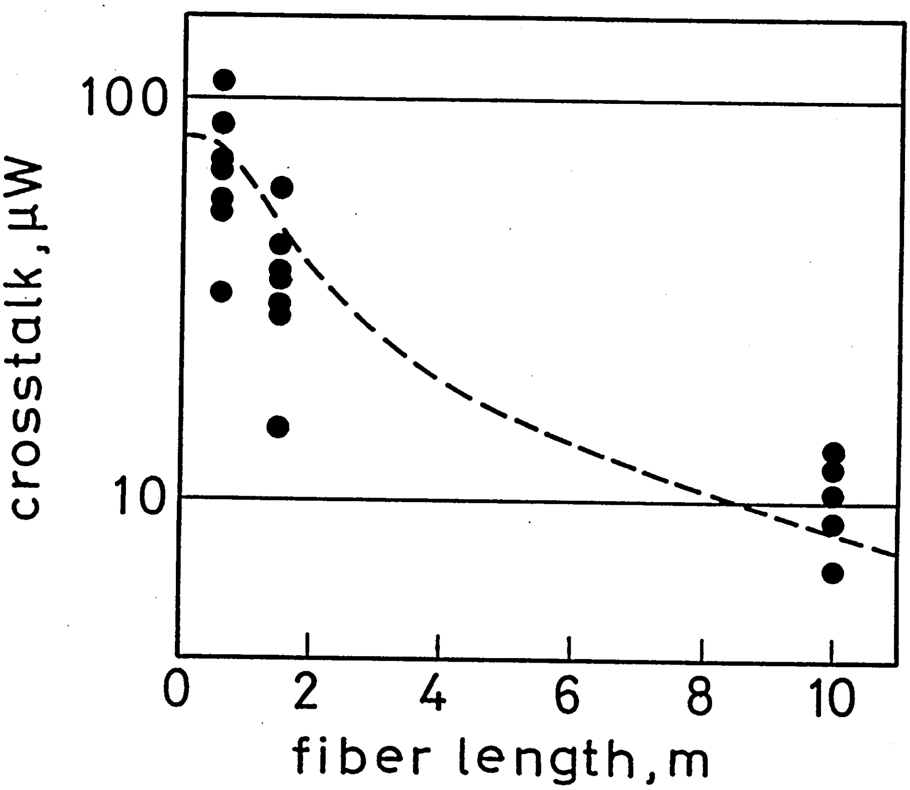


Fig.5 Crosstalk against the fiber length. Central cores are illuminated.

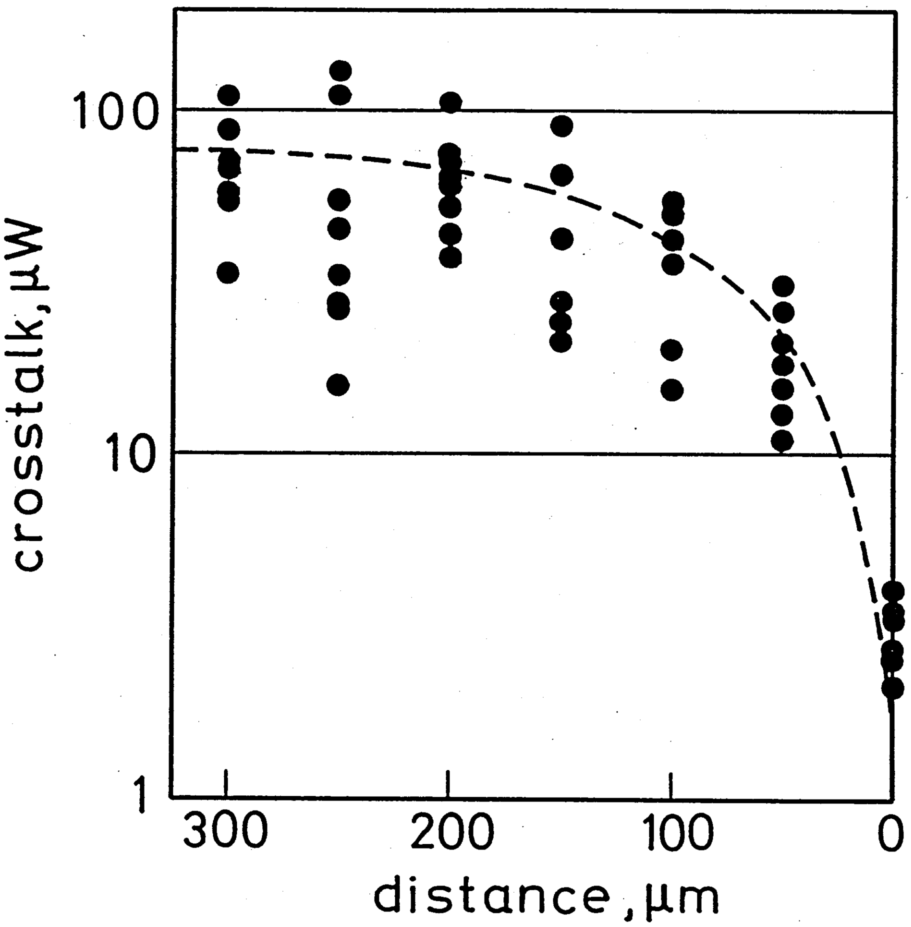
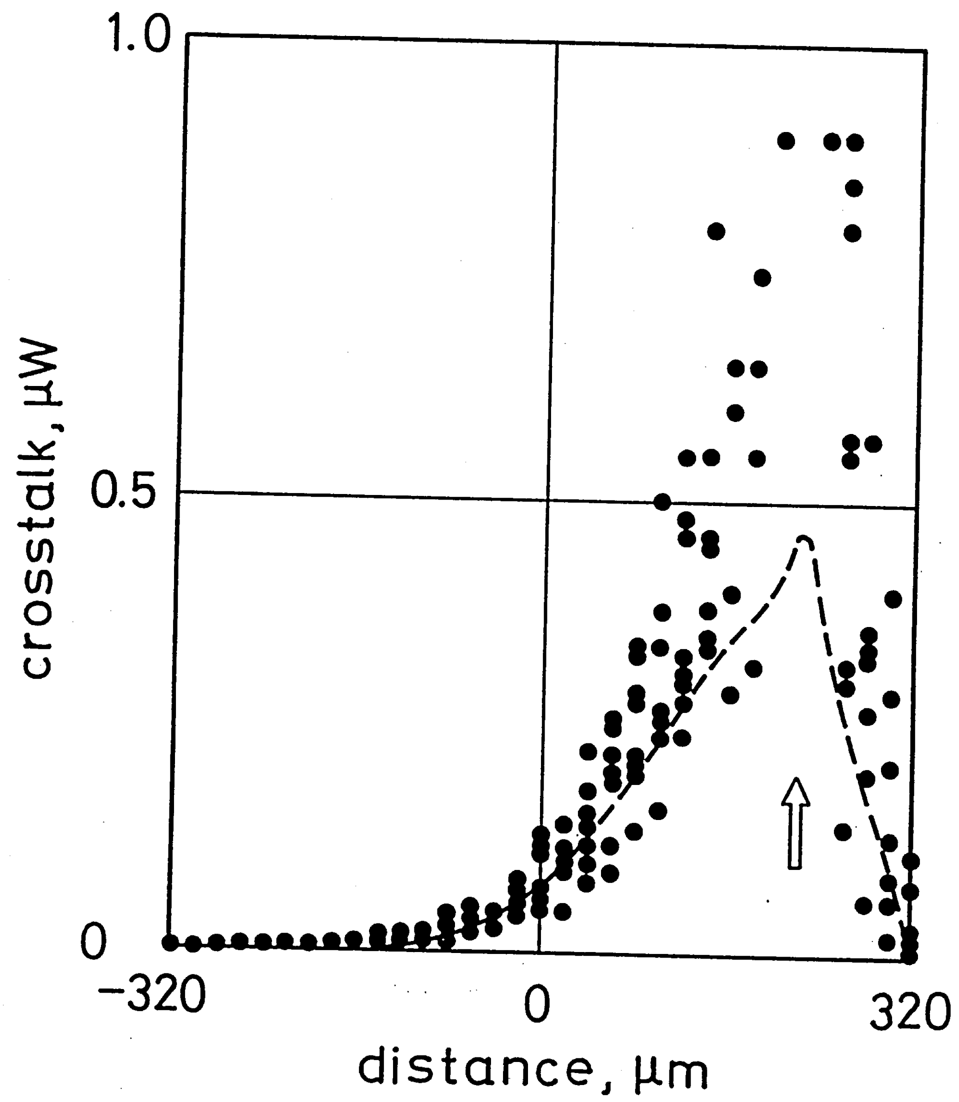
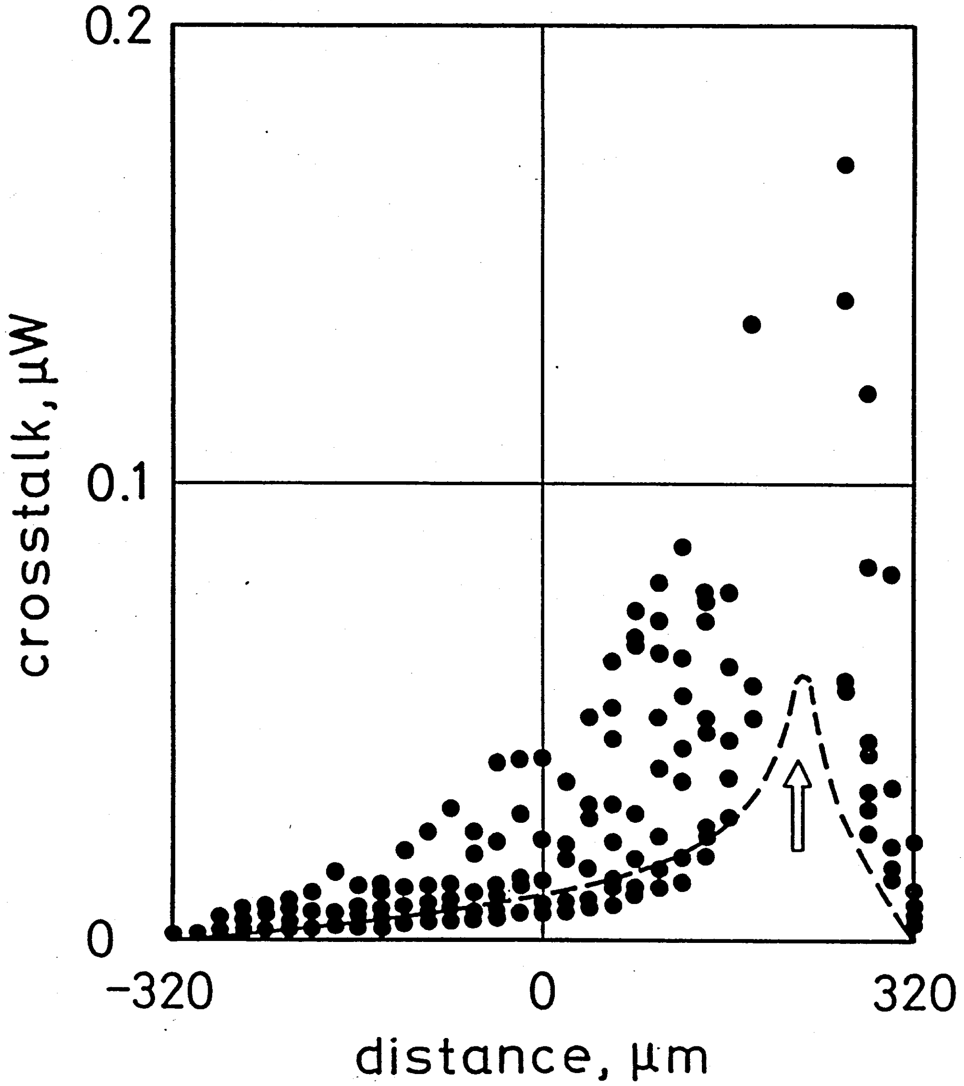


Fig.6 Crosstalk against the positions of the illuminated cores. The fiber length is 0.6m.



(a)

Fig.7 Power distributions on the output end of the fiber with lengths of (a)0.6m and (b)10m.



(b)

Fig.7 Power distributions on the output end of the fiber with lengths of (a)0.6m and (b)10m.

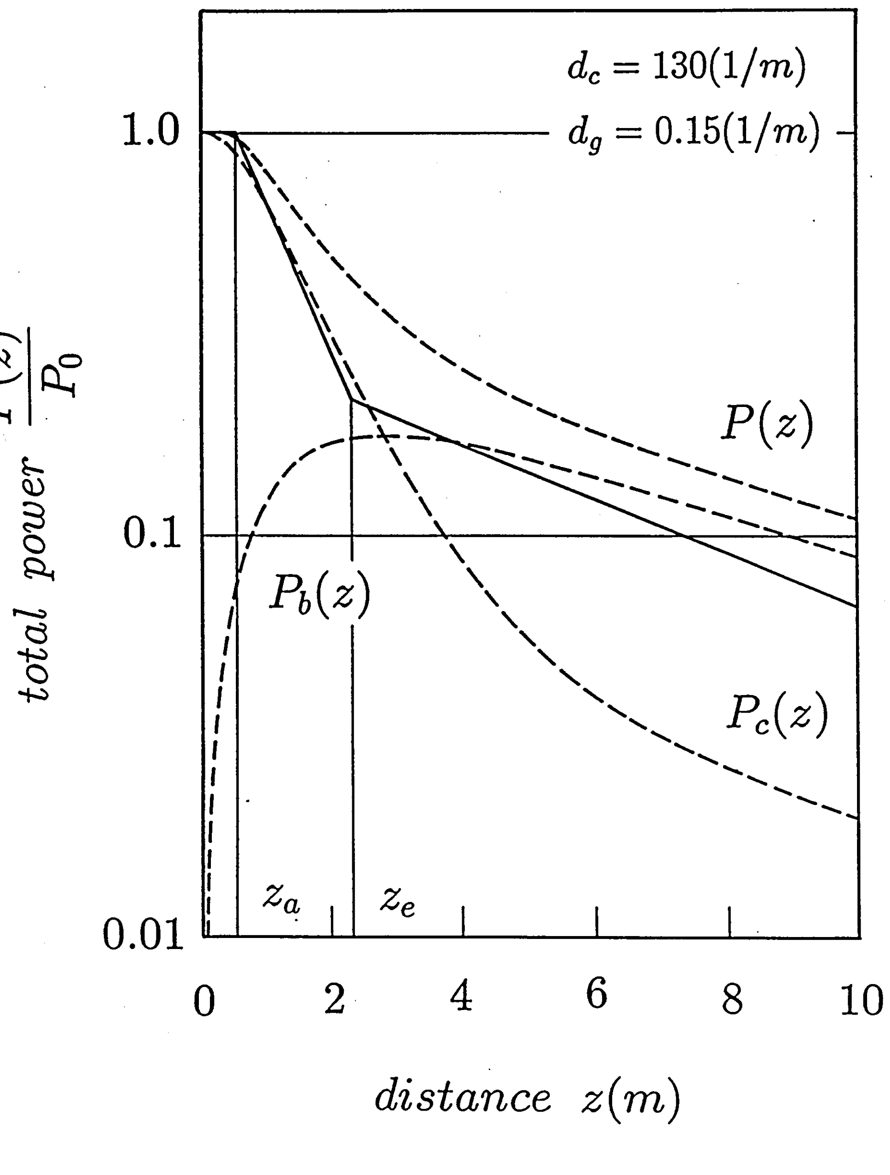


Fig.8 Total power against the distance.

（招待講演）

輻射科学研究会資料
RS 94-6

不規則超格子

–その新しい特性と機構–

佐々木　昭夫
（京都大学工学部電気工学教室）

平成6年7月22日（金）
於　京都大学　工学部

摘要

原子配列、化学組成、不純物分布などの不規則によって生ずる性質と、エピタキシャル成長が可能であるという単結晶の性質を兼ね備えた不規則結晶半導体を紹介し、その一例として、不規則超格子について述べる。層厚を不規則に変化させた超格子によって、発光機能が強められ、同一組成のバルク混晶、規則超格子と比べて、低温において、AlGaAs系で少なくとも500倍以上、AlGaP系で約100倍以上の強い発光が観測された。この新しい物性の発光機構を調べるために光励起発光の温度特性、光吸収、時分解発光の測定を行った。それらの結果を基にして、この新しい物性は、人工的に導入された不規則による局在準位によるものと推測される。

1　まえがき

半導体材料において、代表的なものを二つあげるとすると、Si と GaAs になる。Si は個別電子デバイス、集積回路に、GaAs はマイクロ波、光デバイスに主として用いられている。こうした住み分けが、半導体材料において、ほぼ常識のようになっている。このことは、Si のエネルギー帯構造が間接遷移型であり、GaAs が直接遷移型であることが理由となっている。間接遷移半導体内の電子、正孔が取り得る運動量とエネルギーの関係は図 1(a) に示す関係にある。伝導谷の底部にある電子が価電子帯頂部にある正孔と再結合するとき、光の放射によりエネルギーを放出する。しかし図に示すように、電子と正孔間に運動量の差がある。この運動量の差を半導体の格子振動に与えるかあるいは受け取らなければ電子が正孔と再結合をし得ない。これに比べて、図 1(b) に示す直接遷移半導体内の電子と正孔は最初から同じ運動量にある。以上のような事柄により、間接遷移半導体は、直接遷移半導体に比べて、発光機能がほぼ1/1000劣るものである。

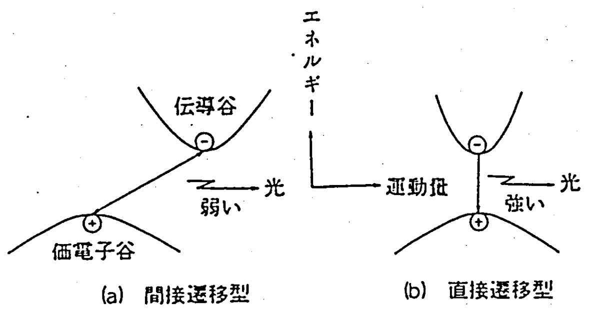


図 1　間接、直接遷移半導体内の電子、正孔の取り得るエネルギー、運動量の関係

Si は単一元素からなり、SiO_2という良好な絶縁層をもち、熱伝導が良いと云う特長をもつにもかかわらず、オプトエレクトロニクスにおける半導体材料の主役になり得ていない。また AlP, AlAs のようなエネルギー帯幅の広い III–V 族半導体では、そのエネルギー帯構造が間接遷移型である。したがって可視域で橙、黄、緑色の発光が得がたい状況である。したがって間接遷移型の半導体をして、常温で約 1000 倍に強められた発光が得られ、直接遷移型並の発光を実現することがおおいに望まれる。実現できれば、Si による発光デバイスが得られ、Si チップ間を光で結ぶ光接続が容易となり、また橙、黄、緑色の高輝度発光ダイオード、半導体レーザーが可能となる。

2　不規則結晶半導体と不規則超格子

原子配列が不規則であるアモルファス材料、極微細寸法により量子効果を現す超微粒子などは、それを構成する母体材料の結晶とは異なる光機能を示す（表1）。しかし、それらの材料を基板として、その上にエピタキシャル成長させることはほとんど不可能である。デバイス作製を念頭におくとき、エピタキシャル成長のできない材料では、エレクトロニクスへの波及効果は、非常に限られる。

アモルファス材料や量子効果を現す材料と類似の光機能をもち、かつエピタキシャル成長可能な材料として考え出されたものが“不規則結晶半導体”である[1]。この半導体では、一つの面内で、元素の配列が単結晶同様に規則正しく配列しており、その面上でエピタキシャル成長が可能である。しかし、その面からずれた方向、例えば直角方向には、元素配列が、自然にせよ人工的にせよ不規則になっている。この不規則配列が、この半導体にアモルファス材料類似の光機能をもたせることになる。さらに特別な場合として、格子定数の非常に似通った材料では、例えばAlP半導体中に、GaPの量子ドットが三次元空間内に分布しているような半導体を考えることができる。この半導体材料では、不規則効果とともに、ドットによる量子効果をも期待することができる。不規則を作り出すのに、元素の空間分布のみならず、化学組成、不純物添加のいずれか、またこれらの組み合わせたものの不規則によって、実現することができる。

この不規則結晶半導体の一つの例が、本論文標題の不規則超格子である。それらの例を図2に示す[2]。III–V族半導体中で、もっとも広く用いられているAlGaAs系半導体を例にとり説明する。$(AlAs)_m(GaAs)_n$で記される通常の超格子では、AlAs層のm分子層、GaAs層のn分子層が交に規則正しく繰り返されて構成されている。このように規則性をもつものを、規則

表1　各種材料とその光機能特に発光機能、およびその材料を基板とするときのエピタキシャル成長の可能性を示す。○印は優れ、×は劣っていることを示す。

材料	光機能	エピタキシャル成長
間接遷移型単結晶	×	○
アモルファス	○	×
超微粒子	○	×
不規則結晶	○	○

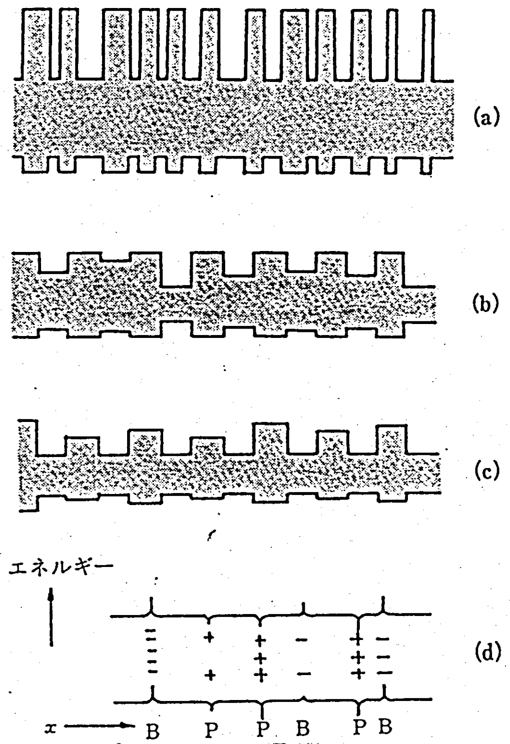


図2　不規則超格子の例[2]、縦軸は各層のエネルギー幅、横軸は各超格子の成長方向を示す。(a) 層厚不規則、(b) 井戸層化学組成不規則、(c) 障壁層化学組成不規則、(d) δドーピング技術による不純物添加不規則、不純物の例として、ホウ素B、リンPを記している。

超格子と呼ぶ。図2(a) で、AlAs 層、GaAs 層は交互に現れるが、m, n の値が不規則に変化、すなわち各層の厚さが不規則に変化するものである。(b) では、層厚は規則正しい変化をするが、井戸層に用いている $Al_xGa_{1-x}As$ の Al 組成比 x を、各井戸層ごとに不規則に変化する。(c) では、障壁層に $Al_yGa_{1-y}As$ を用いて、Al 組成比 y を、各層ごとに不規則に変化する。(d) では、Si または GaP に、不純物のδドーピング技術を用いて、不純物添加の繰り返し周期、添加量を不規則に変化するものである。さらに、これらの四つの方法のうち、任意の数の方法を組み合わせることによる不規則超格子も可能である。

3 試料作製

これまでに、AlGaAs 系不規則超格子と AlGaP 系不規則超格子について研究を行ってきた。AlGaAs 系は (100) 方位 GaAs 基板上、温度 600 ℃にて分子線エピタキシャル法により作製した。その詳細は、これまで発表してきた文献 2) に譲り、ここでは、最近の新しい AlGaP 系の作製法について述べる[3]。ホスフィン (PH_3) に代わり、安全で熱分解温度の低いターシャリブチルホスフィン ($(CH_3)_3CPH_2$, TBP) を用いた常圧有機金属気相エピタキシャル法で作製した。(100) 方位 S 添加の GaP を基板として用い、通常より約 100 ℃低い、720 ℃で成長を行った。これは Al, Ga の相互拡散を押さえ急峻な界面を得るためである。低温成長による界面モホロジーの劣化を、$(NH_4)_2S_x$ 処理により防ぎ、平滑にして鏡面のモホロジーを得た。

作製した試料は、三種類である。層厚が $1\mu m$ の $Al_{0.5}Ga_{0.5}P$ の b-AL, 層厚が $0.54\mu m$ の 5 分子層繰り返しの $(AlP)_5/(GaP)_5$ o-SL, および同じ厚さの $(AlP)_m(GaP)_n (m, n = 3, 6, 9)$ d-SL である。ここで b-AL は bulk alloy でバルク混晶を、o-SL は ordered superlattice で規則超格子を、d-SL は disordered superlattice で不規則超格子を表す。なおこの表記の d-SL は、3 分子層、6 分子層、9 分子層のいずれかが不規則に現れるが、その現れる確率は、全体を通じていずれも 1/3 である。したがって、上記三種類の試料は、いずれも巨視的には、AlP と GaP の等量からなるが、その微視的元素配列は三種とも異なるものである。不規則超格子の層厚の配列例を図 3 に示す。

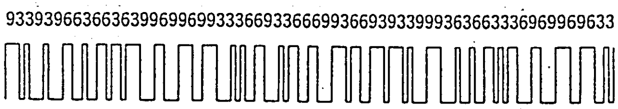


図 3　作製した不規則超格子の層厚変化例、数値は各分子層数を示す

4 光学特性

4.1 光励起発光

3 種類の試料を同一デュワーびんに入れ、光励起発光 (photoluminescence, PL) 強度を、4.2K, 77K, 常温で測定した。励起光には Ar レーザからの波長 5145Å の光を用い、0.5W で各試料を励起した。各温度に対する PL 強度を図 4 に示す[4,5]。不規則超格子のバルク混晶に対する光励起発光の強度比は、20 倍 (4.2K), 2×10^3倍 (77K), 45 倍（常温）である。また規則超格子に対する強度比は 10^2 倍 (4.2K), 3×10^3倍 (77K), 30 倍（常温）である。光励起発光強度が最も

強くなるところの波長は4.2Kで0.605μm（バルク混晶）、0.617μm（規則超格子）、0.633μm（不規則超格子）である。77K, 常温におけるバルク混晶、規則超格子からの発光スペクトラムは非常に広く、発光強度、位置の比較は難しい。以上の実験結果から、不規則超格子は、同一Al組成のバルク混晶、規則超格子に比べて、発光波長において少し長波長側へのずれ(red shift)が生じているが、発光強度において77Kで少なくとも500倍以上、常温で数10倍という非常に強力な発光機能を備えていることを知る。

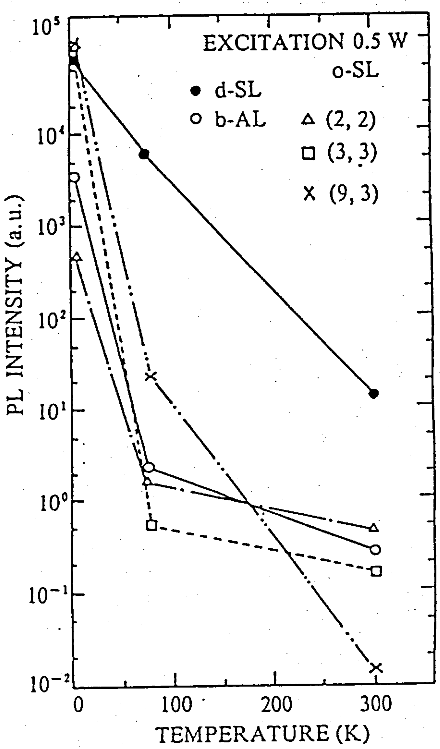


図4　$Al_{0.5}Ga_{0.5}As$ バルク混晶 (b-AL), (AlAs)(GaAs) の（2層, 2層）、（3層, 3層）、（9層, 3層）の各規則超格子 (o-SL) 及び $(AlAs)_m(GaAs)_n$, $m, n = 1,2,3$, 不規則超格子 (d-SL) からの光発光強度の温度に対する変化。(K. Kasu, *et al.*: Jpn. J. Appl. Phys. **29** (1990) 828 より転載)

4.2　光吸収

次に我々は、各試料の光吸収の波長変化の測定を行い、その結果に光発光スペクトラムを重畳させたものを図5に示す[4)]。$Al_{0.5}Ga_{0.5}As$ バルク混晶からの発光は弱く、かつ光吸収端から約80meV低い位置で発光している。これに対して不規則超格子からの発光は強く、光吸収端内で発光している。

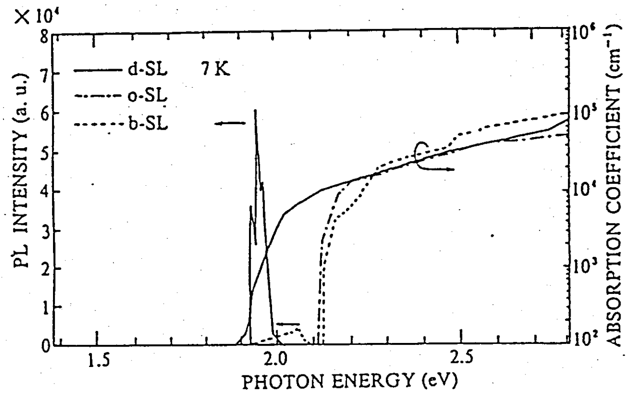


図5　7Kでの光吸収特性と4.2Kでの光発光スペクトラム。吸収特性は温度変化が少なく7Kと4.2Kで大きな違いはない。(M. Kasu, *et al.*: Jpan. J. Appl. Phys. **29** (1990) 828 より転載)

4.3　時分解光励起発光

定性的な結果ではあるが、不規則超格子に関する実験結果を図6に示す[6)]。光発光におけるその発光強度の減衰に関する時定数は、間接遷移型のバルク混晶と規則超格子で最も遅く、10nsオーダで、直接遷移型のバルク混晶が最も速く、0.1nsオーダである。我々の不規則超格子は、それらの中間に位置し、0.2 ～ 2nsに

分布している。

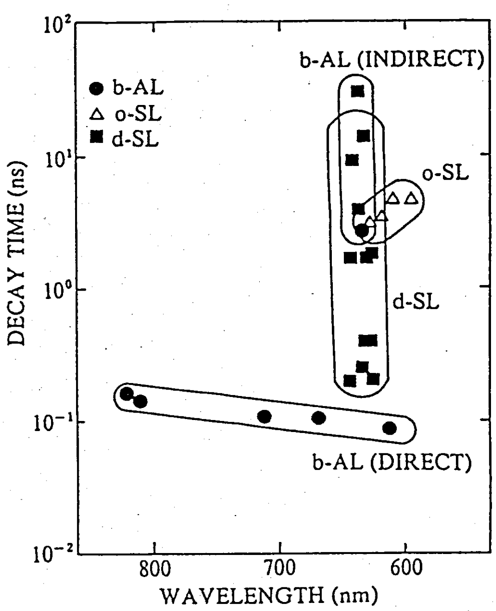


図 6　光発光の時分解測定における各試料の減衰時定数、間接遷移型の AlGaAs が直接遷移型の AlGaAs の一部に比べて、長い波長で発光しているのは、不純物準位を介しての発光であるものと推測される。

4.4　不規則度と局在性

さらに AlGaAs 系の不規則超格子の発光機能を調べるために、(AlAs) ($Al_xGa_{1-x}As$) $\cdot x = 0.4$, 0.33, 0.25, 0.1, 0.0 および ($Al_yGa_{1-y}As$) (GaAs) $\cdot y = 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ の 9 種類について、おのおの規則超格子、不規則超格子を作製し、光発光特性を測定した[7]。なお規則超格子は各層が 4 分子層から、不規則超格子は 2, 4, 6 分子層から構成されている。($Al_yGa_{1-y}As$)(GaAs) 系の試料について、温度と発光波長に対する光励起発光強度の変化を図 7, 8 に示す[7]。

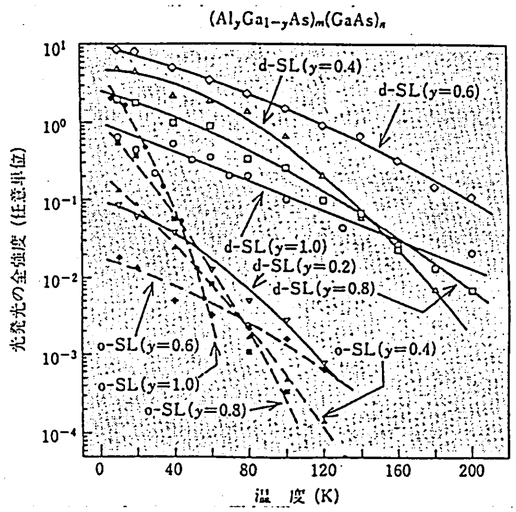


図 7　$(Al_yGa_{1-y}As)_m(GaAs)_n$ の $m = n = 4$ の規則超格子 (o-SL) と、$m, n = 2, 4, 6$ の不規則超格子 (d-SL) の光励起発光強度の温度に対する変化[7]。不規則超格子の方が温度上昇に対して、発光強度の減衰が少ない。

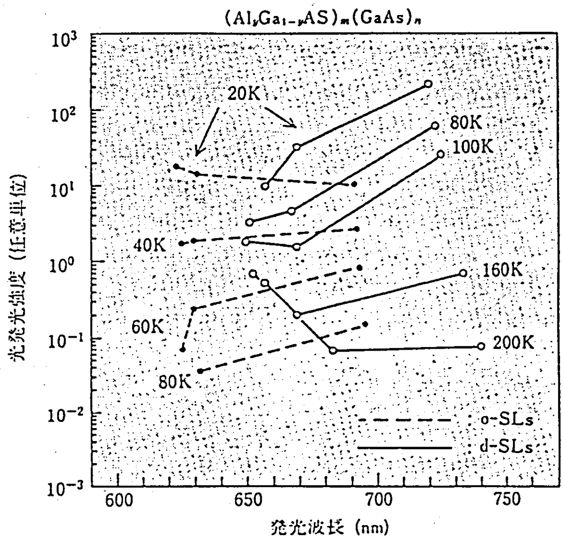


図 8　図 3 における各超格子の発光波長に対する発光強度変化[7]。同一波長においても、不規則超格子の方が発光強度が強い。

図 7 から分かるように、不規則超格子からの発

光は、通常規則超格子の発光に比べて温度上昇に対し、発光強度の弱まり方が少ない。一般に温度上昇に対し、発光強度の減衰特性は

$$I_{PL} = \frac{I_0}{1 + y\exp(T/T_0)}$$

で表される[8)]。ここで I_{PL} は全発光強度、T は試料温度、I_0, y は定数である。温度上昇に伴う発光減衰の度合いは T_0 によって表され、減衰の少ない場合は T_0 は大きくなる。不規則超格子における発光は、人工的不規則によるキャリアの局在によると推測される。T_0 は局在準位におけるキャリアに対する活性化エネルギーに比例することになる。したがって T_0 の大きさはキャリア局在の大きさを表すことになる。各種の不規則超格子を作製し、以上の考えに基づきその T_0 を実験的に求めた。まず $(AlAs)/(Al_xGa_{1-x}As)$, $(Al_yGa_{1-y}As)/(GaAs)$ について、その Al 組成に対する T_0 変化を図 9, 図 10 に示す。

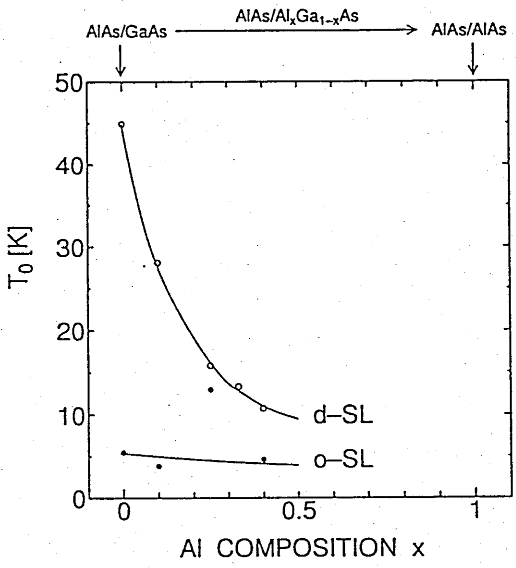


図 9　$(AlAs)/(Al_xGa_{1-x}As)$ 不規則超格子と規則超格子の Al 組成に対する T_0 の変化。

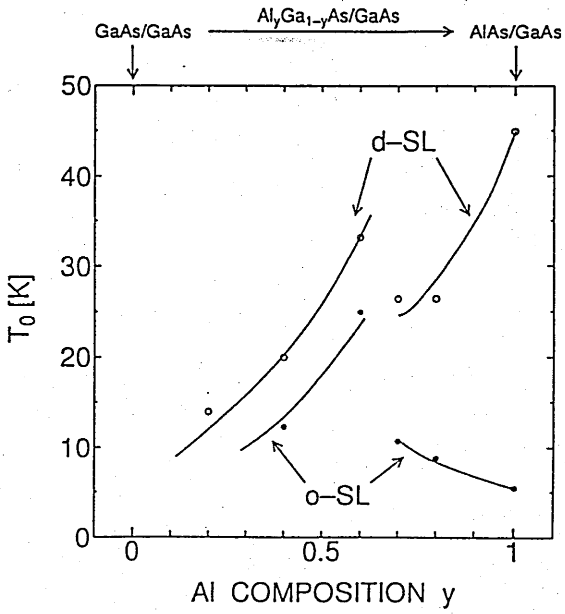


図 10　$(Al_yGa_{1-y}As)/(GaAs)$ 不規則超格子と規則超格子の Al 組成に対する T_0 の変化。

不規則超格子については、そのエネルギー・バンド差が最も大きくなる AlAs/GaAs で、T_0 は最も大きく約 45K となる。図 10 に現れている不連続変化は、超格子が Type I と Type II に遷移する Al 組成値で生じているようである。規則超格子の T_0 は、その遷移する点で最大値を示している。

AlAs/GaAs の組み合わせによる超格子を作製する。超格子は 1200ML から成る。この 1200ML すべてが不規則配列からなるもの、256ML 内は不規則配列で、これと同じ不規則配列を 5 回繰り返して 1200ML を構成したものを作製した。その他、一つの不規則配列の長さを 128ML, 64ML, 32ML である不規則超格子を作製し、その測定した T_0 を図 11 に示す。

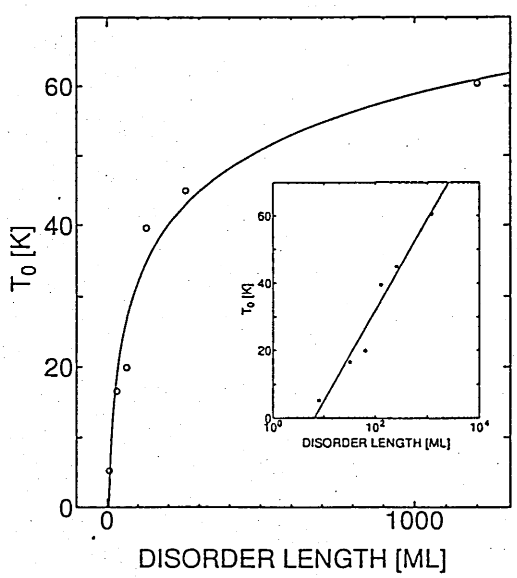


図 11　不規則長変化に対する AlAs/GaAs 不規則超格子の T_0の変化。一番左の 0 における値は $(AlAs)_4/(GaAs)_4$ の規則超格子の T_0に相当する。

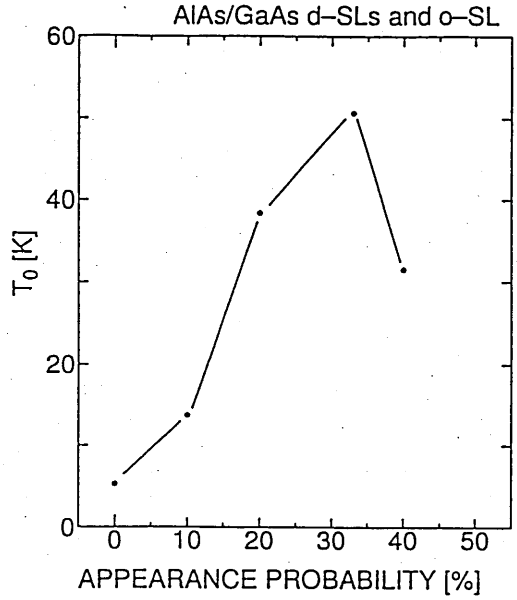


図 12　2,4,6ML のうち 2,6ML の出現確率変化に対する T_0の変化。横軸が零の所は、4ML の規則超格子に相当し、33%の所は、2,4,6ML が不規則に同じ確率で現れるため、最も不規則度が大きい超格子と考えられる。

$(AlAs)_m/(GaAs)_n$:$m, n = 2, 4, 6$ML の 1200ML 不規則長の不規則超格子で 2,4,6ML の現れる平均確率が (0.4, 0.2, 0.4), (1/3, 1/3, 1/3), (0.2, 0.6, 0.2), (0.1, 0.8, 0.1) になるものを作製し、T_0を測った。その結果を図 12 に示す。最も不規則度が大きいと考えられる 33%の不規則超格子の T_0が最も大きいことが分かる。これは図 9 における (AlAs)/(GaAs) による不規則超格子と同じものである。

5　その他の材料系による不規則超格子

障壁層 AlP, 井戸層 GaP ともに間接遷移半導体からなる AlGaP 系の不規則超格子の発光機能を調べた[9]。MOVPE 法により、$Al_{0.5}Ga_{0.5}P$ バルク混晶、$(AlP)_{0.5}(GaP)_{0.5}$ 規則超格子、$(AlP)_m(GaP)_n$ (m, n =3, 6,9) 不規則超格子を作製した。9K における光励起発光に関し、不規則超格子はバルク混晶に比べて 114 倍、規則超格子に比べて 158 倍強く発光する。それぞれの層を活性層に用いた発光ダイオードを作り、室温での連続電流注入による発光の強度を比較した。やはり不規則超格子から強い発光を観測した[10]。

電子ビーム MBE により、$[(Si_{0.76}Ge_{0.24})_{20}$ Å$/(Si)_{20}$ Å$]_{75}$ の規則超格子、$[(Si_{0.76}Ge_{0.24})_m/(Si)_n]_{75}$ (m, n =10, 20, 30Å) の不規則超格子を作製した。これらの 10K における光励起発光の測定を行った。やはり不規則超格子から数倍の強い発光を得た[11]。しかし、その発光スペク

トラムから、発光過程で、音子の助けを借りていることが推測された。

6 新しい物性の創成機構

間接遷移型の組成の半導体が、直接遷移型半導体の性質（常温では間接遷移の約10^3倍の発光強度）にまで至っていないが、非常に強く発光する機能あるいは性質をもつ機構について考察する。従来の実験事実からバルク混晶、規則超格子に比べて異なるところを抽出すると、以下のようになる。

(1) 光励起発光強度の温度に対する変化が、アモルファス Si からの発光温度依存性の式にあてはまる[5)]。(2) 温度上昇による光励起発光強度の減衰が少ない[7)]。(3) 光吸収端が、バルク混晶および規則超格子の吸収端に比べて、少し狭い方にずれている[4)]。したがって光励起発光の波長が、これらバルク混晶および規則超格子の発光波長に比べて、少し長波長側に寄っている[7)]。(4) しかしこの光励起発光波長はそれぞれの光吸収端で決まるバンド幅の波長に比べて、バルク混晶および規則超格子では音子によるエネルギー分だけ少し長いのに対して、不規則超格子では少し短い。したがって不規則超格子では、音子のエネルギーが関与することなく、発光が生じている[4)]。(5) 光励起発光の減衰時定数は、直接遷移型ほど小さくはないが、間接遷移型のバルク混晶、規則超格子より小さい値を示している。[6)]

上記の現象は、人工的に導入された不規則が間接遷移型半導体における isoelectronic trap[12)] と類似の現象を起こしているものと、考えることにより理解することができる。すなわち、不確定性原理による$\Delta\bar{r}\cdot\Delta\bar{p}\geq\hbar/2$ の関係が示すように、電子、正孔のいずれかあるいは両方が局在準位に捕獲され、位置の不確定度$\Delta\bar{r}$が小さくなると、運動量の不確定度$\Delta\bar{p}$が増す。ここで$\hbar=h/2\pi$で、h はプランクの定数である。以上のように、間接遷移型エネルギーバンド構造でも、音子の助けを借りずに、運動量保存則を満たし得て電子・正孔再結合発光が生ずるものと解釈される。

以上のことを考えに入れると、実験事実の(2)は、局在準位に捕獲されながら発光するため、温度上昇による影響は局在準位のない場合に比べて少ない。(3), (4) は局在準位がバンド端テイル (tail) 部に生ずると考えれば理解される。(5) は、再結合に際して、音子との出会いを必要としないため、減衰が速くなりうると解釈できる。

人工的に導入した不規則に関して、「電子が不規則な電位のもとに運動するとき、その波動関数が空間的に局在する」ことを理論的に指摘したアンダーソン局在[13)]の考えを適用することができる。ただし、本実験では、超格子の層厚を不規則に変えているため、電位の「不規則な空間分布」が起因しているためリフシッツ型の局在準位[14)]が生じているものと考えられる。

最近では、この不規則結晶半導体の一例である不規則超格子に対する理論計算がなされている。強結合法による計算[15)]、有効質量近似による計算[15~17)]の結果が報告されて、いずれもキャリア局在が生じ、光吸収、発光を強められることが証明され始めている。

7 あとがき

エピタキシャル成長が可能であることを保ちながら、その半導体材料に不規則性を導入した

材料を提案した。AlGaAs 系、AlGaP 系、SiGe 系それぞれの不規則超格子を作製し、低温光励起発光で少なくとも 500 倍以上、また室温連続電流注入発光で数倍強く、発光機能を増大させる性質を実現し得た。エネルギー・バンド差、不規則長、厚さの異なる層の出現確率等を変えて、不規則の内容の異なる超格子を作製した。温度変化に伴う発光強度の変化から局在度の強さを T_0 なるパラメータで評価した。

不規則度の最も大きいと考えられる AlAs/GaAs で不規則長を最も長く、異なる厚さの層が同じ確率で不規則に出現する不規則超格子で $T_0 \cong 45$K を得た。これに相当する規則超格子での $T_0 \cong 5$K であり、不規則により局在されたキャリアの活性エネルギーは規則超格子に比べて 10 倍大きいことが分かる。規則超格子では、$(AlAs)_4(GaAs)_4$ よりも Type I と Type II の遷移部分で最も大きくなり $T_0 \cong 25$K を示した。

人工的不規則がキャリア局在準位を生じさせるという定性的な事柄を終え、今後定量的な研究が望まれる所である。このように物理的には、発光機能増大のより定量的な検討と増大機構の一層の究明、工学的には、この材料による発光デバイスの実現が望まれる。

本研究は、文部省科学研究費#01420026, #04452175、三菱財団研究助成にて行われたものである。

参考文献

1) A. Sasaki, M. Kasu, T. Yamamoto,and S. Noda, *Jpn. J. Appl. Phys.* **28**, L1249 (1989).

2) A. Sasaki, *J. Crystal Growth* **115**, 490 (1991).

3) A. Wakahara, X-L Wang, and A. Sasaki, *J. Crystal Growth*, **124**, 118 (1992).

4) M. Kasu, T. Yamamoto, S. Noda, and A. Sasaki, *Jpn. J. Appl. Phys.* **29**, 828 (1990).

5) T. Yamamoto, M. Kasu, S. Noda, and A. Sasaki, *J. Appl. Phys.* **68**, 5318 (1990).

6) M. Kasu, T. Yamamoto, S. Noda, and A. Sasaki, *Appl. Phys. Lett.* **59**, 800 (1991).

7) K. Uno, K. Hirano, S. Noda, and A. Sasaki, *19th Int. Symp. GaAs & Related Compounds*, # B4-4, Karuizawa, 1992.

8) R.W. Collins, M.A. Paesler, and William Paul, *Solid State Commum.* **34**, 833 (1980).

9) X-L Wang, A. Wakahara, and A. Sasaki, *Appl. Phys. Lett.* **62**, 888 (1993).

10) A. Sasaki, X-L Wang, and A. Wakahara, *Appl. Phys. Lett.* **64**, 2016 (1994).

11) A. Wakahara, T. Hasegawa, K. Kuramoto, K-K Vong, and A. Sasaki, *Appl. Phys. Lett.* **64**, 1850 (1994).

12) S.M. Sze, *Phusics of Semiconductor Devices*, 2nd ed., 691 (Hohn Wiley & Sons, New York, 1981).

13) P.W. Anderson, *Phys. Rev.* **102**, 1008 (1958).

14) I.M. Lifshitz, *Soviet Phys. Usp* **7**, 549 (1965).

15) K.A. Maerder, L.W. Wang, A. Zunger（私信）.

16) X. Chen and S. Xiong, *Phys. Rev. B*, **47**, 7146 (1993).

17) E.G. Wang, J.H. Xu, W.P. Su, and C.S. Ting, *Appl. Phys. Lett.*, **64**, 443 (1994).

輻射科学研究会資料
RS 94-7

ランダム線路における波動の局在現象

笹倉 芳明、小倉 久直、北野 正雄、高橋 信行
(京都大学 工学部)

1994 年 7 月 22 日
輻射科学研究会
(京都大学 工学部)

ランダム線路における波動の局在現象

笹倉 芳明、小倉 久直、北野 正雄、高橋 信行
京都大学工学部

1 まえがき

1958年にP.W.Andersonは、電子がランダムなポテンシャル中を運動する際にその波動関数が空間的に集中する、すなわち局在化する現象を理論的に指摘した。電子の局在化は乱れたポテンシャルによって散乱された電子波間の干渉が元となり起こる。この現象は電子のアンダーソン局在として知られている [1]。アンダーソン局在は電子の波動的性質が引き起こす現象であり、伝搬定数がランダムに分布する無限長媒質 (以下これをランダム媒質と呼ぶ) における電磁波や特性インピーダンスがランダムに分布する伝送線路 (ランダム線路) における電圧波動などあらゆる波動においてアンダーソン局在のような局在現象は起こりうる [2]。

本稿では伝搬定数がランダムに分布する場合の解の性質を述べる。波数 k の波動は Bragg の反射条件により伝搬定数のうち波数が空間的に $2k$ である成分が強い影響を及ぼすことから不均質な媒質中で波動は指数関数的に増大する傾向を示す。波動の局在はこの増大が減衰へ転換することによって起こると考えられるが、この機構を示すために、2階の波動方程式を Bragg 条件等を用いて近似的に1階のシュレディンガー方程式に似た形を導く。そしてこの方程式の解が局在性を示す場合、その要因が伝搬定数の揺らぎにあるとし、その条件をいくつか述べる。

さらに数値計算により、ランダムな媒質を設定しそこで局在する解を求め、その性質について調べる。ここでいうランダムな媒質には特性インピーダンスが揺らぎをもつ伝送線路を用い電圧波や電流波の局在現象を解析する。

2 ランダム媒質における局在

ここでは一般的なランダム媒質における局在について述べる。ランダム媒質とは、波動の伝搬定数が位置によって統計的に揺らいでいる媒質のことである。

2.1 1次元のランダム媒質中の波動方程式

まず伝搬定数に揺らぎがなく、位置によらずに一定である無損失な媒質中での波動を考える。

伝搬定数が一定である場合の 1 次元の波動方程式は波動の振幅を $\psi(x)$ とすれば、

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + k^2\psi(x) = 0 \tag{1}$$

となる。但し、x は位置を表し、k は伝搬定数である。ここでは、無損失媒質を考えているので k は実数である。

上式の解の形は様々な形式があるが、ここでは、$\psi(x)$ を

$$\psi(x) = C_c \cos kx + C_s \sin kx \tag{2}$$

とかく。但し、C_c, C_s は境界値に依存する定数である。

次に、伝搬定数が位置によって統計的に揺らいでいる場合を考える。この場合も時間には依存せず、無損失媒質であるとすると伝搬定数は定数ではなくなり位置の関数となる。ここでは、伝搬定数の平均値からの揺らぎを (x について) 定常な確率過程で表す。これは、伝搬定数の揺らぎの統計的性質が位置によらないことを意味する。

伝搬定数の平方を

$$k^2[1+\epsilon(x)] \tag{3}$$

と表すことにする。ここで、$\epsilon(x)$ は伝搬定数の平方の平均値からの揺らぎを表す定常な確率過程である。特に、波動が光波を表す場合は屈折率が

$$n^2(x) = 1 + \epsilon(x) \tag{4}$$

となり、$\epsilon(x)$ は誘電率の揺らぎに対応する。

式 (1) と同様な波動方程式は上に述べたような定常なランダム媒質中においては

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + k^2[1+\epsilon(x)]\psi(x) = 0 \tag{5}$$

とかける。今後はこの方程式をもとにして理論を展開していく。但し、$\epsilon(x), \psi(x)$ は確率変数であり正確に記述すると

$$\epsilon(x) \equiv \epsilon(x,\omega), \quad \psi(x) \equiv \psi(x,\omega) \quad (\omega\text{は見本点のパラメータ}) \tag{6}$$

とかく。以後、簡単化のために見本点 ω は省略する。

$\epsilon(x)$ の大きさが 1 に比べて十分小さい場合を考えると、このときの解の形は $\epsilon(x) = 0$ (自由空間) の場合の式 (2) に類似した形でかけると考えられる。そこで、式 (5) の解を

$$\psi(x) \cong A(x)\cos kx + B(x)\sin kx \tag{7}$$

で近似することにする。

また、$\epsilon(x)$ については波動の伝搬に関わる部分は主として直流に近い成分とゆらぎのない場合の波動の周波数の倍に近い周波数成分だけであるから [3]

$$\epsilon(x) = \epsilon_0(x) + 2\epsilon_c(x)\cos kx + 2\epsilon_s(x)\sin kx \tag{8}$$

とする。ここで、$A(x), B(x)$ は k^{-1} に対して十分緩やかに変化しているものとする。式(7),(8) を式 (1) に代入し、先の仮定から $|A''| \ll |kA'|$ とし、さらに $3k$ の成分を無視することにより

$$\mathrm{i}k^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|\psi\rangle = -\epsilon(x)\cdot\boldsymbol{K}|\psi\rangle \tag{9}$$

となり、シュレディンガー方程式に似た形を得る。ここに $|\psi\rangle = [A(x)\ B(x)]^T$, $\epsilon = (\epsilon_s, \epsilon_c, \epsilon_0), \boldsymbol{K} = (K_1, K_2, J_3)$ であり、特に $\boldsymbol{K}$ のそれぞれの成分については、

$$K_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix},\ K_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix},\ J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

の形を持っており、Pauli のスピン行列 $\sigma_i(i = 1, 2, 3)$ を用いれば、

$$K_1 = \mathrm{i}\sigma_3/2\ ,\ K_2 = \mathrm{i}\sigma_1/2\ ,\ J_3 = \sigma_2/2 \tag{11}$$

と表現される。また、これらの演算子の間には

$$[K_1, K_2] = -\mathrm{i}J_3\ ,\ [K_2, J_3] = \mathrm{i}K_1\ ,\ [J_3, K_1] = \mathrm{i}K_2 \tag{12}$$

なる交換関係が存在する。

2.2 指数形の解

式 (9) の解の性質について述べる。式 (9) を書き下すと、

$$\mathrm{i}k^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \mathrm{i}\begin{bmatrix} \epsilon_s & \epsilon_0 - \epsilon_c \\ -\epsilon_c - \epsilon_0 & -\epsilon_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{13}$$

と表せる。A', B' は $A(x), B(x)$ の x に関する 1 階微分を表す。ここで、波動 ψ の性質を説明するために $|\psi\rangle$ のノルムに相当する α と AB 平面における位相 ϕ を導入する。

$$\alpha = \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2}\ \ ,\ \ \phi = \tan^{-1}\frac{B(x)}{A(x)} \tag{14}$$

1. $\epsilon = (\epsilon_s, 0, 0)$ の場合は式 (13) より

$$A(x) = A_0 e^{\epsilon_s kx}, B(x) = B_0 e^{-\epsilon_s kx} \tag{15}$$

を得る。A_0, B_0 は初期値によって決まる定数である。ここで $|\psi\rangle$ のとる値を図式的に示したものが図1である。例えば $\epsilon_s = 1$ で A_0, B_0 の値が図1で点Sの位置にあるとすれば α は x の増加にともない指数関数的に大きくなり ϕ は0に漸近することが分かる。図中の矢印は x の増加に対する $|\psi\rangle$ の変化の方向を示している。

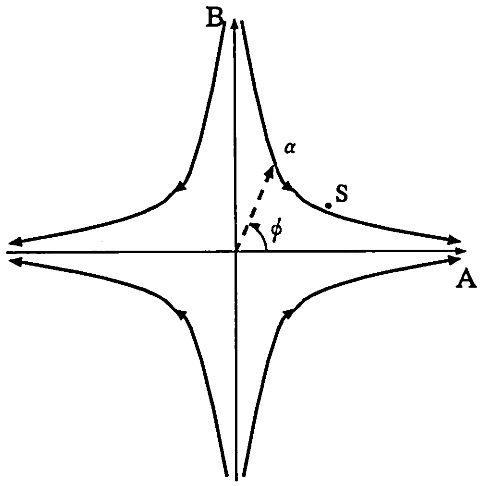


図 1: 指数形の解 (1)

2. $\epsilon = (0, \epsilon_c, 0)$ の場合には

$$A(x) = A_0 \cosh \epsilon_c kx - B_0 \sinh \epsilon_c kx, B(x) = -A_0 \sinh \epsilon_c kx + B_0 \cosh \epsilon_c kx \tag{16}$$

となる。1と同様に $\psi(x)$ の様子を図2に示す。これも x が増すに従い α が指数関数的に増大もしくは減衰していく性質が表れている。

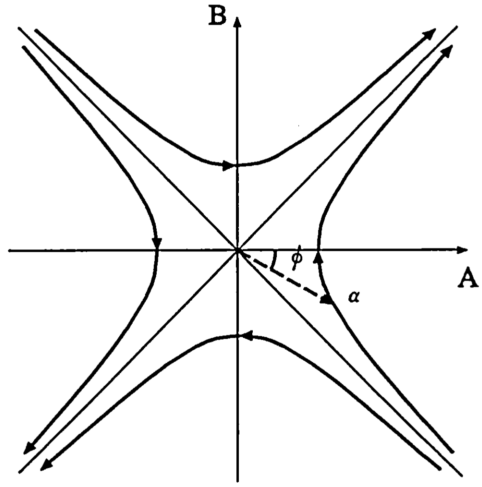


図 2: 指数形の解 (2)

3. $\epsilon = (0, 0, \epsilon_0)$ の場合は同様に

$$A(x) = A_0 \cos \epsilon_0 kx + B_0 \sin \epsilon_0 kx, B(x) = -A_0 \sin \epsilon_0 kx + B_0 \cos \epsilon_0 kx \quad (17)$$

を得る。これらの解が AB 平面上で x に対してどのように変化するかを図 3 に示した。1,2 の場合とは異なり周期性を持つことが分かる。具体的には、この ϵ_0 は揺らぎがない場合の波動の位相を進めたり遅らせたりする作用があると考えられる。指数形の解を作り出すのに直接影響する因子ではないが後述する局在現象を引き起こす要素となっているものと考えられる。

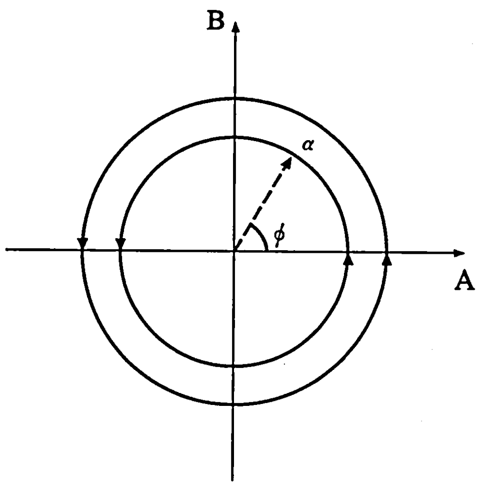


図 3: 指数形の解 (3)

$\epsilon(x)$ の取り得る値のうち特徴的な場合についてその解の形状を調べてきた。実際ランダムに $\epsilon(x)$ が分布する場合は、ある短い区間を考えれば $\epsilon(x)$ の変化は緩やかなものとしているから、その内部で $\epsilon(x)$ が一定であるとみなせて、媒質全体はこういった区間がいくつも継っているというイメージでとらえることができる。それぞれの区間において上で述べたような 3 の成分が強ければ波動の位相が影響され、1 や 2 の要素が大きければ波動の振幅が影響を受ける。後者の場合は x に関して波動の振幅が指数関数的に増大もしくは減衰することになる。

2.3 局在解

前節で波動の 2 倍の周波数成分を多く含むランダム媒質中には、指数関数形の解が存在することを示した。また、ランダム媒質中においては進行波解が存在せず、各位置の伝搬定数の違いから右に左に反射された波が強めあい共振に類した状態になる。これを局在現象と呼ぶが、ここではどのようにして起こり得るかをいくつかのモデルを例に考える。

2.2節で考えた 3 つの場合はいずれも特別の場合である。しかしこれらの結合の形でランダムな伝搬定数が表現される。$\epsilon(x)$ を構成する 3 つの項が緩やかに変化する場合を

表現したのが図4 である。図中に示した局所位相は $\epsilon(x)$ の揺らぎの様子を表す指標であり、これは $\epsilon(x)$ によって決まる $|\psi\rangle$ が漸近する位相のことである。図4 では $\epsilon(x)$ が緩やかに変化するため局所位相も緩やかな変化をしており、x の増加にともない $|\psi\rangle$ の位相が局所位相へ漸近することになる。2.2 節で示したように局所位相へ近付くにつれ、$|\psi\rangle$ の振幅は指数的に増大する。しかし局在する解はある領域に波動の大半が集中するから、増大し続けないことになる。以下ではこの局在の起こる機構を $\epsilon(x)$ を用いて考えてみる。

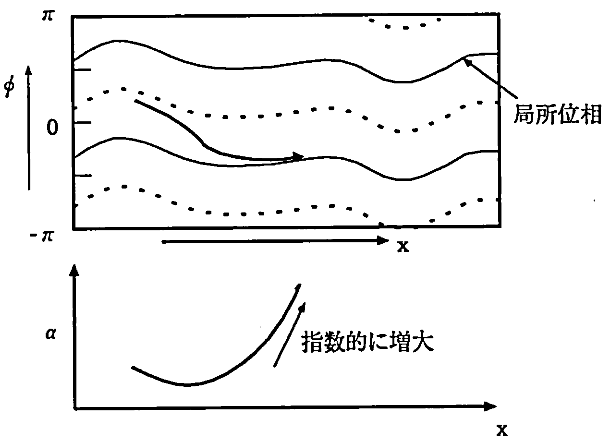


図 4: 局所位相が緩やかに変化

1. 位相の不連続

例として $\epsilon = (1, 0, 0)$ となる場合を考える。これは 2.2 節で見たように $\psi(x)$ の初期値の ϕ が $-\pi < \phi < \pi$ であれば、局所位相である $\phi = 0$ に向かって指数的に増大する。この様子を図5 に示し、それに伴う $\psi(x)$ の振幅 α の値を図5 の下部に示す。$x = x_{jump}$ の位置を境に $\epsilon = (1, 0, 0)$ となれば局所位相は $\phi = \pi/2, \pi/2$ などに変化する。$\psi(x)$ は $\phi = 0$ へ向かっていたが、これにより $\phi = \pi/2$ へ向かうことになり、増大し続けていたものが一転し減衰傾向になる。結果として波動の振幅は図5 の下部に示すように $x = x_{jump}$ を中心に局在する。

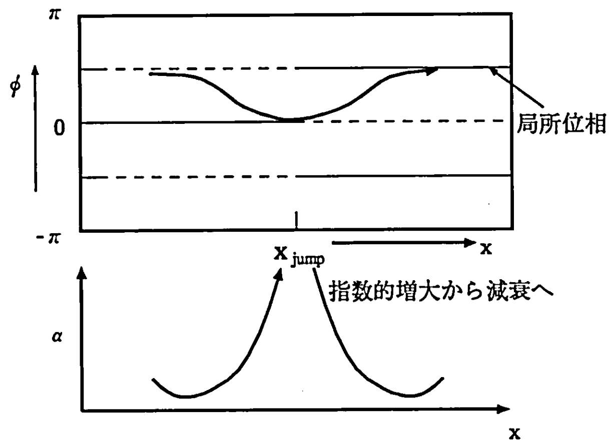


図 5: 局所位相の不連続

2. $|\psi\rangle$ の位相の急速な回転

次に ϵ の ϵ_0 成分が大きな役割を果たす場合について述べる。まず、$\psi(x)$ の振幅と位相を図 6 に示す。このモデルは $x = x_{rot}$ のまわりで局所的に ϵ_0 が大きくなったものである。これは 1 と同様に $\phi = 0$ に向かっていくが、$x = x_{rot}$ のあたりで $\phi = \pi/2$ 程度まで変化したとすれば、そこから先では一転し減衰の方向へ向かうというものである。

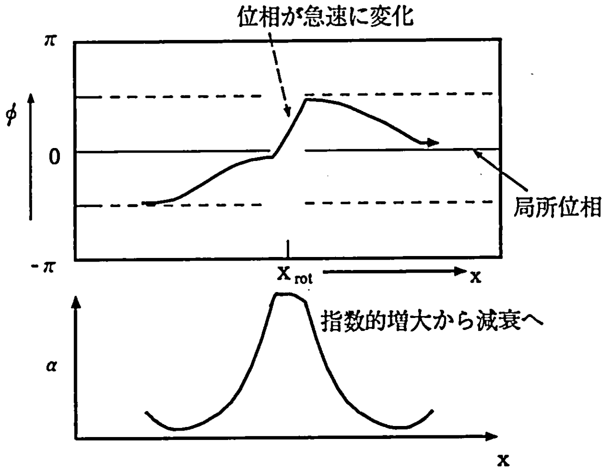


図 6: 位相の急速回転

3. 局所位相 の急速な変化

局所位相 は x の増加にともない $\psi(x)$ の位相が漸近する値であるがこれは一般に変化するものである。しかしその変化は緩やかなものを想定しているから、$\psi(x)$ は局所位相への軌道にのり、指数的に増大していく。しかし図 7 に示すような急激な変化が起こった場合、例えばこの図のように支配的になっている項が $\epsilon = (1,0,0)$ から $\epsilon = (0,1,0)$ へ変化したものであるが、この変化に $\psi(x)$ が追いつかずに図 7 の A 点あたりに出てしまう。するとこの点からは減衰を始めてしまうので結果として図 7 の様に局在するというものである。

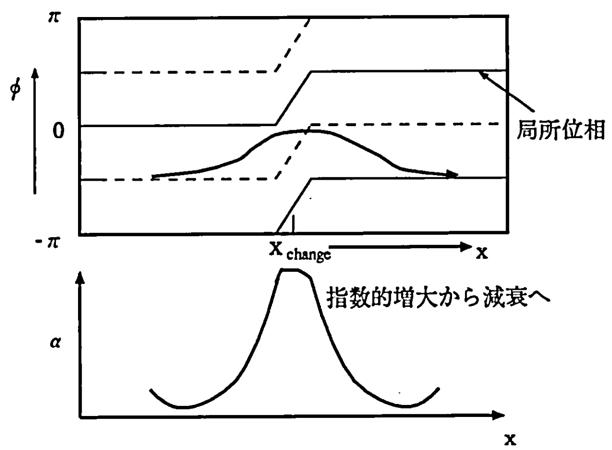


図 7: 局所位相の急速な変化

3 ランダム線路における局在

前節ではランダム媒質中において局在が起こる機構について議論したが、ここでは局在現象の数値解析モデルとして特性インピーダンスが揺らぎを持つ伝送線路を考える。そしてこれを四端子回路の集まりとみなし、数値計算する方法について説明する。

3.1 ランダム線路のモデル化

送電線あるいは通信線のような伝送線路を分布定数回路として扱う場合は、図 8 のように微小な集中定数回路が無数に接続されたものと表現できる。

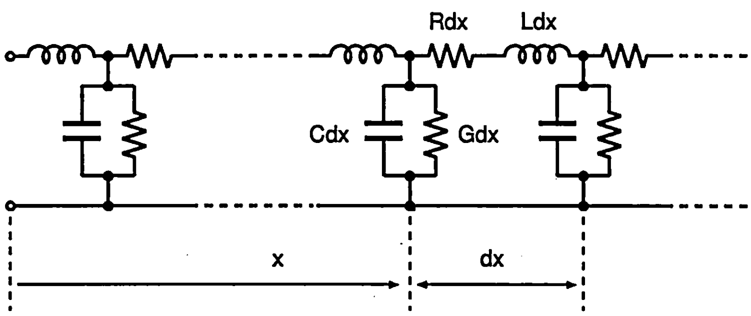


図 8: 伝送線路の集中定数回路近似

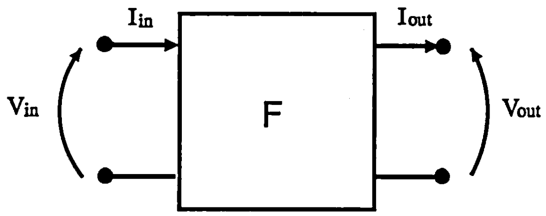


図 9: 四端子回路モデル

この線路において電圧は式 (2) と同様波動関数で表現される [4]。さらに伝送線路のある区間内で伝搬定数や特性インピーダンスが一定であれば図 9 に示すような四端子回路にモデル化することができる。入力を $\dot{V}_{in}, \dot{I}_{in}$ 、出力を $\dot{V}_{out}, \dot{I}_{out}$ とすると、

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{out} \\ \dot{I}_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(qx) & -i\dot{Z}\sinh(qx) \\ -i\frac{1}{\dot{Z}}\sinh(qx) & \cosh(qx) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{in} \\ \dot{I}_{in} \end{bmatrix} \tag{18}$$

が得られる [4]。ここで、線路は無損失な場合を考えると、

$$
\begin{aligned}
Z &= \sqrt{\frac{L}{C}} && (19)\\
q &= \mathrm{i}\omega\sqrt{LC} = \mathrm{i}\beta && (20)
\end{aligned}
$$

となり式 (18) の行列部分は、

$$
\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \cos(\beta x) & -\mathrm{i}Z\sin(\beta x) \\ -\mathrm{i}\dfrac{1}{Z}\sin(\beta x) & \cos(\beta x) \end{bmatrix} \tag{21}
$$

となる。さらに、線路に固有なこの行列を、 F マトリクスと呼ぶ。

ランダムなインピーダンスの分布を持つ線路を四端子回路モデルを用いて表現する方法について述べる。基本的には、四端子回路モデルを複数個並べることで実現するが、並べる線路の特性インピーダンスの決定方法については以下に述べるようなものが考えられる。

- 接続する線路の 1 区間毎に特性インピーダンスをランダムに変化させる。
- 2 、3 種類の特性インピーダンスのことなる線路を用意し、どの線路を接続するかをランダムに決定する。

他にもランダム線路を実現する方法は考えられるが、ここでは、後者を用いることにした。

例えば、2 種類の線路を用意したとして、これらの F マトリクスをそれぞれ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ と表す。これらの線路を図 10 のように N 個ランダムに並べた場合、この線路の F マトリクスは N 個の行列の積

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_N\boldsymbol{F}_{N-1}\boldsymbol{F}_{N-2}\boldsymbol{F}_{N-3}\cdots\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{F}_1 \\
&= \boldsymbol{ABAA}\cdots\boldsymbol{AB} && (22)
\end{aligned}
$$

で与えられる。

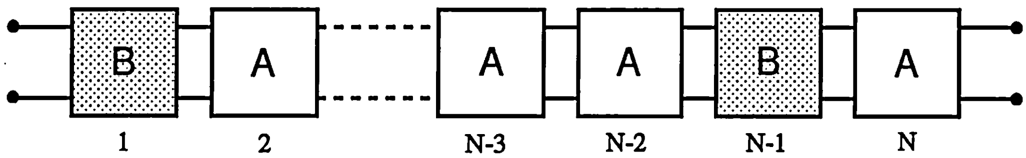


図 10: ランダム線路モデル

ここで、2 種の異なる線路の F マトリクスをそれぞれ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ と表したが、これらは無損失な場合、式(21) となり、線路の特性インピーダンス Z と線路の両端の位相差を示す βx の 2 つの要素のみに関わる。ここでは βx が等しく Z が異なる $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を選ぶことにする。以上のことから、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の線路の特性インピーダンスをそれぞれ Z_A, Z_B とすれば、

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{i}Z_A\sin\theta \\ -\mathrm{i}\dfrac{1}{Z_A}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{i}Z_B\sin\theta \\ -\mathrm{i}\dfrac{1}{Z_B}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\theta = \beta_A x_A = \beta_B x_B \tag{25}$$

となる。

式(24) における θ は式(20) からも明らかなように、周波数に比例する。他に周波数に関わる要素がないので、このβ を周波数に相当するパラメータとして扱うことができる。

3.2 ランダム線路における共振

両端を適当なリアクタンス分などで終端したランダム線路には共振する周波数が存在する。ここではこの共振周波数を求める方法について述べる。

図11に示すような N 個の線路を接続したモデルで、左右の終端にそれぞれ $\dot{Z}_0, \dot{Z}_N$ のリアクタンス分をつないだ場合を考える。図11の左から k 番目の線路の F マトリクスを $\boldsymbol{F}_k$ と表せば、式(18) と同じく、

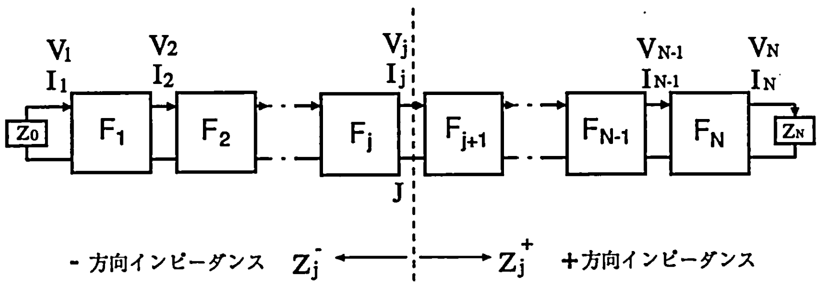


図 11: 線路中の点から左右を見たインピーダンスの説明

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_k \\ \dot{I}_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}_k \begin{bmatrix} \dot{V}_{k-1} \\ \dot{I}_{k-1} \end{bmatrix} \tag{26}$$

が成り立つ。左右それぞれの終端インピーダンスとして $\dot{Z}_0, \dot{Z}_N$ を接続しているので、$\dot{V}_0, \dot{I}_0$ と $\dot{V}_N, \dot{I}_N$ については、

$$\dot{V}_0 = -\dot{Z}_0\dot{I}_0 \tag{27}$$

$$\dot{V}_N = \dot{Z}_N\dot{I}_N \tag{28}$$

なる関係が成り立つ。式 (26) と式 (27) より、図 11の点 J においては、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{V}_j \\ \dot{I}_j \end{bmatrix} &= \boldsymbol{F}_j \begin{bmatrix} \dot{V}_{j-1} \\ \dot{I}_{j-1} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{F}_j\boldsymbol{F}_{j-1}\boldsymbol{F}_{j-2}\ldots\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{F}_1 \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{I}_0 \end{bmatrix} && (29) \\ &\equiv \boldsymbol{F}^j \begin{bmatrix} -\dot{Z}_0\dot{I}_0 \\ \dot{I}_0 \end{bmatrix} && (30) \end{aligned}$$

となる。また、図 11 の点 J から左側を見たインピーダンスは、式 (30) より、

$$\begin{aligned} \dot{Z}_j^- &= \frac{\dot{V}_j}{-\dot{I}_j} \\ &= \frac{-\dot{Z}_0[\boldsymbol{F}^j]_{11} + [\boldsymbol{F}^j]_{12}}{\dot{Z}_0[\boldsymbol{F}^j]_{21} - [\boldsymbol{F}^j]_{22}} && (31) \end{aligned}$$

となる。同様に点 J から右側についても、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{V}_j \\ -\dot{I}_j \end{bmatrix} &= \boldsymbol{F}_{j+1} \begin{bmatrix} \dot{V}_{j+1} \\ -\dot{I}_{j+1} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{F}_{j+1}\boldsymbol{F}_{j+2}\boldsymbol{F}_{j+3}\ldots\boldsymbol{F}_{N-1}\boldsymbol{F}_N \begin{bmatrix} \dot{V}_N \\ -\dot{I}_N \end{bmatrix} && (32) \\ &\equiv \boldsymbol{G}^j \begin{bmatrix} \dot{Z}_N\dot{I}_N \\ -\dot{I}_N \end{bmatrix} && (33) \end{aligned}$$

となり、点 J から右側を見たインピーダンスも、

$$\begin{aligned} \dot{Z}_j^+ &= \frac{\dot{V}_j}{\dot{I}_j} \\ &= \frac{-\dot{Z}_0[\boldsymbol{G}^j]_{11} + [\boldsymbol{G}^j]_{12}}{\dot{Z}_0[\boldsymbol{G}^j]_{21} - [\boldsymbol{G}^j]_{22}} && (34) \end{aligned}$$

となる。θ が周波数に相当することから、$\dot{Z}_j^-, \dot{Z}_j^+$ が周波数の関数となることは明らかである。$\dot{Z}_j^-, \dot{Z}_j^+$ を $\dot{Z}_j^-(\theta), \dot{Z}_j^+(\theta)$ と表せば、共振周波数において、

$$\dot{Z}_j^-(\theta) + \dot{Z}_j^+(\theta) = 0 \tag{35}$$

が成立する。3.1 節で述べたように θ は周波数に相当するため、式 (35) が成り立つ θ を求めることは、共振周波数を求めることに相当する。ただし終端にリアクタンス分のみを接続するため、$\dot{Z}_j^-, \dot{Z}_j^+$ はいずれもリアクタンス分のみ (純虚数) となるので、共振条件である式 (35) の評価は虚数成分についてのみ行なえば十分である。さらに解析する線路において波動は終端に向かい減衰する場合を考えるため短絡するのが適当である。

3.3 ランダム線路の励振

3.1節で述べたランダム線路において、ある位置に可変周波数の交流電流源を挿入し、これを励振する場合を考える。

3.2節では、ランダム線路が無損失であり、さらに終端もリアクタンス分を接続する場合を考えたが、このまま励振すると発散してしまう。このため線路にいくらかの損失を設定しなければならない。これには、

- 接続する各線路に、減衰定数を設定する。
- 終端に抵抗を接続する。

などがある。前者は実際の線路のモデルとして有効であり、後者はランダム線路内には損失がないことから、3.2節で導いた共振解との比較が行いやすい。

図 11の点 J の位置に電流源を入れ、線路を励振する。この時、点 J から左右を見た時のインピーダンスは 3.2節で用いた方法と同様に式 (31)、式 (34) から求めることができる。得られる $\dot{Z}_j^-(\theta), \dot{Z}_j^+(\theta)$ と電流源は図 12のような等価回路で表現でき、電流源から見ると $\dot{Z}_j^-(\theta), \dot{Z}_j^+(\theta)$ の並列インピーダンスは、

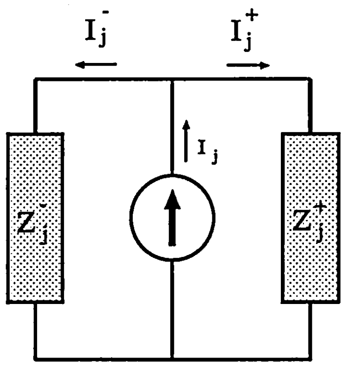


図 12: 励振の等価回路

$$\dot{Z}_j(\theta) = \frac{\dot{Z}_j^-(\theta)\dot{Z}_j^+(\theta)}{\dot{Z}_j^-(\theta) + \dot{Z}_j^+(\theta)} \tag{36}$$

となる。この式からも明らかであるが、

$$\dot{Z}_j^-(\theta) + \dot{Z}_j^+(\theta) = 0$$

を満たす θ は共振周波数に対応するものである。式 (36) より、点 J における電圧は次の式で表される。

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(\theta) &= \dot{Z}_j(\theta)\dot{I}_j(\theta) \\ &= \frac{\dot{Z}_j^-(\theta)\dot{Z}_j^+(\theta)}{\dot{Z}_j^-(\theta) + \dot{Z}_j^+(\theta)}\dot{I}_j(\theta) \end{aligned} \tag{37}$$

さらに、点 J から左右に向かう電流をそれぞれ、$\dot{I}_j^-(\theta), \dot{I}_j^+(\theta)$ と表現すれば、

$$\dot{I}_j^-(\theta) = \frac{\dot{V}_j(\theta)}{\dot{Z}_j^-(\theta)} \tag{38}$$

$$= \frac{\dot{Z}_j^+(\theta)}{\dot{Z}_j^-(\theta) + \dot{Z}_j^+(\theta)}\dot{I}_j(\theta) \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_j^+(\theta) &= \dot{I}_j(\theta) - \dot{I}_j^-(\theta) \\ &= \frac{\dot{Z}_j^-(\theta)}{\dot{Z}_j^-(\theta) + \dot{Z}_j^+(\theta)}\dot{I}_j(\theta) \end{aligned} \tag{40}$$

となる。これにより、3.2節で述べた式 (26) を用いて計算すれば、線路全体において各部の電圧、電流の値が求められる。

ここまでは電流源をある位置に一つだけ挿入した場合を考えたが、ランダム線路のいたるところに電流源を挿入したモデルを考える。この場合各部の電圧は、それぞれの電流源のみが存在した時の電圧の重ね合わせで得られる。

電流分布として、点 $P\{= 1, 2, 3, \cdots, N\}$ の位置に$\dot{I}_P$ を挿入して励振した場合、点 $Q\{= 1, 2, 3, \cdots, N\}$ での電圧分布は、

$$\dot{V}_Q = \sum_{P=1}^{N} \dot{Z}(Q, P)\dot{I}_P \quad (0 \leq Q \leq N) \tag{41}$$

で与えられる。ここで $\dot{Z}(Q, P)$ は点 P に $\dot{I}_P$ を入れた時に、この $\dot{I}_P$ が Q 点の電圧に及ぼす影響を示す因子である。

4　数値計算

4.1　共振解

ここでは、ランダム線路ののモデルとしてランダムに 600 個の線路を接続したものを用い数値計算を行なった。線路は 2 種類の線路を用い、それぞれの特性インピーダンスを $74(\Omega), 40(\Omega)$ とし、発生確率を等しくしランダムに並べている。

4.1.1　ランダム線路の共振解

2 種の線路をランダムに並べた場合について述べる。また、このモデルは 600 個の線路を接続して作った。この線路の中心から左右を見たインピーダンスの虚数部を図 14に示すが、非常に込み入っている。比較のために 30 個を交互に並べた線路で同様にして計算すると図 13のようになる。これから分かるように接続数が 600 に増えることにより交点、即ち解の数もかなり多くなる。さらに増やすとそれにつれてますます解が多くなると予想される。

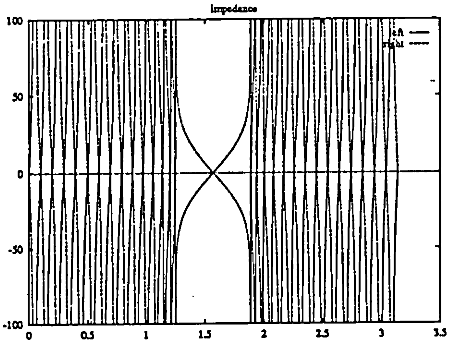


図 13: インピーダンス (交互に接続)

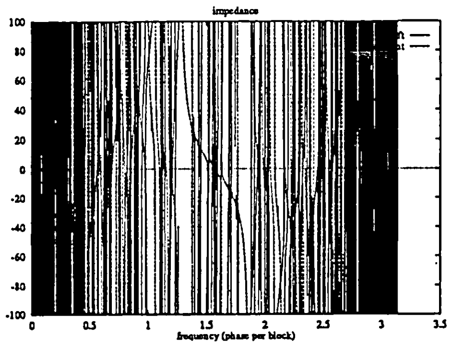


図 14: インピーダンス (ランダム線路)

図 14を部分的に拡大してみると、図 15や図 16に示すようにかなり激しい変化を見せる。周波数に対するインピーダンスをプロットして初めて分かったことであるが、図 15の丸印で囲んだ内部のように、滑らかな変化をすると見える点であっても大きく発散する。これは接続数が少ない時にはない現象であり、解析を難しくする一因である。こういった傾向は線路を増せば増すほど顕著になると予想され注意を要する。

ここで用いたランダム線路の共振周波数のうち、$\theta = 1.2 \sim 1.3$ のあたりの解を例として電圧波形をプロットし、これを図 17, 18に示す。図 17に示した例では、電圧が最も大きくなる点と終端付近とでは 10 桁近く違っている。従って 600 個以上の線路を接続したモデルの解を求めるにはさらに精度を上げる必要がある。

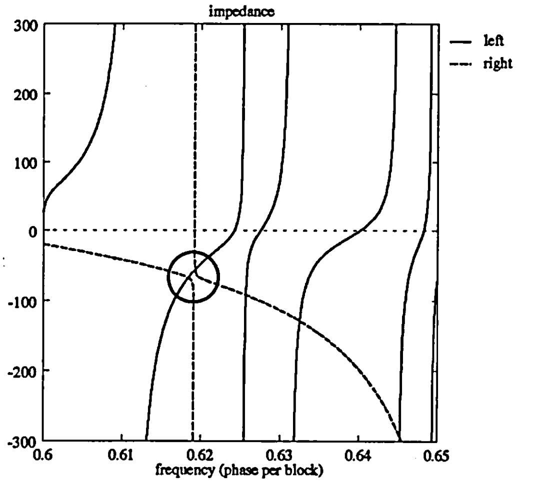


図 15: インピーダンス (0.60 - 0.65 [rad])

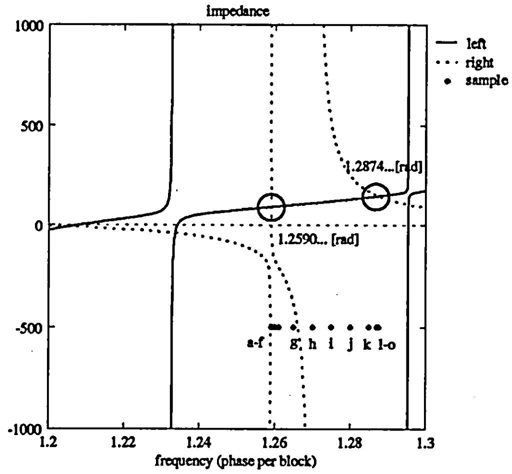


図 16: インピーダンス (1.2 - 1.3 [rad])

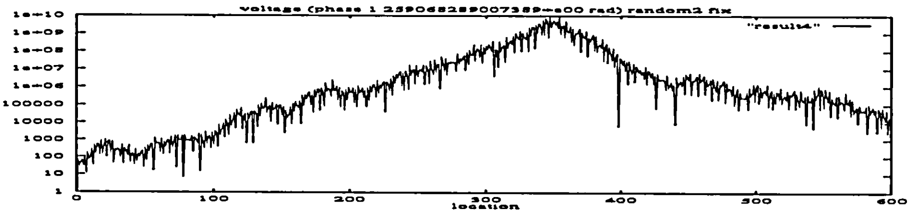


図 17: 共振解 1.25906828900e+00 [rad]

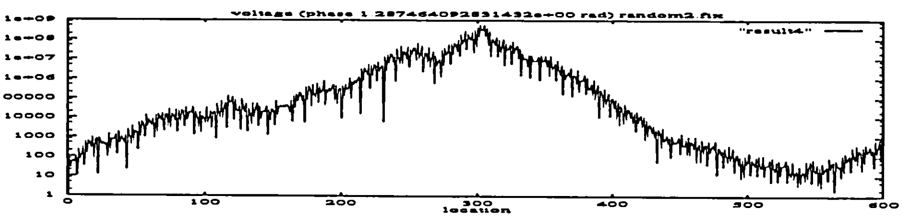


図 18: 共振解 1.287464092831432e+00 [rad]

4.2 励振

ここではランダム線路の1点、もしくは複数の点において線路を励振した計算結果について述べる。共振解や4.1節で見た局在現象との関係を主に調べるために4.1.1節で用いた600個の線路ブロックによるランダム線路と同じモデルを採用した。

3.3節で、励振の場合に必要な線路への損失の設定方法について詳しく述べた。実際に計算には抵抗で終端する方法と各線路毎に減衰定数を設定する方法の両方を用いた。以下、それぞれの設定での結果とそれについての考察を述べる。

4.2.1 終端で整合をとり損失を設定

整合終端することにより損失を設定し、以下のようにパラメータを変化させ電圧波形を解析した。

- 4.1.1節で求めた共振周波数のうち相隣る2つを適当に選びその間で周波数を変化させる。励振位置は中央で固定する。

- 線路全体に電流源を挿入し励振する。周波数を変化させる。

中央で励振し周波数を変化させた場合 4.1.1節で求めた共振周波数のうち、$\theta = 1.259068\cdots$と$\theta = 1.287464\cdots$を選んだ。この間の周波数で適当に15点をとり、中心位置で励振した時の電圧波形を図19から図33に示す。それぞれの図のタイトルに示す括弧内の文字は図16でのアルファベットに相当し、どのあたりの周波数を用いたかを表現するために設けた。

まず注目すべきは励振波形の変化である。15点の周波数で励振したが、共振周波数に接近するにつれて共振解に近くなる様子がはっきりと分かる。さらに、共振周波数付近では、他の点に比べ著しく大きい振幅を示すことが分かる。図は解の振幅の対数をとり表示している。共振周波数の近くの周波数で励振すると、振幅は小さくなるものの共振解の形状に極めて良く似た波動が得られる。

線路全体で励振した場合 ここでは600個の線路を接続した点すべてに電流源を挿入したモデルを計算し、その結果について述べる。3.3節でこの場合の電圧は、個々の電流源で励振したものの重ね合わせで得られることを書いた。この計算結果を図34から図48に示す。また周波数については前々節と同様に$\theta = 1.259068\cdots$と$\theta = 1.287464\cdots$の間の15点を選んだ。図の副番号のアルファベットについても同様で、図16の中の文字に相当する。共振周波数にかなり近いものはほぼ共振解の形と同じになっている。しかし、図42,44に示す中ほどの周波数では所々に小さなピークが見られる。これは中心で励振した

場合と大きく異なる点である。これは中心付近以外にピークを持つ他のモードを励起したためと考えられる。ただ、この傾向も共振周波数からはなれた周波数を用いた時のみであり、共振周波数の近くでは共振解に近い波動が支配的になる。

4.2.2　各線路に損失を設定

まず損失の大きさであるが、100 線路で $1/e$ となる程度の損失を設定した。この状態では線路の局所的な性質が大きく出ると予想され、線路全体としての波形にかなりの変化が見られると思われる。そこで、4.2.1 節で計算したすべての点に電流源を挿入したものとの比較を行なう。図 34 から図 48 に相当するものとして、図 49 から図 63を示す。これは周波数を整合した場合と同様に 15 点選び、それぞれの励振波形を示したものである。周波数は全く同じものにした。

まず、図 34から図 48 に比べて電圧の値が著しく小さくなっていることが分かる。これはランダム線路の感度がかなり鈍くなっていると予想される。しかし、線路に損失がない場合に見られた鋭いピークの位置にここでもわずかながらピークが存在している。電圧の集中する位置は損失があっても変化しないことを示している。ただピークが非常に減衰しているのには、局在現象そのものの性質が影響していると考えられる。すなわち多くの反射、干渉を繰り返して局在に至るが、線路を経れば経るほど減衰する今回のような設定では、ピークの位置、言い換えれば最も反射により通過する回数の多い位置に減衰の影響が大きく出たと考えられる。

5　結び

本稿では伝搬定数に揺らぎのある媒質中の波動方程式について、Bragg の反射条件から指数的な解の存在を導き、さらにその解が局在性を持つ時の条件について定性的に説明した。また、このランダム媒質の議論を特性インピーダンスがランダムに分布する伝送線路に適用し、共振条件をインピーダンスを用いて表現することにより、このモデルを数値解析する方法について述べた。

数値計算ではランダム線路中に局在する解を確認し、さらに電流源を挿入することで線路を励振した場合の電圧波についても局在することを確かめた。線路全体に損失を設けると局在のあった位置の波が最も影響を受けていることから、局在は波動が反射を繰り返すことによって起こるというイメージ通りの結果を得た。

数値解析のモデルに四端子回路のブロックを 600 接続し、共振周波数を求めるのに 10 桁程度の精度が必要でバイナリサーチ法を用いて探索したが、局在と伝搬定数の条件との関係を調べるには、さらに大きいモデルを用いたり伝搬定数の分布の作り方を再検討したりする必要があり、改善の余地がある。

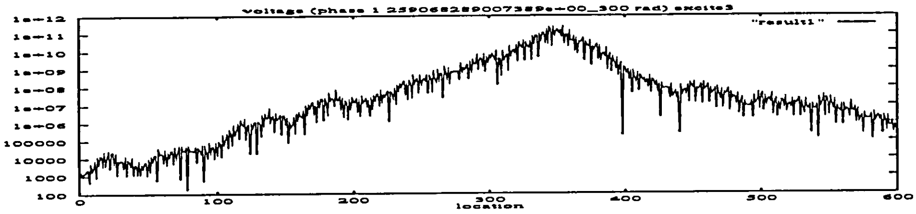


図 19: (a):整合終端し中心励振 (1.259068289007389e+00 [rad])

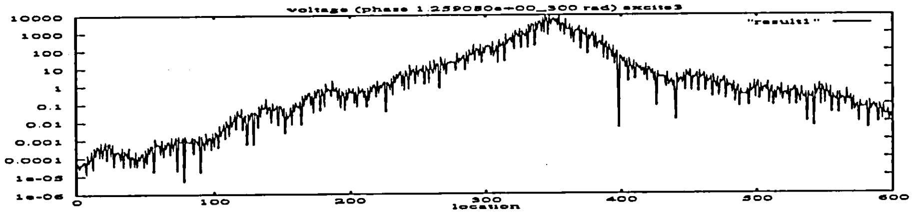


図 20: (b):整合終端し中心励振 (1.259080e+00 [rad])

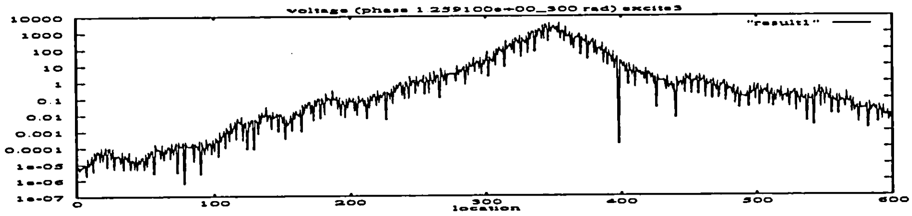


図 21: (c):整合終端し中心励振 (1.259100e+00 [rad])

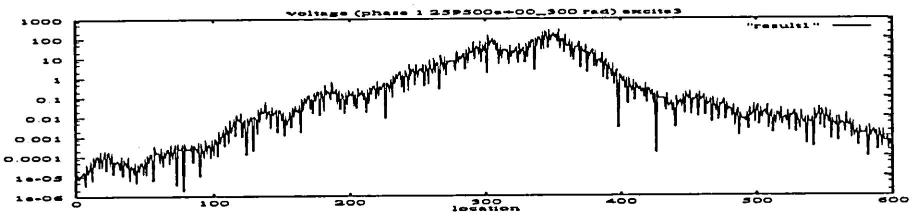


図 22: (d):整合終端し中心励振 (1.259500e+00 [rad])

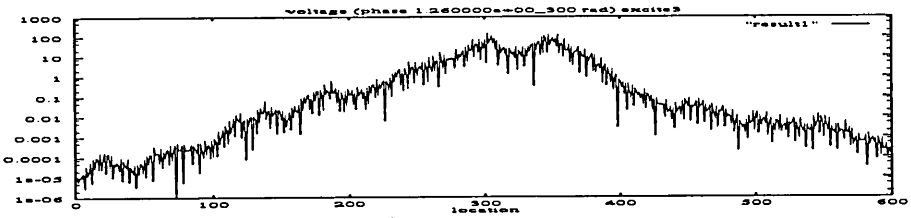


図 23: (e):整合終端し中心励振 (1.260000e+00 [rad])

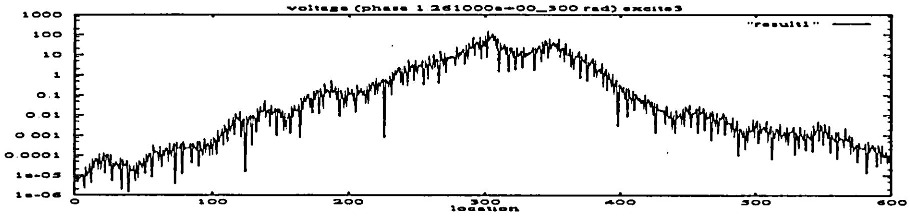


図 24: (f):整合終端し中心励振 (1.261000e+00 [rad])

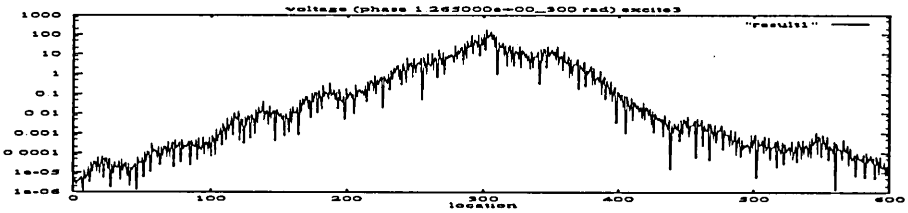


図 25: (g):整合終端し中心励振 (1.265000e+00 [rad])

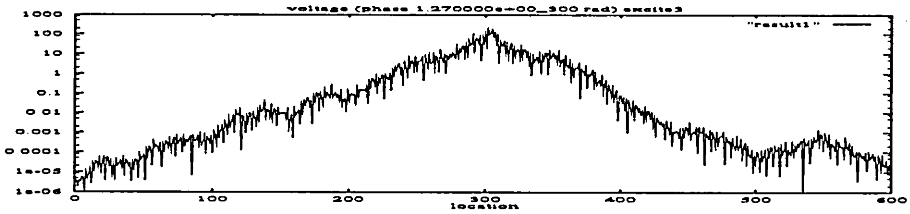


図 26: (h):整合終端し中心励振 (1.270000e+00 [rad])

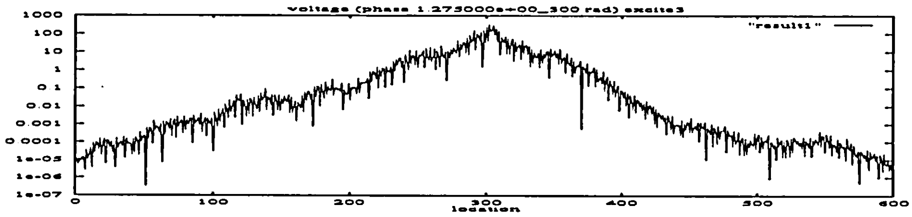


図 27: (i):整合終端し中心励振 (1.275000e+00 [rad])

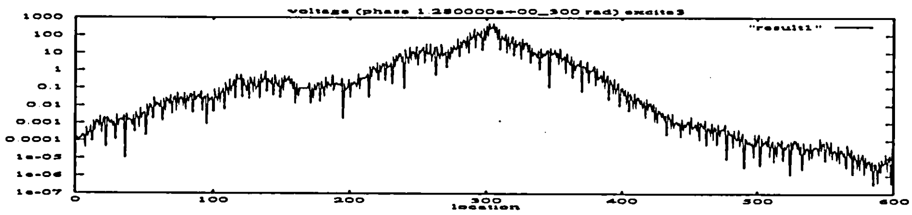


図 28: (j):整合終端し中心励振 (1.280000e+00 [rad])

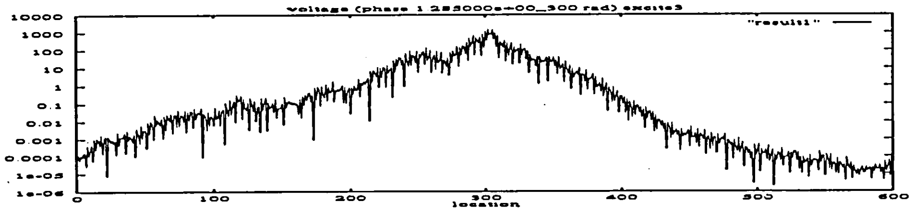


図 29: (k):整合終端し中心励振 (1.285000e+00 [rad])

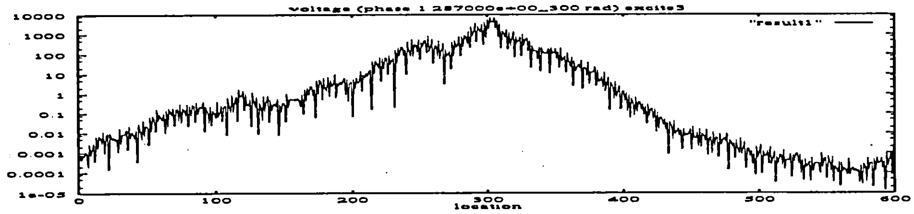


図 30: (l):整合終端し中心励振 (1.287000e+00 [rad])

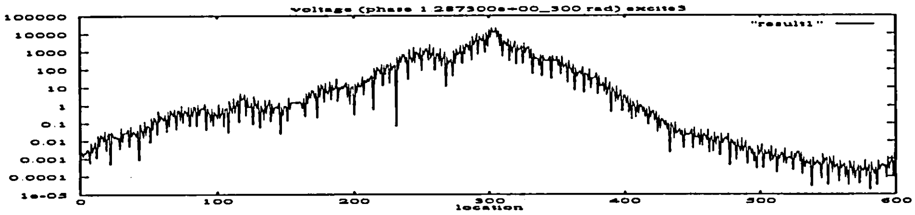


図 31: (m):整合終端し中心励振 (1.287300e+00 [rad])

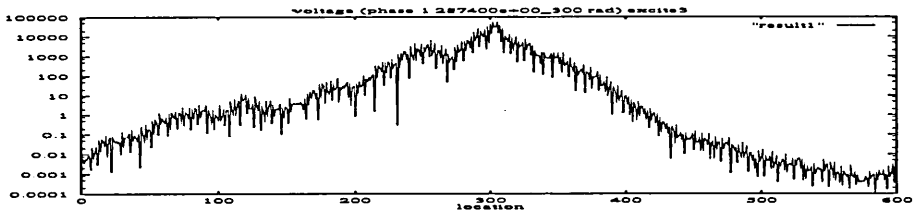


図 32: (n):整合終端し中心励振 (1.287400e+00 [rad])

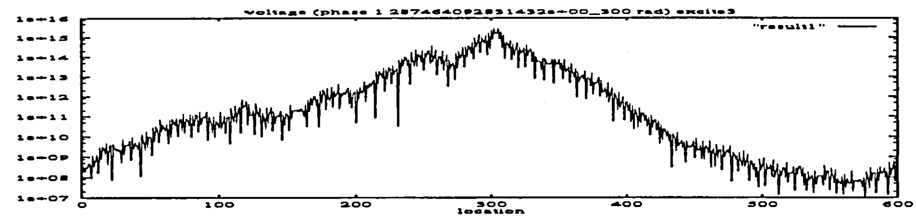


図 33: (o):整合終端し中心励振 (1.287464092831432e+00 [rad])

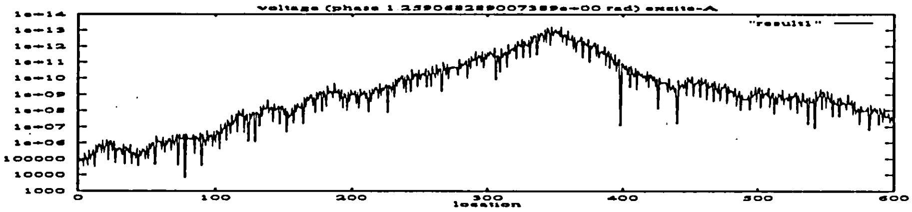


図 34: (a):整合終端し全体励振 (1.259068289007389e+00 [rad])

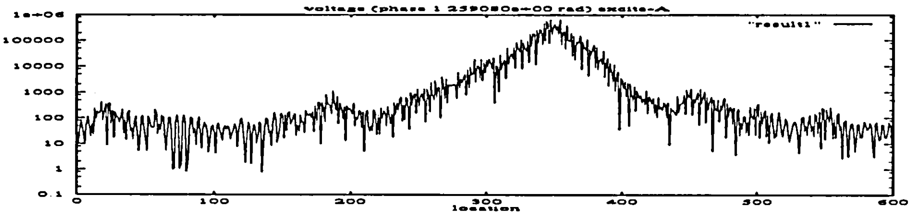


図 35: (b):整合終端し全体励振 (1.259080e+00 [rad])

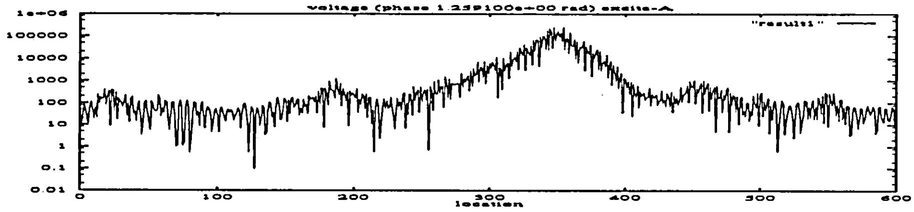


図 36: (c):整合終端し全体励振 (1.259100e+00 [rad])

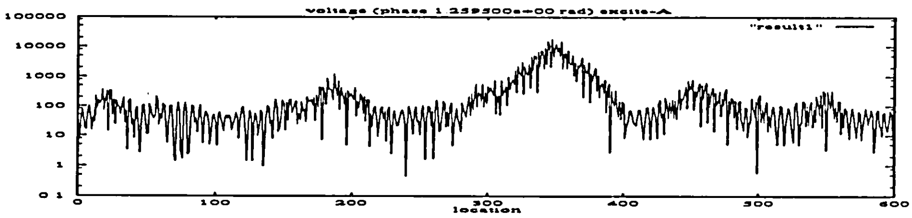


図 37: (d):整合終端し全体励振 (1.259500e+00 [rad])

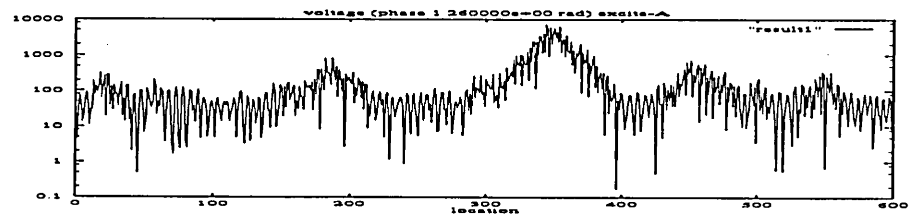


図 38: (e):整合終端し全体励振 (1.260000e+00 [rad])

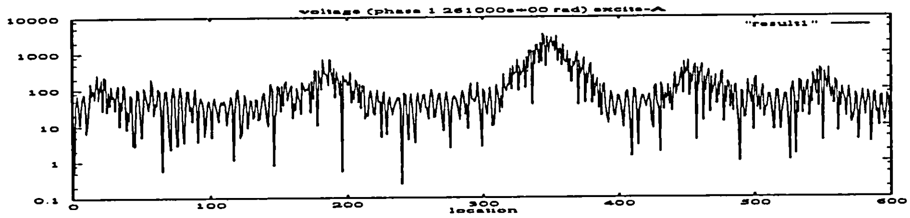


図 39: (f):整合終端し全体励振 (1.261000e+00 [rad])

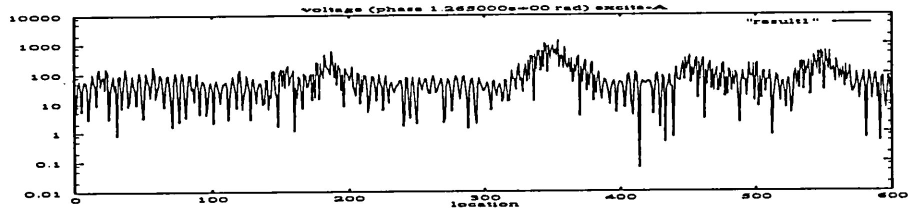


図 40: (g):整合終端し全体励振 (1.265000e+00 [rad])

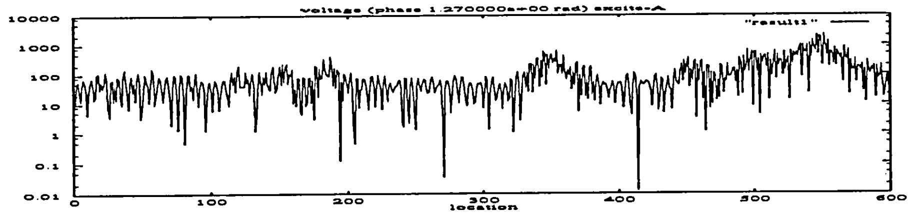


図 41: (h):整合終端し全体励振 (1.270000e+00 [rad])

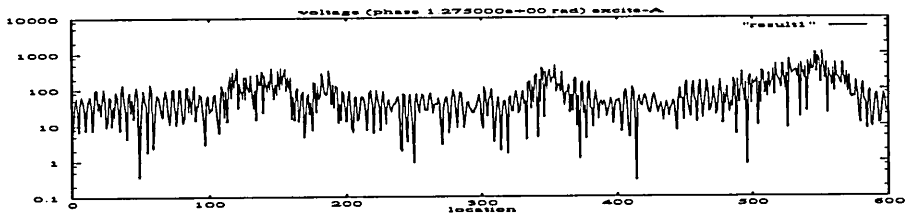


図 42: (i):整合終端し全体励振 (1.275000e+00 [rad])

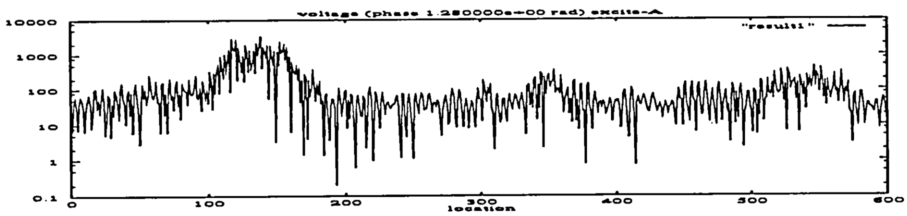


図 43: (j):整合終端し全体励振 (1.280000e+00 [rad])

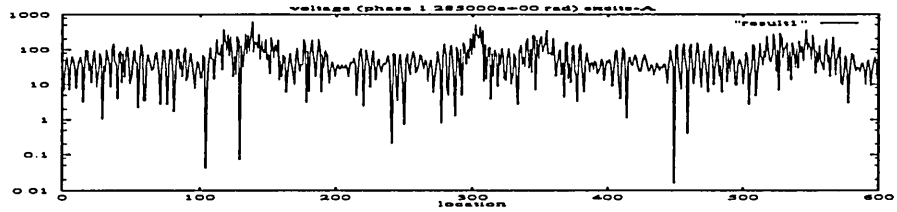


図 44: (k):整合終端し全体励振 (1.285000e+00 [rad])

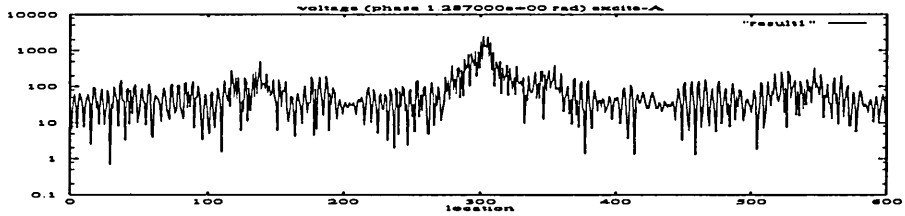


図 45: (l):整合終端し全体励振 (1.287000e+00 [rad])

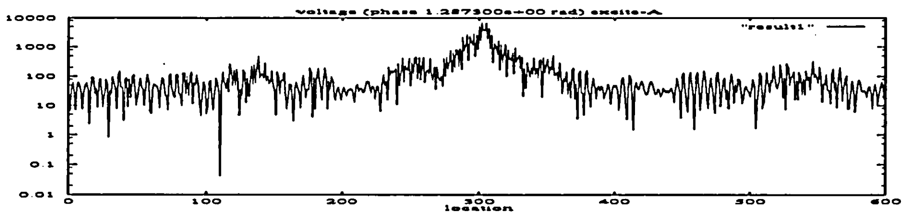


図 46: (m):整合終端し全体励振 (1.287300e+00 [rad])

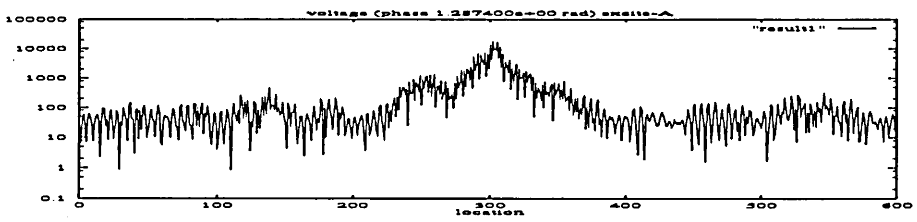


図 47: (n):整合終端し全体励振 (1.287400e+00 [rad])

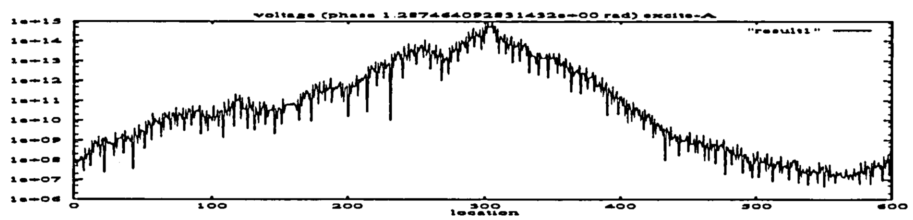


図 48: (o):整合終端し全体励振 (1.287464092831432e+00 [rad])

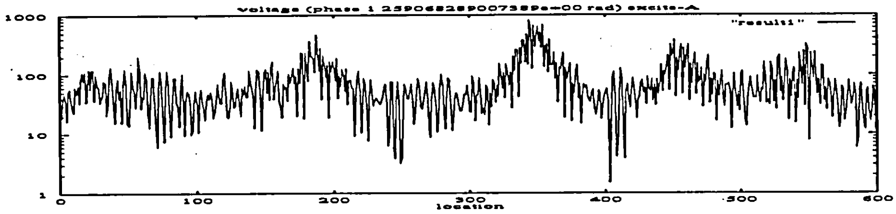


図 49: (a):一様損失し全体励振 (1.259068289007389e+00 [rad])

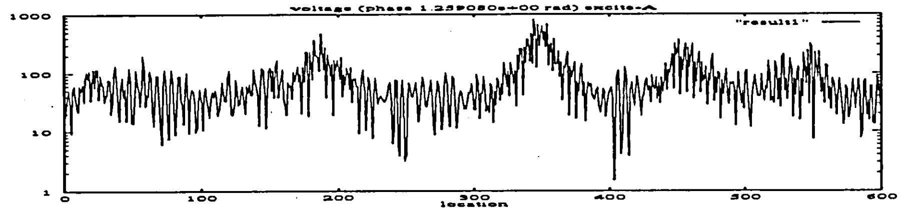


図 50: (b):一様損失し全体励振 (1.259080e+00 [rad])

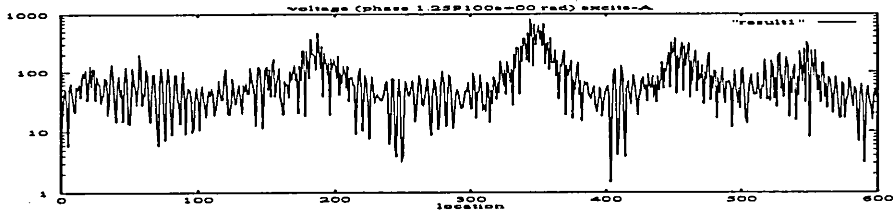


図 51: (c):一様損失し全体励振 (1.259100e+00 [rad])

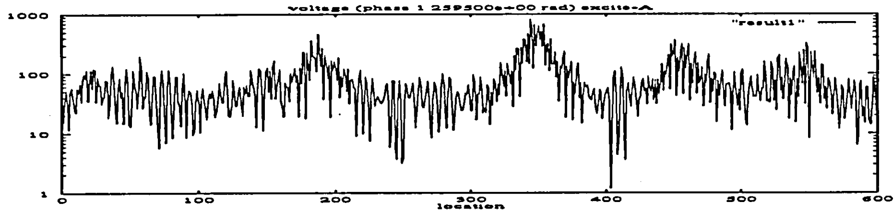


図 52: (d):一様損失し全体励振 (1.259500e+00 [rad])

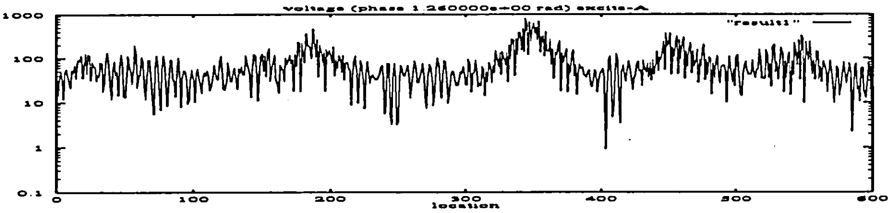


図 53: (e):一様損失し全体励振 (1.260000e+00 [rad])

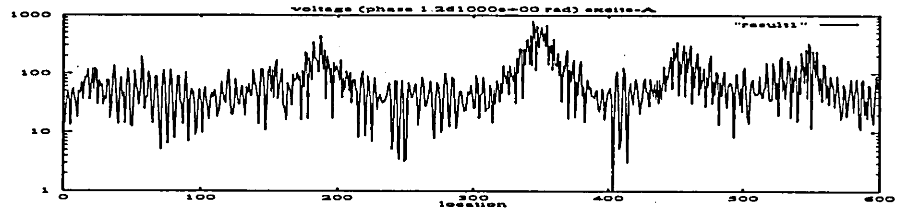


図 54: (f):一様損失し全体励振 (1.261000e+00 [rad])

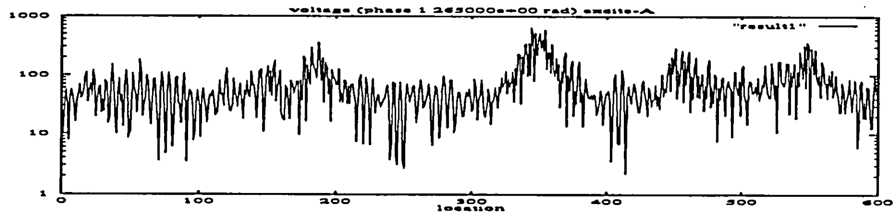


図 55: (g):一様損失し全体励振 (1.265000e+00 [rad])

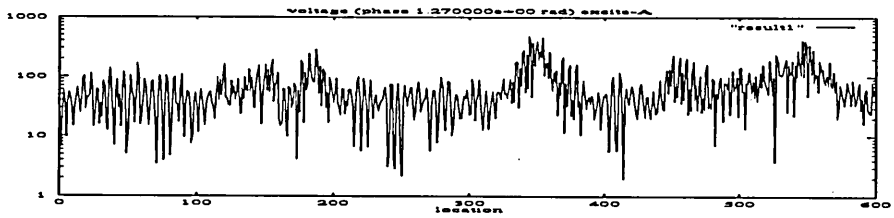


図 56: (h):一様損失し全体励振 (1.270000e+00 [rad])

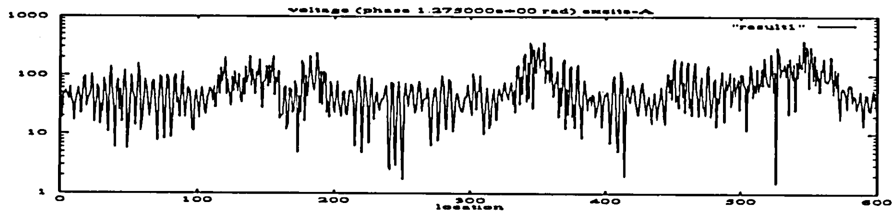


図 57: (i):一様損失し全体励振 (1.275000e+00 [rad])

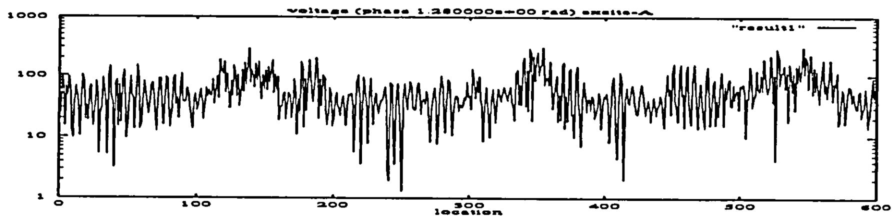


図 58: (j):一様損失し全体励振 (1.280000e+00 [rad])

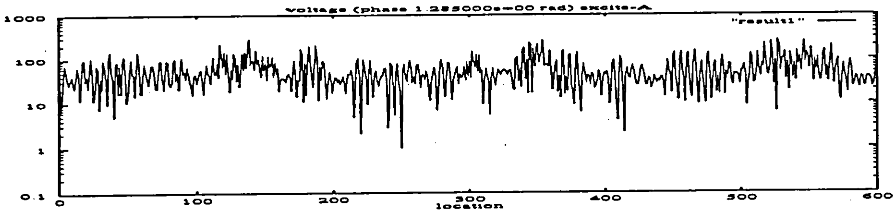


図 59: (k):一様損失し全体励振 (1.285000e+00 [rad])

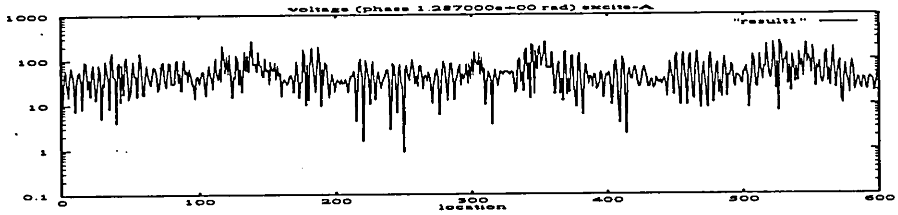


図 60: (l):一様損失し全体励振 (1.287000e+00 [rad])

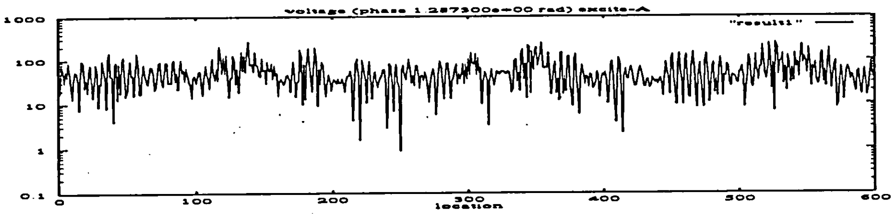


図 61: (m):一様損失し全体励振 (1.287300e+00 [rad])

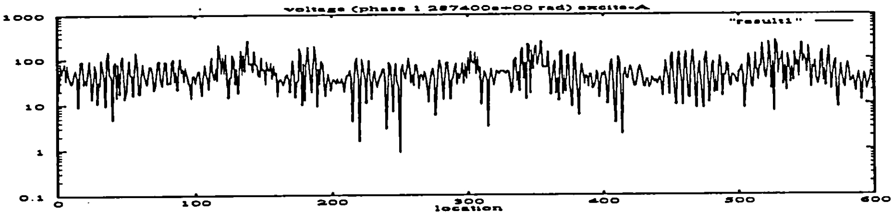


図 62: (n):一様損失し全体励振 (1.287400e+00 [rad])

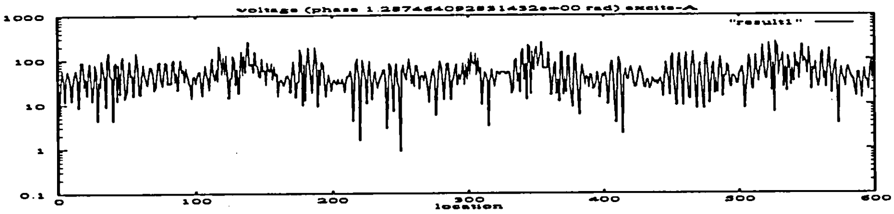


図 63: (o):一様損失し全体励振 (1.287464092831432e+00 [rad])

参考文献

[1] 長岡洋介: アンダーソン局在, 日本物理学会誌 **40** (1985) 489–498.

[2] 冨田誠: 乱れた媒質中での光の揺らぎとアンダーソン局在, 日本物理学会誌 **46** (1991) 927–933.

[3] Hisanao Ogura: Theory of waves in a homogeneous random medium,Phys. Rev. **A 11** (1975) 942–956.

[4] 小澤孝夫: 電気回路 2 (昭晃堂, 1980) pp.252–257.

輻射科学研究会資料
(RS 94-8)

半導体ＭＱＷ構造の部分的非線形光導波デバイスへの応用

村田 博司　　井筒 雅之

大阪大学　基礎工学部

平成６年７月２２日

於： 京都大学 工学部

半導体ＭＱＷ構造の部分的非線形光導波デバイスへの応用

Guided-wave optical devices with localized nonlinearity using MQW structures.

村田　博司　　井筒　雅之
Hiroshi MURATA and Masayuki IZUTSU
大阪大学 基礎工学部 電気工学科
Faculty of Engineering Science, Osaka University

１．はじめに

３次の非線形光学効果を利用した光制御デバイスは、光波の制御を光波だけで行なえるため、光波の持つ高速度性を活かした動作が可能であり、将来の大容量光通信・光情報処理システムへの応用が期待されている。

一方、光導波路は、非線形光学効果を利用した光デバイスを構成する上で有利であると言える。光導波路中では、光波は光閉じ込め効果のために高い光電力密度を保ったまま回折広がりなく伝搬する。このため、大きな非線形分極と大きな相互作用長を比較的容易に得ることができるので、効率良く非線形相互作用を利用することができる。それゆえ、近年来導波形非線形光デバイスの研究が注目を集めてきている[1]。

光導波路において、導波路全体ではなく、その断面の一部分だけが強い３次の非線形光学効果を持つ場合には、非常に興味深い導波特性が生じる。例えば、５層導波路の一方の導波層のみが非線形屈折率効果（光カー効果）を持つときには、導波系の固有モードの位相定数がモードの伝送電力に強く依存するようになる。特に、ある条件下では、位相定数と伝送電力の間に双安定的な特性が生じる[2][3]。我々は、この双安定的な導波特性を応用した新しい非線形光機能デバイスの研究を進めている。これまでに、導波路 Y 分岐、X 分岐の特定の分枝だけに非線形性を持たせた構造を持つ新しい光デバイスを提案し、数値解析により光－光スイッチ、光双安定デバイスとして動作することを明らかにしている[4][5]。

本報告では、部分的に非線形を持つ光導波路の実際の作製方法について考察する。非線形光学材料として半導体 MQW を用いて、MOVPE 領域選択成長技術により MQW 構造のバンドギャップエネルギーを制御することで、部分的に非線形性を持つ導波路構造を実現することを提案する[6]。

以下では、まず部分的非線形性光導波路の導波特性について簡単に述べる。次に、半導体 MQW 構造の部分的非線形導波路への応用について述べる。最後に、半導体 MQW 構造を用いた部分的に非線形性を持つ導波路 X 分岐光－光スイッチの設計を行ない、数値解析によりデバイスの特性を明らかにする。

2．部分的に非線形性を持つ光導波路

非線形屈折率効果（光カー効果）を持つ光導波路においては、導波路中の光波の伝搬の様子は光波自身の光電力に依存する。導波モードは、コアークラッド間の屈折率差と非線形屈折率効果によって誘起される屈折率変化によって決まる。非線形屈折率効果により誘起される屈折率変化は、非線形媒質中での光強度に比例するので、導波路の各部分での非線形光学係数が同じ場合では、ピーク光強度の大きなモードほど強い非線形相互作用を受けることになる。

これに対して、非線形光学係数が導波路断面で一様ではなく分布を持つ場合には、非線形光学係数の分布と光強度分布との重なりによって誘起屈折率変化の大きさが決まるため、モードが受ける非線形相互作用と伝送電力の関係はより複雑なものとなる。

図 1 に示す部分的に非線形性を持つ光導波路を考える。方向性結合器形導波路の片方の導波層が自己集束性の非線形屈折率効果を持ち、他の部分の非線形性は十分弱いとする。この導波路の TE モードの界分布は Jacobi の楕円関数を用いて解析的に表される[7]。モードの伝送電力に対する等価屈折率の変化の様子を図 2 (a) に示す。この例では偶モードの特性に双安定的な変化が生じる。図 2 (a) の a, b, c 点に対応するモードの界分布を図 2 (b) に示す。これらの 3 つのモードは、伝送電力は同じであるが、非線形部分での光電力密度が異なっており、誘起される屈折率変化の大きさには $\Delta n_{NL}^{c} < \Delta n_{NL}^{b} < \Delta n_{NL}^{a}$ の関係がある。このため、モードの等価屈折率の関係も $n_{eff}^{c} < n_{eff}^{b} < n_{eff}^{a}$ となっている。

この部分的に非線形性を持つ導波路の双安定的な導波特性は、光スイッチや光双

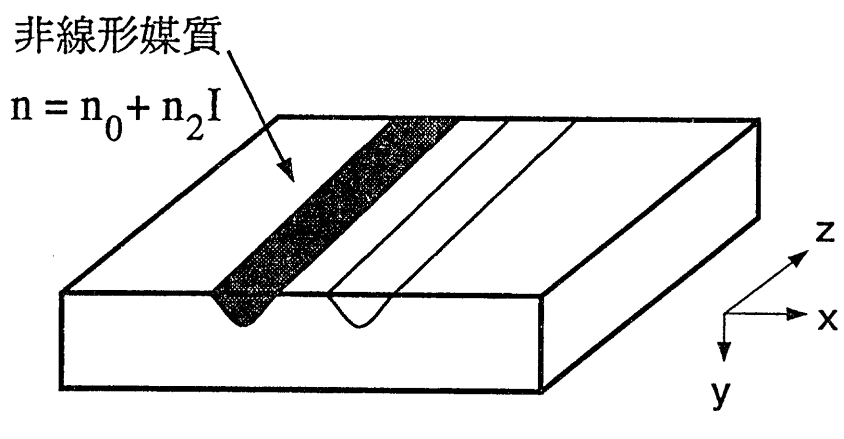


図 1　部分的に非線形性を持つ光導波路

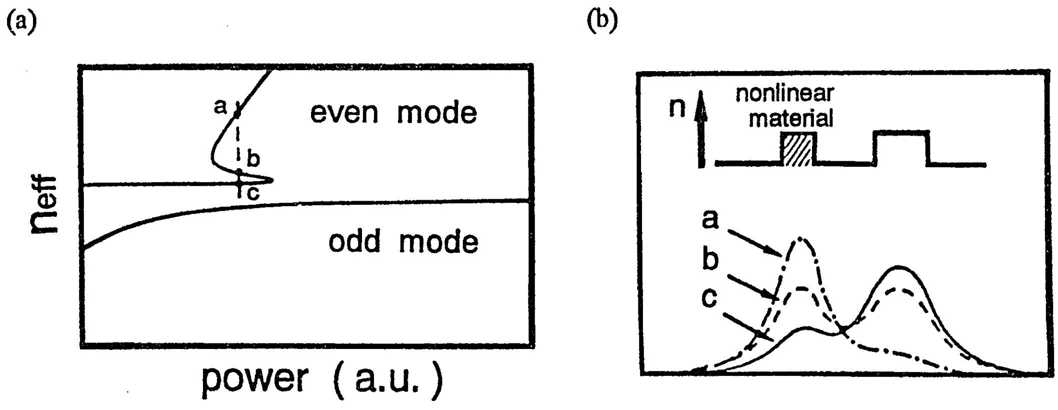


図 2　部分的に非線形性を持つ光導波路の
(a) 非線形分散特性 と (b) 固有モードの界分布

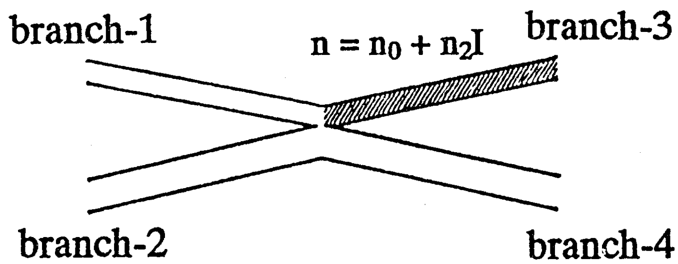


図 3　部分的に非線形性を持つ導波路 X 分岐

安定デバイスなどの光機能デバイスへの応用が考えられる。部分的非線形構造を導波路 X 分岐へ適用した場合の例を図 3 に示す。図では、非対称導波路 X 分岐の分枝 4 だけが自己集束性の非線形屈折率効果を示すとしている。分枝 1 、あるいは分枝 2 から入力した光波の出力ポートを、他の分枝から入力した光波の強度によってコントロールすることが可能である[5]。デバイスの動作は、非線形分枝での誘起屈折率変化を制御することで決まるため、光ー光スイッチング動作において制御光を導波光ではなく、空間ビームとして導波路の外から照射する方式も可能である。

3．半導体MQW構造を用いた部分的非線形導波路

MOVPE (Metal Organic Vapor Phase Epitaxy) 法による領域選択成長を利用することで、半導体 MQW (Multi-Quantum Well) 構造のバンドギャップエネルギーを制御して部分的に非線形性を持つ光導波路を作製することを提案する。

MOVPE 領域選択成長では、マスク上での結晶成長が起こらないために、マスク上の気相中に存在する原料種がマスク上を横方向に拡散して成長領域に達して成長に寄与する。つまり、マスクの面積が大きいほど成長領域に拡散する原料種が増加し、成長量が増加する。

半導体 MQW 構造のバンドギャップエネルギーは、量子閉じ込め効果のために、量子井戸構造のパラメータによって変化する。特に、量子井戸層の厚さに比べて障壁層の厚さが十分大きく、電子が井戸層内に強く閉じ込められている場合では、バンドギャップエネルギーは量子井戸層の厚さに強く依存するが、障壁層の厚さにはあまり依存しない。したがって、MOVPE 選択成長を用いて基板上各部分のマスクの面積を変えて MQW 構造を作製すれば、成長速度が大きく井戸層が厚い部分はバンドギャップエネルギーが小さくなり、マスク面積が狭い領域ほどバンドギャップエネルギーが大きくなる。このようなバンドギャップエネルギーの制御技術を利用して、実際にレーザーと光変調器を一枚の基板上に集積化した報告[8]もあり、半導体光集積回路作製のための重要な技術として注目されている。

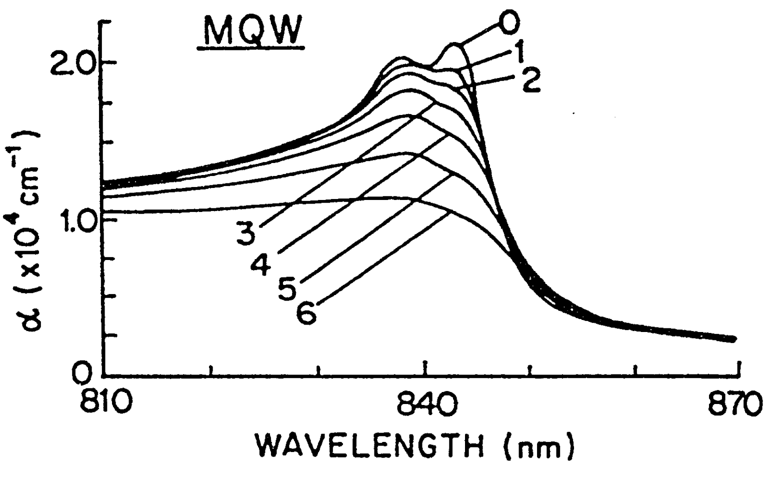


図 4　GaAs/AlGaAs MQW の非線形光吸収[9]
（量子井戸層厚 $L_z = 7.6$nm）
1 : 励起キャリア密度 $N_c = 0\ cm^{-3}$（線形吸収）, 2 : 1.2×10^{17},
3 : 2.1×10^{17}, 4 : 3.5×10^{17}, 5 : 5.8×10^{17}, 6 : 9.6×10^{17}

一方、半導体 MQW 構造は、バンドギャップエネルギー程度のエネルギーを持つ光波に対して励起子吸収の飽和に起因する極めて大きな 3 次の非線形光学効果（ $\chi_{(3)} \sim 10^{-3}$ esu ）を示すことから、非線形光学材料としても注目を集めている。実励起に起因する非線形性ではあるものの、バンドフィリング効果の緩和時間の高速化を図ることで数十ps の応答時間を得ることが可能である。この励起子に伴う非線形光学係数は強い波長依存性（波長分散）を持ち、およそ波長がエネルギーギャップ近傍の光波に対してのみに強い光学的非線形性が生じる[9]（図 4 ）。（図 4 には吸収係数の非線形性のみ示したが、屈折率の非線形変化はクラーマス・クローニッヒの関係から求められる。）図からわかるように、励起子吸収ピーク付近で最も大きな吸収の飽和が生じるが、波長がバンドギャップエネルギーよりも長波長側の領域では非線形性は急激に小さくなる。GaAs/AlGaAs MQW では、バンドギャップエネルギーに比べて 50nm 程度長波長の光波に対する非線形係数は、バンドギャップ付近の非線形係数に比べて十分弱くなる。

この特性を利用すれば、領域選択成長を利用して MQW 構造光導波路を作製するときに、図 5 に示すように、ある部分 (A) の MQW 構造のバンドギャップエネルギーを他の部分 (B) に比べて 50nm 短波長側にシフトさせると、非線形係数の分散のために図中の λ_1, λ_2 の光波に対しては (B) の特性を持つ MQW 構造は大きな 3 次の非線形光学効果を持ち、一方、(A) の特性の MQW 構造では非線形性が十分弱くなる。この

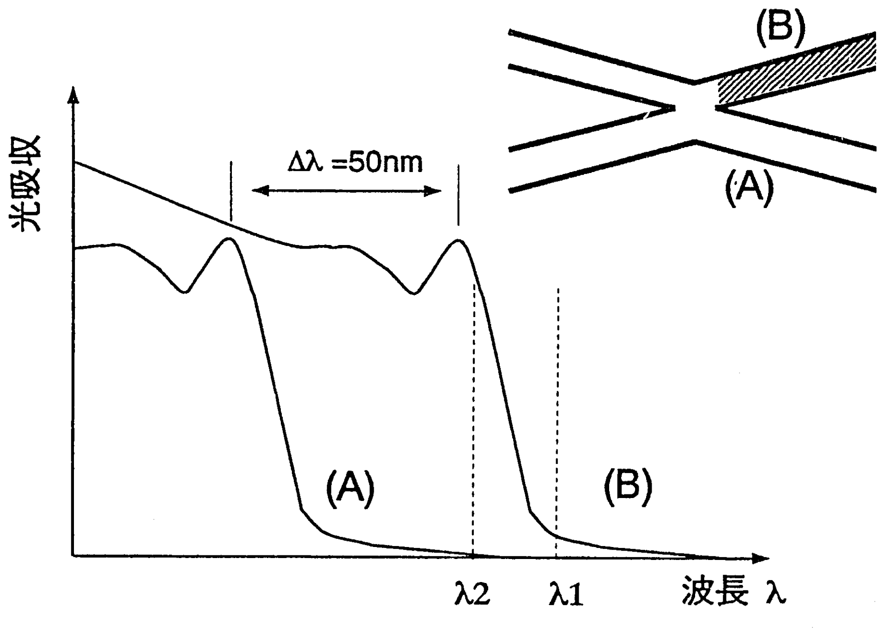


図 5　半導体 MQW 構造の吸収スペクトル

ことは、InGaAs/InGaAsP 系や他の MQW 構造でも同様である。つまり、バンドギャップエネルギーをうまく制御することで部分的に非線形性を持つ光導波路を実現することが可能と考えられる。さらには、非線形光導波路からなる非線形光デバイスと線形導波路からなる従来の光デバイスを一枚の基板上に集積化することも可能であり、さまざまな光集積回路への応用が期待できる。

4．部分的非線形導波路 X 分岐の設計

以上の議論に基づき、実際に半導体 MQW 構造を用いて部分的に非線形性を持つ導波路 X 分岐を作製することを考え、デバイスの設計および特性の解析を行なった。

部分的に非線形性を持つ導波路 X 分岐としては、MQW 構造のバンドギャップエネルギー付近での非線形光学係数の波長分散を考慮して、図 6 の構造を用いることにした。各分枝は単一モード導波路であり、分枝 4 だけが大きな非線形屈折率係数を持つとする。また、信号光の波長を λ_1、制御光の波長を λ_2 として、分枝 4 の非線形屈折率は信号光に対しては自己発散性を示し（非線形屈折率 $n_2 < 0$）、制御光に対しては自己集束性を示す（非線形屈折率 $n_2 > 0$）ものとする。信号光を分枝 1 から、制御光を分枝 2 から入力する。制御光入力が十分弱いときには、分枝間の非対称性により信号光は分枝 3 から出力される。制御光強度が大きくなり、制御光によって誘起される屈折率変化のために信号光（λ_1）に対する分枝 4 の等価屈折率が分枝 3 よりも小さくなると、信号光は分枝 4 から出力されるようになる。つまり、光一光スイッチとして動作する。

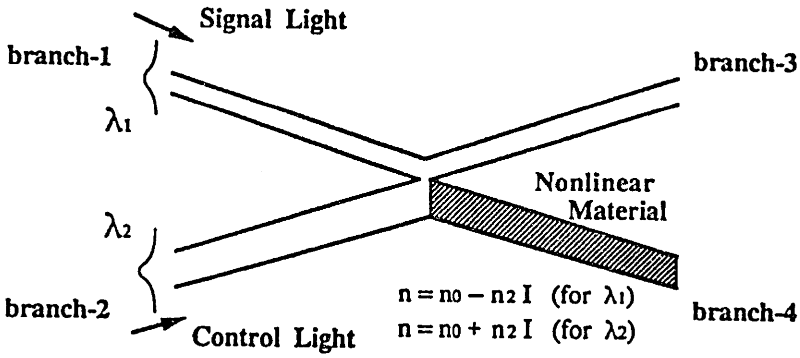


図 6　非線形係数の分散を考慮した部分的非線形導波路 X 分岐

半導体材料としては、光ファイバ通信に用いられる 1.55 μm の光波を信号光とすることを考え、InP 系の InGaAs/InGaAsP MQW を用いることにした。導波路は選択成長によりリッジ形のチャネル導波路を作製することを考え、MQW 層を InGaAsP 層で挟んだ構造とした。また、信号光の波長 λ_1 は 1.55 μm 、制御光の波長 λ_2 は 1.48 μm とした。この信号光と制御光の波長の組み合わせに対しては、図 6 の分枝 4 のMQW 層のバンドギャップエネルギーを波長換算で約 1.50 μm、他の分枝の MQW 層のバンドギャップエネルギーを約 1.45 μm とすることで、分枝 4 だけが非線形性を持つ構造を実現できる。これらのバンドギャップを値を得るためには、例えば文献 [8] のMOVPE の成長条件（成長温度 625 ℃, 圧力 76 Torr, 原料:TMIn,TEGa,AsH3,PH3）を用いたとすれば、分枝 4 の両側のマスク幅を 4μm, その他の分枝の両側のマスク幅を10

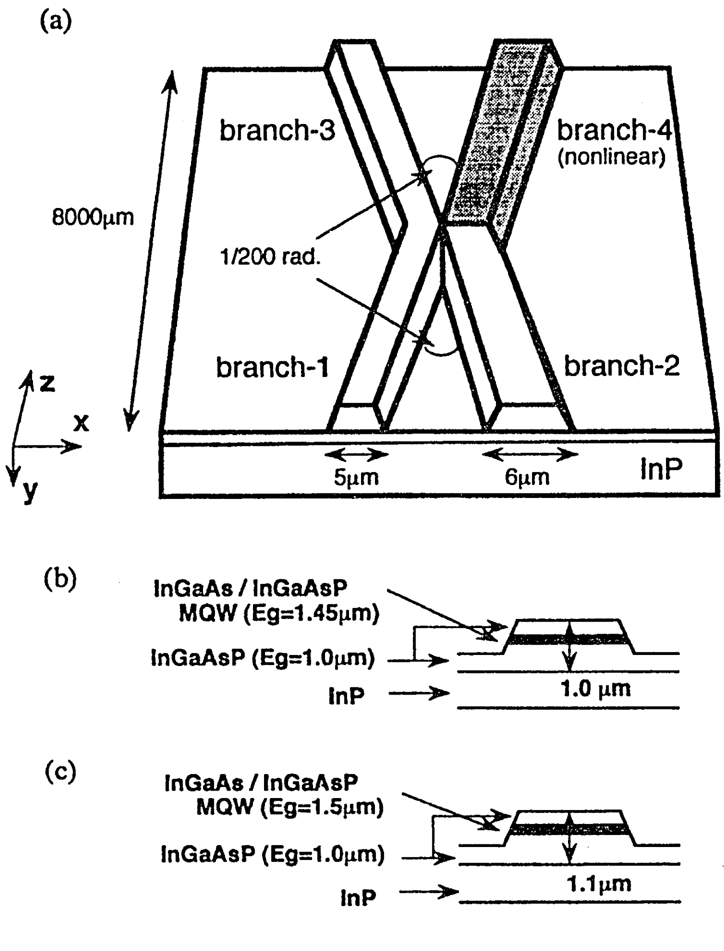


図 7　半導体 MQW 構造部分的非線形 X 分岐
(a) 全体の構成 (b) 分枝 2 の断面図 (c) 分枝 4 の断面図

μm とすれば良い。MQW 層を上下に挟む InGaAsP 層は、光吸収損失を小さくするためにバンドギャップエネルギーの値を 1.00 μm とした。さらに、各分枝が制御光および信号光に対して単一モード導波路になるように導波路分岐の各パラメータを図 7 のように定めた[10]。

これらのパラメータを用いて、BPM により光スイッチング特性の解析を行なった。InGaAs/InGaAsP MQW の非線形屈折率 n_2 の値については、詳しい測定の報告がないため、InGaAs/InAlAs MQW 導波路での報告を参考にして、

$$n_2 = -1.2\times10^{-6}\ [\mathrm{cm^2/W}]\quad (\text{for } \lambda_1 = 1.55\ \mu\mathrm{m})$$

$$n_2 = 1.2\times10^{-6}\ [\mathrm{cm^2/W}]\quad (\text{for } \lambda_2 = 1.48\ \mu\mathrm{m})$$

と定め、計算を行なった[11]。信号光の入力電力は 1μW とし、導波路の吸収係数は信号光に対しては 2.5 $\mathrm{cm^{-1}}$ 、制御光に対しては 25 $\mathrm{cm^{-1}}$ とした。

信号光の伝搬の様子を図 8 に示す。制御光入力により信号光出力ポートが切り替わっているのがわかる。信号光が伝搬に伴い減衰しているのは、光吸収効果を考慮しているためである。さらに、BPM による計算を繰り返して求めた光ー光スイッチング特性を図 9 に示す。図からわかるように、スイッチングに必要な光電力は約 3mW となる。

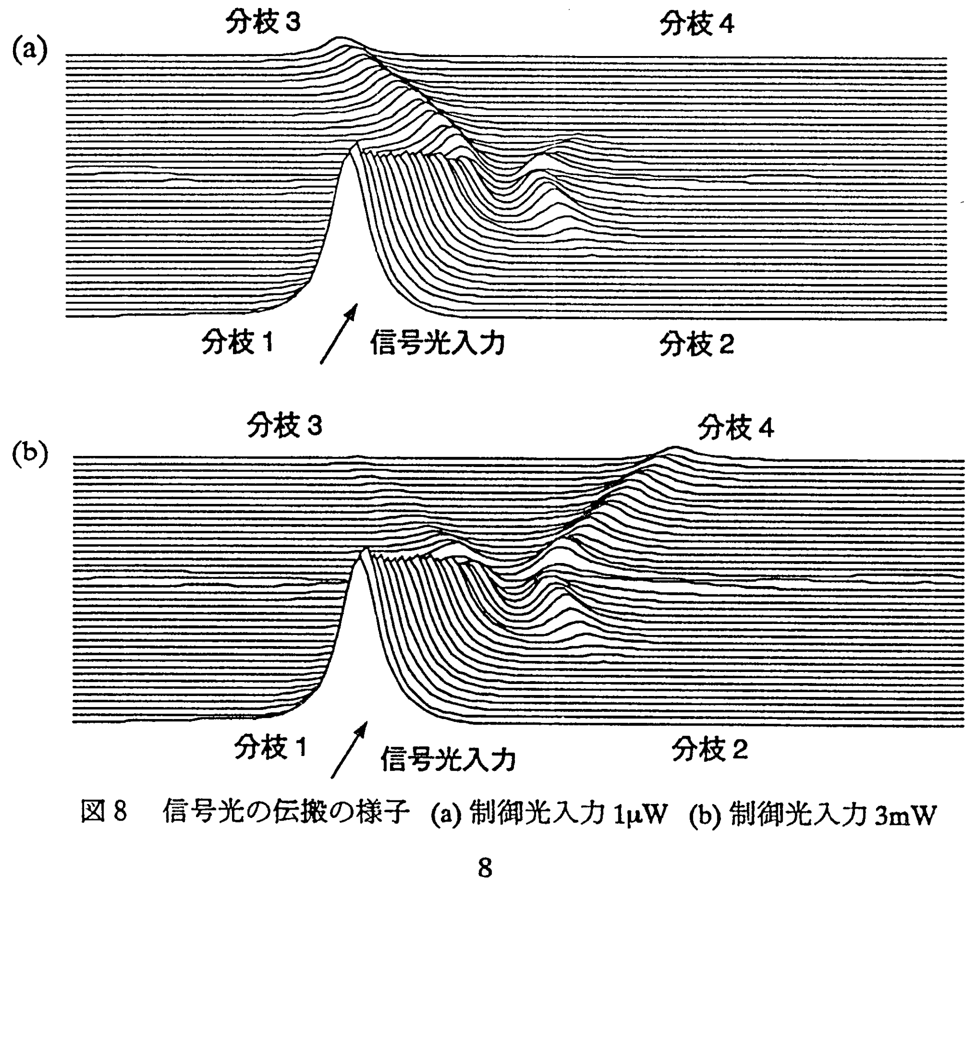


図 8　信号光の伝搬の様子 (a) 制御光入力 1μW (b) 制御光入力 3mW

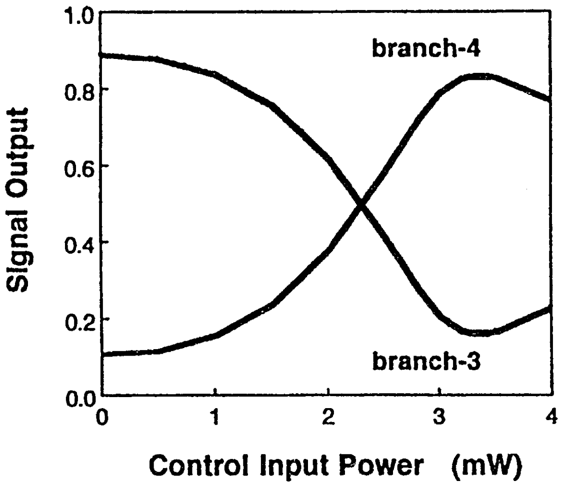


図9　光ー光スイッチング特性

また、図6の光ー光スイッチでは制御光を分枝2から入力しているが、図10のように制御光の入力ポートを変えて制御光を分枝4から入力すると、制御光が吸収による減衰を受けずに非線形媒質に入射するようになり、より低い電力で光ー光スイッチング動作が可能となる。BPMによる試算では、スイッチングに必要な光電力は約500 μWとなる。この場合については、さらに詳しい解析を継続中である。

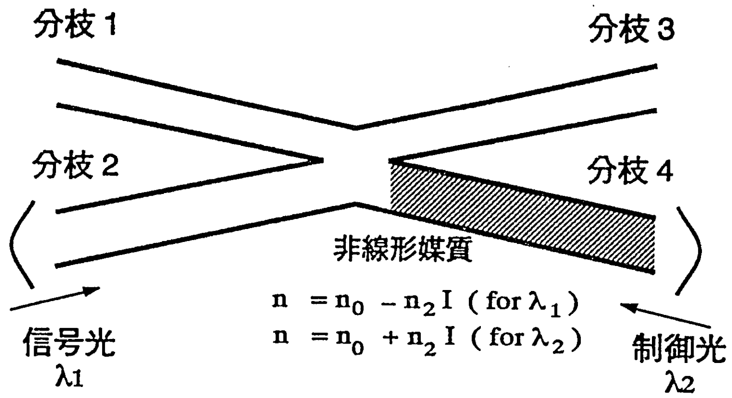


図10　部分的非線形導波路X分岐光ー光スイッチの高効率動作

5．むすび

半導体 MQW 構造を用いて、部分的に非線形性を持つ導波形光デバイスを作製することを提案し、デバイスの設計および BPM 解析を行ない、予想される特性を明らかにした。部分的に非線形性を持つ導波路 X 分岐を InGaAs/InGaAsP MQW を用いて作製すると、mW オーダの光電力で動作する光ー光スイッチを実現できる。また、信号光と制御光の伝搬方向を反対にすると、500 μW程度の光電力で動作する光ー光スイッチが得られる。

現在、非線形吸収効果を考慮に入れた場合についても考察を進めている。非線形吸収効果により吸収の飽和が生じる場合には、スイッチング光電力はさらに小さくなることが予想される。今後は、さらに特性の解析を進めると共に、実際にデバイスを作製し、動作の確認を行なっていくことが課題である。

謝辞

BPM の計算を手伝って頂いた、本学大学院生の石飛啓明君に感謝します。

参考文献

[1] 久保寺憲一：“非線形光学導波路デバイスの研究動向”，レーザー研究, **Vol.21**, pp.1078-1084 (1993).

[2] A.D.Boardman and P.Egan: "Optically Nonlinear Waves in Thin Films," IEEE J.Quantum Electron., **QE-22**, pp. 319-324 (1986).

[3] 大家重明, 梅田徳男, 張吉夫：“線形-非線形・光導波路構成における非線形表面波の伝搬”，電子情報通信学会論文誌C-I, **J75-C-I**, pp.444-451 (1992).

[4] H.Murata, M.Izutsu and T.Sueta: "Optical Bistability in Nonlinear Waveguide Branches," Proc. Optical Computing '90, 9C-8, pp.33-34 (1990).

[5] H.Murata, M.Izutsu and T.Sueta: "All-Optical Switching in Nonlinear X-junctions," Proc. Nonlinear Optics '90, MP26, pp.63-63 (1990).

[6] 村田博司, 井筒雅之：“MOVPE 選択成長による部分的に非線形性を持つ導波形光デバイスの提案”，応用物理学会第54回春季全国大会, 28p-G-16, p.983 (1994).

[7] 村田博司, 井筒雅之, 末田正：“部分的に非線形性を有する光導波路分岐”，電子情報通信学会技術研究報告, **Vol.90**, No.461, OQE90-152, pp.25-30 (1991).

[8] 佐々木達也, 加藤友章, 阪田康隆, 小松啓郎, 北村光弘, 水戸郁夫：“MOVPE 選択成長によるバンドギャップエネルギー制御技術と半導体光集積回路への応用”，電気学会光・量子デバイス研究会, OQD91-59, pp.43-52 (1991).

[9] A.Chavez-Pirson et al. : Proceedings in Physics, 36 , Springer-Verlag, Berlin Hidelberg (1989).

[10] 永井治男, 安達定雄, 福井孝志著：“III -V 族半導体混晶”，コロナ社 (1988).

[11] T.Kanetaka, H.Inoue, S.Tanaka and K.Ishida: "Large nonlinear optical effect in an InGaAs /InAlAs multiquantum well waveguide," Electron. Lett., **vol.29**, pp.1682-1684 (1993).

マイクロ波センサーの開発III
― 厚さ計、骨材水分計、パルプ濃度計、木材水分グレーダー ―

中山　茂

1994年7月22日

Abstract

マイクロ波は，通信や電力としてよく利用されているが，ここではマイクロ波をセンサーとして利用している。マイクロ波センサーとしては，主に，マイクロ波を用いた透過センサーと共振器センサーとがある。計測できる対象は，いろいろな物質の重量や水分，厚さ，密度などが計測できる。特に，マイクロ波は水分に非常に敏感であるので，水分センサーとして利用できる。また，物質の重量にも感じるので，重量・水分の同時計測センサーとしても利用できる。マイクロ波による重量と含水率との同時計測センサーは，マイクロ波帯にある水分の共鳴吸収を利用して感度良く水分を計測し，高いQ値の空胴共振器を用いて高感度水分測定を可能にした。

本報告では，特に，マイクロ波共振器の形状を工夫し，プラスチックシートの厚さ計や砂などの骨材の水分計，製紙工程でのパルプの濃度計，木の角材の水分分布を計測する木材水分グレーダーを開発した。

1 シート状物質の厚さ計 (Microwave Caliper)

1.1 はじめに

紙やプラスチック，ガラス繊維などのシート状の物質の厚さ管理は，品質的に非常に重要である。たとえば，紙の厚さはコピー用紙で通常0.1mmであるが，0.09mmと10 μ mの10%変化すると，その紙で1000枚の本を作成した場合通常は厚さが10cmになるが，厚さが10%少ない紙で製本すると9cmとなり1cmも変化し，背表紙のデザインの位置が変化したり，ブックケースのサイズに合わなくなったりする。このような問題は，シート状の物質ではしばしば発生する。

このようなシート状の物質の厚さ計として，非接触で計測できるセンサにはレーザーで両面からの距離を測定して厚さを計測したり，β線やγ線などの放射線の透過強度や反射強度を測定して厚さを計測したり，赤外線で透過量の減衰を測定して厚さを計測している。レーザー厚さ計では同一点の上下にセンサを設定する必要があり，装置が複雑となる。β線やγ線などの放射線では，取扱いが危険で強い線源の取扱いには免許が必要である。赤外線では，発色紙や厚いシートでは透過しないので計測が困難である。

ここでは，マイクロ波共振器を用いて，非接触でオンラインでも利用できmsecオーダーの高速測定が可能な厚さ計を考案し，マイクロ波厚さ計(Microwave Caliper)を開発した。従来から，紙の重量と水分との同時計測センサについて報告したが，閉じたマイクロ波共振器を分割して10mm程度のギャップを設けて，その内部に紙を入れて重量・水分同時計測を行ってきたが，厚いシート状物質は挿入が困難であった。方形型共振器では感度が良くなく高水分測定に適していたが，リエントラント型共振器は感度が良いが厚いものが測定できなかった。そこで，マイクロ波共振器の片方が開放した同軸型共振器を制作し，高感度で厚いものも測定できるように考案した。[1-16]

片方が開放した同軸型共振器は，その開放部にシート状物質を置くとマイクロ波共振器の共振周波数が通常減少するので，その周波数シフトを測定して，水分のない各種シート状物質（紙，プラスチックフイルム，テフロンシートなど）の厚さを計測した。この周波数シフトの現象は，水晶発振子の水晶に何か物質が付着すると共振周波数が変化するのに似ている。マイクロ波共振器としては，開放型の同軸型共振器や方形型共振器を製作して比較し，実験を行った。

マイクロ波による厚さセンサーは，マイクロ波帯にある物質の屈折率を利用して感度良く計測し，高いQ値の空胴共振器を用いて高感度に測定を可能にした。このセンサーは安価に制作でき，マイクロ波共振器を配列することにより電子スキャンすることで厚さ分布として活用できるものと考える。

1.2　シート状物質の厚さの計測実験

空胴共振器内に物質を挿入した時，共振周波数がシフトする。この周波数シフトは主に物質の重量に依存する。周波数のシフト量の測定量から，密度が一定であれば，物質の厚さが計測できる。あらかじめ試料を測定して，周波数シフトΔｆとシックネスゲージで厚さｔを実測して比例定数ａを求めておき，つぎの式で，周波数シフトΔｆから

$$t \sim \Delta f/a \tag{1}$$

厚さｔを求めることができる。

1.2.1　スロットアンテナ付き方形型共振器

開口同軸型共振器を開発する当初，方形型共振器の研究を行っていたが，方形型共振器にスロットアンテナを持ったマイクロ波共振器が古くから知られていた。スロットアンテナ型共振器とは，共振器にある方向にスロット（細長い穴）を設けたもので，マイクロ波が共鳴的に洩れることを利用する。図1のような共振周波数2.89[GHz]

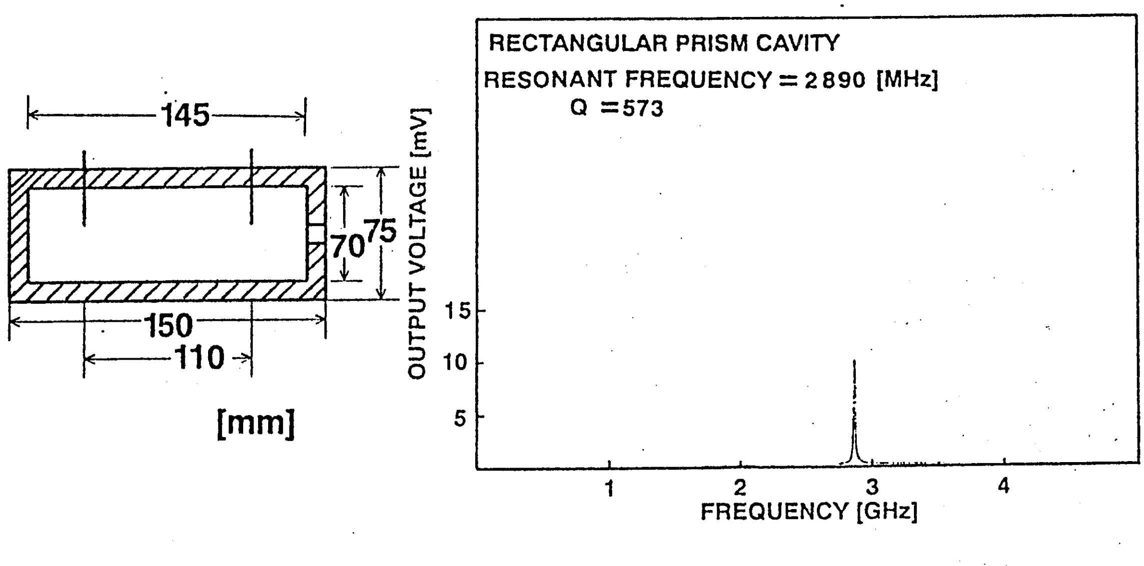


図 1: 方形型空胴共振器のサイズと特性

の方形共振器（Q値=573，共振器損失6.2dB）で側面に切り込みのスロットアンテナ(68[mm] × 4[mm])を設けて，そのスロットアンテナの上に紙を置いて共振曲線の変化を測定した。これは，マイクロ波共振器にスロットに紙をあてることにより，

そこからのマイクロ波の洩れが変化し，共振周波数のシフトを測定した。図2のように，1枚の厚さ80[μ m]の紙を用いて，20枚までスロットアンテナにのせて共振曲線を観測した。コンピュータ計測システムで，紙の厚さによる共振周波数のシ

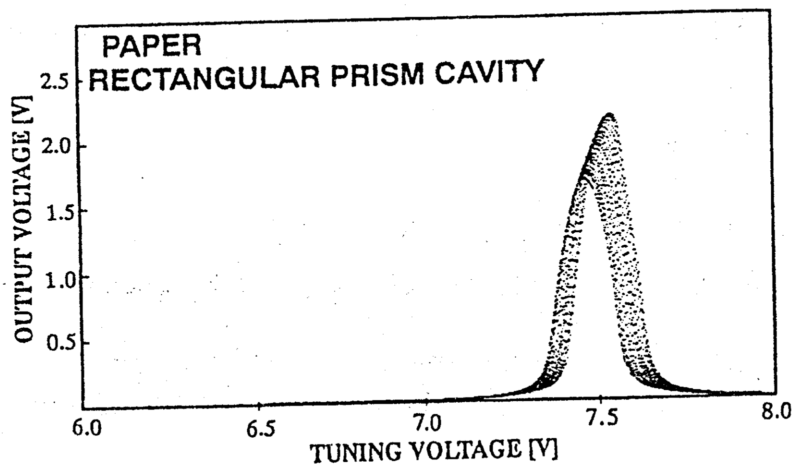


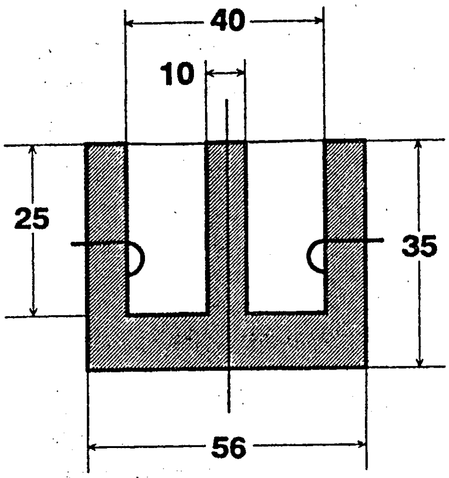
図 2: 方形型空胴共振器による紙（厚さ80 μ m）の厚さ変化

フトを測定した。共振周波数のシフトの単位は，ＶＣＯの電圧10[V]を16ビットのD／Aコンバータで65536段階に変換（1COUNTあたり0.1525[mV]）したものである。

この紙の厚さによる周波数シフトの変化は直線的であるが，紙1枚あたりの周波数シフト量が，この周波数シフトを厚さで直線近似したとき，0.3904 ± 0.0018[counts/μ m]と小さい。分解能として，約2.56[μ m/counts]で，感度があまり良くない。測定のばらつき程度を示す標準偏差は± 20[μ m]と良くない。そこで，つぎに感度の良い開口同軸型共振器を開発した。

1.2.2 開放同軸型共振器

図3のような内径2a=10[mm]，外径2b=40[mm]，高さh=25[mm]の同軸型空胴共振器を製作した[17]。基本モードの共振周波数は2.48[GHz]（Q値=246，共振器損失15.2dB）で，測定面積は1256[mm^2]とスロットアンテナの方形共振器に比較して4.6倍の開口部を持つ。



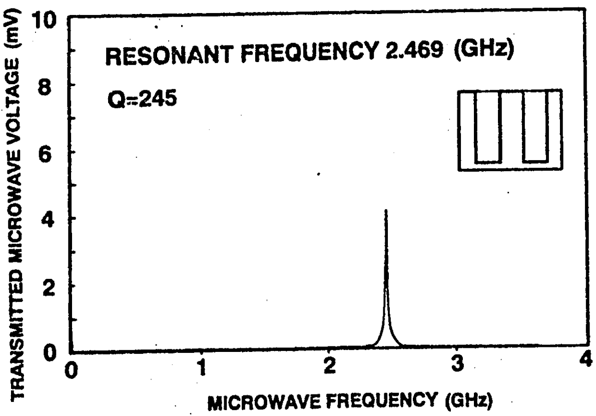


図 3: 開放同軸型空胴共振器のサイズと特性

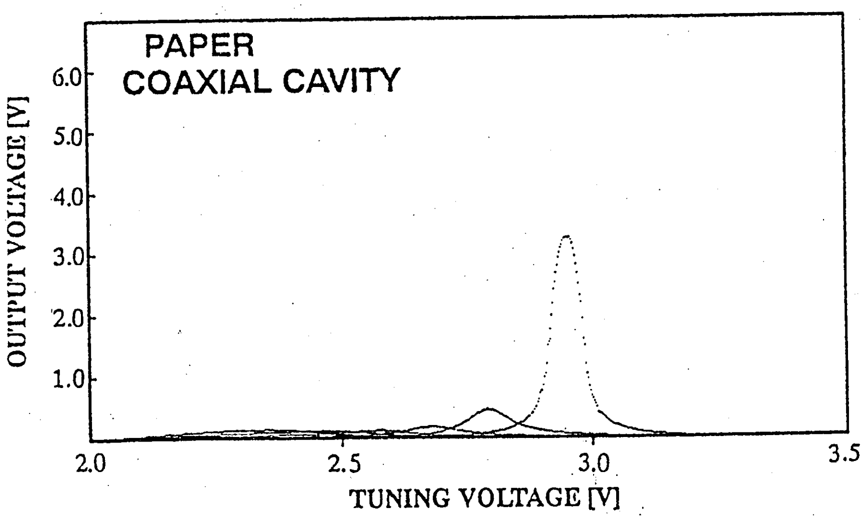


図 4: 開放同軸型空胴共振器による紙 (厚さ 80 μ m) の厚さ変化での共振曲線の変化

この開放同軸型共振器の上に1枚の厚さ80[μ m]の紙を置くと，図4のように大きくシフトした。図2と比較すると大きく違うことがわかる。開放同軸型共振器では，5枚以上でほとんどマイクロ波が紙に吸収されてしまい，周波数シフトは20倍以上の感度があった。そこで，水分のないつぎのような薄いシート状物質について測定を行った。

(i)　テフロンシート　(厚さ47.5[μ m])
(ii)　ポリエチレンフィルム　(厚さ10.0[μ m])
(iii)　ポリエステルフィルム　(厚さ125.0[μ m])

シート状物質がないときの共振曲線を求めて，つぎに1枚1枚シートをのせて共振曲線を描かせた。たとえば，テフロンの実験結果は，図5のようになった。共振曲線は，一走査あたり平均約5[sec]であった。この共振ピーク値の同調電圧のずれ（空の状態とシートのある状態とのずれ）をコンピュータ制御システムで10[V]あたり16ビットに変換して求めた。この同調電圧のずれは，ＶＣＯによりマイクロ波周波数のシフトに対応するので，周波数シフトとしてカウント値で図2,5に表示した。この周波数シフトは，5[msec]で求めることのできるコンピュータ制御システムをＣ言語で製作し，1000回の平均値を5[sec]で求めた値を取ってあるので，ＶＣＯの発振などの不安定性雑音がキャンセルされている。

図6のように，テフロンシートの厚さによる周波数シフトの変化は直線的で，テフロンシート1枚あたりの周波数シフト量の感度は，この周波数シフトを厚さで直線近似したとき，3.73 ± 0.01[counts/μ m]と大きい。分解能として，約0.27[μ m/counts]で，感度が非常によい。この周波数シフトを厚さで直線近似したときの測定のばらつき程度を示す標準偏差は9.9[μ m]となった。

つぎに，薄いポリエチレンフィルムの厚さによる周波数シフトの変化も直線的で，ポリエチレンフィルム1枚あたりの周波数シフト量の感度は，同様にこの周波数シフトを厚さで直線近似したとき，5.61 ± 0.04[counts/μ m]と大きい。分解能として約0.18[μ m/counts]で，これも感度が非常によい。この周波数シフトを厚さで直線近似したときの測定のばらつき程度を示す標準偏差は2.2[μ m]となった。

また，厚いポリエステルフィルムの厚さによる周波数シフトの変化も直線的で，ポリエステルフィルム1枚あたりの周波数シフト量の感度は，同様にこの周波数シフトを厚さで直線近似したとき，8.39 ± 0.09[counts/μ m]と大きい。分解能として約0.12[μ m/counts]で，これも感度が非常によい。この周波数シフトを厚さで直線近似したときの測定のばらつき程度を示す標準偏差は10.6[μ m]となった。

ここでは，12ビットのＡ／Ｄコンバータと16ビットのＤ／Ａコンバータを用いたが，Ａ／Ｄコンバータを16ビットにすることにより，さらに，分解能と標準偏差が向上するのではないかと考えられる。

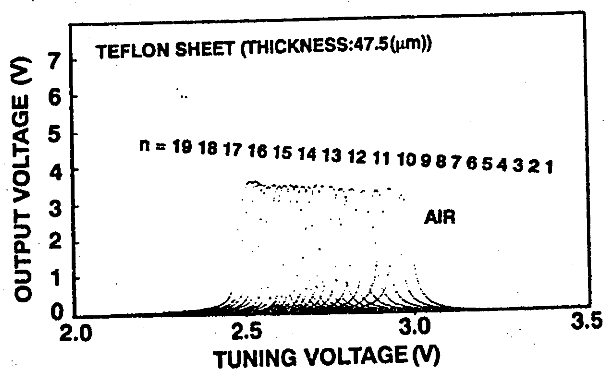


図 5: 開放同軸型空胴共振器によるテフロンシートの厚さ変化での共振曲線と周波数シフト

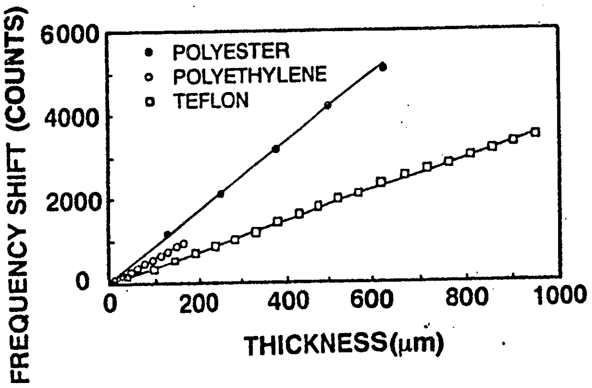


図 6: 開放同軸型空胴共振器のによるポリエステル，ポリエチレン，テフロンの厚さ変化による周波数シフトの比較

スロットアンテナ方形型共振器では電界が一方向にあるために，シート状物質に繊維方向があるときにはマイクロ波の吸収強度や周波数シフトが異なるが，開放同軸型マイクロ波共振器は電界方向が測定平面に放射状にあるために，シート状物質の繊維方向に依存しないと考えられる。

1.3　おわりに

本研究では，マイクロ波共振器を用いて，非接触でオンラインでも利用でき，高速，高感度測定が可能なマイクロ波厚さ計 (Microwave Caliper) として，開放同軸型マイクロ波センサを開発して，十分な分解能と精度を得た。

片方が開放しているために，オンラインで装置を設置する場所が限られている場合でも容易に据え付けが可能である。電子走査マイクロ波厚さセンサーとしても，周波数の異なった開放同軸型共振器は，高さを変えるだけで容易に製作できるので便利である。

2 骨材水分計

2.1 はじめに

ここでの研究目的は，マイクロ波共振器を用いて，木材チップや砂や石などのコンクリートの骨材，石炭などの水分率を非破壊的に計測するマイクロ波センサーを開発することである。木材チップの水分センサー開発の前の予備的な研究として，骨材の水分率の計測センサーの開発を行った [18]。

コンクリートの水分計測は非常に重要で，水分率がコンクリート強度に大きく影響する。そこで，生コンクリートの水分を正確に，簡便に，瞬時に計測できるマイクロ波センサーの開発を行う。コンクリートの水分は，セメントに追加される水分だけではなく，コンクリートの約 70～90%を占める骨材に含有する水分に大きく影響される。そのために，骨材である砂や砂利，砕石の水分率も正確に，簡便に，瞬時に計測できることが必要で，そのようなマイクロ波センサーを開発する。

現在，一般に開発中の生コンクリートの水分計としては，中性子線を用いてその線量の減衰量を測定して，水分を計測しているが，中性子線を非常に危険で安全なセンサーが必要である。そこで，本試験研究で開発しようとする水分センサーは，マイクロ波の透過減衰量を測定をして，水分を計測するものである。いろいろな形状のマイクロ波共振器を工夫して，骨材用低水分水分センサーと生コンクリート用高水分水分センサー，硬化コンクリート用平面型水分センサーの実用機を開発したい。

研究の社会的意義として，本研究は，いろいろなマイクロ波共振器を用いて，骨材や生コンクリート，硬化コンクリートの含水量を瞬時に計測するポータブルシステムで，現場でのコンクリートの品質管理に非常に期待されている。

生コンクリート用の中性子線の水分計のような線源は，取扱いを間違うと大きな惨事となり危険である。そのために，社会的に安全な計測方法が望まれる。本研究でのマイクロ波センサーは，マイクロ波パワーとして数十μWで動作するので，非常に安全である。さらに，マイクロ波センサーを用いると，スランプ試験のように長時間作業を必要としないので，試料にマイクロ波センサーを入れるだけでワーカビリティやコンシステンシーの瞬時計測（１ミリ秒）が可能である。

本研究の利用範囲は広く，被測定物も固体，半固体，粉体，液体，ガスなどいろいろなものが考えられるが，本研究で，特に骨材用，コンクリート用の水分センサーの標準器を完成させると，正確な水分管理を行い，土木，建築でのコンクリート強度や耐久性等の重大な問題の解決への寄与でき，社会的貢献度は大変大きいと考える。

水分率の管理は多くの広い領域で必要とされ，生産性の向上や品質管理に重要である。骨材やコンクリートの水分率管理も非常に重要で，スランプ試験のように突き棒での煩雑な撹拌による人為的な誤差による不確定な測定が問題となっている。

また，コンクリートの約70～90%を占める骨材に含有する水分量が不確定なまま，セメントと水，骨材が一定比率で練り混ぜられるために，骨材の水分率により生コンクリートの水分率が大きく変化する。そのために，骨材である砂や砂利，砕石の水分率も正確に計測できるマイクロ波センサーが望まれる。また，コンクリートの乾燥状態を調べるために，硬化中のコンクリート面の水分率を計測する技術も必要であり，コンクリート亀裂での水漏れ箇所の検知センサーにも応用できる。

従来の技術開発の動向として，コンクリートの水分計には中性子線が用いられていたが，人体への危険性や取扱には特殊免許が必要な場合もある。また，一般に水分計には反射型二波長赤外線がよく用いられていたが，骨材表面やコンクリート表面の水分しか測定できず，物質表面の状態，色，地合の変化で影響を受けたりして，骨材・コンクリート内部までの水分測定はできない。水分計の接触方式としては，電気伝導度方式があるが，水の電離度が温度により大きく変化したり，釘状の電極の接触抵抗の変動の影響があり，精度が非常によくなく，骨材やコンクリートへの適用は困難である。数百MHz以下の高周波水分計は，マイクロ波よりも感度がよくなかった。

本試験研究で使用するマイクロ波周波数は3GHz帯である。これは，水の共鳴吸収線が23GHz付近にあり，数百MHz程度の高周波ではほとんどこの共鳴吸収を利用していないが，3GHz程度のマイクロ波ではこの共鳴吸収が大きく寄与し，取扱いが簡単な周波数帯である。通常，マイクロ波部品は高価であるが，3GHz帯のマイクロ波部品は安価で入手しやすい。

計測原理として，マイクロ波共振器の中に骨材やコンクリートを入れたり，共振器の側面に骨材やコンクリートを当てると，そのマイクロ波共振強度が骨材やコンクリートに含まれる水分の誘電率虚数部（損失）によって吸収されて減衰することを利用している。その共振ピーク強度を測定することにより，骨材やコンクリートの水分を瞬時に(msec以下)計測できる。　このように，スランプ試験のような煩雑な操作が必要であったり，従来の計測方法では骨材・コンクリート用水分には危険であったり適切でない方法が多くあった。しかし，本研究の先駆的な点として，マイクロ波共振器を用いて共振ピーク強度の減衰の測定から，骨材やコンクリートの含水量を瞬時に，安全に，簡単に計測するもので，他に類をみない。更に，本研究の独創的な点は，マイクロ波共振器の形状を工夫して変えることにより，１つのマイクロ波計測システムで，骨材用低水分水分センサーや生コンクリート用高水分水分センサー，硬化コンクリート用平面型水分センサーの実用機を開発することにある。

2.2　骨材用低水分センサーの実験

2.2.1　骨材用水分センサーの原理

骨材の吸収量として，砂などでは0～2%，砂岩では2～7%であり，比較的低水分仕様の水分センサーが必要である。このためには，同軸型共振器（共振周波数３ＧＨｚ）を用いて，その側面にスロットアンテナをもうけて，送信アンテナからマイクロ波を出し，受信アンテナよりその透過波を受ける。この同軸型共振器をテフロン筒で被い，それ全体を骨材に挿入すると，骨材に含まれる水分でのマイクロ波吸収により，共振ピーク電圧が減衰する。この減衰量（または，共振曲線の半値幅）を測定し，水分量を計測する。

骨材が気乾状態や表乾状態，湿潤状態でも，マイクロ波は骨材内部に浸透し，水分に強く反応する。これは，電子レンジ（2.4GHz）に水の入った陶器を入れると，マイクロ波は陶器を通過し，水により吸収を受ける例をみれば理解できる。基礎的な測定として，細骨材や粗骨材などの骨材の粒度による違いや砂，砕砂，砂利，砕石などの骨材の種類による違いなどマイクロ波減衰に与える影響等を実験する。
骨材・コンクリートと水分との複素誘電率は，それぞれ非常に異なっている。誘電率の虚部は物質の吸収係数に関係し，骨材の吸収係数と水分の吸収係数とでは約100倍以上の違いがある。そのために，水分計では骨材・コンクリートの吸収は無視できる。

図７のように，マイクロ波共振器を骨材中に挿入するとマイクロ波共振器の共振ピーク電圧が摂動を受ける。その変化分を測定することにより骨材の水分率を求めることが出来る。つまり，共振ピーク電圧の減衰量V_oは水分率d_wにほぼ比例する。
即ち，

$$V_o = ed_w + fd_s \tag{2}$$

と考えらる。ここで，e,fは比例定数である。そのために，共振ピーク電圧の減衰は水分量d_wに大きく影響されて，骨材の量d_sにはあまり依存しない。

このようにして，気乾状態の骨材を変化させたときの共振ピーク電圧の減衰(V_o)を測定すると，骨材の水分率d_wが解析的に一意に求められる。このように，共振ピーク電圧の減衰より水分率を推定する。

ここでは，スロットアンテナ付き同軸型共振器を，砂骨材に埋めて共振特性の変化を測定し，水分を計測した。また，骨材の温度による影響も調べた。さらに，砂や石などの骨材の粒径による違いも調べた。

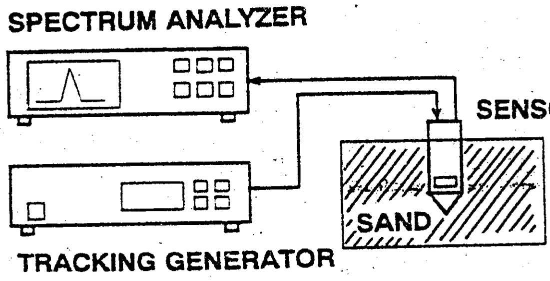


図 7: 木材チップや骨材の水分計測

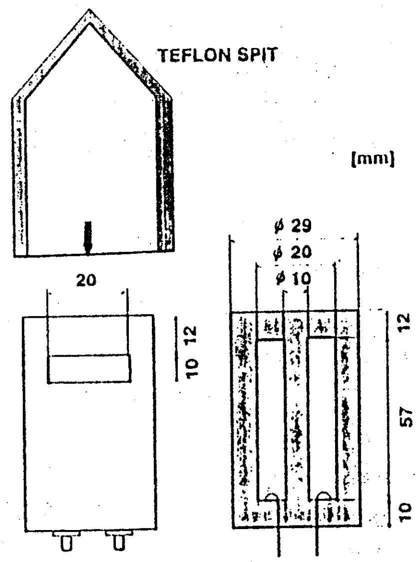


図 8: 外部スロットアンテナ付き同軸空胴共振器のサイズ

2.2.2　スロットアンテナ付き同軸型共振器の特性

製作したスロットアンテナ付き同軸型共振器は，図８のように，同軸型空胴共振器の横に口を設けてその部分からの漏れ電波により水分を測定する。スロットに砂が入らないようにテフロンの筒状のチューブをかぶせた。その共振器の共振特性を図９に示す。

2.2.3　骨材の水分計測の実験

スロットアンテナ付空胴共振器を用いた測定装置は，トラッキングジェネレータとスペクトラルアナライザを用いて波形を測定した。このネットワークシステムでは，ピーク検出機能があり，ピーク周波数とピーク電圧を測定した。

骨材の砂は，ふるいで細かくしたもので，乾燥状態の重さ1589 g に対し水を加えて測定した。その時の共振特性を，図 10 に示す。

水分がない時の乾燥させた砂の共振曲線を求めて，つぎに水分を加えたときの共振曲線を描かせた。そして，それらの差である，ピーク電圧の減衰値の重量水分パーセントによる変化は，図 10 のように直線的で，これを最小自乗法で直線近似したとき，

分解能　：0.15 mV/%　（マイクロ波入力電力：-20dBm）
標準偏差：0.06 %

が得られた。

つぎに，骨材は夏や冬とで温度が異なるので，骨材の温度変化による減衰値の変化を調べた。まず，空気中での共振のピーク電圧を調べて，温度を 2°C から 60°C まで変えて，乾燥骨材での減衰値を求めた。その減衰値は，ほとんど変化はなかった。

次に，コンクリートの骨材には，砂と石との混合をもちいるので，骨材の粒径による減衰値の変化を調べた結果，減衰値にはあまり変化しなかった。

2.3　おわりに

マイクロ波共振器を砂や石などの骨材にに入れることにより共振器の側面に当たると，そのマイクロ波共振強度が砂や石に含まれる水分の誘電率虚数部（損失）によって吸収されて減衰することを利用して測定することができた。

従来の計測方法では骨材・コンクリート用水分センサーは中性子線などを使用した危険性であった。しかし，本研究では，マイクロ波共振器を用いて共振ピーク強度の減衰の測定から，骨材やコンクリートの含水量を瞬時に，安全に，簡単に計測するものである。このマイクロ波共振器を，木材チップの水分計測に応用できると考える。

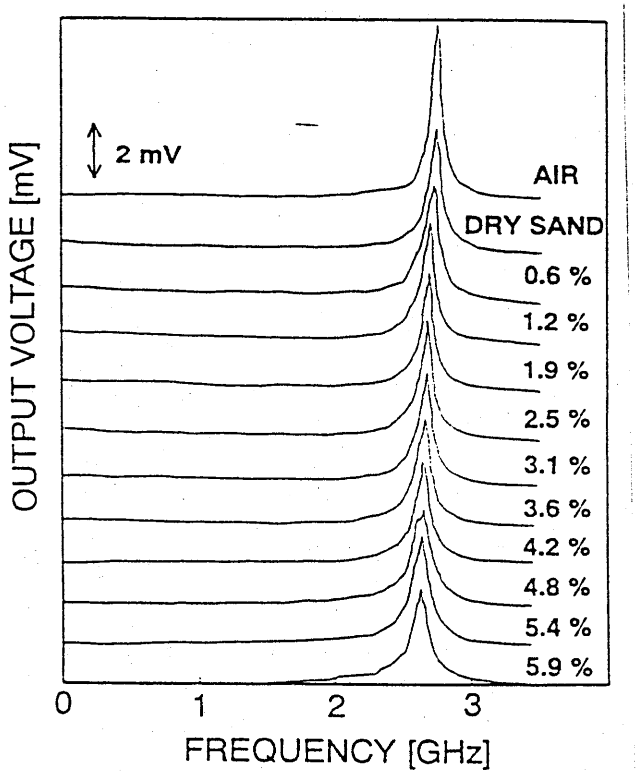


図 9: 外部スロットアンテナ付き同軸空胴共振器の共振特性

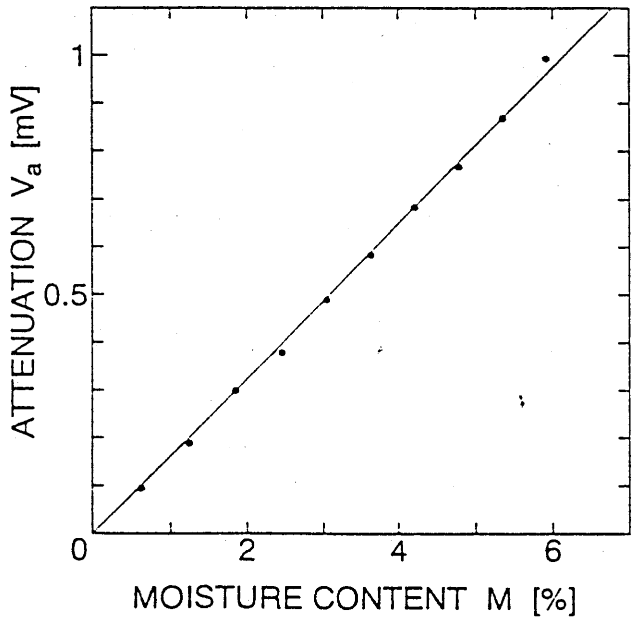


図 10: 砂骨材の水分変化による減衰特性

3　ハルプ濃度計

3.1　はじめに

木材のチップの水分計測は，薬剤の濃度を決定するために重要であるが，つぎは，パルプの濃度が重要となる。紙をすく直前でのパルプの濃度計測法には，パルプ溶液に羽のようなプロペラを沈め，モータを回転させ，そのトルクを測定することによりパルプの濃度を機械的に計測していた。ここでは，100 パーセントの水にパルプを入れると，減衰が大きくならないことを利用して，パルプの濃度を電磁波的に計測しようとするものである。

製作したマイクロ波共振器は，同軸型共振器で，スロットアンテナを内側に付けたものである。そのスロットアンテナのギャップの長さや位置を調節することにより，感度を調整することができる。図 11 のように，スロットアンテナ付き同軸型共振器の内側に塩化ビニールの筒を入れて，その筒にパルプ溶液を入れて，パルプ濃度を計測しようというものである。

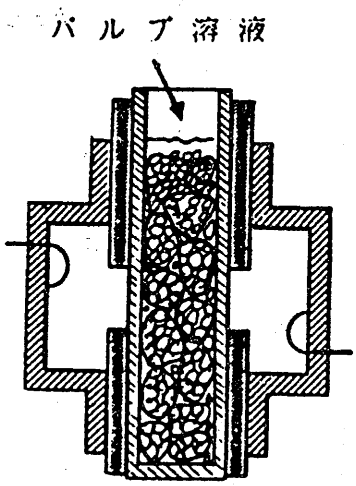


図 11: パルプの濃度計測

3.2 パルプ濃度の計測実験

3.2.1 スロットアンテナ付き同軸型共振器の特性

内部のスロットアンテナ付き同軸型共振器は，図 12 に示すように，共振器の内部の同軸にギャップをもうけて，そこからマイクロ波が洩れることを利用している。ここで，ギャップの大きさやギャップの位置を上下することにより，マイクロ波の洩れの量を制御して，感度を調整することができる [19]。

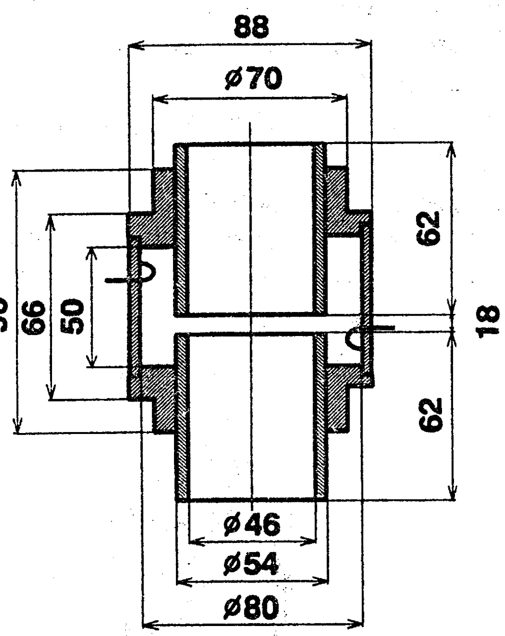


図 12: 内部スロットアンテナ付き同軸空胴共振器のサイズ

製作したスロットアンテナ付き同軸型共振器では，共振器長は，50 mm であるために，図 13 のように 3 つのモードが共振している。ギャップを 18 mm に固定して，一番共振の強い信号の共振周波数は，3542 MHz である。しかし，塩化ビニールの筒を入れると，この共振周波数はさがり，他のモードの共振は非常に小さくなる。

3.2.2 パルプ濃度の測定

パルプの濃度計測には，トラッキングジェネレータとスペクトラルアナライザとを用いて，波形を観測した。パルプとして，トイレットペーパーを使用して，水 1000

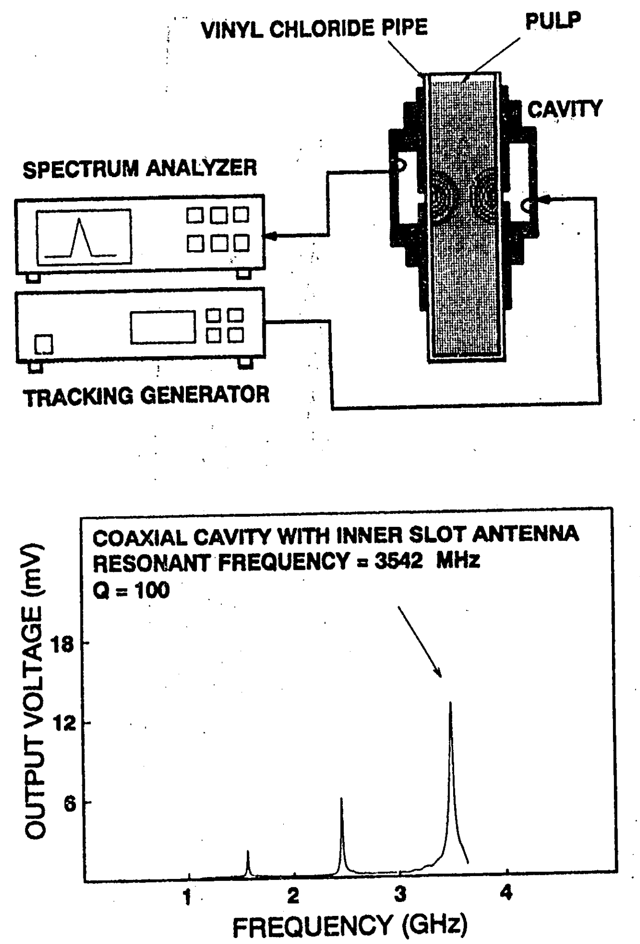


図 13: 内部スロットアンテナ付き同軸空胴共振器の共振特性

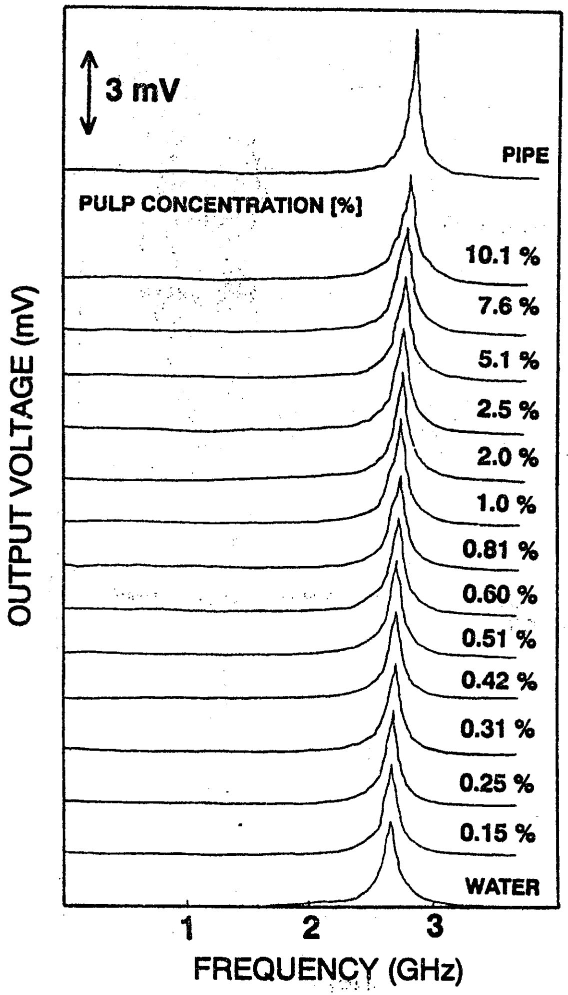


図 14: パルプ濃度変化による共振特性

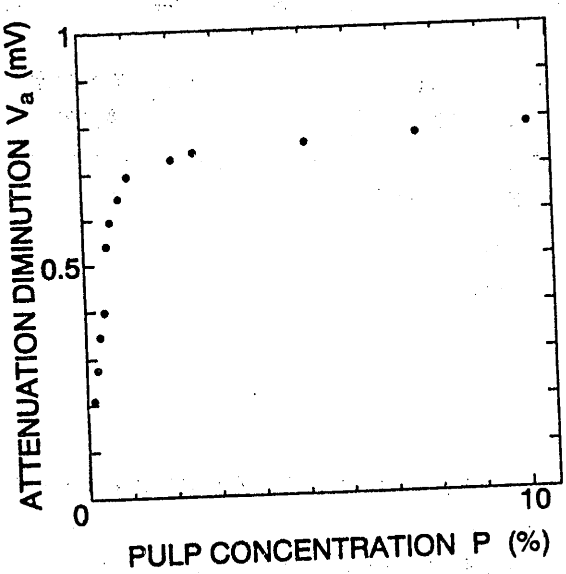


図 15: パルプ濃度変化による減衰特性

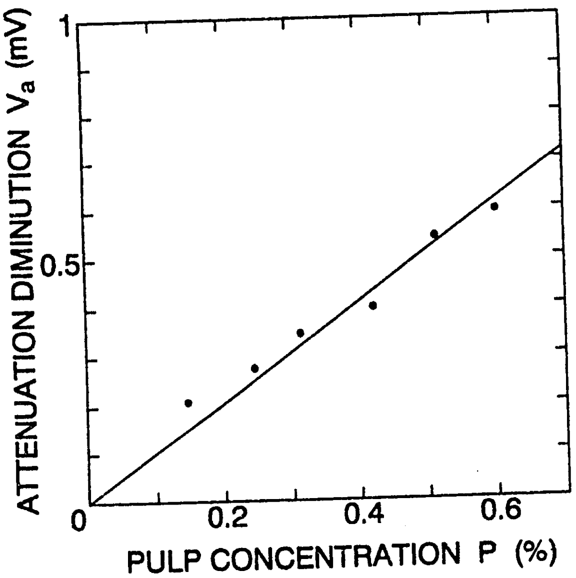


図 16: パルプ濃度変化による減衰特性

ml に対して，トイレットペーパーをミキサーで溶かして計測した。そのときの変化を図 14 に示す。

水のときの共振曲線を求めて，つぎに，トイレットペーパーを水で溶かしたときの共振曲線を求めて，そのピーク電圧の変化を，図 15 に示す。約 2%以上では減衰が飽和するが，パルプの濃度は，1%以下が重要で，そのデータだけを図 16 の下に示した。それでは，パルプ濃度の薄いときに，直線近似したとき，

分解能　：1 mV/%　（マイクロ波入力電力：-10dBm）
標準偏差：0.03 %

で, パルプ濃度の測定が可能である。

3.3　おわりに

木材のチップの水分計測は，薬剤の濃度を決定するために重要であったが，パルプの濃度も，製紙工程で重要となる。ここでは，トルクでパルプ濃度を機械的に計測するのではなく，パルプ濃度をマイクロ波共振器で計測しようとするものであった。ここでの，内部スロットアンテナ付き同軸型共振器を用いれば，パルプの 1%以下の低濃度では，0.03%のパルプ濃度の精度で計測可能である。

4　木材水分グレーダー

4.1　はじめに

木材の加工，利用において木材の水分管理は極めて重要で，製材工程で木材の全体の水分や水分の分布をモニタすることは，品質管理に必要で生産性を向上させるためにも重要である。未乾燥材は乾燥材に比べて重量が５０％以上重く，使用中に収縮しひび割れやたわみが起こり，強度的にも結合力が低くなり，腐敗菌や変色菌が発生しやすくなる [20]。建築用乾燥材の自主基準含水率は，柱類で２０％以下（スギやベイツガは２５％以下），敷居等は１８％以下，床材・内装壁材等は１５％以下１０％以上（過乾燥を防止のため）である。木材の種類により乾燥日数が違うが，たとえば除湿乾燥室でヒノキは７日程度以上で乾燥するが，問題はヒノキで乾燥に２０日以上必要とする [21]。なぜなら，それぞれの生材の横断面での水分分布をみると，ヒノキは中心部分は低水分で外周だけが高水分であり，スギは中心部分と外周とが同程度には高水分で，中間部分が低水分であるためでもある [22]。

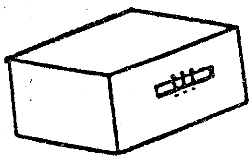
木材用の最も単純な水分測定の方法は乾燥法で，重量をはかり乾燥させてからまた重量をはかって水分量を求める。電気的方法として従来，木材の抵抗式水分計があり，木材に含まれている水が電離したイオンによって電気伝導度が変化することを利用して，木材に針状電極を刺して測定しているが，水の電離度が温度により大きく影響を受けたり，電極と木材との接触抵抗の変動がありいい精度が得られない。また，20～300MHz 程度の高周波容量方式があり，木材片面に２つの細い長い平行平面電極をあててその間での静電容量の変動を測定して水分を測定している。しかし，板の厚み，密度などの影響があり高精度に測定できていない。さらに，水分分布まで測定するには，電極のサイズが大きいために適当な空間分解能が得られにくいと考えられる。

マイクロ波による重量と含水率との同時計測センサーは，マイクロ波帯にある水分の共鳴吸収を利用して感度良く水分を計測し，高いQ値の空胴共振器を用いて高感度水分測定を可能にした。同時に，板の厚みまたは板の単位面積当りの重量も計測できるようなマイクロ波ＢＭセンサーの開発を行った。このセンサーは安価に制作でき，木材の加工の各分野に利用できる。また，マイクロ波共振器の形状を変形し，いくつかの共振器を電子スキャンすることで木材用水分グレーダーとして活用できるものと考える [23,24]。

4.2　木材用水分グレーダーの実験

木材をマイクロ波共振器内にいれるために，高水分の木材や低水分でも体積の大きな木材のマイクロ波ＢＭ計測には，共振器のギャップやサイズがおおきくできな

いために，方形型やリエントラント型共振器は不適当である。



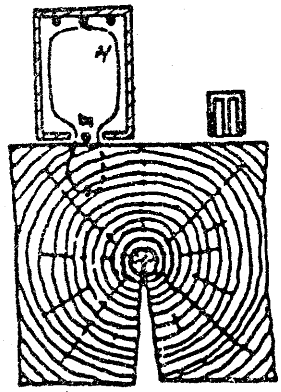


図 17: スロットアンテナ付き方形型または開放同軸型空胴共振器による角材の水分計測

そこで，柱に用いられるような角材のような大きなものでもBM計測できるスロットアンテナ付きマイクロ波共振器を考案した。図 17 に示すように，マイクロ波共振器に木材を入れるのではなく，マイクロ波共振器にスロット（切れ目）を設けて，そのスロットに木材をあてることにより，そこからのマイクロ波の洩れの程度を観測する。そのために，片面で計測できるので，工場ラインに流れる木材のようなものも計測でき，応用範囲は広範囲に渡る。また，スロットの形状により，角材の水分分布も測定可能で，1cm 程度の空間分解能が得られる。

図 18 に角材上での電子走査マイクロ波BMセンサ例を示す。分割器でマイクロ波電力を等分して，適当な間隔で固定された共振器アレイに入れて，それぞれの検出器でマイクロ波の透過強度を検知し電子走査により，数ヶ所での木材の水分量分布とを測定できる。従来の機械的なセンサヘッドの走査よりも，高速測定，高精度，高安定性が期待できる。図 19 のように狭い場所でのオンライン計測の可能である。

この計測では，マイクロ波共振器を用いて，非接触，非破壊で水分計測することが可能である。製作したマイクロ波共振器は，方形型と開放同軸型空胴共振器である。ここでは，共振器アレイとして，製作の容易な開放同軸型共振器を用いた。これは，共振器内部の高さLを変えることによって，共振周波数を変化させ４種類の

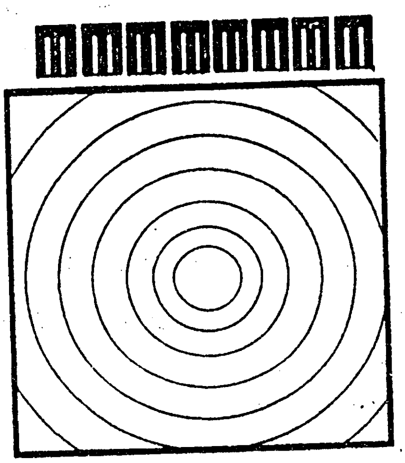


図 18: 開放同軸型空胴共振器アレイによる水分グレーダー計測

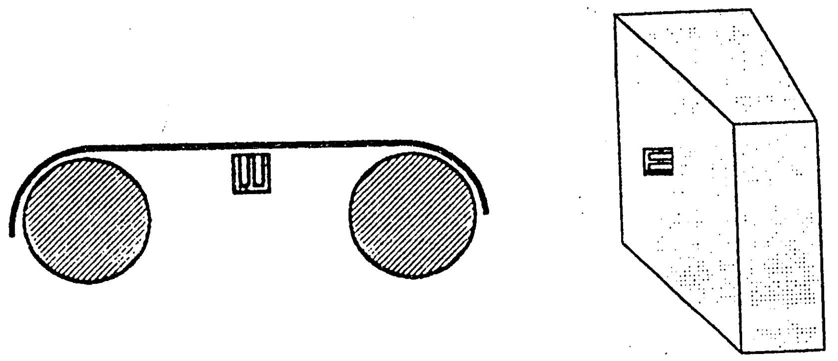


図 19: 開放同軸型空胴共振器による重量・水分のオンライン計測

共振器を製作した。

4.2.1 開口同軸型空胴共振器の特性

開口同軸型空胴共振器として，内径10mm，外径20mm，内部高さを19, 21, 23, 25mmと変えて，４種類を製作した。それぞれの共振特性は，以下のようになる。

共振器番号	内部高さ	共振周波数	Q値
C_1	２５ mm	２．６０ GHz	６４
C_2	２３ mm	２．８４ GHz	５８
C_3	２１ mm	３．０５ GHz	３８
C_4	１９ mm	３．３４ GHz	４５

ここでは，内部高さLを2mmづつ変えて，共振周波数を約200MHzづつずらせ，制作した。(図23参照)

4.2.2 木材水分率の計測

トラッキングジェネレータとスペクトルアナライザで計測した。まず，開放同軸型共振器C_2の上に，１９×６×２ cmのスギを16.7%まで十分に加湿して，重量を測定して計測を行い，温度110℃の恒温室に入れて，少し乾燥させてから，計測を行うという作業を５回続け全乾状態になるまで水分計測を行った。そこで，全乾状態のピーク電圧から，気乾状態のピーク電圧との差，つまり，減衰値を，水分を変化させて計測した。それらの測定波形は，図20のようになった。

図20から，これら減衰値は，木材の水分パーセントで直線的に変化し，最小自乗法で直線近似すると，

分解能　：0.321 mV/%　(マイクロ波入力電力：-20dBm)
標準偏差：0.28 %

と比較的，精度よく測定できた。

4.2.3 開放同軸型共振器アレイによる水分グレーダー

４つの同軸型共振器をアレイとして用いて，角材をそのアレイの上に置くことにより，角材の水分分布を計測する水分グレーダーを開発した。図21のように，これら４つの共振器へ，分配器によってマイクロ波を分配し，４ヶ所での水分計測を行った。これらを，４つのマイクロ波検出器で測定してもよいが，結合器を用いて各共振器への透過マイクロ波を結合させて１つの検出器でも計測可能である。なぜなら，開放同軸型共振器の高さを変えてあるので，４つの共振曲線があまり重なら

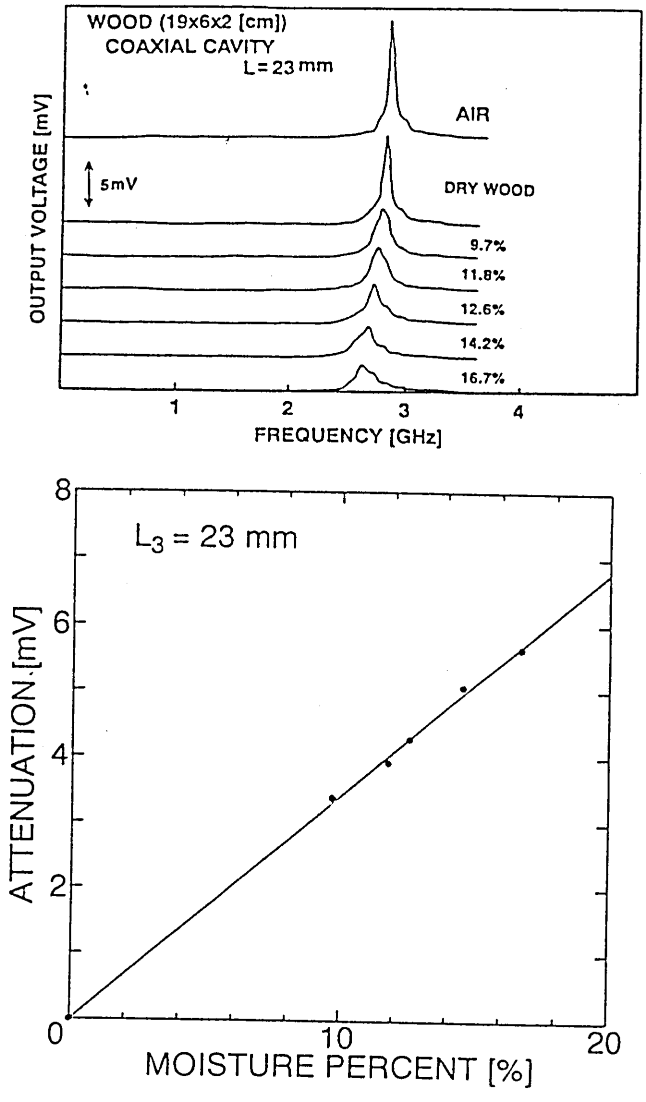


図 20: 開放同軸型空胴共振器による木材ブロックの水分計測

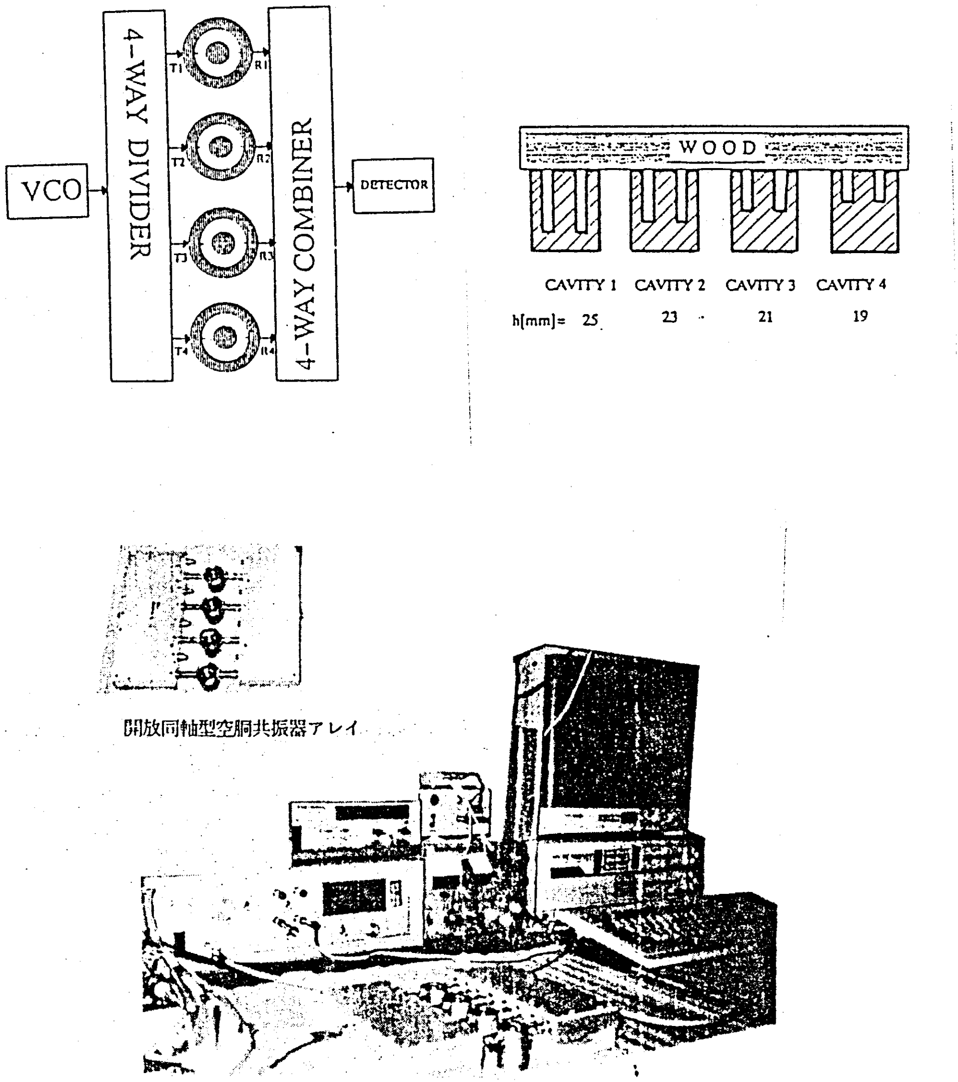


図 21: 開放同軸型空胴共振器アレイによる水分グレーダー計測

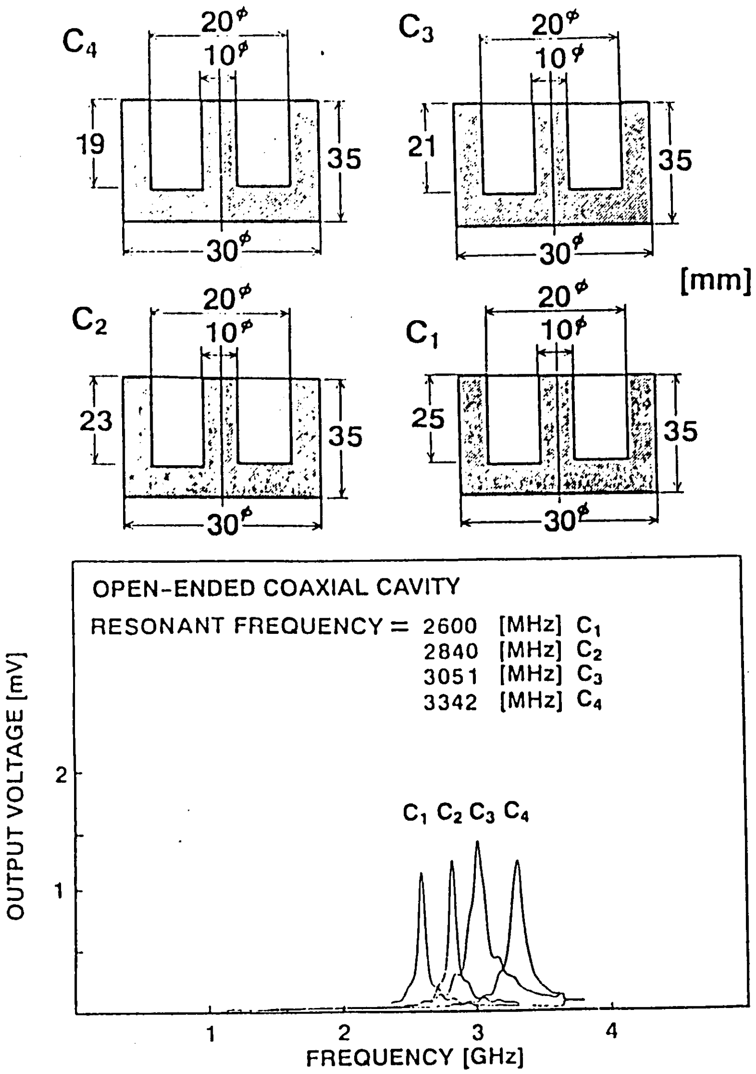
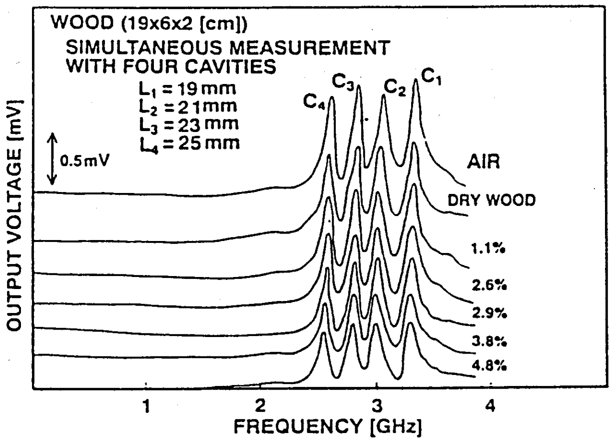


図 22: 開放同軸型空胴共振器アレイの共振器のサイズと特性



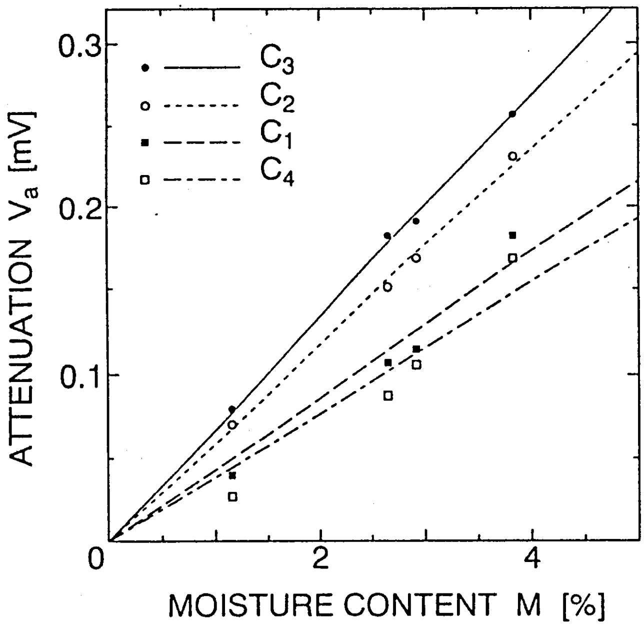


図 23: 開放同軸型空胴共振器アレイでの水分分布計測

ないためである。実際には，今後の拡張を考えて，8 way の分配器と結合器を用いた。8 way の分配器の出力端は，交互に 50 Ω の無反射終端でターミネイトし，4 way の分配器にしている。図 22 は，4つの共振器のサイズと特性を示す。

ここで，用いた木材は，スギ（サイズ１９×６×２ cm）であり，水分分布計測を行った。4.8%まで加湿して，重量を測定して計測を行い，温度 110 ℃の恒温室に入れて，少し乾燥させてから，計測を行うという作業を４回続け全乾状態になるまで水分計測を行った。ここでは，実際の計測を想定して，空気中でのピーク電圧から，気乾状態のピーク電圧との差，つまり，減衰値を，水分を変化させて計測した。それらの測定波形は，図 23 のようになった。

図 24 から，これら減衰値は，木材の水分パーセントで直線的に変化し，最小自乗法で直線近似すると，

分解能　：平均 0.316 mV/%　（マイクロ波入力電力：-20dBm）
標準偏差：平均 0.66 %

と比較的，精度よく測定できた。

4.3　おわりに

開口同軸型共振器アレイを用いて，木材用水分グレーダーの基礎的な開発を行ったが，木材の重量（密度）グレーダーまで開発できなかった。そのために，密度補正が現段階では必要である。しかし，木材の密度により減衰値が異なり，図 21 から理解できるように，水分によっても周波数シフトが起こっている。そこで，BM計測が有効となる。

マイクロ波共振器だけで，あらゆる状態の物質の重量と水分量と同時に測定できることは，機器の構成を単純化し，瞬時に物質の全乾重量と水分量（又は水分パーセント）と気乾重量を表示しえることは操作性の能率化，容易化にもつながる。たとえば，低水分用測定として，プラスチック・ペレットの低水分計，薬や粉体，米の水分計，液体（クリームやバター，オイル）の水分計，不織布の重量計・水分計が可能である。また，高水分用測定として，ウエット・ティッシュの高水分計，板紙の高水分計が可能である。また，不定形物質の水分計として，チーズ状の糸の水分計，石炭の水分計，コンクリート壁の水分計，古紙の水分計，木材チップの水分計などが可能である [25,26]。

さらに，実用的なスタンドアロン型のマイクロ波センサー・システムを製作中である。実用機としてポータブルに使用するために，C言語で開発したコンピュータソフトウェアをROM化できるようになった。そこで，CPUボードとA／Dコンバータ，D／Aコンバータ，ROMボードで，一体化したコンパクトな試作器を製作中である。

参考文献

[1] 中山　茂:輻射科学研究会　RS86-15 (1986) 1

[2] 中山　茂:輻射科学研究会　RS90-7 (1990) 1

[3] 中山　茂:兵庫教育大学研究紀要　第 11 巻　(1988) 145

[4] 中山　茂:兵庫教育大学研究紀要　第 12 巻　(1992)

[5] S. Nakayama:Jpn. J. Appl. Phys., 26 (1987) 1198

[6] S. Nakayama:Jpn. J. Appl. Phys., 26 (1987) 1935

[7] 中山　茂:第 47 回応用物理学会講演会，第 1 巻 (1986)28p-Y-10

[8] 中山　茂:第 48 回応用物理学会講演会，第 1 巻 (1986) 26

[9] 中山　茂:センサー技術　Vol.8 No.2 (1988) 57

[10] 中山　茂，他:日本産業技術教育学会近畿支部第 4 回研究会資料 (1987) 9

[11] 中山　茂:日本産業技術教育学会近畿支部第 5 回研究会資料 (1988) 19

[12] 中山　茂，山根宏夫:日本産業技術教育学会第 33 回全国大会 (1990) 109

[13] 中山　茂，山根宏夫:日本産業技術教育学会第 34 回全国大会 (1991) 78

[14] 中山　茂，河上照雄:日本産業技術教育学会第 34 回全国大会 (1991) 79

[15] 中山　茂，山根宏夫:日本産業技術教育学会第 8 回近畿支部 (1991) 27

[16] 中山　茂，河上照雄:日本産業技術教育学会第 8 回近畿支部 (1991) 29

[17] S. Nakayama:Jpn. J. Appl. Phys., 31 (1992) 1519

[18] S. Nakayama:Jpn. J. Appl. Phys., 33 (1994) 2809

[19] S. Nakayama:Jpn. J. Appl. Phys., 33 (1994) 3614

[20] 佐道　健: 木材用水分グレーダーの開発 研究会報告書 (1990) 5 日本木材加工技術協会関西支部

[21] 鷲見博史: 木材用水分グレーダーの開発 研究会報告 (1990) 11 日本木材加工技術協会関西支部

[22] 寺沢　真: 木材用水分グレーダーの開発 研究会報告 (1990) 43 日本木材加工技術協会関西支部

[23] 中山　茂: 木材用水分グレーダーの開発 研究会報告 (1990) 77 日本木材加工技術協会　関西支部

[24] 中山　茂: 自動制御の基礎と応用 (1990) 118 日本木材学会　研究第1分科会

[25] 中山　茂: 科学研究費補助金 (試験研究) 研究成果報告書 (1992)

[26] 中山　茂: マイクロ波加熱技術集成 (1994) エヌ・ティー・エフ

輻射科学研究会資料
資料番号	RS 94-10

ランダムストリップによる平面波の散乱 III

- Neumann 条件の解に関する考察 -

田村安彦　中山純一
(京都工芸繊維大学 工芸学部 電子·情報工学科)

1994 年 10 月 21 日

輻射科学研究会
(於 ATR 光電波通信研究所)

1 はじめに

以前に僅かにランダムな表面を持つ導体ストリップの平面波散乱問題を報告 [3] したが、Neumann 条件では無限ランダム平面問題を摂動解析した際の１次摂動解が発散するのと同様の解析上の困難を持ち、これが有限な散乱体でも異常散乱が起き得ることを示唆しているのでないかと述べた。今回、対象とするランダムなストリップに対し、Neumann 条件の場合を Dirichlet 条件 [4, 5] と同様の定式化手順及び式表現により解析しなおし０次、１次及び２次摂動解を求める。その上で１次及び２次摂動解が発散するといった解析上の特異性が真に存在するのか、またどのような性質を持つのかを詳しく解析し１次及び２次摂動解の不合理性を調べたのでこれを報告する。

2 散乱問題の定式化

2.1 ランダムなストリップ表面の記述

自由空間中に幅 $2l$ でランダムな表面を持ち、厚みが無視できて完全導体からなるストリップを想定し、直交座標系 (x, z) を図１のようにとる。ストリップ上の１次元ランダム表面を定常ランダム関数 (強定常過程) $z = f(T^x\omega)$, $|x| \leq l$ で表し一般性を失うことなく統計的性質を

$$\langle z \rangle = 0 \quad , \quad \langle z^2 \rangle = \sigma^2 \tag{1}$$

として平均面が平坦面 $z = 0$ に一致するものとする。ω は標本空間 Ω 内の一見本点、$\langle\ \rangle$ は事象 ω に関するアンサンブル平均とする。σ^2 は表面のランダムな凹凸の分散を与える。その標準偏差 σ (> 0) は長さの次元を持ちランダム表面の粗さ (もしくは高さ) のパラメータとみなすことができる。$\sigma^2 = 0$ は表面が平坦で滑らかな場合に相当する。強定常過程 $f(T^x\omega)$ 自体は $x \in R$ で定義されており、T^a は Ω 内の確率測度を変えない保測変換のオペレータで加法群をなす。すなわち $T^0 \equiv 1$, $T^aT^b = T^{a+b}$ $(a, b \in R)$ である。$f(T^x\omega)$ は Gauss 一様確率場であると仮定し次のように Wiener 積分 [8]-[10] でスペクトル表現する。

$$z = f(T^x\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} F(\lambda) dB(\lambda, \omega) \tag{2}$$

ここで、$dB(\lambda, \omega)$ は実 λ 軸上の複素 Gauss ランダム測度[8]-[10] であり、以下の性質を持つランダム変数である。

$$\begin{aligned} dB^*(\lambda,\omega) = dB(-\lambda,\omega) \quad &, \quad dB(\lambda, T^a\omega) = e^{-i\lambda a} dB(\lambda,\omega) \\ \langle dB(\lambda,\omega)\rangle = 0 \quad &, \quad \langle dB(\lambda,\omega) dB^*(\lambda',\omega)\rangle = \delta(\lambda-\lambda') d\lambda d\lambda' \end{aligned} \tag{3}$$

ただし、$*$ は複素共役、δ は Dirac デルタを表す。
(2) 式と (3) 式からランダムなストリップ表面の相関関数は次のようになる。

$$R(a) = \langle f(T^x\omega) \cdot f^*(T^{x+a}\omega)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 e^{-i\lambda a} d\lambda \tag{4}$$

$|F(\lambda)|^2$ はランダム表面のパワースペクトル密度である。

2.2 波動方程式と拘束条件

２次元問題であるから全波動場をスカラー関数 $\phi(x, z, \omega)$ で表す。全波動場は入射波 $\phi_i(x, z)$ とランダムなストリップによる散乱場 $\phi_s(x, z, \omega)$ の和で書ける。

$$\phi(x, z, \omega) = \phi_i(x, z) + \phi_s(x, z, \omega) \tag{5}$$

ここでは、入射波として波数 k の次の単色平面波を仮定する。

$$\phi_i(x,z)=e^{-ik\cos\theta_i x-ik\sin\theta_i z} \qquad (\ 0<|\theta_i|<\pi/2\ ) \tag{6}$$

全波動場 $\phi(x,z,\omega)$ は自由空間中で次の2次元波動方程式を満たす。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\phi(x,z,\omega)=0 \qquad k\equiv k_1+ik_2 \quad , \quad k_1\gg k_2>0 \tag{7}$$

ただし用いる解析手法の都合上、波数 k に媒質の微小損失を仮定した。このような k の下で解析し最後に $k_2\to+0$ として本来の結果を得ることにする。

次に、$\phi(x,z,\omega)$ は完全導体からなるランダムなストリップ上での境界条件 $\partial\phi(x,z,\omega)/\partial n=0$ (Neumann) を満たすと仮定する。しかし、厳密に境界条件を取り扱うのは特にランダム境界値の場合は容易ではない。そこで僅かにランダムな場合 (ストリップ表面の粗さが波長に比べて十分小さい) $|k|\sigma\ll 1$ を仮定し、次の平坦面 (平均面) $z=0$ 上での等価 Neumann 条件を用いて $|x|<l$ におけるランダム境界値のモデルとする。

$$-\frac{d}{dx}f(T^x\omega)\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,z,\omega)+\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,z,\omega)+f(T^x\omega)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(x,z,\omega)\bigg|_{z=\pm0}=0 \qquad (\ |x|<l\ ) \tag{8}$$

(以下、ことわりのない限りプライム $'$ は z に関する偏微分、バックプライム $`$ は $x$ に関する偏微分を表すことにする。) $\phi(x,z,\omega),\phi'(x,z,\omega),\phi''(x,z,\omega),\phi^{`}(x,z,\omega)$ は z に関し $z=0$ において $|x|<l$ で不連続、$|x|>l$ で連続である。

次に散乱場 $\phi_s(x,z,\omega)$ は遠方 $|x|\to+\infty$ で次の実効的な放射条件を満たすと仮定する。

$$\phi_s(x,z,\omega)=A_R(\omega)O(e^{-k_2\cos\theta_i|x|-k_2\sin|\theta_i||z|}) \qquad (\ |x|\to+\infty\ ) \tag{9}$$

次にエッジを持つ構造に対する散乱問題では (7) 式の解の一意性を保証するための拘束条件が必要である。散乱場 $\phi_s(x,z,\omega)$ はエッジの近傍 $|z-f(T^{\pm l}\omega)|\to+0$, $|x\pm l|\to+0$ でエッジ条件を満たすが近似的に平坦面 $z=0$ 上で次の等価エッジ条件を仮定する。

$$\begin{aligned}
\phi_s(x,0,\omega) &= A_{E_1}(\omega)(1+O((x\mp l)^{\frac{1}{2}})) && (\ x\to\pm l\pm0\ )\\
\phi_s'(x,z,\omega),\phi_s^{`}(x,z,\omega)\bigg|_{z=\pm0} &= A_{E_2}(\omega)O((x\mp l)^{-\frac{1}{2}}) && (\ x\to\pm l\mp0\ )\\
\phi_s''(x,z,\omega)\bigg|_{z=\pm0} &= A_{E_3}(\omega)O((x\mp l)^{-\frac{3}{2}}) && (\ x\to\pm l\mp0\ )
\end{aligned} \tag{10}$$

2.3 D^a-Fourier 変換と方程式の導出

求めるべき散乱場は x についての非定常過程であるためこのままでは問題を定式化できない。そこで確率的に拡張された複素 Fourier 変換として D^a-Fourier 変換[7] を導入する。まず、x についての強定常過程 $f(T^x\omega)$ が同時移動変換 $(x,\omega)\to(x+a,T^{-a}\omega)$ $(a\in R)$ に対し不変であることからその汎函数である x についての非定常過程 $\phi_s(x,z,\omega)$ に作用する移動オペレータ D^a [7, 10] を次のように定義する。

$$D^a\phi_s(x,z,\omega)\equiv\phi_s(x+a,z,T^{-a}\omega) \tag{11}$$

T^a が加法群であることから D^a も加法群をなす。すなわち $D^0\equiv1$, $D^aD^b=D^{a+b}$ $(a,b\in R)$ である。
ここで、D^a を用いて D^a-Fourier 変換を次式で定義する。

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{isa}\{D^a\phi_s(x,z,\omega)\}da \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}e^{isa}\phi_s(x+a,z,T^{-a}\omega)da \;=\; e^{-isx}\Phi_s(z,T^x\omega|s) \tag{12}$$

すなわち、ランダム関数に対して D^a を施しそのパラメータ a についての複素 Fourier 変換を取る形で定義する。D^a-Fourier 変換は二つの意義を持つ。

第1に、x について非定常過程である散乱場 $\phi_s(x,z,\omega)$ を複素パラメータ s を持つ D^a -不変な x についての定常過程に変換したこと (これによって $\Phi_s(z,T^x\omega|s)$ は R 上の一様確率場となる)、
第2に、$\phi_s(x,z,\omega)$ を複素 s -平面上の $\Phi_s(z,T^x\omega|s)$ へと写像したことである。
以降、散乱場を定常過程として扱える s 領域で議論する。条件 (9) から $\Phi_s(z,T^x\omega|s)$ は複素 s -平面上の帯状領域 $|\mathrm{Im}\ s|<k_2\cos\theta_i$ で正則な関数であることがわかるので、D^a-逆 Fourier 変換を次式で定義できる。

$$\phi_s(x,z,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}e^{-isx}\Phi_s(z,T^x\omega|s)ds \qquad (\ |\tau|<k_2\cos\theta_i\ ) \tag{13}$$

上式は散乱場の形を与える。このような非定常過程の表現は一様ランダム媒質中の波動関数の表現 [7] として用いられている。同様に、$\phi'_s(x,z,\omega),\dot{\phi}_s(x,z,\omega)$ ついて D^a-Fourier 変換を以下のように定義する。

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{isa}D^a\left\{\begin{array}{c}\phi'_s(x,z,\omega)\\ \phi''_s(x,z,\omega)\\ \dot{\phi}_s(x,z,\omega)\end{array}\right\}da=e^{-isx}\left\{\begin{array}{c}\Phi'_s(z,T^x\omega|s)\\ \Phi''_s(z,T^x\omega|s)\\ \dot{\Phi}_s(z,T^x\omega|s)\end{array}\right\} \tag{14}$$

この定義により $\Phi'_s(z,T^x\omega|s),\Phi''_s(z,T^x\omega|s),\dot{\Phi}_s(z,T^x\omega|s)$ は同様に $|\mathrm{Im}\ s|<k_2\cos\theta_i$ で正則な関数となる。

ここで、差 $\phi_s(x,+0,\omega)-\phi_s(x,-0,\omega)\equiv j(x,\omega)$ (ランダムなストリップ上に誘起される平坦面 $z=0$ 上での等価電流密度に相当する。) を D^a-Fourier 変換する。

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{isa}D^a\{\phi_s(x,+0,\omega)\ -\phi_s(x,-0,\omega)\}da=\int_{-\infty}^{\infty}e^{isa}D^a j(x,\omega)da$$

すなわち、

$$\Phi_s(+0,T^x\omega|s)-\Phi_s(-0,T^x\omega|s)=J(T^x\omega|s) \tag{15}$$

である。実質上閉区間 $[-l-x,l-x]$ での D^a-Fourier 変換となるので $J(T^x\omega|s)$ は整関数となり、全複素 s-平面上で正則である。等価エッジ条件 (10) 式から $|s|\to+\infty$ に対する振舞いとして

$$e^{isl}J(T^x\omega|s)=O(s^{-\frac{3}{2}})\quad(\ \mathrm{Im}\ s>0\ )\quad,\quad e^{-isl}J(T^x\omega|s)=O(s^{-\frac{3}{2}})\quad(\ \mathrm{Im}\ s<0\ ) \tag{16}$$

がわかる。また $|x|<l$ における境界値 $\phi'_s(x,\pm0,\omega),\phi''_s(x,\pm0,\omega),\dot{\phi}_s(x,\pm0,\omega)$ に対する D^a-Fourier 変換及び $x>l$, $x<-l$ における境界値 $\phi'_s(x,0,\omega)$ に対する片側 D^a-Fourier 変換を各々次のように定義する †。

$$\int_{-l-x}^{l-x}e^{isa}D^a\phi'_s(x,\pm0,\omega)da \;=\; e^{-isx}\left\{\begin{array}{c}u'(T^x\omega|s)\\ v'(T^x\omega|s)\end{array}\right\} \tag{17}$$

$$\int_{-l-x}^{l-x}e^{isa}D^a\phi''_s(x,\pm0,\omega)da \;=\; e^{-isx}\left\{\begin{array}{c}u''(T^x\omega|s)\\ v''(T^x\omega|s)\end{array}\right\} \tag{18}$$

$$\int_{-l-x}^{l-x}e^{isa}D^a\dot{\phi}_s(x,\pm0,\omega)da \;=\; e^{-isx}\left\{\begin{array}{c}\dot{u}(T^x\omega|s)\\ \dot{v}(T^x\omega|s)\end{array}\right\} \tag{19}$$

$$\int_{l-x}^{\infty}e^{isa}D^a\phi'_s(x,0,\omega) \;=\; e^{-isx}\cdot e^{isl}w^{+'}(T^x\omega|s) \tag{20}$$

$$\int_{-\infty}^{-l-x}e^{isa}D^a\phi'_s(x,0,\omega) \;=\; e^{-isx}\cdot e^{-isl}w^{-'}(T^x\omega|s) \tag{21}$$

この定義から $u',v',u'',v'',\dot{u},\dot{v}$ は整関数で全複素 s-平面上で正則である。片側変換については定義から、添字 $\pm$ に対し各々 $\mathrm{Im}\ s>-k_2\cos\theta_i$, $\mathrm{Im}\ s<k_2\cos\theta_i$ で正則 (片側変換に関する $\pm$ をこの意味で用いる)

† 等価エッジ条件 (10) 式から $\phi''_s(x,\pm0,\omega)$ の D^a-Fourier 変換は等価エッジ $-l-x,l-x$ を含む場合厳密には存在しない。しかし ε を極めて微小な正数とし $[-l+\varepsilon-x,l-\varepsilon-x]$ とした積分範囲では D^a-Fourier 変換は存在する。これは無限大の定数を無視する近似に相当する。

と仮定する。等価エッジ条件 (10) 式から $|s| \to +\infty$ に対する振舞いとして

$$w^{+\prime}(T^x\omega|s) = O(s^{-\frac{1}{2}}) \quad (\ \mathrm{Im}\ s > -k_2\cos\theta_i\ ) \quad , \quad w^{-\prime}(T^x\omega|s) = O(s^{-\frac{1}{2}}) \quad (\ \mathrm{Im}\ s < k_2\cos\theta_i\ ) \tag{22}$$

がわかる。また、(14),(17),(20) 及び (21) 式から

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(T^x\omega|s) \\ v'(T^x\omega|s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Phi'_s(+0,T^x\omega|s) - \{e^{isl}w^{+\prime}(T^x\omega|s) + e^{-isl}w^{-\prime}(T^x\omega|s)\} \\ \Phi'_s(-0,T^x\omega|s) - \{e^{isl}w^{+\prime}(T^x\omega|s) + e^{-isl}w^{-\prime}(T^x\omega|s)\} \end{array} \right\} \tag{23}$$

と書ける。また次のように書ける。

$$\begin{aligned} u^{\backprime}(T^x\omega|s) - v^{\backprime}(T^x\omega|s) &= \Phi^{\backprime}_s(+0,T^x\omega|s) - \Phi^{\backprime}_s(-0,T^x\omega|s) & (24) \\ u''(T^x\omega|s) - v''(T^x\omega|s) &= \Phi''_s(+0,T^x\omega|s) - \Phi''_s(-0,T^x\omega|s) & (25) \end{aligned}$$

波動場についての境界条件を閉区間 $[-l-x, l-x]$ で D^a-Fourier 変換し、(17)-(19) 式を用いて整理すると D^a-Fourier 変換領域での等価 Neumann 条件を得る。

$$\begin{aligned} &\left\{-(-ik\cos\theta_i)\frac{d}{dx}f(T^x\omega) + (-ik\sin\theta_i) + (-ik\sin\theta_i)^2 f(T^x\omega)\right\} \frac{i(e^{i(s-k\cos\theta_i)l} - e^{-i(s-k\cos\theta_i)l})}{s - k\cos\theta_i} \\ &= -\frac{d}{dx}f(T^x\omega)\left\{ \begin{array}{l} u^{\backprime}(T^x\omega|s) \\ v^{\backprime}(T^x\omega|s) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} u'(T^x\omega|s) \\ v'(T^x\omega|s) \end{array} \right\} + f(T^x\omega)\left\{ \begin{array}{l} u''(T^x\omega|s) \\ v''(T^x\omega|s) \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{26}$$

以上、D^a-Fourier 変換領域で散乱場が満たす方程式として (15) 及び (26) 式が得られた。後は波動方程式 (7) 式、拘束条件 (9) 及び (10) 式を満たすように解けばよい。

2.4 摂動展開による定式化

前節ではランダムなストリップによる散乱場が D^a-Fourier 変換領域で満たすべき方程式を得た。これらを厳密に解くのは困難であるが、僅かにランダムな場合 $|k|\sigma \ll 1$ を仮定しているので近似的には解き得る。また $\Phi_s(z, T^x\omega|s)$ は (2) 式の汎函数 (すなわち $dB(\lambda,\omega)$ の汎函数) かつ R 上の一様確率場でもある。よって $\Phi_s(z, T^x\omega|s)$ を微小パラメータ σ についての摂動展開と Wiener 積分で表示する。Wiener 積分核の z 依存性を波動方程式と放射条件を満たすように決め最終的に次のように展開表示する。

$$\begin{aligned} \Phi_s(z, T^x\omega|s) &= \Phi_{s0}(z|s) + \Phi_{s1}(z, T^x\omega|s) + \Phi_{s2}(z, T^x\omega|s) + \cdots \\ &= C_0^{\pm}(s)e^{-\gamma(s)|z|} + \int_{-\infty}^{\infty} C_1^{\pm}(s,\lambda)e^{-\gamma(s+\lambda)|z| - i\lambda x}dB(\lambda,\omega) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_2^{\pm}(s,\lambda_1,\lambda_2)e^{-\gamma(s+\lambda_1+\lambda_2)|z| - i(\lambda_1+\lambda_2)x}dB(\lambda_1,\omega)dB(\lambda_2,\omega) + \cdots \end{aligned} \tag{27}$$

ここで、$C_n^{\pm}(s,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ は n 次の Wiener 積分核であり、変数 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に関し対称となるよう決定される †。ただし、複号 ± は z の正負に対応する。2 価関数 $\gamma(s)$ の定義を次のようにし、そのブランチカットを分岐点 $s = k, -k$ から各々 $k + i\infty, -k - i\infty$ に至る虚数軸に平行な直線とする。

$$\gamma(s) = \sqrt{s^2 - k^2} \quad , \quad \gamma(0) = -ik \tag{28}$$

この時 $|\mathrm{Im}\ s| < k_2$ に対し $\mathrm{Re}\ \gamma(s) > 0$ が成り立つ。(27) 式で表示したように z 依存性を決めると散乱場が外向き伝搬波と表面波の和で表されること、即ちランダム面での Rayleigh の仮説を想定したことになる。$\Phi_s(z, T^x\omega|s)$ の表示 (27) 式を用いれば $\Phi'_s(z, T^x\omega|s), \Phi''_s(z, T^x\omega|s), \Phi^{\backprime}_s(z, T^x\omega|s)$ の展開表示は容易に得られる。

† (確率を定義しない) 通常の場の摂動展開にはこの条件は必要ではない。また、Wiener-伊藤展開 [10] では展開表示の一意性から核の対称性が要求されるが今回の摂動展開では統計量の計算の便宜を図るという観点から要求される。

片側 D^a-Fourier 変換 $w^{\pm\prime}$ 及び閉区間 D^a-Fourier 変換 $u', v', u'', v'', u^{`}, v^{`}, J$ に対しても同様にして摂動展開と Wiener 積分により次のように表示する。

$$w^{\pm\prime}(T^x\omega|s) = w_0^{\pm\prime}(s) + w_1^{\pm\prime}(T^x\omega|s) + w_2^{\pm\prime}(T^x\omega|s) + \cdots \tag{29}$$

$$= w_0^{\pm\prime}(s) + \int_{-\infty}^{\infty} w_1^{\pm\prime}(s,\lambda)e^{-i\lambda x}dB(\lambda,\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2^{\pm\prime}(s,\lambda_1,\lambda_2)e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)x}dB(\lambda_1,\omega)dB(\lambda_2,\omega) + \cdots \tag{30}$$

$$\begin{Bmatrix} u'(T^x\omega|s) \\ v'(T^x\omega|s) \\ u''(T^x\omega|s) \\ v''(T^x\omega|s) \\ u^{`}(T^x\omega|s) \\ v^{`}(T^x\omega|s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0'(s) \\ v_0'(s) \\ u_0''(s) \\ v_0''(s) \\ u_0^{`}(s) \\ v_0^{`}(s) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1'(T^x\omega|s) \\ v_1'(T^x\omega|s) \\ u_1'(T^x\omega|s) \\ v_1'(T^x\omega|s) \\ u_1^{`}(T^x\omega|s) \\ v_1^{`}(T^x\omega|s) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_2'(T^x\omega|s) \\ v_2'(T^x\omega|s) \\ u_2''(T^x\omega|s) \\ v_2''(T^x\omega|s) \\ u_2^{`}(T^x\omega|s) \\ v_2^{`}(T^x\omega|s) \end{Bmatrix} + \cdots \tag{31}$$

$$= \begin{Bmatrix} u_0'(s) \\ v_0'(s) \\ u_0''(s) \\ v_0''(s) \\ u_0^{`}(s) \\ v_0^{`}(s) \end{Bmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_1'(s,\lambda) \\ v_1'(s,\lambda) \\ u_1''(s,\lambda) \\ v_1''(s,\lambda) \\ u_1^{`}(s,\lambda) \\ v_1^{`}(s,\lambda) \end{Bmatrix} e^{-i\lambda x}dB(\lambda,\omega)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_2'(s,\lambda_1,\lambda_2) \\ v_2'(s,\lambda_1,\lambda_2) \\ u_2''(s,\lambda_1,\lambda_2) \\ v_2''(s,\lambda_1,\lambda_2) \\ u_2^{`}(s,\lambda_1,\lambda_2) \\ v_2^{`}(s,\lambda_1,\lambda_2) \end{Bmatrix} e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)x}dB(\lambda_1,\omega)dB(\lambda_2,\omega) + \cdots \tag{32}$$

$$J(T^x\omega|s) = J_0(s) + J_1(T^x\omega|s) + J_2(T^x\omega|s) + \cdots \tag{33}$$

$$= J_0(s) + \int_{-\infty}^{\infty} J_1(s,\lambda)e^{-i\lambda x}dB(\lambda,\omega) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} J_2(s,\lambda_1,\lambda_2)e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)x}dB(\lambda_1,\omega)dB(\lambda_2,\omega) + \cdots \tag{34}$$

こちらも変数 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に関し対称となるように決める。片側 D^a-Fourier 変換 $w^{\pm\prime}$ を摂動展開した Wiener 積分核 $w_n^{\pm\prime}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ はその定義から、添字 $\pm$ に対し各々 $\mathrm{Im}\ s > -k_2\cos\theta_i$, $\mathrm{Im}\ s < k_2\cos\theta_i$ で正則と仮定する。また閉区間 D^a-Fourier 変換 $u', v', u'', v'', u^{`}, v^{`}, J$ を摂動展開した Wiener 積分核は定義から全複素 s -平面で正則と仮定する。(16) 及び (22) 式から $|s| \to +\infty$ に対する振舞いとして

$$e^{isl}J_n = O(s^{-\frac{3}{2}}) \quad (\ \mathrm{Im}\ s > 0\ ) \quad , \quad e^{-isl}J_n = O(s^{-\frac{3}{2}}) \quad (\ \mathrm{Im}\ s < 0\ ) \tag{35}$$

$$w_n^{+\prime} = O(s^{-\frac{1}{2}}) \quad (\ \mathrm{Im}\ s > -k_2\cos\theta_i\ ) \quad , \quad w_n^{-\prime} = O(s^{-\frac{1}{2}}) \quad (\ \mathrm{Im}\ s < k_2\cos\theta_i\ ) \tag{36}$$

を仮定する $(n=0,1,2,\cdots)$ 。

$\Phi_s(z, T^x\omega|s)$ についての方程式 (15),(26),(29),(31) 及び (33) 式から摂動展開の各オーダー毎の式として整理する。今回はコヒーレント散乱の摂動を得る観点から σ^3 以上のオーダーは十分小さいとして無視し、0 次摂動、1 次摂動及び 2 次摂動として整理する。

σ^0 の項から

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet\Phi_{s0}(+0|s)-\Phi_{s0}(-0|s)=J_0(s)\\ \bullet\Phi'_{s0}(\pm0|s)-\{e^{isl}w^{+\prime}_0(s)+e^{-isl}w^{-\prime}_0(s)\}=-ik\sin\theta_i\dfrac{i}{s-k\cos\theta_i}(e^{i(s-k\cos\theta_i)l}-e^{-i(s-k\cos\theta_i)l})\end{array}\right. \tag{37}$$

σ^1 の項から

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet\Phi_{s1}(+0,T^x\omega|s)-\Phi_{s1}(-0,T^x\omega|s)=J_1(T^x\omega|s)\\ \bullet\Phi'_{s1}(\pm0,T^x\omega|s)-\{e^{isl}w^{+\prime}_1(T^x\omega|s)+e^{-isl}w^{-\prime}_1(T^x\omega|s)\}\\ \quad+f(T^x\omega)\left\{\begin{array}{c}u''_0(s)\\ v''_0(s)\end{array}\right\}-\dfrac{d}{dx}f(T^x\omega)\left\{\begin{array}{c}u'_0(s)\\ v'_0(s)\end{array}\right\}\\ \quad=\left\{-(-ik\cos\theta_i)\dfrac{d}{dx}f(T^x\omega)+(-ik\sin\theta_i)^2f(T^x\omega)\right\}\dfrac{i}{s-k\cos\theta_i}(e^{i(s-k\cos\theta_i)l}-e^{-i(s-k\cos\theta_i)l})\end{array}\right. \tag{38}$$

σ^2 の項から次の関係式を得る。

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet\Phi_{s2}(+0,T^x\omega|s)-\Phi_{s2}(-0,T^x\omega|s)=J_2(T^x\omega|s)\\ \bullet\Phi'_{s2}(\pm0,T^x\omega|s)-\{e^{isl}w^{+\prime}_2(T^x\omega|s)+e^{-isl}w^{-\prime}_2(T^x\omega|s)\}\\ \quad+f(T^x\omega)\left\{\begin{array}{c}u''_1(T^x\omega|s)\\ v''_1(T^x\omega|s)\end{array}\right\}-\dfrac{d}{dx}f(T^x\omega)\left\{\begin{array}{c}u'_1(T^x\omega|s)\\ v'_1(T^x\omega|s)\end{array}\right\}=0\end{array}\right. \tag{39}$$

以上の連立方程式の第2式においては (23) 式の関係を用いて $u'_0, v'_0, u'_1, v'_1, u'_2, v'_2$ を展開してある。(24),(25),(27),(30),(32) 及び (34) 式を用いて (37)-(39) 式を整理することで Wiener 積分核の間の関係式を得る。
0 次摂動から

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet C_0^+(s)-C_0^-(s)=J_0(s)\\ \bullet-\gamma(s)\{C_0^+(s)+C_0^-(s)\}=0\\ \bullet-\gamma(s)\{C_0^+(s)-C_0^-(s)\}-2\{e^{isl}w^{+\prime}_0(s)+e^{-isl}w^{-\prime}_0(s)\}\\ \quad=\ \mathrm{sgn}\theta_i\gamma(k\cos\theta_i)\dfrac{2i}{s-k\cos\theta_i}(e^{i(s-k\cos\theta_i)l}-e^{-i(s-k\cos\theta_i)l})\end{array}\right. \tag{40}$$

1 次摂動から

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet\{C_1^+(s,\lambda)-C_1^-(s,\lambda)\}=J_1(s,\lambda)\\ \bullet-\gamma(s+\lambda)\{C_1^+(s,\lambda)+C_1^-(s,\lambda)\}=-F(\lambda)\{s(s+\lambda)-k^2\}J_0(s)\\ \bullet-\gamma(s+\lambda)\{C_1^+(s,\lambda)-C_1^-(s,\lambda)\}-2\{e^{isl}w_1^+(s,\lambda)+e^{-isl}w_1^-(s,\lambda)\}\\ \quad+F(\lambda)\{u''_0(s)+v''_0(s)\}+i\lambda F(\lambda)\{u'_0(s)+v'_0(s)\}\\ \quad=\{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda)-k^2\}F(\lambda)\dfrac{2i}{s-k\cos\theta_i}(e^{i(s-k\cos\theta_i)l}-e^{-i(s-k\cos\theta_i)l})\end{array}\right. \tag{41}$$

2 次摂動から次の関係式を得る。

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet\{C_2^+(s,\lambda_1,\lambda_2)-C_2^-(s,\lambda_1,\lambda_2)\}=J_2(s,\lambda_1,\lambda_2)\\ \bullet-\gamma(s+\lambda_1+\lambda_2)\{C_2^+(s,\lambda_1,\lambda_2)+C_2^-(s,\lambda_1,\lambda_2)\}\\ \quad=-\dfrac{1}{2}\Big[F(\lambda_1)\{(s+\lambda_2)(s+\lambda_1+\lambda_2)-k^2\}J_1(s,\lambda_2)\\ \qquad\qquad+F(\lambda_2)\{(s+\lambda_1)(s+\lambda_1+\lambda_2)-k^2\}J_1(s,\lambda_1)\Big]\\ \bullet-\gamma(s+\lambda_1+\lambda_2)\{C_2^+(s,\lambda_1,\lambda_2)-C_2^-(s,\lambda_1,\lambda_2)\}-2\{e^{isl}w_2^+(s,\lambda_1,\lambda_2)+e^{-isl}w_2^-(s,\lambda_1,\lambda_2)\}\\ \quad+\dfrac{1}{2}\Big[F(\lambda_1)\{u''_1(s,\lambda_2)+v''_1(s,\lambda_2)\}+i\lambda_1F(\lambda_1)\{u'_1(s,\lambda_2)+v'_1(s,\lambda_2)\}\\ \qquad\qquad+F(\lambda_2)\{u''_1(s,\lambda_1)+v''_1(s,\lambda_1)\}+i\lambda_2F(\lambda_2)\{u'_1(s,\lambda_1)+v'_1(s,\lambda_1)\}\Big]=0\end{array}\right. \tag{42}$$

以上の各々の連立方程式の第2及び3式は連立方程式(37),(38)及び(39)式の第2式で和と差をとって整理したものである。また次の関係式を用いた。

$$-ik\sin\theta_i = \mathrm{sgn}\theta_i(-ik\sin|\theta_i|) = \mathrm{sgn}\theta_i\gamma(k\cos|\theta_i|) = \mathrm{sgn}\theta_i\gamma(k\cos\theta_i) \tag{43}$$

ただし $\mathrm{sgn}x$ は符号関数であり $\mathrm{sgn}x = 1\ ,x>0\ ;-1\ ,x<0$ である†。

2.5 Wiener-Hopf 方程式

s 領域での表現(27)式が求まれば最終的な解が D^a-逆 Fourier 変換により得られるから Wiener 積分核 $C_0^\pm(s), C_1^\pm(s,\lambda), C_2^\pm(s,\lambda_1,\lambda_2)$ を求めればよい。連立方程式(40),(41)及び(42)式の第1, 2式を整理することにより

$$\begin{aligned}
C_0^\pm(s) &= \pm\frac{1}{2}J_0(s) &(44)\\
C_1^\pm(s,\lambda) &= \pm\frac{1}{2}J_1(s,\lambda)+\frac{1}{2}F(\lambda)\frac{s(s+\lambda)-k^2}{\gamma(s+\lambda)}J_0(s) &(45)\\
C_2^\pm(s,\lambda_1,\lambda_2) &= \pm\frac{1}{2}J_2(s,\lambda_1,\lambda_2)+\frac{1}{4}\left\{F(\lambda_1)\frac{(s+\lambda_1)(s+\lambda_1+\lambda_2)-k^2}{\gamma(s+\lambda_1+\lambda_2)}J_1(s,\lambda_2)\right.\\
&\qquad\left.+F(\lambda_2)\frac{(s+\lambda_2)(s+\lambda_1+\lambda_2)-k^2}{\gamma(s+\lambda_1+\lambda_2)}J_1(s,\lambda_1)\right\} &(46)
\end{aligned}$$

となるから結局は s について未知の整関数である Wiener 積分核 $J_0(s), J_1(s,\lambda), J_2(s,\lambda_1,\lambda_2)$ を求めればよいことになる。各々の連立方程式の第3式を整理すればこれらは次の関数方程式を満たすことがわかる。

0次摂動からは

$$e^{isl}W_0^+(s)+\frac{\gamma(s)}{2}J_0(s)+e^{-isl}W_0^-(s)=0 \tag{47}$$

を得る。ただし、

$$W_0^\pm(s) = w^{\pm\prime}{}_0(s) \pm\ \mathrm{sgn}\theta_i\gamma(k\cos\theta_i)\frac{ie^{\mp ik\cos\theta_i l}}{s-k\cos\theta_i} \tag{48}$$

であり、$W_0^+(s)$ は $s=k\cos\theta_i$ での1位の極による特異性を除いて $\mathrm{Im}\ s > -k_2\cos\theta_i$ で正則、$W_0^-(s)$ は $\mathrm{Im}\ s < k_2\cos\theta_i$ で正則である。

1次摂動からは

$$e^{isl}W_1^+(s,\lambda)+\frac{\gamma(s+\lambda)}{2}J_1(s,\lambda)+e^{-isl}W_1^-(s,\lambda)+U_1(s,\lambda)=0 \tag{49}$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned}
W_1^\pm(s,\lambda) &= w^{\pm\prime}{}_1(s,\lambda)\pm F(\lambda)\frac{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda)-k^2}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda)}\cdot\gamma(k\cos\theta_i+\lambda)\frac{ie^{\mp ik\cos\theta_i l}}{s-k\cos\theta_i} &(50)\\
U_1(s,\lambda) &= -\frac{1}{2}\left[F(\lambda)\{u_0''(s)+v_0''(s)\}+i\lambda F(\lambda)\{\dot{u_0}(s)+\dot{v_0}(s)\}\right] &(51)
\end{aligned}$$

であり、$W_1^+(s,\lambda)$ は $s=k\cos\theta_i$ での1位の極による特異性を除いて $\mathrm{Im}\ s > -k_2\cos\theta_i$ で正則、$W_1^-(s,\lambda)$ は $\mathrm{Im}\ s < k_2\cos\theta_i$ で正則である。$U_1(s,\lambda)$ は整関数であるがその具体形や $|s|\to+\infty$ での振舞いは不明である。$U_1(s,\lambda)$ つまり $u_0''(s)+v_0''(s), \dot{u_0}(s)+\dot{v_0}(s)$ の具体形は一見、0次摂動を解かないと得られないよう

†連続な量からこのような符号関数が引き出される場合、引数が0の時、もしくは符号変化点においてはもともとの量が0となることを暗に仮定している。

に思えるが (27) 式の表示からわかる $\Phi''_{s0}(z|s), \Phi^{\cdot}_{s0}(z|s)$ の形を用いて次の量を計算すると

$$
\begin{aligned}
\phi''_{s0}(x,+0)+\phi''_{s0}(x,-0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}\{\gamma(s)\}^2\{C_0^+(s)+C_0^-(s)\}e^{-isx}ds \qquad (|\tau|<k_2\cos\theta_i\ ) \\
&= 0 \qquad (52) \\
\phi^{\cdot}_{s0}(x,+0)+\phi^{\cdot}_{s0}(x,-0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}(-is)\{C_0^+(s)+C_0^-(s)\}e^{-isx}ds \qquad (|\tau|<k_2\cos\theta_i\ ) \\
&= 0 \qquad (53)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、(40) 式の第2式と D^a-逆 Fourier 変換の公式を用いた。(52) 式を閉区間 $[-l-x,l-x]$ D^a-Fourier 変換すれば、$u''_0(s)+v''_0(s)=u^{\cdot}_0(s)+v^{\cdot}_0(s)=0$ 即ち $U_1(s,\lambda)\equiv 0$ が示されるから (49) 式は以下のようになる。

$$
e^{isl}W_1^+(s,\lambda)+\frac{\gamma(s+\lambda)}{2}J_1(s,\lambda)+e^{-isl}W_1^-(s,\lambda)=0 \qquad (54)
$$

2次摂動からは

$$
e^{isl}w_2^+(s,\lambda_1,\lambda_2)+\frac{\gamma(s+\lambda_1+\lambda_2)}{2}J_2(s,\lambda_1,\lambda_2)+e^{-isl}w_2^-(s,\lambda_1,\lambda_2)+U_2(s,\lambda_1,\lambda_2)=0 \qquad (55)
$$

を得る。ただし、

$$
\begin{aligned}
U_2(s,\lambda_1,\lambda_2) = -\frac{1}{4}\Big[&F(\lambda_1)\{u''_1(s,\lambda_2)+v''_1(s,\lambda_2)\}+i\lambda_1F(\lambda_1)\{u^{\cdot}_1(s,\lambda_2)+v^{\cdot}_1(s,\lambda_2)\} \\
&+F(\lambda_2)\{u''_1(s,\lambda_1)+v''_1(s,\lambda_1)\}+i\lambda_2F(\lambda_2)\{u^{\cdot}_1(s,\lambda_1)+v^{\cdot}_1(s,\lambda_1)\}\Big] \qquad (56)
\end{aligned}
$$

でありこれも整関数であるが具体形や $|s|\to+\infty$ での振舞いは不明である。U_2 つまり $u''_1(s,\lambda)+v''_1(s,\lambda)$, $u^{\cdot}_1(s,\lambda)+v^{\cdot}_1(s,\lambda)$ の形を1次摂動の場合同様に評価する。次の量を計算すると近似的な評価として

$$
\begin{aligned}
&\phi''_{s1}(x,+0,\omega)+\phi''_{s1}(x,-0,\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\{\gamma(s+\lambda)\}^2\{C_1^+(s,\lambda)+C_1^-(s,\lambda)\}e^{-i(s+\lambda)x}dB(\lambda,\omega)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(s+\lambda)F(\lambda)\{s(s+\lambda)-k^2\}J_0(s)e^{-i(s+\lambda)x}dB(\lambda,\omega)ds \qquad (|\tau|<k_2\cos\theta_i\ ) \\
&\simeq -2i\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)[\gamma(k\cos\theta_i+\lambda)\{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda)-k^2\}\ \mathrm{sgn}\theta_i ie^{-ik\cos\theta_i x}]e^{-i\lambda x}dB(\lambda,\omega) \qquad (57) \\
&\phi^{\cdot}_{s1}(x,+0,\omega)+\phi^{\cdot}_{s1}(x,-0,\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\{-i(s+\lambda)\}\{C_1^+(s,\lambda)+C_1^-(s,\lambda)\}e^{-i(s+\lambda)x}dB(\lambda,\omega)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\{-i(s+\lambda)\}F(\lambda)\frac{s(s+\lambda)-k^2}{\gamma(s+\lambda)}J_0(s)e^{-i(s+\lambda)x}dB(\lambda,\omega)ds \qquad (|\tau|<k_2\cos\theta_i\ ) \\
&\simeq -2i\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\left[\{-i(k\cos\theta_i+\lambda)\}\frac{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda)-k^2}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda)}\ \mathrm{sgn}\theta_i ie^{-ik\cos\theta_i x}\right]e^{-i\lambda x}dB(\lambda,\omega) \qquad (58)
\end{aligned}
$$

を得る (ただし、$|x|<l$)。ここで (41) 式の第2式と (47) 及び (48) 式を用いた。ただし、(57) 及び (58) 式の D^a-逆 Fourier 変換は極のみを評価しブランチカットの評価は無視した。(57) 及び (58) 式を閉区間 $[-l-x,l-x]$ で D^a-Fourier 変換し、整理すれば

$$u_1''(s,\lambda)+v_1''(s,\lambda) = -2F(\lambda)\{(k\cos\theta_i+\lambda)^2-k^2\}\frac{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda)-k^2}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda)} \cdot \mathrm{sgn}\theta_i \frac{i}{s-k\cos\theta_i}(e^{i(s-k\cos\theta_i)l}-e^{-i(s-k\cos\theta_i)l}) \tag{59}$$

$$u_1'(s,\lambda)+v_1'(s,\lambda) = -2F(\lambda)\{-i(k\cos\theta_i+\lambda)\}\frac{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda)-k^2}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda)} \cdot \mathrm{sgn}\theta_i \frac{i}{s-k\cos\theta_i}(e^{i(s-k\cos\theta_i)l}-e^{-i(s-k\cos\theta_i)l}) \tag{60}$$

を得る。これにより $U_2(s,\lambda_1,\lambda_2)$ の形がわかるから (55) 式は

$$e^{isl}W_2^+(s,\lambda_1,\lambda_2)+\frac{\gamma(s+\lambda_1+\lambda_2)}{2}J_2(s,\lambda_1,\lambda_2)+e^{-isl}W_2^-(s,\lambda_1,\lambda_2)=0 \tag{61}$$

$$\begin{aligned} W_2^{\pm}&(s,\lambda_1,\lambda_2)\\ =\ & w_2^{\pm}(s,\lambda_1,\lambda_2)\\ &\pm\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\theta_i F(\lambda_1)F(\lambda_2)\Big[\frac{\{(k\cos\theta_i+\lambda_1)(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)-k^2\}\{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda_1)-k^2\}}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1)}\\ &\qquad+\frac{\{(k\cos\theta_i+\lambda_2)(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)-k^2\}\{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda_2)-k^2\}}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_2)}\Big]\\ &\cdot\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)\frac{ie^{\mp ik\cos\theta_i l}}{s-k\cos\theta_i} \end{aligned} \tag{62}$$

となる。$W_2^+(s,\lambda_1,\lambda_2)$ は $s=k\cos\theta_i$ での1位の極による特異性を除いて $\mathrm{Im}\,s>-k_2\cos\theta_i$ で正則、$W_2^-(s,\lambda_1,\lambda_2)$ は $\mathrm{Im}\,s<k_2\cos\theta_i$ で正則である。以上の関数方程式 (47),(54) 及び (61) 式は帯上領域 $|\mathrm{Im}\,s|<k_2\cos\theta_i$ で成立する Wiener-Hopf 方程式となっており Wiener-Hopf 法を適用することで解き得る。

3 Wiener-Hopf 方程式の解

3.1 共通 Wiener-Hopf 方程式

この節では前節で得られた0次、1次、2次摂動の Wiener-Hopf 方程式 (47),(53) 及び (61) 式 † の解を求める。一般的に取り扱うため次のような帯状領域 $|\mathrm{Im}\,s|<k_2\cos\theta_i$ で成り立つ共通 Wiener-Hopf 方程式を考える。

$$e^{isl}W_c^+(s)+\frac{\gamma(s)}{2}J_c(s)+e^{-isl}W_c^-(s)=0 \tag{63}$$

$$W_c^{\pm}(s)=w_c^{\pm}(s)\pm c_1\gamma(k\cos\theta_i+c_2)\frac{ie^{\mp ik\cos\theta_i l}}{s-(k\cos\theta_i+c_2)} \tag{64}$$

ここで c_1 は s に無関係な複素数パラメータ、c_2 も s に無関係な実数パラメータ、$J_c(s)$ は全 s-平面上で正則な整関数、$w_c^{\pm}(s)$ は各々 $\mathrm{Im}\,s>-k_2\cos\theta_i$, $\mathrm{Im}\,s<k_2\cos\theta_i$ で正則な関数とする。よって $W_c^+(s)$ は $s=k\cos\theta_i+c_2$ での1位の極による特異性を除いて $\mathrm{Im}\,s>-k_2\cos\theta_i$ で正則、$W_c^-(s)$ は $\mathrm{Im}\,s<k_2\cos\theta_i$ で正則な関数である。また $|s|\to+\infty$ に対する振舞いは

$$w_c^+(s) = O(s^{-\frac{1}{2}})\ \ (\mathrm{Im}\,s>-k_2\cos\theta_i)\ ,\quad w_c^-(s)=O(s^{-\frac{1}{2}})\ \ (\mathrm{Im}\,s<k_2\cos\theta_i) \tag{65}$$

$$e^{isl}J_c(s) = O(s^{-\frac{3}{2}})\ \ (\mathrm{Im}\,s>0)\ ,\quad e^{-isl}J_c(s)=O(s^{-\frac{3}{2}})\ \ (\mathrm{Im}\,s<0) \tag{66}$$

であるとする。(63) 式で $c_1=\mathrm{sgn}\theta_i$, $c_2=0$ とした場合が0次摂動の Wiener-Hopf 方程式 (47) 式に相当する。そこで (63) 式の共通 Wiener-Hopf 方程式を解く。

†Dirichlet 条件 [4] 同様これらの Wiener-Hopf 方程式は表式上もそうであるが物理的な散乱過程の観点からも本質的に同じものを表している。

3.2 共通 Wiener-Hopf 方程式の形式的厳密解

共通 Wiener-Hopf 方程式は本質的にフラットなストリップが満たす Winer-Hopf 方程式そのものであり Wiener-Hopf 法として定石化された手順 [11, 12] に沿って解くことができる。(63) 式を次のように書く。

$$e^{isl}W_c^+(s)+\bar{\gamma}^+(s)\bar{\gamma}^-(s)J_c(s)+e^{-isl}W_c^-(s)=0 \tag{67}$$

$\bar{\gamma}^\pm(s)$ は核関数 $\gamma(s)/2$ の積形式の分解関数であり以下のように定義する。

$$\bar{\gamma}^\pm(s)=2^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}(k\pm s)^{\frac{1}{2}} \tag{68}$$

$\bar{\gamma}^\pm(s)$ は各々 $\mathrm{Im}\ s>-k_2$, $\mathrm{Im}\ s<k_2$ で正則である。なお、$\bar{\gamma}^\pm(s)$ の定義を (68) 式としたのは解析の便宜上、次の対称性を持たせるためである。

$$\bar{\gamma}^+(s)\bar{\gamma}^-(s)=\frac{\gamma(s)}{2}\quad,\quad \bar{\gamma}^+(-s)=\bar{\gamma}^-(s) \tag{69}$$

(67) 式の両辺に $e^{\pm isl}/\bar{\gamma}^\mp(s)$ を乗じて和形式の分解操作を施し $|s|\to+\infty$ での振舞いを考慮すると次の連立積分方程式が得られる。

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{W_c^-(s)}{\bar{\gamma}^-(s)}-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}\frac{e^{2itl}W_c^+(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t-s)}dt=0\\[2ex]\dfrac{W_c^+(s)}{\bar{\gamma}^+(s)}-\dfrac{c_1\gamma(k\cos\theta_i+c_2)ie^{-i(k\cos\theta_i+c_2)l}}{\bar{\gamma}^+(k\cos\theta_i+c_2)\{s-(k\cos\theta_i+c_2)\}}+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty-i\tau}^{\infty-i\tau}\frac{e^{-2itl}W_c^-(t)}{\bar{\gamma}^+(t)(t-s)}dt=0\end{array}\right. \tag{70}$$

ただし $|\mathrm{Im}\ s|<\tau<k_2\cos\theta_i$ である。連立積分方程式 (70) の第 1 式に対して置換 $s\to-s$ 、第 2 式に対して変数変換 $t\to-t$ を施し両式の和と差を取ると

$$\frac{X_c^{a,s}(s)}{\bar{\gamma}^+(s)}-\frac{c_1\gamma(k\cos\theta_i+c_2)ie^{-i(k\cos\theta_i+c_2)l}}{\bar{\gamma}^+(k\cos\theta_i+c_2)\{s-(k\cos\theta_i+c_2)\}}\mp\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau}\frac{e^{2itl}X_c^{a,s}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)}dt=0 \tag{71}$$

ここで、

$$X_c^{a,s}(s)=W_c^+(s)\pm W_c^-(-s) \tag{72}$$

であり、$s=k\cos\theta_i+c_2$ での 1 位の極による特異性を除いて $\mathrm{Im}\ s>-k_2\cos\theta_i$ で正則である。このような一連の操作はストリップ構造の対称性によるものである。
(71) 式の被積分関数は指数因子 e^{2itl} を持つためその積分評価は被積分関数中の 1 位の極 $t=k\cos\theta_i+c_2$ による留数の寄与と被積分関数中の 2 価関数 $\bar{\gamma}^-(t)$ のブランチカット $L_s^-:t=k\sim k+i\infty$ に沿う積分の評価に置き換えられる。ブランチカット周囲の積分をカットの右側に沿う積分に代表させて以下のように書く。

$$\begin{aligned}X_c^{a,s}(s)\ =\ \bar{\gamma}^+(s)\Bigg\{&\frac{c_1\gamma(k\cos\theta_i+c_2)ie^{-i(k\cos\theta_i+c_2)l}}{\bar{\gamma}^+(k\cos\theta_i+c_2)\{s-(k\cos\theta_i+c_2)\}}\pm\frac{c_1\gamma(k\cos\theta_i+c_2)ie^{i(k\cos\theta_i+c_2)l}}{\bar{\gamma}^-(k\cos\theta_i+c_2)\{s+(k\cos\theta_i+c_2)\}}\\&\pm\frac{1}{\pi i}\int_k^{k+i\infty}\frac{e^{2itl}X_c^{a,s}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)}dt\Bigg\}\end{aligned} \tag{73}$$

(73) 式) は (63) 式の厳密な解表現を与えている。しかしこの解は再帰積分を含んだ形式的なものに過ぎない。これは一般にストリップ周囲の波動場が二つのエッジを介した (無限) 多重回折を含むためそれを記述する再帰積分の存在により s の関数として陽な形に開けないからである。

3.3 共通 Wiener-Hopf 方程式の漸近解

以前の報告でも述べたように形式的厳密解は半平面問題の解を二つ重ね合わせかつ二つのエッジによる補正項を導入する形で書けている †ので適当な条件下での補正項の漸近表現を導くことにする。具体的にはス

†このことからもわかるようにストリップの問題に対し Wiener-Hopf 法は本質的に高周波極限の解法である。

トリップ幅が波長に比して十分大きい場合の極限 $|k|l \to +\infty$ に対する漸近解を求める。そこで、D.S.Jones [11] や K.Kobayashi [12] が用いた手順に沿って解析する。

補助的な関数 $W_c^{a,s}(s)$ を次のように定義し $X_c^{a,s}(s)$ 中の未知量を分離する。

$$W_c^{a,s}(s) = w_c^+(s) \pm w_c^-(-s) \tag{74}$$

これと (72) 式から

$$X_c^{a,s}(s) = W_c^{a,s}(s) + c_1\gamma(k\cos\theta_i + c_2)\frac{ie^{-i(k\cos\theta_i+c_2)l}}{s-(k\cos\theta_i+c_2)} \pm c_1\gamma(k\cos\theta_i+c_2)\frac{ie^{i(k\cos\theta_i+c_2)l}}{s+(k\cos\theta_i+c_2)} \tag{75}$$

を得る。補正項である再帰積分は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi i}\int_k^{k+i\infty}\frac{e^{2itl}X_c^{a,s}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)}dt \\
&= \frac{1}{\pi i}\left\{\int_k^{k+i\infty}\frac{e^{2itl}W_c^{a,s}(t)}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)}dt\right. \\
&\quad +c_1\gamma(k\cos\theta_i+c_2)ie^{-i(k\cos\theta_i+c_2)l}\int_k^{k+i\infty}\frac{e^{2itl}}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)\{t-(k\cos\theta_i+c_2)\}}dt \\
&\quad \left.\pm c_1\gamma(k\cos\theta_i+c_2)ie^{i(k\cos\theta_i+c_2)l}\int_k^{k+i\infty}\frac{e^{2itl}}{\bar{\gamma}^-(t)(t+s)\{t+(k\cos\theta_i+c_2)\}}dt\right\}
\end{aligned} \tag{76}$$

となる。第2項、第3項の積分は厳密評価ができて、エッジによる2次の回折効果を記述する。第1項の積分は $|k|l \to +\infty$ の条件下でブランチカット周囲の積分に関する漸近展開の補助定理 [12] を適用して $O((kl)^{-\frac{1}{2}})$ の主要項を導くことで漸近評価できる。この項はエッジによる3次以上の多重回折効果を表す。再帰積分が評価されたので若干計算し整理することで漸近解 $X_c^{a,s}(s)$ が得られる。(72) 式を逆に解くことにより $|k|l \to +\infty$ の条件下での共通 Wiener-Hopf 方程式の漸近解 $W_c^{\pm}(s)$ を次のように得る。

$$\begin{aligned}
W_c^{\pm}(s) \simeq c_1\bar{\gamma}^{\pm}(s)\Big[&\pm\frac{2\bar{\gamma}^{\mp}(k\cos\theta_i+c_2)ie^{\mp i(k\cos\theta_i+c_2)l}}{s-(k\cos\theta_i+c_2)} \\
&-ie^{\pm i(k\cos\theta_i+c_2)l}\gamma(k\cos\theta_i+c_2)\eta(\pm s,\pm(k\cos\theta_i+c_2)) \\
&+\gamma(k\cos\theta_i+c_2)B(k,\mp(k\cos\theta_i+c_2))\xi(\pm s)\Big]
\end{aligned} \tag{77}$$

上式の第1項及び第2項は厳密項であり第3項が漸近項である。表式中の関数 $\eta(s,t), \xi(s), B(s,t)$ は

$$\eta(s,t) = \frac{\xi(s)-\xi(t)}{s-t} \tag{78}$$

$$\xi(s) = \frac{ie^{2ikl}}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{\bar{\gamma}^-(it/(2l)+k)\{t-2i(k+s)l\}}dt \tag{79}$$

$$B(s,t) = \frac{\bar{\gamma}^+(s)\{\chi(s,t)+\chi(s,-t)\bar{\gamma}^+(s)\xi(s)\}}{1-\{\bar{\gamma}^+(s)\xi(s)\}^2} \tag{80}$$

で定義する。更に $\chi(s,t), P(s,t)$ は以下のように定義する。

$$\chi(s,t) = ie^{-ilt}P(s,t) - ie^{ilt}\eta(s,t) \tag{81}$$

$$P(s,t) = -\frac{1}{s-t}\left\{\frac{1}{\bar{\gamma}^+(s)}-\frac{1}{\bar{\gamma}^+(t)}\right\} \tag{82}$$

(78)-(82) 式の定義は Dirichlet 条件 [4] の場合と全く同形である。分解関数 $\bar{\gamma}^-(s)$ を (68) 式で与える時 (79) 式で定義される関数 $\xi(s)$ は次のように簡単に書ける。

$$\xi(s) = -\frac{2l^{\frac{1}{2}}e^{2ikl}}{\pi}L_1\{-2i(s+k)l\} \tag{83}$$

関数 $L_n(\alpha)$ は変形 Laplace 積分の一種であり次式で定義する (付録付録 B)。

$$L_n(\alpha) = \int_0^\infty \frac{t^{n-\frac{3}{2}} e^{-t}}{t+\alpha} dt \quad (n \in N \ , \ |\arg \alpha| < \pi) \tag{84}$$

ただし、$L_1(\alpha)$ は $\alpha = 0$ では定義されない。すなわち単独では $\xi(s)$ は $s = -k$ において定義されない。同様に $P(s,t)$ も $s,t = -k$ においては単独では定義されない。

3.4 0 次摂動の漸近解

(64) 式においてパラメータを $c_1 = \mathrm{sgn}\theta_i, c_2 = 0$ とおけば共通 Wiener-Hopf 方程式 (63) 式は 0 次摂動の Wiener-Hopf 方程式 (47) 式に一致する。従って 0 次摂動の $|k|l \to +\infty$ の条件下での漸近解は (77) 式で $c_1 = \mathrm{sgn}\theta_i, c_2 = 0$ とおいて次のように得られる。

$$\begin{aligned} W_0^{\pm}(s) \ \simeq \ & \mathrm{sgn}\theta_i \bar{\gamma}^{\pm}(s) \Bigg\{ \pm \frac{2\bar{\gamma}^{\mp}(k\cos\theta_i) i e^{\mp ik\cos\theta_i l}}{s - k\cos\theta_i} \\ & -ie^{\pm ik\cos\theta_i l} \gamma(k\cos\theta_i)\eta(\pm s, \pm k\cos\theta_i) + \gamma(k\cos\theta_i) B(k, \mp k\cos\theta_i)\xi(\pm s) \Bigg\} \end{aligned} \tag{85}$$

これにより整関数 $J_0(s)$ が求まり 0 次摂動の Wiener 積分核 $C_0^{\pm}(s)$ が (44) 式により得られる。

3.5 1 次摂動の漸近解

報告 [4] で用いた次の変数変換と置換を導入する†。

$$p = s + \lambda \ \ , \ \ \widehat{W}_1^{\pm}(p) = e^{\mp i\lambda l} W_1^{\pm}(p-\lambda, \lambda) \ \ , \ \ \hat{J}_1(p) = J_1(p-\lambda, \lambda) \tag{86}$$

λ が実数であるためこの変換は $\widehat{W}_1^{\pm}(p), \hat{J}_1(p)$ の正則領域と $|p| \to +\infty$ における振る舞いを変えない。ただし、$W_1^{+}(s,\lambda)$ の $s = k\cos\theta_i$ における 1 位の極はこの変換により $\widehat{W}_1^{+}(p)$ においては $p = k\cos\theta_i + \lambda$ となることに注意する。1 次摂動の Wiener-Hopf 方程式 (53) 式は次のようにおける。

$$e^{ipl} \widehat{W}_1^{+}(p) + \frac{\gamma(p)}{2} \hat{J}_1(p) + e^{-ipl} \widehat{W}_1^{-}(p) = 0 \tag{87}$$

そこで (64) 式においてパラメータを

$$c_1 = F(\lambda) \frac{k\cos\theta_i (k\cos\theta_i + \lambda) - k^2}{\gamma(k\cos\theta_i + \lambda)} \quad , \quad c_2 = \lambda \tag{88}$$

とおけば共通 Wiener-Hopf 方程式 (63) 式は変換された 1 次摂動の Wiener-Hopf 方程式 (87) 式に一致する。従って 1 次摂動の $|k|l \to +\infty$ の条件下での漸近解は (77) 式から次のように得られる。

$$\begin{aligned} \widehat{W}_1^{\pm}(p) \ \simeq \ & F(\lambda) \frac{k\cos\theta_i (k\cos\theta_i + \lambda) - k^2}{\gamma(k\cos\theta_i + \lambda)} \bar{\gamma}^{\pm}(p) \Bigg\{ \pm \frac{2\bar{\gamma}^{\mp}(k\cos\theta_i + \lambda) i e^{\mp i(k\cos\theta_i + \lambda) l}}{p - (k\cos\theta_i + \lambda)} \\ & -ie^{\pm i(k\cos\theta_i + \lambda) l} \gamma(k\cos\theta_i + \lambda) \eta(\pm p, \pm(k\cos\theta_i + \lambda)) \\ & + \gamma(k\cos\theta_i + \lambda) B(k, \mp(k\cos\theta_i + \lambda)) \xi(\pm p) \Bigg\} \end{aligned} \tag{89}$$

これにより整関数 $\hat{J}_1(p)$ つまり $J_1(s,\lambda)$ が求まるので既に求めてある $J_0(s)$ とあわせて 1 次摂動の Wiener 積分核 $C_1^{\pm}(s,\lambda)$ が (45) 式により得られる。

---

†Dirichlet 条件同様この変換は単なる記号の置き換えなどではなく物理的意味 (散乱過程の表現) を持つ。

3.6 2次摂動の漸近解

1次摂動の場合と同様に次の変数変換と置換を導入する。

$$p=s+\lambda_1+\lambda_2 \quad , \quad \widehat{W}_2^{\pm}(p)=e^{\mp i(\lambda_1+\lambda_2)l}W_2^{\pm}(p-(\lambda_1+\lambda_2),\lambda_1,\lambda_2) \quad , \quad \widehat{J}_2(p)=J_2(p-(\lambda_1+\lambda_2),\lambda_1,\lambda_2) \tag{90}$$

$\lambda_1+\lambda_2$ が実数であるため1次摂動の場合と同様にこの変換は$\widehat{W}_2^{\pm}(p), \widehat{J}_2(p)$ の正則領域と $|p|\to+\infty$ における振る舞いを変えない。ただし、$W_2^{+}(s,\lambda_1,\lambda_2)$ の $s=k\cos\theta_i$ における1位の極はこの変換により $\widehat{W}_2^{+}(p)$ においては $p=k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2$ となることに注意する。2次摂動の Wiener-Hopf 方程式(61)式は次のようにおける。

$$e^{ipl}\widehat{W}_2^{+}(p)+\frac{\gamma(p)}{2}\widehat{J}_2(p)+e^{-ipl}\widehat{W}_2^{-}(p)=0 \tag{91}$$

そこで(64)式においてパラメータを

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\theta_i F(\lambda_1)F(\lambda_2)\Bigg[\frac{\{(k\cos\theta_i+\lambda_1)(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)-k^2\}\{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda_1)-k^2\}}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1)} \\ &\qquad +\frac{\{(k\cos\theta_i+\lambda_2)(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)-k^2\}\{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda_2)-k^2\}}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_2)}\Bigg] \qquad (92) \\ c_2 &= \lambda_1+\lambda_2 \qquad (93) \end{aligned}$$

とおけば共通 Wiener-Hopf 方程式(63)式は変換された2次摂動の Wiener-Hopf 方程式(91)式に一致する。従って2次摂動の $|k|l\to+\infty$ の条件下での漸近解は(77)式から次のように得られる。

$$\begin{aligned} \widehat{W}_2^{\pm}(p) &\simeq \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\theta_i F(\lambda_1)F(\lambda_2)\Bigg[\frac{\{(k\cos\theta_i+\lambda_1)(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)-k^2\}\{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda_1)-k^2\}}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1)} \\ &\qquad +\frac{\{(k\cos\theta_i+\lambda_2)(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)-k^2\}\{k\cos\theta_i(k\cos\theta_i+\lambda_2)-k^2\}}{\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_2)}\Bigg] \\ &\quad \cdot\bar{\gamma}^{\pm}(p)\Bigg\{\pm\frac{2\bar{\gamma}^{\mp}(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)ie^{\mp i(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)l}}{p-(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)} \\ &\qquad -ie^{\pm i(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)l}\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)\eta(\pm p,\pm(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)) \\ &\qquad +\gamma(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)B(k,\mp(k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2))\xi(\pm p)\Bigg\} \qquad (94) \end{aligned}$$

これにより整関数 $\widehat{J}_2(p)$ つまり $J_2(s,\lambda_1,\lambda_2)$ が求まるので既に求めてある $J_1(s,\lambda)$ とあわせて2次摂動の Wiener 積分核 $C_2^{\pm}(s,\lambda_1,\lambda_2)$ が(46)式により得られる。

4 散乱場の表式

4.1 s 領域における表現

Wiener 積分核 $C_0^{\pm}(s), C_1^{\pm}(s,\lambda), C_2^{\pm}(s,\lambda_1,\lambda_2)$ が求まったので s 領域での解が強定常過程として得られた。これを D^a-逆 Fourier 変換し整理することで $|k|\sigma\ll 1$ 及び $1\ll|k|l$ の条件下において実空間で散乱場は次のように表される。

$$\begin{aligned} \phi_s(x,z,\omega) &= g_0(x,z)+\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\{g_{1,1}(x,z,\lambda)+g_{1,2}(x,z,\lambda)\}dB(\lambda,\omega) \\ &\quad +\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda_1)F(\lambda_2)\{g_{2,1}(x,z,\lambda_1,\lambda_2)+g_{2,2}(x,z,\lambda_1,\lambda_2)\}dB(\lambda_1,\omega)dB(\lambda_2,\omega) \qquad (95) \end{aligned}$$

$g_0(x,z)$ は0次摂動すなわちストリップが平坦な場合の散乱場、$g_{1,1}(x,z,\lambda)$ 及び $g_{1,2}(x,z,\lambda)$ はランダム表面の Bragg ベクトル λ に対する1重散乱振幅を与える1次の Wiener 積分核、$g_{2,1}(x,z,\lambda_1,\lambda_2)$ 及び

$g_{2,2}(x,z,\lambda_1,\lambda_2)$ はランダム表面の Bragg ベクトル $\lambda_1+\lambda_2$ に対する2重散乱振幅を与える変数 (λ_1,λ_2) に関して対称な2次の Wiener 積分核である。各々の具体形は D^a-逆 Fourier 変換表現を用いて以下ように書ける。

$$g_0(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \mathrm{sgn}z\ \mathrm{sgn}\theta_i G_1(s,k\cos\theta_i)e^{-\gamma(s)|z|-isx}ds \tag{96}$$

$$g_{1,1}(x,z,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \mathrm{sgn}z\ g(k\cos\theta_i,k\cos\theta_i+\lambda)G_1(s,k\cos\theta_i+\lambda)e^{-\gamma(s)|z|-isx}ds \tag{97}$$

$$g_{1,2}(x,z,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \mathrm{sgn}\theta_i\ \frac{g(s,s-\lambda)}{\gamma(s)}G_2(s-\lambda,k\cos\theta_i)e^{-\gamma(s)|z|-isx}ds \tag{98}$$

$$\begin{aligned} g_{2,1}(x,z,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} &\frac{1}{2}\ \mathrm{sgn}z\ \mathrm{sgn}\theta_i \\ &\{g(k\cos\theta_i+\lambda_1,k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)g(k\cos\theta_i,k\cos\theta_i+\lambda_1) \\ &+g(k\cos\theta_i+\lambda_2,k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)g(k\cos\theta_i,k\cos\theta_i+\lambda_2)\} \\ &\cdot G_1(s,k\cos\theta_i+\lambda_1+\lambda_2)e^{-\gamma(s)|z|-isx}ds \end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned} g_{2,2}(x,z,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} &\frac{1}{2}\left\{\frac{g(s,s-\lambda_1)}{\gamma(s)}g(k\cos\theta_i,k\cos\theta_i+\lambda_2)G_2(s-\lambda_1,k\cos\theta_i+\lambda_2)\right. \\ &\left.+\frac{g(s,s-\lambda_2)}{\gamma(s)}g(k\cos\theta_i,k\cos\theta_i+\lambda_1)G_2(s-\lambda_2,k\cos\theta_i+\lambda_1)\right\} \\ &\cdot e^{-\gamma(s)|z|-isx}ds \end{aligned} \tag{100}$$

$$(\ |\tau| < k_2\cos\theta_i\ )$$

ただし、関数 $g(s,t), G_1(s,t), G_2(s,t)$ は

$$g(s,t) = \frac{st-k^2}{\gamma(t)} \tag{101}$$

$$\begin{aligned} G_1(s,t) &= -\frac{\bar\gamma^-(t)ie^{i(s-t)l}}{\bar\gamma^-(s)(s-t)}+\frac{\bar\gamma^+(t)ie^{-i(s-t)l}}{\bar\gamma^+(s)(s-t)} \\ &\quad -\gamma(t)\left\{\frac{-ie^{itl}\eta(s,t)+B(k,-t)\xi(s)}{2\bar\gamma^-(s)}e^{isl}+\frac{-ie^{-itl}\eta(-s,-t)+B(k,t)\xi(-s)}{2\bar\gamma^+(s)}e^{-isl}\right\} \end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned} G_2(s,t) &= -\frac{2\bar\gamma^+(s)\bar\gamma^-(t)ie^{i(s-t)l}}{s-t}+\frac{2\bar\gamma^-(s)\bar\gamma^+(t)ie^{-i(s-t)l}}{s-t} \\ &\quad -\gamma(t)\Big[\bar\gamma^-(s)\{-ie^{itl}\eta(s,t)+B(k,-t)\xi(s)\}e^{isl} \\ &\quad +\bar\gamma^-(s)\{-ie^{-itl}\eta(-s,-t)+B(k,t)\xi(-s)\}e^{-isl}\Big] \end{aligned} \tag{103}$$

と定義する。これから次の性質を満たすことがわかる。

$$G_1(-s,-t)=G_1(s,t)\quad,\quad G_2(-s,-t)=G_2(s,t)\quad,\quad G_1(s,t)=\gamma(s)G_2(s,t) \tag{104}$$

変数変換 $(s,t)\leftrightarrow(-s,-t)$ に関する対称性はストリップ構造の対称性に起因するものである。

4.2 散乱場の統計量

散乱場の表式 (95) 式と複素 Gauss ランダム測度の性質 (3) 式を用いればランダム波動場の統計量は平均操作により容易に求めることができる。散乱場をコヒーレント (平均) 部分とインコヒーレント (変動) 部分

に分離し

$$\phi_s(x,z,\omega) = \phi_s^{c}(x,z) + \phi_s^{ic}(x,z,\omega) \tag{105}$$

と書く。(95) 式の平均よりコヒーレント波動場 $\phi_s^c(x,z)$ は

$$\phi_s^c(x,z) \ = <\phi_s(x,z,\omega)> = \ g_0(x,z) + \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\{g_{2,1}(x,z,\lambda,-\lambda) + g_{2,2}(x,z,\lambda,-\lambda)\}d\lambda \tag{106}$$

となる。今回は2次摂動まで考慮したのでコヒーレントに $(|k|\sigma)^2$ オーダーの摂動を生じることがわかる。一方散乱場の分散はインコヒーレント波動場の自乗平均として与えられ、Gauss 変数のモーメントの公式 [10] を用いれば容易に計算できて次式を得る。

$$\begin{aligned} <|\phi_s^{ic}(x,z,\omega)|^2> \ &= \ <|\phi_s(x,z,\omega) - <\phi_s(x,z,\omega)>|^2> \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 |g_{1,1}(x,z,\lambda) + g_{1,2}(x,z,\lambda)|^2 d\lambda \\ &\quad +2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda_1)|^2|F(\lambda_2)|^2|g_{2,1}(x,z,\lambda_1,\lambda_2) + g_{2,2}(x,z,\lambda_1,\lambda_2)|^2 d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \tag{107}$$

この分散の第2項は $(|k|\sigma)^4$ のオーダーである。

4.3 角スペクトル表現

本節では本来の問題を考え $k_2 \to +0$ とする。次の変数変換と原点を中心とする円筒座標系を導入する。

$$\begin{aligned} s &= -k\cos w \quad (\ s \in R\ ,\ w \in \mathrm{C}\ ) \\ \gamma(s) &= -ik\sin w \end{aligned} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases} \quad (\ r > 0\ , |\theta| \leq \pi\ ) \tag{108}$$

多価関数 $\cos^{-1}(\alpha)$ の主値は $\cos^{-1}(0) = \pi/2$ となるように決める。ここで、C は図2に示す複素 w -平面上の集合であり、$^\forall w \in \mathrm{C}$ に対し $\pi - w \in \mathrm{C}$ に注意する。また、一般の $s \in C$ はこの変数変換により w-平面上の領域 D (図2) へと写像される。θ は散乱角である。

さて、一般に実数パラメータが関与した角度表現を一般的に次のように書くことにする。即ち、$\lambda \in R$, $z \in$ D に対し

$$\lambda + k\cos z \equiv k\cos z(\lambda) \quad , \quad z(\lambda) \equiv \cos^{-1}(\cos z + \lambda/k) \ \in \mathrm{D} \tag{109}$$

とする †。この角度表記を用いて複素角 $\theta_i(\lambda)$ を定義する。つまり

$$\lambda + k\cos\theta_i = k\cos\theta_i(\lambda) \tag{110}$$

である。これはランダム表面の Bragg ベクトル λ により入射波の波動ベクトルが変化することの別表現であって等価的な入射角とみなすことができる。そこで複素角 $\theta_i(\lambda)$ を等価入射角と呼ぶことにする。$\theta_i(\lambda)$ が複素角となる場合は z 軸方向に減衰するエバネセント波を表現する。

同様に散乱角度素片 (角スペクトル変数) w に Bragg ベクトル λ が作用した等価散乱角度素片 $w(\lambda)$ を (109) 式で定義する。つまり

$$s - \lambda = -k\cos w - \lambda = -k\cos w(\lambda) \tag{111}$$

である。$w \in \mathrm{C}$ に対し $w(\lambda) \in \mathrm{C}$ となる。
従って角スペクトル表現した時は座標表記を $(x,z) \Rightarrow (r,\theta)$ として0次摂動の散乱場 $g_0(r,\theta)$ 、1次摂動の Wiener 積分核 $g_{1,1}(r,\theta,\lambda)$, $g_{1,2}(r,\theta,\lambda)$ 及び 2次摂動の Wiener 積分核 $g_{2,1}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2)$,$g_{2,2}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ を

† このような角度表現においては実数角 $0 \leq \alpha \leq \pi$ に対し $(-\alpha)(\lambda) = \alpha(\lambda)$ となって本来の角度の正負の区別は不可能となる。つまり $\alpha(0) = |\alpha|$ であり $-\pi \leq \alpha < 0$ においては$\alpha(0) = \alpha$ は成立しない。しかしこの表記を用いる対象である入射角 θ_i (と散乱角 θ) は絶対値として用いるため矛盾するものではない。その意味では厳密には $|\alpha|(\lambda)$ と表記すべきであるが簡単のため$\alpha(\lambda)$ と書くことにする。

角スペクトル表現すればこれらは共通の散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ を用いて次のような Sommerfeld 型の積分で書けることが示される。

$$g_0(r,\theta) = \frac{i}{4\pi}\int_C \mathrm{sgn}\theta\ \mathrm{sgn}\theta_i S(w,|\theta_i|)e^{ikr\cos(w-|\theta|)}dw \tag{112}$$

$$g_{1,1}(r,\theta,\lambda) = \frac{i}{4\pi}\int_C \mathrm{sgn}\theta g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda))S(w,\theta_i(\lambda))e^{ikr\cos(w-|\theta|)}dw \tag{113}$$

$$g_{1,2}(r,\theta,\lambda) = \frac{i}{4\pi}\int_C \mathrm{sgn}\theta_i g(k\cos w, k\cos w(\lambda))S(w(\lambda),|\theta_i|)e^{ikr\cos(w-|\theta|)}dw \tag{114}$$

$$\begin{aligned} g_{2,1}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{i}{4\pi}\int_C \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\theta\ \mathrm{sgn}\theta_i\{g(k\cos\theta_i(\lambda_1), k\cos\theta_i(\lambda_1+\lambda_2))g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda_1)) \\ &\qquad +g(k\cos\theta_i(\lambda_2), k\cos\theta_i(\lambda_1+\lambda_2))g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda_2))\} \\ &\quad \cdot S(w,\theta_i(\lambda_1+\lambda_2))e^{ikr\cos(w-|\theta|)}dw \end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned} g_{2,2}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{i}{4\pi}\int_C \frac{1}{2}\{g(k\cos w, k\cos w(\lambda_1))g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda_2))S(w(\lambda_1),\theta_i(\lambda_2)) \\ &\qquad +g(k\cos w, k\cos w(\lambda_2))g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda_1))S(w(\lambda_2),\theta_i(\lambda_1))\} \\ &\quad \cdot e^{ikr\cos(w-|\theta|)}dw \end{aligned} \tag{116}$$

散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ （ $\alpha,\beta\in C$ ）は次式で定義する。

$$\begin{aligned} S(\alpha,\beta) &= -2i\frac{\sin\{kl(\cos\alpha+\cos\beta)\}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} - 2\frac{\cos\{kl(\cos\alpha+\cos\beta)\}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} - 2\bar{\gamma}^+(k)\gamma(k\cos\beta) \\ &\quad \cdot\Big\{\Big(-ie^{ikl\cos\beta}\eta(-k\cos\alpha, k\cos\beta) + B(k,-k\cos\beta)\xi(-k\cos\alpha)\Big)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} \\ &\quad +\Big(-ie^{-ikl\cos\beta}\eta(k\cos\alpha, -k\cos\beta) + B(k,k\cos\beta)\xi(k\cos\alpha)\Big)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\Big\} \end{aligned} \tag{117}$$

この散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ は実際には $G_1(s,t), G_2(s,t)$ を角スペクトル表現して整理することで得られるものである。特に次の性質を満たす。

$$S(\pi-\alpha,\pi-\beta) = S(\alpha,\beta) \tag{118}$$

この対称性は (104) 式の性質の別表現である。この散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ は一般に複素角となる $\alpha,\beta\in C$ に関して前者を等価的な散乱角、後者を等価的な入射角と解釈することができるから物理的にはストリップによる回折過程を記述するものであるといえる。一方、この散乱振幅因子は $S(\alpha,\beta)\neq S(\beta,\alpha)$ であるため等価的な入射角と散乱角との相反性を (厳密には) 満たさない。このため相反定理は (厳密には) 成立しない。特に 0 次摂動すなわちストリップがフラットな場合に相反定理を満たさない点は注目すべきである。

後の便宜のため散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ について特に後方散乱 $\beta=\alpha$ の場合を $S^{\mathrm{BK}}(\alpha)\equiv S(\alpha,\alpha)$ 、前方散乱 $\beta=\pi-\alpha$ の場合を $S^{\mathrm{FW}}(\alpha)\equiv S(\alpha,\pi-\alpha)$ とすれば、

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{BK}}(\alpha) &= \lim_{\beta\to\alpha} S(\alpha,\beta) \\ &= -2i\frac{\sin(2kl\cos\alpha)}{\cos\alpha} - 2\cos(2kl\cos\alpha) - 2\bar{\gamma}^+(k)\gamma(k\cos\alpha) \\ &\quad \cdot\Big\{-i\eta(-k\cos\alpha, k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} - i\eta(k\cos\alpha, -k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} \\ &\quad +B(k,-k\cos\alpha)\xi(-k\cos\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} \\ &\quad +B(k,k\cos\alpha)\xi(k\cos\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\Big\} \end{aligned} \tag{119}$$

$$
\begin{aligned}
S^{\mathrm{FW}}(\alpha) &= \lim_{\beta\to\pi-\alpha} S(\alpha,\beta) \\
&= 4ikl\sin\alpha - \frac{2}{\sin\alpha} - 2\bar{\gamma}^{+}(k)\gamma(k\cos\alpha) \\
&\quad \cdot\Big\{ - ie^{-2ikl\cos\alpha}\eta(-k\cos\alpha,-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} - ie^{2ikl\cos\alpha}\eta(k\cos\alpha,k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} \\
&\quad\quad +B(k,k\cos\alpha)\xi(-k\cos\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} \\
&\quad\quad +B(k,-k\cos\alpha)\xi(k\cos\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\Big\}
\end{aligned}
\tag{120}
$$

(118) 式の性質から

$$
S^{\mathrm{BK}}(\pi-\alpha) = S^{\mathrm{BK}}(\alpha)\ ,\quad S^{\mathrm{FW}}(\pi-\alpha) = S^{\mathrm{FW}}(\alpha) \tag{121}
$$

が容易に導かれる。

また関数 $g(s,t)$ は $k_2 \to +0$ としたことにより $t=\pm k$ (実数) の場合に発散する発散因子 $1/\gamma(t)$ を持つことに注意する。

4.4 散乱及び回折過程

Dirichlet 条件の報告 [5] では 0次、1次及び2次摂動を表す Sommerfeld 型の積分の主要部分が共通の関数 $S(\alpha,\beta)$ で書けることをランダムなストリップによる散乱及び回折過程の観点から説明した。この描像は Neumann 条件の場合も成り立つ。すなわち入射波動がストリップ上のランダム表面により摂動を受け波動ベクトルを変更される (別の言い方をすれば等価的に入射角が変化)、その波動がストリップにより回折される、さらにその波動がランダム表面による摂動を受け (等価的に散乱角が変化) 最終的な散乱波動をもたらすと考えることができる。まず一般的な散乱及び回折過程を次の4つに分類する [5] 。

($\mathcal{A}$) ストリップによる回折
($\mathcal{B}$) ランダム表面による散乱 $\Rightarrow$ ストリップによる回折
($\mathcal{C}$) ランダム表面による散乱 $\Rightarrow$ ストリップによる回折 $\Rightarrow$ ランダム表面による散乱
($\mathcal{D}$) ストリップによる回折 $\Rightarrow$ ランダム表面による散乱

ただし、ストリップによる回折とは散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ により記述されるものでストリップからの鏡面反射やエッジによる1次及び多重回折効果を含むすべての回折過程の総称である。またランダム表面による散乱とは1重及び多重散乱及び異常散乱を含む散乱過程の総称である。このような分類のうち ($\mathcal{A}$) は無摂動項でありそれ以外が摂動項に相当する。これらをダイアグラムとして表したのが図4である。
Dirichlet,Neumann 条件とも散乱及び回折過程としては全く同様である。Dirichlet 条件同様 Neumann 条件においても ($\mathcal{D}$) に相当する項がないがこれは等価境界条件 (8) 式がσ^1 のオーダーであることによるものと考えられる。従って、σ^2 オーダーまで考慮した等価境界条件を用いれば現れる可能性はあるが Dirichlet 条件のようにたまたま消えてしまうこともあり得る。同様に ($\mathcal{A}$) と ($\mathcal{B}$) は等価である。なぜならストリップによる回折が引き起こされる前にランダム表面からの摂動を受けることは等価的に入射角が変わることだからである。これが0次、1次及び2次摂動が満たす Wiener-Hopf 方程式が本質的に同じ式つまり (63) 式の共通 Wiener-Hopf 方程式に等しいということの意味である。また1次、2次摂動の式を共通 Wiener-Hopf 方程式にする変換 (86) 及び (90) 式の物理的な意味はランダム表面からの摂動による入射波動ベクトルの変化である。ところが Neumann 条件においてはランダム表面の散乱過程における異常散乱の存在を忘れてはならない。これは微小ランダム表面に沿う伝搬モードとの結合を生じるために発生する現象でありランダム表面による (無限) 多重散乱効果がもっとも顕著に現れた例である。異常散乱は多重散乱のため発生するので散乱のオーダー毎に扱う摂動法では適切に扱えず発散を引き起こす。その因子が $g(s,t)$ 中の $1/\gamma(t)$ である。無限ランダム表面の場合にはこの発散が明確な形で現れたが有限のランダム表面となる今回のストリップの場合は改めて検証する必要がある。

5 摂動解の検証

5.1 散乱振幅因子の検証

0 次摂動 $g_0(x,z)$ 、1 次摂動を構成する Wiener 積分核 $g_{1,1}(x,z,\lambda), g_{1,2}(x,z,\lambda)$ 及び 2 次摂動を構成する Wiener 積分核 $g_{2,1}(x,z,\lambda_1,\lambda_2), g_{2,2}(x,z,\lambda_1,\lambda_2)$ の評価は結局は (112)-(116) 式の積分の評価であるから被積分関数の振る舞いが解の性質を決定する。従って因子 $g(s,t)$ を含めて散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ を検証する。積分の評価は実際は積分路 C を指数因子 $e^{ikr\cos(w-|\phi|)}$ の鞍部点 $w=|\phi|$ を通る最急降下路 $\mathrm{SDP}_{|\phi|}$ へと変更して行なうから、引数である複素角 は $^\forall\alpha,\beta \in \mathrm{D}$ に拡張して考える。

実際には特異性を示す所でのみ議論するのであるが散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ についてはそれに内蔵される関数 $\xi(s), P(s,t)$ の引数が定義域でなくなる $s,t=-k$ をもたらす$\alpha,\beta \to 0,\pi$ が検証の対象であり、$g(s,t)$ については分母の発散因子 $\gamma(t)$ が 0 となる $t \to \pm k$ が対象である。つまりこちらも $\alpha,\beta \to 0,\pi$ である。以前の報告 [3] で指摘した部分波振幅の発散の可能性は発散因子の分母が $\gamma(t)=0$ となるような場合である。これは摂動法を Neumann 条件に対して適用した場合の無限ランダム平面で現れる特異性に対応する。

実際の検証に当たっては次のような場合を調べればよい。

$$
\left\{
\begin{array}{l}
1)\ \alpha \to 0,\pi(\text{等価散乱角が水平角})\ \text{の時の}\beta \to 0,\pi(\text{等価入射角が水平角})\ \text{における振舞い} \\
2)\ \beta \to 0,\pi(\text{等価入射角が水平角})\ \text{の時の}\alpha \to 0,\pi(\text{等価散乱角が水平角})\ \text{における振舞い} \\
3)\ \alpha = \beta(\text{後方散乱})\ \text{の時の}\alpha \to 0,\pi\text{における振舞い} \\
4)\ \alpha = \pi-\beta(\text{前方散乱})\ \text{の時の}\alpha \to 0,\pi\text{における振舞い}
\end{array}
\right.
$$

(118) 式の対称性を考慮すれば検討する α,β を更に絞り込むことができる。

5.2 0 次摂動の検証

これはストリップがフラットな場合そのものでありすでに十分検証されているはずであるが以降の検証において重要であるためみておこう。(112) 式からわかるようにこれは $\mathrm{sgn}\theta\ \mathrm{sgn}\theta_i S(w,|\theta_i|)$ を検証することであるが符号関数が存在するため $|\theta|,|\theta_i|=0,\pi$ においても 0 次摂動が合理的であるためには場が零となることが課せられるのである。

1) 水平散乱の検証

(118) 式の対称性より $\alpha \to 0$ の場合で十分である。そこで $\beta \neq 0,\pi$ に対し

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0} S(\alpha,\beta) &= -2\frac{e^{2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}} - 2\bar{\gamma}^+(k)\gamma(k\cos\beta)\Bigg\{-ie^{ikl\cos\beta}\frac{-e^{2ikl}/\bar{\gamma}^+(k)}{-k-k\cos\beta}e^{ikl} \\
&\qquad -ie^{-ikl\cos\beta}\eta(k,-k\cos\beta)e^{ikl} - ie^{-ikl}\chi(k,-k\cos\beta)\Bigg\} \\
&= -2\frac{e^{2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}} + 2\sin\frac{\beta}{2}\frac{e^{2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}} \\
&\qquad -2\bar{\gamma}^+(k)\gamma(k\cos\beta)(-i)e^{2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}\frac{-1}{k+k\cos\beta}\left\{\frac{1}{\bar{\gamma}^+(k)} - \frac{1}{\bar{\gamma}^-(k\cos\beta)}\right\} \\
&= -2\frac{e^{2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}} + 2\sin\frac{\beta}{2}\frac{e^{2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}} - 2\frac{\sin\frac{\beta}{2}-1}{\cos\frac{\beta}{2}}e^{2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{122}
$$

このように β について考えるまでもなく $S(0,\beta)=0$ となる。これは $\alpha=0(,\pi)$ の 1 点評価であるが鞍部点法で評価する場合に相当する。積分として評価する場合は省略するが電流密度の 0 次摂動 $J_0(s)$ が真に整関数であれば (112) 式の積分は零となるから因子 $\mathrm{sgn}\theta$ との矛盾は生じず合理的である。すなわちフラットな

ストリップに対しては如何なる入射角であっても水平方向への散乱は起きないことを示している。

2) 水平入射の検証

(118) 式の対称性より $\beta \to 0$ の場合で十分である。そこで $\alpha \neq 0, \pi$ に対し

$$
\begin{aligned}
\lim_{\beta \to 0} S(\alpha, \beta) &= -2\frac{e^{2ikl\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + 2\frac{e^{2ikl\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{2\{\bar{\gamma}^+(k)\}^2}{1-\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\}^2} \\
&\quad \cdot\left\{\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} + \bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\right\} \\
&\quad \cdot\lim_{\beta\to 0}\gamma(k\cos\beta)\chi(k, -k\cos\beta) \\
&\quad -\left[-ie^{ikl\sin^2\frac{\alpha}{2}}\eta(-k\cos\alpha, k)\sin\frac{\alpha}{2} - ie^{-ikl\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\xi(k\cos\alpha)}{k+k\cos\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}\right. \\
&\quad +\frac{\bar{\gamma}^+(k)\chi(k,k)}{1-\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\}^2} \\
&\quad \left.\cdot\left\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} + \xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\right\}\right] \\
&\quad \cdot\lim_{\beta\to 0} 2\bar{\gamma}^+(k)\gamma(k\cos\beta) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{123}
$$

このように α について考えるまでもなく $S(\alpha, 0) = 0$ となる。当然積分評価も零であり、因子 $\mathrm{sgn}\theta_i$ と矛盾しない。これはフラットなストリップに対しては水平入射では全く散乱が起きないことを示すものである。

平面波の水平入射に対して (無限に薄い) フラットなストリップからの散乱が起きないことは Neumann 条件では当然である。なぜなら入射平面波自体がストリップ上での境界条件をすでに満足しているからである。

3) 水平後方散乱の検証

(121) 式の対称性より $\alpha \to 0$ の場合で十分である。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0} S^{\mathrm{FW}}(\alpha) &= -2e^{2ikl} - 4\{\bar{\gamma}^+(k)\}^3\frac{i}{2k}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{2\{\bar{\gamma}^+(k)\}^2}{1-\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\}^2} \\
&\quad \cdot\left\{\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} + \bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\right\} \\
&\quad \cdot\lim_{\alpha\to 0}\gamma(k\cos\alpha)\chi(k, -k\cos\alpha) \\
&\quad -\left\{-i\cdot\frac{1}{-2k}\cdot\left(-\frac{e^{2ikl}}{\bar{\gamma}^+(k)}\right) - i\cdot\frac{1}{2k}\xi(k) - e^{ikl}\chi(k,k)\right\} \\
&= -2e^{2ikl} - \frac{2\bar{\gamma}^+(k)}{k}(-i)k\cdot i\left\{-\frac{e^{2ikl}}{\bar{\gamma}^+(k)}\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{124}
$$

従って水平入射の場合後方散乱は存在しない。これは 1)、2) の結果から考えても当然である。

4) 水平前方散乱の検証

(121) 式の対称性より $\alpha \to 0$ の場合で十分である。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0} S^{\mathrm{FW}}(\alpha) &= \lim_{\alpha\to 0}\left[-\frac{2}{\sin\alpha} + 4ie^{-2ikl\cos\alpha}\{\bar{\gamma}^+(k)\}^3\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\xi'(-k\cos\alpha)\right] \\
&\quad -\frac{2\{\bar{\gamma}^+(k)\}^2}{1-\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\}^2}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\gamma(k\cos\alpha)\chi(k, -k\cos\alpha) \\
&\quad \cdot\lim_{\alpha\to 0}\left\{\xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha} + \bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -2\bar{\gamma}^{+}(k)\{-ie^{2ikl}\xi'(k) - e^{ikl}\chi(k,k)\} \cdot \lim_{\alpha\to 0}\gamma(k\cos\alpha) \\
= & \lim_{\alpha\to 0}\left[-2 \cdot \frac{1 - 4ie^{-2ikl\cos\alpha}\{\bar{\gamma}^{+}(k)\}^3 \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^3\frac{\alpha}{2}\xi'(-k\cos\alpha)}{\sin\alpha} \right] \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{125}
$$

従って水平入射の場合前方散乱も存在しない。これは 1)、2) の結果から考えても当然である。

以上の結果からわかるように散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ 自体は発散などの特異性を持たずまた因子 sgnθ, sgnθ_i と矛盾せず合理的である。この0次摂動における性質を確認する意味でストリップ幅のパラメーターを $kl = 4\pi$ とし、入射角 θ_i 、散乱角 θ のいずれか一方を 45° に固定した場合の散乱角、入射角の変化に対する規格化強度 [3] の数値計算結果をそれぞれ図 5(a),5(b) に示す。いずれも鏡面反射となる 135° 付近においてピークを生じる。また水平角 $0, \pi$ の近傍において零化を示す急激な減衰を生じていることがわかる。前節において散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ は (厳密には) 相反性を満たさないと述べたが図においては (a),(b) はほとんと差異がない。従って近似的には相反性を満たすようである。

5.3 1次摂動の検証

1次摂動をもたらす二つの Wiener 積分核について検証する。この場合 $g(s,t)$ 中の発散因子 $1/\gamma(t)$ が問題となる。$s = t$ の場合のみ分子とキャンセルするが殆どの場合は発散因子が存在する。そこで1次摂動の検証では S と $1/\gamma$ のペアで考える †。

5.3.1 $g_{1,1}(r,\theta,\lambda)$ の検証

$g_{1,1}(r,\theta,\lambda)$ については (97) 式から次の量を考えればよい。

$$
h(\alpha,\beta;\beta) = \frac{S(\alpha,\beta)}{\gamma(k\cos\beta)} \ , \ h^{\mathrm{FW}}(\alpha) = \frac{S^{\mathrm{FW}}(\alpha)}{\gamma(k\cos\alpha)} \ , \ h^{\mathrm{BK}}(\alpha) = \frac{S^{\mathrm{BK}}(\alpha)}{\gamma(k\cos\alpha)} \tag{126}
$$

(118) 及び (121) 式の対称性から次式が成り立つ。

$$
h(\pi-\alpha,\pi-\beta;\pi-\beta) = h(\alpha,\beta;\beta) \ , \ h^{\mathrm{FW}}(\pi-\alpha) = h^{\mathrm{FW}}(\alpha) \ , \ h^{\mathrm{BK}}(\pi-\alpha) = h^{\mathrm{BK}}(\alpha) \tag{127}
$$

なお表示は略すが α にからむ散乱角の因子 sgnθ の存在に注意する。

1) (等価) 水平散乱の検証
(127) 式の対称性により $\alpha \to 0$ の場合で十分である。$\beta \neq 0, \pi$ に対し

$$
\lim_{\alpha\to 0} h(\alpha,\beta;\beta) = \frac{S(0,\beta)}{\gamma(k\cos\beta)} = 0 \tag{128}
$$

(122) 式の結果を用いた。$\beta \neq 0, \pi$ に対しては零となる。$\beta = 0, \pi$ については厳密には不定であるが極限を取ることから0とするのが最も簡単であろう。このような極限を取る場合には如何なる等価入射角であっても水平方向への散乱は起きないという結果が得られる。

2) (等価) 水平入射の検証

†しかしながらこの二つの因子は全く別のものである。S はフラットなストリップによる回折過程を記述し、一方 $1/\gamma$ というより g はランダム表面による摂動がもたらす重みの因子であるからペアにして考えなければならないこと自体が合理性を欠くといえる。しかしながら摂動解析においては往々にしてこのような取り扱いがなされている。

(127) 式の対称性により $\beta \to 0$ の場合で十分である。そこで $\alpha \neq 0, \pi$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to 0} h(\alpha,\beta;\beta) \\
&= -2\bar{\gamma}^+(k)\Bigg[-ie^{ikl\sin^2\frac{\alpha}{2}}\eta(-k\cos\alpha,k)\sin\frac{\alpha}{2} - ie^{-ikl\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\xi(k\cos\alpha)}{k+k\cos\alpha}\cos\frac{\alpha}{2} \\
&\qquad + \frac{\bar{\gamma}^+(k)\chi(k,k)}{1-\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\}^2}\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} + \xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\Big\}\Bigg] \\
&\quad - \lim_{\beta\to 0}\Bigg[\frac{2i\frac{\sin\{kl(\cos\alpha+\cos\beta)\}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} + 2\frac{\cos\{kl(\cos\alpha+\cos\beta)\}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} - 2\bar{\gamma}^+(k)\gamma(k\cos\beta)\frac{-ie^{ikl(\cos\alpha-\cos\beta)}\cos\frac{\alpha}{2}\xi(-k\cos\beta)}{k\cos\alpha+k\cos\beta}}{\gamma(k\cos\beta)} \\
&\qquad + \frac{2\{\bar{\gamma}^+(k)\}^2}{1-\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\}^2}\left\{\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} + \gamma(k)\xi(k)\xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\right\} \\
&\qquad \cdot\frac{\gamma(k\cos\beta)\chi(k,-k\cos\beta)}{\gamma(k\cos\beta)}\Bigg] \\
&= -2\bar{\gamma}^+(k)\Bigg[-ie^{ikl\sin^2\frac{\alpha}{2}}\eta(-k\cos\alpha,k)\sin\frac{\alpha}{2} - ie^{-ikl\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\xi(k\cos\alpha)}{k+k\cos\alpha}\cos\frac{\alpha}{2} \\
&\qquad + \frac{\bar{\gamma}^+(k)\chi(k,k)}{1-\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\}^2}\left\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} + \xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\right\}\Bigg] \\
&\quad - \frac{i}{k}\left(\frac{-e^{-2ikl\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2} + 2b\pi^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}e^{2ikl\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&\quad - \frac{2\{\bar{\gamma}^+(k)\}^2}{1-\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\}^2}\left\{\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha} + \gamma(k)\xi(k)\xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\right\} \\
&\qquad \cdot\left(\frac{-ie^{ikl}}{2k\bar{\gamma}^+(k)} - \frac{i\xi(k)e^{-ikl}}{2k} - \frac{b\pi^{-\frac{1}{2}}\bar{\gamma}^+(k)e^{ikl}}{k^2}\right)
\end{aligned}
\tag{129}
$$

このように α について一般に $h(\alpha,0;0) \neq 0$ である。なお、$b = 2(kl)^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ である。この状態で $\alpha \to 0, \pi$ の極限を取る。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0} h(\alpha,0;0) &= -2\bar{\gamma}^+(k)\left(\frac{-ie^{2ikl}}{2k\bar{\gamma}^+(k)} - \frac{i\xi(k)}{2k}\right) - \frac{2b\pi^{-\frac{1}{2}}ie^{2ikl}}{k} \\
&\quad + \left\{\frac{-ie^{ikl}}{2k\bar{\gamma}^+(k)} - \frac{i\xi(k)e^{-ikl}}{2k} - \frac{b\pi^{-\frac{1}{2}}\bar{\gamma}^+(k)e^{ikl}}{k^2}\right\}(-2\bar{\gamma}^+(k)e^{ikl}) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{130}
$$

即ち等価入射角が水平角の場合の後方散乱は 0 である。一方、

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to\pi} h(\alpha,0;0) &= -2\bar{\gamma}^+(k)\frac{ie^{-ikl}}{k}\left\{\lim_{\alpha\to\pi}\frac{\xi(-k\cos\alpha)-\xi(k)}{1+\cos\alpha} + \lim_{\alpha\to\pi}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\xi(k\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}\right\} \\
&\quad + 2\bar{\gamma}^+(k)\chi(k,k)e^{-ikl} - \frac{i}{k}\lim_{\alpha\to\pi}\frac{-e^{-2ikl\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2} + 2b\pi^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}e^{2ikl\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \\
&\to \text{発散}
\end{aligned}
\tag{131}
$$

となり $\alpha \to \pi$ に対しては発散する。これは次のことを意味している。等価入射角を水平角に固定した後で前方散乱振幅を得ようとすると発散する。これは α に関して可積分な特異性ではない。

3) (等価) 水平後方散乱の検証

(127) 式の対称性により $\alpha \to 0$ の場合で十分である。

$$
\lim_{\alpha\to 0} h^{\mathrm{FW}}(\alpha) = -2\bar{\gamma}^+(k)\left\{\frac{-ie^{2ikl}}{2k\bar{\gamma}^+(k)} - \frac{i\xi(k)}{2k} - e^{ikl}\chi(k,k)\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{2i\frac{\sin(2kl\cos\alpha)}{\cos\alpha}+2\cos(2kl\cos\alpha)+\frac{2i\{\bar{\gamma}^+(k)\}^3}{k\cos\alpha}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\xi(-k\cos\alpha)}{\gamma(k\cos\alpha)}\right] \\
= \quad & -2\bar{\gamma}^+(k)\left\{\frac{-ie^{2ikl}}{2k\bar{\gamma}^+(k)}-\frac{i\xi(k)}{2k}-e^{ikl}\chi(k,k)\right\}+\frac{ie^{2ikl}}{2k}b\pi^{-\frac{1}{2}} \\
\neq \quad & 0 \qquad (132)
\end{aligned}
$$

従って等価的に水平入射の場合も後方散乱が存在する。これは 1)、2) の結果に矛盾する。つまり等価入射角を水平角に近付けるようにしながら後方散乱を測定すると水平入射でも 0 にはならない。よって因子 $\mathrm{sgn}\theta$ の存在と矛盾し場が不連続となる。

4) (等価) 水平前方散乱の検証
(127) 式の対称性により $\alpha\to 0$ の場合で十分である。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0}h^{\mathrm{FW}}(\alpha) \quad = \quad & -2\bar{\gamma}^+(k)\{-ie^{2ikl}\xi'(k)-e^{ikl}\chi(k,k)\}-4l \\
& -\frac{2\{\bar{\gamma}^+(k)\}^2}{1-\{\bar{\gamma}^+(k)\xi(k)\}^2}\left\{\frac{-ie^{ikl}}{2k\bar{\gamma}^+(k)}-\frac{i\xi(k)e^{-ikl}}{2k}-\frac{b\pi^{-\frac{1}{2}}\bar{\gamma}^+(k)e^{ikl}}{k^2}\right\} \\
& \cdot\lim_{\alpha\to 0}\left\{\xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}+\gamma(k)\xi(k)\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha}\right\} \\
& -\lim_{\alpha\to 0}\left[2\cdot\frac{1-4ie^{-2ikl\cos\alpha}\{\bar{\gamma}^+(k)\}^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^3\frac{\alpha}{2}\xi'(-k\cos\alpha)}{\sin\alpha\gamma(k\cos\alpha)}\right] \\
= \quad & -2\bar{\gamma}^+(k)\{-ie^{2ikl}\xi'(k)-e^{ikl}\chi(k,k)\}-4l \\
& -\frac{i}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-e^{4ikl\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2b^3}{\pi}\int_0^\infty\frac{2e^{-\sin^2\frac{\alpha}{2}t^2}}{(t^2+b^2)^2dt}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \\
= \quad & -2\bar{\gamma}^+(k)\{-ie^{2ikl}\xi'(k)-e^{ikl}\chi(k,k)\}-4l-\frac{i}{2k}(1-8ikl) \\
= \quad & -8l+\frac{3i}{2k} \qquad (133)
\end{aligned}
$$

従って等価的に水平入射の場合も前方散乱が存在する。これは 1)、2) の結果に矛盾する。つまり等価入射角を水平角に近付けるようにしながら前方散乱を測定すると水平入射でも 0 にはならない。よって因子 $\mathrm{sgn}\theta$ の存在と矛盾し場が不連続となる。この不連続はランダムなストリップの外側の領域 ($|x|>l$) での $z=0$ 上の境界条件すなわち連続性に反するものである。

以上、α,β をどのように $0,\pi$ に近付けるかによって異なる結果を生じ場合によっては発散を引き起こしたり、因子 $\mathrm{sgn}\theta$ と矛盾したりする。極限の取り方により結果の相違はつまるところ実空間での散乱場を求めるための s とλ に関する積分の交換が成立しないことを示している。これは不合理な結果である。

5.3.2 $g_{1,2}(r,\theta,\lambda)$ の検証

$g_{1,2}(r,\theta,\lambda)$ については (98) 式から次を考えればよい。

$$
h(\alpha,\beta;\alpha)=\frac{S(\alpha,\beta)}{\gamma(k\cos\alpha)} \qquad (134)
$$

(118) 式の対称性から次式が成り立つ。

$$
h(\pi-\alpha,\pi-\beta;\pi-\alpha)=h(\alpha,\beta;\alpha) \qquad (135)
$$

前方散乱と後方散乱については $g_{1,2}$ の場合と全く同じ式となるため結果も同じであり省略する。なお表示は略すが β にからむ入射角の因子 $\mathrm{sgn}\theta_i$ の存在に注意する。

1) (等価) 水平散乱の検証
(135) 式の対称性により $\alpha \to 0$ の場合で十分である。$\beta \neq 0, \pi$ に対し

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0} h(\alpha,\beta;\alpha) &= -\frac{i}{k}\Bigg[-\frac{e^{-2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}}{\cos^2\frac{\beta}{2}} \\
&\quad +2\bar{\gamma}^{+}(k)\gamma(k\cos\beta)\Bigg\{\frac{i}{k}\frac{e^{ikl(\cos\beta-1)}}{1+\cos\beta}\left(\frac{e^{2ikl}}{\bar{\gamma}^{+}(k)}b\pi^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\xi(k\cos\beta)\right) \\
&\quad +B(k,k\cos\beta)\cdot\frac{e^{ikl}}{\bar{\gamma}^{+}(k)}b\pi^{-\frac{1}{2}}\Bigg\}\Bigg] \\
&\neq 0
\end{aligned}
\tag{136}
$$

従って等価的な散乱角が水平角であっても散乱振幅は0とはならない。この状態で$\beta \to 0$ の極限を取ると、

$$
\begin{aligned}
\lim_{\beta\to 0} h(0,\beta;0) &= \frac{i}{k}e^{-2ikl}-\frac{i}{k}2\bar{\gamma}^{+}(k)\Bigg\{\frac{i}{2k}\left(\frac{e^{2ikl}}{\bar{\gamma}^{+}(k)}b\pi^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\xi(k)\right) \\
&\quad +B(k,k)\cdot\frac{e^{ikl}}{\bar{\gamma}^{+}(k)}b\pi^{-\frac{1}{2}}\Bigg\}\cdot\lim_{\beta\to 0}\gamma(k\cos\beta) \\
&= \frac{i}{k}e^{-2ikl}
\end{aligned}
\tag{137}
$$

となり、一方、$\beta \to \pi$ の極限については

$$
\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\pi} h(0,\beta;0) &= \frac{i}{k}e^{-2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}\frac{1-\sin\frac{\beta}{2}e^{4ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}\frac{b}{\pi}\int_0^\infty\frac{2e^{-\cos^2\frac{\beta}{2}t^2}}{t^2+b^2}dt}{\cos^2\frac{\beta}{2}} \\
&\quad -\frac{2ib\pi^{-\frac{1}{2}}}{k}\cdot\lim_{\beta\to\pi}e^{2ikl\cos^2\frac{\beta}{2}}\tan\frac{\beta}{2} \\
&\to (\text{発散})
\end{aligned}
\tag{138}
$$

となる。つまり等価散乱角を水平角に取ると、入射角を水平角にした場合後方散乱は有限値で存在するが前方散乱は発散する。これは β について自乗可積分な特異性ではない。当然、因子 $\mathrm{sgn}\theta_i$ の存在と矛盾する。

2) (等価) 水平入射の検証
(135) 式の対称性により $\beta \to 0$ の場合で十分である。$\alpha \neq 0, \pi$ に対し極限を考える。

$$
\lim_{\beta\to 0} h(\alpha,\beta;\alpha) = \frac{S(\alpha,0)}{\gamma(k\cos\alpha)} = 0 \tag{139}
$$

が得られる。(122) 式の結果を用いた。$\beta \neq 0, \pi$ に対しては零となる。$\beta = 0, \pi$ については厳密には不定であるが極限を取ることから0とするのが最も簡単であろう。このような極限を取る場合には如何なる等価入射角であっても水平方向への散乱は起きないという結果が得られる。(138) 式の結果とは矛盾する。

3) 4) については $g_{1,1}$ の場合と全く同じであり省略するが当然、因子 $\mathrm{sgn}\theta_i$ の存在に矛盾する。同じくストリップの外側の領域での $z=0$ 上の境界条件すなわちに反する。

5.4 2次摂動の検証

2次摂動をもたらす二つの Wiener 積分核について検証する。1次摂動の場合と同様に S と $1/\gamma$ のペアで考える。

5.4.1 $g_{2,1}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ の検証

$g_{2,1}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ については (99) 式から次を考えればよい。

$$h(\alpha,\beta;\beta,\beta') = \frac{S(\alpha,\beta)}{\gamma(k\cos\beta)\gamma(k\cos\beta')} \tag{140}$$

$$h^{\mathrm{FW}}(\alpha;\beta') = \frac{S^{\mathrm{FW}}(\alpha)}{\gamma(k\cos\alpha)\gamma(k\cos\beta')} \quad , \quad h^{\mathrm{BK}}(\alpha;\beta') = \frac{S^{\mathrm{BK}}(\alpha)}{\gamma(k\cos\alpha)\gamma(k\cos\beta')} \tag{141}$$

1次摂動の場合ともっとも異なる点は一般に $S(\alpha,\beta)$ と連動しない発散因子 $1/\gamma(k\cos\beta')$ を持つことである。一般に $S(\alpha,\beta)\neq 0$ であるから改めて検証するまでもなく $\beta'=0,\pi$ に対し発散する。これは無限ランダム表面で見られる明確な意味の発散である。コヒーレントの計算にあらわれる2次摂動は (106) 式の量であるから結局 $g(k\cos\theta_i(\lambda),k\cos\theta_i)g(k\cos\theta_i,k\cos\theta_i(\lambda))S(w,|\theta_i|)$ を考えることになる。これは $|\theta_i|\neq 0,\pi$ では $k\cos\theta_i+\lambda=\pm k$ を満たす λ について明確な発散をもたらす。これは λ について自乗可積分な特異性ではない。特に (131) 式の結果から $\beta=0(,\pi)$ の下で $\alpha\to\pi(,0)$ とし、$\beta'\to 0,\pi$ を考えると振幅自体が可積分でない。

5.4.2 $g_{2,2}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ の検証

$g_{2,2}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ については (100) 式から次を考えればよい。

$$h(\alpha,\beta) = \frac{S(\alpha,\beta)}{\gamma(k\cos\alpha)\gamma(k\cos\beta)} \; , \; h^{\mathrm{FW}}(\alpha) = \frac{S^{\mathrm{FW}}(\alpha)}{\{\gamma(k\cos\alpha)\}^2} \; , \; h^{\mathrm{BK}}(\alpha) = \frac{S^{\mathrm{BK}}(\alpha)}{\{\gamma(k\cos\alpha)\}^2} \tag{142}$$

今までの場合ともっとも異なる点は α,β それぞれについて発散因子 $1/\gamma(k\cos\alpha), 1/\gamma(k\cos\beta)$ を持つことである。形としては $g_{1,1}, g_{1,2}$ の各々に発散因子 $1/\gamma(k\cos\alpha), 1/\gamma(k\cos\beta)$ を乗じたものとなるので1次摂動のときよりもより発散はきつくなるのである。実際 (136),(132) 及び (133) 式の結果に対しさらに $1/\gamma(k\cos\alpha)$ を乗じて $\alpha\to 0,\pi$ の極限を考えることになるから明らかに発散する。また (129) 式の結果に $1/\gamma(k\cos\beta)$ を乗じて $\beta\to\pi$ の極限を考えると明らかに発散する。これは自乗可積分な特異性ではない。$\beta\to 0$ における極限は一応有限値が得られるが省略する。いずれにしても2次摂動はすべて発散すると考えて差し支えない。

以上の結果からわかるように発散因子 $\gamma(k\cos\alpha),\gamma(k\cos\beta)$ を考慮した極限を考えると等価入射角や等価散乱角が水平角となる場合散乱振幅が極限の取り方によってなかったり異なる有限値として現れたり、場合によっては発散を引き起こす。無限ランダム平面の場合とは異なり1次摂動解が明確に発散するような激烈な現象ではないが極限の取り方によっては有限値で収まる場合もあるため、むしろよりたちが悪いとも言える。有限値で収まる場合でも因子 $\mathrm{sgn}\theta$, $\mathrm{sgn}\theta_i$ の要請に矛盾する。よって1次及び2次摂動解は不合理である。

5.5 無限ランダム平面及びランダム半平面との比較 (Neumann 条件)

5.5.1 無限ランダム表面の解

1次元無限ランダム表面の摂動解は実空間のままで容易に求めることができる。また今回のストリップの問題の $l\to+\infty$ 極限[†]として考察することも可能である。条件 $k\sigma\ll 1$ での2次摂動解までを (95) 式の形に書けば (112)-(116) 式に等価な式は

$$g_0(r,\theta) = \frac{i}{4\pi}\int_C S(w,\theta_i)e^{ikr\cos(w-\theta)}dw \tag{143}$$

[†]観測点 (r,θ) を固定して考える。

$$g_{1,1}(r,\theta,\lambda) = \frac{i}{4\pi}\int_C g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda))S(w,\theta_i(\lambda))e^{ikr\cos(w-\theta)}dw \tag{144}$$

$$\begin{aligned} g_{2,1}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{i}{4\pi}\int_C \frac{1}{2}\{g(k\cos\theta_i(\lambda_1), k\cos\theta_i(\lambda_1+\lambda_2))g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda_1)) \\ &\quad +g(k\cos\theta_i(\lambda_2), k\cos\theta_i(\lambda_1+\lambda_2))g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda_2))\} \\ &\quad \cdot S(w,\theta_i(\lambda_1+\lambda_2))e^{ikr\cos(w-\theta)}dw \end{aligned} \tag{145}$$

と書ける。($0\le\theta,\theta_i\le\pi, g_{1,2}(r,\theta,\lambda)=g_{2,2}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2)\equiv 0$ である。) 無限ランダム表面においてはランダムストリップ (とランダム半平面) の場合に現れる Wiener 積分核 $g_{1,2}(r,\theta,\lambda), g_{2,2}(r,\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ が存在しないことに注意されたい。これは散乱過程が一様なためストリップの場合のような分離を生じないためである。無限ランダム表面の場合の散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ ($\alpha,\beta\in C$) はもっとも簡単な形では次のように書ける。

$$S(\alpha,\beta) = -4\pi i\delta(\alpha-\beta) \tag{146}$$

上式の δ-関数 は線積分上で定義される Dirac δ である。$S(\alpha,\beta)$ は明らかに次の対称性と相反性を満たす。

$$S(\pi-\alpha,\pi-\beta) = S(\alpha,\beta) \quad , \quad S(\beta,\alpha) = S(\alpha,\beta) \tag{147}$$

無限ランダム表面の場合の $S(\alpha,\beta)$ では (126) 及び (140) 式の量はその分母の発散因子 $1/\gamma$ に従った明確な発散を示す。無限ランダム表面の場合を Sommerfeld 型の積分で書くことは全く形式的であって実際には以下のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_s(r,\theta,\omega) &= e^{ikr\cos(\theta-\theta_i)} \\ &\quad +\int_{-\infty}^{\infty} g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda))F(\lambda)e^{ikr\cos(\theta-\theta_i(\lambda))}dB(\lambda,\omega) \\ &\quad +\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\{g(k\cos\theta_i(\lambda_1), k\cos\theta_i(\lambda_1+\lambda_2))g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda_1)) \\ &\quad +g(k\cos\theta_i(\lambda_2), k\cos\theta_i(\lambda_1+\lambda_2))g(k\cos\theta_i, k\cos\theta_i(\lambda_2))\} \\ &\quad F(\lambda_1)F(\lambda_2)e^{ikr\cos(\theta-\theta_i(\lambda_1+\lambda_2))}dB(\lambda_1,\omega)dB(\lambda_2,\omega) \end{aligned} \tag{148}$$

これにより 1 次摂動解は $\theta_i(\lambda)=0,\pi$ において自乗可積分でない特異性を持つことは明らかである。特に 2 次摂動により生じるコヒーレント散乱振幅は水平入射の場合に可積分でない特異性を持つ。

5.5.2 ランダム半平面の解

1 次元ランダム半平面の摂動解は今回のストリップの形式的厳密解の一部を取り出すことにより容易に得られる。ランダム半平面が $x<0$ におかれているものとし、条件 $k\sigma\ll 1$ に対し (95) 式の形に書けば (112)-(116) 式と全く同様な形に書ける。ランダム半平面の場合の散乱振幅因子 $S(\alpha,\beta)$ ($\alpha,\beta\in C$) は次のように書ける。

$$S(\alpha,\beta) = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha+\cos\beta} \tag{149}$$

明らかに対称性 $S(\pi-\alpha,\pi-\beta)=S(\alpha,\beta)$ を満たさない。これは無限ランダム表面やストリップと異なりどのように座標系を選んでも構造の対称性がないからである。一方、相反性 $S(\beta,\alpha)=S(\alpha,\beta)$ は満たす。ストリップとは異なり半平面では 0 次摂動つまりフラットな場合に相反性を満たすことに注意されたい。ランダム半平面の場合の $S(\alpha,\beta)$ では (126) 及び (140) 式の量は無限ランダム表面とストリップの場合の性質を合わせ持つ。例えば $g_{1,1}$ は$\theta_i(\lambda)=0$ の場合にはストリップの場合と同様に特異因子 $1/\gamma$ とキャンセルする形となり有限値となる。$\theta_i(\lambda)=\pi$ の場合には無限ランダム表面と同様に特異因子 $1/\gamma$ により明確に発散する。

5.5.3 ストリップの解

0次摂動の検証からフラットなストリップによる回折過程 $S(\alpha,\beta)$ は$\alpha,\beta\to 0,\pi$ に対して零化因子として有限の振幅を持つ入射平面波に対し作用している。ところが摂動解析においてはランダム表面の異常散乱のため $\alpha,\beta\to 0,\pi$ にたいしては発散因子 $1/\gamma$ により発散する。ランダムなストリップの場合は零化因子と発散因子が打ち消しあって1次摂動では明確な意味での発散を引き起こさない。2次以上の高次摂動においては発散因子が重畳されるためもはや S による零化作用では抑えることができなくなり明確に発散するのである。

例として1次摂動をもたらす Wiener 積分核 $g_{1,1}(r,\theta,\lambda)$ (97) 式の構成要素の λ 依存性を示す。具体的には重み因子 $g(k\cos\theta_i,k\cos\theta_i(\lambda))$ と $S(|\theta|,\theta_i(\lambda))$ を数値計算した。パラメーターを $kl=4\pi,\theta=\theta_i=45^\circ$ とした結果を図6に示す。等価入射角 $\theta_i(\lambda)$ を水平角 $0,\pi$ とする λ/k (各々 $1-\cos\theta_i\simeq 0.292,-(1+\cos\theta_i)\simeq -1.707$) に対し g は発散し、S は零化していることがわかる。無限ランダム表面は S が定数の場合に相当するから明確に発散を引き起こす。ストリップの場合発散と零化のオーダーが殆んど同じであるためこの場合有限の結果を得る。

6 むすび

本報告ではランダムな表面を持つ無限に薄いストリップの平面波散乱問題について Neumann 条件の場合を摂動法を用いて解析した。1次及び2次摂動解に対し等価的な散乱角や入射角が水平角になる場合の振舞いについて検討し極限の取り方により発散を引き起こしたり有限値が得られるなどの不合理さを見い出した。このような現象は無限ランダム表面を Neumann 条件に対し表面摂動法で解析した場合に現れる摂動解の発散と本質的には同種のものではある。しかし(無限に薄い)ストリップを扱ったため無限ランダム表面で見られたような発散とは異なり緩和された発散となることを示した。この解析上の困難はランダム表面としての無限多重散乱を考慮することで始めて解決されるものと考えられる。これについては現在研究中である。

謝辞

文献 [12] を提供して頂いた中央大学理工学部の小林一哉先生に感謝致します。

文献

[1] 田村安彦、中山純一，“ランダムなストリップによる平面波の散乱”，電磁界理論研究会資料,EMT 92-58(1992.10.13)

[2] Y.Tamura and J.Nakayama, “Plane wave scattering from a randomly rough strip II”, A·P92-140,EMT 93-21(1993.2.12)

[3] 田村安彦、中山純一，“ランダムストリップによる平面波の散乱 II”，(関西) 輻射科学研究会資料,RS 92-20(1993.3.5)

[4] 田村安彦、中山純一，“ランダムなストリップによる平面波の散乱 III(その1)”，電磁界理論研究会資料,EMT 94-43(1994.10.11)

[5] 田村安彦、中山純一，“ランダムなストリップによる平面波の散乱 III(その2)”，電磁界理論研究会資料,EMT 94-44(1994.10.11)

[6] J.Nakayama and Y.Tamura, “Plane wave scattering from a randomly rough half-plane”, 電磁界理論研究会資料,EMT 92-55 (1992.10.13)

[7] H.Ogura and J.Nakayama, “Initial-value problem of the one-dimensional wave propagation in a homogeneous random medium”, Phys. Rev.,A-11,pp.958(1975)

[8] J.Nakayama, H.Ogura and B.Matsumoto, “A probabilistic theory of scattering from a random rough surface”, Radio Sci.,15,pp.1050-1051,1056-1057(1980)

[9] J.Nakayama, "Scattering from a random-surface:Linear equations for coefficients of Wiener-Hermite expansion of the wave field" ,Radio Sci.,21,pp.708-710,(1986)

[10] 小倉久直, "物理・工学のための確率過程論", コロナ社(1978)

[11] B.Noble, "Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of the Partial Diffrerential Equations", Pergamon(1958)

[12] K.Kobayashi, "Plane Wave Diffraction by a Strip:Exact and Asymptotic Solutions", Phys.Soc.Jpn.,60,pp.1902-1905(1991)

付録 A　定義関数の性質

本報告の中で定義された関数 $\xi(s)$ の (主として極限移行時の) 性質を以下に述べる。関数 $\xi(s)$ は $s=-k$ に対しては定義されない (発散する)。しかし、次のような極限を考えることができる。$\alpha \in \mathrm{D}$, Re $\cos\alpha \leq 1$ に対し

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\sin\frac{\alpha}{2}\xi(-k\cos\alpha) &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{-e^{2ikl}}{\bar{\gamma}^+(k)}\cdot\frac{b}{\pi}\int_0^\infty \frac{2e^{-\sin^2\frac{\alpha}{2}t^2}}{t^2+b^2}dt \\ &= -\frac{e^{2ikl}}{\bar{\gamma}^+(k)} \qquad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

ただし、$b=2(kl)^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ である。これを $\alpha\to\pi-\alpha$ と変数変換した極限で書き直せば

$$\lim_{\alpha\to 0}\sin\frac{\alpha}{2}\xi(-k\cos\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi}\cos\frac{\alpha}{2}\xi(k\cos\alpha) = -\frac{e^{2ikl}}{\bar{\gamma}^+(k)} \qquad \text{(A.2)}$$

が成り立つ。

次に関数 $\eta(s,t)$ に対し $t=s$ の時は

$$\eta(s,s) = \lim_{t\to s}\eta(s,t) = \xi'(s) = -\frac{4il^{\frac{3}{2}}e^{2ikl}}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}}{\{t-2il(s+k)\}^2}dt \qquad \text{(A.3)}$$

である。(A.3) 式つまり $\xi'(s)$ も $s=-k$ に対しては定義されない ($\xi(s)$ よりも強い意味で発散する)。しかし同様な次の極限を考えることができる。$\alpha \in \mathrm{D}$, Re $\cos\alpha \leq 1$ に対し、

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\sin^3\frac{\alpha}{2}\xi'(-k\cos\alpha) &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{-ie^{2ikl}}{4\{\bar{\gamma}^+(k)\}^3}\cdot\frac{2b^3}{\pi}\int_0^\infty \frac{2e^{-\sin^2\frac{\alpha}{2}t^2}}{(t^2+b^2)^2}dt \\ &= -\frac{ie^{2ikl}}{4\{\bar{\gamma}^+(k)\}^3} \qquad \text{(A.4)}\end{aligned}$$

先程と同様にこれを $\alpha\to\pi-\alpha$ と変数変換した極限で書き直せば

$$\lim_{\alpha\to 0}\sin^3\frac{\alpha}{2}\xi'(-k\cos\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi}\cos^3\frac{\alpha}{2}\xi'(k\cos\alpha) = -\frac{ie^{2ikl}}{4\{\bar{\gamma}^+(k)\}^3} \qquad \text{(A.5)}$$

が成り立つ。また、次の極限が成立する。

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d}{d\alpha}\left\{\sin\frac{\alpha}{2}\xi(-k\cos\alpha)\right\} = \lim_{\alpha\to\pi}\frac{d}{d\alpha}\left\{\cos\frac{\alpha}{2}\xi(k\cos\alpha)\right\} = \frac{e^{2ikl}}{\bar{\gamma}^+(k)}\cdot b\pi^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(A.6)}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d}{d\alpha}\left\{\sin^3\frac{\alpha}{2}\xi'(-k\cos\alpha)\right\} = \lim_{\alpha\to\pi}\frac{d}{d\alpha}\left\{\cos^3\frac{\alpha}{2}\xi'(k\cos\alpha)\right\} = 0 \qquad \text{(A.7)}$$

関数 $P(s,t)$ に対し $t=s$ の時は $s=-k$ を除き定義できて

$$P(s,s) = \lim_{t\to s}P(s,t) = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{\bar{\gamma}^+(s)}\right\} = \frac{1}{4i\{\bar{\gamma}^+(s)\}^3} \qquad \text{(A.8)}$$

である。次に (A.2) 式から $t \neq \mp k$ に対し

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\{B(k,-t)\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha}+B(k,t)\xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\right\}=-e^{ikl}\chi(k,-t) \tag{A.9}$$

$$\lim_{\alpha\to \pi}\left\{B(k,-t)\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha}+B(k,t)\xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\right\}=-e^{ikl}\chi(k,t) \tag{A.10}$$

となる。また次の極限が成立する。

$$\lim_{\alpha\to 0}\gamma(k\cos\alpha)P(k,-k\cos\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi}\gamma(k\cos\alpha)P(k,k\cos\alpha) = \frac{\bar{\gamma}^+(k)}{k} \tag{A.11}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\gamma(k\cos\alpha)\eta(k,-k\cos\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi}\gamma(k\cos\alpha)\eta(k,k\cos\alpha) = -\frac{ie^{2ikl}}{\bar{\gamma}^+(k)} \tag{A.12}$$

従って、

$$\lim_{\alpha\to 0}\gamma(k\cos\alpha)\chi(k,-k\cos\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi}\gamma(k\cos\alpha)\chi(k,k\cos\alpha) = 0 \tag{A.13}$$

が成り立ち、

$$\lim_{\alpha\to 0}\gamma(k\cos\alpha)B(k,\mp k\cos\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi}\gamma(k\cos\alpha)B(k,\pm k\cos\alpha) = 0 \tag{A.14}$$

が成り立つ。上式と (A.9) 及び (A.10) 式から次の極限が成立する。

$$\lim_{\alpha,\beta\to 0,\pi}\gamma(k\cos\beta)\left\{B(k,-k\cos\beta)\xi(-k\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}e^{-ikl\cos\alpha}+B(k,k\cos\beta)\xi(k\cos\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}e^{ikl\cos\alpha}\right\}=0 \tag{A.15}$$

付録B　変形 Laplace 積分

次のような積分で定義された関数を考え、変形 Laplace 積分と呼ぶことにする。

$$Q_{m,n}(\eta,\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{2(n-1)}e^{-\eta t^2}}{(t^2+\xi^2)^m}dt \quad (\,\mathrm{Re}\,\eta>0\,,\ \mathrm{Re}\,\xi\neq 0\,,\ m\in Z, n\in N) \tag{B.1}$$

$n=1, m=0$ あるいは $m=n-1, \xi=0$ とおけば通常の Laplace 積分である。m が正の整数であるか否かによって (B.1) 式はその性質を著しく異にするが特に m が正の整数の場合は応用上の興味がある。$m=n=1$ の場合を考えるとこれは文献 [6] においてすでに解析されており

$$Q_{1,1}(\eta,\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\eta t^2}}{t^2+\xi^2}dt=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\xi}e^{\xi^2\eta}\mathrm{F}(e^{i\frac{\pi}{4}}\xi\sqrt{\eta}) & (\,\mathrm{Re}\,\xi\sqrt{\eta}>0\,)\\[2ex] -\dfrac{2\pi}{\xi}e^{\xi^2\eta}\{1-\mathrm{F}(e^{i\frac{\pi}{4}}\xi\sqrt{\eta})\} & (\,\mathrm{Re}\,\xi\sqrt{\eta}<0\,)\end{cases} \tag{B.2}$$

で与えられる。ただし、$\mathrm{F}(\alpha)$ は (相補型) 複素 Fresnel 積分であり改めてその定義を書いておく。

$$\mathrm{F}(\alpha)\equiv\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\int_{\alpha}^{+\infty+i0}e^{iz^2}dz \quad (\,\alpha\in C\,) \tag{B.3}$$

である。(B.3) 式の積分路は図 7 の様に定める。引数 α が実数の場合は通常の Fresnel 積分に一致する。積分の終端を常に実軸上の無限遠点 $+\infty+i0$ と明示することを除き表式的な意味ではなんら通常の Fresnel 積分と変わらないが (B.3) 式は本質的にはエバネセントモードに対するエッジの 1 次回折効果を記述する関数の解析における要請から定義された。複素 Fresnel 積分の簡単な性質を述べておこう。

$$\mathrm{F}(\alpha)+\mathrm{F}(-\alpha)=1\,:\ \text{(相補型複素) Fresnel 積分の反転公式} \tag{B.4}$$

これにより $\mathrm{F}(0)=1/2$ である。

$$\mathrm{F}(\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathrm{Fi}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha\right)\ :\ 計算式 \tag{B.5}$$

$$\mathrm{Fi}(\alpha)\equiv\int_0^\alpha e^{i\frac{\pi}{2}z^2}dz\ :\ (複素)\ \text{Fresnel}\ 積分 \tag{B.6}$$

$\mathrm{Fi}(\alpha)$ は奇関数である。通常の Fresnel 積分の公式そのままの拡張である。著しい特徴として $\alpha\neq 0$ に対し $\mathrm{F}(\alpha)=1/2$ すなわち $\mathrm{Fi}(\alpha)=0$ を満たす点つまり零点の存在があげられる [3] 。

本題に戻り、$m=1$ として固定した時の一般の n に対して $Q_{m,n}(\eta,\xi)$ を考えよう。η をパラメータと見なして (B.2) 式の両辺を $n-1$ 回微分すれば

$$\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}}Q_{1,1}(\eta,\xi)=(-1)^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{2(n-1)}e^{-\eta t^2}}{t^2+\xi^2}dt=(-1)^{n-1}Q_{1,n}(\eta,\xi) \tag{B.7}$$

であるから次の公式が得られる。

$$\begin{aligned}Q_{1,n}(\eta,\xi) &= (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}}Q_{1,1}(\eta,\xi)\\ &= (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}}\left\{\frac{2\pi}{\xi}e^{\xi^2\eta}\mathrm{F}(e^{i\frac{\pi}{4}}\xi\sqrt{\eta})\right\}\quad(\ \mathrm{Re}\ \xi\sqrt{\eta}>0\ )\end{aligned} \tag{B.8}$$

一方、$n=1$ として固定した時の一般の m に対して $Q_{m,n}(\eta,\xi)$ を考えよう。(B.2) 式の両辺を ξ^2 をパラメータと見なして $m-1$ 回微分すれば

$$\frac{d^{m-1}}{d(\xi^2)^{m-1}}Q_{1,1}(\eta,\xi)=(-1)^{m-1}(m-1)!\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\eta t^2}}{(t^2+\xi^2)^m}dt=(-1)^{m-1}(m-1)!Q_{m,1}(\eta,\xi) \tag{B.9}$$

従って、次の公式を得る。

$$\begin{aligned}Q_{m,1}(\eta,\xi) &= \frac{(-1)^{m-1}d^{m-1}}{(m-1)!\ d(\xi^2)^{m-1}}Q_{1,1}(\eta,\xi)\\ &= \frac{(-1)^{m-1}d^{m-1}}{(m-1)!\ d(\xi^2)^{m-1}}\left\{\frac{2\pi}{\xi}e^{\xi^2\eta}\mathrm{F}(e^{i\frac{\pi}{4}}\xi\sqrt{\eta})\right\}\quad(\ \mathrm{Re}\ \xi\sqrt{\eta}>0\ )\end{aligned} \tag{B.10}$$

以上の公式は簡単のため m,n のうちの一方を 1 に固定し導出したが (B.2) 式は η,ξ に関して独立に偏微分出来るので結局一般の m,n についてまとめた形として次の公式が成り立つ。

$$\begin{aligned}Q_{m,n}(\eta,\xi) &= \frac{(-1)^{m+n}\partial^{m+n-2}}{(m-1)!\ \partial\eta^{n-1}\partial(\xi^2)^{m-1}}Q_{1,1}(\eta,\xi)\\ &= \frac{(-1)^{m+n}\partial^{m+n-2}}{(m-1)!\ \partial\eta^{n-1}\partial(\xi^2)^{m-1}}\left\{\frac{2\pi}{\xi}e^{\xi^2\eta}\mathrm{F}(e^{i\frac{\pi}{4}}\xi\sqrt{\eta})\right\}\quad(\ \mathrm{Re}\ \xi\sqrt{\eta}>0\ )\end{aligned} \tag{B.11}$$

本文 (84) 式で定義した関数は変数変換 $t\to t^2$ により

$$L_n(\alpha)=\int_0^\infty\frac{t^{n-\frac{3}{2}}e^{-t}}{t+\alpha}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{2(n-1)}e^{-t^2}}{t^2+\alpha}dt=Q_{1,n}(1,\sqrt{\alpha})\quad(\ n\in N\ ,\ |\arg\alpha|<\pi\ ) \tag{B.12}$$

と書ける。すなわち変形 Laplace 積分の一種である。公式 (B.11) 式を用いて $n=1,2$ の場合を書いておく。

$$L_1(\alpha)=\int_0^\infty\frac{t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}}{t+\alpha}dt=Q_{1,1}(1,\sqrt{\alpha})=\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}e^\alpha\mathrm{F}(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha})=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}e^\alpha\left\{1-2^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathrm{Fi}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\right)\right\} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}L_2(\alpha)&=\int_0^\infty\frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{t+\alpha}dt=Q_{1,2}(1,\sqrt{\alpha})=-\frac{d}{d\eta}Q_{1,1}(\eta,\sqrt{\alpha})\Big|_{\eta=1}=-\frac{d}{d\eta}\left\{\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}e^{\alpha\eta}\mathrm{F}(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha\eta})\right\}\Big|_{\eta=1}\\ &=\sqrt{\pi}\{1-2\sqrt{\pi\alpha}e^\alpha\mathrm{F}(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\alpha})\}=\sqrt{\pi}\left[1-\sqrt{\pi\alpha}e^\alpha\left\{1-2^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathrm{Fi}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{B.14}$$

すなわち (複素) Fresnel 積分を用いて変形 Laplace 積分を計算することができる。

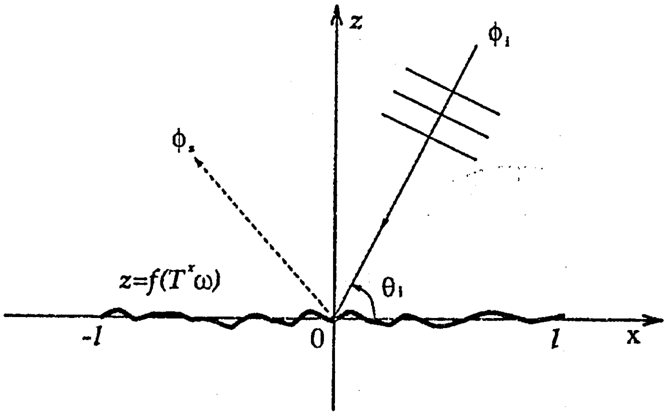


図１　問題の座標系

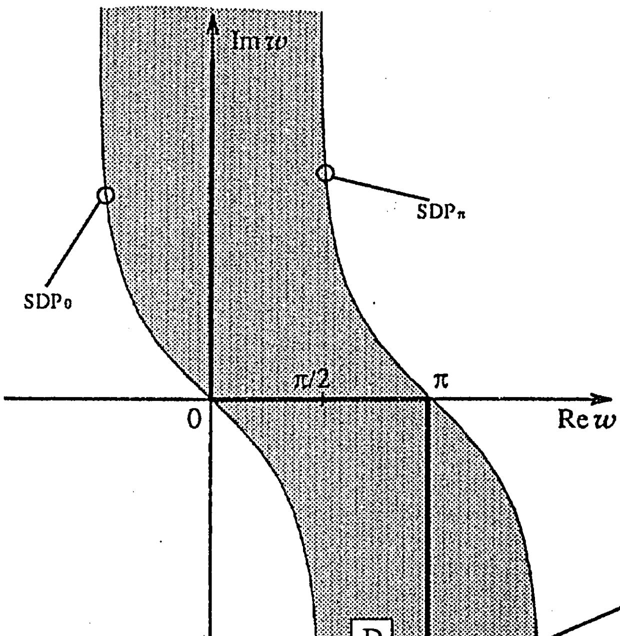


図２　複素 w -平面上の集合 C と領域 D

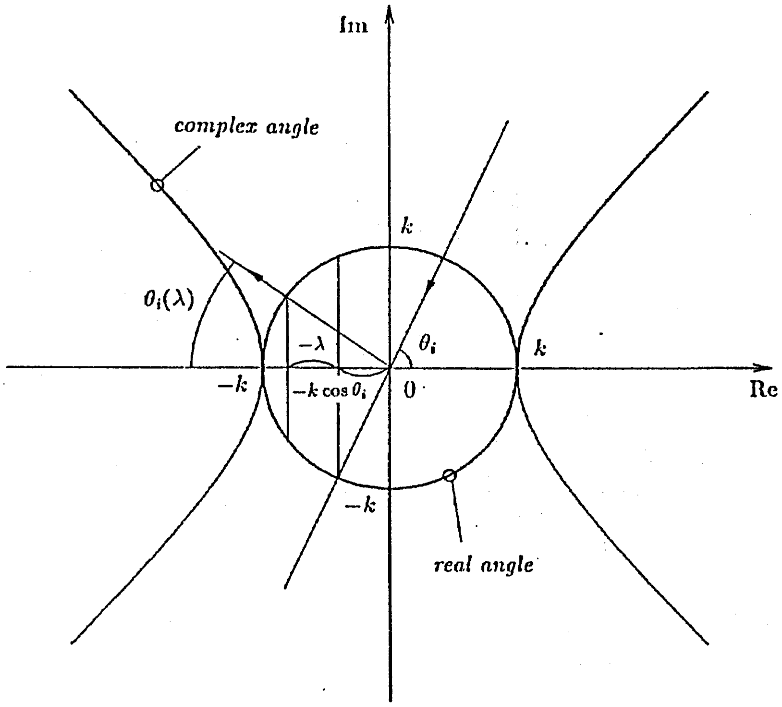


図3　等価入射角の定義

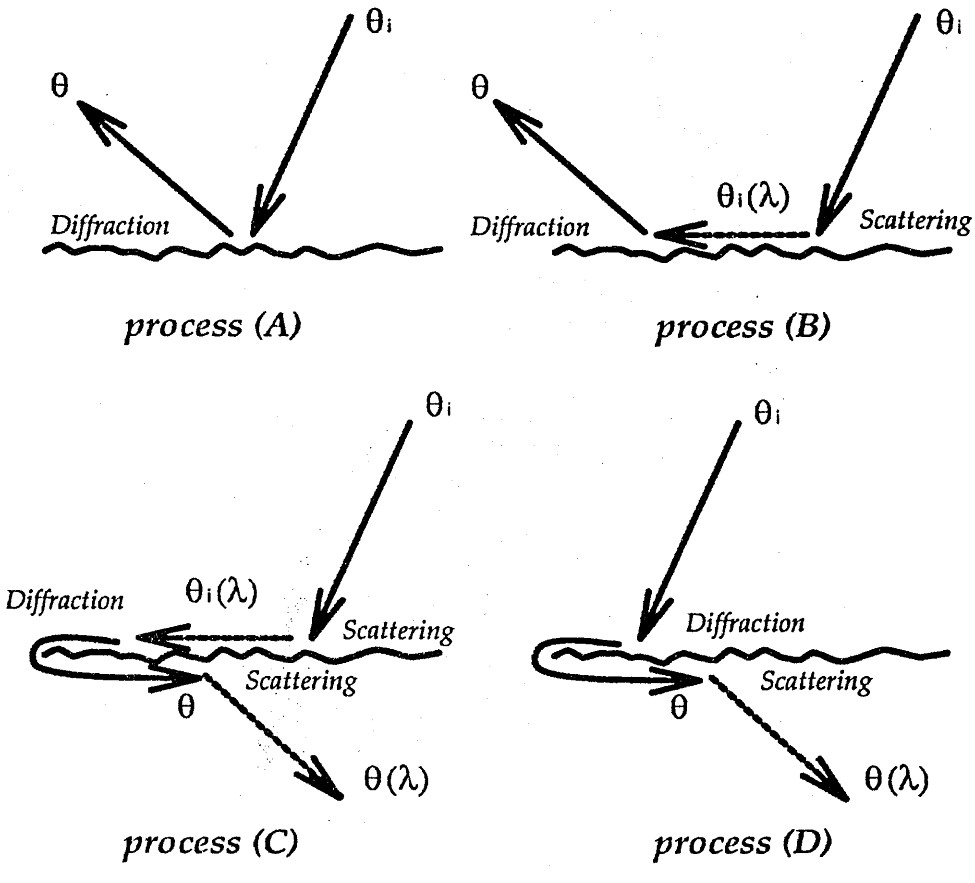


図4　ランダムなストリップによる散乱及び回折過程のダイアグラム

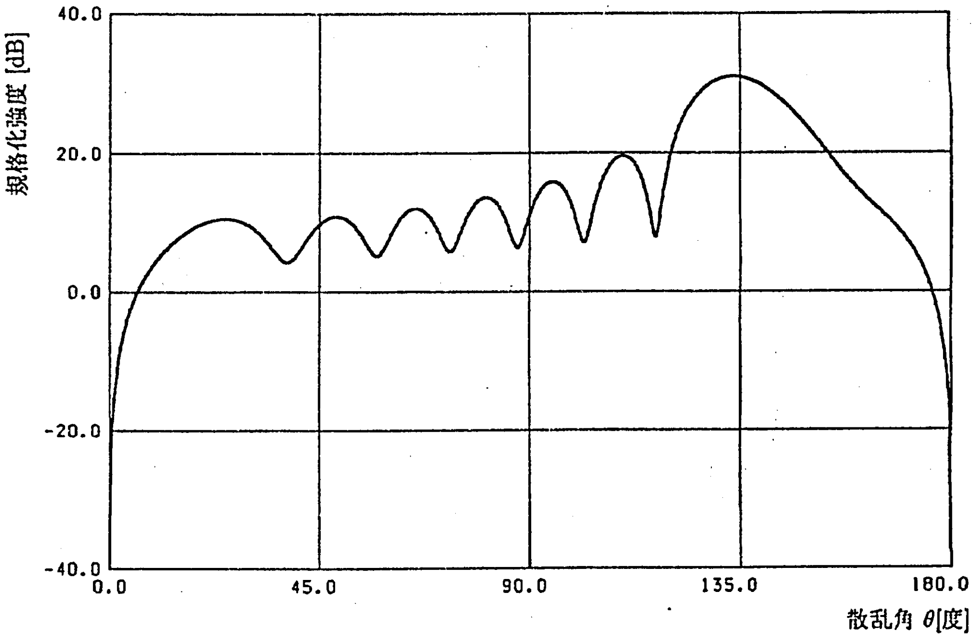


図 5　(a) 0 次摂動の散乱強度角度分布 ($\theta_i = 45°$)

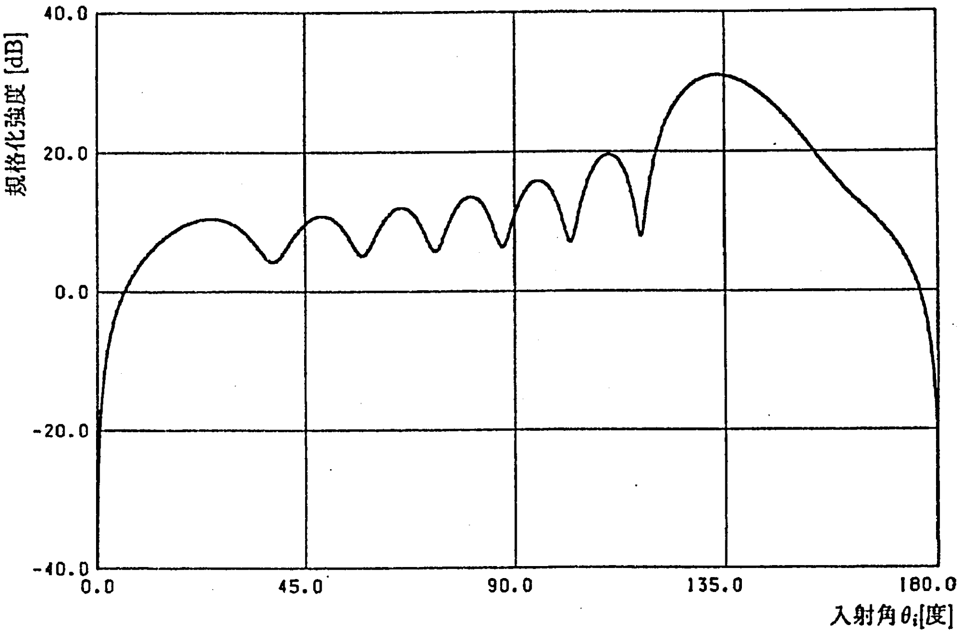


図 5　(b) 0 次摂動の散乱強度角度分布 ($\theta = 45°$)

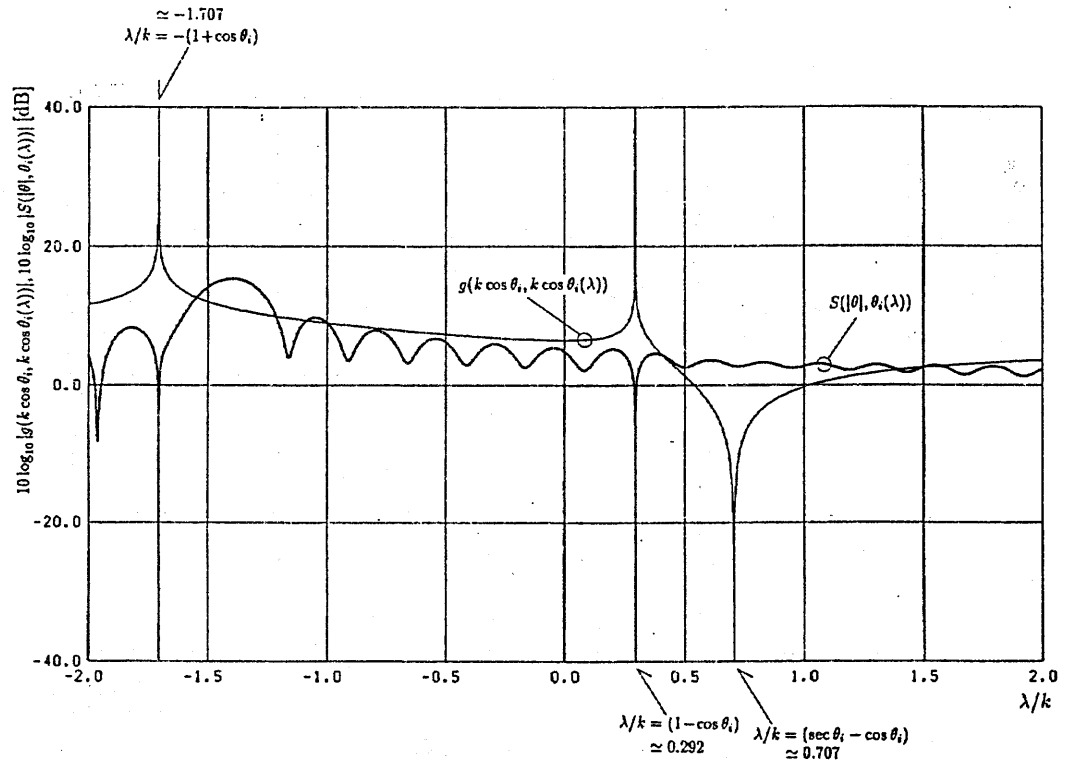


図 6　1 次 Wiener 積分核 $g_{1,1}$ の構成要素の λ 依存性 ($kl = 4\pi, \theta = \theta_i = 45°$)

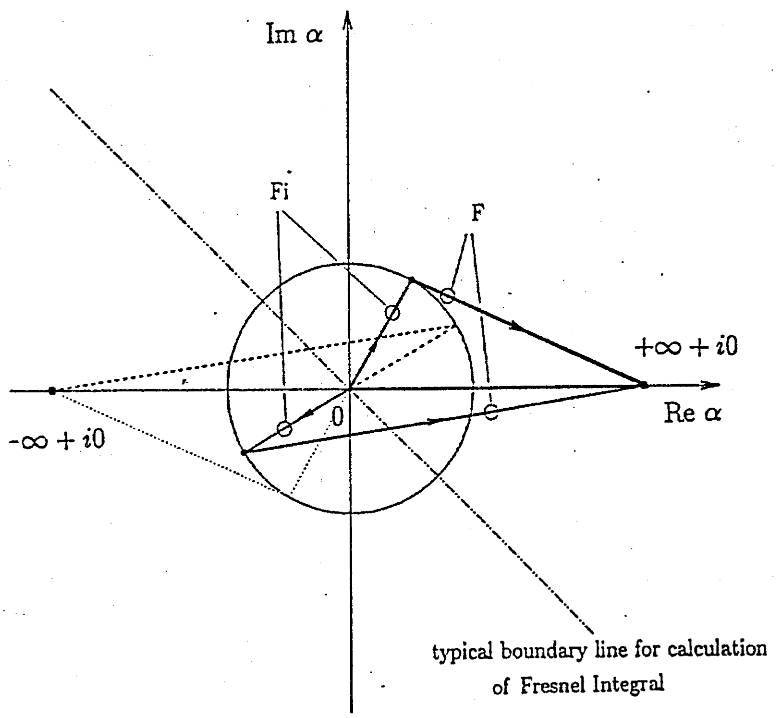


図 7　(複素)Fresnel 積分の積分路

輻射科学研究会資料
RS94-11

高温超伝導体を用いた非対称コプレーナストリップ線路のFD-TD法による解析

平　雅文　　溝本　安展　　倉薗　貞夫

大阪大学工学部

1994年10月21日

1．まえがき

超高速・大容量光通信システムの実現に向けて外部変調方式の高速光変調器の重要性が認識され，変調帯域幅300GHzを実現できる可能性を持つ$LiNbO_3$等の，誘電体電気光学結晶を用いた進行波形光変調器の研究が活発に進められている[1]．進行波形光変調器では，電極の伝搬損や分散によって変調効率の低下，変調帯域の減少等が起こるが，これは広帯域変調の際に深刻な問題となる．この解決法として進行波電極の材料に高温超伝導体を用いることが提案されている[2][3]．また，変調用マイクロ波・ミリ波の実効屈折率を光波に対する実効屈折率に近づけて位相速度の不整合を改善するために，電極近傍にSiO_2バッファ層を挿入すること，電極厚を大きくすること等[4],[5],[6]は従来からよく行われている．従って，進行波形光変調器では，それらの複雑な構造が取扱える解析手法を用いて，広い周波数範囲にわたる電極の減衰定数・位相速度等の特性を明らかにする必要がある．

特に，実際のデバイスでは高温超伝導薄膜の厚さと界の侵入長が同じオーダであるので，表皮抵抗などを用いた近似的な手法ではなく，任意の超伝導体厚を取扱える手法が必要となる．

進行波電極の線路構造としては，接地電極が十分に広い，入出力端での同軸線路との接続が容易である等の特徴を有する非対称コプレーナストリップ線路がよく用いられる[7]が，その線路定数の周波数特性や導体厚依存性を明らかにした報告[8]は少ない．特に，超伝導体を用いた非対称コプレーナストリップ線路[9]については更に詳細な検討が必要であると考えられる．

筆者らは先に，Frequency-Dependent Finite-Difference Time-Domain Method[10]（以下，$(FD)^2TD$法とする）を用いて高温超伝導コプレーナ線路の線路定数の周波数特性や導体厚依存性を求め，その低損失性・低分散性を明らかにした[11]．また$LiNbO_3$基板上の高温超伝導コプレーナ線路を解析し，低損失・低分散の優れた進行波電極が構成できる可能性があることを示した．

本論文では，$(FD)^2TD$法と超伝導体の２流体モデル[12],[13]を用いて，Z-cut $LiNbO_3$基板上にYBCO高温超伝導材料で構成した非対称コプレーナストリップ線路を，$LiNbO_3$基板上の誘電損および異方性をも考慮して解析する．特に，進行波電極としての実用的見地から，SiO_2バッファ層を挿入した構造について詳細に検討する．

まず，高温超伝導非対称コプレーナストリップ線路

($YBa_2Cu_3O_{7-x}$, 77K)の減衰定数・位相速度の周波数特性をいくつかの導体厚について求め，電極に常伝導体(Al, 300K)を用いた場合と比較する．次に，光波と変調波との位相整合を取るために電極下部にSiO_2バッファ層を挿入した構造の線路について解析し，減衰定数・位相速度の周波数特性の変化を明らかにする．また，外部の励振回路と電極との整合を取るために重要な，特性インピーダンスについても検討する．

2．解析手法

高温超伝導体の巨視的特性を求める場合，2流体モデルがよい近似モデルであると考えられている[13]．2流体モデルによれば超伝導体の実効導電率は次式で与えられる．

$$\sigma_{eff}(\omega)=\frac{n_n e^2\tau}{m(1+\omega^2\tau^2)}-j\left\{\frac{n_s e^2}{m\omega}+\frac{n_n e^2\omega^2\tau^2}{m\omega(1+\omega^2\tau^2)}\right\} \qquad (1)$$

ここで，ωは電界の角周波数，eは電子の電荷，mは電子の質量，τは運動量の緩和時間，そして，n_s, n_nは，それぞれ超伝導電子密度，常伝導電子密度を表す．
常伝導状態の導電率

$$\sigma_n=\frac{ne^2\tau}{m} \qquad (2)$$

およびロンドンの磁場侵入長

$$\lambda=\sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} \qquad (3)$$

を用いると，$\omega^2\tau^2 \ll 1$（$f<10^{11}$Hz程度）では次のように簡単化される[12]．

$$\sigma_{eff}(\omega)=\sigma_n\frac{n_n}{n}-j\frac{1}{\omega\mu_0\lambda^2} \qquad (4)$$

nは全伝導電子密度，μ_0は真空の透磁率である．これから超伝導体層の分極率に相当する項$\chi_s(\omega)$は次式で与えられる．

$$\chi_s(\omega)=\frac{\sigma_{eff}(\omega)}{j\omega\varepsilon_0}$$
$$=\frac{\sigma_n n_n}{n\varepsilon_0}\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\lambda^2}\frac{1}{\omega^2} \qquad (5)$$

ε_0は真空の誘電率である．式（５）のフーリエ変換を求めると，

$$\chi_s(t)=\left(\frac{\sigma_n n_n}{n\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\lambda^2}\right)U(t) \tag{6}$$

となる．但し，時間領域において式（６）のような因果律を満たす分極率の式を得るため，式（５）の右辺に

$$\frac{\sigma_n n_n}{n\varepsilon_0}\pi\delta(\omega)-\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\lambda^2}j\pi\frac{d\delta(\omega)}{d\omega} \tag{7}$$

なる項を加えてフーリエ変換を行っている．$U(t)$は単位ステップ関数，$\delta(\omega)$はディラックのデルタ関数である．従って，この場合$\omega=0$に対する応答は求めることができない．

また，常伝導体層においては，その導電率をσ_{cc}とすると，常伝導体層の分極率に相当する項$\chi_{cc}(\omega)$は次式のようになる．

$$\chi_{cc}(\omega)=\frac{\sigma_{cc}}{j\omega\varepsilon_0} \tag{8}$$

これをフーリエ変換すると，

$$\chi_{cc}(t)=\frac{\sigma_{cc}}{\varepsilon_0}U(t) \tag{9}$$

となる．導電率σ_{cd}の損失誘電体層中でも同じ形の$\chi_{cd}(\omega)$，$\chi_{cd}(t)$を用いればよい．$(FD)^2TD$法では式（６）あるいは式（９）で与えられた分極率と電界の時間軸上での畳み込み積分を，差分時間領域法により離散化された電界の値を用いて行う．本論文においても，文献（１０）と同じ手法で数値積分を再帰的に行うことができる．

次に，本論文で求める線路定数の導出方法について述べておく．まず，伝搬定数$\gamma(\omega)$は，伝搬方向であるz軸上に並ぶ長さLだけ離れた２点の電界の時間波形のフーリエ変換$\hat{E}(\omega,z)$，$\hat{E}(\omega,z+L)$より式のように求める．

$$e^{-\gamma(\omega)L}=\frac{\hat{E}(\omega,z+L)}{\hat{E}(\omega,z)} \tag{10}$$

ここでは，中心電極と接地電極の間の中央にある電界節点の値を用いる．そして，以下の式から減衰定数$\alpha(\omega)$および位相速度$v_p(\omega)$を求めることができる．

$$\gamma(\omega)=\alpha(\omega)+j\beta(\omega) \tag{11}$$

$$v_p(\omega)=\frac{\omega}{\beta(\omega)} \qquad (12)$$

また，中心電極と接地電極の間の電界の線積分から線路電圧$\hat{V}(\omega,z)$を，中心電極の周囲の磁界の周回積分から線路電流$\hat{I}(\omega,z)$を求め，次式により特性インピーダンスを求める．

$$Z_0(\omega)=\frac{\hat{V}(\omega,z)}{\hat{I}(\omega,z)} \qquad (13)$$

3．解析結果

3．1　解析モデル

解析を行う高温超伝導非対称コプレーナストリップ線路の構造および座標系を図1に示す．図中のcは導体の厚さ，hはバッファ層の厚さを表す．

電極に用いる超伝導体は$YBa_2Cu_3O_{7-x}$であり，λ=0.24μm，$\sigma_n n_n/n$=4.0×10^6S/mとする．比較する常伝導体はAlとし，その導電率は300Kにおける値σ_{cc}=3.72×10^7S/mを用いる．

差分時間領域法はマクスウェルの方程式を各座標軸成分に分離して離散化を行うので，異方性を考慮する場合は，各成分の計算を行うときにそれぞれの軸方向の比誘電率を用いればよい．本論文では誘電体基板にZ-cut $LiNbO_3$を用いるものとし，x，y，zの各座標軸方向の比誘電率をそれぞれ28，43，43，導電率をσ_{cd}=1.32×10^{-2}S/mとする．バッファ層はSiO_2とし，その比誘電率を4.0，導電率をσ_{cb}=1.0×10^{-13}S/mとする．

Yee's mesh(14)への分割図を図2に示す．この図の場合は，$2W$=4.0μm，$2G$=2.0μm，c=0.25μm，h=0μmであり，先の報告(11)のコプレーナ線路の片側のグランドプレーンを取り去った形状に相当する．非対称コプレーナストリップ線路は断面内に対称軸を持たないため，先の報告のように中央に磁気壁をおいて1/2モデルとすることはできず，更にコプレーナ線路よりも断面内の界の広がりが大きいと考えられるので，解析領域の断面積は2倍以上大きくなっている．解析領域端には，Murの1次の吸収境界条件(15)を用いている．x方向の最小分割幅は磁場侵入長および導体の厚さを考慮して0.125μmとし，必要な主記憶容量の削減を図るために，界分布の変化が緩やかになるにつれて0.1875μm，1.625μmと分割幅を

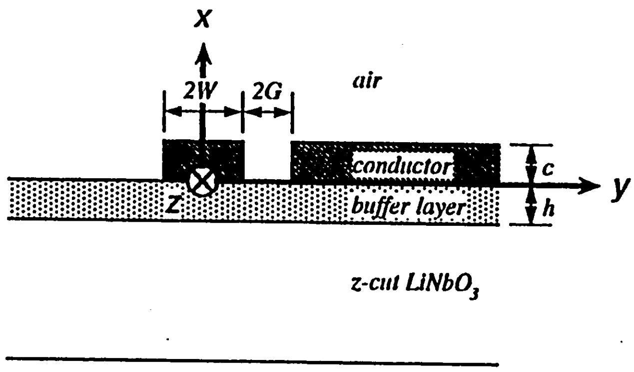


図１　高温超伝導非対称コプレーナストリップ線路

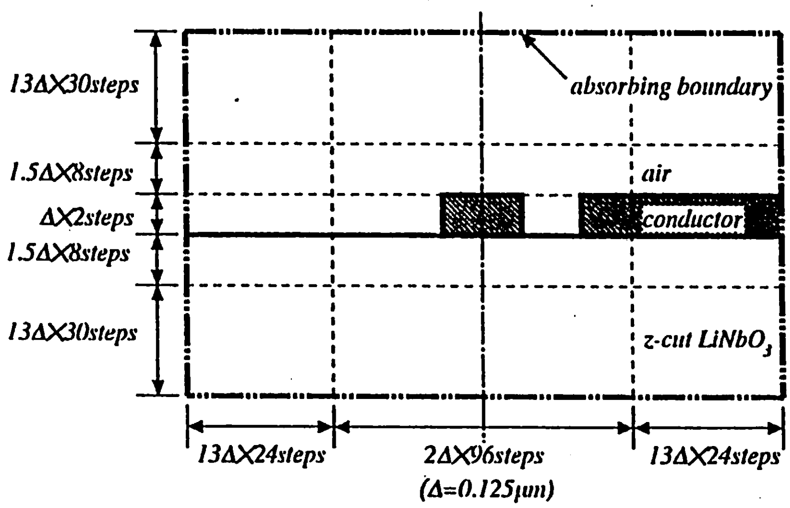


図２　解析領域とメッシュ分割

順に大きくする．また，y方向も界分布の変化にあわせて0.25μm，1.625μmと分割幅を変える．z方向に関しては分割幅は一様に2.0μmとする．式（１０），（１３）におけるz, Lはz=2.0×25μm, L=2.0×3μmとする．また，離散時間間隔ΔtはCourant条件を満たすようにΔt=0.3708fsとする．

通常の差分時間領域法では励振波形としてガウス波形を用いることが多いが，本論文では前述のように周波数が零の成分に対する応答は求められないので，ガウス波形を時間微分した時間波形を用いて中心電極と接地電極の間のE_y節点を励振する．

３．２　高温超伝導非対称コプレーナストリップ線路

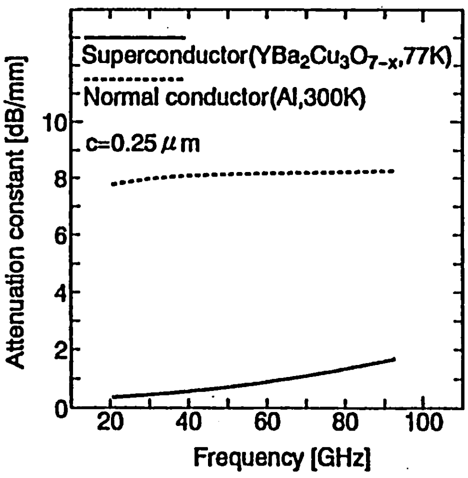
まず，基本的なモデルとして，図２の構造の高温超伝導非対称コプレーナストリップ線路($YBa_2Cu_3O_{7-x}$,77K)を解析した結果を示す．減衰定数および位相速度の周波数特性を常伝導非対称コプレーナストリップ線路(Al,300K)の特性と共に図３に示す．図3において超伝導体を用いた場合（実線）は，常伝導体を用いた場合（点線）に比較して，伝搬損が小さくなるだけでなく，位相速度の分散がほとんどないことが大きな特徴であることがわかる．

高温超伝導体厚をc=0.25μm，1.0μmと変化させた場合の減衰定数および位相速度を図4に示す．
導体厚が大きい方が損失が少なく，位相速度の値が大きいが，これは，導体厚が大きい方が導体縁端部への電流集中が緩和されることと，電磁界の空気中への分布が大きくなることによる．

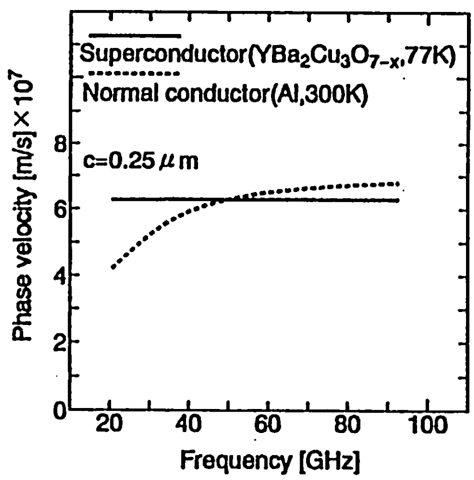
以上のことから，非対称コプレーナストリップ線路に高温超伝導体を用いると変調用マイクロ波・ミリ波の伝搬損および分散が小さい優れた進行波電極を構成できることが明らかになった．

３．３　バッファ層を挿入した場合の特性

進行波形光変調器の広帯域化の限界は，主に変調波と光波の位相速度の不整合によって決定される．
通常，変調用マイクロ波・ミリ波の実効屈折率n_mが光波の等価屈折率n_0に比べて大きいために変調帯域幅が制限されており，変調帯域幅を拡大するためにはn_mを小さくし，n_0に近づける必要がある．光導波路(Z-cut $LiNbO_3$)中を伝搬する光波の実効屈折率はほぼn_0=2.2であるので，位相速度をほぼv_{ph}=1.3×10^8m/sとすれば整合が取れることになる．

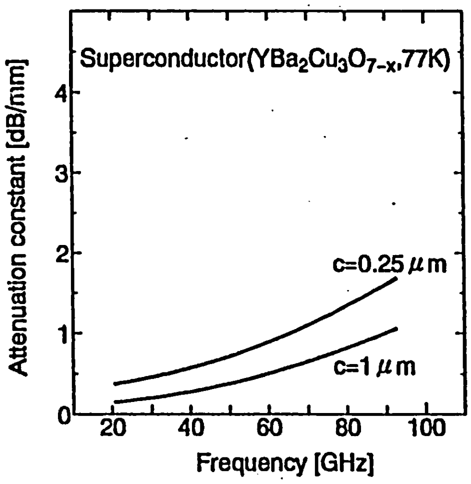


（a）減衰定数

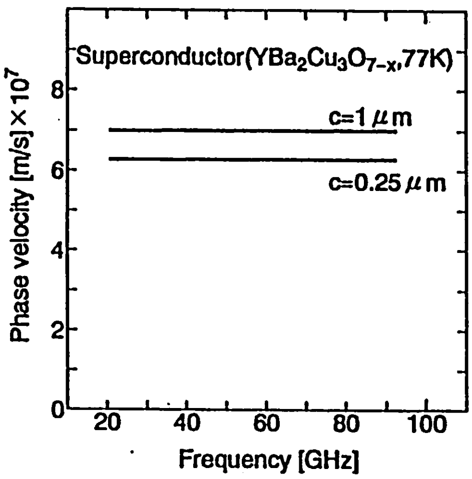


（b）位相速度

図3　非対称コプレーナストリップ線路の特性

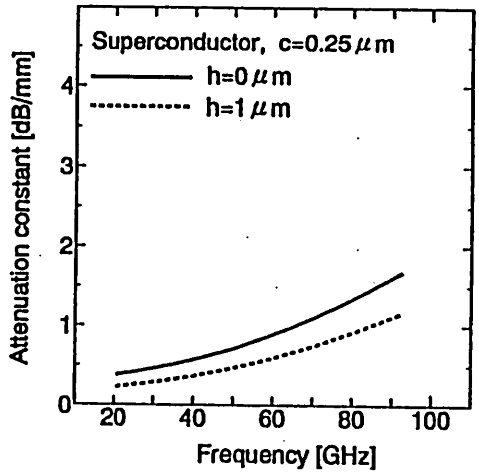


（a）減衰定数

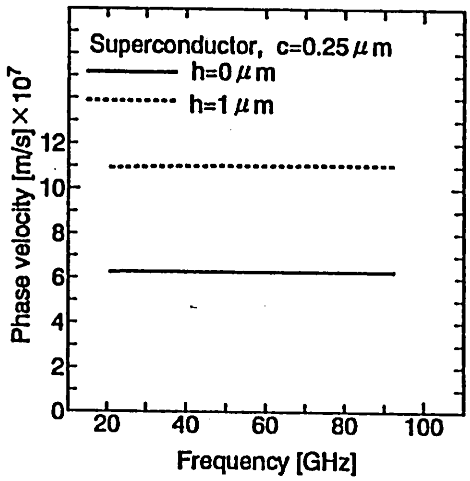


（b）位相速度

図4　導体厚を変化させた場合の特性

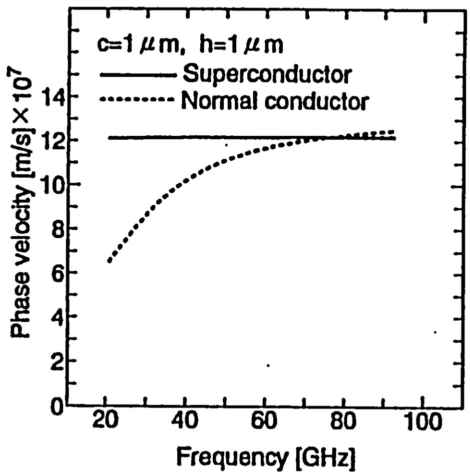


（a）減衰定数

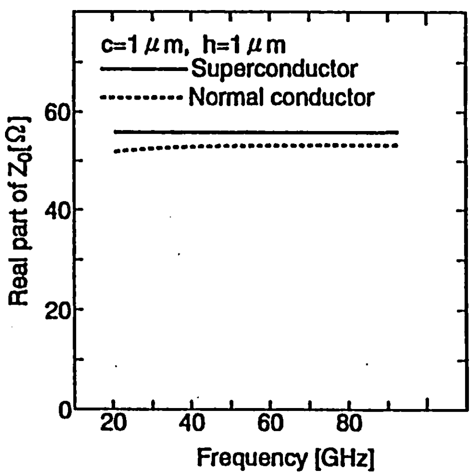


（b）位相速度

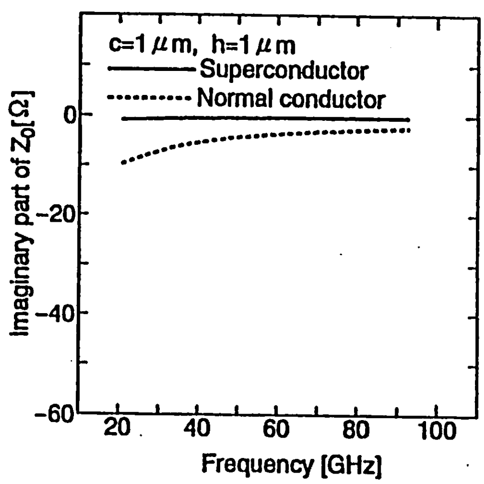
図5　バッファ層を挿入した場合の特性



（a）位相速度



（b）特性インピーダンスの実部



（c）特性インピーダンスの虚部

図6　インピーダンス整合を考慮した場合の特性

本節では前節で解析を行った高温超伝導非対称コプレーナストリップ線路にSiO_2バッファ層を挿入した場合の線路定数の変化について検討する．バッファ層を挿入した場合(h=1.0μm)と挿入しない場合(h=0μm)の減衰定数および位相速度をそれぞれ図5に示す．図において実線はバッファ層を挿入しない場合，点線はバッファ層を挿入した場合を示す．図5より，バッファ層を挿入すれば，低分散のまま変調用マイクロ波・ミリ波の位相速度を大きくできることがわかる．また，伝搬損もわずかに小さくなる．これはバッファ層を挿入しない場合は電磁界の誘電体基板中への侵入が大きいが，バッファ層を挿入した場合は侵入の度合が小さくなり，電極付近の誘電率・導電率の低い空気・バッファ層に電磁界が集中することから説明することができる．

また，実際に進行波電極として使用する場合には，外部のマイクロ波・ミリ波回路とのインピーダンス整合をはかる必要がある．一例として，c=1.0μm，h=1.0μmとしたときの位相速度と特性インピーダンスを図6に示す．この場合には，$v_{ph}=1.2\times10^8$ m/s，$|Z_c|=55\Omega$となり，進行波電極にほぼ適した値となっている．電極に常伝導体を用いた場合の位相速度と特性インピーダンスを図中に点線で示しているが，バッファ層を挿入することによって同じく位相速度が上昇するものの，分散は大きいままである．超伝導体を用いれば広い周波数範囲で特性を改善できることがわかる．

4．むすび

本論文では，$(FD)^2TD$法を用いて，基板の異方性・誘電損をも考慮して高温超伝導非対称コプレーナ線路の線路定数の周波数特性を求め，低損失・低分散の線路であることを明らかにした．

次に，電極下部にSiO_2バッファ層を挿入した場合の高温超伝導非対称コプレーナストリップ線路の線路定数の周波数特性の変化を明らかにした．

その結果，進行波形光変調器の電極材料に高温超伝導体を用いれば，優れた特性を持つ進行波電極が構成できることを示した．

今後は，電極として最適な形状について更に検討して行きたい．

文　献

(1) 皆方　誠："$LiNbO_3$光導波路デバイス"，信学論(C-I)，**J77-C-I**，5，pp.194-205(1994-05).

(2) 榎原　晃，東野秀隆，瀬恒謙太郎，和佐清孝："超伝導電極を用いた進行波形光変調素子の特性"，信学技報，**MW90**-44(1990-06).

(3) Yoshiara K.,Uchikawa F.,Sato K.,Mizuochi T.,Kitayama T.,Izutsu M.,Sueta T.,Imada K.and Watarai H.:"A Study on Transmission Properties of $YBa_2Cu_3O_y$ Coplanar Waveguide on $LiNbO_3$ Substrate",IEICE Trans.Electron.,**E75-C**,8,pp.888-893(Aug.1992).

(4) 並木武文，清野　實，女鹿田直之，山根隆志，倉橋輝男，中島啓幾："Ti:$LiNbO_3$進行波型変調器の帯域拡大の検討－有限要素法を用いた最適設計－"，信学技報，**OQE88**-18(1988-05).

(5) Kawano K.,Noguchi K.,Kitoh T.and Miyazawa H.:"A Finite Element Method (FEM) Analysis of a Shielded Velocity-Matched Ti:$LiNbO_3$ Optical Modulator",IEEE Photonics Tech.Letters,**3**,10,pp.919-921(Oct.1991).

(6) 鬼頭　勤，河野健治："バッファ層を考慮したTi:$LiNbO_3$光変調器用電極の解析とモデル"，信学論(C-I)，**J75-C-I**，6，pp.422-429(1992-06).

(7) 井筒雅之，末田　正："広帯域導波形光変調素子"，信学論(C)，**J64-C**，4，pp.264-271(1981-04).

(8) Kubota K.,Noda J.and Mikami O.:"Traveling wave optical modulator using a directional coupler LiNbO waveguide",IEEE J.Quantum Electron.,**QE-16**,7,pp.754-760(July 1980).

(9) Yoshida K.,Ikeda K.and Kanda Y.:"$LiNbO_3$ Optical Modulator with Superconducting Electrodes",IEICE Trans.Electron.,**E75-C**,8,pp.894-899(Aug.1992).

(10) Luebbers R.J.,Hunsberger F.and Kunz K.S.:"A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for transient propagation in plasma",IEEE Trans.Antennas & Propag.,**AP**-

39,1,pp.29-34(Jan. 1991).
(11) 平　雅文，久保隆之，北村敏明，倉薗貞夫：“差分時間領域法による高温超伝導コプレーナ線路の解析”，信学論(C-I)，**J77-C-I**，2，pp.81-87(1994-2).
(12) Duzer V.T.and Turner C.W.：“超伝導デバイスおよび回路の原理”，第3章，コロナ社(1983-11).
(13) Mei K.K.and Liang G.C.:“Electromagnetics of Superconductors”,IEEE Trans.Microwave Theory & Tech.,**MTT-39**,9,pp.1545-1552(Sept. 1991).
(14) Yee K.S.:“Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media”,IEEE Trans.Antennas & Propag.,**AP-14**,3,pp.302-307(May 1991).
(15) Mur G.:“Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations”,IEEE Trans.Electromagn.Compat.,**EMC-23**,4,pp.377-382(Nov.1981).

輻射科学研究会 (1994-10)

RS 94-12

ミリ波パーソナル通信用光ファイバリンク

皆川 晃　川村 博史　今井 伸明　小川 英一

ATR光電波通信研究所
京都府相楽郡精華町光台2-2

あらまし 当研究所では、将来の高速・広帯域なパーソナル移動通信の実現を目指しミリ波無線通信と光ファイバ通信を融合した、光ファイバを用いたミリ波パーソナル通信の研究を進めている。ここでは、ミリ波をサブキャリア周波数とした光ファイバリンクを用いて、ミリ波パーソナル通信システムのモデル伝送路を構築し、室内において動画像伝送実験を行ない、良好な結果を得たので報告する。

1. はじめに

自動車電話が広く普及し、さらには携帯・コードレス電話の急増により、移動通信用の無線周波数の不足が切迫している。この問題は、今後移動通信がマルチメディア化され、音声だけでなく、高速データや映像を伝送する場合にはさらに深刻になり、新たな周波数帯の開拓が強く望まれている。そこでATRでは、将来のパーソナル移動通信に敵した電波資源として、ミリ波帯の周波数に着目し、その開拓を目指して「光ファイバによる固定通信」と「ミリ波による無線通信」を融合した新しいシステム「光ファイバ・ミリ波通信」を提案している。[1]

一方、移動通信の分野では、制御局と無線基地局とを結ぶ伝送路に光ファイバを使うことが提案されている。[2] [3] その中には無線ゾーンで使用する電波の信号により光を変調して光ファイバで伝送するものがある。すなわち、電波（これを通常サブキャリアと呼んでいる）を光ファイバに直接載せて伝送する方式である。しかし、それらの電波の周波数は、準マイクロ波帯（2～3GHz付近）以下であった。

ATRのシステムの特徴は、ミリ波の電波を使うこと、さらにこのミリ波信号を制御局で直接光に載せ、光ファイバを通して無線基地局に伝送することである。この方法により、多数必要となる無線基地局の装置構成を大幅に小型化・簡素化でき、街路灯などへの設置が容易になる。このように、ATRのシステムは、ミリ波という非常に高い周波数の信号を光ファイバで伝送するもので、世界で初めての試みであり、ミリ波無線と光ファイバの両者の広帯域性という利点を活かすことができる。このシステムのキーデバイスとなる、無線基地局で光からミリ波信号を取り出す受光器には、HBT（Heterojunction Bipolar Transistor）素子を

用いている。我々はミリ波帯ではフォトダイオードより優れた特性が得られることを世界に先駆けて検証している。[4]

また、移動体通信など、無線通信機器への利用を目的としてモノリシックマイクロ波集積回路（MMIC）の研究開発が進められている。このMMICを適用することにより、多数必要となる無線基地局の小型化・高信頼性、かつ低価格化が可能となる。我々も、LUFETや多層化MMICといった独自の技術を提案してきが、[5] [6] さらに適用周波数をミリ波領域まで拡張するための研究を行なっている。

本報告では、光ファイバ・ミリ波通信の特徴を述べるとともに、実際に光ファイバ・ミリ波通信のモデルシステム（下り回線のみ）を構築し、室内において動画像伝送実験を行なったので、それについて報告する。また、モデルシステムに適用できるMMIC技術についても述べる。なお、この実験はミリ波の周波数として43.75GHzを用い、郵政省の無線局免許を取得して行なった。

2. ミリ波・光ファイバリンクの特徴

2.1 システムのイメージ

図1に光ファイバリンクを用いたミリ波移動通信システムのイメージを示す。このシステムでは、町の中や建物の中、地下街、トンネルなど、可能な所まで光ファイバを延ばして無線基地局を配置し、ここで光をミリ波に変換して周囲の無線ゾーン内にあるパーソナル移動局とミリ波で通信する。ミリ波は直径が数10m程度の小さい無線ゾーン（マイクロセルゾーン）に適しているため、町や屋内の隅々まできめ細かくサービスすることができ、「電波の暗闇」を追放することができる。

2.2 ミリ波の利点[7]

現在の移動体通信では、800MHz～2GHzの電波が使われている。しかし利用者の急激な増加が予想され、近い将来周波数が足りなくなる。また、音声だけでなく、映像などマルチメディアにも対応させるためには、既存のシステムでは無理がある。そこで、30GHz以上のミリ波を利用して通信の大容量化を図ることが考えられる。。

このためATRでは、ミリ波を移動通信に利用すべく研究を進めてきた。例えば、無線周波数に50GHzを用いた場合、必要とされる周波数帯域を4GHzとすると、それは比帯域にして8%であり、現状のミリ波回路では実現できる帯域である。これがミリ波が広帯域信号用無線キャリアに適している1つの理由である。

もう一つのミリ波の特徴は、壁面の透過損失や壁面からの反射損失が大きく、無線ゾーンの形状が明確になることである。この特徴は逆に無線ゾーンを構成するときに利用できる。すなわち、収容する端末数が飛躍的に増大することが予想されるため、半径が数10m程度のマイクロセルゾーンの適用が考えられるが、ミリ波の減衰特性は、他の同じ周波数を使う無線ゾーンとの信号の干渉や混信を軽減でき、他のセルへの影響を小さくできる。従って、同じ周波数を隣接した無線ゾーンで繰り返し使用でき、周波数を有効に使用できる。また、無線ゾーンが小さくなれば、端末の送信電力も低下させることができる。

2.3 光ファイバによるミリ波の直接伝送

現在の移動通信方式では、制御局と無線基地局との間に通過帯域が狭い同軸ケーブルが用いられており、たとえば、下り回線（制御局→無線基地局→移動局）では制御局から無線基地局にベースバンド信号を伝送し、無線基地局において準マイクロ波程度までの無線周波数に変換している。無線基地局では通話チャンネルの割り当て、チャンネル毎の発振・変調、無線周波数への変換・増幅などの装置が必要となり、装置が複雑かつ大規模になる。そこで、光ファイバにより無線周波数の信号を制御局から直接伝送することができれば、これらの装置を制御局に集中設置できるので、無線基地局は光と無線信号の変換器・増幅器・アンテナ程度の設備ですみ、大幅に簡易化・小型化が可能となる。2.2で述べたように、ミリ波を用いるパーソナル通信では無線ゾーンが小さくなり無線基地局が多数必要となるので、無線基地局の簡易化・小型化が必要となり、光ファイバによるミリ波直接伝送は必須の技術となる。また、光ファイバは、高速性・大容量性そして広帯域性に優れており、現在の移動通信でネックとなっている広帯域伝送が可能となる。従って、広帯域性を持つ光ファイバ・ミリ波通信システムを実現すれば、パーソナル移動通信でも、米副大統領の提唱している「情報スーパーハイウェー」の利用が可能となる。

3. ミリ波パーソナル通信用光ファイバリンク

3.1 モデルシステムの構成

図2に今回実験したモデルシステムの構成を示す。今回は基本特性確認のために下り伝送路のみのシステムを構築した。この構成は、光ファイバ区間とミリ波区間を通じてミリ波の直接伝送を実験するための最も基本的・簡易な系である。周波数は43.75GHzを使用し、また画像伝送信号は1チャンネルとした。この系に用いている基本回路は、光キャリアを発生させる光源、光キャリアミリ波で強度変調する外部光変調器、光キャリアを伝送する光ファイバ、光キャリアから変調信号を検出するための光検波器（受光器）である。その他電気回路としては、FM変調器、ミリ波帯増幅器、ミリ波帯アンテナである。今回の実験では、制御局と無線基地局とを結ぶ光ファイバの長さを約25m、無線基地局とパーソナル移動局との距離を約5mとした。本システムの大きな特徴は、ミリ波を直接変調し、サブキャリアとして用いている点、もう一つは、受光器としてGaAsHBTを用いたことである。この能動素子であるHBTを受光器として用いるメリットを以下に示す。[8]

(1) フォトダイオードなどの光デバイスは、周波数特性に限界があり、10GHz以上の周波数での適用は難しい。

(2) MMICプロセスとの整合性がよい。

(3) HEMTやMESFETと比較して、高い駆動能力を有しているため、整合回路を用いなくても大きな利得がえられ、広帯域設計が容易である。また、大きな入力信号に対する線形性と歪み特性が優れている。

3.2 実験結果

3.2.1 GaAsHBTの光／ミリ波変換特性

今回のモデル実験のために開発した、GaAsHBTを用いた受光器モジュールについて、λ＝

0.83μmにおけるGaAsHBTを用いた場合およびGaAs Schottkey photodiodeを用いた場合の光／ミリ波変換特性を図3に示す。この図から、フォトダイオードに比べて、測定した全周波数領域に渡り良好な変換特性を示していることがわかる。特に、43.75GHzでは、10dB以上の差がみられる。

3.2.2 画像伝送特性

図4に、評価SNRのアンテナ間距離依存性を示す。アンテナ利得が送受合わせて25dB、送信アンテナ出力−20dBmの時、評価SNRが許容値である45dB以上を満たすアンテナ間距離は5mである。ここで画質の評価レベルとしては、本来5段階評価では評価SNR40dB以上で“ランク5：excellent”とされているが、[9] 今回の実験では、余裕をみて許容値を45dBとした。なお、最終形態では、アンテナ利得が送受合わせて15dB、送信アンテナ出力10dBmとすると、今回の実験に比べて受信強度が20dB強くなるので、評価SNRが許容値となるの距離が10倍つまり50mとなり、十分実用的となる。

さらに、波長1.3μm帯において、InP/InGaAsHBTを用いて、118MbpsのBPSKによるディジタルビデオ画像信号のミリ波直接伝送実験を行ない、伝送可能なことを確認した。伝送後（受信）のアイパターンを図5に示す。

4. MMICの適用について

MMIC技術は、パーソナル通信、特に無線基地局のような、小型・高性能・低価格を必要とするシステムには不可欠な要素である。しかし、現在の準マイクロ波帯の携帯電話のRF部の多くはHIC（Hybrid Integrated Circuit）で構成されているのが現状であり、MMICがHICを凌駕するには至っていない。一方、ミリ波帯のMMICはデバイスの高性能化にともない、増幅器・周波数変換器などの研究が盛んに行なわれている。[10] [11] MMICは周波数が高くなるほど、すなわち波長が短くなるほど小型化が可能となり、MMICの貢献度はマイクロ波帯よりもむしろミリ波帯の方が高くなる。

ATRにおいても、MMICの超小型化・高機能化の研究を進めてきたが、今まで述べてきたような光ファイバリンクの要素回路（増幅器・ミキサ等）にMMICを適用すべく、現在研究を進めている。ATRが開発したMMIC技術として図6に示すような多層化MMIC技術がある。これはGaAs基板上に金属・誘電体薄膜を何層にも形成し、伝送線路などを立体的に配線することができるので、超小型なMMICを実現できる特徴がある。この特徴を利用して、我々は小型・低損失な積層構造の方向性結合器の構成を提案しており、[12] これを用いて試作した平衡型増幅器のチップ写真および周波数特性を、図7(a)、(b)にそれぞれ示す。今後このようなMMIC技術をミリ波パーソナル通信に取り入れることにより、我々が積み上げてきたMMIC技術を実証していく。

5. むすび

ATRにおいて研究を進めているミリ波をサブキャリア周波数とした光ファイバリンクを用いて、画像伝送実験を行ない、良好な伝送特性が得られることを明らかにした。ミリ波帯での、光ファイバと無線ゾーンとを組み合わせた伝送実験は世界で初めてであり、高速・広帯域なパーソナル通信実現への見通しを得た。今後は、上り回線や複数ゾーンを含めた、より実

際的な伝送路でシステムを評価するとともに、ミリ波回路素子として開発を進めている多層化MMICをこのシステムに適用する予定である。

謝辞

本研究を進めるにあたり、ご協力頂いた、今岡、松井両研究員に深謝致します。また、この研究に当初から御尽力頂いた、元ATR光電波通信研究所研究員、末松氏（現シャープ㈱）および馬場氏（現三洋電機㈱）に深謝致します。最後に、日頃御指導頂く当研究所猪股社長に深謝致します。

参考文献

[1] H. Ogawa, et al., "Millimeter-wave fiber optics systems for personal radio communications," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-40, pp. 2285-2293, December, 1992.
[2] T. S. Chu, et al., " Fiber optic microcellular radio," Proc. 41st IEEE VTC '91, pp. 339-344, 1991.
[3] H. Ohtsuka, et al., " Fiber optic link for 256-QAM radio communication systems," MWE '91 Microwave Workshop Dig., pp. 143-148, September, 1991.
[4] 末松、他、「マイクロ波HBT光検波」、1992年電子情報通信学会秋季大会、SC-1-4、1992
[5] 徳満、他、「線路一体化FET(LUFET)の提案およびMMIC小型化への応用」、電子情報通信学会半導体・材料部門全国大会、NO. S10-1、pp. 2-341/342、1987
[6] 田中、他、「多層化MMICの構想」、電子情報通信学会春季全国大会、SC-8-2、1988
[7] 小川、「近未来の移動通信は光ファイバ+ミリ波で」、エレクトロニクス、3月号、pp. 2-5、1993
[8] 末松、他、「HBT光検波器を用いたマイクロ波／ミリ波光ファイバーリンクの伝送特性」、電子情報通信学会技術研究報告、OQE-93-29、1993
[9] 日本放送協会、「NHKテレビ技術教科書」、日本放送出版協会、pp. 306、1989
[10] 舟橋、他、「60GHz帯MMIC2段高出力増幅器」、1994年電子情報通信学会秋季大会、C-38、1994
[11] 広田、「MESFETを用いた60GHz帯MMICミキサ」、1994年電子情報通信学会秋季大会、C-78、1994
[12] 馬場、他、「多層化MMICを用いた方向性結合器」、1994年電子情報通信学会春季大会、C-158、1994

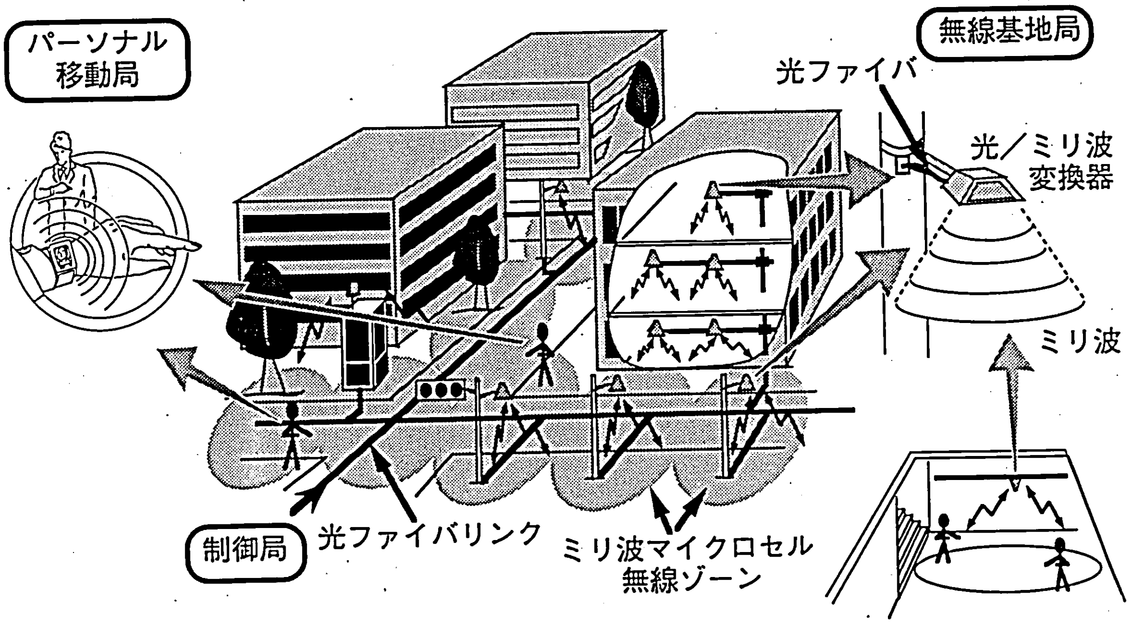


図 1　将来のミリ波パーソナル通信システムのイメージ

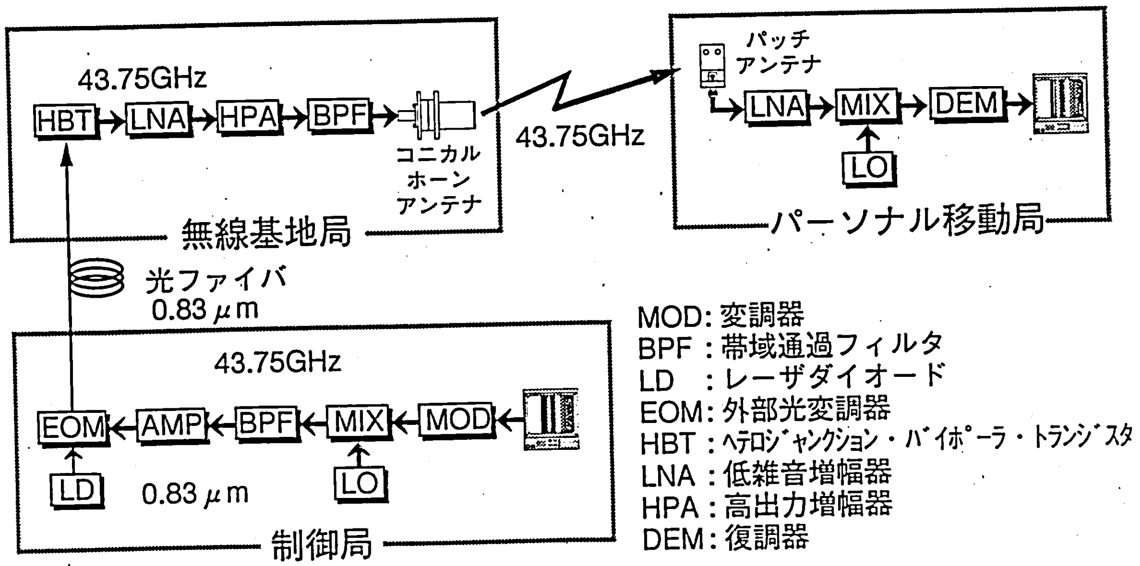
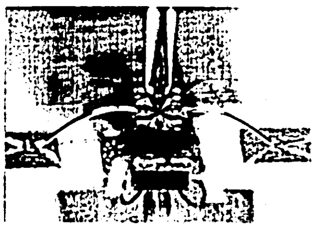
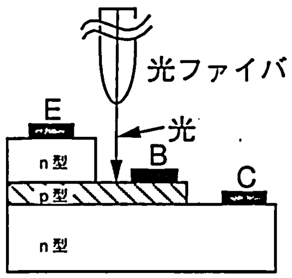


図 2　モデルシステムの構成

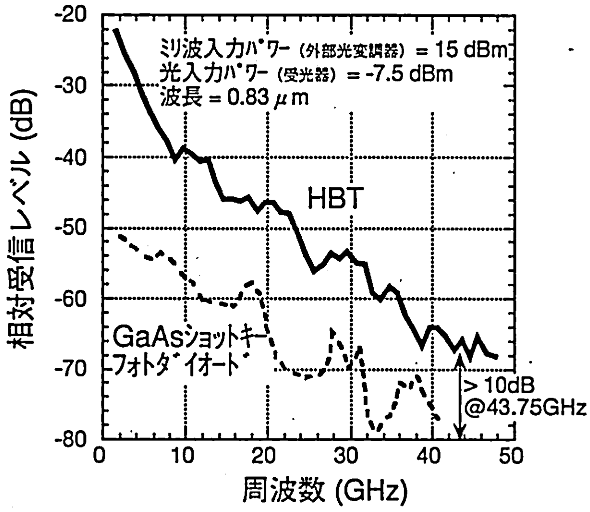


受光部の写真



GaAs HBT

HBT光／ミリ波変換器概略図



HBTとフォトダイオード性能比較

図３　HBTの光／ミリ波変換特性

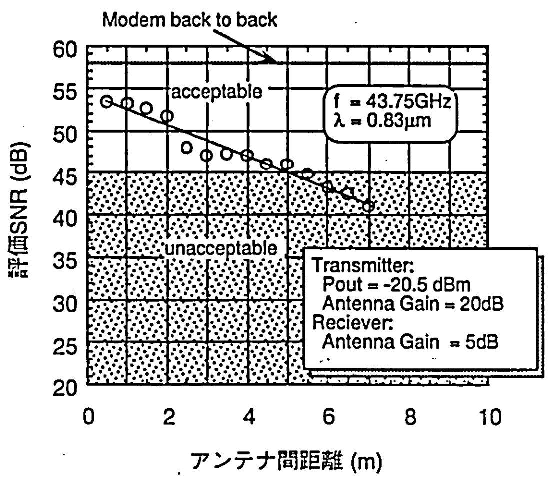


図４　評価SNRのアンテナ間距離依存性

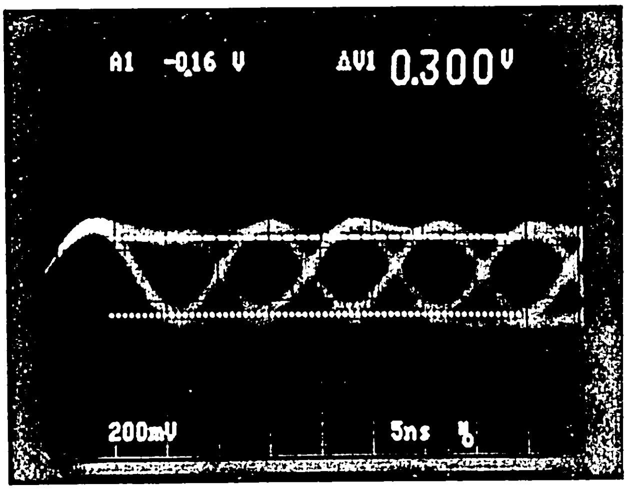
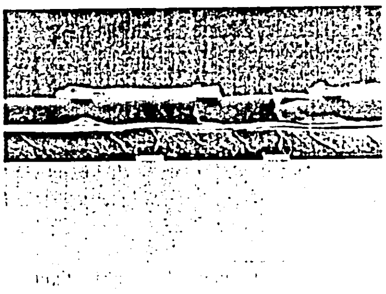
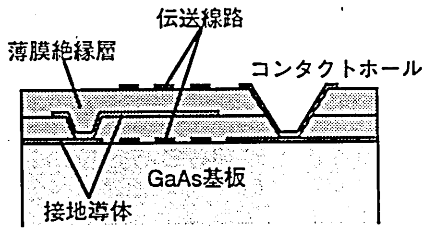


図５　伝送後（受信）のアイパターン

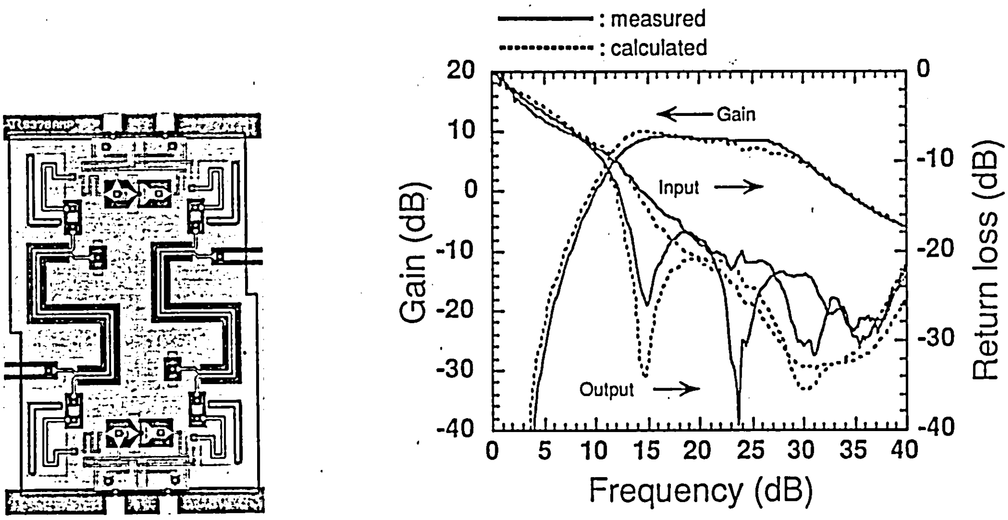


SEM 断面写真



多層化伝送線路の構造

図６　多層化ＭＭＩＣ



(a) チップ写真
(チップサイズ:1.85×1.4mm)

(b) 周波数特性

図７　多層化MMIC技術を用いた平衡型増幅器

輻射科学研究会資料

資料番号　ＲＳ94-13

外部光による半導体レーザのスイッチング

立命館大学　理工学部

岡田　正勝

1994年10月21日

１．はじめに

光による光スイッチングは，光交換や光演算などで要求される基本動作であり，さまざまな光スイッチング素子が提案されてきた．そのなかで，レーザダイオード(ＬＤ)を利用する素子は，増幅効果があり大きなファンアウトがとれる特長がある．ただ，スイッチング速度がキャリアの応答(ns程度)によって制限され高速性に難点があると考えられていたが，最近では数十psのスイッチング速度の可能性も指摘されている[1]．

光によるＬＤのスイッチングには図１に示すような光双安定動作を基本原理としたものが多い．すなわち，入力光強度の変化に対し出力光強度は履歴特性を示し，ある入力光強度に対して出力光強度は２つの安定な状態のどちらかをとりうる．このような光双安定動作は，光強度によって光学定数が変化する"非線形光学効果"と"正帰還"の組み合わせによって得ることができる．ＬＤにおける帰還効果はＬＤが有する共振器構造により与えられるが，ＬＤにおける非線形光学効果には大きく分けて，光強度に応じた屈折率変化(非線形屈折効果)，および光吸収係数または光利得係数の変化(吸収飽和または利得飽和，あるいは非線形吸収効果または非線形利得効果と呼ばれる)がある．これらは，それぞれ，光周波数領域における電気感受率の実数部および虚数部の変化に対応している．

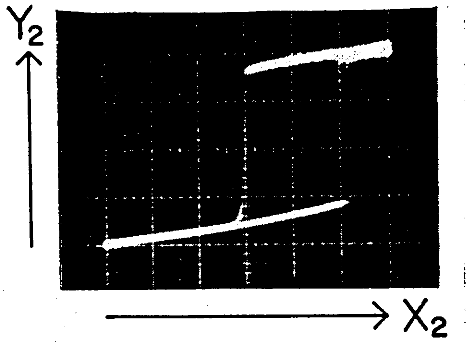


図１　ＬＤにおける光双安定特性の例(横軸が入力光パワー，縦軸が出力光パワー)

ここでは，非線形屈折効果，次に非線形吸収効果，最後に非線形利得効果に基づく双安定ＬＤの特性についてこれまでに得られた結果を述べる．

２．非線形屈折効果に基づく双安定ＬＤ

ＬＤにおける非線形屈折効果は，一般に，半導体における屈折率がキャリア数によって変化する(キャリア誘起屈折率変化)ことに基づいている．一定の注入電流で動作しているLDではキャリア密度ならびにこれに対応した屈折率も一定であり，この屈折率に応じた共振波長でレーザ発振している．ところが，これに外部から光を入射するとキャリア密度が変化しこれに応じて屈折率が変化する．この効果が非線形屈折効果で，屈折率の変化により共振波長も変化するため入力光強度がある値(臨界値)まで増加すると，それまで発振していたレーザ光は発振を停止し，入力光の波長が適当であればその波長でのレーザ発振が生じる．この後，入力光強度を減少させていく時，前述の臨界値より低い値で元の波長でのレーザ発振が復活し，入力光波長でのレーザ発振は停止するので履歴特性を持った光双安定特性が得られる．この場合に得られる光スイッチングは，いわば"波長スイッチング"といえる．

このような現象は，キャリア密度と光強度(光子密度)の間のレート方程式によってよく説明でき(付録１参照)，波長の異なる光を単独にＬＤに入射したときの光双安定特性の計算結果例を図２に示す．

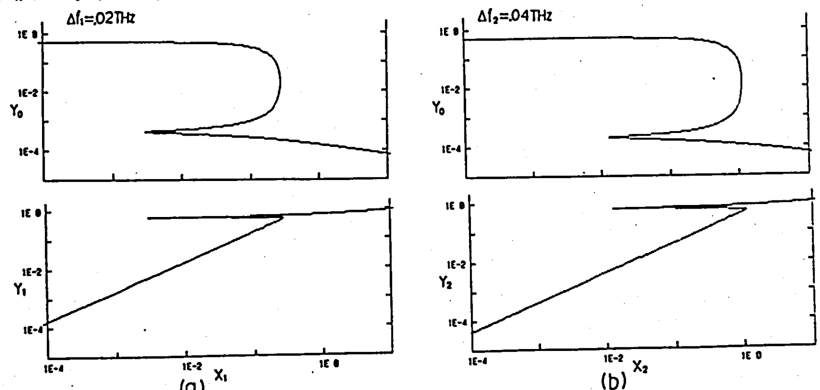


図２　離調した入力光パワー(X_1，X_2)に対する出力光パワー(Y_1，Y_2)の双安定特性の計算結果例．

ここで，Q_0はキャリアの注入割合(注入電流に相当)で，Q_0の一定の値におけるＬＤの自由発振光(入力光がないときの出力光で光周波数f_0)の規格化出力パワーをY_0としており，X_1，X_2は規格化入力光パワー(光周波数f_1，f_2)，Y_1，Y_2はそれぞれの入力光の波長における規格化出力光パワー，Δf_1，Δf_2は入力光の離調を表し$\Delta f_1=f_0-f_1=0.02$THz，$\Delta f_2=f_0-f_2=0.04$THzで与えられる．図２から入力光パワー$X_1(X_2)$の増加とともに出力光はY_0から$Y_1(Y_2)$へスイッチされ，$X_1(X_2)$の減少とともに履歴特性を伴って出力光が元の状態にスイッチされることがわかる．図１は波長0.78μm帯のファブリペロ型GaAlAsレーザを用いた実験で得られた光双安定特性(X_1対Y_1またはX_2対Y_2特性に対応)の例である．また，スイッチングの前後において自由発振光波長から入力光波長に出力光が波長変換されていることを図３に示す．

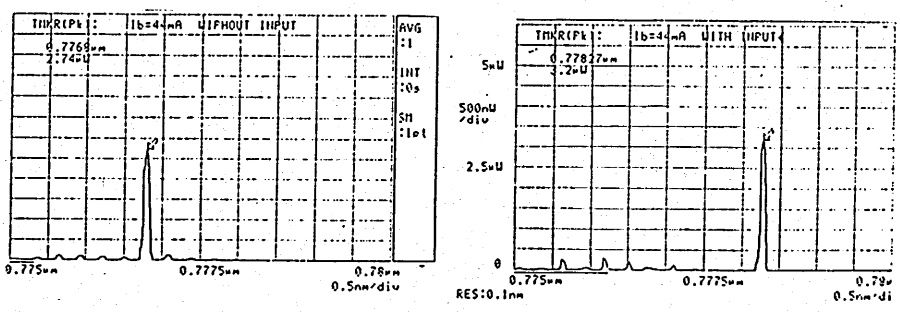


図３　光双安定特性を利用したスイッチングにおける波長の変化

このような光双安定特性は，図２に見られるように入力光の離調(Δf)によって大きく変化するだけでなく，ＬＤの動作電流値(Q_0)や，半導体材料およびＬＤ構造に依存する光利得ならびにキャリア誘起屈折率変化の大きさによっても影響を受ける[(2)]．

以上に述べた現象は入力光が１つの場合であるが，入力光が２つ以上になると，入力光に対する出力光の特性は極めて複雑になり，入力光の数に対応して安定状態の数が増加したり，分離した分岐状態など目新しい現象を得ることができる．図４は一定の電流を注入しているＬＤに２つの異なる波長(周波数で表せば$\Delta f_1=f_0-f_1=0.02$THz，$\Delta f_2=f_0-f_2=0.04$THz)の光を入射したとき，入力光１のパワーX_1に対する出力光Y_0，Y_1，Y_2の応答を示している．ここで，f_2の周波数をもつ入力光２のパワーX_2をパラメターとしてしているが，X_2が小さいときにはX_1に対するY_0およびY_1の特性は１入力光の時のX_1に対するY_0およびY_1の特性と殆ど変わらない(図２(a)と図４(a)を比較参照)．しかし，図４(b)～(e)に示すようにパラメターX_2が大きくなるとともに，X_1に対するY_0，Y_1，Y_2の特性は変化し，特に，X_2が１入力光の時のX_2対Y_2特性の双安定領域(図２(b)で $0.0132<X_2<1.142$)の値をとるとき，X_1に対する出力光の特性には分離した分岐状態が現れる(図４(c)および(d))．そして，$X_2>1.142$になるとX_1に対するY_0，Y_1，Y_2の特性は単純になり，Y_0は常に低レベルにあり，Y_1とY_2は相反的な挙動を示す．

２入力光の時のこのような振舞いは，当然，１入力光の時のそれぞれの特性を反映したものであり，単独の特性では２つの安定状態と１つの不安定状態からなる双安定特性が，２入力光時にはそれぞれの双安定特性の結合として３つの安定状態と２つの不安定状態からなる３安定特性となる．３安定特性の中でも，特に，分離した分岐状態は１入力光時の光入出力特性の双安定領域における分離した２つの安定状態と１つの不安定状態に対応しており，２入力光時には１つの安定状態と不安定状態が連結し，残る１つの安定状態が分離した分岐状態になっている．

分離した分岐状態への遷移は，図４(c)および(d)の例で説明すれば，$0.0132<X_2<1.142$の入力光パワーに対しX_1～.28のパワーの光を入射することにより達成され，しかもX_1が0になった後でもその状態は保持される．すなわち，入力光１の光パルスにより出力光パワーY_0(高状態→低状態)およびY_2(低状態→高状態)がスイッチされ(波長スイッチング)，かつその状態がメモリされることとなる．このメモリ状態は入力光２を切ることによって元の状態へリセットされる．

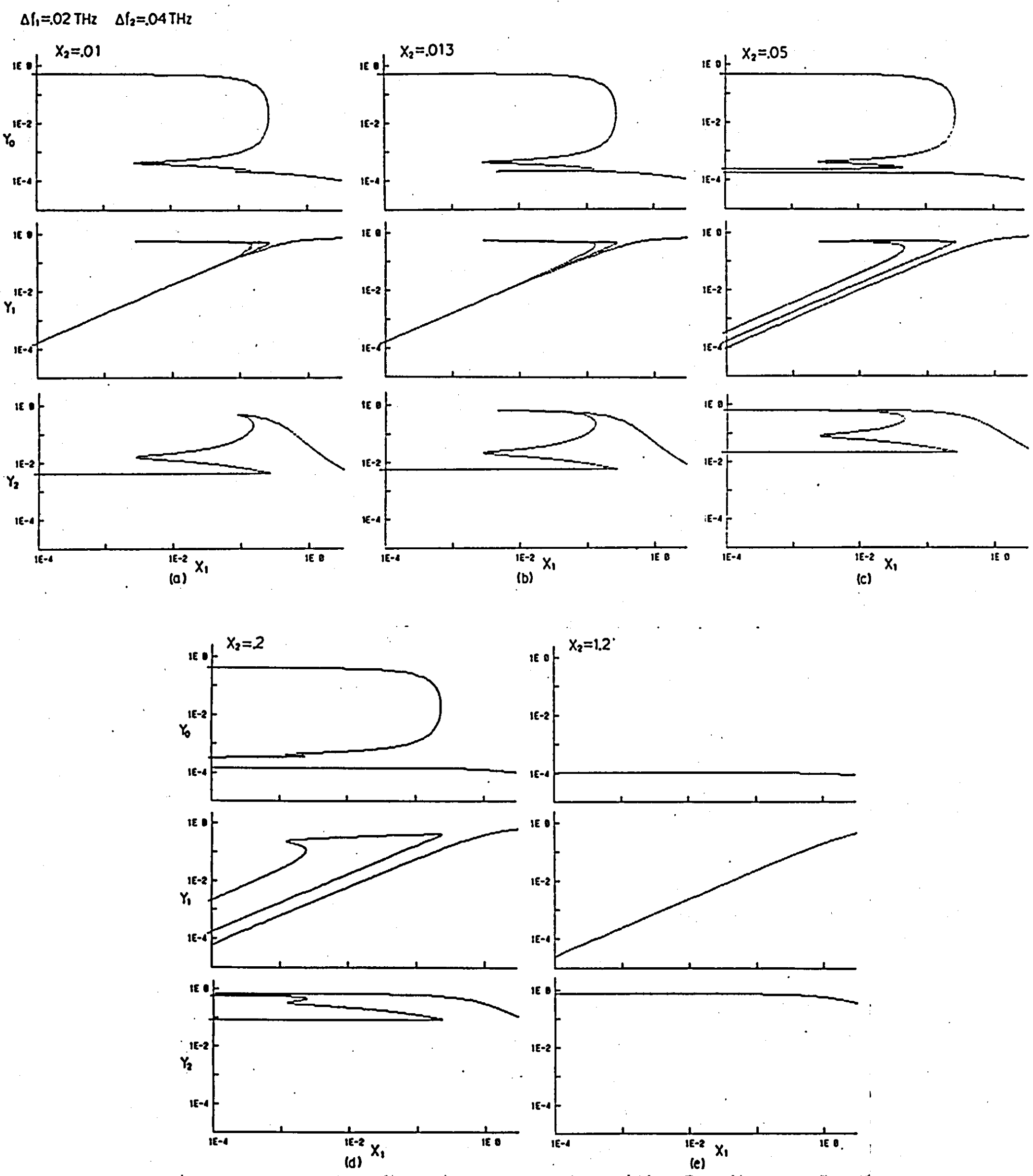


図４　Δf_1=0.02THZ，Δf_2=0.04THzなる２つの入力光がある時の入力光パワーX_1に対する出力光パワー(Y_0，Y_1，Y_2)の特性

しかし，シミュレーション実験の結果，元の状態へのリセット過程は数十nsを要する事が分かり実用的でない．これに代わって，X_1を双安定領域にバイアスしこれに光パルスを重畳することによりY_0とY_2の代わりにY_1とY_2の間のスイッチングを行うことができる．図２および図４の特性に基づいて，光パルスによるY_1とY_2の間のスイッチングの例を図５に示す．また，X_1に対する出力光パワー特性における履歴ループがX_2の値により横軸(X_1軸)に沿ってシフトする挙動を利用することにより，図６～７のようなY_1とY_2の間のスイッチングの実験結果も得られる．

さらに，入力光の数の増加すると光入出力特性は非常に複雑になるが，一般に，m個の異なる波長の入力光に対し，m+1次の多安定特性とm-1個の分離した分岐状態を得ることができ，これ

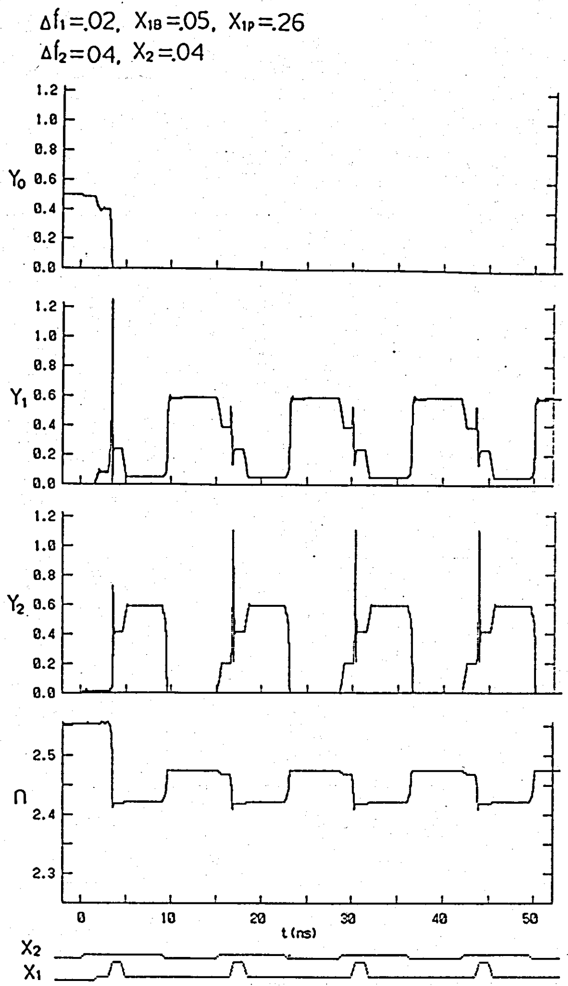


図５　２つの異なる光周波数の入力光パルスによるスイッチングの計算例

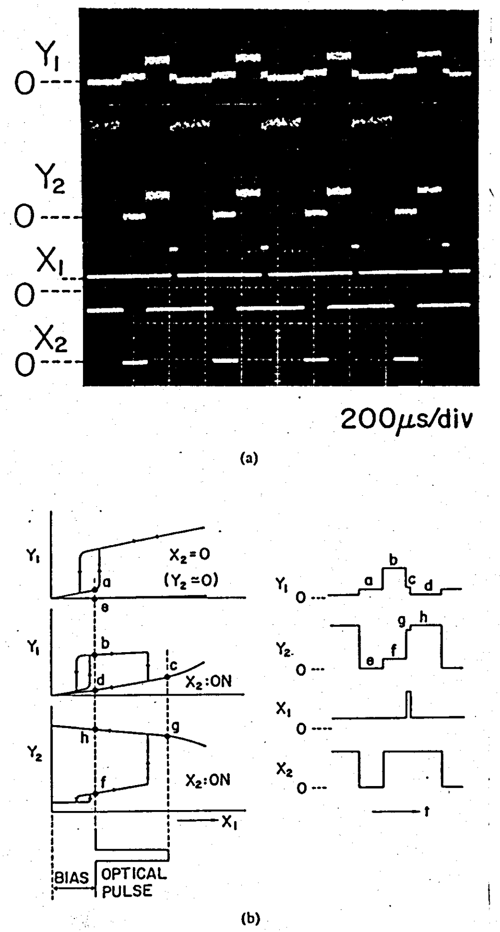


図６　２つの異なる波長の入力光パルスによるスイッチングの実験例とその動作説明図

に伴って，光パルスによって出力光をm-1個の状態のいづれかにスイッチすることができる．図８に４つの入力光パルスによる３つの波長の異なった出力光のスイッチングの例を示す．

３．非線形吸収効果に基づく双安定ＬＤ

双安定ＬＤとして最も早く実現されたのがこの型の素子で，その基本構造はＬＤ共振器内に電流注入領域(利得領域)と電流非注入領域(吸収領域)を含んだ構造から成っている[3]．注入電流が小さいときには利得領域における発光は吸収領域で吸収されレーザ発振しないが，注入電流の増加とともに発光強度が強くなり，その光を吸収して吸収領域におけるキャリアが増加し光吸収係数が小さくなる．そして，注入電流がある値(臨界値)に達すると光吸収が飽和し，共振器による正帰還とあいまってＬＤ出力は高レベルの発振状態に遷移する．また，高レベルの発振状態から注入電流を減少させると，上述の臨界電流値より小さい電流値でレーザ発振が停止する．すなわち，非線形吸収効果に基づいた双安定ＬＤでは，注入電流対光出力特性において双安定特性が得られる．その後，一定の注入電流のもとで光入出力特性にも双安定特性が得

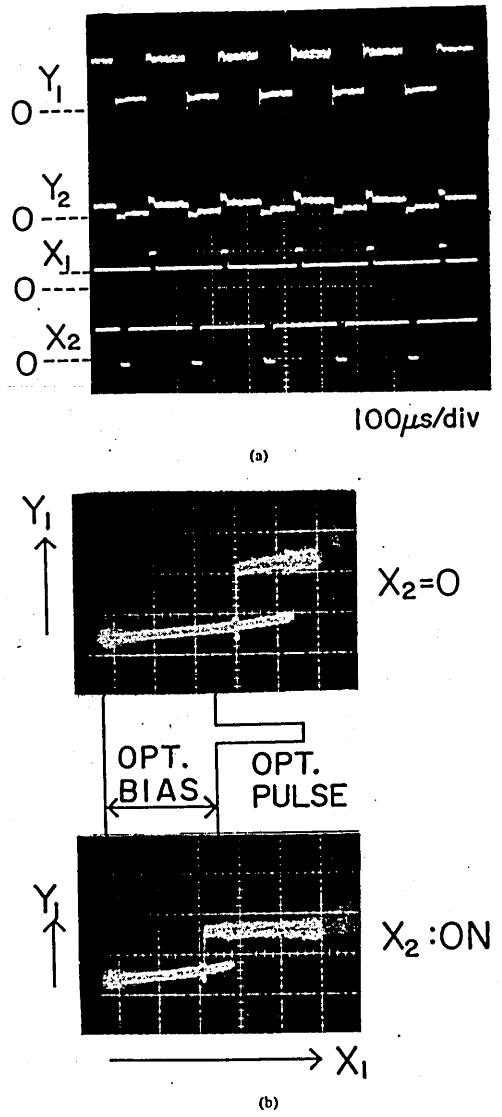


図７　２つの異なる波長の入力光パルスによるスイッチングの実験例とその動作説明図

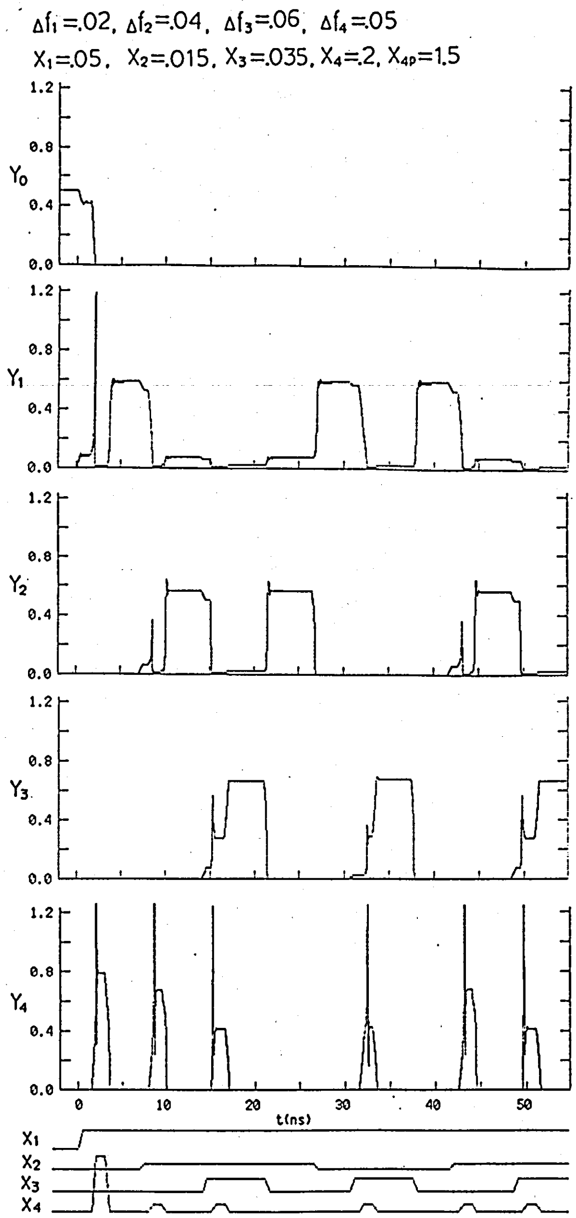


図８　４つの異なる波長の入力光パルスによる３状態へのスイッチングの計算例

られることが確認され[4]，さらに1988年には非線形吸収効果に基づくこの型のＬＤに外部から光パルスを入射することによりフリップフロップ動作が可能であることが報告された(図９)[5]．この実験結果では，セット時の入射光パルスの波長は双安定ＬＤの自由発振波長に近いのに対し，リセット時の入射光パルスの波長は自由発振波長より数nm以上長波長側にシフトしていることに注意する必要がある．

ここでは，フリップフロップ動作の解明も含めて，外部注入光の強度や波長の変化がこの型の双安定ＬＤに与える影響について述べる[6]．

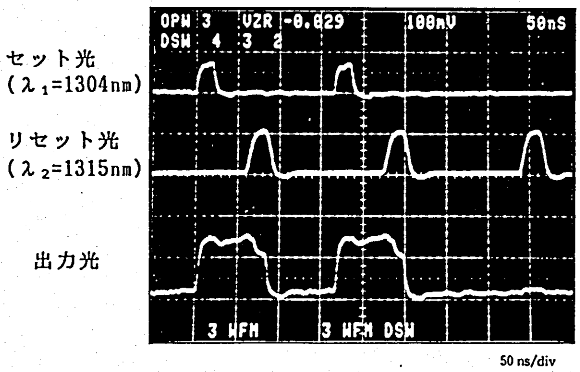


図９ 非線形吸収に基づいた双安定ＬＤに異なる波長の光パルスを入射して得られた光フリップフロップ動作[5]

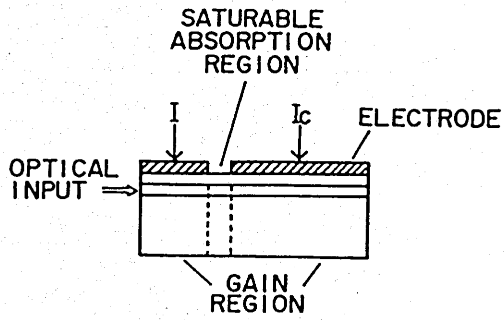


図10 実験に用いた非線形吸収に基づいた双安定ＬＤの構造図

実験に用いた双安定ＬＤは，図10に示すような構造の1.3μm帯のファブリペロ型InGaAsP-ＬＤであり，中心波長1309nmの近辺で縦モード間隔0.8nmの多モード発振ＬＤである．このＬＤに外部光を入射し，その波長を変化したときの注入電流対光出力特性の変化を図11に示す(X_2は入力光パワーであり，左側最上段は入力光がない場合の特性である)．ここで入力光の波長は双安定ＬＤの自由発振波長に近い1309nm近辺であり，入力光源にはＤＦＢ-ＬＤを用いその波長の微調整は温度制御により行った．ＤＦＢ-ＬＤの発振波長の温度変化率は約0.08nm／℃であり，10℃の温度変化により双安定ＬＤの縦モード間の波長を変化させることができる．図11では波長の変化をＤＦＢ-ＬＤの温度Tで表示してあり，T=18℃の特性とT=28℃の特性は一致していることから，1309nm近辺の波長では縦モード間の波長幅にわたって入力光波長を変化すれば双安定ＬＤにおける入力光の波長の影響を知るに十分であるといえる．図11から，入力光波長を変化するとともに注入電流対光出力特性が大きく変化することが分かるが，T=18℃～19℃，27℃～28℃の特性は入力光波長が双安定ＬＤの最近接モードより短波長側にある時に対応し，T=21～25℃の特性は入力光波長が双安定ＬＤの最近接モードの長波長側に位置している場合に相当している．また，T=19℃からT=19.2℃に変化すると瞬時に小さい履歴ループから大きいループに変化することも特徴的である．

図11の特性を利用すれば入力光パルスにより出力光を低レベルから高レベルへセットすることができる．図11の入力光がないとき(X_2=0)の特性で注入電流をI_{D0}とI_{U0}の間の値に設定し出力光は低レベル状態にあるとき，例えばT=25～28℃に対応する波長の光パルスを入射すれば出力光状態は高レベルにセットされ，光パルスがなくなっても高レベル状態に保持される．

一方，双安定ＬＤの中心波長からかなり長波長側に離調した(1314nm)外部光を入射したとき(入力光パワーX_1)の注入電流対光出力特性を図12に示す．ただし，図12では入力光パワーX_1をパラメターとしており，注入電流対光出力特性が入力光パワーに応じてさまざまに変化するこ

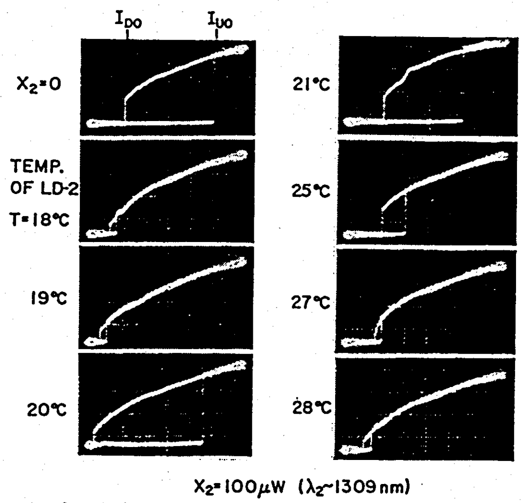


図11 双安定ＬＤにその中心発振波長近辺(～1309nm)の外部光を入射したときの外部光の波長の微小変化が注入電流対光出力特性に与える影響(Tは外部注入光として用いたDFB-LDの温度を表し，入力光波長の変化に対応している)

とが分かる．特に，図12で注意すべき現象は，X_1=465μWおよび538μWの時の双安定特性に見られるように，I_{DO}より大きい注入電流の範囲で履歴ループが形成されていることである．このような特性は，入力光の波長が双安定ＬＤの中心波長に近い場合には見られず，離調が大きい入力光の場合にのみ得られる現象で，利得スペクトルに起因すると考えられる．この現象を用いれば，離調した光パルスの入射により，高レベルにある出力光状態を低レベルにリセットすることができ，結局，図13に示すように注入電流値を設定すれば，外部光による履歴ループの変化を利用して光パルスによるセット・リセット動作が可能となる．セット・リセットには２つの異なる波長の外部光を用いるほか，図14に示すように，単一波長の光を用い光パルスのピーク値やパルス幅の差を利用することもできる．また，図11および図12の特性を利用して２つの異なる波長の光による論理演算の例を図15に示す[6]．

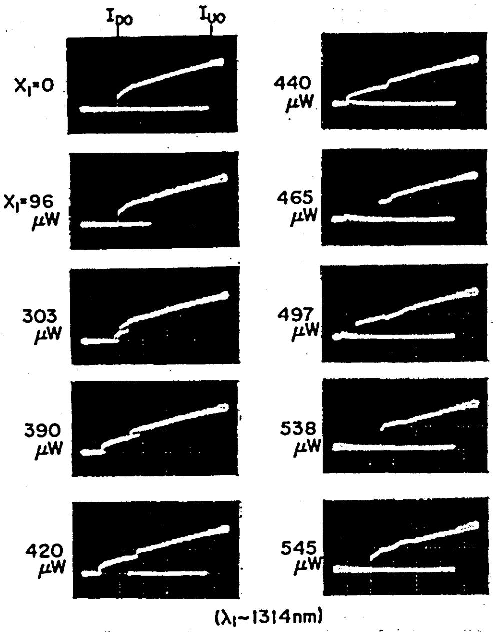


図12 双安定ＬＤにその中心発振波長より十分離調した(～1314nm)外部光を入射したときの入力光パワーが注入電流対光出力特性に与える影響

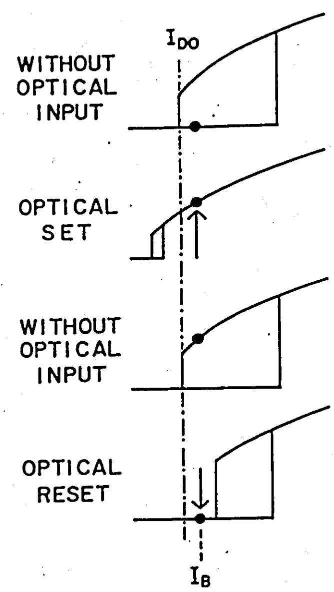


図13 光セット・リセット動作の動作説明図

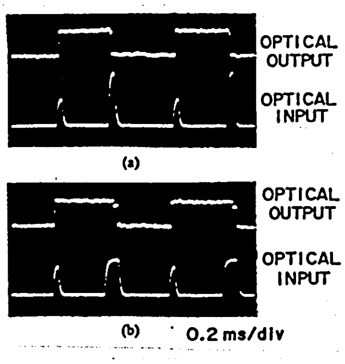


図14 単一波長の入力光パルスによるセット・リセット動作

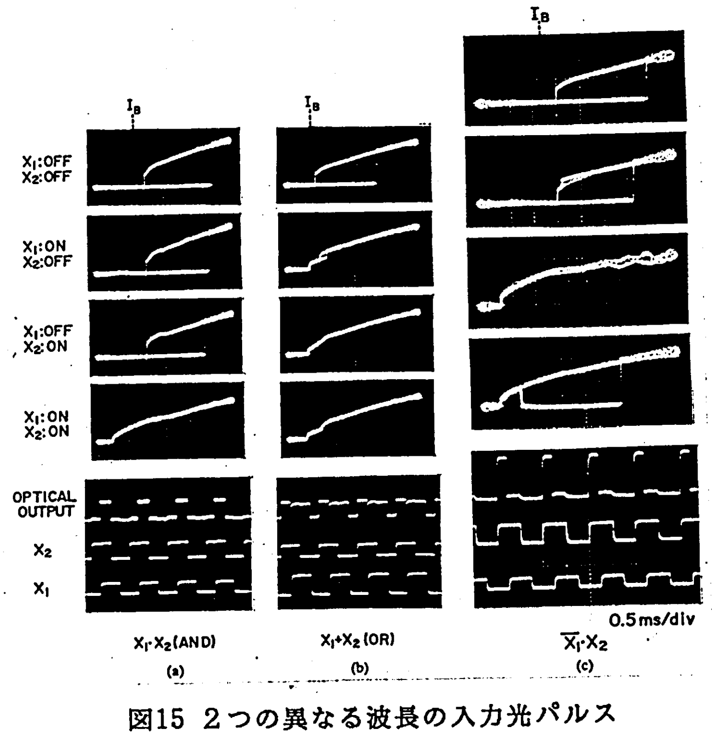


図15 ２つの異なる波長の入力光パルスによる光論理演算の例

これまで述べてきた双安定ＬＤにおける外部光の波長やパワーの効果を示す実験結果の殆どは，レート方程式に基づく解析により説明できる．図16は，外部入力光のパワーX，離調Δωが双安定ＬＤのキャリア注入割合に対する規格化光出力($Y_T=Y_0+Y$)特性に与える影響についての計算結果例であり，図11および図12の実験結果に対応するものである．詳細は文献(6)を参照して頂くこととして，実験結果で現れた特徴的な現象が解析結果でも示されていることが分かる．

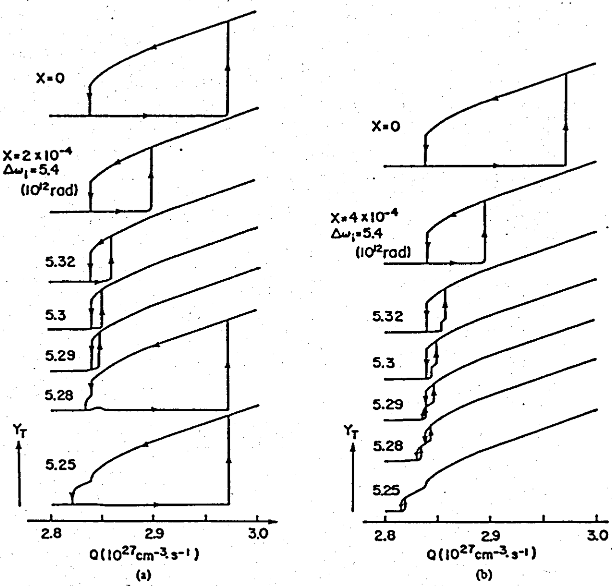


図16 非線形吸収型双安定ＬＤのキャリア注入割合(注入電流)対光出力特性に与える外部入力光の影響の計算例

４．非線形利得効果に基づく双安定ＬＤ

レーザにおける非線形利得の効果については古くから検討され(spectral hole burningなど)，特に，多モード発振レーザにおけるモード間の相互作用の多く(モード間競合など)が非線形利得効果によって説明されてきている[7]．しかし，単一モード発振レーザでも非線形利得を通して発振モードと非発振モード間に相互作用が生じモードスイッチングが起こりうる．例えば２つのモード(1, 2)のみを考慮するとき，それぞれのレーザ利得(誘導放出光利得)G_1，G_2は自分自身のモードならびに他のモードの光強度(光子密度N_1，N_2で表す)によって次のように表される．

$$G_1=G_{10}(1-S_1N_1-C_{12}N_2),\quad G_2=G_{20}(1-C_{21}N_1-S_2N_2)$$

ここで，G_{10}，G_{20}は非線形性を考慮しないときの利得，S_1，S_2は自己飽和係数，C_{12}，C_{21}は相互飽和係数と呼ばれる非線形性の大きさを与える定数である．利得係数が一定の値でなく光強度(光子密度)に応じて変化することから非線形利得と呼ばれるが，$G_{10},G_{20},S_1,S_2,C_{12},C_{21}$の値の組み合わせによっては，励起の変化や外部からのレーザ光注入に伴って双安定特性が得られたり，はじめモード１で発振していたレーザがモード２の発振にスイッチされたりする．

ここでは，半導体レーザにおける非線形利得に基づくTEモードとTMモード間の相互作用についてレート方程式により解析し，外部からのTEあるいはTMモードの光パルスによる半導体レーザのTE-TM光スイッチングについて述べる．この課題はkawaguchi等[1]によって提示されているが，本報告では入力光の離調の影響も含めたレート方程式のより一般化，ならびに自己飽和係数，相互飽和係数および微分利得係数などの組み合わせによるキャリア注入割合(注入電流)対光出力特性の変化の系統的取扱いについて述べる．

レート方程式の詳細については付録２で述べてあるが，その定常特性に対応する式を以下に記す．

光入力がないとき

$$\left\{\begin{aligned}
&Q_0\tau_s=n_0+(n_0-n_T)(1-\varepsilon_EY_{0E}-\varepsilon_{EM}Y_{0M})Y_{0E}+(g_M/g_E)(n_0-n_T)(1-\varepsilon_MY_{0M}-\varepsilon_{ME}Y_{0E})Y_{0M}\\
&Y_{0E}/g_E\Gamma_E\tau_{PE}-(n_0-n_T)(1-\varepsilon_EY_{0E}-\varepsilon_{EM}Y_{0M})Y_{0E}=\beta n_0\\
&Y_{0M}/g_M\Gamma_M\tau_{PM}-(n_0-n_T)(1-\varepsilon_MY_{0M}-\varepsilon_{ME}Y_{0E})Y_{0M}=(g_E/g_M)\beta n_0
\end{aligned}\right.\qquad(1)$$

ここで，Q_0はキャリア密度の注入割合，n_0はキャリア密度，τ_sはキャリア寿命，Y_{0E}およびY_{0M}はTEおよびTMモードの規格化光パワー，g_Eおよびg_MはTEおよびTMモードに対する微分利得係数，Γ_EおよびΓ_Mは光閉じ込め係数，τ_{PE}およびτ_{PM}は光子の寿命，ε_Eおよびε_Mは規格化された自己飽和係数，ε_{EM}およびε_{ME}は規格化相互飽和係数である．

TEモードの光入力があるとき

$$\begin{cases} Q_0\tau_s=n+(n-n_T)\{[1-\varepsilon_E(Y_{0E}+Y_E)-\varepsilon_{EM}Y_{0M}](Y_{0E}+Y_E)+(g_M/g_E)[1-\varepsilon_M Y_{0N}-\varepsilon_{ME}(Y_{0E}+Y_E)]Y_{0M}\} \\ Y_{0E}/g_E\Gamma_E\tau_{PE}-(n-n_T)[1-\varepsilon_E(Y_{0E}+Y_E)-\varepsilon_{EM}Y_{0M}]Y_{0E}=\beta n \\ Y_{0M}/g_M\Gamma_M\tau_{PM}-(n-n_T)[1-\varepsilon_M Y_{0M}-\varepsilon_{ME}(Y_{0E}+Y_E)]Y_{0M}=(g_E/g_M)\beta n \\ Y_E=\dfrac{X_E/(g_E\Gamma_E\tau_c)^2}{\{1/g_E\Gamma_E\tau_{PE}-(n-n_T)[1-\varepsilon_E(Y_{0E}+Y_E)-\varepsilon_{EM}Y_{0M}]\}^2+(2/g_E\Gamma_E)^2[(d\Omega/dn)(n-n_0)+\Delta\omega_E]^2} \end{cases} \tag{2}$$

TMモードの光入力があるとき

$$\begin{cases} Q_0\tau_s=n+(n-n_T)\{[1-\varepsilon_E Y_{0E}-\varepsilon_{EM}(Y_{0M}+Y_M)]Y_{0E}+(g_M/g_E)[1-\varepsilon_M(Y_{0N}+Y_M)-\varepsilon_{ME}Y_{0E}](Y_{0M}+Y_M)\} \\ Y_{0E}/g_E\Gamma_E\tau_{PE}-(n-n_T)[1-\varepsilon_E Y_{0E}-\varepsilon_{EM}(Y_{0M}+Y_M)]Y_{0E}=\beta n \\ Y_{0M}/g_M\Gamma_M\tau_{PM}-(n-n_T)[1-\varepsilon_M(Y_{0M}+Y_M)-\varepsilon_{ME}Y_{0E}]Y_{0M}=(g_E/g_M)\beta n \\ Y_M=\dfrac{X_E/(g_M\Gamma_M\tau_c)^2}{\{1/g_M\Gamma_M\tau_{PM}-(n-n_T)[1-\varepsilon_M(Y_{0M}+Y_M)-\varepsilon_{ME}Y_{0E}]\}^2+(2/g_M\Gamma_M)^2[(d\Omega/dn)(n-n_0)+\Delta\omega_M]^2} \end{cases} \tag{3}$$

ここで，nは光入力に応じたキャリア密度，X_EおよびX_MはTEおよびTMモードの入力光の規格化パワー，$\Delta\omega_E$および$\Delta\omega_M$はTEおよびTMモード入力光角周波数の離調，Y_EおよびY_MはTEおよびTMモード入力光波長における規格化出力光パワー，$d\Omega/dn$はキャリア誘起屈折率変化に基づくレーザ共振角周波数のキャリア密度に対する変化率である．

光入力がないときのキャリア密度注入割合(Q_0)に対する光出力(Y_{0E}およびY_{0M})の特性（式(1)に対応）は，$\varepsilon_{ME}/\varepsilon_E$および$\varepsilon_{EM}/\varepsilon_M$，ならびにブロックパラメーター $A_E=1/\Gamma_E\tau_{PE}g_E$ および $A_M=1/\Gamma_M\tau_{PM}g_M$ の値の大きさにより特徴づけることができる．安定性の判別ならびに式(1)の解析から得られた結果を要約すると次のようになる．

[1] 双安定性が得られるための必要条件は $\varepsilon_{EM}\varepsilon_{ME}>\varepsilon_E\varepsilon_M$ である．

[2] $\varepsilon_{ME}/\varepsilon_E>1$, $\varepsilon_{EM}/\varepsilon_M>1$ の場合，双安定特性は一般にピッチフォーク形になり(図17)，

$\varepsilon_{ME}/\varepsilon_E>\varepsilon_{EM}/\varepsilon_M>1$, $A_M\geqq A_E$ ならば TE-dominant

$\varepsilon_{EM}/\varepsilon_M>\varepsilon_{ME}/\varepsilon_E>1$, $A_E\geqq A_M$ ならば TM-dominant

である．しかし，

$\varepsilon_{ME}/\varepsilon_E>\varepsilon_{EM}/\varepsilon_M>1$, $A_M<A_E$

$\varepsilon_{EM}/\varepsilon_M>\varepsilon_{ME}/\varepsilon_E>1$, $A_E<A_M$

の場合には，Q_0の比較的小さい領域でＳ字形の双安定特性を示した後，Q_0の増加と共にピッチフォーク形の双安定

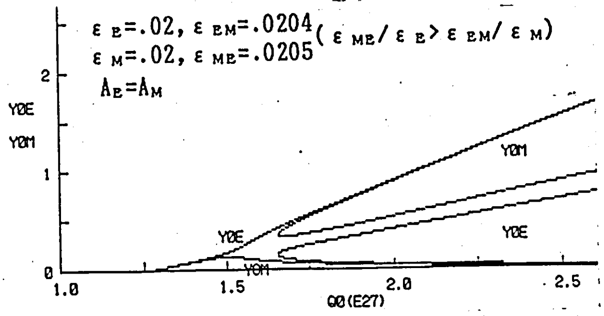


図17 非線形利得型双安定ＬＤにおける ピッチフォーク形双安定特性例

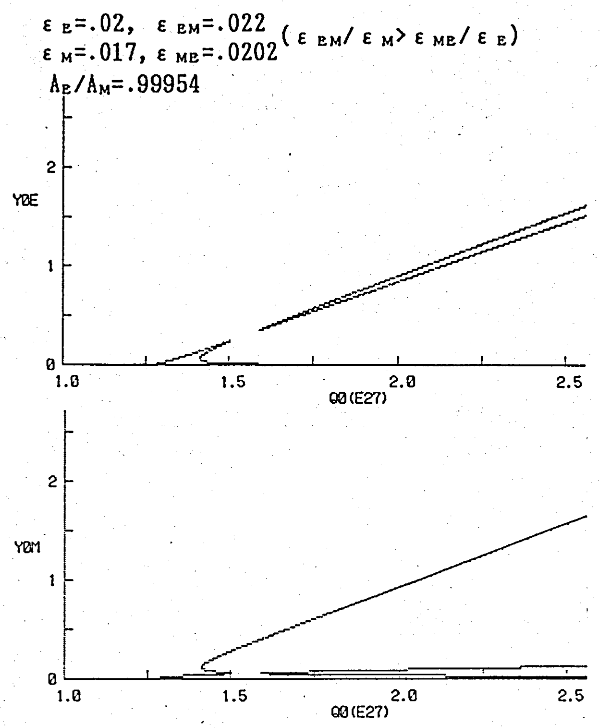


図18 非線形利得型双安定ＬＤにおける Ｓ字形とピッチフォーク形を合わせもつ双安定特性例

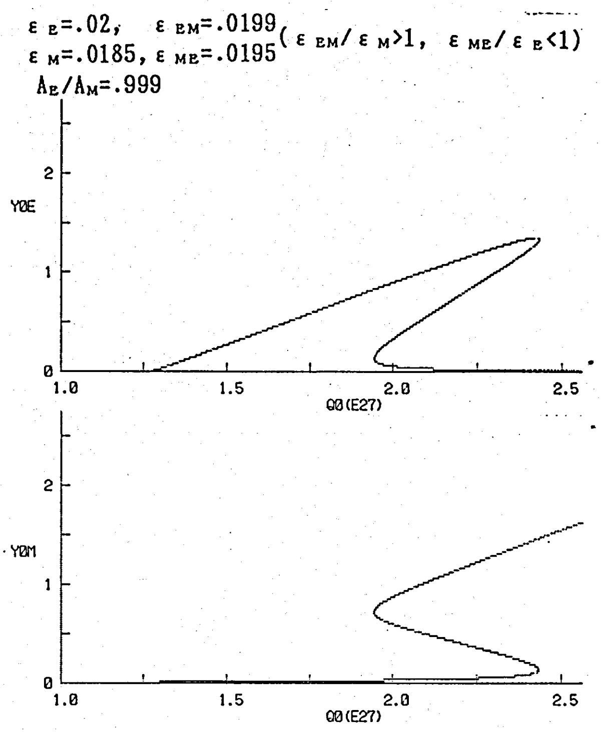


図19 非線形利得型双安定ＬＤにおける Ｓ字形双安定特性例

特性となることがある(図18)．

[3] $\underline{\varepsilon_{EM}/\varepsilon_M>1,\ \varepsilon_{ME}/\varepsilon_E\leqq 1}$ (ただし $\varepsilon_{EM}/\varepsilon_M>\varepsilon_E/\varepsilon_{ME}$)の場合，$\underline{A_E<A_M}$であれば双安定性が得られ，Ｓ字形の特性となる(図19)．

[4] $\underline{\varepsilon_{ME}/\varepsilon_E>1,\ \varepsilon_{EM}/\varepsilon_M\leqq 1}$ (ただし $\varepsilon_{ME}/\varepsilon_E>\varepsilon_M/\varepsilon_{EM}$)の場合，$\underline{A_E>A_M}$であれば双安定性が得られ，[3]の場合のTEとTMモードが交換した形のＳ字型の特性となる．

このようなQ_0対Y_{0E}およびY_{0M}特性でQ_0をある値に設定し，外部からTEまたはTM光を入射したときの光入出力特性は式(2)および(3)から求められる．図17の双安定領域にQ_0を設定したとき，TE光強度X_EまたはTM光強度X_Mに対する光出力特性の計算結果の例を図20に示す．ここで，TEおよびTM光のＬＤ共振周波数からの離調を，それぞれ，Δf_E=0.04THz，Δf_M=0.02THzとしており，また$Y_{ET}=Y_{0E}+Y_E$，$Y_{MT}=Y_{0M}+Y_M$である．図20(a)から，入力光がないときTEモードで発振している(Y_{0E}=1)状態においてX_M>0.2なる強度のTM光を入射すれば，Y_{0E}およびY_{0M}は分離した分岐に遷移し入力光がなくなった後もその状態を保持しTMモードの発振状態(Y_{0M}～1)にスイッチされることが分かる．また，図20(b)から，TEモードの発振状態においてTE光を入射してもTMモードにスイッチされることはないことも分かる．すなわち，ＬＤの発振の偏光状態と異なる偏光の光パルスを加えることにより，ＬＤ発振光の偏光スイッチングが行える．

謝辞 非線形吸収型双安定ＬＤを提供頂いた(株)富士通研究所の方々に感謝する．また，この研究の一部は放送文化基金によって行ったものである．

ε_E=.02, ε_{EM}=.0204
ε_M=.02, ε_{ME}=.0205
A_E=A_M

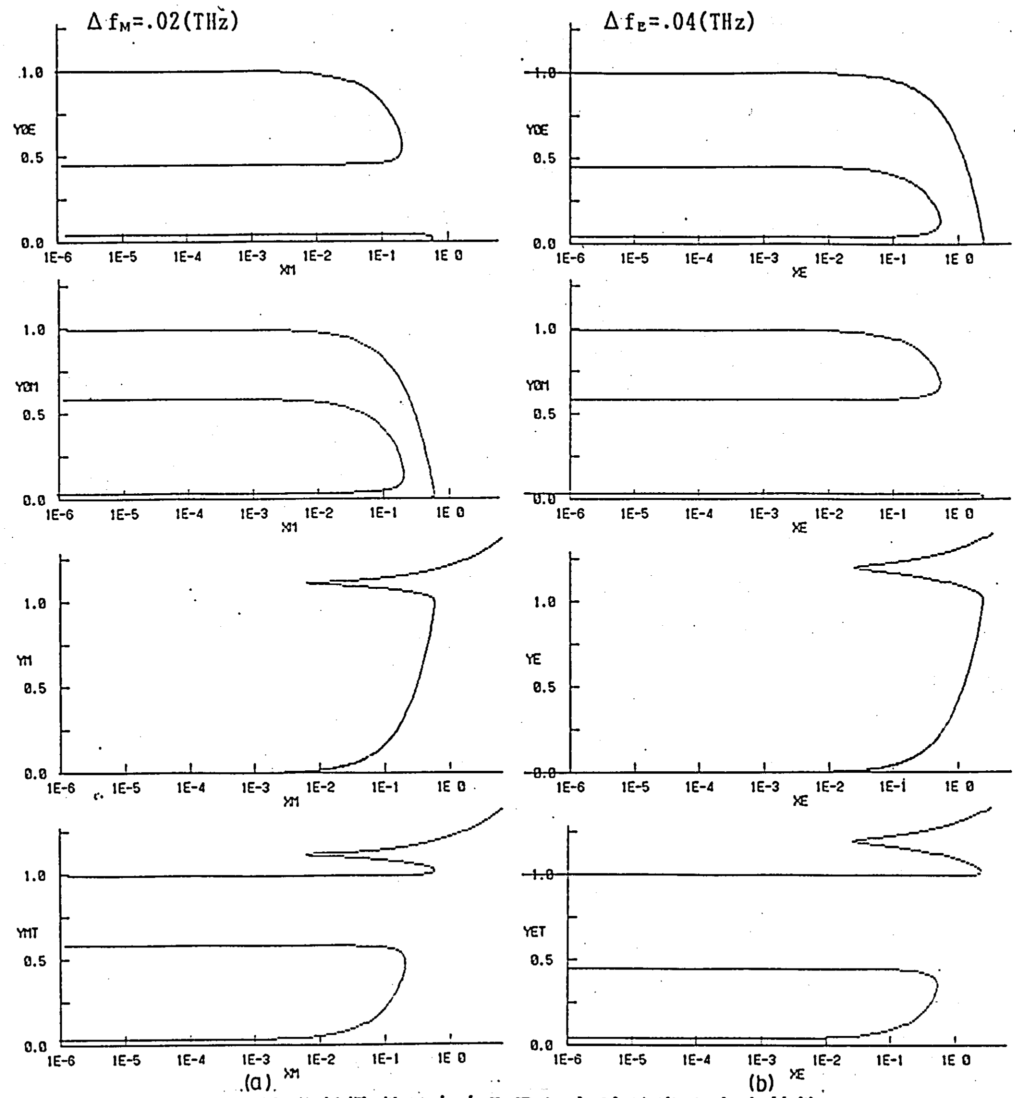


図20 非線形利得型双安定ＬＤにおける光入出力特性

参考文献

(1) H.Kawaguchi, I.W.White, M.J.Offside, and J.E.Crroll; Opt. Lett., Vol.17, p.130 (1992)
(2) M.Okada, H.Kikuchi, K.Takizawa, and H.Fujikake; IEEE J. Quantum Electron., Vol.27, p.2003 (1991).
(3) H.Kawaguchi and G.Iwane; Electron. Lett., Vol.17, p.167 (1981).
(4) H.Kawaguchi; Electron. Lett., Vol.17, p.741 (1981).
(5) T.Odagawa and S.Yamakoshi; Electron. Lett., Vol.25, p.1428 (1989).
(6) M Okada, H.Kikuchi, K.Takizawa, and H.Fujikake; IEEE J. Quantum Electron., Vol.29, p.109 (1993).
(7) 霜田光一; レーザ物理入門, 岩波書店.

付録1．非線形屈折効果に基づく双安定LDにおけるレート方程式

キャリア密度をn，キャリア寿命をτ_s，キャリア密度の注入割合をQ，利得を$G(n)$，利得飽和係数をs，LDの自由発振光の光子密度(出力光強度)をN_0，LD共振器内におけるk番目($k=1,2,3,\cdots,m$)の入力光の光子密度(出力光強度)，複素振幅および角周波数をN_k，$\tilde{E}_k$およびω_k，共振器内の光子寿命をτ_p，光閉じ込め係数をΓ，LDの共振角周波数をΩ_c，自然放出光の寄与率をβ，入力光振幅をE_{1k}，$\tau_c=\eta L/cT$(ηは屈折率，Lは共振器長，Tは共振器鏡の振幅透過率，cは光速度)とすれば，LDのレート方程式は次式で与えられる．

$$dn/dt=Q-n/\tau_s-G(n)[1-s(N_0+N_1+N_2+\cdots\cdots+N_m)](N_0+N_1+N_2+\cdots\cdots+N_m)$$

$$dN_0/dt=-N_0/\tau_p+\Gamma G(n)[1-s(N_0+N_1+N_2+\cdots\cdots+N_m)]N_0+\Gamma\beta n/\tau_s$$

$$d\tilde{E}_k/dt=-\tilde{E}_k/2\tau_p+\Gamma G(n)[1-s(N_0+N_1+N_2+\cdots\cdots+N_m)]\tilde{E}_k/2+j(\Omega_c-\omega_k)\tilde{E}_k+E_{1k}/2\tau_c$$

$$N_k=(\eta/\hbar\omega c)|\tilde{E}_k|^2 \qquad (k=1,2,\cdots\cdots,m)$$

ここで，$G(n)=g(n-n_T)$，　$\Omega_c=\Omega_c(n_0)+(d\Omega/dn)(n-n_0)$と近似する($g$は微分利得係数，$n_T$は利得および損失が0になるキャリア密度，$n_0$は外部からの光がないときのキャリア密度)とともに，$\tilde{E}_k$を実数部と虚数部に分け，$\tilde{E}_k=E_{kR}+jE_{kI}$，$N_k=(\eta/\hbar\omega c)(E_{kR}{}^2+E_{kI}{}^2)=N_{kR}+N_{kI}$とし，
さらに，$N_s=1/g\tau_s$で定義される飽和光子密度によって

$$Y_0=N_0/N_s,\quad Y_k=N_k/N_s,\quad Y_{kR}=N_{kR}/N_s,\quad Y_{kI}=N_{kI}/N_s,\quad X_k=(\eta/\hbar\omega c)E_{1k}{}^2/N_s,\quad \varepsilon=sN_s$$

のように規格化すると，レート方程式は次のようになる．

$$dn/dt=Q-n/\tau_s-(n-n_T)[1-\varepsilon(Y_0+Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_m)](Y_0+Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_m)/\tau_s$$

$$dY_0/dt=-Y_0/\tau_p+\Gamma g(n-n_T)[1-\varepsilon(Y_0+Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_m)]Y_0+\Gamma\beta gn$$

$$dY_{kR}/dt=-Y_{kR}/\tau_p+\Gamma g(n-n_T)[1-\varepsilon(Y_0+Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_m)]Y_{kR} -2[(d\Omega/dn)(n-n_0)+\Delta\omega_k](Y_{kR}Y_{kI})^{1/2}+(Y_{kR}X_k)^{1/2}/\tau_c$$

$$dY_{kI}/dt=-Y_{kI}/\tau_p+\Gamma g(n-n_T)[1-\varepsilon(Y_0+Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_m)]Y_{kI} +2[(d\Omega/dn)(n-n_0)+\Delta\omega_k](Y_{kR}Y_{kI})^{1/2} \qquad (k=1,2,\cdots\cdots,m)$$

ただし，$\Delta\omega_k=\Omega_c(n_0)-\omega_k$ である．

定常状態に対応する式は，時間微分項を0と置いて得られる．

(1)入力光がないとき

$$Q_0\tau_s=n_0+(n_0-n_T)(1-\varepsilon Y_0)Y_0$$

$$Y_0/\Gamma g\tau_p-(n_0-n_T)(1-\varepsilon Y_0)Y_0=\beta n_0$$

(2)入力光があるとき

$$Q_0\tau_s=n+(n-n_T)[1-\varepsilon(Y_0+Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_m)](Y_0+Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_m)$$

$$Y_0=\frac{\Gamma\beta gn}{1/\tau_p-\Gamma g(n-n_T)[1-\varepsilon(Y_0+Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_m)]}$$

$$Y_k=\frac{X_k/\tau_c{}^2}{\{1/\tau_p-\Gamma g(n-n_T)[1-\varepsilon(Y_0+Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_m)]\}^2+4[(d\Omega/dn)(n-n_0)+\Delta\omega_k]^2} \qquad (k=1,2,3,\cdots\cdots,m)$$

付録２　非線形利得効果に基づく双安定ＬＤのレート方程式(TE-TMモード変換)

TEおよびTMモードが存在するときのレート方程式は，付録１と類似の取扱いに従って次のように与えられる．

$$dn/dt=Q-n/\tau_s-G_E(n)[1-S_E(N_{0E}+N_E)-C_{EM}(N_{0M}+N_M)](N_{0E}+N_E)$$
$$-G_M(n)[1-S_M(N_{0M}+N_M)-C_{ME}(N_{0E}+N_E)](N_{0M}+N_M)$$

$$dN_{0E}/dt=-N_{0E}/\tau_{PE}+\Gamma_E G_E(n)[1-S_E(N_{0E}+N_E)-C_{EM}(N_{0M}+N_M)]N_{0E}+\Gamma_E\beta n/\tau_s$$

$$dN_{0M}/dt=-N_{0M}/\tau_{PM}+\Gamma_M G_M(n)[1-S_M(N_{0M}+N_M)-C_{ME}(N_{0E}+N_E)]N_{0M}+\Gamma_M\beta n/\tau_s$$

$$d\widetilde{E}_E/dt=-\widetilde{E}_E/2\tau_{PE}+\Gamma_E G_E(n)[1-S_E(N_{0E}+N_E)-C_{EM}(N_{0M}+N_M)]\widetilde{E}_E/2+j(\Omega_c-\omega_E)\widetilde{E}_E+E_{iE}/2\tau_c$$

$$d\widetilde{E}_M/dt=-\widetilde{E}_M/2\tau_{PM}+\Gamma_M G_M(n)[1-S_M(N_{0M}+N_M)-C_{ME}(N_{0E}+N_E)]\widetilde{E}_M/2+j(\Omega_c-\omega_M)\widetilde{E}_M+E_{iM}/2\tau_c$$

$$N_E=(\eta_E/\hbar\omega c)|\widetilde{E}_E|^2,\quad N_M=(\eta_M/\hbar\omega c)|\widetilde{E}_M|^2$$

ただし，添字のEおよびMは，それぞれTEおよびTMモードに対応し，N_{0E}およびN_{0M}は双安定ＬＤの自由発振光の光子密度，N_EおよびN_Mは入力光(角周波数ω_Eおよびω_M)波長における光子密度である．また，S_EおよびS_Mは自己飽和係数，C_{EM}およびC_{ME}は相互飽和係数である．

ここで，$G_E(n)=g_E(n-n_T)$，　$G_M(n)=G_M(n-n_T)$，　$\Omega_c(n)=\Omega(n_0)+(d\Omega/dn)(n-n_0)$，
$\Delta\omega_E=\Omega(n_0)-\omega_E$，　$\Delta\omega_M=\Omega(n_0)-\omega_M$ と置くとともに，$E_E=E_E\cdot\exp(j\phi_E)$，$E_M=E_M\cdot\exp(j\phi_M)$，さらに $N_s=1/g_E\tau_s$ で定義される飽和光子密度によって

$Y_{0E}=N_{0E}/N_S$，$Y_{0M}=N_{0M}/N_S$，$Y_E=N_E/N_S$，$Y_M=N_M/N_S$，$X_E=(\eta_E/\hbar\omega c)E_{iE}^2$，$X_M=(\eta_M/h\omega c)E_{iM}^2$

のように規格化すると，レート方程式は次のようになる。

$$dn/dt=Q-n/\tau_s-(n-n_T)[1-\varepsilon_E(Y_{0E}+Y_E)-\varepsilon_{EM}(Y_{0M}+Y_M)](Y_{0E}+Y_E)/\tau_s$$
$$-(g_M/g_E)(n-n_T)[1-\varepsilon_M(Y_{0M}+Y_M)-\varepsilon_{ME}(Y_{0E}+Y_E)](Y_{0M}+Y_M)/\tau_s$$

$$dY_{0E}/dt=-Y_{0E}/\tau_{PE}+\Gamma_E g_E(n-n_T)[1-\varepsilon_E(Y_{0E}+Y_E)-\varepsilon_{EM}(Y_{0M}+Y_M)]Y_{0E}+g_E\Gamma_E\beta n$$

$$dY_{0M}/dt=-Y_{0M}/\tau_{PM}+\Gamma_M g_M(n-n_T)[1-\varepsilon_M(Y_{0M}+Y_M)-\varepsilon_{ME}(Y_{0E}+Y_E)]Y_{0M}+g_E\Gamma_M\beta n$$

$$dY_E/dt=-Y_E/\tau_{PE}+\Gamma_E g_E(n-n_T)[1-\varepsilon_E(Y_{0E}+Y_E)-\varepsilon_{EM}(Y_{0M}+Y_M)]Y_E+(Y_E X_E)^{1/2}\cos\phi_E/\tau_c$$

$$d\phi_E/dt=(d\Omega/dn)(n-n_0)+\Delta\omega_E-(X_E/Y_E)^{1/2}\sin\phi_E/2\tau_c$$

$$dY_M/dt=-Y_M/2\tau_{PM}+\Gamma_M g_M(n-n_T)[1-\varepsilon_M(Y_{0M}+Y_M)-\varepsilon_{ME}(Y_{0E}+Y_E)]Y_M+(Y_M X_M)^{1/2}\cos\phi_M/\tau_c$$

$$d\phi_M/dt=(d\Omega/dn)(n-n_0)+\Delta\omega_M-(X_M/Y_M)^{1/2}\sin\phi_M/2\tau_c$$

定常状態の式は時間微分項を0と置いて求められ，本文に記載の式(1)～(3)のようになる．

輻射科学研究会資料
(RS 94-14)

多段大振幅動作光変調とその応用

佐藤能久　　井筒雅之

大阪大学　基礎工学部

平成６年１２月１６日

於：大阪大学　基礎工学部

1. あらまし

光変調器は, 光波の位相あるいは強度を電気信号によって変化させるものであり, 光通信, 光センシング, 光情報処理等の分野における重要な光デバイスである. 光導波路を用いる導波型光変調器は, 小型軽量化, 高効率化, 安定化が実現でき, また, 同一基板上に多くの光素子を集積することが可能となる. さらに, 集積化光変調器は光ファイバとの適合性がよいという利点を有する. 光波のもつ大容量情報の伝送の可能性と, 光ファイバのもつ軽量, 低損失, 広帯域等の特性を生かして, 集積化光変調器を光ファイバ通信システム等へ応用する研究が, 盛んに進められている.

現在の光ファイバ通信システムにおいては, 信号を光波に乗せる方法として, 半導体レーザの直接変調方式が簡便であり多用されているが, 数 GHz 以上の高周波領域では, 半導体レーザーのチャーピングが発生するという問題がある. そのため、これにかわるものとして外部変調器の利用が検討されている. 10GHz 以上の高速動作ができる外部変調器として, $LiNbO_3$ を用いたものが有力視されている.$LiNbO_3$は, 電気光学効果が 100GHz 以上の高速応答性を有すること,Ti 熱拡散により低損失な光導波路が容易に得られる, という利点を持つためである. 光変調を, 光波とマイクロ波を同方向に進行させる進行波動作によって行う場合, 強誘電体材料である $LiNbO_3$を基板に使用すると, 光波とマイクロ波の速度差のために, 帯域幅が制限される. このため, 光波とマイクロ波の速度非整合を低減して, 進行波形光変調器の高効率化を実現する研究が数多くなされてきた. 変調用電極の間の基板表面に溝を設け

るもの [1], シールド電極を用いて速度整合を行うもの [2][3][4] などが報告されている.

また光波とマイクロ波の速度差により生じる位相差を電極配置を変化させて補償する方法を使用した報告も数多くなされている [5][6][7][8]. このように, さらなる高速動作をする変調器の開発は重要である. しかし, それに加えて, デバイスとしての使用目的を限り, 実用的で高効率の素子に適用する研究開発の重要性も増している.

大振幅動作光変調を行うことで, 変調信号周波数よりも高い周波数で光変調が行える. これにより, これまでに研究されて実用化へ達しようとしている比較的低速度の変調器を使い, 超高速変調が可能となる. 比較的低速で, 動作安定性が高く, 安価な光変調器によって大振幅動作光変調を行うことで, 使用目的は限られるが, 超高速光変調が可能となる.

また, 光変調器を多段に接続して、光変調を行うことも興味深い. それぞれの変調信号を適当に調整することで、出力光強度変化を、ある程度望む波形にすることができる.

以上の観点に基づき, 本論文では, 多段大振幅光変調に着目して行なった研究結果について報告する. 大振幅動作する光変調器を複数個, 直列接続して, バイアスや位相差を適当に設定することで, 出力光強度のパルス間隔をそろえることが可能であることを示す. これを応用して, 超高速光変調や極短パルス発生に応用できることを述べる.

2. 大振幅動作光変調の原理

マッハツェンダー型強度光変調器の入力変調信号と入力光強度, 出力光強度の関係を考える. これらの関係は次のように表される [9].

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2V_\pi} V_{\text{signal}} \right) \tag{1}$$

ただし, 入力変調信号電圧を V_{signal}, 入力光強度を I_{in}, 出力光強度 I_{out}, 強度光変調器の半波長電圧を V_πとする. ここで,V_{signal}は次のように時間変化するとする.

$$V_{\text{signal}} = V_a \sin(\omega t + \phi) + V_b \tag{2}$$

ただし, 入力変調信号の角周波数をω, 初期位相をϕ, 振幅を V_a, バイアス電圧を V_bとする.

まず, 振幅が小さい入力変調信号を, 強度光変調器に印加することを考える. 印加する入力変調信号 V_{signal}の振幅 V_aは V_πより小さい. ただし,V_πは半波長電圧である. バイアス電圧は $V_b = V_\pi/2$ とし, 動作点を入出力特性の直線部分になるように設定する. このときの入出力光の特性を図 1 に示す.

次に, 大振幅動作光変調を考える. ここでは, 振幅が V_πより大きい入力変調信号を, 光変調器に印加することを意味する. 印加する入力変調信号を $V_{\text{signal}} = V_a \sin(\omega t)$ としたときの入出力光の特性を図 2 に示す. ただし $V_a = 3V_\pi$としている.

図 1 と図 2 の入力光と出力光の強度比を比較する. 入力変調信号の 1 周期の間に, 図 1 では出力光強度にピークが 1 つあり, 図 2 ではピー

クが6つある．大きい振幅の入力変調信号を印加した図2のほうが，出力光は高い周波数成分を含むことがわかる．

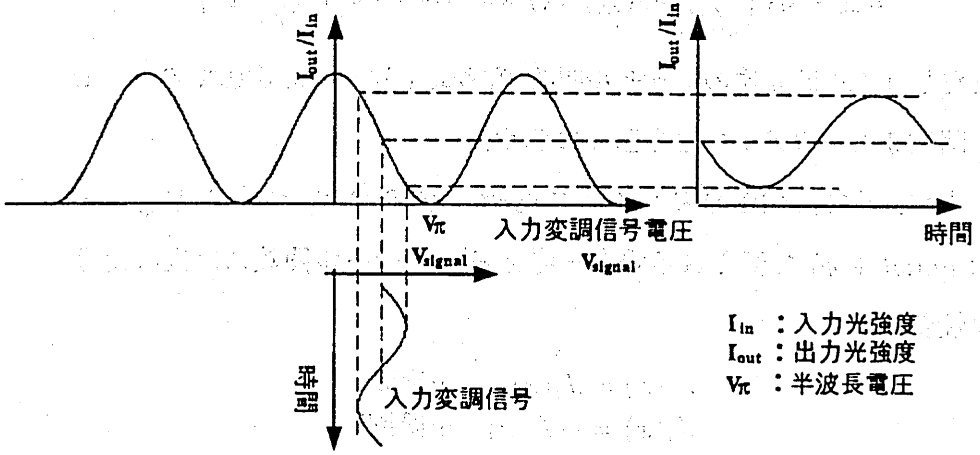


図 1 変調動作例 1

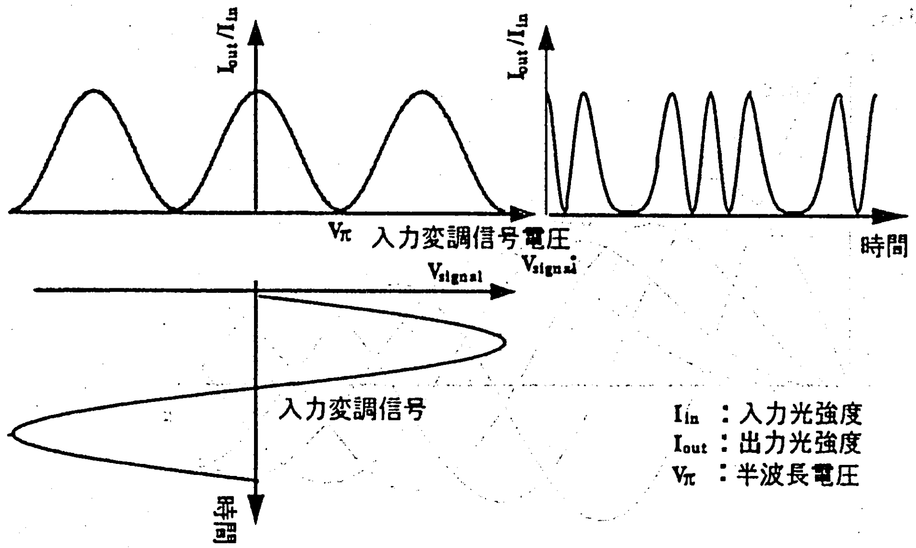


図 2 変調動作例 2

出力光強度 I_{out} を与える式 (1) を, 三角関数で展開すると次のようになる [9].

$$I_{\mathrm{out}} = I_{\mathrm{in}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(\frac{\pi}{2V_\pi} V_a) \cos(n\omega t + n\phi + \frac{\pi}{2V_\pi} V_b) \right)^2 \tag{3}$$

ただし, $\mathrm{J}_n(x)$ は n 次のベッセル関数である. 0 次から 4 次までのベッセル関数 $\mathrm{J}_n(x)$ のグラフをを図 3 に示す.

まず, 入力変調信号のバイアス電圧が 0 のとき, つまり $V_{\mathrm{signal}} = V_a \sin(\omega t + \phi)$ で表される場合を考える. ベッセル関数には次のような性質がある.

$$\begin{aligned} J_n(x) &= J_n(x) \quad &\text{n:奇数} \\ J_n(x) &= -J_n(x) \quad &\text{n:偶数} \end{aligned}$$

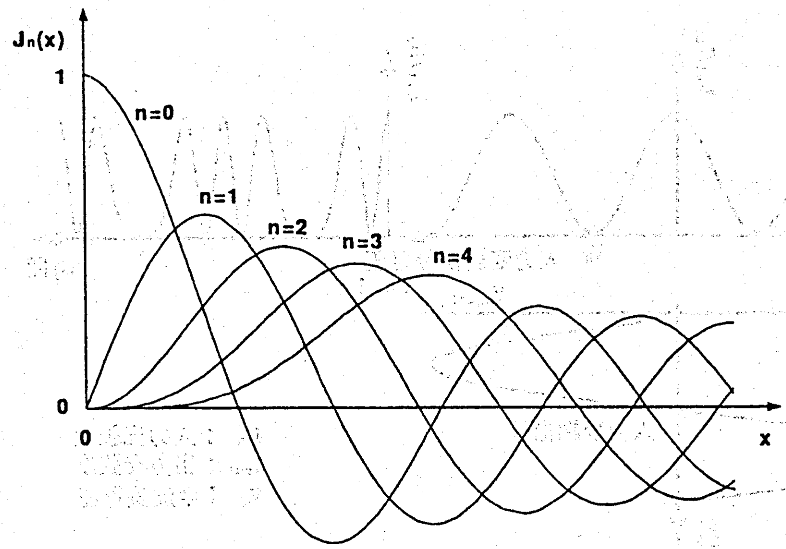


図 3 ベッセル関数

これを用いると出力光強度の式は次のようになる.

$$I_{\mathrm{out}} = I_{\mathrm{in}}\left(\mathrm{J}_0\left(\frac{\pi}{2V_\pi}V_a\right)2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{J}_{2n}\left(\frac{\pi}{2V_\pi}V_a\right)\cos(2n\omega t + n\phi)\right)^2 \quad (4)$$

この式から, 入力変調信号のバイアス電圧が 0 であるときは, 出力光強度の平方根は入力変調信号周波数の偶数倍の周波数成分の和であることがわかる.

つぎに, 入力変調信号の動作点を半波長電圧に設定する場合を考える. つまり, 入力変調信号のバイアス電圧が V_π で, $V_{\mathrm{signal}} = V_a\sin(\omega t+\phi)+V_\pi$ と表される場合である. このとき, 出力光強度は次式のようになる.

$$I_o = I_i\left(2\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{J}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2V_\pi}V_a\right)\sin\left((2n+1)\,\omega t + n\phi\right)\right)^2 \quad (5)$$

この式から, 入力変調信号のバイアス電圧が V_π であるときは, 出力光は入力変調信号の周波数の奇数倍の周波数成分を持つことがわかる.

出力光が高い周波数成分を持つ条件を考える. 式 (3) で出力光の角周波数成分 $n\omega$ の振幅は $\mathrm{J}_n((\pi/2V_\pi)V_a)$ である. 出力光が高い周波数成分を持つためには, 大きな n の値に対して, $\mathrm{J}_n((\pi/2V_\pi)V_a)$ が大きい値であることが必要である. 図 3 をみると, 高次のベッセル関数ほど, ベッセル関数が最大値となる x の値は, 大きくなる. つまり入力変調信号の振幅 V_a が大きいほど, 出力光は高い周波数成分を持つ.

大振幅動作光変調を行なうと, 出力光強度は, 入力変調周波数より高い周波数成分を含む. これをうまく利用すれば, 低い変調周波数で変調器を動作させて, 高い周波数の変調を行なうことができる.

3. 多段大振幅光変調を用いた超高速光変調

大振幅動作光変調を，一定周期で動作する切り替えスイッチに応用することを考える.

超高速動作する一定時間切り替えスイッチの概念図を図4に示す. これは入力光をある一定時間で２つの出力チャンネルに分けるものである. この切り替えスイッチは，時分割多重方式を用いる光通信に応用できる.

前の節でも述べたように，大振幅の入力変調信号で光変調を行なうと，出力光は高い周波数成分を含む. 式(3)をみると，入力変調信号の角周波数ωに対して，出力光はωの整数倍の角周波数成分を含むことがわかる.

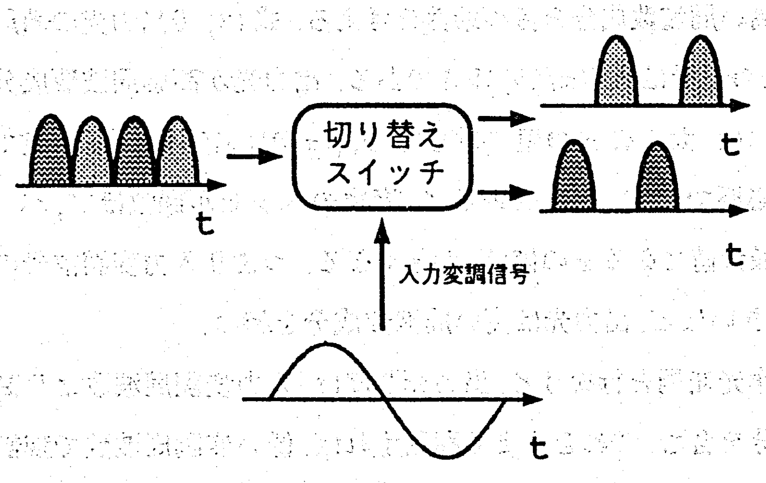


図4 一定時間で動作する切り替えスイッチ

入力変調信号の角周波数がωのとき，出力光の強度は次のように与えられるとする．

$$I_{\rm out} = I_{\rm in} \sin(m\omega t)^2 \tag{6}$$

ただし m は整数である．このときの，光変調器の出力光の例を図 5 に示す．この例では $m = 2$ としている．

このように，光入出力強度の関係が式 (6) で与えられるとすると，入力変調周波数の 2m 倍の周波数で光スイッチングが行なえることになる．

すなわち，光変調器への入力変調信号の角周波数 ω よりも高い角周波数 $2m\omega$でスイッチングが可能となる．

しかし，大振幅動作光変調を行なうだけでは，出力光は式 (6) や図 5 のように一定周期の変化とはならない．それは出力光強度の平方根が,$m\omega$ 以外の角周波数成分も含むからである．この問題を解決する方法として強度光変調器を多段接続することを新しく提案する．

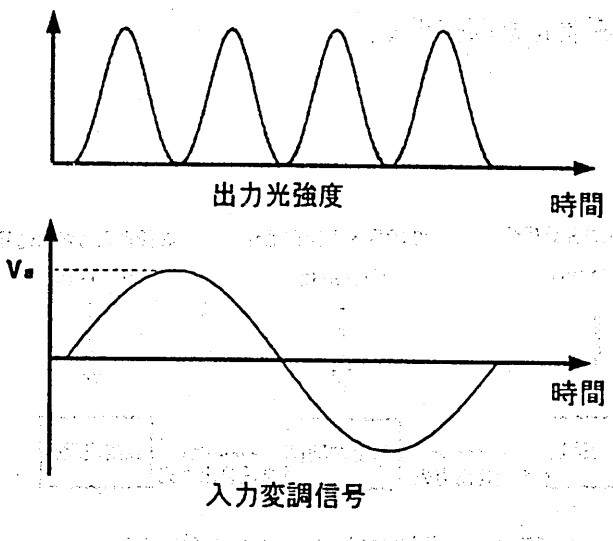


図 5 スイッチの波形の例

光変調器を図 6 のように直列に多段接続する. この図の場合, 強度光変調器を 3 段に接続し, 各光変調器に与える入力変調信号を, それぞれ, V_{signal1},V_{signal2},V_{signal3} としている. このように多段に光変調器を接続して変調を行なうことで, 出力光が式 (6) に近づくようにすることができる.

強度光変調器を n 個, 縦続に接続し,m 段目の光変調器に印加する入力変調信号を $V_{\mathrm{signal}m}$ とする. 出力光は次のようになる.

$$I_{\mathrm{out}} = I_{\mathrm{in}} \cos^2(V_{\mathrm{signal1}}) \cos^2(V_{\mathrm{signal2}}) \cdots \cos^2(V_{\mathrm{signal}n}) \quad (7)$$

ただし,

$$V_{\mathrm{signal}m} = V_m \sin(\omega_m t + \phi_m) + V_{bm} \quad (8)$$

また,m は整数である.

強度光変調器を多段接続して, 大振幅動作させたときの出力光, 式 (7) が $(\sin(l\omega t))^2$(l:整数) となるような, 式 (8) の $V_{\mathrm{signal}m}$ の条件や変調器を直列接続する数 n を探査する.

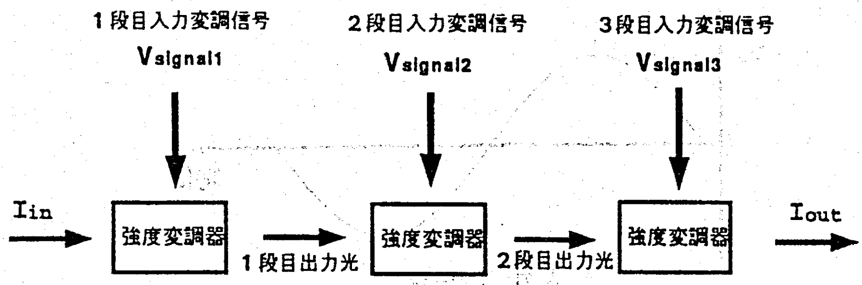


図 6 多段接続した強度光変調器

2 段接続

まずは強度光変調器を 2 段接続する場合について考える．1 段目の変調器に V_{signal1}，2 段目に V_{signal2} の変調信号を印加する．すると出力光は式 (7) から

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{out}} &= I_{\mathrm{in}} I_{\mathrm{out1}} I_{\mathrm{out2}} && (9)\\
I_{\mathrm{out1}} &= \cos^2(V_{\mathrm{signal1}}) && (10)\\
I_{\mathrm{out2}} &= \cos^2(V_{\mathrm{signal2}}) && (11)\\
V_{\mathrm{signal1}} &= V_{a1}\sin(\omega t) + V_{b1} && (12)\\
V_{\mathrm{signal2}} &= V_{a2}\sin(\omega t + \phi) + V_{b2} && (13)
\end{aligned}
$$

となる．ただし簡単のため 2 つの入力変調信号の角周波数は同じとしている．I_{out1}は 1 段目の変調器を独立に用いた場合の出力光強度で，I_{out2} は 2 段目の変調器を独立に用いた場合の出力光強度である．

2 段接続 4 倍波動作

入力変調信号の周波数の 4 倍の周波数でスイッチングをするように，出力光のピークが入力変調信号 1 周期あたり 4 つあるものを考える．これには，$I_{\mathrm{out}} = (\sin(2\omega t))^2$となればいい．そこで，$\sqrt{I_{out}} = \sqrt{I_{\mathrm{out1}}}\sqrt{I_{\mathrm{out2}}} = \sin(2\omega t)$ になるように V_{signal1}と V_{signal2}を決める．

前節の式 (3) を用いて$\sqrt{I_{\mathrm{out1}}}$と$\sqrt{I_{\mathrm{out2}}}$を展開すると次式のようになる．

$$
\sqrt{I_{\mathrm{out1}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n\left(\frac{\pi}{2V_\pi}V_{a1}\right)\cos\left(n\omega t + \frac{\pi}{2V_\pi}V_{b1}\right) \qquad (14)
$$

$$\sqrt{I_{\text{out2}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(\frac{\pi}{2V_\pi}V_{a2})\cos(n\omega t + n\phi + \frac{\pi}{2V_\pi}V_{b2}) \quad (15)$$

$\sqrt{I_{\text{out1}}}$も$\sqrt{I_{\text{out2}}}$も三角関数の和だから，$\sqrt{I_{out}} = \sqrt{I_{\text{out1}}}\sqrt{I_{\text{out1}}}$は三角関数の積となる.

変数がθ_1の三角関数と, 変数がθ_2の三角関数との積は, 変数が$\theta_1+\theta_2$の三角関数と変数が$\theta_1-\theta_2$の三角関数の和になる. 例えば

$$2\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) = \sin(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1-\theta_2) \quad (16)$$

となる. つまり,1 段目の強度光変調器の平方根 $\sqrt{I_{\text{out1}}}$の周波数成分と,2 段目の強度光変調器の平方根 $\sqrt{I_{\text{out2}}}$ の周波数成分との和周波と差周波が, 強度光変調器を 2 段接続した出力光の平方根$\sqrt{I_{\text{out}}}$の周波数成分となる.

$\sqrt{I_{out}} = \sqrt{I_{\text{out1}}}\sqrt{I_{\text{out1}}} = \sin(2\omega t) = 2\sin(\omega t)\cos(\omega t)$ だから,$\sqrt{I_{\text{out1}}}$の主な周波数成分が $\sin(\omega t)$,$\sqrt{I_{\text{out2}}}$の主な周波数成分が $\cos(\omega t)$ となればよい. 式 (5) から, 入力変調信号を

$$V_{\text{signal1}} = V_{a1}\sin(\omega t) + V_\pi \quad (17)$$
$$V_{\text{signal2}} = V_{a2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + V_\pi \quad (18)$$

とすればよいことがわかる. また, 大きな出力振幅が得られるよう, V_{a1},V_{a2}は,$\mathrm{J}_1((\pi/2V_\pi)V_{a1})$, $\mathrm{J}_1((\pi/2V_\pi)V_{a1})$ が大きな値となるように選ぶ. 図 3 のベッセル関数のグラフから,1 次のベッセル関数が最大値を持つ付近を選んで,$V_{a1} = V_{a2} = 1.4V_\pi$とした.

このときの, 数値演算した, 入力変調信号 V_{a1}と, 1 段目の光変調器の出力光強度 I_{out1}と, 出力光強度 I_{out}とを図 7 に示す. I_{out1}はピークの幅

がそろっていないが,2 段目の光変調器を通り,再度,強度光変調を受けることで,ピーク幅がそろうようになることがわかる.

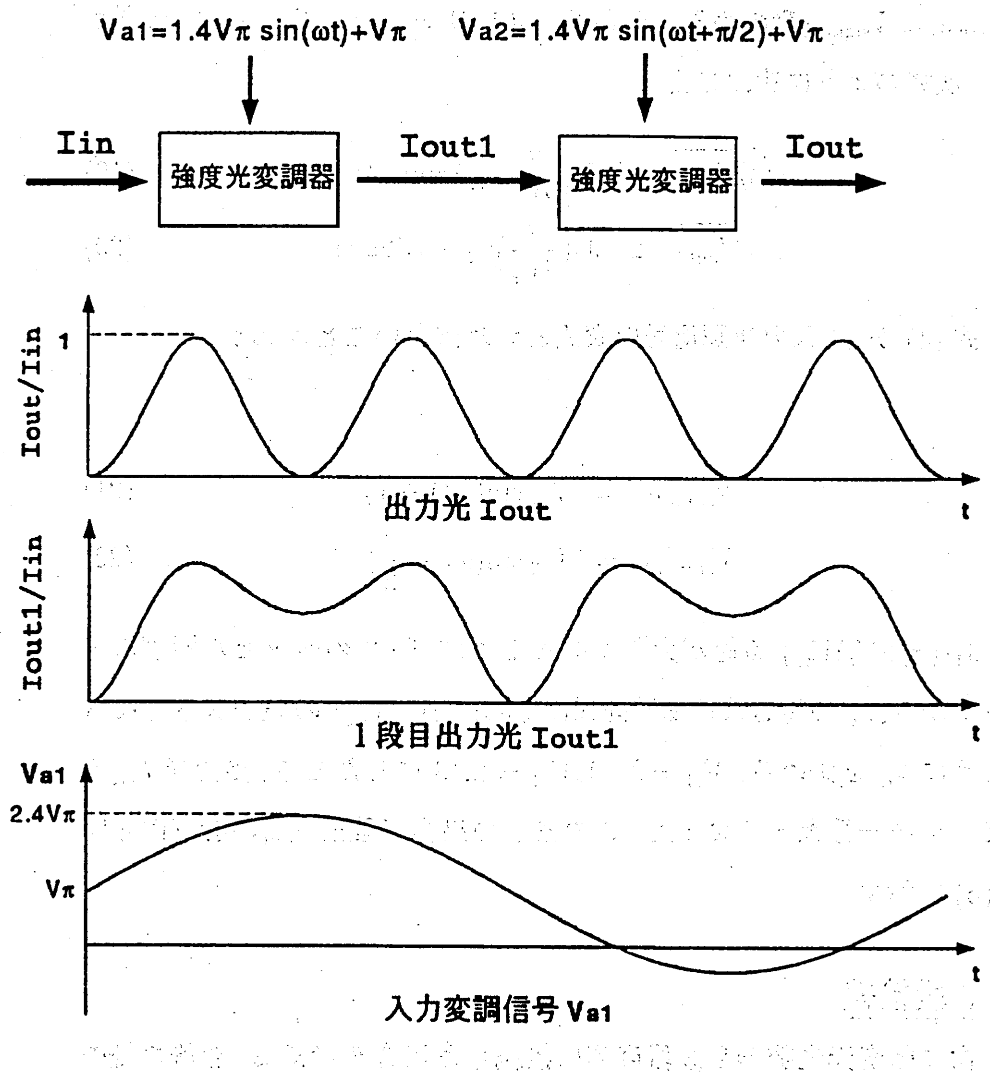


図 7 2 段接続 4 倍周波の出力光強度

2 段接続 6 倍波動作

次に強度光変調器を 2 段に接続して, 入力変調周波数の 6 倍の周波数でスイッチングを行なう場合を考える. 出力光が $I_{\mathrm{out}} = (cos(3\omega t))^2$ となればいい. そこで$\sqrt{I_{out}} = \sqrt{I_{\mathrm{out1}}}\sqrt{I_{\mathrm{out2}}} = \cos(3\omega t)$ になるように V_{signal1} と V_{signal2}を決める. $\sin(\omega t)\cos(2\omega t) = \sin(3\omega t) - sin(\omega t)$ だから, 次式のように選ぶとよい.

$$\sqrt{I_{\mathrm{out1}}} \simeq \mathrm{J}_1(\frac{\pi}{2V_\pi}V_{a1})\sin(\omega t) \tag{19}$$

$$\sqrt{I_{\mathrm{out2}}} \simeq \mathrm{J}_2(\frac{\pi}{2V_\pi}V_{a2})\cos(2\omega t) \tag{20}$$

式 (4) から, 入力変調信号は次式とすればいいことがわかる.

$$V_{signal1} = V_{a1}\sin(\omega t) + V_\pi \tag{21}$$

$$V_{signal2} = V_{a2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{22}$$

$\mathrm{J}_1((\pi/2V_\pi)V_{a1})$ の値が大きくなるように, 図 3 のベッセル関数のグラフから,V_{a1}の値を決める. 同様に,$\mathrm{J}_2((\pi/2V_\pi)V_{a2})$ の値が大きくなるように V_{a2}を決める. $V_{a1} = 1.33, V_{a2} = 2.13$ にしたとき, 出力光 I_{out}のピークが一番大きくなった. このときの出力光強度 I_{out}の計算例を図 8(b) に示す.

3 段接続

次に強度光変調器を,3 段直列に接続した場合を考える. 2 段接続のときにおこなったように, 各段の変調器の入力変調信号の振幅, 位相, バイアス電圧を全て変えたとする. そして, 各段の出力光を三角関数に展

開して,和周波と差周波を考えることを,3段接続にもおこなうと,項の数が多いので,難しくなる.

そこでここでは,3段ある各変調器の入力変調信号の振幅とバイアス電圧は変えずに位相のみを変えることにした. そして1段目と2段目の位相差を$\pi/3$として,2段目と3段目の位相差を$\pi/3$となるようにした. つまり,入力変調信号を次のようにした.

$$V_{signal1} = V_a \sin(\omega t) + V_b \tag{23}$$

$$V_{signal2} = V_a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + V_b \tag{24}$$

$$V_{signal3} = V_a \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + V_b \tag{25}$$

V_bが0のときとV_πの2つの場合で,V_aを変化させて,出力光のピーク間隔がそろい,ピークが大きいものを探した. その結果,$V_a = 2.3V_\pi, V_b = 0$のときの出力光は,入力変調周波数の6倍の周波数でスイッチングすることがわかった. 図8(c)に出力光強度の計算例を示す.

4段接続

次に強度光変調器を,4段直列に接続した場合を考える. 3段接続したときと同じように,各変調器の入力変調信号の振幅とバイアス電圧は変えずに位相のみを変えた. 入力変調信号を次のようにした.

$$V_{signal1} = V_a \sin(\omega t) + V_b \tag{26}$$

$$V_{signal2} = V_a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + V_b \tag{27}$$

$$V_{signal3} = V_a \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{4}\right) + V_b \quad (28)$$

$$V_{signal4} = V_a \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + V_b \quad (29)$$

V_bが0のときとV_πの2つの場合で,V_aを変化させて, 出力光のピーク間隔がそろい,ピークが大きいものを探した. その結果$V_a = 3.2V_\pi$,$V_b = V_\pi$のときの出力光は, 入力変調周波数の8倍の周波数でスイッチングすることがわかった. 図8(d)に出力光強度の計算例を示す.

これまでに,4種類の出力光の波形を考えてきた. これらをまとめて図8に示す. またこれらの波形を出力する, 多段直列接続の段数, 入力変調信号のパラメーターを表1に示す.

表1 パルス間隔一定になる直列接続のパラメーター

図	変調器段数	入力変調信号	ピークの入出力光強度比	出力光強度周期
図8(a)	2	$1.4V_\pi \sin(\omega t) + V_\pi$ $1.4V_\pi \sin(\omega t + \pi/2) + V_\pi$	1	4ω
図8(b)	2	$1.3V_\pi \sin(\omega t) + V_\pi$ $2.1V_\pi \sin(\omega t + \pi/2)$	0.73	6ω
図8(c)	3	$2.3V_\pi \sin(\omega t)$ $2.3V_\pi \sin(\omega t + \pi/3)$ $2.3V_\pi \sin(\omega t) + 2\pi/3$	1	6ω
図8(d)	4	$3.2V_\pi \sin(\omega t) + V_\pi$ $3.2V_\pi \sin(\omega t + \pi/4) + V_\pi$ $3.2V_\pi \sin(\omega t + 2\pi/4) + V_\pi$ $3.2V_\pi \sin(\omega t + 3\pi/4) + V_\pi$	0.75	8ω

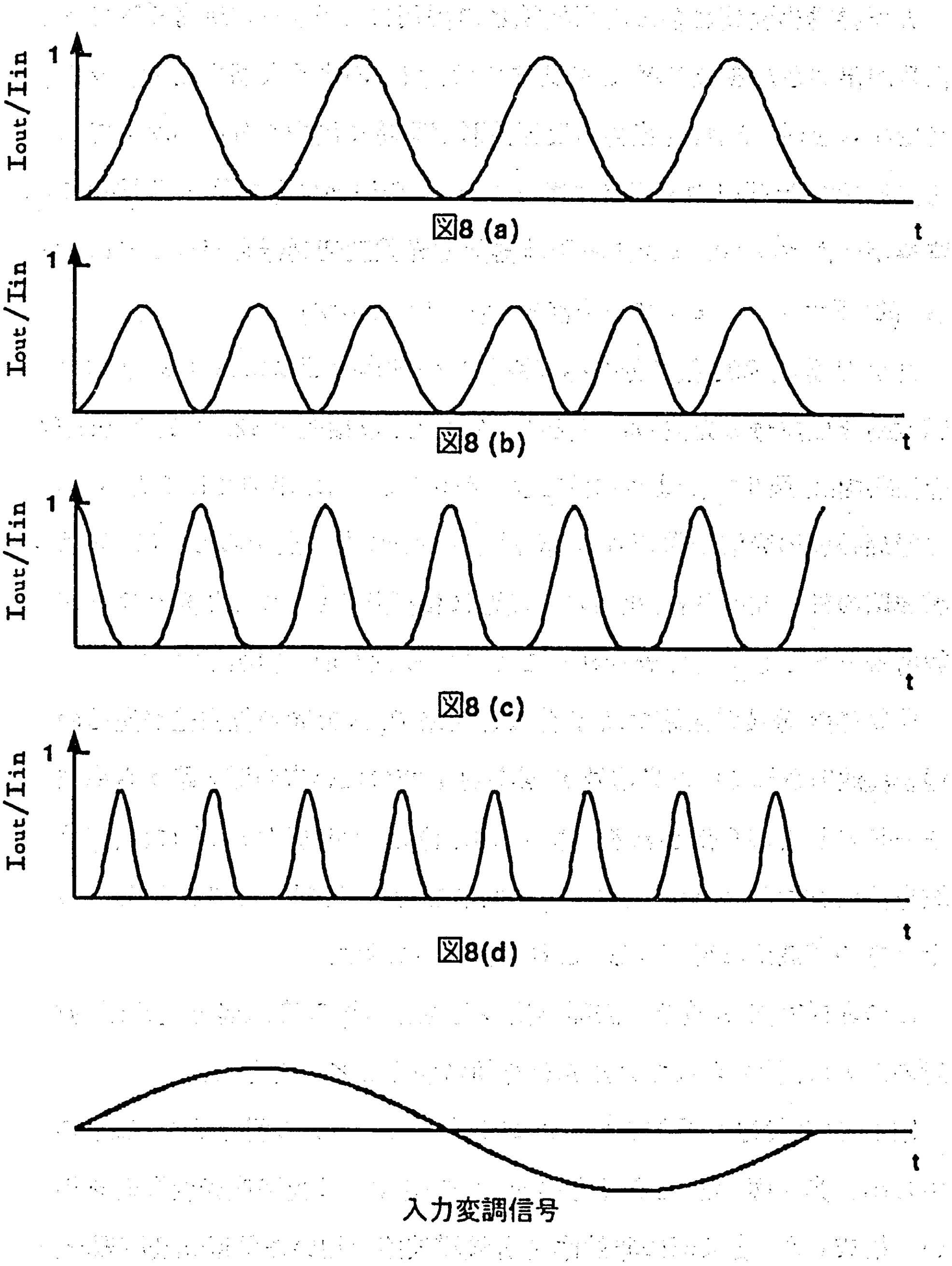


図 8 一定周期切り替え波形

大振幅動作変調と多段直列接続との併用により, 一定時間間隔で光信号が出力されるのだが, このままでは, 図4のような切替えスイッチとはならない. それは, 出力の反転波形が同時に出力されないからである. そこで, 反転出力を同時に得るために, 合波部に非対称X分岐導波路を用いたマッハツェンダー干渉器計型光強度変調器を使うことにする. (以下マッハツェンダー干渉器計をMZと略す)

まず,Y分岐導波路,X分岐導波路[10]の動作を簡単に述べる. 2本の導波路を伝搬する光波の電界を E_1, E_2 とし, 位相差を ϕ とする. Y分岐導波路では, 図9(a)のように位相差 ϕ が0のときは, 出力として E_1+E_2 の電界振幅の光波が得られる. 位相差 ϕ が π つまり逆相のときは, 光は導波路の外に放射され, 出力の導波路に伝搬しない. つまり光パワーが放射モードとして捨て去られることになる(図9(b)参照).

非対称X分岐導波路では,Y分岐導波路で, 入力光の位相差が逆相の場合に放射されていた光信号が, 非対称分岐の細い方の導波路から導波モードとして取り出される. もちろん, 位相差が同相の場合には,Y分岐導波路と同じように, E_1+E_2 の振幅を持つ光信号が, 非対称分岐の太い方の導波路に得られる. これを図10に示す.[11]

この非対称X分岐を合波部に使ったMZ型強度変調器を使えば, 放射のために, 捨てられていた光を有効に使うことができる.

図11に非対称X分岐を用いた切り替えスイッチの例を示す. 表1の中の出力光が図8(a)となるものを, 導波型MZ型光強度光変調器を用いて構成した. 合波部に非対称X分岐導波路を用いた強度光変調器を, 2段に接続している.

MZ型光強度変調器の合波部をY分岐導波路で構成した場合は, 光

信号の一部が放射モードとして捨て去られていた．この捨て去られていた光信号は，1段目と2段目のMZ型強度光変調器の合波部に非対称X分岐導波路を用いることで，それぞれの細い方の導波路に伝搬する．これらの2つの細い方の導波路に伝搬した光信号は，Y分岐導波路で足しあわされる．そのため，放射モードとして捨て去られる光信号はなくなり，図11のような2つの出力光が得られる．

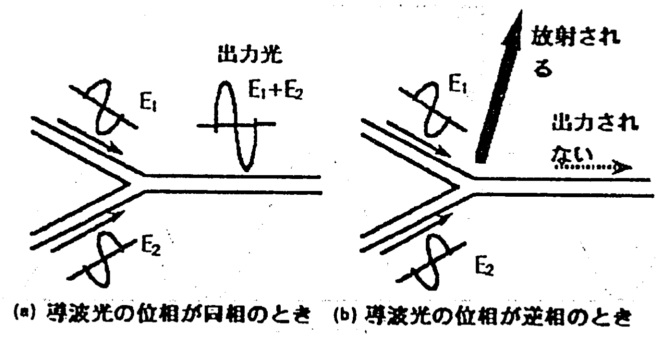


図9 Y分岐導波路

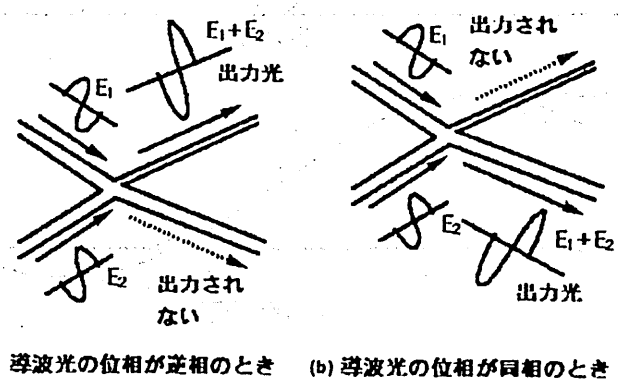


図10 非対称X分岐導波路

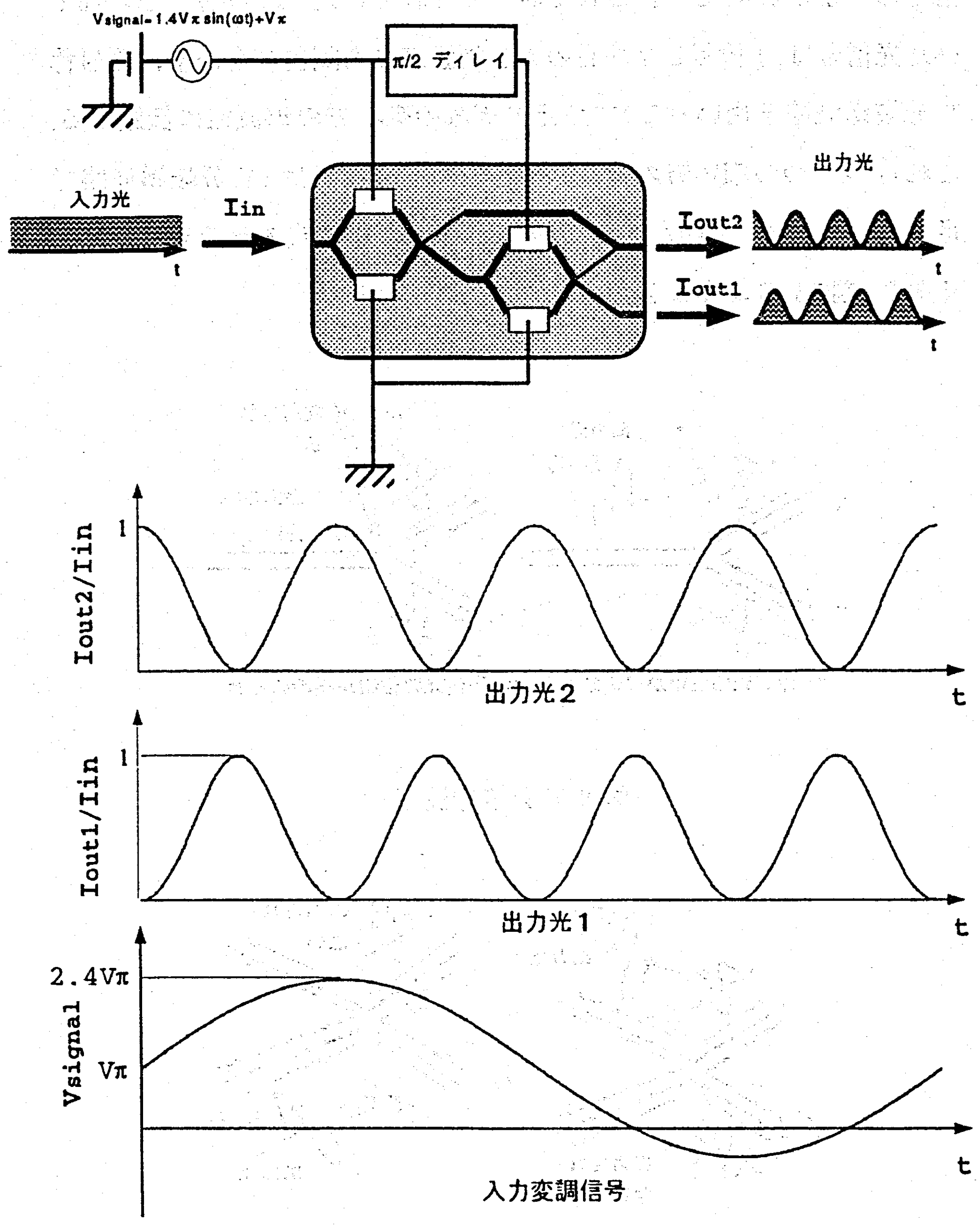


図 11 2段直列接続切替えスイッチ

4. 多段大振幅光変調を用いた極短パルス発生

つぎに，極短パルス発生への，多段大振幅光変調の応用について述べる．

前に述べたように，多段大振幅変調により，間隔や幅のそろっているパルス列をつくり出すことが可能となる．例えば，先ほど考えた超高速切り替えスイッチの波形である図 8 も，一種のパルス列と考えることができるが，このままではデューティー比が小さい．そこで，デューティ比の大きな光パルス列を作る方法を考えることとする．

理想的なパルスは，デルタ関数$\delta(x)$ であらわされると考える場合がある。デルタ関数$\delta(x)$ のフーリエ変換 $F(x)$ は，$F(x) = 1$ である．つまり，理想的なパルスは均一に全ての周波数成分を持つといえる。前節で述べたように，入力変調信号の振幅を大きくすればするほど，変調された出力光は，高い周波数成分を含むようになるので，短パルスを作ることができる可能性がある．

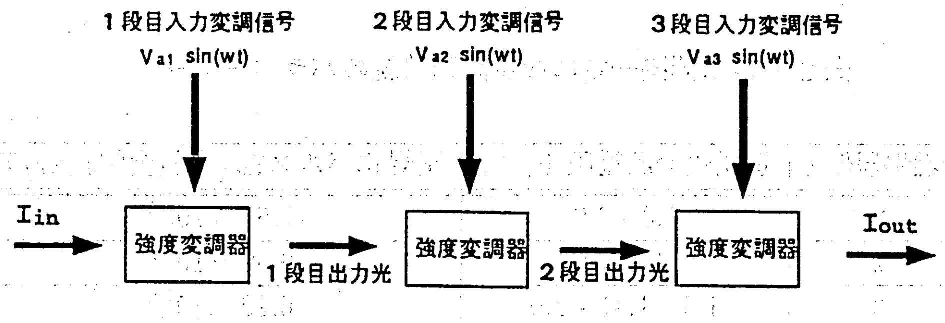


図 12 極短パルス発生模式図

パルス発生では, 簡便のために, 直列に接続する各段において, 印加する入力変調信号の振幅のみを変化し, 位相とバイアスは一定とする. 図 12 に模式図を示す. 変調器を n 段直列に接続し, m 番目の変調器に印加する変調信号電圧を $V_{am}\sin(\omega t) + V_b$ とする. V_{am}は m 段目に印加する変調信号電圧振幅である. このとき, n 個の変調器全体の出力光と入力光の関係は, 次式で表される.

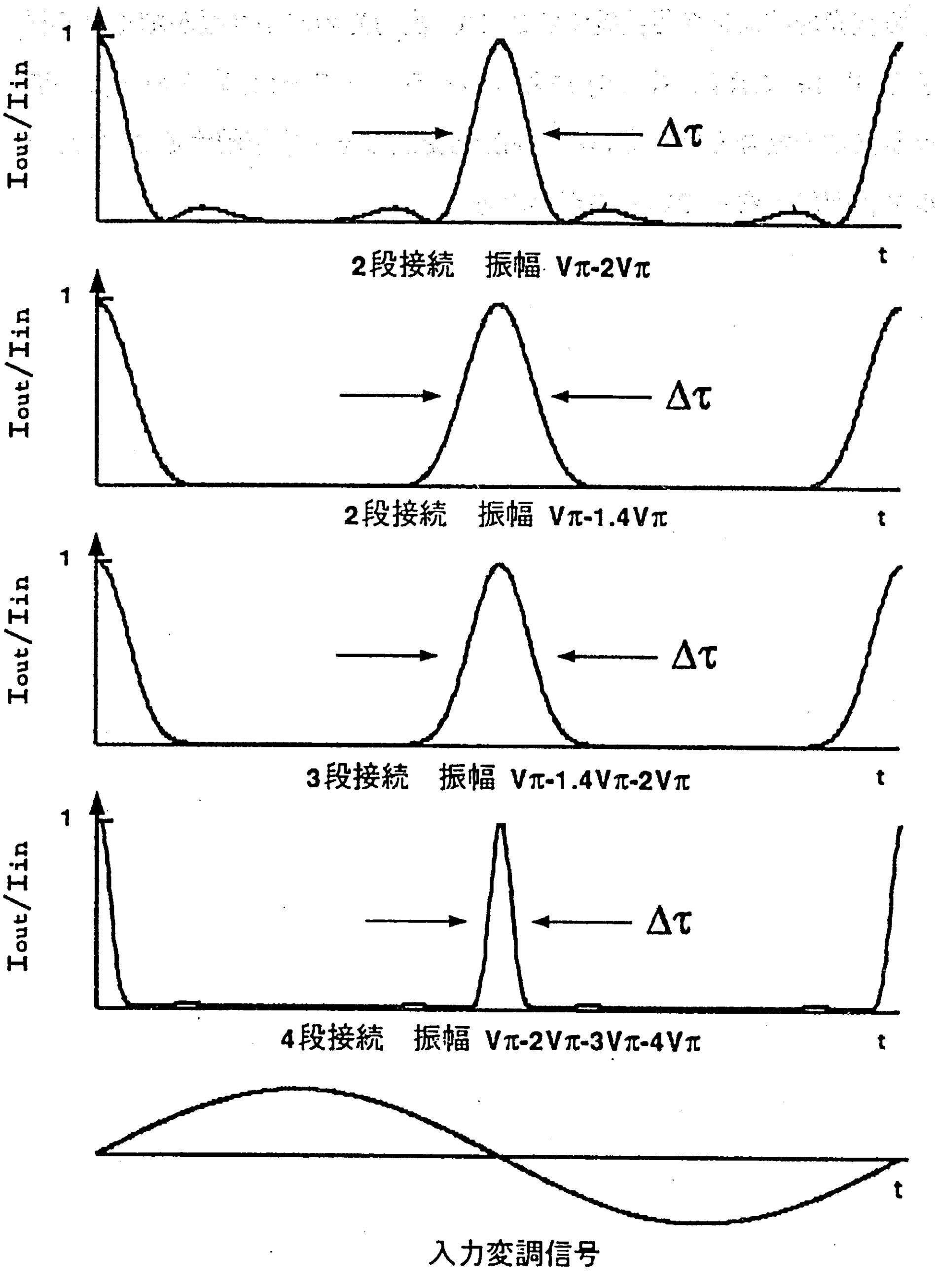
$$I_{out} = I_{in}\cos^2(V_{a1}\sin(\omega t))\cos^2(V_{a2}\sin(\omega t))\cos^2(V_{a3}\sin(\omega t))\cdots \quad (30)$$

直列接続の段数として $n = 2, 3, 4$. 各段の振幅は, V_{am} とし, パルス間隔が等しく, また, パルス幅が小さいものを数値演算により探査した. その結果の一部を n, V_a, V_b およびパルス幅の関係として表 2 に示す. ただし表中の V_π は各段を構成する光強度変調器の半波長電圧である. また, これらの出力光波形を数値演算したものを図 13 に示す. なお出力パルスのくりかえし周波数はすべて 2ωである.

表 2 パルス間隔一定になる直列接続のパラメーター

変調器段数	正規化変調電圧 V_a/V_π	正規化パルス幅 (半値全幅) $\Delta\tau/T$
2	1.0 - 2.0	7.63×10^{-2}
2	1.0 - 1.41	9.32×10^{-2}
3	1.0 - 1.41 - 2.0	6.22×10^{-2}
4	1.0 - 2.0 - 3.0 - 4.0	3.39×10^{-2}

T:入力変調信号周期



1
Iout/Iin
Δτ
t
2段接続　振幅 Vπ-2Vπ
2段接続　振幅 Vπ-1.4Vπ
3段接続　振幅 Vπ-1.4Vπ-2Vπ
4段接続　振幅 Vπ-2Vπ-3Vπ-4Vπ
入力変調信号

図 13 極短パルス波形

強度光変調器を多段接続することで, 出力光のパルス幅が細くなる様子を, 図 14 に示す. 式 (30) におけるパラメーターは, 表 2 の 4 段の変調器段数の場合を選んでいる. 強度光変調器を多段接続することで, パルス幅が細くなっていくのがわかる.

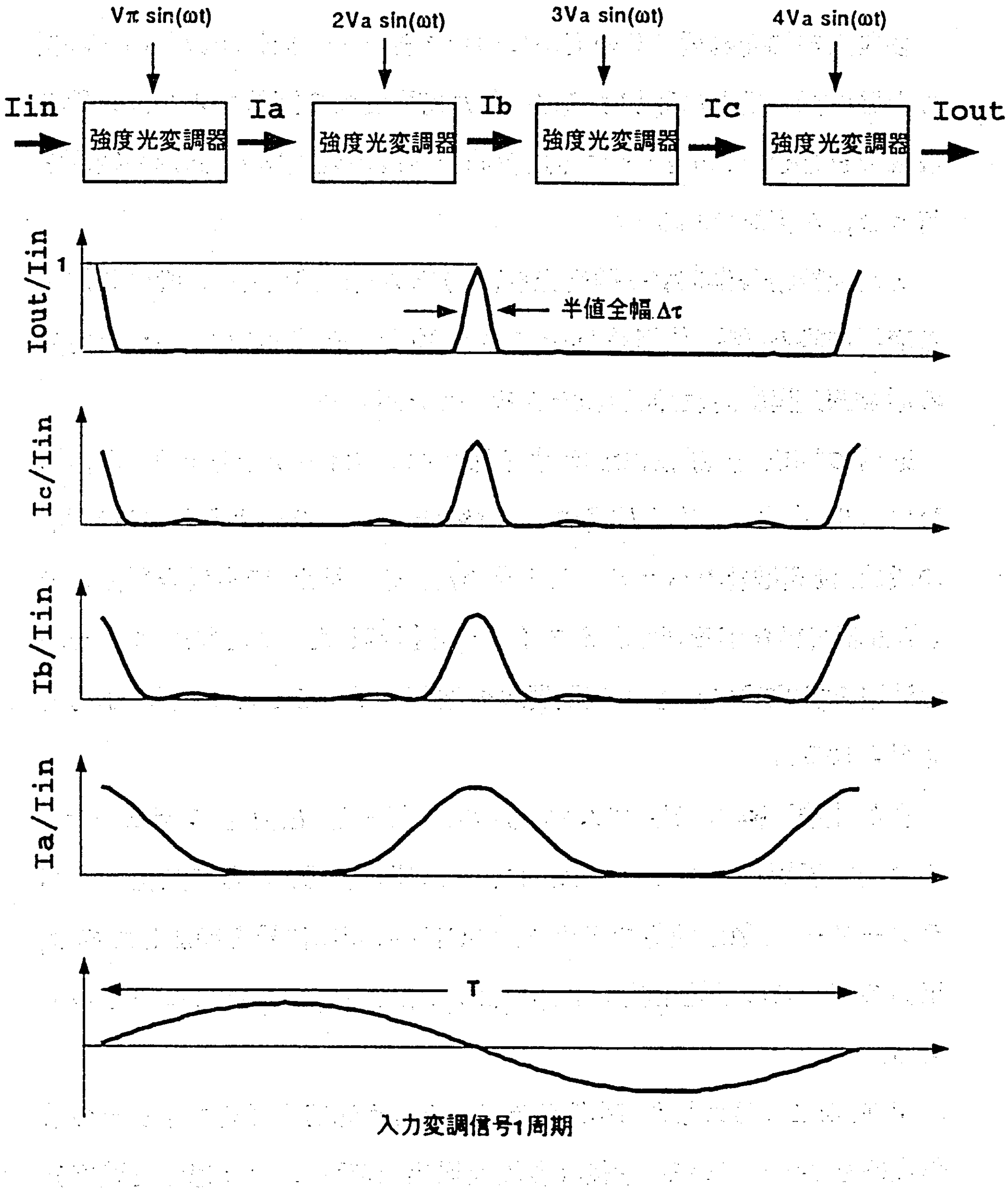


図 14 4 段の光変調器の極短パルス波形

5. むすび

多段大振幅光変調とその応用について述べた. 振幅が大きい変調信号を強度光変調器に印加すると, 出力光強度は変調信号より高い周波数成分を含む. これを用いて, 比較的低速度の変調器で, 高速の変調を行うことが可能である.

また大振幅動作をする強度光変調器を多段に接続し, 各段に印加する変調信号の振幅, 位相差, バイアスを適当に調整することで, 出力光の形をある程度, 望む波形にできることを示した.

応用として, 一定周期で動作する切り替えスイッチを考えた. 数値演算により, 出力光が変調信号の整数倍のピークを持つような, 光変調器の段数, 変調信号のパラメータを求めた. その結果, 変調信号周波数の4倍,6倍で動作する切り替えスイッチを提案した. また非対称X分岐導波路を, 導波型MZ型光変調器の合波部に用いることで, 反転出力光も得られる.

また, 極短パルス発生についても考察を行った. 出力光が, デューティ比の高い極短パルスとなるように, 変調器の段数, 入力変調信号のパラメーターを, 数値演算で求めた. 20GHzの変調信号を印加した場合, 出力のパルスの半値全幅が, 1.7[ps], 3.1[ps], 4.7[ps], 3.8[ps]となるものである.

現在, ここに考察した, 超高速光変調を行う光切り替えスイッチの試作実験をすすめている. 今後は多段大振幅光変調に, より適した強度光変調器の設計などが課題である.

参考文献

[1] M.Haga , M.Izutsu and T.Sueta , "$LiNbO_3$ Traveling-Wave Light-Modulator/Switch with an Etched Groove" ,IEEE J.Quantum Electron., QE-14, pp.838-892, 1978

[2] K.Noguchi and K.Kawano , "PROPOSAL FOR Ti:$LiNbO_3$ OPTICAL MODULATOR WITH MODULATION BANDWIDTH OF MORE THAN 150GHZ", Electron. Lett. , vol.28, No.18, pp1759-pp1761, 1992

[3] K.Noguchi , O.Mitomi , K.Kawano ,and M.Yanagihabashi , "Highly Efficient 40-GHz Bandwidth Ti:$LiNbO_3$ Optical Modulator Employing Ridge Structure", IEEE Photonics Tech. Lett. , vol.5, No.1, pp52-pp54, 1993

[4] K.Kawano , "High-Speed Shielded Velocity-Matched Ti:$LiNbO_3$ Optical Modulator" IEEE J.Quantum Electron. , vol.29, No.9, pp2466-pp2475, 1993

[5] D.W.Dolfi,M.Nazarathy and R.L.Jungerman, "40GHz ELECTRO-OPTIC MODULATOR WITH 7.5V DRIVEVOLTAGE" , Electron. Lett. , vol24 , No.9 , pp529-530 , 1981

[6] Rod C.Alferness , Steven K.Korotoky ,and Enrique A.J.Marcatili , "Velocity-Matching Techniques for Integrated Optic Traveling

Wave Switch / Modulators" , IEEE J.Quantum Electron. ; QE-20 , pp301-309 , 1984

[7] D.Erasme , D.A.Humphreys , A.G.Roddie , and M.G.F.Wilson , "Design and Performance of Phase Reversal Traveling Wave Modulators", J.LIGHTWAVE TECHNOLOGY , vol6 , NO.6 , pp933-936 , 1988

[8] James H. Schaffner and Robert R. Hayes , "Velocity-Matching in Millimeter Wave Integrated Optic Modulators With Periodic Electrodes" , J. Lightwave Tech. , vol12 , NO.3 , pp503-511 , 1994

[9] 末田, 井筒, " 光変調器", 光導波エレクトロニクス; 光導波エレクトロニクス成果研究委員会編 , pp397-416

[10] M.Izutsu,A.Enokihara and T Sueta, "Optical-Waveguide Hybrid Coupler", Optics Lett., vol7, no.11, pp549-551, 1982

[11] Hiroshi Haga , Masayuki Izutsu and Tadasi Sueta, "An Integrated 1 ×4 High-Speed Optical Switch and Its Applications to a Time Demultiplexer " J. Lightwave Tech. , vol.LT-3, NO.1, pp116-120, 1985

RS 94-15

層間反射を用いたグレーティングカップラの回折効率制御の理論的検討

木戸 智　藤井 孝佳　裹 升吾　栖原 敏明　西原 浩

大阪大学工学部電子工学科

平成６年１２月１６日

輻射科学研究会

1. まえがき

光学デバイス/システムの大幅な高機能化を実現する光集積回路デバイス[1)]において、グレーティングカップラは、空間光を薄膜導波路内に導いたり、導波光を空間中に取り出すための基本構成素子[2)]であり、また、そのグレーティングパターンを変形させて波面変換機能を付加することができ[3)]、デバイス実用化の点からも非常に有用である。例えば、集光機能を有するグレーティングカップラ[4−10)]を用いた光集積ピックアップ[11−13)]、光集積センサヘッド[14,15)]、光集積プリンタヘッド[16)]や光集積スペクトルアナライザ[17)]などが提案され、検討されている。このようなグレーティングカップラは、複雑なグレーティングパターンを有し、電子ビーム直接描画法により作製される。一方、これまでの光集積回路デバイスには主として誘電体光導波路が用いられていたが、光源の一体集積化を含むさらなる高機能化を目指して、半導体光導波路とくにGaAs系光導波路へのグレーティングカップラの作製が試みられるようになってきた[10,18)]。

半導体光導波路は屈折率が高く、したがって、周期の短いグレーティングを必要とし、作製には最先端のパターニング/加工技術が不可欠である。例えば、1次回折を利用するグレーティングカップラ[10,18)]の場合、$0.2\mu m$程度の微細周期が必要である。高次回折を利用すれば、このような要求を回避できる。例えば、3次回折を利用すれば、グレーティング周期は1次回折の場合の3倍となる。通常、高次回折光の回折効率は非常に低いが、これを改善できれば、デバイスへの応用が期待される。そこで、本稿では、GaAs系半導体光導波路への応用を対象として、3次回折を利用する高効率グレーティングカップラ[19,20)]を設計し、その実現可能性を検討する。まず、高屈折率導波路中の3次回折グレーティングカップラの特徴について述べ、多層反射膜構造を用いた効率改善方法を提案する。次に、構造パラメータ設計のための解析モデル/手法について触れ、設計例を示すとともに、作製誤差の影響等を検討し、高効率グレーティングカップラの可能性を議論する。また、集光グレーティングカップラの可能性も示す。

2. 高屈折率導波路/基板における 3次グレーティングカップラ

図1に、GaAs基板導波路に3次回折により空気側に放射光を取り出すグレーティングカップラを構成した場合の基本構造を示す。この構造内をx方向に伝搬定数β_0をもつ導波光が伝搬するとき、グレーティングの回折により、波数のx方向成分が

$$\beta_n = \beta_0 - nK \qquad (1)$$

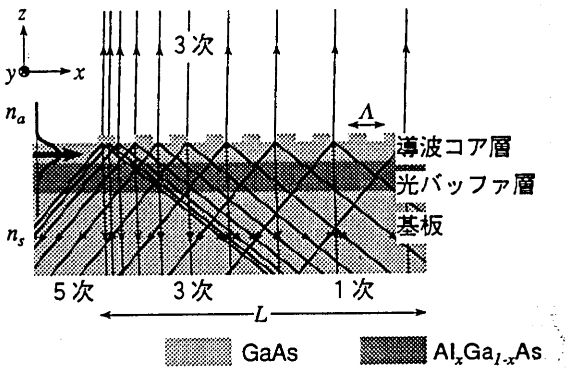


図1 グレーティング付導波路

で表されるn次の空間高調波(回折波)が生ずる。図2にそれらの回折光波およびグレーティングの関係をベクトルダイアグラムで示す。Kはグレーティングベクトルであり、上半円および下半円の半径は、それぞれ空気の屈折率n_aおよびGaAs基板の屈折率n_sに真空中の波数k_0を乗じたものである。この場合、基板と空気の屈折率差が大きいため、3次以外の回折では基板側放射は生じるが、空気側放射は生じないという特徴がある。各放射への結合は、低次の回折によるものほど大きい。また、線幅/周期が1/2の矩形の断面形状を有するグレーティングを用いることにすると、グレーティング領域内での比誘電率のフーリエ成分が、偶数次では0となることから、2次、4次、6次の放射はほとんど生じない。すなわち、入射導波光のほとんどが基板側1次放射光に結合し、残りが3次の空気側と基板側放射光に配分されることになる。そこで、空気側3次回折を高効率化するために、基板側1次および3次回折を抑圧することを考察した。

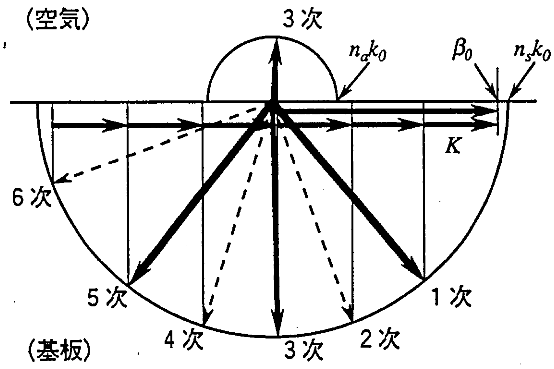


図2 ベクトルダイアグラム

3. 多層反射膜導入による高効率化

基板側放射を抑圧するために、導波路下部にそれらの放射を反射する多層膜構造を導入することを考える。図3に、提案する反射多層膜構造を有するグレーティングカップラの構成を示す。GaAs/空気グレーティング層、GaAs 導波コア層、$Al_xGa_{1-x}As$ 光バッファ層で構成する基本構造の下に、基板側1次放射反射膜、位相調整層、基板側3次放射反射膜を挿入した構造である。反射膜は屈折率の異なる GaAs と

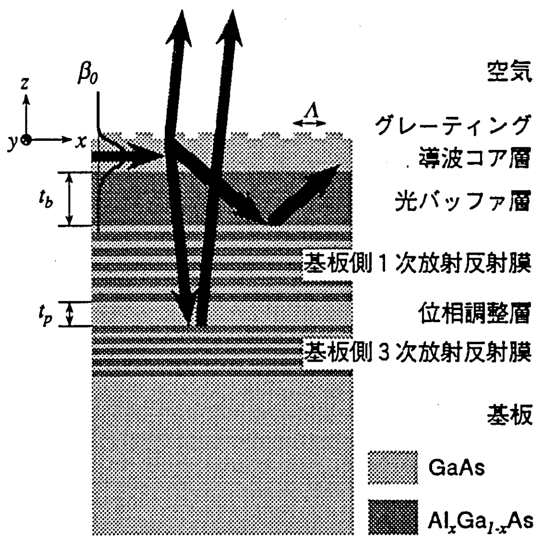


図3 多層反射膜構造を有するグレーティングカップラ

$Al_xGa_{1-x}As$ を交互に積層させて作製する。ペア数を増すほど高反射率が得られる。

1次放射に対しては、空気側は反射率100% の反射器、基板側は反射膜のペア数で決まる反射率をもつ反射器となっており、一種の共振器構造を形成している。したがって、光バッファ層厚を最適化し反共振的条件で使用すれば、基板側1次放射を最小とすることができる。

また、3次放射光に対しては、2ビーム結合状況における効率改善策として用いられる、基板による反射[8,10]、誘電体多層膜による反射[21]、あるいは金属膜による反射[22]等と同様の手法を適用する。すなわち、位相調整層厚を最適化して、基板側3次放射の反射光を空気側3次放射光に同位相で重畳させるようにすれば、空気側3次放射を強めることができる。

4. 解析モデル/手法

設計するグレーティングの導波路基本構造について述べる。波長は $0.9\mu m$ とした。図3における、$Al_xGa_{1-x}As$ の Al の組成は $x = 0.7$ とし、全て同一とした。GaAs、$Al_{0.7}Ga_{0.3}As$ の屈折率はそれぞれ 3.60、3.17 である。GaAs 導波コア層厚は $0.3\mu m$ で、TE 単一モード導波路とした。空気側3次回折光の放射角が、垂直軸に対し1°となるようにした。この時、放射角が0°となる条件は避けた。なぜならば、その場合には6次回折により、入射導波モード–逆進導波モード結合が生じ、3次回折光へのパワー分配比が極端に低下するからである。

各放射への結合の強さは、放射損失係数 α で表され、これを用いると、カップラの全長Lにわたっての空気側3次放射へのパワー変換効率 $P_3^{(a)}$ は次式で表される。

$$P_3^{(a)} = \eta_3^{(a)}\{1 - exp(-2\alpha_r L)\} \tag{2}$$

$$\eta_3^{(a)} = \alpha_3^{(a)}/\alpha_r = \alpha_3^{(a)}/\sum_{n,i}\alpha_n^{(i)} \tag{3}$$

この $\eta_3^{(a)}$ は、空気側3次放射光が全放射光に含まれる割合を示すパワー分配比であり、(3) 式で示されるように、空気側3次放射損失係数 $\alpha_3^{(a)}$ と各放射損失係数のすべての和 α_r との比で与えられる。(2) 式からわかるように、$1/\alpha_r$ はグレーティングカップラの実効開口を表しており、今回の設計では $1/\alpha_r = 1mm$ とした。また、空気側3次放射のパワー分配比 $\eta_3^{(a)}$ として、80%が得られるように設計した。

回折効率のパラメータ依存性を計算するための解析手法として、フロッケの定理 (Floquet's theorem) に基づく空間高調波展開により、複素伝搬定数を求める数値的方法[23]と、伝送回路論的手法を用いる摂動論による解法[24]を併用した。基本的には前者の厳密解法を用いた。後者は近似法であるが、物理的イメージを把握しやすく、計算時間が前者に比べ大幅に短縮され、またグレーティング深さが導波コア層厚に比べて十分薄い場合には、非常に良い精度が得られる。

5. 多層反射膜と位相調整層の設計

まず、1次反射膜の効果を調べるため、3次反射膜がなく1次反射膜のみの構造を考える。反射膜を構成する GaAs、$Al_{0.7}Ga_{0.3}As$ 各層厚は1往復の位相差が π となるように決め、それぞれ $0.081\mu m$、$0.104\mu m$ とした。ペア数を7、グレーティング深さを $0.016\mu m$ とした。実効屈折率は3.45となり、空気側3次放射の放射角が1°となるようにグレーティング周期を $0.786\mu m$ とした。このときの各放射損失係数 $\alpha_n^{(i)}$ の光バッファ層厚依存性を図4に示す。各放射損失係数は、光波の干渉により周期的に変化している。基板側1次放射損失係数 $\alpha_1^{(s)}$ は、共振器構造を反映して共振条件となるところでは、鋭いピークがみられる。基板側5次放射損失係数 $\alpha_5^{(s)}$ も似たような振る舞いをしている。これは、基板側1次と基板側5次の放射角がほぼ

等しいため、1 次反射膜が、5 次反射膜としても働いていることを示している。光バッファ層厚を共振点と共振点のちょうど中間の $t_b = 0.901\mu m$ にとれば、反共振的状態となり、基板側 1 次放射光を最小に抑圧できる。反射膜がない場合、$\alpha_1^{(s)}$ は $1.6mm^{-1}$ という大きな値であるが、光バッファ層厚を t_b にとることで図のように $0.05mm^{-1}$ にまで抑圧されている。しかし、このままでは空気側 3 次の放射損失係数 $\alpha_3^{(a)}$ が小さいままである。

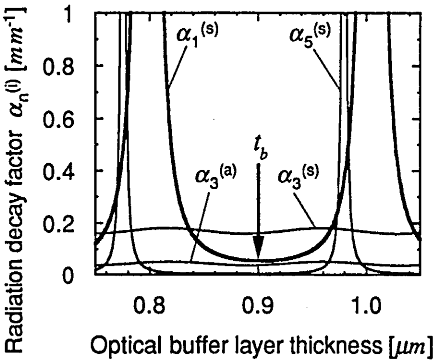


図 4　$\alpha_n^{(i)}$ の光バッファ層厚依存性

そこで、1 次反射膜の下に、さらに 3 次反射膜をつけ加えた場合を考える。$t_b = 0.901\mu m$ とする。3 次反射膜の GaAs 層厚は $0.062\mu m$、$Al_{0.7}Ga_{0.3}As$ 層厚は $0.071\mu m$ となる。ペア数を 13 とした。このときの各放射損失係数 $\alpha_n^{(i)}$ の位相調整層厚依存性を図 5 に示す。位相調整層厚が $t_p = 0.068\mu m$ では、基板側 3 次放射光の反射光が空気側 3 次放射光と同位相となり、その結果、空気側 3 次放射光が増加している。3 次反射膜がない場合では、空気側 3 次の放射損失係数 $\alpha_3^{(a)}$ は $0.05mm^{-1}$ という小さな値であったが、位相調整層厚を $t_p = 0.068\mu m$ にとることで $0.8mm^{-1}$ にまで増大されている。図 6 に全放射損失係数 α_r と空気側 3 次放射のパワー分配比 $\eta_3^{(a)}$ の位相調整層厚依存性を示す。この結果、位相調整層厚を t_p にとることで、$\alpha_r = 1mm^{-1}$ 、$\eta_3^{(a)} = 80\%$ とすることができる。

反射膜がない場合の $\eta_3^{(a)}$ が 2.6% であることを考えると、多層反射膜構造を導入し、膜厚を最適化することで、回折効率が画期的に改善できることが理論的に確かめられた。

6. 作製誤差の回折効率への影響

6.1　線幅/周期依存性

上述の議論では、グレーティングの線幅/周期 a は 0.5 としており、偶数次放射の影響はほとんどない。しかし、実際の作製においては線幅の制御は難しく、作製誤差により a が 0.5 からずれると、偶数次放射が生じる。そこでこの影響を調べた。各放射損失係数

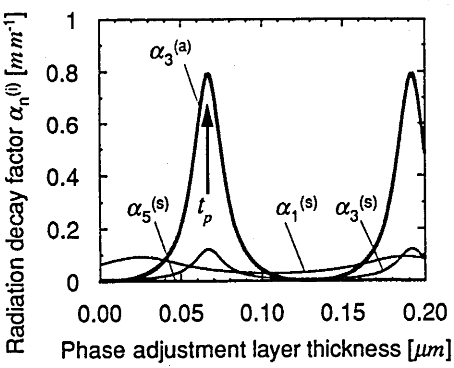


図 5　$\alpha_n^{(i)}$ の位相調整層厚依存性

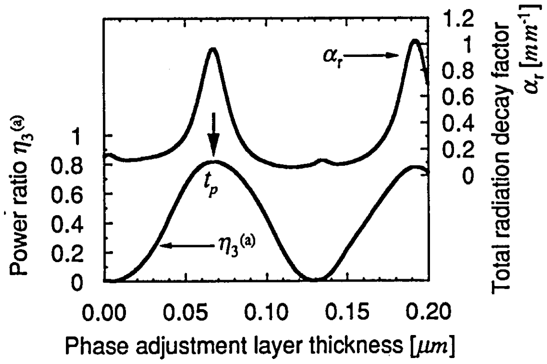


図 6　α_r と $\eta_3^{(a)}$ の位相調整層厚依存性

$\alpha_n^{(i)}$ の a 依存性を図 7 に示す。a が 0.5 からずれると、グレーティングの高調波成分の大きさの変化に応じて、基板側 1 次は少し増大がみられるがほとんど変化せず、空気側、基板側 3 次放射は共に減少し、加えて偶数次放射が現れる。α_r と $\eta_3^{(a)}$ の a 依存性を図 8 に示す。α_r は少し低下しているが、3 次回折の空気側、基板側放射は同様に減少するので $\eta_3^{(a)}$ はほとんど変化せず、±10%の誤差でも 70%以上のパワー分配比が期待できる。

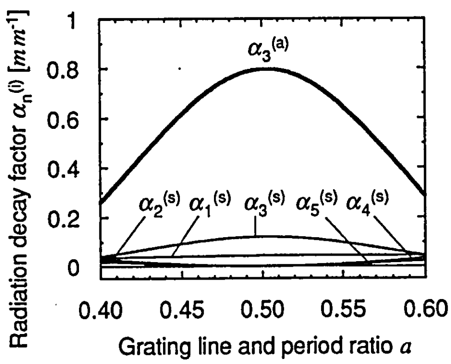


図 7　各放射損失係数 $\alpha_n^{(i)}$ の線幅/周期 a 依存性

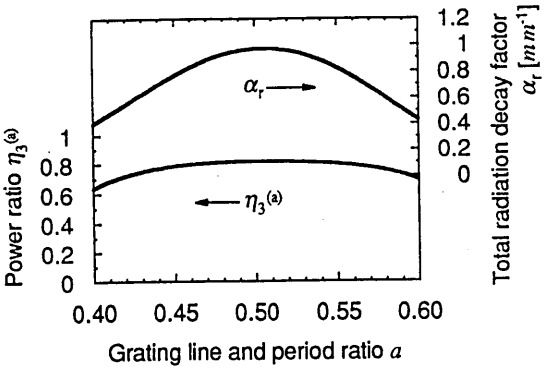


図 8　α_r と $\eta_3^{(a)}$ の線幅/周期 a 依存性

6.2　Al 組成比依存性

MBE によるエピタキシャル成長では、$Al_xGa_{1-x}As$ の Al の組成比 x は Ga と Al のフラックス比で制御される。組成比 x の必要な精度に対する知見を得るため、x 依存性を評価した。結果を図 9、10 に示す。$\alpha_1^{(s)}$ は増大、$\alpha_3^{(a)}$、$\alpha_3^{(s)}$ は共に減少し、$\eta_3^{(a)}$ が低下している。これは組成比が 0.7 からずれると、$Al_xGa_{1-x}As$ の屈折率が変化し、多層膜の反射率が低下するとともに、各層で実効光路長が変化するため

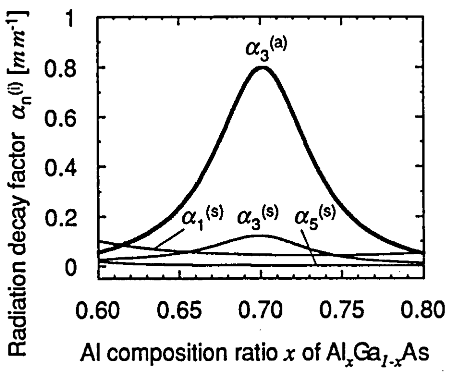


図 9　$\alpha_n^{(i)}$ の Al 組成比 x 依存性

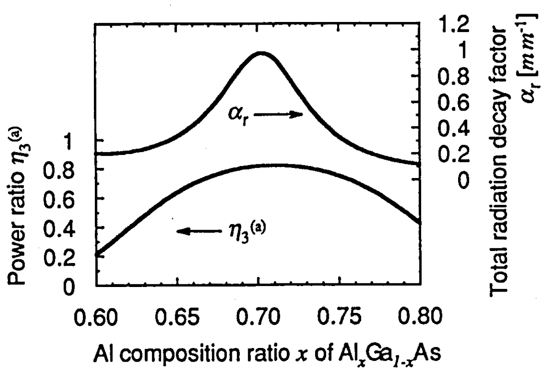


図 10　α_r と $\eta_3^{(a)}$ の Al 組成比 x 依存性

である。しかしながら、±5% の誤差でも 70%以上のパワー分配比が期待できる。

6.3　薄膜成長速度依存性

薄膜成長速度が一様に変化した場合に対応して、各層厚が設計値の r 倍となったときの依存性を評価した。結果を図 11 に示す。$r = 0.98, 1.02$ 付近と $r = 0.93, 1.07$ 付近に $\eta_3^{(a)}$ の急激な減少がみられる。これも組成比 x の依存性と同様、膜厚が設計値よりずれると、多層膜の反射率が低下するとともに、各層で実効光路長が変化するためである。$r = 0.98, 1.02$ 付近は空気側 3 次放射光の減少によるもの、$r = 0.93, 1.07$ 付近は基板側 1 次放射の増加によるものである。3 次回折の影響が 1 次回折よりも強く現れるが、これは 3 次反射膜の位置が 1 次反射膜に比べてグレーティング位置より離れているため、膜厚誤差に対し 1 次放射よりも敏感になることを示している。半値幅は ±1% であり、現在のエピタキシャル技術ではそれほど厳しいものではない。

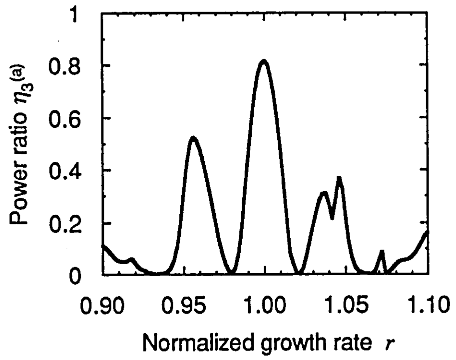


図 11　$\eta_3^{(a)}$ の規格化成長速度 r 依存性

7.　集光グレーティングカップラへの応用

高効率 3 次グレーティングカップラに集光機能を付加できるかどうかを検討した。集光機能を得るためには、開口内で周期を変化させて放射角度に分布を持たせる必要がある。そこで、3 次放射角が 15° で設計したグレーティングの α_r と $\eta_3^{(a)}$ の周期依存性を求めた。結果を図 12 に示す。ただし横軸は対応する出射角度 θ で示してある。$0° < \theta < 20°$ においては $\theta \simeq 2°$ 付近を除いてほぼフラットな特性が得られる。この $\theta \simeq 2°$ 付近では、5 次の回折光の共振条件が満たされ、鋭いピークまたはディップがみられる。$\theta > 20°$ では、θ が大きくなるにつれて α_r が徐々に低下し、$\theta \simeq 27°$ 付近で $0.3mm^{-1}$ 程度になっている。しかしながら、この領域は集光グレーティングカップラの開口内の前方に位置するため、むしろ出射ビームの指数関数的プロファイルを緩和することになる。

$\eta_3^{(a)}$ 60%以上を有効範囲とすると、出射角 3° ~ 27°までに対応する。これは、NA≃ 0.2 に相当する。

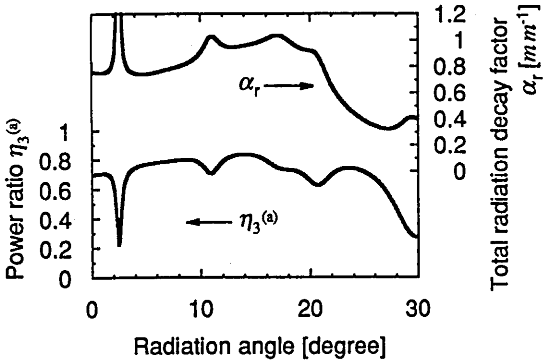


図 12 α_r と $\eta_3^{(a)}$ のグレーティング周期依存性

8. まとめ

高屈折率 GaAs 系半導体光導波路/基板への応用を対象として、3 次回折を利用するグレーティングカップラの高効率化を検討した。導波層下部への多層反射膜構造の導入による高効率 3 次グレーティングカップラを提案し、設計を行った。波長 0.9μm、$Al_xGa_{1-x}As$ の Al の組成比 $x = 0.7$ のもとで、反射膜がない場合に空気側 3 次パワー分配比が 2.6%という低い値であるのに対し、1 次反射膜 7 ペア、3 次反射膜 13 ペアを設けることにより、空気側 3 次パワー分配比 80%が期待できることを示した。線幅/周期、Al 組成、膜厚等の作製誤差の影響を検討し、十分作製可能であることを示した。さらに、集光グレーティングカップラへの応用を検討し、今回提案した構造において、NA≃ 0.2 程度の可能性を示した。素子の作製および実験による評価が今後の課題である。

参考文献

1) 西原浩　春名正光　栖原敏明　「光集積回路（改定増補版）」オーム社　1993 年
2) M. L. Dakss, L.Kuhn, P.F. Heidrich and B. A. Scott, "Grating coupler for efficient excitation of optical guided waves in thin films", Appl. Phys. Lett., vol. 16, no. 12, 1970.
3) T. Suhara and H. Nishihara, "Integrated optics components and devices using periodic structures", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-22, no. 6, pp. 845-867, 1986.
4) A. Katzir, A. C. Livanos, J. B. Shellan and A. Yariv, "Chirped gratings in ingtegrated optics", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-13, no. 4, pp. 296-304, 1977.
5) M. Miler and M. Skalsky, "Stigmatically focusing grating coupler", Electron. Lett., vol. 15, no. 10, pp. 275-276, 1979.
6) D. Heitmann and R. V. Pole, "Two-dimensional focusing holographic grating coupler", Appl. Phys. Lett., vol. 37, no. 7, pp. 585-587, 1980.
7) G. Hatakoshi, H. Fujima and K. Goto, "Waveguide grating lenses for optical couplers", Appl. Opt., vol. 23, no. 11, pp.1749-1753, 1984.
8) T. Suhara, H.Nishihara and J. Koyama, "High-performance focusing grating coupler fabricated by electron-beam writing," Topical Meet. Integrated and Guided-Wave Optics, ThD-4, Kissimmee, Apr. 24-27, 1984.
9) S. Ura, Y. Furukawa, T. Suhara and H. Nishihara, "Linearly focusing grating coupler for integrated-optic parallel pickup", J. Opt. Soc. Am. A, vol. 7, pp. 1759-1763, 1990.
10) T. Suhara, K. Okada, T. Saso and H. Nishihara, "Focusing grating couplers in AlGaAs optical waveguide", Photon. Technolo. Lett., vol. 4, no. 8, pp. 903-905, 1992.
11) S. Ura, T. Suhara, H. Nishihara, and J. Koyama, "An integrated-optic disk pickup device", J. Lightwave Technolo, vol. LT-4, pp. 913-918, 1986.
12) T. Suhara, H. Ishimaru, S. Ura and H. Nishihara, "Integration of detection optics for magnetooptical disk pickup", Trans. IEICE, vol. E73, pp. 110-115, 1990.
13) S. Ura, M. Shinohara, T. Suhara, and H. Nishihara , "An integrated-optic parallel data pickup device", Int'l Sympo. Opt. Memory 1991, 1C-4, Sapporo, October 1-4, 1991.
14) S. Ura, T. Suhara and H. Nishihara, "Integrated-optic interferometer position sensor", J. Lightwave Technol., vol. 7, pp. 270-273, 1989.
15) 裏升吾　篠原正幸　遠藤敏朗　栖原敏明　西原浩　"線集光グレーティングカップラを用いた光集積変位センサ"　電子情報通信学会論文誌 (C-I), vol.J77-C-I, no.5, pp.222-228, 1994.
16) T. Suhara, N. Nozaki and H. Nishihara, "An integrated acoustooptic printer head", Proc. ECIO 87, pp. 119-122, 1987.
17) 栖原敏明　原邦彦　西原浩　"集光グレーティングを用いた光集積スペクトルアナライザ"　レーザー研究, vol. 7, no. 1, pp. 22-31, 1989.
18) T. Hirata, M. Suehiro, M. Hihara, M. Dobashi and H. Hosomatsu, "Demonstration of a waveguide lens monolithically integrated with a laser diode by compositional disordering of a quantum well", Photon. Technolo. Lett., vol. 5, no. 6, pp. 698-700, 1993.
19) 木戸智　藤井孝佳　裏升吾　栖原敏明　西原浩　"3 次グレーティングカップラの 1 次回折抑圧による高効率化"　第 41 回応用物理学関係連合講演会, 30p-G-3, 1994.
20) S. Ura, S. Kido, T. Suhara and H. Nishihara, "Design of high efficiency 3rd order grating coupler in semiconductor waveguide", 5th Optoelectron. Conf., 15B4-2, Chiba, July 12-15, 1994.
21) R. L. Roncone, L. Li, K. A. Bates, J. J. Burke, L. Weisenbach, and B. J. J. Zelinski, "Design and fabrication of a single leakage-channel grating coupler", Appl. Opt., vol. 32, no. 24, pp.4522-4528, 1993.
22) M. Oh, S. Ura, T. Suhara, and H.Nishihara, "Integrated-optic focal-spot intensity modulator using electrooptic polymer waveguide", J. Lightwave Technol., vol. LT-12, pp. 1569-1576, 1994.
23) K. C. Chang, V. Shah, and T.Tamir, "Scattering and guiding of waves by dielectric gratings with arbitrary profiles", J. Opt. Soc. Am., vol. 70, pp. 804-813, 1980.
24) T. Tamir and S. T. Peng, "Analysis and design of grating couplers", Appl.Phys., vol 14, pp. 235-254, 1977.

RS 94-16

輻射科学研究会資料

離散モデルフィッティング法による
レーダー物体像再構成

若山 俊夫 ・ 佐藤 亨 ・ 木村 磐根
京都大学 工学部

平成 6 年 12 月 16 日

離散モデルフィッティング法によるレーダー物体像再構成

若山 俊夫、佐藤 亨、木村 磐根
京都大学 工学部 電気工学第二教室

(平成 6 年 12 月 16 日)

1 はじめに

レーダによる物体像再構成の技術は、地下探査を初めとして様々な分野での応用が期待されている [1, 2]。その手法の一つである回折トモグラフィでは、波数空間において得られる観測データにフーリエ変換を施すことにより実空間の像再構成を行う。ただしこの方法はフーリエ変換を利用しているため、送受信のアンテナの走査は無限直線上で行われることが前提となっている。また観測範囲や方向が限定される場合には、波数領域において多くの欠損が生じるため、適切な手法により欠損領域の補間を行わなければならない [3]。

従来のレーダ信号処理法の多くは空中の電波伝搬を仮定しているので、これを地下探査の場合に適用するには多くの困難がある。まず、均一媒質を仮定した最も簡単な場合について普通に利用されるのは開口合成法であるが、この場合にも、地表からの強い反射波の除去や伝搬速度の推定、媒質を含めたシステムの周波数特性の決定などの問題がある。これらを自動化する試みも行なわれている [4] が、多くの実用システムでは利用者が個別に設定を行なっているのが実情である。さらに、多くの場合には均一媒質を仮定すること自体が不適当であり、これらの手法をそのまま適用することには明らかな限界がある。

すなわち、地下探査においては、単にターゲットの位置や形状を知るのみでなく、媒質パラメータやその分布に関する推定を同時に行なう必要がある。これらのすべての情報を、観測された受信波形のみから推定することは一般に困難であり、地下探査レーダの信号処理はこの意味で不適切な (ill-posed) 逆問題であると言える。

我々はこの問題の一つの解法として、離散モデルフィッティング法 [5] (Discrete Model Fitting; DMF と略記) を提案し、その改良を進めてきた。この方法は、伝搬媒質とターゲットを有限個のパラメータで記述したモデルを作成し、このモデルから推定される受信波形を観測される受信波形と最小 2 乗法を用いて比較することによりモデルを反復改良する手法である。DMF 法の利点は、逆問題を順問題の反復により解くため、任意の媒質やアンテナ配置に適用できる所にある。すなわち、媒質中に大きな断層や空洞がある場合や地表が平坦でない場合などをも正確に取り扱うことが可能であるし、多重散乱の効果なども容易に処理することができる。

DMF 法の精度は仮定するモデルの妥当性に大きく依存するが、適当なモデルを設定できれば高精度な推定が可能である。以下の章では、順に

1. 均質媒質中に配置された点ターゲットの集合 [6, 7]

2. 層状不均質媒質中に配置された点ターゲットの集合 [8–10]

3. 均質媒質中の任意形状金属物体 [11]

を想定し、これらを推定する方法とその特性について述べる。

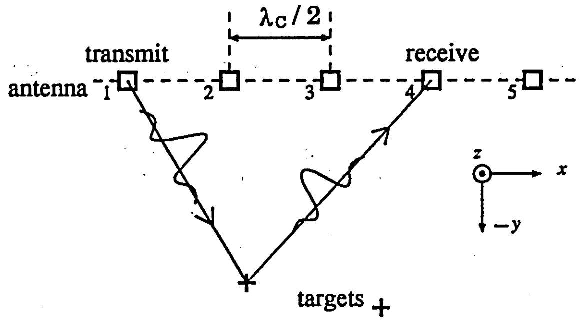


図 1: シミュレーションのモデル

2　離散モデルフィッティング法の基本特性

本章では、まず再構成アルゴリズムの原理を簡単に説明する。ここではターゲットは点状散乱体の集合であるとみなし、非線形最小二乗法を用いてターゲットの推定を行う。続いてアルゴリズムの安定化、従来の開口合成法との比較などについて述べる。

2.1　シミュレーションのモデル

取り扱う逆散乱問題の基本的な性質を調べるために、2 次元問題について比較的簡単なモデルを用いてシミュレーションを行った。図 1にその概略を示した。

円筒波を照射するアンテナを直線上に等間隔に 5 本配置し、これらのアンテナを送信･受信に用いて計 25 通りの送受信の組み合わせについて観測データを得る。伝搬媒質は低域通過特性を持つものとし、受信信号のカットオフ周波数において半波長となるようにアンテナ間隔を設定している。

ターゲットは少数の点状散乱体から成り、各散乱体は等方的に電波を散乱するものとする。これらの散乱体が存在する媒質は均質であるものとする。観測はモノパルス波を送信することにより行う。受信するパルス波形は、送受信アンテナの特性、送受信機の特性、媒質中の伝搬特性によって定まるが、これらを総合した特性が既知であるとして再構成を行う。今回のシミュレーションでは、次のようにしてパルス波形を定めている。回折トモグラフィの基本式によれば、送受信アンテナの位置がそれぞれ$\boldsymbol{r}_\mathrm{t}, \boldsymbol{r}_\mathrm{r}$ であるとき、波数kにおける散乱波電界 $e(k)$ は次式で表される [12]。

$$e(k) = -\frac{k^2}{16}\iint \gamma(x,y)H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}_\mathrm{t}-\boldsymbol{r})H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}_\mathrm{r}-\boldsymbol{r})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

ただし、γは誘電率をϵとして

$$\gamma = \frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon_0} \tag{2}$$

である。散乱体がN個の点ターゲットからなる場合は、(1) 式の積分は和で表される。即ち、それぞれのターゲットの反射率がγ_i であるとすると、

$$e^\mathrm{s}(k) = -\frac{k^2}{16}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i H_0^{(1)}(k\mid \boldsymbol{r}_\mathrm{t}-\boldsymbol{r}_i\mid)H_0^{(1)}(k\mid \boldsymbol{r}_\mathrm{r}-\boldsymbol{r}_i\mid) \tag{3}$$

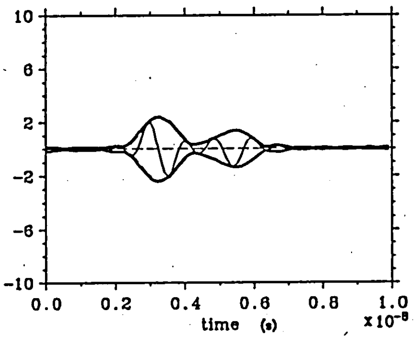


図 2: シミュレーションにおける時系列波形の例
細い実線が受信時系列波形
太い実線がその瞬時包絡線を表す。

となる。そこで低周波領域では (3) 式で散乱特性が表されると仮定した。ここでγは周波数によらず一定であるとした。高周波領域では、カットオフ周波数λ_cを定め、それ以上でなめらかに減衰する周波数特性を与えた。

2.2 初期値の決定

非線形最小二乗法は反復改良法の一種であり、適当な方法で初期値を決定する必要がある。本研究では、個々の受信時系列データに含まれるパルスの群遅延量·位相から初期値決定を行っている [7]。

観測では、送受信アンテナの各組み合わせについて時系列のデータが得られる。まず個々の時系列データについて瞬時包絡線を計算する [13]。図 2は 2 つの点ターゲットを観測した場合の時系列波形の例である。瞬時包絡線が 2 つのピークを持っていることから、この時系列データは 2 つの点ターゲットからの散乱パルスを含んでいることが分かる。この 2 つのピークの位置からターゲットの 1 次元の位置情報を得ることができる。また群遅延パルスの振幅・位相からターゲットの複素反射率を求めることができる。

次に個々の時系列データから得られた 1 次元位置情報を組み合わせることにより 2 次元断面上のターゲット位置を求める。ターゲットは、群遅延量に相当する距離の半分の長さを長半径に持ち、送信アンテナ·受信アンテナの位置に焦点を持つ楕円上に存在することになる。よって送受信の組み合わせの異なる 2 つの時系列データのパルス群遅延量から楕円を描き、その交点を求めれば、その点がターゲットの 2 次元断面上の位置となる。時系列データ上で検出される全てのパルスの群遅延量からこのような楕円を描き、それらの交点を求める。そして交点が集中する点の付近にターゲットが存在すると推定する。

以上の処理によりターゲットの個数, 位置, 反射率が推定できる。この結果を初期値として非線形最小二乗推定を行い、推定の精度を上げる。

2.3 非線形最小二乗法による推定

先にも述べたように、回折トモグラフィの基本式によれば、散乱波電界は (3) 式で表される。そこで、波源の個数を N^e、位置及び反射率をr_i^e, γ_i^e と推定したとすると、観測されるデータは次

の $e^{\mathrm{e}}(k)$ と推定できる。

$$e^{\mathrm{e}}(k) = -\frac{k^2}{16}\sum_{i=1}^{N^{\mathrm{e}}}\gamma_i^{\mathrm{e}} H_0^{(1)}(k\mid \boldsymbol{r}_{\mathrm{t}} - \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{e}}\mid) H_0^{(1)}(k\mid \boldsymbol{r}_{\mathrm{r}} - \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{e}}\mid) \tag{4}$$

その推定誤差は

$$F = \sum[\{\mathrm{Re}(e(k) - e^{\mathrm{e}}(k)\}^2 + \{\mathrm{Im}(e(k) - e^{\mathrm{e}}(k)\}^2] \tag{5}$$

と表せる。ここで、和は全てのアンテナの組み合わせ及び全ての周波数について行う。この誤差が最小となるようなターゲットの位置および反射率を求めれば、正しい推定が行えたことになる。即ち、像再構成問題が非線形最小二乗問題に帰着されるわけである。同様の手法は平面層状媒質における屈折率分布の推定等に適用されている [14, 15]。

今回の計算では周波数領域において等間隔に 30 点のデータを取って非線形最小二乗法を行っている。

2.4 反復推定アルゴリズム

2.2節の結果を初期値に用いて2.3節の非線形最小二乗推定を行うアルゴリズムについて述べる。

まず初めに図 3 (a) のように 4 つの点ターゲットが存在する場合について、2.2節の結果を初期値として非線形最小二乗推定を行った結果を図 3 (b) に示す。

これを見ると 4 個のうちの 1 個のターゲットしか推定が行われていない。時系列データにおいて、アンテナから離れた位置に存在するターゲットからの散乱波が、アンテナに近い位置にあるターゲットからの散乱波に埋もれてしまい、初期値決定の過程でピークが検出できていないためである。ただし、検出されたターゲットについてはおおよそ正しい推定が行われているため、検出されたターゲットによる寄与を時系列データから除去することが可能である。

そこで次のようなアルゴリズムを構成した。まず非線形最小二乗推定を行い、その推定結果が正しいと仮定した場合の推定時系列データを計算する。推定が完全に行われていない場合には、観測される時系列データと推定時系列データは一致しない。そこで両者の差を取った時系列データを作る。この中には前回の推定では検出されなかった散乱波が含まれる。この差時系列データについて 2.2 節の推定を行い、未検出であったターゲットを検出する。この推定結果を前回の非線形最小二乗推定の結果に付け加え、再度非線形最小二乗推定を行う。この操作を反復し再構成の精度を上げる。

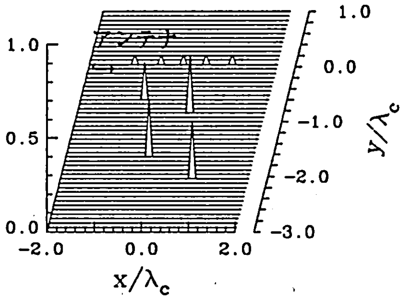
反復する間に, 非線形最小二乗推定の結果反射率が他のターゲットに比べて無視できるほど小さく推定されるターゲットが現れることがある。このようなターゲットは, 最小二乗法において二乗残差の減少に寄与しないので, 次の推定では除外する。これにより, 無駄な変数の数が減り計算時間を短縮できる。

図 3(b) の例について反復推定を行った結果を図 3(c), (d) に示す。反復が進むにつれて検出されるターゲットが増え、3 回目のループで全てのターゲットの検出が完了している。これ以上ループを繰り返しても再構成像は変化しない。

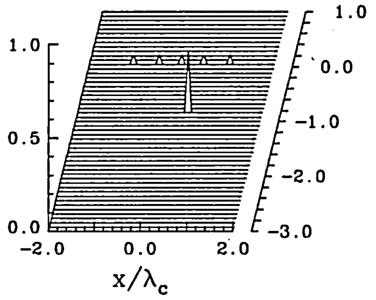
2.5 クラッタが存在する場合の推定 — ペナルティ関数による安定化

反復アルゴリズムでは小さいターゲット数を仮定するところから推定を始め、反復を重ねる毎に仮定するターゲット数を増やし、推定精度を向上していく。反復回数が小さい時にはターゲット数を制限して推定を行うことになる。これは反射率の大きいターゲットのみを選んで像再構成を行うことを意味する。従ってクラッタとなる微小な散乱体がターゲットの周囲に存在する場合にも、反復アルゴリズムを適当な回数で終了することによりクラッタの影響が除去可能であると期待される。

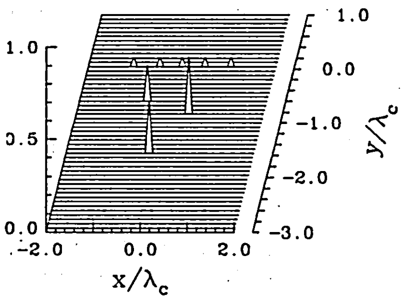
しかし、クラッタのレベルが比較的高い場合には反復アルゴリズムに不安定性が生じることがある。高いレベルのクラッタ源が多数存在する場合に少数のターゲットを仮定して残差二



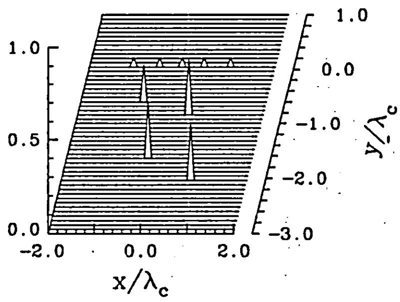
(a)　真のターゲット像



(b)　LOOP = 1

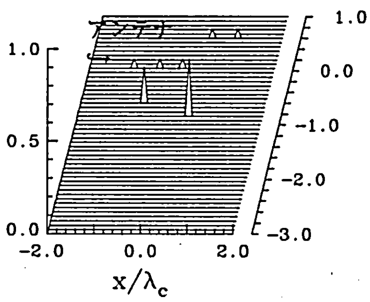


(c)　loop = 2

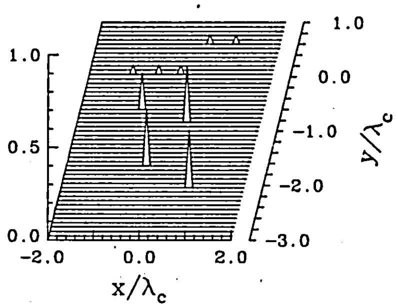


(d)　loop = 3

図 3: 反復推定の計算例 — クラッタの存在しない場合

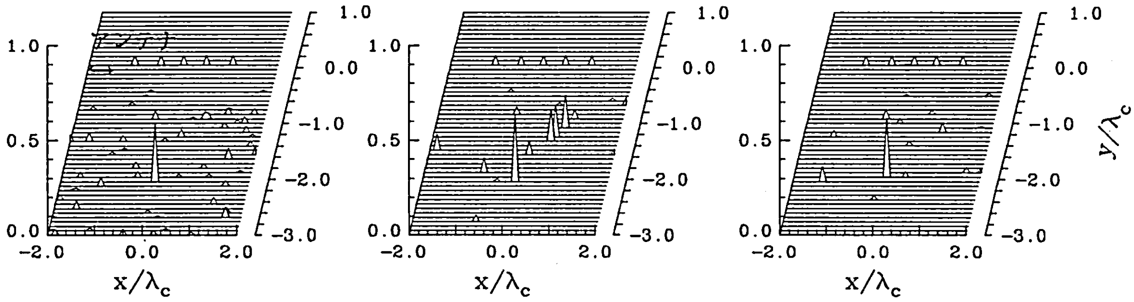


(a)　loop1



(b)　loop = 2

図 4: 反復推定の計算例 — クラッタの存在しない場合 (アンテナ配置に段差あり)



(a) 真のターゲット　(b) ペナルティ関数なし　(c) ペナルティ関数を用いた場合

図 5: ペナルティ関数による安定化 — SIR は 20dB

乗和の最小化を行っても、残差二乗和はクラッタが存在しない場合ほど小さくならない。このような場合に必要以上に反復アルゴリズムを繰り返すと、非線形最小二乗法のアルゴリズムが少ないターゲット数で強制的に残差二乗和を小さくしようとして、スプリアス解を生じてしまうことがある。代表的なスプリアス解は、反射率の大きさが同じで位相が 180° 異なる 2 つの点ターゲットが近接する形で現れる。これら 2 つのターゲットからの散乱波は打ち消され、その存在は受信される時系列データに寄与しない。即ち、受信データを見る限りその場所にターゲットが存在しない場合と区別がつかない。

今回我々は、互いに逆位相の反射率を持つターゲットが近接して存在することはないという前提に立ち、スプリアス解を除去することを試みた。具体的には制約付き最適化の手法の一つであるペナルティ関数法からの類推で、最小化する二乗和にペナルティ関数を加えることにより像再構成の安定化を図った。これは次のように定式化される。L 個の観測データが存在し，観測データと推定観測データの差が

$$f_l(\boldsymbol{x}),\ l=1,\ldots,L \qquad (6)$$

($\boldsymbol{x}$は変数ベクトル)

である場合に、$f_l(\boldsymbol{x})$ の二乗和に $P(\boldsymbol{x})^2$を加えたもの、

$$F=\sum_{l=1}^{N}\{f_l(\boldsymbol{x})\}^2+w_{\mathrm{p}}P(\boldsymbol{x})^2 \qquad (7)$$

を最小二乗法を用いて最小化し、像再構成を行う。ただし $P(\boldsymbol{x})$ はペナルティ関数, w_{p}は重み関数である。ターゲット間距離が小さい時に大きな値を取るような関数形をペナルティ関数に選ぶ。これにより任意の 2 つのターゲット間は一定以上の間隔が保たれ、前述のスプリアス解への収束を防ぐことが可能となる。

今回我々が用いたペナルティ関数は次のようなものである。i 番目と j 番目のターゲットの距離をλ_{c}で規格化したものを r_{ij}として、

$$P(\boldsymbol{x})=\sum_{i\neq j}\frac{\exp(-0.5(r_{ij}/r_0)^2)}{(r_{ij}/r_0)} \qquad (8)$$

2 つのターゲットの位置が一致した時に発散し、またターゲット間の距離が大きくなれば、exp の因子により急速に関数値は減少する。

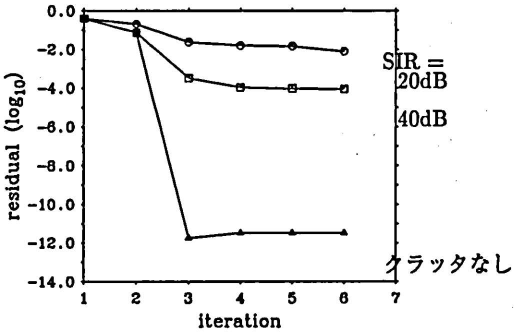


図 6: 反復推定における推定誤差の推移

今回のシミュレーションでは r_0の値を $0.2\lambda_c$ に選んだ。また各イタレーションにおいて最小二乗法の変数ベクトルに初期値を入れた段階で (7) 式の残差二乗和の項とペナルティ関数の項の大きさが同じとなるように重み w_p を選んだ。

図5はペナルティ関数を用いることにより物体像再構成が安定化された例である。ターゲットモデルは(a)のように、1つの点ターゲットに加えて、クラッタ源として反射率の実部·虚部ともガウス分布である散乱体を$\lambda_c/2$ 四方に一つの割合で分布させている。図5の例ではターゲットを基準として-20dB のクラッタレベル、即ち SIR(Signal to Interference Ratio) を 20dB としている。クラッタのレベルが比較的高いために、ペナルティ関数を用いない場合には (b) のようにターゲットが存在しない場所にも大きな偽像が現れているが、ペナルティ関数を用いた場合には (c) のように安定な像再生が行われている。

図3の4つの点ターゲットが存在するターゲットモデルについて、クラッタのレベルを変えて反復アルゴリズムによる推定を行い、残差二乗和の推移を示したのが図6である。クラッタが存在しない場合には3回目のループで全てのターゲットを検出すると急激に残差二乗和が減少している。さらに反復を進めても再構成像の変化はない。SIR が 40dB、20dB と減少するに従って最終的な残差レベルは上昇する。従ってクラッタレベルの上昇によって検出可能な最小のターゲットの振幅が大きくなる。ただし SIR が 20dB の場合も今回のモデルについては4つのターゲット全てを正確に再構成することができた。

2.6 従来の開口合成法との比較

ターゲットが点状散乱体とみなせる場合について本論文で示した非線形最小二乗法による再構成像と従来の開口合成の手法によって再構成された像を比較し、本論文の手法を定量的に評価する。

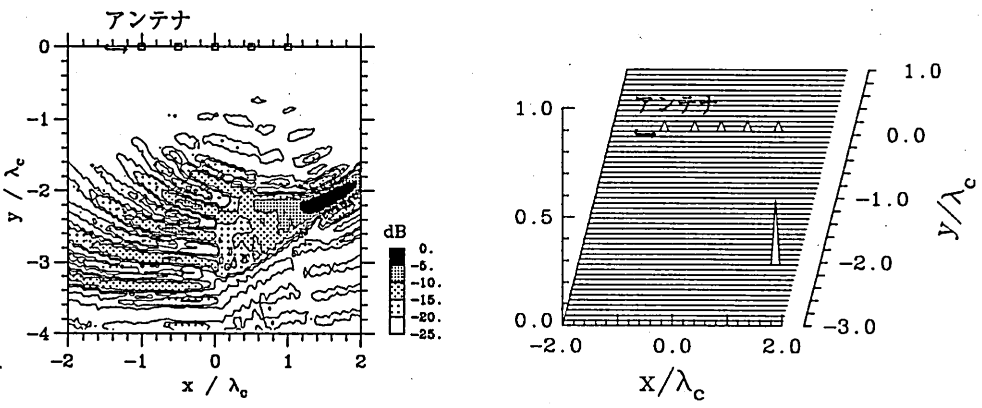
2.6.1 開口合成法

2次元空間において観測点を$\boldsymbol{x}_r = (x_r, y_r)$、像を再生する点を$\boldsymbol{x}$とすると、開口合成によって得られる像は次の $b(\boldsymbol{x})$ で与えられる [16]。

$$b(\boldsymbol{x}) = \int w(\boldsymbol{x}_r, 2|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r|/c_u) \frac{y^3}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r|^3} d\boldsymbol{x}_r \tag{9}$$

但し $w(\boldsymbol{x}_r, t)$ はパルス圧縮フィルタを経た信号を表している。パルス圧縮フィルタとして今回は逆フィルタを用いている。

(9) 式を用いて得られる物体像と本論文の手法で得られる物体像をこの節で比較する。



(a)　開口合成法による再構成像　　　(b)　フィッティングによる再構成像

図 7: 従来の開口合成法との比較 — 再構成像の比較

2.6.2　比較

図 7(a) は 1 つの点ターゲットが x 軸方向においてアンテナ開口の外側にある場合に従来の手法で開口合成したものである。再構成像が広範囲に広がり、かなり劣化している。また $x/\lambda_c = -1 \sim 0$ 付近には多数の不要応答が現れている。これはアンテナアレイの大きさが制限されているためである。このような状況でも提案手法では図 7(b) のようにシャープな再構成像を得ることができる。

推定像の広がりを定量的に議論するために、推定像の 2 次モーメントを考える。再構成された像は真のターゲット位置のまわりに分布した形となっている。真のターゲット位置を$\boldsymbol{r}_0$、位置$\boldsymbol{r}_i$における像の大きさを s_iとすると

$$W = \sum_{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_i|\leq\lambda_c} \{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_i|^2|s_i|\} \Big/ \sum_{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_i|\leq\lambda_c} |s_i| \tag{10}$$

により 2 次モーメントを求める。この 2 次モーメントは像の広がりだけでなく位置推定誤差をも含む。ただし、(10) 式における和を像空間の全ての領域で取ると、もともと像空間に存在するクラッタ源の再生像を含めて 2 次モーメントを計算することになり、像の広がりを正しく評価することができない。そこで距離と像の振幅に適当な閾値を設け、その範囲内に入っている像についてのみで計算することにする。

図 8はターゲットの位置を x 軸方向に変化させて、即ちアンテナアレイに平行な方向に変化させて、それぞれの場合について推定像の 2 次モーメントを求めたものである。図の横軸がターゲットの x 座標、縦軸がそれぞれのターゲット位置における推定像の 2 次モーメントである。実空間には前節と同様の数のクラッタ源を配置している。点ターゲットの再構成像の広がりとクラッタ源が再構成された像が十分区別できるように、SIR は 40dB とし、モーメントを計算する際には真のターゲット位置から半径λ_c以内、像の最大値を基準として−20dB 以上の大きさの像についてのみ (10) 式の和を取る、という閾値を設けた。この図から分かるように、非線形最小二乗法による再構成像では従来の手法の再構成像に比べて、2 次モーメントが一桁以上小さくなっており、超解像的なシャープな像を結ぶことが分かる。

次に複数の点ターゲットが存在する場合に従来の開口合成法を適用した例を図9に示す。ターゲットモデルは図3と同じものを用いている。従来の開口合成法を用いた場合にも真のターゲット位置に 4 つのターゲットを推定している。しかし像は横方向に大きく広がり、周囲には不要

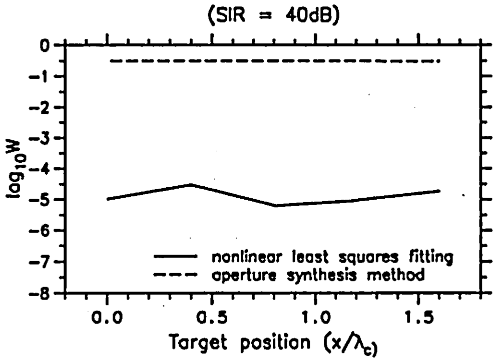


図 8: 再構成された点ターゲットの像の幅の比較
$(y/\lambda_c = -2.0)$

応答が多く現れている。また $x/\lambda_c = 1.0, x/\lambda_c = -2.0$ のターゲットは他の 3 つのターゲットに比べて像の劣化が著しく、$x/\lambda_c = 1.0, x/\lambda_c = -1.0$ に現れている不要応答と同程度の像の大きさとなっている。これらはアンテナアレイの開口の大きさが制限されていることが原因である。このような場合でもフィッティングによる物体像再構成では、先に図 3 で示したように 4 つのターゲット全てを正確に推定することができる。

フィッティングによる再構成法ではターゲット数, 即ちターゲットの存在する場所を限定している。これにより不要応答が抑制され、超解像的なシャープな像を結ぶ。さらに複数のターゲット間の干渉による像の劣化も小さくなる。

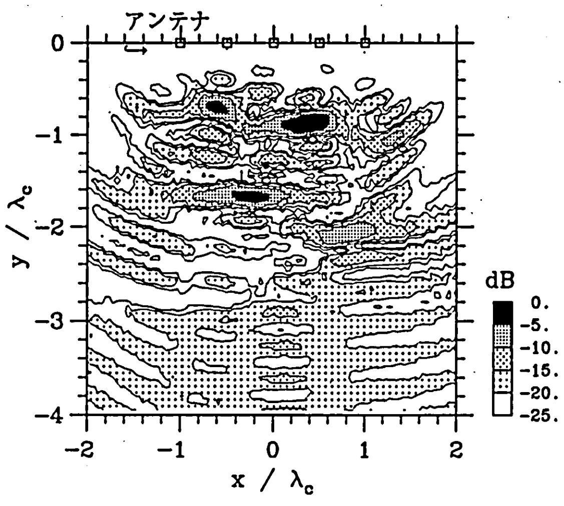


図 9: 開口合成法による再構成 — 4 つのターゲットの推定
ターゲットモデルは図 3の場合と同じ

3 層状不均質媒質中のレーダー物体像再構成

前章では点ターゲットを仮定し、均質媒質中の物体像再構成を行なった。本章では、これを層状不均質媒質中の点ターゲットの集合に拡張する。モデルフィッティングでは、再構成像を繰り返し修正し、推定受信信号と観測受信信号の差の二乗和が最小となるようにする。従って、再構成像を修正する毎に推定受信信号を計算する必要がある。媒質が不均質である場合は、与えたモデルに対する推定受信信号を計算する際に電波の屈折や反射を考慮する必要がある。

最初は、媒質が不均質の場合の推定受信信号の計算にFDTD(Finite Difference Time Domain)法 [18, 19] を用いていたが [8]、FDTD 法による推定受信信号の計算にはかなりの時間を必要とするため、繰り返し計算には不向きであった。そこで、推定受信信号の計算にレイトレーシングを用いた簡易計算法を適用し、計算時間の短縮を図った。また均質媒質中での物体像再構成の場合と同様に、モデルフィッティングの反復を行うアルゴリズムを構成し、計算機シミュレーションによってそのアルゴリズムの動作を確認した。本章ではその手法の原理と計算機シミュレーションの結果について述べる。

3.1 シミュレーションのモデルと物体像再構成の原理

本研究の計算機シミュレーションでは図 10に示すような 2 次元モデルを用いている。無指向性のアンテナを等間隔に 9 本配置し、それぞれを送信・受信の両方に用いる。また偏波は電界が z 軸成分のみを持つものとする。媒質は無損失で誘電率の異なる複数の層で構成されているとする。それらの境界は水平であり、一層目の誘電率は既知であるとする。この媒質中に点状のターゲットが複数存在すると仮定して像再構成を行う。点ターゲットは等方性の散乱特性を持つものとする。

観測はモノパルス波を送信することにより行うが、アンテナで受信される信号波形は、送信機、受信機、アンテナ、媒質、およびターゲットの周波数特性によって決まる。これらを総合した周波数特性が既知であるとして物体像再構成を行う。推定すべき未知数はターゲットの数、位置、散乱断面積、各層の誘電率、層境界の位置である。モデルフィッティングでは、未知数に推定値を代入することによって計算される推定受信信号を実際に観測された受信信号にあてはめ、両者の差の二乗和が最小となるように未知数の値を修正する。即ち最小二乗法を用いてモデルフィッティングを行う。ただしこの最小二乗問題は非線形最小二乗問題となるため、推定する未知数に対して適当な初期値を用意する必要がある。初期値決定には、受信パルスの

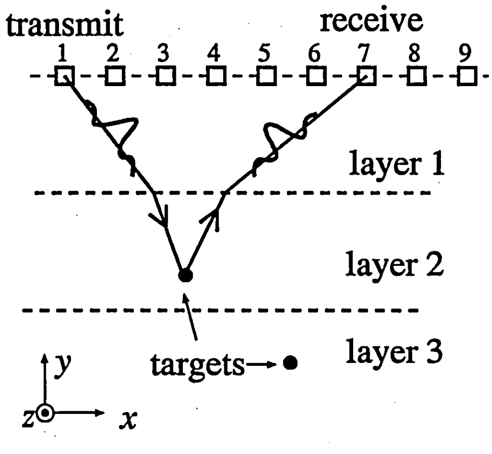


図 10: シミュレーションのモデル

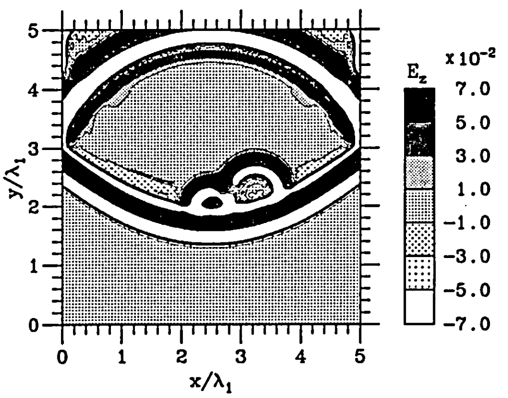


図 11: FDTD 法によるレーダー観測のシミュレーション
— 電磁界分布

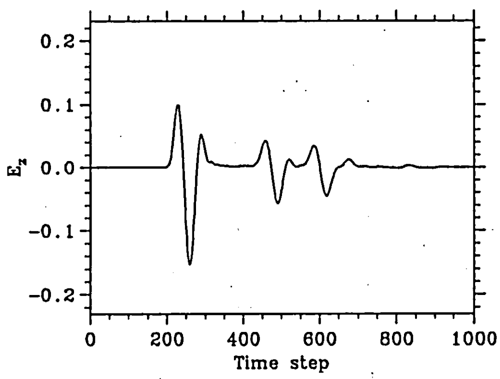


図 12: FDTD 法によって計算された受信信号波形

群遅延量から得られる情報により推定を行う手法を用いる。その概要は次節で述べる。

計算機シミュレーションで用いる擬似レーダー観測データはFDTD(Finite-Difference Time-Domain) 法 [18] を用いて作成した。FDTD 法はマクスウェル方程式を差分化して電磁界を計算する手法である。計算領域の境界では Mur の 2 次吸収境界条件 [19] を用いている。空間格子点間隔は $\Delta s = 0.025\lambda_1$, 時間間隔は $\Delta t = 0.01T_1$ としている。ただし、λ_1、T_1は層 1 における送信パルスの中心周波数での波長と周期である。また、空間格子数は 200×200 とした。

図 11はレーダー観測時における電磁界分布を FDTD 法によって計算した例である。この例では$y = 3.0\lambda_1$ に層境界、$(x, y) = (2.5\lambda_1, 2.0\lambda_1), (3.25\lambda_1, 2.25\lambda_1)$ に 2 つの点ターゲットが存在している。図は、点 $(x, y) = (2.5\lambda_1, 4.0\lambda_1)$ から送信後 350 時間ステップにおける電界分布である。図の上方に層境界による反射波、下方に透過波が伝搬し、また 2 つの点ターゲットによる散乱波が発生している様子が分かる。

図 12はその時の受信時系列データの例である。ただし直接波は除外してある。横軸が時間軸、縦軸が電界強度である。この受信データには 3 つのエコーが受信されている。最初に受信されているエコーが層境界からの散乱波、残りの 2 つのエコーが 2 つの点ターゲットからの散乱波である。送信アンテナ・受信アンテナの異なる組合せにより、このような時系列データを計 81 組得ることができる。これらの時系列データに対して以降に述べる物体像再構成アルゴリズムを適用する。

3.2 初期値の決定

この節では離散モデルフィッティングに用いる初期値を求めるアルゴリズムの概略を説明する。初期値決定アルゴリズムの流れを図 13に示す。

ここで取り扱う受信時系列データには、点ターゲットによって散乱されたエコーと、媒質中の層境界によって散乱されたエコーの両方が含まれる。初期値推定アルゴリズムの最初の段階において、これら両者の識別を行う。識別アルゴリズムでは、送信と受信に同じアンテナを用いるモノスタティック観測で得られるデータが使用される。

図 14はモノスタティック観測により得られる受信データの全てを同じグラフの上に重ね合わせたものである。層境界が水平である場合、アンテナと層境界の距離は一定であるため、層

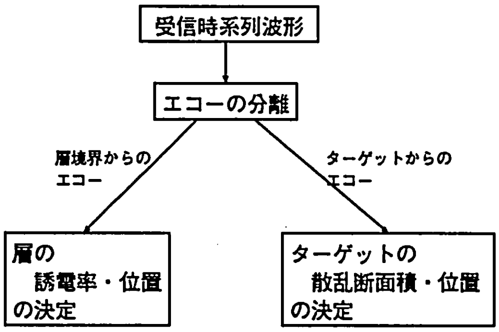


図 13: 初期値決定のアルゴリズム

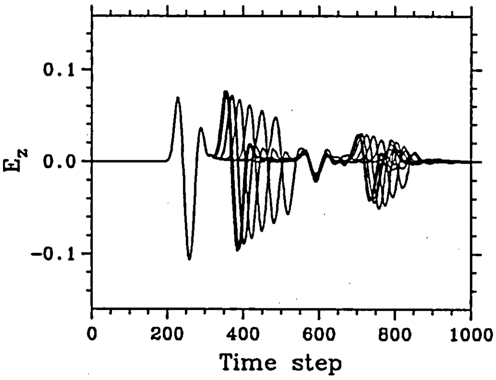


図 14: モノスタティックな観測による受信信号の重ね合わせ

境界で散乱されたエコーは同じ遅延時間に各アンテナで受信される。従って、重ね合わせた波形はほぼ一致する。図 14では、$t = 250\Delta t, 600\Delta t$ 付近で受信されているエコーが層境界で散乱されたものであり、この領域では全てのアンテナで観測される波形は良く一致している。それに対して、点ターゲットで散乱されたエコーが受信される場合には、アンテナの位置によってターゲットまでの距離が異なるために、受信エコーの遅延時間にばらつきが生じ、重ね合わせた波形は一致しない。図 14では、点ターゲットエコーは $t = 300 \sim 550\Delta t$ 及び $t = 650 \sim 900\Delta t$ 付近で受信されているが、各エコーの遅延時間にばらつきがあり、波形が一致していない。この領域において 1 つの時間ステップに着目すると、受信電界レベルは負から正にかけて広く分布している。

層境界エコーと点ターゲットエコーに以上のような性質の違いがあること利用して、各時間ステップにおける中央値を取り出すことにより層境界エコーのみを抽出する。層境界エコーが受信される時間では、どのアンテナで受信される波形もほぼ同じとなり、中央値のレベルは層境界エコーのレベルと等しくなる。それに対し、点ターゲットエコーが受信される時間では、受信レベルが正負に分布しており、中央値はほぼ 0 となる。

アンテナアレイの開口が広い場合には中央値の抽出によりほぼ完全に層境界エコーのみを取り出すことができる。しかしアンテナアレイの開口が狭い場合には抽出されたエコーの中に点ターゲットからのエコーの一部が混入することがある。そこで、受信エコーの位相一致度を調べ、一致度の高い部分のエコーのみを層境界のエコーであるとする。位相一致度は次のように定義する。各アンテナで受信される帯域制限された時系列波形を $f_i(t)$ とし、そのフーリエ変換を $F_i(\omega)$ とする。$F_i(\omega)$ の正の周波数成分のみを取り出し、逆フーリエ変換を施して得られる解析信号を $z_i(t)$ と置く。$z_i(t)$ は複素信号であり、$\angle z_i(t)$ は時刻 t における瞬時位相値を表す。そこで、

$$C_{\rm ph}(t) = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} z_i(t)/|z_i(t)|\right| \tag{11}$$

を位相一致度と定義する。全ての波形の位相が完全に一致している場合には $C_{\rm ph}(t) = 1.0$ となり、逆に全ての位相の波形がランダムに分布する場合には、$C_{\rm ph}(t) \simeq 0.0$ となる。従って、層境界エコーが受信される時間では、位相一致度が 1.0 に近い値になり、点ターゲットエコーが受信される時間では、位相一致度が小さい値になる。本研究では 0.05 を閾値とした。中央値抽出により得られる時系列波形のうち、位相一致度が閾値を越える時間のみからエコーの検出を行う。検出されたエコーは層境界エコーと判断し、層状不均質媒質のモデルパラメータの初期

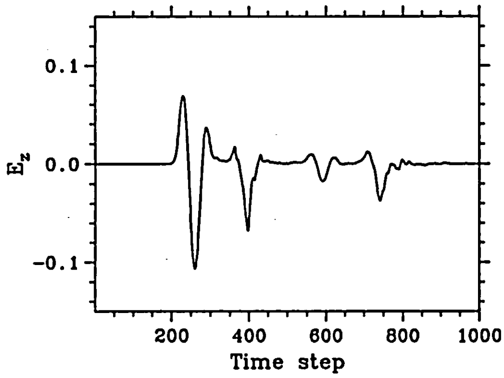


図 15: 中央値抽出によって得られる波形

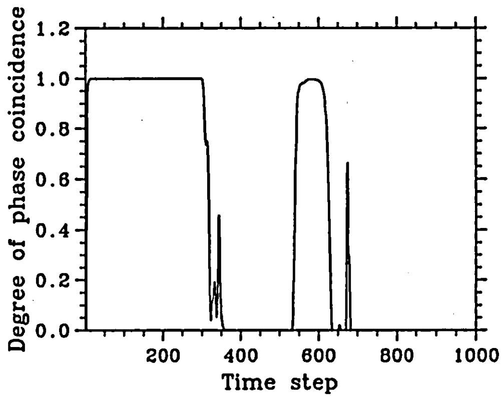


図 16: 位相一致度分布

推定に用いる。

図 15は中央値抽出された時系列波形である。この場合、アンテナアレイの幅が狭いために、点ターゲットエコーが部分的に混入している。しかし、図 16に示した位相一致度を用いることにより、点ターゲットエコーを取り除き、層境界エコーのみを検出することができる。

地下探査レーダーの信号処理において、層境界エコーを取り除く目的のために、各深度でエコーの平均値を差し引く手法が良く用いられる。この手法を点ターゲットエコーと層境界エコーの識別に用いることも考えられるが、平均値はターゲットからのエコーの受信レベルの影響を受けるため、ターゲットエコーと層境界エコーを完全に識別することは困難である。それに比べ、中央値抽出の手法はターゲットエコーの受信レベルの影響を受けないため、識別能力も高くなり、抽出される層境界エコーの歪みも少ない。

層境界エコーの振幅は層境界の反射率によって決まる。その反射率は境界をはさむ二つの層の誘電率の比によって決まる。従ってエコーの振幅から各層の誘電率を推定することができる。また、層境界エコーの遅延時間より層境界の深さを求めることができる。

点ターゲットの初期値推定は、均質媒質の場合と同様の方法で行う。ただし、媒質が層状不均質であるために、送信、ターゲットによる散乱、受信の経路上で電波の速度が変化する。そこで、初期推定された媒質の誘電率に応じてターゲットの位置の補正を行う。

層境界エコーと点ターゲットエコーの識別は必ずしも完全に行うことはできないが、識別を誤った場合でも、モデルフィッティングや反復アルゴリズムによってその誤りは修正される。

3.3 レイトレーシングによる推定受信信号の計算

本節ではレイトレーシングによる推定受信信号の計算方法について述べる。図 17に推定受信信号の流れを示す。

アンテナからの電波の送信、あるいは層境界およびターゲットでの散乱によって波面が構成される。このような波面を複数の ray によって表現する。1 つの波面を構成する複数の ray の集合をここで ray 群と呼ぶことにする。本節のアルゴリズムにおいて、ターゲット、層境界、受信点の検出といった処理が ray 群を単位に行われる。

アルゴリズムにおいて、ray 群はリスト構造を持つデータとして実現されており、各 ray は位置、速度ベクトル、パルスの振幅、波形データ、隣接する ray のデータへのポインタ、などを保持している。ray 群をリスト構造にすることによって、ray 群中の ray の間隔が広がった場合に容易に ray を追加することが可能となっている。

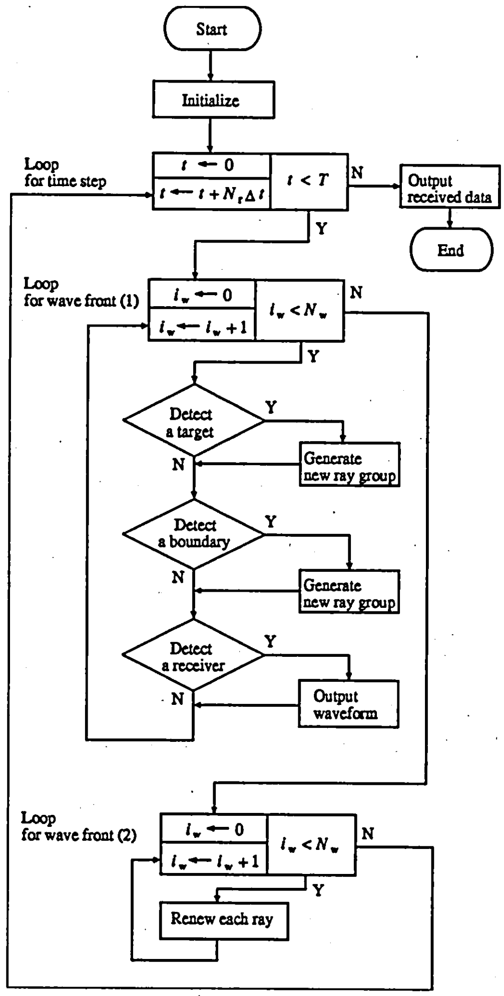


図 17: レイトレーシングによる推定受信信号の計算

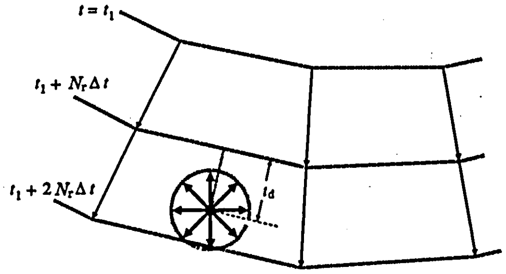


図 18: 点ターゲットの検出

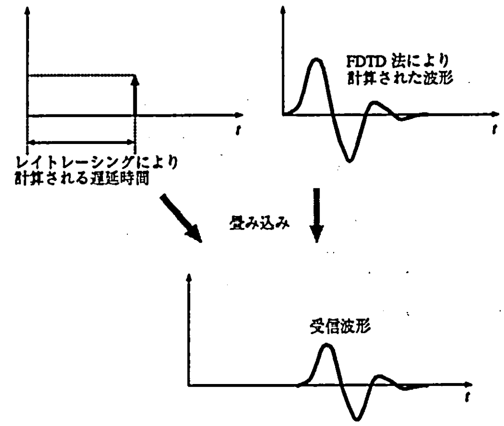


図 19: パルス波形の畳み込み

単位時間ステップがΔtであるとするとき、ray 群は時間 $N_r\Delta t$ 毎に更新される。時間 $N_r\Delta t$ が経過する間に媒質の誘電率の変化が存在しない場合には、各 ray の位置のみ更新されることになる。

3.3.1 ターゲットによる散乱波の発生

電波の波面がターゲットに達すると散乱波が発生する。レイトレーシングのアルゴリズムにおいては ray 群がターゲット位置を通過したときに、新たに発生した散乱波を表現するための ray 群を生成することになる。

図 18はターゲットの検出の様子を示したものである。時刻 t_1には t_1の波面と $t_1+N_r\Delta t$ の波面の間の領域で、時刻 $t_1+N_r\Delta t$ には $t_1+N_r\Delta t$ の波面と $t_1+2N_r\Delta t$ の波面の間の領域でターゲットを探す。この図の場合、時刻 $t_1+N_r\Delta t$ にターゲットが検出され、散乱波波面を表現する ray 群が生成される。ただし、実際には $t_1+N_r\Delta t+t_d$ に散乱波が発生するので、ray 群を発生する時刻には t_dの遅延を設ける。新たに生成される ray 群の形は円環状となり、これにより円筒波を表現する。散乱波の ray の振幅は散乱断面積から計算される。

3.3.2 層境界による散乱波の発生

ray が層境界を通過すると、アルゴリズムは層境界による反射波の波面を表現するための新たな ray 群を生成する。ターゲットの検出と同様に、層境界の検出は $N_r\Delta t$ 毎に行う。ある 1 つの ray が層境界を検出すると、その ray と同じ ray 群に含まれる他の ray がその層境界を将来通過するかどうかを調べる。そして通過する ray からは反射波となる ray を生成する。ただし ray が層境界を通過する時刻に応じて反射波 ray の発生する時刻には遅延を設ける。それらを 1 つの ray 群としてまとめ、反射波の波面を作る。また層境界を通過する ray は引続き透過波の ray として存在する。

反射波・透過波の方向ベクトルは Snell の法則から求め、またこれらの振幅は平面波入射を仮定した反射率 R

$$R=\frac{\cos\theta-\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}{\cos\theta+\sqrt{n^2-\sin^2\theta}} \tag{12}$$

と透過率 T

$$T=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{n^2-\sin^2\theta}} \tag{13}$$

から求める [20]。

3.3.3 観測データの受信

受信アンテナの位置において散乱波を受信する。ターゲットの検出と同様にして、各波面について波面が受信アンテナの位置を通過するかどうかを調べる。そして受信アンテナが検出されれば、その検出時刻に散乱波パルスが受信されるとして、その時刻に予め FDTD 法で計算された波形を畳み込み、推定受信信号を合成する。その様子を図 19に示す。パルス波形は点ターゲットによる散乱回数などによって異なる。今回のシミュレーションでは、送信パルスの波形と点ターゲットによって一度散乱されたパルスの波形の 2 種類を用意し、層境界のみで散乱されたパルスは前者の波形を、1 回以上点ターゲットで散乱された場合は後者の波形を畳み込んでいる。

3.3.4 計算例

図 20はレイトレーシングを行った例である。図 (a)~(d) はそれぞれ $(x, y) = (2.5\lambda_1, 4.0\lambda_1)$ から送信開始後 40, 80, 140, 190Δt 後の ray 分布を描いたものである。まず図 (b) では $y = 3.0\lambda_1$ に存在する層境界によって電波が反射、透過が生じている。図 (c) では透過波が $(x, y) = (2.5\lambda_1, 2.0\lambda_1), (3.25\lambda_1, 2.25\lambda_1)$ に存在する 2 つの点ターゲットによって散乱されている。さらに図 (d) では、点ターゲット間の多重散乱による波面が発生している。また、$(x, y) = (3.25\lambda_1, 2.25\lambda_1)$ の点ターゲットによる 1 回目の散乱波が $y = 3.0\lambda_1$ の層境界に到達し、透過波と反射波が現れているのが分かる。

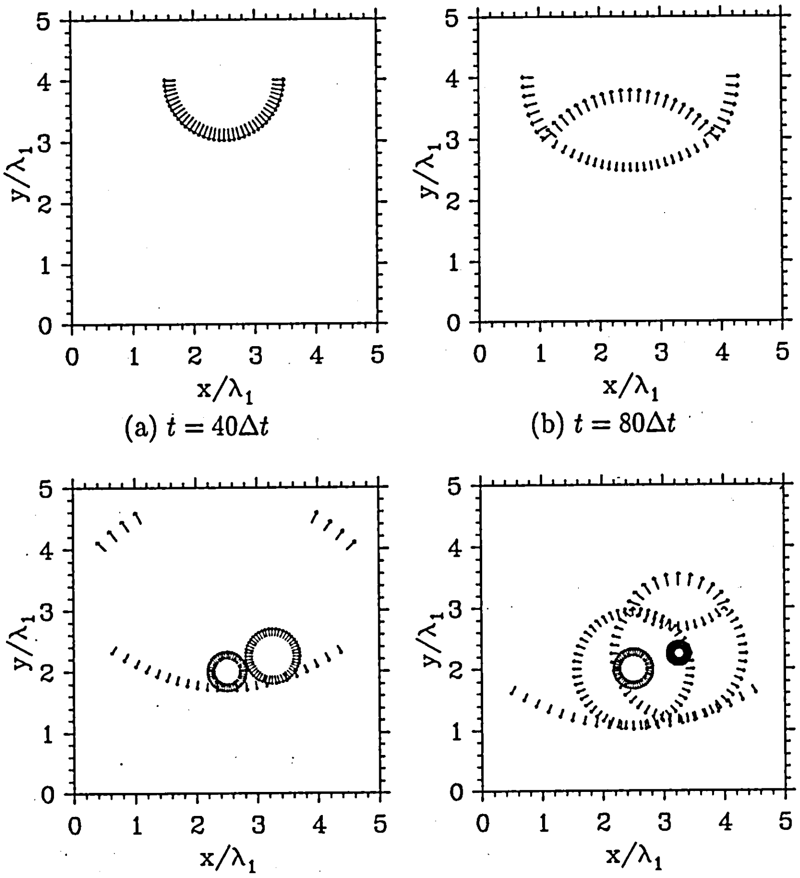
同じモデルの計算を FDTD 法で 200×200 格子で 1000 時間ステップ計算した場合に所要時間は Sun SPARCstation 2 上で 889 秒であった。レイトレーシングを用いた場合の計算時間は、図 20のように十分細かく ray を配置した場合でも 7 秒であり、1/127 の時間である。

3.4 離散モデルフィッティング

3.2節のアルゴリズムで得られた結果を初期値として用いて、非線形最小二乗法によるモデルフィッティングを行う。ただし一回の (初期値推定+モデルフィッティング) の推定では複数の点ターゲットや層境界が近接している場合などにターゲットの検出が不十分となることがある。そこで (初期値推定+モデルフィッティング) の処理を反復して行うことにより物体像再構成の精度の向上を図る。図 21にその流れを示す。1 回のモデルフィッティングを終了した後に観測された受信信号と推定受信信号の差を求める。この残差時系列データに対して初期値決定アルゴリズムを適用する。既に検出されたターゲットに関する散乱波エコーが取り除かれているために、前回の推定では検出されなかった微弱なターゲットからの散乱波も検出できる。前回すでに検出されたターゲットに関する推定結果に新たに検出されたターゲットに関する初期値を付け加え、再度モデルフィッティングを行う。

図 22は反復推定を行った例である。(a), (b), (c) は各反復における推定結果を表している。それぞれの図において左の図がターゲット位置の推定結果である。□ がアンテナ位置、+が真のターゲット位置、○が推定されたターゲット位置を表す。また右の図は媒質の誘電率分布の推定結果である。破線が真の誘電率分布、実線が推定された誘電率分布である。

初回のループでは図 (a) のように 1 つのターゲットと 1 つの層境界のみが検出されている。しかし、検出されたターゲットと層境界については精度良くパラメータの推定が行われているため、検出されたターゲットと層境界のエコーは残差時系列データからほぼ完全に取り除かれている。そこで 2 回目のループにおける初期値決定処理が初回ループ後の残差時系列データから 2 つ目のターゲットを検出し、離散モデルフィッティングの結果、図 (b) のように精度良い推定が行われている。さらに 3 回目のループにおいて、2 つ目の層境界の検出を行い、最終的に (c) に示すように全てのターゲット像と誘電率分布が精度良く再構成されている。



(a) $t = 40\Delta t$ (b) $t = 80\Delta t$

(c) $t = 140\Delta t$ (d) $t = 190\Delta t$

図 20: ray による電波伝搬の表現

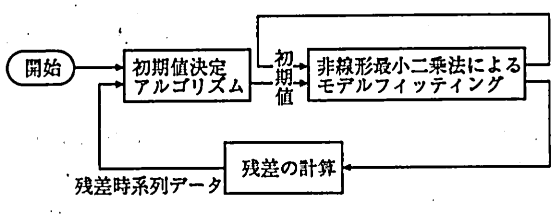
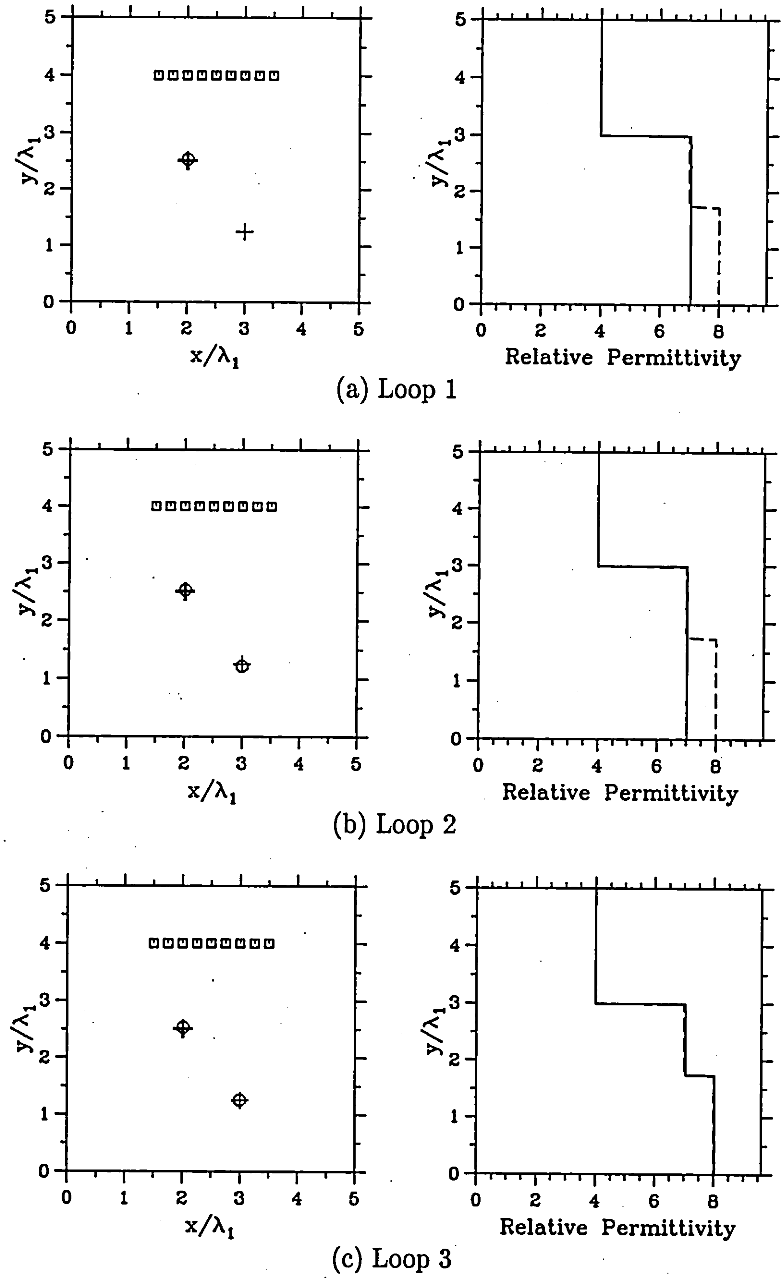


図 21: 反復推定のアルゴリズム



Estimation of targets
□ : Antenna position
+ : True position
○ : Estimated position

Estimation of permittivities
——— : True permittivity
– – – : Estimated permittivity

図 22: 離散モデルフィッティングの反復

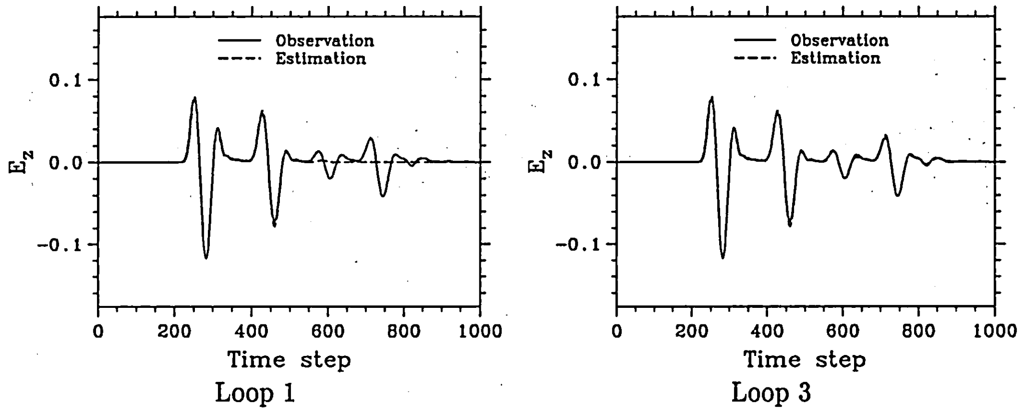


図 23: 離散モデルフィッティングにおける波形の例 (送信がアンテナ 5、受信がアンテナ 9)

モデルフィッティングの様子を時系列波形により図示したものが図 23である。ここでは送信をアンテナ 5、受信をアンテナ 9 で行った場合の波形が示されている。図 (a) は初回のループにおける波形で、実線が観測データ、破線が初期値から計算された推定受信波形、一点鎖線がモデルフィッティング後の推定受信波形である。1 つの点ターゲットと 1 つの層境界のみを仮定して推定受信信号を合成しているために、モデルフィッティング後も残差が残っている。3 回目のループでは全てのターゲットと層境界を仮定して推定受信信号を合成しているために、モデルフィッティング後の波形が観測時系列データにほぼ一致している。また、時間ステップ 850 付近に観測されている波形はターゲット間の多重散乱によるものであるが、図 (b) ではレイトレーシングによって計算された推定受信信号にもその波形が含まれていることが分かる。

図 24は反復推定における観測データと推定受信信号の二乗残差の推移である。ここでは、クラッタが存在しない場合 (△) 以外に、SIR が 24dB(○), 18dB(□) の場合の残差推移も示されて

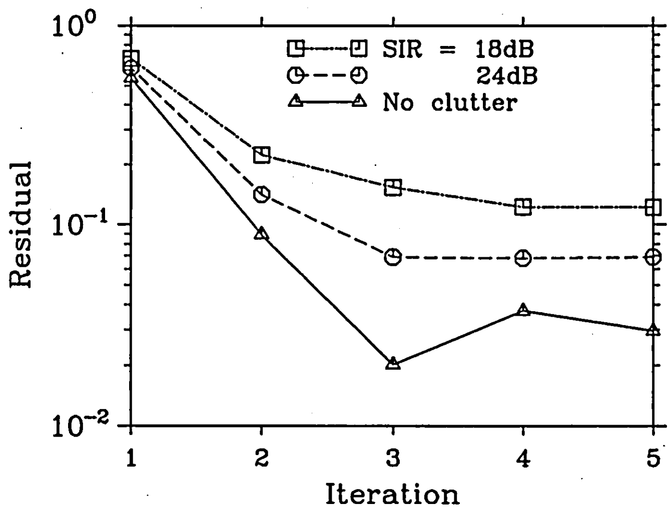


図 24: 推定残差の推移

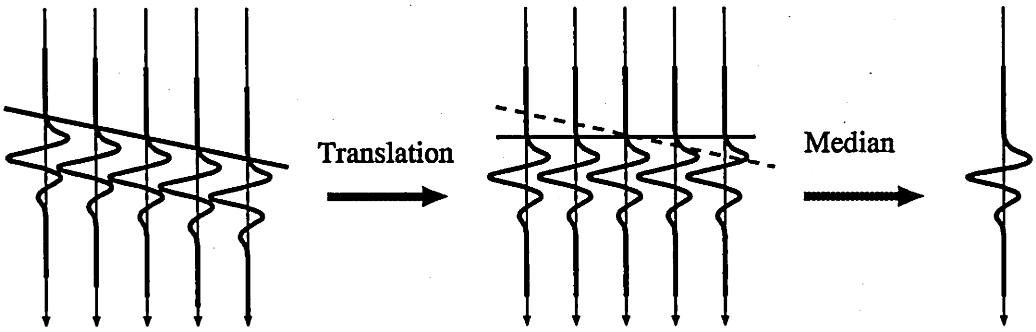


図 25: mono-static observation of oblique boundary

いる。クラッタが存在しない場合には、loop = 3 において残差が最小となり、以後は残差がほとんど変化していないことから、loop = 3 までで推定可能なターゲットは全て推定し終えたことを知ることができる。また過剰な反復推定を行った場合にも、再構成される像は殆んど変化せず、推定アルゴリズムは安定に動作する。クラッタレベルが上昇するにつれ、最終的な二乗残差のレベルが上昇するが、SIR = 18, 24dB のどちらの場合にも、全てのターゲットと層境界が精度良く再構成され、アルゴリズムも安定に動作した。

3.4.1 斜め境界を持つ層状媒質への適用

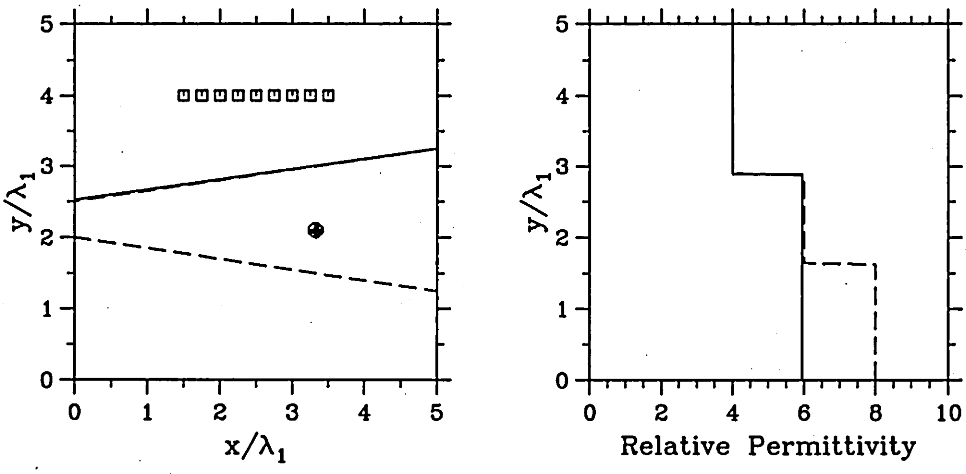
前節までは水平層状媒質を仮定していた。初期値推定アルゴリズムに修正を加えることにより、層境界に傾斜がある場合にも物体像再構成が可能となる。

モノスタティック観測によって傾斜を持つ層境界が観測された場合、図 25の左図のように、受信されるエコーの遅延時間は直線的に変化する。層境界の傾きを正しく仮定し、アンテナの位置に応じてそれぞれのエコーを遅延時間の補正を行えば、全てのエコーの遅延時間は図 25の中央のように等しくなる。従って、水平層状媒質の場合と同様の中央値抽出アルゴリズムを適用することにより、層境界エコーの抽出を行うことができる。物体像再構成においては層境界の傾斜は未知である。そこで、仮定する層境界の傾斜を少しずつ変化させながら層境界検出を行う。層境界の傾斜を正しく仮定した場合に最も位相一致度が高くなり、仮定する傾斜が真値からずれるに従って位相一致度が減少する。従って、この位相一致度のパターンを調べることにより層境界の傾斜を推定することができる。そして、水平層境界の場合と同様に、非線形最小二乗法によるモデルフィッティング及び反復アルゴリズムを行い、物体像再構成を行う。

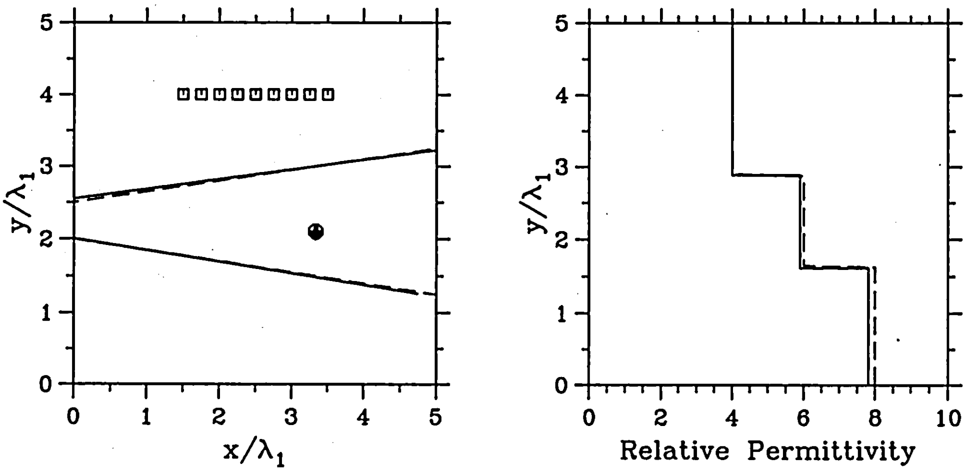
図 26は 2 つの傾斜層境界を持つ媒質中に 1 つの点ターゲットが存在する場合に物体像再構成を行った例である。2 回の反復により全ての層境界とターゲットを検出し、誘電率分布と点ターゲット像が精度良く再構成されていることが分かる。

4 有限の大きさを持つターゲットの形状推定

前章まででではターゲットは点の集合であることを仮定していた。この仮定によってもある程度の物体形状の推定は可能である [5] が、連続した電流がターゲット上を流れることを表現できないため、回折波の取り扱いなどに大きな制約があった。そこで本章では DMF 法を有限の大きさを持つターゲットの形状推定に適用することを試みる。推定受信信号の合成は以前と同様のレイトレーシング法によって行う。ただし、有限の大きさを持つターゲットを取り扱うために、レイトレーシングのアルゴリズムに物理光学近似の手法を組み込んだ。また、非線形最小



(a) Loop 1



(b) Loop 2

Estimation of targets

□ : Antenna position

+ : True position

o : Estimated position

——— : True boundary

– – – : Estimated boundary

Estimation of permittivities

——— : True permittivity

– – – : Estimated permittivity

図 26: 傾斜層状媒質中のレーダー物体像再構成

二乗法における変数の置き方を工夫し、収束力の向上を計った。以下ではその手法の原理を説明し、計算機シミュレーションの結果によりその有効性を示す。

4.1 シミュレーションモデルと擬似観測データの作成

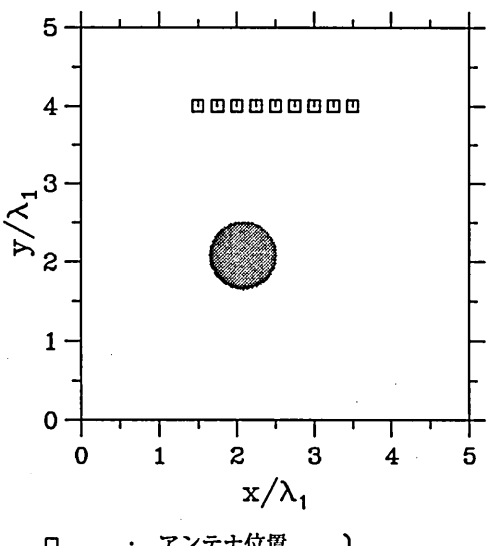
図27は本研究で用いたシミュレーションモデルの例を示したものである。均質媒質を仮定した2次元モデルである。9つの無指向性アンテナを等間隔に配置し、それぞれのアンテナを送信・受信の両方に用いる。ターゲットは導体であるとし、大きさは1波長程度であり、形状は滑らかであるとする。

地下探査レーダーを用いた地下探査を想定しているため、対象となるターゲットの上部のみにアンテナが配置されている。送信波によって照射されるのはターゲットの上面のみとなり、受信される散乱波もそこから発生したもののみとなる。そのため、ターゲット形状の推定はターゲットの上部のみに対して行われ、陰となる下部領域の推定は行わない。

擬似レーダー観測データはFDTD法[18]により作成した。FDTD法による計算は、空間格子間隔を 0.0083λ、時間格子間隔を $0.0033T$ として行った。ただしλ, Tは中心周波数における波長と周期である。シミュレーション領域の境界においてはMurの2次元吸収境界条件[19]を用いた。

4.2 レイトレーシングによる推定受信データの生成

点ターゲットを仮定していた場合と同様に、散乱波の伝搬方向の計算にはレイトレーシングの手法を用いた。さらに散乱電界の大きさを求めるために、新たに物理光学近似の手法を組み込んだ。本節では、まず初めにレイトレーシングのアルゴリズム、特に有限の大きさを持つターゲットの取り扱いについて説明する。続いて、物理光学近似による散乱電界の計算について説明する。



□ : アンテナ位置
ハッチング : ターゲットの形状
を表している。

図27: シミュレーションモデル

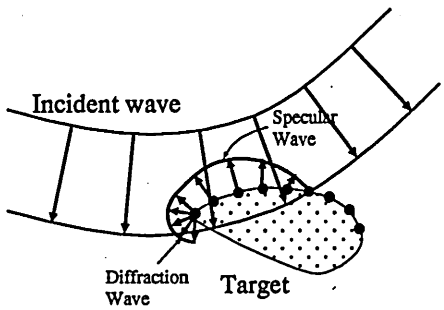


図 28: ターゲットによる散乱

4.2.1 レイトレーシング

レイトレーシングのアルゴリズムは、3.3節で示したものと同様のものであるが、有限の大きさを持つターゲットを取り扱うための拡張を行っている。

レイトレーシングのアルゴリズムの中では、有限の大きさを持つターゲットは点状散乱体の列により表現される。点列で表されるターゲットによって入射波面が散乱される様子を摸式図にしたものが図28である。ただし、今回はターゲットの上方からのみ観測を行うため、送信波によって直接照射されるターゲット上面の形状のみが推定可能となる。従って点状散乱体の列はターゲット上面のみを表す配置となる。入射波の波面が各点を通過する毎に散乱波の ray が生成される。まず、入射角と反射角が等しくなる方向に、各点波源から鏡面反射波を表す ray が生成される。さらに点波源列の両端のエッジ点からはエッジ回折波を表す ray をエッジ点を中心に放射状に生成する。その角度範囲は Reflection boundary(RB) から Shadow boundary(SB) までとしている。

同じ入射波面よって生成された ray は一つにまとめられ、散乱波を表す波面となる。その際に、鏡面反射を表す ray とエッジ回折波を表す ray は RB において接続されることになる。

4.2.2 物理光学近似による散乱波振幅の計算

発生した散乱波の ray が各受信アンテナによって受信されると、あらかじめ FDTD 法によって得られた散乱波パルス波形がその時刻に畳み込まれる。そのパルス波形の大きさは物理光学近似 [21] によって計算する。物理光学近似では散乱体に誘起される電流を幾何光学的に近似し、それを放射積分することにより散乱電界を求める。物理光学近似には

- 主反射方向の精度が良い。
- 影領域の誤差が大きい。
- 不連続や発散がなく実用的である。

などの特徴がある。今回我々が扱う問題では、主反射方向に近い散乱波のみを取り扱うため、この近似により十分な精度を得ることができる。

物理光学近似は周波数領域で計算を行う手法である。レイトレーシングアルゴリズムへの組み込みに際しては、パルスの中心周波数において計算を行っている。計算を行う場合には観測点を設定する必要があるが、本研究のアルゴリズムでは、散乱終了から一定時間たった時刻における散乱 ray の位置を物理光学近似の計算に用いる観測点としている。物理光学近似によって求められた散乱電界から、各 ray の持つエネルギーを計算することができる。このエネルギーは ray の伝搬によって保存されるので、散乱終了直後の ray にそのエネルギーを保持させる。今回は散乱終了から $10T$ 後の ray の位置を観測点とした。

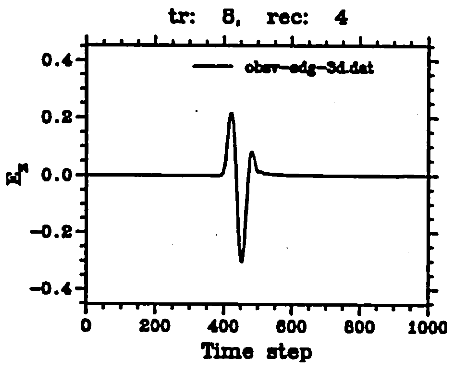


図 29: RB 付近のエッジ回折波波形の例

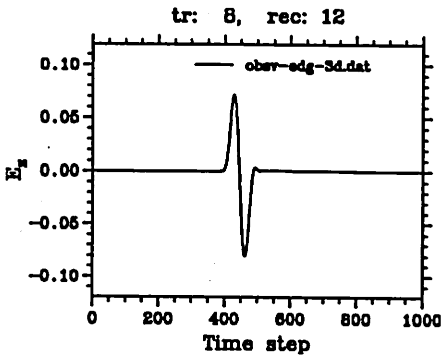


図 30: RB から離れた領域のエッジ回折波波形の例

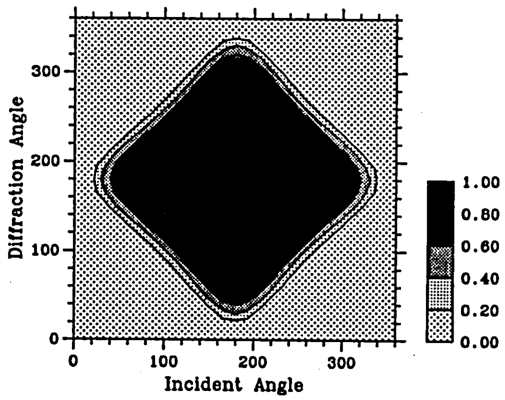


図 31: 波形合成に用いるテーブル

4.2.3 受信パルス波形の修正

鏡面反射波の波形は入射波波形を反転したものとほぼ等しくなることから、レイトレーシングにおいても入射波形を反転したものを畳み込む。それに対し、エッジ回折波の場合は入射角・散乱角によって散乱パルス波形が変化する。エッジ回折波のうちで RB に近いものは入射波形を反転しただけの波形に近く、RB から離れた方向に伝搬するものは、入射波波形を反転し積分した波形に近くなる。図 29に前者の例を、図 30に後者の例を示す。図 29は、エッジから 2 波長の距離にある線状波源から放射されたパルスが入射角 180 度でエッジに入射し、散乱角 15 度の方向のエッジから 2 波長の位置で観測した波形である。それに対し図 30は、エッジと線状波源·観測点の距離は同じで、入射角 180 度· 散乱角 180 度の場合の波形である。2 番めの正のピークの値が特に異なるのが分かる。

一般の入射角・散乱角の場合はこれら 2 つの波形の中間的な波形となる。そこで、図 29と図 30の 2 つの波形を代表に選び、この 2 つの波形を内挿することにより一般の場合の波形を求めている。内分の比については、入射角・散乱角に対する内分比のテーブルを予め用意し、それを用いて求めている。各入射角・散乱角の組み合わせにおいてパルス波形を FDTD 法によって計算し、散乱パルスの 1 番目と 2 番目の正のピークの比 αを求める。図 29・図 30の場合の

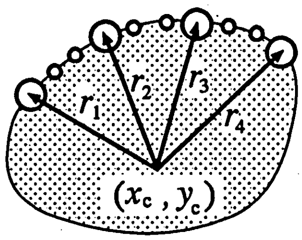


図 32: 最小二乗法における変数の置き方

比をそれぞれ α_s, α_d として、

$$\beta(\theta_i, \theta_d) = \frac{\alpha - \alpha_s}{\alpha_d - \alpha_s} \tag{14}$$

によって計算される $\beta(\theta_i, \theta_d)$ のテーブルを用意し、この βを用いて

$$a(t) = \{1 - \beta(\theta_i, \theta_d)\}a_s(t) + \beta(\theta_i, \theta_d)a_d(t) \tag{15}$$

によって波形を合成する。ただし、$a_s(t)$ は図 29、$a_d(t)$ は図 30 の波形である。

このβ(θ_i, θ_d) の分布を濃淡図にしたものが図 31である。レベルが 0 に近い部分では図 29に示した鏡面反射波に近い波形となり、レベルが 1 に近い部分では図 29に示した波形に近くなる。

4.3 離散モデルフィッティング

前節の方法により得られる推定受信信号から、非線形最小二乗法によるモデルフィッティングを用いてターゲットモデルのパラメータを推定する。非線形最小二乗法の解法には修正マルカート法を用いた。

非線形最小二乗法で推定される変数はターゲットを表現する点波源の位置である。本研究では、次に示す方法により推定変数の数を減らし、最小二乗法の性能を向上させている。

ターゲット形状は滑らかであると仮定していることから、変数となる点波源はある程度疎らに配置し、その間に変数とならない点波源を内挿する。本研究では Lagrange 補間を用いた [22]。以後、変数となる点波源を変数点波源、補間された点波源を補間点波源と呼ぶことにする。本研究では変数点波源の間隔が 1/4 波長程度以下となるようにしている。

変数点波源の位置は x 方向、y 方向の 2 つの自由度を持つ。しかし、点波源がターゲットの表面を沿う方向に動く場合には、ターゲットの形状は変化しないことになるため、2 つの自由度の内の 1 つは冗長となる。そこで、次のようにして各点波源の自由度を 1 つにする。図 32のようにターゲットは点波源の列で表現される。図において、大きい丸で示したものが変数点波源、小さい丸で示したものが補間点波源である。変数点波源の位置は (x_c, y_c) に始点を持つベクトルによって定義される。これらのベクトルの向きは固定されている。各ベクトルの大きさ r_iを変化させることにより、それぞれの点波源の位置が変化し、それによりターゲットの形状も変化する。最小二乗法の変数は点 (x_c, y_c) の x 座標 y座標、$r_i\,(i = 1, \ldots, N_p)$ の $N_p + 2$ 個である。各ベクトルの向きを一定とすることにより、ベクトルに垂直な方向、すなわちターゲット形状に沿う方向に点波源が動くのを防ぎ、最小二乗法の収束力を高めている。

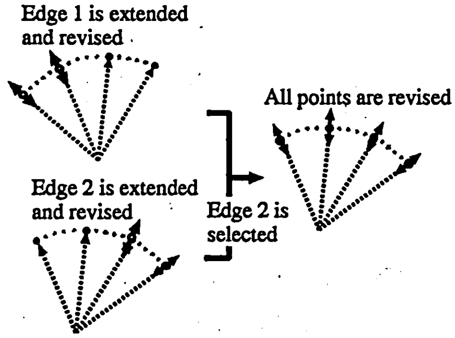


図 33: ターゲットの拡張

4.4 ターゲットの大きさの推定

非線形最小二乗法は反復改良によって解を求める手法であるため、推定変数の初期値を用意する必要がある。ターゲットの形状推定の場合には、ターゲットのおよその位置とターゲットの大きさ、すなわちどの程度の広がりをターゲットが持つか、という情報を推定変数の初期値として与えなければならない。

ターゲットの位置に関しては、点ターゲットの場合と同様の処理により概算する [5]。送信と受信に同じアンテナを用いるモノスタティック観測において、ターゲットエコーが t_{d} 遅延して受信された場合、アンテナ位置を中心に持つ半径 $ct_{\mathrm{d}}/2$ の円周上にターゲットが存在することになる。このような円周は全てのアンテナで観測される受信パルスについて描くことができる。これらの円周のうちの 2 つを選んでその交点を求めれば、ターゲットの位置を決定することができる。実際には全ての円周の組み合わせについて交点を求め、それらの交点が最も集中する位置にターゲットが存在すると推定する。

ターゲットの大きさに関しては、小さいターゲットから推定を始めて、徐々にターゲットを大きくしていく方法を採用した。図 33にその方法の概要を示す。ターゲットが 3 つの変数点波源で表現されるまで推定が進んだとする。ターゲットの大きさを大きくする方法には、左側へターゲットを拡張する方法と、右側へ拡張する方法の 2 通りがある。まず、前段階で推定された 3 つの点波源に対して、新たに左側に変数となる波源を 1 つ追加する。追加された点波源とそれに隣接する点波源の位置のみを変数として、最小二乗法によるターゲット形状の推定を行う。同様の推定を右側に波源を追加した場合についても行う。ターゲットを左側に拡張した場合の推定残差と右側に拡張した場合の推定残差を比較し、より残差の小さい方の拡張が妥当であると判断する。図の場合のように右側への拡張が選択された場合には、右側へ拡張した場合の最小二乗法の結果を初期値として、前段階に推定された 3 つの点波源を含めた 4 つの点波源の位置とターゲット中心 $(x_{\mathrm{c}}, y_{\mathrm{c}})$ を変数として最小二乗法の推定を行う。

以上の推定を変数点波源を 1 つずつ増やしながら繰り返し、非線形最小二乗法の二乗残差が最小となるか変化しなくなった時点で推定を終える。

4.5 推定例

前節までで説明したアルゴリズムを用いて計算機シミュレーションを行った結果を示す。

4.5.1 導体円柱の推定

図 34は円柱導体を推定した例である。各図の上部の ロ がアンテナ位置を表す。ここでは推定受信信号の計算時間を短縮するために、送信は中心のアンテナのみで行い、受信は全てのアンテナを用いる構成で推定アルゴリズムを動作させている。推定ターゲットの拡張が進むにつれて、○で示されている変数点波源がターゲットの形状に沿って分布していくことが分かる。この推定における二乗残差の推移を図 35に示す。横軸は変数点波源の個数、縦軸が二乗残差を表す。変数点波源が5 個以上で二乗残差がほぼ一定となり、推定が終了したと判断することができる。変数点波源の個数が過剰な場合には、拡張された点波源の位置は影領域に入るようになる。影領域に入った点波源は意味を持たないと判断すれば、アルゴリズムを過剰に進めても推定像に影響が現れないとみなすことができる。

4.5.2 導体板の推定

次に導体板を推定した例を図 36に示す。図 34の導体円柱の場合には、受信パルスは全て幾何光学によって説明できる鏡面反射エコーのみであったが、図 36の場合は左半分のアンテナでは鏡面反射エコーは受信されず、エッジ回折によるエコーのみが受信される。このような場合にも良好に推定が進行するのが分かる。変数点波源が6 個のところでターゲット形状が表現されるようになり、変数点波源が8 個の場合には、右側のエッジ点がずれているものの、過剰な波源は影にまわり始めており、推定に大きな影響はない。右側のエッジの位置に誤差が生じるのは、観測可能な鏡面反射波の反射点が右側エッジから離れた位置に存在しているために、エッジ位置が散乱波の鏡面反射成分にあまり影響を与えないためである。図 37の残差推移を見ると、変数点波源の個数が6 個以上になると残差が一定に近づいているのが分かる。

今回のレイトレーシングアルゴリズムではエッジ回折波の伝搬方向に制限を加えているために、右側のエッジから左方向に伝搬するエッジ回折波が表現されていない。このような成分を推定受信信号に含めれば、右側のエッジ位置の誤差の改善が可能になると期待される。

5 まとめ

本報告では地下探査レーダー等、不均質媒質中の物体像再構成を目的とするレーダー信号処理の新しい手法として離散モデルフィッティング (DMF) 法を提案し、その原理といくつかの具体的条件のもとでのアルゴリズムを述べると共に、その特性を計算機シミュレーションにより評価した。

最初にターゲットが均質媒質中に配置された点の集合という最も簡単な場合に即して DMF 法の原理と動作を解析し、その有効性を確認した。また, ペナルティ関数を用いることによりクラッタレベルが比較的高い場合にも安定にアルゴリズムが動作することを述べた。

次にこれを層状不均質媒質中のレーダー物体像再構成に拡張し、計算機シミュレーションでその有効性を実証した。シミュレーションに用いる観測データはFDTD 法により計算した。離散モデルフィッティングで必要となる推定受信信号の計算にレイトレーシングに基づく手法を用い、FDTD 法を用いていた場合に比べて処理を大幅に高速化することができた。レイトレーシングの手法はターゲットや層境界の間の多重散乱の効果も計算可能である。また、媒質の誘電率の不連続性が大きな場合にも適用可能である。これらのモデルは、従来の回折トモグラフィ [12] や開口合成法 [16] などの Born 近似を仮定する手法では取り扱えない。このようなモデルを取り扱うことのできることが離散モデルフィッティング法の特長の 1 つである。

最後に、有限の大きさを持つ導体ターゲットの形状推定を試みた。推定受信信号の計算に用いるレイトレーシングのアルゴリズムに物理光学近似の手法を採り入れることにより有限の大きさを持つターゲットを取り扱うことが可能になった。本研究ではターゲットは導体に限定していたが、遺跡探査などに適用するために、誘電体や空洞からなるターゲットも取り扱うことができるように今後アルゴリズムの拡張を行いたい。

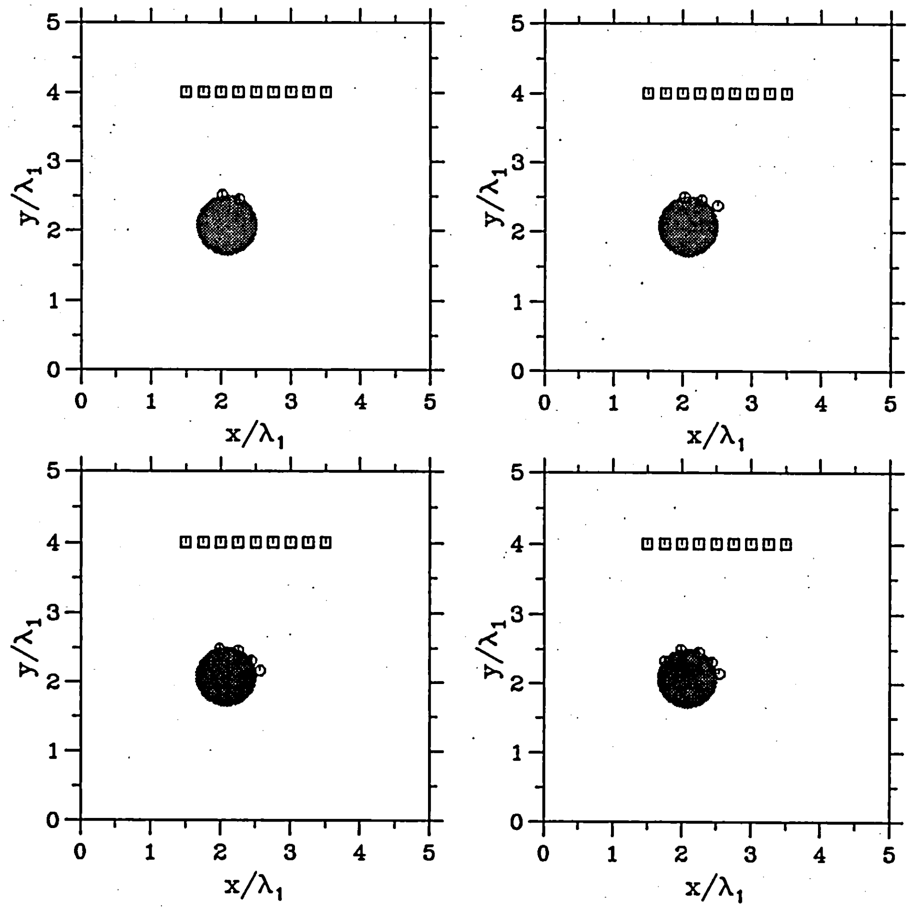


図 34: 円柱導体の推定

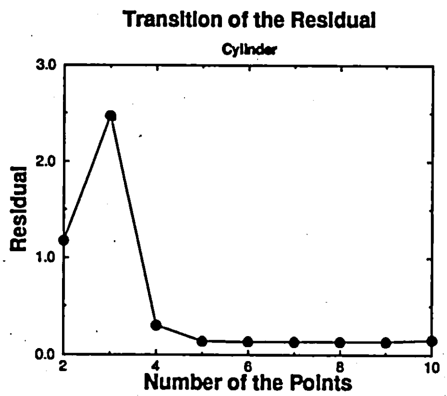


図 35: 円柱導体の推定における二乗残差の推移

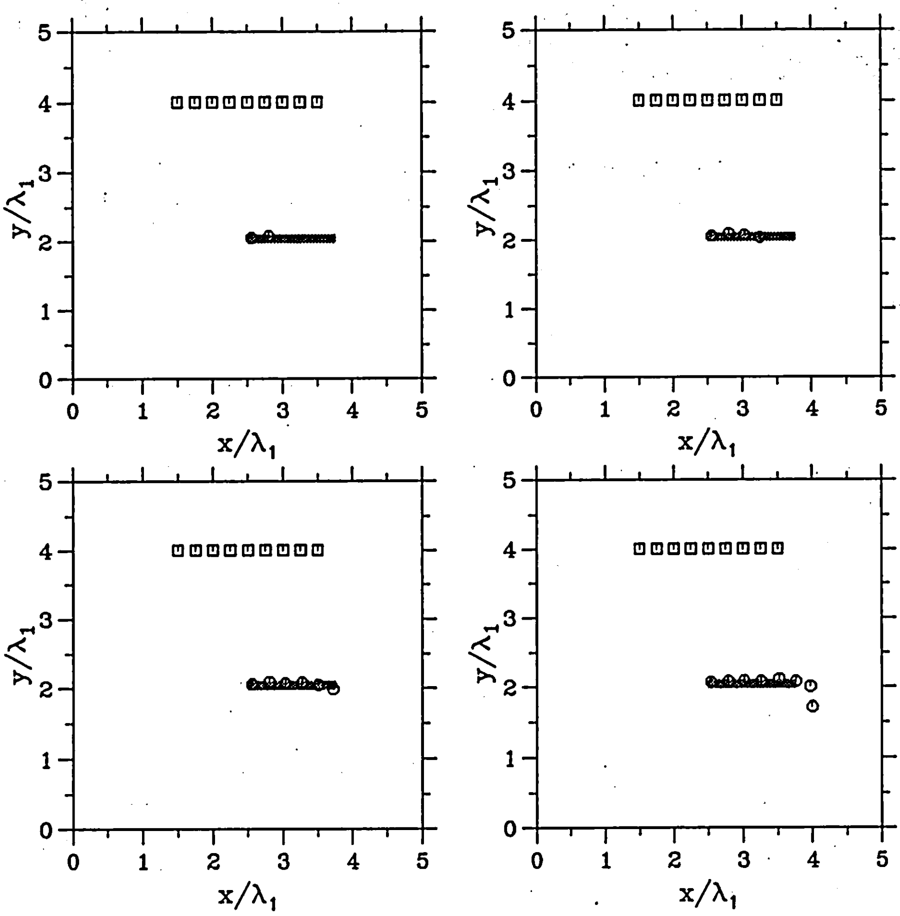


図 36: 導体板の推定

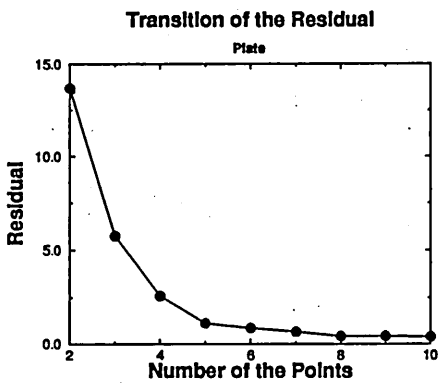


図 37: 導体板の推定おける二乗残差の推移

本報告ではアルゴリズムの評価は計算機シミュレーションのみにより行なったが、現実の地下探査レーダーのデータ処理においては強い地表反射波の除去などさまざまな問題が存在する。われわれはすでにトンネル掘削機前方監視レーダーの信号処理という比較的単純な対象について DMF 法を適用し、現在実用化を進めている [23, 24]。今後はここに述べた場合などについても実験的にその性能を検証して行く計画である。

謝辞
本研究の一部は科学研究費補助金試験研究 (B) 06555108 を受けて行われた。また本研究で用いた擬似観測データの一部は京都大学超高層電波研究センターの電波科学実験装置の計算機を用いて作成した。

参考文献

[1] D.J. Daniels, D.J. Gunton, and H.F. Scott、"Introduction to subsurface radar", *IEE Proc.*, Vol. 135, pp. 278–320, 1988.

[2] Suzuki T. and Arai I.: "Advance on underground radars", *IEICE Trans.*, Vol. E74, pp. 289–293, 1991.

[3] 古澤明, 若山俊夫, 佐藤 亨, 木村磐根, "レーダ物体像再構成のための波数領域 2 次元内挿法", 電子情報通信学会論文誌, Vol. J76-B-II, pp. 293–300, 1993.

[4] "T. Sato, K. Takeda, T. Wakayama, I. Kimura, T. Abe, and T. Shinbo, Automatic data processing procedure for ground probing radar," *IEICE Trans. Commun.*, Vol. E77-B, pp. 831–837, 1994.

[5] T. Wakayama, T. Sato and I. Kimura, High-resolution radar image reconstruction using an arbitrary array, *IEICE Trans. Commun.*, vol. E76-B, pp.1305–1312, 1993.

[6] 若山 俊夫, 佐藤 亨, 木村 磐根, "任意形状アレーを用いたレーダ物体像再構成に関する一考察", 電子情報通信学会技術研究報告, SANE91-54, 1992.

[7] 若山 俊夫, 佐藤 亨, 木村 磐根, "任意アレイに適用可能な高分解能レーダ物体像再構成法", 電子情報通信学会技術研究報告, SANE92-91, 1992.

[8] 多賀 史江, 若山 俊夫, 佐藤 亨, 木村 磐根, "層状不均質媒質中のレーダー物体像再構成の試み" 電子情報通信学会技術研究報告, SANE92-92, 1992.

[9] 若山 俊夫, 佐藤 亨, 木村 磐根, "離散モデルフィッティング法によるレーダー物体像— レイトレーシングによる高速化", 電子情報通信学会技術研究報告, SANE93-51, 1993.

[10] T. Wakayama, T. Sato and I. Kimura, "Radar image reconstruction by discrete model fitting in a layered inhomogeneous medium", Proc. 5th Int. Conf. on Ground Pentrating Radar, June, 1994.

[11] 若山 俊夫, 佐藤 亨, 木村 磐根, "離散モデルフィッティング法を用いた有限の大きさを持つターゲットの形状推定の試み", 電子情報通信学会技術研究報告 SANE94-62, 1994.

[12] 永井 啓之亮, "超音波ホログラフィ", 日刊工業新聞社, 1989.

[13] E. Vanmarke, "Random fields: Analysis and synthesis", MIT Press, 1983.

[14] S.Coen, Inverse scattering technique applied to remote sensing of layered media, IEEE Trans. on Antenna and Propagation, vol.29, No.2, Oct. 1981.

[15] 森田長吉, 多層誘電体中の誘電率推定 - 最適化の方法の適用, 電気学会研究会資料, EMT-76-53, 1976.

[16] N. Osumi, K. Ueno, "Microwave holographic imaging method with improved resolution", *IEEE Trans. on Antenna and Propagation*, vol.32, No.10, pp.1018–1026, 1984.

[17] 西村萬平, 高松修司, 繁沢 宏, 最適化手法を用いた離散的特異点法による完全導体柱の散乱電磁界の数値解析, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J67-B, No.5, 1984.

[18] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-14, no.3, pp.302–307, 1966.

[19] G. Mur, "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations", *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-23, no.4, pp.377–384, 1981.

[20] 前田 憲一, 木村 磐根, "現代電磁波動論", オーム社, 1984.

[21] 山下 栄吉, 電磁波問題解析の実際, 電子情報通信学会, 1993.

[22] 洲之内治男, 数値計算, サイエンス社, 1978.

[23] T. Sato, K. Takeda, T. Nagamatsu, T. Wakayama, I. Kimura, and T. Shinbo, "Automatic signal processing of front monitor radar for tunnelling machines", Proc. 5th Int. Conf. on Ground Pentrating Radar, June, 1994.

[24] 武田 賢也, 長松 隆, 若山 俊夫, 佐藤 亨, 木村 磐根, 新保 哲也, "離散モデルフィッティング法を用いたトンネル掘削機前方監視レーダーの信号処理", 電子情報通信学会技術研究報告, SANE93-73, 1994.

輻射科学研究会資料
ＲＳ９４－１７

分散性光ファイバと
長波長通過（短波長阻止）光フィルタへの応用

西村順二、上田豊、森下克己
大阪電気通信大学
大学院工学研究科　総合電子工学専攻

1994年12月16日（金）
於　大阪大学　基礎工学部

分散性光ファイバと
長波長通過（短波長阻止）光フィルタへの応用

西村順二、上田豊、森下克己
大阪電気通信大学

あらまし

コアとクラッド材の屈折率波長曲線が交差する分散性光ファイバの試作を行った。試作した光ファイバでは特定の波長以下では光は導波せず、長波長通過フィルタとしての特性を持つことが分かった。また、曲率半径を変えることによって遮断波長を調節できることが分かった。

1. はじめに

光通信や光計測などの種々の光ファイバシステムを構築するために、いろいろな光デバイスが必要とされている。その中でも熱や光などで加工した光ファイバや特殊な機能を持った光ファイバを用いたファイバ形光デバイスは、光ファイバとの整合性、安定性、操作性などに優れており、損失も小さいので注目されている。通常の光ファイバではコア・クラッド間の屈折率差は波長に対してほとんど依存せず、波長が長くなるにしたがって導波モード数が減少し、光のコアへの閉じ込めが弱くなりスポットサイズが広がる。そのために、通常の光ファイバを用いて製作できる光デバイスの波長特性は限られたものとなっていた。この制限をなくして種々の波長特性を持った光デバイスを製作するために、コア・クラッド間の屈折率差が波長に大きく依存する光ファイバが提案され、光フィルタ[1][2]、波長無依存カプラ[3]、波長選択カプラ[4]などを実現できることが理論的に示された。このような光ファイバは屈折率差の波長分散が大きいために、**分散性光ファイバ**[5]と呼ばれている。

本報告では、屈折率の波長分散が与えられている光学ガラスの中からコア材とクラッド材を選び、分散性光ファイバの試作を行った。コアとクラッドガラスの選択にあたっては、屈折率波長曲線が交差するようなものを選び、短波長側では基本モードでさえ導波しない分散性光ファイバを製作した。製作した分散性光ファイバの挿入損失を調べ、長波長通過（短波長阻止）の波長可変フィルタとして応用できることを示した。

2. 分散性光ファイバの試作

コア・クラッド間の屈折率差が波長に大きく依存する分散性光ファイバを製作するためには、コアとクラッドの材料として屈折率分散が異なる材料を組み合わせる必要がある。様々な屈折率波長特性を持った光学ガラスが製造され市販されている

ので、試作する分散性光ファイバの材料はその中から選択した[6][7]。光ファイバに線引きする際に２種類のガラスが調和して延伸されて光ファイバとなるためには、コアとクラッド材料間の熱的特性が似ている必要がある。光学ガラスの選定にあたっては屈折率波長特性のほかに転移点と線膨張係数を考慮にいれて選択を行った。選択された光学ガラスをコアロッドとクラッドチューブに加工し、ロッドインチューブ法で光ファイバに線引きした。

コアとクラッドガラスの屈折率波長曲線が交差し、波長が短くなるにしたがってコアの屈折率がクラッドより小さくなるガラスの選択を行う。コア･クラッド間の屈折率差が十分大きい波長では、導波モードはコア部に閉じ込められて伝搬する。波長が短くなり屈折率差が小さくなるにしたがい導波モードの界分布はクラッド部へ広がり、曲げによる損失を受けやすくなる。光ファイバの曲率を小さくすることで短波長側で損失が増加する波長可変の光フィルタとなる。また、コアとクラッドの屈折率波長曲線の交点より短い波長では導波モードは存在せず、光は伝わらない。光学ガラスの組み合わせを選定し分散性光ファイバを試作した結果を次に示す。

2-1　分散性光ファイバ　BaCED4/F11

図１は選定した光学ガラスBaCED4(Hoya)とF11(Ohara)の屈折率波長特性である。屈折率は与えられた分散式を用いて計算により求めた。また、波長1.014μm以上の波長においては外挿により屈折率を求めた。屈折率波長曲線の交点は0.75μm付近であり、それよりも短波長側では導波モードは存在しないことになる。表１に使用した光学ガラスの特性を示す。転移温度差は65℃、線膨張係数差は20%程度であり比較的差の小さいものを選んだ。

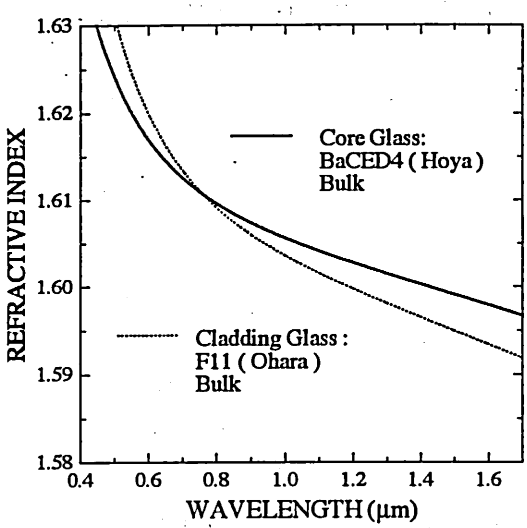
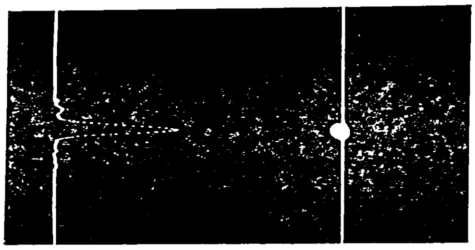


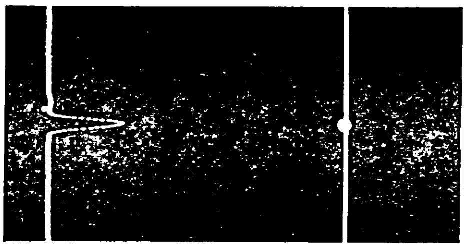
図１．バルク状光学ガラス（BaCED4、F11）の屈折率

表１．バルク状光学ガラス（BaCED4, F11）の特性

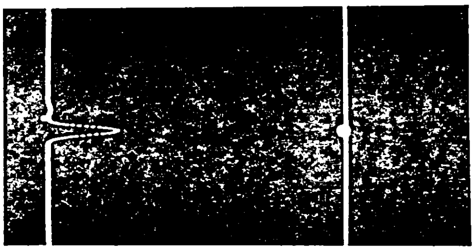
ガラス名	BaCED4 (Hoya)	F11 (Ohara)
転移点	645 ℃	590 ℃
線膨張係数 (100～300℃)	71×10^{-7}/K	89×10^{-7}/K
損失 波長700 n m	0.435 dB/m	2.18 dB/m
損失 波長1060 n m	—	1.30 dB/m



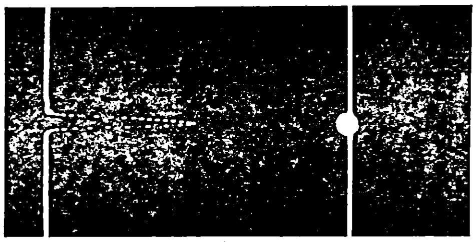
（a） $\lambda=1.52\mu m$



（b） $\lambda=1.3\mu m$



（c） $\lambda=0.85\mu m$



（d） $\lambda=0.633\mu m$

図２．光ファイバBaCED4 / F11
端面における光強度分布

製作された光ファイバBaCED4/F11に異なる波長の光を入射して、光の導波状態を調べた。図２に、波長1.52μm、1.3μm、0.85μm、0.633μmの光を入射したときの光ファイバ端面における光強度分布を示す。波長1.52μmから波長0.633μmまでの各波長で光がコアに閉じ込められて伝搬しているのが分かる。図1の結果からは、波長0.633μmではコアの屈折率がクラッドよりも低く導波モードが観測されないはずである。しかしながら、図２（d）に示すように、明らかに導波モードが存在している。

次にＲＮＦ法により、波長0.633μmにおける光ファイバBaCED4/F11の屈折率分布の測定を行った。図３に測定された光ファイバの屈折率分布を示す。使用したマッチングオイルの屈折率は1.625である。図中にはコアとクラッド材のバルク状光学ガラスの屈折率が破線で示されている。光ファイバではコアの屈折率はクラッドより大きくなっている。この原因は、線引き工程で光ファイバが高温から室温に急冷され、コア部とクラッド部で異なる量の屈折率低下が起きたためと考えられる。冷却によるガラスの屈折率の低下は冷却速度が速いほど大きく、この屈折率低下の度合いはガラスにより異なることが知られている[8]。この光ファイバではクラッド材（Ｆ11）の方がコア材（BaCED4）よりも冷却による屈折率低下が大きく、光ファイバへ線引きする過程でクラッド部のほうがコア部よりも屈折率の低下が大きくなったものと思われる。

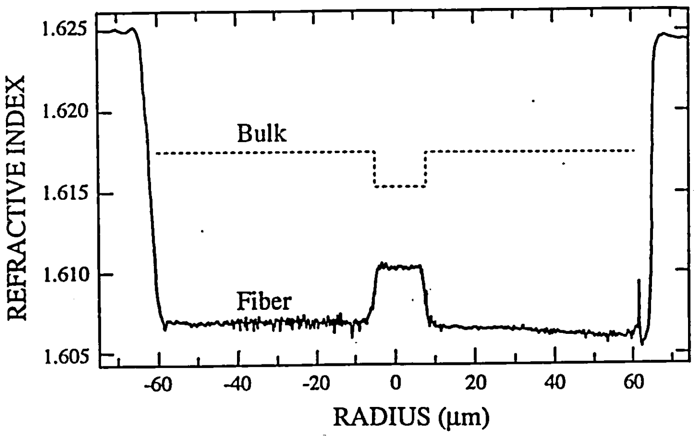


図３．光ファイバBaCED4 / F11の
波長0.633μmにおける屈折率分布

図４にはファイバ状の光学ガラスBaCED4とF11の屈折率波長曲線を示す。波長0.633μmにおけるコア及びクラッドの屈折率をもとにして、図１の屈折率波長曲線を平行移動してファイバ状光学ガラスの屈折率波長曲線を求めた。分散性光ファイバBaCED4/F11では、クラッドの方がコアよりも屈折率の低下が大きいので、屈折率波長曲線の交点は0.52μm付近となり、バルク状光学ガラス（図１）よりも短波長側に移動している。

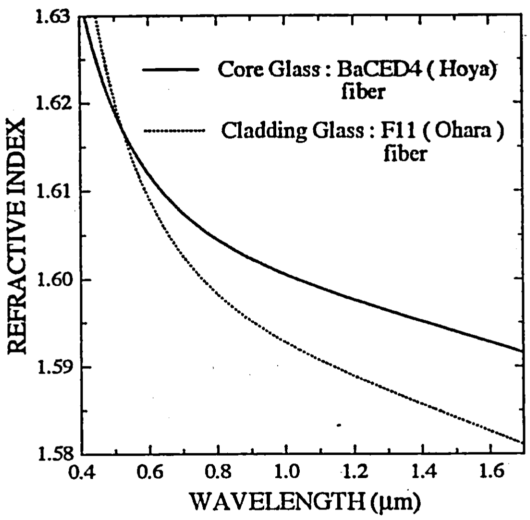


図４．ファイバ状光学ガラス（BaCED4、F11）の屈折率

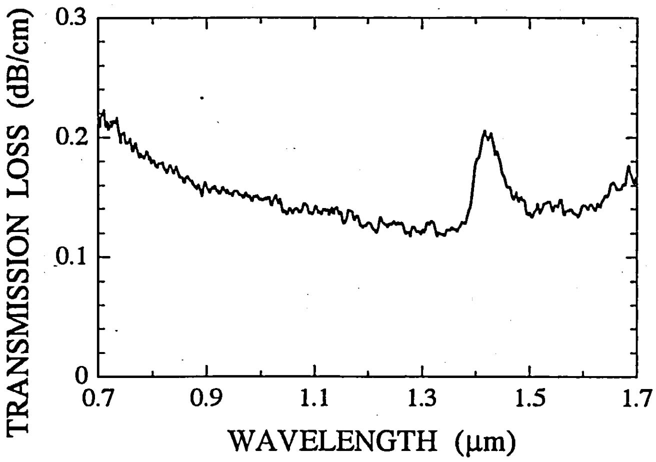


図５．光ファイバBaCED4 / F11 の伝送損失

図５に分散性光ファイバBaCED4/F11の伝送損失を示す。白色光源とスペクトラムアナライザーを用いてカットバック法で測定を行った。波長1.55μm、1.0μm、0.75μmにおける伝送損失は、それぞれ0.14dB/cm、0.15dB/cm、0.2dB/cmである。バルク状光学ガラスの損失は表１に示すように、波長0.7μmでは0.004～0.02dB/cm程度なので、光ファイバ製造時に生じた構造不完全性が伝送損失の主な要因であると思われる。

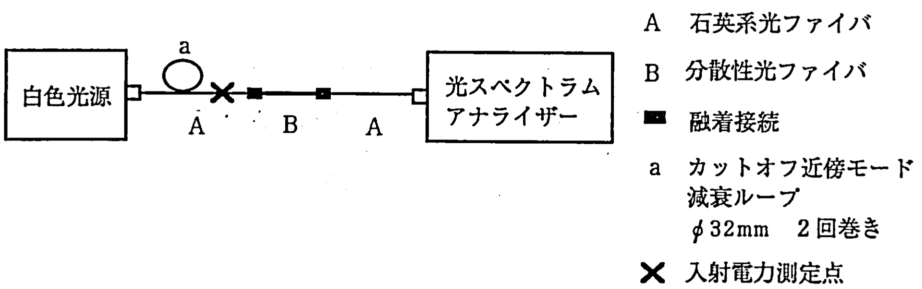


図６．挿入損失波長特性の測定系

表２．石英系光ファイバの諸元

比屈折率差 △	0.35%
モードフィールド径 (at λ=1.3μm)	9.4μm
カットオフ波長	1.20μm
クラッド径	125μm

光ファイバBaCED4/F11の両端に石英系光ファイバを接続した場合の挿入損失を調べる。図6に測定系を示す。分散性光ファイバBaCED4/F11の両端に石英系光ファイバを融着接続する。入射側の石英系光ファイバを曲げることによって、カットオフ近傍のモードが入射しないようにしている。透過光を測定した後、接続点の前で切断し入射電力を測定して挿入損失を求める。表2に使用した石英系光ファイバの諸元を示す。この光ファイバは通常の1.3μm帯における単一モード光ファイバであり、1.2μm以下の波長では多モードとなっている。

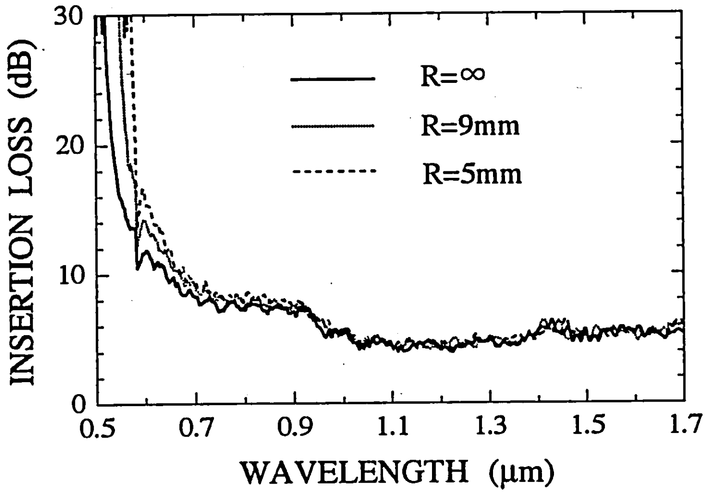


図7．光ファイバBaCED4 / F11 の挿入損失

図7に長さ8.5cmの分散性光ファイバBaCED4/F11の挿入損失の測定結果を示す。実線は分散性光ファイバBaCED4/F11を直線状にした場合である。点線および破線は分散性光ファイバBaCED4/F11を曲率半径9mmと5mmで円状に1巻きした場合の挿入損失である。波長0.6μm付近から波長が短くなるにしたがい損失が急増している。これは波長が短くなるにしたがいコア・クラッド間の屈折率差が小さくなり、石英系光ファイバから分散性光ファイバの導波モードに変換される電力が少なくなり、ついにはコアの屈折率がクラッドよりも低くなり、導波モードが存在しなくなったためであると考えられる。実線、点線および破線を比べると、曲率半径を小さくするにしたがって、屈折率差の小さい短波長側で損失が増加していることが分かる。このことから、製作された分散性光ファイバは波長可変の長波長通過（短波長阻止）光フィルタの特性を持っていることが分かる。波長1.55μmにおける長さ8.5cmの分散性光ファイバBaCED4/F11の挿入損失は5.4dBである。8.5cmの分散性光ファイバの伝送損失を図5から求めると1.2dBとなる。挿入損失からファイバ内での伝送損失を差し引いた残りの4.2dBの損失は、2つの融着接続によって

起こっている。分散性光ファイバBaCED4/F11は波長1.55μmにおいては多モードで、しかもコア径も14μmと大きいので、接続損失も大きくなったものと思われる。コア径を細くして、モードフィールド径を同じにすれば、接続損失を下げることができると思われる。

2-2 分散性光ファイバ BaCD1/F11

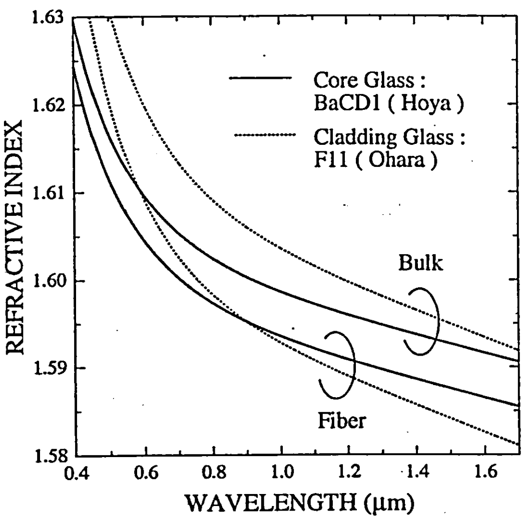
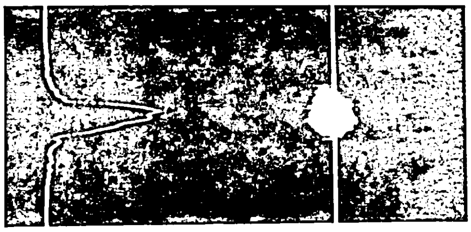


図8. バルク状およびファイバ状光学ガラス (BaCD1、F11)の屈折率

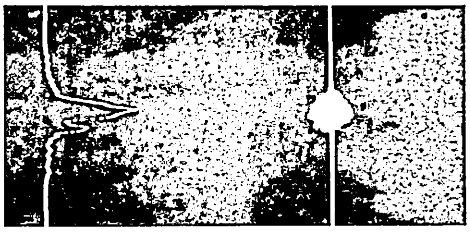
表3. バルク状光学ガラス(BaCD1) の特性

ガラス名	BaCD1 (Hoya)
転移点	645 ℃
線膨張係数 (100~300℃)	73×10^{-7}/K
損失 波長700nm	0.435 dB/m

分散性光ファイバBaCED4/F11では屈折率波長曲線の交点は0.52μm程度の可視域であった。近赤外域でフィルタ効果を実現するために、交点がさらに長波長側となるように新たにコア材を選定し分散性光ファイバを製作した。選定にあたってはBaCED4と比べて屈折率が少し低く、かつ急冷による屈折率低下もほぼ同じであることを考慮し、コア材としてBaCD1(Hoya)を選んだ。表3に光学ガラスBaCD1の特性を示す。バルク状光学ガラスBaCD1とF11の屈折率波長曲線を図8に示す。BaCD1とF11を用いて光ファイバに線引きすると、光ファイバBaCED4/F11の場合と同程度の屈折率変化が起きることが予想される。急冷による屈折率低下が同じとしてファイバ状光学ガラスの屈折率波長特性を計算し図8に示す。バルク状ではコアガラスの屈折率はクラッドガラスよりも低くなっている。しかし、線引き時における急冷により、光ファイバでは波長0.9μm付近以上の波長ではコアの屈折率がクラッドの屈折率よりも高くなるものと思われる。



（a） λ=1.55μm



（b） λ=1.3μm

図９．光ファイバBaCD1／F11
端面における光強度分布

製作された分散性光ファイバBaCD1/F11はクラッド径125μm、コア径35μmであった。波長1.55μm及び波長1.3μmの光を入射したときの光強度分布を図９に示す。波長1.55μmと1.3μmではコアに光が閉じ込められており、導波しているのが分かる。強度分布が歪んでいることから、多モードファイバとなっていると考えられる。また、波長0.633μmでは導波モードは観測されず、コアの屈折率がクラッドよりも低くなっていると思われる。分散性光ファイバBaCD1/F11を短くすると波長0.85μmでも導波モードが観測されることから、波長0.85μmではコアの屈折率がクラッドよりも大きくなっているが屈折率差は非常に小さいと思われる。

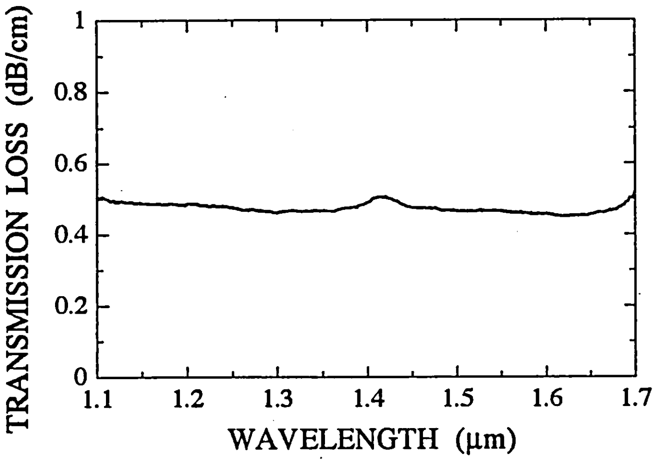


図１０．光ファイバBaCD1／F11 の伝送損失

図１０に光ファイバBaCD1/F11の単位長さ当たりの伝送損失を示す。波長1.55μmにおける伝送損失は0.46dB/cmで、先に示した光ファイバBaCED4/F11よりも大きくなっている。この原因としては、コア・クラッド間の屈折率差が小さくなったために、より大きな散乱損失を受けるようになったものと思われる。BaCD1の材料損失はBaCED4と同じ程度であるので、伝送損失の要因は、光ファイバを製作するときに生じた構造不正によるものが大きいと思われる。

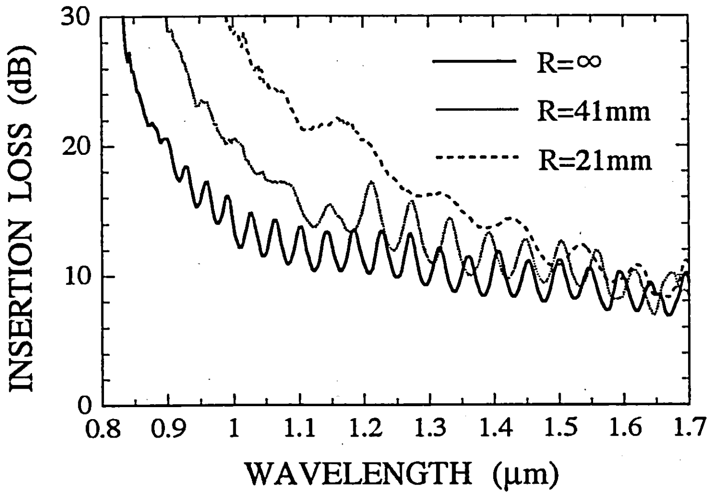


図１１．光ファイバBaCD1 / F11の挿入損失

図１１に製作した分散性光ファイバBaCD1/F11の両端に表２に示した石英系光ファイバを接続した場合の挿入損失を示す。分散性光ファイバBaCD1/F11の長さは4.9ｃｍである。実線は分散性光ファイバを直線状にした場合で、1μm付近より短い波長で挿入損失は急激に増加していく。しかしながら、波長0.9μmでも20ｄＢ程度の損失で光は伝わっているので、コアとクラッドの屈折率波長曲線の交点は、図８に示す波長0.9μmよりも短波長側に移動していると思われる。点線および破線は、分散性光ファイバを曲率半径41ｍｍと21ｍｍで曲げた場合の挿入損失である。曲率半径が小さくなるほど、しかも波長が短くなるほど挿入損失は増加している。特に波長1.2μm以下で挿入損失の増加が顕著になっている。波長1.57μmにおける挿入損失は7.4ｄＢである。長さ4.9ｃｍの分散性光ファイバBaCD1/F11の伝送損失を図１０から求めると2.3ｄＢとなる。挿入損失から分散性光ファイバ内での伝送損失を差し引いた残りの損失約5ｄＢは2つの接続点における接続損失と考えられる。

図１１の挿入損失は周期的な5ｄＢ程度の変動を受けている。分散性光ファイバBaCD1/F11は0.9μm近傍の波長を除いて多モード光ファイバとなっており、伝搬定数の異なる複数のモードが伝搬する。石英系光ファイバによって励振された導波モードはファイバ軸に沿って伝搬し、融着接続された石英系光ファイバへと伝わる。励振された導波モードの干渉による分散性光ファイバ端における光強度分布は、伝搬定数の波長依存性のために周期的に変化し、そのために挿入損失も周期的な変動を受けたものと考えられる[9]。このような周期変動を無くすためには分散性光ファイバのコア径を小さくして単一モードファイバにする必要がある。

3. まとめ

コア・クラッド間の屈折率差が波長により大きく変動する分散性光ファイバを試作しその特性を調べた。バルク状光学ガラスから分散性光ファイバを製作する場合は、線引き工程においてガラスの屈折率が低下することを考慮して光学ガラスの組み合わせを選ぶ必要のあることが分かった。製作した2種類の分散性光ファイバは可視域と近赤外域で短波長阻止の特性を持つことを示した。また、短波長域ではコアの屈折率がクラッドの屈折率よりも低くなり光が導波しないことが分かった。分散性光ファイバを曲げ、その曲率半径を小さくすると短波長域における損失が大きく増大し、波長可変の長波長通過（短波長阻止）光フィルタとして利用できることも分かった。今後の課題は、コア・クラッド界面の不整を少なくして伝送損失を下げること、単一モード化して通過波長域での接続損失を下げること、屈折率波長曲線の交差角が大きい材料を用いて急峻な遮断特性を得ることなどである。

謝辞

分散性光ファイバの線引きおよび屈折率分布測定について御援助を頂きました三菱電線工業（株）の田中紘幸氏および御前俊和氏に深謝致します。

参考文献

[1] K. Morishita, M. S. Yataki and W. A. Gamblimg : "In-line optical fibre filters using dispersive materials", Electron. Lett., **23**, 7, pp. 319-321 (Mar. 1987).

[2] K. Morishita : " Bandpass and band-rejection filters using dispersive fibers ", J. Lightwave Technol., **7**, 5, pp. 816-819 (May 1989).

[3] K. Morishita, M. S. Yataki, and W. A. Gambling : "Wavelength-insensitive couplers using dispersive materials", Opt. Lett., **12**, 7, pp. 534-535 (July 1987).

[4] K. Morishita : " Wavelength-selective optical-fiber directional couplers using dispersive materials", Opt. Lett., **13**, 2, pp. 158-160 (Feb. 1988).

[5] K. Morishita : " Optical fiber devices using dispersive materials", J. Ligtwave Technol., **7**, 1, pp. 198-201 (Jan. 1989).

[6] Hoya Optical Glass カタログ

[7] Ohara Optical Glass カタログ

[8] 泉谷徹朗："光学ガラス"，共立出版株式会社，1984.

[9] P. R. Horche, M. L. Amo, M. A. Muriel and J. A. M.Pereda : "Spectoral behavior of a low-cost all-fiber component based on untaperd multifiber unions", Photonics Technol. Lett.,**1**,7, pp. 184-187 (July 1989).

輻射科学研究会資料
RS94-18

光ファイバーの伝搬モードの近傍界を用いた屈折率分布の推定

藪 哲郎　　沢 新之輔　　下代雅啓

大阪府立大学工学部

1994年12月16日
大阪大学 基礎工学部

1. まえがき

光導波路の伝送特性ならびに他の光導波路または光源との結合特性などの重要な諸特性は、主に屈折率分布によって決まる。従って、屈折率分布を正確かつ迅速に測定する方法を確立することは重要な研究課題の一つである。

光導波路の屈折率分布を測定する一つの方法として導波モードの近傍界を用いる方法がある。これは、屈折率分布と個々の固有モードの界分布との間に、1対1の対応関係があることを利用する方法である。近傍界の測定には顕微鏡とテレビカメラを用意すればよく、装置の安価かつ簡便さがこの方法の特徴であり、またその実用的価値を高めている。

近傍界から屈折率分布を求める場合、理論上は正確な屈折率分布が求まるが、実際の測定では測定値に誤差が混入する。そして、測定値に少しでも系統的な誤差が混入すると、得られる屈折率分布の信頼性は大幅に低下してしまうという問題点がある。

そこで本論文では、まず、最も簡単な場合として光ファイバの屈折率分布を推定する問題を取り上げ、屈折率分布を求める方法、得られた屈折率分布の信頼性、について詳しく検討する。次に、光ファイバで得られた知見を基に、埋め込み型光導波路の屈折率分布を推定する。

2. 光ファイバの解析手法

2.1 近傍界を使う方法の問題点

近傍界から屈折率分布を推定する手法はいずれもスカラ波動方程式に根拠をおいている。光ファイバに対するスカラ波動方程式は次のように表される。

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d\phi(r)}{dr}\right\}+\left\{k^2n^2(r)-\beta^2-\frac{m^2}{r^2}\right\}\phi(r)=0 \tag{1}$$

ここで $n(r)$ は半径方向の屈折率分布、$\phi(r)$ は界分布、β は伝搬定数、k は真空中の波数、r はファイバ中心からの距離を表す。また、m は周方向の量子数であり整数値をとる。上式の中の、既知である $k,\phi(r),m$ を利用して未知関数 $n(r)$ を求める方法として、これまで、次の二つの方法が提案されてきた。それぞれの方法について簡単に説明する。

(1) 微分処理法[(1)~(5)]

式 (1) を $n^2(r)$ について解くと、次式を得る。

$$n^2(r)=\frac{\beta^2}{k^2}+\frac{m^2}{k^2r^2}-\frac{1}{k^2\phi(r)}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi(r)}{dr}\right)\right\} \tag{2}$$

テレビカメラで測定される光強度分布 $P(r)$ は界分布 $\phi(r)$ の 2 乗で表されるから $\phi(r)$ の代わりに $P(r)$ を使って書き直すと次式を得る。

$$n^2(r) = \frac{\beta^2}{k^2} + \frac{m^2}{k^2r^2} - \frac{1}{k^2P(r)}\left\{\frac{1}{2}\frac{d^2P(r)}{dr^2} - \frac{1}{4P(r)}\left(\frac{dP(r)}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2r}\frac{dP(r)}{dr}\right\} \quad (3)$$

上式に基づいて光強度分布自身およびその微分から屈折率分布 $n(r)$ を決定するのが微分処理法である。

式 (3) から分かるように、β が未知のままでは $n^2(r)$ の絶対的な値を決めることはできない。しかし、どこか一点の屈折率がわかっている、あるいはコアとクラッドの屈折率差の絶対値がわかっていれば、$n^2(r)$ を決定することができる。この非決定性は、近傍界より屈折率分布を求める手法に共通のものであり、本論文においてはクラッドの屈折率が既知であるとして議論を進める。

また、式 (3) からわかるように、光導波路は一つのモードのみで励振されている必要がある。従って、本論文ではシングルモードの光導波路を解析の対象とし、基本モードのみが励振されている場合を取り扱う。

(2) 逆解析法[7][8]

まず、あらかじめ適当に屈折率分布 $n(r)$ を仮定する。屈折率分布は多層分割により離散的に表す。次に、仮定した屈折率分布について波動方程式を解き、それによって求まる光強度分布と測定によって得られる光強度分布を比較し、両者の差がなくなるように屈折率分布を反復修正する。この方法は (1) の微分処理法に比べて測定値に含まれるホワイトノイズに強いと言われている。

以上 2 つの解析方法について簡単に述べたが、これらの方法では測定値に混入したわずかな系統的歪みが結果に大きな影響を及ぼす可能性がある。このことについて、以下に例をあげて説明する。

クラッドの屈折率は 1.46 、波長は 0.633μm とする。図 1 の太実線で表されたステップ型の屈折率分布に対応する光強度分布が細実線で表された光強度分布であり、太点線で表された二乗分布型ファイバに対応する光強度分布が細点線である。横軸がファイバ中心からの距離、縦軸がそれぞれ屈折率および光強度を表している。

図 1 における 2 つの光強度分布はほぼ一致しており区別するのが困難なのに対して、それに対応する屈折率分布は大きな違いがある。このことは、光強度分布から屈折率分布を推定する際、測定値にわずかな系統的な歪みが入ると、それが結果に大きな影響を及ぼすことを意味する。

図 1 の二つの光強度分布で認めうる差程度の系統的歪みは、容易に測定系から混入しうる。テレビカメラの受光素子の非線形性、レンズ系など光学系の歪み、ピントのぼけ、ファイバー端面の不整、ファイバの軸と顕微鏡の光軸との不一致、などがその要因として考えられる。

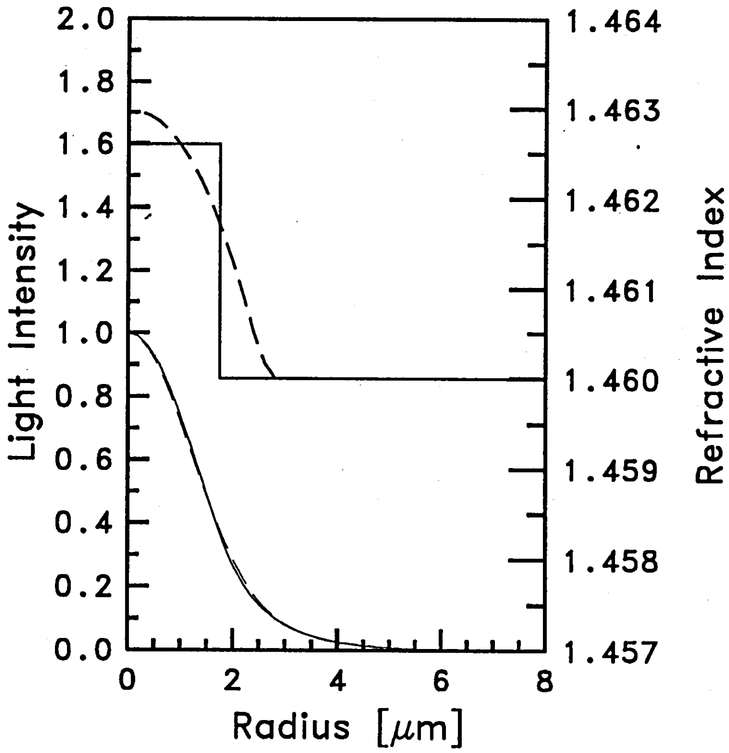


図 1 2つの屈折率分布 (破線) とそれに対応する光強度分布 (実線)

Fig. 1. Two refractive index profiles (dashed lines) and corresponding light intensity distributions (solid lines).

従って、測定装置から系統的な歪みが混入する場合、これまで提案されてきた微分処理法や逆解析法では正確な屈折率分布の推定が困難である。

2.2 制約つき逆解析法

以上のように光強度分布より屈折率分布を推定するのは困難であるが、あらかじめ「屈折率はステップ型である」あるいは「屈折率はグレーデッド型である」などのような既知情報があれば、これを制約として用いることにより、系統的歪みの影響を軽減することが可能である。

微分処理法には制約条件を組み込むのが困難であるが、逆解析法に制約条件を組み込むのは容易である。すなわち、屈折率分布をいくつかのパラメータで表すことにすれば良い。

そこで、本論文ではあらかじめ屈折率の形状がステップ型であることがわかっている場合と、二乗分布型であることがわかっている場合の2つの場合について、この既知情報を制約として付加した逆解析法を提案する[9]。

ステップインデックス型ファイバの場合は図2(a)、2乗分布型ファイバの場合は図2(b) のようなモデリングを行う。つまり

- コアの半径 p_1
- コアの中心の屈折率 p_2

の二つのパラメータで屈折率分布を表現する。先ほど述べたように、クラッドの屈折率は既知とする。このようにモデリングをすることにより、仮定したパターンの屈折率分布以外は考えないという制約を入れている。より複雑な形状を持ったファイバに対しては、適宜パラメータの数を増やすことによって対応すればよい。

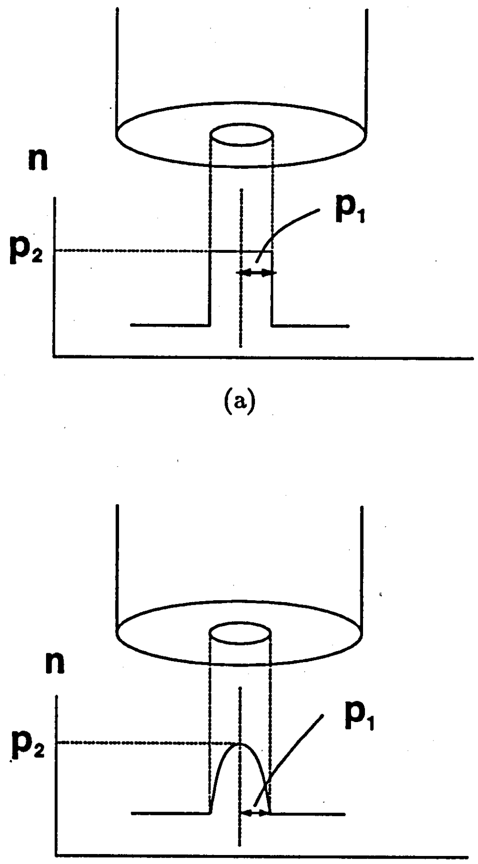
二つのパラメータは以下の手順に従って決定する。

1. パラメータ p_1, p_2 を適当に仮定する。
2. スカラ波動方程式を解いて基本モードの界分布を求め、これを二乗して光強度分布を求める。スカラ波動方程式は多層分割法を用いて解く。
3. 上で求めた光強度分布 $P_c(r;p_1,p_2)$(以下計算値と呼ぶ) と、測定された光強度分布 $P_o(r)$(以下測定値と呼ぶ) を比較し、差が小さくなるように p_1, p_2 を修正する。
4. 2と3を繰り返す。

二つの光強度分布 $P_c(r)$ と $P_o(r)$ の例を図3に示す。このように、$P_c(r)$ と $P_o(r)$ はあらかじめ最大値を1に正規化しておく。このとき、二つの光強度分布の差を評価する評価関数 $E\{P_c(r), P_o(r)\}$ は次のように定義する。

$$E\{P_c(r), P_o(r)\} = \frac{\sum_i^n |P_c(r_i) - P_o(r_i)|}{\sum_i^n max\{P_c(r_i), P_o(r_i)\}} \times 100 \quad [\%] \qquad (4)$$

$r_1, r_2 ... r_n$ は横軸上の点を表しており、$max\{P_c(r_i), P_o(r_i)\}$ はそれぞれの点での大きい方の値を表す。式(4)は直観的には、図3における面積Aと面積B



(a)

(b)

図 2 光ファイバの屈折率分布 (a) ステップインデックス型ファイバ (b) グレーデッドインデックス型ファイバ

Fig. 2. Refractive index profile of optical fiber. (a) step-index fiber (b) graded-index fiber.

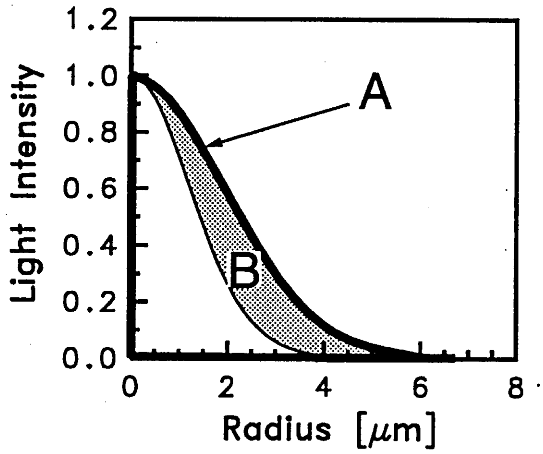


図 3 二つの光強度分布間の差の評価

Fig. 3. Assessment of difference between two light intensity distributions.

の比を評価値とすることを意味している。この評価値を採用することにより、後の節で行う測定時の系統的な歪みの評価が明解になる。

式 (4) の評価値は $P_c(r;p_1,p_2)$ に含まれる二個のパラメータ p_1,p_2 によって決定されるので、結局、前述の反復手順は、E を最小にするような p_1,p_2 を見つけだすという非線形最小値探索問題に帰着する。本論文では、これらのパラメータの決定には非線形関数の極小値を求めるための一手法である共役勾配法を使用する。

2.3 解の探索空間

以上で述べた評価関数 $E\{P_c(r;p_1,p_2),P_o(r)\}$ の最小化は 2 次元空間での非線形最小値探索問題である。ここでは、ステップインデックス型ファイバの場合の探索空間を調べ、収束性を検討する。

クラッドの屈折率が 1.46、波長は 0.633μm の場合について考える。まず、コアの半径 p_1 とコアの屈折率 p_2 を様々な値に設定したときに得られる光強度分布を一覧する。図 4 はコアの半径が 1.0μm ~ 4.0μm 、コアの屈折率が 1.461 ~ 1.465 の場合について、その光強度分布を描いたものである。それぞれの図中の v は正規化周波数を、一点鎖線はコアとクラッドの境界を、点線で示されている光強度分布はマルチモードで動作する領域であることを表している。屈折率を表す二つのパラメータを決定することは、直観的には、測定した光強度分布に最も近い分布をこれらの図中より選び出すことに相当する。

この図からわかるように、探索空間は滑らかであり、どこに初期値をとっても収束することが予想される。

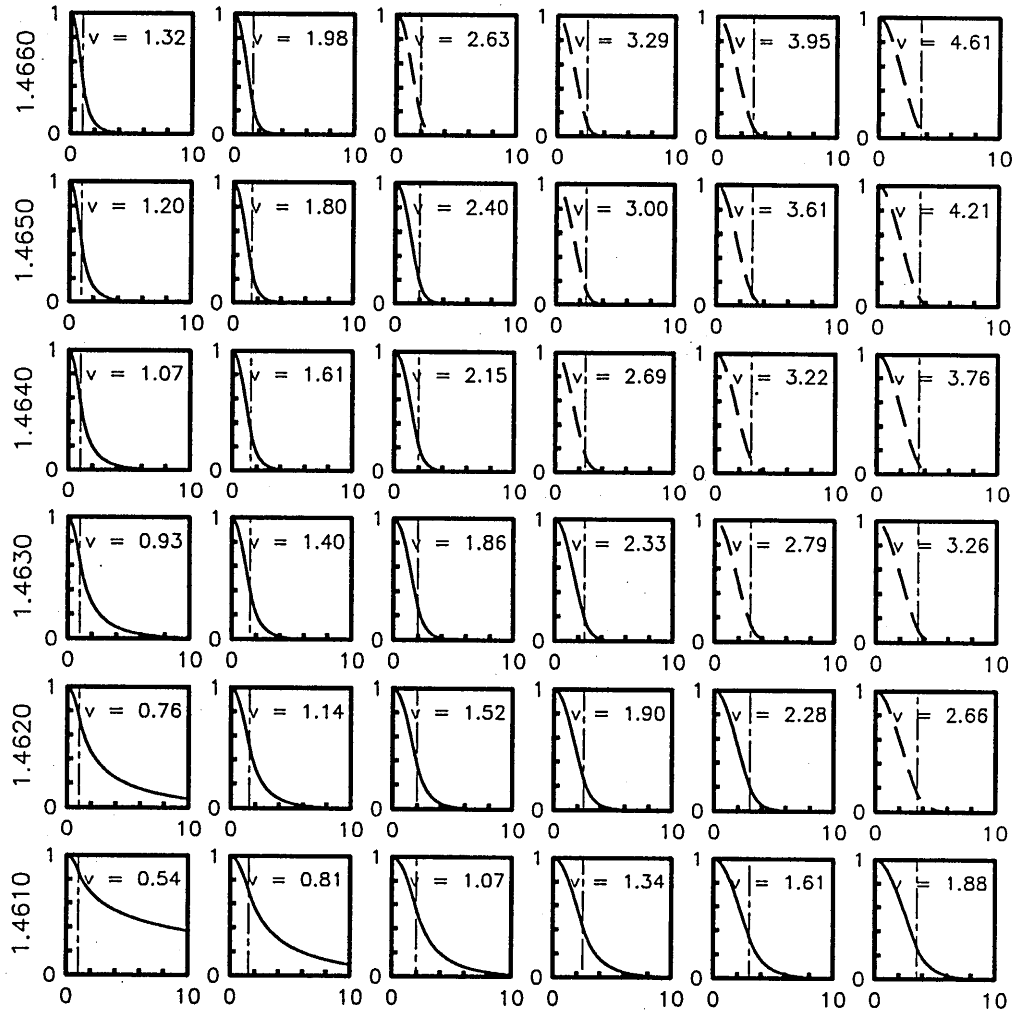


図 4 光強度分布の一覧

Fig. 4. Table of light intensity distribution.

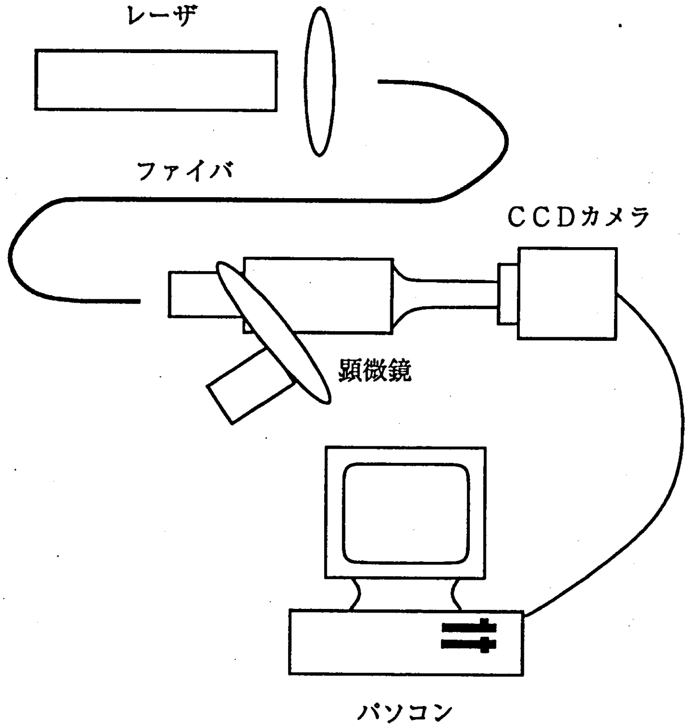


図 5 光強度の測定装置

Fig. 5. Measuring equipment for light intensity.

以上では、ステップインデックス型ファイバについて検討したが、グレーデッドインデックス型ファイバの場合でもほぼ同様であり、探索空間は滑らかである。

3. 光ファイバの測定装置および測定画像の前処理

図 5 に光強度の測定系を示す。波長 $0.633\mu m$ の HeNe レーザで励振されたファイバの端面を顕微鏡で 150 倍に拡大して、その像を CCD カメラ (池上通信機株式会社 FCD-10) で取り込む。CCD カメラの出力はパソコン (日本電気 PC-9801FS) の画像取り込みボード (日本アビオニクス TVIP-4100II) に入力され、512 × 512 ドット 256 階調で A/D 変換される。150 倍のレンズを使った場合、分解能は、1 ピクセルが約 $0.3\mu m$ である。

取り込まれた画像は 2 次元の濃度分布であるのに対して、前節で示したファイバの光強度分布 $P(r)$ は中心からの距離 r を引数とした 1 次元の関数である。そこで、画像を 1 次元の分布に変換する必要がある。これは、次のように行う。

図 6 は測定画像の例である。まず、画像中の光ファイバの中心点 (x,y) を

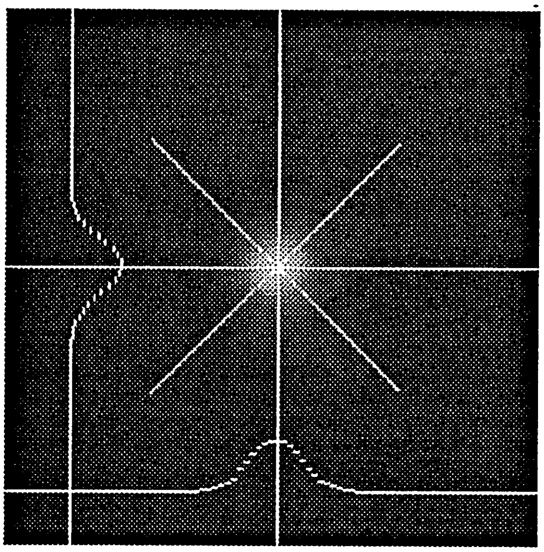


図 6 測定画像の例

Fig. 6. Sample of measured image.

求め、その点から放射状に8方向の1次元分布を求める。こうして求めた8本のプロファイルが図7(a) である。中心点 (x,y) の位置は図7(a) の8本のプロファイルが一致するように決定する。すなわち、中心点 (x,y) からの距離が等しい8点における光強度のばらつき(標準偏差)をそれぞれの距離において計算し、その和が最小になるように共役勾配法を用いて点 (x,y) を決定する。

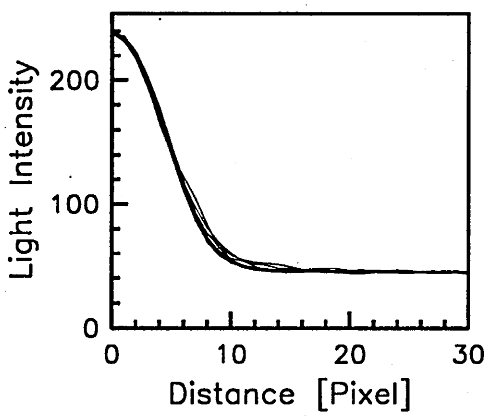
図 7(b) は、図7(a) の8つの分布の平均を取り、さらにオフセットを差し引いたものである。これを屈折率推定のための測定値 $P_o(r)$ として扱う。

4. 光ファイバの屈折率分布の推定と結果に対する検討

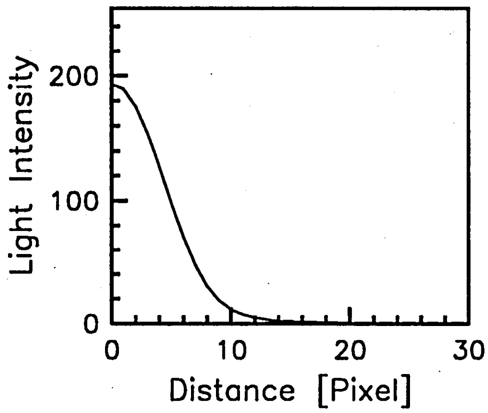
本節では、まず、励振されたファイバの画像から屈折率分布を推定する。次に、その推定結果の信頼性について考察する。測定は3節で説明した方法で行い、波長 $0.633\mu m$ の HeNe レーザーを光源として使用した。2節で説明したように、どこか一箇所での屈折率があらかじめわかっている必要があるので、本節ではクラッドの屈折率は既知とし、1.46 と仮定した。

4.1 ステップインデックス型ファイバの解析

前節で示した図6はステップインデックス型ファイバの測定画像である。



(a)



(b)

図 7 測定画像の前処理 (a) 8 方向の光強度分布 (b) (a) を平均してオフセットを引いたもの

Fig. 7. Pre-processing for measured image. (a) Light intensity measured along the radial direction. (b) Average of measured distributions.

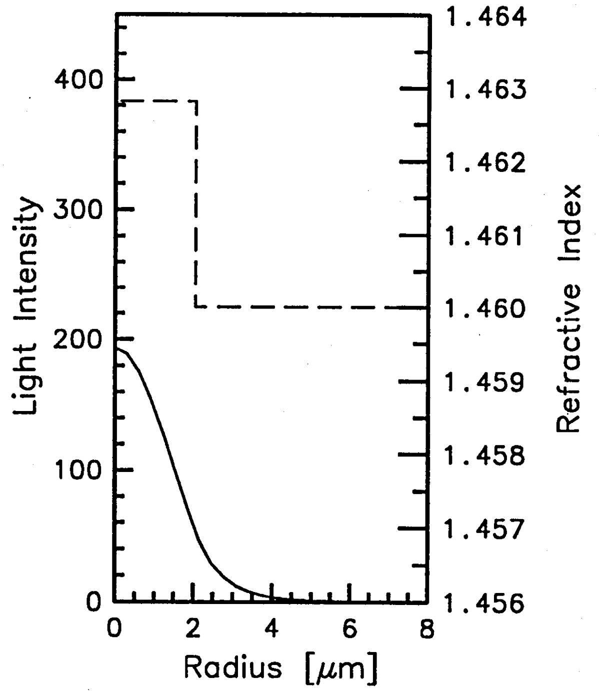


図 8 ステップインデックス型ファイバの解析結果。光強度分布 (実線) および屈折率分布 (点線)

Fig. 8. Analysis for step-index fiber. Light intensity disribution (solid line) and index profile (dashed line).

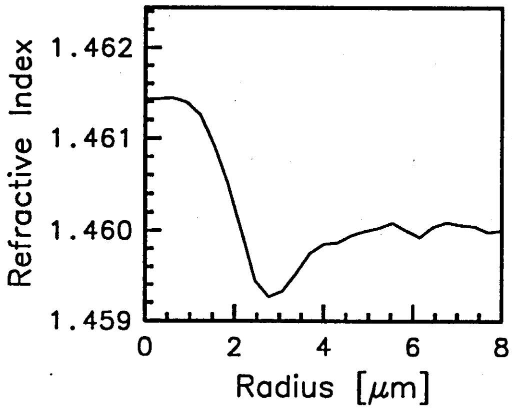


図 9 微分処理法を用いた屈折率分布の推定

Fig. 9. Analysis using field differentiation.

この画像について屈折率分布を推定した結果を図8に示す。図8の実線は測定画像に前処理を施した光強度分布であり、図7(b)と同じものである。この光強度分布との差が最小となるように、パラメータ p_1 および p_2 を決定したところ、次のような結果を得た。

コアの半径　2.05 μm

コアの屈折率　1.4628

なお、前述したように、評価値を計算する時には、測定した光強度分布 $P_o(r)$ と計算によって求めた光強度分布 $P_c(r)$ は最大値を1に正規化しておく。上の屈折率分布を表したのが図8の点線である。また、このときの計算値も図8に書き込んであるが、測定値とほぼ一致しており、両者は重なっている。収束時での評価関数 $E(P_c, P_o)$ の値は1.2%であった。

なお、図8の実線に微分処理法を実行して求めた屈折率分布が図9である。サンプル点は横軸上に26点取り、微分を差分で代用した。この場合は、微分処理法では正確な屈折率分布が求められていない。

次に上の推定結果の信頼性について検討する。今の解析における評価関数

$$E(p_1, p_2) = E\{P_o(r), P_c(r; p_1, p_2)\}$$

の値を等高線で表したのが図10である。横軸にコアの半径 p_1、縦軸にコアの屈折率 p_2 をとり、評価関数値の等高線を引いた。等高線は評価値が2%, 4%, 6%… と2%おきに引いてあり、評価値が4%以上の所は薄い影で、10%以上の所は濃い影でハッチングしてある。x印が収束点を表しており、ここでの評価値は1.2%である。等高線が右上において欠けているが、これは、マルチモード領域なので、評価の対象から外したためである。測定値に4%までの系統的な歪みが混入する可能性があると仮定すれば、真の解は白ぬきの領域のいずれかに存在することになる。

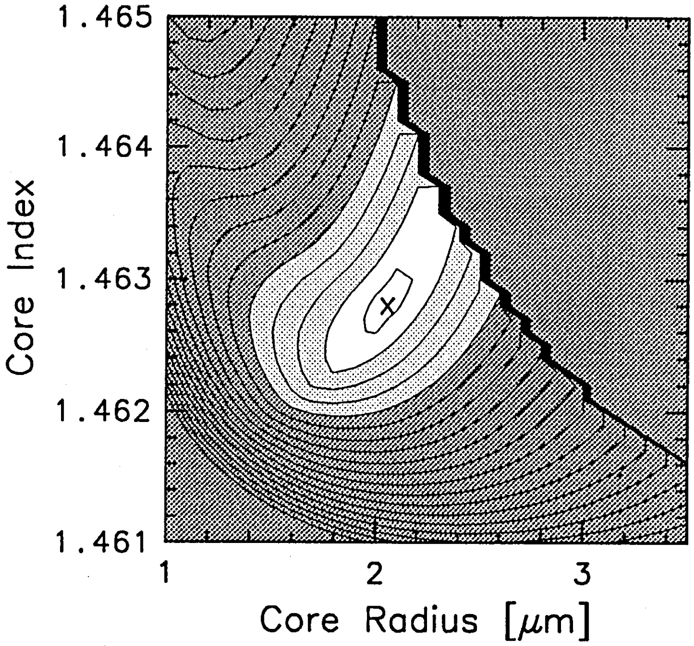


図 10 図8のファイバに関する評価関数の等高線表示

Fig. 10. Contour lines of the assessment function for the fiber discussed in Fig.8.

4.2 2乗分布型ファイバの解析

図 11 の実線は 2 乗分布型ファイバの測定値である。このファイバの屈折率を推定した結果が図 11 の点線である。2 乗分布型ファイバの界分布の計算には多層分割法を使用した。今回は 15 層に分割して計算を行ったので、図 11 の屈折率分布は階段状になっている。このときの計算値も図 11 に書き込んであるが、測定値とほぼ一致しており両者は重なっている。また、収束時の評価関数値は 1.34 % であった。この測定値に対する評価関数の等高線を描いたのが、図 12 である。等高線の間隔および影の色は図 10 と同じである。4% 以内の誤差が測定値に混入していると仮定すれば、真の解は白ぬきの領域にあることになる。

4.3 系統的な歪みが解析結果に及ぼす影響

ここでは、系統的な歪みが解析結果に及ぼす影響についてシミュレーションを通じて考察する。系統的な歪みとして次の二つを仮定する。

1. 測定機器の入出力特性の歪み
2. ピントのぼけ

例として、コアの半径が 2.0μm、コアの屈折率が 1.463 のステップインデックス型光ファイバを測定した時に歪みが生じた場合をシミュレートする。

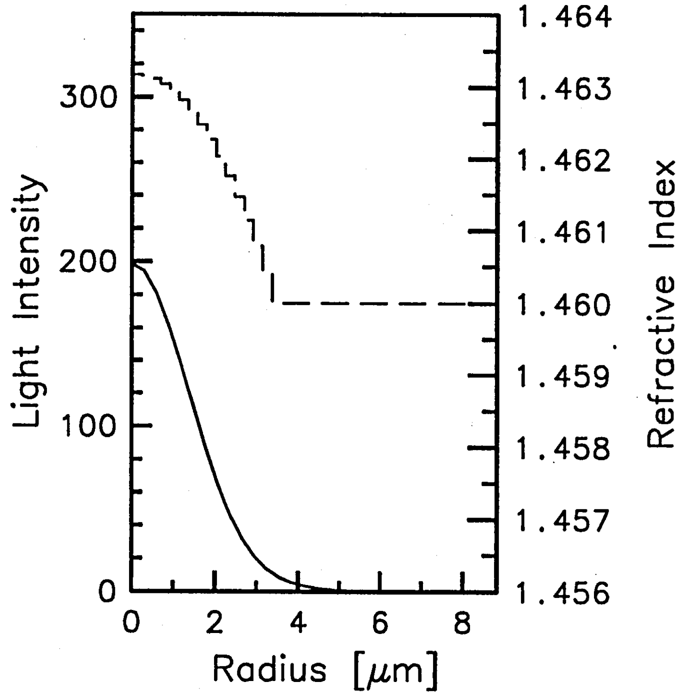


図 11 グレーデッドインデックス型ファイバの解析結果。光強度分布 (実線) および屈折率分布 (点線)

Fig. 11. Analysis for graded-index fiber. Light intensity distribution and index profile.

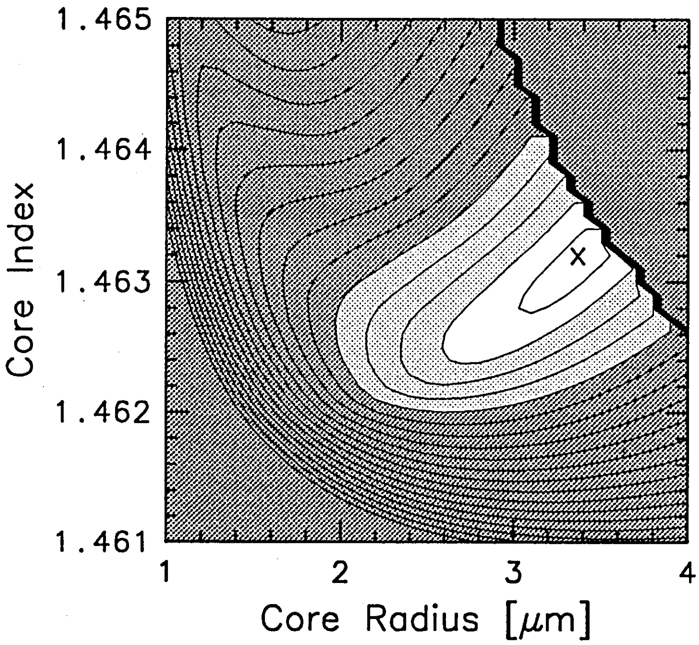


図 12 図 11 のファイバに関する評価関数の等高線表示

Fig. 12. Contour lines of the assessment function for the fiber discussed in Fig.11.

(a) 測定機器の入出力特性の歪み

測定機器が図 13(a) の実線で示すような入出力特性を持っていると仮定する。このような機器で、上記の光ファイバを測定すると図 13(b) の実線で示された屈折率分布を得る。歪みがない場合は点線で示される光強度分布が得られる。このときの両分布に関する評価値は約 4% である。実線で表された歪んだ分布から屈折率を推定すると次の結果を得る。

コアの半径 2.14 μm

コアの屈折率 1.4629

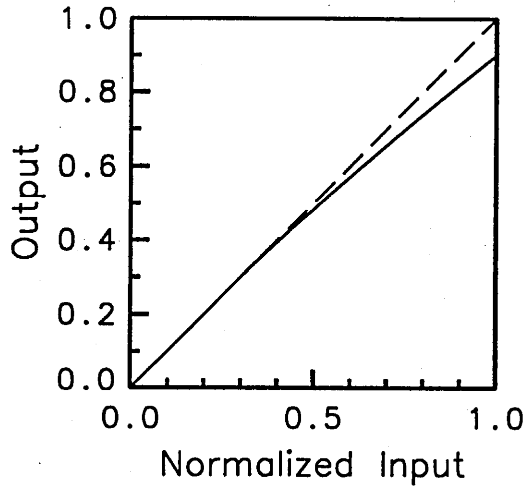
(b) ピントのぼけ

ピントがぼけた場合に得られる画像は、ピントが合っているときの画像とガウス関数との畳込みによって表される。図 14 の 1 点鎖線で示したガウス関数で表されるようなピントのぼけが生じた場合、得られる光強度分布は同図の実線のようになる。また、ピントが合っている場合の分布は点線で与えられる。このときの両分布に関する評価値は約 4% となる。ピントのぼけの影響を受けた光強度分布から屈折率を推定すると次の結果を得る。

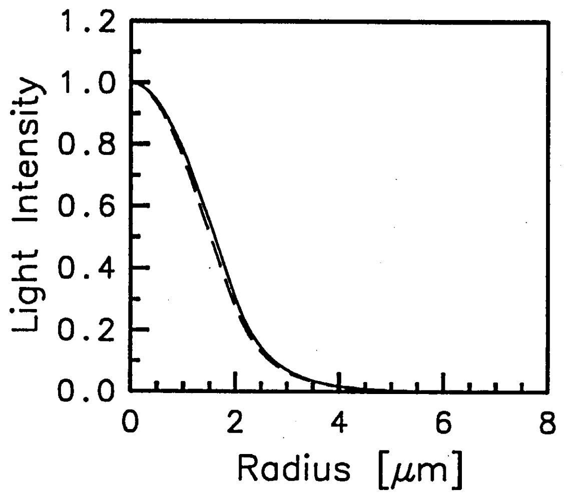
コアの半径 2.06 μm

コアの屈折率 1.4627

(c) 入出力特性の歪みとピントのぼけが同時に生じた場合



(a)



(b)

図 13 (a) 入出力特性の非線形歪 (b) 非線形歪みによる光強度分布の変形

Fig. 13. (a) Input-output non-linearity of the mesuring system. (b) Distortion of the light intensity distribution caused by the input-output non-linearity.

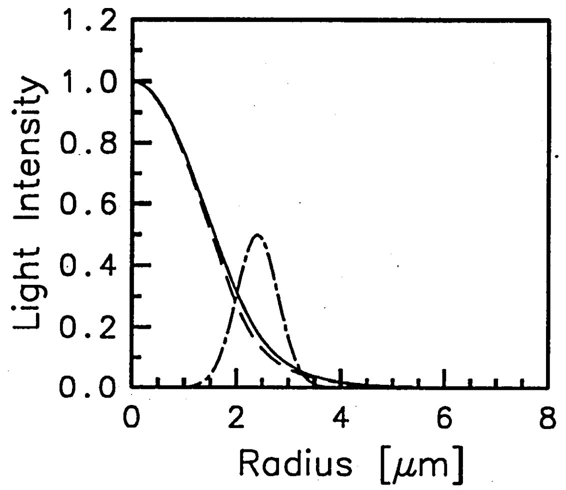


図 14 ピントのぼけによる光強度分布の変形
Fig. 14. Distortion of the light intensity distribution caused by the dull focusing.

前述と同じ入出力歪みならびにピントのぼけが同時に生じた場合、これから得られる推定結果は次のようになる。

コアの半径　2.24 μm
コアの屈折率　1.4627

以上三例の結果を表したのが、図 15 である。図 15 はコアの半径 p_1 が $2.0\mu m$、コアの屈折率 p_2 が 1.463 のとき (真の値) の光強度分布 $P_c(r;2.0,1.463)$ と、p_1 および p_2 を任意の値にとったときの光強度分布 $P_c(r;p_1,p_2)$ に関する評価値

$$E(p_1,p_2)=E\{P_c(r;2.0,1.463),P_c(r;p_1,p_2)\}$$

を等高線で描いたものである。等高線は図 10 と同様に 2%, 4%, 6%$\cdots$ と 2% おきに引いた。x が真の解を、a は入出力特性が歪んでいる場合、b はピントのぼけが生じた場合、c は入出力特性の歪みとピントのぼけが同時に生じた場合、の推定結果を表している。

本論文で提案した評価関数は正規化された値であるため、誤差評価が定量的に行いやすいという利点がある。上の例では仮定した誤差要因一つにつき、約 4% の誤差が発生し、二つの要因が同時に発生したときは約 8% の誤差が発生することが分かった。

5. 埋め込み型光導波路の解析手法

埋め込み型光導波路におけるスカラ波動方程式は次のように表される。

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2n^2(x,y)-\beta^2\right\}\phi(x,y)=0 \quad (5)$$

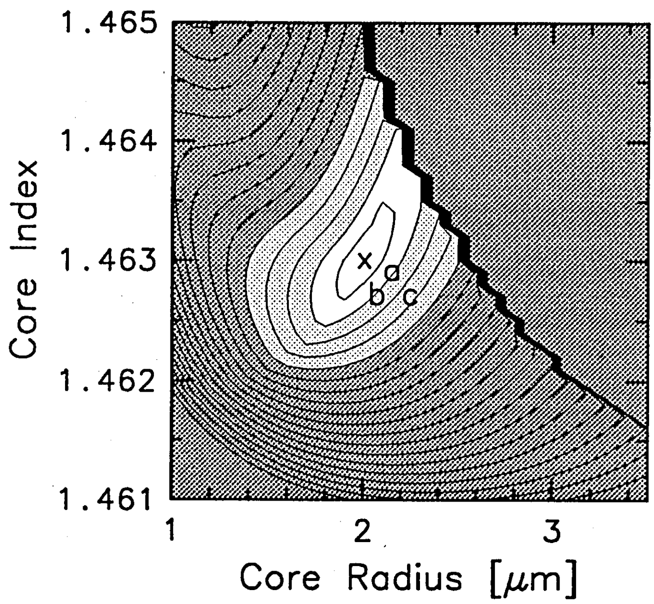


図 15 系統的な誤差に対する検討

Fig. 15. Errors in the index estimation caused by the systematic distortion.

ここで k は真空中の波数、β は伝搬定数、$\phi(x,y)$ は界強度、$n(x,y)$ は屈折率を表している。埋め込み型光導波路においては空気層の屈折率が既知なので、基板の屈折率は未知でも構わない。しかし、今回の解析では基板の屈折率が 1.515 であることがわかっていたので、それも採り入れて次のようなモデリングを行う。2 次元平面上の屈折率分布 $n(x,y)$ を次のように表す。

$$n(x,y) = \begin{cases} 1.0 & (y > p_2) \\ 1.515 + (p_1 - 1.515) \cdot n_x(x) \cdot n_y(y) & (y \le p_2) \end{cases} \tag{6}$$

但し、

$$n_x(x) = \begin{cases} exp\left\{-\frac{(x-(p_3-p_5))^2}{2p_6^2}\right\} & (x < p_3 - p_5) \\ 1 & (p_3 - p_5 \le x \le p_3 + p_5) \\ exp\left\{-\frac{(x-(p_3+p_5))^2}{2p_6^2}\right\} & (p_3 + p_5 < x) \end{cases}$$

$$n_y(y) = \begin{cases} exp\left\{-\frac{(y-p_4)^2}{2p_8^2}\right\} & (y < p_4) \\ exp\left\{-\frac{(y-p_4)^2}{2p_7^2}\right\} & (p_4 \le y) \end{cases}$$

これを図で表現したのが図 16 であり、それぞれのパラメータの意味は次の通りである。

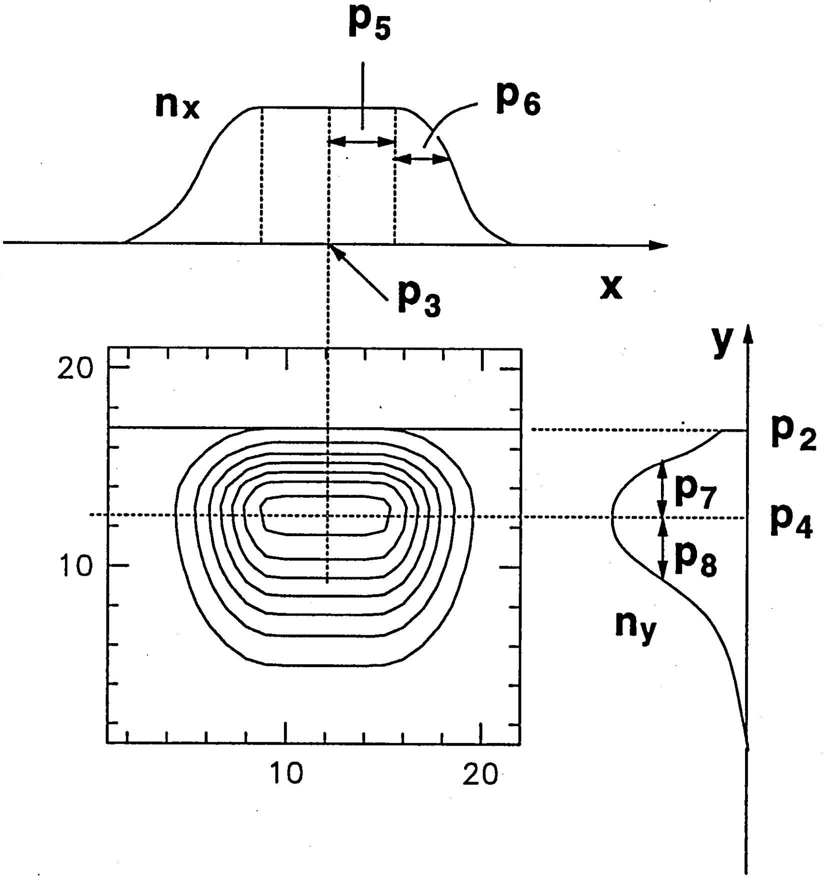


図 16 埋め込み型光導波路のモデル

Fig. 16. Model for buried waveguide.

p_1	:	コアの中心の屈折率	p_5	:	平らな部分の長さ
p_2	:	空気層との境界位置	p_6	:	x 軸両端の標準偏差
p_3	:	コアの中心の x 位置	p_7	:	y軸＋側の標準偏差
p_4	:	コアの中心の y位置	p_8	:	y軸－側の標準偏差

この8つのパラメータを決定すると、各点での屈折率 $n(x,y)$ を決定することが出来る。$\phi(x,y)$ を離散化して $\phi_{ij}=\phi(x_i,y_j)(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ で表し、微分を差分で表現すると、式(5)は $m\times n$ 変数の同次方程式となる。同次方程式の係数行列の行列式を 0 にする β を見つければ、界分布が求まり、これを2乗すると、光強度分布が求まる。このようにして求めた光強度分布と測定画像の濃度分布との差が小さくなるようにパラメータ $p_1 \sim p_8$ を反復修正する。

2つの光強度分布の差の評価はファイバの評価式を2次元に拡張した次式で表す。なお、2つの光強度分布はあらかじめ最大値を1に正規化しておく。

$$E\{P_c(x,y),P_o(x,y)\}=\frac{\sum_i^m\sum_j^n|P_c(x_i,y_j)-P_o(x_i,y_j)|}{\sum_i^m\sum_j^n max\{P_c(x_i,y_j),P_o(x_i,y_j)\}}\times 100 \quad [\%] \qquad (7)$$

6. 埋め込み型光導波路の屈折率分布の推定

当研究室で製作した埋め込み型光導波路について屈折率の推定を行う。製作条件は以下の通りである。

- 基板の材質：ガラス　屈折率 1.515
- 拡散マスクのスリット幅：$4\mu m$
- 1次拡散：濃度0.3% の $AgNO_3$-$NaNO_3$で1分
- 2次拡散：電界 8.3V/mm で 15 分

この埋め込み型光導波路に波長 $0.633\mu m$ の HeNe レーザを入射した画像のグレーレベルを等高線で表したのが、図17(a)である。縦軸と横軸の単位はドットであり、ここでは1ドットは $0.869\mu m$ に対応する。等高線は光強度の最大値を基準にして1/8ごとに引いている。これを立体的に表したのが図17(b)である。

この測定値に対して、前節で述べた評価値を最小にするような8つのパラメータを求めると、次のような結果を得た。

$$p_1 = 1.5161 \quad p_2 = 15.5 \quad p_3 = 11.33 \quad p_4 = 12.61$$
$$p_5 = 1.96 \quad p_6 = 2.17 \quad p_7 = 0.83 \quad p_8 = 2.01$$

長さや位置に関するパラメータの単位はドットである。なお、界強度 ϕ は 16×22 に離散化して計算を行った。多少サンプル点の数が少ないように思われるが、我々の研究室の計算機環境ではこれ以上細かくとると、著しく計算時間がかかるので、今回はこれで解析を行った。

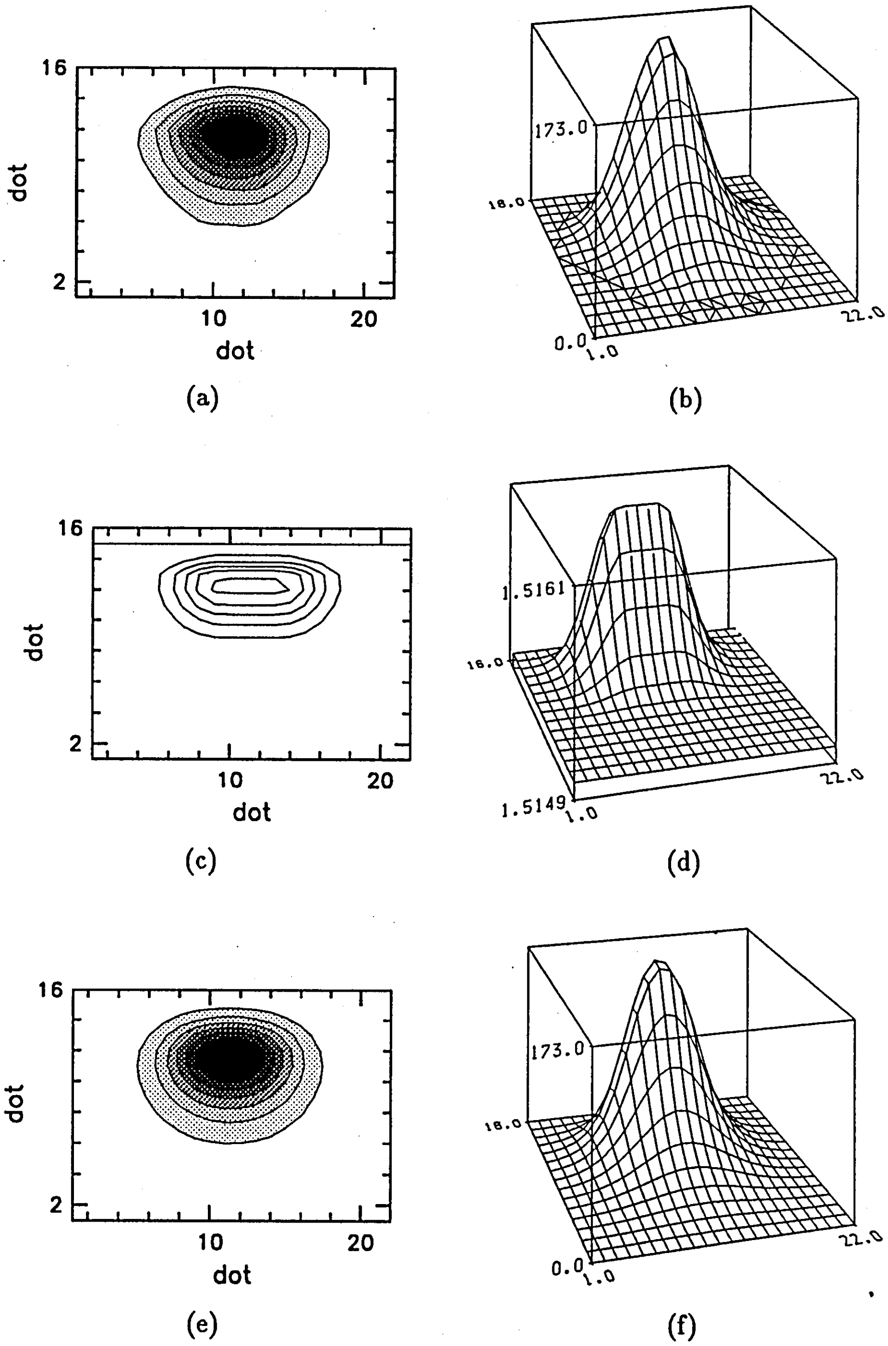


図 17 埋め込み型光導波路の解析結果 (a)(b) 測定値した光強度分布 (c)(d) 推定した屈折率分布 (e)(f) 推定した屈折率分布より計算した光強度分布

Fig. 17. Analysis for buried waveguide. (a)(b) Measured light intensity distribution. (c)(d) Estimated index distribution. (e)(f) Calculated light intensity distribution.

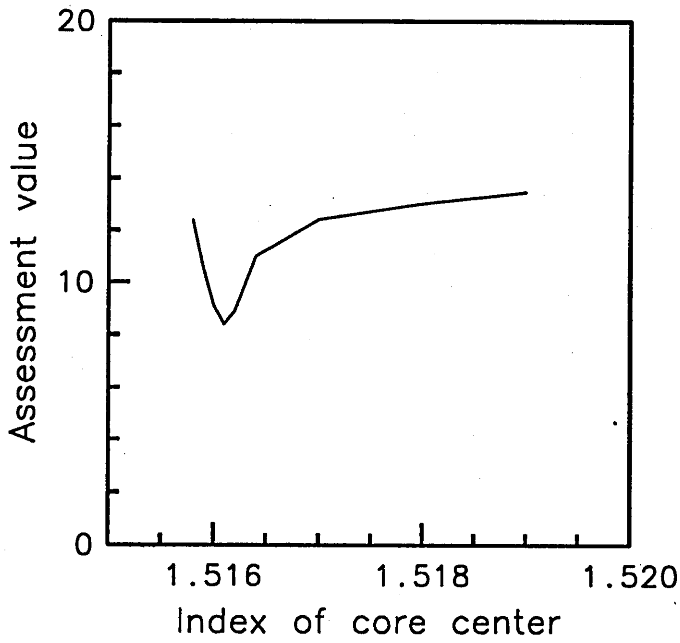


図 18 コアの中心の屈折率を固定して収束計算を行った時の評価値
Fig. 18. Assessment value with index of core center as a fixed parameter.

この屈折率分布を等高線で表したのが図 17(c) である。等高線は屈折率が 0.0002 ごとに引いた。これを立体的に表したのが図 17(d) である。また、この時の計算によって求められた光強度分布を図 17(e)(f) に示す。この時の測定値と計算値との差は約 8.3% であった。測定値と計算値の差が大きいのは、モデルが単純なためと、界強度を求める時のサンプル点の数が少ないためであると考えられる。

次に、得られた結果に対する検討を行う。埋め込み型光導波路の場合、パラメータの数が多く、計算時間も多くかかるため、ファイバの場合のように評価値が n パーセント (n は任意の数) 以下の領域を求めることやそれを表示することは困難である。そこで、最も注目すべきパラメータであるコアの中心の屈折率 p_1 をいくつかの値に固定し、他のパラメータを自由にして収束計算を行い、縦軸を収束時の評価値、横軸を固定したコア中心の屈折率としてプロットする。これが図 18 である。この図は、直観的には、ファイバの検討のところで描いた等高線の谷に沿っての断面を描くことに相当する。この図より、今回使用したモデルの場合、コアの中心の屈折率は 1.5161 付近である可能性が高いことがわかる。しかし、

- 界強度を計算する時のサンプル点の数が 16 × 22 と荒い (より細かくとれば、ここで求めた結果とは少し異なる結果が得られる可能性がある)。

- 収束点における評価値が約8%と大きい(より複雑なモデルを仮定すればより小さい評価値を実現できる可能性が高く、その時の屈折率分布はここで求めた分布と異なる可能性がある)。
- 正解である可能性が高い領域を特定することが難しい(上の考察ではコアの中心の屈折率に着目し、このパラメータについては正しい結果を得られている可能性が高いことを確認したが、その他のパラメータについては、一意的に求まっているのかどうかはわからない)。

であることを考慮すると、今回求めた屈折率分布は、確からしい解のうちの1つを求めたと考えられる。

7. まとめ

本論文では、光導波路の端面の近傍界から屈折率分布を推定する問題においては、わずかな系統的誤差が推定結果に大きな影響を及ぼすことを示した。そして、それを解決するための方法として、制約を付加した逆解析法を提案した。次に、この手法を使って実際にファイバ端面の光強度画像より屈折率分布を推定し、その結果の信頼性をシミュレーションに基づいて検討した。次に、ファイバの解析で得られた知見を基にして、埋め込み型光導波路の屈折率を推定した。これらは、実際の測定データから屈折率分布を推定する際に、役に立つものである。

本論文で述べたように、光導波路の近傍界から屈折率分布を推定する手法では、測定機器の精度が非常に重要である。また、測定において何らかの歪みが生じてしまう場合、その歪みの特性を明らかにしておくことも肝要である。従って、今後の課題として、測定機器の高精度化ならびに測定機器の歪みを補正するための校正法の確立などが重要であると考えている。

また、埋め込み型光導波路については、更に深く研究を進めてゆきたいと考えている。

文献

(1) G.Coopa, P. Di Vita and T. Rossi : "Characterization of single mode fibers by near-field measurement", Electron. Lett., **19**, 8, pp.293-294 (Apr 1983).

(2) L. McCaughan and E.E.Bergmann : "Index distribution of optical waveguides from their mode profile", IEEE J. Light Wave Technol., **LT-1**, 3, pp.241-244 (Mar 1983).

(3) Morishita K. : "Refractive-index-profile determination of single-mode optical fibers by a propagation-mode-near-field scanning technique", IEEE J.Light Wave Technol., **LT-1**, 3, pp.445-449 (Sep 1983).

(4) Morishita K. : "Measurement of refractive-index profile of single-mode optical fibers by the propagation-mode-near-field method", IEEE J. Light Wave Technol., **LT-3**, 2, pp.244-247 (Apr 1985).

(5) Morishita K. : "Index profiling of theree-dimensional optical waveguides by the propagation-mode near-field method", IEEE J. Light Wave Technol., **LT-4**, 8, pp.1120-1124 (Aug 1986).

(6) TANAKA T. and SUEMATSU Y. : "An Exact Analysis of Cylindrical Fiber with Index Distribution by Marix Mathod and Its Application to Focusing Fiber", Tran. IECEJ, Vol.E 59, No.11, pp.1-8 (Nov 1976).

(7) 沢,小野,乗松,掛水 : "光導波路の伝搬モードの近傍界を用いた屈折率分布の計算機推定法", 信学論 (C), **J71-C**, 2, pp.229-237 (1988-02).

(8) 沢,小野,高橋 : "ノイズを含む伝搬モードの近傍界に基づく光導波路の屈折率分布の逆解析", 信学論 (C-I), **J72-C-I**, 9, pp.535-542 (1989-09).

(9) 寺澤,薮,沢 : "ステップ型単一モード光ファイバーの構造パラメータの逆解析による推定", 輻射科学研資, **RS93-19** (1993-12).

輻射科学研究会資料
RS 94-19

ランダム壁をもつ光ファイバーにおける導波モードの放射とモード結合

王 志良、小倉 久直、高橋 信行
(京都大学 工学部 電子工学教室)

1995年3月6日

輻射科学研究会
(株式会社 村田製作所)

ランダム壁をもつ光ファイバーにおける導波モードの放射とモード結合

王 志良*、小倉 久直、高橋 信行

京都大学 工学部 電子工学教室

Abstract

The guided waves or modes in an optical fiber would be perturbed if the boundary of the fiber is statistically irregular (rough). Due to the accumulation effects of multiple scattering along the entire propagation path, even very slight boundary irregularities can give rise to considerable influences on the propagation characteristics of the guided modes, such as radiation, reflection and mode coupling. In this paper, the scattering problem of guided waves in an optical fiber with a slightly rough core boundary is treated by applying the stochastic functional approach, which has been used successfully for the similar problems in a planar waveguide with the Dirichlet boundary condition in an earlier paper. A stochastic representation for the Green's function is given, by expanding the scalar Green's function of the fiber in terms of the Wiener-Hermite stochastic functionals of a homogeneous Gaussian random boundary. The Wiener expansion coefficients and then the radiation losses and mode coupling coefficients of the guided modes caused by the rough boundary are determined from the boundary conditions under the approximation of a slight roughness. To give an idea about how the random rough boundary affects the propagation characteristics of the modes, we present a lot of numerical examples for the Gaussian power spectrum of the random boundary. The numerical results show that the relative dielectric constant of the core and cladding in an optical fiber should be close to the unity as possible in order to reduce the radiation loss caused by the rough boundary.

1 introduction

Scattering of waves from a random rough surface is a problem not only of theoretical interest but also of practical importance, and at the same time it is a very common physical phenomenon.[1–4] In view of its physical phenomena, the problem can evidently be divided into two groups.[2] The first group is related to interactions of the waves in free spaces or half-spaces with the rough surfaces, for instance, the scattering of radio waves from irregular ground or sea surfaces, the wave diffraction from a rough body, and the excitation of surface plasmoms in random metal surfaces. Common to all these situations is that the wave field interacts with only a finite portion of the surface, namely a single act of scattering from the rough surface. Afterwards, the scattered waves travel in free space and nevermore interact with the boundary irregularities. Due to this reason, only slight distortions of the wave field can be produced if the perturbations of the boundary irregularity is small enough, and as a result, even the first Born approximation of perturbation theory gives satisfactory solutions.

*On leave from the National Key Laboratory of Optical Fiber Communication, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, People's Republic of China

The second group is related to interactions of guided waves in waveguides or standing waves in resonant cavities with the rough boundaries inside. The natural examples of such waveguides are the earth-ionosphere cavity, the underwater acoustic channel, tropospheric ducts, and in most important, the telecommunication waveguides (for instance, optical fibers) where, more or less, random deviations from the ideal (cylindrical) cross section can occur. The obvious results from the effects of small boundary roughness are to increase the attenuation and to decrease the coherence of the modes.[5] Since the energy of the guided waves is mainly bounded in domain which contains the rough boundaries, the guided waves will undergo again and again scattering from the irregularities as they are propagating along the boundaries. Hence, the wave field at a observation point is the sum of the waves multiply scattered by the irregularities distributed along the entire propagation path. Even very slight boundary perturbation can give rise to considerable distortions in the field pattern due to accumulation effects, which, though may be harmless in short-distance propagation, have to be paid more great attention in long-distance (international) communication systems.

To consider such effects within the framework of conventional perturbation theory, which respects only single act of scattering, is evidently not very fruitful, and have been shown that have merely a narrow range of validity. It is clear then that, for effective treatment of the second group of phenomena, the theories have to allow summ of waves repeatedly rescattered by small irregularities of the boundaries. Bass and Fuks[2, 6, 7] have studied in detail this kind of problems by the graphical or Feynman diagrammatic method in a similar way to the one in random media, and have given some important and significant results such as the average Green's function and its second order statistical moment as well as the radiation transfer equations for the modes' intensities. It can be seen that the equations they used for solving the average Green's function and the second order moment, respectively, have very close resemblance to the Dyson equation and the Bethe-Salpeter (B-S) equation in the propagation theory in random media.[8] Tolstoy[9, 10] has investigated the coherent modes and boundary waves in a rough-walled acoustic waveguide, in a really different way. In his theory, a lot of small scatterers are used to model the roughness elements of a rough surface, which is usually called as the boss model proposed first by Twersky.[11] The most important result obtained by Tolstoy is that the so-called boundary waves exist under certain conditions in his boss model. DeSanto[12] has also treated the problem of an ocean waveguide with the randomly rough upper boundary and obtained the equivalent impedance for the rough boundary, based on the Green's function expression in which a so-called phase modulation angular spectral term is introduced to describe the rough surface interaction. It seems that his result can be applicable to both small and large roughness, but on the other hand is not in an explicit form. It should be noticed that, the common point of all methods mentioned above is that the rough surface or boundary can be equivalent by a linear boundary condition applied to a smoothed surface, namely the smoothed boundary conditions which have been widely used for the first group problems.[13, 14]

In an earlier paper,[15] we have also developed a theory for the problem of propagation and scattering of guided waves in a planar waveguide with a slightly rough boundary, by applying the stochastic functional approach. The approach was first introduced in the theory of propagation in random media by one of the author, [16–18] and has been used successfully to develop the scattering theory of a plane scalar or electromagnetic wave from various planar,[19–24] cylindrical[25–27] and spherical[28] random rough surfaces with small roughness. In these works, the scattered wave field is regarded as a stochastic functional of the random surface that can be represented in the form of Wiener-Hermite expansion[29, 30] in the case of a Gaussian random surface, and a group-theoretic consideration is made to determine the form of a stochastic wave field based on the statistical homogeneity of the random surface, which is analogous to the Floquet theorem for a periodic boundary.

A set of hierarchical equations for the expansion coefficients are obtained from the boundary conditions and can be solved by making use of the recurrence relations and the orthogonality of the Wiener-Hermite functionals. Various statistical characteristics of the scattered waves, such as coherent and incoherent fields, their differential cross section (the second order moments) and angular distribution etc., can be easily calculated. More importantly, it has been shown that the so-called divergence difficulty in the common perturbation theory, which is due to the multiple scattering in the direction close to the planar random surface, is automatically removed in our approach owing to the "stochastic Floquet theorem" and the stochastic functional calculus.[21] This means that the stochastic functional approach is good enough for treating the multiple scattering effects, and hence can be applied to the scattering problems of the guided waves. In fact, the influence of the guided waves on scattering properties of rough surface has been considered in a previous paper,[22] in which the excitation of surface plasmons (modes) in a *Ag* film with rough surface was studied for the incident plane wave from outside.

Marcuse [31–34] has considered the radiation and mode coupling in slab waveguide and optical fibers with sightly rough boundaries by using the coupled mode theory, which is also applicable for other inhomogeneities, such as abrupt steps, gradual tapers, and periodical boundary perturbations,[33] but seems to be valid only for dielectric waveguides. For perfectly conducting metal waveguides with slightly uneven walls, Hill [35] investigated the reflection and transmission of the guided modes by applying the generalized telegrapher's equations. In addition, many authors [36–41] have analyzed the scattering problems of the guided modes in waveguides with a periodically varying boundary by various methods. Howerve, although both the periodical and random boundaries are the corrugated structures, there are considerable differences of their effects on the propagation characteristics of the guided modes, for example, in waveguides with periodically varying boundaries there are the so-called passbands and stopbands of the mode, but none with random boundaries. In this paper, we extend the stochastic functional theory developed in [15] for the planar waveguides to the case of the optical fibers with a random rough boundary. For simplicity, we confine ourselves to consider merely the scalar field approximation, which is exact enough for weakly guiding optical fibers, and a slight boundary roughness which is fullfilled by most of practical cases. In Sec.2, we at first present a stochastic representation for the scalar Green's function of an optical fiber with a rough boundary in terms of the complex Wiener-Hermite functionals of a homogeneous Gaussian random surface. Then, in Sec.3, we determine the Wiener expension coefficients by applying the boundary conditions under the approximation of a slight boundary roughness. In Sec.4, the expressions for the radiation loss and mode coupling coefficients are derived from the Wiener coefficients. It can be shown that these expressions are really the same ones obtained by Marcuse [32, 34]. Finally, a lot of the numerical examples and dicussions are given in Sec.5 for the Gaussian power spectrum of the rough boundary, which is different from the Lorentzian power spectrum used by Marcuse.[32–34] However, the numerical results show the the maximum and its location of the radiation loss is not strongly dependent on the statistical model of the rough boundary. The numerical results also suggest us to use a very weakly guiding optical fiber (the relative dielectric constant of the core and cladding nearly equal to the unity) for reducing the radiation loss caused by the rough boundary.

2 Stochastic representation for scalar Green's function

Let us at first consider an ideal optical fiber of radius a, the refractive indices in the core and the cladding being n_1 and n_2, respectively. To be simple and systematic, we deal with the scalar Green's function of a fiber. Being interested only in the case of the source point $\boldsymbol{R}' = (\rho', \varphi', z')$ inside the fiber waveguide (the field point is denoted by $\boldsymbol{R} = (\rho, \varphi, z)$), we write the Green's function $G(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ as[42, 43]

$$G(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') = \begin{cases} G_0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') + G_1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') & \text{for } \rho < a \\ G_2(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') & \text{for } \rho > a \end{cases} \tag{1}$$

where $G_0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ is due to the primary excitation in an infinite medium with the wavenumber $k_1 = k_0 n_1$ (k_0 is the free-space wavenumber), $G_1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ and $G_2(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ as the induced fields from the discontinuity of the refractive index at $\rho = a$. The "free-space" Green's function $G_0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ can be expanded in terms of cylindrical function as [43, 44]

$$G_0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_0 \, J_m(\zeta_0 \rho_<) \, H_m(\zeta_0 \rho_>) \, e^{i\lambda_0(z-z') + im(\varphi - \varphi')} \tag{2}$$

where $\rho_<$ and $\rho_>$ denote the lesser and greater of ρ or ρ', respectively. λ_0 is the axial wavenumber and $\zeta_0 = \sqrt{k_1^2 - \lambda_0^2}$. $J_m(x)$ and $H_m(x)$ (we have put $H_m(x) \equiv H_m^{(1)}(x)$) are the first-kind cylindrical Bessel and Hankel functions, respectively. By considering the finiteness of $G_1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ on the z axis ($\rho = 0$) and the radiation condition for $G_2(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ as $\rho \to \infty$, we can express

$$G_1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_0 \, a_0(\lambda_0) \, J_m(\zeta_0 \rho) \, J_m(\zeta_0 \rho') \, e^{i\lambda_0(z-z') + im(\varphi - \varphi')} \tag{3}$$

$$G_2(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_0 \, b_0(\lambda_0) \, H_m(\gamma_0 \rho) \, H_m(\zeta_0 \rho') \, e^{i\lambda_0(z-z') + im(\varphi - \varphi')} \tag{4}$$

where $\gamma_0 = \sqrt{k_2^2 - \lambda_0^2}$ with $k_2 = k_0 n_2$. $a_0(\lambda_0)$ and $b_0(\lambda_0)$ are the unknown coefficients to be determined from the boundary conditions:

$$\begin{cases} G_0 + G_1 = G_2 & \text{at } \rho = a \\ \dfrac{\partial G_0}{\partial \rho} + \dfrac{\partial G_1}{\partial \rho} = \dfrac{\partial G_2}{\partial \rho} & \text{at } \rho = a \end{cases} \tag{5}$$

Substituting Eqs.(2)-(4) into Eq.(5), we then obtain

$$a_0(\lambda_0) = [\zeta_0 H_m'(\zeta_0 a) H_m(\gamma_0 a) - \gamma_0 H_m'(\gamma_0 a) H_m(\zeta_0 a)] \, / \, \Delta_m(\lambda_0) \tag{6}$$

$$b_0(\lambda_0) = (i2/\pi a) \, (1/\Delta_m(\lambda_0)) \tag{7}$$

and the common denominator

$$\Delta_m(\lambda_0) = \gamma_0 H_m'(\gamma_0 a) J_m(\zeta_0 a) - \zeta_0 J_m'(\zeta_0 a) H_m(\gamma_0 a) \tag{8}$$

where the primes on the functions denote the first derivative of the functions with respect to their arguments. It can be easily noticed that $\Delta_m(\lambda_0)$ of Eq.(8) is exactly the same expression with the characteristic equation of a weakly guiding optical fiber[45] and hence the roots of the transendental equation $\Delta_m(\lambda_0) = 0$ determine the propagation constants of the guided modes in the fiber.

We now convert to consider an optical fiber with a random rough boundary expressed by $\rho = a + f(\varphi, z; \omega)$, where $f(\varphi, z; \omega)$ is a random function with the mean $\langle f(\varphi, z; \omega) \rangle = 0$. In this notation, ω denotes a sample point in the sample space Ω which is the ensemble of the realizations of f, and the angle brackets $\langle\ \rangle$ indicate the probabilistic average over Ω. If $f(\varphi, z; \omega)$ is a homogeneous Gaussian random function on the cylindrical surface, then as shown in previous papers[25–27] we have the spectral representation of $f(\varphi, z; \omega)$ in terms of a Wiener integral:

$$f(\varphi, z; \omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z} F_m(\lambda) \mathrm{d}B_m(\lambda) \tag{9}$$

where we have put $\mathrm{d}B_m(\lambda) \equiv \mathrm{d}B_m(\lambda; \omega)$, and will delete ω for brevity in what follows. Here $\mathrm{d}B_m(\lambda)$ denotes the complex Gaussian random measure with the properties:

$$\begin{cases} \langle \mathrm{d}B_m(\lambda) \rangle = 0, \quad \mathrm{d}B_m^*(\lambda) = \mathrm{d}B_{-m}(-\lambda) \\ \langle \mathrm{d}B_m(\lambda) \mathrm{d}B_{m'}^*(\lambda') \rangle = \delta_{mm'}(\lambda - \lambda')\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\lambda' \end{cases} \tag{10}$$

where the star $*$ indicates the complex conjugate. From Eq.(9) and by making use of Eq.(10), we have the following expressions for the correlation function

$$R(\varphi, z) = \langle f(\varphi + \varphi', z + z'; \omega) f(\varphi', z'; \omega) \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z} |F_m(\lambda)|^2 \mathrm{d}\lambda \tag{11}$$

and the variance that describes the random surface roughness

$$\sigma^2 = R(0,0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_m(\lambda)|^2 \mathrm{d}\lambda \tag{12}$$

where we have used the relation $F_m(\lambda) = F_{-m}^*(-\lambda)$. $|F_m(\lambda)|^2$ is called as the power spectrum of the random cylindrical surface. $|F_m(\lambda)|^2 = 0$ and then $\sigma^2 = 0$ corresponds to an ideal smooth boundary.

It is obvious that the Green's function will be perturbed and become random as the boundary is statistically rough surface. We can again write the Green's function $G(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ in the form of Eq.(1) but now $G_1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ and $G_2(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ are random fields and can be expressed as a stochastic functional of the random surface function $f(\varphi, z; \omega)$. Furthermore, if we suppose that $f(\varphi, z; \omega)$ is a homogeneous Gaussian random function, then just like what have been shown in the previous papers,[25–27] the random wave field is the eigenfunction of the shift operators D^φ and D^z with the eigenvalue $e^{im\varphi + i\lambda z}$ (here D^φ and D^z be separately defined with respect to the shift in φ and z, and denote the measure-preserving transformation in the sample space Ω, see [26, 27] for detail). Thus, in view of the form of Eqs.(3) and (4), we can expand the induced or scattered Green's function $G_1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'; \omega)$ and $G_2(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'; \omega)$ (here we put ω to denote that they are random and also distinct from the ideal case) in terms of the Wiener-Hermite functionals as the following:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} G_1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'; \omega) \\ G_2(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'; \omega) \end{array} \right. &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_0=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \\ & \left\{ \begin{array}{l} A_n(m_0, m_1, \cdots, m_n; \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) J_{m_t}(\zeta_n \rho) \\ C_n(m_0, m_1, \cdots, m_n; \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) H_{m_t}(\gamma_n \rho) \end{array} \right\} J_{m_0}(\zeta_0 \rho') \\ & e^{i\eta_n z - i\lambda_0 z' + im_t\varphi - im_0\varphi'}\, \hat{h}_n \left[\mathrm{d}B_{m_1}(\lambda_1), \mathrm{d}B_{m_2}(\lambda_2), \cdots, \mathrm{d}B_{m_n}(\lambda_n) \right] \end{aligned} \tag{13}$$

where $\hat{h}_n[\cdots]$ denotes the nth degree complex Wiener-Hermite differential which is to be understood as a generalization of Hermite polynomial (notice $\hat{h}_0 = 1$), the integrals in Eq.(13) represents the n-tuple complex Wiener integrals, and the coefficients A_n's and C_n's are the unknown integral kernels to be determined by applying the boundary condition on the rough boundary. The parameter $\eta_n = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ and $m_t = m_0 + m_1 + \cdots + m_n$ are the composed axial and angular wavenumbers, respectively, which originate from the scattering by the rough boundary. ζ_n and γ_n are defined as $\zeta_n = \sqrt{k_1^2 - \eta_n^2}$ and $\gamma_n = \sqrt{k_2^2 - \eta_n^2}$. Eq.(1) together with Eq.(13) can be regarded as a stochastic representation of the Green's function of the fiber under discussion, which is the stochastic functional of a homogeneous Gaussian random surface.

On the other hand, by averaging Eq.(13), we can also express the Green's function as the sum of two parts, namely, the coherent and incoherent part. The coherent or average Green's function (the first order statistical moment) is given by

$$G_c(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}') = \langle G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')\rangle = \begin{cases} G_0(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}') + G_1^0(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}') \\ G_2^0(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}') \end{cases} \tag{14}$$

where $G_1^0(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')$ and $G_2^0(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')$ are the first term ($n = 0$, the zreoth term) in Eq.(13), respectively, and represent the contributions from the coherent scattering. The incoherent Green's function $G_{ic}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')$ is then composed of higher terms ($n \geq 1$) and obtained by subtracting $G_c(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')$ from $G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')$.

3 Determination of Wiener coefficients

To investigate the Green's function from Eq.(13) in detail, we have to determine the Wiener expansion coefficients A_n's and C_n's by applying the boundary condition at the random boundary $\rho = a + f(\varphi, z; \omega)$. For simplicity and only to demonstrate the usefulness of the stochastic functional approach, we here confine ourselves to the case that the random boundary is slightly rough, that is $\sigma^2 \ll 1$. Then the boundary condition at the core-cladding interface can be approximated as[26]

$$\begin{cases} \left. G + f\dfrac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} & \text{continuous} \\ \left. \dfrac{\partial G}{\partial \rho} + f\dfrac{\partial^2 G}{\partial \rho^2} - \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\dfrac{\partial G}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial G}{\partial z}\right|_{\rho=a} & \text{continuous} \end{cases} \tag{15}$$

Substituting the expressions of G_0 and G_s into Eq.(12), and making use of the recurrence formula and the orthogonality relation for $\hat{h}_n$ [26, 27, 46] , we consequently obtain a set of hierarchical equations for the Wiener coefficients as follows:

$$\begin{aligned} & \text{for } n = 0: \\ & H_{m_0}(\zeta_0 a) + J_{m_0}(\zeta_0 a)A_0 - H_{m_0}(\gamma_0 a)C_0 \\ + & \sum_{m_1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_1 F_{m_1}^*(\lambda_1)\left[\zeta_1 J'_{m_0+m_1}(\zeta_1 a)A_1 - \gamma_1 H'_{m_0+m_1}(\gamma_1 a)C_1\right] = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} & \zeta_0 H'_{m_0}(\zeta_0 a) + \zeta_0 J'_{m_0}(\zeta_0 a)A_0 - \gamma_0 H'_{m_0}(\gamma_0 a)C_0 \\ + & \sum_{m_1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_1 F_{m_1}^*(\lambda_1)\left[\zeta_1^2 J''_{m_0+m_1}(\zeta_1 a)A_1 - \gamma_1^2 H''_{m_0+m_1}(\gamma_1 a)C_1\right] \\ - & \sum_{m_1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_1 F_{m_1}^*(\lambda_1)\left[\frac{m_1(m_0+m_1)}{a^2} + \lambda_1\eta_1\right] \end{aligned}$$

$$[J_{m_0+m_1}(\zeta_1 a)A_1 - H_{m_0+m_1}(\gamma_1 a)C_1] = 0 \tag{17}$$

for $n = 1$:

$$\begin{aligned} & J_{m_0+m_1}(\zeta_1 a)A_1 - H_{m_0+m_1}(\gamma_1 a)C_1 \\ + & \left[\zeta_0 H'_{m_0}(\zeta_0 a) + \zeta_0 J'_{m_0}(\zeta_0 a)A_0 - \gamma_0 H'_{m_0}(\gamma_0 a)C_0\right] F_{m_1}(\lambda_1) \\ + & \ 2\sum_{m_2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_2 F^*_{m_2}(\lambda_2)\left[\zeta_2 J'_{m_0+m_1+m_2}(\zeta_2 a)A_2 - \gamma_2 H'_{m_0+m_1+m_2}(\gamma_2 a)C_2\right] = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} & \zeta_1 J'_{m_0+m_1}(\zeta_1 a)A_1 - \gamma_1 H'_{m_0+m_1}(\gamma_1 a)C_1 \\ + & \left[\zeta_0^2 H''_{m_0}(\zeta_0 a) + \zeta_0^2 J''_{m_0}(\zeta_0 a)A_0 - \gamma_0^2 H''_{m_0}(\gamma_0 a)C_0\right] F_{m_1}(\lambda_1) \\ + & \left[\frac{m_0 m_1}{a^2} + \lambda_1\eta_0\right]\left[H_{m_0}(\zeta_0 a) + J_{m_0}(\zeta_0 a)A_0 - H_{m_0}(\gamma_0 a)C_0\right] F_{m_1}(\lambda_1) \\ + & \ 2\sum_{m_2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_2 F^*_{m_2}(\lambda_2)\left[\zeta_2^2 J''_{m_0+m_1+m_2}(\zeta_2 a)A_2 - \gamma_2^2 H''_{m_0+m_1+m_2}(\gamma_2 a)C_2\right] \\ - & \ 2\sum_{m_2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_2 F^*_{m_2}(\lambda_2)\left[\frac{m_2(m_0+m_1+m_2)}{a^2} + \lambda_2\eta_2\right] \\ & [J_{m_0+m_1+m_2}(\zeta_2 a)A_2 - H_{m_0+m_1+m_2}(\gamma_2 a)C_2] = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

where we have abbreviated $A_n(m_0, \cdots, m_n; \lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ and $C_n(m_0, \cdots, m_n; \lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ by A_n and C_n, and omitted the equations for $n \geq 2$ for brevity. After a similar approximate treatment to the case of a planar waveguide,[15] we then obtain a set of iteratively solvable equations for A_n's and C_n's in an explicit form. The final approximate solutions for the zero-order and the first-order Wiener coefficients are

$$A_0(\lambda_0) = \frac{\zeta_0 H'_{m_0}(\zeta_0 a)H_{m_0}(\gamma_0 a) - \gamma_0 H'_{m_0}(\gamma_0 a)H_{m_0}(\zeta_0 a)}{\Delta_{m_0}(\eta_0) + M_{m_0}(\eta_0)} \tag{20}$$

$$C_0(\lambda_0) = \frac{i2}{\pi a}\frac{1}{\Delta_{m_0}(\eta_0) + M_{m_0}(\eta_0)} \tag{21}$$

$$A_1(\lambda_0) = -\frac{i2}{\pi a}\frac{k_2^2(\varepsilon_r - 1)H_{m_0}(\gamma_0 a)H_{m_0+m_1}(\gamma_1 a)}{\Delta_{m_0+m_1}(\eta_1)\left[\Delta_{m_0}(\eta_0) + M_{m_0}(\eta_0)\right]} \tag{22}$$

$$C_1(\lambda_0) = -\frac{i2}{\pi a}\frac{k_2^2(\varepsilon_r - 1)H_{m_0}(\gamma_0 a)J_{m_0+m_1}(\zeta_1 a)}{\Delta_{m_0+m_1}(\eta_1)\left[\Delta_{m_0}(\eta_0) + M_{m_0}(\eta_0)\right]} \tag{23}$$

where $\varepsilon_r = (n_1/n_2)^2$ is the relative dielectric constant of the fiber, and the mass operator $M_{m_0}(\eta_0)$ satisfies a set of integral equations, which can be solved iteratively:

$$\begin{aligned} M_{m_0}(\eta_0) = & \sum_{m_1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda_1 \frac{|F_{m_1}(\lambda_1)|^2}{\Delta_{m_0+m_1}(\eta_1) + M_{m_0+m_1}(\eta_1)} \\ & \{[(2k_2^2 - \Gamma)\Delta_{m_0}(\eta_0) + Q_{m_0}(\eta_0)]\Delta_{m_0+m_1}(\eta_1) \\ & + Q_{m_0+m_1}(\eta_1)\Delta_{m_0}(\eta_0) - P_{m_0}(\eta_0)P_{m_0+m_1}(\eta_1)\} \end{aligned} \tag{24}$$

where

$$\Gamma = 2\eta_0\eta_1 - \frac{2m_0(m_0+m_1)+1}{a^2} \tag{25}$$

$$P_{m_0}(\eta_0) = k_2^2(\varepsilon_r - 1)J_{m_0}(\zeta_0 a)H_{m_0}(\gamma_0 a) \tag{26}$$

$$Q_{m_0}(\eta_0) = k_2^2(\varepsilon_r - 1)J_{m_0}(\zeta_0 a)\left[\gamma_0 H'_{m_0}(\gamma_0 a) + H_{m_0}(\gamma_0 a)/a\right] \tag{27}$$

Since we can evaluate the mass operator in an iterative way to obtain better values if we want, $M_{m_0+m_1}(\eta_1)$ in the denominator of the integral kernel in Eq.(24), in fact, reflects the contributions from higher order interactions.

4 Expressions for radiation losses and coupling coefficients

Substituting Eqs.(20) and (21) into Eq.(13), we can easily obtain the coherent or average Green's function. As pointed out in [6], by analogy with the "smooth" waveguide, it seems natural to get the normal waves or the modes of coherent field by evaluating the residues on the roots of the common denominator factor in Eqs.(20)-(23):

$$\Delta_{m_0}(\eta_0) + M_{m_0}(\eta_0) = 0 \tag{28}$$

which indicates that the dispersion equation of the original smooth fiber waveguide $\Delta_{m_0}(\lambda_0) = 0$ (notice that $\eta_0 \equiv \lambda_0$), is perturbed by the influence of the rough boundary. We can obtain the perturbed propagation constants $\tilde{\beta}_n$ of the modified normal waves directly by solving the roots of the dispersion equation (28) by computer, but it is possible to give an explict expression for the roots which have simple and clear physical meanings, if the boundary perturbation is small enough. In this case, the perturbed propagation constant $\tilde{\beta}_n$ can be obtained by making small correction to the unperturbed one:

$$\begin{aligned} \delta\beta_n &= \tilde{\beta}_n - \beta_n \\ &= \frac{P_{m_0}(\beta_n)}{\Delta'_{m_0}(\beta_n)} \sum_{m_1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta_1 \frac{P_{m_0+m_1}(\eta_1)}{\Delta_{m_0+m_1}(\eta_1)} |F_{m_1}(\eta_1 - \beta_n)|^2 - \frac{Q_{m_0}(\beta_n)}{\Delta'_{m_0}(\beta_n)}\sigma^2 \end{aligned} \tag{29}$$

where β_n , the roots of $\Delta_{m_0}(\lambda_0) = 0$, stands for the unperturbed propagation constants of the mode in an ideal optical fiber.

It is obvious that $\delta\beta_n$ of Eq.(29) is complex and hence contains a real part and an imaginary part. From the view point of the modes in the unperturbed or ideal optical fiber, the real part of $\delta\beta_n$ represents the change in the phase velocity of the mode, and the imaginary part means physically the damping of mode amplitude caused by the incoherent transfomation of the mode into the other (including the guided and radiation modes, and both in the forward and backward directions), due to the effects of the rough boundary. Usually we can neglect the real part of $\delta\beta_n$, based on the fact that the unperturbed propagation constant β_n is also real and much larger than the perturbed real part $\mathrm{Re}\,\delta\beta_n$. However, the imaginary part of $\delta\beta_n$ have to be paid more attention, especially for the long fiber with rough boundary, since it is responsible for the damping of the mode amplitude.

For the reasons given above, we then restrict ourselves only to the imaginary part of $\delta\beta_n$. From Eq.(29), it is easy to obtain

$$\mathrm{Im}\,\delta\beta_n = \alpha_n + \sum_{m_1}\sum_{\nu} w_{n\nu} \tag{30}$$

and

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi a^5}\frac{V^2(V^2-U_n^2)}{\beta_n a}\frac{J_{m_0}^2(U_n)}{J_{m_0-1}(U_n)J_{m_0+1}(U_n)}$$
$$\sum_{m_1}\int_{-k_2}^{+k_2}\mathrm{d}\eta_1\,\frac{J_{m_0+m_1}^2(\zeta_1 a)}{|\Delta_{m_0+m_1}(\eta_1)|^2}|F_{m_1}(\beta_n-\eta_1)|^2 \tag{31}$$

$$w_{n\nu} = \frac{\pi}{a^4}\frac{V^2(V^2-U_n^2)}{\beta_n a}\frac{J_{m_0}^2(U_n)}{J_{m_0-1}(U_n)J_{m_0+1}(U_n)}$$
$$\frac{V^2(V^2-U_\nu^2)}{\beta_\nu a}\frac{J_{m_0+m_1}^2(U_\nu)}{J_{m_0+m_1-1}(U_\nu)J_{m_0+m_1+1}(U_\nu)}|F_{m_1}(\beta_n-\beta_\nu)|^2 \tag{32}$$

where $U_n = k_2 a\sqrt{\varepsilon_r-(\beta_n/k_2)^2}$, $V = k_2 a\sqrt{\varepsilon_r-1}$ is the normalized optical fiber parameter, β_n and β_ν stand for the propagation constants of the LP_{m_0n} and $LP_{(m_0+m_1)\nu}$ modes , and are the roots of $\Delta_{m_0}(\eta_0)=0$ and $\Delta_{m_0+m_1}(\eta_1)=0$, respectively. The symbol LP_{mn} denote the linear polarization scalar modes in the weakly guiding optical fiber, and their relations to the exact vector modes HE_{mn}, EH_{mn}, TE_{0n} and TM_{0n} are given in [45]. According to the form of the expressions (31) and (32), we can easily understand that α_n represents the coupling of the guided mode to the radiation modes and hence stands for the radiation loss, while $w_{n\nu}$ represents the coupling of the guided mode to other guided modes and hence stands for the mode coupling coefficient. It is also easy to demonstrate that Eqs.(31) and (32) are in form really the same with those obtaind by the coupled mode theory of Marcuse.[32, 34]

5 Numerical Examples and Discussions

Although there is no known typical power spectrum for the rough boundary of the optical fiber, for the purpose of numerical calculation we conveniently assume that the power spectrum of the random boundary has the Gaussian form

$$|F_m(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2 l}{\sqrt{2\pi}\vartheta}e^{-(\lambda^2 l^2+m^2\tau^2)/2} \tag{33}$$

$$\vartheta = \Theta\left(\frac{\tau^2}{2\pi}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2\tau^2/2} \tag{34}$$

where $\Theta(x)$ denotes the theta function, and τ and l are the parameters describing the correlation length with respect to φ and z. The spectrum is a decreasing function of λ and has a maximum at $l = 1/\sqrt{2}\lambda$ as a function of l. These properties determine certain effects of the rough boundary on the propagating characteristics of the modes. From Eq.(11), the correlation function of the rough boundary is then given by

$$R(\varphi,z) = \frac{\sigma^2\sqrt{2\pi}}{\vartheta\tau}e^{-z^2/2l^2}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{-[(\varphi+2\pi\mu)]^2/2} \tag{35}$$

It can be seen that when τ is large enough, the correlation function is independent on φ (then only $|F_0(\lambda)|^2$ with $\vartheta=1$ has to be considered in Eqs.(31) and (32)), hereafter we will use the term τ infinite ($\tau=\infty$) to denote this case. It should be pointed out that our correlation function is different form the one used by Marcuse,[32, 34] not only on z dependence (Marcuse's is the exponential function), but also on φ independence (Marcuse's is independent on φ). In additon, the power spectrum obtained by the Fourier transform of an exponential correlation function is a Lorentzian function.

Using the power spectrum given in Eqs.(33) and (34), we now can calculate α_n and $w_{n\nu}$ from Eqs.(31) and (32). Because they are directly proportional to the roughness σ^2 as long as it satisfies the condition $\sigma^2 \ll a^2$, we normalize them by a factor a^3/σ^2. For convenience of the discussions below, we have shown in Fig.1, the normalized propagation constants β_n/k_2 of the lowest and a few lower order modes as a function of the normalized fiber parameter V for the different values of the relative dielectric constant $\varepsilon_r = 1.01$, and 1.5. There is no cutoff for LP_{01} mode, but LP_{11} mode is cutoff as $V < 2.405$, and LP_{21} and LP_{02} are cutoff as $V < 3.832$.

Fig.2 shows the normalized radiation loss of the lowest order mode LP_{01} as a function of the normalized optical fiber parameter V for the different values of the normalized axial correlation length l/a, the angular correlation length τ and the relative dielectric constant ε_r. The loss increases and tends to a constant as V increases for $\varepsilon_r = 1.01$, except for a few very small peaks where the higher modes begin to appear. For $\varepsilon_r = 1.5$, the situation is not so simple as $\varepsilon_r = 1.01$. The reason for this is perhaps that the present theory is valid only for weakly guiding fibers with $n_1 \simeq n_2$ or $\varepsilon_r \simeq 1.0$. As τ is smaller, the corrugated structures on φ direction become more complicated, and the number of the radiation modes, which LP_{01} would be coupled to, is larger (more terms of the sum in Eq.(31) have to be considered), so that the radiation loss is a little bit higher in the small value of τ than that in the large value of τ. In Fig.3, we compare the radiation losses for a few different modes. It can be seen that the higher mode undergoes the higher loss than the lower mode when the modes are not near to cutoff.

The mode coupling coefficients are shown in Figs.4-6 for the forward to forward modes and in Figs.7-8 for the forward to backward modes (we use LP_{n-m} to denote the backward modes), also as a function of V for the different values of l/a, τ and ε_r. As $\tau = \infty$, that is, the boundary is axial symmetry (independent on φ), there are no coupling from LP_{01} to $LP_{1\pm1}$ and $LP_{2\pm1}$, and LP_{11} to $LP_{2\pm1}$, because they have the different angular indices (the first number on their subscripts). For LP_{01} and $LP_{0\pm2}$ modes, there are coupling between them even though for $\tau = \infty$ since they have the same angular index. From Fig.4 and Fig.7, we can see that the coupling of LP_{01} to $LP_{0\pm2}$ modes decreases as τ becomes smaller. This is due to the fact that, for the smaller τ, LP_{01} is also coupled to the other modes with different angular indices. It can also be seen that the coupling between the forward and backward modes are much smaller than those between the forward and forward modes, due to the bigger differences of the propagation constants of the modes in the former case. However, the coupling coefficients between the forward and backward modes are also very important even though they are very small because they are responsible for the reflections of the modes.[35] It can be noticed that the mode coupling coefficients are nearly constants in the region of $V > 4$ except for some special cases. This is very distinct from the periodical boundary in which the mode coupling occurs merely at certain points where the differences between the propagation constants of the modes are the multiples of the wavenumber of the periodical corrugations, [36, 37] and hence results in the so-called passbands and stopbands of the modes. [39–41]

Shown in Figs.9-13 are the radiation losses and the coupling coefficients as a function of l/a for the different values of V, ε_r and τ. The common point in these figures is that there is a certain value of l/a giving out the largest loss or coupling. This is due to the form of the spectrum Eq.(33). It is not easy to determine this value of l/a for the radiation loss because the spectrum is involved in an integral (see Eq.(31)), but for the coupling coefficient, from Eq.(32) and Eq.(33) this value of l/a can be determined as $l/a = 0.707/(\beta_n - \beta_\nu)a$. It can be seen that most of the positions where the radiation losses and the coupling coefficients arrive at their maximum are located in the region of

Table 1: Comparison of our and Marcuse's results [34] for the normalized radiation loss $(a^3/\sigma^2)\alpha_{max}$ and the normalized rms core deviation σ/a for four different values of V and a ($\varepsilon_r = 1.02$, $n_2 = 1.0$).

V	a (μm)		$(a^3/\sigma^2)\ \alpha_{max}$	$(\sigma/a) \times 10^{-4}$
3.83	4.3	[34]	0.070	2.66
		ours	0.097	2.26
2.84	3.18	[34]	0.043	2.92
		ours	0.055	2.58
2.0	2.23	[34]	0.018	3.77
		ours	0.022	3.41
1.0	1.11	[34]	0.012	3.26
		ours	0.012	3.26

Table 2: The maximum value α_{max} and its location $(l/a)_{max}$ of the radiation power loss of the dominant mode as $\sigma/a = 0.1\%$ for $V = 2.0$, $n_2 = 1.5$ and the four different values of ε_r.

ε_r	a (μm)	α_{max} (dB/km)	$(l/a)_{max}$
1.04	1.06	257.9	1.4
1.01	2.12	63.8	2.8
1.0025	4.24	15.9	5.6
1.000625	8.49	4.0	11.2

$1.0 < l/a < 10.0$.

To get a feeling for the magnitude of the radiation loss of the dominant mode LP_{01} or HE_{11} to be expected due to its coupling or transformation of the energy to the radiation modes caused by the rough boundary, we consider the worst possible value of the loss α_{max} (the maxmium value reached at a certain point of l/a). Using the fact that 10 dB/km power loss corresponds to $2\,\alpha_{01} = 2.3 \times 10^{-9}$ μm, we can calaulate the corresponding normalized rms deviation σ/a that is required to produce 10 dB/km radiation loss. We compare the results obtained by our Gaussian power spectrum for $\tau = \infty$ with those by Marcuse's Lorentzian spectrum [34] in Table 1 as the parameters are $\varepsilon_r = 1.02$ and $n_2 = 1.0$ for the four different values of V and a (we have assumed that the vacuum wavelength of the light is 1 μm here and hereafter). It can be found that the results obtained by two really different spectrums are near same, this confirms in a certain extent the conclusion of Marcuse[33, 34] that the maximum and its location of the radiation loss is not strongly dependent on the assumed statistical model for the rough boundary. Furthermore, we have given in Table 2 the maximum α_{max} and its location $(l/a)_{max}$ of the radiatin power loss of LP_{01} mode caused by a normalized rms deviation $\sigma/a = 0.1\%$ for $V = 2.0$, $n_2 = 1.5$ and the different values of ε_r. We can clearly see that the loss decreases rapidly as ε_r tends to the unit. It is one of the reasons why we should use the very weakly guiding optical fibers for the long-distance communications.

In conclusion, we have treated the scattering problem of the guided modes in an optical fiber with statistically slight rough boundary, by applying the stochastic functional approach. A lot of numerical examples are given for illustration. Although the random rough boundary is assumed to obey a homogeneous Gaussian distribution statistically and even though the maximun of the radiation loss is not strongly dependent on the statistical model of the boundary, we still want to point out that it is not difficult to extend the theory to other distributions, for example, the Poisson distribution, where the Wiener-Charlier orthogonal expansion for the Poisson-Wiener functionals can be used,[47] instead of the Wiener-Hermite orthogonal expansion used in this paper. Moreover, based on the present theory, the influence of the rough boundary on the propagation characteristics of pulse-modulated signals in a multimode optical fiber can also be investigated, based on the mode coupling coefficients and the intensity transfer equation.

Acknowledgement:

One of the authors Zhi Liang Wang would like to express his deep gratitude to International Communication Foundation of Japan (KDD's ICF) for its financial support on his visiting in Japan. The authors are also grateful to Prof. J.Nakayama of Kyoto Institute of Technology for helpful discussions.

References

[1] P.Beckmann and A.Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Pergamon, New York (1963)

[2] F.G.Bass and I.M.Fuks, *Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces*, Pergamon, Oxford (1979)

[3] J.A.Ogilvy, *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces*, Adam Hilger, Bristol (1991)

[4] A.G.Voronovich, *Wave Scattering at Rough Surface*, Springer, Berlin (1994)

[5] C.S.Clay, "Effect of a slightly irregular boundary on the coherence of waveguide propagation", *J.Acoust.Soc.Am.* **36**, No.5, 833-837 (1964)

[6] F.G.Bass, V.D.Freulicher, and I.M.Fuks, "Propagation in statistically irregular waveguide—-Part I: Average field", *IEEE Trans. on Antennas & Propaga.*, Vol. **AP-22**, No.2, 278-288 (1974)

[7] F.G.Bass, V.D.Freulicher, and I.M.Fuks, "Propagation in statistically irregular waveguide—Part II: Second order statistical moments", *IEEE Trans. on Antennas & Propaga.*, Vol. **AP-22**, No.2, 288-295 (1974)

[8] A.Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, New York (1978)

[9] I.Tolstoy, "Coherent modes and boundary waves in a rough-walled acoustic waveguide", *J.Acoust.Soc.Am.* **73** (4), 1192-1199 (1983)

[10] I.Tolstoy, "Smoothed boundary conditions, coherent low-frequency scatterer, and boundary modes", *J.Acoust.Soc.Am.* **75**(1), 1-22 (1984)

[11] V.Twersky, "On the nonspecular reflection of sound from planes with absorbent bosses", *J.Acoust.Soc.Am.* **23**, 336-338 (1951)

[12] J.A.DeSanto, "Impedance at a rough waveguide boundary", *Wave Motion* **7**, 307-318 (1985)

[13] A.R.Wenzel, "Smoothed boundary conditions for randomly rough surfaces", *J.Math.Phys.* **15**, No.3, 317-323 (1974)

[14] J.G.Watson and J.B.Keller, "Rough surface scattering via the smoothing method", *J.Acoust.Soc.Am.* **75**(6), 1705-1708 (1984)

[15] H.Ogura and Z.L.Wang, "On scattering of guided waves in a waveguide with a slightly rough boundary: Stochastic functional approach", *Phys.Rev.* **E50**, No.6, 5006-5016 (1994)

[16] H.Ogura, "Theory of waves in a homogeneous random medium", *Phys.Rev.* **A11**, 942-956 (1975)

[17] H.Ogura and J.Nakayama, "Initial-value problem of the one-dimensional wave propagation in a homogeneous random medium", *Phys.Rev.* **A11**, 957-962 (1975)

[18] H.Ogura and Y.Yoshida, "Wave propagation in a slightly lossy random medium", *Phys.Rev.* **A14**, 796-801 (1976)

[19] J.Nakayama, H.Ogura and B.Matsumoto, "A probabilistic theory of scattering from a random rough surface", *Radio Sci.* **15**, No.6, 1049-1057 (1980)

[20] J.Nakayama, H.Ogura and M.Sakata, "A probabilistic theory of electromagnetic wave scattering from a slightly random surface. 1. Horizontal polarization and 2. Vertical polarization", *Radio Sci.* **16**, No.5, 831-853 (1981)

[21] J.Nakayama, "Anomalous scattering from a slightly random surface", *Radio Sci.* **17**, 558-564 (1982)

[22] J.Nakayama, K.Mitzutani, and H.Ogura, "Theory of light scattering from a random metal surface: Excitation of surface plasmons in a Ag film", *J.Appl.Phys.* **56**, No.5, 1465-1472 (1984)

[23] H.Ogura and N.Takahashi, "Green function and radiation over a random rough surface", *J.Opt.Soc.Am.* **A2**, No.12, 2208-2224 (1985)

[24] J.Nakayama, "Scattering from a random surface: Linear equation for coefficients of Wiener-Hermite expansion of the wave field", *Radio Sci.* **21**, No.4, 707-715 (1986)

[25] H.Ogura and J.Nakayama, "Scattering of waves from a random cylindrical surface", *J.Math.Phys.* **29**, 851-860 (1988)

[26] H.Ogura, N.Takahashi and M.Kuwahara, "Scattering of waves from a random cylindrical surface ", *Wave Motion* **14**, No.3, 273-295 (1991)

[27] H.Ogura, N.Takahashi and M.Kuwahara, "Scattering of an electromagnetic wave from a slightly random cylindrical surface: horizontal polarization", *Waves in Random Media* **1**, 363-389 (1991)

[28] H.Ogura, N.Takahashi and M.Kuwahara, "Scattering of waves from a random spherical surface—-Mie scattering", *J.Math.Phys.* **31**(1), 61-75 (1990)

[29] K.Ito, "Complex multiple Wiener integrals", *Jpn.J.Math.* **22**, 63-86 (1952)

[30] N.Wiener, *Nonlinear Problems in Random Theory,* MIT Cambridge, MA. (1958)

[31] D.Marcuse, "Mode Conversion Caused by Surface Imperfections of a Dielectric Slab Waveguide", *Bell.Syst.Tech.J.* **48**, 3177-3215 (1969)

[32] D.Marcuse, "Mode Conversion Caused by Diameter Changes of a Round Dielectric Waveguide", *Bell.Syst.Tech.J.* **48**, 3217-3232 (1969)

[33] D.Marcuse, "Radiation Losses of the Dominant Mode in Round Dielectric Waveguides", *Bell.Syst.Tech.J.* **49**, 1665-1693 (1970)

[34] D.Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Academic Press, New York (1974)

[35] D.A.Hill, "Reflection Coefficient of a Waveguide with Slightly Uneven Walls", *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, Vol. **MTT-37**, 244-252 (1989)

[36] A.W.Snyder, "Radiation Losses Due to Variations of Radius on Dielectric or Optical Fibers", *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, Vol. **MTT-18**, 608-615 (1970)

[37] E.G.Rawson, "Analysis of Scattering from Fiber Waveguides with Irregular Core Surfaces", *Appl.Opt.* **13**, 2370-2377 (1974)

[38] O.R.Asfar and A.H.Nayfeh, "Circular Waveguide with Sinusoidally Perturbed Walls", *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, Vol. **MTT-23**, 728-734 (1975)

[39] A.Bostrom, "Passbands and Stopbands for an Electromagnetic Waveguide with a Periodically Varying Cross Section", *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, Vol. **MTT-31**, 752-755 (1983)

[40] S.L.Lundqvist, "Electromagnetic Waves in a Cylindrical Waveguide with Infinite or Semi-infinite Walls", *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, Vol. **MTT-36**, 752-755 (1988)

[41] K.Yasumoto and H.Kubo, "Numerical analysis of a cylindrical dielectric waveguide with a periodically varying circular cross section", *J.Opt.Soc.Am.* **A7**, 2069-2074 (1990)

[42] N.K.Uzunoglu, "Scattering from inhomogeneities from a fiber waveguide", *J.Opt.Soc.Am.* **71**, 259-273 (1981)

[43] C.T.Tai, *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory*, International Textbook Company, Scranton (1971)

[44] R.E.Collin, *Field Theory of Guided Waves*, second edition, IEEE Press, New York (1991), Chap.2

[45] A.W.Snyder and J.D.Love, *Optical Waveguide Theory*, Chapman and Hall, London (1983)

[46] H.Ogura, *Theory of Stochastic Process*, Corona, Tokyo (1978) (in Japanese)

[47] H.Ogura, "Orthogonal functionals of the Poisson process", *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. **IT-18**, No.4, 473-481 (1972)

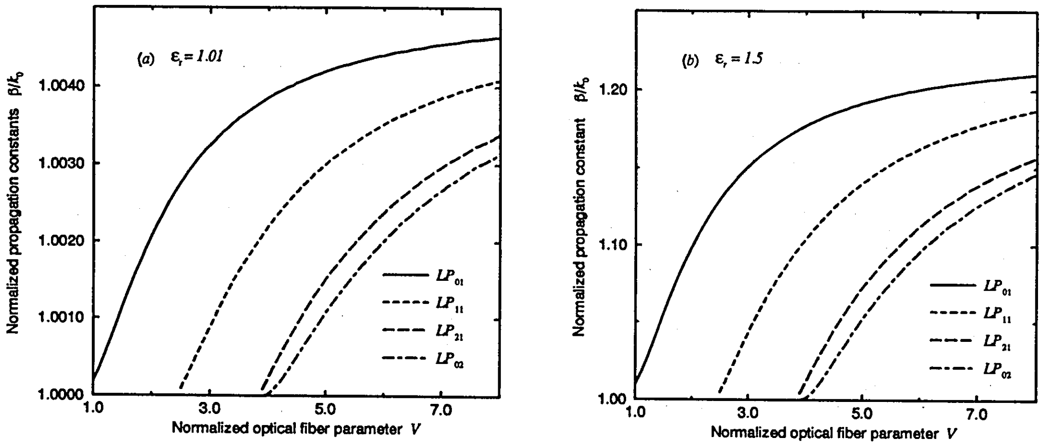


Figure 1: Normalized propagation constants of the lowest order mode LP_{01} (HE_{11}) and a few lower order modes LP_{11} (HE_{21}, TE_{01}, TM_{01}), LP_{21} (HE_{31}, EH_{11}) and LP_{02} (HE_{12}) versus normalized waveguide parameter V. The curve parameters are (a) $\varepsilon_r = 1.01$ and (b) $\varepsilon_r = 1.5$.

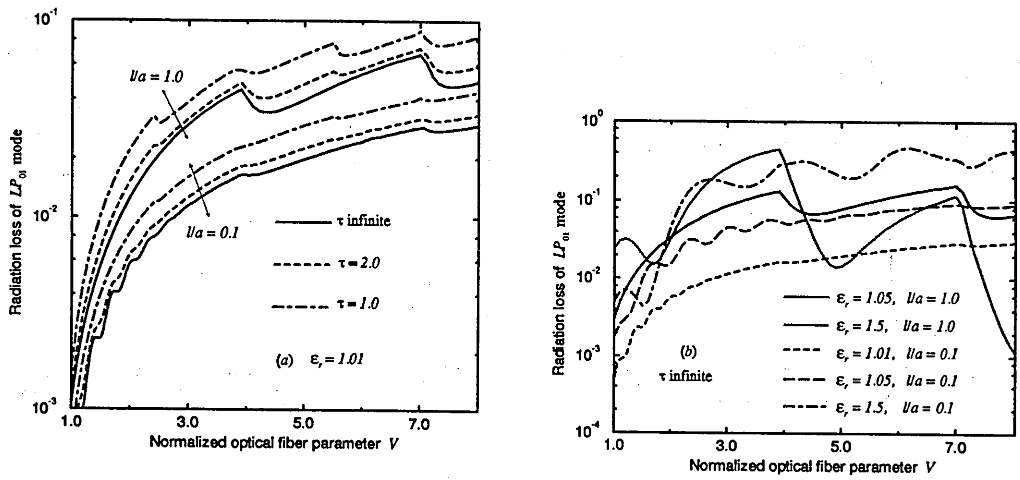


Figure 2: Normalized radiation loss of the dominant or the lowest order mode LP_{01} (HE_{11}) as a function of the normalized optical fiber parameter V with the different values of the relative dielectric constant ε_r, the normalized axial correlation length l/a and the angular correlation length τ. (a) $\tau = \infty$, 2.0 and 1.0; $l/a = 0.1$ and 1.0; $\varepsilon_r = 1.01$ (b) $\tau = \infty$; $l/a = 0.1$ and 1.0, $\varepsilon_r = 1.01, 1.05$ and 1.5.

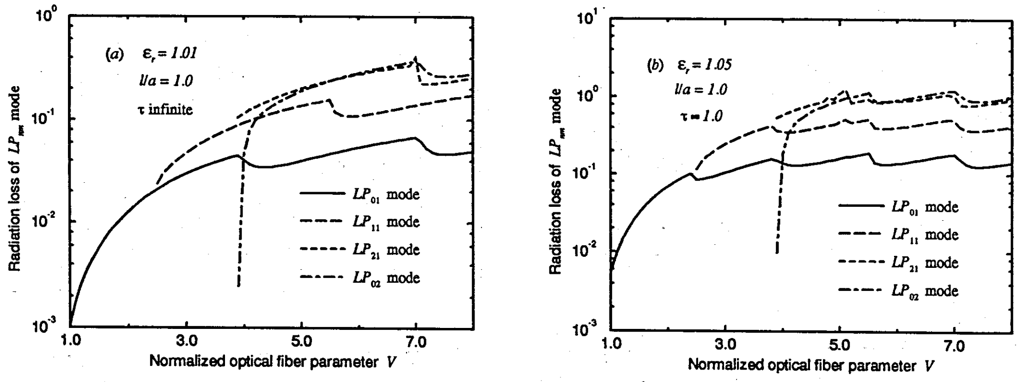


Figure 3: Comparison of the normalized radiation losses among the lowest order mode LP_{01} (HE_{11}) and a few lower order modes LP_{11}, LP_{21} and LP_{02} as a function of V. The curve parameters are (a) $\tau = \infty$; $l/a = 1.0$; $\varepsilon_r = 1.01$ and (b) $\tau = 1.0$; $l/a = 1.0$; $\varepsilon_r = 1.05$.

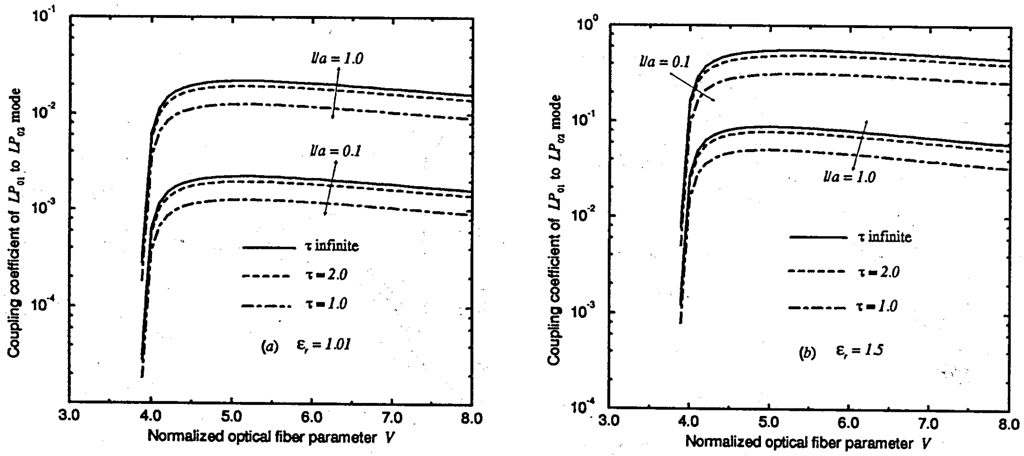


Figure 4: Normalized mode coupling coefficient between LP_{01} and LP_{02} modes as a function of V for the different values of τ, l/a and ε_r. The curve parameters are $\tau = \infty$, 2.0, and 1.0; $l/a = 0.1$ and 1.0 as well as (a) $\varepsilon_r = 1.01$ and (b) $\varepsilon_r = 1.5$.

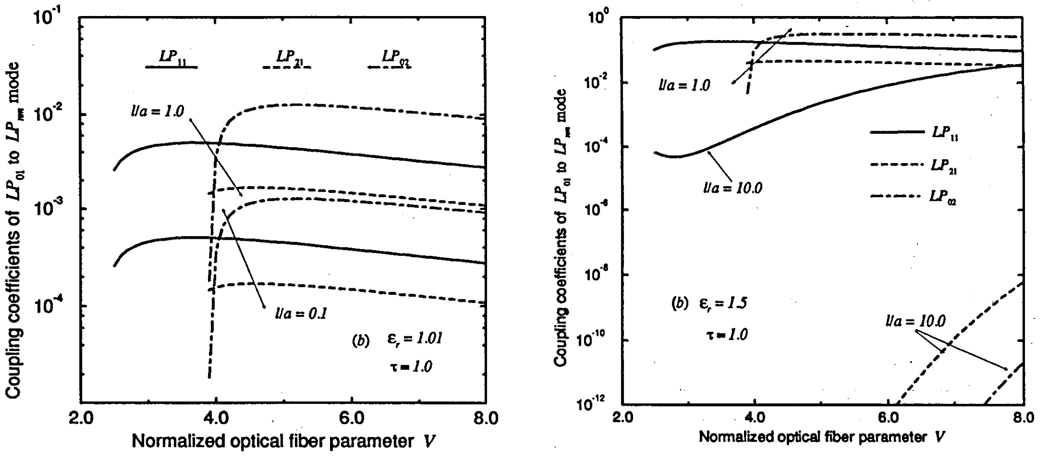


Figure 5: Comparison for the normalized mode coupling coefficients of LP_{01} to LP_{11}, LP_{21} and LP_{02} modes as a function of V. The curve parameters are (a) $\tau = 1.0$; $l/a = 0.1$, 1.0; $\varepsilon_r = 1.01$ and (b) $\tau = 1.0$; $l/a = 1.0$, 10.0; $\varepsilon_r = 1.5$

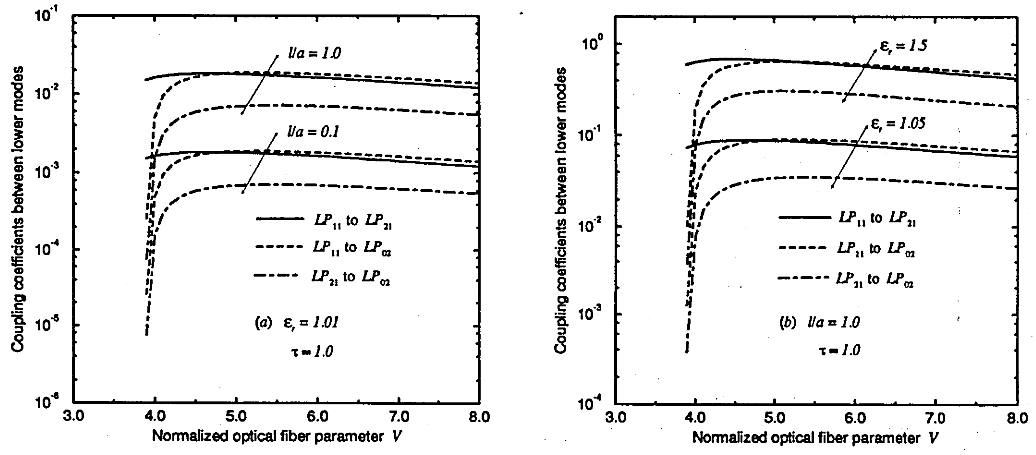


Figure 6: Similar to Fig.5 but for LP_{11} to LP_{21}, LP_{11} to LP_{02} and LP_{21} to LP_{02} modes.

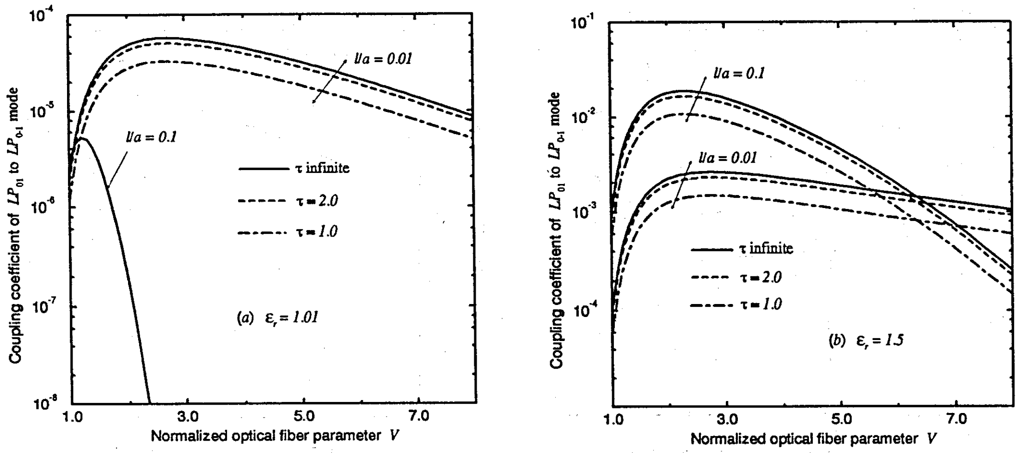


Figure 7: Normalized coupling coefficient of the lowest order forward LP_{01} to backward LP_{0-1} modes as a function of V. The curve parameters are $\tau = \infty$, 2.0 and 1.0; $l/a = 0.01$ and 0.1 as well as (a) $\varepsilon_r = 1.01$ and (b) $\varepsilon_r = 1.5$.

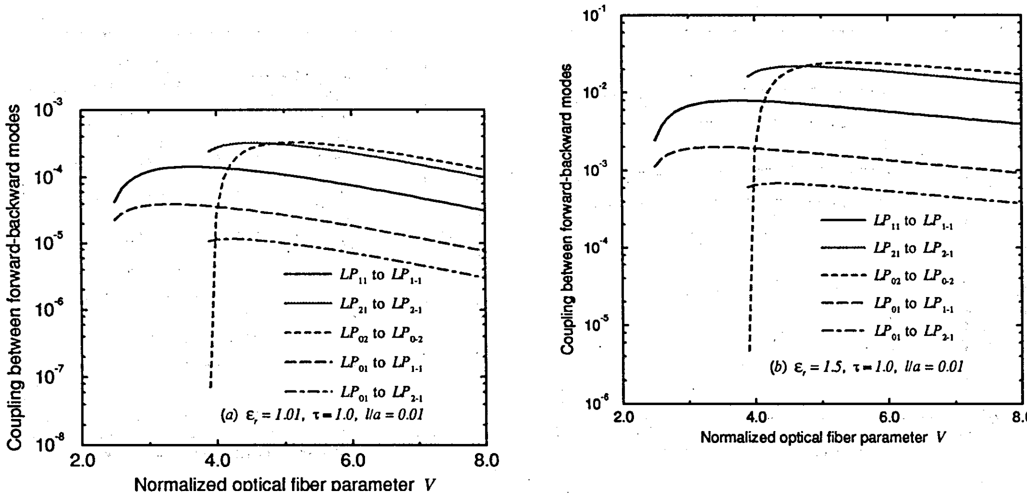


Figure 8: Similar to Fig.7 but for LP_{11} to LP_{1-1}, LP_{21} to LP_{2-1}, LP_{02} to LP_{0-2}, LP_{01} to LP_{1-1} and LP_{01} to LP_{2-1} modes.

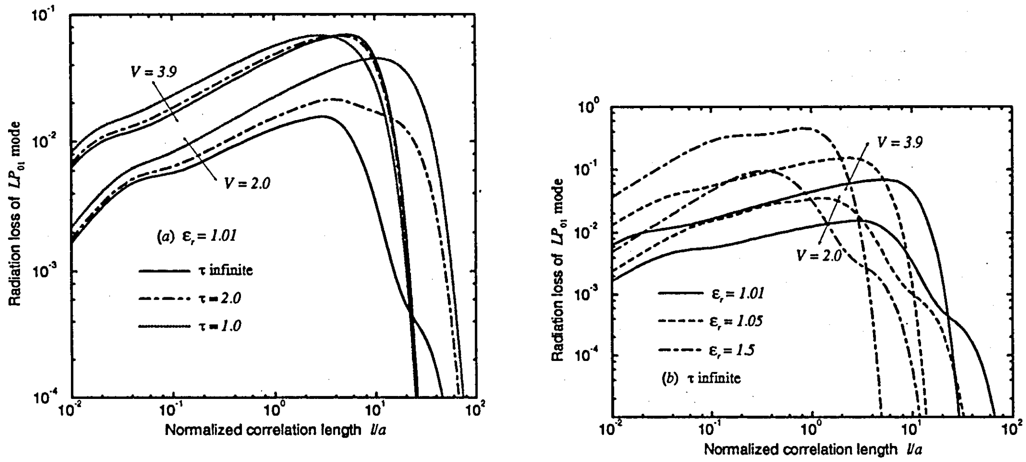


Figure 9: Normalized radiation loss of LP_{01} mode as a function of the normalized axial correlation length l/a. The curve parameters are $V = 2.0$ and 3.9; as well as (a) $\varepsilon_r = 1.01$; $\tau = \infty$, 2.0 and 1.0 and (b) $\tau = \infty$; $\varepsilon_r = 1.01$, 1.05 and 1.5.

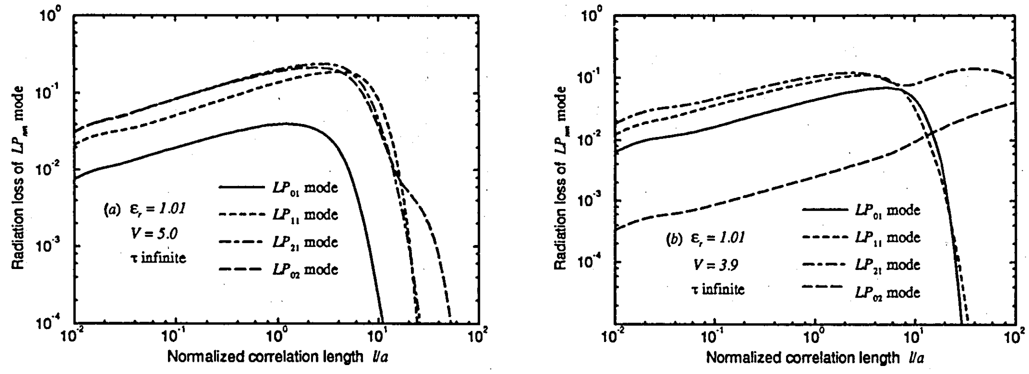


Figure 10: Normalized radiation losses of various modes LP_{01}, LP_{11}, LP_{21} and LP_{02} as a function of l/a. The curve parameters are $\tau = \infty$; $\varepsilon_r = 1.01$ as well as (a) $V = 5.0$ and (b) $V = 3.9$.

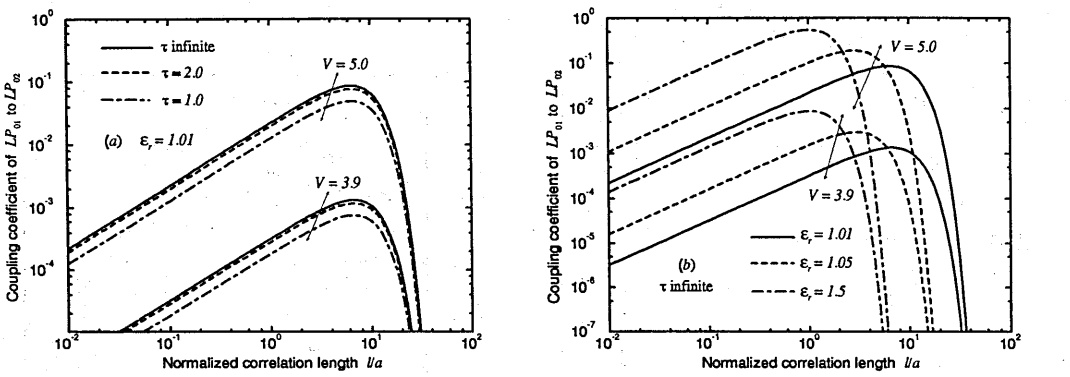


Figure 11: Normalized mode coupling coefficient of LP_{01} to LP_{02} mode as a function of l/a. The curve parameters are $V = 3.9$ and 5.0 as well as (a) $\varepsilon_r = 1.01$; $\tau = \infty$, 2.0 and 1.0 and (b) $\tau = \infty$; $\varepsilon_r = 1.01$, 1.05 and 1.5.

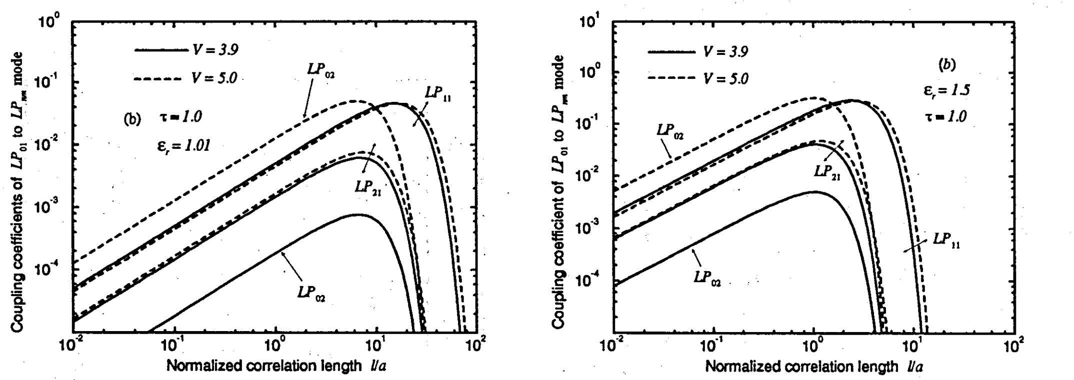


Figure 12: Normalized mode coupling coefficients of LP_{01} to LP_{11}, LP_{21} and LP_{02} modes as a function of l/a. The curve parameters are $V = 3.9$ and 5.0; $\tau = 1.0$ as well as (a) ε_r =1.01 and (a) ε_r =1.5

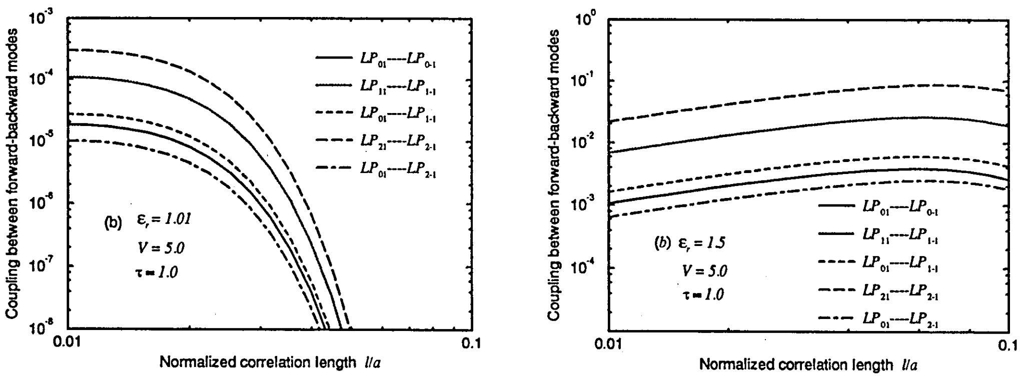


Figure 13: Normalized coupling coefficients of the forward LP_{01} to backward LP_{0-1}, LP_{11} to LP_{1-1}, LP_{01} to LP_{1-1}, LP_{21} to LP_{2-1} and LP_{01} to LP_{2-1} modes as a function of l/a. The curve parameters are τ = 1.0; V =5.0 as well as (a) ε_r = 1.01 and (b) ε_r = 1.5.

輻射科学研究会資料
RS94-20

誘電体グレーティングを用いた
チェレンコフ・レーザのFDTD解析

高橋　博之　　塩沢　俊之
（大阪大学工学部）

１９９５年3月6日

1 まえがき

最近, 電磁波工学あるいはプラズマ理工学などへの応用を目的として, 短ミリ波, サブミリ波の辺りから光波にいたる波長領域において大出力でコヒーレントな電磁波の得られるデバイスの研究が活発に行われている. このような発振器のうち, 特に相対論的電子ビームを用いた発振器は自由電子レーザ（FEL）と呼ばれている. 代表的な自由電子レーザの一つであるチェレンコフ・レーザは, 相対論的電子ビームによる誘導チェレンコフ効果を利用した発振器であり, その実験的[(1)~(5)]および理論的[(6)~(20)]研究が多数報告されている.

チェレンコフ・レーザでは誘電体導波路に沿って伝搬する電磁波と電子ビームに沿って伝搬する空間電荷波との線形結合によって増大波が得られる. 一般に, 自由電子レーザは, 電子ビームの運動エネルギーを直接電磁波のエネルギーに変換することにより電磁波の増幅または発振を行う. したがって, 電磁波が電子ビームからエネルギーをもらって増大すると電子ビームのドリフト速度が減少する. その結果, 電子ビームと電磁波の速度の同期が維持されなくなって電子ビームから電磁波へのエネルギー変換が効率的に行われなくなる. そこで, 電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて何らかの方法で電磁波の位相速度を遅らせることによって自由電子レーザのエネルギー変換効率を改善できるはずである. このような方法の代表的な適用例として, チェレンコフ・レーザあるいは誘電体を装荷したラマン型自由電子レーザにおいて, 導波路を構成する誘電体の誘電率を波動の進行方向に徐々に増加させることによってエネルギー変換効率を大幅に改善できることが示されている[(15),(19)].

導波路を構成する誘電体の誘電率を波動の進行方向に徐々に増加させる具体的な方法としては, 導波路にカー媒質を用いる方法が提案されている[(17),(18)]. もう一つの方法としては, 装荷誘電体をグレーティグ構造[(16)]にし, そのグレーティングのスロットの深さおよび幅のいずれかを波動の進行方向に徐々に変化させることにより, 等価的に誘電体の誘電率を変えていくのと同じ効果が得られ, それを効率改善に利用することが考えられている.

本研究では, 粒子シミュレーション[(21),(22)]により電子ビームの非線形性をも含めて, 誘電体グレーティングを用いたチェレンコフ・レーザの特性について詳しく調べる. ここで, 粒子シミュレーションというのは, 電子ビームを流体として近似することなく, 電子ビームを構成する個々の粒子（電子）と電磁界との相互作用を時間領域差分法（FDTD 法）[(23)]を用いて解析する手法である. 特に, 誘電体グレーティングのスロットの深さおよび幅を変えた場合, 等価的に, 一定の厚さの誘電体を用いる通常のチェレンコフ・レーザにおいて誘電率を変えるのと同じ効果が得られ, これを効率改善に利用できることを明らかにする.

2 基礎方程式

本論文において考察する誘電体グレーティングを用いたチェレンコフ・レーザの2次元モデルを図1に示す. 互いに平行な2枚の完全導体平板の一方に厚さa, 比誘電率ε_rの誘電体グレーティングを装荷し, 誘電体グレーティング表面から距離$(b-a)$離れたところを厚さ$(f-b)$の平板状の相対論的電子ビームがz軸方向にドリフトしているものとし, ドリフト速度の初期値をv_0とする. また, 電子ビームは無限大静磁界によってドリフト方向に集束されているものとする. この場合には, 電子の運動は静磁界の方向, すなわちz方向にのみ可能となる. また, すべての物理量はx軸方向に一様であるとする.

更に, 簡単のために, 電子ビームはイオン流によって中和されているものとする. すなわち, 電子ビーム自身によって作られる静電界および静磁界を打ち消すために, 電子ビームの初期速度と同じ速度でドリフトする, 電子ビームと同じ電荷密度をもつイオン流が存在するものとする. このときイオン流によってもチェレンコフ不安定性が生じるが, チェレンコフ不安定性の増大率は荷電粒子の質量の1/3乗に逆比例するので[(11),(13)], イオン流によるチェレンコフ不安定性の増大率は電子ビームによるチェレンコフ不安定性に比べて十分に小さくなる. 従って, 電子ビームによるチェレンコフ不安定性が飽和に達した時点でもイオン流による不安定性は十分に低いレベルにあり, これを無視することができる.

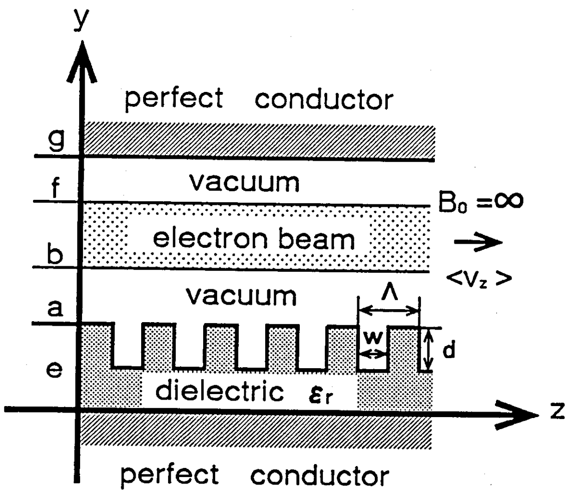


図1 解析のモデル

本論文において解析の基礎となる方程式は, マクスウェルの方程式および電子に対する相対論的運動方程式である. 電子ビームに無限大の静磁界が印加されている場合には電子ビームはTEモードの電磁界とは結合しないことから, 本論文ではTM波の伝搬を取り

扱う.TM 波に対するマクスウェルの方程式は次のように表される.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial E_z(\boldsymbol{r},t)}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y(\boldsymbol{r},t)}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \\[2ex]
\dfrac{\partial B_x(\boldsymbol{r},t)}{\partial z} = \dfrac{\varepsilon_r}{c^2}\dfrac{\partial E_y(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \\[2ex]
-\dfrac{\partial B_x(\boldsymbol{r},t)}{\partial y} = \dfrac{\varepsilon_r}{c^2}\dfrac{\partial E_z(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \mu_0 J_z(\boldsymbol{r},t)
\end{cases}
\tag{1}
$$

但し,

$$J_z(\boldsymbol{r},t) = -\sum_i e v_{zi}\delta(\boldsymbol{r}\text{-}\boldsymbol{r}_i(t)) + J_{ion} \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (x, y.z) \\
\boldsymbol{r}_i &= (x_i(t), y_i(t), z_i(t)) \\
\delta(\boldsymbol{r}) &= \delta(x)\delta(y)\delta(z)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

であり, $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である. μ_0は真空の透磁率, c は真空中の光速度, $-e$ は電子の電荷である. また, v_{zi}は, 電子の速度を表し. 添字 i は個々の粒子を意味する. 更に, J_{ion}は電子流によって作られる電流密度の直流分を打ち消すためのイオン流による電流密度を表す. なお, 式(1)は図1の各領域におけるマクスウェルの方程式をまとめて書いたものである. すなわち, 式(1)において $J_z = 0$ とおくと, 誘電体領域における方程式が得られ, $\varepsilon_r = 1$ とおくと電子ビーム領域における方程式が得られる. さらに, $J_z = 0$, $\varepsilon_r = 1$ とおくと真空領域における方程式が得られる.

電子ビームに無限大の静磁界が印加されている場合には, 電子に対する相対論的運動方程式は次のようになる[24].

$$m_0\frac{d}{dt}(\gamma v_z(t)) = -eE_z \tag{4}$$

但し,

$$v_z = \frac{dz}{dt} \tag{5}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v_z}{c})^2}} \tag{6}$$

であり, m_0は電子の静止質量, zは電子の位置を表す座標である.

3 粒子シミュレーションとFDTD表示

本章では, 解析の手法である粒子シミュレーションについて述べる. 本論文で用いる手法は粒子シミュレーションの中でも特に粒子コード (Particle-in-cell code) と呼ばれているものである. 本論文では, 取り扱う波動の長さが L なる領域（簡単のために, 本論文では L を管内波長の長さに選ぶ）に着目し, この領域内における粒子（電子）の運動と電磁界の

変化を時間的に追跡する. 但し, 取り出された領域の前後の境界では周期的境界条件が近似的に成り立つものとする. この取り出された領域において, 図2に示すように, 位置座標 (y_i, z_i) と速度 v_{zi}をもった粒子をN個並べる ($i = 1, 2, \cdots, N$). 但し, ここで取り扱う粒子は1個の電子ではなく多数の電子からなる「超粒子」である. 従って, この粒子の電荷量 q および質量 Mの値は実際の電子の電荷量および質量の値とは異なるが, その比電荷 q/M は電子の比電荷 e/m_0と同じになる. また, 粒子の密度$\bar{N}$は実際の電子ビームの電子密度 n_0 とは異なるが, 両者の間には $qN = en_0$なる関係が保たれている. 以上により超粒子と電子のプラズマ角周波数は等しくなり, その値 w_pは

$$w_p^2 = \frac{q^2 \bar{N}}{\gamma M \varepsilon_0} = \frac{e^2 n_0}{\gamma m_0 \varepsilon_0} \tag{7}$$

で与えられる. ただし, ε_0は真空の誘電率を表す. このように「超粒子」を考えるのはシミュレーションに要する時間を短縮するためである. なお, 本論文では電子ビームはイオン流によって中和されていると仮定しているので, 電子ビームに対応する超粒子の流れの背景には一様なイオン流に対応する超粒子の流れが存在するものとする. 但し, 先に述べた理由により, イオン流と高周波電磁界との相互作用は考えないものとする. また, この着目する領域を, 図2に示すように, y 方向についてはΔyの間隔でNGY+1 個の, 一方 z 方向についてはΔzの間隔で NGZ+1 個の格子によって微小領域に分割し, E_zおよび J_zは点 $(j+1/2, k)$ において, B_xは点 $(j+1/2, k+1/2)$) において, E_yは点 $(j, k+1/2)$ において求める. (図3参照)

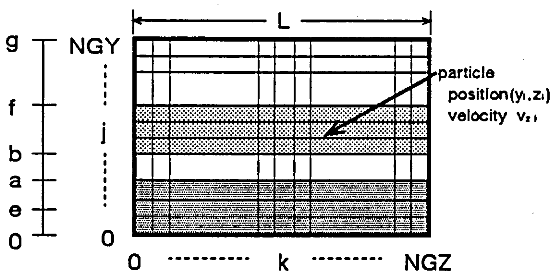
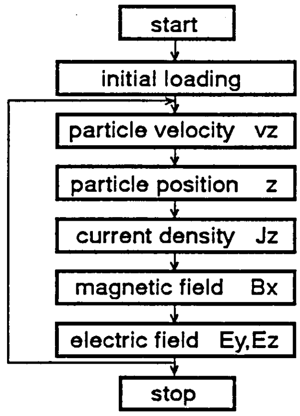


図2　格子による系の分割



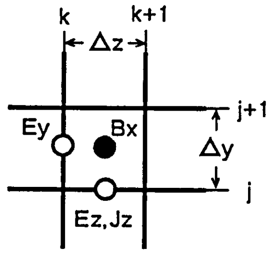


図3　電磁界成分の配置

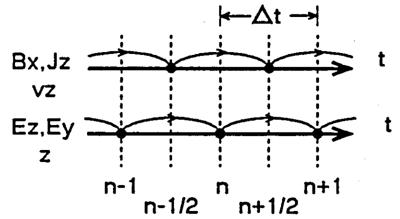


図4　計算の手順

さて, 初期に与えられた粒子の速度のわずかな擾乱によって, 粒子の位置に変化が起こり, その結果として電子密度に変動が生じる. そこで, この電子密度の変化に伴って変化する格子点上の電流密度を求める. 次にこの電流密度によって生じる電磁界成分を求める. この電磁界成分により電子が加速度を得て, その速度および位置が変化する. そして再び, 電子密度に変化が生じる. この過程を繰り返すことにより電磁界および電子の運動の時間的変化を追跡することができる. (図4参照)

まず, 格子上の電流密度 J_zは, 次式で与えられる.

$$J_z = -\sum_i q_i \frac{u_{zi}}{\gamma_i} S(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) + J_{ion} \tag{8}$$

但し,

$$u_{zi} = \gamma_i v_{zi} \tag{9}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_{zi}}{c})^2}} \tag{10}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N; n = 0, 1, 2, \cdots)$$

である. 関数 $S(r)$ は超粒子の広がりを表す形状関数であり, 本論文では2次のスプライン関数を用いる.

また, 電磁界成分はマクスウェルの方程式 (1) を空間的および時間的に離散化した差分方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{B_x^{n+\frac{1}{2}}(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - B_x^{n-\frac{1}{2}}(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} \\
&= -\frac{E_z^n(j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\
&\quad + \frac{E_y^n(j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \\
&\frac{E_y^{n+1}(j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} \\
&= \frac{c^2}{\varepsilon_r} \frac{B_x^{n+\frac{1}{2}}(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - B_x^{n+\frac{1}{2}}(j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \\
&\frac{E_z^{n+1}(j, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} \\
&= -\frac{c^2}{\varepsilon_r} \frac{B_x^{n+\frac{1}{2}}(j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - B_x^{n+\frac{1}{2}}(j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \\
&\quad - \frac{J_z^{n+\frac{1}{2}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$(j=0,1,2,\cdots,NGY-1;k=0,1,2,\cdots,NGZ;n=0,1,2,\cdots)$$

より求める. ここで, Δt は離散時間間隔で t 秒後の時刻を $n\Delta t$ で表す. 但し, 数値安定性のために Δy, ΔzおよびΔt は次のクーラン条件

$$c\cdot\Delta t<\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}}} \tag{12}$$

および,

$$\omega\cdot\Delta t\ll 1 \tag{13}$$

を満たさなければならない. また,$E_z^n(j,k)$ なる記号は$n\Delta t$ 秒後の格子点 (j,k) における電界の z方向成分を示している.

次に, 粒子の速度は, 電子に対する相対論的運動方程式 (4) を離散化した差分方程式

$$\frac{u_{zi}^{n+\frac{1}{2}}-u_{zi}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=-\frac{e}{m_0}E_{zi}^n \tag{14}$$

$$(i=1,2,\cdots,N;n=0,1,2,\cdots)$$

から得られる. ここで E_{zi}は格子点から補間によって得られたi番目の粒子の位置における電界の値を示している. 粒子の移動は式 (5) を離散化した

$$\frac{z_i^{n+1}-z_i^n}{\Delta t}=\frac{u_{zi}^{n+\frac{1}{2}}}{\gamma_i^{n+\frac{1}{2}}} \tag{15}$$

$$(i=1,2,\cdots,N;n=0,1,2,\cdots)$$

により与えられる.

また, 誘電体表面および導体表面は格子面に一致するものとする. このとき誘電体表面上における電磁界成分は式 (12) においてϵ_rを $(\epsilon_r+1)/2$ に置き換えることにより求められる.

4 誘電体グレーティングを用いたチェレンコフ・レーザの解析

本章では, 誘電体グレーティングを用いたチェレンコフ・レーザの解析に前章において説明した FDTD 法を適用し, 電子ビームの非線形性をも含めた特性を解析する. また, 誘電体グレーティングのスロットの深さおよび幅を変えた場合の特性の変化を示し, 等価的に, 一定の厚さの誘電体を用いた通常のチェレンコフ・レーザにおける装荷誘電体の誘電率を変えるのと同じ効果が得られ, これを効率改善に利用できることを明らかにする.

まず, 本研究の解析に用いたパラメータの値を表1に示す.

最初に, x 方向に単位長さ当たりの増大波の電力 P の時間変化の様子を図5に示す. 増大波は, 初め線形近似が成り立つ領域では指数関数的に増大し, やがて非線形性が強まり飽和にいたる様子がわかる.

増大波が飽和に達するまでの時間は $t_{sat} = 1.773/c$ (秒) であることがわかった. 従って, その時間で波が進んだ距離を結合長とすると, 結合長は $1.5m$ であることがわかる. 但し, この結合長は電磁波の電力の初期値によって異なることに注意しなければならない.

次に, 電子ビームの平均速度の時間変化の様子を図6に示す. 図5と図6とを比較すると, 電磁波の電力が増大するにつれて電子ビームの平均速度が減少していくことがわかる. このことから電子ビームの運動エネルギーの減少分が増大波の電磁界のエネルギーに移っていることがわかる. このときの, 電子ビームから電磁波へのエネルギー変換効率の時間変化の様子を図7に示す. 最大値は3.7%であることがわかる.

表1　シミュレーションに使用したパラメータの値

モデルについて		
平行平板の間隔 g	2.0	(mm)
誘電体と電子ビームの間隔 $b-a$	0.5	(mm)
誘電体の厚さ a	0.5	(mm)
比誘電率 ε_r	2.12	
グレーティングの周期 Λ	0.25	(mm)
グレーティングのスロットの深さ d	0.25	(mm)
グレーティングのスロットの幅 w	0.125	(mm)
ビームについて		
電子ビームの厚さ $f-b$	0.125	(mm)
電子ビームのドリフト速度の初期値 β_0	0.872	
電子のプラズマ周波数 $\omega_p/2\pi$	955	(MHz)
電磁波について		
周波数 $\omega/2\pi$	130.5	(GHz)
管内波長 λ_g (= システム長 L)	2.0	(mm)
粒子シミュレーションについて		
y方向格子数 NGY	128	
z方向格子数 NGZ	128	
格子間隔 Δy (=Δz)	0.0156	(mm)
1ステップの時間間隔 Δt	$1.105 \times 10^{-5}/c$	(s)
粒子の個数 N	1024	(個)

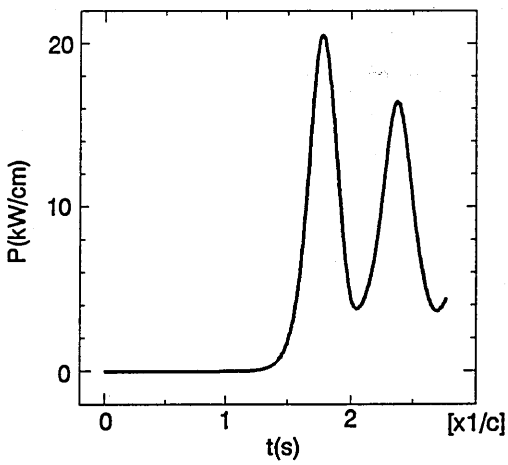


図5 電力の時間的変化

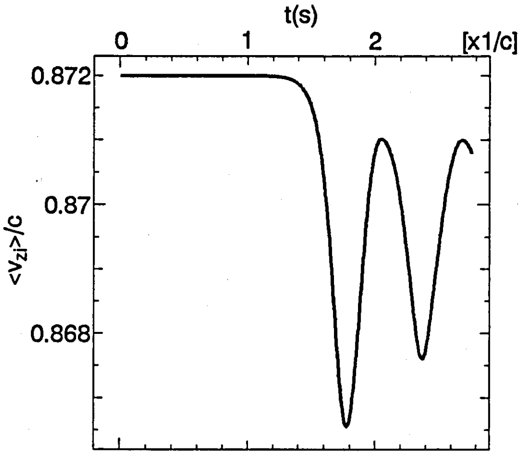


図6 電子ビームの平均速度の時間的変化

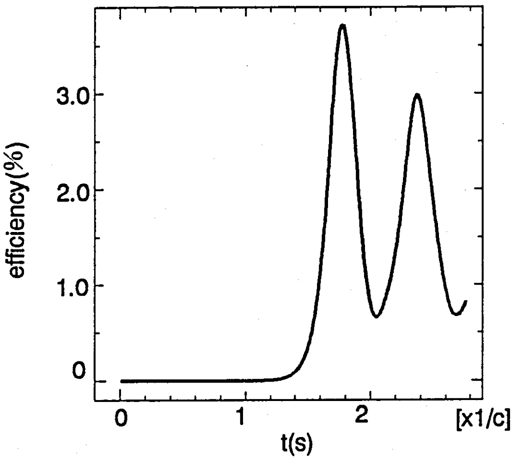


図7 エネルギー変換効率の時間的変化

また, 横軸に粒子の位置 zをとり, 縦軸に個々の粒子の速度 v_zをとった位相空間図を図8に, 横軸に粒子の速度をとり, 縦軸に粒子密度をとった速度分布図を図9に示す. 初め小さな正弦的振動成分をもっていた電子が次第に大きな振動成分をもつようになり, やがて, 線形性が崩れていく様子がわかる. 線形性が崩れるのは電子が電磁波の電界に捕捉されるからである. 大部分の電子が電界に捕捉され, 電子集団の運動エネルギーが最小となる時点で電磁波の振幅は最大となり飽和に達する. それ以後は電磁波の振幅は飽和値のまわりで増減を繰り返す.

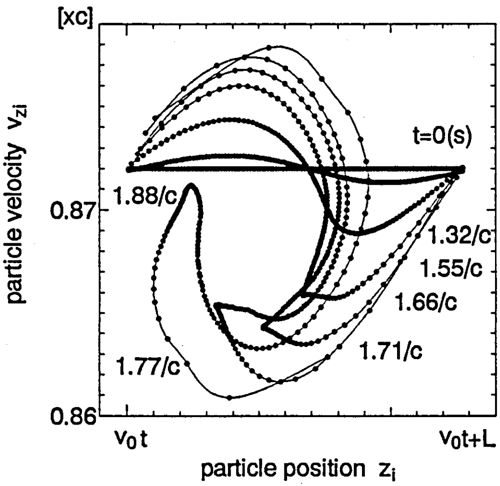


図8 位相空間における粒子の集群

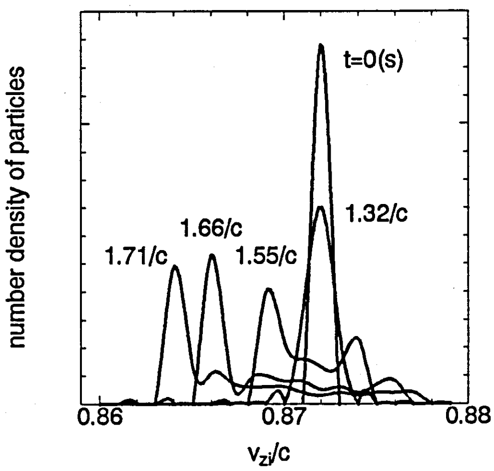


図9 粒子の速度分布

次に, 誘電体グレーティングを用いたチェレンコフ・レーザにおいて, 同じ加速電圧の電子ビームを使い, 誘電体グレーティングのスロットの深さおよび幅を変えた場合の特性の変化を示し, 等価的に, 一定の厚さの誘電体を用いる通常のチェレンコフ・レーザにおける装荷誘電体の誘電率を変えるのと同じ効果が得られることを明らかにする.

まず, 誘電体グレーティングのスロットの深さを変えた場合, およびスロットの幅を変えた場合の電磁波の電力の時間変化の様子を図10, および図11に示す. スロットの深さを深くするほど, あるいは, スロットの幅を広くするほど, 得られる電磁波の電力は小さくなるが, より高い周波数の電磁波が得られていることがわかる.

また, 一定の厚さの誘電体を用いる通常のチェレンコフ・レーザにおける装荷誘電体の誘電率を変えた場合の電力の時間変化の様子を図12に示す. 誘電率が小さくなるほど, 得られる電力は小さくなるが, より高い周波数の電磁波が得られていることがわかる.

また, 誘電体グレーティングのスロットの深さを変えた場合, およびスロットの幅を変えた場合と, 誘電体グレーティングを用いていない通常のチェレンコフ・レーザにおける装荷誘電体の誘電率を変えた場合を比較するために, 横軸に周波数, 縦軸に飽和時における電磁波の電力をとったグラフを図13および図14に示す. どちらの場合にも, ほぼ同じ特性が得られていることから, チェレンコフ・レーザにおいて, 誘電体グレーティングを用い, そのスロットの深さを深くすること, あるいは, そのスロットの幅を広くすることは, 一定の厚さの誘電体を用いる場合における装荷誘電体の誘電率を小さくするのと等価的であることがわかった. すなわち, チェレンコフ・レーザにおいて, 誘電体グレーティングを用い, そのスロットの深さおよび幅を変えることにより, 等価的に一定の厚さの誘電体を用いる通常のチェレンコフ・レーザの装荷誘電体の誘電率を変化させるのと同じ効果が得られることがわかった. なお, 誘電体グレーティングを用いる場合の特性は, 誘電体グレーティング部分と真空部分の面積比で平均をとった誘電率をもつ, 一定の厚さの誘電体を用いた場合の特性と等価になることがわかった.

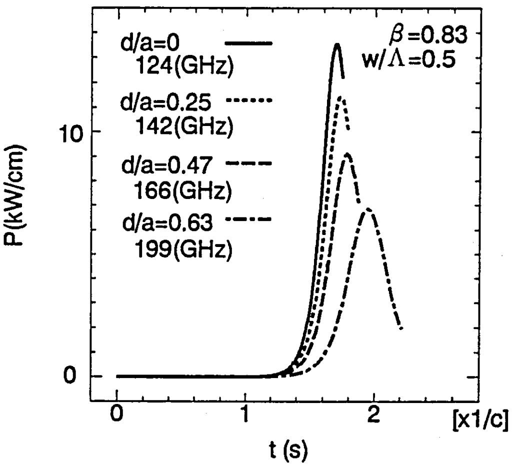


図10 スロット深さを変えた時の電力の時間的変化

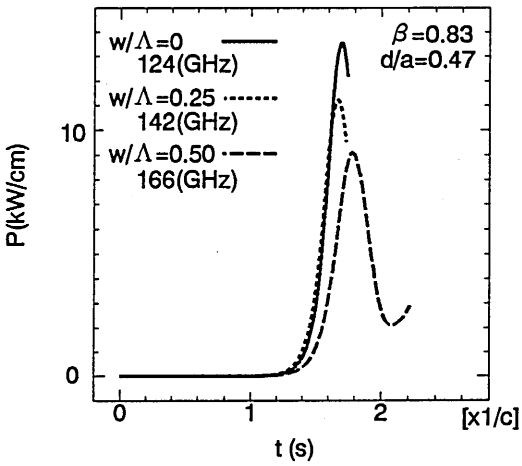


図11 スロット幅を変えた時の電力の時間的変化

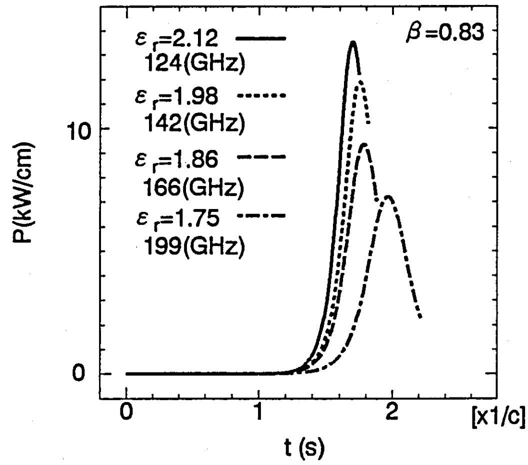


図12 誘電率を変えた時の電力の時間的変化

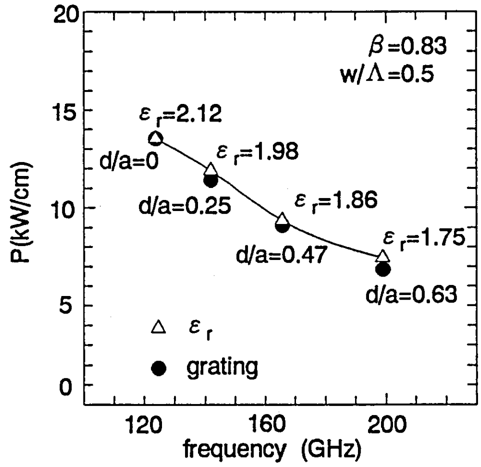


図 13 スロットの深さと誘電率を変えた時の周波数と飽和時における電力の関係

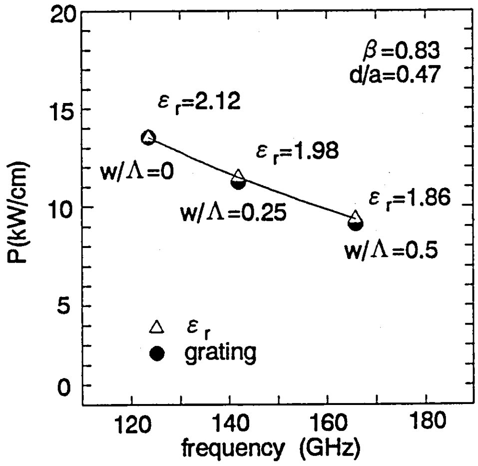


図 14 スロットの幅と誘電率を変えた時の周波数と飽和時における電力の関係

5 むすび

本論文では, 誘電体グレーティングを装荷した平行平板導波路と無限大の大きさの静磁界によって集束された平板状の相対論的電子ビームから構成されるチェレンコフ・レーザのモデルを考え, 粒子シミュレーションを用いてその非線形特性を詳しく調べた.

まず, 無限大の静磁界を印加した相対論的電子ビーム中における電磁界および電子の運動を記述するための基礎方程式を示した. 次に, 解析の手法である粒子シミュレーションと FDTD 法について述べた. この手法においては, 電子ビームは超粒子を用いて表され, 電磁界成分は空間内にもうけられた格子上において求められる. また, 電磁界および電子の運動を記述する基礎方程式は離散化を行い差分方程式で表される.

シミュレーションを行った結果, 誘電体グレーティングを用いたチェレンコフ・レーザは通常のチェレンコフ・レーザの場合と同様に, 電磁波は初め指数関数的に増大していくが, やがて粒子が電界に捕捉されるようになり電磁波の電力が飽和してしまう様子が示された. また, 誘電体グレーティングのスロットの深さおよび幅を変えることにより, 等価的に一定の厚さの誘電体を用いる通常のチェレンコフ・レーザにおける誘電体の誘電率を変えるのと同じ効果が得られ, これを効率改善に利用できることを明らかにした.

参考文献

[1] Walsh J.E., Marshall T.C. and Schlesinger S.P.: Generation of coherent Cerenkov radiation with an intense relativistic electron beam", Phys. Fluids, 20, 4, pp.709-710(April 1977).

[2] Felch K.L., Busby K.O., Layman R.W., Kapilow D. and Walsh J.E.:"Cerenkov radiation in dielectric lined waveguides", Appl. Phys. Lett., 38, 8, pp.601-603(Feb. 1981).

[3] Kimura W.D., Wang D.Y., Piestrup M.A., Fauchet A.M., Edighoffer J.A. and Pantell R.H.: "The stimulated Cerenkov interaction and its applications", IEEE J. Quantum Electron., QE-18, 2, pp.239-245(Feb. 1982).

[4] Garate E.P., Walsh J.E., Shaughnessy C., Johnson B. and Moustaizis S.: "Cherenkov free electron laser operation from 375 to 1000"m", Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, A259, pp.125-127(1987).

[5] Fisch E.E. and Walsh J.E.: "Operation of the sapphire Cerenkov laser", Appl. Phys. Lett., 60, 16, pp.1298-1300(March 1992).

[6] Shoucri M.: "The excitation of microwaves by a relativistic electron beams in a dielectric-lined waveguide", Phys. Fluids, 26, 8, pp.2271-2275(April 1983).

[7] Tripathi V.K.:"Excitation of electromagnetic waves by an axial electron beam in a slow wave structure", J. Appl. Phys., 56, 7, pp.1953-1958(Oct. 1984).

[8] 田中　俊幸, 安元　清俊:"円形導波管内を伝搬する相対論的電子ビームによるチェレンコフ放射", 信学論 (C), J70-C, 1, pp.40-48(1987-01).

[9] Garate E.P., Shaughnessy C.H. and Walsh J.E.: "High-gain Cerenkov free-electron laser at far infrared wavelengths", IEEE J. Quantum Electron., QE-23, 9, pp.1627-1632(Sept. 1987).

[10] Walsh J.E. and Murphy J.B.: "Tunable Cerenkov lasers", IEEE J.Quantum Electron., QE-18, 8, pp.1259-1264(Aug. 1982).

[11] Shiozawa T. and Kondo H.: "Mode analysis of an open-boundary Cerenkov laser in the collective regime", IEEE J. Quantum Electron., QE-23, 9, pp.1633-1641 (Sept. 1987).

[12] 石堂　能成，茨木　晋，塩沢　俊之："非線形誘電体導波路を用いたチェレンコフ・レーザの理論解析"，信学論 (C-I)，J72-C-I, 3, pp.152-159 (1989-03).

[13] Shibuya Y. and Shiozawa T. : "Characteristics of an open-boundary Cerenkov laser using a magnetically-confined relativistic electron beam", Trans. IEICE Japan, E72, 7, pp.828-833(July 1989).

[14] 堀之内　克彦，塩沢　俊之："有限静磁界を印加した開放型チェレンコフ・レーザの特性"，信学論 (C-I), J74-C-I, 7, pp.245-254(1991-07).

[15] 堀之内　克彦，塩沢　俊之："開放型チェレンコフ・レーザの動的特性の解析"，信学論 (C-I)，J76-C-I, 9, pp.331-336(1993-10).

[16] 沖田宗史，田中俊幸，田中和雅，安元清俊："誘電体回折格子を利用した相対論的電子ビームによる電磁放射の数値解析"，信学論 (C-I)，J75-C-I，8，pp.515-522(1992-08).

[17] 塩沢　俊之，宇都宮　英治，上田　哲也："カー媒質装荷によるチェレンコフ・レーザの特性改善"，信学論 (C-I)，J77-C-I, 2, pp.41-47(1994-02).

[18] Shiozawa T., Sato T., and Horinouchi K.: "Improved characteristic of a Cherenkov laser loaded with a Kerr-like medium", Appl. Phys. Lett., 64, 13, pp.1607- 1609 (March28,1994).

[19] Shiozawa T., Mikawa M.: "Efficiency enhancement in a dielectric-loaded Raman-type free-electron laser", IEEE J. Quantum Electron., QE-30, 11, pp.2676- 2681 (Nov. 1994).

[20] 堀之内克彦，三田雅樹，高橋博之，塩沢俊之: 粒子シミュレーションによるチェレンコフ・レーザの特性解析"，信学論 (C-I),J78-C-1,1, pp.1-8(Jan 1995).

[21] Birdsall C.K. and Langdon A.B.: "PLASMA PHYSICS VIA COMPUTER SIMULATION", McGrow-Hill(1985).

[22] 田中　基彦，西川　恭治："高温プラズマの物理学"，１２章，丸善 (1991).

[23] Yee K.S. :"Numerical solution of initial boundary value probrems involving Maxwell's equations in isotropic media", IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-14,3,pp.302-307(May 1966).

[24] 熊谷　信昭（編著）："電磁理論特論"，第４章，コロナ社 (1988).

輻射科学研究会資料
RS94-21

回転対称な断面構造をもつ分布結合系の解析

山口　孜
近畿大学　理工学部

1995年3月6日

於　(株)村田製作所

回転対称な断面構造をもつ分布結合系の解析

1 はじめに

多数本の導波路を並行して配置するような構造をもつ分布結合系は、方向性結合器など各種の回路素子の基本構成要素として興味深い。特に誘電体導波路を用いた光回路の分野では、今後その応用範囲はさらに拡がると思われる。

このような結合系では、同種の導波路がなんらかの対称性をもって配置されることが期待される。本報告では、横断面の構造が周方向に一定角度回転しても変化しないような、いわゆる回転対称性をもつ分布結合系について、モード結合理論を用いた一般的な解析手法を示す。また、将来、回路素子を設計する場合に役立つように、伝送特性を表す諸量をできる限り数式として表現できるよう試みる。

このような結合系の一般的特徴を知る目的で、まず、一つの導波路に一つのモードのみが伝搬するような簡単なモデルについて検討する。系の対称性を利用した解析手法を示し、結合系の正規モードの特徴を調べる。この解析からも明らかになるが、導波路自体が回転対称な断面構造を持つ場合、そこには一般に2重の縮退モードが存在する。そこで、一般の場合として、個々の導波路が縮退モードを持つ場合、特に、誘電体円柱線路で基本モードを伝送する場合について検討する。

このようなモデルについては、マルチコアファイバーの解析に関連して、やはりモード結合理論にもとづく解析が報告されている[1]。そこでは、縮退した直線偏波モードを用いて結合方程式を記述し、偏波方向が同じ方向を向くモード間の 結合係数がすべて等しくみなせる場合が解析されている。本報告では、縮退モードとして正、負の二つの円偏波モードを用いる。これにより、結合方程式を見通し良く表現でき、また、偏波の方向に依存した結合係数の微小な相違も簡単に解析に含めることが可能となる。

さらに、伝送軸方向に対して、系がゆるやかなねじれを持つような場合についても検討する。このような系では、伝送モードの縮退が解け、興味ある伝送特性が見られることが期待される。

以上の解析の適用例として、正三角形の頂点、および重心の位置に誘電体円柱線路が位置するような結合系をモデルとして、いくつかの数値例を示す。

2 結合方程式とその解

以下では、一般に n 個のモードが結合する分布結合系の問題を、結合方程式

$$\frac{d}{dz}\mathrm{a} = -j\mathrm{C}\mathrm{a} \tag{1}$$

を用いて解析する。取り扱う系は、すべて、無損失、可逆と仮定する。a は各モードの複素振幅を要素とする n 次の列ベクトルである。係数行列 C は、結合行列と呼ばれ、対角要素は各モードの位相定数に、非対角要素はモード間の結合係数に対応する。系が無損失の場合、 C はエルミート行列となり、実対称行列として表現することも可能である。

いま、結合行列 C が適当な相似変換により、次式のように対角行列 Λ に変換されるなら、

$$\mathrm{C} = \mathrm{T}\Lambda\mathrm{T}^{-1} \tag{2}$$

式 (1) の解は以下のようになる。

$$\mathrm{a}(z) = \mathrm{T}e^{-j\Lambda z}\mathrm{T}^{-1}\mathrm{a}(0) \tag{3}$$

ここで、$^{-1}$は逆行列を表す。また、a(0) は系の入射端 ($z = 0$) での初期条件を表す。行列 T, Λ は、C の固有値問題を解くことから求められる。すなわち、Λ の要素 λ_i は C の固有値であり、固有ベクトルを e_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) とすると、

$$\mathrm{T} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \cdots, \mathrm{e}_n) \tag{4}$$

で与えられる。λ_i は結合系で新たに形成された正規モードの位相定数を表し、T は結合がない場合のモード振幅との間の変換を表す。

3 回転対称な断面構造をもつ結合系の一般的特徴

中心軸のまわりに一定角度 ($2\pi/n$ [rad]) 回転させても系の横断面構造が変わらない、回転対称な結合系を考える。以下では n を回転対称の次数と呼ぶことにする。この節では、各導波路には単一のモードのみが伝搬するものと仮定する。

図 1(a) のように、回転の中心に導波路がない場合、結合行列 C_R は系の対称性から次式のように表される。

$$\mathrm{C}_R = \begin{pmatrix} \beta & c_1 & c_2 & \cdots & c_1 \\ c_1 & \beta & c_1 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & & \cdots & \beta \end{pmatrix} \tag{5}$$

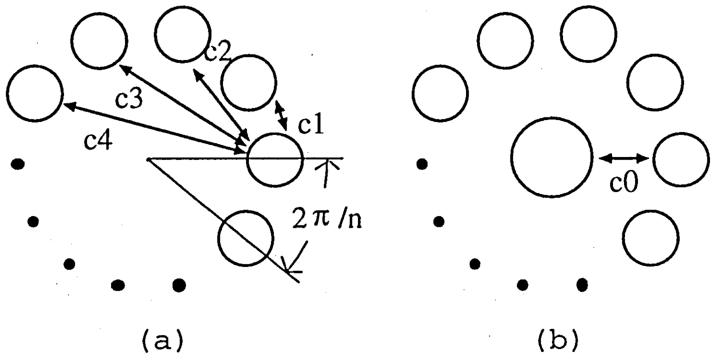


図 1: 回転対称な構造をもつ分布結合系

ここで β は各モードの位相定数を表す。また、c_k $(k=1,2,\cdots,[n/2])$ [1] は $(k-1)$ 個おいて隣り合うモード間の結合係数を表している。行列 C_R は、巡回行列 R

$$\mathrm{R}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \\ 1 & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

を用いて

$$\mathrm{C}_R=\beta 1_n+c_1\mathrm{R}+c_2\mathrm{R}^2+\cdots+c_1\mathrm{R}^{n-1} \tag{7}$$

と表現できる。ここで 1_nは n 次の単位行列を表す。巡回行列 R が

$$\mathrm{R}=\mathrm{T}_R\Omega\mathrm{T}_R^{-1} \tag{8}$$

$$\Omega=\mathrm{diag}(1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}) \tag{9}$$

$$\mathrm{T}_R=(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\cdots,\mathrm{e}_n) \tag{10}$$

$$\mathrm{e}_k=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\omega^{k-1},\omega^{2(k-1)},\cdots,\omega^{(n-1)(k-1)})^T \tag{11}$$

のように対角化できることから[2] 、C もやはり T_Rによって対角化できることが分かる。

$$\mathrm{C}_R=\mathrm{T}_R\Lambda\mathrm{T}_R^{-1} \tag{12}$$

[1][ ] はガウス記号を意味し、$[n/2]$ は $n/2$ を越えない最大の整数を表す。
[2]diag( ) は ( ) 内の要素を対角要素とする対角行列を表し、また、^{T} は行列やベクトルの転置を表す。

ここで、ω は 1 の n 乗根 $e^{j\frac{2\pi}{n}}$ をす。

式 (7) を利用して C_Rの固有値を以下のように計算できる。

n が偶数のとき

$$\lambda_i = \beta + (-1)^{i-1}c_p + \sum_{k=1}^{p-1} 2c_k \cos\frac{2\pi}{n}(i-1)k \tag{13}$$

n が奇数のとき

$$\lambda_i = \beta + \sum_{k=1}^{p} 2c_k \cos\frac{2\pi}{n}(i-1)k \tag{14}$$

ここで、

$$p = [n/2]$$

λ_1は最大の固有値である。式 (11) の e_1より、この固有値に対応する結合系の正規モード (1) は、結合がない場合のすべてのモード振幅が等振幅、同位相で加え合わさったモードであることが分かる。

また、

$$\lambda_i = \lambda_{n-(i-2)} \qquad (i = 2, 3, \cdots, [\frac{n+1}{2}]) \tag{15}$$

となることから、系には 2 重に縮退したモードが存在することが分かる。縮退モードとして、例えば、結合系正規モード (2),(n) について調べてみる。正規モード (2) の場の強度を伝送路上のある場所で眺めると、e_2から分かるように、各導波路を伝搬するモード振幅の最大強度が時間と共に時計回りに移動していくように見える。一方、正規モード (n) では、反時計方向に移動する。このように縮退モードは、場の強度が互いに逆方向に回転するモードとしてとらえることができる。[3]

次に、図 1(b) に示されるような、回転の中心にも導波路が位置する場合について考える。このモードの位相定数を β_0 、周上の各モードとの間の結合係数を c_0 とすれば、系の結合行列は

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc} \beta_0 & c_0 & \cdots & c_0 \\ \hline c_0 & & & \\ \vdots & & C_R & \\ c_0 & & & \end{array}\right) \tag{16}$$

となる。新たに行列 T_0を

[3]縮退モードの組に対応する固有ベクトルの表現は一意ではない。例えば、系の中心軸を含む面に対して、偶対称、奇対称の表現がある。

$$
\mathbf{T}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{T}_R & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{17}
$$

と定義すれば

$$
\mathbf{C} = \mathbf{T}_0 \left(\begin{array}{c|cccc} \beta_0 & \sqrt{n}c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \sqrt{n}c_0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \Lambda & \\ 0 & & & & \end{array}\right) \mathbf{T}_0^{-1} \tag{18}
$$

の関係を得る。これより、中心軸上の導波路を伝わるモードは図 1(a) の結合系の正規モード (1) とのみ結合し、新たに軸対称な正規モードを形作ることが分かる。式 (16) に現れる非対角項部分は、付録Aに示される方法で簡単に対角化できる。特に、

$$
\beta_0 = \lambda_1 \tag{19}
$$

が成立する場合には、いわゆる位相整合の条件が満たされ、これら二つのモード間に電力の完全な移行が生じる。すなわち、中心軸上の導波路に入射した電力は、適当な位置で、周上のすべての導波路に等しく分配される。

4　縮退モードを考慮した取り扱い

横断面の構造が回転対称な導波路には、一般に 2 重の縮退モードが存在する[2]。これは、前節の解析結果にも示されている。我々が取り扱う分布結合系では、周上に位置する導波路には回転対称性は要求されない。しかし中心軸上に位置する導波路は、系の持つ回転対称の次数と等しいか、それ以上の次数の対称性をもつ必要がある。系を構成する導波路としては、当然、同種のものが用いられるであろうこと、また、実際に結合に関与する伝送モードは位相定数が似通った値をとることを考慮して、以下では、個々の導波路が 2 重の縮退をもつ場合を考えることにする。

仮に図 1(a) の系で、導波路 (i) を伝搬する縮退モードの振幅を a_{i+}, a_{i-} として、振幅ベクトルを

$$
a' = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \cdots, \mathbf{a}_n^T)^T
$$

$$
\mathbf{a}_i = (a_{i+}, a_{i-})^T
$$

と与えてみることにする。このとき、結合行列は式 (5) の各要素を

$$\beta \to \beta \mathrm{1}_2\,,\quad c_i \to \mathrm{C}_i$$

のような2行2列のブロック行列で置き換えた形で表現できる。ここで、$\mathrm{1}_2$は2行2列の単位行列であり、また、C_iは2行2列のエルミート行列となる。行列の直積表現[3]を用いれば、式 (7) に対応する形として以下を得る。

$$C'_R = \beta \mathrm{1}_n \otimes \mathrm{1}_2 + \mathrm{R} \otimes \mathrm{C}_1 + \mathrm{R}^2 \otimes \mathrm{C}_2 + \cdots + \mathrm{R}^{n-1} \otimes \mathrm{C}_1^* \tag{20}$$

ここで、* は複素共役を表す。しかしながら、式 (20) をもとに前節と同様の手順でC'_Rが対角化できるのは、例えばC_1を除くすべてのC_iが零行列である場合とか、あるいは、すべてのC_iが同じ行列を用いて対角化できる場合のような、非常に限られた場合のみである。

改めて、振幅ベクトルを以下のように定める。

$$a = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_+ \\ \hline \mathrm{a}_- \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\mathrm{a}_+ = (a_{1+}, a_{2+}, \cdots, a_{n+})^T$$

$$\mathrm{a}_- = (a_{1-}, a_{2-}, \cdots, a_{n-})^T$$

このとき、結合行列は次式のようになる。

$$C = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C}_{Ra} & \mathrm{C}_{Rb} \\ \hline \mathrm{C}_{Rb}^* & \mathrm{C}_{Ra}^* \end{array}\right) \tag{22}$$

C_{Ra}、C_{Rb}は、式 (5) のC_Rと同じ特徴をもつ n 次の正方行列である。よって、T_Rを用いて各ブロック行列を対角化し、更に付録Aに示される相似変換を繰り返し適用し、Cを対角化することが出来る。回転中心に導波路がある場合には、その導波路を伝搬するモードの周方向の次数によって結合係数に違いが現れる。この問題は、次節の誘電体円柱線路を用いたばあいに含めて論じられる。

5　誘電体円柱線路からなる結合系

すべての導波路が誘電体円柱線路である場合を考える。仮に、縮退モードの周方向の次数が m であるとする。以下の議論では、2つの縮退モードを、横断面の場が時間と共に時計方向および反時計方向に回転するような、正、負の回転モードとして表現する。各モードは、位相が ϕ 変化すると、場がそれぞれの方向に ϕ/m 回転する。

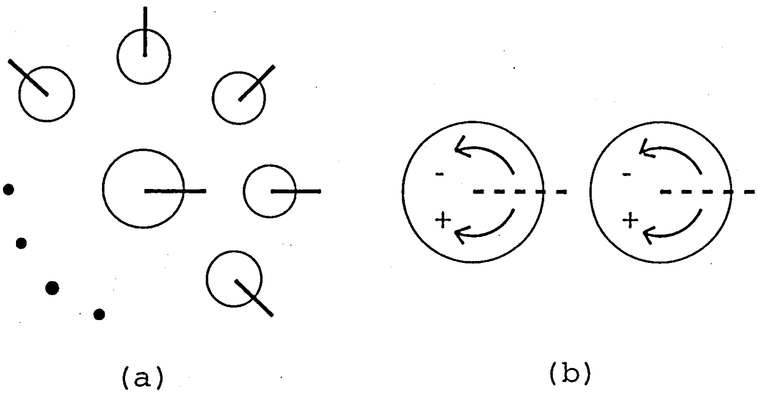


図 2: 回転対称な分布結合系と位相の基準方向

伝送モードをこのように選ぶことにより、導波路の位置関係による結合係数の違いを、モードの位相変化による結合係数の変化に置き換えて表現することが可能となる。

結合系の各導波路に対して、伝搬する正、負の回転モードの位相に関する基準方向（位相が零となる方向）を図 2(a) のように定める。図 2(b) に示されるような、基準方向と線路の並ぶ方向とが一致する時の結合係数をもとにして、結合系の各結合係数を表すことにする。結合係数に付された添字 a は同じ方向に回転するモード間の結合を表し、添字 b は互いに逆方向に回転するモード間の結合を表す。

使用する結合係数に対する基準方向と、結合系で定められた基準方向とのなす角度は、図 3 に示される。ここで、

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

である。結合系の各結合係数の値は、基準方向の回転に相当する位相変化を各モードに与えることから計算できる。付録Cの計算に従えば、式 (20) に使用されている C_kは次式のように計算される。

$$C_k = \begin{pmatrix} c_{ak}e^{+jmk\varphi} & c_{bk}e^{+jm\pi} \\ c_{bk}e^{-jm\pi} & c_{ak}e^{-jmk\varphi} \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$C_{0k} = \begin{pmatrix} c_{a0}e^{+jm_0(k-1)\varphi} & c_{b0}e^{+jm_0(k-1)\varphi} \\ c_{b0}e^{-jm_0(k-1)\varphi} & c_{a0}e^{-jm_0(k-1)\varphi} \end{pmatrix} \tag{24}$$

ここで、m は周上の導波路を伝搬するモードの周方向の次数を表す。また、C_{k0}は式 (16) の c_0 に対応する行列であり、m_0 は中心軸上の導波路を伝搬するモードの周方向の次数を

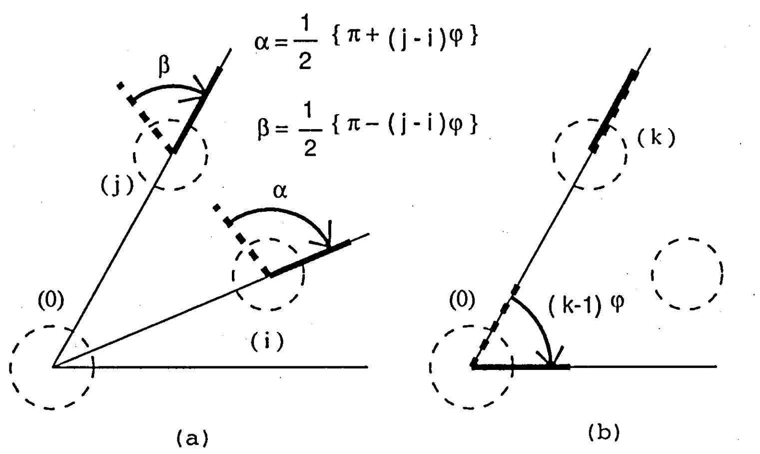


図 3: 導波路の相対位置と位相の基準方向との関係

表す。以下では、繁雑さを避ける目的で $m = m_0 = 1$ として解析を進める。これは、各導波路を基本モードが伝搬する場合に対応する。このとき、正、負の回転モードは、正、負の円偏波モードとなる。[4]

改めて

$$\mathrm{a}_{\pm} = (a_{0\pm}, a_{1\pm}, \cdots, a_{n\pm})^T \tag{25}$$

とおき、式 (21) のaに対応する結合行列Cを求めると次式を得る。

$$C = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C}_a & \mathrm{C}_b \\ \hline \mathrm{C}_b^* & \mathrm{C}_a^* \end{array}\right) \tag{26}$$

$$\mathrm{C}_a = \left(\begin{array}{c|c} \beta_0 & \sqrt{n} c_{a0} \mathrm{e}_n^{T*} \\ \hline \sqrt{n} c_{a0} \mathrm{e}_n & \mathrm{C}_{Ra} \end{array}\right) \tag{27}$$

$$\mathrm{C}_{Ra} = \begin{pmatrix} \beta & \omega c_{a1} & \omega^2 c_{a2} & \omega^3 c_{a3} & \cdots & \omega^{(n-1)} c_{a1} \\ \omega^{(n-1)} c_{a1} & \beta & \omega c_{a1} & \omega^2 c_{a2} & \cdots & \omega^{(n-2)} c_{a2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \omega c_{a1} & \omega^2 c_{a2} & \omega^3 c_{a3} & & \cdots & \beta \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$\mathrm{C}_b = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sqrt{n} c_{b0} \mathrm{e}_2^T \\ \hline \sqrt{n} c_{b0} \mathrm{e}_2 & \mathrm{C}_{Rb} \end{array}\right) \tag{29}$$

[4] 誘電体円柱線路の直線偏波モードと円偏波モードの関係、および、直線偏波モード間の結合係数と円偏波モード間の結合係数の関係は、付録Bにまとめて示す。

$$
\mathrm{C}_{Rb} = \begin{pmatrix} 0 & -c_{b1} & -c_{b2} & -c_{b3} & \cdots & -c_{b1} \\ -c_{b1} & 0 & -c_{b1} & -c_{b2} & \cdots & -c_{b2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -c_{b1} & -c_{b2} & -c_{b3} & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{30}
$$

式 (17) の T_0を用いて

$$
T = \left(\begin{array}{c:c} \mathrm{T}_0 & 0 \\ \hdashline 0 & \mathrm{T}_0^* \end{array}\right) \tag{31}
$$

を定義し、Cを相似変換すると以下を得る。

$$
C = T \left(\begin{array}{c:c} \mathrm{D}_a & \mathrm{D}_b \\ \hdashline \mathrm{D}_b & \mathrm{D}_a \end{array}\right) T^{-1} \tag{32}
$$

$$
\mathrm{D}_a = \left(\begin{array}{c:ccccc} \beta_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \sqrt{n}c_{a0} \\ \hdashline 0 & \lambda_{a1} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{a2} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{a3} & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \sqrt{n}c_{a0} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_{an} \end{array}\right) \tag{33}
$$

$$
\mathrm{D}_b = \left(\begin{array}{c:ccccc} 0 & 0 & \sqrt{n}c_{b0} & 0 & \cdot & 0 \\ \hdashline 0 & \lambda_{b1} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \sqrt{n}c_{b0} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{b2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \lambda_{b3} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda_{bn} & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right) \tag{34}
$$

λ_{ak} 、および、λ_{bk} は、式 (13),(14) の c_k を、それぞれ、c_{ak}、および、$-c_{bk}$ に、また、β を λ_{bk} の場合に 0 に置き換えることにより得られる。これらは、式 (15) と同様、重複した値をもつ。

式 (33),(34) からも分かるように、中心軸上の導波路を伝搬するモードは、そのモードのもつ周方向の次数と同じ次数の回転を示す 2 つのモード（e_2と e_nに係わるモード）と結合する。そのため、最終的にCを対角化するためには、以下の行列の固有値問題を解かねばならない。

$$
\begin{pmatrix} \beta_0 & \sqrt{n}c_{b0} & \sqrt{n}c_{a0} \\ \sqrt{n}c_{b0} & \lambda_{an} & \lambda_{bn} \\ \sqrt{n}c_{a0} & \lambda_{bn} & \lambda_{an} \end{pmatrix} \tag{35}
$$

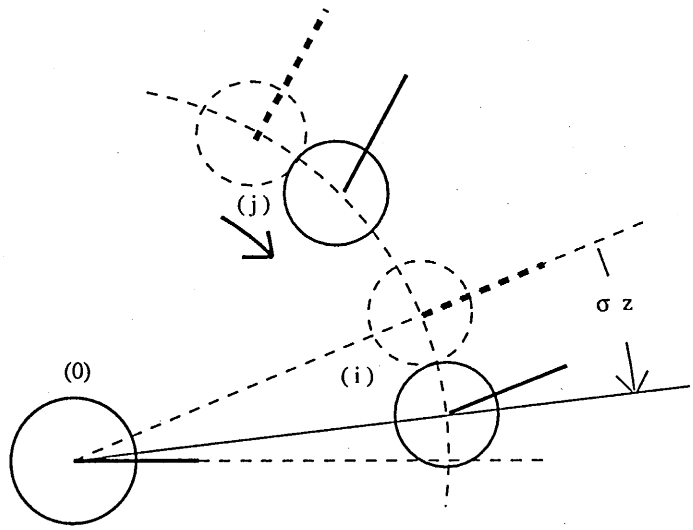


図 4: ねじれを持つ系における位相の基準方向の変化

この行列は対称行列であり、固有値、固有ベクトルを数値として求めることは簡単であるが、各要素を用いた式の形でそれらを表現することは困難である。式 (32) の他の非対角項の部分は、付録Aに示した2次の対称行列を対角化する方法で簡単に処理できる。

3つのモード間の結合を表す式 (35) の表現は、式 (32) の中で重複して2箇所に現れる。また、λ_{ak}, λ_{bk} に重複した値が存在することから、結合系にはやはり2重に縮退した正規モードが存在することが分かる。

6 ゆるやかなねじれを持つ結合系

前節で取り扱った結合系が、さらに、伝送軸の方向にゆるやかなねじれをもつ場合を考える。ねじれは充分ゆるやかであるとし、構造が伝送方向に一様でないことに起因する反射や放射損は無視できるものと考える。

円偏波モードの位相の基準方向のなす角度から結合係数を定める方法は、この場合にもそのまま適用できる。系の単位長さ当たりのねじれ角を σ [rad/m] とするなら、距離 z 隔たった系の横断面の間での位相の基準方向は図 4 に示されるような関係となる。これより結合係数を求めると、結果的に式 (23),(24) の C_k、C_{0k}の表現で、1行2列の項に $e^{-j2\sigma z}$ を、また、2行1列の項に $e^{+j2\sigma z}$ を、それぞれ乗じたものが得られる。

結合行列は z の関数となるが、例えばモード振幅を

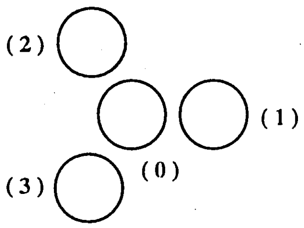


図 5: 三角形に配置された結合系

$$b_{i+} = a_{i+}e^{+j\sigma z} \tag{36}$$

$$b_{i-} = a_{i-}e^{-j\sigma z} \tag{37}$$

のように置き換えれば、結合行列を定数を要素とする形に変換できる。すなわち、式 (26) の表現で、1 行 1 列のブロック要素 C_aの対角要素に σ を加え、2 行 2 列のブロック要素 C_a^*の対角要素から σ を減じた行列が得られる。[5] このことは、ねじれによって、正、負の円偏波モードの縮退が解けることを意味する。変換された行列は、前節とまったく同じ手順で対角化できる。最終的な解は、この表現を利用した解の形に式 (36),(37) に対応する変換行列

$$P(\sigma z) = \left(\begin{array}{c|c} e^{-j\sigma z}\mathbf{1}_{n+1} & 0 \\ \hline 0 & e^{+j\sigma z}\mathbf{1}_{n+1} \end{array}\right) \tag{38}$$

を左側から乗じて求められる。

7　数値計算例

図 5 に示すような、正三角形の頂点、および、重心に誘電体円柱線路が位置するような結合系にたいして、いくつかの数値例を示す。各線路には図に示されるような番号を付けて区別する。中心軸上、あるいは、周上の一つの導波路の縮退モードの内の一方を励振し、その伝送特性を調べるが、ここでは、系の特性をたやすく把握できるように、直線偏波モードを用いる。(円偏波モードとの変換については付録Bにまとめられている。) 図中の P_iは線路 (i) を伝わる電力を表すが、特に断わらない限り二つの縮退モードの電力を加えたものである。区別する必要がある場合には、x 偏波、y 偏波の電力の意味で、P_{ix}、P_{iy}と記す。

[5]厳密には、結合系の伝送軸と周上の導波路の伝送軸とは異なるので、位相定数βを補正する必要がある。ここでは、中心軸上を伝搬するモードの位相定数としてβと異なる表現を用いており、また、ねじれが充分ゆるやかと考えているので、敢えて補正は行わない。

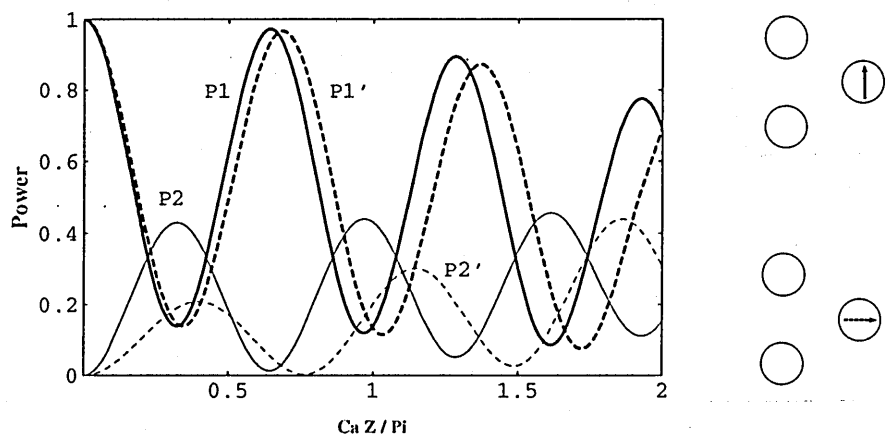


図 6: 3 本の誘電体円柱線路からなる結合系の電力変化 (実線: x 偏波を励振、破線: y 偏波を励振)

各線路に対する x、および、y 方向は、図 2 で定めた位相の基準方向に対して直交する方向が x、平行な方向が y である。

結合係数として以下の値を用いた。

$$c_b = 0.1c_a, \quad c_{a0} = 2.0c_a, \quad c_{b0} = 0.1c_{a0}$$

c_bや c_{b0}の値が実際のものよりかなり大きく設定されているが、これは、入射波の偏波方向による伝送特性の違いを明瞭に示すためである。また、中心部分の線路は周上の線路と同一のものとし、$\beta_0 = \beta$とおいた。

図 6 は、中心軸上に線路が無いとき、線路 (1) に x 偏波、あるいは、y 偏波を入射させた場合、各線路を伝搬する波の電力と伝送距離の関係を示したものである。実線が x 偏波を、破線が y 偏波を入射させた場合を表す。y 偏波を入射させた場合の方が電力の移り変わりの周期が長くなっている。線路 (1) には入射した偏波と偏波方向が直交するモードは生じない。図には示されていないが、線路 (2)、および、(3) を伝搬する二つの直線偏波モードは位相に差があり、また、電力が変化する周期にも違いが見られる。

図 7,8 は、中心軸上に線路がある場合について、その線路に x、あるいは、y 偏波モードを入射させた場合の結果である。 線路 (0) の電力の変化には入射波の偏波方向による違いは見られないが、周上の線路の電力の配分比はかなり異なる。図 9,10 は、同様の構造で、線路 (1) を 2 種類の直線偏波モードで励振した場合の計算結果である。

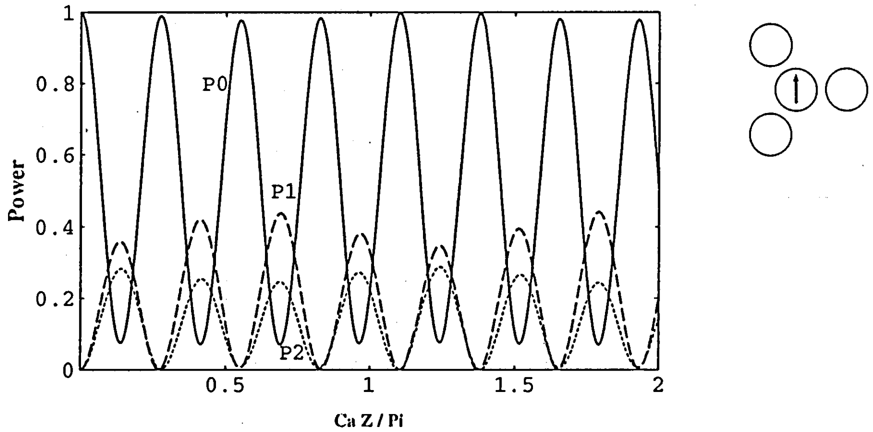


図 7: 中心軸上の線路を励振した場合の伝送電力の変化 (x 偏波を励振した場合)

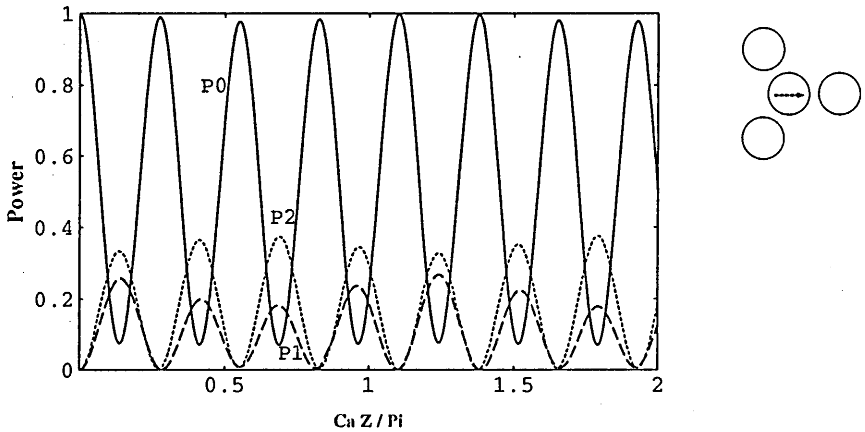


図 8: 中心軸上の線路を励振した場合の伝送電力の変化 (y 偏波を励振した場合)

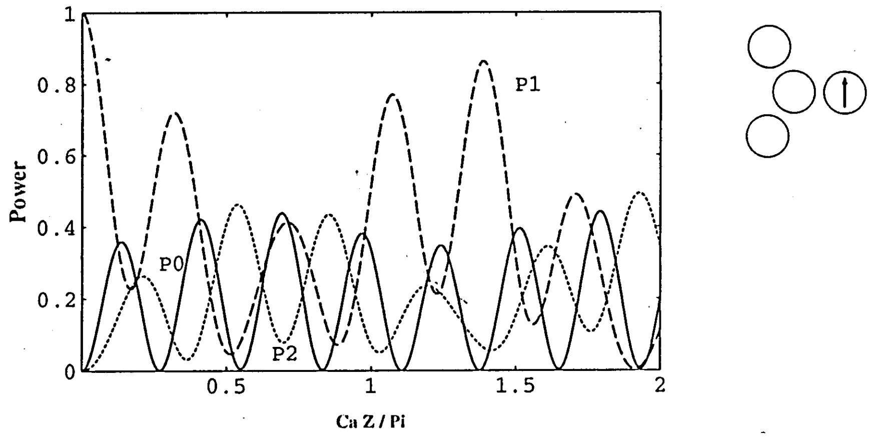


図 9: 周上の線路 (1) を励振した場合の伝送電力の変化 (x 偏波を励振した場合)

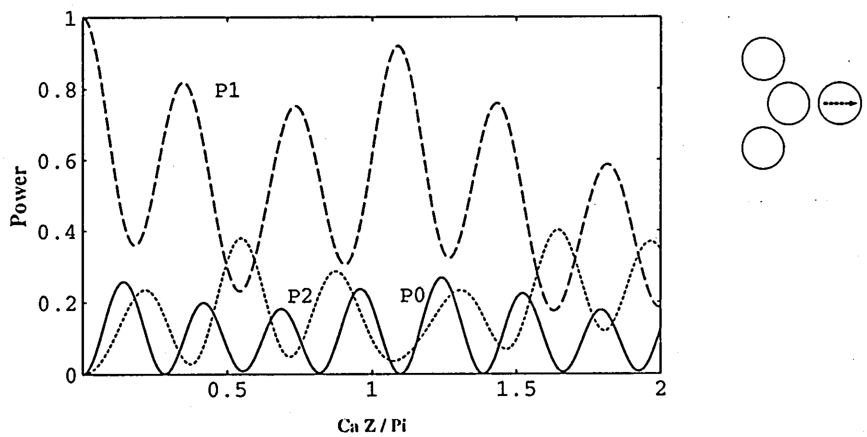
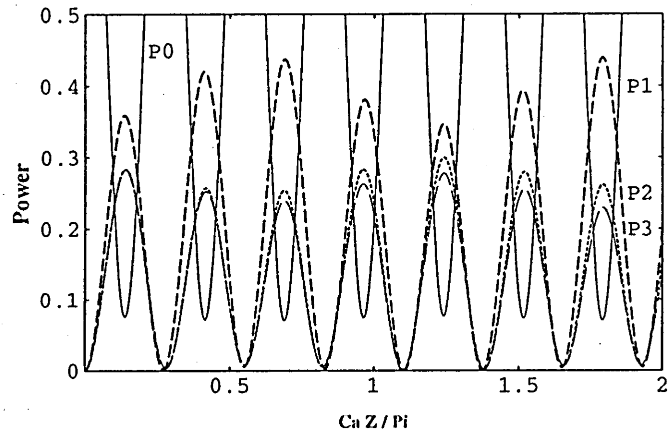


図 10: 周上の線路 (1) を励振した場合の伝送電力の変化 (y 偏波を励振した場合)



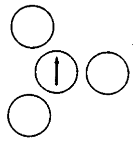


図 11: ねじれをもつ結合系での伝送電力の変化 (中心軸上の線路を励振)

図 6 から図 10 迄の各グラフには P_3は書き込まれていない。これは、対称性から $P_2 = P_3$ となるためである。また、やはり対称性から、中心軸上の線路には入射波と偏波方向が直交するモードは現れていない。

図 11 から図 14 のグラフには、系が伝送軸方向にゆるやかなねじれをもつ場合の計算結果が示されている。 ここでは、単位長さ当たりのねじれ角を

$$\sigma = 0.02c_a$$

として、中心軸上の線路に x 偏波を入射させた。ねじれのため、線路 (2) と (3) の電力の分配比に違いが生じている。また、図 12 に示されるように、線路 (0) と線路 (1) に、微小ではあるが入射波と偏波方向が直交する偏波のモードが現れている。図 13、14 は、線路 (0) を伝搬する波を楕円偏波としてとらえ、楕円偏波の 2 つのパラメタと伝送距離の関係を示したものである。

図 13 には、楕円の長軸と x 軸とのなす角が、また、図 14 には、楕円の長軸と短軸の比を表す $\tan\chi$が示されている[4]。偏波方向が徐々に回転するとともに、直線偏波から正回転する楕円偏波に移行していることが分かる。

8 むすび

横断面の構造が回転対称であるような分布結合系についてモード結合理論をもとにした

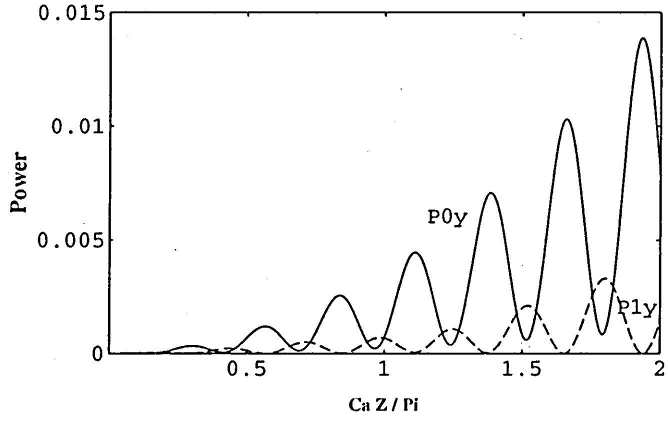


図 12: 入射波の偏波方向と直交する偏波モードの電力変化

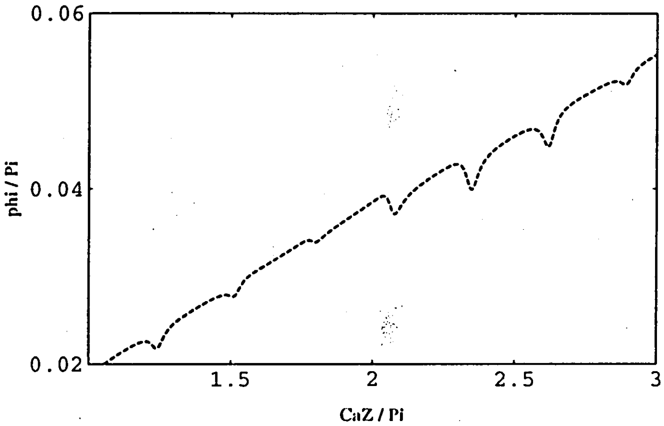


図 13: 楕円偏波の長軸と x 軸とのなす角度と伝送距離との関係

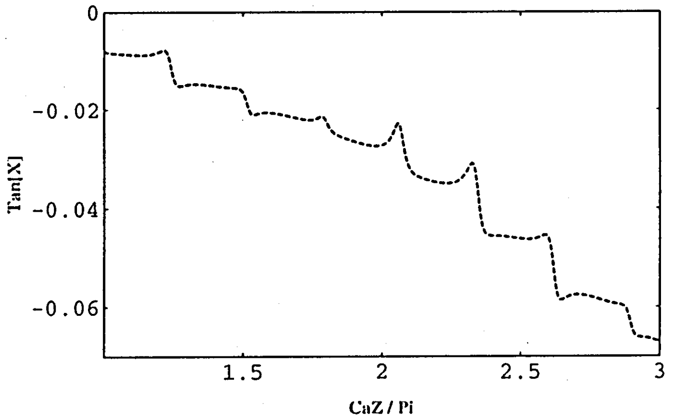


図 14: 楕円偏波の長軸と短軸の比と伝送距離との関係

解析手法を示した。特に、一般の場合として、各導波路が2重の縮退モードをもつ場合の取り扱いを詳しく検討した。その結果として、回転中心に導波路が存在しない場合は、結合方程式の解を解析的に求めることが可能であり、また、回転中心に導波路がある場合でも、たかだか3次の対称行列の固有値問題を解くことにより解を求めることができることが明らかとなった。

系が誘電体円柱線路のような軸対称な導波路からなる場合、縮退モードの表現として円偏波モードを用いれば見通しよく結合方程式を記述できることを示した。さらに、この手法を用いて、伝送軸の方向にゆるやかなねじれを持つ結合系の問題を簡単に取り扱えることを明らかにした。今後の問題としては、具体的な系に適用して特性解析を行うと共に、ここで取り扱ったような対称性をもつ系をもとに、新たな回路素子を構成できればと考えている。

[参考文献]

[1] N.Kishi and E.Yamashita, "A Simple Coupled-Mode Analysis Method for Multiple-Core Optical Fiber and Coupled Dielectric Waveguide Structures", IEEE Trans. MTT, vol.36, pp.1861-1868 (Dec. 1988)

[2] E.Yamashita, S.Ozeki and K.Atsuki, "Modal Analysis Method for Optical Fibers with Symmetrically Distributed Multiple Cores", IEEE J.Lightwave Technol., vol. LT-3, pp.341-346 (Apr. 1985)

[3] 児玉, 須田, " システム制御のためのマトリクス理論", 第1章, 計測自動制御学会 (昭53)

[4] M.Born and E.Wolf, "Principles of Optics",Capt.1,Pergamon Press (1970)

付録A　行列の対角化について

結合行列の非対角要素が、i 行 j 列、j 行 i 列以外すべて 0 の場合、すなわち、

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \beta_i & \cdots & c & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & c & \cdots & \beta_j & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

のような場合には、以下の T_{ij}を用いて C を対角化できる。(式 (2) の形式を参照)

$$\mathrm{T}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & \cdots & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & \cdots & \sin\theta & \cdots & -\cos\theta & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2c}{\beta_i - \beta_j}$$

よって、各行、あるいは列の非対角要素が 1 つを除いてすべて 0 であるような対称行列は、上記の T_{ij}による相似変換を繰り返し適用して対角行列に変換できる。

付録B　直線偏波モードと円偏波モードの関係

誘電体円柱線路の直線偏波モードの振幅を a_x、a_yとすると、円偏波モードの振幅 a_+、a_-との間の関係は以下で与えられる。

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ja_y)$$

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ja_y)$$

この関係を用いれば、それぞれの偏波モードで用いられる結合係数相互の関係式が導かれる。すなわち、

$$c_a = \frac{1}{2}(c_x + c_y)$$

$$c_b = \frac{1}{2}(c_x - c_y)$$

ここで、c_x、c_yは、x 方向に偏波した直線偏波モード間、および、y 方向に偏波した直線偏波モード間の結合係数を表す。一方、c_aは互いに同じ方向に回転する円偏波モード間の結合係数を、c_bは、互いに逆方向に回転する円偏波モード間の結合係数を表す。c_x、c_yは似通った値をとり、その結果、c_bは c_aに比べてかなり小さな値となる。

また、本論で求めた結合方程式の解を直線偏波モードのそれに変換するには、ユニタリ行列

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{n+1} & -j\mathbf{1}_{n+1} \\ \hline \mathbf{1}_{n+1} & +j\mathbf{1}_{n+1} \end{array}\right)$$

および、その逆行列を解の右、左からそれぞれ乗ずれば良い。

付録C　モード振幅の位相変化と結合係数の関係

振幅の位相変化は結合係数の位相を変化させる。結合方程式が

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix} = -j\begin{pmatrix} \beta_i & c_{ij} \\ c_{ij}^* & \beta_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix}$$

で与えられるとき

$$a_i' = a_i e^{j\psi_i}$$

$$a_j' = a_j e^{j\psi_j}$$

の変換によって定められる a_i'と a_j'との間の結合係数 c_{ij}'は

$$c_{ij}' = c_{ij} e^{j(\psi_i - \psi_j)}$$

と計算される。

RS 94-22

A NEW COMPUTATION METHOD IN RADIATION AND DIFFARCTION PROBLEMS

Eldar I.Veliev
Chukuruva University,Department of Electrical and Electronics Engeneering, 01330,Adana,Turkey

In this paper we propose a new computation method for the solution a different tipe of two-dimensional diffraction problems. Our method is the Numerical- Analytical methods which may be consedered as a combination of moment methods and so-called semi-inverstion methods[1-3].

The brief scheme of the semi-inversion technique is as follows. Let an initial boundary-value problem be posed in a from of operator equation

$$Lx = B \tag{1}$$

in corresponding space of the functions (this is the space l_2 isually).The principal (singular) part L_0 should be separated from L operator.Then the equation (1) can be rewritten in form

$$(L_0 + L_1)x = B \tag{2}$$

Futher L_0 operator can be analytically inverted, i.e. the explicit form of L_0^{-1} operator is formulated. By acting L_0^{-1} operator on (2) we get the next equation

$$(I+Q)x = f; \qquad Q \Rightarrow L_0^{-1}L_1, \qquad f \Rightarrow L_0^{-1}B \tag{3}$$

Where I is unit operator.

If the right basis set has been found, then the equations (1) and (2) can be represented in a form of ISLAE. As a rule, the ISLAE matrix elements corresponding with the equation (1) are of a slow convergency. This means the computing of ISLAE of a large order, i.e. considerable waste of computer time.

In contrast, the equation (3) is the Fredholm equation of the second kind. And in case when L_0 operator has been found correctly the matrix operator Q can become a quite contiuous one with the fast-decreasing matrix elements. This circumstance provides a fast convergency for the approximate solutions either. Thus for (1)L_0^{-1} plays part of the regularization operator. It is easy to see that the right definition of L_0 operator is the critical point in this approach because this procedure conditions on the effectiveness of the final result. In particular, any operator confroming to the special and limiting values of parameters characterizing the scattering object may be chosen as L_0 operator.

The subsequent paragraphs are dedicated to thr proposed scheme realization for a specific class of boundary-value diffraction problems.

1. Dual series and integral equations.

Agranovich [4] was the first who proposed the semi-inversion method in capasity of effective method solution of dual series equations (DSE) with the kernel in trigonometrical functions appearing on solving the problem of wave diffractin by a flat grating of strips.

Let turn our attention to finding the regularizator for the most simple form of dual series equations (DSE) and dual integral equations (DIE):

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n \gamma_n e^{in\theta\eta} = f_1(\eta), & |\eta| < 1 \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n e^{in\theta\eta} = 0, & |\eta| > 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(\alpha) k(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha\eta} d\alpha = f_2(\eta), & |\eta| < 1 \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(\alpha) e^{i\varepsilon\alpha\eta} d\alpha = 0, & |\eta| > 1 \end{cases} \tag{5}$$

Here $\{\rho_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ and $\rho(\alpha)$ unknowns are the Fourier coefficients for the functions conforming to the electromagnitic field component or the surface current density; h is normalized coordinate; θ and ε are the geometrical parameters of the scattering object; $\{f_j\}_{j=1}^{2}$ are the given continuous functions specified by the incident field. The given complex values $\{\gamma_{|n|}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ and $k(\alpha)$ may depend on wave-dimension of the object. Tables 1 and 2 list these parameters data corresponding to such problem of plane E-polarized wave

$$E^0 = e^{i(\alpha_0 kz + ky\sqrt{1-\alpha_0^2})}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \alpha = \cos\varphi_i \tag{6}$$

as scattering on the flat grating of strips, non-closed circular cylinder, flat strip, and for the problem of electrical dipole field excitation of circular waveguide cut respectively.

In particular, the only non-zero component of the electromagnetic field (for (b) problems see Table 1, for (c) see Table 2) can be put in the form [3, 5]

$$E_z = E_z^0 + \sum_{n=\infty}^{\infty} \rho_n \begin{Bmatrix} J_n(ka)H_n^{(1)}(kr), \\ J_n(kr)H_n^{(1)}(ka), \end{Bmatrix} e^{in\theta\eta} \begin{matrix} r > a \\ r < a \end{matrix} \tag{7}$$

$$E_z = E_z^0 + \frac{i}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(\alpha) k(\alpha) e^{i\varepsilon[\alpha\eta + \xi\sqrt{1-\alpha^2}]} d\alpha \qquad \xi > 0 \tag{8}$$

Here

$$\rho_n = \int\limits_{-1}^{1} \rho(\eta) e^{-in\theta\eta} d\eta; \qquad \rho(\alpha) = \int\limits_{-1}^{1} \rho(\eta) e^{-i\varepsilon\alpha\eta} d\eta$$

where $\rho(\eta)$ is the current density function appearing due to the field incidence on the scattering screens surfaces; $J_n(x)$ and $H_n(x)$ are the Bessel and Hankel functions respectively; $\varepsilon = ka$.

It is easy to see that the imposing of the Dirichlet boundary condition on the field (7,8) on the scattering screens surfaces yields DSE like (4) and DIE like (5).

Before setting forth an idea of the semi-inversion technique conformably to DSE (4) and DIE (5) it is noteworthy to emphasize that these equations correspond to integral

Table 1

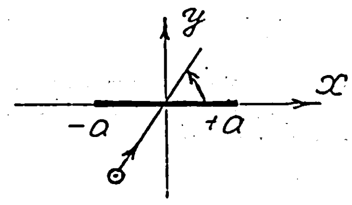
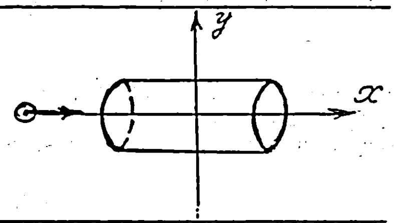
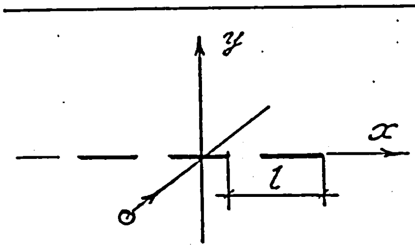
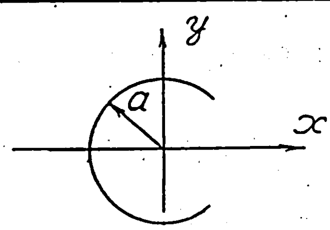
$K(\alpha) = (1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{c}{\lvert\alpha\rvert}[1-\epsilon(\lvert\alpha\rvert)]$	$K(\alpha) = g^2 J_0(g) H_0^{(1)}(g)$ $= \frac{i}{\pi}\lvert\alpha\rvert[1-\epsilon(\lvert\alpha\rvert)]$; $g^2 = (ka)^2 - \alpha^2$
	

Table 2

$\gamma_n = k\sqrt{-1+(\frac{n}{\chi})^2}$ $= k\frac{\lvert n\rvert}{\chi}(1+\epsilon_{\lvert n\rvert})$; $\chi = \frac{l}{\lambda}$	$\gamma_n = J_n(ka)H_n^{(1)}(ka)$ $= \frac{c}{\lvert n\rvert}[1+\epsilon_{\lvert n\rvert}]$
	

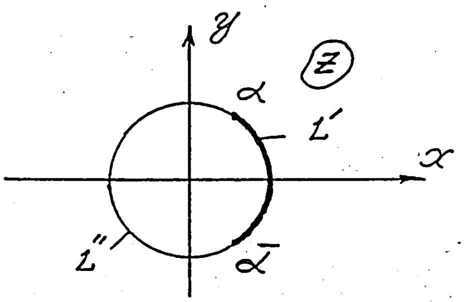


Fig.1

equations (IE) with the difference kernels. For the problems of wave scattering on a flat strip and nonclosed circular cylindrical screen these IE are respectively as following [5] :

$$\int_{-1}^{1} \rho(\xi) H_0^{(1)}\left(\varepsilon|\xi-\eta|\right) d\xi = f_1(\eta), \qquad \eta \in [-1,1] \tag{9}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(\varphi) H_0^{(1)}\left(2\varepsilon\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|\right) d\varphi = f_2(\varphi_0), \qquad \varphi_0 \in [-\alpha,\alpha] \tag{10}$$

In order to go from IE (9,10) to DSE (4) and DIE (5) the unknown current functions $\rho(\xi)$ should be expanded in the Fourier-type integral and Fourier series, and it is necessery to use the following represenations for the kernels of IE (9,10) [12]:

$$H_0^{(1)}\left(\varepsilon|\xi-\eta|\right) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varepsilon\alpha(\xi-\eta)} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$H_0^{(1)}\left(2\varepsilon\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\varepsilon) H_n^{(1)}(\varepsilon) e^{in(\varphi-\varphi_0)} \tag{11}$$

The functions $\rho(\xi)$ and $\rho(\varphi)$ are extended by zero outside the region of their definition, i.e. $\rho = 0$ if $|\xi| > 1$, $\rho = 0$ if $\varphi \notin [-\alpha,\alpha]$.

IE (9,10) belong to very significant class of IE, namely, to IE with the log-difference kernel. In view of the following definition for the zero-order Hankel function

$$H_0^{(1)} x = \frac{2i}{\pi} \ln x + N(x), \qquad x > 0 \tag{12}$$

the IE (9,10) may be rewritten as follows:

$$\int_{-1}^{1} \rho(\xi) \left(\ln|\xi-\eta| d\xi + N_1(\xi,\eta,\varepsilon)\right) d\xi = f_1(\eta), \qquad \eta \in [-1,1] \tag{13}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(\varphi) \left[\ln 2\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right| + N_2(\varphi,\varphi_0,\xi)\right] d\varphi = f_2(\varphi_0), \qquad \varphi_0 \in [-\alpha,\alpha] \tag{14}$$

Let proceed now to finding the regularizations for DSE (4) and DIE(5). For the account simlisity reason the development will be continued for DSE(4) only. Let $\gamma_{|n|}$ values be in the form:

$$\gamma_n = \frac{C}{|n|}\left[1 + \varepsilon_{|n|}\right], \qquad \varepsilon_{|n|} \underset{n\to\infty}{\sim} O(N^{-1-s}) \;, \; s>0 \tag{15}$$

The ε data are listed in Table 1 in an instance of (a) and (b) cases. The explicit form of ε shows that in order to get a concrete expsession of (15) for the particular scattering problem we need in asymptotes of γ when $|n| \to \infty$.

On account of (15) the DSE (4) may be rewritten:

$$\begin{cases} \sum_{n\neq 0}^{\infty} \frac{\rho_n}{|n|} e^{in\theta\eta} = \frac{1}{c}(f_1(\eta) - \rho_0\gamma_0) \sum_{n\neq 0}^{\infty} \frac{\rho_n}{|n|} \varepsilon_n e^{in\theta\eta}, & |\eta| < 1 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n e^{in\theta\eta} = 0, \qquad |\eta| > 1 \end{cases} \tag{16}$$

Notice that if DSE (4) is equivalent to IE (10), then DSE (16) is equivalent to (14). This can be proved. Then the splitting of the DSE (4) operator with reference to γ values on using (15) is equivalent to the separation of the singular (log-difference) part from the operator of IE (10). This brings us a conclusion that in the semi-inversion technique for DSE(4) and DIE(5) L_0 operator is equivalent to the singular parts of the corresponding equations operators. The from of the inverted operator L_0^1 for DSE(16) can be effectively synthesized by the Riemann-Hilbert problem method [1].

Proceeding in this way let us prove that DSE(16) can formulate the Riemann-Hilbert problem on the reconstruction of an analytical function of complex variable via the limiting data of this function belonging some controur. Let us prove this sttement in the following way.

After differentiation of equation (16a) with respect to η and atseparate considera-tion of $\eta = 0$ case we get the new system:

$$\begin{cases} \sum_{n\neq 0} \frac{|n|}{n} \rho_n e^{in\theta\eta} = \Gamma'(\eta) & |\eta| < 1 \\ \sum_{n\neq 0} \frac{\rho_n}{|n|} = \Gamma(0) & \eta = 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n e^{in\theta\eta} = 0 & |\eta| > 1 \end{cases} \tag{17}$$

where

$$\Gamma(\eta) = \frac{1}{c}(f_1(\eta) - \rho_0\gamma_0) - \sum_{n\neq 0} \frac{\rho_n}{n} \rho_n \varepsilon_n e^{in\eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n e^{in\theta\eta} \tag{18}$$

Let now introduce the ancillary functions

$$X^+(z) = \sum_{n>0} \rho_n z^n, \qquad X^-(z) = -\sum_{n<0} \rho_n z^n$$

that are holomorphic functions inside and outside unit circle $|z = 1|$ on complex variable plane $z = je^{i\psi}$. According to (17) the following relations

$$\begin{cases} X^+(e^{i\psi}) + X^-(e^{i\psi}) = \Gamma^+(e^{i\psi}) & \psi = \theta\eta, \quad \psi \in L' \\ X^+(e^{i\psi}) - X^-(e^{i\psi}) = 0 & \psi \in L'' \end{cases} \tag{19}$$

are valid

So, the limiting values of X^+ and X^- are the Same for L'' arc (Fig.1) of the unit circle. This means that one of them analytically becomes another one over L'' arc, i.e. both of them are the same analytical al function $X(z)$. On the added L'' arc the limited values of $X(z)$ function are connected with one anoter through the relationship (19) that is the relationship for $X(z)$ function reconstruction [6]

$$X(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{R(z)}\int\limits_{L'}\frac{\Gamma(t)R^{+}(t)}{t-z}dt + \frac{C}{R(z)}, \tag{20}$$

where C is a constant,

$$R(z) = \begin{cases} 0, & z \in L'' \\ \sqrt{(t-\alpha)(t-\alpha^{*})}, & \alpha = e^{i\theta}, \quad \alpha^{*} = e^{-i\theta} \quad z \in L' \end{cases} \tag{21}$$
$$R(z)^{\pm} = \pm R(z), \qquad z \to z_0 \in L'$$

As follows from (19) and (20) the function $X^{+}(e^{i\psi}) - X^{-}(e^{i\psi}) = \sum\limits_{(n)} \rho_n e^{in\psi}$ has the rootsingularity at the end points of L' controur. Because of proportionality of this function value to the surface current density for the problems under consideration it may be sure that the function X satisfies the edge condition.

In order to obtain the Fourier coefficients for the function $\Gamma(\eta)$ it is recommended to emply the plemelj-Sokhotskii formulas [6] for the extreme values of functions represented by the Cauchy-type integrals.

As a result of the C constant deduction from (20) and on using the Fourierexpansion of $\Gamma(\eta)$ function (18) and equation (17b) we obtain ISLAE of the second kind in $\rho(\eta)\}_{n=-\infty}^{\infty}$:

$$\rho_n = \sum_{(m)} \rho_m Q_{mn} + b_n, \qquad n = 0, \pm 1 \ldots \tag{22}$$

where

$$Q_{mn} \sim \frac{\varepsilon_m}{\gamma_n} T_{mn}(\eta), \quad b_n \sim \frac{1}{\gamma_n}\sum_{m} f_m T_{mn}(\eta)$$

$$T_{mn}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{m} V_{m-1}^{n-1}(\eta), & m \neq 0 \\ \frac{1}{n} V_{n-1}^{-1}(\eta), & m = 0, n \neq 0, \qquad U = \cos\theta \\ -2\ln\frac{1+U}{2}, & m = n = 0 \end{cases}$$

$$V_m^n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L'}\frac{V_n(e^{i\psi},\theta)}{R^{+}(e^{i\psi})}e^{-im\psi}; \qquad V_n(t_o,\theta) = \frac{1}{i\pi}P.V.\int\limits_{L'}\frac{R^{+}(t)t^n}{t-t_0}dt$$
$$V_m^n(U) = \frac{m+1}{2(m-n)}\left[P_m(U)P_{n+1}(U) - P_{m+1}(U)P_n(U)\right] \tag{23}$$

where $P_m(\eta)$ are the Legendre polynomials.

ISLAE (22) is equivalent to DSE(16) and is a result of the application of the regularization procedure to DSE(16). This system of equations can be effectively solved by the reduction method.

It seems reasonable to address the questions: What is the most important feature of the Riemann-Hilbert problem method. The way of answering this question is to turn to the fact thatDSE(16) is equivalent to IE(11). It is known that this class of IE can be reduced to the IE of Fredholm the second kind by means of the inversion procedure imposed on the log-difference part of the operator. This procedure is known enough in mathematics [13]. In the useal way this is a formal procedure and the obtained equations kernels are intricated enough and represented by the integrals in the sense of the main value. In the contrast of the methods the Riemann-Hilbert problem method brings us the ISLAE of the second kind with matrix elements characterized by the fact that all the integrals in their expressions can be caleulated though the quadrature technique and have a simple apperance. This allows to synthesize highly efficient algorithms for calculations. This is a clear advantage of this method.

As has been pointed before the scattering characteristics of numerous structures had been calculated on the basis of theRiemann-Hilbert problem method. As an example the frequency dependencies of total scattering cross-section σ and near- and far-field distributions both for the flat and cylindrical strips are shown in Fig.2,3,4,5 .

2. Method of orthogonal polynomials (O.P.)

2.1. Method of O.P. for IE with log-difference kernel.

Let try now to solve IE (13), (14) by means of more general and quite symple method. Let call it the method of O.P. This is the particular implentation of general scheme of the moments method (M.M.) because it differs from the last by two considerations. It needs firstly to investigate preliminary the structure of solution near the edge point of the domain of integration and secondly to construct spectral expressions for singular parts of the kernels with orthogonal polyunomials as eigenfunctions.

The method of O.P. is widely used for solution of problems of the theory of elastisity and continuous media mechanics [8, 7]. Nevertheless, it has not yet found applications in electromagnetic theory.

It will be shown below that the method of O.P. has the power to formulate the solutions to DSE (4) and DIE (5).

At first let us consider IE (13). Assume that the solution structure be such that $\rho(\xi)$ satisfies the condition

$$\rho(\xi) \underset{\xi_1 \pm 1}{\sim} (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{24}$$

That means $\rho(\xi)$ has square-root singularity at the ends of interval $[-1,1]$. It is well known that condition (24) follows from Meixner condition in diffraction problems.

Let us unite the unknown function $\rho(\xi)$ as follows

$$\rho(\xi) = (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n T_n(\xi) \tag{25}$$

where $\{T_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$ are Chebyshev polynomials of the 1-st kind, ρ_n are the coefficients to be found out.

The expansion (25) for $rho(\xi)$ is caused by the fact that Chebyshev polynomials $T_n(\xi)$ are eigen-functions of the following intefral operator (I.O.) [7, 8]

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln|\xi-\eta| d\xi = \omega_n T_n(\eta), \qquad |\eta| \le 1 \tag{26}$$

Here $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ are eigenvalues of I.O. and are given by

$$\omega_n = \begin{cases} \ln 2, & n=0 \\ \frac{1}{n}, & n=1,2,\dots \end{cases} \tag{27}$$

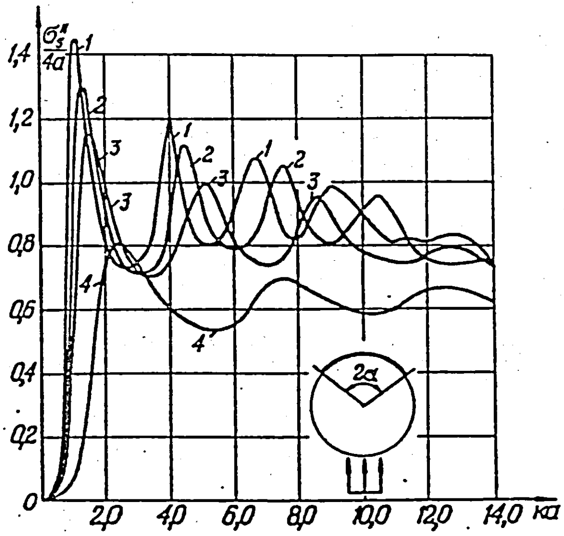


Fig.2 1. $\alpha = 80°$; 2. $\alpha = 70°$; 3. $\alpha = 60°$; 4. $\alpha = 40°$

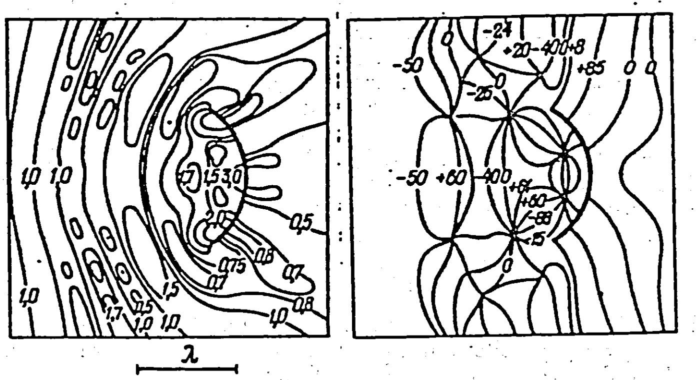


Fig.3 $\alpha = 60°$; $ka = 5.0$ ($H_z = const$)

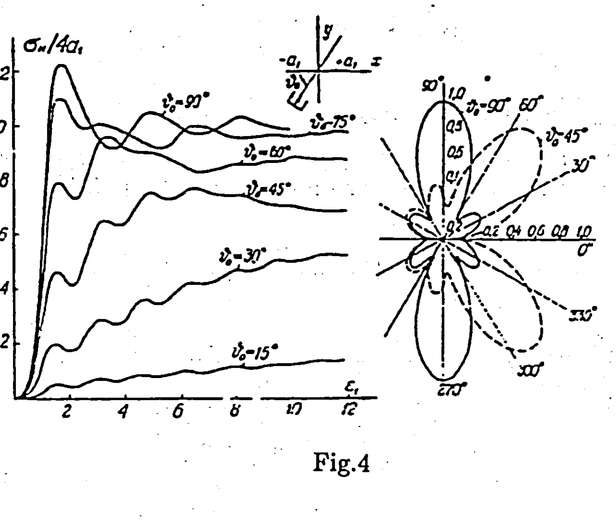


Fig.4

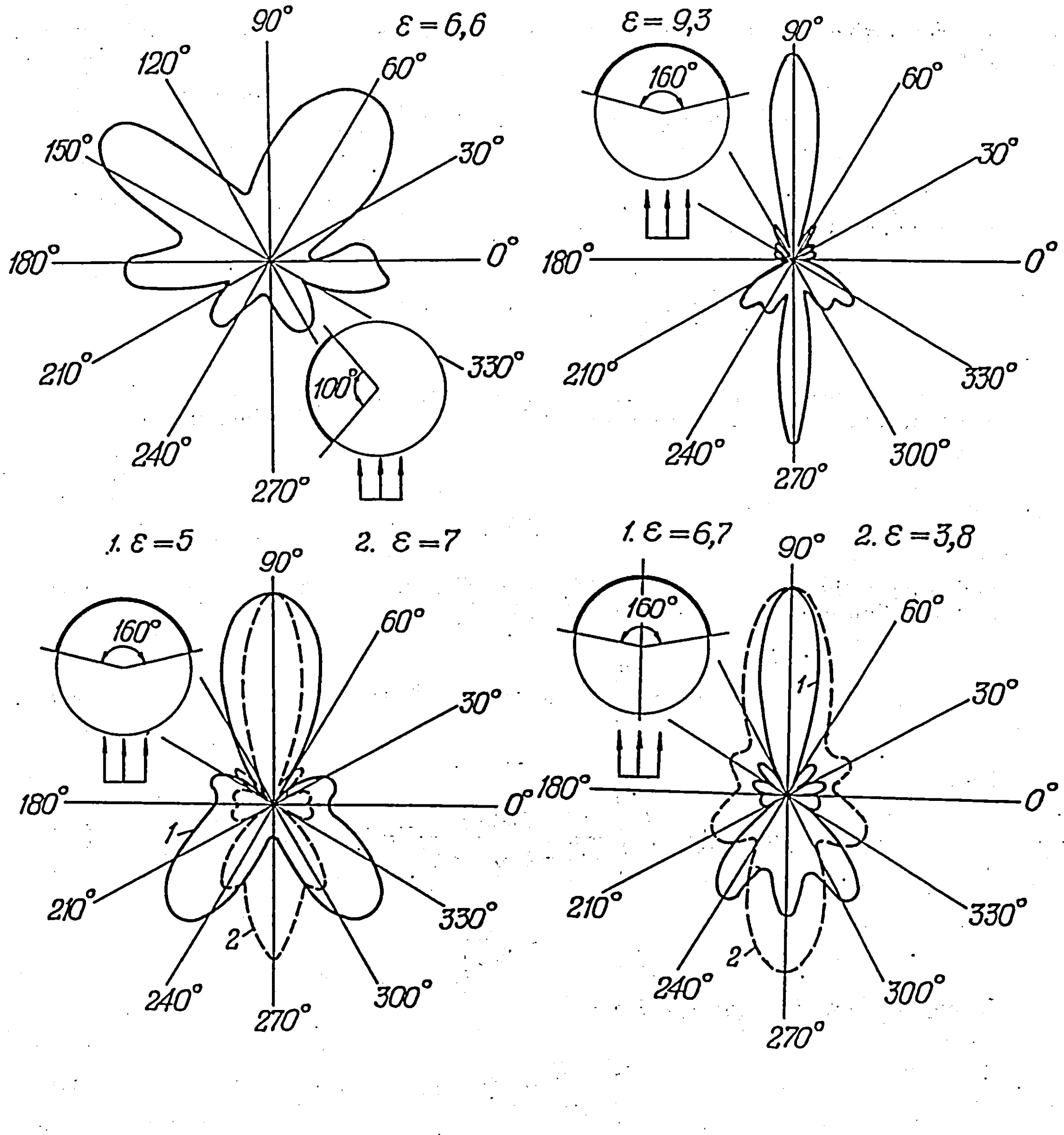


Fig.5. Radiation Pattern(RP) for the different values of α and ε.

For further derivations we need orthogonally condition for Chebyshev polynomials given by

$$\int_{-1}^{1} T_n(\eta)T_n(\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{1}{\beta_n}\pi\delta_{kn}; \qquad \beta = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases} \tag{28}$$

Using (26) and (28) one can show the kernel of (26) to have a convergent in definite sense bilimear expansion

$$\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|\xi-\eta|} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n T_n(\xi)T_n(\eta) \tag{29}$$

Substituting (25) into I.E. (13), let us take into account spectral expression (26) Then assuming the continuous function to $F_1(n)$ be represented by the series expression

$$f_1(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n(\eta) \tag{30}$$

and using orthogonality condition (28) for coefficients ρ_k seeking, we obtain infinite system of linear algebraic equations (SLAE)

$$\rho_k - \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}\rho_n = \gamma_k, \qquad k = 0, 1 \tag{31}$$

Here

$$a_{kn} = \frac{\beta_k}{2\omega_k}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(\xi)T_n(\eta)}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}}N_1(\xi,\eta,\varepsilon)d\eta d\xi \tag{32}$$

$$\gamma_k = \frac{\pi f_k}{(2\omega_k)}$$

It may be shown that $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_2$ and besides

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|a_{kn}|^2 < \infty \tag{33}$$

It means that matrix $\{a_{kn}\}_{k=0}^{\infty}$ produced a fully continuous operator A, from l_2 to l_2. Consequently, this operator may be approximated by a finite-dimensional one, in other words SLAE (31) may be treated by means of truncation.

Let proceed to IE (14). For the simplicity reason the unknown function $\rho(\varphi)$ and the given function $f_2(\varphi)$ are assumed to be even.

Then for the functions $\rho(\varphi)$ we can write

$$\rho(\varphi) = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}\sum_{n=0}^{\infty} x_{2n}T_{2n}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right), \qquad \varphi \in [-\alpha, \alpha] \tag{34}$$

As before, the form of expansion (22) is caused by the fact that Chebyshev polynomials $T_{2n}\left(\sin\frac{\varphi}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ are eigen functions of I.O. corresponding to the singular part of the IE kernel (14). As has been shown in there exist the following spectral expressions

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\frac{1}{2|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}|}\frac{T_{2n}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\alpha)}}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=\sigma_{2n}T_{2n}\left(\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{35}$$

Here $\{\sigma_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ are eigenvalues of I.O., equal to

$$\sigma_{2k}=\begin{cases}-\ln\sin\dfrac{\alpha}{2}, & n=0\\ \dfrac{1}{2n}, & n=1,2,\ldots\end{cases} \tag{36}$$

Besides it shown be noted that for Chebyshev polynomials $T_{2n}\left(\sin\frac{\varphi}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ the following orthogonality conditions are valid.

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}T_n\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)T_k\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(\cos\varphi-\cos\alpha)}}d\varphi=\frac{1}{\beta_k}\pi\delta_{nk}, \tag{37}$$

The krenels of IE (35) may be shown to have the following bilinear expansions

$$\ln\frac{1}{2|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}|}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{2n}\beta_nT_{2n}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)T_{2n}\left(\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{38}$$

Now let us substitute expressions (34) into IE (14). Taking into account spectral expressions (35) and orthogonality (37) we obtain an infinite SLAE for seeking unknown coefficients

$$x_{2k}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{2k,2n}x_{2n}=f_{2k}^{+},\qquad k=0,1,\ldots \tag{39}$$

Here we have denoted

$$b_{2k,2n}=$$

$$=\frac{\beta_k}{8\sigma_{2k}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}T_{2k}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)T_{2n}\left(\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)}{\sqrt{(\cos\varphi-\cos\alpha)(\cos\varphi_0-\cos\alpha)}}N_2(\varphi,\varphi_0;\varepsilon)d\varphi d\varphi_0$$

$$f_{2k}^{+}=\frac{\beta_k}{4\sigma_{2k}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f^{+}(\varphi_0)\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi_0-\cos\alpha)}}T_{2k}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)d\varphi_0$$

It may be shown that

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|b_{2k,2n}|^2<\infty;\qquad\sum_{k=0}^{\infty}|f_{2k}^{+}|^2<\infty \tag{40}$$

In other words, matrix operator B produced by the matrix $\{b_{2k,2n}\}_{k=0}^{\infty}$ is an absolutely continuous one and may be approximated by finite-dimensional operator. Then the solution of infinite SLAE (39) may be obtained with any given prefixed accuracy by the truncation method.

The universality of the method of O.P. resides in the opportunity to construct the spectral relationships for different singular kernels where O.P. play part of the eigenfunctions. As an example it seems reasonable to cite the following spectral relationships [7, 8]:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|x-y|}\frac{U_n(y)}{1-y^{2-\frac{1}{2}}}dy = \begin{cases} \ln 2 - \frac{1}{2}T_2(x), & n=0 \\ \frac{T_n(x)}{n} - \frac{T_{n+2}(x)}{n+2}, & n>0 \end{cases} \tag{41}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\ln\frac{1}{|x-y|}U_n(y)dy = -\pi(n+1)U_n(x) \tag{42}$$

Here $U_n(y)$ are the Chebyshev's polynomials of the second kind.

$$\frac{i}{2}\int_{-1}^{1} \frac{Ce_n(\arccos\xi, g)}{\sqrt{1-\xi^2}}H_0^{(2)}(\varepsilon|\xi-\xi'|)\,d\xi = \frac{Me_n^{(2)'}(0,q)}{Me_n^{(2)}(0,q)}Ce_n(\arccos\xi', g) \tag{43}$$

$q = \frac{\varepsilon^2}{4}$, $\{Ce_n(\arccos\xi, g\}_{n=0}^{\infty}$ are the Mathieu's functions.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{K_0(|x-y|)}{\sqrt{y e^y}}L_n^{-\frac{1}{2}}(2y)dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}L_n^{-\frac{1}{2}}(2x)e^{-x} \tag{44}$$

Here $\{L_n^{-\frac{1}{2}}(2x)e^{-x}\}_{n=0}^{\infty}$ are the Lagerr. polynomials; $K_0(x)$ is the MacDonald's function.

$$\int_{-1}^{1} \frac{C_n^{\frac{\nu}{2}}(y)dy}{|x-y|^{\nu}\sqrt{(1-y^2)^{1-\nu}}} = \pi\frac{\Gamma(n+\nu)}{\Gamma(n+1)}\frac{C_n^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu)\cos\frac{\pi\nu}{2}} \tag{45}$$

These spectral relation ship may be used in solving the different scattering problems with both the Dirichlet and Neumann boundary conditions. In particular, in view of (44) IE of the Viener-Hopf type can be solved in explicit form.

2.2 Solution of DSE and DIE by the method of O.P.

Let show that DSE(4) and DIE (5) can be solved by the method of O.P. For simplicity reason it is worth considering only DIE (5). Solution of this system is formulated on more general assumptions. Namely, $\rho(\alpha)$ function is to be the Fourier transform of $\rho(h)$ function that satisfies the condition

$$\rho(\eta) \underset{\eta\to\pm 1}{\sim} (1-\eta^2)^{\nu-1}, \qquad \frac{1}{2} \le \nu < 1 \tag{46}$$

At $\nu = \frac{1}{2}$ function ρ_n satisfies the classical Meiksner condition for infinitesimally thin screens. In particular, condition (46) appears in the problem of wave scattering on cylindrical object with the edges.

So, to DIE (5) is formulated on the following assumptions:

i) the unknown function $\rho(\alpha)$ is the Fourier transform of $\rho(\eta)$ function satisfying condition (46):

ii) $k(\alpha)$ function may be represented in the form:

$$k(\alpha) = \frac{c}{|\alpha|}\left[1 - \delta(|\alpha|)\right], \qquad \delta(|\alpha|) \underset{|\alpha|\to\infty}{\sim} O|\alpha|^{-1-s}, \qquad s > 0 \tag{47}$$

iii) the given function $f_2(\eta)$ is continuous and $f'(\eta) \in L_2[-1,1;(1-\eta^2)^{\nu-1}]$; here $L_2[-1,1;(1-\eta^2)^{\nu-1}]$ is the Hilbeert space where scalar product is defined with weight factor $(1-\eta^2)^{\nu-1}$.

In order to satisfy (46) the function $\rho(\eta)$ is represented as uniformly converging series

$$\rho(\eta) = (1-\eta^2)^{\nu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m C_m^{\nu-\frac{1}{2}}(\eta), \qquad \frac{1}{2} \le \nu < 1 \tag{48}$$

where ρ_m are the un,nowns coefficients; $C_m^{\nu-\frac{1}{2}}(\eta)$ are the Gegenbaier polynomials which set a basis in $L_2[-1,1;(1-\eta^2)^{\nu-1}]$.

In view of (48) we get the following representation for the Forier transform:

$$\rho(\alpha) = \int_{-1}^{1}\rho(\eta)e^{-i\varepsilon\alpha\eta}d\eta =$$

$$= \frac{2\pi}{\Gamma(\nu-\frac{1}{2})}\sum_{m=0}^{\infty}(-i)^m\rho_m\beta_m^{(\nu-\frac{1}{2})}\frac{J_{m+\nu-1/2}(\varepsilon\alpha)}{(2\varepsilon\alpha)^{\nu-1/2}}, \qquad \nu > \frac{1}{2} \tag{49}$$

where

$$\beta_m^{(\nu-1/2)} = \frac{\Gamma(m+2\nu-1)}{\Gamma(m+1)}$$

Let substitute (49) and (47) into DIE (5) taking inti account that the continuous functions $e^{i\varepsilon\alpha\eta}$ and $f_2(\eta)$ in this equation may be represented as expansions in terms of Gegenbauer polynomials

$$e^{i\varepsilon\alpha\nu} = \left(\frac{2}{\varepsilon\alpha}\right)^{\nu-1/2}\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}i^k\left(k+\nu-\frac{1}{2}\right)J_{k+\nu-\frac{1}{2}}(\varepsilon\alpha)C_k^{\nu-\frac{1}{2}}(\eta); \quad \frac{1}{2} < \nu < 1$$

$$f_2(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}f_k C_k^{\nu-\frac{1}{2}}(\eta) \tag{50}$$

Then after interchanging the orders of summation and integration in deduced equation and using the discontinuous integrals by Weber-Schafheitlin [9] we may conclude that, first, uniform equation of DIE system (5) is satistied identically and, second, for definition of unknown $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ the infinite SLAE of the following taking place:

$$\sum_{m=0}^{\infty}Z_m\left[1+(-1)^{k+m}\right]N_{km}^{(\nu-\frac{1}{2})} = \Gamma_k, \qquad k = 1,2,\ldots, \tag{51}$$

The following notation

$$Z_m = (-i)^m \rho_m \beta_m^{(\nu-\frac{1}{2})} \frac{2\pi}{\Gamma(\nu-\frac{1}{2})}; \qquad K_{\nu-\frac{1}{2}}(\varepsilon) = \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{2\nu-1} \frac{2\Gamma^2(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu)}$$

$$N_{km}^{(\nu-\frac{1}{2})} = \begin{cases} N_{00}^{(\nu-\frac{1}{2})} = 2\int\limits_0^\infty J_{\nu-\frac{1}{2}}^2(\varepsilon\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^{2\nu-1}\sqrt{1-a^2}}, & k=m=0 \\ i\left(C_{km}^{(\nu-\frac{1}{2})} - d_{km}^{(\nu-\frac{1}{2})}\right), & k+m\neq 0 \end{cases}$$

$$C_{km}^{(\nu-\frac{1}{2})} = K_{\nu-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\int\limits_0^\infty J_{k+\nu-\frac{1}{2}}(\varepsilon\alpha)J_{m+\nu-\frac{1}{2}}(\varepsilon\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^{2\nu}} =$$

$$= \frac{\Gamma^2(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{k+m}{2})}{\Gamma(\nu+\frac{m-k+1}{2})\Gamma(\nu-\frac{k-m+1}{2})\Gamma(2\nu+\frac{k+m}{2})}, \qquad k+m\neq 0$$

$$d_{km}^{(\nu-\frac{1}{2})} = K_{\nu-\frac{1}{2}}(\varepsilon)\int\limits_0^\infty \delta(\alpha)J_{k+\nu-\frac{1}{2}}(\varepsilon\alpha)J_{m+\nu-\frac{1}{2}}(\varepsilon\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha^{2\nu}}, \qquad k+m\neq 0$$

$$\Gamma_k \sim \frac{f_k}{k-\nu-\frac{1}{2}}$$

It can be proved that the ISLAE (51) is the Fredholm equation of the second kind, and its approximate solution can be obtained by the truncation method to an arbitrary accuracy.

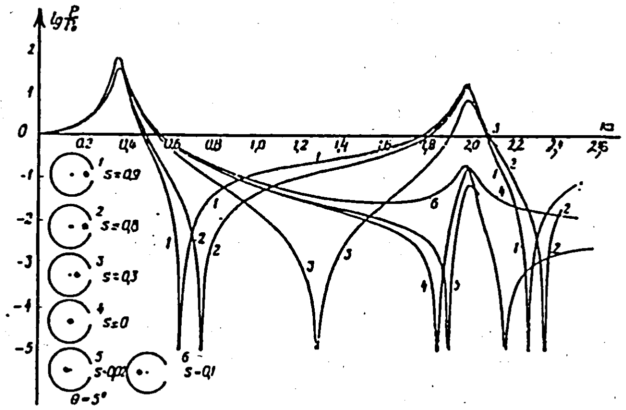
Applications

1."Trapping" effect for an open screen illuminated by fixed source.

Here we investigate in detail using our method the electromagnetic structure consisting of source and a resonant screen, for example of the emission by a filament with magnetic current situated near an open metallic circular cylinder(Fig.6).

Calculation of the frequency dependences of the integral characteristics of the antenna permits clarifying the resenance frequenices of the screen and the regions of extreme radiation. Such a characteristic is, for example, the total radiation power P normalized to the power of the radiation of the filament in free space P_0 ($\frac{P}{P_0}$ also coincides with the normalized value of the radiation resistance of the antenna). The results of the calculation of the frequency dependences of $\frac{P}{P_0}$ on a computer for different values θ=the angular size of the gap in the cylinder and $s=\frac{a}{l}$ are shown in Fig.6.Here a and l are the radius of cylinder and the distance between sources and the axis of cylinder respectively.

As for scattering of a plane wave by an open screen [10], excitation of high Q factor quasicharacteristic regimes of the screen is accompanied by a jumplike change in the Directivity Patterns (DP) and an increase in the total radiation power. In this case, it is as if a powerful linear source of secondary radiation appears on the surface of the cylinder at the location of the slit,since the slit is equivalent to a magnetic current filament. If the



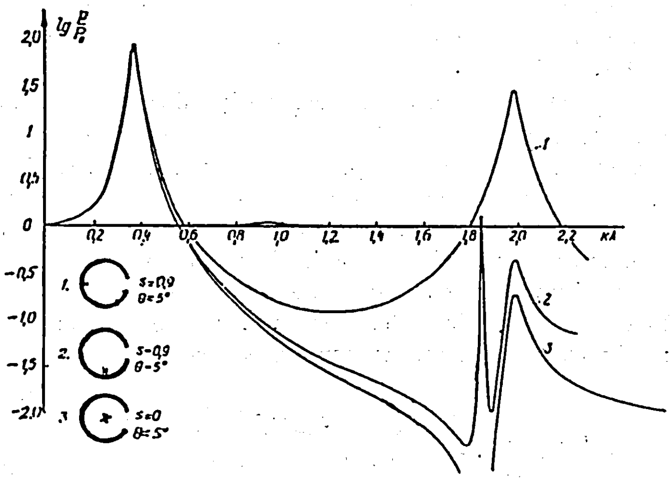


Fig.6. Frequency dependences of the total Radiation Power P normalized to the Power of the Radiation of the filament in free space P_0.

Q factor is high, then a field with high amplitude, whose structure is close to the structure of the characteristic oscilation of a closed circular cylinder,forms inside the screen. For this reason, at the resonance frequency, the amplitude of the secondary radiation of the filament in free space, in view of the fact taht the radiation of the concentrated source is amplified.

The resonance frequencies are close to the zeros of the functions $J'_n(x)$ and exceed them by some amount depending on the gap.The quasistatic resonance regime of the gap type,which is usually denoted by H_{00},occupies a special position [10]:

$$k_o a = (-2 \ln \sin(\frac{\theta}{2}))^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{i\pi}{16} \cdot \ln^{-1} \sin(\frac{\theta}{2})).$$

As the curves in Fig.6 show,in the case of a H_{00} resonance, the increase in $\frac{P}{P_0}$ is not large (1-1.5 orders of magnitude),since thisregime has a small Q factor. The same is true for oscillations of the typeH^+_{mn}. The odd-type oscillations H^-_{mn} have a higher Q factor and when they are excited, the increase in $\frac{P}{P_0}$ can be appreciable.

We note that the phenomenon of an increase in the radiation power of a concentrated source with the help of an open resonator,weakly coupled to external space, is well known in acoustics. Indeed, many musical instruments are nothing more than acoustical antenna equipped with an open resonator , above whose coupling opening an active emitter, viz. the oscillating string, is located.

Aside from the resonance maxima, the frequency dependences $\frac{P}{P_0}$ have a number of deep troughs (Fig.6). Thus, a characteristic of the system consisting of a source and an open screen placed next to one another is the presence of both resonance and antiresonance phenomena. If the former are explained by exitation of the characteristic oscillations of the screen, then the latter originate according to an entirely different mechanism. The characteristic, for an antiresonance, sharp drop in the radiation power occurs due to the compensation of the field from the source by the diffraction field.

Let us turn to the frequency dependence of the power in the long wavelength regin(Fig.6). When the radiation frequency somewhat exceeds the resonanc frequence, namely:

$$k_1 a = \begin{cases} x_0[1 + x_0^2 \ln(1 - s^2)]^{-\frac{1}{2}} for\ a < l \\ [-\ln(1 - \frac{1}{s})]^{-\frac{1}{2}} \quad for\ a > l \end{cases}$$

the emission efficiency drops by several orders of magnitude.

(Here $x_0 = [-\ln \sin(\frac{\theta}{2})]^{-\frac{1}{2}}$).This relation can be called the antiresonance condition.The cases of external $(l > a)$ and internal $(l < a)$ positioning of the source relative to the open screen must be distinguished.

If $(l > a)$, then at the frequence k_1 the filament with the current and the open resonator act as a pair of emitters of the same tipe, compensating one another in the far zone due to the near equality of the amplitudes and the opposite phases of the radiated fields. The effect is all the more clearly manifested, the closer the filament , and the open resonator are to one another and the narrower the gap in the screen(Fig.6). In the limit, when the source is located at infinity and the screen is illiminated by a plane wave, nothing resembling compensation of radiation is absorved [10]. Thus, we can conclude that antiresonance phenomena are characteristic of the pair source + open resonator, but not the resonator by itself. Compensation is always observed at frequencies higher than the frequency of the corresponding resonance ($k_1 > k_0$).

The directivity pattern of the antenna being examined is determined by the superposition of the incident cylindrical wave and the scattered field. The resonance and antiresonance frequencies , near which there is a sharp almost jumplike change in the DP, are of special interest. When a quasistatic resonance regime H_{00} is excited, the DP becomes almost omnidirectional (Fig.7a,curve 2):the cylinder with small wave dimensions distorts little the circular DP of the secondary source, namely, the emitting gap. For the resonance regime H_{11}^{+} , the effect of the cylinder is now much stronger: the backward radiation is much weaker than the forward radiation (Fig.7b). The absence of radiation in the direction of orientation of the slit, as is evident from Fig.5c, for regime H_{11}^{-}, is characteristic for odd-type resonance regimes, since here the emitting aperture(gap) is excited with opposite phase. In this case, the DP is close to the diagram of a pair of current filaments with opposite phase, lying on the surface of a closed cylinder. It has a characteristic double-lobe shape, while the radiation in space, opposite to the gap, is attenuated.

At the antiresonance frequencies, with external excitation, the current filament and the gap in the open resonator act as a pair of linear emitters with nearly equal amplitudes and opposite phases, and in addition, one of them lies on the surface of the cylinder. For example, at low frequencies, the effect of the cylinder is small, and for $k = k_1$ the DP assumes the form of an almost regularfigure 8 (Fig.7a,curve 1). As the width of the gap increases, the figure 8 is distorted (Fig.7e), since a wide gap can no longer completely compensate the emission of the filament with the current.

With internal excitation at the antiresonance frequency, the DP no longer has such a simple shape and strongly depends on the position of the source (Fig.7e,f), which again indicates the differnce between internal and external excitation.

As for as the field in the near zone is concerned and inside the cylindrical open resonator, at resonanct frequencies it is close to the field of the corresponding characteristic oscillation of the closed cylinder. The amplitude of the field in the resonator is proportional to its Q factor. Figure 8 shows the phase and amplitude distribution of the field H_z near the screen at the antiresonance frequency. The preservation of a finite amplitude of the field inside the resonator, together with the sharp drop of the emissivity, suggested to us the idea that the "trapping" properties of the hollow resonator with a small coupling opening must be concidered keeping in mind the antiresonance phenomena.

The resonator is capable of "trapping" only the field of the source situated at the finite distance away from it, and the closer the source, the more successfully is the radiation trapped. For this, the geometry of the rsonant screen must in some sence be related to the geometry of the source. The open cylinder can compensate the radiation of the filament with the current due to the fact that the longitudinal gap plays the role of such a filament, but with "specular" parametrs. In order to compensate, for example, the radiation of a point source, the inhomogeneity in the screen , evididently, must have a similar pointlike character.

2.Anomals wave scattering by a finite number of longitudinally slit cylinders of small wave dimensions.

Now we consider the excitation by a magnetic-current filament of a reflector formed by a finite number(N) of circular cylinders with longitudinal slit (the angular size of the

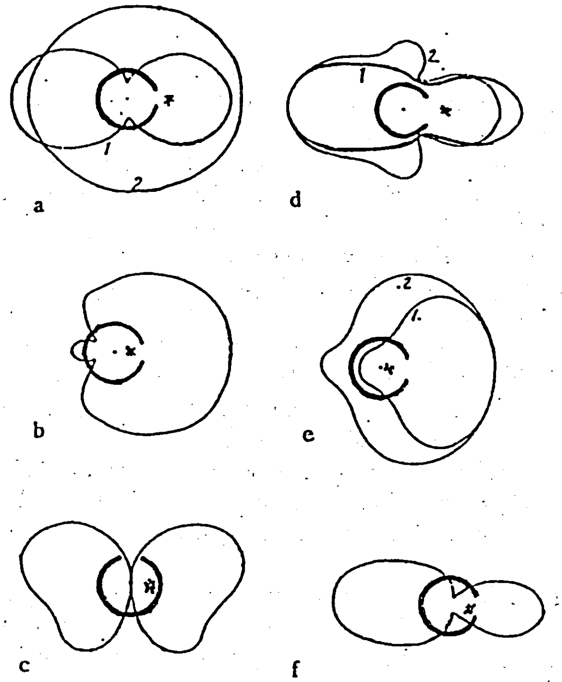


Fig. 7. Directivity patterns for different θ, ka, and s; a) $\theta = 5°$, $s = 1.2$, $ka_1 = 0.454$; b) $\theta = 5°$, $s = 0.5$, $ka = 1.985$; c) $\theta = 5°$, $s = 0.9$, $ka = 1.84$, $ka_2 = 0.375$; d) $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 60°$, $s = 1.2$; e) $\theta = 5°$, $s_1 = 0.5$, $s_2 = 0.3$; f) $\theta = 5°$, $s = 0.8$, $ka = 0.7473$, $ka_1 = 0.706$, $ka_2 = 0.89$, $ka_1 = 1.04$, $ka_2 = 1.28$.

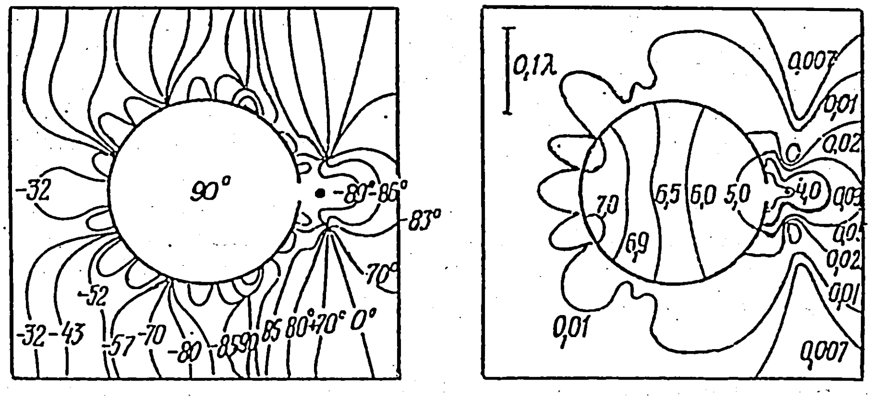


Fig. 8. The lines of equal phases and amplitudes (H_z = const).

slit is θ) distributed uniformly over a circular arc of angle α and radius R_l (Fig.9). We assume that the cylindrical screens are infinitesimally thin and ideally conducting. This problem has benn solved rigorously by means of our approach.The effective solution of this diffraction problem raises possibilities for analyzing the field near this structure over a broad frequence range and for plotting two families of mutually orthogonal curves lines of constant phases of the H_z component of the electromagnetic field and energy flux lines.

Because of the small wave dimensions of the elements of the structure and their weak mutual effects away from the resonance , the radiation field of the magnetic-current filament is perturbed only slightly here;i.e., the radiated field passes freely through the discrete reflector(Fig.9), and the directional pattern is isotropic. In this case the scattering of the waves is analogous to the diffraction of an H-polarized field by closed circular cylinders.

At frequencies near the resonant value, determined by the condition

$$ka \approx [-2 \ln \sin(\frac{\theta}{2})]^{-\frac{1}{2}},$$

on the other hand, the scattering of H-polarized waves by this structure is qualitatively different. The excitation of quasinatural Helmoholtz-mode oscillations in the element of the sistem [10] and the strong mutual effect of the scatters greatly distort the near-zone phase structure of the field. The formation of phase nodes near the scatters leads to the appearance of regions in which the energy flux is zero on the average over a period. These regions cause the effective dimensions of the scatters to increase, and this increase leads in turn to a cutoff of the perturbing field. The phase front becomes essentially flat over an angular sector of significant size near the stucture.

The qualitative change in the near-zone field structure at resonance cases most of the energy of the electromagnetic field of the magnetic-current filament to be radiated in a certain direction.That there is a flat angular distribution of the radiated energy away from resonance and that most of the energy is radiated in a rather narrow angular sector in the resonant case can be seen from the distribution of the near field of the structure,i.e., from a family of lines of the Poynting vector flux, which is orthogonal in the two-dimensional case to the family of lines of constant phase of the field component H_z ($argH_z$=const);(Fig.10a and 10b).

Directional patterns with a clearly defined main lobe with a width of about 36^0 are formed by a system with wave dimensions of order λ through the formation of a region of nearly flat phase front near the antenna (the relating size of the side lobes is less than 0.2).

Numerical analysis of the behavior of the parameters of an antenna formed by a magnetic-current filament and discrete resonant reflector consisting of 3,4,5 or 7 elements has shown that the coefficient of directed action can reach values of 6,7,8.3 and 8.5, respectivly, at resonance. It is particular important to note that the geometric dimensions of the antenna did not exceed 1.2λ.

It is important to note that (as a comparative study shows) the properties of this discrete reflector at intermediate wavelengths,i.e., for wavelengths comparable to the dimensions of the aperture, are similar to those of solid cylindrical mirrors in the short-wave region.

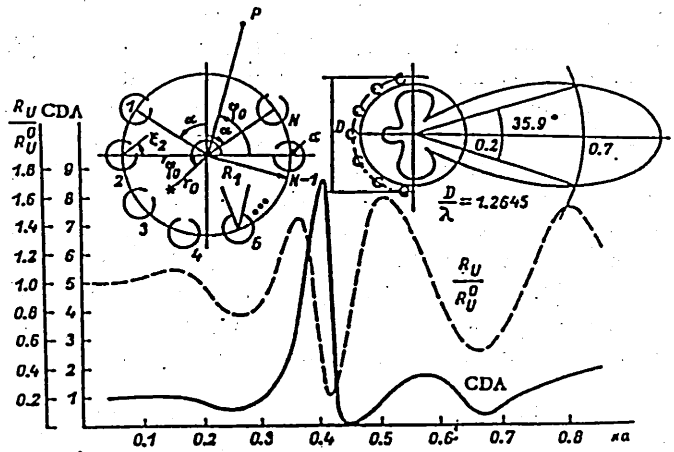


Fig.9. The general structure. Frequency dependence of the coefficient of directed action (CDA) and of the radiation resistance, normalized to the radiation resistance of a filament in free space (R_Σ^0). Also shown here is the directional pattern at the maximum CDA.

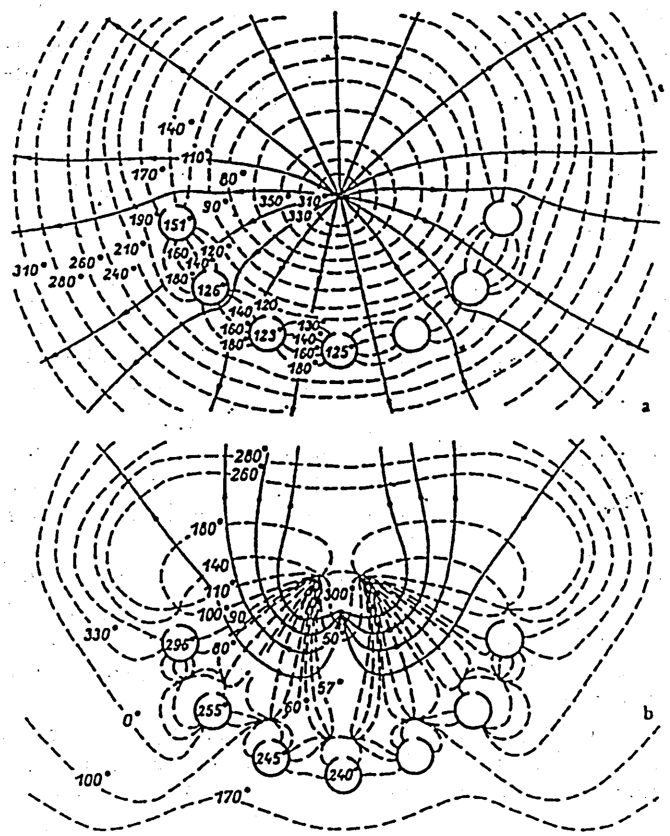


Fig.10. Lines of constant phase (dashed curves) and lines of the energy flux averaged over the period. a) Away from resonance; b) at resonance.

Conclusions

Comparision of the methods solutions to DSE (4) and DIE (5) on the basis of the Riemann-Hilbert problem method with the method of O.P. gives a clear evidence that the last is simple enough and more general. We give a more general solution of DSE (4) and DIE (5) in the case where the parametr ν, which describes the singularity of the finction $\rho(\xi)$, can have any value in the interval $[\frac{1}{2}, 1)$; hence our solution contains the earlier obtained results as a special case. In particular,this generalization is important in oredr to use the method to solve diffraction problems for waves invcident on cylindrical bodies formed from parts of intersecting circular cylinders(screens of finite thickness)[11].

Pay attention taht the probmlem of wave scattering on polygonal silender has been investigated over a wide range of the parameters data by means of the method O.P.[12].

As well the method of O.P. holds a key to solution of IE with kernal of the Bessel functions. These equations appear in the problems of wave scattering on the screens like a disk.

References

1. Shestopalov,V.P.,*Method of the Riemann-Hilbert problem in Diffraction theory and Electromagnetic waves propagations*,Kharkov University,1971 (in Russian).

2. Shestopalov,V.P.,L.N.Litvinenko,S.A.Masalov and V.G.Sologub,*Diffraction of waves by gratings*, USSR:Kharkov,1973 (in Russian).

3. Shestopalov,V.P.,*Summation equation in contemporary diffraction theory*, Naukova Dumka, Kiev, 1983 (in Russian),

4. Agranovich,Z.S.,V.A.Marchenko and V.P.Shestopalov, The diffraction of electromagnetic waves from plane metallic lattices,*Zh. Tekhn. Fiz.*v.32,pp.381-394,1962.

5. Honl,H.,A.W.Maue and K.Westpfahl, *Diffraction Theory*, (Russian translation),Mir,Moscow, 1964.

6. Gakhov,F.D.,*Boundary Value Problems*,Pergamon Press,New York,1966.

7. Popov,G.Ya.,*Concentration of Elastic Tensions Near Stamps, Cuts, Thin Inhomogeneities and Supports*,Nauka , Moscow, 1983 (in Russian).

8. Aleksandrov,V.M. and E.V.Kovalenko,*Continous Media Mechanics Problems with Mixed Boundary Conditions*, Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).

9. Prudnikov,A.P.,Yu.A.Bruchkov, and O.I.Marichev,*Integrals and Series,Special Functions*,Nauka, Moscow, 1983.

10. A.I.Nosich,*Radiotekh.Elektron.*,v.22, No 8,p.1733, 1978.

11. E.I.Veliev and V.P.Shestopalov, *Sov.Phys.Dokl.*,v.30,p.464,1985.

12. E.I.Veliev,V.V.Veremey and V.P.Shestopalov,*Radiotekh. elektron.*,v.32,No3,p.120,1988.

輻射科学研究会資料　　資料番号　ＲＳ 94-23

携帯電話用アンテナの疑似人体による電波散乱について

川端　一也　　番場　成彦　　岡田　勉　　荒井　晴市
K. Kawahata　N. Banba　T. Okada　S. Arai

株式会社　村田製作所

Murata Manufacturing Co., Ltd.

1. はじめに

ここ数年、携帯電話の小型化が急速に進んでいるが、携帯電話の小型化・高周波化に伴って人体がアンテナ特性に与える影響が大きくなり問題となってきている。

このような問題を検討する際に疑似人体（以下ファントムと呼ぶ）を使った実験やシミュレーションプログラムによる解析は有効な手段である。今回、誘電体と抵抗体の複合材料を用いたファントムを用いて携帯機のアンテナ特性が人体の影響でどのように変化するか調べ、さらにＦＤ－ＴＤ法(Finite Difference Time Domain Method)を用いた数値計算結果と比較したのでここに報告する。

2. 人体のアンテナ特性への影響

人体によるアンテナ特性の変化の要因としては、以下のようなものが考えられる。

（１） 携帯機を持つ位置
（２） 携帯機の傾き
（３） 手の影響
（４） 体の影響
（５） 顔の大きさや形
（６） 人体の電気的特性差
（７） アンテナ単体の指向性

そこでまず、５人の人に普通に携帯機を使用するつもりで、金属ケースに装着されたホイップアンテナを手に持ってもらい、その状態で水平面内の指向性を測定した。結果を図１に示す。

この結果から、個人差が非常に大きく、周波数が高くなるにつれてその差が顕著に現れていることがわかる。

次に上記（１）～（３）の条件差を小さくするため、図２に示すように金属ケースを手で持たない状態で垂直に立て、耳から

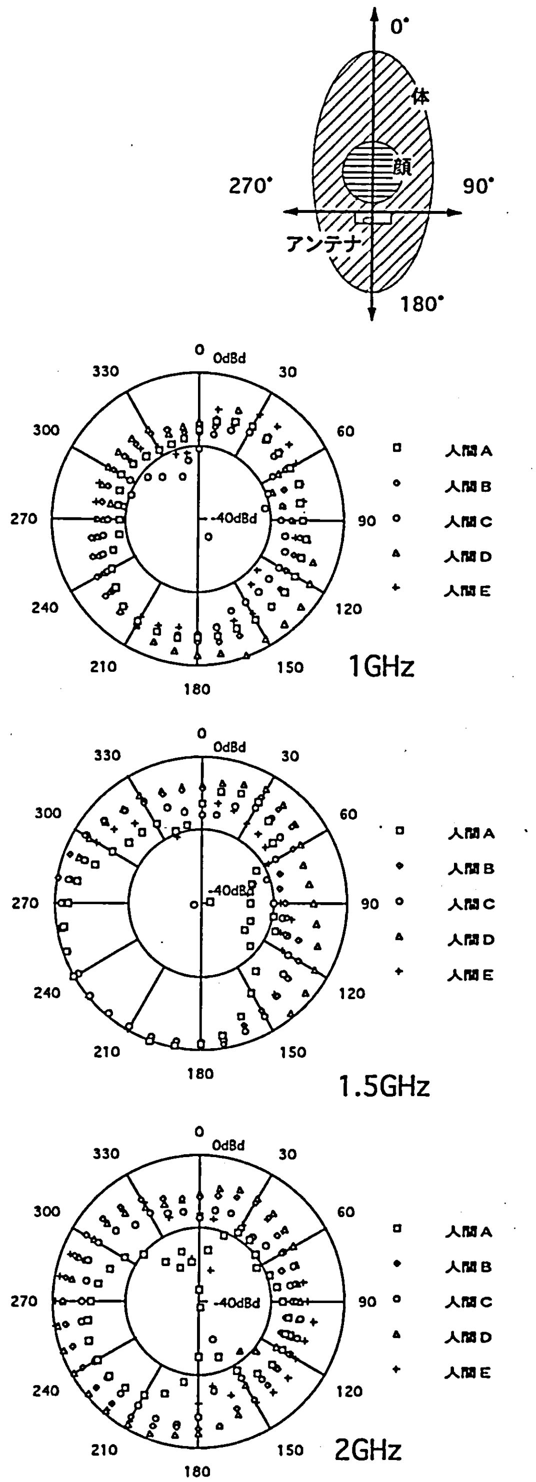


図１　人間が持った場合のアンテナ特性
（持ち方を特に指定しない場合）

の距離を約１３mm一定とし耳の上の位置に給電点がくるように固定して再度、水平面内の指向特性を測定した。

結果を図３に示す。この結果から指向特性の個人差がかなり少なくなったことがわかる。しかしながら１ＧＨｚでは60度方向のアンテナ利得に10ｄＢほどの個人差がある。

このアンテナの場合には、２ＧＨｚでは顔の方向と、その逆の方向とで同じ程度の利得があることがわかる。

これらの現象が、実際の人間を使わなくてもファントムを使った実験でも再現されれば、実験が行い易くなる。またＦＤ－ＴＤ法を用いた計算と実験データとの一致性が良ければアンテナの評価の有効な手段となるので、この解析方法がどの程度実測と合うかを検討する。

以下に詳細を述べる。

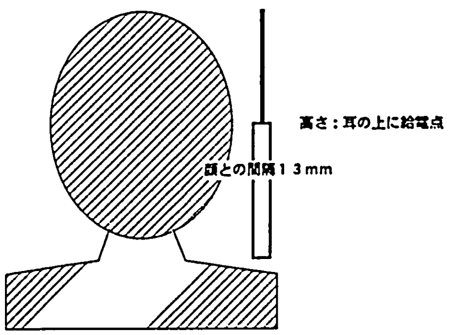


図２　実験方法

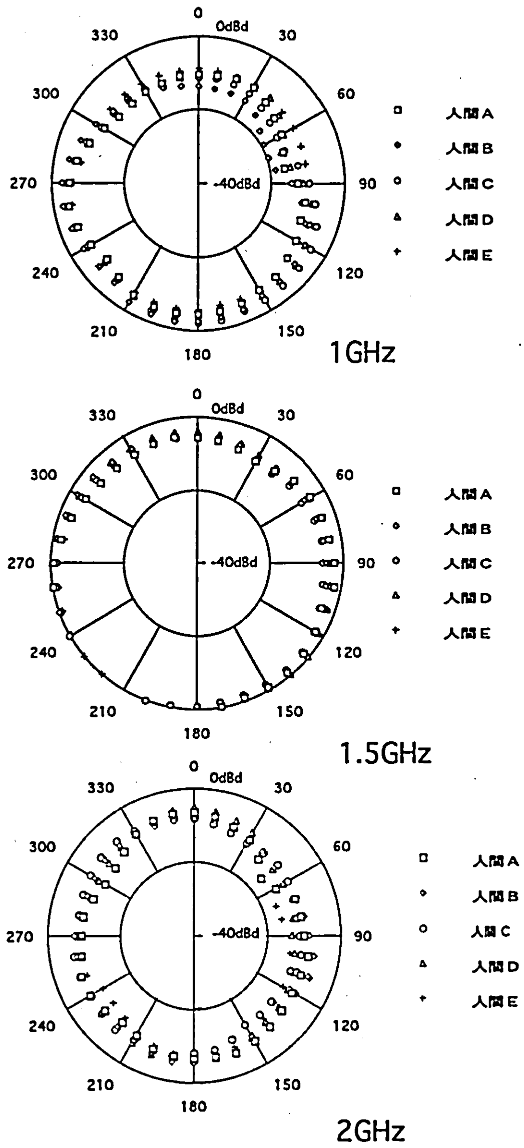


図３　アンテナの位置や角度に限定を加え、手で持たない場合のアンテナ特性

3.　ＦＤ－ＴＤ法による計算

3.1　計算の基本式

ＦＤ－ＴＤ法 [1] は複雑な形状のモデルの計算に有効であり、この種の計算ではよく使われる方法であるため詳細は省略し、簡単にその計算方法および手順のみを述べる。まず式（２－１）、式（２－２）に示すマクスウェルの方程式の２つ回転の式を微少時間△ｔを用いて時間差分表示すると、式（２－３）、式（２－４）の形となる。

$$\frac{\partial Hs}{\partial t} = -\frac{(\mu - \mu 0)}{\mu}\frac{\partial Hi}{\partial t} - \frac{1}{\mu}(\nabla \times Es)$$

(2-1)

$$\frac{\partial Es}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}Es - \frac{\sigma}{\varepsilon}Ei - \frac{(\varepsilon - \varepsilon 0)}{\varepsilon}\frac{\partial Ei}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon}(\nabla \times Hs)$$

(2-2)

$$\mu H^{s}_{n} = \mu H^{s}_{n-1} - (\mu - \mu 0)\Delta t H^{i}_{n} + \left(\nabla \times E^{s}_{n-0.5}\right)\Delta t$$

(2-3)

$$\left(\varepsilon + \sigma\Delta t\right)E^{s}_{n} = \varepsilon E^{s}_{n-1} - \sigma\Delta t E^{i}_{n} - (\varepsilon - \varepsilon 0)\Delta t E^{i}_{n} + \left(\nabla \times H^{s}_{n-0.5}\right)\Delta t$$

(2-4)

ここで

H_i、E_i ：入射波　　H_s、E_s ：散乱波

ε、μ、σ ：比誘電率、透磁率、導電率

更に各空間の代表点の電磁界をＹｅｅの定式化[2] にならって変数配置し、各セル内の電磁界に対して空間的にも差分化して時間軸上、随時計算を行っていくという手法を用いている。

3.2 計算パラメータ

入力波形や時間ステップ等の計算パラメータを表１に示す。また、吸収境界条件はＭｕｒの１次の吸収境界条件 [3] を用いた。

入力波形	ｶﾞｳｼｬﾝｳｪｰﾌﾞ（幅32ｽﾃｯﾌﾟ）
空間ｾﾙｻｲｽﾞ	Δx=2mm Δy=2mm Δz=2mm
空間領域	x方向160ｾﾙ y方向150ｾﾙ z方向150ｾﾙ
時間ｽﾃｯﾌﾟ	3.852ps
計算時間領域	2000ｽﾃｯﾌﾟ

表１　計算パラメータ

4. 実験結果

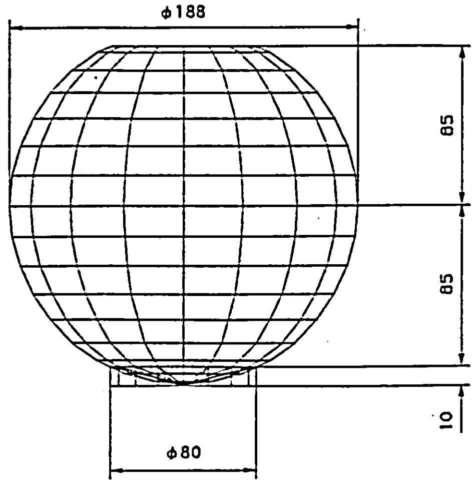
4.1 ファントムモデル

今回、実験に用いたファントムの形状および材料特性を図４、図５に示す。

図４に示すファントムの形状は、定量的に調べやすいように直径188 mmの球状のものとした。

また、図５に示す特性は、ファントム材料の室温（25℃）における比誘電率と導電率の周波数特性データである。（この材料特性は同軸のSパラメータ法により求めたものである。）

このグラフに参照してある高含水組織、低含水組織のデータは1972年にJohnsonらによってまとめられたデータ［4］から引用した。高含水組織は筋肉等のモデルで、低含水組織は骨等のモデルである。このデータと比較すると今回のファントム材料は高含水組織に近いモデルである。



単位: mm

図４　ファントム形状

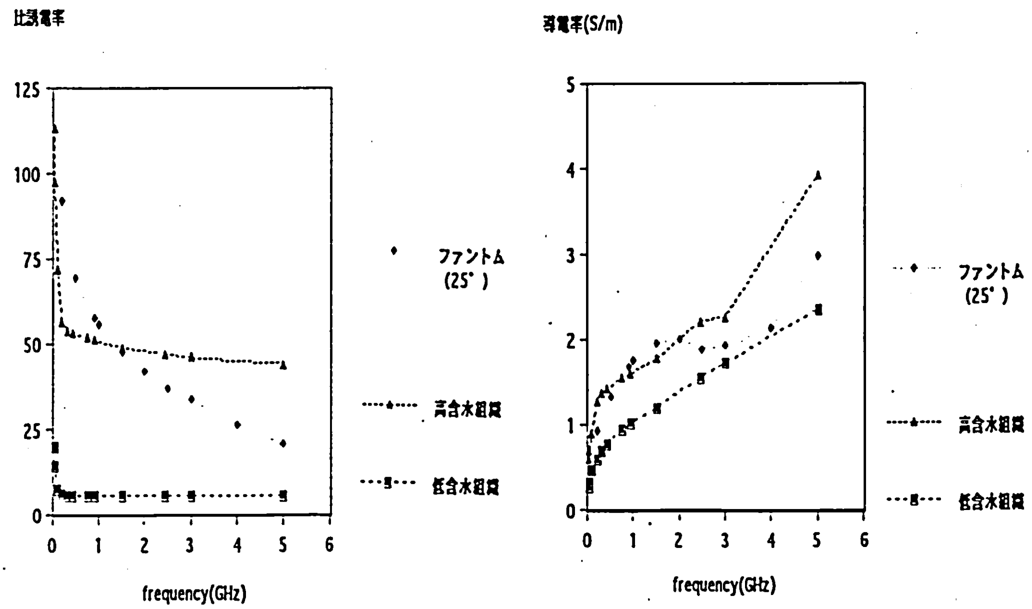


図５　ファントムの比誘電率、導電率

4.2　アンテナ特性

今回用いたアンテナ単体の特性について述べる。今回用いたアンテナは、図７に示すような金属ケースに装着された直径２mm長さ１００mm(１．５ＧＨｚで１／２波長)のホイップアンテナである。このアンテナの指向特性の測定結果を図８に示す。ｙｚ面内でみると、1.5ＧＨｚでは±ｙ方向に強く電波がでるが、１ＧＨｚでは－ｚ方向側に２ＧＨｚでは＋ｚ方向側にビームがチルトしていることがわかる。ｘｙ面では、z方向のビームチルトのため２ＧＨｚで水平面の利得が落ちている。このようなビームチルトも人体を含めたアンテナ特性に影響を与える。

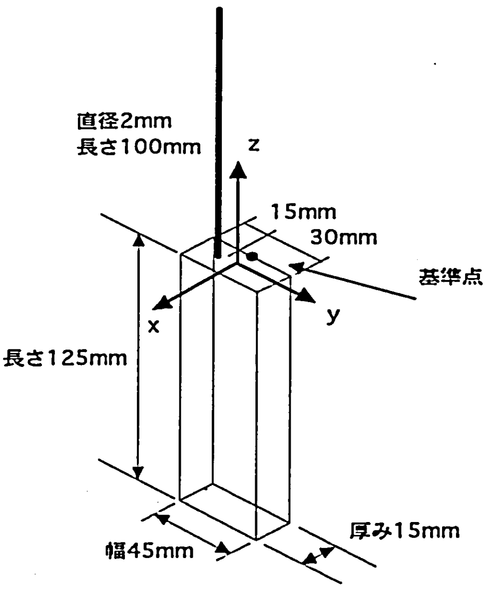


図７　アンテナ形状

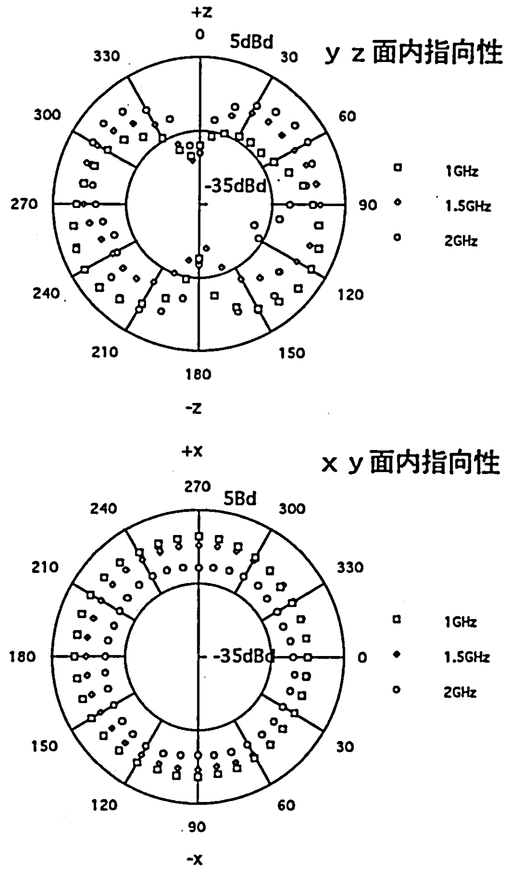


図８　単体の指向性

4.3　ファントムによるアンテナ特性変化

次に上記アンテナを4.1で示したファントムに近づけて、水平面内の特性の変化について調べてみた。この実験においては、ファントムのどの位置にアンテナを置くかも重要なパラメータであるが、まず最初に、図７に示す基準点を図９の座標系においてｘ=13、ｙ＝ｚ=0の位置に設定した時の指向性を基準として、測定及び計算を行い人体によるデータ（図３の平均値）と比較した。結果を図１０に示す。

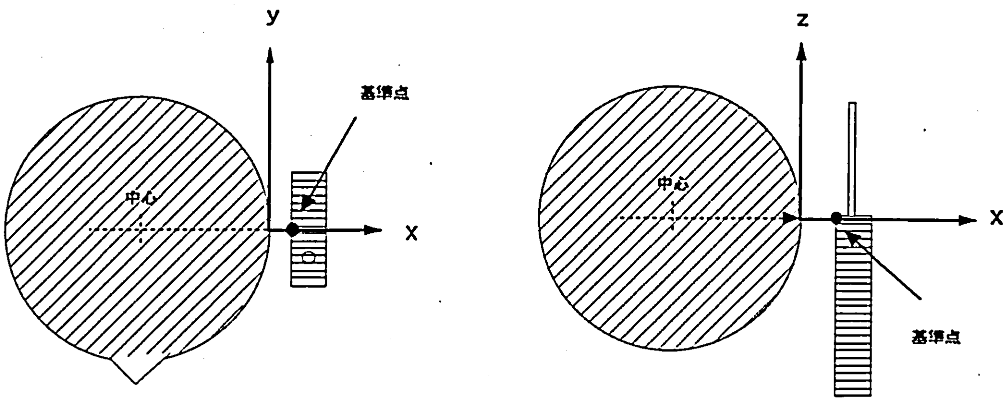


図９　アンテナとファントムの座標系

これらのデータから、

（１）　１ＧＨｚ帯では顔側の利得にファントムと現実の人間で差がある。

（２）　ファントムモデルでは周波数が高くなると人間の頭側に強く電波が出るが、現実の人間ではその傾向が少ない。

（３）　周波数が高くなってくると、計算値と実験値及びファントムと人間モデルとの差が大きくなる。

ことがわかった。そこで次に顔側と顔と反対側のアンテナ利得の差を詳しくみるためにその周波数特性を求めてみた。結果を図11に示す。

この結果から、ファントムの実験および計算モデルでは1.1ＧＨｚ以下で顔と顔と反対側の利得がほぼ等しくなっているのに対して現実の人間では、顔側の利得が落ちている。これは、1.1ＧＨｚ以下ではアンテナの指向性が下側へチルトしているため体に遮られるのに対してファントムの実験と計算結果は体の部分がないためと考えられる。今回のファントムは顔のみの評価であるが現実にどのような指向性のアンテナでも評価できるようにするためには体も考慮する必要があることがわかった。

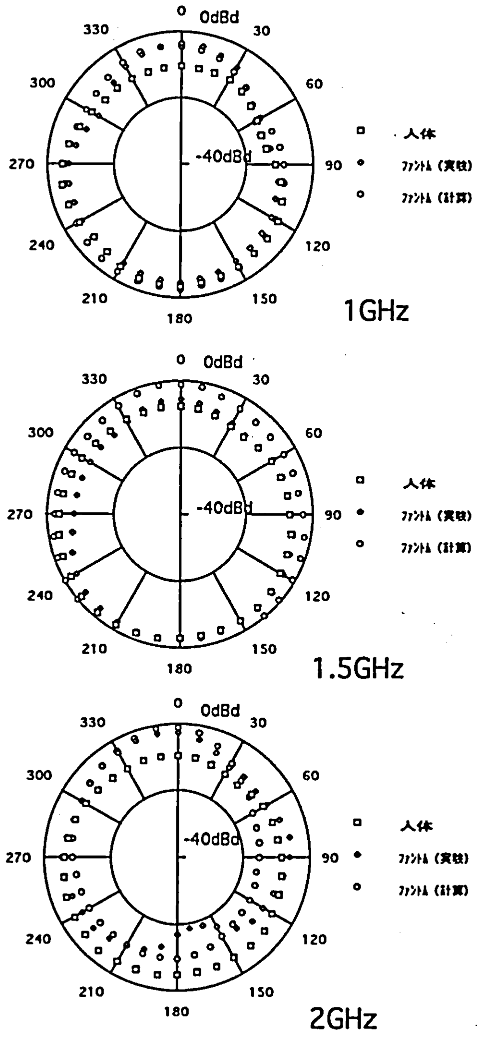


図１０ファントムと人間のデータ比較

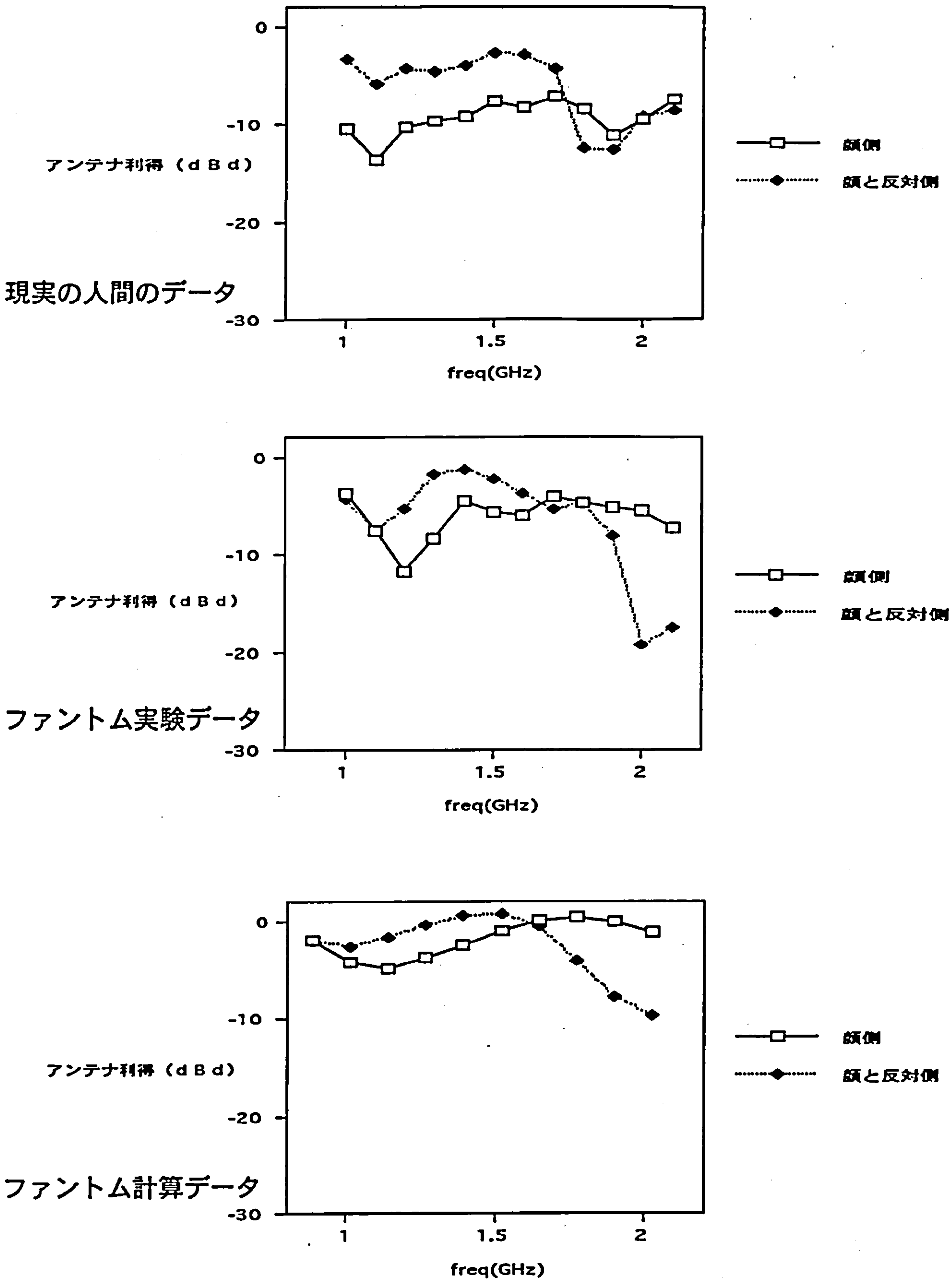


図１１　顔側と顔と反対側のアンテナ利得の周波数変化

4.4　アンテナの位置を変えたときの特性変化

次に、2.で述べた６０度付近の利得のばらつきの原因と4.3で示した２ＧＨｚ帯でのファントムと人間のデータの差について、アンテナの位置が適当でないという推察のもとで、アンテナとファントムの位置を前後左右に変化させて顔側と顔の反対側のアンテナ利得の周波数特性および６０度方向のアンテナ利得の周波数変化を調べた。

アンテナの位置（基準点）のｘ座標を変えたときの顔側と顔と反対側のアンテナ利得の周波数変化データを図12に示す。

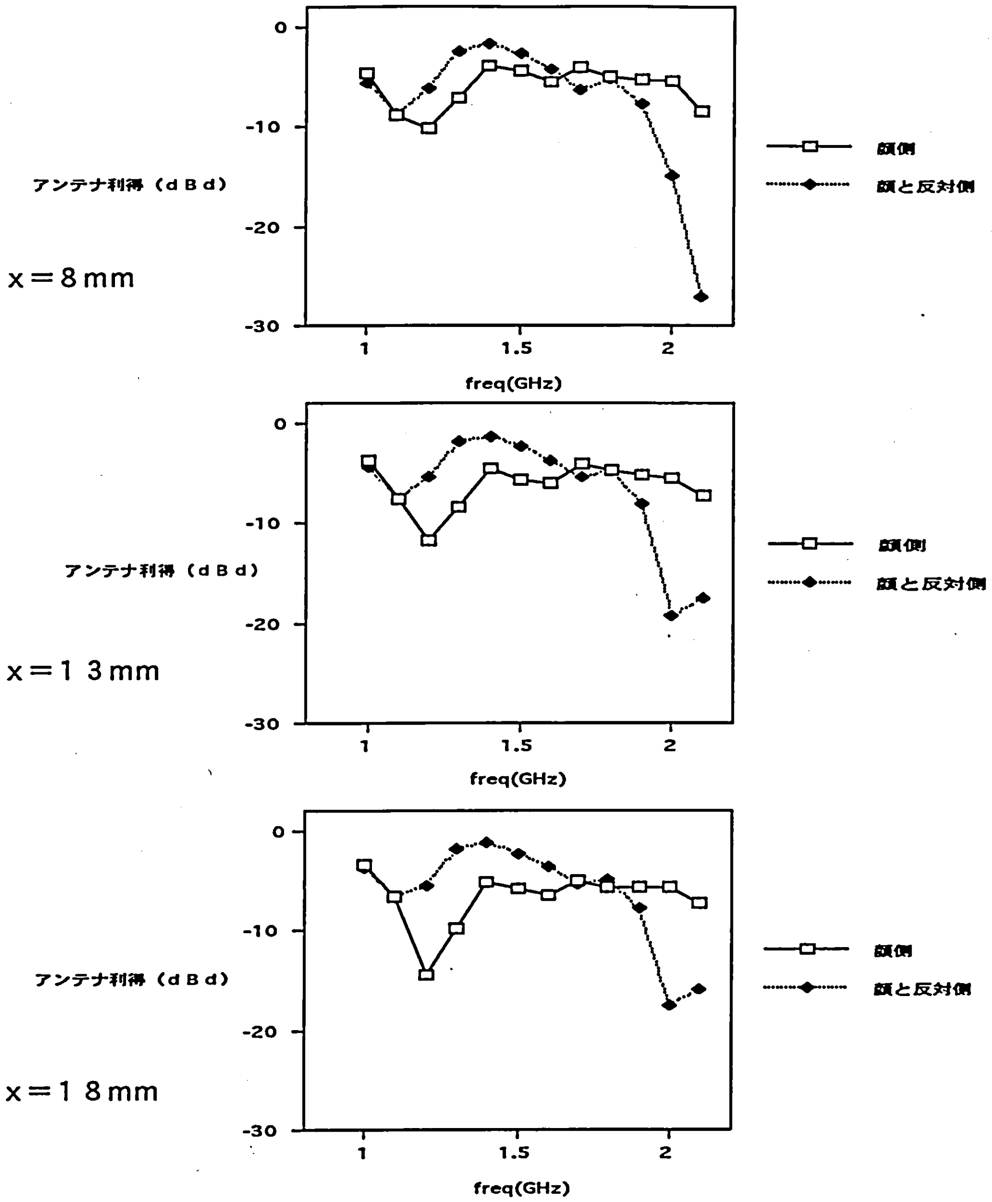


図１２　ｘ方向データ

この結果からｘ座標を±５mm程度変えても２ＧＨｚ帯のアンテナ利得に差がないことがわかった。次にｙ方向に位置を変えてデータをとった。結果を図１３に示す。

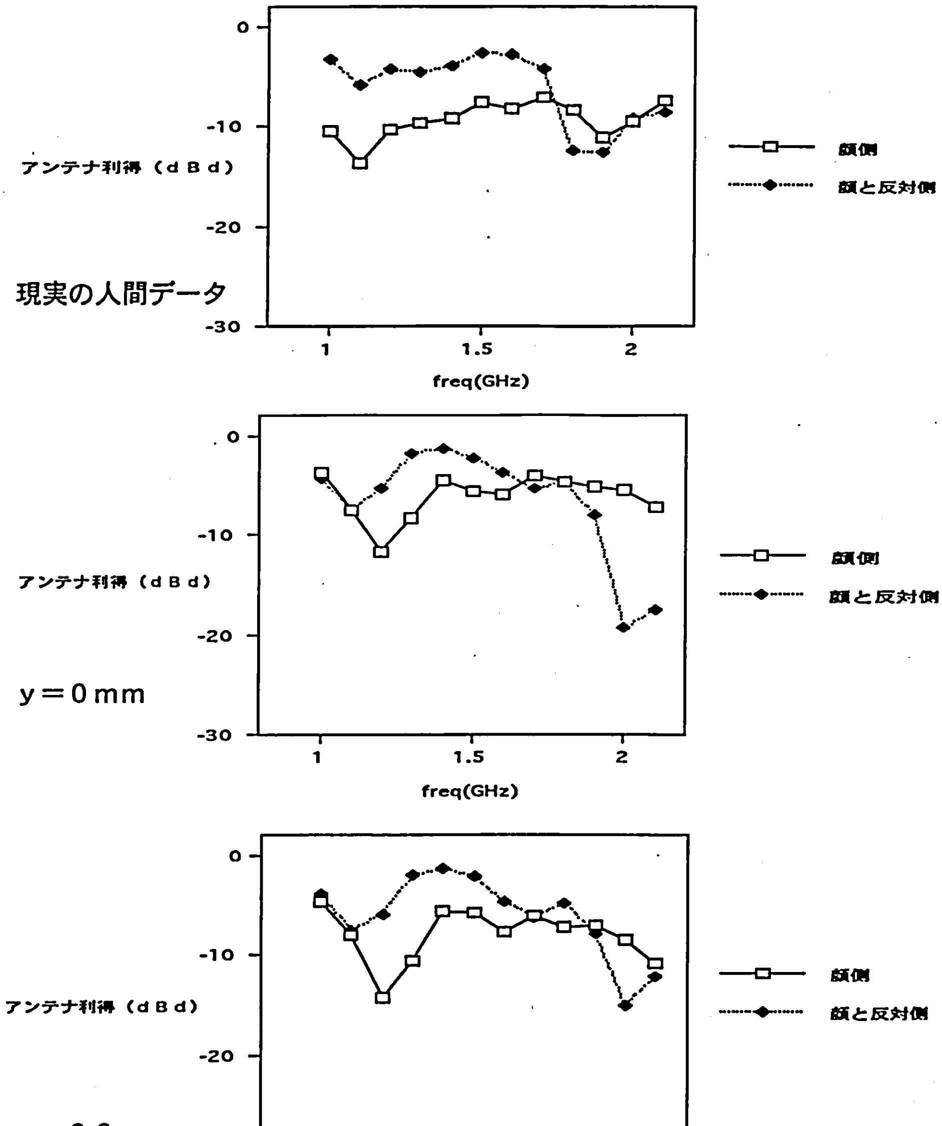


図１３　ｙ方向データ

この結果から、ｙを大きくすると２ＧＨｚ帯で顔側と顔と反対側の利得差が少なくなり、現実の人間のデータに近づくことがわかる。
最後にｚ方向の位置を変えて測定した。結果を図１４に示す。

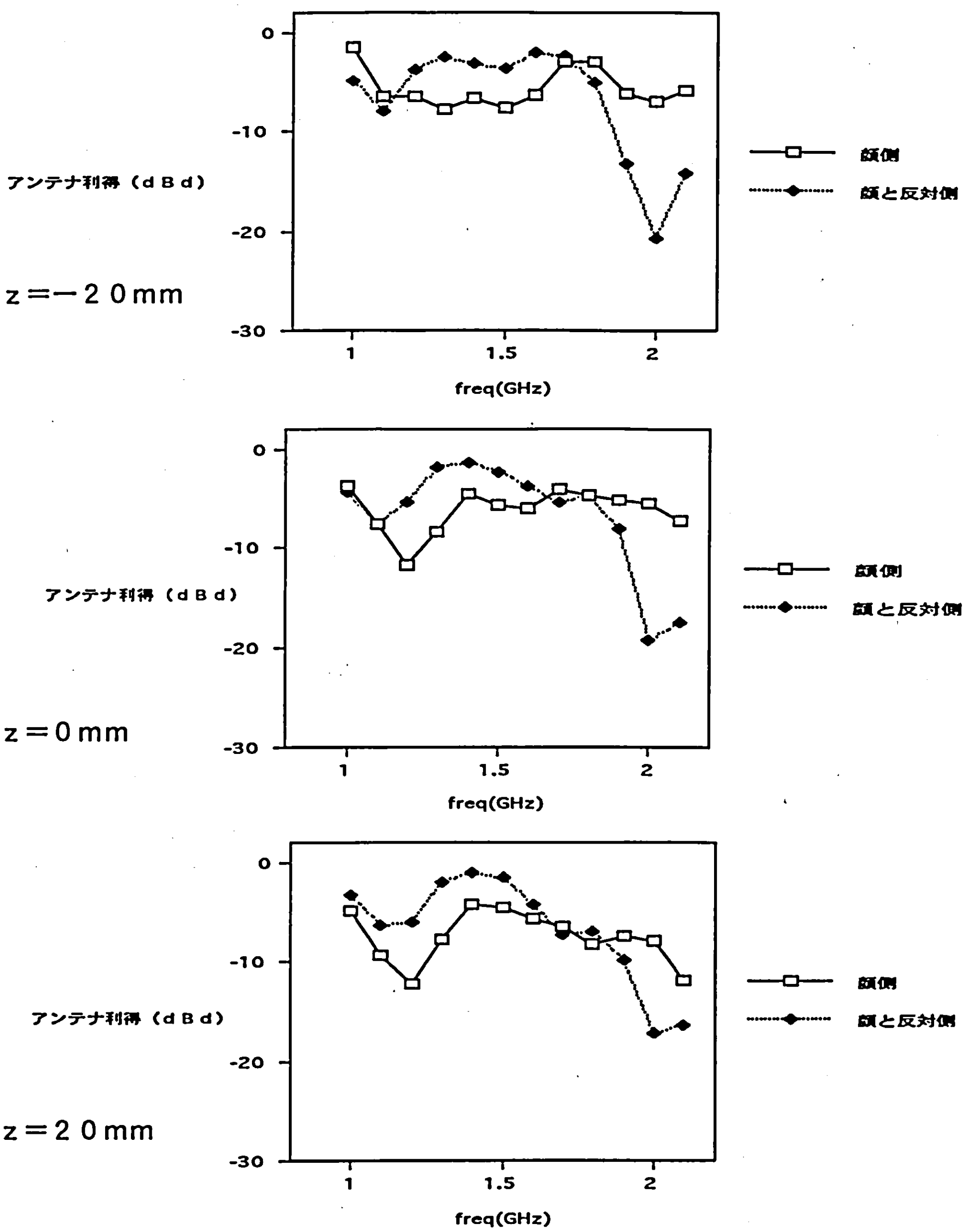
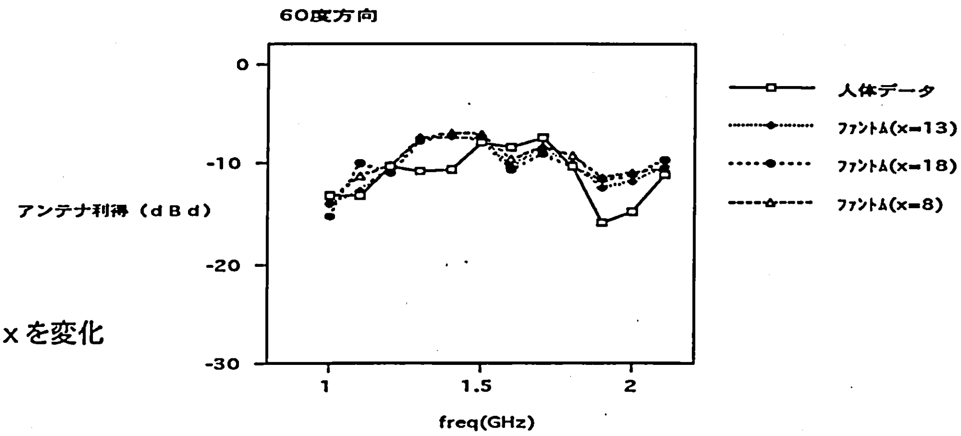


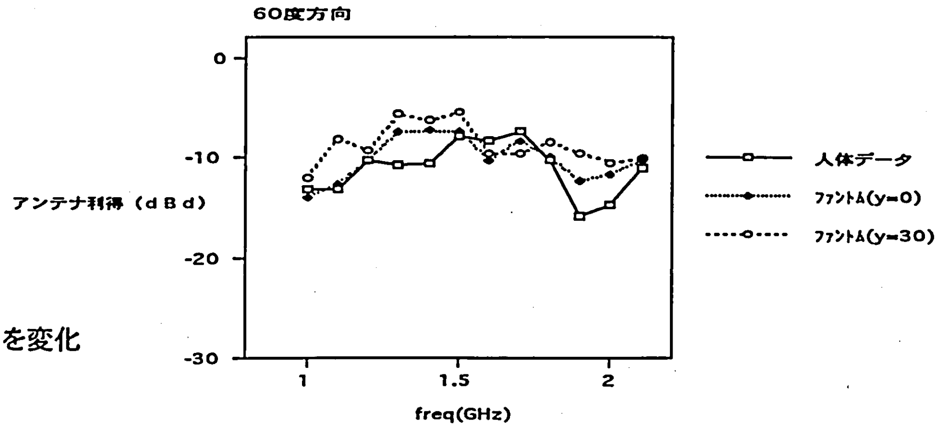
図１４　ｚ方向データ

この結果から、２ＧＨｚ帯での顔側のアンテナ利得はｚ＝－２０mmのデータが現実の人間に近いが、顔と反対側のデータはどの場合もあまり一致していない。

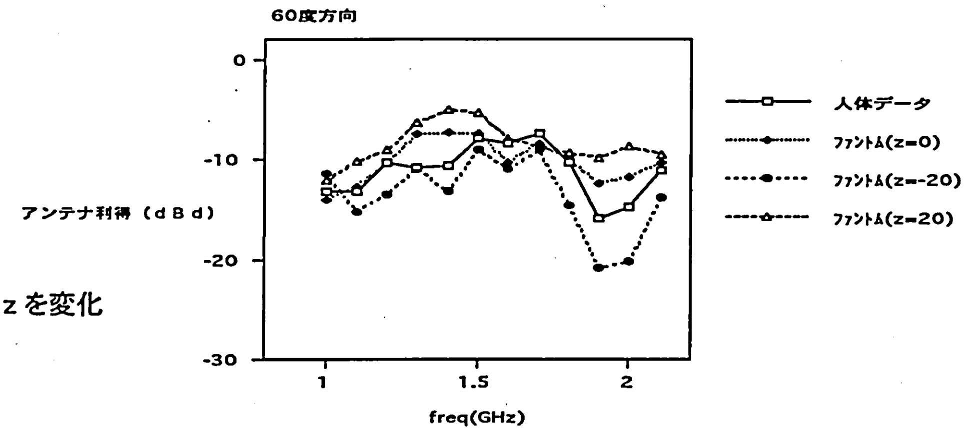
これらまでのデータから以下のことがわかった。
（1）　２ＧＨｚ帯での顔側の特性にはＺ方向の位置が影響する。
（2）　２ＧＨｚ帯での顔と反対方向の特性にはｙ方向の位置が影響する。
最後に、６０度方向のアンテナ利得についてｘ，ｙ，ｚ座標を変えて比較したデータを以下に示す。



ｘを変化



ｙを変化



ｚを変化

図１５　６０度方向の特性変化

この結果の周波数特性から判断すると、ｚ＝０～－２０ｍｍの間で人体データに近いことがわかる。

6. まとめ

今回、現実の人間に近接した携帯機用アンテナの特性とファントムに近接したものと比較し、１．５ＧＨｚではファントムを用いた指向性が現実の人間のそれとほぼ近い特性が得られることがわかった。また、ＦＤ－ＴＤ法を用いた計算結果も、ファントムの実測データとほぼ一致しており使えそうなことがわかった。

しかしながら、周波数を変えたとき１ＧＨｚ付近での顔側のアンテナ利得や２ＧＨｚ帯での全体的な指向性に多少差があることがわかった。この原因を調べるため、ファントムに対するアンテナの位置を変えて実験を行うことにより以下のことが分かった。

（ａ）ビームが下側にチルトするアンテナの場合、体を含むファントムモデルが必要である。

（ｂ）図４に示す形状のファントムを使用する場合はアンテナの位置をファントムの中心から後方、下方へずらす必要がある。

今後は、

（１） ＦＤ－ＴＤ法を用いて形状の異なったファントムの検討

（２） 手や体を含めた実験や計算

（３） アンテナの傾きによる特性変化

（３） この計算方法や疑似人体を用いて感度の劣化の少ない携帯機用の小型アンテナの開発

を行っていく予定である。

最後に、FD－TD法のプログラムを提供していただき、貴重なアドバイスを頂いているペンシルバニアステート大学のＤｒ．Ｒａｙｍｏｎｄ Ｌｕｅｂｂｅｒｓ氏ならびに、ファントム材料やそのデータを頂いた当社第3開発グループ湯川氏にこの場を借りて感謝の意を表します。

＜参考文献＞

[1] Luebbers R.J.,"Finite Difference Time Domein Method for Electromagnetics",CRC Press,Inc (1993)

[2] Yee K.S. : "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotoropic media",IEEE Trans.Antenna & Propag.,AP-14,3,pp.302-307 (1991)

[3] Mur G. : "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domein electromagnetic-field equations",IEEE Trans.Electromagn.Compat.,EMC-23,4,pp.377-382 (1981)

[4] Johnson C. : "Nonionizing electoromagnetic wave effects in biological materials and systems",Proceedings of the IEEE,vol.60,No.6 (1972)

輻射科学研究会資料　RS94-24

ミリ波帯における金属表面抵抗の非接触測定

谷崎 透　斉藤 篤　石川 容平

（株）村田製作所　技術開発本部

平成７年３月６日

1. はじめに

最近，急増する電波需要に対応するため広いスペクトラムを持つ「ミリ波」に注目が集まり，その実用化に向けて通信システムの検討やミリ波集積回路，ミリ波部品の開発が盛んに行われている．高いQを持つ誘電体共振器はこの周波数においてもなお有効であり，ミリ波誘電体材料の開発やその測定評価技術の確立が急がれている．

我々は，以前に入出力線路にＮＲＤガイド[1]を用い，共振系として両端開放型誘電体共振器を用いた複素誘電率評価法の有効性を報告した[2]． また，この評価に用いる測定治具の導波管－ＮＲＤガイド変換部を改良し，治具本体と一体化構造とすることにより測定再現性，設計性，加工性の向上させた新型治具について報告した[3]． 一方，低損失材料の誘電正接を精度よく測定するには，金属の表面抵抗をあらかじめ測定することが不可欠である．我々は，測定治具の必要箇所を取り外し，$TE_{01\delta}$モード共振器を用いた非接触相対測定法[4]を用いて3GHzで評価し，使用周波数へ周波数換算した表面抵抗値を使用していた．しかし，この近似の有効性は明らかでなく，使用周波数における金属の表面抵抗の簡便で高精度な測定法が必要であった．

本研究では，同心円状に配置し互いに結合した一対のTE_{0m1}モード共振器を標準共振器として用いてその偶モードと奇モードの共振波形を測定し，各モードの無負荷Ｑの差から表面抵抗を導出する方法を提案する．本測定法の特長は，試料測定と同じ治具のみを用い，かつ一回の標準共振器の装着で簡便に表面抵抗を測定できることにある．

まず，複素誘電率の測定治具について述べる．次に，この治具の金属表面抵抗の測定法について述べる． 次に，測定例として60GHz帯測定治具の表面抵抗の測定結果を示す．あわせて，誘電体共振器材料の複素誘電率の測定結果を示し，本測定法の有効性について述べる．

2. 複素誘電率の測定治具

本研究で用いる誘電体材料の複素誘電率の測定治具は，図１のように治具本体と変換器部分が一体化された構造である．材質は，硬質アルミ(A7075)を用いている．本測定には，図２のように円板試料を低誘電率の支持台で上下から挟み込むように固定した$TE_{0m\delta}$モードで共振する両端開放型誘電体共振器を用いる．
本共振器は，直径Ｄ，厚みＬ，比誘電率ε_r，誘電正接ｔａｎδの誘電体円板試料を，間隔Ｈだけ隔てた表面抵抗R_Sの２枚の平行導体板の間に配置して構成される．低誘電率の上下支持台は，直径はそれぞれD_{s1}，D_{s2}，厚みはそれぞれh_{s1}，h_{s2}，比誘電率はε_s，誘電正接は$\tan\delta_s$である．

共振器の入出力線路として用いるＮＲＤガイドは，共振器の平行導体板を共有している。誘電体ストリップの材料としては，ミリ波帯で低損失な比誘電率2.04のＰＴＦＥを用いており，その寸法は60GHz帯で一般に使用されている幅2.5mm，高さ2.25mmとした[5]．

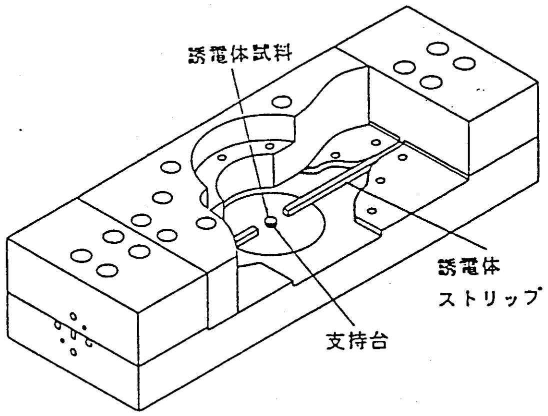


図１　測定治具の構造

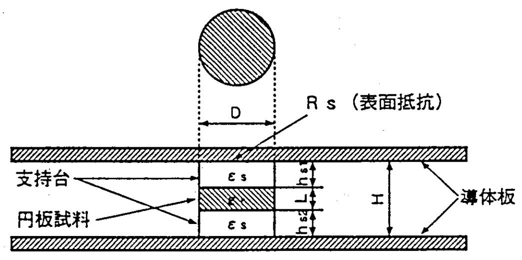


図２　両端開放型誘電体共振器の構造

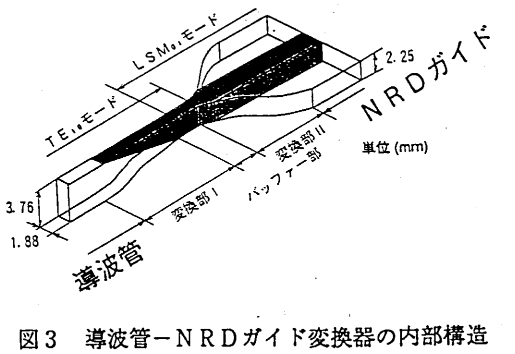


図３　導波管－ＮＲＤガイド変換器の内部構造

変換器部分は図３のような内部構造を持ち，導波管の基本伝送モードのTE_{10}モードからＮＲＤガイドの基本伝送モードであるLSM_{01}モードへの変換を行っている．前回の報告[3]では，テーパ形状を直線としていたが今回は，コサインカーブを採用しさらなる変換特性の改善と小型化を実現した．図１において試料共振器の代わりに入出力線路間を誘電体ストリップで接続した状態の反射特性の測定結果を図４に示す．57～65GHzの周波数帯域において，共振特性測定に使用可能なレベルの反射損失20dBが得られている．

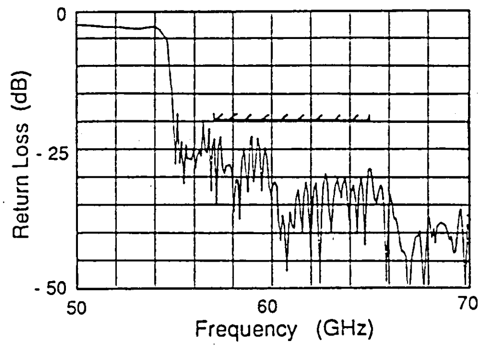


図４　測定治具の反射特性

3．　金属表面抵抗R_sの測定法

3．１　R_s測定精度の設定

金属の表面抵抗R_sは，金属表面がなめらかな場合次式で与えられる．

$$R_s \equiv \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2\sigma}} = \frac{1}{\delta\sigma} \qquad (1)$$

ここで，δは表皮深さ，σは金属の導電率を表す．しかし，実際には表面の仕上げの程度（粗さ），表面の経時的化学変化（酸化など），周波数（波長），電流分布等の要因でR_sの値は増加する．したがって，R_sの測定は使用周波数において測定毎に行う必要がある．

一方、R_sの測定精度は誘電体材料のｔａｎδの算出に影響するため，低損失材料のｔａｎδを高精度に求めるにはR_sを高精度に測定する必要がある．たとえば，前述の測定法でε_r=24の材料を評価する場合，ｔａｎδを2%以下の精度で測定したいときはR_sを10%以下の精度で求める必要がある（図５）．

マイクロ波帯でのR_sの測定には，空胴共振器を用いた方法[6]，二枚の平行金属板試料の間に誘電体共振器を挟んで構成されるTE_{0m1}モード共振器を用いた方法[7]などがある．一方，我々の場合は$TE_{01\delta}$モード共振器を用いた非接触相対測定法[4]を用いて3GHzで評価し，使用周波数へ周波数換算した値を使用していた．しかし，この近似の有効性は明らかでないことから，使用周波数におけるR_sの簡便で高精度な測定法が必要であった．そこで，これを解決する測定法を考案した．

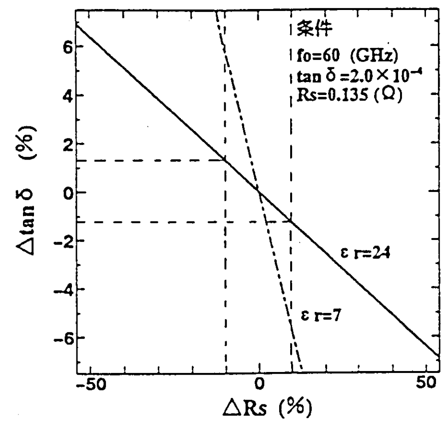


図５　導体板のR_sと誘電体材料のｔａｎδの関係

3．２　測定原理と測定公式

R_sの測定は，試料共振器の代わりにR_s測定用標準共振器を前述の測定治具に実装して行う．標準共振器は，同じ特性（比誘電率ε_x，誘電正接ｔａｎδ_x）を持つように同一試料より切り出したリング状誘電体共振器Ｒ１（TE_{031}モード）と円柱状誘電体共振器Ｒ２（TE_{021}モード）を同心円状に上下からＰＴＦＥ製の支持台で挟み込むように組み立てられた構造である（図６）．等価回路上ほぼ等しい共振周波数を有する二個の共振器をこのように配置すると，互いに結合し，同図に示すような磁界分布をもった偶モード（TE_{051}モード）と奇モード（TE_{041}モード）の共振状態が存在する．　モード名は，結合共振器を一つのTE_{0m1}共振器と見たときの命名法によるものである．この両モードの磁界分布の違いにより上下導体面において奇モードの結合部分の電流密度が偶モードよりも強く，奇モードの導体損によるＱ，Q_c^{odd}が偶モードの導体損によるＱ，Q_c^{even}より低くなる．　この差はR_sに比例するため，各モードの電磁界分布を計算することによりR_sが求まる．Q_c^{even}やQ_c^{odd}は，単独で測定することはできないが，各モードの誘電体損によるＱ，Q_d^{even}やQ_d^{odd}と併せて各モードの無負荷Ｑ，Q_u^{even}やQ_u^{odd}として測定できる．

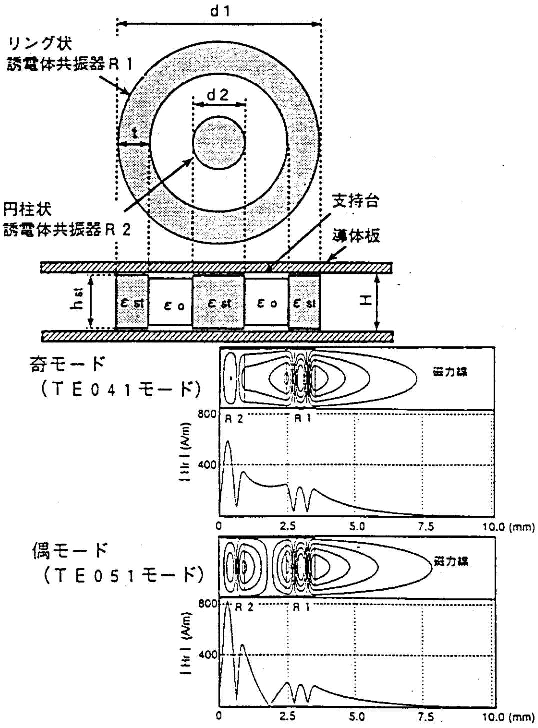


図6　標準共振器の構造と磁界分布

図7に，標準共振器を測定治具に実装したときの共振特性を示す．この特性より，偶モードの共振周波数 f_o^{even}，挿入損失 IL^{even} と負荷Q，Q_L^{even}，奇モードの共振周波数 f_o^{odd}，挿入損失 IL^{odd} と負荷Q，Q_L^{odd} をそれぞれ測定し，Qu^{even} と Qu^{odd} を求める．

R_S の測定公式は，各共振モードに対して成り立つQに対する関係式から次式が導出される．

$$Rs^{even} = \frac{2\pi f_o^{even}\cdot\mu_o\cdot\left[(f_o^{odd}/f_o^{even})\cdot A^{odd}\cdot\frac{1}{Q_u^{even}} - A^{even}\cdot\frac{1}{Q_u^{odd}}\right]}{(f_o^{odd}/f_o^{even})\cdot A^{odd}\cdot D_A^{even} - \sqrt{f_o^{even}/f_o^{odd}}\,A^{even}\cdot D_A^{odd}} \tag{2}$$

ここで，R_S^{even} は f_o^{even} における表面抵抗を表す．A^{even} は偶モード共振器内に蓄積されているエネルギーの集中度，A^{odd} は奇モード共振器内に蓄積されているエネルギーの集中度，D_A は減衰パラメータを表し，これらは ε_{st} と構造パラメータより有限要素法とkajfezの摂動論[8),9)]を用いて各々次式で計算される．

$$A^{even} = \frac{2\varepsilon st(-\frac{\partial f_o^{even}}{\partial \varepsilon st})}{f_o^{even}} \;,\; A^{odd} = \frac{2\varepsilon st(-\frac{\partial f_o^{odd}}{\partial \varepsilon st})}{f_o^{odd}} \tag{3}$$

$$D_A^{even} = \frac{2(-\frac{\partial f_o^{even}}{\partial H})}{f_o^{even}} \;,\; D_A^{odd} = \frac{2(-\frac{\partial f_o^{odd}}{\partial H})}{f_o^{odd}}$$

また，測定周波数に近い周波数における表面抵抗は周波数の比の平方根に比例すると仮定した．ε_{st} には，2章の方法で測定した値を用いる．

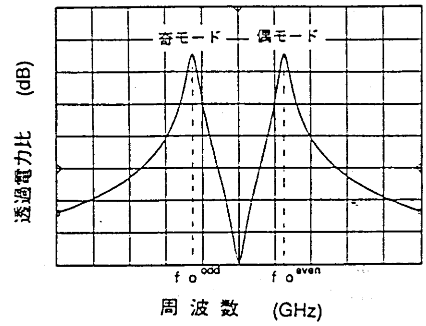


図7　標準共振器の共振特性

3．3　標準共振器の構成

リングまたは円柱型共振器の軸を平行にして結合した二つの TE_{0ml} モード共振器は軸対称性が失われ，Ez成分が発生するためハイブリッドモードになる．そのため，三次元的電磁界解析が必要となり精度，計算時間ともに一般的に標準測定用としては適さないといえる．そこで本研究では，軸を共通にして配置した結合共振器構造とした．これによって軸対称性は完全に保たれ TE_{0ml} モードの二次元的電磁界解析で標準共振器の測定結果を数値処理することが可能である．

図6に示した標準共振器に用いた誘電体共振器の材料は，Ba(Mg, Ta)O₃ であり，その比誘電率 ε_{st} は24，誘電正接 $\tan\delta_{st}$ はミリ波帯で良好な値を示し，60GHzで $1/\tan\delta_{st}$ の値は約6000が得られている．なお，PTFE製支持台を使用し誘電体共振器を導体板から浮かしたのは，二個の共振器の固定と導体板の磨耗劣化を防ぐためである．支持台厚みは，電磁界分布への影響が無視できる範囲を計算し，50μmとした．

3．4　標準共振器の設計

偶モードと奇モードの電流分布の差によるQcの差から R_S を求めるときには，偶モードと奇モード共振における共振器R1とR2の蓄積エネルギーW1，W2の入り方が重要である．そこで、この点に着目し、標準共振器を設計した。以下その手順について述べる．

まず，結合していない状態での自己共振周波数 $f1'$ と $f2'$ が等しい寸法のもとで結合係数kとQcの差ΔQcの関係を電磁界計算により求め，この結果から測定精度を考慮しΔQcが大きくなるR1の外径寸法

d1，厚み寸法tを設定した．ここで，結合係数kは，偶モードの共振周波数f_o^{even}と奇モードの共振周波数f_o^{odd}との差を用いて次式で定義した．

$$k \equiv \frac{2(f_o^{even}-f_o^{odd})}{(f_o^{even}+f_o^{odd})} \tag{4}$$

次に，Qex^{even}とQex^{odd}を一致させるため，入出力端子であるNRDガイドの誘電体ストリップの基準面位置における磁界成分Hzが，共振エネルギーを一定にした状態で偶モードと奇モードで一致するように，R2の外径寸法d2を調整した．これにより，$Qex^{even}=Qex^{odd}$ が達成でき，結合状態にある互いに形状の異なる一組の標準共振器の自己共振周波数がほぼ等しい（$\Delta f \fallingdotseq 0$）ことが設計上保証できることになる．電磁界計算には，二次元の有限要素法を用いた．

3．5　R_sの測定結果

以上の方法で設計し，製作した標準共振器の共振波形を図8に，この波形から測定された各パラメータとR_sの計算結果を表1に示す．この結果のΔQexによる共振器の蓄積エネルギー比Rwの理想状態からのずれはわずかでありこれによる誤差は無視できると結論づけた．

4．　複素誘電率の測定例

本測定装置を用いて60GHz帯での誘電体共振器の複素誘電率の測定を行った．測定試料は，Ba(Mg, Ta)O_3（ε_r=24，当社製）である．共振モードは，$TE_{01\delta}$モードの場合共振器サイズが小さく取り扱いにくいため$TE_{02\delta}$モードとした．測定された共振波形を図9に，試料寸法と測定結果を表2に示す．R_sは，表1の結果を周波数換算した値を用いた．表2よりf_oの測定の再現性は，±0.005%以下である．また，Quの測定の再現性は，±1%以下である．ε_rとtanδの測定結果を，同試料を両端短絡型誘電体共振器法[10]を用いて10GHzで測定した値，各々ε_r'，tanδ'と比較する．ε_r=23.8は，ε_r'=23.81と誤差の範囲でよく一致している．また，tanδ=1.61×10^{-4}は，tanδ'=2.81×10^{-5}をf・1／tanδ＝一定と仮定し，60GHzに換算した値1.69×10^{-4}とほぼ一致している．

5．　むすび

ミリ波誘電体材料の複素誘電率測定に不可欠な金属の表面抵抗の測定法として，二個の共振器を同心円状に配置し結合させた標準共振器を用いる方法を提案し，測定原理，測定公式，測定例を示した．本測定法の特長は，複素誘電率の試料測定と同じ治具のみを用い，かつ一回の標準共振器の装着で簡便に表面抵抗を測定できることにある．また、測定による治具の磨耗劣化防止も考慮している．本方法により，我々がミリ波誘電体材料の複素誘電率測定法として提案してきた，入出力線路としてNRDガイドを用い，共振系として両端開放型誘電体共振器を用いた方法の実用性がさらに向上した．また，本方法は単独でも有用であり，他の周波数帯への応用も期待できる．

今後の課題として，各種金属材料を本方法で測定評価しR_sの測定精度の検証を行うとともに，標準共振器構造の最適化による精度のさらなる向上が考えられる．

謝辞　本研究を進めるにあたり，共振器の数値解析に対して協力頂いた株式会社村田製作所技術管理部技術コンピュータ課，五嶋制二氏，ならびに設計，実験，解析などに協力頂いた同社技術開発本部第三開発グループ開発一部，西田浩氏，塚井紀充氏に深く敬意を表します．

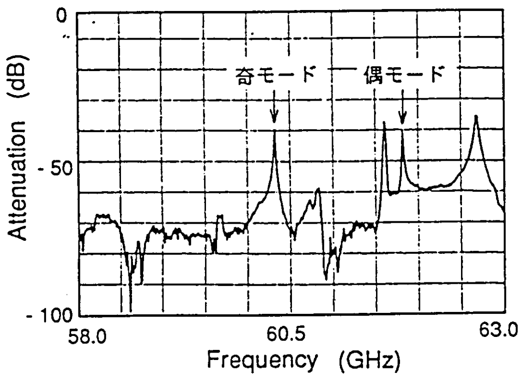


図8　標準共振器の共振特性波形

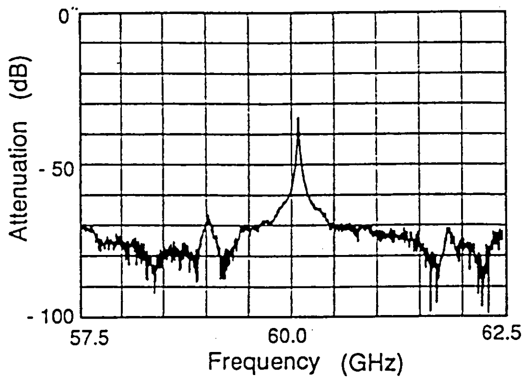


図9　誘電体試料共振器の共振特性波形
（$TE_{02\delta}$モード）

表１　表面抵抗（R_S）の測定結果

ﾓｰﾄﾞ	f_o(GHz)	IL(dB)	Q_L	Qu	Qex	A	D_A	Rs(Ω)
偶ﾓｰﾄﾞ	61.528 ±0.002	32.1 ±0.2	4644 ±50	4762 ±50	373788 ±5000	0.9580 ±0.0004	0.084 ±0.006	0.179 ±0.020
奇ﾓｰﾄﾞ	60.031 ±0.002	34.6 ±0.2	4198 ±80	4278 ±80	448069 ±5000	0.9224 ±0.0009	0.127 ±0.003	0.181 ±0.020

構造ﾊﾟﾗﾒｰﾀ　d1=7.000mm　hst=2.150mm　t=1.0698mm
d2=1.82074mm

$$Rs^{odd} = \sqrt{\frac{f_o^{odd}}{f_o^{even}}} \cdot Rs^{even}$$

表２　誘電体試料共振器の複素誘電率の測定結果

共振ﾓｰﾄﾞ	試料 No.	試料寸法(mm) D	 L	f_o(GHz) $\pm\Delta f_o$	Qu ±ΔQu	εr ±Δεr	tanδ ±Δtanδ
TE02δ	1	2.118 ±0.002	0.683 ±0.004	60.074 ±0.003	5340 ±33	23.80 ±0.08	1.64×10^{-4} $\pm0.04\times10^{-4}$
	2	2.120 ±0.002	0.685 ±0.002	60.072 ±0.002	5577 ±56	23.74 ±0.06	1.55×10^{-4} $\pm0.04\times10^{-4}$
	3	2.116 ±0.003	0.692 ±0.003	59.914 ±0.002	5351 ±27	23.86 ±0.08	1.63×10^{-4} $\pm0.04\times10^{-4}$

$$Rs = \sqrt{\frac{f_o}{f_o^{even}}} \cdot Rs^{even} = 0.177(\Omega)$$

εs=2.04，　tanδs=1.5×10^{-4}

参考文献

(1) T.Yoneyama et al.; "Nonradiative Dielectric Waveguide for Millimeter-Wave Integrated Circuits", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, pp.1188-1192. Nov. 1981.

(2) 石川容平　他；"ＮＲＤガイドを用いたミリ波用誘電体共振器材料の複素誘電率測定法"，信学技報，MW90-13. May. 1990.

(3) 石川容平　他；"導波管－ＮＲＤガイドテーパー変換部を含むミリ波帯誘電体共振器測定治具の設計"，信学春全大，SC-1-2、Mar. 1994.

(4) 西川敏夫　他；"誘電体共振器を用いた金属表面抵抗の非接触相対測定法"，信学会，半導体・材料部門全国大会，No.253, 1985.

(5) 黒木太司　他；"６０ＧＨｚ帯ＮＲＤガイドガン発振器"，信学技報，MW92-94. Oct. 1992.

(6) H.E.Bussey; "Standards and Measurements of Microwave Surface Impedance, Skin Depth Conductivity and Q", IRE Trans. Instrumentation,vol.I-9, pp.171-175, Sep. 1960.

(7) 小林禧夫　他；"誘電体円柱共振器による複素誘電率測定法に関する諸検討"，信学論，Vol. J59-B, Apr. 1976.

(8) D. Kajfez; "Incremental frequency rule for computing the Q-factor of a shielded TE_{0mp} Dielectric resonator", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-32, pp.941-943. Aug. 1984.

(9) 小林禧夫　他；"円柱と平板により構成される誘電体共振の電磁界解析"，信学技報，MW89-55. Jul. 1989.

(10) Y.Kobayashi et al.;"Microwave Measurement of Dielectric Properties of Low-Loss Materials by the Dielectric Rod Resonator Method", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-33, pp.586-592. Jul. 1985.