輻射科学研究会資料
RS97-1

Changing Multimode Dispersive Fibers into Single-Mode Fibers by Heat Treatments

多モード分散性光ファイバの熱処理による単一モード光ファイバ化

Junji Nishimura and Katsumi Morishita
西村順二　　森下克己

Osaka Electro-Communication University
大阪電気通信大学

1997年5月30日（金）
於　大阪電気通信大学

Changing Multimode Dispersive Fibers into Single-Mode Fibers by Heat Treatments

多モード分散性光ファイバの熱処理による単一モード光ファイバ化

Junji Nishimura and Katsumi Morishita
西村順二　　森下克己

Osaka Electro-Communication University
大阪電気通信大学

18-8 Hatsu-cho, Neyagawa-shi, Osaka 572 JAPAN

Abstract - Dispersive fibers whose refractive-index differences change greatly with wavelength are fabricated from optical glasses with different index dispersions. The fibers have several guided modes, and are changed into single-mode fibers by annealing under suitable conditions. The number of guided modes is investigated by measuring the bending loss and the mode lines of annealed dispersive fibers. The annealed single-mode fibers support only the fundamental mode over broad spectral ranges and no second guided mode at any wavelength.

I. Introduction

Optical fiber devices will be important in-line components for optical fiber communications and optical measurements. In conventional optical fibers comprising optical devices, the refractive-index difference between the core and cladding glasses is almost constant against wavelength. The spot size and the bending loss of guided modes increase with wavelength, and the number of guided modes decreases. Therefore realizable functions of optical fiber devices using typical fibers are limited owing to their resembling spectral characteristics.

Optical fibers whose index differences change greatly with wavelength are proposed theoretically to make several kinds of fiber devices, including optical fiber filters [1][2], wavelength-insensitive fiber couplers [3], and wavelength-selective fiber couplers [4]. The fibers are called ***dispersive fibers*** because of their large wavelength dependence of the index difference [5].

Dispersive fibers whose refractive-index spectra cross each other have been fabricated, and present long-wavelength-pass and short-wavelength-rejection characteristics [6][7]. Even the fundamental mode cannot be supported along the fabricated dispersive fibers in the shorter wavelength region than the crossing wavelength. It is shown that spectral characteristics of the dispersive fibers, i.e. stopband, passband, number of guided modes, refractive-index difference and so on, can be changed greatly by annealing [8][9].

In this paper, dispersive fibers are fabricated from optical glasses with different index spectra. The dispersive fibers have several guided modes owing to different index reductions caused by the fiber drawing. The multimode dispersive fibers are annealed under various conditions, and are changed into single-mode fibers. The bending loss of annealed dispersive fibers is measured, and the normalized frequency and cutoff wavelengths of guided modes are estimated. Mode lines of dispersive fibers are also observed to evaluate the number of guided modes.

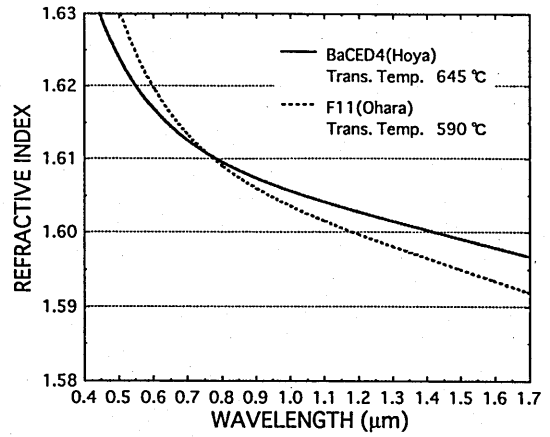


Fig. 1 Chromatic refractive indices of bulk optical glasses of BaCED4 and F11.

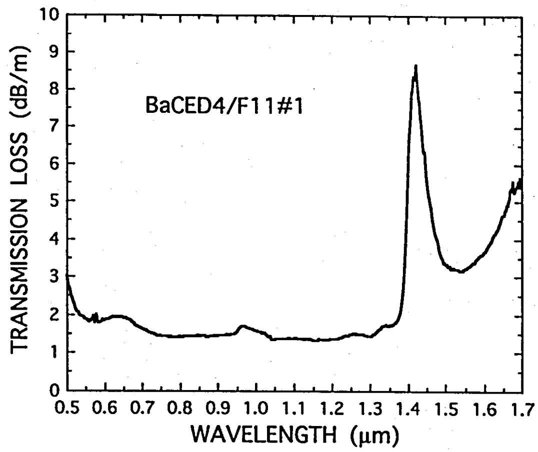


Fig. 2 Spectral transmission loss of the fabricated dispersive fiber BaCED4/F11#1.

II. Fabrication of the BaCED4/F11#1 Fiber

We use the same core and cladding materials of BaCED4 (Hoya) and F11 (Ohara) glasses as the dispersive fiber produced previously [6][7]. A dispersive fiber, which is named BaCED4/F11#1, is fabricated from the glasses by the rod-in-tube technique. The surfaces of the core rod and the cladding tube are polished to reduce the transmission loss.

Fig. 1 shows the refractive-index spectra of bulk optical glasses of BaCED4 and F11. The transformation temperatures of BaCED4 and F11 glasses are 645 °C and 590 °C, respectively. The chromatic refractive-indices of bulk glasses are computed from dispersive formula given in Hoya and Ohara optical glass catalogs [10][11]. For a wavelength larger than 1.014 μm, extrapolated values are used. The index curves cross each other at 0.75 μm. If the refractive-indices remain unchanged for fiber fabrication, no guided mode could propagate below 0.75 μm because of the smaller refractive-index of the core. The index difference would increase with wavelength, and the expansion of the spot size would be suppressed against wavelength.

Fig. 2 shows the spectral transmission loss of the fabricated dispersive fiber BaCED4/F11#1. The measurement is carried out by the cut-back method using a white light source and a spectrum analyzer. The transmission loss is about 1.5 dB/m from 0.7 to 1.3 μm and about 3 dB/m around 1.55 μm. Optical power suffers much loss below 0.5 μm due to the small index difference. The loss is improved and reduced to about one-tenth in comparison with the previous dispersive fiber [6][7] owing to polishing the surfaces of the preform rod and tube, particularly the inner surface of the tube.

III. Annealed BaCED4/F11#1 Fibers and Their Guided Modes

The fabricated dispersive fiber BaCED4/F11#1 supports several guided modes. The fiber is annealed under different conditions, and is changed into a single-mode fiber under a suitable situation. Fig. 3 shows the spectral insertion losses of the dispersive fiber unannealed and annealed for different soaking temperatures and times. The insertion losses are measured by inserting the dispersive fibers between conventional fibers with mode field diameter of 9.3 μm at 1.55 μm wavelength and second mode cutoff wavelength of 1.23 μm. The dispersive fiber is soaked at 440 °C during 1 hour and at 530 °C during 1, 16, and 20 hours. Subsequently to soaking, the fibers are cooled with the constant cooling rate of 50 °C/hr until 150 °C below the soaking temperatures, and are cooled

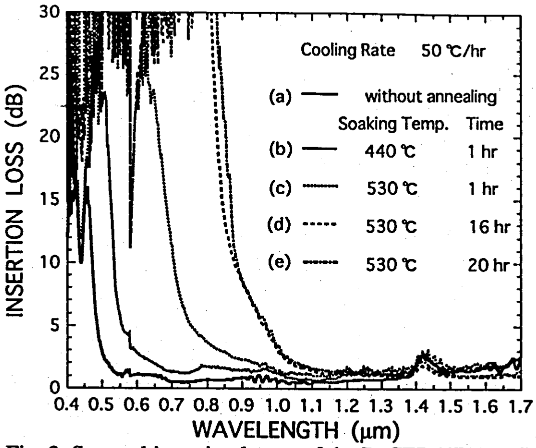


Fig. 3 Spectral insertion losses of the BaCED4/F11#1 fibers (a) unannealed and annealed (b) at 440 °C during 1 hour and at 530 °C during (c) 1 hour, (d) 16 hours, and (e) 20 hours.

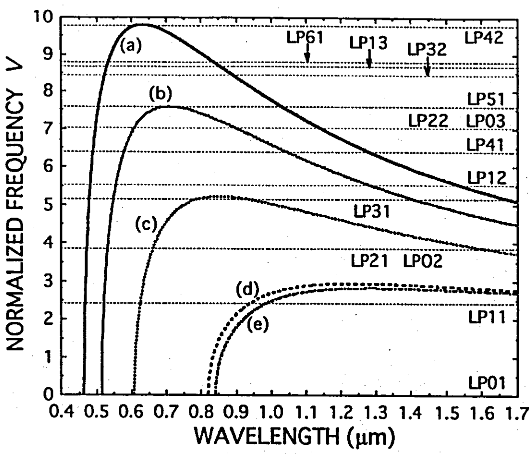


Fig. 4 Normalized frequency V of the BaCED4/F11#1 fibers unannealed and annealed.

fast for shortening the cool-off time to room temperature.

The insertion loss of the fabricated fiber without annealing is indicated by the solid line (a) in Fig. 3. Since the unannealed dispersive fiber can transmit optical power at 0.75 μm, we consider that the refractive-index curves of the fiber glasses are shifted down from those of the bulk glasses by rapid cooling in the process of fiber drawing [6][7]. The index reduction of the cladding glass F11 is more than that of the core glass BaCED4, and the intersection wavelength between the index curves is moved from 0.75 μm to about 0.46 μm. The intersection wavelength can be roughly known on the basis of the measured chromatic insertion loss, because the stopband is the shorter wavelength region than it. The crossing wavelength, 0.46 μm, differs from that of the former dispersive fiber, 0.52 μm. This may be caused by the faster cooling rate in the fiber drawing process.

The insertion loss of the fiber soaked at 440 °C during 1 hour, which is shown by the line (b), is a little different from that of the unannealed fiber, and the stopband is shifted slightly. The stopband of the fibers annealed for soaking temperature of 530 °C is moved to longer wavelength region with increasing soaking time. The shift of the stopband to longer wavelength region is caused by the larger index rise of the cladding than that of the core.

The refractive-index of F11 increases considerably during soaking until F11 glass reaches equilibrium. On the other hand, the index rise of BaCED4 is small, because the soaking temperature 530 °C is much lower than its transformation temperature 645 °C. Therefore the intersection wavelength is transferred greatly to longer wavelength area for longer soaking time [8][9]. We can get single-mode dispersive fibers by adjusting soaking time.

Fig. 4 shows the normalized frequency V against wavelength for the unannealed and annealed dispersive fibers under different conditions. The V value is given by

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda}\sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2} \qquad (1)$$

where a is the core radius, λ is the operating wavelength, n_{co} and n_{cl} are the refractive-indices of the core and cladding glasses. The core radius of the fabricated fiber is 6.5 μm. The cutoff V values of guided modes are shown by thin dotted lines.

The index curve of F11 is shifted from that of the fiber glass shown in references [6]-[9] so that the intersection wavelength corresponds to the edge of the measured passband. We can approxi-

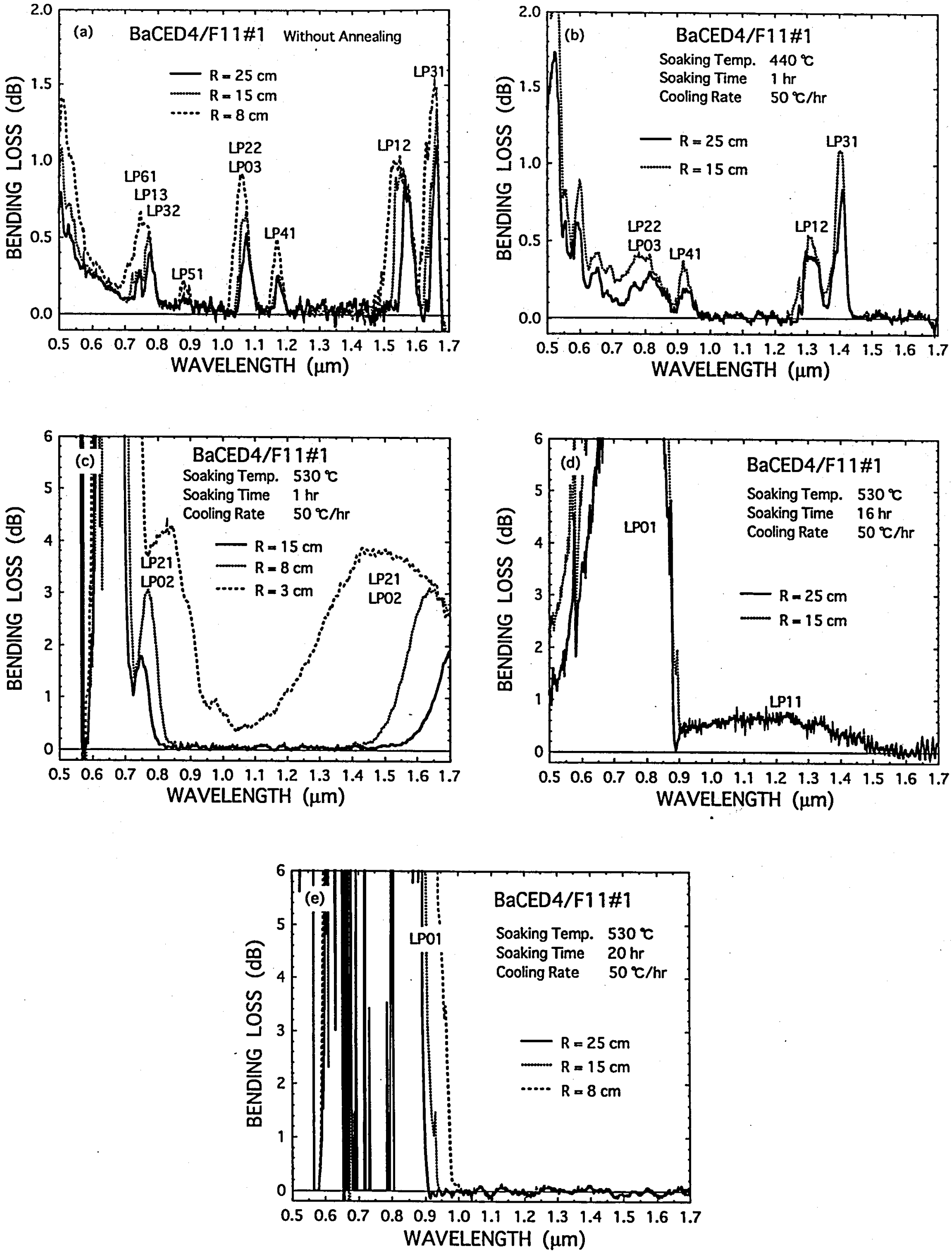


Fig. 5 Spectral bending losses of the BaCED4/F11 fibers (a) unannealed and annealed (b) at 440 °C during 1 hour and at 530 °C during (c) 1 hour, (d) 16 hours, and (e) 20 hours.

mately calculate the V value using (1) and the index difference determined from the intersection wavelength, though the refractive-indices of the dispersive fibers are not known accurately.

Fig. 5 (a) - (e) show the spectral bending losses of the BaCED4/F11#1 fibers unannealed and annealed indicated by the lines (a) - (e) in Fig. 4, respectively. Since guided modes near cutoff suffer much bending loss, we can know their cutoff wavelengths and the number of guided modes at any wavelength on the basis of the chromatic bending loss with reference to Fig. 4.

The solid, dotted and broken lines in Fig. 5 (a) show the bending loss of the unannealed dispersive fiber which is bent with radii of 25, 15 and 8 cm, respectively. The guided modes near cutoff bring about the bending loss peaks, and their mode numbers are written by the peaks. The peaks above 0.65 μm wavelength become broader to the shorter wavelength side according as the bend radius decreases, but the bending loss below 0.65 μm is increased to the longer wavelength region. Therefore we can know that the V value becomes maximum around 0.65 μm and decreases with wavelength above about 0.65 μm as shown by the line (a) in Fig. 4.

Fig. 5 (b) shows the bending loss of the dispersive fiber soaked annealed for soaking temperature of 440 °C and soaking time of 1 hour. The loss peaks of LP31, LP12, LP41, LP22, and LP03 modes are shifted to shorter wavelength region, and are broadened to the shorter wavelength side in proportion to the smaller bend radius. The loss peaks of LP61, LP13, LP31, and LP51 modes vanish, and the modes cannot propagate along the annealed fiber at any wavelength because of the decreased index difference.

Fig. 5 (c) shows the bending loss of the dispersive fiber soaked at 530 °C during 1 hour. The bending loss has the two peaks. The peaks are broadened in the opposite directions by the smaller curvatures. We consider that the V value of the annealed fiber crosses the cutoff V value of LP21 and LP02 modes twice and becomes maximum between the crossings. Since the edge of the loss peak on the right side is in the longer wavelength region than 1.7 μm, the crossing at 1.6 μm of the line (c) in Fig. 4 is believed to be longer than 1.7 μm. The V value around 0.85 μm seems to be less than the cutoff V value of LP31 mode, because there is no loss peak between the two peaks. The annealed fiber for soaking temperature of 530 °C and soaking time of 1 hour can support four guided modes, LP01, LP11, LP21, and LP02, and more soaking time is necessary to reduce the number of guided modes.

Fig. 5 (d) shows the bending loss of the fiber soaked at 530 °C during 16 hours. The loss peak of LP11 mode is broad, and the loss does not increase around 1.7 μm. The V value is thought to be a little greater than the cutoff V value of LP11 mode over a wide wavelength range, but less than the cutoff V value at 1.7 μm. Since the annealed fiber has two guided modes, LP01 and LP11, and the LP11 mode is near cutoff, we can get a single-mode fiber for a little longer soaking temperature.

Fig. 5 (e) shows the bending loss of the annealed dispersive fiber for soaking temperature of 530 °C and soaking time of 20 hours. There is no loss peak for bend radii of 25, 15 and 8 cm. The annealed fiber has no second mode at any wavelength, and can support only the fundamental mode above around 0.83 μm wavelength. The V value shown by the line (e) in Fig. 4 is believed to be slightly smaller than the cutoff V value of LP11 mode. This discrepancy results from the refractive-indices extrapolated above 1.014 μm.

Mode lines of the dispersive fibers are observed to evaluate and confirm the number of guided modes. Fig. 6 shows the mode lines of the BaCED4/F11#1 fibers unannealed and annealed indicated by the lines (a), (b), and (e) in Fig. 3 and 4. Guided modes are radiated through a high index prism placed on the fibers whose sides are partly polished to obtain the desired proximity to the core. Laser diodes operating at 1.46 μm and

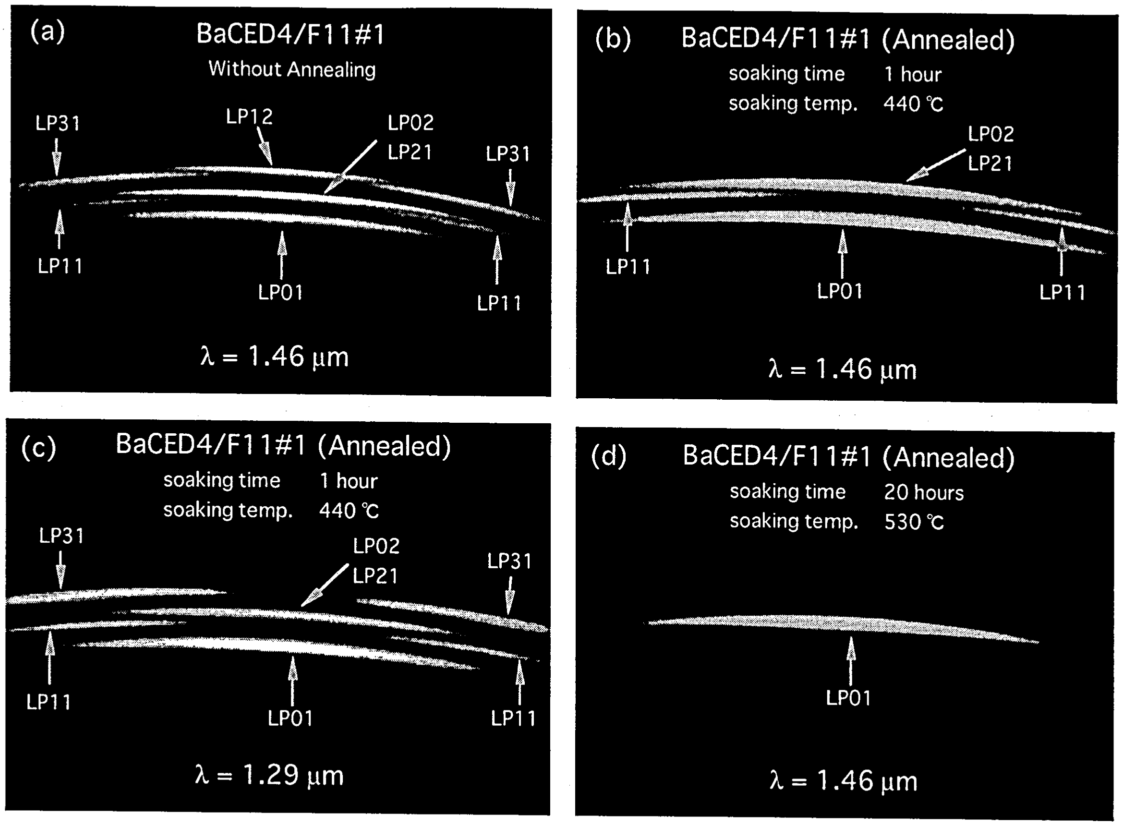


Fig. 6 Mode lines of the BaCED4/F11#1 fibers unannealed and annealed. (a) The unannealed fiber excited with a LD emitting at 1.46 μm. (b) The fiber soaked at 440 °C during 1 hour and excited with a LD emitting at 1.46 μm. (c) The fiber soaked at 440 °C during 1 hour and excited with a LD emitting at 1.29 μm. (d) The fiber soaked at 530 °C during 20 hours and excited with a LD emitting at 1.46 μm.

1.29 μm wavelengths are used to excite guided modes, and the laser beam is launched into one end of the side-polished fibers through a graded-index multimode fiber with core diameter of 50 μm.

Fig 6 (a) shows the mode lines of the BaCED4/F11#1 fiber without annealing at 1.46 μm wavelength. We can see five mode lines. Since the mode lines of LP02 and LP21 are not separated owing to similar propagation constants, it is believed that six guided modes, LP01, LP11, LP21, LP02, LP31, and LP12, can be supported at 1.46 μm as shown by the line (a) in Fig. 4.

Fig. 6 (b) and (c) show the mode lines of the dispersive fiber soaked at 440 °C during 1 hour at 1.46 μm and 1.29 μm, respectively. As compared with Fig. 6 (a), two mode lines of LP12 and LP31 disappear in Fig. 6 (b). Since the cutoff wavelengths of LP12 and LP31 are shorter than 1.46 μm as shown in Fig. 5 (b), the LP12 and LP31 modes cease to propagate at 1.46 μm. The LP31 mode can be supported at 1.29 μm, and its mode line can be observed in Fig. 6 (c). However, there is no mode line of LP12 at 1.29 μm. Since the LP12 mode at 1.29 μm is near cutoff as shown in Fig. 5 (b), its excited power may not be enough to observe the mode line.

Fig. 6 (d) shows the mode line of the annealed dispersive fiber for soaking temperature of 530 °C and soaking time of 20 hours. We can see only one mode line of LP01 at 1.46 μm. Almost same photographs are obtained at 1.29 μm and 1.55 μm.

It becomes evident that the multimode dispersive fiber BaCED4/F11#1 has been changed into a single-mode fiber by annealing under a suitable condition.

The index difference of the annealed single-mode dispersive fiber grows with wavelength, and the bending losses shown in Fig. 5 (e) are not increased in the long wavelength region, i.e. around 1.7 μm. We, therefore, consider that the expansion of the spot size is suppressed against wavelength and the *V* value is wavelength-insensitive above about 0.9 μm because of the index difference increasing with wavelength. The annealed single-mode dispersive fiber would be suitable for wavelength-insensitive devices, e.g. wavelength-insensitive fiber couplers.

It takes much time to change the BaCED4/F11#1 fiber into a single-mode fiber at 530 °C. At higher soaking temperature, the refractive-index increases faster until it reaches equilibrium, and the intersection wavelength between index curves also moves more quickly. The BaCED4/F11#1 fiber can be made into single-mode fibers with shorter annealing time at higher soaking temperature. However the intersection point between the core and cladding index curves cannot be shifted to longer wavelength region at higher temperature, because the both refractive-indices rises more rapidly and the cladding glass F11 reaches equilibrium in shorter time.

IV. Annealed BaCD9/F11 Fibers and Their Guided Modes

Another dispersive fiber is fabricated in order to decrease the number of guided modes. The core and cladding glasses are chosen in consideration of different index reductions caused by the fiber drawing process, and BaCD9 (Hoya) and F11 (Ohara) glasses are selected.

Fig. 7 shows the refractive-index spectra of bulk optical glasses of BaCD9 and F11. The transformation temperature of BaCD9 is 640 °C. The refractive-index of BaCD9 is smaller than that of BaCED4, and the index difference between the core and cladding glasses is reduced and becomes small. The intersection wavelength of the refractive-index curves is 1.31 μm, and is moved to the longer wavelength region.

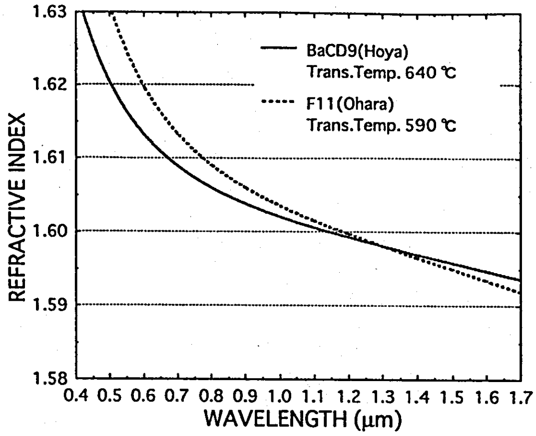


Fig. 7 Chromatic refractive indices of bulk optical glasses of BaCD9 and F11.

Fig. 8 shows the spectral transmission loss of the fabricated dispersive fiber which is named BaCD9/F11. The transmission loss is about 10 dB/m from 0.8 μm to 1.3 μm and about 11 dB/m around 1.55 μm. The loss is lager than that of the BaCED4/F11#1 fiber as shown in Fig. 2. It seems that the core rod and the cladding tube are not polished adequately.

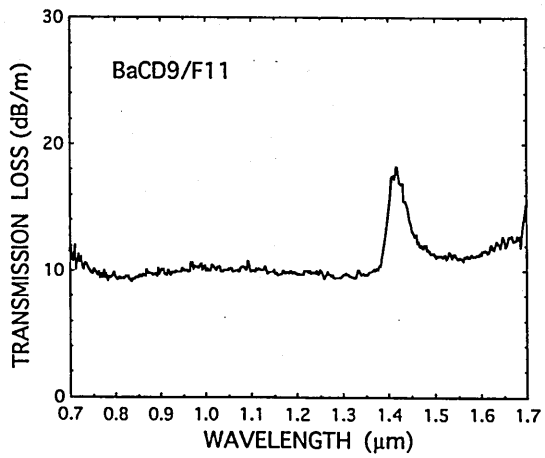


Fig. 8 Spectral transmission loss of the fabricated dispersive fiber BaCD9/F11.

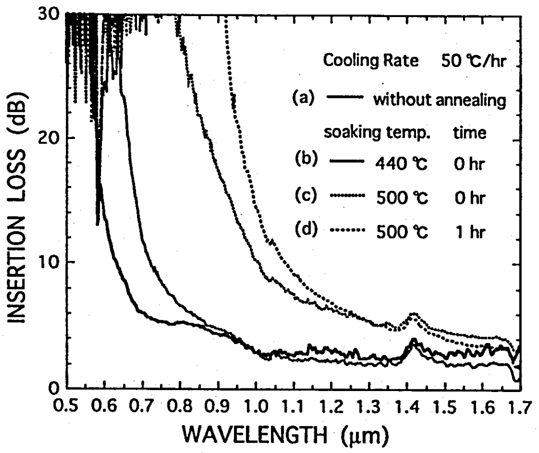


Fig. 9 Spectral insertion losses of the BaCD9/F11 fibers (a) unannealed and annealed (b) at 440 °C during 0 hour and at 500 °C during (c) 0 hour and (d) 1 hour.

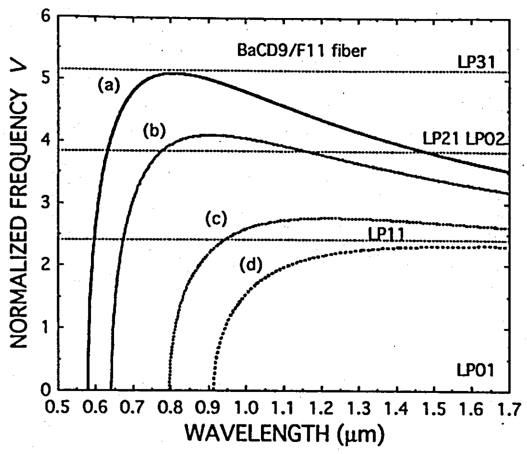


Fig. 10 Normalized frequency V of the BaCD9/F11 fibers unannealed and annealed.

Fig. 9 shows the spectral insertion losses of the BaCD9/F11 fibers unannealed and annealed for different soaking temperatures and times. The insertion loss of the fabricated fiber BaCD9/F11 without annealing is indicated by the solid line (a). The refractive-index curves of the fiber glasses are shifted down from those of the bulk glasses by fast cooling in the fiber drawing process, and the intersection wavelength between the index curves is moved from 1.31 μm to about 0.58 μm.

The line (b), (c), and (d) are the insertion losses of the fibers soaked at 440 °C during 0 hour and at 500 °C during 0 hour and 1 hour, respectively. The edge of the passband is shifted to longer wavelength region with soaking temperature and time, and the intersection wavelength is moved to longer wavelength area.

Fig. 10 shows the normalized frequency V against wavelength for the unannealed and annealed dispersive fibers under different conditions denoted by the line (a)-(d) in Fig. 9. The core radius of the fabricated BaCD9/F11 fiber is 5.7 μm. The intersection between the index curves is determined from the edge of the passband.

Fig. 11 (a)-(d) shows the spectral bending losses of the BaCD9/F11 fibers unannealed and annealed indicated by the line (a)-(d) in Fig. 9 and 10, respectively. The solid, dotted and broken lines in Fig. 11 (a) show the bending losses of the unannealed fiber which is bent with radii of 4, 2.5 and 0.9 cm, respectively. The cutoff wavelength of the LP21 and LP02 modes is 1.3 μm, and the modes can be supported below 1.3 μm.

Fig. 11 (b) shows the bending losses of the BaCD9/F11 fiber soaked at 440 °C during 0 hour. The LP21 and LP02 modes can propagate along the fiber only around 0.9 μm wavelength.

In Fig. 11 (c), there is no loss peak of the LP21 and LP02 modes, and the fiber soaked at 500 °C during 0 hour cannot support the modes. The loss peak of LP11 mode is broad, and grows around 1.5 μm. The V value indicated by the line (c) in Fig. 10 seems to cross the cutoff V value of LP11 mode at about 1.5 μm.

Fig. 11 (d) shows the bending losses of the BaCD9/F11 fiber soaked at 500 °C during 1 hour. We cannot see any loss peak for bend radii of 25, 15 and 8 cm. The annealed fiber has no second mode at any wavelength, and can guided only the fundamental mode above around 0.92 μm wavelength. The multimode fabricated BaCD9/F11 fiber is changed into a single-mode fiber under the condition of soaking temperature of 500 °C and soaking time of 1 hour.

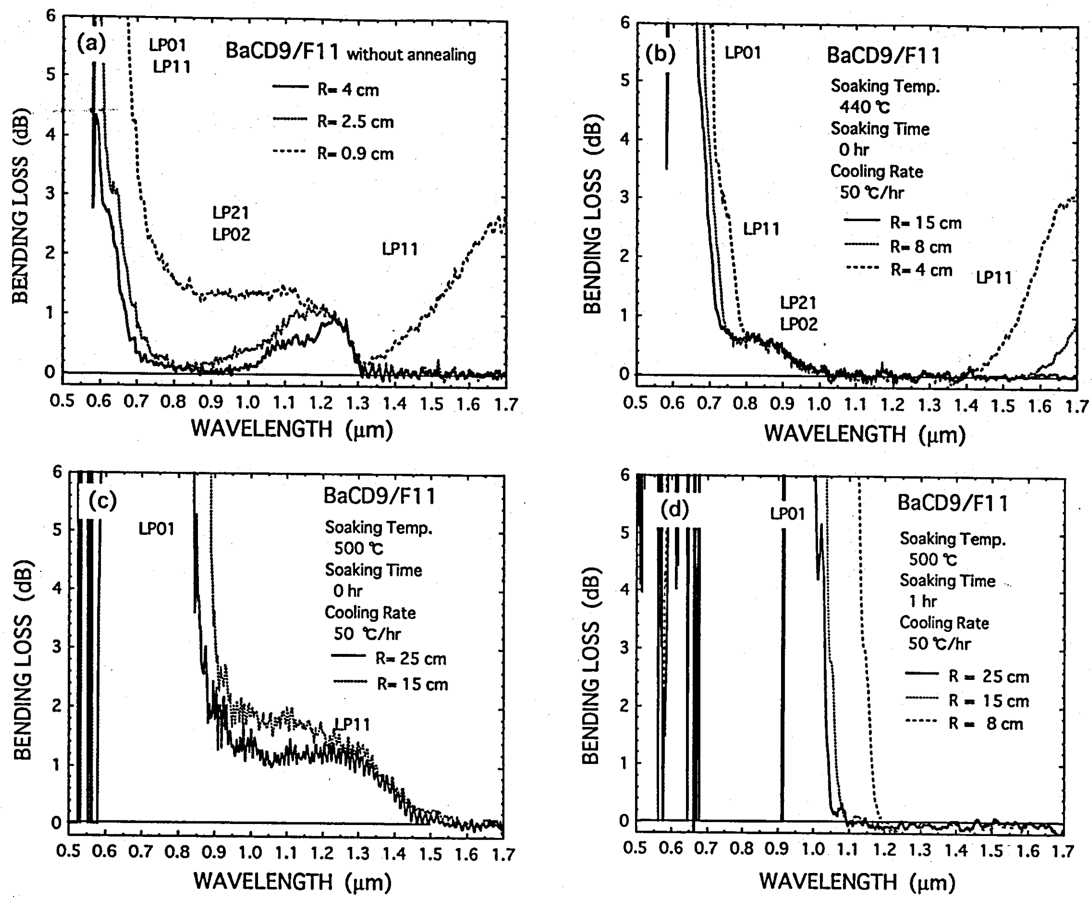


Fig. 11 Spectral bending losses of the BaCD9/F11 fibers (a) unannealed and annealed (b) at 440 °C during 0 hour and 500 °C during (c) 0 hour, and (d) 1 hour.

Fig. 12 (a) shows the mode lines of the BaCD9/F11 fiber without annealing at 1.46 μm wavelength. Four mode lines can be observed at 1.46 μm and 1.29 μm. Since the mode line of the LP21 and LP02 modes can be seen, the LP21 and LP02 modes are supported at 1.46 μm. However the modes cannot be guided at 1.46 μm on the basis of the bending losses shown in Fig. 11 (a). This discrepancy is believed to be caused by the fluctuations of the fiber diameter, i.e. the core diameter. The core radius of the part of the fiber used in Fig. 12 (a) may be a little larger than that in Fig. 11 (a).

Fig. 12 (b) shows the mode line of the annealed BaCD9/F11 fiber for soaking temperature of 500 °C and soaking time of 1 hour. Only the mode line of LP01 can be observed at 1.46 μm, 1.29 μm and 1.55 μm. It can be concluded that the multimode dispersive fiber BaCD9/F11 has been made into a single-mode fiber by annealing.

V. Conclusions

Dispersive fibers are fabricated from optical glasses with different index dispersions, and have several guided modes because of the different index reductions caused by rapid cooling in the fiber drawing process. The multimode dispersive fibers are changed into single-mode fibers by annealing under suitable conditions. The annealed single-mode dispersive fibers support only the fun-

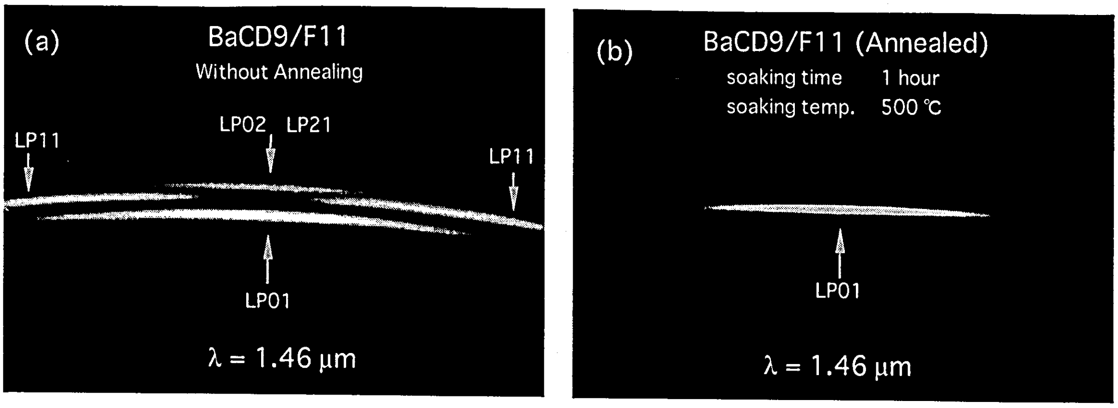


Fig. 12 Mode lines of the BaCD9/F11 fibers unannealed and annealed. (a) The unannealed fiber excited with a LD emitting 1.46 μm. (b) The fiber soaked at 500 °C during 1 hour and excited with a LD emitting at 1.46 μm.

damental mode over broad spectral ranges and no second guided mode at any wavelength. The refractive-index difference increases with wavelength, and the normalized frequency V is wavelength-insensitive. Therefore the change of the spot size of the fundamental mode is believed to be suppressed against wavelength. The annealed single-mode dispersive fibers would be useful for wavelength-insensitive fiber devices.

Acknowledgment

The authors would like to thanks H. Tanaka and T. Gozen of Mitsubishi Cable Industries Ltd. for drawing dispersive fibers.

References

[1] K. Morishita, M. S. Yataki and W. A. Gambling, "In-line optical fibre filters using dispersive materials," *Electron. Lett.*, vol.23, no.7, pp.319-321, March 1987.

[2] K. Morishita, "Bandpass and band-rejection filters using dispersive fibers," *J. Lightwave Technol.*, vol.7, no.5, pp.816-819, May 1989.

[3] K. Morishita, M. S. Yataki and W. A. Gambling, "Wavelength-insensitive couplers using dispersive materials," *Opt. Lett.*, vol.12, no.7, pp.534-535, July 1987.

[4] K. Morishita, "Wavelength-selective optical-fiber directional couplers using dispersive materials," *Opt. Lett.*, vol.13, no.2, pp.158-160, February 1988.

[5] K. Morishita, "Optical fiber devices using dispersive materials," *J. Lightwave Technol.*, vol.7, no.1, pp.198-201, January 1989.

[6] J. Nishimura, Y. Ueda and K. Morishita, "Dispersive fibers and their application to long-wavelength-pass filters," in *Tech. Dig. IOOC'95*, Hong Kong, June 26-30, 1995, paper WA2-5.

[7] J. Nishimura, Y. Ueda and K. Morishita, "Fabrication of dispersive fibers and their application to long-wavelength-pass filters," *Trans. IEICE*, vol.J78-C-I, no.12, pp.658-663, December 1995 (in Japanese).

[8] J. Nishimura and K. Morishita, "Varied spectral properties of annealed dispersive fibers," in *Tech. Dig. CLEO/Europe'96*, Hamburg, Germany, September 8-13, 1996, paper CThB7.

[9] J. Nishimura and K. Morishita, "Control of spectral characteristics of dispersive optical fibers by annealing," *J. Lightwave Technol.*, vol.15, no.2, pp.294-298, February 1997.

[10] Hoya Optical Glass Technical Data, Hoya Corp., Tokyo, Japan, 1985.

[11] Ohara Optical Glass, Ohara Inc., Kanagawa, Japan, 1987.

輻射科学研究会資料
(RS97-2)

広帯域な結合器形光パワーデバイダの一設計法

岸 岡 清　　松 野 斉
大阪電気通信大学·光システム工学科

平成9年5月30日
於 大阪電気通信大学

1．まえがき

方向性結合器を用いた光パワーデバイダは、Y分岐を用いたものに比べ挿入損失が小さく、しかも分岐部分の微細加工も必要とせず、それだけ製作し易いと言う特徴を持っている。加えて、構造パラメータを調整する事によって所望の特性を得る事ができる制御性の良さも備えている。しかしその反面、結合器の特性として、波長依存性が強く、波長によってその分岐比が大きく変わるという難点もあり、広帯域な特性が要求されるシステムでの使用には問題があるとされている。例えば、波長多重通信システムでは、スパンの比較的大きな複数の波長の光を同じ比で分岐させる事が要求されている。この様な問題点を改善するために、近年、広帯域化の研究が盛んに行われており、結合器形であるにもかかわらず、広帯域な特性を持ったパワーデバイダが数多く提案されている [1]-[6]。

方向性結合器形パワーデバイダの広帯域化は伝搬軸に沿って、導波路間の伝搬定数差を変化させる事によって実現されている。問題は最適な伝搬定数差の分布形状を如何に決定するかという事である。従来の最適分布形状を得るための設計法は、計算機シミュレーションに重きを置いたカット＆トライ的なものか、或いは、特定の形状を設定してそのパラメータの値を数値検索するものであった。前者の方法では、見透の悪さは避け難く、後者では得られた最適分布が始めに設定される分布形状に依存してしまう欠点があった。

本報告では、広帯域な特性を得るのに必要な伝搬定数差の最適分布形状を決定する見透の良い方法が与えられる。さらに、提案された設計法に基づいて製作された広帯域３導波路結合器パワーデバイダの特性の測定結果も示される。設計では、伝搬定数差を伝搬軸に沿って変化しない非摂動項と伝搬軸に沿って変化する摂動項の和として与え、結合器の出力光パワーを伝搬定数差の非摂動項に依存する部分と摂動項に依存する部分に分離して表現する式がまず導出される。次いで、導出された式を用いて、所望の特性を達成するための伝搬定数の摂動項の分布形状が決定される。摂動項の分布形状を特定の形状に限定しないために、分布形状を三角関数の級数で表し、固有値問題として三角関数の振幅を解析的に決定している。

設計されたパワーデバイダは Ti 拡散 $LiNbO_3$導波路で構成された３導波路結合器で作られる。伝搬定数差は電気光学効果を利用して、導波路上に装荷された電極に電圧を印加する事によって与えられる。伝搬軸に沿った摂動は電極を軸に沿って分割し、各電極に異なった値の電圧を印加する事によって与えられている。なお、２導波路結合器を使わない理由は、伝搬定数に差がない場合でも、元々、３導波路結合器の方が広い帯域特性を持っており、従って広帯域特性を実現するには２導波路結合器より有利と考えられるからである。

2．基本式の導出

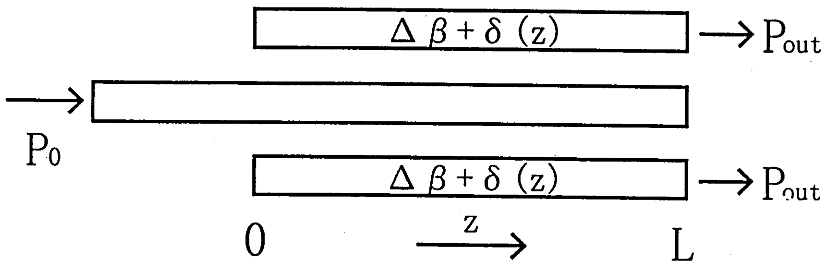


図１ 伝搬軸に沿って伝搬定数差が変化する３導波路結合器

図１に、以下で考える３導波路結合器パワーデバイダが示されている。中央の導波路２に入力された光のパワーは、両側の導波路１と３から等分配されて$\frac{1}{2}$づつ出力される。両側の導波路には、光の進行方向z軸に沿って変化する伝搬定数差$\Delta\beta+\delta(z)$が与えられている。ここで、$\Delta\beta$はzに依存しない一様な伝搬定数差を表し、$\delta(z)$はz軸に沿った$\Delta\beta$の変動量を表している。以下では、$|\delta(z)| << |\Delta\beta|$の条件が成立しているものとして式の導出が行われる。図中のLは結合器の相互作用長である。

結合器をz軸に沿って長さΔzの小区間に分割して、各区間内では近似的に$\Delta\beta$の摂動量δを一定値と見なすと、各小区間内では、３本の導波路のモード振幅$a_i(z),\ i=1,2,3$は

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \\ a_3(z) \end{pmatrix} = -j\begin{pmatrix} \Delta\beta+\delta_i & c & 0 \\ c & 0 & c \\ 0 & c & \Delta\beta+\delta_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \\ a_3(z) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

で表される定数係数の結合方程式を満足する。ここで、δ_iは小区間内では一定値と見なした摂動量である。式（１）を解く事によって各区間の両端のモード振幅間の関係を与える伝送行列$\hat{\mathbf{F}}_i$を求める事ができる。求められた伝送行列の各要素を$|\delta_i/\Delta\beta| << 1$の条件の下で、近似的に$\Delta\beta$による非摂動項と$\delta_i$を含む摂動項に分離して

$$\hat{\mathbf{F}}_i \simeq \hat{\bar{\mathbf{F}}} + \boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{F}}_i \qquad (2)$$

と表す事ができる [7]。$\hat{\bar{\mathbf{F}}}$の要素$\bar{f}_{ij}$は

$$\left.\begin{array}{l}\bar{f}_{11}=\frac{1}{2}\left[\cos Q\Delta z+\cos\frac{1}{2}\Delta\beta\Delta z-j\left\{\left(\frac{\Delta\beta}{2Q}\right)\sin Q\Delta z+\sin\frac{1}{2}\Delta\beta\Delta z\right\}\right]\\ \bar{f}_{12}=-j\left(\frac{c}{Q}\right)\sin Q\Delta z\\ \bar{f}_{13}=\frac{1}{2}\left[\cos Q\Delta z-\cos\frac{1}{2}\Delta\beta\Delta z-j\left\{\left(\frac{\Delta\beta}{2Q}\right)\sin Q\Delta z-\sin\frac{1}{2}\Delta\beta\Delta z\right\}\right]\\ \bar{f}_{22}=\cos Q\Delta z+j\left(\frac{\Delta\beta}{2Q}\right)\sin Q\Delta z\\ \bar{f}_{21}=\bar{f}_{23}=\bar{f}_{32}=\bar{f}_{12}\\ \bar{f}_{31}=\bar{f}_{13}\\ \bar{f}_{33}=\bar{f}_{11}\end{array}\right\} \quad (3)$$

と与えられる。一方、摂動項$\Delta\hat{\mathbf{F}}_i$は対角行列となり、その要素Δf_{ii}は

$$\left.\begin{array}{l}\Delta f_{11}=\Delta f_{33}\simeq -j\frac{1}{2}\delta_i\Delta z\\ \Delta f_{22}\simeq j\frac{1}{2}\delta_i\Delta z\end{array}\right\} \quad (4)$$

と与えられる。ここで、$Q=\sqrt{2c^2+\left(\frac{\Delta\beta}{2}\right)^2}$である。また、上式の導出に於いては、結合行列の固有値 Γは

$$\Gamma=\sqrt{2c^2+\left(\frac{\Delta\beta+\delta}{2}\right)^2}\simeq Q+\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\beta}{Q}\right)\delta_i \quad (5)$$

と近似され、

$$\left.\begin{array}{l}\cos\Gamma\Delta z\simeq\cos Q\Delta z-\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\beta}{Q}\right)\delta_i\Delta z\sin Q\Delta z\\ \sin\Gamma\Delta z\simeq\sin Q\Delta z+\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\beta}{Q}\right)\delta_i\Delta z\cos Q\Delta z\\ \cos\frac{1}{2}(\Delta\beta+\delta_i)\Delta z\simeq\cos\frac{1}{2}\Delta\beta\Delta z-\frac{1}{2}\delta_i\Delta z\sin\frac{1}{2}\Delta\beta\Delta z\\ \sin\frac{1}{2}(\Delta\beta+\delta_i)\Delta z\simeq\sin\frac{1}{2}\Delta\beta\Delta z+\frac{1}{2}\delta_i\Delta z\cos\frac{1}{2}\Delta\beta\Delta z\\ \Gamma^{-1}\simeq\frac{1}{Q}\left(1-\frac{1}{4}\frac{\Delta\beta\delta_i}{Q^2}\right)\end{array}\right\} \quad (6)$$

の近似が用いられた。さらに、Δzは 十分に小さいとして、$\sin Q\Delta z\simeq Q\Delta z$、$\cos Q\Delta z\simeq 1$ が適用され、さらに、$(\delta_i\Delta z)(Q\Delta z)$ など $(\Delta z)^2$以上の項は無視された。

上で求められた小区間の伝送行列を順次掛けることによって、結合器全体の伝送行列を求めることができる。結合器全体の伝送行列$\hat{\mathbf{F}}$は

$$\hat{\mathbf{F}}=\prod_{i=1}^{N}\hat{\mathbf{F}}_i\simeq\hat{\bar{\mathbf{F}}}^N+\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{\bar{\mathbf{F}}}^{N-i}\Delta\hat{\mathbf{F}}_i\hat{\bar{\mathbf{F}}}^{i-1}\right] \quad (7)$$

と表せる。ここで、$\Delta\hat{\mathbf{F}}_i$は第 i 区間に於ける伝送行列の摂動項であり、式（７）では$\Delta\hat{\mathbf{F}}_i^2$以降の項は無視されている。式（７）の第一項目の$\hat{\bar{\mathbf{F}}}^N$は全区間で摂動$\delta$が無い結合器の伝送行列を表しており、第二項の和で表されている部分が摂動による寄与を表している。摂動項$\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{\bar{\mathbf{F}}}^{N-i}\Delta\hat{\mathbf{F}}_i\hat{\bar{\mathbf{F}}}^{i-1}\right]$の物理的な解釈は図２を

用いて以下のように説明できる。$\sum$記号内の括弧内の３つの行列の積は、第 i 区間の摂動δ_iによる寄与を表している。即ち、$(i-1)$ 区間まで摂動の無い結合器を伝搬して来て、摂動δ_iによる寄与$\Delta\hat{\mathbf{F}}_i$を受け、再び残りの $(N-i)$ 区間の摂動の無い結合器を伝搬するモードの伝送行列に対応している。全区間の寄与は、一区間のこの様な寄与の和を取る事で与えられ、これが$\sum$で和を取る意味である。

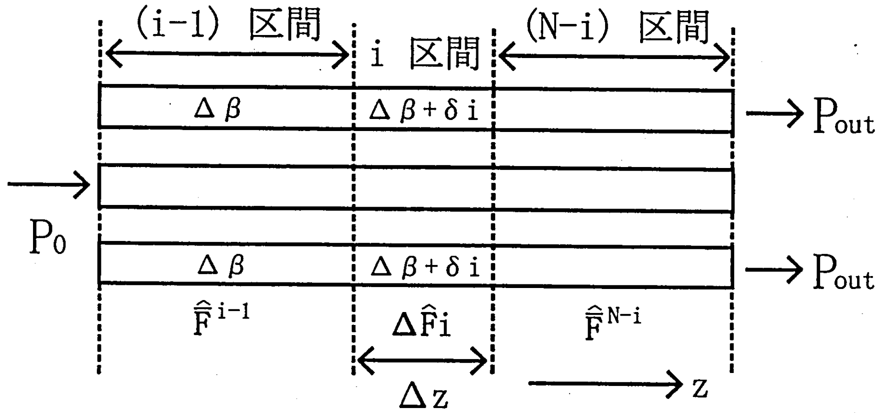


図２ 小区間の摂動項δ_iによる寄与

非摂動項$\hat{\hat{\mathbf{F}}}^N$の各要素は式（３）のΔzを $L(=N\Delta z)$ で置き換える事によって与えられる。一方、後半部の摂動項の行列は、式（３）と（４）を用いて実際に３つの行列の積を実行する事により得られる。計算に於いては式（４）中のδ_iを$\delta(i\cdot\Delta z)$ とおいて式（７）に代入される。この様にして計算された摂動行列 $\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{N-i}\Delta\hat{\mathbf{F}}_i\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{i-1}\right]$は、$\Delta z\to 0$ の条件下では積分形に移行できる。以下の設計では両側の導波路からの出力光パワーの表示式のみが必要である事を考慮して、摂動行列の要素Δ_{ij}の内、$\Delta_{12}(=\Delta_{32})$ 要素のみを示すと

$$\Delta_{12}=j\frac{1}{2}\left(\frac{c}{Q}\right)\int_0^L\delta(z)[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\beta}{Q}\right)\{\cos Q(L-2z)-\cos QL\} -j\sin Q(L-2z)]dz \qquad (8)$$

となる。

伝搬定数差の摂動δを

$$\delta(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\cos m\pi\left(\frac{z}{L}-\frac{1}{2}\right)+B_m\sin m\pi\left(\frac{z}{L}-\frac{1}{2}\right)\right] \qquad (9)$$

と三角関数の級数の和で表すと、δの分布を決定する問題は、未知係数 A_m と B_m を決定する問題に帰着される。

式（9）を式（8）に代入して、積分を実行してΔ_{12}を求め、非摂動項$\hat{\hat{\mathbf{F}}}^N$の (1,2) 要素との和を取ると、伝搬定数差に摂動が与えられた場合の結合器全体の伝送行列$\hat{\mathbf{F}}$の (1,2) 要素 $f_{12}(=f_{32})$ は

$$
\begin{aligned}
&f_{12} = -j\left(\frac{c}{Q}\right)\sin QL \\
&+j\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{c}{Q}\right)\Bigg[\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1}(-1)^{k-1}\left(\frac{\Delta\beta}{Q}\right)\frac{8(QL)^2}{(2k-1)\pi[(2k-1)^2\pi^2-4(QL)^2]}\cos QL \\
&-\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}\left(\frac{\Delta\beta}{Q}\right)(-1)^k\frac{QL}{(k\pi)^2-(QL)^2}\sin QL \\
&+j\sum_{k=1}^{\infty} B_{2k-1}(-1)^{k-1}\frac{8QL}{(2k-1)^2\pi^2-4(QL)^2}\cos QL \\
&-j\sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}(-1)^k\frac{2k\pi}{(k\pi)^2-(QL)^2}\sin QL\Bigg] \qquad (10)
\end{aligned}
$$

と求められる。これを用いて、両側の導波路の出力光パワーは

$$P_{out} = |\, f_{12} \,|^2$$

と与えられる。式（１０）は、$\delta(z)$ の内、$z = L/2$ に対して偶対称な cos 分布と、奇対称な sin 分布の寄与が分離されて表されている。さらに、cos、sin の各分布に対して、それぞれの奇数項及び偶数項からの寄与も分離された形で含まれており、見透の良い表現式となっている。

以下の第３節では、式（１０）を用いた伝搬定数差の摂動量$\delta(z)$ の最適分布形状の簡便な決定方法が示される。

３．$\delta(z)$ の分布形状の設計法

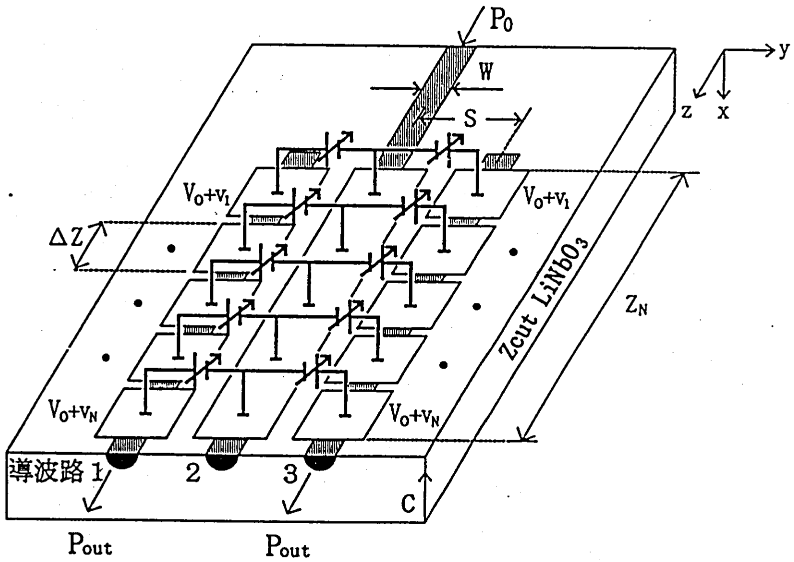


図3 $LiNbO_3$基板を用いて作られる３導波路結合器パワーデバイダ

図３に製作を想定したパワーデバイダの構造が示されている。パワーデバイダは z-cut $LiNbO_3$Ti 拡散導波路で作られた３導波路結合器によって構成されて

いる。導波路の表面には電界を印加して導波路に伝搬定数差を与えるための金属薄膜電極が装荷されている。電極は光の伝搬軸（z方向）に沿って多分割されており、これにより、各電極に同一のバイアス電圧 V_0を印加して両側の導波路に同じ大きさの伝搬定数差$\Delta\beta$を発生させることができる。さらに、各電極にΔV_iの電圧変動を与える事によって、伝搬定数差の摂動$\delta(z)$ 発生させる事ができる。

式（９）で一般的に考えた摂動量δの分布の内で sin の奇数項による寄与を考える。即ち、$\delta(z)$ を

$$\delta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k-1} \sin[(2k-1)\pi(\frac{z}{L} - \frac{1}{2})] \tag{11}$$

と与えて、式（１０）に $A_{2k-1} = A_{2k} = B_{2k} = 0$ と共に代入して、f_{12}を求め、それより $|f_{12}|^2$によって P_{out}を計算すると、

$$P_{out} = \left(\frac{c}{Q}\right)^2 \sin^2 QL + 4\left(\frac{c}{Q}\right)^2 \left(\frac{\Delta\beta L}{\pi}\right)^2 \left(\frac{QL}{\pi}\right)^2$$
$$\times \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_{2k-1}}{\Delta\beta}\right) \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 - \left(\frac{2QL}{\pi}\right)^2}\right]^2 \cos^2 QL \tag{12}$$

を得る。第一項が非摂動項を第二項が摂動項をそれぞれ表している。これを見ると、非摂動項は QL がπの整数倍の値を取る波長で零となり、πの半整数倍のとき、最大値を取る。一方、摂動項はこれとは反対に、QL がπの整数倍となる波長で最大値を取り、πの半整数倍のとき零となる。従って、摂動量の振幅 B_{2k-1}の値をうまく設定すれば、互いの項が補い合って P_{out}の波長レスポンスの変動が緩和され、広帯域な特性となる事が期待できる。以下に、B_{2k-1}の設計法が述べられる。設計は実際の素子のパラメータの範囲を考慮して、$\pi < QL < \frac{3}{3}\pi$の範囲で行われる。

式（１２）に $QL = \pi$を代入すると、P_{out}は摂動項だけとなり、

$$P_{out} = 4\left(\frac{c}{Q}\right)^2 \left(\frac{\Delta\beta L}{\pi}\right)^2 \mathbf{B}^t \hat{\mathbf{H}} \mathbf{B} \tag{13}$$

で表される２次形式となる。ここで、$\mathbf{B}$ は $B_{2k-1}/\Delta\beta$を成分とするベクトルで、添字 t はその転置を表している。また、行列$\hat{\mathbf{H}}$の各要素は

$$h_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{[(2i-1)^2 - 4][(2j-1)^2 - 4]} \tag{14}$$

で与えられる。そこで、$\mathbf{B}$ を行列$\hat{\mathbf{H}}$の絶対値最大の固有値に属する固有ベクトルに選ぶと、摂動項は最大となり、δの最大の寄与を達成できる。しかし、まだ固有ベクトルの大きさには不定性が残っている。即ち、パワーレスポンスは固有ベクトルの大きさに依存することになる。固有ベクトルの大きさは次のようにして

決めることができる。$|\mathbf{B}|$は、固有ベクトルを与えて計算されるP_{out}と所望の分配比である$\frac{1}{2}$との2乗積分

$$\eta = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{1}{2} - P_{out}\right)^2 d\lambda \tag{15}$$

の値が最小となるように決定される。ここで、λ_1、λ_2はそれぞれ、最適化が図られる波長範囲の下限および上限を表している。この様にして求められたB_{2k-1}を式（１１）に代入すると、設計された$\delta(z)$ の形状を得ることができる。さらに、式（１２）に代入すると最適化されたパワーレスポンスを計算することができる。

式（１５）の積分を実際に実行するためには、c、QL、$\frac{c}{Q}$および$\Delta\beta$の波長依存性が必要である。これらに付いては、以下で、実際の導波路を想定した値が示される。また、$B_{2k-1}/\Delta\beta$の値は波長には依存しないとして計算される。その理由は次の通りである：電極に電圧を印加する事によって生じる伝搬定数差は印加電圧にほぼ比例する。即ち、その比例定数を h と表すと、$\Delta\beta = hV_0$、$\delta = h\Delta V$ が成立するので、δの 振幅 B_{2k-1}と$\Delta\beta$の間に $B_{2k-1}/\Delta\beta = \Delta V/V_0$の関係が成り立ち、波長には依存しないことがわかる。

以下に、表１及び２に示す導波路パラメータの値を持つ２つのパワーデバイダについて、上で述べた方法で広帯域設計された波長レスポンス及び設計されたδの分布形状の計算結果を示す。

表１．３導波路結合器の導波路パラメータ（設計例１）

導波路幅	W	μm	7.0
導波路間隔 (center-to-center)	s_{cc}	μm	13.0
電極間隔	g	μm	7.0
相互作用長	L	mm	8.8

表２．３導波路結合器の導波路パラメータ（設計例２）

導波路幅	W	μm	7.0
導波路間隔 (center-to-center)	s_{cc}	μm	14.0
電極間隔	g	μm	7.0
相互作用長	L	μm	9.7

両者は導波路間隔 s_{cc}と相互作用長 L の値が異なるだけで他のパラメータの値は同じである。設計された波長範囲は何れの場合も $1.2\mu m < \lambda < 1.6\mu m$ である。設計はＴＥモードについて行われている。従って、特性には常光屈折率n_oのみが関与し、何れの場合も印加電圧による両側の導波路の屈折率変Δn_oは1.0×10^{-4}としている。図４及び５に表１のパラメータを持つ広帯域パワーデバ

イダのパワーレスポンスの計算結果と設計されたδの分布形状をそれぞれ示す。$\delta(z)$ の分布は$\Delta\beta$で規格化されて示されている。また、図４の実線が式（１２）の近似式を用いた計算結果を表しており、破線は結合器を zに沿って１０分割して，各区間ではδの値が一定であるとして式（１）に示す結合方程式を近似を使わないで解いて、得られた各区間の伝送行列を順次掛け合わせて得られた結果である。分割数をこれ以上増やしても計算結果は殆ど変化せず、これが実質的な厳密解であると考えられる。近似解は厳密解に良く一致しており、これより近似が妥当であることもわかる。図６及び７に表２に示されたパラメータを持つパワーデバイダの波長レスポンスとそれを実現するδの分布形状がそれぞれ示されている。図６の実線、破線は図４と同様、近似式による計算結果と厳密解法による計算結果である。予想通り広い波長域に於いて所望の分配比が得られている。

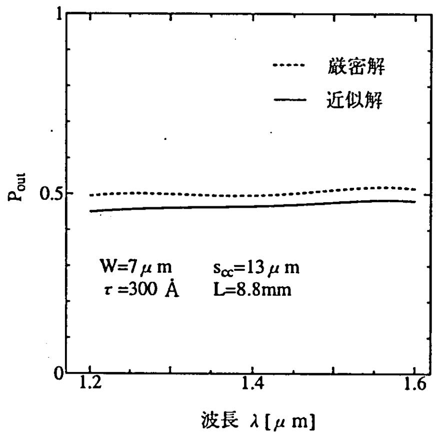


図４ 設計されたパワーデバイダの波長レスポンス（設計例１）

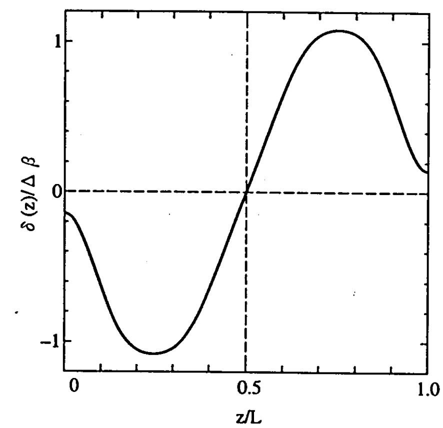


図５ $\delta(z)/\Delta\beta$の最適分布形状（設計例１）

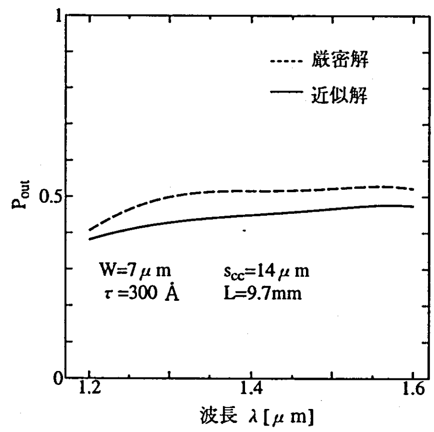


図６ 設計されたパワーデバイダの波長レスポンス（設計例２）

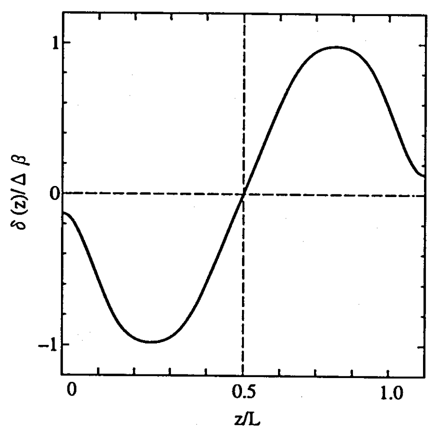


図７ $\delta(z)/\Delta\beta$の最適分布形状（設計例２）

なお、上に示された設計に於いては、式（１３）の行列$\hat{\mathbf{H}}$は5×5としている、即ち、δの振幅は$B_1, B_3, ..., B_9$の５項で打ち切って計算されている。実際これより以降の項の値を計算しても、10^{-3}以下と小さくその寄与は無視できると考えられる。

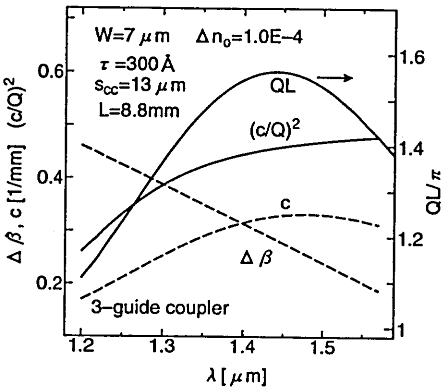


図８ $\Delta\beta$、c、QL、$(c/Q)^2$の波長依存性（設計例１）

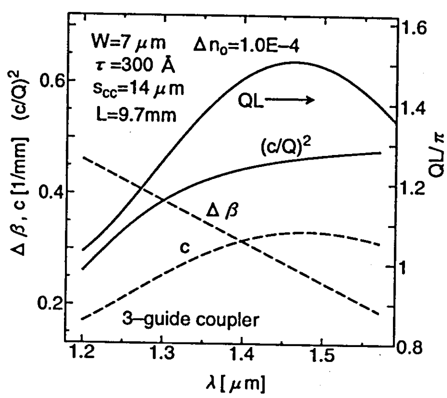


図９ $\Delta\beta$、c、QL、$(c/Q)^2$の波長依存性（設計例２）

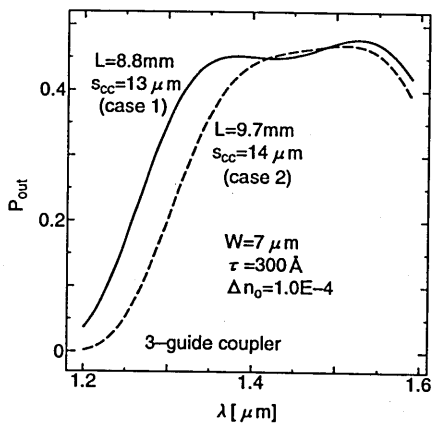


図１０ 一様$\Delta\beta$分布を持つパワーデバイダの波長レスポンス

図８及び９にそれぞれのパワーデバイダについて、$\delta(z)=0$の時、即ち、伝搬定数差に摂動が無いときの$\Delta\beta$、c、QL及び、$(c/Q)^2$の波長依存性の数値計算結果が示されている。これらのパラメータの波長依存性特性は摂動がない時のパワーデバイダの波長レスポンスを推測するのに有効である。これを用いて$\pi < QL < \frac{3}{2}\pi$に対応する波長帯域、或いは$QL = \frac{3}{2}\pi$の波長で得られる$P_{out}$の最大値等、広帯域化設計に必要な値を得ることができる。また、比較のために、図１０にそれぞれのデバイダについて、一様な伝搬定数差$\Delta\beta$のみが与えられた場

合のパワーレスポンスの計算結果が示されている。

$\Delta\beta$、cの計算は等価屈折率法 [8] によって行われた。Ti 拡散導波路の断面内の屈折率分布は文献 [8] に基づいて深さ方向には Hermite-Gaussian 分布、横方向（y方向）には$\frac{1}{2}\{erf[\frac{W}{2D}(1+\frac{2y}{W})]+erf[\frac{W}{2D}(1-\frac{2y}{W})]\}$ と仮定されている。ここで、Dは Ti イオンの拡散の深さである。また、Ti 拡散による基板表面の屈折率の増加量及びDの値には文献 [9] に与えられている実験値が用いられた。Ti 膜厚を 300$\mathring{A}$ とし、1000^oCで 6 時間の拡散が想定されている。また、計算では、基板の屈折率の波長分散 [10] は考慮されているが、拡散による屈折率の増加量は波長に依存しないと仮定されている。

4．製作及び実験結果

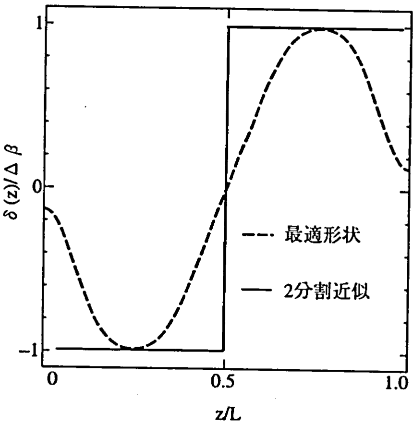


図１１ $\delta(z)$ のステップ分布近似

以下では、設計値に基づいて製作されたパワーデバイダの特性が示される。製作の容易さを考慮して、表２に示されたパラメータを持ったパワーデバイダが製作された。図７に示されている$\delta(z)$ は比較的単純な分布形状をしている事を考慮して、製作されたパワーデバイダでは図１１の実線で示すようにスッテプ状に近似して、電極を２分割して電圧が印加される。さらに、実際に製作されたパワーデバイダでは、図１２に示す２分割電極が装荷されている。図１３には、電極を２分割したときの波長レスポンス（実線）の計算結果が示されている。比較のために、連続な分布を与えて厳密解析して得られたレスポンス（破線）も示されている。これはすでに図６に示されているレスポンスと同じものである。２分

割電極を用いても大きな違いが現れない事がわかる。

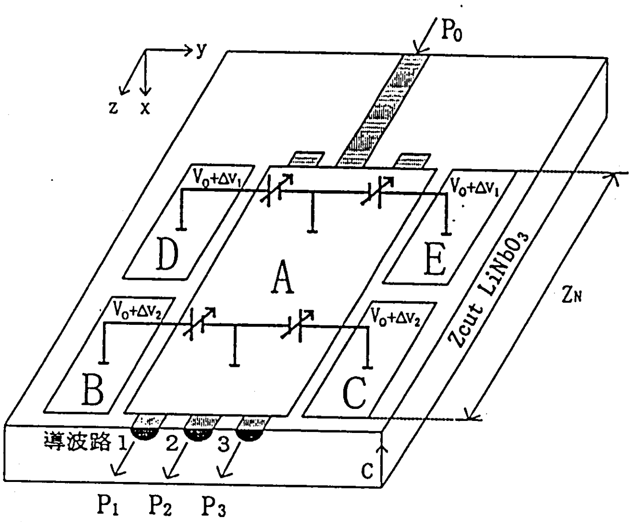


図１２ 製作されるパワーデバイダの電極形状

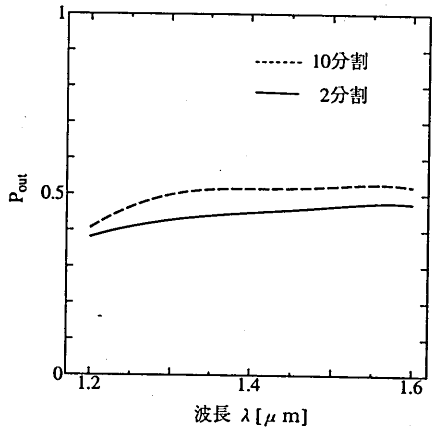


図１３ ２分割電極を持ったパワーデバイダの波長レスポンス

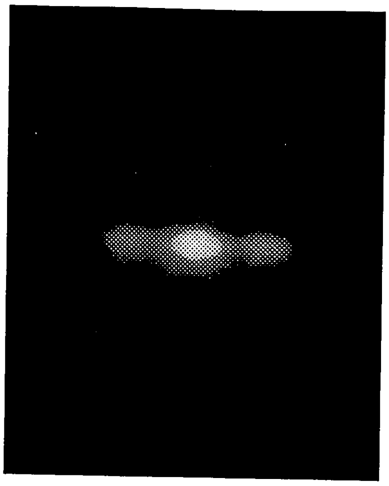
なお、ＴＥモードで動作させる理由は、DC-ドリフト現象による動作の不安定さを避けるために、ＴＭモード動作では必要な電極と導波路表面の間の低屈折率バファ層を除くためである。即ち、ＴＥモードでは、ＴＭモードに比べて金属

電極による伝搬損失が小さいため、バファ層が無くても動作させることができるためである。

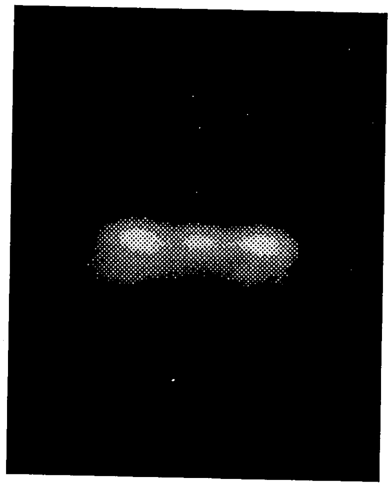
製作されたパワーデバイダの端面から光が入射され、出力ポート端面の近傍界が導波路端面の後方に置かれた赤外線ＴＶカメラで観察される。光の偏光方向は光源と素子の入射端面並びに、ＴＶカメラと導波路端面の間に置かれたポラライザによって選択される。測定には波長 $1.523\mu m$ の He-Ne ガスレーザと $1.297\mu m$ の半導体レーザの２つの光源が使われた。

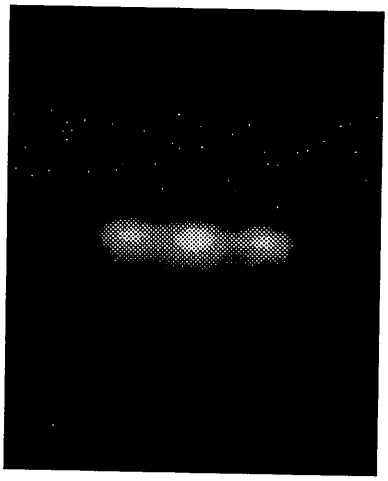
製作されたパワーデバイダでは製作誤差のため生じた電極間隔の違いや、導波路と電極の位置の相対的なずれによって各電極の感度は異なっている。電極間の相対的な電圧感度比は、次のようにして推測された。両側の導波路と中央の導波路間の伝搬定数差が同じであれば、両側の導波路からの出力は同じになる事に留意して、両側の電極の電圧を調整して、その値から算出された。そのようにして得られた電圧感度比は電極Ｂ、Ｃ、Ｄ、Ｅに対して、2.1:1:2.7:1.7 であった。測定ではこの比を考慮して各電極に電圧が印加される。以下、印加電圧として電極Ｃの電圧が示される。他の電極には感度比に逆比例する電圧が印加される。なお、摂動$\delta(z)$ を与える各電極の印加電圧ΔV_{CA}とΔV_{BA}は正、ΔV_{DA}とΔV_{EA}は負である。

図１４にＴＶモニタに映し出された近視野像の写真が測定された２波長に付いて示されている。白く映っている３つのスポットが各導波路の出力端である。電圧を印加して行くにつれて両側の導波路からの出力光強度が増加するのが観察される。図１５に測定された分岐比の測定結果が示されている。ΔV_{CA}の値に対する変化がプロットされている。$\Delta V_{CA} = 95.4V$で両波長に於いて、導波路１と３で一致した分岐比が得られている。また、図１６に$\Delta V_{CA} = 95.4V$のときの分岐比の測定値がパワーレスポンスの設計値と共にプロットされている。ほぼ設計値通りの値が測定されていることが確認できる。測定中には各電極にはΔVに加えて一様な伝搬定数差$\Delta\beta$を与えるバイアス電圧も印加された。その値は電極Ｃで、およそ、$-80V$である。実際に印加されたバイアス電圧と図１１から推測される電圧値（電極Ｃに対して；$V_0 \simeq \Delta V_{CA}$）との間に生じた違いは、導波路幅の製作誤差によって生じた初期位相不整合のよるものと推察される。なお、図１２に示された電極形状を用いて、電極間間隔が設計値（$g = 7\mu m$）の場合に、$\Delta n_o = 1.0 \times 10^{-4}$を得るのに必要なバイアス電圧は約 64[V] である。この値は文献 [11] に示されているモードの界分布と印加電界の分布の重なり積分の近似値 Γを用いて $V = 2(\frac{\Delta n_o}{n_o^3})(\frac{g}{\gamma_{13}\Gamma})$ によって推定された。ここで、γは電気光学定数である。また、分岐比の測定は近傍界の観察用のＴＶカメラに接続されたオシロスコープによるラスタスキャンによって各導波路の相対出力強度を測定する事によって行われた。

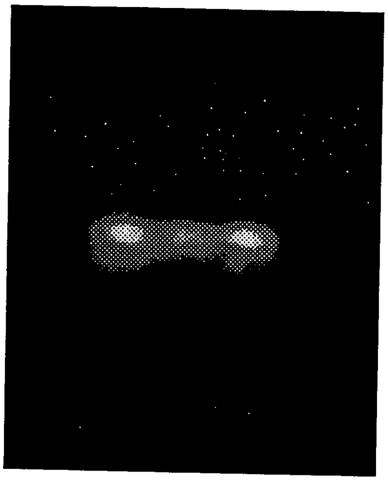


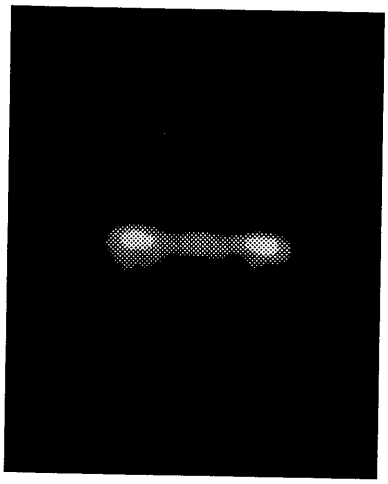
$\Delta V_{CA} = 0$ [V]





$\Delta V_{CA} = 45.3$ [V]





$\Delta V_{CA} = 95.4$ [V]

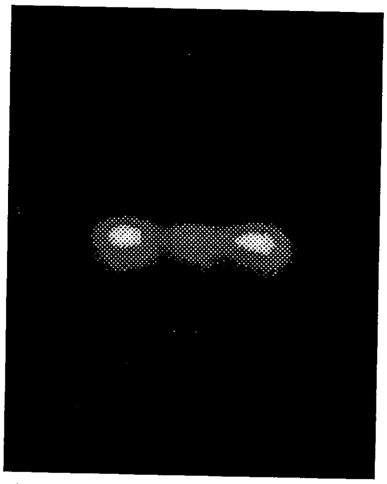


図１４ 近視野像の印加電圧に対する変化

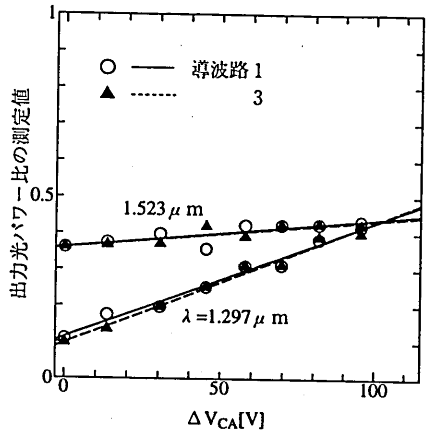


図１５ 分岐比の測定結果（印加電圧依存性）

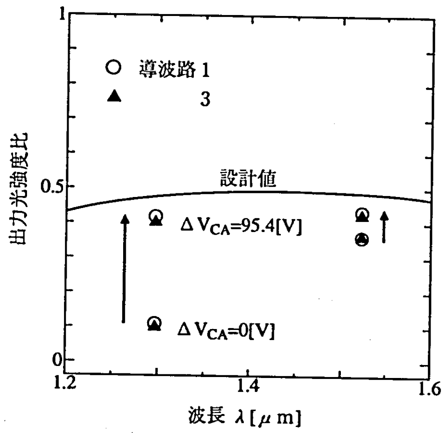


図１６ 分岐比の測定値と設計値の比較

5．まとめ

方向性結合器形パワーデバイダに於いて、伝搬定数差に伝搬軸に沿って変化する摂動を加えることによって広帯域なパワーデバイダが実現できることを示し、摂動の分布形状を決めるための見透しの良い設計法を与えた。更に、Ti 拡散によって z-cut $LiNbO_3$基板上に作られた 3 導波路結合器パワーデバイダに於いて、広帯域特性を確認した。

本報告で提案した所望のパワーレスポンスを得る設計法はパワーデバイダの広帯域化だけではなく、結合器のフィルタ特性の設計に広く利用できるものと期待される。

文献

[1] N.Takato, M.Yasue and M.Kawachi;"Low-loss high-silica single-mode channel waveguide", Electron. Lett., vol.22, pp.321-322(1986).

[2] H.Yanagawa, S.Nakamura, I.Ohyama and K.Ueki;"Broad-band high-silica waveguide starcoupler with asymmetric directional couplers", J. Lightwave Tech., vol.8, No.9, pp.1292-1297(1990).

[3] 植木、清水、柳川 ;" 部分非対称性を有する波長平坦カップラ " 、信学会秋期大会、C-244(1992).

[4] 荒井、上塚、他 ;" 非対称テーパー結合部による波長広帯域化 " 、信学会秋期大会、C-243(1992).

[5]A.Takagi, K.Jinguji and M.Kawachi;"Wavelength characteristics of (2×2) optical channel-type directional couplers with symmetric or nonsymmetric coupling structures", J.Lightwave Tech., vol.10, No.6, pp.735-745(1992).

[6] 江守、水本、内藤;"テーパ形結合器の広帯域設計" 、信学全大会、C-260(1996).

[7]K.Kishioka;" Improvement of the power spectral response in the three-guided coupler demultiplexer", Appl. Opt., vol.29, No.3, pp.360-366(1990).

[8]G.B.Hocker and W.K.Burns;"Mode dispersion in diffused channel waveguides by the effective index method", Appl. Opt., vol.16, pp.113-118(1977).

[9]C.H.Bulmer and W.K.Burns;"Polarization characteristic of $LiNbO_3$ channel waveguide directional couplers", J. Lightwave Tech., vol.LT-1, No.1, pp.227-236(1983).

[10]E.D.Palik, Ed.;"Handbook of optical constants of solids", Academic Press, pp.695-702 (1985).

[11]T.Tamir;"Guided-wave optoelectronics", Springer-Verlag, p.156 (1988).

輻射科学研究会資料
RS97-3

移動通信用ＳＡＷ共振器横結合型フィルタの通過帯域幅拡大

Passband Widening of Transversely Coupled Resonator Filters
Due to Reduction of SAW Velocity in the Resonator Gap Region

堤　潤　　伊形　理　　佐藤　良夫
J. Tsutsumi, O. Ikata and Y. Satoh

（株）富士通研究所
FUJITSU LABORATORIES LTD.

1997年5月30日

1. まえがき

弾性表面波(Surface Acoustic Wave: SAW)フィルタは、急峻なフィルタ特性が得られ、しかも小型・薄型化が可能なため、携帯電話等の移動通信端末の小型化のキーデバイスとして近年脚光を浴びている。また、最近の通信システムの急速な発展に伴い、SAW フィルタに要求される特性も変化しており、特に、中間周波数(Intermediate Frequency: IF)用フィルタでは、通信の高速・大容量化のため広帯域化が進んでいる。例えば、日本のディジタル携帯電話システムである PDC(Personal Digital Cellular)では、IF フィルタの要求比帯域幅は 0.03 %であるのに対し、欧州統一規格の GSM(Global System for Mobile communication)では 0.04～0.07 %、さらに PHS(Personal Handy Phone System)では 0.09 %と従来の 2～3 倍の比帯域幅が要求されている。従って、新しいフィルタ設計手法の開発が必要となっている。

携帯電話用 IF フィルタ等の狭帯域フィルタに適した SAW フィルタの構成として横モード結合型フィルタ（Transversely Coupled Resonator Filter : TCF）[1,2]がある。この TCF は小型・低損失で狭帯域な通過特性が得られ、しかも通過帯域外のサイドローブがないという優れた特徴を持つ。特に、基板材料に水晶を選んだ場合、フィルタ特性がさらに急峻になるのに加えて、温度に対する周波数変動が極めて小さいため、携帯電話用の IF フィルタとして広く用いられてきた。従って、水晶基板を用いた TCF を広帯域化できれば、GSM や PHS 向けに対しても極めて良好なフィルタを実現できる。しかしながら、TCF の帯域幅を拡大するには、IDT の電極指交差幅および共振器間ギャップ部の幅を狭くする必要があり、挿入損失の増加や帯域外抑圧度の劣化を引き起こすため、従来は困難であった。

今回、水晶基板を用いた TCF により 0.1 %程度の比帯域幅を有するフィルタの実現を目的とし、TCF の通過帯域幅を拡大する新たな手法について検討したので報告する。具体的には、横方向のモード結合理論を用いて TCF を解析し、共振器間ギャップ部の SAW 速度を低減することで帯域幅が拡大できるこを導く。また、共振器間ギャップ部の SAW 速度を効率良く低減する電極構造について述べ、実際にフィルタを作製する。

2. 通過帯域幅拡大の検討

2．1 横モード結合型フィルタの通過帯域幅

横モード結合型フィルタの構成を図 1 に示す。2 つの 1 ポート SAW 共振器が共通グランドバーを介し、SAW 伝搬方向に対して横方向に近接配置された構成となっている。

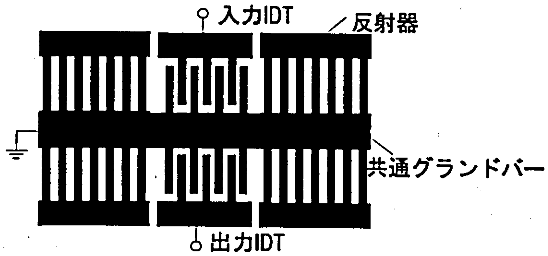


図1 横モード結合型フィルタ

この横モード結合型フィルタの通過帯域幅は、図 2 に示すフィルタ内に存在する最低次の対称・非対称の導波モード Φ_s および Φ_a の共振周波数差で決定される。従って、通過帯域幅を考える上で、これら対称・非対称モードの周波数 f_s および f_a を求めることが必須であり、これまで図 2 の右側に示した導波路モデルを用いて解析が行われてきた[3]。

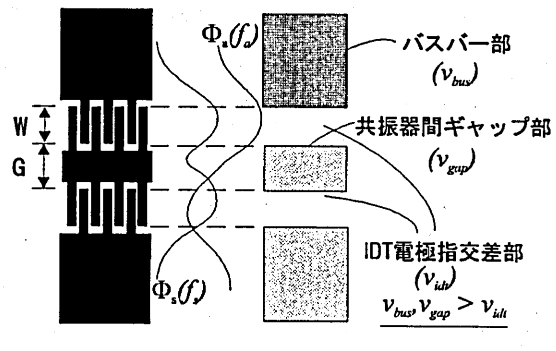


図 2 横モード結合型フィルタの導波路モデル

図 2 のモデルでは、横モード結合型フィルタを SAW 伝搬速度の大小関係により 5 つの領域に分け、IDT

電極指交差部を SAW 導波路として取り扱う。このようなモデル化を行うと、導波路を伝搬する SAW の振る舞いはスカラーポテンシャルを用いて解析でき[4,5]、数学的には誘電体光導波路中を伝搬する TE モードの解析と全く同じとなる。つまり、対称および非対称モードの周波数f_s,f_aは以下の分散関係式を解くことにより求められる[3]。

$$k_x W = Tan^{-1}\left(\frac{k_b}{k_x}\right) + Tan^{-1}\left\{\frac{k_g}{k_x}\tanh\left(k_g\frac{G}{2}\right)\right\} + m\pi \quad (1)$$

$$k_x W = Tan^{-1}\left(\frac{k_b}{k_x}\right) + Tan^{-1}\left\{\frac{k_g}{k_x}\coth\left(k_g\frac{G}{2}\right)\right\} + m\pi \quad (2)$$

$$k_x^2 = \left(\frac{\omega}{v_{idt}}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{v_{mode}}\right)^2$$

$$k_b^2 = \left(\frac{\omega}{v_{mode}}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{v_{bus}}\right)^2$$

$$k_g^2 = \left(\frac{\omega}{v_{mode}}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{v_{gap}}\right)^2$$

v_{mode}: 対称・非対称モードの伝搬速度
m: 整数

2．2 モード結合理論を用いた通過帯域幅拡大の検討

前述のように、横モード結合型フィルタの通過帯域幅を拡大するには、f_a-f_s を大きくすればよい。従来は、式(1)(2)を用いて IDT 電極指交差幅 W および共振器間ギャップ幅 G に対するf_a-f_sの変化を計算し、帯域幅が拡大されてきた。今回、W および G 以外のパラメータを制御して f_a-f_s を拡大する手法を探るため、横モード結合型フィルタの解析手法として横方向のモード結合方程式を初めて導入した。

横方向のモード結合方程式を導入するために、横モード結合型フィルタにおいて、上下の共振器間で結合がある場合と無い場合での導波モードの様子を図 3 に示す。Φ_s,Φ_a は結合があるときのモードであり、すなわち横モード結合型フィルタの対称・非対称モードである。Φ_1,Φ_2 は結合がないときに各共振器内に存在するモードであり、次式で表される。

$$\Phi_1(x,t) = \phi_1 f_1(x) e^{j\omega_1 t} \quad (3)$$

$$\Phi_2(x,t) = \phi_2 f_2(x) e^{j\omega_2 t} \quad (4)$$

ω_1,ω_2: 各モードの角周波数
f_1,f_2 : 各モードのプロファイルを表す関数
ϕ_1,ϕ_2 : 各モードの振幅

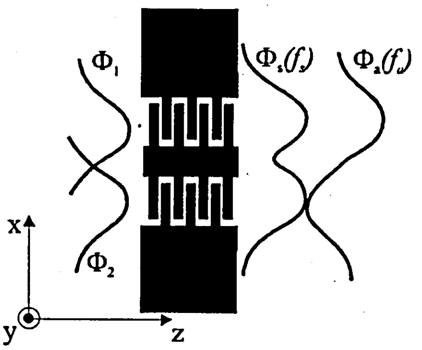


図 3　共振器内に存在する導波モードのモードプロファイル

ここで、各モードのプロファイルは y 方向には一定とし、z 方向に関しては以下に示すモード結合方程式には影響を与えないので省略した。共振器を結合させた場合のモード結合方程式は次のようになる[6,7]。

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = j\omega_1\Phi_1 + j\kappa_{12}\Phi_2 \quad (5)$$

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = j\omega_2\Phi_2 + j\kappa_{21}\Phi_1 \quad (6)$$

$$\kappa_{12} = \kappa_{21}^{*} = \kappa \quad (7)$$

ここで、κ_{12}および κ_{21}はモード間結合係数である。式(5)(6)のモード結合方程式の解は次式で表される。

$$\Phi_1 = \phi_s e^{j(\omega_c-\Delta\omega)t} + \phi_a e^{j(\omega_c+\Delta\omega)t} \quad (8)$$

$$\Phi_2 = \frac{\omega_c'-\Delta\omega}{\kappa}\phi_s e^{j(\omega_c-\Delta\omega)t} + \frac{\omega_c'-\Delta\omega}{\kappa}\phi_a e^{j(\omega_c+\Delta\omega)t} \quad (9)$$

$$\omega_c = \frac{\omega_1+\omega_2}{2},\quad \Delta\omega = \sqrt{\frac{(\omega_2-\omega_1)^2}{2}+\kappa^2} \quad (10)$$

$$\omega_c' = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$$

式(8)(9)から、2 つの共振器が結合した場合、Φ_1および Φ_2はそれぞれ角周波数が $\omega_c-\Delta\omega$ と $\omega_c+\Delta\omega$ の 2 つのモードから成っているのがわかる。この 2 つのモードが対称モードと非対称モードに相当し、その角周波数 ω_sおよび ω_aはそれぞれ $\omega_c-\Delta\omega$、$\omega_c+\Delta\omega$ となる。従って、対称モードと非対称モードとの周波数差は次のようになる。

$$f_a - f_s = (\omega_a - \omega_s)/2\pi = 2\Delta\omega/2\pi \quad (11)$$

式(11)より、対称・非対称モードの周波数差を大きくして通過帯域幅を拡大するには、$\Delta\omega$ を大きくすればよいことがわかる。

$\Delta\omega$ について考える。式(10)より $\Delta\omega$ は平方根内の2つの項に依存している。しかし、横モード結合型フィルタの上下の共振器の構成が等しい場合、$\omega_1=\omega_2$ となり、結局 $\Delta\omega$ はモード間結合係数 κ にのみ依存することになる。ここで光導波路の場合、モード間結合係数は以下の式で与えられる[6,7]。

$$\kappa_{12} = c\omega \cdot \Delta\varepsilon \int_{IDT2} f_1(x)^* \cdot f_2(x) dx \qquad (12)$$

c はモード振幅の規格化に関する定数であり、$\Delta\varepsilon$ は導波路部の誘電率変化分であり、導波路内で一定の値とする。式(12)の光導波路に対するモード間結合係数が SAW 導波路でも成り立つとすれば、κ は式(12)の積分項にのみ依存することになる。なぜなら、誘電率変化分 $\Delta\varepsilon$ は IDT の電極材料・膜厚や電極指のメタライゼーションレシオが決まると一定の値となるからである。従って、式(12)の積分項の値を大きくすることで、モード間結合係数 κ が大きくなり、対称・非対称モードの周波数差を広げられる。

さらに、式(12)中の積分項について考える。この積分項は、結合がない場合の導波モードの空間的重なりの程度を表している。図 4 に、モードの空間的重なりの様子を示す。図 4 中の斜線部分がモードの空間的重なりを表しており、κ を大きくするにはこのモードの空間的重なりの程度を高めればよいことになる。

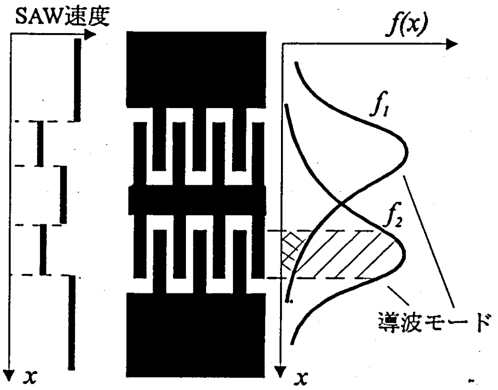


図 4　導波モードの空間的重なり

2．3　共振器間ギャップ部の速度に対する $f_a - f_s$ の変化

図 4 に示した導波モードの重なりの程度を高めるには、各々の導波モードを相手側導波路に漏らしてやればよい。これには共振器間ギャップ部の SAW 速度の低減が有効である。なぜなら、共振器間ギャップ部の SAW 速度を低減することで、導波路である IDT 電極指交差部と共振器間ギャップ部との速度差が小さくなるため、共振器間ギャップ側のモードの閉じ込めが弱くなる。この結果、相手側導波路への導波モードの漏れが多くなるからである。

共振器間ギャップ部のＳＡＷ速度をパラメータとして導波モードの空間的重なりを表す(12)式の積分項を計算した結果を図 5 に示す。各領域の SAW 速度は、v_{idt} = 3102 m/s、v_{bus} = 3150 m/s とし、IDT 電極指交差幅は 7 λ とした。λ は IDT の電極周期である。共振器間ギャップ部の SAW 速度を低減することで導波モードの空間的重なりは急激に増加することが確認された。

以上の横方向のモード結合理論からの予測を検証するために、式(1)(2)に示した分散関係式を用い、共振器間ギャップ部の SAW 速度をパラメータとして対称・非対称モードの周波数差を計算した。結果を図 6 に示す。予想通り、共振器間ギャップ部の速度を低減することで対称・非対称モードの周波数差が大きくなるのが確認できた。

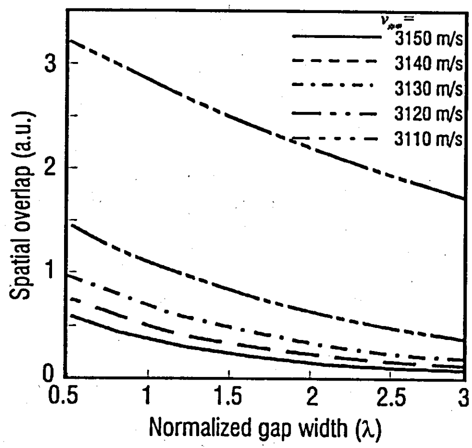


図 5　導波モードの空間的重なりの変化

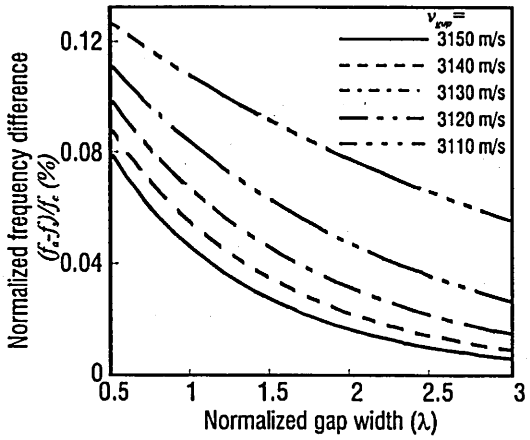


図 6　対称・非対称モードの周波数差の変化

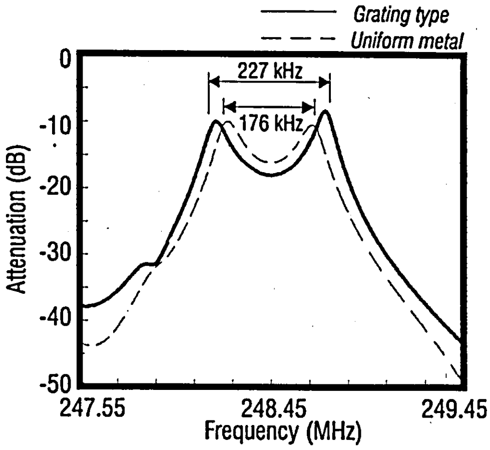


図 8　共通グランドバー形状による通過特性の変化

3．共振器間ギャップ部のＳＡＷ速度低減の実現

前節の検討結果を踏まえ、共振器間ギャップ部のSAW 速度を低減する手法として、図 7 に示すように共通グランドバーをグレーティング形状にした電極構造を提案した。

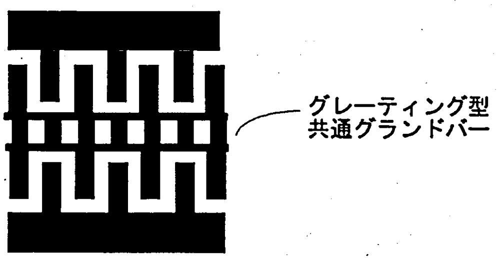


図 7　共振器間ギャップ部のＳＡＷ速度低減のため電極構造

共通グランドバーをグレーティング形状にすることにより、IDT 電極指交差部と共振器間ギャップ部との電極形状が類似してくるため、この 2 つの領域の速度差が小さくなる。つまり共振器間ギャップ部の SAW 速度が大幅に低減される。また、作製プロセスを新たに追加する必要もないため、共振器間ギャップ部の SAW 速度を低減する手段として極めて有効な手法である。グレーティング形状の共通グランドバーを用い、ST カット水晶基板上で、中心周波数 248 MHz の横モード結合型フィルタを作製した。IDT の電極周期 λ=12.5 μm、電極指交差幅 W=7 λ、共振器間ギャップ部の幅 G=1.5 λ であり、一段構成とした。通過特性を図 8 に示す。比較のため、均一膜の共通グランドバーを用いたときの特性を点線で示す。外部マッチング回路を付加せずに 50 Ω 系で測定を行った。共通グランドバーをグレーティング形状にすることで、対称・非対称モードの周波数差は、29 % 増加するのが確認でき、W、G を変化させずに対称・非対称モードの周波数差を拡大することができた。

次に、f_a−f_s をさらに拡大するために、共振器間ギャップの幅 G を 1 λ まで縮小し、SAW 速度もさらに低減することを考えた。まず、共振器間ギャップ部の速度をさらに低減したときの対称・非対称モードの周波数差変化の計算結果を図 9 に示す。

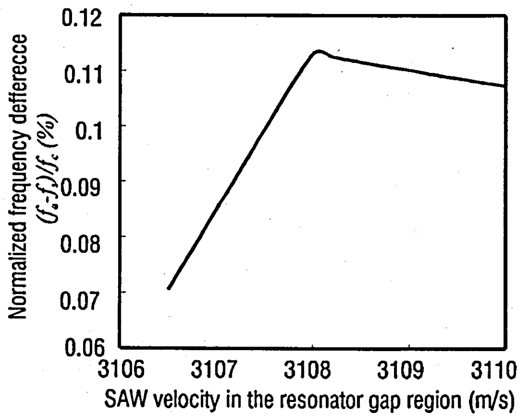


図 9　共振器間ギャップ部の速度をさらに低減させたときの対称・非対称モードの周波数差の変化

共振器間ギャップ部の速度を低減しすぎると、逆に対称・非対称モードの周波数差が急激に小さくなる

ことがわかった。つまり、ある最適な共振器間ギャップ部の速度で、f_a-f_s は最大となる。この結果を実験により確かめるため、共通グランドバーのグレーティングメタライゼーションレシオを大きくしてSAW速度をさらに低減し、対称・非対称モードの周波数差を評価した。IDT電極指のメタライゼーションレシオは 50％ である。結果を図 10に示す。

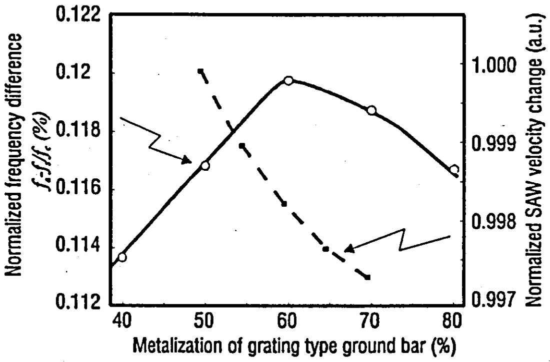


図 10グレーティングのメタライゼーションレシオに対する対称・非対称モードの周波数差の変化

SAW 速度は、グレーティングのメタライゼーションレシオの増加とともに減少するが、対称・非対称モードの周波数差は、メタライゼーションレシオが60％以上になると急激に減少した。この結果、共振器間ギャップ部の速度には最適値が存在することを実験により確認でき、現状の設計条件では、共通グランドバーが 60 ％のグレーティングのときに、対称・非対称モードの周波数差が最大となった。

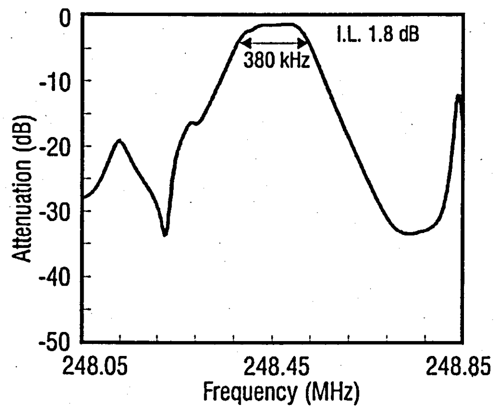


図 11 整合回路を付加したときのフィルタ特性

次に、f_a-f_s を広げたときに、平坦な通過帯域が得られるかを確認するため、フィルタの入出力端に整合回路を付加して特性を評価した。結果を図 11 に示す。リップルのない平坦な通過帯域が得られ、3 dB帯域幅は 380 kHz を確保できた。これは、比帯域幅 0.15 ％に相当する。

また、通過帯域幅を拡大したときの挿入損失の変化を図 12 に示す。通過帯域幅を 400 kHz まで拡大しても挿入損失の増加は見られなかった。以上の結果、共振器間ギャップ部をグレーティング形状にすることで、挿入損失を増加させずに通過帯域幅を拡大できることが確認できた。

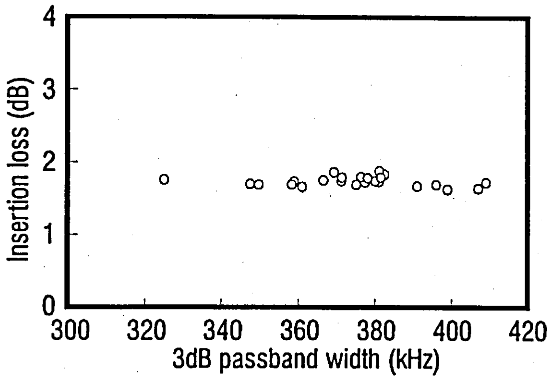


図 12 通過帯域幅に対する挿入損失の変化

4. フィルタ特性

横モード結合型フィルタを 2 段にカスケード接続し、PHS および GSM 向けフィルタを作製した。測定は、入出力端にのみ整合回路を付加して行った。PHS 向けフィルタの特性を図 13 に示す。

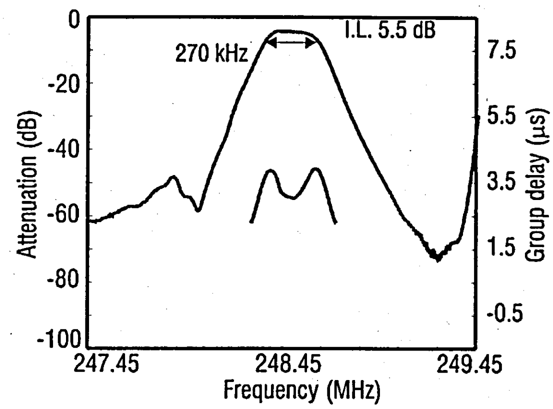


図 13 PHS 向け 248 MHz フィルタの特性

要求帯域幅 220 kHz に対して、3 dB 帯域幅 270 kHz を確保できた。挿入損失は 5.5 dB 以下、群遅延時間リップルは 1 μs 以下であった。また、±600 kHz の隣接チャネルでの減衰量は 45 dB 以上が得られた。

次に、中心周波数 400 MHz の GSM 向け IF フィルタの特性を図 14 に示す。要求帯域幅 160 kHz に対して、3 dB 帯域幅 360 kHz 以上が得られた。また、±400 kHz での減衰量は 20 dB 以上である。挿入損失は 4.5 dB 以下、群遅延時間リップルは 1 μs 以下と良好な特性を得た。

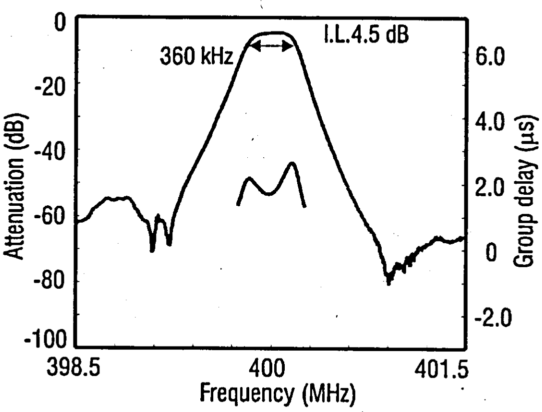


図 14　GSM 向け 400 MHz フィルタの特性

フィルタのパッケージサイズは、PHS 向けフィルタが 5×7mm²、GSM 向けフィルタが 5×5mm² と小型である（図 15）。

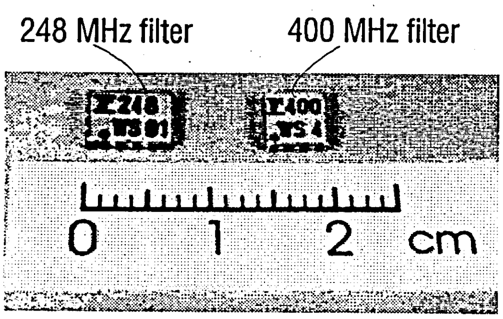


図 15 作製したフィルタの外観写真

5. まとめ

横モード結合型フィルタの通過帯域幅拡大を目的とし、横方向のモード結合理論を適用して解析を行った。その結果、共振器間ギャップ部の SAW 速度を低減することで通過帯域幅を拡大できることを見出した。次に、共振器間ギャップ部の SAW 速度を低減する方法として、共通グランドバーをグレーティング形状にすることを提案し、W=7 λ、共 G=1.5λのとき、対称・非対称モードの周波数差が 29 %増加することを確認した。また、帯域幅を拡大したときの挿入損失の変化を評価し、中心周波数 248 MHz のとき、3 dB 帯域幅を 400 kHz まで拡大しても損失が変化しないことを確認した。この結果、共通グランドバーをグレーティング形状にすることが優れた帯域幅拡大の手法であることを確認した。最後に、水晶基板上で横モード結合型フィルタを 2 段にカスケード接続して PHS および GSM 向けフィルタを作製し、比帯域幅～0.1 %を有する良好な特性を実現できた。

参考文献

[1] H.F. Tierstein and R.C. Smythe, "Guided Acoustic Surface Wave Filters", IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, pp.293-294 (1975).

[2] A. Yamada and H. Shimizu, "Double Mode Filter by Elastically Coupled SAW Resonators", Paper of the Technical Group on Ultrasonics, IEICE , Japan, US77-33, pp.29 (1977).

[3] M. Tanaka, T. Morita, K. Ono and Y. Nakazawa, "Narrow Bandpass Filters using Double-Mode SAW Resonators on Quartz", 38th Frequency Control Symposium, pp.286-293, (1984).

[4] W.D. Hunt, T. Cameron, J.C.B. Saw, Y. Kim and M.S. Suthers, "Mode Profiles in Waveguide-Coupled Resonators", IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, pp45-50, (1992).

[5] R.V. Schmidt and L.A. Coldren, "Thin Film Acoustic Surface Waveguides on Anisotropic Media", vol.SU-22, No.2, pp.115-122, (1975).

[6] 西原，春名，栖原，"光集積回路" オーム社 (1985).

[7] H.A. Haus and W. Huang, "Coupled-Mode Theory", Proceedings of IEEE, vol.79, no.10, pp.1505-1518,(1991).

輻射科学研究会資料　RS 97-4

ストレッチパルス光ファイバ通信

松本正行（大阪大学）　H. A. Haus（MIT）

平成９年５月３０日

ストレッチパルス光ファイバ通信

松本正行（大阪大学），H. A. Haus（MIT）

あらまし　正と負の群速度分散をもつ光ファイバを交互に接続した伝送路を伝搬する準安定なＲＺ（Return-to-Zero）非線形パルスは，分散マネージソリトン（Dispersion-managed soliton），分散アロケートソリトン（Dispersion-allocated soliton）あるいはストレッチパルス（Stretched pulse）などと呼ばれている．これらの非線形パルスは，伝送方向に均一な異常分散性をもつファイバ中の光ソリトンよりも優れた伝送特性をもつ可能性があるとして，現在多くの研究機関で精力的な研究がすすめられている．本報告では，これらの非線形パルスの伝搬特性を理論的に解析し，長距離大容量光ファイバ通信における信号パルスとして用いた場合の特徴について論じる．

１．まえがき

均一な異常分散性をもつ光ファイバ中の光波包絡線の振舞いは，群速度分散とKerr非線形性だけが作用する理想的な条件のもとで，非線形シュレディンガー方程式によって記述される[1]．非線形シュレディンガー方程式は無限に長い距離にわたって波形が壊れない安定な孤立波（ソリトン）を解としてもつので [1],[2]，このソリトンパルスを情報のキャリアとして用いれば長距離大容量の光ファイバ通信が実現できる．これまでに，総伝送容量100Gbit/s（20Gbit/s x 5 チャネル）伝送距離10,000 km [3]，あるいは，総伝送容量80Gbit/s（10Gbit/s x 8 チャネル）伝送距離10,000km[4] のソリトン伝送実験が報告されており，NRZ（Non-Return-to-Zero）信号を用いた従来の線形伝送方式 [5],[6] と同程度あるいはそれ以上の性能を有する通信システムが実現可能であることが示されている．

ところで最近，正と負の群速度分散をもつファイバを交互に接続した伝送路においても，非線形パルスがほぼ安定に伝搬することが見出され，従来の光ソリトンとの性質の違いや長距離伝送に用いた場合の利点について多くの研究がなされている．本報告では，このようなファイバの群速度分散の符号が周期的に反転するような伝送路を伝搬する準安定なパルス（ここでは主としてストレッチパルスと呼ぶ）に関する性質を理論的に明らかにする．

２．研究の背景

光ソリトン伝送の伝送容量および伝送距離を制限する主要な原因の一つに伝送路に挿入された光増幅器が発生する雑音によってもたらされるゴードン・ハウス時間ジッタがある[7]．これは，ソリトンに雑音が重畳された時に生じるソリトンの中心周波数の揺らぎが，ファイバの分散性を介して受信端でパルスの時間揺らぎとして現れる効果であり，時間揺らぎが許容値よりも大きくなると符号誤りが発生する．

この時間ジッタを抑圧するための方法として，伝送路中に帯域通過フィルタを挿入することによってソリトンの周波数揺らぎを低減する，または，伝送路中に信号パルス列と同期した振幅変調器を挿入することによってソリトンの時間揺らぎを直接抑圧する，という方法があり [8]，前述の長距離ソリトン伝送実験 [3],[4]ではこれらの方法が採用されている．しかしながら，伝送路中にこれらの制御素子を挿入することは，中継増幅器の構成を複雑にし，システムの信頼性を損なう要因となるという難点をもつ．

ソリトンのゴードン・ハウス時間ジッタを低減する他の方法として，伝送路に周期的に分散補償を施す方法がある．つまり，数増幅器スパンごとに大きな正常分散性をもつ短距離の分散補償用ファイバを挿入することによって，局所的にはソリトンが伝送されるようにファイバの分散性を異常分散に保ちながらシステム全体については累積分散が小さくなるようにファイバの分散性を設定するのである [9]．Suzukiらはこの方法を用いることによって，フィルタや同期変調器を用いることなく長距離のソリトン伝送（20Gbit/s，9000km）が可能になることを実験的に示した[10]．またこのような分散補償の考え方は，すでに敷設された標準ファイバ（ゼロ分散波長=1.3μm帯）を1.5μm帯で動作するソリトン伝送用ファイバにアップグレードする場合や，分散値に大きなばらつきがあるファイバを接続してソリトン伝送路として用いる場合にも有効である [11],[12]．これらの実験や考察が契機となって，伝送方向に不均一な分散分布をもつファイバ伝送路中の非線形パルス伝搬に関する研究が活発になった[13]-[16]．特に，Smith らは周期的に群速度分散の符号が反転する伝送路におけるパルス伝搬の数値シミュレーションを行い，定常的なパルスがほぼ安定に伝搬することを示した[13]．さらに，パルス波形が通常のソリトンのsech形からずれることや，パルスのエネルギーがこの伝送路の平均分散値から計算されるソリトンのエネルギーよりも大きくなることを明らかにした．

一方，ファイバ中のパルス伝搬における不均一な分散配置の効果は，ファイバリングレーザ内のパルス伝搬にも当てはまる．Tamuraらは正と負の群速度分散をもつ２つのファイバから構成される受動モード同期ファイバリングレーザによって生成されるサブピコ秒パルスが，均一な分散性をもつソリトンファイバリングレーザから生成されるパルスよりも大きいエネルギーをもつことを実験的に観測した [17]．これは，ファイバの分散性の周期的な変化に伴ってパルス幅が圧縮と伸長を繰り返すために，パルスが感じる非線形性がソリトンレーザの場合よりも小さくなるためである．そして，このようなファイバリングレーザをストレッチパルスファイバリングレーザと名付けた．また，Hausらはマスター方程式にもとづく理論解析を行い，レーザ出力パルスの諸パラメタを与える式を導いた[18]．

以下では，文献[18]の方法を用いて，周期的に群速度分散の符号が反転する伝送路におけるストレッチパルスの特性を明らかにし，さらにより実際的な伝送路におけるストレッチパルスの長距離伝搬特性を数値シミュレーションによって明らかにする[19],[20]．

３．マスター方程式に基づく解析

本報告では，同じ長さの異常分散ファイバと正常分散ファイバが交互に接続された伝送路を想定して解析を行う．基準値 D_0 で規格化した群速度分散パラメタを異常分散，正常分散ファイバでそれぞれ D+d，-D+d とおく．ただし D は周期的な分散変動の振れ幅を与える量であり，d は平均分散である．さらに，$z_d=2\pi c t_0^2/(\lambda^2 D_0)$ で規格化した各ファイバセグメントの長さを L とする．ただし，t_0 は時間を規格化する際の基準量である．また，伝送方向の座標 z の原点を異常分散ファイバセグメントの中点に置く．なお，本節での解析では，ファイバの損失は分布的に補償されている（損失がない）とみなし，また，フィルタと過剰利得の効果を解析に含める．

伝送路中に存在するすべての効果を伝送方向に平均化すると，基準面（ z=0）における規格化された電場包絡線 q(t) に対する定常状態におけるマスター方程式が

$$ikq = i\frac{d}{2}\frac{d^2q}{dt^2} + i\frac{\phi}{2L}q + gq + \beta\frac{d^2q}{dt^2} \tag{1}$$

のように導かれる．ここで，k は電場の伝搬定数，ϕ は分散変動の１周期にわたる非線形位相シフト量，gは過剰利得係数，β はフィルタの強度を与える係数である．

次に，非線形位相シフト量が $\phi=\phi_0-\phi_2 t^2$ のように時間 t の２次関数で表わされると仮定する．文献[18]では，位相シフトはガウス関数で表わされる線形解 u(z,t) の２乗の積分

$$\phi = \int_{\text{one period}} |u(z,t)|^2 dz \tag{2}$$

ただし

$$u(z,t) = \frac{A_0}{\sqrt{1+i(z-a)D/\tau_0^2}}\exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_0^2}\frac{1}{1+i(z-a)D/\tau_0^2}\right) \tag{3}$$

（この式は異常分散区間 -L/2<z<L/2 で成り立つ式である．正常分散区間 L/2<z<3L/2 では D の符号を反転し，またパルス幅が最小になる位置 a を L-a で置き換えた式が成り立つ．また上式中の A_0 と τ_0 はパルスのピーク振幅および最小パルス幅である．）で見積もられ，係数 ϕ_0 および ϕ_2 は ϕ の時間 t に関する展開式の０次および２次の項の係数として与えられている．しかしながら，一般にはこの手順は正しい ϕ_0 と ϕ_2 を与えず，この理論から導かれる定常解の振幅が数値シミュレーションによって求まる値と大きく食い違う原因となっている．そこでここでは，ϕ_0 と ϕ_2 をより正確に計算するために変分法 [21],[22] を用いる．変分法の手順によると，非線形シュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{D'(z)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + |v|^2 v = 0 \tag{4}$$

は

$$v(z,t) = A(z)\exp\left[-\frac{t^2}{2\tau^2(z)} + ib(z)t^2 + i\theta(z)\right] \tag{5}$$

で表されるガウス波形仮定のもとで

$$\frac{d\tau}{dz} = 2D'\tau b \quad \text{(6a)} \qquad \text{および} \qquad \frac{db}{dz} = -\frac{E_0}{2\sqrt{2}\tau^3} + \frac{D'}{2\tau^4} - 2D'b^2 \quad \text{(6b)}$$

という連立常微分方程式に変換される．ただし $D'(z)$ は異常（正常）分散区間においては D（-D）という値をとり，また，$E_0 = \tau(z)A^2(z)$ は定数である．分散変動の1周期にわたる位相シフト量は，式(6)の解を用いて $\theta(2L) - \theta(0) + i[b(2L) - b(0)]t^2$ で与えられる．次に，位相シフト量，特にその2次の係数 ϕ_2 を陽に与える表現式を求めるために，式(6)を近似的に解く．そのために式(6)を $E_0 = 0$ とした場合の線形解のまわりで近似的に線形化する．つまり，$b = b_L + \tilde{b}$ ($|\tilde{b}| << |b_L|$) および $\tau = \tau_L$ を式(6)に代入し，$\tilde{b}$ に関する方程式を導く．ここで，線形解 $\tau_L(z)$ および $b_L(z)$ は，解(3)とガウス波形仮定(5)とを等置することによって求まる．$\tilde{b}$ に関する方程式

$$\frac{d\tilde{b}}{dz} = -\frac{E_0}{2\sqrt{2}\tau_L^3} - 4D'b_L\tilde{b} \tag{7}$$

を解くことによって，非線形位相シフトの2次の係数が

$$\phi_2 = -[\tilde{b}(2L) - \tilde{b}(0)] = \frac{A_0^2}{\sqrt{2}D}\left\{\frac{\sinh^{-1}[(L/2-a)D/\tau_0^2]}{1+(L/2-a)^2D^2/\tau_0^4} + \frac{\sinh^{-1}[(L/2+a)D/\tau_0^2]}{1+(L/2+a)^2D^2/\tau_0^4}\right\} \tag{8}$$

のように求まる．

これらの表現式および $q(t)=u(z=0,t)$ をマスター方程式(1)に代入し，t の次数が同じ項を集めることによって導かれる代数方程式を解くと，定常状態におけるパルスの諸パラメタが次のように求まる．

・最小パルス幅 $\quad \tau_0 = \sqrt{\beta/(2g)} \quad$ (9)

・パルス幅が最小となる位置 $\quad a = (\sqrt{d^2/4+\beta^2} - d/2)/(2gD) \quad$ (10)

・パルスが最も圧縮された時のピーク電力

$$A_0^2 = \frac{2\sqrt{2}gL}{a}\left\{\frac{\sinh^{-1}[(L/2-a)D/\tau_0^2]}{1+(L/2-a)^2D^2/\tau_0^4} + \frac{\sinh^{-1}[(L/2+a)D/\tau_0^2]}{1+(L/2+a)^2D^2/\tau_0^4}\right\}^{-1} \tag{11}$$

式(9)は，通常のソリトン伝送の場合と同様に，パルス幅がフィルタの強さと過剰利得の大きさの比で決まる値に安定化されることを示している [8]．フィルタと過剰利得がともにゼロの場合は a=0 となる．また，この場合，τ_0 と A_0 の値は式(9)および(11)のようにユニークには決まらないが，これらの値の間の関係式が導かれ，この関係式を使うとパルスのエネルギーが

$$E = \sqrt{\pi}\tau_0 A_0^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{DLd}{\tau_0^3}\frac{1+[DL/(2\tau_0^2)]^2}{\sinh^{-1}[DL/(2\tau_0^2)]} \tag{12}$$

のように与えられる．この式は，分散が周期的に変動するファイバ伝送路におけるストレッチパルスのエネルギーが均一な分散をもつファイバ中の通常のソリトンのエネルギーよりもどれだけ増大するかを表わす係数を与える．Smithらは，ストレッチパルスのエネルギー増大係数を数値計算との比較によって経験的に見積もっており，そのエネルギーを

$$E = \frac{2\ln(1+\sqrt{2})d}{\sqrt{\ln 2}\,\tau_0}\left[1+\alpha\left(\frac{DL}{2\ln 2\,\tau_0^2}\right)^2\right] \quad (\alpha=0.7) \tag{13}$$

で表している[23]．図 1 に式(12)および(13)で与えられるパルスエネルギーと，数値計算によって求めたパルスエネルギーとを比較する．図 1 より，群速度分散の振れ幅 D と各ファイバ区間の長さ L の積が大きいほど，定常パルスのエネルギーが大きくなることがわかる．これは，DL が大きいほど 1 周期内でのパルス幅の圧縮・伸長の度合が大きくなり，パルスが感じる非線形性が小さくなるためである．また，$DL/\tau_0^2 < 2$ の場合は式(13)のほうが数値結果との差が小さいが，DLが大きくなると式(12)のほうがより精度よく数値結果を説明することがわかる．

図 2 は，フィルタの効果を含めた場合のパルス幅 vs 伝搬距離を，ここで導いた理論と数値計算とによって求めた結果である．両者にある程度の差がみられるが，最もパルスが圧縮されたときのパルス幅や，分散変動の 1 周期の中でパルス幅が最小になる位置などはほぼ一致している．

4．実際的な伝送路モデルに対する数値シミュレーション

前節ではファイバの損失を無視し，またフィルタの効果を分布的に取り入れたモデルを用いて解析を行った．ここでは，より実際に近い伝送路モデルに対して数値シミュレーションを行う．伝送路は長さが50kmの異常分散性のファイバと正常分散性のファイバからなるとする．ファイバの損失を0.22dB/kmとし，この損失を補うために異常分散性を有するファイバ区間の直後に増幅器を挿入する．したがって増幅器の間隔は100kmとなる．また，増幅器の直後に帯域幅1.9nmのローレンツ形の周波数応答特性をもつ帯域通過フィルタを挿入する．また，伝送路の平均群速度分散（前節の D_0d）は以下の全ての計算において0.094ps/nm/km（異常分散）であるとす

る．

図３に2000km，3000km，および4000km伝送後のパルス波形を示す．ファイバの群速度分散値の振れ幅（前節のD_0D）は2.35ps/nm/kmである．同図より，パルスは安定に伝搬しており，パルスに付随する分散性の裾の大きさはピーク電力より50dB以上小さいことがわかる．なお，同図は増幅器の位置（異常分散性をもつファイバ区間の終端）におけるパルス波形を示しており，そのパルス幅は約14.8psであるが，分散変動の１周期の中でパルス幅は11.6ps と30psの間を変化する．また，ここに示したストレッチパルスのパス平均パルスエネルギーは0.036pJであり，この値は，同じ平均分散をもつ均一分散ファイバ中のソリトン（パルス幅を11.6psとする）のエネルギーの約2.6倍である．

また，図３には，前節で用いた変分法解析を１周期だけでなく全伝送距離にわたって適用して得られたパルス波形を点線で示している．パルスの中心部については変分法解析の結果は数値解析の結果とよく一致しており，非線形シュレディンガー方程式を忠実に解くかわりに，式(6)で与えられる常微分方程式を解くことによってもパルスのおおよその振舞いを把握できることがわかる．本節の数値計算においては，変分法解析によって求まった波形を初期値として数値シミュレーションを行っている．

次に，増幅器が発生する雑音の影響を考慮に入れてパルス伝搬のシミュレーションを行った．ここでは雑音を与える乱数を変えてパルスを繰返し伝搬させ，パルス時間位置のジッタとQファクタを計算した．Qファクタは，$Q=(\mu_1-\mu_0)/(\sigma_1+\sigma_0)$（ただし，$\mu_1$および$\sigma_1$は検波後のパルスのピーク値の平均値と標準偏差であり， μ_0およびσ_0は検波後のパルスのピークから十分離れた裾の値のそれである）で与えられ，パルスのエネルギージッタの大きさを表す．ビット誤り率がたとえば10^{-9}以下になるためには，Qファクタの値は約6以上でなければならない．また，20Gbit/sの伝送速度を想定した場合，パルスの時間ジッタの分散の許容値は約7.5ps^{2}である．図４に，ファイバの群速度分散の振れ幅がD_0D=2.35ps/nm/km および4.70ps/nm/kmの場合のストレッチパルス，および群速度分散が均一の場合のソリトン，の時間ジッタとQファクタを示す．同図より，ストレッチパルスのほうがソリトンよりもQファクタが大きく，かつ，時間ジッタが小さいこと，またその傾向は群速度分散の振れ幅が大きいほど顕著であることがわかる．これは，群速度分散の振れが大きく，増幅器スパン内でのパルスの圧縮・伸長率の大きなストレッチパルスほど，パルスエネルギーが大きく，雑音の影響を受けにくいためである[24].

図５は２つのパルスを隣接させて伝搬させた場合の衝突距離（非線形相互作用のために２個のパルスの中心位置が接近し衝突してしまうまでの距離）を群速度分散の振れ幅を変えて計算した結果である．分散の振れ幅が大きいほど，増幅器スパン内での最大パルス幅が大きくなり，隣接パルス間の相互作用が大きくなるため，衝突距離が短くなる．これは長距離ストレッチパルス伝送にとって好ましくない効果であり，これを防ぐためには隣り合うパルスの偏波方向を直交させるなどの対策が必要である[25].

５．むすび

正と負の群速度分散をもつ光ファイバを交互に接続した伝送路における準安定なＲＺパルス（ストレッチパルス）の伝搬特性を理論的に解析した．この非線形パルスは，平均分散値が同一の均一な異常分散性をもつファイバ中のソリトンよりもエネルギーが大きいため，伝送路に挿入される光増幅器からの雑音の影響を受けにくく，より長い距離を伝搬させることができる．あるいは，パルスエネルギーを一定に保つとするならば，ストレッチパルスの場合のほうが伝送路の平均分散値をゼロに近づけることができるため，ゴードン・ハウス効果などを低減できる．このことは，狭帯域フィルタや同期変調器などによる強力な伝送制御を施すことなく長距離の伝送システムを構成することができることを意味しており，実用化の際の大きな利点となる．現在，このような非線形パルスを用いた波長分割多重通信に関する研究が多くの研究機関ですすめられており，その発展が期待される．

参考文献

[1] A. Hasegawa and F. D. Tappert, Appl. Phys. Lett. 23, 142 (1973).

[2] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Soviet Phys. JETP, 34, 62 (1972).

[3] M. Nakazawa, K. Suzuki, H. Kubota, A. Sahara, E. Yamada, "100 Gbit/s WDM (20 Gbit/s x 5 channels) soliton transmission over 10,000km using in-line synchronous modulation and optical filtering", Optical Fiber Communication Conference (OFC'97) , PD21 (1997).

[4] L. F. Mollenauer, P. V. Mamyshev, and M. J. Neubelt, "Demonstration of soliton WDM transmission at up to 8 x 10 Gbit/s, error-free over transoceanic distances", Optical Fiber Communication Conference (OFC'96) , PD22 (1996).

[5] H. Taga, N. Takeda, K. Imai, S. Yamamoto, and S. Akiba, "111Gbit/s (22 x 5 Gbit/s), 9500 km transmission experiment using 980 nm pump EDFA 1R repeater without forward error correction", Optical Amplifiers and Their Applications Topical Meeting, PD5 (1996).

[6] N. S. Bergano, C. R. Davidson, M. A. Mills, P. C. Corbett, S. G. Evangelides, B. Pedersen, R. Menges, J. L. Zysking, J. W. Sulhoff, A. K. Srivastava, C. Wolf, and J. Judkins, "Long-haul WDM transmission using optimum channel modulation: A 160 Gb/s (32 x 5Gb/s) 9,300 km demonstration", Optical Fiber Communication Conference (OFC'97) , PD16 (1997).（この実験では一部のチャネルでＲＺパルスが使われている．）

[7] J. P. Gordon and H. A. Haus, "Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission", Opt. Lett. 11, pp.665-667 (1986).

[8] 例えば A. Hasegawa and Y. Kodama, Solitons in Optical Communication, Oxford University Press (1995).

[9] N. J. Doran, N. J. Smith, W. Forysiak, and F. M. Knox, "Dispersion as control parameter in soliton transmission systems", in A. Hasegawa(ed.), Physics and Applications of Optical Solitons in Fibers '95, pp. 1-14, Kluwer (1996).

[10] M. Suzuki, I. Morita, N. Edagawa, S. Yamamoto, H. Taga, and S. Akiba, "Reduction of Gordon-Haus timing jitter by periodic dispersion compensation in soliton transmission", Electron. Lett. 31, pp.2027-2029 (1995).

[11] M. Nakazawa and H. Kubota, "Optical soliton communication in a positively and negatively dispersion-allocated optical fibre transmission line", Electron. Lett. 31, pp.216-217 (1995).

[12] F. M. Knox, W. Forysiak, and N. J. Doran, "10 Gbit/s soliton communication systems over standard fiber at 1.55mm and the use of dispersion compensation", IEEE/OSA J. Lightwave Technol. 13, pp.1955-1963 (1995).

[13] N. J. Smith, F. M. Knox, N. J. Doran, K. J. Blow, and I. Bennion, "Enhanced power solitons in optical fibers with periodic dispersion management", Electron. Lett. 32, pp.54-55 (1996).

[14] I. R. Gabitov, "Averaged pulse dynamics in a cascaded transmission system with passive dispersion compensation", Opt. Lett. 21, pp.327-329 (1996).

[15] A. B. Grudinin and I. A. Goncharenko, "Increased amplifier spacing in soliton system with partial dispersion compensation", Electron. Lett. 32, pp.1602-1604 (1996).

[16] M. Nakazawa, H. Kubota, A. Sahara, and K. Tamura, "Marked increase in the power margin through the use of a dispersion-allocated soliton", IEEE Photon. Technol. Lett. 8, pp.1088-1090 (1996).

[17] K. Tamura, E. P. Ippen, H. A. Haus, and L. E. Nelson, "77-fs pulse generation from a stretched-pulse additive pulse mode locked all-fiber ring laser", Opt. Lett. 18, pp.1080-1082 (1993).

[18] H. A. Haus, K. Tamura, L. E. Nelson, and E. P. Ippen, "Stretched-pulse additive pulse mode-locking in fiber ring lasers : Theory and experiment", IEEE J. Quantum Electron. 31, pp.591-598 (1995).

[19] M. Matsumoto and H. A. Haus, "Stretched-pulse optical fiber communications", IEEE Photon. Technol. Lett. 9 (June 1997).

[20] M. Matsumoto, "Theory of stretched-pulse transmission in dispersion-managed fibers", submitted to Opt. Lett. (1997).

[21] D. Anderson, "Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers", Phys. Rev. A 27, pp.3135-3145 (1983).

[22] D. Anderson, "Nonlinear pulse propagation in optical fibers : a variational approach", IEE Proc. 132 J, pp.122-125 (1985).

[23] N. J. Smith, N. J. Doran, F. M. Knox, and W. Forysiak, "Energy-scaling characteristics in strongly dispersion-managed fibers", Opt. Lett. 21, pp. 1981-1983 (1996).

[24] N. J. Smith, W. Forysiak, and N. J. Doran, "Reduced Gordon-Haus jitter due to

enhanced power solitons in strongly dispersion managed systems", Electron. Lett. 32, pp.2085-2086 (1996).
[25] T. Georges and B. Charbonnier, "Pre-chirping and dispersion compensation for long-haul 20Gbit/s soliton transmission at 1.55mm on nondispersion-shifted fibers", Optical Fiber Communication Conference (OFC'97) , WH2 (1997).

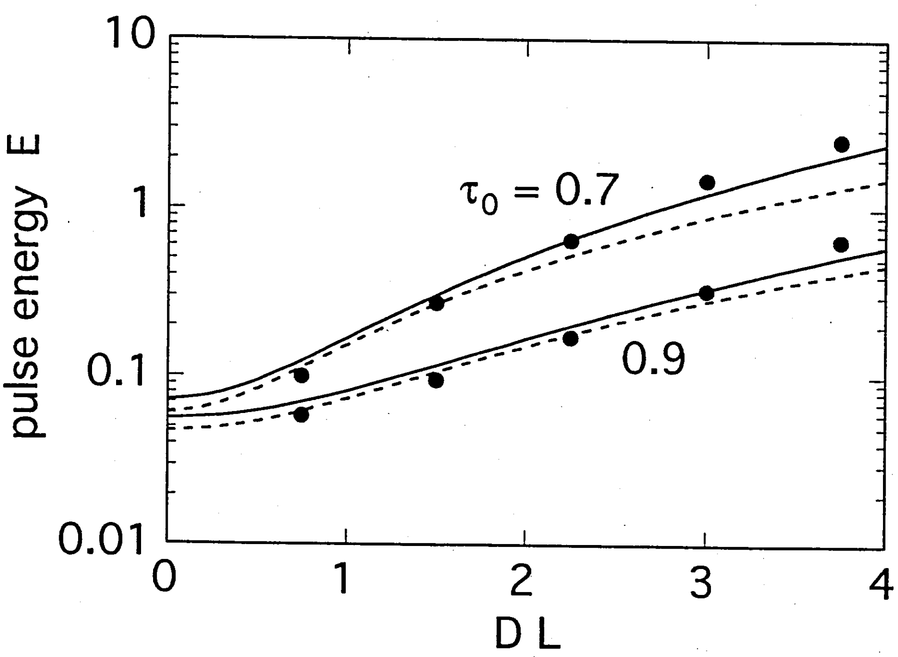
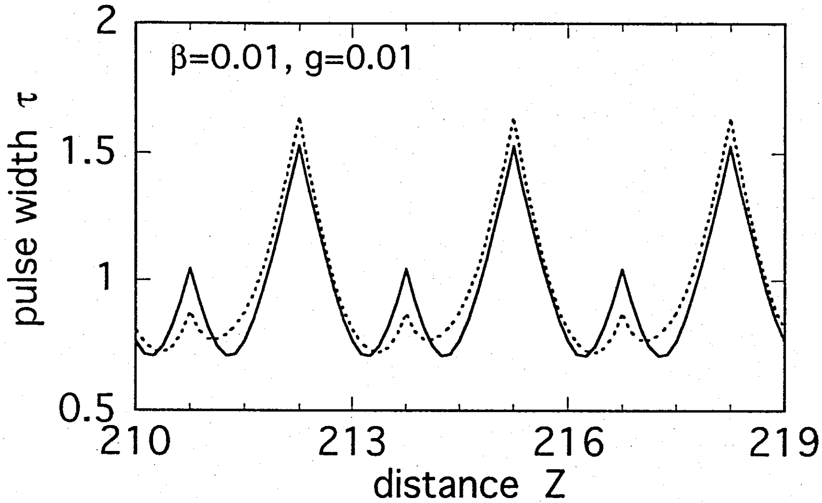
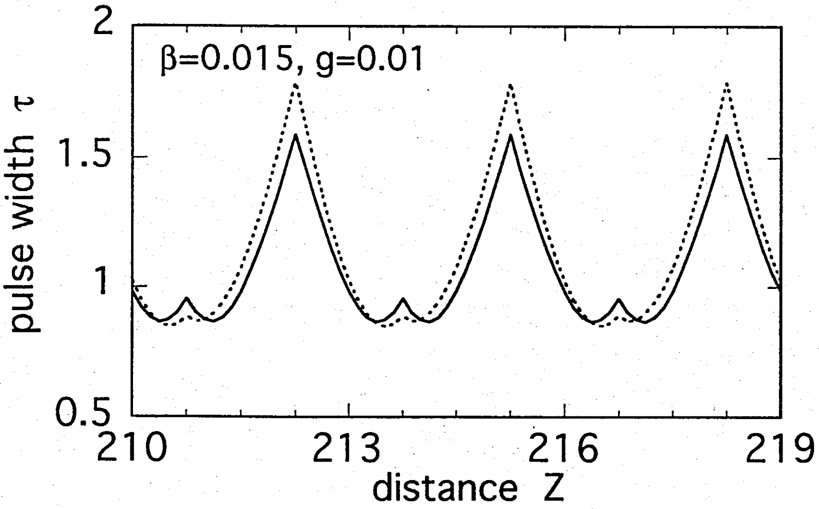


図1　　ストレッチパルスのエネルギーと DL の関係

実線：式(12)　破線：式(13)　黒点：数値計算結果（d=0.02, L=1.5）



(a) $\beta = 0.01$, $g = 0.01$



(b) $\beta = 0.015$, $g = 0.01$

図２　パルス幅の変動（D=1, d=0.02, L=1.5）

基準点（異常分散区間の中点）の位置は z=210+3n（nは整数）で表される．

実線：式(9)〜(11)で定まるパルスパラメタを用い，式(3)に従ってパルス幅を求めたもの．

点線：数値計算によって求めたパルス幅．

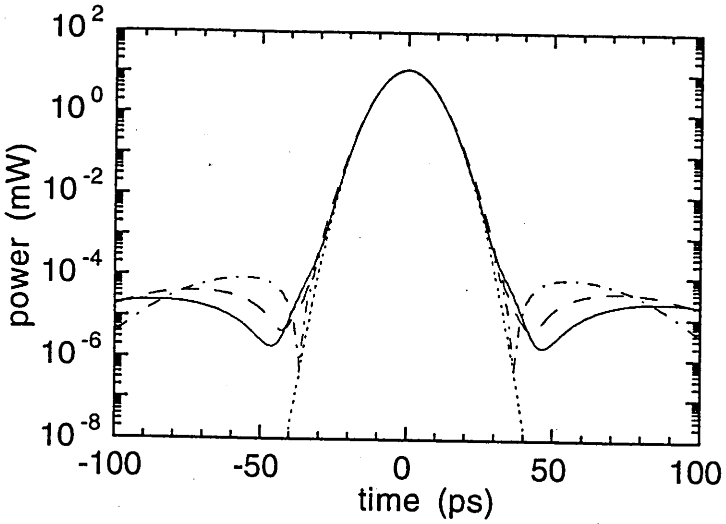


図3　　　　　　　　　ストレッチパルスの波形.

一点鎖線：2000km伝搬後，破線：3000km伝搬後，実線：4000km伝搬後
点線：変分法によって求めた定常解

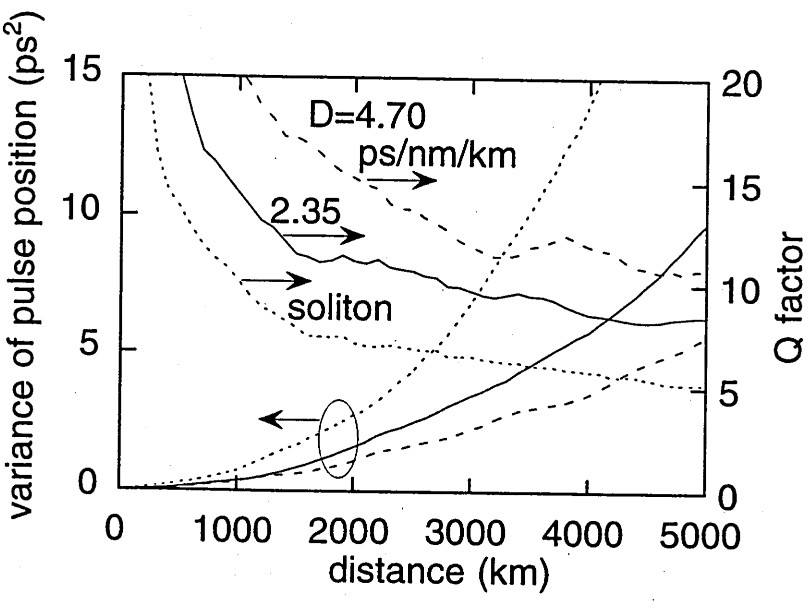


図4　ストレッチパルスおよびソリトンの時間ジッタとQファクタ

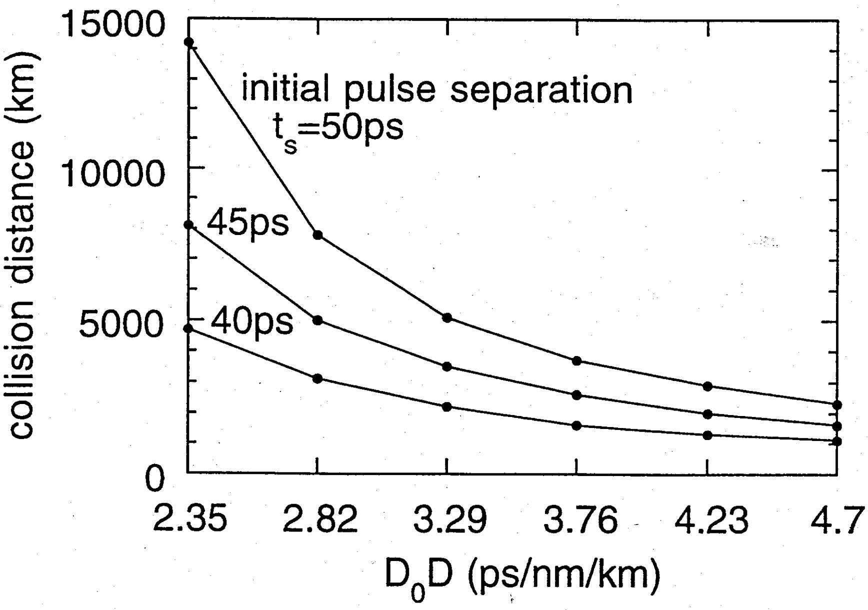


図５　２つのパルスの衝突距離と群速度分散の振れ幅 D_0D との関係
パルス幅（１周期のなかでの最小値）はおよそ11.6ps である.

輻射科学研究会資料
RS97-5

非線形誘電体導波路型
全光学スイッチおよび論理ゲート

岡 直人　金本 貴志　沖田 剛一（大阪大学）
倉薗 貞夫（大阪大学名誉教授）

1997 年 7 月 24 日 (木)
於　大阪大学工業会館

1 まえがき

通信や情報処理システムの大容量化超高速化にともない光信号処理デバイスへの期待が高まっている．中でも光スイッチや光論理ゲート [1, 2] は光集積回路において必要不可欠な素子であり，近年さかんにその可能性が模索されている．その中で，制御光パワにより信号光の経路を切り替える全光学スイッチ [3, 4] が提案されている．三次の非線形光学効果を利用した光スイッチは，光強度によって光信号を切り替えるので，電気光学効果を利用した光スイッチよりも速いスイッチング動作を示すと考えられる．

本稿では，まず三次の非線形光学効果を利用した全光学スイッチのモデルを提案し，次にこれを利用して、より速い論理ゲートを実現するために，直接光で制御を行う全光学論理ゲートを考え，その中の一つである XNOR ゲートのモデルを提案する。

解析手法としては、Crank-Nicolson 法を採用し透過境界条件 [5] を組み込んだ反復差分ビーム伝搬法 [6, 7] により行う。

2 全光学スイッチ

2.1 解析モデル

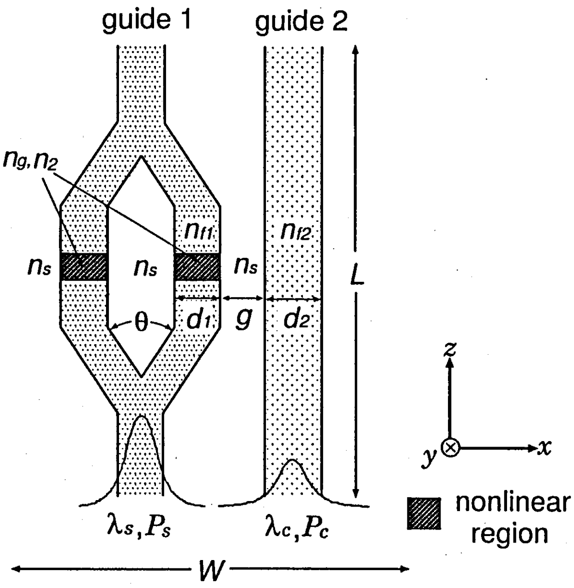


図 1: 非線形誘電体導波路型全光学スイッチのモデル

本稿で提案する全光学スイッチの解析モデルを図 1 に示す．このモデルは，光の伝搬方向を z 軸，これと垂直な横方向を x 軸とし，y 方向に一様なスラブ構造で，guide 1 および

guide 2 の二つの導波路から構成される.

guide 1 は波長λ_s, パワ P_sの信号光が入力される全長 L の Y 分岐型導波路対であり, コアおよびクラッドの屈折率をそれぞれ n_{f1} および n_s, 導波路幅を d_1, Y 分岐角をθとする. また, 図の斜線部に Kerr 効果を有する非線形誘電体を含む. なお, 非線形誘電体の線形屈折率, 非線形屈折率をそれぞれ n_g, n_2とする.

一方, guide 2 は波長λ_c, パワ P_cの制御光が入力される全長 L の直線型導波路であり, guide 1 の右のアームと距離 g 離して分布結合されている. また, コアの屈折率 n_{f2}および導波路幅 d_2の値はともに guide 1 の値とは異なる.

なお, 入力光には線形誘電体三層モデルに対する TE_0モードの光波を用いる.

guide 2 へ入力された制御光は, guide 1 の右のアームの線形部分でいったん完全結合し非線形誘電体部を伝搬した後, 再び guide 2 と完全結合して出力ポートから取り出される. このとき, guide 1 の右のアームの非線形誘電体の屈折率は Kerr 効果により制御光パワの大きさによって変化し, guide 1 へ入力された信号光の特性に影響を与える. すなわち, 制御光の入力パワが零（十分弱い）の場合には, guide 1 へ入力された信号光は Y 分波部でパワが左右のアームに等分配され, 非線形誘電体部を伝搬した後 Y 合波部において左右同位相で結合し guide 1 へ出力される. これに対し, 制御光の入力パワを増大させていくと, 非線形部で位相が変化するために信号光が Y 合波部において左右逆位相で結合されるような制御光パワ P_cが存在する. このような制御光パワ P_cが入力される場合, 信号光は Y 合波部で結合して高次モードとなってサブストレートへ放射され, guide 1 へはほとんど出力されない. したがって, 提案したモデルは制御光パワ P_cによって信号光出力のオン・オフが切り替わることが期待される.

さらに, このモデルは信号光と制御光の波長が異なることを利用して, guide 1 から信号光, guide 2 から制御光が常に分離して取り出されるよう以下のように工夫されている. guide 1 と 2 のコアの屈折率が異なる場合, 信号光からみた両導波路の位相定数は異なるが, 制御光からみると一致するような guide 2 の導波路幅 d_2が存在する. このようなパラメータを用いてそれぞれの導波路を構成すれば, 信号光の guide 2 への結合は, 位相定数が大きく異なるだけでなく, guide 1,2 の導波路間隔が十分広いこともありほとんど起こらないが, 制御光は二回の完全結合により所望の分離特性を得ることができる.

2.2 数値解析結果

実際に数値解析を行う際に用いる図 1のパラメータの値を表 1のように定める. ここで, 導波路の各部の長さはすべて信号光の波長λ_sで規格化している.

表 1: 解析に用いるパラメータ

信号光の波長	$\lambda_s = 0.515\mu$m
制御光の波長	$\lambda_c = 0.900\mu$m
guide 1 の導波路幅	$d_1 = 4.0\lambda_s$
guide 2 の導波路幅	$d_2 = 5.6\lambda_s$
guide 1,2 の導波路間隔	$g = 7.0\lambda_s$
伝搬方向に対する全長	$L = 13000\lambda_s$
導波路の分岐角	$\theta = 0.5°$
guide 1 のコアの線形屈折率	$n_{f1} = 1.550$
guide 2 のコアの線形屈折率	$n_{f2} = 1.549$
クラッドの線形屈折率	$n_s = 1.545$
非線形誘電体の線形屈折率	$n_g = 1.550$
非線形光学係数	$n_2 = 3.0 \times 10^{-14}\mathrm{m}^2/\mathrm{W}$

なお，信号光の波長$\lambda_s = 0.515\mu$m は Ar レーザを仮定し，制御光の波長$\lambda_c = 0.900\mu$m は InP レーザを仮定している．また，表中の d_2の値は前節で述べたように，guide 1 と 2 の結合部付近における屈折率分布が図 2のようなとき，制御光からみたときのみ両導波路の位相定数が一致するように選んでいる．すなわち，d_2に対する両導波路の位相定数を表す図 3により $d_2 = 5.6\lambda_s$とする．なお、横方向の解析領域幅 W=100λ_sとする。

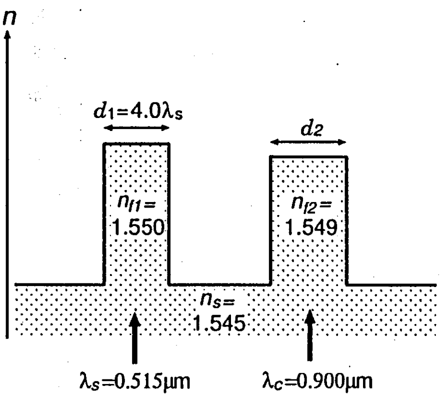


図 2: 結合部付近における屈折率分布

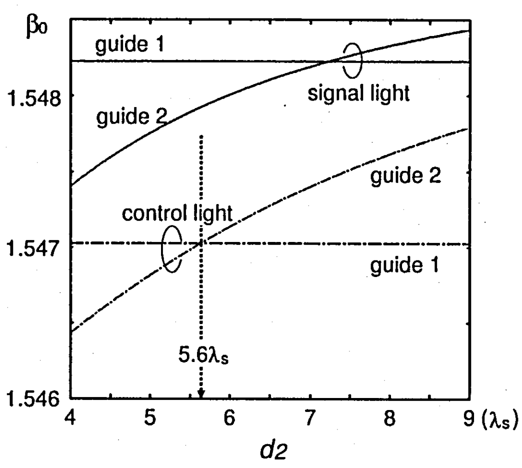


図 3: d_2に対する両導波路の位相定数

反復計算を行う FD-BPM を用いて数値解析を行うためには，提案したモデルを x 方向および z 方向に対して細かく分割する必要があるが，この分割数は実際の計算時間および解析精度に密接に係わるため，実際に計算を行う前にあらかじめ最適な値を定めておかなければならない．

ここでは，適当なパワの信号光および制御光を入力し，Δx またはΔz を変化させるときの二光波の透過率の推移を調べ，それらが安定している範囲内でできるだけ大きなきざみ幅の値を用いることにする．なお，ここでは信号光パワ 250mW/μm，制御光パワ 1mW/μm の二光波を用いる．

まず，図 4にΔz の値を $1\lambda_s$に固定し，Δx の値を 0.01 ～ $2\lambda_s$まで変化させる場合の二光波の透過率の推移を示す．なお，それぞれの曲線はすべて入力した guide の出力ポートにおける透過率を表し，x 軸にΔx をログスケールで表している．この図から，二光波の透過率はΔx の値が $0.1\lambda_s$付近まではほぼ一定で，$0.2\lambda_s$よりも大きくなると大きく変化することが分かる．

次に，図 5にΔx の値を $0.1\lambda_s$に固定し，Δz の値を 1 ～ $100\lambda_s$まで変化させる場合の二光波の透過率の推移を示す．ただし，x 軸はΔz をログスケールで表している．この図から，この解析手法ではΔz に関してはかなり安定であり，二光波透過率は $10\lambda_s$付近まで大きくしてもほとんど一定で，$20\lambda_s$を越えるあたりからやや変化することが分かる．

以上の結果より，この解析手法では x 方向に関しては屈折率変化が存在するために，あまりきざみ幅を大きく取ることができないが，z 方向に関しては本モデルのように分岐角θが十分小さければ，きざみ幅をかなり大きくとっても安定であることが分かる．したがって，計算時間および安定性を考慮して以後の計算にはすべて$\Delta x = 0.1\lambda_s$，$\Delta z = 10\lambda_s$を用いることにする．

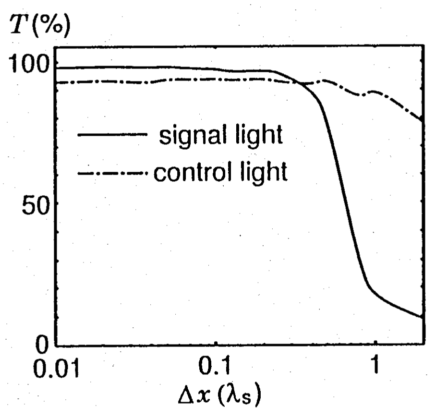


図 4: Δx に対する二光波の透過率の推移 (P_s=250mW/μm, P_c=1mW/μm, Δz=$1\lambda_s$)

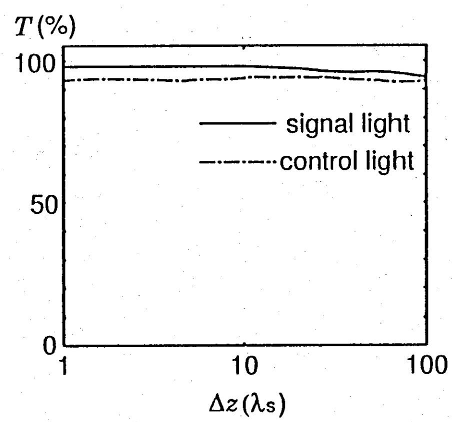


図 5: Δz に対する二光波の透過率の推移 (P_s=250mW/μm, P_c=1mW/μm, Δx=$0.1\lambda_s$)

本稿で提案した全光学スイッチでは，制御光パワを変化させることにより一定のパワの信号光出力のオン・オフの切り替えを行うため，まず最適な信号光パワ P_sの値を決めなければならない．したがって，まず図 1のモデルに対して 0.01mW/μm の制御光を guide 2 へ

入力し，guide 1 へ入力する信号光パワを変化させたときの信号光および制御光の透過特性を図 6に示す．透過率 T は入出力ポートでのパワ P_{in}および P_{out}を用いて、

$$T = P_{out}/P_{in}$$

で与えられる。なお、P_{out}は正規モードとの重ね合わせ積分で求められる。

この図から，信号光パワが 150mW/μm のときに信号光，制御光ともに高い透過率を示し，他のポートへ漏れるパワが低いことがわかる．なお，実際のデバイスの厚さが 1μm 程度であることを考慮すると，この程度の大きさの信号光なら十分実用的と考えられる．したがって，信号光パワを P_s=150mW/μm に固定し，次に制御光パワを変化させた場合の二光波の特性について検討を行う．

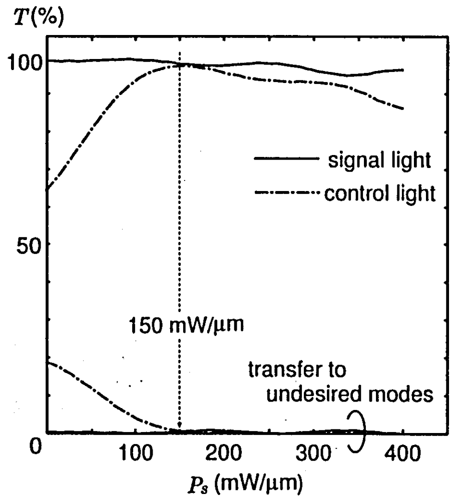


図 6: 信号光パワ P_sに対する二光波の透過特性
(P_c=0.01mW/μm)

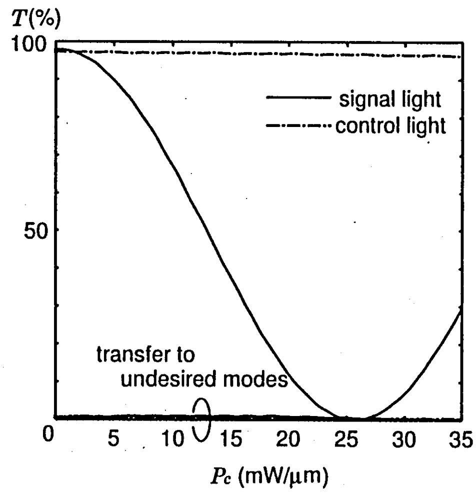


図 7: 制御光パワ P_cに対する二光波の透過特性
(P_s=150mW/μm)

ここでは，図 1のモデルに対して信号光が guide 1，波長の異なる制御光が guide 2 へ入力される場合の，二光波の透過特性および伝搬波形を求める．

まず，信号光パワを先程求めた 150mW/μm に固定し，制御光パワを変化させたときの信号光および制御光の透過特性を図 7に示す．

この図から，制御光パワが十分弱い場合には信号光透過率はほとんど 100%に近くパワの大部分が guide 1 へ出力されるが，制御光パワを強くしていくと透過率は下がり，制御光パワが約 26mW/μm になったとき，信号光透過率はほとんど零になることがわかる．

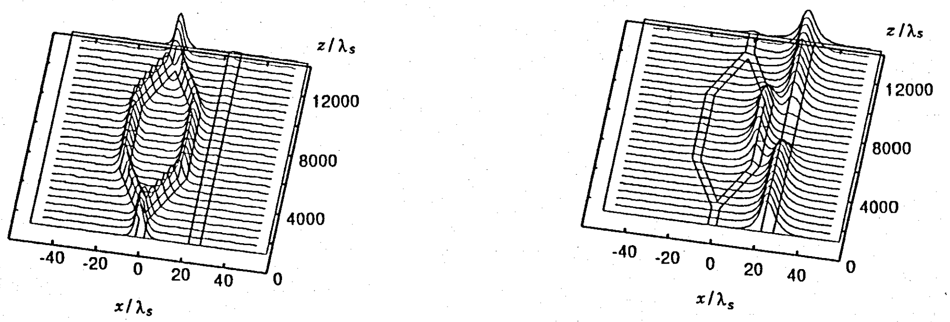
一方，制御光の透過率は，制御光パワを変化させてもほとんど 100%のまま一定で，パワの大部分がそのまま guide 2 へ出力されることがわかる．ここで制御光パワが十分弱い場

合として 0.01mW/μm およびスイッチングが起こる 26mW/μm の二つの場合の信号光および制御光の伝搬波形を図 8，9に示す．なお，これらの波形はそれぞれの入力パワで規格化している．

これらの図から，制御光パワが十分弱い場合には，制御光は二回完全結合して大部分が guide 2 から出力されるのに対し，信号光は Y 合波部においてほぼ同位相で結合してパワの大部分が guide 1 から出力される様子がわかる．また，制御光パワが 26mW/μm の場合には，制御光は先程と同様に二回完全結合して guide 2 から出力されるのに対し，信号光は Y 合波部において逆位相で結合して高次モードとなり，パワの大部分がサブストレートへ放射する様子がわかる．

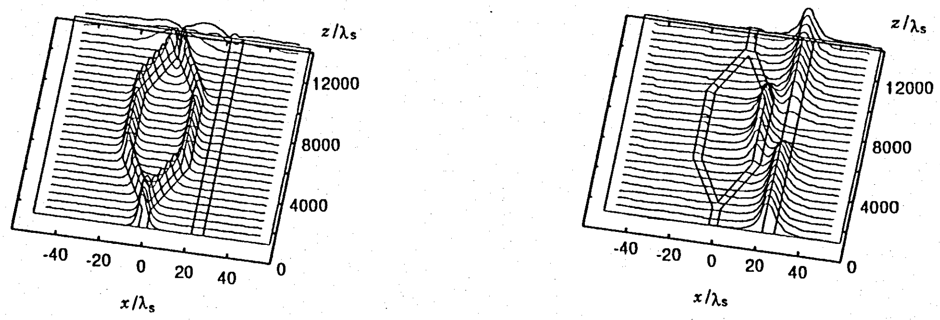
さらに，信号光も制御光も入力する guide と反対側の出力ポートに漏れるパワは，それぞれ最大で 0.74mW/μm および 0.11mW/μm と入力パワに対して非常に小さく，二光波を分離して取り出せることがわかる．

以上の結果より，提案したモデルは制御光パワによって信号光出力のオン・オフが切り替わり，かつ二光波の分離可能な全光学スイッチへの応用の可能性がある．



(a) 信号光の伝搬波形　　(b) 制御光の伝搬波形

図 8: $P_c = 0.01$(mW/μm) の場合の信号光および制御光の伝搬波形 (P_s=150(mW/μm))



(a) 信号光の伝搬波形　　(b) 制御光の伝搬波形

図 9: $P_c = 26$(mW/μm) の場合の信号光および制御光の伝搬波形 (P_s=150(mW/μm))

3　全光学論理ゲート

3.1　解析モデル

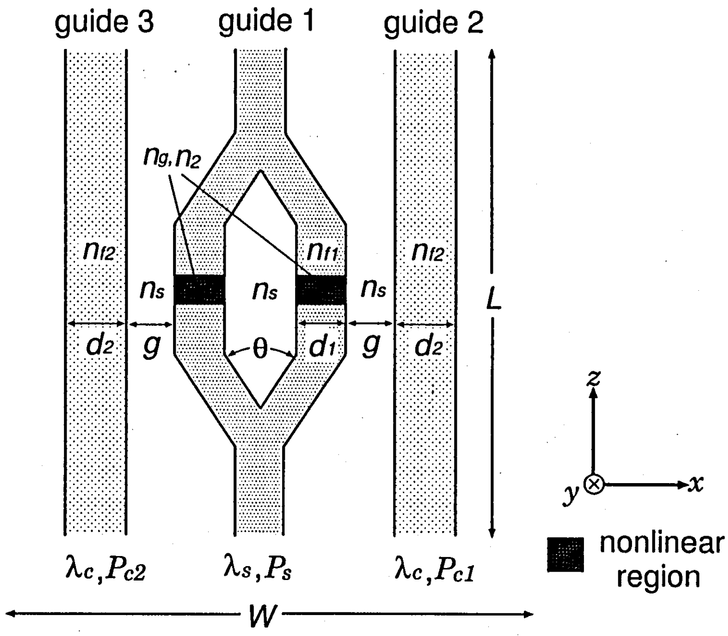


図 10: 非線形誘電体導波路型全光学論理ゲートの解析モデル

ここでは前節で提案した全光学スイッチのモデルを利用して，全光学論理ゲートの一つとして XNOR ゲートのモデルを提案し，図 10 に示す．このモデルは，図 1に示したモデルにおいて、guide 1 に関して guide 2 と左右対称になるように新たに guide 3 を加えた三つの導波路から構成される。

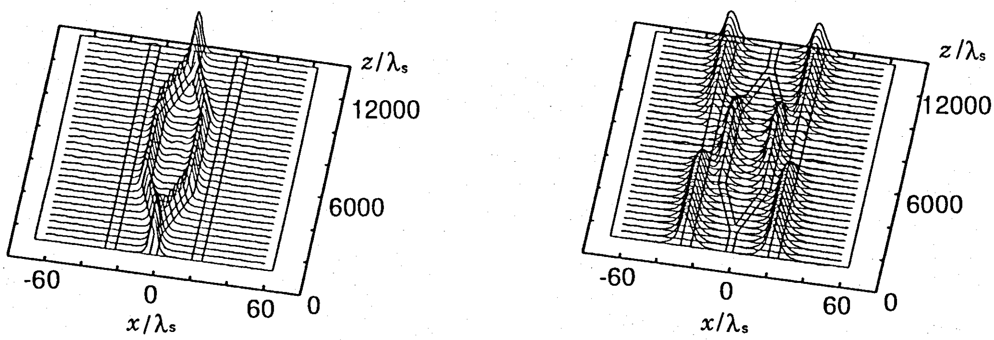
なお、guide 2 および guide 3 に入力する制御光パワはそれぞれ，P_{c1}および P_{c2}とする．

前節の全光学スイッチのモデルと同様に，guide 2 および guide 3 の制御光の入力パワが両方とも零 (十分弱い) の場合には，guide 1 に出力される．また，guide 2 または guide 3 のどちらか一方に，前節で求めた適当な値の制御光パワが入力される場合は放射され，guide 1 へはほとんど出力されない．そして，guide 2 および guide 3 の両方に同じ値の制御光パワを入力した場合は，guide 1 の左右のアームの非線形部での位相の変化が同じであるので，Y 合波部において左右同位相で結合し，guide 1 へ出力される．

3.2 数値解析結果

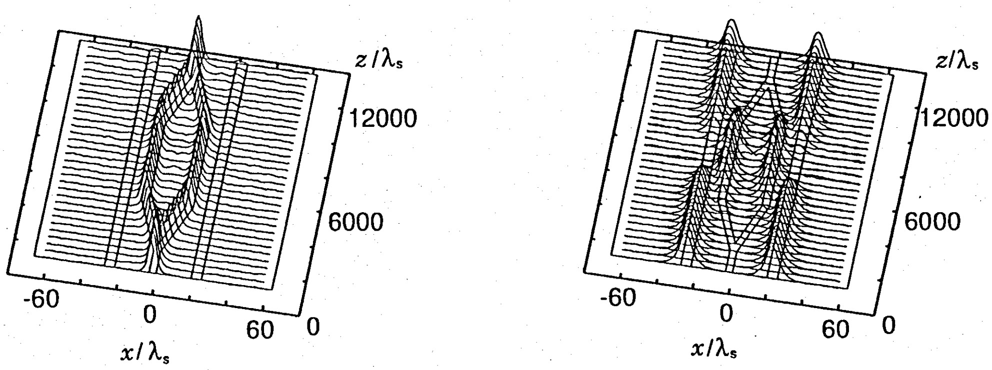
実際に数値解析を行う際に用いる図 10のパラメータの値は前節で用いた表 1の値と同様である。また、横方向の解析領域幅 $W=120\lambda_s$とする。

ここで前節の結果を利用して、信号光の入力パワ P_sを 150(mW/μm) に固定し、二つの制御光パワ P_{c1}および P_{c2}をそれぞれ高パワ (26(mW/μm)) または低パワ (0.01(mW/μm)) にしたときの信号光および制御光の伝搬波形を図 11～ 14に示す。



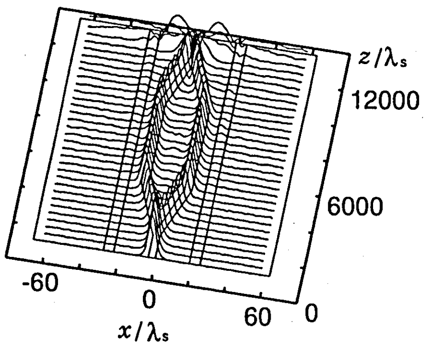
(a) 信号光の伝搬波形　　(b) 制御光の伝搬波形

図 11: 二つの制御光パワが共に低パワの場合の
信号光および制御光の伝搬波形
(P_s=150(mW/μm), $P_{c1} = P_{c2} = 0.01$(mW/μm))

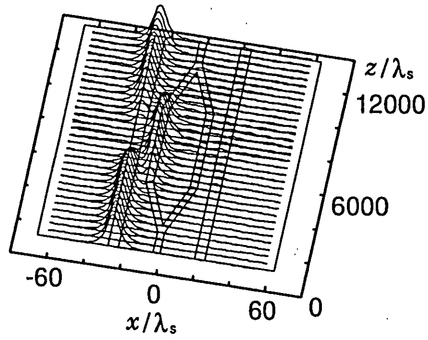


(a) 信号光の伝搬波形　　(b) 制御光の伝搬波形

図 12: 二つの制御光パワが共に高パワの場合の
信号光および制御光の伝搬波形
(P_s=150(mW/μm), $P_{c1} = P_{c2} = 26$(mW/μm))

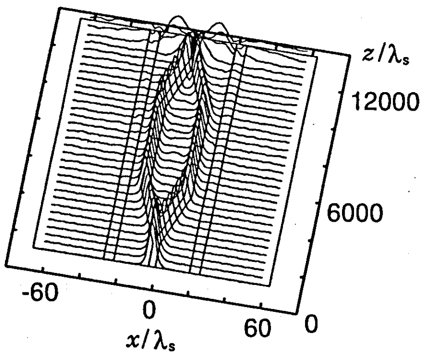


(a) 信号光の伝搬波形

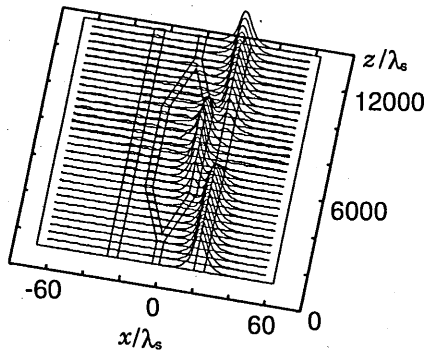


(b) 制御光の伝搬波形

図 13: guide 2 入力の制御光パワが低パワ guide 3 入力の
制御光パワが高パワの場合の信号光および制御光の伝搬波形
(P_s =150(mW/μm),
P_{c1}=0.01(mW/μm),P_{c2} = 26(mW/μm))



(a) 信号光の伝搬波形



(b) 制御光の伝搬波形

図 14: guide 2 入力の制御光パワが高パワ guide 3 入力の
制御光パワが低パワの場合の信号光および制御光の伝搬波形
(P_s =150(mW/μm),
P_{c1} = 26(mW/μm), P_{c2} = 0.01(mW/μm))

図 11の二つの制御光パワが共に低パワの場合と，図 12の制御光パワが共に高パワの場合は，信号光および二つの制御光はパワの大部分が入力した guide から出力される様子がわかる．それに対して，図 13の制御光パワが guide 2 に低パワ，guide 3 に高パワの場合と，図 14の制御光パワが guide 2 に高パワ，guide 3 に低パワの場合は，制御光は先程と同

様に入力した guide に出力されているが，信号光は高次モードとなり、パワの大部分がサブストレイトに放射する様子がわかる．

以上の結果から制御光の入力パワが高パワ (26(mW/μm)) のときを "1"，低パワ (0.01(mW/μm)) のときを "0" とした場合，二つの制御光の入力と信号光の出力の関係は表 2のようになり，これは XNOR ゲートの真理値表と一致する．したがって図 10に提案したモデルは信号光よりも低パワの制御光で制御可能な全光学 XNOR ゲートの特性を有する．

表 2: 三光波の対応関係 (XNOR の真理値表)

guide 2 入力の制御光 (P_{c1})	guide 3 入力の制御光 (P_{c2})	guide 1 出力の信号光
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4　結論

本稿ではまず、非線形誘電体導波路型全光学スイッチのモデルを提案し，互いに波長の異なる信号光および制御光が同時に入力される場合について反復計算を行う差分ビーム伝搬法を用いて解析を行った．この結果、26mW/μm の制御光パワにより，150mW/μm の信号光出力のオン・オフ状態を切り替えられることを示した．また、信号光も制御光も入力する guide と反対側の出力ポートに漏れるパワは，それぞれ最大で 0.74mW/μm および 0.11mW/μm と入力パワに対して非常に小さいことを示した．これにより，このモデルは二光波の分離可能な全光学スイッチへの応用の可能性があることが分かった．

次に、この全光学スイッチのモデルを利用して、非線形導波路型全光学論理ゲートの一つとして XNOR ゲートのモデルを提案し、同様の解析を行った。その結果，制御光の入力パワが高パワ (26(mW/μm)) のときを "1"，低パワ (0.01(mW/μm)) のときを "0" とすれば，信号光の出力は二つの制御光入力に対し XNOR ゲートの真理値表に一致することを示した．これにより，提案したモデルは信号光よりも低パワの制御光で制御可能な全光学 XNOR ゲートの機能を有することが明らかとなった．

参考文献

[1] H.F. Taylor: "Guided wave electrooptic devices for logic and computation", Appl. Opt., **17**, 10, pp.1493-1498(May. 1978).

[2] T.G. Brown,P.L.Bradfield and D.G.Hall: "Optical emission from impurities within an epitaxial-silicon optical waveguide", Opt. Lett., **12**, 9, pp.753-755(May. 1987).

[3] Y. Silberberg and B.G. Sfez: "All-Optical Phase-and Power-Controlled Switching in Nonlinear Waveguide Junctions", Opt. Lett., **13**, 12, pp.1132-1134(Dec. 1988).

[4] F. Lederer, M. Bertolotti, C. Sibilia and V. Leutheuser: "An Externally Controlled Nonlinear Directional Coupler", Opt. Commun., **75**, 3, pp.246-250(March 1990).

[5] G.R. Hadley:"Transparent Boundary Condition for Beam Propagation", Opt. Lett., **16**, 9, pp.624-626(May 1991).

[6] Y. Chung and N. Dagli:"An Assessment of Finite Difference Beam Propagation Method", IEEE J. Quantum Electron., **QE-26**, 8, pp.1335-1339(Aug. 1990).

[7] 横田浩久, 平雅文, 倉薗貞夫:"非線形光導波路励振問題の反復差分ビーム伝搬法による解析", 信学論 (C-I), **J77-C-I**, 10, pp.529-535(Oct. 1994).

輻射科学研究会資料
RS 97-6

最適化法による新構造低損失 Y 分岐光導波路

New low loss Y-branch optical waveguides designed by optimization method

沢　新之輔† 　薮　哲郎† 　真瀬博仁* 　下代雅啓†
(†：大阪府立大学　＊：(株) メガチップス)

SAWA Shinnosuke†, YABU Tetsuro†, MASE Hirohito*, and GESHIRO Masahiro†
(†: Osaka Prefecture University　*: MegaChips)

1997 年 7 月 24 日 (木)
於　大阪大学工業会館

1　まえがき

分岐導波路は光集積回路における最も基本的な素子であり、その低損失化は重要な研究課題の一つである。

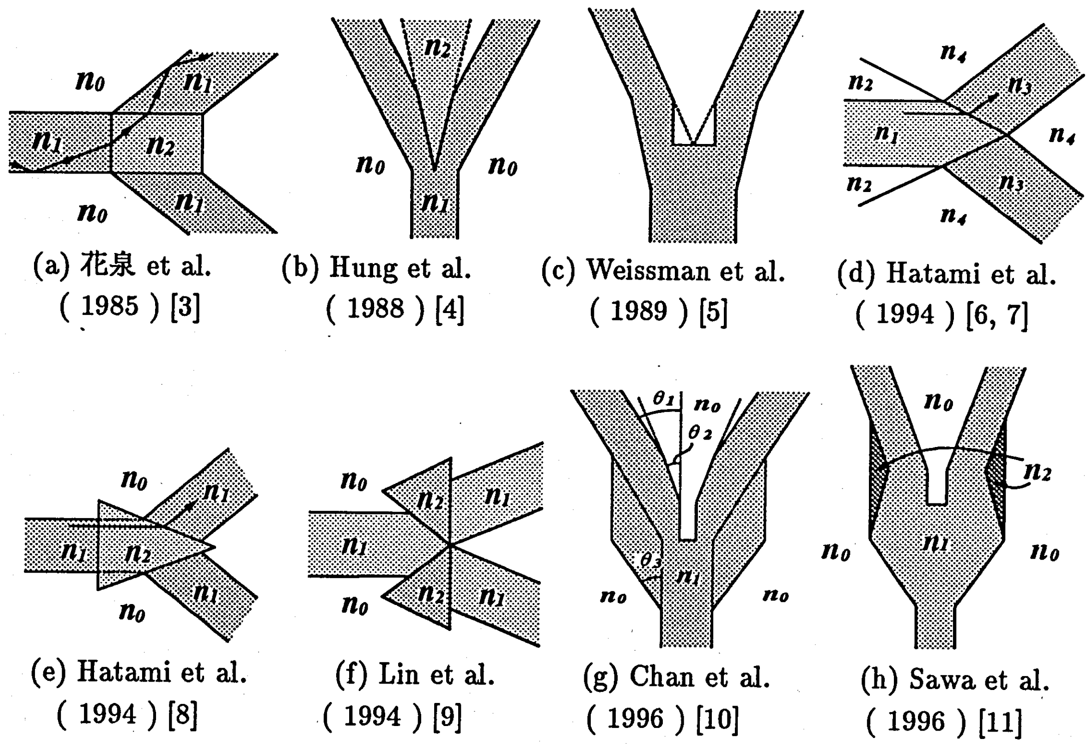
分岐導波路は次の二つに分類することができる。一つは導波路間の結合を利用した方向性結合器形 [1] の構造であり、もう一つは Y 字形の構造である。導波路間の結合を利用した構造はデバイス長が極めて長くなるという欠点がある。

また、別の分類法として、分岐導波路は対称形の構造と非対称形 [2] の構造に分類することもできる。非対称形の構造は、製作誤差が生じた場合に電力の分配比への影響が大きいという欠点がある。

従って、分岐導波路としては Y 字形で対称構造を持つものが最も有望であると思われる。

対称形 Y 分岐導波路としては、分岐角が極めて小さい場合は、単純 Y 分岐素子が原理的に最も低損失である。単純 Y 分岐素子は、局部正規モードが徐々に変化するので、分岐角が小さい領域では、放射モードがほとんど発生しない。しかし、単純 Y 分岐素子は分岐角が大きくなると、指数関数的に損失が増加するという欠点がある。分岐角が小さな領域でしか使えないということは、素子長が長くなることを意味する。また、小さな角度の鋭角部分を持つので、製作上の難点がある。

従って、これまでに Y 分岐導波路に関して行われた研究の多くは、分岐角が大きい場合についても低損失である構造に関して行われている。



(a) 花泉 et al. (1985) [3]　(b) Hung et al. (1988) [4]　(c) Weissman et al. (1989) [5]　(d) Hatami et al. (1994) [6, 7]

(e) Hatami et al. (1994) [8]　(f) Lin et al. (1994) [9]　(g) Chan et al. (1996) [10]　(h) Sawa et al. (1996) [11]

図 1: これまでに提案された様々な形の Y 分岐導波路

花泉らは図 1(a) に示すような導波モードと放射モードの変換を利用したアンテナ結合形 Y 分岐導波路を提案した [3] 。Hung らは同図 (b) に示すような構造を提案した [4]。分岐部

のクサビ形部分に付加された屈折率の低い部分は波面加速 (phase-front accelerator) の働きをする。Weissman らは同図 (c) に示すような分岐部のクサビ形部分を長方形にした構造を提案した [5] 。Safavi [6] らと Hatami [7] らは同図 (d) に示す構造を提案した。この構造は 6 つの屈折率を使い、スネルの法則を利用している。Hatami らは同図 (e) に示すようなマイクロプリズムを使った Y 分岐素子を提案した [8]。Lin らは同図 (f) に示すようなマイクロプリズムを使った別のタイプの Y 分岐素子を提案した [9]。Chan らは同図 (g) に示すような構造を提案した [10]。図中 θ_2 で表される部分は波面加速 (phase-front accelerator) の働きをし、θ_3 で表される部分は波面減速 (phase-front retarder) の働きをする。

文献 [3, 4, 6, 7, 8, 9] で提案されている構造は、3 つ以上の屈折率を使っており、構造の中に 10° 以下の鋭角部分を持っている。従って、製作上の難点がある。また、分岐角が $1^\circ \sim 10^\circ$ の範囲において比較的フラットな特性を持っているが、損失自体の大きさは極めて小さいとは言い難い。文献 [4, 5, 10] はいずれもレター論文であり、詳しい検討はまだなされていない。また、文献 [5, 10] はマルチモードの導波路を取り扱っており、実用上重要であると思われるシングルモードにおける場合を扱っていない。

これに対して、我々はシングルモードで動作し、分岐角が $1^\circ \sim 2.5^\circ$ の範囲で極めて低い損失を持つ構造の Y 分岐素子を、約一年前に提案した [11]。その構造を図 1(h) に示す。今回は、文献 [11] のモデルを更に改良したモデルを提案する。

前回提案したモデルと今回新しく提案するモデルは以下の点で異なっている。前回のモデルは屈折率を三つ使い、形状の中に 5° 以下の鋭角部分を持っていた。それに対して、今回のモデルは屈折率を二つしか使わず、10° 以下の鋭角部分を持たないので製作が比較的容易である。また、前回は人間の手による試行錯誤によって導波路の構造パラメータを決定していたが、今回は計算機による自動最適化法を用いたので、より一層の低損失化が達成できた。

2 新構造 Y 分岐素子

分岐導波路における損失は次の二つの要因によって発生する [5, 9]。一つは分岐前と分岐後の導波路における波面の不整合であり、もう一つは分岐前と分岐後の導波路におけるフィールド分布の不整合である。弱導波導波路においては、特に波面の整合が重要であると考えられている [5]。これまでになされた研究の多くは、波面の整合のみを設計理論の柱としている。これに対して、今回提案する Y 分岐素子は、波面の整合のみならず、フィールド分布の整合をも考慮したものである。

図 2 が、今回新たに提案する新構造 Y 分岐素子である。以下に設計理念を説明する。

まず、製作が容易であることを念頭において、屈折率はコアとクラッドの二つだけに限定し、できる限り鋭角部分は現れないようにしている。

分岐部の中央に、パラメータ d と h で表される窪みがある。この窪みは中央部の波面を進ませるためのものである。窪み部分の屈折率はコアの屈折率よりも低く、クラッドの屈折率に等しいので、光波はコアの部分より速く伝搬する。従って、d と h を適切な値に設定することにより、波面を分岐後の導波路に垂直になるように傾けることができる。テーパ部の角度 α も波面と分岐後の導波路が垂直になるようにするためのパラメータである。

テーパ部出口における突起部は分岐前の導波路の 0 次モードと分岐後の導波路の 0 次モードのフィールド分布の整合を高めるために設けられてたものであり、その幅は w で表される。

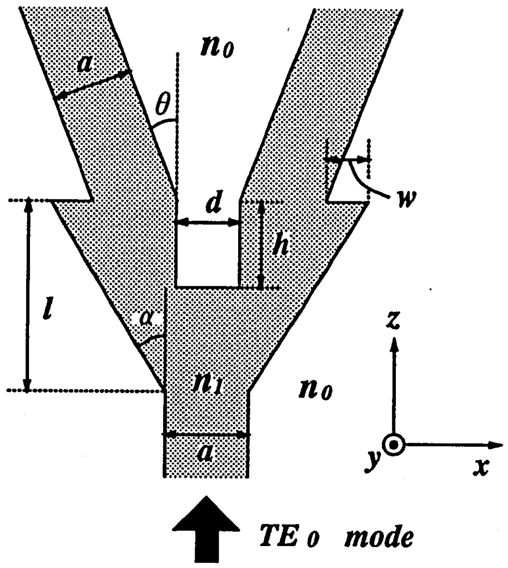


図 2: 新構造 Y 分岐素子

なお、テーパ部の長さ l は a、θ、w、α、d が決定されると一意に決まる。

今回の研究においては、コアの屈折率 n_1、クラッドの屈折率 n_0、導波路幅 a、分岐角 θ があらかじめ与えられていることを仮定する。この与えられた条件において最低の損失を実現するために、共役勾配法を用いた最適化により、4 つのパラメータ α、h、d、w を決定する。

3　数値シミュレーションの手法

3.1　損失の計算

三次元形状を持つ光導波路は等価屈折率法によって二次元のスラブ導波路に置き換えて考えることができる。これまでに発表された研究は、ほとんどがスラブ導波路に対して行われている。従って、我々もスラブ導波路について解析を行う。

光波の伝搬を解析する手法としては、差分ビーム伝搬法 [12] を使う。解析領域の端からの非物理的反射波を除去するために、透過境界条件 [13] を用いる。解析は TE モードについて行う。弱導波導波路においては TE モードと TM モードはほぼ同じフィールドパターンを持つ。ゆえに、TE モードについて得られた結果は TM モードにも適用可能である。

図 2 の入射ポートから 0 次の TE モードを入射し、この電力を P_{in} とする。分岐後、二つの導波路が十分離れた場所を出射ポートとし、そこでの 0 次モードの電力を P_{out} とすると、損失 L は次式で与えられる。

$$L = -10\log\left(\frac{2P_{out}}{P_{in}}\right)\ [dB] \tag{1}$$

ビーム伝搬法で求めたフィールドを各固有モードに分解するには重畳積分を用いる。まず、導波路が x 軸と直交している場合を考える。任意のフィールドの E_y 成分が $\phi(x)$ で表され

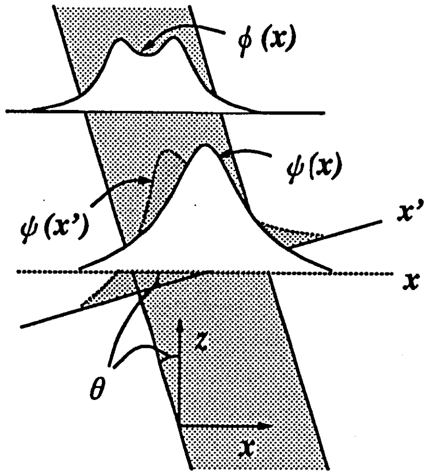


図 3: 導波路が斜めのとき

るとき、そのうち $\psi(x)$ で表されるモードの電力は、次の重畳積分によって求まる。

$$P = \left| \frac{\beta}{2\,\omega\mu_0} \int \phi\,\psi^*\,dx \right|^2 \tag{2}$$

ここで、ω は角周波数、μ_0 は真空中の透磁率、β は ψ で表されるモードの伝搬定数である。但し、ψ は次式のように正規化されていることを仮定する。

$$\frac{\beta}{2\,\omega\mu_0} \int \psi\psi^* dx = 1 \tag{3}$$

これに対して、本論文で解析する導波系の出射ポートは x 軸と直交していないので、モード電力を求めるときには注意が必要である。図 3 のように導波路が z 軸に対して θ の角度を持つ場合を考える。

ビーム伝搬法で計算する場合の格子点は x 軸 と z 軸に沿って取られる。従って、本来なら補間によって x' 軸上のフィールドを求め、x' 軸上で重畳積分を行う必要がある。本研究では計算を簡単にするため、代わりに x 軸上で重畳積分を行う。

x 軸上で重畳積分することにより発生する誤差について考察する。x' 軸上での正規モードの E_y を $\psi(x')$ とすると、それを x 軸に投影したときの $\psi(x)$ は次式で与えられる。

$$\psi(x\cos\theta)\,e^{-j\beta x \sin\theta} \tag{4}$$

今、図 3 のフィールド ϕ が ψ_1 と ψ_2 の二つの正規モードの和で構成されていると仮定する。このうち、ψ_1 の占める電力を求める。本来 x' 軸上で行うべき重畳積分を x 軸上に投影して行うと以下のようになる。

$$P = \left| \frac{\beta_1}{2\omega\mu_0} \int \phi(x')\,\psi_1^*(x')\,dx' \right|^2 \quad \leftarrow \text{本来の式} \tag{5a}$$

$$\simeq \left| \frac{\beta_1}{2\omega\mu_0} \int \phi(x)\,\psi_1^*(x)\,dx \cdot \cos\theta \right|^2 \quad \leftarrow x\ \text{軸に投影して計算} \tag{5b}$$

$$= \left| \frac{\beta_1}{2\omega\mu_0} \int \left(\psi_1 e^{-j\beta_1 x \sin\theta} + \psi_2 e^{-j\beta_2 x \sin\theta} \right) \psi_1^* e^{j\beta_1 x \sin\theta}\, dx \cdot \cos\theta \right|^2$$
$$= \left| \frac{\beta_1}{2\omega\mu_0} \int \left(\psi_1 \psi_1^* + \psi_2 \psi_1^* e^{-j(\beta_2-\beta_1) x \sin\theta} \right) dx \cdot \cos\theta \right|^2 \quad (5c)$$

式 (5c) の第一項は x' 軸上で重畳積分した場合と同じ値であるが、第二項は x' 軸上で重畳積分した場合は 0 となる項である。つまり、図 3 における x 軸上でのフィールド ϕ は厳密にはモード分解できない。しかし、弱導波導波路の場合、式 (5c) の第一項と第二項の比は 1 万倍以上であり、第二項は無視できる。従って、本論文では式 (5b) によって、モード電力を求める。

3.2　最適化

本稿ではコアの屈折率 n_1、クラッドの屈折率 n_0、導波路幅 a、分岐角 θ があらかじめ与えられていることを仮定する。この条件のもとで、最低の損失 L を実現するための α、h、d、w を決定する。

損失 L は α、h、d、w によって決まる。つまり、L は 4 変数の非線形関数であると考えられる。従って、非線形関数の極小値を求める問題に帰着する。非線形関数の極小値を求める方法は、文献 [14] で系統的に説明されており、大別すると以下の二つの系統に分かれる。

1. 探索点近傍を二次曲面で近似し、その二次曲面の極小点へジャンプする。これを繰り返す。これは、ニュートン形の公式と呼ばれ、解の近傍での収束速度は速いが、初期点を解の近傍に取らないと収束性は保証されない。

2. 探索点近傍の傾斜ベクトルを求め、傾斜ベクトルより決定される方向へ一次元探索を行う。これを繰り返す。これは、最急降下形の公式と呼ばれ、大域的収束性が保証されているが、収束速度は遅い。

本稿では 2. の方法の一種である共役勾配法を用いる。2. の方法の代表は最急降下法であるが、最急降下法は最小点の近傍で探索軌道がジグザグになり、収束が遅いという欠点がある。この欠点をなくすために前回の探索方向と最急降下方向をミックスした方向に探索を行うのが共役勾配法である。

4　数値シミュレーション結果

4.1　新構造 Y 分岐素子の特性

図 2 において、コアの屈折率 n_1、クラッドの屈折率 n_0、導波路幅 a が表 1 のように与えられていることを仮定する。

分岐角 θ を 0.5° ~ 3.5° まで 0.25° 刻みに設定し、それぞれの θ に対して最小の損失を与えるパラメータ α、h、d、w を共役勾配法を用いて求める。

なお、差分ビーム伝搬法における刻み幅 Δx、Δz はそれぞれ 0.1λ、1λ に設定し、参照屈折率は 1.502 に設定した。0 次の TE モードを図 2 の入射ポートから入射し、式 (1) を用いて損失を求める。

表 1: 基本パラメータ

コアの屈折率	1.503
クラッドの屈折率	1.500
コアの幅	4 λ

λ : 光波の波長

非線形関数の極小値探索においては、局所的最小値に陥る危険性が常に存在する。これを避けるために、本研究では種々の初期値を与えて極小点探索を行った。また、全てのパラメータを自由にして極小点に近づけることは困難であったため、以下の手順により極小点探索を行った。

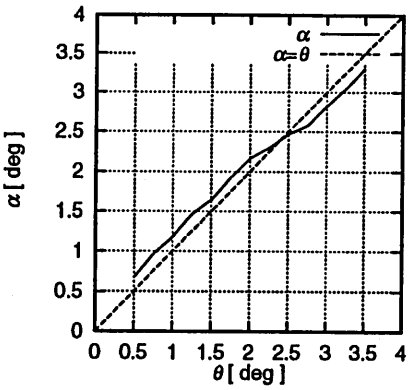
1. α、d を自由にし、残りを固定して極小点探索を行う。
2. α、w を自由にし、残りを固定して極小点探索を行う。
3. α、d、w を自由にし、残りを固定して極小点探索を行う。
4. h だけを自由にし、残りを固定して極小点探索を行う。
5. 4 つのパラメータ全てを自由にして極小点探索を行う。
6. 1.～5. をもう一度繰り返す。

この手順により求めた最適値を表 2 と図 4(a)～(c) に示す。また、最適値における Y 分岐導波路の形状を図 5(a)～(g) に示す。

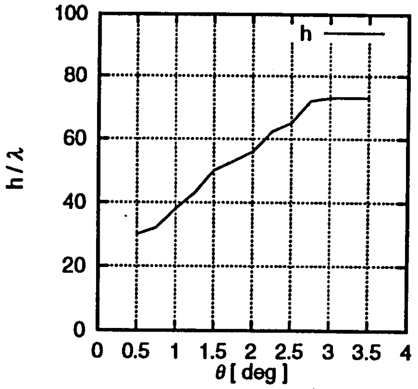
表 2: 共役勾配法で求めたパラメータ

分岐角 θ [deg]	α [deg]	w/λ	h/λ	d/λ	Loss [dB]
0.50	0.66772	0.75000	30.00000	0.94999	0.0068
0.75	0.96051	1.02139	32.00000	1.14842	0.0128
1.00	1.17737	1.41186	38.09280	1.95804	0.0201
1.25	1.46465	1.93232	43.12500	2.56413	0.0237
1.50	1.64590	2.39256	50.16071	3.21695	0.0224
1.75	1.92506	2.67284	53.00000	3.30807	0.0387
2.00	2.16339	2.83600	56.00000	3.40000	0.0737
2.25	2.29957	2.93318	62.21759	3.69277	0.1287
2.50	2.46524	2.99381	65.06250	3.80000	0.1990
2.75	2.57848	3.05000	72.07757	4.14887	0.2854
3.00	2.82897	3.16016	73.00000	4.20000	0.3950
3.25	3.04708	3.34567	73.06306	4.41032	0.5485
3.50	3.30491	3.36775	73.06306	4.41151	0.7385

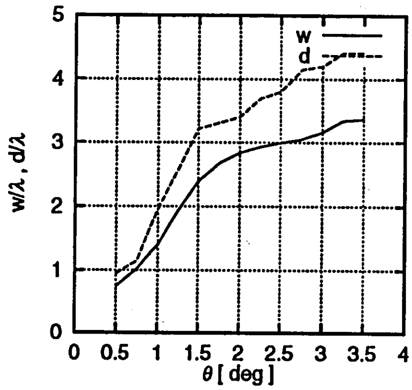
本論文で提案する Y 分岐導波路の損失を、これまでに提案されてきた他の形の Y 分岐導波路の損失と比較する。比較の対象として、分岐角が小さいときに低損失となる単純 Y 分岐



(a) α の最適値



(b) h の最適値



(c) d, w の最適値

図 4: 共役勾配法で求めたパラメータ

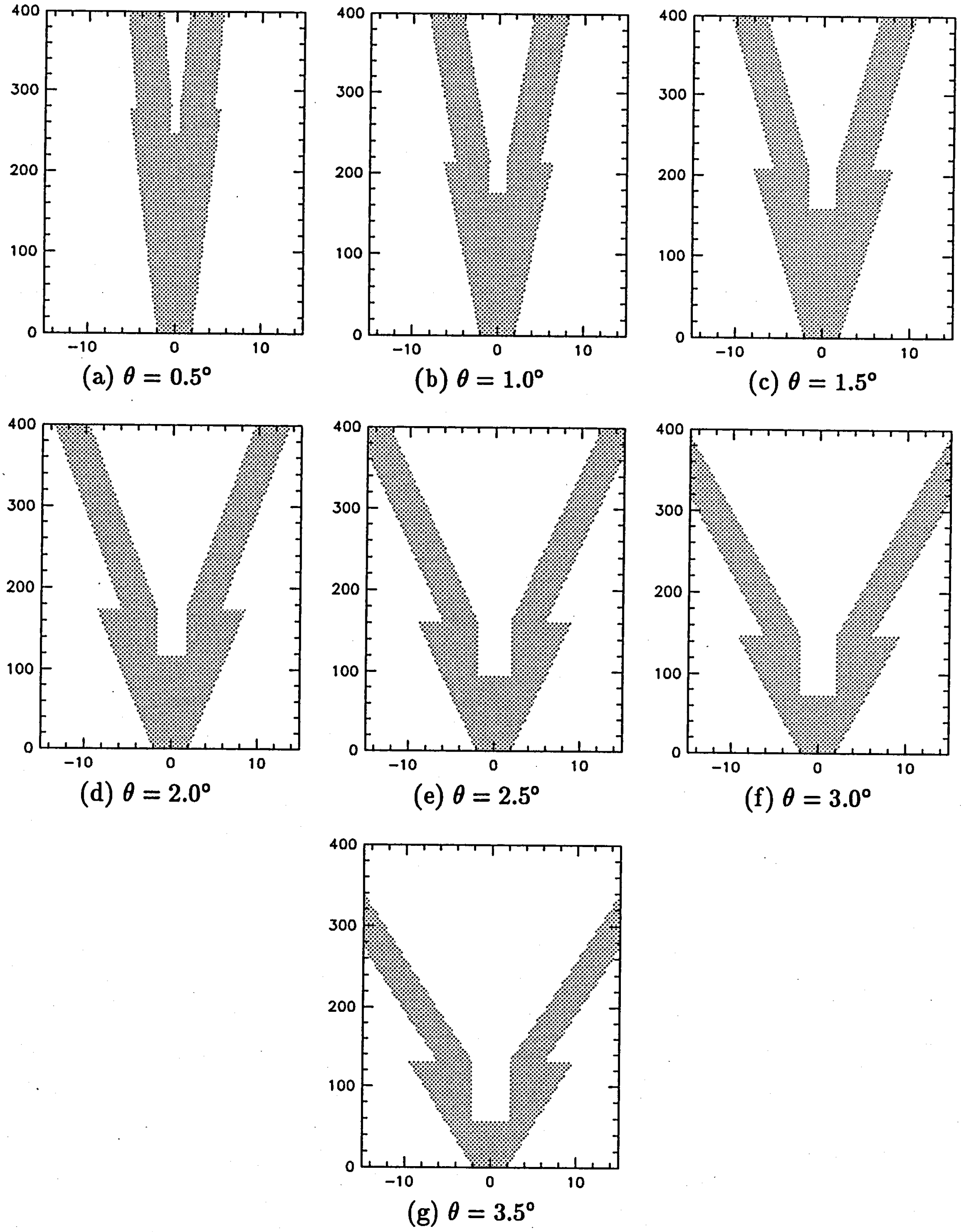
導波路と設計理論が明解で分岐角が $1^\circ \sim 10^\circ$ の広い範囲において低損失であるアンテナ結合形 Y 分岐導波路 (図 1(a)) を選ぶ。アンテナ結合形は 3 種類の屈折率を使用するが、参考のため、$n_0 = n_2$ として 2 種類の屈折率しか使わなかった場合についても計算を行った。

比較の結果を図 6 に示す。図より本論文で提案する Y 分岐導波路は分岐角が $1^\circ \sim 2.5^\circ$ の範囲で非常に低損失であることがわかる。また、屈折率を 2 種類しか使わない場合のアンテナ結合形 Y 分岐導波路と比べると、全ての分岐角に対して損失は低くなっている。

また、分岐角が 2° のときの伝搬の様子を示す。図 7(a)~(c) にフィールドの絶対値を示し、図 8(a)~(c) に波面を示す。なお、波面はフィールドの絶対値が最大値の 15% 以上である点についてのみ描いた。なお、アンテナ結合形の伝搬図は 3 種類の屈折率を使用した場合の伝搬図である。

4.2　各パラメータに対する検討

前節では、最小の損失を与える 4 つの構造パラメータを最適化により求めた。本節ではこの 4 つの構造パラメータの性質について考察する。そのために、4 つのパラメータのうち 1 つを故意に最適値からずらし、残りのパラメータを最適値に固定した場合の損失を計



(a) $\theta = 0.5°$
(b) $\theta = 1.0°$
(c) $\theta = 1.5°$
(d) $\theta = 2.0°$
(e) $\theta = 2.5°$
(f) $\theta = 3.0°$
(g) $\theta = 3.5°$

図 5: 各分岐角における Y 分岐光導波路の形状

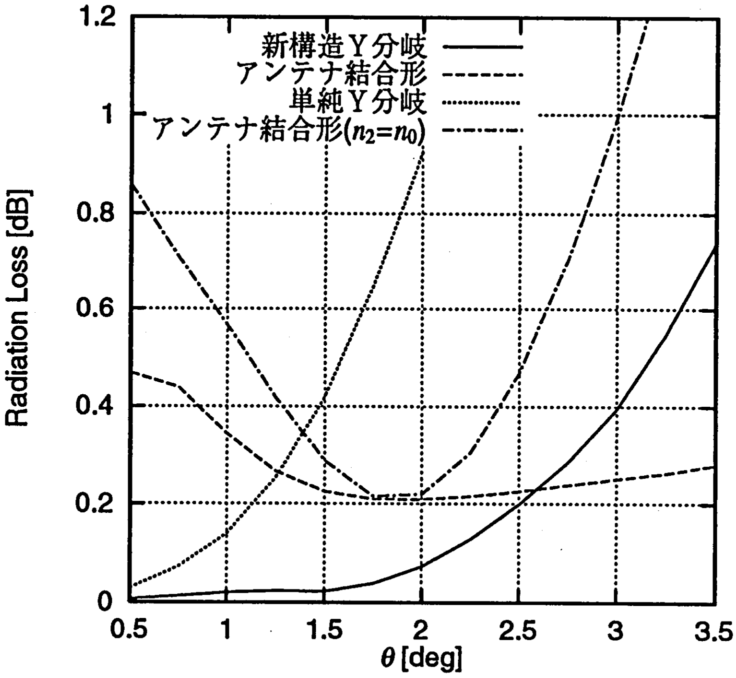
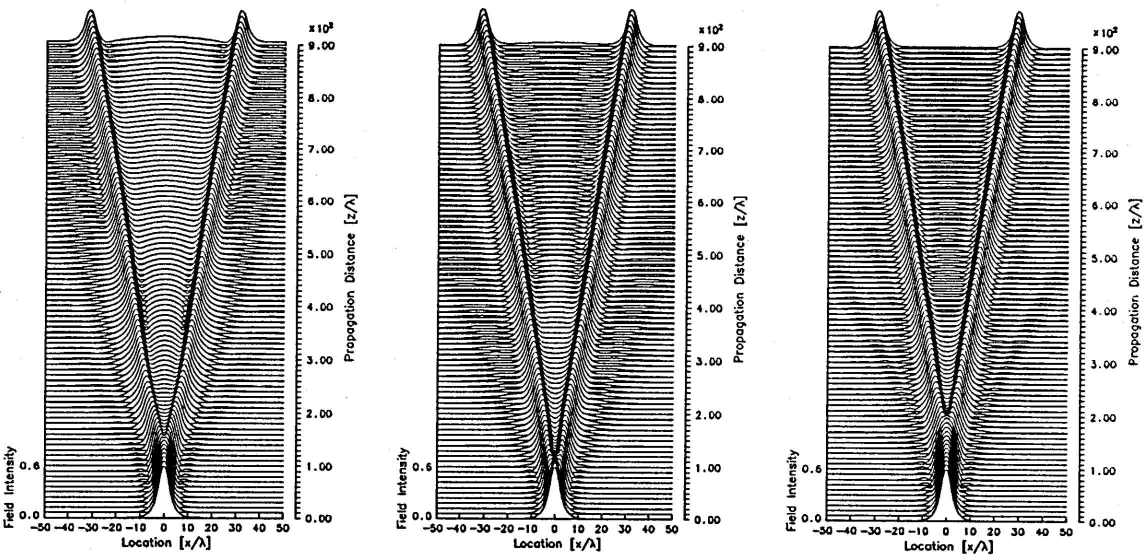
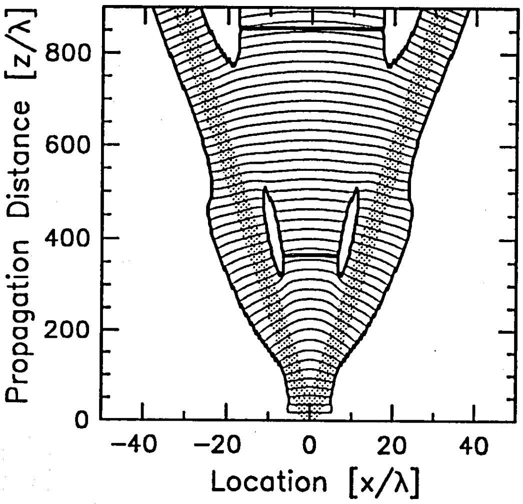


図 6: 他の形との損失の比較

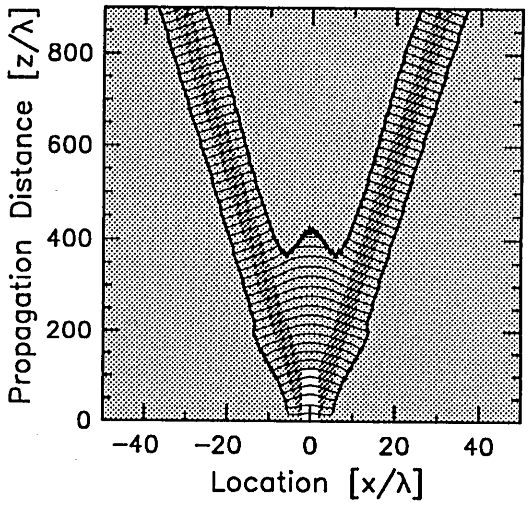


(a) 単純Y分岐　(b) アンテナ結合形Y分岐　(c) 新構造Y分岐

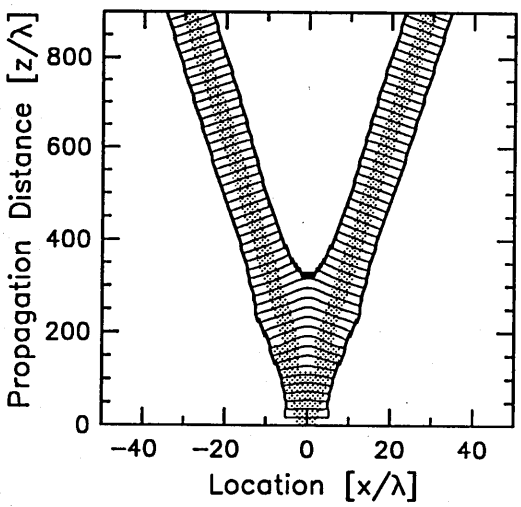
図 7: フィールドの絶対値($\theta = 2°$)



(a) 単純 Y 分岐

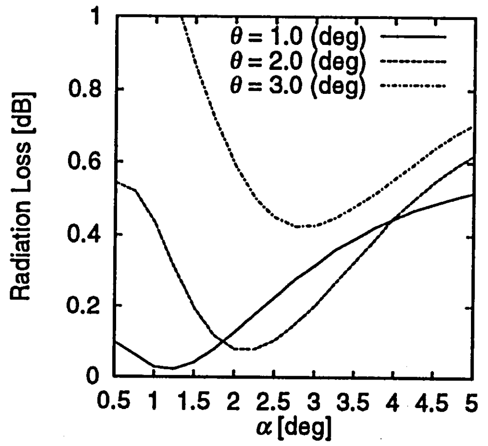


(b) アンテナ結合形 Y 分岐

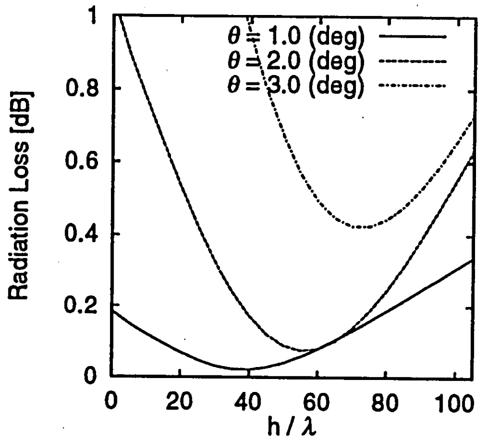


(c) 新構造 Y 分岐

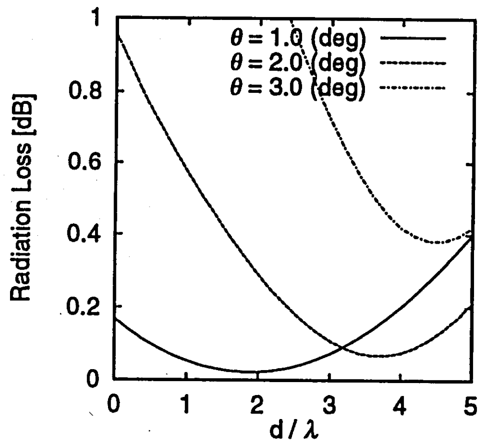
図 8: 波面 ($\theta = 2^{\circ}$)



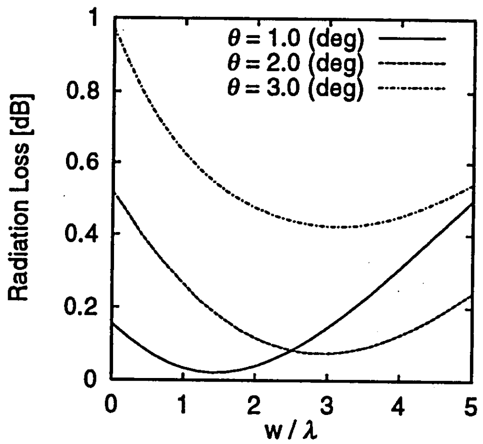
(a) α を変化させたとき



(b) h を変化させたとき



(c) d を変化させたとき



(d) w を変化させたとき

図 9: 各パラメータの性質

算する。

分岐角が 1°、2°、3° のそれぞれの場合において、α だけを最適値からずらし、残りのパラメータを最適値に固定したときの損失を図 9 (a) に示す。h、d、w についても同様の計算を行い、その結果をそれぞれ図 9(b)〜(d) に示す。図 9(a)〜(d) から 4 つのパラメータは全て損失の低減に強く作用していることがわかる。

5 あとがき

本論文では新しい構造の Y 分岐導波路を提案した。その構造は屈折率を二つしか使わず鋭角部分がないため、その製作は容易と思われる。また、構造パラメータの決定に最適化アルゴリズムを導入することにより一層の低損失化が可能となった。本論文で提案した Y 分岐導波路の損失は、分岐角が $0^\circ \sim 2.5^\circ$ の範囲で極めて低い。この特性は従来提案されてきた Y 分岐光導波路では実現されなかった特性である。

参考文献

[1] M. Hotta , M. Geshiro , T. Arashiba , and S. Sawa , "A design consideration for optical power dividers composed of three coupled waveguides , " IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., vol.42, no.7, pp.1167–1171, July 1994.

[2] Kaoru Shirafuji and Sadao Kurazono , "Transmission characteristics of optical asymmetric Y junction with a gap region. " IEEE J. Lightwave Technol., vol.9, no.4, pp.426–429, April 1991.

[3] O. Hanaizumi , M. Miyagi , and S. Kawakami , "Wide Y-junctions with low losses in three-dimensional dielectric optical waveguides , " IEEE J. Quantum Electron., vol.21 ,no.2, pp.168–173, Feb. 1985.

[4] W. Y. Hung , H. P. Chan , and P. S. Chung , "Novel design of wide-angle single-mode symmetric Y-junctions , " Electron. Lett., vol.24, no.18, pp.1184–1185, Sept. 1988.

[5] Z. Weissman , E. Marom , and A. Hardy , "Very low-loss Y-junction power divider , " Opt. Lett., vol.14, no.5, pp.293–295, March 1989.

[6] S. Safavi-Naeini , Y. L. Chow , S. K. Chaudhuri , and A. Goss , "Wide angle phase-corrected Y-junction of dielectric waveguides for low loss applications , " IEEE J. Lightwave Technol., vol.11, vo.4, pp.567–576, April 1993.

[7] Hamid Hatami-Hanza , Max J. Lederer , Pak L. Chu , and Iain M. Skinner , "A novel wide-angle low-loss dielectric slab waveguide Y-branch , " IEEE J. Lightwave Technol., vol.12, no.2, pp.208–214, Feb. 1994.

[8] H. Hatami-Hanza , P. L. Chu , and M. J. Lederer , "A new low-loss wide-angle Y-branch configuration for optical dielectric slab waveguides , " IEEE Photon. Technol. Lett., vol.6, no.4, pp.528–530, April 1994.

[9] Han-Bin Lin , Rei-Shin Cheng , and Way-Seen Wang , "Wide-angle low-loss single-mode symmetric Y-junctions, " IEEE Photon. Technol. Lett., vol.6, no.7, pp.825–827, July 1994.

[10] H. P. Chan , S. Y. Cheng , and P. S. Chung , "Low loss wide-angle symmetric Y-branch , " Electron. Lett., vol.32, no.7, pp.652–654, March 1996.

[11] 沢新之輔、真鍋考士、薮哲郎、下代雅啓 , "超低損失 Y 分岐光導波路 , " 輻射科学研究会資料, RS96-11 , Sept. 1996.

[12] Y. Chung and N. Dagli , "An assesment of finite difference beam propagation method, " IEEE J. Quantum Electron., vol.26, no.8, pp.1335–1339, Aug. 1990.

[13] G. Ronald Hadley , "Transparent boundary condition for the beam propagation method, " IEEE J. Quantum Electron., vol.28, no.1, pp.363–370, Jan. 1992.

[14] 西川、三宮、茨木 , "最適化 , "pp.41–60, 岩波書店, 1982.

輻射科学研究会資料
RS97-7

Efficiency Enhancement in a Cherenkov Laser by an Optimum Variation of the Thickness of the Dielectric Sheet.

誘電体の厚さの最適変化による チェレンコフレーザの特性改善

Akimasa Hirata, Yoshio Yuse, and Toshiyuki Shiozawa
平田晃正　　湯瀬芳雄　　塩沢俊之

Osaka University
大阪大学

1997年7月24日（木）
於　大阪大学工業会館

1　まえがき

相対論的電子ビームを用いた発振器の一つであるチェレンコフレーザは，サブミリ波から遠赤外波領域に至る広い波長領域において大出力かつコヒーレントな電磁波が得られるとともに，発振波長を連続的に変化させることができる発振器であり，通信工学，プラズマ理工学，電磁波工学などの様々な分野への応用が期待されている[1]．チェレンコフレーザは，相対論的電子ビームに沿って伝搬する空間電荷波と誘電体導波路に沿って伝搬する電磁波との結合によって増大波を発生させるレーザである．チェレンコフレーザに関しては，これまでに実験的[2]~[5]および理論的[6]~[21]研究が多数報告されている．

ところで，チェレンコフレーザにおいては，電子ビームの運動エネルギーを電磁波のエネルギーに直接変換するため，電磁波が増大するにつれて電子ビームのドリフト速度が減少し，電磁波の位相速度と電子ビームのドリフト速度の同期が保たれなくなる．その結果，電子ビームの運動エネルギーから電磁波のエネルギーへの変換が有効に行われなくなる．この難点を解決するための方法として，電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて導波路を構成する誘電体の誘電率を電磁波の進行方向に徐々に変化させて電磁波の位相速度を遅らせることによって，電子ビームのドリフト速度との同期をより長く維持することが考えられており，これによりエネルギー変換効率が改善されることが示されている[15],[19]．しかしながら，誘電体の誘電率を変化させることは，技術的な困難が予想される．そのため，導波路を構成する誘電体をグレーティング構造にし，グレーティングの溝の深さあるいはスロット幅を徐々に変化させることによって，等価的に誘電体の誘電率を変化させる方法が報告されている[21]．

本稿では，誘電体の誘電率を変化させる場合と同様の効果をグレーティング構造に比べてより簡単な構造で得られるように，導波路を構成する誘電体の厚さを電子ビームのドリフト速度の減少に合わせてステップ状に変化させることを提案し，粒子シミュレーションの手法[18],[20],[21],[23]を用いた解析から，電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて誘電体の厚さを電磁波の進行方向に徐々に増加させることにより，電子ビームから電磁波へのエネルギー変換効率が改善されることを示す．ここで，粒子シミュレーションというのは，電子ビームを流体として近似することなく，電子ビームを構成する個々の粒子（電子）と電磁界との相互作用を時間領域差分法（FDTD法）[23]~[25]を用いて解析する手法である．

2　解析のモデルと基礎方程式

本稿において解析するチェレンコフレーザの2次元モデルを図1に示す．互いに平行な2枚の完全導体平板の一方に厚さaの誘電体を装荷し，その誘電体表面と平行に厚さ$(d-b)$の平板状の相対論的電子ビームがz軸方向に初期値v_0でドリフトし

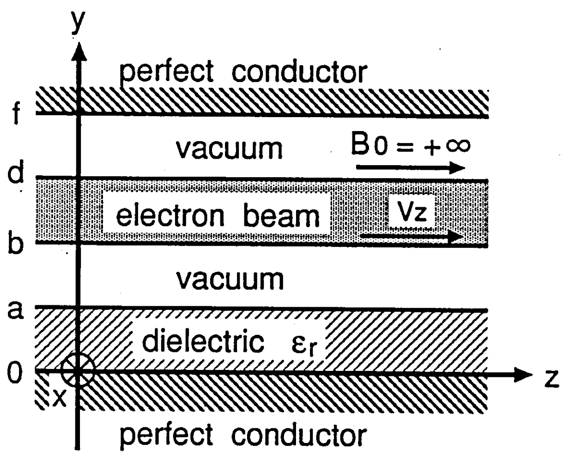


図1　解析のモデル

ているものとする．また，電子ビームは十分大きい静磁界によってドリフト方向に集束されているものとし，すべての物理量はx軸方向に一様であるとする．更に，簡単のために，電子ビームはイオン流によって中和されているものとする[26]．すなわち，電子ビーム自身によって作られる静電界および静磁界を打ち消すために，電子ビームの初期速度と同じ速度でドリフトする電子ビームと同じ電荷密度を持つイオン流が存在するものとする．

本稿の解析の基礎となる方程式は，マクスウェルの方程式および電子に対する相対論的運動方程式である．電子ビームに十分大きい静磁界が印加されている場合には電子ビームはTEモードの電磁波とは結合しないことから，本稿ではTM波の伝搬を取り扱う．TM波に対するマクスウェルの方程式は次のように表される．

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}\\ \frac{\partial B_x}{\partial z} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\\ -\frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}+\mu_0 J_z\end{aligned} \tag{1}$$

但し，

$$\begin{aligned}J_z &= J_z(y,z,t)\\ &= \sum_i q_i v_{zi}\delta(y-y_i)\delta(z-z_i)\end{aligned} \tag{2}$$

であり，μ_0は真空の透磁率，cは真空中の光速度，v_{zi}は粒子の速度を表し，添字iは個々の粒子を意味する．また，$\delta(x)$はディラックのデルタ関数である．更に，J_zは電子およびイオンの超粒子により作られる電流密度を表している．ここで，超粒子とは1個の粒子ではなく，多数の同じ種類の粒子からなる粒子の集団である．この超粒子という概念を用いることができるのは，本稿において興味があるのが個々の粒子の詳細な振舞いではなく，粒子の集団としての統計的な振る舞いにあるからである．この概念を用いる利点は，見かけの粒子の数を減らすことができ，その結果，シミュレーションに要する時間を短縮できることである．

電子ビームに十分大きな静磁界が印加されている場合には，電子からなる超粒子に対する相対論的運動方程式は次のようになる．

$$\frac{d}{dt}(\gamma_i m_e v_{zi}) = q_e E_z(y_i, z_i, t) \tag{3}$$

但し，

$$v_{zi} = \frac{dz_i}{dt} \tag{4}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-(v_{zi}/c)^2}} \tag{5}$$

であり，m_e，q_eは，それぞれ，電子からなる超粒子の静止質量および電荷を表している．

3 粒子シミュレーション

本節では，解析の手法である粒子シミュレーションについて述べる．本稿で用いる手法は粒子シミュレーションの中でも特に粒子コード（Particle-in-cell code）と呼ばれているものである．チェレンコフレーザにおいては，ほぼ同じ速度でz方向に進行する電子ビームと電磁波との間でエネルギーの授受が行われ，電磁波のエネルギーが最大となる飽和点に達するまでに両者が進む距離の差は管内波長のほぼ半分である．但し，管内波長とは導波路に沿って測った電磁波の波長を表す．そこで，電子ビームとともに伝搬しながら増大していく電磁波が管内波長に比べて十分長い波束からなるものとし，管内波長当りの増大率が十分小さいものとする．このとき，この波束の（波頭を除く）任意の一波長の長さの部分に着目すると，その部分の直前，直後では，電子ビームと電磁波の相互作用の様子はほぼ同じであると考えられる．従って，電子ビーム全体を構成する粒子の集団と電磁波の相互作用を取り扱う代わりに，管内波長Lを占める電子の集団と電磁波の相互作用を時間的に追跡することにより，電磁波の増大特性を明らかにすることができる．そこで，本稿では図1に示したチェレンコフレーザの2次元モデルを管内波長Lの長さでz方向に分割し，その分割された領域の前後では周期的境界条件が成り立つものとする．そして，初期状態で，原点近傍のある一つの領域に含まれる粒子群を選び，FDTD法を用いてその粒子群と電磁波との相互作用を時間的に追跡していく．任意の時刻において粒子の存在する位置における電磁界成分をFDTD法を用いて計算するために，z方向に管内波長Lで分割された各領域を，図2に示すように，y方向についてはΔyの間隔でNGY個の，一方z方向についてはΔzの間隔でNGZ個の格子によって微小領域に細分化する．そして，図3に示すように，各微小領域でE_zおよびJ_zは点$(j, k+1/2)$において，B_xは点$(j+1/2, k+1/2)$において，E_yは点$(j+1/2, k)$において求める．

シミュレーションを行うために，まず，初期状態において，図2に示す電子ビーム領域$(b<y<d)$に，位置座標(y_i, z_i)と速度v_{zi}をもった電子およびイオンの超粒子を格子によって細分化された微小領域中に各一個，計N個一様に並べる$(i=1,2,\cdots,$

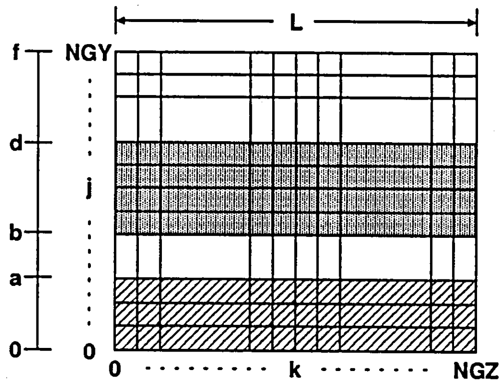


図2　格子による系の分割

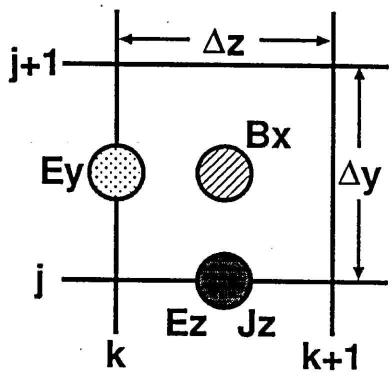


図3　電磁界成分の配置

N). そこで，粒子の速度にわずかな擾乱を与えると，電子密度に変動が生じる．そこで，この電子密度の変化に伴って変化する格子点上の電流密度を求める．次に，この電流密度によって生じる電磁界成分を求める．この電磁界成分により電子が加速度を得て，その速度および位置が変化する．そして再び，電子密度に変化が生じる．この過程を繰り返すことにより電磁界および電子の運動の時間的変化を追跡することができる．なお，本稿のシミュレーションにおいては，初期状態において粒子の速度に微小な正弦的変調を与えるものとする．

4　増幅特性の改善

チェレンコフレーザでは，電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて導波路を構成する誘電体の誘電率を徐々に大きくし，電磁波の位相速度を遅くすることによって電子ビームと電磁波との同期をより長く保ち，電子ビームから電磁波へのエネルギー変換効率を改善する方法が報告されている．しかしながら，誘電体の誘電率を変化させることは技術的な困難が予想されるため，導波路を構成する誘電体をグレーティング構造にし，グレーティングの溝の深さあるいはスロット幅を徐々に変化させることによって，等価的に誘電体の誘電率を変化させる方法が報告されている．本稿では，誘電体の誘電率を変化させる場合と同様の効果を，グレーティング構造に比べてより簡単な構造で得られるように，導波路を構成する誘電体の厚さを電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて変化させることにより，電子ビームから電磁波へのエネルギー変換効率の改善を試みる．本節の解析で用いたパラメータの値を表1に示す．

手法としては，まず各時点での電子ビームの平均ドリフト速度を計算し，その値を用いて電子ビームに対して線形流体近似の手法を用いて得られる分散関係式を解くことにより増大波の増大率が最大，すなわちωの虚部が最大となるような誘電体の厚さを決定する．そして，その誘電体の厚さの値を随時粒子シミュレーションに組み込むことにより解析を行う．また，誘電体の厚さは正のy方向，すなわち電子

表1　シミュレーションに用いたパラメータの値

誘電体の厚さの初期値 a	0.5 (mm)
電子ビームの厚さ $d-b$	0.125 (mm)
電子ビームと誘電体の間隔の初期値 $b-a$	0.5 (mm)
平行平板の間隔 f	2.0 (mm)
比誘電率 ε_r	2.12
電子ビームのドリフト速度の初期値 β_0	0.8274
電子のプラズマ周波数 $\omega_p/2\pi$	954 (MHz)
増大波の周波数 $\omega/2\pi$	123.8 (GHz)
システム長 L（管内波長λ_g）	2.0 (mm)
粒子の個数 N	1024（個）
y方向格子数 NGY	256
z方向格子数 NGZ	64
1ステップの時間間隔 Δt	2.53×10^{-14} (s)
電子ビームの加速電圧 V	398.9 (kV)
電子密度 n_0	2.01×10^{10} (/cm^3)

ビームの側に増やすものとする．

電子ビームに対して，線形流体近似の手法を用いて，図1に示したモデルに対する分散関係式を求めると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_y {k_y}^2}\tan p_y a\ \tanh h_y(b-a) \\
&-\frac{\varepsilon_r}{p_y {k_y}^2}\tan k_y(d-b) \\
&+\frac{1}{{h_y}^2 k_y}\tan p_y a\{1+\tanh h_y(b-a)\ \tanh h_y(f-d)\} \\
&-\frac{\varepsilon_r}{p_y h_y k_y}\{\tanh h_y(f-d)+\tanh h_y(b-a)\} \\
&-\frac{1}{{h_y}^3}\tan p_y a\ \tan k_y(d-b)\ \tanh h_y(f-d) \\
&+\frac{\varepsilon_r}{p_y {h_y}^2}\tan k_y(d-b)\ \tanh h_y(b-a)\ \tanh h_y(f-d) \\
&=0
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
{p_y}^2 &= \varepsilon_r\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-{k_z}^2 \\
{h_y}^2 &= {k_z}^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \\
{k_y}^2 &= {k_z}^2+\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2
\end{aligned} \tag{7}$$

とする．

以上のような手法を用いて解析を行った結果を以下に示す．まず，効率改善を行うための誘電体の厚さの最適な時間変化の様子を図4に示す．この図から，電子ビー

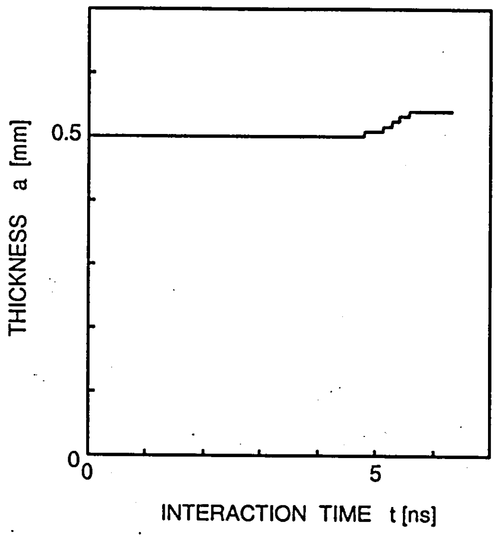


図4　誘電体の厚さの最適な
時間変化

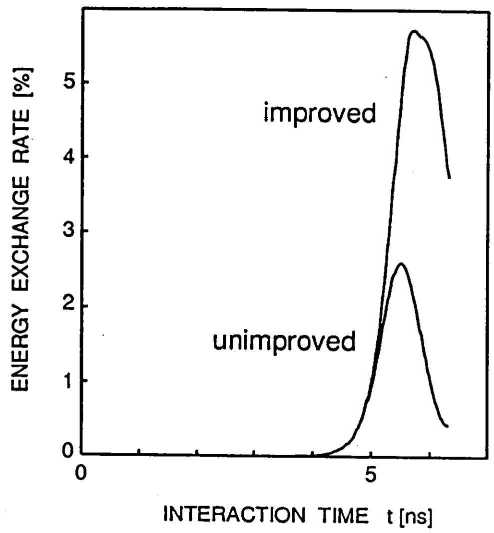


図5　エネルギー変換率の
時間変化

ムのドリフト速度の減少に合わせて誘電体の厚さを電磁波の進行方向に増加させれば，より長く電子ビームと電磁波の同期を維持できることがわかる．

以下，誘電体の厚さを図4のように変化させた場合の電磁波の特性について検討するために，電子ビームから電磁波へのエネルギー変換率の時間変化について考察する．ここで，時刻$t = n\Delta t$（Δt=1 ステップの時間間隔，$n = 0, 1, 2, \cdots$）における電子ビームから電磁波へのエネルギー変換率 $\eta(n)$ を，電子ビームの運動エネルギーから電磁波のエネルギーへ変換された割合として定義すると，

$$\eta(n) = \frac{W_{em}^n}{W_p^0} = \frac{W_p^0 - W_p^n}{W_p^0}$$

と表される．但し，W_{em}^n，W_p^n は，それぞれ，時刻$n\Delta t$における電磁波のエネルギーおよび電子ビームの運動エネルギーを示し，W_p^0 は電子ビームの運動エネルギーの初期値を示す．

誘電体の厚さが一定の場合，および誘電体の厚さを図4のように変化させた場合の電子ビームから電磁波へのエネルギー変換率の時間変化の様子を図5に示す．図5から，エネルギー変換率は，初めのうちはどちらも同じように指数関数的に増大しているが，次第に電子ビームの非線形性が強まり，やがて飽和に達する．この図より，誘電体の厚さを変化させた場合には電子ビームと電磁波の同期がより長く維持され，より多く電子ビームから電磁波にエネルギーが変換されていることがわかる．このとき，飽和時のエネルギーの変換率，すなわちエネルギー変換効率は，誘電体の厚さが一定の場合が2.60%であるのに対し，誘電体の厚さを変化させた場合には5.74%と，大幅に改善されている様子がわかる．

次に，横軸に個々の粒子の位置z_iを，縦軸に個々の粒子の速度v_{zi}をとった位相空間

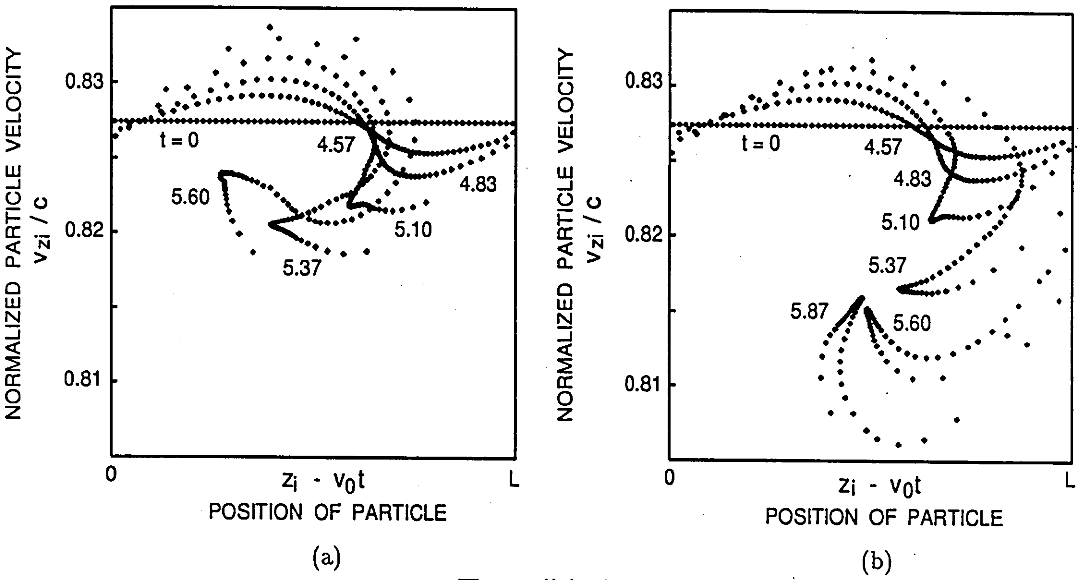


図6　位相空間図

図を，誘電体の厚さが一定の場合を図6 (a) に，誘電体の厚さを変化させた場合を図6 (b) に示す．まず，図6 (a) では，$t = 0$(ns) のときには小さな正弦的振動成分をもってほぼ一様に並んでいた粒子が，時間の経過とともに電磁波の電界に捕捉され，集群し，その集群が徐々に減速されていく様子がわかる．そして，$t = 5.37$(ns) において電子集群は最も減速され，電磁波のエネルギーが飽和に至る．その後，$t = 5.60$(ns) では電子集群は減速領域から加速領域に移り，加速されていることがわかる．一方，図6 (b) では，$t = 5.37$(ns) においても電子集群は更に減速されており，$t = 5.60$(ns) を過ぎてから電子集群が減速領域から加速領域に移る様子がわかる．このことからも，誘電体の厚さを変化させることにより電子ビームと電磁波の同期がより長く維持され，電子ビームから電磁波へより効率的なエネルギー変換が行われることがわかる．

最後に，表2に示す誘電体の厚さの変化を有する導波路（図4参照）を構成した場合の，電子ビームから電磁波へのエネルギー変換率の入力波数特性を図7に示す．ここで，電子ビームの速度は，初期状態で波数 k_za が $\pi/2$ ($\simeq 1.57$) のときの増大率が最大となるように設定されており，また出力点は，波数 k_za が $\pi/2$ のときの電磁波のエネルギーが飽和に達する位置に固定する．まず，誘電体の厚さが一定の場合では，図7からわかるように，出力点でのエネルギー変換率が最大となるのは，波数 k_za が$\pi/2$ よりもわずかに上方にずれた 1.58 のときである．これは，初期状態において $k_za = \pi/2$ の場合の増大率は最大であるが，出力点の直前では増大率は既に減少しているのに対して，初期状態において $k_za = 1.58$ の場合の増大率は，$k_za = \pi/2$ の場合の増大率と比べてわずかに小さいが，電子ビームのドリフト速度が減少しても増大率はほとんど減少しないからである．しかしながら，波数 k_za が 1.58 より大きくなると，出力点まで増大率はほとんど変化しないが，その増大率が小さいために

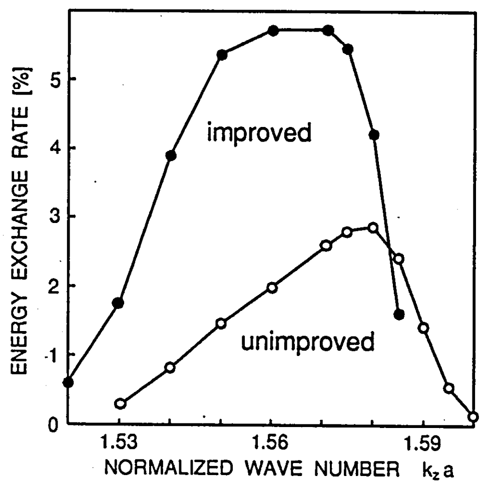


図7　エネルギー変換率の入力波数特性

結果的にエネルギー変換率は小さくなる．逆に，波数k_zaが$\pi/2$よりも小さい場合は，電子ビームのドリフト速度の減少とともに増大率が減少するために出力点でのエネルギー変換率は減少する．一般に，相対論的電子ビームを用いた発振器では，増大率が最大となる条件とエネルギー変換効率が最大となる条件は異なることが知られている[22]．次に，誘電体の厚さを変化させた場合では，誘電体の厚さが一定の場合に比べて幅広い波数の領域において出力点でのエネルギー変換率が大幅に改善されていることがわかる．しかしながら，波数k_zaが$\pi/2$より大きい領域では，波数の増加とともに出力点でのエネルギー変換率は急激に減少している．これは，初期状態での電子ビームと電磁波の結合が弱いために電子ビームのドリフト速度が$k_za=\pi/2$の場合に比べてなかなか減少しないにもかかわらず，誘電体の厚さが増加するために結合が更に弱くなり，結果として増大率が小さくなるからである．

表2　誘電体の厚さの変化

入力端からの距離(m)	1.1905	1.2701	1.3098	1.3435	1.3849	出力点(m)
厚さ変化(mm)	0.5078	0.5156	0.5234	0.5312	0.5391	1.4158
厚さ一定(mm)	0.5000					1.3664

5　結論

本稿では，誘電体薄膜を装荷した平行平板導波路と，十分大きい静磁界によって集束された平板状の相対論的電子ビームから構成されるチェレンコフレーザの2次元モデルにおいて，電子ビームのドリフト速度の減少に合わせて誘電体の厚さを電磁波の進行方向にステップ状に増加させることにより，誘電体の厚さが一定の場合に比べて電子ビームと電磁波の同期をより長く維持することができ，電子ビームの運動エネルギーから電磁波のエネルギーへのエネルギー変換効率が大幅に改善されることを示した．

参考文献

[1] A.V.Gaponov-Grekhov, and V.L.Granatstein, Eds., *Applications of High-Power Microwaves.* Norwood, MA: Artech House, 1994.

[2] J.E.Walsh, T.C.Marshall, and S.P.Schlesinger, "Generation of coherent Cherenkov radiation with an intense relativistic electron beam," *Phys. Fluids,* vol.20, pp.709-710, 1977.

[3] K.L.Felch, K.O.Busby, R.W.Layman, D.Kapilow, and J.E.Walsh, "Cherenkov radiation in dielectric lined waveguides," *Appl. Phys. Lett.,* vol.38, pp.601-603, 1981.

[4] E.P.Garate, J.E.Walsh, C.Shaughnessy, B.Johnson, and S.Moustaizis, "Cherenkov free electron laser operation from 375 to 1000 μm," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A,* vol.259, pp.125-127, 1987.

[5] F.Ciocci, A.Doria, G.P.Gallerano, I.Gaibbai, M.F.Kimmitt, G.Messina, A.Renieri, and J.E.Walsh, "Observation of coherent millimeter and submillimeter emission from a microtron-driven Cherenkov free-electron laser," *Phys. Rev. Lett.,* vol.66, pp.699-702, 1991.

[6] J.E.Walsh and J.B.Murphy, "Tunable Cherenkov laser,"*IEEE J. Quantum Electron.,* vol.QE-18, pp.1259-1263, 1982.

[7] M.Shoucri, "The excitation of microwaves by a relativistic electron beam in a dielectric lined waveguides," *Phys. Fluids.* vol.26 pp.2271-2275, 1983.

[8] V.K.Tripathi, "Excitation of electromagnetic waves by an axial electron beam in a slow wave structure," *J. Appl. Phys.,* vol.56, pp.1953-1958, 1984.

[9] E.P.Garate, C.H.Shaughnessy, and J.E.Walsh, "High-gain Cherenkov free-electron laser at far infrared wavelengths," *IEEE J. Quantum Electron.,* vol.QE-23, pp.1627-1632, 1987.

[10] T.Shiozawa and H.Kondo, "Mode analysis of an open-boundary Cherenkov laser in the collective regime," *IEEE J. Quantum Electron.,* vol.QE-23, pp.1633-1641, 1987.

[11] 田中俊幸, 安元清俊, "円形導波管内を伝搬する相対論的電子ビームによるチェレンコフ放射," 信学論 (C), vol.J70-C, pp.40-48, 1987.

[12] Y.Shibuya and T.Shiozawa, "Characteristics of an open-boundary Cherenkov laser using a magnetically-confined relativistic electron beam," *IEICE Trans.,* vol.E72, pp.828-833, 1989.

[13] 石堂能成, 茨木 普, 塩沢俊之, "非線形誘電体導波路を用いたチェレンコフレーザの理論解析," 信学論 (C-I), vol.J72-C-I, pp.152-159, 1989.

[14] 沖田宗史, 田中俊幸, 田中和雅, 安元清俊, "誘電体回折格子を利用した相対論的電子ビームによる電磁放射の数値解析," 信学論 (C-I), vol.J75-C-I, pp.515-522, 1992.

[15] 堀之内克彦, 塩沢俊之, "開放型チェレンコフレーザの動的特性の解析," 信学論 (C-I), vol.J76-C-I, pp.331-336, 1993.

[16] 塩沢俊之, 宇都宮英治, 上田哲也, "カー媒質装荷によるチェレンコフレーザの特性改善," 信学論 (C-I), vol.J77-C-I, pp41-47, 1994.

[17] T.Shiozawa, T.Sato, and K.Horinouchi, "Improved characteristics of a Cherenkov laser loaded with a Kerr-like medium," *Appl. Phys. Lett.*, vol.64, pp.1607-1609, 1994.

[18] 堀之内克彦, 三田雅樹, 高橋博之, 塩沢俊之, "粒子シミュレーションによるチェレンコフレーザの特性解析," 信学論 (C-I), vol.J78-C-I, pp.1-8, 1995.

[19] 佐多正博, 鎌田 央, 塩沢俊之, "誘電率変化によるチェレンコフレーザの効率改善 — モード散乱を考慮した場合," 信学論 (C-I), vol.J78-C-I, pp.353-359, 1995.

[20] T.Shiozawa and T.Yoshitake, "Efficiency enhancement in a Cherenkov laser loaded with a Kerr-like medium," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-31, pp.539-545, 1995.

[21] T.Shiozawa, H.Takahashi, and Y.Kimura, "Nonlinear saturation and efficiency enhancement in a Cherenkov laser using a dielectric grating," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-32, pp.2037-2044, 1996.

[22] Y. Carmel, W. R. Lou, T. M. Antonsen, Jr., J. Rodgers, B. Levush, W. W. Destler, and V. L. Granatstein "Relativistic plasma microwave electronics: Studies of high-power plasma-filled backward-wave oscillators" *Phys. Fluids, B,* vol.4, pp.2286-2291, 1992

[23] C.K.Birdsall and A.B.Langdon, *Plasuma Physics via Computer Simulation.* New York: McGraw-Hill, 1985.

[24] K.S.Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.AP-14, pp.302-307, 1966.

[25] A.Taflove, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method.* Norwood, MA: Artech House, 1995.

[26] R.B.Miller, *An Introduction to the Physics of Intense Charged Particle Beams.* New York: Plenum, 1982.

輻射科学研究会資料

RS 97-8

Leaky Wave Radiation of Millimeter Waves in a Corrugated Dielectric Waveguide Backed by Semiconductor Plasma Layer

Arokiaswami Alphones and **Makoto Tsutsumi**
アロキャスワミ アルフォンス 堤 誠

Department of Electronics and Information Science
Kyoto Institute of Technology
Matsugasaki, Sakyo-Ku, Kyoto 606

1997年7月24日

Abstract: Corrugated dielectric waveguide backed by silicon slab has been analyzed using coupled mode theory to study the variation of leaky wave radiation characteristics. By optical illumination, the plasma induced semiconductor layer has capability of control on radiation characteristics of leaky wave. With the increase in optically induced plasma density, leakage constant and radiation efficiency have become improved. Also the experiments have been carried out at Q band to investigate the light controlled phenomena of leaky wave.

1.Introduction

There has been a continuous and increasing interest in the optical control of microwave devices which include passive structures mainly concerned with switching, phase shifting, filtering and attenuation applications [1-3] and on the optical performance of active devices such as GaAs MESFET and HEMT [4-5]. Also the optical control on periodic structures have been given certain attention [6]. The propagation characteristics and the radiation characteristics of the periodic structure at millimeter wave band can be controlled by either electrically or optically. However the optical control has its own inherent merits such as high isolation and faster speed. Some of the investigations reported in the literature are fiber optically controlled Bragg reflection filter on silicon coplanar waveguide [7] and the periodically photoinduced semiconductor plasma grating structure [8]. But all these studies have been done on a single semiconductor waveguide or microstrip/coplanar lines of semiconductor substrates which have not shown an efficient performance of optical control.

Recently J.Liu et al [9] have theoretically investigated the plasma backed fixed periodic structure. In their work, a corrugated sapphire structure backed by light induced thin silicon layer has been considered in which the plasma occupied region has been assumed as entire silicon layer and the variation of Bragg reflection and leaky wave radiation under different plasma densities have been reported. In reality and experimental situations, semiconductor slab with partially occupied plasma layer created by optical illumination must be considered and hence in this paper such a model has been investigated.

To analyze this multilayered structure, there are methods that usually a mixture of analytical and computer based numerical techniques namely boundary value methods [10], perturbation techniques [11], eigen system methods [12] and coupled mode approach [13]. Among them the coupled mode theory is a simple approach which combine perturbation arguments with coupled wave concept, and can provide good physical insight about the modes in the periodic structure. Hence this approach has been employed here to analyze the leaky wave radiation characteristics and its optically controlled behavior.

2. Formulation of the Problem

Fig.1 shows the configuration of the corrugated dielectric waveguide backed by silicon wafer with partially occupied plasma region. By illuminating with photon energy greater than the band gap energy of the semiconductor, the generation of free carriers creates a thin plasma layer at the surface of the semiconductor. The absorption coefficient and the light penetration depth depend on the optical wavelength and the given semiconductor. The permittivity in the created plasma region is given by the following equation.

$$\varepsilon_p = \varepsilon_s - \sum_{i=e,h} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 + \gamma_i^2}\left(1 + j\frac{\gamma_i}{\omega}\right) = \varepsilon_{pr} - j\varepsilon_{pi} \quad (1)$$

$$\omega_{pi}^2 = \frac{N_p e^2}{\varepsilon_0 m_i^*} \qquad i = e,h$$

ε_s is the relative permittivity of semiconductor, ω_p is the plasma frequency and γ the collision frequency of electrons or holes. The plasma resonance frequency of electron or hole depends on the density of the corresponding type of carriers which is related to the intensity of the incident optical beam.

The presence of periodic structure geneartes spatial harmonics and at Bragg resonances, there is a strong interaction between two major spatial harmonics that have the appearance of propagating in opposite directions. The spatial harmonic n=-1 with a relatively small axial propagation constant, causes significant propagation in the transverse direction, so that the periodic waveguide exhibits radiation. The direction of the radiated beam will be shifted or scanned due to change in the propagation constant which can be accomplished by the light induced plasma layer with a controllable dielectric constant.

The basic features of the behavior of dielectric waveguide backed by semiconductor with plasma layer can be extracted from a multilayered planar model of Fig.1 in which no variation exists in y-direction. Here TM mode is considered for the analysis. The field components are

$$H_y(x,z,t) = H_y(x)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$E_x(x,z,t) = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} H_y(x)e^{j(\omega t-\beta z)} \tag{2}$$

$$E_z(x,z,t) = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

and the transverse function $H_y(x)$ is considered in each layer as in Eq.(3)

$$H_y(x) = \begin{cases} Ae^{qx}, & x \le 0 \\ A[\cosh(ux) + \frac{q\varepsilon_p}{u}\sinh(ux)], & 0 \le x \le t_p \\ A[X_1\cosh(v(x-t_p)) + X_2\sinh(v(x-t_p))], & t_p \le x \le t+t_p \\ A[X_3\cos(p(x-t-t_p)) + X_4\frac{v\varepsilon_d}{p\varepsilon_s}\sin(p(x-t-t_p))], & t+t_p \le x \le d+t+t_p \\ A[X_3\cos(pd) + X_4\frac{v\varepsilon_d}{p\varepsilon_s}\sin(pd)]e^{-q(x-d-t-t_p)}, & x \ge d+t+t_p \end{cases} \tag{3}$$

where

$$q^2 = \beta^2 - k_0^2, \quad p^2 = k_0^2\varepsilon_d - \beta^2$$

$$u^2 = \beta^2 - k_0^2\varepsilon_p, \quad v^2 = \beta^2 - k_0^2\varepsilon_s$$

$$X_1 = \cosh(ut_p) + \frac{q\varepsilon_p}{u}\sinh(ut_p)$$

$$X_2 = \frac{u\varepsilon_s}{v\varepsilon_p}\sinh(ut_p) + \frac{q\varepsilon_s}{v}\cosh(ut_p)$$

$$X_3 = X_1\cosh(vt) + X_2\sinh(vt)$$

$$X_4 = X_1\sinh(vt) + X_2\cosh(vt)$$

The continuity of H_y and E_z at the four interfaces results in the eigenvalue equation given by Eq.(4).

$$\cos(pd)[X_4 \frac{v}{\varepsilon_s} + qX_3] + \sin(pd)[qX_4 \frac{v\varepsilon_d}{p\varepsilon_s} - \frac{p}{\varepsilon_d} X_3] = 0 \qquad (4)$$

Now considering the surface corrugation at the dielectric- air interface, the field component E_x of the corrugated waveguide can be expanded in terms of guided modes and the continuum of radiation modes.

$$E_x = BE_x^{(0)} e^{j(\omega t - \beta_0 z)} + \int \sigma_\beta A_\beta e^{j(\omega t - \beta z)} E_x^{(\beta)} d\beta \qquad (5)$$

The coupled mode equations which describe coupling from one mode to a continuum are [13]

$$\begin{aligned} \frac{dA_\beta}{dz} &= \kappa_{\beta_0\beta} e^{j(\beta-\beta_0)z} B \\ \frac{dB}{dz} &= \int_0^{k_0} \kappa^*_{\beta_0\beta} \sigma_\beta A_\beta e^{-j(\beta-\beta_0)z} d\beta \end{aligned} \qquad (6)$$

and the leakage constant is given by

$$\alpha = \pi \left| \kappa_{\beta_0\beta} \right|^2 \sigma_\beta \qquad (7)$$

where

$$\sigma_\beta = \frac{\beta}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2}}$$

and

$$\kappa_{\beta_0\beta} = \frac{\omega\mu_0}{4\pi}\frac{\varepsilon_d - 1}{\varepsilon_d}A^2\{\frac{a}{2}[X_3^2 + X_4^2\frac{v^2\varepsilon_d^2}{p^2\varepsilon_s^2}] + \frac{\sin 2pd - \sin 2p(d-a)}{4p}\cdot$$

$$[X_3^2 - X_4^2\frac{v^2\varepsilon_d^2}{p^2\varepsilon_s^2}] - X_3X_4\frac{v\varepsilon_d}{2p^2\varepsilon_s}[\cos 2pd - \cos 2p(d-a)]\}$$

where $\kappa_{\beta_0\beta}$ is the coupling coefficient, A_β and B are the respective mode amplitudes for continuum and guided modes, β and β_0 are the propagation constants and σ_β is the mode density for the continuum.

3. Numerical Results

We consider a thick teflon waveguide with a rectangular grating at the teflon-air interface of thickness a=3mm as shown in Fig.1. The bottom of the waveguide has a thin silicon layer of thickness 0.5mm. It is assumed that the dielectric constant of teflon and silicon as 2.2 and 11.8 respectively. In the numerical evaluation the plasma thickness t_p has been assumed as uniform with 20 μm [6].

The variation of propagation and the attenuation constants as a function of plasma density.thickness product of $N_p.t_p$ are evaluated and are shown in Figs. 2(a) and 2(b). At low plasma densities the change in the refractive index of silicon is not so predominant and hence at high plasma densities of the order more than $10^{18}/m^2$, the variation of propagation constant is clearly observed. But the imaginary part of the refractive index is quite significant and exhibit pronounced effect even at low plasma densities of the order about $10^{15}/m^2$ and resulting in a considerable attenuation of propagating power.

Now by considering the surface corrugation at the teflon-air interface with grating period (Λ) of 6.1 mm, the distance between the grating teeth as 3mm and the depth of corrugation as 1.2 mm, the leakage constant (αΛ) has been evaluated from Eq.(7) as a function of plasma density and for different modulation depths of corrugation ($\eta = 2a/\pi d$) which are shown in Fig.3. At low plasma densities the leakage constant contributed by the optically induced plasma density is relatively small. As the plasma density is increased the effect of semiconductor plasma on the propagation characteristics of dielectric waveguide are clearly understood. The radiation efficiency (Γ) is also behaving in a similar fashion which has been numerically estimated from the following expression and is shown in Fig.4.

$$\Gamma = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}[H_y]_{out}[H_y]_{in}\,dx\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|[H_y]_{in}\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty}\left|[H_y]_{out}\right|^2 dx} \tag{8}$$

At high plasma densities, the leakage constant ($\alpha\Lambda$) and the radiation efficiency (Γ) have shown an enhanced effect and it is found more effective at higher corrugation depths. The radiation pattern has been numerically estimated by the following expression

$$R(\theta) = \left|\frac{1}{Ne^{(N-1)\psi''/2}}\frac{\sin(N\psi'/2)}{\sin(\psi'/2)}\right|^2 \tag{9}$$

where

$$\psi = \psi' - j\psi'' = k_0\Lambda\sin\theta - (\beta_0 - j\alpha)$$

The radiation pattern at 40 GHz under different plasma densities over a corrugation length of 10cm has been calculated and are shown in Fig.5. It has been assumed that the maximum power radiated in the main beam direction in the case of without plasma as 0dB and all other pattern data with plasma are normalized. The deterioration of radiation pattern with increase in plasma density is due to the contribution of conductivity of plasma layer resulting in a lossy component of guided wave signal. With the creation of plasma layer in the silicon layer the change in the propagation constant results in the angle of maximum radiation and are shown in Fig.6 at three different plasma density.thickness product values which exhibit the scanning behavior by optical illumination about 2 deg.

4.Experimental Results

To investigate the effect of optical control on leaky wave phenomena, experiment has been carried out at Q band(33-50GHz) using a HP 8757C scalar network analyzer. The dielectric guide used is teflon with a thickness of 3mm, the depth of corrugation of 1.2 mm (η=25%) and having a corrugation period of 6.1 mm. High resistivity silicon wafer of thick 500 μm and having a resistivity of 5000 ohm.cm is used. Silicon wafer is placed under the teflon guide as shown in the theoretical model of Fig.1. To enhance the launching efficiency the teflon guide has a tapered transition at the input end which is placed into horn antenna. The schematic diagram of the test section is shown in Fig.7. To detect the leaky wave signal a standard horn antenna is fixed far from the center of the corrugated teflon slab about 70 cm, which is rotatable 90 deg. towards backfire and endfire directions from the broadside. First, without and then with silicon wafer backing the corrugated teflon slab, the scanning behavior of the radiated signal has been experimentally observed and are shown in Fig.8 which closely follow the theoretically predicted scanning characteristic of Fig.6. A high power Xenon arc lamp of 2.2W with Al coated parabolic mirror is used to illuminate the silicon wafer. With illumination the radiation pattern at 36 GHz has been observed and is shown in Fig.9. By comparing with the theoretically estimated radiation pattern, the optically induced plasma density.thickness product in the silicon slab could be in the order of $10^{17}/m^2$ which agree with our earlier investigations [8,14]. Though the change in main beam direction is not so clearly observed, but the degradation of power level has been observed. The reason for not obtaining scanning characteristics by illumination could be due to the high loss tangent of silicon wafer and inadequate intensity of optical signal in the experiment.

5. Conclusion

The leaky wave radiation characteristics of a corrugated dielectric waveguide backed by partially plasma occupied semiconductor slab and its optically controlled behavior are analyzed by coupled mode theory. Though the leakage constant and efficiency have shown an enhanced effect with increase in plasma density of more than $10^{22}/m^3$, the radiation pattern become deteriorated at higher plasma densities. Experimental investigations are also carried out at millimeter wave band. The scanning behavior with optically induced plasma density has been examined and are compared with theoretical predictions.

Acknowledgment

The first author would like to thank Japan Society for Promotion of Science (JSPS) for the fellowship support. Also we would like to thank Mr.M.Kanehira for the experiemental assistance.

References

[1] Special issue on Optical-Microwave Interaction Devices, Circuits and Systems, IEICE Trans., Vol.E76-C, Feb. 1993.

[2] Special issue on Microwave and Millimeter wave Photonics, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-43, Sept. 1995.

[3] R.Simons, Optical Control of Microwave Devices, Boston: Artech House, 1990.

[4] A.J.Seeds and A.A.A.DeSalles, "Optical control of microwave semiconductor devices", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-38, pp.577-584, 1990.

[5] M.A.Romero, M.A.G.Martinez, and P.R.Herczfeld, "An analytical model for the photodetection mechanisms in high- electron mobility transistors", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-44, pp.2279-2287, 1996.

[6] M.Matsumoto, M.Tsutsumi and N. Kumagai, "Radiation of millimeter waves from a dielectric waveguide with a light induced grating layer", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-35, pp.1037-1042, 1987.

[7] W.Platte, "LED induced distributed Bragg reflection microwave filter with fiber optically controlled change of center frequency via photoconducting gratings", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-39, pp.359-363, 1991.

[8] A.Alphones and M.Tsutsumi, "Leaky wave radiation from a periodically photoexcited semiconductor slab waveguide", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-43, pp.2435-2441, 1995.

[9] J. Liu et al., "Analysis of millimeter wave phase shifters coupled to a fixed periodic structure", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-44, pp. 1416-1423, 1996.

[10] K.C.Chang, V.Shah and T.Tamir, "Scattering and guiding of waves by dielectric gratings with arbitrary profiles", J. Opt. Soc. Am., Vol.70, pp.804-813, 1980.

[11] K.Handa, S.T.Peng and T.Tamir, "Improved perturbation analysis of dielectric gratings", Appl.Phys., Vol.5, pp.325-328, 1975.

[12] S.T.Peng, T.Tamir and H.C.Bertoni, "Theory of periodic dielectric waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-23, pp.123-133, 1976.

[13] H.F.Taylor and A.Yariv, "Guided wave optics", Proc. of IEEE, Vol.62, pp.1044-1060, 1974.

[14] A.Alphones and M.Tsutsumi, "Optically controlled Bragg reflection characteristic of millimeter waves in a corrugated dielectric waveguide", Technical Report of IEICE(Japan), OM96-13, pp.1-7, 1997.

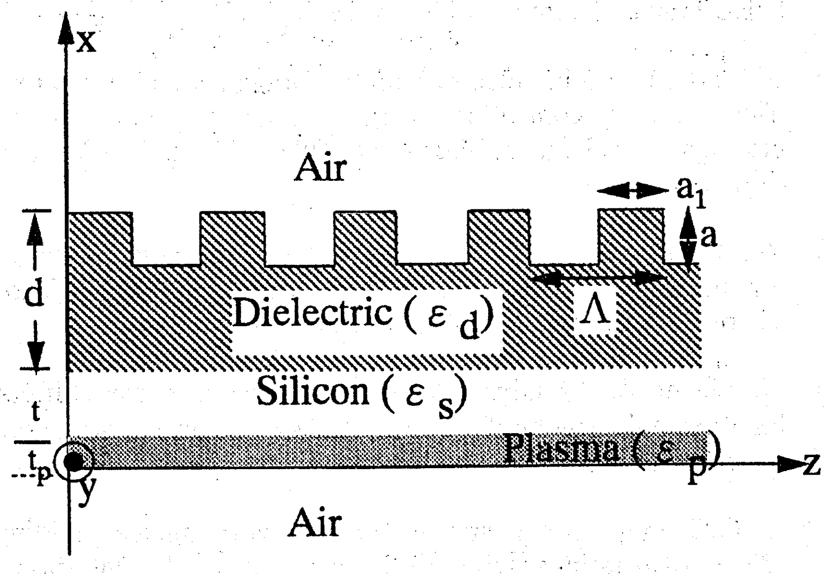


Fig.1. Configuration of corrugated dielectric waveguide backed with semiconductor layer

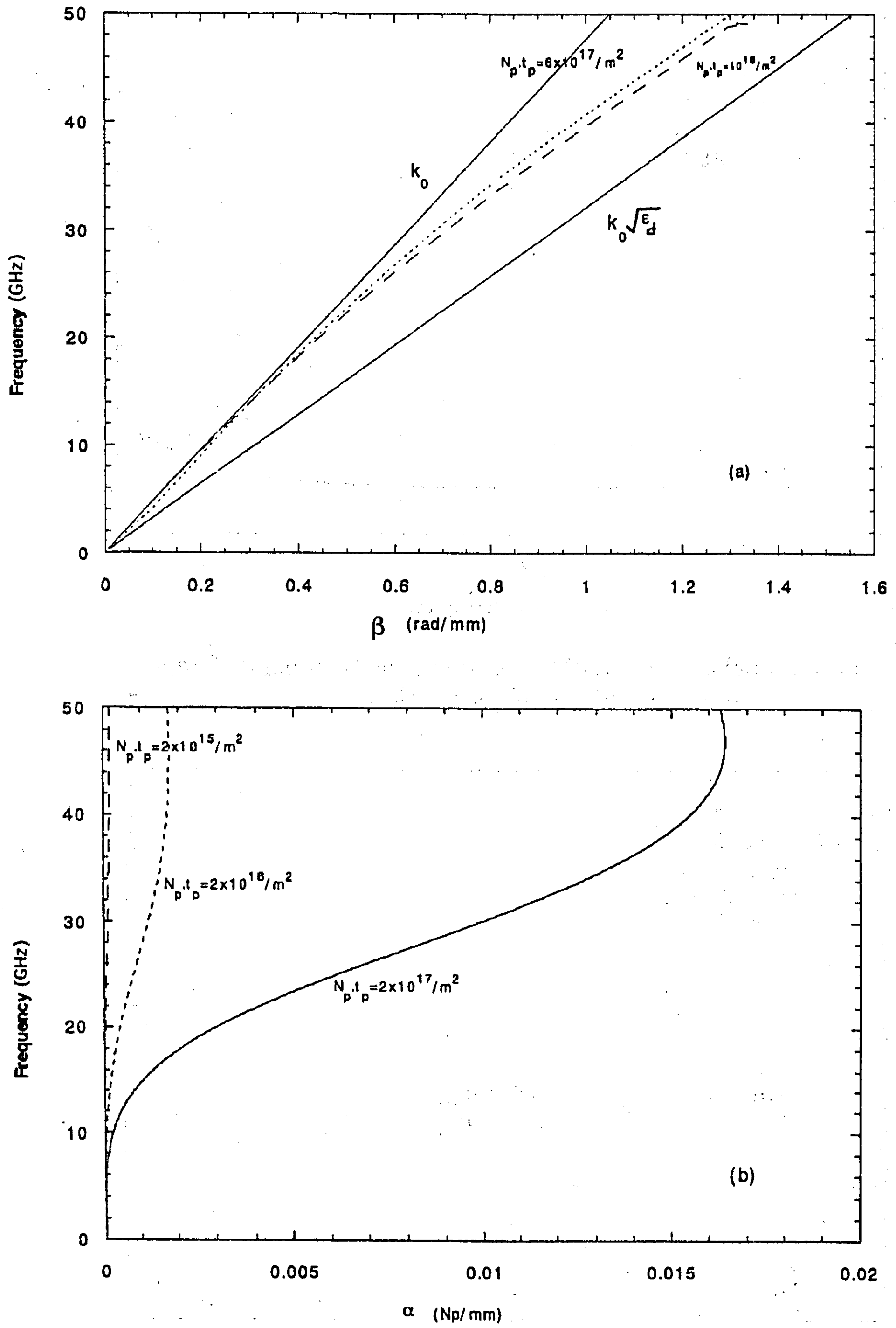


Fig.2. Dispersion characteristics of planar dielectric waveguide backed by silicon wafer
(a) Phase constant (b) attenuation

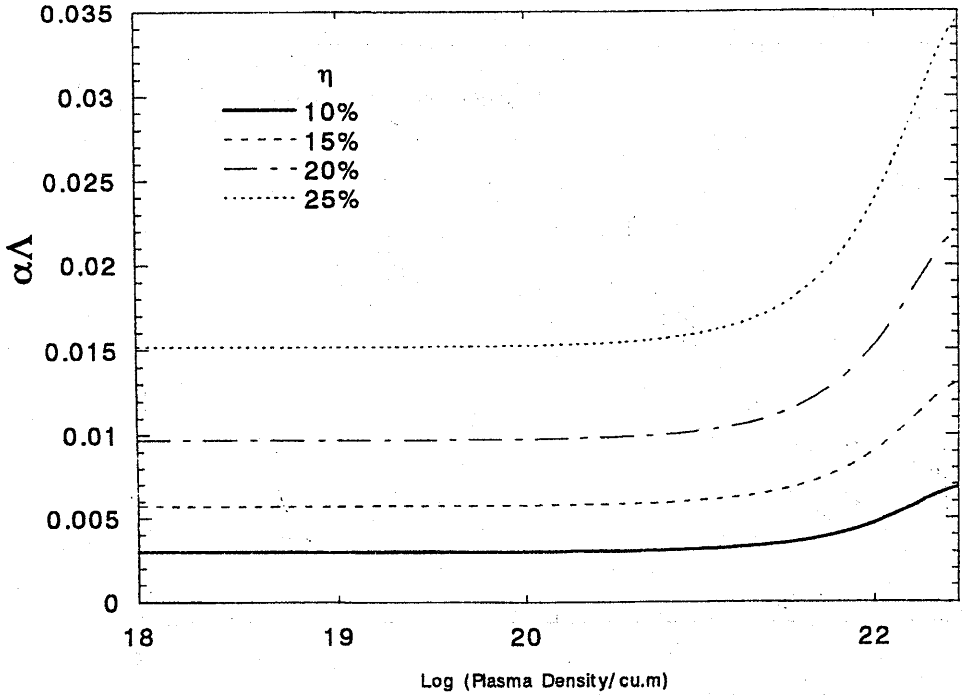


Fig.3. Leakage constant vs. plasma density under different modulation indices of corrugation

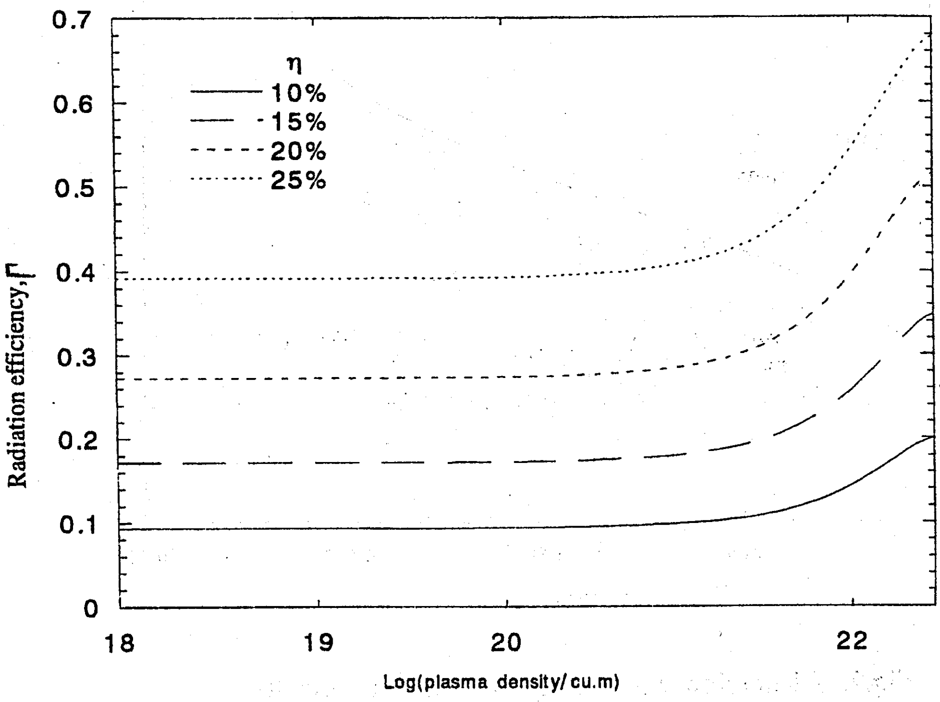


Fig.4. Radiation efficiency vs. plasma density under different modulation indices of corrugation

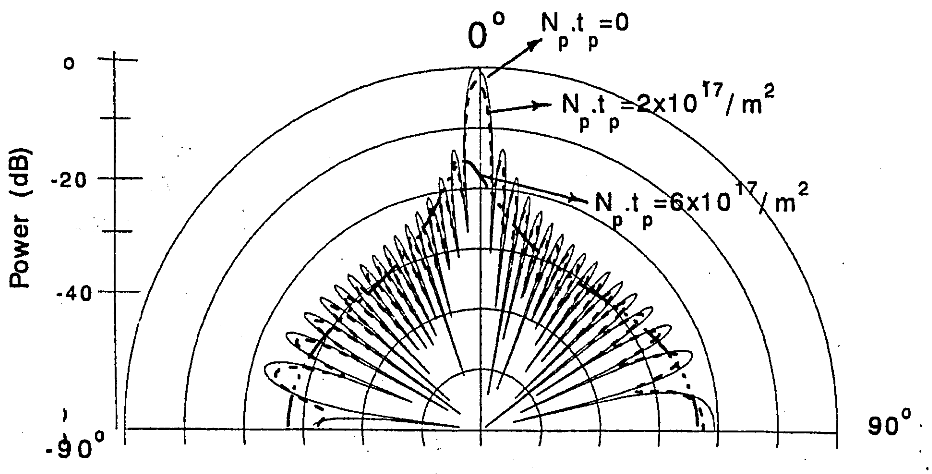


Fig.5. Radiation pattern under different plasma densities
(f = 40 GHz)

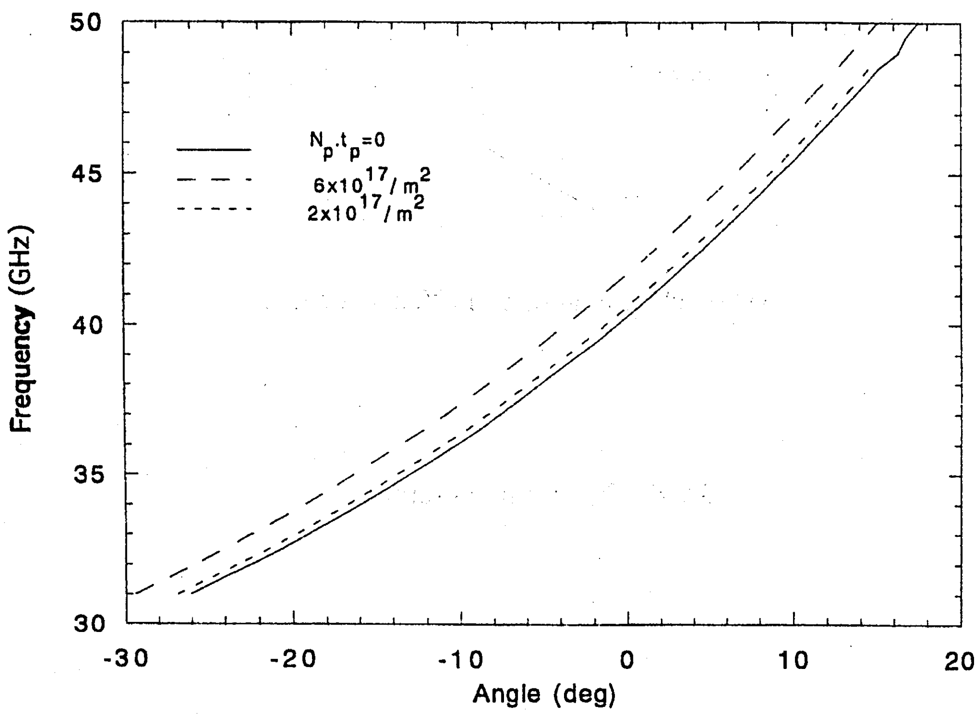


Fig.6. Scanning behavior under different plasma densities

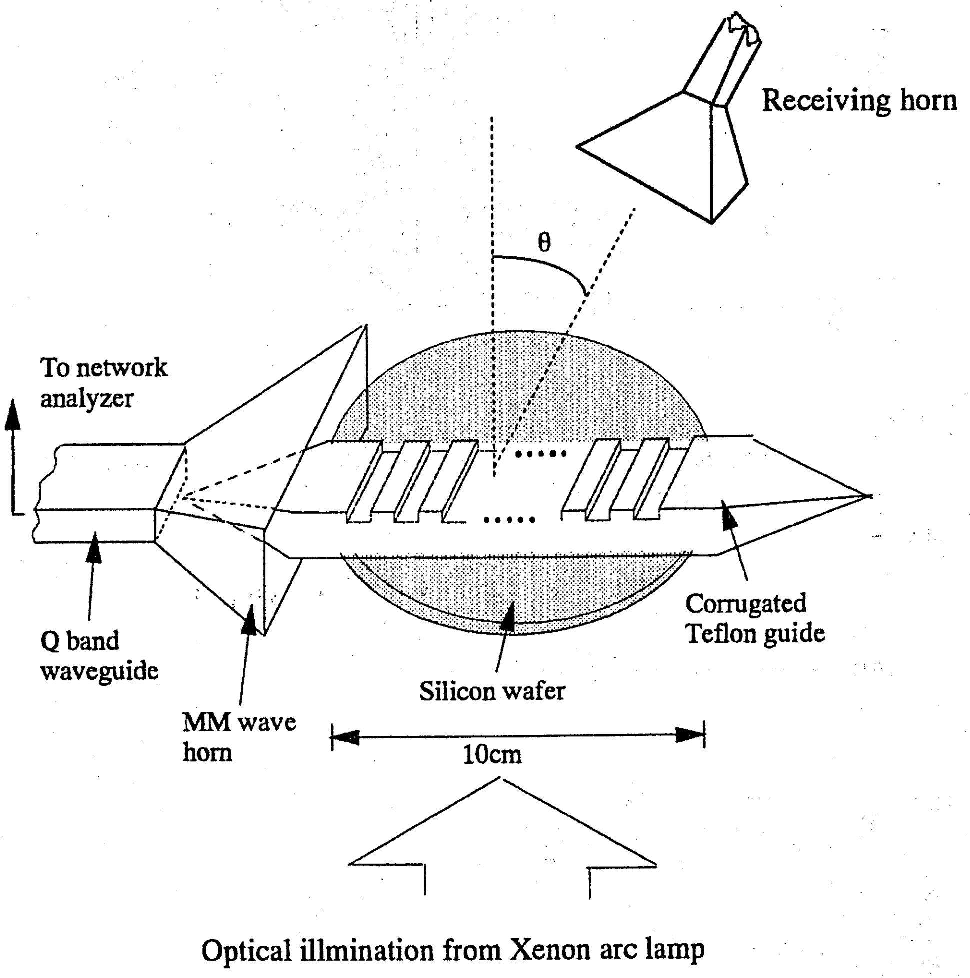


Fig.7. Experiemntal setup

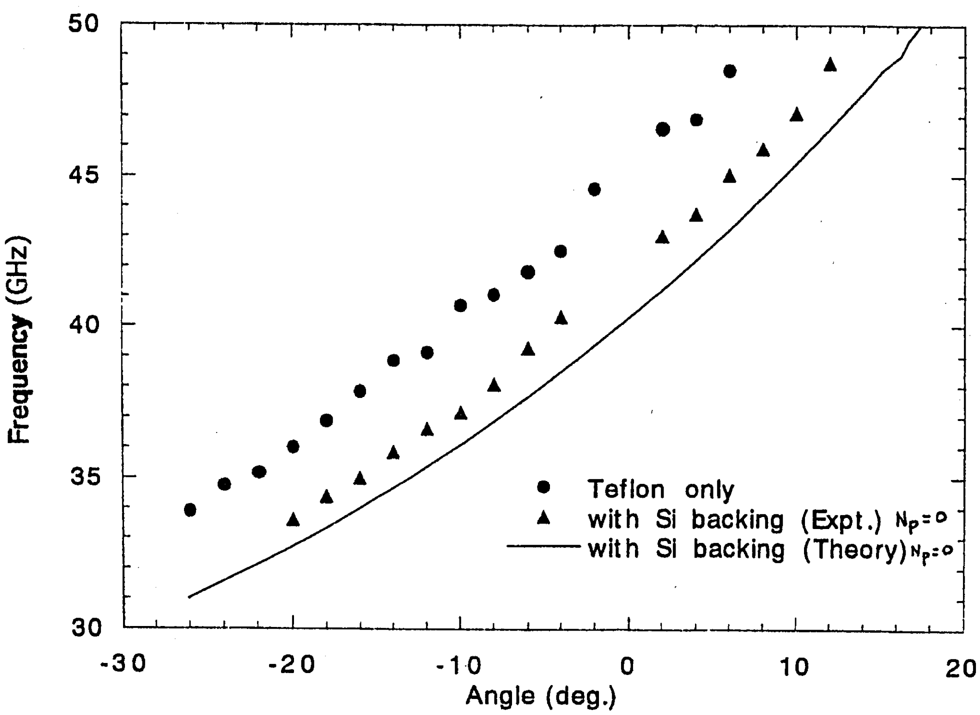


Fig.8. Experiemntally observed scanning characteristic

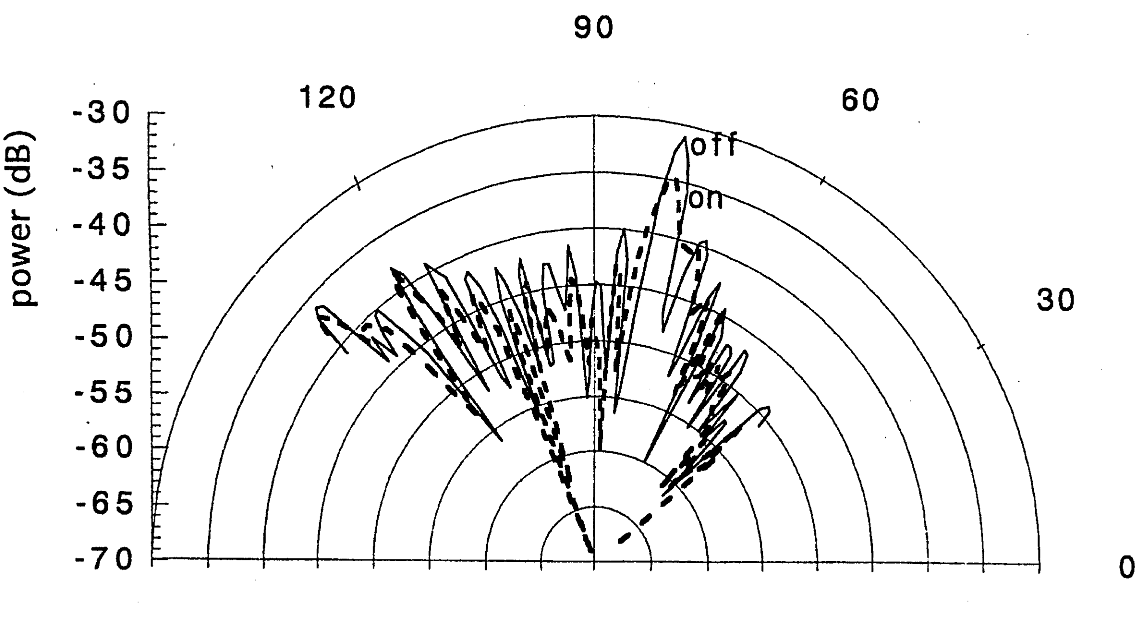


Fig.9. Measured radiation pattern at 36 GHz with silicon backing under illumination

輻射科学研究会資料
(RS97-9)

８００ＭＨｚデジタル携帯電話用ダイバーシチアンテナの解析および実験による検討

Analytical and Experimantal Studies on a Diversity Antenna for 800 MHz-band Digital Portable Telephones

小川晃一*1　上野伴希*1
菅田誠*2　森永洋一*2

*1 松下電器産業（株）デバイス・エンジニアリング開発センター
〒５７１　大阪府門真市大字門真１００６

*2 松下通信工業（株）パーソナルコミュニケーション（事）
〒２２３　横浜市港北区綱島東４丁目３番１号

平成９年７月２４日（木）
於　大阪大学工業会館

８００ＭＨｚデジタル携帯電話用ダイバーシチアンテナの解析および実験による検討

Analytical and Experimantal Studies on a Diversity Antenna for 800 MHz-band Digital Portable Telephones

小川晃一[*1]　上野伴希[*1]
菅田誠[*2]　森永洋一[*2]

[*1]松下電器産業（株）デバイス・エンジニアリング開発センター
〒５７１　大阪府門真市大字門真１００６

[*2]松下通信工業（株）パーソナルコミュニケーション（事）
〒２２３　横浜市港北区綱島東４丁目３番１号

あらまし

８００ＭＨｚ帯デジタル携帯電話用として外部アンテナに２共振特性の広帯域ホイップアンテナを、内蔵アンテナに小形マイクロストリップアンテナを用いたダイバーシチアンテナを開発した。ホイップアンテナは、これを携帯電話に設置した場合の放射特性とインピーダンス特性をモーメント法による数値解析と実験により検討した。この結果から、２共振特性を与えるアンテナ構造を見いだし、筐体上の電流を小さくし、利得が高く、かつ帯域幅が従来比２．６倍の広帯域な特性を有するアンテナを実現した。一方、内蔵アンテナには樹脂性誘電体基板を用いた小形アンテナを検討した。特に、携帯電話に実装したときのアンテナの大きさと利得、帯域幅の関係を詳細に調べ、体積３．５ｃｃの大きさでありながらホイップアンテナに匹敵する－１ｄＢｄの高い利得が得られることを明らかにした。さらに、移動通信における多重波環境をモデル化し、上記ダイバーシチアンテナの相関特性を理論解析した。それにより、放射効率が高く、小さい相関係数を得るための様々な条件を具体的に示した。その結果、高い放射効率を得るためのホイップアンテナおよび筐体の長さには最適値が存在し、ホイップ長が０．５４波長付近で放射効率は最大になりほぼ０ｄＢとなること、筐体長が１／４波長では１／４波長より短いホイップアンテナでも高い放射効率が得られること、さらにこれらの条件下で携帯電話の実用状態では０．３以下の十分小さな相関係数が得られることを明らかにした。そして、最後にダイバーシチ相関特性の屋外実験を行い、携帯電話用として実用上十分低い相関係数が得られること、ならびに解析結果とよい一致を示すことを確認した。

キーワード　ダイバーシチ、携帯電話、板状逆Ｆアンテナ、モーメント法、相関特性

1．まえがき

携帯電話の普及は近年めざましいものがある。本年３月末現在、国内におけるその加入者数は２０００万と、国民の５人に１人は端末を持つ時代に突入している。携帯電話にはアナログ方式とデジタル方式があるが、デジタル方式は従来のアナログ方式と比べて極めてノイズのすくない通話品質、高度な秘話機能、高品位なデータ通信機能など優れた特徴をもっており、利用者が急速に増えつつある。ところで、デジタル携帯電話にはダイバーシチ受信方式が採用されている。ダイバーシチ受信では２つのアンテナによって電波を同時に受信し、常にレベルの大きいほうを選択することでフェージングによって生じる受信レベルの低下を防止する。このため、アンテナには外部アンテナとしてのホイップアンテナと、小型筐体に納めることができる内蔵アンテナが必要である。

一方、この種のダイバーシチアンテナでは２つのアンテナが互いに近接して用いられるため、アンテナ素子間相互結合による放射効率の低下を招きやすい。従って、高いダイバーシチ効果を得るためには、放射効率の低下を防ぎながらアンテナ間の相関係数を十分小さくすることが重要である［１］。そのためには、アンテナ構造、配置および到来波の状況と放射効率および相関係数の関係を知ることが必要である。

そこで本論文では、まず８００ＭＨｚ帯デジタル携帯電話用として外部アンテナに２共振特性の広帯域ホイップアンテナを、内蔵アンテナに小形マイクロストリップアンテナを用いたダイバーシチアンテナの開発結果について述べる［２］。これにより、デジタル携帯電話用として充分な帯域幅と高い利得を有した優れた特性のダイバーシチアンテナを実現した。

さらに、上記ダイバーシチアンテナの相関特性を理論的に検討した［３］。移動通信における多重波環境をモデル化し、ホイップ長、筐体の形状、傾き角、到来波の状況と放射効率および相関係数の関係を定量的に解明した。これにより、放射効率が高く、小さな相関係数を得るための様々な条件を具体的に示した。そして、最後にダイバーシチ相関特性の屋外実験を行い、携帯電話用として実用上十分低い相関係数が得られること、ならびに解析結果とよい一致を示すことを確認した。

2．システム構成

携帯電話の外観を図１に示す。外観寸法は幅４７mm，奥行き２６mm，高さ１４０mmで容積は約１５０ccである。ダイバーシチアンテナはホイップアンテナと内蔵アンテナによって構成される。ホイップアンテナは受信および送信の共用アンテナとして、内蔵アンテナは受信専用アンテナとして機能し、これら２つのアンテナでダイバーシチブランチを構成している。ホイップアンテナの整合回路は送受信回路が実装されているプリント基板上に、内蔵アンテナは携帯電話内部の背面に設置されている金属板の上方に実装されている。この金属板はプリント基板のグランド面と接続されており、これらが一体となって筐体を形成しアンテナ素子と共に携帯電話全体のアンテナ系を構成している。

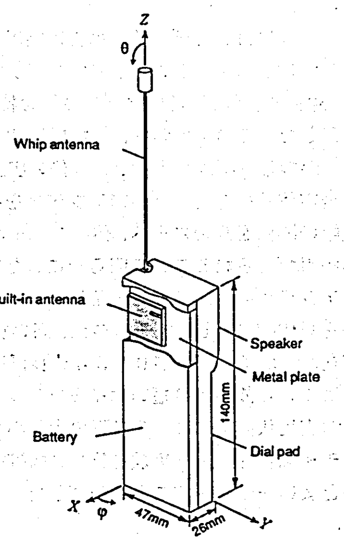


図１　携帯電話の構成
Fig. 1 Configuration of the portable telephone.

3．ホイップアンテナ

図２にデジタル方式と従来（アナログ）方式の周波数配置を示す。従来方式の帯域が７２ＭＨｚ（比帯域７．９％）であるのに対し、デジタル方式の帯域は１４６ＭＨｚ（比帯域

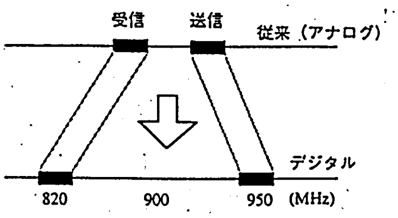


図２　携帯電話の周波数配置
Fig. 2 Frequency allocation for the portable telephone.

１６．５％）と、従来方式と比べて２倍以上広くなっている。このことからデジタル方式では、従来のアナログ方式携帯電話の２倍以上の周波数帯域幅を有するホイップアンテナが必要とされる。この場合、広帯域化とともに高利得化が重要な課題である。この要求を満足するためには、アンテナ構造の最適化が必要である。しかしアンテナ特性が無線機筐体の影響を強く受けるので、一般的な設計方法がなく、これまでは実験による cut and try 的手法がとられていた。この問題点を解決するために、以下の技術開発を行った。

（１）２共振特性を与えるホイップアンテナによって従来の限界を越えた広帯域化を実現した。

（２）無線機筐体に装着された任意形状の線状アンテナの厳密な電磁界解析を行い、広帯域で高利得なアンテナ構造を見いだした。

（３）整合回路を分布定数で構成し、無線回路基板上に実装することによって小型化するとともに共振周波数の無調整化に成功した。

以下にこれらの技術を述べる。

３．１．電磁界解析の手法

特性の数値解析にはモーメント法［４］を用いた。筐体を直方導体で近似し、さらに図３のワイヤグリッドモデルに置き換えた。直方導体の寸法は実際の筐体に近いように３５×２０×１２５mmとした。またエレメントは長さＬｗの線状素子とし、給電点を直方体の頂点に選んだ。網目の選び方はｘ，ｙ，ｚ方向にそれぞれ１，２，３分割とし、さらに給電点付近の電流を正確に表現するため給電点から３本の斜めの線状素子と、給電点と対向するｘ－ｚ面に１本の斜めの線状素子を加えた［５］。従って、エレメントも含め総数３３本の線状素子によってアンテナ系はモデル化されている。これらの線状素子を流れる電流は展開関数、重み関数として三角形電流

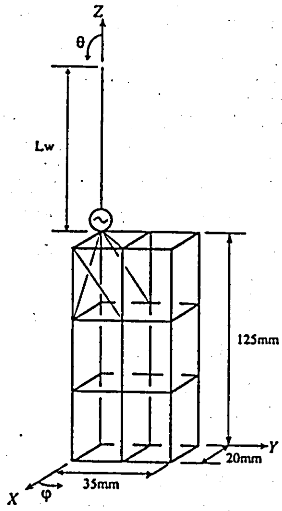
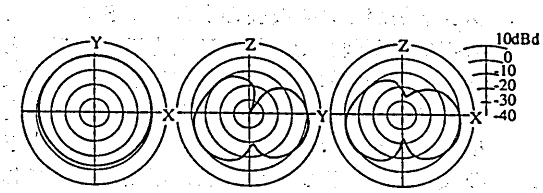


図３　ホイップアンテナのワイヤグリッドモデル
Fig. 3 Wire-grid model of the whip antenna.

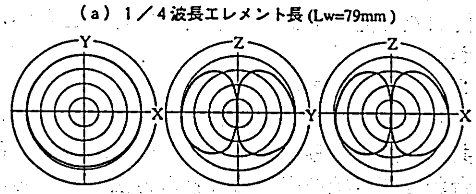
を用いて計算した。放射特性および入力インピーダンスは線状素子の電流から計算することができる。

３．２．放射特性とインピーダンス特性

ホイップアンテナの放射特性はエレメント長の影響を強く受ける［６］。そこで、まずエレメントの長さによる放射特性の変化について調べた。図４はエレメント長を９５０ＭＨｚ（送信帯域の中心周波数）において１／４波長および１／２波長としたときのＥθ成分（垂直偏波）指向性の計算値である。基準はダイポールアンテナの最大利得（２．１５ｄＢｉ）でｄＢｄ表示である。図４でｚ－



（ａ）１／４波長エレメント長 (Lw=79mm)



（ｂ）１／２波長エレメント長 (Lw=158mm)

図４　ホイップアンテナの放射特性
Fig. 4 Calculated radiation characteristics of the whip antenna at 950 MHz.

yあるいはz－x面における指向性を（a）、（b）について比較すると1／4波長では指向性の最大方向が水平から下方向に向いたひずんだ形になっている。これに対してエレメント長が1／2波長ではダイポールアンテナの8の字形に近い指向性になっている。携帯電話基地局からの到来波仰角は0～30度（θ＝90～60度）の水平方向付近に集中していることが知られている［7］。従って、今回検討したホイップアンテナでは（b）の特性のほうが好ましいと言える。このようにエレメントの長さによって指向性が大きく変化する原因を考察するため電流分布を調べた。図5は給電電圧に1Vを与えたときのアンテナと筐体上の電流分布の計算値である。これからわかるようにエレメント長が1／4波長の場合に比較して1／2波長では筐体上の電流が小さい。これはエレメント長が1／2波長の場合、給電点における電流が小さいいわゆる電圧給電であるためである。筐体上の電流が小さいことはホイップアンテナと内蔵アンテナの結合による利得の劣化が小さく［8］、またアンテナ特性に及ぼす人体の影響も小さいと考えられる。このように放射特性の検討からはエレメント長は1／2波長にすることが望ましいことがわかった。次にアンテナのインピーダンス特性を調べた。図6はエレメント長を変化した場合の入力インピーダンスの計算値である。なお、アンテナには整合回路が接続されており、図6は整合回路を通して見たインピーダンスである。エレメント長が1／4波長の場合はVSWR＜2の帯域幅が図2で示した帯域を満たしているが、1／2波長の場合は極めて狭帯域である。表1に放射およびインピーダンス特性の上記検討結果をまとめて示す。この表から1／2波長ホイップアンテナの広帯域化ができれば優れた性能のアンテナを実現できることがわかる。

3．3．広帯域化

広帯域化には（a）エレメントそのものに共振回路を組み込む、（b）整合回路を組み合わせて帯域を広げるなどの方法が考えられる。（a）の方法による例としては短波帯で使われるマルチバンドダイポールアンテナ等を挙げることができる。しかし携帯電話のホ

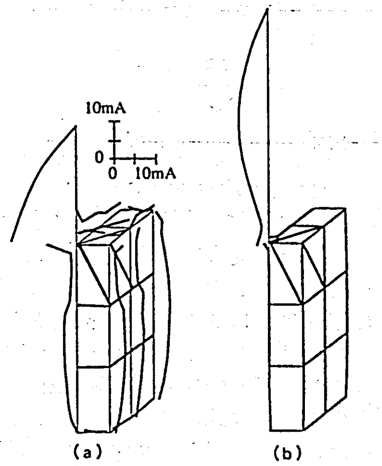


図5 電流分布
（a） 1／4波長エレメント長
（b） 1／2波長エレメント長
Fig. 5 Current distributions.

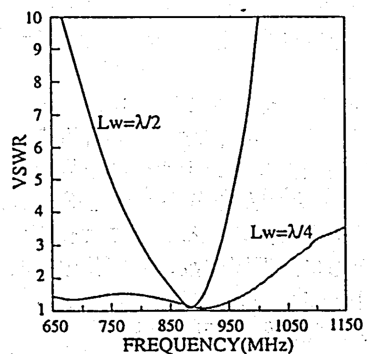


図6 エレメント長によるインピーダンス特性の変化
Fig. 6 Impedance change of the whip antenna due to element length.

表1 エレメント長によるアンテナ特性の比較
Table 1 Comparison of antenna performance due to element length.

アンテナ特性	エレメント長	
	1／4波長	1／2波長
指向性	×	○
利得	×	○
帯域幅	○	×
人体の影響	×	○
内蔵アンテナとの結合	×	○

イップアンテナは収納構造にする必要があるため（ａ）の方法では機構的に構造が複雑になる。今回は（ｂ）の整合回路を組み合わせる方法で広帯域化を実現した。

開発した広帯域アンテナの構成を図７に示す。整合回路は３個のインダクタンス素子Ｌ１～Ｌ３と２個のキャパシタンス素子Ｃ１，Ｃ２から構成されている。一般にキャパシタンス素子Ｃ２が無い状態ではこのアンテナ系は単共振特性を示す。ここにキャパシタンス素子Ｃ２を加えることにより、Ｃ２とＬ２＋Ｌ３が並列共振回路を構成し、２共振特性を示す。

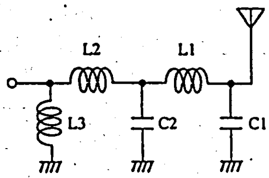


図７　ホイップアンテナの整合回路
Fig. 7 Impedance matching circuit of the whip antenna.

図８にインピーダンス特性の計算結果を示す。エレメント長は１／２波長である。図において（ａ）は整合回路が無いエレメントそのもののインピーダンスで、それがＣ２が無い単共振整合回路では（ｂ）のインピーダンスに変換され、さらにＣ２を付加することによって（ｃ）の特性になる。（ｃ）のＶＳＷＲはいわゆる双峰特性を示しており、広帯域化が達成されている。図９にＶＳＷＲの測定結果を示す。エレメント長は１１５ｍｍである。整合回路は分布定数回路によって構成し、無線回路基板上に実装した。これによりＬ１～Ｌ３のインダクタンス値が安定になり、回路の無調整化が実現できた。図９からわかるように、ＶＳＷＲ＜２の帯域が従来方式では１２０ＭＨｚ（比帯域１３％）であるのに対し、開発したアンテナは３１０ＭＨｚ（比帯域３４％）と従来比２．６倍の広帯域化に成功している。

４．内蔵アンテナ

内蔵アンテナとしてスリットにより大幅な小形化をはかった樹脂性誘電体基板を用いた新しいマイクロストリップアンテナを検討した［９］。これまで、マイクロストリップ

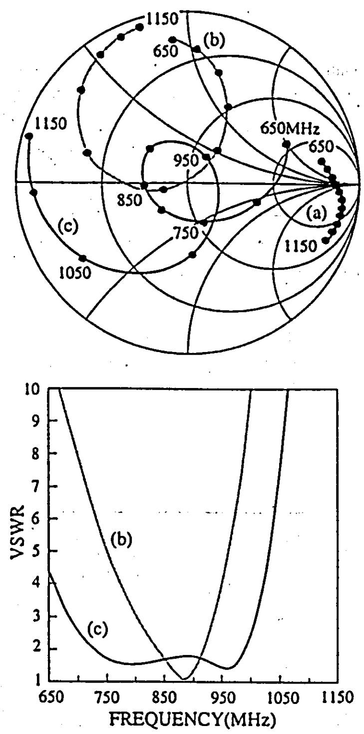


図８　１／２波長ホイップアンテナのインピーダンス特性
（ａ）アンテナ単体　（ｂ）単共振アンテナ　（ｃ）２共振アンテナ
Fig. 8 Impedance characteristics of the λ/2 whip antenna.

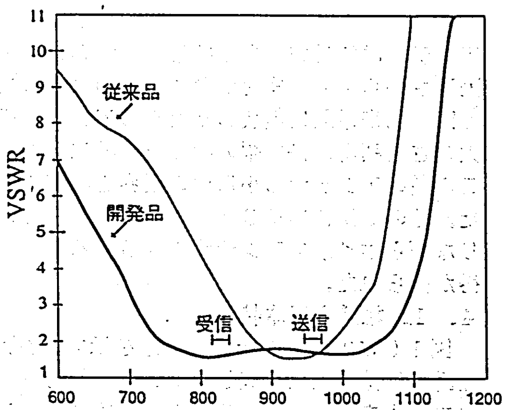


図９　ホイップアンテナのインピーダンス測定結果
Fig. 9 Measured impedance characteristics of the whip antenna.

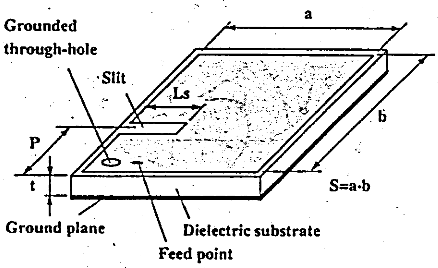


図１０　内蔵アンテナの構造
Fig. 10 Structure of the built-in antenna.

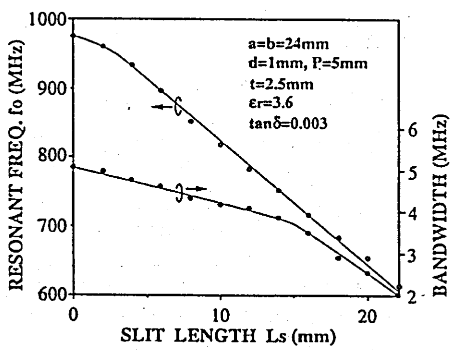


図１１　内蔵アンテナの共振周波数および帯域特性
Fig. 11 Resonant frequency and bandwidth for VSWR<2 of the built-in antenna, as a function of slit length *Ls* on a ground plane.

アンテナは狭帯域であり携帯電話への適用の困難さから十分な検討がなされていなかった。今回、携帯電話に実装したときのアンテナの大きさと利得、帯域幅の関係を詳細に調べ、この種のアンテナの小形化の限界を明確にした。その結果、体積３．５ｃｃの大きさでありながらホイップアンテナに匹敵する高い利得が得られた。

４．１．構造と基本特性

図１０に内蔵アンテナの構造を示す。樹脂性誘電体基板上に形成したプレナー放射素子のコーナをスルーホールによって接地し、スルーホール近傍の放射素子上の一点を給電点とした構造である。また放射素子にはスリットを形成し、共振周波数を低下させている。

図１１はグランドプレーン（５００×５００ｍｍの金属板）上に形成したアンテナのスリット長Ｌｓによる共振周波数と帯域幅の測定値である。帯域幅はＳＷＲ＜２で規定した。誘電体基板の厚さは２．５ｍｍで、放射素子は２４×２４ｍｍである。基板の誘電率は３．６、誘電正接は０．００３である。スリット長Ｌｓを長くするに伴って共振周波数ｆｒは低下し、Ｌｓが１０ｍｍのときｆｒは８２０ＭＨｚである。また、帯域幅はスリット長の増加と共に減少し、Ｌｓ＝７ｍｍでは帯域幅は４．４ＭＨｚ（０．５４％）である。

４．２．小形筐体上における実験結果

内蔵アンテナを小形筐体に装着した場合の帯域幅および利得特性を実験的に調べた。図１２は誘電体基板の厚さｔと帯域幅および利得の関係をスリット長をパラメータとして測定した結果である。スリット長Ｌｓは０、１０、２０ｍｍとした。測定周波数は８７９ＭＨｚで、３５×２０×１２５ｍｍの金属筐体にアンテナを装着して測定した。利得はｘ－ｙ平面における平均化利得（ＰＡＧ）である。帯域幅および利得はともに誘電体基板の厚さにほぼ比例して増加しており、厚さを増すとこれらの特性が著しく改善されることがわかる。例えば、厚さ５ｍｍでＬｓ＝０の場合、３０ＭＨｚの帯域幅と－１ｄＢｄの利得が３．５ｃｃのアンテナ体積で得られている。これはホイップアンテナに匹敵する高い利得である。また、帯域幅および利得はスリット長Ｌｓの増加にともなって減少している。これは測定周波数を一定としているためＬｓの増加につれて放射素子の面積が減少しているからである。図１３に基板の誘電率に対する帯域幅と利得の変化を示す。誘電率が大きくなると帯域幅が狭くなり利得が低下する。また図から誘電率１０．５においても５ｍｍの厚さの基板を用いることによって－３ｄＢｄ以上の利得が得られることがわかる。

５．相関特性の理論的検討

３．および４．ではダイバーシチアンテナを構成する各アンテナ素子の設計方法について述べた。ここでは、それぞれのアンテナ素子を携帯電話に配置し、ダイバーシチ構成とした場合の相関特性の理論解析ならびに実験

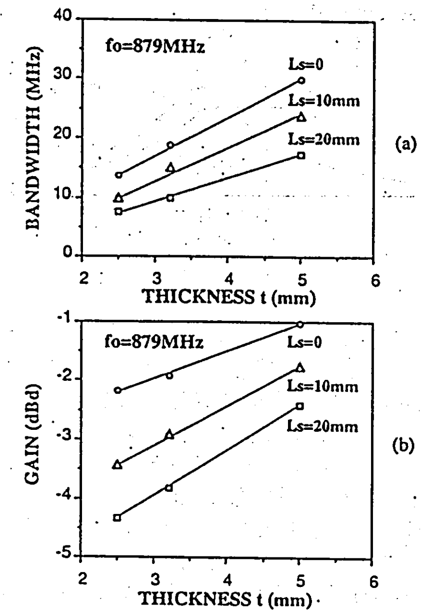


図１２　小型筐体上における内蔵アンテナの特性
Fig. 12 Characteristics of the built-in antenna on a rectangular box of 35 x 20 x 125 mm, where d = 1mm, P = 5mm, εr = 3.6, and $\tan\delta$ = 0.003; (a) bandwidth for VSWR≦2 vs. thickness; (b) gain (PAG) vs. thickness.

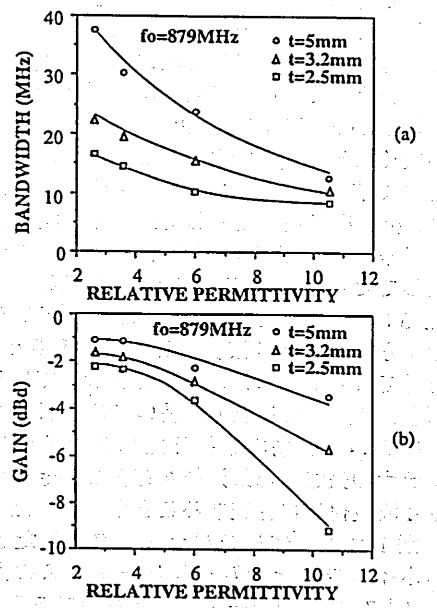


図１３　誘電率による内蔵アンテナの特性変化
Fig. 13 Bandwidth and gain vs. relative permittivity relationship with no slit on a rectangular box of 35 x 20 x 125 mm, where d = 1mm, and $\tan\delta$ = 0.003; (a) bandwidth for VSWR≦2 vs. relative permittivity; (b) gain (PAG) vs. relative permittivity.

結果について述べる。

５．１．解析モデル

図１４に解析に用いたダイバーシチアンテナのワイヤーグリッドモデルを示す。図３のモデルに内蔵アンテナとして板状逆Ｆアンテナ［１０］（Planar Inverted F Antenna 以下ＰＩＦＡ）を装着している。ＰＩＦＡは図１０のマイクロストリップ内蔵アンテナにおいて誘電体層を空気層に置き換えたアンテナである。

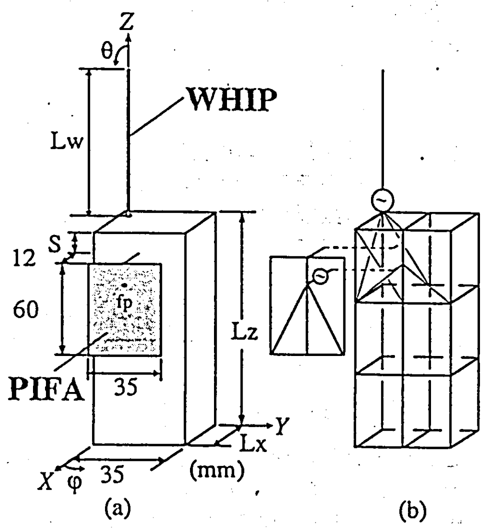


図１４(a)ダイバーシチアンテナの外観と(b)ワイヤーグリッドモデル
Fig. 14 (a) Configuration of the diversity antenna and (b) the wire-grid model.

５．２．　放射効率の計算式

図１４のアンテナ系の各給電点での等価回路モデルを図１５に示す。

Z_{11}、Z_{22} はホイップアンテナとＰＩＦＡの自己インピーダンス、Zm は相互インピーダンスである。Z_{L1}、Z_{L2} はそれぞれのアンテナ端子から回路側を見込んだ負荷インピーダンスである。今、ホイップアンテナを電圧 V_1 で励振したとすると、ホイップアンテナへの入力電力 P_1 および負荷 Z_{L2} での消費電力 P_2 は次式で与えられる。

$$P_1=\frac{1}{2}Re[Z_{in1}I_1I_1^*] \qquad (1)$$

$$P_2=\frac{1}{2}Re[Z_{in2}I_2I_2^*] \qquad (2)$$

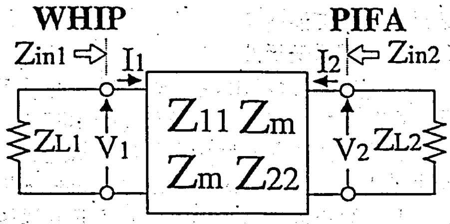


図１５アンテナの等価回路
Fig. 15 Equivalent circuit of the diversity antenna.

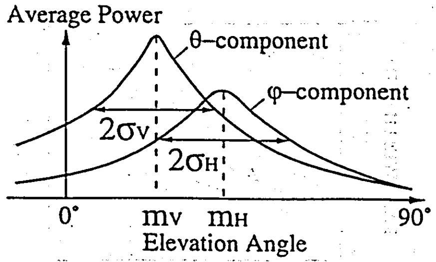


図１６到来波モデル
Fig. 16 Incident wave model.

ここで$Re[X]$はＸの実数部を表す。これより放射効率ηは次式によって求めることができる。

$$\eta=\frac{P_1-P_2}{P_1}=1-\frac{P_2}{P_1} \qquad (3)$$

５．３． 相関係数の計算式

ダイバーシチアンテナの相関係数ρ_eは、到来波各波の振幅がレイリー分布、位相が一様であると仮定すると（４）式で表される［１１］。

$$\rho_e=\frac{\left|\oint\left\{XPR\cdot E_{\theta 1}\cdot E_{\theta 2}^{*}\cdot P_\theta+E_{\phi 1}\cdot E_{\phi 2}^{*}\cdot P_\phi\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\phi\right|^2}{\oint\left\{XPR\cdot E_{\theta 1}\cdot E_{\theta 1}^{*}\cdot P_\theta+E_{\phi 1}\cdot E_{\phi 1}^{*}\cdot P_\phi\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\phi \times\oint\left\{XPR\cdot E_{\theta 2}\cdot E_{\theta 2}^{*}\cdot P_\theta+E_{\phi 2}\cdot E_{\phi 2}^{*}\cdot P_\phi\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\phi} \quad (4)$$

ここでＸＰＲは交差偏波電力比、$E_{\theta k}$、$E_{\varphi k}$（k＝１，２）はホイップアンテナとＰＩＦＡのθ、φ成分電界指向性でアンテナの位置のずれによる空間位相項を含むものとする。$E_{\theta k}$、$E_{\varphi k}$は図１４（ｂ）のワイヤーグリッドモデルによって求めた。その際、両アンテナの負荷インピーダンスとして整合負荷を接続した。また、P_θ、P_φは水平面一様、垂直面は図１６に示すようにガウス分布をしていると仮定したときの到来波のθ、φ成分に対する角密度関数で（５）、（６）式で表される［１１］。

$$P_\theta=A_\theta exp\left[-\frac{\left\{\theta-\left(\frac{\pi}{2}-m_V\right)\right\}^2}{2\sigma_V^2}\right] \qquad (5)$$

$$P_\varphi=A_\varphi exp\left[-\frac{\left\{\theta-\left(\frac{\pi}{2}-m_H\right)\right\}^2}{2\sigma_H^2}\right] \qquad (6)$$

ここでA_θ、A_φは比例定数、m_V、m_Hはそれぞれθ、φ各偏波成分分布の平均仰角であり、σ_V、σ_Hはθ、φ各偏波成分の標準偏差である。

５．４． 放射効率の解析結果

図１７はホイップアンテナの長さＬｗと放射効率の関係である。図において（ａ）は筐体の奥行きＬｘを、（ｂ）は筐体の長さＬｚをパラメータとした場合である。周波数は９００ＭＨｚである。図からわかるように、放射効率はＬｗによって大きく変化し、１／４波長程度の短いホイップアンテナでは１ｄＢ以上の放射効率の低下が生じる。図１７（ａ）から筐体の奥行きが小さくなり、アンテナが近接するに従って放射効率の低下が著しいことがわかる。また、図１７（ｂ）から筐体の長さが１／４波長では短いホイップアンテナでも高い放射効率が得られるが、筐体長が３／８波長以上になると放射効率が低くなることがわかる。このように、筐体を短くすることで放射効率が高くなることは、小形携帯電話用として優れた性能の小形ホイップアンテナが実現できる可能性を示唆しており、大変興味深い事実である。また$Lz=3/8\lambda$および$\lambda/2$では、ホイップアンテナの長さが０．５４波長（Ｌｗ＝１８０ｍｍ）付近で放射効率はほぼ０ｄＢとなっている。即ち、３／８波長以上の長い筐体形状においては高い放射効率を得るためのホイップアンテナの長さには最適値が存在し、それが０．５４波長付近に存在することがわかった。

図１８は筐体長をパラメータとしたときのホイップ長と相互インピーダンスの大きさ（｜Zm｜）の関係を示したものである。筐体長が３／８波長以上の場合、相互インピーダンスはホイップ長が０．５４波長付近で最小となる。また、筐体長が１／４波長では、１／４波長の短いホイップアンテナでも相

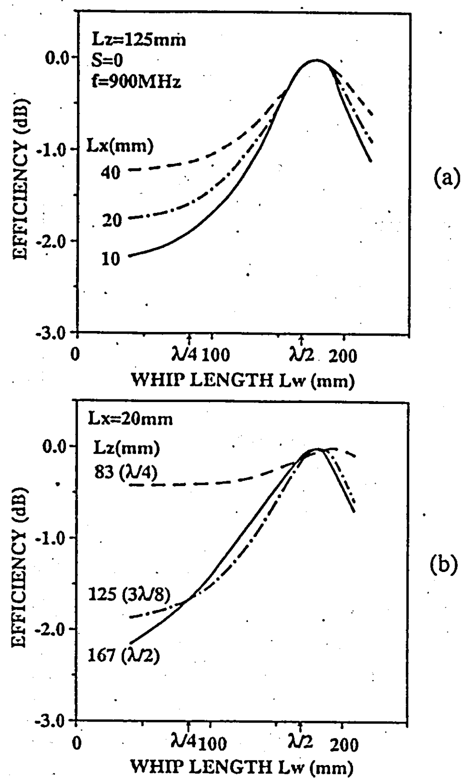


図１７ホイップ長と放射効率
Fig. 17 Whip length vs. radiation efficiency (a) Lz=125mm (b) Lx=20mm.

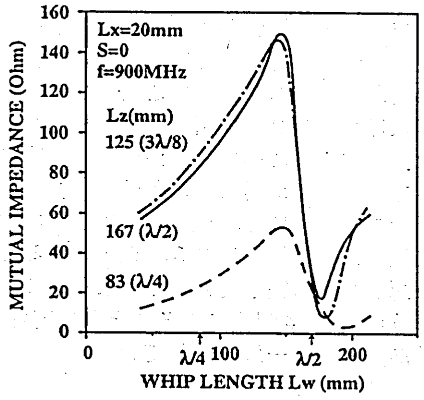


図１８ホイップ長と相互インピーダンス
Fig. 18 Whip length vs. mutual impedance.

互インピーダンスは低い値を示している。これらの現象は図１７（ｂ）の放射効率の振る舞いと一致している。即ち、図１８より、ホイップ長や筐体長によってホイップアンテナとＰＩＦＡの相互結合が変化し、その結果相互結合が小さくなる条件において高い放射効率が得られることがわかる。

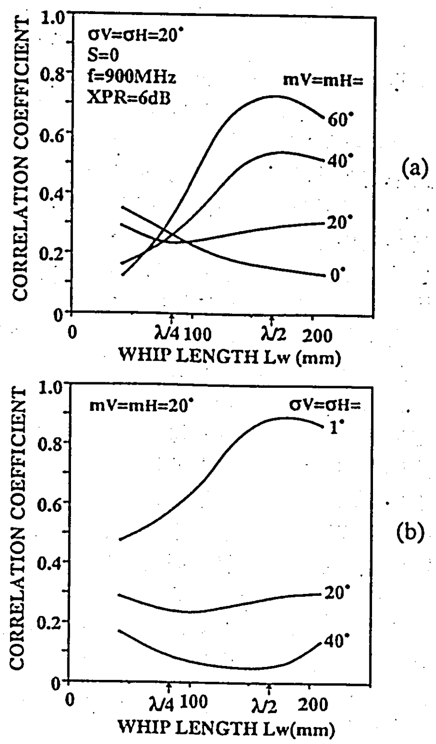


図１９ホイップ長と相関係数
Fig. 19 Whip length vs. correlation coefficient (Lx=20mm, Lz=125mm).

５．５．相関係数の解析結果

到来波仰角と標準偏差が変化した場合のホイップ長と相関係数の関係を図１９に示す。周波数は９００ＭＨｚである。ＸＰＲは市街地におけるこれまでの測定結果（ＸＰＲ＝４～９ｄＢ）［１２］から６ｄＢとした。図１９（ａ）からわかるように到来波仰角が２０°以下のときはホイップ長に関わらず相関係数は０．４以下の低い値を示すが到来波仰角が４０°以上になると３／８波長より長いホイップアンテナでは０．５以上の高い相関係数を示し、ホイップ長がほぼ１／２波長のとき最大になる。９００ＭＨｚ帯携帯電話の郊外地における伝搬環境では基地局から１ｋｍ以上離れた遠方では到来波が２０°以下の低い仰角に集中していることが知られており［７］、このような伝搬環境下では３／８波長より長いホイップアンテナでも実用上問題ない。しかし、市街地では２０～４０°付近の比較的高い仰角から電波

が到来することがあり、図１９（ａ）はこのような環境下ではダイバーシチ効果が悪化する可能性があることを示唆している。図１９（ｂ）は標準偏差をパラメータとしたときの計算結果である。標準偏差が２０°以上で到来波の広がりが大きいときは相関係数は０．４以下であるが、標準偏差が１°で到来波が集中するような状況では相関係数が大きくなることがわかる。しかし、通常の使用状態では、このように集中して到来する電波はまず存在しないから、図１９（ｂ）で相関係数が０．４を越えることはないと言える。

図２０は筐体の傾きによる相関係数の変化である。ホイップ長は１／２波長である。筐体の傾きが大きくなるに伴って相関係数は小さくなり、５０°以上の傾き角ではいずれの到来波仰角に対しても０．３以下の低い相関係数を示す。通話状態における携帯電話の平均的な傾き角αは６０°付近であることが知られており［１３］、このことから携帯電話の実使用状態における相関係数はホイップ長に関わらず十分低い値が得られれているものと思われる。

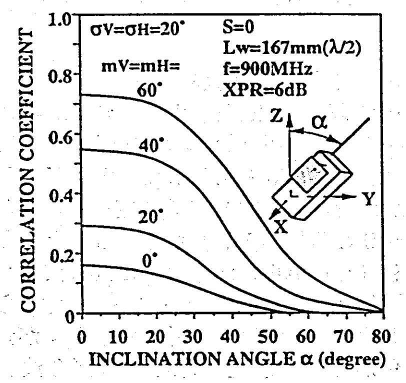


図２０筐体の傾き角と相関係数
Fig. 20 Inclination angle of the body vs. correlation coefficient (Lx=20mm, Lz=125mm).

５．６．相関特性の屋外実験

図１のダイバーシチアンテナの相関特性を調べるため屋外実験を行なった。実験は携帯電話基地局より送信されている制御チャンネルの電波を受信することにより行なった。

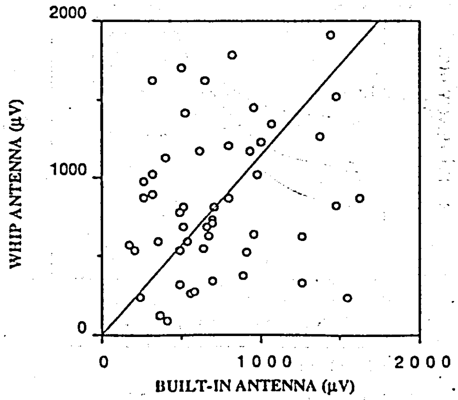


図２１　ダイバーシチアンテナの受信信号特性
Fig.21 Typical received signal characteristics of the diversity antenna.

測定コースは当センターの構内を１周する約２００ｍの区間である。携帯電話を台車の支柱に直立に取り付けて歩行速度で移動しながら受信レベルを自動計測し、相関係数と平均受信電力を求めた。受信信号特性の一例を図２１に示す。図中の直線は最小２乗法により求めたものであり相関が高い場合はこの直線の周辺に測定データが密集するが、図ではばらつきが大きく相関が低いことが示されている。また直線の傾きが１より大きいことから内蔵アンテナと比較してホイップアンテナの平均的な受信レベルが高いことがわかる。相関係数は０．３２と実用上十分低い値が得られた。実験環境は高さ１０ｍ以上の建物に囲まれており、基地局までの距離（約２ｋｍ）を考慮すると到来波パラメータは仰角は２０°以下、標準偏差は２０°以上であることが予想される。従って、図１９より相関係数の理論値は０．４以下であることが推定され、実験結果とよい一致を示している。

６．むすび

本論文は８００ＭＨｚ帯デジタル携帯電話用ダイバーシチアンテナの開発結果について述べた。外部アンテナとして２共振特性のホイップアンテナを用い、ワイヤグリッド法による解析と実験により、従来比２．６倍の広帯域特性と高利得化を達成した。一方、内蔵アンテナには、大きさ３．５ｃｃの小形マイクロストリップアンテナを用い、ホイップ

アンテナに匹敵する高い利得を得ることができた。さらに、移動通信における多重波環境をモデル化し、相関特性を理論解析することによって放射効率が高く、小さい相関係数を得るための様々な条件を具体的に示した。そして、最後にダイバーシチ相関特性の屋外実験を行い、携帯電話用として実用上十分低い相関係数が得られること、ならびに解析結果とよい一致を示すことを確認した。

謝辞 日頃御指導頂く当社デバイス・エンジニアリング開発センター所長石田徹氏に感謝致します。

文献

[1] Lee W. C. Y. :"Mobile Communication Engineering", pp. 273-336, McGraw-Hill (1982).

[2] 小川晃一,上野伴希,菅田誠,森永洋一：“８００ＭＨｚディジタル携帯電話用ダイバーシティアンテナ”, National Technical Report Vol. 42 No. 1 Feb. 1996.

[3] 小川晃一,上野伴希：“ホイップと板状逆Ｆアンテナで構成された携帯電話用ダイバーシチアンテナの解析”信学論（B-II）, J79-B-II, 12, pp. 1003-1012 (1996-12).

[4] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods. New York: Kreiger, 1982.

[5] 平沢一紘、藤本京平：”直方導体上、又は、その近傍にある線状アンテナの特性解析のためのワイヤグリッド法について”、信学論(B),J65-B,4,pp.382-389 (1982-04).

[6] 小川晃一、上野伴希：”円柱導体装荷によるホイップアンテナの小型化の検討”、１９９３年９月信学総全大、No.B-119

[7] Lee W. C. Y. and Brandt R. H. : “The Elevation Angle of Mobile Radio Signal Arrival”, IEEE Trans. Commun., COM-21, No. 11, pp. 1194-1197, Nov. (1973).

[8] 小川晃一、上野伴希：”ホイップと内蔵アンテナの結合による効率低下に対する考察”、１９９４年３月信学総全大、No.B-128

[9] Ogawa K. and Uwano T. : “A Diversity Antenna for Very Small 800-MHz Band Portable Telephones”, IEEE Trans. Antennas Propagat. AP-42, No. 9, pp. 1342-1345, Sep. (1994).

[10] 春木宏志,小林　敦：“携帯無線機用逆Ｆアンテナ”,昭５７信学総全大, No. 613.

[11] 多賀登喜雄：“陸上移動通信環境におけるアンテナダイバーシチ相関特性の解析”信学論（B-II）, J73-B-II, 12, pp. 883-895(1990-12).

[12] Lee W. C. Y. and Yeh Y. S. : “Polarization Diversity System for Mobile Radio”, IEEE Trans. Commun., COM-20, No. 5, pp. 912-923, Nov. (1972).

[13] Taga T. and Tsunekawa K. :"A Built-in Antenna for 800 MHz Band Portable Radio Units", Proc. of ISAP ‘85, No. 121-1, pp. 425-428, 1985.

輻射科学研究会資料
RS97-10

フェライト中の電磁波伝搬における非線形特性のFDTD法による解析

Analysis of Nonlinear Characteristics of Electromagnetic Wave Propagation in Ferrite by FDTD method

小寺敏郎　島崎仁司　堤　誠（京都工芸繊維大学）
Toshiro KODERA , Hitoshi SHIMASAKI , Makoto TSUTSUMI
Kyoto Institute of Technology

1997年10月17日（金）
於　京都工芸繊維大学

1　まえがき

フェライト内部を電磁波が伝搬する場合、電力が増大するにつれて磁気双極子モーメントの非線形性が顕著に現れてくることが知られている。このフェライトの非線形性についての研究例として静磁波ソリトンの研究がある[2][3][4]。静磁波ソリトンの解析においては伝搬パルスの包絡線にのみ着目した非線形シュレーディンガー方程式の解を求める方法が取られてきた。一方、フェライト中の電磁波伝搬についてのＦＤＴＤ法による解析は、非線形項を省略した線形解析がいくつか見られるが[1]、非線形現象に対する解析についてはこれまで例がない。フェライト中の電磁波モードはサーキュレータやアイソレータといったフェライトを用いたデバイスにおいて主に利用するモードでもあり、その非線形特性の解明はレーダー等の大電力のシステムにフェライトデバイスが用いられていることを考えても重要であると言える。

本稿では、高周波磁化・磁界成分により構成される非線形項を含めた形で磁気双極子モーメントの歳差運動を取り扱うことにより、フェライト中を伝搬する電磁波の非線形特性の解析を行っている。計算方法としては従来の静磁波ソリトンの解析のアプローチとは異なり、歳差運動の方程式を時間・空間において直接差分化し、ＦＤＴＤ法（有限差分時間領域法）に組入れて解析を行っている。解析の結果、右円偏波成分にのみ，入力電力が増大するにつれてパルス幅が狭まり尖頭値が増大する非線形効果を現れることを確認できたので報告する

2　解析方法

2.1 フェライトの磁気特性の定式化

フェライトの電磁波に対する特性は磁気双極子モーメントの歳差運動としてモデル化されており、その運動を記述する方程式としてLarmorの式、Landau-Lifshitzの式等がある。ここでは高周波成分の２次の項と磁気モーメントの緩和項両方を含めて解析を行うために歳差運動の方程式としてBlochの式を用いている。

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}m_x = \gamma\,\mu_0\left[\mathbf{M}\times\mathbf{H}\right]\Big|_x + \dfrac{m_x}{T_2} & (1) \\ \dfrac{d}{dt}m_y = \gamma\,\mu_0\left[\mathbf{M}\times\mathbf{H}\right]\Big|_y + \dfrac{m_y}{T_2} & (2) \\ \dfrac{d}{dt}m_z = \gamma\,\mu_0\left[\mathbf{M}\times\mathbf{H}\right]\Big|_z + \dfrac{m_z}{T_1} & (3) \end{cases}$$

ここで磁気緩和項の係数T_1およびT_2の関係式は磁気モーメントの大きさ一定の条件として次のような条件を満たしている。

$$T_1 = 2\,T_2 \tag{4}$$

パラメータＴは歳差運動の緩和を表すものであり、磁気損失を０とする場合、緩和時

間Ｔは無限大となる。直流磁界の大きさをH_0、フェライトの飽和磁化をM_0とし、直流磁界の印加方向をｚ方向とすると磁化および磁界ベクトルは次のように書ける

$$\begin{cases} \mathbf{M} = m_x\, i_x + m_y\, i_y + (M_0 + m_z)\, i_z & (5) \\ \mathbf{H} = h_x\, i_x + h_y\, i_y + (H_0 + h_z)\, i_z & (6) \end{cases}$$

ここでm_*およびh_*は高周波磁化および磁界である。磁化ベクトルM、磁界ベクトルHをBlochの式に代入し展開すると次式を得る。

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} m_x = \gamma\, \mu_0 \left[m_y (H_0 + h_z) - (M_0 + m_z) h_y \right] - \dfrac{m_x}{T_2} & (7) \\ \dfrac{d}{dt} m_y = \gamma\, \mu_0 \left[(M_0 + m_z) h_x - m_x (H_0 + h_z) \right] - \dfrac{m_y}{T_2} & (8) \\ \dfrac{d}{dt} m_z = \gamma\, \mu_0 \left[\underline{\underline{m_x h_y - m_y h_x}} \right] + \dfrac{m_z}{T_1} & (9) \end{cases}$$

ここで、正弦定常状態を仮定し、二重線部で示す高周波磁化・磁界によって構成される２次の非線形項を無視し、無損失とした場合は透磁率としてPolderのテンソル形式

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & -j\kappa & 0 \\ j\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

を導出することができるが、本稿では正弦定常状態を仮定せず、非線形項を含めた形で、微分方程式をそのままＦＤＴＤ法に組み入れて解析を行っている。

解析対象として本稿では無限媒質に平面波が伝搬する場合を考える。直流磁界の印加方向をｚ方向とし、波動の伝搬方向も印加する直流磁界と同じｚ方向とする。このモデルはファラデー回転を利用する導波路の場合の磁化方向となっている。導波路はｘ，ｙ方向に無限に広がっているものとする。なお、任意の方向に直流磁界を印加する場合も同様に定式化が可能である。

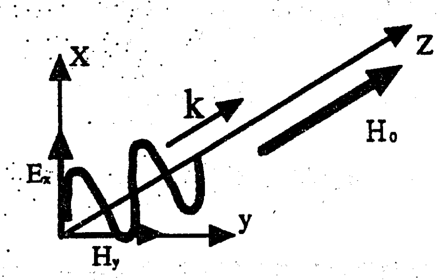


図１　解析対象

異方性を持たない媒質に対してｚ方向に伝搬する平面波を励振する場合、E_xとH_y、或いはE_yとH_xという成分を個別に考えればよいが、このモデルの場合ファラデー回転が生

じ、E_xとE_yが結合した形で現れる。同様に磁界ベクトルもx,y,zの３成分生じ、更に磁化ベクトルについては歳差運動の方程式からx,y,zの３成分生じ、解析対象は１次元線路であるが、成分としては磁界ベクトル３成分、さらに磁化ベクトル３成分の全てと電界E_x, E_yとを計算する必要がある。

マクスウェル方程式

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = -\mu_0\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} + \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{M}\right) & (11) \\ \nabla\times\mathbf{H} = \varepsilon_r\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} & (12) \end{cases}$$

において、x、y方向の微分の項を零にすると以下の各式を得る。

$$\begin{cases} -\mu_0\left(\dfrac{\partial}{\partial t}h_x + \dfrac{\partial}{\partial t}m_x\right) = -\dfrac{\partial}{\partial z}e_y & (13) \\ -\mu_0\left(\dfrac{\partial}{\partial t}h_y + \dfrac{\partial}{\partial t}m_y\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}e_x & (14) \\ -\mu_0\left(\dfrac{\partial}{\partial t}h_z + \dfrac{\partial}{\partial t}m_z\right) = 0 & (15) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_r\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}e_x = -\dfrac{\partial}{\partial z}h_y & (16) \\ \varepsilon_r\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}e_y = \dfrac{\partial}{\partial z}h_x & (17) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}e_z = 0 & (18) \end{cases}$$

以上の（13）～（18）式および先ほど記したBlochの歳差運動の方程式（7）～（9）の電界・磁界および磁化成分を空間・時間領域の格子点に配置し、計算を行う。配置の方法については様々な方法が考えられるが、今回は図２の様に配置した。

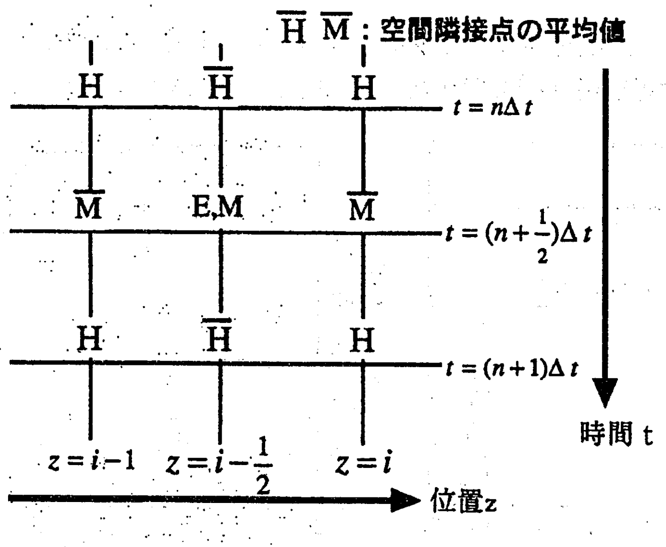


図２　成分の空間・時間配置図

磁化成分Mの計算については時間領域で中心差分を用いて計算を行い、磁界Hおよび電界

Ｅの成分についてはFDTD法を用いて計算を行った。ここで$\overline{\mathrm{M}}$および$\overline{\mathrm{H}}$は空間で隣接している点の値の平均値である。$\overline{\mathrm{M}}$は式（１１）を計算する際に用い、$\overline{\mathrm{H}}$は式（７）～（９）を計算する際に用いている。磁界Ｈおよび電界Ｅの計算については一般のＦＤＴＤ法同様に時間領域・空間領域において中心差分を行っている。

以上の方法により定式化を行った計算結果を次に示す。

3　解析結果

はじめに、全ての解析に共通しているパラメーターを以下に示す。

表１　計算に用いたパラメータ

周波数	12 GHz
印加直流磁界	0.18 [T]
飽和磁化	0.173 [T]
包絡線パルスの形状	10th. SuperGaussian
空間差分長	1 [mm]
時間差分長	1.2 [ps]
解析長	1.0 [m]

解析長は１[m]、空間差分長を1[mm]（空間分割数1000）とし解析を行っている。励振は12GHzの周波数のマイクロ波を１０次のSuperGaussianパルスで変調した単一パルスで行っている。励振の方向は電界Exの成分で行い、励振点では直線偏波としている。

ここでBlochの式において磁気損失が零、すなわち

$$\frac{1}{T_1}=\frac{1}{T_2}=0 \tag{19}$$

としたの場合の計算結果を示す。励振パルスは図３に示す包絡線パルスの幅が8 [ns]のSuperGaussianで変調をかけた周波数１２GHzのパルスを用いている。

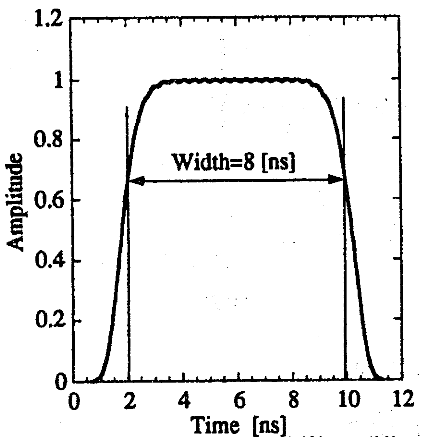


図３　励振パルス（包絡線）の形状

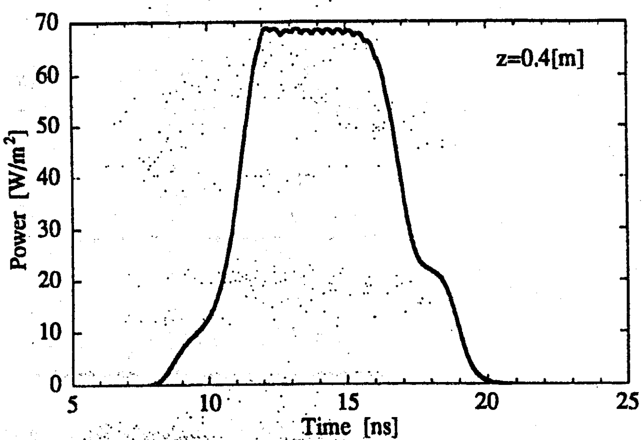


図４　励振パルスの電力が68.6[W/m²]の場合の時間波形

このパルスで励振した場合の励振点から0.4 m 離れた点で観測できるパルスを図４に示す。以下の図において示すパルス波形は、すべてパルスの包絡線を示すものとする。図４に示すように線路の分散性により波形が広がり、励振波形と比較してパルス波形が崩れていることがわかる。

次に励振電力を2.47×10¹¹[W/m²]とした場合の計算結果を図５に示す。パルスの左側にオーバーシュートが見られるのが分かる。この場合、パルスの左側と右側でパルスの変形のしかたが異なる結果を得ている。このパルスの変形について考察するために偏波の回転方向および回転面を図５中のA,B,Cの時刻付近に対して図にしたものを図5.1～5.3に示す。

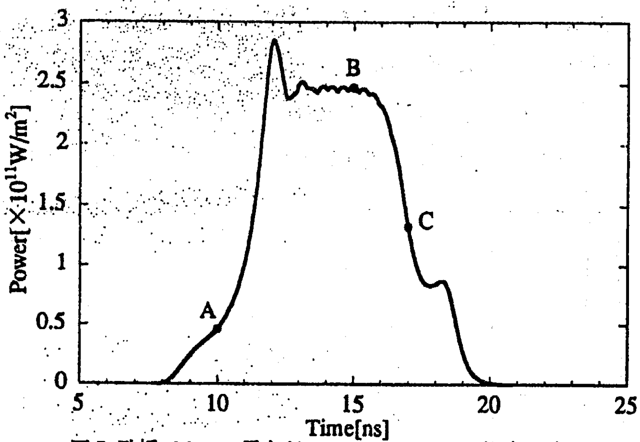


図５ 励振パルスの電力が2.47×10¹¹[W/m²]の場合の時間波形

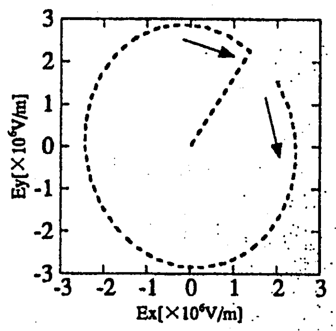


図5-1 A点における偏波面の回転

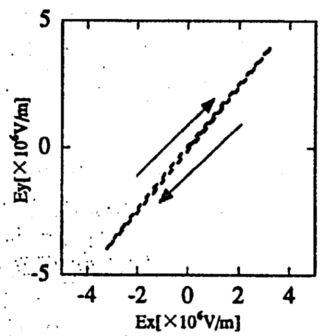


図5-2 B点における偏波面の回転

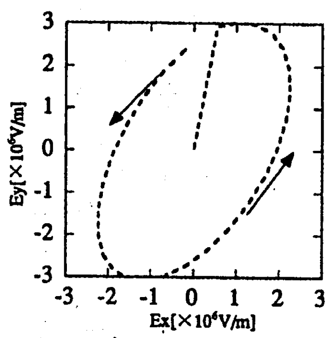


図5-3 C点における偏波面の回転

各図は観測点から励振点への方向で見た偏波の回転であり、見かけの回転方向と偏波面の回転方向は逆になっている。図に示している通り、時刻Aでは左回り円偏波であり、時刻Bでは直線偏波になっている。励振点ではEx成分のみの直線偏波で励振を行っているが，図５－２に示しているように励振時の偏波の向きに対して４０度程傾いておりファラデー回転が生じている。Ｃ点に関してはA

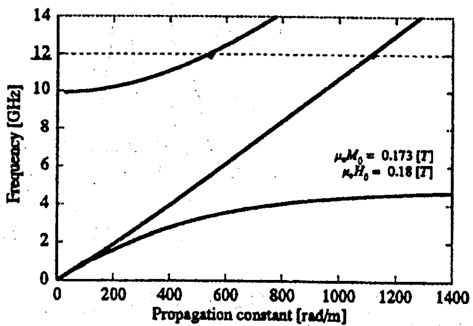


図６ 正弦定常状態の場合の分散特性

点、B点とは逆に右回転円偏波に変化している。以上のことを説明するために正弦定常状態を仮定した場合Polderテンソル透磁率を用いて計算できる分散関係式

$$\beta_{\pm}(\omega) = \omega\varepsilon\sqrt{\mu \mp \kappa} \tag{20}$$

$$\mu = \mu_0 + \frac{\gamma^2 H_0 M_s}{\gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \qquad \kappa = \frac{\omega\,\gamma\,M_s}{\gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \qquad (21)(22)$$

を直流磁界0.18 [T]、飽和磁化0.173 [T] において計算したものを図6に示す。

ここで図5に示した計算結果の励振周波数は12GHzであり、この周波数において左右円偏波の群速度は図6からみても判るように異なる。すなわち元々左右円偏波の合成である直線偏波で励振したパルスが、伝搬の過程で群速度の異なる2つのパルスに分離してゆくと説明づけることができる。このことをよりはっきりと観測するために、図7に示すように1 [ns]のパルスを用いて励振した場合の計算結果を図8～図12に示す。

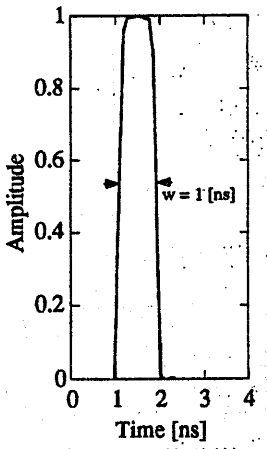


図7励振パルス（包絡線）の形状

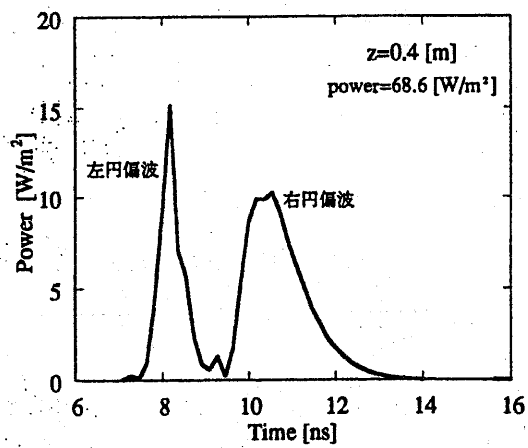


図8　z=0.4[m]における出力パルスの時間波形

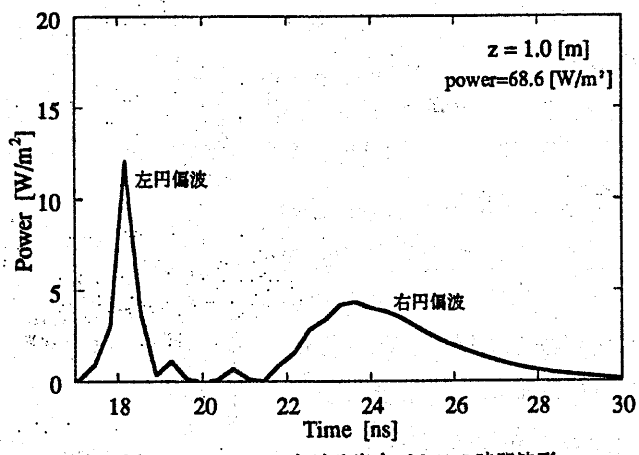


図9　Z=1.0 [m]における出力パルスの時間波形

この場合、図4～図5に比べ、よりはっきりと左右の円偏波成分が分離していることが判る。図は励振点から0.4[m]離れた点での観測データであるが、1.0[m]離れた点で観測す

る場合、図９の様に分散性を持つ右円偏波成分のパルスのみに著しいパルスの広がりを認めることができる。

パルスの分離というこの結果の妥当性を評価するために、図８に示す左右円偏波成分の波数を励振周波数を変化させて計算したものと，式（２０）に示した正弦定常状態を仮定した分散関係式を比較したものを図１０に示す。

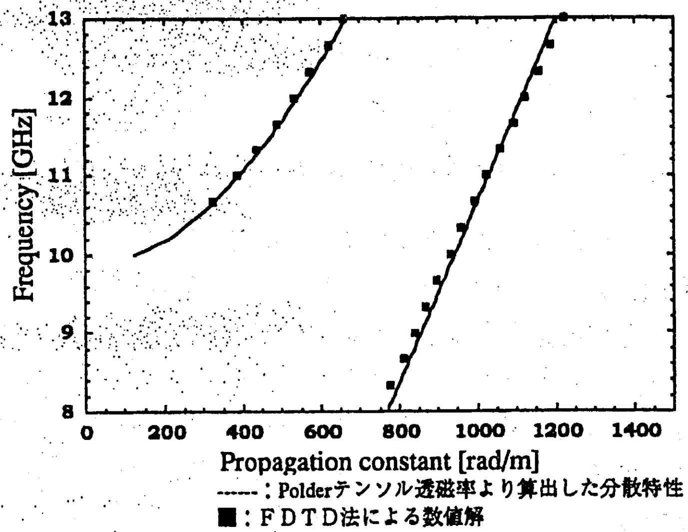


図１０　ＦＤＴＤ法による数値解の妥当性の評価

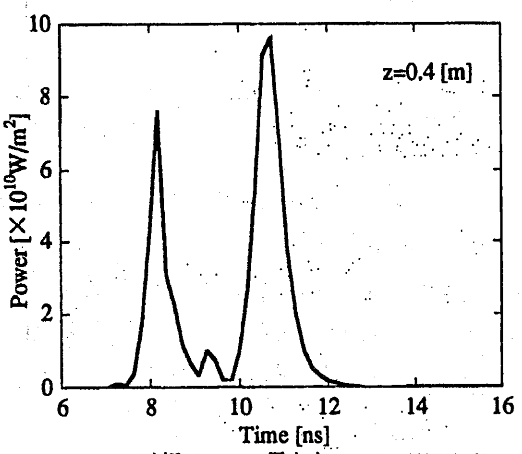


図１１　励振パルスの電力を3.36×10¹¹[W/m²]としたときのの時間波形

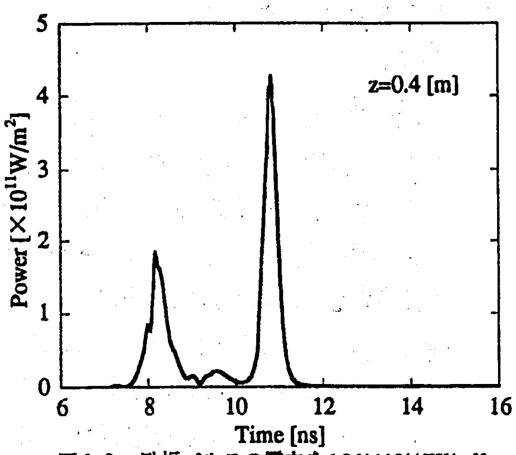


図１２　励振パルスの電力を6.86×10¹¹[W/m²]としたときのの時間波形

図１０に示すように、正弦定常状態を仮定した解析解と、今回得た数値解がほぼ一致することを確認し，パルスの分離，及び計算方法の妥当性を評価することができた。

次に励振パルスの電力を増加させた場合の計算結果を図１１～図１２に示す

図１２は励振電力を6.86×10^{11}[W/m^2]とした場合の計算結果である。図を見てわかる通り、右円偏波成分のみ著しくパルス幅が減少し、ピーク値が増大する非線形特性を観測することができた。

このときの観測パルスのピーク値およびパルス幅を励振電力に対して示したものが図

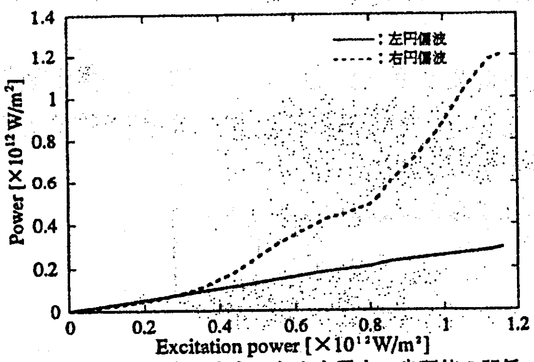


図１３ 励振電力の大きさと出力電力の尖頭値の関係

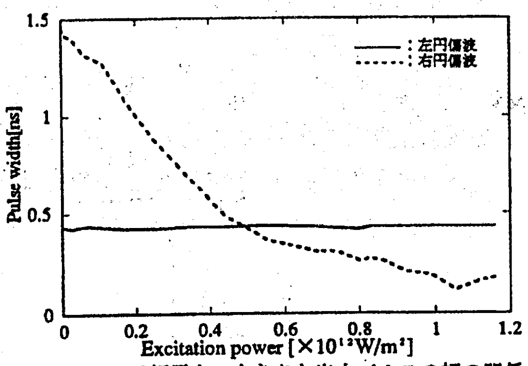


図１４ 励振電力の大きさと出力パルスの幅の関係

１３および１４である。ピーク値については左円偏波成分は励振電力にほぼ比例して増大するが、右円偏波成分は励振電力に対して非線形的に増大していることが判る。パルス幅に対しては、左円偏波成分は励振パルスの電力の増大に対して影響なくほぼ一定を保つが、右円偏波成分に対しては、電力が増大するにつれ、パルス幅が減少する結果を得た。

このように非線形効果が右円偏波成分にのみ生じるのはスピンの歳差運動の向きと、偏波の回転方向の向きが一致しているのが右円偏波であり、左円偏波は逆向きとなり、右円偏波成分が磁性体としての特性を直接反映したモードであることからも説明付けることができる。

結論

波動の伝搬方向と同方向に直流磁化を印加したフェライト中の電磁波伝搬についてＦＤＴＤ法を用いて解析を行った。

フェライトの有する非線形特性の定式化として、正弦定常状態を仮定したPolderテンソル透磁率を用いるのではなく、磁気モーメントの歳差運動の方程式としてのBlochの式を直接空間・時間領域で差分化した。差分化の際、磁化・磁界によって構成される２次の高周波成分を考慮に入れ解析を行った。その結果パルス幅が狭い場合、群速度の異なる左右の偏波成分にパルスが分離し、その右偏波成分にのみ励振電力を増大させるにつれてパルスの幅が減少する非線形効果が生じることを確認することができた。

今後の課題としては本解析の２次元化、アイソレーター・サーキュレーターの非線形動作の解析への応用、レーダーシステムのデバイスの特性解析への応用、非線形シュレーディンガー方程式を用いた解析結果との比較・検討等がある。

謝辞

本研究の一部は財団法人村田学術振興財団による助成金によって行われたことを付記し，謝意を表す．

参考文献

[1]徳田真哉、柏　達也、深井一郎：“ＦＤ－ＴＤ法による磁化フェライトのジャイロ磁気特性の定式化”信学論（Ｃ－Ｉ）、J-75-C-I,9,pp. 572-578(1992)

[2]堤　誠：“非線形なフェライト媒質におけるファラデー回転”
電気学会、電磁界理論研究会資料EMT-94-99(1994)

[3]V.Priye, M.Tsutsumi : " Simulation Study on Magnetic Wave Soliton" IEICE Trans. on Electron. E-79-C,10,pp.1430-1435(1996)

[4]M.A.Tsankov , M.Chen , and C.E.Patton : "Forward volume wave microwave envelope solitons in yttrium iron garnet films : Propagation , decay , and collision " J.Appl.Phys.76(7)pp.4274-4289(1994)

[5]Yee K.S. : "Numerical solutions of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media" , IEEE Trans. Antennas & Propag. , AP-14,3,pp.302-307(1966)

輻射科学研究会資料
(RS97-11)

ナノ構造への光の閉じ込め
～低次元光波とその応用～

高原淳一、山岸傑、小林哲郎
大阪大学大学院　基礎工学研究科

平成9年10月17日
於：京都工芸繊維大学センターホール

ナノ構造への光の閉じ込め　～低次元光波とその応用～

高原淳一、山岸傑、小林哲郎
大阪大学大学院　基礎工学研究科

１．はじめに

1980年代後半から、数ナノメートル～100ナノメートル程度の大きさの人工的構造（ナノ構造）を作り、ナノ構造に閉じ込められた電子系の量子輸送現象や光学応答を研究することが盛んである。そこでの主役は電子であり、光はいわばその電子系を観察するための手段（プローブ）でしかない。光ビームは回折限界のために光波長程度（数100ナノメートル）より小さくしぼることはできず、このために光とナノ構造とは直接は関係が無いような印象を受ける。しかし、1990年代になって近接場光学の分野が発展したため、近接場光学顕微鏡や近接場による原子、分子マニピュレーションなどに見られるように、ナノメートル領域での光の果たす役割は非常に大きくなってきている。

このように、ナノメートル領域での光の役割は大きくなってきたとはいえ、光集積回路について考えてみると、その大きさはマイクロメートルの領域にあり、微細化は回折限界によって原理的に妨げられている。これは電子回路が電磁波の波長よりずっと小さいこととは対照的である。もし、ナノ構造へ光を閉じ込め、回折限界無く光をガイドすることができれば、光集積回路を今の電子的な集積回路程度の大きさに構成できると考えられる。

回折限界から決まる光伝送ビーム径の最小値は$\lambda/2n$（nは屈折率）程度である。このような最小値が存在するのは、自由空間を伝わる光波は波数ベクトル（位相定数）が３つの実数成分を持つ、いわば「３次元光波」であるためである。光ファイバや光導波路中の光波であっても、境界面で全反射を繰り返して見かけ上は１次元的であるが、やはり３次元光波であることには変わりがない。このため$\lambda/2n$程度のビーム径の最小値が存在し、いくら導波構造のみを小さくしてもビーム径を回折限界以下にすることはできない。従って、ナノ構造へ光を閉じ込めるためには構造を小さくすると、それにつれてビーム径も小さくなるようにしなければならない。我々はこのような３次元光波の限界を越えるために、「低次元光波」の概念を提案し、これを利用すると光ビーム径をいくらでも小さくすることができることを示してきた [1]。また、低次元光波の伝送路である低次元光波伝送路を２種類提案し、それぞれ１次元光波伝送路、２次元光波伝送路と名付け、その特性を理論的に解析している [1,2]。ここでは我々の研究を紹介する。

本稿では、まず次節において負誘電体と表面波について述べ、低次元光波の概念について紹介する。３節では、１次元光波伝送路の概念について述べ、様々なモードの伝搬特性について紹介する。４節では、２次元光波伝送路の概念について述べ、その伝搬特性を紹介する。５節では低次元光波伝送路の応用、特に２次元光波変調器について述べる。６節では、まとめと将来への展望を述べる。

2．負誘電体と表面波

負誘電体と誘電体との界面には表面プラズモンポラリトン (Surface Plasmon Polariton：SPP) と呼ばれる表面波が存在することが知られている。負誘電体とは負の誘電率を持つ物質のことで、金属は光周波数で負誘電体となる。SPP は負誘電体・誘電体界面に局在し、界面の両側でエバネッセント波となり指数関数的に減衰する TM (Transverse Magnetic field) 波である。一般に、誘電体どうしの界面では全反射がおこると片側誘電体中のみエバネッセント波となるが、これとは異なっている。SPP の磁場（Hy）の分布を図１に示す。磁場は界面から指数関数的に減衰し、界面のみに存在するモードであることがわかる。

さらに、負誘電体薄膜（負誘電体を正誘電体ではさんだ構造)、負誘電体間隙（正誘電体を負誘電体ではさんだ構造）においては、波長よりずっと薄いSPPの結合モード（Fano モード）が形成されることが知られている。結合の仕方によって二つのモード（偶モードと奇モード）があるが、これらを図２に示す。この中には膜厚をいくら薄くしてもカットオフを持たない伝搬モードがある [3]。このモードのビーム厚は、膜厚を薄くするに伴い波長より十分小さい領域まで薄くなる。これらの表面波の波数ベクトル成分は、界面に平行方向では実数で、垂直方向では虚数となる。すなわち、波数ベクトル３成分のうち実数が２つ、虚数が１つである。従って、我々はこれを「２次元光波」と呼ぶことにする。

我々の提案した伝送路には、大きく分けて２つのタイプがある。一つは負誘電体・誘電体界面を小さく巻き込み線状にしたものである (図３参照)。このとき波数ベクトルは線路方向のみ実数であり、実数成分は１つ、虚数成分２つとなるので、我々はこれを「1

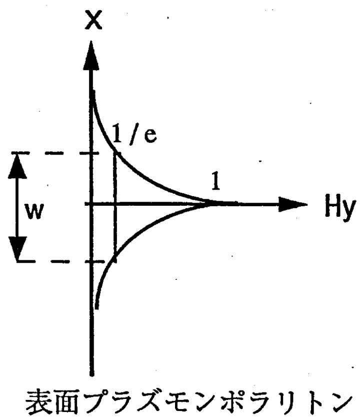


図１　表面プラズモンポラリトンの磁場（Hy）の空間分布

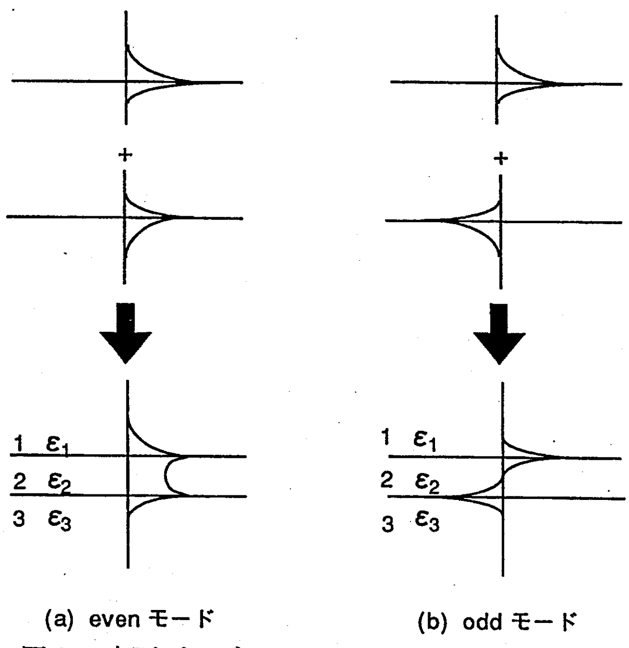
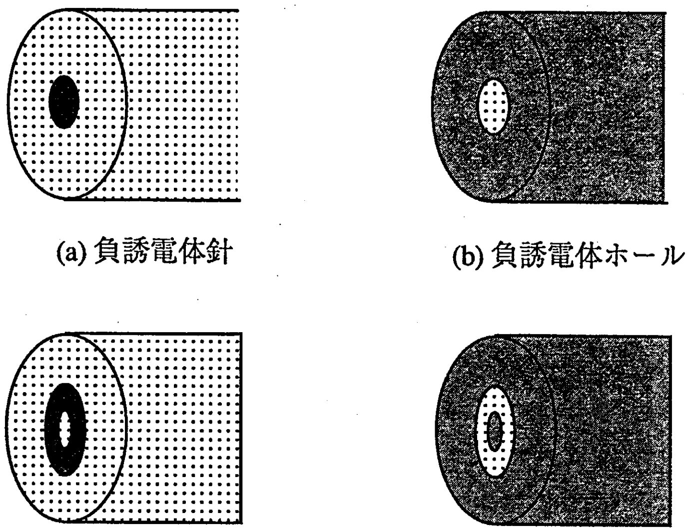


図２　表面プラズモンポラリトンの結合モード
(a) 偶モードと (b) 奇モード

次元光波」と呼ぶことにする。そしてこの伝送路を１次元光波伝送路と名付ける。これを図３に示す。１次元光波伝送路はいずれも負誘電体・誘電体界面を巻き込んだ構造をとる [1]。この場合光ビームの厚さだけでなく、全体を波長より十分小さい領域に閉じ込めることができる。ここで、図３ (a) に示す負誘電体針については、既に２０年以上前から研究があったようであるが [4]、近年の近接場光学の発展に伴い、再びこの系に大きな興味が持たれている [5]。我々の研究はこれらの研究と重なる部分もあるが、異なった観点から独立に行われたものであり、１次元光波の概念や導波路としての取り扱いは独



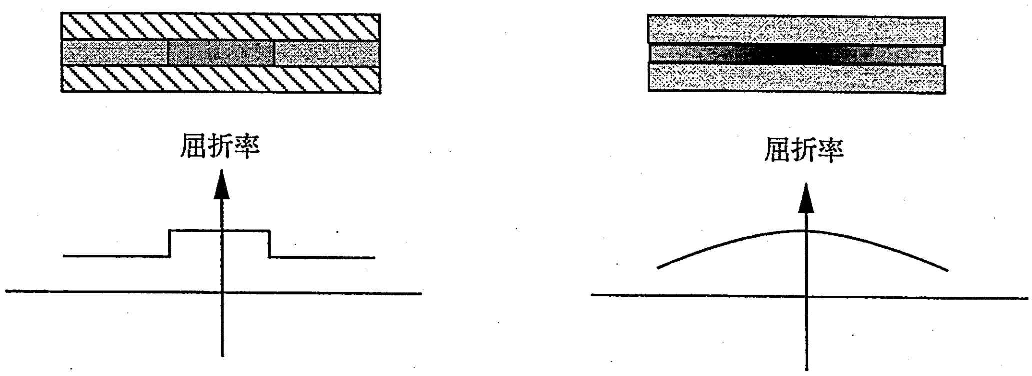
(a) 負誘電体針　(b) 負誘電体ホール

(c) 負誘電体チューブ　(d) 正誘電体チューブ

図３　１次元光波伝送路の例　黒い部分は負誘電体、点の部分は誘電体を示す

自のものである。

二番目のタイプの伝送路は、２次元光波を横方向に従来の光導波路と同様に屈折率ガイドする伝送路である。我々はこの伝送路を２次元光波伝送路と名付けた [2]。これを図４に示す。ここでは屈折率分布の方式として、ステップ型とグレーデッド型について示



(a) ステップ形　(b) 屈折率２乗分布形

図４　２次元光波伝送路の例とコアの屈折率分布　(a) ステップ型、(b) グレーデッド型

している。

ここで、これらの伝送路の名称について整理しておきたい。光導波路の分野ではスラブ導波路のことを２次元光導波路、チャネル光導波路のことを３次元光導波路と呼ぶが、これは閉じ込めの次元により名前を付けたものである。本稿で提案している２次元光波伝送路は、「２次元光波の伝送路」という意味であり、一般に用いられる２次元光導波路とは全く異なるものである。我々の定義では、通常の誘電体光導波路はどれも３次元光波伝送路ということになる。半導体の分野では、閉じ込めの次元ではなく、閉じ込められた電子の自由度により名前を付けており、例えば量子細線における１次元電子系、量子井戸における２次元電子系などである。我々の提案した名称はどちらかといえばこれに近い。

３．１次元光波伝送路の伝搬特性

我々は、図３に示す１次元光波伝送路全てについて解析を行っているが、本節では負誘電体針の伝搬特性について述べる。解析の対象となる導波路の模式図を図５挿入図に示す。解析にはコア半径aの負誘電体の比誘電率をε_m (<0)、クラッドの比誘電率をε_r (>0)とし、光波の伝送方向をz軸に選んだ円筒座標系をとる。ステップ型光ファイバの解析方法に従いz軸方向の伝搬定数をβとする。Maxwell方程式から解を仮定すると、コア・クラッド界面の境界条件から特性方程式を導くことができる。特性方程式と波数保存の式を連立させて解くことでβを数値的に求めることができる。その結果、負誘電体針には、光ビーム径を波長制限なしに細くできる伝搬モードが存在することがわかった。

図５に無損失負誘電体針の伝搬モードを示す。４つのモードの伝搬定数のコア半径依存性を示している。ここで、光波長633nm、コアに銀（ε_m=-19)、クラッドに屈折率２の

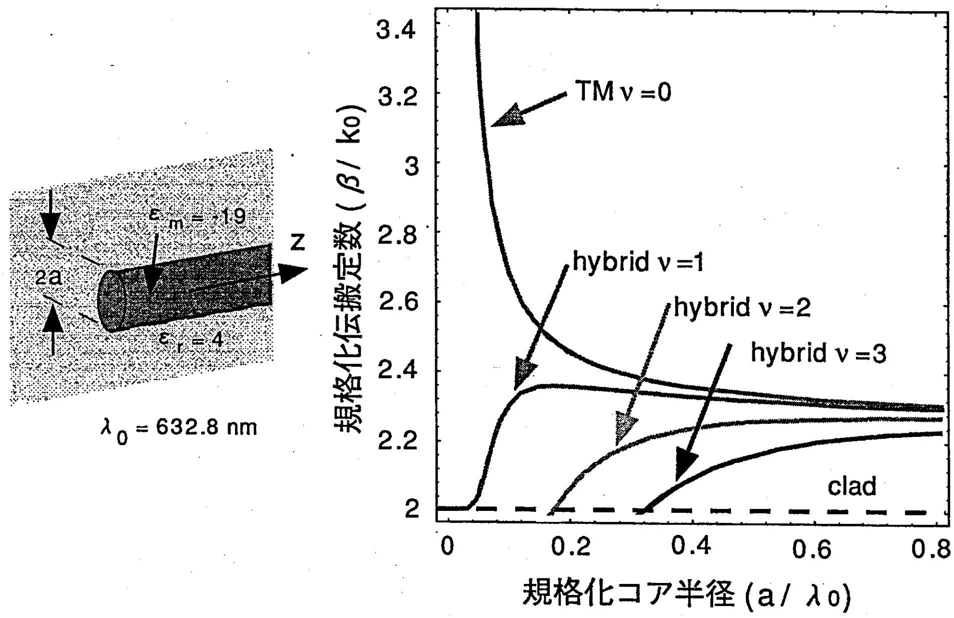


図５　無損失負誘電体針の伝搬モード　伝搬定数のコア半径依存性　伝搬定数とコア半径はそれぞれ真空中の波数、波長で規格化している　挿入図：負誘電体針の模式図

誘電体（ε_r=4）を選んだ。図５から、最低次のTMモードと１次ハイブリッドモードについては、コア半径を小さくしてもカットオフがないことがわかる。また、各モードのビーム半径ｗのコア半径依存性を図６に示す。図６挿入図にこのときの電磁界分布を模式的に示すが、電磁界強度はコア、クラッドとも半径方向に変形ベッセル関数的減衰をする。

図５、６からTMモードはa→0で伝搬定数が無限大に近づくとともに、ビーム半径がいくらでも細くなることがわかる。負誘電体針にはSPPから出発してコア半径をいくら小さくしても遮断されない伝搬モードが存在することになる。また、１次ハイブリッドモードのビーム幅は、いったん最小値をとったあとa→0で非常に大きくなり発散する。これより自由空間中に波長より十分小さい（目に見えない）金属針を置き、このモード

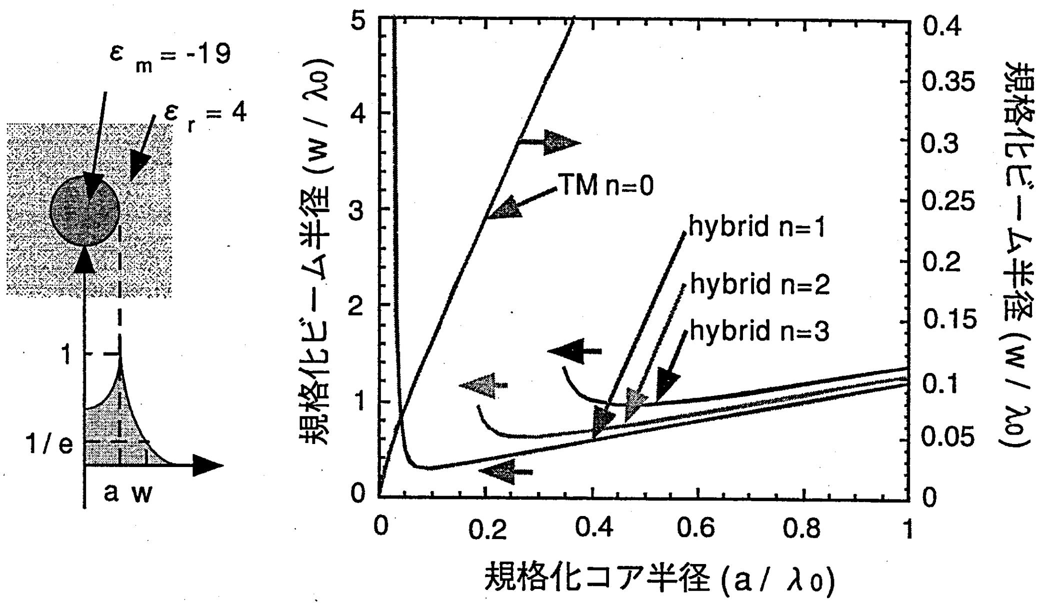


図６　無損失負誘電体針におけるビーム半径のコア半径依存性　ビーム半径とコア半径は真空中の波長で規格化している　挿入図：界分布の模式図

を励振すると、光ビームはあたかも回折拡がりなく自由空間中をガイドされていくという興味深い性質を示すことがわかる [6]。

そもそも、自由空間中の光ビームを回折限界以下に集束できないのは、波数ベクトル成分が全て実数だからである。このとき波数保存則より各波数成分は上限値をもつので、フーリエ変換から３次元光波のビーム径には最小値（回折限界）が存在することが示される。一方、１次元光波伝送路では、いくらでもビーム径を小さくできるが、これは波数成分に虚数を含むために、波数保存則を満たすのに各波数成分が上限値をもつ必要が無く、いくらでも大きな値を取りうるからである。

現実の金属は理想的な負誘電体ではなく、誘電率として負の実部のほかに小さな虚部を持っており、これが伝送損失の原因となる。有損失負誘電体針についても解析を行ったところ、TMモードの場合は、伝送損失はコア径を小さくしてゆくと急激に増大するが、具体的な数値例として、コア直径20nmのときビーム直径33nm、伝送損失3dB/410nm

となる。超微細光集積回路への応用においては、回路長だけ損失を少なく伝搬できればよいので、この損失は許容できるものである。

4．2次元光波伝送路の伝搬特性

2次元光波伝送路は、負誘電体間隙に存在するSPPを屈折率ガイドするものである。負誘電体間隙では、コア厚が厚いときは奇モードと偶モードが縮退しているが、コア厚を薄くしていくと縮退が解けて偶モードが伝搬定数をいくらでも大きくすることができるモードとなる。このことは、偶モードの等価屈折率が通常の誘電体導波路の場合と比べて、非常に大きくなることを示している。等価屈折率が大きければ2次元光波でも細くしぼることができる。従って、コア厚さを薄くすればビーム厚さだけでなくビーム幅も小さくできる。このことから、2次元光波を屈折率差により閉じ込めても、ビーム幅を波長に比べて十分小さくできると考えられる。

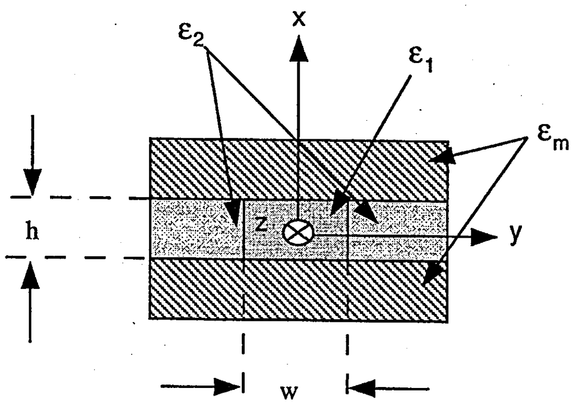


図7　ステップ型2次元光波伝送路　計算に用いた座標と記号

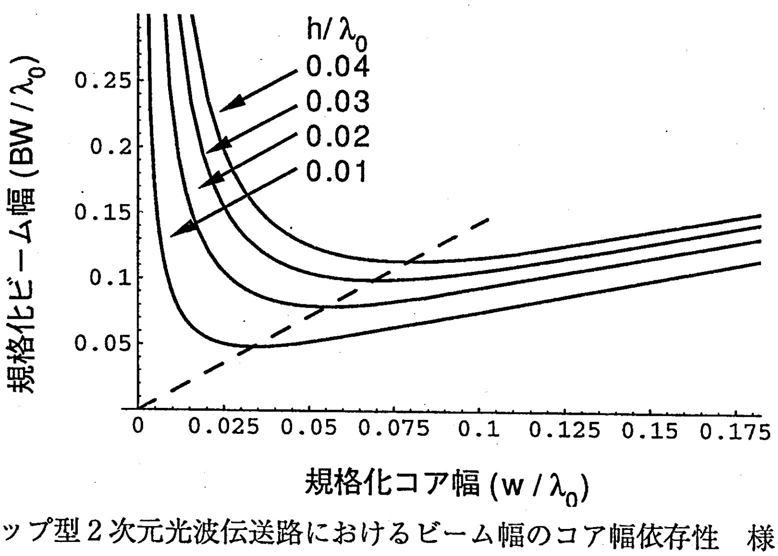


図8　ステップ型2次元光波伝送路におけるビーム幅のコア幅依存性　様々なコア厚に対してプロットしている　斜線はビーム幅の最小値をむすんでいる　ビーム幅とコア幅は真空中の波長で規格化している

本節では、図４ (a) のステップ型２次元光波伝送路の伝搬特性について述べる。コア厚をh、コア幅をdとし、負誘電体の誘電率をε_m (<0)、コアの誘電率をε_1 (>0)、クラッドの誘電率をε_2 (>0) とする。ステップ型２次元光波伝送路では界分布の厳密な解析解を求めることは難しいので、等価屈折率法を用いて近似的に導いている。等価屈折率法はステップ型３次元光導波路の近似解を求めるのに用いられる手法である [7]。電磁界分布が求まるとビーム幅を計算することができる。

図８にビーム幅のコア幅依存性を示す。ここで、ビームパワーの半値幅をビーム幅BWと定義する。様々なコア厚についてプロットしている。斜線はビーム幅の最小になる点をつないだものである。この斜線から、コア厚を小さくすることによりビーム幅の最小値をいくらでも小さくすることができるということがわかる。２次元光波伝送路の場合でも、ビームの大きさをナノメートル領域まで小さくすることができるのである。

５．低次元光波伝送路の応用

１次元・２次元光波伝送路を用いることで光集積回路の小型化に波長による制限がなくなるため、光回路の超小型、高集積化が可能となる。これを非線形光学材料と組み合わせて機能性を持たせれば、光集積回路の超微細化が可能となろう。このとき、２次元光波伝送路は１次元光波伝送路よりも超微細光集積回路への応用は容易であると考えられる。負誘電体・誘電体界面のSPPは伝送損失が大きいため (>10^2cm)、これまでモードフィルター以外には殆ど応用されていなかった [8]。ここで述べた１次元・２次元光波伝送路でもやはり伝送損失が大きいことは変わりないが、長距離伝送を考えない超微細光集積回路への応用については伝送損失は大きな妨げとはならない。この他にも様々な応用があるが、以下では２次元光波伝送路の機能素子としての応用の一例として、変調器について簡単に述べる。

２次元光波伝送路は誘電体が従来の誘電体光導波路にくらべて非常に薄いので、小さな電圧で高電界を印可することができる。また、負誘電体として金属を用いているためにこれを電極として利用できる。これらの特徴は電気光学効果を利用した機能素子として用いるのに有利である。図９に２次元光位相変調器の例を示す [9]。この変調器は２次元光波の位相を変調するものである。また、図１０にその半波長電圧のコア厚依存性を示す。コア厚を小さくすることにより、半波長電圧を1V以下にすることも原理的には可能である。ここで強調したいことは、この位相変調器の半波長電圧が小さいのはアスペ

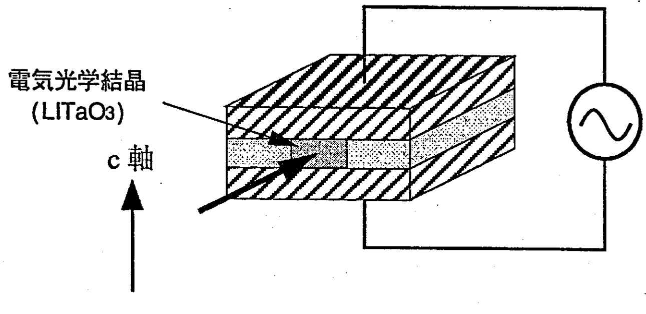


図９　２次元光波変調器の概念　コアに電気光学結晶を用いる

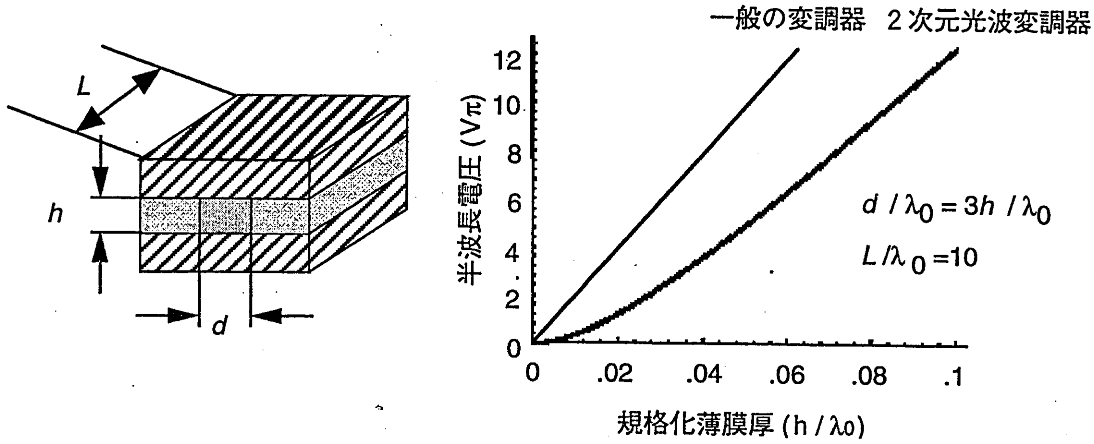


図１０　２次元光波変調器における半波長電圧のコア膜厚依存性　太線は２次元光波変調器、細線は一般の変調器を示す　コア膜厚は真空中の波長で規格化している　挿入図：２次元光波変調器のサイズ

クト比の効果のみではないという点である。図１０には一般の変調器をこれと同じアスペクト比で動作させた場合の（仮想的な）半波長電圧をプロットしているが、これと比較しても２次元光位相変調器の半波長電圧が小さいことがわかる。

６．まとめと今後の課題

負誘電体・誘電体界面の表面波を利用した１次元・２次元光波伝送路について、我々の研究の概要を述べた。１次元・２次元光波伝送路を用いると光ビーム幅に波長による制限がなくなるため、光素子の超小型化が可能となる。

最後に今後の課題について述べる。ここでは述べることができなかったが、負誘電体針以外の他の１次元光波伝送路には、物理的に興味深いモードも数多く存在する。基礎的な課題としてこれらのモードを詳しく調べる必要がある。また、興味あるモードの励起方法についても考える必要がある。１次元光波伝送路を実際に作製するためにはナノメートル径の金属細線の作製プロセスについて研究を行う必要がある。また、ロスの低減も重要な課題であり、金属の伝送損失の低減方法、低損失負誘電体の開発が必要である。さらに、１次元・２次元光波伝送路の大きさはナノメートルオーダーであるから、量子効果デバイスとのサイズの整合性が良く、様々な組み合わせが考えられる。例えば、量子ドットへの情報の書き込みや読み出しに利用できるかもしれない。

参考文献

[1] J. Takahara, S. Yamagishi, H. Taki, A. Morimoto and T. Kobayashi : Opt. Lett. 22 (1997) 475-477.

[2] 小林哲郎、山岸傑、森本朗裕、北川勝浩：第42回応用物理学関係連合講演会予稿集、29p-ZP-5 (1995).

[3] J.J.Burke, G.I.Stegeman and T.Tamir : Phys. Rev. B33 (1986) 5186-5201.

[4] C.Ashley and L.C.Emerson : Surf. Sci. 41 (1974) 615-618. その他の過去の文献については [5] 中の文献を参照のこと。

[5] 近接場光学顕微鏡への応用については、例えば、L.Novotny and C. Hafner : Phys. Rev. B50 (1994) 4094-4106.

[6] 山岸傑、高原淳一、北川勝浩、森本朗裕、小林哲郎：第57回応用物理学会学術講演会予稿集、8a-PA-12 (1996).

[7] 小柴正則：光導波路解析 (1990) 朝倉書店.

[8] W. Johnstone, G. Stewart, T. Hart and B. Culshaw : IEEE J. Lightwave Technol. Vol.8, 4 (1990) 538-544.

[9] J. Takahara, S. Yamagishi, A. Morimoto and T. Kobayashi : CLEO/Pacific Rim 1997, Technical Digest TuM4 (1997) 42.

輻射科学研究会資料
RS 97 - 12

全光学的セット・リセット光メモリの提案

All optical set-reset flip-flop memory element : a proposal

福本 克巳† 中島 将光*
(† : シャープ * : 京都大学 工学部)

FUKUMOTO Katsumi† and NAKAJIMA Masamitsu*
(† : Sharp * : Kyoto University)

1997 年 10月 17日 (金)
於 京都工芸繊維大学

1. まえがき

光メモリ素子は,高速動作と低消費電力動作を特徴とし,光計算機への応用が見込めるため,光通信分野から注目されている[1]。光メモリ素子としては,これまでに双安定デバイスを用いるもの[2-10]や,光遅延線を用いるものなどが提案されている[11]。双安定デバイスは,記憶内容の切り換え方法により, ① 光によりセットし,電気的にリセットするもの[2,3], ② 入射光によりセット/リセットするが, DC光バイアスを必要とするもの[4-7], ③ 光学的ラッチ回路と一対のレーザ光で記憶状態をモニターするものがある[8-10]。その後,単一の入射パルス光の強度を変化させることにより記憶状態の切り換え可能なメモリ素子が提案された[12]。この素子の欠点は,入射光と出射光の波長が異なることである。そのため,並列処理に必要なカスケード接続ができないこと,及び,記憶状態の切り換え時間が遅いことである。文献[17]には 3-dB 光カプラ に接続された一対の相互同期状態のレーザダイオードを用いた光メモリ素子の提案がある。この光メモリ素子の特徴は,記憶状態の切り換え動作が速く,同期状態では入射光と出射光の波長はほとんど同じなのでカスケード接続が可能なことである。

本論文では,文献[17]で新たに提案された光メモリ素子に用いられるレーザの負荷特性に電圧依存項の虚部 Bv を考慮して光メモリ素子の同期特性を解析している。レーザ ダイオードの電圧依存項の実部 Gv と虚部 Bv の比を Bv/Gv とおき, $\phi = -\arctan(Bv/Gv)$ とするときレーザ ダイオードの特性が, Van der Pol型 ($\phi = 0$) からずれて $\phi \neq 0$ の場合には 図1 の結合長 l ($l = l_1+l_2+2l_4$) の長さを等価的に, ϕ/β だけ長くなるようにすればよいことが分かった。結合長 l の調整は,光導波路上に誘電体を装荷するか,光位相変調器[15]の原理を使えばよい。

2. 光メモリ素子の構成と解析

図1に示すように,4端子 3-dB 光カプラの ポート1 と ポート2 にそれぞれ,単一モードのレーザダイードを接続し,残りのポート3とポート4にはハーフミラーを接続する。ハーフミラーからの反射光でレーザ ダイオード LD1 と レーザ ダイオード LD2 は相互同期する。出力光は,ハーフミラーを介して ポート3 と ポート4 から取り出す。

レーザ ダイオード LD1 と レーザ ダイオード LD2 の出力波をそれぞれ,

$$a_1 = |a_1|\exp(j\alpha_1) \qquad (1)$$
$$a_2 = |a_2|\exp(j\alpha_2) \qquad (2)$$

とする。また,レーザの電圧依存項の実部と虚部の比を Bv/Gv とし, ϕ を式(3)の様に表す[18]。

$$\phi = -\arctan(Bv/Gv) \qquad (3)$$

レーザ ダイオード LD1 と LD2 の特性は等しいと仮定すると,同期位相方程式は

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\omega_0}{Q}\,\mathrm{Im}\left[\frac{b_1}{a_1}\exp(j\phi)\right] - \omega + \omega_0 \qquad (4)$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\omega_0}{Q} \mathrm{Im}\left[\frac{b_2}{a_2} \exp(j\phi)\right] - \omega + \omega_0 \tag{5}$$

ただし，$|a_1| = |a_2| = |a|$ であり，ω_0 はレーザ ダイオードの自由発振角周波数で b_1, b_2 は レーザ ダイオード LD1, LD2 への注入波である。$\phi = 0$ (Bv = 0) は，通常 Van der Pol 型と呼ばれる。$\phi \neq 0$ の場合，マイクロ波発振器ではリーケ線図上で等周波数線が曲がり，注入同期特性では微小入力波のとき，入射波と出射波の位相差は，入射波の周波数が自由発振周波数に等しい時にも ϕ だけずれる[18]。

ハーフミラー (HM) の S マトリクスを

$$S_{HM} = \begin{bmatrix} r & jt \\ jt & r \end{bmatrix} \tag{6}$$

$t = \sqrt{(1-r^2)}$ と表現する。無損失対称形ハーフミラーでは，$r = t = 1/\sqrt{2}$ である[17]。

3. 外部注入同期特性

ポート3 から注入光 a_3 がある場合を検討する。

レーザ ダイオード LD1 と レーザ ダイオード LD2 への入射光 b_1 , b_2 はそれぞれ，

$$b_1 = a_1\frac{r}{2} x_1(x_3 + x_4) + a_2\frac{r}{2}(x_4 - x_3)\sqrt{(x_1x_2)} + a_3\frac{jt}{\sqrt{2}}\sqrt{(x_3x_1)} \tag{7}$$

$$b_2 = a_1\frac{r}{2}(x_4 - x_3)\sqrt{(x_1x_2)} + a_2\frac{r}{2} x_2(x_4 + x_3) - a_3\frac{jt}{\sqrt{2}}\sqrt{(x_3x_2)} \tag{8}$$

と表せる。ただし，l_i は 図1 に示す光導波路長であり，$x_i = \exp(-2j\beta l_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ である。 a_3 はポート3 から注入される外部注入光の振幅であり，位相の基準面(位相零)は適当にとる。また β は光導波路の位相定数である。

図1 のポート3 とポート4 の光導波路の回路条件を式(9) に示す[17]。

$$x_3\exp(-j\pi) = x_4 \tag{9}$$

すなわち，$2\beta l_3 + \pi = 2\beta l_4$ が成立する様に回路を設計する。式(4)と式(5)の差をとると，

$$\frac{d(\alpha_1-\alpha_2)}{dt} = 2\Omega\left[\cos(\beta l-\phi)\sin(\alpha_2-\alpha_1) + K_3\sin(\phi-\phi)\cos\frac{(\alpha_1-\alpha_2)}{2}\right] \tag{10}$$

ただし，$\Omega=\omega_0 r/Q$, $l=l_1+l_2+2l_4$, $l_1=l_2$, $2\phi=\alpha_1+\alpha_2+\beta l$, $K_3=t|a_3|/r|a|\sqrt{2}$ である。

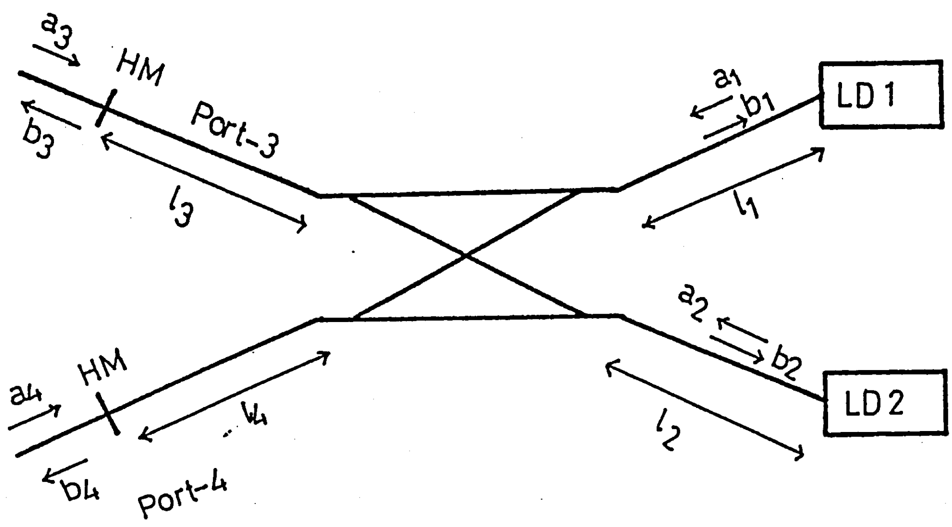


図1　光メモリ素子の回路図
Fig. 1 A schematic circuit diagram of the optical memory element.

定常状態は 式(10) = 0 から，

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pi \qquad (11)$$

逆相同期となる。狭い周波数範囲を取り扱っているため線路の分散特性を無視し，$\beta = \omega/c$ を光導波路の位相定数，c を光導波路における光速とする。
次に，式(4) + 式(5) = 0 から，

$$\frac{\omega-\omega_0}{\Omega} = \sin(\beta l - \phi) + K_3\cos(\phi - \phi) \qquad (12)$$

ここで，ωは注入光の角周波数である。位相 α_1 と α_2 は,式(11)と式(12)から求まる。
ポート3 からの出力光 b_3 は

$$b_3 = \frac{jt}{\sqrt{2}}(\sqrt{x_3})|a|\left[\exp(-j\theta_1) - \exp(-j\theta_2)\right] \qquad (13)$$

ただし,$\theta_1 = \beta l_1 - \alpha_1$，$\theta_2 = \beta l_2 - \alpha_2$ である。ここで，$l_1 = l_2$ とおくと出力光 b_3 は式(14) と表される。

$$|b_3|^2 = t^2|a|^2\left[1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right] \qquad (14)$$

ポート3 から注入光がある場合,出力光 b_3 は 逆相同期 $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ で, $|b_3|^2 = 2t^2|a|^2$ となり,最大出力が得られる。
また,ポート3から注入光がある場合,ポート4からの出力光 b_4 は

$$|b_4|^2 = t^2|a|^2\left[1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \right] \qquad (15)$$

と表され,逆相同期 $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ では,ポート4からの出力光 b_4 は, $|b_4|^2 = 0$ となる。
　続いて,ポート4から注入光がある場合を考察する。

$$\frac{d(\alpha_1-\alpha_2)}{dt} = 2\Omega\left[\cos(\beta l-\phi)\sin(\alpha_2-\alpha_1) + K_4\sin(\phi-\phi)\sin\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{2}\right] \qquad (16)$$

ただし, $K_4=t|a_4|/r|a|\sqrt{2}$ である。定常状態は 式(16) = 0 から,

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \qquad (17)$$

同相同期となる。このとき,式(14)よりポート3からの出力光 b_3 は, $|b_3|^2 = 0$ と求まる。
また,式(15)よりポート4からの出力光 b_4 は,

$$|b_4|^2 = 2t^2|a|^2 \qquad (18)$$

となり,最大出力が得られる。
すなわち,ポート3または, ポート4から光を注入することにより, 図1 の光メモリ素子の記憶状態を切り換えることができる。

4. 相互同期特性

　次に,外部から注入光を入れない ($a_3 = a_4 = 0$) 場合を検討する。この時,レーザ ダイオード LD1 と LD2 とは相互同期状態にあるとすると, 式(4) - 式(5) から

$$\frac{d(\alpha_1-\alpha_2)}{dt} = 2\Omega\left[\cos(\beta l-\phi)\sin(\alpha_2-\alpha_1) \right] \qquad (19)$$

となる。定常状態 $d(\alpha_1-\alpha_2)/dt = 0$ では, $\cos(\beta l-\phi) \neq 0$ の場合,

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \qquad (20)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pi \qquad (21)$$

の解がある。 式(20), 式(21) は同相同期と逆相同期に対応し, 式(14) と式(15) から
同相同期状態では $|b_3|^2 = 0$, $|b_4|^2 = 2t^2|a|^2$ となり,
逆相同期状態では $|b_3|^2 = 2t^2|a|^2$, $|b_4|^2 = 0$ となる。

そのため,ポート3 または,ポート4 のいづれから出力光が得られるかを検出することにより,同期状態(記憶状態)を知ることができる。
また,$d(\alpha_1+\alpha_2)/dt = 0$ から,

$$\frac{\omega_c - \omega_0}{\Omega} = \pm \sin(\beta_c l - \phi) \qquad (22)$$

ただし,式(22) の右辺の − 符号は同相同期,+ 符号は逆相同期に対応し,$\beta_c = \omega_c/c$,ω_c を相互同期状態のレーザ ダイオード LD1 と LD2 の共通の発振角周波数とする。
ここで,図1 の結合長 l が式(23) を満たすように設計する(n は整数で 0,1,2,3...)と,

$$\beta_0 l = \omega_0 l/c = (4n + 1)\pi/2 \qquad (23)$$

式(22) は式(24) のように書き表せる。

$$\cos\left\{\frac{(\omega_c - \omega_0)l}{c} - \phi\right\} = \pm \frac{\omega_c - \omega_0}{\Omega} \qquad (24)$$

ただし,c は光導波路における光速である。
　共通の発振角周波数(ω_c)に関して,超越関数 式(24) は,一般的には多数の解を持つが,2個の解を持つように光メモリ回路の設計を行う。すなわち,図解(図2) から大略の回路条件を次のように求めることができる。$\phi = 0$ では $\omega_c = \omega_0 + \pi c/l$ のとき 式(24) の左辺は極小値 -1 をとる。式(24) の左辺は $\omega_c = \omega_0$ で 0 となるので,これらの2点を結ぶ直線の傾きよりも式(24) の右辺の傾き $1/\Omega$ の方が急勾配であればよい。すなわち,式(25) と表すことができる。

$$Q > \frac{2r\mu l}{\lambda} \qquad (25)$$

ただし,μ は屈折率,λ は光導波路におけるレーザの波長である。図2 には $\phi = 0$ の場合を示す。図2 の Xin は同相同期状態,Xan は逆相同期状態の発振周波数を表す。$\phi \neq 0$ の場合は,結合長 l ($l = l_1 + l_2 + 2l_4$) の長さを等価的に,ϕ/β だけ長くなるようにすればよい。
結合長 l の調整は,光導波路上に誘電体を装荷するか,光位相変調器[15] の原理を使えばよい。

5. 安定条件と同期帯域幅

　次に相互同期状態にある光メモリ回路の安定条件と同期帯域幅を考察する。ポート3から注入光がある場合の定常状態を α_{1s},α_{2s} とおき,位相が定常状態からそれぞれ微小量だけずれたとすれば 1次の微少部分だけを考慮して,式(4)と式(5)から変分方程式と,変分方程式の特性方程式を求めることができる。

特性方程式は式(26)で与えられる。

$$\lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) = 0 \qquad (26)$$

ここで，

$$A_{11} = -\Omega[\cos(\alpha_{2s} - \alpha_{1s} - \beta l + \phi) + K_3\sin(\alpha_{1s} + \beta(l_1 + l_3) - \phi)] \qquad (27)$$
$$A_{12} = \Omega\cos(\alpha_{2s} - \alpha_{1s} - \beta l + \phi) \qquad (28)$$
$$A_{21} = \Omega\cos(\alpha_{1s} - \alpha_{2s} - \beta l + \phi) \qquad (29)$$
$$A_{22} = -\Omega[\cos(\alpha_{1s} - \alpha_{2s} - \beta l + \phi) - K_3\sin(\alpha_{2s} + \beta(l_2 + l_3) - \phi)] \qquad (30)$$

であり，安定条件は式(31)で表される。

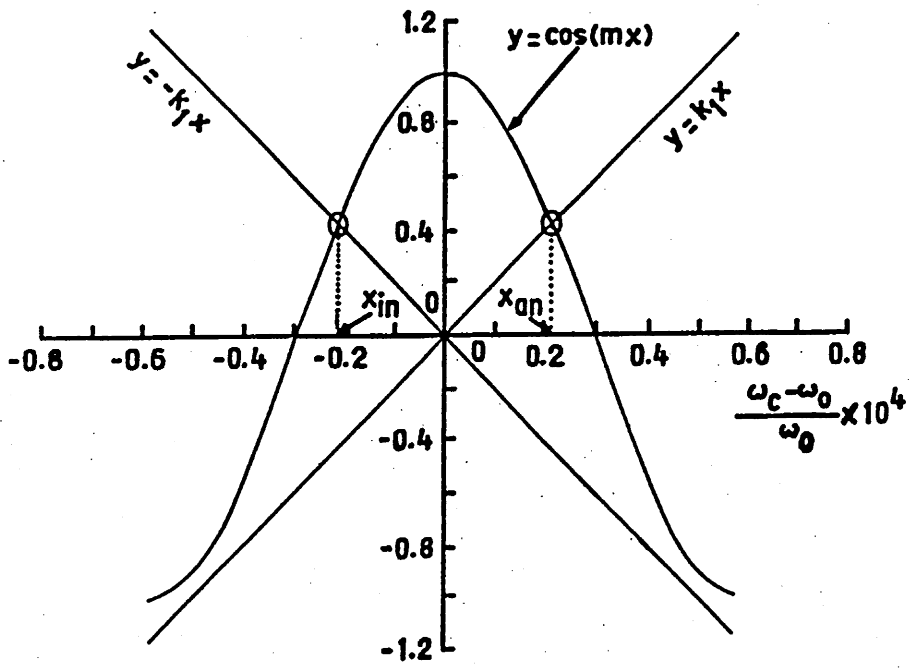


図 2　超越関数 式(24) の図解

Fig. 2　Graphical solution of the transcendental eqn. (24).
Xin and Xan correspond to the inphase frequency and antiphase frequency, respectively.

$$\phi = 0,\ x = \frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_0} \times 10^4,\ m = \frac{\omega_0 l}{c} \times 10^{-4} \text{ and } K_1 = \frac{Q}{r} \times 10^{-4}$$

where

$\lambda_0 = 1.55\mu m$, $l = 6mm$, $r = 1/\sqrt{2}$, $\mu = 2.2$ and $Q = 1.4 \times 10^4$

$$A_{11} + A_{22} < 0 , \qquad A_{11}A_{22} > A_{12}A_{21} \tag{31}$$

ポート3から注入光がない場合（ $K_3 = t|a_3|/r|a|\sqrt{2} = 0$ ）の安定条件は,

$$\cos(\beta l - \phi) < 0 \tag{32}$$

で与えられ,ポート3から注入光がある場合（ $K_3 \neq 0$ ）の安定条件は,

$$K_3\cos(\alpha_{1s} - \phi + \beta l/2) < -\cos(\beta l - \phi) \tag{33}$$

$$K_3 > -2\frac{\cos(\beta l - \phi)}{\cos(\alpha_{1s} - \phi + \beta l/2)} \tag{34}$$

で表される。式(33) と式(34) が同時に成り立つのは,

$$\cos(\alpha_{1s} - \phi + \beta l/2) < 0 \tag{35}$$

の場合である。ここで $\beta = \omega/c$ なので, 定常状態の位相 α_{1s} とポート3 からの注入光の周波数は式(35) を満足するように決定する必要がある。また,ポート3から角周波数 ω_s の注入光がある場合には式(12) より 式(36) を得る（逆相同期状態)。

$$\frac{\omega_s - \omega_0}{\Omega} = \sin(\beta_s l - \phi) + K_3\sin(\alpha_1 - \phi + \beta l/2) \tag{36}$$

角周波数 ω_s と ω_c は,ほとんど同じなので, $\sin(\beta_s l - \phi) \fallingdotseq \sin(\beta_c l - \phi)$ と近似すると 式(22) - 式(36) より,

$$\frac{\omega_c - \omega_s}{\Omega} = -K_3\sin(\alpha_1 - \phi + \beta l/2) \tag{37}$$

となる。前述の安定条件 式(35) より, $\pi/2 < (\alpha_1 - \phi + \beta l/2) < 3\pi/2$ に注意すると, $-1 < \sin(\alpha_1 - \phi + \beta l/2) < 1$ なので同期帯域幅 BW は 式(37) より 式(38) となる。

$$BW = \omega_c - \omega_s = 2\Omega K_3 \tag{38}$$

6. むすび

一対の相互同期状態のレーザダイオードを用いた光メモリ素子を提案した。光で高速に記憶状態が切り換わり，同期状態では入力光と出力光の波長はほとんど同じなのでカスケード接続が可能である。レーザダイオードの電圧依存項の実部と虚部の比を Bv/Gv とし，$\phi = -\arctan(Bv/Gv)$ とするとき レーザダイオードの特性が，Van der Pol 型（$\phi = 0$）からずれて $\phi \neq 0$ の場合には 図1 の光導波路の 結合長 l（$= l_1 + l_2 + 2l_4$） の長さを等価的に，ϕ / β だけ長くなるようにすればよい。結合長 l の調整は，光導波路上に誘電体を装荷するか，光位相変調器[15]の原理を使えばよい。

7. 文献

[1]. J.E.Midwinter and M.G.Taylor, IEEE LCS Magazine (May 1990) 40.

[2]. H.Kawaguchi and G.Iwane, Electron. Lett. 17 (1981) 167.

[3]. A.Sasaki, K.Matsuda, Y.Kimura and S.Fujita, IEEE Trans. Electron. Devices ED-29 (1982) 1382.

[4]. H.M.Gibbs, S.L.McCall, T.N.C.Venkatesan, A.C.Gossard, A.Passner and W.Wiegmann, Appl. Phys. Lett. 35 (1979) 451.

[5]. T.Nakai, N.Ogasawara and R.Ito, Japanese J. Appl. Phys. 22 (1983) L310.

[6]. A.Sasaki, M.Tareya, H.Yano and S.Fujita, IEEE Trans. Electron. Devices ED-31 (1984) 805.

[7]. D.A.B.Miller, D.S.Chemla, T.C.Daman, T.H.Wood, C.A.Burrus,Jr.A.C.Gossard and W.Wiegmann, IEEE J. Quantum Electron. QE-21 (1985) 1464.

[8]. K.Hara, K.Kojima, K.Mitsunaga and K.Kyuma, Elactron. Lett. 25 (1989) 433.

[9]. A.L.Lentine, H.S.Hinton, D.A.B.Miller, J.E.Henry, J.E.Cunningham and L.M.F.Chirovsky, IEEE J. Quantum Electron. 25 (1989) 1928.

[10]. K.Matsuda, H.Adachi, T.Chino and J.Shibata, IEEE Electron. Devices Lett. 11 (1990) 442.

[11]. H.Goto etal., Topical meeting on photonic switching, FDI, Incline village (1987) p.132.

[12]. K.Matsuda and J.Shibata, IEEE Photon. Techn. Lett. 4 (1992) 483.

[13]. T.Chattopadhyay and M.Bhattacharya, Optics Comm. 110 (1994) 46.

[14]. M.Nakajima, T.Chattopadhyay, M.Wang and H.Hamasaki, Technical Digest of second Optoelectronics Conference, OEC'88, Tokyo, Japan (1988) p.88.

[15]. T.Chattopadhyay and M.Nakajima, IEEE J. Lightwave Techn. 8 (1990) 221.

[16]. M.Minakata and T.Chattopadhyay, Final Report of Nishizawa Terahertz Project, ERATO, Japan (1992) p.47.

[17]. T.Chattopadhyay and M.Nakajima, Optics Comm. 138 (1997) 320.

[18]. K.Fukumoto and M.Nakajima, Electronics and Communication in Japan (Scripta Technica, Inc.) part 2, vol.73, no.10, (1990) 1.

ＲＳ９７－１３

ベクター結合型ライトガイドによる液晶ディスプレイ用バックライト

篠原　正幸　　鄭　昌鎬　　青山　茂　　竹内　司

オムロン(株) 中央研究所

１９９７年１０月１７日

輻射科学研究会資料

ベクター放射結合型ライトガイドによる液晶ディスプレイ用バックライト

篠原　正幸　　　鄭　昌鎬　　　青山　茂　　　竹内　司

オムロン㈱　中央研究所

1．はじめに

近年、PHS（Personal Handy Phone）等の移動体通信やPDA（Personal Digital Assistant）等の携帯情報端末の普及は目覚ましいものがあり、その生産台数は年間8000万台を超えている。これらを達成した要因の1つとして、急速に進んだ小型軽量化、バッテリ駆動の長時間化等が挙げられる。しかし現在、新たな市場、商品高性能化をめざし、文字、画像対応化をはじめ要求はさらに高まる一方であり、各構成部材の技術革新が市場拡大のために必要不可欠と思われる。中でもLCD照明用光源であるLEDバックライトは、高消費電力、輝度不均一によるLCD画像劣化といった問題を抱えており改善が強く望まれている。もっとも、光源として使用されるLEDの方は小型軽量、長寿命、といった利点に加え最近では非常に効率の高いものも実用化されており技術革新が進んでいる。しかし、点光源から面光源への変換方式は研究開発が送れており、変換効率は10%台のものが多く、面内輝度バラツキ（輝度最小値に対する最大値）も3倍を超えるものもある。

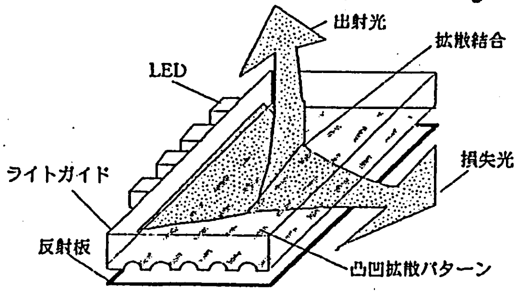


図 1.従来方式LEDバックライト

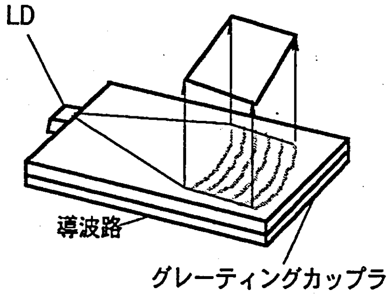


図 2. グレーティングカップラ

図1に従来からあるLEDバックライト構成を示す。ＬＥＤからの光は、ライトガイド下面に設けられた凸凹パターン拡散作用によって面状に広がり、同時にライトガイド出射光に結合される。拡散による結合を用いているため制御性が極めて悪く、高効率、高均一性に限界がある。また変換理論が、確立されておらす、設計は技術者の経験によるところが大きい。

一方、制御性の高い変換素子としてグレーティングカプッラ［1］が挙げられる（図２参照）。これはモード結合理論[2,3]により裏付けされた変換方法で、光情報処理分野等のキーデバイス[4,5]として盛んに研究開発がなされている。しかしながらモード結合理論はコヒーレント光に対する理論であり、そのままでは照明等インコヒーレント光へあてはめる事が出来ない。そこで我々は、グレーティングカップラのモード結合を基にインコヒーレント光の使用が可能な、ベクター放射結合を提案した。以下、本稿ではベクター放射結合の原理、設計方法、さらに実験結果においてその有効性を紹介する。

２．ベクター放射結合型ライトガイド

２.１．原理

本バックライトの構成を図３に示す。光源は１点に局在化されており、ここを中心として凸凹パターンが同心円上に配列されている。ＬＥＤからライトガイドに結合された光は放射状に広がりライトガイド下面凸凹パターンにより出射される。以下、ベクター放射結合の原理を述べる。

まずライトガイド中の光を、光源を中心として直線的に導光させる。

これにより、グレーティングカップラと同様、出射光は導光量を放射損

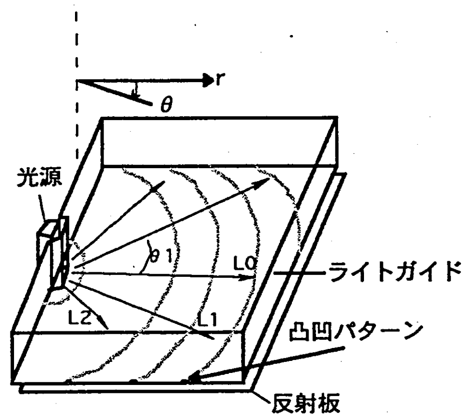


図 3. ベクター放射結合型ライトガイド

失係数との積で表すことができるようになる。。ここで放射損失係数を導光量低下を補うように増加させることにより、均一な出射光量を得る。

次に、直線的な導光を実現させるためには光源を１点に局在化させ、凸凹パターンは導光方向に対して垂直な方向に一様な形状にする。これにより、パターンに当たった光で出射されなかった光も、導光方向を変化させることがなく、直線的な導光が得られる。

なお、グレーティングカップラーでは位相の方向と量を同時に整合させることにより放射結合させていたが、ここでは方向（ベクター）のみを整合させることにより放射結合させている。

実際の設計手順は、まず、光源の指向性を制御し、つづいて各指向別に放射損失係数を設計する。以下に、この２点について詳細に述べる。

２．２．光源指向性

本バックライトでは、光が直線的に導光することから光源の指向性の制御が重要となる。これをライトガイドの光源結合部の形状を制御ことで達成している。図４に本バックライト理想的な光源の指向性 $I(\theta)$を示す。$I(\theta)$は[θ, θ+dθ] 間の導光板面積、つまりθ方向における光源からライトガイド出射領域の端までの距離の２乗にほぼ比例する。このため、対角θ方向にピークが現われ、光源指向性の補正が必要となる。

図５にライトガイド光源結合部の上面図を示す。$\theta=0$の方向を尖らせることで、θ方向に光を屈折させ補正している。　実際には、理想的な指向性と完全に一致させることは不可能なためθ方向に依存する輝度ムラが発生する。そこで、輝度の強い方向のパターン密度を下げ、低い方向へあわせることにより均一性を達成する。

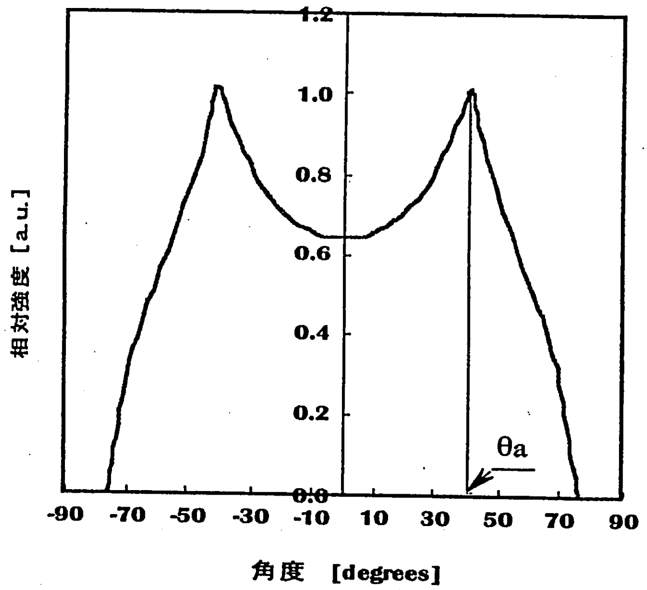


図 4. 光源指向性目標値

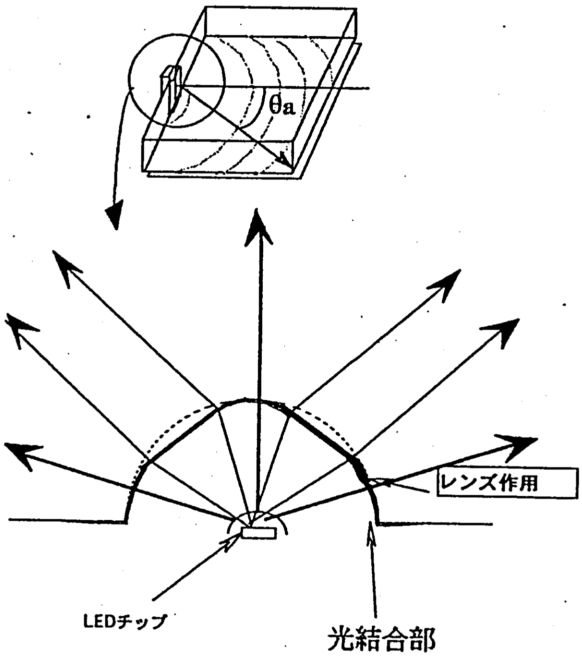


図 5. 光結合部構造

2.3. 放射損失係数

f(r：光源からの距離)

輝度が均一であるための条件は、放射損失係数＝f（光源からの距離r）の形で表すことで、放射損失係数は凸凹パターンの配置密度で自由に設定できる。以下にこの2点について述べる。

図6 (a) に示す斜体の領域に光量Poの光が入射した場合を考える。この時、r方向単位長さ当りに出射される光量Qは

$$Q(r) = \frac{2\,Po}{L^2} \cdot r \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

と表すことができる。ここでLはr＝LとなるときPoすべてライトガイド表面から出射される距離に相当し導光板長さdよりも大きくとってある。このためLの大きさにより出射効率が変わるが、L決定方法は後述する。一方導光光量Sは

$$S(r) = Po - \int_0^r Q(r)dx \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$= Po\left(1 - \frac{r^2}{L^2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

これより、放射損失係数αは

$$\alpha(r) = -\ln\left(1 - \frac{Q(r)}{S(r)}\right) \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\sim \frac{Q(r)}{S(r)} \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

$$= \frac{2r}{L^2 - r^2} \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

と表すことができる。((4)式は(1)における単位長さが十分小さくなり $Q/S \ll 1$ とした時成り立つ) (5) 式を図6 (d) に示す。r＝dでαが最大値αdをとる。ここで放射損失係数はパターンの配置密度を上げることにより大きくなるが、ある値α.max以上は大きくならない、よってαd≦α.maxとなるLを選ばなくてはならず（L＞d）出射効率が決定される。

図7に凸凹パターンの配置密度に対する放射損失係数の計算結果を示す。

計算は、図中に示すシリンドリカル形状のパターンを用いて光線追跡法により求めた。αが0から最大値まで連続的に変化しており、配置密度でαの連続的な変調が可能なことがわかる。
またαは、単にパターン配置個数を変えるだけで変調可能であり、グレーティングにおける比線幅、拡張変調と比べ作製が容易である。

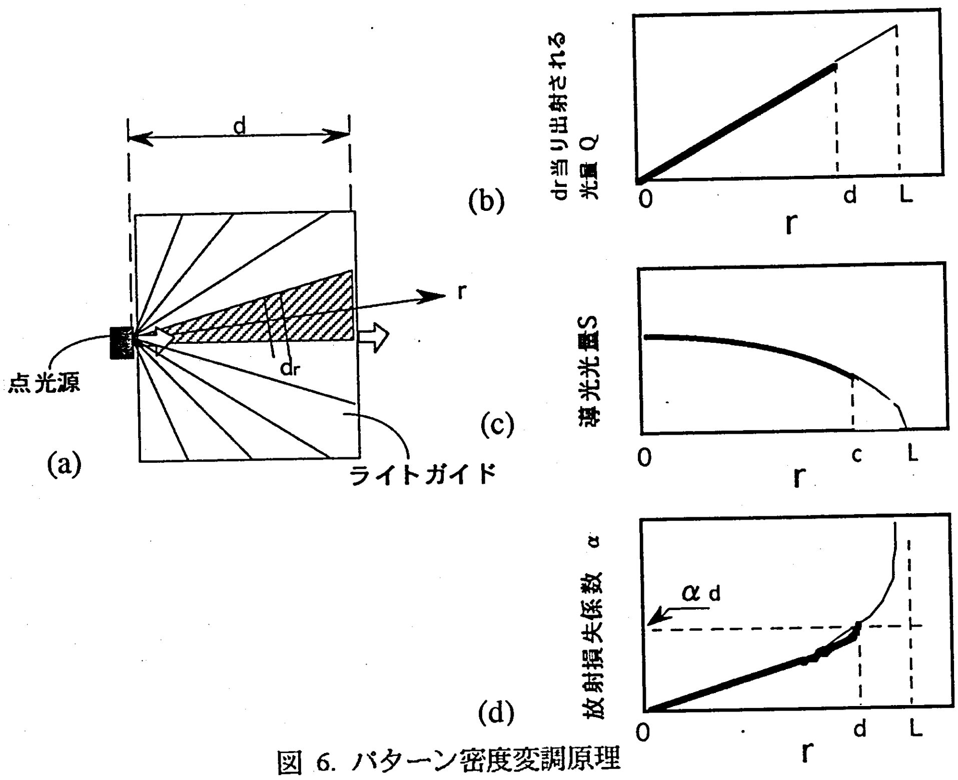


図 6. パターン密度変調原理

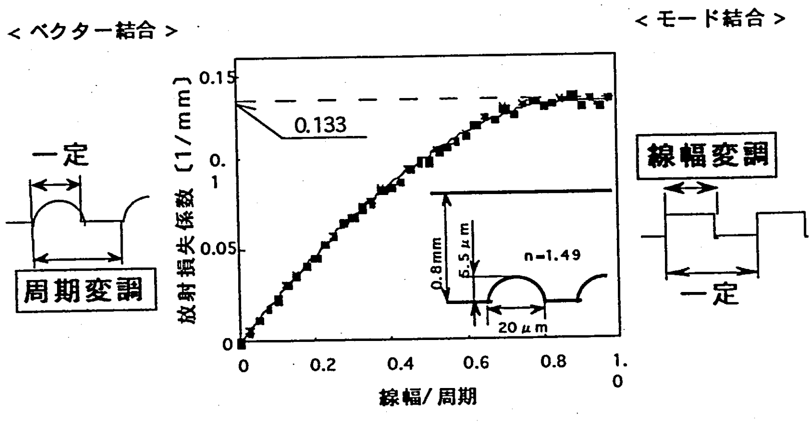


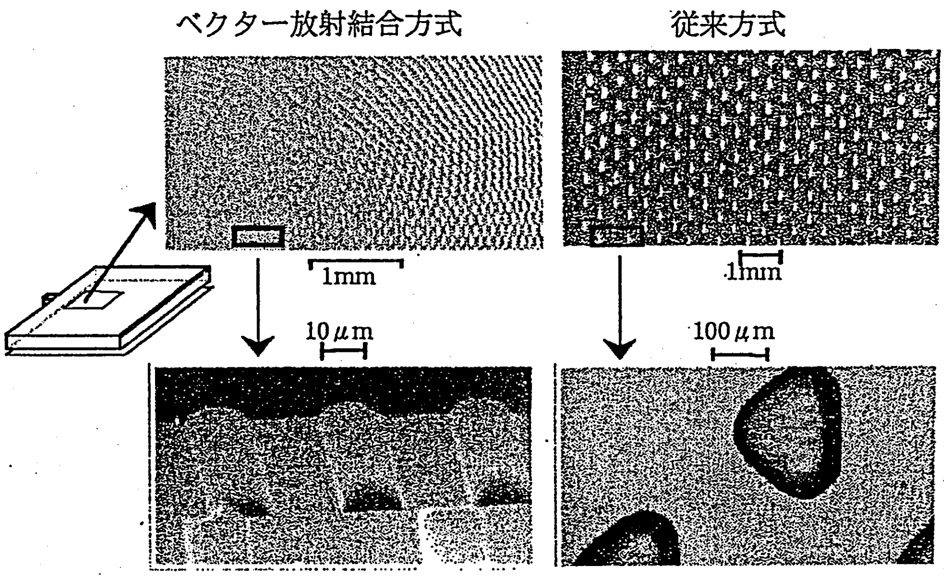
図 7. 放射損失係数

３．作製評価

今回、厚み0.8ｍｍ, 面積22×33mm□, 光源ＬＥＤ１個のバックライトを作製した。

パターン部は電子ビーム描画装置で原盤を作製し、これを型にニッケルスタンパを作製して、２Ｐ法によりライトガイド成形品に転写した。

図８(a) に作製したパターンのSEM写真を示す。各パターンが光源に対して垂直方向に一様となっており、またパターン密度も場所により変化している。なお、(b) に従来バックライトの拡散パターンを示す。出射効率は、従来比４倍の70％を得た。図９に輝度測定結果を示す。縦軸はそれぞれ平均輝度で規格してある。輝度の最小値に対する最大値は1.5倍となり従来の3.5倍に比べ大幅に改善していることがわかる。



(a) (b)

図 8.　パターンSEM写真

4. まとめ

高効率で均一な面光源を実現目的としてグレーティングカップラのモード結合を基に、ベクター放射結合型ライトガイドを提案し、原理、設計、試作結果について述べた。効率は従来比4倍の70%、輝度バラツキは3.5倍から1.5倍に向上した。今後、大面積化、カラー化を検討し応用範囲を広げていきたいと考えている。

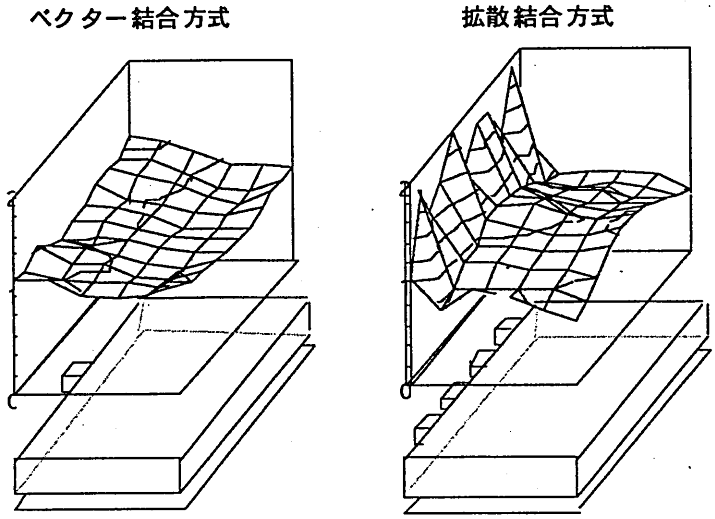


図 9. 輝度分布測定値

参考文献

[1] M.Dakss,L.kuhn,P.F.Heidrich and B.AScott, "Grating couplerfo efficient excitation of optical guided wave in thin films ,Appl.Phys,Lett.,vol,12,p.523,June 1970

[2] A.Yariv, "Coupled-mode theory for guided-wave optics",IEEE J Quantum Electoron.,QE-9,9,P919,Sept.1973

[3]西原浩,春名正光,栖原敏明, "光集積回路",第4章,オーム社 1985

[4]S.Ura,T.Suhara,H.Nishihara and J.Koyama, "An integreted-optics disk pickup devices," IEEE/OSA J.Lightwave Technol.LT-4,913(1986).

[5]S.Ura,Y.Furukawa T.Suhara T ,and H.Nishiara, "Linearly focusing grating coupler for integrated-optic parallel pickup",J.Opt.Soc.Am.A, vol.7,9,1759, Sep.1990

[6]H.Hosokawa,N.Horie,T.Yamashita, "Mass-producible Optical Guided-wave Devices Fabricated by Photopolymerization",Photopolymer Device Physics, Chemistry,and Applications, Proc.SPIE,24-26 July 1991

[7]S.Aoyama,N.Horie, and T.Yamashita, "Micro Fresnel lens fabricated by electron-beam lithography," Proc.SPIE 1211,175,1990

輻射科学研究会資料
RS 97-14

光導波路伝搬定数（実効屈折率）の一般的表現

General Expression for Optical Waveguide Propagation Constants

摂南大学工学部 大家重明
Setsunan University Shigeaki Ohke

広島県立保健福祉短期大学 梅田徳男
Hiroshima Pref. College of Health and Welfare Tokuo Umeda

応用光電研究室 張 吉夫
Oyokoden Laboratory Yoshio Cho

1997年12月5日
輻射科学研究会
（於 シャープ株式会社）

光導波路伝搬定数（実効屈折率）の一般的表現
General Expression for Optical Waveguide Propagation Constants

大家重明　　梅田徳男　　張 吉夫
Shigeaki Ohke　　Tokuo Umeda　　Yoshio Cho

摂南大学工学部　広島県立保健福祉短期大学　応用光電研究室
Setsunan Univ.　Hiroshima Pref. College of Health and Welfare　Oyokoden Lab.

あらまし

本報告は、光導波路における伝搬定数（実効屈折率）を記述する新しい積分表現（屈折率自乗の界分布荷重平均根表現）と、その成立に関する検証、ならびに従来より検討されている変分表現との関連も含めて、一般的表現について検討したものである。

ここで検討した実効屈折率に関する界分布荷重平均表現は、「光導波路の実効屈折率は、導波路中で界分布が感じる屈折率である」ことを示すものであり、界分布の極値間でこの関係が成立する。また、変分表現は、界分布の極値間のみならず、界分布がゼロとなる範囲内で成立することを明らかにした。

目　次

1．まえがき

光導波路の伝搬定数（実効屈折率）については、これまで界分布と屈折率分布などを用いた積分表現として、変分表現式[(1)~(3)]や電力流分布などを用いたBrownの関係式[(4)(5)]やStewartの式[(6)]などが検討されている。

実効屈折率（ないし等価屈折率）n_{eff} は通常、光導波路を構成する各媒質中の電磁界成分の連続性を考慮して得られる固有値方程式を解くことにより求められ、伝搬定数βを真空中の波数κで割った、$\beta/\kappa=n_{eff}$ として定義される。しかし、その物理的意味はこれまであまり明瞭にされていない。

本報告では、光導波路における実効屈折率を界分布と屈折率分布の自乗を用いて荷重平均表現する新しい積分表現式[(7)~(16)]を示し、実効屈折率の物理的意味について、光波自身が導波路中で感じる屈折率であり、より詳細には、導波路中で界分布感じる屈折率（界分布の存在するところの屈折率）であることを説明する。

さらに、スラブ光導波路において、この積分表現式の成立に関して検証し[(15)]、この荷重平均表現と通常の変分表現との関連も含めて、より一般的な表現[(16)]について検討を行っている。また、光ファイバにおいて成立する積分表現式についても検討を行っている。

2．実効屈折率の荷重平均表現式

簡単のためにスラブ光導波路を伝搬するＴＥ波（$E_y(x)$, $H_x(x)$, $H_z(x)$成分からなる）とＴＭ波（$H_y(x)$, $E_x(x)$, $E_z(x)$成分からなる）について実効屈折率が屈折率分布（$n(x)$）の自乗（もしくはその逆数）の界分布荷重平均根を用いて表現できる[(16)]ことを示す。

2．1　ＴＥ波

Maxwellの電磁界の基礎方程式（ $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\partial \boldsymbol{B}/\partial t$、 $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\partial \boldsymbol{D}/\partial t$、

$B = \mu H = \mu_0 H$, $D = \varepsilon E = \varepsilon_0 n^2(x) E$, $\dfrac{\partial}{\partial z} = -j\beta$, $\dfrac{\partial}{\partial t} = j\omega$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = 0$

とする）より、それぞれの成分表示として、

$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_y \qquad (1)$$

$$j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_z \qquad (3)$$

を得る。(2)式より、

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \qquad (4)$$

(3)式より、

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j\,\partial^2 E_y}{\omega\mu_0 \partial x^2} \qquad (5)$$

となり、(4)式、(5)式を(1)式へ代入し、$\omega^2\varepsilon_0\mu_0 = \kappa^2\ (=2\pi/\lambda)$ の関係を用いると、

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (\kappa^2 n^2(x) - \beta^2)\cdot E_y = 0 \qquad (6)$$

を得る。

この(6)式より、

$$\frac{dE_y}{dx} = \int_a^x (\beta^2 - \kappa^2 n^2(x))\cdot E_y\,dx + c \qquad (7)$$

但し、a, c は定数である。ここで $dE_y/dx = 0$ となる $x = x_1$、$x = x_2$ を考えると

$$\int_{x2}^{x1} (\beta^2 - \kappa^2 n^2(x))\cdot E_y\,dx = 0 \qquad (8)$$

を得る。この(8)式より、ＴＥ波において、

$$\beta^2 = \frac{\int_{x_2}^{x_1} \kappa^2 n^2(x) \cdot E_y(x)\, \mathrm{d}x}{\int_{x_2}^{x_1} E_y(x)\, \mathrm{d}x} \tag{9}$$

すなわち、

$$n_{eff} = \frac{\beta}{\kappa} = \left(\frac{\int_{x_2}^{x_1} n^2(x) \cdot E_y(x)\, \mathrm{d}x}{\int_{x_2}^{x_1} E_y(x)\, \mathrm{d}x} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

を得る。

この式は、実効屈折率が屈折率自乗の界分布荷重平均根で表されることを示している。物理的には、界分布が導波路中で感じる屈折率であることを意味している。x_1及びx_2は、界分布E_yが極値を取るxの値であるが、導波路中で界分布が感じる屈折率という考え方からすれば積分範囲は本来、$-\infty$～$+\infty$とすべきであり、通常の光導波路（閉じ込めモード）構成においては、分母の積分値が0とならなければ、$-\infty$、$+\infty$としてもさしつかえない。

また、上述の(10)式が屈折率の自乗を用いた界分布荷重平均根の表現であるのに対して、「**まえがき**」で述べたStewartの関係式[6]は、屈折率そのものを用いる式であり、屈折率の1乗の界分布荷重平均表現である。しかしながら、この式は、コア、クラッドなどの屈折率差があまり大きくない場合に近似的に成立する関係式である。

２．２　ＴＭ波

スラブ光導波路を伝搬するＴＭ波についてはＴＥ波の場合の(1)～(3)式に対して次の(11)～(13)式

$$j\beta H_y = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_x \qquad (11)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 n^2 E_z \qquad (12)$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \qquad (13)$$

を得る。(11)式より、

$$E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0 n^2} H_y \qquad (14)$$

(12)式より、

$$E_z = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0 n^2}\frac{\partial H_y}{\partial x} \qquad (15)$$

となり、これを(13)式に代入すれば、ＴＥ波の(6)式に対する波動方程式として、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n^2(x)}\frac{dH_y}{dx}\right) + (\kappa^2 n^2(x) - \beta^2)\cdot\frac{1}{n^2(x)}H_y = 0 \qquad (16)$$

を得る。(16)式より、

$$\left(\frac{1}{n^2(x)}\frac{dH_y}{dx}\right) = \int_a^x(\beta^2 - \kappa^2 n^2(x))\cdot\frac{H_y}{n^2(x)}\,dx + c \qquad (17)$$

ここで、$dH_y/dx = 0$ となる $x = x_1$、$x = x_2$ を考えると

$$\int_{x2}^{x1}(\beta^2 - \kappa^2 n^2(x))\cdot\frac{H_y}{n^2(x)}\,dx = 0 \qquad (18)$$

を得る。この(18)式より、ＴＭ波において、

$$\beta^2 = \frac{\displaystyle\int_{x_2}^{x_1}\kappa^2 H_y(x)\,dx}{\displaystyle\int_{x_2}^{x_1}\frac{1}{n^2(x)}H_y(x)\,dx} \qquad (19)$$

すなわち、

$$\frac{1}{n_{eff}} = \frac{1}{\frac{\beta}{\kappa}} = \left(\frac{\displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{n^2(x)} H_y(x)\, dx}{\displaystyle\int_{x_2}^{x_1} H_y(x)\, dx} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

を得る。

この式は、実効屈折率の逆数が屈折率自乗の逆数の界分布荷重平均根で表されることを示している。x_1及びx_2は、TE波の場合と同様に、界分布H_yが極値を取るxの値であり、通常の光導波路（閉じ込めモード）構成においては、分母の積分値が0とならなければ、$-\infty$、$+\infty$としてもさしつかえない。

3．三層スラブ光導波路

図１のような屈折率分布（コア---n_2, クラッド---n_1,及びn_3）を有する基本的な光導波路構成（非対称三層構造）である誘電体スラブ光導波路中を伝搬する光波モードは、ＴＥモード（$E_y(x)$, $H_x(x)$, $H_z(x)$成分からなる）とＴＭモード（$H_y(x)$, $E_x(x)$, $E_z(x)$成分からなる）に分類される。

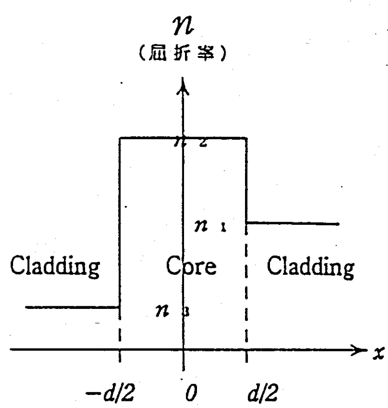


図１．三層スラブ導波路構成

光導波路の実効屈折率を、すでに述べたように、屈折率分布と界分布を用いて表現すれば、ＴＥモードに対して、

$$n_{eff} = \left(\int_{-\infty\ (\text{or } x_{LB})}^{x_{UB}\ (\text{or } +\infty)} E_y(x)\, n^2(x)\, dx \Big/ \int_{-\infty\ (\text{or } x_{LB})}^{x_{UB}\ (\text{or } +\infty)} E_y(x)\, dx \right)^{1/2}$$

ＴＭモードに対して、 (21)

$$\frac{1}{n_{eff}} = \left(\int_{-\infty\ (\text{or } x_{LB})}^{x_{UB}\ (\text{or } +\infty)} H_y(x) \frac{1}{n^2(x)}\, dx \Big/ \int_{-\infty\ (\text{or } x_{LB})}^{x_{UB}\ (\text{or } +\infty)} H_y(x)\, dx \right)^{1/2}$$

となる。ここで、積分範囲は、$-\infty$～x_{UB}であり（x_{UB}はコア内

での積分上限である）、この積分上限 x_{UB} は界分布ピークの位置座標を示している（この積分範囲は、x_{LB}〜＋∞ でもよく、(21)式内の積分範囲として( )内にそれを示している---x_{LB}も界分布ピークの位置座標である）。

導波路中で界分布が感じる屈折率という考え方からすれば、積分範囲は本来、−∞〜＋∞ とすべきであるが、もし、積分範囲を−∞〜＋∞ とすれば[7][8]、対称構造光導波路における奇モード伝搬に対しては、(21)式は、0 / 0 の形となり、実効屈折率を規定できない。これを避けるためには、積分の上限値をコア内のどこかに設定し、しかも、この積分により規定される実効屈折率が真値を取るべく設定せねばならない。ここで設定した x_{UB} はすでに述べたように界分布ピークの位置座標である。

同様に、この積分範囲、−∞〜x_{UB} は、x_{LB}〜＋∞（x_{LB} はコア内積分下限を意味する）としてもよく、同じ実効屈折率を与えるものである。

三層スラブ光導波路中での光波伝搬姿態は、よく知られているように[17][18]実効屈折率 n_{eff}と n_1, n_2, n_3 の大小関係（但し、$n_2>n_1>n_3$と仮定）により、次の 3.1 閉じ込めモード（導波モード）（$n_2>n_{eff}>n_1,n_3$）、3.2 基板放射モード（$n_2>n_1>n_{eff}>n_3$）、3.3 放射モード（$n_2>n_1>n_3>n_{eff}$）に分けられる。以下、これら３つの場合について、(21)式で示される実効屈折率 n_{eff}と屈折率分布及び界分布の関係について検証する。

3. 1 閉じ込めモード（導波モード）

$n_2>n_{eff}>n_1,n_3$ の時、界分布は、コアで正弦関数状となるが、両側のクラッドでは、指数関数的となる。今、簡単のため、界分布（E_y ---TEﾓｰﾄﾞ、H_y ---TMﾓｰﾄﾞ）の x 座標依存項のみ示せば、コア、クラッドの各層において、

$$E_y\ (H_y) = A \begin{cases} \cos(h(d/2) - \phi)\exp(q(d/2-x)) & ---- \quad x \geqq d/2 \\ \cos(hx - \phi) & ---- \quad |x| \leqq d/2 \end{cases} \qquad (22)$$

$$\left\lfloor \cos(h(d/2)+\phi)\exp(p(d/2+x)) \quad ---- \quad x \leqq -d/2\right.$$

と表すことができる。ここで、Aは任意定数、また、ϕは境界条件より決まる定数であり、q, h, p はそれぞれ、

$$\begin{aligned} q &= \kappa(n_{eff}{}^2 - n_1{}^2)^{1/2} \\ h &= \kappa(n_2{}^2 - n_{eff}{}^2)^{1/2} \\ p &= \kappa(n_{eff}{}^2 - n_3{}^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{23}$$

である。

$x_{UB}=(\phi+m\pi)/h$（但し、$m=0,1,2,---$）、また、$x=-d/2$での界分布の連続性より、$\tan(h(d/2)+\phi)=p/h$（ＴＭモードでは、$\tan(h(d/2)+\phi)=pn_2{}^2/(hn_3{}^2)$）であるのを考慮して、(21)式の右辺を計算すると、ＴＥモードで、

$$\left(\frac{\int_{-\infty}^{x_{UB}} E_y(x)\cdot n^2(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{x_{UB}} E_y(x)\,dx}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{n_3{}^2}{p}\cos\left(h\left(\frac{d}{2}\right)+\phi\right)+\frac{n_2{}^2}{h}\sin\left(h\left(\frac{d}{2}\right)+\phi\right)}{\frac{1}{p}\cos\left(h\left(\frac{d}{2}\right)+\phi\right)+\frac{1}{h}\sin\left(h\left(\frac{d}{2}\right)+\phi\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{hn_3{}^2+pn_2{}^2\tan\left(h\left(\frac{d}{2}\right)+\phi\right)}{h+p\tan\left(h\left(\frac{d}{2}\right)+\phi\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

$x=-d/2$ での微係数の連続性により、

$$= \left(\frac{h^2n_3{}^2+p^2n_2{}^2}{h^2+p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

さらに、(23)式を用いて、

$$= n_{eff} \tag{26}$$

となり、(21)式の成立することがわかる。同様のことが、ＴＭモードについても成立する。また、ここでの計算においては、積分範囲として、$-\infty \sim x_{UB}$を考えたが、当然のことながら、$x_{LB} \sim +\infty$としても同様に(21)式の成立することを確かめることができる。

３．２ 基板放射モード

実効屈折率が片側クラッドの屈折率より小さい場合（$n_2>n_1>n_{eff}>n_3$の場合）、界分布（EyもしくはHy）は、屈折率n_3の領域では指数関数的、屈折率n_2及びn_1の領域では、正弦関数的な振る舞いとなる。これは、片側クラッド（この場合n_1）が基板であることが多く、基板放射モードと呼ばれるものであり、片側クラッドへの放射モードである。この時、界分布は、

$$Ey\ (Hy) = A \begin{cases} a(q)\cos qx + b(q)\sin qx & \text{----} \quad x \geqq d/2 \\ \cos(hx - \phi) & \text{----} \quad |x| \leqq d/2 \\ \cos(h(d/2)+\phi)\exp(p(d/2+x)) & \text{----} \quad x \leqq -d/2 \end{cases} \tag{27}$$

である。$a(q)$、$b(q)$は、$x=d/2$での界分布の連続性により、

$$\begin{aligned} a(q) &= \cos qd/2 \cos(h(d/2)-\phi) + \zeta_1 h/(\zeta_2 q) \sin qd/2 \sin(h(d/2)-\phi) \\ b(q) &= \sin qd/2 \cos(h(d/2)-\phi) - \zeta_1 h/(\zeta_2 q) \cos qd/2 \sin(h(d/2)-\phi) \end{aligned} \tag{28}$$

と与えられる。ここで、ＴＥモードの場合、$\zeta_i=1$、また、ＴＭモードの場合、$\zeta_i=n_i^2$である。また、q, h, pはそれぞれ、

$$\begin{aligned} q &= \kappa(n_1^2-n_{eff}^2)^{1/2} \\ h &= \kappa(n_2^2-n_{eff}^2)^{1/2} \\ p &= \kappa(n_{eff}^2-n_3^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{29}$$

である。特に、qについては、(23)式と( )内の符号が異なる。

(21)式の積分範囲として、$-\infty \sim x_{UB}$については、**3.1**と同様の計算になり(21)式が成立することは明らかである。ここでは、積分範囲として$x_{LB}\sim+\infty$を用いて、(21)式を検証する。しかし、(27)式より、屈折率n_1の領域では、界分布は図２のように振動関数（正弦関数）であり、$x\to+\infty$での界の値は定まらない。この場合、**3.1**の閉じ込めモードの考察

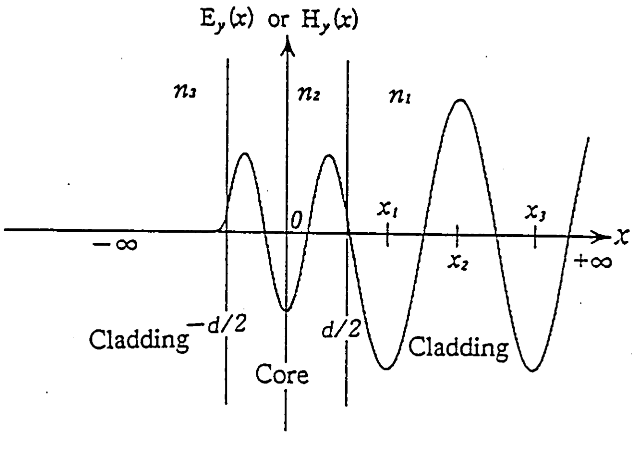


図２．基板放射モード
（$n_2>n_1>n_{eff}>n_3$の場合の界分布の一例）

の際、コア内での界分布のピーク値（極値）までの積分を考慮したように、クラッド内で正弦関数を与える n_1 領域での積分上限値としては、＋∞の代わりに、界分布の極値を与える x の値（x_i）を考えることとする。すなわち、積分範囲としては、x_{LB}～x_i と考えるわけである。

図２では、x_i の値は、x_1, x_2, −−− であり、どの値でもよい。なぜなら、異なる x_i 間の界分布に関する積分値は、0となり、積分に寄与しないからである（このことは、コア内で極値が多くある場合も同様で、x_{LB} の値も極値のどの値を用いてもよいのと同様である）。

ＴＥモードについて、(21)式の積分範囲を上述のように(x_{LB}～x_i)と考えると、(27)式及び(28)式より、

$$\int_{x_{LB}}^{x_i} Ey(x)dx = \int_{(\phi+m\pi)/h}^{d/2} Ey(x)dx + \int_{d/2}^{x_i} Ey(x)dx$$

$$= \frac{1}{h}\sin(h(\frac{d}{2})-\phi) - \frac{h}{q^2}\sin(h(\frac{d}{2})-\phi) \qquad (30)$$

となる。これが、(21)式右辺の分母に対応する。

従って、(21)式右辺は、

$$\left(\frac{\int_{x_{LB}}^{x_i} E_y\ (x)\cdot n^2(x)\ \mathrm{d}x}{\int_{x_{LB}}^{x_i} E_y\ (x)\ \mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{n_2{}^2}{h} - \frac{hn_2{}^2}{q^2}}{\frac{1}{h} - \frac{h}{q^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{q^2 n_2{}^2 - h^2 n_1{}^2}{q^2 - h^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (31)$$

(29)式を用いて、

$$= n_{eff} \qquad (32)$$

積分範囲が、−∞～x_{UB} の時の(21)式の成立に対しては、界分布が指数関数的である n_3 領域での x→−∞の値も一つの極値を与えていることを考えれば、結論として、(21)式の成立に関してコア－クラッド間の界分布の極値間を積分範囲として取ればよいことがわか

る。なお、同様の考察は、ＴＭモードについても成立する。

３．３ 放射モード

実効屈折率が両側クラッドの屈折率より小さい場合（$n_2>n_1>n_3>n_{eff}$の場合）、界分布（EyもしくはHy）は、三つのすべての領域で正弦関数的となる。すなわち、両側のクラッドへの放射モードである。この時、界分布は、それぞれ、

$$Ey\,(Hy) = A\begin{cases} a(q)\cos qx + b(q)\sin qx & \text{----}\quad x \geqq d/2 \\ \cos(hx - \phi) & \text{----}\quad |x| \leqq d/2 \\ c(p)\cos px + d(p)\sin px & \text{----}\quad x \leqq -d/2 \end{cases} \tag{33}$$

である。$a(q)$、$b(q)$、$c(p)$、$d(p)$は、$x=d/2$及び$x=-d/2$での界分布の連続性により、

$$\begin{aligned} a(q)&=\cos qd/2\cos(h(d/2)-\phi)+\zeta_1 h/(\zeta_2 q)\sin qd/2\sin(h(d/2)-\phi) \\ b(q)&=\sin qd/2\cos(h(d/2)-\phi)-\zeta_1 h/(\zeta_2 q)\cos qd/2\sin(h(d/2)-\phi) \\ c(p)&=\cos pd/2\cos(h(d/2)+\phi)+\zeta_3 h/(\zeta_2 p)\sin pd/2\sin(h(d/2)+\phi) \\ d(p)&=\sin pd/2\cos(h(d/2)+\phi)-\zeta_3 h/(\zeta_2 p)\cos pd/2\sin(h(d/2)+\phi) \end{aligned} \tag{34}$$

と与えられる。ここで、ＴＥモードの場合、$\zeta_i = 1$、また、ＴＭモードの場合、$\zeta_i = n_i^2$ である。また、q, h, pはそれぞれ、

$$\begin{aligned} q &= \kappa(n_1^2 - n_{eff}^2)^{1/2} \\ h &= \kappa(n_2^2 - n_{eff}^2)^{1/2} \\ p &= \kappa(n_3^2 - n_{eff}^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{35}$$

である。特に、p、qについては、(23)式と( )内の符号が異なる。

この両クラッドへの放射モードの場合、ＴＥ、ＴＭ両モードにおける(21)式の成立に対して、**3.2**で述べたように、いずれか片側のクラッド内界分布のピーク値（極値）の位置座標を考え、コアークラッド間の界分布の極値間を積分範囲とすればよいことが容易に推察される。

次に光線光学により界分布と実効屈折率の関係について考察する。

4． 光線光学による界分布と実効屈折率の関係

実効屈折率に関する(10)式及び(20)式の表現は、光導波路中での光線光学的表示における実効屈折率決定の物理的機構についても示唆[11][12]している。この時の界分布及びジグザグ経路をたどる光線との関係の一例を図３に示す。図３左側に示すのは、界分布の一例で、この図ではＴＥ$_2$（もしくはＴＭ$_2$）導波モードに対応している。光波はコア部の外側、すなわち、上下クラッド部へ浸み出し、導波層中を全反射を繰り返しながらジグザグに伝搬していくと考えられる。

ジグザグ光線伝搬において、一巡に際しての位相推移の総和が2πの整数倍（$2n\pi$）となっているが、この関係は、コアークラッドの境界における全反射による位相推移を$2\phi_1$、$2\phi_2$とすると、半周期で、(36)式のように表すことができる[19]。ここで、nはモード次数に対応している。

$$h{\cdot}d + \phi_1 + \phi_2 = n\pi \qquad (36)$$

この(36)式は、$h{\cdot}d_n = n\pi$として、次の(37)式のように変形することができる。

$$h{\cdot}(d - d_n) + \phi_1 + \phi_2 = 0 \qquad (37)$$

すなわち、モード次数nの光線を考えるに、コア厚dからd_nを減じて、$d-d_n$のコア厚で、モード次数n=0の光線を考えても実効屈折率としては同じである。なぜなら、図３中で、①、②、③、④の面積は等しく、①と②、③と④は異符号のため、これらは(10)式及び(20)式の分母、分子の積分には寄与せず、実効屈折率決定に際して、コア部の寄与は、図中において、$-d/2$～x_1もしくは、x_3～$+d/2$である。コア部の残りの界分布は実効屈折率決定には全く寄与しない。これは、(37)式のように、x_1～x_3の間(d_n)における位相推移が、$n\pi$となっていると考えれば、この間(d_n)の光線伝搬（図３中の破線部）は実効屈折率n_{eff}（ないし、伝搬定数β）の決定には関与しないからである。

結局、クラッド部に浸み出したエバネセント界に対応したグースヘンヒェンシフト（ϕ_1

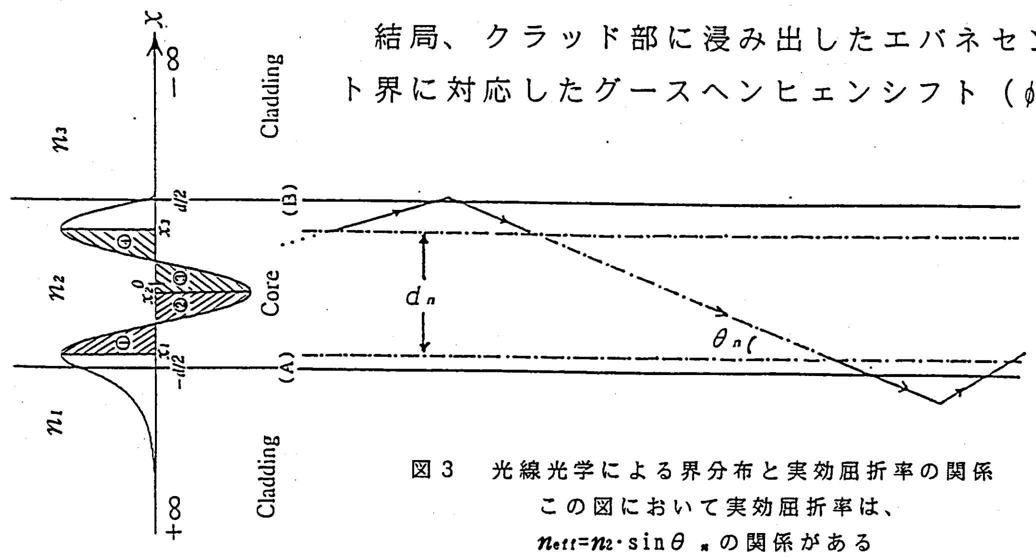


図３　光線光学による界分布と実効屈折率の関係
この図において実効屈折率は、
$n_{eff}=n_2\cdot\sin\theta_n$ の関係がある

及びϕ_2）と $-d/2$ 〜 x_1もしくは、x_3〜 $+d/2$ のコア界に対応したジグザグ経路の寄与のみを考えればよいわけである。それゆえ、界分布に一つのピーク値しかもたないＴＥ$_0$もしくは、ＴＭ$_0$の基本モードにおいては、界分布のすべての寄与を考えることにより、実効屈折率が決定でき、高次モードにおいては、コアークラッドの両境界面部分の寄与を主として考えることにより、実効屈折率が決定できることになる。

このことは、多層構造の光導波路構成についてもそのまま適用できるものであり、以下に、さらに多層スラブ光導波路の実効屈折率の成立について数学的に検討を行う。

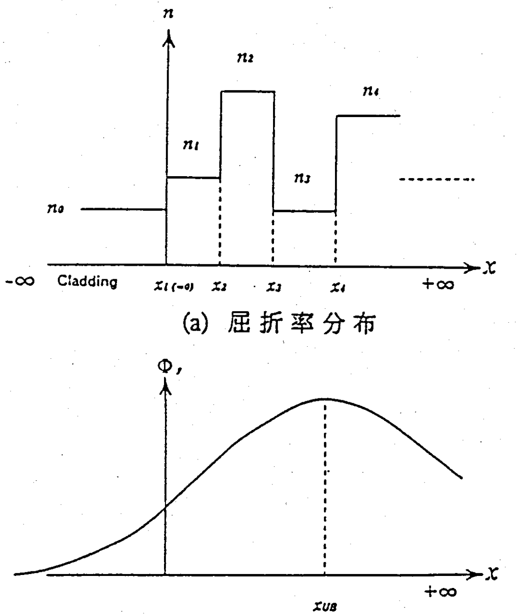
５．多層スラブ光導波路の実効屈折率

一般に、任意の屈折率分布を有するスラブ光導波路は、微小区間の均一な屈折率を持つ多層構造で近似を行うことができる。この多層分割法は、導波路の線形、非線形、及びその構造ならびに偏波（ＴＥ波、ＴＭ波）にかかわらず、定常解（界）を求めることが可能であり、すでに有効な解析手段の一つとなっている[20]。ここでは、その基本である多層スラブ光導波路についての実効屈折率の積分表現[14][15]について考察を行う。

5．1　多層スラブ光導波路

多層スラブ光導波路において、ＴＥ、ＴＭ両モードを同時に取り扱うために、それぞれの電磁界成分を以下のようにおく[21]。但し、ＴＥモードでは、上段、ＴＭモードでは下段をとるものとする。

$$\Phi_y = \begin{bmatrix} E_y \\ \eta H_y \end{bmatrix}, \quad \Phi_z = \begin{bmatrix} j\eta H_z \\ -j E_z \end{bmatrix} \tag{38}$$



(a) 屈折率分布

(b) 界分布

図４．多層光導波路の一例

図４のような光導波路の屈折率分布において（この 5.1 での x の下添字番号は、領域境界を示すもので、x を含めて境界の位置座標を示すものとし、前述の界分布のピークの位置座標ではない）、i 番目の領域（屈折率 n の下添字番号領域）での界分布は、

$$\begin{aligned} \Phi_y(x) &= \Phi_y(x_0)\cdot\cos\gamma_i\cdot(x-x_0) \\ &\quad - \zeta_i\kappa/\gamma_i\cdot\Phi_z(x_0)\cdot\sin\gamma_i\cdot(x-x_0) \\ \Phi_z(x) &= \gamma_i/(\zeta_i\kappa)\cdot\Phi_y(x_0)\cdot\sin\gamma_i\cdot(x-x_0) \\ &\quad + \Phi_z(x_0)\cdot\cos\gamma_i\cdot(x-x_0) \end{aligned} \tag{39}$$

但し、ＴＥモードにおいて、$\zeta_i = 1$、また、ＴＭモードにおいて、$\zeta_i = n_i{}^2$ である。さらに、$\eta = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$，$\gamma_i = \kappa(n_i{}^2 - n_{eff}{}^2)^{1/2}$，また、$x_i < x < x_{i+1}$ であり、以後 x_0 を、$x_0 = x_i$ に選ぶ。

これらの式より、一般に、

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi_y(x)dx = \text{------} = \frac{\zeta_i\kappa}{\gamma_i{}^2}(\Phi_z(x_{i+1}) - \Phi_z(x_i)) \tag{40}$$

（この間の屈折率は n_i である）

が得られる。また、0番目の領域において、

$$\int_{-\infty}^{0} \Phi_y(x)dx = \frac{\zeta_0 \kappa}{\gamma_0{}^2}\Phi_Z(x_1) \tag{41}$$

が得られる。ゆえに、

$$\int_{-\infty}^{x_{UB}} \Phi_y(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \Phi_Z(x_i)\left(\frac{\zeta_i \kappa}{\gamma_i{}^2} - \frac{\zeta_{i-1}\kappa}{\gamma_{i-1}{}^2}\right) \tag{42}$$

となる。但し、x_{UB}は、$i=k$　すなわち、k番目の領域に位置するものとする。これらの式より、ＴＥモードに対して、(21)式右辺は、

$$\left(\frac{\int_{-\infty}^{x_{UB}} \Phi_y(x)\cdot n^2(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{x_{UB}} \Phi_y(x)\,dx}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{k}\Phi_Z(x_i)\left(\frac{n_i{}^2}{\gamma_i{}^2} - \frac{n_{i-1}{}^2}{\gamma_{i-1}{}^2}\right)}{\sum_{i=1}^{k}\Phi_Z(x_i)\left(\frac{1}{\gamma_i{}^2} - \frac{1}{\gamma_{i-1}{}^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{43}$$

と計算される。上式はさらに、任意のi番目の領域においては、$\gamma_i = \kappa(n_i{}^2 - n_{eff}{}^2)^{1/2}$の関係を用いて計算すれば、$n_{eff}$となる。従って、ＴＥモードに対する(21)式右辺の計算は、

$$\left(\frac{\int_{-\infty}^{x_{UB}} \Phi_y(x)\cdot n^2(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{x_{UB}} \Phi_y(x)\,dx}\right)^{\frac{1}{2}} = n_{eff} \tag{44}$$

となり、(21)式が成立することがわかる。

ＴＭモードに対しても、$\zeta_i = n_i{}^2$として同様の計算を行えば、

$$\left(\frac{\int_{-\infty}^{x_{UB}} \Phi_y(x)\cdot \frac{1}{n^2(x)}\,dx}{\int_{-\infty}^{x_{UB}} \Phi_y(x)\,dx}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n_{eff}} \tag{45}$$

が成立する。

５．２ 界分布が凹凸をもつ多層光導波路

これら(21)式の検証過程においては、その数式中の積分範囲は、

界分布の極値を与える異なる $x_i\ (i=1,2,3,---)$ を用いて、$\int_{x_j}^{x_i} --- dx$（但し、$j \neq i$）と表すことも可能であることがわかる（但し、ここでの x の下添字番号は、再び界分布ピークの位置座標を表すこととし、この積分値がゼロとならないように x_i 及び x_j を選ぶこととする）。

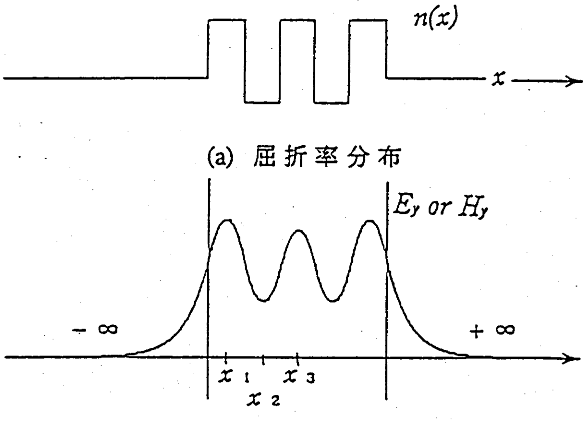
表１　実効屈折率の積分表現式

TE−modes	TM−modes
$n_{eff} = \left(\dfrac{\int_{-\infty\ (\text{or } x_j)}^{x_i} E_y(x) \cdot n^2(x)\, dx}{\int_{-\infty\ (\text{or } x_j)}^{x_i} E_y(x)\, dx} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{n_{eff}} = \left(\dfrac{\int_{-\infty\ (\text{or } x_j)}^{x_i} H_y(x) \cdot \frac{1}{n^2(x)}\, dx}{\int_{-\infty\ (\text{or } x_j)}^{x_i} H_y(x)\, dx} \right)^{\frac{1}{2}}$

すなわち、多層構造光導波路の実効屈折率は、界分布の極値間における屈折率分布の自乗の界分布荷重平均根を用いて表現することも可能なわけである。表１に、界分布の極値間における積分範囲の表現も含めて実効屈折率の積分式を再度示す。

図５に界分布が凹凸をもつような多層光導波路（例えば、図５のような多重量子井戸構成）の屈折率分布及び界分布の一例を示す。すでに述べたように、表１中の式においては、実効屈折率は、表１中( )内に示した積分範囲のように、界分布の極値を与える異なる $x_i\ (i=1,2,3,---)$ を用いて積分表現することが可能である。

光波長　0.8 μm
クラッド屈折率　3.53
コア（井戸層）屈折率 3.6　　層厚　0.4 μm
コア（バリア層）　　 3.5　　層厚　0.4 μm
全コア厚　2.0 μm



(b) 界分布（0次のモードを示している）

図５．多層スラブ光導波路の一例

この例において、多層構成での固有値方程式を解いて求めた実効屈折率の計算結果とそれから得られる界分布を用いて表１による実

効屈折率を計算した結果との比較を表2に示す。

表1による実効屈折率 n_{eff} は、積分範囲を個々の領域の極値を与える x_i までの範囲とし、この計算での積分値は、区分求積により求めたが、それでも固有値方程式より得られる実効屈折率とこの表1による実効屈折率の計算結果は、比較的良い一致を示していることがわかる。

表２　実効屈折率の計算値比較

	積分範囲	TE_0	TM_0
表1による n_{eff} の計算	$-\infty \sim x_1$	3.564275	3.563246
	$x_1 \sim x_2$	3.564246	3.563245
	$x_2 \sim x_3$	3.564176	3.563106
	$-\infty \sim x_3$	3.564238	3.563206
固有値方程式による n_{eff}	-----	3.564234	3.563202

６．光導波路伝搬定数（実効屈折率）の一般的表現

次にこれまで扱ってきた荷重平均表現と変分表現との関連も含めて、一般的表現についてさらなる検討を行う。

６．１　ＴＥ波

m を非負整数として、一般に、

$$d(E_y^{\,m}\cdot dE_y/dx)/dx = E_y^{\,m}\cdot d^2E_y/dx^2 + m\cdot E_y^{\,m-1}(dE_y/dx)^2 \tag{46}$$

なる関係が成立する。一方、スラブ光導波路において、ＴＥ波の波動方程式は、(6)式のように、$d^2E_y/dx^2 = (\beta^2 - \kappa^2\cdot n^2(x))\cdot E_y$ で表されるので、(46)式を代入し、２で示した同様の計算により、$E_y^{\,m} = 0$ または、$dE_y/dx = 0$ となる x を積分上下限とする積分表現を導くと、次の(47)式が得られる。

$$\beta^2 = \frac{\int E_y^{m+1}(x)\cdot\kappa^2\cdot n^2(x)\,dx - \int m\cdot E_y^{m-1}(x)\cdot\left(\frac{dE_y(x)}{dx}\right)^2 dx}{\int E_y^{m+1}(x)\,dx} \tag{47}$$

この式は、$m = 0$ のとき、これまでに示してきた界分布荷重平均表現である(10)式を表し、$m = 1$ のとき、通常の変分表現を表していることがわかる。なお、積分は、$m \geqq 1$ のときは、界分布が０

もしくは極値をとるまでの範囲、また、$m=0$ のときは、界分布の極値間の範囲で考えればよいことがわかる（但し、分母の定積分値は 0となら ないように積分範囲を選ばねばならない）。

6．2　ＴＭ波

ＴＭ波については、(46)式のかわりに、

$$d(H_y{}^m\cdot 1/n^2(x)\cdot dH_y/dx)/dx = H_y{}^m\cdot d(1/n^2(x)\cdot dH_y/dx)/dx + m\cdot H_y{}^{m-1}\cdot 1/n^2(x)\cdot(dH_y/dx)^2 \qquad (48)$$

を考え、$[n^2(x)\cdot d(1/n^2(x)\cdot dH_y/dx)/dx = (\beta^2-\kappa^2\cdot n^2(x))\cdot H_y]$で表される波動方程式(16)式を用いれば、同様の積分表現式(49)式を得ることができる。

$$\beta^2 = \frac{\int H_y^{m+1}(x)\cdot\kappa^2\ dx - \int m\cdot H_y^{m-1}(x)\ /\ n^2(x)\cdot(\frac{dH_y(x)}{dx})^2\ dx}{\int H_y^{m+1}(x)\ /\ n^2(x)\quad dx} \qquad (49)$$

この式は、ＴＥ波の場合と同様、$m=0$ のとき、(19)式としてすでに示した界分布荷重平均表現を表し、$m=1$ のとき、通常の変分表現を表しており、積分範囲についても分母の定積分値が 0とならないような範囲とし、$m=0$ のときは、界分布の極値間の範囲で考えればよく、$m\geqq 1$ のときは、界分布が 0 もしくは極値間の範囲で考えればよい。

6．3　光ファイバ

光ファイバにおいては、円筒座標系を用いた解析が行われる。円筒座標系におけるスカラ波動方程式の電界表示式は光波進行方向の z 成分 E_z を用いて、

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}E_z\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}E_z + \kappa^2 n^2 E_z = 0 \qquad (50)$$

で与えられる。$E_z = R(r)\cos(\iota\theta)\exp\{j(\omega t-\beta z)\}$ と置くと、次のベッセルの方程式が得られる[22]。

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left\{(\kappa^2n^2-\beta^2)-\frac{\iota^2}{r^2}\right\}R=0 \tag{51}$$

スラブ光導波路における(46)式、(48)式のかわりに、

$$d(R^m\cdot r dR/dr)/dr=m\cdot R^{m-1}\cdot r\cdot(dR/dr)^2+R^m\cdot dR/dr+R^m\cdot r\cdot(d^2R/dr^2) \tag{52}$$

の式を考え、この(52)式に上述の(51)式を代入すれば、

$$\frac{d(R^m\cdot r\cdot\frac{dR}{dr})}{dr}=m\cdot R^{m-1}\cdot r\cdot(\frac{dR}{dr})^2+(\beta^2-\kappa^2n^2+\frac{\iota^2}{r^2})\cdot R^{m+1}\cdot r \tag{53}$$

が得られる。ここで、積分範囲として、$(R^m\cdot r dR/dr)=0$ とする r の値を積分上下限とする積分表現を導くと次の(54)式が得られる。

$$\beta^2=\frac{\int\kappa^2n^2R^{m+1}\cdot r dr-\int\left[m\cdot R^{m-1}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+\frac{\iota^2}{r^2}R^{m+1}\right]r dr}{\int R^{m+1}\cdot r dr} \tag{54}$$

この(54)式は、(47)式、(49)式に対応し、特に、$m=0$ のとき、スラブ光導波路における(9)式、(19)式に対応し、$m=1$ のとき、変分表現[23]に対応する。

この結果、従来さまざまな表現で表されてきた光導波路の実効屈折率について、それらを含むより一般的な表現を得、また、それらの間の関係を明らかにすることができた。

7．むすび

光導波路における伝搬定数（実効屈折率）は、通常、光導波路を構成する各媒質中の電磁界成分の連続性を考慮して得られる固有値方程式を解くことにより求められる。これに対して、我々は、光導波路における実効屈折率（伝搬定数）を表現する新しい積分形式として界分布荷重平均表現について検討を行った。この積分表現式の成立に関して検証することにより、光導波路の実効屈折率は、界分布の異なる極値間における、屈折率分布の自乗の界分布荷重平均根を用いて表現することが可能であることを明らかにし、また、変分表現式との関連も含めて、より一般的な式を導出し、それらの間の

関係を明らかにすることができた。

ここで検討した実効屈折率に関する界分布荷重平均表現式は、光導波路の導波特性に対する種々の直感的理解を助けるもので、すでに述べた固有値方程式を解かない実効屈折率の求解法 (7)~(12) など、種々の応用が考えられる。

現在、さらに、損失を有する光導波路構成での実効屈折率についての検討を行っている。

参考文献

1. K.Morishita and N.Kumagai: IEEE Trans.Microwave Theory and Tech.,MTT−25, 1, (1977) 34.
2. M.Saini and E.K.Sharma: IEEE J.Quantum Electron. 32, 8, (1996) 1383.
3. 川上彰二郎：「光導波路」，第 9 章，朝倉書店 (1980).
4. J.Brown: Proc. IEE, 113, (1966) 27.
5. D.Krumphoktz, E.Brinkmeyer & E.−G.Newmann: J.Opt.Soc.Am. 70, (1980) 179.
6. W.J.Stewart: Electronics Lett., 16, (1980) 380.
7. 大家、里村、梅田、張：1993 年春季応物予稿集 29a−SA−22 (1993−3).
8. S.Ohke, Y.Satomura, T.Umeda, and Y.Cho: 4th Sino−Japanese Joint Meet. on Optical Fiber Science and Electromagnetic Theory OFSET'93 pp.363−368 (1993−10).
9. 大家、里村、梅田、張：1994 年秋季応物予稿集 21p−R−1 (1994−9).
10. 大家、里村、梅田、張：1994 年電子情報通信学会秋季大会 C−230 (1994−9).
11. 大家、里村、梅田、張：1994 年電磁界理論研究会 EMT−94−98 pp.19−27 (1994−10).
12. S.Ohke, Y.Satomura, T.Umeda, and Y.Cho: Opt.Commun., 118 ,pp.227−234 (1995) .
13. S.Ohke, T.Umeda, and Y.Cho: 1995 International Laser, Lightwave and Microwave

Conference Proceedings, (ILLMC'95), pp.169−172 (1995−10).
14. 大家、梅田、張：1995 年秋季応物予稿集 28a−SQ−16 (1995−8).
15. 大家、梅田、張：1996 年電磁界理論研究会 EMT−96−98 pp.85−93 (1996−10).
16. 大家、梅田、張：1997 年秋季応物予稿集 2a−ZB−1 (1997−10).
17. 例えば、A.Yariv:「光エレクトロニクスの基礎」原著 3 版（多田、神谷共訳）丸善 (1988).
18. H.Kressel, J.K.Butler: "Semiconductor Lasers and Heterojunction LEDs", Academic Press (1977).
19. 例えば、小山、西原：「光波電子工学」、第 8 章、コロナ社 (1978−5).
20. 大家、梅田、張：電子情報通信学会論文誌 (C−I), J75−C−I, (1992−6) 444.
21. 「光導波エレクトロニクス」成果編集委員会編："光導波エレクトロニクス", (1981−3).
22. 例えば、末松、伊賀：「光ファイバ通信入門」、第 10 章、オーム社（平成 7 年 3 月）.
23. 例えば、大越孝敬編（大越、岡本、保立）：「光ファイバの基礎」、第 5 章、オーム社（昭和 53 年 12 月）.

輻射科学研究会資料
RS 97-15

半導体Hガイドにおける光導電効果のミリ波伝搬特性に及ぼす影響

Influence of photoconductivity effect on the propagation characteristics of millimeter waves in the semiconductor H-guide

里村 裕　岡田 照夫　　堤 誠

(大阪工業大学)　　(京都工芸繊維大学)

1997年12月5日（金）

於　シャープ株式会社本社

半導体Hガイドにおける光導電効果の
ミリ波伝搬特性に及ぼす影響

里村　裕　　岡田照夫　　　　　堤　　誠
（大阪工業大学）　　　　（京都工芸繊維大学）

１．まえがき

最近、半導体の光導電効果を用いた光制御ミリ波デバイスの開発に関する研究が盛んに行われてきている。すなわち、禁止帯幅以上のエネルギーをもつ光を半導体に照射すると、電子ー正孔対からなるプラズマ層が発生し、その部分の誘電率が複素数となるため損失を有する媒質となる。そのため、その媒質中を伝搬するミリ波の振幅や位相などの伝搬特性を、外部からの照射する光で制御することができる[1]。この方法によれば高速な制御が行えるうえ、制御信号である光と被制御信号であるミリ波との間にほぼ完全なアイソレーションがある点、さらにハイパワーな信号でも制御が可能といった特徴がある。これまで、イメージ線路[2]、フィンライン[3]、マイクロストリップ線路[4]、コプレーナー線路[5]、Hガイド[6～9]などにおいて、この光導電効果を利用したミリ波デバイスが報告されている。このうち、Hガイドは半開口型の伝送線路であるためにフィンラインやマイクロストリップ線路などと違い、電磁界の解析が容易だけでなく、外部からの効率の良い光照射をおこなう事ができる点にその特徴がある。さらに、Hガイドの一種であるNRDガイドにおいてその特徴を生かした種々のミリ波用デバイスの報告がなされており[10]、これらとの共用も可能である。

これまで半導体のシリコンを用いたHガイドに外部から光を照射し、光導電効果を利用してスイッチング特性や漏洩波特性が現われることを明らかにしてきた。この漏洩現象を新しい光制御デバイスとして利用するためには、漏洩特性を詳細に把握する必要がある。漏洩波はいろいろな導波構造の型において発生する。スラブ導波路[11]、W型屈折率分布導波路[12]、コプレーナーストリップ線路[13]などのほか、さらにHガイドにおいても導波モードのほかに漏洩波が存在し、NRDガイドにおいてその詳細な報告もなされている[14]。しかしながら半導体への光照射によって生じる新しい漏洩波の発生機構については、まだ十分な検討が行われていない。そこで本報告では、シリコンHガイドの光照射による漏洩波特性をほかの漏洩現象と比較しつつ、伝搬特性を数値計算により明らかにする。

２．Hガイドの構造図

Hガイドは導波路としては、誘電体ロッドを２枚の金属板で挟んだ構造をしている。光照射により、プラズマが励起されて損失をもつ媒質が含まれる場合の構造および座

標系を図１に示す。図において$-d \leq z \leq 0$の領域がプラズマ層である。電磁波はx方向に導波するものと考え、時間因子は$\exp(j\omega t)$として以下では省略する。

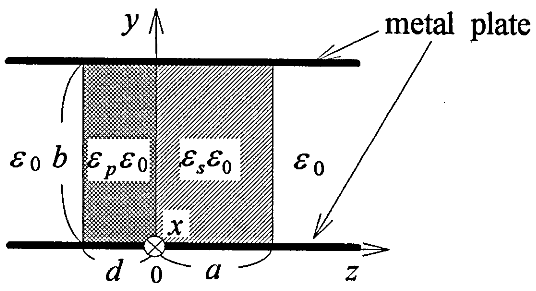


図１　プラズマ層を含む場合のＨガイドの構造

３．電磁界表示式と特性方程式

ＨガイドにはLSE，LSMの二つのハイブリッドモードが存在することがわかっている。Ｈガイド中のミリ波の電界$\boldsymbol{E}$および磁界$\boldsymbol{H}$は、磁気的ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$および電気的ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{F}$を用いて次のように表される。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \times \boldsymbol{F} - j\omega\mu_0 \boldsymbol{A} + \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} - j\omega\varepsilon \boldsymbol{F} + \frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \tag{2}$$

ここで、$\boldsymbol{A}=0$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}_z F_z$と置いて(3)式からLSEモードの電磁界成分が得られる。また、$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}_z A_z$，$\boldsymbol{F}=0$と置いて(4)式からLSMモードの電磁界成分がそれぞれ得られる。

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial F_z}{\partial y} & H_x &= \frac{1}{j\omega\mu_0}\cdot\frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} \\
E_y &= \frac{\partial F_z}{\partial x} & H_y &= \frac{1}{j\omega\mu_0}\cdot\frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z} \\
E_z &= 0 & H_z &= \frac{1}{j\omega\mu_0}\cdot\left(\omega^2\varepsilon\mu_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot F_z
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} & H_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} \\
E_y &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} & H_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\
E_z &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\cdot\left(\omega^2\varepsilon\mu_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot A_z & H_z &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ベクトルポテンシャルF，Aは、導波路の構造を考慮すると得られ、したがって各領域の電磁界の各成分はそれぞれ以下のように表される。

LSEモード

1) $z<-d$ （空気層）

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \frac{n\pi}{b} D_2 e^{pz} \cdot \sin\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
E_y &= -j\beta D_2 e^{pz} \cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= -\frac{p\beta}{\omega\mu_0} D_2 e^{pz} \cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
H_y &= -\frac{p}{j\omega\mu_0} \frac{n\pi}{b} D_2 e^{pz} \cdot \sin\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
H_z &= \frac{1}{j\omega\mu_0}\left(k_0{}^2 + p^2\right) D_2 e^{pz} \cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x}
\end{aligned}\right\} \tag{5-a}$$

2) $-d \le z < 0$ （プラズマ層）

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \frac{n\pi}{b}\left(C_1 \cos\delta z + C_2 \sin\delta z\right) \cdot \sin\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
E_y &= -j\beta\left(C_1 \cos\delta z + C_2 \sin\delta z\right) \cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= \frac{\delta\beta}{\omega\mu_0}\left(C_1 \sin\delta z - C_2 \cos\delta z\right) \cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
H_y &= \frac{\delta}{j\omega\mu_0} \frac{n\pi}{b}\left(C_1 \sin\delta z - C_2 \cos\delta z\right) \cdot \sin\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
H_z &= \frac{1}{j\omega\mu_0}\left(k_0{}^2 \varepsilon_p - \delta^2\right)\left(C_1 \cos\delta z + C_2 \sin\delta z\right) \cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x}
\end{aligned}\right\} \tag{5-b}$$

3)　$0 \le z \le a$　（誘電体層）

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \frac{n\pi}{b}\left(A_1 \cos k_z z + A_2 \sin k_z z\right)\cdot \sin\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
E_y &= -j\beta\left(A_1 \cos k_z z + A_2 \sin k_z z\right)\cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= \frac{k_z\beta}{\omega\mu_0}\left(A_1 \sin k_z z - A_2 \cos k_z z\right)\cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
H_y &= \frac{k_z}{j\omega\mu_0}\frac{n\pi}{b}\left(A_1 \sin k_z z - A_2 \cos k_z z\right)\cdot \sin\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
H_z &= \frac{1}{j\omega\mu_0}\left({k_0}^2\varepsilon_1 - {k_z}^2\right)\left(A_1 \cos k_z z + A_2 \sin k_z z\right)\cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(5-c)}$$

4)　$z > a$　（空気層）

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \frac{n\pi}{b} D_1 e^{-pz} \cdot \sin\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
E_y &= -j\beta D_1 e^{-pz} \cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
E_z &= 0 \\
H_x &= \frac{p\beta}{\omega\mu_0} D_1 e^{-pz} \cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
H_y &= \frac{p}{j\omega\mu_0}\frac{n\pi}{b} D_1 e^{-pz} \cdot \sin\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x} \\
H_z &= \frac{1}{j\omega\mu_0}\left({k_0}^2 + p^2\right) D_1 e^{-pz} \cdot \cos\frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-j\beta x}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(5-d)}$$

但し

$$k_z^2 = k_0^2\varepsilon_s - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta^2 \ , \quad p^2 = \beta^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_0^2 \ , \quad \delta^2 = k_0^2\varepsilon_p - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \beta^2 \qquad (6)$$

である。

図１のＨガイドを伝搬するLSEモードの特性方程式は、$z = -d, 0$ および a における境界条件を適用することにより､次式のように得られる。

$$\begin{aligned}
&\left(k_z \sin k_z a - p\cos k_z a\right)\cdot\left(k_z\delta\cos\delta d + pk_z \sin\delta d\right) \\
&+\left(k_z \cos k_z a + p\sin k_z a\right)\cdot\left(\delta^2 \sin\delta d - p\delta\cos\delta d\right) = 0
\end{aligned} \qquad (7)$$

また、LSMモードの特性方程式は、

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_p k_z \left(k_z \sin k_z a - \varepsilon_s p \cos k_z a\right) \cdot \left(\delta \cos \delta\, d + \varepsilon_p p \sin \delta\, d\right) \\
&\quad + \varepsilon_s \delta \left(k_z \cos k_z a + \varepsilon_s p \sin k_z a\right) \cdot \left(\delta \sin \delta\, d - \varepsilon_p p \cos \delta\, d\right) = 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

となる。

４．プラズマ層の複素比誘電率

光導電効果によって生じる半導体中のプラズマ層の比誘電率 ε_p は、複素数 $(\varepsilon_R - j\varepsilon_I)$ となり、以下のように表される[1]。

$$
\varepsilon_p = \varepsilon_s - \sum_{i=e,h} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 + \nu_i^2}\left(1 + j\frac{\nu_i}{\omega}\right) \tag{9}
$$

ただし、

$$
\omega_{pi}^2 = \frac{n_p\, q^2}{\varepsilon_0\, m_i^*} \tag{10}
$$

ここで

ε_s	：プラズマが誘起されていないときの半導体の比誘電率		
ω_{pi}	：プラズマ角周波数	ω	：電磁波の角周波数
ν_i	：キャリアの衝突周波数	m_i^*	：キャリアの有効質量
n_p	：プラズマ密度	q	：電子の電荷量

である。添字 i はeが電子、hが正孔に対応している。半導体結晶として例えばシリコンを用いたときの各定数の値は、$\varepsilon_s = 11.8$, $\nu_e = 4.53\times10^{12}\,[1/s]$, $\nu_h = 7.71\times10^{12}\,[1/s]$, $m_e^* = 0.259 m_0$, $m_h^* = 0.38 m_0$ （$m_0 = 9.10939\times10^{-31}$ [kg] ：電子の静止質量）である[1]。

上式からわかるように誘電率の大きさは、照射される光強度に依存するプラズマ密度 n_pによって大きく変化する。例えば周波数が25[GHz]のとき、シリコンの比誘電率は図２のようになる。n_p がおよそ$1.6\times10^{22}[m^{-3}]$以上では、実部 ε_R は負となり、金属の性質に近づく。また、n_p を$3.5\times10^{22}[m^{-3}]$のときの周波数特性は図３のようになる。

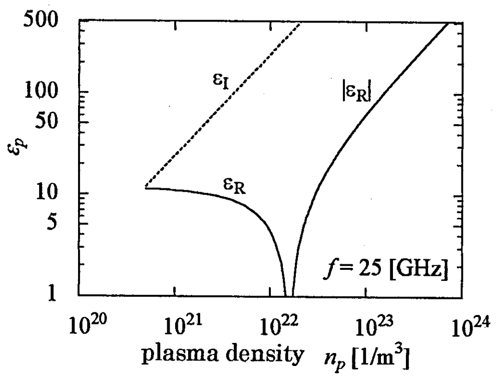


図２　プラズマ密度に対する比誘電率

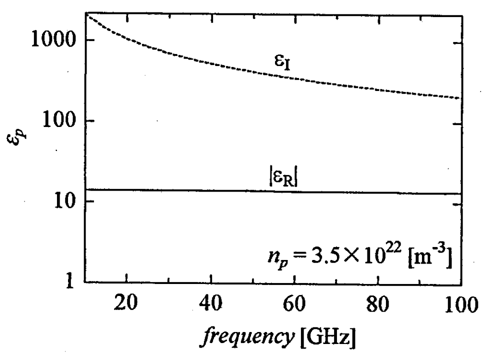


図３　比誘電率の周波数特性

5．シリコンHガイドにおける伝搬特性

まず、図4に光照射がないときの、すなわちプラズマ層が発生していないときのシリコンHガイドを伝搬するLSEモードの分散特性を示す。LSE_{nm}モードの添字n,mは、それぞれy方向およびz方向のモード次数である。シリコンのサイズは、$a=0.8[mm]$, $d=0[mm]$, $b=6.5[mm]$としている。この周波数帯では基本モードのLSE_{10}のみ伝搬している。縦軸はk_0で規格化された伝搬定数$\beta\left(=\beta_r-j\alpha\right)$である。図中の2本の細線はそれぞれ$\sqrt{k_0^2\varepsilon_s-(\pi/b)^2}/k_0$, $\sqrt{k_0^2-(\pi/b)^2}/k_0$を表しており、導波モードの存在範囲の目安となる曲線である。

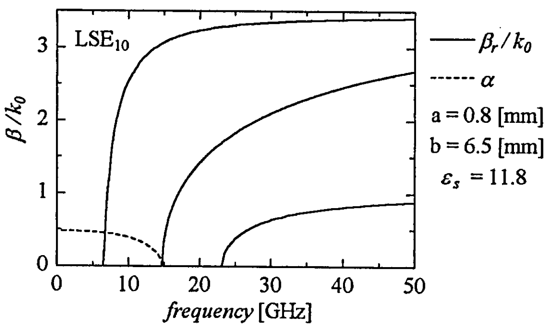
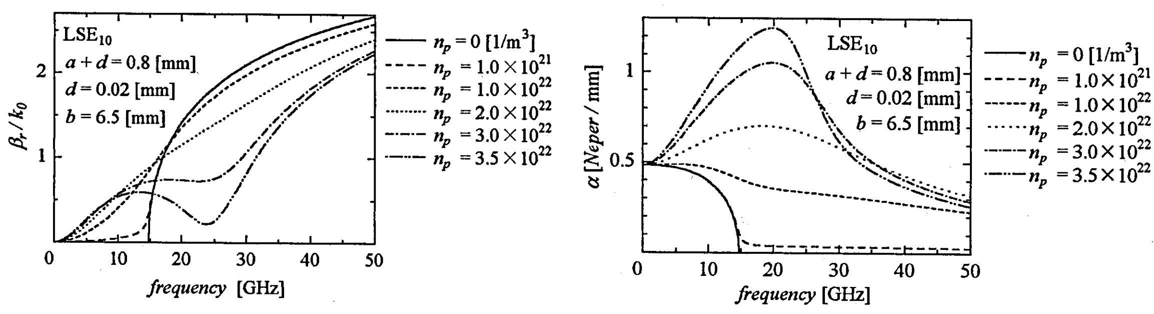


図4　3層シリコンHガイドにおける分散特性

光照射により光プラズマが励起されたときの伝搬特性の数値計算例を次に示す。今、プラズマ密度 n_pをパラメータとして変化させたときの基本モードであるLSE_{10}モードの分散特性を、図5に示す。計算では、$a=0.78[mm]$, $b=6.5[mm]$, $d=0.02[mm]$とおき、20μmのプラズマ層がシリコンスラブ中に生じたとしている。図5よりプラズマ密度が増加すると、光照射がない時の導波遮断周波数以下の周波数領域でもモードが存在したり、特異な分散形状を示すことがわかる。これらの伝搬定数は、光照射のない場合と異なり、常に複素数となる。



(a) 位相定数　　(b) 減衰定数

図5　プラズマが励起されたシリコンHガイドにおけるLSE_{10}モードの分散特性

さらに $n_p = 3.5\times10^{22}[m^{-3}]$ の場合の、各周波数における界分布E_yの変化の様子を図６に示す。光照射により伝搬定数は複素数となるとともに、ある周波数で伝搬方向および横方向に振動しながら減衰する漏洩波が現われていることがわかる。さらに、プラズマ密度が低いとき、すなわち照射する光の強度が弱い場合は、横方向である z 軸方向には漏洩波としての放射は見られないが、さらに光強度を上げてプラズマの密度を大きくすると、z 軸方向には漏洩波としての放射が顕著に現れることがわかる。また，このときの各領域の横方向、すなわち z 方向の波数（伝搬定数）の変化を図７に示す。ただし、各領域の波数を以下のように置いている。

$$k_z = k_{zr} + jk_{zi} \quad , \quad \delta = \delta_{zr} + j\delta_{zi} \quad , \quad p = p_r + jp_i \tag{11}$$

このように、外部から光を照射してシリコン層の表面にプラズマ層を励起すれば、特定の周波数において導波モードから急速に漏洩波に変換することがわかる。

次に、この漏洩現象と通常のHガイドでも生じる漏洩波と比較を行う。シリコンスラブの膜厚を少し大きくした$a = 1.5mm$の場合の分散曲線を図８に示す。このとき、２番目の高次モードであるLSE_{11}は基本モードと異なった分散傾向を示している。また、このシリコンスラブに光照射を行ったときの分散曲線は図９のようになる。

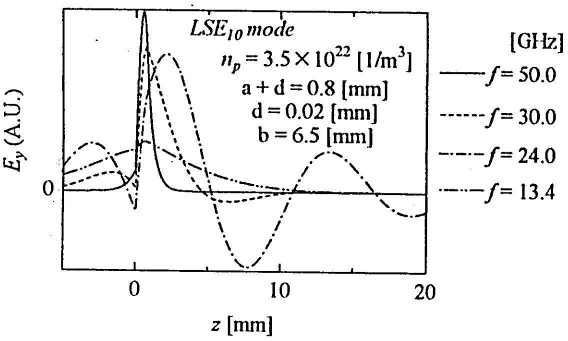


図６　４層シリコンHガイドにおける LSE_{10}モードの界分布

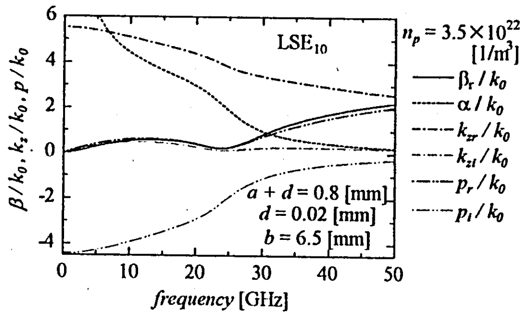


図７　４層シリコンHガイドにおける波数の変化

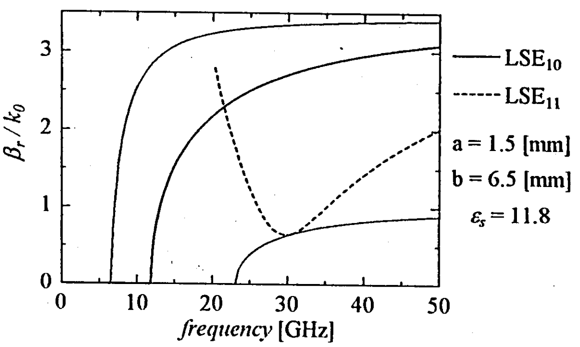


図８　３層シリコンHガイドにおける分散特性

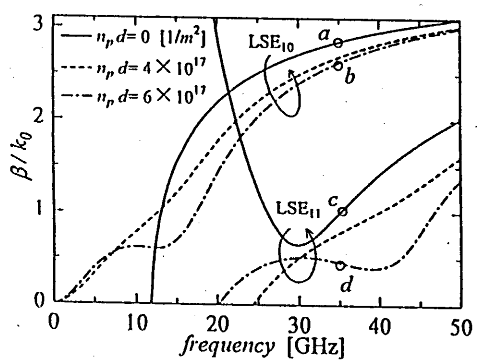


図９　４層シリコンHガイドにおける分散特性

Hガイドの高次モードに現れるこの漏洩特性は、すでにＮＲＤガイドのLSMモードの場合について報告されている[14]。そこでは金属板に挟まれている誘電体はRexolite1422（$\varepsilon_r = 2.53$）としている。図１０にLSEモードについての分散特性を示す。さらに、高次モードであるLSE$_{13}$モードの波数の変化を図１１に示す。図中のf_{cr} , f_Lは、それぞれ導波遮断周波数，漏洩遮断周波数である。このとき周波数fが$f > f_{cr}$では、$\beta = \beta_r , k_z = k_{zr} > 0 , p = p_r > 0$であり、$f_L < f < f_{cr}$では、$\beta = \beta_r$, $k_z = k_{zr} > 0$, $p = p_r < 0$となり、さらに$f < f_L$では、$k_{zr} > 0$, $k_{zi} > 0$ $p_r < 0$, $p_i > 0$というように全て複素数の値をとる。これらはそれぞれ導波モード領域、非物理解領域、漏洩モード領域に対応している。非物理解領域では導波モードと異なり伝送方向に減衰がなく、横の z 方向について誘電体内では振動解となり、空気層では遠方で無限大に発散している。これに対して漏洩領域では、伝送方向の x方向には振動しながら減衰し、横方向の z方向には振動しながら遠方で無限大に発散する。

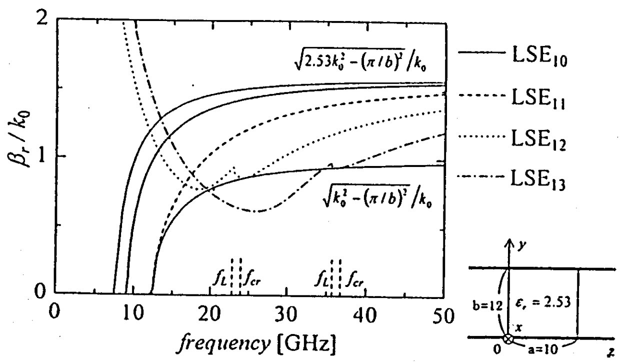


図１０　３層シリコンHガイドにおける分散特性

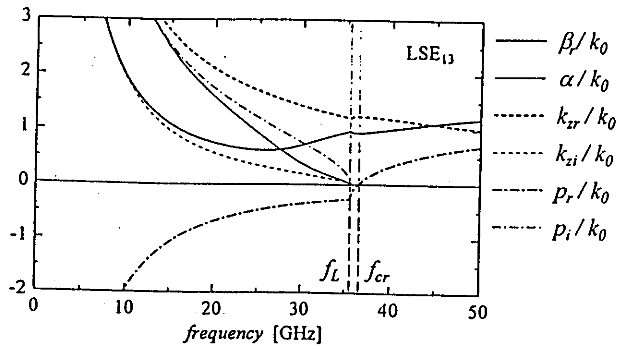


図１１　３層シリコンHガイドにおけるLSE$_{13}$モードの波数の変化

６．パワー密度の空間分布

次に式(12)に示すように、ポインティングベクトルの時間平均値をとってパワー密度の空間分布<S>を計算する。

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right) \quad [W/m^2] \tag{12}$$

４層Hガイドの伝送方向のパワー密度分布<S_x>は次式で表される。

1) $z<-d$ (空気層)

$$\langle S_{x3}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{\omega\mu_0}(k_0{}^2+p^{*2})D_2D_2{}^{*}e^{pz}e^{p^*z}e^{-j\beta x}e^{j\beta^* x}\right) \tag{13}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{\omega\mu_0}(k_0{}^2+p^{*2})D_2D_2{}^{*}\right)e^{2p_r z}e^{-2\alpha x}$$

2) $-d<z<0$ (プラズマ層)

$$\langle S_{x1}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{\beta}{\omega\mu_0}(k_0{}^2\varepsilon_p{}^*-\delta^{*2})(C_1\cos\delta z+C_2\sin\delta z)\right.$$

$$\left.\times(C_1{}^*\cos\delta^* z+C_2{}^*\sin\delta^* z)e^{-j\beta x}e^{j\beta^* x}\right] \tag{14}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{\beta}{\omega\mu_0}(k_0{}^2\varepsilon_p{}^*-\delta^{*2})(C_1\cos\delta z+C_2\sin\delta z)\right.$$

$$\left.\times(C_1{}^*\cos\delta^* z+C_2{}^*\sin\delta^* z)e^{-2\alpha x}\right]$$

3) $0<z<a$ (誘電体層)

$$\langle S_{x2}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{\beta}{\omega\mu_0}(k_0{}^2\varepsilon_1-k_z{}^{*2})(A_1\cos k_z z+A_2\sin k_z z)\right.$$

$$\left.\times(A_1{}^*\cos k_z{}^* z+A_2{}^*\sin k_z{}^* z)e^{-j\beta x}e^{j\beta^* x}\right] \tag{15}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{\beta}{\omega\mu_0}(k_0{}^2\varepsilon_1-k_z{}^{*2})(A_1\cos k_z z+A_2\sin k_z z)\right.$$

$$\left.\times(A_1{}^*\cos k_z{}^* z+A_2{}^*\sin k_z{}^* z)e^{-2\alpha x}\right]$$

4) $z>a$ (空気層)

$$\langle S_{x4}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{\omega\mu_0}(k_0{}^2+p^{*2})D_1D_1{}^{*}e^{-pz}e^{-p^*z}e^{-j\beta x}e^{j\beta^* x}\right) \tag{16}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{\omega\mu_0}(k_0{}^2+p^{*2})D_1D_1{}^{*}\right)e^{-2p_r z}e^{-2\alpha x}$$

また、$z>a$ の空気層の横方向パワー密度分布$\lt S_z\gt$は式(17)で表される。

$$\langle S_{z4}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{jp^*}{\omega\mu_0}D_1D_1{}^{*}e^{-pz}e^{-p^*z}e^{-j\beta x}e^{j\beta^* x}\right)\left((\frac{n\pi}{b})^2\sin^2(\frac{n\pi}{b}y)+\beta\beta^*\cos^2(\frac{n\pi}{b}y)\right) \tag{17}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{jp^*}{\omega\mu_0}D_1D_1{}^{*}\right)\left((\frac{n\pi}{b})^2\sin^2(\frac{n\pi}{b}y)+\beta\beta^*\cos^2(\frac{n\pi}{b}y)\right)e^{-2p_r z}e^{-2\alpha x}$$

図１２にＮＲＤガイドのLSE_{13}モードのパワー密度分布$\lt S_x\gt$を示す。同図(b)は遮断周波数に近い導波モードの場合であり、同図(c)は非物理解領域の場合である。さらに図１３に空気層の横方向パワー密度分布$\lt S_z\gt$を示す。これに対して、光照射によってプラズマ層が生じたときの横方向パワー密度分布は図１４のようになる。この図より図１３の場合と異なり次第に減少していることがわかる。

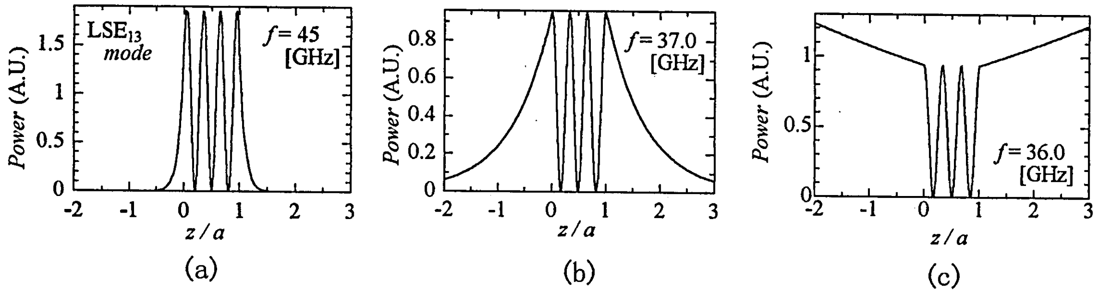


図１２　伝送方向（x方向）のパワー密度分布

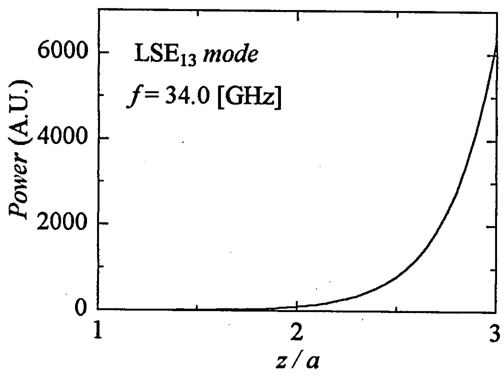


図１３　３層シリコンHガイドにおける横方向（z方向）のパワー密度分布

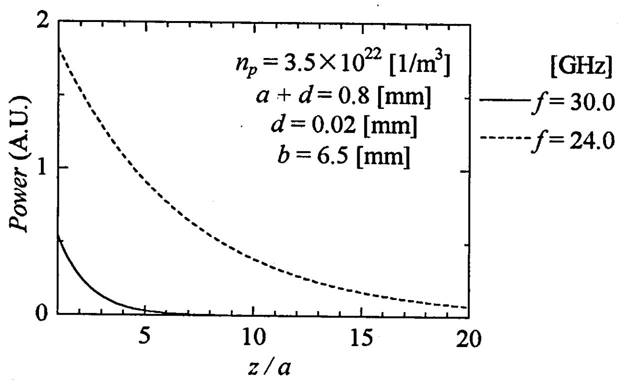


図１４　４層シリコンHガイドにおける横方向のパワー密度分布

７．むすび

本報告では光照射によって励起されたプラズマ層を含むシリコンHガイドにおける伝搬特性を、漏洩波を中心とした数値計算例を示して明らかにした。また、光照射がないとき、すなわち損失を含まないときのHガイドにおける漏洩波との比較を行った。光照射によってプラズマ層が生じ、一部が損失媒質となったシリコンHガイドにおいては、漏洩波は損失が無い場合と異なり、伝搬の横方向には遠方で減衰する形状となることがわかった。本報告では光導電効果を有する半導体材料としてシリコンを例にとり数値計算を行ったが、応答速度の点で期待できるGaAs等の他の半導体材料も同様に求められる。本報告で得られた漏洩波の性質を利用した光スイッチや漏洩波アンテナなどの設計に関する検討も今後の課題である。

参考文献

[1] C. H. Lee , P. S. Mak and A. P. Defonzo : " Optical Control of Millimeter- Wave Propagation in Dielectric Waveguides " , IEEE J. Quantum Electron. , vol. QE-16 , No. 3 , pp. 277-288 , 1980.

[2] M. Tsutsumi and A. Alphones :"Optical Control of Millimeter Waves in the Semiconducter Waveguide " ,IEICE Trans. Electron. , vol. E76-C , No. 2 , pp. 175-182 , Feb. 1993.
[3] D. Xu, L. Song and K. Wu.:"A New Type of Optoelectronic Millimeter-Wave FinlineSwitches", IEEE Trans.Microwave Theory and Tech., vol.MTT-40, No.12, pp.2329-2396, 1992.
[4] M. Tsutsumi, H. Shimasaki and G.B. Morgan, "Optacal Control of Wave Propagation in Microstrip-Slot Lines at D Band", IEE Proceedings-H, Vol.138, No.6, pp.527-531, 1991.
[5] P. Cheung, D.P. Neikirk and T. Ito: "Optically Controlled Coplanar Waveguide Phase Shifters", IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., Vol.MTT-38, No.5, pp.586-595, 1990.
[6] M.Tsutsumi and Y.Satomura : "Optical control of millimeter waves in silicon waveguides", Digest of The 18th.Int. Conf.on IR and MM Waves, pp.539-540, Sep. 1993.
[7] Y.Satomura and M.Tsutsumi: "Switching characteristics of millimeter waves in the silicon H-guide", Digest of The 19th.Int. Conf.on IR and MM Waves, pp.512-513, Oct. 1994.
[8] 里村、堤：″シリコンHガイドの光プラズマによるミリ波の漏洩特性″、電気学会電磁界理論研資 , EMT-96-111(1996).
[9] Y.Satomura , S.Sumida and M.Tsutsumi : "Leaky wave behaviour in the silicon H-guide with optically induced plasma region", IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, vol.1, Tu4B-2, pp.287-290, June 1996.
[10] 米山 務 :″非放射性誘電体線路を用いたミリ波集積回路″, 信学論, (C-I), vol. J73-C-I , No. 3 , pp. 87-94 (1990-3).
[11] 山口, 下島, 細野 : ″スラブ形導波路の漏えいモード解析″, 信学論, vol.J73-C-1, No.1, pp.9-17, Jan. 1990.
[12] 宮城光信 : ″光伝送の基礎″, pp.51-55, 昭晃堂, 1991.
[13] H.Shigesawa, M.Tsuji and A.A.Oliner: "Simultaneous propagation of both bound and leaky dominant modes on conductor-backed coplanar strips," IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest, MM-2, June 1993.
[14] C.Di Nallo et.al. :"Properties of NRD-guide and H-guide higher-order modes:Physical and nonphysical ranges", IEEE Trans.Microwave Theory and Tech., vol.MTT-42, No.12, pp.2429-2434, Dec. 1994.

輻射科学研究会資料
RS 97-16

ミリ波帯注入同期型MMIC発振器

Millimeterwave Injection Locked MMIC Oscillator

末松英治　矢倉基次　山田敦史　岸本克彦　朱雨　John K. Twynam
作野圭一　長谷川隆夫　長谷川正智　佐藤浩哉

E. Suematsu M. Yagura A. Yamada K. Kishimoto Y. Zhu
K. Sakuno T. Hasegawa M. Hasegawa H. Sato

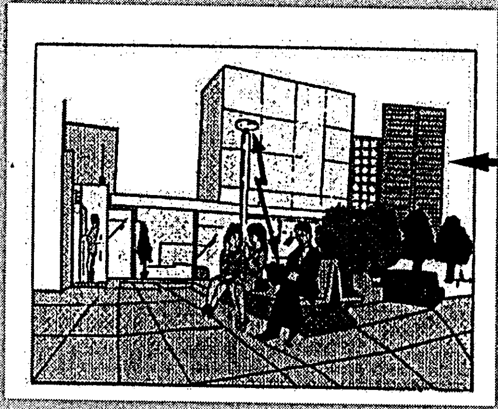
（シャープ株式会社　中央研究所）

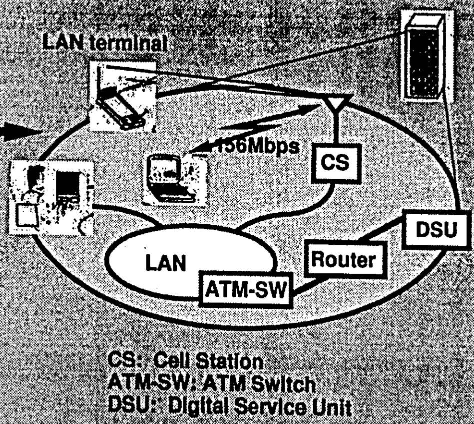
1997年12月５日　（金曜日）
於　シャープ　（株）

OUTLINE

1. 背景
2. 構成
3. 実験結果
4. まとめ

Image of multimedia mobile access communication system





High Speed Wireless Access
(25GHz band)
(OUTDOOR : Max 25Mbps)

Hiigh Speed Wireless LAN
(60 GHz band)
(INDOOR: Max 156Mbps)

SHARP

System Requirements

Millimeter-wave high speed wireless LAN and PDA requires an osillator which has

[1] High stability
[2] Low phase noise
[3] Frequency control and switching

Advantage of MMW MMIC Injection Locking Oscillator (ILO)

▲ Large locking range due to Low Q resonator
☞ Realization of low cost frequency Synthsizer
▲ Small size and Low DC power consumption
☞ Realization of mobile hand-held terminal

SHARP

1.　背景

ミリ波帯高速データ伝送には、周波数安定度の高い発振器が、不可欠。

周波数安定化について

(1)　誘電体共振器による手法

. 周波数安定度に限界------>高速伝送困難

. 量産性難しい　------------>　低コスト化困難

(2)　ﾏｲｸﾛ波PLO(逓倍)による手法

. プリスケーラに課題

　10GHz以上の動作周波数困難、消費電力大

. 低コスト化に課題

(3)　注入同期による手法

(課題点)

・周波数同期幅が小さい（動作周波数の～2%程度）

・安定動作・信頼性に課題

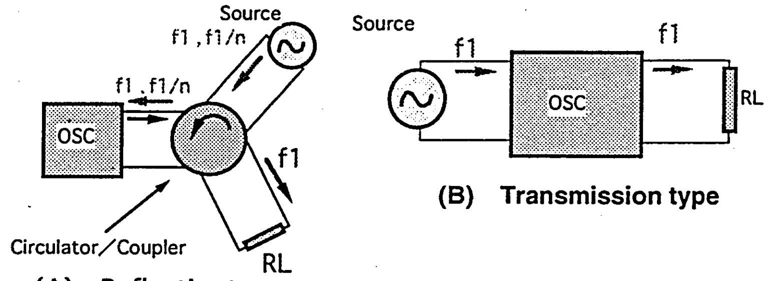
(特長)

・MMICによる小型化可能（低Qをに利用）

・小型化、低消費電力化に貢献

・低ｺｽﾄｼﾝｾｻｲｻﾞ　が実現可能

Conventional Technique of ILO



(A)　Reflectiontype

(B)　Transmission type

$\Delta fr_{1/n} = (fo/Q_{EXT})\sqrt{(Pin/Po)}$

$\Delta fr_{1/n}$: Locking range for subharmonic frequency

fo : Free running frequency

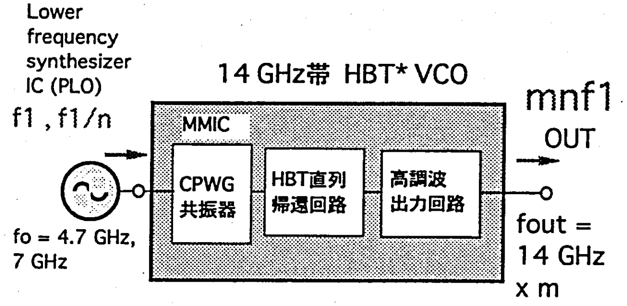
Pin : nth subharmonic Injection Power

Po : Free running output power

Q_{EXT} : CircuitQ（ExternalQ）

SHARP

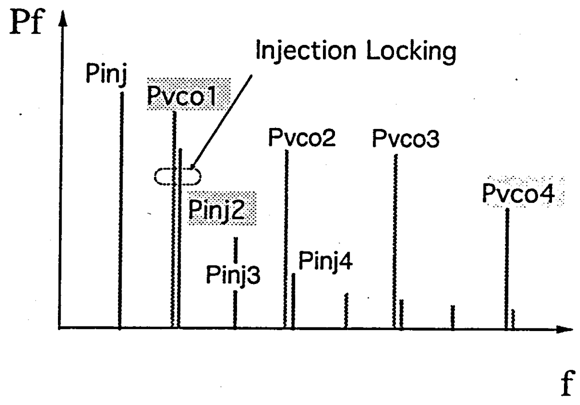
直列型　サブハーモニック／ハーモニック 注入同期発振器の提案



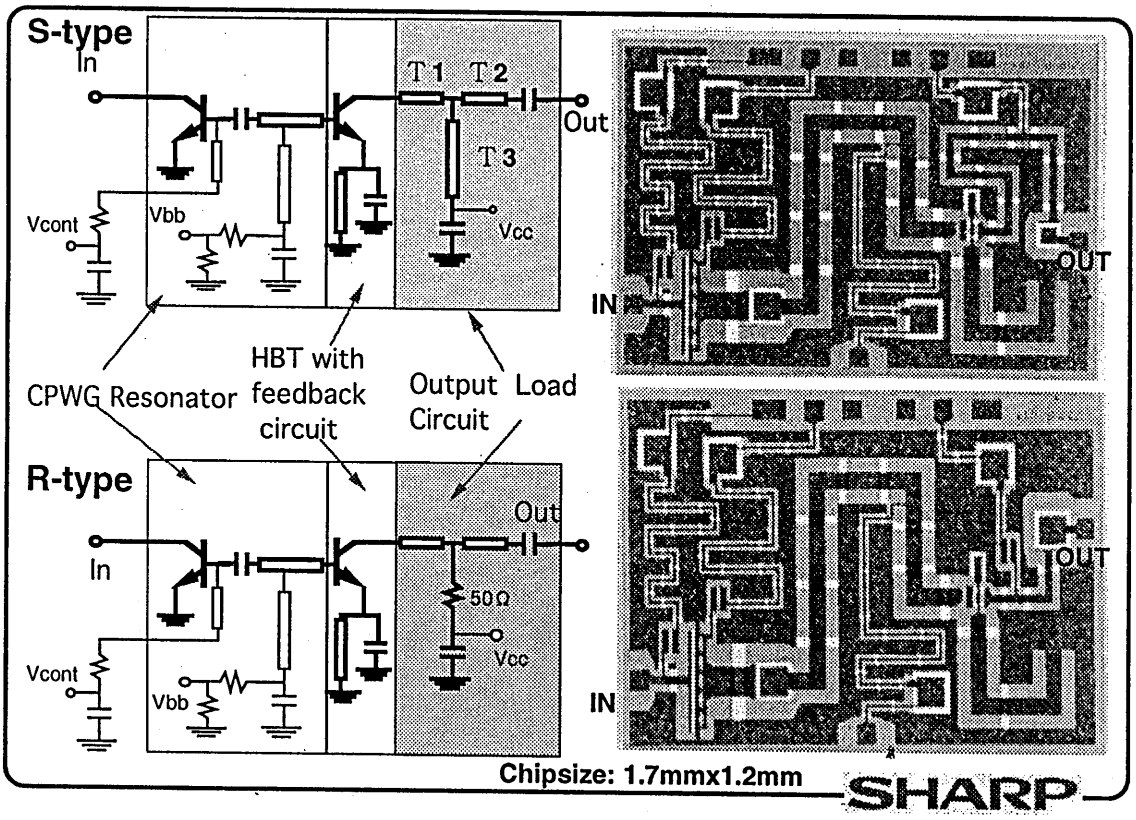
（特徴）

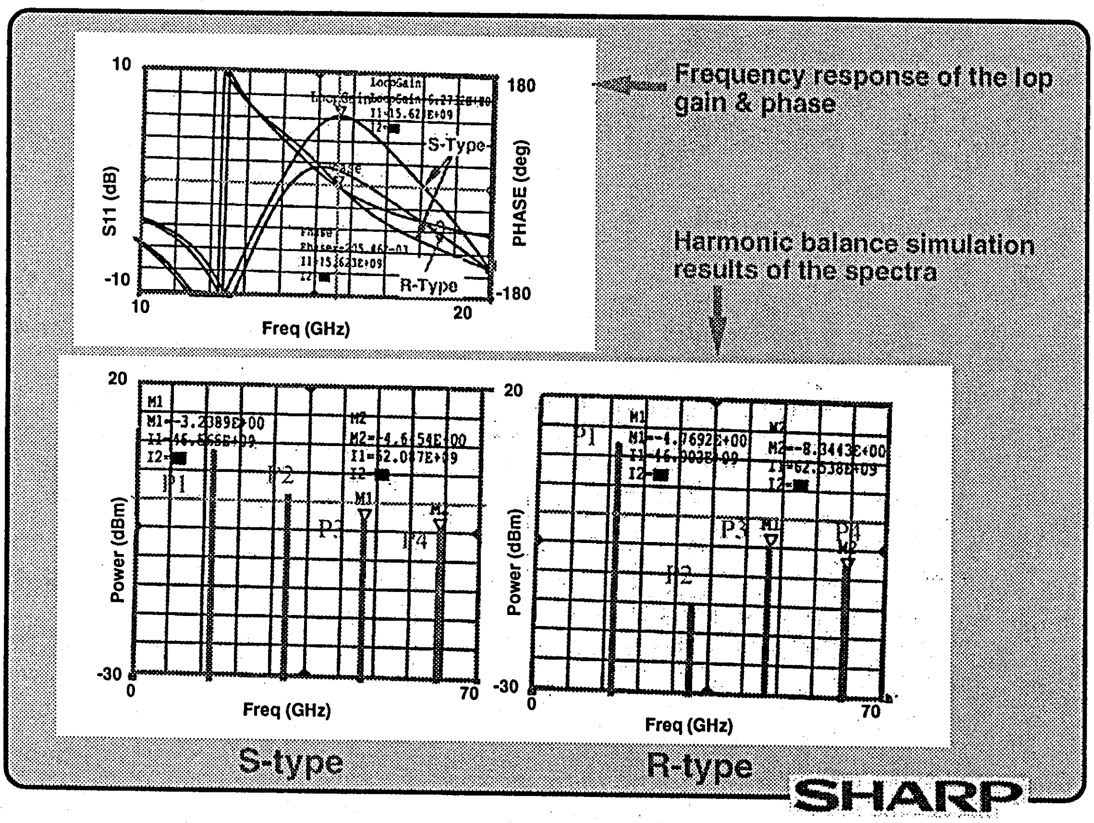
1．広帯域のサーキュレータを必要としない
　——> MMIC化が容易。
2．ベース（ゲート）側から直接注入可能
　——> 能動素子の利得を積極利用。
　——> 同期幅の広帯域化が可能。
3．発振素子の直後に高調波制御回路を装加することが可能。
4．注入同期自体のプロセスで、サブハーモニック波を抑圧可能。

* HBT
　Emitter Size : 2.4 um x20 um
　ft =40 GHz, fMAX=70 GHz



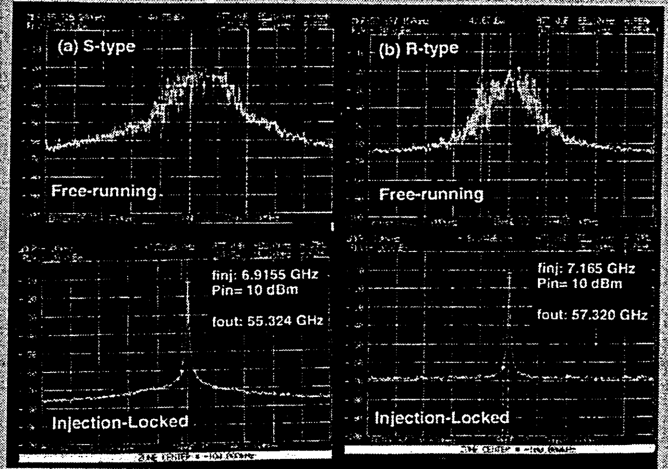
The relationship of oscillator and injected spectra.


S-type
In
T1
T2
T3
Out
Vcont
Vbb
Vcc
IN
OUT
HBT with feedback circuit
CPWG Resonator
Output Load Circuit
R-type
In
Out
50Ω
Vcont
Vbb
Vcc
IN
OUT
Chipsize: 1.7mmx1.2mm
SHARP


Frequency response of the lop gain & phase
S11 (dB)
PHASE (deg)
Freq (GHz)
S-Type
R-Type
Harmonic balance simulation results of the spectra
Power (dBm)
Freq (GHz)
S-type
R-type
SHARP

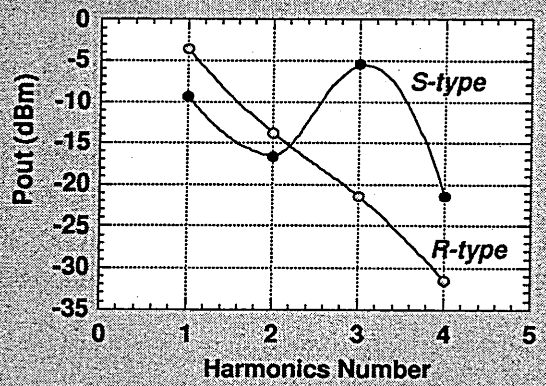
(5)

Free-running and injection-locked spectra



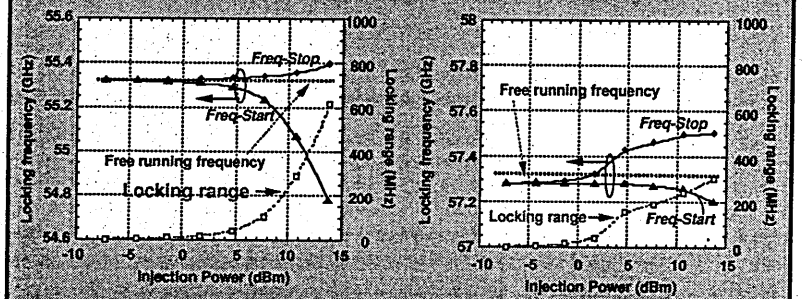
SHARP

Measured Harmonic Output Power



SHARP

Measured Locking Frequency and Range



S-type　　R-type

SHARP

4．まとめ

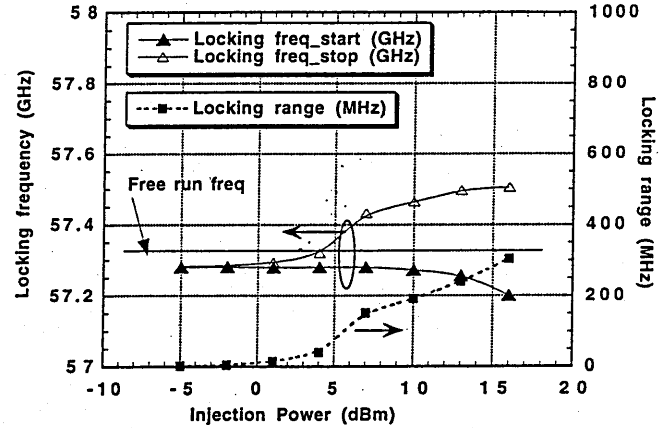
◎　ミリ波帯発振器において、信号安定化の技術として、直列型ｻﾌﾞﾊｰﾓﾆｯｸ注入同期と高調波MMICVCOとの組み合わせによる手法で高安定化が実現可能であることを MMIC の試作・実験により示した。

（今後の課題）

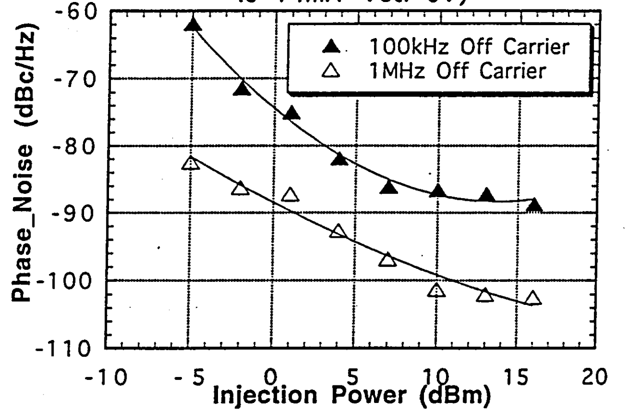
★高出力化------＞出力負荷回路かつ使用するﾊｰﾓﾆｯｸ次数の最適化。

★同期幅の広帯域化-----＞バラクタ側の注入回路工夫要。

(a) R-type:Vcc=3.7V Vbb=4.5V
Ic=18.2mA Vctl=0V

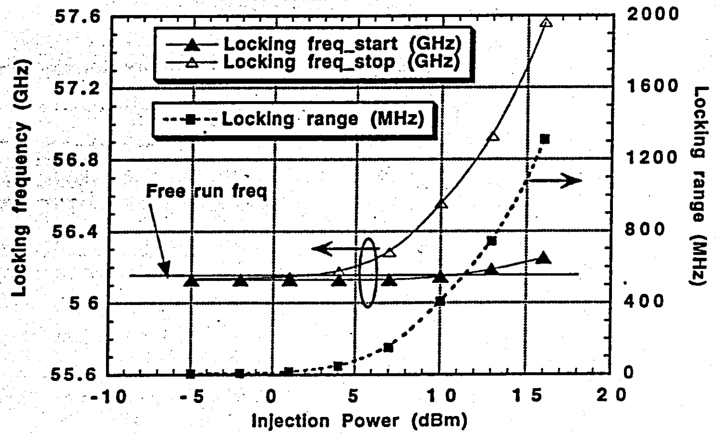


(a) S-type: V15_swso1 (Vcc=2.2V Vbb=4.56V
Ic=14mA Vctl=0V)

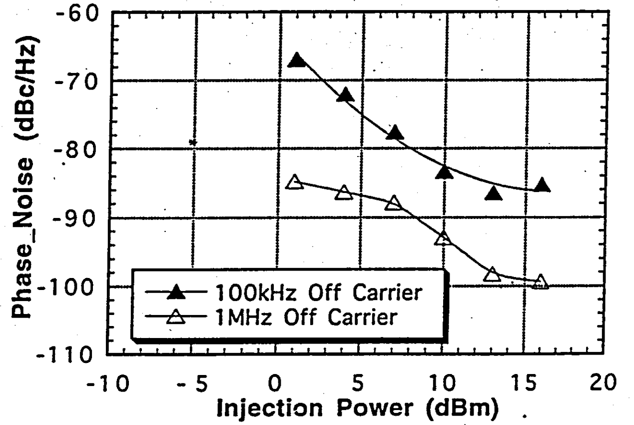


(7)

(b) R-type: Vcc=3.7V Vbb=4.5V
Ic=18.2mA Vctl=6 V



(b) S-type: V15_swso1 (Vcc=2.2V Vbb=4.57V
Ic=13.7mA Vctl=1.5 V)



輻射科学研究会資料

資料番号	RS 97-17

Wiener 解析に関する一考察

- ランダム変位平面の等価反射係数 -

田村安彦　中山純一

(京都工芸繊維大学 工芸学部)

1998 年 3 月 23 日 (月)

輻射科学研究会

(於 三菱電機（株）先端技術総合研究所)

1 はじめに

確率過程の非線形問題の解析は拠り所となる一般的な理論が今なお存在しないため難しい。しかしもとの確率過程が Gauss 過程、Gauss 系列である場合は Wiener による非線形汎関数解析の理論により解析可能であり物理や工学における諸問題に適用されている。例えば、非線形回路のパラメーター推定、神経系の応答、乱流理論、ランダム媒質中における波動伝搬 (ランダム初期値問題) [1] やランダム表面による波動散乱 (ランダム境界値問題) [2] 等である。確率汎関数法 [1, 2, 3] は筆者の一人によって開発されたそのようなランダム境界値問題及びランダム初期値問題を解析する統計的手法である。(無限に広い) 不規則表面による散乱波動場は不規則表面による非線形汎関数であるが平面波入射に対しては不規則表面が統計的一様性を持つ場合、実空間内での移動に対する見本空間内の移動の群論的な変換性を考慮することで確率論的な Floquet の定理 (波動場の一般形) が得られる。不規則表面が Gauss 過程で記述できる場合には Wiener による非線形汎関数解析 (Wiener 展開) を用いることで波動場の種々の統計量を具体的に求めることが可能である。筆者等は確率汎関数法により様々なランダム境界値問題を扱ってきた[4]–[8] が確率汎関数法と言えば Wiener 展開が連想される程、従来の研究において Wiener 解析は重要な地位を占めており今後も然りである。しかし、より正確には Wiener 展開は具体的な解析のためのツールの一つに過ぎず、その意味では狭義の確率汎関数法と呼ぶのが適切であろう。実際、Wiener 展開を用いずに確率場を単純に巾展開 (摂動展開) [7] してもやはり確率汎関数法と呼んでも広義の意味では差し支えない。また、最近では二値確率系列の確率直交基底として binary 展開 [9] が具体的に見出され、それを用いた確率汎関数法によって、周期的二値不規則表面からの波動の散乱と回折 [10] が解析されつつある。数学的には今だ未発見であるが、多項式展開によらない確率直交基底が見い出せれば、確率汎関数法の適用範囲は極めて広範囲となりランダム境界値問題及び初期値問題の主要な解析理論となり得ることが予想されている。しかし、そのような確率直交基底の数学的基礎研究は今後によるものであり、現段階ではやはり Wiener 解析が必要不可欠である。

確率汎関数法における解析上の仮定と近似　確率汎関数法を用いた従来の我々の不規則表面散乱の研究においては実質上、僅かにランダムすなわち不規則表面は波長に比して十分小さくかつ滑らかな場合に限定していた。更に、定式化上及び解法上の適当な仮定や近似を施して Wiener 解析を行なっていた。これらの仮定や近似を挙げておく。

定式化上の仮定:	(1)	不規則表面に対する Rayleigh の仮説
	(2)	近似境界条件の導入
Wiener 解析上の仮定:	(1)	階層方程式の有限使用
	(2)	主要近似の導入

定式化上の仮定は実質上設けていた制限事項であり、これは狭義の確率汎関数法における波動理論が形式上、回折格子での Rayleigh の回折理論の確率的な拡張になっていることによる。Rayleigh の仮説とは、外部領域においては正しい表現である外向き散乱波と表面波の和のみで記述した散乱波動場を、表面形状の凹領域や境界上でも十分良い近似であると想定することである †。これは正弦波状の回折格子に対しては既に成立のための条件が求められているが不規則表面に対しては理論的にも数値的にも未解決である。境界条件に扱いについては Rayleigh の仮説とも多少関連するが、厳密な不規則表面上の境界条件の代わりに平均面上での適当な近似境界条件を用いるものである。次に Wiener 解析上の仮定は確率汎関数法固有のものではなく、Wiener 解析が実際の評価上抱えている問題点であると言えるが、あまり検討されていないようである。一般論としての Wiener 解析は Gauss 白色雑音に対する非線形系の応答を入力の直交汎関数として Wiener 展開し、その汎関数表現における核関数 (Wiener 核) によって系を特徴付けるものである。しかしながら与えれた問題に対し Wiener 核を具体的に求めることは一般に簡単ではない。特に高次の Wiener 核を求める

†確率汎関数法における Rayleigh の仮説や近似境界条件を用いない厳密な定式化については、不規則表面上の Green の定理 [11] あるいは Voronovich 型の確率積分方程式 [12] によって試みられている。

のは困難な場合がほとんどであり、ある種の仮定の下での低次の近似解を得ることが多い。そのような近似 Wiener 核が厳密な Wiener 核からはたしてどの程度食い違うのかを検討することは重要であるが、厳密解が得られる様な問題は従来ほとんど無く近似 Wiener 核がエネルギー保存則あるいは境界条件及び初期条件をどの程度満足するかと言ったような間接的な検証を採らざるを得なかった。厳密な Wiener 核が明示的に関数に解析された例は少ないが以前にヒステリシス系の Wiener 解析 [13] があり、エネルギー保存則に関する収束性や具体的な見本過程への収束性等が検討された。

今回は何らかの仮定を考慮した上での近似 Wiener 核と厳密な Wiener 核との比較を行なうため、Gauss 不規則表面による平面波散乱問題の特殊な例を取り上げる。不規則表面の相関距離が無限大となる極限では不規則な凹凸は消滅し平滑平面が Gauss 分布に従って上下に変位したと見なすことが出来る (平面変位モデル)。このようなモデルにおいては Rayleigh の仮説の検証は意味が無いが境界条件と Wiener 解析 (正確には Hermite 解析) に関する考察が可能である。この場合の Wiener 核は Wiener 展開の展開係数として直接計算する方法と Wiener 核が満たすべき可算無限個の連立方程式 (階層方程式) を解く方法との二通りの算法により求めることができる。散乱もしくは一般の問題に対する Wiener 核の算法においては後者を採らざるを得ないため、階層方程式をどのように導出し、どのように解くかは用いる近似に依存していた。本報告では平面変位モデルにおいて、その反射係数の厳密な Wiener 核と何等かの近似を施して求めた Wiener 核との比較検討を行なう。なお、波動場の時間因子を $e^{-i2\pi f_i t}$ として本文の記述からはすべて省略する。

2 平面変位モデル

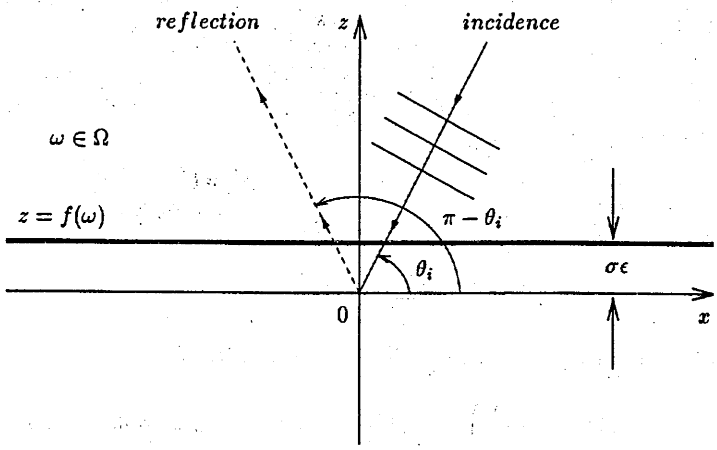


図 1: ランダム変位平面と座標系

図 2のように直角座標系 (x, z) を設定し、完全導体からなる平滑平面が平均値 0、位置の揺らぎ (分散) を σ^2 として z-軸上を Gauss 分布に従ってランダムに変位するものと仮定する。平滑平面の位置を $z = f(\omega)$ として以下のように書く。

$$z = f(\omega) = \sigma\epsilon, \quad \omega \in \Omega, \quad \langle z \rangle = 0, \quad \langle z^2 \rangle = \sigma^2 \tag{1}$$

ここで、ω は標本空間 Ω 内の一見本点、$\langle\cdot\rangle$ はアンサンブル平均、$\sigma(>0)$ は変位の RMS 実効値を表し、ϵ は見本点 ω に対応する Gauss 変数で平均値 0、分散を 1^2 とする Gauss 分布 $G(x; 1^2)$ に従う。Gauss 分布 $G(x, \sigma^2)$ は以下のように定義しておく。

$$G(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \tag{2}$$

全波動場 $\phi(x,z,\omega)$ は自由空間中での二次元波動方程式

$$(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2+k^2)\phi(x,z,\omega)=0, \quad z>f(\omega) \tag{3}$$

と平滑平面 $z=f(\omega)$ 上での境界条件として

$$\begin{array}{ll} \phi(x,z,\omega)=0 & \text{:Dirichlet} \\ \partial\phi(x,z,\omega)/\partial n=\partial\phi(x,z,\omega)/\partial z=0 & \text{:Neumann} \end{array} \tag{4}$$

及び遠方 $z\to\infty$ での外向き放射条件を満たす。

平面波入射を考える場合、平滑平面 (1) による全波動場 $\phi(x,z,\omega)$ は明らかに次の形に書ける。

$$\phi(x,z,\omega)=e^{-i\lambda_0 x}\{e^{\gamma(\lambda_0)z}+\Gamma(\omega|\lambda_0)e^{-\gamma(\lambda_0)z}\} \tag{5}$$

(5) の第一項はその波動ベクトルが

$$(-\lambda_0,-i\gamma(\lambda_0))=(-k\cos\theta_i,-k\sin\theta_i) \tag{6}$$

で与えられる入射平面波を表す。ただし、k は波数 (長さを波長を 1 として規格化するため $k=2\pi$ である)、$\theta_i,(0<\theta_i<\pi)$ は入射角、二価関数 $\gamma(\lambda)$ は以下のように定義する。

$$\gamma(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-k^2}, \quad \gamma(0)=-ik \tag{7}$$

$\gamma(\lambda)$ のブランチカットは複素 λ-平面上において、分岐点 $\lambda=k,-k$ から各々 $k+i\infty,-k-i\infty$ に至る虚数軸に平行な直線にとるものとする。また、(5) の第二項は平滑平面からの鏡面反射波を表わし、$\Gamma(\omega|\lambda_0)$ はランダム変位した平滑平面の一見本 ω に対するランダム反射係数である。なお、平面変位モデルにおいては (4) に示したように Dirichlet 条件と Neumann 条件との本質的な差異はないことに留意されたい。実際、結果的には反射係数 $\Gamma(\omega|\lambda_0)$ の符号が変わるだけである。

ランダム反射係数 $\Gamma(\omega|\lambda_0)$ は Gauss ランダム変数 ϵ により駆動される確率変数であるから条件 $\langle|\Gamma(\omega|\lambda_0)|^2\rangle<+\infty$ の下で Wiener-伊藤の展開定理 [14] により (アンサンブル自乗平均の意味で) 直交展開できる †。

$$\Gamma(\omega|\lambda_0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\lambda_0)H_n(\epsilon) \tag{8}$$

ここで、$A_n(\lambda_0)$ は n 次の Wiener 核、$H_n(x)$ は n 次の Hermite 多項式で

$$H_n(x)=G(x;1^2)^{-1}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n G(x;1^2), \quad n\geq 0, \qquad H_n(x)=0, \quad n<0 \tag{9}$$

と定義される。$H_n(\cdot)$ は Gauss ランダム変数 ϵ に対し次の (アンサンブル自乗平均の意味での) 直交性を持つ。

$$\langle H_m(\epsilon)H_n(\epsilon)\rangle=n!\delta_{mn} \tag{10}$$

散乱波動場に関する各種の統計量は平均操作により Wiener 核を用いて表現できる。

コヒーレント波動場　(1),(5),(8) 及び (10) よりコヒーレント波動場 $\phi^c(x,z)$ は

$$\phi^c(x,z)=\langle\phi(x,z,\omega)\rangle=e^{-i\lambda_0 x}\{e^{\gamma(\lambda_0)z}+A_0(\lambda_0)e^{-\gamma(\lambda_0)z}\} \tag{11}$$

と書ける。よって 0 次 Wiener 核 $A_0(\lambda_0)$ はコヒーレント反射係数を表す。

†正確には Hermite 展開と呼ぶべきである。

光学定理　波動方程式の解に関する保存則 [div {Im (ϕ^* grad ϕ)}]/$k = 0$ より入射電力とコヒーレント反射電力及びインコヒーレント反射電力に関する関係式 (光学定理) を導くことができる。平面変位モデルにおける光学定理は以下のようになる。

$$\frac{i\gamma(\lambda_0)}{k} = \frac{i\gamma(\lambda_0)}{k}|A_0(\lambda_0)|^2 + \frac{i\gamma(\lambda_0)}{k}\sum_{n=1}^{\infty} n!\,|A_n(\lambda_0)|^2 \tag{12}$$

光学定理 (12) を規格化すれば

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|A_n(\lambda_0)|^2 \tag{13}$$

を得るが、これは Wiener 核に関する Parseval の等式そのものである。

ランダム反射係数の自乗平均誤差　ある Wiener 核 $A_n(\lambda_0)$ とそれによって定まるランダム反射係数 $\Gamma(\omega|\lambda_0)$ に対して、何らかの手段で近似的に得たランダム反射係数及び Wiener 核を$\Gamma'(\omega|\lambda_0)$ 及び $A'_n(\lambda_0)$ で表し、$\Gamma(\omega|\lambda_0)$ に対する近似ランダム反射係数 $\Gamma'(\omega|\lambda_0)$ の自乗平均誤差 E^2 を以下で定義する。

$$\begin{aligned} E^2 &= \langle|\Gamma(\omega|\lambda_0) - \Gamma'(\omega|\lambda_0)|^2\rangle & (14)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|A_n(\lambda_0)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|A'_n(\lambda_0)|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty} n! A'_n(\lambda_0)A^*_n(\lambda_0) & (15)\end{aligned}$$

(15) は (10) を用いて書き直した式である。

3　1 次近似の境界条件による Wiener 核

平滑平面の変位が波長に比べて十分小さい場合 ($k\sigma \ll 1$) に Dirichilet 条件を平均面上 $z = 0$ で Taylor 展開した 1 次近似の境界条件

$$\left[\phi(x,z,\omega) + (\sigma\epsilon)\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,z,\omega)\right]\Big|_{z=0} = 0 \tag{16}$$

を用いる。これは、従来不規則表面の散乱問題において用いられてきた実効境界条件 [15] に対応する。(16) に対応するランダム反射係数を $\Gamma_1(\omega|\lambda_0)$ で表し、厳密な境界条件のそれと区別しておく。

3.1　直接計算による Wiener 核

(5),(8) 及び (16) より容易に反射係数 $\Gamma_1(\omega|\lambda_0)$ の具体形が得られる。

$$\Gamma_1(\omega|\lambda_0) = -\frac{1+\sigma\gamma(\lambda_0)\epsilon}{1-\sigma\gamma(\lambda_0)\epsilon} = -\frac{1-s\epsilon}{1+s\epsilon}, \quad s = -\sigma\gamma(\lambda_0) = ik\sigma\sin\theta_i \tag{17}$$

通常の入射角を考える限り s は純虚数であるから (17) は有限である。Wiener 核を求める計算公式 [14] より

$$\begin{aligned} A_n(\lambda_0) &= \frac{1}{n!}\langle\Gamma_1(\omega|\lambda_0)H_n(\epsilon)\rangle \\ &= -\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-s\epsilon}{1+s\epsilon}H_n(\epsilon)G(\epsilon;1^2)d\epsilon, \quad n \geq 0 & (18)\end{aligned}$$

が明示的な式として得られる。(18) を数値計算することで境界条件 (16) に対する Wiener 核 A_n が求まる。

3.2　階層方程式による解法

一般の問題、例えばランダム媒質中の波動伝搬や不規則表面による波動散乱等においては、Wiener 核を直接計算することはほとんど不可能に近い。そのため Wiener 核が満たすべき方程式を境界条件から導出し、これを解いて Wiener 核を決定する手法が採られる。以下では従来法により階層方程式を導きこれを解く。

3.2.1 階層方程式の導出

等価境界条件 (16) を ω に関する確率方程式と見なして左辺を境界条件に関する誤差 $e(x,\omega)$ と定義し、等号をアンサンブル自乗平均 $\langle|e(x,\omega)|^2\rangle = 0$ の意味にとるものとする。$f(\omega) = \sigma\epsilon = \sigma H_1(\epsilon)$ に注意しHermite 多項式に関する次の公式

$$H_1(\epsilon)H_n(\epsilon) = H_{n+1}(\epsilon) + (n+1)H_{n-1}(\epsilon), \quad n \geq 0 \tag{19}$$

を用いれば境界条件 (16) の自乗平均誤差は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\langle|e(x,\omega)|^2\rangle &= |1 + A_0(\lambda_0) + sA_1(\lambda_0)|^2 \\ &\quad +1!\ |A_1(\lambda_0) - s\{1 - A_0(\lambda_0)\} + 2sA_2(\lambda_0)|^2 \\ &\quad +\sum_{n=2}^{\infty} n!\ |A_n(\lambda_0) + sA_{n-1}(\lambda_0) + (n+1)sA_{n+1}(\lambda_0)|^2 \end{aligned}\tag{20}$$

上式が零となるためには、各項が非負なため項別に零にならねばならない。従って、(20) における絶対値記号内が零になる必要がある。これにより Wiener 核に関する以下のような可算無限個の連立方程式 (階層方程式) を得る。

0 次:
- $1 + A_0(\lambda_0) + sA_1(\lambda_0) = 0$ (21)

1 次:
- $A_1(\lambda_0) - s\{1 - A_0(\lambda_0)\} + 2sA_2(\lambda_0) = 0$ (22)

2 次:
- $A_2(\lambda_0) + sA_1(\lambda_0) + 3sA_3(\lambda_0) = 0$ (23)

$\vdots$

n 次 ($n \geq 2$):
- $A_n(\lambda_0) + sA_{n-1}(\lambda_0) + (n+1)sA_{n+1}(\lambda_0) = 0$ (24)

平面変位モデルの階層方程式 (21)-(24) は Q を Wiener 核を定める作用素行列、$\boldsymbol{A}$ をベクトル Wiener 核及び$\boldsymbol{N}$ を励振ベクトルとする次のような半無限次元行列方程式の形に書ける。

$$\boldsymbol{QA} = \boldsymbol{N} \tag{25}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & s & & & & & & & O \\ s & 1 & 2s & & & & & & \\ & s & 1 & 3s & & & & & \\ & & s & 1 & 4s & & & & \\ & & & s & 1 & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & ns & & \\ & & & & & s & 1 & (n+1)s & \\ & & & & & & s & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ O & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= [A_0(\lambda_0)\ \ A_1(\lambda_0)\ \ A_2(\lambda_0)\ \ \cdots\ \ A_n(\lambda_0)\ \ \cdots]^T &(27)\\ \boldsymbol{N} &= [-1\ \ s\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ \cdots]^T &(28)\end{aligned}$$

3.2.2 厳密解と近似解

拡張された Bass-Fuks 解 報告 [16] において筆者の一人は、一次元 Dirichlet 不規則表面の平面波散乱問題において、確率汎関数法による定式化で得られた階層方程式における'拡張された Bass-Fuks 解'を定義しその N = 2 の解を数値解析により求めた。本報告における平面変位モデルにおいても同様な意味で拡張された Bass-Fuks 解を導入する。すなわち、N(> 1) 次の Wiener 核までを考慮し $A_n \equiv 0$ $(n > \mathrm{N})$ とおいて半無限次元行列方程式 (25) を N + 1 次元行列方程式として扱う。しかしながら、実際に解く場合には行列形式ではなく従来のように高次オーダーから解く方が簡単である。N > 2 として (24) で $n = \mathrm{N}, A_{\mathrm{N}+1} = 0$ とおけば

$$A_{\mathrm{N}}(\lambda_0) = -sA_{\mathrm{N}-1}(\lambda_0) \tag{29}$$

を得る。これを用いて順次低次の式を解いていけばよいが、平面変位モデルの場合は、隣接三項漸化式である各オーダーの階層方程式を厳密に隣接二項漸化式に書き換えることができる。すなわち、$n-1, n$ 次の Wiener 核 $(2 \le n \le \mathrm{N})$ の関係は

$$A_n(\lambda_0) = \frac{-sA_{n-1}(\lambda_0)}{1 + Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)} \tag{30}$$

として厳密に定まる。ここで、因子 $Z_s^{(n)}(\lambda_0)$ は mass operator (正確には等価表面インピーダンス) に対応し

$$Z_s^{(n)}(\lambda_0) = \begin{cases} \dfrac{nM}{1 + Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)} & \mathrm{N} \ge n \ge 1 \\[2ex] 0 & n > \mathrm{N} \end{cases} \tag{31}$$

$$M = -s^2 = (k\sigma)^2 \sin^2\theta_i \ (> 0) \tag{32}$$

で定義される[†]。漸化式 (30) を用いて順次次数を落せば (22) は

$$A_1(\lambda_0) = \frac{s\{1 - A_0(\lambda_0)\}}{1 + Z_s^{(2)}(\lambda_0)} \tag{33}$$

となるからこれを (21) へ代入して 0 次 Wiener 核を得る。これより 1 次 Wiener 核を求め、更に高次オーダーへと漸化式 (30) を順次適用する。よって、最終的に拡張された Bass-Fuks 解を次のように得る。

$$A_0(\lambda_0) = -\frac{1 - Z_s^{(1)}(\lambda_0)}{1 + Z_s^{(1)}(\lambda_0)} \tag{34}$$

$$A_n(\lambda_0) = \begin{cases} -2(-s)^n \displaystyle\prod_{l=1}^{n+1} \frac{1}{1 + Z_s^{(l)}(\lambda_0)} & \mathrm{N} \ge n \ge 1 \\[2ex] 0 & n > \mathrm{N} \end{cases} \tag{35}$$

なお、$Z_s^{(n)}(\lambda_0)$ は非線形隣接二項漸化式 (31) から有限連分数の形で次のように明示的に書くことができる。

$$Z_s^{(n)}(\lambda_0) = \begin{cases} \cfrac{nM}{1 + \cfrac{(n+1)M}{1 + \cfrac{(n+2)M}{\begin{matrix} \vdots \\ 1 + \cfrac{}{\mathrm{N}M} \end{matrix}}}} & \mathrm{N} \ge n \ge 1 \\[2ex] 0 & n > \mathrm{N} \end{cases} \tag{36}$$

[†] これは本質的にオーダー n 毎に定義式が異なる mass operator であり、本来の不規則表面散乱の N = 2 の拡張された Bass-Fuks 解における mass operator の表現式からも要請されている結果である。これは不規則表面散乱に関する階層方程式の厳密解における mass operator のあるべき姿を示唆するものと考えられる。

厳密解 ($\mathrm{N}=\infty$ の拡張された Bass-Fuks 解) 拡張された Bass-Fuks 解において打ち切り項数のパラメータを $\mathrm{N}\to\infty$ とすれば (25) の厳密解を与える。結局、mass operator の定義式を次のように変更すればよい。

$$Z_s^{(n)}(\lambda_0) = \cfrac{nM}{1+\cfrac{(n+1)M}{1+\cfrac{(n+2)M}{1+\cdots}}}, \quad n \geq 1 \tag{37}$$

これは (36) における連分数が無限項になったものであり、complete mass operator を与える。当然のことながらこの厳密解は境界条件の誤差 (20) を零にする唯一の解である。

なお、通常 M は正数であるから有限連分数 (36) あるいは無限連分数 (37) は必ず有限確定値となる。実際には M が負の実数にならない限り複素数の M に対しても有限確定値を与える。

主要近似解 ここでは本来の不規則表面散乱に関する階層方程式の主要近似解 [16, 17] に対応する解を求める。主要近似の本質は、厳密評価が困難な積分項を無視して mass operator を導き出したところにあった。これは平面変位モデルの階層方程式に当てはめれば、作用素行列 Q を (26) の代わりに

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & s & & & & & & & O \\ s & 1 & s & & & & & & \\ & s & 1 & s & & & & & \\ & & s & 1 & s & & & & \\ & & & s & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & s & \\ & & & & & & s & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ O & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{38}$$

と置き換えることである。対応する Wiener 核は mass operator $Z_s^{(n)}(\lambda_0)$ の定義を以下のように変更するだけでよい。

$$Z_s^{(n)}(\lambda_0) = \begin{cases} \dfrac{M}{1+Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)} = \cfrac{M}{1+\cfrac{M}{1+\cfrac{M}{\cfrac{\vdots}{1+\cfrac{\vdots}{M}}}}} & 1 \leq n \leq \mathrm{N} \\ 0 & n > \mathrm{N} \end{cases} \tag{39}$$

打ち切り項数のパラメータを $\mathrm{N}\to\infty$ とすれば mass operator は連分数表示から明らかに

$$Z_s^{(1)}(\lambda_0) = Z_s^{(2)}(\lambda_0) = \cdots = Z_s^{(n)}(\lambda_0) = \cdots = Z_s^{(\infty)}(\lambda_0) \equiv Z_s(\lambda_0)$$

となりすべて共通の $Z_s(\lambda_0)$ で書ける。

$$Z_s(\lambda_0) = \frac{M}{1+Z_s(\lambda_0)} = \cfrac{M}{1+\cfrac{M}{1+\cfrac{M}{1+\cdots}}} \tag{40}$$

この共通の $Z_s(\lambda_0)$ が本来の不規則表面散乱において従来我々が得てきた mass operator に対応する。(40) より $Z_s(\lambda_0)$ は次の明示的な形となることが分かる。

$$Z_s(\lambda_0) = \frac{-1+\sqrt{1+4M}}{2} = \gamma(\lambda_0) M_D^{(\delta)}(\lambda_0) \tag{41}$$

ただし、$M_D^{(\delta)}(\lambda)$ は主要近似解 (N $=\infty$) に対する (極限)mass operator が満たす非線形積分方程式の δ-厳密解 [17] である。N $=\infty$ の主要近似 Wiener 核は (34) 及び (35) の mass operator を全て $Z_s(\lambda_0)$ で置き換えて

$$A_0(\lambda_0) = -\frac{1-Z_s(\lambda_0)}{1+Z_s(\lambda_0)} \tag{42}$$

$$A_n(\lambda_0) = -2(-s)^n \frac{1}{\{1+Z_s(\lambda_0)\}^{n+1}} \quad n \geq 1 \tag{43}$$

となる。

ハイブリッド解　定義から (拡張された)Bass-Fuks 解と主要近似解は N $=1$ の場合は一致し、これは不規則表面散乱においても全く同様である [16, 17]。しかし、N ≥ 2 に対しては明らかに差異を生じる。そこで現段階ではやや天下り的であるが、両者の中間となる近似解としてハイブリッド解を導入する。これは作用素行列 Q を

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & s & & & & & & & O \\ s & 1 & 2s & & & & & & \\ & s & 1 & 3s & & & & & \\ & & s & 1 & 4s & & & & \\ & & & s & 1 & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & (\mathrm{N}+1)s & & \\ & & & & & s & 1 & s & \\ & & & & & & s & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ O & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{44}$$

とした場合の Wiener 核を N(≥ 0) 次のハイブリッド解と定義する。これは N 次オーダー以下の階層方程式については拡張された Bass-Fuks 解と同様にそのまま評価し、N $+1$ 次オーダー以上の全ての階層方程式については主要近似で扱うことを意味する。得られる Wiener 核は (34) 及び (35) と同形で

$$A_0(\lambda_0) = -\frac{1-Z_s^{(1)}(\lambda_0)}{1+Z_s^{(1)}(\lambda_0)} \tag{45}$$

$$A_n(\lambda_0) = -2(-s)^n \prod_{l=1}^{n+1} \frac{1}{1+Z_s^{(l)}(\lambda_0)}, \quad n \geq 1 \tag{46}$$

と書けるが mass operator の定義が若干変更される。実際は以下のように置き換えればよい。

$$Z_s^{(n)}(\lambda_0) = \begin{cases} \dfrac{nM}{1+Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)} & 1 \leq n \leq \mathrm{N}+1 \\[2ex] \dfrac{M}{1+Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)} = Z_s(\lambda_0) & n > \mathrm{N}+1 \end{cases} \tag{47}$$

連分数の形で具体形を書けば以下のようである。

$$Z_s^{(n)}(\lambda_0) = \begin{cases} \cfrac{nM}{1+\cfrac{(n+1)M}{1+\cfrac{(n+2)M}{\begin{array}{c}\vdots\\ 1+\cfrac{(\mathrm{N}+1)M}{1+Z_s(\lambda_0)}\end{array}}}} & \mathrm{N}+1 \geq n \geq 1 \\ Z_s(\lambda_0) & n > \mathrm{N}+1 \end{cases} \tag{48}$$

以上、境界条件 (16) の自乗平均誤差を零にするように導かれた階層方程式に対する三種類の解として、拡張された Bass-Fuks 解、主要近似解及びハイブリッド解を求めたがこれらの Wiener 核は本質的に表示自体は変わらないことが示された。この三種類の解で異なる点は mass operator の定義でのみである。また、階層方程式を有限個かあるいは無限個用いるかも結局のところ mass operator に集約されることが分かった。これは、平面変位モデルであるため本来の不規則表面散乱の場合と直ちに比較は出来ないが階層方程式を有限個用いるのか無限個用いるのかは、従来の主要近似解においては同様に mass operetor の定義の相違 (正確には mass operator が満たす非線形積分方程式の評価の方法) のみに現れることが分かっている [17] 。

連分数 (mass operator) の計算　三種類の解における mass operator の振舞いの数値計算結果を図 2〜5に示す。図の横軸は $M=(k\sigma)^2$ の値である。図 2は (36) で定義される $Z_s^{(1)}(\lambda_0)$ の打ち切り次数 N を増した際の complete mass operator (37) への収束の様子を表したものである。次数 N が増加するにつれて $\mathrm{N}=\infty$ である complete mass operator へ漸近することが分かる。有限の N に対する $Z_s^{(1)}(\lambda_0)$ の図 2のような (微弱な) 振動の振舞いは、(34) で示される $A_0(\lambda_0)$ つまりコヒーレント反射係数に反映されるはずであるが、$M \approx 0.1$ 程度の変位が僅かな範囲では $\mathrm{N}=2$ 程度でも complete mass operator との差は小さい。見なせる。図 3は各オーダー毎の complete mass operator $Z_s^{(n)}(\lambda_0), (n=1,\cdots,8)$ の振舞いを $0 \leq M \leq 10$ の範囲で計算した結果である。オーダー n が増加するにつれて急峻に立ち上がる関数となっていることが分かる。次に図 4は (39) で定義する $Z_s^{(1)}(\lambda_0)$ で打ち切り次数 N を増した際の極限 mass operator (41) への収束の様子を表したもので、報告 [17] において議論した非線形積分方程式を零を初期値とする逐次近似解の振動現象に対応するものである。なお、比較のために complete mass operator も示したが $M \approx 0.1$ 程度の範囲では極限 mass operator との大きな差はない。しかし、M が大なれば complete mass operator との差が現れる。図 2と比較すると収束確定値への収束は大なる M に対しても良好で、急速に極限 mass operator (41) に近付く。主要近似解はこのような mass operator を持つため、$k\sigma$ が小さくない場合や高次の Wiener 核においては拡張された Bass-Fuks 解との差異が著しく増大することが予想される。次に、両者の中間である、(48) で定義されたハイブリッド解の mass operator $Z_s^{(1)}(\lambda_0)$ の次数 N を増した際の振舞いを図 5に示す。$\mathrm{N}\to\infty$ の極限では明らかに complete mass operator へ移行するはずであり、実際そのようになっている。図 2と比較すると次数 N が小さい場合でも complete mass operator への収束性が向上していることが分かる。これは拡張された Bass-Fuks 解では考慮しない高次オーダーの影響を (不十分ではあるが) 主要近似の形で取り入れていることによると考える。

コヒーレント反射係数　まず、コヒーレント反射係数の入射角依存性の計算結果を図 6 に示す。これは変位パラメータを $k\sigma=\pi/10$ $(M \approx 0.1)$ とした拡張された Bass-Fuks 解 $(\mathrm{N}=\infty)$、主要近似解 $(\mathrm{N}=\infty)$ 及び 2 次のハイブリッド解のコヒーレント反射係数である。ランダムな変位が存在しなければ反射係数は常に -1 となるはずであるが、ランダム変位の影響でコヒーレント反射は減少する。特に垂直入射 $(\theta_i = 90°)$ 時に最も影響を受け 16% ほど反射率が低下している。計算結果から、拡張された Bass-Fuks 解と 2 次のハイブリッド解との差は殆んど無いが、主要近似解の場合には若干コヒーレント反射の減少が大きいことが分かる。このような差は図 2,4,5におけるグラフ上では僅かに思われる mass operator の値の差が拡大されて現

れた結果である。同様に図7は $k\sigma = \pi/5$ ($M \approx 0.4$) として計算した結果であるが、より顕著にコヒーレント反射の減少が現れている。また、拡張された Bass-Fuks 解と2次のハイブリッド解に若干の差が生じていることが分かる。M が大なれば更に差を生じるものと思われる。

3.2.3 光学定理と境界条件の誤差

光学定理 (13) に関する誤差 OPT_{err} を以下のように定義する。

$$OPT_{err} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|A_n(\lambda_0)|^2 \tag{49}$$

拡張された Bass-Fuks 解 N 次までを考慮した場合の拡張された Bass-Fuks 解で n 次 Wiener 核までを用いた場合は

$$OPT_{err} = \frac{4n!\,M^n Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)}{\prod_{l=1}^{n+1} |1 + Z_s^{(l)}(\lambda_0)|^2} \tag{50}$$

となる。$k\sigma$ が十分小さければ $Z_s^{(n)}(\lambda_0) = O((k\sigma)^2)$ であるから光学定理の誤差は $O((k\sigma)^{2(n+1)})$ である。ここで拡張された Bass-Fuks 解で $n = \mathrm{N}$ とした場合は性質 $Z_s^{(\mathrm{N}+1)}(\lambda_0) = 0$ から $OPT_{err} = 0$ が示される。すなわち (25) を有限で打ち切って完全に解いた解は光学定理を満たし、それは揺らぎ $k\sigma$ に無関係に成り立つ。従って $\mathrm{N} \to \infty$ に対応する厳密解は光学定理を満たす †。

図8は拡張された Bass-Fuks 解 ($\mathrm{N} = n = 1, 2, 4, 8, \infty$) の光学定理の揺らぎ依存性である。なお、以下の光学定理と誤差に関する数値計算においては入射角は $\theta_i = 90°$ (垂直入射) に固定する。(50) で示したように全ての Wiener 核を用いれば光学定理は揺らぎに無関係に成立するが、計算結果もそれを示しており後に示す主要近似解の結果と比較すれば明らかに様相が異なる。揺らぎが増加するのに従ってコヒーレント反射電力とインコヒーレント反射電力は互いに減少及び増加する。その変動の様子は N によって若干異なるが、N の増加につれて厳密解である $\mathrm{N} = \infty$ へと収束して行く様が分かる。$\mathrm{N} = 4, 8$ はかなり厳密解のそれに近くなっている。N に無関係に同じと見なせるのは揺らぎが $\sigma \approx 0.025$ [波長単位](以下略す) 程度までであり、$\sigma \approx 0.05$ では $\mathrm{N} = 2$、$\sigma \approx 0.075$ では $\mathrm{N} = 4$ まで考慮する必要のあることが分かる。図9は $\mathrm{N} = \infty$ の拡張された Bass-Fuks 解つまり厳密解で最高次数 n の Wiener 核までを使用した時の光学定理を示す。有限個の Wiener 核では光学定理は厳密には成立しないが、実際には揺らぎの程度に応じて必要とされる Wiener 核の最高次数 n が定まり、その様は図8と同様になっている。厳密解では (既に定まっているため) コヒーレント反射電力は変わらないがインコヒーレント反射電力は次数 n の増加に従って増加しコヒーレント散乱電力の減少分を補おうとする。そのように図9を見れば揺らぎの程度による各次数 Wiener 核の寄与の様子が分かる。

次に境界条件に関する誤差は N 次までを考慮した拡張された Bass-Fuks 解で n 次 Wiener 核までを用いた場合以下で与えられる。

$$\langle |e(x,\omega)|^2 \rangle = n!|A_n(\lambda_0)|^2 \{(n+1)M + |Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)|^2\} = O((k\sigma)^{2(n+1)}) \tag{51}$$

なお、厳密解は (25) を零にするよう決定されているので全ての Wiener 核を用いれば誤差は無い。一方、拡張された Bass-Fuks 解の場合は全ての Wiener 核を使用しても性質 $Z_s^{(\mathrm{N}+1)}(\lambda_0) = 0$ 及び (51) より

$$\langle |e(x,\omega)|^2 \rangle = (\mathrm{N}+1)!M|A_{\mathrm{N}}(\lambda_0)|^2 = O((k\sigma)^{2(\mathrm{N}+1)}) \tag{52}$$

に従う誤差は必ず残ることになる。図10に数値計算結果を示す。いずれも揺らぎにある閾値が存在し、それを越えると誤差が目立つような振舞いを呈している。$\mathrm{N} = 1, 2, 4, 8$ に対してはそのような閾値は $\sigma \approx 0.025, 0.05, 0.075, 0.1$ になっており、それを越えると誤差が立ち上がり始め以降増大していく。(しかし、光学定理は成立している。)

† 正確には数学的帰納法を用いて証明する。

主要近似解　主要近似解の場合は 1 次 Wiener 核までを用いた場合の誤差は

$$OPT_{err} = \frac{4MZ_s^{(2)}(\lambda_0)\}}{|1+Z_s^{(l)}(\lambda_0)|^2|1+Z_s^{(2)}(\lambda_0)|^2} = O((k\sigma)^4) \tag{53}$$

となり、拡張された Bass-Fuks 解と同形である。これは 1 次オーダーの式までを厳密に扱っていることによるものである。一方 n ($\mathrm{N} \geq n \geq 2$) 次の Wiener 核までを用いた場合の誤差は

$$\begin{aligned} OPT_{err} &= \frac{4M}{|1+Z_s^{(l)}(\lambda_0)|^2|1+Z_s^{(2)}(\lambda_0)|^2} \cdot \frac{M}{|1+Z_s^{(3)}(\lambda_0)|^2} \\ &\cdot \left[(1-2!) + \frac{M}{|1+Z_s^{(4)}(\lambda_0)|^2}\left[\cdots + \frac{M}{|1+Z_s^{(n)}(\lambda_0)|^2}\right.\right. \\ &\cdot \left.\left.\left[\{1-(n-1)!\} + \frac{M}{|1+Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)|^2}\{(1-n!)+Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)\}\right]\cdots\right]\right] = O((k\sigma)^4) \end{aligned} \tag{54}$$

である。注意すべきことは項数に無関係に $O((k\sigma)^4)$ となっていることである。これは主要近似による誤差の影響が高次の Wiener 核を用いたとしても残ることによる。図 11は主要近似解 ($\mathrm{N}=\infty$) の光学定理の揺らぎ依存性である。n は用いた Wiener 核の最高次数である。揺らぎが $\sigma \approx 0.025$ 程度までは光学定理はほぼ成立していると見なせるがこの場合インコヒーレント反射電力は 1 次 Wiener 核の寄与が支配的であり十分である。それよりも揺らぎが増すと 2 次以上の寄与が現れ始めるが光学定理は成立しなくなる。特に、揺らぎが $\sigma \approx 0.075$ を越えると顕著である。n が増してもコヒーレント反射電力は全く変わらないがインコヒーレント反射電力は増加する一方であるから、数値的にも光学定理は全く成り立たなくなる。これは (54) にも示したように誤差が蓄積するからである。

境界条件の自乗平均誤差は N 次まで考慮した主要近似解で $n(\leq \mathrm{N})$ 次までの Wiener 核を用いた場合

$$\langle|e(x,\omega)|^2\rangle = M\sum_{l=1}^{n-1} l^2 l!|A_{l+1}(\lambda_0)|^2 + n!|A_n(\lambda_0)|^2\{(n+1)M + |Z_s^{(n+1)}(\lambda_0)|^2\} \tag{55}$$

となって $n \geq 2$ では一般に $O((k\sigma)^6)$ である ($n=1$ の場合は $O((k\sigma)^4)$)。(55) の右辺第一項は主要近似したことによる誤差項であるが、光学定理の場合と同様に高次の Wiener 核を用いたとしても残る。特に、$\mathrm{N}=\infty$ の主要近似解を n 次の Wiener 核までで打ち切って用いる時の誤差は

$$\langle|e(x,\omega)|^2\rangle = M\sum_{l=1}^{n-1} l^2 l!|A_{l+1}(\lambda_0)|^2 + n!|A_n(\lambda_0)|^2\{(n+1)M + |Z_s(\lambda_0)|^2\} \tag{56}$$

となる。図 12は主要近似解 ($\mathrm{N}=\infty$) の自乗平均誤差の揺らぎ依存性である。揺らぎが $\sigma \approx 0.025$ 程度までは十分小さいと言えるが、そこを越えると誤差は増加し始め $\sigma \approx 0.06$ を境にして急激に増加する。また、揺らぎがそのような閾値よりも小さいと次数 n を増すに従って極めて僅かながら誤差の減少が見られるが、拡張された Bass-Fuks 解の場合と比較すれば誤差は大きい。逆に閾値よりも大きいと次数 n を増すに従って誤差はより急激に増加し、光学定理の結果 (図 11) と同様に n が増せば増す程、誤差が増大する。不規則表面散乱の場合に文献 [16] において主要近似解の誤差についてオーダーとしての議論を行なったが、その極限である平面変位モデルでは主要近似解は定量的な意味でも非常に誤差の大きい解と言える。つまり、誤差が十分小さく無視できるのはインコヒーレント部分が 1 次の Wiener 核で記述できる程度までで 2 次 Wiener 核の寄与が関与し始める場合にはもはや主要近似は定量的な意味では不適当である。これは表面粗さが $\sigma \approx 0.05$ 程度で小さくとも不規則表面の相関距離が大きい滑らかな不規則表面の場合でさえも主要近似解は十分でないことを示唆する。

ハイブリッド解　N 次のハイブリッド解で N 次 Wiener 核までを用いる場合は、拡張された Bass-Fuks 解と定性的には同じ誤差オーダーを示し

$$OPT_{err} = \frac{4n!\ M^{\mathrm{N}} Z_s^{(\mathrm{N}+1)}(\lambda_0)}{\prod_{l=1}^{\mathrm{N}+1} |1 + Z_s^{(l)}(\lambda_0)|^2} \tag{57}$$

となる。実質的には mass operator の差異が定量的な意味で現れるはずである。図 13は N 次のハイブリッド解 ($\mathrm{N} = 1, 2, 4, 8$) に対する光学定理の計算結果である。ハイブリッド解は解析的には光学定理を満たさない。しかし、次数 N を上げるに従って大きな揺らぎに対しても光学定理が実質上成立することが分かる。図 8と同様に、$\mathrm{N} = 1, 2, 4$ の解に対しては $\sigma \approx 0.025, 0.05, 0.075$ 程度までなら光学定理を満たすと見なせる。

N 次のハイブリッド解を N 次 Wiener 核まで用いる時の誤差は

$$\langle |e(x,\omega)|^2 \rangle = (\mathrm{N}+1)! |A_{\mathrm{N}}(\lambda_0)|^2 \{M + (\mathrm{N}+1)|Z_s(\lambda_0)|^2\} = O((k\sigma)^{2(\mathrm{N}+1)}) \tag{58}$$

で与えられる。仮に $\mathrm{N} = 2$ のハイブリッド解の場合は $O((k\sigma)^6)$ となるから境界条件を $(k\sigma)^2$ のオーダーまで満たすことになる。図 14は、N 次のハイブリッド解 ($\mathrm{N} = 1, 2, 4, 8$) に対する計算結果である。定性的な性質は図 10と同じであることが分かる。定量的にはハイブリッド解の方が定数倍だけ誤差が小さくなる結果が得られている。これは、ハイブリッド解では高次オーダーの影響を多少なりとも取り入れているためと考える。

以上のようにハイブリッド解は拡張された Bass-Fuks 解のように解析的に光学定理を満たす解ではないが境界条件をも併せて考慮すると、1 次近似の境界条件 (16) に対する厳密解としては良い近似解なっていると結論できる。平面変位モデルでは問題は無いが、本来の不規則表面散乱においては階層方程式を有限オーダーで打ち切って解く場合には、その影響で mass operator に絡む数値計算上の困難を生じることが分かっており [17]、その非物理的な振舞いと拡張された Bass-Fuks 解を数値的に求める場合の実際上の困難を指摘した [16]。ハイブリッド解はそのような困難を回避する目的で将来的に導入するが、平面変位モデルの場合に良好な振舞いが得られたことは意義深い。

3.3　1 次近似の境界条件の解の収束性

光学定理の誤差と境界条件の自乗平均誤差　拡張された Bass-Fuks 解 (または厳密解) で用いる Wiener 核の最高次数と誤差の関係についての計算結果を図 15～17に示す。まず、図 15は拡張された Bass-Fuks 解の打ち切り項数 N と自乗平均誤差との関係で揺らぎ $k\sigma = \pi/20, \pi/10, \pi/5$ に対してプロットしたものである。図より特に大きな揺らぎに対しては最初は自乗平均誤差はゆっくりと減少し、次第に急速に減少していくことが分かる。次に、図 16及び 17は厳密解における Wiener 核の次数 n と光学定理の誤差及び境界条件の自乗平均誤差の関係である。図から明らかなように図 15の場合と同様な傾向を示しており、次数を増すに従って収束していくことが分かる。

反射係数の自乗平均誤差　1 次近似の境界条件 (16) に対しては $\mathrm{N} = \infty$ の拡張された Bass-Fuks 解が光学定理 (13) を満たしかつ境界条件の自乗平均誤差 (18) を零にする唯一の解となっている。よってこれを (16) に対する厳密解と見なしてその他の解の近似精度を計算する。これは光学定理や境界条件の自乗平均誤差よりも直接的な誤差の検証である。$\mathrm{N} = \infty$ の拡張された Bass-Fuks 解に対しては (15) は (13),(34),(35) 及び (37) を用いて更に

$$E^2 = 2 - 2\mathrm{Re}\left\{-\frac{1 - Z_s^{(1)}(\lambda_0)}{1 + Z_s^{(1)}(\lambda_0)} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n! A'_n(\lambda_0)(-s^*)^n \prod_{l=1}^{n+1} \frac{1}{1 + Z_s^{(l)}(\lambda_0)}\right\} \tag{59}$$

と書き直すことが出来る。図 18～23に (59) を用いた反射係数の自乗平均誤差の計算結果を示す。まず、図 18は主要近似解 ($\mathrm{N} = \infty$) であるが、境界条件の誤差の図 12を拡大したかのような振舞いとなっている。反

射係数の自乗平均誤差が 0.0025 程度ならこれは反射係数自体でおよそ 5% 異なることになるがそのように見ると $\mathrm{N}=1,2,4,8$ に対しては $\sigma\approx 0.02\sim 0.03$ 程度で限界である。これは今まで見てきた評価をほぼ一致する。同様に、図 19及び 20は拡張された Bass-Fuks 解とハイブリッド解の結果である。境界条件の誤差等の振舞いと同じ傾向が見られる。扱う次数が増加すればその分誤差が小さい揺らぎの範囲が広がる。また、定量的にはハイブリッド解の方が若干小さい誤差を与えていることが分かる。次に図 21,22及び 23は主要近似解、拡張された Bass-Fuks 解 (または厳密解) で用いる Wiener 核の最高次数と誤差の関係についての $k\sigma=\pi/20,\pi/10,\pi/5$ に対する計算結果である。主要近似解では揺らぎが小さい $\sigma=0.025$ の場合は次数を増せば僅かに誤差は減少しほぼ 0.0001 程度 (反射係数自体では 1%) でしばらくは安定するが、次数が 100 辺りから増加に転じる。これは揺らぎが増せばより顕著に現れる。そして $\sigma\approx 0.1$ ではもはや誤差が増す一方である。逆に、収束している解である拡張された Bass-Fuks 解とハイブリッド解では次数を増すにつれて急速に収束していることが分かる。

3.4 Hermite 多項式に関する一積分公式

厳密解等の導出は波数 k が実数であるとして考察したが媒質が損失を持つ $\mathrm{Im}\,k>0$ の場合も合理的であるからそのような複素波数に対しても成り立つ。よって (18),(33),(34) 及び (37) をまとめることで次のような Hermite 多項式に関する一積分公式を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-s\epsilon}{1+s\epsilon}G(\epsilon;1^2)d\epsilon = \frac{1-M^{(1)}(s)}{1+M^{(1)}(s)} \tag{60}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-s\epsilon}{1+s\epsilon}H_n(\epsilon)G(\epsilon;1^2)d\epsilon = 2n!(-s)^n\prod_{l=1}^{n+1}\frac{1}{1+M^{(l)}(s)} = \frac{2(-1)^n\prod_{l=1}^{n}M^{(l)}(s)}{s^n\{1+M^{(1)}(s)\}},\quad n\geq 1 \tag{61}$$

$$M^{(n)}(s) = \frac{-ns^2}{1+M^{(n+1)}(s)},\quad n\geq 1 \tag{62}$$

ただし、s は $-\pi/2\leq \arg s<0$ あるいは $s=0$ を満たす複素数である。(62) より性質

$$M^{(n)}(-s)=M^{(n)}(s),\quad \{M^{(n)}(s)\}^*=M^{(n)}(s^*) \tag{63}$$

が分かる。(63) は s が実数 (零は除く) でない時には意味を持つ †。これと性質 $H_n(-\epsilon)=(-1)^nH_n(\epsilon)$ を用いて解析接続することにより公式 (60)-(62) の成立する s は $0<|\arg s|<\pi$ 及び $s=0$ となる。性質 (10) を用いれば (60) 及び (61) より次の関係が容易に得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\epsilon}{1+s\epsilon}G(\epsilon;1^2)d\epsilon = \frac{M^{(1)}(s)}{1+M^{(1)}(s)},\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+s\epsilon}G(\epsilon;1^2)d\epsilon = \frac{1}{1+M^{(1)}(s)} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s\epsilon}{1+s\epsilon}H_n(\epsilon)G(\epsilon;1^2)d\epsilon &= -n!(-s)^n\prod_{l=1}^{n+1}\frac{1}{1+M^{(l)}(s)}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+s\epsilon}H_n(\epsilon)G(\epsilon;1^2)d\epsilon &= n!(-s)^n\prod_{l=1}^{n+1}\frac{1}{1+M^{(l)}(s)}\end{aligned} \tag{65}$$

特に (64) 及び (65) における二つ目の式が本質的であると考える。

4 2次を考慮した近似境界条件による Wiener 核

前節では 1 次近似の境界条件 (16)) に対する厳密解を得たがこれはもちろん厳密な (4) に対する解ではない。揺らぎが大なれば (16)) は (4) のよい近似とは見なせなくなると予想されるから、より高次の近似を考

†実際にはある実数については存在しそうであるが明らかではない。しかしながら、その場合は公式 (60)-(62) は (18) の積分が存在しないため意味を失う。

慮する必要がある。そこで、ここでは (4) を Taylor 展開の2次までで近似した境界条件

$$\left[\phi(x,z,\omega)+(\sigma\epsilon)\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,z,\omega)+\frac{(\sigma\epsilon)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(x,z,\omega)\right]\Bigg|_{z=0}=0 \tag{66}$$

を考察する。対応するランダム反射係数を $\Gamma_2(\omega|\lambda_0)$ で表す。

4.1 直接計算による Wiener 核

(5),(8) 及び (66) より

$$\Gamma_2(\omega|\lambda_0)=-\frac{1-s\epsilon+(s\epsilon)^2/2}{1+s\epsilon+(s\epsilon)^2/2} \tag{67}$$

を得るから Wiener 核を求める計算式 [14] より

$$A_n(\lambda_0) \;=\; -\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-s\epsilon+(s\epsilon)^2/2}{1+s\epsilon+(s\epsilon)^2/2}H_n(\epsilon)G(\epsilon;1^2)d\epsilon,\quad n\geq 0 \tag{68}$$

が得られる。

4.2 階層方程式による解法

同様に近似境界条件 (66) を ω に関する確率方程式と見なして等号はアンサンブル自乗平均 $\langle|e(x,\omega)|^2\rangle=0$ の意味で扱う。$(\sigma\epsilon)^2=\sigma^2H_1(\epsilon)H_1(\epsilon)(=\sigma^2\{H_2(\epsilon)+1\})$ に注意して次の公式を用意する。

$$\{H_1(\epsilon)\}^2H_n(\epsilon)=H_{n+2}(\epsilon)+(2n+1)H_n(\epsilon)+n(n-1)H_{n-2}(\epsilon),\quad n\geq 0 \tag{69}$$

(69) はある次数 n に対して $n-2,n+2$ と二つずれた次数の寄与を表す式となっている。よって境界条件の誤差は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\langle|e(x,\omega)|^2\rangle \;=\;& \left|\left(1+\frac{s^2}{2}\right)\{1+A_0(\lambda_0)\}+sA_1(\lambda_0)+s^2A_2(\lambda_0)\right|^2\\ &+1!\left|\left(1+\frac{3s^2}{2}\right)A_1(\lambda_0)-s\{1-A_0(\lambda_0)\}+2sA_2(\lambda_0)+3s^2A_3(\lambda_0)\right|^2\\ &+2!\left|\left(1+\frac{5s^2}{2}\right)A_2(\lambda_0)+sA_1(\lambda_0)+3sA_3(\lambda_0)+\frac{s^2}{2}\{1+A_0(\lambda_0)\}+6s^2A_4(\lambda_0)\right|^2\\ &+\sum_{n=3}^{\infty}n!\left|\left\{1+\frac{(2n+1)s^2}{2}\right\}A_n(\lambda_0)+\frac{s^2}{2}A_{n-2}(\lambda_0)+sA_{n-1}(\lambda_0)\right.\\ &\qquad\left.+(n+1)sA_{n+1}(\lambda_0)+\frac{(n+2)(n+1)s^2}{2}A_{n+2}(\lambda_0)\right|^2\end{aligned} \tag{70}$$

対応する階層方程式は

0 次:

- $$\left(1+\frac{s^2}{2}\right)\{1+A_0(\lambda_0)\}+sA_1(\lambda_0)+s^2A_2(\lambda_0)=0 \tag{71}$$

1 次:

- $$\left(1+\frac{3s^2}{2}\right)A_1(\lambda_0)-s\{1-A_0(\lambda_0)\}+2sA_2(\lambda_0)+3s^2A_3(\lambda_0)=0 \tag{72}$$

2 次:

- $$\left(1+\frac{5s^2}{2}\right)A_2(\lambda_0)+sA_1(\lambda_0)+3sA_3(\lambda_0)+\frac{s^2}{2}\{1+A_0(\lambda_0)\}+6s^2A_4(\lambda_0)=0 \tag{73}$$

$\vdots$

n 次 $(n \geq 3)$:

- $$\left\{1+\frac{(2n+1)s^2}{2}\right\}A_n(\lambda_0)+\frac{s^2}{2}A_{n-2}(\lambda_0)+sA_{n-1}(\lambda_0)$$
$$+(n+1)sA_{n+1}(\lambda_0)+\frac{(n+2)(n+1)s^2}{2}A_{n+2}(\lambda_0)=0 \tag{74}$$

階層方程式 (71)-(74) は一般に隣接五項間漸化式となることに注意されたい。(25) の形に書けば Q 及び N は

$$Q=\begin{bmatrix} 1+\frac{s^2}{2} & s & s^2 & & & & O \\ s & 1+\frac{3s^2}{2} & 2s & 3s^2 & & & \\ \frac{s^2}{2} & s & 1+\frac{5s^2}{2} & 3s & 6s^2 & & \\ & \frac{s^2}{2} & s & 1+\frac{7s^2}{2} & 4s & 10s^2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{s^2}{2} & s & 1+\frac{(2n+1)s^2}{2} & (n+1)s & \frac{(n+2)(n+1)s^2}{2} \\ O & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{75}$$

$$N = \left[-\left(1+\frac{s^2}{2}\right) \ \ s \ \ -\frac{s^2}{2} \ \ 0 \ \cdots \ 0 \ \cdots\right]^T \tag{76}$$

$O(s^2)$ の項を無視した場合は 1 次近似の境界条件の作用素行列 (26) に移行することに注意されたい。1 次近似の境界条件における拡張された Bass-Fuks 解と同様の概念で半無限次元行列方程式を $\mathrm{N}+1$ 次元で打ち切って解を求めるが、mass operator を介在させた見やすい解を解析的に導くことは困難であり実際の評価においては数値的に解かざるを得ないようである。これは本来の不規則表面散乱で (66) に相当する 2 次近似の境界条件を用いた場合の解析の困難さを示唆する。

2 次近似と 1 次近似の境界条件との決定的な違いは有限次元で打ち切って解いたとしても光学定理を (少なくとも解析的な式の上では) 満たしていないことである。例えば、2 次オーダーで打ち切って $s=i$ とおくと (25) の形の行列方程式は具体的に

$$\begin{bmatrix} 1/2 & i & -1 \\ i & -1/2 & 2i \\ -1/2 & i & -3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0(\lambda_0) \\ A_1(\lambda_0) \\ A_2(\lambda_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ i \\ 1/2 \end{bmatrix} \tag{77}$$

となる。これを解くと

$$\begin{bmatrix} A_0(\lambda_0) \\ A_1(\lambda_0) \\ A_2(\lambda_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25/17 \\ -20i/17 \\ 16/17 \end{bmatrix}, \quad |A_0(\lambda_0)|^2+1!|A_1(\lambda_0)|^2+2!|A_2(\lambda_0)| = 1537/17^2 \approx 5.32 \neq 1 \tag{78}$$

となり光学定理は全く満たされない。これは不規則表面散乱においても同様な性質であると予想する。次に、境界条件の誤差であるが簡単のため $\mathrm{N}+1(>4)$ 次元で打ち切った行列方程式で求めた Wiener 核を全て用いた場合を考える。(70) より

$$\begin{aligned}\langle|e(x,\omega)|^2\rangle &= (\mathrm{N}+1)!\left|\frac{s^2}{2}A_{\mathrm{N}-1}(\lambda_0)+sA_{\mathrm{N}}(\lambda_0)\right|^2+(\mathrm{N}+2)!\left|\frac{s^2}{2}A_{\mathrm{N}}(\lambda_0)\right|^2 \\ &= O((k\sigma)^{2(\mathrm{N}+1)})\end{aligned} \tag{79}$$

となり、1次近似の境界条件の場合 (52) と同様な誤差オーダーを示している。実際には数値計算で光学定理の成立程度及び境界条件の誤差を調べる必要がある。

光学定理と境界条件の誤差　N + 1 次元で打ち切った行列方程式を数値的に解いて得た Wiener 核を用いて光学定理を計算した結果 ($N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$) を図 24に示す。1次近似の場合とは異なり打ち切り次数 N までを完全に解いたとしても完全には光学定理は満たしていないが、N が増えるにつれて光学定理は数値的に非常に良く満たされていく様子が分かる。図より N を定めた場合、揺らぎの閾値が存在しそれを越えない範囲では極めてよく光学定理は成り立つが、一方、閾値を越えると急激に成立しなくなることが分かる。例えば、$N = 2, 4, 8$ に対しては $\sigma \approx 0.03, 0.06, 0.1$ を越えるとコヒーレント及びインコヒーレント反射電力共に大きくずれていく。図の揺らぎの範囲では $N = 64$ で収束状態と見なせる。また、対応する境界条件の自乗平均誤差 (68) を図 25 に示す。光学定理と同様な閾値までは誤差は極めて少なくいがそれを越えると極めて急峻に誤差が増大しており、1次近似の境界条件の場合の図 10と比較すればより強調された振舞いを呈していると言える。$N = 16$ だけはやや特異な振舞いであるが一般的には N が大なれば誤差は小さくなっていく。この計算結果より $N \to \infty$ での厳密解は光学定理を満たす解となることが予想される。そこで、(68) に従う直接計算により求めた n 次までの Wiener 核を用いて $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ に対し光学定理と境界条件の自乗平均誤差を計算した結果を図 26及び 27に示す。図 26は図 9に対応するが、全く同様な傾向で n が増すにつれて光学定理を満たしていくが、$n = 16$ で図の様な揺らぎに対しては収束に達しているようである。1次近似の境界条件の場合と比較するとコヒーレント及びインコヒーレント反射電力の増減の振舞いが異なっており、2次近似の場合の方が揺らぎに関して速く減少もしくは増加している。境界条件の誤差については図 27のように次数 n の増加と共に減少していく。

反射係数の自乗平均誤差　(68) に基づく Wiener 核は光学定理を満たし、境界条件の自乗平均誤差 (71) を零にする解となっているはずであるから1次近似の場合と同様に反射係数の自乗平均誤差を計算する。図 {fig:b2.N=n.Gamma.err.sig=0to0.125 は階層方程式の打ち切り項数との関係であり、1次の場合と比較すれば小さいと頃はよりいっそう小さく、それを外れると急激に増加しており誤差の小さい揺らぎの範囲もやや大きい。これらは境界条件の誤差と同様な結果である。また、図 29は $k\sigma = \pi/20, \pi/10, \pi/5$ における階層方程式の打ち切りオーダーとの関係であるが、1次近似の場合と比較するとより急速に誤差が減少し収束することが分かる。ただ、やや乱れた振舞いが見られるのと揺らぎに無関係に誤差は一定値 ($\approx 10^{-8}$) に到達しているが、これは比較対象である厳密な Wiener 核自身も数値積分で得ていることによるものと考える。

4.3　一拡張された近似境界条件による Wiener 核

厳密な境界条件を平均面 $z = 0$ 上で Taylor 展開しておく。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma\epsilon)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \phi(x, z, \omega)\bigg|_{z=0} = 0 \tag{80}$$

上式において展開の1次項まで採るのが近似境界条件 (16) であり、2次項まで採るのが近似境界条件 (66) である。従って、展開の全ての項を考慮すればそれは結局厳密な境界条件を扱うのに等しい。しかしここでは1次近似の境界条件を一拡張したモデル境界条件

$$\left[\phi(x, z, \omega) + (\sigma\epsilon)\frac{\partial}{\partial z}\phi(x, z, \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sigma^{2n} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{2n} \phi(x, z, \omega)\right]\bigg|_{z=0} = 0 \tag{81}$$

を考える。これは (80) において2次以上の項に関して

$$\langle(\sigma\epsilon)^n\rangle = \begin{cases} (n-1)!!\sigma^n & n\text{: even} \\ 0 & n\text{: odd} \end{cases} \tag{82}$$

の置き換えを行ない更に係数に一般性を持たせた一つの近似境界条件である。

(5),(8) 及び (81) よりランダム反射係数 $\Gamma_e(\omega|\lambda_0)$ の具体形は

$$\Gamma_e(\omega|\lambda_0) = -\frac{g(s)-s\epsilon}{g(s)+s\epsilon}, \quad g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{2n} \tag{83}$$

である。特に $g(s) \neq 0$ の場合に (83) を

$$\Gamma_e(\omega|\lambda_0) = -\frac{1-s\epsilon/g(s)}{1+s\epsilon/g(s)} \tag{84}$$

と変形すれば、これは 1 次近似の境界条件での反射係数 (17) そのものである。すなわち、モデル境界条件 (81) は偶関数 $g(s)$ の任意性の形で全て表現しうる †。例えば $g(s)=1$ が 1 次近似の境界条件に対応する。(80) で (82) の置き換えを行なった場合は $a_n = 1/(2n)!!$ に対応するがこの時は

$$g(s) \doteq e^{s^2/2} \tag{85}$$

である。モデル境界条件 (81) に対する各種の結果は、1 次近似の境界条件に対する結果の全て、つまり、解法手順や厳密解または各種の近似解及びそれらの誤差等の表現での純虚数パラメータ s を $s/g(s)$ に置き換えてしまえばよい。なお、$g(s)=0$ の場合はモデル境界条件 (81) は

$$(\sigma\epsilon)\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,z,\omega)\bigg|_{z=0} = 0 \tag{86}$$

となりこの場合は Gauss ランダム変数 ϵ に無関係となり $\Gamma(\omega|\lambda_0)=-1$ であるが、これは Wiener 核を直接求める計算式 (18) の $|\mathrm{Im}\ s| \to +\infty$ における極限操作からも得られる ‡。平面変位モデルにおけるモデル境界条件 (81) は 1 次近似の境界条件と同様に光学定理を満たす境界条件であることが分かったが、これが通常の不規則表面散乱の場合にも当てはまるかは興味のあるところであるが今回は論じていない。

5 厳密な境界条件による Wiener 核

5.1 直接計算

平面変位モデルでは厳密な境界条件に対するランダム反射係数自体を求めることが出来る。(5),(4) 及び (8) より

$$\Gamma(\omega|\lambda_0) = -e^{2\sigma\gamma(\lambda_0)\epsilon} = -e^{-2s\epsilon} \tag{87}$$

を得るから Wiener 核を求める計算式 [14] より

$$\begin{aligned} A_n(\lambda_0) &= -\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2s\epsilon} H_n(\epsilon) G(\epsilon;1^2)d\epsilon & (88)\\ &= -\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(2is)\epsilon} H_n(\epsilon) G(\epsilon;1^2)d\epsilon & (89)\end{aligned}$$

が得られる。(89) は $H_n(\epsilon)G(\epsilon;1^2)$ の (パラメータ $2is$ の複素)Fourier 変換を表す。従って、任意の複素数 α に関して成り立つ Hermite 多項式に関する次の積分公式

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\epsilon} H_n(\epsilon) G(\epsilon;1^2)d\epsilon &= e^{(n\pi i-\alpha^2)/2}\alpha^n & (90)\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\epsilon} \epsilon^n G(\epsilon;1^2)d\epsilon &= e^{(n\pi i-\alpha^2)/2} H_n(\alpha) & (91)\end{aligned}$$

†条件 $g(s)+s\epsilon \neq 0$ を仮定する。

‡階層方程式から求めた Wiener 核で極限移行しても得られるはずである。

を用いれば Wiener 核の厳密解が得られる。もしくは、確率 FM 変調の公式 [14] を (87) に直接適用してもよい。

$$A_n(\lambda_0) = -\frac{1}{n!}e^{2s^2}(-2s)^n \tag{92}$$

次の和を計算すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!|A_n(\lambda_0)|^2 = e^{4(|s|^2+\mathrm{Re}\ s^2)} \tag{93}$$

となるから s が純虚数なる時 Wiener 核は Perseval の等式を満足する。従って、s が純虚数となるため平面変位モデルでは光学定理が成立する。

なお、反射係数 $\Gamma(\omega|\lambda_0)$ を次のように書き直せば

$$\Gamma(\omega|\lambda_0) = -\frac{e^{-s\epsilon}}{e^{s\epsilon}} = -\frac{1 - s\epsilon + (s\epsilon)^2/2! - (s\epsilon)^3/3! + \cdots}{1 + s\epsilon + (s\epsilon)^2/2! + (s\epsilon)^3/3! + \cdots} \tag{94}$$

(17) 及び (67) との関連が分かる。従って、$k\sigma \ll 1$ ならば (94) のよい近似であることが期待できる。

5.2 階層方程式による解法

境界条件 (4) 自身を ω に関する確率方程式と見なして等号をアンサンブル自乗平均 $\langle|e(x,\omega)|^2\rangle = 0$ の意味で扱う。確率 FM 変調の公式 及び Wiener 展開の二重積に関する公式 [13, 18] を用いれば

$$\begin{aligned}\langle|e(x,\omega)|^2\rangle &= \left\langle\left|e^{-s\epsilon} + e^{s\epsilon}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda_0)H_n(\epsilon)\right|^2\right\rangle & (95)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\left|\frac{(-s)^n}{n!} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\lambda_0)\sum_{l=0}^{\min(m,n)}\frac{{}_m\mathrm{C}_l}{(n-l)!}s^{m+n-2l}\right|^2 & (96)\end{aligned}$$

となる。よって対応する階層方程式は

n 次 $(n \geq 0)$:

$$\bullet\quad \frac{(-s)^n}{n!} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\lambda_0)\sum_{l=0}^{\min(m,n)}\frac{{}_m\mathrm{C}_l}{(n-l)!}s^{m+n-2l} = 0 \tag{97}$$

である。(25) の形式で書くなら

$$Q = (Q_{pq}),\quad Q_{pq} = \sum_{l=0}^{\min(p,q)-1}\frac{{}_{q-1}\mathrm{C}_l}{(p-l-1)!}s^{p+q-2(l+1)},\quad p,q > 0 \tag{98}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & \cdots \\ s & 1+s^2 & 2s+s^3 & 3s^2+s^4 & \\ \frac{s^2}{2} & s+\frac{s^3}{2} & 1+2s^2+\frac{s^4}{2} & 3s+3s^3+\frac{s^5}{2} & \\ \frac{s^3}{3!} & \frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{3!} & s+s^3+\frac{s^5}{3!} & 1+3s^2+\frac{3s^4}{2}+\frac{s^6}{3!} & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots\ \ddots\ \ddots \end{bmatrix} \tag{99}$$

$$\boldsymbol{N} = [-1\ \ s/1!\ \ -s^2/2!\ \ \cdots\ \ -(-s)^n/n!\ \ \cdots]^T \tag{100}$$

となる。作用素行列 Q 及び 励振ベクトル N 共に要素が全て埋まっていることに注目されたい。これを本来の不規則表面散乱において行なうのが不規則表面の Green の定理と Wiener 展開を用いた厳密な定式化 [11] である。

行列方程式は結局 N+1 次元で打ち切って解を求めるが、2次近似の境界条件の場合と同様 mass operator を介在させた見やすい解を導くのは困難であり、実際の評価においては数値的に解かざるを得ない。N+1 次元で打ち切って求めた全ての Wiener 核を用いた場合の境界条件の誤差は $O((k\sigma)^{2(N+1)})$ となり、1次近似及び2次近似の場合と同様である。なお、$O(s^2)$ の項を無視した場合は1次近似の境界条件の行列方程式に移行するが、$O(s^3)$ の項を無視しても2次近似の境界条件の行列方程式には移行しないことに注意されたい。

光学定理と境界条件の誤差　図 30に N+1 次元で打ち切った行列方程式を数値的に解いて得た Wiener 核を用いて光学定理を計算した結果 ($N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$) を示す。これは2次近似における図 31に対応する。打ち切り次数 N までを完全に解いても光学定理は満たされていないが、N が増えるにつれて数値的に満たされていく様子が分かる。揺らぎ $\sigma \leq 0.125$ に対しては $N = 16$ で既に収束していると見なせてこれは1次及び2次近似の場合よりも速い。しかしながら、そこに至るまでは2次近似の場合以上に厳しいと言える。例えば、$N = 2, 4, 8$ に対しては $\sigma \approx 0.02, 0.05, 0.8$ を越えると特にインコヒーレント反射電力は大きく過剰評価されていく。一方、厳密な Wiener 核 (92) による光学定理収束の様子を最高次数 $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ に対し計算した結果を図 9に示す。コヒーレント反射電力は定まっているため変わらないがインコヒーレント反射電力は n の増加と共に光学定理を満たすように増えていくことが分かる。$n = 8$ で収束状態に達しており、今までの中で一番速く収束している。

反射係数の自乗平均誤差　厳密な Wiener 核が (92) で与えられているから反射係数の自乗平均誤差を計算すれば

$$E^2 \;=\; 1 + \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|A'_n(\lambda_0)|^2 + 2\mathrm{Re}\, e^{-2|s|^2} \sum_{n=0}^{\infty} n! A'_n(\lambda_0)(-2s^*)^n \tag{101}$$

となるから、階層方程式を N+1 次で打ち切って解いた近似解に対する反射係数の自乗平均誤差を求める。図 32は次数 $N = 1, 2, 4, 8$ に対する (101) の計算結果である。今までのどの境界条件よりも各々揺らぎの閾値 $\sigma \approx 0.01, 0.025, 0.06, 0.9$ までは誤差は小さく、それを越えると急峻に増加に転じることが分かる。また、図 33は用いる Wiener 核の最高次数と誤差の関係についての $k\sigma = \pi/20, \pi/10, \pi/5$ に対する計算結果である。こちらも今回扱ったどの境界条件の場合よりも遥かに急激に誤差が小さくなっていくことが分かる。

厳密な境界条件に対する complete mass operator　0次の Wiener 核 $A_0(\lambda)$ はコヒーレント反射係数を表すから (34) の形に書けるはずである。従って、逆に厳密な境界条件での等価表面インピーダンス (もしくは compelete mass operator) $Z_s^{(1)}(\lambda_0)$ を形式的に導いておく。(34) 及び (92) より

$$Z_s^{(1)}(\lambda_0) = -\frac{e^{2s^2}-1}{e^{2s^2}+1} = -\frac{\sinh s^2}{\cosh s^2} = \frac{-s^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s^2)^{2n}}{(2n+1)!}}{1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s^2)^{2n}}{(2n)!}} \tag{102}$$

を得る。(102) の表現は文献 [19] の一次元 Neumann 不規則表面による平面波散乱問題の厳密解における等価表面インピーダンスの相関距離無限大の極限表現に対応している。

5.3 境界条件の近似の影響

ここでは、各々の境界条件に対する厳密解を比較することで境界条件の近似程度を考察する。

complete mass operator $Z_s^{(1)}$ の比較　2次近似の境界条件では及び厳密な境界条件では高次 Wiener 核における一般の mass operator の形は不明である。しかし、0次 Wiener 核はコヒーレント反射係数を与えるため (102) で示したように形式的に complete mass operator $Z_s^{(1)}(\lambda_0)$ を定義可能である。よって2次近似の境界条件に対しては数値的に $A_0(\lambda_0)$ が求まれば次のように逆算できる。

$$Z_s^{(1)}(\lambda_0) = \frac{1 + A_0(\lambda_0)}{1 - A_0(\lambda_0)} \tag{103}$$

これらを用いてパラメータ M について数値計算した結果を図 34に示す。(102) からも分かるように厳密な境界条件に対する complete mass operator は M が増加する時 1 に漸近する。しかしながら1次近似では右上がりでそのまま移行し、2次近似では多少厳密な境界条件のそれに近付いてはいるが近似が十分ではない。M が十分小さいところ、図では $M \approx 0.2$ 程度 ($\sigma \approx 0.03$) まではほぼ一致しているから近似の影響は小さいものと思われるが、それを越えると厳密な境界条件からのずれが特に1次近似の境界条件には現れそうである。

コヒーレント反射係数の比較　実際、図 6,7に対応するコヒーレント反射係数を計算して比較してみる。図 35は $\sigma \approx 0.05$ 及び図 36は $\sigma \approx 0.1$ におけるコヒーレント反射係数である。厳密なコヒーレント反射係数は図 34における振舞いに対応して1次近似と2次近似との中間の2次近似側に存在する。予想通り $\sigma \approx 0.1$ の場合はもとより $\sigma \approx 0.05$ においても1次近似と厳密な境界条件の場合との差異は小さくはない。揺らぎを更に大きくした場合、これら三者の差が顕著に現れると思われるので図 37に0次 Wiener 核の比較を示す。やはり、$\sigma \approx 0.03$ 程度までのようである。厳密なコヒーレント反射係数は揺らぎが増すにつれて減少し零に漸近する。これは物理的に理にかなった結果である。一方、近似境界条件の場合はかなり特異な振舞いを示し、コヒーレント反射係数が横軸を横切る様な振舞いを示しているがこれ自身が既に非物理的な結果である。そのような揺らぎに対してはもはや境界条件の近似が完全に不適切であることを示している。

接触的近似による厳密解への漸近　図 34の見方を変えてコヒーレント反射係数としての収束の様子を各境界条件について示す。図 38,39 及び 40は各々1次近似、2次近似及び厳密な境界条件に対する厳密解のコヒーレント反射係数及び対応する拡張された Bass-Fuks 解の漸近する様をプロットしたものである。階層方程式の打ち切りオーダー N が増加するにつれて接触的近似で厳密解 $\mathrm{N} = \infty$ に収束していくことがわかる。これは (8) の展開が多項式展開つまり巾展開の変形であることを改めて認識させてくれる結果である。1次近似の境界条件では拡張された Bass-Fuks 解は光学定理を満たす解であるが、2次近似や厳密な境界条件に対するそれは光学定理を満たさない。それは反射係数の絶対値が1を越えることからも明らかであると言える。N を増せば図に示されるように接触的近似度が上がるが、大なる揺らぎに対しては収束は速いとは言えない。また、図 40では $\mathrm{N} = 32$ の計算結果は $\sigma > 0.3$ に対しては、もはや正確には計算されていない。これは大なる引数に対し零に漸近する関数を巾展開際に現れる典型的な計算精度の低下によるもので倍精度演算を持ってしても生じた困難である。

光学定理　コヒーレント反射係数が図 37のように変動すると対応する光学定理も奇妙なものとなる。それを図 41に示す。厳密な境界条件の光学定理はコヒーレント反射電力は揺らぎの増加と共に減少し零に漸近する。それと呼応してインコヒーレント反射電力は増加し、光学定理はいつも成り立つ。1次近似及び2次近似の結果は一旦減少して零になったコヒーレント反射電力が逆に増加に転じると言った非物理的な解になってしまっており、これはコヒーレント反射係数の振舞いに対応する不合理な結果である。

反射係数の自乗平均誤差　更に、各近似境界条件の厳密解を用いて反射係数の自乗平均誤差 (101) を計算することで境界条件を近似することの影響を定量的に議論できる。特に1次近似の場合は (101) は

$$E^2 = 2\left[1 - e^{-2|s|^2}\left\{-\frac{1 - Z_s^{(1)}(\lambda_0)}{1 + Z_s^{(1)}(\lambda_0)} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(2|s|^2)^n \prod_{l=1}^{n+1}\frac{1}{1 + Z_s^{(l)}(\lambda_0)}\right\}\right] \tag{104}$$

と書ける。2次近似の境界条件については $A'_n(\lambda_0)$ の代わりに (68) で定義される Wiener 核を用いて (101) を数値計算する。結果を図 42 に示す。2次近似の方が1次近似よりも全体として誤差は小さく、確かに厳密な境界条件への近似度は上がっていると言える。揺らぎ $\sigma \leq 0.125$ における結果を拡大したものを図 43に示す。原点近傍で2次近似の方の誤差が大きいのは1次近似が解析的な式として (104) を計算しているのに対し、2次の方は数値的に得た Wiener 核を用いて (101) を計算しているための誤差の影響と考える。この図からランダム反射係数に要求する精度から逆に有効な揺らぎの上限を見出すことが出来る。例えば、$\sigma = 0.05$ の場合は1次近似では 10^{-3} のオーダーの誤差でありやや大きい。10^{-4} のオーダーを要求すると揺らぎの上限は $\sigma \approx 0.025$ となる。2次近似の場合でも一桁精度が向上するに至っていない。これは近似境界条件の厳密解に対してこれであるから、その更に近似解に対してはより一層誤差は大きいと思われる。

6 むすび

確率汎関数法ならびに Wiener 解析一般に関わる仮定と近似について考察するため、不規則表面散乱の極限例である平面変位モデルに対する平面波入射の場合のランダム反射係数を Wiener 解析 (正確には Hermite 解析) した。平面変位モデルは色々な意味で厳密に解ける数少ない一例であることが分かった。特に二つの疑問に関する知見が得られたことを強調する。

一つは定式化上の仮定である厳密な境界条件を近似境界条件で置き換えることの是非の検証である。これは従来の散乱問題等で全く取り扱えなかった話であり、平面変位モデルと言う極限ケースではあるが、厳密な境界条件によるその厳密な解と近似境界条件によるその厳密な解との自乗平均誤差を導き出せたことは極めて意義深いものと思われる。これは今後確率汎関数法を更に改良及び発展させていく上で一つの目安となろう。

もう一つは Wiener 解析上の仮定と近似である。Hermite 展開をも含めて Wiener-伊藤展開が実際に収束するような例題は従来殆んど無く、Wiener 自身による確率 FM 変調の公式のみと言っても過言ではない。その意味では実際上、今回の平面変位モデルは厳密な境界条件の立場から見ればそれは確率 FM 変調そのものであるから今回の研究ではそのような厳密な境界条件を近似した境界条件に対する厳密な Wiener 展開を見出せた、つまり、一変数の Hermite 多項式に関する積分公式 (60)-(62) を発見したと言うことに尽きる。そしてその公式が通常の応用で採る手法である階層方程式から得られたことは興味深い。実際の Wiener 解析では階層方程式を厳密に解くことは極めて難しく、これは本来の階層方程式が積分漸化式となっているため解析的に有効な手段がないためである。我々をも含めてこのような積分漸化式は解ける部分のみを取り出して解く、筆者が言うところの'主要近似'を施して近似解を得るが、その正当性については従来殆んど考慮しなかった (出来なかった)。不規則表面散乱の場合の積分漸化式である階層方程式を数値解析することで (あるオーダーで打ち切るが) 厳密に解いた解が光学定理を満たしたことから、階層方程式をきちんと解けば、そして現れる mass operator を正確に評価すれば、その解は Wiener-伊藤展開の厳密な実例となっているとの予想から今回の平面変位モデルを解いてみた。予想通り、有限オーダーで打ち切って厳密に解いた'拡張された Bass-Fuks 解'は光学定理を満たす解となっていること、および、その極限である厳密解の形を導き出すことが出来た。また、主要近似解は光学定理及び境界条件の誤差の観点からも本当に分散が小さな、1次の Wiener 核で十分記述できるような範囲でしか有効でないことを明らかにした。このことから多重散乱の効果が現れる様な場合にはやはり階層方程式を (ある程度は) きちんと解く必要のあることが分かった。誤解の無いように述べておくと、確率汎関数法はどんなに分散が小さくとも単純な巾展開では解が発散する、Neumann 不規則表面 [20, 21] や電磁波散乱等 [5, 6, 22] において有限解を得ることの出来る系統的かつ強力な最もやさしい手法でありそのようなクリティカルケースで真価を発揮する。そもそも、誤差の評価と言った定量的に厳密な話題は他の手法では殆んど顧みられていないことを指摘しておきたい。もっともより正確にはこれは解析のためのツールの問題であり、再三述べているように Wiener 解析を含めた確率解析一般における問題であるからそのような数学的な基礎研究の発展が望まれる。

文献

[1] H.Ogura and J.Nakayama, "Initial-value problem of the one-dimensional wave propagation in a homogeneous random medium", Phys. Rev. **A-11**, pp.957-962(1975)

[2] J.Nakayama, H.Ogura and B.Matsumoto, "A probabilistic theory of scattering from a random rough surface", Radio Sci. **15**, pp.1049-1057(1980)

[3] 小倉久直,「第5章 不規則表面による電磁波散乱の解析」, 電子情報通信学会 (山下榮吉監修), "電磁波問題解析の実際", コロナ社 (1993)

[4] J.Nakayama, H.Ogura and M.Sakata, "Scattering of a scalar wave from a slightly random surface", J. Math. Phys. **22**, pp.471-477(1981)

[5] J.Nakayama, H.Ogura and M.Sakata, "A probabilistic theory of electromagnetic scattering from a random rough surface 1, Horizontal polarization, 2, Vertical polarization", Radio Sci. **16**, pp.831-847,847-853(1981)

[6] J.Nakayama, K.Mizutani and M.Tsuneoka, "Scattering of electromagnetic waves from a perfectly conductive slightly random surface: Depolarization in backscatter", J. Math. Phys. **27**, pp.1435-1448(1986)

[7] Y.Tamura and J.Nakayama, "Scattering and diffraction of a plane wave from a randomly rough strip", Waves in Random Media **6**, pp.387-418(1996)

[8] J. Nakayama, Lan Gao, and Y. Tamura, "Scattering of a plane wave from a periodic random surface: A probabilistic approach", Waves in Random Media **7**, pp.65-78(1997)

[9] J. Nakayama and Lan Gao, "Formulas on orthogonal functionals of stochastic binary sequence", IEICE Trans. **E80-A**, pp.782-795(1997)

[10] Lan Gao and J. Nakayama, "Diffraction and scattering of a plane wave from randomly deformed periodic surface", IEICE Trns. Electron. **E80-C**, pp.1374-1380(1997)

[11] J.Nakayama, "Scattering from a random-surface:Linear equations for coefficients of Wiener-Hermite expansion of the wave field", Radio Sci. **21**, pp.707-712,(1986)

[12] H.Ogura and Z.L.Wang, "Stochastic Integral Equation for Rough Surface Scattering", IEICE Trans. Electron. **E80-C**, pp.1337-1342(1997)

[13] J.Nakayama and E.Omori, "Wiener analysis of a binary hysteresis system", J. Math. Phys. **29**, pp.1982-1989(1988)

[14] 小倉久直, "物理・工学のための確率過程論", コロナ社 (1978)

[15] F.G.Bass and I.M.Fuks, *Wave Scattering From Statistically Rough Surfaces* (New York: Pergamon, 1981)

[16] 田村安彦、中山純一, "ランダム境界値問題の解析的数値解法 - 確率汎関数法の数値解析的アプローチ -", 電磁界理論研究会資料,EMT 97-117(1997.11.7)

[17] 田村安彦、中山純一, "不規則表面による波動散乱問題における mass operator に関する考察 - 非線形積分方程式の数値解析 -", 電磁界理論研究会資料,EMT 97-87(1997.11.6)

[18] J.Nakayama, "A formula on the Wiener-Hermite expansion", J. Math. Phys. **28**, pp.2559-2563(1987)

[19] 恒岡道朗, "ランダム表面による波動散乱の解析", 修士学位論文, (1987)

[20] J.Nakayama, "Anomalous scattering from a slightly random surface", Radio Sci. **17**, pp.558-564(1982)

[21] H.Ogura and N.Takahashi, "Scattering of waves from random rough surface — reciprocal theorem and backscattering enhancement", Waves in random media **5**, pp.223-242(1995)

[22] H.Ogura, T.Kawanishi, N.Takahashi and Z.L.Wang, "Scattering of electromagnetic waves from a slightly random surface — reciprocal theorem, cross-polarization and backscattering enhancement", Waves in random media **5**, pp.461-495(1995)

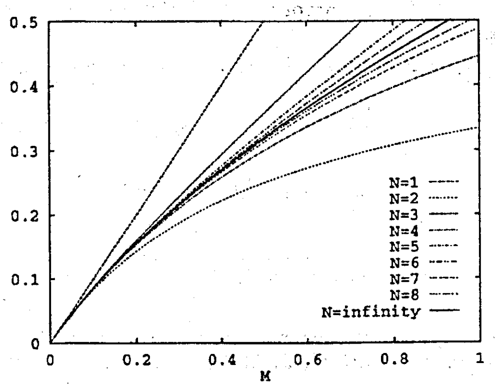


図 2: 拡張 Bass-Fuks 解の $Z_s^{(1)}$ (N $= 1, \cdots, 8, \infty$)

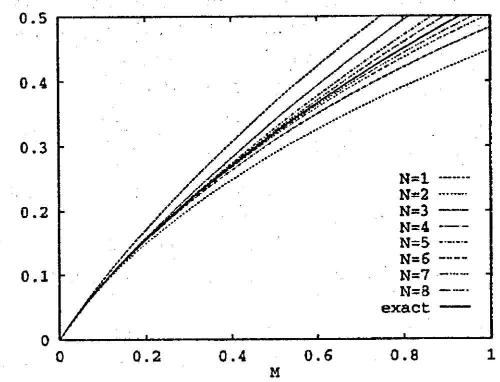


図 5: ハイブリッド解の $Z_s^{(1)}$ の収束 (N $= 1, \cdots, 8$)

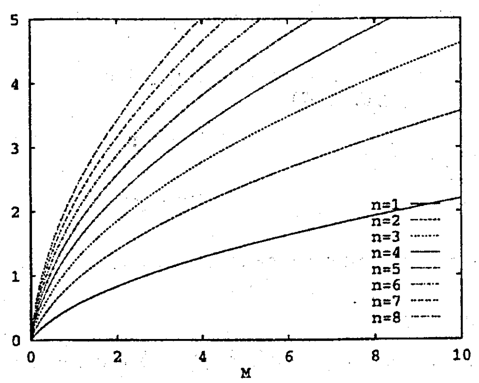


図 3: complete mass operator $Z_s^{(n)}$ ($n = 1, \cdots, 8$)

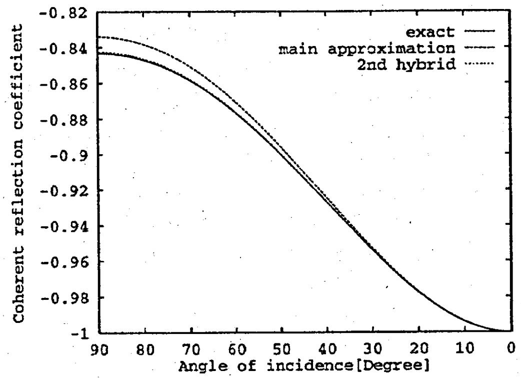


図 6: コヒーレント反射係数 $A_0(\lambda_0)$ の入射角依存性 ($k\sigma = \pi/10$)

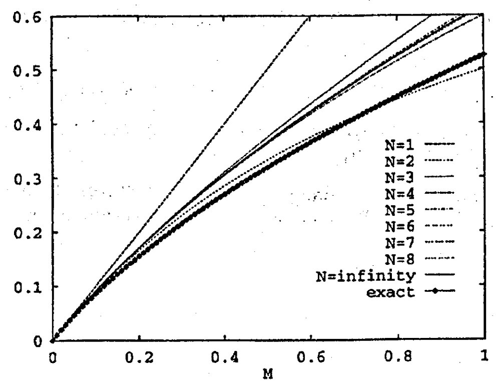


図 4: 主要近似解の $Z_s^{(1)}$ の収束 (N $= 1, \cdots, 8, \infty$)

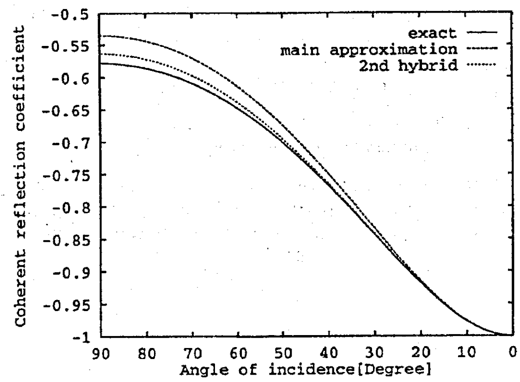


図 7: コヒーレント反射係数 $A_0(\lambda_0)$ の入射角依存性 ($k\sigma = \pi/5$)

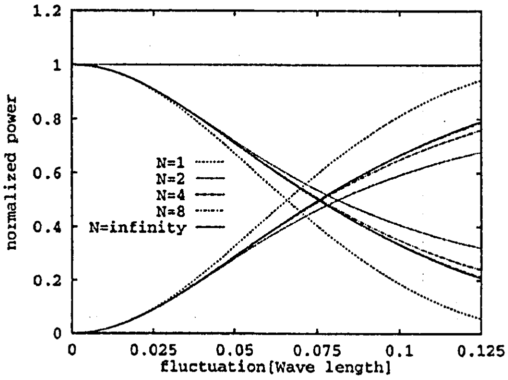


図 8: 光学定理
(拡張された Bass-Fuks 解 $n = \mathrm{N}$)

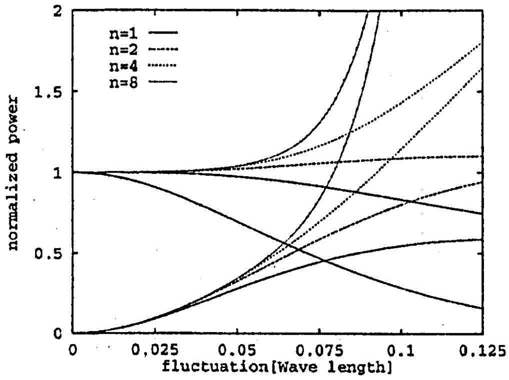


図 11: 光学定理
($\mathrm{N} = \infty$ の主要近似解の有限使用)

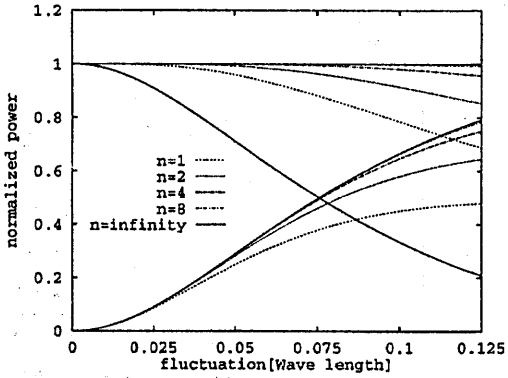


図 9: 厳密解の光学定理の収束性
($\mathrm{N} = \infty$ の拡張された Bass-Fuks 解の有限使用)

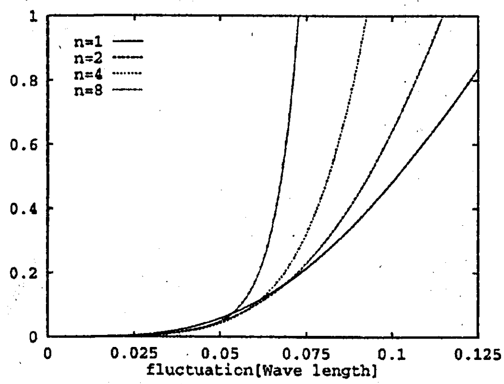


図 12: 境界条件の自乗平均誤差
($\mathrm{N} = \infty$ の主要近似解の有限使用)

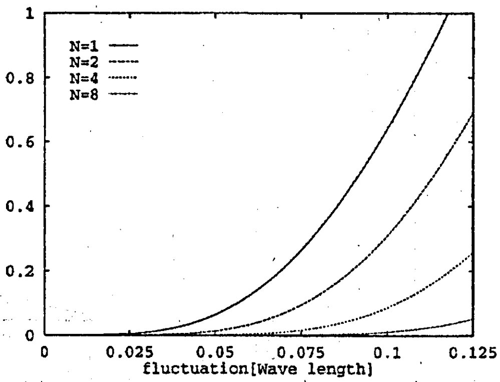


図 10: 境界条件の自乗平均誤差
(拡張された Bass-Fuks 解 $n = \mathrm{N}$)

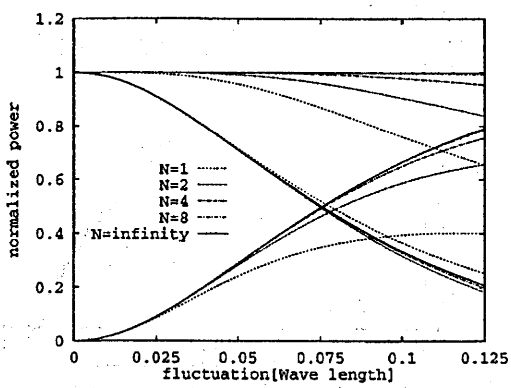


図 13: 光学定理
(ハイブリッド解)

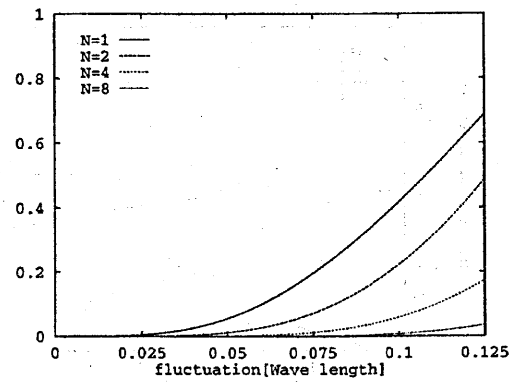


図 14: 境界条件の自乗平均誤差
(ハイブリッド解)

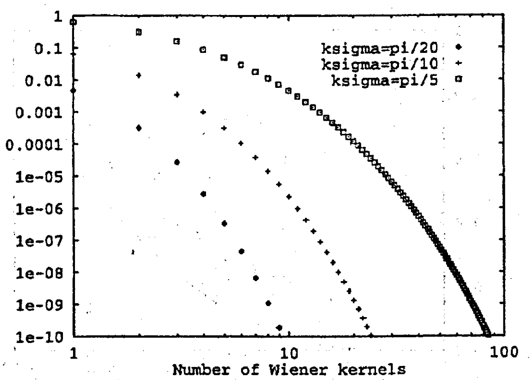


図 15: 境界条件の自乗平均誤差 (項数 N 依存性)
(拡張された Bass-Fuks 解 $n=$ N)

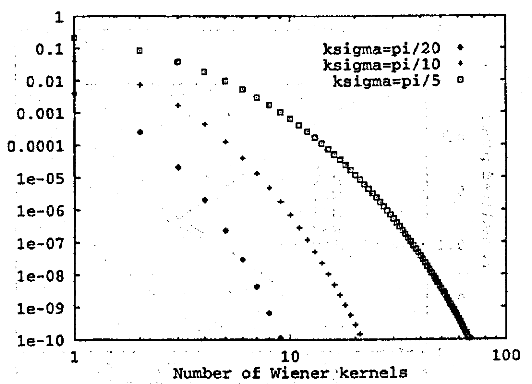


図 16: 厳密解の光学定理の収束性 (項数 N 依存性)
(N $=\infty$ の拡張された Bass-Fuks 解の有限使用)

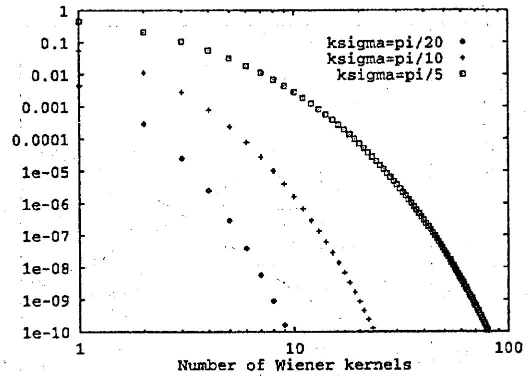


図 17: 厳密解の境界条件の自乗平均誤差 (項数 N 依存性) (N $=\infty$ の拡張された Bass-Fuks 解の有限使用)

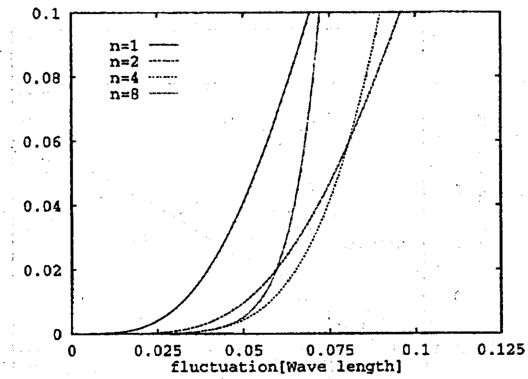


図 18: 1 次近似の境界条件の反射係数の自乗平均誤差 (N $=\infty$ の主要近似解の有限使用)

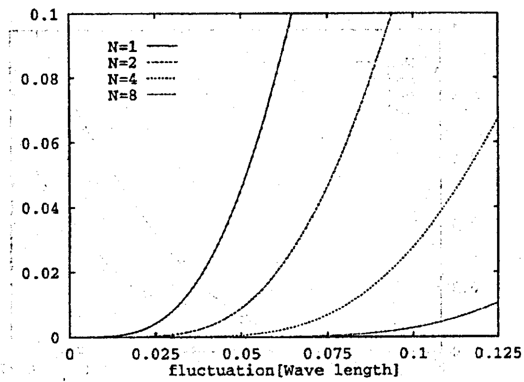


図 19: 1 次近似の境界条件の反射係数の自乗平均誤差 ($n=$ N の拡張された Bass-Fuks 解)

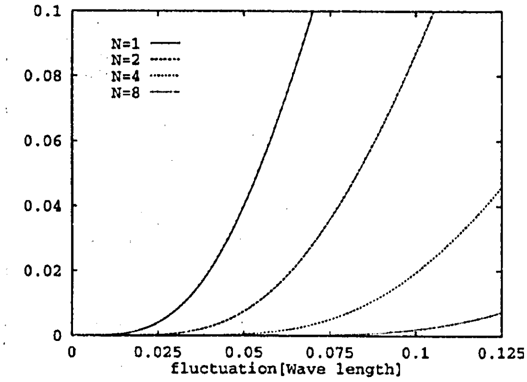


図 20: 1次近似の境界条件の反射係数の自乗平均誤差 (ハイブリッド解)

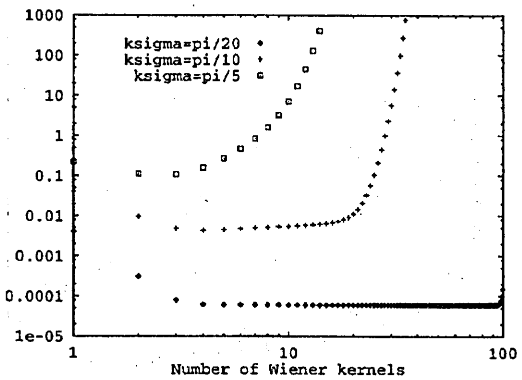


図 21: 1次近似の境界条件の反射係数の自乗平均誤差の収束性 (N = ∞ の主要近似解の項数依存性)

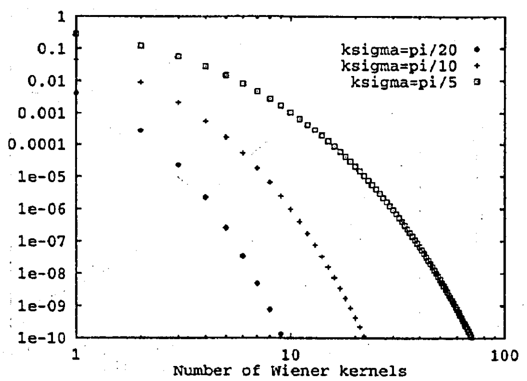


図 22: 1次近似の境界条件の反射係数の自乗平均誤差の収束性 ($n = \mathrm{N}$ の拡張された Bass-Fuks 解)

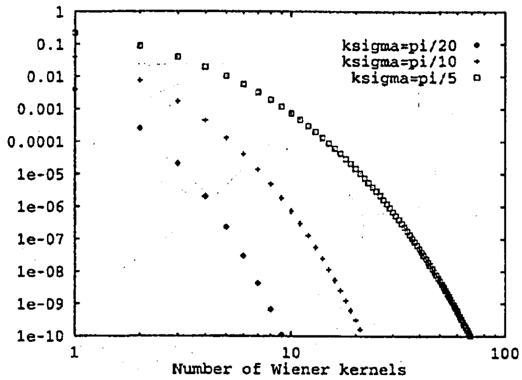


図 23: 1次近似の境界条件の反射係数の自乗平均誤差の 収 束 性 (ハイブリッド解)

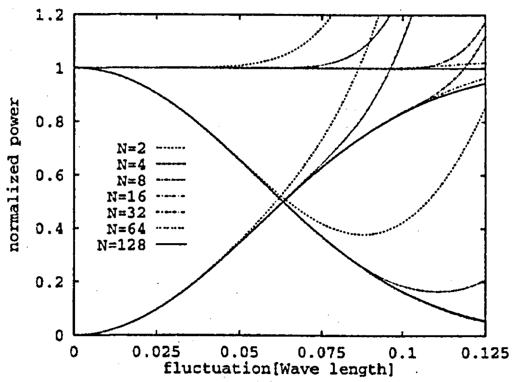


図 24: 2次近似の境界条件による光学定理 (階層方程式の数値解)

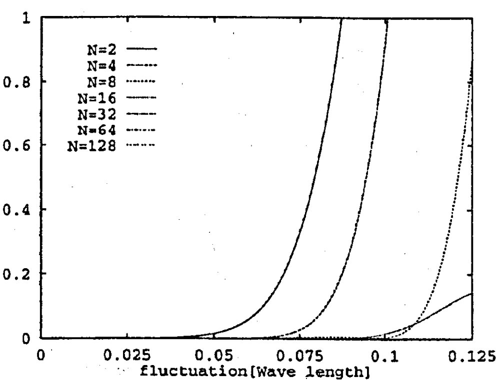


図 25: 2次近似の境界条件での自乗平均誤差 (階層方程式の数値解)

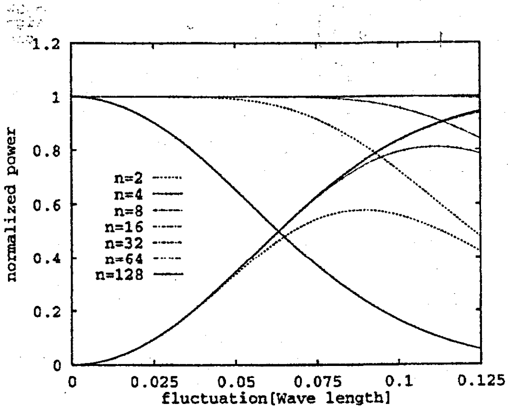


図 26: 2次近似の境界条件による光学定理の収束性
(数値積分による厳密な Wiener 核)

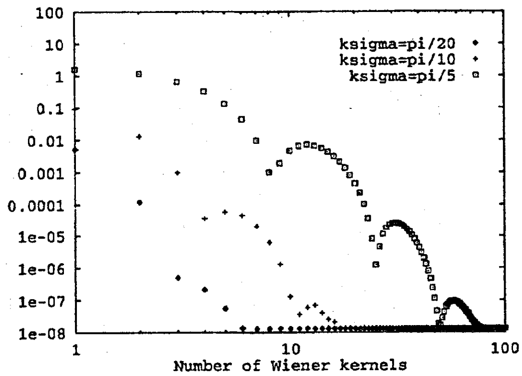


図 29: 2次近似の境界条件の反射係数の自乗平均
誤差の収束性 (階層方程式の数値解)

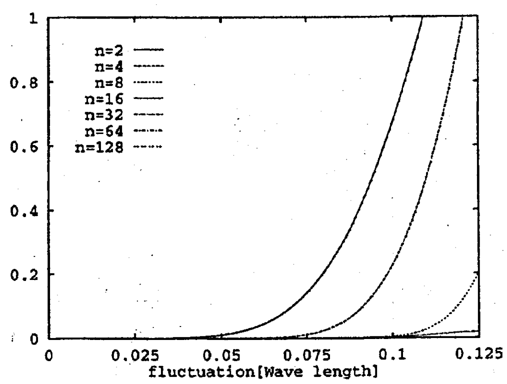


図 27: 2次近似の境界条件での自乗平均誤差
(数値積分による厳密な Wiener 核)

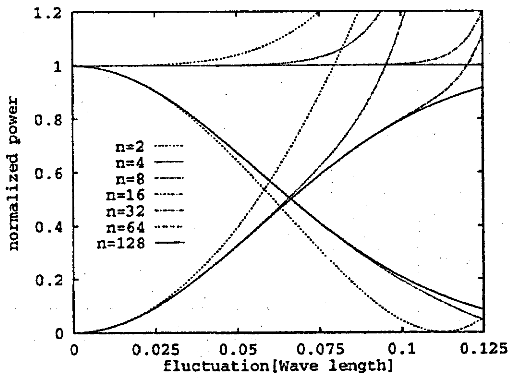


図 30: 厳密な境界条件における光学定理
(階層方程式の数値解)

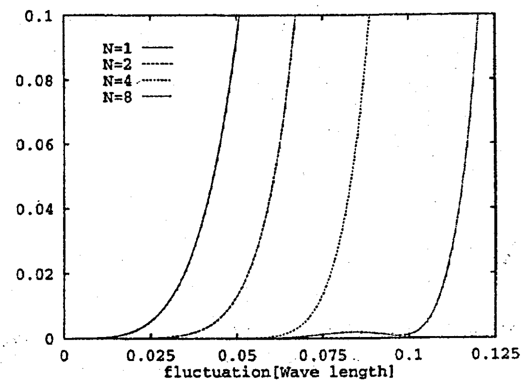


図 28: 2次近似の境界条件の反射係数の自乗
平均誤差 (階層方程式の数値解)

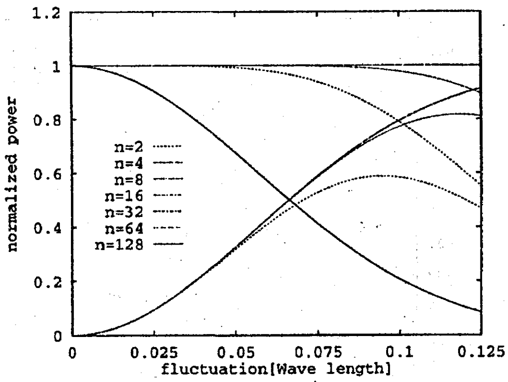


図 31: 厳密な境界条件における光学定理の収束性
(Wiener 核の厳密式)

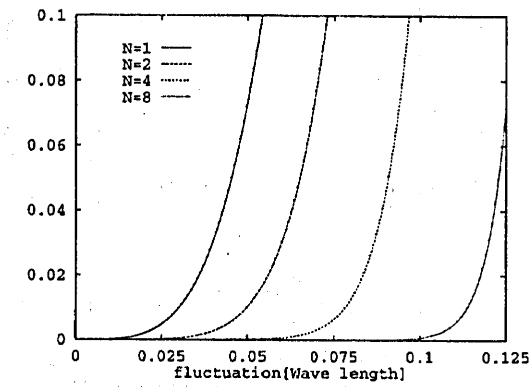


図 32: 厳密な境界条件の反射係数の自乗平均誤差の収束性 (階層方程式の数値解)

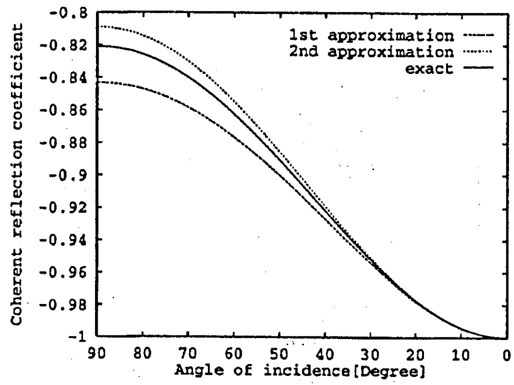


図 35: 1次及び2次近似の境界条件と厳密な境界条件におけるコヒーレント反射係数の相違 ($k\sigma = \pi/10$)

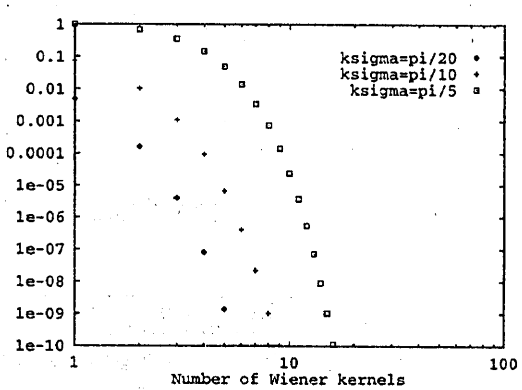


図 33: 厳密な境界条件の反射係数の自乗平均誤差の収束性 (階層方程式の数値解)

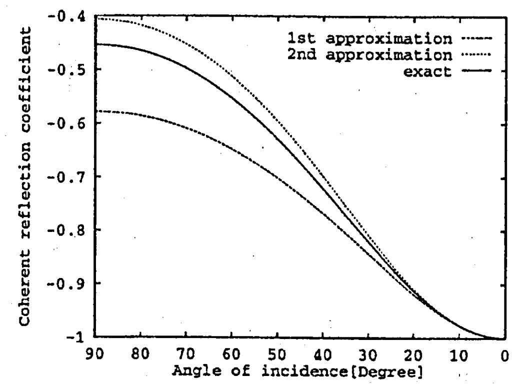


図 36: 1次及び2次近似の境界条件と厳密な境界条件におけるコヒーレント反射係数の相違 ($k\sigma = \pi/5$)

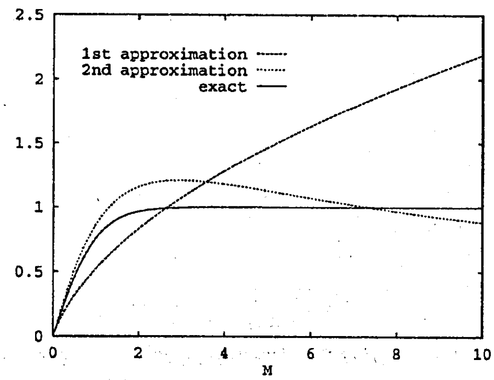


図 34: 1次及び2次近似の境界条件と厳密な境界条件による complete mass operator $Z_s^{(1)}$ の相違

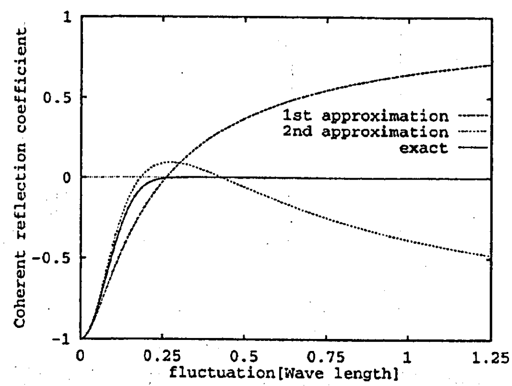


図 37: 1次及び2次近似の境界条件と厳密な境界条件におけるコヒーレント反射係数の相違 (揺らぎ依存性)

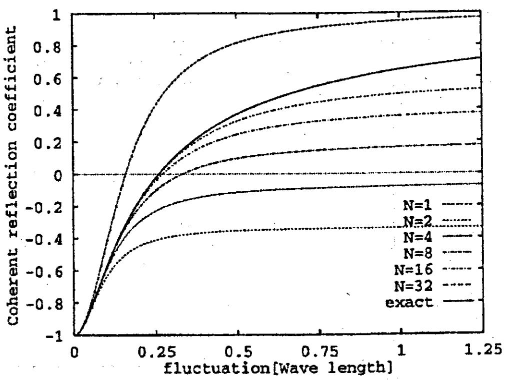


図 38: 1 次近似の境界条件におけるコヒーレント反射係数の収束性 ($n = \mathrm{N}$ の拡張された Bass-Fuks 解)

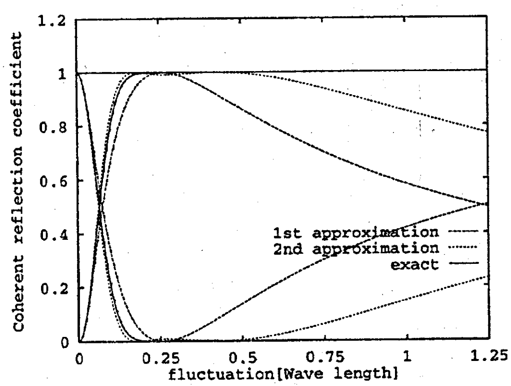


図 41: 1 次及び 2 次近似の境界条件と厳密な境界条件における光学定理の成立状態の相違 (揺らぎ依存性)

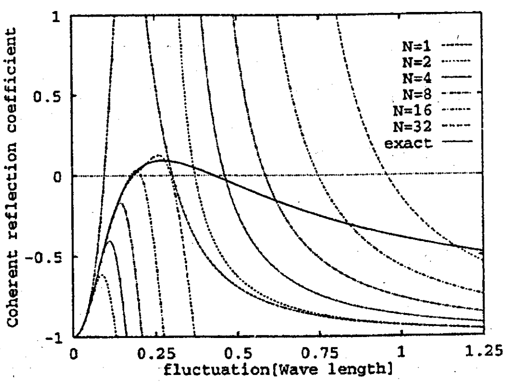


図 39: 2 次近似の境界条件におけるコヒーレント反射係数の収束性 (階層方程式の数値解)

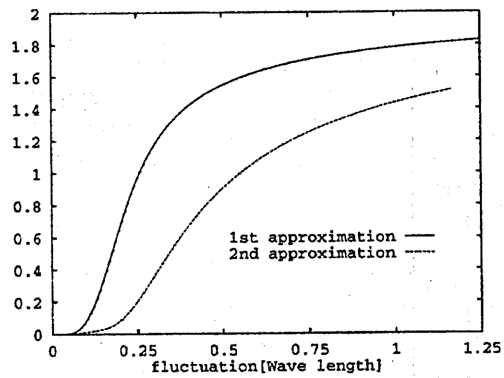


図 42: 1 次及び 2 次近似の境界条件によるランダム反射係数の自乗平均誤差 (揺らぎ依存性)

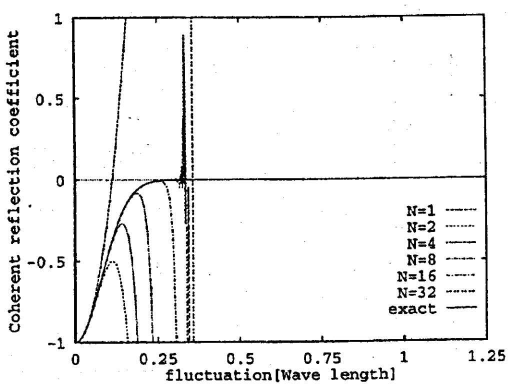


図 40: 厳密な境界条件におけるコヒーレント反射係数の収束性 (階層方程式の数値解)

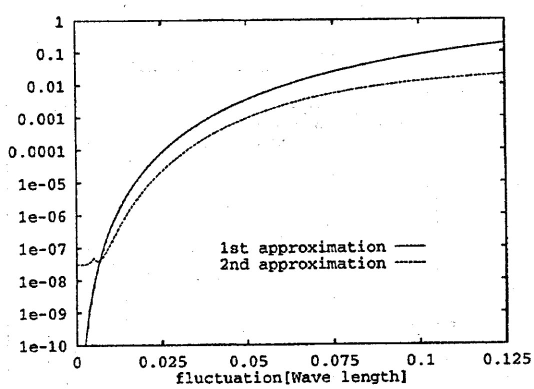


図 43: 1 次及び 2 次近似の境界条件によるランダム反射係数の自乗平均誤差拡大図 (揺らぎ依存性)

輻射科学研究会資料
RS97－18

不規則散乱におけるメモリー効果

川西哲也
（京都大学 VBL）

小倉久直
（近畿大学生物理工学部）

1998 年 3 月 23 日（月）
於　三菱電機（株）先端技術総合研究所

不規則散乱におけるメモリー効果

京都大学VBL 川西哲也　近畿大学生物理工学部 小倉久直

1998年3月23日

1　はじめに

不規則表面・媒質による電磁波散乱は身近な現象であり、私たちがものを見るために不可欠な光の乱反射もその一つである。散乱に関する研究の歴史は古く、Maxwellによって電磁波の存在が証明される以前に、裏面反射鏡における散乱波の干渉、いわゆる散乱光干渉がNewtonによって発見されている [1]。この現象が実用面から研究課題として提起されたのはレーダの開発が進められた第二次世界大戦前後のことであるが、これは不規則な地表面、海面上での電磁波の散乱・伝搬や不規則な媒質中の伝搬に起因するクラッタエコーなどが問題となったことによる。近年では、光波による表面プラズモンの励起や、光導波系の不規則面による散乱なども研究の対象となっている [2, 3, 4, 5]。現在、精力的に進められている液晶などのディスプレイ装置の低消費電力化、視認性の向上には乱反射の制御が不可欠であり、また、散乱光を用いた形状測定器などの様々な測定装置も開発されており不規則表面による電磁波散乱の解析の必要性が高まっている。

不規則散乱体にコヒーレント光を照射した場合には散乱強度分布に不規則なパターンが生じる [6]。このパターンはスペックルパターンと呼ばれ、散乱体の形状や入射条件に依存して変化することが知られている。この現象の産業分野での応用例としては表面形状の微小な変化をスペックルパターンの変化として検出するスペックル干渉計測が挙げられる。近年、異なる入射条件によって生じた複数のスペックルパターンの間にメモリー効果と呼ばれる相関が存在することが実験、理論の両面から見出され、リモートセンシング等への応用も期待され注目を集めている [7, 8, 9, 10, 11]。これまでの研究では入射波長を一定として取り扱う場合が多かったが、本論文では入射波長が異なるスペックルパターン間の相関を議論する。共役メモリー効果という新しい概念を導入し、散乱強度相関を一般的に取り扱う。散乱体のもつ次元によってメモリー効果の特性が大きく変化することや、互いに複素共役の関係にある1組の散乱プロセス間の干渉によって起こる共役メモリー効果の存在を示す。また、多重散乱効果が小さい場合には通常の時間反転対称性（相反性）に加えて空間反転対称性もみられることを議論する。第2章ではメモリー効果について概説する。第3章では統計的性質を規定された不規則散乱体を取り扱い、メモリー効果、共役メモリー効果やスペックルパターンの対称性の性質を明らかにする。第4章では確率汎関数法により不規則表面散乱を取り扱い、メモリー効果のメカニズムを考察する。

2 メモリー効果

メモリー効果とは図1に示すように入射角θ_{i1}のときの散乱角θ_{s1}への散乱と入射角θ_{i2}のときの散乱角θ_{s2}への散乱を考えると

$$\sin\theta_{s1} - \sin\theta_{i1} = \sin\theta_{s2} - \sin\theta_{i2} \tag{1}$$

が成り立つ場合に正の相関があるという現象である。ここで、角度は図1に示すように散乱体平均面の法線に対して定義し、入射方向と散乱方向は同一平面内にある場合を考える。また、入射波長は不変であるとする。入射角が微小変化する場合を考え $\mathrm{d}\theta_i = \theta_{i2} - \theta_{i1}$, $\mathrm{d}\theta_s = \theta_{s2} - \theta_{s1}$ とすると、式(1)は

$$\cos\theta_i\,\mathrm{d}\theta_i = \cos\theta_s\,\mathrm{d}\theta_s \tag{2}$$

となる[12]。ここで$\theta_i = \theta_{i1}, \theta_s = \theta_{s1}$とした。式(2)は入射角の変化に応じてスペックルパターンが移動することを意味している。これは散乱波が入射に関する情報を保持していることによるものでメモリー効果と呼ばれている。また、式(2)は入射角、散乱角の関係を規定しているので、特に角度メモリー効果と呼ぶことがある。θ_{i1}, θ_{s1}を一定とし、相関関数をθ_{i2}, θ_{s2}の関数としてみると、図2に示すようなメモリーラインと呼ばれる線上にピークが存在する。メモリーラインを横切るように入射角、散乱角を変化させるとメモリーライン上でピークがみられ、ピーク幅はスペックルパターンの特徴的な大きさに依存する。また、メモリーラインに沿って変化させると$\theta_{i1} = \theta_{i2}, \theta_{s1} = \theta_{s2}$と$\theta_{i1} = -\theta_{s2}, \theta_{s1} = -\theta_{i2}$の２点でピークが見られ、前者はスペックルパターンの自己相関、後者は系のもつ相反性によるものである[13]。

最近、プラズモンモードをもつ金属面での散乱において上記の通常のメモリー効果に加えて

$$\sin\theta_{s1} - \sin\theta_{i1} = -\sin\theta_{s2} + \sin\theta_{i2} \tag{3}$$

が成り立つ場合にも強度相関にピークが存在することが理論的に指摘されている[14]。特に、$\theta_{i1} = \theta_{i2} = \theta_i$とすると

$$2\sin\theta_i = \sin\theta_{s1} + \sin\theta_{s2} \tag{4}$$

が得られ、同一入射角での異なる方向への散乱強度が相関をもつ。これはスペックルパターンが鏡面反射方向θ_iを中心とする対称性をもつことを意味している。

3 不規則散乱の強度相関

本章では不規則散乱の強度相関を取り扱い、メモリー効果ならびに共役メモリー効果を議論する。散乱体としては揺らぎがガウス白色雑音であるような不規則媒質と位置がポアソン白色雑音で表されるような無数の点散乱体を考える。

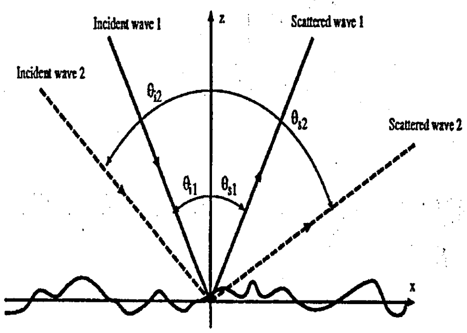


図 1: メモリー効果

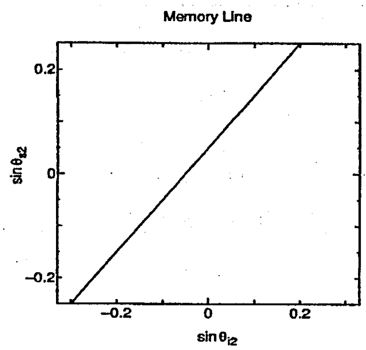


図 2: 角度メモリー効果のメモリーライン。$\sin\theta_{s1} - \sin\theta_{i1} = 0.05$

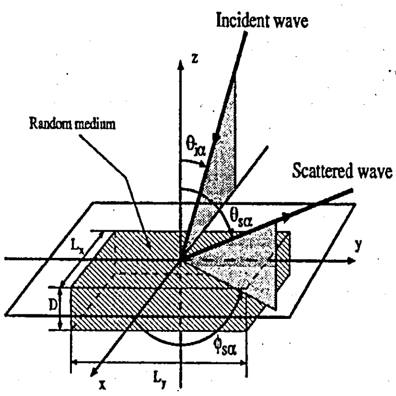


図 3: 座標系

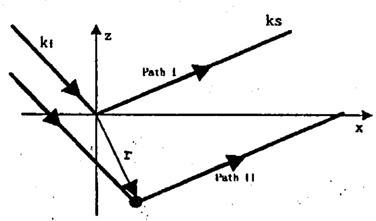


図 4: 散乱体の位置と光路差

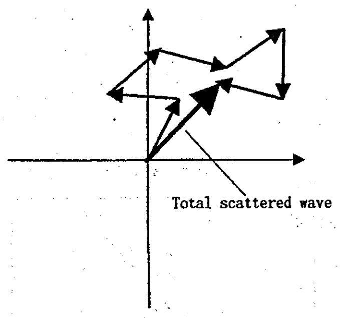


図 5: ランダムウォークで表現された散乱波

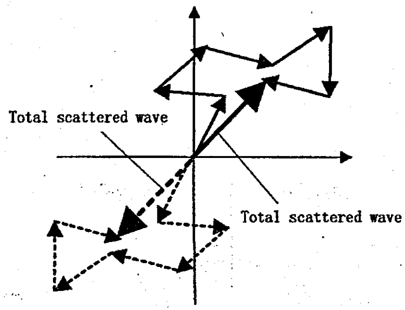


図 6: 複素平面上で互いに複素共役の関係にある散乱波

3.1 定式化

平面波 (波数ベクトル$\boldsymbol{k}_{i\alpha}$) 入射時の散乱波の波数ベクトル$\boldsymbol{k}_{s\alpha}$で表される平面波成分を考える。αは異なる入射条件を区別するためのラベルである。非弾性散乱は考慮に入れないので波数ベクトルの大きさの変化はなく

$$k_{i\alpha} = k_{s\alpha} \equiv k_\alpha, \quad k_{i\alpha} = |\boldsymbol{k}_{i\alpha}|, \quad k_{s\alpha} = |\boldsymbol{k}_{s\alpha}| \tag{5}$$

が成り立つ。ただし、本論文では議論しないが入射側と散乱側で屈折率が異なる場合には$nk_{i\alpha} = k_{s\alpha}$となる ($n$ は散乱側の入射側に対する相対屈折率)。図 3 に示すような座標系を考え、以下のようなベクトル、スカラーを定義する。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_{i\alpha} &\equiv \boldsymbol{q}_{i\alpha} + \boldsymbol{e}_z\beta_{i\alpha} = (k_{i\alpha}\sin\theta_{i\alpha}\cos\phi_{i\alpha}, k_{i\alpha}\sin\theta_{i\alpha}\sin\phi_{i\alpha}, -k_{i\alpha}\cos\theta_{i\alpha}) &(6)\\
\boldsymbol{k}_{s\alpha} &\equiv \boldsymbol{q}_{s\alpha} + \boldsymbol{e}_z\beta_{s\alpha} = (k_{s\alpha}\sin\theta_{s\alpha}\cos\phi_{s\alpha}, k_{s\alpha}\sin\theta_{s\alpha}\sin\phi_{s\alpha}, k_{s\alpha}\cos\theta_{s\alpha}) &(7)\\
\boldsymbol{p}_\alpha &\equiv \boldsymbol{k}_{s\alpha} - \boldsymbol{k}_{i\alpha} \equiv \boldsymbol{q}_\alpha + \boldsymbol{e}_z\beta_\alpha &(8)\\
\boldsymbol{r} &\equiv \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_z z &(9)\\
\boldsymbol{r}_n &\equiv \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{e}_z z &(10)
\end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{k}_{i\alpha}, \boldsymbol{k}_{s\alpha}, \boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_n$は 3 次元ベクトル、$\boldsymbol{q}_{i\alpha}, \boldsymbol{q}_{s\alpha}, \boldsymbol{q}_\alpha, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n$は 2 次元ベクトルである。また、$\boldsymbol{e}_z$は$z$方向単位ベクトルである。

図 4 に示すように原点で散乱が起こる光路を Path I、位置$\boldsymbol{r}$で散乱が起こる光路を Path II とすると光路差は

$$\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}_{i\alpha}}{k_{i\alpha}} - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}_{s\alpha}}{k_{s\alpha}} \tag{11}$$

であり、位相差は$-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_\alpha$となる。したがって、不規則媒質の揺らぎが Gauss 白色雑音で

表される場合、揺らぎが小さく多重散乱の効果が無視できるとすると、散乱強度は

$$
\begin{aligned}
I(\boldsymbol{k}_{s\alpha}|\boldsymbol{k}_{i\alpha}) \equiv I(\boldsymbol{p}_\alpha) &= A_g \left| \int_V \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}B(\boldsymbol{r}) \right|^2 && (12)\\
&= A_g \int_V \int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_\alpha\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}\, \mathrm{d}B(\boldsymbol{r}_1)\, \mathrm{d}B(\boldsymbol{r}_2) && (13)
\end{aligned}
$$

で表現できる。ここで、A_gは全散乱強度の大きさを表す定数である。$\boldsymbol{p}_\alpha$は散乱波ベクトルと入射波ベクトルの差で、$\boldsymbol{p}_\alpha = 0$ は入射方向にそのまま進む波を意味する。$\mathrm{d}B(\boldsymbol{r})$ は3次元ガウスランダム測度で、以下のような性質をもつ。

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}B(\boldsymbol{r}) \rangle &= 0 && (14)\\
\langle \mathrm{d}B(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}B(\boldsymbol{r}') \rangle &= \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}' && (15)
\end{aligned}
$$

ここで、$\langle\cdot\rangle$ は集合平均を表す。式 (12) より、散乱強度 I は複素平面上の無数のランダムフェーザの和であり、図5に示すようなランダムウォーク過程と解釈できる [6]。

散乱強度の揺らぎ成分 J は

$$
\begin{aligned}
J(\boldsymbol{p}_\alpha) &\equiv I(\boldsymbol{p}_\alpha) - \langle I(\boldsymbol{p}_\alpha) \rangle && (16)\\
&= A_g \int_V \int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_\alpha\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} [\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{r}_1)\, \mathrm{dB}(\boldsymbol{r}_2) - \langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{r}_1)\, \mathrm{dB}(\boldsymbol{r}_2) \rangle] && (17)
\end{aligned}
$$

となる。$J(\boldsymbol{p}_1), J(\boldsymbol{p}_1)$ の相互相関関数 (共分散) は式 (14),(15) を用いると

$$
\begin{aligned}
\langle J(\boldsymbol{p}_1) J(\boldsymbol{p}_2) \rangle &= A_g^2 \int_V \int_V \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} \right] \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 && (18)\\
&= A_g^2 \left[\left| \int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \right|^2 + \left| \int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \right|^2 \right] && (19)
\end{aligned}
$$

となる。ここで散乱体は厚さ D 長さ L_x, L_y, 体積 $V = L_x L_y D$ の領域に分布しているものとし、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} &= q_x x + q_y y + \beta z, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z && (20)\\
\int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_x x + \mathrm{i}q_y y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= L_x \frac{\sin q_x L_x/2}{q_x L_x/2} L_y \frac{\sin q_y L_y/2}{q_y L_y/2} && (21)\\
&= L_x L_y \mathrm{sinc}(q_x L_x/2) \mathrm{sinc}(q_y L_y/2) && (22)\\
\int_{-D/2}^{D/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}\, \mathrm{d}z &= D \mathrm{sinc}(\beta D/2) && (23)\\
\Gamma(\boldsymbol{p}) &\equiv V \mathrm{sinc}(q_x L_x/2) \mathrm{sinc}(q_y L_y/2) \mathrm{sinc}(\beta D/2) && (24)
\end{aligned}
$$

とおけば、式 (19) は

$$
\langle J(\boldsymbol{p}_1) J(\boldsymbol{p}_2) \rangle = A_g^2 \left\{ |\Gamma(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)|^2 + |\Gamma(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2))|^2 \right\} \qquad (25)
$$

となる。$\Gamma(\boldsymbol{p})$ は

$$q_x L_x \simeq q_y L_y \simeq \beta D \simeq 0, \qquad \boldsymbol{p} = (q_x, q_y, \beta) \tag{26}$$

のときに最大値 V となるので、強度相関 (25) は

$$|(q_{1x} - q_{2x})L_x| + |(q_{1y} - q_{2y})L_y| + |(\beta_1 - \beta_2)D| \simeq 0 \tag{27}$$

が成り立つときに$\Gamma(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$ によるピークを、また、

$$|(q_{1x} + q_{2x})L_x| + |(q_{1y} + q_{2y})L_y| + |(\beta_1 + \beta_2)D| \simeq 0 \tag{28}$$

が成り立つときに$\Gamma(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$ によるピークをもつ。

次に、媒質がポアソンランダム点の場合を考える。散乱体の存在する位置がポアソン白色雑音で表される場合、各散乱体からの散乱波強度が等しいと仮定すると、散乱強度は

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{p}_\alpha) &= A_p \left| \sum_{n=1}^{N} \exp[-\mathrm{i}\boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{p}_\alpha] \right|^2 = A_p \left| \int_V \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_\alpha}\, \mathrm{d}D(\boldsymbol{r}) \right|^2 && (29) \\ &= A_p \int_V \int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\cdot\boldsymbol{p}_\alpha}\, \mathrm{d}D(\boldsymbol{r}_1)\, \mathrm{d}D(\boldsymbol{r}_2) && (30) \end{aligned}$$

で表現される。ここで A_pは全散乱強度を表す定数である。$\mathrm{d}D(\boldsymbol{r})$ は3次元ポアソンランダム測度で

$$\begin{aligned} \mathrm{d}D(\boldsymbol{r}) &= \sum_j \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} && (31) \\ \langle \mathrm{d}D(\boldsymbol{r}) \rangle &= \mathrm{d}\boldsymbol{r} && (32) \\ \langle \mathrm{d}D(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}D(\boldsymbol{r}') \rangle &= \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}' && (33) \end{aligned}$$

($\boldsymbol{r}_j$はポアソンランダム点の位置) などの性質をもつ。式 (30) も式 (12) と同様に複素平面上でのランダムウォーク過程とみなせる。

$J(\boldsymbol{p}_1), J(\boldsymbol{p}_1)$ の相互相関関数 (共分散) は式 (32),(33) を用いると

$$\begin{aligned} & \langle J(\boldsymbol{p}_1) J(\boldsymbol{p}_2) \rangle \\ = \ & A_p^2 \Bigg[\int_V \int_V \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_1\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_2\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \\ & + \int_V \int_V \int_V \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{r}_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r}_2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}_3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{r}_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r}_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}_3} \right. \\ & \left. + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{r}_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r}_2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}_3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{r}_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r}_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}_3} \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 + V \Bigg] \qquad (34) \\ = \ & A_p^2 \left\{ |\Gamma(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)|^2 + |\Gamma(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)|^2 + |\Gamma(\boldsymbol{p}_1)|^2 + |\Gamma(\boldsymbol{p}_2)|^2 \right. \\ & \left. + 2[\Gamma(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2) + \Gamma(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)]\Gamma(\boldsymbol{p}_1)\Gamma(\boldsymbol{p}_2) + V \right\} \qquad (35) \\ \simeq \ & A_p^2 \left\{ |\Gamma(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)|^2 + |\Gamma(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)|^2 + V \right\} \qquad (36) \end{aligned}$$

となり、強度相関はガウス白色雑音の場合と同様に$\Gamma(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2), \Gamma(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$によるピークをもち、その条件は式(27),(28)であることがわかる。なお、ここで$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \neq 0$(コヒーレント透過波方向から十分離れた方向)の場合、$\Gamma(\boldsymbol{p}_1), \Gamma(\boldsymbol{p}_2) \simeq 0$となることを用いて近似した。

これら2つの散乱プロセスは入射角、散乱角が異なるにもかかわらず、式(27)が成り立つ場合は、式(12)より明らかなように、それぞれの散乱波を表す複素平面でのランダムウォーク過程はほぼ同様となり近似的に等しい強度となる。これは後述するように従来から知られている通常のメモリー効果に相当するものである。一方、式(28)が成り立つ場合はそれぞれのランダムウォーク過程はほぼ互いに複素共役となり近似的に等しい強度をもつ(図6参照)。これを共役メモリー効果と呼ぶ。

3.2 メモリー効果と共役メモリー効果

ここで散乱体の広がり$(L_x, L_y, D$の大きさ)と散乱強度ピークの関係について議論する。まず、散乱体が薄く$(D \simeq 0)$で2次元的広がりをもち、表面散乱とみなせるような場合を考える。メモリー効果によるピークの条件式(27)は

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2 \tag{37}$$

となる。また、共役メモリー効果の条件式(28)は

$$\boldsymbol{q}_1 = -\boldsymbol{q}_2 \tag{38}$$

となる。特に2つの入射条件が等しい$(\boldsymbol{q}_{i1} = \boldsymbol{q}_{i2} = \boldsymbol{q}_i)$の場合を考えると式(38)は

$$\boldsymbol{q}_{s1} + \boldsymbol{q}_{s2} = 2\boldsymbol{q}_i \tag{39}$$

となる。これは同一入射条件による異なる方向への散乱強度が等しいことを示しており、各スペックルパターンが式(39)で規定される対称性をもつことを意味する。ここでこれを共役対称性と呼ぶ。1組の入射波動ベクトル$\boldsymbol{k}_{i1}$、散乱波動ベクトル$\boldsymbol{k}_{s1}$を考えると、任意の方向への入射ベクトル$\boldsymbol{k}_{i2}$に対して、式(37)を満たす散乱波動ベクトルは

$$\boldsymbol{k}_{s2} = \boldsymbol{q}_{s1} - \boldsymbol{q}_{i1} + \boldsymbol{q}_{i2} \pm \boldsymbol{e}_z \beta_{s2} \tag{40}$$

の2つが存在する。ただし、β_{i2}は式(5)より求める。式(38)に関しても、1組の$\boldsymbol{k}_{i1}, \boldsymbol{k}_{s1}, \boldsymbol{k}_{i2}$に対して、2つの$\boldsymbol{k}_{s2}$が存在する。これは2つの散乱ベクトル$\boldsymbol{k}_p, \boldsymbol{k}_m$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_p &\equiv \boldsymbol{q} + \boldsymbol{e}_z \beta && (41) \\ \boldsymbol{k}_m &\equiv \boldsymbol{q} - \boldsymbol{e}_z \beta && (42) \\ \beta &\equiv \sqrt{k_\alpha^2 - |\boldsymbol{q}|^2} && (43) \end{aligned}$$

に対応する散乱波が等しい強度をもつことを意味する。図7に示すようにこれらの2つの散乱方向はxy平面に関して対称である。ここで$\boldsymbol{q}$は大きさがk_α以下の任意の2次元ベクトルである。

入射波長一定 $(k_1 = k_2)$ のとき入射面内への散乱 $(\phi_{i\alpha} = \phi_{s\alpha} = 0°)$ を考えると式 (37) は

$$\sin\theta_{s1} - \sin\theta_{i1} = \sin\theta_{s2} - \sin\theta_{i2} \tag{44}$$

となり通常の角度メモリー効果に相当することがわかる。さらに式 (37) は異なる入射波長 $(k_1 \neq k_2)$ によるスペックルパターンの間にもメモリー効果が存在することを示している。これを周波数-角度メモリー効果と呼ぶ。$\theta_{i1} = \theta_{i2} = \theta_i$ の場合を考えると、複数の波長成分を含む入射波によるメモリー効果を表す式

$$k_1\sin\theta_{s1} - k_2\sin\theta_{s2} = (k_1 - k_2)\sin\theta_i \tag{45}$$

が得られる。この場合、図 8 に示すような波長と散乱角度の間で定義されるメモリーライン上で散乱強度相関がピークをもつ。角度メモリー効果の場合、散乱体を照射する範囲を一定に保ちつつ入射角を変化させる必要があり測定が困難であるが、周波数-角度メモリー効果では式 (45) を満たす散乱角 θ_{s1}, θ_{s2} への散乱波強度の k_1, k_2 成分より入射角一定での測定が可能であり、実用上有用である。

共役メモリー効果に関して、入射波長一定 $(k_1 = k_2)$ のとき入射面内への散乱 $(\phi_{i\alpha} = \phi_{s\alpha} = 0°)$ を考えると式 (38) は

$$\sin\theta_{s1} - \sin\theta_{i1} = -\sin\theta_{s2} + \sin\theta_{i2} \tag{46}$$

となる。また、対称性を表す式 (39) は

$$2\sin\theta_i = \sin\theta_{s1} + \sin\theta_{s2} \tag{47}$$

となる。ここで $\theta_{i1} = \theta_{i2} = \theta_i$ とした。

次に、散乱体が 3 次元的に広がりをもち $L_x, L_y, D \neq 0$ である場合を考える。式 (27) より

$$\boldsymbol{k}_{s1} - \boldsymbol{k}_{i1} = \boldsymbol{k}_{s2} - \boldsymbol{k}_{i2} \tag{48}$$

が、式 (28) より

$$\boldsymbol{k}_{s1} - \boldsymbol{k}_{i1} = -\boldsymbol{k}_{s2} + \boldsymbol{k}_{i2} \tag{49}$$

が得られる。ここで各波動ベクトルが同一平面内にあり、入射波長を一定 $(k_1 = k_2 = k)$ とする。$\boldsymbol{k}_{i\alpha}, \boldsymbol{k}_{s\alpha}$ は常に式 (5) を満たすので、式 (48) が成立するのは

$$\boldsymbol{k}_{i1} = \boldsymbol{k}_{i2}, \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{k}_{s1} = \boldsymbol{k}_{s2} \tag{50}$$

または、

$$\boldsymbol{k}_{i1} = -\boldsymbol{k}_{s2}, \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{k}_{s1} = -\boldsymbol{k}_{i2} \tag{51}$$

の場合のみである。前者は自明な自己相関ピーク、後者は散乱の時間反転対称性を意味するものである。式 (51) が成り立つとき、各波動ベクトルは図 9 に示すような関係にある。

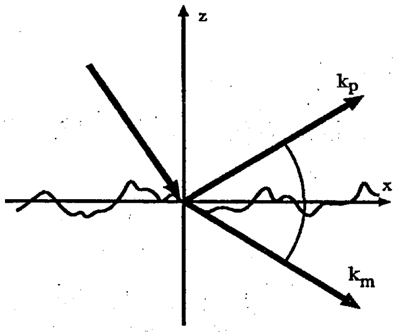


図 7: 散乱波の散乱面に対する対称性。

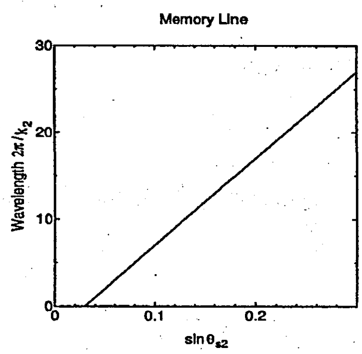


図 8: メモリーライン。$k_1(\sin\theta_{s1} - \sin\theta_i)/2\pi = 0.01, \sin\theta_i = 0.03$

ここで破線は式 (5) を意味しており、波数ベクトルは原点とこの円周上の 1 点を結ぶものである。また、入射方向と散乱方向は図 10 のとおりである。一方、式 (49) が成立するのは

$$\boldsymbol{k}_{i1} = -\boldsymbol{k}_{i2}, \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{k}_{s1} = -\boldsymbol{k}_{s2} \tag{52}$$

または、

$$\boldsymbol{k}_{i1} = \boldsymbol{k}_{s2}, \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{k}_{s1} = \boldsymbol{k}_{i2} \tag{53}$$

の場合である。ここで式 (52) で表される関係を空間反転対称性と呼ぶ。図 11 に各波動ベクトルの関係を示した。また、図 12 に示すように、入射方向、散乱方向をともに 180 度反転したものとなっている。また、式 (53) は時間反転対称性と空間反転対称性を組み合わせたものと解釈できる。さらに、入射波長一定で各波動ベクトルが同一平面内にあるという条件を外した場合を考えると、各ベクトルが図 13 に示すような関係にあるとき式 (48) を満たし、強度相関ピークを生じる。ここで K_z 軸が $\boldsymbol{p}_1$ と平行となる座標系を用いた。$\boldsymbol{k}_{i1}, \boldsymbol{k}_{s1}$ を一定とすると、図 13 の $\boldsymbol{k}_{i2}, \boldsymbol{k}_{s2}$ を K_z 軸に関して任意の角度回転させたものも式 (48) を満たす。同様に図 14 に式 (49) を満たす波動ベクトルの関係を示す。この場合も $\boldsymbol{k}_{i2}, \boldsymbol{k}_{s2}$ を K_z 軸に関して任意の角度回転させたものも式 (49) を満たす。

多重散乱の効果が無視できない場合のこれらの強度相関ピークについて議論する。図 15 に示すような簡単な多重散乱モデルを考える。ここで Path II,III は多重散乱を表して

おり、Path III の$\boldsymbol{r}_n$から$\boldsymbol{r}_1$までのプロセスはPath II の$\boldsymbol{r}_1$から$\boldsymbol{r}_n$までの時間反転となっている。Path I,II の位相差は

$$\Psi_{f\alpha} \equiv \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{k}_{i\alpha} - \boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{k}_{s\alpha} + \psi, \tag{54}$$

Path I,III の位相差は

$$\Psi_{r\alpha} \equiv \boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{k}_{i\alpha} - \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{k}_{s\alpha} + \psi, \tag{55}$$

となる。ここでψは$\boldsymbol{r}_1$–$\boldsymbol{r}_n$間の散乱プロセスで生じる位相差である。時間反転を表す式 (51) が成り立つ場合

$$\Psi_{f1} = \Psi_{r2} \tag{56}$$

が得られる。これは入射角・散乱角$\boldsymbol{k}_{i1}, \boldsymbol{k}_{s1}$に関するPath II による散乱強度と$\boldsymbol{k}_{i2}, \boldsymbol{k}_{s2}$に関するPath III による散乱強度が等しいことを意味している。すべての散乱プロセス Path II に対応する Path III が存在するので、全体として散乱強度が等しくなり時間反転によるピークが生じる。一方、空間反転対称性を意味する式 (52) が成り立つ場合

$$\Psi_{f1} = -\Psi_{f2} + 2\psi, \tag{57}$$

を得る。これは$\boldsymbol{k}_{i2}, \boldsymbol{k}_{s2}$に関する散乱プロセスと$\boldsymbol{k}_{i1}, \boldsymbol{k}_{s1}$に関する散乱プロセスが複素共役の関係から$\psi$だけずれていることを意味しており、多重散乱の影響が無視できない場合には空間反転対称性は存在しないことが分かる。$D \simeq 0$ の場合も同様の議論が可能で、多重散乱効果が大きい場合には共役メモリー効果は存在しない。

$L_y = D = 0$ で散乱体が 1 次元的広がりをもつ場合、メモリー効果、共役メモリー効果はそれぞれ

$$q_{1x} = q_{2x} \tag{58}$$

$$q_{1x} = -q_{2x} \tag{59}$$

が成り立つときにみられる。この場合は$\boldsymbol{k}_{i1}, \boldsymbol{k}_{s1}, \boldsymbol{k}_{i2}$を一定としても、式 (5) を満たす $q_{\alpha x}, \beta_\alpha$ の組み合わせは無数に考えられる。前述のように、3 次元的散乱体の場合は、強度相関は特定の条件式 (48),(49) を満たすときにのみ相関が存在し、2 次元の場合は、$\boldsymbol{k}_{i1}, \boldsymbol{k}_{s1}, \boldsymbol{k}_{i2}$の各組に対して強度相関をもつ特定の散乱方向$\boldsymbol{k}_{s2}$が 1 組 (2 つ) 存在する。したがって、強度相関のもつ対称性やメモリー効果、共役メモリー効果は散乱体のもつ次元によりその性質が著しく異なることがわかる。

3.3 数値計算

前節での結果を確認するために強度相関、スペックルパターンを数値的に計算した。ここでは簡単化のため散乱体はy方向には一様としxz平面での 2 次元問題とする ($\phi_{i\alpha}, \phi_{s\alpha} =$

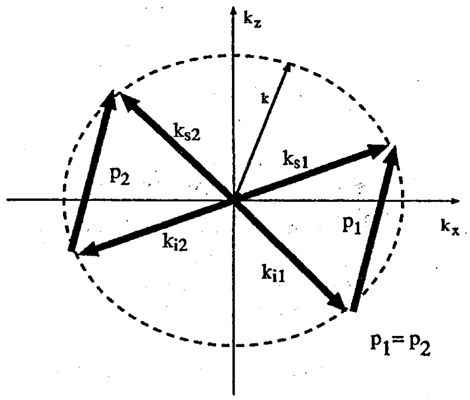


図 9: 時間反転対称性による散乱強度相関が生じる場合の入射波動ベクトル、散乱波動ベクトルの関係。

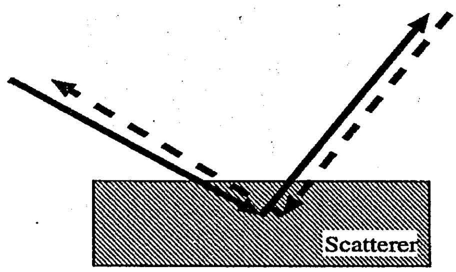


図 10: 時間反転対称性に対応する入射方向と散乱方向

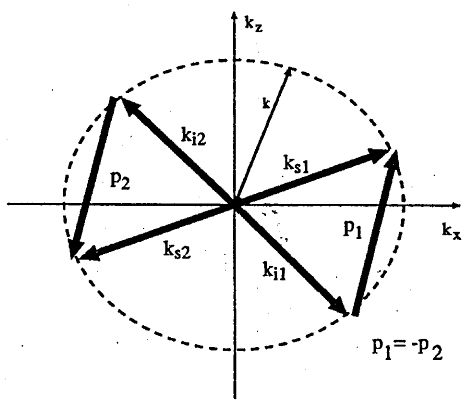


図 11: 空間反転対称性による散乱強度相関が生じる場合の入射波動ベクトル、散乱波動ベクトルの関係。

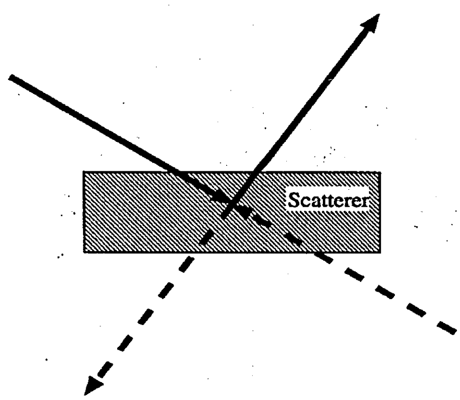


図 12: 空間反転対称性に対応する入射方向と散乱方向

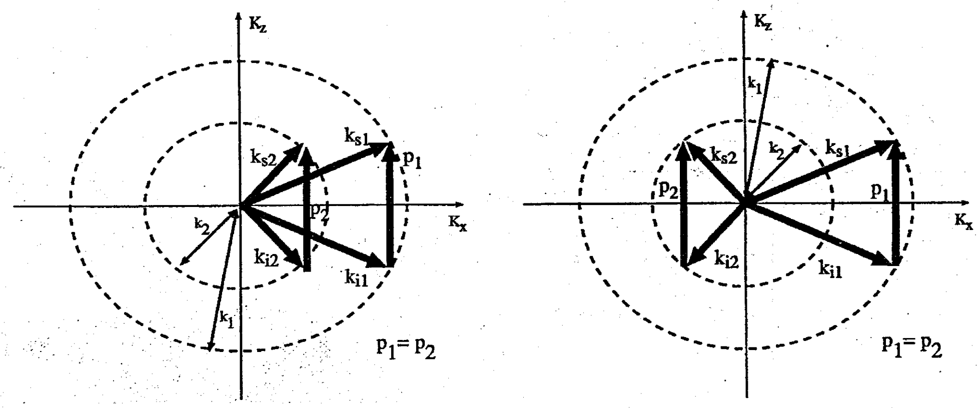


図 13: 3 次元散乱体による通常のメモリー効果に対応する入射波動ベクトル、散乱波動ベクトルの関係。

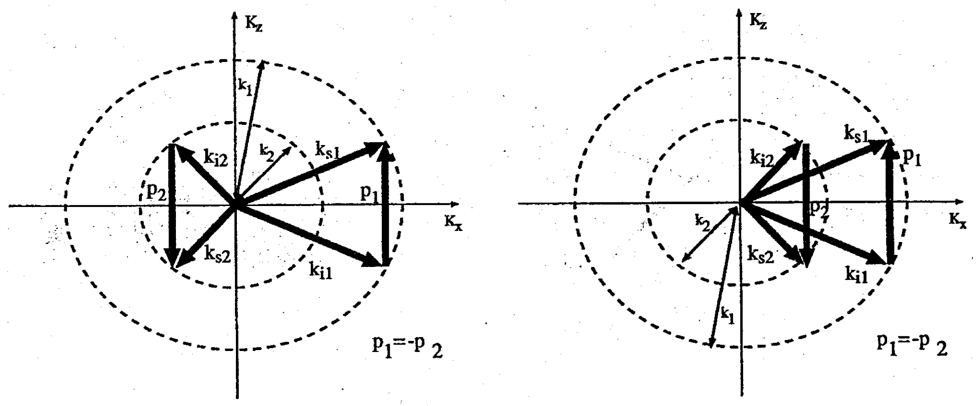


図 14: 3 次元散乱体による共役メモリー効果に対応する入射波動ベクトル、散乱波動ベクトルの関係。

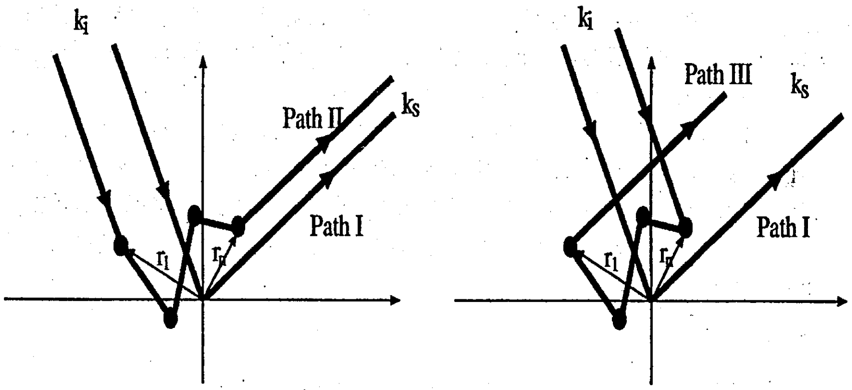


図 15: 多重散乱

0°)。厚さD、長さL_xの範囲内にランダムに位置する点状散乱体からの散乱強度$I(\theta_{s\alpha}|\theta_{i\alpha}, k_\alpha)$を

$$I(\theta_{s\alpha}|\theta_{i\alpha}, k_\alpha) = \frac{A}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} \exp\left[ik_\alpha\left\{x_n(\sin\theta_{i\alpha} - \sin\theta_{s\alpha}) - z_n(\cos\theta_{i\alpha} + \cos\theta_{s\alpha})\right\}\right]\right|^2 \tag{60}$$

で表す。ここで$\theta_{i\alpha}, \theta_{s\alpha}$はそれぞれ入射角、散乱角である。また、$k_\alpha$は入射波長である。

図 16 にメモリーライン上での強度相関を示す。横軸は散乱角θ_{s2}で入射角θ_{i2}は

$$d_+ \equiv k_1(\sin\theta_{s1} - \sin\theta_{i1}) - k_2(\sin\theta_{s2} - \sin\theta_{i2}) = 0, \quad \cos\theta_{i2} > 0 \tag{61}$$

を満たすように設定した。$\cos\theta_{i2} > 0$は図 10 の場合を含む解を得るための条件である。なお、この式が実数解をもたない場合は強度相関をゼロとした。入射角θ_{i1}, θ_{i2}、散乱角θ_{s1}, θ_{s2}は図 1 に示すように定義した。図 16 より$D = 0.1, 0.3$の場合にはメモリーライン上全体で強い相関があるが、$D = 10$の場合では自己相関ピーク$\theta_{s2} = 50°$と時間反転対称性によるピーク$\theta_{s2} = -30°$以外ではほぼゼロとなる。同様に、

$$d_- \equiv k_1(\sin\theta_{s1} - \sin\theta_{i1}) + k_2(\sin\theta_{s2} - \sin\theta_{i2}) = 0, \quad \cos\theta_{i2} < 0 \tag{62}$$

で定義される共役メモリーライン上での強度相関を数値計算した。図 17 に示すように散乱体が厚い場合 ($D = 10$) には共役対称性ピーク$\theta_{s2} = 50°$とその時間反転によるピーク$\theta_{s2} = -30°$付近でのみ相関がある。Dが小さい場合は散乱体は 2 次元的なひろがりをもつので、メモリーライン・共役メモリーライン上の広い範囲で相関がみられるが、Dが大きい場合は散乱体は 3 次元的ひろがりをもち、式 (48),(49) を満たす方向にピークがみられ、それ以外での相関は小さくなる。そのピーク形状は$\mathrm{sinc}\frac{(\beta_1-\beta_2)D}{2}$, $\mathrm{sinc}\frac{(\beta_1+\beta_2)D}{2}$に因っており、$D$が大きいほど鋭くなる。また、図 18,19 に式 (24),(25) から得られる強度相関の理論値を示した。式 (60) による数値シミュレーション結果 (図 16,17) とよく一致していることがわかる。図 20 に強度相関の理論値を$\sin\theta_{i1}, \sin\theta_{s1}$の関数として等高線図を示した。

$\cos\theta_{i2}, \cos\theta_{s2} > 0$ としたので、通常のメモリーラインに相当する部分で線状にピークがみられる。メモリーラインを横切る方向に対してはほぼ一様に急峻なピークとなっているがこれはピーク形状が $\mathrm{sinc}\frac{(q_{1x}-q_{2x})L_x}{2}$ に因るためである。

図21,22に $D=0,1$ の場合のスペックルパターンを示した。$D=0$ の場合にはスペックルパターンが鏡面反射方向を中心に共役対称性がみられるが、$D=1$ の場合には対称性はみられないことがわかる。共役対称性の条件式 (39) が成り立つ場合には、式 (52),(53) は満たされないので散乱体が3次元的広がりをもつ場合には共役対称性による対称構造はみられないことがわかる。

4 不規則表面散乱における共役メモリー効果

確率汎関数法により一様かつ無限に広がるガウス不規則表面からの散乱を解析することが可能である。散乱波動場を Wiener-Hermite 展開し、Wiener 核 A_n で表現する。0次 Wiener 核 A_0 はコヒーレント散乱成分を、1次 Wiener 核 A_1 および高次の Wiener 核 $A_n(n=2,3,\dots)$ はインコヒーレント散乱成分を意味するが、表面粗さが小さい場合 A_0, A_1 のみで近似的に散乱波を表すことができる。ここでは2次元不規則表面

$$f(\boldsymbol{x}) \doteq \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{q})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}) \tag{63}$$

$$\overline{F(\boldsymbol{q})} = F(-\boldsymbol{q}) \tag{64}$$

からの散乱を考える (図23参照)。ただし $\mathrm{dB}(\boldsymbol{q})$ は2次元複素ガウスランダム測度で、以下のような性質をもつ。

$$\left\langle \overline{\mathrm{dB}(\boldsymbol{q})}\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}')\right\rangle = \delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}' \tag{65}$$

$$\overline{\mathrm{dB}(\boldsymbol{q})} = \mathrm{dB}(-\boldsymbol{q}) \tag{66}$$

式 (64),(66) は不規則表面の位置座標表示 $f(\boldsymbol{x})$ が実関数であることを意味している。散乱強度は

$$I(\boldsymbol{k}_{s\alpha}|\boldsymbol{k}_{i\alpha})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s\alpha} = \begin{cases} |A_1(\boldsymbol{q}_\alpha|\boldsymbol{q}_{i\alpha}, k_\alpha)\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_\alpha)|^2 \cos^2\theta_{s\alpha} & (\boldsymbol{q}_\alpha \neq 0) \\ |A_1(\boldsymbol{q}_\alpha|\boldsymbol{q}_{i\alpha}, k_\alpha)\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_\alpha) + A_0(\boldsymbol{q}_{i\alpha}, k_\alpha)|^2 \cos^2\theta_{s\alpha} & (\boldsymbol{q}_\alpha = 0) \end{cases} \tag{67}$$

であたえられる [2]。ここで $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s\alpha} = \cos\theta_{s\alpha}\,\mathrm{d}\theta_{s\alpha}\,\mathrm{d}\phi_{s\alpha}$ である。散乱強度相関は

$$C(\boldsymbol{k}_{s1}, \boldsymbol{k}_{i1}|\boldsymbol{k}_{s2}, \boldsymbol{k}_{i2}) \equiv \frac{\langle I(\boldsymbol{k}_{s1}|\boldsymbol{k}_{i1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s1} I(\boldsymbol{k}_{s2}|\boldsymbol{k}_{i2})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s2}\rangle - \langle I(\boldsymbol{k}_{s1}|\boldsymbol{k}_{i1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s1}\rangle \langle I(\boldsymbol{k}_{s2}|\boldsymbol{k}_{i2})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s2}\rangle}{\left|\left\{\langle [I(\boldsymbol{k}_{s1}|\boldsymbol{k}_{i1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s1}]^2\rangle - \langle I(\boldsymbol{k}_{s1}|\boldsymbol{k}_{i1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s1}\rangle^2\right\}\left\{\langle [I(\boldsymbol{k}_{s2}|\boldsymbol{k}_{i2})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s2}]^2\rangle - \langle I(\boldsymbol{k}_{s2}|\boldsymbol{k}_{i2})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s2}\rangle^2\right\}\right|^{1/2}} \tag{68}$$

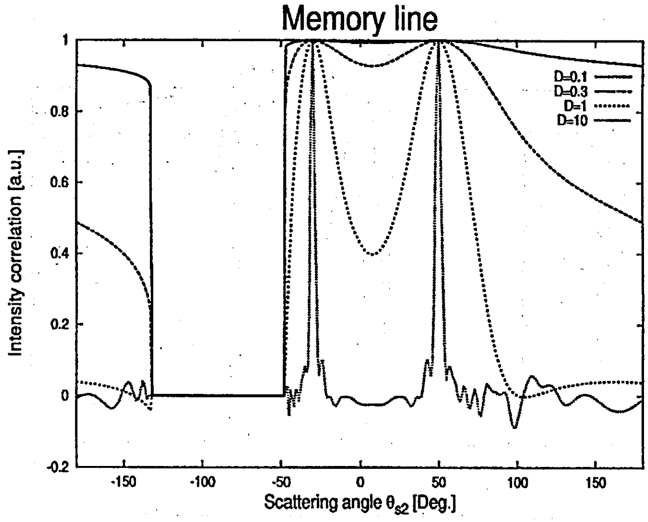


図 16: メモリーライン上の強度相関。入射角$\theta_{i1} = 30°$、散乱角$\theta_{s1} = 50°$、入射波長$2\pi/k_1 = 2\pi/k_2 = 1$、散乱体の長さ$L_x = 1000$、厚さ$D = 0.1, 0.3, 1, 10$、個数$N = 1000$、サンプル数 1000。

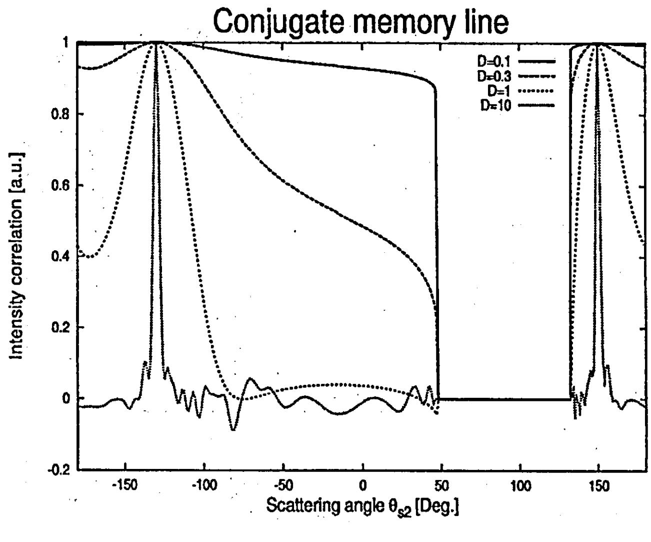


図 17: 共役メモリーライン上の強度相関。入射角$\theta_{i1} = 30°$、散乱角$\theta_{s1} = 50°$、入射波長$2\pi/k_1 = 2\pi/k_2 = 1$、散乱体の長さ$L_x = 1000$、厚さ$D = 0.1, 0.3, 1, 10$、個数$N = 1000$、サンプル数 1000。

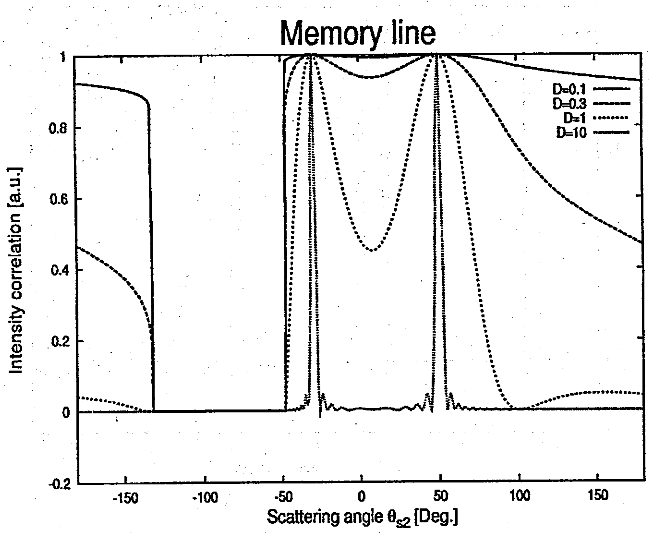


図 18: メモリーライン上の強度相関 (理論値)。入射角$\theta_{i1}=30°$、散乱角$\theta_{s1}=50°$、入射波長 $2\pi/k_1=2\pi/k_2=1$、散乱体の厚さ $D=0.1,0.3,1,10$。

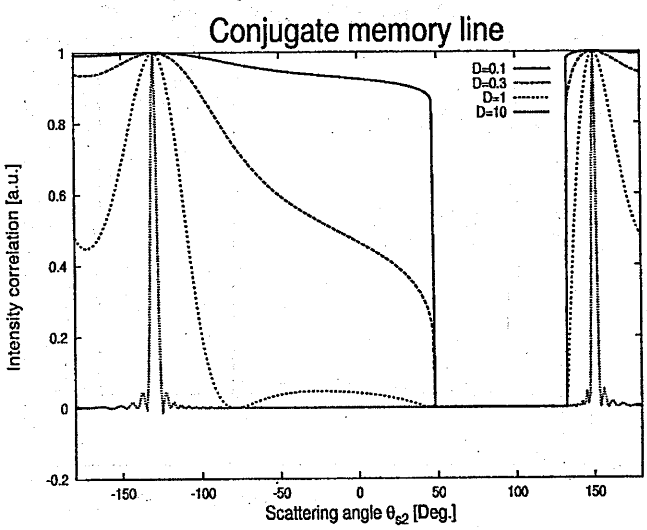


図 19: 共役メモリーライン上の強度相関 (理論値)。入射角$\theta_{i1}=30°$、散乱角$\theta_{s1}=50°$、入射波長 $2\pi/k_1=2\pi/k_2=1$、散乱体の厚さ $D=0.1,0.3,1,10$。

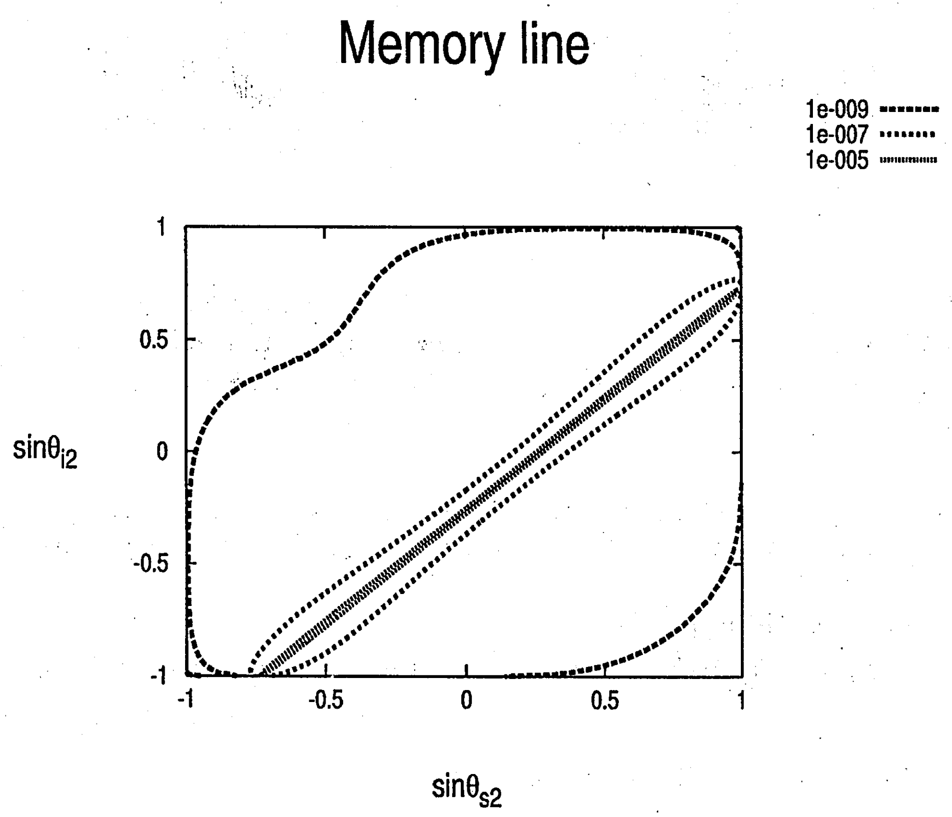


図 20: 強度相関の等高線図 (理論値)。入射角$\theta_{i1} = 30°$、散乱角$\theta_{s1} = 50°$、入射波長$2\pi/k_1 = 2\pi/k_2 = 1$、散乱体の長さ$L_x = 1000$、厚さ$D = 1$。

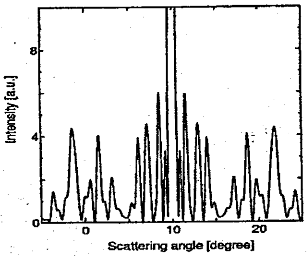


図 21: 散乱強度。入射角$\theta_{i1}=10°$、入射波長$2\pi/k_1=1$、散乱体の長さ$L_x=100$、厚さ$D=0$、個数$N=100$

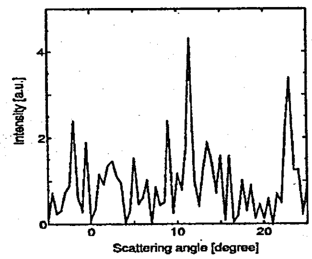


図 22: 散乱強度。入射角$\theta_{i1}=10°$、入射波長$2\pi/k_1=1$、散乱体の長さ$L_x=100$、厚さ$D=1$、個数$N=100$

と定義できる。散乱角が鏡面反射方向に一致しない、すなわち$\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2\neq 0$のとき上式は1次Wiener核$A_1$で表現できる。ガウスランダム測度の4次モーメントに関する関係式

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s1})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s2})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s3})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s4})\rangle \\
&= \langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s1})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s2})\rangle\langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s3})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s4})\rangle + \langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s1})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s2})\rangle\langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s3})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s4})\rangle \\
&\qquad + \langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s1})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s2})\rangle\langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s3})\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_{s4})\rangle
\end{aligned} \tag{69}$$

を用いて、散乱強度相関(68)の分子、分母は

$$\langle I(\boldsymbol{k}_{s1}|\boldsymbol{k}_{i1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s1} I(\boldsymbol{k}_{s2}|\boldsymbol{k}_{i2})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s2}\rangle - \langle I(\boldsymbol{k}_{s1}|\boldsymbol{k}_{i1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s1}\rangle\langle I(\boldsymbol{k}_{s2}|\boldsymbol{k}_{i2})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s2}\rangle \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
= \;& |A_1(q_1|q_{i1},k_1)|^2|A_1(q_2|q_{i2},k_2)|^2\cos^2\theta_{s1}\cos^2\theta_{s2} \\
& \times\left[\langle \mathrm{dB}(q_1)\overline{\mathrm{dB}(q_1)}\,\mathrm{dB}(q_2)\overline{\mathrm{dB}(q_2)}\rangle - \langle \mathrm{dB}(q_1)\overline{\mathrm{dB}(q_1)}\rangle\langle \mathrm{dB}(q_2)\overline{\mathrm{dB}(q_2)}\rangle\right]
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
= \;& |A_1(q_1|q_{i1},k_1)|^2|A_1(q_2|q_{i2},k_2)|^2\cos^2\theta_{s1}\cos^2\theta_{s2} \\
& \times\left[\langle \mathrm{dB}(q_1)\,\mathrm{dB}(q_2)\rangle\langle\overline{\mathrm{dB}(q_1)\,\mathrm{dB}(q_2)}\rangle + \langle\overline{\mathrm{dB}(q_1)}\,\mathrm{dB}(q_2)\rangle\langle \mathrm{dB}(q_1)\overline{\mathrm{dB}(q_2)}\rangle\right]
\end{aligned} \tag{72}$$

$$= \begin{cases} |A_1(q_1|q_{i1},k_1)|^2|A_1(q_2|q_{i2},k_2)|^2\cos^2\theta_{s1}\cos^2\theta_{s2}\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2 & \text{if } q_1=\pm q_2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{73}$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle [I(\boldsymbol{k}_{s1}|\boldsymbol{k}_{i1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s1}]^2 \right\rangle - \left\langle I(\boldsymbol{k}_{s1}|\boldsymbol{k}_{i1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{s1} \right\rangle^2 && (74)\\
=\;& \left[|A_1(\boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_{i1}, k_1)|^2 \cos^2\theta_{s1}\right]^2 \\
&\times \left[\left\langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)\overline{\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)}\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)\overline{\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)} \right\rangle - \left\langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)\overline{\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)} \right\rangle^2 \right] && (75)\\
=\;& \left[|A_1(\boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_{i1}, k_1)|^2 \cos^2\theta_{s1}\right]^2 \\
&\times \left[\left\langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1) \right\rangle \left\langle \overline{\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)} \right\rangle + \left\langle \overline{\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)}\,\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1) \right\rangle \left\langle \mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)\overline{\mathrm{dB}(\boldsymbol{q}_1)} \right\rangle \right] && (76)\\
=\;& \left[|A_1(\boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_{i1}, k_1)|^2 \cos^2\theta_{s1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\right]^2 \\
& && (77)
\end{aligned}
$$

で表現できる。式 (73),(77) を散乱強度相関 (68) に代入すると

$$
C(\boldsymbol{k}_{s1}, \boldsymbol{k}_{i1}|\boldsymbol{k}_{s2}, \boldsymbol{k}_{i2}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{q}_1 = \pm\boldsymbol{q}_2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (78)
$$

を得る。なお、鏡面反射方向への散乱についても上式と同じ結果が得られる。第3章で示したように

$$
\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2 \qquad (79)
$$

は通常のメモリー効果を意味する。これは式 (72) の第2項によるものである。一方、第1項による

$$
\boldsymbol{q}_1 = -\boldsymbol{q}_2 \qquad (80)
$$

は共役メモリー効果を意味するが、これまでの研究では第1項の効果を無視しているものがほとんどである。なお、ここで得られた強度相関のピークがデルタ関数的であるのは不規則面が無限に広がっているしたことによるもので、有限面積の表面からの散乱の場合には有限のピーク幅をもつ。

図24に示すように周期構造による散乱では鏡面反射波 (0次波) および回折波 (±1次波) が生じるが、同様に表面粗さの小さい不規則面からの散乱波は表面形状のもつ各空間周波数成分による回折波とみなすことができる。回折波は入射波数ベクトルの xy 平面への射影成分$\boldsymbol{q}_i$と表面形状の空間周波数成分であるBraggベクトル$\boldsymbol{q}_s$の和で表される。ここで、Braggベクトルは式 (8),(67) における$\boldsymbol{q}_\alpha$に相当するものである。メモリー効果は式 (79) を満たす場合、入射条件、散乱方向は異なるが同一のBraggベクトルによる散乱であるために等しい散乱強度となる現象であると解釈できる。また、表面形状は実関数で表現されるので空間周波数成分のうち互いに複素共役の関係にある対は等しい大きさをもち、Braggベクトル$\boldsymbol{q}_s, -\boldsymbol{q}_s$による散乱は等強度となる。よって、共役メモリー効果は式 (80) を満たす場合、Braggベクトルの複素共役の対による散乱であるために散乱強度が等しくなる現象であると考えられる。共役メモリー効果によるスペックルの対称性は表面形状の各空間周波数成分による+1次、-1次の回折強度が等しいことによると考えられ、図25に示すような鏡面反射方向を中心とした対称構造が存在する。

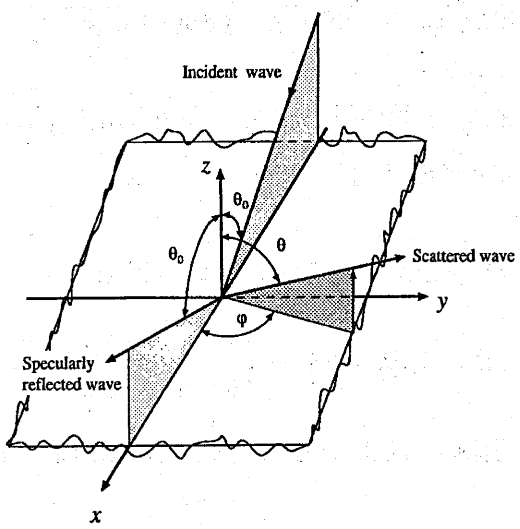


図 23: 不規則表面からの散乱

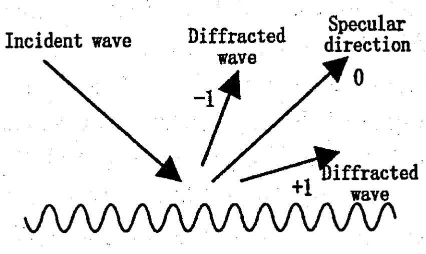


図 24: 周期構造からの回折。

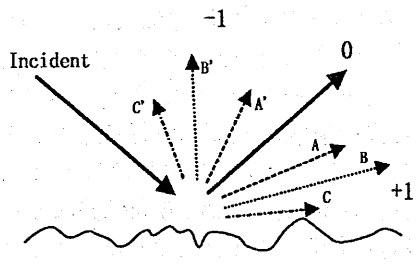


図 25: 不規則表面による回折。

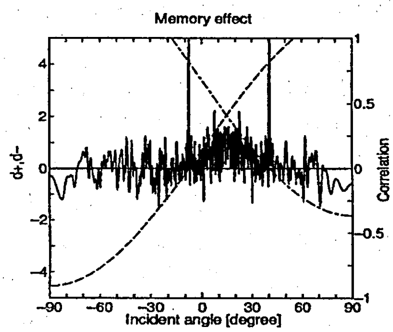


図 26: 散乱強度相関。入射角$\theta_{i1} = 30°, \theta_{i2} = 15°$、散乱角$\theta_{s1} = 10°$、入射波長 $2\pi/k_1 = 1, 2\pi/k_2 = 1.2$、不規則表面の長さ $L = 100$、表面粗さ $k_1\sigma = 0.03$、相関距離 $k_1 l = 1.2$、サンプル数 100、一点破線は $d+$、破線は $d-$ を表す。

表面粗さの小さい不規則面からの散乱におけるメモリー効果および共役メモリー効果を確認するために摂動法により散乱強度相関を数値計算した。表面粗さは小さいとするので 1 次項のみで近似する。散乱面は 1 次元不規則表面 $f(x)$ とする。波動場は表面上でディレクレ条件を満たすスカラー波であるとすると散乱強度は

$$I(\theta_{s\alpha}|\theta_{i\alpha}, k_\alpha) \simeq \left| \frac{k_\alpha^2 \cos\theta_{i\alpha} \cos\theta_{s\alpha}}{\pi r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\alpha r} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\alpha(\sin\theta_{i\alpha} - \sin\theta_{s\alpha})x} f(x)\, \mathrm{d}x \right|^2, \tag{81}$$

であたえられる。ここで r は不規則表面と観測点の距離を表し、入射波長および不規則表面の長さより十分大きいとする。図 26 に示すように $d_+ = 0, d_- = 0$ を満たす場合に相関が大きくなり、メモリー効果、共役メモリー効果の両方が見られることがわかる。なお、d_+, d_- は式 (61),(62) で定義される。

5 結論

本論文では不規則表面による散乱の強度相関について議論した。異なる入射波長によるスペックルパターンの間にも相関がありメモリー効果が存在することを明らかにした。この周波数－角度相関におけるメモリー効果は従来から知られている角度メモリー効果を含むものである。特に入射角一定で周波数変化のみでメモリー効果が見出せることは実用上有用である。メモリー効果は散乱波を表す複素平面でのランダムウォーク過程が互い

に等しい散乱プロセスの間で生じるものであるが、ランダムウォーク過程が互いに複素共役である場合にも散乱強度が等しくなり強度相関がピークをもち共役メモリー効果が存在することを示した。通常のメモリー効果に関しては時間反転対称性による強度相関ピークが存在することが知られているが、本論文では共役メモリー効果に関して空間反転対称性によるピークの存在を指摘した。

また、共役メモリー効果により、各スペックルパターンが鏡面反射方向を中心とする対称性をもつことを明らかにした。不規則面は全く対称性をもたないが、その形状は実関数で表現されるので空間周波数領域で表現すると原点対称となる。散乱強度は表面形状の空間周波数成分に依存するので、散乱波は対称性をもつことになる。表面粗さの小さい粗面からの散乱では散乱点が特定の2次元平面内に限定されているが、これは低次元の領域に閉じ込められた不規則散乱体からの散乱波が何らかの対称性をもつことを示唆するものであると考えられる。また、共役メモリー効果ならびに共役対称性は表面粗さに大きく依存する現象であるので、理論的に興味深いのみならず、計測技術への応用なども期待できる。

参考文献

[1] 鶴田匡夫. 応用光学II, 第4章, pp. 33–39. 培風館, 1990.

[2] H. Ogura, T. Kawanishi, N.Takahashi, and Z. L. Wang. Scattering of electromagnetic waves from a slightly random surface — reciprocal theorem, cross-polarization and backscattering enhancement —. *Waves in random Media*, Vol. 5, pp. 461–495, 1995.

[3] T. Kawanishi, H. Ogura, and Z. L. Wang. Scattering of electromagnetic waves from a planer waveguide structure with a slightly 2D random surface. *Waves in random Media*, Vol. 7, pp. 35–64, 1997.

[4] T. Kawanishi, H. Ogura, and Z. L. Wang. Scattering of electromagnetic wave from a slightly random dielectric surface. *Waves in random Media*, Vol. 7, pp. 351–384, 1997.

[5] T. Kawanishi, H. Ogura, and Z. L. Wang. Polarization characteristics of an electromagnetic wave scattered from a slightly random surface — +45° polarized incidence —. *Waves in random Media*, Vol. 7, pp. 593–605, 1997.

[6] J. W. Goodman. Some fundamental properties of speckle. *J. Opt Soc. Am.*, Vol. 66, No. 11, pp. 1145–1150, 1976.

[7] S. Feng, C. Kane, P. A. Lee, and A. D. Stone. Correlations and fluctuations of coherent wave transmission through disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 61, No. 7, pp. 834–837, 1988.

[8] T. R. Michel and K. A. O'Donnell. Angular correlation functions of amplitudes scattered from a one-dimensional, perfectly conductiong rough surface. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 9, No. 8, pp. 1374–1384, 1992.

[9] M. E. Knotts, T. R. Michel, and K. A. O'Donnell. Angular correlation functions of polarized intensities scattered from a one-dimensionally rough surface. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 9, No. 10, pp. 1822–1831, 1992.

[10] G. Zhang and L. Tsang. Angular correlation function of wave scattering by a random rough surface and discrete scatterers and its application in the detection of a buried object. *Waves in random Media*, Vol. 7, pp. 467–478, 1997.

[11] T. Chan, Y. Kuga, and A. Ishimaru. Subsurface detection of buried object using angular correlation function measurement. *Waves in random Media*, Vol. 7, pp. 457–465, 1997.

[12] D. Léger and J. C. Perrin. Real-time measurement of surface roughness by correlation of speckle patterns. *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 66, No. 11, pp. 1210–1217, 1976.

[13] M. Nieto-Vespernas and A. Sanchez-Gil. Intensity angular correlations of light multiply scattered from random rough surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 10, No. 1, pp. 150–157, 1993.

[14] V. Malyshkin, A. R. McGurn, T. A. Leskova, A. A. Maradudin, and M. Nieto-Vesperinas. Speckle correlations in the light scattered from weakly rough random metal surfaces. *Waves in random Media*, Vol. 7, pp. 479–520, 1997.

輻射科学研究会資料
RS 97-19

ＤＢＲチェレンコフレーザの粒子シミュレーションによる解析

Analysis of a DBR Cherenkov laser via particle simulation

平田晃正　　　　塩沢俊之
(大阪大学)

１９９８年3月２３日（月）

於　三菱電機（株）先端技術総合研究所

1 まえがき

相対論的電子ビームを用いた発振器の一つであるチェレンコフレーザは，サブミリ波から遠赤外波に至る広い波長領域において大出力かつコヒーレントな電磁波の得られる発振器であり，リモートセンシング，高分解能レーダ等，電磁波工学のさまざまな分野への応用が期待されている．チェレンコフレーザは，相対論的電子ビームに沿って伝搬する空間電荷波と誘電体導波路に沿って伝搬する電磁波の結合によって増大波が得られるレーザである．チェレンコフレーザに関しては，これまでに実験的[(1)~(5)]および理論的[(6)~(18)]研究が多数報告されている．

従来，チェレンコフレーザに関する理論的研究においては，主として single-pass 型のレーザにおける電磁波の増大特性が解析されてきた．その解析によると，電磁波をある程度の大きさまで増幅するには，長い導波路が必要であった．そのため，装置は大きなものとなり，また導波路に装荷する誘電体を長く一定の厚さに作り，かつ長い距離にわたって電子ビームと誘電体の間隔を一定に保つ必要があり，技術的に大きな負担になる思われる．近年，その難点を解決するために，導波路の両端に反射鏡を置くことにより，導波路を共振器構造にし，デバイスのコンパクト化を図り，導波路の長さを短くすることによって技術的負担を軽減する試みがなされている[(5),(13),(17)]．文献[17]において，塩沢らは，反射鏡としてＤＢＲ (Distributed Bragg Reflector)[(17),(20),(21)]を用いることを提案し，その線形過渡解析を行っている．ところで，先の考察[(17)]では，電子ビームに対しては線形流体近似が用いられ，電子ビームの非線形性は考慮されていない．しかしながら，電磁波が電子ビームからエネルギーをもらって増大していくと，電子ビームを構成する個々の電子は電磁波の電界に捕捉され，電子ビームの非線形性が無視できなくなってくる．そこで，本稿では，電子ビームと電磁波の相互作用領域においては粒子シミュレーションの手法[(14)~(16),(18),(19)]を用いて電子ビームの非線形性を考慮に入れ，ＤＢＲチェレンコフレーザの非線形特性を詳しく検討する．但し，電子ビームと電磁波が相互作用しないＤＢＲ領域においては，文献[17]と同様，線形解析を行なうものとする．

2 解析のモデルと基礎方程式

本稿において解析するチェレンコフレーザの２次元モデルを図1に示す．互いに平行な２枚の完全導体平板の一方に厚さaの誘電体を装荷し，誘電体表面から一定距離$(b-a)$だけはなれたところを厚さ$(f-b)$の平板状の相対論的電子ビームがz軸方向にドリフトしているものとし，ドリフト速度の初期値をv_0とする．また，電子ビームは十分大きい静磁界によってドリフト方向に集束されているものとする．ただし，すべての物理量はx軸方向に一様であるとする．更に，前章で述べたように，

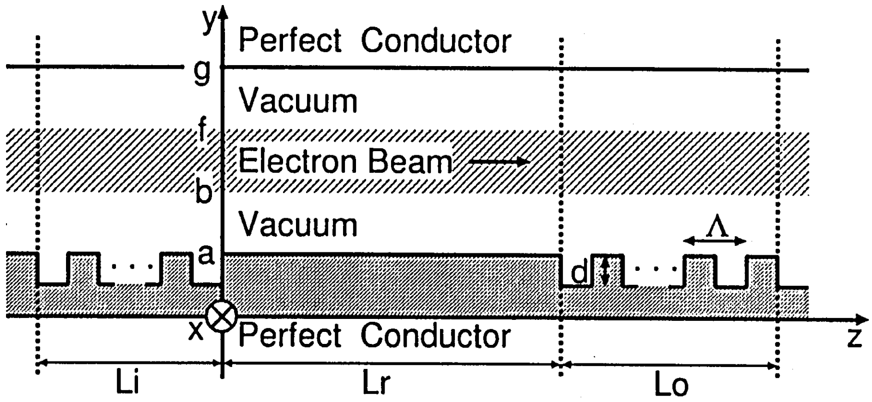


図1 解析のモデル

相互作用領域の両端の誘電体に，周期Λ，深さ d のグレーティングを施し，反射鏡として用いる．

本論文の解析の基礎となる方程式は，マクスウェルの方程式および電子に対する相対論的運動方程式である．電子ビームに十分大きい静磁界が印加されている場合には電子ビームはTEモードの電磁波とは結合しないことから，本論文ではTM波の伝搬のみを取り扱う．TM波に対するマクスウェルの方程式は次のように表される．

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}$$
$$\frac{\partial B_x}{\partial z}=\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial B_x}{\partial y}=\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}+\mu_0 J_z \tag{1}$$

但し，

$$\begin{aligned} J_z &= J_z(y,z,t) \\ &= \sum_i q_i v_{zi}\delta(y-y_i)\delta(z-z_i) \end{aligned} \tag{2}$$

であり，μ_0 は真空の透磁率，c は真空中の光速度，v_{zi} は粒子の速度を表し，添字 i は個々の粒子を意味する．ε_r は誘電体の比誘電率を表し，電子ビーム領域および真空領域では $\varepsilon_r=1$ とする．また，$\delta(x)$ はディラクのデルタ関数である．更に，J_z は電子およびイオンの巨視的粒子[19]により作られる電流密度を表している．ここで，巨視的粒子とは1個の粒子ではなく，多数の同じ種類の粒子からなる粒子の集団である．この巨視的粒子という概念を用いることができるのは，本論文において興味があるのが個々の粒子の詳細な振舞いではなく，粒子の集団としての統計的な振る舞いにあるからである．この概念を用いる利点は，見かけの粒子の数を減らすことができ，その結果，シミュレーションに要する時間を短縮できることである．

電子ビームに十分大きな静磁界が印加されている場合には，電子からなる巨視的粒子に対する相対論的運動方程式は次のようになる．

$$\frac{d}{dt}(\gamma_i m_e v_{zi}) = q_e E_z(y_i, z_i, t) \tag{3}$$

但し，

$$v_{zi} = \frac{dz_i}{dt} \tag{4}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-(v_{zi}/c)^2}} \tag{5}$$

であり，m_e，q_eは，それぞれ，電子からなる巨視的粒子の静止質量および電荷を表している．

3　粒子シミュレーション

本章では，解析の手法である粒子シミュレーション(14)~(16),(18),(19)について述べる．本論文で用いる手法は粒子シミュレーションの中でも特に粒子コード（Particle-in-cell code）と呼ばれているものである．本論文では，図1に示したチェレンコフレーザの2次元モデルを管内波長Lの長さでz方向に分割し，その分割された領域の前後では周期的境界条件が近似的に適用できるものとする．そして，初期状態で，ある一つの領域に含まれる粒子群を選び，FDTD法を用いてその粒子群と電磁波との相互作用を時間的に追跡していく．FDTD法を適用するために，このz方向に分割された各領域を，図2に示すように，y方向についてはΔyの間隔でNGY+1個の，一方z方向についてはΔzの間隔でNGZ+1個の格子によって微小領域に再分割する．そして，図2に示すように，これらの再分割された微小領域に，位置座標(y_i, z_i)と速度v_{zi}をもった電子およびイオンの巨視的粒子をそれぞれN個一様に並べる（$i = 1, 2, \cdots, N$）．

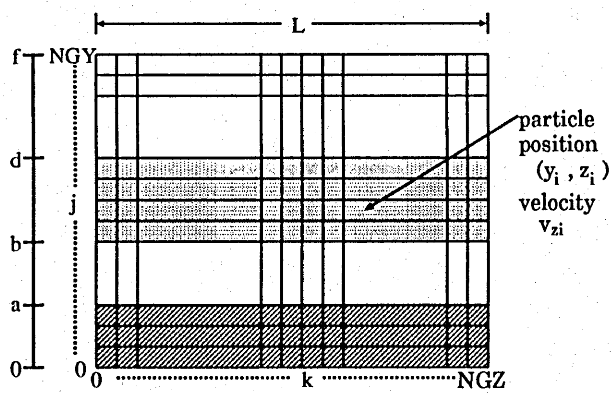


図2 格子による系の分割

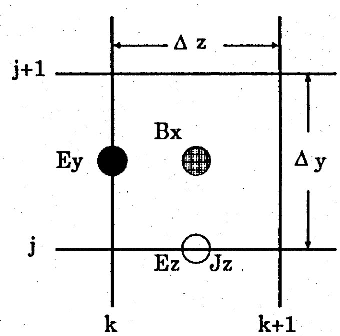


図3 電磁界成分の配置

また，図3に示すように，各微小領域で，E_zおよびJ_zは点$(j+1/2,k)$において，B_xは点$(j+1/2,k+1/2)$において，E_yは点$(j,k+1/2)$において求める．

まず，初期状態において，粒子の速度にわずかの擾乱を与えると，この擾乱によって粒子の位置に変化が起こり，その結果として電子密度に変動が生じる．そこで，この電子密度の変化に伴って変化する格子点上の電流密度を求める．次に，この電流密度によって生じる電磁界成分を求める．この電磁界成分により電子が加速度を得て，その速度および位置が変化する．そして再び，電子密度に変化が生じる．この過程を繰り返すことにより電磁界および電子の運動の時間的変化を追跡することができる．

4　ＤＢＲチェレンコフレーザの増幅特性

本章では，ＤＢＲチェレンコフレーザにおける電磁界と電子ビームの相互作用を前章において説明した粒子シミュレーションの手法を用いて解析し，その結果を検討する．本章の解析で用いた種々のパラメータの値を表1に示す．ここで，出力側のグレーティングの長さL_oは，飽和時の出力電磁波電力が最大となるように選んだ．また，以下のグラフで用いた，transitとは，電磁波が共振器内の往路を伝搬する回数を示す．

表1　シミュレーションに用いたパラメータの値

管内波長λ_g	1.56(mm)
増大波の周波数F	105.7(GHz)
比誘電率ε_r	9.63
誘電体の厚さa	0.25 (mm)
電子ビームの厚さ$f-b$	0.125(mm)
電子ビームと誘電体の間隔$b-a$	0.25(mm)
導波管断面の高さf	4.0(mm)
二つの反射鏡の間隔L_r	100(mm)
入力側のグレーティングの長さL_i	9.75(mm)
出力側のグレーティングの長さL_o	3.51(mm)
グレーティングの深さd	0.0625(mm)
グレーティングの周期Λ	0.78(mm)
ビームのドリフト速度の初期値β_0	0.5538
電子のプラズマ周波数ω_p / 2π	0.954 (GHz)
粒子の個数N	256(個)
1ステップの時間間隔Δt	6.42×10^{-14}(s)
入力パルスの平均電力P_0	7.2(μW)
電子ビームの加速電圧V	103(kV)
電子密度n_0	1.36×10^{10}(/cm^3)

以下では，時刻$t=0$において，入力端に反射鏡の間隔L_rの2倍より短くかつ反

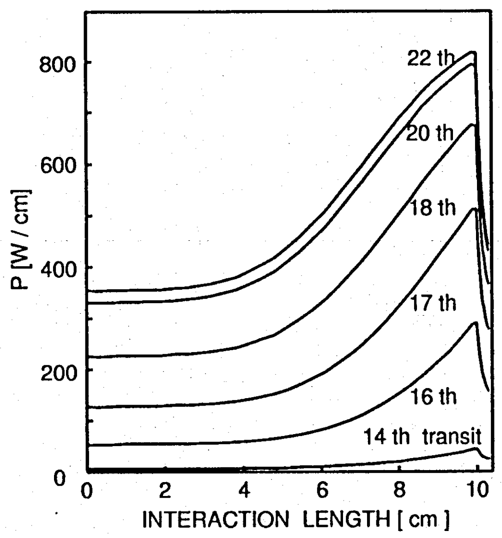


図 4 電磁波電力の空間変化

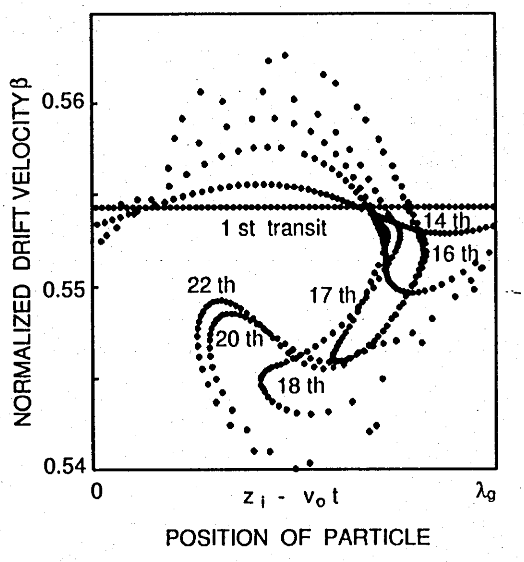


図 5 終端付近での位相空間図

射鏡の長さより十分長いパルス電磁波（平均電力 P_0）を入力するものとし，このパルスが二つの反射鏡によって交互に反射されながら電子ビームからエネルギーをもらって増大していく過程を数値的に追跡する．但し，シミュレーションでは，パルスの中央部の長さが一波長の部分にのみ着目し，この部分が増大し飽和に達する様子を調べる．

まず，共振器内の電磁波電力の変化の様子を図4に示す．図4から，電磁波が往復を繰り返すごとに共振器内の電磁波電力が増大し，やがて飽和に達する様子がわかる．また，往復回数が増えるにつれ電磁波電力が増大した結果，電子ビームを構成する電子が短い相互作用距離で集群を形成している様子もわかる．この数値例で，電磁波を入力し，出力端で最大電力を得るのに要する時間は 13(ns) であり，これは電子ビームの持続時間数百 ns に比べ十分小さい．共振構造を用いない場合，最大電力を得るための相互作用長は 65cm で，その電力は，624[W/cm] である．それに対し，共振構造を用いた本研究において，二つの反射鏡の間隔を 10cm にしたときは，出力端における最大出力電力は 446[W/cm] であった．

次に，相互作用領域の終端付近における位相空間図を図5示す．この図において，左半分が電子の加速領域に，右半分が電子の減速領域に対応している．図5から，電磁波が往復を繰り返すごとに，電子の集群がより減速している様子がわかる．相互作用領域が一定の長さであるにもかかわらず，電子集群がより減速するのは，共振器内の電界の振幅が大きくなったため，電子がより強く電界に捕捉されるためである．また，ほぼ飽和に達する往復回数における電子集群は，加速領域に入り，逆に若干加速され始めている様子もわかる．

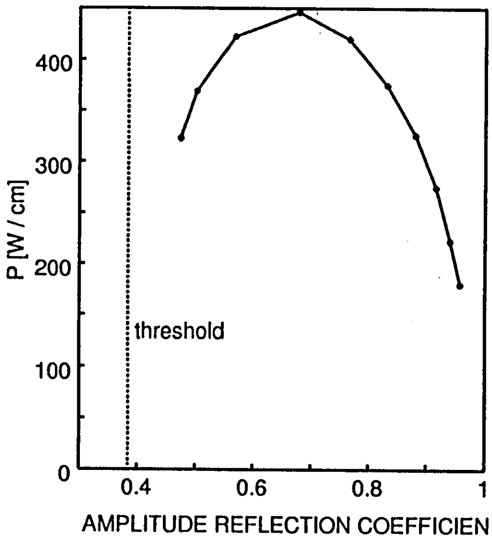


図 6 出力電磁波電力の反射率依存性

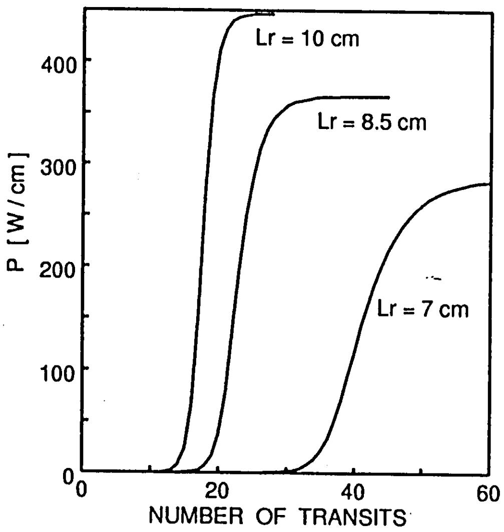


図 7 出力端における電力変化

本研究で反射鏡としてＤＢＲを用いた利点の一つに，グレーティングの長さ，溝の深さなどの各種パラメータを変化させることにより任意の反射率が実現できることが挙げられる．そこで，図 6に飽和時の出力電力が，出力側反射率によりどのように変化するかを示す．ところで，チェレンコフレーザでは，電子ビームと電磁波との相互作用が進むにつれ，電子ビームのドリフト速度が減少し，波数・周波数がごくわずか変化する．そのため，往復回数により，反射率が若干異なるが，その変化は高々1 %であるため，横軸には，反射率の初期値を示している．図6から，最大出力電力を得るための，最適な反射率が存在することがわかる．また，最適反射率から若干ずれても，得られる電力はあまり変化しないこともわかる．また，図中の threshold は，電磁波が往復を繰り返すごとに増大するための反射率の最小値を示し，この値は次式により与えられる．

$$R_i R_o \exp(\alpha L_r) > 1 \tag{6}$$

但し，R_i，R_oはそれぞれ入力側，出力側の振幅反射率，αは小信号近似が成り立つ領域での空間的増大率を示す．

最後に，二つの反射鏡の間隔L_rによる電力増大の変化を調べるために，様々なL_rの値に対して，共振器の出力端における電磁波電力の変化の様子を図 7に示す．また，このときの出力側のグレーティングの長さは，出力電力が最大となるようにL_rごとに変えるものとし，それ以外のパラメータについては表1のものを用いる．この図から，二つの反射鏡の間隔が長いほど，少ない往復回数で高い電力が得られることがわかる．但し，L_rが長くなると single-pass 型のレーザの特性に近づくことに注意しなければならない．

5 結論

本稿では，誘電体導波路の両端にＤＢＲを形成し，誘電体表面から一定距離離れたところを相対論的電子ビームがドリフトしているチェレンコフレーザのモデルを考え，粒子シミュレーションの手法を用いて，その非線形特性を詳しく調べた．その結果，ＤＢＲチェレンコフレーザは，single-pass チェレンコフレーザに比べて得られる電力は小さくなるが，デバイスの大きさを小型化できることが明らかになった．また，二つの反射鏡の間隔が長いほど得られる電磁波電力が大きくなり，single-pass 型のレーザの特性に近づくことがわかった．更に，出力電磁波電力は出力側のＤＢＲの反射率に大きく依存することがわかった．

参考文献

[1] J. E. Walsh, T. C. Marchall, and S. P. Schlesinger, "Generation of coherent Cherenkov radiation with an intense relativistic electron beam," *Phys. Fluids*, vol.20, pp.709-710, 1977.

[2] K. L. Felch, K. O. Busby, R. W. Layman, D. Kapilow, and J. E. Walsh, "Cherenkov radiation in dielectric lined waveguides," *Appl. Phys. Lett.*, vol.38, pp.601-603, 1981.

[3] E. P. Garate, J. E. Walsh, C. Shaughnessy, B. Johnson, and S. Moustaizis, "Cherenkov free electron laser operation from 375 to 1000 μm," *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res.*, A259, pp.125-127, 1987.

[4] F. Ciocci, A. Doria, G. P. Gallerano, I. Giabbai, M. F. Kimmitt, G. Messina, A. Renieri, and J. E. Walsh, "Observation of coherent millimeter and submillimeter emission from a microtron-driven Cherenkov free-electron laseer," *Phys. Rev. Lett.*, vol.66, pp.699-702, 1991.

[5] E. E. Fisch and J. E. Walsh, "Operation of the sapphire Cerenkov laser," *Appl. Phys. Lett.*, vol.60, no.12, pp.1298-1300, 1992.

[6] J. E. Walsh and J. B. Murphy, "Tunable Cerenkov lasers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-18, pp.1259-1263, 1982.

[7] M. Shoucri, "The excitation of microwaves by a relativistic electron beam in a dielectric-lined waveguide," *Phys. Fluids*, vol.26, pp.2271-2275, 1983.

[8] V. K. Tripathi, "Excitation of electromagnetic waves by an axial electron beam in a slow wave sturcture," *J. Appl. Phys.*, vol.56, pp.1953-1958, 1984.

[9] E. P. Garate, C. H. Shaughnessy, and J. E. Walsh, "High gain Cerenkov free-electron laser at far infrared wavelengths," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-23, pp.1627-1632, 1987.

[10] T. Shiozawa and H. Kondo, "Mode analysis of an open-boundary Cherenkov laser in the collective regime," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-23, pp.1633-1641, 1987.

[11] 田中俊幸, 安元清俊, "円形導波管内を伝搬する相対論的電子ビームによるチェレンコフ放射," 信学論 (C), vol.J70-C, no.1, pp.40-48, Jan. 1987.

[12] Y. Shibuya and T. Shiozawa, "Characteristics of an open-boundary Cherenkov laser using a magnetically-confined relativistic electron beam," *IEICE Trans.*, vol.E72, pp.828-833, 1989.

[13] E. Fisch, A. K. Henning, and J. Walsh, "A Cerenkov microlaser," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-27, no.3, pp.753-759, Mar. 1991.

[14] 堀之内克彦, 三田雅樹, 高橋博之, 塩沢俊之: 信学論 (C-I), vol.J78-C-I, pp.1-8, 1995.

[15] T. Shiozawa and T. Yoshitake, "Efficiency enhancement in a Cherenkov laser loaded with a Kerr-like mdedium," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-31, pp.539-545, Mar. 1995.

[16] T. Shiozawa, H. Takahashi, and Y. Kimura, "Nonlinear saturation and efficiency enhancement in a Cherenkov laser using a dielectric grating,"*IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-32, pp.2037-2044, Dec. 1996.

[17] T. Shiozawa and H. Kamata, "A Compact Chernkov laser with a Bragg cavity composed of dielectric grating," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-33, no.10, pp.1687-1693, Oct. 1997.

[18] A.Hirata and T.Shiozawa, "Efficiency enhancement in a Cherenkov laser by a proper permittivity variatio," *J. Appl. Phys.*, vol.82, no.12, pp.5907-5912, Dec. 1997.

[19] C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation*, McGraw-Hill, New York, 1985.

[20] H. Stoll and A. Yariv, "Coupled-mode analysis of periodic dielectric waveguides," *Opt. Commun.*, vol.8, pp.5-8, 1973.

[21] A. Yariv, *Quantum Electronics*, 3rd ed.,Wiley, New York, 1988, pp.606-615.

[22] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, vol.AP-14, pp.302-307, 1966

[23] A. Taflove, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, Boston, 1995.

輻射科学研究会資料
RS　９７－２０

不要電磁輻射（EMI）現象のモデル化と数値解析

Modeling of EMI Phenomena and Numeric Simulation

田邉　信二
(三菱電機先端技術総合研究所)

１９９８年3月２３日（月）

於　三菱電機株式会社先端技術総合研究所

1．ＥＭＩ問題の背景

1．1　ＥＭＩとは

ＥＭＩ(Electromagnetic Interference：「電磁干渉」と訳している）とは、電気電子機器から出す不要電磁輻射により、テレビ、ラジオ、さらにその他隣接する機器への電磁傷害を意味する言葉である。従来から、スパーク、スイッチング動作などから発生する電磁波が問題となってはいたが、近年、インバータ、高速なクロック信号に同期して動作するデジタル機器の普及が、このＥＭＩの問題をより深刻なものとしている。

1．2　不要電磁輻射のメカニズム

デジタル電子機器においては、遅いものでも数MHzのクロック信号に同期して動作している。ＣＰＵなどではその周波数は数100MHzに及んでいる。また、その波形はデータ、クロック信号のみならずデータにおいても「矩形」でありその立ち上がり、立ち下がり時間は、数ナノ秒であり、20次を越えるような高調波まで観測されている。また、高圧、大電流を扱う電力機器においても１マイクロ秒程度のスイッチング動作が行われている。

一般にノイズ源としては、高速で動作するＩＣなどの「スイッチ」であるが、そこで発生したノイズは、伝送線路、ケーブル、筐体などの「アンテナ」により増幅放射される。これがＥＭＩである。

1．3　ＥＭＩに関する法規制

電磁傷害はいまや深刻な「環境汚染」であり各国が、それぞれの法規のもとに規制をかけている。国際的には、ＩＥＣ(The International Electrotechnical Commission)のもとにＣＩＳＰＬ(Comite International Special Des Perturbations Radioelectriques（仏語）,The International Special Committee on Radio Interference（英語））、ＴＣ(Technical Committee)がその規制値、測定法などの策定、ドキュメント作成を行っている。また北米においてはＦＣＣ(The Federal Communications Commission) による規制、日本ではＶＣＣＩ(The Voluntary Control Council for Interference)に基づく規制が行われている。

規制の内容はもちろん対象とする機器により違うが、一般的な電子機器では30MHz～1GHzでのスペクトルを図１．１に示すように横軸に周波数、縦軸に電場強度（１μV/mの電場を０dBをとし、dBμV/mを単位として表す）をとり、測定する。その場合、図１．２の様に非測定物（ＥＵＴ）は高さ８０cmの回転する台に

置き、３ｍもしくは１０ｍ離れたアンテナを上下させ、スペアナでノイズの最大値をプロットしていく。

２．ＥＭＩ解析

２．１　ＥＭＩ解析の役割

電子機器の設計のおいて、一般的には、図２．１に示すように、回路図面から実際のプリント基板（以後ＰＣＢ：Printed circuit Boardと呼ぶ）の各層の配線に相当する「パターン図」をおこし、ＰＣＢの試作、量産を行う。従来多くの場合、パターン図でのＥＭＩのチェックは、感と経験による目視的なものに限られ、試作品の完成後の試行錯誤によるＥＭＩ低減対策が行われていた。この場合、ＥＭＩ低減に多くの時間と、手直しによるコストアップが費やされてきた。このような、チェックを「図面段階」でかけることを目的としたのが「ＥＭＩ解析」である。

２．２　ＥＭＩ解析の種類

ＥＭＩ解析には、大きく分けると「伝送線路解析」と「放射解析」がある。ＳＰＩＣＥに代表される伝送線路解析は、ストリップ線路、マイクロストリップ線路などの伝送線路とそれに付加されるＭＯＳ、ダイオードなどの能動素子、Ｌ、Ｃ、Ｒといった受動素子を考慮し、タイムドメイン（オシロの波形のように横軸に時間ｔをとった「波形」）の解析を行う。ここでは、無駄なリンギングがでないようなフィルタの設計などが行われる。今回、以下に示す例で扱う解析は、もう一つの「放射解析」に関するものである。放射解析の手法には、大きく分けると表２－１に示すように、「伝送線路解析とグリーン関数(Green's Function)を併用したもの」、「モーメント法(MoM:Moment Method)」、「ＦＤＴＤ(Finite Difference Time Domain)」、「有限要素法(FEM:Finite Element Method)」がある。それぞれの特徴を表２．１に示す。一般に、それぞれの解析法の特徴から、「伝送線路解析とグリーン関数(Green's Function)を併用したもの」は、その高速性と簡便さから、何十本、何百本の線路から危なそうな線路を抽出する「スクリーニング」に適する。MoMは、その展開関数が比較的簡素化でき、任意形状の誘電体を含まないＰＣＢの解析に、ＦＤＴＤは、タイムドメインでの過渡応答解析、アンテナの放射パターン、ゲインなどの解析、ＦＥＭは、複雑な形状の筐体などの解析に適する。今回下に示す例は３次元有限要素法を用いた解析例である。

３．線路構造と電磁放射の関係

有限要素法によるＥＭＩ解析を大きく分けると、ノイズ源であるＰＣＢの解析と、シールド、また、あるときは、「アンテナ」となる筐体の解析に分けられる。　この章では、ＰＣＢ上の線路、設計の例をとり上げる。第２章で述べたような伝送線路解析とグリーン関数を併用した線路スクリーニングは、あくまでも概略設計であり、個々の線路構造（例えば、マイクロストリップ構造を取ったときと、ストリップ構造の放射電磁場の差、線路のベンディング、スルーホール、任意形状のパッドなどの影響）、フレームグランド（ＦＧ）の取り方と電磁放射の関係など、部分部分での詳細な解析は、３次元の有限要素法が適している。

３．１　解析の概要

有限要素法の特長としては、従来のような、線路の特性インピーダンス、等価回路といった見方を必要とせず、

①誘電率 ε 、透磁率 μ 、導電率 σ など、実際の物理定数を入れて解析できる。

②３次元の現実に近い形状で解析できる。

③いわゆる、ニアフィールドでもファーフィールドでもない中間的な距離の問題を、近似なしに解ける。

といったことが挙げられる。

解析は３次元有限要素法を用い、磁気スカラーポテンシャルＡの３成分、電気スカラーポテンシャル ϕ それぞれの実数部、虚数部を変数に、１ノード８変数で解くことで、磁場、電場の位相も考慮した解析となっている。解析には主に、ＥＷＳ（ＤＥＣ３０００／９００：クロック周波数２７６ＭＨｚ、主記憶５１２ＭＢ）を用いた。

３．２　適用の実際

この解析手法は、プリント基板上の各線路の構造、実形状の決定、ＦＧの配置の決定などに活用している。図３．１は、(a)で示されるような、概略構造を持った長さ200mmの信号線路を３６０ＭＨｚのノイズ信号が走る場合について、信号ラインが最表層にあるマイクロストリップラインと、ベタのグランド、Ｖcc層に挟まれたストリップライン構造との電磁放射の差を示している。この解析では、導体層での表皮効果も考慮され、上下導体層での反射、透過、位相変化なども定量的に扱われる。このほか、ベンディング部、スルーホールの形状による電磁放射なども定量的に扱える。図３．２は、図３．１で示した線路に対しＦＧの取り方と放射ノイズの関係を示したもので、システムグランド全体をガスケットのようなもので全面

ＦＧに落とした場合を０dBとして、ＦＧの取り方による線路からの放射ノイズの変動について解析した例である。

これらの解析は、例えば、実際のTFT-LCD制御基板のパターン設計において、いろいろな制約条件の中で、線路構造、パターン、FGなどの最適設計に活用している。

４．筐体設計への適用

電子機器のシールド筐体を設計する上で、考慮すべき基本的要件としては、筐体の継ぎ目などにできるスリットからの漏れ、LEDの取り付け、放熱などのための穴からの漏れ、ケーブルを介しての漏れ、筐体内での空洞共振、電磁波の指向性などがある。筐体設計においても、３次元有限要素法電磁場解析が適用され、マクスウェルの方程式を離散化し直接に解いている。従って基本的には、３章での基板からの放射解析と同じように、設計者は、筐体の実際の形状、導電率などの物理定数を入力してやれば、筐体内部での渦電流分布、スリット部での変位電流、空洞共振、振動数の違いによる指向性の違いなどは自動的に考慮される。

４．１　解析の概要

ここでは、実際のＡＴＭ－ＤＳＵ(Asynchronous Transfer Mode - Digital Service Unit)の筐体設計を例に、各要件の解析結果について述べる。筐体は、実寸にほぼ合わせて、200mm×150mm×15mmの0.8mm厚のAl製筐体を仮定し、ＡＴＭ－ＤＳＵの基本周波数である150MHz（波長２ｍ）の周波数に対し解析した。

４．１．１　スリットからの漏れ

筐体を設計する場合、必ずいくつかの部分を組み合わせる形となり、塗装その他の影響で、狭く長い隙間（スリット）ができる心配がある。ガスケットなどを用いてこのようなスリットをなくすのが理想ではあるが、必ずしもすべての場所で実現はできない。スリットの形状と漏れの関係を把握することは、筐体設計において重要な用件の一つである。

一般に、このような細いスリットから電磁波が漏れる原因は、次のように考えられる。すなわち、図４．１（ａ）のように、筐体の内側のアルミ表面には、ノイズ源から発生した電磁波により渦電流が流れる。アルミでの表皮深さは100MHzで10μｍ程度であるから、完全に筐体で覆われていれば電磁波が漏れることはないが、

細いスリットがあると渦電流が迂回しきれずスリット内を変位電流が流れる。スリットは直接外側の空間とつながっているため、スリット内の変位電流は筐体の外側に磁場をつくり、電磁波として漏れることになる。図４．１（ｂ）は、改善前の実際の筐体の継ぎ目からの150MHzの電磁波の漏れを、ＥＭスキャン(Northern Telecom)を用いて測定した結果である。図４．１（ｃ）は、解析により求めた、スリット幅0.08mm、0.8mm、4.0mmのときの筐体上部からの電磁波の漏れ（表示は磁場成分のコンタ図）を示す。図４．２は、計算で求めた、スリットの真上10cmでの磁場強度を、筐体のない時の値を0dBとして表したものである。隙間が細いほど変位電流密度が上がり、漏れ強度は増大している。

４．２　穴からの漏れ

通常、導波管のようなものでは、穴の径が波長と同程度以上の大きさを持たなければ電磁波は伝わらない。しかし筐体の設計では、①胴体の厚みが薄い（今回の場合0.8mm厚）、②電磁波は、平面波でなく（ノイズ発生源が穴に近い場合は特に）球面波に近いなどの理由から、波長２ｍの電磁波も数cmのLED取り付け穴から漏れている。

図４．３（ａ）は解析モデルの構造図、図４．３（ｂ）波実際の筐体の前面LED取り付け穴からの、漏れ電磁波の強度分布の測定値を示す。図４．３（ｃ）は、筐体穴からの漏れの解析結果を示すが、ノイズ発生源である電気双極子を穴に近づけるに従い、漏れ強度が増す。図４．４は、穴とノイズ源の距離を140mm、60mm、0mmと近づけていったとき、穴の真上10cmの位置での磁場強度を、筐体のない時を0dBとして表したものである。ノイズ源となるICや終端が穴から至近の距離にあるときは、波長に対してきわめて小さな穴からの漏れも無視できなくなる。

４．３　適用の実際

上記のような解析結果を踏まえ、接合部分での塗装除去、細く長いスリットができないように接合部分の変更、LED穴の形状変更、LED後ろ側でのシールドなどの方法を用い、図４．５に示すように、当初のノイズレベルから、３ｍ法での測定で10dB程度の放射ノイズ低減が実現された。図４．６には最終的なＡＴＭ－ＤＳＵ筐体を示す。

また、前出のTFT-LCDのような表示機器、携帯電話のように軽量性が重視される機器のように、「筐体」の形態を呈していない電子機器も多く、筐体自体がアンテナとなり電磁波を再放射している場合も珍しくない。これらの機器では、３章で

述べた基板のＦＧ設計と、筐体設計を融合させて解く必要もでてきている。

５．まとめ

上に述べてきたように、ＥＭＩは、今後益々電気、電子機器の設計において重要な項目となる。設計段階でのＥＭＩの定量的予測は、開発期間の短縮、コスト低減に欠かせないものとなってきている。その中で、ＥＭＩ解析は、設計を行う技術者の「ツール」であり、ツールなしで、複雑なものを精度よく、すばやく組み立てることが不可能なように、これからの低ＥＭＩ設計に、これらの解析ツールは不可欠なものとなるであろう。

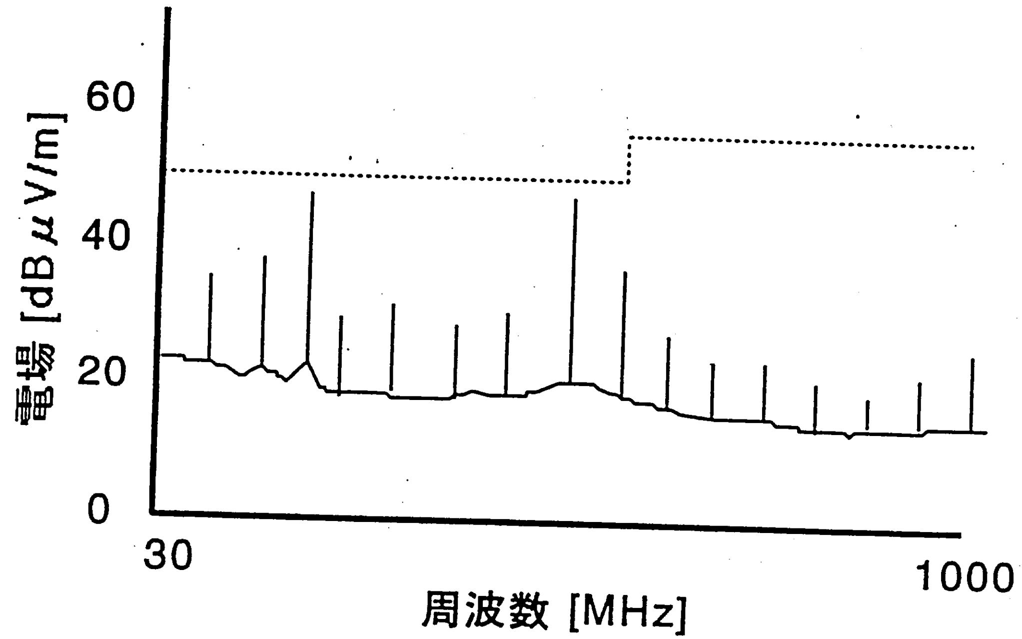


図１．１　ＥＭＩノイズ

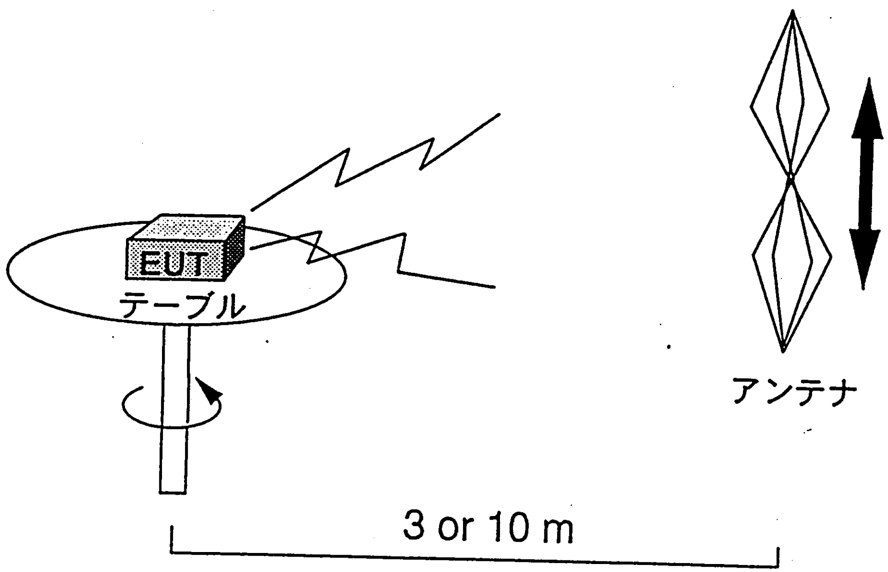


図１．２　ＥＭＩの測定

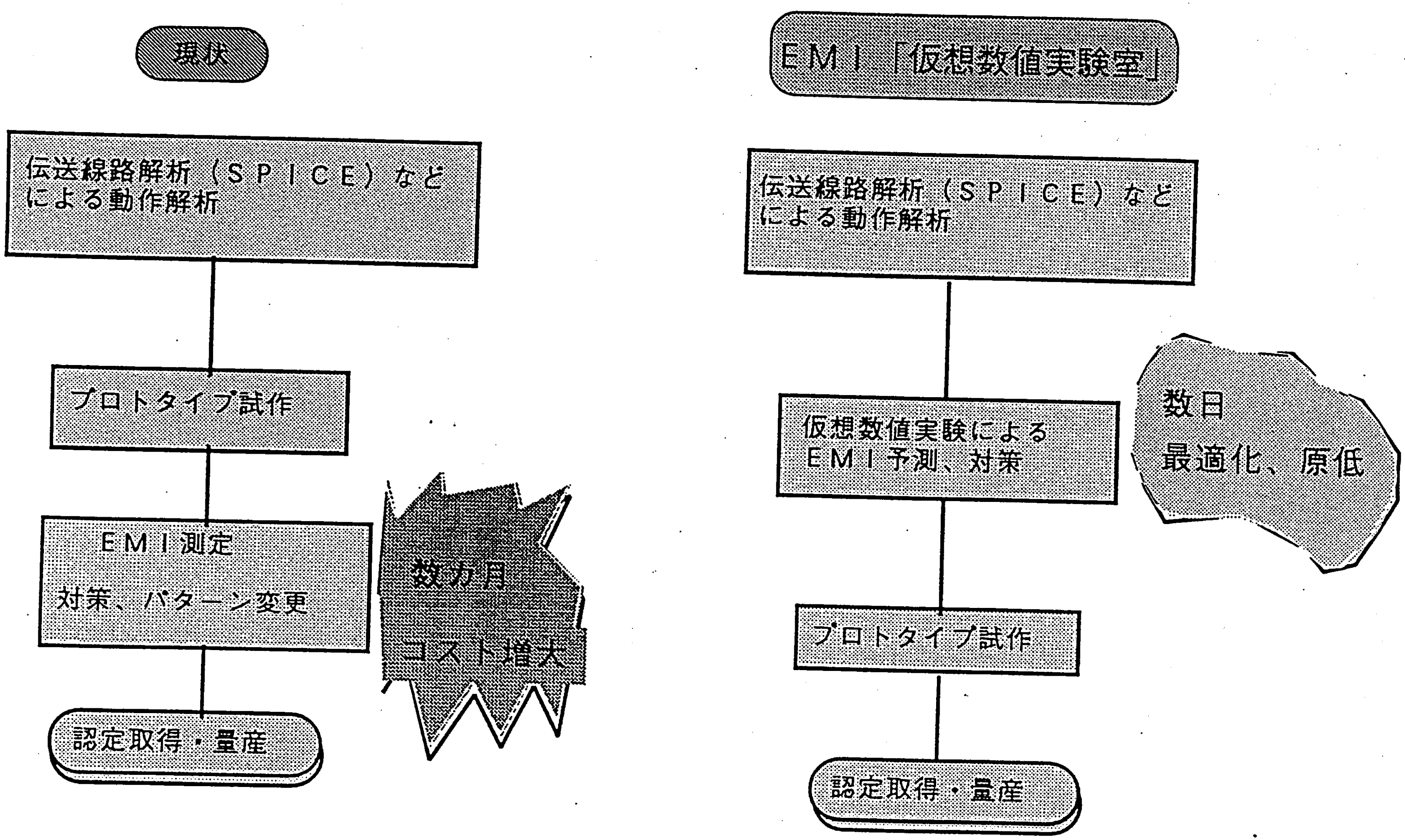
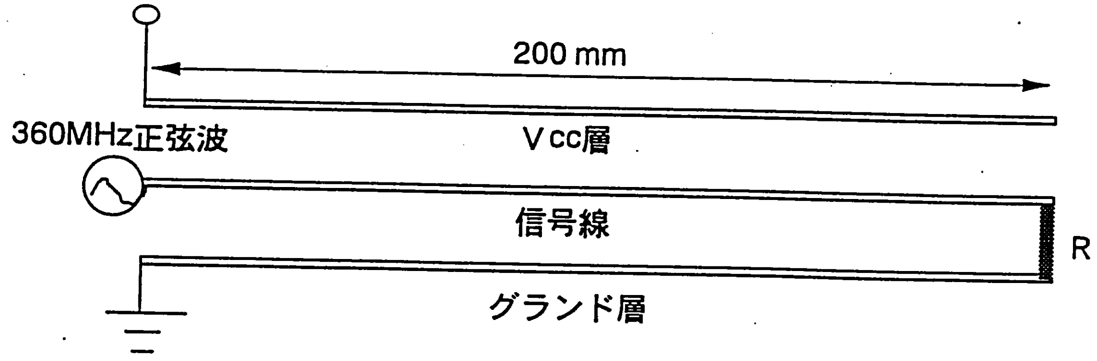
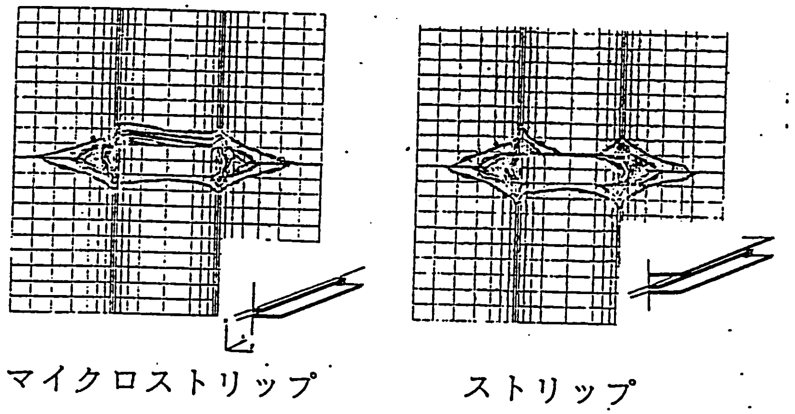


図２．１　ＥＭＩシミュレータの役割

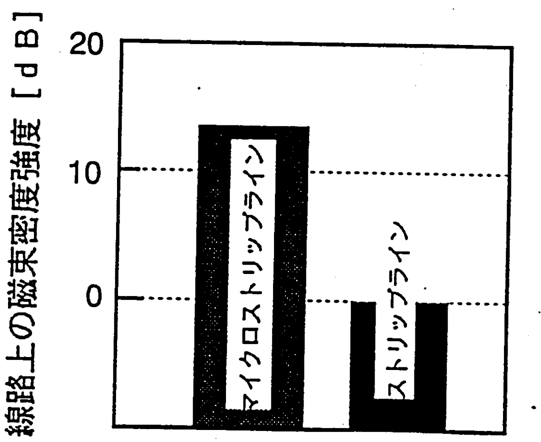


（a）線路構造

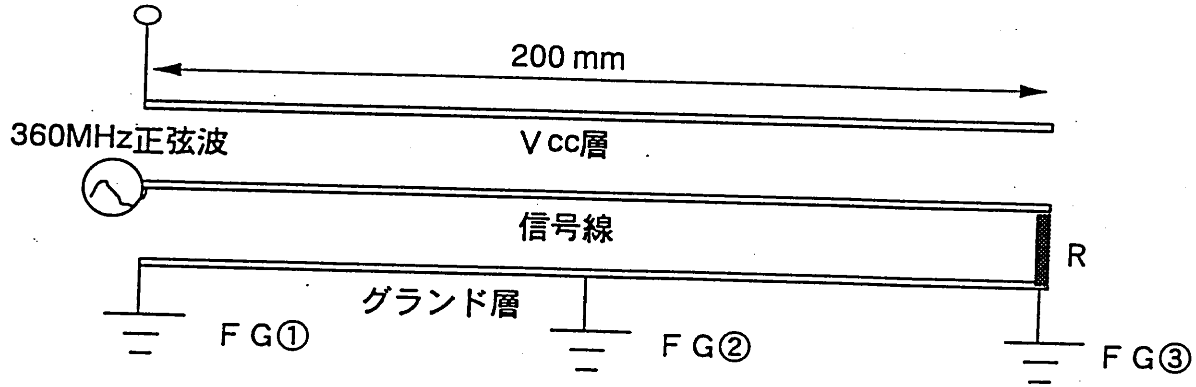
図３．１　線路構造と電磁放射
（a）多層基板の解析モデル
（b）基板構造と磁場強度の関係



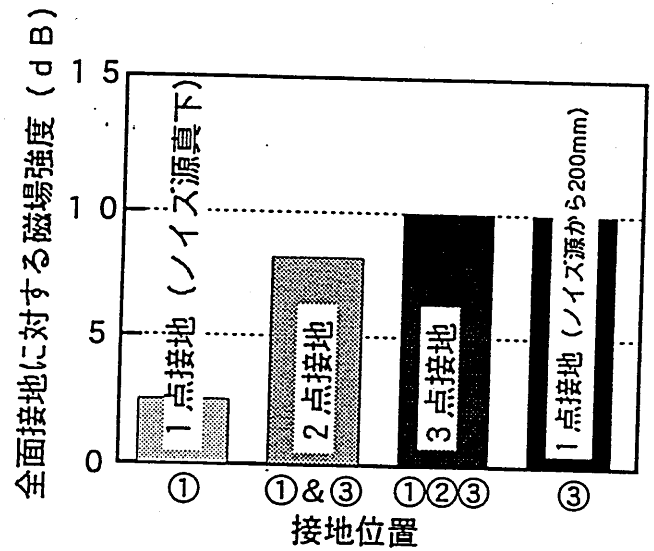
（b）磁束密度コンター図



（c）ストリップ線路とマイクロストリップ線路



（a）線路構造



（b）ノイズ強度の比較

図３．２　接地方法と磁場強度の関係

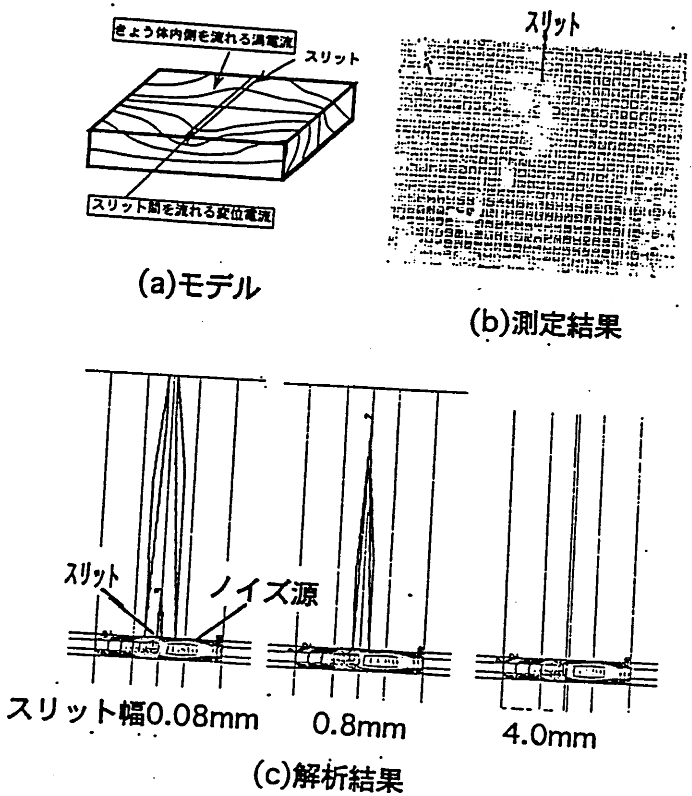


図４．１　スリットからの電磁波の漏れ

（ａ）モデル
（ｂ）測定結果
（ｃ）解析結果

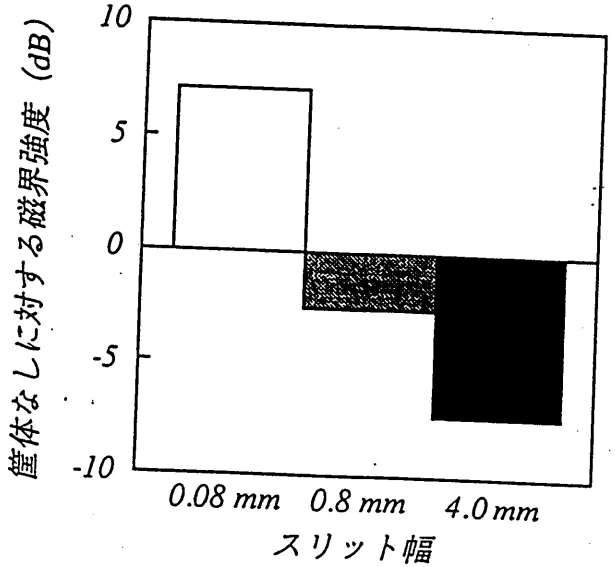


図４．２　スリット幅と漏れ磁場の関係

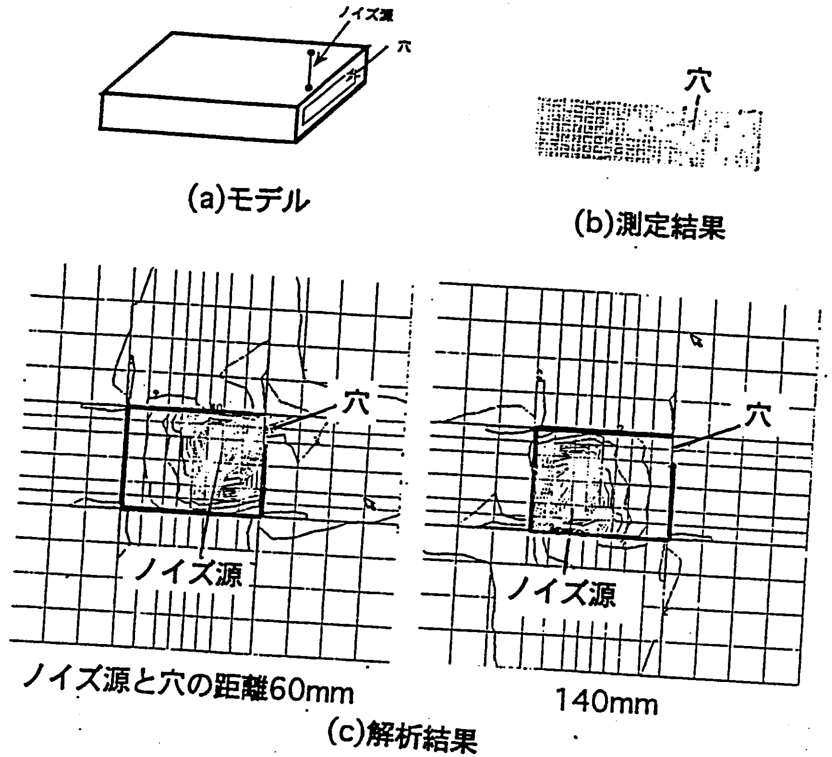


図４．３　穴からの電磁波の漏れ
（ａ）モデル
（ｂ）測定結果
（ｃ）解析結果

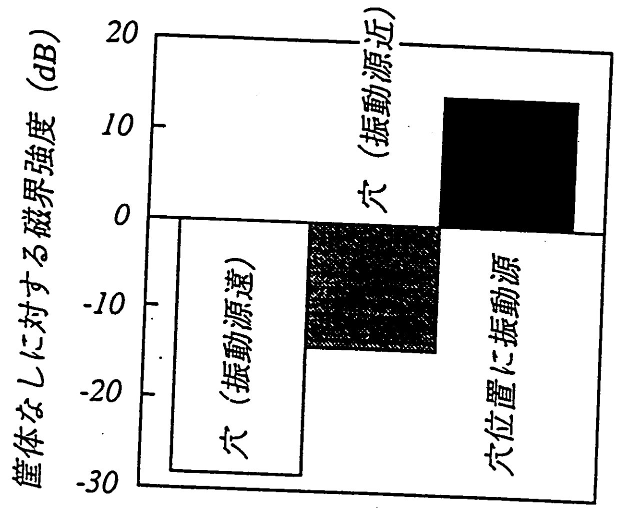


図４．４　穴とノイズ源の距離と漏れ磁場の関係

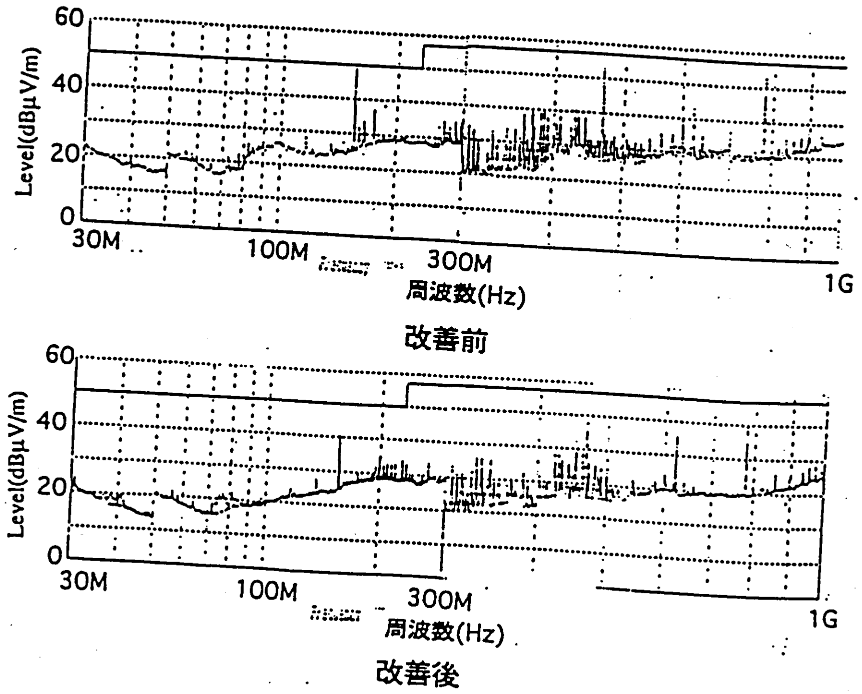


図４．５　ATM-DSUでの放射ノイズ低減
（ａ）改善前
（ｂ）改善後

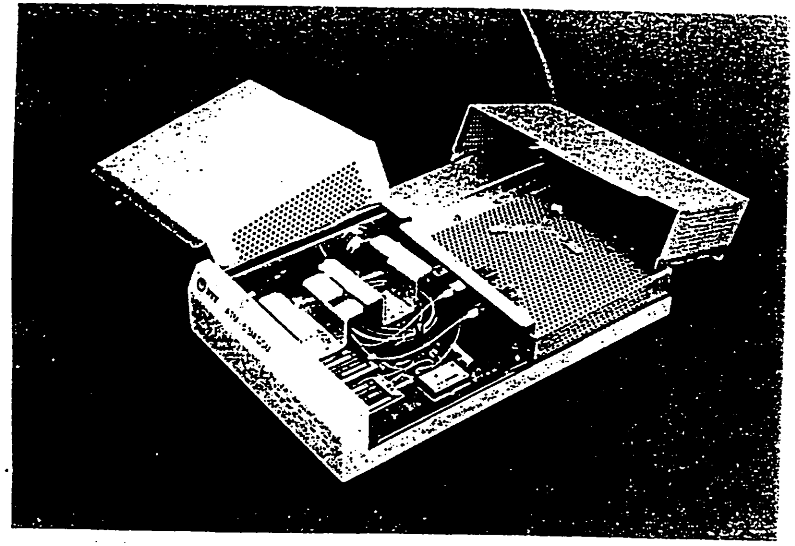
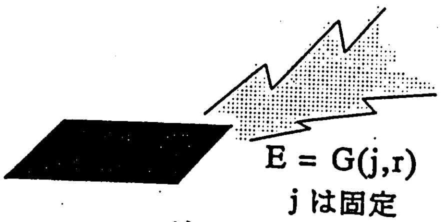


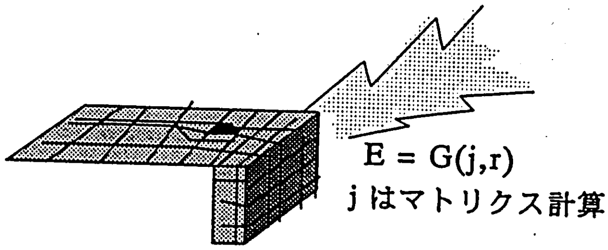
図4．6　ATM-DSUの筐体

表２－１　電磁波の数値解析手法

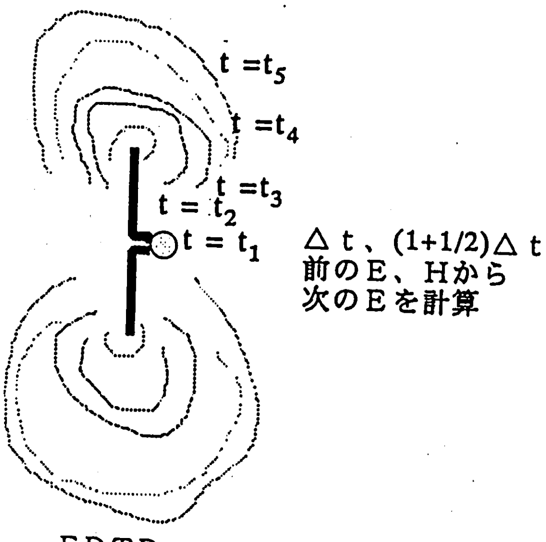
手法	長所	短所
グリーン関数法	高速、簡便	自由空間の電場しか計算できない。相互作用が入らない。
モーメント法	空間メッシュがいらない。境界条件がいらない。	物質（導電体、誘電体）の内部が解けない。フルマトリクスがでてくる。
ＦＤＴＤ	タイムドメインで解ける。マトリクス計算がいらない。物質の内部が解ける。	空間分割の他に時間分割が必要。周波数ドメインのデータを選るのにフーリエ変換が必要。等分割の直方体での分割が必要。吸収境界条件が必要。空間も分割が必要。
有限要素法	任意形状、任意物理定数の物質内の電磁場が計算できる。スパースな対称バンドマトリクスである（複雑な形状に対してはモーメント法より高速）。	空間も分割が必要。吸収境界条件が必要。



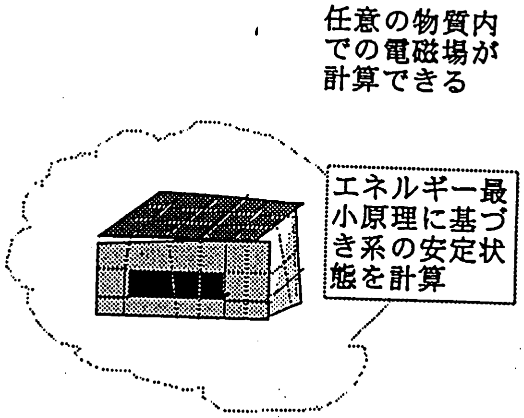
グリーン関数法



モーメント法



ＦＤＴＤ



有限要素法