

輻射科学研究会資料

RS. 96-1

不規則金属表面の表面プラズモンモードの
励振と局在現象

笹倉 芳明, 王 志良, 小倉 久直, 北野正雄

(京都大学 工学部)

1996 年 5 月 17 日

輻射科学研究会

(京都大学 工学部)

ランダム線路における波動の局在現象

笹倉 芳明, 王 志良, 小倉 久直 (京都大学工学部)

1 まえがき

1958年に P. W. Anderson は電子が不規則ポテンシャル中を運動する際に, その波動関数が空間的に集中する局在化現象を理論的に指摘した. 電子の局在は乱れたポテンシャルによって散乱された電子波間の干渉により起こり, この現象は電子のアンダーソン局在として知られている [1]. 近年, 古典的な波動の 1 つである光波についても電子波と同様に波動の局在現象が見られるのではないかと考えられるようになった [2]. これは不規則な粗表面における波動の散乱問題を通して研究されている [3][4]. M. Saillard と D. Maystre は beam-simulation 法を用いて光の数十波長程度の有限不規則粗表面に対して解析した [5][6][7]. これに対し小倉, 王らは統計的手法である確率汎関数法により無限に広い不規則表面での解を得ている [8]. 確率汎関数法では波動場を不規則表面の汎関数として扱う. 確率論的フロケの定理に基づいて多重散乱の効果を自然な形式で含む波動場を与えることが可能である. 確率場の確率分布がガウス分布の場合には Wiener の非線形汎関数解析を用いることができる. しかし局在現象のような多重散乱による波動が支配的になる場合には無限回の散乱の効果を含めると解が発散する [8].

本稿では不規則金属表面で波動のエネルギーが局在する現象を数値解析するために確率汎関数法を扱い, 多重散乱の効果を含む行列階層方程式を導いた. 不規則金属表面には銀薄膜と空気の境界面を想定する. 光の波長領域では銀の比誘電率は負の値をもつ. このため波動はエバネッセント波として存在する. 金属と空気の境界面には表面プラズモンモードと呼ばれる伝搬モードが存在し, これは互いの比誘電率によって決定される境界面に沿う方向の表面波モードである. 銀薄膜へエバネッセント波を入射すると入射電力は指数関数的に減衰しながら銀-空気境界面へ伝搬し, 表面プラズモンモードを励起する場合を解析する. このとき波動は表面のスペクトルのうちブラッグ条件が成立する成分の影響を強く受ける. これにより不規則表面としてこのモードの 2 倍近傍の空間周波数成分からなるランダムグレーティングを扱う.

2 確率過程を用いたモデルの表現

2.1 1次元不規則表面

ここでは無限の広さを持つ平面に沿って統計的に定常な 1次元不規則表面を想定する. ここでこのモデルの概念図を図 1 に示す. 不規則表面を表す関数は x, ω に依存し以下のように表現できる.

$$z = f(x, \omega) \quad (1)$$

ただし (1) において x は平面上の不規則性を持つ軸方向の位置を表しており, ω は見本空間 Ω の見本点を表現している. また金属と誘電体の境界面には TM 入射に対して, 境界面に沿う方向に表面プラズモンモードと呼ばれる共振モードが存在する. これは金属と誘電体の比誘電率によって決定される.

$$\lambda_p = \pm k \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (2)$$

媒質境界面に揺らぎがある場合はこの揺らぎのために共振モードがずれる. これについては数値計算の結果を通して触れる. また, 入射波の波数ベクトルの表面に沿う方向の成分 λ を

$$\lambda \rightarrow \lambda_0 \equiv \text{Re}[\lambda_p] \quad (> 0) \quad (3)$$

となるような入射角を選べば表面プラズモンモードを励起できる.

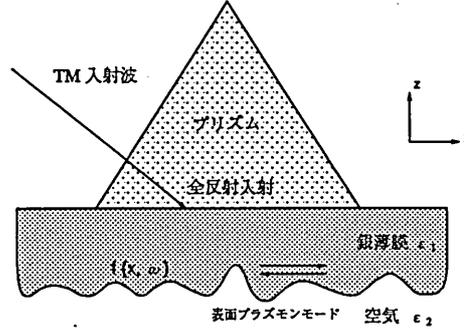


図 1: 不規則表面モデルの断面

2.1.1 ランダムグレーティングのスペクトル表現

本稿では入射波として媒質境界面に沿う方向の波数成分が λ_0 近くの波動を想定している. この場合, 不規則表面のスペクトルのうちブラッグ条件が成立する成分が波動場に対し強い影響を及ぼすと考えられる [9]. そこで不規則表面として空間周波数 $2n\lambda_0$ の付近のみにスペクトルを持つようなランダムグレーティングを想定する. この表面は狭帯域定常確率過程の級数の形で表現できる. 先に示した図 1 の表面にはこのランダムグレーティングの概形を示した. これにより不規則表面を表現する関数 (1) は, 複素ガウスランダム測度を用いてスペクトル表現すれば以下のように記述できる.

$$f(x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2n\lambda_0 x} \int e^{i\nu x} F_n(\nu) dB(2n\lambda_0 + \nu, \omega) \quad (4)$$

$$= \int e^{i\nu x} d\beta_n(\nu, \omega) \quad (5)$$

ここで $dB(\lambda, \omega)$ は複素ガウスランダム測度であり, 以下に示す性質をもつ [10].

$$\langle dB(\lambda) \rangle = 0 \quad (6)$$

$$\langle d\overline{B}(\lambda) dB(\lambda') \rangle = \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' \quad (7)$$

$$d\overline{B}(\lambda) = dB(-\lambda) \quad (8)$$

ここで $\delta(\lambda - \lambda')$ はディラックデルタである. また, ランダムグレーティングのスペクトル密度関数 (電力密度関数) $|F(\lambda)|^2$ にはガウス形を用い, 以下のように級数の形で表現する.

$$|F(\lambda)|^2 = \sum_n |F(\lambda - 2n\lambda_0)|^2 \quad (9)$$

$$\overline{F_n(\nu)} = F_{-n}(-\nu) \quad (10)$$

$$|F_n(\nu)|^2 = \sigma_n^2 \frac{l_n}{\sqrt{\pi}} e^{-l_n^2 \nu^2} \quad (11)$$

ただし (11) で l_n は $2n\lambda_0$ のスペクトル成分の相関距離を表現する。 σ_n はその成分の表面の振幅揺らぎを示す。これらは不規則表面の性質を表現するパラメータである。ここで表面を表す関数が実数の値をとるための条件から (10) は必要である。図 2, 3 にランダムグレーティングのスペクトル分布を示す。次に、ここで (5) で示した $d\beta_n(\nu, \omega)$ の性質に関して触れる。これは以下のように定義される。

$$d\beta_n(\nu) \equiv F_n(\nu) dB(2n\lambda_0 + \nu)$$

$$\overline{d\beta_n(\nu)} = d\beta_{-n}(-\nu)$$

また見本空間における移動変換に対しては以下が成立し、さらに複素ガウスランダム測度 $dB(\lambda)$ と同様に直交性を持つ。

$$\begin{aligned} d\beta_n(\nu, T^a \omega) &= e^{i(2n\lambda_0 + \nu)a} d\beta_n(\nu, \omega) \\ \langle \overline{d\beta_n(\nu)} d\beta_m(\nu') \rangle &= \delta_{nm} |F_n(\nu)|^2 \delta(\nu - \nu') d\nu d\nu' \end{aligned} \quad (12)$$

ただし $\langle \rangle$ は集合平均を表している。

2.1.2 ランダムグレーティングの統計的性質

不規則表面 f を構成する $f_n(x)$ はゆるやかに変化する狭帯域確率過程である。位置 a の移動に関してシフト作用素を用いれば、

$$D^a f_n(x, \omega) = e^{-i2n\lambda_0 a} f_n(x, \omega) \quad (13)$$

なる性質を持つ。この性質は x の位置で表面を記述すれば $x + a$ の位置の表面も記述できることを示している。また不規則表面の相関関数および分散については、

$$R(x) = \langle \overline{f(\omega)} f(T^x \omega) \rangle = \sum_n \int e^{i2n\lambda_0 x} e^{i\nu x} |F_n(\nu)|^2 d\nu \quad (14)$$

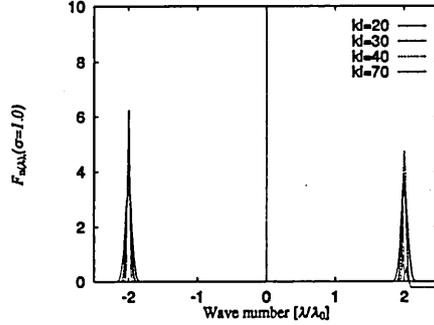


図 2: 不規則表面のスペクトル分布

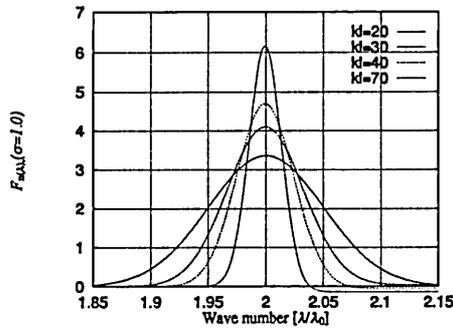


図 3: スペクトル分布 (拡大)

$$\langle f^2 \rangle = \sigma^2 = R(0) = \sum_n \int |F_n(\nu)|^2 d\nu = \sigma_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\sigma_n^2 \quad (15)$$

で与えられる。(14) が示すように相関関数は表面のスペクトル密度のフーリエ積分の形式で得られ、分散は不規則表面の各成分の分散の級数形式で与えられる。

2.2 確率波動場

ここでは 2 種類の媒質の境界面が 2.1 節で導入したランダムグレーティングで表現できる場合、各媒質での波動が不規則表面の関数の形で表現できることを示す。また不規則表面で散乱された波動を確率場で表し、これが満たすべき諸条件についても述べる。

2.2.1 波動場に関する条件

金属と空気の境界面において TM 波に対し表面プラズモンモードと呼ばれる境界面に沿う方向の導波モードが存在する [11]。そこでこの共振周波数近傍、すなわち表面プラズモンモード近傍の波数の TM 波を境界面に入射する場合を仮定し、境界面の表面プラズモンモードを励起した場合の波動解の振舞いを解析する。このとき波動に対する条件は以下のとおりである。

まず、それぞれ媒質の波動はヘルムホルツ方程式を満足しなければならない。

$$\nabla^2 \psi_j(z, x; \omega) + k_j^2 \psi_j(z, x; \omega) = 0 \quad k_j = \sqrt{\epsilon_j} k, j = 1, 2 \quad (16)$$

ここで媒質 1 には銀薄膜を、媒質 2 には空気を想定している。銀の光の周波数領域に対する比誘電率 ϵ_1 は負の値となるので媒質 1 中の波数 k_1 は純虚数となる。このことは銀薄膜中では光の波動はエバネッセント波として存在することを示している。図 1 に示すように x 軸方向に λ_0 の波数をもつ入射をすれば、銀薄膜中を z 軸方向すなわち媒質境界面に垂直な方向の波数が虚数となり入射波のエネルギーは指数関数的に減衰して伝わる。

次に不規則表面 $z = f(T^x \omega)$ における境界条件として、

$$\begin{aligned} \psi_1(z, x; \omega) &= \psi_2(z, x; \omega) \\ \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} &= \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \end{aligned} \quad (17)$$

が成立する。ただし $\partial/\partial n$ は不規則表面 f の法線方向の偏微分を表す。(17) は TM 入射に対する境界条件に対応している。さらに $|z| \rightarrow \infty$ を考えた場合放射条件を満たさなければならない。媒質 j ($j = 1, 2$) 中の平面波 $\phi_j = e^{i\lambda x - i\mu_j(\lambda)z}$ を考える。ここで、 $\mu_j(\lambda)$ は、

$$\mu_j(\lambda) \equiv \sqrt{\epsilon_j k^2 - \lambda^2} \quad (18)$$

で定義され、 x 軸方向に λ の波数で入射する光の z 軸方向の波数成分を表す関数で、2 値関数である。しかし放射条件を満たすため、すなわち $|z| \rightarrow \infty$ に対して波動が発散しないという条件を満たすように $\mu_j(\lambda)$ の虚数部が決定される。

2.2.2 ランダムグレーティングへのブラッグ入射波と散乱波の表現

ここでは 2.1.1 節で述べたランダムグレーティングへ入射した波動とその散乱波の表現法について述べる。簡単のため、ランダムグレーティングは空間周波数 $\pm 2\lambda_0$ 近傍の成分で記述する。

$$f(T^x\omega) = e^{i2\lambda_0 x} f_1(x, \omega) + e^{-i2\lambda_0 x} \overline{f_1(x, \omega)} \quad (19)$$

このランダムグレーティングへ振幅 1 の平面波 $\psi_0(z, x|\lambda) = e^{i\lambda x - i\mu(\lambda)z}$ を入射すると、入射波の表面に沿う方向の波長がランダムグレーティングの主たる波長の 2 倍になりブラッグの反射条件を満たす。ランダムグレーティングに対してブラッグ条件が成立する入射をブラッグ入射と呼ぶ。またこのとき波動が表面の影響を受けて強い干渉の効果が現れることについては 2.1.1 節で触れた。

2.2.3 ブラッグ入射での確率波動場

媒質境界面へ 2.2.2 節で述べたブラッグ入射近くの x 軸方向の波数 λ の入射をすれば波動場は確率論的フロケの定理から

$$\psi_1(z, x; \omega) = e^{i\lambda x} U(z, T^x\omega) \quad (z > 0) \quad (20)$$

$$\psi_2(z, x; \omega) = e^{i\lambda x} V(z, T^x\omega) \quad (z < 0) \quad (21)$$

と表現できる。ここで U, V はランダムグレーティングから入射波に対して空間周波数 $2n\lambda_0$ に相当する運動量を与えるとみれば、

$$U(z, T^x\omega) = e^{-i\mu_1(\lambda)z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2n\lambda_0 x} U_n(z, x; \omega) \quad (22)$$

$$V(z, T^x\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2n\lambda_0 x} V_n(z, x; \omega) \quad (23)$$

と記述できる。ここで運動量を与えると表現したが、今後ランダムグレーティングが散乱の結果、波動場に対して $2n\lambda_0$ に相当する波数の変化を及ぼす場合には $2n\lambda_0$ のブラッグベクトルを与えると表現する。この空間周波数領域での波動と不規則表面とのやりとりの概念図を図 4 に示す。ランダムグレーティングは 2.1.1 節で述べたように狭帯域で記述できる場合を仮定するので、(22), (23) の U_n, V_n は位置の変化に対して緩やかに変化する狭帯域過程でありそれぞれ次のように表せる。

$$U_n(z, x; \omega) = \int_N e^{i\nu x + i\mu_1(2n\lambda_0 + \nu)z} dM_n(\nu, \omega) \quad (z > 0) \quad (24)$$

$$V_n(z, x; \omega) = \int_N e^{i\nu x - i\mu_2(2n\lambda_0 + \nu)z} dN_n(\nu, \omega) \quad (z < 0) \quad (25)$$

ここで $dM_n(\nu, \omega), dN_n(\nu, \omega)$ は直交ランダム測度である。

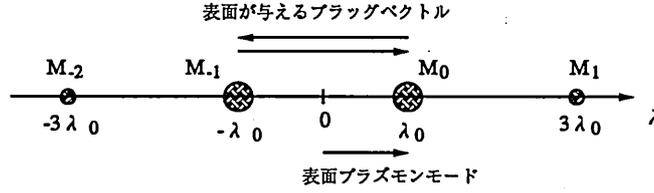


図 4: 表面プラズモンモード付近の波数をもつ波動のスペクトル分布とランダムグレーティングが波動に対し散乱時に与えるブラッグベクトルの関係

3 階層方程式

3.1 ランダム測度を用いた境界条件の表現

本節では 2.2 節で述べた媒質境界面における波動場の表現を用い、境界面がランダムグレーティングで与えられる場合の波動についての方程式を TM 入射波の境界条件をもとにランダム測度を用いて導く。

3.1.1 波動場の形式

入射波の x 依存因子を $e^{i\lambda x}$ と仮定する。この場合、波動解は不規則表面上の入射波と散乱波を含めた確率波動場を媒質 1,2 中のそれぞれについて以下のように表現できる。

$$\psi_1(z, x; \omega) = e^{i\lambda x} \left[e^{-i\mu_1(\lambda)z} + \sum_n e^{i2n\lambda_0 x} \int e^{i\mu_1(2n\lambda_0 + \lambda + \nu)z} e^{i\nu x} dM_n(\nu, \omega) \right] \quad (26)$$

$$\psi_2(z, x; \omega) = e^{i\lambda x} \left[\sum_n e^{i2n\lambda_0 x} \int e^{-i\mu_2(2n\lambda_0 + \lambda + \nu)z} e^{i\nu x} dN_n(\nu, \omega) \right] \quad (27)$$

ただし (26), (27) で λ_0 はランダムグレーティングの基本周波数であり λ は入射波の不規則表面に沿う方向の波数成分を表す。ここで (26), (27) は入射波が不規則表面の影響を受けて散乱される物理的な意味を含む形式である。すなわち λ の波数をもつ入射波が不規則表面から $2n\lambda_0$ のブラッグベクトルを受けることにより、 $\lambda \pm 2n\lambda_0$ の波数をもつ波動に散乱されるプロセスを記述する形式であるといえる。この散乱プロセスは図 4 に示した通りである。これらの波動場の表現を境界条件 (17) に適用する。この結果、未定の直交ランダム測度 $dM_n(\nu, \omega), dN_n(\nu, \omega)$ に関する確率積分方程式を得る。

3.1.2 不規則表面の形式

2.1.1 節で空間周波数 $2n\lambda_0$ の近くにスペクトルをもつランダムグレーティングの性質を述べた。入射波が λ_0 近傍の λ を表面に沿う方向に波数をもつために、ランダムグレー

ティングは波動に最も強い影響を及ぼす $2\lambda_0, -2\lambda_0$ の成分のみを用いて記述する. このときランダムグレーティングは以下のように記述する.

$$f(x) = f_1 + f_{-1} = f_1 + \overline{f_1}, \quad f_1 \equiv e^{i2\lambda_0 x} \int_{N_1} e^{i\nu x} d\beta_1(\nu) \quad (28)$$

(28) で表面を構成する $2\lambda_0$ のスペクトル成分を f_1 で定義する. ここで N_1 は f_1 の狭帯域性を仮定し, それをもつスペクトル幅を表す. また N_n についても同様に $2n\lambda_0$ 近傍の成分のスペクトル幅を表す. また表面 $f(x)$ の空間微分は

$$\begin{aligned} f'(x) = \nabla f(x) &= \sum_{n=-1,1} \left\{ i2n\lambda_0 e^{i2n\lambda_0 x} \int_{N_n} e^{i\nu x} d\beta_n(\nu) + e^{i2n\lambda_0 x} \int_{N_n} i\nu e^{i\nu x} d\beta_n(\nu) \right\} \\ &= \sum_{n=-1,1} \left\{ i2n\lambda_0 f_n + f'_n \right\} = \sum_{n=-1,1} [f']_n \\ f'_n &\equiv \int_{N_n} i\nu e^{i\nu x} d\beta_n(\nu), \quad [f']_n \equiv i2n\lambda_0 f_n + f'_n \end{aligned} \quad (29)$$

で与えられる. (29) の $f'_n, [f']_n$ は階層方程式を簡単な形式で記述するために必要でありここで定義しておく.

3.1.3 境界条件の近似形

ランダムグレーティングについてはその振幅揺らぎが入射波長に対して十分小さく, また十分滑らかであると仮定しているため ($k^2\sigma^2 \ll 1, \sigma^2/l_n^2 \ll 1$), 境界条件 (17) は $z = 0$ での微分の値を用いて近似することが可能である.

$$\psi_1 + f \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \psi_2 + f \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \quad (30)$$

$$\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{df}{dx} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + f \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{df}{dx} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + f \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) \quad (31)$$

ここで f の 2 次以上のオーダーについては無視した. 必要であれば更に高次についても同様に近似できる. 3.2 節ではここで得た (30), (31) をもとに未知のランダム測度を求める行列形式の階層方程式を導く.

3.2 階層方程式を導く際の問題点

(30), (31) の形式は 3.1 節に表したランダム測度の積分を含む形である. また不規則表面を表す f に関わる因子についても (28), (29) の様に積分形式である. しかし実際には図 4 のスペクトル分布の概念図に示したように $e^{i(2n\lambda_0 + \lambda)}$ 付近の空間周波数帯域内の成分が主たる役割を果たす. この結果, n の次数をパラメータとして階層方程式が得られる. この階層方程式は ν についての狭帯域積分を含む形である.

(2) で示した表面プラズモンモードの実数部は対象とする光の波数 k に近い値をとるため, 階層方程式の次数 $m = 0, -1$ においては $\mu_2(\lambda)$ に対する扱いを慎重にする必要がある. 実際にパラメータを $k = 1.0, \epsilon_1 = -17.55, \epsilon_2 = 1.0$ のようにとったときの $\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda)$

を 図 5 に示す. また 図 6 に表面プラズモンモードの実数部 $\lambda_0 = \text{Re}[\lambda_p]$ も示し, また μ_2 が実数をもつ範囲と虚数をもつ範囲も示しておく.

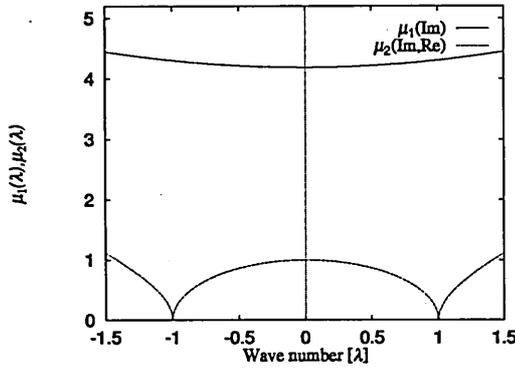


図 5: $\mu_2(\lambda)$ と $\mu_1(\lambda)$ の変化

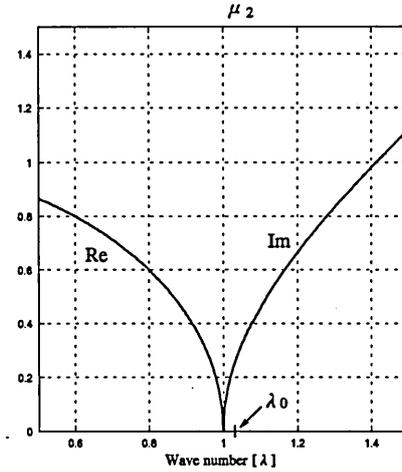


図 6: $\mu_2(\lambda)$ の不連続性について

この図から明らかなように $\lambda = \pm 1.0$ 付近では $\mu_2(\lambda)$ の変化が著しい. 階層方程式においては $m = 0, -1$ 次方程式が境界面に関して共振モード近傍を表す主方程式となっている. すなわち他の次数の解に対して主方程式の解が支配的な役割を果たすことを示している. しかし図 6 から $m = 0, -1$ 次方程式では $\mu_2(\lambda)$ の変化が大きいため, 積分方程式中の $\mu_2(\lambda)$ を慎重に扱う必要がある. すなわち $\mu_2(\lambda)$ に関する表現のみならず積分全体について単純化することなく,

$$\int_N \mu_2(\lambda + \nu) dN_0(\nu), \quad \int_N \mu_2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu) dN_{-1}(\nu) \quad (32)$$

の形式のまま扱う. $\mu_2(\lambda)$ は 2.2.1 節で定義した $\mu_1(\lambda)$ と同様に媒質 2 における波数ベクトルの z 成分を表す $\mu_2(\lambda + \nu)$ は

$$\mu_2(\lambda + \nu) = \sqrt{\epsilon_2 k^2 - (\lambda + \nu)^2} \quad (33)$$

であらわされ, $\epsilon_2 k^2 - (\lambda + \nu)^2$ の値の正負によって波動の性質が大きく異なってくる. このことから $m = 0, -1$ 付近の媒質 2 (空気) 側の波動の扱いに注意しなければならないことが分かる. この値が負の場合は $\mu_2(\lambda)$ が虚数となり空気側では波動がエバネッセント波として存在することを示しており, 正の値をとるときは $\mu_2(\lambda)$ が実数の値をもち放射的な波動となることを示す. また媒質 1 側の波動については ϵ_1 が負であるため常に $\mu_1(\lambda)$ は虚数でありエバネッセント波として存在し, z 軸方向に指数関数的に減衰する. $m = 0, -1$ 以外の媒質 2 側の波動については μ_1 同様に μ_2 が虚数となる. したがって不規則表面のスペクトル幅が広い場合は主方程式の周波数付近での ψ_2 のみに問題点があることを示している.

3.3 階層方程式の扱い

近似境界条件をもとにして得られた階層方程式のうち, 表面プラズモンモード近傍の波動を記述する主方程式が支配的になる. このことから主方程式を示す次数 $m = 0, -1$ の表現する方程式をもとに積分形式を含めて書き下せば以下の積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
& \int_N i \left\{ \frac{\mu_1(\lambda)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2(\lambda + \nu)}{\epsilon_2 k} \right\} dN_0(\nu) \\
& + \int_N \left[\left\{ \frac{\mu_1(\lambda)\mu_2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2^2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu)}{\epsilon_2 k} \right\} f_1 \right. \\
& \quad \left. - i \frac{-2\lambda_0 + \lambda}{k} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) [f']_1 \right] dN_{-1}(\nu) = \frac{2}{\epsilon_1 k} i \mu_1(\lambda) \quad (34) \\
& \int_N \left[\left\{ \frac{\mu_1(-2\lambda_0 + \lambda)\mu_2(\lambda + \nu)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2^2(\lambda + \nu)}{\epsilon_2 k} \right\} \bar{f}_1 \right. \\
& \quad \left. - i \frac{-2\lambda_0 + \lambda}{k} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) [\bar{f}']_1 \right] dN_0(\nu) \\
& + \int_N i \left\{ \frac{\mu_1(-2\lambda_0 + \lambda)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu)}{\epsilon_2 k} \right\} dN_{-1}(\nu) \\
& = \frac{2}{\epsilon_1 k} i \mu_1^2(\lambda) \bar{f}_1 \quad (35)
\end{aligned}$$

ここで f^2 のオーダー, すなわち σ^2 のオーダーの項を無視した. さらに同一の帯域内, 同一の波数 ν の付近で等式を作れば以下のような ν' についての積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
& i \left\{ \frac{\mu_1(\lambda)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2(\lambda + \nu)}{\epsilon_2 k} \right\} dN_0(\nu) \\
& + \int_{N_1} d\beta_1(\nu - \nu') \left[\frac{\mu_1(\lambda)\mu_2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu')}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2^2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu')}{\epsilon_2 k} \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\lambda_0(-2\lambda_0 + \lambda)}{k} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \right] dN_{-1}(\nu') = \delta(\nu) d\nu \frac{2i}{\epsilon_1 k} \mu_1(\lambda) \quad (36) \\
& \int_{N_1} d\bar{\beta}_1(\nu' - \nu) \left[\frac{\mu_1(-2\lambda_0 + \lambda)\mu_2(\lambda + \nu')}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2^2(\lambda + \nu')}{\epsilon_2 k} \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\lambda_0(-2\lambda_0 + \lambda)}{k} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \right] dN_0(\nu') \\
& + i \left\{ \frac{\mu_1(-2\lambda_0 + \lambda)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu)}{\epsilon_2 k} \right\} dN_{-1}(\nu) \\
& = \frac{2i}{\epsilon_1 k} \mu_1^2(\lambda) d\bar{\beta}_1(-\nu) \quad (37)
\end{aligned}$$

ここで得られた (36), (37) は求める表面プラズモンモード付近の波動場の性質を示しており, 次のように解釈することができる. 両式にあるランダム測度 $dN_0(\nu), dN_{-1}(\nu)$ はそれぞれ表面プラズモンモード付近の x 軸正方向, 負方向の波動解を表しており, (36) は

$dN_0(\nu)$ すなわち正方向の表面プラズモンモード付近の波動解の生成される様子を、また (37) は同様に負方向の波動解の生成される様子を表現していると言える。具体的には (36) を左辺第 1 項が示す正方向の波動場の生成されるプロセスを表していると見れば、右辺の入射波動に相当する項と左辺第 2 項の積分項の 2 つの項の和から成っており、この積分項は負方向の表面プラズモンモード近傍の波動場を表す $dN_{-1}(\nu')$ がランダムグレーティング $d\beta_1(\nu - \nu')$ による散乱のために正方向のブラッグベクトルを受けることで表面プラズモンモード近傍の波動を作り出す様子を表している。また (37) についても左辺第 2 項が示す負方向の波動場が生成されるプロセスを表現していると見れば、右辺は入射波動がランダムグレーティング $d\beta_1(-\nu)$ により散乱され負方向の波動場に寄与することを示しており、左辺第 1 項は正方向の表面プラズモンモード近傍の波動場が不規則表面 $d\beta_1(\nu' - \nu)$ からブラッグベクトルを受けることで負方向の波動場に寄与の様子を表している。したがって (36), (37) は、波動が表面に多重散乱され、境界面の共振モードである 2 つの表面プラズモンモード $\pm\lambda_0$ 付近の波数の間を行き来する多重散乱の結果を反映している。前述した図 4 の示す内容をそのまま反映する方程式であると言える。

3.3.1 スペクトル分割による主方程式の行列表示

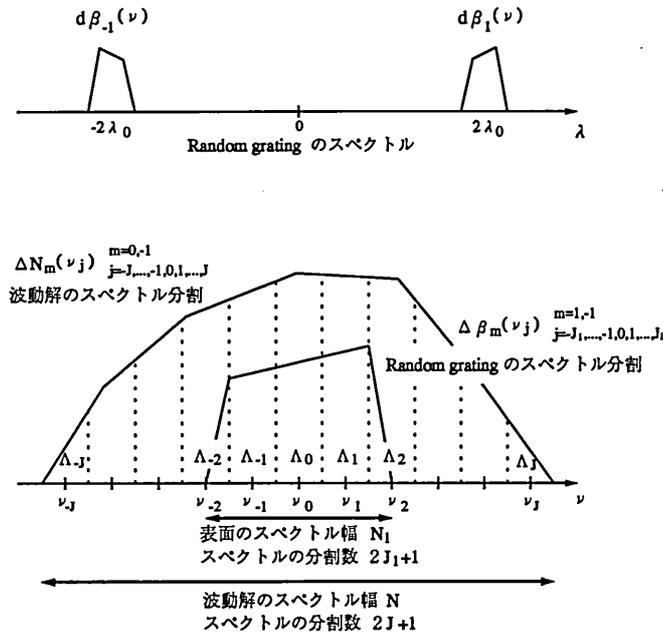


図 7: 不規則表面と波動解のスペクトル分割

ここまでで得た方程式をもとにして、数値計算を行いやすくするため連続的な積分形式の積分範囲を分割する。これによって離散的な方程式を導き、未知のランダム測度 $dN_0(\nu)$, $dN_{-1}(\nu)$ についての線形方程式の形を導く。積分範囲を分割する前に (36), (37) の積分範

囲について述べる. 図 4 に示すように, 求める波動場は不規則表面からブラッグベクトルを受け, 不規則表面 $d\beta_1(\nu)$ のスペクトル幅を N_1 とすれば波動場 $dN_0(\nu)$, $dN_{-1}(\nu)$ のスペクトル幅 N はその数倍に広がると考えられる. 図 7 に示すようにそれぞれのスペクトル幅 N_1, N を同一の微小区間 Λ で分割しそれぞれ $2J_1+1$ 個, $2J+1$ 個の領域に分け, 各領域を Λ_j と名付ける. その領域に対応する中心周波数からの変化分を ν_j と呼ぶ.

$$\Lambda_j \equiv \left[\nu_j - \frac{\Lambda}{2}, \nu_j + \frac{\Lambda}{2}\right], \quad \nu_j \equiv j\Lambda, \quad \nu_{j-k} = \nu_j - \nu_k \quad (38)$$

(38) における添字は $j, j-k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm J$ の値をとる. そこで離散的な方程式を示すために分割領域 Λ_j の積分に対応するランダム測度を次のように定義する.

$$\Delta N_m(\nu_j) \equiv N_m(\Lambda_j) = \int_{\Lambda_j} dN_m(\nu), \quad m = -1, 0 \quad (39)$$

$$N_m = \int_N dN_m(\nu) = \sum_j \Delta N_m(\nu_j), \quad |j| = 0, 1, \dots, J \quad (40)$$

$$\Delta \beta_1(\nu_j) \equiv \beta_1(\Lambda_j) = \int_{\Lambda_j} d\beta_1(\nu), \quad |j| = 0, 1, \dots, J_1 \quad (41)$$

$$= 0, \quad |j| > J_1 \quad (42)$$

$$f_1(0) = \int_{N_1} d\beta_1(\nu) = \sum_{j=-J_1}^{J_1} \Delta \beta_1(\nu_j) \quad (43)$$

これらを (36), (37) に適用することにより, 主方程式を離散的なランダム測度 $\Delta N_m(\nu_j)$ に関する線形方程式として

$$\begin{aligned} & i \left\{ \frac{\mu_1(\lambda)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2(\lambda + \nu_j)}{\epsilon_2 k} \right\} \Delta N_0(\nu_j) \\ & + \sum_l \Delta \beta_1(\nu_{j-l}) \left[\frac{\mu_1(\lambda) \mu_2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu_l)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2^2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu_l)}{\epsilon_2 k} \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\lambda_0(-2\lambda_0 + \lambda)}{k} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \right] \Delta N_{-1}(\nu_l) = \delta_{j,0} \frac{2i}{\epsilon_1 k} \mu_1(\lambda) \quad (44) \\ & \sum_l \overline{\Delta \beta_1(\nu_{l-j})} \left[\frac{\mu_1(-2\lambda_0 + \lambda) \mu_2(\lambda + \nu_l)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2^2(\lambda + \nu_l)}{\epsilon_2 k} \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\lambda_0(-2\lambda_0 + \lambda)}{k} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \right] \Delta N_0(\nu_l) \\ & + i \left\{ \frac{\mu_1(-2\lambda_0 + \lambda)}{\epsilon_1 k} + \frac{\mu_2(-2\lambda_0 + \lambda + \nu_j)}{\epsilon_2 k} \right\} \Delta N_{-1}(\nu_j) \\ & = \frac{2i}{\epsilon_1 k} \mu_1^2(\lambda) \overline{\Delta \beta_1(\nu_{-j})} \quad (45) \\ & \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm J \end{aligned}$$

を得る. (44), (45) を解く場合は不規則表面のランダム測度 $\Delta \beta_1(\nu_j)$ を複素ガウス乱数をもとに作成し与えることで, 波動場のランダム測度 $\Delta N_0(\nu_j), \Delta N_{-1}(\nu_j)$ についての $2(2J+1)$

元 1 次方程式として行列方程式を解くことになる。ただし本節で触れたように波動場のランダム測度のスペクトル幅の分割数 $2J+1$ は不規則表面のスペクトル幅の分割数 $2J_1+1$ の 2,3 倍程度を与えるのが適当である。

3.3.2 波動場の級数形式

任意の x についての波動場は不規則表面を与えるランダム測度 $d\beta_1(\nu)$ に対して見本空間のシフトを施すことで得られる。(44), (45) はランダム測度 $\Delta\beta_1(\nu_j)$ を決定すれば解が決まるのでこれにシフトを施すと,

$$\Delta\beta_1(\nu_j, x) = \int_{\Lambda_j} e^{i\nu x} d\beta_1(\nu) = \int_{\nu_j - \Lambda/2}^{\nu_j + \Lambda/2} e^{i\nu x} d\beta_1(\nu) \quad (46)$$

$$= e^{ij\Lambda x} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} e^{i\nu x} d\beta_1(j\Lambda + \nu) \quad (47)$$

$$f_1(x) = \sum_{j=-J_1}^{J_1} \Delta\beta_1(\nu_j, x) = \int_{N_1} e^{i\nu x} d\beta_1(\nu) \quad (48)$$

となり, 波動解を表すランダム測度 $\Delta N_0(\nu_j, x), \Delta N_{-1}(\nu_j, x)$ を求められる。ただしこれらはあわせて $2(2J+1)$ 個の要素から成り, 媒質 2 側の波動の式に適用するには

$$N_0(x) = \sum_{j=-J}^J \Delta N_0(\nu_j, x) \cong \int_N e^{i\nu x} dN_0(\nu) \quad (49)$$

$$N_{-1}(x) = \sum_{j=-J}^J \Delta N_{-1}(\nu_j, x) \cong \int_N e^{i\nu x} dN_{-1}(\nu) \quad (50)$$

を施す必要がある。

4 数値計算および考察

ここでは不規則表面の性質を示すパラメータを変化させた場合の波動解への影響について考察し, 不規則表面に現れる波動の局在現象の解析を行う。ここで数値計算に用いた各種定数について触れる。本稿では 2 種類の媒質として媒質 1 には銀を媒質 2 には空気を想定する。2 つの媒質の比誘電率は入射する光の波長に対して $\epsilon_1 = -17.55 + 0.404i$, $\epsilon_2 = 1.0$ として計算した。従って $k = 1.0$ で規格化した表面プラズモンモードは (2) より $\lambda_p = 1.02975 + 0.00072i$ である。この表面プラズモンモードは媒質境界表面が平坦な場合のものであり, 後述するように表面に粗さがある場合には共振モードの λ_0 からのずれが確認できる。

数値計算を行う上で不規則表面のスペクトル幅 N_1 に対して散乱の結果として波動のスペクトル幅 N が N_1 の数倍程度に広がるという仮定を設ける。図 7 のようにスペクトルを分割し波動の離散化されたスペクトルと表面の離散化されたスペクトルの間の相互作用として散乱を表現している。したがって図 4 に示す散乱プロセスをより具体的に記述できる解法である。

行列方程式 (44), (45) はスペクトル分割された不規則表面とスペクトル分割された波動場間の関係を記述する. 不規則表面のスペクトル幅 N_1 は波動の波数 k に対して $0.1k$ とし, また散乱された波動のスペクトル幅 N を N_1 の 2 倍として計算した. 図 7 におけるスペクトルの分割数 $2J_1 + 1, 2J + 1$ はそれぞれ 41, 81 としている. 実際に数値計算では乱数を生成しこれをもとに (48) のフーリエ積分形式を級数形式として扱い不規則表面 $f(x)$ を得る. しかし 3.3.2 節では触れなかったが乱数の数が少ない場合は得られる表面に規則性が現れる. このため広い範囲の不規則表面が生成できない. この問題はスペクトル分割区間をさらに分割し, より多くの乱数を用いて不規則表面を表現することで回避できる. ここでは図 7 に示す $2J_1 + 1$ 個に分割した表面スペクトル区間 $\Delta\beta_1(\nu_j)$ を求める際に, この区間 Δ_j をさらに 500 ~ 1000 個程度に分割し $f(x)$ を (48) のフーリエ級数形式で生成した.

4.1 不規則表面と波動の局在現象の関係

4.1.1 不規則表面のスペクトル幅の影響

図 8, 図 9, 図 10 に不規則表面のスペクトル幅を変化させた時の波動解を示す. これらが示すように表面のスペクトル幅の波動の局在の半値幅への影響はほとんど見られない. また kl が大きくなれば波動の局在が起こる間隔は広がることも確認できる. さらに大きな kl に対して数値計算する場合には積分範囲 N, N_1 を適当に狭くする必要がある.

4.1.2 不規則表面の振幅揺らぎの大きさの影響

次に不規則表面の振幅揺らぎの大きさを変化させた時の波動への影響について述べる. 振幅揺らぎの度合 ($k\sigma$) をパラメータとして得た波動解を図 11, 図 12, 図 13 に示す. これらは $k\sigma$ が小さくなれば波動の局在の半値幅は広くなることを示す. ここで得られる局在の半値幅は図 13 の $k\sigma = 0.02$ の場合で 20 波長程度となっている. これは比較的大きい局在であるが, $\mu_2(\lambda)$ の値により媒質 2 (空気) 側で波動が境界面に垂直な方向に放射性を持つ可能性があることに起因する. すなわち空気側の波動に対して境界面に垂直な方向に洩れる放射電力を考慮した結果であると考えられる.

4.2 不規則表面と表面プラズモンモードのずれ

ここでは不規則表面のパラメータが境界面の共振入射角に与える影響について述べる. すなわち表面のパラメータと表面プラズモンモードのずれとの関係を調べる. 入射角を変化させた時の波動強度は図 14, 図 15, 図 16 に示す通りである. これによれば図 16 の λ_0 からずらして入射した時の波動強度の方が λ_0 で入射した時の波動強度よりピークが高い. これは境界面の共振モードに λ_0 からのずれがあることを示唆しており, そこで本節では各パラメータとこのずれとの関係について考察する.

4.2.1 不規則表面のスペクトル幅の影響

図 17, 図 18, 図 19 に不規則表面のスペクトル幅をパラメータにとり, 入射角に相当する λ を変化させた時の局在のピークの波動強度を示した. また kl と Q 値や共振入射角の関係を表 1 に示す. ただし先に述べたように $\lambda_0 = 1.02975$ である. これによればスペクトル幅が狭くなるに従って Q 値が高くなる傾向が見られる. しかし共振入射角と λ_0 とのずれに関してははっきりした傾向は見られない. これを確認するにはスペクトルの分割数を増やすなどより厳密に数値計算する必要がある. kl は表面のスペクトル幅に対応し, これが大きくなれば入射波が図 4 に示すプロセスで散乱される際に表面から $\pm 2\lambda_0$ により近いブラッグベクトルを多く受ける. したがって共振入射角から外れた入射角に対しては $\pm\lambda_0$ 付近へ散乱される波動が小さくなり, また λ_0 付近の入射角では $\pm\lambda_0$ 付近へ散乱される波動が多くなる. Q 値が高くなる傾向は以上のように解釈できる.

4.2.2 不規則表面の振幅揺らぎの大きさの影響

図 20, 図 21, 図 22 は不規則表面の振幅揺らぎの大きさをパラメータにとり入射角を変化させた時の局在のピークの波動強度を示す. いずれの図についても共振モードは λ_0 からのずれが見られ, 不規則表面の振幅揺らぎ $k\sigma$ の値が小さくなればそのずれが小さくなる. この共振モードのずれは表面の粗さのために起こるものである. さらにスペクトル幅を変えた時と同様に $k\sigma$ が小さくなれば Q 値が高くなることも認められる. $k\sigma$ と Q 値や共振入射角の関係を表 2 に示す.

5 おわりに

数値解析から不規則表面の振幅揺らぎが小さくなれば局在の半値幅は広がることを確認した. これより表面の振幅揺らぎが小さくなると波動は表面からブラッグベクトルを受けにくくなり, 共振器長が長くなることが分かった. この結果は D. Maystre らの示した結果 [7] と一致している. 不規則表面の振幅揺らぎの大きさは表面プラズモンモードのずれにも影響し, 振幅揺らぎが大きくなればその平方のオーダーで表面プラズモンモードは波数が増す方向にずれる [12]. これを定量的に支持する計算結果は得られていない. またランダムグレーティングのスペクトル幅の影響は振幅揺らぎの影響ほど顕著な結果は確認できなかった. 本稿で示した近似解法は共振状態である局在現象を扱う上で適用範囲が広く, また不規則表面による波動の散乱をより厳密に表現する方法である. 不規則表面のスペクトル幅が狭い場合はスペクトル幅に応じて積分範囲を狭くすればこの解法を適用できる. またさらに厳密な解を得るには表面と波動解のスペクトル分割数を適宜増すことで対処できる. 分割数が増せばその平方の行列要素ができる. しかしその行列要素の大半は 0 である. したがってこれを効率よく扱うことで数値計算の効率が上がる. このため最急降下法を改良した多次元の共役勾配法を用いるなど工夫が必要である.

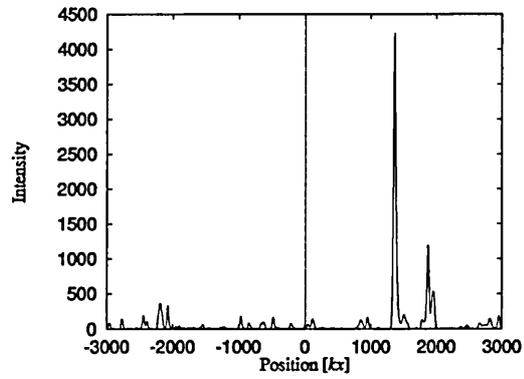


図 8: 不規則表面スペクトル幅 (kl) の波動への影響, $kl = 20, k\sigma = 0.1$

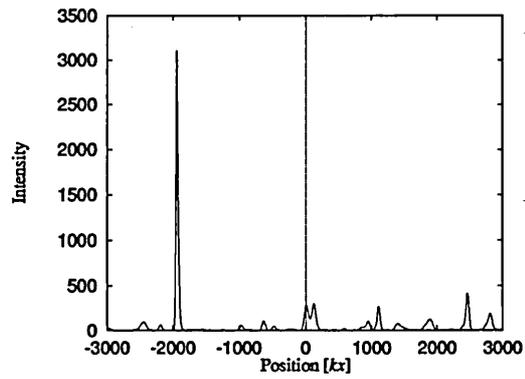


図 9: 不規則表面スペクトル幅 (kl) の波動への影響, $kl = 50, k\sigma = 0.1$

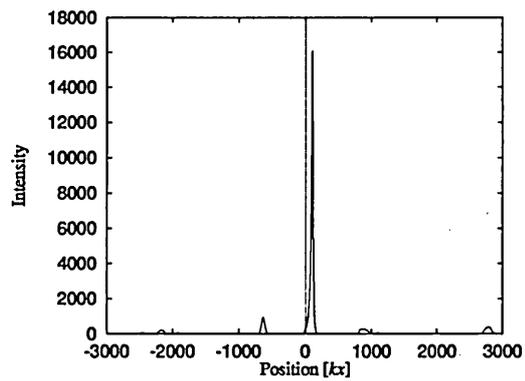


図 10: 不規則表面スペクトル幅 (kl) の波動への影響, $kl = 70, k\sigma = 0.1$

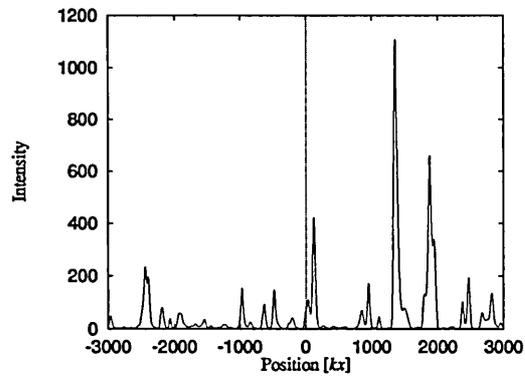


図 11: 不規則表面振幅揺らぎ ($k\sigma$) の波動への影響, $kl = 30, k\sigma = 0.1$

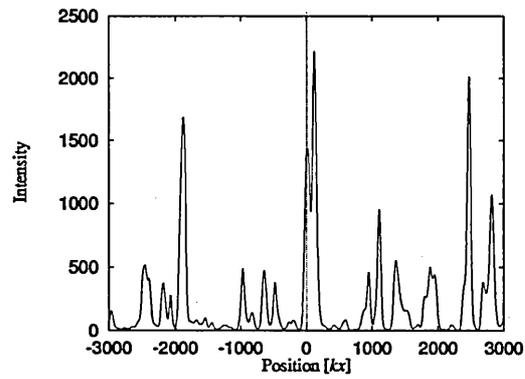


図 12: 不規則表面振幅揺らぎ ($k\sigma$) の波動への影響, $kl = 30, k\sigma = 0.05$

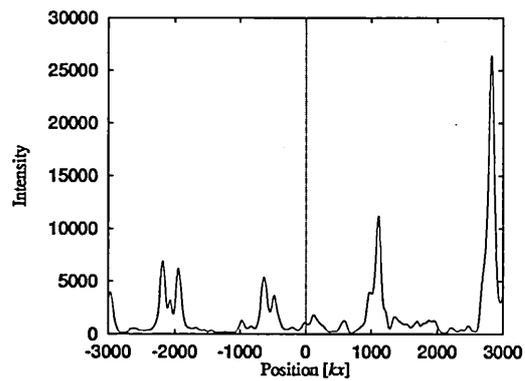


図 13: 不規則表面振幅揺らぎ ($k\sigma$) の波動への影響, $kl = 30, k\sigma = 0.02$

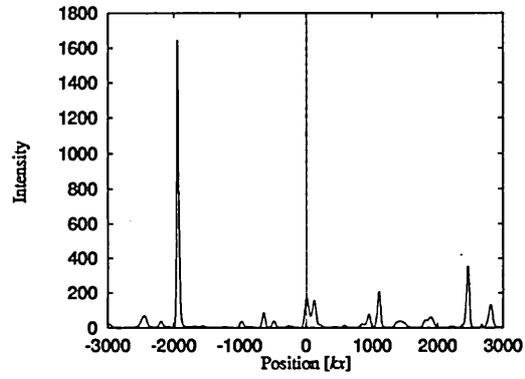


図 14: 共振波数から外して入射した時の波動, $kl = 50, k\sigma = 0.1, \lambda = \lambda_0 - 0.01$

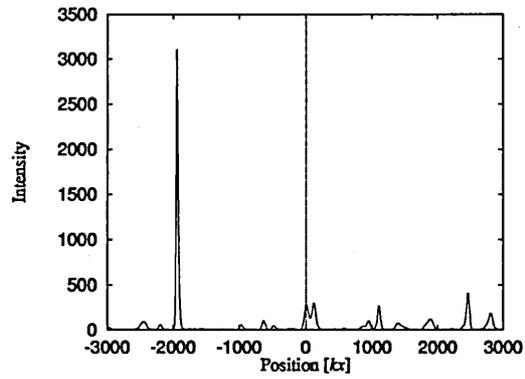


図 15: 共振波数で入射した時の波動, $kl = 50, k\sigma = 0.1, \lambda = \lambda_0$

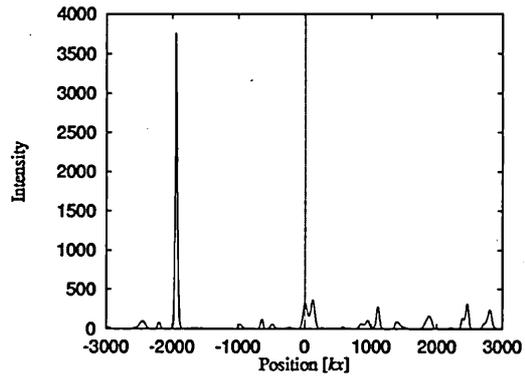


図 16: 共振波数から外して入射した時の波動, $kl = 50, k\sigma = 0.1, \lambda = \lambda_0 + 0.01$

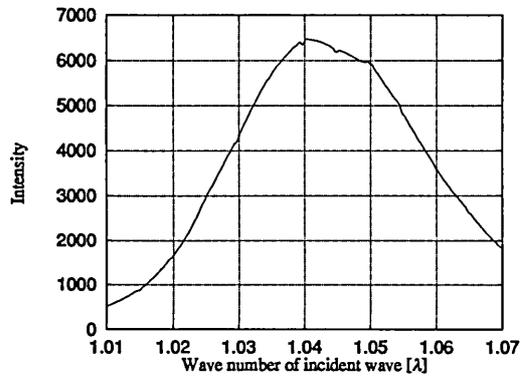


図 17: 局在ピークの波動強度と入射角の関係, $kl = 20, k\sigma = 0.1, x = 1356.0$

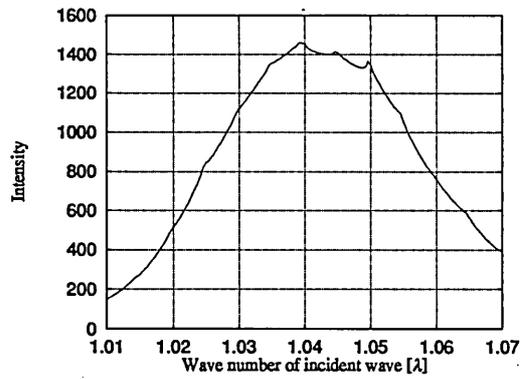


図 18: 局在ピークの波動強度と入射角の関係, $kl = 30, k\sigma = 0.1, x = 1353.0$

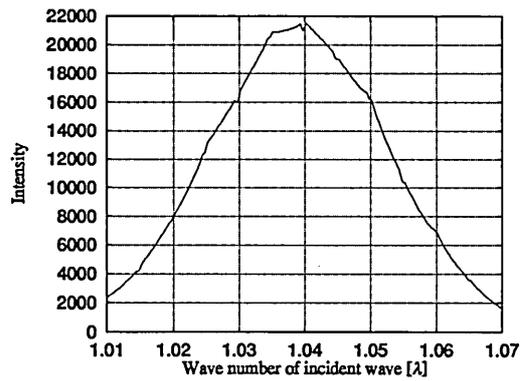


図 19: 局在ピークの波動強度と入射角の関係, $kl = 70, k\sigma = 0.1, x = 99.0$

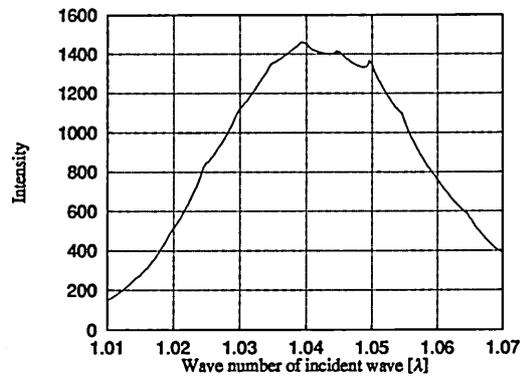


図 20: 局在ピークの波動強度と入射角の関係, $kl = 30, k\sigma = 0.1, x = 1356.0$

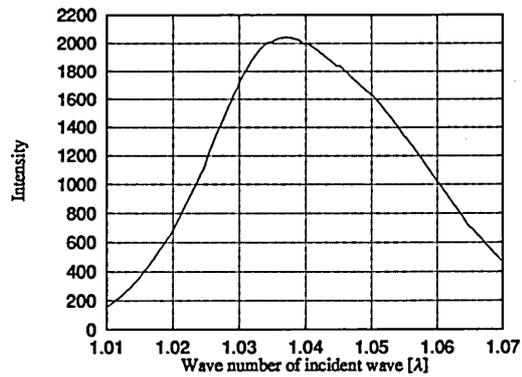


図 21: 局在ピークの波動強度と入射角の関係, $kl = 30, k\sigma = 0.05, x = -1881.0$

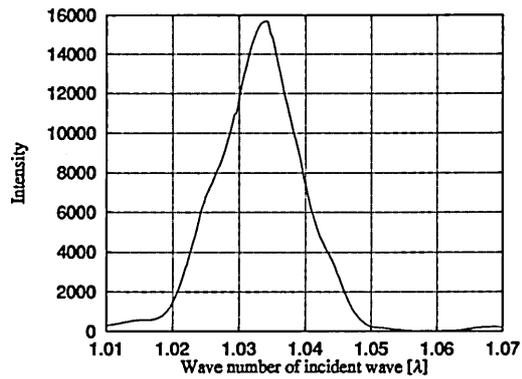


図 22: 局在ピークの波動強度と入射角の関係, $kl = 30, k\sigma = 0.02, x = 1104.0$

kl の値	半値幅 $[\lambda/k]$	Q 値	共振モードのずれ $[\lambda/k]$
20.0	0.0356	28.1	0.0104
30.0	0.0370	27.0	0.00960
70.0	0.0314	31.8	0.0104

表 1: 不規則表面のスペクトル幅と Q 値, $k\sigma = 0.1$

$k\sigma$ の値	半値幅 $[\lambda/k]$	Q 値	共振モードのずれ $[\lambda/k]$
0.1	0.0370	27.0	0.00960
0.05	0.0362	27.6	0.00704
0.02	0.0132	75.8	0.00420

表 2: 不規則表面の振幅揺らぎと Q 値, $kl = 30.0$

参考文献

- [1] 長岡 洋介: 日本物理学会誌 **40** (1985) 489–498.
- [2] 冨田 誠: 日本物理学会誌 **46** (1991) 927–933.
- [3] P. sheng, ed.: *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media* (World Scientific, London, 1990).
- [4] D. Maystre and J. C. Dainty: *Modern Analysis of Scattering Phenomena* (Hilger, New York, 1991).
- [5] M. Saillard: *Opt. Commun.* **96** (1993) 1–7.
- [6] M. Saillard: *J. Opt. Soc. Am. A* **11** (1994) 2704–2709.
- [7] D. Maystre and M. Saillard: *J. Opt. Soc. Am. A* **11** (1994) 680–690.
- [8] 小倉 久直, 王 志良: 輻射科学研究会資料 **RS 95–10** (1995).
- [9] H. Ogura: *Phys. Rev. A* **11** (1975) 942–956.
- [10] 小倉 久直: 確率過程論 (コロナ社, 1978).
- [11] S. O. Sari, D. K. Cohen and K. D. Scherkoske: *Phys. Rev. B* **21** (1980) 2162–2174.
- [12] T. R. Michel: *J. Opt. Soc. Am. A* **11** (1994) 1874–1885.

Wave scattering from a periodic random surface

周期的不規則表面による波動の散乱

Gao Lan and Junich Nakayama (Kyoto Institute of Technology)

高 嵐, 中山 純一 (京都工芸繊維大学)

1 Introduction

Scattering of waves from a random periodic surface is a problem not only of theoretical interest but also of practical importance. A random periodic surface is very common physical phenomenon such as plowed field and ocean surface. In fact, a real periodic grating is not exactly periodic because of imperfection yielded by inaccurate manufacturing, non-uniform heating, and other reasons [1]. Digital recording devices such as optical disks and compact disks have almost periodic random surface, in which random data are stored by deformations called pits [2]. Such problems have been researched by the small perturbation method [3], Kirchoff approximation [4], microdensitometer analysis [5], first-order scattering theory [6], and extended boundary condition (EBC) method [3,4]. However, we will study the periodic random surface scattering based on the stochastic functional approach.

In this paper, a periodic surface is first made by the periodic displacement of a local surface profile, of which height is modulated by a stationary binary sequence. Then the surface becomes a periodic stationary random process [7,8]. By the group theoretic consideration associated with the shift invariance property of the stationary binary sequence, we determine a possible form of the stochastic wave solution satisfying the boundary condition. The scattered wave is shown to have a 'stochastic Floquet's form: a product of a periodic stationary random function and an exponential phase factor. The periodic stationary random function is given by binary expansion with unknown binary coefficient functions similar to Wiener-Hermite expansion [9,10]. Representing these binary coefficient functions by their Fourier integrals over wavenumber region and dividing the wavenumber region into consecutive subintervals, we obtain a harmonic series representation with unknown coefficient functionals called binary kernels. By applying the approximation boundary condition, we get a hierarchy of equation for the binary kernels. Solving these equations, we obtain the lower order binary kernels. A so-called mass operator appears in our expressions of binary kernels. Then, we calculate several statistical properties of scattering, such as coherent scattering, angular distribution of the incoherent scattering and optical theorem, which are shown in figures.

2 Stochastic representation of the problem

We consider the structure, shown in Fig 1, where the surface deformation is expressed by a periodic stationary process $f(x, \omega)$,

$$z = f(x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x - nL)b_n(\omega). \quad (1)$$

Here, $g(x)$ is the local surface profile, L is the period and $b_n(\omega)$ is an independent stationary binary sequence taking ± 1 with equal probability:

$$P(b_i = 1) = P(b_i = -1) = 1/2. \quad (2)$$

The $b_i(\omega)$ has zero average and orthogonal correlation,

$$\langle b_n(\omega) \rangle = 0, \quad \langle b_n(\omega) b_m(\omega) \rangle = \delta_{n,m}, \quad (3)$$

where $\delta_{n,m}$ is the Kronecker delta, and the angle brackets indicate the ensemble average over Ω . Then the average and correlation of $f(x, \omega)$ become

$$\langle f(x, \omega) \rangle = 0, \quad (4)$$

$$R(x, x') = \langle f(x, \omega) f(x', \omega) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(x - mL) g(x' - mL) = R(x + L, x' + L), \quad (5)$$

which is invariant under the translation $(x, x') \rightarrow (x + L, x' + L)$. A probability parameter ω denotes a sample point in the sample space Ω . However, we regard ω as an infinite dimensional vector given by the sequence,

$$\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots), \quad \omega_i = b_i(\omega) \quad (6)$$

where ω_i is the i -th component of ω . By a translation $T : b_i(\omega) \rightarrow b_{i+1}(\omega)$ of a sample sequence, a sample point ω is shifted into another sample point $\omega' = T\omega$. Since $b_i(\omega)$ is an independent sequence, the shift T^m becomes a measure-preserving transformation and satisfies the group property:

$$T^{n+m} = T^n T^m, \quad T^0 = 1(\text{identity}). \quad (7)$$

Therefore, the periodic stationary process $f(x, \omega)$ satisfies a property,

$$f(x, \omega) = f(x + nL, T^{-n}\omega), \quad (8)$$

which means that $f(x, \omega)$ is invariant under the two dimensional shift: $(x, \omega) \rightarrow (x + nL, T^{-n}\omega)$. We will use the invariance to determine a possible form of the scattered wave.

Let us denote the y component of the TE electric field by $\Psi(x, z, \omega)$, which satisfies the wave equation in free space,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \Psi(x, z, \omega) = 0 \quad (9)$$

where k is wave number. When the periodic random surface is perfectly conductive, the wave function $\Psi(x, z, \omega)$ satisfies the Dirichlet condition: $\Psi(x, z, \omega)|_{z=f(x, \omega)} = 0$. For simplicity, however, we only consider the case that the random surface is slightly rough. In this case, the boundary condition can be approximated by

$$\Psi(x, 0, \omega) + f(x, \omega) \frac{\partial \Psi(x, z, \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (10)$$

The wave function $\Psi(x, z, \omega)$ may be written as a sum of the incident plane wave $\Psi_i(x, z)$ and the scattered wave $\Psi_s(x, z, \omega)$ which is a random function,

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, \omega) &= \Psi_i(x, z) + \Psi_s(x, z, \omega), \quad \Psi_i(x, z) = e^{ipx - i\beta_0(p)z}, \\ p &= k \cdot \cos \theta, \quad \beta_n(p) = \sqrt{k^2 - \left(p + \frac{2\pi n}{L}\right)^2}, \\ \text{Im}[\beta_n(p)] &\geq 0, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (11)$$

where θ is the angle of incidence. Let us determine a form of the scattered wave $\Psi_s(x, z, \omega)$. We introduce a translation operator D acting on the wave function $\Psi(x, z, \omega)$ by the relation,

$$D^m \Psi(x, z, \omega) = \Psi(x + mL, z, T^{-m}\omega), \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (12)$$

By the definition, $f(x, \omega)$ is invariant under the operator D^m , so that if $\Psi(x, z, \omega)$ is a solution of the problem, $D^m \Psi(x, z, \omega)$ is a solution also. Because the incident plane wave satisfies the relation $D^m \Psi_i(x, z) = e^{ipmL} \Psi_i(x, z)$, we get,

$$D^m \Psi_s(x, z, \omega) = \Psi_s(x + mL, z, T^{-m}\omega) = e^{ipmL} \Psi_s(x, z, \omega) \quad (13)$$

A possible solution to this relation is given by the stochastic Floquet's form,

$$\Psi_s(x, z, \omega) = e^{ipx} U(x, z, \omega), \quad (14)$$

where $U(x, z, \omega)$ is a periodic stationary process of x with the period L enjoying

$$U(x, z, \omega) = U(x + mL, z, T^{-m}\omega), \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (15)$$

$$\langle U(x, z, \omega) \rangle = \langle U(x + mL, z, \omega) \rangle = \langle U(x + mL, z, \omega) \rangle \quad (16)$$

where $\langle U(x, z, \omega) \rangle$ is a periodic function of x .

3 Stochastic representation for the periodic stationary process

We now consider the harmonic series representation for the periodic stationary random surface $f(x, \omega)$. When the local surface profile $g(x)$ is a square integrable function, we may write

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} G(\lambda) d\lambda = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi q}{L}x} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} e^{i\lambda x} G^{(q)}(\lambda) d\lambda, \quad (17)$$

$$G^{(q)}(\lambda) = G\left(\lambda + \frac{2\pi q}{L}\right), \quad G^{(q)}(\lambda) = G^{(-q)*}(-\lambda),$$

where the asterisk indicates the complex conjugate. Substituting (17) into (1), we obtain the harmonic series representation for $f(x, \omega)$,

$$f(x, \omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi q}{L}x} f^{(q)}(x, \omega), \quad f^{(q)*}(x, \omega) = f^{(-q)}(x, \omega)$$

$$f^{(q)}(x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B^{(1)}[b_n] \int_{-\pi/L}^{\pi/L} e^{i\lambda(x-nL)} G^{(q)}(\lambda) d\lambda \quad (18)$$

where $f^{(q)}(x, \omega)$ is a complex valued stationary random process with zero average and mutual correlation function $R_{qq'}(x)$,

$$\langle f^{(q)}(x, \omega) \rangle = 0$$

$$R_{qq'}(x - x') = \langle f^{(q)}(x, \omega) f^{(q')*}(x', \omega) \rangle = \frac{2\pi}{L} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} e^{i\lambda(x-x')} G^{(q)}(\lambda) G^{(q')*}(\lambda) d\lambda$$

$$R_{qq'}^*(x) = R_{q'q}(-x), \quad R(0) \geq 0 \quad (19)$$

which may be obtained from (18) and the relation,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{iLm(\lambda-\lambda')} = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \delta(L\lambda - L\lambda' + 2\pi m) = \frac{2\pi}{L} \sum_{m=0}^{\infty} \delta(\lambda - \lambda' + 2\pi m/L) \quad (20)$$

Next, we consider a stochastic representation for the periodic stationary random process $U(x, z, \omega)$. Though a periodic stationary process is a non-stationary, it can be expressed by a harmonic series representations. Because $U(x, z, \omega)$ is a functional of binary sequence, it can be represented by a binary expansion for every value of (x, z) (See (A6) of Appendix A),

$$\begin{aligned} U(x, z, \omega) &= c_0(x, z) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_1(x - mL, z) B^{(1)}[b_m] \\ &+ \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_2(x - mL, x - nL, z) B^{(2)}[b_m, b_n] + \dots \\ &+ \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=-\infty}^{\infty} c_k(x - i_1 L, x - i_2 L, \dots, x - i_k L, z) B^{(k)}[b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}] \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

where $B^{(k)}[\cdot]$ is the multi-variate binary polynomial defined in Appendix A, and $c_0(x, z)$, $c_1(x - mL, z)$, \dots are coefficient functions which we call binary kernels. Here, we have used the property (15) to get the forms of binary kernels. Since $\langle U(x, z, \omega) \rangle$ is a periodic function, $c_0(x, z)$ becomes a periodic function of x . Representing the binary kernels by their Fourier integrals and dividing the wavenumber region into bands with equal band width $2\pi/L$, we obtain the harmonic series representation for every term of $U(x, z, \omega)$. Rewriting these representations, we have,

$$\begin{aligned} U(x, z, \omega) &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi q}{L}x} U^{(q)}(x, z, \omega) \quad (22) \\ U^{(q)}(x, z, \omega) &= C_0^{(q)} e^{i\beta_q(p)z} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} B^{(1)}[b_m] \int_{-\pi/L}^{\pi/L} C_1^{(q)}(\lambda) e^{i\lambda(x-mL) + i\beta_q(p+\lambda)z} d\lambda \\ &+ \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} B^{(2)}[b_m, b_n] \int \int_{-\pi/L}^{\pi/L} C_2^{(q)}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i\lambda_1(x-mL) + i\lambda_2(x-nL) + i\beta_q(p+\lambda_1+\lambda_2)z} d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (23)$$

Here, $e^{ipx} e^{i\frac{2\pi q}{L}x} U^{(q)}(x, z, \omega)$ satisfies the wave equation (9). Furthermore, each integral in (23) is a superposition of out going plane waves with amplitude factor $C_n^{(q)}$. The factors $C_0^{(q)}$, $C_1^{(q)}(\lambda)$, \dots are binary kernels in the spectrum domain on the λ axis, which we simply call binary kernels. $U^{(q)}(x, z, \omega)$ is a stationary random process of x .

4 Statistical properties of scattering

In the preceding section, we have obtained a harmonic series representation of the scattered wave. In this section we will obtain several statistical properties of the scattering such as coherent wave, incoherent scattering cross section and optical theorem. From (22), (23) and (11) we obtain the total coherent wave (average wave)

$$\langle \Psi(x, z, \omega) \rangle = e^{ipx - i\beta_0(p)z} + e^{ipx} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi q}{L}x + i\beta_q(p)z} C_0^{(q)} \quad (24)$$

Clearly, this is well-known Floquet's solution for a periodic grating. $C_0^{(q)}$ is the zero order binary kernel which is the amplitude of the plane wave diffracted into the direction: $\phi_q^{(0)} = \cos^{-1} \left[\frac{1}{k} \left(p + \frac{2\pi q}{L} \right) \right]$. Next, let us consider the optical theorem. In a loss-less case, we obtain the identity: $\text{div} \left[\text{Im} \left(\frac{\Psi^*}{k} \cdot \text{grad} \Psi \right) \right] = 0$, and hence $\text{Im} \left[\text{div} \left(\frac{\Psi^*}{k} \cdot \text{grad} \Psi \right) \right] = 0$. Integrating the identity over the area ABCDA shown in Fig 1, where the length of AB is L, applying Gauss theorem, we obtain an identity (see Fig 1)

$$\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0. \quad (25)$$

Since the integrand $\text{Im} \left(\frac{\Psi^*}{k} \cdot \text{grad} \Psi \right)$ is a periodic function of x with the period L , the integrals over BC and DA cancel each other. The integral over CD vanishes for the Dirichlet condition. Therefore we have

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \text{Re} \left\langle \frac{\Psi^*}{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \right\rangle dx = -\frac{\beta_0(p)}{k} + \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \text{Re} \left\langle \frac{U^*}{ik} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \right\rangle dx = 0 \quad (26)$$

Substituting (11), (14) and (22) into (26) and using the orthogonal relations (A3), we obtain the optical theorem

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0(p)}{k} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\text{Re}[\beta_n(p)]}{k} |C_0^{(n)}|^2 + 1! \left(\frac{2\pi}{L} \right) \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{\text{Re}[\beta_n(p+\lambda)]}{k} |C_1^{(n)}(\lambda)|^2 d\lambda \right. \\ &+ 2! \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \frac{\text{Re}[\beta_n(p+\lambda_1+\lambda_2)]}{k} [|C_2^{(n)}(\lambda_1, \lambda_2)|^2 \\ &\left. - \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} C_2^{(n)}(\lambda_1, \lambda_2) C_2^{(n)*}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3, \lambda_3) d\lambda_3 \right] d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots \} \end{aligned} \quad (27)$$

The left hand side in (27) is the incident power per unit length, and the first term of the right hand side in (27) is the total coherent power. An integral term in (27) indicates the incoherently scattered power. If a scattering angle is denoted by ϕ in Fig 1, the optical theorem can be expressed by another form as

$$\sin \theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re}[\sin \phi_n^{(0)}] |C_0^{(n)}|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sigma_i(\phi|\theta) d\phi \quad (28)$$

where $\sigma_i(\phi|\theta)$ is the scattering cross section per unit area,

$$\begin{aligned} \sigma_i(\phi|\theta) &= 2\pi k \sin^2 \phi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 1! \left(\frac{2\pi}{L} \right) |C_1^{(n)}(\lambda_n)|^2 S(\lambda_n) \right. \\ &+ 2! \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \int_{-\pi/L}^{\pi/L} [|C_2^{(n)}(\lambda_n - \lambda', \lambda')|^2 \\ &\left. - \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} C_2^{(n)}(\lambda_n - \lambda', \lambda') C_2^{(n)*}(\lambda_n - \lambda_1, \lambda_1) d\lambda_1 \right] S(\lambda_n - \lambda') d\lambda' + \dots \}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\lambda_n = k \cdot (\cos \phi - \cos \theta) - \frac{2\pi n}{L} \quad (30)$$

where $S(\lambda) = 1$ for $|\lambda| \leq \pi/L$ and $S(\lambda) = 0$ for $|\lambda| \geq \pi/L$. We will calculate concretely these quantities by use of zero order and first order binary kernels.

5 An approximate solution

Let us determine the binary kernels to investigate the coherent and incoherent scattering and optical theorem. We assume that the boundary condition (10) holds in the sense of norm:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \int_{\pi/L}^{\pi/L} \left\langle \left| \Psi(x, 0, \omega) + f(x, \omega) \frac{\partial \Psi(x, z, \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right|^2 \right\rangle dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{\pi/L}^{\pi/L} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{2\pi(n-m)x}{L}} \langle V^{(n)}(x, \omega) V^{(m)*}(x, \omega) \rangle dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle |V^{(n)}(x, \omega)|^2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Here,

$$\Psi(x, 0, \omega) + f(x, \omega) \frac{\partial \Psi(x, z, \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} = e^{ipx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{2\pi n x}{L}} V^{(n)}(x, \omega) \quad (32)$$

$$V^{(n)}(x, \omega) = \delta_{n0} + U^{(n)}(x, 0, \omega) - i\beta_0(p) f^{(n)}(x, \omega) + \sum_{r=-\infty}^{\infty} f^{(n-r)}(x, \omega) \frac{\partial U^{(r)}(x, z, \omega)}{\partial z} \quad (33)$$

which is a stationary random function and hence $\langle V^{(n)}(x, \omega) V^{(m)*}(x, \omega) \rangle$ is a constant independent of x . Therefore we obtain

$$V^{(n)}(x, \omega) = 0 \quad (34)$$

which holds in quadratic mean sense. Calculating (34) by the orthogonality relation, we get a hierarchy of equations for the binary kernels. The two lower order equations are

$$\delta_{n,0} + C_0^{(n)} + i \left(\frac{2\pi}{L} \right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} G^{(n-r)}(-\lambda) C_1^{(r)}(\lambda) \beta_r(p + \lambda) d\lambda = 0 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & C_1^{(n)}(\lambda) - i\beta_0(p) G^{(n)}(\lambda) + i \sum_{r=-\infty}^{\infty} G^{(n-r)}(\lambda) C_0^{(r)} \beta_r(p) \\ & + 2i \left(\frac{2\pi}{L} \right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} G^{(n-r)}(-\lambda') C_2^{(r)}(\lambda, \lambda') \beta_r(p + \lambda + \lambda') d\lambda' \\ & - \frac{2i\pi}{L} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int \int_{-\pi/L}^{\pi/L} G^{(n-r)}(-\lambda_1 - \lambda_2) C_2^{(r)}(\lambda_1, \lambda_2) \beta_r(p + \lambda_1 + \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

We can determine the zero order and first order kernels by neglecting $C_2^{(r)}(\lambda_1, \lambda_2)$ in the equation (36). Thus we obtain an approximate representation for $C_1^{(n)}(\lambda)$,

$$C_1^{(n)}(\lambda) = i \sum_{r=-\infty}^{\infty} G^{(n-r)}(\lambda) \beta_r(p) [\delta_{r,0} - C_0^{(r)}] \quad (37)$$

Substituting (37) into (35), we have an equation about $C_0^{(m)}$ for every n

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta_{n,m} + M_{n,m}(p)] C_0^{(m)} = -\delta_{n,0} + M_{n,0}(p) \quad (38)$$

where $M_{n,m}(p)$ is the so-called mass operator,

$$M_{n,m}(p) = \left(\frac{2\pi}{L} \right) \beta_m(p) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} G^{(n-r)}(-\lambda) G^{(r-m)}(\lambda) \beta_n(p + \lambda) d\lambda. \quad (39)$$

Here, (38) is an infinite dimensional matrix equation which is approximated by a matrix function with finite size for concrete calculation. Substituting (37) into (30), the incoherent cross section $\sigma_i(\phi|\theta)$ is approximately expressed as

$$\sigma_i(\phi|\theta) \approx 2\pi k \sin^2 \phi \left(\frac{2\pi}{L} \right) \cdot \left| \sum_{r=-\infty}^{\infty} G(k \cos \phi + k \cos \theta - 2\pi r/L) \beta_r(k \cos \theta) [\delta_{r,0} - C_0^{(r)}] \right|^2, \quad (40)$$

which means that the scattering cross section can be determined by a summation of all zero order binary kernels.

6 Numerical examples

For the purpose of numerical calculation, we assume that the local surface profile function has the form

$$g(x) = \begin{cases} z_0 & |x| \leq a_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad G(\lambda) = \frac{z_0 \sin(a_0 \lambda)}{\pi \lambda}, \quad (41)$$

where z_0 is a small roughness parameter, and a_0 is the half of the width of the surface profile (See Fig 1). Here, we calculate the scattering cross section only by first order binary kernels $C_1^{(n)}(\lambda)$.

The scattering cross section $\sigma_i(\phi|\theta)$ are illustrated against the scattering angle ϕ in Fig 2-5. There are common properties that the incoherent scattering is strong in the direction of specular reflection and ripples appear due to interference of the displaced surface profiles in every period. Fig 2 shows the case of parameters $L = 3\Lambda$, $a_0 = \Lambda$ and $z_0 = \Lambda/10$ for several angles of incidence. Fig 3 shows the case of parameters $L = 3\Lambda$, $\theta = 60^\circ$ and $z_0 = \Lambda/10$ for several widths a_0 . When the width parameter is small ($a_0 = 0.3\Lambda$), no ripples appear. Fig 4 shows the case of parameters $L = 3\Lambda$, $a_0 = \Lambda$ and $\theta = 60^\circ$ for several z_0 . We find that the scattering cross section becomes weaker in the direction of specular reflection and spreads widely in the scattering angle with the decrease of incident angle θ , a_0 and z_0 . Fig 5 is the case of parameters $\theta = 60^\circ$, $a_0 = \Lambda$ and $z_0 = \Lambda/10$ for several period L . It shows that the scattering cross section strengthened in the direction of specular reflection and spreads widely in the scattering angle with the decrease of period L .

Fig 6. illustrates the backscattering cross section $\sigma(\phi|\pi - \phi)$ against scattering angle ϕ for several z_0 with parameter $L = 3\Lambda$ and $a_0 = \Lambda$. The backscattering cross section is relatively strong when the incident angle nears 90° .

Fig 7. shows the optical theorem against the surface roughness z_0 with parameters $\theta = 45^\circ$, $a_0 = 1.2\Lambda$ and $L = 3\Lambda$. The incoherent scattering power increases but the total coherent scattering power decreases when the surface gets rough. The total scattering power is almost equals to the incident power. Fig 8 illustrates the optical theorem against the incident angle with parameters $z_0 = \Lambda/30$, $a_0 = 1.2\Lambda$ and $L = 3\Lambda$. We find the difference of the total scattering power and incident power increases with the increase of the incident angle. The reason is that we have neglected more than second order binary kernels.

Appendix A Stochastic binary sequence

The nonlinear functional of stochastic binary sequence has been studied by Ogura [11], where Gram-schmidt method constructing multi-variate orthogonal polynomials, mathematical definition of orthogonal stochastic functionals and completeness of orthogonal functional series are given for a multi-valued stationary sequence. However, we give explicit formulas for orthogonal polynomials and stochastic functionals of random binary process.

Let $b_i(\omega)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, be an independent binary sequence taking ± 1 with properties (2). We define the multi-variate orthogonal polynomials $B^{(n)}[\dots]$ associated with the binary sequence as

$$\begin{aligned}
 B^{(0)} &= 1, \\
 B^{(1)}[b_k] &= b_k, \\
 \text{Quasiperiodic } B^{(2)}[b_k, b_l] &= (1 - \delta_{k,l})b_k b_l = b_k b_l - \delta_{k,l} b_k b_l, \\
 &\dots \\
 B^{(n)}[b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}] &= (1 - \delta_{i_n, i_{n-1}} - \delta_{i_n, i_{n-2}} - \dots - \delta_{i_n, i_1}) \\
 &\dots (1 - \delta_{i_3, i_2} - \delta_{i_3, i_1})(1 - \delta_{i_2, i_1}) b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_n}, \quad (\text{A1})
 \end{aligned}$$

which we call the binary polynomials. Here, we have drop the probability parameter ω . The binary polynomials enjoy the recurrence formula

$$\begin{aligned}
 B^{(n)}[b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}] &= B^{(n-1)}[b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}] B^{(1)}[b_{i_n}] \\
 &- \sum_{l=1}^{n-1} B^{(n-2)}[b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{l-1}}, b_{i_{l+1}}, \dots, b_{i_{n-1}}] \delta_{i_n, i_l} \\
 &+ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n-1} B^{(n-2)}[b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{l-1}}, b_{i_{l+1}}, \dots, b_{i_{n-1}}] \delta_{i_n, i_l} \delta_{i_n, i_k}. \quad (\text{A2})
 \end{aligned}$$

and satisfy the orthogonality relation:

$$\begin{aligned}
 \langle B^{(n)}[b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}] B^{(m)}[b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_m}] \rangle &= (1 - \delta_{i_n, i_{n-1}} - \delta_{i_n, i_{n-2}} - \dots - \delta_{i_n, i_1}) \dots (1 - \delta_{i_3, 2} - \delta_{i_3, 1})(1 - \delta_{i_2, 1}) \\
 &\cdot (1 - \delta_{j_m, j_{m-1}} - \delta_{j_m, j_{m-2}} - \dots - \delta_{j_m, j_1}) \dots (1 - \delta_{j_3, 2} - \delta_{j_3, 1})(1 - \delta_{j_2, 1}) \delta_{n,m} \delta_{i,j}^{(n)}, \quad (\text{A3})
 \end{aligned}$$

where $\delta_{i,j}^{(n)}$ is defined by

$$\delta_{i,j}^{(n)} = \sum_{l_1=1}^n \delta_{i_1, j_{l_1}} \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq l_1}}^n \delta_{i_2, j_{l_2}} \dots \sum_{\substack{l_n=1 \\ l_n \neq l_1, l_2, \dots, l_{n-1}}}^n \delta_{i_n, j_{l_n}}. \quad (\text{A4})$$

Putting $m = 0$ in (A3), we obtain averages

$$\langle B^{(n)}[b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}] \rangle = \delta_{n,0} \quad (\text{A5})$$

Next, we consider a stochastic functional $\Phi(\omega)$ of the binary sequence $b_n(\omega)$. If $\langle |\Phi(\omega)|^2 \rangle < \infty$, $\Phi(\omega)$ has an orthogonal functional expansion which we write in terms of the binary polynomials,

$$\Phi(\omega) = a_0 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_1(m) B^{(1)}[b_m] + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_2(m,n) B^{(2)}[b_m, b_n] + \dots, \quad (\text{A6})$$

which we call the binary functional expansion. The binary kernels $a_n(\dots)$ can be determined by orthogonality relation (A3) as

$$a_0 = \langle \Phi(\omega) \rangle$$

$$a_n(i_1, i_2, \dots, i_n) = \frac{1}{n!} \langle \Phi(\omega) \cdot B_n[b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_n}] \rangle, \quad (\text{A7})$$

where (i_1, i_2, \dots, i_n) is a distinct set and $a_n(\dots)$ is assumed to be a symmetrical function. Using the orthogonal relation (A3), we may calculate the mean square of $\Phi(\omega)$ as

$$\langle |\Phi(\omega)|^2 \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m! \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m): \text{distinct}} |a_m(i_1, i_2, \dots, i_m)|^2. \quad (\text{A8})$$

which is the Parseval relation.

Reference

- [1] D. P. Chrissoulidis, "EM wave scattering from statistically inhomogeneous and periodic random rough surfaces, *IEE Proc.* 134, Pt. H, pp. 209-214, 1989.
- [2] 安田直義, "CD-ROM の作り方," *UNIX MAGAZINE*, 1993.2.
- [3] H. A. Yueh, R. T. Shin, and J. A. Kong, "Scattering from Randomly Perturbed Periodic and Surface," in *Process in Electromagnetic Research*, ed, J. A. Kong, Elsevier, New York, 1988.
- [4] R. T. Shin and J. A. Kong, "Scattering of electromagnetic wave from a Randomly Perturbed Quasiperiodic Surface," *J. Appl. Phys.*, 56, 10-21, 1984.
- [5] Monique Rasigini, Georges Rasigni, and Jean-Pierre Palmari, "Study of surface roughness using a microdensitometer analysis of electron micrographs of surface replicas: I. Surface profiles," *J. Opt. . Am.*, Vol. 71, No. 9. September 1981.
- [6] IEICE John W. Wright, "A New Model for Sea Clutter," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, -16, 217-223, 1969.
- [7] Willam A. Gardner, *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*, IEEE PRESS, 1993.
- [8] 小倉久直, 確率過程論, コロナ社.
- [9] N. Wiener, *Nonlinear problem in random theory*, MIT, Cambridge, MS, 1958.
- [10] 北川敏男, 確率論及び推計学進歩, 岩波書店, 1953.

[11] H. Ogura, "On the orthogonal polynomials and functionals associated with a multi-valued random variable," *Technical Report of*, IT69-29, (1969).

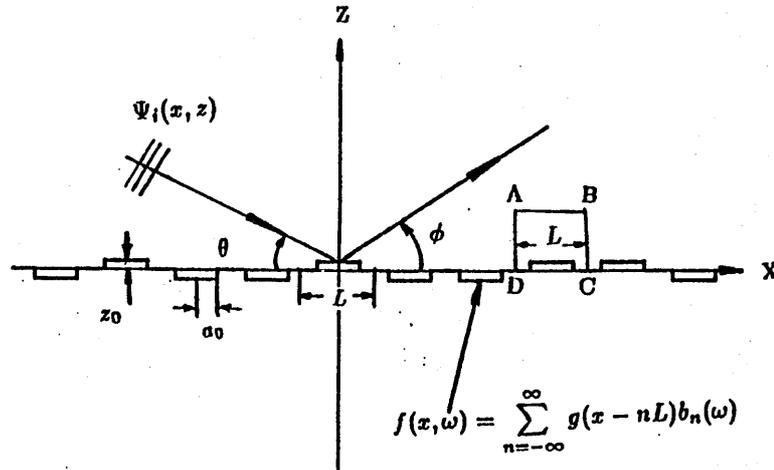


Fig 1. Scattering of a TE plane wave from a periodic random surface. L is the period. a_0 is the width of the surface profile. z_0 is a small roughness parameter. θ is the angle of incident and ϕ is a scattering angle. The box ABCDA is an integral area for obtaining the optical theorem. In this case, $b_n(\omega)$ is a stationary binary sequence taking ± 1 with equal probability $1/2$, however, $f(x, \omega)$ is a three-valued function.

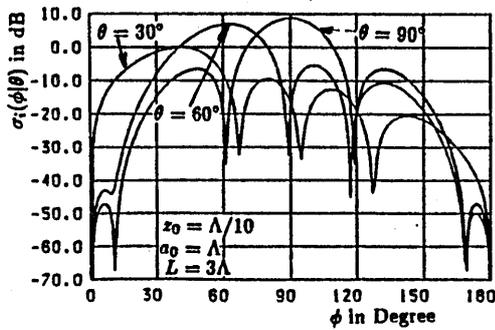


Fig 2. Scattering cross section $\sigma_i(\phi|\theta)$ against scattering angle for several angles of incidence. Incoherent scattering is relatively strong in the direction of specular reflection.

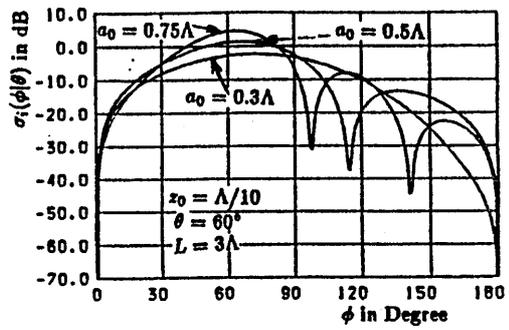


Fig 3. Scattering cross section $\sigma_i(\phi|\theta)$ for several widths a_0 . When the width parameter a_0 is small ($a_0 = 0.3\Lambda$), no ripples appear. However, when a_0 is larger than 0.5Λ , ripples appear.

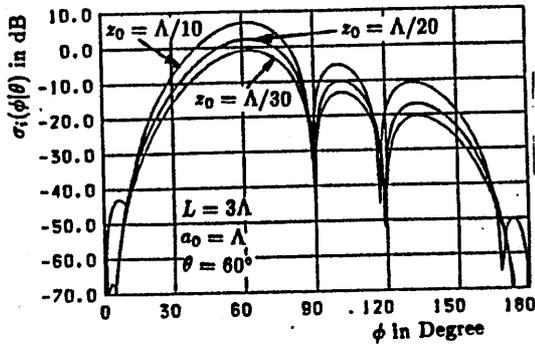


Fig 4 Scattering cross section $\sigma_i(\phi|\theta)$ for several values of z_0 . The scattering cross section strengthens with the increase of the roughness z_0 .

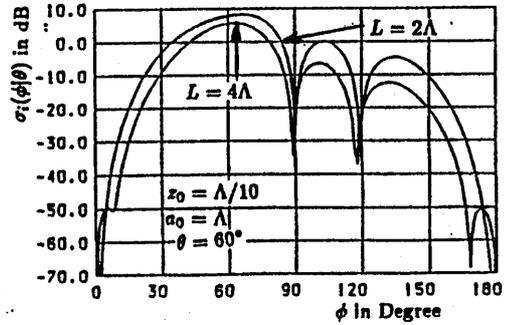


Fig 5. Scattering cross section $\sigma_i(\phi|\theta)$ for several values of period L . The scattering cross section spreads widely with the decrease of the period L .

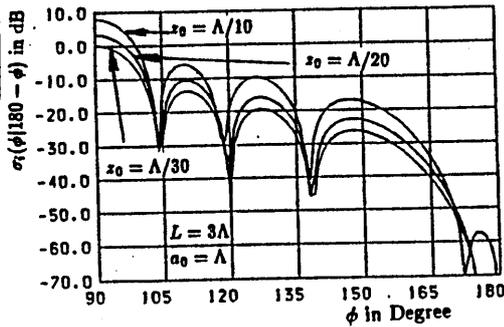


Fig 6. Backscattering cross section $\sigma_i(\phi|\pi - \phi)$ against scattering angle ϕ for several values of roughness z_0 . The backscattering is relatively strong when the incident angle nears 90° .

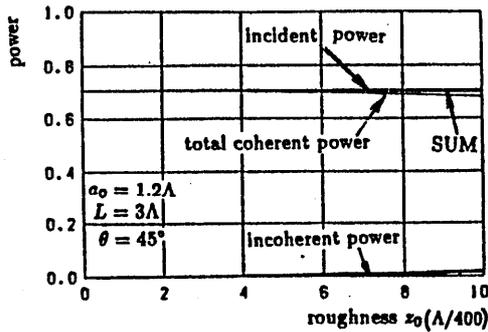


Fig 7. The optical theorem against the surface roughness z_0 with parameters $\theta = 45^\circ$, $a_0 = 1.2\Lambda$ and $L = 3\Lambda$. The incoherent scattering power increases but the total coherent power decreases when the surface get rough.

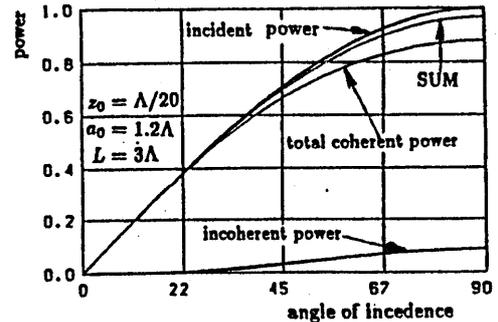


Fig 8. The optical theorem against the angle of incidence with parameters $L = 3\Lambda$, $z_0 = \Lambda/30$ and $a_0 = 1.2\Lambda$.

半導体量子細線中の電子波導波モード

小川真人 土屋英昭 大川康司 伊東正治 三好旦六
神戸大学工学部電気電子工学科

1. はじめに

シリコンや GaAs 等を用いた半導体量子細線の作製技術の向上とともに量子細線電子デバイスや量子細線レーザの実現に向けた研究が活発に行われている。本章では、これらデバイスの動作特性を決めている量子細線中の電子波について解析を行っている。特に作製されている複雑な断面形状を持つ量子細線の解析に適用できるように有限要素法による解析方法を新たに開発するとともに、シリコン量子細線の電子波導波モードとそのゲート電圧制御特性や GaAs 量子細線の価電子帯バンド構造を解析した結果について報告する。

2. シリコン量子細線の電子波導波モードとそのゲート電圧制御

シリコン量子細線は、現在のマイクロプロセス技術を用いて作製することができる上に、100K 以上の高温で量子化コンダクタンスが観測されている [1] ことから、量子デバイスとしての発展が期待されている。本章では、任意断面形状を持ち、任意方向に形成された Si 量子細線中を伝搬する電子波導波モードについて報告する。有効質量テンソルの異方性や境界面の確率流密度の連続性を厳密に考慮した有限要素法による定式化を行うとともに、固有導波モード及びそのゲート電圧制御特性を求めている。

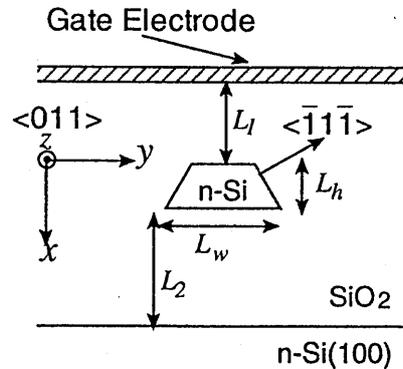


図 1: シミュレーションモデル

2.1 シミュレーションモデル

Si 量子細線のシミュレーションモデルを図 1 に示す。n 型 (100) 基板上に形成された SOI (Silicon-On-Insulator) 量子細線を念頭においており、SiO₂ 上に付けられた金属ゲート電極に加える電圧により、伝導特性を制御する。異方性エッチングと熱酸化により形成された量子細線は台形の断面形状をしており、電子波の伝搬方向 z は $\langle 011 \rangle$ 方向になる [1]。

Si 量子細線中を伝搬する電子波固有モードは 2 次元シュレディンガー方程式を解くことにより求めることができる。本稿では、複雑な断面形状を持つ量子細線の解析に適用するため、新たに有限要素法を開発した。有効質量テンソルを考慮に入れると、有限要素解析

に用いる汎関数は、次式で与えられる。

$$I = \iint \frac{\hbar^2}{2} \left(w_{xx} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi^*}{\partial x} + w_{xy} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi^*}{\partial y} + w_{xy} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi^*}{\partial x} + w_{yy} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi^*}{\partial y} \right) + (V - E') \xi \xi^* dx dy. \quad (1)$$

ここで、 $\xi(x, y)$ は断面方向の包絡線関数で、波動関数との関係は、

$$\psi(x, y, z) = \xi(x, y) \exp(ik_z z) \times \exp[ik_z(ax + by)], \quad (2)$$

$$a = \frac{w_{xy}w_{yz} - w_{yy}w_{xz}}{w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2}, \quad (3)$$

$$b = \frac{w_{xy}w_{xz} - w_{xx}w_{yz}}{w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2}, \quad (4)$$

である。ここで w は逆有効質量テンソルである。 E' は断面方向の固有エネルギーで全エネルギーとの関係は、

$$E = E' + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_z^*}, \quad (5)$$

となる。ここで、 m_z^* は z 方向の有効質量であり、次式で与えられる。

$$\frac{1}{m_z^*} = w_{zz} + w_{xz}a + w_{yz}b. \quad (6)$$

伝導帯のポテンシャルエネルギー $V(x, y)$ は、

$$V(x, y) = -e\phi(x, y) + \Delta E_c(x, y), \quad (7)$$

で与えられる。 $\phi(x, y)$ は静電ポテンシャルであり、 $\Delta E_c(x, y)$ は伝導帯のオフセットである。式(1)の汎関数を用いると要素境界上で包絡線関数が連続であれば、確率流密度の連続の条件は自然に満たされる。確率流密度は次式のように表される。

$$J_x = -\hbar \text{Im} \left[w_{xx} \xi^* \frac{\partial \xi}{\partial x} + w_{xy} \xi^* \frac{\partial \xi}{\partial y} \right], \quad (8)$$

$$J_y = -\hbar \text{Im} \left[w_{xy} \xi^* \frac{\partial \xi}{\partial x} + w_{yy} \xi^* \frac{\partial \xi}{\partial y} \right]. \quad (9)$$

量子細線の電子密度分布は、包絡線波動関数 ξ を正規化すると、次式で定義される。

$$n_0(x, y) = \sum_i |\xi_i(x, y)|^2 \frac{g(2m_z^* k_B T)^{\frac{1}{2}}}{\pi \hbar} F_{-1/2}(\eta). \quad (10)$$

ここで、 $F_{-1/2}(\eta)$ は $-1/2$ 次のフェルミ-ディラック積分であり、以下のように与えられる。

$$F_{-1/2}(\eta) = \int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} [1 + \exp(x - \eta)]} dx, \quad (11)$$

$$\eta = \frac{E_F - E'_i}{k_B T}. \quad (12)$$

g は伝導帯の谷の縮退度、 E_F 、 E'_i はそれぞれフェルミエネルギーと、 i 番目の準位の固有エネルギーである。

ハートリー近似の範囲内で電子-電子相互作用を取り入れるため、上記シュレディンガー方程式とポアソン方程式を自己無撞着に解析する。解くべきポアソン方程式の汎関数は以下のように与えられる。

$$I_p(\phi_1, \nabla \phi_1) = \iint \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{e}{\epsilon \epsilon_0} n_1 \phi_1 - 2\phi_1 \left\{ \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + \frac{e}{\epsilon \epsilon_0} (N_d - n_0) \right\} \right] dx dy. \quad (13)$$

ここで、 N_d はイオン化ドナー密度分布、 n_0 は式(10)で定義される電子密度分布である。 n_1 は静電ポテンシャルの微小変化 ϕ_1 による電子密度の変化分で以下のように表される。

$$n_1 = e \sum_{i=0}^\infty |\xi_i|^2 \frac{g(2m_z)^{\frac{1}{2}}}{\pi \hbar (k_B T)^{\frac{1}{2}}} \frac{dF_{-1/2}(\eta)}{d\eta} \phi_1. \quad (14)$$

ただし、次の近似を用いた。

$$E'_i(\phi_0 + \phi_1) - E'_i(\phi_0) = \frac{-e \int \phi_1 |\xi_i|^2 dx dy}{\int |\xi_i|^2 dx dy} \approx -e\phi_1. \quad (15)$$

-1/2 次のフェルミディラック積分 $F_{-1/2}(\eta)$ およびその微分には近似式 [2] を用いた。

伝搬方向を $\langle 011 \rangle$ 方向としたときの Si 量子細線中の有効質量と縮退度を表 1 に示す。このとき $w_{xy}=0$ である。Si の異方性有効質量は

表 1: 有効質量テンソル

	(a)	(b)
degeneracy	2	4
w_{xx}	$1/m_t$	$1/m_t$
w_{yy}	$1/m_t$	$(1/m_t + 1/m_l)/2$
m_z	m_t	$(m_t + m_l)/2$

$m_t^* = 0.19m_0$ 、 $m_l^* = 0.98m_0$ 、 SiO_2 の有効質量は $0.5m_0$ [3] とした。また、Si と SiO_2 の比誘電率はそれぞれ 11.9 と 3.8 とした。

図 2 に有限要素法で用いたシミュレーション領域を示す。対称性を考慮して右半領域を解析した。シュレディンガー方程式については量子細線部を囲む狭い領域を、ポアソン方程式については埋め込み酸化膜を全て含む広い領域を取り、一次 3 角形要素を用いて離散化した。ポアソン方程式の境界条件としてはゲート電極部 C_1 で $\phi = V_g$ 、 C_2 上で $\phi = 0$ 、 C_3 上で $\partial\phi/\partial y = 0$ とした。シュレディンガー方程式の境界条件は、対称面上では、奇モードの場合 $\xi = 0$ 、偶モードの場合 $\partial\xi/\partial n = 0$ とし、その他の境界上で $\xi = 0$ とした。セルフコンシステント解は繰り返し計算により求め、 $\phi_1 \leq 0.01\text{mV}$ を収束条件とした。

2.2 シミュレーション結果

$L_h = 6\text{nm}$ 、 $L_w = 20\text{nm}$ 、 $L_1 = 30\text{nm}$ 、 $L_2 = 400\text{nm}$ 、 $N_d = 10^{14}\text{cm}^{-3}$ の場合の $T=4.5\text{K}$ におけるサブバンドエネルギー E_i^s のゲート電圧 V_g

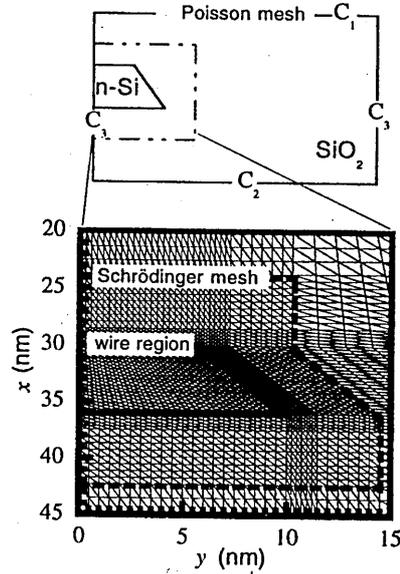


図 2: シミュレーション領域

依存性を図 3 に示す。エネルギーの基準はフェルミエネルギー E_F に取ってある。固有エネルギー E_i^s が $E_i^s < E_F$ となったとき、固有モードは伝搬モードとなる。図 3 を見ると、ゲート電

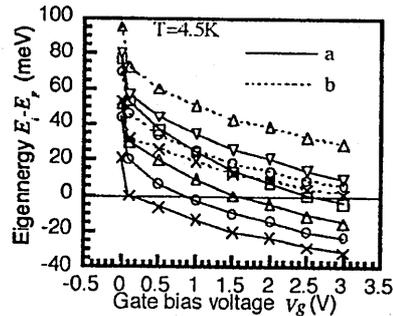


図 3: 固有エネルギーのゲート電圧依存性

圧 $V_g=0\text{V}$ の時は細線中を伝搬するモードが存在しないが、ゲート電圧の増加とともに伝搬モードが増していることが分かる。これはゲート電極に加えられた正の電圧により、細

線のポテンシャルエネルギーが引き下げられることによっている。ゲート電圧 $V_g=1V$ の時の細線部における伝導帯のポテンシャルエネルギー分布を図4(a)に示す。Si-SiO₂の境界で

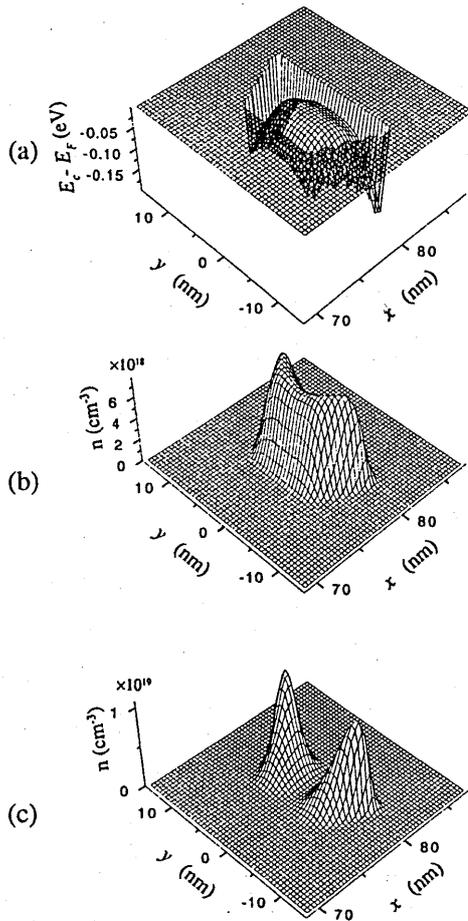


図4: (a) 伝導帯のポテンシャル分布、(b) 基底モードの電子密度分布、(c) 一次モードの電子密度分布

は $\sim 3.25\text{eV}$ [4] の非常に大きな伝導帯の不連続が仮定されていることに注意頂きたい。伝搬モードの電子密度分布を図4 (b) - (c) に示す。図4 (b) を見ると基底モードで y 方向に2つのピークが見られるが、これは、空間電

荷効果により凸状に曲げられたポテンシャル (図4 (a)) により電子波が細線の端へ押しやられているためである。

本計算には HP9000 シリーズ model735 を用いた。ポアソン方程式については 194×166 、シュレディンガー方程式については 92×64 の三角形要素を用いた。反復計算一回当たり約2分の計算時間を要し、収束するまでには20回程度の反復が必要であった。

2.3 まとめ

2章では、任意の断面形状を有し、任意の方位に作製された Si 量子細線中を伝搬する電子波導モードを解析するため、新たに有限要素法による定式化を行うとともに、解析例を示した。その結果、Si 量子細線中を伝搬する電子波の固有エネルギー、及び電子密度分布が電子-電子相互作用の影響を強く受けること、またゲート電極に正の電圧を印加することにより細線を伝搬するモードの数を制御できることを示した。今後は、報告されている、量子化コンダクタンスなどの実験結果を説明するモデルに発展させたいと考えている。

3. 任意断面形状量子細線の価電子帯のバンド構造の有限要素法による解析

最近の半導体微細構造加工技術の発展により、高性能光デバイスや電子デバイスへの応用を目的として、量子井戸、量子細線、量子箱等の量子構造が作成されている。とりわけ、量子井戸構造は、既に量子井戸レーザ等現実のデバイスへの応用が実現されている。しかし、量子細線構造に関しては、細線の均一性の制御や、断面形状の変化に伴うバンド構造に関する検討が未だ不十分であり、現実の光デバイスを作成するためには多くの課題が残されている。

本章では、上記の背景を踏まえ、任意の断面形状をもつ GaAs/Al_xGa_{1-x}As 量子細線構造の価電子帯のバンド構造を解析するために有限要素法を適用した結果について報告する。

この系では、価電子帯が重い正孔と軽い正孔のバンド混合により形成されている。従って、バンド構造を有効質量近似の範囲で解析するためには、この効果を取り入れる必要がある。ここでは、バンド混合効果を考慮した多バンド有効質量近似に基づき、4 × 4 Luttinger-Kohn ハミルトニアンを用い、その固有値問題として価電子帯の構造の解析を行った。解析方法には、ガラーキン法に基づく一次要素による有限要素法を使用し、細線と障壁間の境界条件として課せられる確率密度流連続の条件を厳密に取り入れている。次節では、シミュレーションの定式化について述べ、第3.2節では、本手法を正方形断面と三角形断面を持つ細線構造に適用した結果につき詳述する。最後に結論を述べる。

3.1 量子細線のモデルと定式化

図5に示す様に、 x, z 方向に量子閉じ込めが行われた量子細線の価電子帯バンド構造の解析につき考察する。GaAs 系半導体では、価電子帯と伝導帯は 1eV 以上隔たっているので、価電子帯と伝導帯とは結合していないと仮定し、Luttinger-Kohn の有効質量理論 [5] に基づき、価電子帯構造のみを考察する。

この時、価電子帯の状態はブリルアン帯の中心 $k=0$ でのスピン状態の異なる 4 つのプロッホ関数を基底とした、次式のハミルトニアンで記述される。

$$H = \begin{bmatrix} H_{hh} & c & b & 0 \\ c^\dagger & H_{lh} & 0 & -b \\ b^\dagger & 0 & H_{lh} & c \\ 0 & -b^\dagger & c^\dagger & H_{hh} \end{bmatrix} \quad (16)$$

但し、行列要素は、それぞれ以下の式で与え

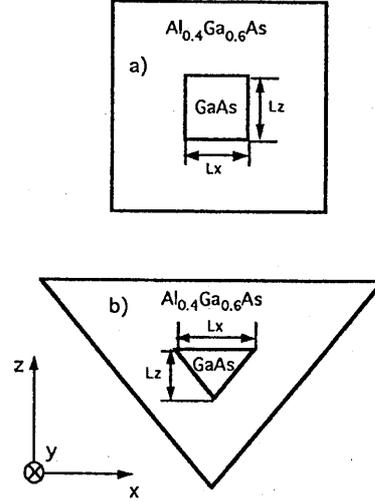


図5: シミュレーションモデル a) 正方形断面、b) 三角形断面量子細線

られる。

$$\begin{aligned} H_{hh} &= \frac{\hbar^2}{2m_0} [(\gamma_1 + \gamma_2)(\partial_x^2 - k_y^2) \\ &\quad + \partial_z(\gamma_1 - 2\gamma_2)\partial_z] + V(x, z) \\ H_{lh} &= \frac{\hbar^2}{2m_0} [(\gamma_1 - \gamma_2)(\partial_x^2 - k_y^2) \\ &\quad + \partial_z(\gamma_1 + 2\gamma_2)\partial_z] + V(x, z) \\ b &= -\frac{\sqrt{3}\hbar^2}{2m_0}(\partial_x - k_y)(\gamma_3\partial_z + \partial_z\gamma_3) \\ c &= -\frac{\sqrt{3}\hbar^2}{2m_0}\gamma_2(\partial_x + k_y)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

上式で $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ は Luttinger パラメータ、 m_0 は電子の静止質量、 V はポテンシャルである。また、ハミルトニアンの基底関数には、

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= u_{3/2,0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}|(X + iY) \uparrow\rangle, \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= u_{-1/2,0} = \frac{1}{\sqrt{6}}|(X - iY) \uparrow + 2Z \downarrow\rangle, \\ \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= u_{1/2,0} = \frac{1}{\sqrt{6}}|-(X + iY) \downarrow + 2Z \uparrow\rangle, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = u_{-3/2,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}|(X - iY) \downarrow|. \quad (18)$$

を用い、それぞれ順に重い正孔 (HH)、軽い正孔 (LH)、LH、HHに対応している。価電子帯のバンド構造、及び包絡線関数を求めるには、(16) 式のハミルトニアンを用いて、次の多バンド有効質量方程式を伝搬方向の波数 k_y をパラメータとして解くことになる。

$$\sum_{j'} H_{jj'} G_j^q(x, z, k_y) = E^q(k_y) G_j^q(x, z, k_y) \quad (19)$$

$$(j, j' = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2})$$

但し、 G_j^q は包絡線関数、 q はサブバンドの番号である。この際注意しなければならないのは、細線部と障壁部とで異なる材料を用いて量子閉じ込めを行っている事である。このために、界面では確率密度流連続の条件を課す必要がある。バンド混合のない量子構造の解析では、上の条件は容易に取り込めたが、ここでは、価電子帯のバンド混合効果が存在するために基本に戻る必要がある。元来の波動関数を $\Psi(\mathbf{r})$ とすると、確率密度流は次式で定義される。

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2m_0 i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (20)$$

Ψ は、

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{j, k_y} G_j(x, z, k_y) e^{ik_y y} |j\rangle \quad (21)$$

で近似できる。(20) 式を、先の基底関数を用いて、 x, z 成分について展開し演算子化すると、次式のようになる。

$$j_x = \frac{\hbar}{m_0} \begin{bmatrix} -i(\gamma_1 + \gamma_2)\partial_x & \sqrt{3}i(\gamma_2\partial_x + \gamma_3k_y) \\ \sqrt{3}i(\gamma_2\partial_x - \gamma_3k_y) & -i(\gamma_1 - \gamma_2)\partial_x \\ \sqrt{3}i\gamma_3\partial_x & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}i\gamma_3\partial_x \\ \sqrt{3}i\gamma_3\partial_x & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}i\gamma_3\partial_x \\ -i(\gamma_1 - \gamma_2)\partial_x & -\sqrt{3}i(\gamma_2\partial_x + \gamma_3k_y) \\ -\sqrt{3}i(\gamma_2\partial_x - \gamma_3k_y) & -i(\gamma_1 + \gamma_2)\partial_x \end{bmatrix}$$

$$j_z = \frac{\hbar}{m_0} \begin{bmatrix} -i(\gamma_1 - 2\gamma_2)\partial_z & 0 \\ 0 & -i(\gamma_1 + 2\gamma_2)\partial_z \\ \sqrt{3}i\gamma_3(\partial_x - k_y) & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}i\gamma_3(\partial_x - k_y) \\ -\sqrt{3}i\gamma_3(\partial_x + k_y) & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}i\gamma_3(\partial_x + k_y) \\ -i(\gamma_1 + 2\gamma_2)\partial_z & 0 \\ 0 & -i(\gamma_1 - 2\gamma_2)\partial_z \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここで、 $j_x G_j^q, j_z G_j^q$ 、及び、 G_j^q 連続の境界条件を課すと、ガラーキン法における部分積分の項が除去できることが容易に示され、界面での境界条件が厳密に取り入れられる。その他の境界条件は、解析領域端で $G_j^q = 0$ としている。有限要素法の要素分割は、量子細線を囲む部分を等間隔に分割した三角形一次要素を用いている。

3.2 解析結果

モデルとして図 5 a) 正方形断面、 $L_x = L_z = 11\text{nm}$ 、b) 三角断面、 $L_x = 20\text{nm}$ 、 $L_z = 12\text{nm}$ [7] を持つ細線を考える。なお、計算には表 2 の値を用いた。

表 2: 計算に用いた物性パラメータ

材料	GaAs	Al _{0.4} Ga _{0.6} As
$E_g(\text{eV})$	1.424	1.923
γ_1	6.85	5.73
γ_2	2.50	2.01
γ_3	2.50	2.01
$\Delta E_v(\text{eV})$	0.20	

本報告の妥当性を確認するために、正弦波展開法を用いて無限障壁閉じ込め正方形断面量子細線のバンド構造を解析した安藤らの結果 [6] と本手法の結果とを比較した。その結果、エネルギー固有値、固有関数 (包絡線関数) とともに良好な一致を示しており、本方法が妥当であることを確かめている。安藤らの手

法は、実際の量子細線の様に量子細線と障壁部との閉じ込めポテンシャルが有限の場合や細線断面が任意形状の場合には適用が困難になるため、本報告の手法が量子細線のバンド構造の解析に対しては汎用性があると考えられる。

図6 a) に、正方形断面細線のバンド構造を求めた結果を示す。ここで正方形断面量子細線構造では、それぞれのサブバンドはポテンシャルに x 方向、 z 方向、ともに対称性があるため二重に縮退している事に注目したい。

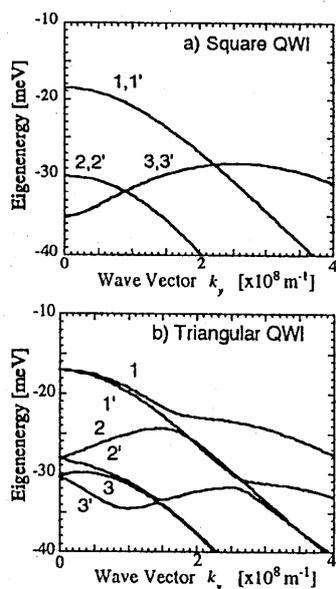


図 6: 価電子帯バンド構造 a) 正方形断面、b) 三角形断面

次に、三角形断面の結果を図6 b) に示す。図6 a) と b) とを比較すると、三角形断面の場合には $k_y \neq 0$ の点で縮退が解けている。これは、三角形断面では x 方向には対称性があるが、 z 方向には対称性がないために起こっている。

次に、この場合の第 1 サブバンドにおけ

る $k_y=0$ での包絡線関数を図7に示す。a) にはHH成分、b) にはLH成分を示す。ここで、量子細線の場合には量子井戸の場合とは異なり x 方向の閉じ込めがあり x 方向にも定在波が生じ、 $k_y=0$ の時でもHHとLHとの混合が起きている。これは、(16)式で $k_y=0$ の時にもHH、LHの混合を表す b, c の値が非零であることから理解できる。なお、HH、LH成分の包絡線関数はそれぞれ2つずつあり、各々が x 軸に関して線対称の関係にある。また、a)、b) を比較すると、HHの振幅がLH成分より大きく、第1サブバンドはHHが支配的であるといえる。更に、HHは形状がほとんどミキシングのない場合の1次モードと同じであるのに対し、LHは有効質量が小さいために、変動を受けやすくなっている。

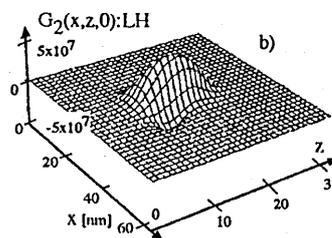
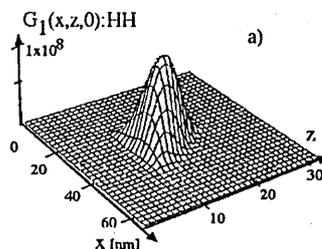


図 7: 第1サブバンドの $k_y = 0$ における包絡線関数 a) HH成分、b) LH成分

3.3 まとめ

3章では、量子細線を用いた光デバイスの設計を目的として、任意断面形状の量子細線価電子帯バンド構造を有限要素法を基本として解析を行った。この際価電子帯のバンド混合効果を考慮したハミルトニアンを用いた有限要素法による定式化を行った。更に、細線と障壁との間の確率密度流連続の条件を厳密に取り入れることにより有限要素法の計算が簡略化されることを示した。GaAs/Al_xGa_{1-x}Asなどの確率密度流連続条件が適用できる系を用いた量子構造には、有限要素法による解析は有効であり、また、任意断面形状への適用が容易である事が明らかになった。

任意断面形状の一例として三角形断面量子細線のバンド計算に本手法を適用した。その結果、三角形断面量子細線では、正方形断面とは異なり、 z 方向のポテンシャル対称性が欠落するので $k_y \neq 0$ の点では、縮退が解けることが分かり、断面形状によってバンド構造が大きく影響を受けることが分かった。

今後は、本手法から求めたバンド構造から光学特性を計算し、実験結果との比較、最適断面形状の設計を行う予定である。

[謝辞]

本研究の一部は科研費重点領域研究「量子位相エレクトロニクス」の補助を受けた。

参考文献

- [1] Y. Nakajima, Y. Takahashi, S. Horiguchi, K. Iwadate, K. Kurihara, and M. Tabe : "Fabrication of a silicon quantum wire surrounded by silicon dioxide and its transport properties," *Appl. Phys. Lett.*,

Vol.65(1994), No.28, pp.2833-2835.

- [2] F. Aymerich-Humet, F. Serra-Mestres, and J. Millán : "A generalized approximation of the Fermi-Dirac integrals," *J. Appl. Phys.*, Vol.54(1982), No.5, pp.2850-2851.
- [3] Z. A. Weinberg : "On tunneling in metal-oxide-silicon structures," *J. Apply. Phys.*, Vol.53(1982), No.7, pp.5052-5056.
- [4] B. E. Deal, E. H. Snow, and C. A. Mead : "Barrier energies in metal-silicon dioxide-silicon structures," *J. Phys. Chem. Sol.*, Vol.27(1966), pp.1873-1879.
- [5] J. M. Luttinger, and W. Kohn : "Motion of Electrons and Holes in Perturbed Periodic Fields," *Phys. Rev.*, Vol. 97(1955), No.4, pp.869 -883.
- [6] H. Ando, S. Nojima, H. Kanbe : "Band-Edge Optical Absorption Spectra of GaAs Quantum Wires Calculated by Multiband Effective Mass Theory," *J. Appl. Phys.*, Vol. 74(1993), No. 10, pp.6383-6390.
- [7] T. Nagamune, Y. Arakawa, S. Tsukamoto, and M. Nishioka, S. Sakaki, and N. Miura : "Photoluminescence Spectra and Anisotropic Energy Shift of GaAs Quantum Wires in High Magnetic Fields," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 69(1992), No. 20, pp.2963-2966.
- [8] 小柴 正則 : 光・波動のための有限要素法の基礎, 森北出版 (1990).

マイクロ波センサの開発V

中山 茂*

兵庫教育大学・電気工学教室

Abstract

シート状物質の厚さ計測

紙や布, プラスチックなどのシート状物質の厚さ計測は, 製品の品質管理や生産性向上の意味からも重要である。従来, 非接触で厚さを計測する方法として, レーザー光や赤外線, β 線, γ 線などの放射線を利用した方法などいろいろな計測方法が開発されている。

ここではマイクロ波センサを用いてシート状の物質の厚さ計測を行った。これまでの研究で, 方形型共振器と開放同軸型共振器を用いて厚さ計測を行っていたが, ここでは計測精度を向上させるためにリエントラント型共振器を用いて行った。

位置変動の影響

共振器のギャップ中の電界強度が一定でないために, ギャップ中の試料の位置により異なった減衰を受けることになる。特に, 製紙工程におけるオンライン計測で予想される試料の共振器からの位置変動が, 共振ピーク電圧へ及ぼす影響を調べた。

ここでは大きなギャップを持った同軸型共振器を用い, その特性を測定すると同時に, 試料の共振器からの距離と出力電圧との関係を明らかにし, 位置変動に影響されにくい計測の方法について検討した。

糸の重量と水分量の同時計測

糸の絶乾重量や気乾重量あるいは水分量や水分率を知ることは, 製造工程における品質管理などに必要である。水分吸着の大小は, 繊維の電氣的, 力學的, 熱的性質に敏感に変化を与えるので, 用途によっては水分率を重要視しなければならない場合がある。

ここでは, リエントラント型共振器を用いて, 共振器の軸に糸を通して, 糸の重量と水分量との同時計測を行った。このような糸の重量と水分量を同時にモニターすることは, 製造工程における生産性を向上させる意味においても重要である。

* 〒 673-14 兵庫県加東郡社町下久米 942-1, Email: shignaka @ life.hyogo-u.ac.jp,
Tel+Fax: 0795-44-2174

1 シート状物質の厚さ計測

1.1 はじめに

紙や布、プラスチックなどのシート状物質の厚さ計測は、製品の品質管理や生産性向上において重要である。従来、非接触で厚さを計測する方法として、レーザー光や赤外線、 β 線や γ 線などの放射線を利用した方法などいろいろな計測方法が開発されている。

ここではマイクロ波センサを用いて、厚さ計測を行った。マイクロ波センサの特徴は、シート状物質を非破壊、非接触で計測できること、試料の色に影響されないで、試料内部にまで浸透することなどがある [1-21]。また、瞬時にしかも高感度に計測できることである。したがって、このマイクロ波センサは生産工程におけるオンライン計測にも適していると思われる。マイクロ波によるシート状物質の厚さ計測として、方形型共振器 [5] や開放同軸型共振器 [11] を用いていたが、計測感度を向上させるために、今回はリエントラント型共振器を用いて厚さ計測を行った。

1.2 計測原理

マイクロ波共振器に水分の無いシート状物質を挿入すると、試料の誘電率の実数部の大小により共振周波数が変化し、さらに試料の厚さにより共振周波数が変化する。この共振周波数シフトは、試料中の材質と厚さで影響される。水分の無いシート状物質においては、低近似では周波数シフト量 V_t [MHz] は厚さ t [μ m] に比例すると考えられる。

$$V_t = c_1 t \quad (1)$$

ここで c_1 は比例定数で、シート状物質の誘電率や密度、共振器の形状に影響される。そこで、予め試料の厚さを実測し、厚さによるシフト量の変化を測定し比例定数 c_1 を求めておけば、この式より周波数シフト量を測定するだけで、その試料の厚さを計測することが可能である。

1.3 リエントラント型共振器による厚さ計測

1.3.1 ギャップ付きリエントラント型共振器

水分の無いシート状物質の厚さ計測を開放同軸型共振器で行っていたが、今回は、同様の計測を共振器形状を変え、図 1 に示すギャップ付きリエントラント型共振器で行い、計測精度を比較した。この共振器はリエントラント型共振器を輪切りにしてギャップを設けているため、開放同軸型共振器のように厚い試料の計測には不適

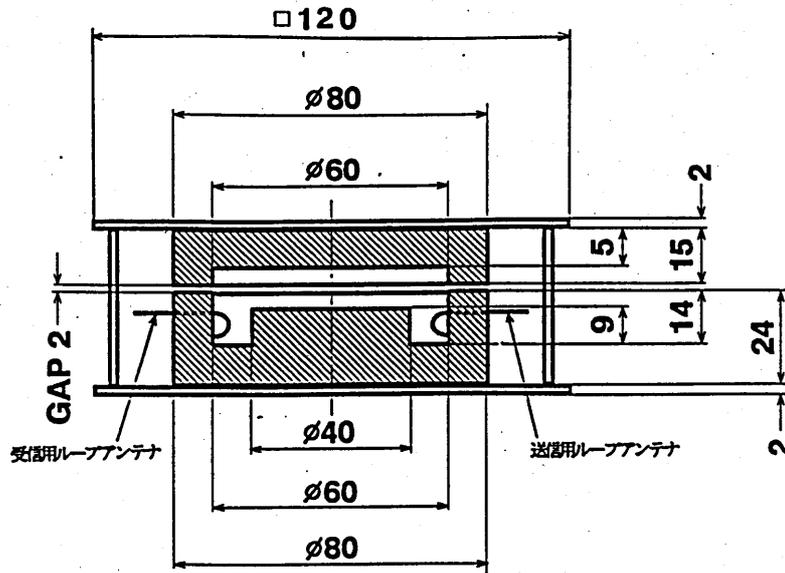


図 1: ギャップ付きリエントラント型共振器の構造

切であるが、マイクロ波のもれが少ないため高感度に計測できると思われる。なお、この共振器の共振特性を図 2 に示す。1つの共振器が上下に分離しているために、六角柱ボルトで支えて平行にしているが、共振周波数 3080[MHz] で Q 値は 106 と低い。送受信アンテナは、それぞれループアンテナを使用し、磁気結合で励振している。リエントラント型共振器のモードでは、TM の基本波を使用している [1]。

1.3.2 計測方法

開放同軸型共振器での実験に使用したテフロンシート (厚さ 47.5[μm]) とポリエチレンフィルム (厚さ 10.0[μm])、ポリエステルフィルム (厚さ 125.0[μm]) の試料 3 種類について実験した。ギャップ付きリエントラント型共振器を用いた計測装置を図 3 に示す。計測方法は以下の通りである。

1. 共振器中に試料を挿入しない状態で、トラッキング・ジェネレータよりマイクロ波を発生させ共振器に送信する。受信用ループアンテナでその透過波を受信し、スペクトラム・アナライザで共振周波数を測定する。
2. 次に、試料を 1 枚ずつ挿入し、その都度共振周波数を測定する。この操作を 10 枚まで行う。また、試料を変えて同様の測定を行う。
3. (1) の結果を基準にして、各枚数における共振周波数のシフト量を計算し、最小自乗法で直線近似して検量線を求める。さらに、この近似式より計算した厚

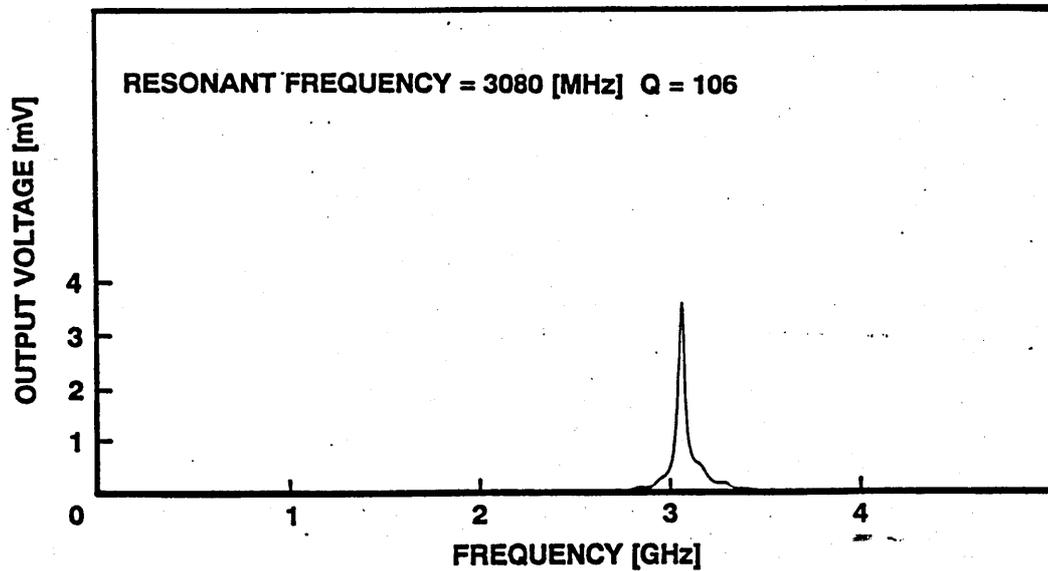


図 2: ギャップ付きリエントラント型共振器の共振特性

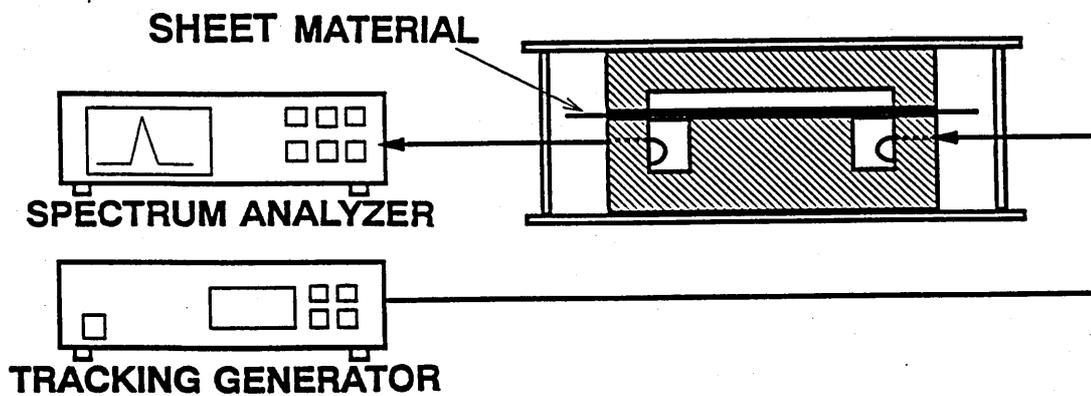


図 3: ギャップ付きリエントラント型共振器によるシート状物質の厚さ計測装置

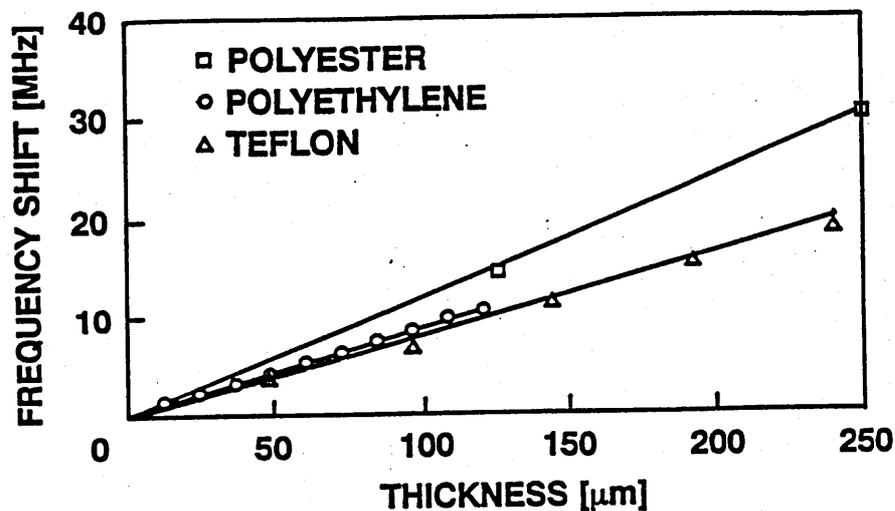


図 4: シート状物質の厚さによるシフト量の変化

さと実測値を比較し，標準偏差を求める。

1.4 結果と考察

各試料における厚さ $t[\mu\text{m}]$ による共振周波数シフト $V_f[\text{MHz}]$ の変化は図 4 に示すように直線的であった。そこで，各試料について最小 2 乗法で直線近似したとき，以下のような比例定数 c_1 が得られた。比較のために 100MHz で測定された各試料の誘電率 ϵ' (実数部)[22] を示した。相対的には，各試料の比例定数と誘電率は似ていると考えられる。

表 1 材質による感度と誘電率との比較

	比例定数 $c_1[\text{MHz}/\mu\text{m}]$	誘電率 $\epsilon'(100\text{MHz})$
テフロンシート	0.082 (基準 2.10)	2.10
ポリエチレンフィルム	0.089 (換算 2.27)	2.26
ポリエステルフィルム	0.125 (換算 3.20)	2.96

次に，この式を用いてシフト量の実測値から逆に厚さを計算し，図 5 に示すように実測値と比較した。その結果，測定のばらつき程度を示す標準偏差および単位厚さ当たりのシフト量の感度，分解能が以下ようになった。

表2 共振器構造による計測特性の比較

テフロンシート	開放同軸型共振器	リエントラント型共振器
標準偏差 [μm]	9.9	10.98
感 度 [$\text{MHz}/\mu\text{m}$]	0.0746 ± 0.0002	0.082 ± 0.0009
分解能 [$\mu\text{m}/\text{MHz}$]	13.40	12.05
ポリエチレンフィルム	開放同軸型共振器	リエントラント型共振器
標準偏差 [μm]	2.2	1.43
感 度 [$\text{MHz}/\mu\text{m}$]	0.1122 ± 0.0008	0.089 ± 0.0005
分解能 [$\mu\text{m}/\text{MHz}$]	8.913	11.16
ポリエステルフィルム	開放同軸型共振器	リエントラント型共振器
標準偏差 [μm]	10.6	5.73
感 度 [$\text{MHz}/\mu\text{m}$]	0.1678 ± 0.0018	0.125 ± 0.0003
分解能 [$\mu\text{m}/\text{MHz}$]	5.959	7.99

このリエントラント型共振器による計測結果を、開放同軸型共振器における場合 [11] と比較すると、標準偏差ではポリエチレンフィルムとポリエステルフィルムでばらつきの少ないデータが得られた。また、感度や分解能に関しても多少良くなっているが、大幅に改善できなかった。これは、分離したリエントラント型共振器の製作に難しさにあると思われる。その点、同軸型共振器は製作が容易で、Q値も高くできた。

1.5 おわりに

各種のシート状物質の厚さを計測するために、現在様々な方法が開発されている。ここではマイクロ波センサを用いた厚さ計測の方法について検討した。これは共振周波数のシフト量を測定して、検量線により厚さを求める計測法である。

共振器形状による計測精度の比較を目的に実験を行った。ここではギャップ付きリエントラント型共振器を用い、テフロンシート、ポリエチレンフィルム、ポリエステルフィルムの厚さ計測を行い、開放同軸型共振器の場合の計測精度と比較した。その結果、ポリエチレンフィルムとポリエステルフィルムでは少しだけ精度の向上が確認された。

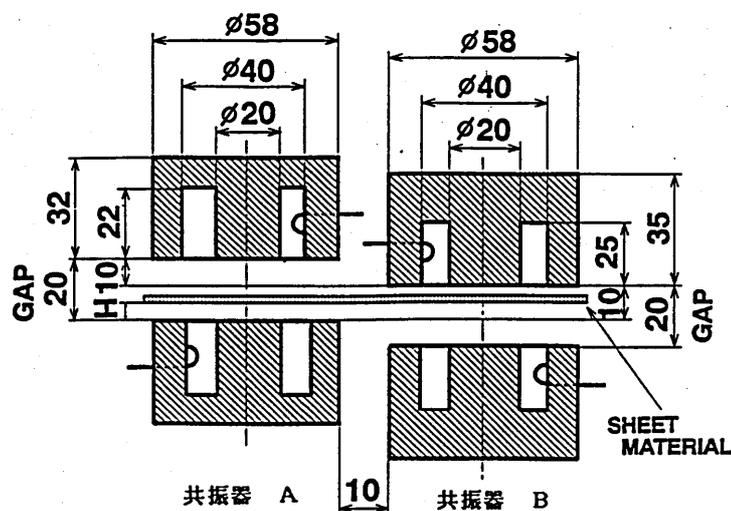


図 5: ギャップ付き同軸型共振器

2 位置変動の影響

共振器のギャップ中の電界強度が一定でないために、ギャップ中の試料の位置により異なった減衰を受けることになる。特に、製紙工程におけるオンライン計測で予想される試料の共振器からの位置変動が、共振ピーク電圧へ及ぼす影響を調べた。

ここでは 20mm のギャップを持った同軸型共振器を用い、その特性を測定すると同時に、共振器からの試料の距離と出力電圧との関係を明らかにし、試料の位置変動に影響されにくい計測の方法について考えた。

2.1 ギャップ付き同軸型共振器

試料が位置変動しても測定結果への影響を少なくするために、次のような方法を考えた。すなわち、図 5 に示すようにギャップ付き同軸型共振器を 2 個使用し、位置を予めずらして設置しておく。

この状態で間を通過するシート状物質の位置が上下すると、一方の共振器での共振ピーク電圧は高くなるが、別の共振器では逆に低くなると予想される。そこで両方の測定データを処理し、位置が変わってもほぼ一定な値を求めることができれば、それをもとに試料が上下した場合でも誤差の少ない計測ができると思われる。

ここで使用したギャップ付き同軸型共振器は、試料を両側から挟み込んで計測できるよう、同軸型共振器を中央で輪切りにし、送信用ループアンテナと受信用ルー

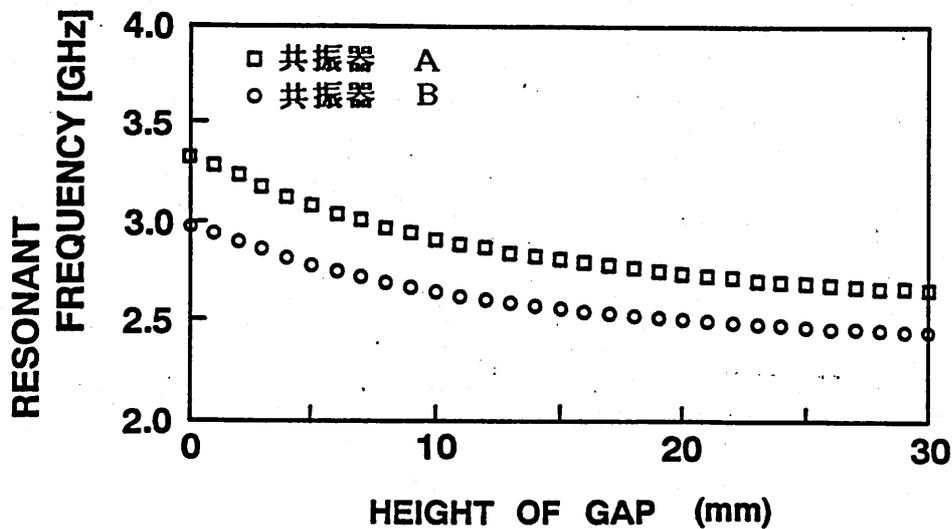


図 6: ギャップ付き同軸型共振器の共振周波数特性

アンテナを上下に取り付けたものである。同軸型共振器の共振周波数は内部の高さのみに依存し、内径や外径には影響されないのが特徴である。そこで、共振器のギャップ幅による周波数特性の基礎的なデータを得るために、ギャップ幅を変え、その時の共振周波数を2つの共振器について測定した。その結果を図6に示す。同軸型共振器ではTEMモードの基本を使用している。

ギャップ幅がゼロのときは、それぞれの共振器の高さが44mm (3.4 GHz) と50mm (3.0 GHz) と異なるために、それぞれが2分の1波長となり、実測共振周波数は、それぞれ3.324GHz と2.974GHz となった。ギャップが開くと、共振器の高さが2分の1波長とする計算では決められず、図6のようになだらかになる。ギャップ幅を20mm に設定したときの共振特性を図7に示す。このように共振曲線が分離しているので相互による干渉はほとんどないようにした。

2.2 実験方法

シート状物質が上下に変動するときに、位置変動に影響されにくい計測を行うにあたり、ここでは試料の共振器からの距離に対する出力電圧の変化を測定した。実験装置を図8に示す。試料は厚さ83.5 μ mのコピー用紙を使用した。

実験方法は以下の通りである。

1. 共振器の間に試料1枚を挿入し共振器Aに水平に接触するように試料支持用の板を調節する。この位置を共振器からの高さ0mmとする。

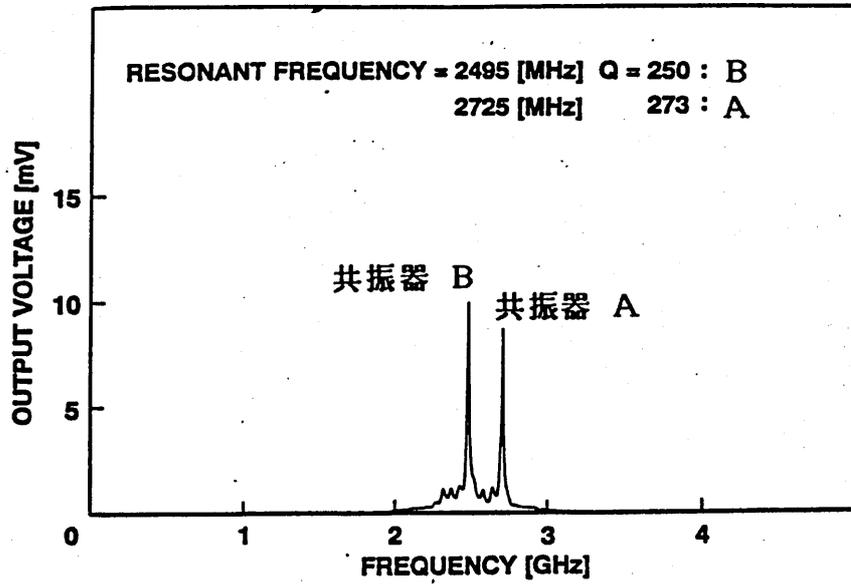


図 7: ギャップ付き同軸型共振器の共振特性

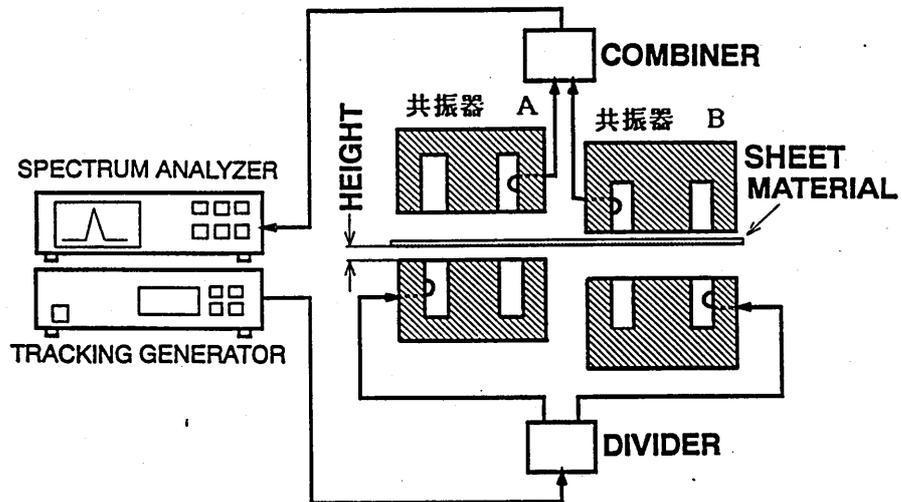


図 8: ギャップ付き同軸型共振器を用いた厚さ計測装置

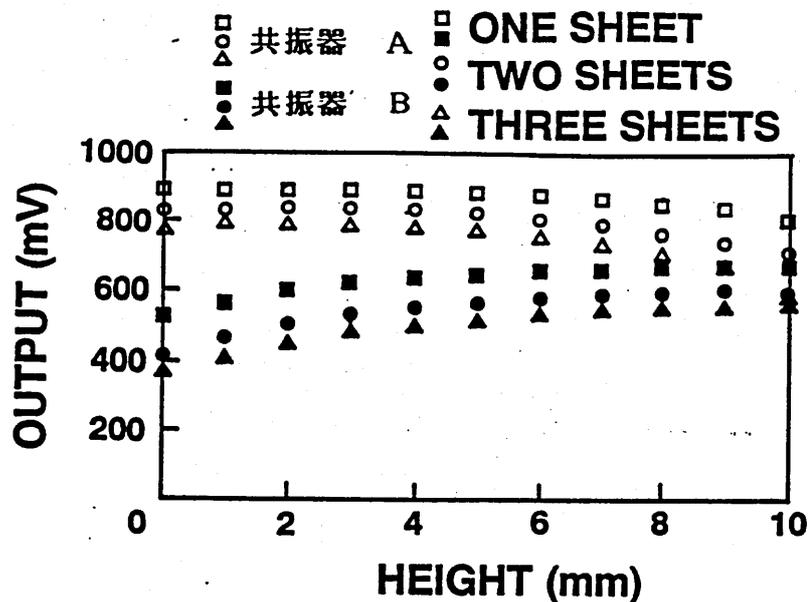


図 9: 共振器からの高さによる共振ピーク電圧の変化

2. トラッキング・ジェネレータよりマイクロ波を発生させ、2方向の分配器で共振器 A と共振器 B にマイクロ波を分配し送信する。透過波を受信し結合器を通してスペクトラム・アナライザで各共振器の共振ピーク電圧を測定する。結合器を用いて1つの検出器で測定できる理由は、ギャップ付き同軸型共振器の内部の高さが異なるため、2つの共振曲線が現れ重ならないためである。
3. 同様の測定を紙の枚数を変えて行う。
4. 以上の測定を、共振器からの高さを1mm ずつ変え、10mm の高さまで行う。

2.3 結果と考察

共振器からの高さによる共振ピーク電圧の変化を図9に示す。この結果より、試料の位置が高くなるにしたがって共振器 A での共振ピーク電圧は徐々に下がり、共振器 B では逆に上がることが明らかとなった。これは共振器に近いほど電界強度が強くなるためと考えられる。また、同じ高さでも枚数(厚さ)が増すと、共振ピーク電圧が下がることもわかった。これは厚さが増すほど減衰が大きくなりマイクロ波の透過強度が弱くなるためである。

次に、測定値を処理し位置により変化しない一定値を求めるために、共振器 A, B における測定値の平均を取った。その結果を図10に示す。このグラフより高さ5mm 付近では出力電圧がほぼ一定となることが認められた。どの高さまでほぼ一定

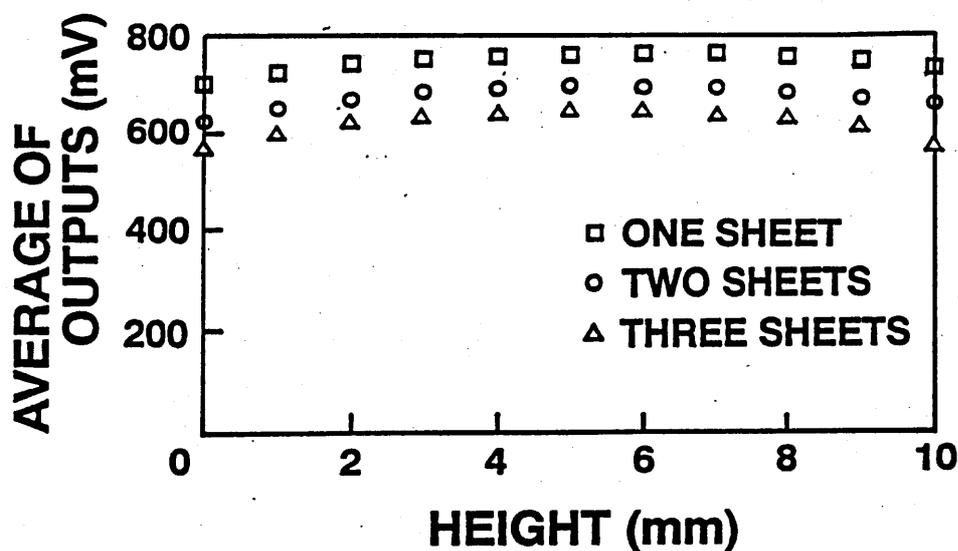


図 10: 共振器からの高さに対する出力電圧の平均値

と見るかという問題が残るが、ここでは5mmを中心に上下2mmまで変化しても約1%しか変わらなかった。すなわち、図8の装置を用いてシート状物質の厚さを計測する場合、試料の位置変動を高さ3mmから7mmの範囲に抑えることができれば、約1%の誤差で計測ができる。

2.4 おわりに

計測に及ぼす位置変動の影響について調べ、誤差を少なくする計測方法について検討した。位置変動に影響されにくくするために、共振器を2個使用した計測装置を考案した。これを使用して高さによる出力電圧の変化を調べると、共振器から離れるほど出力電圧が下がり、逆に近づくほど高くなることが明らかになった。そこで、各共振器の測定値の平均をとると、高さ5mmを中心にほぼ一定な値になることがわかった。この結果より紙の位置変動が高さ3mmから7mmの間であれば、つまり、試料が4mm上下変動しても約1%の誤差で計測ができるものと思われる。

3 糸の重量と水分量の同時計測

3.1 はじめに

糸の絶乾重量や気乾重量あるいは水分量や水分率を知ることは、製造工程における品質管理や製品取引上必要である。特に、水分率の測定は、正量を算出するために必要である。また、水分吸着の大小は、繊維の電氣的、力学的、熱的性質に敏感に変化を与えるので、用途によっては水分率を重要視しなければならない場合がある。

現在、糸の重量や水分量は、重量計測法によって計測されている場合が多い。しかし、重量と水分量を求めるためには何段階かの操作が必要であり、1回の操作で同時にモニターすることはできない。これを可能にすることは、製造工程における生産性を向上させる意味においても重要である。また、遠赤外線等で絶乾状態にしなければならないため計測に長い時間を要する。

ここでは、糸状物質を計測できるマイクロ波共振器を考え、糸の重量と水分量を同時に、しかも瞬時に計測できるセンサーの開発を試みた。この計測では、共振器内に挿入した試料にマイクロ波を送信すると、試料の誘電率の実数部の違いにより共振器の共振周波数がシフトし、誘電率の虚数部の違いにより共振ピーク電圧が減衰することを利用するものである。これら2つの変化量を測定することにより、試料の重量と水分量の2成分を同時に求めることができると考えた。

従来方法では、共振ピーク電圧の減衰より水分量を推定し、共振周波数のシフトから重量を推定していた。しかし、単にそれだけでは精度の高い測定はできない。なぜなら、共振ピーク電圧の減衰は水分による損失だけでなく糸の重量による損失も無視できない。また、周波数シフトも糸の重量だけでなく水分量によっても影響を受けるからである。ゆえに、まず、絶乾糸を用意し共振周波数のシフト量と共振ピーク電圧の減衰量が糸の重量により如何に変化するかを調べた。さらに、加湿した糸の水分量による影響を調べた。これらの結果から重量と水分量を求める近似式を立て、同時計測の可能性を検討した。

3.2 ホール付きリエントラント型共振器

細い糸の単位長さ当たりの重量や水分量を計測するためには、共振器の電界強度を増し感度を上げる必要がある。したがって、図11に示すようなリエントラント型共振器の中央の軸にホールを開けた共振器を開発した。磁界結合型の送信用ループアンテナからマイクロ波を発信し、受信用ループアンテナよりその透過波を受ける。試料片が共振器の中に入って共振状態が変わるのを防ぐためにホールに外径4mmのテフロンチューブを通し、その中に試料である各種の糸状物質を挿入する。この共振器の特性を図12に示す。共振周波数は2814MHzで、Q値が957と高く、高

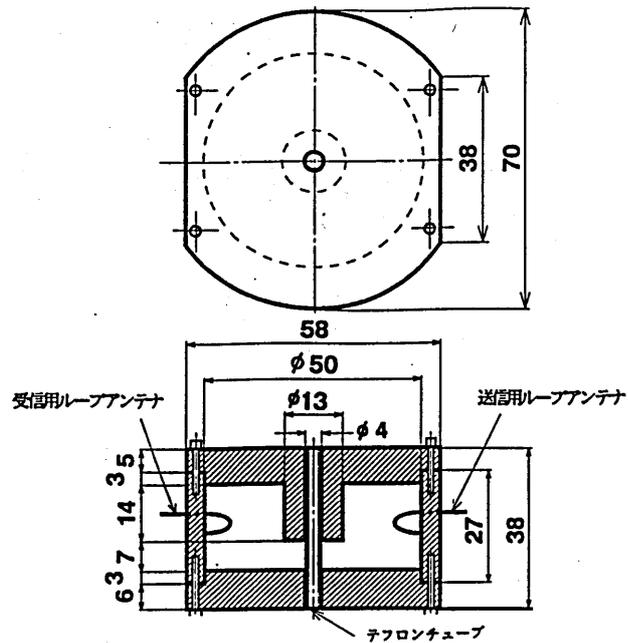


図 11: ホール付きリエントラント型共振器

感度な計測が期待できる。

3.3 計測原理

共振器に糸を挿入しない状態、すなわち共振器内が空気の時に比べ、糸を挿入すると糸の誘電率の影響により共振周波数が摂動を受け低い方にずれる。また、糸でのマイクロ波吸収のため透過波の共振ピーク電圧が減衰する。その共振状態の変化をもとめるために、図 13 に示す計測システムを用い、テトロンやナイロン、木綿での共振曲線を求めた。

パソコンより D/A コンバータを通して制御信号を送り、電圧同調発振器の同調電圧を 0~35V まで変化させることにより発生するマイクロ波の周波数を 2.5~3.5GHz まで変化させる。さらに、反射波による発振器破壊を防ぐためにアイソレータを通して共振器に送信する。そして、クリスタルディテクタによりマイクロ波の共振器内への透過強度を電圧として検出する。検出した電圧を A/D 変換しパソコンで処理すると同時に結果を XY プロッタに出力し共振曲線を求めた。

その結果を図 14 に示す。この図の横軸は掃引したチューニング電圧でマイクロ波の周波数に対応する。縦軸はクリスタルダイオードで検出したマイクロ波の透過強度を直流電圧に変換したものである。厭水性のテトロンの場合水分を全く含まないので、共振ピーク電圧の減衰はほとんど見られず、重量変化による共振周波数シフトのみがうかがえる。しかし、木綿においては 1 本当たりの重さが重い上にナイロ

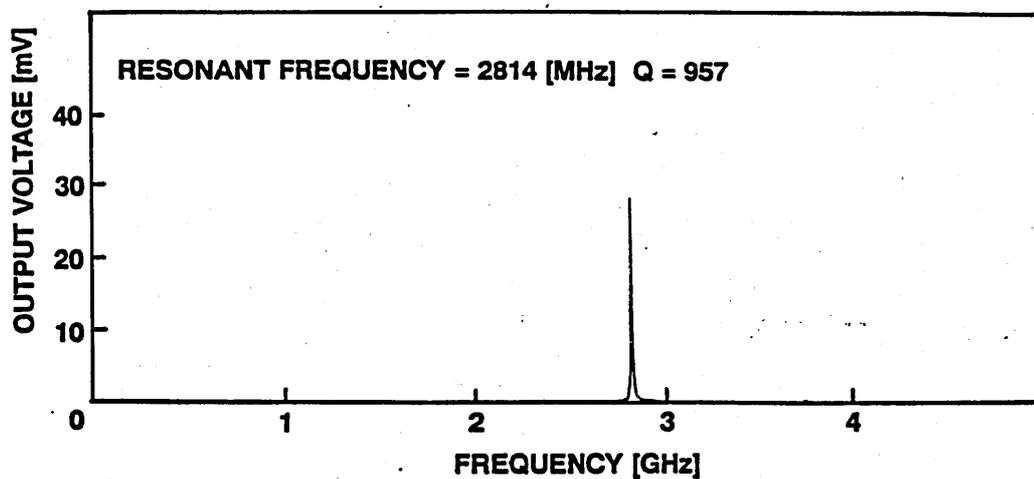


図 12: ホール付きリエントラント型共振器の共振特性

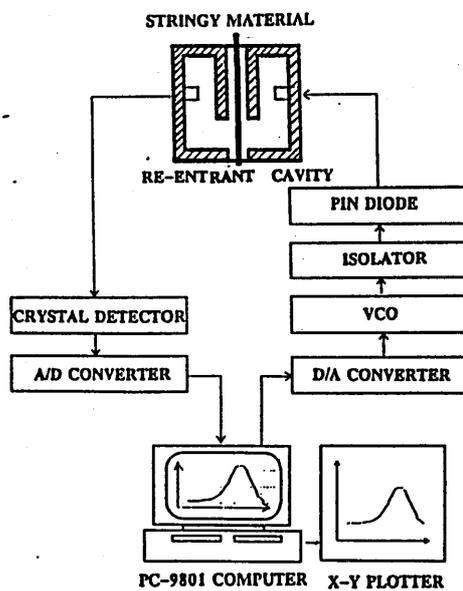


図 13: コンピュータ制御マイクロ波センサーシステム

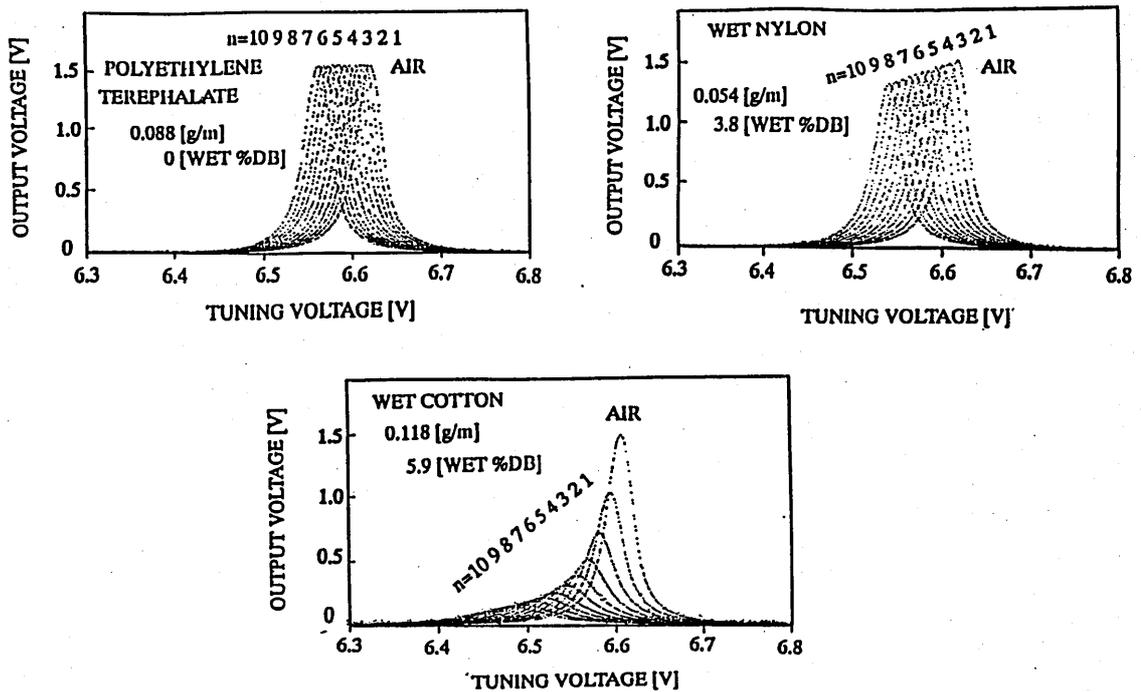


図 14: テトロン, ナイロン, 木綿の共振曲線

ンと比較しても水分率が大きいいため共振ピーク電圧がかなり減衰している。

この周波数シフト量は主に糸の重量に依存するが、高精度測定を行うためには糸に含まれる水分量による影響も無視できない。また、共振ピーク電圧の減衰量は主に水分量に依存するが、重量による減衰も無視できない。そこで、シフト量 V_t , 減衰量 V_o , 重量 d_p , 水分量 d_w について、低近似では、つぎのような関係が成り立つものと考えられる。

$$V_t = c_2 d_p + c_3 d_w \quad (2)$$

$$V_o = c_4 d_w + c_5 d_p \quad (3)$$

ここで c_2, c_3, c_4, c_5 は比例定数であり、あらかじめ実測したシフト量と重量およびシフト量と水分量の関係や減衰量と水分量および減衰量と重量の関係から実験的に求めておく。さらに、その関係式を d_p と d_w について解くことにより、以後は計測したシフト量と減衰量からこの式により重量と水分量を同時に求めることができる。

3.4 計測方法

糸の重量と水分量の同時計測システムを図 15 に示す。試料は 30 g 重の引っ張り荷重を加えたもとの長さ 1 m 単位で太さの異なる 8 番, 20 番, 30 番 (富士紡績製) の木綿糸 3 種類を使用した。

計測方法は以下の通りである。

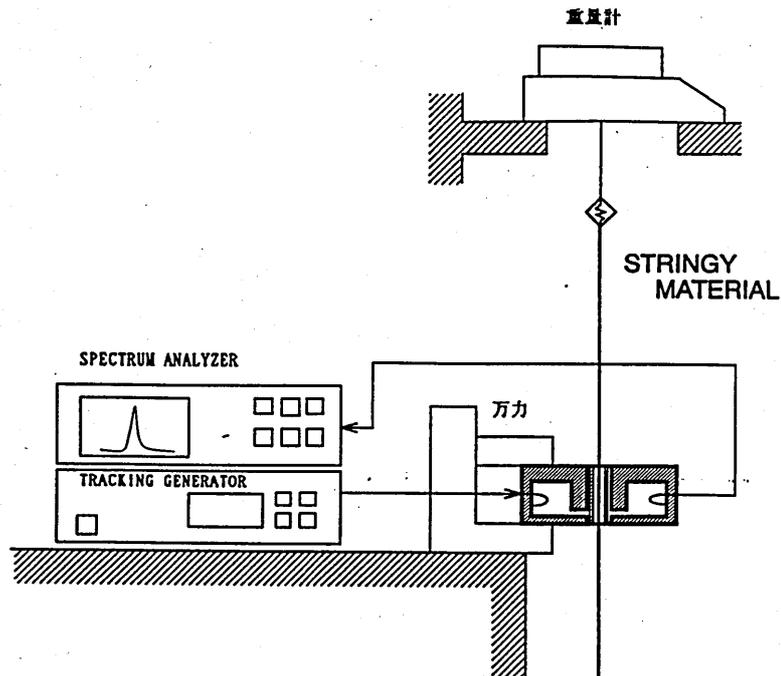


図 15: 糸の重量と水分量の同時計測装置

1. 前述の方法でそれぞれの種類について 10 本のサンプルを計りとる。それらを 110 °C で 15 時間乾燥させ、絶乾状態における 1 m 当たりの平均重量を求める。
2. サンプルを挿入しない場合と、絶乾状態にあるサンプル 1 本から 10 本の場合について次の操作を行う。すなわち、電磁式はかり（研精工業製 FA-200）に試料の糸を吊るし共振器に通す。次にトラッキング・ジェネレータよりマイクロ波を発生させ共振器に送信し、受信アンテナで受信しスペクトラム・アナライザで共振周波数と共振ピーク電圧を計測する。
3. 次に木綿糸 3 種類につき、それぞれ 1 本ずつ取り出し、水を加えて湿らせる。そのサンプルを共振器に挿入する。この場合、時間経過とともに糸が乾燥し重量が軽くなるので、手早く共振周波数と共振ピーク電圧およびその時の糸の重量を計測する。計測終了後その都度共振器から糸を抜く。なぜなら、同一箇所常にマイクロ波が送信されることにより、その部分が早く乾燥し他との水分率が変化するのを防ぐためである。この操作を適当な間隔をおき重量変化がなくなるまで行う。
4. このようにして計測した共振周波数とピーク電圧より周波数シフト量と減衰量を計算し、その時の重量や水分量との関係から前述の比例定数を求める。

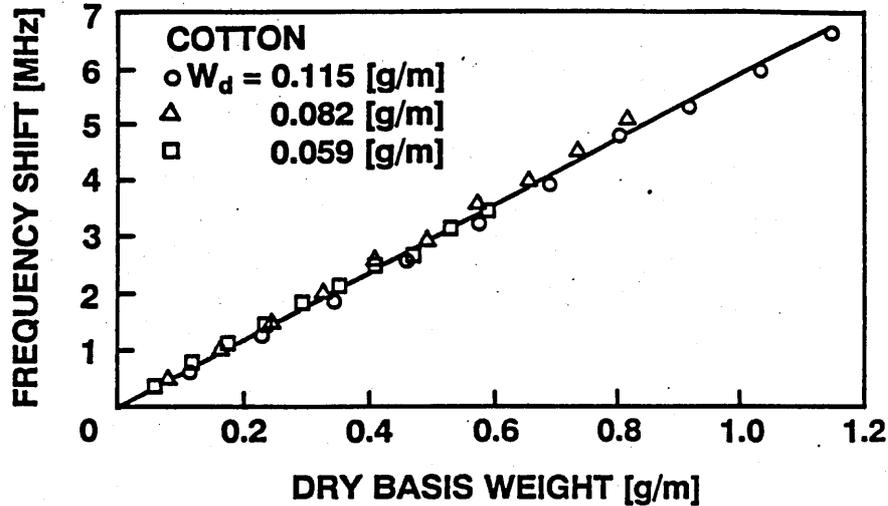


図 16: 絶乾糸の重量に対する周波数シフト量の変化

3.5 結果と考察

3.5.1 絶乾糸の計測

絶乾状態にあるサンプルについて、糸のみの重量 d_p [g/m] と共振周波数のシフト量 V_t [MHz] および共振ピーク電圧の減衰量 V_o [mV] との関係についてまとめた結果を以下に示す。周波数シフト量 V_t との関係では図 16 に示すように比例的な変化が認められ、最小 2 乗法で直線近似した。この結果より周波数シフト量 V_t について、つぎのような近似式を立てた。

$$V_t = 5.84d_p \quad (4)$$

この式を用いて、逆に糸の重量 d_p を計算により求め実測値と比較したとき、測定のはらつき程度を表す標準偏差は 19.6 [mg/m] となった。

また、共振ピーク電圧減衰量 V_o との関係では図 17 に示すような放物曲線的な変化が認められ、減衰量を 2 乗し最小 2 乗法で直線近似した。この結果より共振ピーク電圧の減衰量 V_o について

$$V_o = 1.33\sqrt{d_p} \quad (5)$$

という近似式が得られた。この式より逆に糸の重量 d_p を計算し実測値と比較したとき、標準偏差は 38.4 [mg/m] となった (図 18)。

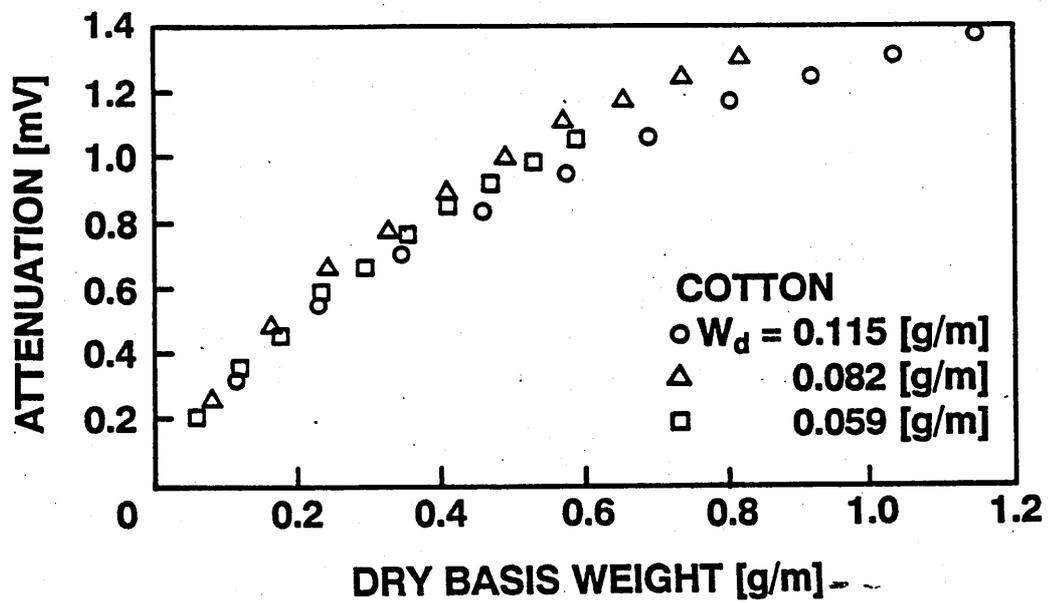


図 17: 絶乾糸の重量に対する減衰量の変化

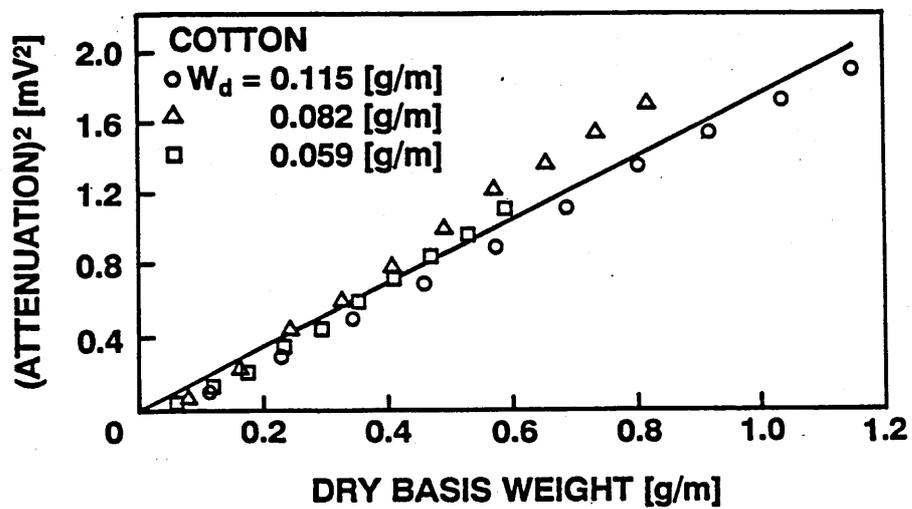


図 18: 絶乾糸の重量変化による減衰特性

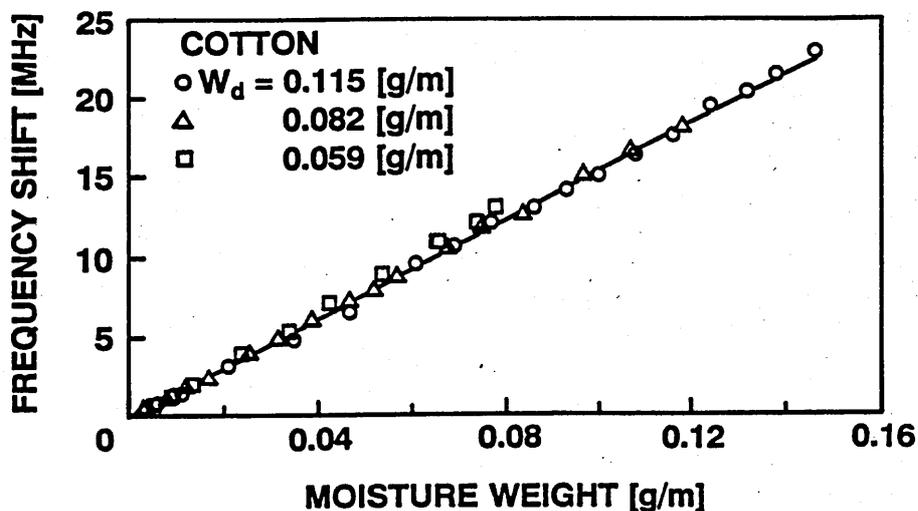


図 19: 糸の水分量に対するシフト量の変化

3.5.2 気乾糸の計測

水分を含んだ糸全体の重量から絶乾重量を引くことにより含まれる水分量を求め、糸の水分量 d_w [g/m] と共振周波数のシフト量 V_t [MHz] および共振ピーク電圧の減衰量 V_o [mV] との関係についてまとめた結果を以下に述べる。周波数シフト量 V_t との関係では図 19 に示すように比例的な変化が認められたので、最小 2 乗法で直線近似した。この結果より周波数シフト量 V_t について

$$V_t = 154.9d_w \quad (6)$$

という近似式が得られた。この式を用い逆に水分量 d_w を計算により求め実測値と比較したとき、標準偏差は 2.1 [mg/m] となった。

また、共振ピーク電圧減衰量 V_o との関係では図 20 に示すような変化が認められた。したがって、減衰量を 3 乗し、最小 2 乗法で直線近似した。この結果より共振ピーク電圧の減衰量 V_o について

$$V_o = 3.38 \sqrt[3]{d_w} \quad (7)$$

という近似式が得られた。この式より逆に水分量 d_w を計算し実測値と比較したとき、標準偏差は 3.7 [mg/m] となった (図 21)。

以上の結果を総合すると、木綿糸においては絶乾糸の重量変化と含まれる水分量変化により共振周波数のシフト量が図 22 のように変化することがわかった。すなわ

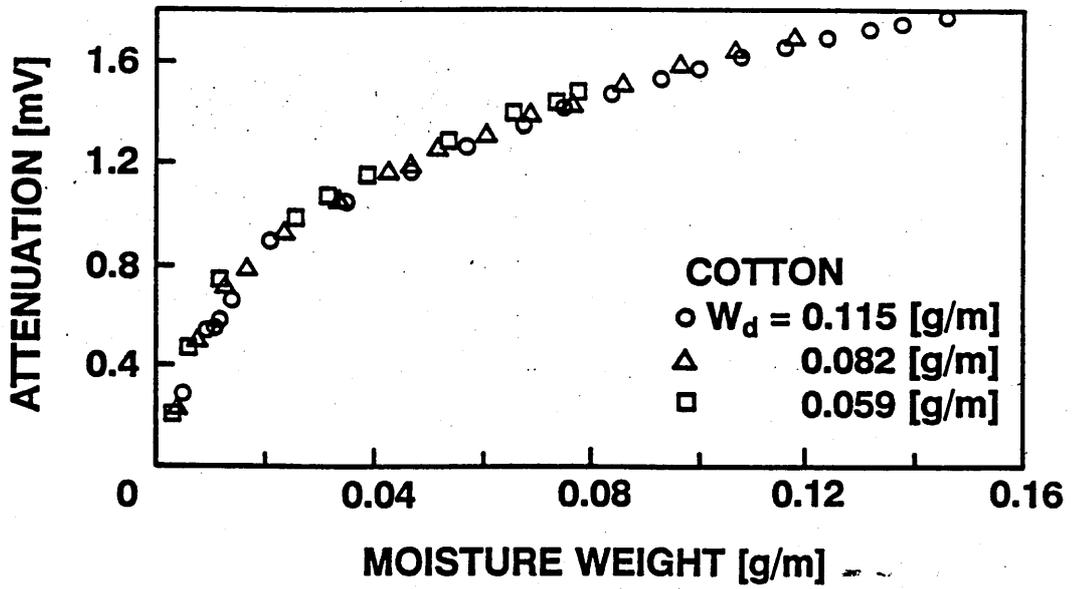


図 20: 糸の水分量に対する減衰量の変化

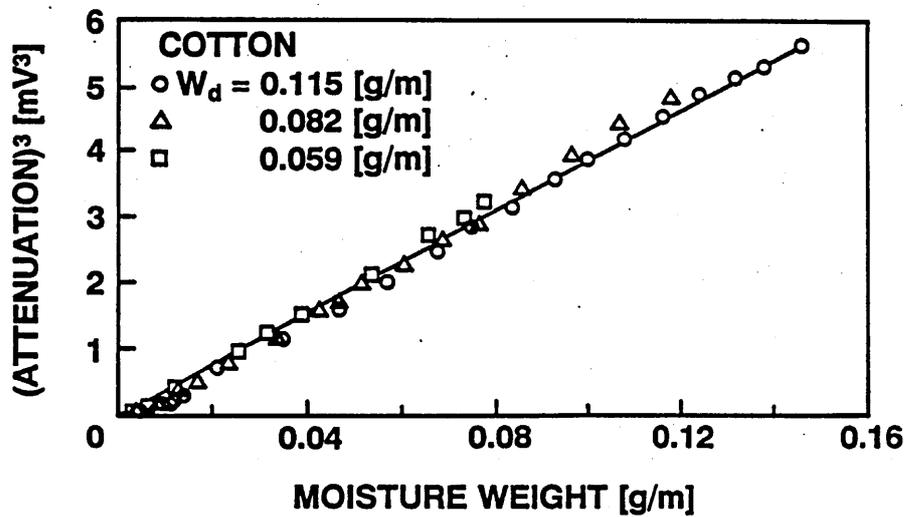


図 21: 糸の水分量変化による減衰特性

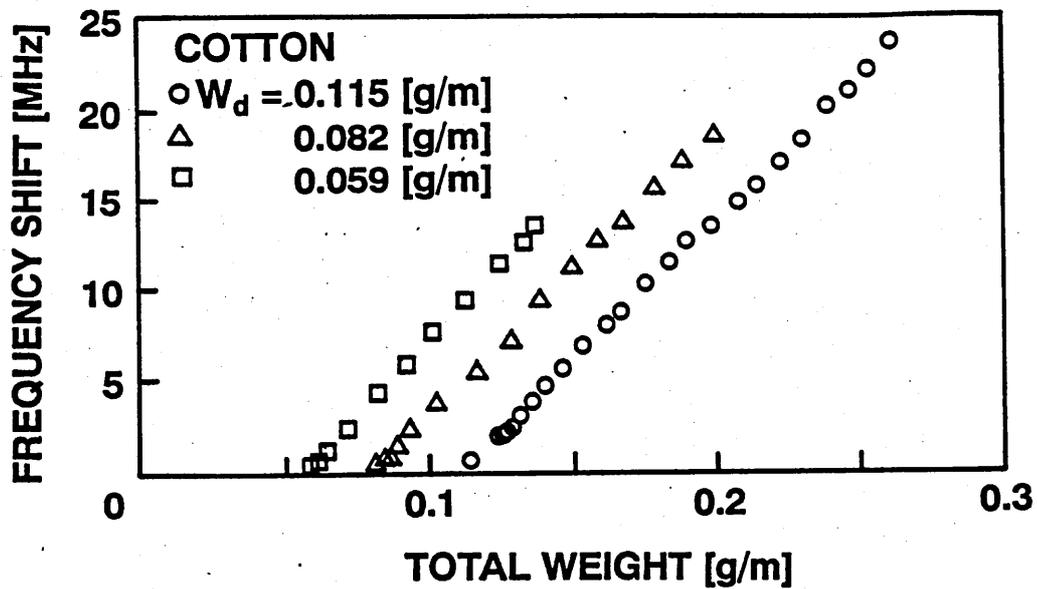


図 22: 糸の重量と水分量によるシフト量変化

ち、共振周波数は糸の重量だけではなく水分量でも大きくシフトすることが認められた。実測による近似式をまとめると共振周波数のシフト量 V_f は

$$V_f = 5.84d_p + 154.9d_w \quad (8)$$

と表すことができる。

また、共振ピーク電圧の減衰量は、木綿糸の重量と水分量により図 23 のように変化することがわかった。すなわち、水分量だけではなく糸の重量でも減衰していることが理解できる。実測による近似式より共振ピーク電圧の減衰量 V_o は

$$V_o = 3.38\sqrt[3]{d_w} + 1.33\sqrt{d_p} \quad (9)$$

と表すことができる。

式(8),(9)を d_p と d_w について解き、計算値と実測値との計測精度を求めた。その結果、標準偏差は、糸の重量においては 63.3[mg/m]、水分量においては 21.8[mg/m] とバラツキが大きくなった。

3.6 おわりに

マイクロ波共振器を用いて、糸状物質の一例として木綿糸を取り上げ、その単位長さ当たりの重量と水分量の同時計測を試みた。これは、共振器内に挿入した試料にマイクロ波を送信すると、試料の誘電率実数部の違いにより共振器の共振周波数

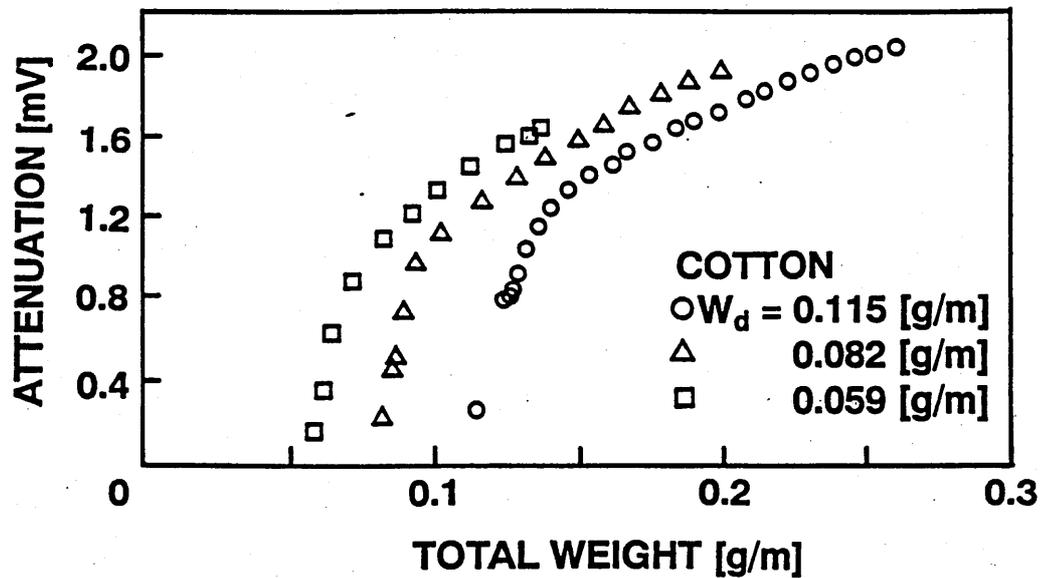


図 23: 糸の重量と水分量による減衰量の変化

がシフトし、誘電率虚数部の違いにより共振ピーク電圧が減衰することを利用した。これら2つの変化量を測定することにより、試料の重量と水分量の2成分を同時に求めることができる。

リエントラント型共振器を用いて、3種類の木綿の絶乾糸を用意し、共振周波数のシフト量と共振ピーク電圧の減衰量が糸の重量により如何に変化するかを調べた。さらに、加湿した糸の水分量による影響を調べた。その結果、共振周波数は糸の重量だけではなく水分量でも大きくシフトし、共振ピーク電圧は水分量だけではなく糸の重量でも減衰した。そこで、共振周波数のシフト量 V_f と共振ピーク電圧の減衰量 V_a について近似式を求め、糸の重量と水分量を求めることができた。糸の重量と水分量との同時計測では、十分な精度は得られなかった。今後、計測方法や共振器を改善し測定精度を上げる必要がある。

謝辞

この実験に関して、実験を補助していただいた兵庫教育大学の河上照雄氏に感謝すると同時に、この研究は科学研究補助金 (試験研究 0255602411) による。

参考文献

- [1] 中山 茂: 輻射科学研究会 RS90-7 (1990) 1

- [2] 中山 茂, 山根宏夫 : 日本産業技術教育学会第 33 回全国大会 (1990) 109
- [3] 中山 茂, 他 : 「木材用水分グレーダーの開発」研究会報告 (1990) 77 日本木材加工技術協会関西支部
- [4] 中山 茂, 他 : 「自動制御の基礎と応用」(1990) 118 日本木材学会研究第 1 分科会
- [5] 中山 茂 : 兵庫教育大学研究紀要 11 (1991) 145
- [6] 中山 茂, 山根宏夫 : 日本産業技術教育学会第 34 回全国大会 (1991) 78
- [7] 中山 茂, 河上照雄 : 日本産業技術教育学会第 34 回全国大会 (1991) 79
- [8] 中山 茂, 山根宏夫 : 日本産業技術教育学会第 8 回近畿支部 (1991) 27
- [9] 中山 茂, 河上照雄 : 日本産業技術教育学会第 8 回近畿支部 (1991) 29
- [10] 中山 茂 : 兵庫教育大学研究紀要 12 (1992) 179
- [11] S. Nakayama : Jpn. J. Appl. Phys., 31 (1992) 1519
- [12] 中山 茂 : 科学研究費補助金 (試験研究) 研究成果報告書 (1992)
- [13] 中山 茂, 他 : 「マイクロ波加熱技術集成」(1994) エヌ・ティー・エフ
- [14] 中山 茂 : 日本産業技術教育学会第 11 回近畿支部 (1994) 39
- [15] 中山 茂 : 輻射科学研究会 RS94-9 (1994) 1
- [16] S. Nakayama : Jpn. J. Appl. Phys., 33 (1994) 2809
- [17] S. Nakayama : Jpn. J. Appl. Phys., 33 (1994) 3614
- [18] S. Nakayama : Jpn. J. Appl. Phys., 33 (1994) 6379
- [19] 中山 茂 : 輻射科学研究会 RS95-6 (1995) 1
- [20] S. Nakayama : Meas. Sci. Technol., 6 (1995) 429
- [21] 中山 茂 : 兵庫教育大学研究紀要 16 (1996) 81
- [22] R.C. Weast and M.J. Astle : *CRC Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press, Florida, 1979) E-60.

輻射科学研究会資料 RS96-5

研究の回想 — マイクロ波と光 —

末 田 正

摂南大学工学部

平成8年5月17日
(於 京都大学工学部)

(財) 輻射科学研究会

財団法人 輻射科学研究会

昭和21年3月24日認可（1946年）

輻射科学に関する研究の助成と奨励

部 会（昭和28年8月1日制定の規定による）

第1部会 真空技術及び真空管材料

第2部会 超高周波電子管

第3部会 立体回路素子

第4部会 超高周波測定

第5部会 輻射線の特殊応用

第6部会 超高周波通信

航空に関する電子工学（第1・5部会）

原子力に関する電子工学（第1・5部会）

ミリ波の特別研究（第2・3・4部会）

研究の回想 — マイクロ波と光 —

末 田 正 (摂南大学工学部)

1. はじめに
輻射科学研究会について
2. 最初の発表
管内放射
同軸定在波測定器
3. ミリ波の時代
輻研ミリ波研究会
金属導波路、円形 TE_{01} モード
誘電体導波路 → 誘電体アンテナ、光導波路
準光学回路 → 光学の基礎
回折格子 → フェイズドアレイ
大きい開口による回折界
4. マイクロ波アンテナ
誘電体アンテナ (放射機構と高利得化)
Dash-Hollow Antenna → Quasi Phase Matching(QPM)
フェイズドアレイ → 2次元光フェイズドアレイ (空間光変調器)
5. 光エレクトロニクス
レーザの出現、研究テーマの選定
2次元光フェイズドアレイ
光のマイクロ波変調 ← マイクロ波との関連付け
進行波変調、PRR 法
超短光パルス
発生、処理、計測
炭酸ガスレーザ
導波形高圧力レーザ、赤外光変調

6. 導波形光デバイス、光集積回路

非線形光導波路 → 導波形光変調器の進行波動作

高速光変調 (10 GHz 以上の帯域)

進行波動作と非対称平面電極

位相変調と強度変調

高速光変調素子の集積化

光導波路分岐 → X分岐、光集積回路センサ

SSB光変調器、高速信号処理器

高速タイムディマルチプレクサ

光変調素子の高速化

速度整合

帯域形変調 → ミリ波光変調

光集積回路のマイクロ波応用

特定研究「光導波エレクトロニクス」

特定研究「極微構造エレクトロニクス」

7. 光波利用センサ

光ファイバセンサ ← PRR法

光集積回路センサ

導波路分岐の利用

特定研究「光波利用センシング」

8. 超高速光エレクトロニクス

重点領域研究「超高速・超並列光エレクトロニクス」

9. むすび

輻射科学研究会の役割

輻射科学研究会資料

RS 96-6

非線形クラッドを持つ光導波路の
導波特性

摂南大学工学部

大家重明

広島県立保健福祉短期大学

梅田徳男

応用光電研究室

張吉夫

1996年7月26日

輻射科学研究会

(於 摂南大学)

非線形クラッドを持つ光導波路の導波特性

大家重明

Shigeaki Ohke

梅田徳男

Tokuo Umeda

張 吉夫

Yoshio Cho

摂南大学工学部 広島県立保健福祉短期大学 応用光電研究室

あらまし

本論文は、クラッドが非線形媒質で構成される、非線形／線形／非線形の3層スラブ光導波路において、デバイス応用という観点から、光波伝搬過程で、光波強度分布がどのように変化していくのかを検討したものである。非線形係数の符号は、正、負いずれの場合も考えられ、正の非線形屈折率をもつ場合、及び、負の非線形屈折率をもつ場合の両場合について、実効屈折率と光強度の関係を、界分布を基礎とした数値計算によって明らかにしている。特に、クラッドが正の非線形係数をもつ場合の光スイッチング及びクラッドが負の非線形係数をもつ場合の光（パワー）リミティング動作をビーム伝搬法を用いた光波伝搬特性によって明らかにしている。

1. まえがき

屈折率が光強度に比例して変化する非線形媒質を含む光導波路の伝搬特性については、すでに多くの報告例があり^{(1)~(35)}、近年、活発に研究がなされている分野である。これら非線形スラブ光導波路をその構造ないし構成において分類すれば、下記のように大別される。

● 正の非線形係数を持つ光導波路

- ① 非線形／線形／非線形（もしくは、線形）
- ② 線形／非線形／線形
- ③ 線形／非線形
- ④ 非線形（導波構造を持たない）

●負の非線形係数を持つ光導波路

⑤ 非線形／線形／非線形（もしくは、線形）

⑥ 線形／非線形／線形

このうち、非線形領域の非線形屈折率の光強度依存性が正である場合の非線形光導波路構成において、これまで研究の対象となっている大部分は、①の非線形／線形／非線形（または線形）の媒質構造を有する3層スラブ光導波路である。これは、同じ3層構造でも、②の線形／非線形／線形の媒質構造⁽²¹⁾に比べて、この構造の方が誘電体境界面に沿って伝搬する非線形表面波（界面に沿うモードであるが慣例に従って表面波と呼ぶことにする）など^{(10) (17) ~ (20)}、興味深い現象を呈し得るからである。

また、非線形領域の非線形屈折率の光強度依存性が正である場合の非線形光導波路構成においては、線形光導波路のように3層構造である必要はなく、③のような線形／非線形の2層構成でも線形／非線形境界面に沿って伝搬する定常的導波モードは、十分存在可能である^{(10) (18) (19)}。

逆に、この分類には示していないが、多重量子井戸（MQW）構造のような多層光導波路構成⁽²²⁾も考えられる。しかし、構造周期が小さい時は、線形のみならず非線形導波路構成においても、一層近似できるので⁽²³⁾、④の光導波路構成の場合に帰着する。この④のような、全く導波構造を持たない均質な非線形媒質中においても定常伝搬モードが存在し、その界分布が、sech形となることなどが知られている^{(23) (24)}。

一方、これに対して、屈折率が光強度に比例して減少する負の非線形係数を持つ光導波路の導波特性については、非線形材料そのものの検討もまだそれほどなされておらず、正の非線形係数を有する光導波路に比べて、報告例もかなり少ない^{(1) ~ (6) (31) ~ (34)}。また、そのデバイス応用に対しても、わずかに、GaAs-AlGaAs MQWの持つ負の光非線形性を光方向性結合器の接近した導波路間媒質として用いたという報告例^{(4) ~ (6)}があるが、光方向性結合器に対する利

用という点からは、非線形係数の符号はことさら問題にしなくてもよいものであった。

このような負の非線形係数を持つ光導波路は、⑤、⑥のように分類できる。⑥のコアが負の光非線形性を持つ光導波路は、光波の伝搬に対して、従来、正の非線形係数に一般であった「自己集束効果」とは逆に「自己発散効果」を与える。従って、光強度分布整形装置⁽²⁵⁾や光(パワー)リミター⁽²⁾としての利用が考えられる。

本報告は、この非線形領域の非線形屈折率依存性が正、及び、負である場合の非線形導波路構成のうち、①と⑤の、非線形/線形/非線形・構造における光導波路についてデバイス応用という観点から導波特性の検討を行ったものである。

2. 非線形光導波路における光強度－実効屈折率の関係

一般に、非線形光導波路構成においては、非線形部の屈折率が光強度に依存して変化するため、通常、定常伝搬においても、解析解を求めるのは容易ではない。一方、光波進行方向に対する垂直断面内で、非線形領域を多層分割して(均質な屈折率 n_{01}, n_{02}, \dots を有するものとして近似する)数値計算を行う手法は、その構造ならびに、偏波(TE波、TM波)にかかわらず、定常解を求めることが可能であり、既に、有効な手段の一つとなっている^{(7)(10)(12)(26)~(29)}。非線形性による屈折率は、光強度(光パワー密度)に応じて、 $n_{0i} = n_0 + n_2 I_i$ と表すことができる。ここで、 n_2 は非線形屈折率であり、 I_i は分割層中の光強度である。この多層分割法を用いることにより得られた、入射光強度(Input Optical Intensity)－実効屈折率(Effective Refractive Index)の関係について、まず考察した。

2.1 クラッドが正の非線形係数をもつ光導波路

非線形光導波路構成において、正の非線形係数をもつ非線形/線形/非線形の3層構造のスラブ導波路については、すでに解析解も得られており、種々検討がなされている⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽²⁰⁾。

ここでは、GaAs-AlGaAs MQW構造を非線形媒質とする、非線形 ($n_0=3.53$) / 線形 ($n_0=3.54$) / 非線形 ($n_0=3.53$) の3層対称構成 (すでに、1の①として分類した) について、多層分割法を用いて計算を行った。但し、非線形屈折率 $n_2=10^{-9} \text{ m}^2/\text{W}$ (この値は、MQW構造においては、十分妥当な大きさ⁽³⁰⁾⁽³⁶⁾である)、コア厚 $d=2 \mu\text{m}$ 、光波長 $\lambda=0.8 \mu\text{m}$ とした。

図1は、TE₀モードにおける定常特性で、入射光強度(Input Optical Intensity) P の変化に対する導波路の実効屈折率(Effective Refractive Index) n_{eff} の変化の様子である。入射光強度が小さい場合は、 n_{eff} の大きさはほとんど変化せず直線的であるが、ある光強度のピークを越えてから実効屈折率がコアの屈折率(3.54)を超えるため、特異な変化を示している。図1上に矢印で示したように、入射光強度を増大してゆけば、 $P=60\text{W/m}$ 付近で光強度分布波形(界分布)のピーク値はクラッドに移行する。逆に、入射光強度を減少していった場合は、 $P=52\text{W/m}$ 近傍まで下げないと、実効屈折率がもとのコアの屈折率より小さくならないため、光強度分布のピーク値はコア内にもどらないことがわかる。すなわち、ヒステリシス特性を有し、 $P=52\text{W/m} \sim 60\text{W/m}$ 付近では、実効屈折率は二つの値を取り得るのである。二つの実効屈折率のどちらをとるか、言い換えれば、光強度分布のピークが、コア内に存在するか、コア外(クラッド)に存在するかは(すなわち、界分布波形は)、図1の矢印経路に依存したものとなっている。従って、その経路を切り換えることにより、同じ入射光強度でも、コア内パワー占有率が変わるため、光検出器の検出領域を制限すれば、光スイッチとして機能させ得ることがわかる。

なお、この図1においては、界分布がコアの中心に対して完全に対称なTE₀モード入射を仮定しているが、入射光強度分布にわずかも非対称性が生ずれば、入射光強度増大による光強度のピーク値のクラッド側への推移は、そのわずかな非対称性をきっかけとして、一方の側のクラッドへ集中して起こることになる。これは、もとの3層構成光導波路からすれば、非対称モードであるが、安定なモー

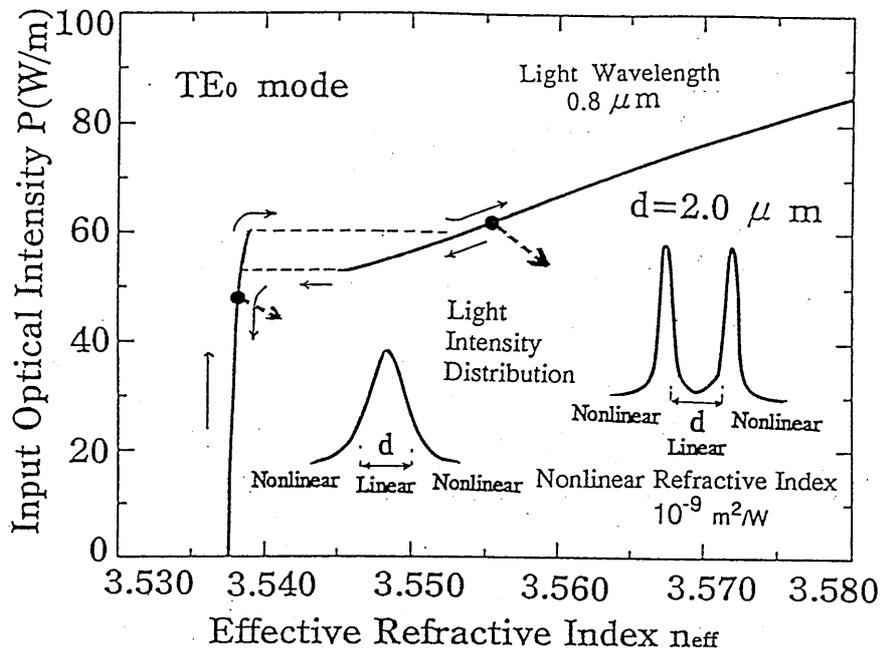


図 1. 両側クラッドが正の光非線形係数をもつ非線形 ($n_0=3.53$) / 線形 ($n_0=3.54$) / 非線形 ($n_0=3.53$)・3層スラブ光導波路の入射光強度-実効屈折率の関係 (対称モード)

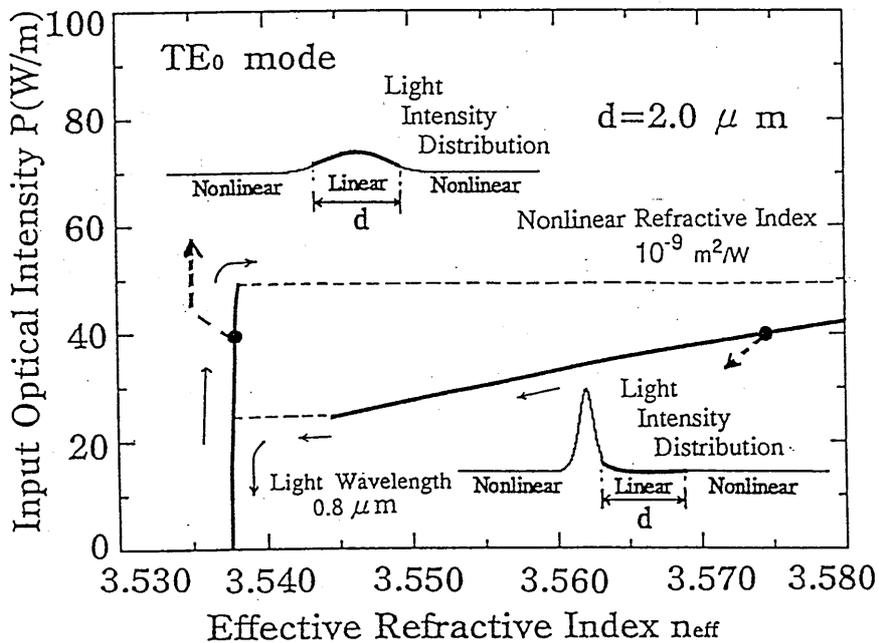


図 2. 両側クラッドが正の光非線形係数をもつ非線形 ($n_0=3.53$) / 線形 ($n_0=3.54$) / 非線形 ($n_0=3.53$)・3層スラブ光導波路の入射光強度-実効屈折率の関係 (非対称モード)

ドである。一方、図1で仮定した対称モードは上述の意味で不安定なモードである。図2は、図1と同じく対称なTE₀モード入射を仮定しているが、数値計算によるわずかな非対称性をきっかけとして、界分布に非対称性が生じた場合の定常特性である。図1に比べてヒステリシス性がさらに大きくなっていることがわかる。

図2中に、 $P=40\text{w/m}$ の時の光強度分布の例を示す。この時の実効屈折率の二つの値は、図1の場合と同じく、コア内に界分布のピーク値があるものとコア外にピーク値を持つものに相当するが、コア外に界分布のピーク値を持つものは、図1の場合と異なり、いずれか片側のコア-クラッド境界面（図1の場合、界分布はコア-クラッドの両境界面外側クラッドに対称的なピーク値を持つ）にのみ沿う表面伝搬モードである。従って、このモードは「まえがき」において、③として分類した線形/非線形の表面伝搬モードに対応し、コア-クラッドの両境界面どちらの側においても存在可能な伝搬モード⁽¹⁰⁾⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾である。

さらに、クラッド領域がすべて非線形媒質である場合、③の線形/非線形境界面に沿うこの導波モード以外に、④に示した全く導波構造を有しない均質な非線形媒質中（クラッド中）でも定常伝搬モードが存在可能である。これは、図1、図2の計算には含まれておらず、両側のクラッド領域が半無限状とすれば、このモードは、境界面がなくても、どこにおいても安定な空間的ソリトン波である。

2.2 クラッドが負の非線形係数をもつ光導波路

負の非線形係数をもつ光導波路の導波特性については、正の非線形係数を有する光導波路に比べて、これまで報告例はあまり多くない。次に、クラッドが負の光非線形係数をもつ光導波路の導波特性について報告する⁽¹²⁾。

図3に、クラッドが負の非線形媒質で構成される非線形/線形/非線形の3層スラブ光導波路の入射光強度(P)—実効屈折率(n_{eff})の関係の計算結果の一例を示す。この計算に用いたパラメータは、

コア厚(d)の変化以外は図1及び図2と同じである。但し、非線形屈折率の大きさは同じであるが、負値を取るものとした。この図によれば、光強度の増大と共に導波路に対する実効屈折率は次第に低下し、そして、ある光強度以上では導波モードは存在せず、カットオフされることがわかる。

ここでいうカットオフというのは、実効屈折率がクラッドの値以下となり、導波モードから漏洩モードへと移行するとみなされることをいう。この傾向は、コアである線形部分の厚さ(d)が薄いほど顕著である。クラッドが負の非線形媒質で構成されるこの導波路においては、入射光強度に応じて、クラッドの屈折率は低下するため、光導波路としては、光導波作用をより促進するものと予想されるが、それに反して全く逆の現象を呈している。これについては、詳細はすでに文献(12)に説明がなされている。

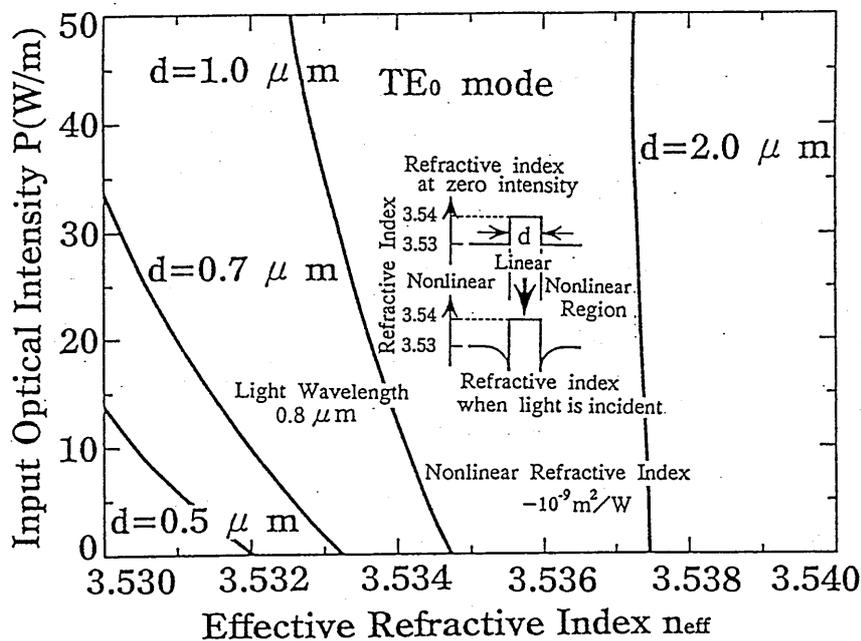


図3. 両側クラッドが負の光非線形係数をもつ非線形($n_0=3.53$) / 線形($n_0=3.54$) / 非線形($n_0=3.53$)・3層スラブ光導波路の入射光強度 - 実効屈折率の関係

また、この図には示し得ないが、カットオフより、十分離れたところでは、入射光強度の増大に対して、実効屈折率は低下するにもかかわらず、全般的に、光強度分布としては、コア内への閉じこめが促進される。これは、非線形性により、コア近辺のクラッドの屈折率がより低下するため、相対的に屈折率の高いコア内へパワー集中が起こることによる。このことは、コアとクラッドの間にクラッドよりもさらに屈折率の低いクラッド（二重クラッド構造）をもつ線形W型光導波路の特性^{(37)~(39)}と似た傾向を示すものである。

しかし、例えば、 $d=0.5\mu\text{m}$ の場合、非線形導波路の入射光強度が大きくなれば、パワーのコア内閉じこめが悪くなってくる。これは、この非線形導波路がカットオフに近づいてくる影響であり、非線形クラッドに界分布がかなりしみ出すためである。さらに光強度が増大すれば、もはや通常の導波モードは存在せず、カットオフとなる。従って、光波伝搬に際しては、光波伝搬過程で、あるパワーレベルまでパワー発散（漏洩）が起こると考えられる。すなわち、パワーリミターとしての機能を有することになる。

3. 非線形光導波路中での光波伝搬特性

上述したように、クラッドが正の非線形係数をもつ光導波路は、ヒステリシス特性を、そして、クラッドが負の非線形係数をもつ光導波路は、パワーリミターとしての機能を有することがわかる。ここでは、さらに、これらの非線形光導波路における光波伝搬過程をビーム伝搬法（BPM）を用いて検討を行う。

ビーム伝搬法は、任意の屈折率分布を有する光導波路における光波伝搬問題についてよく用いられる手法であり⁽⁴⁰⁾、すでに、負の非線形媒質中での光波伝搬過程の取り扱いにも用いられている⁽³³⁾
(34)。

ここでは、定常的な非線形光導波路中での光波伝搬について、FFTを用いた通常のBPM⁽⁴⁰⁾を用いることとし、非線形光導波路中において、光波による屈折率変化及びその界分布が収束（距離に

対する収束ではなく、時間に対する収束) するまで、その光導波路での伝搬過程を繰り返し計算することにより、解析を行った。

図4に、非線形光導波路中での光波伝搬特性の解析手順を示す。以後に述べる光波伝搬特性は、この手順に沿って計算を行ったものである。なお、これらの具体的計算において、 ΔZ は $0.1 \mu\text{m}$ とした。

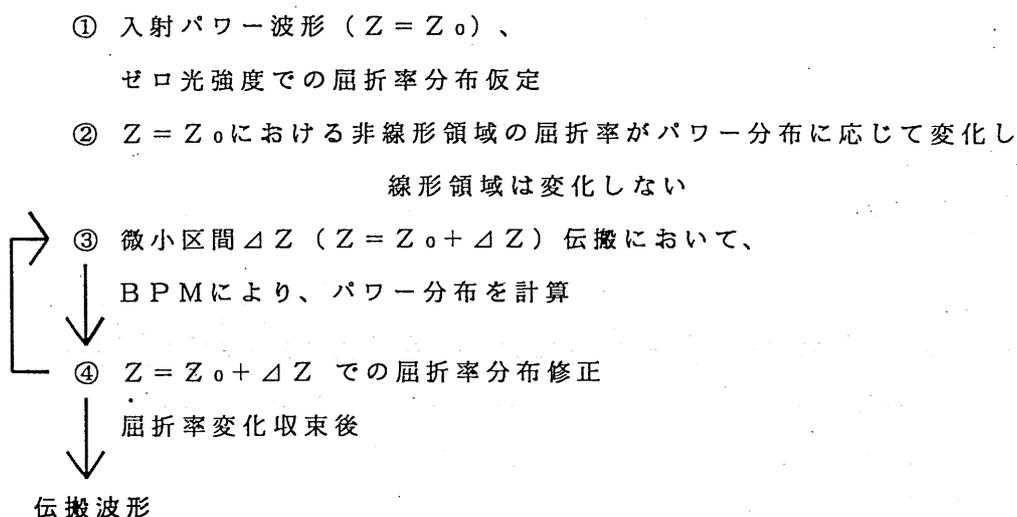


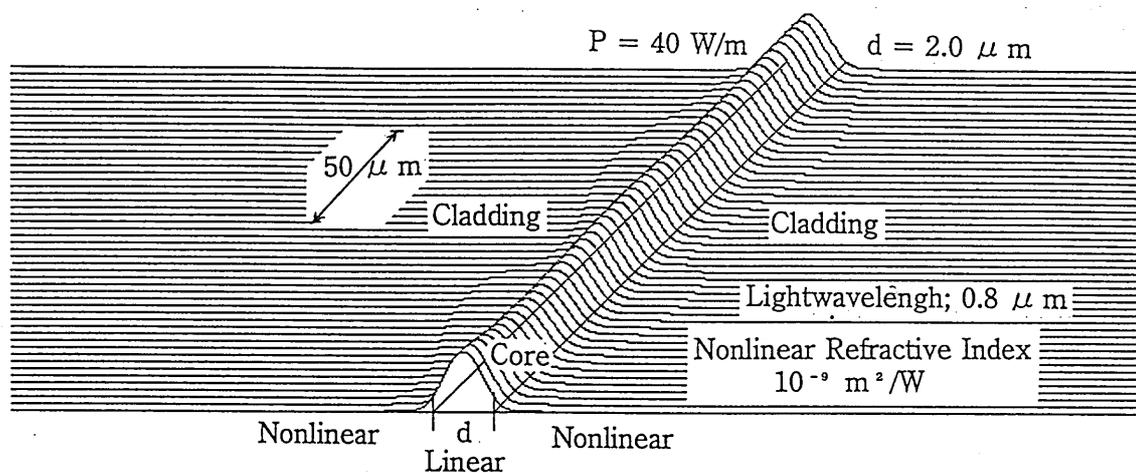
図4. 伝搬特性計算フロー

3.1 光強度 40 W/m 及び 60 W/m での光波伝搬特性

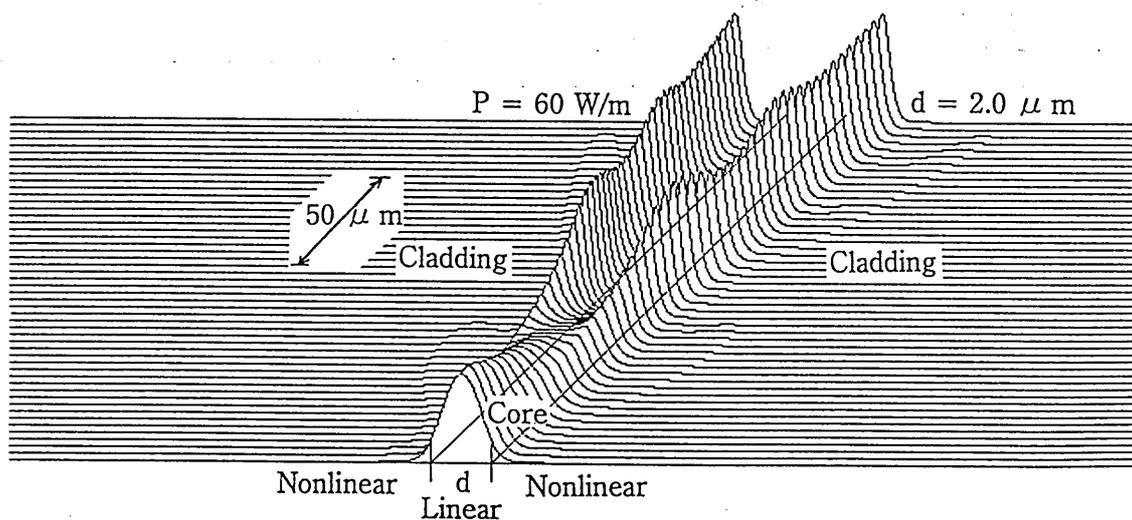
まず、図1の計算の基となっている非線形/線形/非線形・光導波路構成（正の非線形屈折率を有する）において、ゼロ光強度での屈折率（コア--3.54、クラッド--3.53）で定常的光強度分布を有する光波を入射した時の伝搬特性について示す。

図5は通常の本PMの計算に際して、一定入力光をもとに多数回繰り返し、時間的に定常に達した後（図4の計算手順）の結果を示したものである。図5(a)は、入射光強度 40 W/m 、(b)は、 60 W/m のときの光波光強度分布の伝搬（ 0.2 mm までの伝搬）による変化の様子を示している。(a)の 40 W/m 時においては、図1で、 n_{eff} の大きさはほとんど変化しない領域の中にあるので、伝搬に際して、光強度分布の変化もほとんどない。(b)の入射光強度 60 W/m 時においては、

光波伝搬に際して、0.1mm手前で波形は二つに離れ、光強度のピーク値がクラッド側へ推移していく現象がみられる。これは、図1の定常分布の計算結果からも(60W/m時においては、光強度のピーク値がクラッドへ位置することが明らかなので)妥当性を得ている結果である。ところが、さらなる伝搬に際して、このクラッド側への推移はさらに促進されている。これは、1や2でも述べたように非線形クラッドのみでも導波モードが保持できることに起因している。



(a) 入射光強度 40 W/m



(b) 入射光強度 60 W/m

図5. 光波伝搬特性

図1、図2の計算においては、3層構成を仮定しており、そのときの「入射光強度－実効屈折率」の関係を示しているが、この非線形クラッド媒質のみにおける定常モードの関係は含まれていない。しかし、実際の光波伝搬過程においては、1の④のモードへと移行していくようである。したがって、このクラッド媒質のみでの伝搬傾向は、1の③で分類した線形/非線形の表面伝搬モードの励振を困難なものとしていることがわかる。このことは、さらに次の3.2において一層明らかとなる。

3.2 光制御光スイッチの検討

クラッドが正の非線形係数をもつ、非線形(3.53)/線形(3.54)/非線形(3.53)の光導波路における入射光強度－実効屈折率の関係は、図1、図2に示したように、パワー経路依存性をもつヒステリシス特性である。

この時、図2に示したように、入射光強度分布にわずかでも非対称性が生ずれば、入射光強度の増大による光強度のピーク値のクラッド側への推移は、そのわずかな非対称性をきっかけとして、一方のクラッドに集中して起こることになる。このわずかな非対称性を引き起こす光波（制御光）を片側クラッド側より入射し、導波光を制御することができると思われる。

図6にその結果を示す。これは、図5(a)の40W/mの光波伝搬時に、その入射光に対して入射光と同相で、コアから一方の側のクラッド（この場合、左クラッド）へ、2 μ mシフトさせた（界分布としては入射光の1/4に相当する）制御光を合わせて（約48W/m）の光波伝搬特性である。

予想に反して、やはり1の③として分類した表面伝搬モードとはならず1の④で分類したモードへと移行している様子がわかる。このことは、1の③の表面伝搬モードの励振の困難さを示している。

クラッド側はすべて非線形媒質であり、伝搬に際してどこで「安定」なモードを保つのか位置の予測は難しいが、このように、この

例では、わずかな非対称性を外部から与えることにより、片側クラッド側へ光波を導くことができ、光-光スイッチが可能となることがわかる。この例では、コア部にも光波は残っており、現在、さらに、このモードの安定性も含めて検討を行っている。

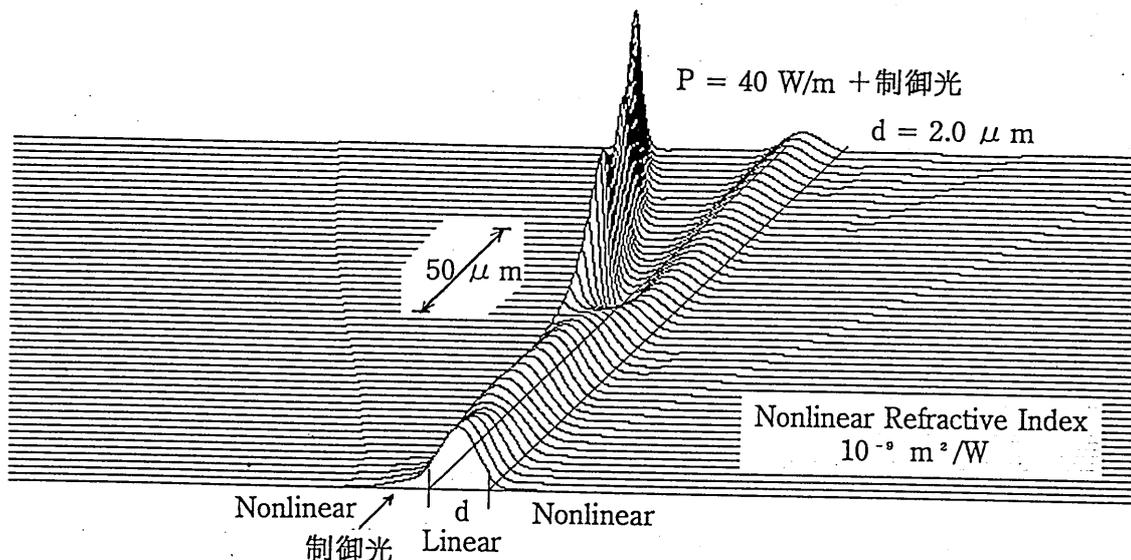
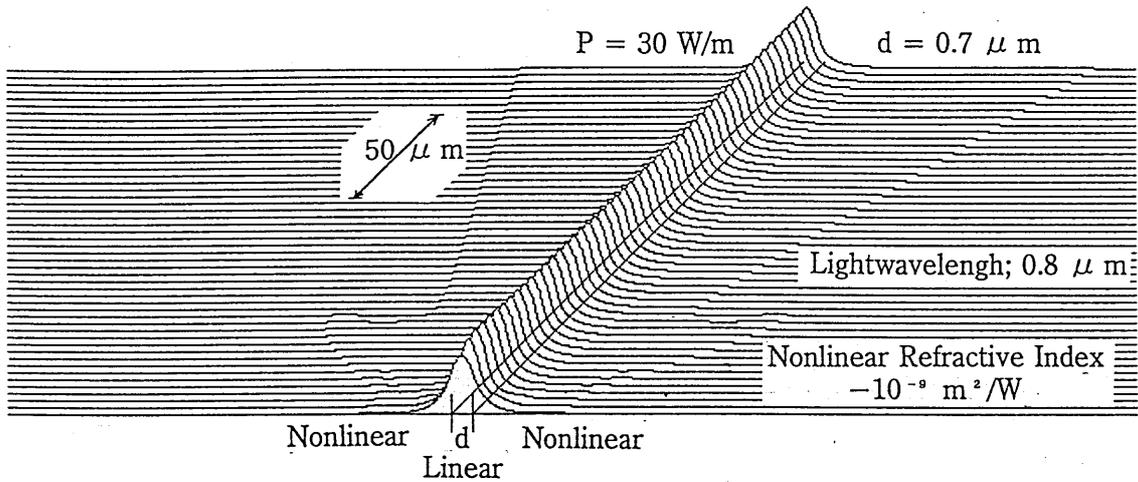


図6. 光制御光スイッチにおける光波伝搬特性---入射光強度40W/m + 制御光入射（左クラッド部）

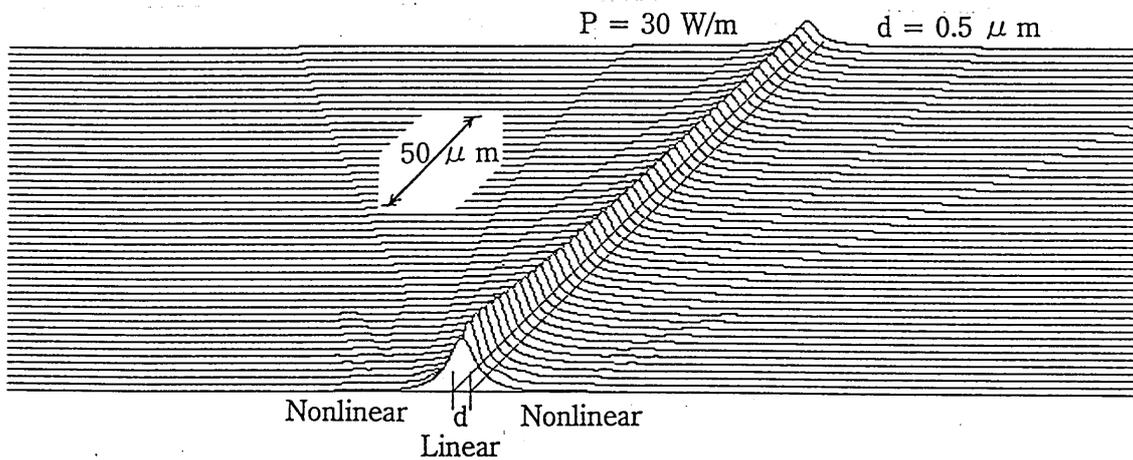
3.3. パワーリミター特性

一方、クラッドが負の非線形係数をもつ場合、すでに述べたように、図3よりパワーリミターとしての機能が予測される。図7(a)(b)は $P=30\text{W/m}$ の光強度を持つ光波を入射した場合の光波伝搬波形（光強度分布で示してある）であり、それぞれ、コア厚 d が、(a) $d=0.7\mu\text{m}$ 、(b) $d=0.5\mu\text{m}$ の時である。但し、入射波形は、線形の場合において形成される、クラッド(3.53)/コア(3.54)/クラッド(3.53)での光強度分布を持つものとした。図3より明らかなように、 $d=0.7\mu\text{m}$ においては、 30W/m でも導波モードは十分存在するので（図3において、 $d=0.7\mu\text{m}$ において、 30W/m のときの実効屈折率は存在し得るので）、パワーの漏洩はほとんど起こらず（むしろ2.2で述べ

たように、コア内への光閉じこめが促進されており)、伝搬と共にその実効屈折率で決まる光強度分布に落ちつく結果となっている。しかし、(b)の $d=0.5\mu\text{m}$ においては、導波モードは存在しないため、光波伝搬に際して、導波モードが保持できるまでのパワー漏洩が起きている。この光波の漏洩は、図3の $d=0.5\mu\text{m}$ の時の特性曲線上のある一定パワーに落ち着くまで続くと予想される。すなわち、導



(a) $d=0.7\mu\text{m}$ の場合



(b) $d=0.5\mu\text{m}$ の場合

図7. 両側クラッドが負の光非線形係数をもつ非線形($n_0=3.53$)/線形($n_0=3.54$)/非線形($n_0=3.53$)・3層スラブ光導波路の光波伝搬特性(入射光強度 $P=30\text{W/m}$)

波モードが保持できるまでのパワー漏洩が起こることになる。

図8は、さらに、 $P=50\text{W/m}$ のときの光波伝搬波形である。この時、(a)の $d=0.7\mu\text{m}$ では、伝搬過程において、すでに2.2ですでに述べたようにコア内パワー集中により光閉じこめが促進されているが、図3において、 $P=50\text{W/m}$ 、 $d=0.7\mu\text{m}$ では導波モードは存在しないので、やはりある程度のパワー漏洩が起こっており、光波分布の裾部

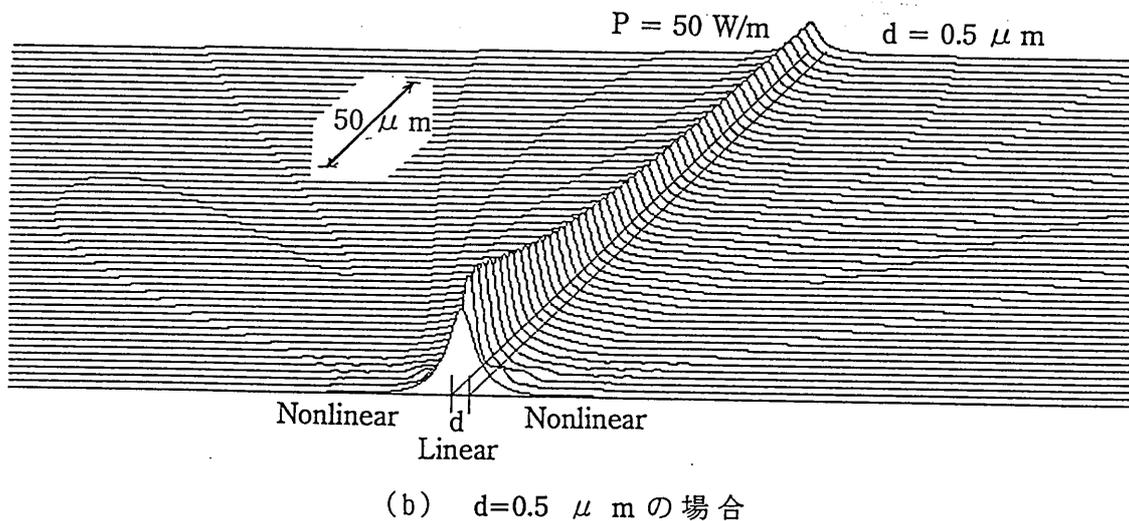
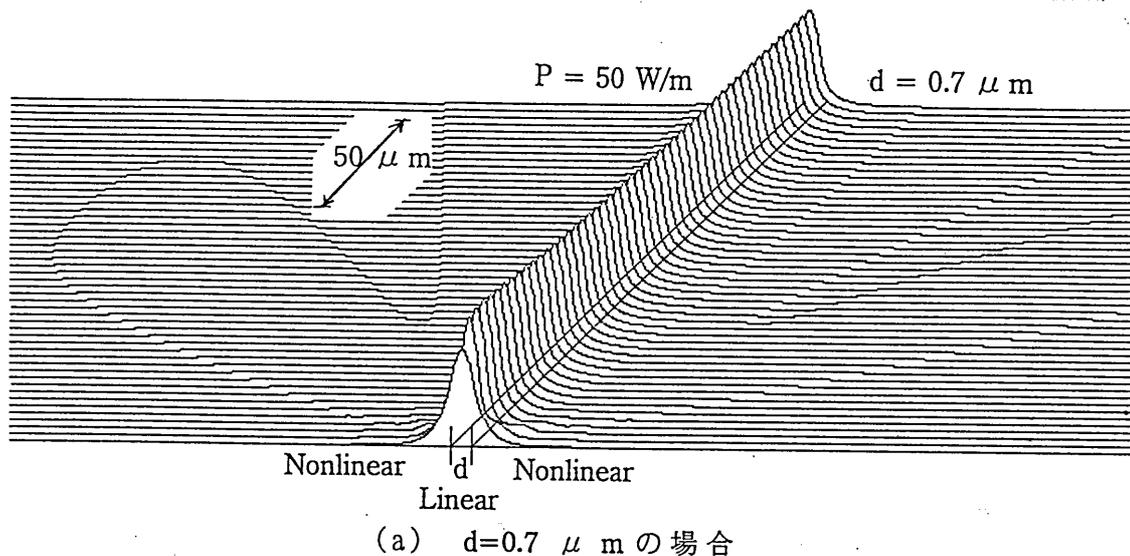


図8. 両側クラッドが負の光非線形係数をもつ非線形($n_0=3.53$)/線形($n_0=3.54$)/非線形($n_0=3.53$)・3層スラブ光導波路の光波伝搬特性(入射光強度 $P=50\text{W/m}$)

分のクラッド側への浸み出しが伝搬と共に多くなっている。(b)の $d=0.5\mu\text{m}$ では 30W/m のときと比べると一層の光波漏洩が起こっていることがわかる。

このように、クラッドが負の非線形媒質である光導波路では、あるパワーレベル以上の光波伝搬はカットオフとなるため、そのパワーレベル内での伝搬しか許されず、パワーリミターとしての機能を有することがわかる。

4. むすび

クラッドが非線形媒質で構成される3層スラブ光導波路において、非線形係数が正の場合及び負の場合の光波伝搬特性についてデバイス応用という観点から伝搬特性について検討を行った。

正の非線形係数材料をクラッドに用いた光導波路の場合、3層構成での実効屈折率は光強度に対してヒステリシス特性をもち、ある光強度範囲内で、実効屈折率が二値存在する。この二つの実効屈折率の差異は、光強度分布において、コア内に光強度のピーク値をもつものと、コア外(クラッド)にピーク値をもつものとの違いでもある。従って、この二値を光強度に対するヒステリシス特性を用いて、切り換えることにより、光スイッチングが可能となる。この場合、さらに、クラッドの非線形媒質のみで保持されるモードについても検討を行う必要がある。

負の非線形係数材料をクラッドに用いた光導波路の場合、光強度の増大と共に導波路に対する実効屈折率は次第に低下し、ある光強度以上では、導波モードは存在せず、カットオフされる。従って、その光強度以上の光波が入射した場合、光波伝搬過程で、あるパワーレベルまで(実効屈折率が存在するところまで)、パワーの漏洩が起こる。すなわち、パワーリミターとしての機能を有する。

本論文では、クラッドが非線形媒質である光導波路において、光波伝搬過程で、光強度分布がどのように変化していくのかを、このような光制御デバイスへの応用という観点から検討を行った。今後、

これらへのデバイス応用におけるモードの安定性の検討、さらに、実験的検討を行う必要がある。

参 考 文 献

- (1) Seaton C.T., Valera J.D., Shoemaker R.L., Stegeman G.I., Chilwell J.T. and Smith S.S.: "Calculation of nonlinear TE waves guided by thin dielectric films bounded by nonlinear media", IEEE J.Quantum Electron. 21, 7, pp.774-783 (July 1985).
- (2) Lambkin P.M. and Shore K.A.: "Asymmetric semiconductor waveguide with defocusing nonlinearity", IEEE J.Quantum Electron., 24, 10, pp.2046-2051 (Oct.1988).
- (3) Lambkin P.M., Montrosset and Shore K.A.: "Guided modes in nonlinear periodic structures", IEE Proceedings-J, 139, 3, pp.173-179 (June 1992).
- (4) Cada M., Gauthier R.C., Paton B.E. and Chrostowski J.: "Nonlinear guided waves coupled nonlinearity in a planar GaAs/GaAlAs multiple quantum well structure", Appl.Phys.Lett., 49, 29, pp.755-757 (Sep.1986).
- (5) Cada M. and Begin J.D.: "An analysis of a planar optical directional coupler with a lossless Kerr-like coupling medium", IEEE J.Quantum Electron., 26, 2, pp.361-371 (Feb.1990).
- (6) Meng X.J. and Okamoto N.: "Numerical analysis of a MQW-sandwich coupler with strong coupling", IEEE Photonics Tec.Lett., 4, 4, pp.460-462 (Apr.1993).
- (7) 大家重明、梅田徳男、張吉夫: "GaAs-AlGaAs MQW非線形光導波路の導波特性の解析", 信学論(C-I), J73-C-I, 9, pp.573-579 (1990-09).
- (8) Lehmen.A.V., Chemla D.S., Zucker J.E., and Heritage J.P.: "Optical Stark effect on excitons in GaAs quantum wells", Optics Lett., 11, pp.609-611 (Oct.1986).
- (9) Mysyrowicz A., Hulin D., Antonetti A. and Migus A.: "'Dressed Excitons' in a multiple-quantum-well structure: Evidence for an optical stark effect with femtosecond response time", Phys. Rev. Lett., 56, 25, pp.2748-2751 (June 1986).
- (10) 大家重明、梅田徳男、張吉夫: "線形-非線形・光導波路構成における非線形表面波の伝搬", 信学論(C-I) J75-C-I,6, pp.444-451 (1992-06).
- (11) Rahman B.M.A., Souza J.R. and Davies J.B.: "Numerical analysis of Nonlinear bistable optical

- waveguides", IEEE Photo. Tech. Lett., 2, 4, pp.265–267 (Apr.1990).
- (12) Ohke S., Satomura Y., Umeda T. and Cho Y.: "Waveguiding characteristics of optical waveguide with claddings having negative nonlinear refractive coefficient", Jpn.J.Appl.Phys., Part 1, 33, 6, pp.3478–3479 (June 1994).
- (13) Jakubczyk Z., Jerominek H., Patera S., Tremblay R. and Delisle C.: "Power-dependent attenuation of TE waves propagating in optical nonlinear waveguiding structure", IEEE J. Quantum.Electron. 23, 11, pp.1921–1928 (Nov.1987).
- (14) Al-Bader S.J. and Jamid H.A.: "Guided waves in nonlinear saturable self-focusing thin films", *ibid.*, pp.1947–1955.
- (15) Blow K.J., Doran N.J., Nelson B.P. and Wood D.: "Nonlinear self-guiding and switching in an all-fiber device", IEEE J.Quantum Electron. 23, 7, pp.1108–1112, (July 1985).
- (16) Moliney J.V., Ariyasu J., Seaton C.T. and Stegeman G.I.: "Numerical evidence for nonstationary, nonlinear, slab-guided waves", Opt. Lett. Vol.11, 5, pp.315–317 (May 1986).
- (17) Stegeman G.I., Seaton C.T. and Ariyasu J.: "Saturation and power law dependence of nonlinear waves guided by a single interface", Opt. Commun. 56, 5, pp.365–368 (Jan.1986).
- (18) Tomlinson W.J.: "Surface wave at a nonlinear interface", Opt.Lett., 5, 7, pp.323–325 (July 1980).
- (19) Maradudin A.A.: "S-polarized nonlinear surface polaritons", Z.Phys. B-Condensed Matter., 41, pp.341–344 (1981).
- (20) Satomura Y.: "Propagation characteristics of nonlinear TE waves in dielectric optical waveguide with nonlinear media", Trans. IECE Japan (Section E), 70, 6, pp.541–543 (June 1987).
- (21) Yuan Li-P.: "A numerical technique for the determination of the propagation characteristics of nonlinear planar optical waveguides", IEEE J.Quantum Electron., 30, 1, pp.134–138 (Jan. 1994).
- (22) Trutschel U., Lederer F. and Golz M.: "Nonlinear guided waves in multilayer systems", IEEE J.Quantum Electron. 25, 2, pp.194–200 (Feb. 1989).
- (23) 大家重明、梅田徳男、張吉夫：“線形（非線形）／非線形・多層構造における光波の定常伝搬モード”，1991信学春季全大、SC-1, (1991-03).
- (24) Chiao R.Y., Garmire E. and Townes C.H.: "Self-trapping of optical beams", Phy.Rev.Lett., 13, 15, pp.479–482 (Oct.1964).
- (25) Ohke S., Umeda T. and Cho Y.: "Field redistribution using optical nonlinearity in MQW light waveguide", 11th Record of Alloy Semiconductor Physics and Electronics Symposium, pp.551–558 (July

1992).

(26) Hayata K., Nagai M. and Koshiha M.: "Finite-element formalism for nonlinear slab-guided waves", IEEE Trans.Microwave Theory & Tech., 36, 7, pp.1207-1215 (July 1988).

(27) Okamoto K. and Marcatili E.A.J.: "Chromatic dispersion characteristics of fibers with optical Kerr-effect nonlinearity", IEEE J.Lightwave Technol., 7, 12, pp.1988-1994 (Dec. 1989).

(28) Ramadas M.R., Varshney R.K., Thyagarajan K. and Ghatak A.K.: "A matrix approach to study the propagation characteristics of a general nonlinear planar waveguide", IEEE J.Lightwave Tech. 7, 12, pp.1901-1905 (Dec.1989).

(29) Ogusu K.: "Nonlinear TE waves guided by graded-index planar waveguides", Opt. Commun. 63,6, pp.380-384 (Sep.1987).

(30) Cha I.J., Ohke S, Umeda T. and Cho Y.: "Optical nonlinearity of GaAs-AlGaAs MQW structure and its application to nonlinear optical waveguide", 6th Sympo. Rec. of Alloy Semicon. Phys. & Electron., pp.499-506 (March 1987).

(31) Varatharajah P., Moloney J.V., Newell A.C. and Wright E.M. "Stationary nonlinear waves guided by thin films bounded by nonlinear diffusive media" J.Opt.Soc.Am. B,10,1,pp.46-54 (Janu.1993).

(32) Tran H.T.: "Stability of bright TE waves in slab waveguides with a self-defocusing bounding medium", Opt.Lett.,17,24, pp.1767-1769 (Dec.1992).

(33) Chen Y.: "Stability of bright and dark surface waves", 10, 6, pp.1077-1080 (June 1993).

(34) Tran H.T.: "Stability of stationary dark waves guided by nonlinear surfaces and waveguides", J.Opt.Soc.Am. B 11, 5, pp.789-797 (May 1994).

(35) 横田浩久、平雅文、倉藪貞夫： "非線形光導波路励振問題の反復差分ビーム伝搬法による解析"、信学論(C-I), J77-C-I, 10, pp.529-539 (1994-10).

(36) 久保寺憲一： "非線形光学デバイスの将来展望"、応用物理 59, 2, pp.155-163 (1990-02).

(37) 大高洋一、川上彰二郎、西田茂穂： "低屈折率層を内部に有する多層誘電体スラブ光線路の伝送特性"、信学論(C)、57,6, pp.187-194 (1974-06).

(38) 川上彰二郎、西田茂穂： "低屈折率中間層を持つ対称五層スラブ光線路におけるカットオフモードの諸特性"、信学論(C)、57, 9, pp.304-311 (1974-09).

(39) 川上彰二郎： "光導波路"、第6章「二重クラッド型伝送路」、朝倉書店 (1980).

(40) 岡本勝就： "光導波路の基礎"、7「ビーム伝搬法」、コロナ社 (1992).

輻射科学研究会資料
(RS96-7)

導波管並列給電誘電体装荷
円偏波平面アンテナ(その2)

津川哲雄 (大阪工業大学電子工学科)

杉尾嘉彦 (摂南大学工学部電気工学科)

1996年7月26日

摂南大学 寝屋川キャンパス7号館7F 第2会議室

導波管並列給電誘電体装荷円偏波 平面アンテナ (その2)

Circularly Polarized Dielectric-Loaded Planar Antenna
Excited by Parallel Feeding Waveguide Network (2nd)

津川哲雄

大阪工業大学

Tetsuo Tsugawa

Osaka Institute of Technology

杉尾嘉彦

摂南大学

Yoshihiko Sugio

Setsunan University

あらまし

衛星放送の12(GHz)帯において素子利得の高いアンテナを得るために、誘電率の低い円柱状、または角柱状の誘電体を、放射用導波管、即ち、長さが1/2管内波長の片方が閉じた導波管の開口部に装荷して、この導波管の側面から他の導波管回路で励振する並列給電方式の構造の平面アンテナを提案し、研究を進めている。この放射用導波管は直線偏波のみならず、内部にピンやダイポール等の偏波子を挿入したり、方形導波管の一对角の角を取って六角形の導波管として、これを側面から給電して円偏波を発生させる素子とすることも紹介した。

本論文では、上記の様に誘電体を六角形の円偏波放射用導波管の開口部に装荷し、導波管回路で並列給電した方式の64素子の平面アンテナの試作実験について紹介する。

1. まえがき

通信放送技術衛星 (COMETS) が1997年の8~9月期に種子島宇宙センターからH-2 ロケットで打ち上げられ、次世代の高精細度テレビジョンの実験放送が21(GHz)帯で予定されている。当初の実験放送計画は1ビームあたり200(W)のトランスポンダーで放送されるとして受信アンテナの利得が42.36(dBi)必要とされていたが、システムを晴天時には70(W),雨天時においては430(W)と可変できるシステムとして、降雨による最悪月のサービス時間率を99(%)とすると受信アンテナの利得は38.8(dBi) (コンバーターのNFを1.5 (dB)と仮定) でよく、パラボラアンテナ (開口効率が80(%)であるとして) で受信すると仮定すれば径が45(cm)のもので良いとされている。平面アンテナで開口効率が90(%)を仮定すると38(cm)角で良いことになるが、これを現在の衛星放送受信用平面アンテナの主流となっているラジアル導波管方式で実現するには、これ等は直並列給電方式であるために利得を高くすると周波数帯域幅が狭くなり問題が生ずる。したがって、並列給電方式とするのが理想的である。その給電線路としてマイクロストリップ線路やトリプレート線路を使えばよいが、これ等は損失が大きく、効率の良いアンテナの製作は困難である。損失の少ない導波管で並列給電線路を構成すればよいが、導波管の幅が広すぎるため素子間隔を1波長以下で構成することはできない。素子利得が低い場合にはグレーティングローブを生じ、高利得の平面アンテナの製作は不可能となる。

開放導波管の周囲にグラウンド板を設け、誘電率の低いテフロン、ポリプロピレン、ポリエチレンやポリスチレン等の円柱や角柱の誘電体を装荷すると非常に利得の高いアンテナができる。⁽¹⁾⁽²⁾ 例えば、11.85 (GHz)において、開口部にグラウンド板を持つ16(mm)角の方形導波管をアンテナとして利得を測定すると約7.3(dBi)となるが、この開口部に直径28.5(mm) (1.126波長)、高さ33(mm)のポリプロピレンを装荷すると15.5(dBi)の利得が得られる。誘電体の断面積をアンテナの開口面積とすれば開口効率は約280(%)となり、有効開口面積を正方形で考えると約42(mm)角となるので素子間隔は42(mm)とすることができるが、配列すれば相互作用により1素子当たりの利得が低下するので素子間隔は少し詰める必要があり、36(mm)位にしなければならない。1波長は25.3(mm)で

あるからこの場合の素子間隔は約1.42波長となる。しかし、1素子当たりの利得が高いためにグレーティングローブは抑えられる。⁽³⁾⁽⁴⁾

電波を放射するための導波管の長さは平面アンテナ用にするため奥行きを短くする必要がある。そのためには長さを約1/2管内波長として片方を短絡し、この短絡面から約1/4管内波長の位置において側面から給電導波管でTEの基本モードを励振する方法をとる。これを円偏波用とする場合は導波管内に偏波素子を挿入したり、導波管を変形すれば円偏波を発生することができる。一般に導波管を用いた摂動理論による円偏波の生成方式は透過方式になっているが、⁽⁵⁾ここで論じている方式は上記のように導波管内の摂動素子の真横から給電する方式であり、装荷した誘電体による反射係数を有効に生かして円偏波を生成すると共に高利得を得る方式であることを特徴としている。⁽⁶⁾⁽⁷⁾

本論文は12(GHz)帯において、導波管による給電回路網を使用し、64個の上記の様な誘電体を装荷した放射導波管素子を並列給電する方式の円偏波平面アンテナを試作し好結果を得たのでこれについて紹介するものである。

なお、12(GHz)帯におけるこの種のアンテナにおいては、放射用導波管の長さが約22(mm)、誘電体の高さが約33(mm)で合計すると55(mm)となり、平面アンテナとしてはかなりの厚みとなる。しかし、21(GHz)帯においては各部の寸法が12/21倍となるので、厚みは31~32(mm)でよいことになり、給電線路が導波管であるから高い周波数領域においてもあまり損失に対して気遣う必要がないものと考えられる。したがって、この研究の目的は、上記の21(GHz)帯における次世代の高精細度テレビジョン放送受信用平面アンテナの開発を当面の目的としている。

2. 円偏波放射素子

図1は方形導波管の一对の対角部を欠いて六角形とした導波管に誘電体を装荷したアンテナの斜視図である。放射用導波管や給電導波管は2枚のアルミ板に溝を彫り、図のように重ねることによって構成され、放射用導波管の開口部には円筒形の誘電体が装荷されている。図2に放射用導波管の開口面と電界方向を示す。放射用導波管に側面から給電された電界Eは E_α と E_β の二つのモードに分離して考えられるが、導波管

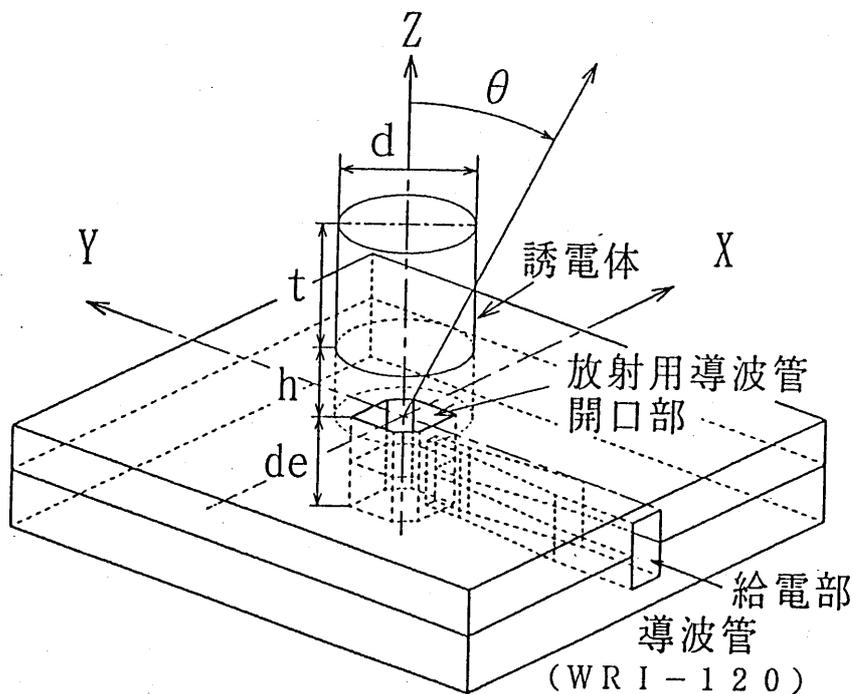


図1 1素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの構造図

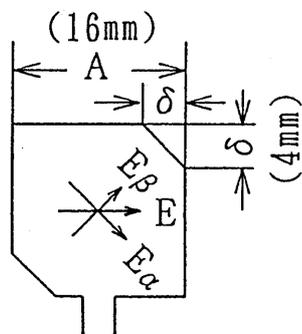


図2 六角導波管の開口部の寸法、および、円偏波生成の説明図

の形状により E_α に対する位相定数は E_β に対する位相定数よりも小さいので E_α は E_β より位相が進む。放射用導波管の長さ(穴の深さ) de を、 E_α と E_β との管内波長の平均の約半波長にして適当な誘電体の厚みのものを装荷すると、 E_α と E_β の位相差が90度で振幅を等しくすることがで

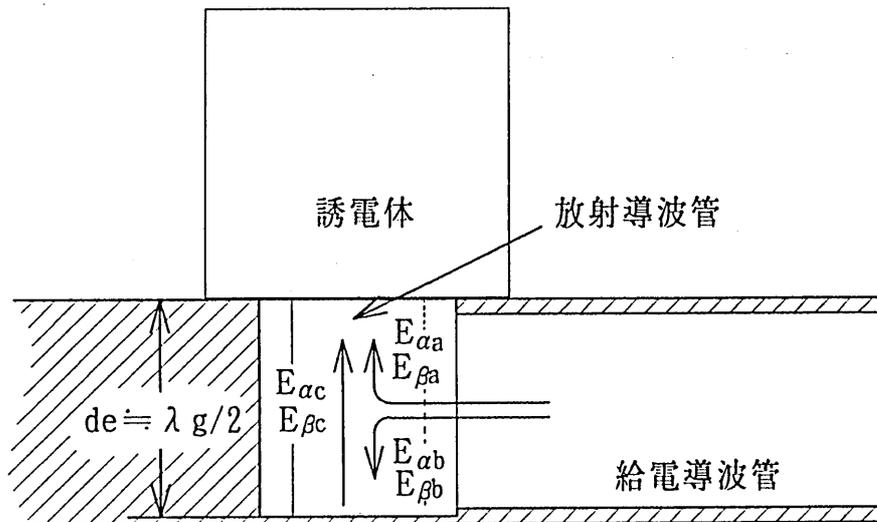


図3 六角導波管方式円偏波アンテナの側面から見た内部の電界の説明図

きるので円偏波を生成することができる。これを図3でもう少し詳しく述べると、給電導波管より給電された電波は、放射導波管の開口方向へ向かう経路aを通して $E_{\alpha a}$ 、 $E_{\beta a}$ となるが開口部までの距離が短いため軸比の悪い右旋の楕円偏波となって開口部に到達する。短絡端、いわゆる底に向かう電波も同じように $E_{\alpha b}$ 、 $E_{\beta b}$ に分かれつつ左旋偏波となり底に到達する。これらは底で反射され、それぞれ $E_{\alpha c}$ 、 $E_{\beta c}$ となって右旋偏波に変わり、約 $1/2$ 管内波長の距離を通過しながら軸比が改善されつつ開口部に到達する。開口部ではこれらの一部が反射されて放射導波管の底で再び反射され開口部に戻る。開口部においてこれ等の波が合成されて E_{α} 、 E_{β} となって放射される。誘電体が装荷されていない場合の E_{α} 、 E_{β} の周波数に対する位相差を、開口部の寸法 $A=16(\text{mm})$ 、 $\delta=4(\text{mm})$ 、放射導波管の深さ $de=21.7(\text{mm})$ として計算（式については付録参照）した例を図4に示す。開口部に誘電体が装荷されている場合は、その開口部における反射係数が誘電体の高さ（厚み）によって波動的に変化するの位相差も波動的に変化する。その結果軸比が最も良い誘電体の高さを選択できる。誘電体の直径 $d=28.5(\text{mm})$ 、誘電体の高さ $t=32.4(\text{mm})$ 、誘電体とグランド板の間隔 $h=0$ とした例も図4の中に示している。これを見れば誘電体を装荷することにより位相差が装荷しない場合に比べて大きく変化していることがわかる。

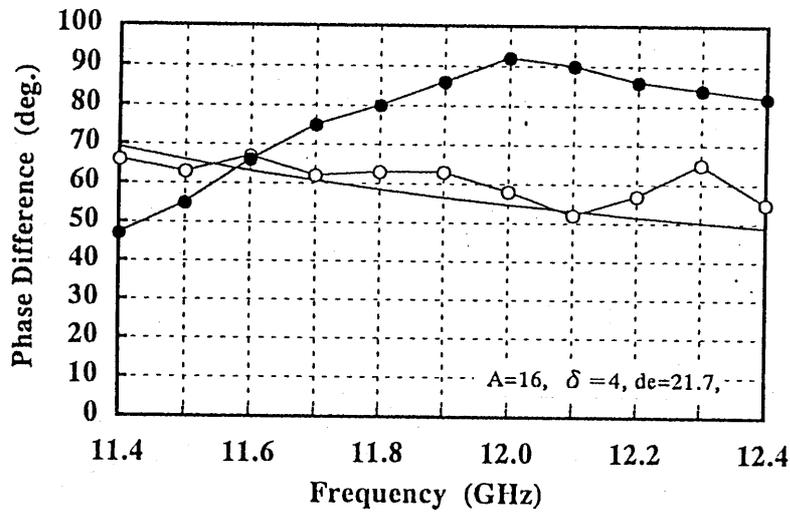


図4 誘電体非装荷時の E_α と E_β の位相差の実測値と計算値と誘電体装荷時の位相差の実測値

なお、誘電体を装荷しなくても δ を少し大きくとることにより軸比は良くできる。また、軸比も良くなり利得も高くなる誘電体の高さにおける利得と軸比の周波数特性をそれぞれ図5、図6に示す。最大利得は15.5(dBi)で、利得が1dB低下の周波数帯域幅は約700(MHz)であった。また、1dB以下の軸比の帯域幅は約110(MHz)であった。

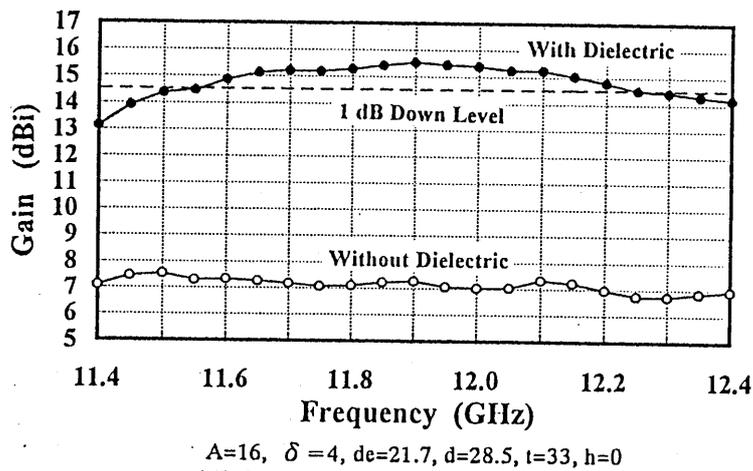


図5 1素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの利得

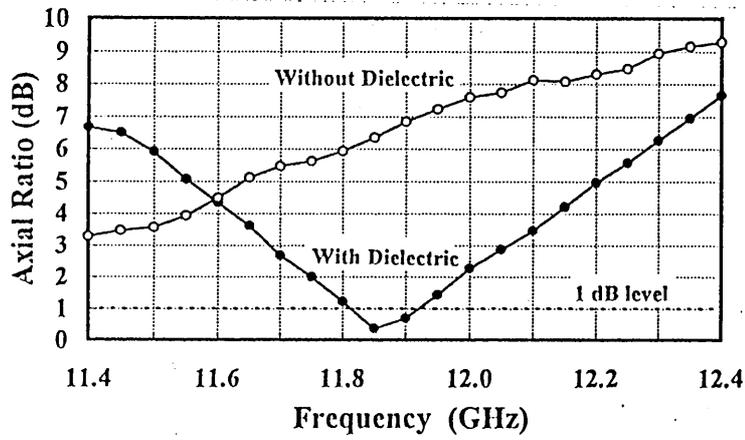


図6 1素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの軸比

放射導波管と給電導波管の結合部のインピーダンスとリターン・ロス特性を図7に示す。リターン・ロスが15dB以上の帯域幅は約900(MHz)以上であった。スピネル指向性を図8に示す。

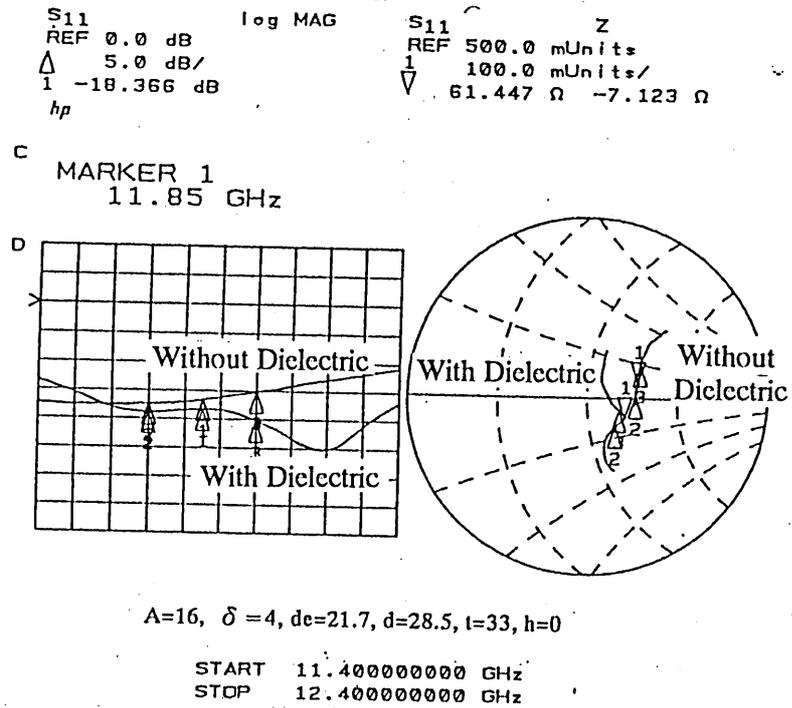
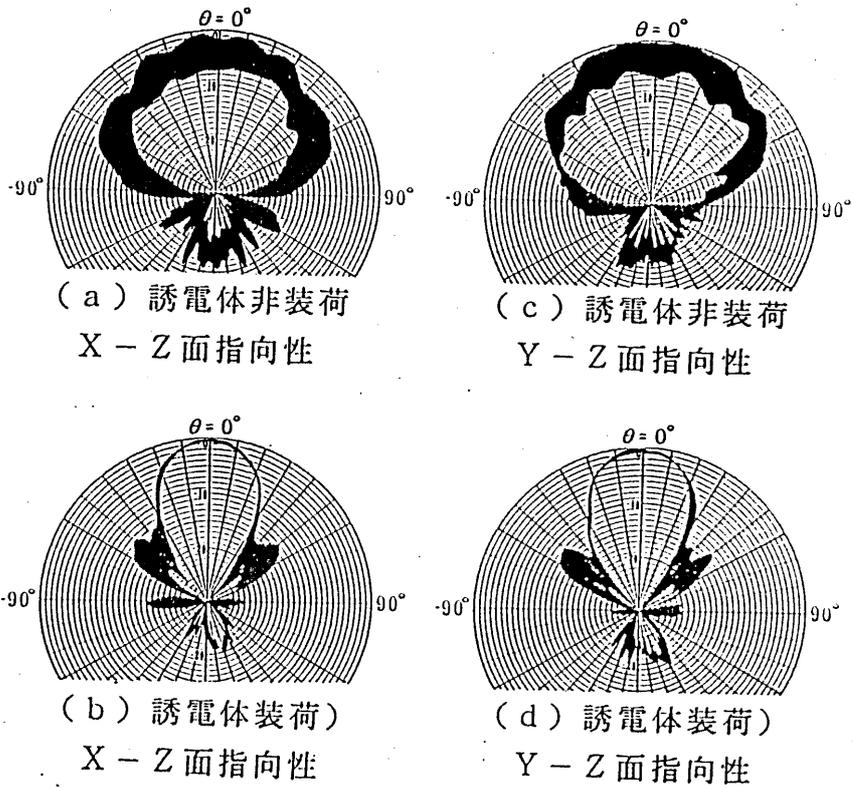
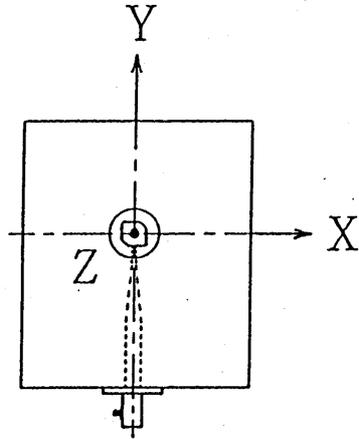


図7 1素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの入力インピーダンス特性



$A=16, \delta=4, de=21.7, d=28.5, t=33, h=0$

図8 1素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの誘電体装荷、非装荷時におけるX-Z方向、Y-Z方向のスピネル指向性図

3. 4素子サブアレー・アンテナ

多素子の平面アンテナを構成するサブアレー・アンテナは図9の様に4素子で構成されている。このアンテナは右旋偏波であり、放射する電界のベクトルの方向が常に一致して、ある瞬間には矢印の様に揃って、アンテナ上部から見ると左に回転する様に給電線路を設計してある。アンテナ素子AとB、CとDはそれぞれ楕円偏波の長径方向が直交することによって円偏波となる様に、即ちペア素子を形成している。このために給電線路上のQ点からアンテナBまで距離はアンテナAまでの距離よりも $1/4$ 管内波長だけ長くしてある。もし、同じ距離であれば、例えばアンテナ素子の付け根の部分におけるある瞬間の電界方向は点線の矢印の様になるからアンテナBの位相を90度遅らせればよい。同様の理由から給電線路上のP点からQ点までの距離よりも、P点からR点までの距離を $1/2$ 波長だけ長くし、R点からアンテナCまでの距離よりもアンテナDまでの距離を $1/4$ 波長だけ長くしてある。

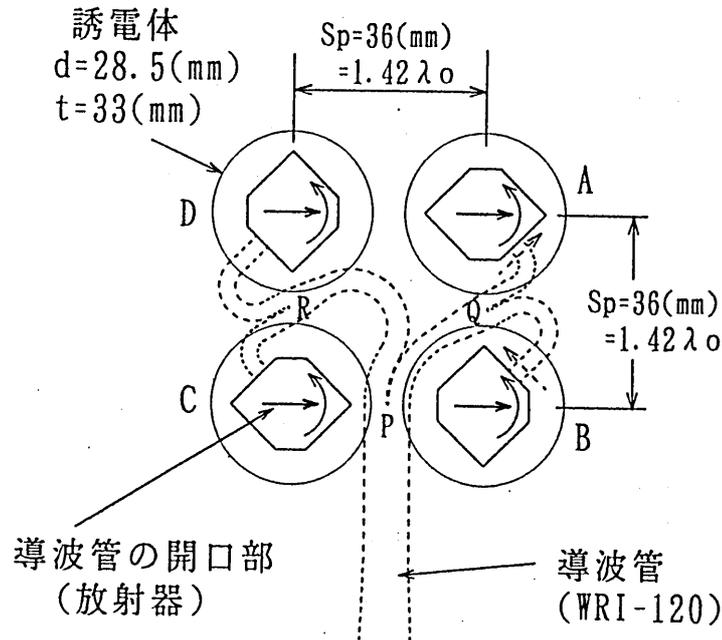


図9 4素子サブアレー・アンテナの説明図

線路長は線路の中心線で計算し、素子間隔は36(mm)(1.42波長)として線路のみを製作して位相測定した結果、分岐点Qから素子Aと、分岐点Rから素子Dまでの距離を、位相にして9度増加するように長くする必要があった。また、分岐点PからRまでの距離は逆に6度分短くする必要があった。

以上の線路を用いて開口寸法 $A=16$ (mm)、 $\delta=4$ (mm)、深さ $de=21.7$ (mm)の放射導波管を励振し、これに直径 $d=28.5$ (mm)、高さ $t=33$ (mm)の誘電体を開口部に密着して装荷したアンテナを製作した。図10は利得の周波数特性、図11は軸比特性を示す。

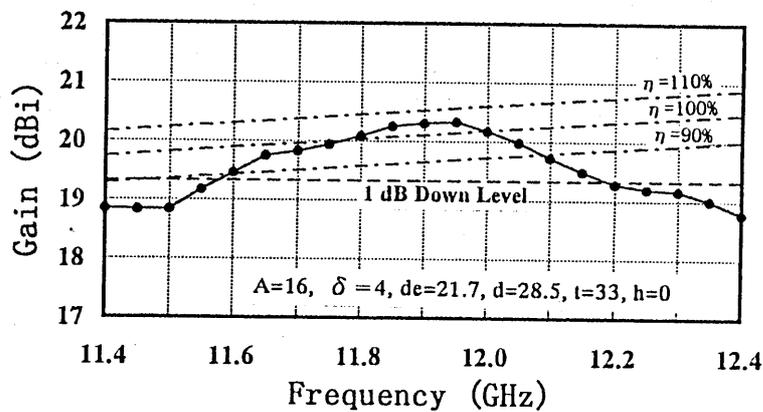


図10 4素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの利得

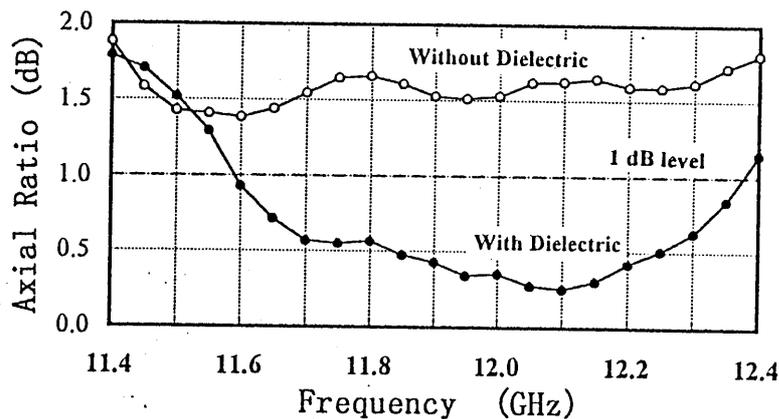
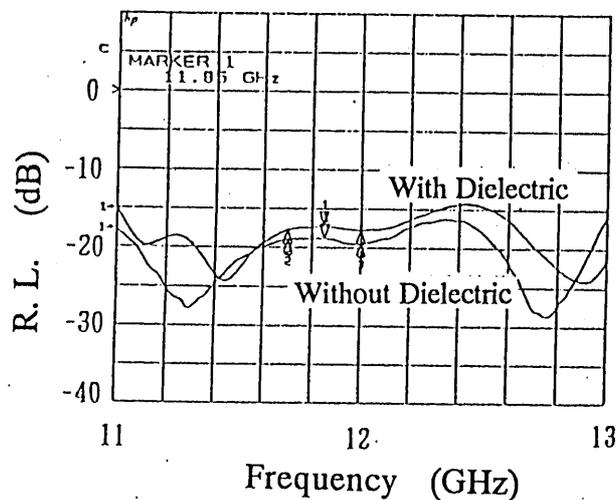


図11 4素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの軸比

最大利得は20.3(dBi)、開口効率は約105(%) (開口面積は素子間隔の自乗×4として計算)、利得が1dB低下の帯域幅は約600(MHz)となった。利得の帯域幅が比較的狭いのは素子の軸比が狭いからである。1dB以下の軸比の帯域幅約750(MHz)となった。開口効率が100(%)を越えたのは誘電体の側面が有効に効いているからである。

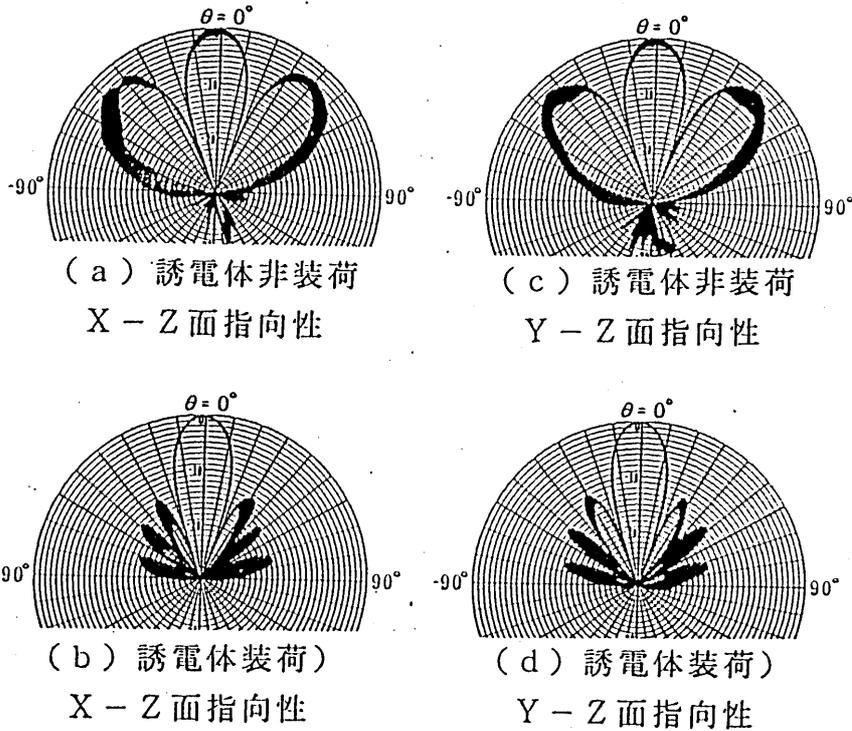
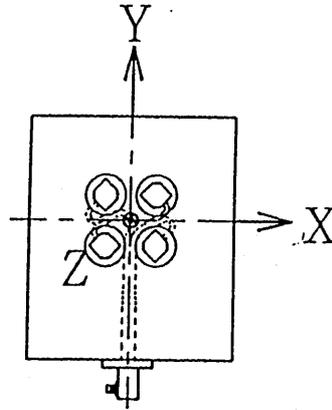
図12は4素子アンテナの誘電体を装荷した場合と、装荷していない場合のリターン・ロスであり、-15dB以上の帯域幅は約1.3(GHz)である。



$A=16, \delta=4, de=21.7, d=28.5, t=33, h=0$

図12 4素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの誘電体装荷、非装荷に対する反射特性

図13はX-Z、Y-Z方向のスピネル指向性図で誘電体を装荷した場合としない場合を比較してある。主ローブの軸比は非常に良い軸比を示していることがわかる。



$A=16, \delta=4, de=21.7, d=28.5, t=33, h=0$

図 1 3 1 素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの誘電体装荷、非装荷時における X - Z 方向、Y - Z 方向のスピネル指向性図

4. 16素子平面アンテナ

4素子のサブアレーアンテナを4セット合わせて並列給電して16素子の平面アンテナを構成した。

図14は利得の周波数特性、図15は軸比特性を示す。最大利得は26.05(dBi)、開口効率約98.1(%) (開口面積は素子間隔の自乗×16として計算)、利得が1dB低下の帯域幅は約650(MHz)となった。また、1dB以下の軸比の帯域幅約850(MHz)となった。

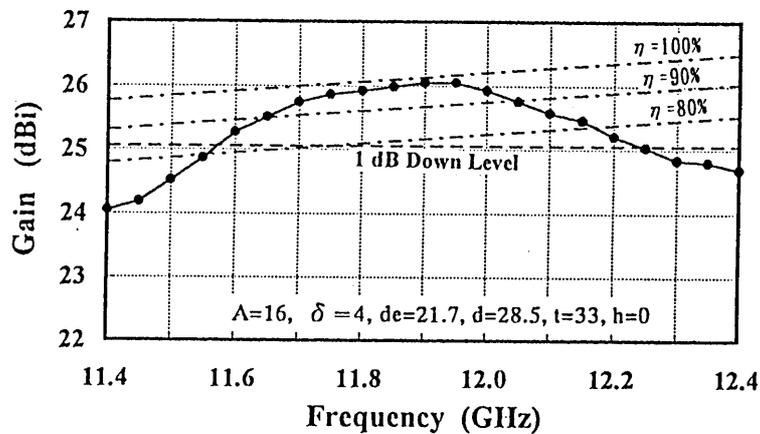


図14 16素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの利得

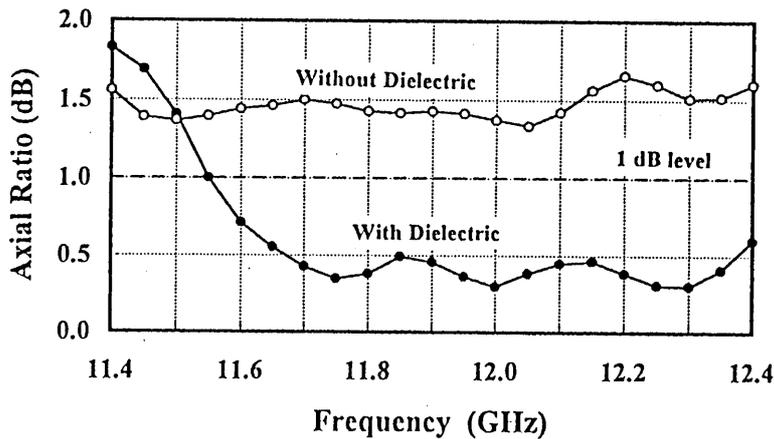


図15 16素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの軸比

図16は16素子アンテナの誘電体を装荷した場合と、装荷していない場合のリターン・ロスであり、-15dB以上の帯域幅は約900(MHz)である。

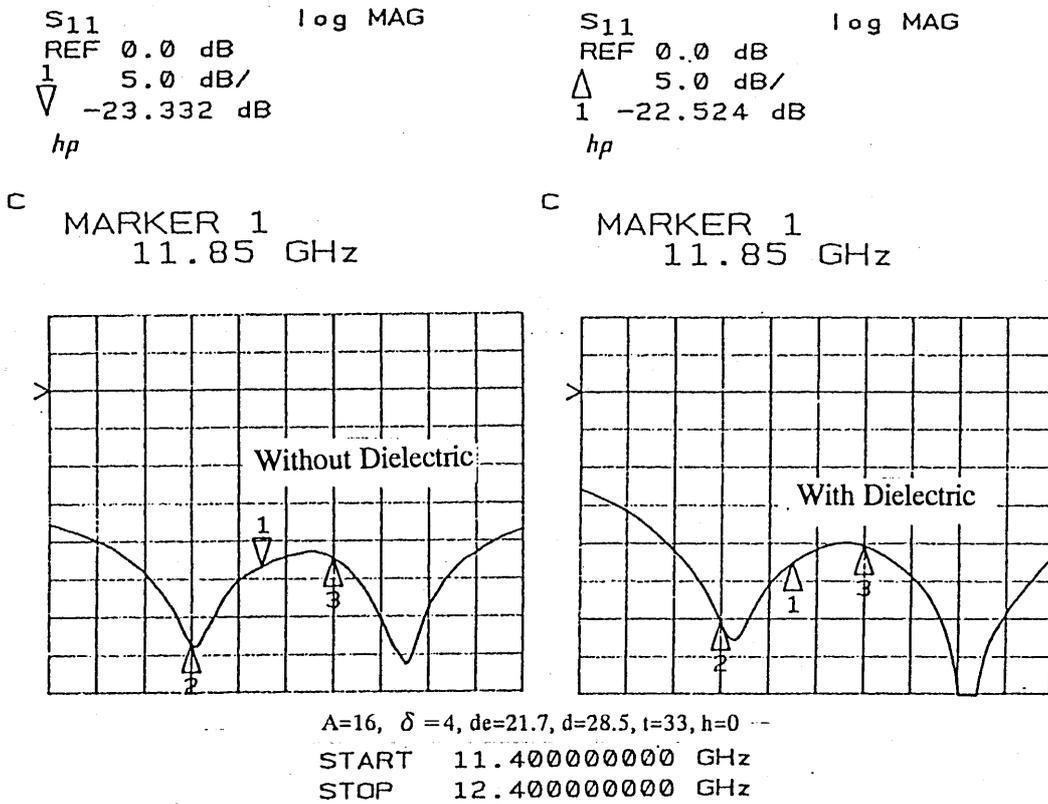
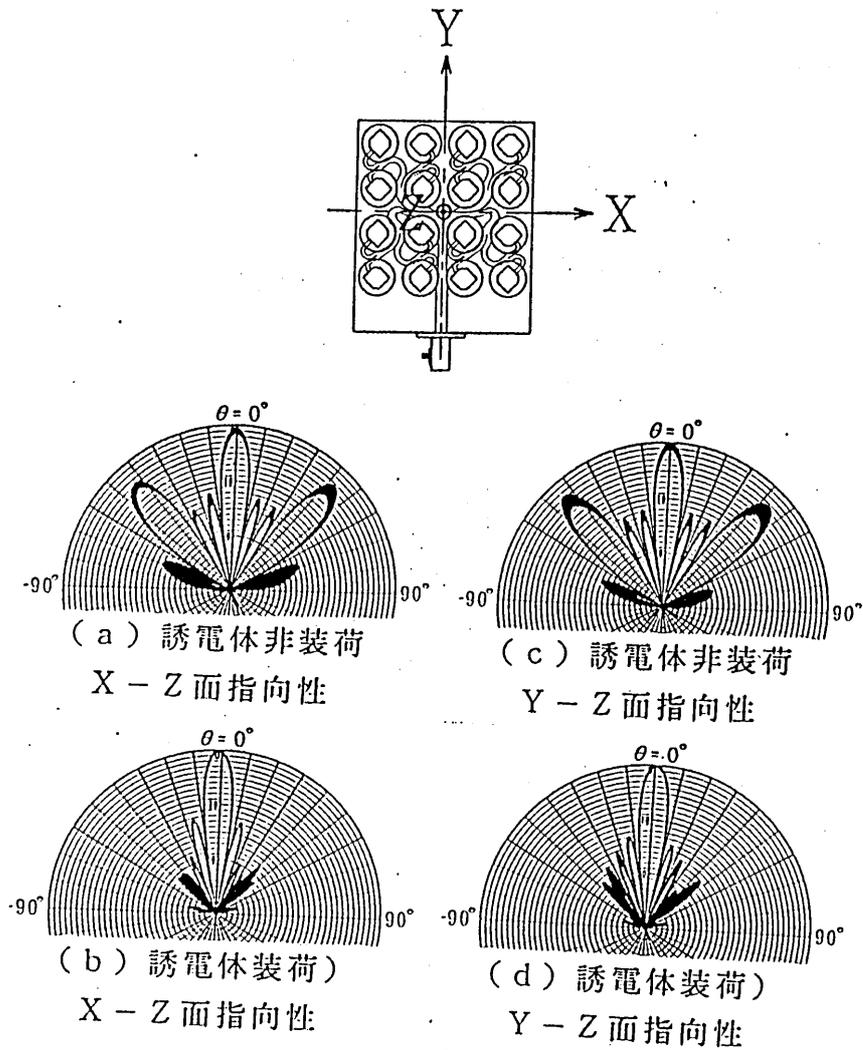


図16 16素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの誘電体装荷、非装荷に対する反射特性

図17はX-Z、Y-Z方向のスピネル指向性図で誘電体を装荷した場合としていない場合を比較してある。この場合は主ローブ、第一サイドローブまで軸比が非常に良くなっていることがわかる。グレーティングローブは殆ど消えていることがわかる。



$A=16, \delta=4, de=21.7, d=28.5, t=33, h=0$

図 1 7 16 素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの誘電体装荷、非装荷時における X - Z 方向、Y - Z 方向のスピネル指向性図

5. 64素子平面アンテナ

4素子のサブアレーアンテナを16セット合わせて並列給電して64素子の平面アンテナを構成した。図18はその上面図と座標を示す。

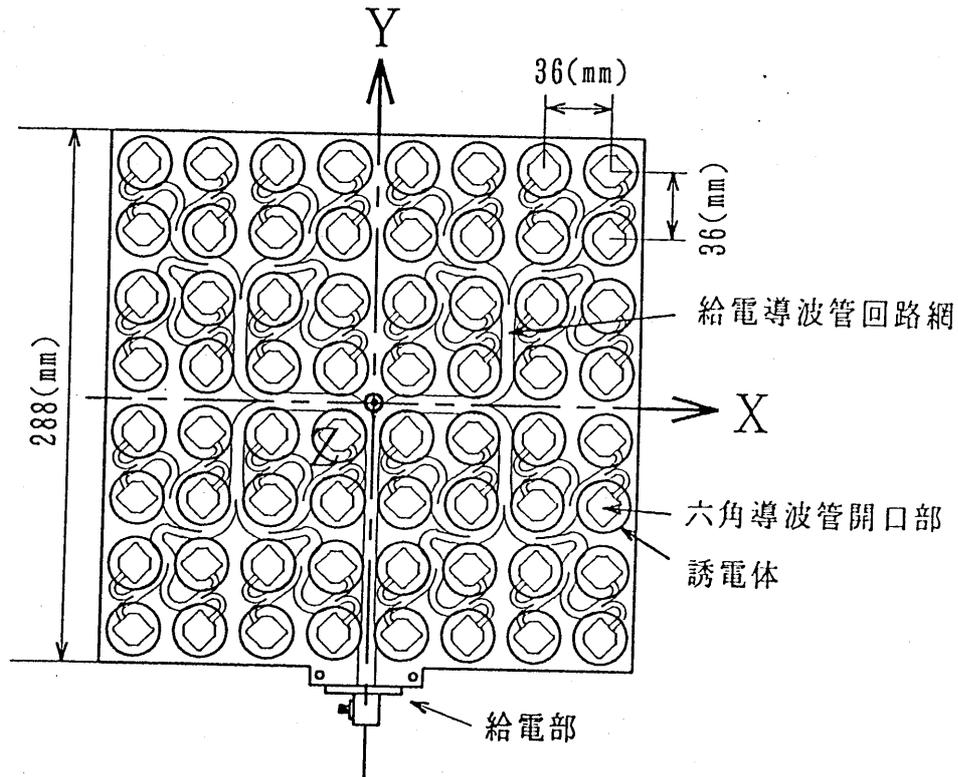


図18 64素子の平面アンテナの上面図とその座標

図19は利得の周波数特性、図20は軸比特性を示す。最大利得は31.9(dBi)、開口効率は約94.7(%) (開口面積は素子間隔の自乗×64として計算)、利得が1dB低下の帯域幅は約800(MHz)となった。また、1dB以下の軸比の帯域幅約850(MHz)となった。

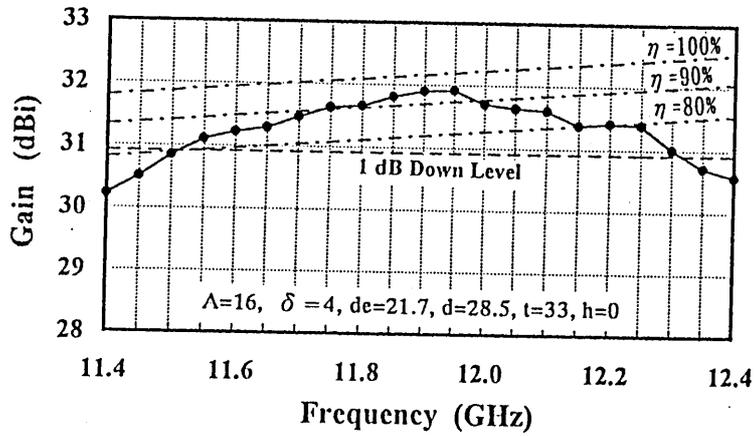


図 19 64 素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの利得

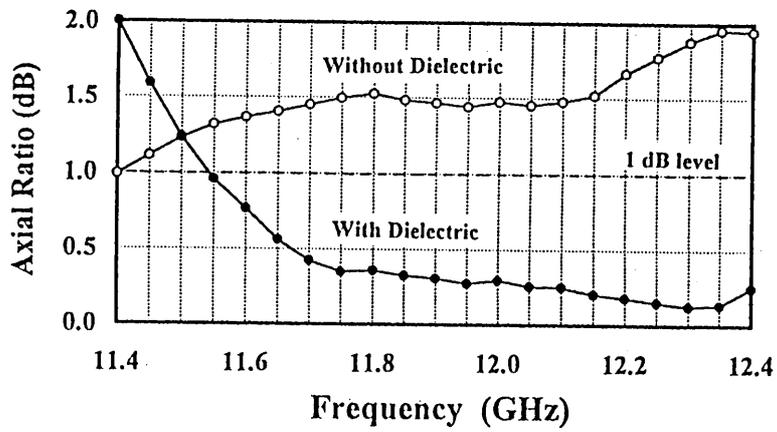


図 20 64 素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの軸比

図21は64素子アンテナの誘電体を装荷した場合と、装荷していない場合のリターン・ロスであり、-15dB以上の帯域幅は約650(MHz)である。

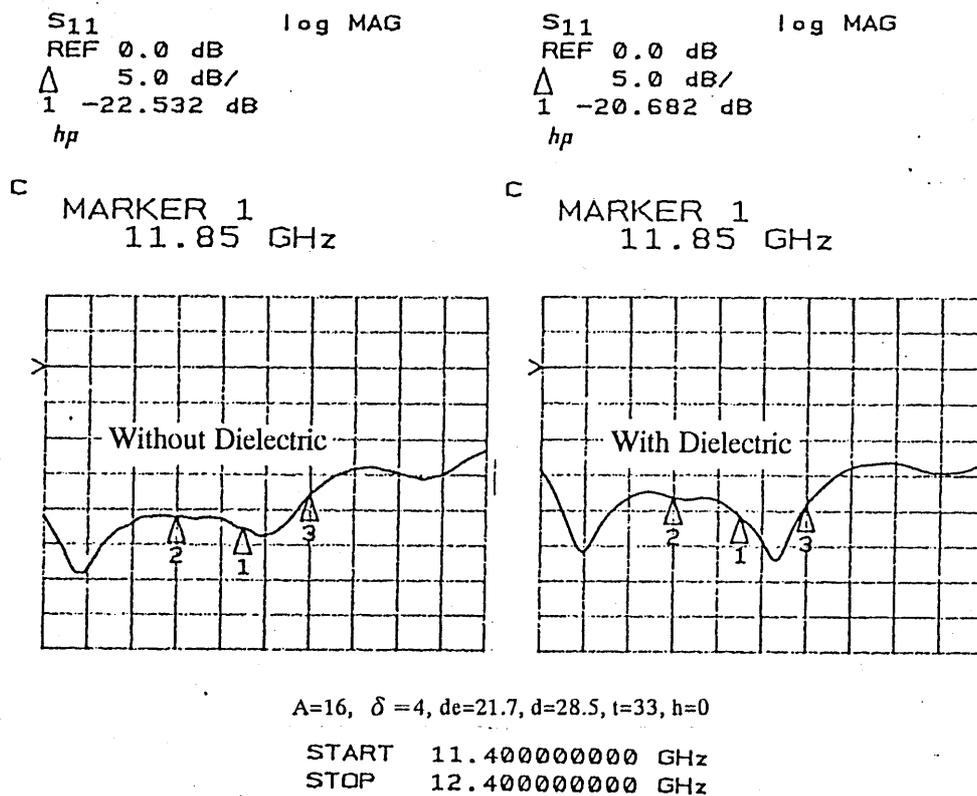
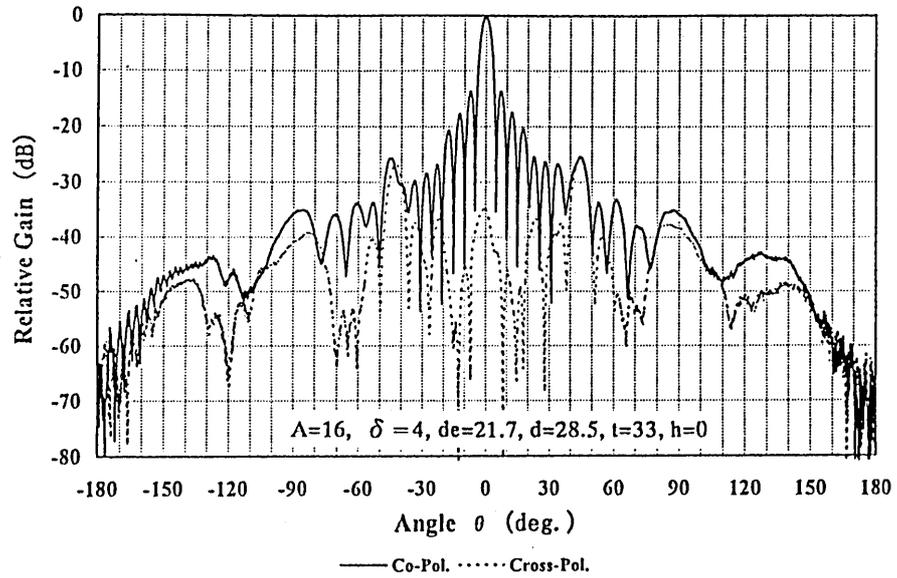
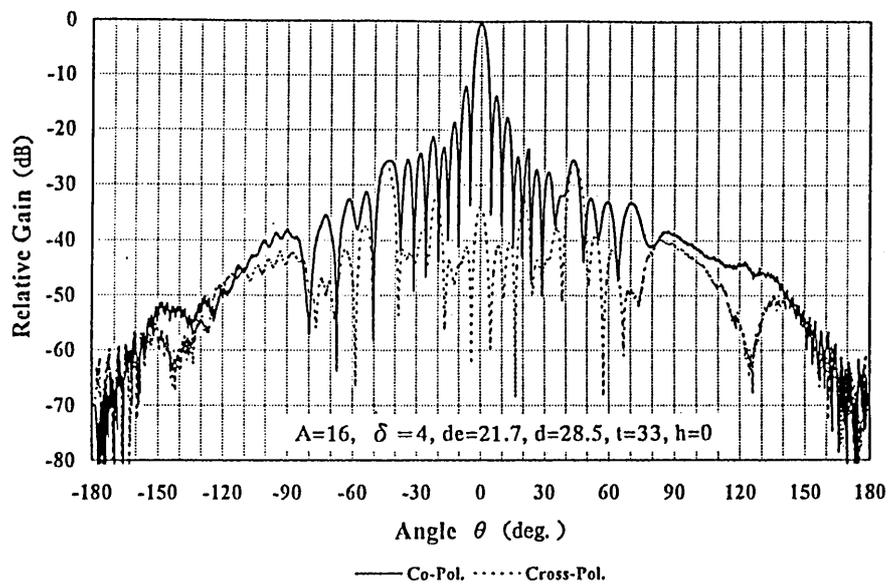


図 2 1 6 4 素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの誘電体装荷、非装荷に対する反射特性

図22(a)はX-Z、(b)はY-Z方向の指向性図で誘電体を装荷した場合の指向性と交差偏波の指向性を比較してある。主ローブ方向の交差偏波は-34(dB)以下で非常に良いことがわかる。しかし、若干グレーティングローブの出る方向の交差偏波が大きくなることが分かる。



(a) X-Z方向 ($\phi=0$ 度) の指向特性



(b) Y-Z方向 ($\phi=90$ 度) の指向特性

図2.2 6.4素子の誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの指向性図

6. 21GHz帯の次世代衛星放送への対応

図23のグラフは以上の試作アンテナの素子数に対する利得の変化を示すものである。1素子から4素子へは5(dB)しか増加していない理由は並べたための相互作用による利得の低下と考えられる。しかし、4素子から16素子、16素子から64素子へと順調にほぼ5.8(dB)ずつ増加している。このまま256素子アンテナを構成すれば図のように37.7(dBi)となり、開口効率90(%)にはなるが目標の38.8(dBi)に少し足りない。この目標値を得るためには素子間隔を1.66波長(24mm)にする必要がある。開口効率が90(%)に維持できれば39(dBi)となる。21(GHz)帯用にするため寸法を波長に比例して小さくすると若干の線路損失(表皮効果による導体損)が増える。損失が増加する割合を知るために次の様な試算をした。12(GHz)帯の上記の64素子アンテナでは給電部から一つの素子までの導波管距離が約400(mm)となっている。導波管(WRI-120)の電界方向の幅をすべて3(mm)と仮定し、導体の固有抵抗を上記のアンテナに使用したアルミ合金の値($5.86 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$)として損失を計算し、これを21(GHz)帯の導波管の寸法に相似的に縮めて、その周波数で同じように計算して比較すると、約0.15(dB)だけ21(GHz)帯の方が損失が高くなる事が分かる。21(GHz)用アンテナに銅を使えば損失はむしろ0.03(dB)ではあるが少なくなる。したがって、素材を選べば目標は達成できるものと思われる。

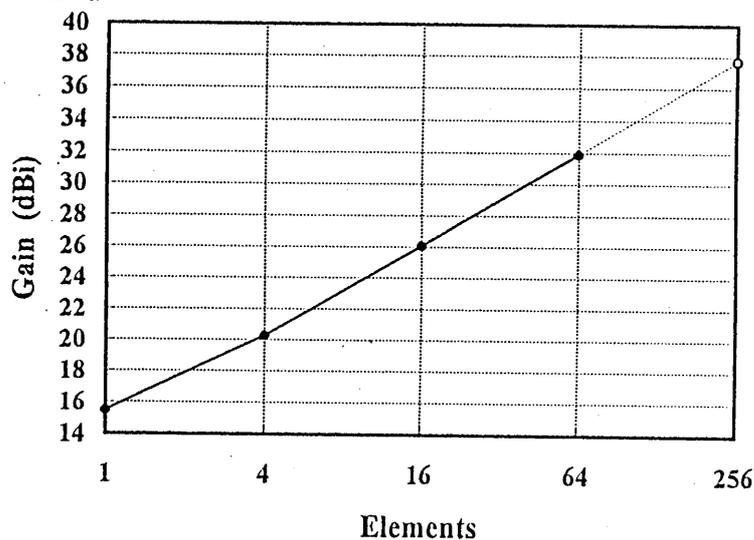


図 2 3 誘電体装荷六角導波管方式円偏波アンテナの素子数による利得の値

まとめ

誘電体を装荷した長さが約 $1/2$ 管内波長の放射用となる六角導波管の側面から、給電線路としての矩形導波管回路網で64個を並列給電する方式により、広い周波数帯域幅にわたって軸比、利得、効率の各特性の良いアンテナが構成できることを示した。この方式はダウンサイズにより予定されている21GHz帯の衛星放送受信用アンテナとして利用でき、さらには60(GHz)帯、あるいは90(GHz)帯にも利用できるものと思われる。

謝辞

日頃ご指導を頂く大阪大学名誉教授の牧本利夫先生、東京工芸大学教授の小西良弘先生、大阪大学の西村貞彦先生、また、測定にご協力頂く関西電子工業振興センター山田泰広氏やご討論頂くマイクロ波研究会の皆様へ深謝します。

参考文献

- [1] T.Tsugawa, Y.Sugio, and T.Makimoto
"Experimental study on high efficiency dielectric loaded antennas"
Trans,IEICE.,Vol.E73,No.1 pp.128-130
- [2]Y.Sugio, O.Imanishi, and T.Tsugawa,
"Analysis of Dielectric-Loaded Planar Antenna Fed by an Aperture"
Progress In Electromagnetics Research Symposium, pp.597, July 25,1995
- [3]津川哲雄, 杉尾嘉彦, 牧本利夫
"誘電体装荷平面アンテナ"
電子情報通信学会論文誌, B-II,J75-B-II,No.3 pp.208-210
- [4] T. Tsugawa, M. Kawahara Y. Sugio, and Y. Yamada
"Experimental study of dielectric loaded planer antenna fed by waveguide network"
IEEE, AP-S, Symp., Vol.1, pp.480-483, June,1994
- [5]外山 昇
"金属片をそ入した正方形導波管円偏波発生器の設計と円偏波小型1次放射器への応用"
電子情報通信学会論文誌, Vol.J64-B,No.12
- [6] T.Tsugawa, Y.Sugio, and Y.Yamada
"Circularly Polarized Dielectric-Loaded Planar Antenna Excited by Waveguide Aperture"
Progress In Electromagnetics Research Symposium, pp.599, July 25,1995

[7] 津川哲雄、杉尾嘉彦
“導波管並列給電誘電体装荷円偏波平面アンテナ”
輻射科学研究会資料, RS95-12, 1995年10月

Appendix

$$\lambda_{c\alpha} = 2A \left[1 + \frac{\frac{2\delta}{\pi A} \left(1 + \frac{\sin \frac{\pi\delta}{A}}{\frac{\pi\delta}{A}} \right) \sin \frac{\pi\delta}{A}}{1 - \frac{2\delta}{\pi A} \sin \frac{\pi\delta}{A} - \left(\frac{\delta}{A} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\sin \frac{\pi\delta}{A}}{\frac{\pi\delta}{A}} \right)^2 \right\}} \right]^{-1/2} \quad (1)$$

$$\lambda_{c\beta} = 2A \left[1 - \frac{\frac{2\delta}{\pi A} \left(1 - \frac{\sin \frac{\pi\delta}{A}}{\frac{\pi\delta}{A}} \right) \sin \frac{\pi\delta}{A}}{1 + \frac{2\delta}{\pi A} \sin \frac{\pi\delta}{A} - \left(\frac{\delta}{A} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\sin \frac{\pi\delta}{A}}{\frac{\pi\delta}{A}} \right)^2 \right\}} \right]^{-1/2} \quad (2)$$

$$\lambda_{g\alpha} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c\alpha}} \right)^2}}, \quad \lambda_{g\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c\beta}} \right)^2}} \quad (3)$$

輻射科学研究会資料

RS96-8

キラルスラブ導波路の
ベクトル形差分ビーム伝搬法による解析

藪 哲郎 沢 新之輔

大阪府立大学工学部

1996年7月26日

摂南大学

1 はじめに

キラル媒質とは、直線偏波の電磁波が入射したときに、その偏波面を回転させる媒質を言う。マイクロ波領域のキラル媒質は、誘電体に螺旋状導体をランダムな密度でランダムな方向に埋め込むことにより実現される。光領域におけるキラル媒質としては、水晶、テレピン油などがあり、これらの媒質は螺旋状の分子構造を持っている。光領域ではキラル媒質のことを、光学活性な媒質または旋光性を持つ媒質と呼ぶ。

キラル媒質における平面波は、位相速度が異なる右円偏波と左円偏波であり、ハイブリッドモードである。この性質を用いて、方向性結合器、モード変換器、マイクロストリップアンテナ、スイッチなど様々な素子への応用が期待されている。

キラル媒質に対する研究は 1990 年頃から急に活発になった。これまでにキラル媒質に対して行われた研究としては、キラルスラブの散乱問題を扱った研究 [1]、キラル媒質を用いたアンテナの研究 [2]、キラル導波路の特性に関する研究 [3]-[9]、キラルグレーティング導波路に対する研究 [10]、などがある。

一方、光回路における光波の伝搬問題の解析法として、ビーム伝搬法がある [12][13]。ビーム伝搬法は、反射を考慮しなくて良い光回路に対しては、極めて少ない計算量で精度良く光回路を解析できるので、最もポピュラーな方法として広く用いられている。等方性媒質に対する光の伝搬問題に対しては、既にビーム伝搬法を用いた光 CAD が製品化されている。

キラル導波路に関するこれまでの研究は、いずれも伝搬方向に一様な構造を扱っており、伝搬方向に変化を持つ構造に関する報告は、筆者らの過去の発表 [14] を除いてはないようである。

そこで、本報告では、キラルスラブ導波路の伝搬問題をベクトル形差分ビーム伝搬法を用いて解析する方法を提示する。そして、その方法を用いた計算結果が妥当な結果をもたらすことを示す。

また、キラルスラブ導波路に関する研究を行うためには、先だって、キラルスラブ導波路の分散特性や固有モードのフィールド分布を求める必要がある。それらについては既に多数の報告がある [5][8][9] が、筆者らは多層分割を用いた独自の定式化を行ったので、これについても 3 章で説明する。

2 キラルスラブ導波路の基本式

2.1 キラル媒質における電磁界の関係式

キラル媒質内における電磁界は、時間に関して $e^{j\omega t}$ の仮定を置くとき、次のように表される [1]。

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E - j\xi B \quad (1)$$

$$H = -j\xi E + \frac{1}{\mu_r \mu_0} B \quad (2)$$

ここで、 ϵ_r は比誘電率、 ϵ_0 は真空中の誘電率、 μ_r は比透磁率、 μ_0 は真空中の透磁率、 ξ はキラルアドミタンスである。この関係を、マクスウェルの方程式

$$\text{rot } E = -j\omega B \quad (3)$$

$$\text{rot } H = j\omega D \quad (4)$$

に代入するのであるが、その際、次に示す関係

$$\begin{aligned} \text{新しい } E &\leftarrow \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \\ \text{新しい } H &\leftarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H \\ \text{新しい } x, y, z &\leftarrow k_0 x, k_0 y, k_0 z \\ \tau &\leftarrow -\xi \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \\ \text{ただし } k_0 &= \lambda / (2\pi) \end{aligned} \quad (5)$$

を用いて変数を置き直す。この置換により、方程式から ϵ_0, μ_0, k_0 が消えるので取り扱いが簡単になる。また、 β は等価屈折率 n_e と等しくなる。 τ は屈折率と同じ次元を持つ量である。

まず、次の仮定をおく。

仮定 1

1-1. 媒質は磁性を持たない。従って、比透磁率 $\mu_r = 1$ 。

以上の手続きからキラル媒質を解析するときの出発点となる以下の基本方程式が得られる。

$$\text{rot } E = -jH - \tau E \quad (6)$$

$$\text{rot } H = j\gamma E - \tau H \quad (7)$$

$$\text{ただし } \gamma = n^2 + \tau^2 \quad (n \text{ は屈折率})$$

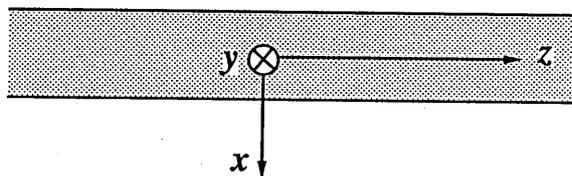


図 1: キラルスラブ導波路

2.2 キラル媒質を伝わる平面波

まず、キラル媒質を伝わる平面波について述べる [1][3]。式 (6)(7) において、 $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ を仮定すると、キラル媒質を z 方向に伝わる平面波が得られる。キラル媒質を伝わる平面波の解は二つ存在する。一つは左回りの円偏波であり、その等価屈折率は $\sqrt{n^2 + \tau^2} + \tau$ である。通常 τ^2 は小さいので $n + \tau$ と近似できる。もう一つは右回りの円偏波であり、その等価屈折率は $\sqrt{n^2 + \tau^2} - \tau$ (τ が小さいとき $n - \tau$ と近似される) である。このことから、キラル媒質は複屈折と似た性質を示すことがわかる。

また、 τ は正負どちらの値も取りうる。 τ の符号が逆になることは、マイクロ波領域においては誘電体に埋め込まれた螺旋導体の回転方向が逆になることを示し、光領域においてはキラル媒質の分子の螺旋構造が逆回りになることを表している。

2.3 キラルスラブ導波路における電磁界の関係式

次に、キラルスラブ導波路を解析するための式を導く。図 1 に示すように y 方向に一様なキラルスラブ導波路を、光が z 方向に伝搬する場合を考える。次の二つの仮定を設ける。

仮定 2

- 2-1. y 方向に一様な構造を仮定するので、各フィールド成分について、 $\frac{\partial}{\partial y} = 0$
- 2-2. z 方向には屈折率の急激な変化はないことを仮定するので、 $\frac{\partial n}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$

式 (6)(7) を成分表示し、上の仮定を適用して変形すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} E_y \\ H_z \\ E_z \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j & -\tau & 0 \\ -j \left(\gamma + \frac{\tau}{n^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & 0 & 0 & \tau \left(1 - \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ \tau \left(1 - \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & 0 & 0 & j \left(1 + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ 0 & -\tau & j\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ H_z \\ E_z \\ H_y \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ H_x \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2} \begin{bmatrix} -\tau & j \\ -j\gamma & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} H_y \end{bmatrix} \quad (9)$$

式(8)の1行目と4行目より

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2} \begin{bmatrix} \tau & -j \\ j\gamma & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} E_y \\ \frac{\partial}{\partial x} H_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

を得る。式(9)(10)から E_x 、 E_z 、 H_x 、 H_z は E_y と H_y によって表せることがわかる。次に、 E_y と H_y が満足すべき方程式を導出する。式(8)の1行目と4行目を x で微分すると、次式を得る。

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (n^2 + 2\tau^2) \right\} E_y + 2j\tau H_y + \frac{\partial \tau}{\partial x} E_z = 0 \quad (11)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (n^2 + 2\tau^2) \right\} H_y - 2j\tau \gamma E_y - j \frac{\partial \gamma}{\partial x} E_z + \frac{\partial \tau}{\partial x} H_z = 0 \quad (12)$$

さらに、式(8)の2行目と3行目を利用して E_z と H_z を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (n^2 + 2\tau^2) \right\} E_y + 2j\tau H_y \\ & + \frac{\tau}{n^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{-j}{n^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (n^2 + 2\tau^2) \right\} H_y - 2j\tau \gamma E_y \\ & + \frac{\partial E_y}{\partial x} \left\{ j \left(\frac{\gamma}{n^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\tau}{n^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left\{ \frac{\tau}{n^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{1}{n^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

すなわち、キラルスラブ導波路を伝わる光波は、 E_y と H_y を未知関数とする連立偏微分方程式(13)(14)で表され、残りの4成分は、式(9)(10)に E_y と H_y を代入することによって求められる。

これらの式(13)(14)(9)(10)を用いて、第3章でキラルスラブ導波路の分散特性と固有モードを求め、第4章でキラルスラブ導波路のベクトル形差分ビーム伝搬法の定式化を行う。

3 キラルスラブ導波路の分散特性と固有モード

3.1 多層分割を用いた定式化

ここではキラルスラブ導波路の分散特性と固有モードを、多層分割法を用いて求める。定式化に先立って次の仮定をおく。

仮定 3

- 3-1. 各層においては屈折率は一定であるとみなし、 $\frac{\partial n}{\partial x} = 0$ 、 $\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$ とする。
- 3-2. フィールド各成分の z 依存性は $e^{j\beta z}$ で与えられるものとする。

境界条件が適用される成分は E_y 、 H_y 、 E_z 、 H_z の 4 成分である。そこで、多層分割された一つの層において、上の 4 成分を表す式を導く。

前章の式 (13)(14) に仮定 3-1 を適用すると次式が得られる。

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (n^2 + 2\tau^2) \right\} E_y + 2j\tau H_y = 0 \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (n^2 + 2\tau^2) \right\} H_y - 2j\tau E_y = 0 \quad (16)$$

式 (15)(16) より次の複 2 次式が得られる。

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + 2(\tau^2 + \gamma) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + (\tau^2 - \gamma)^2 \right\} \begin{pmatrix} E_y \\ H_y \end{pmatrix} = 0 \quad (17)$$

仮定 3-2 より、 $\frac{\partial}{\partial z}$ を $-j\beta$ で置き直して、さらに変形すると

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\sqrt{n^2 + \tau^2} + \tau)^2 - \beta^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\sqrt{n^2 + \tau^2} - \tau)^2 - \beta^2 \right\} \begin{pmatrix} E_y \\ H_y \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

を得る。従って、 E_y の解は以下のように表される。

$$E_y = A \exp(k_+ x) + B \exp(-k_+ x) + C \exp(k_- x) + D \exp(-k_- x) \quad (19)$$

$$k_+ = \sqrt{\beta^2 - (\sqrt{n^2 + \tau^2} + \tau)^2}$$

$$k_- = \sqrt{\beta^2 - (\sqrt{n^2 + \tau^2} - \tau)^2}$$

A 、 B 、 C 、 D は任意定数である。式 (19) を式 (15) に代入すると H_y は以下のようになる。

$$H_y = -j\alpha A \exp(k_+ x) - j\alpha B \exp(-k_+ x) + j\alpha C \exp(k_- x) + j\alpha D \exp(-k_- x) \quad (20)$$

$$\alpha = \sqrt{\gamma}$$

E_z 、 H_z は式 (10) より求められるので、結局、各層における E_y 、 H_y 、 E_z 、 H_z は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \\ H_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(k_+x) & \exp(-k_+x) & \exp(k_-x) & \exp(-k_-x) \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ -j\alpha \exp(k_+x) & -j\alpha \exp(-k_+x) & j\alpha \exp(k_-x) & j\alpha \exp(-k_-x) \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \quad (21)$$

ただし、

$$\begin{aligned} g_{21} &= f_{21}k_+ \cdot \exp(k_+x) + f_{22}(-j\alpha)k_+ \cdot \exp(k_+x) \\ g_{22} &= f_{21}(-k_+) \cdot \exp(-k_+x) + f_{22}(-j\alpha)(-k_+) \cdot \exp(-k_+x) \\ g_{23} &= f_{21}k_- \cdot \exp(k_-x) + f_{22}j\alpha k_- \cdot \exp(k_-x) \\ g_{24} &= f_{21}(-k_-) \cdot \exp(-k_-x) + f_{22}j\alpha(-k_-) \cdot \exp(-k_-x) \\ g_{41} &= f_{11}k_+ \cdot \exp(k_+x) + f_{12}(-j\alpha)k_+ \cdot \exp(k_+x) \\ g_{42} &= f_{11}(-k_+) \cdot \exp(-k_+x) + f_{12}(-j\alpha)(-k_+) \cdot \exp(-k_+x) \\ g_{43} &= f_{11}k_- \cdot \exp(k_-x) + f_{12}j\alpha k_- \cdot \exp(k_-x) \\ g_{44} &= f_{11}(-k_-) \cdot \exp(-k_-x) + f_{12}j\alpha(-k_-) \cdot \exp(-k_-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= \tau/n^2 \\ f_{12} &= -j/n^2 \\ f_{21} &= j\gamma/n^2 \\ f_{22} &= \tau/n^2 \end{aligned}$$

なお、変数 E_y 、 H_y 、 E_z 、 H_z の並び方が式 (8) とは異なっているが、これは逆行列を求めるときに行列が悪条件にならないための配慮である。

次に、多層分割されたキラルスラブ導波路の固有モードを求める方法について述べる。例として図 2 に示すような 3 層キラルスラブ導波路の場合を考える。式 (21) を利用して第 i 層におけるフィールド分布は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \\ H_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i(x) \\ (4 \times 4 \text{ 行列}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここで、行列 $A_i(x)$ は式 (21) の行列を表す。 $x = x_1$ において次の関係が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} A_0(x_1) \\ (4 \times 4 \text{ 行列}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x_1) \\ (4 \times 4 \text{ 行列}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

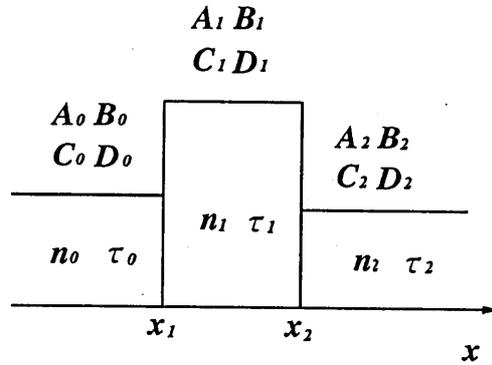


図 2: 3層キラルスラブ導波路

$x = x_2$ において次の関係が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} A_1(x_2) \\ (4 \times 4 \text{ 行列}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(x_2) \\ (4 \times 4 \text{ 行列}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

式 (23)(24) をつなげると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0(x_1)^{-1} \\ (4 \times 4 \text{ 行列}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(x_1) \\ (4 \times 4 \text{ 行列}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1(x_2)^{-1} \\ (4 \times 4 \text{ 行列}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2(x_2) \\ (4 \times 4 \text{ 行列}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (25) \end{aligned}$$

導波モードにおいては無限遠でフィールドは 0 となるから、次の条件を満たす必要がある。

$$B_0 = D_0 = 0 \quad \text{かつ} \quad A_2 = C_2 = 0 \quad (26)$$

これを代入すると、次の関係を得る。

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \\ C_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12}B_2 + d_{14}D_2 \\ d_{22}B_2 + d_{24}D_2 \\ d_{32}B_2 + d_{34}D_2 \\ d_{42}B_2 + d_{44}D_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

これを満たすには、

$$\begin{bmatrix} d_{22} & d_{24} \\ d_{42} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

が必要である。この式が $B_2 = D_2 = 0$ 以外の解を持つには、

$$\begin{vmatrix} d_{22} & d_{24} \\ d_{42} & d_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

が必要である。結局、式(29)を満たす β を求める固有値問題に帰着する。 β が求まったとき、 B_2 か D_2 のどちらかを 1 とおくと、残りの全ての係数が決定される。

層数が増えても、同様の操作によりフィールドを求めることができる。

3.2 数値計算結果

以上の定式化を用いてキラルスラブ導波路の分散曲線とフィールド分布を求める。文献[9]と同じパラメータに設定してここで述べた方法で分散曲線を求めたところ、文献[9]と同様の結果を得た。

図3に示すようなキラルスラブ導波路の分散曲線を求めたのが図4である。実線で示すモードは等価屈折率 $n + \tau$ の平面波に対応するモードであり、このモードを Upper mode と呼ぶ。点線で示すモードは等価屈折率 $n - \tau$ の平面波に対応するモードであり、これらのモードを Lower mode と呼ぶ。そして、フィールド分布にピークが一つしかないモードを 1 次モード、ピークが二つあるモードを 2 次モードと呼ぶ。なお、キラルスラブ導波路におけるそれぞれのモードは直交している [11]。

図4中で 1 と印をつけた場所でのフィールド分布と光強度分布を図5に示す。光強度分布は $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)/2$ により求めた。七つの図は横軸が x 軸、縦軸が電界または磁界または光強度を表す。また、実線が実数部、一点鎖線が虚数部を表している。縦の点線は導波路の境界を表している。上側の三つの図が TM モードに対応する成分であり、下側の三つの図が TE モードに対応する成分である。

この図より、 E_x と E_y は位相が 90 度ずれていることがわかる。つまり、キラルスラブ導波路の固有モードは円偏波である。また、固有モードは六つの成分を持つ。つまり、キラルスラブ導波路においては、TE モードと TM モードに分離することができず、ハイブリッドモードとなる。

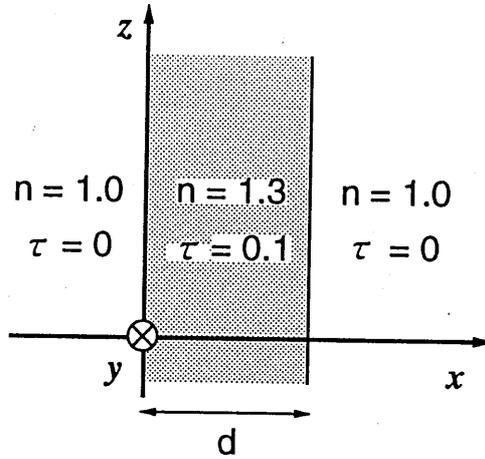


図 3: 導波路

ここで、興味深い現象が図4の楕円で囲んだ領域において観察される。例えば図中に a と示したところでは、3 次の Upper mode と 1 次の Lower mode の分散曲線がつながっている。一般に、 n 次の Upper mode と $n - 2$ 次の Lower mode の分散曲線はつながっている。また、 $n - 2$ 次の Upper mode と n 次の Lower mode もつながっている。

図中に 2、3、4 と印をつけた場所でのフィールド分布と光強度分布を図 6(a)~(c) に示す。これより、導波路の幅を徐々に広げてゆくと 1 次の Lower mode が 3 次の Upper mode に徐々に移り、円偏波の回転方向が逆になっていることが分かる。

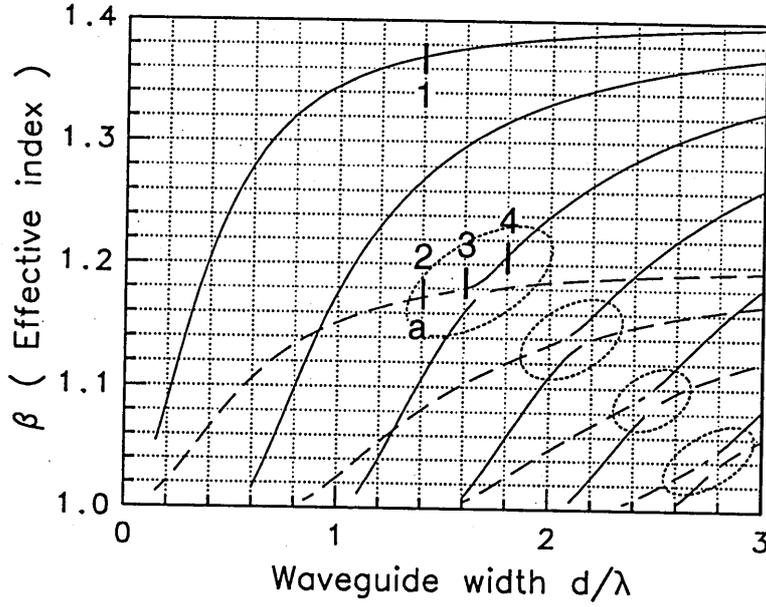


図 4: 分散特性

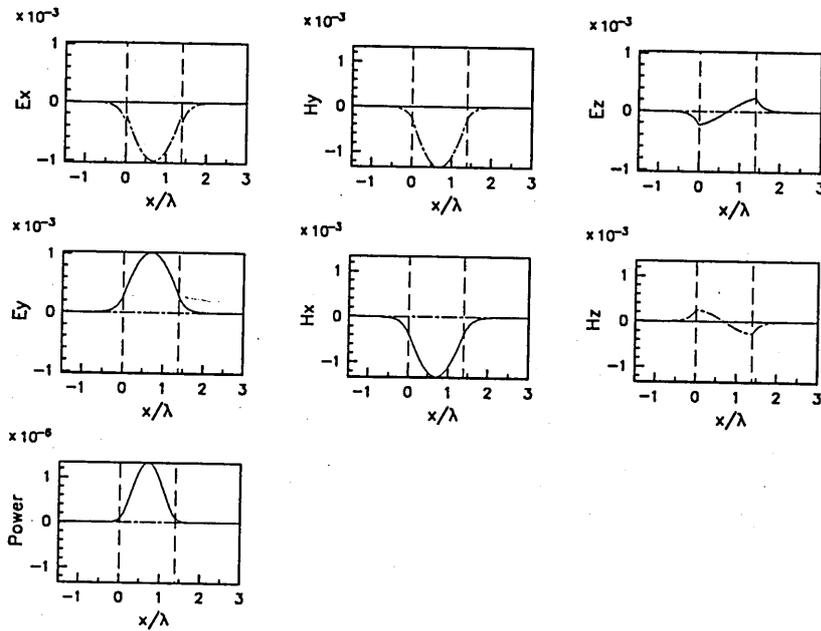
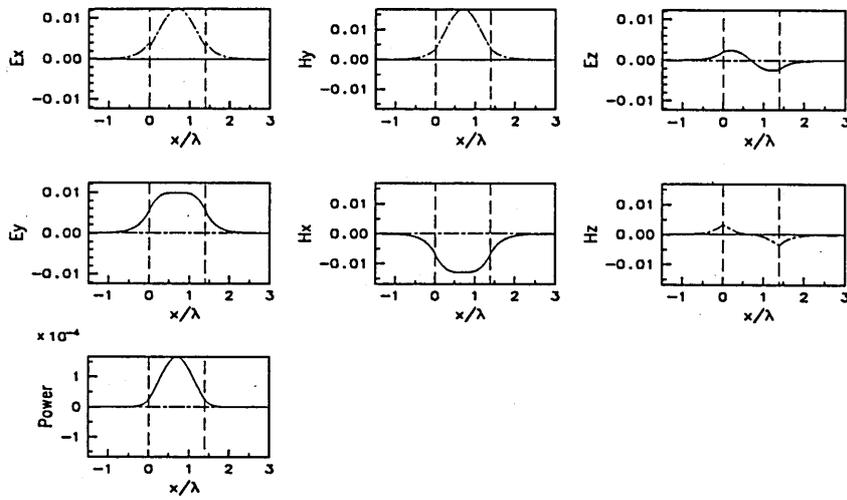
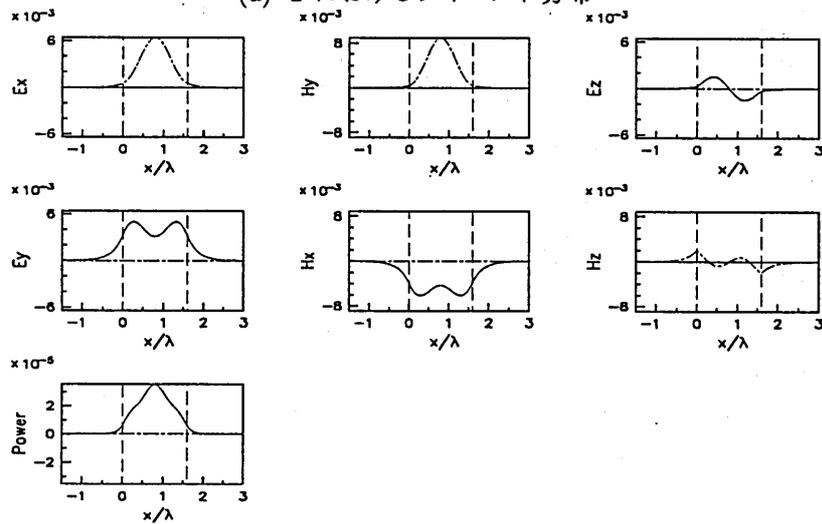


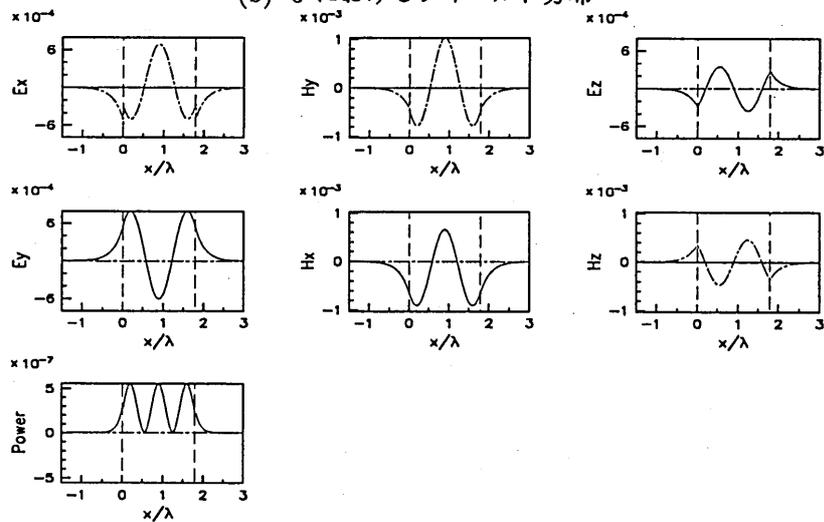
図 5: 1 におけるフィールド



(a) 2 におけるフィールド分布



(b) 3 におけるフィールド分布



(c) 4 におけるフィールド分布

図 6: 結合領域におけるフィールド分布

4 キラルスラブ導波路に対するベクトル形差分ビーム伝搬法の定式化

4.1 スカラのフレネル形ビーム伝搬法

まず、スカラのフレネル形ビーム伝搬法の基本的な考えを述べる [12][13]。スカラのヘルムホルツ方程式は次式で表される。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \right) \psi = 0 \quad (30)$$

z の正方向へ伝搬する光波を解析するために、新しい変数 ϕ を導入して ψ を

$$\psi(x, z) = \phi(x, z) \exp(-jk_0 n_0 z) \quad (31)$$

置き直す。ここで n_0 はビーム伝搬法の参照屈折率である。上式を式 (30) に代入すると次式を得る。

$$2jk_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \phi - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 n^2 \right) \phi \quad (32)$$

ここで次の事項が成立することを仮定する。

仮定 4

- 4-1. z の負方向へ進行する波は存在しない。
- 4-2. z の正方向へ進行するそれぞれのモードの等価屈折率は n_0 に極めて近い値を持つ。
- 4-3. 光波の進行方向と z 軸との角度は 5 度以内である。

上の仮定が成立するとき $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi$ は極めて小さくなり、無視することができる。結局、次のスカラのフレネル形ビーム伝搬法の基本式が得られる。

$$2jk_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 n^2 \right) \phi \quad (33)$$

このように、新しい変数 ϕ を導入して $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi$ を無視することにより、 z に関する微分は 1 階微分のみになる。そして、 z に関する 1 階微分は、 $z = z_0$ の点から z の正の方向へ向けて順番に解いてゆくことができるので、極めて少ない計算時間で光波の伝搬問題を解くことができる。

4.2 キラルスラブ導波路のベクトル形ビーム伝搬法の基本式

第 2 章の式 (13)(14) を解くために新しい変数 E 、 H を導入する。

$$E_y(x, z) = E(x, z) \exp(-jn_0 z) \quad (34)$$

$$H_y(x, z) = H(x, z) \exp(-jn_0 z) \quad (35)$$

上式を式(13)(14)に代入する。仮定4が成立する場合、 $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$ と $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$ の項は小さいので無視できる。その結果、次式を得る。

$$2j n_0 \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + (n^2 + 2\tau^2 - n_0^2)E + 2j\tau H + \frac{\tau}{n^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{-j}{n^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (36)$$

$$2j n_0 \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + (n^2 + 2\tau^2 - n_0^2)H - 2j\tau\gamma E + \frac{\partial E}{\partial x} \left\{ j \left(\frac{\gamma}{n^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\tau}{n^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial H}{\partial x} \left\{ \frac{\tau}{n^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{1}{n^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right\} \quad (37)$$

式(36)(37)の連立偏微分方程式がキラルスラブ導波路のベクトル形ビーム伝搬法の基本式である。キラルスラブ導波路では、電磁界はTEモードとTMモードに分離することができない。従って、ベクトル形のビーム伝搬法となる。

4.3 差分ビーム伝搬法による定式化

式(36)(37)の連立偏微分方程式を差分ビーム伝搬法を用いて定式化する。放物型の偏微分方程式を差分を用いて解く方法は数多く存在する[15]。ここでは連立の偏微分方程式を扱うので、格子点の配置を含めて多くのバリエーションが存在する。

筆者らはいくつかの定式化を試してみた。その結果、クランク・ニコルソン法が最も計算量が少なく済むことがわかった。従って、本報告ではクランク・ニコルソン法を使った定式化について述べる。

E, H を離散化し、それぞれの格子点を図7のように表す。つまり

- x 軸についての格子点番号を右下の添字で表す。
- z 軸についての格子点番号を右上の添字で表す。

これに基づいて、式(36)を離散化すると次式を得る。

$$a_i E_{i-1}^{j+1} + b_i E_i^{j+1} + c_i E_{i+1}^{j+1} + d_i H_{i-1}^{j+1} + e_i H_i^{j+1} + f_i H_{i+1}^{j+1} = -a'_i E_{i-1}^j - b'_i E_i^j - c'_i E_{i+1}^j - d'_i H_{i-1}^j - e'_i H_i^j - f'_i H_{i+1}^j \quad (38)$$

$$a_i : \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{\tau_i^{j+1}}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\tau_{i+1}^{j+1} - \tau_{i-1}^{j+1} - 1}{2\Delta x} \frac{-1}{2\Delta x}$$

$$b_i : \frac{-2}{(\Delta x)^2} + \left\{ (n_i^{j+1})^2 + 2(\tau_i^{j+1})^2 - n_0^2 \right\} - 4j n_0 \frac{1}{\Delta z}$$

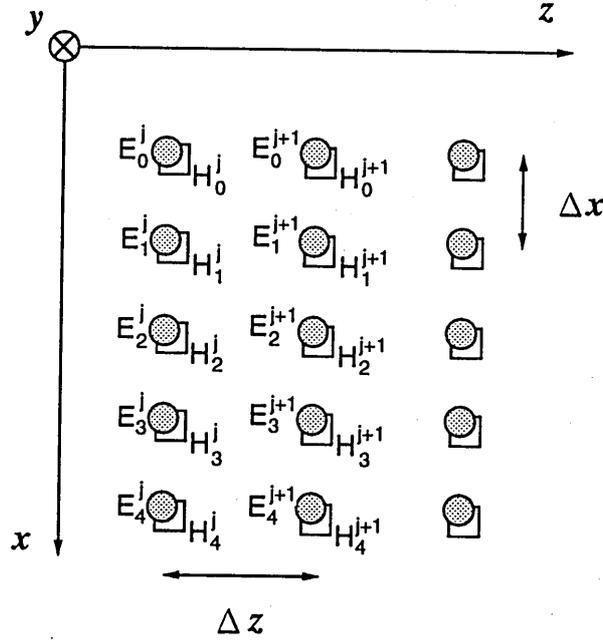


図 7: 格子点の呼び方

$$\begin{aligned}
 c_i &: \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{\tau_i^{j+1}}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\tau_{i+1}^{j+1} - \tau_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \frac{1}{2\Delta x} \\
 a'_i &: \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{\tau_i^j}{(n_i^j)^2} \frac{\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j}{2\Delta x} \frac{-1}{2\Delta x} \\
 b'_i &: \frac{-2}{(\Delta x)^2} + \left\{ (n_i^j)^2 + 2(\tau_i^j)^2 - n_0^2 \right\} + 4j n_0 \frac{1}{\Delta z} \\
 c'_i &: \frac{-1}{(\Delta x)^2} + \frac{\tau_i^j}{(n_i^j)^2} \frac{\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j}{2\Delta x} \frac{1}{2\Delta x} \\
 d_i &: \frac{-j}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\tau_{i+1}^{j+1} - \tau_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \frac{-1}{2\Delta x} \\
 e_i &: 2j \tau_i^{j+1} \\
 f_i &: \frac{-j}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\tau_{i+1}^{j+1} - \tau_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \frac{1}{2\Delta x} \\
 d'_i &: \frac{-j}{(n_i^j)^2} \frac{\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j}{2\Delta x} \frac{-1}{2\Delta x} \\
 e'_i &: 2j \tau_i^j
 \end{aligned}$$

$$f'_i : \frac{-j}{(n_i^j)^2} \frac{\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j}{2\Delta x} \frac{1}{2\Delta x}$$

同様に式 (37) を離散化すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & r_i H_{i-1}^{j+1} + s_i H_i^{j+1} + t_i H_{i+1}^{j+1} + u_i E_{i-1}^{j+1} + v_i E_i^{j+1} + w_i E_{i+1}^{j+1} \\ & = -r'_i H_{i-1}^j - s'_i H_i^j - t'_i H_{i+1}^j + -u'_i E_{i-1}^j - v'_i E_i^j - w'_i E_{i+1}^j \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} r_i & : \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \frac{\tau_{i+1}^{j+1}}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\tau_{i+1}^{j+1} - \tau_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} - \frac{1}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\gamma_{i+1}^{j+1} - \gamma_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \right\} \\ s_i & : \frac{-2}{(\Delta x)^2} + \left\{ (n_i^{j+1})^2 + 2(\tau_i^{j+1})^2 - n_0^2 \right\} - 4j n_0 \frac{1}{\Delta z} \\ t_i & : \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \frac{\tau_{i+1}^{j+1}}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\tau_{i+1}^{j+1} - \tau_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} - \frac{1}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\gamma_{i+1}^{j+1} - \gamma_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \right\} \\ r'_i & : \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \frac{\tau_i^j}{(n_i^j)^2} \frac{\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j}{2\Delta x} - \frac{1}{(n_i^j)^2} \frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_{i-1}^j}{2\Delta x} \right\} \\ s'_i & : \frac{-2}{(\Delta x)^2} + \left\{ (n_i^j)^2 + 2(\tau_i^j)^2 - n_0^2 \right\} - 4j n_0 \frac{1}{\Delta z} \\ t'_i & : \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ \frac{\tau_i^j}{(n_i^j)^2} \frac{\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j}{2\Delta x} - \frac{1}{(n_i^j)^2} \frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_{i-1}^j}{2\Delta x} \right\} \\ u_i & : -\frac{1}{2\Delta x} \left\{ j \left(\frac{\gamma_{i+1}^{j+1}}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\tau_{i+1}^{j+1} - \tau_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} - \frac{\tau_{i+1}^{j+1}}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\gamma_{i+1}^{j+1} - \gamma_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \right) \right\} \\ v_i & : -2j \tau_i^{j+1} \gamma_i^{j+1} \\ w_i & : \frac{1}{2\Delta x} \left\{ j \left(\frac{\gamma_{i+1}^{j+1}}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\tau_{i+1}^{j+1} - \tau_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} - \frac{\tau_{i+1}^{j+1}}{(n_i^{j+1})^2} \frac{\gamma_{i+1}^{j+1} - \gamma_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \right) \right\} \\ u'_i & : -\frac{1}{2\Delta x} \left\{ j \left(\frac{\gamma_i^j}{(n_i^j)^2} \frac{\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j}{2\Delta x} - \frac{\tau_i^j}{(n_i^j)^2} \frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) \right\} \\ v'_i & : -2j \tau_i^j \gamma_i^j \\ w'_i & : \frac{1}{2\Delta x} \left\{ j \left(\frac{\gamma_i^j}{(n_i^j)^2} \frac{\tau_{i+1}^j - \tau_{i-1}^j}{2\Delta x} - \frac{\tau_i^j}{(n_i^j)^2} \frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) \right\} \end{aligned}$$

解析領域の x 座標の両端では E 、 H それぞれに対して透過境界条件 [16] を適用する。すなわち、 x 軸の格子点番号が 0 からはじまり n でおわるとき、次式を仮定する。

$$E_0^{j+1} = e_l \cdot E_1^{j+1} \quad (40)$$

$$E_n^{j+1} = e_r \cdot E_{n-1}^{j+1} \quad (41)$$

$$H_0^{j+1} = h_l \cdot H_1^{j+1} \quad (42)$$

$$H_n^{j+1} = h_r \cdot H_{n-1}^{j+1} \quad (43)$$

5 数値計算結果

5.1 直線状キラル導波路

図8に示す直線状の導波路は第3章の図4と同じ屈折率分布を持つ。この導波路に対して1次のUpper Mode(図4中で1で示されるモード)を入射する。 $\Delta x = 0.01\lambda$ 、 $\Delta z = 1\lambda$ 、 $n_0 = 1.37$ として $z = 0$ から $z = 600\lambda$ まで計算したときの光強度分布が図9である。

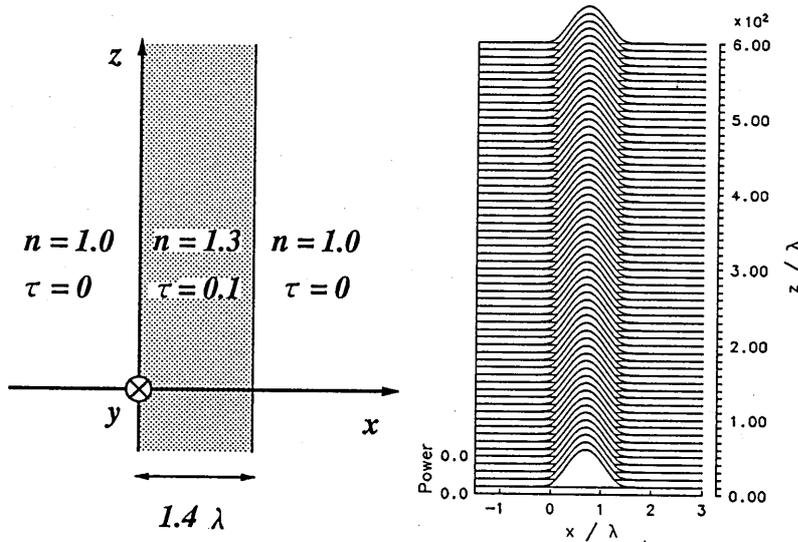


図8:直線状キラル導波路

図9:光強度分布

なお、図9の $z = 0$ において光強度分布が0になっているのは、数値計算上の都合によるものである。光強度分布を計算するには $E_x H_y^* - E_y H_x^*$ を求める必要があるが、 E_x と H_x は $\frac{\partial}{\partial z}$ を含むので少なくとも1ステップ計算してからでないといけない。従って、 $z = 0$ においては光強度の計算をすることは出来ない。

本手法の解析精度を評価するために、ビーム伝搬法で計算されたフィールドの電力 P と、それを固有モードで展開したときの各固有モードの電力 C を次のように定義する。

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)_z}{2} dx \quad (53)$$

$$C = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H})_z dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_n^* + \mathbf{E}_n^* \times \mathbf{H}_n)_z dx} \right|^2 \quad (54)$$

ただし、
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_n^*)_z}{2} dx = 1$$

ここで、 E と H は本ビーム伝搬法によって求まるフィールドを表し、 E_n と H_n は E と H を展開する場所での固有モードのフィールドを表している。

図 9 において、 $z = 1\lambda, 300\lambda, 600\lambda$ における全電力 P と、これを固有モードで展開したときの 1 次の Upper mode の電力 C の値を表 1 に示す。

z/λ	P	C
1	1.00000	0.99999
300	1.00000	0.99999
600	1.00000	0.99999

表 1: 直線状導波路

光の全電力は保存されている。また、1 次の Upper mode の電力もほぼ 1 になっている。

以上より、第 4 章で示した定式化によりキラル媒質中の光の伝搬を正しく解析できることがわかった。

5.2 テーパ形キラルスラブ導波路

図 10 の導波路に入射端での 1 次の Lower mode (図 4 中の 2 で示されるモード) を入射する。導波路は徐々に広がっているので、入射された光は図 4 の 2 → 3 → 4 に示されるようにモードが移り変わり、3 次の Upper mode になることが予想される。 $\Delta x = 0.01\lambda$ 、 $\Delta z = 1\lambda$ 、 $n_0 = 1.19$ として計算したときの光強度分布が図 11 である。予想通りの結果が得られている。

このときのフィールドの各成分を図 12 に示す。(a)~(f) はそれぞれ $|E_y|$ 、 $|H_y|$ 、 $|E_x|$ 、 $|H_x|$ 、 $|E_z|$ 、 $|H_z|$ を示している。 $|E_x|$ 、 $|H_x|$ が $z = 0$ において 0 になっているのは光強度分布の場合と同じ理由による。

また、 $z = 1\lambda, 150\lambda, 300\lambda, 450\lambda, 600\lambda$ の各場所における全電力 P と、固有モード (ここでは図 4 の 2~3~4 の分散曲線で表されるモード、以後このモードを主結合局部正規モードと呼ぶ) の電力 C を示したのが表 2 である。

電力は保存されておらず、やや増加する傾向が見られる。別の定式化を用いたり、 Δz や Δx を変えてみてもこの傾向は変わらなかった。テーパ形導波路においては、主結合局部正規モード以外のモード (以後、派生局部正規モードと呼ぶ) がわずかに発生する。例えば $z = 600\lambda$ におけるフィールドを固有モードで展開すると、主結合局部正規モード (3 次の Upper mode) が全電力の 99.5%、派生局部正規モードのうち 4 次の Upper mode が全電力の 0.4% を占めている。派生局部正規モードは仮定 4-2 を満たしていない

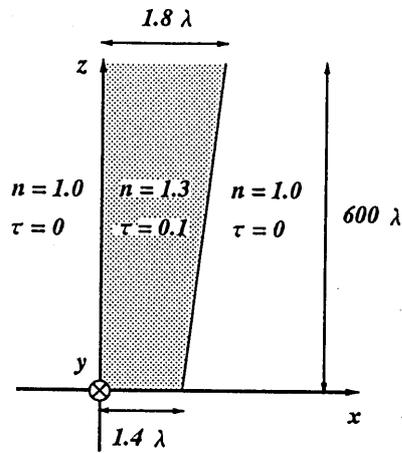


図 10:テーパ形キラル導波路

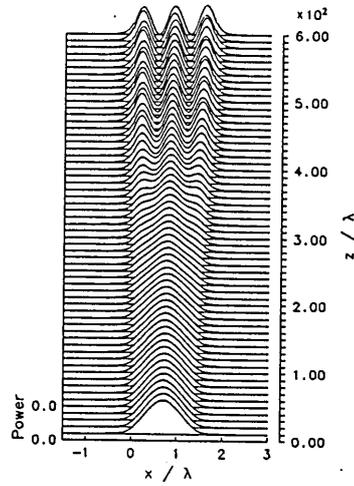


図 11:光強度分布

z/λ	P	C	C/P
1	1.00000	0.99998	0.99998
150	1.00294	1.00262	0.99969
300	1.00759	1.00817	0.99942
450	1.01857	1.01275	0.99429
600	1.02112	1.01619	0.99517

表 2: テーパ形キラル導波路

ので、派生局所正規モードについては計算がやや不正確になっていると思われる。このため、電力がやや増加していると思われる。

また、フィールドや光強度分布の形が $z > 450\lambda$ においてやや脈動しているが、これはわずかに発生する派生局所正規モードとの干渉によるものである。脈動の形状が左右非対称であるが、これは図 10 の導波路の構造上の非対称性とは関係なく、キラル媒質の螺旋構造に基づくものであると思われる。このことは、以下の事実から推測される。すなわち、筆者らが左右対称のテーパ形導波路についても数値計算を行ったところ、この場合も左右非対称の光強度分布が得られた。

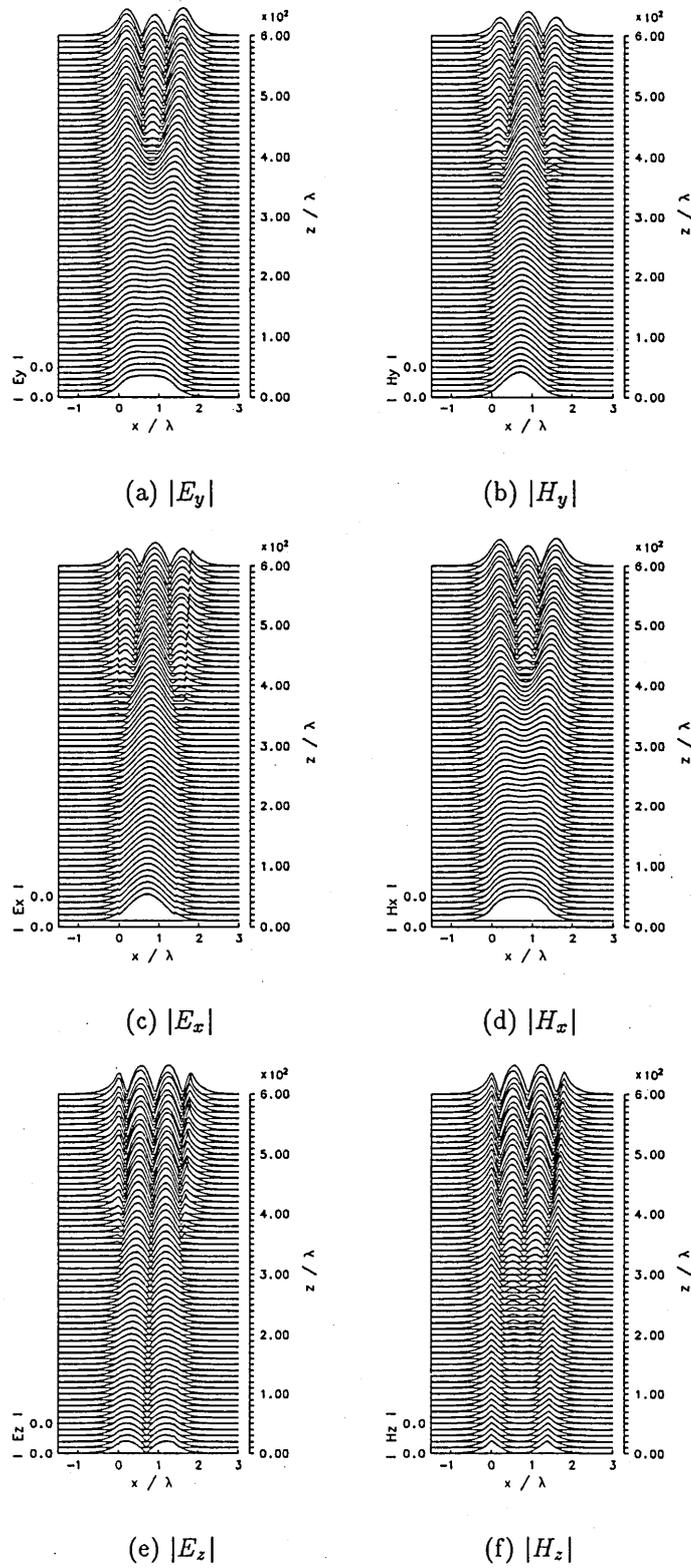


図 12: 各フィールド成分

6 むすび

本報告ではキラルスラブ導波路における光波の伝搬をベクトル形差分ビーム伝搬法を用いて定式化した。そして、この方法を用いてキラルスラブ導波路における伝搬問題を数値解析したところ、妥当な結果を得ることができ、ここで提案した手法はキラルスラブ導波路解析のための有効な手法の一つであることが確認された。

今回は、定式化において $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$ および $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0$ と仮定したが、これは、伝搬しているモード (通常は複数次) の等価屈折率とビーム伝搬法での参照屈折率 n_0 が近い場合にのみ許される。今回解析の対象としたキラルスラブ導波路には複数次の伝搬モードが存在し、各伝搬モードの等価屈折率にはかなりの違いがある。本研究では一つのモードだけが伝搬する場合を取り扱ったが、複数次のモードが伝搬する場合は、パテ近似などを用いて $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ の項を考慮する必要がある。今後、 $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ の項を無視しない場合の定式化について、研究を進めてゆく予定である。

謝辞

本研究をすすめるにあたり、種々、御討論、御検討頂いた元本学講師森静雄氏、本学助教授下代雅啓氏、本学助手北村敏明氏、研究室諸氏に謝意を表す。

参考文献

- [1] S. Bassiri, C. H. Papas and N. Engheta : "Electromagnetic wave propagation through a dielectric-chiral interface and through a chiral slab", J. Opt. Soc. Am. , vol. A5, no.9, pp.1450-1450, Sept. 1988.
- [2] Samir F. Mahmoud : "Characteristics of an chiral-coated slotted cylindrical antenna", IEEE Trans. on Antennas and Propag., vol.44, no.7, pp.814-821, July 1996.
- [3] P. Pelete , N. Engheta : "The theory of chirowaveguides", IEEE Trans. on Antennas and Propag., vol.38, no.1, pp.90-98, Jan. 1990.
- [4] Jan A. M. Svedin : "Propagation analysis of chirowaveguides using the finite-element method" IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol.38, no.10, pp.1488-1496, Oct. 1990.
- [5] Cory H., Rosenhouse I. : "Electromagnetic wave propagation along a chiral slab", IEE Proceedings-H, vol.138, no.1, pp.51-54, Feb. 1991.
- [6] Markku I. Oksanen, Päivi K. Koivisto, and Sergei A. Tretyakov : "Vector Circuit Method Applied for Chiral Slab Waveguides", IEEE J. of Lightwave Tech., vol.10, no.2, pp.150-155, Feb. 1992.
- [7] 丸山真示, 小柴正則 : "2次元キラル導波路の有限要素法解析", 信学論 (C-I), vol.J77-C-I, no.1, pp.12-16, Jan. 1994.
- [8] Samir F. Mahmoud : "Guided modes on open chirowaveguides", IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol.43, no.1, pp.205-209, Jan. 1995.
- [9] 魏玉峰, 吳君香, 松本恵治, 六島克 : "キラルスラブ導波路の行列表示による解析", 平成7年電気関係学会関西支部連合大会論文集, G8-7, Nov. 1995.
- [10] 松本恵治, 六島克, 山北次郎 : "等方性キラル格子による回折波の解析", 信学論 (C-I), vol. J79-C-I, no.6, pp.165-172, June 1996.
- [11] N. Engheta, P. Pelet : "Mode orthogonality in chirowaveguides", IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., vol.38, no.11, pp.1631-1634, Nov. 1990.
- [12] Y. Chung and N. Dagli : "An assesment of finite difference beam propagation method", IEEE J. of Quantum Electronics, vol.26, no.8, pp.1335-1339, Aug. 1990.

- [13] 岡本勝就：“光導波路の基礎”，コロナ社, pp.266-298, 1992.
- [14] 森静雄, 藪哲郎, 沢新之輔：“等方性キラル媒質からなるスラブ光導波路のビーム伝搬法による解析”，電磁界理論研究会資料, EMT-94-68, pp.21-30, Oct. 1994.
- [15] 戸川隼人：“微分方程式の数値計算”，オーム社, p.103, 1973.
- [16] G. Ronald Hadley：“Transparent boundary condition for the beam propagation method”，IEEE J. of Quantum Electronics, vol.28, no.1, pp.363-370, Jan. 1992.

輻射科学研究会資料

RS96-9

アニールされた分散性光ファイバの波長特性
Wavelength Characteristics of Annealed Dispersive
Optical fibers

西村順二 森下克己

Junji NISHIMURA Katsumi MORISHITA

大阪電気通信大学

Osaka Electro-Communication University

1996年7月26日（金）

於 摂南大学 寝屋川キャンパス

アニールされた分散性光ファイバの波長特性
Wavelength Characteristics of Annealed Dispersive Optical fibers

西村順二 森下克己

Junji NISHIMURA Katsumi MORISHITA

大阪電気通信大学

Osaka Electro-Communication University

Abstract

Novel optical fibers fabricated from optical glasses with different dispersive characteristics are annealed under various conditions. Spectral properties of such dispersive fibers are changed greatly by annealing. It is shown that one of core and cladding index spectra can be shifted largely by annealing in case of fiber glasses with different transformation temperatures. We, therefore, can control properties of annealed dispersive fibers by adjusting the heat treatment.

I. INTRODUCTION

Optical fiber devices will be important in-line components for optical communications and optical measurements. In conventional optical fibers used in optical devices, the core and the cladding glasses have similar spectral characteristics so that the refractive index difference between them is almost constant against wavelength. We, therefore, have difficulty in getting optical fiber devices with various spectral properties by using typical fibers.

Optical fibers whose refractive index difference changes greatly with wavelength are proposed theoretically to make several kinds of fiber devices, including optical fiber filters [1][2], wavelength-insensitive fiber couplers [3], and wavelength-selective fiber couplers [4]. The fibers are called *dispersive fibers* because of their large wavelength dependence of the index difference [5]. Dispersive fibers whose refractive index spectra cross each other are fabricated, and have long-wavelength-pass characteristics [6]. However, it is difficult to select suitable core and cladding glasses and produce different kinds of dispersive fibers, because optical glasses with known chromatic refractive indices are limited in number.

In this paper, we propose a method of controlling wavelength characteristics of dispersive fibers by annealing. Dispersive fibers fabricated from optical glasses with different index spectra and transformation temperatures are annealed under various conditions. It is shown that spectral characteristics of dispersive fibers can be modified greatly by annealing under suitable conditions, and annealed dispersive fibers can obtain varied spectral properties.

II. FABRICATION AND ANNEALING

The core and the cladding materials of dispersive fibers are selected from optical glasses. The refractive index in the core becomes smaller than that in the cladding at the shorter wavelength side. We fabricate dispersive fibers using the core and the cladding glasses of BaCED4 and F11 by the rod-in-tube technique.

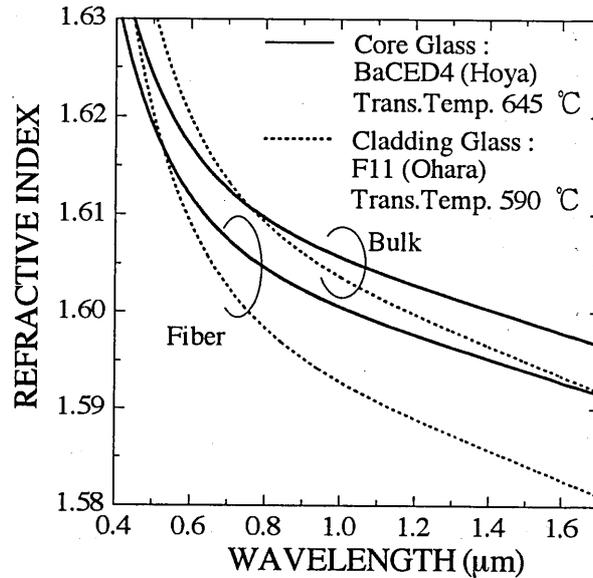


Fig.1 Chromatic refractive indices of bulk and fiber optical glasses of BaCED4 and F11.

Fig.1 shows the chromatic refractive indices of bulk and fiber glasses of BaCED4 and F11. The transformation temperatures of BaCED4 and F11 are 645 °C and 590 °C, respectively. The chromatic refractive indices of bulk glasses are computed from dispersive formula given in Hoya and Ohara optical glass catalogs [7][8]. The refractive index curves of the fiber glasses are shifted down from those of the bulk glasses by rapid cooling in the process of fiber drawing [6]. The index reduction of the cladding glass F11 is more than that of the core glass BaCED4, and the intersection wavelength between the refractive index curves is moved from 0.75 μm to 0.52 μm. Since the core index is below the cladding index at all shorter wavelengths than the intersection, even the fundamental mode cannot be supported along the dispersive fiber, and the region becomes a stopband. Refractive index profile is measured at 0.633 μm, and index reduction caused by fiber drawing is observed at 0.633 μm. Supposing that the same change of refractive index occurs at any wavelength, we calculate chromatic refractive indices of the fiber glasses.

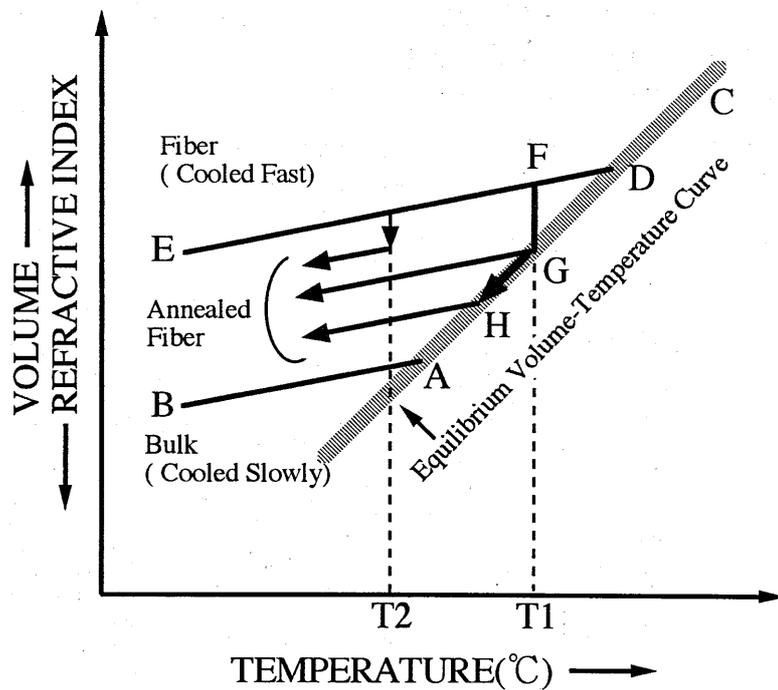


Fig.2 Schematic chart of volume- or index-temperature variations of an optical glass for heat treatments.

Fig.2 shows schematic diagram of volume- or index-temperature variations of an optical glass for heat treatments. The striped line is an equilibrium volume-temperature curve. The optical glass can follow the equilibrium volume-temperature curve as temperature decrease slowly. According to decreasing of temperature, the viscosity of the optical glass increases. Then the glass cannot trace the equilibrium curve with decreasing temperature because of its large viscosity, and becomes solid. In case the glass is cooled fast, it cannot follow the equilibrium curve at higher temperature. Therefore density and refractive index of the glass cooled fast are smaller than those of that cooled slowly [9].

Bulk optical glasses are annealed with long soaking time and very slow cooling in manufacturing process. The density and refractive index distributions become uniform over bulk glasses. In this process, volume or refractive index follows the trail of C-A-B. In the fiber drawing process, the core and the cladding glasses are heated over their softening temperatures, then are drawn to a fiber. Since the fiber is cooled very fast, volume change along the path C-D-E. Therefore refractive indices of the core and the cladding glasses in the fiber are lower than those of bulk glasses.

If such a drawn fiber is heated and held at temperature T_1 , the optical glasses in the fiber approach to the equilibrium state G from F , and the refractive indices increase. In case the fiber is cooled more slowly after reaching the equilibrium, the fiber glasses depart from the equilibrium curve at lower temperature. The time required to reach equilibrium state becomes longer according to lower holding temperature. If the fiber is held at lower temperature T_2 than T_1 and is cooled, the fiber glasses do not reach an equilibrium state in the same time, and the index increase is less than that for T_1 .

The index change caused by annealing depend largely on differences in thermal history [9]. In case of different transformation temperatures of the core and the cladding glasses, their index changes due to the heat treatment are different. The intersection wavelength, therefore, can be shifted by annealing, and wavelength characteristics of annealed fibers can be modified and controlled by adjusting the heat treatment.

III. EXPERIMENTAL RESULTS

The fabricated dispersive fibers are annealed according to the procedures shown in Fig.3. The dispersive fibers are heated till a soaking temperature is reached, and are held at the soaking temperature during a soaking time. Subsequently to soaking, the fibers are cooled slowly with a proper cooling rate until $150\text{ }^\circ\text{C}$ below the soaking temperature, and are cooled fast for shortening the cool-off time to room temperature. Heating rate is $1590\text{ }^\circ\text{C/hr}$. The dispersive fibers are annealed by changing soaking temperature, soaking time and cooling rate. The insertion loss is measured by inserting the dispersive fibers between the conventional single-mode fibers with mode field diameter of $9.3\text{ }\mu\text{m}$ at $1.55\text{ }\mu\text{m}$ wavelength and cutoff wavelength of $1.23\text{ }\mu\text{m}$. The intersection wavelength can be roughly known on the basis of the chromatic insertion loss.

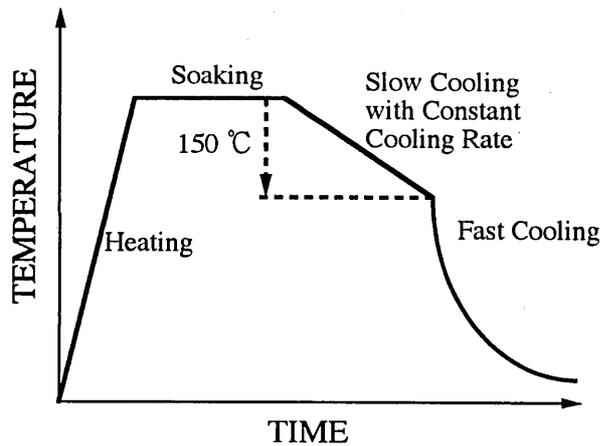


Fig.3 Procedures for annealing dispersive fibers.

A. The Case of Different Soaking Temperatures

Fig.4 shows the insertion loss of annealed fibers at different soaking temperatures. The fibers are soaked at 440 °C, 550 °C and 590 °C during 1 hour, and are cooled with the constant cooling rate of 50 °C/hr after soaking. The insertion loss of the fabricated fiber without annealing is indicated by the solid line for reference. The dot-dash line for the soaking temperature of 440 °C is a little different from that of the fiber without annealing. The broken line indicates the insertion loss for 550 °C, and the stopband is shifted largely to longer wavelength region. The dotted line shows the insertion loss for 590 °C, and the stopband is not changed largely. The stopband is moved to longer wavelength area for soaking temperatures below 550 °C, and is returned to shorter wavelength region for more than 550°C. The shift of the stopband to longer wavelength range is caused by the larger index rise of the cladding than that of the core.

Fig.5 shows schematic diagram of volume- or index-temperature variations of BaCED4 and F11 glasses for annealing procedures used in Fig.4. The striped lines are equilibrium volume-temperature curves of BaCED4 and F11. The solid lines indicate volume-temperature curves of glasses in the fiber without annealing. The dot-dash lines are the volume-temperature curves of BaCED4 and F11 for soaking temperature of 440 °C. The time required to reach equilibrium state becomes longer according to lower soaking temperature because of increase of viscosity. The soaking time of 1 hour is too short for the core and the cladding glasses to reach equilibrium states at 440 °C, which is much lower than the transformation temperatures of BaCED4 and F11, 645 °C and 590 °C. Both index curves change a little, and the index increase of BaCED4 is smaller than that of F11. The stopband, therefore, is shifted slightly to longer wavelength region. The broken lines indicate the volume-temperature curves for soaking temperature of 550 °C. Since the transformation temperature of F11, 590 °C, is lower than that of BaCED4, 645 °C, the refractive index of F11 increases greatly comparing with BaCED4 at 550 °C during 1 hour. Then the intersection point is moved to longer wavelength range than the crossing wavelength of bulk glasses, 0.75 μm . The stopband is shifted greatly to longer wavelength region. The dotted lines show the volume-temperature curves for soaking temperature of 590 °C. The cladding glass F11 reaches equilibrium volume, and stop increasing its refractive index. The core glass BaCED4 is approaching to equilibrium volume during 1 hour. Then both index curves move upward, and the intersection wavelength is shifted a little to longer wavelength area.

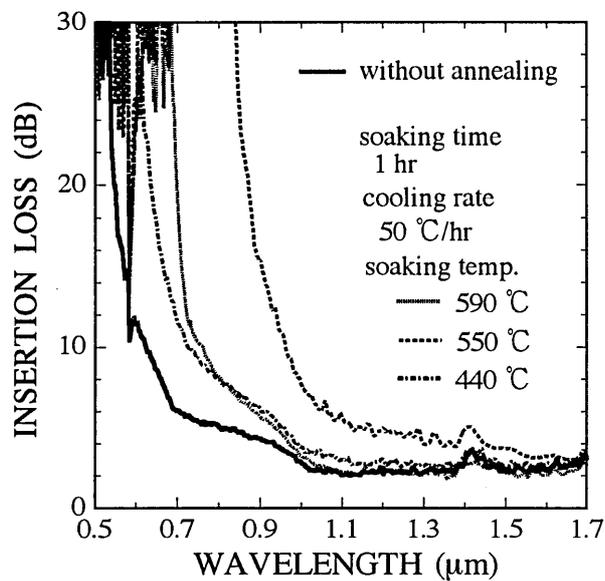


Fig.4 Insertion loss of the BaCED4/F11 fibers annealed at soaking temperature of 440°C, 550 °C and 590 °C. The fiber are soaked during 1 hour, and are cooled with cooling rate of 50 °C/hr.

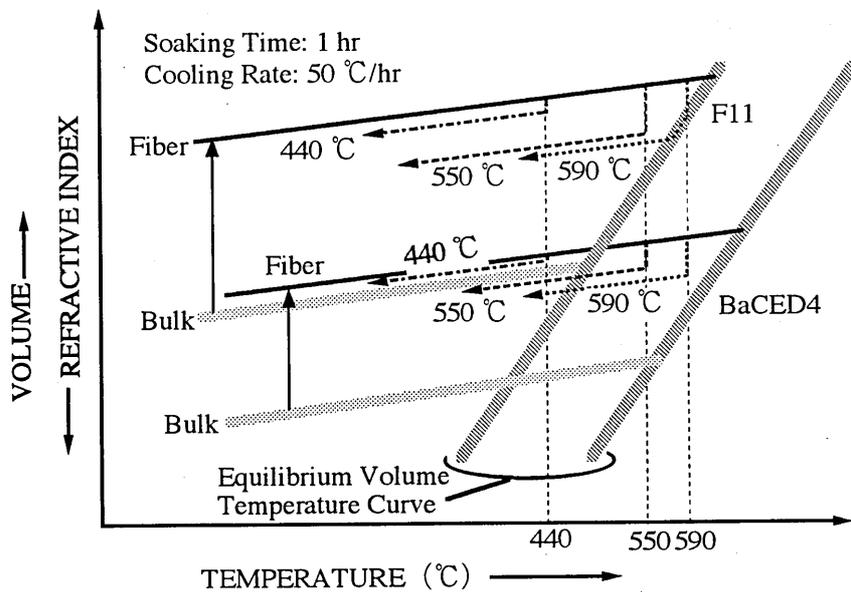


Fig.5 Schematic diagram of volume- or index-temperature variations of BaCED4 and F11 glasses annealed at soaking temperature of 440 °C, 550 °C and 590 °C. The glasses are soaked during 1 hour, and are cooled with cooling rate of 50 °C/hr.

B. The Case of Different Soaking Times

Fig.6 shows the insertion loss of annealed fibers for different soaking times. The fibers are soaked at 590 °C during 0, 0.5, and 2 hours, and are cooled with the constant cooling rate of 50 °C/hr after soaking. The dotted, broken and dot-dash lines indicate the insertion loss for soaking time of 0, 0.5 and 2 hours, respectively. The stopband moves to longer wavelength region with the decrease of soaking time.

Fig.7 shows schematic diagram of volume- or index-temperature variations of BaCED4 and F11 glasses for annealing processes used in Fig.6. The cladding glass F11 reaches equilibrium state for soaking time of more than 0 hours. Therefore the increase of refractive index of F11 is same for soaking time of 0, 0.5 and 2 hours. It takes about 0.5 hour for the used electric furnace to reach 590 °C. The cladding glass F11 seems to get to equilibrium state during heating. On the other hand, the core glass BaCED4 is moving toward equilibrium state during 2 hours. The refractive index of BaCED4 becomes larger with soaking time. Then the intersection between the core and the cladding index curves is shifted to longer wavelength region with decreasing soaking time, and the stopband moves there.

Fig.8 shows the insertion loss of annealed fibers for different soaking times. The fibers are soaked at 550 °C during 0, 4 and 8 hours, and are cooled with the cooling rate of 50 °C/hr. The dotted, broken and dot-dash lines indicate the loss for soaking time of 0, 4 and 8 hours, respectively. The stopband is shifted to longer wavelength region for soaking time of less than 4 hours, and goes back to shorter wavelength range for more than 4 hours.

Fig.9 shows schematic diagram of volume- or index-temperature variations of BaCED4 and F11 glasses for annealing procedures employed in Fig.8. The cladding glass F11 does not reach equilibrium state up to soaking time of 4 hours, and the refractive index of F11 increases considerably with soaking time. Since F11 is in an equilibrium state for soaking time of more than 4 hour, the index increase of F11 is the same for soaking time of over 4 hours. The core glass BaCED4 is approaching to equilibrium state during 8 hours at 550 °C. The refractive index of BaCED4 rises with soaking time. However its index increase is small, because the soaking temperature 550 °C is much lower than its transformation temperature 645 °C. Therefore the intersection wavelength is transferred greatly to longer wavelength area for soaking time of less than 4 hours, and the stopband moves there. The intersection wavelength begins to return to shorter wavelength region for soaking time of more than 4 hours, and the stopband is shifted back a little.

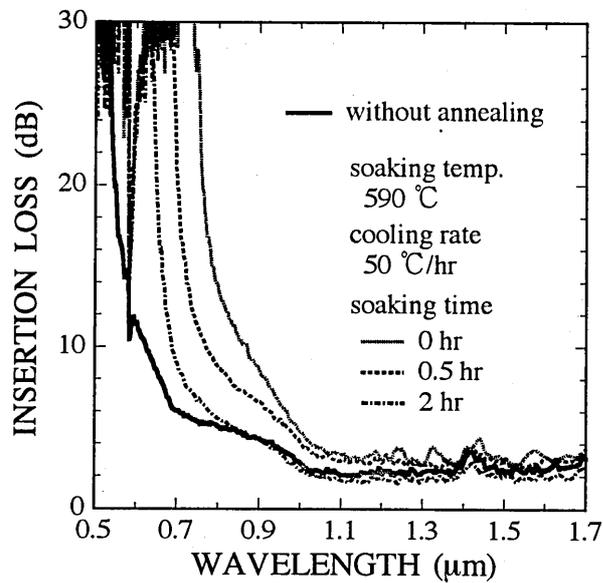


Fig.6 Insertion loss of the BaCED4/F11 fibers annealed with soaking time of 0, 0.5 and 2 hours. The fibers are soaked at 590 °C, and are cooled with cooling rate of 50 °C/hr

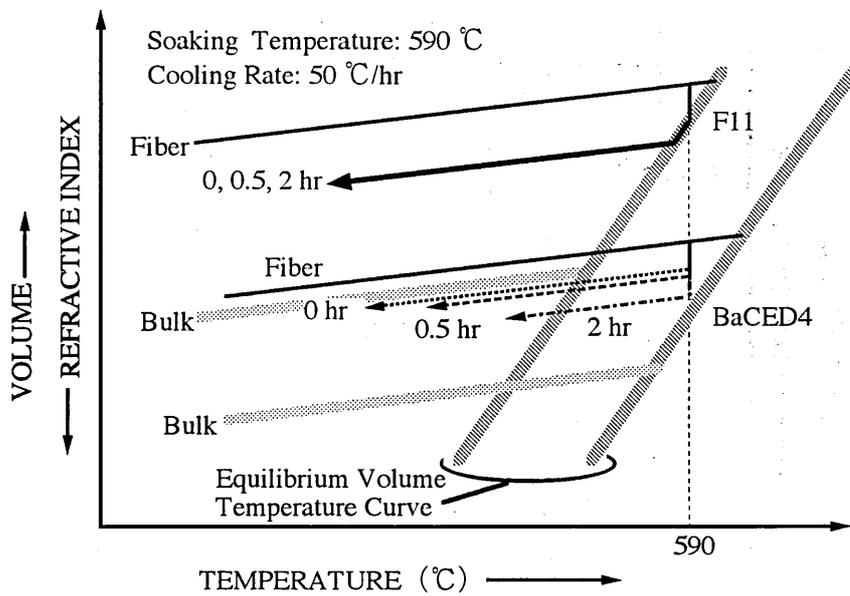


Fig.7 Schematic diagram of volume- or index-temperature variations of BaCED4 and F11 glasses annealed with soaking time of 0, 0.5 and 2 hours. The glasses are soaked at 590 °C during 0, 0.5 and 2 hours, and are cooled with cooling rate of 50 °C/hr.

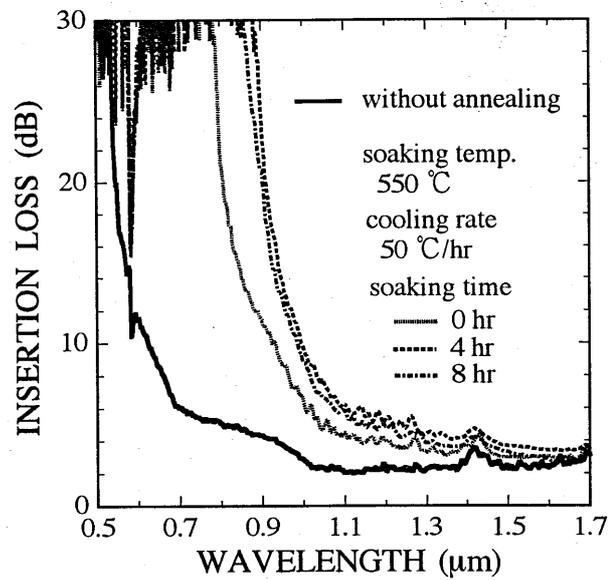


Fig.8 Insertion loss of the BaCED4/F11 fibers annealed with soaking time of 0, 4 and 8 hours. The fibers are soaked at 550 °C, and are cooled with cooling rate of 50 °C/hr.

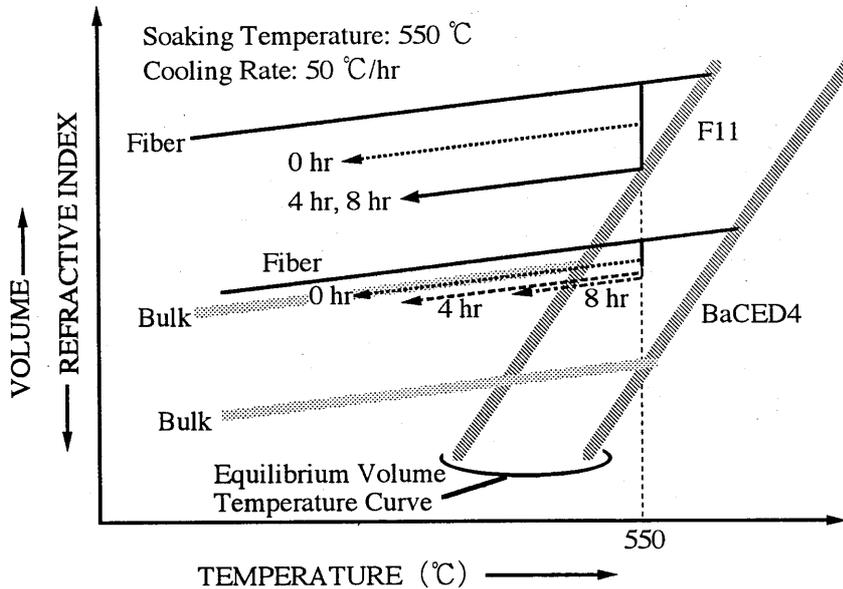


Fig.9 Schematic diagram of volume- or index-temperature variations of BaCED4 and F11 glasses annealed with soaking time of 0, 4 and 8 hours. The glasses are soaked at 550 °C during 0, 4 and 8 hours, and are cooled with cooling rate of 50 °C/hr.

C. The Case of Different Cooling Rates

Fig.10 shows the insertion loss of dispersive fibers annealed under different cooling rates. The fibers are soaked at 590 °C during 1 hour. The dotted, broken and dot-dash lines are the loss for cooling rate of 50 °C/hr, 20 °C/hr and 2 °C/hr, respectively. The stopband is shifted to longer wavelength region according to slower cooling rate. The intersection wavelength, therefore, moves to longer wavelength area with decreasing cooling rate.

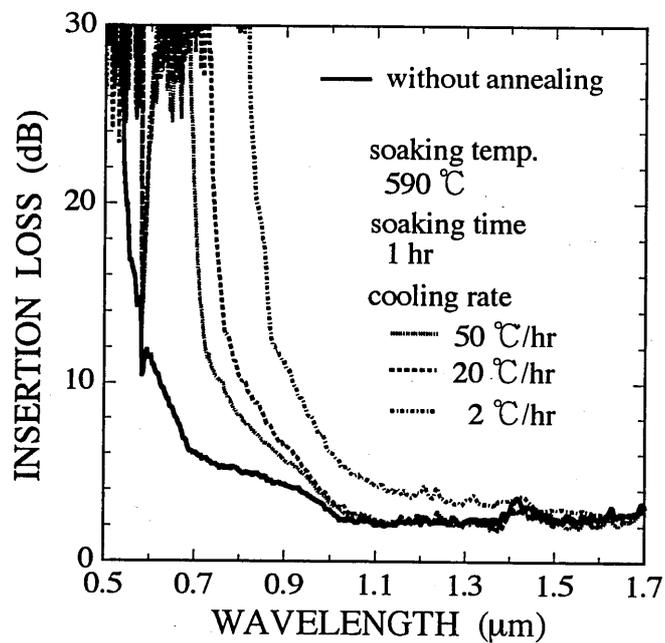


Fig.10 Insertion loss of the BaCED4/F11 fibers annealed with cooling rate of 50 °C/hr, 20 °C/hr and 2 °C/hr. The fibers are soaked at 590 °C during 1 hour.

Fig.11 shows schematic diagram of volume- or index-temperature variations of BaCED4 and F11 glasses for annealing procedures utilized in Fig.10. The dotted, broken and dot-dash lines indicate volume-temperature variations of the cladding glass F11 for cooling rate of 50 °C/hr, 20 °C/hr and 2 °C/hr, respectively. At the transformation temperature of the cladding glass F11, 590 °C, F11 gets to equilibrium state during 1 hour. As the fiber is cooled with slower cooling rate after soaking, F11 begins to cease to trace equilibrium volume-temperature curve at lower temperature and its refractive index becomes greater. An optical glass reaches equilibrium state more slowly at lower temperature because of its larger viscosity. The solid line with an arrow shows the volume-temperature variations of the core glass BaCED4 for cooling rate of 50 °C/hr, 20 °C/hr and 2 °C/hr. The core glass BaCED4 does not reach equilibrium state during 1 hour and its index increase caused by annealing depends little on cooling rate, because the soaking temperature of 590 °C is relatively lower than its transformation temperature 645 °C. Therefore the intersection between core and cladding index curves is transferred to longer wavelength side for smaller cooling rate. The stopband moves to longer wavelength region with the decrease of cooling rate.

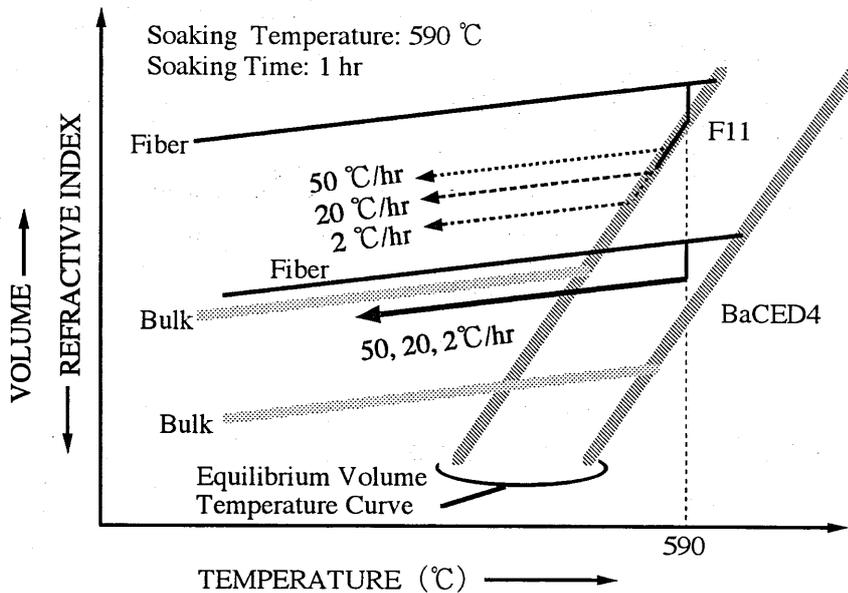


Fig.11 Schematic diagram of volume- or index-temperature variations of BaCED4 and F11 glasses annealed with cooling rate of 50 °C/hr, 20 °C/hr and 2 °C/hr. The glasses are soaked at 590 °C during 1 hour.

IV. CONCLUSIONS

Dispersive fibers made from optical glasses with different refractive index spectra are annealed under various conditions. Spectral characteristics of the dispersive fibers are changed greatly by annealing. The behavior of refractive index in the core and the cladding glasses during annealing is investigated. As a result of experiments, it becomes evident that we can shift greatly only one of core and cladding index spectra by means of annealing in case of fiber glasses with different transformation temperatures. We, therefore, can obtain dispersive fibers with various spectral characteristics by annealing under varied conditions and can control properties of annealed dispersive fibers by adjusting soaking temperature, soaking time and cooling rate. Various optical devices will be made using dispersive optical fibers annealed under suitable conditions.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank H. Tanaka and T. Gozen of Mitsubishi Cable Industries Ltd. for drawing dispersive fibers.

REFERENCES

- [1] K. Morishita, M. S. Yataki and W. A. Gambling, "In-line optical fibre filters using dispersive materials," *Electron. Lett.*, vol.23, no.7, pp.319-321, Mar. 1987.
- [2] K. Morishita, "Bandpass and band-rejection filters using dispersive fibers," *J. Lightwave Technol.*, vol.7, no.5, pp.816-819, May 1989.
- [3] K. Morishita, M. S. Yataki, and W. A. Gambling, "Wavelength-insensitive couplers using dispersive materials," *Opt. Lett.*, vol.12, no.7, pp.534-535, July 1987.
- [4] K. Morishita, "Wavelength-selective optical-fiber directional couplers using dispersive materials," *Opt. Lett.*, vol.13, no.2, pp.158-160, Feb. 1988.
- [5] K. Morishita, "Optical fiber devices using dispersive materials," *J. Lightwave Technol.*, vol.7, no.1, pp.198-201, Jan. 1989.
- [6] J. Nishimura, Y. Ueda and K. Morishita, "Fabrication of dispersive fibers and their application to long-wavelength-pass filters," *Trans. IEICE*, vol.J78-C-I, no.12, pp.658-663, Dec. 1995 (in Japanese).
- [7] J. Nishimura, Y. Ueda and K. Morishita, "Dispersive fibers and their application to long-wavelength-pass filters," in *Tech. Dig. IOOC '95*, Hong Kong, June 26-30, 1995, paper WA2-5.
- [7] Hoya Optical Glass Technical Data, Hoya Corp., Tokyo, Japan, 1985.
- [8] Ohara Optical Glass, Ohara Inc., Kanagawa, Japan, 1987.
- [9] T. S. Izumitani, *Optical Glass*. New York: American Institute of Physics, 1986, ch.1.

超低損失 Y 分岐光導波路

沢 新之輔 真鍋 考士 藪 哲郎 下代 雅啓

大阪府立大学工学部

1996年9月13日(金)
於 大阪大学

1 まえがき

光ファイバの普及に伴い、光波を媒体としたシステムの開発が進められている。光波を分流するための素子の一つとして Y 分岐光導波路があり、その低損失構成法がいくつか提案されている。これまでに提案された Y 分岐光導波路としては、アンテナ結合型 Y 分岐光導波路 [1][2]、モード変換型 Y 分岐光導波路 [3]、新構造 Y 分岐素子 [4]、分岐部に切込みを設けた構造の Y 分岐光導波路 [5]、新構造低損失 Y 分岐光導波路 [6] などがある。

文献 [1][2] のアンテナ結合型 Y 分岐光導波路は、分岐角が $1^\circ \sim 6^\circ$ の広い範囲において損失が 1dB 以下という優れた特性を持っている。文献 [3]-[6] は分岐角が 1° 以下の場合を対象にしており、分岐角が 1° 以下の場合については文献 [1] [2] のアンテナ結合型 Y 分岐光導波路よりも低い損失を示している。

本稿で提案する超低損失 Y 分岐光導波路は文献 [4] の新構造 Y 分岐素子をベースにして新しい発想による改良を加えたものである。文献 [3]-[6] の導波路の設計法を分岐角 1° 以上の場合に対して適用すると極めて大きな損失が生じてしまうが、新しい発想による改良を加えることにより、分岐角が 1° 以上の場合においても、文献 [3]-[6] の導波路の $1/10$ 以下という極めて低損失な導波路を実現することが出来た。

なお、本稿ではスラブ光導波路を議論の対象とする。埋め込み型光導波路に対しても等価屈折率法などを用いることにより本稿で提案する設計理論を適用することが可能である。

2 設計理論

2.1 新構造 Y 分岐素子の場合

本稿で提案する超低損失 Y 分岐光導波路は、文献 [4] の新構造 Y 分岐素子で提案された形をベースにして更に新しい発想による改良を加えたものである。従って、まず、文献 [4] の新構造 Y 分岐素子の設計理論について説明する。

文献 [4] で提案されているモデルを少し変形したモデルが図 1 である。

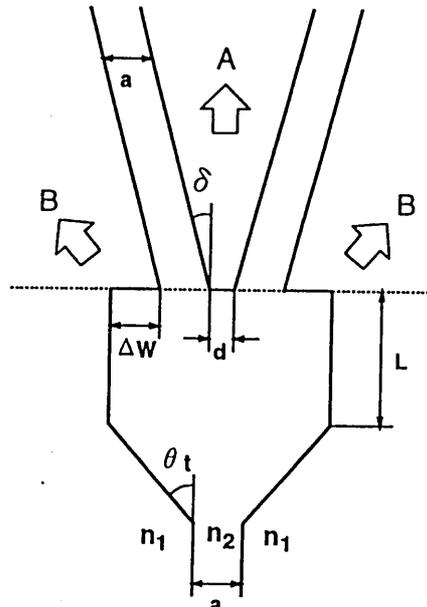


図 1: 文献 [4] のモデルを変形したモデル

ここで n_1, n_2, a, d はあらかじめ表1のように与えられているものとする。導波路の入射端と出射端においてはシングルモードである。

表1: 各パラメータ

クラッドの屈折率	$n_1 = 1.5$
コアの屈折率	$n_2 = 1.503$
導波路幅	$a = 4\mu m$
2導波路間の空隙	$d = 2\mu m$

ここで、 $\Delta W, \theta_i, L$ を損失が最も少なくなるように設定する。 ΔW は図1の点線の下側の0次モードと点線の上側の0次モードの結合が最大になるように設定し、 θ_i は入射した0次モードの光が、全て幅の広い部分の0次モードになるような小さな値に設定する。しかし、 θ_i をどんなに小さくしても、幅の広い部分では2次モードが少しは発生する。そこで、2次モードと0次モードが点線の位置において強めあうように L を設定する。例えば、表1で与えられたパラメータに対して最適な $\Delta W, \theta_i, L$ を求めると、表2のような値になった。

表2: $\Delta W, \theta_i, L$ の最適値

導波路終端拡大幅	$\Delta W = 1.7\mu m$
テーパ角	$\theta_i = 0.3^\circ$
直線導波路長	$L = 125\mu m$

そこで、いま、このような導波路にTEの0次モードが入射する場合を考える。数値解析法としては差分ビーム伝搬法を用いる。

分岐角 δ を $0^\circ \sim 4^\circ$ に設定した場合の損失が図2である。

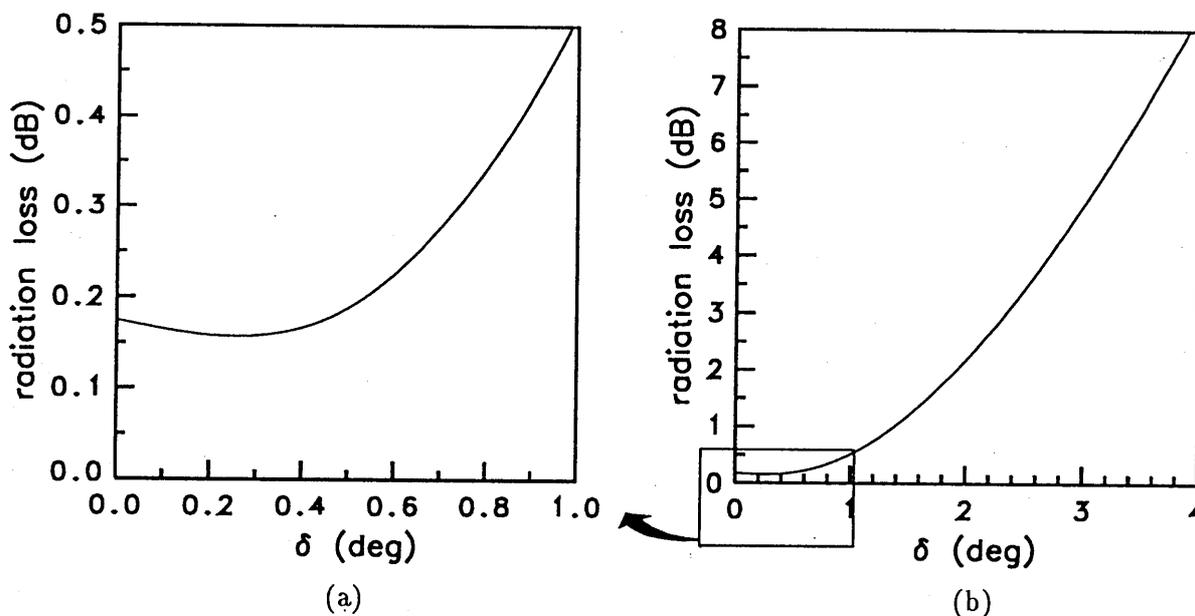


図2: 分岐角 δ と損失の関係

図2から、図1のモデルでは分岐角 δ が 1° 以下の範囲であれば、損失は小さく抑えられているが、分岐角 δ が 1° を越える範囲になると損失が急激に増加する傾向にあるのが分かる。この原因は分岐角が 1° 以上になると、A方向への放射が増加するためである。したがって、分岐角が 1° 以上の場合に対しても低損失であるようなY分岐光導波路を実現するためには、A方向への放射を抑えるような構造でなければならない。そこで次節に新たなモデルを提案する。

2.2 超低損失 Y 分岐光導波路の場合

図3が本文で提案する超低損失 Y 分岐光導波路である。このモデルの特徴は、導波路の外側に高屈折率 n_3 をもつ部分を付加し、内側に低屈折率をもつくぼみ部分を付加していることである。この n_3 と h を最適な値に設定することにより、分岐部における波面を分岐後の導波路に対し垂直にすることが出来る。このように、前節で示した点線部分でのモード整合を最大にするという発想に加えて、波面の傾きをも考慮するという考えで本導波路は設計されている。

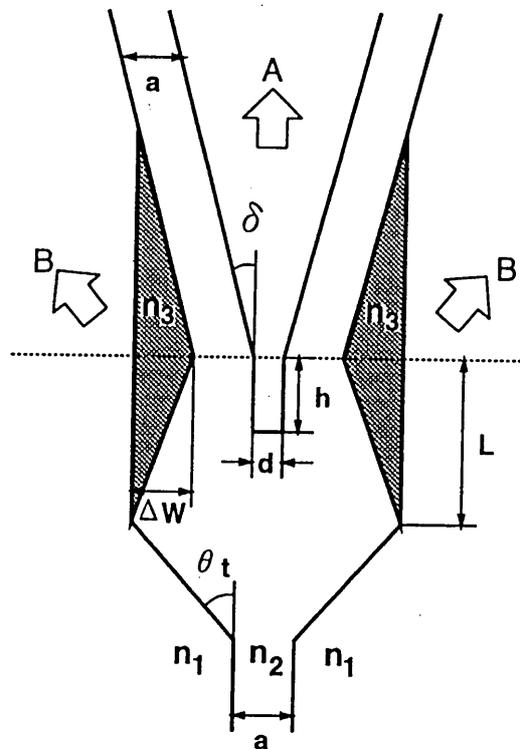


図3: 超低損失 Y 分岐光導波路

3 数値計算結果

3.1 分岐角 $\delta = 1.5^\circ$ の場合

分岐角 δ が 1.5° の場合について考える。図1の導波路で分岐角 $\delta = 1.5^\circ$ としたとき、損失は 1.192dB である。このときの光波の伝搬波形を図5(a)に示す。この場合、A方向即ち分岐部の中

中央方向への放射が大きいことが問題になることが分かる。次に本稿で提案する超低損失 Y 分岐光導波路の結果を示す。図 3 で分岐角が同じ $\delta = 1.5^\circ$ の場合、 $h = 0$ として n_3 を変化させたときの特性を図 4(a) に示す。図 4(a) より、 $n_3 = 1.5065$ で損失が最小となり 0.0926dB となることが分かる。更に、 $n_3 = 1.5065$ に固定して h を変化させたときに、得られる特性を図 4(b) に示す。図 4(b) より $h = 12\mu\text{m}$ で損失の最小値が 0.0784dB になった。この値は図 1 で示されるモデルの $1/10$ 以下であり、図 3 の構造によって超低損失の Y 分岐光導波路が得られる可能性があることが分かる。このときの伝搬波形を図 5(b) に示す。A 方向への放射を抑え、損失を低減していることが分かる。また、B 方向に発生する放射も抑えられていることが分かる。

放射が抑えられている様子をより深く理解するために、図 6 に 2 つのモデルの波面の様子を示す。改良前は図 6(a) より、分岐部における波面は z 軸に対しほぼ垂直で、光波は分岐後の導波路に δ の傾きをもって斜めに入射する。そのため、A 方向即ち分岐部の中央方向への放射が多くなっている。ところが、改良後では図 6(b) より、光波が分岐部に差し掛かると、高屈折率部 n_3 によって光波の外側の伝搬速度が遅くなり、また、くぼみ h によって光波の内側の伝搬速度が速くなり、波面が外側へ傾く。その結果、光波は分岐後の導波路に対してほぼ垂直に入射することができ、A 方向への放射が低減される。

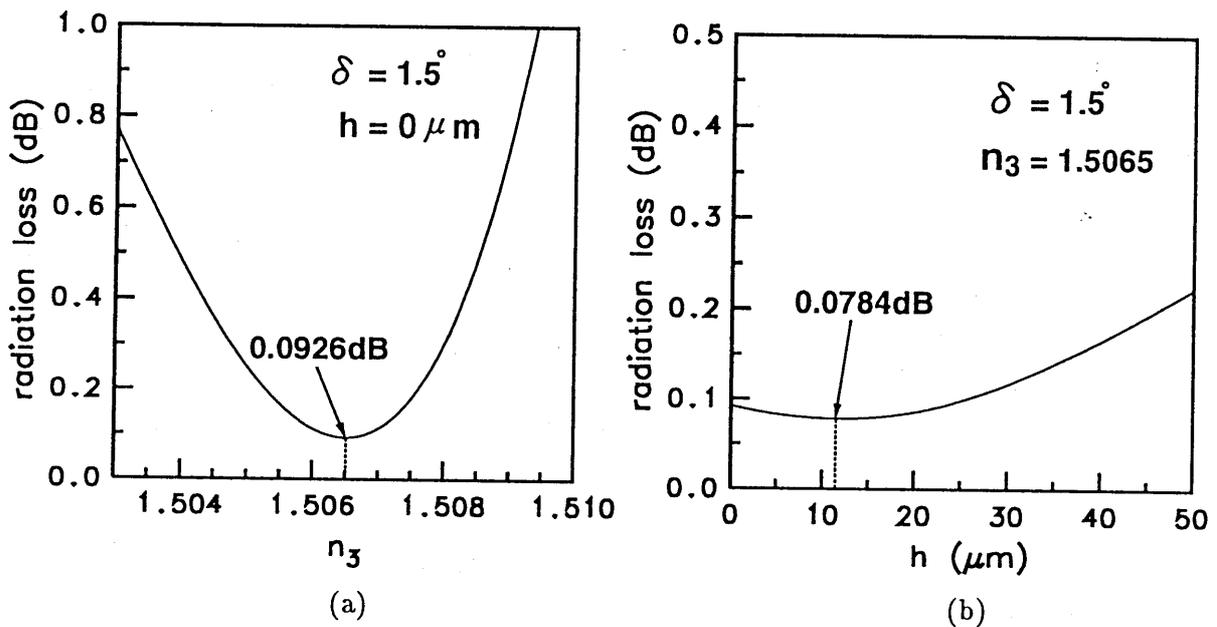
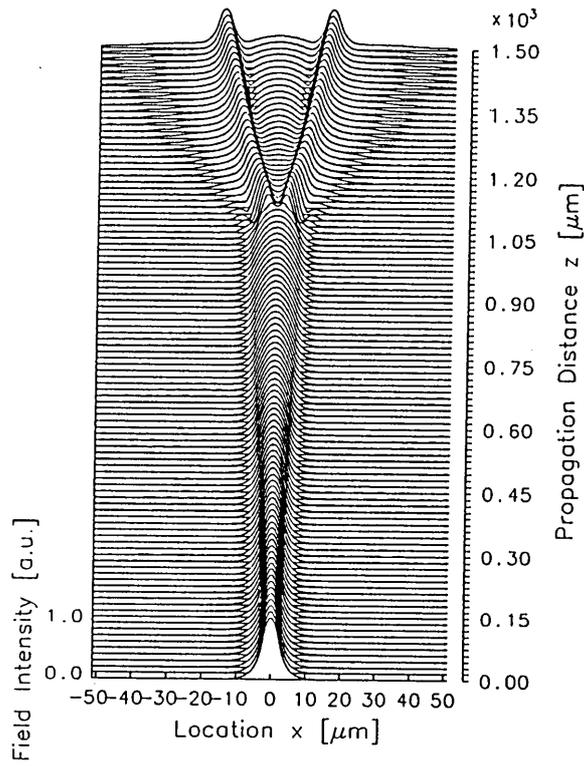
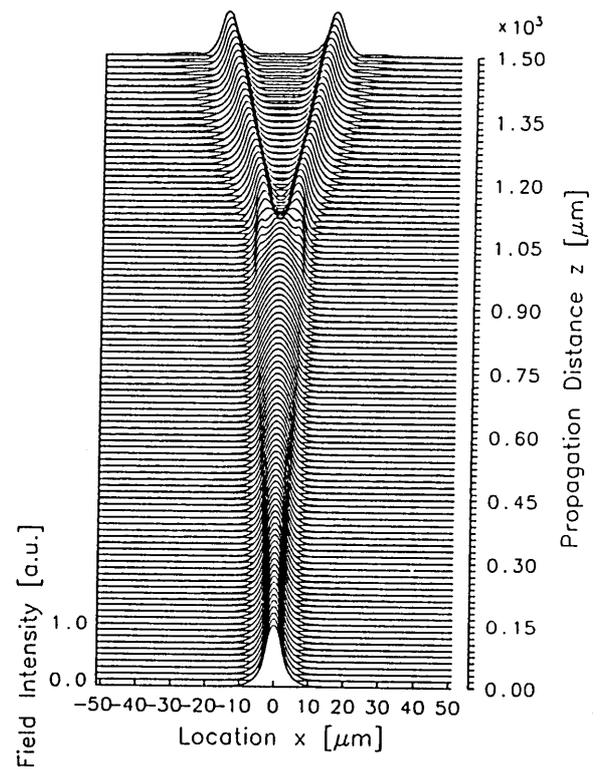


図 4: n_3, h と損失の関係 ($\delta = 1.5^\circ$)

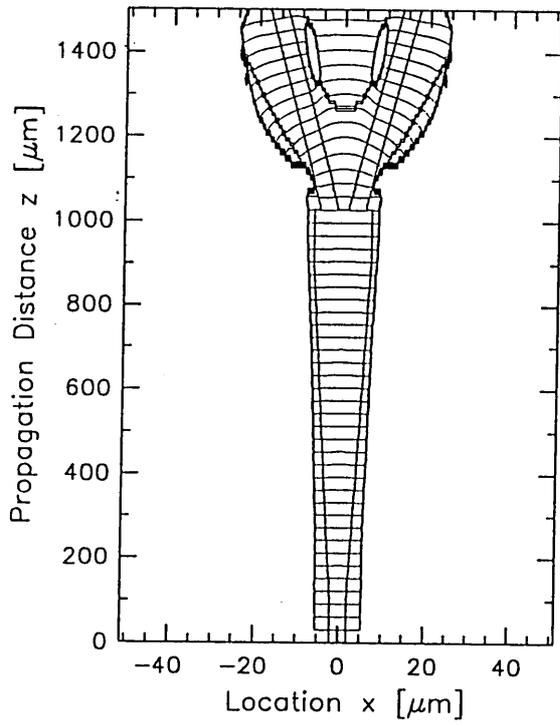


(a) 図 1 のモデル

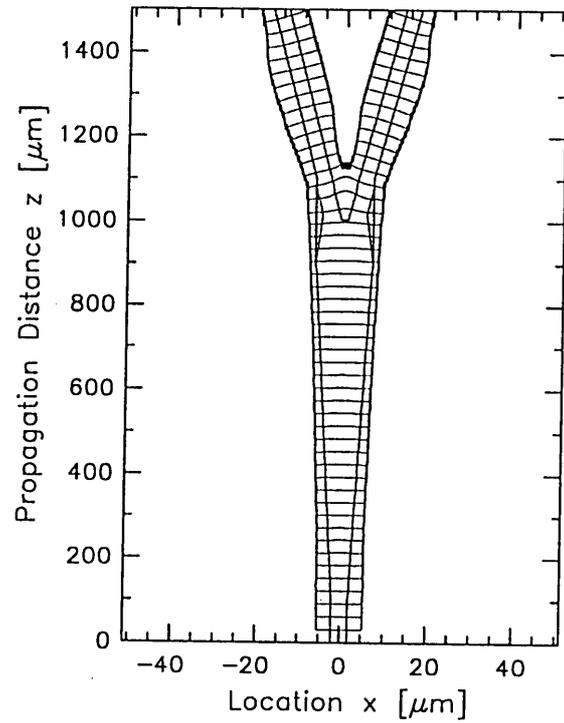


(b) 提案モデル

図 5: 伝搬波形 ($\delta = 1.5^\circ$)



(a) 図 1 のモデル



(b) 提案モデル

図 6: 波面の様子 ($\delta = 1.5^\circ$)

3.2 分岐角 $\delta = 4.0^\circ$ の場合

同様に分岐角 δ が 4.0° の場合について考える。提案モデルにおいて、 $h = 0$ とし n_3 を変化させると図 7(a) より、 $n_3 = 1.5123$ で損失が最小となり 2.635dB となる。更に、 $n_3 = 1.5123$ に固定して h を変化させると、図 7(b) より $h = 32\mu\text{m}$ で最小の損失 1.954dB をとる。このときの伝搬波形を図 8(b) に示す。それに対して、図 1 のモデルで分岐角 $\delta = 4.0^\circ$ としたときの損失は 8.334dB であり、その伝搬波形を図 8(a) に示す。また、図 9 に波面の様子を示す。しかし、この場合、損失は改善されてはいるが、図 9(b) より、波面が分岐後の導波路に対し垂直になっていない。これは h の付加により、 n_3 が最適値からずれたためと考えられる。

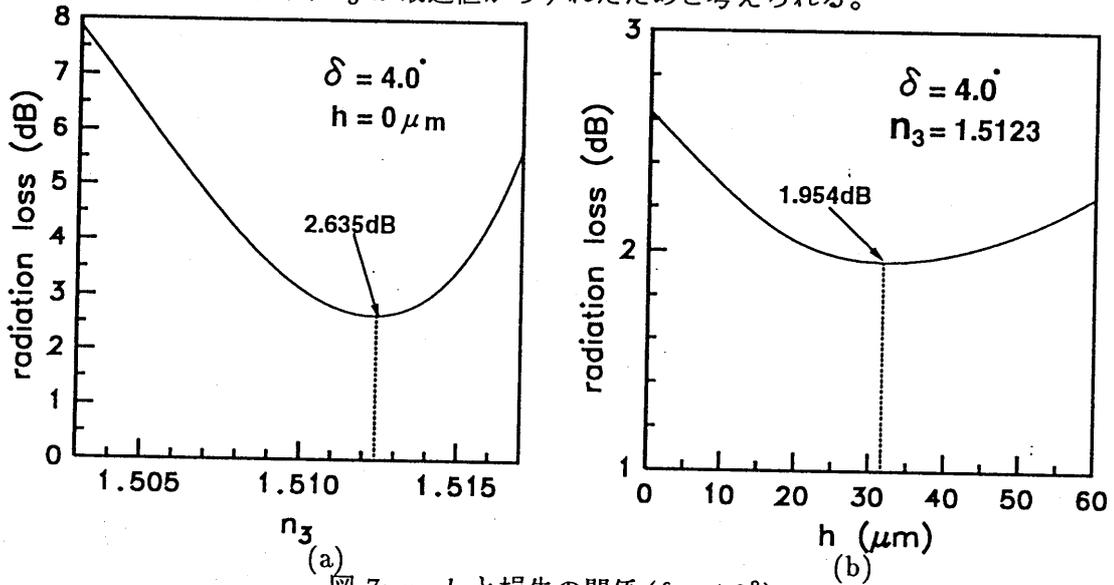
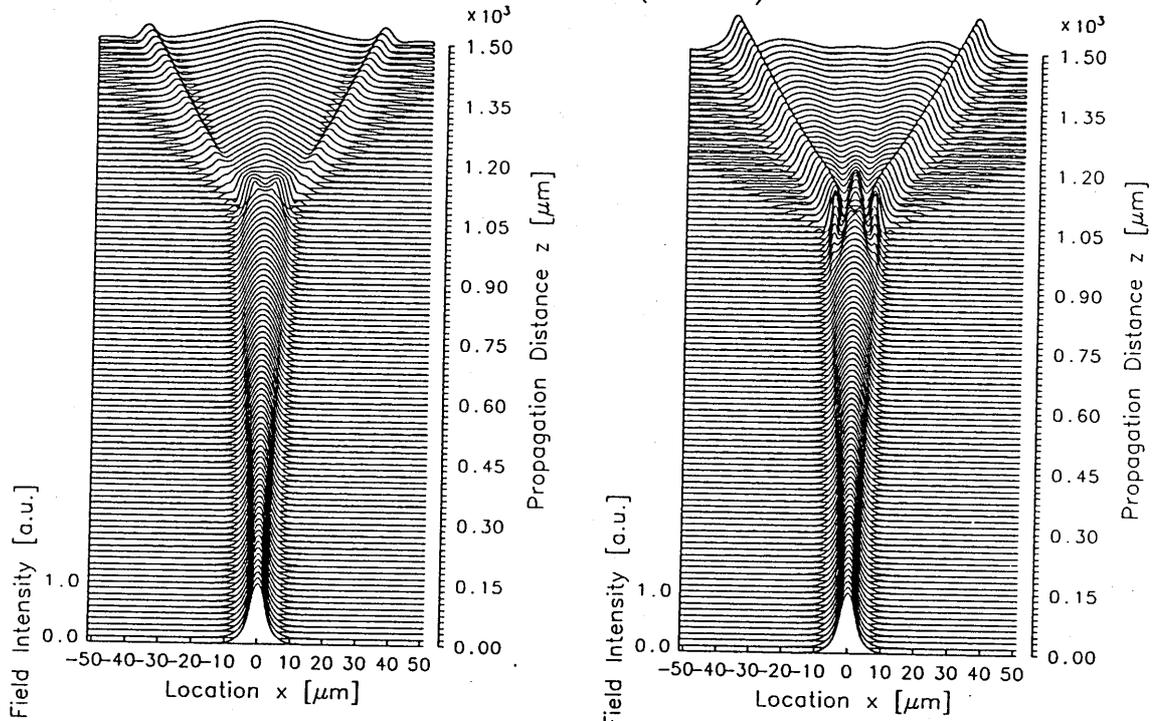


図 7: n_3, h と損失の関係 ($\delta = 4.0^\circ$)



(a) 図 1 のモデル

図 8: 伝搬波形 ($\delta = 4.0^\circ$)

(b) 提案モデル

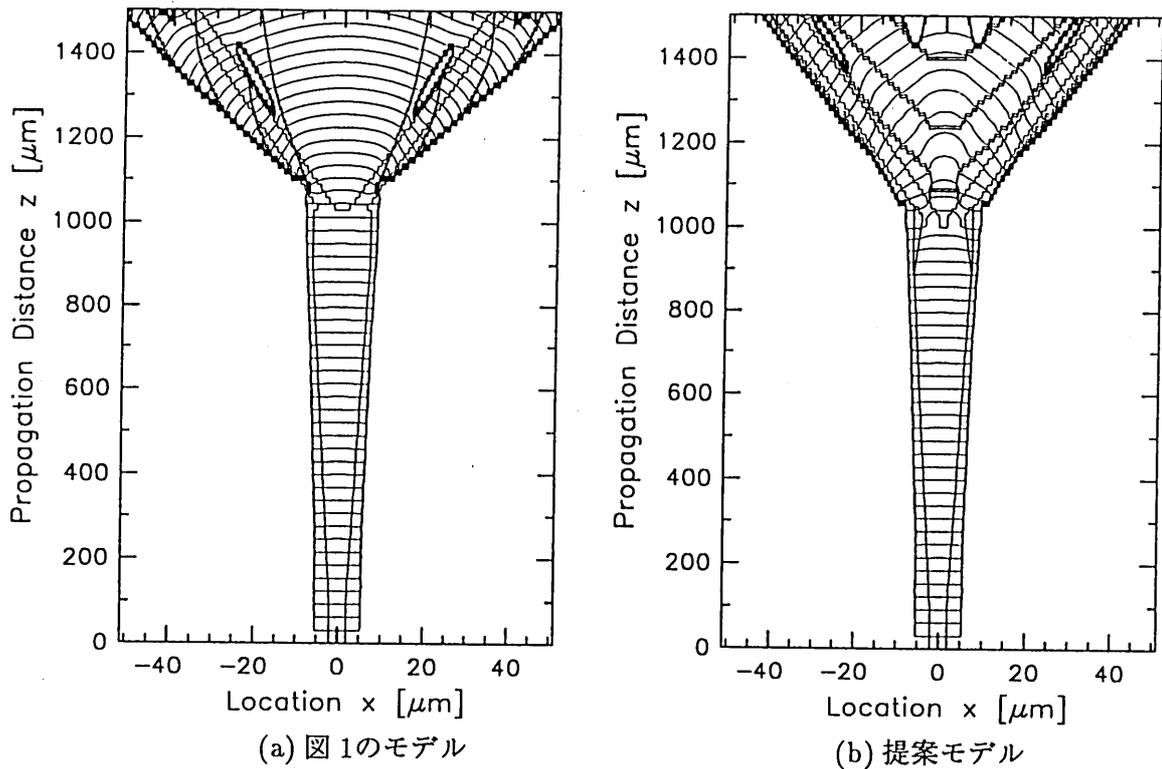


図9: 波面の様子 ($\delta = 4.0^\circ$)

3.3 各々のモデルの損失の比較

アンテナ結合型 Y 分岐光導波路^{[1][2]}と本稿で文献 [4] を変形したモデルとの比較を行う。図 10 の実線はアンテナ結合型 Y 分岐光導波路の特性である。また、本稿で提案する超低損失 Y 分岐光導波路で、分岐角 $\delta = 1.5^\circ$ 、 4.0° のそれぞれの場合について n_3 、 h を適切な値に調節したときの損失を図 10 の Δ 印で示した。また、一点鎖線は図 1 のモデルにおける特性である。図 10 より $\delta = 1.5^\circ$ の場合は、アンテナ結合型 Y 分岐光導波路よりも本稿で提案するモデルの方が、より低損失であることが分かる。しかし $\delta = 4.0^\circ$ の場合では、図 1 のモデルにおける損失と比べると大幅な損失の低減が見られるが、アンテナ結合型 Y 分岐光導波路との比較においては低損失化は十分でない。

本稿では、分岐角 $\delta = 1.5^\circ$ と $\delta = 4.0^\circ$ についてのみ検討を行ったが、各 δ について n_3 、 h を最適化すると図 10 中の破線で示されるような特性が得られると思われる。これより、分岐角 $\delta = 0^\circ \sim 2^\circ$ の範囲においては、本稿で提案するモデルにより極めて低損失な Y 分岐光導波路が得られる可能性があることが予想される。

また表 2 で示したパラメータは、図 1 のモデルで最適化されたものなので、提案モデルにおいて、もう一度最適化するとさらに損失が小さくなる可能性が高い。

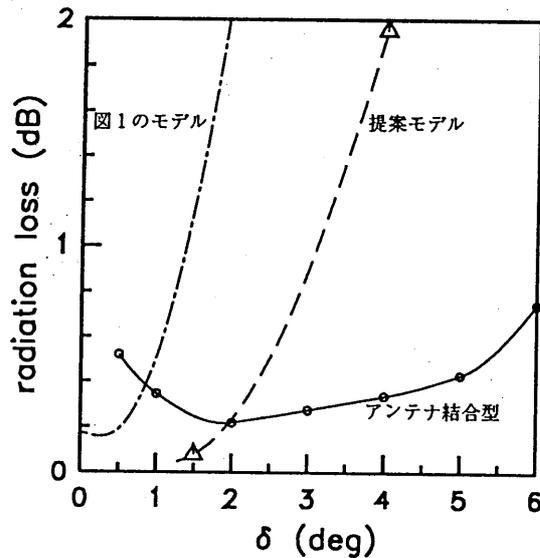


図 10: アンテナ結合型 Y 分岐光導波路との比較

4 おわりに

本稿で示したモデルは、パラメータ n_3 と h を設け、それらを適切な値に調節することにより光波の波面を分岐後の導波路に整合させるという考え方に基いて設計された。そして分岐角が大きな場合に問題となる分岐部中央方向への放射を抑え、損失を大幅に低減できた。

本稿で示した構造はやや複雑な構造なので構造の簡略化の余地は残っていると思われる。今後は、他の構造パラメータと特性との関係についても詳しく調べ、より簡単な導波路構造について検討していく予定である。

参考文献

- [1] 花泉 修, 宮城 光信, 皆方 誠, 川上 彰二郎: “3次元誘電体光導波路におけるアンテナ結合型 Y 分岐導波路”, OQE85-62, pp.73-80, (1985).
- [2] OSAMU HANAIZUMI, MITUNOBU MIYAGI, and SHOJIRO KAWAKAMI: “Wide Y-Junction with Low Losses in Three-Dimensional Dielectric Optical Waveguides”, IEEE J. Quantum Electronics, QE-21, 2, pp.168-174, (Feb. 1985).
- [3] 沢 新之輔, 小野 和雄, 森 誠二: “モード変換型光分岐導波路の構成理論”, 電子情報通信学会論文誌 C, J71-C, 3, pp.432-433, (Mar. 1988).
- [4] 松浦 裕司, 笹岡 英資, 金森 弘雄: “新構造 Y 分岐素子の低損失化”, 電子情報通信学会春期大会, C-330, 4-327, (Mar. 1994).
- [5] 越 浩之, 植木 健, 小沢 章一: “Y 分岐導波路の低損失化の検討”, 電子情報通信学会エレクトロニクスソサイエティ大会, C-247, (Sept. 1995).
- [6] 沢 新之輔, 藪 哲郎, 下代 雅啓, 道脇 正樹: “放射モードから導波モードへの再変換を利用した新構造低損失 Y 分岐光導波路”, 電気関係学会関西支部連合大会, G10-3, (Nov. 1995).

RS96-13

低コヒーレント光による後方強調光散乱

岡村康行*、** 山本錠彦**

*和歌山大学システム工学部

**大阪大学基礎工学部

1996年9月13日

輻射科学研究会

低コヒーレント光による後方強調光散乱

岡村康行*、** 山本錠彦**

*和歌山大学システム工学部

**大阪大学基礎工学部

1. まえがき

近年、ランダム媒質内の波動伝搬あるいは散乱に関する理論的・実験的検討が盛んに行われている。これは、レーダー工学や通信、リモートセンシングなどの分野における様々な問題 [1]、[2]、例えば大気中における屈折率の揺らぎが電磁波の伝搬特性に与える影響や電離層でのシンチレーション、マイクロ波の地表での散乱によるリモートセンシングへの影響、さらに光波を用いた生体組織の検査や生体高分子の研究などを取り扱う際重要である。

波動の散乱現象に関する研究は古くから行われているが、具体的に科学研究の対象となったのは19世紀以降である。例えば、19～20世紀にかけレイリー散乱やラマン散乱、ブリルアン散乱などの分子散乱、あるいはミー散乱として知られる単一粒子の散乱問題が登場した。さらに1960年初頭のレーザーの出現により、散乱現象は純粋な物理学の対象としてでなく、その応用に関する可能性の追求から多くの分野で非常に高い関心を持たれるようになった [3]。特に、ランダム媒質内の波動の伝搬、散乱などの多重散乱問題は、1960年代に Tatarskii 等に代表される旧ソ連研究者によって創始され [4]、近年にいたるまで、観測される多くの現象に対し様々な考え方が提案されている。

それらの中で、うまく説明のつかなかった現象が存在する。その代表的なものに後方強調光散乱あるいはオポジション効果と呼ばれる現象がある。これは、ランダムな媒質や粗い表面を持つ媒質に光を入射したとき、観測される平均散乱光強度が入射方向の全く逆の方向（後方反射方向）において鋭いピーク状の散乱特性を示す現象である [5]。代表的なオポジション効果として、森などを航空写真で撮ると

中央部が明るく見られる、あるいは満月の異常な明るさなどが知られている [6]。これらの現象自体は1960年代後半に知られていたが、引き起こすメカニズムは解明されなかった。

一方、固体電子物理において、電子の弱局在、すなわち乱れたポテンシャルによって散乱された電子波間の干渉効果に関する研究が進み、その微視的メカニズム（多重散乱により高次の散乱経路を通過する電子波とそれと全く逆行する電子波との干渉により後方散乱が増大し、結果として伝導率が減少する）が明らかになるにつれ、これが電子波のみならずあらゆる波動に共通した現象であることが期待されるようになった。1985年、古典的波動である光のオポジション効果あるいは後方強調光散乱が電子の弱局在と類似の現象であることが指摘されてから、これらに関する研究が盛んに行なわれるようになった [7]。

特に最近、後方強調光散乱の測定が行なわれるようになってきた。これらの多くはランダムな媒質や粗い表面を持つ媒質にレーザー光を入射し、後方散乱光強度の角度依存性を測定している。Kuga と Ishimaru はラテックス球水溶液をランダム媒質として用い、ラテックス球の平均粒径が入射光の波長と同程度かそれより小さいとき、体積密度が1%以上で鋭いピークを観測した [8]。Wolf と Maret はポリスチレン球水溶液を用い、後方散乱光ピークの偏波依存性を調べている [9]。Vreeker 等は酸化チタンを有機溶媒に分散させた試料にレーザーパルスを照射して後方散乱光強度を測定し、パルス入射後、時間が経過するにつれピーク幅が狭くなることを確認した [10]。また、O'Donnell と Mendez は金属コーティングした粗い表面を持つ媒質からの散乱光強度を測

定し、表面の粗さのスケールが波長に比べて短い場合に鋭いピークが現れることを確認した [11]。

さらに、これらの測定結果を説明するための新しい多重散乱理論が現れはじめた。それまで、このようなランダム媒質内での現象を考える際に輸送理論が一般的に用いられていたが、この理論では平均自由行程を過ぎたすべての散乱過程は全く相関を持たないと仮定されており、このような過程のもとでは後方強調散乱は導かれぬ。このため、多重散乱された光の干渉を考慮した多重散乱理論をもとに様々な解析法が提案されている。Akkermans等は散乱中心が多数存在する誘電体にスカラー波を入射したときの後方散乱光ピークを調べ [12]、MackintoshとJohnはベクトル波に拡張しピークの波形を求めた [13]。MandtとTsangは散乱体球を有限の大きさとして考察している [14]。

このように様々な研究が行われているが、光源としてはコヒーレント光を、さらに集合平均することによって結果を得ることを前提としている。本論文では、コヒーレンス度の異なる光源を用いて後方強調散乱を調べ、コヒーレンスの低い光源により集合平均することなく観測が可能であることを実験的に調べている。さらに、アルミナ粉体による後方強調散乱特性の粒径依存性や波長依存性を調べている。

2. 後方強調散乱の機構

通常の物体はその表面が粗く、これに入射した光は乱反射され、我々は物質を認識する。この乱反射の度合いがある適当な大きさになると入射した方向に強く戻りピーク状の変化を示すことがある。この現象は後方強調散乱と呼ばれ、ランダム表面やランダム媒質特有の現象として知られている。もっともこの現象は、入射光がコヒーレントな光源である限り時間平均あるいは集合平均した結果であり、単一時間での現象ではない。

まず、この現象の物理的な意味を考える。光波はベクトル波であるが、簡単のためスカラー波として取り扱う。平面を境界とする2媒質を考え、一方の

媒質を粒径のそろった粒子がランダムに分布したランダム媒質とし、片方を真空とする。なお、粒子はランダムにブラウン運動しているものとする。このような系において、真空側から波数ベクトル k_0 の平面波がランダム媒質に入射するものとする。時刻 $t = t_0$ に位置 $r_i^{(1)}$ にある粒子で初めて散乱されたものとし、その後、ランダム媒質内を進行しながら次々に散乱を繰り返す、位置 $r_j^{(n)}$ にある粒子で時刻 $t = t_s$ に起きる n 回目の散乱によって波数ベクトル k_s の方向に出射するとする。このとき散乱光の振幅は

$$\begin{aligned} E(k_0, t_0, r_i^{(1)}; k_s, t_s, r_j^{(n)}) \\ &= A_{ij} \exp\left[j \sum_{l=0}^n \Delta r_{ij}^{(l)} \cdot k_{ij}^{(l)}\right] \\ &= A_{ij} \exp\left[j\{(k_0 \cdot r_i^{(1)} - k_s \cdot r_j^{(n)}) + \sum_{l=1}^{n-1} \Delta r_{ij}^{(l)} \cdot k_{ij}^{(l)}\}\right] \quad (1) \end{aligned}$$

で表される。ここに、

$$\Delta r_{ij}^{(l)} = r_{ij}^{(l+1)} - r_{ij}^{(l)}, \quad r_{ij}^{(n+1)} = 0, \quad r_{ij}^{(0)} = 0 \quad (2)$$

$k_{ij}^{(l)}$: l 番目の粒子通過後の波数、 $k_{ij}^{(0)} = k_0$: 入射波の波数

$r_{ij}^{(l)}$: l 番目の粒子の位置ベクトル、 $k_{ij}^{(n)} = k_s$: 出射波の波数

である。入射光の有限な広がりの中には、多数の粒子が存在するため、 n 次散乱で生じる後方散乱光の強度分布は、すべての入射位置と出射位置に対する散乱光強度の総和になる。従って後方 n 次散乱強度は、

$$\begin{aligned} I(n; k_0, t_0; k_s, t_s) \\ &= \sum_{i,j,l,m} E(k_0, t_0, r_i^{(1)}; k_s, t_s, r_j^{(n)}) \cdot E^*(k_0, t_0, r_l^{(1)}; k_s, t_s, r_m^{(n)}) \\ &= \sum_{i=l, j=m} |A_{ij}|^2 + \sum_{i=m, j=l} |A_{ij}|^2 \exp[i(k_0 + k_s) \cdot (r_i^{(1)} - r_j^{(n)})] \\ &\quad + \sum_{i \neq j, l \neq m} A_{ij} A_{lm}^* \exp[i(\phi_{ij} + \phi_{lm})] \quad (3) \end{aligned}$$

となる。上式の第1項は同一経路を通る光波による散乱光で形成されるインコヒーレント成分、第2項は同一経路を通る互いに逆方向に進む散乱光で形成される時間反転コヒーレント成分、第3項は異なる経路を進む散乱光によって形成されるスペックル成分を表しており、それぞれは図1の(a)、(b)、(c)に対応する。ここで散乱粒子はブラウン運動をしているため、粒子からの散乱光も時間的に揺らいでいる。実際に観測する強度は検出時間内で平均化されるため第3項のスペックル成分は消失する。従って観測される強度は式(2)のアンサンブル平均をとると

$$\langle I(n; k_0, t; k_s, t_s) \rangle = \sum_j \langle |A_j|^2 \rangle [1 + \cos(k_0 + k_s) \cdot (r_j^{(n)} - r_j^{(n)})] \quad (4)$$

となる。ここで $k_s = -k_0$ となる方向、すなわち入射方向の逆方向において最大になる。いま、 k_s と k_0 の間の角度を θ とすると、 $\theta > \lambda/|r_1 - r_2|$ のときコヒーレンスが壊れ、強めあう効果は弱くなる。n=2 のときの $|r_1 - r_2|$ の平均値が、散乱体間の平均距離、すなわち散乱平均自由行程 ℓ を与え、 λ/ℓ 程度の角度幅で逆反射方向の干渉の度合いは半減する。

詳細には次のように説明される。今、 $z > 0$ の半空間に散乱体があるとし、そこで散乱される光について考える。単位立体角あたり、 k_s 方向の単位面積

当たり境界を出ていくエネルギーと、入射エネルギーの比を考え、これを α と定義とすると次式のようになる [12]。

$$\alpha(\theta) = \frac{3}{8\pi} \left[1 + \frac{2z_0}{\ell} + \frac{1}{\{1 + (k_0 + k_s)_\perp \ell\}} \times \left\{ 1 + \frac{1 - \exp\{-2(k_0 + k_s)_\perp z_0\}}{(k_0 + k_s)_\perp a} \right\} \right] \quad (5)$$

ただし、 $(k_0 + k_s)_\perp \cong \frac{2\pi\theta}{\lambda}$ 、 $a = 2(1 + z_0)$ 、 $z_0 = 0.7\ell$

式(5)より散乱特性は次のような特徴を持つことがわかる。

1. $(k_0 + k_s)_\perp = 0$ 、すなわち $\theta = 0$ 、正確に入射波の逆方向では、 α はバックグラウンドの値 (θ が十分大きい場合) の2倍になる。
2. コヒーレントが維持される角度の幅は $\lambda/2\pi\ell$ である。
3. $\theta = 0$ の付近では α はほぼ直線となり、 $\alpha = \alpha_{\text{int}}(2 - 2\pi\ell + z_0|\theta|/\lambda)$ と表せる。

図2に平均自由行程を変化させた場合の散乱特性 $\alpha(\theta)$ を示す。図中の ℓ の単位は μm 、角度は逆反射方向を0としている。図2より、散乱体中での

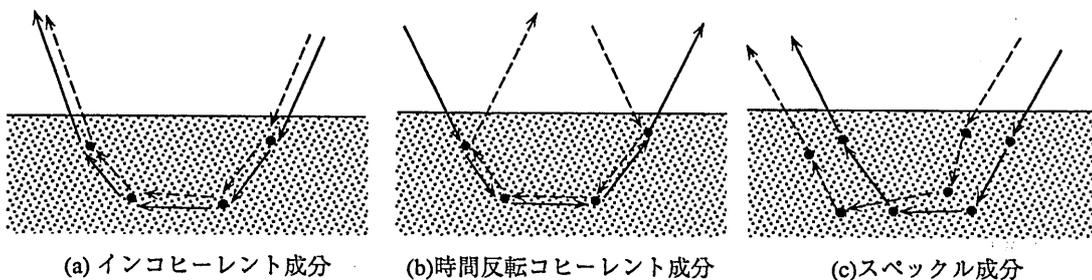


図1 後方散乱機構

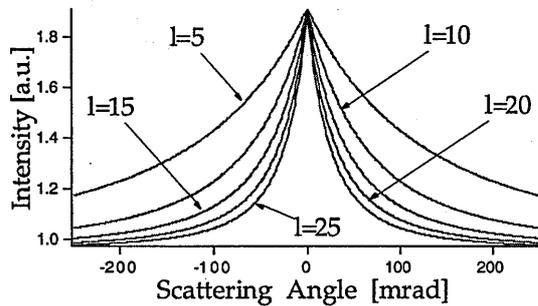


図2 平均自由行程 ℓ をパラメータとした場合の後方強調散乱特性

平均自由行程が短くなれば、半値幅は広くなることがわかる。

散乱回数も特性に影響し、散乱回数が増えれば光路長が増えるが、そのような光路長の影響は、輸送方程式を用いて理論的に求められており、次の式で表わされる [3]。

$$I(\theta) = \frac{3}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\theta) \quad (6)$$

ここに $I_n(\theta)$ は各散乱回数からの強度成分の寄与を示し、次式で表わされる。

$$I_n(\theta) = \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!!} \left\{ 1 - (k_{\perp} \ell)^2 \right\}^{n+1/2} \times \left[1 - (2n+1)!! \frac{j_n \left(\frac{a}{\ell} (1 - (k_{\perp} \ell)^2)^{1/2} \right)}{\left\{ \frac{a}{\ell} (1 - (k_{\perp} \ell)^2)^{1/2} \right\}^n} \right] \quad (7)$$

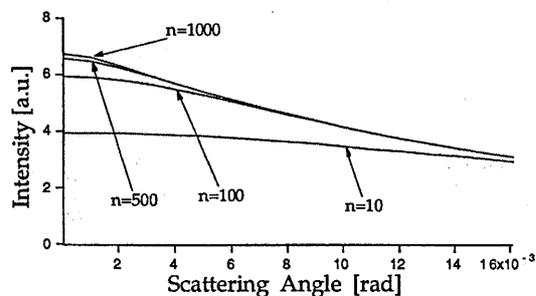


図3 散乱特性の角度依存性 (散乱回数がパラメータ)

j_n は第一種球ベッセル関数である。図3は、散乱回数をパラメータとして散乱特性の角度依存性を示しており、散乱回数が少なくなると、ピークの鋭さがなくなり、高さも低くなるのがわかる。

3. コヒーレンス度の異なる光源による 後方強調光散乱

コヒーレント光をランダム媒質に入射し、その散乱光を観測するとスペックルパターンが見られる。したがって、このままでは後方強調光散乱は観測されない。そのため通常散乱光強度の集合平均をとるが、ランダム媒質がコロイドなどのように散乱体が時間的に揺らいでいる場合、時間平均を取ればよく、一方、ランダム表面や粉体などのように静止している場合には、試料をランダムに動かし、観測結果の集合平均をとることになる。この時光源のコヒーレンスは重要な要素であり、コヒーレンスが悪くなるとスペックルパターンは消失する。ここでは光源のコヒーレンスの影響を調べるために、コヒーレンス度の異なる3種類の光源を用いて後方強調光散乱の観測を行った。

時間的に揺らぎのないランダム媒質として、図4に示すような構造を持つ液晶分散有機薄膜を用いた。これは波長オーダーの粒径を有する液晶粒子をランダムに有機材料中に分散させ、ガラス板で挟んだ構造をしており、調光ガラスとして知られている [15]。有機薄膜の厚さは $19 \mu\text{m}$ であり、液晶粒径が

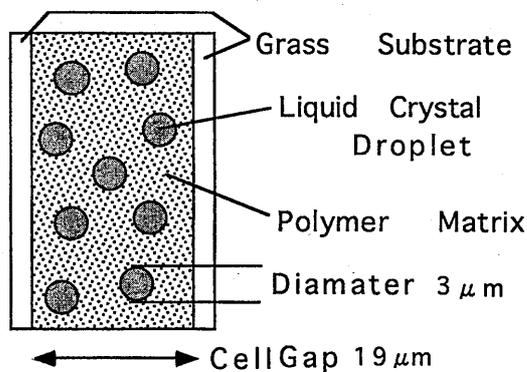


図4 液晶分散有機薄膜

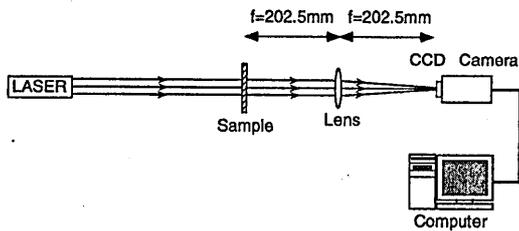


図5 スペックルパターン観測系

3.0 μm の試料を用いて測定を行った。

光源としては、He-Neレーザー（波長： $0.63\ \mu\text{m}$ 、コヒーレンス長： $20\ \text{cm}$ ）、多モード半導体レーザー（中心波長： $0.67\ \mu\text{m}$ 、コヒーレンス長： $200\ \mu\text{m}$ ）、SLD（中心波長： $0.85\ \mu\text{m}$ 、コヒーレンス長： $50\ \mu\text{m}$ ）を用いた。

まず、試料に光ビームを透過させ、そのスペックルパターンの観測を行った。図5は実験系を示しており、SLDの場合ビームを拡げて試料に入射させた。観測にはCCDカメラを用い、その受光面がレンズのフーリエ面と一致するように配置している。図6は代表的なスペックルパターンであり、散乱光強度がランダムに分布している。さらに、それぞれの光源を用いてスペックルの変化を測定した結果を図7に示す。横軸の角度は、画像データの位置に関する量から変換している。なお、縦軸の散乱光強度は平均値で規格化している。図より、SLDのようにコヒーレンス度の悪い光源ではスペックルの変化は小さくなり、平均化されることがわかる。

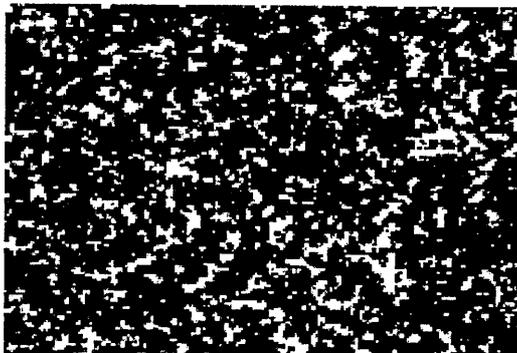
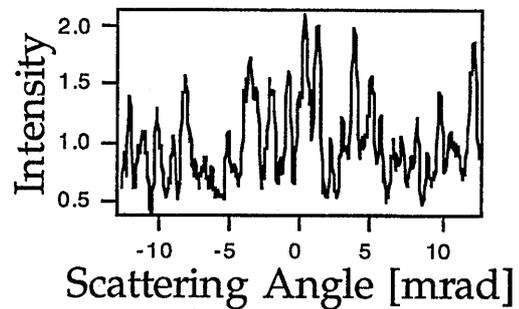
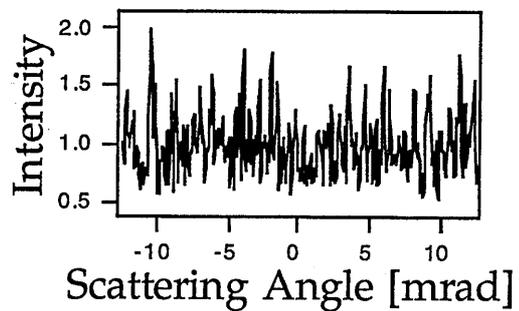


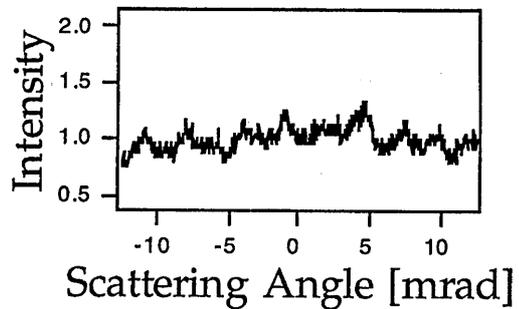
図6 スペックルパターン



(a) He-Neレーザー



(b) マルチモードレーザー



(c) SLD

図7 スペックルの散乱角度依存性

さらに、自己相関関数を利用して、スペックル斑点模様の度合と平均化回数との関係を調べた。スペックルコントラストが鋭く、斑点模様の明暗が顕著な場合、自己相関関数の変化は大きく、逆にスペックルの度合いが小さい場合、自己相関関数の変化は小さくなる。図8は、3種類の光源について、平均化操作を行わなかった場合のスペックルパターンの自己相関関数を示している。SLDではほとんど変化が

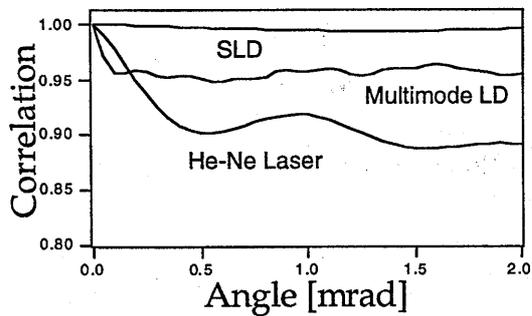


図8 光源の相違によるスペckルパターンの自己相関関数

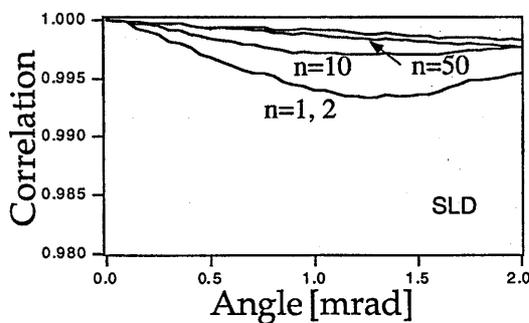
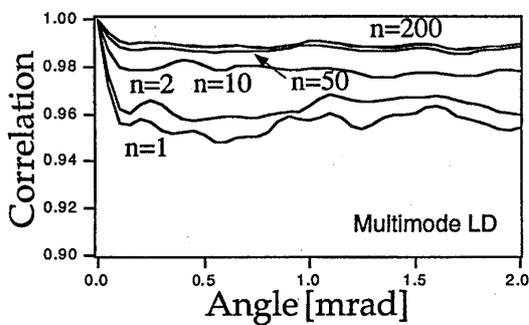
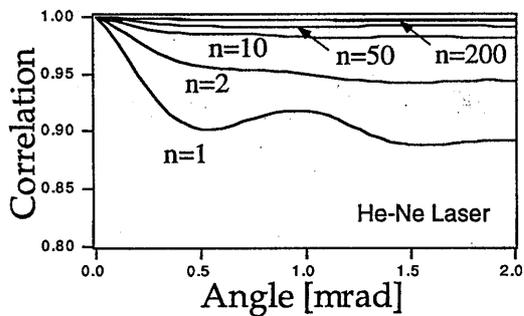


図9 スペckルパターンの平均化

なく1となり、スペckル斑点模様の度合いが小さいことがわかる。図9は、3種類の光源について、試料を可動させて平均化を行った場合の影響を調べた結果を示しており、平均回数を多くすることにより、自己相関関数の変化は小さくなり、1に近づくことがわかる。これより、SLDを用いることにより、平均化の操作を施すことなく後方強調光散乱が観測されることが予想される。

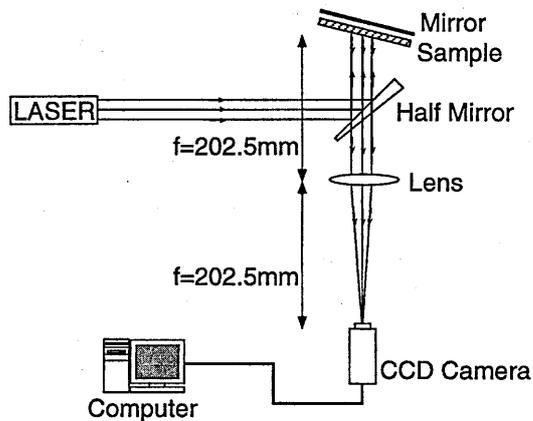


図10 後方強調光散乱の観測系

これを確かめるために図10に示す実験系を用いて後方強調光散乱の観測を行った。光源にHe-Neレーザを用い、ハーフミラーにより一部の光を試料に入射させ、その散乱パターンをフーリエ変換レンズを介してCCDカメラで観測している。なお、試料の裏面に鏡を置き、液晶分散有機薄膜と一体でランダム媒質と考える。なお、試料からの直接の反射光がカメラ受光面に入ることを避けるために、 11° 斜めから入射している。図11は、平均回数を変化させた場合の散乱の様子を示している。なお、図の縦軸はバックグラウンドの平均強度で規格化しており、横軸は散乱角度に対応し、後方散乱方向を0にしている。平均回数が少ない場合、スペckルの影響が強く、散乱光はランダムに変化しているが、平均回数を多くするに従い、スペckルによる変化が消え、後方散乱方向にピークが見えるようになる。

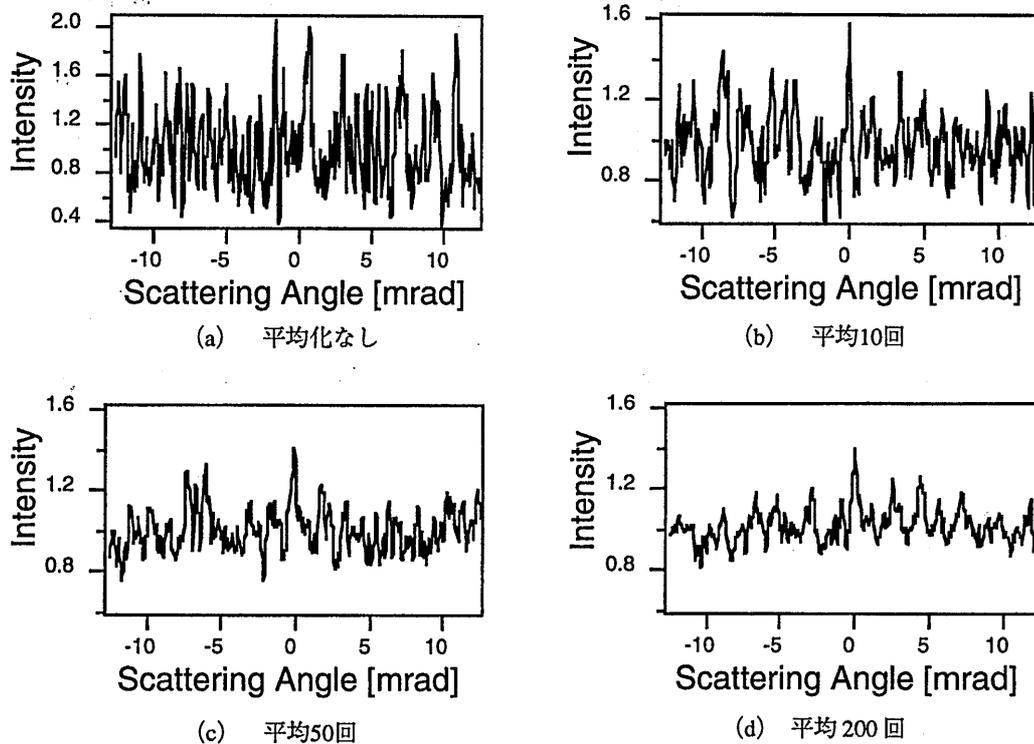


図 1.1 He-Ne レーザによる散乱パターン
(平均回数をパラメータにしている)

光源を多モード半導体レーザとした場合の結果を
図 1.2 に示す。この場合も平均回数を増加するに従
い、後方散乱方向にピークが見えるようになるが、
平均回数は He-Ne レーザの場合に比べ、少ない回数
で観測できる。

SLD を用いた場合、出射ビームは平行光ではない
ため、レンズによるコリメートを行った後、試料に
入射させた。さらに、観測される光は微弱なため、
CCD カメラの代わりに、ICCD カメラを用いた。図
1.3 は試料を可動させず、一度の観測により得られ
た散乱光強度の散乱パターンを示しており、平均化
をほどこすことなく後方強調光散乱が観測されるこ
とがわかる。

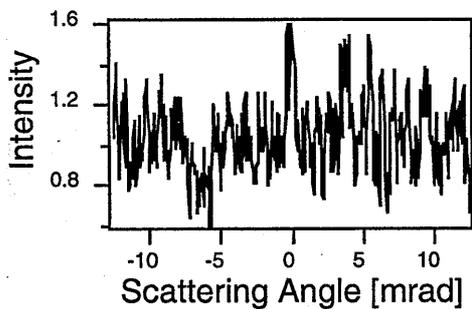
4. アルミナ粉体からの後方強調光散乱

前章より低コヒーレント光源を用いる観測手法が、
時間的に揺らぎのないランダム媒質からの後方

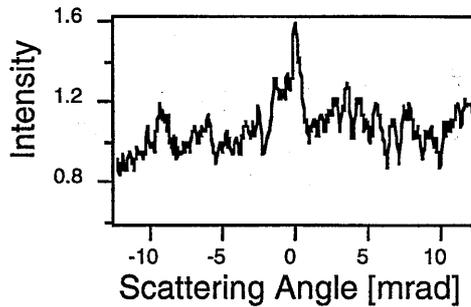
強調光散乱の観測に有効であることが示されたが、
ここでは、ランダム媒質としてアルミナ粉体を、光
源として SLD を用いた場合の後方強調光散乱を観
測し、粒径が散乱特性に与える影響を調べる。

アルミナ粉体としては、研磨剤として用いられて
いる粉末アルミナを使用した。この粉末をアセトン
中に混入してよくかき混ぜた後、スライドガラス上
に塗布、乾燥させた。なお、アルミナの粒径は、 $0.06 \mu\text{m}$ 、 $0.3 \mu\text{m}$ 、 $3 \mu\text{m}$ の 3 種類を用いた。

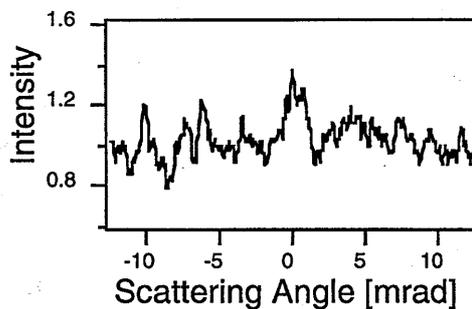
測定には図 7 の観測系を用いた。ただし、SLD を
光源としているため、一度レンズによりコリメート
した後、試料に入射させた。なお、鏡は取り除いて
いる。図 1.4 は、3 種類の粒径に対し測定した後方
散乱特性を示している。図より、粒径が大きくなる
にしたがい、ピークの幅が広がるなることがわか
る。この広がり大きさを調べるために、散乱光強
度の角度依存性を次式に示すローレンツ関数で近似



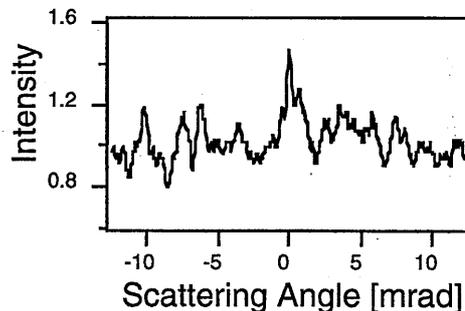
(a) 平均化なし



(b) 平均10回



(c) 平均50回



(d) 平均200回

図12 多モード半導体レーザによる散乱パターン
(平均回数をパラメータにしている)

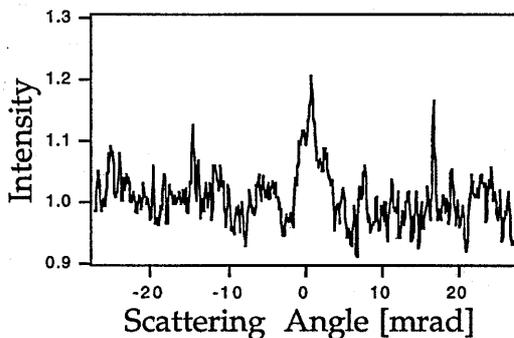


図13 SLDによる散乱パターン

し、半値全幅を求めた。

$$I = 1 + \frac{a}{\theta^2 + b^2} \quad (8)$$

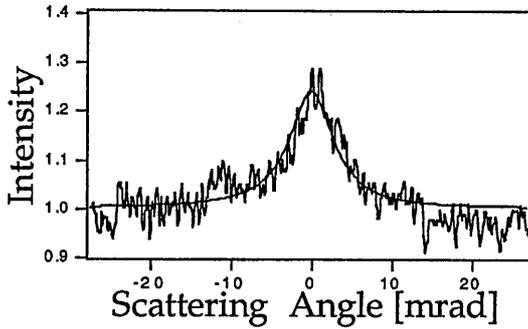
ここに、 θ は散乱角度、 a 、 b は定数であり、測定結果より求める。上式より、半値全幅は $2b$ で与えら

れる。さらに、比較のため、He-Neレーザを用いて同様の実験を行った。ただし、この場合、後方強調散乱を観測するために400回の平均を行っている。表1は、求めた半値全幅の結果を示している。

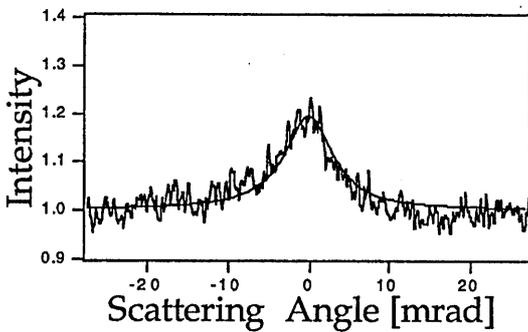
いずれの光源に対しても粒径が大きくなるにしたがい、半値全幅は広くなり、さらに光源の波長が長いと拡がることになる。これは定性的には次のようにして説明できる。後方強調散乱の特性は、図2に示したようにランダム媒質の平均自由行程によって決まり、自由行程が短くなるにしたがい、半値幅は広くなる。平均自由行程は、粉体が散乱体であるランダム媒質の場合、数密度 n と粒子1個当たりの全散乱断面積 σ によって次式で与えられる。

$$\ell = \frac{1}{n\sigma} \quad (9)$$

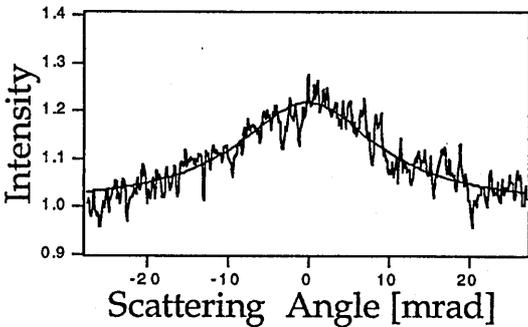
数密度は体積の逆数に比例すると考えると粒径の3



(a) 平均粒径 $0.06 \mu\text{m}$



(b) 平均粒径 $0.3 \mu\text{m}$



(c) 平均粒径 $3 \mu\text{m}$

図14 SLDを光源として用いた場合のアルミナ粉体による後方散乱特性

乗に逆比例し、一方、全散乱断面積は半径の6乗に比例する。すなわち粒径が大きくなるにしたがって平均自由行程は短くなり、散乱ピークの半値幅は広くなる。波長については、散乱断面積が波長の2乗

表1 測定した後方散乱ピークの半値全幅

平均粒径 (μm)	半値全幅 (mrad)	
	SLD	He-Ne Laser
0.06	6.6	4.2
0.3	7.3	5.4
3	21	11

に比例すると考えると、波長が長くなると平均自由行程は短くなり、ピークの半値幅は広くなる。

5. まとめ

光源のコヒーレンスが後方強調散乱に与える影響を実験的に調べた。具体的には、光源として、比較のコヒーレンス度がよいと考えられるHe-Neレーザ、多モード半導体レーザ、さらにコヒーレンス度が悪いSLDを用いて測定を行った。後方強調散乱を認識するために必要な測定回数は、He-Neレーザの場合200回程度必要であるのに対し、SLDでは平均化操作を施す必要がないことがわかった。その際、スペックルの散乱角度特性の自己相関関数による評価の有効性も確かめられた。ランダム媒質が時間的に揺らいでいる場合、時間平均をとることにより容易に観測できるが、ランダム表面あるいは粉体などのように時間的に揺らぎのない媒質による後方強調散乱特性の測定にはSLDを用いた測定は有効であることがわかる。なお、散乱特性において後方散乱方向のピーク値が理論から予測される2にならないが、ビーム径や不要な散乱光の影響など実験系の問題であると考えられる。

参考文献

- [1] B. Wen, L. Tsang, D. P. Winebrenner, and A. Ishimaru : "Dense Medium Radiative Transfer Theory : comparison with experiment and application to microwave remote sensing and polarimetry," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 28, 46-59 (1990) .
- [2] B. L. Lindner, and R. G. Isaacs : "Remote sensing of

- clouds by multispectral sensors, " *Appl. Opt.* **32**, 2744-2746 (1993) .
- [3] 岩井 俊昭, 岡本 卓, 朝倉 利光: "光散乱現象の研究と展開, " *応用物理*, **63**, 14-22 (1994).
- [4] Yu. N. Barabanenkov, Yu. A. Kravtsov, S. M. Rytov, and V. I. Tatarskii : " Status of the theory of propagation of waves in a randomly inhomogeneous media," *Sov. Phys. Vsp.* **13**, 551-580 (1971) .
- [5] M. Nieto-Vesperinas, and C. Dainty (eds.) : *Scattering in Volumes and Surfaces*, North-Holland, Amsterdam (1990) .
- [6] David K.Lynch and William Livingston : *Color and Light in Nature*, Cambridge University Press. p.6 (1995) .
- [7] W. van Haeringen, and D. Lenstra : *Analogies in Optics and Micro Electronics*, Kluwer Academic Publishers, Norwell (1990) .
- [8] Y. Kuga, and A. Ishimaru : "Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles," *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 831-835 (1984) .
- [9] P. E. Wolf, and G. Maret : "Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media," *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2696-2699 (1985) .
- [10] R. Vreeker, M. P. van Albada, R. Sprik, and A. Lagendijk : "Femtosecond time-resolved measurements of weak localization of light," *Phys. Lett. A* **132**, 51-54 (1988) .
- [11] O'Donnell and E.R.Mendez : "Experimental study of scattering from characterized random surfaces," *J.Opt.Soc.Am.A* **4**, 1194-1205 (1987) .
- [12] E. Akkermans, P. E. Wolf, and R. Maynard : "Coherent backscattering of light by disordered media : Analysis of the peak line shape," *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1471-1474 (1986) .
- [13] F. C. Mackintosh, and S. John : "Coherent backscattering of light in the presence of time-reversal-noninvariant and parity-nonconserving media," *Phys. Rev. B* **37**, 1884-1897 (1988) .
- [14] C. E. Mandt, and L. Tsang : "Backscattering enhancement from a random distribution of large discrete spherical scatters with a size distribution," *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 2246-2251 (1992) .
- [15] N.Kinugasa, Y.Yano, A.Takigawa, and H.Kawahara : "Characteristics of light scattering in Nematic droplet-polymer films," *Proc.SPIE*, 1665 (1992) .

Coherent Effects in Media Bounded by Rough
Surfaces

粗面境界をもつ媒質におけるコヒーレント効果

V. Freilikher

富来利加

(Bar-Ilan University, Israel)

1996年9月13日

輻射科学研究会

(大阪大学 工学部)

Coherent Effects in Media Bounded by Rough Surfaces

V. Freilikher
Jack and Pearl Resnick Institute of Advanced Technology
Department of Physics Bar-Ilan University
Ramat-Gan, 52 900 Israel

August 15, 1996

Abstract

The scattering of scalar and electromagnetic waves from random media that support (due to the presence of boundaries) discrete components in their excitation spectrum is studied analytically and numerically. Enhanced backscattering and the memory effect are investigated for random interfaces which support surface polaritons. It is shown that the enhanced backscattered peak appears as a result of competition between two mechanisms: multiple scattering of a surface wave as it propagates along the interface, and its leakage into the upper half space. The latter is an important feature of surface scattering, since it shifts the poles of the scattering amplitude off the real wave number axis, and eliminates in a natural way the divergence of second moments of the scattered field. New results, valid when there is no real absorption in the medium, are obtained for the scattered intensity as a function of angles near the retroreflection direction. It is shown that the shape of the peak near this direction exhibits a strong dependence on the geometry of the surface. The angular correlation function of the amplitudes of two waves with different angles of incidence is calculated. The possibility of using the memory effect for the determination of statistical characteristics of a random surface is discussed. We also study wave scattering from, and transmission through, a thin film with a random surface or volume scatterers in the case when the thickness of the film is small in comparison to the mean free path of the surface or guided waves it

supports. We predict analytically, and demonstrate numerically, the existence of peaks in the angular distribution of the intensities of both the reflected and transmitted waves. These peaks occur in directions defined by degenerate time reversal symmetry in a scattering system with a discrete spectrum of eigenmodes.

1 Introduction

A great deal of attention has been paid recently to the multiple scattering of classical waves and quantum particles in media with volume and surface disorder [1,2]. The interest in this problem was stimulated by the fact that in disordered media, notwithstanding the seemingly absolutely random nature of the scattering (either volume or surface), under some conditions there occurs either complete (one-dimensional (1D) systems) or partial (2D and 3D systems) coherence of the multiply-scattered fields. This coherence, which is a consequence of time-reversal symmetry, leads to a constructive interference that gives rise to such effects as strong localization [3], fluctuational waveguiding [4], weak localization [5], enhanced backscattering [6], the memory effect [7], etc. Until recently, in the investigations of these phenomena attention was directed mainly on infinite systems that support a continuous spectrum of propagating (or evanescent) waves only. However, in bounded random media it is often the case that the random interaction of fields corresponding to the discrete and continuous parts of the spectrum, as well as regular interference caused by the presence of surfaces, can be significant. The additional coherence arising from the latter source leads to new effects absent in infinite systems.

In this paper we show analytically and numerically that the angular dependences of the intensity of waves scattered from and transmitted through a random bounded system with a discrete spectrum of excitations exhibit some peculiar features in the shape of the enhanced backscattering peak, and acquire (due to degenerate time-reversal symmetry) additional satellite peaks.

The outline of this paper is as follows. In Section I the intensity enhancement in the retroreflection direction is studied for scalar waves scattered by a random interface which has a bound state (surface wave). In Section II the angular distribution of the scattered

intensity and the angular correlation function of scattering amplitudes are calculated for electromagnetic waves incident on a slightly rough dielectric surface. Consequently, in Section III we investigate theoretically and numerically the scattering diagram for a random dielectric slab placed on a perfectly reflecting substrate in the case when the thickness of the slab is small in comparison with the mean free path of the surface or guided waves it supports. Wave scattering from, and transmission through, a film containing a random distribution of volume scatterers is considered in Section IV. A discussion of the results obtained and the conclusions drawn from them are presented in Section V.

I. Backscattering enhancement from a random impedance interface with surface polaritons. Scalar case.

Enhanced backscattering from a random surface is caused by the interference of multiply scattered fields, and depends on the fact that, in spite of the random nature of the scattering, in the absence of inelastic processes some trajectories may retain complete phase coherence. If the characteristic sizes of the roughness—the rms height of the surface and the correlation length of the roughness - are large compared to the wavelength of the incident field, multiple scattering is caused by reflections of beams from different randomly oriented parts of the surface [8-10]. In the opposite case of a slightly perturbed interface, which is typical for SHF and UHF remote sensing of the environment, multiple scattering is usually disregarded. This largely stems from the fact that a wave, after having been scattered once from a slightly rough surface into the upper half-space, propagates in a homogeneous medium without further interaction with the scattering boundary. In order to understand where the backscattering enhancement comes from in this case, one has to take into account that diffraction from surface irregularities also makes possible the resonant excitation of surface waves (SW) [6,11-13]. These waves propagate along the boundary, interact repeatedly with the roughness and, on being transformed into volume waves, give rise to enhanced diffuse scattering in the retroreflection direction. The localization of surface waves and the effective absorption caused by their transformation into volume waves are the main factors which form the field in the retroreflection direction. It is significant that in the presence of fluctuations a surface

wave (SW) is not a pure two-dimensional object, since it is connected with the upper volume through scattering.

We show in this paper that under some assumptions this connection may be taken into account by means of an effective absorption of SW. A closed two-dimensional Schrödinger equation with a complex-valued potential is obtained for the SW wave function. The real part of the random potential leads to resonant scattering of the SW along the surface, while the imaginary part describes its nondissipative attenuation caused by the transformation of the SW into volume waves. This attenuation is indispensable in the propagation of SW on real surfaces. It is a very important distinctive feature, which differentiates a SW on a random surface from a volume wave in a random medium, and gives rise to some characteristic properties of enhanced backscattering. The shape and magnitude of the enhanced backscattering peak are now dictated by the characteristic relation between the SW attenuation length l_{at} and the SW scattering mean free path l_{sc} . In the case of a rough dielectric surface with a large refractive index the inequality $l_{at} \ll l_{sc}$ holds even for absolutely nonabsorbing media, which means that multiple scattering of SW is not very significant, and the enhanced backscattered peak is completely described by the second order approximation. In the opposite case $l_{at} \gg l_{sc}$ the interference of multiply scattered SW is the determining factor, and has to be taken into account carefully.

We will demonstrate this with the example of a scalar field scattered from the plane $z = 0$, whose surface impedance H is taken to be

$$H = -\eta_0 + \eta(\mathbf{r}),$$

where $\eta(\mathbf{r})$ is a random function with zero average value $\langle \eta(\mathbf{r}) \rangle = 0$. In the case of a slightly rough surface defined by $z = \zeta(\mathbf{r})$, the impedance fluctuations $\eta(\mathbf{r})$ can be expressed through the surface profile function $\zeta(\mathbf{r})$ and its derivatives [13].

The Green function of the problem (point source field) obeys the Helmholtz equation

$$\Delta G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + k_0^2 G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (1.1)$$

where

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}, z), \quad k_0 = \omega/c,$$

and the impedance boundary condition

$$\frac{dG}{dz} = HG, \quad z = 0. \quad (1.2)$$

Using Green's theorem, a closed integral equation for the field on the surface

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)|_{z=z_0=0} \quad (1.3)$$

is easily obtained,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d^2\mathbf{r}'' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \eta(\mathbf{r}'') G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'), \quad (1.4)$$

whose Fourier representation takes the form

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = G_0(\mathbf{p}) [\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \int d^2\mathbf{p}' \eta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') G(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0)]. \quad (1.5)$$

Here

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; 0, 0), \quad (1.6)$$

and G_0 is the Green's function of the unperturbed ($\eta(\mathbf{r}) = 0$) problem, which in the \mathbf{p} -representation is given by

$$G_0(p) = \frac{1}{i\sqrt{k_0^2 - p^2 + \eta_0}}, \quad p = |\mathbf{p}|. \quad (1.7)$$

If $\eta_0 > 0$, $G_0(p)$ has a pole at real $p = p_s$ (discrete spectrum), where

$$p_s = \sqrt{k_0^2 + \eta_0}, \quad (1.8)$$

which corresponds to surface waves (SW) with wave number p_s , propagating without attenuation in different directions along the surface $z = 0$. Note that the continuous spectrum, which corresponds to the region $|\mathbf{p}| < k_0$, describes volume waves (VW) which, after reflection from the surface, propagate in the halfspace $z > 0$ at angles $\phi = \arccos p/k_0$, measured from the plane $z = 0$. Therefore, we have two well-defined regions in momentum space. The first is the circular region $|\mathbf{p}| < k_0$, which corresponds to the phase volume of waves propagating above the interface in free space. The second is the circle $|\mathbf{p}| = p_s > k_0$, which

corresponds to surface waves propagating along the interface with wave number p_s and decaying exponentially in the direction normal to the interface. The inhomogeneity of the interface causes scattering between different volume modes inside the region $|\mathbf{p}| < k_0(VW \leftrightarrow VW)$, as well as between surface waves (SW \leftrightarrow SW). What is most important is that the random impedance also mixes waves of different nature, causing excitation of a surface wave by the incident bulk wave (VW \rightarrow SW), and the leakage of a surface wave into free space (SW \rightarrow VW). This interaction leads to a broadening of the discrete spectrum, and smears the boundary of the region of volume waves in phase space. If the scattering is weak enough, i.e. if the characteristic width $\Delta p \sim l^{-1}$ (l is the SW mean free path) is much smaller than the distance $p_s - k_0$ between the two different regions in momentum space, it is plausible to consider them as well distinguished and weakly affected by each other. Hence, we can introduce the matrix Green function [14,15]

$$\hat{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \begin{pmatrix} G_{ss}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') & G_{sv}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\ G_{vs}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') & G_{vv}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

where the subscripts indicate to which regions of wavenumbers the arguments belong (the first subscript indicates the location of the first argument, the second indicates the location of the second one). Since the scattering potential $\eta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ enters into Eq. (1.5) only as a product with $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, the representation (1.9) dictates the same structure for η . Therefore, we introduce, instead of $\eta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ in Eq. (1.5), four functions $\eta_{ss}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, $\eta_{sv}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, $\eta_{vs}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, and $\eta_{vv}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, which are peaked near different argument values and govern different scattering processes (this procedure is similar to the so-called resonant scattering approximation [16], well known in 1D problems). The equation for G may be written in matrix form as follows

$$\hat{G}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \hat{G}_0(p)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \hat{G}_0(p) \int d^2 \mathbf{p}'' \hat{\eta}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') \hat{G}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}'), \quad (1.10)$$

where

$$\hat{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_{ss} & \eta_{sv} \\ \eta_{vs} & \eta_{vv} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

\hat{G}_0 is a diagonal matrix in this representation, with G_{oss} equal to

$$G_{oss}(p) \equiv G_{os}(p) = \frac{2\eta_0}{p_s^2 - p^2 + i0}. \quad (1.12)$$

We shall use the symbolic form of Eq. (1.5),

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{\eta} \hat{G}. \quad (1.13)$$

As will be shown below, the scattering indicatrix near the retroreflection direction can be expressed through the second moments of G_{ss} only. To derive an equation for G_{ss} let us rewrite Eq. (1.13) in the form:

$$\hat{G}_0^{-1} = \hat{G}^{-1} + \hat{\eta}, \quad (1.14)$$

and introduce a new, diagonal, matrix Green function \hat{G}^d , which obeys the equation

$$\hat{G}_0^{-1} = (\hat{G}^d)^{-1} + \hat{\eta}^d, \quad (1.15)$$

where $\hat{\eta}^d$ is the diagonal part of the matrix $\hat{\eta} = \hat{\eta}^d + \hat{\eta}^{nd}$.

Subtraction of Eq. (1.15) from Eq. (1.14) leads to the equation

$$(\hat{G}^d)^{-1} = \hat{G}^{-1} + \hat{\eta}^{nd}, \quad (1.16a)$$

which is equivalent to

$$\hat{G} = \hat{G}^d + \hat{G}^d \hat{\eta}^{nd} \hat{G}. \quad (1.16b)$$

If we take the “ss” and “vs” matrix elements of Eq. (1.16), eliminate G_{vs} , and then use Eq. (1.15) for G_s^d , we find the equation satisfied by G_{ss} ,

$$G_{ss} = G_{0s} + G_{0s}(\eta_{ss} + V)G_{ss}, \quad (1.17)$$

where

$$V = \eta_{sv} G_v^d \eta_{vs}. \quad (1.18)$$

To proceed we will calculate V to the leading order in the scattering potential

$$V = \eta_{sv} G_{ov} \eta_{vs}, \quad (1.19)$$

which means that a single scattering is considered to be weak enough. Since G_{ov} is the regular part of the unperturbed Green function, it is smooth on a scale of the order of k_0 .

Therefore, under the condition $k_0 l_{cor} \ll l$ (l_{cor} is the correlation length of the fluctuations $\eta(\mathbf{r})$), we write

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \eta_{sv} G_{ov} \eta_{sv} = \int d^2 \mathbf{p}_1 \eta_{sv}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) G_{ov}(\mathbf{p}_1) \eta_{vs}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}') = \\ &= \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \int d^2 \mathbf{p}_1 G_{ov}(\mathbf{p}_1) W(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \Sigma_v(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (1.20)$$

where $W(\mathbf{p})$ is the Fourier transform of the correlation function of the random part of the impedance. The integral equation which corresponds to the coordinate representation of Eq. (1.17), may be written in the differential form

$$\frac{I}{2\eta_0} (\Delta + p_s^2) G_{ss}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\eta_{ss}(\mathbf{r}) + \Sigma_v) G_{ss}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.21)$$

Thus, the derivation of the SW Green function is reduced to the solution of a two-dimensional problem with a scattering potential η_{ss} and an effective attenuation $Im\Sigma_v$ which is of nondissipative nature, but is connected with the transformation of surface waves into outgoing volume waves. The real dissipation in the media, if it exists ($Im\eta_0 = \gamma \neq 0$), should be taken into account by replacing Σ_v by $(\Sigma_v - i\gamma)$.

An analogous result can be obtained in the situation where there are no surface waves on the unperturbed interface, but they appear due to scattering from irregularities, so that the corresponding pole arises in the averaged Green function only. In such a case Eq. (1.13) takes the form:

$$\hat{G} = \langle \hat{G} \rangle + \langle \hat{G} \rangle (\hat{\eta} - \hat{\Sigma}) \hat{G}, \quad (1.22)$$

and one can easily obtain Eq. (1.21).

Consider now the plane wave scattering problem. The intensity of the diffusely scattered field $I_{diff}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0)$ can be expressed through the Green function $G(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0)$ as

$$I_{diff}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) = 4\alpha(q)\alpha(q_0) \langle |G(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0)|^2 \rangle_{diff}, \quad (1.23)$$

with

$$\langle |G(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0)|^2 \rangle_{diff} = |G(q)|^2 \Gamma_{\mathbf{q}\mathbf{q}_0}(\mathbf{k} = 0) |G(q_0)|^2. \quad (1.24)$$

Here \mathbf{q}_0 and \mathbf{q} are the projections on the plane $z = 0$ of the wave vectors of the incident and scattered waves, respectively, and $\alpha(q) = \sqrt{k_0^2 - q^2}$. The function $\Gamma_{\mathbf{q}\mathbf{q}_0}(\mathbf{k})$ is the reducible

vertex function which obeys the Bethe-Salpeter equation

$$\Gamma_{\mathbf{q}\mathbf{q}_0}(\mathbf{k}) = \gamma_{\mathbf{q}\mathbf{q}_0}(\mathbf{k}) + \int d^2p \gamma_{\mathbf{q}\mathbf{p}}(\mathbf{k}) G(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2) G^*(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2) \Gamma_{\mathbf{p}\mathbf{q}_0}(\mathbf{k}), \quad (1.25)$$

where $\gamma_{\mathbf{q}\mathbf{q}_0}(\mathbf{k})$ is the irreducible vertex function, $G(p)$ is the averaged Green function which has a smooth “volume” part $G_v(p)$ and pole contribution $G_s(p)$,

$$G_s(p) = \frac{1}{G_s^{-1} - \Sigma(p)}, \quad (1.26)$$

and Σ is the mass operator calculated with the Green function (1.7). Its imaginary part represents the sum of two integrals over different regions of wavenumbers,

$$Im\Sigma = Im\Sigma_v + Im\Sigma_s. \quad (1.27)$$

In this result $Im\Sigma_v$ is given by an integral containing the smooth Green function $G_{ov}(p)$ over the wavenumbers $|\mathbf{p}| < k_0$:

$$Im\Sigma_v = \int_{|\mathbf{p}'| < k_0} d^2\mathbf{p}' W(\mathbf{p} - \mathbf{p}') ImG_{ov}(p'), \quad (1.28)$$

while $Im\Sigma_s$ is given by an integral containing the part of the Green function that possesses the SW pole

$$Im\Sigma_s = \int d^2\mathbf{p}' W(\mathbf{p} - \mathbf{p}') ImG_{0s}(p') \quad (1.29)$$

which, for example, for delta-correlated Gaussian fluctuations $\langle \eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}') \rangle = W\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ has the form

$$Im\Sigma_s = 2\pi\eta_0 W.$$

It is interesting to note that if we introduce the notations $\nu_v/2 = -Im\Sigma_v$ and $\nu_s/2 = -Im\Sigma_s$, the pole part of the averaged Green function can be written in the form

$$G_s = \frac{1}{E_s - p^2/2\eta_0 + i\nu/2}, \quad (1.30)$$

which coincides with the single-particle Green function of an electron, with $\eta_0, p_s, v_s = p_s/\eta_0$, and $E_s = p_s^2/2\eta_0$ being the effective mass, Fermi momentum, velocity, and energy, respectively. The essential difference is that in our case the scattering frequency ν is made up

of two parts $\nu = \nu_s + \nu_v$ which affect the two-particle Green function (scattered intensity) in different ways. The frequency ν_s is connected with $SW \leftrightarrow SW$ elastic scattering from the random potential η_{ss} and may result in SW localization, whereas ν_v comes from the imaginary part of the potential Σ_v and, therefore, leads to the effective attenuation of SW. Since multiple scattering of volume waves is negligible, so that multiple scattering must be taken into account for SW only, $G(p)$ in (1.25) may be replaced with its pole part $G_s(p)$. If we express G through a new function ϕ by the equation

$$\Gamma_0(\mathbf{k}) = \gamma_{\mathbf{q}\mathbf{q}_0}(\mathbf{k}) + \int d^2 p \gamma_{\mathbf{q}\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{k}) \gamma_{\mathbf{p}\mathbf{q}_0}(\mathbf{k}), \quad (1.31)$$

the arguments of ϕ can be taken in the vicinity of $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = p_s$, and instead of (1.25) we obtain

$$\phi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{k}) = G_s(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2) G_s^*(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2) \{ \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \int d^2 p'' \gamma_{\mathbf{p}\mathbf{p}''}(\mathbf{k}) \phi_{\mathbf{p}''\mathbf{p}'}(\mathbf{k}) \}. \quad (1.32)$$

One can now see that $\phi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{k})$ is connected with G_{ss} as follows:

$$\langle G_{ss}(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2, \mathbf{p}' + \mathbf{k}/2) G_{ss}^*(\mathbf{p} - \mathbf{k}'/2, \mathbf{p}' - \mathbf{k}'/2) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \phi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{k}). \quad (1.33)$$

Therefore, Eqs. (1.23), (1.24), (1.25), and (1.32) express the scattered intensity I_{diff} through the second moment of the SW Green function. In the leading approximation in $(p_s l)^{-1}$ ($l = v_s/\nu$) we find

$$\phi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{k}) = \frac{i}{N} \frac{\Delta G_p \Delta G_{p'}}{\nu_v + D k^2}, \quad (1.34)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta G_p &= G_s(p) - G_s^*(p), & N &= \int d^2 \mathbf{p} \Delta G_p \\ D &= i\nu_s^2/M, & \Delta \Sigma_{\mathbf{p}} &= \Sigma(\mathbf{p}) - \Sigma^*(\mathbf{p}), & \mathbf{m} &= \mathbf{p}/p, \end{aligned} \quad (1.35)$$

and

$$M_{ij} = \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{p} d^2 \mathbf{p}' m_i \Delta G_p \gamma_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \Delta G_{p'} m_j - \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{p} m_i \Delta G_p \Delta \Sigma_p m_j. \quad (1.36)$$

Substituting (1.34) in (1.35) and using the Ward identity

$$\Delta \Sigma_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = \int d^2 \mathbf{p}' \gamma_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{k}) \Delta G_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}),$$

we obtain

$$G_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{k}) = \gamma_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(\mathbf{k}) + \frac{i}{N} \frac{\Delta\Sigma_{\mathbf{p}} \Delta\Sigma_{\mathbf{p}'}}{\nu_v + Dk^2}. \quad (1.37)$$

For a delta-correlated random process we have $\Delta\Sigma_{\mathbf{p}} = W N$ and

$$\Gamma_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{k}) = \gamma_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(\mathbf{k}) + W \frac{\nu_s}{\nu_v + Dk^2}, \quad (1.38)$$

which gives

$$I_{diff}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) = 4\alpha(\mathbf{q})\alpha(\mathbf{q}_0)|G(\mathbf{q})|^2 \left\{ \gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) + W \frac{\nu_s}{\nu_v} \right\} |G(\mathbf{q}_0)|^2, \quad (1.39)$$

where $\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) = \gamma_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0}(\mathbf{k} = 0)$. In the case of a slightly rough dielectric surface with a large dielectric constant ϵ ($\eta_0^2 \sim 1/\epsilon \ll 1$), SW attenuation caused by the leakage into the volume is strong compared to SW \rightarrow SW scattering [17], and the inequality $\nu_v \gg \nu_s$ holds.

It is clear that under this condition multiple scattering is suppressed by the effective attenuation, and $\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0)$ in (1.39) may be expanded in powers of $\nu_s/\nu_v \ll 1$ up to the second order only, which leads to the following form of the enhanced backscattering peak

$$\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) = W + W \frac{\nu_s}{\nu_v} \left(1 + (\mathbf{q} + \mathbf{q}_0)^2 l_{at}^2 \right)^{-1/d}, \quad (1.40)$$

where $l_{at} = \nu_s/\nu_v$ is the leakage mean free path, and d is the dimensionality of the surface roughness.

If the leakage of SW into the upper halfspace is weak ($\nu_v \ll \nu_s$), the multiple scattering of SW strongly affects the scattering into the retroreflection direction, and an infinite series of diagrams for $\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0)$ must be summed. To do this we use the self-consistent theory of localization [18], which suggests the following form for the irreducible vertex function

$$\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) = W + W \frac{\nu_s}{\nu_v + D(\mathbf{q} + \mathbf{q}_0)^2}, \quad (1.41)$$

where the diffusion coefficient D is the solution of the self-consistent equation

$$\frac{D_0}{D} = 1 + \frac{p_s^{2-d}}{md} \int_0^{Q_0} \frac{Q^{d-1} dQ}{\nu_v + DQ^2}, \quad (1.42)$$

where $Q_0 \approx l_s^{-1} = \nu_s/\nu_s$ is an upper cut-off parameter, $D_0 = \nu_s l_s/d$ is the bare diffusion coefficient, and d is equal to 1 or 2 depending on whether the correlation function depends

on one or two coordinates, respectively. Therefore, the diffuse scattered intensity can be written in the form

$$I_{diff}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) = 4\alpha(q)\alpha(q_0)|G(q)|^2 \left\{ W \frac{\nu_s}{\nu_v + D(\mathbf{q} + \mathbf{q}_0)^2} + W \frac{\nu_s}{\nu_v} \right\} |G(q_0)|^2. \quad (1.43)$$

The first term in brackets in Eq. (1.43) describes an enhanced backscattering peak of the same magnitude as the background, and of width $(\Delta\theta)^2 = \nu_v/Dq_0^2$.

In the 1D case the ratio $t = D/D_0$ depends on one dimensionless parameter $\xi = \sqrt{\nu_v/\nu_s}$, and Eq. (1.42) takes the form

$$d = 1 - \frac{\sqrt{t}}{\xi} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{t}}{\xi} \right). \quad (1.44)$$

Since $\xi \ll 1$ the ratio t given by Eq. (1.44) is equal to $t = a^2\xi^2$, where a is the solution of $1 = a \tan^{-1} a$. This leads to the following form of the peak

$$\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) = W \frac{\nu_s}{\nu_v} \frac{1}{1 + a^2 l_s^2 (\mathbf{q} + \mathbf{q}_0)^2}. \quad (1.45)$$

In the 2D case analogous calculations yield

$$\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) = \frac{\nu_s}{\nu_v} \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi^2} (\mathbf{q} + \mathbf{q}_0)^2 l_s^2} \quad (\xi > e^{-2p_s l}). \quad (1.46)$$

II. Scattering of electromagnetic waves from an impedance random surface

The distinctive feature of an electromagnetic field is the presence of a crosspolarized scattered component in which the enhanced backscattering peak is more pronounced (and hence it is more easily measurable) than in the scalar case. This stems from the fact that if the vectors of the incident and scattered waves lie in the same plane, the amplitude of the crosspolarized component itself is proportional to the second order diagrams, which means that the enhanced backscattering peak exists in the leading order and it is not screened by the singly-scattered field.

Consider, following [19], a plane electromagnetic wave incident from vacuum on a random, slightly rough surface $z = \zeta(x, y)$ of a medium with the dielectric constant ϵ . If the roughness is weak enough, the intensity of the diffusely scattered field, $I_{diff}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; i, j)$, may be written in the form

$$I_{diff}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; i, j) = 4\alpha(k_0)\alpha(k)\langle |G_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)|^2 \rangle_{diff}. \quad (2.1)$$

Here $G_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ is the two-dimensional Fourier transform of the Green function $G_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')|_{z=z'=0}$, which obeys the integral equation

$$G_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = G_i^{(0)}(k) \{ \delta_{ij} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \int d^2 \mathbf{p}'' V_{ik}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') G_{kj}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}') \} \quad (2.2)$$

with the effective potential $V_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = v_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \zeta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, where

$$v_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \begin{pmatrix} pp' - \frac{1}{c}(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}')\alpha(p)\alpha(p') & -\frac{\omega}{c}\alpha(p)[\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}']_z \\ -\frac{\omega}{c}[\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}']_z\alpha(p') & \epsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}') \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

In Eq. (2.3) $\hat{\mathbf{p}}$ is the projection of the corresponding wave vector on the unperturbed surface which has unit length, and $\zeta(\mathbf{k})$ is the Fourier transform of the random surface profile function,

$$\langle \zeta(\mathbf{p}) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(\mathbf{p}) \zeta(\mathbf{p}') \rangle = W(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}').$$

The unperturbed Green functions have the forms

$$G_1^{(0)}(k) = \frac{i\epsilon}{\epsilon\alpha_0(k) + \alpha(k)} \quad G_2^{(0)}(k) = \frac{i}{\alpha_0(k) + \alpha(k)}$$

$$\alpha_0(k) = \sqrt{k_0^2 - k^2} \quad \alpha(k) = \sqrt{\epsilon k_0^2 - k^2}.$$

The indices i, j specify the state of polarization: p-polarization ($i, j = 1$) or s-polarization ($i, j = 2$).

Equation (2.2) has a form typical for scattering problems. Therefore the standard Bethe-Salpeter equation for the function $\langle |G_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)|^2 \rangle_{diff}$ can be derived. The averaged p-polarized function $G_1(k)$ in this equation can be approximated by a simple polar form,

$$G_1(|\mathbf{k}|) = \frac{C}{|\mathbf{k}| - k_s - i\Delta_{tot}} \quad C = \frac{\epsilon\sqrt{-\epsilon}}{1 - \epsilon^2}, \quad (2.4)$$

where $k_s = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon/(\epsilon + 1)}$ is the surface wave number.

The self-energy may be represented in the form $\Delta_{tot} = \Delta + \Delta_\epsilon$, where Δ_ϵ describes the surface wave damping due to the loss mechanisms in the dielectric medium (to simplify the discussion we will assume that $\Delta_\epsilon = 0$), whereas Δ is connected with the scattering of the surface wave by the surface roughness, and in its turn is the sum of two contributions,

$$\Delta = \Delta_s + \Delta_v. \quad (2.5)$$

This representation reflects the fact that there are two kinds of scattering processes: surface wave-surface wave scattering, and the transformation of surface waves into outgoing volume waves. The influence of these processes on the averaged Green function manifests itself in the appearance of the additional damping terms Δ_s and Δ_v , respectively. The effects of those two on second moments are completely different. Surface wave-surface wave scattering is elastic, the interference of multiply scattered waves is significant, and may lead to surface wave localization with the characteristic length

$$l_s = \frac{1}{2\Delta_s}, \quad \Delta_s = 2\pi C^2 k_s \left(\frac{|\epsilon| + 1}{|\epsilon|} \right)^2 \int d^2\mathbf{p} W(\mathbf{k}_s - \mathbf{p}) \delta(k_s - |\mathbf{p}|) v_{11}^2(\mathbf{k}_s, \mathbf{p}). \quad (2.6)$$

The conversion of surface polaritons into volume waves is a single-scattering process, in the sense that if the roughness is weak enough, the volume wave propagates after scattering in free space with no further interaction with the surface. Such a leakage leads to an effective attenuation of the surface polaritons on the scale

$$l_{at} = \frac{1}{2\Delta_v}, \quad (2.7a)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_v = & \pi C^2 k_s \left(\frac{|\epsilon| + 1}{|\epsilon|} \right)^2 \int_{|\mathbf{p}| < \omega/c} d\mathbf{p} W(\mathbf{k}_s - \mathbf{p}) \\ & \times \left(\frac{\alpha_0(p)}{\alpha_0^2 + |\alpha(p)/\epsilon|^2} v_{11}^2(\mathbf{k}_s, \mathbf{p}) - \frac{\alpha_0(p)}{\alpha_0^2(p) + |\alpha(p)|^2} v_{12}^2(\mathbf{k}_s, \mathbf{p}) \right). \end{aligned} \quad (2.7b)$$

As was shown in Section II, if $\Delta_v \ll \Delta_s$, the multiple scattering of surface waves is significant, and an infinite series of diagrams has to be summed. For real surfaces, which are usually investigated by radar or laser (sea surface, ice, top-soil, metal surface), the opposite

inequality $\Delta_v \gg \Delta_s$ holds. In this case the contribution of n^{th} order diagrams is proportional to $(\Delta_s/\Delta_v)^n$, and therefore no more than second-order diagrams are important for backscattering enhancement.

To obtain the second order approximation for the averaged intensity of the cross-polarized ($p \rightarrow s$) scattered field, the second iteration of the Bethe-Salpeter equation, corresponding to Eq. (2.2) has to be calculated. The shape of the enhanced backscattered peak depends strongly on the dimensionality of the roughness. In the case of a two-dimensional isotropic surface whose correlation function is given by

$$W(p) = \left(\frac{\pi \sigma^2 a^2}{4} \right) \exp(-p^2 a^2/4), \quad (2.8)$$

from Eq. (2.1) we obtain for $I_{eb_s}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_0; p, s)$

$$\begin{aligned} I_{eb_s}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; p, s) &= 4\alpha_0(k)\alpha_0(k_0)|G_1(k)|^2|G_2(k_0)|^2 \\ &\times 4\pi^2 C^2 k_s |\alpha(k_s)|^2 \frac{(|\epsilon|+1)^4}{|\epsilon|^6} \\ &\times \left(\frac{\pi \sigma^2 a^2}{4\lambda} \right)^2 e^{-\frac{a^2}{2}(k_0^2+k_s^2)} \frac{1}{2\Delta + \sqrt{(2\Delta)^2 + (k-k_0)^2}} \\ &\times \left(\frac{1}{2} |\alpha(k_0)\alpha(k)|^2 \frac{2\Delta}{2\Delta + \sqrt{(2\Delta)^2 + (k-k_0)^2}} (|\epsilon|kk_s)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

In the one-dimensional case, where the surface profile function ζ depends on only one coordinate, a new angular parameter ϕ appears, which is the angle between the generators of the surface and the plane of incidence. If the plane of incidence is perpendicular to the generators of the surface ($\phi = 0$), cross-polarized components are absent. If $\phi \neq 0$ but small enough ($\phi \ll \Delta/k_0 \ll 1$), the angular distribution of the scattered intensity near the retroreflection direction is given by

$$\begin{aligned} I_{eb_s}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; p, s) &= \phi^2 4\alpha_0(k)\alpha_0(k_0)|G_1(k)|^2|G_2(k_0)|^2 \\ &\times 4\pi C^2 \frac{(|\epsilon|+1)^4}{|\epsilon|^6} |\alpha(k_s)|^2 \left(\frac{\pi \sigma^2 a^2}{4\lambda} \right)^2 \exp\left(-\frac{a^2}{2}(k^2+k_s^2)\right) \frac{2\Delta}{(2\Delta)^2 + (k-k_0)^2} \\ &\times (|\alpha(k)\alpha(k_s)|^2 - (|\epsilon|kk_s)^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

If it is possible to measure simultaneously the angular dependences of the amplitudes of the diffusely scattered signals for two incident waves incident from different directions \mathbf{k}_0 and

\mathbf{k}'_0 , the correlation function $\langle \delta A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; p, s) \delta A^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'_0; p, s) \rangle$ may be obtained, which provides additional information about the random interface. The function $\delta A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; p, s)$ is defined as the difference $A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; p, s) - \langle A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; p, s) \rangle$, where $A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; p, s)$ is the amplitude of a p-polarized wave scattered into the angle defined by \mathbf{k} , when the incident wave is s-polarized and its angle of incidence is defined by \mathbf{k}_0 . Evaluating this correlation function in the case of an isotropic surface, we obtain the expression

$$\langle \delta A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; p, s) \delta A^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'_0; p, s) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'_0 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0) F(k_0 - k', k, k_0) \Phi(k, k_0), \quad (2.11)$$

where $\phi(k, k_0)$ is a smooth function of its arguments,

$$\begin{aligned} \Phi(k, k_0) &= 4\alpha_0(k)\alpha_0(k_0) \\ &\times G_1(k)G_2^*(k)G_2(k_0)G_1^*(k_0)4\pi C^2 \frac{(|\epsilon| + 1)^4}{|\epsilon|^6} \left(\frac{\pi\sigma^2 a^2}{4\lambda} \right)^2 |\alpha(k_s)|^2 \exp\left(-\frac{a^2}{4}(2k_s^2 + k_0^2 + k^2)\right), \end{aligned}$$

and the function F contains the enhanced backscattering peak

$$F(k_0 - k', k, k_0) = (2\Delta)^2 \int_0^\pi \frac{d\theta \sin^2 \theta}{(2\Delta)^2 + (k_0 - k')^2 \cos^2 \theta} \exp\left(-\frac{a^2}{2}k_s(k - k_0) \cos \theta\right) \quad (2.12)$$

$$\times (|\alpha(k_0)\alpha(k_s)| \cos \theta + |\epsilon|k_0k_s)(|\alpha(k)\alpha(k_s)| \cos \theta - |\epsilon|kk_s). \quad (2.13)$$

It is easy to show that when the directions of incidence and observation of both waves are close to the normal to the mean surface, and the inequalities

$$|k - k_0| \ll k_0, (k_s a^2)^{-1} \quad (2.14)$$

hold, Eq. (2.12) coincides with the intensity distribution (2.10). Although the angular distribution function always has a maximum at $k_0 = k'$, one can see from Eq. (2.12) that the pronounced correspondence between the correlation function and the enhanced backscattering peak claimed in [20] exists only in the rather special case (2.13). Nevertheless, the correlation function (2.12), being an experimentally measurable quantity, contains a considerable body of scattering information, and may be used for the retrieval of surface statistical parameters.

Equation (2.12) shows that the amplitudes of waves scattered in the two directions \mathbf{k} and \mathbf{k}' are correlated only if the angle between \mathbf{k} and \mathbf{k}' is exactly equal to the angle between the incident wave vectors \mathbf{k}_0 and \mathbf{k}'_0 , which is a manifestation of the memory effect, which is well known in the volume scattering problem [7,21]. It stems from the assumption of the statistical spatial homogeneity of the random surface. Therefore, a nonzero correlation for $\mathbf{k} - \mathbf{k}' \neq \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0$ (if it exists), demonstrates definitely the nonhomogeneity of the surface under investigation.

III. Scattering from a perfectly reflecting thin film with a random surface

A distinguishing feature of a thin film is the fact that it possesses a discrete spectrum of excitations. To understand the physical origin of the new coherent scattering effects resulting from the discrete spectrum, we present now a rather simple explanation of how the enhanced backscattering peak arises in the scattering from the random interface considered in Sec. I. In this case the constructive interference of the random scattered fields can take place in the direction opposite to that of the incident waves, since only in this direction for each random path ABCD (Fig. 1a) is there a time-reversed DCBA path which has exactly the same phase factor. In order that there be this equality of phases, the velocities of propagation from C to B and from B to C must be equal.

In the case of a bounded system the situation is more complicated. If the refractive index $n = \sqrt{\epsilon}$ inside the slab ($0 < z < d$) is larger than that outside (in the case of the Schrödinger equation this corresponds to a potential well), then the z -component k_z of the wave vector \mathbf{k} is quantized inside the slab. The field corresponding to the discrete part of the spectrum is the sum of eigenmodes. Each eigenmode, being a standing wave in the z -direction, propagates along the layer with its own (quantized) phase velocity $v_n = vk/k_n$, (v and k are the velocity and wavenumber in the infinite dielectric medium, and $k_n = \sqrt{k^2 - k_{zn}^2}$).

In contrast to infinite media, each trajectory ABCD (Fig. 1b) is now N -fold degenerate (N is the number of discrete modes, which is proportional to $k_0 d$, where k_0 is the wavenumber in vacuum), in the sense that on the segment BC there are N “channels” with different

velocities. The phase difference for two channels $(ABCD)_n$ and $A' CBD'_m$ (they differ in the velocities on the segment BC) equals

$$\Delta\phi_{nm} = (\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{sc}) \cdot \mathbf{r}_{BC} + |\mathbf{r}_{BC}|(k_n - k_m).$$

One can see that constructive interference ($\Delta\phi_{nm} = 0$) can occur not only near the retro-reflection angle ($n = m, \mathbf{k}_{sc} = -\mathbf{k}_{in}$), which is the case in infinite media where $k_n = k_m = k$, but also in other directions $\mathbf{k}_{sc} \neq -\mathbf{k}_{in}$ for which $\Delta\phi_{nm} = 0$ for some $n \neq m$.

To calculate analytically the form of the latter peaks, let us consider, as was done in [22], a plane wave with wave vector \mathbf{k}_{in} incident from vacuum ($z > d$) on a randomly rough scattering slab $0 < z < d$ deposited on a planar, perfectly conducting surface (Fig. 2). The Green function $G_0(\mathbf{p})$ (see Sec. II) has in this case (due to the finiteness of the slab in the z -direction) a set of poles $\{p_n\}$ corresponding to size quantization. In the case of weak scattering $l \gg (\Delta p_n)^{-1}$ (l is the mean free path; Δp_n is the characteristic distance between the poles p_n), the averaged Green function $G(\mathbf{p})$ ($G(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \langle G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \rangle$) also has a well-emphasized pole structure, and can be represented in the form

$$G(\mathbf{p}) = G_{reg}(\mathbf{p}) + G_{sing}(\mathbf{p}), \quad (3.1)$$

where $G_{reg}(\mathbf{p})$ is a smooth function related to the continuous part of the spectrum, and $G_{sing}(\mathbf{p})$ describes the behavior of $G(\mathbf{p})$ in the vicinity of the poles,

$$G_{sing}(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\frac{p^2 - p_n^2}{C_n} - \Sigma(\mathbf{p})}, \quad (3.2)$$

where $\Sigma(\mathbf{p})$ is the mass operator of Eq. (1.5), and the coefficients C_n are defined in terms of the unperturbed Green function $G_0(\mathbf{p})$ by

$$C_n = \left(\frac{\partial}{\partial(p^2)} G_0^{-1}(\mathbf{p}) \right)_{p=p_n}.$$

To allow the result to be physically clear without burdening it with undue details, we will restrict further consideration to the case of one-dimensional disorder. Under this assumption the equation for $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ takes the form (1.5) with $\eta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ being replaced by the Fourier-transform of the random potential $v(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = v(p_x - q_x)$. When calculating the imaginary part of the mass operator, $Im\Sigma$, we assume, for simplicity, that the potential is a Gaussian

δ -correlated random process, which means that $\langle v(p)v(p') \rangle = W\delta(p+p')$. Treating W as a small parameter, it is then possible to calculate the intensity of the diffusely scattered waves I_{diff} given by Eq. (1.23) by summing the ladder and maximally crossed diagrams using the pole approximation (3.2), which results in

$$I_{diff}(p_{sc}, p_{in}) = 4\alpha_0(p_{sc})4\alpha_0(p_{in})|G^2(p_{sc})G^2(p_{in})|W \left\{ \frac{\nu}{\nu_v} + \frac{M(Q)}{1-M(Q)} \right\}, \quad (3.3)$$

where

$$\begin{aligned} Q &= p_{in} + p_{sc}, \\ M(Q) &= W \int dp G(p + \frac{Q}{2}) G^*(p - \frac{Q}{2}) \\ &= \pi \frac{W}{\nu} \left(\sum_n \frac{a_n}{1 + (\frac{Q}{\nu_{nn}})^2} + \sum_{n \neq m} \frac{2[(a_n)^{-1} + (a_m)^{-1}]^{-1}}{1 + (\frac{Q+p_n-p_m}{\nu_{nm}})^2} \right); \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \nu &= -Im\Sigma = \nu_s + \nu_v, \\ \nu_s &= -W \int dp Im G_{sing}(p), \quad \nu_v = -W \int dp Im G_{reg}(p), \\ \nu_{nm} &= \frac{\nu}{2}(a_n + a_m), \quad a_n = \frac{C_n}{p_n}. \end{aligned}$$

The angular distribution of the scattered intensity $I_{diff}(p_{sc}p_{in})$ exhibits peaks at the maxima of the function $M(Q)$. When $|Q| \gg \nu_n$ and $|Q + p_n - p_m| \gg \nu_{nm}$ the function $M(Q) \ll 1$, and I_{diff} is a smooth function of the scattering angle and is determined by the first term in curly brackets of Eq. (3.3) (ladder approximation).

In the vicinity of the retroreflection direction ($|Q| \lesssim \nu_n, |Q + p_n - p_m| \gg \nu_{nm}$), the main contribution to M comes from the first term in (3.4), which is equal to $M \simeq \frac{\pi W}{\nu} \Sigma a_n = \pi \frac{\nu_s}{\nu}$, and describes the well-known enhanced backscattering peak.

When the direction of scattering is close to one of the angles determined by the equation $|Q| = |p_n - p_m| (n \neq m)$, the first term in $M(Q)$ can be neglected, whereas the second one contributes significantly and, being equal to $\frac{\pi W a_n a_m}{\nu_{nm}}$, provides (in accordance with the qualitative considerations presented above) well-pronounced additional peaks in the scattered intensity.

For example, in the case of an s-polarized wave scattered from a slab with a slightly rough interface $z = d + \zeta(x)$, the potential $v(p, q)$ can be represented in the form [23]

$v(p, q) = k_0^2(\epsilon - 1)\zeta(p - q)$. For this case numerical calculations were carried out to illustrate the predictions made above. The results are shown in Fig. 3 and display two additional, well-pronounced peaks in the intensity of waves scattered from a two-mode slab.

It should be pointed out that scattering features displayed in the second moments of the reflected field are also expected to be observed in the intensity-intensity correlation function as well. To demonstrate the fact that features of reflection from the bounded disordered media predicted above manifest themselves in the intensity-intensity correlation function, we consider the so-called $C^{(1)}$ function, which is related to the square of the amplitude-amplitude correlation function,

$$C^{(1)}(p, p_0; p', p'_0) = \delta(p - p_0 - p' + p'_0)G(p)G^*(p')F(p, p_0; p', p'_0)G(p_0)G^*(p'_0). \quad (3.5)$$

Here the function $F(p, p_0; p', p'_0)$, calculated in the same approximation as I_{diff} has been, can be expressed through the function M introduced above

$$F(p, p_0; p', p'_0) = W \left\{ \frac{\nu}{\nu_v} + \frac{M(p - p')}{1 - M(p - p')} + \frac{M(q)}{1 - M(q)} \right\}, \quad q = \frac{p + p_0 + p' + p'_0}{2}. \quad (3.6)$$

It is clear from (3.6) that the intensity-intensity correlation function has well-pronounced peaks when $|p - p'| \approx |p_n - p_m|$ and $|p + p_0 + p' + p'_0| \approx 2|p_n - p_m|$.

It is important to stress that the peaks described above originate from the interference of multiply-scattered random fields, and do not coincide with the regular angular oscillations of the reflection coefficient of the unperturbed layer.

To evaluate the results obtained in this Section, we have carried out numerical simulations of the scattering of s-polarized light from the structure depicted in Fig. 2 [24]. In these simulations the incident light was represented by a beam of finite width, and the surface profile function was taken to be a stationary Gaussian random process with zero average and a Gaussian correlation function. The calculations were carried out on the basis of equations derived in detail in Ref. [25]. The wavelength of the incident light was equal to $\lambda = 632.8nm$, and the dielectric constant of the film at this wavelength was assumed to be $\epsilon = 2.6896$, which is the wavelength appropriate to photoresist. In order that the scattering structure support only two guided waves for these values of λ and ϵ in the absence of the surface roughness, we found that the mean thickness of the film d has to satisfy the inequalities $365.1 nm < d < 608.5nm$.

The length L of the rough surface used in the simulations was $L = 25\,600\text{nm}$. The ratio L/g assumed in this work, where g is the half-width of the intercept of the incident beam with the mean scattering plane, was $L/g = 4$. The length L was divided into $N = 400$ subintervals of equal length in solving the integral equations arising in the scattering theory presented in [25] by converting them into matrix equations. In the calculation of the contribution of the mean differential reflection coefficient from the incoherent component of the scattered light, averages over 1000 realizations of the surface profile were used. The angle of incidence assumed in these calculations was fixed at $q_0 = 0^\circ$, i.e., normal incidence was assumed, and the mean thickness d of the dielectric film was varied. This choice of experimental conditions was made because in the numerical simulations, which take multiple-scattering of all orders into account, it was found that as the angle of incidence is given increasing positive values, the satellite peak at the scattering angle $q_s = q_-$, which is the larger of the two angles q_+ , q_- in magnitude, washes out rapidly, presumably due to shadowing effects, and only the satellite peak at $q = q_+$ is observed. At normal incidence both satellite peaks are clearly visible in the intensity of the diffusely scattered waves, and as the thickness of the film is decreased, the scattering angles $q_s = \pm(q_+ - q_-)$ at which they occur increase in magnitude due to the changes in the values of the longitudinal wave numbers $q_{+,-}$. In our calculations values of d equal to 580 and 500 nm were used. The satellite peaks for these choices of d should occur at scattering angles given by $q_s = 13.3^\circ$ and -13.3° , and $q_s = 17.7^\circ$ and -17.7° , respectively.

In Fig. 4 we present our results in the case that the surface roughness is characterized by the rms height $d = 110\text{nm}$ and the correlation length $a = 260\text{nm}$. For a mean film thickness of $d = 580\text{nm}$ (Fig. 4a), in addition to the enhanced backscattered peak at $q_s = 0^\circ$ two well-defined satellite peaks, symmetrically placed with respect to the retroreflection direction, are observed. The vertical dashed lines indicate the positions of the satellite peaks predicted by the theory above. When the thickness of the film is decreased to 500 nm (Fig. 4b) the positions of the two satellite peaks are shifted to larger values of the scattering angle as expected. The small difference between the values of the scattering angles at which the satellite peaks occur in the numerical simulation results and the values predicted theoretically are presumably due to the fact that the numerical simulations take into account the renormalization of the values of q_+ and q_- caused by the surface roughness,

while the values $q_{+,-}$ used in obtaining the predicted values of q_s were calculated in the absence of the roughness.

We also note that the angular width of the enhanced backscattering peak, as defined by the distance between the subsidiary minima separating the subsidiary maxima from the enhance backscattered peak, does not change when d is changed. This is as expected, since the angular width of the enhanced backscattering peak is determined by the ratio λ/a , and thus should not change when only d is changed.

IV. Scattering from a thin film with volume disorder

We shall consider now the scattering from and transmission through a free-standing slab with a random distribution of volume scatterers. It was found in [26] that the intensity of the diffuse component of light transmitted through a thin rough metal film has a narrow peak at the angle of transmission corresponding to the antispecular direction. This peak is the analog in transmission of the enhanced backscattering of p-polarized light from a randomly rough metal surface. In this Section we show that in the case of scattering from a slab additional peaks are also present in the intensity of the transmitted field if the thickness of slab is of the order of a few wavelength of the incident wave.

To calculate analytically the intensity of diffusely scattered and transmitted waves let us introduce the Green function of the problem through the equation

$$[\Delta_R + (\epsilon_0 + \delta\epsilon(\mathbf{R}))k_0^2]G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = -2\pi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}'), \quad R = \{\mathbf{r}, z\}, \quad (4.1)$$

with boundary conditions that require the continuity of G and $\frac{\partial G}{\partial z}$ across the boundaries $z = \pm L/2$. We assume that $\epsilon_0 > 1$ inside the slab and equals 1 outside it. The intensity of the diffusely reflected and transmitted waves can be expressed through the Fourier transform $G_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(z, z')$ of the Green function with respect to the coordinates x, y (\mathbf{p}, \mathbf{p}' are the projections of the wave vectors on the plane $z = 0$) as follows

$$I_{\text{diff}}^R(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(L/2, L/2), \quad I_{\text{diff}}^T(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(-L/2, L/2), \quad (4.2)$$

where

$$I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(z, z') = 4\alpha_0(p)\alpha_0(p')\{ |G_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(z, z')|^2 - |(G_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(z, z'))|^2 \}, \quad (4.3)$$

$$\alpha_0(q) = \sqrt{k_0^2 - q^2}, \quad \alpha(q) = \sqrt{\epsilon_0 k_0^2 - q^2},$$

$\langle \dots \rangle$ denotes an average over the ensemble of random scatterers, and the superscripts R and T denote the reflected and transmitted intensities, respectively.

For simplicity, we assume the random part of the permittivity $\delta\epsilon(\mathbf{R})$ to be independent of one of the longitudinal coordinates: $\delta\epsilon(\mathbf{R}) = \delta\epsilon(x, z)$. In this case, the boundary conditions assumed above describe the propagation of s-polarized light. Equation (2.1) can be rewritten in the following form [27]

$$G_{pp'}(z, z') = G_p^0(z, z')\delta(p - p') + \int_{-L/2}^{L/2} dz_1 \int dq G_p^0(z, z_1) v_{p-q}(z_1) G_{qp'}(z, z'), \quad (4.4)$$

where

$$\begin{aligned} G_{pp'}(z, z') &= \int \frac{dx dx'}{(2\pi)^2} \exp(-ipx + ipx') G(x, z; x', z'), \\ v_p(z) &= k_0^2 \int dx e^{-ipx} \delta\epsilon(x, z). \end{aligned}$$

The unperturbed Green function G_p^0 is given by

$$G_p^0(z, z') = \frac{1}{w_0(p)} \begin{cases} \psi_p^+(z) \psi_p^-(z') & z \geq z' \\ \psi_p^+(z') \psi_p^-(z) & z' \geq z \end{cases}, \quad (4.5)$$

where

$$\begin{aligned} \psi_p^\pm(z) &= e^{\pm i\alpha(p)z} + \rho(p) e^{\mp i\alpha(p)z}, \\ \rho(p) &= \frac{\alpha(p) - \alpha_0(p)}{\alpha(p) + \alpha_0(p)} e^{i\alpha(p)L}, \\ w_0(p) &= -2i\alpha(p)[1 - \rho^2(p)]. \end{aligned}$$

G_p^0 as a function of p has a set of poles $\{p_n; n = 1 \dots, N = \lfloor \sqrt{\frac{\epsilon_0 - 1}{\pi}} k_0 L + 1 \rfloor\}$, $k_0 \leq p_N < \dots < p_1 < k_0 \sqrt{\epsilon_0}$. Each pole corresponds to the wavenumber of an eigenmode that propagate inside the film. One can easily check that at such points $\rho(p_n) = (-1)^{n-1}$.

Averaging the Green function over the ensemble of random scatterers we find that $\langle G_{pp'}(z, z') \rangle = G_p(z, z')\delta(p - p')$, where $G_0(z, z')$ satisfies the equation

$$G_p(z, z') = G_p^0(z, z') + \int_{-L/2}^{L/2} dz_1 G_p^0(z, z_1) S(z_1) G_p(z_1, z'), \quad (4.6)$$

with $\Sigma(z)$ the mass-operator. We assume $v_p(z)$ to be a Gaussian δ -correlated random process so that

$$\langle v_p(z)v_q(z') \rangle = W\delta(p+q)\delta(z-z'), \quad -L/2 \leq z \leq L/2. \quad (4.7)$$

Then, in the leading approximation, $\Sigma(z)$ may be written as

$$\Sigma(z) = iW \int dq \operatorname{Im} G_q^0(z, z), \quad -L/2 \leq z \leq L/2. \quad (4.8)$$

$\Sigma(z)$ consists of two terms, which correspond to the discrete and continuous parts of the spectrum. The first one describes scattering between eigenmodes, and the second one corresponds to the leakage into free space, which plays the role of effective losses (see Sec. I),

$$\Sigma(z) = \Sigma_d(z) + \Sigma_c(z), \quad (4.9)$$

where

$$\Sigma_c(z) = 2iW \int_0^{k_0} dq \operatorname{Im} G_q^0(z, z), \quad \Sigma_d(z) = i\pi W \sum_{n=1}^N a_n \phi_n^2(z), \quad (4.10)$$

$$\phi_n(z) = |\psi_{p_n}^\pm(z)|, \quad a_n = \frac{C_n}{p_n}, \quad C_n^{-1} = \left(\frac{\partial w_0(p)}{\partial p^2} \right)_{p=p_n}.$$

If the film is sufficiently thin (so that its thickness L is much smaller than the mean free path, $L \ll l$), the disorder does not change the z, z' -dependences of G_p^0 significantly, but leads to a shift of the poles, which may be calculated in the Born approximation,

$$G_p(z, z') = \frac{w_0(p)}{w_0(p) + \Delta(p)} G_p^0(z, z'), \quad (4.11)$$

where $\Delta(p)$ is the lowest order correction to $w_0(p)$. In what follows we will need G_p in the vicinity of the poles defined by the zeros of the denominator of (4.11) (pole approximation), which has the form

$$G_p(z, z') = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n(z)\phi_n(z')}{\frac{p^2 - p_n}{C_n} - i\nu_n}, \quad (4.12)$$

where

$$\nu_n = -\operatorname{Im}\Delta(p_n) = \nu_n^c + \nu_n^d, \quad \nu_n^{c(d)} = \operatorname{Im} \int_{-L/2}^{L/2} dz \phi_n^2(z) \Sigma_{c(d)}(z). \quad (4.13)$$

On introducing the reducible vertex function G we can write $I_{pp'}(z, z')$ as

$$I_{pp'}(z, z') = 4\alpha_0(p)\alpha_0(p') \int dz_1 dz_2 dz'_1 dz'_2 G_p(z, z_1) G_p^*(z, z'_1) \\ \times G_{pp'}(z_1, z'_1; z_2, z'_2) G_{p'}(z_2, z') G_{p'}^*(z'_2, z'). \quad (4.14)$$

Here each G_p can be replaced by G_p^0 , because all poles p_n of the unperturbed Green function occur when $p > k_0$, and do not correspond to propagating waves. We calculate $G_{pp'}(z_1, z'_1; z_2, z'_2)$ by summing the ladder (second term in Eq. (4.15)) and maximally crossed (third term in Eq. (4.15)) diagrams,

$$G_{pp'}(z_1, z'_1; z_2, z'_2) = W\delta(z_1 - z_2)\delta(z_1 - z'_1)\delta(z_2 - z'_2) + \\ + F_{Q=0}(z_1, z_2)\delta(z_1 - z'_1)\delta(z_2 - z'_2) + F_Q(z_1, z_2)\delta(z_1 - z'_2)\delta(z_2 - z'_1), \quad (4.15)$$

where $Q = p + p'$ and $F_Q(z_1, z_2)$ satisfies the equation

$$F_Q(z, z') = W^2 M_Q(z, z') + W \int_{-L/2}^{L/2} dz_1 M_Q(z, z_1) F_Q(z_1, z'), \quad (4.16)$$

and the kernel $M_Q(z, z')$ is given by

$$M_Q(z, z') = \int dp G_{p+Q/2}(z, z') G_{p-Q/2}^*(z, z') = \sum_{m,n} \phi_n(z) \phi_m(z) K_{nm}(Q) \phi_n(z') \phi_m(z'), \quad (4.17)$$

where

$$K_{nm}(Q) = \pi \frac{a_n a_m}{\nu_n} \left[1 + \left(\frac{Q + p_n - p_m}{\nu_{nm}} \right)^2 \right]^{-1}, \\ \nu_{nm} = \frac{1}{2} (a_n \nu_n + a_m \nu_m). \quad (4.18)$$

One can see that the explicit form of $M_Q(z, z')$ in the case of a thin layer allows solving Eq. (4.18) straightforwardly but, when a leakage frequency ν_n^c is large in comparison to the intermode scattering frequency ν_n^d , the contribution of multiple scattering is negligible, and Eq. (4.18) can be solved by iteration, leading to the following expression for Γ ,

$$\Gamma_{pp'}(z_1, z'_1; z_2, z'_2) \approx W\delta(z_1 - z_2)\delta(z_1 - z'_1)\delta(z_2 - z'_2) + \\ + W^2 M_Q(z_1, z_2)\delta(z_1 - z'_2)\delta(z_2 - z'_1). \quad (4.19)$$

The first term here corresponds to the Born approximation, while the second one is a contribution from the first of the maximally crossed diagrams. Substituting (4.20) into (4.15)

and (4.2)-(4.3), we obtain

$$I_{diff}^{R(T)}(p, p') = W F(p)F(p')\{\mu^{R(T)}(p, p') + W \sum_{m,n} K_{nm}(p + p')\eta_{nm}^{R(T)}(p, p')\}, \quad (4.20)$$

where

$$\begin{aligned} F(p) &= 2\alpha_0(p)|\psi_p^+(L/2)/w_0(p)|^2, \\ \mu^{R(TP)}(p, p') &= \int_{-L/2}^{L/2} dz |\psi_p^{-(+)}(z)\psi_{p'}^-(z)|^2, \\ \eta_{nm}^{R(T)}(p, p') &= \left| \int dz \psi_p^{-(+)}(z)\phi_n(z)\phi_m(z)[\psi_{p'}^-(z)]^* \right|^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

and $K_{nm}(Q)$ is given by Eq. (4.18). Results for the reflected and transmitted intensities $I_{diff}^{R(T)}(p_{sc}, p_{in})$ are depicted in Fig. 4.

The angular distribution of the scattered intensity, $I_{diff}^{R(T)}(p_{sc}, p_{in})$, exhibits sharp peaks at the maxima of the function $K_{nm}(Q)$. When $|Q + p_n - p_m| \gg n_{nm}$, the second term in curly brackets in Eq. (4.20) is negligible, and the scattered intensity $I_{diff}^{R(T)}$ is a smooth oscillating function of the scattering angle. In the vicinity of directions satisfying the equation $Q = p_{sc} + p_{in} = 0$ ($|Q| \leq \nu_{nn}$), the dominant contribution to the sum in Eq. (4.20) comes from the diagonal ($n = m$) terms. In this case Eq. (4.20) describes the well-known enhanced backscattering peak and its complementary peak in the transmitted field. When the direction of scattering occurs in the vicinity of one of the angles defined by the equation $|Q| = |p_i - p_k|$ ($i \neq k$), the main contribution to the sum in Eq. (4.21) comes from the two terms with $n = i, m = k$ and $n = k, m = i$, providing, in agreement with our qualitative arguments, satellite peaks in the scattered intensity.

It should be noted that similar features are expected to be observed in the intensity-intensity correlation function as well. Its calculation can be carried out just as was done in Section III.

The result is Eq. (4.21) is valid as long as $L \ll l$. When the film is sufficiently thin that the inequality $\alpha L \lesssim 1$ holds, where α is a characteristic value of the transverse wave vector inside the film, $\alpha \sim \alpha(p)$, the scattered intensity exhibits well-pronounced peaks in both the reflected and transmitted fields. When the thickness of the film is so large that the inequality $\alpha L \lesssim 1$ is violated, all peaks in the transmitted field disappear, while peaks in

the reflected intensity still exist. When the number of modes N is large, but the inequality $L \ll l$ still holds, the amplitudes of the satellite peaks in the reflected intensity become at least N times smaller than the amplitude of the backscattering peak. In the case when L is larger than l , the form of the backscattering peak, which is the only one that exists, can be analyzed by the methods of the diffusion approximation.

V. Conclusions

In conclusion, we note that the scattering of a wave incident from outside on a random system containing discrete components in its spectrum of excitations is determined by the multiple scattering, interference, and dissipation of guided-wave modes (corresponding to the discrete spectrum) excited inside the system by the incident field. The angular distribution of the intensity of the waves scattered from or transmitted through such a system is determined by the number N of these modes, and if N is fixed has qualitatively the same structure independently of the nature of the scatterers (volume or surface) and the nature of the waves comprising the discrete spectrum. In the case when the eigenmode is a surface wave on a randomly rough interface, the corresponding scattering problem is reduced to the solution of a 2D Schrödinger equation with an effective random complex potential. Its imaginary part can be traced to the roughness-induced leakage of the surface wave of the energy into the upper volume. This leakage takes place on each real surface and removes in a natural way the unphysical divergence which appears if it is neglected. The shape of the enhanced backscattered peak depends strongly on the dimensionality and anisotropy of surface fluctuations. In the case of a random dielectric or metallic thin slab, degenerate time-reversal symmetry gives rise to peaks in the angular distribution of the intensity of both reflected and transmitted waves.

Acknowledgments

This work was supported in part by the United States - Israel Binational Science Foundation Grant No. 92-00248, by Army Research Office Grant No. DAAL 03-92-G-0239, and by

the Consejo Superior de Investigaciones Cientificas. It was also supported by the Univeristy of California, Irvine, through an allocation of computer time.

References

1. *Scattering in Volumes and Surfaces*, edited by M. Nieto-Vesperinas and J. C. Dainty (North-Holland, Amsterdam, 1990).
2. *Localization and Propagation of Classical Waves in Random and Periodic Structures*, edited by C. M. Soukoulis (Plenum, New York, 1993).
3. I. M. Lifshitz, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur, *Introduction to the Theory of Disordered Systems* (Wiley, New York, 1988).
4. V. D. Freilikher and S. A. Gredeskul, *J. Opt. Soc. Am.* **A7**, 868 (1990).
5. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. Licciardello, and T. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 673 (1979).
6. A. R. McGurn, A. A. Maradudin, and V. Celli, *Phys. Rev.* **B31**, 4866 (1985).
7. I. Freund, M. Rosenbluh, and R. Berkovits, *Phys. Rev.* **B39**, 12 403 (1989).
8. K. A. O'Donnell and E. R. Méndez, *J. Opt. Soc. Am.* **A4**, 1194 (1987).
9. M.-J. Kim, J. C. Dainty, A. T. Friberg, and A. J. Sant, *J. Opt. Soc. Am.* **A7**, 569 (1989).
10. J. M. Soto-Crespo and M. Nieto-Vesperinas, *J. Opt. Soc. Am.* **A6**, 376 (1989).
11. M. Nieto-Vesperinas and J. M. Soto-Crespo, *Opt. Lett.* **12**, 979 (1989).
12. A. A. Maradudin, E. R. Méndez, and T. Michel, in Ref. [1].
13. T. N. Antsygina, V. D. Freylikher, S. A. Gredeskul, L. A. Pastur, and V. A. Slusarev, *J. of Electromagnetic Waves and Applications* **5**, 873 (1991).
14. V. Freilikher and I. Yurkevich, *Physics Letters* **A183**, 247 (1993).
15. V. Freilikher, M. Kaveh, and I. Yurkevich, *Physica* **A200**, 452 (1993).
16. A. A. Abrikosov and I. A. Ryzkin, *Adv. Phys.* **27**, 146 (1978).

17. F. G. Bass and I. M. Fuks, *Scattering from Statistically Rough Surfaces* (Pergamon Press, New York, 1979).
18. D. Vollhardt and P. Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980).
19. V. Freilikher and I. Yurkevich, Physics Letters A **183**, 253 (1993).
20. S. Feng and A. D. Arsenieva, Phys. Rev. B **47**, 13047 (1993).
21. R. Berkovits, M. Kaveh, and S. Feng, Phys. Rev. B **40**, 739 (1989).
22. V. D. Freilikher, M. Pustilnik, and I. Yurkevich, Physics Letters A **193**, 467 (1994).
23. V. Freilikher and I. M. Fuks, Izv. Vissh. Uch. Zav., Radiophysics **13**, 98 (1970).
24. J. Sánchez-Gil, A. A. Maradudin, Jun Q. Lu, V. D. Freilikher, M. Pustilnik, and I. Yurkevich, Phys. Rev. B **50**, 15 353 (1994).
25. J. Lu, A. A. Maradudin, and T. Michel, J. Opt. Soc. Am. B **8**, 311 (1991).
26. A. R. McGurn and A. A. Maradudin, Optics. Comm. **72**, 279 (1989).
27. V. Freilikher, M. Kaveh, M. Pustilnik, I. Yurkevich, OSA Proceedings on *Advances in Optical Imaging and Photon Migration*, Vol. 21, Ed. R. R. Alfano, 1994, p. 34.
28. V. Freilikher, M. Pustilnik, I. Yurkevich, and A. A. Maradudin, Optics. Comm. **110**, 63 (1994).

Figure Captions

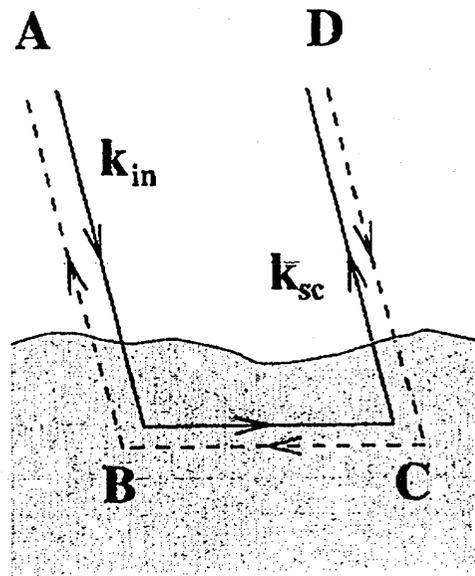
Figure 1 Optical paths with the same phase factors. (a) an infinite medium; (b) a bounded medium.

Figure 2 The scattering system studied in Section III.

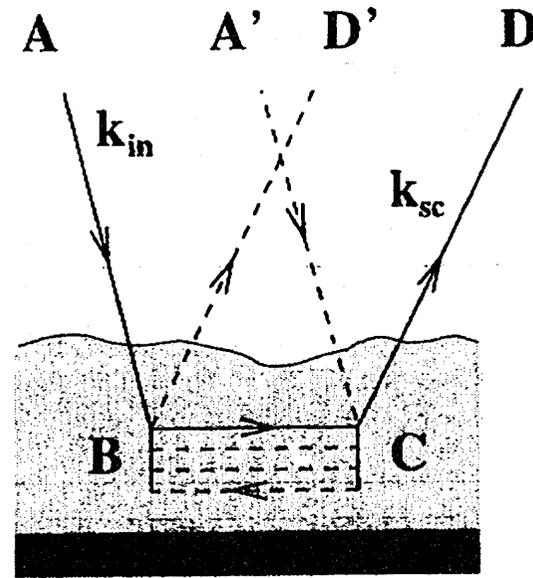
Figure 3 Analytical results for the angular distribution of the intensity of an s-polarized wave scattered from a dielectric slab with a rough surface deposited on a planar perfectly conducting substrate. The angles of incidence and scattering are defined as $\theta_{in(sc)} = \arcsin\left(\frac{p_{in(sc)}}{k_0}\right)$.

Figure 4 Computer simulation results for the differential reflection coefficient $\langle \partial R_s / \partial q_s \rangle_{diff} = \alpha(p_{sc}) I_{diff}(p_{sc}, p_{in})$ of an s-polarized beam of light incident on a one-dimensional random surface of a photoresist film deposited on a planar perfectly conducting substrate. The vertical dashed lines indicate the scattering angles at which the satellite peaks should occur according to the analytical calculations.

Figure 5 The dependence of $I_{diff}^{R(T)}$ on the angle of scattering q_{sc} for s-polarized light scattered from a dielectric film with volume disorder. The angle of incidence $\theta_{in} = -20^\circ$, and the parameters of the film are $\epsilon = 1.5, k_0 L = 8, W = 10^{-3} k_0^2$. The angles of incidence and scattering are introduced through the following equations: $\theta_{in} = \arcsin\left(\frac{p_{in}}{k_0}\right)$, $\theta_{sc} = \arcsin\left(\frac{p_{sc}}{k_0}\right)$, where p_{in} and p_{sc} are the projections of the wave vectors of the incident and scattered waves on the plane $z = 0$.



(a)



(b)

Figure 1

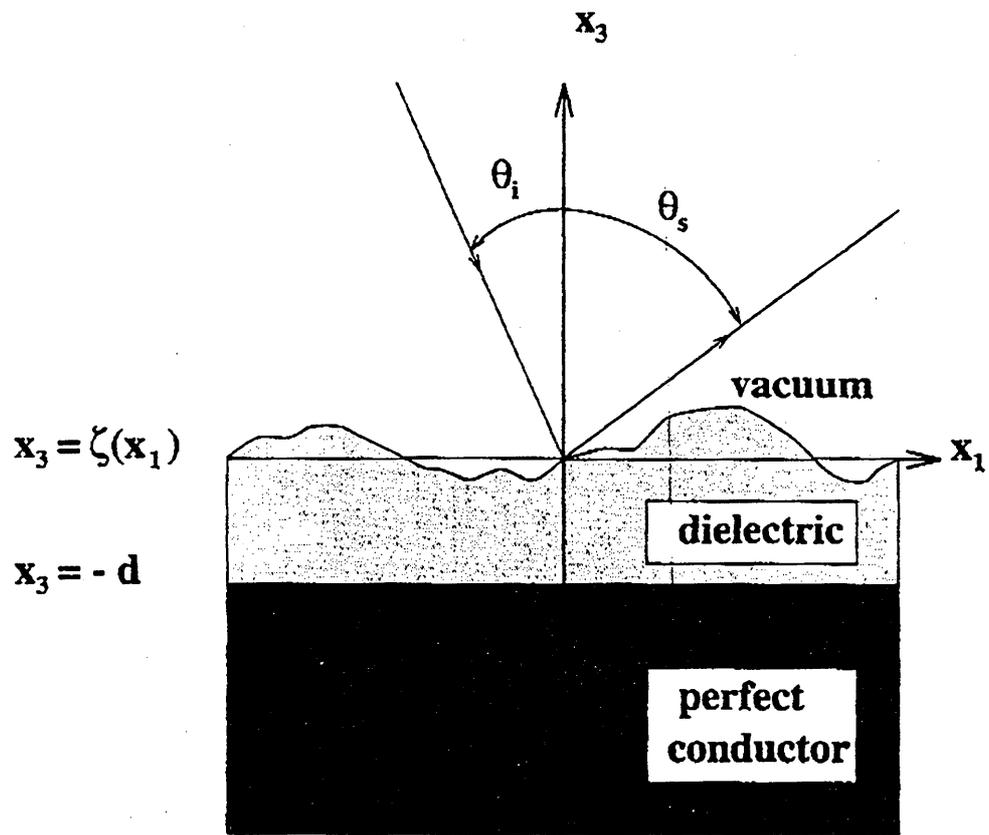


Figure 2

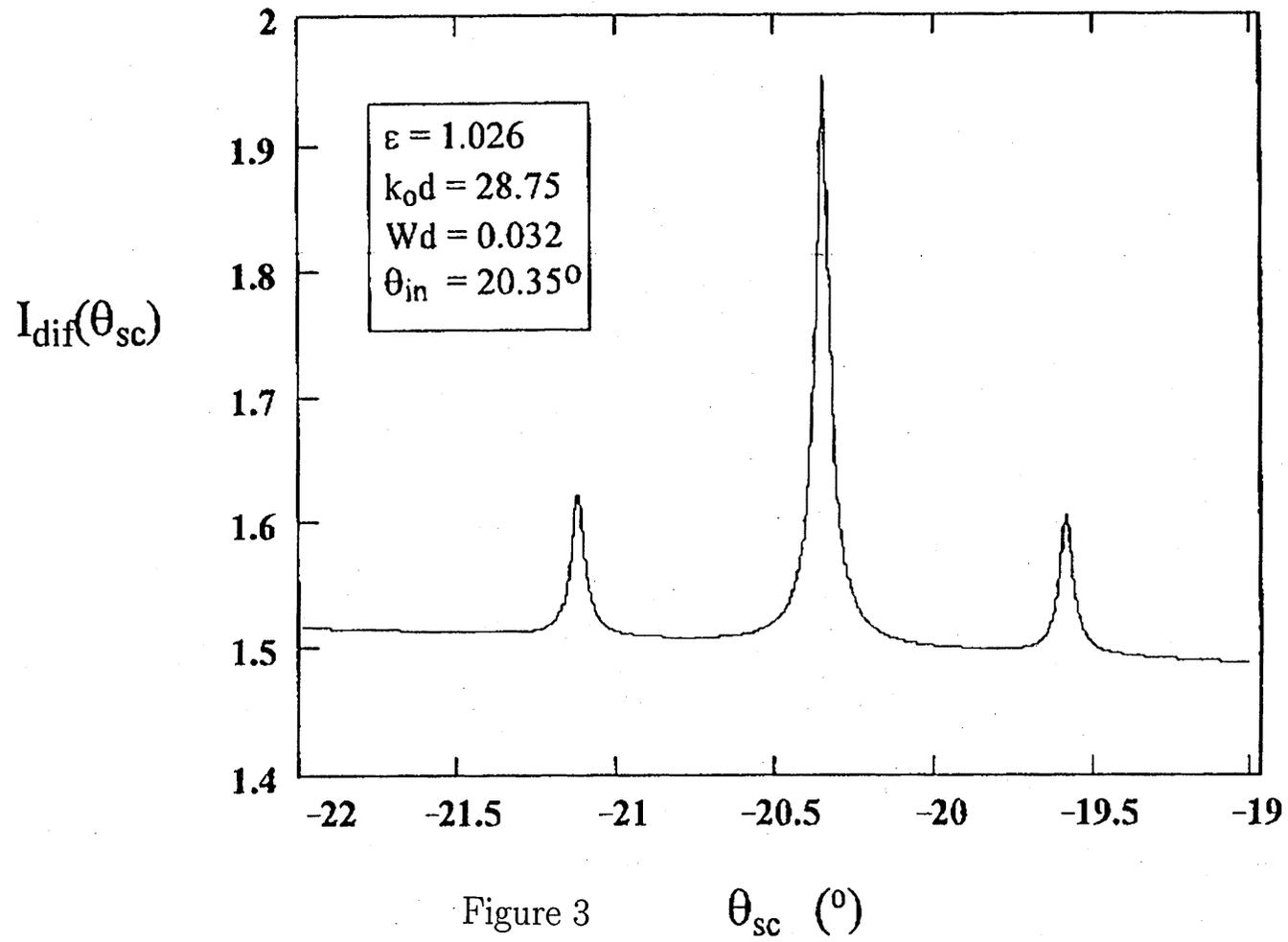


Figure 3

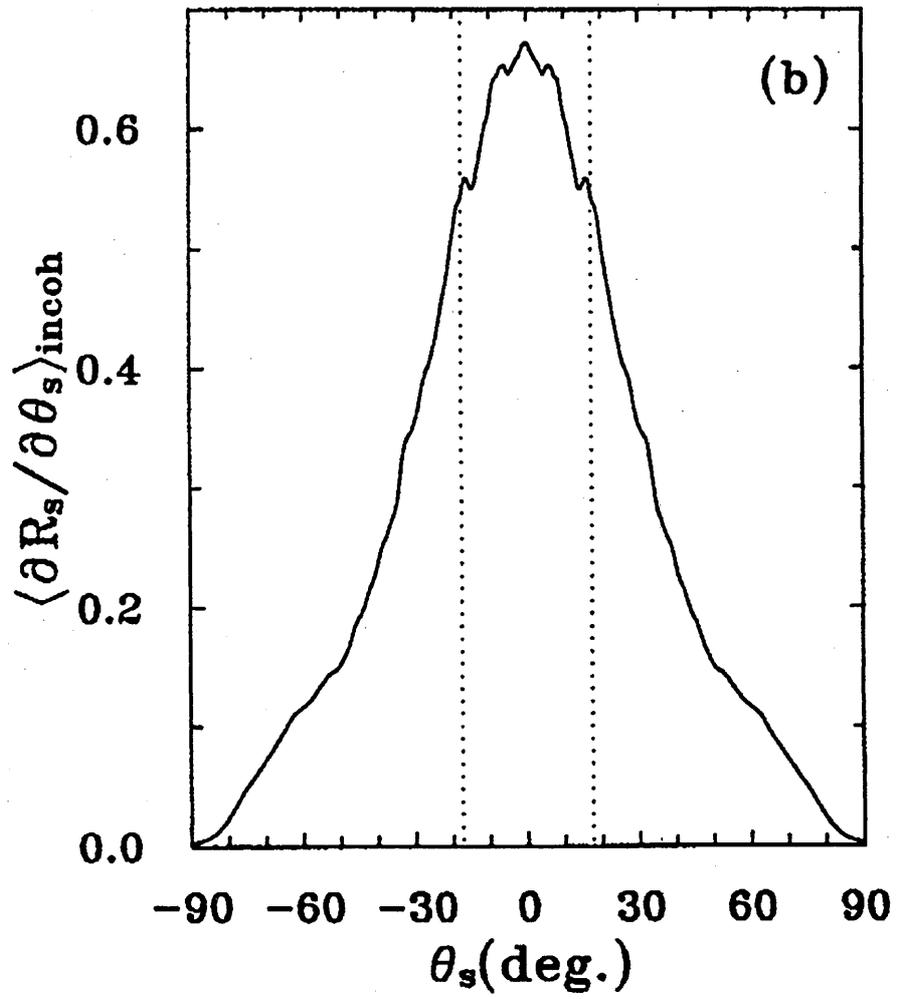


Figure 4

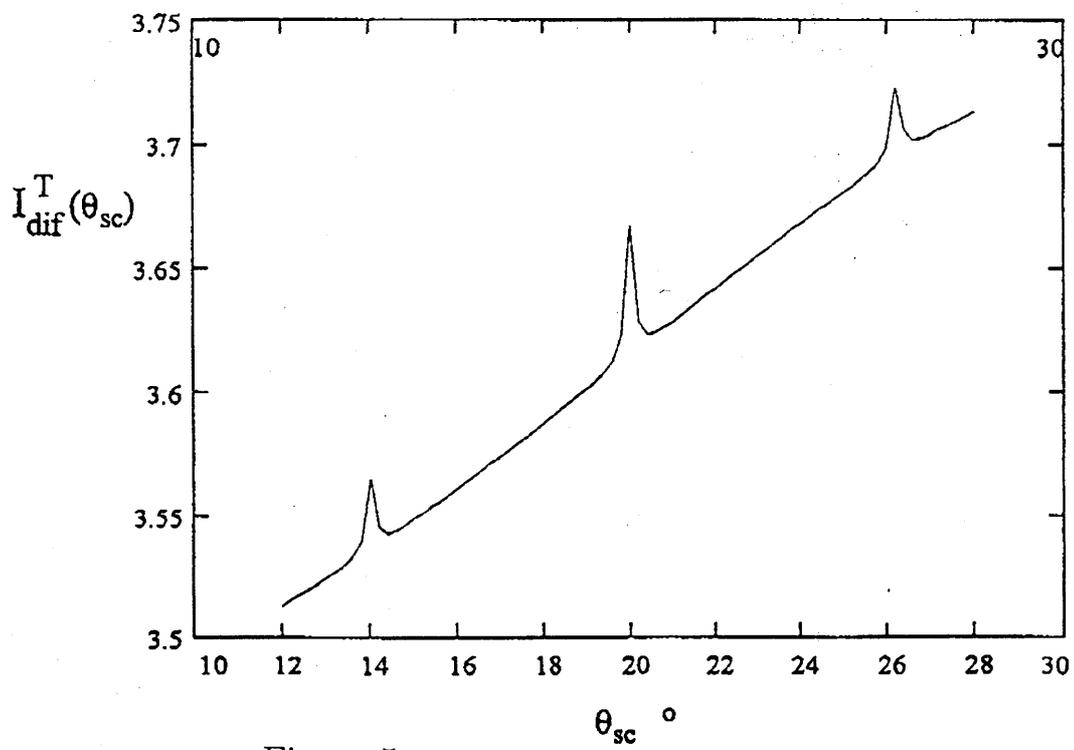
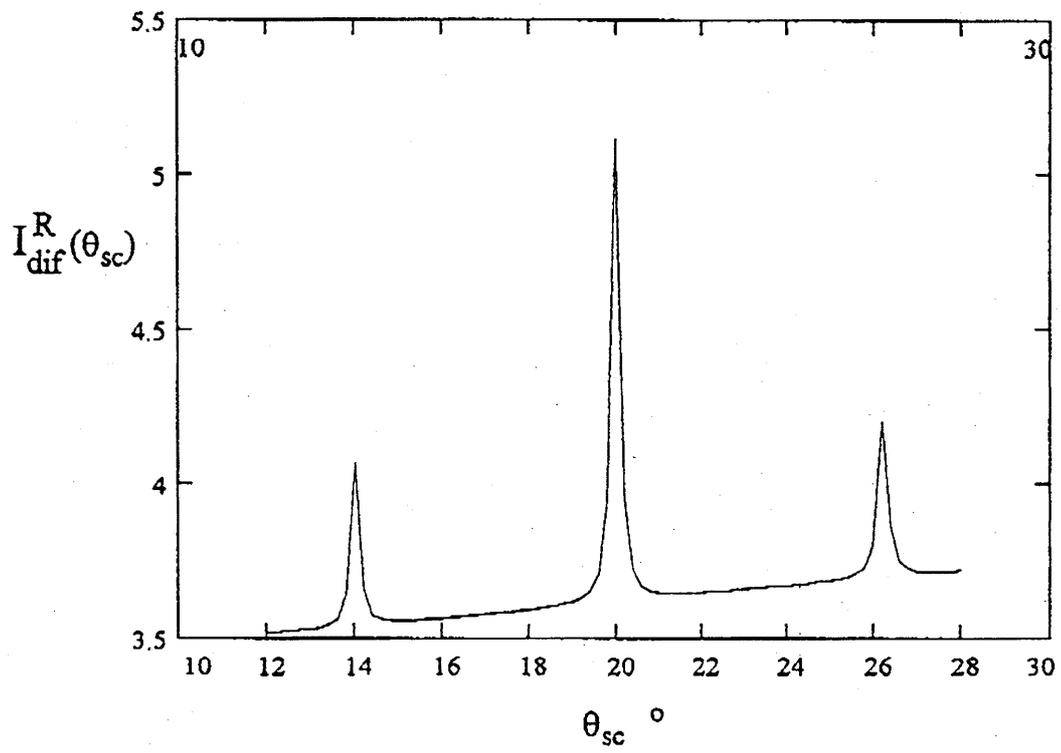


Figure 5

輻射科学研究会資料

RS 96-16

誘電体不規則表面による電磁波散乱
—Yoneda ピークと Brewster 散乱角—

川西哲也, 小倉久直, 王志良

(京都大学 工学部)

1996 年 12 月 6 日

輻射科学研究会

住友電気工業(株) 大阪本社

誘電体不規則表面による電磁波散乱 —Yoneda ピークと Brewster 散乱角—

川西哲也*, 小倉久直, 王志良
(京都大学工学部電子通信工学教室)

1 まえがき

誘電体表面による電磁波散乱においては、これまでにレーザー光のビームウエストや反射方向が変化することや Brewster 角がシフトすることなどが知られている [1, 2]。また、X 線散乱では臨界角方向への異常散乱 (Yoneda ピーク) がみられる [3, 4]。筆者らは以前の報告でこの現象が X 線特有のものではなく光領域でも起こり得る普遍的な現象であることを指摘した [5]。さらに、水平偏波入射時には散乱分布が零点 (Brewster 散乱角) をもち、入射波の偏波、角度によっては Brewster 散乱角と Yoneda ピークの生じる方向である臨界角とが接近し、ピークの形状が大きく変化することを示した。一方、平坦な誘電体表面における球面波の散乱においては臨界角方向へ放射しながら表面に沿って伝搬するラティラル波が存在することが知られている [6]、このラティラル波は臨界角方向への異常散乱に関連をもつものと考えられる。

本研究では、異なる誘電率をもつ 2 つの媒質の境界が 2 次元不規則表面である場合の電磁波散乱を取り扱う。1 次散乱における Yoneda ピーク、Brewster 散乱角 [5] に加え、2 次散乱では Yoneda ピークが顕著な場合に限り後方強調散乱がみられることを示す。また、Yoneda ピーク、後方強調散乱のラティラル波との関連を議論し、物理的意味を考察する。

2 2 次元不規則表面による電磁波散乱理論

誘電体不規則表面による電磁波散乱理論による散乱分布の計算結果 [5, 7] を示し、Yoneda ピークと Brewster 散乱角について議論する。

図 1, 2 に示すような 2 つの媒質からなる系を考え、媒質 1 側から電磁波 (平面波) が入射した場合の散乱を取り扱う。媒質 1, 2 の境界は統計的に一様かつ等方な不規則表面 $z = f(x)$ であるとする。

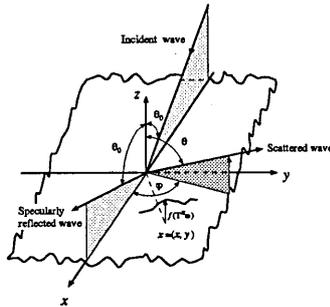


図 1: 全体図

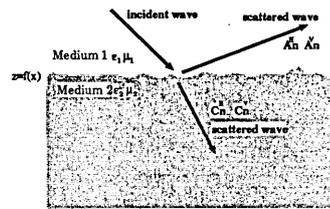


図 2: 断面図

位置ベクトルを $\mathbf{x} = (x, y)$ とし、境界面をランダム平面一様 Gauss 確率場

$$z = f(\mathbf{x}) = \int e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}} F(\lambda) dB(\lambda, \omega) \quad (1)$$

で表す。dB(λ) は2D 複素 Gauss ランダム測度で、スペクトル密度 $|F(\lambda)|^2$ は

$$|F(\lambda)|^2 = \sigma^2 \frac{l^2}{\pi} e^{-l^2 \lambda^2} \quad (2)$$

とする。ここで、 σ^2 は表面粗さ、 l は相関距離をである。さらに、波動ベクトル k_i を

$$k_i = (\lambda, S_i(\lambda)) = \lambda + \text{sgn}([k_i]_z) S_i(\lambda) e_z \quad i = \begin{cases} 1 & \text{媒質 1 : } z > 0 \\ 2 & \text{媒質 2 : } z < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$S_i(\lambda) = \sqrt{k_i^2 - \lambda^2} \quad (4)$$

$$k_i = |k_i|, \quad \lambda = |\lambda| \quad (5)$$

と表す。ここで、 λ は波動ベクトルの xy 平面への射影、 $S_i(\lambda)$ は z 成分 (絶対値) である。

2.1 1 次散乱

表面粗さが小さい場合 ($k_i^2 \langle f^2 \rangle \ll 1, \langle |\nabla f|^2 \rangle \ll 1$)、媒質 1 におけるインコヒーレント散乱角度分布 (入射角 $\theta_0 = (\theta_0, \phi_0)$ に対する単位表面積あたり角度 $\theta = (\theta, \phi)$ 方向の単位立体角への散乱) の 1 次近似解の水平 (TE)、垂直 (TM) 偏波成分 $P_1^H(\theta|\theta_0), P_1^V(\theta|\theta_0)$ は

$$P_1^H(\theta|\theta_0) = k_1^2 \cos^2 \theta |A_1^H(\lambda - \lambda_0|\lambda_0)|^2, \quad P_1^V(\theta|\theta_0) = k_1^2 \cos^2 \theta |A_1^V(\lambda - \lambda_0|\lambda_0)|^2 \quad (6)$$

$$A_1^H(\lambda_1|\lambda_0) = C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \quad (7)$$

$$A_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = n C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) - n^{-1} S_2(\lambda_0 + \lambda_1) C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \quad (8)$$

$$C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) = -\frac{iF(\lambda_1)}{\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1)} (\alpha \cos \phi_{0,0+1} - \beta \sin \phi_{0,0+1}) \quad (9)$$

$$C_1^V(\lambda_1|\lambda_0) = C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) + S_1(\lambda_0 + \lambda_1) C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \quad (10)$$

$$C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) = -\frac{iF(\lambda_1)}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} \gamma \quad (11)$$

$$C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) = -\frac{iF(\lambda_1)}{\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1)} (\alpha \sin \phi_{0,0+1} + \beta \cos \phi_{0,0+1}) \quad (12)$$

$$\alpha = -(n^2 - 1) \frac{2S_1(\lambda_0)}{\Delta^H(\lambda_0)} N^H(\lambda_0) \quad (13)$$

$$\beta = -(n^2 - 1) \frac{2S_1(\lambda_0) S_2(\lambda_0)}{n \Delta^V(\lambda_0)} N^V(\lambda_0) \quad (14)$$

$$\gamma = -|\lambda_0| |\lambda_0 + \lambda_1| (n^2 - 1) \frac{2S_1(\lambda_0)}{n \Delta^V(\lambda_0)} N^V(\lambda_0) \quad (15)$$

$$\Delta^H(\lambda_0) \equiv S_2(\lambda_0) + S_1(\lambda_0) \quad (16)$$

$$\Delta^V(\lambda_0) \equiv n S_1(\lambda_0) + n^{-1} S_2(\lambda_0) \quad (17)$$

で与えられる [5, 7]。ここで、 $\mu_0 = \mu_1$ と仮定し、 $n \equiv \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0}, k_1 = 1$ とした。また、 N^H, N^V はそれぞれ入射波の水平偏波成分、垂直偏波成分を意味し、 $\phi_{0,0+1}$ は λ_0 と λ_{0+1} のなす角である。

Brewster 散乱角 垂直 (TM) 偏波入射の場合 ($N_H = 0, N_V = 1$) の入射面内 ($\phi = 0^\circ$) への媒質 1 側での散乱角度分布を図 3 に示した ($\theta_B = \tan^{-1} n^{-1}$ は Brewster 角である)。入射角が大きい場合 ($\theta_0 = \theta_B, 80^\circ$) に零点がみられるが、この方向 Θ_{B1} は (8) より

$$\tan \theta'_0 \tan \Theta'_{B1} = n^{-2} \quad \text{但し } n \sin \theta' = \sin \theta \quad (18)$$

となる。入射角が Brewster 角と一致する ($\tan \theta'_0 = n^{-1}$) 場合

$$\tan \Theta'_{B1} = n^{-1} \quad (19)$$

となり、Brewster 角と一致する。また、媒質 2 側にも零点があり、その方向 Θ'_{B2} は (10) より

$$\tan \theta'_0 \tan \Theta_{B2} = 1 \quad (20)$$

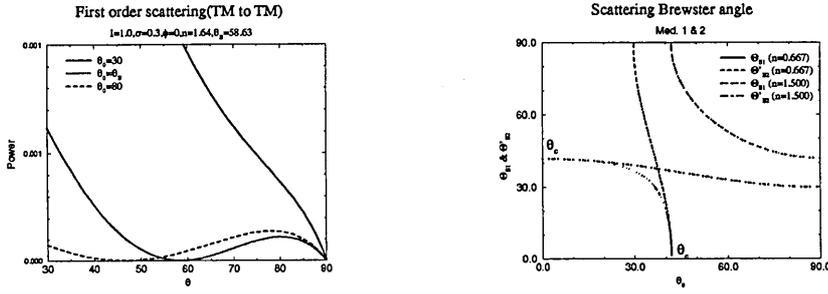


図 3: 散乱分布 (TM 偏波入射, 図 4: 入射角と Brewster 散乱角の関係, $n = 2/3, 3/2$)
 $\theta_0 = 30^\circ, \theta_B, 80^\circ, \phi = 0^\circ, n = 1.64$

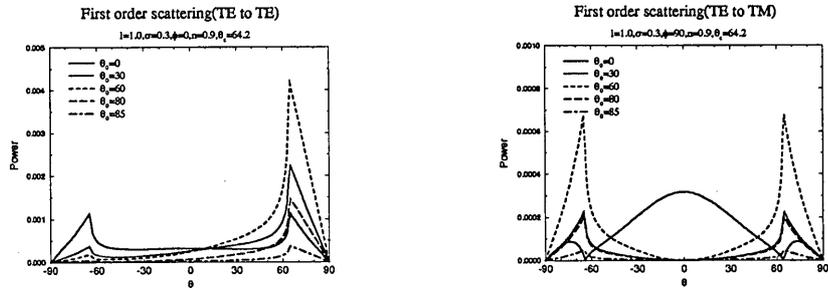


図 5: 散乱分布 (TE 入射, TE 散乱, $n = 0.9$, 図 6: 散乱分布 (TE 入射, TM 散乱, $n = 0.9$, $\phi = 90^\circ$)
 $\phi = 0^\circ$

と表される。但し、方位角 $\phi = 180^\circ$ で、媒質 1 側の場合の逆向きである。これらの $\Theta_{B1}, \Theta'_{B2}$ を Brewster 角の拡張と考え、Brewster 散乱角と呼ぶ。また、入射角 θ_0 と $\Theta_{B1}, \Theta'_{B2}$ の関係を図 4 に示した。ここで、 $\theta_0 \rightarrow 0$ のとき $\Theta_{B2} \rightarrow 90^\circ$ で

$$\sin \Theta'_{B2} = \frac{1}{n} \quad (21)$$

となり、 Θ'_{B2} は臨界角に等しくなることを指摘しておく。($n < 1$ の場合は Θ_{B1} が臨界角に等しくなる。)

Yoneda ピーク 図 5-9 に $n = 0.9$ の場合の媒質 1 側への散乱分布を偏波成分ごとに数値計算した結果を示した。臨界角方向 (64.2°) にピークがみられることがわかるが、これは散乱分布 (7)-(15) の分母の共通因数 Δ^H, Δ^V が臨界角で最小値をとるためである (図 11,12 参照)。垂直偏波入射時、入射角を変化させると、ピークの生じる方向は変化しないが、Brewster 散乱角が変化し、前章で述べたように $\theta_0 = 0^\circ$ のときには臨界角と一致する。そのため、垂直入射時 ($\theta_0 = 0^\circ$) には Yoneda ピークと Brewster 散乱角が重なり、臨界角への散乱は零となる。また、ピーク大きさは入射角が臨界角に近いほど大きくなるが、これはこの系のもつ相反性によるものである (図 9 参照)。

図 11,12 に示すように Δ^H, Δ^V の最小値は $n \sim 1$ のときに 0 に近づく。よって、媒質 1,2 の屈折率の差が小さいほど Yoneda ピークが顕著になることがわかる (図 10 参照)。

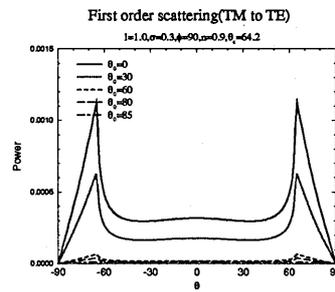
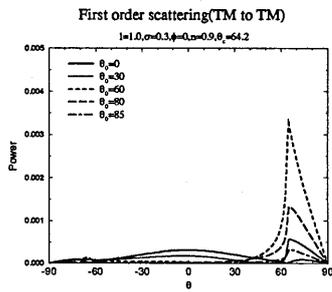


图 7: 散乱分布 (TM 入射, TM 散乱, $n = 0.9$, $\phi = 0^\circ$)

图 8: 散乱分布 (TM 入射, TE 散乱, $n = 0.9$, $\phi = 90^\circ$)

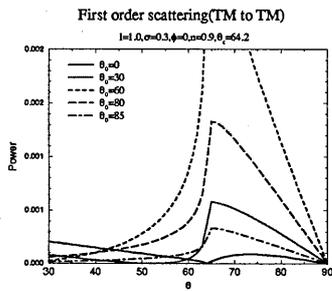


图 9: 图 7 の 拡大図

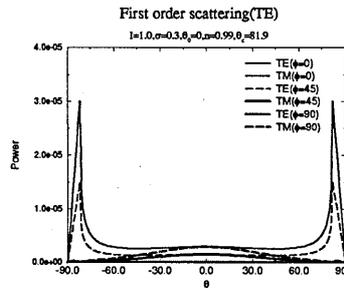


图 10: 散乱分布 (TE 入射, $n = 0.99$)

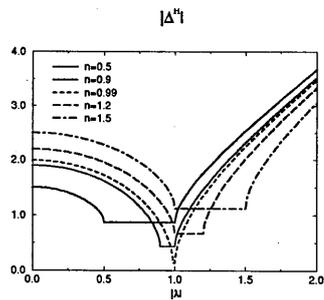


图 11: Δ^H

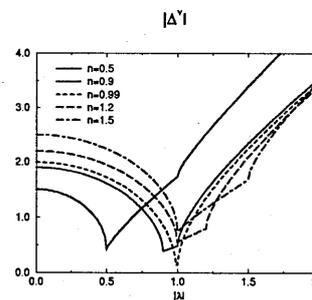


图 12: Δ^V

2.2 2次散乱

媒質1におけるインコヒーレント散乱角度分布(入射角 $\theta_0 = (\theta_0, \phi_0)$)に対する単位表面積あたり角度 $\theta = (\theta, \phi)$ 方向の単位立体角への散乱)の2次近似解の水平、垂直偏波成分 $P_2^{1H}(\theta|\theta_0), P_2^{1V}(\theta|\theta_0)$ は

$$P_2^{1H}(\theta|\theta_0) = 2!k_1^2 \cos^2 \theta \int_{R_2} |A_2^H(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 \quad (22)$$

$$P_2^{1V}(\theta|\theta_0) = 2!k_1^2 \cos^2 \theta \int_{R_2} |A_2^V(\lambda - \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_2|\lambda_0)|^2 d\lambda_2 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & A_2^H(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \\ = & \frac{iF(\lambda_2)}{2\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \left[\{(n^2 - 1)C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} \right. \\ & - [n\zeta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0) \\ & - (n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_1)S_2(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0)] \sin \phi_{0+1,0+1+2} \} \\ & + S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \\ & \times \left. \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} + \xi(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} \right\} \right] \\ + & \frac{iF(\lambda_1)}{2\Delta^H(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \left[\{(n^2 - 1)C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} \right. \\ & - [n\zeta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\perp}(\lambda_2|\lambda_0) \\ & - (n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_2)S_2(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0)] \sin \phi_{0+1,0+1+2} \} \\ & + S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \\ & \times \left. \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} + \xi(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & A_2^V(\lambda_1, \lambda_2|\lambda_0) \\ = & -\frac{iF(\lambda_2)}{2\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \left[n \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} - \xi(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} \right. \right. \\ & + \left. \left. [n^{-1}\zeta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) - (n - 1/n)C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0)] |\lambda_0 + \lambda_1||\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2| \right\} \right. \\ & + n^{-1}S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \{ (n^2 - 1)C_1^H(\lambda_1|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} \\ & + \left. \left. [(n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_1)S_2(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\parallel}(\lambda_1|\lambda_0) + n\zeta(\lambda_0 + \lambda_1)C_1^{V\perp}(\lambda_1|\lambda_0)] \cos \phi_{0+1,0+1+2} \right\} \right] \\ - & \frac{iF(\lambda_1)}{2\Delta^V(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \left[n \left\{ \eta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} - \xi(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0) \cos \phi_{0+1,0+1+2} \right. \right. \\ & + \left. \left. [n^{-1}\zeta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0) - (n - 1/n)C_1^{V\perp}(\lambda_2|\lambda_0)] |\lambda_0 + \lambda_2||\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2| \right\} \right. \\ & + n^{-1}S_2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \{ (n^2 - 1)C_1^H(\lambda_2|\lambda_0) \sin \phi_{0+1,0+1+2} \\ & + \left. \left. [(n - 1/n)S_1(\lambda_0 + \lambda_2)S_2(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\parallel}(\lambda_2|\lambda_0) + n\zeta(\lambda_0 + \lambda_2)C_1^{V\perp}(\lambda_2|\lambda_0)] \cos \phi_{0+1,0+1+2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\zeta(\lambda_0 + \lambda_1) \equiv S_1(\lambda_0 + \lambda_1) + S_2(\lambda_0 + \lambda_1) \quad (26)$$

$$\eta(\lambda_0 + \lambda_1) \equiv -\{S_1(\lambda_0 + \lambda_1) + S_2(\lambda_0 + \lambda_1)\} \quad (27)$$

$$\xi(\lambda_0 + \lambda_1) \equiv nS_1(\lambda_0 + \lambda_1) + n^{-1}S_2(\lambda_0 + \lambda_1) \quad (28)$$

で与えられる[7]。2次散乱は入射波 λ_0 が2つの中間状態 $\lambda_i = \lambda - \lambda_2, \lambda'_i = \lambda_0 + \lambda_2$ を経由して散乱波 λ へと散乱するプロセスを意味する(図13参照)。

後方強調散乱 後方散乱においては図13に示した2つの散乱プロセスが互いに時間反転の関係にある経路をもち、干渉により強め合い強調散乱を生じる(図14参照)。これまでに表面粗さが小さい場合には表面

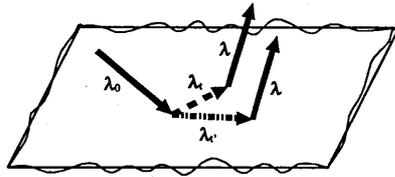


図 13: 2次散乱プロセス

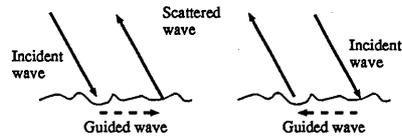


図 14: 後方強調散乱

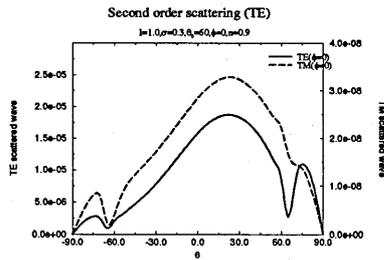


図 15: 2次散乱 (TE 入射, $n = 0.9, \phi = 0^\circ$)

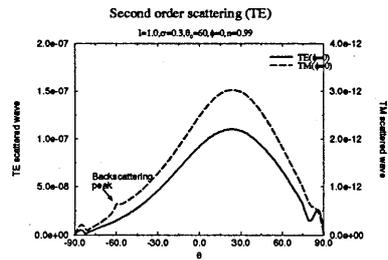


図 16: 2次散乱 (TE 入射, $n = 0.99, \phi = 0^\circ$)

が導波モードをもつ場合のみ後方強調散乱が生じることが知られており [8]、その場合には中間状態 λ_t, λ'_t が導波モードであるプロセスの寄与が大きくなる [9, 10]。

図 15,16 に $n = 0.9, 0.99$ の場合の 2 次散乱の分布を示した。2 次散乱の強度は非常に小さいが、1 次散乱にはない入射面内 ($\phi = 0^\circ$) への交差偏波散乱が存在することがわかる。誘電体表面は導波モードをもたないにもかかわらず、 $n = 0.99$ の場合には後方強調散乱がみられ (図 16 参照)、 $n \sim 1$ の場合に限り後方強調散乱がみられるということがわかる。これは臨界角方向への散乱で $\Delta^H, \Delta^V \sim 0$ となり、中間状態が臨界角方向への波動であるプロセスの寄与が大きくなることによるもので、後方強調散乱の形成に関して、臨界角方向への波動 (媒質 2 では表面に沿って伝搬する波動) が導波モードと同等の役割を果たしていると考えられる。

3 ラティラル波と Yoneda ピーク・後方強調散乱

平坦な誘電体表面による反射・屈折において入射角が臨界角に一致する場合に入射側の媒質に放射しながら表面に沿って屈折側の媒質内を伝搬する波動が存在することが知られており、ラティラル波と呼ばれている (図 17 参照)。図 18 のように屈折率が大きい側から小さい側へ入射する場合を考えると入射角が臨界角より小さい場合は反射波と屈折波が生じるが、入射角が臨界角に等しくなると屈折角は 90° となり境界面に沿って進む波が存在することになる。この波がラティラル波に相当すると解釈できる。

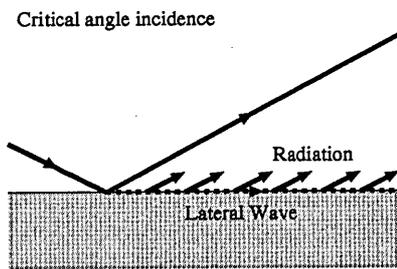


図 17: ラテラル波

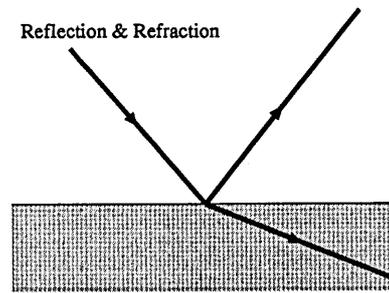


図 18: 反射波と屈折波

前章で述べたように誘電体不規則表面による散乱では臨界角への散乱が強く生じるが、媒質 1 での波動が臨界角で進む場合、媒質 2 ではラテラル波が存在するので、Yoneda ピークの形成にラテラル波が重要な役割を果たしていると考えられる。また、 $n \sim 1$ の場合には Yoneda ピークが顕著になるとともに後方強調散乱がみられるが、これはラテラル波が $n \sim 1$ の場合に導波モードに準じる性質をもつことを意味する [7]。

参考文献

- [1] J. J. Greffet, *Opt. Lett.* **17**, 238 (1992).
- [2] C. Baylard, J. J. Greffet and A. A. Maradudin, *Opt. Soc. Am.* **10**, 2637 (1993)
- [3] O. J. Guentert, *J. Appl. Phys.* **36**, 1361 (1965).
- [4] A. A. Maradudin, *Workshop on Rough Surface Scattering and Related Phenomena "X-Ray Scattering From a Randomly Rough Surface"* (California, USA, 1996)
- [5] 川西哲也、小倉久直、王志良、電磁界理論研究会資料 EMT-96-45 (1996)
- [6] 筒井英人、石原豊彦電磁界理論研究会資料 EMT-96-43 (1996)
- [7] T. Kawanishi, H. Ogura and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic waves from a slightly random dielectric surface, to be published in *Waves in Random Media*
- [8] A. Ishimaru, J. S. Chen, P. Phu and K. Yoshitomi, Numerical, analytical, and experimental studies of scattering from very rough surfaces and backscattering enhancement, *Waves in Random Media* **1**, 91 (1991)
- [9] T. Kawanishi, H. Ogura and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic waves from a planer waveguide structure with a slightly 2D random surface, to be published in *Waves in Random Media*
- [10] H. Ogura, T. Kawanishi, N. Takahashi and Z. L. Wang, Scattering of electromagnetic waves from a slightly random surface — reciprocal theorem, cross-polarization and backscattering enhancement, *Waves in Random Media* **5**, 461 (1995)

エッジのある散乱体からの高周波回折界と
低周波散乱界との関係

**Relation Between High-Frequency Diffraction And
Low-Frequency Scattering From An Obstacle
with A Sharp Wedge***

橋本 正弘

大阪電気通信大学 工学部

Masahiro Hashimoto

*Department of Applied Electronic Engineering
Osaka Electro-Communication University
Neyagawa, Osaka 571, Japan
Fax +81-720-24-0014
E-mail hashimot@hslab.osakac.ac.jp*

平成8年12月6日（於住友電気工業株式会社本社）

1 はじめに

幾何光学では、界の振幅を波長ゼロの光線概念から定めているため、焦点や焦線(コースティック)など幾何学的特異点(線・面)で発散する。回折波に同様の近似を用いた幾何光学的回折理論[1]も、高周波回折界の複雑な振舞いを直感的に表記できるものの、やはり、この種の発散からは免れない。これは幾何光学を支える漸近理論の固有の性質であり、特異点あるいは特異線の周りを拡大視する特異摂動あるいは一様漸近展開の考えを導入しない限り避けられない。

安藤・大堂ら[2]は電磁流を用いた界の表記法を併用し、エッジ回折問題で、大域的に発散しない一様界を得ている。そこでは、エッジに流れる電磁流には等価的なものを想定して、高周波回折界をより簡潔に表記するよう工夫している。また、西本・生野ら[3]は滑らかな散乱体にも等価電磁流を適用して、クレーピング波の発散を防止している。いずれも、より実用的な界を得ようとするものであるため、等価電磁流は幾様にも存在する。したがって、決定方法に多様性があり、深い洞察力と経験を要する。

しかし、これらの問題には、単に界の表記法にとどまらず、「幾何光学での幾何学的描写と波源からの放射という相入れない二つの概念の間の波動関係を探れ」という別の命題が潜んでいる。たとえば、遠方で、近似的な高周波回折界が与えられたとき、この界を生み出している散乱体上の波源はいかなるものかという疑問が起きる。幾何光学的回折理論で取り上げられている規範問題[7]を除いて、これを一般的に論ずることは難しいと思われる。

そこで、本文では、幾何光学界に正則な複素関数を対応づけることで、(1) 遠方の近似界を真の界とするような波動界が求められること、(2) その散乱体の近傍における界を調べることで、散乱体上(エッジ上)に流れる電磁流を一意的に決定できること、などを述べる。また、一様な近似回折係数を与え、これをあたかも厳密な係数とするような一様界とエッジ付近の近傍界を例題として示す。

2 散乱界の表示

ここで取り扱う電磁界は2次元とし、座標を x 、 y 、また、 z 方向の電磁界成分を u とする。時間因子を $\exp(j\omega t)$ と仮定するため、時間的虚数単位 j を使用する。同時に $z = x + iy$ $\zeta = x - iy$ とするような空間的虚数単位 i を次の約束の下で使用する。

$$j^2 = -1 \quad i^2 = -1 \quad (1)$$

以下、座標 x 、 y の代わりに空間複素座標 z 、 ζ を用いる。界 u には i と j が含まれている混合形複素関数であるため、従来の数学と異なる点に特に注意を要する。たとえば、絶対値記号 $|\cdot|$ を空間的複素数に対するものと定義(i に関する実部と虚部の2乗和の平方根)すれば、

$$|\exp(ijx)| = 1 \quad |1 + ij| = 0 \quad (2)$$

ただし $\exp(ijx) = \cosh x + ij \sinh x$. このように指数関数の実部と虚部がともに発散す

* 本課題の要旨はM.Hashimoto, "Relation between high-frequency diffraction and low-frequency scattering from a sharp wedge", Trans Blacksea Region Symposium on Applied Electromagnetism, April 17-20, 1996, Metsovo, Greeceにて口答発表済み。また本稿は電気学会資料EMT-96-41の拡大・修正版。

るにもかかわらず、絶対値が1であったり、ゼロでない二つの複素数、 $1+ij$ とその共役 $1-ij$ 、の積がゼロであるように、絶対値は大きさの測度にならないなど、これまでにない数学概念を取り入れる必要がある。

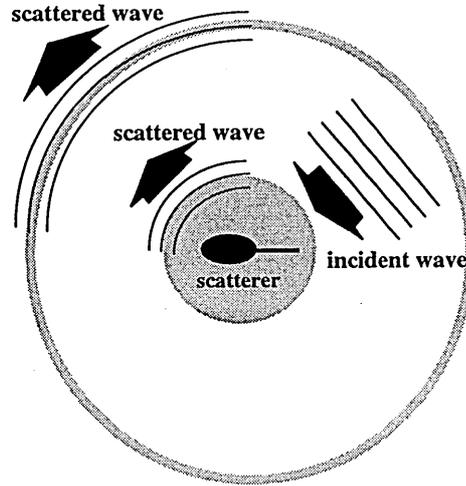


図1 エッジのある物体からの電磁波散乱

散乱界 u (図1 参照) をここでは次式のように与える。

$$u(z, \zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma} dt \oint_{\gamma} d\tau K(z, \zeta; t, \tau) \Psi(t) \Phi(\tau) \quad (3)$$

ただし核関数 K は

$$K(z, \zeta; t, \tau) = \pi j H_0^{(2)}(k\sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)}) \quad (4)$$

であり、 $H_0^{(2)}$ はハンケル関数である。さらに、複素関数 Φ は Ψ の共役関数

$$\Phi(\zeta) = \overline{\Psi(\bar{\zeta})} \quad (5)$$

であって、また、 Ψ は無限遠の周りで $1/z$ で減少する z の関数であると仮定する。

なお、一般に、 Φ と Ψ を独立に選ぶことができる。文献[4]では、 Φ を散乱体の断面を円形に等角写像する形状関数とすることで、 u と Ψ を一対一対応させ、任意断面の散乱体を円柱からの散乱問題に帰着させている。式(3)を含めて、それらは Vekua [5] や Henrici [6] が求めた内部界に対応する外部界表示となっている。式(5)のように選ぶことで u が (j は含むが) i を含まない"実数"表現となっている。また $x-y$ 平面内の電磁界成分は、 E 波および H 波に対して、それぞれ、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} j \omega \mu_0 (H_y + i H_x) \quad \text{for } E \text{ waves} \\ &= -\frac{1}{2} j \omega \epsilon_0 (E_y + i E_x) \quad \text{for } H \text{ waves} \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる。

散乱体より十分離れた遠方の高周波界は、ハンケル関数の漸近展開を適用した近似式

$$K(z, \zeta; t, \tau) = \pi j \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-jkr + j\frac{\pi}{4}} \times e^{j\frac{k}{2}(\sqrt{\frac{\zeta}{z}})r + j\frac{k}{2}(\sqrt{\frac{z}{\zeta}})\tau} \quad (7)$$

と式(3)より容易に求められ、

$$u(z, \zeta) = \pi j \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-jkr + j\frac{\pi}{4}} \times \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta}r} \Psi(t) dt \right|^2 \quad (8)$$

となる。ここで

$$r = \sqrt{z\zeta} \quad \sqrt{\frac{\zeta}{z}} = e^{-i\theta} \quad \sqrt{\frac{z}{\zeta}} = e^{i\theta}$$

同様に、低周波界あるいは近傍界も、やはり、ハンケル関数の近似公式から

$$K(z, \zeta; t, \tau) = \pi j - 2(0.57721 - \ln k/2) + \ln(z-t) + \ln(\zeta-t) + O(k^2) \quad (9)$$

と求められ、これを利用すれば

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \bar{a}_0 \times \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Psi(t)}{z-t} dt \quad (10)$$

となる。関数 Ψ が無限遠方でゼロとなる条件より、最終結果は次式のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \bar{a}_0 \Psi(z) \quad (11)$$

ただし定数 a_0 は関数 Ψ の無限遠の留数、 \bar{a}_0 は虚数 i に関する複素共役である。

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \Psi(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \Phi(\tau) d\tau \quad (12)$$

式(11)は低周波近似界を表しているので、そこに現れている関数 Ψ を式(8)に代入すれば、高周波遠方界が得られる。このように、ここでは高周波界と低周波界は、複素関数 Ψ を通して関係づけられていることが分かる。遠方界の放射パターンを与えて複素関数 Ψ を定めれば、近傍界が式(11)で求められ、それより、散乱体上の電磁流も決定できる。以下、最も簡単な放射場の一例を示し、後述の理論展開の一助とする。

ここでは、 n 次の円筒波を例にとり、遠方パターンは $\cos n\theta$ であると仮定する。すなわち、式(8)で

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta}r} \Psi(t) dt \right|^2 = \cos n\theta \quad (13)$$

と仮定する。このとき、

$$\cos n\theta = \frac{(1+je^{-in\theta})(1+je^{in\theta})}{2j} \quad \text{or} \quad \cos n\theta = \frac{(j+e^{-in\theta})(j+e^{in\theta})}{2j} \quad (14)$$

より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{k\frac{t}{2} - i\theta t} \Psi(t) dt \\ &= e^{i\theta} \frac{1+je^{-in\theta}}{\sqrt{2j}} \quad \text{or} \quad e^{i\theta} \frac{j+e^{-in\theta}}{\sqrt{2j}} \end{aligned} \quad (15)$$

となり、この解は

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= e^{i\theta} \frac{k}{2\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\frac{jkz}{2}} + \frac{jn!}{\left(\frac{jkz}{2}\right)^{n+1}} \right] \\ \text{or} \quad e^{i\theta} \frac{k}{2\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \left[\frac{j}{\frac{jkz}{2}} + \frac{n!}{\left(\frac{jkz}{2}\right)^{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。また、留数計算によって

$$a_0 = e^{i\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad \text{or} \quad e^{i\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (n \neq 0)$$

$$a_0 = e^{i\theta} \quad (n = 0)$$

と求められる。さらに、式(11)によれば、近傍界は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 \Psi(z) &= \frac{k}{4} \left[\frac{\pm 1}{\frac{jkz}{2}} + \frac{jn!}{\left(\frac{jkz}{2}\right)^{n+1}} \right] \quad (n \neq 0) \\ \bar{a}_0 \Psi(z) &= \frac{1}{z} \quad (n = 0) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで複号は式(14)の二様性に対応しており、いずれも式(13)の解として正しい。しかし、この複号によって、式(17)の近傍界には二つの界が存在するという矛盾が生じる。その原因は、式(16)の表現に k の位が異なる二つの項が含まれていることによる (n の値がゼロでないとき)。本来、位の低い第一項の寄与が、積分によって、消失するはずであったのが、式(9)の近似誤差で現れてしまったからである。このように、式(17)の右辺の第一項は、物理学上現れてはならない誤差項である。そこでこれを避けるため、次節のような工夫をする。

3 複素関数 Ψ の役割

上記の例に見られたように、多くの場合、関数 Ψ が二つに分離される。一つは物理量の記述には直接寄与しないが、無限遠で留数を有限値に維持する部分 Ψ_a 、もう一つはとエッジ付近の界を表す Ψ_b となっている。そこでそれらに対応した複素積分を、それぞれ、 a と b と書く。

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{k\frac{t}{2} - i\theta t} \Psi_a(t) dt & b &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{k\frac{t}{2} - i\theta t} \Psi_b(t) dt \\ \Psi(z) &= \Psi_a(z) + \Psi_b(z) \end{aligned} \quad (18)$$

ただし a と b は次式の条件を満たしているものとする。

$$a \equiv a(e^{-i0}), b \equiv b(e^{-i0}) \quad a(0) = a_0 \neq 0 \quad b(0) = 0 \quad (19)$$

すなわち、形式的に $e^{-i0} \rightarrow 0$ のとき $a \rightarrow a_0 \neq 0$ および $b \rightarrow 0$ と約束している。無限遠の留数を与える役目を Ψ_a に担わせているため、 Ψ_b の留数はゼロとなり、無限遠で一位の極あるいは a_0 の値を発生させる特異性をもたない関数となる。

これに加えて制約条件

$$|a|^2 + |b|^2 = 0 \quad (20)$$

$$|a+b|^2 = \bar{a}b + a\bar{b} \quad (21)$$

が成り立っているものとする。さらに厳密に言えば、

$$a(s) \overline{a(1/\bar{s})} + b(s) \overline{b(1/\bar{s})} = 0 \quad (22)$$

であるとする。この式は、先に述べたように、 $a=0, b=0$ を意味しない。

式(5)にしたがい、 Ψ_a, Ψ_b に対応する共役関数を、それぞれ、 Φ_a, Φ_b と書けば、式(3)の代わりに、次式が全ての領域で成立する(付録参照)。

$$u(z, \zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma} dt \oint_{\gamma} d\tau K(z, \zeta; t, \tau) \times [\Psi_a(t) \Phi_b(\tau) + \Psi_b(t) \Phi_a(\tau)] \quad (23)$$

この表現を用いれば、式(10)に代わって、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \bar{a}_0 \times \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Psi_b(t)}{z-t} dt \quad (24)$$

が導かれる。やはり、 Ψ_b を無限遠でゼロとなる関数とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \bar{a}_0 \Psi_b(z) \quad (25)$$

となる。このように Ψ が分離可能なときは、近傍界を上式でより正確に近似表現できる。式(16)の例で言えば、右辺の第一項が Ψ_a を、第二項が Ψ_b を表している。このことから、式(17)の右辺第一項は、 n がゼロでない場合、本来、消えるべき項であることが分かる。

4 回折問題への応用

本理論の適用範囲はかなり広いと思われるが、ここではより理解を深めるため、よく知られた規範問題に適用する。

本節では、図2に示すように、半無限の完全導体平板からの回折を取り扱う。入射波は平面波とし、入射角度を ϕ 、観測角を θ とする。いずれも平板から反時計周りに測るものとする。このような単純な散乱体形状に対しては、エッジから距離 r 離れた点における回折波の界が厳密に求められおり、また、その幾何光学界も算出されている[8]。ここではその結果のみを引用する。

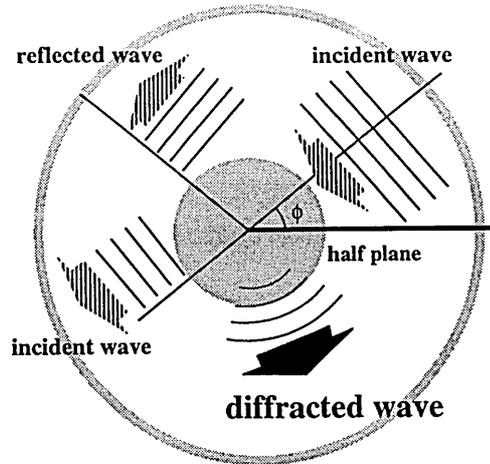


図2 半無限平板からの反射波と回折波

式(8)とその幾何光学回折界とを比較すれば、 E 波および H 波に対して、それぞれ、 Ψ を決定する次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i(k/2 e^{-i\theta})t} \Psi(t) dt \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\cos\theta + \cos\varphi} \times \begin{cases} -\sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\varphi}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{26}$$

上式の左辺は $a \bar{a}$ の形で与えられている。右辺の各項も同様の形式で表現するため、以下の数学公式を利用する。ただし、 $c.c.$ はその前にある項の i に関する複素共役である。すなわち $a \bar{a}$ を $a \times c.c.$ と略記している。

$$\begin{aligned}
 \cos\theta + \cos\varphi &= \frac{e^{-j\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2}} (e^{j\varphi} + e^{-i\theta}) \times c.c. \\
 -\sin\frac{\theta}{2} &= \frac{(e^{-i\theta/2} + ij)}{\sqrt{2j}} \times c.c. \\
 &\text{or } \frac{j(e^{-i\theta/2} - ij)}{\sqrt{2j}} \times c.c.
 \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{j(e^{-i\theta/2} - j)}{\sqrt{2j}} \times c.c.$$

$$\text{or } \frac{e^{-i\theta/2} + j}{\sqrt{2j}} \times c.c.$$

また、orは別解を示し、必ずしも解が一意的でないことを意味する。したがって、回折係数（ここでは一般に定義されている回折係数の $-1/4\pi$ 倍）は

$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)} \mp \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2}e^{j\varphi/2}}{e^{-i\theta} + e^{j\varphi}}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\sin \varphi/2}{2j}} (e^{-i\theta/2} + ij) \text{ or } \sqrt{\frac{j \sin \varphi/2}{2}} (e^{-i\theta/2} - ij) \\ \sqrt{\frac{\cos \varphi/2}{2j}} (e^{-i\theta/2} + j) \text{ or } \sqrt{\frac{j \cos \varphi/2}{2}} (e^{-i\theta/2} - j) \end{array} \right.$$

$$\times c.c.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} e^{i\theta} \sqrt{\frac{\sin \varphi/2}{\pi}} e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})} \left(\frac{e^{-i\theta/2} \pm ij}{e^{-i\theta} + e^{j\varphi}} \right) \\ e^{i\theta} \sqrt{\frac{\cos \varphi/2}{\pi}} e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})} \left(\frac{e^{-i\theta/2} \pm j}{e^{-i\theta} + e^{j\varphi}} \right) \end{array} \right. \times c.c.$$

(27)

と表される。これを式(26)に代入すれば

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta}t} \Psi(t) dt$$

$$= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})}}{e^{-i\theta} + e^{j\varphi}} \times \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\sin \varphi/2} (\sqrt{e^{-i\theta}} \pm ij) \text{ for E waves} \\ \sqrt{\cos \varphi/2} (\sqrt{e^{-i\theta}} \pm j) \text{ for H waves} \end{array} \right.$$

(0 < φ < π)

(28)

を得る。 Θ は i に関する任意の実数定数である。複号は解の二様性を表している。この解の多様性は式(26)の非線型性に起因しており、さらに多くの別解が存在すると思われる。いずれを選んでも、実の界にはなんら影響を与えないことが後で分かる。

ここでは、3節に示した方法で、解を求める。なお、 γ は無限平板を反時計方向に回る積分路であるから、上式の左辺は区間 $[0, \infty]$ の積分に帰着され、その結果、ラプラス変換の積分形になる。

今、われわれの課題は式(28)の複素関数解 Ψ を3節の方法で解く問題に帰着した。し

かし、2節で述べたように、混合形複素関数の特異な振舞いによって、左辺の周回積分は必ずしも収束しないという、これまでに見られない特異な事象が発生する。本例題で観測点が遠方にある場合、図3に示された影領域が収束域であり、上下の無地の部分で積分が発散する。図3(a)は入射角 ϕ が $\pi/2$ より小さい場合、図3(b)はそれより大きく $\pi/2$ より小さい場合を示している。 π より大きいときは、背面入射となるため、 ϕ を $2\pi - \phi$ で置き換え、正面入射問題として解けばよい。したがって、ここでは ϕ を常に π より小さいと仮定している。また、観測角 θ は半無限平面の表面から測られているため、 0 と 2π までの間の値をとる。

図から明らかなように、観測点が二つの幾何光学境界面、すなわち、反射境界と影境界の間（濃い影領域）にあれば、必ず収束する。また、これらの境界面の延長面に挟まれた領域（薄い影領域）も収束域である。しかし、これら薄い影で描写された収束域は、積分路 γ を γ' に変形することで、反射境界および影境界まで解析接続でき、結局、二つの幾何学境界を除けば、すべての領域で積分が収束する。 γ' は z 平面上の半無限直線 $z = \rho \exp(i\psi)$ ($\rho = 0 \sim \infty$)を囲むように沿う積分路である。 $\psi = 0$ のとき、ちょうど γ' が γ に一致する。 ψ の値は $-\pi/2$ と $+\pi/2$ との間に限定し、観測角 θ とともに

$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \cos \phi} \quad (29)$$

にしたがって動く。 θ の値が反射境界および影境界の値に近づくとき、 ψ の値は $+\pi/2$ あるいは $-\pi/2$ になり、 γ' はもとの積分路に対して垂直に傾く。このように変形された積分路は、もはや、散乱体を囲まないが、収束域で得られた解の解析接続解を与える。

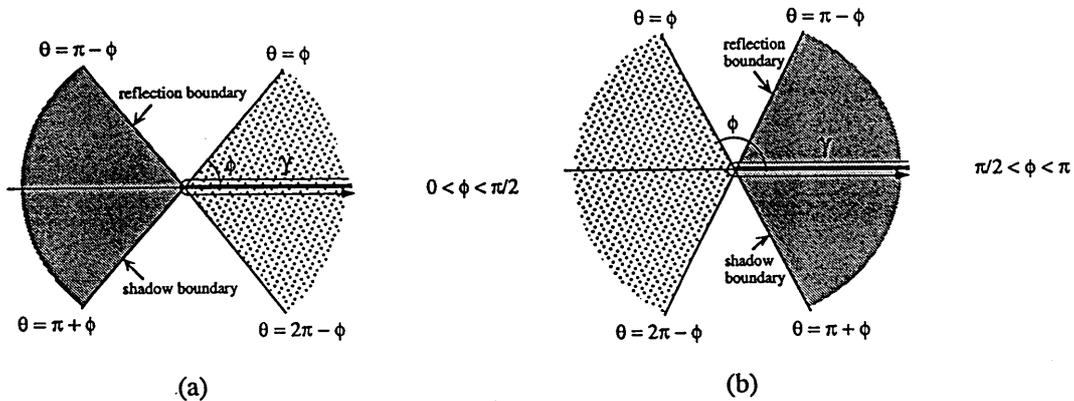


図3 z 平面上の γ に沿った積分の収束域(影領域)
積分路 γ を変形すれば、薄い影の領域が拡張され、幾何光学上の反射境界と影境界を除いて、すべての領域で積分が収束する。

Ψ の導出はここでは省略するが、解は次式のように得られる。

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{2j} e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})} \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} \\
&\quad \times e^{-z} \left(\pm ij \ln Z + \frac{\sqrt{\pi}}{2j} e^{j\frac{\varphi}{2}} \int_{-\infty}^z t^{-3/2} e^{t'} dt \right) \\
&\quad \text{for E waves} \\
\Psi(z) &= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{2j} e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} \\
&\quad \times e^{-z} \left(\pm j \ln Z + \frac{\sqrt{\pi}}{2j} e^{j\frac{\varphi}{2}} \int_{-\infty}^z t^{-3/2} e^{t'} dt \right) \\
&\quad \text{for H waves}
\end{aligned} \tag{30}$$

ただし

$$Z = \left(\frac{k}{2} e^{k(\varphi - \frac{\pi}{2})} \right) z$$

また

$$\bar{a}_0 = \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{\pi}} e^{-j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})} \times \begin{cases} -i \sqrt{\sin \varphi/2} & \text{for E waves} \\ \sqrt{\cos \varphi/2} & \text{for H waves} \end{cases} \tag{31}$$

式(30)で与えられた Ψ は Ψ_a と Ψ_b の和に分離されており、右辺の括弧内第一項が Ψ_a に、第二項が Ψ_b となっている。この Ψ_b を式(25)に代入すれば、近傍界が求められ、それよりエッチ電流あるいはエッチ磁流を決定できる。

一方、物理光学界(Physical Optics)による回折界PO-Diffractionは式(26)の代わりに

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{k\frac{z}{2} e^{-i\theta} t} \Psi(t) dt \right|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\tan \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) \mp \tan \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\cos \theta + \cos \varphi} \times \begin{cases} -\sin \varphi & \text{for E waves} \\ \sin \theta & \text{for H waves} \end{cases}
\end{aligned} \tag{32}$$

で与えられる[2]。このとき、同様にして Ψ を解くための方程式として

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{k\frac{z}{2} e^{-i\theta} t} \Psi(t) dt \\
&= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{j\frac{\varphi}{2}}}{e^{-i\theta} + e^{j\varphi}} \times \begin{cases} \sqrt{-2 \sin \varphi} & \text{for E waves} \\ e^{\pm j\frac{\pi}{4}} (e^{-i\theta} \pm ij) & \text{for H waves} \end{cases} \\
&(0 < \varphi < \pi)
\end{aligned} \tag{33}$$

が得られる。E波については通常の方法が、またH波については3節の分解法が適用可能となり、

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{2j} e^{j\frac{\varphi}{2}} \sqrt{-\sin \varphi} e^{-Z \ln Z} \\ &\quad \text{for E waves} \\ \Psi(z) &= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\pi}} \frac{k}{2j} e^{j\frac{1}{2}(\varphi \pm \frac{\pi}{2})} \\ &\quad \times \left(\frac{e^{j\varphi}}{Z} + (\pm ij - e^{j\varphi}) e^{-Z \ln Z} \right) \\ &\quad \text{for H waves} \end{aligned} \quad (34)$$

と求められる。ただし

$$Z = \left(\frac{k}{2} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} \right) z \quad (35)$$

また

$$\bar{a}_0 = \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2\pi}} \times \begin{cases} e^{-j\frac{\varphi}{2}} \sqrt{-2 \sin \varphi} & \text{for E waves} \\ i e^{-j\frac{1}{2}(\varphi \pm \frac{\pi}{2})} & \text{for H waves} \end{cases} \quad (36)$$

H波の解 Ψ (式(34)の第2式) は Ψ_a と Ψ_b の和で表わされている。複号のついた項が Ψ_a に対応し、残りの項が Ψ_b を表わしている。幾何光学回折界と比較すれば分かるように、上の表現にはエッチ効果を表わす $z^{-1/2}$ 項を含んでいない。そのため、エッチ条件を満たす電磁電が流れず、二つの回折境界付近以外で、近似精度が劣化している。H波の回折ではエッチに線状磁流が流れているが、E波ではそのような線状電流が流れないという非物理的な解となっている。これは、物理光学近似が表面電流を正しく表現していないことによるものと思われる。

同様の手法を用いて幾何光学回折界の一様界を求めてみる。式(26)の界が幾何光学境界で発散したのは、厳密な回折係数に含まれる関数 F (フレネル積分に付随した関数 [9])

$$F(x) = j2\sqrt{x} e^{jx} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-t^2} dt \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\pi x} e^{jx + j\frac{\pi}{4}} & \text{as } x \rightarrow 0 \\ 1 & \text{as } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (37)$$

を1で近似したことで、 $x = 0$ 付近で精度が劣化したためである。幾何光学域とされる遠方では、この領域は極く狭い範囲に限られているため、ここで精度を上げるより、むしろ単に発散を防止することのみに専念する。最も簡単な方法は次式で近似することであろう。

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x - j\frac{1}{\pi}}} \quad (38)$$

この近似を用いれば、少なくとも、 $x = 0$ と $x = \infty$ で厳密解を与える。

さらに、上記の近似を式(26)の分母だけに限って適用すれば、式(26)の代わりに

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta}t} \Psi(t) dt \right|^2 \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sgn}(\cos \theta + \cos \varphi)}{\sqrt{(\cos \theta + \cos \varphi)^2 - j\frac{2}{\pi k r} \sin^2 \varphi}} \times \begin{cases} -\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{cases}
\end{aligned} \tag{39}$$

が得られる。この右辺を、やはり、 $a \bar{a}$ の形に分解する、

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta}t} \Psi(t) dt \right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2} e^{j\varphi/2}}{\sqrt{(e^{-i\theta} + e^{j\varphi})^2 + j\frac{2}{\pi k r} e^{j2\varphi}}} \\
& \times \begin{cases} \sqrt{\frac{\sin \varphi/2}{2j}} (e^{-i\theta/2} + ij) \text{ or } \sqrt{\frac{j \sin \varphi/2}{2}} (e^{-i\theta/2} - ij) \\ \sqrt{\frac{\cos \varphi/2}{2j}} (e^{-i\theta/2} + j) \text{ or } \sqrt{\frac{j \cos \varphi/2}{2}} (e^{-i\theta/2} - j) \end{cases} \\
& \times \text{c.c.} \\
& = \begin{cases} e^{i\theta} \sqrt{\frac{\sin \varphi/2}{\pi}} e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})} \left(\frac{e^{-i\theta/2} \pm ij}{\sqrt{(e^{-i\theta} + e^{j\varphi})^2 + j\frac{2}{\pi k r} e^{j2\varphi}}} \right) \\ e^{i\theta} \sqrt{\frac{\cos \varphi/2}{\pi}} e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})} \left(\frac{e^{-i\theta/2} \pm j}{\sqrt{(e^{-i\theta} + e^{j\varphi})^2 + j\frac{2}{\pi k r} e^{j2\varphi}}} \right) \end{cases} \times \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{40}$$

したがって、式(28)に代わる式として

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta}t} \Psi(t) dt \\
&= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})}}{\sqrt{(e^{-i\theta} + e^{j\varphi})^2 + j\frac{2}{\pi k r} e^{j2\varphi}}} \\
& \times \begin{cases} \sqrt{\sin \varphi/2} (\sqrt{e^{-i\theta}} \pm ij) \text{ for } E \text{ waves} \\ \sqrt{\cos \varphi/2} (\sqrt{e^{-i\theta}} \pm j) \text{ for } H \text{ waves} \end{cases} \\
& (0 < \varphi < \pi)
\end{aligned} \tag{41}$$

を得る。上の積分の収束については、 $2/\pi k r$ が十分に小さければ、前述の解析接続法をそのまま適用できる。その結果、ベッセル関数を含む次式の解が得られる。

$$\Psi(z) = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{2j} e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})} \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2}} e^{-z} \times \left[\begin{array}{l} \pm ij J_0 \left(\sqrt{\frac{j^2}{\pi kr}} Z \right) \ln Z \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{2j} e^{j\frac{\varphi}{2}} \int_{-\infty}^z t^{-3/2} e^t J_0 \left(\sqrt{\frac{j^2}{\pi kr}} (Z-t) \right) dt \end{array} \right] \quad \text{for E waves} \quad (42)$$

$$\Psi(z) = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\pi}} \frac{k}{2j} e^{j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{-z} \times \left[\begin{array}{l} \pm j J_0 \left(\sqrt{\frac{j^2}{\pi kr}} Z \right) \ln Z \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{2j} e^{j\frac{\varphi}{2}} \int_{-\infty}^z t^{-3/2} e^t J_0 \left(\sqrt{\frac{j^2}{\pi kr}} (Z-t) \right) dt \end{array} \right] \quad \text{for H waves} \quad (43)$$

ただし

$$Z = \left(\frac{k}{2} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} \right) z$$

また

$$\bar{a}_0 = \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-j\frac{1}{2}(\varphi \mp \frac{\pi}{2})}}{\sqrt{1 + j\frac{2}{\pi kr}}} \times \begin{cases} -i \sqrt{\sin \varphi/2} & \text{for E waves} \\ \sqrt{\cos \varphi/2} & \text{for H waves} \end{cases} \quad (44)$$

この一様界で、 $2/\pi kr$ をゼロに近づけば、先に求めた幾何光学の回折界に一致する。

5 むすび

エッチのような幾何学的な端点をもつ散乱体からの回折問題に幾何光学的な手法を用いると、必ず、反射/影境界が現れ、そこで界が発散する。仮に一様漸近展開の考えを導入したとしても、これを局所的に押さえられたかもしれないが、大域的には止められない。ここでは、大域界として知られている物理光学界（波動光学界）と直視的な幾何光学界の間の関係を求めるため、両者の間の変換関係を、複素積分の表現で与えた。

それによって、遠方の幾何光学界から、この界が作る近傍界（あるいは低周波界）を導き、散乱体上の電磁流が定められることを示した。さらに、一様な近似幾何光学界の近傍界も求めておいた。なお、ここでは、最も簡単な半無限平板の回折問題で要点を述べたが、理論は一般的であり、任意の形状にも適用可能である。

参考文献

- [1] Kohei Hongo, "GTD(Geometrical Theory of Diffraction) and its application Pt.1", J. Inst. Electron. Inform. Commun. Engrs., vol.70, no.6 pp.607-612, June 1987 (in Japanese); ----, "GTD(Geometrical Theory of Diffraction) and its application Pt.2", ibid., vol.70, no.7, pp.745-

749 (in Japanese).

- [2] M.Ando and M.Oodo, "High frequency diffraction analysis of electromagnetic waves", Proc. Fifth Sino-Japanese Joint Meeting on Optical Fiber Science and Electromagnetic Theory, September 20-22, 1995, Tianjin, China, pp.A1-A13.
- [3] M.Nishimoto and H.Ikuno, "Method of equivalent currents for calculation of surface diffraction by a smooth convex object", IEICE Trans. Electron., vol.E79-C, no.10, October 1996 (in press).
- [4] M.Hashimoto and K.Fujisawa, "Field description with spatial complex variables and its application to scattering and waveguide problems", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.MTT-19, no.5, pp.458-474, May 1971.
- [5] I.N.Vekua, "New Methods for Solving Elliptic Equations", Amsterdam, North-Holland Pub., 1967.
- [6] P.Henrici, "Zur Funktiontheorie der Wellengleichung -mit Anwendungen auf spezielle Reihen und Integrale mit Besselschen, Whittakerschen und Mathieuschen Funktionen-", Commentarii Mathematici Helvetici, vol.27, pp.235-293, 1953.
- [7] J.J.Bowman, T.B.A.Senior and P.L.E.Uslenghi, ed., "Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes," Amsterdam, North-Holland Pub., 1969.
- [8] J.J.Bowman and T.B.A.Senior, "The half-plane" Chapter 8, in the literature [7].
- [9] M.Ando, "The geometrical theory of diffraction" Chapter 7, p.218, in Analysis Methods for Electromagnetic Waves, ed. E.Yamashita, New York, Artech House Inc., 1990.
- [10] M.Abramowitz and I.A.Stegun, ed., "Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables", p.360, New York, Dover Pub.Inc., 1972.

付録 式(23) および式(25)の導出

空間複素変数 w

$$w = u + iv \quad (A1)$$

を変数とするハンケル関数の積分表示式は、定義にしたがって、次式で与えられる [10].

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(w) &= J_0(w) - jY_0(w) \\ &= \frac{j}{\pi} \int_{-\infty + j\pi/2 + i\theta_1}^{+\infty - j\pi/2 - i\theta_2} e^{-jw \cosh \xi} d\xi \end{aligned} \quad (A2)$$

ただし

$$-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2 \quad (A3)$$

ここで、 z と ξ は互いに複素共役の関係にあるため、それらの積は実数となることを考慮して、変数を次のように取る。

$$w = k\sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)} \quad \arg w = \arg \sqrt{(1-t/z)(1-\tau/\zeta)} \quad (A4)$$

また、 θ_1 と θ_2 は(A3)を満たすかぎり任意に選べるため、ここでは以下のように取る。

$$\theta_1 = -\arg \sqrt{1-t/z} \quad \theta_2 = \arg \sqrt{1-\tau/\zeta} \quad (A5)$$

次に式(A2)の積分変数を

$$\xi = \xi' - \xi_0$$

で変換する。ただし

$$\xi_0 = \ln \left(\frac{\sqrt{1-t/z}}{\sqrt{1-\tau/\zeta}} \right) \quad \text{or} \quad e^{\xi_0} = \sqrt{\frac{1-t/z}{1-\tau/\zeta}} \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} & H_0^{(2)}(k\sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)}) \\ &= \frac{j}{\pi} \int_{-\infty + j\pi/2 + i\theta_2}^{+\infty - j\pi/2 + i\theta_1} e^{-jk\sqrt{\zeta} \cosh \xi} \\ & \quad \times e^{j\frac{k}{2}\sqrt{\zeta}e^{-\xi} + j\frac{k}{2}\sqrt{\zeta}e^{\xi}} d\xi' \end{aligned} \quad (A7)$$

を得る。ここで

$$\sqrt{z\zeta} = r \sqrt{\zeta/z} = e^{-i\theta} \quad \sqrt{z/\zeta} = e^{i\theta} \quad (A8)$$

したがって

$$\begin{aligned} u(z, \zeta) &= - \int_{-\infty + j\pi/2 + i\theta_2}^{+\infty - j\pi/2 + i\theta_1} e^{-jkr \cosh \xi'} d\xi' \\ & \times \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta-\xi}} \Psi(t) dt \times \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta+\xi}} \Phi(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (A9)$$

上式で式(5)の関係を考慮し、さらに θ_1 と θ_2 は(A3)を満たすかぎり任意に選べるため、ここではゼロとする。そうすれば、積分路を (i に関する) 実数面上に取ることができる。すなわち ξ' が実数となるため

$$\begin{aligned} u(z, \zeta) &= - \int_{-\infty + j\pi/2}^{+\infty - j\pi/2} e^{-jkr \cosh \xi'} d\xi' \\ & \times \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta-\xi}} \Psi(t) dt \times \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{j\frac{k}{2}e^{-i\theta+\xi}} \Psi(t) dt \end{aligned} \quad (A10)$$

となる。 Ψ の γ 上での積分が $a+b$ を表わしているのので、これに

$$s = e^{-i\theta-\xi}$$

として

$$a(s) \overline{a(1/\bar{s})} + b(s) \overline{b(1/\bar{s})} = 0 \quad (A12)$$

の関係を適用すれば

$$u(z, \zeta) = - \int_{-\infty + j\pi/2}^{+\infty - j\pi/2} e^{-jkr \cosh \xi'} d\xi' \times \left[a(e^{-i\theta - \xi}) \overline{b(e^{-i\theta + \xi})} + \overline{a(e^{-i\theta + \xi})} b(e^{-i\theta - \xi}) \right] \quad (A11)$$

を得る。この結果を式(A9)にまで遡れば、界 u が γ の外側のすべての領域で

$$u(z, \zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma} dt \oint_{\gamma} d\tau K(z, \zeta; t, \tau) \times \left[\Psi_a(t) \Phi_b(\tau) + \Psi_b(t) \Phi_a(\tau) \right] \quad (A13)$$

で表わされていることが分かる。この表現式に近傍近似

$$\partial K / \partial z = 1 / (z - t)$$

を行い、さらに関数 $\Phi_a(\tau)$ の $\overline{\gamma}$ 上での積分が消えることより (式(19)参照のこと)、ただちに

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \overline{a_0} \times \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Psi_b(t)}{z - t} dt \quad (A14)$$

が導かれる。積分は無限遠点と $t = z$ の極のまわりでの留数計算によって与えられる。もし Ψ_b を遠方でゼロとなる関数とすれば、無限遠での積分の寄与が無くなるため

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \overline{a_0} \Psi_b(z) \quad (A15)$$

となる。

輻射科学研究会資料
RS 96-18

コルゲーションを装荷したフェライトHガイド
からのミリ波の放射
**(Millimeter Wave Radiations from
a Grooved Ferrite H Guide)**

長谷川 浩文, 堤 誠, 島崎 仁司
(京都工芸繊維大学 工芸学部)

1996年 12月 6日
輻射科学研究会
(住友電気工業 (株) 大阪本社)

Millimeter Wave Radiations from a Grooved Ferrite H Guide

H.HASEGAWA, M.TSUTSUMI and H.SHIMASAKI

Faculty of Engineering and Design
Kyoto Institute of Technology

Abstract

The magnetically scannable millimeter wave leaky wave antenna using a H guide loaded with a grooved ferrite slab was proposed, and demonstrated both theoretically and experimentally at Q band. The maximum scanning rate for the magnetic field was found to be $5^\circ / 0.1\text{T}$ with average half-power beamwidth of 5.5° at 45GHz, which agrees well with numerical results based on the exact dispersion relation of the H_{11}^x mode in the ferrite H guide.

I. Introduction

Leaky wave phenomena from the periodic waveguide structure are very attractive subject from a point of view of an application to frequency steerable millimeter wave antenna[1]. Leaky wave antennas employing slow wave structures may be formed by cutting grooves in the dielectric surface or in the conducting surface[2][3] or by applying a series of metallic strips on the dielectric waveguide surface[4]. On the other hand, leaky wave antennas employing the dielectric inset waveguide loaded with periodic metal-strips are recently analyzed[5]. About a decade ago leaky waves from a grooved ferrite image line have been studied in the laboratory prototype by one of the authors, who observed good magnetically steerable leaky wave characteristics at millimeter wave frequencies[6].

In this paper, we treat a leaky wave antenna consisting of H guide loaded with a grooved ferrite in more practical design[7]. The classical perturbation theory was used for the analysis of this structure in the reference [7]. Therefore, we apply here an exact wave analysis by which we replace the perturbation theory[8]. Some numerical results of dispersion curves, radiation angles, beamwidths, and radiation patterns were presented and experimentally verified at Q band.

II. Theory

A. Dispersion relation

The geometry of the structure of ferrite H guide loaded with a grooved shape is shown in Fig.1. The grooved ferrite having the width w , the height h ,

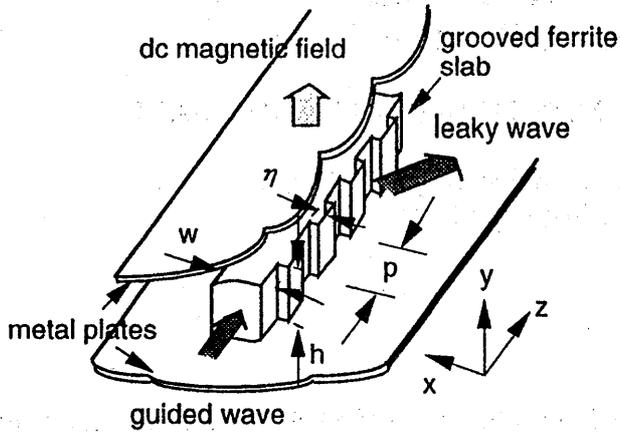


Fig.1 The geometry of the structure of H guide loaded with a grooved ferrite.

harmonic β_0 of the leaky wave phenomena is close to the propagation constant β of the guided wave[1]. Thus we have derived the guided wave propagation characteristics of the ferrite H guide in an exact form according to the reference [8].

The permeability tensor of the ferrite slab is given by

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & j\kappa \\ 0 & 1 & 0 \\ -j\kappa & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (1)$$

where

$$\mu = 1 + \frac{(\gamma\mu_0 M)(\gamma\mu_0 H_0)}{(\gamma\mu_0 H_0)^2 - \omega^2}, \quad \kappa = \frac{(\gamma\mu_0 M)\omega}{(\gamma\mu_0 H_0)^2 - \omega^2}$$

γ , $\mu_0 M$ and $\mu_0 H_0$ are the gyromagnetic ratio, the saturation magnetization and the dc magnetic field for the y direction, respectively[6].

From Maxwell's equations together with (1), the RF electric(E_{yf}) and magnetic(H_{yf}) field components of the y direction satisfy the following simultaneous partial differential equations:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2\right)E_{yf} + aE_{yf} + b\frac{\partial}{\partial y}H_{yf} = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2\right)\frac{\partial}{\partial y}H_{yf} + c\frac{\partial}{\partial y}H_{yf} + dE_{yf} = 0 \quad (3)$$

the modulation index η and the periodicity p , respectively, sandwiched between two parallel metal plates, is magnetized in the y direction and is surrounded by a free space (ϵ_0, μ_0).

A periodic structure of shallow rectangular grooves of practical shape is formed by mechanical cutting a surface of the slab.

In the theory, we assume that the effect of the groove on the ferrite slab is neglected due to the small perturbation of the surface and that the fundamental space

where

$$\begin{aligned}
 a &= \mu_{ef} \epsilon_r k_0^2 - k_y^2, & b &= -\eta_0 k_0 \frac{\kappa}{\mu}, \\
 c &= \epsilon_r k_0^2 - \frac{1}{\mu} k_y^2, & d &= -\frac{\epsilon_r k_0 \kappa}{\eta_0 \mu} k_y^2, \\
 k_0 &= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, & k_y &= \frac{n\pi}{h} \quad (n=1,2,\dots), \\
 \eta_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, & \mu_{ef} &= \frac{\mu^2 - \kappa^2}{\mu}.
 \end{aligned}$$

ϵ_r is a relative dielectric constant of the ferrite, and k_y satisfies the boundary conditions at upper and lower metal plates.

According to the description method of Kales[8][9], we find the following x , y and z field components in the ferrite region.

$$E_{yf} = s_1 u_1 + s_2 u_2, \quad (4)$$

$$H_{yf} = -\frac{1}{k_y} \left(q_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + q_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$E_{xf} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u_1 + u_2) + \frac{\mu \beta}{\kappa k_y^2} \left\{ (s_1 - a) \frac{\partial u_1}{\partial y} + (s_2 - a) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right\}, \quad (6)$$

$$H_{xf} = -\frac{\epsilon_r k_0 \beta}{\eta_0} (u_1 + u_2) + \frac{1}{\eta_0 \kappa k_0} \left\{ (k_1^2 - s_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (k_1^2 - s_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right\}, \quad (7)$$

$$E_{zf} = -j \left[\beta \frac{\partial}{\partial y} (u_1 + u_2) + \frac{\mu}{\kappa k_y^2} \left\{ (s_1 - a) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + (s_2 - a) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \right\} \right], \quad (8)$$

$$H_{zf} = j \left[\frac{\epsilon_r k_0}{\eta_0} \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2) - \frac{\beta}{\eta_0 \kappa k_0} \left\{ (k_1^2 - s_1) u_1 + (k_1^2 - s_2) u_2 \right\} \right], \quad (9)$$

where

$$u_1 = (A \cos \alpha_1 x + B \sin \alpha_1 x) \cos k_y y,$$

$$u_2 = (C \cos \alpha_2 x + D \sin \alpha_2 x) \cos k_y y,$$

$$q_1 = \frac{(s_1 - a)s_1}{bk_y}, \quad q_2 = \frac{(s_2 - a)s_2}{bk_y},$$

$$\alpha_1^2 = s_1 - \beta^2, \quad \alpha_2^2 = s_2 - \beta^2,$$

$$k_1^2 = \mu\epsilon_r k_0^2 - k_y^2,$$

s_1 and s_2 are the roots of the quadratic equation as

$$s^2 - (a + c)s + ac - bd = 0,$$

and A, B, C and D are unknown amplitude coefficients to be determined.

On the other hand, the E_{ya} and H_{ya} components in the air regions satisfy the following homogeneous Helmholtz equations:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 + k_0^2\right)E_{ya} = 0, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 + k_0^2\right)H_{ya} = 0. \quad (11)$$

Equations (10) and (11) can be easily solved for E_{ya} and H_{ya} . Therefore, we find the following x , y and z fields components in the air regions as

$$\left\langle x \geq \frac{w}{2} \right\rangle$$

$$E_{ya} = K \cos\left(\frac{n\pi}{h}\right)y \cdot e^{-v\left(x - \frac{w}{2}\right) - j\beta z}, \quad (12)$$

$$H_{ya} = L \sin\left(\frac{n\pi}{h}\right)y \cdot e^{-v\left(x - \frac{w}{2}\right) - j\beta z}, \quad (13)$$

$$E_{xa} = \frac{1}{k_0^2 - k_y^2} \left(v \left(\frac{n\pi}{h}\right) K + \omega\mu_0 \beta L \right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}\right)y \cdot e^{-v\left(x - \frac{w}{2}\right) - j\beta z}, \quad (14)$$

$$H_{xa} = \frac{-1}{k_0^2 - k_y^2} \left(\omega\epsilon_0 \beta K + v \left(\frac{n\pi}{h}\right) L \right) \cos\left(\frac{n\pi}{h}\right)y \cdot e^{-v\left(x - \frac{w}{2}\right) - j\beta z}, \quad (15)$$

$$E_{za} = \frac{j}{k_0^2 - k_y^2} \left(\beta \left(\frac{n\pi}{h}\right) K + \omega\mu_0 v L \right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}\right)y \cdot e^{-v\left(x - \frac{w}{2}\right) - j\beta z}, \quad (16)$$

$$H_{za} = \frac{-j}{k_0^2 - k_y^2} \left(\omega\epsilon_0 v K - \beta \left(\frac{n\pi}{h}\right) L \right) \cos\left(\frac{n\pi}{h}\right)y \cdot e^{-v\left(x - \frac{w}{2}\right) - j\beta z}, \quad (17)$$

$$\left\langle x \leq -\frac{w}{2} \right\rangle$$

$$E_{ya} = M \cos\left(\frac{n\pi}{h}\right) y \cdot e^{v\left(x+\frac{w}{2}\right) - j\beta z} \quad (18)$$

$$H_{ya} = N \sin\left(\frac{n\pi}{h}\right) y \cdot e^{v\left(x+\frac{w}{2}\right) - j\beta z} \quad (19)$$

$$E_{xa} = \frac{-1}{k_0^2 - k_y^2} \left(v \left(\frac{n\pi}{h} \right) M - \omega \mu_0 \beta N \right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}\right) y \cdot e^{v\left(x+\frac{w}{2}\right) - j\beta z} \quad (20)$$

$$H_{xa} = \frac{-1}{k_0^2 - k_y^2} \left(\omega \epsilon_0 \beta M - v \left(\frac{n\pi}{h} \right) N \right) \cos\left(\frac{n\pi}{h}\right) y \cdot e^{v\left(x+\frac{w}{2}\right) - j\beta z} \quad (21)$$

$$E_{za} = \frac{j}{k_0^2 - k_y^2} \left(\beta \left(\frac{n\pi}{h} \right) M - \omega \mu_0 v N \right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}\right) y \cdot e^{v\left(x+\frac{w}{2}\right) - j\beta z} \quad (22)$$

$$H_{za} = \frac{j}{k_0^2 - k_y^2} \left(\omega \epsilon_0 v M - \beta \left(\frac{n\pi}{h} \right) N \right) \cos\left(\frac{n\pi}{h}\right) y \cdot e^{v\left(x+\frac{w}{2}\right) - j\beta z} \quad (23)$$

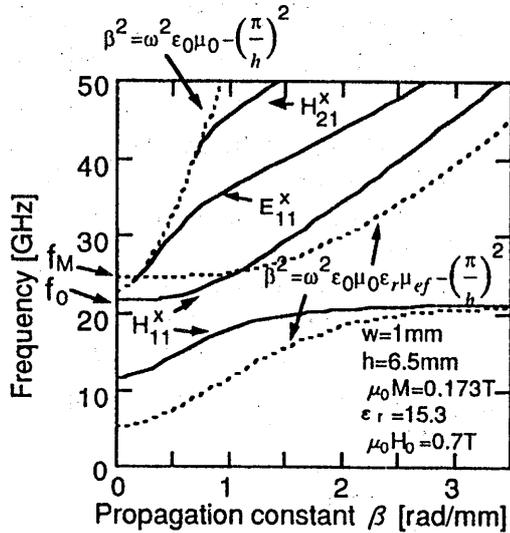


Fig.2 Dispersion curve of the ferrite H guide.

where

$$v^2 = \beta^2 + k_y^2 - k_0^2$$

and K, L, M and N are unknown amplitude coefficients to be determined.

The characteristic equation is derived by matching the tangential electric and magnetic fields at the interfaces between an air and a ferrite and by eliminating the unknown amplitude coefficients A, B, C, D, K, L, M and N[8]. The characteristic equation is solved numerically for the propagation constant β of the guided wave and the dispersion curve is depicted in Fig.2 as a function of frequency at an dc magnetic field $\mu_0 H_0=0.7T$. The material parameters of

the ferrite slab are $\epsilon_r=15.3$, $\mu_0 M=0.173T$, $\gamma=1.76 \times 10^{11}(\text{rad}/(\text{sec} \cdot T))$ and the dimension of the ferrite slab is selected for width $w=1\text{mm}$ and height $h=6.5\text{mm}$.

The propagation modes having all the six field components are classified as $E_{m,n}^x$ and $H_{m,n}^x$, where "x" denotes TM and TE x-direction mode, respectively, which correspond in the limit condition of $\mu \rightarrow 1$ and $\kappa \rightarrow 0$ to the LSM and LSE mode in a well known H guide[8]. The integer "m"(m=1,2,3,...) and "n" correspond to the mth root of the characteristic equation and to the nth value for k_y , respectively.

Within the frequency band $f_0 (= \gamma \mu_0 \sqrt{H_0(H_0+M)} / 2\pi) < f < f_M (= \gamma \mu_0 (H_0 + M) / 2\pi)$ and for $\beta > \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_{ef} - (\frac{\pi}{h})^2}$, only surface waves corresponding to magnetostatic and dynamic modes, discussed in detail by Gerson and Nadan[10], can exist. Outside these frequency ranges, dispersion curves for the volume waves exist in the high- and the low-frequency range, where $\sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - (\frac{\pi}{h})^2} < \beta < \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_{ef} - (\frac{\pi}{h})^2}$. The H_{11}^x , E_{11}^x , H_{21}^x , and E_{21}^x modes in

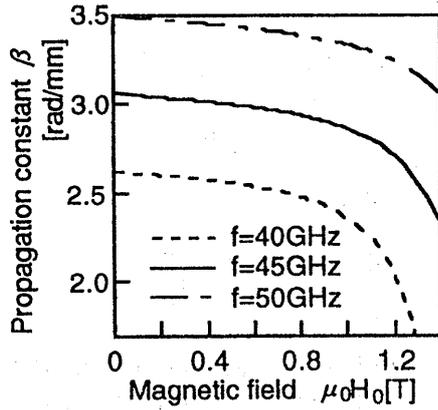


Fig.3 Calculated propagation constant β as a function of the magnetic field for the H_{11}^x mode.

where $\mu_0 H_{0g} = \left[-\mu_0 M + \sqrt{(\mu_0 M)^2 + 4(\omega_0/\gamma)^2} \right] / 2$ and ω_0 is the gyromagnetic resonance frequency.

B. Characteristics of radiation beam

The main beam direction θ_m of the leaky wave antenna is given approximately by[1]

$$\theta_m = \sin^{-1} \left(\frac{\beta_0 + n\lambda_0}{k_0 p} \right), \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (24)$$

where n is the number of the space harmonic and $\lambda_0 = 2\pi/k_0$. Although β_0 becomes complex for n=-1, we assume the groove modulation index η is

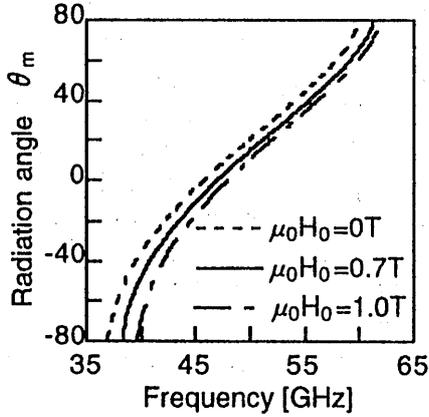


Fig.4 Calculated radiation angle as a function of the frequency for three magnetic fields.

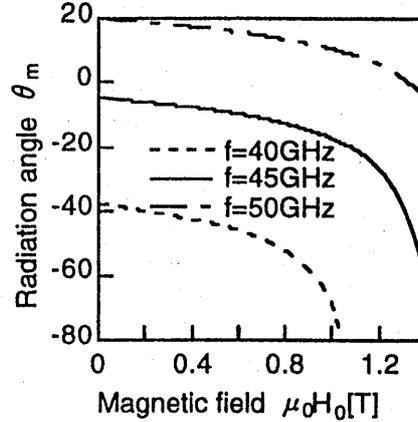


Fig.5 Calculated radiation angle as a function of the magnetic field for three frequencies.

sufficiently small that the imaginary part of β_0 might be neglected and its real part corresponds to the propagation constant β of the guided wave in Figs.2 and 3. Equation (24) is evaluated numerically by estimating the propagation constant β of dispersion curve as a function of the operating frequency and for different magnetic fields, as shown in Fig.4. The periodicity of groove is $p=2\text{mm}$. The negative sign of the θ_m on the ordinate of the figure denotes the scanning of the main beam toward the backfire region, and a positive sign indicates the scanning toward the endfire region. It can be seen that the change in the sign of θ_m occurs at frequency band $45\sim 50\text{GHz}$, and that θ_m changes with a magnetic field.

Fig.5 show the numerical results for the main beam direction as a function of dc magnetic field for three different operating frequencies between 40GHz and 50GHz. At the zero magnetic field and for the operating frequency 45GHz, the direction of the main beam θ_m is seen to be $\theta_{m0} = -5^\circ$ toward the backfire direction from the broadside. By increasing the dc magnetic field a continuous scanning of the main beam can be available. We can estimate from Fig.5 that the slope or scanning rate, $\Delta \theta_m / \Delta \mu_0 H_0$ increases rapidly, when the magnetic field approaches to the gyromagnetic resonance field $\mu_0 H_{0g} = 1.52\text{T}$ at 45GHz. Thus we can recognize magnetically scannable characteristics of the H guide in this configuration.

A theoretical expression for the half-power beamwidth θ_w is given approximately by[1]

$$\theta_w = 2[\sin^{-1}(\frac{\beta_n}{k_0}) - \sin^{-1}(\frac{1.39\lambda_0}{N\pi p} + \frac{\beta_n}{k_0})] \quad (25)$$

where $\beta_n = \beta_0 + 2n\pi/p$, and $n=-1$. N is the number of groove. Equation (25) is evaluated numerically by estimating the propagation constant β of the dispersion curve of Figs.2 and 3 as a function of the dc magnetic field. Fig.6 show the numerical results of the half-power beamwidth θ_w as a function of the dc magnetic field for three different frequencies. The periodicity of groove and the number of groove are $p=2\text{mm}$ and $N=52$, respectively. Beamwidths are almost constant until 0.8T, but in the vicinity of the gyromagnetic resonance of 1.52T at 45GHz the beamwidths increase rapidly. The average values of beamwidth below magnetic field intensity 1.0T may be evaluated as 3.2° at 45GHz, and the frequency dependence on θ_w is also small.

A theoretical expression for the radiation pattern is given approximately by[1]

$$R(\theta) = \left| \frac{\sin(N\psi/2)}{N\sin(\psi/2)} \right|^2 \quad (26)$$

where $\psi = k_0 p \sin \theta - \beta_n p$. Equation (26) is evaluated numerically by using the propagation constant β of the dispersion curve, and is depicted for two different dc magnetic field at the operating frequency 45GHz in Fig.7. The numerical results exhibit that the main beam directions θ_m are -10° and -11° for the dc magnetic fields 0.6T and 0.7T, respectively, and the half-power beamwidth θ_w is 3.5° .

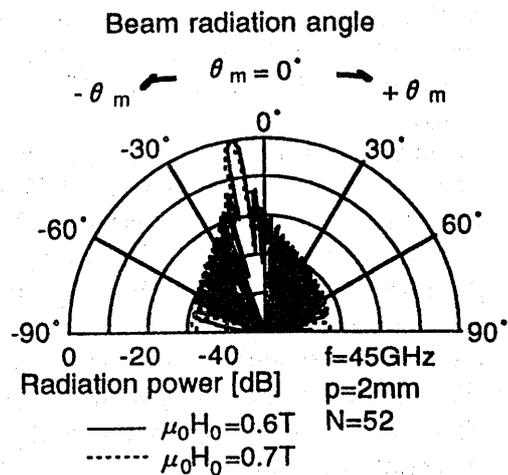
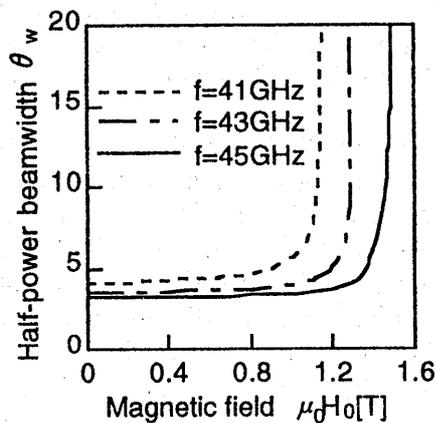


Fig.6 Calculated half-power beamwidth as a function of the magnetic field for three frequencies.

Fig.7 Calculated radiation patterns for two different magnetic fields.

III. Experimental results

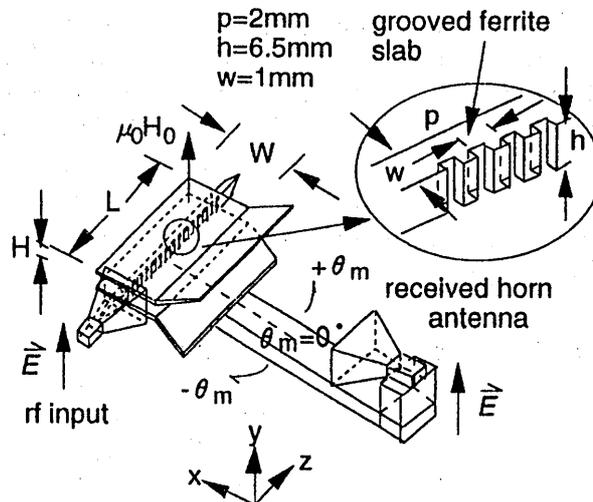


Fig.8 Test set up of magnetically steerable leaky wave antenna using H guide having a grooved ferrite slab .

Experiments on the leaky wave antenna using the H guide loaded with a grooved ferrite slab have been carried out in the 33~50GHz at Q band. A grooved polycrystalline(YIG) ferrite slab with finite linewidth of 750e are used as the guiding region. Dimensions of the ferrite slab are $w=1\text{mm}$, $h=6.5\text{mm}$ and $l=125\text{mm}$ or 150mm . A surface of the slab is grooved with rectangular form and the periodicity of groove and the number of groove are $p=2\text{mm}$ and $N=52$ or 65 , respectively. They are the same dimensions as that used for the theory. The modulation indexes are three kinds of $\eta=20\%$, 30% and 40% . The grooved ferrite slab is sandwiched between two metal plates as shown in Fig.1 to get the H guide structure.

Fig.8 shows the experimental geometry of the leaky wave antenna with a grooved ferrite slab. The H guide consisting of the dimensions of height of $H=6.5\text{mm}$, width of $W=50\text{mm}$, and length of $L=180\text{mm}$ is fabricated with a metal flare attached to the upper and lower metal plates.

Scalar network analyzer HP8757C was used in the measurement. The millimeter wave of the frequency range 33~50GHz was fed to H guide through a teflon slab and a rectangular WRJ-400 waveguide of TE_{10} mode. To excite the H_{11}^* mode in the H guide, the grooved ferrite slab is held parallel to the electric field of the TE_{10} mode. To enhance the launching efficiency, the ferrite slab have a tapered transition section at the front end. The far end of the slab is also tapered and coated with absorber to avoid unwanted reflections. The H guide is inserted into an electromagnet having large magnet poles having the diameter 110mm. The leaky wave is detected through a standard horn at a distance of

50cm from the center of the grooved ferrite slab.

Fig.9 shows the experimental results for typical radiation patterns for two magnetic fields at the operating frequency 45GHz. The length of the ferrite slab, and the number and modulation index of the groove are $l = 125\text{mm}$, $N=52$ and $\eta = 20\%$, respectively. It can be seen from Fig.9 that for a dc magnetic field 0.6T the main beam direction θ_m is -18° , the first sidelobes are 7.0dB and 14.9dB below the level of the main beam, and the half-power beamwidth θ_w is about 6° . Thus it is found that the main beam can be steered magnetically about 5° , as shown in this figure, and the radiation patterns measured agree well with the numerical results of Fig.7.

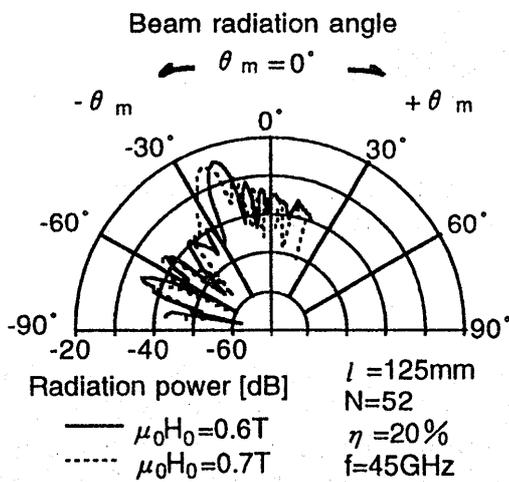


Fig.9 Measured radiation patterns for two magnetic fields.

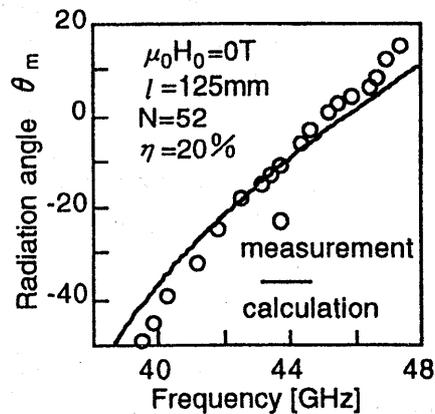


Fig.10 Measured radiation angle as a function of the frequency for the absence of the magnetic field.

It is well known that the direction of the main beam θ_m is a function of the operating frequency[1]. The experimental result of frequency dependence of θ_m is shown in Fig.10, where the main beam direction θ_m was measured by changing the frequencies for an absence of the dc magnetic field. It was used that the length of the ferrite slab, and the number and modulation index of the groove are $l = 125\text{mm}$, $N=52$ and $\eta = 20\%$, respectively. Plotted values for the experiments agree well with the theoretical estimation of Fig.4 as shown in solid line in Fig.10 for a wide range of the operating frequencies 39~48GHz.

Fig.11 show the experimental results for the main beam direction as a function of dc magnetic field for an operating frequency 45GHz. At the magnetic field 0.1T in Fig.11, the direction of the main beam θ_m is measured to be $\theta_{m0} = -12^\circ$ toward the backfire direction from the broadside. By increasing the dc magnetic field a continuous scanning of the main beam up to $\theta_{max} = -33^\circ$ was observed. The maximum range of scanning $|\theta_{max} - \theta_{m0}|$ is 21° , which corresponds to an average magnetic scanning rate of $1^\circ / 0.052\text{T}$. It is noted that plotted

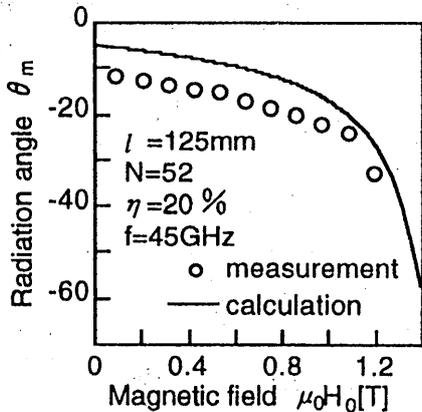


Fig. 11 Measured radiation angle θ_m as a function of the magnetic field.

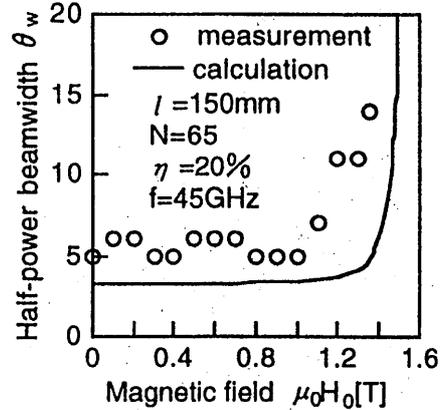


Fig. 12 Measured half-power beamwidth θ_w as a function of the magnetic field.

values for the experiments agree well with the theoretical result of Fig. 5 as shown with the solid line in Fig. 11 for a wide range of the dc magnetic fields.

Fig. 12 shows the experimental results for the half-power beamwidth θ_w as a function of the dc magnetic field for an operating frequency 45GHz. The length of the ferrite slab, and the number and modulation index of the groove are $l = 150\text{mm}$, $N = 65$ and $\eta = 20\%$, respectively. The average values of beamwidth below magnetic field intensity 1.1T may be evaluated as 5.5° . The theory on θ_w is also shown in figure with a solid line.

Fig. 13 shows the experimental results for typical radiation patterns for three different groove modulation indexes ($\eta = 20\%$, 30% and 40%) at the operating frequency of 45GHz and at $\mu_0H_0 = 0.7\text{T}$. Three kind of grooved ferrite slabs with the length $l = 150\text{mm}$ are used. It can be seen from Fig. 13 that the half-power beamwidth θ_w broadens as increasing modulation index. It can be also seen that the maximum radiation power does not change even if η is increased, because the guided waves completely radiate the power until the far end of ferrite slab.

Fig. 14 shows the experimental results for typical radiation patterns for two different distances ($d = 3\text{mm}$ and 5mm) of metal reflector and a surface of ferrite slab. It can be seen from Fig. 14 that the maximum radiation power is available by matching the fields between the metal reflector and the grooved ferrite slab when d is the half wavelength of 3.4mm at the operating frequency 44GHz and at $\mu_0H_0 = 0.7\text{T}$. For $d = 3\text{mm}$, the main beam direction θ_m is -30° , the two sidelobes are 19.0dB and 21.6dB below the level of the main beam, and the half-power beamwidth θ_w of about 7° . The radiation pattern of H guide loaded with a grooved ferrite slab against the metal reflector is improved with the radiation power of 6.7dB compared with that of without the metal reflector although the half-power beamwidth θ_w is increased about 1° .

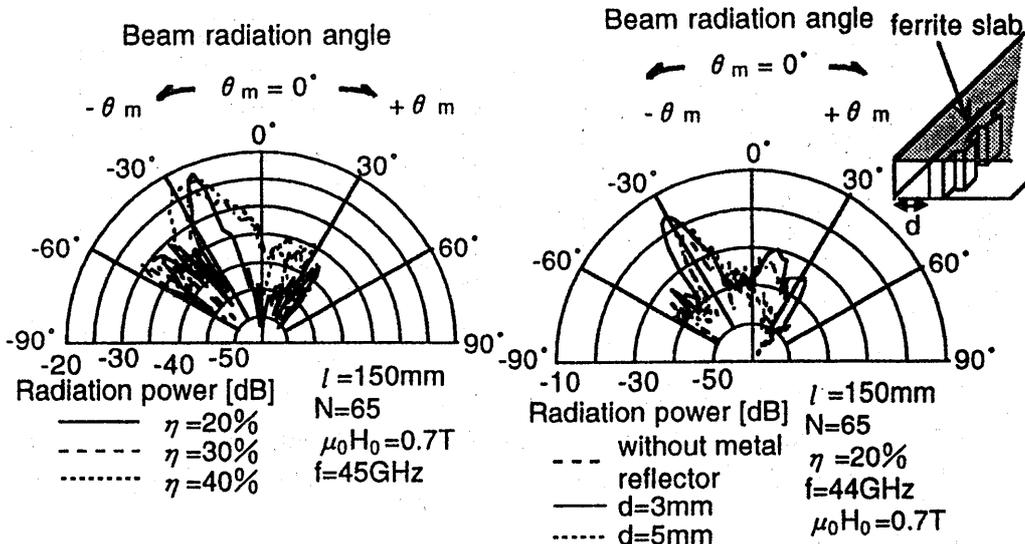


Fig.13 Measured radiation patterns for three different groove modulation indexes.

Fig.14 Measured radiation patterns for two different distance d between a metal reflector and ferrite slab and without metal reflector.

IV. Conclusion

The magnetically scannable leaky wave antenna using a H guide loaded with the grooved ferrite slab has been demonstrated both theoretically and experimentally at Q band. Assuming that the groove depth is sufficiently small, the propagation constant has been evaluated numerically from the exact dispersion curve of the guided mode H_{11}^x . A polycrystalline(YIG) ferrite slab having dimensions $1.0 \times 6.5 \times 125 \text{mm}^3$ or $1.0 \times 6.5 \times 150 \text{mm}^3$ and H guide having dimensions of the cross section $6.5 \times 50 \text{mm}^2$ and the length 180mm were used in the experiment, where the periodicity and the number of grooves were $p=2 \text{mm}$ and $N=52$ or 65, and three kind of the groove depths were examined.

The main beam direction, the beamwidth and the radiation profile of the leaky wave antenna have been demonstrated experimentally and confirmed with the theory. It was shown that the main beam direction could be steered continuously by changing the dc magnetic field and strongly depended on the dc magnetic field near the gyromagnetic resonance. The maximum scanning angle of the main beam direction was seen to be 21° associated with an average beamwidth of 5.5° with the dc magnetic field up to 1.1T at 45GHz. The maximum magnetic scanning rate was found to be $5^\circ / 0.1 \text{T}$. Measured results agreed well with numerical results based on the full dispersion curve of guided modes.

The leaky wave antenna proposed here may be useful for millimeter wave local area network applications.

Acknowledgment

We would like to thank Co.,Ltd. TDK for fabricating the grooved ferrite slab.

References

- [1] P.Bhartia and I.J.Bahl, *Millimeter Wave Engineering and Applications*, New York : Wiley, 1984, pp.575-598.
- [2] F.K.Schwering and S.T.Peng, "Design of dielectric grating antennas for millimeter-wave applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.MTT-31, pp199-209, Feb. 1983.
- [3] W.S.Park and S.R.Seshadri, "Theory of the grating coupler for a grounded-dielectric-slab waveguide," *Proc. Inst. Elec. Eng.*, vol.132, pt.H, pp.149-156, June 1985.
- [4] J.A.Encinar, "Mode-matching and point-matching techniques applied to the analysis of metal-strip-loaded dielectric antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.AP-38, pp.1405-1412, Sep. 1990.
- [5] M.Guglielmi and G.Boccalone,"A novel theory for dielectric-inset waveguide leaky-wave antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.AP-39, pp.497-504, Apr. 1991.
- [6] T.Ohira, M.Tsutsumi, and N.Kumagai,"Radiation of millimeter waves from a grooved ferrite image line," *Proc. IEEE(Letter)*, vol.70, pp.682-683, June 1982.
- [7] M.Tsutsumi, H.Shimasaki, and H.Hasegawa,"Electrically steerable millimeter wave antenna using the H guide with corrugated ferrite slab," *Proc. of ISAP'96*, Chiba, Japan, pp.1245-1248, Sep. 1996.
- [8] A.C.Cesar, and R.F.Souza,"Full-wave analysis of a transversely magnetized ferrite nonradiative dielectric waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.MTT-41, pp.647-651, Apr. 1993.
- [9] M.L.Kales,"Modes in wave guides containing ferrites," *J. Appl. Phys.*, vol.24, pp.604-608, May 1953.
- [10] T.J.Gerson, and J.S.Nadan,"Surface electromagnetic modes of a ferrite slab," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.MTT-22, pp.757-763, Aug. 1974.

光フィード無線中継システム
Optical Fiber Link Radio Expansion Systemu
法兼 敏雄
Toshio Norikane

資料番号 (RS 96-19)

住友電気工業株式会社 システムエレクトロニクス研究開発センター 無線通信技術グループ
Radio Communication Technology Group System & Electronics R&D Center, Sumitomo Electric Industries, Ltd

1. はじめに

近年の高度情報化の進展に伴い、アナログ・デジタル携帯電話、無線呼び出し（ポケットベル）などの移動体通信事業が全国で積極的に展開され、これらのサービスを受けられる地域も急速に拡大しつつある。これに伴って、ビル内・ビル陰、トンネル内、地下街といった電波の届きにくい地域（図1）の数も増加し、その対策が急務となっている。

これに対し、従来は漏洩同時ケーブルを敷設したり、新たな基地局を設置することにより対策が行われていたが、近年その伝送損失が少ないことと工事の簡便性から、アナログ光伝送を用いたシステムが注目され検討が行われている。

アナログ光伝送の設計時には搬送波電力対雑音電力比(Carrier to Noise ratio: C/N)と相互変調歪(the inter-modulation distortion :IMD)とのトレードオフ関係が問題となる。一般に C/N と IMD に対する所要値はデジタル伝送のそれと比べて非常に厳しい。

ここでは、C/N と IMD に対する評価及びそれを用いて当社が開発した中継用光伝送システムの概要と実施例について紹介するとともに、さらに高機能化を狙った光多重伝送方式とその評価結果について述べる。

2. 光フィード無線中継システムの概要

2-1. システム構成

光フィード無線中継システムは、電波の到達の不十分な区域（電波不感）区域に設置し、本来の通信エリアを補ったり、拡張したりする無線中継システムである。図2. に示すように、本システムは対基地局用と対移動局用の中継器とアンテナより構成されている。対基地局用中継装置は基地局からの無線信号の送受を行う。一方、対移動局用中継装置は電波不感地域の移動機（端末機）との無線信号の送受を行う。この対基地局用中継装置と対基地局用中継装置は光ファイバーで信号の伝送が行われる。

2-2. アナログ光伝送システムの伝送方式

無線信号のようなアナログ信号を光ファイバーを用いて伝送する方式とし無線信号の周波数が高い場合はLDの特性が充分な特性を示さないため、周波数変換器により一旦中間周波数（500MHz程度以下）に変換した後、光ファイバー伝送を行い、対移動局側で電気信号に変換後再度無線周波数に変換して不感地域をサービスする方式がとられる。

さらに、無線信号を光ファイバーで伝送する方式として各サービスエリアごとに複数の光ファイバーを敷設し伝送する方法と、光の波長を変えて1本の光ファイバーで多重しファイバー数を削減する方法がある。

ビル地下駐車場不感地対策実験システムとして、今回は無線信号を中間周波数に変換する方式を用いた。局部発振周波数を対基地局と対移動局を同一にするために、対基地局のPLL基準信号を光ファイバーを通して対基地局に送信し、再生する方式をとった。

2-3. 光リンク部の特性

光リンク部のダイナミック特性はC/NとC/IM₃によって制限される。ここでIM₃は3次の歪みである。図3. に光リンク部の出力レベルに対するC/NとC/IM₃の実測結果を示す。C/N特性の図は光リンク部の損失及び雑音特性が優れている程左方向にシフトし、また、C/IM₃特性は後段のドライバアンプリのニアリティーが高い程右方向にシフトし、総合特性としてダイナミックレンジが広がる。ビル地下駐車場不感地対策実験システムとして出力レベル1mW(odBm)/1波×30波でサービスエリア半径150mでの必要電界強度40dBμV/m以上を確保した。

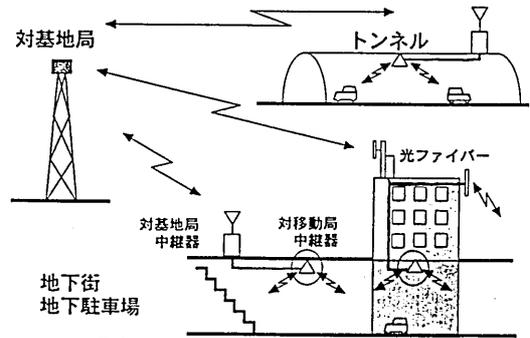


図1. 光フィード無線中継システム概念図

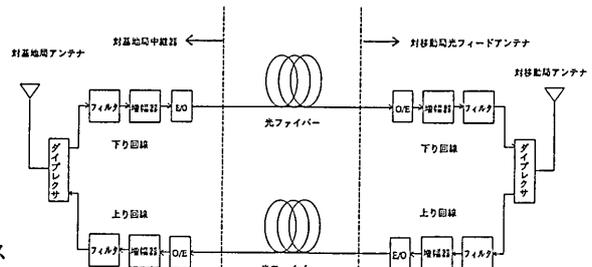


図2. システム構成図

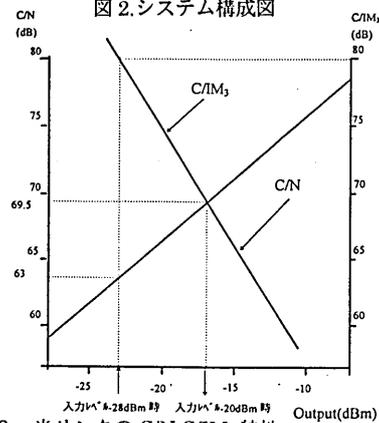


図3. 光リンクのC/N, C/IM₃特性

性能諸元

周波数帯域	(上り)900 MHz帯 (下り)800 MHz帯
出力	1 mW/ch(max)
伝送ch数	30 ch
スプリアスレベル	2.5 μW以下
アンテナ利得	(対基地局アンテナ) 10.6 dBi(5素子八木アンテナ) (対移動局アンテナ) 0.6 dBi (無指向性ディスクアンテナ)
寸法	(対基地局中継器) 400(W)×300(D)×1100(H)mm (対移動局中継器) 400(W)×300(D)×800(H)mm

図4. 中継システムの性能諸元

3. 光リンクの多重化

3-1. 光の多重化における雑音

光信号を波長を変えて多重化する方式として①光オフセット伝送と②光波長多重化伝送が考えられる。①については波長を変えて1本の光ファイバーで合成するため、波長間隔に充分な考慮をする必要がある。波長間の干渉によりビート雑音が光-電気信号変換用のPD(フォトダイオード)の非直線性により発生し、RF帯域内に落ち込むため干渉妨害となる。また、LDのサイドモード光が隣接の光信号のメインモード光に干渉を与え充分なS/Nを確保できない場合は、サイドモード光を減衰させるための光フィルタが必要になる。実測結果では、サイドモード光を減衰させることにより約3.5dBのS/Nが改善されている。

②の光波長多重化伝送方式の特徴としては、波長毎に光フィルタを用いて光信号を選択し光-電気信号変換するため同一RF周波数を伝送できる。従って周波数有効利用あるいは、伝送容量の点でも効率が良い。

3-2. 光多重化における課題

光多重化をするためには、異なった波長の光信号を光フィルタで選択し、光-電気変換する必要があるが、このためには光の発光波長をある程度以上(6nm)の間隔で制御するデバイス技術が必要である。

また、光を分配するに従って分配損が増加していくため、C/Nが劣化していくため現状では小エリアの通信(半径数100m以内)には適しているが、広域サービスには1.3μmの光増幅器の開発が必要である。

4. まとめ

ここでは、光フィード無線中継システムのアプリケーションとして携帯電話の電波不感地対策として、ビルの地下駐車場B1F,B2Fのサービスをするためのシステムの1例について紹介した。また、送信出力レベルは地下駐車場といった狭い閉空間をサービスする目的であったため出力レベルも1mW/波で充分な電界強度が得られた。しかし閉空間もしくはさらに広い不感地域をサービスするためには出力段に高出力増幅器を追加する必要がある。現在、50mW×30波出力では歪み補償としてプリディストーション方式、200mW×30波以上ではフィードフォワード方式を採用している。

一方、光多重方式については光の異なった波長を多重化したときのメインモード光とサイドモード光の干渉によりC/Nが劣化するが、光フィルタの挿入によりほぼ理論通りの結果が得られることを実験により確認した。現在はこの光波長オフセット方式を用いたマイクロセル用光リンク装置を試作中である。

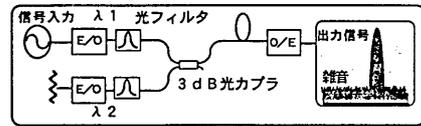


図5. 光多重のC/N評価構成図

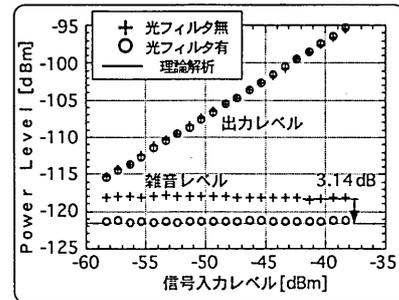


図6. 光多重時のフィルタの効果による雑音特性

輻射科学研究会資料

RS96-21

弾性体積波方形導波路グレーティング
フィルターの一考察

水嶋 俊之 辻 幹男 繁沢 宏
(同志社大学 工学部)

平成9年3月10日

1 まえがき

最近では、弾性波および弾性表面波を用いた伝送線路や回路素子として、複雑な構造を有するものが用いられるようになってきている。その場合に基本的でかつ重要な問題は三次元弾性導波路不連続問題をベクトル問題として正確に解く方法を用いることである。これは、回路が複雑になると不連続部が多数存在することから、単独の不連続部の場合には誤差の小さい近似解法であっても、回路全体の解析となるとその計算誤差は無視できなくなるからである。そこで筆者らは三次元弾性導波路不連続問題をベクトル問題として正確に解く方法として、三次元有限要素法解析 (3DFEM)[1][2][3] を用い、不連続問題の基本問題であるステップ状不連続問題について、その定式化 [1] ならびに、各基本モード (縦波モード [2], 屈曲モード [3], ねじれモード [4]) に対する伝搬特性を明らかにしてきた。

本文では、不連続部が多数存在する例として、ステップ状不連続部が有限長にわたって周期的に存在するグレーティングを取り上げ、その伝搬特性について有限要素法による結果と近似解法によるそれとの比較を行う。また、このような均一グレーティングをフィルタとして用いる際には、サイドローレベルが大きくとれないという本質的な問題がある。そこで、本文では各ステップ状不連続部の段差、したがって反射係数を変化させて、各段の反射係数をチェビシェフ多項式に近似させることにより、サイドローレベルの低減を行う一方法についても述べる。

2 グレーティングの構造及び解析

図 1(a) にグレーティングの構造を示す。ここでは導波路として、アルミニウム ($\rho_m = 2.69[g/cm^3]$) を用い、縦波モードの伝搬を考える。

ここでの解析は、まず図 1(b) に示すような凸形不連続部を一つの単位構造とみなし、3DFEM を用いてこの構造に対する伝送行列を導出

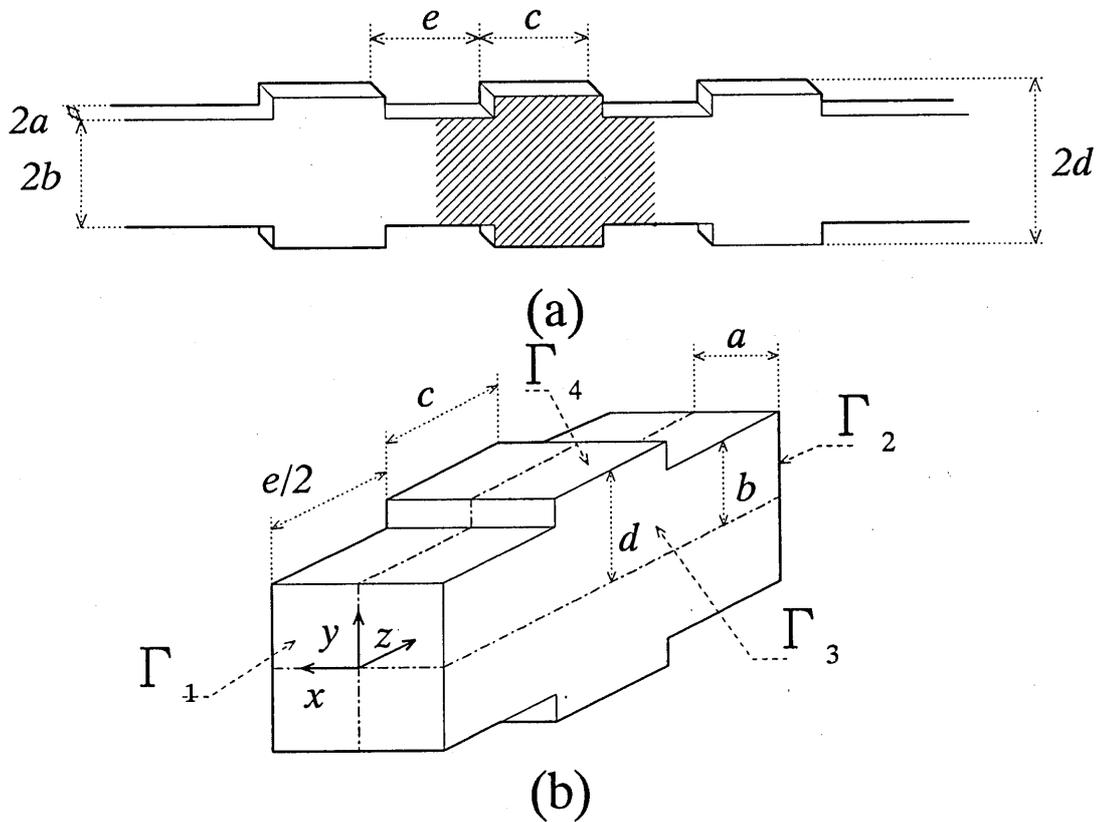


図1 (a)有限長導波路グレーティング, (b)グレーティングの単位構造

する。そして、グレーティング全体の特性は各単位構造毎に導出された伝送行列の N 段の縦続接続から求める。

2.1 有限要素法による解析

まず、図1(b)に示す凸状不連続部の解析を有限要素法により行う。導波路開口面 Γ_1 , Γ_2 は半無限長の一樣導波路に接続され、凸状不連続部の境界面 Γ_3 , Γ_4 は自由境界面とする。

粒子変位 u , 応力 T , ひずみ S , 媒質密度 ρ_m および弾性定数テンソ

ル [c] を用いて弾性波の支配方程式および関係式を表すと次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \omega^2 \rho_m \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\mathbf{T} = [c] \mathbf{S} \quad (3)$$

ここで、 $\nabla \cdot$ 、 ∇_s は Auld の表記法 [5] に従うものとする。また境界面 Γ_3 、 Γ_4 上の単位法線ベクトルを \mathbf{n} 、境界面に働く応力を \mathbf{T}_n とすると次式で与えられる。

$$\mathbf{T}_n = 0 \quad (\text{on } \Gamma_3, \Gamma_4) \quad (4)$$

いま、不連続部全体 Ω を 10 接点四面体二次要素を用いて分解した後、(1) 式にガラーキン法を適用し、部分積分を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial x} \mathbf{T}_{rx} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \mathbf{T}_{ry} + \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \mathbf{T}_{rz} - \omega^2 \rho_m \{N\} \mathbf{u}_r \right) d\Omega_e \\ - \iint_{\Gamma_e} \{N\} (\mathbf{T}_{rx} \mathbf{n}_x + \mathbf{T}_{ry} \mathbf{n}_y + \mathbf{T}_{rz} \mathbf{n}_z) = \{0\} \\ (r = x, y, z) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $\iint_{\Omega_e} d\Omega_e$ は四面体領域における積分、 $\iint_{\Gamma_e} d\Gamma_e$ は要素の境界における積分、 $\{N\}$ は要素内で定義される形状関数の列ベクトル、 $\{0\}$ は零列ベクトル、 \mathbf{n}_x 、 \mathbf{n}_y 、 \mathbf{n}_z は外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} の x, y, z 成分である。(2),(3) 式を (5) 式に代入して、粒子変位 \mathbf{u}_r を形状関数 $\{N\}$ を用いて各要素内で二次関数で近似し、境界条件および境界 Γ_1 ,

Γ_2 が z 軸に垂直であることを考慮して、部分構造法を用いてすべての要素について重ね合せるとともに、境界 $\Gamma_i, (i = 1, 2)$ 上の応力 $\mathbf{T}_{xz}, \mathbf{T}_{yz}, \mathbf{T}_{zz}$ を境界 Γ_i に接する四面体要素の面上において二次関数で近似し離散化すると、次のような行列方程式が得られる。

$$[A] \begin{bmatrix} \{u_x\}_1 \\ \{u_y\}_1 \\ \{u_z\}_1 \\ \{u_x\}_2 \\ \{u_y\}_2 \\ \{u_z\}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B]_1 \{\mathbf{T}_{xz}\}_1 \\ [B]_1 \{\mathbf{T}_{yz}\}_1 \\ [B]_1 \{\mathbf{T}_{zz}\}_1 \\ [B]_2 \{\mathbf{T}_{xz}\}_2 \\ [B]_2 \{\mathbf{T}_{yz}\}_2 \\ [B]_2 \{\mathbf{T}_{zz}\}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[B]_i = (-1)^i \sum_{e'} \iint_{\Gamma_{ie'}} \{N\}_i \{N\}_i^T d\Gamma_{ie'} \quad (7)$$

ただし、 $[A]$ は部分構造法を用いることによって生成される係数行列、 $\{u_x\}_i, \{u_y\}_i, \{u_z\}_i, \{\mathbf{T}_{xz}\}_i, \{\mathbf{T}_{yz}\}_i, \{\mathbf{T}_{zz}\}_i$ はそれぞれ境界 Γ_i 上の節点における $u_x, u_y, u_z, \mathbf{T}_{xz}, \mathbf{T}_{yz}, \mathbf{T}_{zz}$ の値からなる列ベクトルであり、それぞれの境界条件を満たすことによって除外される節点値の考慮がなされているものとする。また、 $\{N\}_i$ は境界 Γ_i 上の要素における形状関数であり、 $\sum_{e'}$ は境界 Γ_i 上の要素 e' についての和を表す。

一方、不連続部に接続する半無限長導波路における界分布は、三次元方形弾性導波路の固有モード関数を用いると、次のようにモード展開できる。

$$\begin{bmatrix} u_{x,i} \\ u_{y,i} \\ \mathbf{T}_{zz,i} \end{bmatrix} = \sum_m (a_{i,m} e^{-j\beta_i m z} + b_{i,m} e^{j\beta_i m z}) \begin{bmatrix} u_{x,i,m} \\ u_{y,i,m} \\ \mathbf{T}_{zz,i,m} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{T}_{xz,i} \\ -\mathbf{T}_{yz,i} \\ u_{z,i} \end{bmatrix} = \sum_m (a_{i,m} e^{-j\beta_i m z} - b_{i,m} e^{j\beta_i m z}) \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_{xz,i,m} \\ -\mathbf{T}_{yz,i,m} \\ u_{z,i,m} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 m は固有モードの次数、 $a_{i,m}, b_{i,m}$ は各モードの振幅係数、

$\beta_{i,m}$ は伝搬定数である。また、 $u_{r,i,m}, T_{rz,i,m}, (r = x, y, z)$ は導波路 i の断面内における m 次のモードの粒子変位、応力の固有モード関数を表す。

従って、凸状不連続部の伝送特性は、まず導波路 1 の境界 Γ_1 から単位振幅の基本モードが入射した場合の (8),(9) 式を (6) 式に適合するように離散化する。そして、これらと (6) 式とを組み合わせることによって導かれる連立一次方程式から、境界 $\Gamma_i, (i = 1, 2)$ 上の節点における粒子変位および応力が求まる。つまり、導波路断面における界分布が求まることから、一様導波路の固有モードとの直交性を利用すれば、凸状不連続部での各モードの透過、反射係数が導出できることになる。すなわち、凸状不連続部を散乱行列で表したときの S_{11}, S_{21} が求まる。図 1(b) は対称構造を考えていることから、 $S_{11} = S_{22}, S_{21} = S_{12}$ であり、凸状不連続部の基本モード散乱行列がすべて求まることになる。この散乱行列から伝送行列が直ちに求められることは言うまでもない。従って、 N 段有限長グレーティングの解析は図 1(b) に示すように凸状不連続部において接続導波路の長さが $e/2$ である点での開口面を Γ_1, Γ_2 としたときの伝送行列を求め、その N 段縦続接続を行うことで求められる。

一般に導波路のサイズが小さい場合には、遮断モードである高次モードの減衰定数が大きく、その不連続部で発生する高次モードが次段の不連続部に与える影響は無視できる程度と考えることが良い。ここで考えるグレーティングの場合、高さの低い導波路の方では、高次モードの遮断減衰量が極めて大きくなるようなグレーティング構造を考えることにする。

2.2 縦波振動近似による解析

三次元弾性波均一導波路を伝搬する縦波モードの解析は、導波路断面の寸法が波長に比べて充分小さいという条件のもとでは、簡単な近似式を用いて行うことができる [6]。この場合、伝搬定数および特性イ

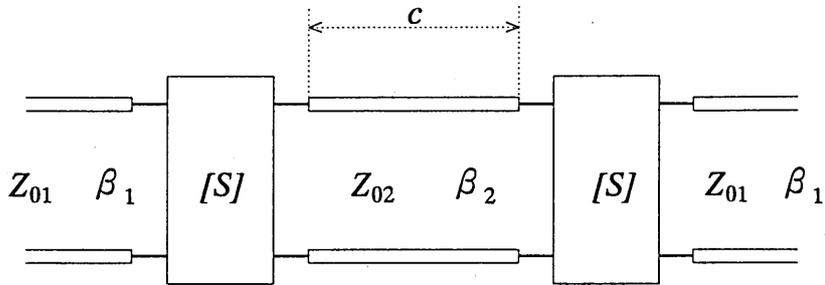


図 2 等価伝送線路

インピーダンスは次式で与えられる。

$$\beta \cong \omega \sqrt{\rho_m / E} \quad (10)$$

$$Z_0 \cong A_0 \sqrt{\rho_m E} \quad (11)$$

ただし、 E はヤング率、 A_0 は導波路の断面積である。これらの式を用いれば、均一導波路は図 2 に示すような伝送線路で等価的に示すことができる。この近似によれば、有限長グレーティングの伝送特性は伝搬定数および特性インピーダンスの異なる伝送線路が、図 2 のように交互に接続された単純な等価回路を解析することによって求めることができる。図 3(a) は正方形断面 ($a = b$) をもつ均一導波路の伝搬定数を求め、有限要素法による計算結果ならびに R.E.Booker による実験値 [7] と比較したものである。断面積が波長に比べて小さい場合には、近似解法による結果は有限要素法および実験値とよく一致するが、周波数が高くなるとずれが生じている。

このことは、方形導波路の相対粒子変位分布を求めた図 3(b)(c) を見ればより明確となる。図 3(b) は低い周波数 ($\omega a / \pi v_s = 0.001$, ただし、 v_s は横波の速度) の場合を示したものであり、粒子変位は z 方向

のみに存在し、縦振動近似が成り立つことがわかる。

一方、図3(c)は周波数の高い $\omega a/\pi v_s = 0.4$ の場合を示したもので、この場合には z 方向の縦振動だけでなく、自由境界の影響により断面内成分の振動も現れ、縦振動近似が成り立たなくなっている。

以下では、両解析法を用いてグレーティングの解析を行い、その比較検討を行うことにする。

3 グレーティングフィルタの特性

3.1 均一グレーティング

図1において $b/a = 1$, $d/a = 1.18$, $c = \lambda_d/4$ (λ_d は断面寸法 $2a \times 2d$ の導波路における縦波モードの波長), $e = \lambda_b/4$ (λ_b は、断面寸法 $2a \times 2b$ の導波路における縦波モードの波長)とし、グレーティングの段数 N を1, 2, 4, 8としたときの伝送特性をそれぞれ図4(a),(b),(c),(d)に示す。ここで、縦波振動近似をもとにした解析による結果を破線で示している。両者の結果はほぼ一致しているが、段数が増えるに従い、高周波側での両者のずれがみられる。これは図3に示した分散特性および粒子変位分布からわかるように高周波領域では断面内成分が増え、縦波のみでの近似によるわずかの誤差が蓄積されるためであると思われる。また、図5には著しく3DFEMと縦振動近似による結果のずれが生じる一例としてグレーティングの段差を高くし、さらに c を短くした $b/a = 1$, $d/a = 1.5$, $c/a = 1$, $e/a = 3.6$, $N = 4$ としたときの伝送特性を示した。これは凸状の導波路の高さ d が高く、その長さ c が短いいため、凸状部分の両側のステップ状不連続部で発生した高次カットオフモードが互いに影響を及ぼしているためであり、このようなグレーティングの場合には必ず3DFEMによる解析が必要となる。

最後にグレーティングを帯域除去フィルタとして用いることを考え、 $N = 44$ として3DFEMによる反射特性の計算結果を図6に示す。導波路は図4に用いたものと同じである。図より有限長グレーティング

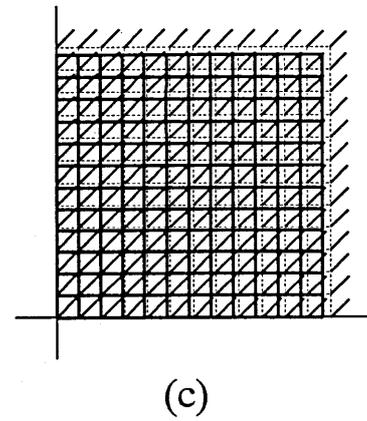
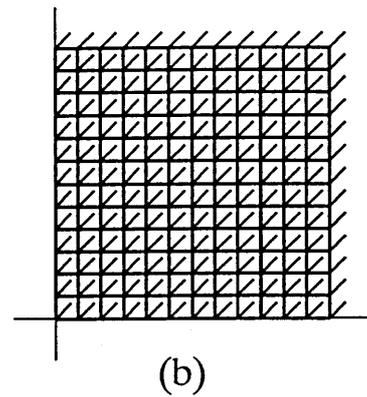
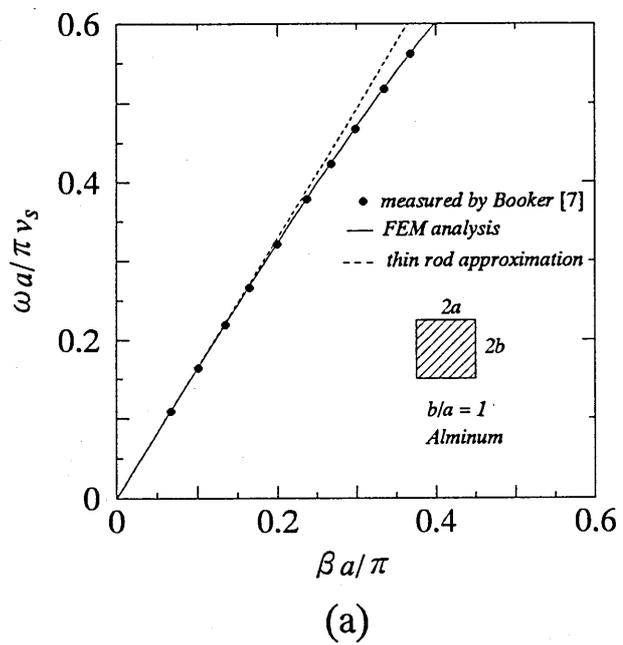


図3 (a) 正方形導波路分散特性, (b) 低周波数での相対粒子変位分布, (c) 高周波数での相対粒子変位分布

は、ある帯域幅を持つ除去フィルタとして有効に働くことを示しているが、通常の一定周期の有限長周期構造にみられるようにサイドローブレベルが高くなっている。

そこでサイドローブを低減するために、次節では図1(b)に示す各単位構造である凸状部分の段差を変化させ、各段の反射係数がチェビシェフ多項式に一致するように設計することを考える。

3.2 フィルタ特性の改善

図7に示すように単位構造毎に凸部の段差を変えることを考える。このとき導波路の長さは導波路の高さにかかわらず、その区間の縦波モードの位相推移量が中心周波数で $\pi/2$ となるように調節するものとする。従って各単位構造毎の位相推移量は中心周波数近傍ですべて θ で表す。いま、各不連続部での反射を小さくして、多重反射の影響が、無視できるものとする。グレーティング全体の反射係数 R は、 i 番目の単位構造での反射係数 R_i を用いて次式で表せる。

$$R = R_1 e^{j(2n-1)\theta} + R_2 e^{j(2n-3)\theta} \dots \\ + R_{2n-1} e^{-j(2n-3)\theta} + R_{2n} e^{-j(2n-1)\theta} \quad (12)$$

ただし、 $n = N/2$ であり、反射波の位相基準はグレーティングの中心にとっている。ここで図7に示すようなグレーティングの中心で対称となる構造をとると、反射係数 R は次式のように書ける。

$$R = 2 \sum_{k=1}^n R_k \cos[(2(n - (k - 1)) - 1)\theta] \\ = 2 \sum_{k=1}^n R_k \cos[(2m - 1)\theta] \quad (13)$$

ただし、 $m = n - (k - 1)$ である。また、 $\phi = \theta + \pi/2$ とおくと

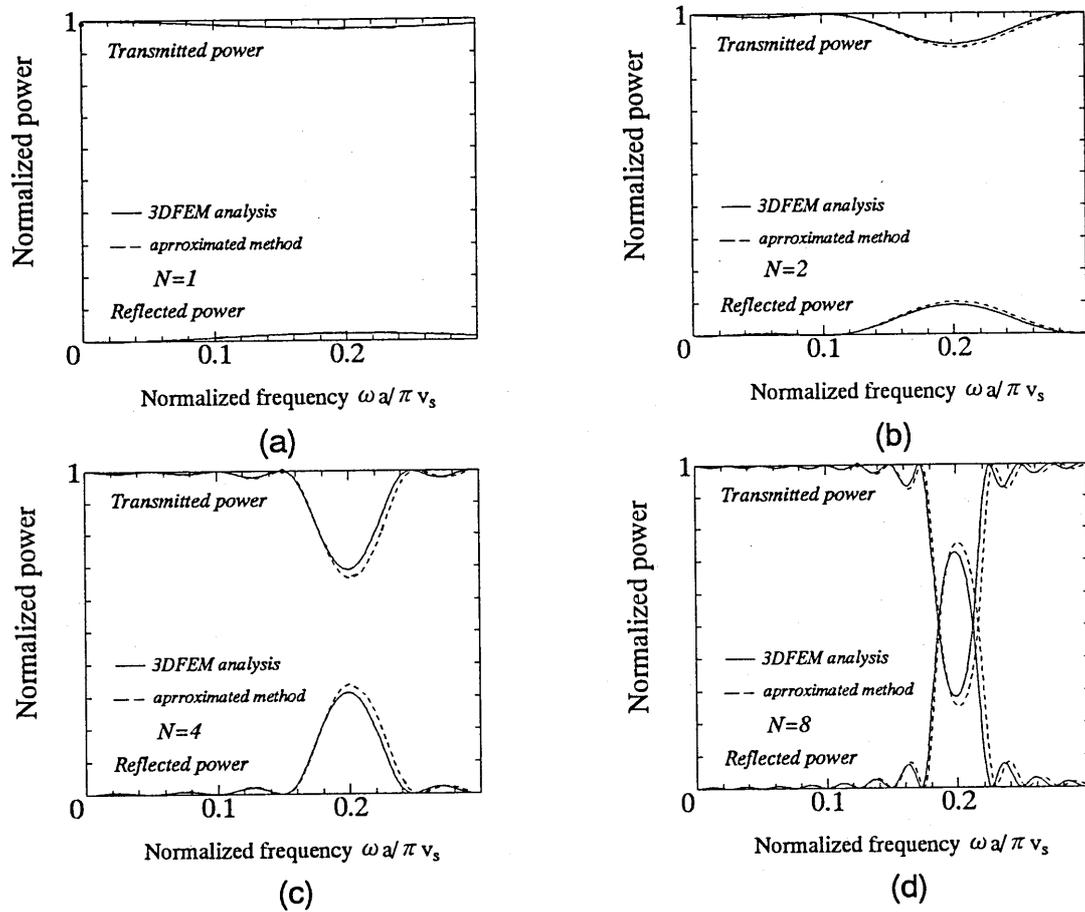


図 4. 伝送特性 (a) $N=1$, (b) $N=2$, (c) $N=4$, (d) $N=8$

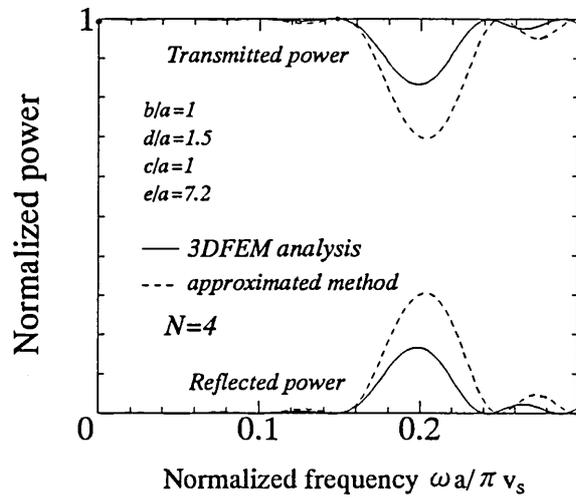


図 5 高次モードが伝搬に影響する場合の伝送特性

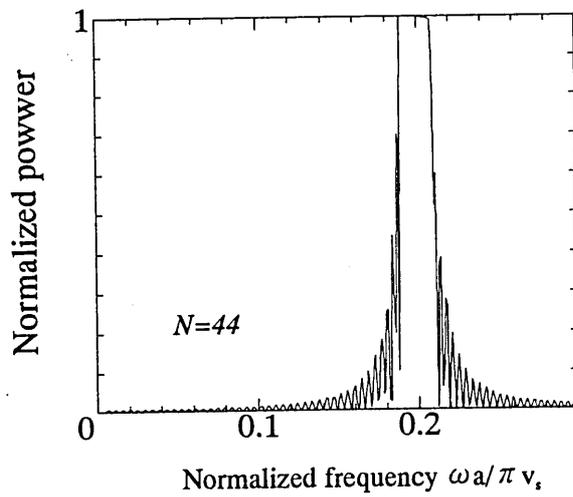


図 6 均一グレーティングの伝送特性 ($N=44$)

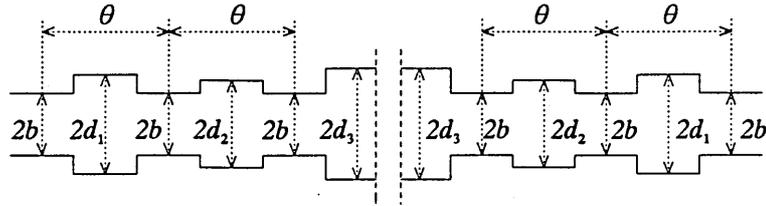


図7 段差を可変にしたグレーティング構造

$$R = 2 \sum_{k=1}^n R_k (-1)^{(m-1)} \sin[(2m-1)\phi] \quad (14)$$

となる。ここで、第一種チェビシェフ多項式 $T_k(\cos x) = \cos kx$ を用いると次式のように変形できる。

$$R = 2 \sum_{k=1}^n R_k T_{(2m-1)}(\sin \phi) \quad (15)$$

それゆえ、この式が

$$\gamma T_{(2m-1)}(X) \quad (16)$$

と一致するように R_1, \dots, R_n を選べば、サイドローブの低減が可能となる。ただし、

$$\gamma = 10^{-P_c/20} \quad (17)$$

とし、 P_c を阻止域レベル [dB] とする。また、 $X = \sin \phi / \sin \phi_1$, $\phi_1 = \frac{\pi f_1}{2 f_0}$ としている。

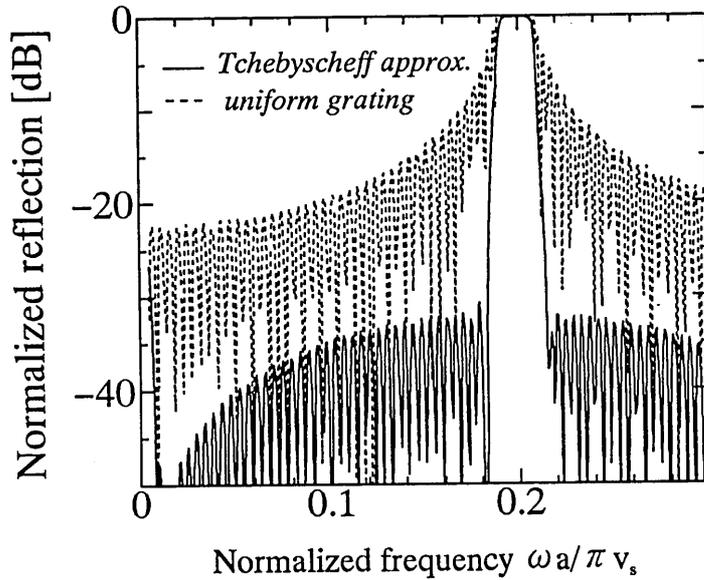


図8 チェビシェフ近似により設計を行ったグレーティングの伝送特性

上記に述べた方法により、 $P_c = 32.6[dB]$, $n = 22$, $\omega_0 a / \pi v_s = 0.183$, $\omega_1 a / \pi v_s = 0.200$, として各单位構造での反射係数を求め、各寸法を設定したものを Table. 1 に示す。

図8では Table. 1 で設定した不均一周期構造グレーティングフィルタをおよび破線は44段の均一周期構造グレーティングフィルタの特性を示したものである。明らかに、チェビシェフ近似によってサイドローブが低減できることが明確に示されている。

Table. 1 反射係数をチェビシェフ多項式に一致させたときの各ステップでの反射係数、中心周波数での波長、その反射係数での導波路の高さ d/a

($P_c = 32.6[dB]$, $\omega_1 a / \pi v_s = 0.183$, $\omega_0 a / \pi v_s = 0.200$, $N_c = 22$)

i	S_{11}	d_i/a	$\lambda_i/4a$
1	0.0172	1.0201	4.0882
2	0.0131	1.0153	4.0884
3	0.0177	1.0207	4.0882
4	0.0232	1.0271	4.0880
5	0.0294	1.0343	4.0878
6	0.0363	1.0425	4.0876
7	0.0440	1.0514	4.0873
8	0.0523	1.0611	4.0871
9	0.0612	1.0715	4.0868
10	0.0704	1.0823	4.0864
11	0.0799	1.0934	4.0861
12	0.0896	1.1046	4.0858
13	0.0991	1.1158	4.0855
14	0.1084	1.1267	4.0852
15	0.1174	1.1371	4.0849
16	0.1257	1.1469	4.0846
17	0.1334	1.1558	4.0843
18	0.1402	1.1638	4.0841
19	0.1460	1.1706	4.0839
20	0.1506	1.1760	4.0837
21	0.1539	1.1797	4.0836
22	0.1555	1.1817	4.0836

4 むすび

弾性体積波導波路グレーティングにおいて、実用的と考えられる縦波モードの解析を、3DFEM および縦波振動近似を用いて行い、縦波振動近似の精度上の問題点を指摘した。

また、弾性体積波導波路グレーティングを帯域除去フィルタとして用いることを考え、サイドロープレベルの低減法を示した。

今後は、より実用的な帯域通過フィルタとして用いることを考える。この際には弾性波 3dB 方向性結合器が必要となるので現在、その構成法、設計についてさらに検討している。これらをもとにして新しい形の弾性波フィルタの提案と実験による特性の検証を後日に報告する。

参考文献

- [1] T.Katura, M.Tsuji and H.Shigesawa, "A New Understanding for Characterizing Acoustic Rectangular-Rod Waveguides and 3D Discontinuities," 1996 IEEE Intern'l Microwave Symp., San Francisco, June 1996.
- [2] 桂 隆俊, 辻 幹男, 繁沢 宏, "弾性方形導波路におけるステップ状不連続部の有限要素法解析", 電気学会電磁界理論研資, EMT-95-44, Dec. 1995, pp1-10
- [3] 桂 隆俊, 辻 幹男, 繁沢 宏, "弾性方形導波路のステップ状不連続部の一解析法", 輻射科学研究会, March 1996.
- [4] 桂 隆俊, "ステップ状不連続部を有する弾性方形導波路の伝送特性に関する基礎的研究", 同志社大学修士論文, 1996.
- [5] B.A.Auld and E.A.Tsao, "Acoustic Fields and Waves in Solids", A Wiley Interscience Pub., 1972.

- [6] 日本学術振興会弾性波素子技術第 150 委員会, "弾性波素子技術ハンドブック", オーム社, 1991.
- [7] R.E.Booker, "Velocity Dispersion of Isotropic Rods of Square Cross Section Vibrating in the Lowest-Order Longitudinal Mode", J.Acoust. Soc. Am., 45, 5, Dec. 1969, pp 1284-1286.

輻射科学研究会資料
RS 96-22

マイクロストリップ楕円共振器と
高温超伝導フィルタへの応用

榎原 晃, 瀬恒謙太郎
(松下電器産業株式会社 中央研究所)

平成9年3月10日
(同志社大学)

マイクロストリップ楕円共振器と高温超伝導フィルタへの応用

榎原 晃, 瀬恒謙太郎

(松下電器産業株式会社 中央研究所)

1. はじめに

本研究では、高周波電流の分布を均一に保つことができる平面回路型共振器として、楕円型のマイクロストリップ共振器について検討を行い、これをマイクロ波フィルタに応用したマイクロストリップ楕円共振器フィルタを提案した。さらに、超伝導薄膜を用いてフィルタを試作し、実験的にその有効性を確認した。このフィルタの特徴は、通常のストリップ線路共振器に比べて電流の集中が少ないため、導体損失を低く押さえられるだけでなく、特に、超伝導薄膜を利用する場合、フィルタのパワーハンドリング特性の改善が期待できる点にある。

立体回路と集中定数回路の中間的な2次元回路である平面回路は、通常のストリップ線路による回路や集中定数型回路に比べ、設計に困難さは伴うものの設計の自由度が大きく、比較的簡単な構造で高い機能を有する高周波素子を実現することができる[1-5]。その中で、円板共振器に代表される平面回路型の共振器は、直交関係にある縮退したモードを利用した興味深い応用がいくつか報告されている[2,3]。

一方、超伝導体をマイクロストリップフィルタの導体部分に金属膜の代わりに用いた場合、導体損失が低減され、回路の飛躍的な低損失化が実現できる。しかしながら、このような超伝導フィルタに対しては、超伝導体の臨界電流密度によって入力電力が制限されることから、従来から耐電力性能での問題が指摘されている。実際に超伝導フィルタの入力電力が限界に達するのは、入力信号によって生じた高周波電流の密度が超伝導体の高周波での臨界電流密度を越えたために超伝導性が消失し、導体損失が急激に増加する場合、もしくは、超伝導薄膜作製過程で薄膜内に生じる微少な弱結合部分が高周波電流によって段階的に壊れることにより、徐々に損失が増加し、臨界電流密度に達する前に超伝導体の低損失性が失われてしまう場合である。一般に、比較的超伝導特性の優れた薄膜で、欠陥が少なく、超伝導体中への実効的な電磁界の侵入長が短い場合は、前者のようなふるまいをすることが多く、その場合、過大な電力信号を入力することによって、超伝導共振器が急激に発熱し、フィルタが破損する可能性がある[6]。いずれにせよ、通常よく利用される伝送線路共振器を用いた構造の超伝導フィルタや共振器では、高々数十mW程度の入力電力でその特性が劣化し始めるとされていることから、超伝導薄膜回路の耐電力性の改善は、超伝導フィルタ実用化

のためには極めて重要な課題の一つである。

超伝導薄膜を用いたマイクロストリップフィルタの耐電力性を向上させるためには、超伝導体中の高周波信号による局所的な最大電流密度を減少させることと、超伝導材料自身の臨界電流密度を向上させることが考えられる。このうち、後者については、材料及び薄膜作成プロセスに依存したもので、現在、比較的高品質の高温超伝導薄膜が実際に市販されている。今回は、前者のアプローチのために、マイクロストリップ楕円共振器フィルタを新たに提案し、検討を行ったので報告する。

2. 縮退モードを利用した多重モード型円板共振器フィルタ

楕円共振器の基本形となる円板共振器は平面回路共振器の代表例の1つで、輪郭形状が滑らかでパターンエッジでの局所的な電流集中も少ないと考えられ、均一な電流分布を得るためには有利な構造である。図1は円板共振器の低次の共振モードの電磁界分布を示している。一般的に円板共振器のモードの呼び方は円筒導波管のモードに準じており、この中で、 TM_{11} モードは共振周波数が最も低く、共振の Q 値も最も高い。また、このモードは互いに直交する方向に分極した2つのモードが縮退しており、これらを同時に励振させることによって、単一モードで利用する場合よりも設計の自由度が向上する[7]。真円の円板共振器では、この2つのモードは完全に縮退しているが、構造的な摂動を与えることによって、縮退を解くことができる。このわずかに縮退を解いた状態で、モード間結合の効果を有効に利用すれば新たな機能を発揮させることができる。

ここで提案する楕円共振器フィルタの基本である多重モード型円板共振器フィルタの構成を図2に示す。導体膜からなる円板共振器と、互いに直交する方向からこの円板共振器に対向する入出力線路からなる。この入出力線路を通して、円板共振器に結合することによって、互いに直交した2つのダイポールモードをそれぞれの入出力線路によって別々に励振することができる。円板共振器のこの2つのモードが縮退しているときは両モードは独立しているが、円板形状に適当な変化を与えてモードの縮退を解くことによって、励振された2つのモード間に結合を生じさせることができる。また、先にも述べたように、このモードは円板共振器の中で最も電流が均一に分布しており、入力信号による電流集中の影響が最も少ない。さらに、これらモード間の電流分布は互いに直交関係を有しており、単一のモードで動作している場合に比べて2つのモードが同時に励振されても局所的な電流密度の最大値が増加することはない。

図3には、縮退を解くためのいくつかの構造を示した。図3(b)は、円板の一部にスタブを設けたもの、図3(c)はスロットを設けたものである。これらは通常金属を用いたフィルタのための構造として既に報告されている[2,3]。これらの構造では、近似的にはスタブあるいはスロットの面積でモード結合量を制御できるので、設計は比較的容易であるが、摂動部分で輪郭の形状が急激に変化するため、この部分に電流が集中する可能性が大きい。超伝導体でフィルタを構成する場合、最も電流の集中する部分ではじめに超伝導性が破壊され、それによって損失が急激に増加すると予想され

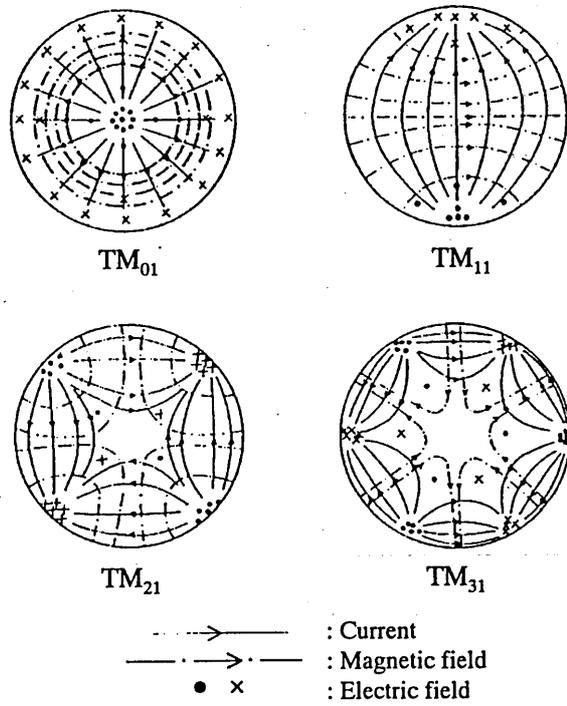


図1 円板共振器の共振モード

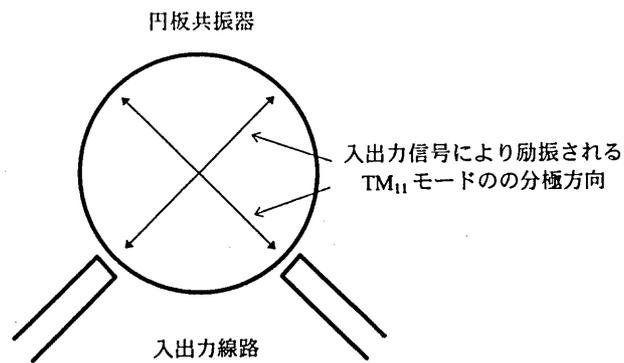


図2 多重モード型円板共振器フィルタの基本構造

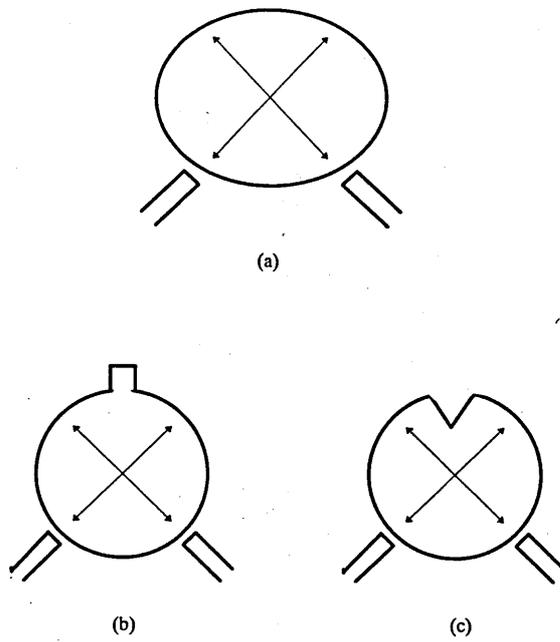


図3 多重モード型円板共振器フィルタ
 (a):楕円共振器
 (b):スタブを設けた円板共振器
 (c):スリットを設けた円板共振器

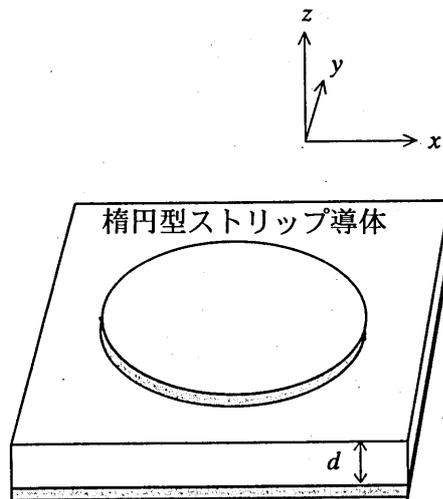


図4 マイクロストリップ楕円共振器

るので、このように局所的に電流が集中する構造は、高耐電力用フィルタとしては望ましくない。図3(a)は超伝導耐電力用フィルタのために今回提案する構造で、楕円型の円板共振器を用いている。楕円の楕円率の変化によって2つの共振モードの結合度を調節できれば同図(b),(c)のフィルタと同様の動作を行わせることができる。この場合、輪郭形状に急激な変化がないので、左記の構造のような部分的な電流の集中がなく、耐電力性において有利である。

マイクロストリップ構造の楕円型円板共振器は、以前に周波数逡倍器やパラメトリックアンプなどに応用する目的で検討されたことがある[8]。これは、楕円共振器が、その楕円率を変えることによって、各共振モードの共振周波数の関係にある程度調節できるという特性に基づいている。しかし、その後は筆者らの知る限りマイクロストリップ楕円共振器を検討した報告は見当たらず、実際の回路素子に応用することも試みられなかった。このような、共振モードの共振周波数を調整すること自体は、楕円共振器でなくとも、図3(b),(c)の構造の共振器やスリットを入れた円板共振器でも可能であるが[1]、本報告のように、共振器の輪郭の滑らかさが重要な意味を持つ場合には、楕円共振器の有効性が発揮されるものと考えられる。

3. マイクロストリップ楕円共振器フィルタ

次に、図3(a)に示す楕円共振器フィルタについて検討する。楕円共振器のような2次元的な電流分布を有する平面回路では、通常の回路シミュレータを利用することは不可能で、厳密には基板の厚さ方向の広がりを含めた電磁界分布を計算して、その結果から伝送特性を算出する必要がある。しかし、3次元の電磁界分布を直接求めるには、膨大な計算時間が必要となるため、一般には計算を高速化するための特殊な手法を用いられることが多い。この場合でも、伝送特性を算出するには、導体パターンをメッシュ状の微少な要素の集まりに分割して、それら要素間で所望の電磁気学的な関係を満たすよう計算を行う必要があり、周波数特性を計算するには、各周波数点で毎回計算を行う必要があるため、計算時間は回路シミュレータに比べて遙かに長くなる。最近、平面回路の計算に特化し、効率的に計算を行う平面回路用シミュレーションソフトウェアが多数市販されており、また、計算機の処理速度も最近急速に向上していることから、平面回路型のフィルタのシミュレーションがある程度可能になってきている。しかし、このようなシミュレータでは各ポート間の伝送特性だけしかわからないので、この方法だけですべてを設計することは得策ではなく、ある程度理論的な計算を行った後に利用した方が効率的な場合が多い。そこで、ここでは、楕円共振器フィルタを設計するために、まずマイクロストリップ楕円共振器の特性を理論的に検討してみる。

3-1 楕円共振器の電磁界分布

まずはじめに、楕円共振器内の電磁界分布から求める。対象とする平面回路内の位

置を示す座標を図4のように定める。簡単のために楕円型ストリップ導体のエッジは磁気壁で囲まれていると仮定する。そうすると、ストリップ導体上の電位 $\phi(x,y)$ は、以下のラプラスの方程式を満たす。

$$\nabla_T \phi + k^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} + k^2 \phi(x,y) = 0 \quad (1)$$

境界条件： $\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial n} = 0$ (外周上で)

ただし、

$$k = 2\pi f \sqrt{\epsilon\mu} = 2\pi\lambda \quad (2)$$

$f, \lambda, \epsilon, \mu$ は、それぞれ、電磁波の周波数、波長、媒質の誘電率、透磁率である。ここで、以後は、計算をやり易くするために、図5のような楕円座標系を利用する。楕円座標 (u,v) と直交座標 (x,y) の関係は、以下のようになる。

$$x = c \cosh u \cos v$$

$$y = c \sinh u \sin v$$

$$u + iv = f(z) = f(x + iy)$$

$$f(z) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{z}{c}\right)$$

ただし、焦点の座標は $(\pm c, 0)$ とする。この場合、同一焦点の楕円円周上の点は適当な u によって以下で表される。

$$\left(\frac{x}{c \cosh u}\right)^2 + \left(\frac{y}{c \sinh u}\right)^2 = 1 \quad (3)$$

また、楕円共振器の輪郭上では $u = u_0$ とする。この楕円座標を使うと、式(1)は、

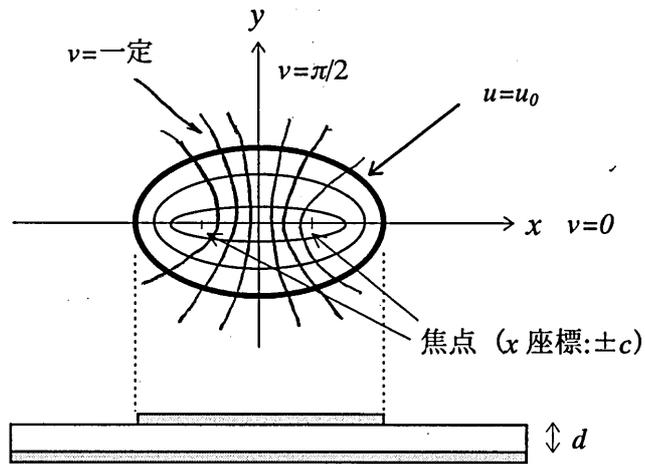


図5 座標系

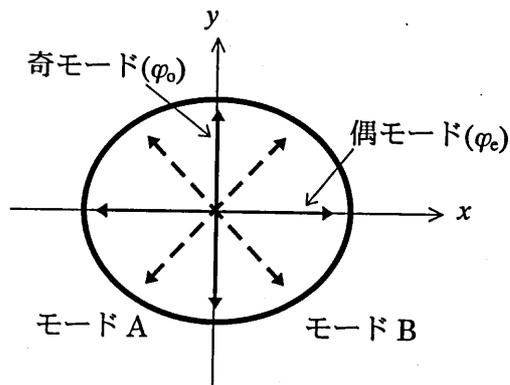


図6 楕円共振器の固有モード

$$\nabla_T \phi + k^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} + \frac{q^2 k^2}{2} (\cosh 2u - \cos 2v) \phi = 0 \quad (4)$$

と変形できる[9]。この方程式は、変数分離を行うことで、以下の Mathieu の方程式、および、変形された Mathieu の方程式に分割される。今、 $\phi(u, v) = f(u)g(v)$ とすると、

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + (a - 2q \cos 2v)g = 0 \quad : \text{Mathieu の微分方程式} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (a - 2q \cosh 2u)f = 0 \quad : \text{変形された Mathieu の微分方程式} \quad (6)$$

ただし、

$$q = k^2 c^2 / 4 \quad (7)$$

上記方程式で、与えられた定数 q において、適当な a の値に対して 0 でない周期解が存在する場合、それは、Mathieu 関数と呼ばれ、 a は固有値となる。また、(5)式の基本解は、 $q \rightarrow 0$ で、 $\cos nz$, $\sin nz$ に収斂し、固有値は $a = n^2$ となる。このように、 $\cos nz$, $\sin nz$ に収斂する Mathieu 関数を n 次の Mathieu 関数と呼んで、一般に、それぞれ $ce_n(v, q)$, $se_n(v, q)$ と表す。また、式(6)の解は、同様に変形された Mathieu 関数と呼ばれ、 $Ce_n(u, q)$, $Se_n(u, q)$ で表されて、 $q \rightarrow 0$ で、それぞれ、 $\cosh nz$, $\sinh nz$ に収斂する。Mathieu 関数と変形された Mathieu 関数の関係は、以下のようになる。

$$Ce_n(u, q) = ce_n(iu, q), \quad Se_n(u, q) = -ise_n(iu, q) \quad (8)$$

これらの関数の組み合わせることで、式(4)の一般解は、次のようになる。

$$\phi(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \{C_m Ce_m(u, q) ce_m(v, q)\} + \sum_{m=0}^{\infty} \{S_m Se_m(u, q) ce_m(v, q)\} \quad (9)$$

本報告では、 TM_{11} モードだけを考慮の対象にしているので、以下のように、式(9)の両級数の $m=1$ の項のみを考えておけば十分である。

$$\phi(u, v) = C_1 Ce_1(u, q) ce_1(v, q) + S_1 Se_1(u, q) se_1(v, q) \quad (10)$$

また、式(9),(10)の境界条件としては、楕円輪郭部では磁気壁を仮定しているので、

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial n} \Big|_{\text{輪郭上}} = \frac{\partial \phi(u,v)}{\partial u} \Big|_{u=u_0} = 0 \quad (11)$$

これを書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} C e_1(u,q) \Big|_{u=u_0} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} S e_1(u,q) \Big|_{u=u_0} &= 0 \end{aligned}$$

式(10)で第1項は $\nu = 0, \pi$ rad の時に最大値を取り、第2項は $\nu = 1/2\pi, 3/2\pi$ rad の時に最大値を取る。つまり、図6に示すように、第1項は長軸(x軸)方向に分極した偶モードに対応し、第2項は短軸(y軸)方向に分極した奇モードに対応しており、これら2つのモードが楕円共振器の独立なモードになる。したがって、式(10)は、次のように、偶モードおよび奇モードに対応した固有関数 $\varphi_e(u,\nu)$ 、 $\varphi_o(u,\nu)$ を用いて表せる。

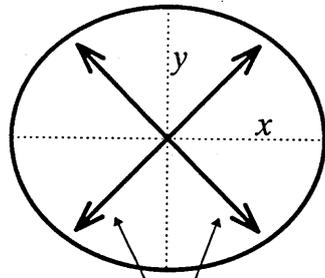
$$\phi(u,\nu) = C_e \varepsilon_e \varphi_e(u,\nu) + C_o \varepsilon_o \varphi_o(u,\nu) \quad (12)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \varepsilon_e \varphi_e(u,\nu) &= C e_1(u,q) c e_1(\nu,q) \\ \varepsilon_o \varphi_o(u,\nu) &= S e_1(u,q) c e_1(\nu,q) \end{aligned} \quad (13)$$

ε_e 、 ε_o は固有関数が正規化条件を満足するための係数、 C_e 、 C_o は適当な定数である。図6のA及びBの方向に分極するモードは、これら偶および奇モードの重ね合わせからなるハイブリッドモードで、互いに独立ではないためモード間結合が生じる。これは、図2(a)に示す回路が、同図(b),(c)と同様に2段共振器結合型フィルタとして動作することを示している。ここで、偶モード及び奇モードの共振周波数をそれぞれ f_e 、 f_o とすると、モードA、B間のモード結合係数 k_{AB} は、式(2)の関係を利用すると

$$k_{AB} = 2 \frac{f_o - f_e}{f_o + f_e} = 2 \frac{k_o - k_e}{k_o + k_e} \quad (14)$$



Resonant Modes

$$\text{Ellipticity} = (x-y)/x$$

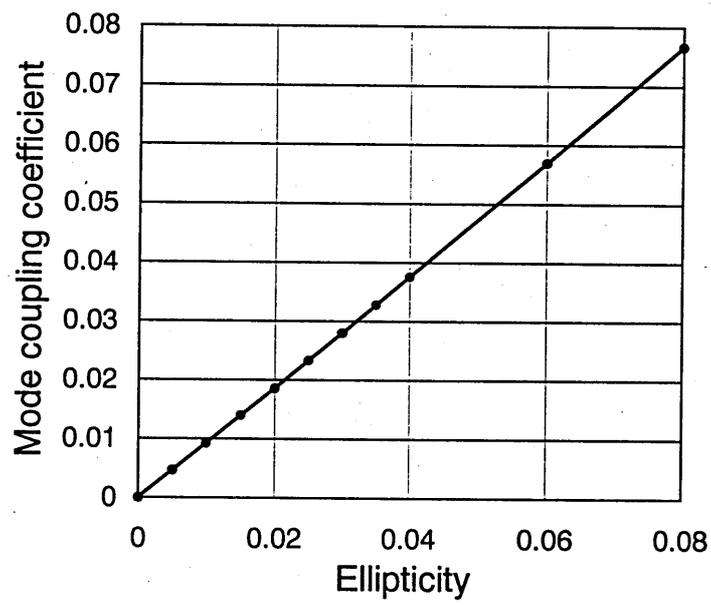


図7 楕円率とモード結合係数の関係

ただし、 k_e 、 k_o は固有関数 $\varphi_e(u,v)$ 、 $\varphi_o(u,v)$ の固有値を表す。式(7)より k_e 、 k_o は定数 q によって表されており、また、 q はモードと楕円形状に依存することが示されているので、式(14)の k_{AB} は楕円形状により決定される[10]。図7は、楕円共振器の楕円率とモード結合係数 k_{AB} の関係を、有限要素法を用いて計算したものである。楕円率が小さい範囲では、両者はほぼ比例関係を有していることがわかる。

3-2 楕円共振器フィルタの特性の検討

次に、図8に示すように楕円共振器に入出力ポートを設けたときの入出力特性を検討する。今後は、電気回路的な検討も行うので、電位を $\phi(x,y)$ の代わりに $V(x,y)$ を用いて表現する。また、入出力ポート1、2の幅は無視できるものとする。ストリップ導体上(楕円板上)の電位分布 $V(x,y)$ は式(1)の方程式及び境界条件を満たしているので、式(1)に対してインピーダンスの次元を持つ第2種グリーン関数を導入する。図8の楕円共振器内の領域Dで、以下の関係を満たすグリーン関数 $G(x,y|x_0,y_0)$ が存在し、

$$V(x,y) = \iint_D G(x,y|x_0,y_0) i(x_0,y_0) dx_0 dy_0 \quad (15)$$

外周上で境界条件

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

を満たすとする。 $i(x,y)$ は、 (x,y) の点での電流密度である。いまは、ポート1、2での電流・電圧の関係だけが必要であるので、式(15)の面積積分を図のような外周に十分接近した境界線Cを仮定し、その上での線積分で表す。

$$V(s) = -\oint_C G(s|s_0) i_n(s_0) ds_0 \quad (16)$$

ここで、 s と s_0 は境界C上の距離を表し、 $i_n(s)$ は境界Cに垂直で外向きの電流密度を示す。 $i_n(s)$ はポートの位置でのみ存在するので、いま、ポート i の電圧を V_i とすると、

$$V_i = V(s_i) = \sum_{j=1,2} G(s_i|s_j) I_j \quad (17)$$

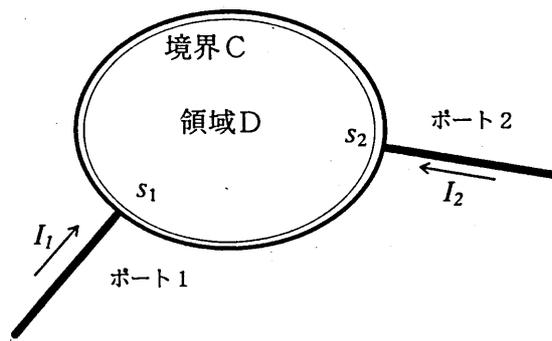


図8 入出力ポートを付加した楕円共振器

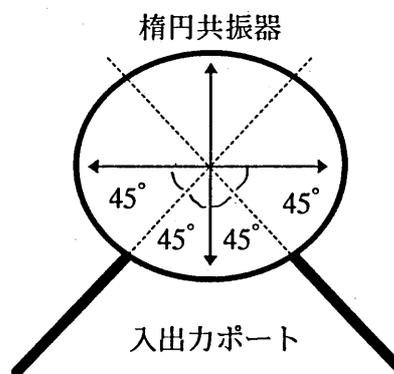


図9 楕円共振器フィルタの入出力ポートの位置

表1 フィルタ設計条件

作成条件	
基板材料	LaAlO ₃
基板比誘電率	24
基板厚さ	0.5 mm
フィルタの仕様	
共振器の長軸直径	7 mm(中心周波数:約 5GHz)
比帯域	2 %
回路定数	
モード結合係数	0.0185
入出力結合度 (外部Q)	83
帯域内リップル	0.8 dB

ここで、 s_j は j ポートの位置を、 I_j はそのポートから共振器に流れ込む電流を表す。式(17)より、この回路のインピーダンスマトリックスは、

$$Z_{ij} = G(s_i | s_j) \quad (18)$$

で表されることがわかる。したがって、図8の回路の電気特性を求めるには、グリーン関数を求めればよいことがわかる。グリーン関数は、式(1)を満たす固有関数により展開されることが知られている。今回対象にしている平面回路でのグリーン関数は一般に以下のように表されることが示されている[1]。

$$G(x, y | x_0, y_0) = j\omega\mu d \sum_n \frac{\varphi_n(x_0, y_0)\varphi_n(x, y)}{k_n^2 - k^2} \quad (19)$$

ただし、 φ_n 、 k_n は、それぞれ、 n 番目の固有関数および固有値を、 d は誘電体の厚さを表す。今回の楕円共振器のケースでは、式(18)にあるように、境界C上のグリーン関数が求まればよく、さらに、固有関数は TM_{11} モードのみを考慮しているのので、式(19)は、以下のように簡単化できる。

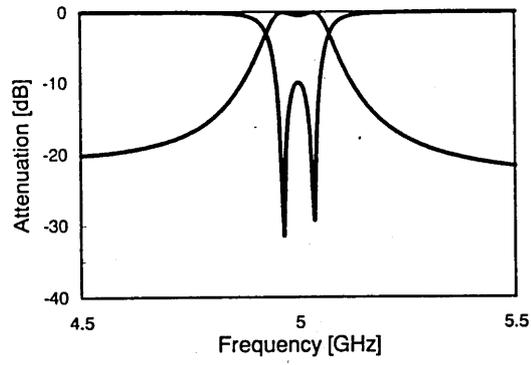
$$G(s | s_0) = j\omega\mu d \left(\frac{\varphi_e(s_0)\varphi_e(s)}{k_e^2 - k^2} + \frac{\varphi_o(s_0)\varphi_o(s)}{k_o^2 - k^2} \right) \quad (20)$$

式(13)を用いると、上の式を計算することができ、式(18)のインピーダンスマトリックスが計算でき、楕円共振器フィルタの電気回路特性が計算できる。

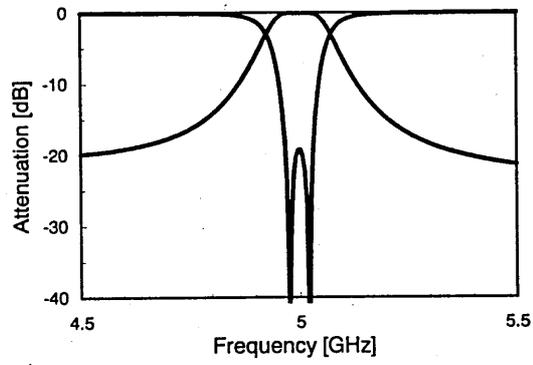
これらの結果を基に、実際に2段のフィルタを仮定し、入出力特性の計算を試みた。フィルタ設計の条件を表1に示す。ここでは、最終的に超伝導薄膜を用いてフィルタを作製するので、誘電体には超伝導薄膜に適した基板である $LaAlO_3$ を用い、楕円共振器の長軸直径は7mmとした。これにより、フィルタの中心周波数は5GHz程度となる。導体材料には完全導体を仮定している。図9に示したように楕円の対称軸から 45° の方向に入出力ポートを設置して、このポートから信号を入出力する際のインピーダンスをいくつか変化させることで、入出力結合度に対する透過特性を算出している。実際に計算した例を図10に示す。図からわかるように、典型的な2段の共振器結合型のフィルタの特性を示していることがわかり、ここで提案した楕円共振器フィルタの動作が理論的に確認できた。

3-3 電磁界シミュレータによる計算

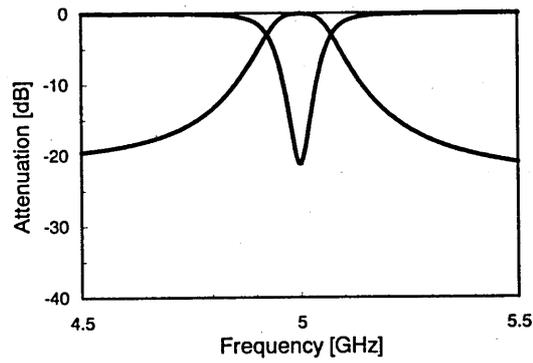
今までの計算の方法での問題点としては、共振器の側面は磁気壁を仮定しているた



(a) $Z_c=110\Omega$



(b) $Z_c=100\Omega$



(c) $Z_c=90\Omega$

図10 フィルタ特性の計算結果
(Z_c は入出力ポートのインピーダンス)

めに誤差が生じること、および、図2や図3に示すようなギャップによる入出力結合を計算で再現することが困難なことなどから、高精度の設計にはこれらの問題を解決する必要がある。そこで、一般に市販されている平面回路用電磁界シミュレータを用いて検討を行ったので次に述べていく。

平面回路用シミュレータでは、回路パターン図形を入力し、それを使って電磁界分布を直接計算し、電気特性を算出する。したがって、計算の途中のデータを取り出すことができないので、ある程度理論計算によって構造を決定している必要がある。そこで、シミュレーションに先立って、入出力結合部分の構造を決定する。ここでは、ギャップ結合で、ある程度大きな結合度を得るために、図11に示すような入出力線路の先端を広げた構造を利用した。同じ図に先端の開き角度 α に対する外部 Q の変化を実験的に測定した結果を示す。図からわかるように α を 20° まで広げることで、外部 Q が約80まで下がることがわかる。そこで、図12に示すようなパターンを用いて、電磁界シミュレーションを行った。ここで、 α は 20° とし、比帯域は2%となるように、楕円の短軸直径を6.86mmとした。

図13にシミュレータによる周波数特性の計算結果を示す。ここで、導体材料として、(a)は完全導体を、(b)は温度77Kの金を、(c)は室温での金を仮定している。この程度の周波数帯での高温超伝導体の表面抵抗は、同じ温度の金属よりも1~3桁程度低いとされていることから、高温超伝導体を利用した場合、(a)と(b)の中間的な損失を示すと考えられる。入出力結合を小さいため、リップルが目立つ特性となっていると思われる。表1の条件から算出される帯域内リップルは0.8dBとなることから、この結果は設計仕様に対してはほぼ満足する特性を示している。また、透過特性が、中心周波数に対して左右非対称になっている。これは、入出力線路間の直接結合の成分がフィルタ自身の特性に重ね合わされたために生じたものと考えられ、後の実際の測定結果でも同様の特性が得られている。このような浮遊結合の影響も結果に反映されていることは興味深いことである。

さらに、シミュレータの有する機能を利用して、中心周波数における電荷密度分布と電流密度分布の時間変化を計算させたものを、それぞれ、図14、図15に示す。比較のために、単一モードで動作している円板共振器の電流密度分布の時間変化を図16に示す。ここで、色が黄色い部分は値が大きく、青から水色の部分は値が小さいことを示している。図14、15より、偶モードと奇モードが同時に励振され、それらの周波数ががわずかに異なっているためにパターンが回転していることがわかる。図14で、周辺部分に電荷密度の高い部分があり、それが回転していることから、共振器のエッジ部分では、比較的大きな密度の電流がエッジに平行に流れているものと考えられる。また、図15より、電流密度は楕円共振器内ではかなり均一に分布していることもわかる。これは、超伝導体を用いた場合、本構造のフィルタは耐電力特性の向上にかなり有効であることが予想される。図16の単一モード動作の時の円板共振器では、1周期のうちに電流密度の低い状態があるために、瞬間的な最大電流密度は図15の楕円共振器フィルタと同程度でも電流密度の時間平均値は半分程度になると考えられる。したがって、楕円共振器フィルタは、多重モード動作によって効率的

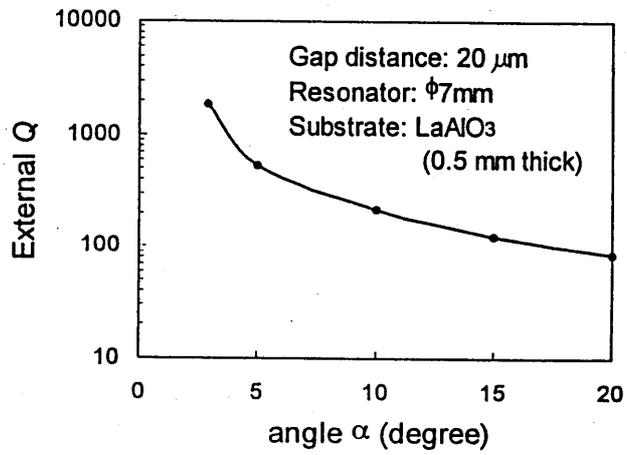
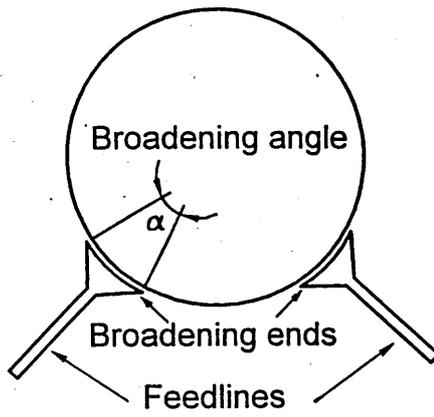


図 1 1 入出力構造と外部 Q の関係

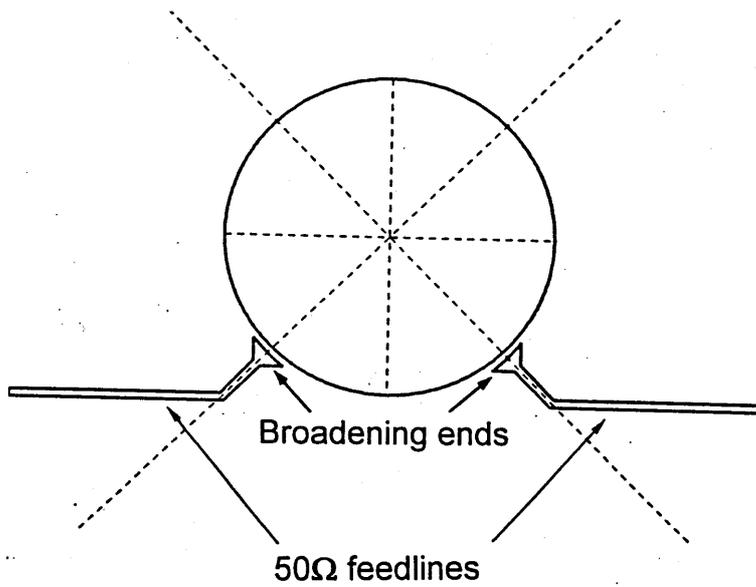
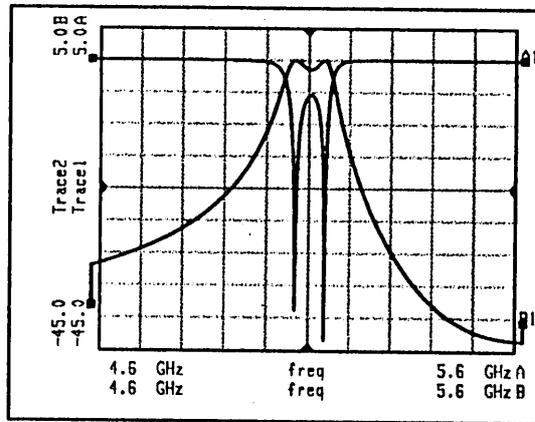
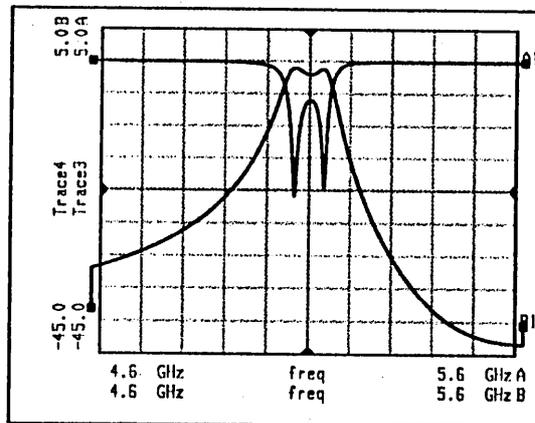


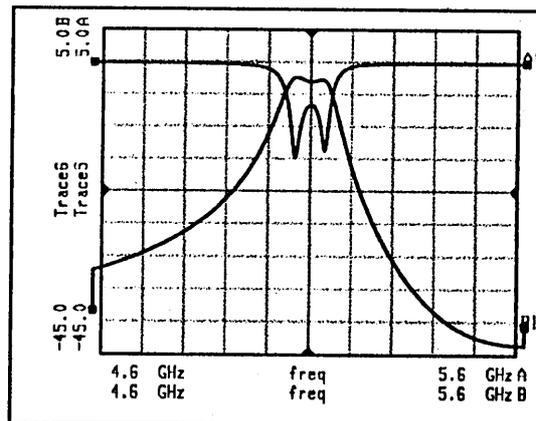
図 1 2 フィルタパターン



(a) 完全導体

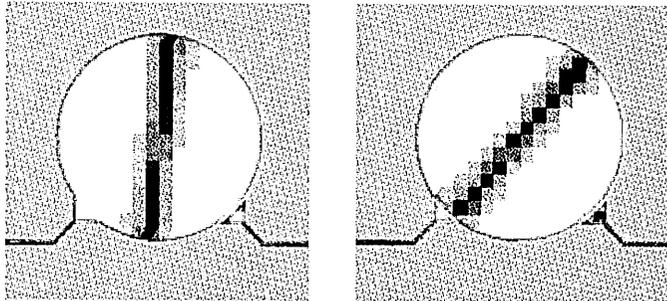


(b) 金(77 K)



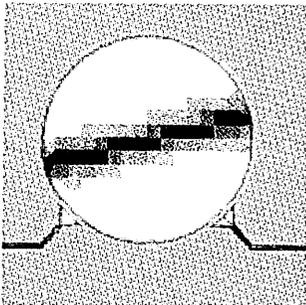
(c) 金(室温)

図 1 3 電磁界シミュレータによる計算結果

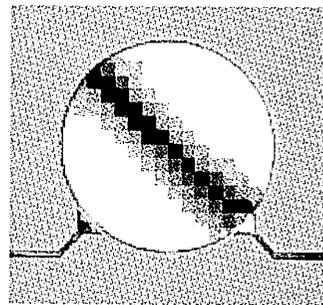


0 degree

45 degrees

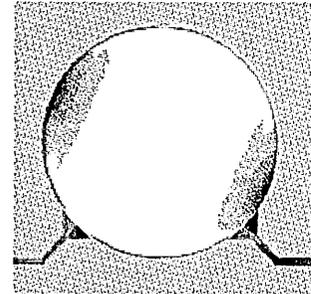


90 degrees

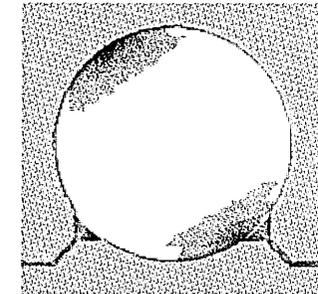


135 degrees

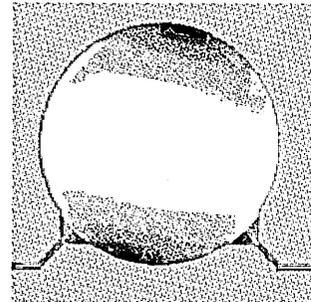
図14 楕円共振器フィルタの電荷密度の時間変化
(図中の数値は位相角度)



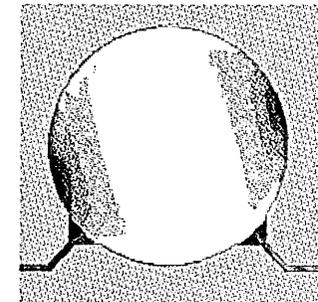
0 degree



45 degrees



90 degrees



135 degrees

図15 楕円共振器フィルタの電流密度の時間変化
(図中の数値は位相角度)

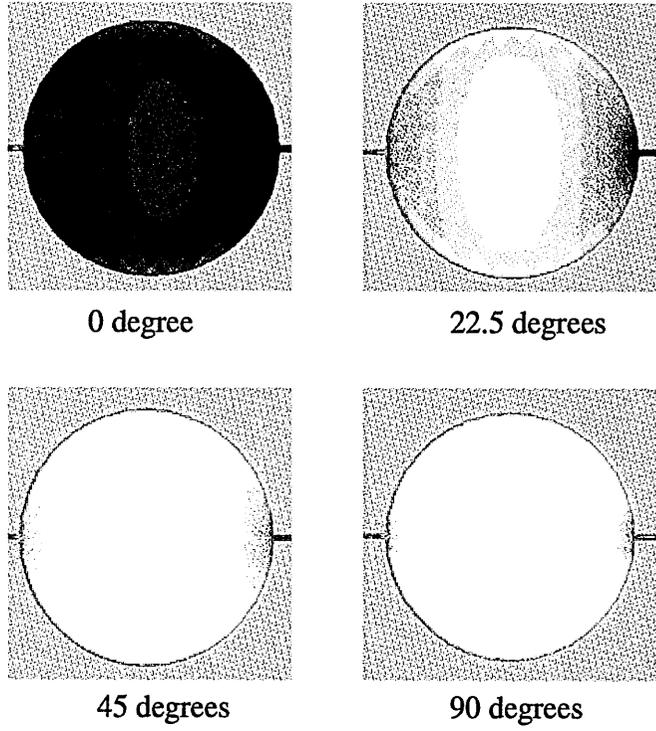


図16 単一モード動作の円板共振器の電流密度の時間変化(図中の数値は位相角度)

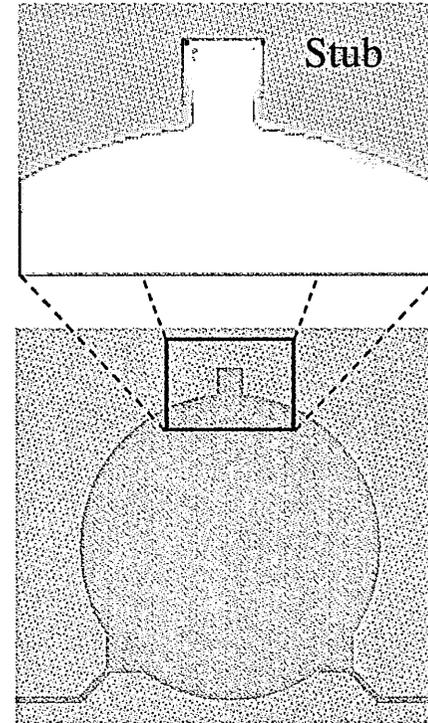


図17 円板共振器フィルタのスタブ部分への電流集中

に共振エネルギーを蓄積していることがわかる。図17は、比較のために、同様のフィルタ仕様のスタブ付き円板共振器フィルタでの電流密度分布を示したものである。先に述べたように、共振器のエッジ部分では、比較的大きな密度の電流がエッジに平行に流れているため、図のようにスタブの急峻な曲がりの部分で電流が集中していることがわかる。これは、同じ入力電力で最大電流密度が増加する事を意味しており、導電性損失の増大を招くだけでなく、超伝導体を用いた場合には耐電力特性の劣化につながると思われる。

4. 実験

次に、実際に楕円共振器フィルタを超伝導薄膜を用いて試作し、動作確認を行った結果について述べる。実験では、基板材料には0.5mm厚の LaAlO_3 単結晶を、導体材料として、円板部分にタリウム系超伝導薄膜を、グランドプレーンには金薄膜を用いた。超伝導膜のパターン化には、ネガ型フォトレジスト OMR（東京応化製）によるフォトリソグラフィの手法と、アルゴンイオンビームエッチングを用いた。加工されたフィルタ素子は、コネクタを作りつけた治具内に固定し、コネクタの芯線と入出力線路とを接触させ、信号の入出力を行った。温度制御にはヘリウム循環式冷凍器を用いた。測定は、HP8510 ネットワークアナライザを用い、測定の際の参照面はコネクタ部分に設定した。温度77Kでの散乱パラメータ S_{11} 、 S_{21} の測定結果を図18に示す。図13のシミュレーション結果とほぼ一致した特性を示している。

図19には、挿入損失の温度変化を示す。比較のために、金薄膜で作った同じパターンのフィルタの特性も示している。温度77Kでは、超伝導体フィルタの通過帯域での損失は約0.8dBであるのに対し、金で作製したフィルタでは1.9dBである。超伝導体利用により、損失が顕著に低下していることがわかる。今回の超伝導フィルタでは、グランドプレーンに金薄膜を利用しているが、一般に、この程度の周波数帯では、金属の表面抵抗は超伝導体よりも1~3桁ほど大きいとされているので、超伝導フィルタの損失の多くの部分は、金のグランドプレーンで発生しているものと予想される。グランドプレーンを超伝導体に代えることで、さらなる低損失化が期待できる。

つぎに、入力パワーに対する挿入損失の変化を図20に示す。測定温度は20Kである。最大入力レベルは+41.2 dBm (約15W)で、これは測定装置によって制限されたものである。最大レベルまで、挿入損失はほとんど変化することなく、超伝導性に基づく低損失特性が維持されることが確認された。はじめにも述べたように、通常の半波長ストリップ線路共振器を用いた超伝導フィルタでは、多くの場合、耐電力性は数十 mW 程度とされているので、本構造は超伝導フィルタの耐電力性向上に非常に有効であることがわかる。

5. まとめ

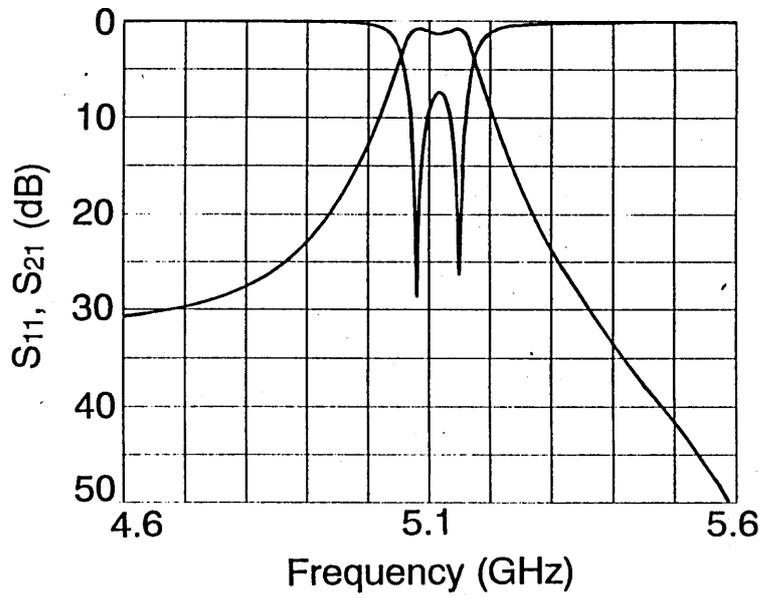


図 1 8 超伝導楕円共振器フィルタの周波数特性 (77K)

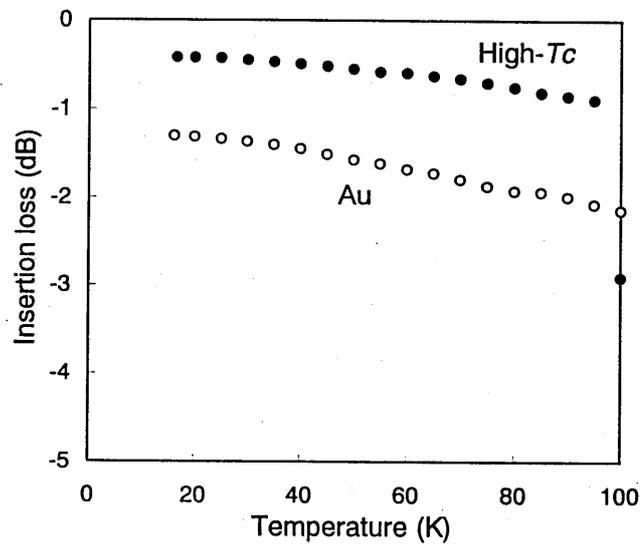


図 1 9 超伝導楕円共振器フィルタの挿入損失の温度変化

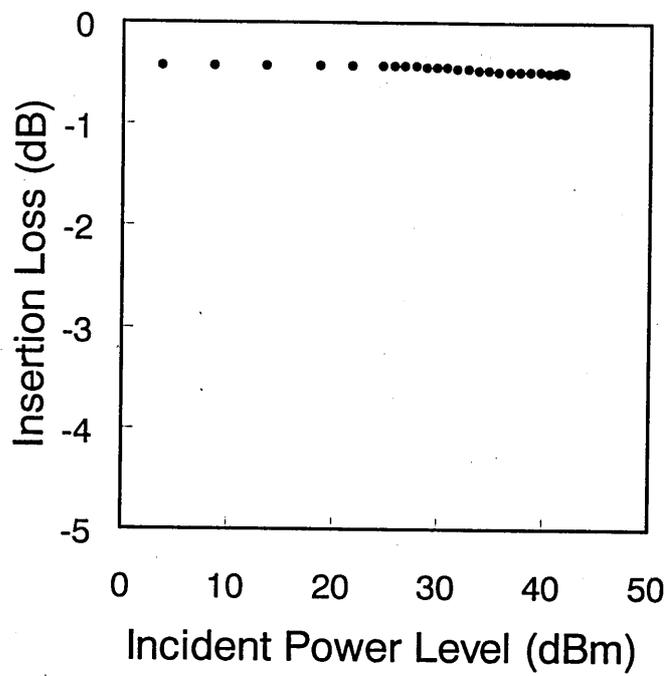


図 2 0 超伝導楕円共振器フィルタの挿入損失の入力電力依存性(20K)

耐電力性の優れた超伝導フィルタの開発を目的として、楕円共振器フィルタを提案し、試作・実験によりその有効性を確認した。本フィルタは、たとえば、移動体通信システムの基地局用送信フィルタなどに適用できれば、フィルタシステムの小型化及びシステム全体の高効率化などが期待できる。今後は、さらに正確なシミュレーション手法の確立、および、実用周波数帯でのフィルタ設計、測定系の改善、更なる耐電力性の向上、多段化等について検討する必要がある。

謝辞

本研究を進めるにあたり、有益な助言をいただいた松下技研の牧本三夫氏、佐川守一氏に深謝いたします。本研究は、通商産業省補助金プロジェクトの一環として実施したものである。

参考文献

- [1] 大越孝敬、三好旦六：“平面回路”オーム社、1975.
- [2] 大越孝敬、三好旦六：“マイクロ波平面回路の解析的取り扱い”電子通信学会論文誌、55-B, 8, pp.441 (1972).
- [3] 許瑞邦：“マイクロ波平面回路の等価回路”信学技報、MW71-45、(1971)
- [4] 田島祐介：“円形共振器の数値解析”
- [5] A. Enokihara and K. Setsune: "High- T_c superconducting planar filter for power handling capability," *IEICE Trans. Electronics*, E79-C, 9, pp.1228 (1996).
- [6] D. E. Oates and A. C. Anderson: "Surface impedance measurements of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ thin films in stripline resonators," *IEEE Trans. Magnetics*, MAG-27, 2, pp.863, (1991).
- [7] J. Watkins: "Circular resonant structures in microstrip," *Electron. Lett.*, 5, 21, pp.524 (1969).
- [8] R. T. Irish: "Elliptic resonator and its use in microstrip systems," *Electron. Lett.*, 7, 7, pp.149 (1971).
- [9] M. Abramowitz and I. A. Segun: "Handbook of mathematical functions," Dover Publications Inc., New York.
- [10] J. G. Kretzschmar: "Wave propagation in hollow conducting elliptical waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-18, pp.547 (1970).

誘電率変化による
チェレンコフレーザーの特性改善

Efficiency Enhancement in a Cherenkov Laser
by Varying Permittivity of Dielectric Sheet

平田晃正 塩沢俊之
(大阪大学)

Akimasa Hirata and Toshiyuki Shiozawa
(Osaka University)

1997年3月10日

1 まえがき

相対論的電子ビームを用いた発振器の一つであるチェレンコフレーザは、サブミリ波から遠赤外波に至る広い波長領域において大出力かつコヒーレントな電磁波の得られる発振器であり、通信、プラズマ理工学、電磁波工学等のさまざまな分野への応用が期待されている。チェレンコフレーザは、相対論的電子ビームに沿って伝搬する空間電荷波と誘電体導波路に沿って伝搬する電磁波の結合によって増大波が得られるレーザである。チェレンコフレーザに関しては、これまでに実験的^{(1)~(4)}および理論的^{(5)~(20)}研究が多数報告されている。

ところで、チェレンコフレーザにおいて、電磁波の増大は、電子ビームの運動エネルギーが電磁波のエネルギーに変換されることによって起こる。そのため、電磁波の増大とともに電子ビームのドリフト速度は減少し、電子ビームのドリフト速度と電磁波の位相速度との間に同期のずれが生じ、その結果、エネルギー変換が有効に行われなくなる。この難点を解決するために、電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて導波路を構成する誘電体の誘電率を徐々に大きくし、電磁波の位相速度を遅くすることによって電子ビームと電磁波との同期をより長く保ち、電子ビームから電磁波へのエネルギー変換の効率を大幅に改善する方法が報告^{(12),(14)~(18)}されている。本稿では、粒子シミュレーションの手法^{(18),(20),(21)}を用いて、電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて誘電率を徐々に大きくし、更に、エネルギー変換が飽和に達し、電子ビームが逆に加速されはじめると、それに合わせて導波路を構成する誘電体の誘電率を徐々に小さくすることにより電子ビームと電磁波との同期をより長く保ち、エネルギー変換効率を更に大幅に改善できることを示す。ここで、粒子シミュレーションというのは、電子ビームを流体として近似することなく、電子ビームを構成する個々の粒子（電子）と電磁界との相互作用を時間領域差分法（FDTD法）^{(22),(23)}を用いて解析する手法である。

2 解析のモデルと基礎方程式

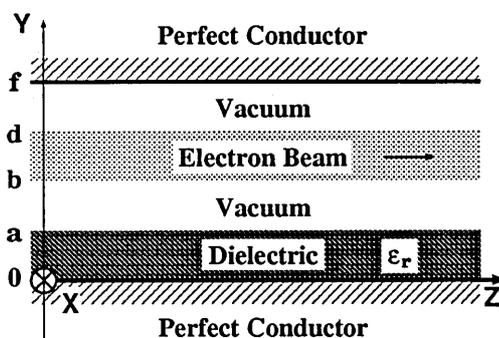


図1 解析のモデル

本稿において解析するチェレンコフレーザの2次元モデルを図1に示す。互いに平行な2枚の完全導体平板の一方に厚さ a の誘電体を装荷し、誘電体表面から一定距離 $(b-a)$ だけはなれたところを厚さ $(d-b)$ の平板状の相対論的電子ビームが z 軸方向にドリフトしているものとし、ドリフト速度の初期値を v_0 とする。また、電子ビームは十分大きい静磁

界によってドリフト方向に集束されているものとする。また、すべての物理量は x 軸方向に一様であるとする。更に、簡単のために、電子ビームはイオン流によって中和されているものとする。すなわち、電子ビーム自身によって作られる静電界および静磁界を打ち消すために、電子ビームの初期速度と同じ速度でドリフトする電子ビームと同じ電荷密度を持つイオン流が存在するものとする。

本論文の解析の基礎となる方程式は、マクスウェルの方程式および電子に対する相対論的運動方程式である。電子ビームに十分大きい静磁界が印加されている場合には電子ビームは TE モードの電磁波とは結合しないことから、本論文では TM 波の伝搬を取り扱う。TM 波に対するマクスウェルの方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \mu_0 J_z\end{aligned}\quad (1)$$

但し、

$$\begin{aligned}J_z &= J_z(y, z, t) \\ &= \sum_i q_i v_{zi} \delta(y - y_i) \delta(z - z_i)\end{aligned}\quad (2)$$

であり、 μ_0 は真空の透磁率、 c は真空中の光速、 v_{zi} は粒子の速度を表し、添字 i は個々の粒子を意味する。また、 $\delta(x)$ はディラクのデルタ関数である。更に、 J_z は電子およびイオンの超粒子により作られる電流密度を表している。ここで、超粒子とは 1 個の粒子ではなく、多数の同じ種類の粒子からなる粒子の集団である。この超粒子という概念を用いることができるのは、本論文において興味があるのが個々の粒子の詳細な振舞いではなく、粒子の集団としての統計的な振る舞いにあるからである。この概念を用いる利点は、見かけの粒子の数を減らすことができ、その結果、シミュレーションに要する時間を短縮できることである。

電子ビームに十分大きな静磁界が印加されている場合には、電子にからなる超粒子に対する相対論的運動方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt}(\gamma_i m_e v_{zi}) = q_e E_z(y_i, z_i, t)\quad (3)$$

但し、

$$v_{zi} = \frac{dz_i}{dt}\quad (4)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_{zi}/c)^2}}\quad (5)$$

であり、 m_e 、 q_e は、それぞれ、電子にからなる超粒子の静止質量および電荷を表している。

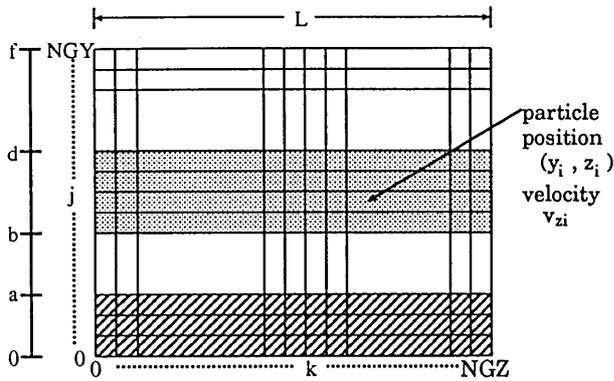


図2 格子による系の分割

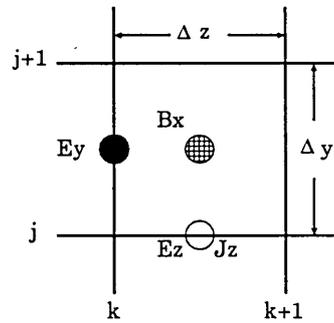


図3 電磁界成分の配置

3 粒子シミュレーション

本章では、解析の手法である粒子シミュレーションについて述べる。本論文で用いる手法は粒子シミュレーションの中でも特に粒子コード (Particle-in-cell code) と呼ばれているものである。本論文では、図1に示したチェレンコフレーザの2次元モデルを管内波長 L の長さで z 方向に分割し、その分割された領域の前後では周期的境界条件が成り立つものとする。そして、初期状態で、ある一つの領域に含まれる粒子群を選び、FDTD法を用いてその粒子群と電磁波との相互作用を時間的に追跡していく。更に、この z 方向に分割された各領域を、図2に示すように、 y 方向については Δy の間隔で $NGY+1$ 個の、一方 z 方向については Δz の間隔で $NGZ+1$ 個の格子によって微小領域に分割する。そして、図2に示すように、位置座標 (y_i, z_i) と速度 v_{zi} をもった電子およびイオンの超粒子をそれぞれ N 個一様に並べる $(i = 1, 2, \dots, N)$ 。また、図3に示すように、各微小領域で、 E_z および J_z は点 $(j + 1/2, k)$ において、 B_x は点 $(j + 1/2, k + 1/2)$ において、 E_y は点 $(j, k + 1/2)$ において求める。

まず、初期状態において、粒子の速度にわずかの擾乱を与えると、この擾乱によって粒子の位置に変化が起こり、その結果として電子密度に変動が生じる。そこで、この電子密度の変化に伴って変化する格子点上の電流密度を求める。次に、この電流密度によって生じる電磁界成分を求める。この電磁界成分により電子が加速度を得て、その速度および位置が変化する。そして再び、電子密度に変化が生じる。この過程を繰り返すことにより電磁界および電子の運動の時間的変化を追跡することができる。

4 増幅特性の改善

チェレンコフレーザでは、電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて導波路を構成する誘電体の誘電率を徐々に大きくし、電磁波の位相速度を遅くすることによって電子ビームと電磁波との同期をより長く保ち、電子ビームから電磁波へのエネルギー

表1 シミュレーションに用いたパラメータの値

誘電体の厚さ a	0.5 (mm)
電子ビームの厚さ d-b	0.125(mm)
電子ビームと誘電体の間隔 b-a	0.5(mm)
平行平板の間隔 f	2.0(mm)
比誘電率の初期値 ϵ_r	2.12
ビームのドリフト速度の初期値 β_0	0.8274
電子のプラズマ周波数 $\omega_p / 2\pi$	0.954 (GHz)
増大波の周波数 F	123.8(GHz)
システム長 L(管内波長 λ_g)	2.0(mm)
粒子の個数 N	256(個)
y 方向格子数 NGY	64
z 方向格子数 NGZ	64
1ステップの時間間隔 Δt	$1.8 \times 10^{-5}/c$ (s)
電子ビームの加速電圧 V	398.8(kV)
電子密度 n_0	$2.01 \times 10^{10}/(\text{cm}^3)$

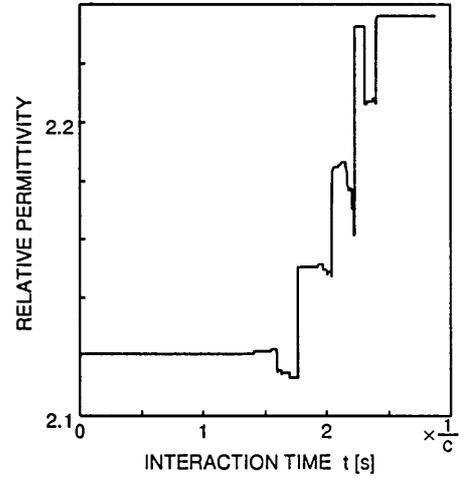


図4 最適な誘電率の変化

ギー変換効率を大幅に改善する方法が報告されている。本章では、前章で述べた粒子シミュレーションの手法を用いて、電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて誘電率を徐々に大きくし、更に、エネルギー変換が飽和に達し電子ビームが逆に加速されはじめると、それに合わせて誘電率を徐々に小さくすることにより電子ビームと電磁波との同期をより長く保ち、エネルギー変換効率を更に大幅に改善することを試みる。本章の解析で用いたパラメータの値は表1に示されている。

手法としては、まず各時点での電子ビームの平均ドリフト速度を計算し、その値を用いて電子ビームに対して線形流体近似の手法を用いて得られる分散関係式を解くことにより増大波の増大率が最大、すなわち ω の虚部が最大となるような誘電率を決定する。そして、その誘電率を随時粒子シミュレーションに組み込むことにより解析を行う。

電子ビームに対して、線形流体近似の手法を用いて、図1に示したモデルに対する分散関係式を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h_y k_y^2} \tan p_y a \tanh h_y (b-a) \\
 & - \frac{\epsilon_r}{p_y k_y^2} \tan k_y (d-b) \\
 & + \frac{1}{h_y^2 k_y} \tan p_y a (1 + \tanh h_y (b-a) \tanh h_y (f-d)) \\
 & - \frac{\epsilon_r}{p_y h_y k_y} (\tanh h_y (f-d) + \tanh h_y (b-a)) \\
 & - \frac{1}{h_y^3} \tan p_y a \tan k_y (d-b) \tanh h_y (f-d) \\
 & + \frac{\epsilon_r}{p_y h_y^2} \tan k_y (d-b) \tanh h_y (b-a) \tanh h_y (f-d) = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

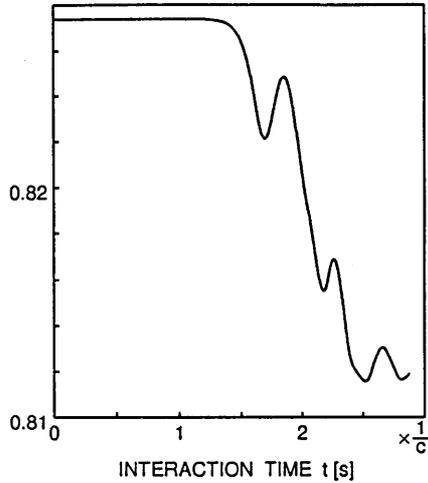


図5 電子ビームの平均速度の時間変化

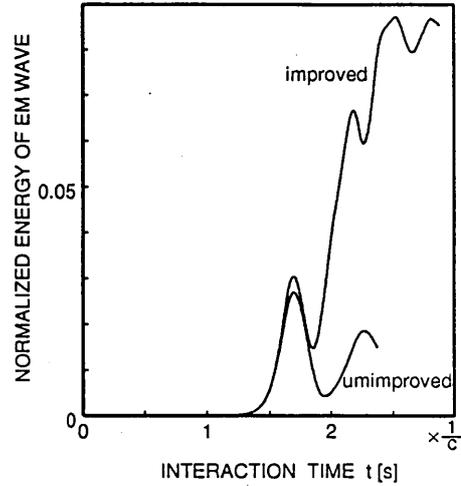


図6 エネルギー変換率の時間変化

ここで、

$$\begin{aligned}
 p_y^2 &= \epsilon_r \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_z^2 \\
 h_y^2 &= k_z^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \\
 k_y^2 &= k_z^2 + \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

とする。

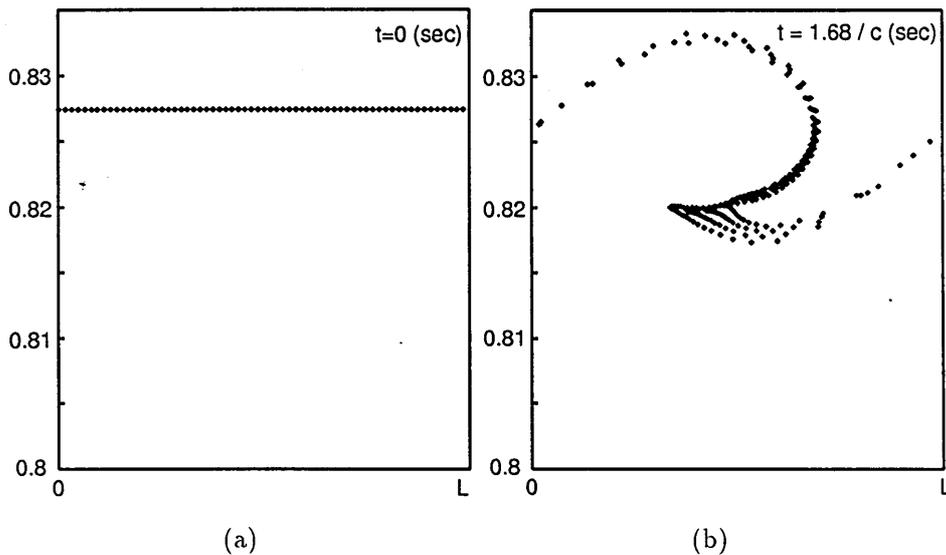
以上のような手法を用いて解析を行った結果を以下に示す。まず、効率改善を行うための誘電率の最適な変化の様子を図4に、また、このときの電子ビームの平均速度の時間変化を図5に示す。図4と図5を比較すると、電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて誘電率を大きくし、逆に電子ビームの速度の上昇に合わせて誘電率を小さくすれば、結果として、電子ビームの平均速度が大きく低下することがわかる。以下、誘電率を図4のように変化させた場合の電磁波の特性について検討するために、電子ビームから電磁波へのエネルギー変換率の時間変化について考察する。ここで、時刻 $t = n\Delta t$ ($\Delta t = 1$ ステップの時間間隔, $n = 0, 1, 2, \dots$) における電子ビームから電磁波へのエネルギー変換率 $\eta(n)$ を、電子ビームの運動エネルギーから電磁波のエネルギーへ変換された割合として定義すると、

$$\eta(n) = \frac{W_{em}^n}{W_p^0} = \frac{W_p^0 - W_p^n}{W_p^0}$$

と表される。但し、 W_{em}^n , W_p^n は、それぞれ、時刻 $n\Delta t$ における電磁波のエネルギーおよび電子ビームの運動エネルギーを示し、 W_p^0 は電子ビームの運動エネルギーの初期値を示す。

誘電率が一定の場合、および誘電率を図4のように変化させて場合の電子ビームから電磁波へのエネルギー変換率の時間変化の様子を図6に示す。エネルギー変換率は、初めのうちはどちらも同じように増大しているが、誘電率を変化させた場合は電子ビームと電磁波の同期がより長く維持され、より多く電子ビームから電磁波にエネルギーが変換されていることがわかる。これは、誘電率が一定の場合、電磁波の増大とともに電子ビームのドリフト速度が減少し、結果的に電子ビームと電磁波との同期が維持されなくなるのに対し、電子ビームのドリフト速度の変化に合わせて誘電率を変化させた場合は、電子ビームと電磁波との同期がより長く維持され、電子ビームから電磁波へエネルギーが効率よく変換されるためである。また、電磁波電力が最大となる場所を結合長とすると、誘電率が一定の場合の結合長は1.40mであるのに対し、電子ビームのドリフト速度の変化に合わせて誘電率を変化させた場合の結合長は2.09mであった。ただし、結合長は初期値によって変化することに注意しなければならない。また、図6の数値例では、飽和時のエネルギーの変換率、すなわちエネルギー変換効率誘電率一定の場合が2.8%であるのに対し、誘電率を変化させた場合には8.7%と、大幅に改善されている様子が見られる。

次に、横軸に粒子の位置 z_i を、縦軸に個々の粒子の速度 v_{z_i} をとった位相空間図を図7に示す。まず、図7(a)では、 $t=0$ (秒)のときに、粒子は小さな正弦的振動成分をもってほぼ一様に並んでいる。しかし、時間の経過とともに粒子は電磁波の電界に捕捉され、集群し、その集群が徐々に減速される。そして、図7(b)を見ると、 $t=1.68/c$ (秒)において集群は最も減速され、その後は、集群の速度が小さくなったため集群の位置が電子の減速領域から加速領域に移ってしまい、集群は逆に加速される。これまでの報告では、ドリフト速度の減少に合わせて誘電率を大きくするのみだったため、電子ビームと電磁波との同期がずれてしまい、あまり大きな改善はなされていなかった。一方、本稿では、更にドリフト速度大きくなるのに合わせて誘電率を小



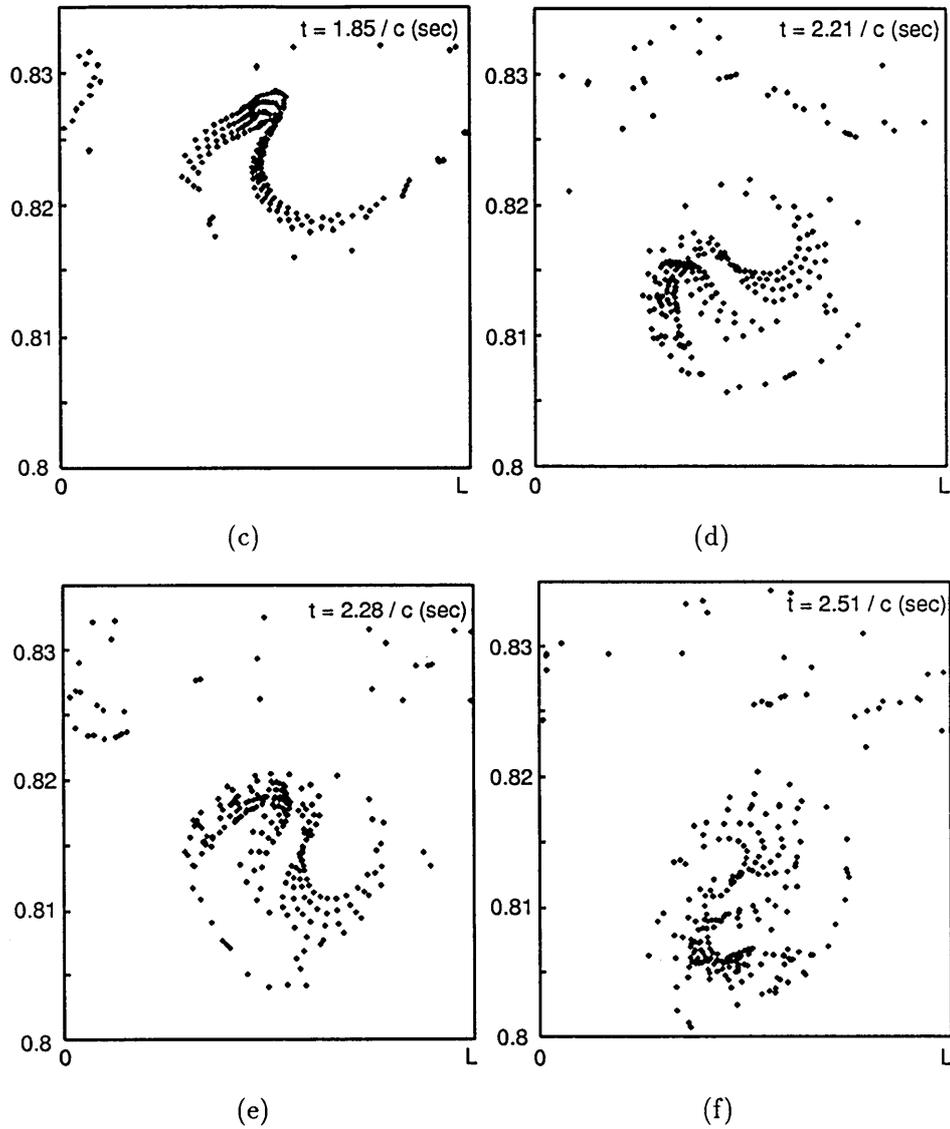


図7 位相空間図

さくしているため、電磁波と電子ビームとの同期が保たれたまま、つまり集団が保たれたまま加速されている様子がわかる（図7(c)参照）。そして、その集団が加速されたため、再び集団は電子の減速領域に入り、減速され、図7(d)を見ると、集団は図7(b)よりも更に減速している様子がわかる。図7(e),(f)では、それぞれ、図7(c),(d)と同様の現象が起こっている。ここで、図7(b),(d),(f)を比較すると、電子集団が減速領域に入る度に、電子ビームの平均速度が低下し、電子ビームの運動エネルギーが電磁波のエネルギーにより多く変換されていることがわかる。

5 結論

本稿では、互いに平行な2枚の完全導体平板の一方に誘電体を装荷し、誘電体表面から一定距離はなれたところを平板状の相対論的電子ビームがドリフトしているチェレンコフレーザーの2次元モデルを考え、電子ビームのドリフト速度の変化に合わせて導波路を構成する誘電体の誘電率を電磁波の進行方向に徐々に変化させることにより、電磁波の位相速度と電子ビームのドリフト速度との同期がより長く維持され、電子ビームから電磁波へのエネルギー変換効率が大幅に改善されることを示した。

参考文献

- [1] J. E. Walsh, T. C. Marchall, and S. P. Schlesinger, "Generation of coherent Cherenkov radiation with an intense relativistic electron beam," *Phys. Fluids*, vol.20, pp.709-710, 1977.
- [2] K. L. Felch, K. O. Busby, R. W. Layman, D. Kapilow, and J. E. Walsh, "Cherenkov radiation in dielectric lined waveguides," *Appl. Phys. Lett.*, vol.38, pp.601-603, 1981.
- [3] E. P. Garate, J. E. Walsh, C. Shaughnessy, B. Johnson, and S. Moustazis, "Cherenkov free electron laser operation from 375 to 1000 μm ," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res.*, A259, pp.125-127, 1987.
- [4] F. Ciocci, A. Doria, G. P. Gallerano, I. Giabbai, M. F. Kimmitt, G. Messina, A. Renieri, and J. E. Walsh, "Observation of coherent millimeter and submillimeter emission from a microtron-driven Cherenkov free-electron laseer," *Phys. Rev. Lett.*, vol.66, pp.699-702, 1991.
- [5] J. E. Walsh and J. B. Murphy, "Tunable Cerenkov lasers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-18, pp.1259-1263, 1982.
- [6] M. Shoucri, "The excitation of microwaves by a relativistic electron beam in a dielectric-lined waveguide," *Phys. Fluids*, vol.26, pp.2271-2275, 1983.
- [7] V. K. Tripathi, "Excitation of electromagnetic waves by an axial electron beam in a slow wave sturcture," *J. Appl. Phys.*, vol.56, pp.1953-1958, 1984.
- [8] E. P. Garate, C. H. Shaughnessy, and J. E. Walsh, "High gain Cerenkov free-electron laser at far infrared wavelengths," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-23, pp.1627-1632, 1987.
- [9] T. Shiozawa and H. Kondo, "Mode analysis of an open-boundary Cherenkov laser in the collective regime," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-23, pp.1633-1641, 1987.
- [10] 田中俊幸, 安元清俊, "円形導波管内を伝搬する相対論的電子ビームによるチェレンコフ放射," *信学論 (C)*, vol.J70-C, no.1, pp.40-48, Jan. 1987.

- [11] Y. Shibuya and T. Shiozawa, "Characteristics of an open-boundary Cherenkov laser using a magnetically-confined relativistic electron beam," *IEICE Trans*, vol.E72, pp.828-833, 1989.
- [12] 石堂能成, 茨木 晋, 塩沢俊之, "非線形誘電体導波路を用いたチェレンコフ・レーザの理論解析," *信学論 (C-I)*, no.3, vol.J72-C-I, pp.152-159, Mar. 1989.
- [13] 沖田宗史, 田中俊之, 田中和雅, 安元清俊, "誘電体回折格子を利用した相対論的電子ビームによる電磁波放射の数値解析," *信学論 (C-I)*, no.4, vol.J75-C-I, pp.515-522, Apr. 1992.
- [14] 堀之内克彦, 塩沢俊之, "開放形チェレンコフ・レーザの動的特性," *信学論 (C-I)*, no.9, vol.J-76-C-I, pp.331-336, Sep. 1993.
- [15] 塩沢俊之, 宇都宮英治, 上田哲也, "カー媒質装荷によるチェレンコフ・レーザの特性改善," *信学論 (C-I)*, vol.J77-C-I, no.2, pp.41-47, Feb. 1994.
- [16] T. Shiozawa, T. Sato, and K. Horinouchi, "Improved characteristics of a Cherenkov laser loaded with a Kerr-like medium," *Appl. Phys. Lett.*, vol.64, pp.1607-1609, 1994.
- [17] 佐多正博, 鎌田央, 塩沢俊之 "誘電率変化によるチェレンコフ・レーザの効率改善—モード散乱を考慮に入れた場合," *信学論 (C-I)*, vol.J78-C-I, no.1, pp.331-336, Sep. 1993.
- [18] T. Shiozawa and T. Yoshitake, "Efficiency enhancement in a Cherenkov laser loaded with a Kerr-like medium," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-31, pp.539-545, Mar. 1995.
- [19] T. Shiozawa and T. Nishimura, "Efficiency enhancement by a tapered dielectric grating in a Cherenkov laser," *Appl. Phys. Lett.*, vol.68, pp.1443-1455, 1996.
- [20] T. Shiozawa, H. Takahashi, and Y. Kimura, "Nonlinear saturation and efficiency enhancement in a Cherenkov laser using a dielectric grating," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-32, pp.2037-2044, Dec. 1996.
- [21] C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation*, McGraw-Hill, New York, 1985.
- [22] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, vol.AP-14, pp.302-307, 1966
- [23] A. Taflov, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, Boston, 1995.

1. 新世紀の宇宙開拓と宇宙太陽発電

松本 紘

京都大学超高層電波研究センター長

1. はじめに

人々の多くは、今の生活がいつまでも続くような錯覚に陥っています。しかし、実はこの地球上の文明の行く先は百年くらいのスケールでは、決して明るいものではありません。増え続ける人口と、向上を続ける生活レベルのために、いろいろな意味で地球は手狭になりつつあります。資源、エネルギー、食糧および空間はいずれも急激に不足し、遠くない将来に醜い争いが起こり、人類の滅亡もしくは大悲劇が起こる可能性は少なくありません。この問題を解決するには、地球という閉鎖系から、地球以外の領域も含めた開放系、たとえば太陽系全体に目を向けることが必要です。つまり、人間が生き残ってゆくためには、早晚、人類の英知を傾けて宇宙開拓に真剣に取り組まなくてはならないのです。

本講演では、近い将来の宇宙開拓の実現を念頭に置いて、私たちが取り組んできた電波を中心とした宇宙実験や計算機実験と研究の一端をご紹介します。このテキストでは、研究の背景を比較的丁寧に書きました。具体的研究の説明と紹介は紙面の都合上、項目だけを記載しました。しかし、講演では、詳しく述べます。図面は紙面の都合上、できるだけ省きました。当日配布する当センターの色刷りのパンフレットの中の図面を参照してください。講演の図は別途、ハンドアウトを用意し、配布する予定です。

2. 地球文明と宇宙

宇宙というと、みなさんはどんなイメージを

持ちますか。星を散りばめた濃紺の空間でしょうか、あるいはブラックホールや暗黒空間に浮かび上がる輝く銀河イメージでしょうか。これらは、はるかに遠い宇宙のイメージです。宇宙論や天文学はそんな「遠い宇宙」を対象とし、真実と夢を迫っています。これらの「遠い宇宙」は「ユニバース (Universe)」または「コスモス (Cosmos)」とか呼ばれています。

一方、宇宙開拓が対象とする宇宙はもっと「身近な宇宙」です。人類として初めて宇宙に飛び出したガガーリンの活躍した宇宙も、向井千秋さんが最近翔んだ宇宙もわずかに東京、大阪間くらいの距離を上空に伸ばした「近場の宇宙」にすぎなかったのです。実用衛星が活躍する静止軌道でも東京、リオデジャネイロの往復距離くらいしかありません。これらの身近な宇宙は遠い宇宙と区別して、「スペース (Space)」または「宇宙空間」と呼んでいます。現在は「スペース」の定義は人間が探査機などを送り、直接測定できる領域とされています。現在は米国の惑星探査機ボイジャーが太陽系の辺境まで達していますから、当面、スペース (宇宙空間) は太陽系全体を指すと考えていいでしょう。スペースサイエンスや宇宙開拓が対象としているのはこの「近場の宇宙空間」です。そこはもはや夢の世界ではなく、現実に惑星探査や工学的な宇宙利用が実行に移されてきている世界なのです。

1957年の初の人工衛星の打ち上げ以来、急速に人々の眼が宇宙に向けられ、いわゆる「身近な宇宙」の時代が始まりました。わずかに40年ほど前のことです。宇宙と人間の関わり方の変化は初期のころは非常に遅く、近年に近づくに

表1 加速度的な地球文明の進歩

400万年前	人類祖先の誕生	原始生活
10万年前	移動狩猟生活	
1万年前	定住農耕生活	
3000年前	文明の発祥	
500年前	船舶時代・非動力生活	
200年前	産業革命・動力生活開始	
100年前	航空機時代開幕・電力生活開始	
40年前	宇宙時代開幕・コンピュータ生活開始	

つれ加速度的に速くなってきています。非常に荒っぽい数字で、人間の歴史を振り返ると表1のようにまとめることができます。

古代から現代に至るまで、人の生活と意識の中にいつも宇宙が存在し、真理の探求の原動力にもなってきました。しかし、宇宙の意識は、宇宙時代に入って人々の心のなかで確実に変化してきています。そもそも生まれおちたときから宇宙実用衛星の恩恵を受けている子どもたちにとっては、宇宙はもはや夢物語の世界ではないはずです。来世紀を背負う彼らにとっては宇宙は現実の世界であり、近未来の具体的な活動の標的となってきています。事実、気象衛星、通信衛星などはお茶の間の日常生活の一部となっています。気象衛星から送られてくる雲の動きの連続写真を見れば素人でもほぼ天気予報できるようになりましたね。ベランダや屋根の上で宇宙を見上げている小さなパラボラアンテナが宇宙からの電波を受け、衛星放送(BS)を受信しています。ビジネスの世界では通信衛星や海事衛星が国内、国際通信や船舶通信に活躍していますし、予備校ネットワークやスーパーマーケットのチェーン店の連絡網、トラック輸送の連絡にも衛星電波が利用されはじめています。さらに地球観測衛星や資源探査衛星は宇宙から地球資源の探査や農林水産の収穫予想などに活躍しています。航空機や自動車などの移動体が自分のいる位置を知るのに便利な測位、航行衛星(GPS)は地球を周回している衛星群です。宇宙(スペース)は確実に身近になりつつあります。

3. 宇宙船「地球号」の危機

人類が地球上の生物の冠たる地位を築き、今日の繁栄にいたったのはなぜでしょう。人類の繁栄の基盤は、(1)物・食糧、(2)エネルギー、(3)領土・空間、(4)人口、(5)知識・技術の5つの量を次第次第に拡大しながら入手してきたからだと言われています。第一の「物・食糧」、第二の「エネルギー」を次々と手に入れていって人々が生活を向上させてきたのは明らかですね。第三の「領土・空間」の拡大は農地、工業用地、住居地などの人々の活動空間、生産空間の増大をもたらしました。しかし、以外と見落とされがちなのが第四の「人口の増加」です。人の数が実は重要な成長の要因であったということです。人口の増加は、労働力の増加、社会活力の増加を通して、明らかに人類の繁栄に貢献してきましたね。知的発見も人口に対し一定の割合でなされていますから、明らかに人口の増加が知的生産物に対し大きな貢献をしてきているのです。

しかし、5番目の「知識・技術」を除けば、いずれも無限に増やしてゆくことは出来ません。この限界が実は深刻な問題なのです。惑星「地球」のこのような危機は専門家の間では随分前から認識されており、警鐘も打ち鳴らされてきました。しかし、あまり顧みられることはありませんでした。最近のジャーナリズムの啓発活動や政治レベルの環境問題への取り組みのおかげで、ようやく広く一般の国民にも、「病める地球」の問題の重大さが少し認識されるようになりました。それでもなお、人類の未来と一連托生の惑星「地球」に忍び寄る破滅の暗い影は、いまだ人々に真剣に受け止められてはいません。

1972年にローマクラブがこの資源・食糧・エネルギー・空間などの有限性のために、人間社会の経済成長はいずれ止まるという警告を発しました。その翌年に第1次のオイルショックが襲ったため、この警告は深刻に受け止められま

した。日本では第1次、第2次オイルショックで、トイレットペーパー騒ぎなどが起こり、テレビの深夜放映の自粛や夜のネオンサインの消灯などエネルギー節約がやかましく言われました。しかし、熱しやすく冷めやすいのが日本人の国民性でしょうか、今ではさっぱり節電の努力は行われていないように見えます。実は、この「成長の限界」の意味は経済成長が止まるというだけではなく、もっと深刻なのです。いくつかの問題を考え直してみましょう。

3.1 人口爆発

人口は繁栄の結果でもあり同時に繁栄の原動力でもあります。図1は紀元後の2000年間の人口推移をグラフにしたものです。この図からわかるように、18世紀まではおよそ2~3億人程度の人口にとどまっていた。注意したいのは、戦争のために10パーセント以上も人口が減ったということはないということです。自分の親戚縁者に戦死者がでるともうごめんだという自制心が働くようです。一方、増えるほうには自制心はなかなか働きません。産業革命の起こった18世紀から後には、世界の人口は急激に増加の一途をたどっています。その人口増加の

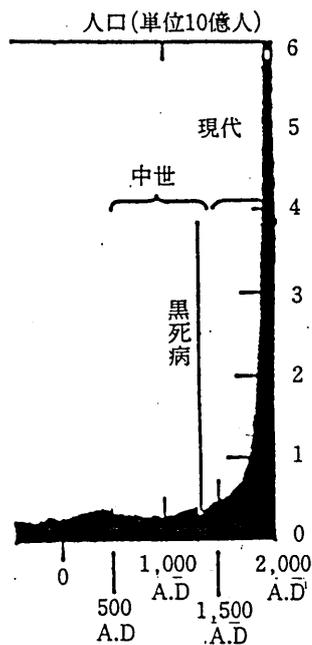


図1 世界の人口推移と人口爆発
(Population Bulletin, 18-1)

仕方はまさに爆発的です。この人口増加の曲線は、数学的には指数関数曲線になっています。人口の増加の仕方は、そのときの人口に比例すると単純に考えると簡単な微分方程式の答えとして指数関数が得られます。産業革命以前に、指数関数的に人口が増えなかったのは、人口の増え方が単純にその時の人口に比例するのではなく、病気、災害や飢饉などのいろんな要因で人々が亡くなっていたからです。産業革命以後の人類の生活安定が人々の死亡率を低下させ、理論どおりに人口爆発が生じたまでのことです。

現在の世界の人口はおおよそ56億人と推定されています。それも時々刻々増えています。現在の世界平均の人口増加率はおよそ2%弱ですから、一秒間に3人以上も増え、一年間に1億人ずつ増えていることに相当します。おそろしい勢いで人間がこの地球上で増殖しているのが分かりますね。

科学技術を駆使して、直面している人口爆発を抑える努力をすべきことは当然ですが、よほどうまくしないと人口の減少は社会不安を引き起こしたり、社会の沈滞を生み出すので得策ではないでしょう。50年、100年というスケールで考えると、やはり今の人口の2倍や3倍の人口が地球上にひしめくようになるのは避けられそうにもありません。そうなれば、資源やエネルギー源をめぐる、開発途上国と先進国との間の深刻な南北問題や、国家間のエゴのぶつかり合いなどが起こって、醜いそして致命的な争いが人類を覆いつくし、やがて人類が滅亡するという悲しい予測すら可能です。うまく争いが避けられても、富と資源を増えつづける人類で分かち合うわけですから、いわゆる生活水準(生活の質)は来世紀には下降の一途を辿ります。事実、地球外の資源やエネルギーを導入しないと、世界の生活水準(生活の質)が来世紀末には現在の半分以下に落ち込んでしまうというシミュレーション結果も発表されています。やはり、争いなく増大する人口と向上する生活

水準を保ちながら、人類が生き続けられるような道を模索しなくてはならないでしょう。このためには、100年のスケールで宇宙へ進出するしか方法はないように思います。

3.2 エネルギー問題

21世紀のエネルギー事情はどうなるでしょうか。世界の人口が増え、さらに一人一人が使うエネルギーも確実に増えています。お隣の中国の沿岸では、経済成長率は10%を超えており、ベトナムでは13パーセントという驚異的な経済成長率で経済が伸びており、世界のエネルギー消費は猛烈に増えていますね。我が国においても電気エネルギーの需要は依然として毎年3パーセント以上の伸び率を示しています。しかし現在の主要エネルギー源である石油の埋蔵量は早くも21世紀の半ばには枯渇してしまいます。このままでは近い将来に深刻なエネルギー危機が我々を襲い、経済的、社会的パニックに陥る可能性が高いのです。この解決のために石油に代わるエネルギー源を求め、石炭の見直し、原子力発電の普及、熱核融合発電の開発などが現在真剣に行われています。しかし、石炭は石油と同様に炭酸ガスを大量に発生し、温室ガラスのように地球をすっぽりと覆い、いわゆる温室効果を生み、地球全体の気温の上昇を招きかねません。原子力は有望なエネルギー源ですが、立地問題や放射性廃棄物の問題を抱えています。熱核融合もまだ未解決の技術問題が多く、すぐにはエネルギー源として期待できそうにありません。そこで、大型でクリーンなエネルギー源として24時間運転できる宇宙太陽発電が有望な電気エネルギー源と考えられるようになりました。いずれ、宇宙進出が避けられないのであれば、現在のエネルギー不足を補い、宇宙開拓の礎となる宇宙エネルギー基地（宇宙太陽発電所）を実現することは、まさに一石二鳥ではないでしょうか。ここにも宇宙開拓の必要性があるのです。

3.3 免罪符となっちはいけない地球環境対策 地球環境サミットに象徴されるように、近年

「環境問題」が人々の関心を呼んでいます。事実、地球環境の科学的調査にも研究費が多く使われるようになってきました。確かに資源リサイクル、森林保護、大気汚染防止、オゾン破壊物質使用禁止、省エネ対策など努力すべきことは多いのです。しかし、このような努力も急速に悪化している人口爆発、食糧危機、耕地砂漠化、資源枯渇や深刻なエネルギー不足の前には「焼け石に水」ということを認識すべきなんです。科学調査も環境問題の根本的理解には必要ですが、観測だけでは環境悪化を止めることはできません。何か、根本的に瀕死の地球を救う具体的な手だてを考えねばならないのです。人類にとって「ゆりかご」の役目を果たしてくれた地球は、このままでは墓場になりかねません。たとえ人口が増えなくとも、世界の人々が日本人並みの生活をするようになれば、たちまち地球は破産なのです。今、世界平均で人は一人当たり1トンもの化石燃料を消費しています。そんなに猛烈消費をする人間が、瞬きする間に一人ずつ増えているのです。冷静に考えれば、現在の環境対策や新産業革命だけでは人類は救えず、結局人間の活動する器を地球から太陽系に広げざるを得ないことに気づくでしょう。地球環境問題の重視や環境に優しい対策がこれらの問題を解決してくれる、と人々に錯覚をさせてしまうとかえって罪作りです。この点では、環境対策は下手をすると中世の「免罪符」のようになりかねません。このように悪化している地球環境はまさに人類の経済活動、生活水準の向上の裏返しです。現在、行われている「環境」と名の付く研究の大部分はいわば、病める地球、病める人間文明の病気の「診断」をしていることに対応するでしょう。病名が宣告されただけで、治療がなされなかったら、本当の手当てとは言えませんね。診断と同時に「治療」の研究も同時に行わなければいけないのです。手遅れになる前に、今こそ何が根本的に必要なのか、どうすれば「病める地球」を根本的に「治療」できるのかという問題を真剣に考えると、

何故今「宇宙開拓」という「治療」に急いで取りくまなければならないのかが分かるでしょう。

4. 宇宙開拓の合理性—太陽系を食べる—

人間が来世紀に生き残ってゆくためには、人類の英知を傾けて宇宙開拓に真剣に取り組まなくつはならないことは前に述べました。幸いなことに地球が手狭になってきた20世紀の後半になって、人類は地球の重力圏外の世界に出てゆける宇宙ロケットをタイミング良く手に入れましたね。また、地道な科学研究によって着実に地球の近くの宇宙空間の知識も増えました。宇宙技術というとすぐにロケットやスペース・シャトルなどの飛翔体技術を思い浮かべる人が多いのですが、実は宇宙技術は、宇宙航空工学以外に、電子工学、電波工学、計算機工学、材料工学、機械工学、化学工学などはもちろん、土木工学や建築工学までもが必要とされる総合技術なのです。これらの技術を総合的に駆使して宇宙開拓に取り組むこととなります。しかし、「宇宙開拓技術」の開発の前に宇宙空間科学、惑星科学、プラズマ科学、流体力学、材料科学、宇宙医学、宇宙生物学などの「宇宙科学」の基礎が確立されていなければなりません。その意味で、宇宙科学は宇宙開拓の先発隊と言えるでしょう。知識なしに、宇宙というとても大きく大きい目標に船出をするのは、風車に向かって槍一つで突入するドンキホーテのようなものです。この意味で、宇宙科学は夢と知的好奇心を追う学術と評されがちですが、実は宇宙科学の果たすべき役割は重く、實際上重要なのです。

地球の扶養限界を打破しながら、ゆるやかな成長をし続けるには、宇宙への進出がたった一つの解決法であると私は信じています。今までの歴史がゆっくりと進んできたのに対し、現在世界中で進行しているエネルギーの消費爆発、資源の猛烈消費などは、まさに過去の歴史になかった速さですから、「今までなんとかなって

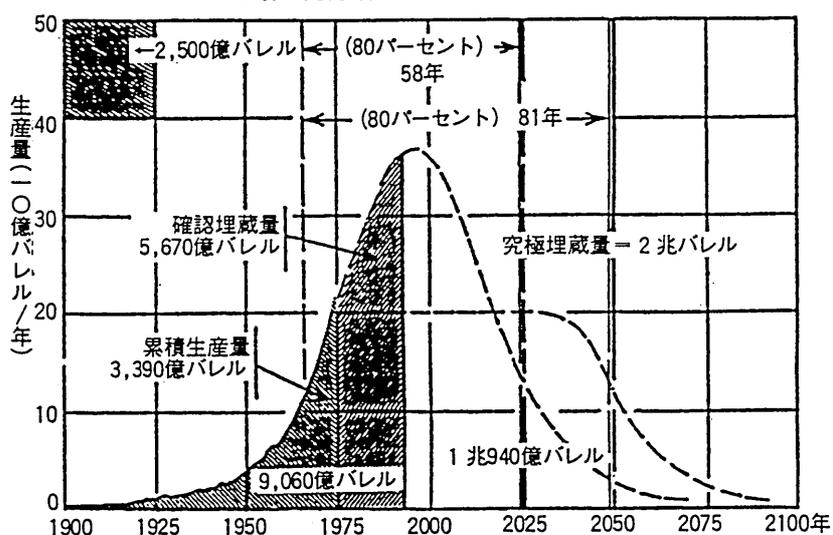
きたから大丈夫だろう」という考えは全く通用しなくなることは火を見るより明らかです。

でも資源は宇宙に十分有るのか、エネルギーは十分有るのかという疑問が当然湧いてきますね。その質問に対する答えはイエスです。地球は太陽系の第4惑星です。その地球の構成元素の割合は鉄がもっとも多く約40%、ついで酸素が28%、珪素が約15%、それ以下はマグネシウム、ニッケル、カルシウム、アルミニウムと続きますしかし、鉄やニッケルやマグネシウムは地球物質の大半(67%以上)を占めるマントルに豊富に含まれています。これに対し、私たち人類が利用してきた地殻に含まれる元素は、酸素が約50%、ついで砂の主成分の珪素が約26%、そしてアルミニウムが7%、鉄が4%、カリウム、マグネシウムが約2%と続いています。もっとも地球に近い月の地殻の組成比はどうでしょうか。実は驚くほど地球の組成比と似通っています。地球と火星の間に小惑星群があることは良く知られていますね。その小惑星の組成比も似たものです。つまり、太陽系の惑星とその衛星、小惑星などを利用すれば、ほぼ地球上でこれまで人間が利用してきた鉱物資源は太陽系の中にふんだんに存在するわけです。エネルギーについては、太陽の熱、光を利用すれば無尽蔵に得ることができます。つまり、太陽系を人類が食べるのに成功すれば、少なくとも30~40世紀までは人類の文明の発展が期待できます。

5. 宇宙でのエネルギー確保

地球の上では電気エネルギーはもうすぐ先進国でも不足します。石油や石炭を燃やして発電する化石燃料発電は現在の発電方式の主流を占めますが、石油の資源が50年しかもちません(図2参照)。しかも、石油はいろいろな化学工業製品に必要ですから燃やしてしまうのは愚かなことです。さらに、石油や石炭を燃やせば、亜硫酸ガス、亜硝酸ガスや炭酸ガスが発生します。脱硫や脱硝装置を完備しなければ、酸性雨

世界の究極可採原油資源量の可能な生産率曲線



(M. King Hubbert, in Congressional Research Service, Project Interdependence: U. S. and World Energy Outlook Through 1990, Washington, 1977, p. 442)

図2 20世紀, 21世紀の石油事情

の原因にもなります。炭酸ガスやメタンなど、いわゆる温室効果ガスは地球の温暖化をもたらします。地球の温暖化や酸性雨は今後の人類の生活に多大の影響を与えることは必至でしょう。したがって、これらの化石燃料への依存性は減らしていかなければなりません。一方、原子力発電は、不足する電気エネルギーを補うのに多くの国で使われています。日本ではほぼ1/3の電気エネルギーが原子力発電によって賄われていますね。しかし、チェルノブイリやスリーマイル島で起きた事故のような放射能漏れ、核廃棄物の処理の問題などを抱えています。

この地球上のほとんどのエネルギーは大本をたどれば、太陽に行き着きます。石油や石炭は長い時間をかけて太陽エネルギーを形を変えて蓄えたものを使っていることになります。また、水力発電も太陽が引き起こす大気と陸地間の水の循環が源ですね。事実、太陽は莫大なエネルギーを太陽系全体に放出しています。地球の軌道上で1平方メートル当たり、1.37キロワットのエネルギーを受けています。この値は太陽定数と呼ばれています。太陽と地球間の距離は1億5千万キロメートルですから、それを

半径とする太陽をすっぽり囲む球を考えて、その全表面を通過するエネルギーの流れは簡単に計算できますね。その球の全表面積はおよそ2,800億平方メートルの1兆倍もあります。したがって、3,900億キロワットの1兆倍ものエネルギーが太陽から太陽系全体に放射されています。地球に降り注がれている太陽エネルギーだけでも、太陽定数に地球の断面積の130兆平方メートルを掛けると、175兆キロワットもあります。現在人類は100億キロワットも使っていませんから、太陽の全放射エネルギーの40兆分の1程度、地球に降り注ぐ太陽エネルギーの1万5,000分の1のエネルギーしか使っていないことになりますね。

宇宙に出れば、曇りの日も、雨の日も、昼も夜もないわけですから、24時間、年中太陽エネルギーを利用することができます。現に、ほとんどの人工衛星は太陽電池を広げてエネルギー源としています。今世紀末に打ち上げられる国際宇宙ステーションでもそうです。宇宙で太陽光または太陽熱を使って発電する。宇宙発電所(SPS; Solar Power Station; 図3参照)もそんな考えに立脚しています。宇宙に超大型の太陽電池パネルを展開し、クリーンな電気エネルギー

ギーだけを地球にしようというのが宇宙太陽発電所計画です。1基あたり2,000万キロワットを発生する発電所60基を静止軌道上に打ち上げ、アメリカ合衆国の全電気エネルギーをまかなおうというのが最初の提案でした。原子力発電所の最大級のものが100万キロワットの出力ですから、SPS 一台で原子力発電所の10基分以上の電力が得られることとなります。

当センターも宇宙太陽発電所にとって重要な技術要素であるマイクロ波による電力伝送の基礎研究に取り組んでいます。センターの紹介パンフレットの20～21ページに関係の説明と図が載せてあります。ご覧ください。図3は宇宙太陽発電所の概念図と私たちが世界に先駆け成功させた MINIX というマイクロ波エネルギー放射のロケット実験の絵です。

講演では、以下の項目についてお話をいたします。

- (1) マイクロ波電力伝送の研究の歴史
 - テスラ（百年前）から現在まで
 - （興味のある人には論文の別刷りをさしあげます）
- (2) 宇宙太陽発電所の概念
 - SPS 概念の特徴はつぎのようにまとめることができます。
 - (イ) エネルギー源は無尽蔵、無公害、クリーン、かつ無料
 - (ロ) 一年中、昼夜の区別なく利用可能
 - (ハ) 超大電力の供給が可能。基幹電力システムとしての使用可
 - (ニ) 国際市場に供給可能
 - (ホ) エネルギー問題、環境問題に貢献
 - (ヘ) 人類文明の宇宙空間への発展の重要な一里塚
- (3) 宇宙太陽発電の要素技術
 - (イ) 発電（太陽光から直流電力へ）
 - (ロ) マイクロ波への変換
 - (ハ) マイクロ波送電
 - (ニ) 受電用レクテナ
- (4) 当センターを中心とした日本の宇宙

太陽発電所とマイクロ波送電の研究
（パンフレット20ページの図参照）

- (イ) 大電力マイクロ波と電離層プラズマとの相互作用の理論研究
 - 非線形プラズマ物理学
 - (ロ) MINIX ロケット実験（図3参照）
 - 世界初の宇宙実験
 - (ハ) エネルギー送電用レトロディレクティブ方式の開発
 - 7素子フェイズド・アレイ送電機
 - (ニ) 無燃料マイクロ波飛行機実験—MILAX—（図4参照）
 - 世界で2例目、アクティブ方式では世界初の実験
 - (ホ) 地上2点間の無線送電試験（図4参照）
 - 世界で2例目
- (5) マイクロ波による電力輸送の技術的課題

6. 宇宙プラズマの世界

昔は宇宙は恒星や惑星以外は真空の世界と考えられ、太陽系空間も太陽を巡る9つの惑星とその衛星群、小惑星、彗星微粒子以外の空間は何もない真空世界と思われていました。磁気嵐やオーロラは、ときどき太陽から放出された高エネルギー荷電粒子が真空中を走り抜け、地球を襲って引き起こされると考えられていたのです。しかし、今から40年ほど前にこの真空宇宙の考え方は誤りで、太陽風と呼ばれるプラズマの風が常に太陽から吹き出て、太陽系を満たしながら吹き抜けていることが明らかになりました。最初この事実は、太陽系を走り抜ける彗星の尾が、運動の方向とは逆向きの尾以外に、太陽から反対方向に伸びる尾も持っているという地上からの観測事実によって明らかにされました。ついで理論的に太陽から定常的にプラズマの風が吹き出ることが米国のパーカー博士によって証明されました。その後、米国の人工惑星マリナー2号が太陽風の存在を証明したのです。太陽系の外側では銀河風と呼ばれるプラズマの風が吹いていて太陽系をすっぽりと銀河プ

ラズマが包んでいると考えられています。真空宇宙からプラズマ宇宙へ宇宙の見方がすっかり変わったのです。

このように太陽系の広大な空間を埋めているプラズマとは一体どのようなものでしょうか。物質にエネルギーをつぎ込んでゆくと、ちょうど水という物質が「氷」、「水」、「水蒸気」と状態を変えてゆくように「固体」、「液体」、「気体」へと状態を変えてゆきます。気体状態にさらにエネルギーをつぎ込むとどうなるでしょうか。ついには物質を構成している分子や原子の中の電子が剥がされ（これを「電離される」と言います）、プラスの電荷を持つイオンとマイナスの電荷を持つ電子とに別れた「プラズマ」と呼ばれる第4の物質状態に変わります。プラズマとは原子がイオンと電子にばらばらになった状態なので、電気を通しやすく、磁場の影響を受けやすい性質を示します。そのためプラズマの世界ではさまざまな電磁気現象が支配するようになります。

有名なノーベル賞学者のハネス・アルフヴェン博士は「全宇宙の全物質は99.9パーセント以上がプラズマ状態です」と言っています。全宇宙の中で私たちの棲む地球のように固体、液体、気体という電離されていない状態は非常に少ないのです。私たちの母星「地球」の表面から大空に向かってどんどん昇っていけば、100キロメートルの高度くらいからもうプラズマの世界が始まります。100キロメートルと言えば、京都から名古屋までくらいの近場です。近場の宇宙の利用を考える上でもプラズマ宇宙の理解が必要なことが分かるでしょう。したがって人類の宇宙進出には、このプラズマ世界の理解を得るために宇宙科学の進歩が必要となっているのです。

まず、地球周辺のプラズマ環境を概括してみましよう。地球は太陽表面からおよそ1億5千万キロメートル離れた所に位置する太陽系の第3惑星で、大気と水を持つユニークな星です。大気や水は地球の表面に固有の環境を規定して

いますね。しかし、そんな地表、海、大気層は、紙の上に鉛筆で直径5センチメートル位の地球の円を描くと、0.4ミリメートルの幅に入ってしまいます。私たちはその鉛筆の線の太さくらいの大気層の、そのまた下で暮らしているわけです。この0.4ミリの幅は実際の地球大気では100キロメートルくらいの高さに相当します。

高度100キロメートルくらいから1,000キロメートルくらいまでは「電離圏」と呼ばれる領域です。そこでは地球の大気の成分が太陽の紫外線によって電離され、プラズマになっています。そこでのプラズマの粒子密度は最初、高度とともに高くなってゆき、300キロメートルから400キロメートル位の高度で最大に達し、1cc 当たり百万個のイオンと電子のペアが存在します。（ちなみに、地上の空気中にはおよそ1cc 当たり3,000京個の分子が存在していません。）この領域は電離圏F層と呼ばれ、短波帯の電波を反射し、遠距離短波通信に役立っています。F層からさらに上に行くと、プラズマ密度は徐々に減ってゆき、1,000キロメートルで1cc に一万個くらいになります。この空間は、秋山さんの乗った旧ソ連のミール宇宙船や毛利さんや向井さんがスペースシャトルで乗って翔んだ空間です。最近流行しだした車のナビゲーションシステムに使われているGPS衛星群が飛び交っているのもこの宇宙空間です。ここはまた電子ビーム放出実験やテザー実験などいろいろな宇宙実験が行われている空間でもあります。

さらに高度を上げてゆくと、電離圏の外側には「磁気圏」と呼ばれる空間が広がっています（図5参照）。その名前の由来は、その領域のプラズマの電氣的挙動が地球磁場の磁気で支配されているからです。ここではプラズマ粒子どうしの衝突効果はほとんどありません。磁気圏には地球大気が紫外線で電離されてできた電離圏起源のプラズマと先に述べた太陽風起源のプラズマとが混在しています。電離圏起源のプラズ

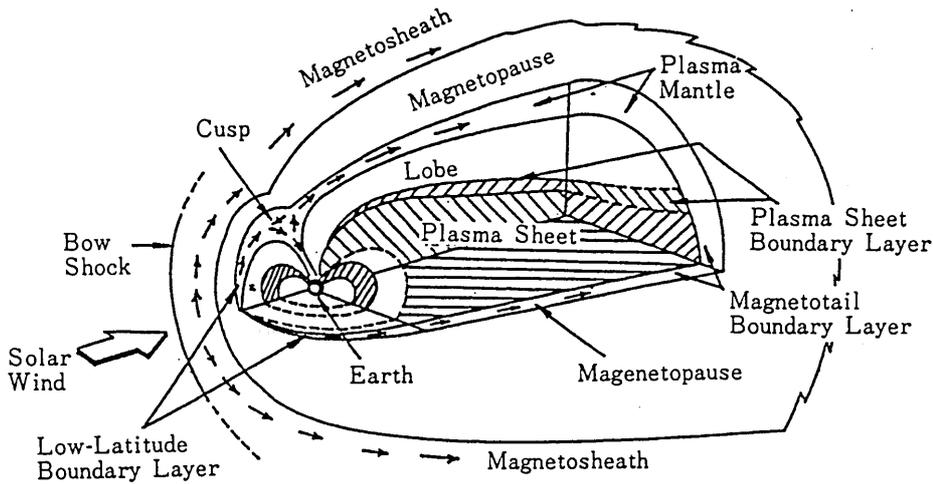


図5 地球周辺の電離圏・磁気圏の模式図

マは、電離圏から拡散によって磁気圏へと上に向かって広がったものです。これに対し、太陽風起源のプラズマは「カusp」と呼ばれる極地方の太陽側にある一種の穴から直接に入るものを除けば、大部分は図中の「磁気圏尾部」から太陽風とは逆向きに夜側から地球に向けて逆流してきています。その一部は地球に近づくとつれて加速され、エネルギーを得て「バン・アレン帯（放射線帯）」として貯められています。

「磁気圏」の大きさは太陽風の強さによって変動しますが、平均的には昼間側で地球半径のおよそ10倍です。磁気圏の中の地球磁場はだいたい双極子（ダイポール）磁場の形をしています。一方、夜側の磁気圏は図に示したように、地球磁場はずっと引き延ばされ、双極子（ダイポール）磁場の形からはおおきくずれています。およそ地球の半径の10倍くらいから遠方ではちょうど「吹き流し」のような恰好をしています。この尻尾の赤道面には「プラズマシート」と呼ばれる熱いプラズマが存在して、その中の電流がプラズマシートの南北の磁場の向きを変えています。この地球の尻尾がどこまで伸びているのかはよくわかっていません。この尻尾も太陽風の状態で大きく変動しています。現在、日本の科学衛星「GEOTAIL」はおよそ150万キロメートルの彼方まで旅をしてこの尻尾の領域を探索しています（当センターパンフレット18～19ページ参照）。この衛星は日本の文部

省宇宙科学研究所が作り、米国のロケットで打ち上げました。私たちの研究室もこの衛星と深くかかわっていて、プラズマ波動の観測機をGEOTAILに搭載し、私は主任研究員として研究室の若手研究者、大学院生、関係大学の共同研究者、米国の共同研究者と一緒に、得られたデータの解析を進めています。次々と新しい発見があり、関係者は毎日興奮しています。

7. 宇宙実験とコンピュータ実験

宇宙空間の知識は、人工衛星や人工惑星に搭載された科学観測機器のもたらす情報で大きく進歩しました。これらの衛星は、耳をすまし、目を見開いて宇宙空間の出来事をつぶさに報告してくれます。プラズマや大気が発するわずかな光を捕らえる高感度カメラ、プラズマ世界の電波を捕まえるアンテナ、高エネルギー粒子をカウントするセンサー、絶えず変動する磁場をモニターする磁力計などが目であり、耳なのです。これらの観測は一種の宇宙実験には違いありません。しかし、衛星は広大な空間のほんの一部の領域しか観測できない上、自然現象は気まぐれで、いつ、どこで、なにが起こるかわかりません。したがって、観測された衛星データを解析するだけではなかなか宇宙空間で起きている物理現象の全貌は掴みきれません。さらに衛星で観測されたデータをテレメータで地球まで送れる情報量にも限りがあります。そこ

で、観測以外に、次に述べる二つの試みが行われてきたのです。

一つは、自然現象が起こるのをじっと待つ「まちぼうけ」方式の観測実験から一歩踏みだし、積極的に宇宙プラズマに人工的に刺激を与え、その反応を見ようとする「ちょっかい方式」の宇宙実験です。自然現象を辛抱強く待つ方法は「受動的実験」と呼ばれ、積極的に働きかける実験は「能動実験」と呼ばれます。

「能動実験」には電子ビームやイオンビームを発射したり、強い電波を発射したりして、プラズマを刺激します。こうすることによって、プラズマがどんなふうに反応するかを見れば、原因と結果がはっきりしていますから宇宙プラズマのなかで起こる物理現象をつぶさに研究できると言うわけです。図6（左図）は日本人として初めてシャトル実験を行われた、故大林教授のSEPACと呼ばれた電子ビーム放出実験の模式図です。私たちも、宇宙科学研究所の観測用ロケットを使って、いろいろな能動実験をしたことがあります。そのうちのいくつかは講演で紹介します。アメリカではビームや電波以外に、テザー（はしけ紐）と呼ばれる非常に長いワイヤーをスペース・シャトルから伸ばして、その先っぽに人工衛星を結びつけた「テザー衛星」実験（図6の右参照）を行っています。地球磁場を長いテザー電線が横切って動くと、ちょうど発電機の磁石のなかをローターという

電線が横切って回ると、その電線に電気が流れるのと同じで、テザーが発電作用を持つことを利用した能動実験です。私たちの研究室でもアメリカの依頼を受けて、テザー衛星の周辺で一体何事が起こるのかを研究しました。

もう一つの宇宙実験は、宇宙に実際実験装置を打ち上げる代わりに、宇宙で起こっている現象を計算機の中に再現させ、計算機のメモリー上で、各種の模擬実験を行うものです。そのために、科学が確立した基礎方程式だけを組み合わせ、理論モデルを作り、数10万から数100万の連立方程式をスーパーコンピュータに解かせるもので「コンピュータ実験」とか「コンピュータ・シミュレーション」と呼ばれています。筆者は「コンピュータ実験」という呼ばれ方が好きです。「シミュレーション」という言葉は自然現象を模倣さえすれば良いという響きがあってあまり好きになれません。「コンピュータ実験」がちょうど「理論」と「宇宙実験」との間を埋める数値実験としての役割が大きいという観点からもこう呼ぶ方が適切と思っています。事実、最近では、コンピュータ実験の手法を使って、宇宙観測では得られない詳しい情報を拾い出し、人間の頭脳だけではどうしようもないむづかしい問題を解き、学問の体系化をは図ろうとする努力がなされています。図7はコンピュータ実験の進め方を図にしたものです。

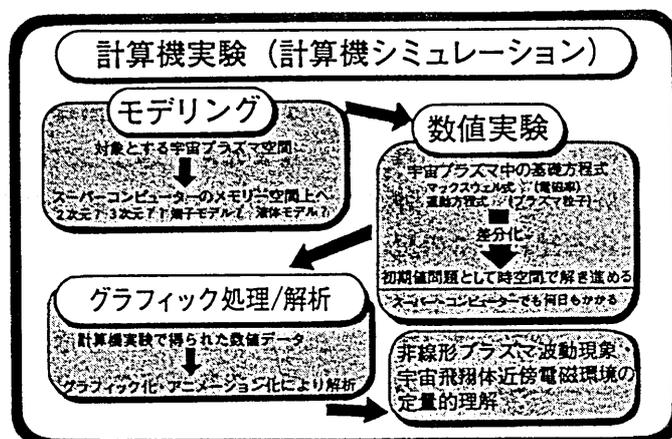


図7 コンピュータ実験の進め方

宇宙科学の分野では特にこの手法は重宝です。巨額の研究費と長年の準備期間を必要とする衛星観測のデータを生かすためにも、コンピュータ実験による理論解析は大変有効で、今後ますます必要とされるでしょう。私たちの研究センターはこの分野でも世界をリードしてきました。講演ではコンピュータ実験が生み出したおもしろいプラズマの世界の力学をアニメーションなどを混じえてお話しします。

物理現象を理解する方法には「理論的手法」と「実験的手法」があります。ちょっとくどくどしますが、理論研究の多くは、未解決の（もしくは新発見した）問題を既に知られている普遍的な基礎方程式系（またはその変形）の組み合わせで記述する努力をして、その解を求め、物理的解釈を与えようという仕事です。

スペース・プラズマ物理学においては、理論的研究の多くはこの傾向が強く見られます。実験事実の説明に行き詰り、既存の物理法則にない新法則が発見・提案される事は稀です。スペース・プラズマ現象は多くの場合、同時に進行したり、競合しながら進行する物理プロセスが多いため、選ばれる仮説または抽象化プロセスに自由度が多すぎて、複数の理論的解釈ができてしまいます。そのため、自然界の物理像は混沌としていることが多いのです。一方、宇宙プラズマに関しては、実験的研究も一部の能動実験の場合を除き、初期値や境界値などをコントロールした状態で行なえる実験は少なく、ほとんどの場合、自然まかせの受動的な観測研究が主流です。宇宙空間という自然界への人間の挑戦レベルはまだまだ低いと言わざるを得ません。したがって、これまで物理学的研究の一般的指針とされてきた「枝葉をばっさり落とし、幹とか根とかいう本質（基本法則）のみを抽出する」という研究手法は大変困難となっています。そこで、プラズマ物理学においては「より細かく分解することを止め、より現実に近い多くの相互作用を含んだ系をあるがまま追求する」という発想が考えられます。コンピュータ

実験（コンピュータ・シミュレーション）はこの発想に基づいており、その役割が近年次第に重要視されてきています。宇宙プラズマ研究においてはその重要性はますます高くなってきています。理論や実験（観測）に不確定性が多く、推論の余地が大きすぎるため、コンピュータ実験による定量的研究が多くの場合、理論や実験（観測）の不足分を補ってくれるからです。事実、「理論」と「実験」と「コンピュータ実験」とは三位一体の関係をなしていて、この三つが有機的に助け合って初めてうまく物事が理解出来るという考えが定着しつつあります。

8. 宇宙プラズマ現象のコンピュータ実験の例

当センターでは、もう20年以上も前から、コンピュータ実験の重要性に気づき、まだ計算機的能力がよちよち歩きの時代からコンピュータ実験用のソフトウェア開発に取り組んで参りました。なかでも、KEMPO (Kyoto university Electro Magnetic Particle Ode) と名付けたソフトウェア（コード）は、かなり汎用性があり、一部はすでに世界中の研究者に公開して使っていただいています。このコードは、電磁界を記述するマクスウェル方程式とプラズマ粒子の運動を記述する運動方程式を連立させて、プラズマと電磁界との相互作用を時間的に追跡できるようにしたものです。

プラズマの粒子は電磁界から力を受けて、動こうとします。しかし、電気を帯びたプラズマの粒子が動くと、電流を流すことになります。電流が流れると電磁界が変わります。つまり、どの粒子が動いても、電磁界が変化し、電磁界が変化するとどの粒子の動き方もそれにつれて変わるわけです。「風が吹くと桶屋が儲かる」という人間社会にも似て、誰かがなにかをすると誰かに（たぶん厳密にはすべての人に）影響がでるように、お互いに電磁界という糸で結ばれたプラズマの粒子群の複雑な動きとその結果

として現われる電磁界（電磁波）を解く必要があるのです。この複雑に絡み合ったシステムの中の粒子1個々々の運動をすべて解くわけですから、結局、数百万連立方程式を解くことになります。このような単純ですが、人の頭脳では解けない問題でも、コンピュータはこなしてくれます。

紙面の都合上、本テキストでは詳細は書けませんが、以下のいくつかのコンピュータ実験のトピックスを講演ではお話しします。（パンフレット22～23ページ参照）

(1) 電子ビームが作り出すプラズマのパルス

電子ビームは地球の極域磁気圏に降り込み、波動を励起させたりオーロラを光らせたり、磁気圏の尾部を走り、奇妙なパルスを作り出しています。ビームが走ると図8に示されるように、ちょうどコーヒーの中にクリームを落とした時のように速度空間で渦巻きを示します。図8はそのような渦巻きの一例を示します。その結果できる静電ポテンシャルはパルス状になり、GEOTAIL衛星で観測されたパルスの秘密を解き明かしました。

(2) 慧星から噴流する水系イオンの振る舞い

ハレー慧星から吹き出る水プラズマの作り出す電磁波の研究

(3) 地球の尻尾のプラズモイド

地球の尻尾で発生する巨大なプラズマの雲の研究

(4) テザー衛星による宇宙プラズマの乱れ

テザー衛星の周辺で起こる電磁環境の研究

(5) 地球大気への再突入する宇宙飛翔体の電磁環境

アポロやシャトルが地球に帰還するときのブラックアウトの研究

(6) 太陽へ突入する人工惑星のシミュレーション

高速プラズマの流れの中の衛星が作り出すプラズマの乱れの研究

(7) マイクロ波電力ビームと宇宙プラズマの非線形相互作用

MINIX ロケット実験で発見された非線形プラズマ波動励起の研究

(8) プラズマ・ダイオードのカオス

プラズマ世界の「バタフライ現象」の研究

9. 終わりに

宇宙空間とくに太陽系空間は、単に知的好奇心の対象にとどまらず、我々の子孫が21世紀には活躍する領域です。うまくゆけば、コスモ・ホモサピエンス（新宇宙人）と呼ばれる私たちの子孫の生活空間でもあります。こう考えた場合、プラズマ環境中の種々の相互作用を十分に研究し、理解しておくことが現在の宇宙科学の重要な任務の一つであることに気付くでしょう。本講演では、電波の研究を通して、私たちが宇宙に興味をもちながら、宇宙を科学し、宇宙開拓の夢をめざして日夜研究に取り組んでいる一端をご紹介いたしました。ご紹介しました研究は、私の周辺の研究室教官、院生、学生、秘書、そしてセンターのスタッフの力を合わせた成果であり、国の内外の研究者との共同研究の成果も含んでいます。紙面を借りてその方々にお礼を申し上げたいと思います。

最後に、本講演が皆様のご理解とご支援を一層深いものにしていただくのに、そして私たちの研究分野に興味をお持ちいただくのに役立つことを密かに願っています。

参考文献

一般的な参考文献としては

大林辰蔵：宇宙空間物理学，常華書房，1971.

前田憲一，木村磐根：現代電磁波動論，オーム社，1984.

松本 紘：変わる宇宙感覚，朝日新聞夕刊科学欄連載，Sep. 1-Oct. 27, 1992.

Matsumoto, H., ed.: Modern Radio Science, Oxford University Press, 1993.

宇宙太陽発電所やマイクロ波送電関係の参考文献としては

松本 紘：宇宙太陽発電用ビームと電離層プラズマとの非線形相互作用の理論的検討，東京大学

宇宙航空研究所報告, 15, 407-430, 1979.

Matsumoto, H. and T. Kimura: Nonlinear excitation of electron cyclotron waves by a monochromatic strong microwave, *Space Power*, 6, 187-191, 1986.

Matsumoto, H.: Numerical estimation of SPS microwave impact on ionospheric environment, *Acta Astronautica*, 8, 493-497, 1982.

Kaya, N., H. Matsumoto, S. Miyatake, I. Kimura, M. Nagatomo and T. Obayashi: Nonlinear Interaction of strong microwave beam with the ionosphere—MINIX rocket experiment, *Space Power*, 6, 181-186, 1986.

Matsumoto, H., Microwave power transmission from space and related nonlinear plasma effects, *Space and Radio Science Symposium*, Edited by P. Van Daele & P. Delogne, 155-190, 1995.

松本 紘: 宇宙太陽発電システムにおけるマイクロ波エネルギー伝送, *エネルギー・資源*, Vol. 9, No. 3, 270-274, 1988.

松本 紘: 電磁波形態によるエネルギーの長距離輸送, *エネルギー・資源*, Vol. 13, No. 6, 530-537, 1992.

コンピュータ実験や宇宙実験関係の参考文献としては

Matsumoto, H. and Y. Omura: Particle simulation of electro-magnetic waves and its application to space plasmas, *COMPUTER SIMULATION OF SPACE PLASMAS!* edited by H. Matsumoto and T. Sato, Terra Sci. Pub. Co., 43-102, 1984.

小嶋浩嗣: Linear and nonlinear wave instabilities driven by cometary ions in the solar wind, 京都大学大学院工学研究科, 電子工学専攻, 修士論文, 1989.

村田健史: Study of collisionless tearing instabilities in the magnetotail plasma via computer

experiments, 京都大学大学院工学研究科, 電子工学専攻, 修士論文, 1992.

岡田雅樹, 大村善治, 松本 紘: 希薄高速プラズマ中を航行する衛星による電磁氣的擾乱に関する計算機実験, *電子情報通信学会論文誌*, B-II, Vol. J75-B-II, 179-187, 1992.

Usui, H. and H. Matsumoto: Electron beam injection and associated LHR wave excitation: computer experiments of electrodynamic tether system, *Geophys. Res. Lett.*, vol. 18, 821-824, 1991.

松本 紘: 波動と粒子の非線形相互作用, *核融合研究*, 66巻2号, 119-132, 1991.

Matsumoto, H. and Y. Omura, ed.: *Computer Space Plasma Physics: Simulation Techniques and Software*, Terra Scientific Publishing Co., 1993.

講演者紹介

松本 紘 (まつもと ひろし) 氏

昭和17年生まれ。昭和40年に京都大学工学部電子工学科卒業。同大学院を終了後、京都大学工学部助手、助教授を経て現職。この間、NASA 客員研究員、スタンフォード大学及びUCLA などの客員研究員を務める。文部省宇宙科学研究所及び核融合科学研究所の客員教授兼任。宇宙開発委員会長期ビジョン懇談会委員、科学技術庁会議エネルギー部会委員など国の科学技術庁政策にも関与。国際電波科学連合H委員会委員長や米国地球物理学学会学術誌編集委員等を務める。日本地球電磁気学会田中館賞など受賞。

専門分野は、宇宙プラズマ物理学、宇宙電波工学、宇宙エネルギー伝送など。

約160編の欧文、邦文の研究論文や「近代電波科学」「宇宙プラズマ計算機実験」などの編著がある。

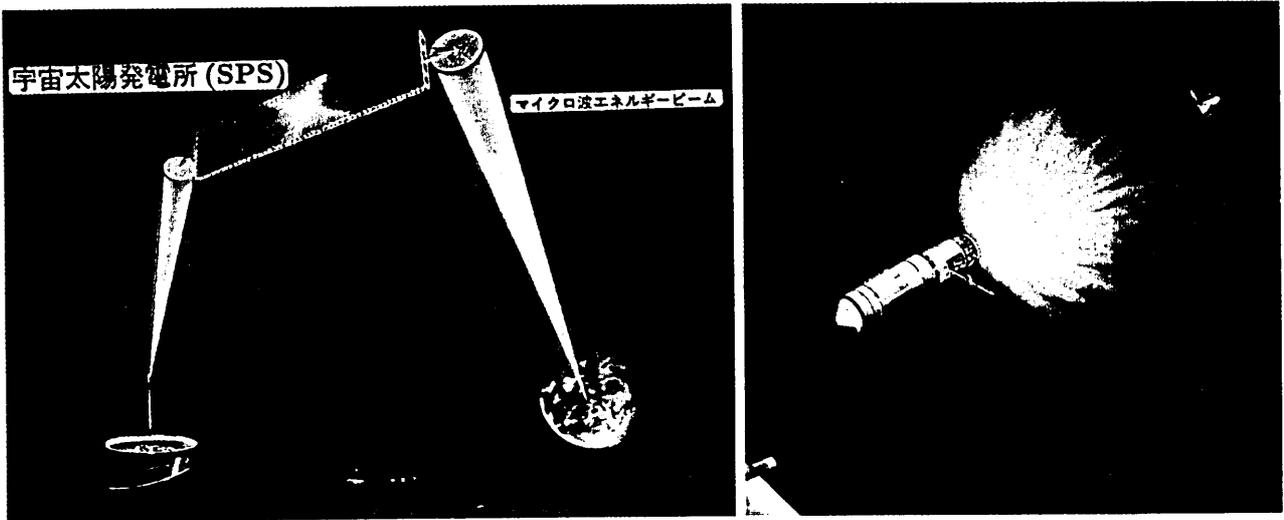


図3 SPSの概念図(左図)とMINIXロケット実験(右図)

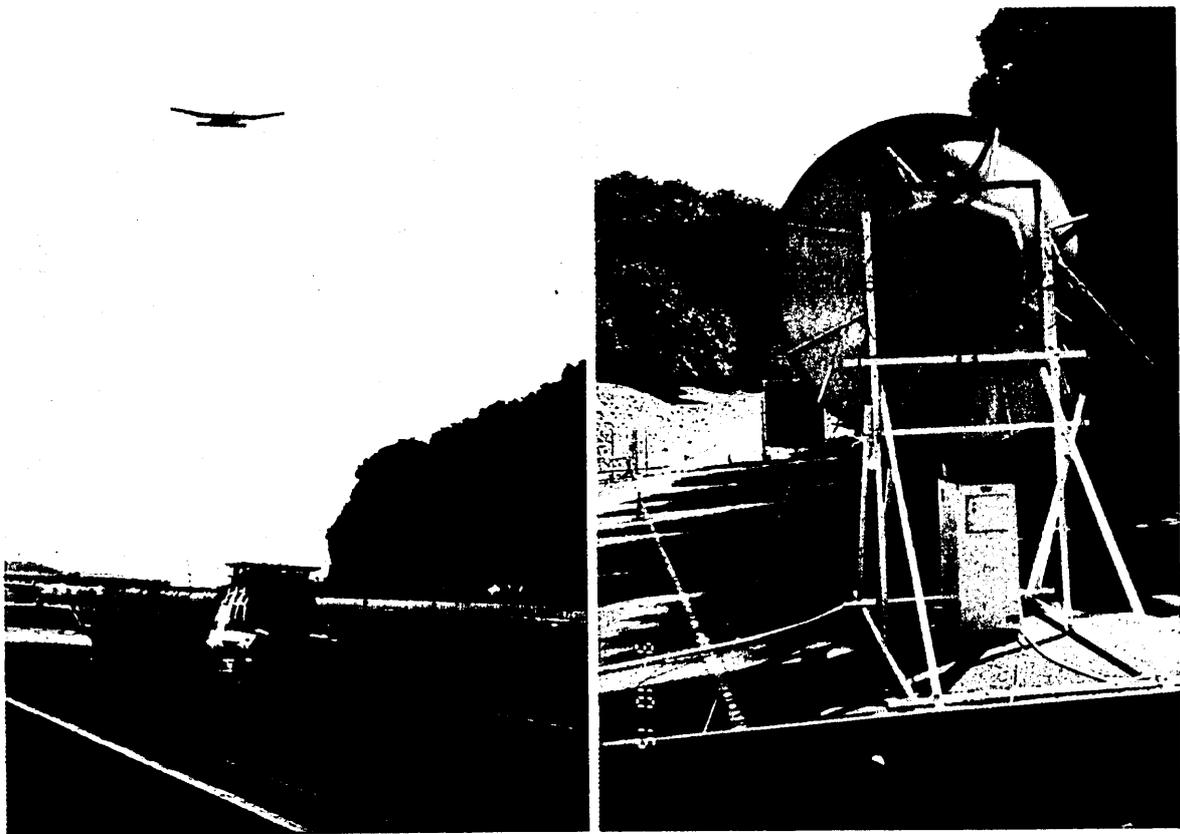


図4 MILAX実験(左図)と地上マイクロ波送電実験(右図)

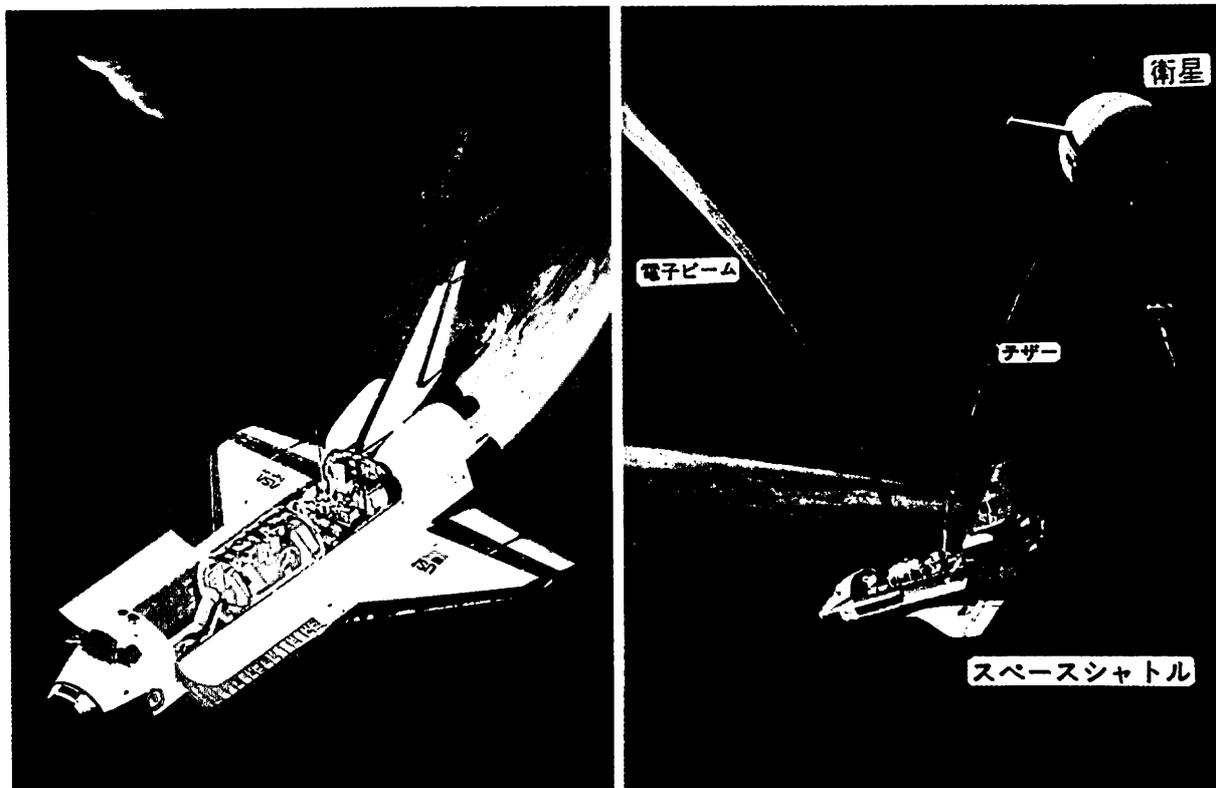


図6 スペース・シャトルによる電子ビーム実験（左図）とレーザー衛星実験の概念図（右図）

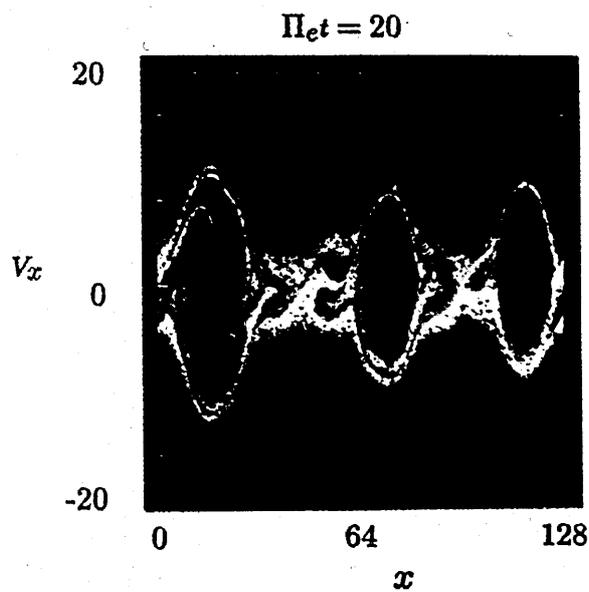


図8 電子ビームの非線形挙動のコンピュータ実験