輻射科学研究会資料
ＲＳ９８－１

半導体レーザーを用いた光計測　－帰還とカオス－

田中拓男　紫藤則和　山本錠彦

(大阪大学大学院　基礎工学研究科)

平成１０年5月２２日

半導体レーザーを用いた光計測　ー帰還とカオスー

田中拓男　紫藤則和　山本錠彦

（大阪大学大学院　基礎工学研究科）

1．はじめに

半導体レーザーから射出された光が，外部で反射されてレーザー共振器に戻ってくると，光出力の雑音レベルが増加し，発振される光強度は不安定になる．このような現象は，比較的古くから知られていたが，半導体レーザーが研究分野のみならず，光ディスクの光源など広く民生部品にまで使用されるようになってくると，この戻り光による不安定化の問題も顕著化し，これを抑制するための研究が数多く行われてきた．

一方，最近になると，この戻り光による発振強度の不安定化は，単なるランダム雑音ではなく，決定論的な方程式で支配された光カオスの１種であり，ランダムな雑音とは区別して取り扱うべきものであると認識されるようになってきた．この半導体レーザーの戻り光による光カオスは，典型的なカオス現象であり，近年その特性についてさかんに研究が行われているが，そのほとんどはカオス状態を制御・抑制し，光強度を安定化させるための研究である．これに対し，本研究では，カオスを制御して押さえ込むのではなく，（１）あえて半導体レーザーに光を戻すことによって光検出器がなくても物体の像を検出できる顕微鏡と，（２）カオス状態を積極的に利用した吸光度センサーを提案し，それら実験結果を報告する．

２．半導体レーザーを用いたレーザーフィードバック共焦点顕微鏡

2.1　共焦点レーザー走査顕微鏡

生物学や医学分野では，細胞組織などμｍ～ｍｍオーダーの試料の観察には，光学顕微鏡がよく使用される．この，光を用いて試料を観察する光学顕微鏡は，試料に直接触れずに測定ができるため試料を傷つけず，また可視域の光では試料のダメージを最小限に押さえられるため，生体

試料のダメージが非常に少ない測定法といえる．しかしながら，光学顕微鏡には，厚みをもつ試料を直接観察できないという最大の欠点があった．これは，厚みのある試料をそのまま観察しようとして，試料内部にピントを合わせても，その上下の像がボケた像として重畳してしまい，ピントの合った部分を観察できなくなるからである．つまり，光学顕微鏡で観察する試料は，薄くスライスしなければならず，結果として細胞を殺してしまう．これでは，光計測の持つ非接触，非破壊というメリットを充分に活かせてはいない．

このような問題点に対して，近年共焦点レーザー走査顕微鏡が提案され，さかんに研究されている[1, 2]．この共焦点レーザー走査顕微鏡は，図１に示すように，光源であるレーザーを対物レンズL_1を用いて試料内部の１点に集光する．レーザースポットの位置で反射，吸収，蛍光発光した光は，再度対物レンズL_2で集光された後，ピンホールを置いた光検出器によって検出される．この光学系では，点光源とみなせるレーザーと，試料内部に集光されたレーザースポット，ならびにピンホールディテクタの３点が互いに共役な位置に配置されている．すると，(1)試料内部の観察しようとする１点だけが局所的に照明されるため，それ以外からの散乱光等が大幅に低減される．(2) 図２に示すように，レーザースポットの前後で吸収，散乱されピンホール上でデフォーカスした光は，そのほとんどがピンホールによって蹴られてしまい，光検出器によって検出されなくなる，という光強度に対する２乗効果が生じ，この非線形性によって焦点部分の情報だけが検出され，焦点面前後のボケた像は消えてしまう．つまり，この光学系では，厚みのある試料を物理的にスライスすることなしに，その内部を直接観察できるようになり，従来の光学顕微鏡が持つ問題点を克服できる．

2.2 半導体レーザーフィードバック顕微鏡

この共焦点顕微鏡の問題点は，その光学系の調整が難しく，とりわけピンホールの位置をレーザースポットと共役な位置へ３次元的に調整するのが困難なことである．この問題に対し，最近He-Neレーザーや半導体レーザーを用いたレーザーフィードバック顕微鏡が研究されはじめている[3, 4]．今回我々は，このレーザーフィードバック顕微鏡の結像特性に

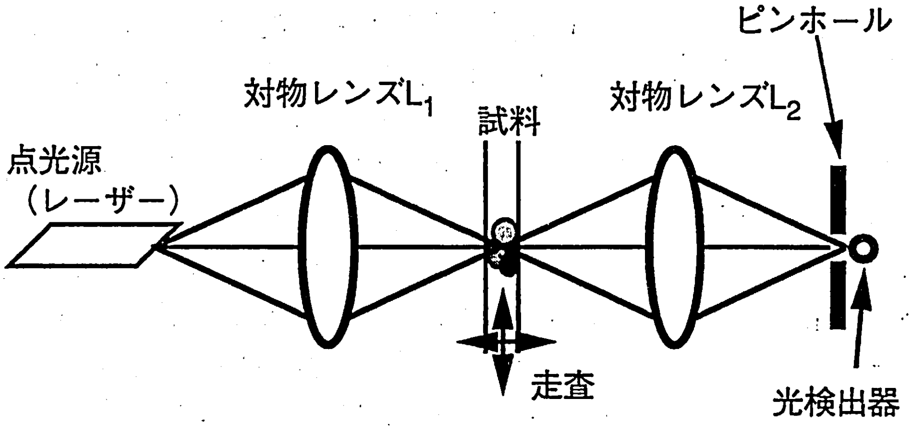


図１　共焦点顕微鏡

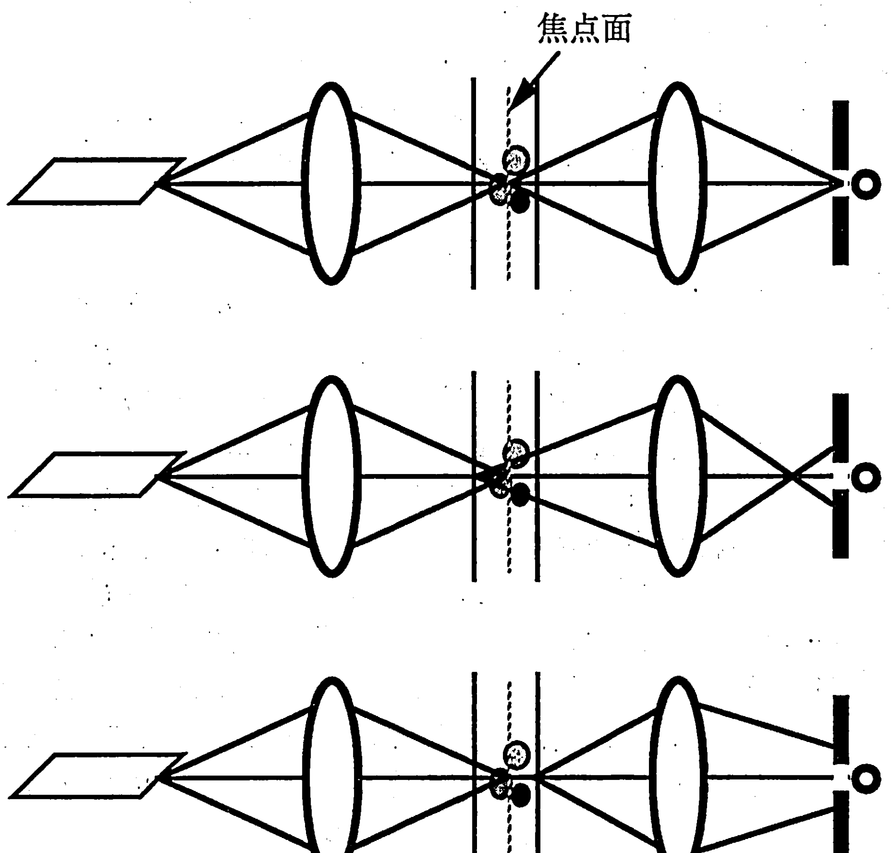


図２　共焦点顕微鏡の光軸方向分解特性

着目し，光源に半導体レーザーを使用して，その特性を利用することにより，半導体レーザーを光源として使用するとともに，これで光の検出も同時に行い，ピンホール光検出器が不要なシステムの試作を行った．

本研究で試作した共焦点レーザー走査顕微鏡の光学系を図３に示す．この光学系は反射型顕微鏡である．まず定電流駆動された半導体レーザー（松下電子工業LNCQ02PS，波長660.1nm）の光をコリメータレンズでコリメートした後，対物レンズ（×40, NA=0.65）を用いて試料表面の一点に集光する．試料で反射された光は，再度同じ対物レンズを通り，半導体レーザーに帰還される．反射光強度の検出は，光源である半導体レーザーで行う．これは半導体レーザーに光を戻すと，半導体レーザーのｐ－ｎ接合面間の電圧が光強度に応じて変化する現象を利用したものであり，試料で反射したレーザー光の強度は，ｐ－ｎ接合面両端の電圧を測定することにより検出する．このためｐ－ｎ接合面間の電圧をA/Dコンバータでディジタルデータに変換後コンピュータによって計測する．試料は，コンピュータコントロールされたx-y-zステージ上に固定されており，このステージを３次元的に走査することにより試料の像を測定する．

2.3 実験結果

まず，ミラーの反射率を変化させて半導体レーザーに戻る光量を変え，その時のｐ－ｎ接合面間の電圧を測定した．測定結果を図４に示す．図４より，ｐ－ｎ接合面間の電圧の変化は，半導体レーザーに戻ってくる光の強度に対してほぼ線形に変化していることがわかる．

試料として平面ミラーを置き，そのミラーを光軸方向に走査することにより，試作した共焦点顕微鏡の光軸方向の応答特性を測定した．測定結果を図５に示す．図５より，試作したピックアップ光学系の光軸方向の応答は，半値全幅で3.8μｍであり，これは試作した顕微鏡が，３次元物体を光軸方向に分離して観察可能であることを示している．またグラフには，レーザースポットの片側に大きなサイドローブが生じているが，これは，生物用対物レンズをカバーガラス無しで使用したために屈折率の不整合が生じ，このために発生した球面収差の影響である．

試作した共焦点顕微鏡を用いて実際に試料を観察した．試料には，ＬＳＩ素子を用いた．そして，光軸方向に焦点位置を変化させて再生像の

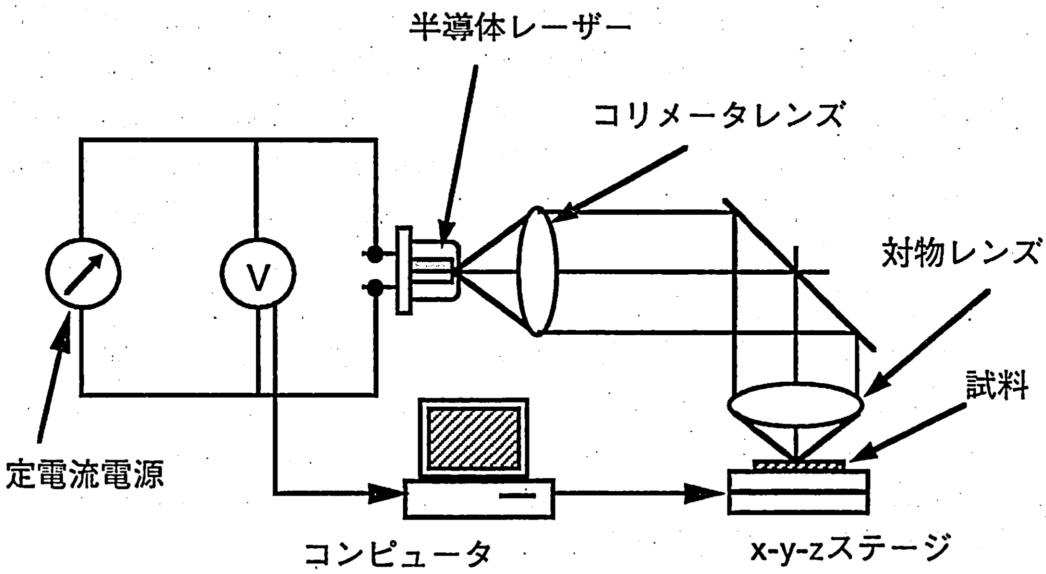


図３　半導体レーザーフィードバック共焦点顕微鏡

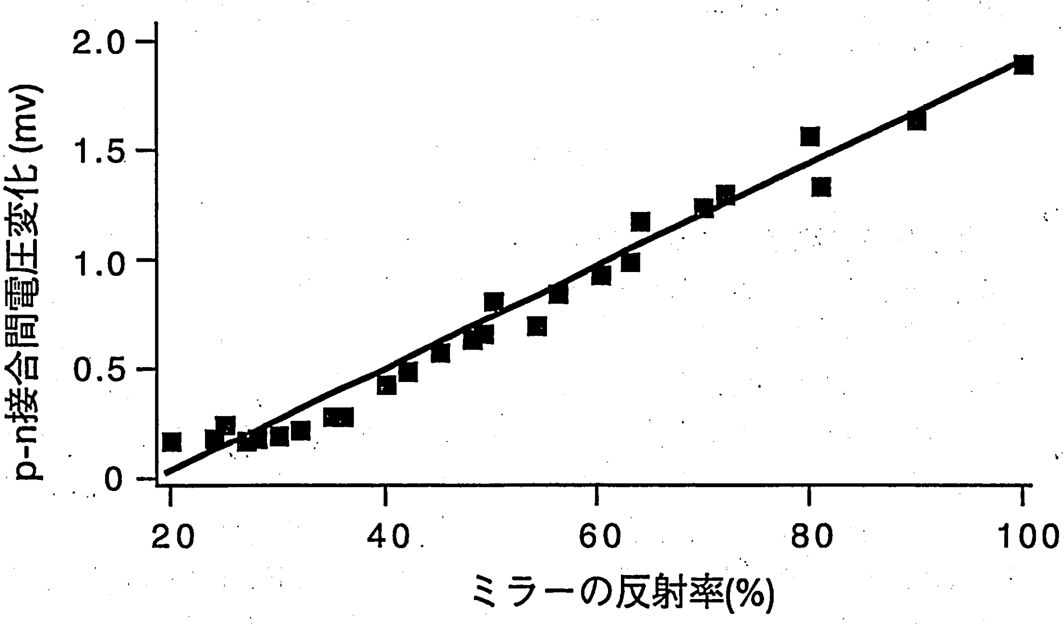


図４　光の戻り量とｐ－ｎ接合間の電圧変化

変化を見た．この実験結果を図６に示す．図６は，２μmごとに焦点位置を変えて測定した４枚の画像である．実験結果より，焦点位置を変化させると，ピントの合う高さが異なるため，各高さごとの構造が観測できていることがわかる（特に矢印で示した部分がわかりやすい）．また，焦点位置から外れた部分の像は，ボケずに消えており，焦点の合った部分の像のみが観測できている．このように，試作したレーザー帰還型共焦点顕微鏡が，奥行きの方向に物体を分解して解像できることを確認した．試作したシステムは，光源そのものが光検出器の役割も同時に果たすため，光検出器が不要である．従って光学系がシンプルになるだけでなく，光の相反則によりレーザー光は自ずから，検出器である半導体レーザーに戻ってくるので，従来の共焦点顕微鏡のようにピンホールの位置を細かく調整する必要もなくなる．

３．カオスを用いた吸光度センサー

3.1 カオスについて

決定論的な方程式で記述される物理系においても，その中に非線形性が内包されていると不規則な信号を発生させることがあり，これはカオスと呼ばれている．たとえば，

$$x_n = a\,(1 - x_n)\,x_n \qquad (1)$$

で表される数列は，ロジスティック写像と呼ばれ，初項が決まれば全ての項が一意に決定される決定論的な数列である[5]．しかしながらこの数列が取りうる値は，パラメータaの値に対して大きく変化することが知られている．例として，図７(a)にパラメータaに対して，初項を0.5としたときの数列x_nが取りうる値をプロットした．また，a=3.2, 3.5, 3.82の場合の数列の値を図７(b)～(d)に示す．図７(a)から，aが0～1.0の間では，数列の値は0に収束し，1～3.0付近までは，ある一定値に収束することがわかる．aが3.0を過ぎると，図７(b), (c)のように２つ以上の値を周期的に繰り返すようになる（n周期状態）．さらに3.7を過ぎた辺りからは，様々な値を取るようになり（図７(d)），その振る舞いは決定論的な方程式に基づいているにもかかわらず，一見ランダムな雑音のように振る舞う．こ

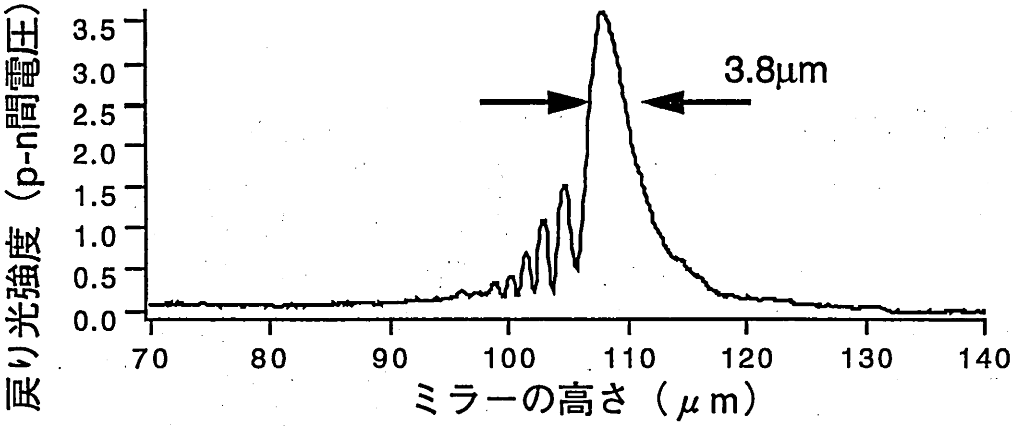


図５　光軸方向の応答特性

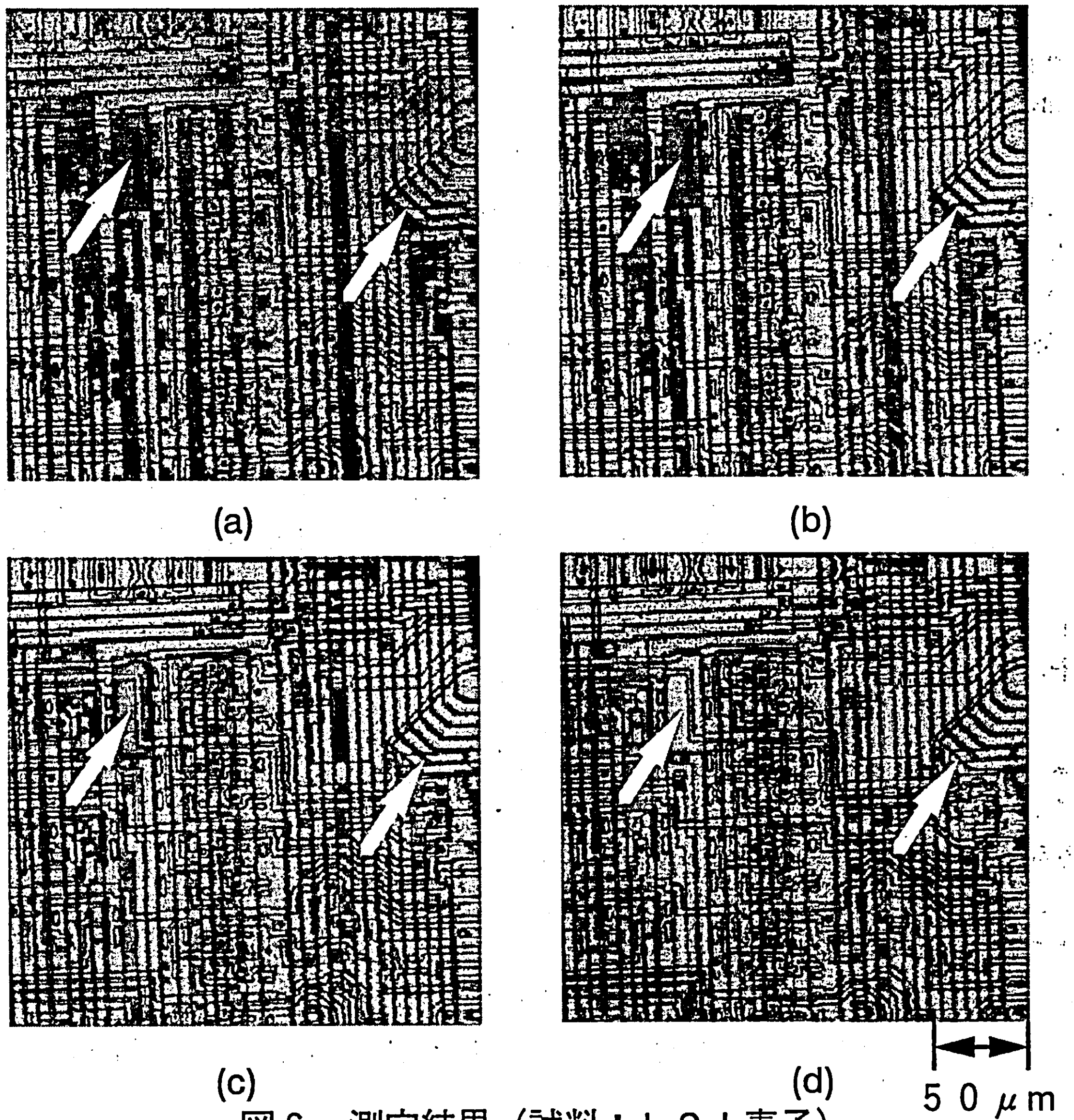
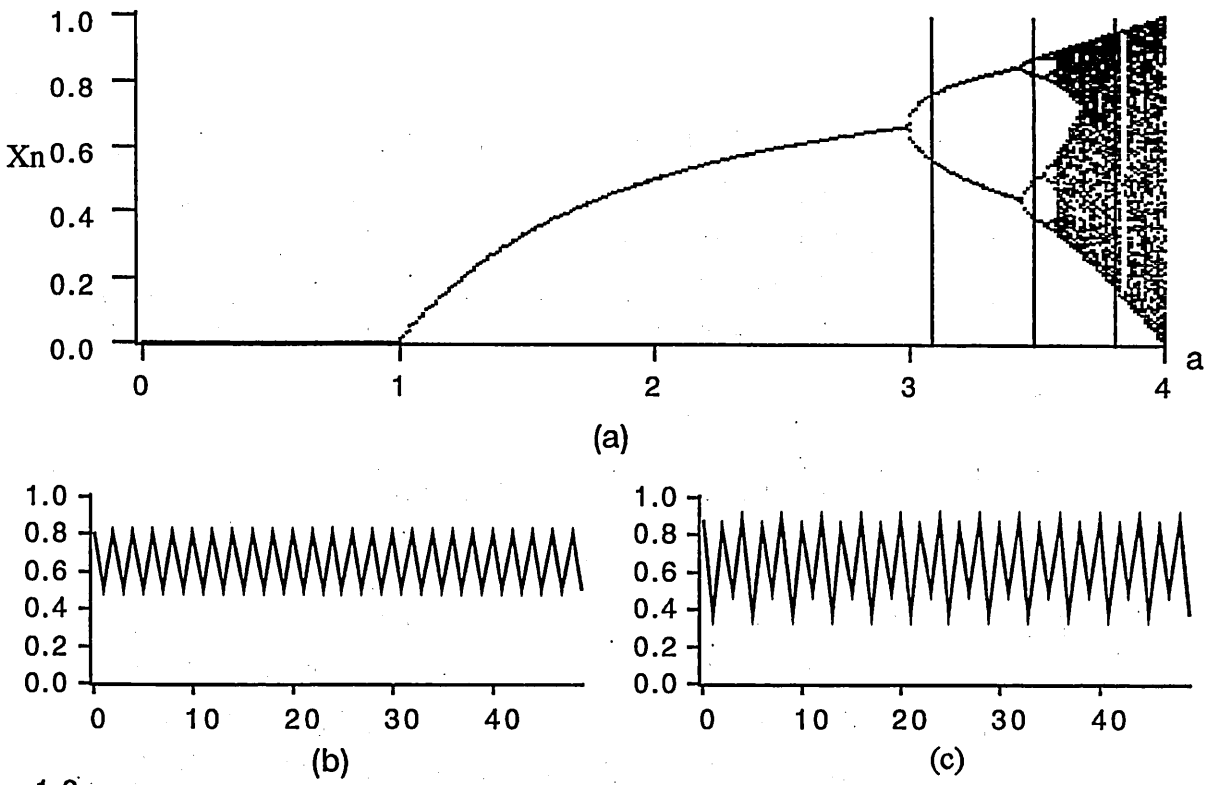


図６　測定結果（試料：ＬＳＩ素子）
(a) z=0, (b) z=2, (c) z=4, (d) z=8 (μm)

の，系が不規則な振る舞いを示す状態をカオスと呼ぶ．図７(a)のうち3.82≦a≦3.87の領域を拡大したものを図８に示す．図８からカオスには，（１）カオス的な系は，パラメータ（先ほどの例では，変数a）に対して非常に敏感に反応し，その振る舞いが変化する．（２）系がカオス的であるとき，そのパラメータ空間において，そのまわりの至る所でカオス的になっているわけではなく，近くに周期的な状態が存在する場合がある，という特徴がわかる．またこれに加えカオスには，（３）系がカオス的である場合は，系のとりうる値は，初項（初期条件）に敏感に反応し，初項の微小な変化によっても，系の振る舞いが大きく変化するという特徴もある．近年（２）の特徴を利用し，カオス状態の系のパラメータに微小な摂動を与えて安定状態に引き込ませることにより，カオスを制御する手法が提案されている[6, 7, 8, 9, 10].

半導体レーザーに光を戻した時の不安定化を，光カオスの１つとしてとらえ，この不安定化をカオスの制御手法を用いて抑制する１つの試みとして，半導体レーザーと干渉計を組み合わせたフィードバック系を用いた手法が大坪らによって提案されている[9]．この光学系を図９に示す．半導体レーザーから出た光は，トワイマン・グリーン干渉計に入り干渉する．干渉パターンの光強度は，フォトディテクタで検出された後，増幅とバイアスの加算ならびにディレイを与えたのち，これを半導体レーザーの注入電流にフィードバックする．半導体レーザーは，注入電流が変化すると発光強度のみならずその発振波長も変化するため，トワイマン・グリーン干渉計での干渉パターンが変化を受け，結果として，フォトディテクタで検出される光強度が変化する．このようにこの系では，干渉パターンから得られる光強度を半導体レーザーの注入電流にフィードバックする，一種のフィードバックループが形成されている．大坪らは，この系において注入電流にフィードバックする際の遅延時間を変化させて系に時間的な摂動を与えることにより，系のカオス状態を制御する手法を提案している．

この干渉計を用いた系は，干渉計部分に非線形性を内包しており，カオス的な振る舞いを示すと共に，フィードバックループを行う際のゲインやオフセットという系のパラメータを自由に制御できるため，半導体レーザーに直接光を戻す系に比べて，系全体の取り扱いが容易であると



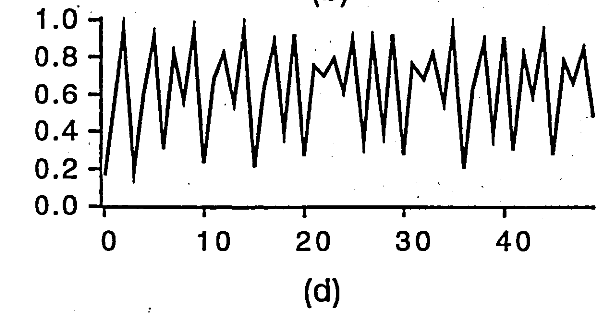


図７　ロジスティック写像
(a) 分岐図, (b) a = 3.2, (c) a = 3.5
(d) a = 3.82波形

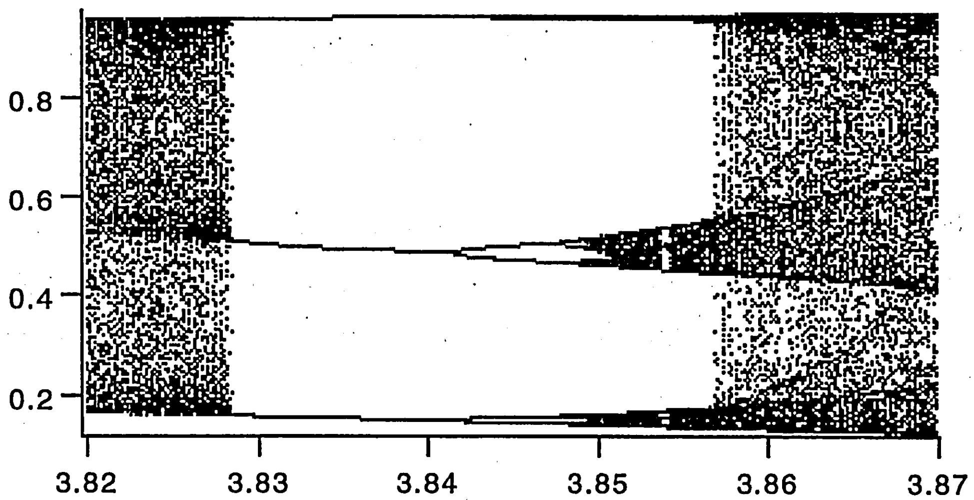


図８　ロジスティック写像分岐図の拡大図
a = 3.82 ～ 3.87

いう特徴を持っている．今回我々は，この点に着目し，この干渉計を用いた光カオス系に対する基礎的な特性の解析と共に，カオスを制御するのではなく，カオスの特徴であるパラメータに対する鋭敏性と，パラメータの変化による周期状態とカオス状態間の遷移現象とを積極的に利用することにより，この干渉計を用いたカオス系を，吸光度センサーへ応用することを試みた．

3.2 半導体レーザーと干渉計を用いた光カオスの特性

本研究で用いた実験系を図１０に示す．半導体レーザーには，LNCQ02PS(松下電子工業）を用いた．半導体レーザーから出た光は，トワイマン・グリーン干渉計に入射し，フォトディテクタ上に干渉パターンを生成する．この時半導体レーザー側へは光が戻らないよう干渉計のミラーを傾けてある．フォトディテクタで検出された光強度はA/Dコンバータによってコンピュータに取り込まれる．コンピュータは，その値に基づいて注入電流を計算し，半導体レーザーにフィードバックする．

まず，この光学系の特性を数式化し，その特性を解析する．使用した半導体レーザーは，閾値以上の注入電流では，発光強度が注入電流に比例する．従って，閾値電流をI_0で表すと，比例定数をwとして，発光強度Pは，

$$P = w\,(I - I_0) \tag{2}$$

となる．また，発振波長も注入電流に線形に比例すると近似して，

$$\lambda = \lambda_0 + k\,I \tag{3}$$

とする．ここで，電流に比例する比例定数をkとした．

次に，２つの光路の光路差がLのトワイマン・グリーン干渉計に強度P，波長λの光が入射した場合，フォトディテクタで検出される干渉パターンの光強度電圧V_{PD}は，

$$V_{PD} = P\left\{1 + a\cos\left(\frac{L}{\lambda}\right)\right\} \tag{4}$$

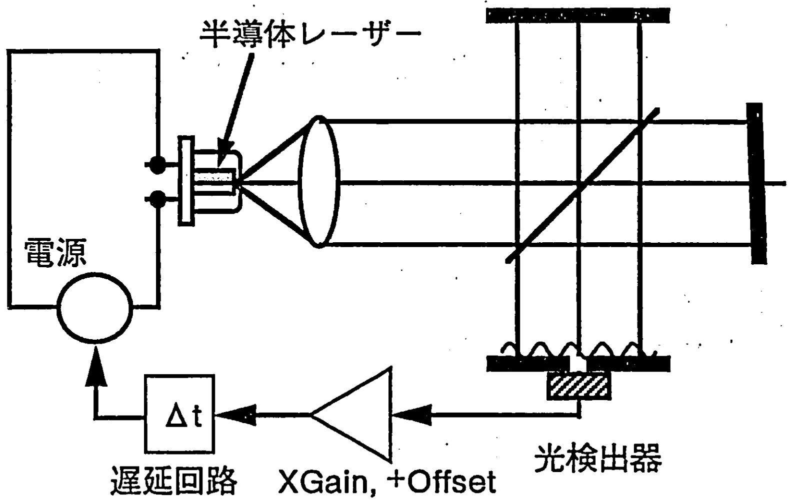


図９　半導体レーザーと干渉計を用いた光カオス光学系 [9]

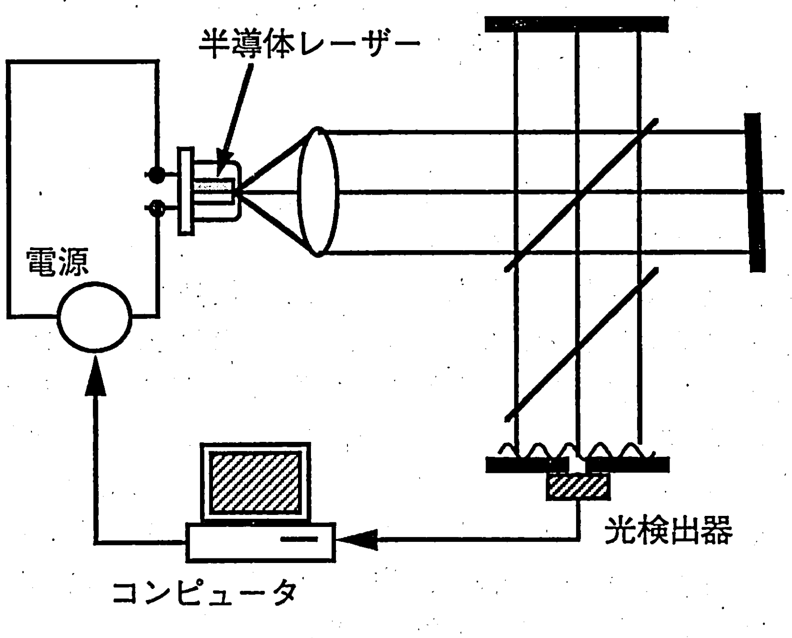


図１０　干渉計を用いた光カオスの評価光学系

となる．ここでaは，干渉縞のビジビリティである．

コンピュータでは，得られたV_{PD}にゲインgとオフセットfを加え，D/Aコンバータの出力Vを求める．

$$V = f - g\,V_{PD} \tag{5}$$

さらに，半導体レーザーの電源では，D/Aコンバータから出力された電圧に対して線形に注入電流を決定する．

$$I = h(V + V_0) \tag{6}$$

ここで，V_0はバイアス電圧である．

以上の式をまとめ，D/Aコンバータから出力した値Vnと，その時フォトディテクタで検出された電圧V_{PD}から算出された次のD/A出力値V_{n+1}の関係を求めると，

$$V_{n+1} = -g\,E\,(V_n - b)\{1 + a\cos(c\,V_n - d)\} + f \tag{7}$$

が得られる．このとき，(3)式における波長の変化が基準波長λ_0に比べて充分小さいとして，($\lambda_0 >> k$)（4)式を近似した．

3.3 実験結果

まず，半導体レーザーに印加する注入電流と，その時フォトディテクタで検出される光強度との関係を測定した．図１１より，その特性は，注入電流に比例して光強度が増加する効果と，波長変化にともなう干渉状態の変化による効果との積になっており，これは(2), (4)式から導かれる結果と良い一致を示した．また図１１の注入電流が32mA, 36mA付近において光強度が0になっていないのは，干渉縞のビジビリティが悪いためであると考えられる（(4)式のパラメータaが１未満）．以上の結果より，干渉効果による系の特性は，ほぼ理論式に従うことが確認でき，注入電流の変化幅の範囲では，発振波長が注入電流に対してほぼ線形に変化しているという仮定が成り立つ事がわかった．

コンピュータによってゲインgを変化させて，系の特性を測定した．実

験より得られたgに対する系の分岐図を図１２(a)に，また(7)式から求めたシミュレーション結果を図１２(b)に示す．(a)では，カオス状態と周期状態の境界がぼやけて判別しにくいものの，全体としての特性は，シミュレーション結果(b)とほぼ一致していることがわかる．

次に，オフセットfを変化させて系の特性を測定した．測定結果を図１３に示す．f=0.5では，一定値で安定しているが，f=1.5になると２周期状態を示し，f=3.8では４周期状態になっている．さらにfを大きくして，f=4.7ではカオス状態に遷移している．fの変化に対する分岐図を図１４(a)に，シミュレーション結果を図14(b)に示す．オフセットを変化させた場合でも，全体的な振る舞いはシミュレーション結果とよく一致している．従って，実験結果ではノイズ等の影響で潰れているが，(b)に示されるような，カオス状態の狭間にある周期安定状態（カオスの窓）も実際には存在していると推測される．

以上の実験結果と解析より，干渉計を用いたフィードバック光学系がカオス状態になりうること，ならびに系のパラメータ(f, g)の変化に対して，敏感に反応し，カオス状態と周期状態との間で遷移することが確認できた．

3.4 光カオスを用いた吸光度センサー

基礎的な実験により，今回用いた実験系の状態は，パラメータであるゲインgやオフセットfの値に対して変化し，そのパラメータが変化すると，カオス状態と安定周期状態との間を遷移することが確認できた．これを逆に利用すれば，系の状態変化から，パラメータの変化を検出できる事になり，今回は，これを物質の吸光度変化を検出するセンサーに応用した．考案した光学系を図１５に示す．半導体レーザーとトワイマン・グリーン干渉計を用いたフィードバック系は，図１０と同じである．これに加えてHe-Neレーザー（MELLES GRIOT 05-LHP-081, 5mw, λ=632.8nm）を第２の光源として用い，このHe-Neレーザー光を１辺10mmの液体セルを透過させた後，半導体レーザーの干渉パターンと重ね合わせて，フォトディテクタに入射させた．半導体レーザーとHe-Neレーザーとはインコヒーレントであるため，光検出器にとっては，He-Neレーザーの光は一種のバイアスとみなすことができる．つまり試料を透過した

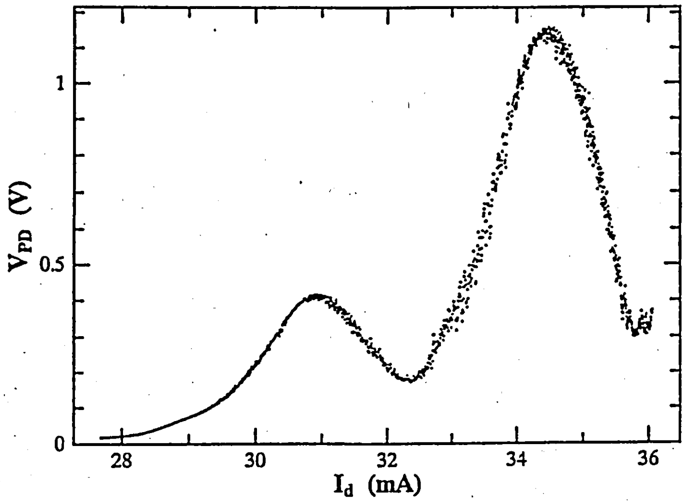


図１１　注入電流と光検出器の出力

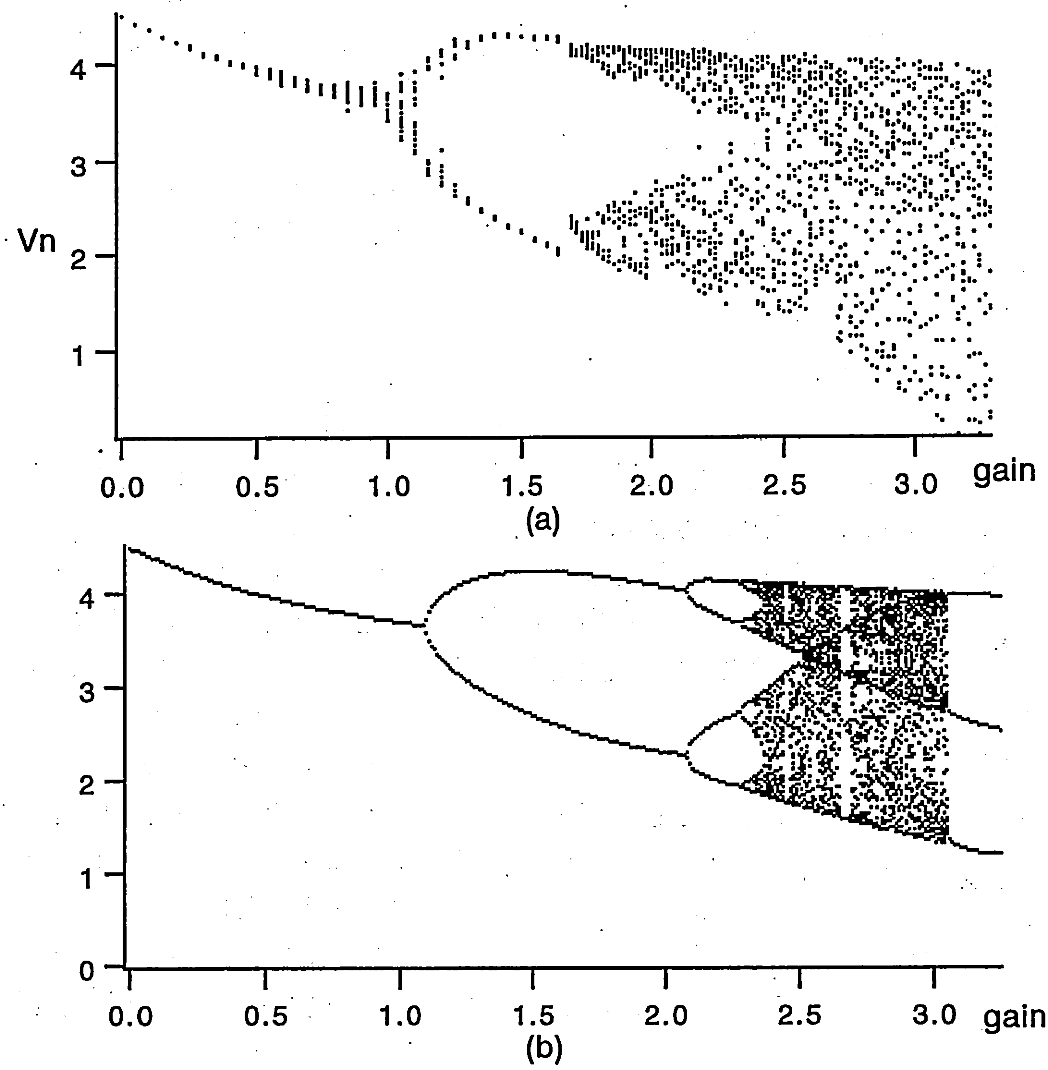


図１２　gainを変化させたときの分岐図
(a) 実験結果, (b) シミュレーション結果

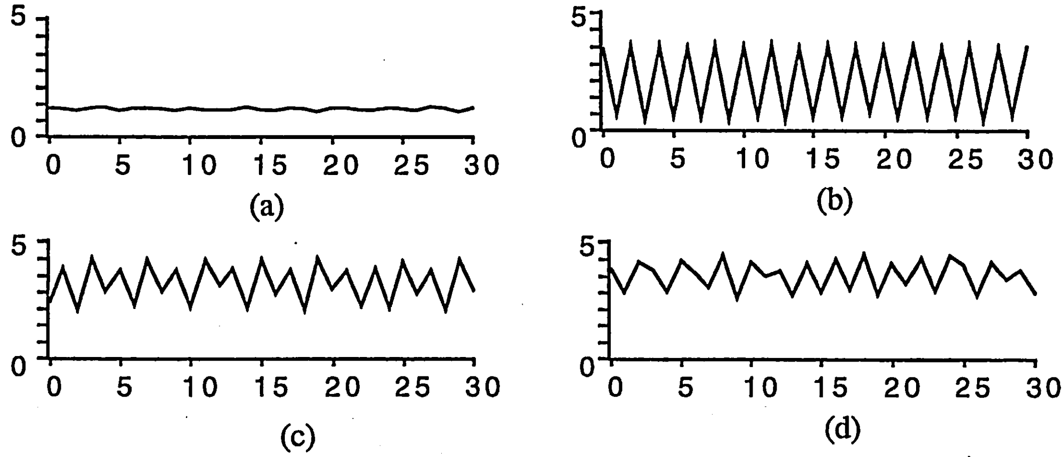


図１３　offsetを変化させたときの状態変化
(a) f = 0.5, (b) f = 1.5, (c) f = 3.8, (d) f = 4.7

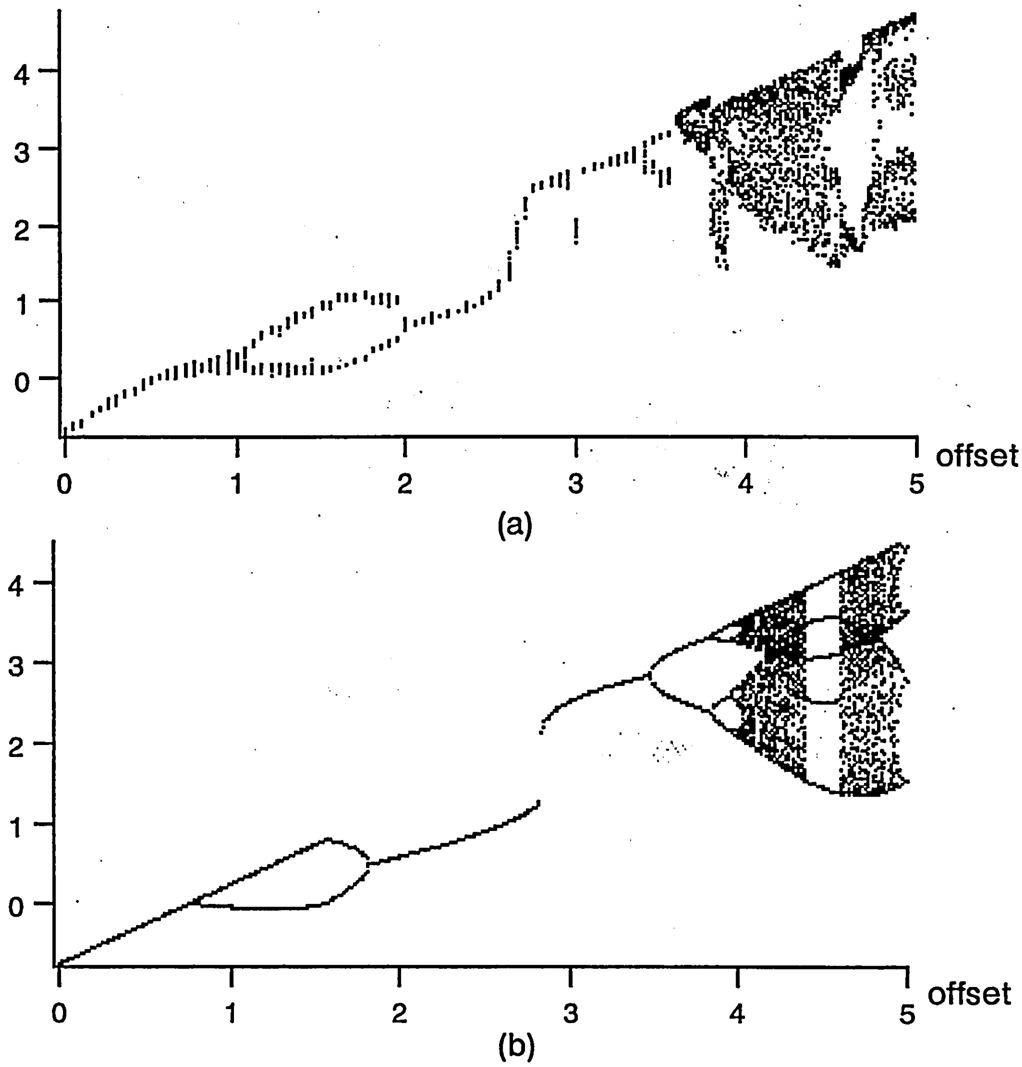


図１４　offsetを変化させたときの分岐図
(a) 実験結果, (b) シミュレーション結果

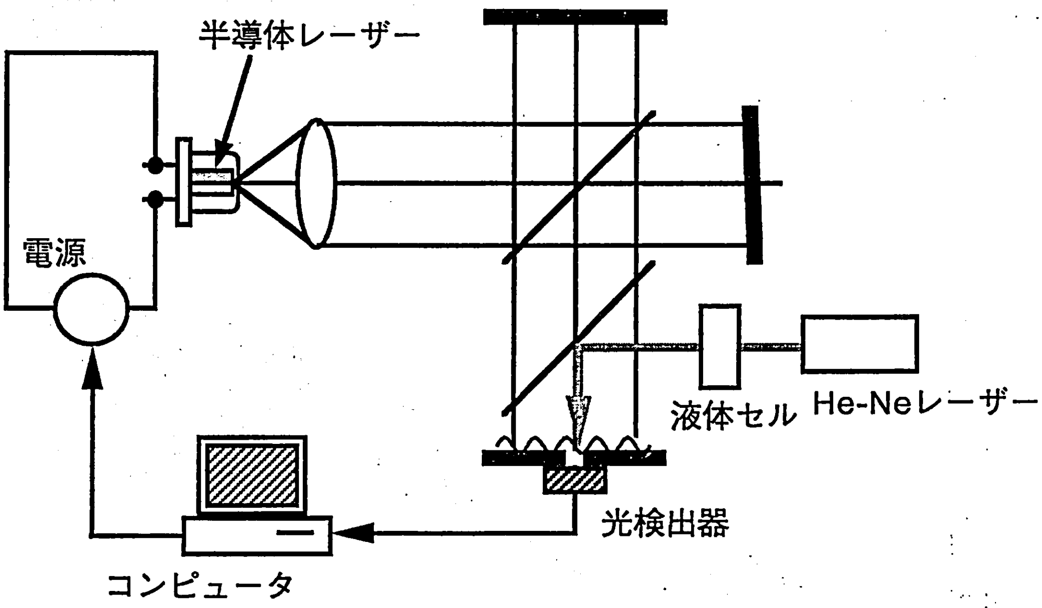


図１５　半導体レーザーと干渉計を用いた吸光度センサー

He-Neレーザーの光強度は，コンピュータ内部の演算で使用したオフセットfと等価である．従って，この状態で試料の吸光度（透過率）の変化は，オフセットfの値の変化と同じであるため，試料の吸光度が変化し，He-Neレーザーの光強度が変化すると，系が安定状態からカオス状態に遷移するといったように系の状態が変化する．従って，逆に系の状態変化から，試料の吸光度の変化が検出可能である．

実験結果を図１６に示す．まず液体セルに純水を入れ，この状態で系が2周期状態になるように，コンピュータ内部のパラメータf, g操作した．図１６(a)は，この時コンピュータが半導体レーザーの電源へ出力している電圧をプロットしたものであり，その波形は，２つの値の間を周期的に変動している．次に，この液体セルにメチレンブルを溶かした水溶液を滴下した．この時の波形をプロットしたのが，図１６(b)である．図１６(b)より，液体セル中の純水にメチレンブルーを加えると，波形はランダムに変動するようになり，一種のカオス状態へと遷移していることが確認できる．この時の液体セル中のメチレンブルーの濃度は，0.3mg/lであった．このメチレンブルー溶液の濃度を吸光度差に換算すると0.04の変化である．以上の結果より，カオス系の状態遷移を用いて，そのパラメータ変化を検出と，それを応用したセンサーが実現可能であることが確認できた．今回の実験では，吸光度差0.04と比較的大きな変化量である．しかしながら，先に述べたように，カオス的な振る舞いを示す系では，系のパラメータ変化に対して，カオス状態と安定（周期）状態が複雑に入り組んでおり非常に微少なパラメータ変化に対して系の状態が大きく変化する可能性がある．その例として，オフセットを変化させた場合の分岐図（図１４(b)）の一部を拡大したものを図１７に示す．図１７では，offset=4.100～4.108の0.008の間に周期的な状態が存在しており，その両側では系はカオス的になっている．この0.008の幅は，吸光度の変化量に換算すると0.0029である．従って，このような「カオスの窓」を利用すれば，高感度なセンサーへの応用が可能になると考える．

４．まとめ

半導体レーザーを用いた光計測手法を２つ報告した．レーザーフィードバックレーザー走査顕微鏡では，半導体レーザーに積極的にレーザー

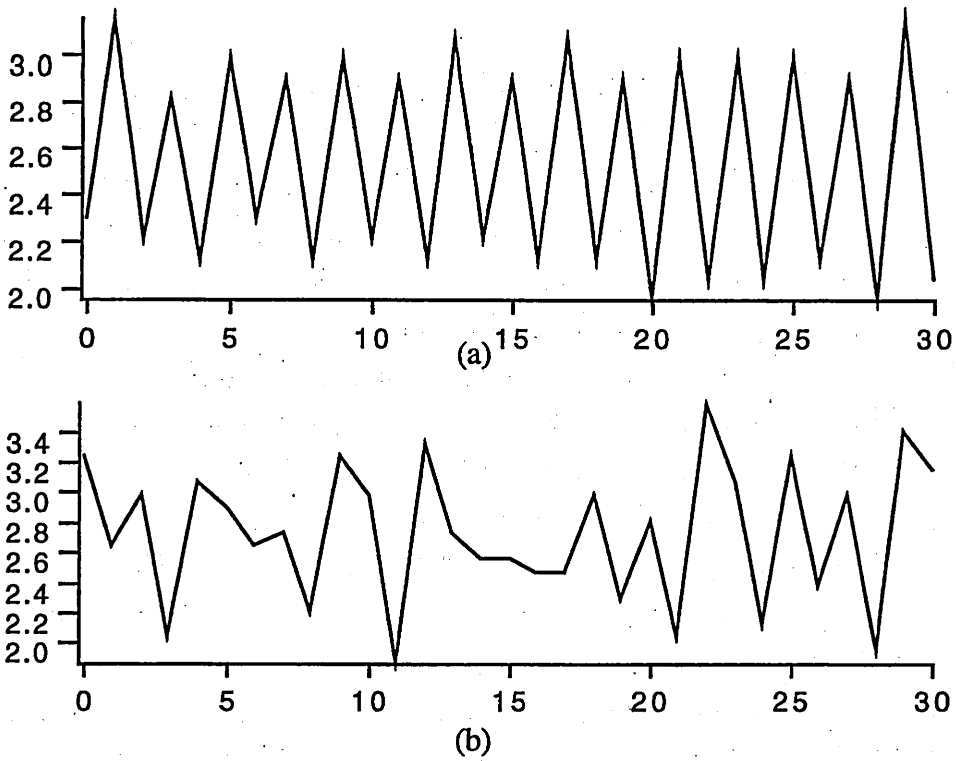


図１６　吸光度変化による状態の変化
(a) 純水, (b) メチレンブルー水溶液

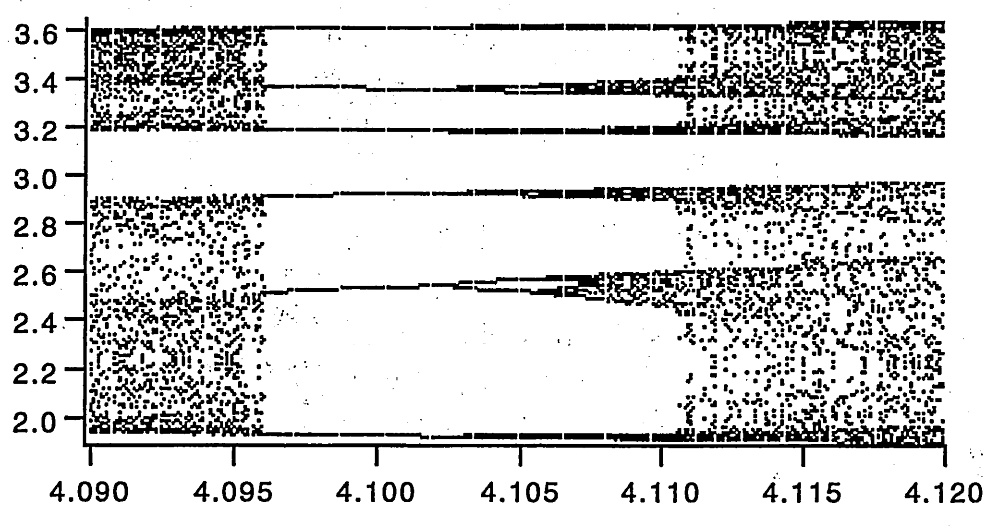


図１７　offset変化時の分岐図の拡大図
offset = 4.090～4.120

光を戻すことにより，レーザーそのものが光検出器の役割も果たすため，非常に単純で光学系の調整が容易な，共焦点顕微鏡が実現可能となる．現在の問題点はやはり，半導体レーザーの戻り光による発振強度の不安定化を避けて通れない点であり，反射率の高い（戻り光強度の強い）試料の観察を行うと半導体レーザーは不安定になってしまう．

一方，半導体レーザーと干渉計を用いた光カオスシステムでは，カオスを制御して安定状態に引き込むのではなく，その状態変化を利用することにより，吸光度センサーに応用する手法を提案した．この系では，どの状態からどの状態へ遷移したかを特定するのが困難なため，吸光度の絶対値測定を行うことはできないが，抗原抗体反応における物質の吸光度変化や屈折率変化の検出，指示薬を用いたタンパクセンサーやPhセンサーへの応用など，物理量の変化のみを高感度に検出したいという要望は多く，その応用範囲は広い．

今後は，このような高感度なセンシング技術と高分解な顕微技術を融合させ，顕微領域における微少な物理量変化を検出可能なシステムへの応用を行いたい．

参考文献

1) T. Wilson and C. Sheppard, "Theory and practice of scanning optical microscopy," Academic Press (1984)

2) T. Wilson, "Confocal Microscopy," Academic Press (1990)

3) R. Jukaitis, T. Wilson, and F. Reinholz, "Spatial filtering by laser in confocal microscopy," Opt. Lett., Voll. 18, 1135-1137 (1993)

4) R. Juskaitis, N. P. Rea, and T. Wilson, "Semiconductor laser confocal microscopy," Appl. Opt., Vol. 33, 578-584 (1994)

5) R. M. May, "Simple methematical models with very complicated dynamics," Nature, Vol. 261, 459-467 (1976)

6) E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, "Controlling chaos," Phys. Rev. Lett., 64, 1196 (1990)

7) E. R. Hunt, "Stabilizing high-period orbits in a chaotic system: The diode resonator," Phys. Rev. Lett., 67, 1953 (1991)

8) R. Roy, T. W. Murphy, T. D. Maier, Z. Gills and E. R. Hunt, "Dynamical

control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system," Phys. Rev. Lett., 68 1259 (1992)

9) T. Liu and J. Ohtsubo, "Experimental control of chaos in a laser-diode interferometer with delayed feedback," Opt. Lett., 19, 448 (1994)

10) K. Phragas, "Continuos control of chaos by self controlling feedback," Phys. Lett. A, 170, 421 (1992)

輻射科学研究会資料
RS98-2

レンズ変調を伴う電気光学位相変調器を用いた超短光パルス生成

Ultrashort Optical Pulse Generation Using Electrooptic Phase Modulator Featuring Lens Modulation

カイムタッティー、金大式、小林哲郎
大阪大学大学院　基礎工学研究科

1998年5月22日(金)
於　大阪大学基礎工学部A棟2階　大会議室A

Ultrashort Optical Pulse Generation Using Electrooptic Phase Modulator Featuring Lens Modulation

Tattee Khayim, Dae-Sik Kim and Tetsuro Kobayashi
Division of Advanced Electronics and Optical Science, Graduate School of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-8531 Japan.

1 Introduction

For generating ultrashort optical pulse, passive mode-locking of wideband lasers and pulse compression techniques are ordinarily used, and the shortest pulse width of 4.5 femtoseconds has been led by these methods [1]. However, they have some disadvantages, for example, the pulse width depends strongly on laser linewidth and electrical control of the laser pulse is difficult due to the passivity of the locking. Hence, their application is limited to a few kinds of lasers.

On the contrary, the electrooptic modulation method[2]-[7] is applicable to all kinds of lasers regardless of the linewidth. This method yet has advantages of stability and controllability of the temporal pulse position, width, shape and the repetition rate.

We have developed the quasi-velocity-matching(QVM) electrooptic phase modulator of a high frequency with periodic domain inversion[8],[9]. As a result, the sidebands broadening up to a few terahertz were obtained experimentally and the generation of femtosecond pulses by the electrooptic chirping compression method was succeeded for the first time[10].

Nevertheless, in this method, a residual CW optical power between adjacent pulses and sidelobes of the pulses after compression are not sufficiently small. The cause of the problem is pulse compression by the group delay dispersion takes effect only at chirped frequency, either up-chirped or down-chirped at once, while the modulated optical frequency is sinusoidal with nonlinear parts, up-chirped part and down-chirped part in a modulation period. Consequently, nonlinear parts and the other chirped part remain after compression.

To alleviate this problem, a novel elctrooptic phase modulator featuring lens modulation has been invented[11]. The novel phase modulator has parabolic-shaped periodic domain inversion in order to perform lens modulation as well as make quasi-velocity-matching possible at a high frequency. Using the electrooptic phase modulator featuring lens modulation together with a Fourier transform lens and a slit, either up-chirped or down-chirped frequency is allowed to enter the dispersive circuit, while others are gated out at the slit. As a result, a femtosecond pulse train with no background light remaining is generated electrooptically.

In this paper, we report the experimental generation of pedestal free femtosecond pulses from an ordinary CW laser by using the QVM electrooptic phase modulator featuring lens modulation.

2 Theoretical Analysis

2.1 Electrooptic Lens Modulation

The basic structure of lens modulation consists of an electrooptic lens that has electrical controllability of the focal distance, a Fourier transform lens and a slit as shown in Fig.1. As well as performing phase modulation, at the same time, the electrooptic lens makes the focal point of a Fourier transform lens move as a simple harmonic motion that is sinusoidal against time. The modulated light has some parts cut periodically as if being amplitude modulated when a slit with suitable aperture is placed around the movement range of the optical focus. Therefore, it is possible to properly select the light which matches the frequency chirping from every modulation period by adjusting the position of a slit.

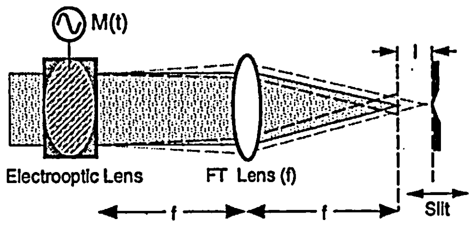


Figure 1: The basic structure of lens modulation

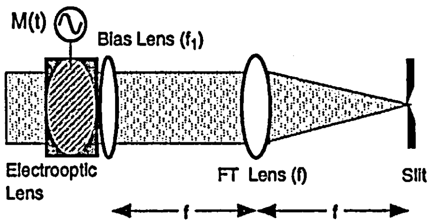


Figure 2: A simpler model for theoretical analysis

For theoretical calculation, a simpler model shown in Fig.2 is used. All lenses in this model are considered as cylindrical lenses for one-dimensional Fourier transform analysis. A distance between focal point of a Fourier transform lens and a slit l in Fig.1 is substituted by the so-called bias lens which is assumed as an ideal thin lens with focal length f_1, placed immediately to the left of the electrooptic lens.

The electrooptic lens is an electrooptic phase modulator that has a parabolic-shaped electrode for applying electric field. According to a linear electrooptic effect, a change in the index of refraction varies quadratically along x axis, thus causing the quadratic variation of the phase retardation which is the basic physical property of lens. The spatial variation of phase retardation in the electrooptic lens $\Delta\varphi(x,t)$ is

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x,t) &= \Delta\varphi(t)(1-(\frac{x}{d})^2) \qquad (1) \\ \Delta\varphi(t) &= \frac{1}{2}\gamma_{33}n_e^3\frac{V(t)}{h}l_0k \end{aligned}$$

where $2d$ is maximum width of the electrode, h and l_0 is the crystal thickness and length respectively.

As a result, the elctrooptic lens is able to make a light beam, propagating through itself, converse and diverse alternately, depending on the sign of the external applied electric field. Fig.3 shows the relation between the applied electric field and the operation of the electrooptic lens, while considering a parabolic-shaped area was inverted. A convex and a concaive lens symbols represent the operation of making

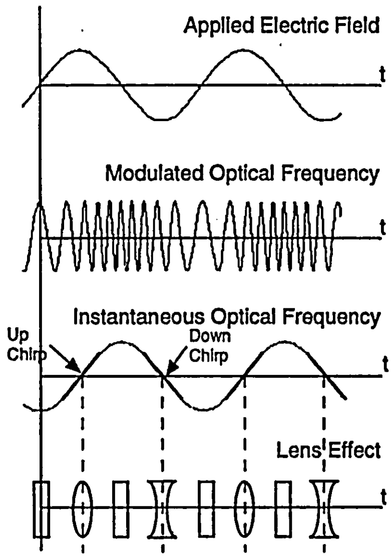


Figure 3: The relation between the applied electric field, modulated optical frequency and the operation of electrooptic lens

the light converse and diverse most, respectively. Note that when the light converse and diverse most, a focal point of the Fourier transform lens is at the inner and outer edge of the movement, respectively.

When a CW laser of angular frequency ω_0, propagating in y axis, is phase modulated by a sinusoidal frequency of f_m in the electrooptic lens, the quadratic variation of phase retardation in x axis occurs. The modulated light field traveling past the electrooptic lens is expressed as

$$\begin{aligned} U_1(x_1,t) &= E_0 \cdot \exp[j(\omega_0 t - \Delta\theta \sin 2\pi f_m t(1-(\frac{x}{d})^2))] \cdot \exp[-(\frac{x}{w})^2] \\ &= E_0 \cdot h(t) \cdot \exp[-(\frac{1}{w^2} - \frac{j\Delta\theta \sin 2\pi f_m t}{d^2}){x_1}^2] \end{aligned} \quad (2)$$

where $h(t)$ is defined as $h(t) = \exp[j(\omega_0 t - \Delta\theta \sin 2\pi f_m t)]$, which is the same form as an ordinary phase modulated light, $2w$ is the beamwidth of the incident light.

The effect of the bias lens is to cause a phase shift $kx_1^2/2f_1$, therefore, a transfer function of the bias lens is

$$P = \exp[j\frac{kx_1^2}{2f_1}].$$

Hence, the optical field $U_1'(x_1,t)$ immediately to the right of the bias lens and that immediately to the left $U_1(x_1,t)$ are related as follows;

$$U_1'(x_1,t) = U_1(x_1,t) \cdot P$$

$$
\begin{aligned}
&= E_0 \cdot h(t) \cdot \exp\left[-\left(\frac{1}{w^2} - \frac{j\Delta\theta \sin 2\pi f_m t}{d^2} - \frac{jk}{2f_1}\right){x_1}^2\right] \\
&= E_0 \cdot h(t) \cdot \exp\left[-C{x_1}^2\right]
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{w^2} - \frac{j\Delta\theta \sin 2\pi f_m t}{d^2} - \frac{jk}{2f_1} \\
&= \frac{1}{w^2}\left[1 - j\left(\frac{w}{d}\right)^2(\theta_0 + \Delta\theta \sin 2\pi f_m t)\right]
\end{aligned} \tag{4}
$$

where $\theta_0 = kd^2/2f_1$.

Because the bias lens and a slit are both far from the Fourier transform lens which has focal length f with the distance f, the light $U_2(x_2, t)$ becomes

$$
\begin{aligned}
U_2(x_2, t) &= \sqrt{\frac{j}{\lambda f}} \cdot \int U_1' \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda f}x_1 x_2\right]dx_1 \\
&= E_0\sqrt{\frac{j}{\lambda f}} \cdot h(t) \cdot \int \exp\left[-C{x_1}^2\right] \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda f}x_1 x_2\right]dx_1 \\
&= E_0\sqrt{\frac{j}{\lambda f}} \cdot h(t) \exp\left[C\left(\frac{Kx_2}{2}\right)^2\right] \cdot \sqrt{\frac{\pi}{C}}
\end{aligned} \tag{5}
$$

where K is defined as $K = j2\pi(\lambda f C)^{-1}$.

Finally, due to the operation of a slit and for simplicity, we assume that only the light field at $x = 0$ pass the slit by approximation. As a result, the output immediately to the right of the slit is written as

$$
U_2(0, t) = E \cdot \frac{\exp[j(\omega_0 t - \Delta\theta \sin 2\pi f_m t)]}{\sqrt{1 - j(w/d)^2(\theta_0 + \Delta\theta \sin 2\pi f_m t)}}. \tag{6}
$$

Term $[1 - j(w/d)^2(\theta_0 + \Delta\theta \sin 2\pi f_m t)]^{-\frac{1}{2}}$ in eq.(6) confirms that not only phase modulation is performed, but also a periodical change in amplitude controllable by changing the value of θ_0 which is a function of f_1. As mentioned earlier that the bias lens with focal length f_1 replaces a distance l in Fig.??, thus a change in amplitude is also controllable by adjusting the position of the slit. This is the electrooptic lens modulation.

2.2 Quasi-Velocity-Matched Electrooptic Phase Modulator Featuring Lens Modulation

For generating ultrashort pulse, deep modulation, namely, a high modulation index at a high modulation frequency is required in the electrooptic modulator.

To accomplish deep modulation, the modulator requires a long interaction length. At high modulation frequencies, however, the length is limited by the velocity mismatching between the modulating microwave and the light wave.

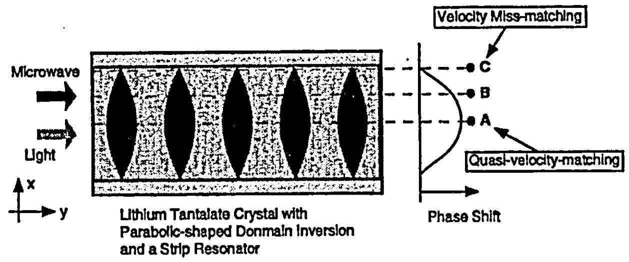


Figure 4: The basic schematic of the parabolic-shaped QVM electrooptic phase modulator

If y axis is the direction that the light wave and microwave propagate in the electrooptic crystal, for $v_0 > v_m$, the modulation index of the electrooptic phase modulator is expressed as follows[10];

$$\Delta\theta = \frac{4L}{\lambda} n_m \sin(\frac{\pi}{2L} y) \tag{7}$$

where $L = \left[2f_m(v_m^{-1} - v_0^{-1})\right]^{-1}$ and λ is the wavelength of the light. where f_m is the microwave frequency, v_0 and v_m are the group velocity of the light and the phase velocity of microwave in the crystal respectively, n_m is defined as $n_m = n_e^3\gamma_{33}E_m/2$ where n_e is the extraordinary index of refraction and γ_{33} is the electrooptic coefficient of the crystal and E_m is the amplitude of electric field.

Since an ordinary modulator has velocity mismatching between microwave and light, the modulation index $|\Delta\theta|$ becomes a periodical function of y with period $2L$ as written in eq.(7). Hence, if we change the sign of modulation in the area where the modulation index decreases, the modulation index increases as well in that area, then the total modulation index increases almost proportionally to the interaction lengths. This is a quasi-velocity-matching method with periodic domain inversion.

Fig.4 shows the basic schematic of the parabolic-shaped QVM electrooptic phase modulator. At point A, there is a quasi-velocity-matching as explained above. On the other hand, the light and microwave are completely velocity-missmatched at point C, or the total modulation index is 0. Considering at point B or any point between A and C, the value of the modulation index is less than that at line A but not 0. Since the parabolic shape is symmetric, the variation of the phase retardation is symmetric as well, thus similar to a quadratic curve. This scheme therefore makes the electrooptic phase modulator performing lens modulation with high modulation index possible at a high frequency.

2.3 Electrooptic Chirping Compression with Electrooptic Phase Modulator Featuring Lens Modulation

The electrooptic pulse compression method[12],[13] is a chirping compression technique that utilizes electrooptic phase modulation instead of self-phase modulation. In principle, an input light is phase modulated by an electrooptic modulator and passes through a frequency dispersive element such as a pair of gratings, then ultrashort optical pulses are formed.

When a CW laser of angular frequency ω_0 is modulated by a sinusoidal frequency of f_m in the electrooptic phase modulator featuring lens modulation, then passes through a Fourier transform lens and a slit, the output light from the slit is expressed as follows;

$$\begin{aligned} E_{pl}(t) &= E \cdot \frac{\exp[j(\omega_0 t - \Delta\theta \sin 2\pi f_m t)]}{\sqrt{1 - j(w/d)^2(\theta_0 + \Delta\theta \sin 2\pi f_m t)}} \\ &= E \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{J_q(\Delta\theta) \exp\{j(\omega_0 - 2\pi q f_m) t\}}{\sqrt{1 - j(w/d)^2(\theta_0 + \Delta\theta \sin 2\pi f_m t)}} \\ & \qquad\qquad (q : integer) \end{aligned} \tag{8}$$

where $\Delta\theta$ is the modulation index. Eq.(8) shows that The sideband spectra of the modulated light should not have a form of Bessel distribution.

When the modulation index and the modulation frequency are very high, the optical frequency chirps almost linearly with the chirping rate expressed as

$$\left(\frac{\partial \nu}{\partial t}\right) = \pm 2\pi f_m^2 \Delta\theta. \tag{9}$$

The ($\pm$) sign in the right hand side of eq.(9) means that both negative and positive group delay dispersion can be used for chirping compression. From Fig.3, it is clear that a slit must be put at the inner edge of the focus movement range or at the convex lens symbol, where the frequency chirps up, when negative group delay dispersion such as a grating pair is to be used. On the other hand, it has to be at the outer edge or at the concaive lens symbol while using optical fiber as a positive group delay dispersion.

The phase retardation $\theta(\omega)$ of a dispersive circuit can generally be approximated as

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &\cong \theta(\omega_0) + \left.\frac{\partial\theta(\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \times (\omega - \omega_0) \\ &\quad + \left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta(\omega)}{\partial\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} \times (\omega - \omega_0)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

using Taylor's series expansion around $\omega = \omega_0$.

The output field becomes

$$\begin{aligned} E_{out}(t) &= E \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{J_q(\Delta\theta)}{\sqrt{1 - j(w/d)^2(\theta_0 + \Delta\theta \sin 2\pi f_m t)}} \cdot \exp[j(\omega_0 - 2\pi q f_m)t \\ &\quad - j\theta(\omega_0 - 2\pi q f_m)] \end{aligned}$$

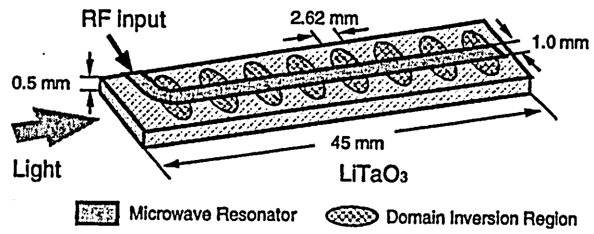


Figure 5: The QVM electrooptic phase modulator featuring lens modulation

$$\begin{aligned} \cong\ & E\exp[j(\omega_0 t-\theta(\omega_0))]\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\frac{J_q(\Delta\theta)}{\sqrt{1-j(w/d)^2(\theta_0+\Delta\theta\sin 2\pi f_m t)}} \\ & \cdot\exp[-j2\pi q f_m(t-\tau_0)-j\pi q^2 f_m^2(\frac{\partial\tau}{\partial\nu})] \end{aligned} \tag{11}$$

where $\tau_0=\tau(\omega_0)=\partial\theta(\omega_0)/\partial\omega$.

The quantity $\partial\tau/\partial\nu$ corresponds to the frequency dispersion of the group delay. For the optimum bunching condition, it is required that

$$\frac{\partial\tau}{\partial\nu}\sim-\left(\frac{\partial\nu}{\partial t}\right)^{-1}. \tag{12}$$

In chirping compression technique, a pair of plane gratings arranged in tandem with their faces and rulings parallel has the property of producing a time delay that is an increasing function of the wavelength. The variation of group delay with wavelength λ can be expressed as follows[14],[15];

$$\frac{\partial\tau}{\partial\nu}=-\frac{\lambda^3 l}{c^2d^2\cos^2\beta} \tag{13}$$

where c is the velocity of light, l is the slant distance between the gratings, d is the grating constance and β is the angle of diffraction at the gratings.

In this case, since modulated optical frequency is not linear but sinusoidal, the minimum compressed pulse width(FWHM) is obtained by[16],

$$\Delta t\sim\frac{a}{2\Delta\theta f_m} \tag{14}$$

where $a=0.6\sim0.7$. As an example, if $\Delta\theta=50$ rad, $f_m=20$ GHz, then the compressed pulse width is about 300 fs.

3 Experiment and Results

A bulk type $LiTaO_3$ electrooptic phase modulator featuring lens modulation was fabricated with parabolic-shaped periodic domain inversion, as shown in Fig.5, to perform lens modulation and make quasi-velocity-matching possible at a high frequency. For the thickness of a $LiTaO_3$ crystal $t=0.5$ mm, the width of microstrip

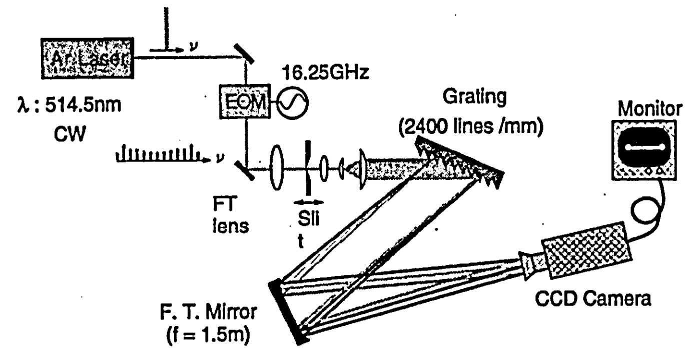


Figure 6: The experimental setup for observing optical sidebands

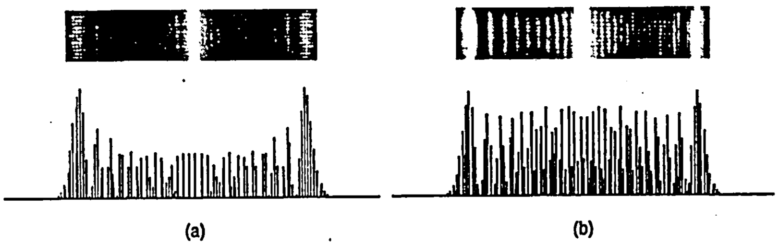


Figure 7: The optical sidebands generated by (a) QVM electrooptic phase modulator and (b) QVM electrooptic phase modulator featruing lens modulation, both for $\Delta\theta$ = 40 rad.

line W=1.0 mm, the wavelength of light λ = 514.5 nm, the phase velocity of microwave $v_m = 5.04 \times 10^7$ m/s and the group velocity of light $v_0 = 1.24 \times 10^8$ m/s, a half period of domain inversion is calculated to be 2.62 mm. The domains were inverted by applying a high DC voltage (22 kV/mm on +z surface) to electrodes in an insulating fluid at room temperature. Afterwards, the crystal was annealed to prevent optical scattering at 555°C for 8 hours. A microwave resonator at 16.25 GHz is formed by an open-circuit terminated silver strip line. The modulation by the microwave traveling on a silver strip line in the opposite direction to the light is negligible in this configuration.

Fig.6 shows the experimental setup for observation of optical sideband spectra generated by the electrooptic phase modulator featuring lens modulation. A 514.5 nm CW Ar laser (100 mW, single longitudinal mode operation) was used as a light source, and a 16.25 GHz pulsed magnetron (pulse width 1 μs) was used as a modulating microwave source. The sideband components of the modulated light were spatially separated by a grating, and observed with a CCD camera at the focal plane of the 3 m radius Fourier transform mirror.

The observed optical sideband of the modulated light is shown as a CCD image in Fig.7. Fig.7(a), (b) show the sideband spectral width of 1.4 THz(FWHM), generated by QVM electrooptic phase modulator and QVM electrooptic phase modulator featuring lens modulation, respectively. It is obvious that the shape of the entire

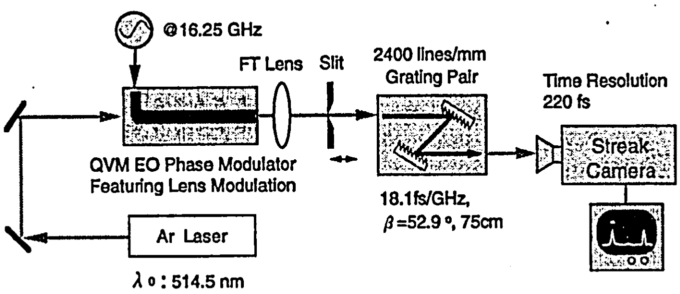


Figure 8: The experimental arrangement for observation of lens effect and generation of ultrashort pulse

sideband spectral intensity becomes much flatter compared to a Bessel function form.

Fig.8 shows the experimental arrangement for lens effect observation and generation of ultrashort pulse using the electrooptic phase modulator featuring lens modulation. For observing lens effect, the grating pair was removed out.

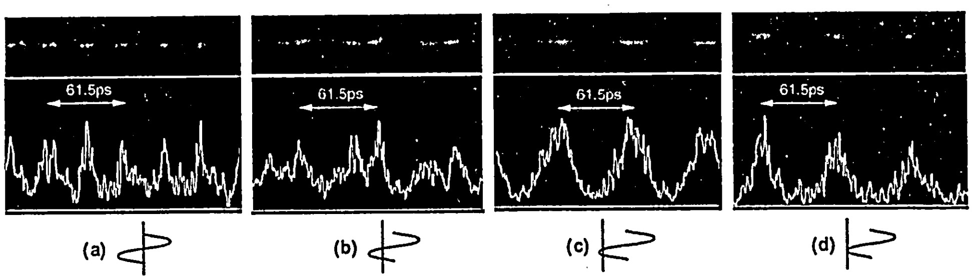


Figure 9: The streak images of the output light after the slit when the slit was put (a) at the ordinary focal point of the Fourier transform lens, (b) at the midpoint between the inner edge of the simple harmonic motion and the ordinaru focal point (c) near the inner edge and (d) exactly at the inner edge.

The CW light was phase modulated and lens modulated simultaneously, then a slit was regulated to allow only up-chirped frequency light to pass, and gate out others. Fig.9 shows the streak images, observed by streak camera(C3735-01S:Hamamatsu, time resolution 220 fs), of the output light after the slit without compression observed when the slit was put at different places. When the slit is placed at the ordinary focus of the Fourier transform lens, there are two long pulses in a modulation period. Two long pulses start to combine to one long pulse when the slit was slided over towards the inner edge of the focal movement. Finally, placing the slit at the inner edge, there is one long pulse a period suitable for pulse compression by grating pairs.

Next, an output light after the slit passed through the grating pair which provides the optimum group delay dispersion of 18.1 fs/GHz calculated by using eqs.(9)-(12). The slant distance between gratings and the diffraction angle were decided by using eq.(13), As a result, pedestal free optical transform-limited pulses of 550 fs with 16.25 GHz repetition rate were obtained and observed as the streak trace shown in

Fig.10. Taking the account of the time resolution, obtained pulsewidth is evaluated to be 520 fs that agrees well with the theoretically calculated pulsewidth .

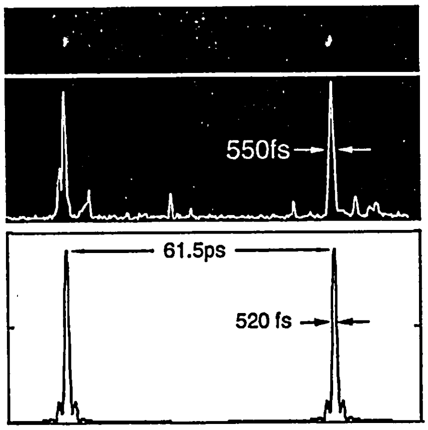


Figure 10: The streak trace, the intensity profile and the calculated pulseshape of the compressed pulses.

4 Conclusion

The electrooptical generation of pedestal free femtosecond optical pulses from a CW laser was proposed and demonstrated.

From theoretical analysis, it was shown that a residual CW optical power between adjacent pulses and sidelobes of the pulses after compression remaining, the problem in a chirping compression technique with a normal electrooptic phase modulator, can be solved by adding lens modulation into the modulator. Moreover, the electrooptic chirping compression method with the electrooptic phase modulator featuring lens modulation is still applicable for the negative group delay dispersion as well as the positive group delay dispersion.

In our experiment, pedestal free optical pulses of 550 fs with 16.25 GHz repetition rate were obtained by the group delay dispersion of a grating pair, and consequently, the extinction ratio is improved relatively to the previous result.

Furthermore, the electrooptic lens modulation is useful for other applications in ultrafast field such as a Febry-Perot modulator[17]-[19] and an electrooptic synthesizer in the femtosecond range[20],[21].

References

[1] M. Nisoli, S. De Silvestri, and O. Svelto: *Opt. Lett.,* vol. 22, p. 522, 1997.

[2] K. Amano, T. Kobayashi, H. Yao, A. Morimoto, and T. Sueta: *J. Lightwave Technology,* LT-5, p. 1454, 1987.

[3] T. Kobayashi: *UUO* Intl. Sympo.'94, 1-8, p. 35, 1994.

[4] M. Aoki, M. Suzuki, M. Takahashi, H. Sano, T. Ido, T. Kawano, and A. Takai: *Electron. Lett.,* vol. 28, p. 1157, 1992.

[5] S. W. Corzine, J. E. Bowers , G. Przybylek, U. Koren, B. I. Miller, and C. E. So ccolich: *Appl. Phys. Lett.,* vol. 52, p. 348, 1988.

[6] K. Y. Lau, and A. Yariv: *Appl. Phys. Lett.,* vol. 46, p. 326, 1985.

[7] B. H. Kolner: *Appl. Phys. Lett.,* vol. 52, p. 1122, 1988.

[8] A. Morimoto, E. Saruwatari, and T. Kobayashi: *CLEO'94,* CME5, p.21, 1994.

[9] A. Morimoto, and T. Kobayashi: *SPIE* vol. 2633, p. 622, 1995.

[10] D.-S. Kim, M. Arisawa, A. Morimoto, and T. Kobayashi: *IEEE J. Quantum Electron.,* vol. 2, p. 493, 1996.

[11] T. Khayim, D.-S. Kim, M. Yamauchi, and T. Kobayashi: *CPT'98,* Pd-07, p.235, 1998.

[12] T. Kobayashi, H. Yao, K. Amano, Y. Fukushima, A. Morimoto, and T. Sueta: *IEEE J. Quantum Electron.,* vol. 24,, p. 382, 1988.

[13] T.Kobayashi: *OEC'94 Technical Digest,* 13E2-1, July 1994.

[14] E. B. Treacy: *IEEE. J. Quantum Electron.,* vol. 5, p. 454, 1969.

[15] J. D. McMullen: *Applied Optics.,* vol. 18, p. 737, 1979.

[16] M. A. Duguay, and J. W. Hansen: *Appl. Phys. Lett.,* vol. 14, p. 14, 1969.

[17] M. Kourogi, B. Widiyatomoko, Y. Takeuchi, and M. Ohtsu: *IEEE J. Quantum Electron.,* vol. 31, p. 2120, 1995.

[18] A. Morimoto, T. Okimoto, A. Soga, and T. Kobayashi: *IEICE TRANS. ELECTRON.,* vol. E78-C, p. 88, 1995.

[19] T. Kobayashi, A. Morimoto, Bong Young Lee, and T. Sueta: *Ultrafast Phenomena VII,* eds. C. B. Harris, E. P. Ippen and G. A. Mourou, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[20] T. Kobayashi, and A. Morimoto: *OSA Proc. on Picosecond Electron. and Optoelectron.,* vol.4, eds. by T. Sollner and D. M. Bloom (Opt. Soc. America, Washington, DC.) p. 81, 1989.

[21] D.-S. Kim, T. Khayim, A. Morimoto, and T. Kobayashi: *IEICE TRANS. ELECTRON.,* vol. E81-C, p. 260, 1998.

Technical Report of Radiation Science Research
(RS 98 – 3)

Aperture Efficiency and Maximum Gain of a Dielectric-Loaded Antenna.
(In Relation to Hansen-Woodyard Condition)

Tetsuo Tsugawa
Department of Electronics, Osaka Institute of Technology, Osaka, Japan

Kepo Pomat and Yoshihiko Sugio
Department of Electrical Engineering, Setsunan University, Neyagawa – Shi, Osaka, Japan

May 22nd, 1998
At Conference Room A, 2nd floor of Building A,
Faculty of Engineering Science, Osaka University.

Aperture Efficiency and Maximum Gain of a Dielectric Loaded Antenna
(In relation to Hansen - Woodyard condition)

1. Introduction

Higher gains and higher efficiencies of antennas are very important problems and much work have been devoted in the study of them. Over the past couple of years experimental studies have been done on high efficiency dielectric loaded antennas [1], dielectric loaded planer antenna fed by waveguide network [2], and circularly polarised dielectric loaded planer antenna excited by the parallel feeding waveguide network [3], and all of the above involves the dielectric loaded antenna.

In this paper we discussed further the investigation carried out on the aperture efficiency and maximum gain of a dielectric loaded antenna (as shown in figure 1), and describe the results obtained from the investigation in relation to Hansen-Woodyard Condition [4] which is given by the relationship, $(1 - \beta/k_o)l/2 = (2m + 1)\lambda/4$, where l is the length of the dielectric rod , m is any positive integer and β/k_o is the relative phase constant of the rod.

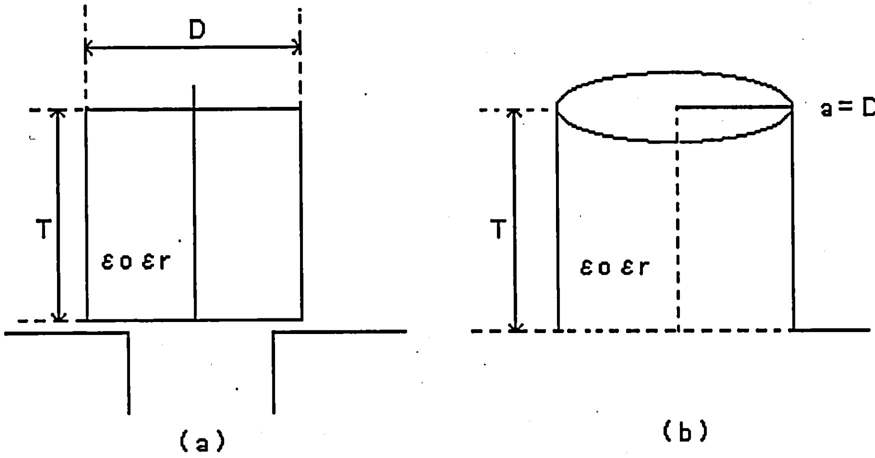


Fig.1 A dielectric loaded antenna.

Firstly we discuss the experimental results and then we take a short time to calculate the phase constant of HE_{11} mode which will be seen to be relatively important in our discussion of the aperture efficiency and the maximum gain to be followed respectively.

The centre frequency used for most of the investigation was 11.85GHz and the permittivity of the dielectric was 2.26 which is the permittivity of Polypropylene but for comparison purposes permittivity of 4, 2.64 and 2 are also used .

2. Experimental results

The results obtained are from experiments of the dielectric loaded antenna fed by a rectangular waveguide through it's side wall with a linearly polarised exciting wave in figure 2 . The results are as shown in figures 3 and 4 respectively.

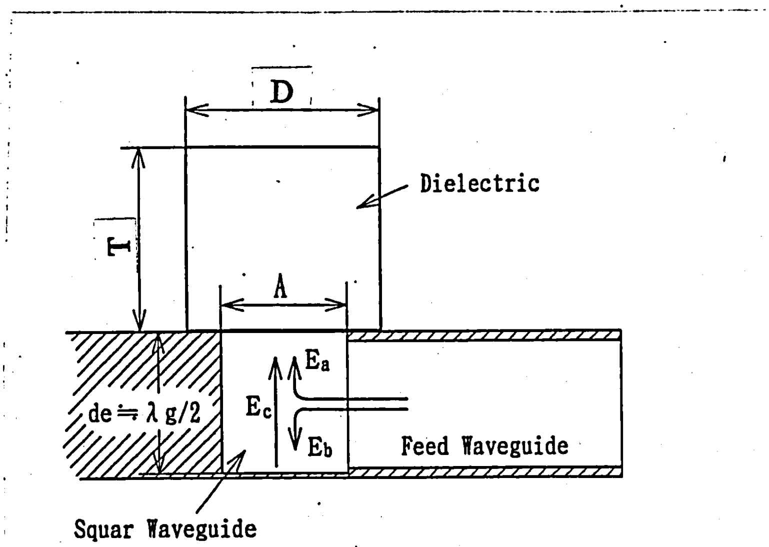


Fig. 2 Dielectric loaded antenna as fed by the waveguide.

Here we see the behaviour of the efficiency and the gain of the dielectric with respect to the increasing diameter and the length of the dielectric. Also in figure 3, the relationship between the length and diameter of the dielectric can be seen and how they affect the gain.

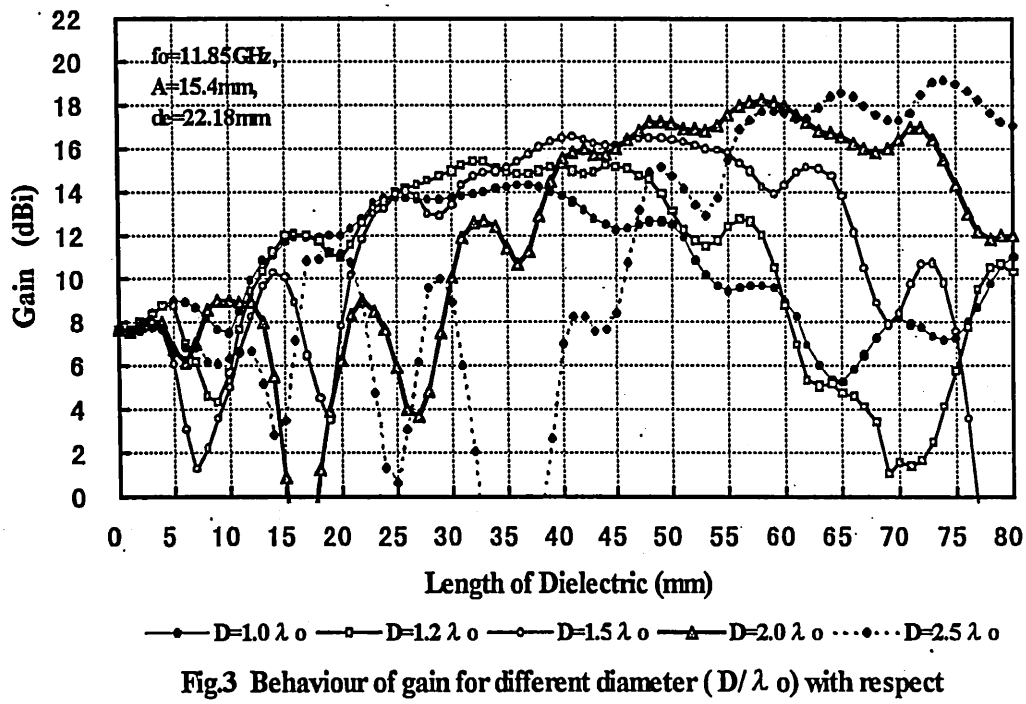


Fig.3 Behaviour of gain for different diameter (D/λo) with respect to increasing lengths.

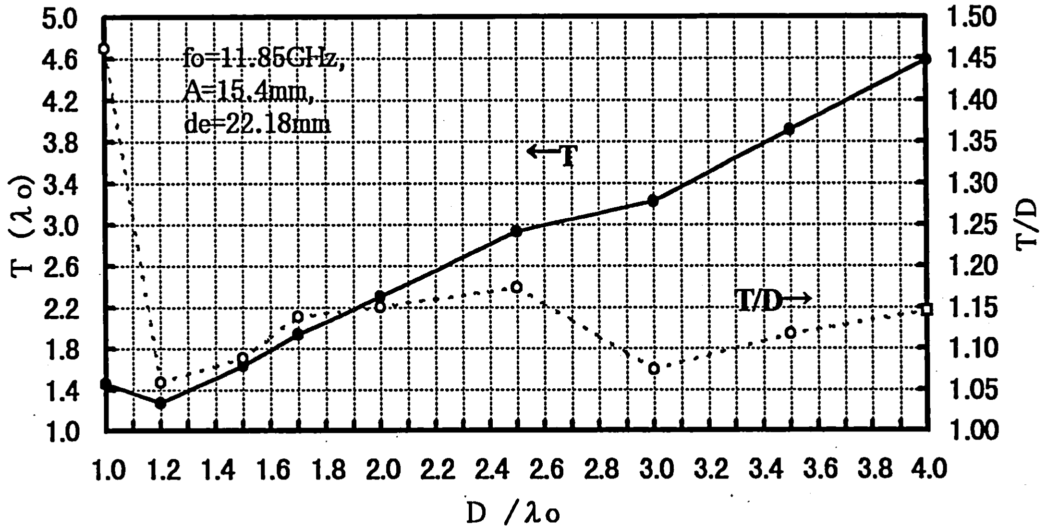


Fig. 4 Relation between the length and the diameter the dielectric at maximum gain.

Figure 4 illustrates the experimental results obtained which depicts the behaviour of the ratio of the length to increasing diameter of the dielectric.

3. Phase Constant of HE_{11} mode

Leading up to our investigation of the aperture efficiency and the maximum gain of the dielectric loaded antenna, we firstly present some mathematical calculation on the phase constant of HE_{1m} modes with emphasis mainly on the HE_{11} modes.

We begin with the characteristic equation (dispersion equation) for a dielectric rod modes as given below;

$$\{\varepsilon_r(\Gamma a)^2 J'_m(\gamma a) / \gamma a J_m(\gamma a) + \Gamma a K'_m(\Gamma a) / K_m(\Gamma a)\}\{(\Gamma a)^2 J'_m(\gamma a) / \gamma a J_m(\gamma a) + \Gamma a K'_m(\Gamma a) / K_m(\Gamma a)\} = \{m(\varepsilon_r - 1)(\beta a)(k_o a) / (\gamma a)^2\}^2 \quad (1)$$

where $k_o = \omega\sqrt{\varepsilon_o \mu_o} = 2\pi/\lambda_o$, (λ_o is the wavelength in free space) and

$$\gamma a = \sqrt{(k_o a)^2 \varepsilon_r - (\beta a)^2} \quad \text{and} \quad \Gamma a = \sqrt{(\beta a)^2 - (k_o a)^2} \quad (2)$$

$$(\gamma a)^2 + (\Gamma a)^2 = p^2 \quad \text{and} \quad p = k_o a \sqrt{\varepsilon_r - 1} \quad (3)$$

Proceeding on further, the Bessel and the Modified Bessel function of the m[th] order are introduced and given by $J_m(x)$ and $K_m(x)$ which are expressed as.

$$Jm(x) = (x/2)m\sum_{n=0}(-1)n(x/2)2n / n!F(m+n+1) = \tfrac{1}{2}\pi f_0^{2\pi} \cos(nt - x\sin t)' dt \qquad (4)$$

$$Km(x) = f_0^{\infty} e^{-x\cosh t}\cosh mt\, dt = (2n)! / 2^n n! x^n f_0^{\infty}\cos(x\sinh t) / \cosh^{2n} t\, dt$$

$$= (\sqrt{\pi/2x})\, e^{-x} \sum F(m+n+\tfrac{1}{2}) / n!\, F(m-n+\tfrac{1}{2})(2x)^n \qquad (5)$$

Upon introducing the Gamma function $F(x)$ which is defined as follows.

$$F(x) = f_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad (\mathrm{Re}x > 0) \qquad \text{and} \qquad F(x+1) = xF(x) \qquad (6)$$

$$F(n+1/2) = ((2n)! / 2^{2n} n!)\sqrt{\pi} \qquad \text{and} \qquad F(-n+\tfrac{1}{2}) = (-4)^n n! / (2n)! \qquad (7)$$

The Bessel function then satisfy the following recurrence equations.

$$J'_m(x) = J_{m-1}(x) - m/x\, J_m(x) = m/x\, J_m(x) - J_{m-1}(x)$$
$$K'_m(x) = -K_{m-1}(x) - m/xK_m(x) = -\tfrac{1}{2}\{K_{m-1}(x) + K_{m+1}(x)\} \qquad (8)$$

Since our emphasis is on the dominant mode, which is the HE_{11} mode, then for m = 1, equation (1) can be rewritten as.

$$\{\varepsilon_r(\Gamma a)^2 \gamma a J'_1(\gamma a) / J_1(\gamma a) + \Gamma a(\gamma a)^2 K'_1(\Gamma a) / K_1(\Gamma a)\}\{(\Gamma a)^2 \gamma a J'_1(\gamma a) / J_1(\gamma a) + \Gamma a(\gamma a)^2 K'_1(\Gamma a) / K_1(\Gamma a)\} = p^2\{p^2 + (\varepsilon_r - 1)(\Gamma a)^2\} \qquad (9)$$

Though we must solve the above equation rigorously for any diameter $2a / \lambda_o$ of the dielectric rod, if we assume that $2a / \lambda_o > 1$ (i.e, $koa > \pi$ and $\Gamma a > 0.8p = 0.9\pi$) and $\gamma a < 1.3\pi$, then we have the following relationship.

$$\gamma a J'_1(\gamma a) / J_1(\gamma a) = 1 - (\gamma a)^2 U(\gamma a) \qquad \text{and} \qquad K'_1(\Gamma a) / K_1(\Gamma a) = -V(\Gamma a) \qquad (10)$$

let $W = \tfrac{1}{4}[1 - 1/3(\gamma a/2)^2 + (3/2x(3!)^2)(\gamma a/2)^4 - (8/5x(4!)^2)(\gamma a/2)^6 + (5/3x(5!)^2)(\gamma a/2)^8]$

and $W1 = 1 - \tfrac{1}{2}(\gamma a/2)^2 + 1/2x3!(\gamma a/2)^4 - (1/4x(3!)^2)(\gamma a/2)^6 + (1/5x(4!)^2)(\gamma a/2)^8 - (1/6x(5!)^2)(\gamma a/2)^{10}$

then $U(\gamma a) = W/W1$ (11a)

we also let $Z = 1 + 1/2\Gamma a + (3/8 + 9/2^7)1/(\Gamma a)^2 - (1/2^7 + 5/2^{10})15/(\Gamma a)^3 + (1/2^{10} + 35/2^{15})105/(\Gamma a)^4$

$Z1 = 1 + 3/8\Gamma a - 15/2^7(\Gamma a)^2 + 105/2^{10}(\Gamma a)^3 - 945/2^{15}(5/(\Gamma a)^4)$

therefore $V(\Gamma a) = Z/Z1$ (11b)

Rearranging equation (9) we get.

$$\varepsilon_r(\Gamma a)^4 - (\Gamma a)^3(\gamma a)^2\{2\varepsilon_r(\Gamma a)U(\gamma a) + (\varepsilon_r + 1)V(\Gamma a)\} + (\Gamma a)^2(\gamma a)^4\{\varepsilon_r(\Gamma a)U(\gamma a) + V(\Gamma a)\}\{(\Gamma a)U(\gamma a) + V(\Gamma a)\} = p^2\{p^2 + (\varepsilon_r - 1)(\Gamma a)^2\} \quad (12)$$

We can finally rewrite it as;

$$f(x) = x^2(\gamma a)^2\{\varepsilon_r xU(\gamma a) + V(x)\}\{xU(\gamma a) + V(x)\} - x^3\{2\varepsilon_r xU(\gamma a) + (\varepsilon_r + 1)V(x)\} - \varepsilon_r x^2 - p^2 = 0 \quad (13)$$

where; $x = \Gamma a$ and $\gamma a = \sqrt{p^2 - x^2}$

To find x, which is the solution to equation (13), it can be done numerically by computing. For the Zeroth - order approximation, if we assume $x = p$, $U(\gamma a) = 1/4$ and $V(x) = (1+1/2p) / (1+3/8p)$ then

$$(\gamma a)^2_o = p\{\varepsilon_r p/2 + (\varepsilon_r + 1)(1 + ½ p)/(1 + 3/8p)\} / \{\varepsilon_r p/4 + (1 + ½ p)/(1 + 3/8p)\}\{p/4 + (1 + ½ p)/(1 + 3/8p)\} \quad \text{and} \quad (\Gamma a)_o = \sqrt{p^2 - (\gamma a)^2_o} \quad (14)$$

Then the first order solution from equation (13) is given by.

$$(\gamma a)^2_1 = [(\Gamma a)_0\{2\varepsilon_r(\Gamma a)_0U((\gamma a)_0) + (\varepsilon_r + 1)V((\Gamma a)_0)\} + \varepsilon_r + p^2/(\Gamma a)^2_0] / [\{\varepsilon_r(\Gamma a)_0U((\gamma a)_0) + V((\Gamma a)_0)\}\{(\Gamma a)_0U((\gamma a)_0) + V((\Gamma a)_0)\}] \quad (15)$$

$$(\Gamma a)_1 = \sqrt{p^2 - (\gamma a)^2_1}, \quad \{(\beta/k_o)^2 = (\Gamma a/k_oa)^2 + 1 = \varepsilon_r - (\gamma a/k_oa)^2\} \quad (16)$$

Similarly the n^{th} order solution can be calculated by the $(n - 1)^{th}$ order solution. For HE_{11} mode, the error of the first solution, equation (15), was found to be less than 3% for $D > \lambda_o$.

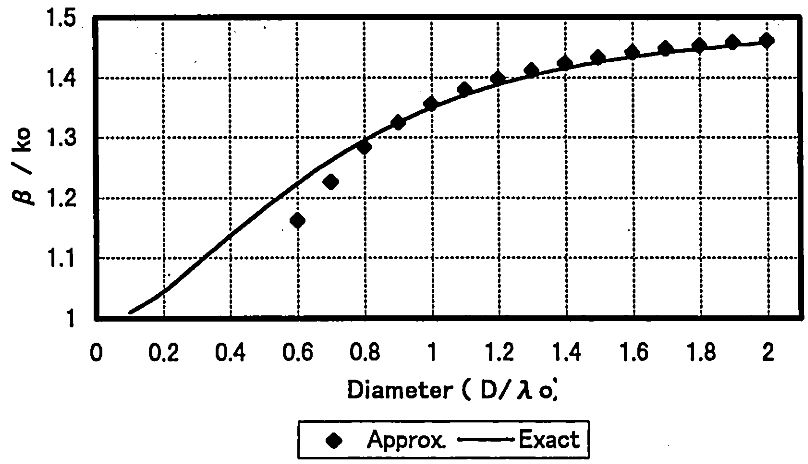


Fig.5 The approximate relative phase constant of HE_{11} mode for $\varepsilon_r = 2.26$.

For the exact relative phase constant as computed using equation (9). It is as shown in figure 6. below, for various ε_r with respect to the increasing diameter of the dielectric.

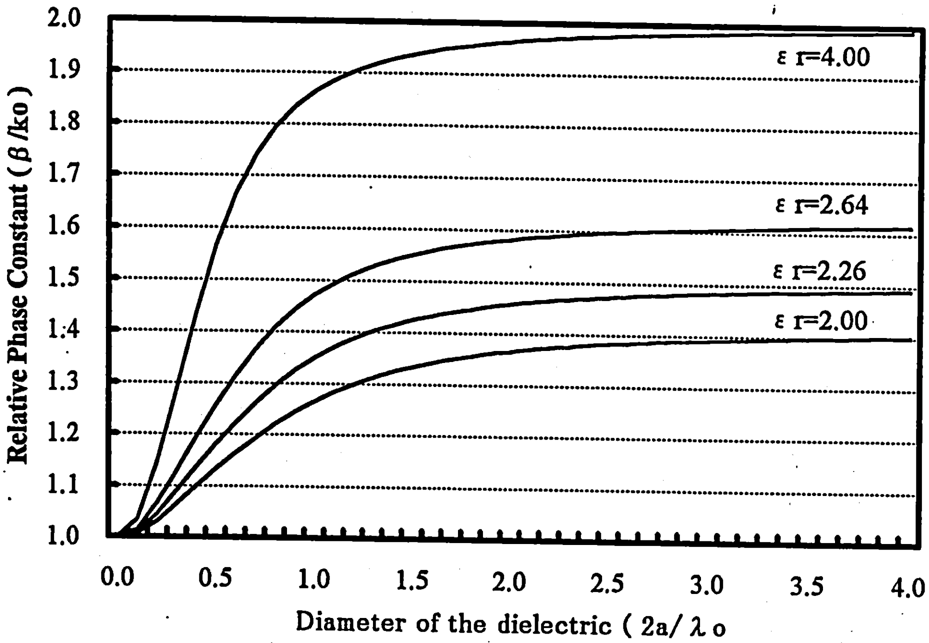


Fig. 6 Relative phase constants as computed from equation (9) for various ε_r.

4. Aperture Efficiency η

Here our assumption is that, this type of dielectric loaded antenna radiates (or receives) power not only from the actual physical area of the dielectric, but from the effective aperture area which consists of the physical area S_A of the dielectric, plus an area outside the dielectric caused by the surface wave HE_{11} mode which corresponds to the surface area S_B of the dielectric side wall with the length of l as shown in figure 7.

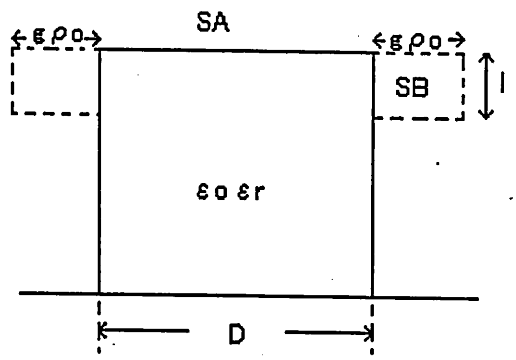


Fig. 7 A concept of the effective aperture.

So the area now under investigation is theoretically much wide than the actual physical area of the aperture, and we had based our investigation and discussion on the effective aperture area rather than the actual physical area of the dielectric. With that in mind, the total area now is;

$$S = S_A + S_B \tag{17}$$

where $S_A = \pi(D / 2)^2$ and $S_B = \pi Dl$

Since we know that the aperture efficiency is the ratio of the effective area to the physical area of the aperture, we then express it as.

$$\eta = S / S_A = (S_A + S_B) / S_A$$

$$= 1 + 4l / D \tag{18}$$

so the fields outside the dielectric are represented in terms of the modified Bessel functions $K_m(\Gamma r)$ or $K_m'(\Gamma r)$. For m = 1,

$$K_1(\Gamma r), K_1'(\Gamma r) = 1 / \sqrt{\Gamma r} * e^{-\Gamma(r - D/2)} \tag{19}$$

setting $\Gamma \rho o = 1$ ($\rho o = r_o - D/2$) , we have

$$\rho o = 1/\Gamma = \lambda_o / (2\pi\sqrt{(\beta/k_o)^2 - 1}) \tag{20}$$

The radius of the effective aperture area may be assumed as $D/2 + g\rho o$, so we obtain

$$\pi(D/2 + g\rho o)^2 - \pi(D/2)^2 = \pi Dl \tag{21}$$
$$l = g\rho o(1 + g\rho o/D) \tag{22}$$
$$\eta = 1 + 4\, g\rho o/D\, (1 + g\rho o/D) \tag{23}$$

When $\varepsilon_r = 2.26$ and $D = 2a = \lambda_o$, then $\beta/k_o = 1.355$, $\rho o = 0.1742\lambda_o$.
and from experiment $\eta = 2.75$. Hence

$$g2 + 5.74g - 14.42 = 0 \qquad \therefore g = 1.89$$
$$\eta = 1 + 4*1.89*\rho o/D(1 + 1.89*\rho o/D) \tag{24}$$

This aperture efficiency may be approximated as

$$\eta = 1 + 4R/D(1 + R/D), \qquad (R = 2\rho o) \tag{25}$$

This means that the fields outside the dielectric are effective to the aperture efficiency with the relative field strength of $e^{-2\,(\Gamma R = 2)}$.

Figure 8 shows the relationship of a portion of the effective radius denoted by gρo to the diameter of the dielectric.

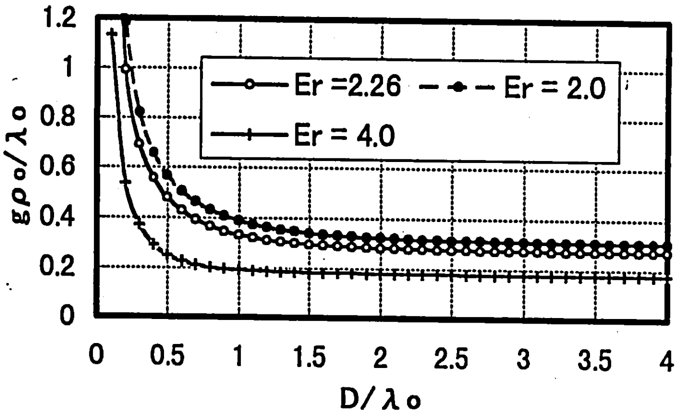


Fig. 8 Relationship of gρo to the increasing diameter of the dielectric.

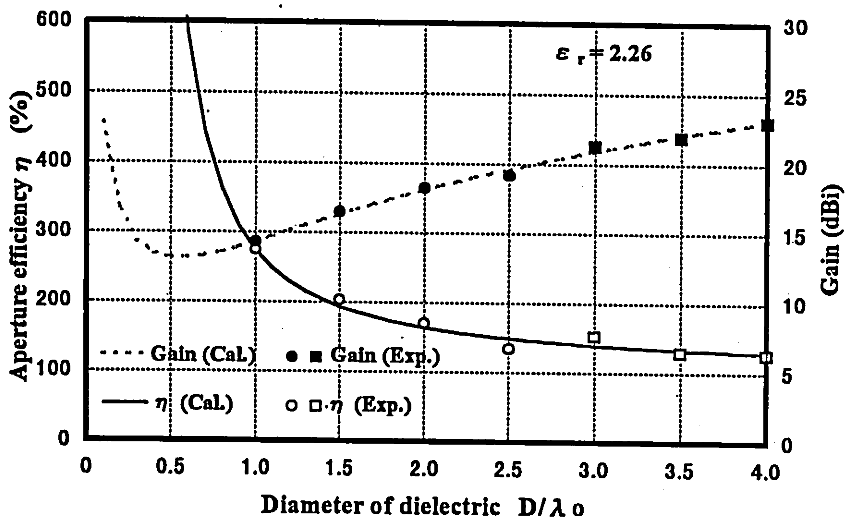


Fig. 9 Illustrates the behaviour of aperture efficiency and gain to the increasing diameter for ε_r = 2. 26.

It is seen in figure 9 , that with increasing diameter, the gain increases and is maximum and also the efficiency though seem to be decreasing is still maximum at above 100 %.

5. Relationship between length and diameter of the dielectric at gain maximum

The maximum gain is assume to be achieved when the phase of the path length of the plane wave radiated from the origin (o) in the direction of the dielectric face front, coincides with the total phase of the surface wave which is excited by the plane waves radiated from the origin to the side wall and reflected off the dielectric wall as shown in figure 10.

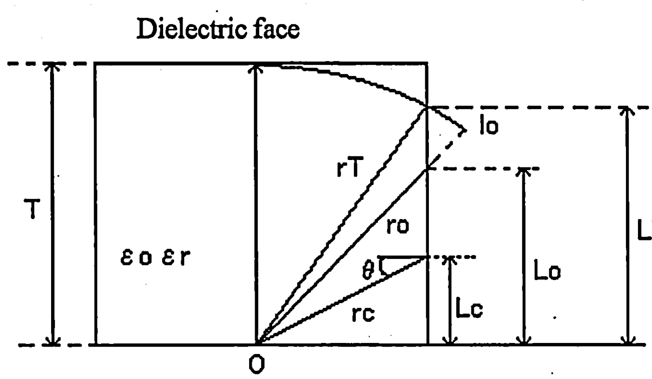


Fig. 10 Typical path lengths

Also it is noted that as the diameter of the dielectric becomes larger, the total phase of the surface wave that is reflected off the dielectric side wall becomes out of phase with the plane wave radiated in the direction of the dielectric face front and the maximum gain cannot be obtain. In order to maintain the maximum gain, extra dielectrics of proportional diameter and length were placed on top of the dielectric face , which produced a lens type structure of the face that will enable a coincidence in the phases of the two waves. This is as shown in figure 11. (a), (b) and (c) respectively for different diameters of the dielectric.

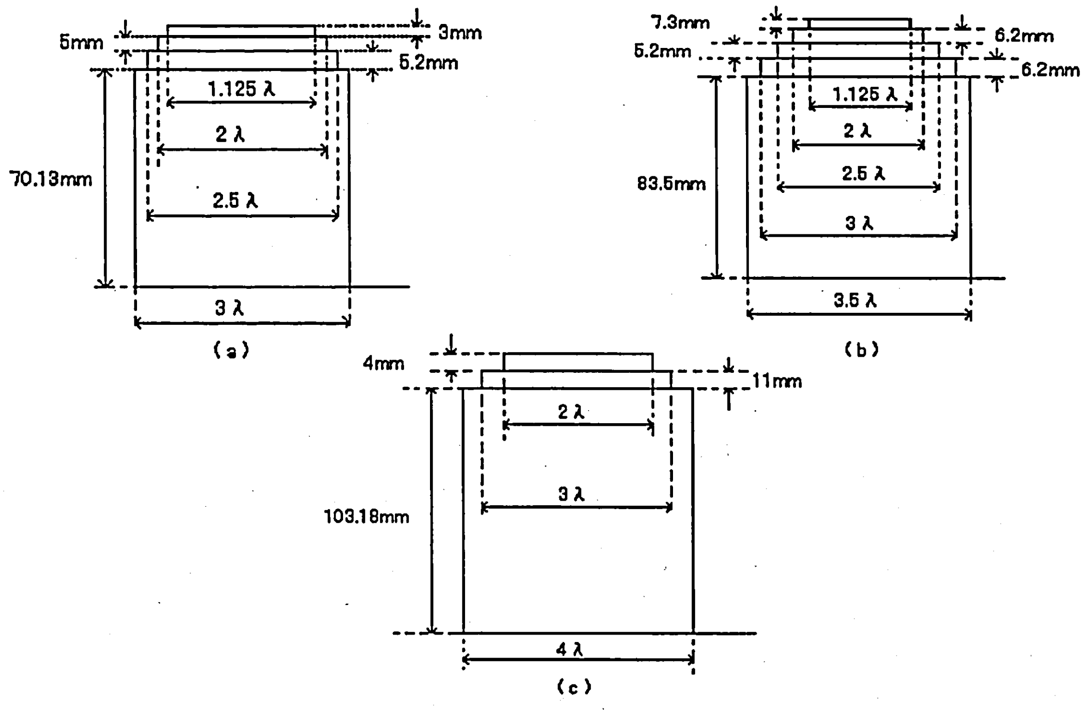


Fig. 11 The three different lens structures of the dielectric showing the relationship between the diameter and the length

So we may set

$$k_o\sqrt{\varepsilon_r}\,T = \Phi + \beta l \tag{26}$$

where Φ denotes the average phase of the plane waves which are totally reflected off from the side wall of the dielectric. For large diameter (i.e $D > 5\lambda_o$) and from experiment, we can write ($\beta \rightarrow k_o\sqrt{\varepsilon_r}$) and from experiment it was found that this was seen to be true for T which is the length of dielectric, equal to 1.12D.

Therefore we rewrite (26) as.

$$k_o\sqrt{\varepsilon_r}*1.12D = \Phi + k_o\sqrt{\varepsilon_r}*l_o$$

$$\Phi = k_o\sqrt{\varepsilon_r}\,(1.12D - l_o) \qquad \text{and} \qquad l_o = \lambda_o / \pi(\sqrt{\varepsilon_r - 1}) \tag{27}$$

$$\therefore\ T/\lambda_o = 1.12\,D/\lambda_o + (\beta/k_o\sqrt{\varepsilon_r})*l/\lambda_o - l_o/\lambda_o \tag{28}$$

$$l_o/\lambda_o = 1/(\pi\sqrt{(\beta/k_o)^2 - 1})\{1 + (\lambda_o/D)/(\pi\sqrt{(\beta/k_o)^2 - 1})\} \tag{29}$$

If T = 1.12D, then

$$L_o = D/\lambda_o - 1.12 l_o/\lambda_o, \quad L_T/\lambda_o = D/\lambda_o, \quad L_c/\lambda_o = (D/2\lambda_o)*(1/\sqrt{\varepsilon_r - 1})$$

$$r_o = 1.12D - l_o, \quad r_T = 1.12D, \quad r_c = (D/2)*(\sqrt{\varepsilon_r/\varepsilon_r - 1}) \tag{30}$$

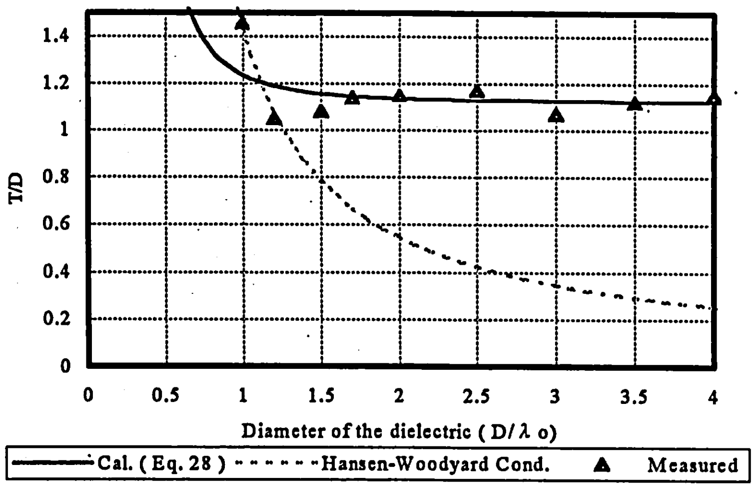


Fig. 12 Ratio of the length to the diameter of the dielectric at gain maximum.

Figure 12 illustrate the ratio to the diameter of the dielectric at gain maximum in relation to the Hansen-Woodyard Condition as mentioned earlier. From the graph it clearly indicates that for smaller diameter up to about 1 λ_o, the calculated and the experimental results seem to agree [5] with the Hansen-Woodyard Condition . But as the diameter becomes larger the results never agree at all. The measured result was taken for eight different diameters and as shown in figure 12, seems to agree with the calculated result. Similar test was carried out for the dielectric with different lens type face structure as shown in figure 11 and for without (i.e flat face), and the results are given in the tables 1, 2 and 3 respectively.

Table 1. Results for figure 11 (a)

Shape of the dielectric face	Diameter of the dielectric D (λ o)	Gain (dBi)	efficiency (%)	length of the dielectric (mm)	length of the dielectric T (λ o)	T / D
Lens	3	21.31	152.2	84.33	3.333	1.111
Flat	3	21.02	142.37	81.56	3.224	1.075

Table 2. Results for figure 11 (b)

Shape of the dielectric face	Diameter of the dielectric D (λ o)	Gain (dBi)	efficiency (%)	length of the dielectric (mm)	length of the dielectric T (λ o)	T/ D
Lens	3.5	21.98	130.47	108.4	4.285	1.224
Flat	3.5	19.21	68.95	99	3.913	1.118

Table 3. Results for figure 11 (c)

Shape of the dielectric face	Diameter of the dielectric D (λ o)	Gain (dBi)	efficiency (%)	length of the dielectric (mm)	length of the dielectric T (λ o)	T / D
Lens	4	23.02	126.92	118.2	4.672	1.168
Flat	4	19.51	56.56	116	4.585	1.146

Comparing the gain and aperture efficiency of the two types of dielectric face (i.e lens and flat) for the three different cases in figure 11 respectively, the gain and the aperture efficiency for the lens type face is higher than that for the flat face in all three cases.

Conclusion

Higher efficiencies and higher gains were obtained from the experiments carried out which prompted this further investigation in relation to the famous Hansen-Woodyard Condition. As seen in the discussion, it was assumed that the dielectric radiates (or receives) power not only through the actual physical area of the dielectric, but through the effective aperture area, and so both the length and the diameter of the dielectric have a greater influence on the aperture efficiency and gain of the dielectric loaded antenna. It is proved both by the experimental results and the mathematical approach used that for diameters greater than $1\lambda_0$, the Hansen-Woodyard Condition is not applicable due to the fact that, it only accounts for the length of the dielectric and not the diameter.

Therefore for dielectrics of diameters larger than $1\lambda_0$ the Hansen-Woodyard Condition is not applicable so the discussed approach is suggested in order to obtained higher efficiencies and higher gains.

References

(1) T. Tsugawa, Y. Sugio, and T. Makimoto, "Experimental study on high efficiency dielectric loaded antennas ", *Trans., IEICE.*, Vol. E73, No. 1, pp. 128 ~ 130, 1990.

(2) T. Tsugawa, M. Kawahara, Y. Sugio, and Y. Yamada, " Experimental study of dielectric loaded planer antenna fed by waveguide network ", *IEEE, AP-S, Symp.*, Vol.1, pp. 480 ~ 483, June, 1994.

(3) T. Tsugawa, Y. Sugio, and Y. Yamada, "Circularly polarised dielectric-loaded planar antenna excited by the parallel feeding waveguide ", *Trans.on Broadcasting, IEEE*, Vol. 43, pp. 205 ~ 212, June, 1997.

(4) R.C.Hansen, " Microwave Scanning Antennas ", Vol. II, Array Theory and Practice, pp.33 ~ 34. *Academic Press*, 1964.

(5) T. Sueta, S. Nishimura, and T. Makimoto, "A study on the radiation mechanism of dielectric rod antennas and the new types with high gain ", J. IECE Japan, 48, 4, pp. 217 ~ 225, April, 1965.

輻射科学研究会資料
RS 98－4

光スイッチ素子によるTHz電磁波の発生

Generation of THz Radiation by Using Ultrafast Photo-Switches

谷 正彦　阪井清美
（郵政省通信総合研究所 関西先端研究センター）
萩行正憲　斗内政吉
（大阪大学　超伝導エレクトロニクス研究センター）

平成10年5月22日（金）
於　大阪大学基礎工学部

光スイッチ素子によるＴＨｚ電磁波の発生

谷 正彦[1]、阪井清美[1]、萩行正憲[2]、斗内政吉[2]

[1]郵政省通信総合研究所 関西先端研究センター　〒651-2401 神戸市西区岩岡町岩岡 588-2

[2]大阪大学　超伝導エレクトロニクス研究センター　〒565-0871　吹田市山田丘 2-1

はじめに

テラヘルツ(THz)電磁波領域（ここでは 100GHz-10THz の未開拓周波数領域を指す）は、潜在的な応用の可能性が数多くあるにも関わらず、他の周波数領域に比べ光源や検出器等の開発が立ち後れており、技術的には多くの課題を残した領域であるといえる。我々の研究グループでは簡便で高効率なＴＨｚ帯光源の実現をめざし、レーザー光による高速変調を利用したＴＨｚ光源開発を行ってきた。本報告では１）超短パルスレーザー励起による半導体及び高温超伝導体光スイッチ素子によるＴＨｚ電磁波パルス発生、２）半導体光スイッチ素子の光差周波ビート励起による連続波（ｃｗ）ＴＨｚ電磁波発生（photomixing)についての最近の研究結果について報告する。

１．半導体光スイッチ素子によるＴＨｚ電磁波パルスの発生

１．１．　半導体光スイッチ素子

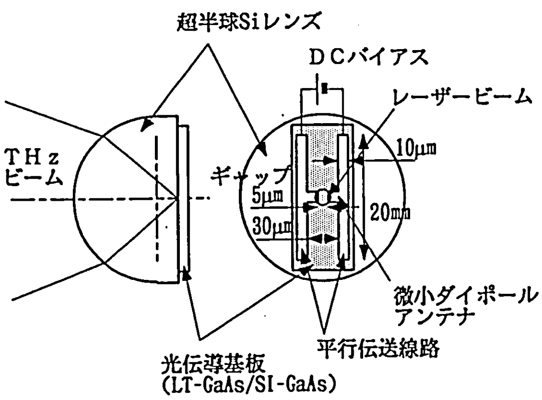


図１．半導体光スイッチ素子の構造

図１にテラヘルツ電磁波を発生させるための半導体光スイッチ素子の例を示す。素子は高速応答する半導体基板(低温成長 GaAs, イオン注入 Si など）上につくられ、その構造は平行伝送線路(coplanar transmission line)とその中央部分に配置された微小ダイポールアンテナとからなる。アンテナの中央には微小なギャップ（数μm）があり、ギャップ間には適当なバイアス電圧を印加する。このギャップに半導体のバンドギャップよりも高い光子エネルギー($h\nu > E_g$)を持ったレーザーパルスを照射すると、半導体中に電子と正孔の自由キャリアが生成され、パルス状の電流が流れる（光伝導効果）。微小ダイポールアンテナによる電磁波放射 $E_r(t)$はアンテナから十分離れた位置（far field）では、電気的ダイポール p の２次の時間微分、すなわち電流 i の時間微分に比例する($E_r(t) \propto \partial^2 p/\partial t^2 \propto \partial i/\partial t$)。通常アンテナ素子は半球または超半球型の基板レンズ上(吸収ロスの少ない高抵抗Ｓｉで作られることが多い)にマウントされ（図１）、放射パワーのほとんどは誘電率の高い半導体基板側に放出される[1]。光スイッチ素子のユニークな点は、電磁波発生に用いた同じ素子を電磁波検出にも使えることである。発生された電磁波(パルス)を検出側の光スイッチ素子に入射させ、それと同期して励起パルス光の一部を分岐したサンプリングパルス光で光スイッチ素子にゲートをかけると、電磁波の電場がバイアスとして働き、過渡的電場 $E_r(t)$に比例した電流信号 I（直流）を得ることができる。この時の電流信号は電磁波の波形 $E_r(t)$、サンプリングパルス光で励起されたキャリアの減衰関数 $n(t)$のコンボリューションで与えられ、

次の式で表すことができる。

$$I(\tau) = e\mu\int_{-\infty}^{\infty} E_r(t)n(t-\tau)dt \qquad (1)$$

ここで、μ はキャリアの易動度、τ はポンプ光とサンプリング光の時間遅れである。キャリア寿命が電磁波のパルス幅に比べて十分短ければ、$n(t)$ はデルタ関数的になり、受信素子で検出される直流電流は、ポンプ光とプローブ光の時間遅れを連続的に変化させたとき、電磁波の時間分解波形を与えることになる。光スイッチ素子によるＴＨｚ電磁波の発生と検出の装置図を図２に示す。

光スイッチ素子による電磁波発生の特性は光導電性基板とアンテナ構造に依存する。光伝導基板の特性として下記の特性が重要である。

１）絶縁または耐電圧特性：光スイッチ素子からの電磁波放射パワーはバイアス電圧の２乗にほぼ比例することから、高い耐電圧特性が求められ、また後で述べるように素子を検出器として用いる場合はノイズレベルが抵抗値の平方根の逆数に比例することから、できるだけ高抵抗のものが良い。

２）キャリア寿命：検出器として広い検出帯域を得るためにはキャリア寿命ができるだけ短いことが望ましい。ただし、パルスの電磁波発生においてはキャリア寿命はそれほど重要では、なくキャリア寿命が長い半導体でも効率よく電磁波発生できることが分かっている。

３）キャリアの易動度：光スイッチ素子の電磁波の発生と検出効率はキャリアの移動度に比例するので、できるだけ移動度が大きい方が良い。ただし、大きな移動度は特性１）と２）とは両立し難い。

光伝導基板としては、低温(<300°C)でＭＢＥ(Molecular Beam Epitaxy)成長させた GaAs(LT-GaAs)膜と、イオン注入したサファイア基板上のＳｉ薄膜(Radiation-Damaged Si on Sapphire, RD-SOS)[2-3]がもっともよく用いられる。LT-GaAs は過剰の As を含み、As_{Ga} 等の欠陥が多数存在し、これらがキャリアの捕獲または再結合中心となるため、非常に短いキャリア寿命(<0.5 ps)を示す[4-5]。また、易動度も比較的高く(150-200 $cm^2/V{\cdot}s$、RD-SOS の約 5 倍)、成長後アニールしたものは耐電圧特性も半絶縁性 GaAs(SI-GaAs)より良い[6-7]。

１．２．半導体光スイッチ素子の発振特性

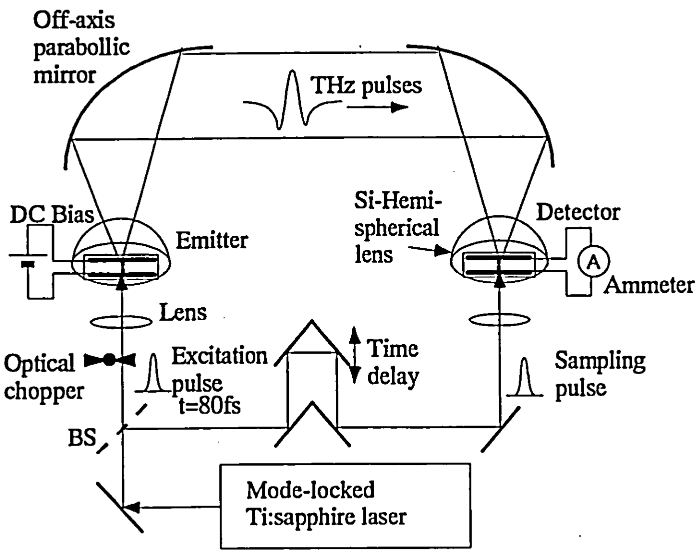


図２．光スイッチ素子によるＴＨｚ電磁波の発生と検出実験

図２に我々が行った光スイッチ素子によるＴＨｚ電磁波パルスの発生と検出実験の装置構成図を示す。励起用光源は Ar イオンレーザー励起のモード同期チタンサファイアレーザーで、パルス幅約 80 フェムト秒、発振波長約 800nm、繰り返し周期 82 ＭＨｚで動作する。ポンプ光は発振素子の光伝導ギャップに対物レンズを用いて照射し、発生した電磁波パルスは基板レンズと一組の軸外し放物面鏡で受信素子に集光される。ＴＨｚビームの伝播経路は空気中の水蒸気の吸収の影響を避けるために、真空にするか乾燥窒素ガスで水蒸気を除去する。

我々は SI-GaAs 上に GaAs 膜を約２５０℃でＭＢＥ成長し、その後６００℃で

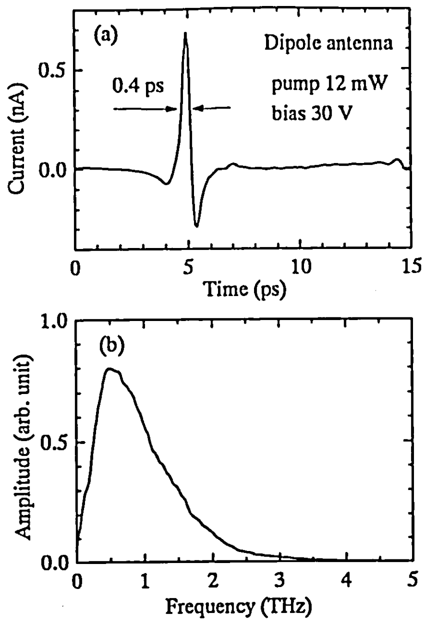


図３．半導体光スイッチ素子により発生された(a)ＴＨｚ電磁波パルスの波形と(b)そのフーリエ変換スペクトル

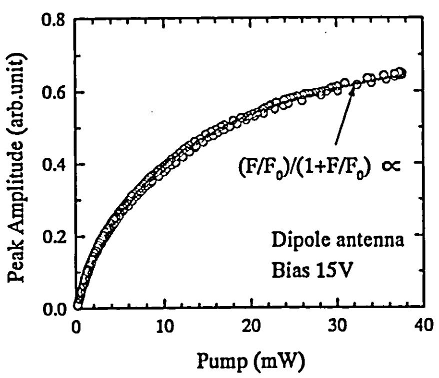


図４．電磁波放射振幅のポンプ光強度依存

アニールをほどこしたLT-GaAsを用いて図１のような形状のダイポールアンテナ型の光スイッチ素子を作製した。ポンプ・プローブ法による反射率の変化から求められたLT-GaAsのキャリア寿命は0.3 psであった[5)]。この素子を用いて発生させたＴＨｚ電磁波を、同様の素子により時間分解検出した電磁波波形を図3(a)に示す。また、そのフーリエ変換スペクトルを図3(b)に示す。電磁波パルスの主ピークでの半値幅は約0.4psである。そのスペクトルは0~3 THzにわたる広い周波数範囲に分布しており、スペクトルのピークは約0.5THzにある。この時のポンプ光強度は 12mW で、バイアス電圧は30Vであった。また、電磁波の平均出力は約0.3μW(約4 fJ/pulse)であった。

測定される電磁波の振幅はバイアス電圧にほぼ比例する。したがって放射パワー（振幅の２乗に比例）はバイアス電圧の２乗に比例する。ポンプ光強度に対しては、比較的強度が弱い場合はポンプ光強度にもほぼ比例する。しかし、ポンプ光強度を強くするにつれ、電磁波の発振強度は飽和する傾向を見せる。図４にLT-GaAs光スイッチ素子による電磁波の振幅（波形ピークでの値）のポンプパワー依存を測定した結果を示す。このような放射電磁波強度の飽和は光励起された過剰キャリアによる電場のスクリーニング効果で説明される[8)]。このスクリーニングの効果を考慮すると、電磁波の振幅のポンプ光強度依存は次のような式で与えられる。

$$E_{peak} \propto \frac{F/F_0}{1+F/F_0} \qquad (2)$$

ここで、E_{peak}は電磁波のピーク振幅、Fはポンプ光強度、F_0はスクリーニングの強さに関係した定数である。(2)式を実験データにフィットしたものを実線で示す。このような飽和効果は受信素子の信号強度のプローブ光強度依存にも同様に観測される。

電磁波の強度及びスペクトルは当然アンテナ形状にも強く依存する。ダイポールアンテナの場合はアンテナ長が長いほど放射強度が強くなる[3,9)]。また一般にダイポールアンテナの長さが長いほど、低周波側にスペクトルはシフトする（しかし、アンテナ長が50μm以下ではスペクトルにそれほど大きな変化は無い）。また、ボウタイアンテナ[10)]やスパイラル[11)]、ログペリアンテナ[12)]などの周波数無依存型の広帯域アンテナを用いるとさらに大きな放射強度の増大が観測されるが、発振スペクトルは大きく低周波側にシフトする。これは、アンテナの大きさが大きくなることにより、電磁波の低周波成分が増大しているためで、１ＴＨｚ以上の成分は同様な条件（ポンプ光強度とバイアス電圧）のもとでの微小ダ

イポールアンテナとあまり大きく変わらない。比較的高効率で高い周波数スペクトルを持った電磁波を発生する方法として、非常に高い正のバイアス電圧を印加されたストリップライン（金属）と半導体の境界を励起することによる電磁波発生が報告されている [13-14]。この方法では約５ＴＨｚまでのスペクトル分布を持った電磁波を発生させることができる。

なお、ＴＨｚ電磁波の発生と検出はキャリア寿命の長い半絶縁性GaAsや半絶縁性InP（キャリア寿命~1ns）を用いた素子でも可能である [15-16]。この場合は光励起キャリアの立ち上がり部分での応答で電磁波の放射及び検出が行われる。キャリア寿命が長い場合は、(1)式の $n(t)$ がステップ関数的になり、検出される波形 $I(\tau)$ は電磁波の波形 $E_r(t)$ の積分波形となる。キャリア寿命の長い半導体を用いた場合、発生される電磁波強度はキャリア寿命の短いLT-GaAs素子と同程度であるが、発振スペクトルはやや低周波数側にシフトする。また、電磁波の検出感度またはＳＮ比はあまり良くない。これは、キャリア寿命が長いことにより、キャリアによるスクリーニングの効果が大きくなることと、長寿命のキャリアにより、実効的に素子の抵抗値が下がり、抵抗ノイズ(ジョンソンノイズ)による雑音信号が増加することが原因であると考えられる [17]。

２．高温超伝導体光スイッチ素子によるＴＨｚ電磁波の発生

２．１．発生原理と発振特性 [18-21]

図４に典型的な高温超伝導体光スイッチ素子の模式図を示す。基板（ＭｇＯ）上に高温超伝導体のＹＢＣＯ($YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$)膜（c軸配向、厚さ100nm前後）で中央にブリッジ構造を持つストリップラインを形成する。これを臨界温度(Tc)以下に冷却し、バイアス電流を流した状態で、ブリッジ部分に光パルスを照射すると、超伝導電流を担っている超伝導電子対（クーパー対）が一部破壊され、常伝導電子（準粒子）となり、電子-電子散乱あるいは電子-フォノン散乱を受けて停止する。この結果超伝導電流の減少が起こる。光生成された準粒子はエネルギー緩和の後、再びクーパー対となり電流に参加する（図５）。この一連の過程で超伝導電流Ｊが変調され、その時間スケールがサブピコ秒のオーダーであれば、半導体の光伝導スイッチの場合と同様ＴＨｚ電磁波が放射される。すなわち、半導体光伝導スイッチでは過渡的な光生成電流を利用するのに対し、超伝導光スイッチでは過渡的な超伝導電流の減少を利用することになる。

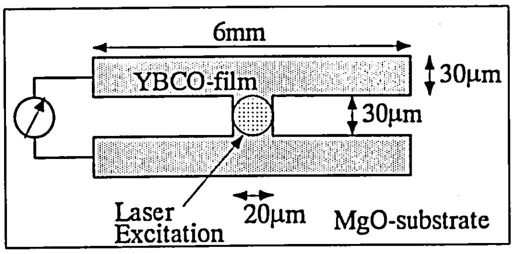


図４．高温超伝導体光スイッチ素子の構造

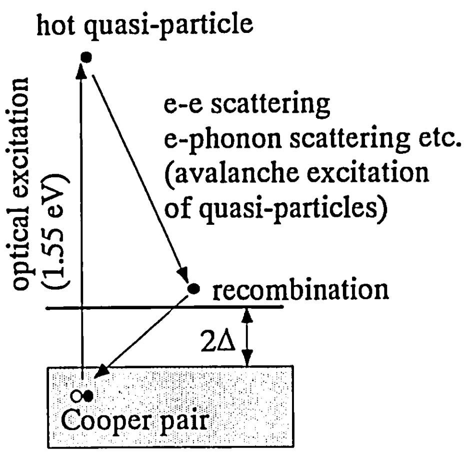


図５．高温超伝導体中のキャリアダイナミクス

図４に示された素子はブリッジ部分が微小ダイポールアンテナとして作用し、放射される電磁波は半導体光スイッチの場合同様、基板（ＭｇＯ）側に主に放射される。図６にこのようなダイポールア

ンテナ型のＹＢＣＯ光スイッチ素子をフェムト秒光パルスで励起し、LT-GaAs の光伝導スイッチ素子を用いて、放射電磁波を時間分解検出した例を示す。波形はほぼシングルサイクルで、最初のパルスピークの半値幅は約 0.5ps である。また、電流バイアスの極性を反転させたときには、電磁波の波形の極性も反転し、無バイアス時には電磁波は観測されない。また、当然であるが、Tc 以上の温度でも電磁波は観測されない（バイアス電流もほとんど流れない）。なお、最初のパルスのあとに観測される変調信号ははMgO 基板内での反射と水蒸気吸収によるものである。

図７に放射電磁波の振幅（パルスのピークでの信号強度）のレーザーポンプ強度とバイアス電流に対する依存性を測定した結果を示す。ポンプ強度に対しては最初非線形に増大し、ある程度ポンプ強度が強くなると、飽和する傾向をみせる(図７(a))。バイアス電流に対してはほぼ線形に比例しているが、高いバイアスではやや線形な増加より強い増加傾向を示す(図７(b))。図８に電磁波振幅の温度に対する依存性を示す。振幅はＹＢＣＯ膜の温度が上がるにつれ増加し、Tc（～80K）より少し低い温度で最大値をとり、さらに Tc 付近ではまた減少する。

以上、放射される電磁波振幅のポンプ強度、バイアス電流、温度依存を示したが、これらはＹＢＣＯ膜の温度による特性変化で説明できる [21]。 図８には温度に対するＹＢＣＯ膜(t=200nm)の透過率を計算したものが同時に示されているが、透過率は温度が上がるにつれ増加し、Tc 近くでは急激に増加している。これはＹＢＣＯ膜は超伝導状態では非常に(複素)誘電率が高く、したがって吸収と内部反射による電磁波の閉じ込めが強いが、温度が上がるにつれ、誘電率が低下し、吸収と内部反射の効果が小さくなるためである。したがって、温度が上がるにつれ超伝導体光スイッチからの電磁波の放射効率が誘電率の低下と共に増大する。ポンプ強度に対する電磁波振幅の非線形な増大は、ポンプ光による温度上昇によると考えられる。またバイアス電流に対する非線形な増大もバイアス電流によるオーミックな熱損失による温度上昇が原因と思われる（超伝導状態ではオーミックな損失はゼロであるが、高いバイアス電流では超伝導状態が一部壊れている部分が発生するため、部分的にオーミックな熱喪失が発生すると考えられる）。

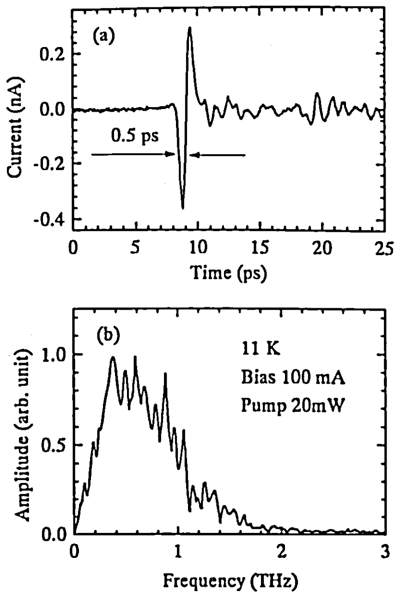


図６．高温超伝導体（ＹＢＣＯ）光スイッチ素子による(a)電磁波パルスの波形と(b)そのフーリエ変換スペクトル。

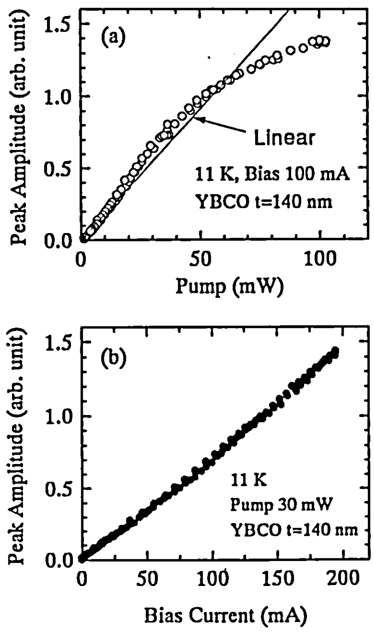


図７．高温超伝導体光スイッチからの電磁波放射振幅の(a)ポンプ光(b)バイアス電流依存。

ＴＨｚ電磁波源としての応用を考えるとき電磁波強度が強いことが重要であるが、高温超伝導体光スイッチ素子からの電磁波強度は半導体光スイッチ素子と比べてやや劣る。ＴＨｚ電磁波強度の増大にには臨界超伝導電流を大きくし、超伝導膜自体での吸収損失を低減するため、比較的薄くて良質の高温超伝導膜を作成することが必要である。その他、アンテナ構造を放射効率のよいボウタイやスパイラル型のものにする、電磁波の集光効率を上げるため、半球状の基板レンズ（基板と同じ材質）を用いるなどの工夫が考えられる。これまでのところボウタイ型アンテナとＭｇＯの半球レンズを用いることにより、最大 0.5μW の出力を観測している。[22)]

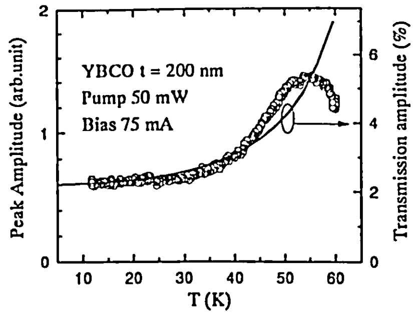


図８．高温超伝導体光スイッチ素子からの電磁波放射振幅の温度依存(Tc=約 80K)。

２．２．磁束バイアスおよび磁束トラップによる電磁波発生

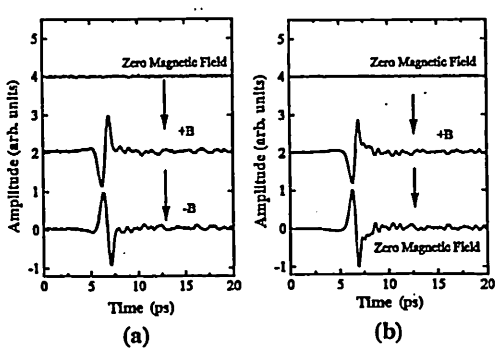


図９．高温超伝導体からの電磁波放射、(a)外部磁場印加状態、(b)磁束トラップ状態。

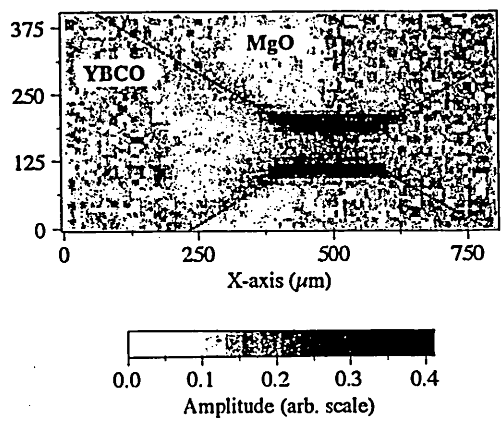


図 10．ボウタイ型ＹＢＣＯ光スイッチ素子の電磁波放射強度の２次元マッピング。

非常に興味深い現象として、高温超伝導体に磁場を印加する[23)]、あるいは磁場が超伝導体にトラップされる[24)]ことによってもＴＨｚ電磁波が発生されることが観測されている。この場合の磁場は数百ガウス程度の弱いものでも良く、永久磁石を近づけるだけで、無バイアス電流状態で電磁波放射が観測される。図９(a)はＹＢＣＯボウタイアンテナ型素子にｃ軸方向に外部磁場（Ｂ＝１５０Ｇ）を印加した場合の放射波形で、磁場方向を反転すると波形の極性も反転する。さらに興味深いことは図９(b)にも示されるように、磁場を印加後外部磁場を取り去っても符号が反転して電磁波放射が観測されることである。磁場印加時に観測される電磁波放射は外部磁場に対する超伝導遮蔽電流が光パルスで変調されること、また外部磁場と取り去ったあとの電磁波放射は外部磁場を取り去った後にもＹＢＣＯ膜に一部侵入しトラップされた磁束に伴う超伝導永久電流が光パルスにより変調されるためとして理解される。磁束トラップ状態からの放射は磁束の動きを反映して、数分の緩和時間でゆっくりある一定強度にまで減少することが観測されている。

高温超伝導体からの電磁波放射の応用の一つに超伝導電流のマッピングがある。すなわち、超伝導体からの電磁波放射（振幅）は超伝導電

流密度に比例するので、励起レーザーの焦点を２次元的にスキャンしながら電磁波強度を測定することにより、素子上の超伝導電流密度の２次元イメージを得ることができる。従来は超伝導電流による磁場をマイクロSQUIDや磁気光学効果を用いて測定し、間接的に超伝導電流密度の分布を決定していたが、ＴＨｚ電磁波放射の測定により、電流分布を直接的に測定することが可能である。図10はボウタイ型のＹＢＣＯ光スイッチ素子に対してそのような電流マッピングを行った結果である。この時の超伝導電流は１００ｍＡでレーザーのスポットサイズは約φ３０μｍである。直径３ｍｍのＭｇＯ基板レンズを基板裏側に取り付けているため、中央部が強調された形になっているが、超伝導電流が主にブリッジ部の端を流れているのが良く分かる。

３．テラヘルツ電磁波パルスの分光応用

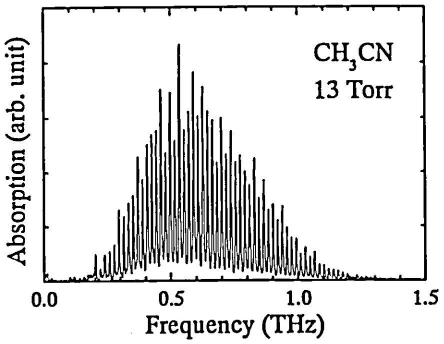


図11. CH_3CNの吸収スペクトル。

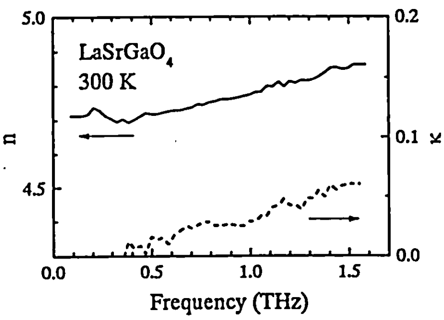


図12. LSGOの複素屈折率。

１節でのべたＴＨｚ電磁波の発生と検出システムは時間領域の分光システムとして応用できる。すなわち、図２でのＴＨｚビームの伝播経路中に測定したいサンプルを挿入し、サンプルを透過したときの電磁波の波形とサンプルなしの場合の電磁波の波形を測定し、両者のフーリエ変換スペクトルの比較から、ＴＨｚ域の広い範囲にわたる、透過または吸収スペクトルを得ることができる。これまで、すでに気体分子の吸収、誘電体あるいは半導体基板の複素屈折率、超伝導薄膜の複素伝導率などの測定に応用されている。

図11はサンプルとして、アセトニトリル(CH_3CN)の気体分子の吸収を測定した例である[25)]。アセトニトリルが対称こま型分子であるため、その基底状態の回転準位に対応した等間隔の吸収線が現れている。測定の周波数分解能Δｆはポンプ光とプローブ光の時間遅れの走査幅Δｔの逆数に比例する($\Delta f=1/\Delta t$)。図11での分解能は約2.5 GHz(Δt=400ps)である。

この分光法は周波数領域で従来行われていたフーリエ分光法と似ているが、フーリエ分光では、測定される干渉波形が電磁波の強度（パワー）波形であるのに対し、本方法では電磁波の振幅波形を時間分解で測定しているため、位相情報を同時に測定している点が大きく異なる。したがって、誘電体などの複素屈折率などを測定する場合に非常に有利である。すなわち、屈折率の実部nは電磁波波形のフーリエ変換スペクトルの位相変化から、虚部kはフーリエ変換スペクトルの振幅の変化からそれぞれ直接得られる。図12に$LaSrGaO_4$(t=0.54mm)の常温(300K)での複素屈折率$\tilde{n} = n - ik$を本分光システムを用いて測定した例を示す。

４．光混合法によるテラヘルツ電磁波の連続発生

４．１．　発生原理と特性

前節までのテラヘルツ電磁波発生では励起光源として超短パルスレーザーを用いるものであったが、同じ光スイッチ素子上で２つの連続波（cw）レーザーを光混合（photomixing）することによりテラヘルツ電磁波を連続発生させることができる[26-29]。以下では光混合法による cw テラヘルツ電磁波の発生原理と放射特性について簡単に述べ、我々が行なった photomixing による cw-THz 電磁波発生実験を紹介する。

周波数の異なる２つの単色光を混合すると、合成振幅が差周波数で変調（ビート）を受けることはよく知られた事実である。その混合波を光スイッチ素子に照射すると、光電流が変調を受けてアンテナから電磁波を放射する。バイアス電圧 Vを印加された光スイッチ素子（直流光伝導度 G、アンテナインピーダンス R、電極間容量 C、キャリア寿命 τ_c）に対して入射レーザー強度があまり大きくない（$R << 1/G$）場合、放射される電磁波の強度 $I(\omega)$（ω：差周波の角周波数）は、

$$I(\omega)=\frac{R(GV)^2}{2\{1+(\omega\tau_c)^2\}\{1+(\omega RC)^2\}} \quad (3)$$

で表される[26]。(3)式から明らかなように、パルス電磁波発生の場合と同様、放射強度がバイアス電圧と光伝導度（レーザー強度に比例）のそれぞれの２乗に比例する。また、高出力・広帯域にするには、当然ながら光スイッチ素子として光感度が高くキャリア寿命が短いものを選ぶべきであることがわかる。RC 時定数も高周波での放射強度を減少させる要因となるので、容量が小さくなるよう素子構造を工夫しなければならない。

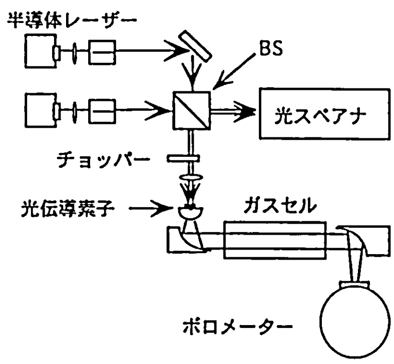


図 13. 光混合による電磁波発生の実験配置。

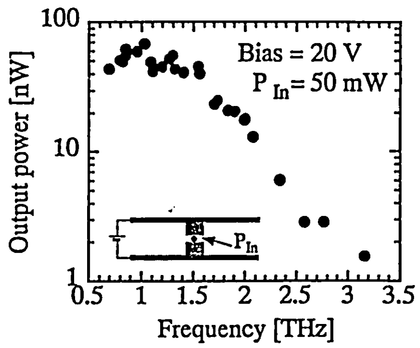


図 14. 光混合による放射スペクトル。

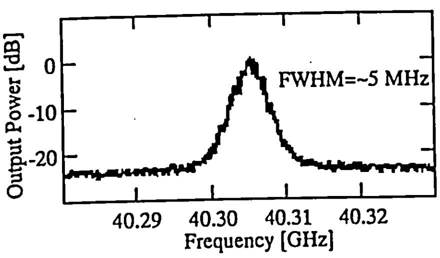


図 15. ＲＦスペアナで測定した電磁波の周波数安定度。

光スイッチ素子を用いた光混合による電磁波発生法が他の方式と比較して優れている点は、i)装置が基本的にレーザーと光スイッチ素子のみの単純な構成であるため小型化が可能であること、ii)周波数可変性や安定性に優れていること、などである。

図 13 に我々が行った実験装置の構成を示す。励起レーザー光源としては回折格子用いた外部共振器型の２台の単一モード半導体レーザーを用いる。各レーザーの波長は外部共振器を構成している回折格子の角度とバイアス電流及び温度を調整することにより 810-830nm 範囲で波長選択でき、さらにピエゾ素子で回折格子の角度を微調させることにより、約１０ＧＨｚの周波数をモードホップなしで連続的に変化させることができる。各レーザーの周波数安定度は約 3MHz である。２つのレーザーの出力光はプリズムキ

ューブで空間結合されたのち、光伝導スイッチ素子（アンテナ長 50μm のダイポールアンテナ）に照射される。発生された電磁波は 1 組の軸外し放物面鏡でコリメートされ、Si コンポジットボロメーター(4.2K)で検出される。図 14 に電磁波の放射パワーの周波数依存を測定したものを示す。この時のレーザーの入射パワーは 20mW で素子へのバイアス電圧は 50V である。放射スペクトルは約 1THz 付近で最大になり、これは用いたダイポールアンテナの共振周波数を示していると思われる。このダイポール型の光スイッチ素子では 2THz 以下の周波数領域で 10nW 以上のパワーが得られている。レーザーパワーに対する電磁波の変換効率はこの場合 10^{-6} 程度であるが、今後、さらに短いキャリア寿命を持つ材料の採用、電極構造の工夫およびレーザー強度の増大などによって 10^{-4} 程度（出力～ 1 μW）までの効率の向上が可能と思われる。素子の耐熱性やキャリアの飽和などで単一素子に照射可能なレーザー強度には限りがあるが、素子のアレイ化などでさらなる大出力化も可能と考えられる。本システムにより発生された電磁波の周波数安定度を評価するために 40GHz 付近でＲＦスペクトラムアナライザーを用いて測定した結果を図 15 に示す。電磁波の発振線幅は半値全幅で約 5MHz で、これは各レーザーの周波数安定度から見積られる値と一致する。

４．２．高分解分子分光への応用

光混合法による cw 電磁波発生の大きな特徴の一つはその波長可変性と周波数安定度である。このような特性は高分解分子分光には理想的である。我々は上記の電磁波発生システムを用いてアセトニトリル(CH_3CN)分子ガスの分光を行った[30)]。ＴＨｚビームのパスにアセトニトリルを封入したガスセルを挿入し（図 13）、ピエゾ素子で一方のレーザーの波長をスキャンしボロメーターで透過する電磁波強度を測定した。図 16 はアセトニトリルの基底状態の回転準位の遷移(J=72-73)に対応する透過スペクトルである。K（回転モーメントの対称軸への射影成分を表す量子数)＝0 ～ 7 に対応した鋭い吸収線が観測されている。

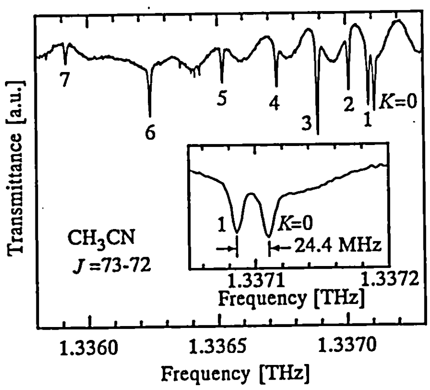


図 16．CH_3CN 分子ガスの透過スペクトル

ベースラインのうねりは発振素子とボロメーター間で生じる電磁波の干渉によるものである。

今後さらにレーザーの安定化を行い、kHz オーダーの周波数安定度をもつ cw-THz 電磁波光源の構築を計画中である。

５．最近の進展

以上、我々が行ってきたＴＨｚ電磁波発生の研究を中心に述べてきたが、レーザーを用いたオプトエレクトロニクス的な手法によるＴＨｚ電磁波発生（および検出とその応用）の研究は、近年のレーザー技術の進歩に触発され、ますます盛んになる様相を呈している。詳しくは文献 31 などを参照していただくとよいが、特に注目を集めているものとして、ＴＨｚ電磁波パルスによる透過イメージングとＥＯサンプリングによるＴＨｚ電磁波の超広帯域検出などがある。ＴＨｚ電磁波によるイメージング[32)]及びトモグラフィー[33)]はベル研の Nuss らのグループによって精力的に研究が進められており、産業応用への期待もよせられている。非線形結晶の電気光学（ＥＯ）効果を利用したＴＨｚ電磁波のＥＯサンプリングは原理的に非常に広帯域な検出が可能であることと２次元同時検出も可能なことから、今後半

導体光伝導スイッチに代る検出方法として期待されている。Zhang らのグループでは３７ＴＨｚに及ぶ広帯域の電磁波検出[34]とＴＨｚビームの２次元検出[35-36]にすでに成功している。

このようにＴＨｚ電磁波発生に関する技術は急速に発展しつつあるが、今後はこれらの技術が新たな応用を生み出し、応用がさらにこの領域での研究を加速させるようになるのではないかと筆者らは考えている。

文 献

1) D. B. Rutledge, D. P. Neikirk and D. P. Kasilingam: *Infrared and Millimeter Waves* 10 (1983) 1.

2) F. E. Doany, D. Grischkowsky and C.-C. Chi: Appl. Phys. Lett., 50 (1987) 460.

3) P. R. Smith, D. H. Auston, and M. C. Nuss: IEEE J. Quantum Electron., 24 (1988) 255.

4) S. Gupta, J. F. Whitaker, and G. A. Mourou: IEEE J. Quantum Electron., 28 (1992) 2464.

5) M. Tani, K. Sakai, H. Abe, S. Nakashima, H. Harima, M. Hangyo, Y. Tokuda, K. Kanamoto, Y. Abe, and N. Tsukada: Jpn. J. Appl. Phys., 33 (1994) 4807.

6) G. L. Witt: Materials Science and Engineering, B22 (1993) 9.

7) D. C. Look: Thin Solid Films, 231 (1993) 61.

8) A. J. Taylor, P. K. Benicewicz, and S. M. Young: Opt. Lett., 18 (1993) 1340.

9) M. Tani, S. Matsuura, and K. Sakai: Appl. Opt. 36 (1997) 7853.

10) H. Harde and D. Grischkowsky: J. Opt. Soc. Am. B, 8 (1991) 1642.

11) Y. Pastol, G. Arjavalingam, and J.-M. Halbout: Electron. Lett., 26 (1990) 133.

12) D. R. Dykaar, B. I. Greene, J. F. Federici, A. F. Levi, L. N. Pfeiffer and R. F. Kopf: "Log-periodic antennas for pulsed terahertz radiation," Appl. Phys. Lett., 59 (1991) 262-264.

13) N. Katzenellenbogen and D. Grischkowsky: Appl. Phys. Lett., 58 (1991) 222.

14) S. E. Ralph, and D. Grischkowsky: Appl. Phys. Lett., 60 (1992) 1070.

15) A. C. Warren, N. Katzenellenbogen, D. Grischkowsky, J. M. Woodall, M. R. Melloch, and N. Otsuka: Appl. Phys. Lett., 58 (1991) 1512.

16) F. G. Sun, G. A. Wagoner, and X.-C. Zhang: Appl. Phys. Lett., 67 (1995) 1656.

17) Masahiko Tani, Kiyomi Sakai and Hidenori Mimura: Jpn. J. Appl. Phys. 36 (1997) L1175.

18) M. Tonouchi, M. Tani, Z. Wang, K. Sakai, S. Tomozawa, M. Hangyo, Y. Murakami, S. Nakashima: Jpn. J. Appl. Phys., 35 (1996) 2624.

19) M. Hangyo, S. Tomozawa, Y. Murakami, M. Tonouchi, M. Tani, Z. Wang, K. Sakai, S. Nakashima: Appl. Phys. Lett. 69 (1996) 2122.

20) M. Tani, M. Tonouchi, Z. Wang, K. Sakai, M. Hangyo, S. Tomozawa and Y. Murakami: Jpn. J. Appl. Phys., 35 (1996) L1184.

21) M. Tani, M. Tonouchi, M. Hangyo, Z. Wang, N. Onodera, and K. Sakai: Jpn. J. Appl. Phys. 36 (1997) 1984 .

22) Mananori Hangyo, Noboru Wada, Masayoshi Tonouchi, Masahiko Tani, and Kiyomi Sakai: IEICE Trans. Electron. E80-C (1997) 1282.

23) M. Tonouchi, M. Tani, Z. Wang, K. Sakai, N. Wada and M. Hangyo: Jpn. J. Appl. Phys. 36 (1997) L93.
24) Masayoshi Tonouchi, Noboru Wada, Masanori Hangyo, Masahiko Tani, Kiyomi Sakai: Appl. Phys. Lett. 71 (1997) 2364.
25) Masahiko Tani, Shuji Matsuura and Kiyomi Sakai: J. Commun. Res. Lab. 43 (1996) 151.
26) E. R. Brown, F. W. Smith, and K. A. McIntosh: J. Appl. Phys. 73 (1993) 1480.
27) E. R. Brown, K. A. McIntosh, K. B. Nichols, and C. L. Dennis: Appl. Phys. Lett. 66 (1995) 285.
28) K. A. McIntosh, E. R. Brown, K. B. Nichols, O. B. McMahon, W. F. DiNatale, and T. M. Lyszczarz: Appl. Phys. Lett. 67 (1995) 3844.
29) S. Matsuura, M. Tani and K. Sakai: Appl. Phys. Lett. 70 (1997) 559.
30) Shuji Matsuura, Masahiko Tani, Hajime Abe, Kiyomi Sakai, Hiroyuki Ozeki, and Shuji Saito: J. Mol. Spectrosc. 187 (1998) 97.
31) IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, Vol.2, No.3 (1996).
32) B. B. Hu and M. C. Nuss: Opt. Lett., 20 (1995) 1716.
33) D. M. Mittleman, S. Hunsche, L. Boivin and M. C. Nuss: Opt. Lett. 22 (1997) 904.
34) Q. Wu and X.-C. Zhang: Appl. Phys. Lett. 71 (1997) 1285.
35) Q. Wu, T. D. Hewitt and X.-C. Zhang: Appl. Phys. Lett. 69 (1996) 1026.
36) Q. Wu, F. G. Sun, P. Campbell, and X.-C. Zhang: Appl. Phys. Lett. 68 (1996) 3324.

輻射科学研究会資料
RS98-5

ランダム導波路系におけるモード波の局在

Localization of Mode Waves in a Random Waveguide System

小見山　彰
大阪電気通信大学

１９９８年７月２４日（金）
於　大阪府立大学　学術交流会館小ホール

ランダム導波路系におけるモード波の局在

あらまし　ランダムに大きさの異なるコアからなる導波路系におけるモード波の局在機構をモード結合理論の立場から明らかにする．モード結合方程式の初期値問題にラプラス変換を適用し，伝搬定数が強くばらついている場合について，局在モード波の伝搬定数と隣り合ったコア間の振幅比をモード結合係数のべき級数に展開した．それらの結果を制御系における信号伝達過程として解釈した．局在中心に位置するコアにおいて作り出された信号が他のコアに伝わり，出力信号となる．それらの信号がモード波を形成する．モード波の伝搬定数と振幅比がコアの伝搬定数の局所的なふるまいから決まるとき，モード波は局在する．決定に関係するコアの数は伝搬定数の統計的な性質だけに依存し，導波路系の大きさには無関係である．伝搬定数の決定に関係する数本のコアがモード波の実質的な存在領域となる．

1．まえがき

電子の波動関数はランダム格子において局在する [1]．波動関数は狭い空間領域に集中し，振幅はそこから離れるとともに指数的に減少する．局在の強さはランダム系におけるエネルギーバンド幅と電子間の結合の強さの比で表される．１次元ランダム格子においてすべてのエネルギー固有状態が局在する [2,3]．

電子波の局在によく似た現象が光導波路系において起きる．ランダムに大きさの異なるコアからなる導波路系においてモード波が局在する [4]．モード波の振幅は局在中心から離れるとともに指数的に減少する．モード波は数本のコア領域に集中し，そこが存在領域となる．１本のコアに光を入射したとき，そのコアを存在領域とするモード波が励振され，それらのモード波が系を伝搬する．それらのモード波の存在領域の外側へ光が広がることはない．その結果，互いに存在領域の外側に位置する２本のコアに光を入射すると，図１（a）に示すように光は互いに相互作用することなく，系を伝搬する．一方，同じ大きさのコアからなる一様導波路系においてはすべてのモード波が系全体に広がっている．そのようなモード波は一般的に導波路系を構成する任意のコアに光を入射することによって励振できる．その結果，離れた２本のコアに光を入射したとしても，同じモード波の組を励振することになり，図１（b）に見られるように，出力端においてどのコアに入射された光であるか区別することは難しい．

モード波が局在する原因はコア間のランダムな位相不整合にある．しかしながらランダムな位相不整合がモード波を局在させる機構は明らかにされていない．

２本のコアからなる導波路系は考えられる最も簡単な例であり，その系におけるモード波のふるまいはよく知られている [5]．位相不整合がモード結合係数に比べて大きいとき，モード波の振幅は一方のコアで大きくなり，振幅のバランスは著しく崩れる．また，伝搬定数は振幅が大きくなっているコアの伝搬定数にほぼ等しくなる．それらの特性はコア間の電力移行を説明するために用いられている．しかしながら，そのようなモード波自身の形成過程にはこれまでほとんど注意が払われていない．

本論文において，ランダムに大きさの異なるコアからなる導波路系におけるモード波の局在機構をモード結合理論の立場から明らかにする．モード結合方程式の初期値問題にラプラス変換を適用し，伝搬定数が強くばらついている場合について，局在モード波の伝搬定数と隣り合ったコア間の振幅比をモード結合係数のべき級数に展開する．それらの結果を制御系における信号伝達過程として解釈する．

2．局在モード波の伝搬定数と振幅

$N+1$本のコアを等間隔に一列に並べた導波路系を考える（図２参照）．コアの大きさはランダムに僅かに異なっているとする．各々のコアは１個のモードだけを伝えているとし，隣り合ったコア間の結合だけを考えに入れる．そのとき，次のモード結合方程式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{da_0}{dz} &= -\jmath\beta_0 a_0 - \jmath\kappa a_1 \\ \frac{da_n}{dz} &= -\jmath\beta_n a_n - \jmath\kappa(a_{n-1}+a_{n+1}), \qquad n=1,2,\cdots,N-1 \\ \frac{da_N}{dz} &= -\jmath\beta_N a_N - \jmath\kappa a_{N-1}\end{aligned} \tag{1}$$

ここでzは導波路軸に沿った距離であり，a_nとβ_n はそれぞれn番目のコアにおけるモード波の振幅と伝搬定数である．伝搬定数β_nはランダムにばらついている．κはコア間のモード結合係数である．

コア間の光の移行過程を直観的に把握するためにラプラス変換を用いる．振幅 $a_n(z)$ のラプラス変換を $f_n(s)$ とする．

$$f_n(s) = \int_0^\infty a_n(z)e^{-sz}dz \tag{2}$$

モード結合方程式（1）は次のように変換される．

$$\begin{aligned}f_0(s) &= \frac{a_0(0)}{s+\jmath\beta_0} + g_0(s)f_1(s) \\ f_n(s) &= \frac{a_n(0)}{s+\jmath\beta_n} + g_n(s)\{f_{n-1}(s)+f_{n+1}\}, \qquad n=1,2,\cdots,N-1 \\ f_N(s) &= \frac{a_N(0)}{s+\jmath\beta_N} + g_N(s)f_{N-1}(s)\end{aligned} \tag{3}$$

$a_n(0)$ は $z=0$ における振幅である．また，

$$g_n(s) = \frac{-\jmath\kappa}{s+\jmath\beta_n} \tag{4}$$

である．式の表示を簡潔にするために，導波路系の最も端のコアに局在したモード波を考察の対象とする．そうすることによって一般性を失うことはない．0番目のコアだけを励振する：

$$a_n(0) = \begin{matrix} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0\end{matrix} \tag{5}$$

式（3）は次のようになる．

$$\begin{aligned}f_0(s) &= \frac{1}{s+\jmath\beta_0} + g_0(s)f_1(s) \\ f_n(s) &= g_n(s)\{f_{n-1}(s)+f_{n+1}\}, \qquad n=1,2,\cdots,N-1 \\ f_N(s) &= g_N(s)f_{N-1}(s)\end{aligned} \tag{6}$$

式（6）において $f_N, f_{N-1}, \cdots$を順次消去することにより，振幅 $f_n(s)$ を次のように表すことができる．

$$f_0(s) = \frac{1}{s+\jmath\beta_0}\frac{1}{1-g_0(s)T_1(s)} \tag{7}$$

$$f_n(s) = T_n(s) f_{n-1}(s), \qquad n = 1, 2, \cdots, N \tag{8}$$

ここで$T_n(s)$はコア$n-1$からコアnへの伝達関数である：

$$\begin{aligned} T_n(s) &= \frac{g_n(s)}{1 - g_n(s) T_{n+1}(s)}, \qquad n = 1, 2, \cdots, N-1 \\ T_N(s) &= g_N(s) \end{aligned} \tag{9}$$

式（9）は$g_n(s)$を要素とする$T_n(s)$の連分数表現を与える．また，伝達関数$T_n(s)$は固有多項式を用いて次のように表すこともできる．

$$T_n(s) = -\jmath\kappa \frac{D(n+1, \cdots, N; s)}{D(n, n+1, \cdots, N; s)} \tag{10}$$

$D(n, n+1, \cdots, N; s)$はn番目からN番目までのコアからなる部分導波路系に対する固有多項式であり，次の漸化式を満たす．

$$\begin{aligned} D(n, n+1, \cdots, N; s) &= (s + \jmath\beta_n) D(n+1, \cdots, N; s) + \kappa^2 D(n+2, \cdots, N; s) \\ D(N-1, N; s) &= (s + \jmath\beta_{N-1})(s + \jmath\beta_N) + \kappa^2 \\ D(N; s) &= s + \jmath\beta_N \end{aligned} \tag{11}$$

伝達関数$T_n(s)$は式（１０）の表現を用いることによって，モード結合係数のべき級数に展開することができる．

$$\begin{aligned} T_n(s) &= \frac{-\jmath\kappa}{s + \jmath\beta_n} + \frac{(-\jmath\kappa)^3}{(s + \jmath\beta_n)^2 (s + \jmath\beta_{n+1})} \\ &+ \frac{(-\jmath\kappa)^5}{(s + \jmath\beta_n)^2} \left[\frac{1}{(s + \jmath\beta_n)(s + \jmath\beta_{n+1})^2} + \frac{1}{(s + \jmath\beta_{n+1})^2 (s + \jmath\beta_{n+2})} \right] + \cdots \end{aligned} \tag{12}$$

振幅$f_0(s)$の極$s = -\jmath\gamma_0$が局在モード波の伝搬定数γ_0を，また極$s = -\jmath\gamma_0$における$f_0(s)$の留数が励振されたモード波の０番目のコアにおける振幅v_0を与える．

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{\jmath}{\gamma_0 - \beta_0} \frac{1}{\left[\frac{d}{ds} \{1 - g_0(s) T_1(s)\} \right]_{s=-\jmath\gamma_0}} \\ &= \frac{1}{1 + \jmath\kappa \left[\frac{dT_1(s)}{ds} \right]_{s=-\jmath\gamma_0}} \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N} \prod_{m=1}^{n} T_m^2(-\jmath\gamma_0)} \end{aligned} \tag{13}$$

n番目のコアにおける振幅v_nは式（8）より次のようになる．

$$v_n = v_0 \prod_{m=1}^{n} T_m(-\jmath\gamma_0) \tag{14}$$

つまり$T_n(-\jmath\gamma_0)$は隣り合ったコア間の振幅比を与える．v_0は励振されたモード波の振幅であるだけでなく，モード波の全電力および全電力を１に規格化した場合の０番目のコアにおける

相対強度でもある．振幅比が小さいとき，０番目のコアの相対強度は１に近づく．式（１３）は０番目のコアへのモード界の集中がそれ以外のコアにおける振幅の減少と引き替えに起こることを示している．

局在モード波の伝搬定数γ_0は次式を満たす．

$$\gamma_0 - \beta_0 = \kappa T_1(-\jmath\gamma_0) \tag{15}$$

右辺はモード界が０番目のコアから周囲に広がっていることによる伝搬定数の補正項である．振幅比$T_1(-\jmath\gamma_0)$が小さいならば，n番目のコアの振幅v_nはv_0より一般的には小さくなる．その結果，モード界は０番目のコアに集中する．そのモード波の伝搬定数γ_0はβ_0に近い値を取る．この状態がモード波の局在である．

伝搬定数γ_0は，式（１５）の右辺を式（１２）に従ってκのべき級数に展開した後，逐次法を適用することによって求めることができる．

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \beta_0 + \frac{\kappa^2}{\beta_0-\beta_1} + \frac{\kappa^4}{(\beta_0-\beta_1)^2}\left[\frac{1}{\beta_0-\beta_1} - \frac{1}{\beta_0-\beta_1}\right] \\ &+ \frac{\kappa^6}{(\beta_0-\beta_1)^2}\left[\frac{2}{(\beta_0-\beta_1)^3} - \frac{3}{(\beta_0-\beta_1)^2(\beta_0-\beta_2)} + \frac{1}{(\beta_0-\beta_2)^2(\beta_0-\beta_3)}\right] + \cdots\end{aligned} \tag{16}$$

局在モード波の伝搬定数γ_0とコアの伝搬定数β_0の差はκ^2の程度となる．また，n番目のコアが伝搬定数に与える影響はκ^{2n}の項に現れる．局在モード波の伝搬定数は局在中心から離れたコアの影響を実質的には受けない．振幅比$T_n(-\jmath\gamma_0)$は次のようになる．

$$\begin{aligned}T_n(-\jmath\gamma_0) &= \frac{\kappa}{\beta_0-\beta_n} + \frac{\kappa^3}{(\beta_0-\beta_n)^2}\left[\frac{1}{\beta_0-\beta_{n+1}} - \frac{1}{\beta_0-\beta_1}\right] \\ &+ \frac{\kappa^5}{(\beta_0-\beta_n)^2}\left[\frac{1}{(\beta_0-\beta_1)^2(\beta_0-\beta_n)} - \frac{1}{(\beta_0-\beta_1)^2(\beta_0-\beta_2)} + \frac{1}{(\beta_0-\beta_1)^3}\right. \\ &- \frac{2}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_n)(\beta_0-\beta_{n+1})} - \frac{1}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_{n+1})^2} \\ &\left. + \frac{1}{(\beta_0-\beta_n)(\beta_0-\beta_{n+1})^2} + \frac{1}{(\beta_0-\beta_{n+1})^2(\beta_0-\beta_{n+2})}\right] + \cdots\end{aligned} \tag{17}$$

$n+m$番目のコアが振幅比へ与える影響はκ^{2m+1}の程度であり，振幅比はそこから離れたコアの影響を受けない．振幅比はκの程度であり，これは伝搬定数β_nがばらついていることの結果である．n番目のコアにおける振幅v_nはκ^nの程度となるので，振幅は局在中心から離れるとともに減少する．相対強度v_0は

$$v_0 = 1 - \frac{\kappa^2}{(\beta_0-\beta_1)^2} + \frac{\kappa^4}{(\beta_0-\beta_1)^2}\left[\frac{3}{(\beta_0-\beta_1)^2} - \frac{2}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_2)} - \frac{1}{(\beta_0-\beta_2)^2}\right] + \cdots \tag{18}$$

となる．電力の大部分は０番目のコアに集中し，残りのコアの電力の総和はκ^2の程度となる．

３．導波路系における光の移行過程

モード結合方程式のラプラス変換（６）はコア間の光の移行過程が制御系における信号伝達過程として解釈できることを示している．$\frac{1}{s+\jmath\beta_0}$が入力信号であり，$f_n$が出力信号である．また，関数$g_n(s)$が制御系における伝達関数の役割を果たす．コア間の結合は図３に示すよう

なフィードバックループとして表すことができる．導波路系における光の移行過程に対するブロック線図を図4に示す．システムは多重のフィードバックループから構成されている．

式（9）で定義されるコア間の伝達関数 $T_n(s)$ を用いることにより，導波路系における光の移行過程は励振した0番目のコアからN番目のコアへの一方向の移行過程として表すことができる（図5参照）．振幅 $f_0(s)$ は部分分数に展開できる．

$$
\begin{aligned}
f_0(s) &= \frac{D(1,\cdots,N;s)}{D(0,1,\cdots,N;s)} \\
&= \frac{v_0}{s+\jmath\gamma_0}+\sum_{m=1}^{N}\frac{v_0^{(m)}}{s+\jmath\gamma_m}
\end{aligned} \tag{19}
$$

右辺第1項が0番目のコアに局在したモード波を表す．また，残りの項は同時に励振されるモード波を表し，γ_m，$v_0^{(m)}$はそれらのモード波のそれぞれ伝搬定数と振幅である．0番目のコアで発生した信号$\frac{v_0}{s+\jmath\gamma_0}$が図5に示した伝達路を経て各コアから出力される．それらの出力信号が0番目のコアに局在したモード波を形づくる．伝搬定数γ_0および振幅 v_0は振幅比 $T_n(-\jmath\gamma_0)$ から決まるので，伝達関数 $T_n(s)$ のふるまいがモード波の状態を決める．

同じ大きさのコアからなる一様導波路系において固有多項式は次のように表される [6].

$$
D(0,1,2,\cdots,N;s)=\kappa^{N+1}U_{N+1}\left(\frac{s+\jmath\beta}{2\kappa}\right) \tag{20}
$$

ここでU_{N+1}は第2種チェビシェフの多項式であり，βはコアを伝わるモード波の伝搬定数である．導波路系を伝わるモード波の伝搬定数γ_mは次のようになる．

$$
\gamma_m=\beta+2\kappa\cos\left(\frac{m\pi}{N+2}\right),\qquad m=1,2,\cdots,N+1 \tag{21}
$$

γ_mとβの差はκの程度となる．そのとき振幅比 $T_n(-\jmath\gamma_m)$ は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
T_n(-\jmath\gamma_m) &= \frac{U_{N-n}\left(\cos\left(\dfrac{m\pi}{N+2}\right)\right)}{U_{N-n+1}\left(\cos\left(\dfrac{m\pi}{N+2}\right)\right)} \\
&= \frac{\sin\left((N-n+1)\dfrac{m\pi}{N+2}\right)}{\sin\left((N-n+2)\dfrac{m\pi}{N+2}\right)}
\end{aligned} \tag{22}
$$

振幅比はκ^0の程度であり，コア間の結合の強さに依存しない．このことはランダム導波路系における振幅比のふるまいと大きく異なる．そこでは振幅比はκ の程度であり，伝搬定数のばらつきとコア間の結合の強さの両者に依存している．振幅比（２２）は伝達関数を与える部分導波路系のコア数 $N-n+1$ に依存している．この依存性は部分導波路系を構成するすべてのコアが振幅比に影響を与えていることを示している．つまり，一様導波路系における伝達関数のブロック線図は図6のようになっていると考えられる．

ランダム導波路系における振幅比は式（１７）に与えられている．振幅比 $T_n(-\jmath\gamma_0)$ への$n+M$番目のコアの寄与はκ^{2M+1}の程度であり，$n+M+1$ 番目から N 番目までのコアの寄与は無視することができる．つまり，伝達関数を与える部分導波路系は実質的には n 番目

から $n+M$番目までの $M+1$本のコアから構成される．そのブロック線図を図7に示す．Mの値は伝搬定数β_nの統計的な性質から決まり，導波路系の大きさには依存しない．その値がモード波の局在領域の広がりを示す．モード波の実質的な存在領域は T_1に対する Mの値で決まる．モード波が強く局在しているとき，Mの値は小さい．

導波路系においては伝達関数 T_nを介した信号伝達経路が形成されている．励振されたコアにおいて発生した信号がその経路を通り，各コアに伝わる．その結果，モード波が形成される．その過程は局在あるいは非局在に拘らず同じである．伝達関数の構造が局在と非局在を分ける．数本のコアから伝達関数が構成され，その数が導波路系の大きさに依存しないならば，モード波は局在する．モード波は導波路系のランダム性にだけ依存する固有の広がりを示す．それに対して，伝達関数を構成するコアの数が導波路系の大きさに依存するとき，モード波は非局在となり，系全体に広がる．

4．まとめ

ランダムに大きさの異なるコアからなる導波路系におけるモード波の局在機構をモード結合理論の立場から明かにした．モード結合方程式の初期値問題にラプラス変換を適用し，伝搬定数が強くばらついている場合について局在モード波の伝搬定数γ_0と隣り合ったコア間の振幅比をモード結合係数κのべき級数に展開した．伝搬定数γ_0と局在中心に位置するコアの伝搬定数β_0の差はκ^2の程度であり，その差は中心コアから周囲のコアへ光が移行することによって生じる．差はモード界が局在中心に集中するとともに小さくなる．振幅比はκの程度であり，コア間の結合の強さと伝搬定数のばらつきの両者に依存する．それらの結果を制御系における信号伝達過程として解釈した．中心コアにおいて作り出された信号$\frac{1}{s+j\gamma_0}$が各コアに伝わり，それらの出力信号がモード波を形成する．伝搬定数γ_0と振幅比がコアの伝搬定数の局所的なふるまいから決まるとき，モード波は局在する．決定に関係するコアの数は伝搬定数の統計的な性質だけに依存し，導波路系の大きさには無関係である．伝搬定数の決定に関係する数本のコアがモード波の実質的な存在領域となる．

同じ大きさのコアからなる一様導波路系におけるモード波の伝搬定数と振幅比のふるまいはランダム導波路系のそれとは大きく異なる．モード波の伝搬定数とコアの伝搬定数の差はκの程度となる．また，振幅比はκ^0 の程度であり，コア間の結合の強さに依存しない．伝搬定数と振幅比の決定に関係するコアの数は導波路系の大きさに一致する．その結果，系全体がモード波の存在領域となる．

参考文献

1. P. W. Anderson, "Absence of diffusion in certain random lattices", Phys. Rev., 109, pp.1492-1505, 1958.

2. N. F. Mott and W. D. Twose, "The theory of impurity conduction", Adv. Phys., 10, pp.107-163, 1961.

3. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan, "Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions", Phys. Rev. Lett., 42, pp.673-676, 1979.

4. A. Komiyama, "Localization properties of mode waves in an image fiber", 電気学会，電磁界理論研究資料，EMT-97-55, 1997.

5. 例えば，C. Vassallo, "Optical waveguide concepts", Elsevier, pp.27-30,1991.

6. D.C. Herbert and R. Jones, "Localization states in disordered systems", J. Phys. C, 4, pp.1145-1161, 1971.

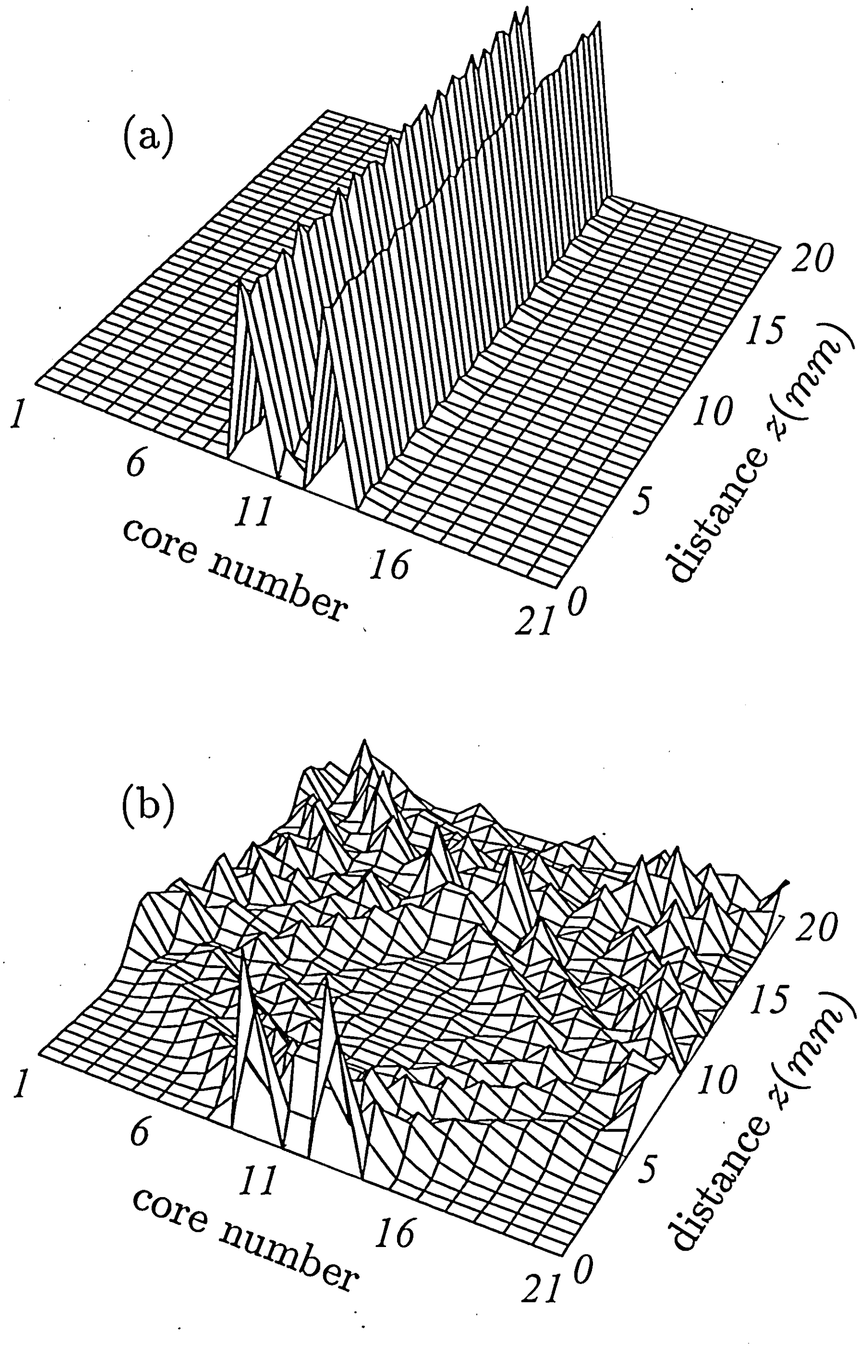


図１　導波路系における光の伝搬の様子：(a) ランダム導波路系，(b) 一様導波路系．

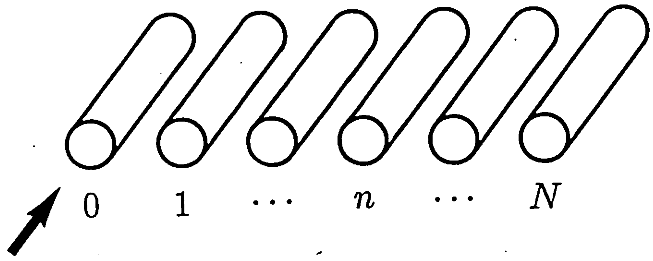


図2　ランダム導波路系.

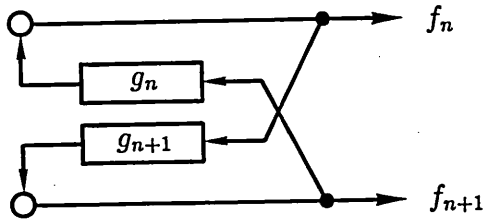


図3　コア間の結合

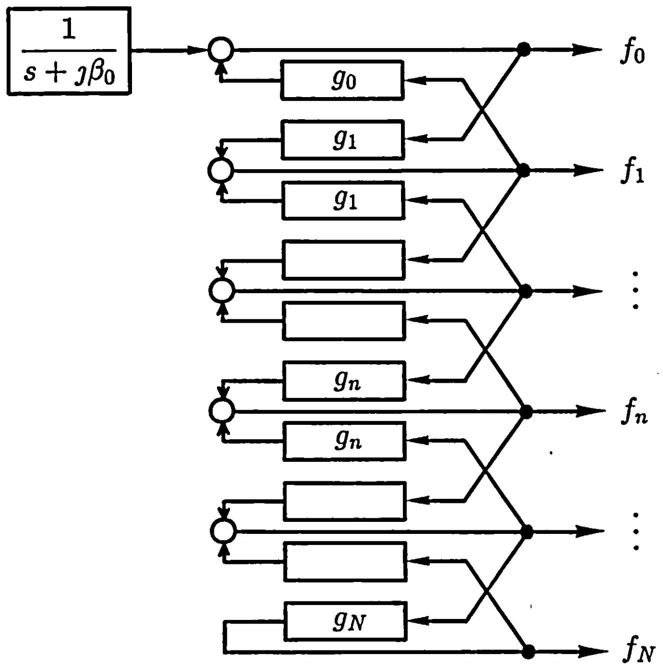


図4　導波路系における光の移行過程に対するブロック線図.

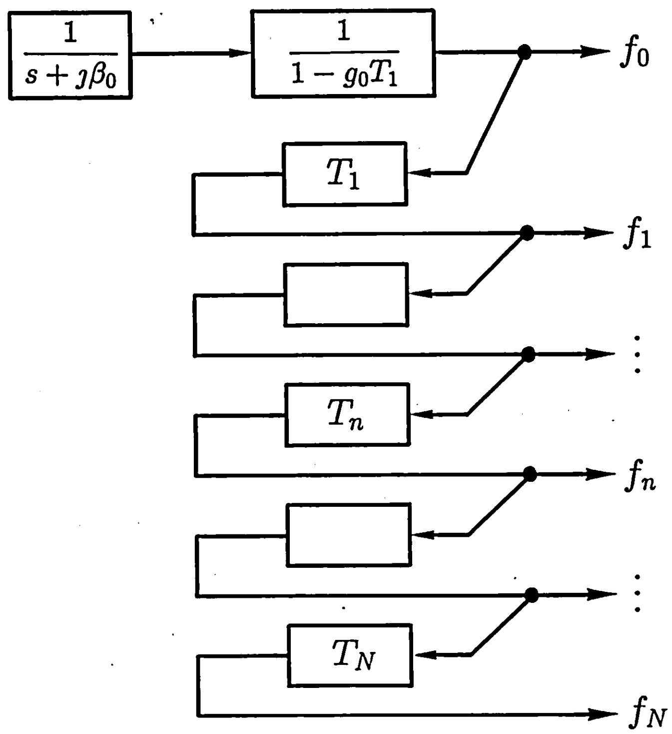


図5　簡略化されたブロック線図.

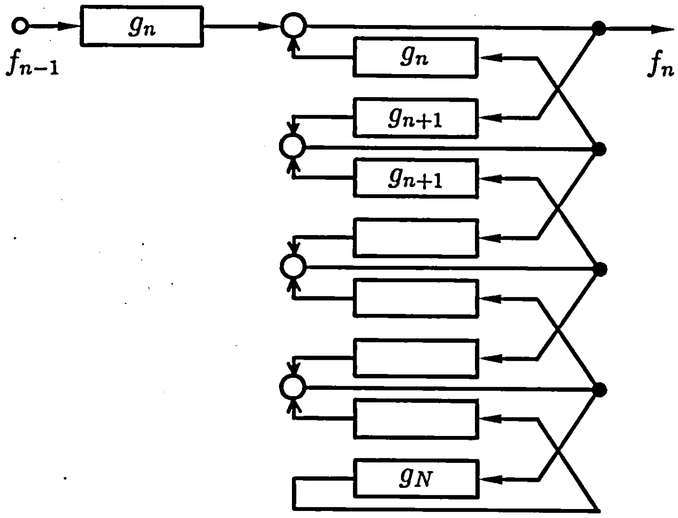


図6　一様導波路系における伝達関数 $T_n(s)$.

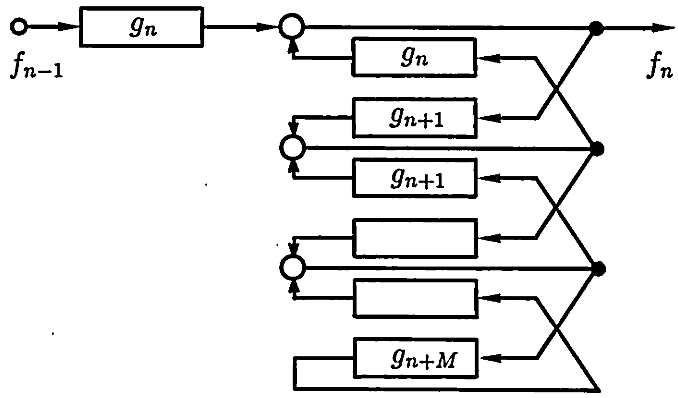


図7　ランダム導波路系における伝達関数 $T_n(s)$.

輻射科学研究会資料
RS98-6

結合ギャップを有する奇数等分配分岐導波路の設計

Odd-branch optical power dividers of symmetric structure with a coupling gap

南 尚行、藪 哲郎、下代 雅啓、沢 新之輔
大阪府立大学工学部

1998年7月24日(金)
於 大阪府立大学 学術交流会館小ホール

1 はじめに

分岐素子は光集積回路において必要不可欠なデバイスであり、その低損失化ならびに分岐数の多様化は重要な研究課題の一つである。

分岐素子の代表は2分岐であり、その低損失化についてはこれまで多くの研究がなされている。2^n 分岐は2分岐素子を多段に結合することによって構成できるが、より多様な分岐を実現するためには奇数分岐素子が必要となる。3分岐はそのための基本構造とみなすことができ、その低損失化は重要な研究課題である。しかしながら、それに対する検討は十分に尽くされているとは言い難い。

分岐導波路は構造的に次の二つのタイプに分類される。一つは隣接する導波路間の分布結合を利用した方向性結合器であり [1, 2]、もう一つは構造的に直接光波を分割するフォーク形導波路である [3, 4, 5, 6, 7, 8]。方向性結合器は、導波路間隔と結合長のみの調節によって比較的容易に等分配を実現できるが、一般に素子長が長くなるという欠点をもっている。集積化の観点からは、小形化の可能性の高いフォーク形導波路の方がより有望である。

フォーク形導波路で3分岐を設計する際、その低損失化もさることながら、電力分配比の制御が重大な問題となる。2分岐では導波路構造の対称性を維持するだけで等分配は必ず保証される。従って、問題点を低損失化に絞ることができた。しかし3分岐においては、構造の対称化によって外側の導波路の電力は等化されるが、中央の導波路の電力をも等化するためには、分岐部の設計に特別の工夫が必要となる。その上で低損失化をはからなければならず、さらに、分岐部の広角化も軽視できない重要課題である。

このような観点から、フォーク形3分岐導波路に対してこれまでいくつかの提案がなされている。

文献 [3, 4, 5, 6, 7] は、分岐角が 1° 以下の狭角構造について検討し、等分配を実現するために様々な提案を行っている。Yip らは、外側の導波路の等価屈折率を上げることにより、中央の導波路への分配電力を減らす構造を提案している [3, 4, 5] 。Hung らは、フェーズフロントアクセラレータを導入することにより、中央の導波路への電力の直進を抑えるための構造を提案している [6]。Banba らは、単純Y分岐の直後に直線導波路を離して施置することによって電力分配比を制御している [7] 。Lin らは、分岐の広角化に着目し、マイクロプリズムを導入することにより、3°程度まで低損失性を保つ広角の等分配構造を実現している [8]。

しかしながら、上で述べた文献 [3, 4, 5, 6, 8] の構造は、3種類の異なる屈折率を必要とするため、製造が難しくなるという欠点をもっている。文献 [7] の構造は、2種類の屈折率のみで構成されてはいるが、分岐角の拡大とともに損失が著しく増大する。

そこで本報告では、2種類の屈折率しか使わずに、低損失かつ広角の3等分配を実現するための構造を提案する。さらに、3分岐構造を2段に接続した5分岐導波路についても報告する。ところで、これまでの多くの報告では1種類の構造パラメータ(比屈折率差と導波路幅)に対するシミュレーションしか行われていないが、誘電体光素子の特性は比屈折率差や導波路幅に強い依存性を示す。そこで、本稿では3通りの構造パラメータに対するシミュレーション結果を報告する。

2 設計理論

図1がフォーク形3分岐導波路の最も基本的な構造である。断熱条件が成立する程度に分岐角 θ が小さいとき、手前から0次モードを入射すると、出射端では7層スラブ導波路の0次モードが現れる。導波路間隔が十分に広いとき、このモードは、左側の導波路の電力:中央の導波路の電力:右側の導波路の電力 の比が $1:2:1$ となるような界分布特性を有する。従って、θをいくら小さくしても図1の構造では等分配を実現することは出来ない [9]。逆に、分岐角を大きくするにつれて、中央の導波路に分配される電力の割合はより大きくなる。従って、等分配を実現するためには分岐部の形状に工夫が必要である。

Shirafuji らは非対称2分岐導波路に対して図2に示すようなギャップを設けた構造を提案し [10]、低損失な2等分配特性を実現している。しかしこの構造はむしろ、対称構造においてより効率的に動作するものと思われる。そこで我々は、3分岐への応用として、分岐後の中央部の導波路が対称性を保持したままでギャップを介して接続されるような構造を提案する。

フォーク形3分岐導波路におけるもう一つの課題は、1° 以上の広い分岐角に対しても低損失で動作させるにはどうすればよいか、という問題である。広角分岐に対しては文献 [8] で行っているようなマイクロプリズムの導入が効果的ではあるが、そのことによって3種類の屈折率を使う必要が生じ、製造が難しくなるという欠点が浮上する。

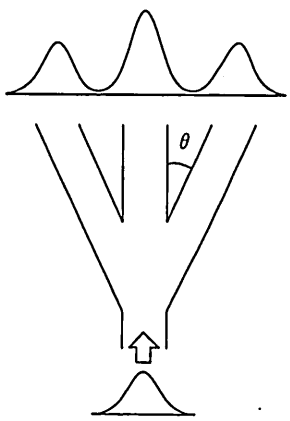


図 1: 基本的な 3 分岐導波路

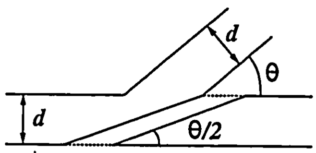


図 2: Shirafuji らによって提案された非対称 Y 分岐 [10]

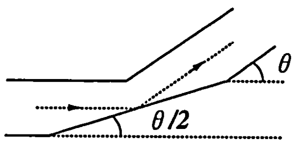


図 3: ogusu らによって提案された折れ曲がり導波路 [11]

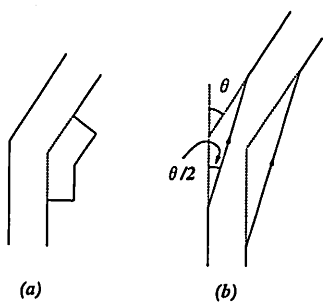


図 4: 折れ曲がり導波路 (a) Neumann による提案 [12] , (b)Sanagi らによる提案 [13].

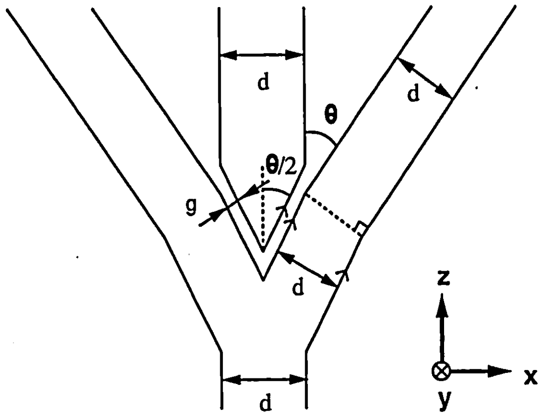


図 5: 提案する 3 分岐導波路の構造

ところで、折れ曲がり導波路に対して、Ogusu らは図 3 に示すような 2 種類の屈折率のみを使った構造を提案し、広角で低損失な曲がりを実現している [11]。損失をより一層減らすために、Neumann や Sanagi らはそれぞれ以下のアイデアを提案した [12, 13]。すなわち、折れ曲がりの外側で屈折率を下げ、内側で屈折率を上げることにより、曲がりの外側での光波の速度を速くし、逆に内側で光波の速度を遅くする。その結果、位相面が曲がりに沿って傾くことになり、導波路軸と波面の整合が高まるために損失が小さくなる。具体的には、Neumann は図 4(a) のような構造を、Sanagi らは同図 (b) のような構造を提案している。本稿では分岐部に 後者の構造を導入する。

以上の考え方に基づいて、本報告では図 5 に示すような構造を提案する。分岐後の左右の導波路に対しては、位相減速効果を付加した構造によって放射損失を抑えながら電力を分配する。一方、中央の導波路に対しては、ギャップを介した結合によって電力を供給する。

この構造において分岐角 θ が与えられたとき、中央の導波路と分岐部との間のギャップ g を適切な値に設定すれば、低損失な等分配が実現できるものと期待される。数値計算によると、本構造は分岐角が 1° 以上の広い角度に対しても低損失な等分配が可能である。また、屈折率はコアとクラッドの 2 種類しか使わないので製造が容易であるという特長がある。本 3 分岐は、従来提案されてきた 2 種類の屈折率のみからなるフォーク形 3 分岐の中では最も低損失である。

3　数値シミュレーション

3.1　導波路の構造パラメータ

ほとんどの 3 次元導波路は等価屈折率法によってスラブ導波路に精度良く近似することができる。本稿では、計算量を節約するため、スラブ導波路に対して数値シミュレーションを行う。ここで解析するスラブ導波路は y 軸方向に一定の構造をもち、光波は z 軸方向に伝搬することを仮定する。

従来の分岐導波路に関する研究の多くは一組の構造パラメータに対する検討しか行っていない。しかし通常、誘電体光導波路においては比屈折率差や導波路幅が変わるとその特性はかなり変化する。そこで、本稿では 3 種類の構造パラメータに対して数値シミュレーションを行い、その結果を示す。

ところで、本稿ではクラッドの屈折率を常に 1.50 に固定してシミュレーションを行うが、これによって一般性を失うことはない。なぜなら、任意の構造パラメータをもつ導波路は、クラッドの屈折率が 1.50 の等価な導波路に置き換えることができるからである。すなわち、クラッドの屈折率が n_0、コアの屈折率が n_1、導波路幅が d のスラブ導波路における現象は、クラッドの屈折率が 1.50、コアの屈折率が $n_1/(n_0/1.5)$、導波路幅が $d\cdot(n_0/1.5)$ の導波路における現象と等価である。

クラッドの屈折率が 1.50 のとき、横軸をコアの屈折率、縦軸を導波路幅として導波モード数の変化を描くと図 6 のようになる。本研究では、実用上重要なシングルモード動作が可能な領域でのシミュレーションを行う。典型的な例として、図中に 'A','B','C' で示している 3 種類の導波路に対してシミュレーションを行う。

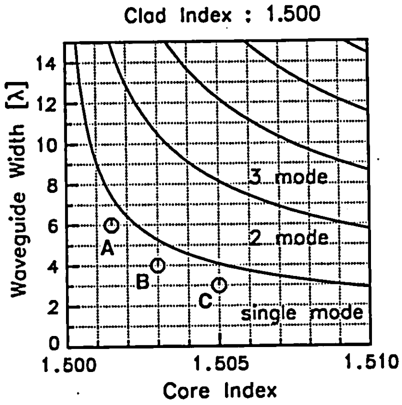


図 6: クラッドの屈折率 1.50 におけるコアの屈折率と導波路幅を関数とした導波モード数

3.2 シミュレーションの手法と評価法

数値シミュレーションには (1,1) のパデ近似に基づいた差分ビーム伝搬法を用いる [14, 15]。解析領域の両端における境界条件として透過境界条件を採用する [16]。入射端から 0 次の TE 正規モードを入射し、出射端でのフィールドを正規モード展開したときの 0 次 TE 正規モードの電力を出射電力と定義する。

出射端が z 軸に対して角度 θ だけ傾いている場合、正規モード電力 P は次式によって与えられる。

$$P = \frac{\left| \frac{\beta \cos\theta}{2\omega\mu_0} \int E_y(x)\phi^*(x\cos\theta) e^{-j\beta\sin\theta x}\, dx \right|^2}{\frac{\beta\cos\theta}{2\omega\mu_0} \int |\phi(x\cos\theta)|^2\, dx} \tag{1}$$

但し、$E_y(x)$ はビーム伝搬法によって求まるフィールド、$\phi(x)$ は正規モードのフィールド、β は正規モードの伝搬定数である。なお、上式は厳密には TE モードに対してしか成立しないが、本稿で取り扱うスラブ導波路はコアとクラッドの比屈折率差が 最大でも 0.5% と非常に小さいため、ここで得られる結果はほとんど直接的に TM モードにも適用し得る。

3 分岐導波路の光電力分配特性は電力透過率と電力分配比の二つの基準により評価される。構造の対称性より左右の導波路の出射電力は等しくなることを考慮し、入射電力を P_{in}、中央の導波路の出射電力を P_c、左右の導波路の一方からの出射電力を P_s とするとき、評価基準はそれぞれ次式で定義される。

$$\text{電力透過率} \quad : \quad (P_c + 2P_s)/P_{in} \times 100\ [\%] \tag{2}$$

$$\text{電力分配比} \quad : \quad P_s/P_c \tag{3}$$

3.3 シミュレーション結果

3.3.1 3 等分配器

本稿における数値シミュレーションは全て、$\Delta x = 0.1\lambda, \Delta z = 1.0\lambda, n_r = 1.50$ という条件下で行っている。Δx と Δz は空間離散化における刻み幅、n_r はビーム伝搬法の参照屈折率である。但し、Δx および Δz の値は計算精度と計算時間を考慮して決定したものである。

図 7 は、図 6 において 'A' で示された導波路に対して、分岐角 θ とギャップ幅 g/λ (λ：自由空間波長) の関数として電力透過率と電力分配比を同時に等高線で描いたものである。電力透過率は細い等高線で、電力分配比は太い等高線で示している。なお、電力分配比は、等分配を与える点 ($P_s : P_c = 1:1$) と、外側の導波路と中央の導波路の電力比が $1:3$ ($P_s : P_c = 1:3$) となる点の 2 本の等高線を描いている。電力透過率の等高線は、透過率が 90% 以下では 10% 毎に描いてあり、90% 以上では 1% 毎に描いてある。また、90% 以下の領域は濃い色でハッチングされており、90% ~ 95% の領域は薄い色でハッチングされている。等分配は、電力分配比が 1 : 1 の曲線上の任意の分岐角 θ とギャップ 幅 g/λ の組合せにおいて実現される。さらに、図 7 から以下のことが分かる。

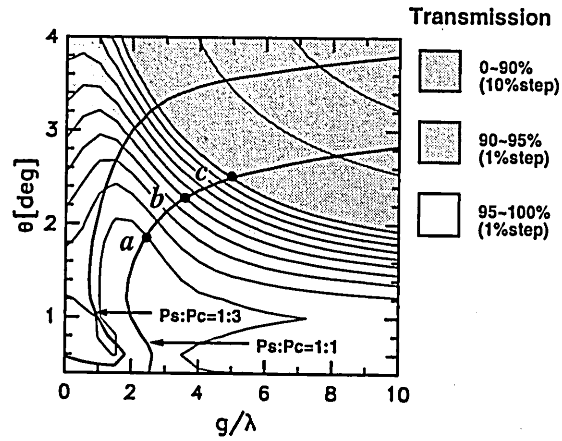


図 7: 図 6の 'A' における光電力分配特性 (コアの屈折率:1.5015、導波路幅:6.0 λ)

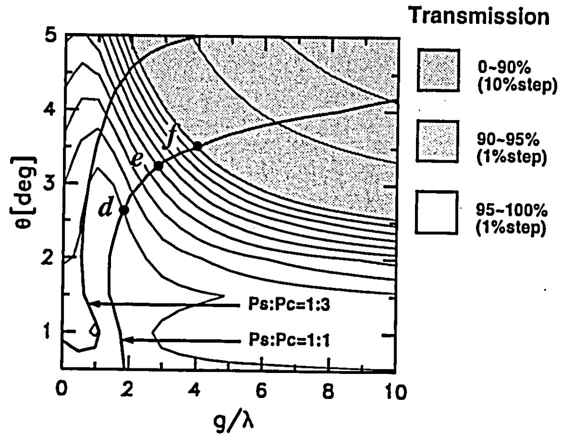


図 8: 図 6の 'B' における光電力分配特性 (コアの屈折率:1.503、導波路幅:4.0 λ)

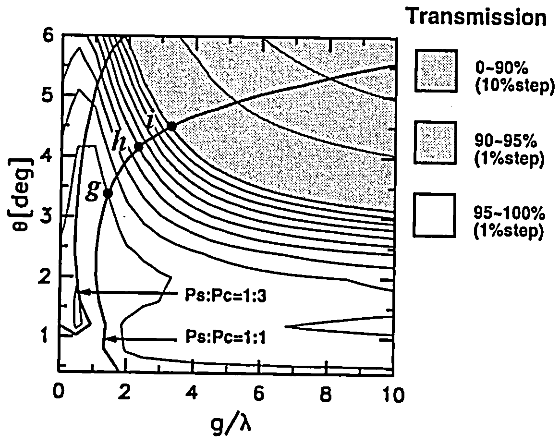


図 9: 図 6の 'C' における光電力分配特性 (コアの屈折率:1.505、導波路幅:3.0 λ)

表 1: シミュレーション結果

パラメータ	導波路		
	A	B	C
比屈折率差 [%]	0.0999	0.1996	0.3322
導波路幅 [λ]	6.0	4.0	3.0
規格化周波数 v	$0.805\pi/2$	$0.759\pi/2$	$0.736\pi/2$
θ_{99} *	1.85°	2.7°	3.3°
θ_{95} **	2.3°	3.2°	4.2°

* : 電力透過率が 99% 以上を与える最大の分岐角
** : 電力透過率が 95% 以上を与える最大の分岐角

- ギャップを広くするほど中央の導波路に透過する電力は少なくなる。
- 分岐角が 2° 程度までは、電力透過率が 98% 以上の 3 等分配器が常に実現可能である。
- 分岐角が 2° を超えると、急激に損失が増大する。
- 分岐角がある限度 (2.8° 付近) を超えると、ギャップをどんなに大きくしても等分配は不可能である。

図8および9に、それぞれ、図6 中の 'B' および'C' で示された導波路の数値シミュレーション結果を示す。これらは図7 と同様の傾向を示している。但し、図の縦軸 (分岐角 θ) のスケールが異なっていることに注意すべきである。

図7〜9 を比較検討すると、比屈折率差が大くなるほど損失はより少なくなっている。従って、より大きな角度でも低損失な等分配が可能となる。

以上を要約すると表1 のようになる。また、図7〜9 において、$a, b, c, d, e, f, g, h, i$ で示された構造パラメータをもつ導波路形状を図10 にまとめて示しておく。

以上のように、本稿で提案する構造は、1° 以上の広角分岐に対しても低損失な 3 等分配が可能である。また、比屈折率差が大きくなるほど、より大きな分岐角でも低損失となる。これは比屈折率差の増大に伴って、境界面での全反射角が大きくなり、界の閉じ込め効果が強くなるからである。しかし、比屈折率差が大きくなると、シングルモード動作を実現するためにはより狭い導波路幅が必要となり、製造上の不利益が生ずる。また、一般に比屈折率差の大きい導波路は材料面での損失が高くなる傾向にある。

3.3.2 5 等分配器

図11に示すように、3 分岐導波路を 2 段に接続することによって5 分岐導波路を構成し、5 等分配を実現する。

5 分岐において等分配を実現するためには、1 段目の分岐で外側の導波路の出射電力 P_3と中央の導波路に分配される電力との比を $1:3$ にしなければならない。さらに、2 段目の分岐で $P_1 : P_2 = 1 : 1$ を実現しなければならない。そのためには、図7〜9において1 段目の分岐では $P_s : P_c = 1 : 3$ となる曲線上のパラメータを選び、2 段目の分岐では $P_s : P_c = 1 : 1$ となる曲線上のパラメータを選べばよいことになる。*port2* と *port3* が平行となるように分岐を設計するのが構造上望ましく、ここでは$\theta = 2°$と定める。このとき二つのギャップ間隔は、3 種類の導波路に対して、それぞれ、図7より $g_1 = 0.93, g_2 = 2.69$、図8より $g_1 = 0.57, g_2 = 1.41$、図9より $g_1 = 0.51, g_2 = 1.10$ と決定すればよいことが分かる。このときの各 5 分岐導波路の形状は図12に示すようになる。

3.4 クサビの先端が鈍った場合のシミュレーション

本稿で提案する分岐の構造は屈折率分布にクサビ状の鋭角部分を含んでいる。実際に製作する場合、製法によっては鋭角部分の正確な形成が難しいこともある。ここでは図13 に示すように、鋭角部分が鈍った場合について数値シミュレーションを行う。鈍りの度合は図中のパラメータ s で表す。また、5 分岐導波路の場合、2 段の分岐部に同様の鈍りが生じるものとする。

図7〜図9において、それぞれ分岐角が2°のときに等分配を与えるようにギャップを定め、鈍りが伝搬方向に $0 \leq s \leq 30\lambda$ の範囲で生じたとして数値シミュレーションを行う。図14は 3 分岐導波路の結果であり、図15は 5 分岐導波路の結果を示している。図の横軸は鈍りの大きさ s を、縦軸は電力透過率および電力分配比を表している。電力透過率は実線で

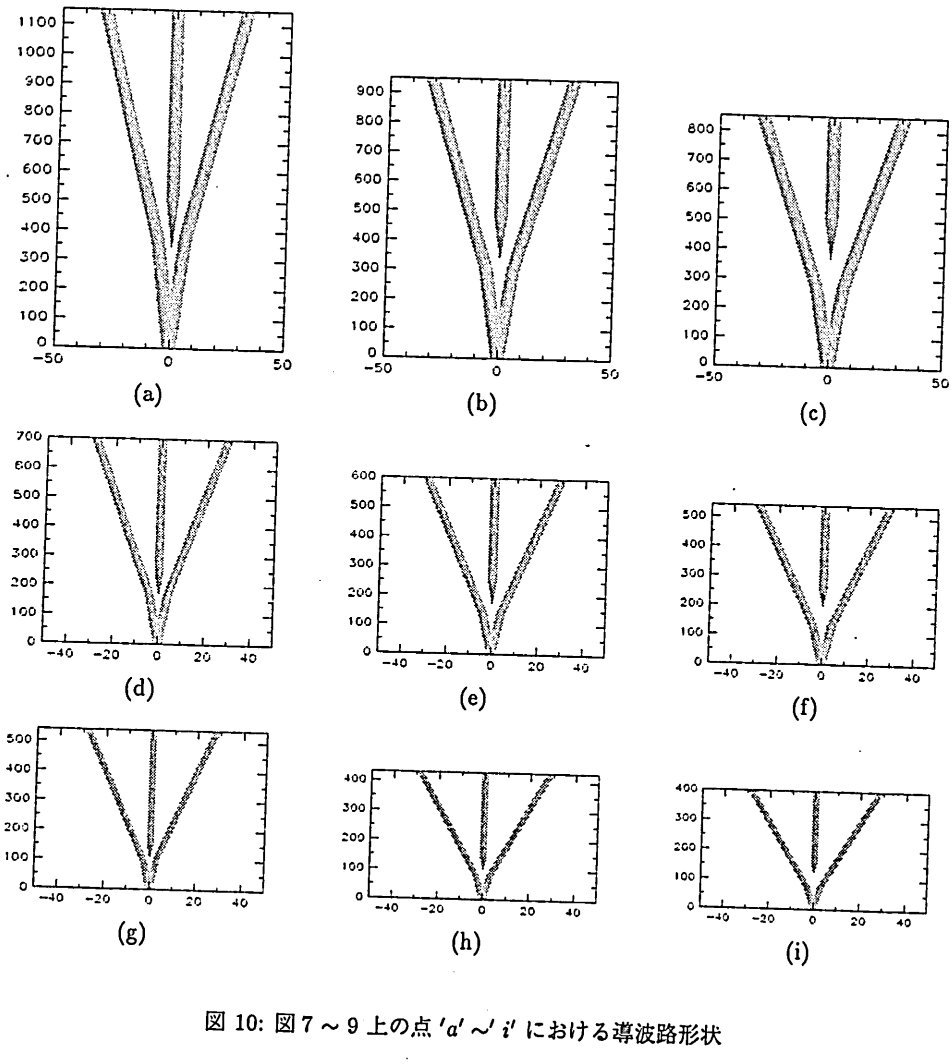


図 10: 図 7 ～ 9 上の点 'a' ～' i' における導波路形状

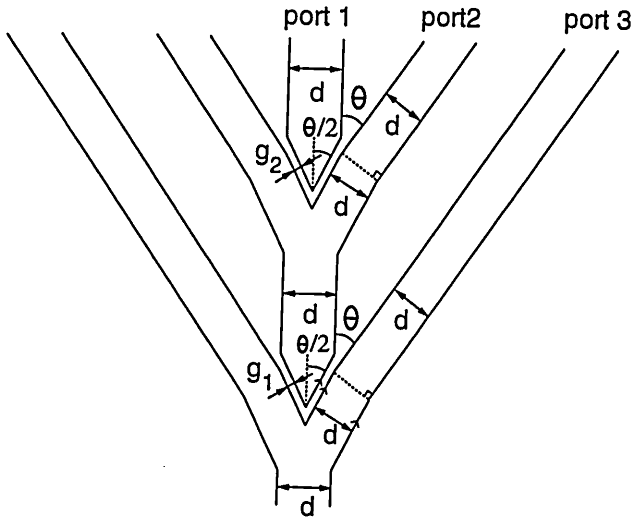
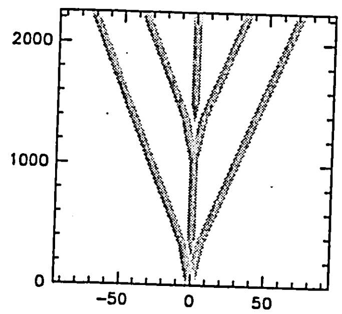
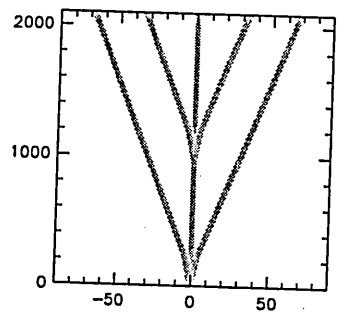


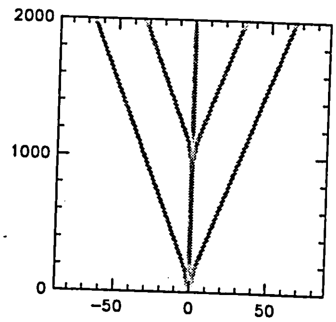
図 11: 5 分岐導波路の構造



(a)　コアの屈折率:1.5015,
$g_1 = 0.93\lambda, g_2 = 2.69\lambda$



(b)　コアの屈折率:1.503,
$g_1 = 0.57\lambda, g_2 = 1.41\lambda$



(c)　コアの屈折率:1.505,
$g_1 = 0.51\lambda, g_2 = 1.10\lambda$

図 12: 5 分岐導波路の形状

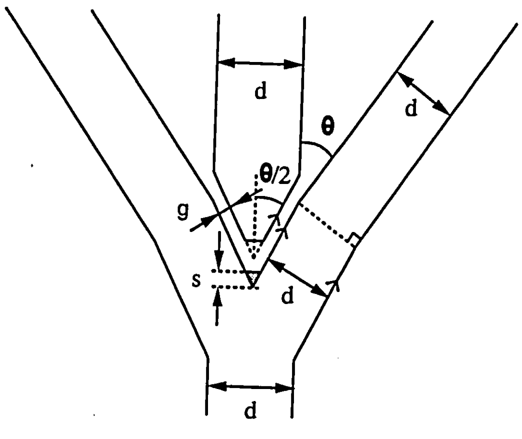
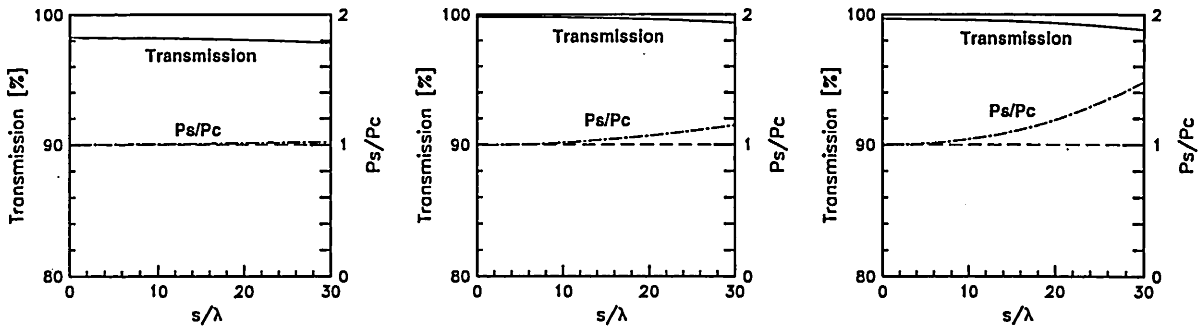
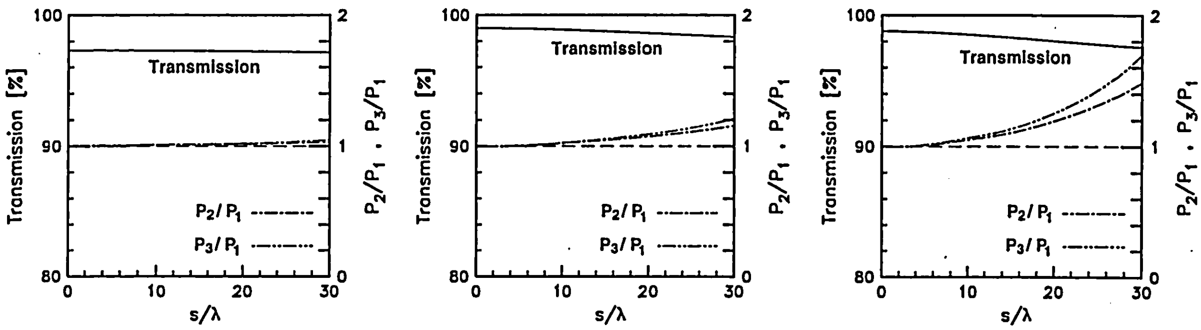


図 13: 鈍りが生じた場合の 3 分岐導波路の構造



(a) コアの屈折率:1.5015, $g = 2.69\lambda$
(b) コアの屈折率:1.503, $g = 1.41\lambda$
(c) コアの屈折率:1.505, $g = 1.10\lambda$

図 14: クサビ部分に鈍りが生じた場合の分配特性の変化 (3 分岐導波路)



(a) コアの屈折率:1.5015, $g_1 = 0.93\lambda, g_2 = 2.69\lambda$
(b) コアの屈折率:1.503, $g_1 = 0.57\lambda, g_2 = 1.41\lambda$
(c) コアの屈折率:1.505, $g_1 = 0.51, g_2 = 1.10\lambda$

図 15: クサビ部分に鈍りが生じた場合の分配特性の変化 (5 分岐導波路)

描き、電力分配比に関しては、P_s/P_c(3 分岐) および P_2/P_1(5 分岐) は一点鎖線で、P_3/P_1(5 分岐) は二点鎖線で示している。破線は等分配の目標値を表している。図より、比屈折率差が大きくなるほど、鈍りによる影響が強く現れることが分かる。また 5 分岐においては、g_1の値が小さいために電力分配比 P_3/P_1の方により強い影響が現れている。従って、導波路幅の制御も考慮に入れると、比屈折率差が大きくなるほど、製作誤差の許容度が低くなる。

4 結論

本稿では 2 種類の屈折率からなるフォーク形 3 分岐素子ならびに 5 分岐素子の新しい構造を提案した。そして、3 組の構造パラメータ (比屈折率差および導波路幅) に対して数値シミュレーションを行った。その結果、本稿で提案する分配器はその簡単な構造にもかかわらず、1° 以上の広角においても低損失な等分配が可能であることがわかった。また、構造パラメータの異なる導波路に対するシミュレーション結果より、比屈折率差が大きい導波路の方が、より広い分岐角まで低損失特性を保つことが分かった。そして、最後に屈折率分布の鋭角部分に鈍りが生じた場合の特性の変化についてシミュレーションを行い、比屈折率差が大きくなるほど鈍りによる影響が強く現れることを明らかにした。

参考文献

[1] 山内潤治、安藤拓司、中野久松, "陰的差分法による 1 × 3 結合導波路形光パワー分配器解析," 電子情報通信学会論文誌 C-I, vol.J75-C-I, no.11, pp.703-710, Nov. 1992.

[2] M. Geshiro, T. Kitamura, K. Fukumura, and S. Sawa, "A three-waveguide tapered-velocity coupler for dividing optical power into three equal parts," IEICE Tran. Electron., vol. E80-C, no.11, Nov. 1997.

[3] M. Belanger, G. L. Yip, and M. Haruna, "Passive planar multibranch optical power divider: some design considerations," Applied Optics, vol.22, no.15, pp.2283–2389, Aug. 1983.

[4] M. Haruna, M. Belanger, and G. L. Yip, "Passive 3-branch optical power divider by K^+-ion exchange in glass," Electron. Lett., vol.21, no.12, pp.535–536, June 1985.

[5] G. L. Yip, M. A. Sekerka-bajbus, "Design of symmetric and asymmetric passive 3-branch power dividers by beam propagation method," Electron. Lett., vol.24, no.25, pp.1584–1586, Dec. 1988.

[6] W.-Y. Hung, H.-P. Chan, and P. S. Chung, "Single mode 1×3 integrated optical branching circuit design using phase-front accelerators," Electron. Lett., vol.24, no.22, pp.1365–1366, Oct. 1988.

[7] S. Banba, H. Ogawa, "Novel symmetrical three-branch optical waveguide with equal power division," IEEE Microwave & Guided Wave Lett., vol.2, no.5, pp.188–190, May 1992.

[8] H. B. Lin, Y. H. Wang and W.-S. Wang, "Singlemode 1x3 integrated optical branching circuit design using microprism," Electron. Lett., vol.30, no.5, pp.408–409, March 1994.

[9] R. A. Becker and L. M. Jonson, "Low-loss multiple-branching circuit in Ti-indiffused LiNbO3 channel waveguides", Optics Lett., vol.9, no.6, pp.246–248, June 1984.

[10] K. Shirafuji and S. Kurazono, "Transmission characteristics of optical asymmetric Y Junction with a gap region," IEEE J. Lightwave Technol., vol.9, no.4, pp.426–429, April 1991.

[11] K. Ogusu, "Transmission characteristics of optical waveguide corners", Optics Commun., vol.55, no.3, pp.149–153, Sept. 1985.

[12] E. G. Neumann, "Reducing radiation loss of tilts in dielectric optical waveguides", Electron. Lett., vol.17, no.11, pp.369–371, May 1981.

[13] M. Sanagi, M. Nakajima, "An optical waveguide bend with enhanced curvature and the optimization of its structure", Fiber and Integrated Optics, vol.9, pp.329–345, 1990.

[14] Y. Chung and N. Dagli, "An assessment of finite difference beam propagation method", IEEE J. Quantum Electron., vol.26, no.8, pp.1335–1339, Aug. 1990.

[15] G. R. Hadley, "Wide-angle beam propagation using Pade approximant operators", Optics Lett., vol.17, no.20, pp.1426–1428, Oct. 1992.

[16] G. Ronald Hadley , "Transparent boundary condition for the beam propagation method, " IEEE J. Quantum Electron., vol.28, no.1, pp.363–370, Jan. 1992.

輻射科学研究会資料
RS 98 – 7

厚みをもつ素子からなる無限周期アレーの散乱特性

Scattering Properties by Infinite Periodic Array of Elements with Thickness

若林　秀昭　　山北　次郎
(岡山県立大学 情報工学部)

松本　恵治
(大阪産業大学 工学部)

1998年7月24日(金)
於　大阪府立大学

目 次

厚みをもつ素子からなる無限周期アレーの散乱特性
Scattering Properties by Infinite Periodic Array of Elements with Thickness

若林　秀昭　　山北　次郎
(岡山県立大学 情報工学部)

松本　恵治
(大阪産業大学 工学部)

1　まえがき

周期構造媒質による電磁波散乱は光・電波工学における基礎的課題であり，解析手法や計算手法についても数多くの報告がある．

表面レリーフ形誘電体格子に関しては，モード整合法 [1] [2] やフーリエ展開法 [3] [4] をはじめ，有限要素法 [5]，境界要素法 [6]，ブロッホ波展開法 [7]，微分法，積分法 [8] などが有力な計算機解析法として知られている．また，損失媒質をはじめ異方性誘電体やキラル構造媒質などによる回折格子，斜め格子や 3 次元的に斜め方向からの入射波に対する数値計算例についても多くの報告 [9] [10] がある．しかし，これらの報告の大部分は，周期構造が 1 方向に限られた 1 次元誘電体格子に関するもので，2 方向に周期的な 2 次元誘電体格子に関する解析は，松田，奥野らの先駆的な計算例 [11] [12] を除けば，非常に数少ない．これは 2 次元誘電体格子の厳密な解析に要する複雑な計算過程とこれに付随する巨大計算を実行することが難しいためである．

アンテナの分野では，周波数選択板として用いられる周期アレー，いわゆる 2 次元平板格子に関する数値解析が日常的に行われており，筆者らは先に，完全導体平板格子だけでなく，抵抗平板格子についても解析報告した [13]~ [19]．これら抵抗平板格子の解析においては，本来，複素誘電率と厚みで表される誘電体格子を，格子層の厚みを無視する近似によって表面抵抗に置き換え，この表面抵抗と電流分布が境界条件を満足するような計算法が採用されている．つまり，誘電率の虚数部が非常に大きく，格子層の厚みが表皮深さに比べて薄い誘電体格子を抵抗平板格子とみなし，電流が境界面にのみ存在するという近似を用いて電流展開と抵抗境界条件を導入している．例えば，スペクトル領域ガレルキン法 [20] [21] は，数少ない電流展開項数と抵抗境界条件によって平板格子の実用的な解を求められる有力な解法であることが知られている．この平板格子の計算過程は誘電体格子の計算過程に比べてはるかに簡単であり，計算量も小さい．しかし，金属素子の厚みを無視した抵抗境界条件を適用する上で，あらかじめ厚みによる影響を調べておくことは非常に重要なことである．金属素子の厚みを考慮した計算法としては，

導波管モードを適用したアレーの解析法が報告されている [22] [23] が，完全導体素子を扱ったものが多く，この解析法では，表皮深さよりも薄い不完全導体素子を扱うことは困難である．そこで本報告では，表皮深さに比べて厚みの薄い素子からなるアレーについて検討する．まず 2 節では，素子の厚みによる影響を調べるために，表皮深さに比べて厚みの薄い不完全導体素子を誘電体格子とみなして数値解析を行う．平板格子の数値結果との比較 [24]~ [27] により，素子の厚みによる影響を調べ，電流展開と抵抗境界条件が有効な格子層の厚みの限界点を検討する．次に 3 節では，一様でない表面インピーダンス分布をもつ不完全導体素子を表面レリーフ形誘電体格子とみなして数値解析を行い，平板格子の数値結果との比較 [28] [29] から素子の厚みによる影響を調べるとともに，任意レリーフ形状をもつ誘電体格子を場所の関数で表される表面インピーダンス分布をもつ平板格子として扱える可能性を検討する．さらに，極めて厚みの薄い誘電体格子を平板格子の計算法を用いて解析し，レリーフ形状による特性の違いを比較する．誘電体格子の計算法として行列固有値による手法，平板格子の計算法としてスペクトル領域ガレルキン法による手法を採用し，同条件同設定のもとにそれぞれ定式化を行う．

ただし本報告では，問題点の明確化と数値計算の容易さのため，1 次元格子について定式化を行い，表面インピーダンスが抵抗分のみ有する場合 (抵抗格子) とリアクタンス分のみ有する場合 (リアクタンス格子) に分けて検討する．

2 厚みをもつ素子に対する検討

2.1 解析モデルの設定

図 2.1 に問題の構成を示す．y 軸方向には一様な 1 次元格子が，z 軸方向に周期 Λ，格子の幅 W で配置されている．図 (a) は方形形状の誘電体格子，図 (b) は格子層の厚みが薄く誘電率の大きな誘電体格子，図 (c) は平板格子である．平面波 $\exp[\, j\,\{\omega t - \sqrt{\varepsilon_1} k_0 (x\cos\theta_i + z\sin\theta_i\,)\}\,]$ が入射角 θ_i で入射する散乱問題について考える．図 (a)(b)(c) において，領域 I，III の比誘電率は，それぞれ ε_1，ε_3 で表される．これらの領域は無損失媒質であり，ε_1 と ε_3 の虚数部は無視する．領域 II の格子層については，図 (a)(b) では，比誘電率 $\varepsilon_2(z) = \varepsilon_2' - i\varepsilon_2''$ と格子層の厚み d によって表し，図 (c) では，格子の厚みは無視し，表面抵抗 R Ω/square によって表す．図 (a) は誘電体格子としての計算法を，図 (c) は平板格子としての計算法を採用すべきである．ところが，図 (b) の誘電体格子は，表皮深さよりも格子層の厚みが薄く，比誘電率が非常に大きいので，近似的に平板格子と考えることも可能である．つまり，導電率 σ は非常に大きく，格子層の厚み d は非常に小さいので，これらの積 σd はそこそこの値をもち，表面抵抗 R によって

$$R = 1/(\sigma d) \tag{1}$$

のように表すことができる．領域 II を表す複素比誘電率 ε_2 は表面抵抗 R によって次式のように表される．なお，本報告では，$\varepsilon_2' = 1$ とする．

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' - i\varepsilon_2'' = 1 - i\frac{\sigma}{(\omega\varepsilon_0)} = 1 - i\frac{1}{(R/Z_0)k_0 d} \tag{2}$$

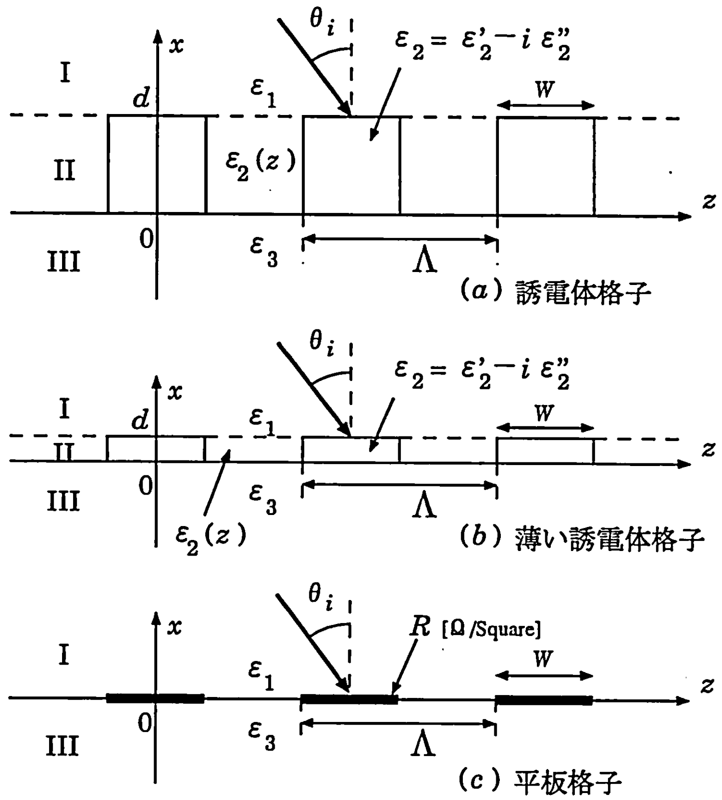


図 2.1 誘電体格子と平板格子

ここで，R は抵抗分のみで表される場合だけでなく，抵抗分とリアクタンス分を有するインピーダンスで表される場合にも成立する [30].

本節では，図 (b) の薄い誘電体格子に対して，式 (2) による誘電体格子として解析した数値結果と表面インピーダンス R による抵抗リアクタンス平板格子として解析した数値結果の比較を行い，素子の厚みによる影響を検討するとともに，抵抗境界条件の有効性を導入できる格子層の厚みの限界点を述べる.

本報告では，空間座標 (x, y, z) を波数 $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2\pi/\lambda$ によって $k_0x \to x$, $k_0y \to y$, $k_0z \to z$ のように規格化する．さらに，比透磁率を $\mu = 1$ と設定すれば，Maxwell の方程式は

$$\overline{\mathrm{curl}}\sqrt{Y_0}\boldsymbol{E} = -i\sqrt{Z_0}\boldsymbol{H} \tag{3}$$

$$\overline{\mathrm{curl}}\sqrt{Z_0}\boldsymbol{H} = i\,\varepsilon(z)\sqrt{Y_0}\boldsymbol{E} \tag{4}$$

のように表される．ここで，$Z_0 = 1/Y_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ であり，$\overline{\mathrm{curl}}$ は k_0 で空間変数が規格化された curl を示している．電磁界の各成分は E_ℓ，$H_\ell(\ell = x, y, z)$ は構造の周期性から，$e_{\ell m}(x)$，$h_{\ell m}(x)$ を展開係数とする空間高調波によって

$$\sqrt{Y_0}E_\ell = \sum_{m=-M}^{M} e_{\ell m}(x)\exp(-is_m z) \tag{5}$$

$$\sqrt{Z_0}H_\ell = \sum_{m=-M}^{M} h_{\ell m}(x)\exp(-is_m z) \tag{6}$$

のように展開表示できる．ここに，s_m と s_0 は，周期 Λ，波長 λ，比誘電率 ε_1 および入射角 θ_i によって

$$s_m = s_0 + m\lambda/\Lambda, \qquad s_0 = \sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_i \tag{7}$$

のように与えられる．

2.2 誘電体格子の解析手法

図 2.1(b) のような誘電体格子の解析手法として，行列固有値を用いる手法を採用する．

格子領域の比誘電率 $\varepsilon_2(z)$ は m 次の Fourier 係数 b_m を用いれば，媒質の周期性より打ち切り次数 N_f によって，次式のように Fourier 展開できる．

$$\varepsilon_2(z) = \sum_{m=-N_f}^{N_f} b_m \exp\{im(\lambda/\Lambda)\} \tag{8}$$

電磁界の y，z 成分に関して整理すれば，行列微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{F}}{dx} = i\ [C]\boldsymbol{F}(x) \tag{9}$$

TE-waves:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{h}_x \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} [0] & -[1] \\ -[\varepsilon]+[s]^2 & [0] \end{bmatrix} \tag{10}$$

TM-waves:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{h}_y \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} [0] & [1]-[s][\varepsilon]^{-1}[s] \\ [\varepsilon] & [0] \end{bmatrix} \tag{11}$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{F}$ は領域間の境界面に対する電磁界の空間高調波からなる接線成分であり，この微分方程式を構成する $\boldsymbol{e}_\ell$，$\boldsymbol{h}_\ell$ $(\ell = y, z)$ は，電磁界の接線成分に関する展開係数を要素とする (2M + 1) 元の列ベクトル

$$\boldsymbol{e}_\ell(x) = [e_{\ell-M}(x)\ldots e_{\ell 0}\ldots e_{\ell M}(x)]^t \tag{12}$$
$$\boldsymbol{h}_\ell(x) = [h_{\ell-M}(x)\ldots h_{\ell 0}\ldots h_{\ell M}(x)]^t \tag{13}$$

である．また，係数行列 $[C]$ を構成する小行列は m 行 n 列の要素表現を用いて

$$[\varepsilon] = [b_{n-m}], \quad [s] = [s_m\delta_{mn}], \quad [1] = [\delta_{mn}] \tag{14}$$

によって表される．[0] は零行列を，$[\varepsilon]^{-1}$ は $[\varepsilon]$ の逆行列を表し，δ_{mn} は Kronecker Delta を表している．

方形誘電体格子の場合，行列微分方程式 (11) の係数行列 $[C]$ は定数行列である．従って，係数行列 $[C]$ の行列固有値問題に帰着する．$2(2M+1)$ 元の列ベクトル $\boldsymbol{a}(x)$ を導入して

$$\boldsymbol{F}(x) = [T]\boldsymbol{a}(x) \tag{15}$$

のように変換すれば，式 (11) は

$$\frac{da(x)}{dx} = i[\kappa]a(x) \tag{16}$$

となる．ここで，行列 $[\kappa]$ は行列 $[C]$ の固有値 κ_m によって表される対角行列である．また，行列 $[T]$ は κ_m に対応する固有ベクトルから作られる行列 $[C]$ の対角化行列である．固有値 κ_m は各 $(2M+1)$ 個の $\pm x$ 方向に伝搬する $\kappa_m^{\pm}$ に分離できる．$a(x)$ も，$\kappa_m^{\pm}$ に対応する $\pm x$ 方向に伝搬する複素振幅 $a^{\pm}(x)$ に分離して表記できる．従って，式 (16) の解は

$$\begin{bmatrix} a^+(x) \\ a^-(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [U(\kappa^+, x - x_0)] & [0] \\ [0] & [U(\kappa^-, x - x_0)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^+(x_0) \\ a^-(x_0) \end{bmatrix} \tag{17}$$

となる．ここで，$[U(\kappa^{\pm}, x - x_0)]$ は対角行列，x_0 は位相基準点の座標である．領域 I，III では，行列 $[C]$ の固有値 κ_m と対角化行列 $[T]$ は解析的に求められ

$$\kappa_m^{\pm} = \mp\xi_m = \mp\sqrt{\varepsilon - s_m^2}, \tag{18}$$

TE-waves:

$$[T] = \begin{bmatrix} [1] & [1] \\ [\delta_{mn}\xi_m] & -[\delta_{mn}\xi_m] \end{bmatrix} \tag{19}$$

TM-waves:

$$[T] = \begin{bmatrix} [\delta_{mn}\xi_m/\sqrt{\varepsilon}] & [\delta_{mn}\xi_m/\sqrt{\varepsilon}] \\ -[\delta_{mn}\sqrt{\varepsilon}] & [\delta_{mn}\sqrt{\varepsilon}] \end{bmatrix} \tag{20}$$

となる．ただし，ξ_m は複素数の場合，虚数部が負となるように符号選択する．なお，固有ベクトルは $e_{ym}h_{zm}^* = \pm\xi_m$ (TE 波)，$-e_{zm}h_{ym}^* = \pm\xi_m$ (TM 波) となるように規格化している．電磁界 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ の接線成分の連続性より

$$\boldsymbol{F}_1(d) = \boldsymbol{F}_2(d), \qquad \boldsymbol{F}_2(0) = \boldsymbol{F}_3(0) \tag{21}$$

$x = d$:

$$[T_1]\begin{bmatrix} a_1^+(d) \\ a_1^-(d) \end{bmatrix} = [T_2]\begin{bmatrix} [U(\kappa_2^+, d)] & [0] \\ [0] & [U(\kappa_2^-, d)] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2^+(0) \\ a_2^-(0) \end{bmatrix} \tag{22}$$

$x = 0$:

$$[T_2]\begin{bmatrix} a_2^+(0) \\ a_2^-(0) \end{bmatrix} = [T_3]\begin{bmatrix} a_3^+(0) \\ a_3^-(0) \end{bmatrix} \tag{23}$$

のような線形方程式が得られる．ただし，上式において，$a_1^-(d)$ は領域 I からの入射波として，$a_3^+(0)$ は領域 III の放射条件として，

$$a_1^- = [\,0\cdots1\cdots0\,]^t, \quad a_3^+ = [\,0\cdots0\cdots0\,]^t \tag{24}$$

で与えられる定数である．従って，線形方程式 (22)(23) の未知数は $a_1^+(d)$，$a_2^+(0)$，$a_2^-(0)$，$a_3^-(0)$ である．また，m 次の反射および透過回折効率はそれぞれ，次式で表される．

$$\eta_m^r = Re\{\xi_{1m}^+\} \mid a_1^+(d) \mid^2 \tag{25}$$

$$\eta_m^t = Re\{\xi_{3m}^+\} \mid a_3^-(0) \mid^2 \tag{26}$$

2.3 平板格子の解析手法

2.3.1 電流展開と抵抗境界条件

格子層の厚みを無視した平板格子の解析法には，多くの高精度な解析手法 [24], [31] ~ [33] があが，本報告では，抵抗境界条件がきわめて容易に導入できる利点をもつスペクトル領域ガレルキン法による電流展開を用いた手法について定式化を行う．

境界面 $x=0$ における平板格子上の電界の接線成分 $E_{\tan}(x,z)$ は表面抵抗 R と面電流密度 $J(x,z)$ によって次式のように表される．

$$\sqrt{Y_0}E_{\tan}(z)-(R/Z_0)\sqrt{Z_0}J(z)=0 \qquad (\,-W/2\le z\le W/2\,) \tag{27}$$

上式は抵抗境界条件と呼ばれ，アンテナの分野でよく用いられている．

本報告のような 1 次元格子の場合，電界の接線成分 $E_{\tan}$ と面電流密度 J は TE 波に対して $E_{\tan}=E_y$，$J=J_y$，TM 波に対して E_z，J_z であるが，混同することがないので以下の記述では省略する．いま，電界の接線成分 $E_{\tan}$ は，平板格子が存在しない場合の 1 次界 $E_{\tan}^{1.st}(z)$ と表面電流源 $J(z)$ による散乱界 $E_{\tan}^{s}(z)$ の和で表され，

$$E_{\tan}=E_{\tan}^{1.st}(z)+E_{\tan}^{s}(z) \tag{28}$$

となる．境界面 $x=0$ 上での 1 次界 $E_{\tan}^{1.st}$ は

$$\sqrt{Y_0}E_{\tan}^{1.st}(z)=\overline{e_0(0)}\exp(-is_0z) \tag{29}$$

であり，散乱界 $E_{\tan}^{s}$ はスペクトル領域のグリーン関数 $g_m(x)$ を用いて

$$\sqrt{Y_0}E_{\tan}^{s}(z)=\sum_{m=-M}^{M}g_m(0)j_m\exp(-is_mz) \tag{30}$$

のように表される．j_m は表面電流の展開係数であり，表面電流の空間高調波展開

$$\sqrt{Z_0}J(z)=\sum_{m=-M}^{M}j_m\exp(-is_mz) \tag{31}$$

によって表される．したがって，抵抗境界条件式は

$$\sum_{m=-M}^{M}\left\{g_m(0)-\frac{R}{Z_0}\right\}j_m\exp(-is_mz)=-\,\overline{e_0(0)}\exp(-is_0z) \tag{32}$$

となる．表面電流 j_m は N 項の既知関数 ϕ_{pm} によって，次式のように展開する．

$$j_m=\sum_{p=1}^{N}I_p\,\phi_{pm} \tag{33}$$

式 (33) を式 (32) に代入し，スペクトル領域ガレルキン法により，

$$\sum_{p=1}^{N}\left[\sum_{m=-M}^{M}\phi_{mk}^{*}\left\{g_m(0)-\frac{R}{Z_0}\right\}\phi_{mp}\right]I_p=-\,\overline{e_0(0)}\phi_{k0}^{*} \qquad (k=1,\cdots,N) \tag{34}$$

によって表される N 元の線形方程式が得られる．電流の展開係数 I_p が求まれば，式 (33) から電流分布 $J(z)$ が決定する．

2.3.2 行列算法による1次界と散乱界

2.2小節において述べた空間高調波展開による解析法は，展開項数を $(2M+1)$ に設定することを前提にして定式化した．ところが，$M=0$ の場合，すなわち1項展開に設定すれば，1次界やスペクトル領域のグリーン関数を簡単に導き出すことが可能である．本報告で想定するような簡単な構造であれば，解析解が得られるが，基板層が多層，異方性基板，キラル媒質のような複雑構造に対して有効な方法である [34].

いま，$2M+1=1$ とおき，さらに入射波振幅として $a_{10}^{-}(0)=1$，領域IIIの放射条件より $a_{30}^{+}(0)=0$ を与えれば，境界面 $x=0$ における電磁界の接線成分の連続性から，式(15)(17)を用いて

$$[T_1]\begin{bmatrix} a_{10}^{+}(0) \\ 1 \end{bmatrix} = [T_3]\begin{bmatrix} 0 \\ a_{30}^{-}(0) \end{bmatrix} \tag{35}$$

が得られ，反射波振幅 $a_{10}^{+}(0)$ および透過波振幅 $a_{30}^{-}(0)$ の値が決定される．境界面 $x=0$ 上の電磁界の接線成分 $\overline{e_0(0)}$，$\overline{h_0(0)}$ は，式(21)より

$$\begin{bmatrix} \overline{e_0(0)} \\ \overline{h_0(0)} \end{bmatrix} = [T_1]\begin{bmatrix} a_{10}^{+}(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} \overline{e_0(0)} \\ \overline{h_0(0)} \end{bmatrix} = [T_3]\begin{bmatrix} 0 \\ a_{30}^{-}(0) \end{bmatrix} \tag{36}$$

となり，境界面上の1次界が求められる．

表面電流による散乱界は，ある特定の空間高調波成分 e_m，h_m に対し，境界面 $x=0$ における電界の接線成分は連続であるが，磁界の接線成分は表面電流の高調波成分 j_m によって $h_m(0^+)-h_m(0^-)=j_m$ で表されるように不連続である．放射条件 $a_{1m}^{-}(0)=0$, $a_{3m}^{+}(0)=0$ を考慮すれば，境界面 $x=0$ において

$$[T_1^{(m)}]\begin{bmatrix} a_{1m}^{+}(0) \\ 0 \end{bmatrix} - [T_3^{(m)}]\begin{bmatrix} 0 \\ a_{3m}^{-}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ j_m \end{bmatrix} \tag{37}$$

となる．いま，$j_m=1$ とおけば，上式より，領域I, IIIにおける散乱波振幅 $a_{1m}^{+}(0)$, $a_{3m}^{-}(0)$ が決定する．境界面上の表面電流源 j_m による電界の散乱界は

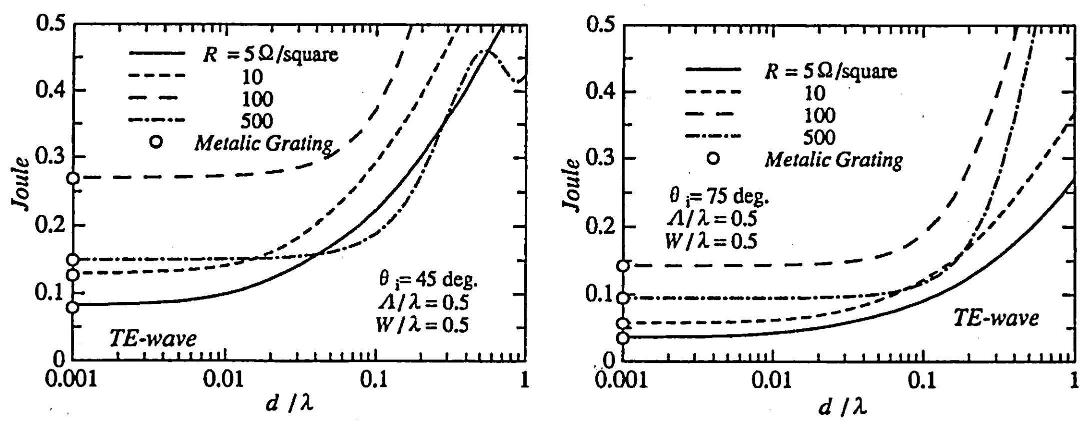
$$e_m(x) = g_m(x)j_m \tag{38}$$
$$g_m^{+}(x) = t_{1,11}^{(m)}\exp(-j\xi_{1m}x)a_{1m}^{+}(0) \quad (x \le 0) \tag{39}$$
$$g_m^{-}(x) = t_{3,21}^{(m)}\exp(j\xi_{3m}x)a_{3m}^{-}(0) \quad (x \ge 0) \tag{40}$$

で与えられる．$g_m(x)$ はスペクトル領域でのグリーン関数である．ただし，$t_{1,11}^{(m)}$ は行列 $[T_1^{(m)}]$ の1行1列要素を，$t_{3,21}^{(m)}$ は行列 $[T_3^{(m)}]$ の2行1列要素を示している．また，e_m と h_m の接線方向はそれぞれ，TE波に対して e_{ym}，h_{zm} を，TM波に対して e_{zm}，h_{ym} を表している．したがって，電流分布が決定すれば，平板格子による m 次の反射および透過回折効率はそれぞれ，次式で与えられる．

$$\eta_m^{r} = Re\{\xi_{1m}^{+}\} \mid g_m^{+}(0)j_m \mid^2 \tag{41}$$
$$\eta_m^{t} = Re\{\xi_{3m}^{+}\} \mid g_m^{-}(0)j_m \mid^2 \tag{42}$$

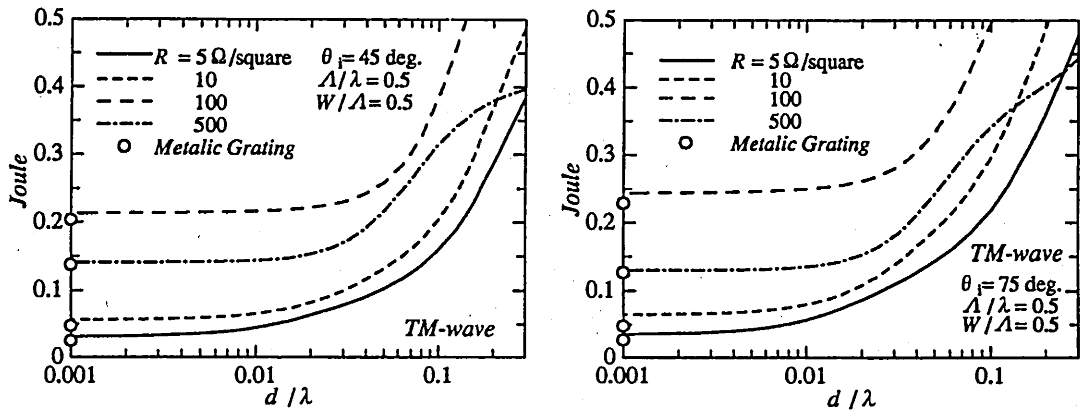
2.4 数値計算例

誘電体基板上に装荷された抵抗リアクタンス平板格子による散乱問題を考え，式(2)において R が複素数で表される場合に抵抗境界条件が成立する有効性について検討する．問題を明確にするため，R が実数(抵抗分)のみで表される場合と虚数(リアクタンス分)のみで表される場合に分けて，抵抗境界条件の成立する格子層の厚み d/λ の限界点を誘電体格子と平板格子の解析結果の比較により調べる．以下の数値計算では，領域Iを空気層，領域IIIを比誘電率 $\varepsilon_3 = 2.5$ の無損失誘電体に設定した．誘電体格子の解析では，電磁界成分の空間高調波の展開項数を $2M+1=301$ とした．平板格子では，表面電流の空間高調波の展開項数を $2M+1=301$ とし，電流展開の既知関数にスペクトル領域ガレルキン法でよく用いられている区分的正弦波(PieceWise Sinusoidal：PWS)関数を用いて展開項数を $N=100$ とした．このときの平板格子の解は十分，収束している．



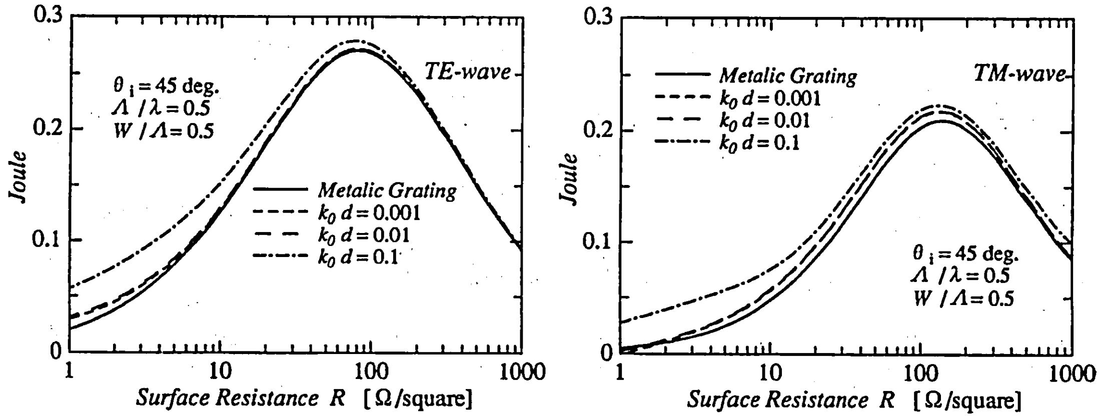
(a) $\theta_i = 45$ degree (b) $\theta_i = 75$ degree

図 2.2 格子層の厚さに対するジュール熱 (TE-wave)



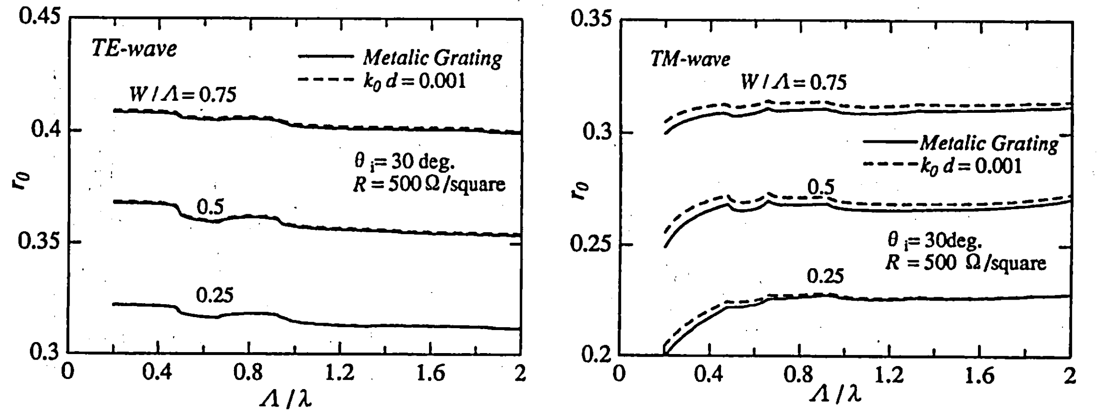
(a) $\theta_i = 45$ degree (b) $\theta_i = 75$ degree

図 2.3 格子層の厚さに対するジュール熱 (TM-wave)



(a) TE-wave　　(b) TM-wave

図 2.4 抵抗に対するジュール熱

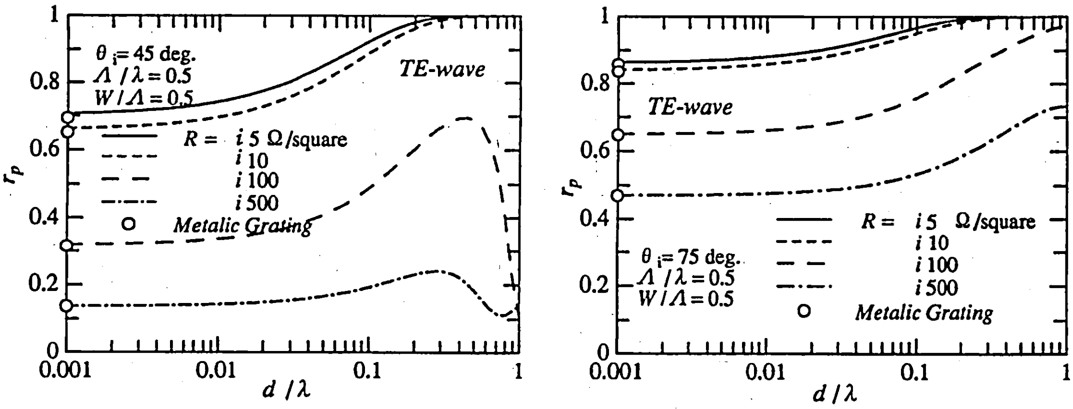


(a) TE-wave　　(b) TM-wave

図 2.5 格子周期に対する振幅反射係数

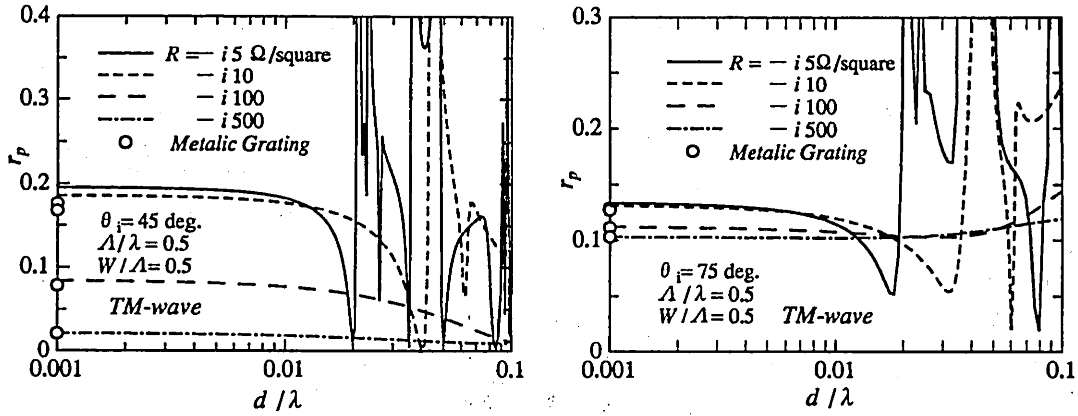
2.4.1 R が実数の抵抗格子について

本小節では，誘電率の虚数部が非常に大きく，厚みが非常に薄い損失誘電体格子を抵抗境界条件と電流展開を用いて，R が実数の抵抗平板格子とみなせる可能性について調べる．まず，格子周期 $\Lambda/\lambda = 0.5$，格子幅 $W/\Lambda = 0.5$ の損失誘電体格子の格子層の厚み d/λ に対するジュール熱変化について調べた．ジュール熱損失 (Joule Loss) は，電力反射係数 r_p $(= \sum_{m=-M}^{M} \eta_m^r)$ と電力透過係数 t_p $(= \sum_{m=-M}^{M} \eta_m^t)$ を用いて $(1 - r_p - t_p)$ で表される．図 2.2 に TE 波入射を，図 2.3 に TM 波入射を示している．これらの図から，格子層の厚み d/λ が 0.01 より薄ければ，ジュール熱として消費されるエネルギーはいずれの場合も平板格子の結果に，ほぼ収束していることから，格子層の厚み d と格子を



(a) $\theta_i = 45$ degree (b) $\theta_i = 75$ degree

図 2.6 格子層の厚さに対する電力反射係数 (TE-wave)



(a) $\theta_i = 45$ degree (b) $\theta_i = 75$ degree

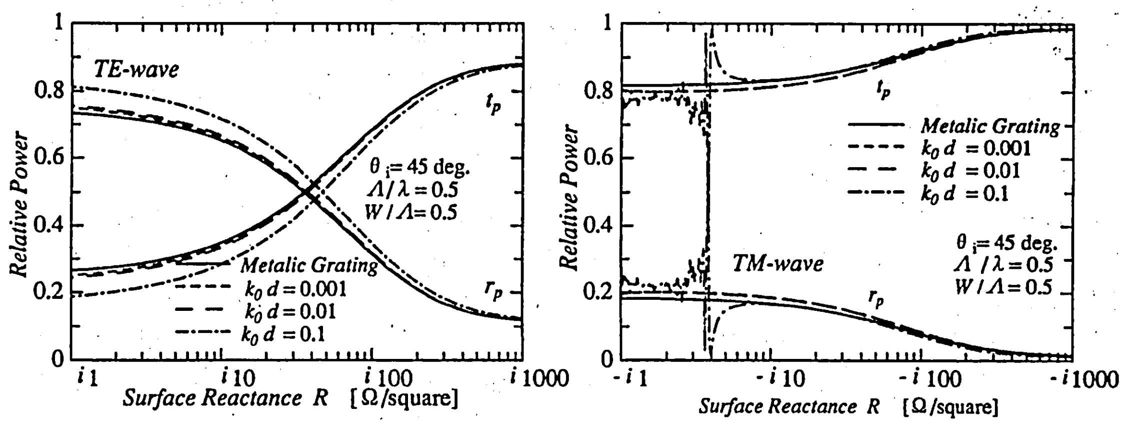
図 2.7 格子層の厚さに対する電力反射係数 (TM-wave)

形成する媒質の導電率 σ の積によって表される表面抵抗 R Ω/square が意味を持ち，抵抗平板格子としての扱いの有効性が理解できる．つまり，格子層の厚みが厚いときには，平板格子としてではなく，損失誘電体格子として解析する必要がある．

$d/\lambda = 0.01$ における表皮深さ S_d は，$R = 100$ Ω/square では $S_d/\lambda \approx 0.029$，500 Ω/square では $S_d/\lambda \approx 0.065$ であり，電流が境界面にのみ存在するという近似を用いて表面抵抗を定義できるのは，厚みが表皮深さに比べて薄いときで，電磁波の減衰量が $1/e$ となる厚みでは，抵抗境界条件が成立しないことがわかる．

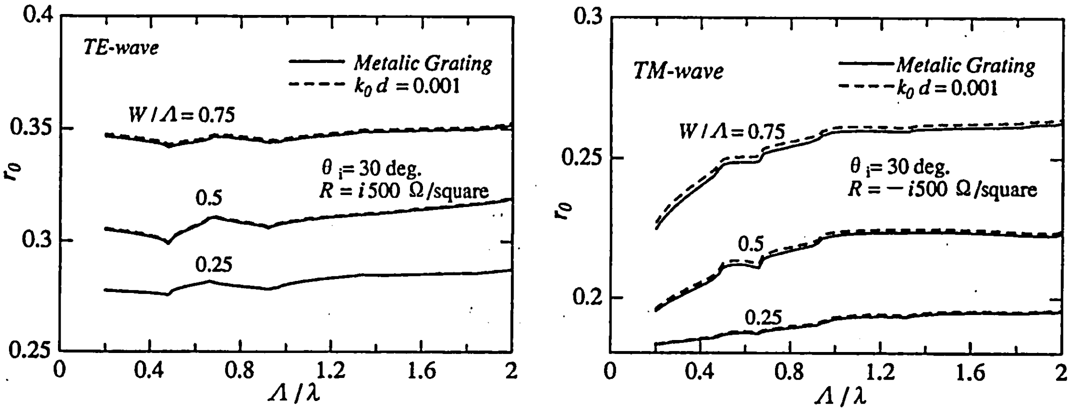
表面抵抗 R に対するジュール熱変化を格子層の厚み $k_0d = 0.1$，0.01，0.001 の誘電体格子と平板格子について図 2.4 に調べた．$k_0d = 0.01$ のときの誘電体格子と平板格子の結果は，TE 波入射，TM 波入射の場合いずれも，表面抵抗に対してほぼ一致している．

次に，格子の幅，周期による違いを調べるために，格子幅 $W/\Lambda = 0.25$，0.5，0.75 の



(a) TE-wave (b) TM-wave

図 2.8 リアクタンスに対する相対電力比



(a) TE-wave (b) TM-wave

図 2.9 格子周期に対する振幅反射係数

ときの格子周期 Λ/λ に対する 0 次回折波の振幅反射係数 $r_0 = \sqrt{\eta_0^r}$ を図 2.5 に示す．格子層の厚み $k_0 d = 0.01$ の誘電体格子と平板格子の結果は，格子周期に対してほぼ一致していることがわかる．

2.4.2 R が虚数のリアクタンス格子について

本小節では，抵抗境界条件と電流展開を用いて，R が虚数のリアクタンス平板格子とみなせる無損失誘電体格子の格子層の厚みの限界点について調べる．R がリアクタンスで表される場合，TE 波入射では，平板格子に対して平行な電界成分を有するので，平板格子が誘導リアクタンスとして，TM 波入射では，平板格子に対して直交する電界成分を有するので，容量リアクタンスとして作用する [35]．そこで TE 波入射では，リアク

タンス分として，$R=iX$ を考え，TM 波入射では，$R=-\ iX$ Ω/square を考えた．

まず，格子周期 $\Lambda/\lambda=0.5$，格子幅 $W/\Lambda=0.5$ の無損失誘電体格子の電力反射係数 r_p について，図 2.6 に TE 波入射を，図 2.7 に TM 波入射の場合を示した．これらの図から，格子層の厚み d/λ が 0.01 よりも薄ければ，平板格子の結果にほぼ収束していることから，平板格子として扱えるが，格子層が厚いときには誘電体格子として解析しなければならないことがわかる．

表面リアクタンス $R=\pm\ iX$ に対する相対電力比を格子層の厚み $k_0d=0.1$，0.01，0.001 の誘電体格子と平板格子について図 2.8 に示す．$k_0d=0.01$ のときの誘電体格子と平板格子の結果は，表面リアクタンスに対してほぼ一致していることがわかる．

次に，格子幅 W/Λ が 0.25，0.5，0.75 のときの格子周期 Λ/λ に対する 0 次回折波の振幅反射係数 r_0 を図 2.9 に示す．格子層の厚み $k_0d=0.01$ の誘電体格子と平板格子の結果は，格子の幅，周期に対してほぼ一致していることがわかる．

3　表面インピーダンス分布をもつ素子の厚みに対する検討

3.1　解析モデルの設定

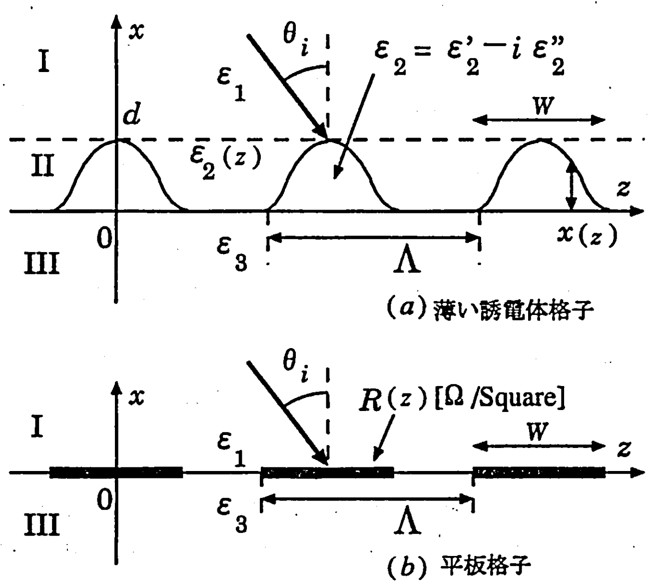


図 3.1 誘電体格子と平板格子

図 3.1 に示すように，y 軸方向に一様な 1 次元格子が，z 軸方向に周期 Λ，格子の幅 W で配置されている．図 (a) は格子層の厚みが薄い任意形状 $f(z)$ の表面レリーフ形誘電体格子，図 (b) は場所の関数で表される表面インピーダンス $R(z)$ をもつ平板格子である．平面波 $\exp[\ j\ \{\omega t-\sqrt{\varepsilon_1}k_0(x\cos\theta_i+z\sin\theta_i\ )\}\ ]$ が入射角 θ_i で入射する散乱問題について考える．図 (a)(b) の領域 I，III の比誘電率はそれぞれ ε_1，ε_3 で表され，無損失媒質で虚数部は無視する．領域 II の格子層については，図 (a) では，比誘電率 $\varepsilon_2(z)=$

$\varepsilon_2' - i\varepsilon_2'' = 1 - i\varepsilon_2''$ と格子層の厚み $x(z) = d\,f(z)$ によって表す．導電率 σ は非常に大きく，格子層の厚み $x(z)$ は非常に小さいので，これらの積 $\sigma\,x(z)$ はそこそこの値をもち，

$$R(z) = \frac{1}{\sigma x(z)} = \frac{1}{(1/Z_0)k_0\,x(z)\,\varepsilon_2''} = \frac{1}{f(z)}R(0) \tag{43}$$

Ω/square を用いて，図 (b) に示す抵抗リアクタンス平板格子と近似的に考えることも可能である．以下では，$R(0)$ を R_0 と略記する．

本節では，図 (a) に示す極めて厚みの薄い任意形状表面レリーフ形誘電体格子に対して，式 (43) による素子の厚みを無視した平板格子の計算法を用いて解析できる可能性および素子の厚みによる影響を調べる．

3.2 任意形状表面レリーフ形誘電体格子としての取扱い

本小節では，誘電体格子の解析手法として，2 節で採用した行列固有値による方形誘電体格子の計算法を拡張し，格子領域は図 3.2 のように，$(L-2)$ 層に分割して方形誘電体格子の積み重ねとして階段状に近似する．

n 層における格子領域の比誘電率 $\varepsilon_{2n}(z)$ は m 次の Fourier 係数 b_m を用いれば，媒質の周期性より打切り次数 N_f によって，次式のように Fourier 展開できる．

$$\varepsilon_{2n}(z) = \sum_{m=-N_f}^{N_f} b_m \exp\{im(\lambda/\Lambda)z\} \qquad (n = 2\cdots L-2) \tag{44}$$

電磁界の y，z 成分に関してマクスウエルの方程式を整理すれば，行列微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} e_y \\ h_z \\ e_z \\ h_y \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} [C_{TE}] & [0] \\ [0] & [C_{TM}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_y \\ h_z \\ e_z \\ h_y \end{bmatrix} \tag{45}$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{e}_\ell$，$\boldsymbol{h}_\ell$ $(\ell = y, z)$ は，電磁界の接線成分に関する展開係数を要素とする (2M+1) 元の列ベクトル

$$\boldsymbol{e}_\ell = [e_{\ell(-M)}(x)\ldots e_{\ell(0)}(x)\ldots e_{\ell(M)}(x)]^t \tag{46}$$

$$\boldsymbol{h}_\ell = [h_{\ell(-M)}(x)\ldots h_{\ell(0)}(x)\ldots h_{\ell(M)}(x)]^t \tag{47}$$

である．また，$[C_{TE}]$，$[C_{TM}]$ は係数行列であり，式 (12)(13) で与えられる．対角化行列 $\boldsymbol{T}$ と $2(2M+1)$ 元の列ベクトル $\boldsymbol{a}(x)$ を導入して一次変換すれば，行列微分方程式 (45) の解は固有値 κ_m と対角化行列 $\boldsymbol{T}$ を用いて

$$\boldsymbol{T}\,[\exp\{\kappa_{n,m}^{\pm}(x-x_0)\}\delta_{mn}]\,\boldsymbol{a}(x_0) = \boldsymbol{T}\,[U(\kappa_n^{\pm}, x-x_0)]\,\boldsymbol{a}(x_0) \tag{48}$$

と表される．領域 I，III では，解析的に固有値 $\kappa_m^{\pm} = \mp\xi_m$ と対角化行列 $\boldsymbol{T}$ は求められる．$\boldsymbol{a}(x)$ も固有値 κ_m の伝播方向に対応して，複素振幅 $\boldsymbol{a}^{\pm}(x)$ に分離表記する．

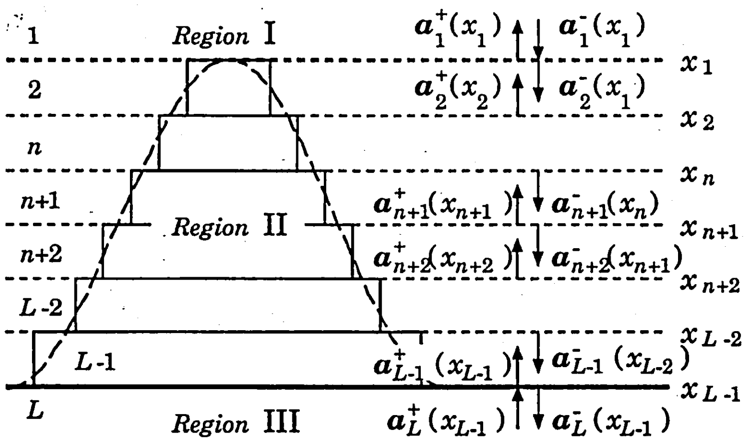


図 3.2 格子領域の階段近似

ξ_m は複素数の虚数部が負となるように符号選択し，固有ベクトルは $e_{ym}h_{zm}^* = \pm\xi_m$, $-e_{zm}h_{ym}^* = \pm\xi_m$ となるように規格化している．各層間の境界条件より

$x = x_1 = d$:

$$[T_1]\begin{bmatrix} a_1^+(x_1) \\ a_1^-(x_1) \end{bmatrix} = [T_2]\begin{bmatrix} [U(\kappa_2^+, x_1 - x_2)] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2^+(x_2) \\ a_2^-(x_1) \end{bmatrix} \tag{49}$$

$x = x_n \quad (n = 2 \cdots L-2)$:

$$\begin{aligned}[T_n]&\begin{bmatrix} [1] & [0] \\ [0] & [U(\kappa_n^-, x - x_{n-1})] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n^+(x_n) \\ a_n^-(x_{n-1}) \end{bmatrix} \\ &= [T_{n+1}]\begin{bmatrix} [U(\kappa_{n+1}^+, x - x_{n+1})] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+1}^+(x_{n+1}) \\ a_{n+1}^-(x_n) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{50}$$

$x = x_{L-1} = 0$:

$$[T_{L-1}]\begin{bmatrix} [1] & [0] \\ [0] & [U(\kappa_{L-1}^-, x_{L-1} - x_{L-2})] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{L-1}^+(x_{L-1}) \\ a_{L-1}^-(x_{L-2}) \end{bmatrix} = [T_L]\begin{bmatrix} a_L^+(x_{L-1}) \\ a_L^-(x_{L-1}) \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$a_1^- = [\,0 \cdots 1 \cdots 0\,]^t, \qquad a_L^+ = [\,0 \cdots 0 \cdots 0\,]^t \tag{52}$$

の線形方程式が得られる．逐次消去すると未知数は $a_1^+(x_1)$, $a_L^-(x_{L-1})$ である．誘電体格子の m 次の反射および透過回折効率はそれぞれ，次式で与えられる．

$$\eta_m^r \;=\; Re\{\xi_{1m}^+\} \mid a_1^+(x_1) \mid^2 \tag{53}$$

$$\eta_m^t \;=\; Re\{\xi_{3m}^+\} \mid a_L^-(x_{L-1}) \mid^2 \tag{54}$$

3.3 表面インピーダンス分布をもつ平板格子としての取扱い

本小節では，格子層の厚みを無視した平板格子に対して，場所の関数で表される表面インピーダンス分布による抵抗境界条件を適用したスペクトル領域ガレルキン法について述べる．

境界面 $x=0$ における平板格子上の電界の接線成分は，平板格子が存在しない場合の 1 次界 $E_{\tan}^{1st}(z)$ と表面電流源 $J(z)$ による散乱界 $E_{\tan}^{s}(z)$ の和であり，場所の関数 z で表される表面インピーダンス $R(z)$ と面電流密度 $J(x,z)$ を用いて次式のような抵抗境界条件式が表される．

$$\sqrt{Y_0}\,\{E_{\tan}^{1st}(z)+E_{\tan}^{s}(z)\}-(R(z)/Z_0)\sqrt{Z_0}J(z)=0 \quad (\,-W/2\le z\le W/2\,) \tag{55}$$

式 (55) にグリーン関数 $g_m(x)$，空間高調波展開を用いると，

$$\overline{e_0(x)}\exp(-is_0z)+\sum_{m=-M}^{M}g_m(x)j_m\exp(-is_mz)-(R(z)/Z_0)\sqrt{Z_0}J(z)=0 \tag{56}$$

となる．ここで，表面電流 j_m は

$$j_m=\frac{1}{\Lambda}\int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2}\sqrt{Z_0}\;J(z)\;\exp(\,is_mz)\;dz \tag{57}$$

とする．表面電流を N 項の既知関数によって

$$j_m=\sum_{p=1}^{N}I_p\;\phi_{pm},\quad \sqrt{Z_0}J(z)=\sum_{p=1}^{N}I_p\;\Phi_p(z) \tag{58}$$

のように展開表示し，式 (56) に代入すると，スペクトル領域ガレルキン法により，

$$[A_{kp}]\;[I_p]=[b_k] \qquad (k=1,2,\cdots,N) \tag{59}$$

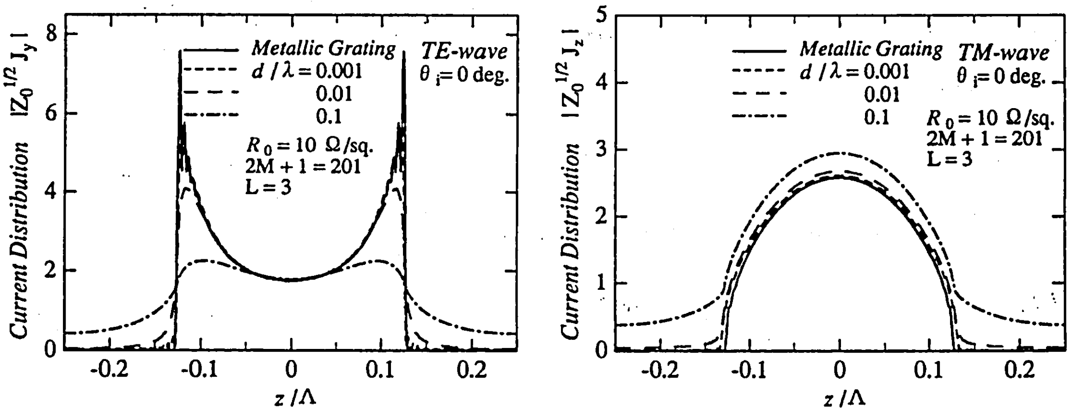
$$A_{kp}=\sum_{p=1}^{N}\left[\sum_{m=-M}^{M}\phi_{mk}^{*}\;g_m(0)\;\phi_{mp}-\frac{1}{\Lambda}\int_{-W/2}^{W/2}\Phi_k^{*}\;(R(z)/Z_0)\;\Phi_p\;dz\right] \tag{60}$$

$$b_k=-\frac{\overline{e_0(0)}}{\Lambda}\int_{-W/2}^{W/2}\Phi_k^{*}(z)\exp(-is_0z)dz=-\,\overline{e_0(0)}\;\phi_{k0}^{*} \tag{61}$$

による N 元の線形方程式が得られる．前節の一様な抵抗分布に対するガレルキン法では，スペクトル領域形 ϕ_{kp} だけを用いて表された (単独形) が，場所の関数で表される表面インピーダンス分布に対するガレルキン法では，空間領域形 $\Phi_k(z)$ とスペクトル領域形 ϕ_{kp} を用いて表される (混合形)．電流の展開係数 I_p が求まれば，電流分布 $J(z)$ が決定する．$g_m(x)$ はスペクトル領域でのグリーン関数であり，2.3 小節で述べたように簡単に導き出すことができる [7]．平板格子による m 次の反射および透過回折効率はそれぞれ，次式で与えられる．

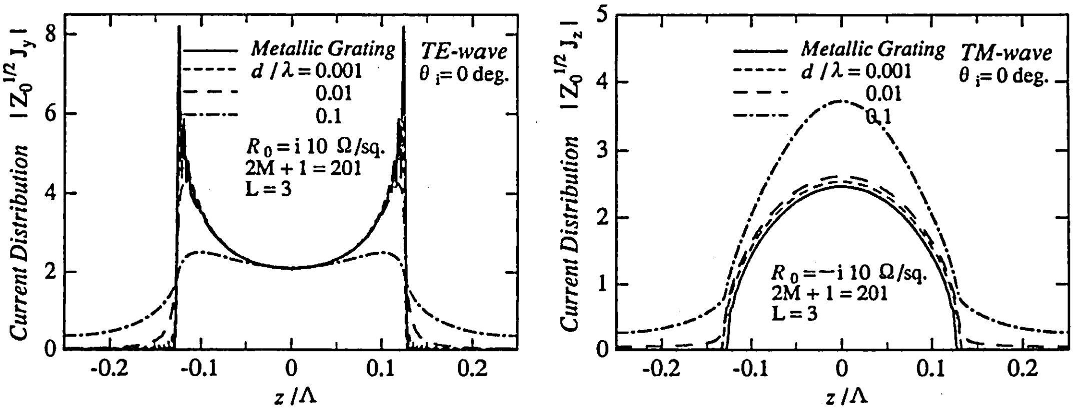
$$\eta_m^r \;=\; Re\{\xi_{1m}^{+}\}\mid g_m^{+}(0)j_m\mid^2 \tag{62}$$

$$\eta_m^t \;=\; Re\{\xi_{3m}^{+}\}\mid g_m^{-}(0)j_m\mid^2 \tag{63}$$



(a) TE-wave (b) TM-wave

図 3.3 抵抗方形格子の電流分布



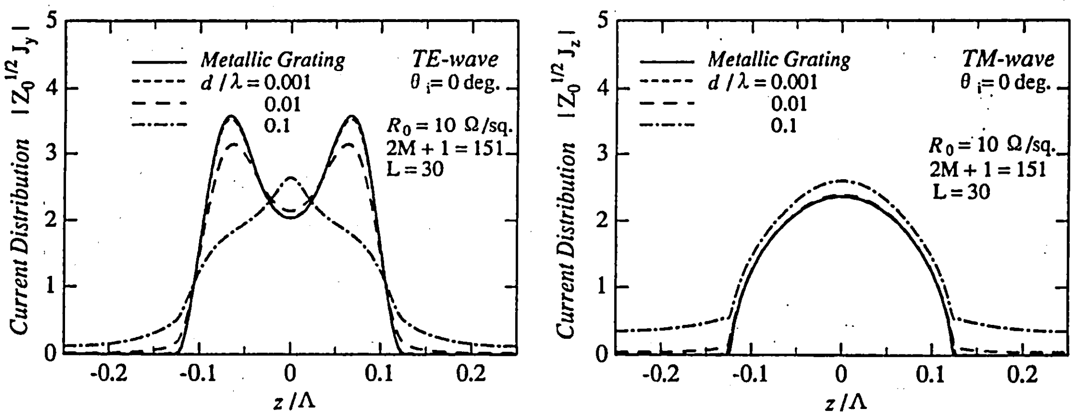
(a) TE-wave (b) TM-wave

図 3.4 リアクタンス方形格子の電流分布

3.4 数値計算例

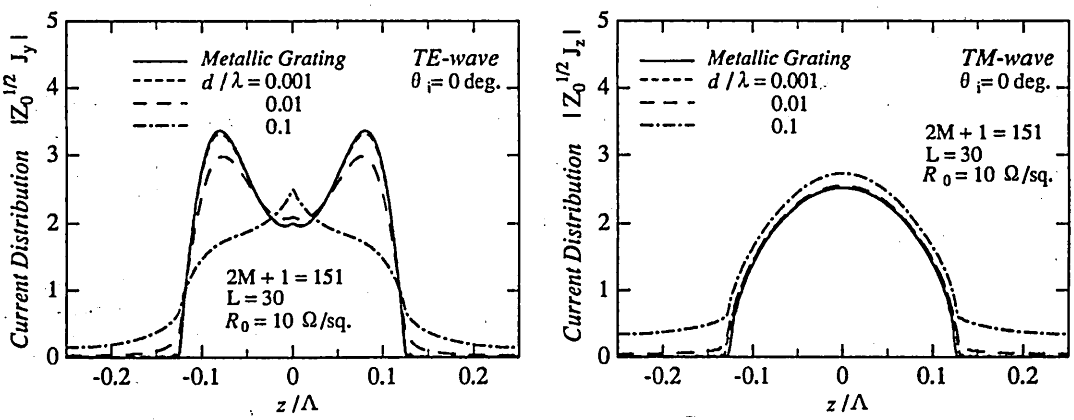
本報告では，1 次元の任意形状表面レリーフ形誘電体格子として，次式で表される方形，正弦波，三角形の格子形状 $f(z)$ をもつ誘電体格子を考え，格子層の厚みが非常に薄い場合に平板格子の計算法を用いて解析できる可能性を解析結果により示す．抵抗格子，リアクタンス格子の各場合について検討する．

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{(方形)} \\ \dfrac{1}{2}\left\{1+\cos(2\pi\dfrac{z}{W})\right\} & \text{(正弦波形)} \\ 1-\dfrac{2}{W}|z| & \text{(三角形)} \end{cases} \qquad (-W/2 \le z \le W/2)$$



(a) TE-wave (b) TM-wave

図 3.5 抵抗正弦波形状格子の電流分布



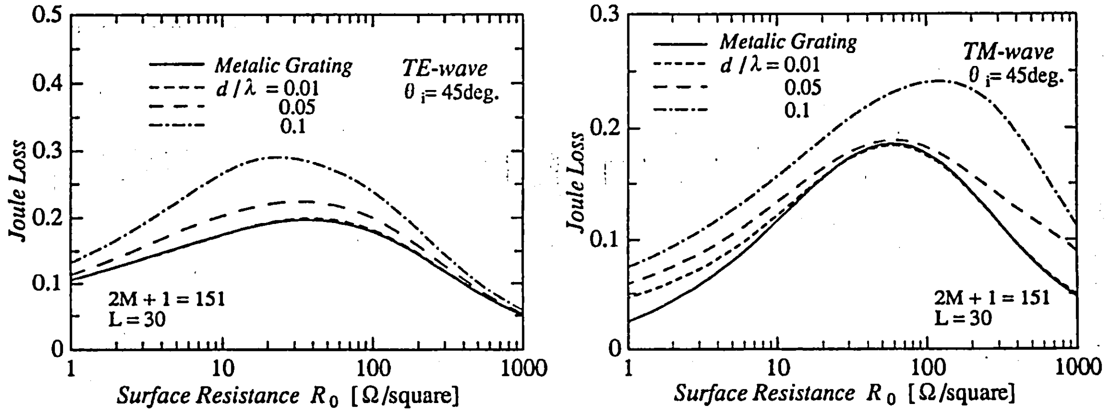
(a) TE-wave (b) TM-wave

図 3.6 抵抗三角形格子の電流分布

ただし，各格子の特性を比較するために，各格子形状の格子層の厚み $x(z)$ に対して，平均値 $\frac{1}{W}\int_{-W/2}^{W/2} x(z)\,dz$ が一定になるように $f(z)$ を設定した．つまり，方形格子における実際のインピーダンス値は 2 R_0 Ω/square となる．

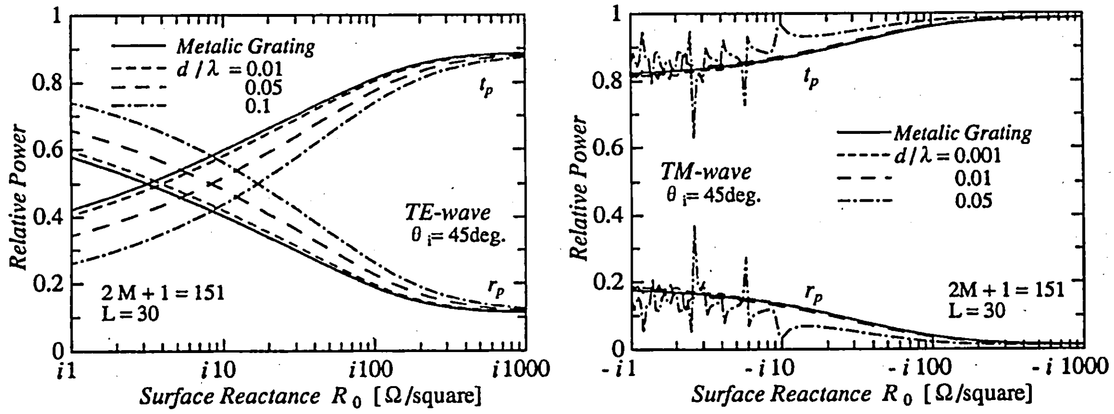
以下の数値計算では，領域 I を空気層，領域 III を比誘電率 $\varepsilon_3 = 2.5$ の無損失誘電体とし，周期 $\Lambda/\lambda = 0.5$，幅 $W/\Lambda = 0.5$ の 1 次元格子の電磁波散乱を考えた．誘電体格子の各解析では，解の収束性と所要計算時間の関係から電磁界成分の空間高調波の展開項数，格子領域の階段近似数を決めた．平板格子では，表面電流の空間高調波の展開項数を $2M + 1 = 301$，電流展開の既知関数にステップ関数を用いて展開項数を $N = 100$ とした．このときの平板格子の解は十分，収束していることを確認している．

まず，格子層の厚み $d/\lambda = 0.1$，0.01，0.001 の方形誘電体格子と平板格子の電流分布を比較する．$R_0 = 10$ Ω/square の抵抗格子の場合を図 3.3 に，$R_0 = i10$ Ω/square (TE



(a) TE-wave (b) TM-wave

図 3.7 抵抗正弦波形状格子のジュール熱変化



(a) TE-wave (b) TM-wave

図 3.8 リアクタンス正弦波形状格子の相対電力比

波)，$-i10$ Ω/square (TM 波) のリアクタンス格子の場合を図 3.4 に示す．本報告では，誘電体格子において，格子表面と領域 III の境界 $x = x_{L-1}$ における磁界成分の差を平板格子の電流 $\sqrt{Z_0}J(z)$ に相当する量と考えて比較した．ただし，格子表面は，階段近似 (図 3.2 参照) による方形格子の表面とした．TE 波，TM 波入射の場合ともに，格子層の厚み $d/\lambda = 0.001$ のとき，平板格子の結果によく一致していること，抵抗平板格子とリアクタンス平板格子の電流分布波形はよく似ていることがわかる．また，TE 波入射において，厚み $d/\lambda = 0.01$，0.001 の誘電体格子と平板格子の電流分布では，端点の特異性による影響が現われている．

図 3.5 に正弦波形状，図 3.6 に三角形の抵抗格子の場合を示した．格子層の厚み $d/\lambda = 0.001$ のとき，平板格子の結果によく一致している．TE 波入射では端点の特異性による影響が緩和されていることがわかる．図 3.3(b)，3.4(b)，3.5(b)，3.6(b) の TM 波入射の

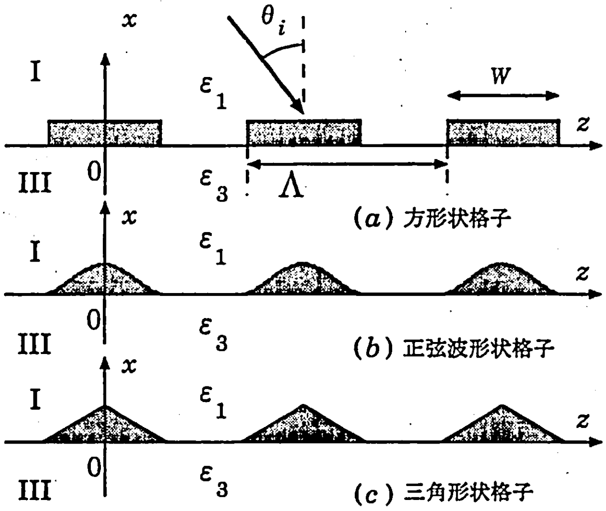
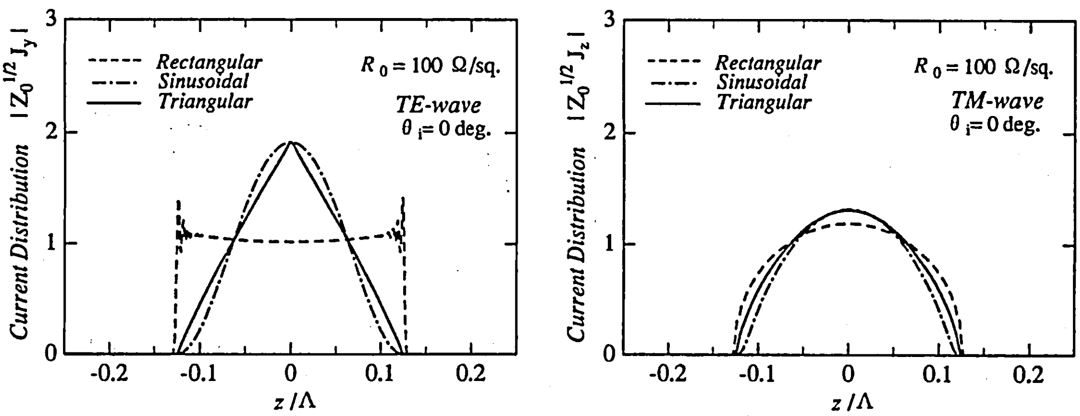


図 3.9 極めて薄い表面レリーフ形格子

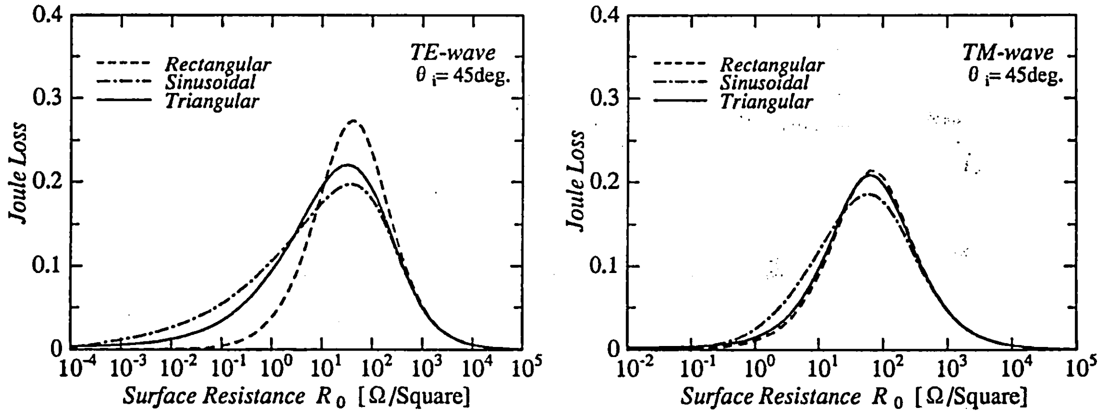


(a) TE-wave　　(b) TM-wave

図 3.10 抵抗格子の電流分布

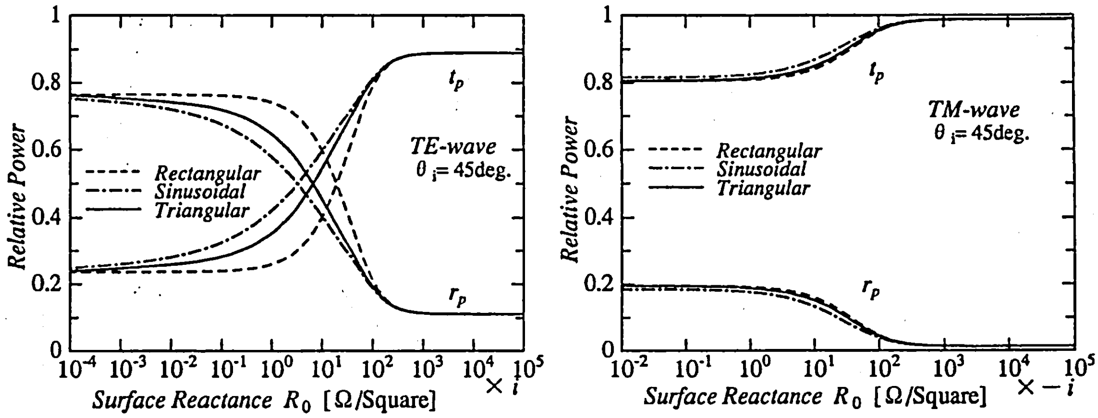
場合，格子に対して電界成分が直交しているため，格子形状による電流分布波形の違いは小さいことがわかる．図 3.3 から 3.6 の電流分布の比較では，格子層の厚み $d/\lambda = 10^{-3}$ 程度で平板格子として扱えることがわかった．

次に，格子層の厚み $d/\lambda = 0.1$，0.05，0.01 の正弦波形状誘電体格子と平板格子について，抵抗格子の表面抵抗に対するジュール熱変化を図 3.7 に，リアクタンス格子の表面リアクタンスに対する相対電力比を図 3.8 に示す．電流分布では，格子層の厚み $d/\lambda = 10^{-3}$ のときに平板格子の結果によく一致したが，図 3.7，3.8 の散乱特性では，表面抵抗，表面リアクタンスそれぞれに対して広い範囲で，厚み $d/\lambda = 10^{-2}$ のとき，平板格子の結果によく一致している [25]．以上から，極めて薄い誘電体格子は平板格子の計算法を用いて解析できること，格子層が厚いときには，平板格子としてではなく誘電体格子として解析する必要があることがわかった．



(a) TE-wave　　(b) TM-wave

図 3.11 抵抗格子のジュール熱変化



(a) TE-wave　　(b) TM-wave

図 3.12 リアクタンス格子の相対電力比

さらに，図 3.9 に示すような極めて薄い方形，正弦波形状，三角形の抵抗格子を平板格子の計算法により，解析比較した．$R_0 = 100\ \Omega$/square の各抵抗格子の電流分布分布を図 3.10 に調べた．図 (a) の TE 波入射の場合，$R_0 = 10\ \Omega$/square のときと比べて，電流波形は大きく異なっている．また，$R_0 = 100\ \Omega$/square では，端点の特異性による影響が，方形格子には見られるものの，正弦波形状格子と三角形格子には見られなくなっている．図 (b) の TM 波入射の場合には，$R_0 = 10\ \Omega$/square のときと同様，格子形状による違いは小さい．

図 3.11 は表面抵抗に対する抵抗格子のジュール熱変化，図 3.12 は表面リアクタンスに対するリアクタンス格子の相対電力比である．図 3.11 から，格子形状によらず，ほぼ同じ抵抗値のときにジュール熱損失は最大になること，抵抗値が極めて小さいときは，完全導体，極めて大きいときは，無損失誘電体に近づくため，ジュール熱損失は 0 になる

ことがわかる．また，図 3.11，12 から格子形状による散乱特性の違いは，TE 波入射に対して顕著に現れるが，TM 波入射に対しては小さいことがわかる．これは，電流分布の傾向 (図 3.10) と同じである．以上から，極めて薄い誘電体格子は，TE 波入射の場合に，格子形状により，特性が顕著に異なることがわかった．

4 むすび

厚みをもつ素子からなる無限周期アレーの電磁波散乱について，厚みによる影響を調べるとともに，抵抗境界条件の有効性を調べた．本報告では，問題点の明確化のため 1 次元格子を扱った．まず，行列固有値による表面レリーフ形誘電体格子の解析法とスペクトル領域ガレルキン法による平板格子の解析法を用いて数値計算を行い，検討した．その結果，格子層の厚みが $d/\lambda = 10^{-2}$ 以下であれば，平板格子の計算法を用いて十分な解が求められ，抵抗境界条件が成立することがわかった．次に，極めて薄い任意形状表面レリーフ形誘電体格子について，場所の関数で表される表面インピーダンス分布を考慮することで抵抗境界条件を用いた平板格子の計算法を用いて解析できることを示した．格子層が厚いときには，平板格子としてではなく，誘電体格子として扱わなければならないことを示した．素子の厚みによる影響は，散乱特性よりも電流分布において顕著に現れることがわかった．さらに格子層の極めて薄い方形格子，正弦波形状格子，三角形格子について，平板格子の計算法による数値計算結果の比較から，格子形状の違いによる特性を調べた．その結果，厚みの平均値が同じならば，ジュール熱損失は格子形状に関わらず，同じ表面抵抗値で最大になることがわかった．今後，本報告で得られた 1 次元格子の結果をふまえて，2 次元格子を検討していきたい．

参考文献

[1] 安浦亀之助，冨田正治，"誘電体格子による平面波回折の数値解析", 信学論 (B), J61-B, 7, pp.662-669, 1978.

[2] 安浦亀之助，村山正直，"損失を考慮に入れた正弦波状格子による回折問題の数値解析", 信学論 (B), J69-B, 2, pp.198-205, 1986.

[3] 山崎恒樹，日向　隆，細野敏夫，"周期的表面を持つ誘電体格子による電磁波の散乱", 電学研資, 電磁界理論, EMT-91-83, pp.71-80, 1991.

[4] T. Yamazaki, T. Hosono and J.A. Kong, "Propagation characteristics of dielectric waveguides with periodic Surface-relief", IEICE, E74, 9, pp.2839-2847, 1991.

[5] 中田康則，小柴正則，鈴木道雄，"誘電体格子による平面波回折の有限要素法解析", 信学論 (C), J69-C, 12, pp.1503-1511, 1986.

[6] 南　功治，山北次郎，沢新之輔，"周期条件を満たすグリーン関数を用いた損失誘電体格子の解析", 信学論 (C-I), J75-C-I, 8, pp.528-535，1992.

[7] 山北次郎，今村文広，広田敦志，六島　克，"固有モード展開を用いた誘電体格子の解析"，信学論 (C-I), J72-C-I, 11, pp.740-746, 1989.

[8] R. Petit, "Electromagnetic Theory of Gratings", Springer-Vverlag, Berlin, Heidelburg, New York, 1980.

[9] 松本恵治，六島　克，山北次郎，"等方性キラル格子による回折波の解析"，信学論 (C-I), J79-C-I, 11, pp.165-172, 1996.

[10] K. Matsumoto, K. Rokushima and J. Yamakita, "Three-dimensional rigorus analysis of dielectric grating waveguides for general case of oblique propagation", J.Opt.Soc.Am., A10, pp.269-276, 1993.

[11] 松田豊稔，奥野洋一，"大規模な最小２乗問題の解法についての一考察" 電学研資，電磁界理論, EMT-95-40, pp.27-36, 1995.

[12] 松田豊稔，奥野洋一，"Doubly periodic grating の回折特性算出" 電学研資，電磁界理論, EMT-95-76, pp.129-138, 1995.

[13] 若林秀昭，小南昌信，沢新之輔，中嶋　弘，"互いに補対なエレメントからなる FSS の特性"，信学研資，アンテナ伝播, AP92-74, pp.39-46, 1992.

[14] H. Wakabayashi, M. Kominami and S. Sawa, "Scattering from a Periodic Array on a Semi-Infinite Dielectric Array", Bulletin of Osaka Prefecture Univ., pp.233-245, 1992.

[15] 小南昌信，若林秀昭，沢新之輔，中嶋　弘，"半無限誘電体上の任意形状素子からなる無限周期アレーによる電磁界の散乱"，信学論 (B-II), J76-B-II, 4, pp.260-267, 1993.

[16] H. Wakabayashi, M. Kominami, H. Kusaka and H. Nakashima, "Numerical simulations for FSSs with complementary elements", IEE Microw. Antennas Propag., 141, 6, pp.477-482, 1994.

[17] 浅居正充，山北次郎，沢新之輔，石井順也，"異方性誘電体上２次元平面格子の解析"，電学研資，電磁界理論, EMT-94-55, pp.121-129, 1994.

[18] M. Asai, J. Yamakita, J. Ishii and S. Sawa, "Electromagnetic wave scattering by two-dimensional resistive plane gratings with anisotropic slab", Proc. of International Conference Modeling, Simulation and Identification,IASTED, pp.249-252, 1994.

[19] H. Wakabayashi, M. Kominami and J. Yamakita, "Scattering of Electromagnetic Wave by Double Periodic Array with a Dielectric Substrate", IEICE Trans. Fundamentals., E75-A, 11, pp.1545-1547, 1995.

[20] 伊藤龍男, "電磁波問題の基礎解析法", 第11章, 山下榮吉 監修, 電子情報通信学会, 昭和62.

[21] T.A. Cwik and R. Mittra, "Scattering from a periodic array of free-standing arbitrarily shaped perfectly conducting or resistive patches", IEEE Trans. Antennas and Propag., AP-35, 11, pp.1226-1234, 1987.

[22] S.W. Lee, G. Zarrillo and C.L. Law, "Simple formulas for transmission through periodic metal grids or plates", IEEE Trans. Antennas and Propag., AP-30, 5, pp.904-909, 1982.

[23] C. Scott, "The spectral domain method in electromagnetics", Capter 4, The Artech House Microwave Library, 1989.

[24] R. Petit and G. Tayeb, "Theoretical and numerical study of gratings consisting of periodic arrays of thin and lossy strips", J. Opt. Soc. Am. A, Vol.7, No.9, pp.1686-1692, 1990.

[25] 若林秀昭, 山北次郎, 松本恵治, 浅居正充, "平板格子における抵抗境界条件の有効性", 信学論 (C-I), J80-C-I, 9, pp.387-396, 1997.

[26] 若林秀昭, 山北次郎, 浅居正充, 松本恵治, 六島　克, "平板格子における抵抗境界条件について", 電学研資, 電磁界理論, EMT-96-78, pp.45-54, 1996.

[27] 若林秀昭, 山北次郎, 松本恵治, 浅居正充, "平板格子における近似境界条件の有効性", 電学研資, 電磁界理論, EMT-97-9, pp.49-54, 1997.

[28] 若林秀昭, 山北次郎, 松本恵治, "厚みの薄い表面レリーフ形誘電体格子による散乱特性", 電学研資, 電磁界理論, EMT-97-78, pp.71-76, 1997.

[29] 若林秀昭, 山北次郎, 松本恵治, "極めて厚みの薄い誘電体格子の解析", 電学研資, 電磁界理論, EMT-98-34, pp.61-66, 1998.

[30] タチャナジネンコ, 奥野洋一, 松島　章, "表面抵抗をもつ平板格子による平面H波の散乱", 電学研資, 電磁界理論, EMT-96-79, pp.55-65, 1996.

[31] T. Hinata and T. Hosono, "On the scattering of electromagnetic wave by plane grating placed in homogeneous medium - Mathematical foundation of point matching and numerical analysis -", Trans. IECE Japan, Vol.J59-B, No.12, pp.571-578, 1976.

[32] K. Uchida, T. Noda and T. Matsunaga, "Spectral domain analysis of electromagnetic wave scattering by an infinite plane metallic grating", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.AP-35, No.1, pp.46-52, 1987.

[33] M. Ando and M. Murota, "Reflection and transmission coefficients of a thin strip grating on a dielectric sheet",Trans.IECE Japan, Vol.E69 No.11, pp.1189-1198, 1986.

[34] 山北次郎，浅居正充，六島　克, "多層異方性基板上の電流源による散乱界の表現ースペクトル領域のグリーン関数ー"，信学論 (C-I), J73-C-I, 9, pp.594-596，1990.

[35] 牧野　滋，宮原典夫，水溜仁士，浦崎修治, "3 層メアンダーライン円偏波発生器の設計"，信学論 (B), J71-B, 11, pp.1358-1364, 1988.

[36] M. Asai, J. Yamakita and S. Sawa, "On the resistive boundary conditions for planar dielectric structure", Bulletin of Univ.of Osaka Prefecture, Series A, vol.40, 1, pp.19-30, 1991.

(付録)　抵抗境界条件に関する近似的検討

損失誘電体格子の解析において，電磁界の展開項数を $2M+1=1$ とおけば，周期性を持たない単なる抵抗平板である．この場合，抵抗平板の厚み d が小さく，比誘電率の虚数部が大きいと近似することによって，よく知られた反射係数 r および透過係数 t の公式が解析的に導け，さらに，表面抵抗 R と抵抗境界条件 $E_{\tan}=JR$ の成立する範囲が明確になる [36].

1. TE 波入射の場合

式 (22)(23) より $x=d$, $x=0$ における境界条件は

$x=d$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi_1 & -\xi_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1^+ \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi_2 & -\xi_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \exp(-j\xi_2 d) & 0 \\ 0 & \exp(j\xi_2 d) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2^+ \\ a_2^- \end{bmatrix} \tag{64}$$

$x=0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi_2 & -\xi_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2^+ \\ a_2^- \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi_3 & -\xi_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ a_3^- \end{bmatrix} \tag{65}$$

によって表される．ただし，$\xi_i(i=1,2,3)$ は x 方向の規格化伝搬定数であり

$$\xi_i=\sqrt{\varepsilon_i-s_0^2} \tag{66}$$

によって表される．いま，簡単化のために，$\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon$ (実数) とし，式 (64)(65) より a_2^+ と a_2^- を消去すれば，振幅反射係数 $r(=a_1^+)$ および振幅透過係数 $t(=a_3^-)$ は

$$r = \frac{-(\xi_2^2-\xi^2)\{\exp(j\xi_2 d)-\exp(-j\xi_2 d)\}}{2} \Big/ \left[\frac{(\xi_2^2+\xi^2)\{\exp(j\xi_2 d)-\exp(-j\xi_2 d)\}}{2}-\frac{2\xi_2\xi\{\exp(j\xi_2 d)+\exp(-j\xi_2 d)\}}{2}\right] \tag{67}$$

$$
\begin{aligned}
t &= -2\xi\xi_2/ \\
&\left[\frac{(\xi_2^2+\xi^2)\{\exp(j\xi_2 d)-\exp(-j\xi_2 d)\}}{2} - \frac{2\xi_2\xi\{\exp(j\xi_2 d)+\exp(-j\xi_2 d)\}}{2}\right]
\end{aligned} \tag{68}
$$

となる．ここで，近似関係式

$$
\begin{aligned}
&\exp(-\xi_2 d) \approx 1 - j\xi_2 d, \quad \exp(\xi_2 d) \approx 1 + j\xi_2 d \\
&\xi_2^2 = \varepsilon_2' - j\varepsilon_2'' - s_0^2, \quad (\varepsilon_2'' \gg \varepsilon_2')
\end{aligned} \tag{69}
$$

を導入し，規格化波動インピーダンス $Z = 1/\xi$ および規格化表面抵抗 $R = 1/(\varepsilon_2'' d)$ を定義すれば，反射係数 r および透過係数 t についてのよく知られた結果

$$
r = \frac{-Z}{Z+2R}, \qquad t = \frac{2R}{Z+2R} \tag{70}
$$

が得られる．

2. TM 波入射の場合

境界面 $x = d$, $x = 0$ における境界条件

$x = d$:

$$
\begin{bmatrix} \xi_1/\sqrt{\varepsilon_1} & \xi_1/\sqrt{\varepsilon_1} \\ -\sqrt{\varepsilon_1} & \sqrt{\varepsilon_1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1^+ \\ 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \xi_1/\sqrt{\varepsilon_2} & \xi_2/\sqrt{\varepsilon_2} \\ -\sqrt{\varepsilon_2} & \sqrt{\varepsilon_2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \exp(-j\xi_2 d) & 0 \\ 0 & \exp(j\xi_2 d) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_2^+ \\ a_2^- \end{bmatrix} \tag{71}
$$

$x = 0$:

$$
\begin{bmatrix} \xi_2/\sqrt{\varepsilon_2} & \xi_2/\sqrt{\varepsilon_2} \\ -\sqrt{\varepsilon_2} & \sqrt{\varepsilon_2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_2^+ \\ a_2^- \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \xi_3/\sqrt{\varepsilon_3} & \xi_3/\sqrt{\varepsilon_3} \\ -\sqrt{\varepsilon_3} & \sqrt{\varepsilon_3} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ a_3^- \end{bmatrix} \tag{72}
$$

から，TE 波入射の場合と同様に，振幅反射係数 $r(=a_1^+)$ および振幅透過係数 $t(=a_3^-)$ は式 (70) で与えられる．

輻射科学研究会資料
RS98-8

光波長多重伝送方式を用いた ミリ波アレイアンテナシステムの開発

Development of Millimeter-Wave Array Antenna System Using Optical Wavelength Division Multiplexed Subcarrier Transmission.

大見則親　平川満　岡田洋侍　　辻宏之　長谷良裕

住友電気工業株式会社　　郵政省通信総合研究所

１９９８年7月２４日（金）
於　大阪府立大学　学術交流会館小ホール

１．はじめに

携帯電話、ＰＨＳの普及に伴い、屋外においても、移動利用でのデータ通信が身近なものになってきている．さらに、有線の分野では、光ファイバ網を利用した動画像を含む大型のデータのアクセスが頻繁になされており、今後、屋外においても、広帯域の無線アクセスシステムの必要性が高まるものと考えられる．

今までに、我々は上記システムの実現のために、「ミリ波帯広帯域無線アクセス」[1,2]を提案してきた．今回は、そのうちの要素技術である「光波長多重伝送技術」と「ミリ波帯アレーアンテナ」について述べるものである．

２．システム実現のための課題

本システムを実現するための課題を表１に示す．

表１．技術的課題

1）マルチメディアに対応するため、
　ミリ波帯などの高い周波数帯の開発が必要
2）高速移動体対応　　＝広いサービスエリアが必要
　　←→ミリ波帯は伝搬損失が大きいため遠くに飛ばない。
　　a)送信電力を大きくする
　　←→大出力の電力増幅器が必要となり技術的に制約
　　b)アンテナ利得を大きくする
　　・・アンテナの指向性をシャープにして利得を稼ぎ、
　　　指向性を走査することでサービスエリアを広げる
　　　－＞電波到来方向推定アルゴリズム・装置の開発
3）基地局アンテナの集中制御化
　　＞＞低コスト化のため、指向性制御部を集中化
　　光波長多重＋光ファイバによる遠隔集中制御で
　　指向性を走査し、移動体追尾。

本システムは、動画像や大型データなどのマルチメディアに対応できる広い帯域を確保しなければならない．しかし、近年の急速な移動体通信の発展のため、周波数資源がひっ迫しており、現状の周波数帯では広い帯域の確保は望めない．そのため、広い帯域を確保できる周波数帯としてミリ波帯の開発が急務である．

ミリ波帯は波長が短いため，回路・アンテナ等の小型ならびに軽量化が期待できる反面，自由空間伝搬損失が大きくなり、サービスエリアが小さくなるという短所がある. この問題点を克服する手段として，移動体の方向を検出して、その方向にアレーアンテナの指向性を向けることにより，通信を確保する方式を提案する[3,4].

また基地局での移動体の方向検出、アレーアンテナの指向制御など複雑な処理を、光ファイバーを用いて制御局に集中させることで、コストの軽減をはかることが望ましい. 本システムでは，基地局の小型化・低価格化を実現するため，光波長多重サブキャリア伝送方式を用いて，ミリ波帯アレーアンテナの各素子アンテナで受信した信号をそれぞれ独立に制御局まで伝送すし、制御局で指向性制御に必要な処理を行うことで，基地局を RF ユニットと光伝送部だけの簡単な構成にすることを目指す.

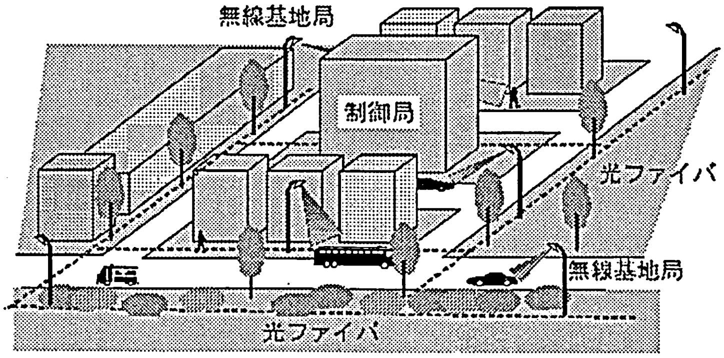


図１　利用イメージ

本システムの利用イメージを図１に示す．また開発の流れを図２に示す．

３．システムの概要

図３に基地局および制御局のブロック図を示す．ミリ波帯アレーアンテナの各素子アンテナ素子で受信された信号は，それぞれＩＦ帯に変換された後，光波長多重伝送装置により多重化され，光ファイバで制御局に送られ、そこで位相や振幅の重み付けをされて指向性合成される．さらに、カップラにより信号の一部を取り出し、直交検波器とA/D変換器により標本化をおこない、得られた複素振幅情報から移動体の到来方向推定処理をおこなっている．

次章以降では、光波長多重伝送装置、ミリ波帯アレーアンテナの詳細を述べる．

４．光波長多重伝送装置[5,6]

4-1.装置の概要

製作した光波長多重伝送装置の構成を図４に示す．光源波長の異なる電気／光(E/O) 変換器，複数の光信号を合波および分波する光カプラ，受信時に光信号を分離する光バンドパスフィルタ(BPF)，光/電気 (O/E) 変換器および電力増幅器から構成されている．

ここで，中間周波数は，LD (Laser Diode)やPD(Photo Diode) などの光デバイス入手の容易性から1.5GHzとした．また，光波長多重数は，後述のように、光伝送系の所用ＣＮＲ(Carrier to Noise Ratio)や各光波長を分離する光ＢＰＦの通過特性を考慮して 4 とした．

以下では，開発時に検討を行った光ＢＰＦの設計および光伝送部のＣＮＲについて述べる．

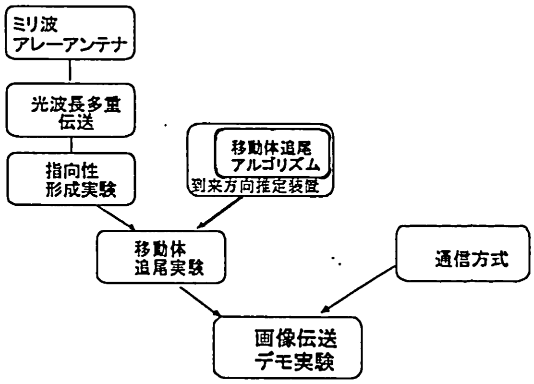


図２　開発の流れ

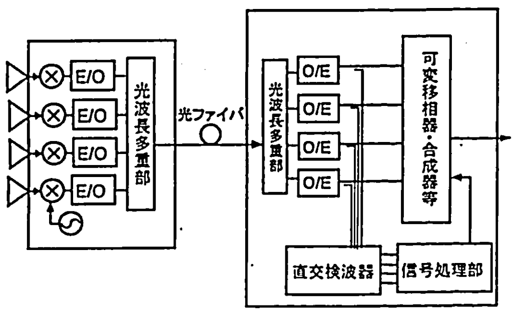


図３　システムのブロック図

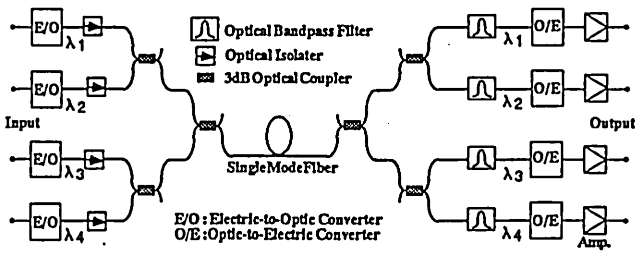


図４　光波長多重伝送装置（多重数４の場合）

4-2.光伝送路のCNRから求めた多重数

光伝送路の CNR から、多重数を決定する．クロストークのない理想的な光多重伝送路を考えると，光伝送路の CNR は次式で与えられる．

$$CNR = \frac{m^2(\eta P_t L_t^{-1})^2 L_x^{-2}/2}{BW\{\underbrace{RIN(\eta P_t L_t^{-1})^2 L_x^{-2}}_{\text{LD Intensity Noise}} + \underbrace{2q(\eta P_t L_t^{-1}) L_x^{-1}}_{\text{Shot Noise}} + \underbrace{I_t^2}_{\text{Receiver Noise}}\}} \quad (1)$$

ここで，m : 光変調度，RIN : LD の相対強度雑音，η: 受光素子感度，Pt : 送信光電力，It : 光受信器の等価雑音電流密度，Lt : 伝送光ファイバ損失，q : 電子電荷，BW : 信号帯域幅である．光合波部および光分波部の光損失を合わせた Lx は，光波長多重数を n ($n=2^i$, i = 0,1,...)，光カプラの通過損失を Lc，光アイソレータの通過損失を Li，および光BPF の通過損失を Lf とすれば，

$$L_x = (L_c)^{2\log_2 n} L_i L_f \quad (2)$$

となる．CNR の計算例を図５に，計算に用いた諸元を表２に示す．

光伝送系の所要CNRは、デジタル伝送系の所要CNR 20ｄＢ、距離変動（１から１００ｍ）のマージン２０ｄＢの合わせて４０ｄＢ以上とした． 図５から，光合波部および光分波部における損失が変化するため，多重数によって実現できる CNR が制限されることが分かる．すなわち，アレーアンテナの素子数を増やせば，アンテナの高利得化が期待できる反面，光伝送路のCNR が劣化するというトレードオフが存在する．

今回は、所要ＣＮＲを満たす最大の多重数 として、ｎ＝４を採用した．

表2. 計算に用いた諸元

相対強度雑音密度	RIN	-150 [dB/Hz]
受光素子の量子効率	η	0.85 [A/W]
送信光出力	P_t	+9 [dBm]
等価雑音電流密度	I_t	20 [pA/√Hz]
光ファイバ伝送損失	L_t	2 [dB]

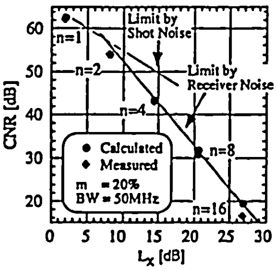


図５　多重度ｎに対するＣＮＲの変化

4-3.光ＢＰＦの設計

図４の光伝送系において、光BPF の遮断特性が十分でないと，多重伝送路間で信号の漏れ込み（クロストーク）が生じる．この結果、信号の振幅および位相に誤差を与え、その結果、所望の指向性形成が困難になると考えられる．ここでは、クロストークの影響を検討し、使用する光源の波長間隔を決定する．

多重伝送路の i 番目入力信号の複素振幅を a_i (i=1,..,n)，出力信号の複素振幅を b_i (i=1,..,n)，k 番目伝送路から i番目伝送路への複素クロストークを

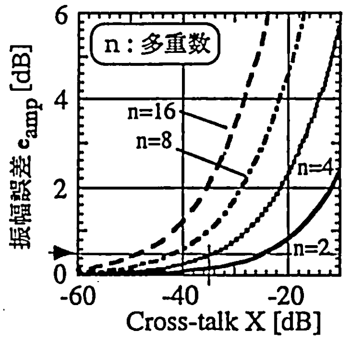


図６　振幅誤差

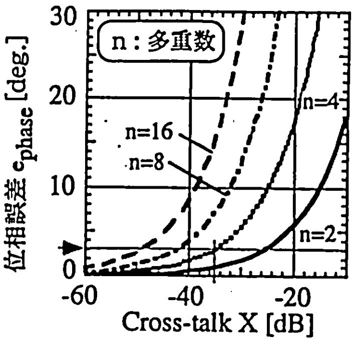


図７　位相誤差

X_{ik} とし，伝送利得 G が各伝送路間で等しいとすれば，出力信号 b_i は

$$b_i = G a_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} X_{ki} G a_k \tag{3}$$

で表すことができる．また，振幅の 2 乗誤差 $e_{amp,i}$ および位相の誤差 $e_{phase,i}$ を次式のように定義する．

$$e_{amp,i} = \frac{|b_i|^2}{|G a_i|^2} \tag{4}$$

$$e_{phase,i} = \left| \angle b_i - \angle (G a_i) \right| \tag{5}$$

多重数 n の場合の，伝送路のクロストーク X_{ik} に対する振幅 2 乗誤差 $e_{amp,i}$ および位相の誤差 $e_{phase,i}$ の理論計算結果を図6，7に示す． ここで，伝送信号は等振幅 ，およびクロストークは伝送路間によらず一定振幅（$|X_{ik}| = X$）であると仮定している．この図より，許容できる振幅 2 乗誤差を 0.5dB，位相誤差を 3 ° とすると，クロストークは -35dB 以下に抑える必要があることが分かる．

光サブキャリア伝送においては光領域での 1dB の伝送損失が，電気領域においては 2dB の伝送損失に相当することから，光BPF では，別チャンネル光信号の波長帯において17.5dB 以上の遮断特性が必要となる．

図８に光BPF の光減衰特性例として，a) 誘電体多層膜を用いた光BPF，および b)ファイバグレーティング (Fiber Grating) を用いた BPF の測定結果を示している．

図８より，17.5dB以上の遮断特性が得られるのは、a) の光BPF を用いる場合には，LD の波長間隔には約 3.5nm 以上が必要となる．また，b) の光BPF を用いる場合には，約 3nm 以上が必要となる．

光波長多重伝送装置の諸元を表３に示す．用いられた波長は、光波長多重伝送を行った場合、アレーアンテナの指向性制御に影響を及ぼさないように決められたものであり、次章で、実際

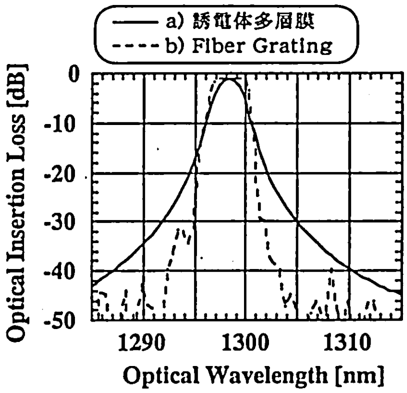


図８　光ＢＰＦの光減衰特性

表３　光伝送系の諸元

多重数	n	4
光源波長	λ	1298.3 [nm] 1304.2 [nm] 1308.5 [nm] 1315.4 [nm]
伝送路クロストーク	X	<-38 [dB]
CNR (m=20%,BW=50MHz ,光ファイバ4km伝送)		>43 [dB]
光源		DFB-LD
受光素子		Pin-PD
伝送周波数		1.5 GHz 帯

にミリ波帯での指向性制御を行って、確認をする．

５．ミリ波帯アレーアンテナの指向性制御実験

5-1.実験の目的

ミリ波帯アレーアンテナの指向性制御実験の目的を、以下に示す．

・ミリ波帯で実際にビーム走査ができるか？
・ミリ波帯において、指向性は計算に合うか？
・光波長多重伝送装置を用いて、素子アンテナの信号を４ｋｍ伝送した後も、「相対位相」「振幅」は、正しく保存されているか？

これらを確認するために、後述する１波長間隔４素子導波管スロットアンテナを用いて、最大ビーム角およびにグレーティングローブ・サイドローブの大きさ、また光波長多重伝送装置の有無で指向性に影響がでるかどうかを調査した．

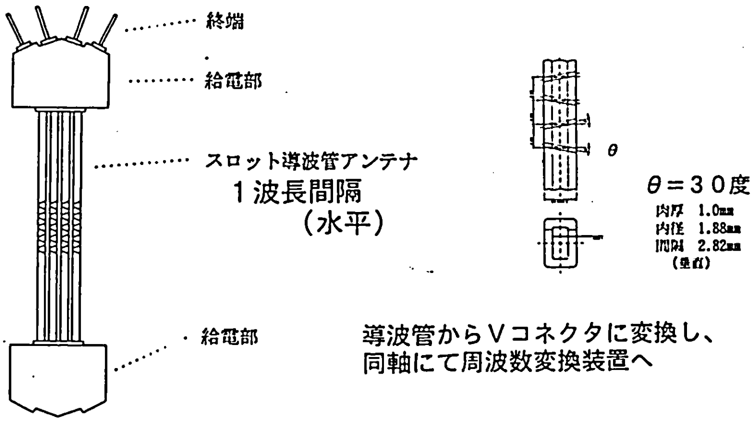


図9　1波長間隔4素子導波管スロットアンテナの構造

5-2.指向性制御実験系の構成

(1)実験系の構成

実験系の構成は、図3に示した．ミリ波帯の信号は、ミリ波帯アレーアンテナの各アンテナ素子で受信され、それぞれダウンコンバータによりＩＦ帯(1.5GHz)に変換された後，光波長多重装置により4多重化し，1本の光ファイバで集中制御局に伝送され，そこで位相や振幅の重み付けをされて合成されている[7].

なお、素子アンテナ～移相器間の各信号間の位相のバラツキは，ＩＦ帯での可変移相器で、電界ベクトル回転法により調整を行っている。

(2)ミリ波帯アレーアンテナの構造

アレーアンテナの構造を図9に示す．素子アンテナは導波管スロットアンテナであり，1素子あたりのスロット数は１０，素子数は４，素子間隔は１波長，測定周波数は５９．５ＧＨｚである．給電部には、導波管同軸変換器を接続し，そこからＶコネクタケーブルで、ダウンコンバータへと導いている．

素子アンテナのリターンロスは-30dB以下で利得は8dBiであった．素子アンテナの水平面・垂直面指向性を図１０、１１にしめす．

5-3.ミリ波帯アレーアンテナの指向性制御実験結果

まずはじめに、図１２，１３に、光波長多重伝送装置を用いないで、直接

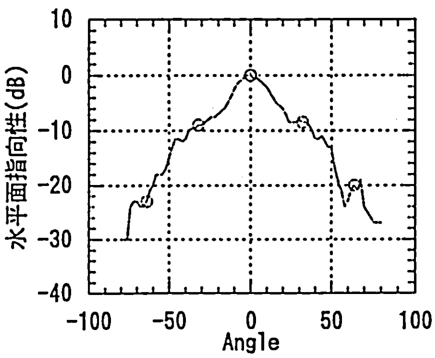


図１０　素子アンテナ水平面指向性

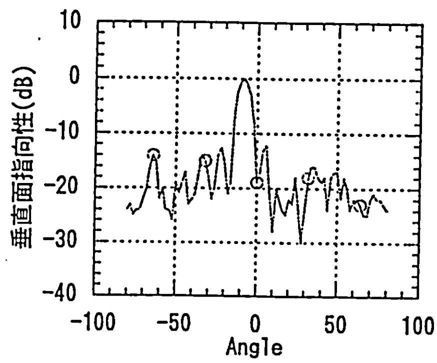
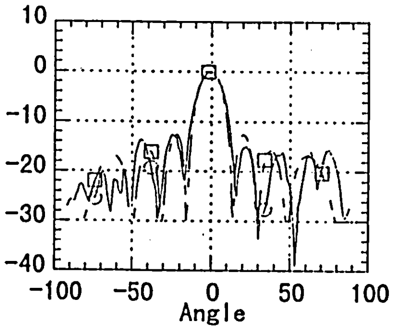


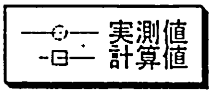
図１１　素子アンテナ垂直面指向性

ＩＦ帯で指向性制御を行った場合の指向性測定結果を計算値と共に示す．

また、光波長多重伝送装置を用いて、６０ｍおよび４ｋｍの光ファイバーによる遠隔指向性制御実験の結果を図１４、１５に示す．

どちらの場合も、１波長間隔４素子アレーアンテナを用いており、等振幅





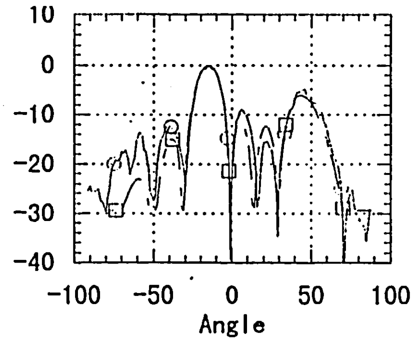
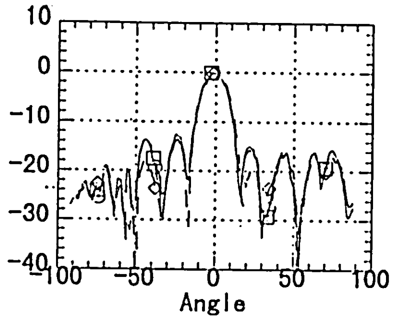


図１２　指向性計算値及び実測値（Δφ＝０）

図１３　指向性計算値及び実測値（Δφ＝９０）



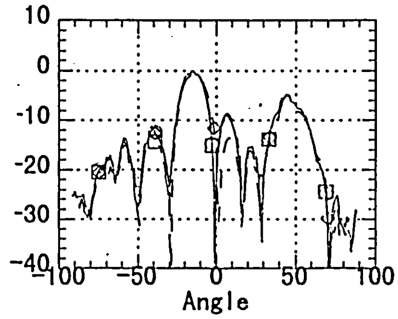


図１４　指向性実測値（Δφ＝０）

図１５　指向性実測値（Δφ＝９０）

励振，素子間の位相差(Δφ）が、０度および９０度の場合を示している．

素子間の位相差が０度（図１２）の場合、実測値は計算値にほぼ一致している．また、位相差が９０度(図１３）の場合，右４５度に大きなローブがでているが，これは素子間隔が１波長のため出てくるグレーティングローブであり，メインローブ、グレーティングローブ共に、計算値にほぼ一致していることがわかる．以上のことから、ミリ波帯においても、実際にビーム走査ができること、計算値にほぼ合った指向性が得られることが確認できた．

また、図１４、１５に示したように、光波長多重伝送装置を用いて遠隔指向性制御した場合、直接接続し制御した場合と同じ指向性を示している．このことは、光伝送系の振幅位相誤差が目標値に収まっており、かつ、４ｋｍ伝送後の各素子間の「相対位相」「振幅」は、正しく保存されていることを示している．

６．まとめ

アレーアンテナの指向性制御に要求される光波長多重伝送装置の諸元を明らかにした。

光波長多重伝送装置を用いて、ミリ波帯アレーアンテナの指向性測定を行った．

その結果，ミリ波帯においても、実際にビーム走査ができること、計算値にほぼ合った指向性が得られることが確認できた．

さらに、光波長多重伝送装置による伝送後も、各信号間の「相対位相」「振幅」は、正しく保存されていることが確認できた．

今後は，半波長間隔ミリ波帯アレー

アンテナによる走査角の広角化、移動体追尾アルゴリズムを採用した「到来方向推定装置」を組み合わせ、移動体追尾実験を行う予定である．

参考文献

［１］岡田他、”光ファイバ無線技術と高機能アンテナを用いたミリ波帯広帯域無線アクセスシステムの提案”
信学技報　ＲＣＳ９６－１１１
［２］吉本他，”ミリ波帯広帯域無線アクセス技術への取り組み”信学技報　ＲＣＳ９７－４１，１９９７
［３］岡田他、”ミリ波帯広帯域無線アクセスシステムにおける移動体追尾法”信学技報　ＲＣＳ９７－７７
［４］岡田他、”移動体追尾技術を用いたミリ波帯広帯域無線アクセスシステム”信学’９７ソ大Ｂ－５－１２９
［５］志村他，”アレーアンテナ制御のための光波長多重サブキャリア伝送方式”信学技報　ＭＷ９７－４５
［６］志村他、”ミリ波帯広帯域無線アクセスシステムにおける光波長多重サブキャリア伝送方式の特性評価”
信学’９７ソ大　Ｂ－５－１３０
［７］大見他，”ミリ波帯広帯域無線アクセスシステムにおけるアレーアンテナの特性評価”
信学’９７ソ大　Ｂ－５－１３１

輻射科学研究会
RS98-9

2次元周期構造による共振モード格子フィルター

Resonant grating-waveguide filters with two-dimensional periodic structures

菊田久雄 水谷彰夫 岩田耕一

大阪府立大学 工学部

1998年10月16日(金)
於 関西大学100周年記念会館

1. はじめに

光の波長と同程度の周期をもつ回折格子は反射型の狭帯域波長フィルターになる[1]。このようなフィルターでは対象波長での反射率を 100%に保ったまま半値幅を数オングストロームにすることが可能であり、レーザーのキャビティミラーや波長選択偏光ミラーとしての応用が考えられている。市販の多層膜誘電体によるフィルターでは通常 10nm 程度の半値幅であり、高性能なものでは 1nm のものも存在するが、その透過率は 20%程度である。

これまで報告されている共振モード型平面フィルターの研究例は１次周期構造によるものが中心で、いずれも強い偏光特性を示すものである[2]。また、２次元構造にすることで偏光特性を解消することも考えられているが、入射の条件が格子面に垂直な場合に限られている[3]。センサーへの利用など、共振モードフィルターのより広い応用を考えた場合、斜め入射に対して偏光に依存しない仕様が望まれる。我々は、斜め入射において偏光特性を無くすための２次元周期構造について検討を行った。また、実際にフィルターの設計を行い、数値計算によりその反射特性を見積もった。

2. 共振モードフィルターの原理

共振モードフィルターの原理を Fig.1 を使って"直感的"に述べる。図は１次元格子構造の例である。基板層の上に屈折率の高い導波路層があり、その上に波長程度の周期をもつグレイティングがある。入射光はグレイティングにより導波路(WG)を伝搬する光波と透過する光波に分かれる。導波路中を伝搬する光はグレイティングと結合して再び放射する。基板側に放射される光は直接の透過光と互いに打ち消し合う条件になっており、結果的にすべてが上方に反射される。このための条件は、1)格子を含めて導波路が入射光の波長を伝播させること、2)格子の周期（格子ベクトル K）が導波路での伝搬定数βと一致すること、である。入射光が垂直でないときは、入射光波数ベクトルの格子面内の成分が、格子ベクトルと導波路内での伝搬定数の差に等しい場合に共振する。

非共振条件では反射率が小さいことが望ましいので、格子と導波路層で反射防止の条件になるように設定される。反射率の半値幅は、導波路中を進む光波の減衰距離に反比例する。１次元格子の場合、TE 波と TM 波では伝搬定数が異なるので、入射の偏光により共振波長が異なる。また、図では導波層(WG)を独立に設けているが、高屈折率の媒質でグレイティングを構成すれば導波層が存在しなくても、グレイティング層が導波層を兼ねることができる。

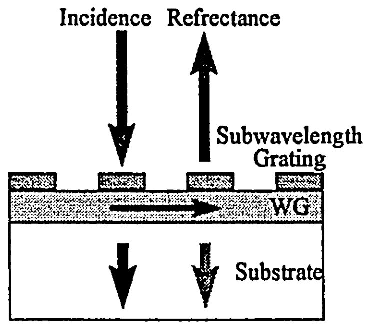


Fig.1 1-D resonance mode wave guide filter

3. 2次元構造の共振モードフィルター

x,y 方向に周期性をもつ２次元構造の場合、一つの入射偏光にたいして多くの方向に TE 波と TM 波が伝搬する可能性をもつ。導波層の厚さや x,y 方向の周期を調節することで、特定の導波モードが同じ波長で共振するようにできる。ここでは偏光依存を無くすための方法として３つの例(Type A～C)を考えた。また、製作や設置角度の誤差との関連についても検討を行った。計算には回折格子の厳密解析手法である Rigorous Coupled Mode Analysis[4]を用いた。

２次元格子の幾何学配置を Fig.2 に示しておく。この図ではグレイティング層が導波層を兼ねている。この場合、グレイティング層(region2)の平均屈折率は上方や基板の屈折率より高くなければならない。一方、当然のことであるが、反射率に偏光依存が無くなるのは、ある波長範囲に対して特定の角度で光が入射する場合である。

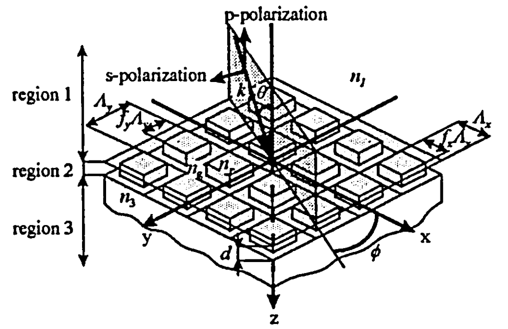


Fig.2 Two-dimensional resonance mode waveguide filter

3.1 Type A

２次元格子を Fig.3 のように 90°の回転に対して非対称な構造にすると、TE,TM 波の伝搬定数を同一方向で等しくすることができる。図では入射光(ϕ=0°)の格子面内の波数ベクトル成分を k_{in} で表しており、これに格子ベクトル Kを加えたものが伝搬定数に等しくなればよい。図の例では、p 偏光で入射した光は TM モードで、s 偏光で入射した光は TE モードで伝搬する。これらの伝搬定数は互いに等しく、かつ $k_{in}+K$に一致する。

Fig.4 にこの方法で設計したフィルターの反射特性（計算値）を示す。この例では導波層をとくに設けず、格子層が導波層を兼ねる１層型のものである。設計は屈折率 1.5 の基板上に屈折率 2.0 の矩形周期構造を想定し、入射角は θ=10°とした。p 偏光、s 偏光における共振波長は一致しているが、フィルター

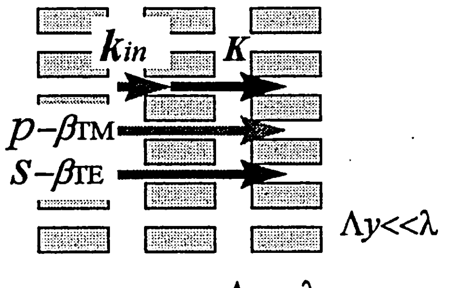


Fig.3 Type A, TE and TM waves propagate in the same direction.

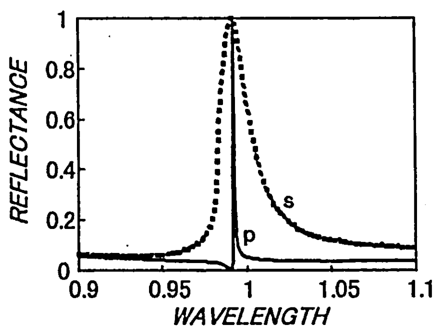


Fig.4 Refrectance of Type A filter

としての半値幅が大きく異なる。一般に TE 波の半値幅は TM 波のものに比べてかなり大きく、これらを同じにするための形状は存在しない。また、製作時の誤差により、偏光状態に対する共振波長の条件が異なる。

3.2 Type B

Type A と同様に 90°の回転に対して非対称な構造を用いて、Fig.5 のように伝搬方向の異なる形で偏光依存を無くすこともできる。p 偏光および s 偏光入射で発生する導波モードが共に TE 波になり、その伝搬方向を異なるようにすることで共振条件を一致させることができる。双方とも TE 波で構成されるので、p 偏光、s 偏光に対しする半値幅は同程度になる。

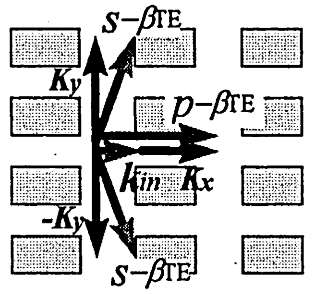


Fig.5 Type B, TE waves propagate in different directions.

Fig.6(a)にθ=5°の入射角で設計したフィルターの反射率特性を示す。s 偏光の半値幅が p 偏光のものの半分程度である。

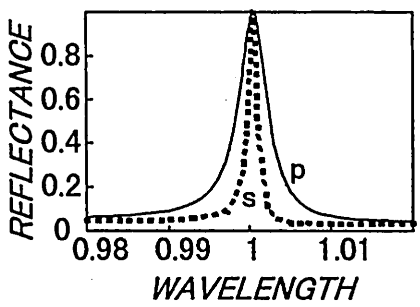


Fig.6 Reflectance of Type B

ところで、このタイプでは製作誤差に対する補償方法が無い。例えば、グレイティングの深さが設計値からずれているとき、その共振波長は当初のものからずれる。p 偏光については入射角θ の調節で共振波長をシフトさせることができるが、s 偏光は入射角θ の変化に対して鈍感であり、調節が効かない。

3.3 Type C

Fig.7 のように正方形が並ぶ 90°回転対称な構造に光を入射すると、p 偏光、s 偏光で入射する光波は二つの方向に同じ TE 波で伝搬する。構造の周期性と入射角度が図のように上下対象な場合(ϕ=45°)、二つの方向に進む伝搬定数は互いに等しいので共振波長は一つになる。また、導波路内（格子内）では同じ伝搬モードの光波となるので、反射率の半値幅は p 偏光と s 偏光で完全に等しい。製作誤差による設定波長からのずれは入射角度θ の調節で補償できる。逆に入射角度を積極的に変えることで、共振波長の調節（変更）が行える。

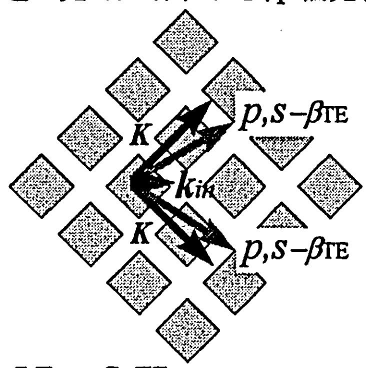


Fig.7 Type C, TE waves propagate in the same directions.

この場合の設計例を Fig.8 に示す。共振波長 688nm、入射角度θ=10°を仕様とし、非共振条件での反射率を低減するために２層構造のものとした。石英基板上に Si_3N_4 膜を導波層とし、２次元格子は電子線レジストで構成図されるものを想定した。反射特性の計算値を Fig.9 に示す。半値幅は p 偏光 s 偏光共に約 0.4nm である。p,s で僅かにデータが異なるのは数値計算の誤差だと思われる。また、隣接する他の共振条件での波長は 30nm 以上離れている。

入射角θ の変化に対する共振波長のズレは約 5nm/度であった。入射角φ の変化に対しては共振周波数の分離が生じる。1°のφ の変化に対して 1.5nm の共振波長の分離があらわれる。

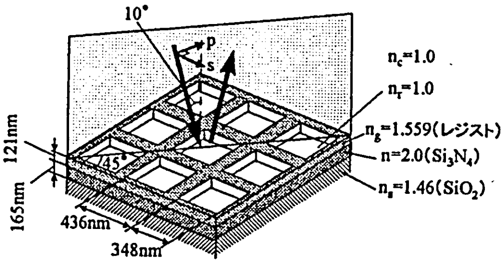
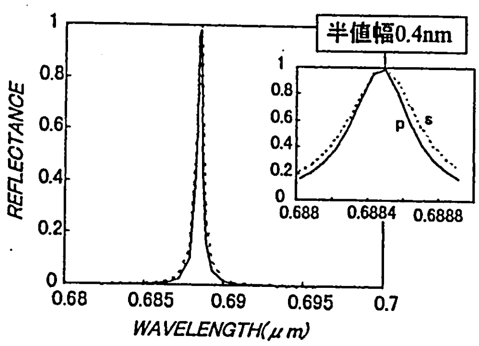


Fig.8 Two dimensional grating of Type C.



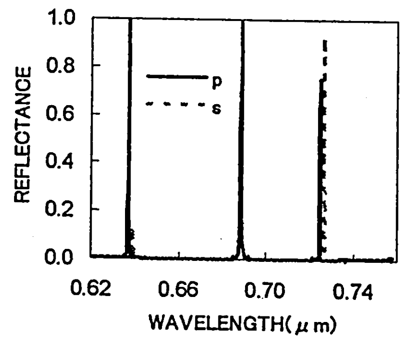


Fig.9 Reflectance of Type C

4. フィルター以外の応用

先に述べたように共振モードフィルターは入射角度に対して非常に敏感である。このことはフィルターとしては決して好ましいことではないが、これを利用した角度・波面・屈折率センサーなどが考えられる。

角度に対する感度を Fig.9 の 5nm/°とした場合、半値幅 0.4nm は 0.08°に対応する。もし反射光強度を 50 分割の精度で測定した場合、0.0016° (3×10^{-5}rad)の分解能で角度ズレを計測することができる。これは可視光の干渉縞の場合、縞間隔が 2cm のものが測定できることに対応する。

また、２次元格子である必要はないが、格子上部の雰囲気（媒質）の屈折率を測定することも考えられる。

文献

1)R.Magunusson et al., Appl.Phys.Lett. 61 (1992) 1022

2)S.Peng et al., Optics Lett. 21, 8 (1996) 549

3)S.Peng et al., J.Opt.Soc.Am.A 13, 5 (1996) 993

4)M.Moharam et al., J.Opt.Soc.Am.A 12, 5 (1995) 1068-1076

輻射科学研究会資料
RS98－10

時間領域法における共振器Ｑの計算法と
ＦＤＴＤ格子の粗さに基づく誤差

Method for Computing the Resonator Q
and Coarseness Error in the FDTD Method

飯田 幸雄
関西大学工学部

1998年10月16日(金)
於 関西大学 100周年記念会館

概　要　時間領域の電磁界解析において，共振器の無負荷Qと外部 Q を計算する新しい方法を提案している．これらの Q 値はエネルギー関係を基にして計算されるもので，正弦波で励振された電磁界の振幅増加過程の初期段階でQ 値が求められる．

最初に，厳密解と比較するために，このエネルギー法を開口の無い TE_{101} モード矩形空洞に適用し，表皮抵抗の広範囲の値にわたって無負荷 Q が 0.01%程度の誤差で計算できることを示すと共に，無負荷 Q が 10^{12} と非常に高くても共振周波数の 230 周期程度の計算で十分であることを示す．

次に，本論文では，FDTD 法における導体コーナ付近での誤差の問題を取り上げて，格子の配置方法と格子粗さの側面から検討を行い，導体コーナに対する有用な処理方法を提案している．

最後に，上記の計算を通して，提案している Q 計算法が有用で精度の高いものであることを確認している．

1．はじめに

FDTD 法 [1]，TLM 法 [2]，空間回路網法 [3] などの時間領域の電磁界解析法に関しては多くの報告がある．近年，FDTD 法において導体のエッジやコーナ付近での格子粗さに基づく誤差に関する研究が行われている [4]-[9]．しかし，FDTD 格子の配置との関係を取扱った報告はあまり見られない．

一方，共振器の時間領域での解析も行われている [10]-[19]．最近，高 Q 共振器に適用可能な 3つの方法が報告されている．最初の方法 [10]，[12] は，エネルギー関係を基にして計算するもので，正弦波で励振された電磁界の振幅増加過程の初期段階で Q 値を求める方法である．第 2の方法 [20] は，正弦波励振状態での共振器内の蓄積エネルギーと内部媒質での損失電力を電磁界より直接求め，Q の定義式によって計算するものである．この方法は，Q の定義式をそのまま使うので，定常的な電磁界が分かれば，どの様な Q でも求められるが，体積内の全ての蓄積エネルギーや媒質内での全ての損失電力を計算しなければならない．第 3 の方法 [21] は，パルス入力後の自由振動状態における電磁界の減衰曲線とQ値の関係 [22] から求めるものである．この方法は，多少の拡張性はあるものの基本的には負荷 Q しか求められない．これら 3 つの方法についての報告は全て無負荷 Q を取扱ったものである．

本論文は，外部 Q と内部 Q を求める方法を提案している．これらの Q は，励振点からの入力エネルギーと観測点電磁界振幅からエネルギー関係を基にして計算される．この方法は，文献 [10] の方法を入出力ポートを有する場合へ拡張すると共に，安定な計算ができるように計算方法を改良したものである．

本論文は，また，FDTD 法における導体コーナ付近での誤差の問題についても検討している．開口をもつ矩形空洞の外部 Q が誘導性しぼりを構成する導体コーナー付近での電磁界計算の精度に大きく影響することを利用して，格子の配置方法と格子粗さによる誤差から，導体コーナに対する簡単で有用な方法を提案する．

2．共振器Qの計算法

2.1　計算法

1つの入出力ポートをもつ共振器を考える．定常状態において，共振器の蓄積エネルギー

E_S，ポートからの出力電力 P_A，共振器内での損失電力 P_0 は共振器内電磁界振幅 A の 2 乗に比例する．

共振器内に適当な励振点と観測点を置き，共振周波数の正弦波で励振点から励振する．Q値の高い共振器では，電磁界は徐々に増加を続け，次の τ_E と τ_0，

$$\tau_E = E_S / P_A, \quad \tau_0 = E_S / P_0 \tag{1}$$

はある一定値に落ち着くと考えられる．これらの収束値 τ_{EC}，τ_{0C} から外部 Q と無負荷 Q が求められる．

$$Q_{EXT} = \omega\, \tau_{EC}, \quad Q_0 = \omega\, \tau_{0C} \tag{2}$$

ここで，$\omega = 2\pi f$ は励振角周波数である．

τ_E と τ_0 は以下のように計算できる．最初，共振器内に損失を与えず，$t=0$ より電磁界を励振する．時刻 t における蓄積エネルギーを $E_{S1}(t)$，励振開始からの全入力エネルギーを $E_{I1}(t)$，ポートからの全出力エネルギーを $E_{A1}(t)$とすると，次の関係が成立する．

$$E_{S1}(t) = E_{I1}(t) - E_{A1}(t) \tag{3}$$

ポートからの出力電力を $P_{A1}(t)$とすると，

$$E_{A1}(t) = \int_0^t P_{A1}(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

の関係があり，$E_{I1}(t)$と $P_{A1}(t)$は容易に求められるので,次式

$$\tau_E(t) = E_{S1}(t) / P_{A1}(t) \tag{5}$$

から $\tau_E(t)$が計算でき，外部Qが求められる．

次に，共振器内に損失を与え，励振する．この場合，蓄積エネルギー，全入力エネルギー，および全出力エネルギーを，それぞれ，$E_{S2}(t)$, $E_{I2}(t)$，$E_{A2}(t)$と表すことにする．また，観測点の電磁界振幅を $A_2(t)$とすると，次の関係が成立する．

$$E_{S2}(t) = E_{S1}(t)\left\{\frac{A_2(t)}{A_1(t)}\right\}^2 \tag{6}$$

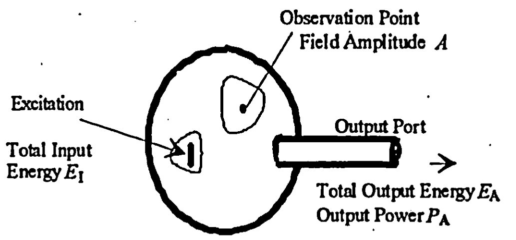


Fig.1 Resonator model under investigation.

ここで，$E_{S1}(t)$，$A_1(t)$は損失を与えない最初の場合の蓄積エネルギーと観測点電磁界振幅である．従って，$E_{S2}(t)$を得ることができる．励振開始から時刻 t までの共振器内での全損失エネルギーを $E_{02}(t)$とすると，次の関係が成り立つ．

$$E_{02}(t) = E_{I2}(t) - E_{A2}(t) - E_{S2}(t) \tag{7}$$

$E_{I2}(t)$と $E_{A2}(t)$は，最初の場合と同様に求まるので，$E_{02}(t)$が求められる．$E_{02}(t)$の時間に対する傾きを計算すると，$\tau_0(t)$が計算できる．

$$\tau_0(t) = \frac{E_{S2}(t)}{\partial E_{02}(t)/\partial t} \tag{8}$$

E_{I1}，E_{I2}，A および $\partial E_{02}/\partial t$ の具体的な計算方法は 2.2 節で，E_{A1} と E_{A2} については 3 節で述べる．

以上に述べた共振器Qの計算法は，エネルギー関係を基にしているので，エネルギー法と呼ぶことにする．

2.2 計算例

Q値の具体的な計算法を示し，解析的に導ける厳密解と比較するために，図 2 に示す開口の無い TE_{101} モード矩形空洞の無負荷Qを FDTD 法によって計算する．x=0 の y-z 面に磁気壁を，y=0 の x-z 面に電気壁を配置し，4 分の 1 の領域で解析する．導体壁では，表皮抵

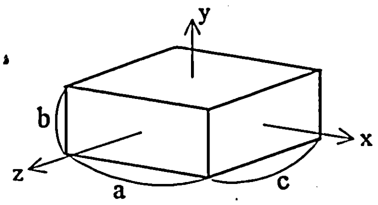


Fig.2 Cavity resonator. a=c=23mm and b=10 mm.

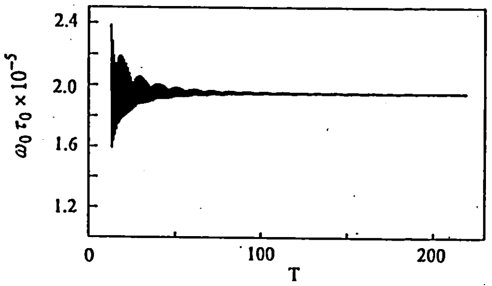


Fig.3 Variation in $\omega_0\tau_0$ as a function of normalized time T. R_S=0.001Ω.

抗R_Sのみを考慮する．これは，表皮効果に基づく表皮インピーダンスの虚部に蓄えられるエネルギーが空洞の蓄積エネルギーに比べて十分に小さいからである．FDTD 格子のサイズは，$\Delta x = \Delta z = 0.5$mm，$\Delta y =$ 1mm であり，時間刻み Δtは，安定のための臨界値 [23] の半分の値を用いる.なお，この節での計算は倍精度で行っている．

励振の方法，入力エネルギー，観測点電磁界振幅，$\partial E_{02}/\partial t$の計算法を以下に説明する．

(1) 励振点に電流密度$I_y/(\Delta x\Delta z)$の電流源を置き，$I_y = \sin\omega t$として$t=0$から励振する．全入力エネルギーE_Iは，Δt間の入力エネルギー$\Delta E_I = -\Delta y E_y I_y \Delta t$の総和として求める．

(2) 観測点の電磁界振幅 A は，励振周波数の１周期分の離散データに，離散フーリエ正弦・余弦変換を適用して求める．励振周波数の１周期の間に２０点の割合で計算する．

(3) 共振器内での全損失エネルギーE_{02}は，瞬時入力エネルギーの変化に対応して励振周波数の周期で変動している．従って，$\partial E_{02}/\partial t$ の値は，求めたい時刻の前後 10 周期分，合計２０周期分の E_{02} の離散データを最小２乗近似して得られた２次の多項式から求める．

計算は次の節で述べられる２種類の格子配置を用いて行われる．電磁界変数の位置を$(x/\Delta x, y/\Delta y, z/\Delta z)$の形で表すことにすると，type 1の格子配置における励振点は E_y(0, 1/2, 0)，観測点は E_y(6, 4+1/2, 0)であり，type 2に対しては,それぞれ E_y(1/2, 0, 1/2)，E_y(5+1/2, 4, 1/2)である．

共振周波数f_0は，$T \equiv ft = 150$のチューニングカーブから求め，type 1，type 2の両格子配置共に 9.2153 GHz であった．これは，理論共振周波数 9.21675 GHz より 0.016%低い値である．図３は，表皮抵抗が R_S=0.001Ωのときの T=0〜230 に対するτ_0の変化である．τ_0はある値に収束して行くのが分かる．T の範囲の最後から４分の１に相当する T=167.5〜219.2 の範囲の平均値から Q_0 を計算する．このように計算された無負荷 Q の結果を表１に示す．表皮抵抗値 R_S の広い範囲にわたって，0.01%程度の誤差で Q_0 が求まっている．Q が 10^{12} と非常に高くても,共振周波数の 230 周期に相当する計算時間で求まることが分かる．また，格子配置の種類による差は小さいことも分かる．図４は，励振周波数に対する Q_0の変化を type 1 の格子配置について調べたものである．励振周波数の設定はそれほど敏感に Q_0の計算値に影響を与えないことが分かる．

Table 1 Comparison of the unloaded Q with theoretical value for the TE_{101} mode rectangular cavity without a port.

R_s [Ω]	$R_s Q_0$ [Ω]		
	Theory	Type 1	Type 2
10^{0}		194.8548	194.8761
10^{-1}		194.7016	194.6987
10^{-2}		194.6434	194.6380
10^{-3}		194.6368	194.6312
10^{-4}		194.6361	194.6305
10^{-5}	194.6243	194.6360	194.6304
10^{-6}		194.6360	194.6304
10^{-7}		194.6360	194.6302
10^{-8}		194.6361	194.6266
10^{-9}		194.6363	194.6191
10^{-10}		194.6372	194.4255
10^{-11}		194.6204	195.0301

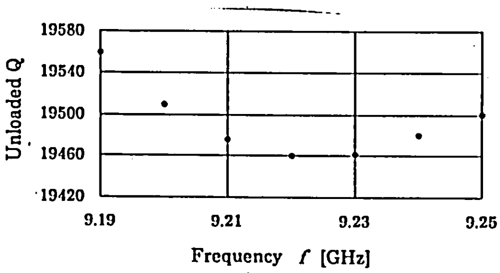
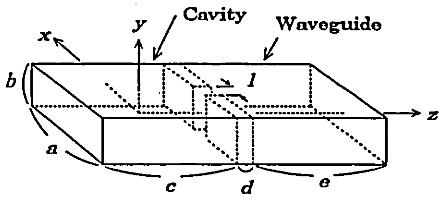


Fig.4 Variation in $\omega_0 \tau_0$ as a function of normalized time T. R_S=0.001Ω.

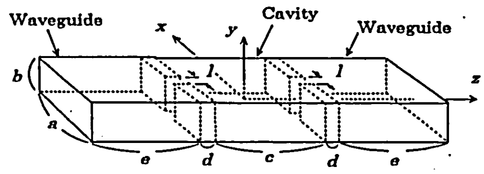
これらの結果から，Q 計算法の妥当性が示される．

3. 解析モデル

誘導性しぼりで構成した開口を有する図５の空洞共振器を FDTD 法を用いて解析する．この際，図６に示す２種類の格子配置を用いる．また，それぞれについて，粗い格子と細かい格子を用いる．TE_{101} モードを念頭において



(a) One-port cavity.



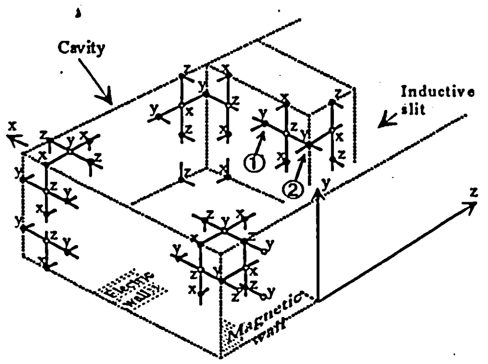
(b) Two-port cavity.

Fig.5 Cavity resonators with apertures. a=c=23mm, b=10mm, d=2mm and e=24mm.

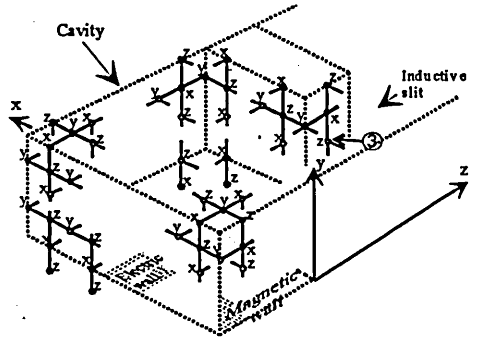
解析するので，磁気壁と電気壁を用いて解析領域を小さくする．１開口空洞では，x=0 の y-z 面を磁気壁，y=0 の x-z 面を電気壁として解析する．２開口空洞では，x=0 の y-z 面と z=0 の x-y 面を磁気壁として，y=0 の x-z 面を電気壁として解析する．また，開口に接続されている導波管は TE_{10} モードの波動インピーダンスで終端する．

図６に電磁界変数の配置を示している．●印は電界変数を，○は磁界変数を示し，付随する x，y，z はその成分を表す．また，実線は差分演算で関係する変数間を接続したものである．導体面上の電磁界変数は，通常よく用いられる方法 [10], [24], [25] で処理する．例として，図６に ①，②，③として示された点での処理法を説明する．

導体壁面上にあり，壁面に平行な電界成分を受け持つ点での処理法を図６(a)に①と示された E_y (i, j, k)点を例にとり説明する．導体壁面上では，$\partial H_x / \partial z = 0$ の関係がほぼ成立するの



(a) Type 1 arrangement.



(b) Type 2 arrangement.

Fig.6 The two types of grid arrangements.
●: electric fields, ○: magnetic fields.

で，H_x (i, j, k) が H_x (i, j, k-1/2) にほぼ等しいと考え，次式が成立するとして処理する．

$$E_y^{n+1}(i,j,k) = -E_y^n(i,j,k) - 2R_S H_x^{n+1/2}(i,j,k-1/2) \qquad (9)$$

ここで，上付きの n 等は時間ステップを表す．②と示された導体コーナーの E_y (i, j, k) 点では，場の特異性に対する特別な取扱はせず，点① と同様な取扱とする．すなわち，

$$E_y^{n+1}(i,j,k) = -E_y^n(i,j,k) + R_S \cdot [H_z^{n+1/2}(i-1/2,j,k) - H_x^{n+1/2}(i,j,k-1/2)] \qquad (10)$$

図 6 (b)に③ と示された H_z (i, j, k) 点では，次のファラデーの法則，

$$\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_s \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (11)$$

を，E_y (i, j, k)， E_x (i, j+1/2, k)，E_y (i-1/2, j, k)，および E_x (i, j-1/2, k) 点を通る積分路に適用して，処理する．FDTD 法の表現では次式となる．

$$H_z^{n+1/2}(i,j,k) = H_z^{n-1/2}(i,j,k) + \frac{2\Delta t}{\mu_0 \Delta x \Delta y} \cdot \Big[\frac{\Delta x}{2}\{E_x^n(i,j+1/2,k) - E_x^n(i,j-1/2,k)\} - \Delta y\{E_y^n(i,j,k) - E_y^n(i-1/2,j,k)\}\Big] \qquad (12)$$

一方，点 (i, j, k)では，次の関係が成り立つ．

$$E_y^n(i,j,k) = (R_S/2) \cdot [H_z^{n+1/2}(i,j,k) + H_z^{n-1/2}(i,j,k)] \qquad (13)$$

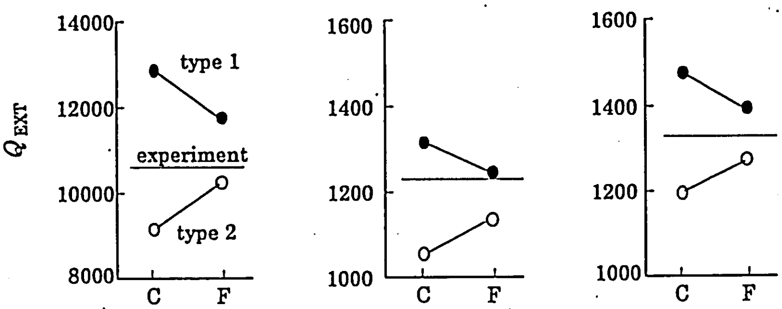
式(12)と(13)より $E_y^n(i,j,k)$ を消去した関係式を解くことにより，$H_z^{n+1/2}(i,j,k)$ を求める．

FDTD 格子のサイズは，粗い格子では $\Delta x = \Delta z = 0.5$mm，$\Delta y = 1$mm，細かい格子では $\Delta x = \Delta z = 0.25$ mm，$\Delta y =$ 1 mm である．共振器内に設置する励振点，観測点および導波管内の観測点の電磁界成分と座標を表 2 にまとめている．

導波管内の観測点は開口から失われる全エネルギー E_A を計算するために置かれている．この点での E_y から TE_{10} モードの瞬時出力電力 P_A を 求め，Δt ごとのエネルギー $\Delta E_A = P_A \Delta t$ の総和から全出力エネルギーを求める．

Table 3 Computed results and the comparison with that of experiment. Character C1 and F1 indicate the coarse and fine meshes of type 1 arrangement, respectively, while C2 and F2 are for type 2.

Cavity l [mm]			one port 5	one port 7	two ports 7
Resonant frequency f [GHz]	Experiment		9.135	9.063	8.909
	Calculation	C1	9.147	9.070	8.937
		F1	9.145	9.066	8.929
		F2	9.140	9.060	8.917
		C2	9.135	9.054	8.907
External Q	Experiment		10600	1230	1330
	Calculation	C1	12853.7	1323.27	1475.30
		F1	11747.9	1243.21	1391.35
		F2	10284.0	1139.92	1281.57
		C2	9125.15	1055.64	1191.05



(a) 1-port, l=5mm (b) 1-port, l=7mm (c) 2-ports, l=7mm

Fig.7 Variations in the external Q for the mesh sizes . Symbols C and F on the abscissas indicate the coarse mesh and the fine mesh, respectively.

Table 2 Excitation points, observation points and the observation points in the output waveguide. Character C and F indicate the coarse mesh and fine mesh, respectively.

Grid arrangement		Type 1	Type 2
Field component		E_y	E_y
Excitation point	C	(0, 1/2, 0)	(1/2, 0, 1/2)
	F	(0, 1/2, 0)	(1/2, 0, 1/2)
Observation point (Cavity)	C	(6, 4+1/2, 0)	(5+1/2, 4, 1/2)
	F	(11, 4+1/2, 0)	(11+1/2, 4, 1/2)
Observation point (Output Waveguide)	C	(0,1/2,75)	(1/2,0,1/2)
	F	(0,1/2,150)	(1/2,0,149+1/2)

4. 計算結果と検討

共振周波数とQ値の計算手順は2節と同様であるが，共振周波数は T=100 のチューニングカーブから決定した．また，倍精度で行った式(3)-(4)，(6)-(8)の計算以外は単精度で行った．

共振周波数と外部Qの計算結果を表3示す．細かい格子で計算した結果を比較すると，type 1 の格子配置で得た結果と type 2 のものでは，共振周波数においては約 0.1%の差しかないが，外部Qでは，8.2 % から 13.3% の差がある．格子の粗さに対する外部Qの変化を図7

に示す．格子が細かい程，type1 と type 2 の外部Qは，お互いに接近すると共に，それらの平均値に近ずくことが分かる．また，type 1 のものの方が type 2 のものより大きく，両者の平均値は実験誤差の範囲で実験値によく一致している．

図8は，誘導性しぼり付近の電磁界分布を l = 5mm の1開口空洞について示したもので，type1 と type 2 の電磁界が比較されている．電磁界は，type 1 に対しては，点 $(x/\Delta x,\ y/\Delta y,\ z/\Delta z) = (0, 2+1/2, -22-1/2)$ の H_x の振幅で，type 2 に対しては，点 (1/2, 3, -23)の H_x の振幅で規格化されている．これら両点での H_x 振幅の差は，開口の無い矩形空洞の TE_{101} モード電磁界から0.1%と見積もられる．従って，図8より，type 2の E_y と H_x は，開口部において，type 1 の

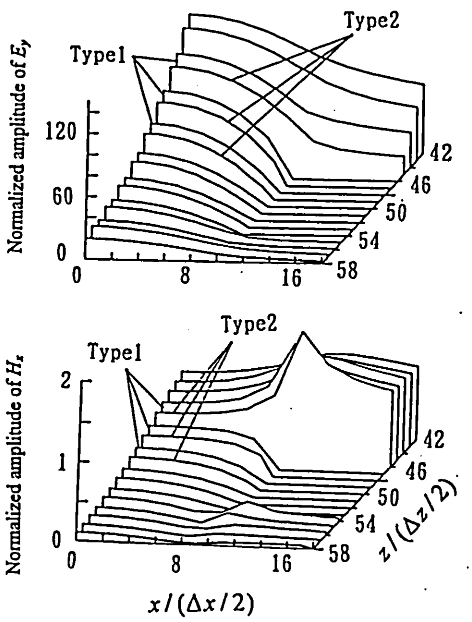


Fig.8 The electromagnetic field distributions in the vicinity of the inductive aperture are compared for the two types of grid arrangements. The amplitudes of the E_y and H_x at T=100 in the one-port cavity with l = 5mm are shown. The coarse mesh is used.

それらより強いことが分かる．これは，type 2の場合には，type 1 に比べてより多くの電力が開口から出て行くことを意味し，type 2の外部Qが type 1 のものより小さく計算されていることに対応している．

type 1，type 2の格子配置の違いによって，外部Qに大きな差が生じるのは，開口部での電磁界計算の誤差が外部Qに大きく反映されるためである．ここでは，このことを利用して格子粗さに基づく誤差を検討していることになる．

FDTD 法による電磁界計算では，格子が細かい程計算誤差が小さくなると考えるのが自然である．ここで，格子が細かい程，type1 と type 2 の外部Qは，お互いに接近すると共に，それらの平均値に近ずくことと，両者の平均値が実験誤差の範囲で実験値によく一致ことを思い出すと，次の結果は十分に支持されるものと考えられる．すなわち，開口を出て行く電力は，type 1 の格子配置では実際の電力より小さく計算され，type 2では大きく計算されるという結果である．このことは，FDTD 法における導体コーナーの処理にとって大切な事柄である．

図9と表4は，type 1 の細かい格子を用いた l =7mm の1開口空洞に対する計算結果である．表皮抵抗 R_S は，$z/\Delta z = -46 \sim 55$ の範囲の導体面に考慮されている．なお，誘導性しぼりを構成している導体の外側の面は $z/\Delta z = 54$ に位置している．図9は，R_S=0.01Ω のときの T に対する τ_E と τ_0 の変化を示しており，τ_E と τ_0 がある値に収束して行くことが分かる．表4は，表皮抵抗 R_S に対する Q_0 の変化を示している．表皮抵抗の広範囲の変化に対して Q_0 が安定に計算されていることが分かる．

これらの結果から，外部Qと無負荷Qの計算法は妥当な方法であることが分かる．但し，当

然のことであるが，電磁界が正確に計算できることが条件である．

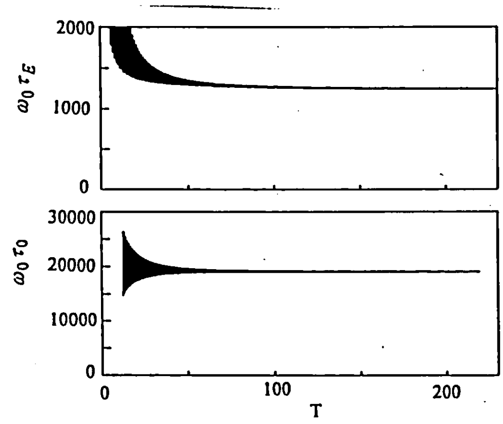


Fig.9 Variations in $\omega_0\tau_E$ and $\omega_0\tau_0$ as a function of normalized time T for the one-port cavity with l=7mm. Type 1 arrangement is used. R_S=0.01Ω.

Table 4 Variation in the unloaded Q as a function of the surface resistance R_S for the one-port cavity with l =7mm. Type 1 arrangement is used. f_0 =9.066GHz.

R_s [Ω]	$R_s Q_0$ [Ω]
10^{-1}	190.5850
10^{-2}	190.5382
10^{-3}	190.5329
10^{-4}	190.5324
10^{-5}	190.5323
10^{-6}	190.5323
10^{-7}	190.5323
10^{-8}	190.5323
10^{-9}	190.5322
10^{-10}	190.5212
10^{-11}	190.5810

5．グレイデッドメシュを用いた解析

ここでは，さらに格子間隔を狭くするために，格子間隔を徐々に狭くするグレイデドメシュ [9] を用いて，l =5mm の1開口空洞を例にとって格子配置の影響を検討する．なお，この節での計算は倍精度で行っている．

格子は，図10に示す様に，誘導性しぼりを構成する導体のコーナ付近に細かく格子を配置する．なお，導体コーナより離れたところでは，前節で用いた等間隔の粗い格子を配置している．格子の配置方法を図 11(a)に示す．この図は，基本的な配置方法を示すもので，簡単のため1次元方向のみを示しているが，実際には図10の様に x，z の両方向に間隔を変えている．図中の AB 間，BC 間で間隔をグレイディングファクタ [9] q_1，q_2 に従って徐々に変化させている．同図(b)は B 点を境界として C 点方向に導体がある場合の格子の配置方法を示しており，図6に示したと同様の type 1，type 2 の配置の様子である．表5に，$a=b$ の場合を "GM Type1,2" と表現，$a=\sqrt{q_1}\,b$ の場合を "GG Type

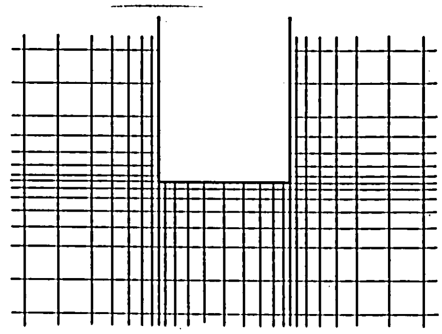


Fig.10 Graded mesh arrangement near the inductive aperture. The graded factor q=1.410415. $\Delta x=\Delta z=0.5$mm and $\Delta y=$ 1mm. $\Delta x_{\min}/\Delta x=\Delta z_{\min}/\Delta z=0.179170$.

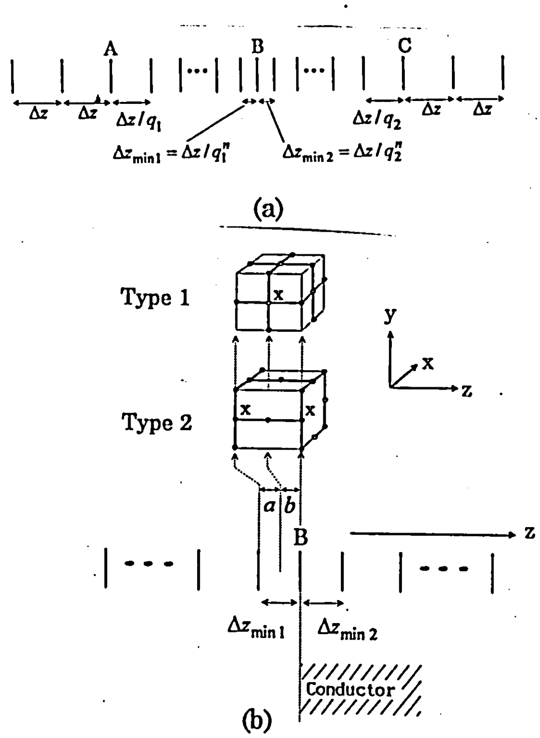


Fig.11 Graded mesh and grid arrangement.

Table 5 Mesh parameter.

Notation	Grid Arrangement
M Type 1, 2	$a=b$, $q_1=q_2=1.410415$ $\Delta z_{\min 1}=\Delta z_{\min 2}=0.179170\Delta z$
G Type 1, 2	$a=\sqrt{q_1}\,b$, $q_1=q_2=1.410415$ $\Delta z_{\min 1}=\Delta z_{\min 2}=0.179170\Delta z$
G Type 3	$a=\sqrt{q_1}\,b$, $c=d=b/2$ $q_1=1.397737$, $\Delta z_{\min 1}=0.1874446\Delta z$ $q_2=1.423576$, $\Delta z_{\min 2}=0.1710397\Delta z$

Table 6 Computed results for the one port cavity with l=5mm, using the graded mesh.

Resonant Frequency f [GHz]	GM Type1	9.1424
	GG Type1	9.1416
	GG Type3	9.1412
	GG Type2	9.1406
	GM Type2	9.1396
Q_{EXT}	GM Type1	11565.22
	GG Type1	11169.73
	GG Type3	10978.74
	GG Type2	10691.89
	GM Type2	10334.18

1,2" と表現して格子の配置条件をまとめている．

共振周波数と外部 Q の計算結果を表 6 に示している．また，外部 Q の比較を図 7(a)の結果も含めて図 12 に示している．"GM "と"GG"とは$\Delta z_{\min 1}$が同じであるにもかかわらず，type 1 と type 2 の外部 Q は，"GM" では 11% の差があるのに対して，"GG" では 4.3%の差となっている．これは，導体コーナの付近では$a=\sqrt{q_1}\,b$の様に格子間隔をスムーズ変化させるべきであることを意味する重要な結果である．

また，図 12 の結果より，正確な Q 値は type 1 と type 2 の中間にあると考えるのが妥当で

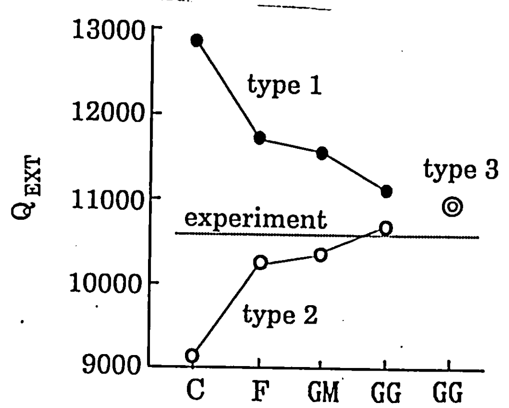


Fig.12 Variations in the external Q.

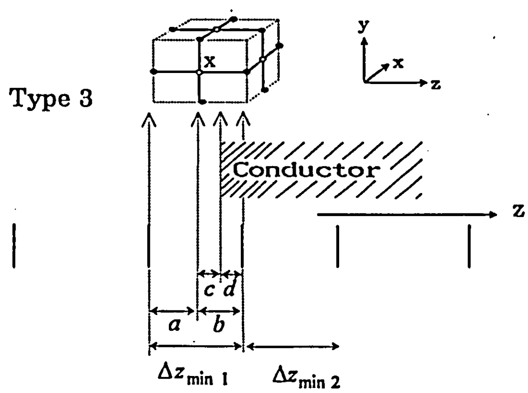


Fig.13 Type 3 arrangement.

ある．両タイプの格子を重ねて配置すれば，より正確な値を得ることができると思われるが，計算が複雑となる．そこで，ここでは，導体境界を両タイプの中間に配置する type 3 の方法を検討した．この様子を図 13 に示す．また，具体的な条件を表5に“GG Type 3”として示している．この方法での結果を図 12 中に◎印で示している．よい値が得られていると考えられる．導体コーナの処理として有用で精度の高い方法と考えられる．

なお，“GG Type 1, 2, 3”で計算した無負荷Qの結果を表7に示す．type 1 と type 2 での差は0.5%程しかないが，type 3 ではほぼその中間の値が得られている．この表の結果もQ値計算法であるこのエネルギー法の有用性を示している．

Table 7 Variation in the unloaded Q as a function of the surface resistance R_S.

R_s [Ω]	$R_s \cdot Q_0$ [Ω]		
	Type 1	Type 3	Type 2
10^{-1}	190.8442	190.4449	189.8434
10^{-3}	190.7847	190.3865	189.7796
10^{-5}	190.7840	190.3859	189.7789
10^{-7}	190.7840	190.3858	189.7776
10^{-9}	190.7868	190.3758	189.6048
10^{-11}	190.8064	190.5361	171.8929

6．むすび

エネルギー関係を基にする共振器の内部 Q と外部 Q を計算する方法を提案した．最初に，解析的に導ける厳密解と比較するために，このエネルギー法を開口の無い TE_{101} モード矩形空洞に適用し，表皮抵抗の広範囲の値にわたって，無負荷 Q が 0.01%程度の誤差で計算できることを示した．また，無負荷 Q が 10^{12} と非常に高くても共振周波数の 230 周期程度の計算で十分であることが示された.これは，フーリエ変換を利用する方法とは比較にならない大きな改善である．

本論文は FDTD 格子の配置と粗さに基づく計算誤差についても報告している．このエネルギー法を誘導性絞りで構成された開口をもつ矩形空洞に適用し，開口部導体コーナでの電磁界計算の誤差が外部 Q に大きく反映することを利用して，格子の配置方法と格子間隔に関する問題を詳細に検討し，導体コーナにおいても誤差の少ない新しい処理方法を提案した．

また，これらの計算を通して，ここで提案しているエネルギー法が有用で精度の高いものであることを示した．

文　献

[1] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", IEEE Trans., vol.AP-14, no.3, pp.302-307, May 1966.

[2] S. Akhtarzad and P. B. Johns, "Solution of Maxwell's equations in three space dimensions and time by the t.l.m. method of numerical analysis", IEE Proc., vol.122, no.12, pp.1344-1348, Dec.1975.

[3] 吉田則信，深井一郎，福岡諄一,"電磁界の節点方程式による過渡解析," 信学論,vol.J63-B, no.9, pp.876-883, 1980-09.

[4] B.-Z.Wang, "Small-hole formalism for the FDTD simulation of small-hole coupling," IEEE Microwave Guided Wave Lett., vol.5, no.1, pp.15-17, Jan. 1995.

[5] B.-Z.Wang, "Enhanced Thin-slot formalism for the FDTD analysis of Thin-slot penetration," IEEE Microwave Guided Wave Lett., vol.5, no.1, pp.15-17, Jan.1995.

[6] S.Kapoor, "Sub-cellular technique for finite-difference time-domain method," IEEE Trans, vol.MTT-45, no.5, pp.673-677, May 1997.

[7] P.Przybyszewski and M.Mrozowski, "A conductive wedge in Yee's mesh," IEEE Microwave Guided Wave Lett., vol.8, no.2, pp.66-68, Feb. 1998.

[8] E.A.Navarro, N..T.Sangary and J.Litva, "Some consideration on the accuracy of the nonuniform FDTD method and its application to waveguide analysis when combined with the perfectly matched layer technique," IEEE Trans, vol.MTT-44, no.7, pp.1115-1124, July 1996.

[9] W.Heinrich, K.Beilenhoff, P.Mezzanotte and L.Roselli, "Optimum mesh grading for finite-difference method," IEEE Trans., vol.MTT-44, no.9, pp.1569-1574, Sept. 1996.

[10] 飯田幸雄，森田正信, "FD-TD 法による空胴解析での Q 値の計算法と曲面導体壁の取り扱い", 信学論, vol.J77-C-I, no.9 p.496-503, 1994-09.

[11] D.H.Choi and W.J.R.Hoefer, "The finite-difference time-domain method and its application to eigenvalue problems," IEEE Trans., vol.MTT-34, no.12, pp.1464-1470, Dec. 1986.

[12] 飯田幸雄，山本完，松本万典，森田正信, "空間回路網法による空胴共振器のQ値も計算法". 信学論,vol.J72-C-I, no.6, pp.359-360, 1989-06.

[13] X.Zhao, C.Liu and L.C.Shen, "Numerical analysis of a TM_{010} cavity for dielectric measurement," IEEE Trans. vol.MTT-40, no.10, pp.1951-1959, Oct. 1992.

[14] Y. Iida and M. Morita, "Modeling of curved conductor surface in analysis cavity resonators by spatial network method," IEICE Trans. Electron., vol.E78-C, p.193-200, Feb. 1995.

[15] R.Mittra and P.H.Harms, "A new finite-difference time-domain (FDTD) algorithm for efficient field computation in resonator narrow-band structures," IEEE Microwave Guided Wave Lett., vol.3, no.9, pp.316-318, Sept. 1993.

[16] A.Navarro, M.J.Nunez and E.Martin, "Finite difference time domain FFT method applied to Axially symmetrical electromagnetic resonant devices," IEE Proc. vol.137, Pt.H, no.3, pp.193-196, June 1990.

[17] A. Navarro, M. J. Nunez, and E. Martin, "Study of TEo and TMo modes in dielectric resonators by a finite difference time-domain method coupled with the discrete Fourier transform," IEEE Trans., vol.MTT-39, no.1, pp. 14-17, Jan. 1991.

[18] J.D.Wills, "Spectral estimation for the transmission line matrix method," IEEE Trans., vol.MTT-38, no.4, pp.448-451, April 1990.

[19] Z.Bi, Y.Shen, K.Wu and J.Litva, "Fast finite-difference time-domain analysis of resonators using digital filtering and spectrum estimation techniques," IEEE Trans. vol.MTT-40, no.8, pp.1611-1619, Aug. 1992.

[20] 橋本修，阿部琢美: "FDTD 時間領域差分法入門", 森北出版, 1996, p.62-66.

[21]本間尚樹，陳 強，澤谷邦男.,"FDTD 法を用いたマイクロストリップ共振器の Q 値の解析",平成８年度電気関係東北支部連大論文集 p.18.

[22] R. E. Collin, "Field theory of guided waves", IEEE Press, New Jersey, 1991, p.387-389.

[23] A.Taflove and M.E.Brodwin, "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equation," IEEE Trans., vol.MTT-23, no.8, pp.623-630, Aug. 1975.

[24] T. G. Jurgens, A. Taflove, K. Umashankar and T.G. Moore, "Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces," IEEE Trans., vol.AP-40, no.4, pp.357-366, April 1992.

[25] Y.Hao and C.Railton, "Analyzing electromagnetic structures with curved boundaries on Cartesian FDTD meshes," IEEE Trans, vol.MTT-46, no.1, pp.82-88, Jan. 1998.

輻射科学研究会資料
ＲＳ９８－１１

電磁事象の新しい視点と基本課題の解明（1）
— 電磁界の動的性質とポインティング・ベクトルの意味 —

A New Point of View of Electromagnetic Phenomena
and the Solution of the Fundamental Problems (1)
— The Activated Character of the Electromagnetic Field
and the Meaning of the Poynting Vector —

中 島 將 光
京都大学 情報学研究科

1998 年 10 月 16 日
於 関西大学１００周年記念会館

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS C-I

EiC C-I

電子情報通信学会論文誌

VOL.J81—C-I NO.9 SEPTEMBER

エレクトロニクスI—光・波動

1998

エレクトロニクスソサイエティ

社団法人 電子情報通信学会

THE ELECTRONICS SOCIETY

THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

論　文

電磁現象の基本概念と電磁界の新しい性質

中島　将光[†]

A Basic Concept of Electromagnetic Phenomena and the Novel Characteristics of Electromagnetic Field

Masamitsu NAKAJIMA[†]

あらまし　前世紀後半，マクスウェルによって定式化された電磁気学は，現在，物理学の重要な部門として，また，電気・電子工学の基礎として緻密な学問体系を形成している．しかしながら，以下に述べるようにいくつかの基本的な問題が残されている．そこで，電磁事象を原点から見直し，標本関数なる手法を導入することによって，マクスウェルの方程式を物理的かつ数学的に分析した．その結果，電磁界の新しい性質が見えてくると共に，場の振舞いの自己無撞着な描像が得られることを示した．特に，従来，静電界あるいは静磁界と称されてきたものは，単に静止していると考えるより動的なものとしてとらえる方が合理的であって，電磁現象を静・動の区別なく(すべて動的なものとして)一般的に把握できることを種々の観点から説明した．これは，電磁現象の統一的な理解に資すると共に基本問題解決への糸口を与える．

キーワード　電磁気学，電磁界，平面波展開，ポインチングベクトル

1. まえがき

現在，普通に理解されているところによれば，電磁現象の根元は電荷にある．そして，電荷間の相互作用はそれに起因する場を媒介として働く．つまり，電磁現象は，電荷→場→電荷という図式によって集約される(注1)．電磁現象が力として，またエネルギーとして我々の感覚に直接的にとらえられるのは，電荷を通じて初めて可能なのであるから，電磁場の理解は間接的にならざるを得ない．しかし，物質的でない電磁場も諸々の現象を通して物理的実体として把握されるようになっている．そして，電荷と場との相互作用はマクスウェルの方程式によって定式化され，電荷（電子）の内部構造に立ち入らない限り，定性的にも完全に理解されたように考えられている．しかしながら，数式的な表現を得ることと，現象を理解することとは密接に関連してはいるが，両者は別であることに注意したい．そこで，マクスウェルの方程式を物理的に見直すことから始めよう．

2. 予備的な考察

2.1 マクスウェルの方程式について

まずマクスウェルの方程式を書き下し，その物理的意味について若干の注意を促しておく(注2)．

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \partial \boldsymbol{D}/\partial t + \boldsymbol{J} \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t \tag{4}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

最初の式(1)について，電磁気学の教科書では，(単位体積当り）電荷 ρ から ρ 本の電気力線が出ると表現される．感覚的にとらえやすい表象ではあるが，例えば，水が涌き口から涌き出すときの流線のようにとられやすい．確かに，そのようなアナロジーは成り立っているが，物質（流体）と場との本質的な相違に注意

† 京都大学工学部電子通信工学教室，京都市
Department of Electronics and Communication, Kyoto University, Kyoto-shi, 606-8501 Japan

(注1)：現代物理学においては量子論的な場が根元的なものと考えられているが，電磁気学の範囲においては上のような現象論的な見方がわかりやすい．しかしながら，考察を進めていくに従って，(電磁）場がより本質的な役割を果たしていることが理解されるであろう．

(注2)：ここでは自由空間における現象を扱うので，真空の誘電率および透磁率はそれぞれ ε, μ とおく．また，方程式の表示も，一応，電気・電子工学において普通に用いられているものを採用する．自由空間においては，表示の相違は問題にならない．

する必要がある．式(1)の関係にある電束 D と電荷 ρ とは，不可分に一体となっている．一つの電荷があれば，そこに電束の発散があり，電束の発散があれば，その集積点にその密度に対応する電荷がある．しかし，電荷と電束の発散は一体であると言っても両者の関係は量的に一体であって，それ以上のものではない．

電荷が一様な速度で移動すると，一定の電流 $J = \rho \mathrm{v}$ が流れたことになるので，式(3)によって磁界の回転が生じる．

更に，電流を変化させると，すなわち，電荷に加速度を与えた場合，電界と共に磁界も時間的に変動する．すると，式(3)と(4)とが結合し，電荷あるいは電流から独立した電界と磁界との結合系が生じる．これが，マクスウェルによって予言された電磁波にほかならない．

このように，電磁界は電荷に固有な電界，電流に固有な磁界，およびそれらとは独立の電磁界とに区分できる．電荷および電流に独立な場は，電荷の加速運動によって励起されるものであって，電荷に力を加えることによって初めて発生する．換言すると，その（場の）エネルギーは外部より供給されるものであって，電荷を媒介とするが，電荷を離れた場である．

電磁界を上のように三つに分類したのは，場(注3)の振舞いを正確に理解するための便宜であって，電磁界そのものの性質が互いに違うわけでは決してない．つまり，局所的に見た場合，その起源のいかんにかかわらず，電荷あるいは「磁荷」(注4)に作用する力としての性質（場の定義）は異ならない．

なお，電磁場が物質と相互作用するのは電荷あるいは電流を媒介とするのであって，電荷がなければ，電磁場があってもそれを感知することはできない．従って，荷電粒子の内部機構も電磁現象にとって看過できない問題である．そこで，そのようなミクロな領域への適用を考えて，マクスウェルの方程式を修正する試みもある．ここでは，一応，マクスウェルの方程式の範囲内で論ずることにする．

2.2　電荷を離れた電磁界

次に，電荷から離れた電磁界について詳細に検討する．教科書などに例示されているように，電荷が上下に動く，あるいは分極する場合を考える．すると，図1に示すように，正負電荷の分離によって下向きに電束 $D^{(1)} = \varepsilon E^{(1)}$ が生じ，電気的エネルギーが空間に蓄えられる．また，式(3)によれば，電荷移動による電流 $J^{(0)}$ と変位電流 $\partial \varepsilon E^{(1)}/\partial t$ との和に相当した磁界の回転 $\mathrm{rot}H^{(2)}$ が存在する．変位電流 $\partial \varepsilon E^{(1)}/\partial t$ は電流源 $J^{(0)}$ の方向とは反対であるから，磁界 $H^{(2)}$ はそれによって打ち消されてすぐには増加しない．

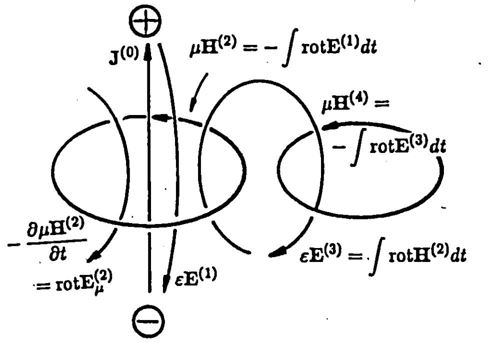


図1　電磁界運動の概念図
Fig. 1　Conceptual illustration of electromagnetic propagation.

式(4)によると，磁界 $H^{(2)}$ の時間的変化に伴って，その回りを電界 $E^{(2)}_{\mu}$ が左ねじ方向に巻きつく．これは，図1からわかるように，変位電流による最初の電界 $E^{(1)}$ へフィードバックされる．つまり，電気エネルギーは反作用のために瞬間的には広がらず，ひとまず，その近傍に蓄積される．

このように $E^{(1)}$ が局在化する，つまり，外側に向かってその値が減少しているので，空間的微係数 $\mathrm{rot}E^{(1)}$ が生じる．すると，式(4)の時間積分

$$\int \mathrm{rot}E^{(1)}dt = -\mu H^{(2)} \tag{5}$$

に従って，磁界 $H^{(2)}$ が電界 $E^{(1)}$ を左ねじ方向に取り巻いて増加しつつある．

この磁界 $H^{(2)}$ ができると，それを右向きに取り巻いて $\mathrm{rot}H^{(2)}$ が生じるので，

$$\int \mathrm{rot}H^{(2)}dt = \varepsilon E^{(3)}$$

に従って電界 $E^{(3)}$ が発生する．

図1から明らかなように，この電界 $E^{(3)}$ は，電離の中心では最初にできた電界 $E^{(1)}$ および $E^{(2)}_{\mu}$ を打ち消す方向になっており，それから離れた場所では最初の電界と同一方向である．換言すれば，時間をおい

(注3)：同一のものが工学の分野では電磁界，物理の分野では電磁場と呼ばれる．概念的な相違も感じられるので（場の方が意味が広い），慣用なども考慮して混用した．
(注4)：真の磁荷は存在しないが，磁気ダイポール（磁石）の磁極を電荷に対応させると，クーロンの法則が成立することから磁界が定義される．

て電界が磁界の回転の時間積分を媒介として広がることを示している．

この電界 $E^{(3)}$ ができると，それを右向きに取り巻いて $\mathrm{rot}E^{(3)}$ が生じ，式(4)の時間積分(5)に従って磁界 $H^{(4)}$ が発生する．以下同様にして電磁界は源から遠ざかっていく．図1の紙面上で見ると，電界 $E^{(3)}$ はその場所で下方を向き，それによって生じた磁界 $H^{(4)}$（内側の磁界は打ち消されるので，新たに生じた外側の磁界に着目）は紙面の奥を向いている．つまり，電磁界の広がる方向はポインチングベクトルの方向に一致する．

ところで，電磁波の伝搬についてなされてきた従来の解釈は上述のものとは逆である．電磁波関係の教科書では，電流によって引き起こされた磁界の時間変化によって電界がその回りに生じ，その電界の時間変化に応じて磁界が現れ，その磁界の時間変化によって……と説明される．そのように推論すると，電磁波は広がるのではなく，源の近傍における $H^{(2)} \to E_{\mu}^{(2)}$ のように，むしろ収縮することになる．しかも，その時間的順序はポインチングベクトルの方向とは逆である(注5)．

これは，源の近傍に拡散せずに滞留する電磁エネルギーが存在することに対応するとみられる．アンテナ近傍に滞在する電磁界は準静電界および誘導界と呼ばれ，それぞれアンテナからの距離の3乗および2乗に反比例する．それに対して電荷・電流から離れた場は放射界と呼ばれ，アンテナからの距離に反比例する．

電磁界の振舞いの予備的な考察として物理的に説明したが，要するに電磁事象は物質とは異なり，多面的な性質をもつので，それに応じた見方，例えば同じ現象を見るにも相反する視点から観察することが必要である．このような多角的な吟味の詳細については稿を改めて論ずる予定であるが，最後の事例について言えば，次のような事実に着目すべきである．すなわち，電磁波の励起にはまず電荷を動かさねばならないが，いったんそれが励振されると，その逆作用によって進行する（作用と反作用）．このようなメカニズムに着目すると，後述するように，電磁界は静電磁界・動電磁界を区別することなく総括的に把握することができ，電磁事象の矛盾のない統一的な理解が得られる．また，新たな事実を発見する縁ともなる．

まえがきの最後に触れたように，電磁事象を深く理解するには物理的に把握することが大切であるが，同時にそれが正確であるためには数学を看過することができない．そこで，議論を厳密かつ一般化するために，簡単な事例から数式的に扱うこととする．

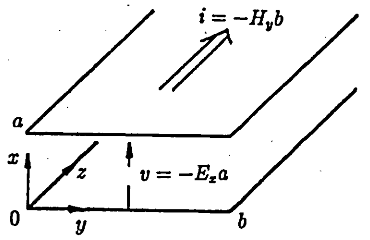


図2　電界に垂直に入れた薄い平行平板
Fig. 2　Thin plane conductors placed in perpendicular to the electric field.

3. 電磁界の物理

3.1 基本モデル

まず簡単な場合から考察する．電界の x 成分および磁界の y 成分のみが存在するものとし，マクスウェルの方程式において E_x および H_y のみを残すと

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{6}$$

を得る．電界が x 方向のみであれば，それに垂直に薄い平板導体を置いても電磁界は全く影響を受けない．図2に示すように間隔 a を隔てて2枚の平面導体板を平行に置くと，導体間には $v = -E_x a$ なる電位差が生じる．上の導体の下面には y 方向の単位長さ当り $-H_y$ なる密度の電流が $+z$ 方向に，下の導体の上面には等量の電流が $-z$ 方向に流れる．y 方向の幅 b 当りの電流を $i = -H_y b$ とおき，$a \times b$ の領域のみに着目し，(6) の左の式に $-a$ を，右の式に $-b$ を掛けると

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -L\frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -C\frac{\partial v}{\partial t} \tag{7}$$

が得られる．これは伝送線路の方程式であって

$$L = \mu a/b, \quad C = \varepsilon b/a$$

である．

この等価回路は図3のように表される．この線路の左端に電流源を接続してパルス電流 $I^{(0)}$ を流し込ん

(注5)：電磁波伝搬の説明について従来の教科書では E, H および E×H の向きは明示されないか，示されてあっても注意して見ると，どこかに矛盾がある．参考のために例を挙げるならば，Max Born, Die Relativitätstheorie Einsteins, Springer-Verlag, 1964 (p.159) [瀬谷訳，アインシュタインの相対性原理，講談社 (p.182)，ほか．]，牟田，電磁力学，岩波，1992 (p.99) など．

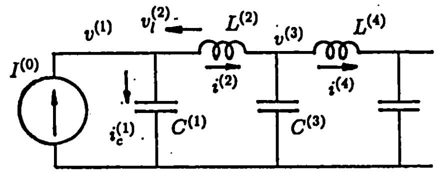


図3　平面波の $a \times b$ 断面の等価回路
Fig. 3　Equivalent circuit in the cross-sectional area $a \times b$ of a plane wave.

だとすると，インダクタンス $L^{(2)}$ には逆起電力 $v_l^{(2)}$ のためにすぐには電流は流れず，容量 $C^{(1)}$ に流れ込み電荷として蓄えられる．その両端の電圧も直ちには上昇せず，電流の積分

$$v^{(1)} = \frac{1}{C^{(1)}}\int\{I^{(0)} - i^{(2)}\}dt \tag{8}$$

に比例して次第に上昇する．これは前述のモデルにおいて下向きの電界 $E^{(1)}$ に対応する．なお，インダクタンスによる逆起電力 $v_l^{(2)}$ は，図1の電界 $E_\mu^{(2)}$ に符合する．また，$C^{(1)}$ に流れる電流

$$i_c^{(1)} = I^{(0)} - i^{(2)}$$

は$\partial\varepsilon E^{(1)}/\partial t$ に相当する．容量の両端の電圧が上がると，その積分に比例してインダクタンス $L^{(2)}$ に電流

$$i^{(2)} = \frac{1}{L^{(2)}}\int\{v^{(1)} - v^{(3)}\}dt \tag{9}$$

が流れ，次の微小区間の容量 $C^{(3)}$ を充電する．その電流によって電源側における $C^{(1)}$ の両端の電圧が降下し，$L^{(2)}$ を通して流れた電流の積分に応じた電圧が $C^{(3)}$ に発生して，電圧は1区間右へ進むことになる．

以下同様な現象が繰り返されて電磁波動が伝搬する．なお，図1と図3とは番号などを付して対応を見やすくしてある．

このように，回路モデルを援用すると，電磁界運動（伝搬）の物理的性質が式(3)，(4)あるいは(8)，(9)からわかるように，積分の結果生じる電磁界あるいは電圧・電流の増加は，ε, μ あるいは C, L に逆比例している．例えば，式(3)を

$$\int \mathrm{rot}\boldsymbol{H}\, d\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \boldsymbol{E}$$

と書いて見ればわかるように($J = 0$)，ε, μ(あるいは C, L)は，一定の積分値（例えば，一定の蓄積電荷）に達するまでの時間スケールを拡大することを意味する．換言すると，$\varepsilon, \mu(L, C)$ に比例する値だけ積分時間が長くなるので，現象の一巡過程は $d(t/\varepsilon)$ と $d(t/\mu)$ との幾何平均

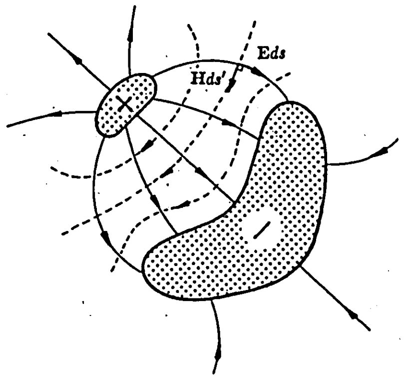


図4　一般伝送線路の横断面
Fig. 4　Cross-sectional area of a general transmission line.

$$\sqrt{d(t/\varepsilon)d(t/\mu)} = dt/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

なる時間単位で進む．よって，進行速度は $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ に比例することが納得される．

3.2　エネルギー伝送

上のモデルにおいて上下の導体間に電圧 v が存在し，それに電流 i が流れると

$$vi = E_x H_y ab \tag{10}$$

なる電力が $+z$ 方向に伝達される．導体板は今考えている電磁界には何の影響も与えないので，それを取り除いて考えると，単位断面積当り $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ の電力が移動していると言える．

上の議論を一般化して，任意の断面形状をもつ互いに平行な2本の直線導体の間を伝搬する平面波(TEM)波を考える．図4に示すように，導体線路の垂直断面内において電磁界はラプラスの方程式を満足する．そこで一方の導体から他方の導体まで電気力線 $\boldsymbol{E}$ を積分すると，導体間の電位差$v = -\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$ を得る．電気力線に垂直に交わる等電位線は磁力線に一致するので，それを一周積分すると，導体に流れる電流 $i = -\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}'$ に等しい(注6)．その積をとって式を変形すると，ベクトル公式によって

$$vi = \int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} \oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}' = \iint \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S}$$

となることが導かれる．ここに，$d\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{E}$ に沿って，$d\boldsymbol{s}'$ は $\boldsymbol{H}$ に沿ってとるものとし，面積要素 $d\boldsymbol{s}\times d\boldsymbol{s}' = d\boldsymbol{S}$

(注6)：右（負）方向に回って周回積分するときは，＋印導体に流れる電流を，逆回転に積分するときは － 印導体に流れる電流を表す．

とおいた[注7]．

電界と磁界とは断面内の至るところで直交しているので，任意の微小面積をとると，前述の平行平板線路を微小化して当てはめることができる．従って，上式右辺の被積分項は，線路断面内の微小面積 dS 内を紙面の奥に向かって流れる電力を表し，それを断面全体にわたって積分したものが vi にほかならない．言い換えると，電磁界理論（場の理論）的に表現した $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ は微小単位断面積当りの伝送電力を表すのに対し，回路理論的に表現した vi はそれを全断面にわたって積分したものに相当する．すなわち，電磁界理論と回路理論とは微分と積分の関係にある．これは，前節において電荷は電界の集積点であると述べたことに呼応している．

3.3 単一平面波

さて，マクスウェルの方程式あるいは波動方程式 (6) の最も基本的な解は，平面波

$$E_x = \widehat{E_x}\, e^{j(\omega t - kz)}, \quad H_y = \widehat{H_y}\, e^{j(\omega t - kz)} \quad (11)$$

である．ここに

$$H_y = \eta E_x, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon/\mu}$$

このとき，$\Re E_x \cdot \Re H_y$ の時間平均をとると，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*/2$ の実部に等しい．上の議論から，これは明らかに今考えている平面波の単位断面積当りの平均伝送電力を表し，複素ポインチングベクトルとして知られているものである．

ここで，エネルギー伝送などについて少し言及したのは，後続の論文においてポインチングベクトルを一般的に解明するための準備であって，単一平面波の場合は，上述のように，このベクトルは明確な物理的意味をもっている．

4. 電磁界の励振

もとに戻って，電磁界の性質を更に詳しく調べるために，いくつかの形で場を励振してその伝搬の様子を考察する．

4.1 方形パルス励振

図2の線路の左端 $z = 0$ において，一定電圧 $v = -\overline{E}_x a$ を $\Delta t = \Delta z/c$ の時間だけ印加して，以後切り離したとすると

$$E_x = \overline{E}_x \sqcap (ct - z), \quad H_y = \overline{H}_y \sqcap (ct - z) \quad (12)$$

なる波動が線路に励振される．ここに，$\sqcap(z)$ は $z = -\Delta z/2$ から $z = +\Delta z/2$ の区間で 1，そのほかでは 0，すなわち

$$\sqcap(z) = u(z + \Delta z/2) - u(z - \Delta z/2) \quad (13)$$

なる関数と定義する．$u(z)$ は単位階段関数であり[注8]，

$$\overline{E}_x = \zeta \overline{H}_y \quad (14)$$

$$\zeta = 1/\eta = c\mu = 1/c\varepsilon = \sqrt{\mu/\varepsilon}$$

である．

4.2 直流励振

方形インパルス励振 (12) を $\Delta t = \Delta z/c$ の間隔で連続的に無限回繰り返すならば，標本関数 $\sqcap(z)$ の定義によって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqcap\{ct - (z - n\Delta z)\} = 1 \quad (15)$$

であるから，式 (12) の総和をとることによって，直流で励振された波動

$$E_x = \sum_n \overline{E}_x \sqcap \{c(t + n\Delta t) - z\} = \overline{E}_x$$

$$H_y = \sum_n \overline{H}_y \sqcap \{c(t + n\Delta t) - z\} = \overline{H}_y$$

を得る．

今考えている半無限長線路の励振においては，電界と磁界との間に $\overline{E}_x = \zeta \overline{H}_y$ なる関係が満たされているが，もっと一般的な直流励振を考えてみよう．

E_x と H_y 成分のみが存在する場合のマクスウェルの方程式 (6) の一般解は，ダランベールによれば

$$E_x(z,t) = \overrightarrow{E}_x(ct - z) + \overleftarrow{E}_x(ct + z)$$

$$\zeta H_y(z,t) = \overrightarrow{E}_x(ct - z) - \overleftarrow{E}_x(ct + z) \quad (16)$$

と表される．$\overrightarrow{E}_x(z)$ および $\overleftarrow{E}_x(z)$ は任意の関数である．

さて，静電磁界 $\overline{E}_x$ と $\overline{H}_y$ とがあるものとし，

(注7)：$\mathbf{H}\cdot ds = 0$ および $\mathbf{E}\cdot ds' = 0$ に注意する．

(注8)：厳密には，単位階段関数は
$u(z) = 0$ for $z < 0$,　$u(z) = 1/2$ for $z = 0$,
$u(z) = 1$ for $z > 0$ のように定義する．
また，標本関数の変数は無次元化して $\sqcap(z/\Delta z)$ のように，その間隔 Δz によって規格化して表現することに決めれば，いろいろな変数に使えて便利である．つまり，x を無次元量とするとき，$\sqcap(x)$ は $|x| < 1/2$ のとき 1 であって，それ以外で 0 であると定義できる．しかし，標本間隔（例えば Δz）が自明な場合は，分母の Δz を表式の簡単化のため省略することとする．具体的に言えば，式 (13) は

$$\sqcap\left(\frac{z}{\Delta z}\right) = u\left(\frac{z + \Delta z/2}{\Delta z}\right) - u\left(\frac{z - \Delta z/2}{\Delta z}\right)$$

を簡略表現したものである．

$z_n - \Delta z/2 \leqq z < z_n + \Delta z/2$ の領域にある静電磁界のみに着目する．そして，上に定義した標本関数 $\sqcap(z)$ を使って

$$E_x^{(n)} = \overline{E}_x \sqcap (z - z_n), \quad H_y^{(n)} = \overline{H}_y \sqcap (z - z_n) \tag{17}$$

と表現する．これらを $t=0$ における初期条件として，一般解 (16) に課すと

$$E_x^{(n)}(z,t) = \frac{\overline{E}_x + \zeta\overline{H}_y}{2} \sqcap (ct - z + z_n) + \frac{\overline{E}_x - \zeta\overline{H}_y}{2} \sqcap (ct + z - z_n) \tag{18}$$

$$\zeta H_y^{(n)}(z,t) = \frac{\overline{E}_x + \zeta\overline{H}_y}{2} \sqcap (ct - z + z_n) - \frac{\overline{E}_x - \zeta\overline{H}_y}{2} \sqcap (ct + z - z_n) \tag{19}$$

つまり，この二つの式は，$t=0$ で初期条件 (17) を満足し，かつ，$\pm z$ 方向に光速 c で進行する二つの方形インパルス波の和である．このように，静電磁界と言われるものであっても，部分的に見れば，一般に $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ に垂直な方向に光速 c で走る前進波と後進波との重畳である．そして，マクスウェルの方程式は線形であるので，今考えている領域の電磁界と他の領域のそれらとは全く独立である．

そして，$z_n = n\Delta z$ とおき，n について $-\infty$ より $+\infty$ まで加え合わせると，前に定義した標本関数の特性 (15) によって

$$E_x(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_x^{(n)}(z,t) = \overline{E}_x \tag{20}$$

$$H_y(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_y^{(n)}(z,t) = \overline{H}_y \tag{21}$$

なる結果が得られる．つまり，$\sum E_x^{(n)}(z,t)$ および $\sum H_y^{(n)}(z,t)$ なるインパルス列の総和と静電界 $\overline{E}_x$ および静磁界 $\overline{H}_y$ とは数学的に等価である(注9)．

このような関係が導かれたのは，マクスウェルの方程式の特徴であって，物理的なすべての場に対して成立するわけではない．例えば，シュレーディンガーの波動方程式においては，ガウス分布の波動関数の形は保存されるが，それは時間と共に広がる．あるいは，初期条件として方形インパルス関数 $\sqcap(z)$ を仮定すると，時間と共に崩れる．熱伝導方程式においても同様，上述のことは成立しない．

そのような現象が生じるのは，線形で分散性のない場であって，電磁場の一般化としてプロカ場あるいはクライン・ゴルドン場が考えられるが，質量が零でない限り分散性があるので，現象はかなり異なったものとなる．また，同じ電磁場であっても媒質が非線形な場合は別に考察する必要がある．

5. 静電磁界

5.1 静電磁界の実相

前章に示したように，電磁界は静止しているように見えても，部分的に見れば運動している．通常の数学的表現としては，結果的な表示となり，その事実は数式の奥に隠されて見えない．

図1の電磁波の伝搬の説明において rot$\boldsymbol{E}$ あるいは rot$\boldsymbol{H}$ があると，その時間積分として $\boldsymbol{B}$ あるいは $\boldsymbol{D}$ が必然的に生じることを述べた．波頭の近傍においては，電界 $\boldsymbol{E}$ あるいは磁界 $\boldsymbol{H}$ が空間的に急激に変化しており，その空間微分としての rot$\boldsymbol{E}$ または rot$\boldsymbol{H}$ が生じ，前章に述べた原理によって電磁界は動くことになる．これが標本関数を用いて区分した局所電磁界が移動せざるを得ない理由である．このような部分的電磁界が重畳して静電磁界になった状態では，rot$\boldsymbol{E}$ および rot$\boldsymbol{H}$ は隣同士のインパルスによって打ち消されて，結果的に波が進行していないように見える．

ここで，式 (20) および式 (21) の意味をもう少し突っ込んで考察しておこう．上に定義した標本関数の性質によって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqcap(ct \mp z \pm n\Delta z) = 1$$

であるが，和が同じ 1 であっても，引数 $(ct \mp z \pm n\Delta z)$ の $\mp$ に応じて，それぞれ右方向および左方向に移動する電磁界である．要素的な電磁界は運動していても，総和をとると，これら二つの電磁界は時間的および空間的に一定となるので，静止した電磁界であるかのように観測される．また，数式的にも同一表現になってしまう．しかし，上に説明したように本来的に区別すべきものである．そこで

$$\sum_n \sqcap(ct \mp z \pm n\Delta z) = \overrightarrow{1} \quad \text{or} \quad \overleftarrow{1}$$

(符号 $-$ および $+$ はそれぞれ→および←に対応) の

(注9)：ちなみに，この論文の元資料 (EMT-91-64) 報告後，非一様伝送線路における直流電圧を2方向に伝搬する波に分解すると，ある種の解析が簡単になるという短い論文が発表された：IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol.3, No.3 (1993), pp.82-84.

ような記号を使用するならば，式(20)および(21)は，(18) と (19)とを参照して

$$E_x(z,t) = \frac{\overline{E}_x + \zeta\overline{H}_y}{2}\overrightarrow{1} + \frac{\overline{E}_x - \zeta\overline{H}_y}{2}\overleftarrow{1} \quad (22)$$

$$H_y(z,t) = \frac{\overline{H}_y + \eta\overline{E}_x}{2}\overrightarrow{1} + \frac{\overline{H}_y - \eta\overline{E}_x}{2}\overleftarrow{1} \quad (23)$$

と書くのが合理的である．

この式から数々の事実が判明する．まず，電界と磁界との間に$\overline{E}_x = \zeta\overline{H}_y$ なる関係があるときには，$-z$ 方向に進む波 $\overleftarrow{1}$ はなく，$+z$ 方向に進む波 $\overrightarrow{1}$ だけが存在する．これは，例えば，無限長線路の左端から直流を励振したとき，右方向（$+z$ 方向）に伝搬する直流のTEM波に相当する．このときの伝送電力は前の章で説明したように

$$E_xH_y = \eta E_x^2(\overrightarrow{1})^2 = \zeta H_y^2(\overrightarrow{1})^2$$

である．数値的には $(\overrightarrow{1})^2 = 1$ であるが，$+z$ 方向に伝搬するものという意味で，表式の中に残しておいた．

次に，電界と磁界との間に$\overline{E}_x = -\zeta\overline{H}_y$ なる関係があるとすれば，$-z$ 方向に進む波 $\overleftarrow{1}$ だけが残る．

上記二つの関係のいずれをも満たさないならば，互いに逆方向に伝搬する二つの波がある．これは，例えば，不整合負荷が接続されている線路の場合である．このように，電磁現象の状態が異なるにもかかわらず，従来の数式表現 ($\overrightarrow{1} = \overleftarrow{1} = 1$) では同一であると解釈される．

特別な例として，磁界 $\overline{H}_y$ がなく，電界 $\overline{E}_x$ のみがある場合を考える．式(22)によると，正および負の z 方向に進行する同じ振幅 $\overline{E}_x/2$ の波が存在する．そして，式(23)からわかるように，それぞれの進行波には互いに逆符号の磁界$\pm\eta\overline{E}_x/2$ が伴っている．静止系において静電界のみが観測されるとき，一般には磁界はないと見られるが，これは結果的に両方向の進行波の磁界が打ち消されているのであって，本質的に磁界が存在しないとは言えない．

逆に電界がなく，磁界 $\overline{H}_y$ のみがある場合，式(22)によると，互いに逆符号の電界振幅 $\pm\zeta\overline{H}_y/2$ をもつ逆進する二つの波がある．静磁界のみの場合でも本質的に電界は存在しているが，打消しによって通常の数式表示では見えない．

静止系において電界のみが存在する場合でも，それに対して動いている系から見るならば，磁界が観測される．この事実によって3元複素ベクトル $\mathbf{F} = E \pm jcB$ あるいは4元テンソル $F = (cB, -jE)$ が定義されるように，電界と磁界とは相対論的に同等のものと言われる．本文の結果に照らして物理的に言うならば，静止系自身の中にも電界と磁界とは光速 c とインピーダンス ζ を介して不可分に結び付いている．一方が他方に独立して見えるのは，ある系において他方が打ち消されている特別な場合である．

5.2 静電磁界の要素分解

理解しやすいように，かなり理想化されたモデルを用いて説明したが，これを一般化する．式(13)のように定義した標本関数をΔz で割ると

$$\frac{\sqcap(z)}{\Delta z} = \frac{u(z+\Delta z/2) - u(z-\Delta z/2)}{\Delta z}$$

すなわち，$\Delta z \to 0$ の極限において上式は単位階段関数 $u(z)$ の微分，すなわち，デルタ関数 $\delta(z)$ の定義式にほかならない．つまり領域幅 Δz を限りなく狭くしていくと，$\sqcap(z)/\Delta z$ は，デルタ関数 $\delta(z)$ に移行する．従って，式(22)あるいは式(23)は総和記号の代わりに積分を使って[式(18), (19)および式(20), (21)を参照]

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{E}_x + \zeta\bar{H}_y}{2}\delta(ct - z + z')dz' \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{E}_x - \zeta\bar{H}_y}{2}\delta(ct + z - z')dz' \\ H_y(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_y + \eta\bar{E}_x}{2}\delta(ct - z + z')dz' \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_y - \eta\bar{E}_x}{2}\delta(ct + z - z')dz' \end{aligned}$$

と書き表すことができる．更に，デルタ関数の指数関数による表現

$$\delta(ct \mp z \pm z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jk(ct \mp z \pm z')}dk \quad (24)$$

を用いると，静電磁界は(正弦的)平面波に展開できることがわかる．上式において $k = \omega/c$ である．式(24)をその上の式に代入すると，空間的に一様な静電磁界の平面波展開

$$\bar{E}_x = \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{E}_x \pm \zeta\bar{H}_y}{2} \cdot e^{j\{\omega t \mp k(z-z')\}}dkdz' \quad (25)$$

$$\bar{H}_y = \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}_y \pm \eta\bar{E}_x}{2} \cdot e^{j\{\omega t \mp k(z-z')\}}dkdz' \quad (26)$$

が得られる．ここに，$\sum_{\pm}$ は被積分関数内の複号 $\pm$ の各項について和をとることを意味する．平面波 $e^{j\omega t \mp jk(z-z')}$ の前の係数は定数であることから，上式は明らかにマクスウェルの方程式 (6) を満たしている．

6. 一般化

電磁界の性質を原理的に探るために一様な電磁界について考察したが，一般的な場合に拡張する．

6.1 非一様静電磁界の平面波合成

一様な電磁界の平面波展開を参考にして，非一様な静電界の平面波合成を導いてみよう．その一つの例は次のようなものであろう．すなわち

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dz' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Re\{(\hat{x}+j\hat{y})(x+jy)^n\} e^{j\omega t}\{E_n(+)e^{-jk(z-z')} + E_n(-)e^{jk(z-z')}\} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dz' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Im\{(\hat{x}+j\hat{y})(x+jy)^n\} e^{j\omega t}\eta\{E_n(+)e^{-jk(z-z')} - E_n(-)e^{jk(z-z')}\} \tag{28}$$

$\hat{x}+j\hat{y}$ は複素表現を用いた $x-y$ 平面内の基底ベクトルであり，それに複素数 $(x+jy)^n$ をかけて波動因子 $e^{j(\omega t \pm kz)}$ と組み合わせると，マクスウェルの方程式を満足する種々の非一様な静電磁界が得られる．それは，付録で証明している．各平面波の複素振幅 E_n を適当に決めて n の全整数域 $(-\infty \sim +\infty)$ にわたって加算すると，無数に多くの種類の非一様静電磁界の平面波合成が得られる．式 (27) および (28) は z 軸方向に進む平面波に関する合成であるが，z 軸を任意に選んであらゆる方向に加え合わせると，更に一般的な平面波合成が得られる．

[平行平板]

非一様平面波合成 (27)，(28) の意味を知るために，まず簡単な場合 $E_n(+) = E_n(-) = E_0\,\delta_{n0}/2$ を調べてみる（δ_{ij} はクロネッカのデルタ）．そして x, y 座標に関して標本関数を掛けておくと

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dz' \sqcap(x)\sqcap(y)E_0\,\hat{x}e^{j\omega t}\cos k(z-z') = \hat{x}E_0\sqcap(x)\sqcap(y) \tag{29}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{-j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dz' \sqcap(x)\sqcap(y)\eta E_0\,\hat{y}e^{j\omega t}\sin k(z-z') = 0 \tag{30}$$

上式は，$(|x| < \Delta x/2,\ |y| < \Delta y/2)$ なる領域にある一定の静電界 $\hat{x}E_0$ を表している．物理的には $x = \pm\Delta x/2$ の位置に（仮想的な）平行平板導体があり，$y = \pm\Delta y/2$ の位置に磁気壁がある場合と同様である．それは，上式の発散をとると明りょうになる．すなわち，標本関数の定義によって

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\varepsilon\boldsymbol{E} &= \varepsilon E_0\{\delta(x+\Delta x/2) - \delta(x-\Delta x/2)\}\\ &= q\delta(x+\Delta x/2) - q\delta(x-\Delta x/2)\end{aligned}$$

つまり，$x = \mp\Delta x/2$ における2枚の平板導体に $\pm q = \pm\varepsilon E_0$ なる電荷が帯電したことによる静電界と同一である．**3.**における基本モデルの特別な場合である．なお，この例では磁界は最終的に零となるので，磁気壁には仮想磁荷は現れていない．

上では $E_n(+) = E_n(-)$ としたが，$E_n(-) = 0$ とおけば，$+z$ 方向に進行する波を表し，時間的に変化しない静電磁界が得られる．

[円筒座標]

他の興味ある例として次のようなものがある．直交座標と円筒座標との基底ベクトルの関係

$$\hat{x} = \hat{\rho}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi,\quad \hat{y} = \hat{\rho}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi$$

を用いると，式 (27) および (28) の中にある複素基底ベクトルは

$$\hat{x}+j\hat{y} = (\hat{\rho}+j\hat{\phi})e^{\phi}$$

のように円筒座標表式に書き換えられる．

一つの具体例として標本 $\sqcap(\rho-\rho')$ を掛けて，$E_n(+) = E_n(-) = (q/4\pi\varepsilon)\delta_{n,-1}$ とおくと，式 (27)，(28) は

$$\boldsymbol{E} = \hat{\rho}\sqcap(\rho-\rho')q/2\pi\varepsilon\rho$$

$$\boldsymbol{H} = 0$$

と計算される．この式の発散をとり

$$\rho' - \Delta\rho/2 = \rho_i,\quad \rho' + \Delta\rho/2 = \rho_0$$

とおくと

$$\mathrm{div}\,\varepsilon\boldsymbol{E} = (q/2\pi\rho)\{\delta(\rho-\rho_i) - \delta(\rho-\rho_0)\}$$

物理的に言えば，内径 ρ_i および 外径 ρ_0 を有する同

軸ケーブルの内外導体表面に $\pm q$ なる電荷がある場合の静電界を表している．内導体の半径 ρ_i を無限小，外導体の半径 ρ_0 を無限大としたとき，直線電荷分布 q による電界

$$E_\rho = q/2\pi\varepsilon\rho$$

を得る．

これは普通の電磁気学の教科書に与えられているが，計算の都合によって静的な2次元フーリエ変換

$$E_\rho = \frac{1}{4\pi^2}\int \frac{q}{\varepsilon h}e^{-j\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\rho}}d\boldsymbol{h}$$

の形式に表現されることがある．ここに $\boldsymbol{h}$ は横方向波数ベクトルであり，$d\boldsymbol{h} = h\,dh\,d\phi_h$ である．しかし，このような（静的）波数分解においては，その各成分はマクスウェルの方程式を満たしていない．例えば，一つの成分の発散をとってみると

$$\mathrm{div}\left(\hat{\rho}\frac{q}{\varepsilon h}e^{-j\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\rho}}\right)$$
$$= \frac{q}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{h\rho} - j\cos(\phi_h - \phi)\right\}e^{-jh\rho\cos(\phi_h-\phi)}$$

となって，自由空間中でも零とならないからである（ϕ_h は波数ベクトル $\boldsymbol{h}$ の方位角）．このように，従来の静的フーリエ展開は物理的意味をなさず，単なる数学的なものと言わざるを得ない．

6.2 標本関数の物理的意味について

ここで，電磁界の解析手段として導入した標本関数の物理的意味について言及しておく．どのような形態であれ時空内に電磁界が存在するならば，どんな瞬間をとっても各領域で界はマクスウェルの方程式を満たしているはずである．その意味で標本関数は電磁界を分析する数学的手段として好都合であり，それによって選ばれる時空領域内に関する限り問題はない．そこで，標本関数の限界あるいは境界面はどのような物理的意味をもつのかを考察する．

マクスウェルの方程式を満たす任意の電界および磁界を $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ とおき，それを時間的に $\sqcap(t)$，空間的に $\sqcap(x)$ によってサンプリングし，マクスウェルの方程式を適用する．

まず，空間的にサンプリングしたものについて，電界のガウスの式 $\mathrm{div}\,\varepsilon\boldsymbol{E} = \rho$ を適用すると

$$\mathrm{div}\{\sqcap(x)\varepsilon\boldsymbol{E}\} = \sqcap(x)\rho$$
$$+\hat{x}\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}\{\delta(x+\Delta x/2) - \delta(x-\Delta x/2)\}$$

すなわち，標本関数の仮想境界面上に垂直な電界があれば，もともと存在する電荷 ρ に加えて，仮想電荷 $\hat{x}\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}$ が現れる．キルヒホッフ・ホイヘンスの(回折)理論にならって，領域内の電磁界の一部はこの仮想（等価）電荷によるものとみなすことができる．言うまでもなく，この仮想電荷は領域を仮想的に区切ることによって出現したものであって，隣接する領域の電界からの寄与を電荷に換算したものとなっている．

同様に，磁界の発散の方程式に代入すると，上式の $\boldsymbol{E}$ の代わりに $\boldsymbol{H}$, ρ, ε の代わりに ρ_m, μ と置き換えた式が得られる．すなわち，領域を区切ることによって仮想磁荷 $\hat{x}\cdot\mu\boldsymbol{H}$ が現れる．その意味は仮想電荷の場合と同様である．

そして，アンペールの式を適用すると

$$\mathrm{rot}\{\sqcap(x)\boldsymbol{H}\} = \sqcap(x)(\partial\boldsymbol{D}/\partial t + \boldsymbol{J})$$
$$+\hat{x}\times\boldsymbol{H}\{\delta(x+\Delta x/2) - \delta(x-\Delta x/2)\}$$

つまり，境界面上に平行な（$\hat{x}$ に垂直な）磁界は，その面上に流れる仮想電流を発生する．

また，ファラデーの式を適用すれば，上式において $\boldsymbol{H}$ の代わりに $-\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ の代わりに $\boldsymbol{B}$ とおいた式が得られる．境界面上に平行な電界は仮想磁流に対応する．

議論を複雑にしないために，空間的なサンプリングとして x 軸に垂直な面に関するものを取り上げたが，他の空間的なサンプリングに対しても事情は変わらない．

次に，時間的なサンプリングをアンペールの式に適用すると

$$\partial\{\sqcap(t)\boldsymbol{D}\}/\partial t = \sqcap(t)(\mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J})$$
$$+\boldsymbol{D}\{\delta(t+\Delta t/2) - \delta(t-\Delta t/2)\}$$

右辺最終項中の最初の項は時刻 $t = -\Delta t/2$ における初期条件としての電流（源）を表す．つまり，時間的サンプリング領域における電磁界は，その前の区間の値を引き継ぐのであるが，そのために必要な励起源の存在を意味する．最後の項は，終末条件とも呼ぶべきものである．すなわち，時間的にサンプリングすることは，それ以後の電磁界を零に設定することに相当するので，その時刻に存在する電磁界を打ち消さねばならないからである．この項の存在によって時間的サンプリングが完遂される．

この時点で次のサンプリングを付加したとすれば，次のサンプリングの初期条件がそれ以後の電磁界の値を設定する．このとき，前後における終末条件と初期条件とは，大きさが等しく符号が反対であって相殺す

るので，当然のことながら，前後のサンプリングはスムースに接続される．

時間的サンプリングをファラデーの式に適用すると，上と全く同様にして，初期条件および終末条件としての磁流を得る．

このように，標本関数は電磁界解析に対して数学的に有用であるばかりでなく，物理的にも明確な意味をもっている．

7. （静・動電磁界の）一般的平面波展開

基礎的な事項から解き起こし，数式表現を整えると共に，平面波から無数に多くの静電磁界が合成できることを示した．次にその逆の操作を考えよう．

7.1 平面波展開公式

すなわち，任意に与えられた電磁界は，静電磁界，動電磁界の区別なく，一般的に平面波（円筒波・球面波）展開できることを示す．まず

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-j\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}d\boldsymbol{k}$$

と書き表す．ここに $\int d\boldsymbol{r}'$ および $\int d\boldsymbol{k}$ は全実空間および全波数空間にわたって積分することを意味する．そして，マクスウェルの式よりヘルムホルツの式 $\{\nabla^2-\partial^2/\partial(ct)^2\}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0$ が成立するので，この式に上の二つの式を代入すると

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\iint\left\{-k^2-\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\right\}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)\,e^{-j\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}d\boldsymbol{r}'d\boldsymbol{k}=0 \tag{31}$$

これは t に関する2階の線形微分方程式であるから，その解は $e^{\pm jkct}$ の線形結合によって与えられる．すなわち

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{\pm}\iint \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\pm)\,e^{\pm j\omega t-j\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{r}' \tag{32}$$

但し $k=|\boldsymbol{k}|$, $kc=\omega$ とおいた．また $\sum_{\pm}$ は式(25)，(26)と同じ意味である．そして磁界に関しても同様に

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{\pm}\iint \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',\pm)\,e^{\pm j\omega t-j\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{r}' \tag{33}$$

と書ける．時間の原点を適当にとり，$t=0$ の瞬間の電磁界振幅を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',0)$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',0)$ とおけば，式(32)，(33)において

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',+)+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',-)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',0) \tag{34}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',+)+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',-)=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',0) \tag{35}$$

が成立する．

さて，アンペールの式(3)およびファラデーの式(4)によって平面波の複素振幅に関する関係式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\pm)=\mp(\boldsymbol{k}/\omega\varepsilon)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',\pm) \tag{36}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',\pm)=\pm(\boldsymbol{k}/\omega\mu)\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\pm) \tag{37}$$

を得るので，式(34)，(35)と組み合わせると平面波展開式 (32)，(33)の展開係数

$$2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\pm)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',0)\mp\hat{k}\times\zeta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',0) \tag{38}$$

$$2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',\pm)=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',0)\pm\hat{k}\times\eta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',0) \tag{39}$$

が定まる．但し $\hat{k}=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$．

要するに，任意に与えられた電磁界は，適当な時刻 $t=0$ における電磁界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',0),\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',0)$ を初期条件として平面波に展開される．電荷の存在しない空間領域ではガウスの式 $\mathrm{div}\boldsymbol{D}=0$ が成立すべきであるが，式(36)より $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\pm)=0$ であって，上述の展開式はマクスウェルの式を満足していることは言うまでもない．時刻の原点 $t=0$ は任意に選べるので，ある時刻において位置 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ にある電磁界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',0),\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',0)$ は，式(38)，(39)によって展開係数 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\pm)$ および $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',\pm)$ を決定し，展開式 (32)，(33)によってその後あらゆる波数の方向に広がる．つまり，波のすべての点が新たな波源となって広がるという，キルヒホッフ・ホイヘンスの定理そのものを表している．

この展開公式は非常に一般的なものであるが，適当な条件を入れて特殊化していくと，電磁波工学など波動論関係の教科書に散見されるような式が出てくる．例えば，式(32)および(33)において

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\pm)=\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}'\pm)e^{j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}d\boldsymbol{r}'$$

とおけば

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{\pm}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\pm)e^{\pm j\omega t-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k}$$

および $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ に関する同様な式が得られる．電磁界のいずれか一つの成分だけをとれば，それは量子力学において波動関数の平面波展開に時おり用いられるも

のと同形である．また，アンテナなどの工学的応用においては単一正弦波を扱う場合が多いが，その場合は上の式で $\omega = \omega_0$ ($k = k_0$) なる制約を加えることになる．このような場合は，上述のように初期条件を設定する平面波展開より，次の論文において導出する境界条件設定型の方が便利である．

7.2 直流電磁界の平面波展開

電磁界は3次元ベクトル量であって単純な物理量ではないので，展開係数が解析関数的に表現できる場合は数少ない．が，簡単な例として

$$E(r,t) = \hat{x}E, \quad H(r,t) = \hat{y}H$$

なる直流電磁界に対する平面波展開係数の具体的な表示を求めてみる．

時刻 $t = 0$ における値（この例では常に一定）を展開公式 (38) および (39) に代入すると

$$2E(r',\pm) = \hat{x}E \mp \hat{k} \times \zeta\hat{y}H$$
$$2H(r',\pm) = \hat{y}H \pm \hat{k} \times \eta\hat{x}E$$

式 (36), (37) によって上式と $\hat{k}$ との内積は零なので，$\hat{k}$ は $\hat{x}$ および $\hat{y}$ に垂直，つまり，$\hat{z}$ あるいは $-\hat{z}$ に等しい．$\hat{k} = \hat{z}$ と選べば，式 (32), (33) に代入することによって直流電磁界の展開式

$$\hat{x}E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\pm}\hat{x}\frac{E \pm \zeta H}{2} e^{\pm j\omega t - jk(z-z')}dk\,dz'$$

$$\hat{y}H = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\pm}\hat{y}\frac{H \pm \eta E}{2} e^{\pm j\omega t - jk(z-z')}dk\,dz'$$

が得られる ($k_x = k_y = 0$, $k_z = k$)．この式において $\omega = kc$であり，k の積分は正負にまたがっているので，複合 $\pm$ の 下符号 $-$ に対して $k \to -k$ と置き換えれば，上の式は，前章で物理的考察によって得た平面波合成表示式 (25) および (26) と全く同じ式になる．同様な理由で $\hat{k} = -\hat{z}$ と選んでも，k の正負対称性を利用すると，結果は変わらない．

なお，次の論文において採用する境界条件設定型展開公式によっても同一の結果が得られる．

7.3 静磁界の平面波・円筒波展開

興味ある例として，直線状に流れる電流によって生じる静磁界

$$H(r,t) = \hat{\phi}\frac{I}{2\pi\rho}, \qquad E(r,t) = 0 \tag{40}$$

の平面波あるいは円筒波展開について考える．

[初期条件設定型展開]

式 (39), (38) より

$$H(r',\pm) = \frac{1}{2}\hat{\phi}\frac{I}{2\pi\rho'}$$
$$E(r',\pm) = \pm\frac{1}{2}\hat{k} \times \zeta\hat{\phi}\frac{I}{2\pi\rho'}$$

この式を (33) および (32) に代入すると，平面波展開が得られる．そして，$k_z = 0$, $k \cdot r' = k\rho'\cos(\phi_k - \phi')$ と書けることに注意し，方位角 ϕ' について積分すると，円筒波展開

$$H(r,t) = \hat{\phi}\,\frac{I}{2\pi}\int_0^{\infty} J_1(k\rho)\cos\omega t\,dk \tag{41}$$

$$E(r,t) = \hat{z}\,\zeta\,\frac{I}{2\pi}\int_0^{\infty} J_0(k\rho)\sin\omega t\,dk \tag{42}$$

になる．$\rho = 0$ を中心軸として円筒状に拡散および収束する無限に多くの円筒波の合成となっている．

実際，上の式を波数 k について積分すると，$ct < \rho$ なるとき $H(r,t) = \hat{\phi}I/2\pi\rho$, $E(r,t) = 0$ となり(注10)，元の静磁界が再現されて，展開の正しいことが確かめられる．

ところが，この範囲を超えると ($ct > \rho$ なる領域では)

$$H = \hat{\phi}\,\frac{I}{2\pi\rho}\left(1 - \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}}\right) \tag{43}$$

$$E = \hat{z}\,\zeta\,\frac{I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \tag{44}$$

となって，時間的に変化し始めるという結果が出る．これは何を意味するのであろうか．

ここで行った展開は，$t = 0$ における磁界を初期条件として与えたこと，および，既に述べたように，静電磁界であっても界のあるゆる点は部分的に光速で走っていることに留意する．つまり，ρ なる場所にある電磁界は，それから ct だけ離れた地点における t 時間前の電磁界によって決定される (ホイヘンスの原理)．

(注10)：公式
$\int_0^{\infty} J_n(bx)\cos ax\,dx = \cos n\phi/\sqrt{b^2 - a^2}$
および
$\int_0^{\infty} J_n(bx)\sin ax\,dx = \sin n\phi/\sqrt{b^2 - a^2}$
を用いる ($b^2 > a^2$)．

この原理に基づいて一般に波動は伝搬するが，静電磁界の場合，結果的に界の値は変動せず一定値をとる．

ところが，上のような展開においては $t=0$ 以後，原点 $\rho=0$ における直流電流 I による励振はないと仮定することになる[展開の基礎波動方程式として斉次(同次)波動方程式(31)を用いたので]．物理的に言えば，$t=0$ 以前に励磁ために流れていた電流 I を $t=0$ の瞬間に急激に停止させることに相当する．これはコイルあるいはトランスの電流をスイッチで遮断することに似ており，電流が切れると，その周りを取り巻いていた磁界が急になくなるので，ファラデーの誘導則(4)によって過大な逆起電力 $\boldsymbol{E}$ が $+z$ 方向に発生する．この電界 $\boldsymbol{E}$ は またアンペールの式(3)によってその周囲に過大な磁界を生む．これは**2.**において言及した電磁誘導過程であって，電磁波としての伝搬は上の逆過程をたどる．すなわち，それから時間が ρ/c だけ経過したとき，その電磁界は地点 ρ に到達し，そこの界に影響を及ぼす．つまり，その時点まで一定値(定常値)を保っていた磁界は突然負方向に，電界は z の正方向に不連続的に変化する．更に時間が経過すると(実質的な励振は取り除かれているので)電磁界は散逸し，$t=\infty$ においてその値は零に帰する．ついでながら，式(43)，(44)のポインチングベクトルは ρ の増加する方向を向いている．

[電流励振型展開]

そこで，もし直流電流による励振を常に考慮した展開を行うならば，時間的に全く変化しない展開が得られると期待される．(規定の頁数を既に超えているので)導出は省略するが，電流励振項を有する非斉次(非同次)波動方程式を採用すれば，下のような展開が得られる．

$$\boldsymbol{H}=\Re\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}I\frac{k}{j4}H_1^{(2)}(k\rho)e^{j\omega(t-t')}df\,dt' \tag{45}$$

$$\boldsymbol{E}=\Re\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\zeta I\frac{-k}{4}H_0^{(2)}(k\rho)e^{j\omega(t-t')}df\,dt' \tag{46}$$

変数 x が小さいとき

$$J_n(x)=x^n/2^n n!$$

$$N_n(x)=-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n$$

なることに注意すると，展開(45)，(46)は時間にかかわらず常にもとの静磁界(40)を再現することが確かめられる．同じ静磁界であっても，仮定する条件(初期磁界か，電流による定常励振か)によって異なる展開が得られる．

展開式(45)，(46)によれば，電流 I からハンケル関数に基づいて電磁界は円筒波として広がるが，全波数の波を合成すると $\boldsymbol{E}=0$ となる．従って積分結果としてのポインチングベクトルは打ち消されて零となり，実質的なエネルギー移動はない．このようなポインチングベクトルの意味については後の論文において論じる．

7.4 静電磁界と動電磁界

いくつかの実例を挙げて静電磁界を平面波(円筒波)展開し，静電磁界と言えども動的であることを示した．この章において導いた展開公式は全く一般的であって，動電磁界の平面波展開も同様な手続きで行えることは言うまでもない．この章の例からわかるように，静電磁界の平面波展開には無限個の波数にわたる積分が必要であるが，動電磁界のそれは有限個になる場合が多い．最も簡単な場合は一つの平面波であって，それを展開公式に入れれば計算の結果そのもの自身が再現される．動電磁界の具体的な展開例については，次の論文において導出する境界条件設定型公式の方が実用的なので，そこで述べる．

平面波・円筒波・球面波は座標変換によって相互に換算表示できるので，電磁界はつまるところ静・動にかかわらず一般的に平面波展開できることがわかる．**2.**に述べたように電磁事象は多面的であって，従来，静電界，静磁界および動電磁界は互いに区別して扱われてきたが，より深い立場から見るならば，この区別は本質的でない．静電磁界とは平面波合成の結果時間的に一定になる特別な場合であって，動的であることは変わらない．換言すれば，標本関数を用いて電磁界を分析することによって静電磁界と動電磁界とを総合することができたと言えよう．

8. むすび

電磁現象を原点から見直すことによって，今までに知られていない，あるいは，気づかれなかったいくつかの基本的事実を明らかにした．主要な結果は次のとおりである．

(1) マクスウェルの方程式に基づいて電磁界を物理的に分析し，場の運動の自己無撞着な描像を導いた．

(2) そのような物理的考察を一般化・厳密化するために，標本関数なる数学的手法を導入することによって，電磁界を静的・動的に関係なく一般的に扱う方法

を開発した．そして，従来，静電界あるいは静磁界と呼ばれているものは，動電磁界と区別して静止しているものとして取り扱われてきたが，分析的に見れば，光速で運動あるいは伝搬しているととらえる方がより一般的で物理的であることを示した．具体的には，静電磁界と言えども平面波，円筒波のような動的な波の合成として表すことができる．

(3) 深く電磁現象を理解し基本を知るには，この事実を念頭におく必要がある．本文の結果は，電磁現象のより統一的な理解とポインチングベクトルや電磁質量その他に関する基礎問題解明への鍵となる．

付　　録

非一様静電界の平面波合成式 (27) および (28) がマクスウェルの方程式を満たすことを証明する．

式 (27) 中の一つの成分を

$$\boldsymbol{E}_n = E_n(\hat{x} + j\hat{y})(x + jy)^n e^{j(\omega t - kz)}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\boldsymbol{E}_n &= E_n \,\mathrm{grad}\, \{(x + jy)^n e^{j(\omega t - kz)}\} \times (\hat{x} + j\hat{y}) \\ &= -k\boldsymbol{E}_n \end{aligned}$$

また，式 (28) の磁界成分は

$$\boldsymbol{H}_n = -j\eta\boldsymbol{E}_n = \eta\hat{z} \times \boldsymbol{E}_n$$

と書けるので，$\eta = k/\omega\mu$ に注意して，その時間微分を算出すると

$$-\partial\boldsymbol{B}_n/\partial t = -k\boldsymbol{E}_n$$

すなわち，マクスウェルの方程式 $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}_n = -\partial\boldsymbol{B}_n/\partial t$ を満たしている．

同様に $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}_n = \partial\boldsymbol{D}_n/\partial t$ および $\mathrm{div}\boldsymbol{E}_n = 0$ と $\mathrm{div}\boldsymbol{H}_n = 0$ も容易に確認できる．

（平成 9 年 10 月 3 日受付，12 月 22 日再受付）

中島　将光　（正員）

昭 35 京大・工・電子卒．昭 40 同大学院博士課程了．昭 43 同大・工・助教授，現在に至る．パラメトリック増幅器・ガンダイオード・インパットダイオードなどのマイクロ波固体素子とその回路，光変調・復調および光通信システム，大電力ミリ波アンテナおよび伝送系，電磁現象の基本概念に関する研究などに従事．工博．著書「マイクロ波工学一基礎と原理」（森北出版），「基本電子回路」（電気学会），「Microwave Integrated Circuits」（共著，Dekker）など．

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS C-I

EiC C-I

電子情報通信学会論文誌

VOL.J81-C-I NO.9 SEPTEMBER

エレクトロニクスI—光・波動

1998

エレクトロニクスソサイエティ

社団法人 電子情報通信学会

THE ELECTRONICS SOCIETY

THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

—— 論　文 ——

ポインチングベクトルの解明とパラドックスの解消(基本概念2)

中島　将光†

Physical Meaning of the Poynting Vector and the Resolution of Paradoxes (Basic Concept 2)

Masamitsu NAKAJIMA†

あらまし　電気・電子工学において，電磁エネルギーの移動は基礎物理量の一つであって，通常，それはポインチングベクトルによって表現される．しかしながら，このベクトルに関連していくつかの問題点が指摘され，種々解決への試みが続けられてきた．ここでは，その問題点を整理した後，先に明らかにした概念に基づいてポインチングベクトルの物理的意味を解明した．それによると，このベクトルは正味の電磁エネルギー流密度を表す．そして，電磁界の平面波展開とその直交性に着目すると，このベクトルにまつわるパラドックスも自然に解消し，その扱い方が明快になる．

キーワード　電磁界理論，電磁エネルギー流，ポインチングベクトル，平面波展開

1. まえがき

電磁エネルギーはいかに伝わるのか，これを明確に理解することは電気・電子工学においてはもとより，物理学においても重要なことである．電磁エネルギーの移動は通常ポインチングベクトルによって計量されるが，このベクトルはいわゆるポインチングの定理をもとに推定されたものであって，次の章で説明するような問題をはらんでおり，長年議論が繰り返されてきた．

ここでは，主要な問題点を整理した後，先に示した電磁界の性質をもとに定式化を行い，その解決を与える．すなわち，ポインチングベクトルの問題の主要な源はポインチングの定理がもつ不確定性にあり，従来の議論はすべてこの定理に基づいている．この定理はポインチングベクトルが電磁エネルギー流を表すための必要条件を与えるのみであって，それだけでは本質的な解決はない．従って，この定理とは独立に，電磁界は一般に平面波展開できる事実を用いて，ポインチングベクトルそのものの物理的意味を解明する．その結果，ポインチングベクトルは正味としての電磁エネルギー流密度を表すことが判明し，このベクトルにまつわるパラドックスが自然に解消する．併せてこのベクトルの用法にも言及する．

2. ポインチングベクトルに関する問題点

マクスウェルの方程式を用いて，ポインチングは1884年

$$\int_S \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}dV -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})dV \tag{1}$$

と等価な式を導き，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ は単位時間当り単位断面積を通過する電磁エネルギーの流れを表すとして，いくつかの具体例を挙げて説明した [1]．ここに S は体積 V の表面積を表す．その翌年，ヘビサイドも同様な考えを提出した [2]．ところが，それからしばらくしてヘルツは次のことを指摘した [3]．すなわち，上の導出過程からわかるように，ポインチングベクトル $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ は，それを一つの体積の全表面にわたって積分したときに正しい結果を与えるのであって，局部的にそれを適用してよいとは限らない．更に，静電界と静磁界とを交差させたとき $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ が生じるが，これはエネルギーの流れであるとは考えられない(と彼は書いている)．

このような疑問の由来の一つを数式的に表現すると次のようになる．すなわち，常に div rot = 0 である

† 京都大学工学部電子通信工学教室，京都市
Department of Electronics and Communication, Kyoto University, Kyoto-shi, 606-8501 Japan

から，ポインチングベクトル $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ に定数や，あるベクトルの回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{X}$ を付け加えても上の式は成立する．つまり，ポインチングの定理(1)を満たす無数のベクトルを $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ の代わりに考えることができる．そこで，付加(あるいは除去)されるべき量を求めて，さまざまな電磁エネルギー流ベクトルなるものが提案されてきた．例えば，スレピアンは「エネルギー流密度ベクトル」を一般的に求める一つの方法を示し，9種類のベクトルを挙げている [4].

他の一例として，抜山 [5], [6]，後にレイ [7] は下のようなものを提案した．電界のポテンシャル表示 $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ を使って，ポインチングベクトルを書き換え，$-\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{H})$ なる項を除くと

$$\boldsymbol{N} = \varphi(\boldsymbol{J} + \partial\boldsymbol{D}/\partial t) + \boldsymbol{H}\times\partial\boldsymbol{A}/\partial t$$

という表現が得られる．これは当然のことながら，ポインチングの定理(1)を満足する($\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ の代わりに $\boldsymbol{N}$ とおく)．体積積分を実行すると，電圧と電流の積が現れ，電力の流れとして日常的感覚的にとらえやすくなり，また，直流電磁界に対してはその値が零になって，自然な形になるとしている．

これに対して，直流磁界もその根源は電流の還流にあるので，直流電磁界の中にエネルギーの流れがあっても決して不自然ではないという意見も多い [8].

ところで，電磁界のエネルギー・運動量テンソルの非対角項はポインチングベクトルまたは運動量に比例したものであり，自由空間において互いに同じベクトルを表している（角運動量保存）．もし，ポインチングベクトル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ に何らかの量を加減して補正すべきならば，電磁運動量 $\boldsymbol{G}$ にも同じ補正を加えるべき不定性があるべきだとし，これを根拠として $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ に余計な物理量を付加する必要はないとの主張もある [9], [10].

また，橋本はエネルギーの渦流なるものを考えることによって，ポインチングベクトルは正確なエネルギー輸送を表すと推定している [11].

このほかいろいろな意見があり，何らかの注釈を付けている教科書も多い [12], [13].

そして，ポインチングベクトルの解釈に関連し，アンテナの電磁波放射機構について疑問が提出されている [6], [14]．その疑問の根は次のように言い表すことができよう．例えば，半波長アンテナからの電磁波放射は導体に流れる電流，あるいは運動する電子から放出される．実際にそのように仮定して多くの有用な解析結果が得られている．ところが，一方，導体表面上においては電界の接線成分は零であるので，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ の法線成分は零になる．もし，このベクトルが電磁エネルギー流を表すのならば，電磁波は放射されないことになる．このパラドックスはどのようにして解かれるのであろうか．

このほかにもパラドックスではないにしても，そのような事実が多い．わかりやすい一つの例を示す．自由空間のある点に電界 $\widehat{\boldsymbol{E}}\, e^{j\theta}$ および磁界 $\widehat{\boldsymbol{H}}\, e^{j\theta}$ があれば，その点における複素ポインチングベクトルは $\boldsymbol{S} = \widehat{\boldsymbol{E}}\times\widehat{\boldsymbol{H}}^{*}/2$ に等しい．そして，位相が -2θ だけずれた電磁界 $\widehat{\boldsymbol{E}}\, e^{-j\theta}$ および $\widehat{\boldsymbol{H}}\, e^{-j\theta}$ をそこに重畳させる．後者の複素ポインチングベクトルも $\boldsymbol{S} = \widehat{\boldsymbol{E}}\times\widehat{\boldsymbol{H}}^{*}/2$ に等しいので，ベクトルの立場からすれば，その空間中には $2\boldsymbol{S}$ なるポインチングベクトルがあることになる．一方，その点における電界は $\boldsymbol{E} = \widehat{\boldsymbol{E}}\, e^{j\theta} + \widehat{\boldsymbol{E}}\, e^{-j\theta} = 2\,\widehat{\boldsymbol{E}}\cos\theta$ に等しく，磁界も同様な式で表されるので，場の立場からすると，その点のポインチングベクトルは $\boldsymbol{S} = 4\boldsymbol{S}\cos^2\theta$ と算出される．位相に応じて $0\boldsymbol{S}$ から $4\boldsymbol{S}$ まで変化する．

古くヘルツの指摘以来，このような問題に対して，その解決が摸索されている [6], [7], [15]．簡潔なポインチングベクトル $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ の中に秘められた深い意味と大きな疑問は物理学者，電気工学者を驚嘆させ [8]，悩ませてきた．電磁エネルギーは重要な物理量の一つであるが，上のような基本的な問題を蔵しながらも，エネルギー移動を計量するものとして，ポインチングベクトルが大きな役割を果たし得たのは何を物語るのであろうか．

3. 平面内のポインチングベクトル

さて，ポインチングベクトルにまつわる主要な問題点は次の事実に起因する．すなわち，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ は，それを体積の表面全体にわたって積分したときに意味をもつのであって，その一部の面積素片については何も言えない．つまり，ポインチングの定理 (1) に依拠する限り，問題は解決されない．

そこで，ひとまず，有限の体積の表面ではなく，全空間を無限平面で2等分し，その平面を通してどのような電磁エネルギーの移動があるかという問題を設定しよう．その際，ポインチングベクトル自身に不明な点はあるにしても，エネルギー移動の考察にあたって大きな手がかりを与えるであろう．

解析の便宜のため，無限平面を $z = 0$ とおき，そ

の面内に x および y 軸をとる．任意に与えられた電磁界を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ および $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ とおき，それらを前論文[16]第4章で導入した標本関数を用いて

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\sqcap(t-t_n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},t) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\sqcap(t-t_n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}^{(n)}(\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

のように展開する．ここに $u(t)$ を単位階段関数とすれば

$$\sqcap(t-t_n)=u(t-t_n+\Delta t/2)-u(t-t_n-\Delta t/2)$$

である $(t_{n+1}-t_n+\Delta t)$．その中から時刻 $t=t_n$ を中心に $\pm\Delta t/2$ の時間間隔に存在する電磁界のみを取り出して，それを時間に関してフーリエ展開する(注1)．

$$\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}^{(n)}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5}$$

ここに

$$\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},t)e^{-j\omega t}dt \tag{6}$$

$$\boldsymbol{H}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}^{(n)}(\boldsymbol{r},t)e^{-j\omega t}dt \tag{7}$$

である．すると，その時間間隔 Δt におけるポインチングベクトル $\boldsymbol{E}^{(n)}\times\boldsymbol{H}^{(n)}$ の積分は

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}^{(n)}(\boldsymbol{r},t)dt\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega)\times\boldsymbol{H}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega')\\&\quad\times e^{j(\omega+\omega')t}d\omega d\omega' dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega)\times\boldsymbol{H}^{(n)}(\boldsymbol{r},-j\omega)d\omega\end{aligned} \tag{8}$$

と書き表される．ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(\omega+\omega')t}dt=2\pi\delta(\omega+\omega')$$

なる関係を用いた．

次に，電磁界を一つの周波数 ω の成分について x および y 軸に沿って波数分解すると

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega)\equiv\boldsymbol{E}^{(n)}(x,y,z,j\omega)\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}^{(n)}(jk_x,jk_y,z,j\omega)\\&\quad\times e^{-j(k_xx+k_yy)}dk_xdk_y\end{aligned}$$

および $\boldsymbol{H}$ に関する同様な式を得る．

この式を式(4)に用いて，ヘルムホルツの波動方程式

$$\{\nabla^2-\partial^2/\partial(ct)^2\}\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},t)=0$$

に代入すると，一つの周波数成分について演算子 $\nabla^2-\partial^2/\partial(ct)^2$ は $-k_x^2-k_y^2+\partial^2/\partial z^2+\omega^2/c^2$ に置き換えられるので，上式は z に関する2階の線形微分方程式となる．時刻 $t=t_n$ において面 $z=0$ 上の境界条件を満足するようにすれば，その解は $e^{\mp jk_zz}$ の線形結合として下のように書き表される．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega)\equiv\boldsymbol{E}^{(n)}(x,y,z,j\omega)\\&=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{s=\pm1}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}^{(n)}(jk_x,jk_y,jsk_z,j\omega)\\&\quad\times e^{-j(k_xx+k_yy+sk_zz)}dk_xdk_y\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}^{(n)}(\boldsymbol{r},j\omega)\equiv\boldsymbol{H}^{(n)}(x,y,z,j\omega)\\&=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{s=\pm1}\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}^{(n)}(jk_x,jk_y,jsk_z,j\omega)\\&\quad\times e^{-j(k_xx+k_yy+sk_zz)}dk_xdk_y\end{aligned} \tag{10}$$

ここに $k_z=\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}$, $\omega/c=k$ である．平面波は一定の波数ベクトル $\boldsymbol{k}=\hat{x}k_x+\hat{y}k_y+\hat{z}k_z$ をもっているが，一つの周波数成分について k_x および k_y 成分を与えると，$k_z^2=k^2-k_x^2-k_y^2$ なる関係により k_z は符号の任意性を除いて自動的に定まる．

さて，表記法を簡略化する．目的はある時点 $t=t_n$ においてある面 $z=0$ を通過する電力を調べることなので，他の時間領域 $t\neq t_n$ における電磁界はその意味において除外してよい．すなわち，$z=0$ の近傍（$|z|<c\Delta t/2$）において時刻 $t=t_n$ を含む標本区間 $|t-t_n|<\Delta t$ 中の界のみを考慮すればよいので，今後

(注1)：与えられた領域において有界可積分な関数に対してフーリエ直交関数系は完全性を備えている．従って，問題とする時間領域の電磁界のみを取り出して考えると，フーリエ変換は必ず存在し，以下に示すように平面波展開が一意的に定まる．一応，時間領域を限るので，静電磁界であっても支障ない．

$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ における右肩添字 (n) は省略する．しかし，異なる目的で全時間領域を問題とする場合は，添字 (n) を復活させ，式(2), (3)に従って総和をとるものとする．あるいは，時間間隔 Δt の長さは任意であるから，必要に応じて $\Delta t \to \infty$ とすれば，総和をとる必要はない

さて，各平面波成分がそれぞれマクスウェルの方程式を満たすためには

$$\boldsymbol{H}(jk_x, jk_y, jsk_z, j\omega) \equiv \boldsymbol{H}(s) = \{\boldsymbol{k}(s)/\omega\mu\} \times \boldsymbol{E}(s) \tag{11}$$

が成立しなければならない．ここに

$$\boldsymbol{k}(s) = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}sk_z$$

また，電荷を含まない空間領域を考えているので，マクスウェルの方程式 $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0$, $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ より

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H} = 0 \tag{12}$$

が成立する(注2)．

上の展開(9)および(10)を(8)の被積分関数に代入する．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, j\omega) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, -j\omega)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{s=\pm1}\sum_{s'=\pm1}\iiiint_{-\infty}^{\infty}\\ &\quad \boldsymbol{E}(jk_x, jk_y, jsk_z, j\omega)e^{-j(k_x x + k_y y + sk_z z)}\\ &\quad \times\boldsymbol{H}(jk'_x, jk'_y, js'k'_z, -j\omega)\\ &\quad \times e^{-j(k'_x x + k'_y y + s'k'_z z)}dk_x dk_y dk'_x dk'_y \end{aligned} \tag{13}$$

そして

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jkx}dx = 2\pi\delta(k)$$

に注意し，式(13)を式(8)に代入して，$z = 0$ なる平面全域にわたって積分すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\\ &\quad \boldsymbol{E}(x, y, 0, j\omega) \times \boldsymbol{H}(x, y, 0, -j\omega)dxdyd\omega\\ &= \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\sum_{s=\pm1}\sum_{s'=\pm1}\boldsymbol{E}(jk_x, jk_y, jsk_z, j\omega)\\ &\quad \times\boldsymbol{H}^*(jk_x, jk_y, js'k_z, j\omega)dk_x dk_y d\omega \end{aligned} \tag{14}$$

ここに

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}^*(jk_x, jk_y, js'k_z, j\omega)\\ &\quad = \boldsymbol{H}(-jk_x, -jk_y, -js'k_z^*, -j\omega)\end{aligned}$$

式(14)が(8)に等しいことに注意すると，電磁界を有限な時間領域で考えるとき，その時間間隔におけるポインチングベクトルの積分値は，電磁界を平面波展開して各平面波のポインチングベクトルを作り，それをあらゆる周波数成分について加え合わせたものと等価であることを示している．

これを更に分析すると次のようになる．式(14)の $\boldsymbol{H}$ に(11)を代入し，その被積分項の z 方向成分をとると，付録に示すように

$$\begin{aligned}&\Re(k_z/\omega\mu)|\boldsymbol{E}(+)|^2 - \Re(k_z/\omega\mu)|\boldsymbol{E}(-)|^2\\ &\quad +\Im(k_z/\omega\mu)\cdot j\{\boldsymbol{E}(+)\cdot\boldsymbol{E}^*(-) - \boldsymbol{E}(-)\cdot\boldsymbol{E}^*(+)\}\end{aligned} \tag{15}$$

を得る．但し

$$\boldsymbol{E}(jk_x, jk_y, \pm jk_z, j\omega) = \boldsymbol{E}(\pm)$$

などと簡略記した．ポインチングベクトルの時間積分(8)は，上の式(15)を波数および周波数 (k_x, k_y, ω) について $(-\infty, \infty)$ の範囲で積分したものとして与えられる．

この計算結果から次のことがわかる．k_x, k_y が小さく，$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ が実数の範囲の平面波に対して被積分関数(15)の第3項は消える(注3)．

そして第1項は $+z$ 方向に進む平面波の電力であり，第2項は $-z$ 方向に進む波のそれを表す．

k_x あるいは k_y が大きくなると，k_z は虚数になり，上式(15)の前半の2項は消え，その代わり第3項が値をもつ．虚数の k_z に対する平面波はz方向には伝搬せず，それに垂直な xy 平面に平行に進行する非一様平面波を表す．換言すると，それは z 方向にエバネセントな波である．

無限の自由空間中ではこのような波は生じない．しかし，空間が限られる場合，一般に非一様平面波が存

(注2)：開口アンテナの解析においては式(9)および式(10)と同様な平面波展開が用いられる．そのような場合，k_z の符号が正の場合のみに限られるが，これは反射波を無視することになり厳密でない．また，電磁場の量子化においては，ベクトルポテンシャル A による表示をとるのが一般であるが，電磁界表示のゲージ任意性を排除するために，ここでは直接的な場の量 E および H を用いる．

(注3)：$z = 0$ 平面内における x, y の関数 E および H は実数の波数 k_x および k_y によって一意的にフーリエ展開される．従って k_z は純実数か純虚数となる．

在し得るので，これを考慮しなければならない．例えば，$z=0$ の面から少し離れてこの面に平行に誘電体（光）導波路がある場合，エバネセント波が存在し得る．

そのような状況においても，片方の符号の伝搬定数をもつエバネセント波だけでは z 方向にエネルギーの移動は起こらない．例えば，$z<0$ または $z>0$ いずれかの領域に誘電体板があり，その内部で全反射が生じているような場合である．しかし，伝搬因子 $e^{\pm 2\Im k_z z}$ をもつ一対のエバネセント波 $E(+)$ および $E(-)$ が重なると，エネルギー移動が起こる．上の例で言えば，$z=0$ の面を挟んで2枚の誘電体板があって，いわゆるトンネル現象が起こっているような場合である．このとき，二つの波 $E(+)$ および $E(-)$ の位相差によってエネルギー移動の方向が定まる．すなわち，

$$E(\pm)=|E|e^{\mp jk_z z+j\phi_\pm}$$

とおいて，式(15)の最後の項を書き換えると

$$-2\Im(k_z/\omega\mu)|E(+)E(-)|\sin(\phi_+-\phi_-)$$

を得る．$z>0$ に対して減衰定数 $\Im k_z<0$ ととるのが自然（あるいは通常）であるから ($\Re k_z=0$)，そのようにすると，$E(+)$ に対して $E(-)$ の位相が遅れるとき，$+z$ 方向にエネルギーが流れる．これは物理的にも納得しやすいことである．

従って，ここに得られた式(15)は，結局，次のことを意味する．電磁界は一般に無数の平面波の合成によって表すことができ，$E\times H$ を一つの平面内で積分したものは，各平面波がその面を通過する電力のベクトル的代数和に等しい．$E\times H$ の方向に z 軸を選んで考えると，ポインチングベクトル $E\times H$ は，それに垂直な断面を横切って通過する多数の平面波電力の差し引き正味の値に一致する(注4)．これがポインチングベクトルの意味である．

要するに，電磁エネルギー移動に関するパラドックスはポインチングベクトルの物理的意味の不完全な解釈から生じるのである．その説明ないし応用に移る前にいくつかの問題を解決しておかなければならない．

4. 任意電磁界の平面波展開

前章では，任意の電磁界が平面波展開できたとして議論を進めてきたが，実際にエネルギー移動の様子を知りたいときなどは，その展開係数を具体的に知る必要がある．次に，そのための公式を導出しておく．

自由空間中の任意の電磁界を $E(x,y,z,t)$ および $H(x,y,z,t)$ とおき，それらを無限平面 $z=0$ 上において波数 k_x,k_y および周波数 ω に関してフーリエ展開すれば

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}E\\H\end{pmatrix}(x,y,0,t)e^{j(k_x x+k_y y)}e^{-j\omega t}dxdydt$$
$$=\sum_{s=\pm1}\begin{pmatrix}E\\H\end{pmatrix}(jk_x,jk_y,jsk_z,j\omega) \tag{16}$$

と書ける(注5)．そして，この式を

$$\mathring{E}=E(+)+E(-) \tag{17}$$
$$\mathring{H}=H(+)+H(-) \tag{18}$$

のように簡略記する．ここに

$$\mathring{E}\equiv\iiint E(x,y,0,t)\,e^{j(k_x x+k_y y)}e^{-j\omega t}dxdydt \tag{19}$$

および

$$E(jk_x,jk_y,\pm jk_z,j\omega)=E(\pm) \tag{20}$$

である(H についても同様)．$\mathring{E}$，$\mathring{H}$ は $z=0$ における電磁界のフーリエ積分を，$E(\pm)$,$H(\pm)$ は波数ベクトル

$$k(\pm)=\hat{x}k_x+\hat{y}k_y\pm\hat{z}k_z\equiv k_t\pm\hat{z}k_z \tag{21}$$

をもつ平面波の複素ベクトル振幅を表す．各成分が平面波であるためには

$$H(\pm)=\{k(\pm)/\omega\mu\}\times E(\pm) \tag{22}$$

を満たす必要がある．

すると，付録に導出過程を示すように，平面波展開の公式を得る(注6)．

$$2E_t(\pm)=\mathring{E}_t\pm\mathring{E}_z\,k_t/k_z\mp\hat{z}\times\mathring{H}_t\,\omega\mu/k_z \tag{23}$$
$$2E_z(\pm)=\mp\mathring{E}\cdot k(\mp)/k_z \tag{24}$$
$$2H_t(\pm)=\mathring{H}_t\pm\mathring{H}_z\,k_t/k_z\pm\hat{z}\times\mathring{E}_t\,\omega\varepsilon/k_z \tag{25}$$

(注4)：前論文[16]において説明したように，単一平面波のポインチングベクトルは明確な意味をもつ．

(注5)：静電磁界や周期的電磁界の場合，t に関する積分が発散するが，標本関数をかけておくとそれを防ぐことができる．考慮する時間間隔に対して標本関数の幅を十分長くとっておけばよい．なお，現実の電磁現象を扱う場合，空間積分が発散することはないはずである．

(注6)：前論文[16]における初期条件設定型平面波展開に比較して公式の形がやや複雑になる．それは，境界条件設定の目的で $z=0$ なる面を選定したので，空間座標表現の対称性が失われるからである．

$$2H_z(\pm) = \mp \overset{\circ}{H} \cdot k(\mp)/k_z \tag{26}$$

添字 t は z 軸に関して垂直な成分であることを示す．

まとめると，上式の展開係数 (20) を用いて任意の電磁界は下のように展開表示することができる．

$$E(r,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\sum_{s=\pm 1} E(jk_x, jk_y, jsk_z, j\omega)$$

$$e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - sk_z z)} dk_x\, dk_y\, d\omega \tag{27}$$

H の表式は E をそれに置き換えたものに等しい．

4.1 展開公式による若干の考察

この章で得た平面波展開公式の意味の説明を兼ねて，電磁界の振舞いを考察する．

最も簡単な例として，$z=0$ の面において空間的に一定で，時間的に正弦変動する電界と磁界

$$E(x,y,0,t) = \hat{x} 2\, \widehat{E}\, e^{j\omega_0 t}$$
$$H(x,y,0,t) = \hat{y} 2\, \widehat{H}\, e^{j\omega_0 t} \tag{28}$$

があるとする．これらのフーリエ積分は，式 (19) に代入することによって

$$\overset{\circ}{E} = \hat{x} 2\, \widehat{E}, \quad \overset{\circ}{H} = \hat{y} 2\, \widehat{H} \tag{29}$$

但し，因子 $8\pi^3\delta(k_x)\delta(k_y)\delta(\omega-\omega_0)$ は省略した．これを展開公式 (23) および (25) に入れると

$$E_t(\pm)e^{j(\omega_0 t \mp k_0 z)} = \hat{x}(\widehat{E} \pm \zeta\, \widehat{H})e^{j(\omega_0 t \mp k_0 z)}$$
$$H_t(\pm)e^{j(\omega_0 t \mp k_0 z)} = \hat{y}(\widehat{H} \pm \eta\, \widehat{E})e^{j(\omega_0 t \mp k_0 z)} \tag{30}$$

ここに $k_x = k_y = 0$，$k_z = k_0$ なることに留意し，$\zeta = \omega_0\mu/k_0 = k_0/\omega_0\varepsilon = 1/\eta$ とおいている．また

$$E_z(\pm) = 0, \quad H_z(\pm) = 0$$

も導かれる．

上の計算結果の意味は下のとおりである．式 (28) は，$z=0$ なる無限平面上において空間的な変化はないが，時間的に角周波数 ω_0 で変動する電磁界である．式 (30) によると，それは $\pm z$ 方向に走る平面波の重なりの結果であることを示している．

もし，電界と磁界との間に $\widehat{E} = \zeta\, \widehat{H}$ なる関係があるとすれば，$E_t(-)$ および $H_t(-)$ が 0 となり，$+z$ 方向に伝搬する平面波のみが存在することになる．これに対して $\widehat{E} = -\zeta\, \widehat{H}$ なる関係になっていれば，$-z$ 方向に走る平面波のみがある．そのいずれでもなければ，$+z$ および $-z$ 方向に伝搬する二つの平面波がある．

上の議論においては $\omega_0 \neq 0$ として正弦波動を考えたが，$\omega_0 \neq 0$ とすべき必然性はない．$\omega_0 = 0$ とおくと，$k_0 = 0$ となり，展開式 (30) の $E_t(\pm)$ および $H_t(\pm)$ も時間的・空間的に変動しない，いわゆる静電磁界を表す．このような場合，現象論的に電磁界は全く静止しているものとみなされるが，実際はそうでない．それは展開式 (30) 内の伝搬因子を $e^{j(\omega_0 t \mp k_0 z)} = e^{jk_0(ct \mp z)}$ のように書き換えて $\omega_0 \to 0$ としたとき（$k_0 = \omega_0/c \to 0$），極限に至るまで伝搬因子の速度は $\pm c$ に保たれるからである．従って，先 [16] に解説したように，静電磁界と言えども本質的に $E(+), H(+)$ と $E(-), H(-)$ とは区別すべきものである．

5. 局所ポインチングベクトル

前章において考察したポインチングベクトルは無限平面内におけるベクトルであった．実際に関心があるのは，局所的に考えるとどうかということである．それを明らかにするために，前に定義した標本関数を利用する．

任意に与えられた電磁界について，時空点 $(x', y', 0, t')$(注7) を中心に z 軸に垂直な面積 $\Delta x \Delta y$ 内のみを取り出す．すると，その部分の Δt 秒間の電磁界は，前に定義した標本関数を用いて

$$E(x,y,0,t) \sqcap (x-x') \sqcap (y-y') \sqcap (t-t')$$
$$H(x,y,0,t) \sqcap (x-x') \sqcap (y-y') \sqcap (t-t')$$

と書き表すことができる．上の式を平面波展開式 (16) に代入すると

$$\sum_{s=\pm 1}\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}(jk_x, jk_y, jsk_z, j\omega)$$
$$= \int_{x'-\Delta x/2}^{x'+\Delta x/2} dx \int_{y'-\Delta y/2}^{y'+\Delta y/2} dy \int_{t'-\Delta t/2}^{t'+\Delta t/2} dt$$
$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}(x,y,0,t)e^{j(k_x x + k_y y)}e^{-j\omega t}$$
$$= \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}(x', y', 0, t')\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega \Delta t}{2}$$
$$\cdot \frac{2}{k_x}\sin\frac{k_x \Delta x}{2} \cdot \frac{2}{k_y}\sin\frac{k_y \Delta y}{2} \tag{31}$$

但し，フーリエ積分を求めるにあたって $\Delta x, \Delta y$ および Δt は後で零の極限をとるので（$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta t \to 0$），$E$ および H はその微小領域において

(注7)：$t_n = t'$ と置き換えた．

一定であるとして，積分の外に出した．上の式を簡略記すると

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(+)+\boldsymbol{E}(-)\\&=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t')\Delta x\,\mathrm{sinc}\frac{k_x\Delta x}{2}\\&\quad\cdot\Delta y\,\mathrm{sinc}\frac{k_y\Delta y}{2}\Delta t\,\mathrm{sinc}\frac{\omega\Delta t}{2}\end{aligned}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{H}(+)+\boldsymbol{H}(-)\\&=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',t')\Delta x\,\mathrm{sinc}\frac{k_x\Delta x}{2}\\&\quad\cdot\Delta y\,\mathrm{sinc}\frac{k_y\Delta y}{2}\Delta t\,\mathrm{sinc}\frac{\omega\Delta t}{2}\end{aligned}\tag{33}$$

但し $\mathrm{sinc}\,x=\sin x/x$ である．この式は，微小時空領域（$\Delta x\,\Delta y\,\Delta t$）内にある電磁界の平面波展開係数である．前章の結論に従って，$z=0$ 面を横切る電磁エネルギーの移動は，各平面波（エバネセント波も含めて）の伝送電力の合成に等しい．従って，付録の式(A・1)を参照すると，その値は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi^2}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\Re\{\boldsymbol{E}(+)\times\boldsymbol{H}^*(+)+\boldsymbol{E}(-)\times\boldsymbol{H}^*(-)\\&\quad+\boldsymbol{E}(+)\times\boldsymbol{H}^*(-)+\boldsymbol{E}(-)\times\boldsymbol{H}^*(+)\}dk_xdk_y\end{aligned}$$

上の行は一様平面波によるエネルギー移動を，下の行は非一様平面波によるそれを表す．上式に(32)および(33)を代入すると，面積 $\Delta x\Delta y$ を通過する電磁エネルギーは次のように算出される(注8)．

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int dk_xdk_yd\omega\,\Re\,\hat{z}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t')\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',t')\\&\qquad\left(\Delta x\,\mathrm{sinc}\frac{k_x\Delta x}{2}\Delta y\,\mathrm{sinc}\frac{k_y\Delta y}{2}\Delta t\,\mathrm{sinc}\frac{\omega\Delta t}{2}\right)^2\\&=\hat{z}\cdot\boldsymbol{E}(x',y',0,t')\times\boldsymbol{H}(x',y',0,t')\Delta x\Delta y\Delta t\end{aligned}\tag{34}$$

但し

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin p\theta}{\theta}\right)^2 d\theta=p\pi$$

なる公式を用いた．

上に得た結果は次の事柄を意味する．自由空間中に任意の電磁界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ があるとき，適当な時空点 $(x',y',0,t')$ を中心とする微小面積 $\Delta x\Delta y\Rightarrow dxdy$ を単位時間に通過する正味の電磁エネルギーは，その時空点においてその面を貫くポインチングベクトル $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t')\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}',t')$ の微小面積法線成分に等しい．z 軸を $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ の方向に選ぶと，それはその方向に流れる電磁エネルギー流密度を表す．

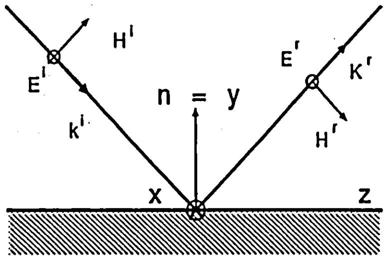


図1　平面導体による電磁波の反射
Fig. 1　Reflection of electromagnetic wave from a plane conductor.

従って，ある与えられた面 S を横切る正味の電力は，式(34)に相当する量をその面で積分したもの

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\hat{n}dS\tag{35}$$

によって与えられる．dS は S を含む任意の微小面積であり，$\hat{n}$ は dS の単位法線ベクトルである．これを一つの体積の全表面で積分した結果がポインチングの定理に対応する．

6.　ポインチングベクトルの正しい解釈

ポインチングベクトルは正味の電磁エネルギーの移動量を表すことを示したが，それを正しく解釈しなければ，パラドックスが生じる．説明の準備として次のようなモデルを考える．

6.1　導体表面上の電磁界

異なる媒質の境界面における電磁波の反射・屈折の問題は，マクスウェルの方程式に境界条件を適用して解くのが普通である．これを物理的な観点から眺めるならば，電磁波によって媒質中の電子(またはイオン)が力を受けて運動し，それによって電磁波が再放射されるためである．

この現象を端的に見るために，無限に広い平面導体の表面に一様な平面電磁波が入射する場合を考える．すなわち，図1に示すような x,y,z 直交座標系をとり，法線(y軸)と一定の角度をもって入射するTE(S偏向)波を

$$\boldsymbol{E}^i=\hat{x}\,\widehat{E}^i\,e^{j(\omega t-\boldsymbol{k}^i\cdot\boldsymbol{r})}\tag{36}$$

$$\boldsymbol{H}^i=(\boldsymbol{k}^i/\omega\mu)\times\boldsymbol{E}^i\tag{37}$$

(注8)：この章の導出過程は，前々章の平面波展開を単に逆行させたように見えるかもしれないが，全平面ではなく微小面積 $\Delta x\Delta y$ 内の電磁界を考慮対象としている．

とおく．ここに

$$k^i = -\hat{y}k_y + \hat{z}k_z$$

アンテナ工学などの分野において導体表面に流れる電流は

$$K = 2\,\hat{n} \times H^i, \quad \hat{n} = \hat{y} \tag{38}$$

となることが知られている．この式に式(37)および式(36)を適用すると

$$K_x = \widehat{K}_x\, e^{j(\omega t - k_z z)} = -2(k_y^i/\omega\mu)\,\widehat{E}^i\, e^{j(\omega t - k_z z)}$$

さて，この電流による2次波を算出する．電流 $K = \hat{x}K_x$ によるベクトルポテンシャルは，それに伝搬関数あるいはグリーン関数 G を乗じることによって求められる．

$$A_x = \mu \int_{-\infty}^{\infty} K_x G dz' \tag{39}$$

ここに G は2次元のグリーン関数

$$G = H_0^{(2)}(k\rho)/j4 \tag{40}$$
$$\rho = \sqrt{y^2 + (z - z')^2}$$

である．積分を実行すると(注9)

$$A_x = \mu\,\widehat{K}_x\, e^{j(\omega t - k_y|y| - k_z z)}/j2k_y \tag{41}$$

但し $k_y = -k_y^i$ に注意する．スカラポテンシャルは零とおけるので，ベクトルポテンシャル $A = \hat{x}A_x$ から2次電磁界が次のように求められる：

$$E^r = -\partial A/\partial t = -\,\widehat{E}^i\, e^{j(\omega t - k_y|y| - k_z z)} \tag{42}$$

$$H^r = \mu^{-1}\mathrm{rot}A = (k^r/\omega\mu) \times E^r \tag{43}$$

ここに $k^r = \hat{y}k_y + \hat{z}k_z$ である．上の式(42)は，入射電界（導体接線方向成分）の符号が逆転したものになっている．

導体表面において，入射波(36)，(37)および反射波(42)，(43)が重なっているので，ポインチングベクトルは次のように計算される．

$$\begin{aligned}
&E(t) \times H(t) \\
&= \Re\{\widehat{E}^i e^{j(\omega t - k^i\cdot r)} + \widehat{E}^r e^{j(\omega t - k^r\cdot r)}\} \\
&\quad \times \Re\{\widehat{H}^i e^{j(\omega t - k^i\cdot r)} + \widehat{H}^r e^{j(\omega t - k^r\cdot r)}\} \\
&= \widehat{E}^i \times \widehat{H}^i \cos^2(\omega t - k^i\cdot r) \\
&\quad + \widehat{E}^r \times \widehat{H}^r \cos^2(\omega t - k^r\cdot r) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\widehat{E}^i \times \widehat{H}^r + \widehat{E}^r \times \widehat{H}^i) \\
&\quad \cdot \left[\cos\{2\omega t - (k^i + k^r)\cdot r\} \right. \\
&\quad \left. + \cos(k^i - k^r)\cdot r\right]
\end{aligned} \tag{44}$$

簡単のため，入射電磁界振幅 E^i, H^i は実数，従って E^r, H^r も実数であるとした．

上式右辺第1項および第2項はそれぞれ入射波および反射波によるポインチングベクトルを表し，第3項は入射波と反射波による干渉を示す．$k^i + k^r = \hat{z}2k_z$ であるから，干渉項の前半の余弦波は $+z$ 方向（接線方向）への進行波である．また，$k^i - k^r = \hat{y}2k_y$ なることに注意すると，後半の余弦波は y 方向（法線方向）の定在波を表す．

このモデルにおいては

$$\widehat{E}^i = \hat{x}\,\widehat{E}_x, \quad \widehat{E}^r = -\hat{x}\,\widehat{E}_x$$
$$\widehat{H}^i = \hat{y}\,\widehat{H}_y + \hat{z}\,\widehat{H}_z, \quad \widehat{H}^r = -\hat{y}\,\widehat{H}_y + \hat{z}\,\widehat{H}_z$$

とおけるので，式(44)の時間平均をとって整理すると

$$\begin{aligned}
\overline{E \times H} &= \frac{1}{2}\widehat{E}^i \times \widehat{H}^i + \frac{1}{2}\widehat{E}^r \times \widehat{H}^r \\
&\quad + \frac{1}{2}(\widehat{E}^i \times \widehat{H}^r + \widehat{E}^r \times \widehat{H}^i)\cos 2k_y y \\
&= \hat{z}2\,\widehat{E}_x\widehat{H}_y \sin^2 k_y y
\end{aligned} \tag{45}$$

この式は，このモデルに対するポインチングベクトルとして二つの見方があることを教えている．

第1行目右辺は入射波と反射波に対するポインチングベクトルを表すが，そのように見るときは必ず次の行の干渉項も考慮に入れなければならない．つまり，二つの平面波があるとき，局所的にはそれぞれが独立にポインチングベクトルを形成するのではなく，両者の干渉のため時間的にも場所的にも変動し，両者の単なる代数和とはならない(注10)．

それらを一つにまとめると，第3行目のように，一定の空間分布 $\sin^2 k_y y$ をもって，導体表面 z 方向に電磁エネルギーが流れるとみなすことができる．導体面に垂直な方向には，入射波と反射波の往復のエネル

(注9)：積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk_z(z'-z)} H_0^{(2)}\{k\sqrt{y^2 + (z'-z)^2}\}dz' = 2e^{-j|y|\sqrt{k^2-k_z^2}}/\sqrt{k^2-k_z^2}$$

を用いる．

(注10)：全空間にわたって積分すると干渉項は消滅する．そのときは，平面波の直交性によって二つの波のポインチングベクトルはベクトル合成できる．後の章「ポインチングベクトルの用法」を参照．

ギー移動があるが，正味として垂直方向にはエネルギーの移動がないとして算出される．

第1，第2行目のようなポインチングベクトルの見方を分析的な観点と呼ぶならば，第3行目のような見方は総合的な観点と呼ぶことができるであろう．

6.2 半波長アンテナからの電磁波の放射

最初に述べたように，半波長アンテナからの電磁波の放射機構に関して疑問がもたれている．具体的に述べると次のようになろう．

半波長アンテナ導体棒の中央から平行2線を介して高周波電流が励振されるとき，導体棒を流れる電流は励振点で極大値，棒の両端で零となる正弦波形に近い分布を呈する．このような電流分布を仮定して電磁波放射パターンを計算すると，実際のものとよく一致する．

ところが，アンテナ棒から電磁エネルギーがどのように放射されているのかその経路をたどろうと，ポインチングベクトルを計算してその軌跡を描くと，エネルギーはアンテナ棒の電流から発するのではなく，棒の中央の電流励振部分からアンテナ棒に沿って進み，棒の両端から放出されるような形になる [17]．ポインチングベクトル $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ の定義から言って，アンテナ棒導体表面では電界 $\boldsymbol{E}$ の接線成分はなく(注11)，一方，高周波電流によって磁界 $\boldsymbol{H}$ が棒を取り巻いて発生するので，ポインチングベクトルは棒に平行にならざるを得ず，導体表面から電磁エネルギーが放射されるようなパターンは得られない．

2本の導体よりなる平行2線によって電気を導く際，エネルギーは，導体中の電子によって伝えられるのではなく，電磁界が主体となってその周囲の空間を伝わる．従って，ポインチングベクトルによって計算したとき，アンテナの中央給電点付近から電磁波が放射されるようなパターンが得られるのは正しく，また，後に論ずるように，導線によって電子との相互作用を通じて電磁エネルギーがアンテナ導体に沿って平行に導かれる [17] のも，その意味で自然である．

この見方からするならば，アンテナ導体中の電子の運動から電磁波が放出されると考えたり，電流分布を仮定して放射特性を計算する方法は誤りかという疑問が生じるかもしれない．

ここで，導体表面の電磁界に関して前項で述べたように，二つの見方があることに注意する必要がある．上の考察は総合論的な観点である．分析論的な見地に立つと，導体の表面には入射電磁波と反射電磁波とが共存する．

この事実を考慮すると，入射波は信号源あるいはアンテナ励振用平行2線から発してアンテナ導体中の電子を励振する役目をする．そして，電子の運動によって生じた放射波が反射波に相当する．アンテナの近傍においては，これら二つの波が重畳し，結果としてのポインチングベクトルは，導体棒（表面）に平行となり，通常の観測手段では両者を区別することができない(注12)．

この間の事情をもう少し具体的に見るために，数式的に表現する．半波長アンテナ導体棒の中心軸を z 軸にとって円筒座標を採用すると，その周りの電磁界は円筒関数によって表される．境界条件を満たす最も簡単な解は次式のようになる．

$$\boldsymbol{H}=\hat{\phi}K\{H_1^{(1)}(h\rho)+H_1^{(2)}(h\rho)\}e^{-j\beta z}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}=&\,\hat{\rho}(\beta/\omega\varepsilon)K\{H_1^{(1)}(h\rho)+H_1^{(2)}(h\rho)\}e^{-j\beta z}\\&-j\hat{z}(h/\omega\varepsilon)K\{H_0^{(1)}(h\rho)+H_0^{(2)}(h\rho)\}e^{-j\beta z}\end{aligned}$$

ここに ρ は導体棒中心軸からの距離，ϕ は方位角である．アンテナ導体棒表面 $\rho=a$ 上の境界条件 $E_z=0$，すなわち $H_0^{(1)}(ha)+H_0^{(2)}(ha)=2J_0(ha)=0$ を満たす横方向の波数 h から軸方向波数 $\beta^2=k^2-h^2$ が決まる．また，導体棒表面 z 方向に流れる電流密度は $K\{H_1^{(1)}(ha)+H_1^{(2)}(ha)\}e^{-j\beta z}$ に等しい．すなわち，第1種ハンケル関数 $H_1^{(1)}(h\rho)$ は入射波を表し，それによってアンテナ導体棒上に電流が励起され，放射波 $H_1^{(2)}(h\rho)$ が生じる．

ポインチングベクトルは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*=&\,\hat{z}\frac{\beta}{\omega\varepsilon}|K|^2\left|H_1^{(1)}(h\rho)+H_1^{(2)}(h\rho)\right|^2\\&-j\hat{\rho}(h/\omega\varepsilon)|K|^2\\&\{H_0^{(1)}(h\rho)+H_0^{(2)}(h\rho)\}\{H_1^{(1)}(h\rho)\\&+H_1^{(2)}(h\rho)\}^*\end{aligned}$$

と書ける．第1項は入射(励振)電力 $H_1^{(1)}(h\rho)$ と反射(放射) 電力 $H_1^{(2)}(h\rho)$ とが重なり，アンテナ導体棒と空間との間には正味の電力の授受がなく，導体棒 z 軸に沿って電力が流れることを示している．

文献 [17] に計算されているように，ポインチングベクトルはアンテナ導体棒電流から発することなく，

(注11)：アンテナは完全導体によってできているものとする．
(注12)：マイクロ波技術における方向結合器のようなセンサを作れば，励振波と出射波とを区別して観測することができるであろう．

棒の先端から出射することが納得される．また，第2項は純虚数であって(第1種および第2種ハンケル関数は互いに複素共役)，半径方向の定在波を表している．この項は第1種ハンケル関数に比例する入射波 $H_0^{(1)}(h\rho)\{H_1^{(1)}(h\rho)\}^*$ および第2種ハンケル関数に比例する放射波 $H_0^{(2)}(h\rho)\{H_1^{(2)}(h\rho)\}^*$ に分解されるが，そのときは，平面波の場合と同じように，入射波と反射波との干渉項も現れる．

実用アンテナの電磁界はもっと複雑であるが，更に高次の円筒関数および方位角方向の正弦・余弦関数を重畳させることによって表現可能である．

既に指摘したように，ポインチングベクトルは無条件にベクトル合成を行うことはできず(注13)，干渉項を考慮しなければならない．これが，ポインチングベクトルの理解を難しくしている一因でもある．もし，アンテナからある程度遠く離れた点で電磁界を観測するならば，励振波の影響は少なく電子の運動から発した放射波のみが現れ，干渉効果は消えるので，正弦波電流を仮定して求められた従来の解析結果に近いものが得られる．もし，何らかの方法で入射波(励振波)を除き，反射波(散乱波または放射波)のみを取り出すならば，電子の運動によってアンテナ導体表面から垂直に出る電磁エネルギー成分が観測されるはずである．

7. ポインチングベクトルの用法

最後にポインチングベクトルの正しい使用法について言及しておく．

7.1 空間的な合成

x 軸方向の電界 $\hat{x}E$ および y 軸方向の磁界 $\hat{y}H$ があるとき，そのポインチングベクトルは $\boldsymbol{S} = \hat{z}\,EH \equiv \hat{z}S$ である．この電磁界を z 軸方向に対して角度 $+\phi$ だけ回転させると

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_+ \\ \boldsymbol{H}_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$$

この電磁界のポインチングベクトルも当然のことながら $\boldsymbol{E}_+ \times \boldsymbol{H}_+ = \hat{z}S$ に等しい．また，$\hat{x}E, \hat{y}H$ を $-\phi$ だけ回転させたもの，すなわち $\boldsymbol{E}_-$, $\boldsymbol{H}_-$ のポインチングベクトルも $\hat{z}S$ に等しい．

しかし，$\pm\phi$ だけ回転させた，これら二つの電磁界の和のポインチングベクトルを計算すると

$$(\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-) \times (\boldsymbol{H}_+ + \boldsymbol{H}_-) = \hat{z}S\,4\cos^2\phi$$

となり，交角 2ϕ に応じてその値は $0\ \hat{z}S$ から $4\ \hat{z}S$ まで変化する．すなわち，合成電磁界のポインチングベクトルは，個々のベクトルの和にはならない．しかしながら，条件 $2\phi = \pi/2$ が成立する，つまりもとの電磁界が直交する場合，上式の値は $2\ \hat{z}S$ に等しくなり，ベクトルとしての合成則が満たされる．

7.2 時間的な合成

次に，正弦波的に変化する電磁界

$$\boldsymbol{E}_+ = \widehat{\boldsymbol{E}}\ e^{j(\omega t+\theta)},\ \ \boldsymbol{H}_+ = \widehat{\boldsymbol{H}}\ e^{j(\omega t+\theta)}$$

について考える．2.において示したように，そのポインチングベクトルは $(1/2)\ \boldsymbol{E}_+ \times \boldsymbol{H}_+^* = (1/2)\ \widehat{\boldsymbol{E}} \times \widehat{\boldsymbol{H}}^*$ である．θ の代わりに $-\theta$ とおいた電磁界 $\boldsymbol{E}_-$, $\boldsymbol{H}_-$ との和のポインチングベクトルを計算すると

$$\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-) \times (\boldsymbol{H}_+ + \boldsymbol{H}_-)^* = \frac{1}{2}\ \widehat{\boldsymbol{E}} \times \widehat{\boldsymbol{H}}^* 4\cos^2\theta$$

この場合も，一般にベクトルの合成則は成り立たないが，直交条件 $2\theta = \pi/2$ が満たされるときは，ベクトルとして合成される．

7.3 導波管内の電磁界

具体的な例として導波電磁界について考察する．断面 a, b の方形導波管の基本モード電磁界は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \hat{x}E\ 2\cos hy\ e^{-j\beta z} \\ \boldsymbol{H} &= \hat{y}\frac{\beta}{\omega\mu}E\ 2\cos hy\ e^{-j\beta z} \\ &\quad + \hat{z}\frac{h}{\omega\mu}E\ j2\sin hy\ e^{-j\beta z} \end{aligned} \tag{46}$$

と表現することができる．この電磁界は下のような二つの平面波の合成である．

$$\boldsymbol{E}_\pm = \hat{x}E\ e^{-j\boldsymbol{k}_\pm\cdot\boldsymbol{r}},\ \ \boldsymbol{H}_\pm = (\boldsymbol{k}_\pm/\omega\mu) \times \boldsymbol{E}_\pm$$

ここに $\boldsymbol{k}_\pm = \mp\hat{y}h + \hat{z}\beta$ であって，$h = \pi/b$ は導波管の遮断波数を表す．それぞれの平面波のポインチングベクトルは

$$\boldsymbol{S}_\pm = \frac{1}{2}\ \boldsymbol{E}_\pm \times \boldsymbol{H}_\pm^* = \frac{1}{2}\ \frac{\boldsymbol{k}_\pm}{\omega\mu}\ |E|^2$$

と計算される．この二つのベクトルを合成すると

$$\boldsymbol{S}_+ + \boldsymbol{S}_- = \hat{z}(\beta/\omega\mu)|E|^2$$

(注13)：式(35)はポインチングベクトルの合成のように見えるかもしれないが，それは同一空間での和ではなく，足し合わされる要素ベクトルは別の空間点に属し，互いに独立であることに注意する必要がある．次の章（用法）を参照．

を得る．

平面波展開とは別に元の電磁界のポインチングベクトルを求めると

$$S = \frac{1}{2}E \times H^* = \hat{z}\frac{\beta}{\omega\mu}|E|^2 2\cos^2 hy + j\hat{y}\frac{h}{\omega\mu}|E|^2 \sin\ 2hy \tag{47}$$

第1項は，y 方向に $\sin^2 hy$ なる分布をもって管軸 z 方向に伝搬する電磁エネルギー密度を表すが，平面波のベクトル合成とは一致しない．しかし，導波管断面内で積分すれば

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} S_+\ dxdy + \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} S_-\ dxdy = \int_0^a\int_0^b S dxdy = \hat{z}\frac{\beta}{\omega\mu}|E|^2 ab \tag{48}$$

のように，個々の平面波ポインチングベクトル S_+ および S_- の和と，合成電磁界としての S とは一致する．積分によって（この場合は数学的な意味での）直交条件が満たされるからである．

7.4 インコヒーレント合成

自然光のようにインコヒーレントな波動に対して適当な時間あるいは空間領域で平均をとると干渉項は消える．すなわち，この場合，時空的平均の意味において直交性が満たされるので，ベクトル合成則が成立する．

8. 補足とまとめ

若干の補説を行い，本論文において得られた結果をまとめておく．

8.1 ポインチングベクトルの意味

平面波の電磁エネルギー流密度は $E \times H$ に等しいことが既に知られている．そこで，任意の電磁界は平面波に展開され，かつ各平面波は互いに直交することに注意すると，任意電磁界の電磁エネルギー流は，各平面波のそれを（ベクトル的に）合成したものに等しい．つまり，平面波合成の結果としての電界および磁界をそれぞれ E および H とおけば，ポインチングベクトル $E \times H$ は正味の電磁エネルギー流密度を表す．

なお，ポインチングベクトルに関する諸問題解決への努力は，2. 前半で説明したように，ヘルツの指摘以来，付加項 rot$X$ をどのように定めるかに集中されてきたように見える．本論文の結論の一つとして，ポインチングベクトル $E \times H$ それ自身で電磁エネルギー流密度を表すことが判明したので，付加項は必要でない．つまり rot$X = 0$ であって，結局，ポインチングベクトル自身に問題はなかったことになる．その解釈が不完全で誤ったものが多かったわけである．

このように，ポインチングベクトルは正味の電磁エネルギー流密度を表すことが判明したので，零でない付加項を有する他のベクトルは不要である．しかし，提案されてきた他のベクトルが電磁エネルギー以外のエネルギー流を表す可能性は否定できないので，その検討は必要であろう．これについては別の機会に譲る．

8.2 ポインチングベクトルの和

2. 後半にポインチングベクトルの和に関するパラドックス的な事実を示した．これは，通常のベクトルのような加法則が成立しないことを意味する．その理由は，前章において説明したように，複数のポインチングベクトルを加え合わせると，干渉項が生ずるからである．ベクトルとは 平行四辺形則（加法則）が成立するものと定義されるので，一般的にはこの量に対してベクトルという呼称は適当でない．

しかしながら，平面波に展開した後，必要な空間領域にわたって積分すると，干渉項が消滅し，上述のように各平面波の電力ベクトル和として表現される．すなわち，直交性が成立するときは，ベクトル合成則を満足する．この意味においてはベクトルと呼ぶことができる．

8.3 直流ポインチングベクトル

静電磁界に関してポインチングベクトルは物理的実体をもたないとする意見がかなりある．が，それは根拠のないことである．式 (2), (3) を見ると，E および H が時間的に変動するしないにかかわらず，考慮すべき時空の近傍の電磁界をとれば，それ以下の議論が常に成立するので，ポインチングベクトルに関して静電界，静磁界，動電磁界を区別する必要はない．平面波を加え合わせた総和が時間的に一定になるか否かにすぎない．

8.4 物質中のポインチングベクトル

物質中の電磁エネルギー流密度についても従来から議論が続いている．真空中のポインチングベクトルに関する本論文の結果はその解決に資するであろう．

9. む す び

前に示した場の概念に基づいて，応用に便利な平面波展開公式を導き，電磁エネルギー移動に関するポイ

ンチングベクトルの意味を解明した．そして，それに付随するパラドックスを解いて，その具体的な用法をも示した．本論文で得られた主要な結果は前章にまとめたとおりである．

文　献

[1] J.H. Poynting, "On the transfer of energy in the electromagnetic field," Phil. Trans., vol.175, pp.343–361, 1884.

[2] O. Heaviside, "Electromagnetic induction and its propagation," The Electrician, vol.14, pp.178–180, 1885.

[3] H. Hertz, "Electric waves," Macmillan and Co., p.220, 1893.

[4] J. Slepian, "Energy and energy flow in the electromagnetic field," Journal of Applied Physics, vol.13, pp.512–518, 1942.

[5] 抜山平一, "Poynting vector の分解並に電磁的勢力移動の観念に就いて," 電学誌, vol.45, pp.739–948, 1925.

[6] 徳丸　仁, "完全導体アンテナにおける電波の放射機構 ―抜山ベクトクトルを利用した一つの解釈," 信学論, vol.67-B, no.9, pp.377–383, 1984.

[7] C.S.Lai, "Alternative choice for the energy flow vector of the electromagnetic field," Am. J. Phys., vol.49, pp.841–843, 1981.

[8] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands, "The Feynman Lectures on Physics," Addison-Wesley, 1965 （日本語訳, IV, 第6章, 岩波書店）

[9] 細野敏夫, "Poyntingベクトル，電磁モーメントおよびAbraham-Minkowski論争について," 信学論(C), vol.J69-C, no.9, pp.1122–1133, 1986.

[10] 細野敏夫, "電力流とその表現―Poynting ベクトルと抜山ベクトル," 信学論(C-I), vol.J77-C-I, no.10, pp.519–528, 1994.

[11] M. Hashimoto, "Eddy power flow of electromagnetic waves," Int. J. Electrinics, vol.34, pp.713–716, 1973.

[12] J.A. Stratton, "Electromagnetic Theory," McGraw-Hill, pp.131–135, 1941.

[13] 飯田修一, "新電磁気学・下," 丸善, pp.480–481, 1975.

[14] 安達三郎, "電磁波工学におけるパラドックス―その思い違いを探る," 信学誌, vol.67, pp.657–662, 1984.

[15] 橋本正弘, "電磁導波論入門," 日刊工業, p.8, 1985.

[16] 中島将光, "電磁現象の基本概念と電磁界の新しい性質," 信学論(C-I), vol.J81-C-I, no.9, pp.494–506, Sept. 1998.

[17] S.A. Schelkunoff and H.T. Friis, "Antennas," John Wiley & Sons, pp.124–125, 1952.

付　録

1. 平面波展開表示式(15)の導出

式(14)の被積分項を具体的に書くと

$$\sum_{s=\pm1}\sum_{s'=\pm1}\mathbf{E}(jk_x,jk_y,jsk_z,j\omega)$$
$$\times\mathbf{H}^*(jk_x,jk_y,js'k_z,j\omega)$$
$$=\mathbf{E}(+)\times\mathbf{H}^*(+)+\mathbf{E}(-)\times\mathbf{H}^*(-)$$
$$+\mathbf{E}(+)\times\mathbf{H}^*(-)+\mathbf{E}(-)\times\mathbf{H}^*(+)\quad(\mathrm{A\cdot1})$$

平面波としての条件(11)を用いると，右辺第1項は

$$\{\mathbf{k}^*\mathbf{E}(+)\cdot\mathbf{E}^*(+)-\mathbf{E}(+)\cdot\mathbf{k}^*(+)\mathbf{E}^*(+)\}/\omega\mu$$

更に式(12)を援用し，上式の z 方向成分をとると

$$=\{k_z^*|\mathbf{E}(+)|^2+(k_z-k_z^*)|E_z(+)|^2\}/\omega\mu$$

を得る．式(14)において，積分は引数 jk_x，jk_y，$j\omega$ について正負対称であるので，被積分関数はその複素共役値と交換しても積分の値は変わらない．そこで，両者の和の半分の z 成分をとってもよい．

$$=\Re(k_z/\omega\mu)|\mathbf{E}(+)|^2$$

同様に第2項は $-\Re(k_z/\omega\mu)|\mathbf{E}(-)|^2$ となる．

式(A・1)の第3および4項についても，平面波の条件(12)および(11)を援用すると，同様な計算過程を経て，その z 方向成分はそれぞれ

$$\{\mp k_z^*\mathbf{E}(\pm)\cdot\mathbf{E}^*(\mp)\pm E_z\cdot(k_z+k_z^*)\mathbf{E}^*(\mp)\}/\omega\mu$$

となる．第1および2項と同様な理由で上式の複素共役式をとり，両者の和の半分を書き出すと

$$j\Im(k_z/\omega\mu)\cdot\{\mathbf{E}(+)\cdot\mathbf{E}^*(-)-\mathbf{E}(-)\cdot\mathbf{E}^*(+)\}$$

2. 平面波展開公式の導出

式(17), (18)および(22)より $\mathbf{H}(\pm)$ および $\mathbf{E}(-)$ を消去すると

$$\{\mathbf{k}(+)-\mathbf{k}(-)\}\times\mathbf{E}(+)=\omega\mu\,\mathring{\mathbf{H}}-\mathbf{k}(-)\times\mathring{\mathbf{E}}$$

ここで，$\mathbf{k}(+)-\mathbf{k}(-)=2\hat{z}k_z$ なることに注意し，上式に対して左から $\hat{z}$ との外積をとると

$$2k_z\{E_z(+)\hat{z}-\mathbf{E}(+)\}$$
$$=\omega\mu\hat{z}\times\mathring{\mathbf{H}}-\hat{z}\times\{\mathbf{k}(-)\times\mathring{\mathbf{E}}\}$$

式(21)を用いると，(23)を得る．式(25)も同様に得られる．また，式(17)と $\mathbf{k}(-)$ との内積をとり，$\mathbf{k}(-)\cdot\mathbf{E}(-)=0$ なることに注意すると，(24)が出る．式(26)も同様である．

3. 静電界の平面波展開

前[16]に静電磁界の平面波展開のいくつかの例を紹介したが，今回採用した境界条件設定型展開公式によっても同じ結果が得られることを示す．

簡単な例として全空間で一様な静電界

$$E(r,t) = \hat{x}E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}E \sqcap (t-t_n)$$
$$\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} E^{(n)}(r,t)$$

に対して適用する．区間 n に対するフーリエ成分は，式(19)によって

$$\overset{\circ}{E} = \iiint \hat{x}E \sqcap (t-t_n) e^{j(k_x x + k_y y)} e^{-j\omega t} dx dy dt$$
$$= 4\pi^2 \hat{x}E\delta(k_x)\delta(k_y)\,\Delta t\,\mathrm{sinc}\frac{\omega\Delta t}{2} e^{-j\omega t_n}$$

と計算される．式(23)より $E_t(\pm) = \overset{\circ}{E}_t/2$, $E_z(\pm) = 0$, $H_t(\pm) = \pm\eta\overset{\circ}{E}_t/2$, $H_z(\pm) = 0$ となるので，これらの展開係数を式(27)に代入することによって区間 $|t-t_n| < \Delta t/2$ における電磁界の平面波展開

$$E^{(n)}(r,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \sum_{s=\pm} E(s) e^{j(\omega t - \omega t_n - k_x x - k_y y - s k_z)} dk_x dk_y d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\int \hat{x}\frac{E}{2}\Delta t\,\mathrm{sinc}\frac{\omega\Delta t}{2} e^{j\omega(t-t_n)\mp jkz} d\omega$$
$$= \sum_{\pm}\hat{x}\frac{E}{2}\sqcap(ct - ct_n \mp z) \qquad (\mathrm{A{\cdot}2})$$

$$H^{(n)}(r,t)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\int \hat{y}\frac{\pm\eta E}{2}\Delta t\,\mathrm{sinc}\frac{\omega\Delta t}{2} e^{j\omega(t-t_n)\mp jkz} d\omega$$
$$= \sum_{\pm}\hat{y}\frac{\pm\eta E}{2}\sqcap(ct - ct_n \mp z) \qquad (\mathrm{A{\cdot}3})$$

が得られる．

時刻 $t-t_n$ における(境界)面 $z=0$ 上の電磁界は光速で $\pm z$ 方向に走るので，$ct_n = \pm z_n$ とおけば，これらは前論文[16] 4.において物理的に導出した $E_x^{(n)}(z,t)$ および $H_y^{(n)}(z,t)$ と同一の式 ($H_y = 0$) になる．これらを $n=-\infty$ から $+\infty$ まで加え合わせると

$$E(r,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E^{(n)}(r,t) = \hat{x}E, \quad H = 0$$

となってもとの静電界が再現される(注14)．

(注14)：公式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax \cos bx}{x}dx = \sqcap\left(\frac{b}{2a}\right)$$

を用いる．

（平成9年10月3日受付，12月22日再受付）

中島　将光　（正員）

昭35京大・工・電子卒．昭40同大学院博士課程了．昭43同大・工・助教授，現在に至る．パラメトリック増幅器・ガンダイオード・インパットダイオードなどのマイクロ波固体素子とその回路，光変調・復調および光通信システム，大電力ミリ波アンテナおよび伝送系，電磁現象の基本概念に関する研究などに従事．工博．著書「マイクロ波工学―基礎と原理」(森北出版)，「基本電子回路」(電気学会)，「Microwave Integrated Circuits」(共著，Dekker) など．

論　文

凹凸のある表面をもつ3次元完全導体による電磁波散乱特性
—— 近傍界および表面電流密度 ——

川野　光則[†]　　生野　浩正[†]　　西本　昌彦[†]

Numerical Analysis of the Electromagnetic Scattering from Three-Dimensional Perfectly Conducting Objects with Convex-Concave Surface
—— The Near Field and the Surface Current Density ——

Mitsunori KAWANO[†], Hiroyoshi IKUNO[†], and Masahiko NISHIMOTO[†]

あらまし　安浦の方法を用いて，凹凸のある表面をもつ3次元完全導体による電磁波散乱特性のうち，近傍界および表面電流密度に関する解析を行っている．まずはじめに，平面波が入射したときの照射領域における物体のごく近傍での全電界と全磁界の強度分布を比較し，それらの間には物体遠方では観測されない顕著な相違が生じることを示している．次に，照射領域における物体のごく近傍での全磁界は，物体形状に沿って強い分布を有することを示し，物体形状が全磁界の分布に直接反映されることを明らかにしている．更に，物体形状の局所的な変形が表面電流密度の分布を大きく変化させることを示し，表面電流密度が物体形状に大きく依存した特性を有していることを明らかにしている．最後に，3次元物体表面上の任意の観測面における表面電流密度は，互いに直交する特定の観測面における表面電流密度の合成として表されることを示し，3次元問題特有の偏波依存性を明らかにしている．

キーワード　3次元電磁波散乱問題，近傍電磁界，表面電流密度，凹凸のある表面をもつ3次元完全導体

1. まえがき

近年，環境電磁工学 [1], 近接場光学 [2] および電磁波逆散乱問題 [3] に代表されるように，物体近傍における放射電磁界や散乱電磁界の特性解析が重要な課題となっており，3次元物体近傍における電磁波散乱の解析結果はアンテナや携帯電話等の貴重な設計資料として注目されている [4]．筆者らは現在までにこれらの問題を解析するため，多重極展開に基づく安浦の方法に新しくアレー状の多重極子 [5] を導入し，解の収束の改善を図った．その結果，これまでに数値解析が非常に困難であった凹凸のある表面をもつ3次元完全導体による電磁波散乱問題を広帯域にわたり解析できるようになった．実際，文献 [5] に回転体から変形した凹凸のある物体による遠方界の特性を解析できることを示した．また，解の収束の改善は，従来は解の収束が遅くその解析が困難であった近傍界や表面電流密度の解析も容易に行えることを示唆している．

そこで，本論文では3次元完全導体による電磁波散乱特性を更に詳しく分析するために，解の収束を改善した安浦の方法を用いて近傍界および表面電流密度を計算し，それらの特性について検討している．まずはじめに，物体に相似な曲面上における全電磁界の強度分布を計算し，物体のごく近傍における全磁界は入射波の照射領域で一様に強い分布を有するのに対し，全電界は照射領域と影領域の境界付近の一部でのみ強い分布を有することを示し，それらの間には物体遠方では観測されない顕著な相違が生じることを明らかにする．次に，物体断面を含むある観測面における全電磁界の強度分布を計算し，物体のごく近傍における全磁界は物体形状に沿って強い分布を有することを示し，物体形状が全磁界の分布に直接反映されることを明らかにする．更に，3次元物体表面上に励起される電流密度を計算し，その特性が物体形状の局所的な変形によ

† 熊本大学電気システム工学科，熊本市
Department of Electrical and Computer Engineering, Kumamoto Univ., Kurokami 2-39-1, Kumamoto-shi, 860-8555 Japan

輻射科学研究会資料
RS98-12

周期的分散マネージメント光伝送系における非線形パルスの変分法解析

Variational Analysis of Nonlinear Pulse in a Periodically Dispersion Managed Optical Transmission System

丸田 章博, コンスタルツ ビンセント, 児玉 裕治

大阪大学大学院 工学研究科

1998年10月16日(金)
於　関西大学100周年記念会館

あらまし

ファイバの分散値を長手方向に周期的に変化させた分散マネージメント光伝送路を伝搬する非線形パルスを変分法によって解析している。RZ パルスである DM ソリトンに対してはエルミート・ガウス関数展開を用いて解を仮定することにより、数値シミュレーションによって知られている振動を伴うテールおよび非線形チャープが展開関数間の干渉として説明できることを示している。また、NRZ パルスに対しては非線形チャープを採り入れた解を仮定することにより、数値シミュレーションとよく一致した結果が得られることを示す。

1. まえがき

分散値の異なるファイバを交互に周期的に接続した伝送路は分散マネージメント光伝送路と呼ばれ、超高速長距離伝送および波長分割多重伝送用に活発に研究されている[1]。このような伝送路を伝搬する RZ(Return-to-Zero) パルスおよび NRZ(Non-Return-to-Zero) パルスの振舞いは主に実験および数値シミュレーションによって調べられており、伝送路の最適化、性能限界の明確化のために理論の構築が急務となっている。ところで、種々の工学的問題を解くために変分法が多用されてきた。いまの場合、モデル方程式である無限自由度を持つ (非線形) 偏微分方程式の解を有限個のパラメータを含む適当な形で仮定し、変分法を適用することによって、それらのパラメータに対する有限自由度の (連立) 常微分方程式系に変換することができれば、有限個のパラメータの変化を調べることによってパルスの挙動を明らかにすることができる。本報告では、分散値および非線形性がファイバの長手方向に変動するような比較的複雑な問題に対しても、変分法による解析が有効であることを示す。

2. モデル方程式

分散値、非線形性および利得/損失がファイバの長手方向に変動するような伝送路を伝搬するパルスの振舞いは、次式によって記述される。

$$i\frac{\partial q}{\partial Z} - \frac{d(Z)}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + s(Z)|q|^2 q = ig(Z)q\,, \tag{1}$$

ここで、$q, T, Z, d(Z), s(Z)$ および $g(Z)$ はそれぞれ規格化された電場包絡線の複素振幅 E, 群速度で伝搬する座標系から見た時間 t, 伝搬距離 z, 群速度分散 $k''(z)$, 非線形係数 $\nu(z)$ および利得/損失係数 $\gamma(z)$ を表わし、これらと実パラメータとは、規格化のために適当に選ばれた時間 t_0, 電力 P_0 および非線形距離 $z_{\rm NL}[\equiv 1/(\nu_0 P_0)]$ を用いて、$q \equiv E/\sqrt{P_0}, T \equiv t/t_0$, $Z \equiv z/z_{\rm NL}$, $d(Z) \equiv k''(Z)z_{\rm NL}/t_0^2$, $s(Z) \equiv \nu(Z)P_0 z_{\rm NL}$ および $g(Z) \equiv \gamma(Z)z_{\rm NL}$ によって関係づけられる。非線形距離 $z_{\rm NL}$ の定義に表われる ν_0 は規格化のための非線形係数であり、適当に選ばれたファイバのカー非線形係数 n_{20}, 有効コア断面積 $A_{\rm effo}$ および搬送波の波長 λ を用いて、$\nu_0 \equiv 2\pi n_{20}/(A_{\rm effo}\lambda)$ と定義される。

次に、$q(Z,T)=a(Z)u(Z,T)$ なる変数変換を行うと、式(1)は次式のように書き直すことができる。

$$i\frac{\partial u}{\partial Z}-\frac{d(Z)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}+S(Z)|u|^2u=0\ , \tag{2}$$

ここで、$S(Z)\equiv s(Z)a^2(Z)$ であり、$a(Z)$ は $a(Z)\equiv a(0)\ \exp\left[\int_0^Z g(Z')dZ'\right]$ で定義される。

3. RZ パルスの変分法解析

分散マネージメント光伝送路を伝搬する非線形定常 RZ パルスは、分散マネージメントソリトン(DM ソリトン)と呼ばれ、実験と数値シミュレーションによってそのパルスの振舞いが調べられている[2]。DM ソリトンは、分散値が一定の伝送路を伝搬する従来のソリトンに比べて、パルスと雑音との相互作用に起因するタイミングジッタ(ゴードンハウスジッタ)が少なく、高密度光時分割多重伝送(OTDM)時に問題となる隣接パルス間相互作用および波長分割多重伝送(WDM)時に問題となるチャネル間の相互作用に起因するタイミングジッタも少ないといった、大容量長距離伝送の特性向上に向けた多くの優れた特徴を有している[2]。

ところで、DM ソリトンのラグランジュの変分法による理論解析では、線形チャープを持つガウス関数でパルス波形を近似する方法が多用されてきた[2]。しかし、平均化法を用いた数値シミュレーションによるとパルスの裾は振動を伴って指数関数的に減衰することが観測されており[3]、このことはガウス関数近似を行った変分法では説明することができない。また、ガウス関数近似を行った変分法では数値シミュレーションの結果を定性的に説明することはできても、定量的な取扱いには難点があった。Lakoba と Kaup は、より良い近似としてパルスをエルミート・ガウス関数展開する方法を示し、多重スケールの方法によって展開係数を摂動的に求めている[4]。しかし、彼らは平均零分散の伝送路を伝搬する線形パルスの摂動としてパルスを取り扱っているために、この方法は小さなエネルギーを持つパルスに対してしか有効ではない。本節では、適切なパルス波形を仮定した変分法によって、DM ソリトンの振舞いをより詳細に解析し、パルスの振舞いが定量的に説明できることを示す。

さて、分散マネージメント伝送路では局所的に大きな分散値のファイバが用いられるために、パルスは一般に大きな周波数チャープを持つ。そこで、ラグランジュの変分法[5]で用いる試行関数として、式(2)の解を次式に示すモード関数展開の形で仮定する。

$$u(Z,T)=\sum_{n=1}^{N}A_n(Z)f_n(\tau)\exp(i\phi_n)\ . \tag{3}$$

ここで、

$$\tau=p(Z)T\ ,\qquad \phi_n=C(Z)\tau^2/2+\theta_n(Z)\ . \tag{4}$$

であり、$A_n(Z)$, $\theta_n(Z)$ および $p(Z)$, $C(Z)$ は Z のみの実関数であり、それぞれ第 n モードの振幅、位相およびパルス幅の逆数、チャープを表わす。なお、$p(Z)$ と $C(Z)$ はすべての

モードに対して共通であると仮定する。また、第 n 番目のモード関数 f_n は τ のみの実関数であり、$\int_{-\infty}^{\infty} f_n^2 d\tau = 1$ と規格化されているものとする。変分法では、適切な形の解を仮定することが解析の有効性を保証するために大変重要である。ここで考えている波動問題のような無限次元の問題の場合には、より良い解析精度を得るには、より多くのモードを考慮することが必要となる。一方、より多くのモードを考慮するほど、解析はより複雑となり煩雑な計算が必要となる。そこで、本報告では偶対称のパルスを考え、式 (3) において $N = 2$ としたエルミート・ガウス関数展開を行う。すなわち、$H_n(\tau)$ を n 次のエルミート多項式として、$f_1(\tau) = \pi^{-1/4} H_0(\tau)\exp(-\tau^2/2)$ および $f_2(\tau) = \pi^{-1/4} H_4(\tau)\exp(-\tau^2/2)/(8\sqrt{6})$ を用いる。式 (3) を試行関数として式 (2) のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{d(Z)}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial T}\right|^2 + \frac{S(Z)}{2}|u|^4 + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Z}u^* - \frac{\partial u^*}{\partial Z}u\right) \tag{5}$$

に代入し、変分法を適用すると次式が得られる。

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\varepsilon}{dZ} &=& -\dfrac{\sqrt{3}S(Z)E_0}{16\sqrt{\pi}}p\sin\theta\ , \\ \dfrac{dp}{dZ} &=& p^3Cd(Z) - \dfrac{\sqrt{3}S(Z)E_0}{2\sqrt{\pi}}p^2\varepsilon\sin\theta\ , \\ \dfrac{dC}{dZ} &=& -p^2(C^2+1)d(Z) - \dfrac{S(Z)E_0p}{\sqrt{2\pi}}\left[1 + \dfrac{\sqrt{6}}{4}\varepsilon(\cos\theta - 4C\sin\theta)\right]\ , \\ \dfrac{d\theta}{dZ} &=& -4p^2d(Z) - \dfrac{S(Z)E_0p}{128\sqrt{2\pi}}\left[198 + 35\cos(2\theta) + \dfrac{8\sqrt{6}}{\varepsilon}\cos\theta\right] \end{array}\right. \tag{6}$$

ここで、$E_n(Z)(\equiv A_n^2/p)$ は第 n モードのエネルギーを表わし、$E_0(= E_1 + E_2)$ はパルスの全エネルギーを表わす保存量である。また、$\theta(Z)(\equiv \theta_1 - \theta_2)$ はモード間の位相差を表わす。$\varepsilon(Z)$ は $E_2 = \varepsilon^2 E_0$ によって定義される高次モードの持つエネルギーの割合を表わし、一般的に $\varepsilon \ll 1$ であるので、式 (6) の導出過程で ε の高次項は無視している。

さて、$0 < Z < Z_d/4$ および $3Z_d/4 < Z < Z_d$ においては $d(Z) = -d_{av} - \Delta D/2$、$Z_d/4 < Z < 3Z_d/4$ においては $d(Z) = -d_{av} + \Delta D/2$、$S(Z) \equiv 1$ である周期 Z_d の具体的な 2 ステップ分散マップに対して式 (6) の周期解を探してみよう[1]。分散マップの周期 $Z_d = 1$、分散値の差 $\Delta D = 100$ とする。また、1 周期内で対称的な分散マップ、均一非線形、無損失の伝送路に対して共通に用い得る初期値として、$C(0) = 0$ および $\theta(0) = \pi$ とする。具体的には、与えられたパルスのエネルギー E_0 に対して、適切な $\varepsilon(0)$ と $p(0)$ の値を決めることで周期解の決定を行っている。伝送路の平均分散 $d_{av} = 1$、初期自乗平均 (RMS) パルス幅 $T_{rms} \equiv \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} T^2|u|^2 dT \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dT} = 1.5$ とした場合の、周期解に対する C - p および θ - E_2 の位相図を図 1 に示す。実線は式 (6) によって求めた結果であり、点線は従来のガウス関数近似に相当する式 (6) の第 2 および第 3 式において $\varepsilon = 0$ とおいた式によって

[1] 従来のブライト・ソリトンが伝送路が異常分散の場合に存在することをから、$d(Z)$ と d_{av} の符号を反対にとっていることに注意。

求めた結果である。図 1 より、$\varepsilon(\ll 1)$ の逆数が式 (6) 第 4 式の右辺に含まれることによって、モード間の位相差 θ が急激に変化し、また、このことが ε の変化と C - p 軌道のガウス近似からのずれを引き起こしている。次に、パルス波形と瞬時周波数を図 2 で比較してみよう。実線は平均化法を用いた数値シミュレーション[3]、破線はガウス関数近似による変分法、点線は式 (6) によってそれぞれ得られた結果である。図 2(a) は $Z = 0$ で観測した結果であり、数値シミュレーション結果には、パルスの裾の振動が見られる。パルスの第一零点の位置は、数値計算による結果とエルミート・ガウス展開による結果とがよく一致している。また、図 2(b) は $Z = Z_d/4$ で観測した結果であり、エルミート・ガウス展開による結果は単純なガウス関数近似による結果に比べて、数値計算結果とよく一致している。ここで、数値計算で観測された周波数チャープが線形ではないことに注意しておこう。このことも線形チャープを仮定したガウス関数近似の妥当性を破る一因となっている。

図 3 には、パルスの全エネルギーが $E_0 = 15$ となる周期解の $Z = 0$ における初期 RMS パルス幅 T_{rms} とパルスの第一零点の位置を、平均分散 d_{av} に対して示す。ここでの線種は、図 2 に示す結果と同じ方法をそれぞれ表わす。図 3 においても、すべてのパラメータに対してエルミート・ガウス展開による結果がガウス近似による結果よりも、数値計算結果とよく一致している。なお、伝送路の平均分散が正常分散 ($d_{av} < 0$) の場合には、変分法によると、同じエネルギーに対してパルス幅の異なる 2 つの周期解が存在する。しかし、幅が狭い方のパルスは不安定であり、数値シミュレーションによってはこのブランチの解は見つかっていない。

最後に、以上に示した規格化値の実パラメータへの換算を示しておく。$t_0 = 10$[ps], $P_0 = 3$ [mW], $n_2/A_{\rm eff} = 4 \times 10^{-10}$[W^{-1}], $\lambda = 1.55$[μm] といった良く用いられる値の場合には、初期 RMS パルス幅 $T_{rms} = 1.5$ は $t_{rms} = 15$[ps]、分散マップの周期 $Z_d = 1$ は $z_d = 200$[km], 分散値 $d = -1$ は 0.38[ps/(nm · km)] にそれぞれ相当する。

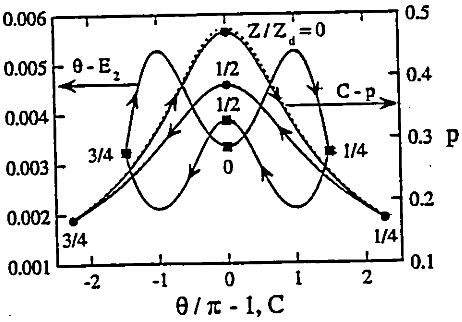


図 1 : C - p および θ - E_2 位相平面における周期軌道.

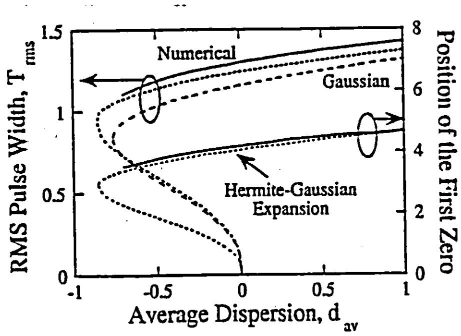
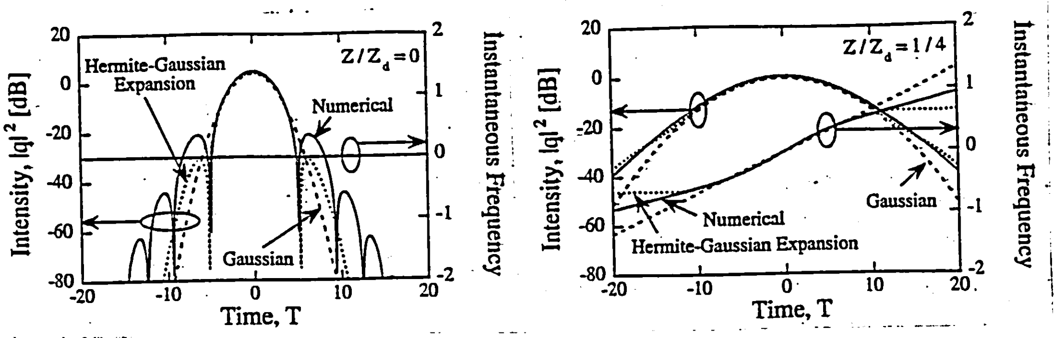


図 3 : $\Delta D = 100$, $Z_d = 1$, $E_0 = 15$ に対する周期解.



(a) $Z=0$　　(b) $Z=Z_d/4$

図 2：パルス波形と瞬時周波数の比較

以上では、ファイバの分散値を周期的に変化させた光伝送路を伝搬する DM ソリトンを特徴づけるパルスの裾の振動および非線形チャープが、適切に選んだパルス波形の仮定に基づく変分法の枠組みで定量的に説明できることを示した。パルス波形を展開するモード数は解析精度と解析の煩雑さとのトレードオフによって決定される。本報告では、エルミート・ガウス展開の 2 つのモードを用いることによりパルスの裾の振動の第一零点の位置とパルスの中心付近の非線形チャープが十分に説明できることを示した。この方法によって、従来のガウス近似では説明することができなかったパルスの裾の重なりによって生じる隣接パルス間の相互作用の解析が可能であると考えられる。

4. NRZ パルスの変分法解析

NRZ パルスは光ファイバ通信システムにおいて最も広く用いられている変調形式である。しかし、ファイバの群速度分散と非線形性による NRZ パルスの波形歪に関する理論的研究はほとんど行われていない[6]。このことは実験および数値シミュレーションによって数多くの優れた報告がなされていることと対照的である[1]。Kodama と Wabnitz はパルス伝搬のモデル方程式である非線形シュレディンガー方程式 (2) に WKB 近似を適用して準線形流体方程式を導き、それを特性曲線法によって解くことによって NRZ パルスの波形歪の解析的表式を示している[6]。しかし、彼らの解析では、分散値と非線形性は伝送路に沿って一様である必要があった。本節では、適切なパルス波形を仮定した変分法によって、光伝送路における NRZ パルスの振舞いを解析し、パルスの振舞いが定量的に説明できることを示す。また、この方法は分散値や非線形性、利得/損失がファイバの長手方向に変化する分散マネージメント伝送路[7],[8] におけるパルス伝搬の解析にも直接適用することができる。さらに、パルスの波形歪を抑えるためにパルスに初期チャープを与えた場合の効果についても検討している。

前節でも述べたように、変分法では、適切な形の解を仮定することが解析の有効性を保証するために大変重要である。ここでは、偶対称の NRZ パルスを考える。また、NRZ パルスの伝搬には非線形チャープが伴うことが観測されている[6]。そこで、ラグランジュの変分法[5]で用いる試行関数として、式 (2) の解を次式で仮定する。

$$u(Z,T)=\frac{A(Z)}{2}\{\tanh[\tau_+(Z,T)]-\tanh[\tau_-(Z,T)]\}\exp[i\varphi(Z,T)]\,. \tag{7}$$

ここで、

$$\begin{cases}\tau_\pm(Z,T) &=& p(Z)\{T\pm T_p(Z)\}\,,\\ \varphi(Z,T) &=& \dfrac{E(Z)}{4}T^4+\dfrac{C(Z)}{2}T^2+\theta(Z)\,,\end{cases} \tag{8}$$

であり、$A(Z)$, $p(Z)$, $T_p(Z)$, $E(Z)$, $C(Z)$ および $\theta(Z)$ はそれぞれパルスの振幅、パルスエッジの勾配、パルス幅、非線形チャープ、線形チャープおよび位相を表す。

式 (8) を式 (5) に示すラグランジアン密度に代入し、変分法を適用すると次式が得られる。

$$\begin{cases}\dfrac{dA}{dZ} &=& \dfrac{d(Z)A}{2}\left[C-\dfrac{E}{140p^2}f_A\right]\,,\\ \dfrac{d\tau}{dZ} &=& -\dfrac{d(Z)E}{35p^2}f_\tau\,,\\ \dfrac{dE}{dZ} &=& d(Z)\left[320p^6f_{E_1}+\dfrac{5E^2}{14p^2}f_{E_2}+4EC\right]+40S(Z)A^2p^4f_{E_3}\,,\\ \dfrac{dC}{dZ} &=& d(Z)\left[8p^4f_{C_1}+\dfrac{E^2}{112p^4}f_{C_2}+C^2\right]+S(Z)A^2p^2f_{C_3}\,.\end{cases} \tag{9}$$

ここで、$\tau(Z)\equiv 2pT_p$ であり、$f_i,(i=A,\tau,E_j,C_j;j=1,2,3)$ は付録に示す τ のみの関数である。また、$E_0\equiv\int_{-\infty}^{\infty}|u|^2\,dT=A^2f_0(\tau)/p$ はパルスの全エネルギーを表わし、保存量である。なお、$f_0(\tau)$ も付録に示す。

さて、本方法の妥当性を示すために、式 (1) を直接数値計算した結果との比較を行ってみよう。計算に用いるパラメータは、ファイバの分散値 $d(Z)=0.393$ (-0.05 [ps/(nm·km)]), ファイバの非線形性 $s(Z)=1$ ($n_2/A_{\rm eff0}=0.4\times10^{-9}$ [1/W]), ファイバの損失 $g(Z)=-14.2$ (0.2[dB/km]), 搬送波の波長 $\lambda=1.55[\mu{\rm m}]$, パルス幅 $2T_p=20$ (200[ps]、これはビットレートが 5 [Gbit/s] のシステムの最も短いパルスに相当), パルスエッジの勾配 $p\doteq 2$, 初期チャープ $E=C=0$ (チャープフリー), 初期のピーク電力 $A=1$ (1 [mW]), 増幅器間隔 $Z_a=0.081$ (50[km]) とする。

0, 5000 および 10000[km] 伝搬後のパルス波形を図 4 に示す。実線は式 (1) を直接数値計算して求めた結果であり、破線は式 (9) の変分法解析によって得られた結果である。両者はよく一致しいていることが分かる。図 5 では伝搬距離に対する相対的 RMS パルス幅 $T_{\rm rms}(z)/T_{\rm rms}(0)$ の変化を比較している。実線は数値シミュレーションによる結果であり、黒丸は変分法による結果である。また、破線と点線はそれぞれ文献 [6] の式 (6) および文献 [9] の式 (26) に示された解析的表式による結果である。変分法は従来の方法よりもよりよい

結果を与えることが分かる。図6には分散マネージメント伝送路における相対的 RMS パルス幅の変化を示している。ここでは、増幅器間の分散値を、$0[\mathrm{km}] < z < 40[\mathrm{km}]$ に対しては $d(Z) = 7.86$ (-1 [ps/(nm·km)])、$40[\mathrm{km}] < z < 50[\mathrm{km}]$ に対しては $d(Z) = -29.475$ (3.75 [ps/(nm·km)]) としている。その他のパラメータおよび平均分散値は図4および5で用いたものと同一である。実線は数値シミュレーションによる結果であり、点線は変分法による結果である。双方の結果は比較的良く一致しており、このことは変分法が分散マネージメント伝送路の解析にも適用可能であることを示している。適切な大きさの初期位相変調を与えることはパルス広がりを抑えることに有効である[10]。図7ではパルスに初期に線形チャープ $C = 0, \pm\pi/50$ (0, ± 0.1 [GHz/ps]) を与えた場合の相対的 RMS パルス幅の変化を比較している。伝送系は図4および5で用いたものと同一である。実線は数値シミュレーション、黒丸は変分法による結果であり、0.1 [GHz/ps] の初期チャープを与えることによってパルス広がりが抑えられていることが分かる。

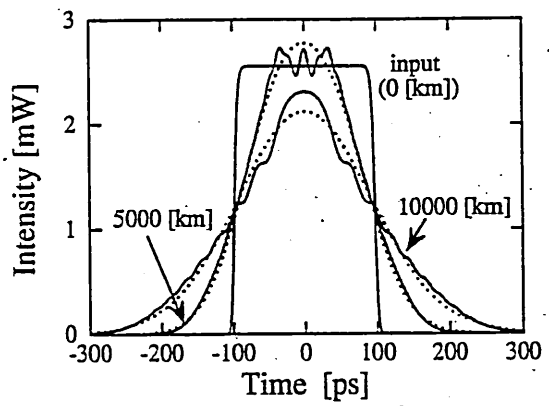


図4：0, 5000 および 10000 [km] 伝搬後のパルス波形.

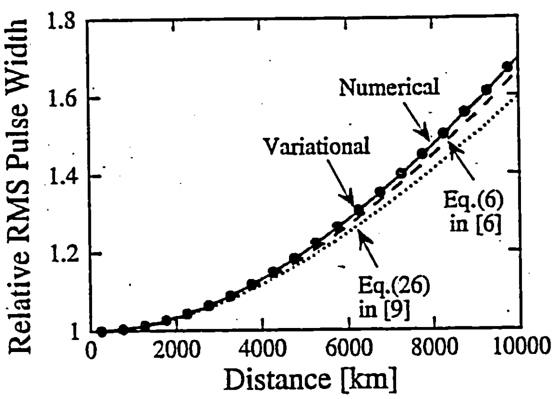


図5：伝搬距離に対する相対的 RMS パルス幅の変化.

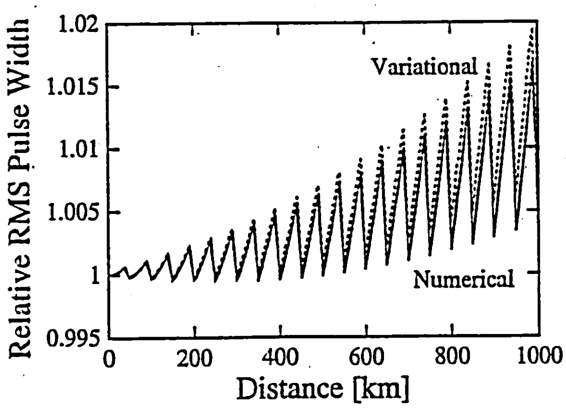


図6：分散マネージメント光伝送路における相対的 RMS パルス幅の変化.

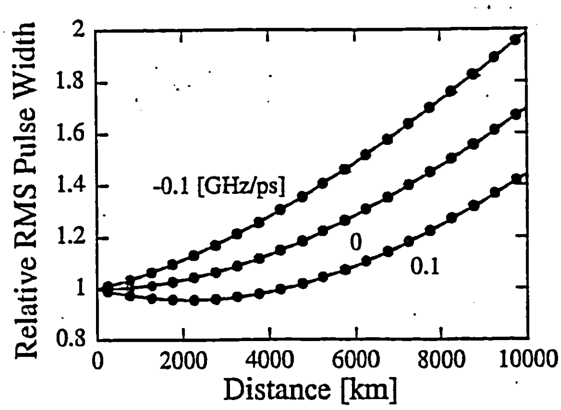


図7：相対的 RMS パルス幅の変化に対する初期チャープの影響.

以上では、光伝送路におけるNRZパルス伝搬の様子が適切に選んだパルス波形の仮定に基づく変分法の枠組みで定量的に説明できることを示した。また、この方法は分散マネージメント伝送路を伝搬するNRZパルスの解析にも適用できることを示した。さらに、この方法は式(2)の右辺に非線形利得のような伝送制御装置[11]を表わす摂動項を含んだ問題にも容易に拡張できるので、そのような伝送制御装置の最適設計などにも用いることができよう。

5. まとめ

分散マネージメント光伝送路を伝搬するRZパルスであるDMソリトンおよびNRZパルスの振舞いは適切に選んだパルス波形の仮定に基づく変分法の枠組みで定量的に説明できることを示した。この方法は伝送路の最適化、性能限界の明確化などに有用であるとともに、分散値および非線形性がファイバの長手方向に変動するような比較的複雑な問題に対しても、変分法による解析が有効であることを示したことは工学的見地から重要である。

参考文献

[1] 例えば、G. P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1997), E. Iannone et al., *Nonlinear Optical Communication Networks*, (Wiley, New York, 1998).

[2] Y. Kodama, pp.131-153, J. N. Kutz, S. G. Evangelides Jr, and J. P. Gordon, pp.183-195, S. K. Turitsyn, pp.225-243, N. J. Doran, W. Forysiak, J. H. B. Nijhof, A. M. Niculae, and A. Berntson, pp.303-316, T. Georges and F. Favre, pp.317-340 in *New trends in optical soliton transmission systems*, A. Hasegawa ed. (Kluwer Academic Pub., Dordrecht, the Netherlands, 1998).

[3] J. H. B. Nijhof et al., Electron. Lett. **33** 1726 (1997).

[4] T. I. Lakoba and D. J. Kaup, Electron. Lett. **34**, 1124 (1998).

[5] D. Anderson, Phys. Rev. A **27** 3135 (1983).

[6] Y. Kodama and S. Wabnitz, Opt. Lett. **20**, 2291 (1995).

[7] D. Marcuse, J. Lightwave Technol. **9**, 356 (1991).

[8] E. Lichtman and S. G. Evangelides, Electron. Lett. **30**, 346 (1994).

[9] D. Marcuse, J. Lightwave Technol. **10**, 17 (1992).

[10] Y. Kodama and S. Wabnitz, Electron. Lett. **31**, 1761 (1996).

[11] Y. Kodama, S. Wabnitz, and K. Tanaka, Opt. Lett. **21**, 719 (1996).

付録

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f_\Lambda(\tau) & = & [50 f_6 (f_0 f_2' - 3 f_2 f_0') + 7 f_4 (5 f_4 f_0' - f_0 f_4')]/D(\tau) \ , \\
f_\tau(\tau) & = & f_0 (25 f_2 f_6 - 7 f_4^2)/D(\tau) \ , \\
f_{E_1}(\tau) & = & [f_s (f_0 f_2' - 2 f_2 f_0') + f_s' f_0 f_2]/D(\tau) \ , \\
f_{E_2}(\tau) & = & [f_6 (-3 f_0 f_2' + 2 f_2 f_0') + f_6' f_0 f_2]/D(\tau) \ , \\
f_{E_3}(\tau) & = & [f_t (f_0 f_2' - 5 f_2 f_0') + 2 f_t' f_0 f_2]/D(\tau) \ , \\
f_{C_1}(\tau) & = & [f_s (3 f_4 f_0' - f_0 f_4') - 2 f_s' f_0 f_4]/D(\tau) \ , \\
f_{C_2}(\tau) & = & [f_6 (-f_4 f_0' + 3 f_0 f_4') - 2 f_6' f_0 f_4]/D(\tau) \ , \\
f_{C_3}(\tau) & = & [f_t (9 f_4 f_0' - f_0 f_4') - 4 f_t' f_0 f_4]/D(\tau) \ , \\
D(\tau) & = & f_2 (f_0 f_4' + f_4 f_0') - 2 f_2' f_0 f_4 \ ,
\end{array}
\right. \qquad (A1)
$$

ここで、

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f_s(\tau) & \equiv & 1 + 3\mathrm{cosech}^2\tau (1 - \tau \ \coth\tau) \ , \\
f_t(\tau) & \equiv & 4 - 3\coth\tau \{3\tau + 5\coth\tau (1 - \tau \ \coth\tau)\} \ , \\
f_0(\tau) & \equiv & \tau \ \coth\tau - 1 \ , \\
f_2(\tau) & \equiv & \tau \ (\pi^2 + \tau^2) \ \coth\tau - (\pi^2 + 3\tau^2) \ , \\
f_4(\tau) & \equiv & \tau \ (7\pi^4 + 10\pi^2\tau^2 + 3\tau^4) \ \coth\tau - (7\pi^4 + 30\pi^2\tau^2 + 15\tau^4) \ , \\
f_6(\tau) & \equiv & \tau \ (31\pi^6 + 49\pi^4\tau^2 + 21\pi^2\tau^4 + 3\tau^6) \ \coth\tau \\
 & & -(31\pi^6 + 147\pi^4\tau^2 + 105\pi^2\tau^4 + 21\tau^6) \ ,
\end{array}
\right. \qquad (A2)
$$

であり、f_i' は $f_i, (i = s, t, 0, 2, 4, 6)$ のτ についての一回微分を表わす。

シャープ株式会社 電化商品開発研究所

輻射科学研究会資料
RS98-13

FDTD法を用いた電子レンジのマイクロ波分布解析

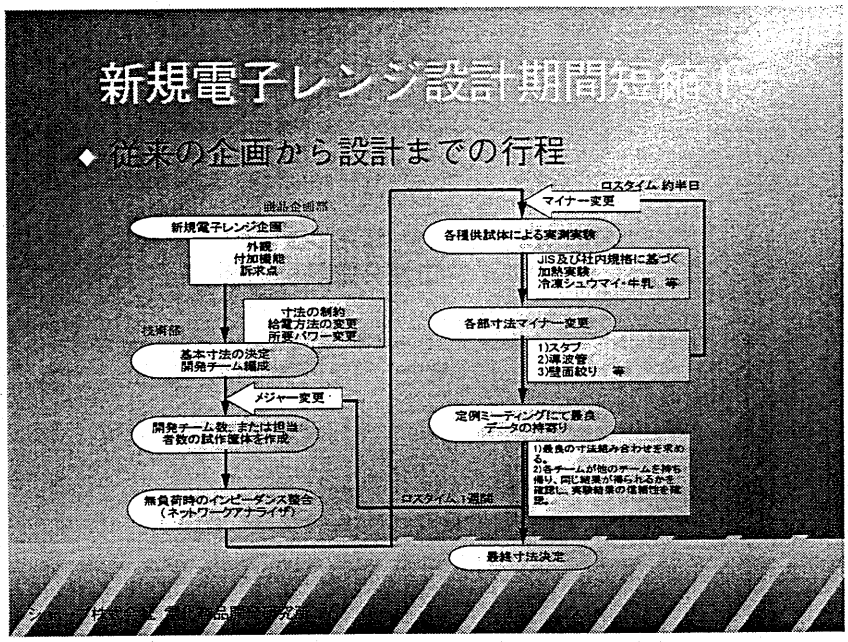
Analysis of the Maicro Wave distribution in the MW Oven Using FDTD Method

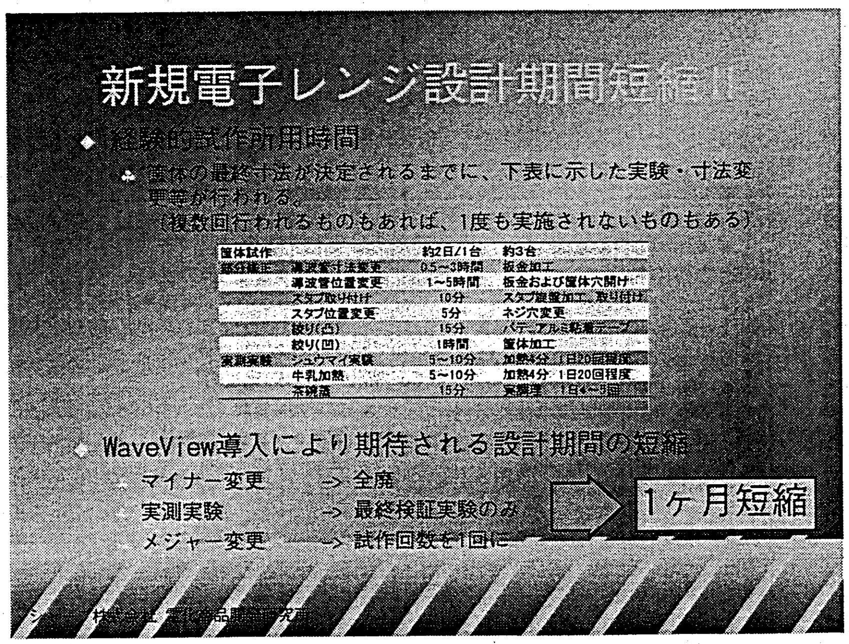
中井和広、岸本卓士、牧田実
シャープ株式会社 電化商品開発研究所

橋本 修
青山学院大学　理工学部

（目次）

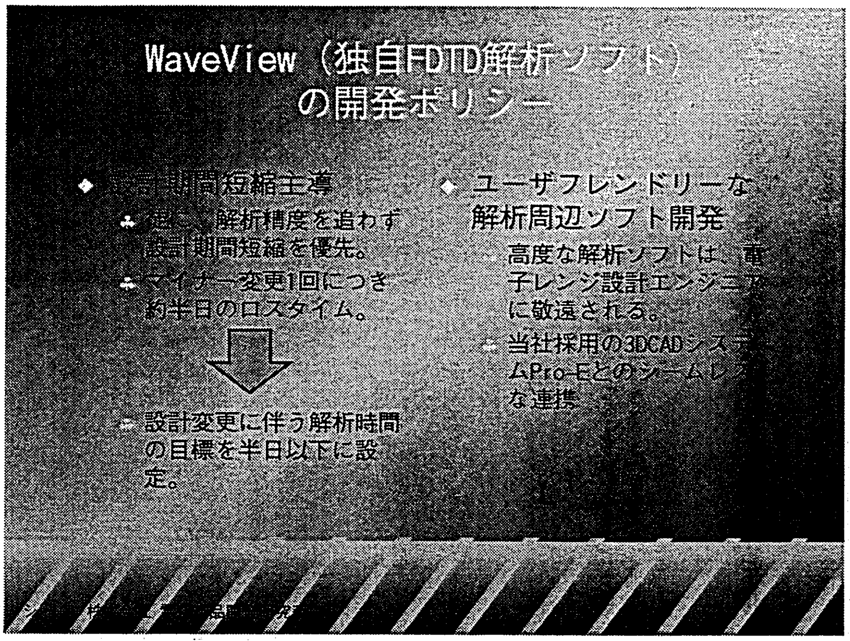
1998年10月16日（金）
於 関西大学　100周年記念会館

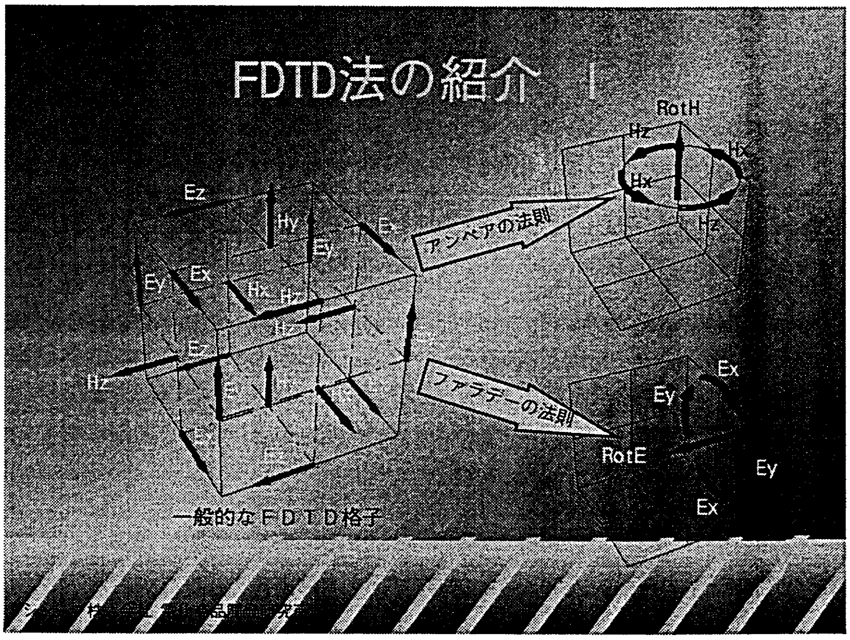




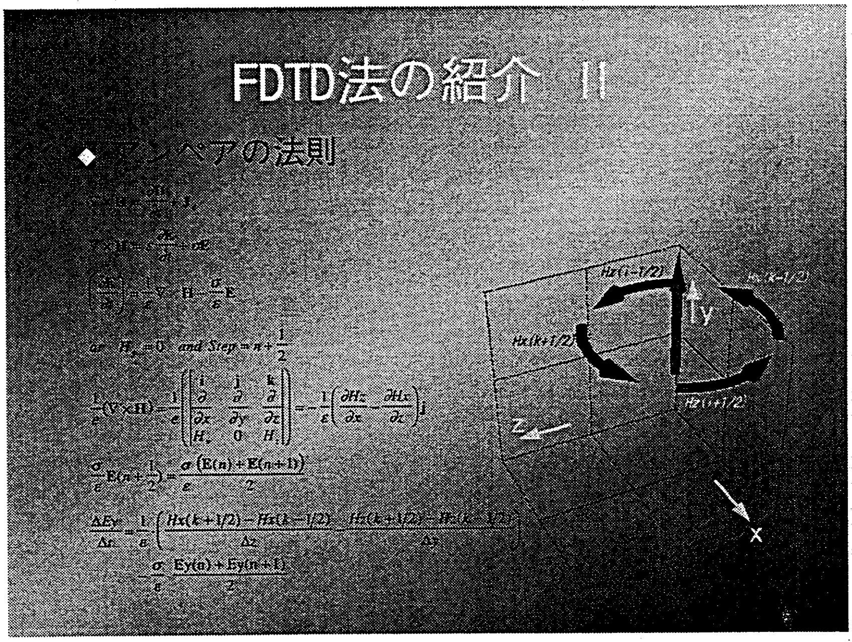
筐体試作		約2日/1台	約3台
[illegible]	導波管寸法変更	0.5～3時間	板金加工
	導波管位置変更	1～5時間	板金および筐体穴開け
	スタブ取り付け	10分	スタブ旋盤加工、取り付け
	スタブ位置変更	5分	ネジ穴変更
	絞り(凸)	15分	パテ、アルミ粘着テープ
	絞り(凹)	1時間	筐体加工
実測実験	シュウマイ実験	5～10分	加熱4分 1日20回程度
	牛乳加熱	5～10分	加熱4分 1日20回程度
	茶碗蒸	15分	実調理 1日4～5回

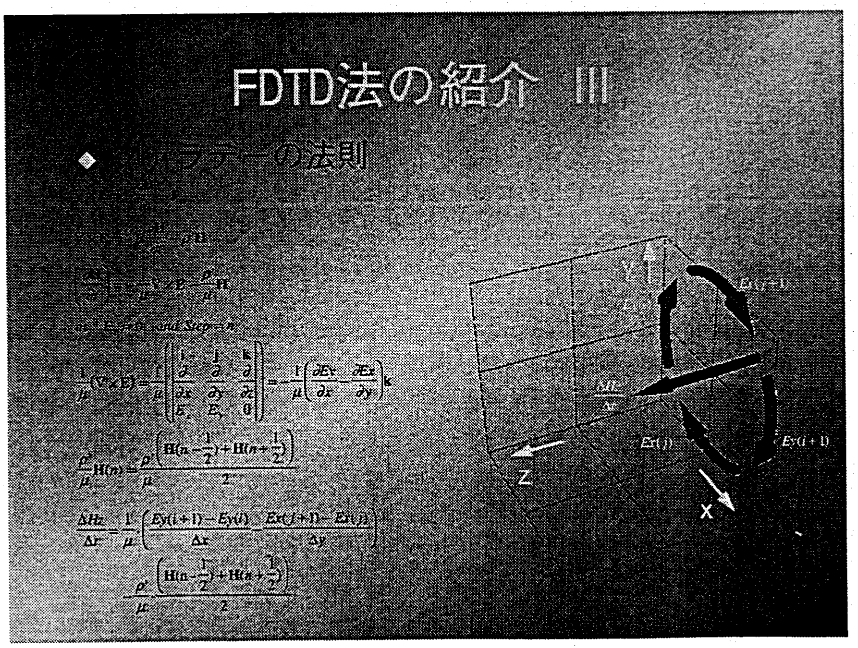
1998年10月16日（金）
於 関西大学　100周年記念会館

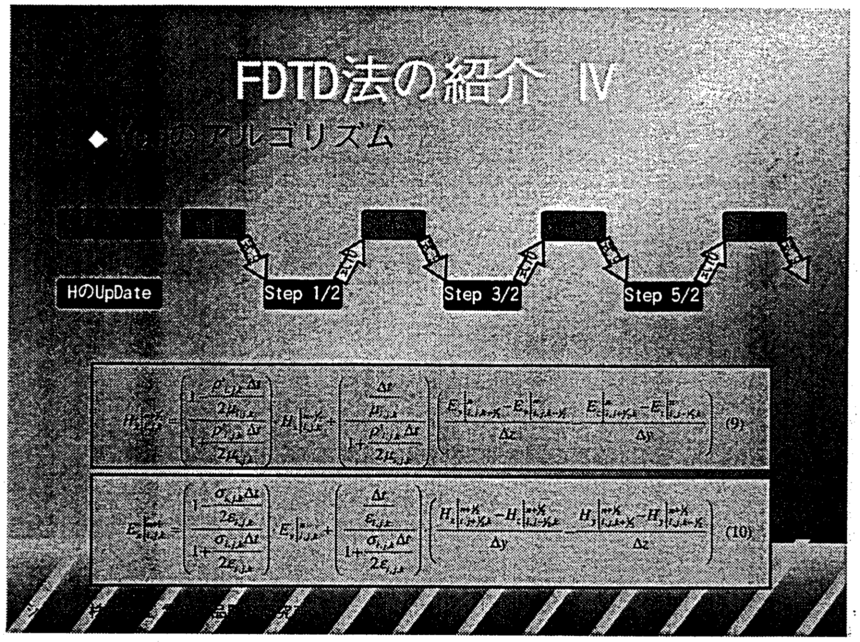


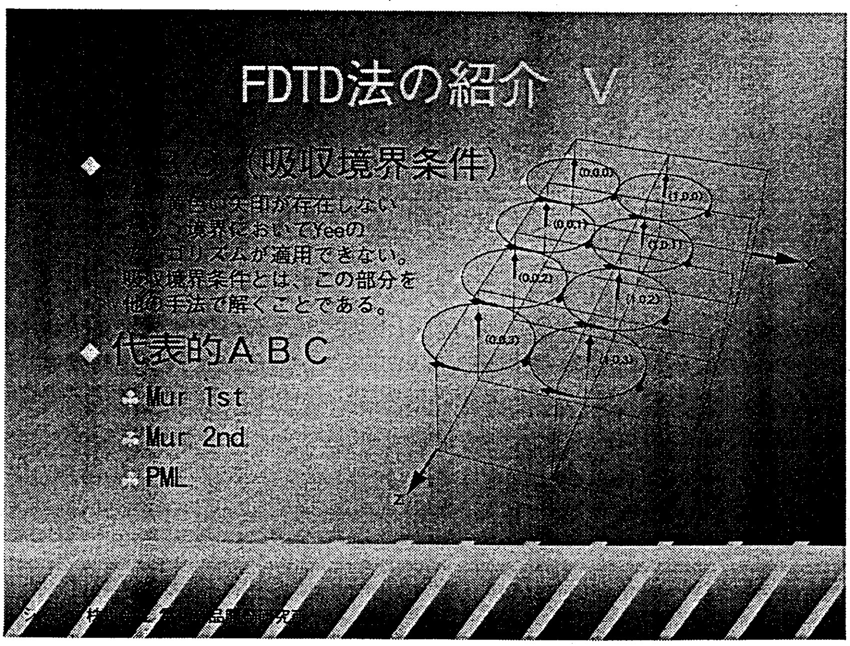


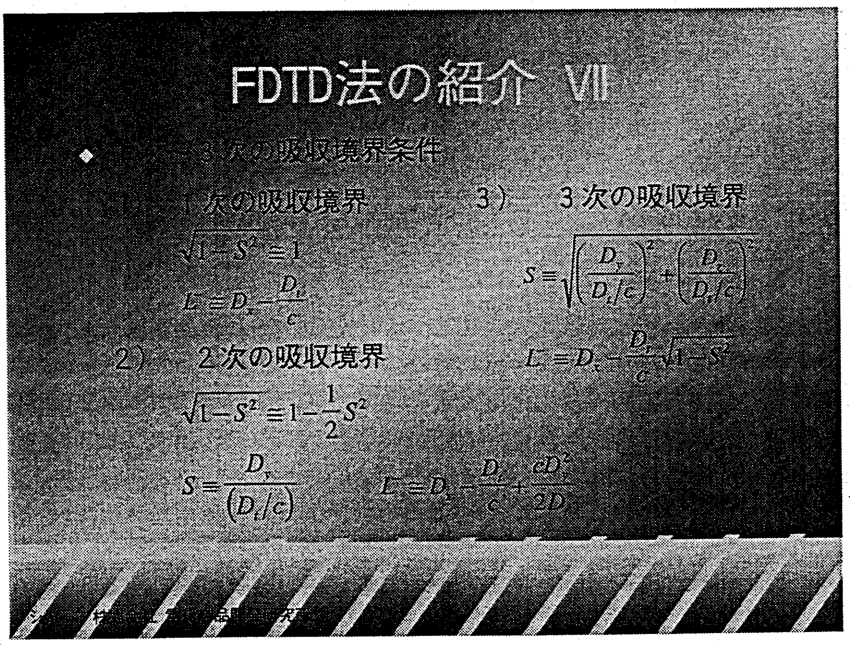
1998年10月16日(金)
於 関西大学 100周年記念会館


FDTD法の紹介 II
アンペアの法則
Hz(i−1/2)
Hx(k−1/2)
Hx(k+1/2)
Hz(i+1/2)
y
z
x


FDTD法の紹介 III
ファラデーの法則
Y
Ex(j+1)
Ex(j)
Ey(i+1)
z
x

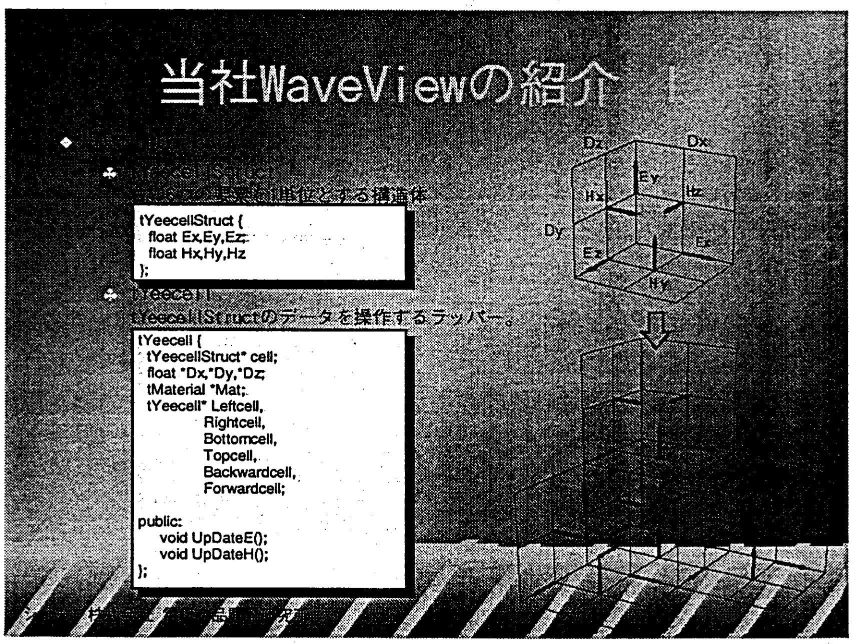

FDTD法の紹介 Ⅳ
HのUpDate
Step 1/2
Step 3/2
Step 5/2
(9)
(10)

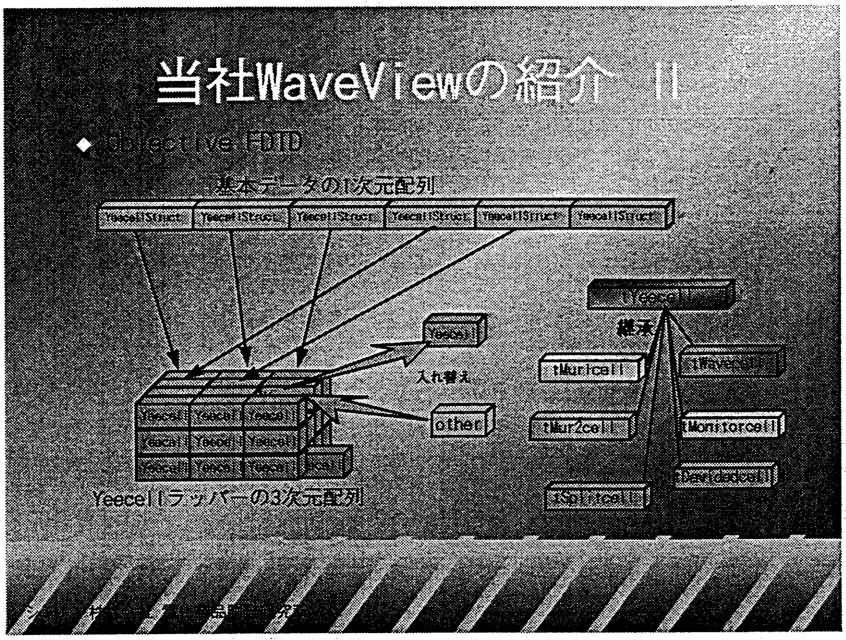

FDTD法の紹介 Ⅴ
(吸収境界条件)
吸収境界条件とは、この部分を
他の手法で解くことである。
代表的ABC
Mur 1st
Mur 2nd
PML
(0,0,0)
(1,0,0)
(0,0,1)
(1,0,1)
(0,0,2)
(1,0,2)
(0,0,3)
(1,0,3)
x
z

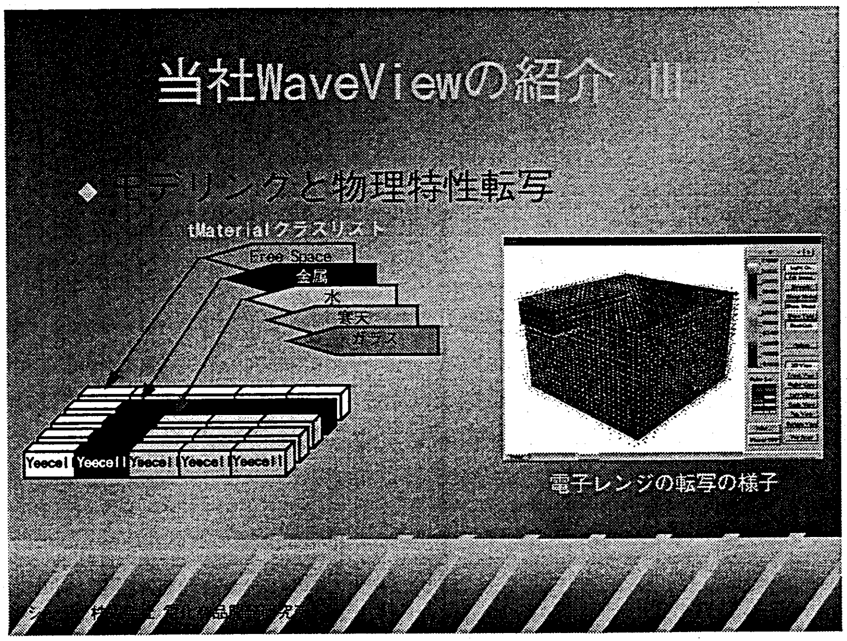


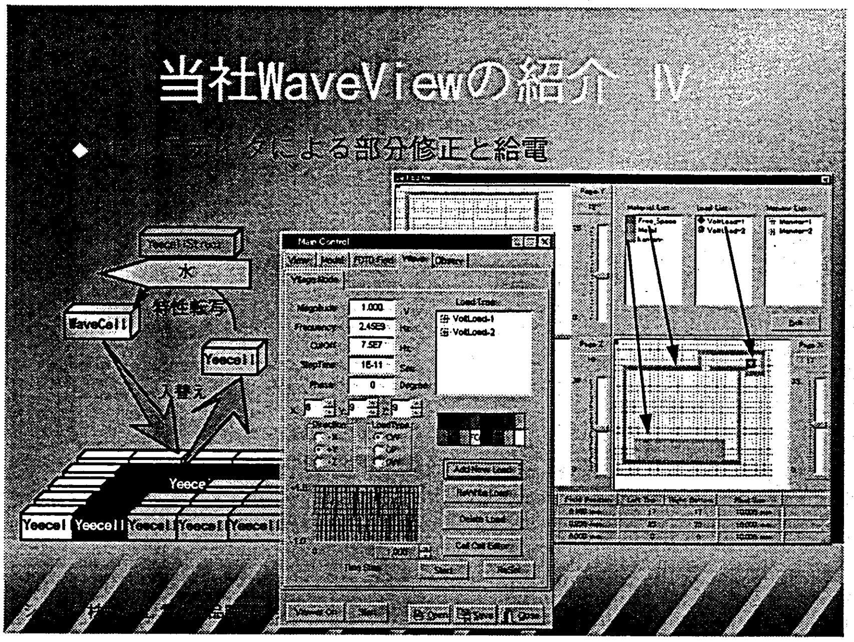
1998年10月16日（金）
於 関西大学　100周年記念会館

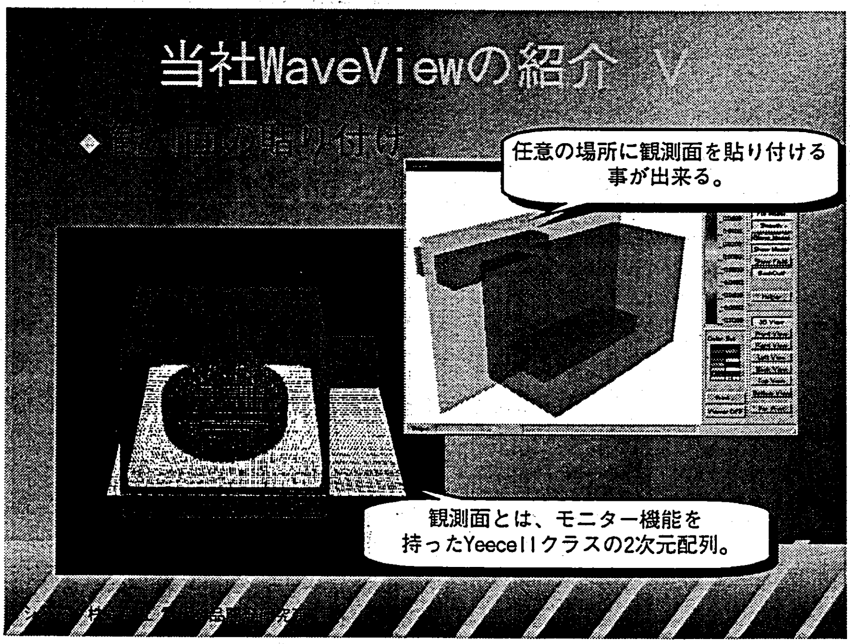

FDTD法の紹介 VIII
の吸収境界条件
はOne-Way WaveEquationの具体的差分式を導出した。
における２次の吸収境界条件式


当社WaveViewの紹介 I
単位とする構造体
tYeecellStruct {
float Ex,Ey,Ez;
float Hx,Hy,Hz
};
tYeecellStructのデータを操作するラッパー。
tYeecell {
tYeecellStruct* cell;
float *Dx,*Dy,*Dz;
tMaterial *Mat;
tYeecell* Leftcell,
Rightcell,
Bottomcell,
Topcell,
Backwardcell,
Forwardcell;
public:
void UpDateE();
void UpDateH();
};
Dz
Dx
Ey
Hx
Hz
Dy
Ez
Ex
Hy

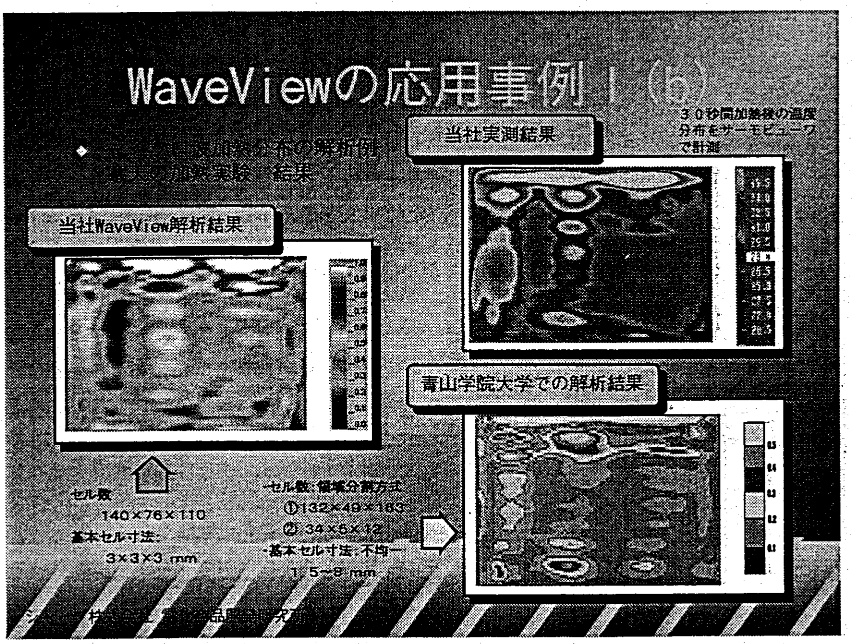

当社WaveViewの紹介 II
Objective FDTD
基本データの1次元配列
YeecellStruct
入れ替え
other
継承
tYeecell
tMurlcell
tWavecell
tMur2cell
tMonitorcell
tDavidadcell
tSplitcell
Yeecellラッパーの3次元配列


当社WaveViewの紹介 III
モデリングと物理特性転写
tMaterialクラスリスト
Free Space
金属
水
寒天
ガラス
Yeecell
電子レンジの転写の様子

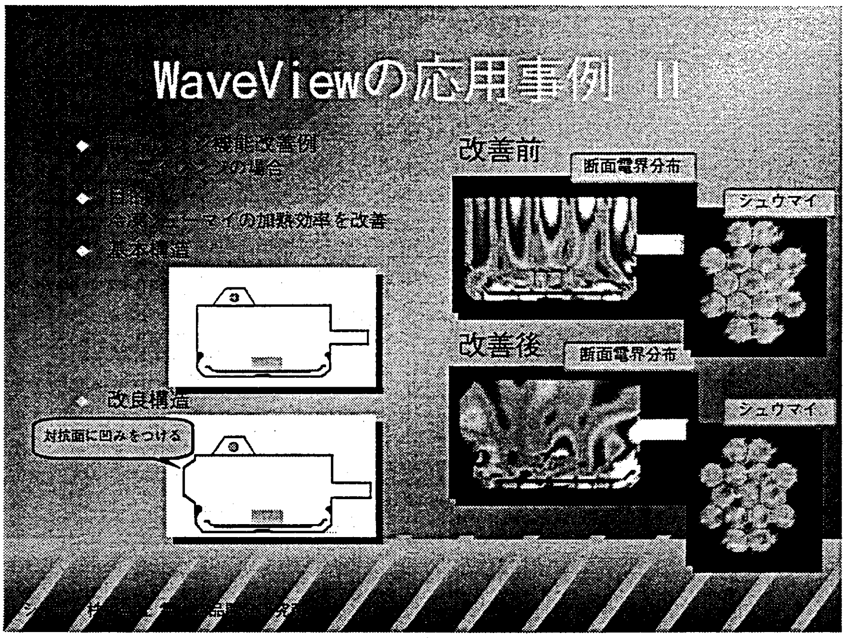

当社WaveViewの紹介 IV
による部分修正と給電
水
特性転写
WaveCell
Yeecell
入替え
Yeecell

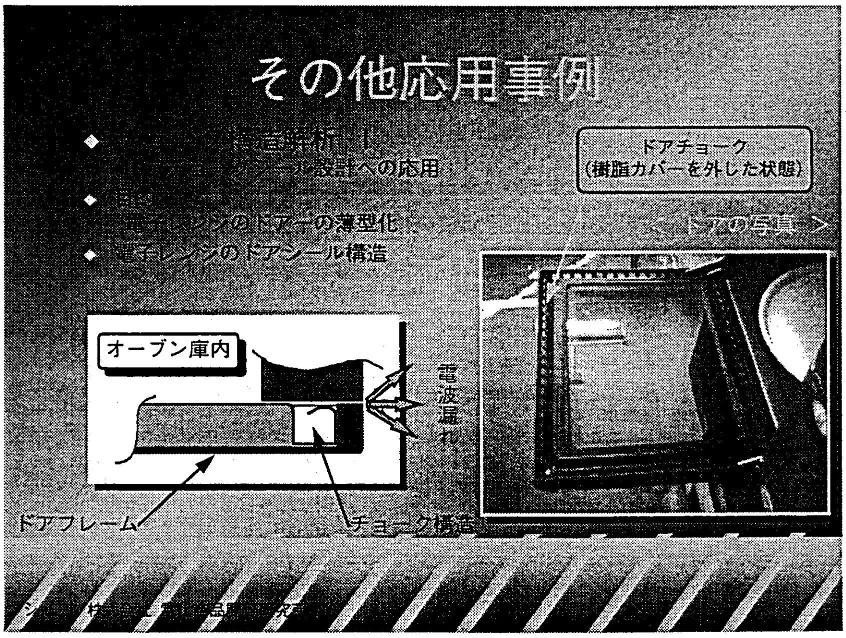

当社WaveViewの紹介 V
任意の場所に観測面を貼り付ける
事が出来る。
観測面とは、モニター機能を
持ったYeecellクラスの2次元配列。


WaveViewの応用事例Ⅰ(a)
目的
電子レンジの均一加熱性能評価
の信憑性検証
解析モデル
当社量産型モデル R2A48
被験負荷
寒天
寸法:215×146×20 mm
検証方法
実測は加熱後の寒天表面温度分布
をサーモビューワで計測
解析出力
寒天表面の損失電流及び電力を表示
解析モデル R2A48
負荷
給電位置
(マグネトロン)
ガラス製ターンテーブル

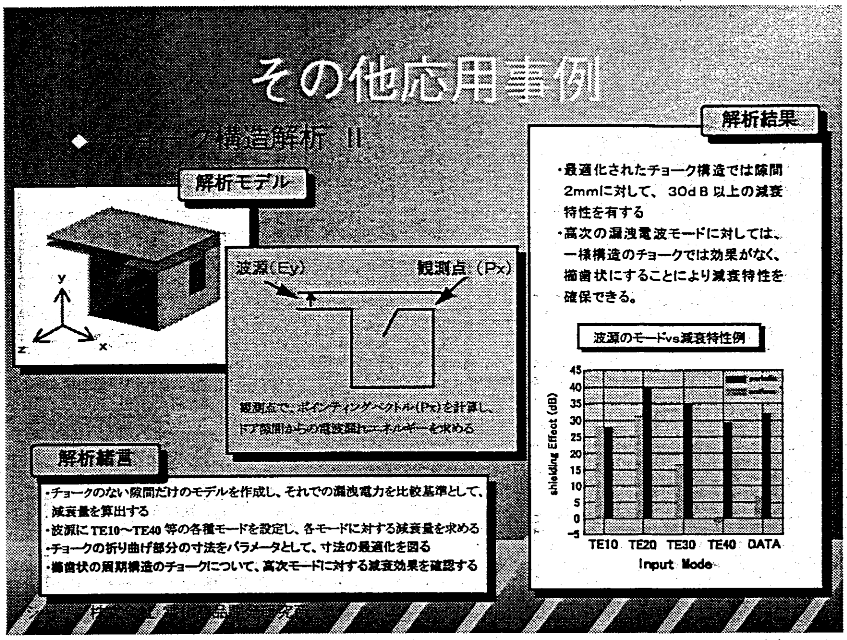

WaveViewの応用事例Ⅰ
当社実測結果
30秒間加熱後の温度
分布をサーモビューワ
で計測
当社WaveView解析結果
青山学院大学での解析結果
セル数
140×76×110
基本セル寸法:
3×3×3 mm
セル数:領域分割方式
①132×49×183
② 34×5×12
基本セル寸法:不均一
1.5~8 mm

シャープ株式会社 電化商品開発研究所





1998年10月16日（金）
於 関西大学 100周年記念会館



参考文献

- 橋本、毛塚、他：“FDTD法を用いた電子レンジの加熱むらに関する検討”信学技報、MW98-20、pp.53-58（１９９８.05)
- 橋本、草間、他：“FDTD法による電子レンジのドアシール設計に関する一検討” 信学技報、MW97-128、pp.7-12（１９９８）
- 橋本、草間、他：“FDTD法による高次モード成分を考慮した電子レンジ用ドアシール設計に関する一検討“… 信学技報、MW98-71、pp.89-94（１９９８）

- 参考書籍
  - 「COMPUTATIONAL ELECTRODYNAMICS The Finite-Difference Time-Domain Method」 ALLEN TEFLOVE
  - 「FDTD 時間領域差分法入門」 橋本 修 ・ 阿部 琢美
  - 「FDTD法によるマイクロ波平面回路・アンテナ特性の解析」 山下 栄吉・銭 永喜

1998年10月16日(金)
於 関西大学 100周年記念会館

輻射科学研究会資料
RS98-14

波長分割多重光ソリトン伝送方式における最適分散マネージメント

Optimal dispersion management for a wavelength-division-multiplexed optical soliton transmission system

菅原 弘人, 丸田 章博, 児玉 裕治

大阪大学大学院 工学研究科

1998年12月15日(火)

於　住友電気工業株式会社本社 11F 110 会議室

あらまし

波長分割多重光ソリトン伝送では、異なるチャネル間のパルスの衝突時に相互位相変調効果による周波数シフトが生じ、ファイバの分散性を介してパルスの到着時間にジッタをもたらす。この周波数シフトは、ファイバの分散値を長手方向に周期的に変化させて伝送路を設計する分散マネージメント技術によって低減することができる。本報告では、分散マネージメントを施した伝送路において周波数シフトならびにこれがもたらす時間ジッタを理論的に解析し、分散マネージメント伝送路の最適設計を提案する。

1. まえがき

光ソリトンを用いた波長分割多重伝送方式は光ファイバの伝送容量を飛躍的に増大させる最も有効な手法の一つであり、盛んに研究が行なわれている。光ファイバ中ではパルスの群速度が波長に依存するため、波長の異なるソリトンどうしが衝突を起こし、非線形性に起因する相互位相変調効果によってそれらの中心周波数が一時的に変化する[1]。伝送路が無損失の場合には衝突後の中心周波数は衝突前の値に戻るが、ファイバの損失を周期的な増幅によって補償する場合には、ピーク電力の変化により非線形性と分散性がつり合わず、衝突後にも周波数シフトが残留し、ファイバの分散性を介してパルスの到着時間にジッタをもたらす。この残留周波数シフトは、衝突によって周波数が変化している間に多数の増幅器を通過するように波長間隔および増幅器間隔を選ぶことで低減することができるが[1]、高密度の波長分割多重を行なう際、最も外側どうしの波長間隔が制限され波長多重数を増やすことができない。この残留周波数シフトをあらゆる波長間隔および増幅器間隔で低減する手法として、ファイバの分散値を長手方向に周期的に変化させて伝送路を設計する分散マネージメント技術があり[2–7]、最近ではこの技術を用いて 25 チャネル ×10Gbit/s、9288km 波長分割多重伝送に成功している[8]。本報告では、分散マネージメントを施した伝送路において周波数シフトを理論的に解析し、その基本的性質を議論する。また、残留周波数シフトを最も低減する分散マネージメントの最適な設計例を示す。さらに、周波数シフトがもたらす時間ジッタを統計的に解析し、分散マネージメント伝送路における時間ジッタの低減を定量的に評価する。

2. 周波数シフトの理論解析

規格化された分散値 $d(Z)$、非線形性 $s(Z)$ が長手方向 (Z 方向) に変化する光ファイバ中を伝搬するパルスの電場包絡線の複素振幅 $q(T,Z)$ が満たす方程式は次式で与えられる[9]。

$$i\frac{\partial q}{\partial Z}+\frac{d(Z)}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2}+s(Z)|q|^2q=ig(Z)q \tag{1}$$

ここで、$g(Z)$ はファイバの損失または増幅器による利得を表す。次に変数変換 $q(T,Z)=a(Z)u(T,Z)$、$a(Z)=a(0)\exp\left[\int_0^Z g(\zeta)d\zeta\right]$、$Z'=\int_0^Z d(\zeta)d\zeta$ を行なうと、式 (1) は次式のように変形できる[2]。

$$i\frac{\partial u}{\partial Z'}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}+S(Z)|u|^2u=0 \tag{2}$$

ここで、$S(Z)=s(Z)a^2(Z)/d(Z)$ である。2 チャネルの波長分割多重伝送を考え、$u=u_1+u_2$ を式 (2) に代入し波長の異なる四波混合光を無視すると、チャネル $l(l=1,2)$ に対して次式が得られる。

$$i\frac{\partial u_l}{\partial Z'}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_l}{\partial T^2}+S(Z)|u_l|^2u_l=-2S(Z)|u_{3-l}|^2u_l \tag{3}$$

$d(Z)$、$s(Z)$ および $g(Z)$ は同一の周期 Z_d を持つ周期関数とすると、式 (3) で右辺を零とおいた時の単一チャネルの定常パルスは、$d(Z)$、$s(Z)$、$g(Z)$ および Z_d によってその波形が異なる。平均分散値 ($\langle d(Z)\rangle=1$) で規格化された分散値の長手方向の変動幅 ΔD と増幅器間隔 Z_d が $|\Delta D\cdot Z_d|<1$ を満たす場合にはガイディングセンターソリトン理論が適用でき、$u_l(T,Z')$ は以下のように純粋なソリトンに近い sech 型のパルスを仮定することができる[10]。

$$u_l(T,Z')=A_l(Z')\mathrm{sech}[A_l(Z')\{T-T_l(Z')\}]\exp[-i\kappa_l(Z')\{T-T_l(Z')\}+i\theta_l(Z')] \tag{4}$$

ここで、$A_l(Z')$、$T_l(Z')$、$\kappa_l(Z')$、$\theta_l(Z')$ はそれぞれパルスの振幅とパルス幅の逆数、中心位置、中心周波数、位相を表す。式 (3) の解として式 (4) を仮定し、摂動法[9]を適用すると、$A_l(Z)$ は定数となり $A_l(Z')=1$ とおくと、中心周波数 $\kappa_1=-\kappa_2=\kappa$、ならびに中心位置 $T_1=-T_2=T_0$ の変化は次の常微分方程式で表される。

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{d\kappa(Z')}{dZ'} &=& S(Z)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|u_{3-l}|^2\frac{\partial|u_l|^2}{\partial T}dT,\\ \dfrac{dT_0(Z')}{dZ'} &=& -\kappa(Z')\end{array}\right. \tag{5}$$

式 (5) より周波数シフトが相互位相変調効果に起因していることが分かる。また、周波数シフト量 $|\delta\kappa|\equiv|\kappa(Z')-\Delta B/2|$ が周波数の初期値 $\Delta B/2$ と比較して十分小さい場合には、式 (5) の第 2 式において $\kappa(Z')\simeq\Delta B/2$ と近似することができ、周波数シフト量 $\delta\kappa(Z')$ は以下のように表される。

$$\frac{d(\delta\kappa(Z'))}{dZ'}=\frac{S(Z)}{\Delta B}\frac{d}{dZ'}F[T_0\{(Z-Z_c)'\}] \tag{6}$$

ここで、Z_c は衝突の中心位置を表す。また、関数 $F(T_0(Z'))$ は衝突による相互作用の強さを表し、一般に $T_0=0$ に関して対称な釣り鐘型の関数である。式 (3) の解として式 (4) を仮定する場合、$F(T_0(Z))$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}F(T_0(Z')) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2(T+T_0)\,\mathrm{sech}^2(T-T_0)\,dT\\ &= 4\frac{2T_0(Z')\cosh\{2T_0(Z')\}-\sinh\{2T_0(Z')\}}{\sinh^3\{2T_0(Z')\}}\end{aligned} \tag{7}$$

式 (6) より、$S(Z)$ が伝搬方向に対して一定値をとる伝送路では衝突による周波数シフトは衝突中心に対して対称となり、残留周波数シフトは零になる。
さらに、式 (6) に部分積分を適用すると、次式が得られる。

$$\delta\kappa(\infty)=-\frac{1}{\Delta B}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dS(Z)}{dZ'}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2\{T+T_0(Z')\}\,\mathrm{sech}^2\{T-T_0(Z')\}\,dT\right]dZ' \tag{8}$$

ここで、$S(Z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\exp(ikZ')dk$ なる $A(k)$ を用いると、式 (8) は次式に変形できる。

$$\delta\kappa(\infty)=-\frac{i}{(\Delta B)^2}\int_{-\infty}^{\infty}kA(k)\left[\frac{2\{\pi k/(2\Delta B)\}}{\sinh\{\pi k/(2\Delta B)\}}\right]^2\exp(ikZ_c')dk \tag{9}$$

さらに、$k=2\pi n/Z_d$ (n は整数) を用いると、残留周波数シフト量 $\delta\kappa(\infty)$ は次式で与えられる。

$$\delta\kappa(\infty)=-\frac{16}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^4}{n\cdot\sinh^2 x_n}\int_0^{Z_d}a^2(Z)\sin\left\{\frac{2\pi n}{Z_d}(Z'-Z_c')\right\}dZ \tag{10}$$

ここで、$x_n=\pi^2 n/(Z_d\Delta B)$ である。

3. 周波数シフトの基本的性質

ここでは分散マネージメント伝送路での波長の異なるパルスどうしの衝突による周波数シフトの変化の様子を調べる[7]。まず伝送路が無損失 ($a^2(Z)=1$) でファイバの非線形性が長手方向に一定 ($s(Z)=1$) の場合を考える。右図1は、$0<Z+nZ_d<Z_1$ において $d=d_1$、$Z_1<Z+nZ_d<Z_d$ において $d=d_2$ の分散値を持つ2ステップ分散マネージメント伝送路 (周期 Z_d) におけるパルスの中心位置の軌跡と周波数シフトを示したものである。ここで、$\pm$ は分散値の符号を表し、$+$は異常分散、$-$は正常分散を表す。Z_c は衝突の中心位置であり、T_s はパルスの電力半値幅を表す。分散マネージメント伝送路中でのパルスは図1に示すようにジグザグな軌跡をたどり、その軌跡は次式で与えられる。

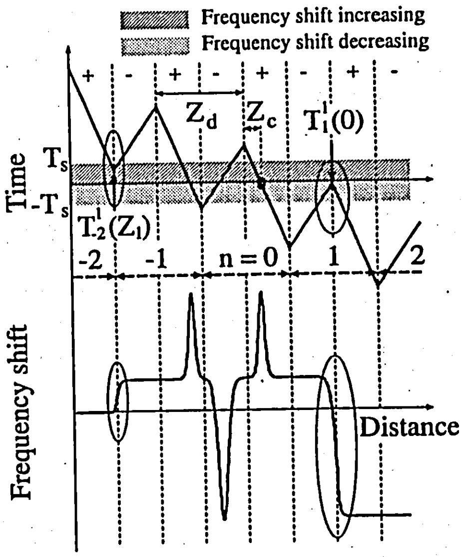


図1: 分散マネージメント伝送路における中心位置の軌跡と周波数シフト

$$T_n^\alpha(Z)=-\frac{\Delta B}{2}\{d_\alpha(Z-Z_c)+nZ_d\} \quad (11)$$

ここで $0\le Z_c/Z_d<Z_1/Z_d$ のとき $\alpha=1$ で $-Z_2/Z_d\le Z_c/Z_d<0(Z_2=Z_d-Z_1)$ のとき $\alpha=2$ である。n は分散マネージメントの周期を番号化したもので、$T_0^\alpha(Z_c)=0$ とした。他チャネルのパルスが $T=0$ に対して対称な軌跡をたどる場合を想定すると、図の実線で示されたパルスが斜線部分を通過する時に相互位相変調によって周波数が増加し、網かけ部分を通過する時に周波数が減少する。分散値 $d=d_\alpha$ のファイバを通過する際に生じる周波数シフトは、式(6)により

$$\frac{d(\delta\kappa(Z))}{dZ}=\frac{1}{\Delta B\cdot d_\alpha}\frac{d}{dZ}F\{T_0(Z-Z_c)\} \quad (12)$$

で与えられる。この式から、分散値 d_α のファイバを通過する際の残留周波数シフトは、各ファイバセグメントの両端における中心位置 $T_m^\alpha(0)$ と $T_l^\alpha(X_\alpha)$ のみによって決定されることが分かる。ここで $X_\alpha\equiv(-1)^{\alpha-1}Z_\alpha$ である。したがって、複数回の局所的な衝突のうちパルスの軌跡が斜線部分ならびに網かけ部分 (相互作用領域) を完全に通過する場合にはその衝突による周波数シフトは打ち消されるが、パルスの軌跡が相互作用領域の途中で折り返す場合には衝突後に周波数シフトが残留する。よって、衝突後の残留周波数シフト量 $\delta\kappa(\infty)$ は、一連の衝突過程の最初と最後の部分で起こる衝突による残留周波数シフトで与えられ、次式が得られる。

$$\delta\kappa(\infty)=\frac{1}{\Delta B}\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right)[F\{T_l^\alpha(X_\alpha)\}-F\{T_m^\alpha(0)\}] \quad (13)$$

残留周波数シフトが最も大きくなる $L_{coll}/Z_d=0.5$ の場合[1] ($L_{coll}=2T_s/\Delta B$)、相互作用領域で軌跡が折り返すのは2回もしくは4回生じ、式(13)には2回の場合が示されている。関数 $F(T_0(Z))$ が偶関数であることから、式(13)は $(T_l^\alpha)^2-(T_m^\alpha)^2=(T_l^\alpha-T_m^\alpha)(T_l^\alpha+T_m^\alpha)$ の要素を持つ。したがって、以下の条件下で残留周波数シフトは零となる。

$$T_l^\alpha(X_\alpha)-T_m^\alpha(0)=0\Longleftrightarrow d_\alpha=\frac{(-1)^\alpha}{\dfrac{Z_\alpha}{Z_d}}\left(l-m+\frac{1}{2}\right)+1 \quad (14)$$

または

$$T_l^\alpha(X_\alpha)+T_m^\alpha(0)=0 \Longleftrightarrow \frac{Z_c}{Z_d}=\frac{l+m}{2d_\alpha}-\frac{(-1)^\alpha}{2}\frac{Z_\alpha}{Z_d} \tag{15}$$

図 2 は分散マネージメントを構成する 2 種類のファイバの長さが等しい場合 ($Z_1 = Z_d/2$) において残留周波数シフトが零となる分散値の変動幅 $\Delta D = d_1 - d_2$ と衝突中心 Z_c の関係を示している。線上に示された数字は式 (14) における $l-m$ の値、または式 (15) における $l+m$ の値を表している。式 (14) の結果は $\Delta D = 4n+6(n=m-l+2)$ とした場合、いかなる位置で衝突が起こっても周波数シフトが残留しないことを示している[4,5]。式 (14) と (15) の交点はその衝突形態から Type A と Type B の 2 種類に分けられる。図 2(a) の黒丸に示す Type A は、パルスの軌跡が $T=\pm\Delta BZ_d/4$ で折り返し、それぞれの局所的な衝突によって周波数シフトが打ち消される。一方図 2(a) の白丸に示す Type B は、パルスの軌跡が $T=0$ で折り返し、衝突過程の最初と最後で大きさが等しく逆方向に生じるシフトによって周波数シフトが打ち消される。これらは共に式 (14) と (15) の双方を満足し、強い打ち消し合いが実現している。

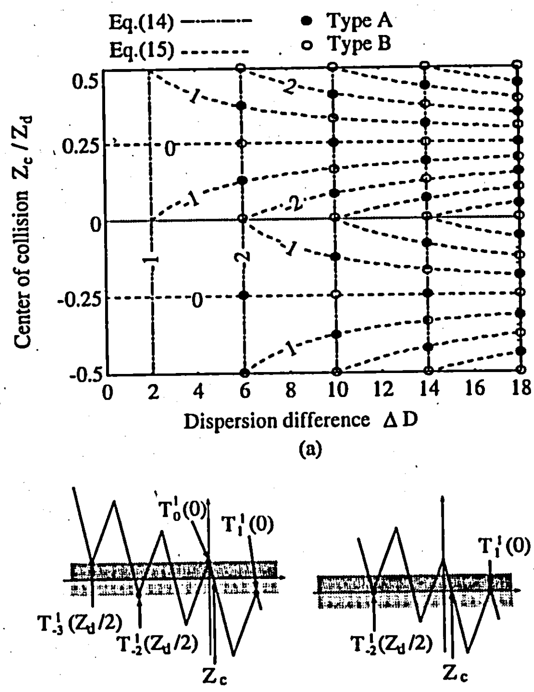


図 2: (a) 損失がない分散マネージメント伝送路において残留周波数シフトが零となる ΔD と Z_c の関係
(b),(c) Type A、Type B における中心位置の軌跡

4. 伝送路の最適化

ここでは、表 1 に示すパラメータを用いた数値解析を行ない周波数シフトを定量的に評価し、周波数シフトを最も低減する最適設計について考える。表 1 において、チャネル間隔は一定分散の伝送路における周波数シフトが最悪となる $L_{coll}/Z_d = 0.5$ の場合を考え、$\Delta\lambda = 8$[nm] とした。伝送路の最適化には次の 2 つの手法が考えられる。図 3(a) は、分散マップを固定し、増幅器の挿入位置 Z_a を変化させる場合、(b) は増幅器間

表 1: シミュレーションで用いるパラメータ

	実際値	規格化値
パルス幅	$\tau_s = 10.0$ [ps]	$T_s = 1.76$
波長	$\lambda = 1.55$ [μm]	
平均分散値	$\langle d\rangle = 0.10$ [ps/nm/km]	1
分散距離	$z_0 = 251$ [km]	1
増幅器間隔	$z_d = 50$ [km]	$Z_d = 0.20$
分散補償周期	$z_d = 50$ [km]	$Z_d = 0.20$
損失	$\delta = 0.20$ [dB/km]	$\Gamma = 5.8$
チャネル間隔	$\Delta\lambda = 8$ [nm]	$\Delta B = 35.5$

の分散値を変える距離を変化させる場合で、それぞれ残留周波数シフト量が最も低減される最適設計を求める。

まず増幅器の最適配置位置について議論する。このとき分散値を変える距離は分散マネージメント周期の半分 $Z_1/Z_d = 0.5$ に固定する。周波数シフト量は衝突の中心位置で増幅器を通過する場合が最も大きくなるため、衝突中心位置 Z_c に増幅器を配置する場合 $(Z_a = Z_c)$ を考える。前節で議論したように、Type A、B の分散マップでは強い打ち消し合いが実現しているため、損失と増幅器を考慮した場合でも周波数シフトの低減が期待できる。特に Type B の場合には、周波数シフトの打ち消し合いが衝突過程全体にわたって実現しているため、増幅器が周波数シフトに与える効果が平均化され、残留周波数シフトは低減される。図 4 は Type A(実線)、B(破線)の場合の中心位置の軌跡と周波数シフトを示している。この図から、Type B の場合には、増幅器の位置で生じる周波数シフトが $T^1_{-2}(Z_d/2)$ と $T^1_1(0)$ で生じるシフトによって打ち消されていることが確認できる。

図 5 は、分散値の差 ΔD と増幅器の配置位置 $Z = Z_a$ に対して、残留周波数シフト量の最悪値が $\max.|\Delta B \cdot \delta\kappa| < 0.15$ となる点を数値計算によって求めた結果である。先に考察したように Type B の分散マップの周辺が損失がある場合の最適設計を与えることが分かる。

つぎに分散値を変える距離に関する最適設計について議論する。このとき増幅器の配置位置はファイバの先端 $Z_a/Z_d = 0$ に固定する。式 (15) は $Z_a/Z_d = 0$ のとき式 (14) と等価となり、これらの線上はすべて前に議論した Type B に相当する。

図 6 は、分散値の差 ΔD と分散値を変える距離 $Z = Z_1$ に対して、残留周波数シフト量の最悪値が $\max.|\Delta B \cdot \delta\kappa| < 0.15$ となる点を数値計算によって求めた結果である。図の実線は式 (14)(式 (15)) の結果を示し、ファイバが無損失で非線形性が伝搬方向に対して変化しない場合に周波数シフトが零になる条件である。それぞれの直線は式 (14)(式 (15)) における l の値で決定される。ただし $m = 0$ である。この図から、分散値を変える距離の最適設計は Type B に相当する図 6 の実線上の中でも $Z_1 \simeq Z_d/2$ 付近に存在することが分かる。

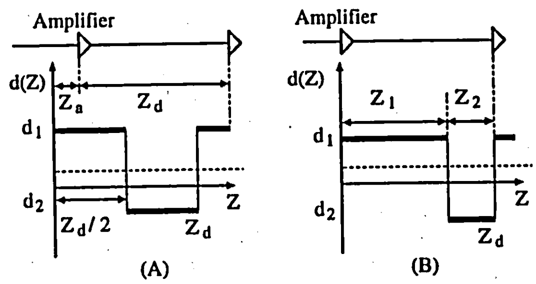


図 3: 伝送路の最適化

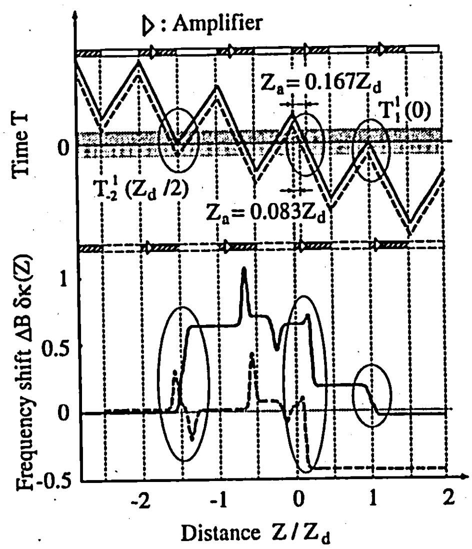


図 4: Type A(実線)、B(破線) の場合の中心位置の軌跡と周波数シフト

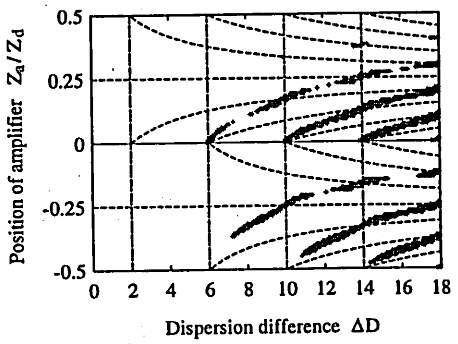


図 5: 損失を考慮した場合の最適増幅器配置

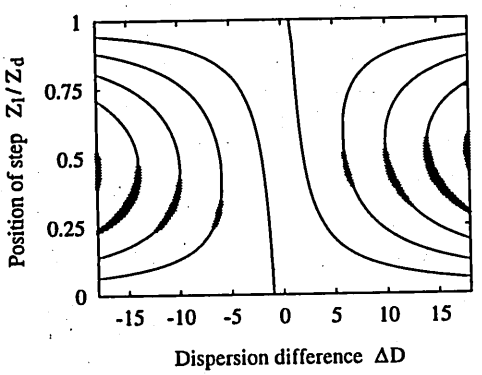


図 6: 損失を考慮した場合の分散値を変える距離の最適設計

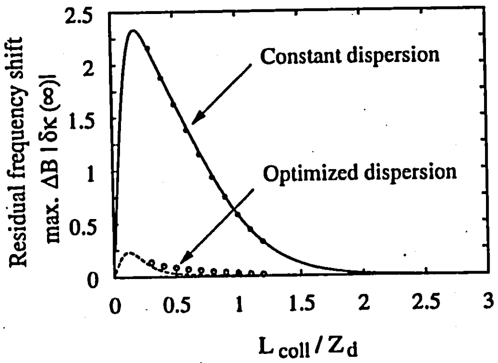


図 7: L_{coll}/Z_d に対する残留周波数シフト

表 2 は、増幅器の配置位置と分散値を変える距離を同時に変え、残留周波数シフト量を効果的に低減する分散マネージメントの設計例を示している。(a)~(c) は$\Delta D = 6$ 付近、(d)~(f) は$\Delta D = 10$ 付近の最適設計である。このうち (a) の分散マップを用いて、L_{coll}/Z_d に対する残留周波数シフト量を求めた結果を図 7 に示す。最適設計された分散マネージメントによって、ほとんどすべての L_{coll}/Z_d において周波数シフトが低減されていることが分かる。これより、多重数が増加した高密度の波長分割多重光ソリトン伝送が可能となることが示される。

表 2: 分散マネージメントの最適設計例

−	ΔD	Z_a/Z_d	Z_1/Z_d	max.$\lvert\Delta B\cdot\delta\kappa\rvert$
(a)	5.6	0.27	0.56	0.028
(b)	5.7	0.27	0.55	0.028
(c)	6.2	−0.29	0.71	0.023
(d)	9.7	0.15	0.49	0.015
(e)	10.2	0.16	0.47	0.013
(f)	10.5	−0.33	0.67	0.014

5. タイミングジッタの理論解析

ここまでは、波長の異なるパルスどうしの 1 回の衝突によって生じる周波数シフトを解析し、これを低減する分散マネージメントを紹介した。実際の伝送系では、このような衝突を多数回繰り返しランダムな残留周波数シフトを受けながら伝搬していく。ここでは、この周波数シフトがもたらす時間ジッタを統計的に解析する手法を示す。

式 (6) 両辺を積分して周波数シフト $\delta\kappa(Z')$ をもとめ、これを式 (5) 第 2 式に代入すると、$Z = Z_c$ で他チャネルのパルスと衝突したパルスがシステム長 $Z' = L'$ 伝搬後に生じる時間シフト量 $\delta T \equiv T_0(L') - \int_0^{L'} \frac{\Delta B}{2} d\zeta'$ は以下のように表される。

$$\delta T = -\frac{1}{\Delta B}\int_{-\infty}^{L'}\int_{-\infty}^{Z'} S(Z)\frac{d}{d\zeta'}F(T_0(\zeta' - Z_c'))d\zeta' dZ' \tag{16}$$

$$= -\frac{1}{\Delta B}\int_{-\infty}^{L'} S(Z)F(T_0(Z'-Z'_c))dZ' + \frac{1}{\Delta B}\int_{-\infty}^{L'}(L'-Z')\frac{dS(Z)}{dZ'}F(T_0(Z'-Z'_c))dZ' \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &= (L'-Z'_c)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(2\pi n\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_n\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{\frac{\pi}{\Delta B}\coth\left(2\pi n\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_n\right) - \frac{3Z_d}{2n\pi}\right\}\cos\left(2\pi n\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_n\right) + \frac{4}{(\Delta B)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、a_n および ϕ_n は次式で与えられる。

$$a_n = \frac{16}{\pi^3}\frac{x_n^4}{n\sinh^2 x_n}\left|\int_0^{Z_d} S(Z)\exp\left(-i\frac{2\pi n}{Z_d}Z'\right)dZ\right| \quad (19)$$

$$\phi_n = \arg\left[\int_0^{Z_d} S(Z)\exp\left(-i\frac{2\pi n}{Z_d}Z'\right)dZ\right] \quad (20)$$

また、x_n は式 (10) のそれと同一である。式 (18) の右辺第 1 項は、$Z = Z_c$ の位置での衝突における残留周波数シフトによって生じる時間シフト、また第 3 項は理想的なソリトンどうしの衝突の際に生じる位置ずれを表している。一般に衝突距離 L_{coll} が増幅器間隔 Z_d の 0.5 倍前後では、残留周波数シフトに起因する時間シフトが支配的となるため[1]、ここでは式 (18) の右辺第 1 項のみを考える。また時間シフト量は衝突位置 Z_c に依存するため、このパラメータの関数として次式で表す。

$$\delta T(Z_c) = (L-Z'_c)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(2\pi n\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_n\right) \quad (21)$$

ここで、Z' の座標系で示されたシステム長 L' は $\langle d(Z)\rangle = 1$ より Z 座標系では $L = L'$ であることを用いた。

隣接する同一チャネルのソリトンどうしの相対的な時間ジッタを考える。チャネル 1 のソリトンがチャネル 2 の c 番目のソリトンと衝突位置 $Z = Z_c$ で衝突する際、これと隣接するチャネル 1 のソリトンはチャネル 2 の $c+1$ 番目のソリトンとやはり $Z = Z_c$ で衝突すると考えられ、この際に生じる相対的な時間シフトは次式で表される。

$$\delta T_c(Z_c) = (b_{c+1} - b_c)\,\delta T(Z_c) = \delta b_c\,\delta T(Z_c) \quad (22)$$

ここで、b_c はチャネル 2 の c 番目のビットを表し、1 または 0 の値をとる。システム長だけ伝搬する間に最大 N 個のソリトンと衝突の可能性がある場合、時間シフト量の合計は次式で与えられる。

$$\Delta T(Z_c) = \sum_{c=1}^{N}\delta b_c\,\delta T(Z_c) \quad (23)$$

衝突位置 Z_c がシステム長 L の中でランダムに現れると考えて、式 (23) を統計的に解析する。δb_c の値は 0、1、-1 がそれぞれ 1/2、1/4、1/4 の確率で生起するから、その平均は $\langle\delta b_c\rangle = 0$ であり、ΔT の平均は $\langle\Delta T\rangle = 0$ となる。また、ΔT の 2 乗平均 $\langle(\Delta T)^2\rangle$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \langle(\Delta T)^2\rangle &= \left\langle\left\{\sum_{c=1}^{N}\delta b_c\,\delta T(Z_c)\right\}^2\right\rangle \\ &= \left\langle\sum_{c=1}^{N}\{\delta b_c\,\delta T(Z_c)\}^2\right\rangle + \left\langle\sum_{\substack{c_1,c_2=1\\c_1\neq c_2}}^{N}\delta b_{c_1}\,\delta b_{c_2}\,\delta T(Z_{c_1})\,\delta T(Z_{c_2})\right\rangle \quad (24) \\ &= \sum_{c=1}^{N}\langle(\delta b_c)^2\rangle\,\langle\{\delta T(Z_c)\}^2\rangle + \sum_{\substack{c_1,c_2=1\\c_1\neq c_2}}^{N}\langle\delta b_{c_1}\delta b_{c_2}\rangle\,\langle\delta T(Z_{c_1})\delta T(Z_{c_2})\rangle \quad (25) \end{aligned}$$

まず、式 (25) 右辺第 1 項 (これを (square) とする) を考える。δb_c の 2 乗平均は $\langle(\delta b_c)^2\rangle = 1/2$ であるから式 (21) より (square) は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\text{(square)} &= \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{N}\left\langle\left\{(L-Z'_c)\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(2\pi n\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_n\right)\right\}^2\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{N}\left\langle(L-Z'_c)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\sin\left(2\pi n\frac{Z'_n}{Z_d}+\phi_n\right)\right\}^2\right\rangle \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{c=1}^{N}\left\langle(L-Z'_c)^2\sum_{\substack{n_1,n_2=1\\ n_1\neq n_2}}^{\infty}a_{n_1}a_{n_2}\sin\left(2\pi n_1\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_{n_1}\right)\sin\left(2\pi n_2\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_{n_2}\right)\right\rangle
\end{aligned} \tag{26}$$

式(26) の右辺第2項は Z'_c 成分が位相項に残るため、その平均は零になる。また、式(26) の右辺第1項を変形して $L = NZ_s$ を考えると (square) は次式で表される。

$$\text{(square)} = \frac{L^3}{12Z_s}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 \tag{27}$$

Jenkins らや Ablowitz らは、チャネル間の衝突による残留周波数シフトに起因する時間ジッタの 2 乗平均として式 (27) を導出している[11,12]。

次に、式 (25) 右辺第 2 項 (これを (cross) とする) を考える。$c_1 \neq c_2 \pm 1$ の場合、生起するビットパターンをすべて考えた平均は $\langle\delta b_{c_1}\delta b_{c_2}\rangle = 0$ となる。しかし $c_1 = c_2 \pm 1$ の場合、生起するビットパターンは表 1 に示す通りであり、その平均は $\langle\delta b_{c_1}\delta b_{c_2}\rangle = -1/4$ で非零となる。

表 3：衝突位置が隣接する場合に生起するビットパターン

b_{c_1}	$b_{c_1+1} = b_{c_2}$	b_{c_2+1}	$\delta b_{c_1}\delta b_{c_2}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	-1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	-1
1	1	0	0
1	1	1	0

したがって、(cross) は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\text{(cross)} &= -\frac{2}{4}\sum_{c=1}^{N}\left\langle\left\{(L-Z'_c)\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(2\pi n\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_n\right)\right\}\left\{(L-Z'_{c+1})\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(2\pi n\frac{Z'_{c+1}}{Z_d}+\phi_n\right)\right\}\right\rangle \\
&= -\frac{2}{4}\sum_{c=1}^{N}\left\langle(L-Z'_c)(L-Z'_{c+1})\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\sin\left(2\pi n\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_n\right)\sin\left(2\pi n\frac{Z'_{c+1}}{Z_d}+\phi_n\right)\right\rangle \\
&\quad -\frac{2}{4}\sum_{c=1}^{N}\left\langle(L-Z'_c)(L-Z'_{c+1})\sum_{\substack{n_1,n_2=1\\ n_1\neq n_2}}^{\infty}a_{n_1}a_{n_2}\sin\left(2\pi n_1\frac{Z'_c}{Z_d}+\phi_{n_1}\right)\sin\left(2\pi n_2\frac{Z'_{c+1}}{Z_d}+\phi_{n_2}\right)\right\rangle
\end{aligned} \tag{28}$$

(square) の場合と同様、式 (28) の右辺第 2 項は零になる。また、$L = NZ_s$、さらに $Z'_{c+1} = (Z_c + Z_s)'$ を考えると、(cross) は次式で表される。

$$\text{(cross)} = -\left(\frac{L^3}{12Z_s}-\frac{L^2}{8}\right)\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\frac{1}{Z_d}\int_0^{Z_d}\cos\left(\frac{2\pi n}{Z_d}\int_{Z_c}^{Z_c+Z_s}d(Z)dZ\right)dZ_c \tag{29}$$

以上の結果をまとめると、波長分割多重伝送システムにおけるチャネル間相互作用による残留周波数シフトに起因する時間ジッタ ΔT の 2 乗平均 $\langle(\Delta T)^2\rangle$ は、次式で表される。

$$\langle(\Delta T)^2\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\left\{\frac{L^3}{12Z_s}-\left(\frac{L^3}{12Z_s}-\frac{L^2}{8}\right)\frac{1}{Z_d}\int_0^{Z_d}\cos\left(\frac{2\pi n}{Z_d}\int_{Z_c}^{Z_c+Z_s}d(Z)dZ\right)dZ_c\right\} \tag{30}$$

さらに、これらの時間ジッタがガウス分布に従うと仮定できる場合、ビット誤り率を以下の式で見積もることができる。

$$\mathrm{BER} = \mathrm{erfc}\left[\frac{rT_{int}}{\sqrt{2\langle(\Delta T)^2\rangle}}\right] \tag{31}$$

ここで、erfc(x) は誤差補関数、$T_{int} = Z_s\Delta B$ は同一チャネルでの隣接パルス間隔の最小値 (ビットスロット幅)、r は受信機の感度を表す。

6. タイミングジッタの数値解析

ここでは表1に示すパラメータを用いて時間ジッタやビット誤り率の定量的な評価を行なう。また、前節で示した最適な分散マネージメントを施すことによってこの時間ジッタが低減されることを示す。図8は一定分散 ($\Delta D = 0$) の伝送路における伝搬距離に対する残留周波数シフトによる時間ジッタの2乗平均を式 (27) と (30) により求めたものであり、隣接パルス間隔 $T_{int} = 4.5T_s$(45[ps])、$T_{int} = 4.0T_s$(40[ps]) とした場合の結果である。図1の白丸は、長さ $2^{11}-1$ 個の疑似ランダムビット系列を用いて式 (23) をシミュレーションした結果であり、式 (30) の結果に一致していることがわかる。残留周波数シフトによる時間ジッタは隣接パルス間隔 T_{int} に大きく依存しており、特に $T_{int} = 4.0T_s$ の場合には増幅器間隔 (Z_d) と衝突間の最小距離 (Z_s) が同期し、1周期の中で常に同じ位置で衝突するため相対的な時間ジッタは大きく低減される。

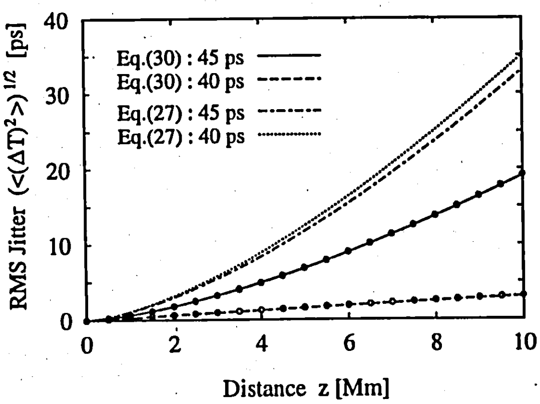


図8：伝搬距離に対する時間ジッタ

次に、分散マネージメントが残留周波数シフトによる時間ジッタに及ぼす効果について考える。ここでは、図9の分散マップに示す分散マネージメント伝送路を用いて議論する。図9(a) の実線は、同図点線に示す分散減少ファイバを2種類の一定分散値を有するファイバで近似した伝送路、図9(b) は表2(a) に示す伝送路である。

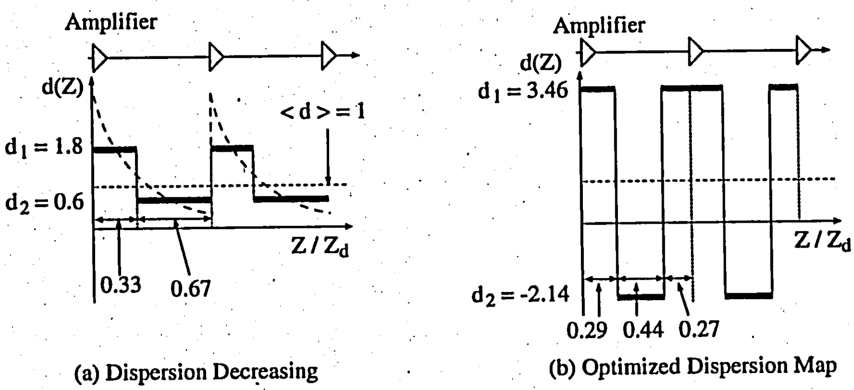


図9：分散マップ

図 10 は隣接パルス間隔 T_{int} (ビットレートの逆数) に対する残留周波数シフトによる時間ジッタの 2 乗平均を一定分散の場合、図 9(a) の分散マップを用いた場合、図 9(b) の分散マップを用いた場合についてそれぞれ求めたものである。実線は式 (30) による結果、点線は式 (27) による結果である。これらによると、修正された理論式 (30) は分散マネージメントを施した系においても適用可能である。

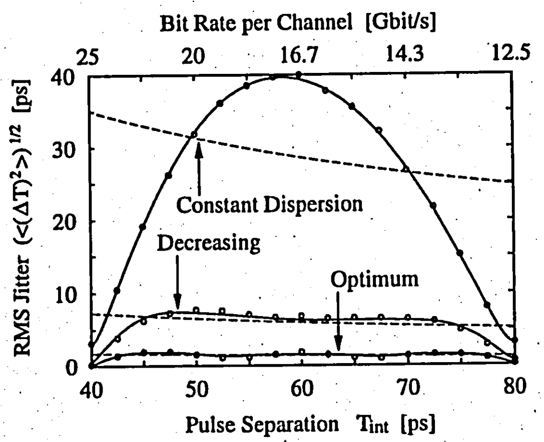


図 10 : 隣接パルス間隔に対する時間ジッタ

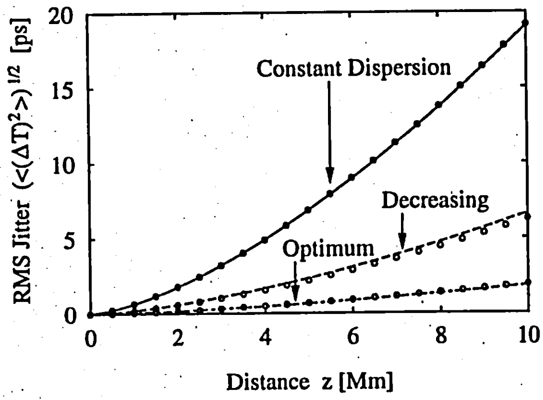


図 11 : 伝搬距離に対する時間ジッタ

また、式 (27) では隣接パルス間隔の減少 (1 チャネルあたりのビットレートの増加) に伴ない時間ジッタが単調に増加しているが、式 (30) では最適値が存在することが確認できる。図 11 は伝搬距離に対する残留周波数シフトによる時間ジッタの 2 乗平均を一定分散の場合、図 9(a) の分散マップを用いた場合、図 9(b) の分散マップを用いた場合についてそれぞれ求めたものである。また、表 3 はシステム長 $L = 10$ Mm 伝搬後のビット誤り率を式 (31) より求めたものである。いずれも、隣接パルス間隔を $T_{int} = 4.5T_s$ とした。図 9(b) の分散マップを用いることによって時間ジッタが大きく低減され、エラーフリーの長距離伝送が可能となる。

表 3 : 10 Mm 伝搬後のビット誤り率

r	一定分散	図 9(a)	図 9(b)
0.2	6.4×10^{-1}	1.7×10^{-1}	9.2×10^{-7}
0.3	4.8×10^{-1}	4.1×10^{-2}	1.8×10^{-13}
0.4	3.4×10^{-1}	6.4×10^{-3}	9.6×10^{-23}

7. まとめ

波長分割多重伝送方式において問題となる波長の異なるパルスどうしの衝突による周波数シフトの解析を、分散マネージメント伝送路において行ない、周波数シフトの基本的性質を理解した。また、残留周波数シフトを最小にする分散マネージメント伝送路の最適設計を示した。

さらに、この残留周波数シフトによるタイミングジッタの解析手法を紹介し、タイミングジッタがビットレート (隣接パルス間隔) に大きく依存することを示した。また、分散マネージメントの最適設計を行なうことによってエラーフリーの長距離伝送が可能となることを示した。

参考文献

[1] L. F. Mollenauer, S. G. Evangelides, and J. P. Gordon, *J. Lightwave Technol.*, **9**, pp.362-367, 1991.
[2] A. Hasegawa, S. Kumar, and Y. Kodama, *Opt. Lett.*, **21**, pp.39-41, 1996.
[3] S. Kumar, Y. Kodama, and A. Hasegawa, *Electron. Lett.*, **33**, pp.459-461, 1997.
[4] H. Sugahara, H. Kato, and Y. Kodama, *Electron. Lett.*, **33**, pp.1065-1066, 1997.
[5] J. F. L. Devaney, W. Forysiak, A. M. Niculae, and N. J. Doran, *Opt. Lett.*, **22**, pp.1695-1697, 1997.
[6] H. Sugahara, T. Inoue, A. Maruta, and Y. Kodama, *Electron. Lett.*, **34**, pp.902-903, 1998.
[7] H. Sugahara, A. Maruta, and Y. Kodama, *Opt. Lett.*, February, 1999.
[8] M. Murakami, T. Matsuda, and T. Imai, Technical Digest of ECOC'98, Vol.3,pp.79-81, 1998.
[9] A. Hasegawa and Y. Kodama, "Solitons in optical communications," *Oxford University Press*, 1995.
[10] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Opt. Lett.*, **16**, pp.1385-1387, 1991.
[11] R. B. Jenkins, J. R. Sauer, S. Chakravarty, M. J. Ablowitz, *Opt. Lett.*, **20**, pp.1964-1966, 1995.
[12] M. J. Ablowitz, G. Biondini, S. Chakravarty, R. L. Horne, *Opt. Comm.*, **150**, pp.305-318, 1998.

輻射科学研究会資料
RS-98-15

散乱媒質透過光からの準直進光成分の抽出による光コンピュータトモグラフィー

Optical Computed Tomography Based on the Extraction of Quasi-Straightforward-Propagating Photons Transmitting Through a Scattering Medium

和田健司，堀中博道
Kenji Wada and Hiromichi Horinaka
大阪府立大学工学部
Osaka Prefecture University

1998 年 12 月 15 日（火）
（於　住友電気工業株式会社本社 11 F 110 会議室）

散乱媒質透過光からの準直進光成分の抽出による光コンピュータトモグラフィー

Optical Computed Tomography Based on the Extraction of Quasi-Straightforward-Propagating Photons Transmitting Through a Scattering Medium

大阪府立大学工学部　　和田健司，堀中博道

Osaka Prefecture University　Kenji Wada and Hiromichi Horinaka

あらまし

Ｘ線ＣＴのアルゴリズムを利用して，光のプローブによる断層映像（ＣＴ画像）を得るためには，対象とする媒質中を直進透過してきた光の吸収情報が必要となるが，生体などの強散乱体では，散乱光が支配的となり，直進透過光の情報を正確に読み出せない．そこで，光ＣＴ実現のためには，いかに散乱光を除去し，直進透過光からの吸収情報を抽出できるかという点が重要な課題となる．本報告では，直進透過光の抽出法として提案した二つの手法（偏光保存成分検出法，非線形光学効果による光コヒーレンス検出法）について説明し，標準散乱体を用いた基礎実験の結果を示すとともに，果実を対象として実際に描いた光ＣＴ画像も示す．

１．はじめに

Ｘ線ＣＴ法は，Ｘ線の投影データをもとに計算機による画像再構成を行う手法であり，生体の断面が画像化できることから，現代の医療診断で広く普及している．Ｘ線の代わりに光をプローブとして用いれば，無侵襲計測が可能となり，装置の小型化も期待できる．また，生体の内部構造だけでなく，分光学的に生理活性情報が取得可能となる利点がある．700-1000nm付近の近赤外域では，体内色素や水による光の吸収が比較的少

ないので，その透過光を利用して，生体内情報が読み出せるといわれており，すでに，赤外域の発光ダイオードや半導体レーザーを用いて，血液中の酸素濃度を測定する酸素モニターが医療の現場で実用されている．これは，酸素担体である体内色素のヘモグロビンが，酸素と結合している場合（酸化型）と結合していない場合（還元型）において，異なる吸収スペクトル特性を示すことを利用している．この原理のもとで，Ｘ線ＣＴのアルゴリズムを適用し，脳内血管中の酸素濃度分布を二次元画像化できれば，医療診断への貢献は甚大であるといわれている．

２．散乱光の影響

しかしながら，一般に生体は光に対して強散乱体であるため，入射光（強度 I_i）は散乱され，入射光軸（z 軸）上にある光検出器で受光される光量 I_o は，吸収体がない場合でも，散乱係数 $\mu_s(z)$ と伝搬距離 d に応じて，次式に示すように指数関数的に減衰する．

$$I_o = I_i \exp\left(\int_0^d -\mu_s(z)\,dz\right) \qquad (1)$$

上式は，Ｘ線ＣＴのアルゴリズムの基本原理となっている光吸収に対して定義される Lambert-Beer 則と等価である．上記の散乱媒質中の測定光軸上に吸収係数 $\mu_a(z)$ なる吸収体が分布した場合，検出器に受光される光量 I_o は，

$$I_o = I_i \exp\left(\int_0^d -(\mu_s(z) + \mu_a(z))\,dz\right) \qquad (2)$$

と書ける．したがって，媒質内での散乱の形態が一様（$\mu_s(z)$: 一定）であると仮定すると，散乱媒質中の吸収体の分布を調べる問題は，式(2)より，一様な吸収係数を持つ吸収体の中から，異なる吸収係数を持つ吸収体の分布を調べる問題に帰着する．これは，散乱体においても断層画像を得るためにＸ線ＣＴのアルゴリズムが適用可能であることを意味する．

しかし，強散乱の条件下では，図 1 に示すように，いったん入射光軸からはずれるが，多重散乱の結果，再び光軸上に戻ってくる回り込み光が存在する．

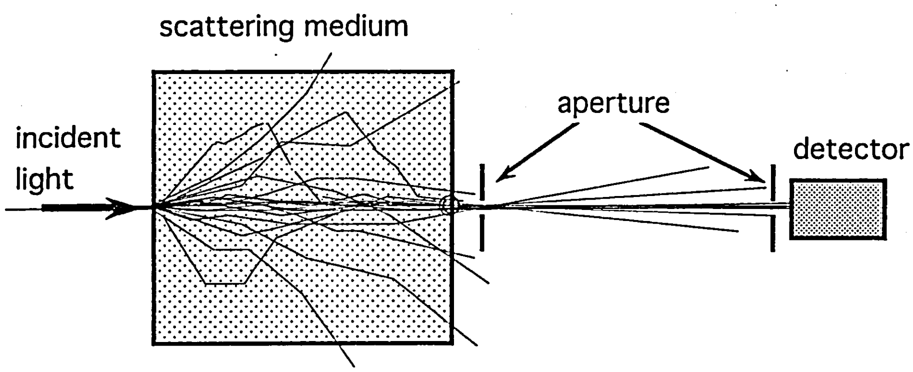


図 1　散乱媒質中の光伝搬

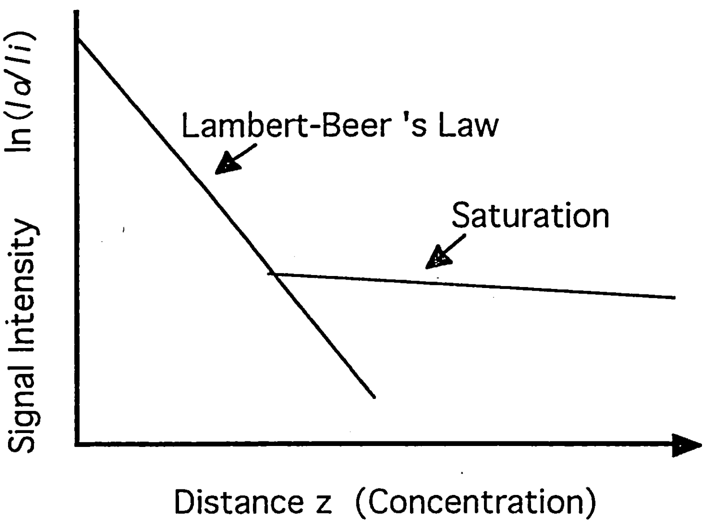


図 2　散乱媒質透過光の伝搬距離および濃度に対する強度変化

この効果により，光検出器での受光強度は飽和し（図 2），式(2)は成立しなくなり，X線ＣＴのアルゴリズムの適用限界を与え

ることになる．式(2)の成立領域を拡大するためには，回り込み光を除去し，比較的散乱の影響を受けずに，ほぼ直進してきた光成分（準直進光成分）だけを抽出する必要がある．結局，式(2)の成立する領域が測定器のダイナミックレンジを与えるために，いかに低い強度レベルまで準直進光成分を抽出・検出できるかという点が光ＣＴの実現にむけた重要な課題といえる．

３．準直進光成分の抽出法

準直進光成分の抽出法として，時間ゲートを利用したストリークスコープ法[1],[2]，カーセルシャッター法[3]，高調波発生法[4],[5]が提案され，また，光の空間的，時間的コヒーレンスを利用した空間アパチャ法[6],[7]，ヘテロダイン検出法[8]，偏光保存光検出法[9]も提案され，それぞれ基礎実験などが行われている．時間ゲートによる手法では，光パルスを散乱媒質に入射し，準直進光成分と散乱光成分の受光器への到達時間の違いから両者を分離しており，コヒーレンスを利用した手法に対して，インコヒーレントな手法として区別されている．コヒーレンスを利用した手法は，一般に cw 光源を用いるために，比較的簡易な装置構成による実験が行えることから，精力的に研究がなされており，すでに，ラット（光ファイバの受光角制限法[10]），人指（ヘテロダイン検出法[11]），果実（偏光保存光検出法[12]）の光ＣＴ画像を得ることに成功している．

以下では，我々が行ってきた異なる二つの手法（偏光保存光検出法，非線形光学効果による光コヒーレンス検出法）による準直進光成分の抽出実験について説明する．

４．偏光保存成分の抽出による光ＣＴ

散乱媒質中では，多重散乱の結果，偏光解消が起こり，入射光の偏光状態が乱される．しかし，入射光のうち準直進光成分は，散乱回数が少ないため，偏光解消の影響が小さく，入射

時の偏光状態を保持していると考えられる．したがって，入射時の偏光状態を保存した光成分を準直進光成分として検出する手法（偏光保存成分検出法）を提案し，以下の実験を行った[9].

4－1　光パルスを用いた基礎実験

上記の考えが実際に成り立つことを調べるために，光パルスを用いた実験を行った．実験系を図 3 に示す．光源にモード同期 Ti:sapphire レーザーを用い，出力される中心周波数 800nm，時間幅 2 ピコ秒のモード同期パルスを，長さ 10mm のガラスセルに入った標準散乱体（Intralipid-10%水溶液）に入射した．その透過光は，検光子を通して，ストリークカメラ（時間分解能 15 ピコ秒）によって時間分解観測した．検光子の方向は，入射光の偏光方向に対して，平行方向と垂直方向の二種類の設定のもとで透過光パルスを測定した．

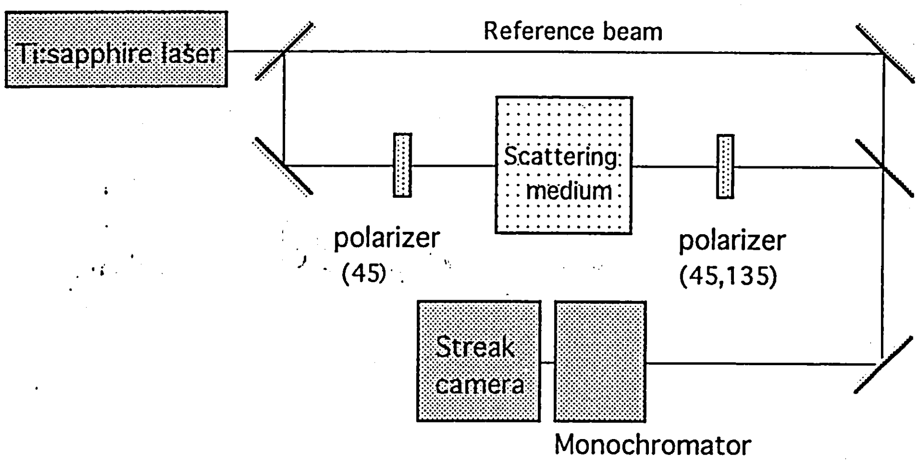


図 3　散乱媒質中での偏光解消を調べる実験

Intralipid-10%水溶液の濃度を 6%から 8%まで変化させたときに得られた，偏光の平行成分 *Ip* と垂直成分 *Ic* の透過光パルス波形と，これらから計算される *Ip+Ic* ，*Ip-Ic* を図 4 に示す．

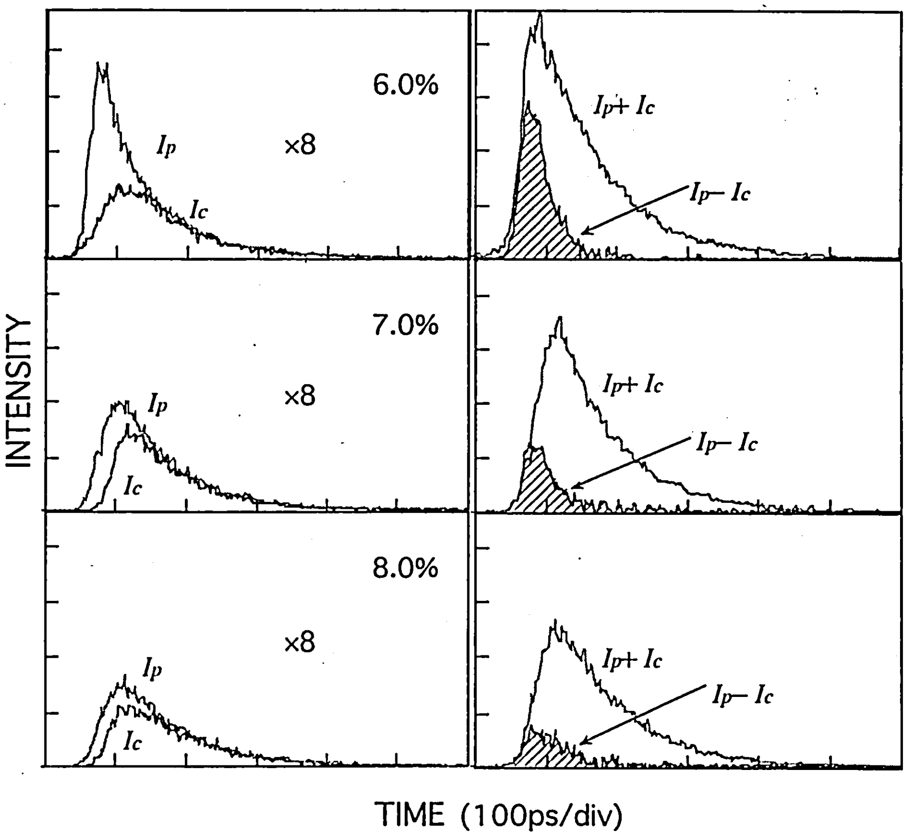


図 4　観測されたパルス波形

Ip+Ic は全透過光強度を，*Ip-Ic* は偏光保存成分を意味している．得られた結果から，濃度が濃くなるにつれて，散乱によるパルスの裾引きが顕著になるとともに，偏光解消にもとづく垂直成分の占める割合の大きくなっていることがわかる．平行成分は入射光の偏光を保存した成分と偏光解消された成分の合成光となっているが，そのうち偏光解消成分は，偏光方向に依存性を持たないので，垂直成分 *Ic* と等しい波形であると考えられる．したがって，平行成分 *Ip* から垂直成分 *Ic* を差し引いた波形が，偏光保存成分と見なせる．偏光保存成分は，全透過光パルスの

立ち上がり部分（～100 ピコ秒）に位置していることから，準直進光成分に対応していることが確認された．

4－2　Lambert-Beer 則成立領域の拡大

大型のパルス光源やストリークカメラを用いることなく，cw 光源を用いた比較的簡単な装置構成で，散乱媒質透過光からの偏光保存成分を抽出する実験を行った．実験系を図 5 に示す．光源には，20mW 出力 AlGaAs 半導体レーザー（波長 785nm）を用い，偏光子と液晶位相変調器を通して，出力ビームの偏光面を縦・横に交番させ（20Hz），散乱媒質に入射した．散乱媒質には，4－1の実験と同じく長さ 10mm のガラスセルに入った Intralipid-10%水溶液を用いた．散乱媒質透過光は，アパチャと検光子を通して光電子増倍管で検出した．検光子を通った偏光保存成分は位相変調器の変調に同期した交流信号となるが，偏光解消された透過光成分は，強度一定の背景光として受光される．そこで，位相変調器の変調周波数を参照信号にとり，透過光をロックイン検出することによって，準直進光成分としての偏光保存成分を抽出した．

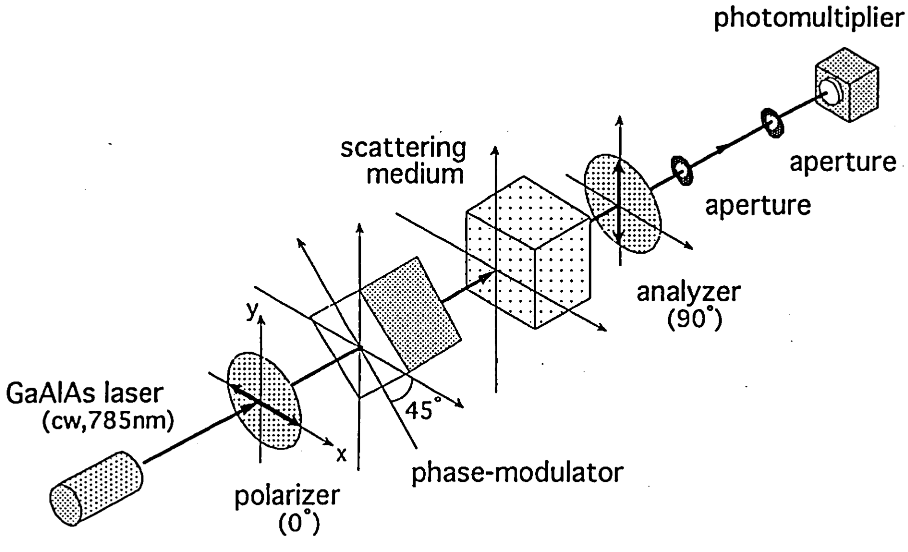


図 5　偏光保存光成分の抽出実験

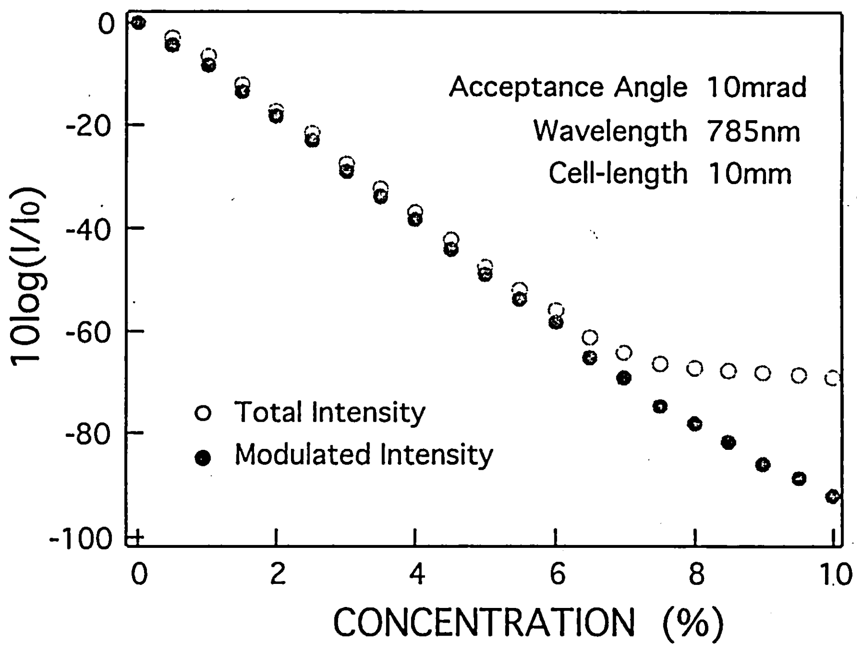


図 6　散乱媒質濃度に対する透過光の強度変化

散乱媒質濃度を変化させたとき得られた透過光強度の測定結果を図 6 に示す．縦軸は，対数表示した透過光強度を示し，散乱媒質濃度 0％時（純水）の強度で規格化している．図中の●は偏光保存成分を，○は全透過光を表し，全透過光測定時には，偏光子の前に光チョッパーを挿入し，その変調信号をロックイン検出の参照信号とした．全透過光の測定では，散乱媒質濃度 6％付近から散乱光の回り込みによる影響が見られ，Lambert-Beer 則（L-B 則）の成立するダイナミックレンジは 60 デシベル程度に制限されている．一方，偏光保存成分の測定では，飽和が見られず，濃度 10％までおよそ 90 デシベルにわたって L-B 則の成立していることが確認できる．グラフの傾きより散乱媒質の散乱断面積は，$0.21\mathrm{mm}^{-1}$/%と読みとれ，これより，濃度 6%，10%での平均自由行程は，それぞれ，0.79mm，0.48mm と見積もられる．

4－3　光ＣＴ実験

上述の偏光保存成分の抽出法を用いて，実際に光ＣＴ画像を得るための実験を行った．人体を測定対象にすることが望ましいが，本装置の持つダイナミックレンジでは，人体に対する透過可能距離は 1~2cm 程度に制限される．そこで，比較的散乱の影響の少ない植物組織（果実）を対象として本手法の適用を試みた[11]．図 7 に実験系を示す．

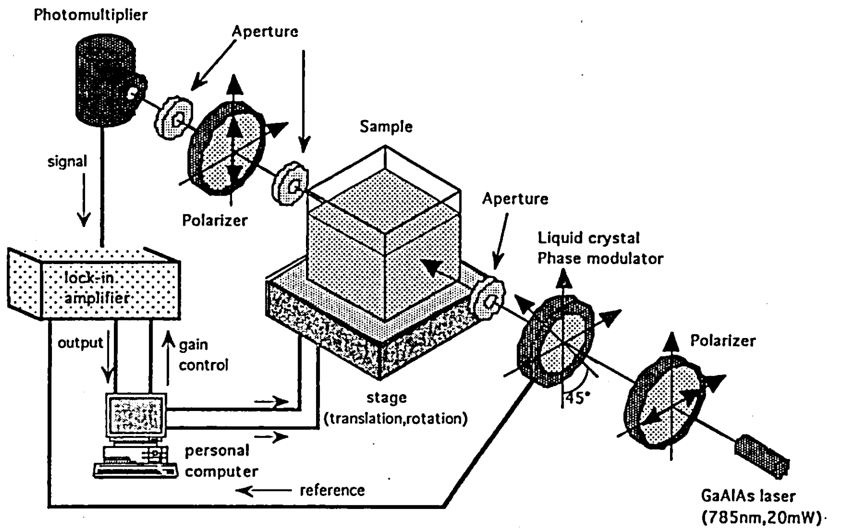
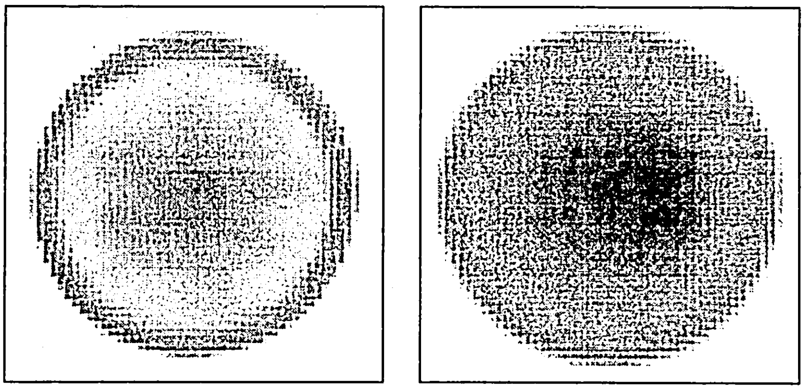


図 7　光ＣＴ装置

基本構成は図 5 と同じであり，新たに取り付けた試料台は二つのステッピングモータによって，回転方向，直線方向（光軸に垂直方向）に駆動した．この装置を用いて，直径約 8.5cm のハッサクの光ＣＴ像を描いた．測定物の境界における急激な屈折率変化を緩和するため，また，入射光軸上に測定物のない場合に，受光器に強い光が入射することを防ぐために，試料台を囲む容器(D90×W190×H95mm)を Intralipid-10%水溶液の 0.5％水溶液で満たし，その中にハッサクを配置した．直線方向には，

移動距離 90mm を 51 分割し（1.8mm/step），回転方向にも 1 回転を 50 分割し（7.2°/step），Half scan 方式により，合計 1300 個の投影データをロックインアンプの時定数 1sec のもとで取得した．また，比較のために全透過光を検出した投影データも用意した．計算機による画像再構成は，フィルタ補正逆投影法（Filtered Back-Projection Method）にもとづいて行い，フィルタ関数としては，Chesler Filter を用いた．



(a) 準直進光　　　　(b) 全透過光

図 8　ハッサクの光ＣＴ画像

図 8(a),(b)はそれぞれ，偏光保存成分と全透過光の投影データをもとに描いた光ＣＴ画像である．(b)では，散乱光の影響によって内部構造が再現されていないが，(a)では，準直進光成分を抽出することにより，放射状に広がる袋の形状らしきものが再現されている．この例からも，光ＣＴに対して，偏光保存成分検出法の適用が有効であることがわかる．現段階では，糖度や熟成度などの分光学的な情報を取得するには至っていないが，光源の波長を変えて実験を行い，これらの情報の二次元分布を調べる予定である．

５．非線形光学効果を利用した準直進光成分の抽出法

上述の偏光保存成分検出法や他の研究機関で精力的に研究されているヘテロダイン検出法は，いずれも変調法であるため，背景光が受光面上にあたってしまう．このためショット雑音によるＳＮ比の劣化が生じ，微弱光測定の点からは不利である．そこで，測定のダイナミックレンジを拡大することを目的として，背景光のない測定を可能とする非線形光学効果を利用したタイムゲート法による以下の実験を行った[13],[14],[15].

５－１　第二高調波発生による準直進光成分の抽出実験

プローブパルスを散乱媒質に入射し，その透過光パルスのうち散乱回数の少ないパルスの立ち上がり部分を，ポンプパルスによって切り出そうとする手法が非線形光学効果を利用したタイムゲート法である[4],[5]．我々は，図９に示す実験系を用いて，第二高調波（Second Harmonic: SH）発生による準直進光成分の抽出を試みた[13]．光源には，モード同期 Ti:sapphire レーザーを用い，2 ピコ秒の時間幅をもつモード同期パルスを標準散乱体である Intralipid-10%水溶液（セル長 10mm）に入射した．透過プローブパルスは，ポンプパルスとともに，レンズ（f=100mm)を通して，非線形光学結晶（BBO 結晶）に集光した．結晶より発生する SH 光は，光電子増倍管を用いてロックイン検出した．実験では，ポンプパルスをプローブパルスの立ち上がり部分に重ねることにより，プローブパルス中の準直進光成分が SH 光として抽出されることを期待した.

Intralipid-10%水溶液の濃度を変え，SH 光強度を測定した結果，濃度 8%まで信号が観測でき，86 デシベルのダイナミックレンジで L-B 則が満たされることを確認した（図 10）．一方，非線形光学結晶を通さない全透過光強度を観測した場合のダイナミックレンジは 57 デシベルにとどまり，準直進光成分を抽出した本手法により，ダイナミックレンジにして 29 デシベルの改善がなされた．また，最適なゲート時間を調べる

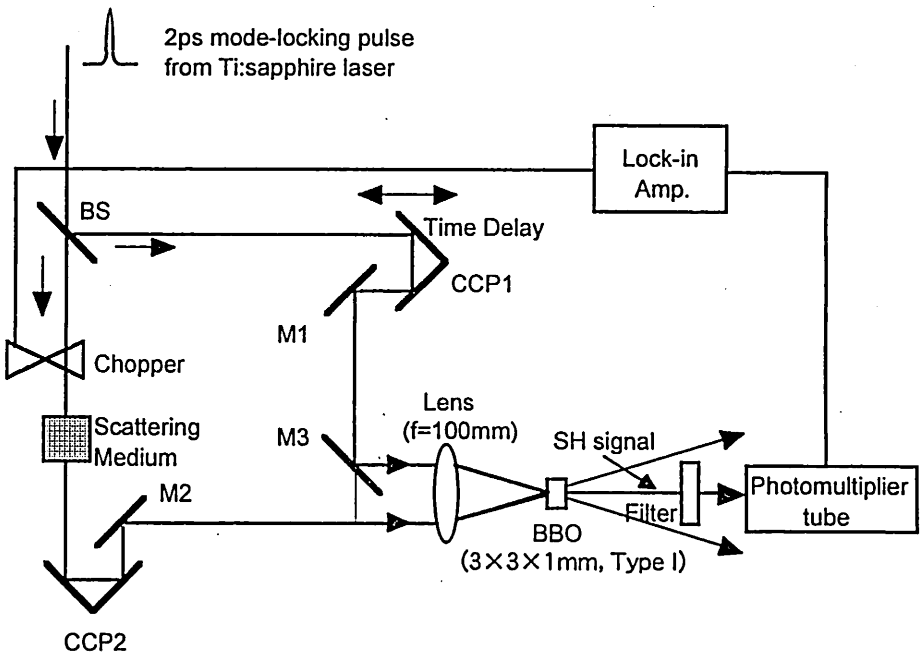


図 9　第二高調波発生法による準直進光成分の抽出実験

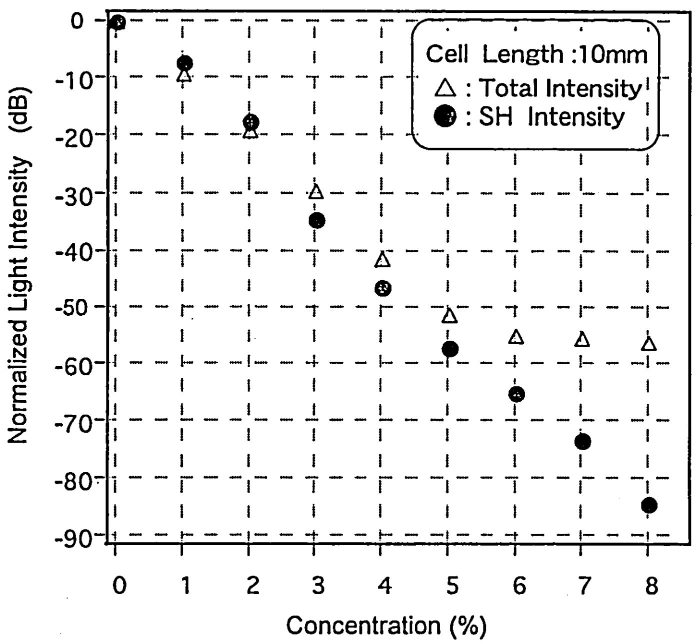


図 10　散乱媒質濃度に対する信号光の強度変化

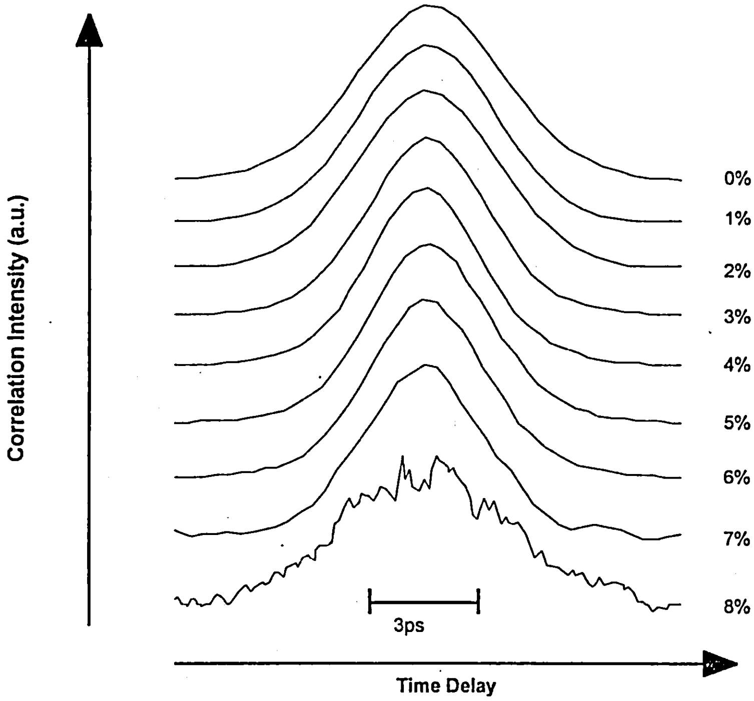


図 11　プローブ・ポンプパルス間の相関測定

ことを目的として，ポンプパルスに時間遅延を与えることにより，両パルス間の相関波形を描いた（図 11）．その結果，得られた相関幅は散乱濃度によらず一定であり，入射パルス幅（=入射光コヒーレンス時間：2 ピコ秒）に一致することがわかった．これより，高調波発生による準直進光成分の抽出は，ポンプパルスのパルス幅をゲート時間とした切り出しではなく，プローブパルス自体のコヒーレンス時間に依存したものであるといえる．結晶内で生じる非線形光学過程による高調波発生には，本質的に入射光間の位相同期（コヒーレンス）が要求されるため，この時点で散乱光は除去されることになる．したがって，この手法はタイムゲート法というよりも，むしろ光コヒーレンス検出法として区別した方がわかりやすい[14]．ただし，上の実験で

は，非線形光学結晶の表面散乱などにより，ポンプパルスのみで SH 光が発生したために，これが背景光となり測定範囲を制限する原因となった．

5－2　和周波発生法による準直進光成分の抽出実験

ポンプ光とプローブ光に異なる波長を選び，準直進光成分を和周波光として抽出することで，信号を波長的に分離し，背景光のない測定を行った[14],[15]．また，非線形光学効果を利用する上記手法が，本質的に光パルスを必要としないことから，測定装置の簡易化，小型化を図るためにポンプ光，プローブ光ともに cw 光源を用いた．ただし，cw 光でも和周波を効率よく発生させるために，非線形光学結晶を共振器内に挿入するイントラキャビティ構成をとり実験した．

図 12 に実験系を示す．ポンプ光には Nd:YVO_4 レーザー（波長 1064nm）を，プローブ光には cw Ti:sapphire レーザー（波長 820nm）を用い，KTP 結晶（Type II, 3mm×3mm×5mm）により和周波（波長 463nm）を発生させた．Nd:YVO_4 レーザーは，YVO_4 結晶端面，M3（f＝50mm），M4（f＝50mm），および M5（f＝100mm）の高反射率ミラーからなる Z 型共振器で構成され，KTP 結晶を共振器内のミラー M4, 5 の焦点位置に配置した．プローブ光はミラー M1, 2 および 1/2 波長板を介して散乱媒質に入射し，その透過光をレンズ（f = 100 mm）により KTP 結晶に集光した．KTP 結晶において発生した和周波信号はレンズ，光減衰器，分光器を通して光電子増倍管（P.M.T）に入射し，ロックイン検出した．Nd:YVO_4 レーザーは半導体レーザー（波長 809nm）で励起され，その励起出力は 5W一定，また，プローブ光出力は散乱媒質入射前で 50mW一定とした．散乱媒質 Intralipid 10%水溶液を長さ 10mm のガラスセルに入れ，その濃度を変えて，発生する和周波信号を計測した．

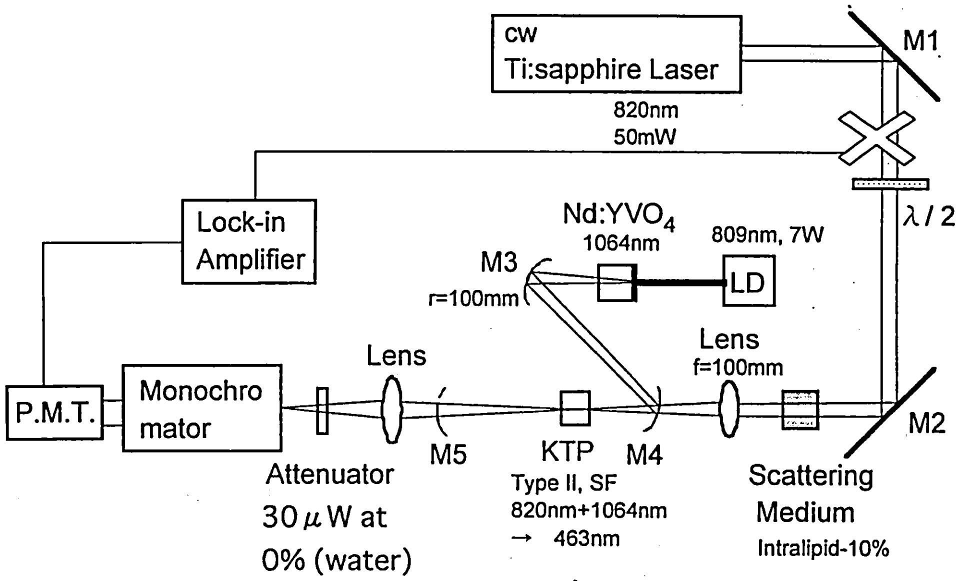


図 12　和周波発生法による準直進光成分の抽出実験

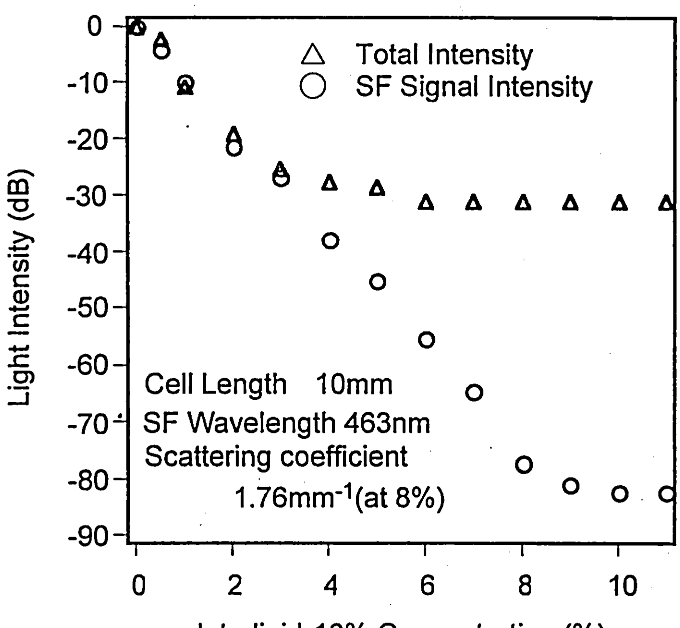


図 13　散乱媒質濃度に対する信号光の強度変化

図 13 に測定結果を示す．横軸には Intralipid 10%水溶液の濃度を，縦軸には光信号強度をとっている．縦軸は，散乱媒質濃度 0%（純水）時の信号強度で規格化し，デシベル表示している．図中の〇印と△印はそれぞれ和周波（SF Signal）と全透過光（Total）の光強度変化を表している．全透過光は，KTP 結晶を取り除き，代わりに空間アパチャ（1mm 径）を挿入し，散乱光成分を含むプローブ光の透過光強度を計測したものである．全透過光の強度は，散乱媒質濃度 3%（平均自由行程 1.6mm に相当）より散乱光の回り込みにもとづく飽和が見られるが，和周波の場合は，散乱媒質濃度 8%（平均自由行程 0.6mm に相当）まで L-B 則成立領域が拡大しており，本手法によって 82dB のダイナミックレンジがとれることを示している．この値は，モード同期レーザーを用いて得た５－１の結果と同等であり，cw レーザーを用いた場合でも，イントラキャビティ構成をもつ和周波発生法を適用することにより，準直進光成分の抽出が有効に行なえるとともに，信号測定に関して比較的広いダイナミックレンジのとれることがわかった．

ただし，上の測定のフロアレベル（82dB）を決定しているのは，KTP 結晶で発生する倍波（波長 532nm）による迷光と考えられるため，今後，最適な光学フィルターを用い，さらにダイナミックレンジの拡大を試みるつもりである．また，本手法を用いて，果実の光ＣＴ画像を描き，その性能等について偏光保存成分検出法と比較する予定である．

５－３　半導体の二光子吸収効果による準直進光成分の抽出

ここまで，測定装置のダイナミックレンジを拡大することを重要視してきたが，多波長測定や短時間測定が容易に行えることも光ＣＴにとって重要な課題である．偏光保存成分検出法も非線形光学効果による光コヒーレンス検出法も，受光部が複雑な配置かつ高価となるので，これをアレイ状に配置することは困難であり，そのため画像データの取得に多くの時間を費や

してしまうことが欠点として挙げられる．特に，光コヒーレンス検出法は，非線形光学結晶の位相整合条件による制限から，光源の波長が限定され，多波長測定には適さない．

５－１，２の実験より，非線形光学結晶での多光子過程（高調波発生）によって，散乱光から準直進光成分を抽出できることがわかった．そこで，上に列挙した欠点を克服し，迅速な画像データの取得を可能とするために，フォトダイオード(PD)や発光ダイオード(LED)などの半導体における二光子吸収効果を利用した準直進光成分の抽出法を考えている．この場合，非線形素子を吸収体として用いるので，図 12 に示したイントラキャビティ構成がとれず，二光子吸収を効率よく発生させるためには光源に超短光パルスが必要となる．しかし一方，PD や LED での二光子吸収過程は，二光子遷移が可能な波長範囲で光源波長を任意に選べるため，多波長測定が容易に行える利点を持つ．また，受光素子が小型，安価であるため，一次元，二次元アレイ構成をとりやすく，吸収情報を持つ準直進光データを迅速に取得することが可能になる．図 14 の実験系で基礎実験を行った．これまでと同様にガラスセル（長さ 10mm）の中に Intralipid-10％水溶液を満たし，Ti:sapphire レーザーからのモード同期パルス（中心波長パルス幅 2ps，平均出力 100mW，繰り返し 82MHz）を入射した．その透過光をセルの直後においた対物レンズ（×10）を通して，Si フォトダイオードおよび AlGaAs 発光ダイオードで受光した．前者は線形吸収，後者は二光子吸収用の受光素子として用いた．図 15 に散乱媒質の濃度を変えたときに，それぞれの受光器で測定された信号強度（散乱媒質濃度 0%時の信号強度で規格化）の変化を示している．Si フォトダイオードでは，線形吸収の結果，散乱媒質濃度 1%あたりから飽和が見られる．これに対し，二光子吸収にもとづく AlGaAs 発光ダイオードでは，濃度 3%まで，信号強度にして-55 デシベルまで飽和が見られず，散乱光の除去されていることが確認できる．

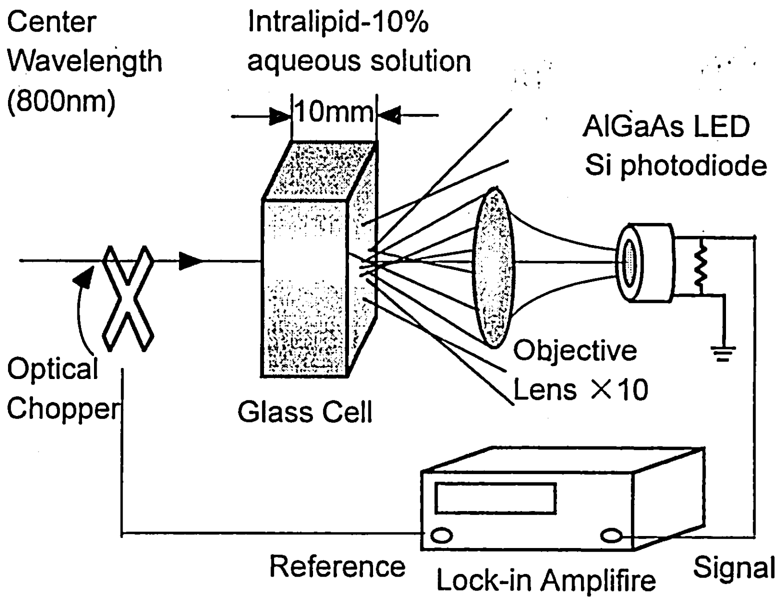


図 14　半導体の二光子吸収効果を用いた
準直進光成分の抽出実験

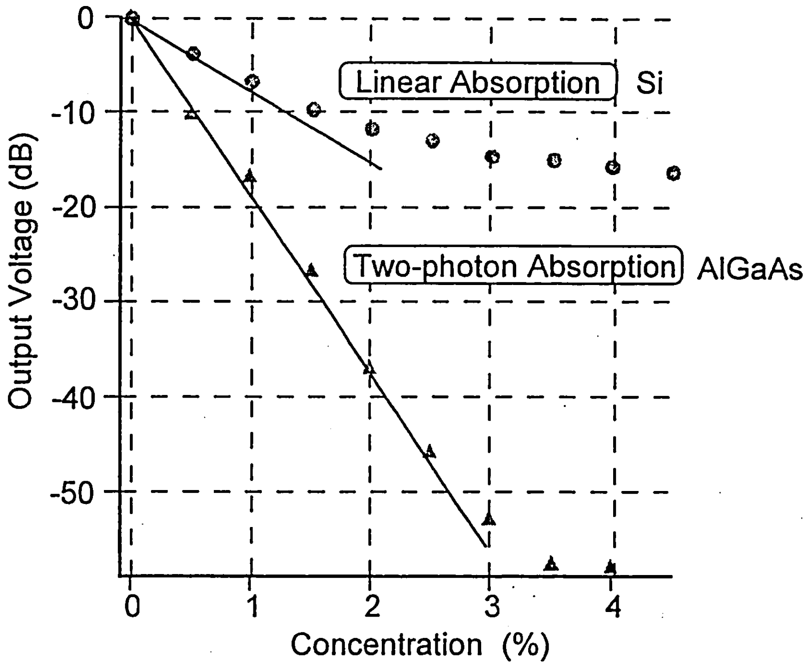


図 15　散乱媒質濃度に対する半導体中の誘起光電流量の変化

ただし，二次の非線形過程を用いているため，信号が強度変化の二乗で減衰してしまい，このままでは微弱信号の測定に適さない．広いダイナミックレンジを確保するためには，別のパルス光源をポンプパルスとして，透過光パルスに重ねて入射する必要があり，装置構成としては図 9，12 と同様になることが予想される．この時のポンプパルスの波長には，それ自身で二光子吸収が生じないように注意して選択しなければならない．半導体では，二光子吸収と同時に線形吸収も生じており，入射光強度が小さくなると，線形吸収に二光子吸収がマスクされ，これにより測定のダイナミックレンジが制限される．このことに関して，AlGaAs，GaAsP，GaN などの二光子吸収受光素子では，上記の入射光条件の下で，55~70 デシベル程度のダイナミックレンジが確保されることを確認している．４－３のハッサクを対象とした光ＣＴ実験では，必要なダイナミックレンジは，60 デシベル程度であったので，半導体の二光子吸収効果を利用した手法も，果実などの対象物に対して適用可能であると考えられる．パルス光源を用いることにより，装置は大型化してしまうが，受光側の半導体素子をアレイ構造にすることにより，測定対象は回転方向だけの移動により投影データを取得できることになり，測定時間の短縮が期待できる．現在，詳細な装置構成などについて検討中である．

６．まとめ

光ＣＴの実現をめざして，散乱媒質透過光中から準直進光成分を抽出する二つの手法（偏光保存成分検出法，非線形光学効果による光コヒーレンス検出法）を提案し，基礎実験の結果を示した．偏光保存成分検出法では，実際に果実（ハッサク）を対象として光ＣＴ画像を描き，本手法の有用性を確認した．また，光コヒーレンス検出法では，測定時間の短縮をめざし，半導体の二光子吸収効果を利用する手法を提案した．

参考文献

[1] M. Yoo and R. R. Alfano: Opt. Lett., 15 (1990) 320.

[2] H. Yoshino, K. Wada, H. Horinaka, Y. Cho, T. Umeda, and M. Osawa; The Review of Laser Eng., 23 (1995) 762.

[3] L. Wang, P. P. Ho, X. Dai, and R. R. Alfano: Opt. Lett., 18 (1993) 241.

[4] K. M. Yoo, Qirong Xing, and R. R. Alfano: Opt. Lett., 16 (1991) 1019.

[5] G. W. Faris and M. Banks: Opt. Lett., 19 (1994) 1813.

[6] I. Oda, Y. Ito, H. Eda, T. Tamura, M. Takada, R. Abumi, K. Nagai, H. Nakagawa, and M. Tamura : SPIE Proc. 1431 (1991) 284.

[7] Y. Cho, T. Shiota, K. Wada, T. Umeda, and M. Osawa: in Conference on Lasers and Electro-Optics, Vol. 11 of 1993 OSA Technical Digest Series (Optical Society of America, Washington, D.C., 1993) paper CTuK7.

[8] M. Toida, M. Kondo, T. Ichimura, and H. Inaba: Appl. Phys., B52 (1991) 769.

[9] H. Horinaka, K. Hashimoto, K. Wada, Y. Cho, and M. Osawa: Opt. Lett., 20 (1995) 1501.

[10] 北間，清水，山本：医用電子と生体工学，31 (1993) 282.

[11] B. Cevaraji, M. Takeda, M. Kobayashi, M. Usa, K. P. Chan, Y. Watanabe, T. Yuasa, T. Akatsuka, M. Yamada, and H. Inaba: Appl. Phys. Lett., 69 (1996) 3671.

[12] 堀中，和田，張：レーザー研究，25, 10 (1997) 692.

[13] 丸居，三品，和田，堀中，山本，大澤，梅田，張： 第43回春期応物講演会，講演予稿集 3, p.870 (1996)

[14] 三品，和田，堀中，山本，梅田，張：第58回秋期応物講演会，講演予稿集 3, p.956 (1997).

[15] 里村，和田，堀中，張，梅田：日本光学会'98 学術講演会，講演予稿集 19p1C05, p.271 (1998).

輻射科学研究会資料
ＲＳ９８－１６

Problems of illposedness, resolution, and local minima in the inverse scattering

Jung Woong Ra
KAIST,Korea

１９９８年１２月１５日（火）
於　住友電気工業株式会社本社

Radio Science, Volume 31, Number 6, Pages 1877–1886, November–December 1996

Moment method and iterative reconstruction of two-dimensional complex permittivity by using effective modes with multiple sources in the presence of noise

Cheon-Seok Park

Department of Electronic Engineering, Sung Kyun Kwan University, Suwon, KyungKi Do, Korea

Seong-Kil Park and Jung-Woong Ra

Department of Electrical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Taejon

Abstract. An iterative hybrid algorithm combining the steepest descent algorithm of Levenberg-Marquardt and the simulated annealing algorithm is used for reconstructing the complex permittivity of a two-dimensional, high-contrast, large object. The scattered fields calculated in a cost function are expanded in angular spectral modes. The "illposedness" in the inversion due to the noise in the scattered fields is regularized by keeping only the effective modes and filtering out the higher angular spectral modes. The object is discretized into N square cells of unknown permittivities and N or larger number of effective modes (P) are needed for this spectral domain iterative method to reconstruct the shape and the permittivity distribution of the object. When $N > P$, multiple view (K) and effective modes of each view (P) make the reconstruction possible if $N \leq PK$.

1. Introduction

The shape and the distribution of the complex permittivity of an object may be reconstructed from the fields scattered by the object. For a small object of permittivity close to that of the host medium, the Born approximation [*Devaney*, 1983; *Slaney et al.*, 1984] linearizes the relation between the permittivity distribution and the scattered field by approximating the total field inside the scatterer by its incident wave. Diffraction tomography [*Devaney*, 1984; *Kim and Ra*, 1995] based on this Born approximation relates the permittivity distribution to the Fourier transform of the scattered field. This method is fast and insensitive to the measurement error for the low-contrast object, where the relative dielectric constant of the scatterer is very close [*Slaney et al.*, 1984] to that of the host medium.

For high-contrast objects where permittivities of the object are much different from that of the host medium, a moment method inversion [*Ghodgonkar et al.*, 1983; *Johnson et al.*, 1983] may be used to discretize the object into small cells much smaller than the wave length, such that the fields in each cell may be assumed constant, and then to obtain the polarization current in each cell from the scattered fields. The total fields inside the scatterer are obtained from these polarization currents, and the distribution of the complex permittivity is then obtained by taking the division of the polarization current by the total field in each cell. This moment method inversion, however, is shown to suffer from the "illposedness" [*Hadamard*, 1923; *Tikhonov and Arsenin*, 1977; *Yoon et al.*, 1982] in a sense that a small error (or noise) in the scattered field causes a large error in the polarization current. This illposedness may be identified as the exponentially decaying behavior of the evanescent modes, which makes the small error in the scattered field grow exponentially in the back propagating process of the inversion [*Lee et al.*, 1988; *Kim et al.*, 1992a, b].

By selecting only the propagation modes excluding the evanescent (or exponentially small) modes from the spectral domain representations of the scattered fields the illposedness is stabilized without the regularization terms of Tikhonov [*Hadamard*, 1923; *Tikhonov and Arsenin*, 1977] nor the use of the pseudo-inversion, which needs more data points [*Ney et al.*, 1984; *Caorsi et al.*, 1990] than that for the moment method inversion. If the total number of cells of the scatterer N is smaller than the number of propagating

Paper number 96RS01881.
0048-6604/96/96RS-01881$11.00

modes, it is shown [*Lee et al.*, 1988; *Kim et al.*, 1992a, b; *Lee and Ra*, 1992] that the errors in the measured scattered field do not cause the illposedness. For a large scatterer producing fewer propagating modes P than N the moment method inversion does not give the reconstruction of the object even with the multiple views (or multiple sources), since the polarization currents in each cell vary with the different views.

One may define a cost function as the summation of the squared magnitude of the difference between the measured and the calculated scattered fields from iteratively chosen dielectric profiles. One then minimizes this cost function by utilizing the iterative steepest-descent method, such as the Levenberg-Marquardt (LM) algorithm [*Dennis*, 1983]. For a low-contrast object this algorithm gives close reconstruction if the initial profile is chosen to be the same as the background medium [*Borup et al.*, 1992; *Joachimowicz et al.*, 1991; *Takenaka*, 1992; *Wang and Chew*, 1989; *Chew and Wang*, 1990]. These examples are shown to satisfy the validity criterion of the Born approximation [*Slaney et al.*, 1984]. For a high-contrast object the steepest-descent algorithm may not give the original profile, because it converges to the values of the local minima of the cost function [*Park et al.*, 1994].

A simulated annealing (SA) algorithm may be used in this iterative minimization of the cost function for the reconstruction of the two-dimensional high-contrast object [*Garnero et al.*, 1991] without the regularization. It will be shown in this paper that the iterative hybrid algorithm combining the LM and SA algorithms gives an effective reconstruction of a two-dimensional large-sized scatterer of an arbitrary shape with high-contrast permittivity distribution. Here the cost function is newly defined as the summation of the squared magnitude of the difference between the measured and the calculated angular spectrum over all the effective modes and multiple views. From the cost function obtained by an arbitrary dielectric cylinder it is shown that a single global minimum of the cost function occurs when the total number of the cells of the scatterer N is smaller than KP, where K is the number of multiple views. It is shown numerically that multiple global minima occur in its cost function if $N > KP$, which prohibits the convergence of the reconstruction to the original profile. The iterative method with the cost function in terms of the angular spectrum is regularized without any additional regularization means, and its stability of inversion is compared with that of the configuration domain.

2. Moment Method Inversion in the Spectral Domain and Illposedness of Inversion

When a time harmonic plane wave having a z-polarized electric field is incident upon a two-dimensional dielectric cylinder of arbitrary cross section along the z axis, the total field satisfies the inhomogeneous Helmholtz equation with the source term producing the incident plane wave. If the cross section of the object is given by its distribution of relative permittivities $\varepsilon(\boldsymbol{\rho})$, where $\boldsymbol{\rho}$ is the two-dimensional cylindrical coordinate vectors, the total fields polarized in the z direction may be represented by the sum of the incident wave and the scattered wave, u^s [*Chew*, 1990],

$$u^s(\boldsymbol{\rho}) = k_0^2 \int\int_{S_0} d\boldsymbol{\rho}' \, [\varepsilon(\boldsymbol{\rho}') - 1] u(\boldsymbol{\rho}') G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'), \tag{1}$$

where k_0 is the wave number in the background medium, u is the total field inside the dielectric cylinder S_0, $\boldsymbol{\rho}$ and $\boldsymbol{\rho}'$ are the cylindrical coordinate vectors (ρ, ϕ) and (ρ', ϕ'), and G is the two-dimensional Green's function. The radiation condition for u^s is satisfied by $G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$, and G may be represented either in the configuration or the angular spectral domain as

$$G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = -(j/4) H_0^{(2)}(k_0 |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|), \tag{2a}$$

$$= -(j/4) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_0 \rho') H_m^{(2)}(k_0 \rho) e^{jm(\phi - \phi')}, \qquad \rho > \rho', \tag{2b}$$

where J_m and $H_m^{(2)}$ are the mth-order Bessel function and Hankel function of the second kind, respectively, for the time dependence $e^{j\omega t}$.

One may calculate the scattered fields numerically by using the moment method [*Richmond*, 1965, 1966] by dividing the cross section S_0 into small cells smaller than $0.2\lambda/\sqrt{\varepsilon}$, where λ is the free space wavelength. The size of the cell is small enough that the polarization current (or the dielectric constant and the total field) inside each cell is taken as a constant. Substituting (2) into (1), one obtains the integral in (1) for the scattered field by the summation over the total number of cells N, where discretized rectangular cells are replaced by the circular cells [*Richmond*, 1965, 1966] of the same area with its radius a, as

$$u^s(\rho) = \sum_{n=1}^{N} [\varepsilon_n(\rho_n) - 1]u_n(\rho_n)I_n(\rho, \rho_n), \qquad (3)$$

where ε_n and u_n are the relative permittivity and the total field at $\rho = \rho_n$, respectively,

$$I_n(\rho, \rho_n) = -(j/2)[\pi k_0 a H_1^{(2)}(k_0 a) - 2j] \quad \rho = \rho_n \qquad (4a)$$

$$I_n(\rho, \rho_n) = -(j/2)\pi k_0 a J_1(k_0 a) H_0^{(2)}(k_0|\rho - \rho_n|) \qquad (4b)$$

$$\rho \neq \rho_n$$

from the configuration domain Green's function in (2a) and

$$I_n(\rho, \rho_n') = -(j\pi/2)k_0 a J_1(k_0 a) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\phi} H_m^{(2)}(k_0 \rho) \cdot J_m(k_0 \rho_n) e^{-jm\phi_n} \qquad \rho > \rho' \qquad (5)$$

from the angular spectral domain Green's function in (2b), where Graf's integral theorem [*Abramowitz et al.*, 1972] of Bessel functions is used in the process of the integral evaluation [*Lee and Ra*, 1992].

To find $\varepsilon(\rho)$ from the integral in (1) is a nonlinear problem. This inversion problem is shifted into finding the polarization current, $(\varepsilon_n - 1)u_n$, in (3) from the measured scattered field $u^s(\rho)$ for the same number of measurement points with the total number of cells, $\rho = \rho_l$, $l = 1, 2, \cdots, N$. This problem becomes linear and its solution is unique if I_n is well defined, where I_n depends upon the geometrical configuration of the discretized cells and measurement points, $|\rho_l - \rho_n| = \rho_{ln}$. Since the cells are discretized much smaller than the wavelength, ρ_{ln} does not change much for the neighboring $(n+1)$th cell, and the values of the neighboring column of the matrix $I_n(\rho_{ln})$ in (4) are not much different from $I_n(\rho_{ln+1})$. This makes the inversion of the matrix I_n from (3) and (4) in the configuration domain unstable. If there exists even a very small error in the measurement of the scattered field u^s, it causes uncontrollable error in the calculation of $(\varepsilon_n - 1)u_n$, as shown in Figure 1. This is generally known as the illposedness of Hadamard, and the quadratic constraint [*Miller*, 1970] in the sense of Tikhonov has been used to regularize the illposedness. Thus the configuration domain inversion of the polarization current needs an additional regularization term [*Joachimowicz et al.*, 1991] in the inversion of the matrix I_n to compromise the errors in the resultant polarization currents and the stabilization of the inversion process.

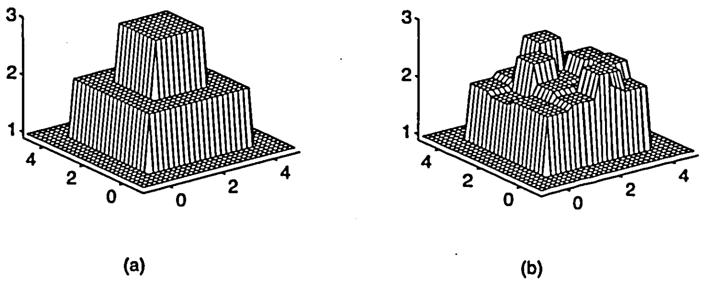


Figure 1. "Illposedness" of the moment method inversion in the configuration domain. (a) Original profile and (b) reconstructed profile (RMS error = 18.2%) of a square dielectric inhomogeneous cylinder of $0.4\lambda \times 0.4\lambda$ when 0.01% Gaussian noise is added to the scattered fields at $\rho = 0.3\lambda$. Sixteen unknowns with 16 field data are used.

This illposedness of the moment method inversion in the configuration domain may be regularized by employing the spectral domain inversion from (3) and (5) and filtering out the higher-order modes of small amplitudes. The normalized modal amplitudes $J_m(k_0\rho_n)$ in (5) for I_n in the spectral domain are plotted in Figure 2 for a square dielectric cylinder of $1\lambda \times 1\lambda$ and $\varepsilon = 5$. The angular spectral amplitudes of this example without noise in the scattered field decay faster than the exponential decay for modes

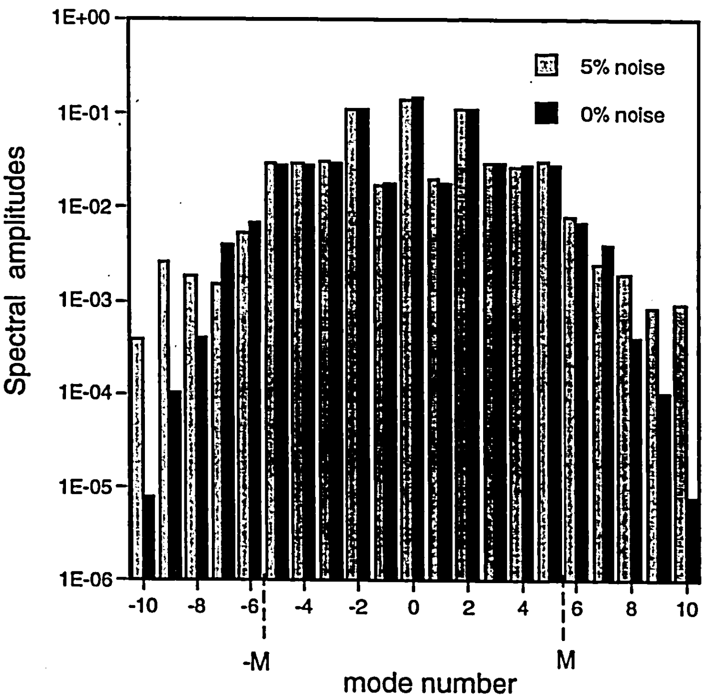


Figure 2. Computed angular spectrum of the fields scattered by a square dielectric cylinder of $1\lambda \times 1\lambda$ and $\varepsilon = 5$ at $\rho = 5\lambda$ for plane wave incidence from (8).

higher than a critical Mth mode. This may be shown from the asymptotic properties of the mth-order Bessel function [*Abramowitz et al.*, 1972], since

$$J_m(k_0\rho_n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\left(\frac{ek_0\rho_n}{2m}\right)^m \qquad m \gg k_0\rho_n \tag{6}$$

decreases algebraically for $2m > ek_0\rho_n$, where $e \approx 2.718$ and M is the smallest integer satisfying

$$M \geq ek_0\rho_n/2. \tag{7}$$

When the noise fields of white Gaussian are added to the scattered fields, the noise-added scattered field, $u^s(\rho, \varphi)$, may be expanded by its angular modal coefficients,

$$a_m(\rho) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} u^s(\rho, \phi)e^{-jm\phi}\,d\phi. \tag{8}$$

Comparing (8) with (3) and (5), one may identify that the modal coefficients are proportional to the product $H_m^{(2)}(k_0\rho)J_m(k_0\rho_n)$. The modal amplitudes normalized by $H_m^{(2)}(k_0\rho)$ for 5% noise-added scattered field are calculated as in Figure 2. This shows that the existence of noise affected only the modal amplitudes of higher-order modes $|m| > 5$, where $M = 5$ is calculated from (7) for the square cylinder of $1\lambda \times 1\lambda$ and $\varepsilon = 5$ ($\rho_n = 0.6187\lambda$).

The cause of the illposedness may be explained from the behavior of the product $H_m^{(2)}(k_0\rho)J_m(k_0\rho_n)$ in (5). When a white Gaussian noise distribution is assumed in the scattered field, the noise power distributed over the modes is uniform. The modal amplitudes of the noiseless scattered field decrease fast for higher modes of $|m| > M$. For the inversion these scattered fields with noise are transformed into the scattered fields inside the scatterer in which the back propagation via the $H_m^{(2)}(k_0\rho)$ is needed, where $H_m^{(2)}(k_0\rho)$ diverges fast in the near field range, $k_0\rho \ll m$, $m > 0$, as $\sqrt{2/\pi m}\,(ek_0\rho/2m)^{-m}$; the variation is opposite to that of $J_m(k_0\rho_n)$ in (6). This diverging process amplifies the noise existing in the scattered field in the process of back propagation of the scattered field. This is the same back propagation effect for the plane wave spectrum representation of the Green's function, which amplifies exponentially the noise carried by the evanescent modes of the scattered fields [*Lee et al.*, 1988; *Kim et al.*, 1992a, b].

It is almost impossible to obtain the original permittivity distribution, since the small numerical errors existing in this moment method inversion are amplified exponentially in the back propagation process if all the modes of the scattered field are included in the inversion. By filtering out all these higher-order modes and keeping only the lower-order modes of $|m| \leq M$ the inversion is stabilized in the presence of noise (or errors) in the scattered field and any other additional regularization processes are not needed.

For a realistic inversion the size and the center of the object has to be estimated. Measured scattered fields may be transformed into a new scattered field with a different origin. The number of effective angular modes of this new scattered field, neglecting those modes having exponentially small modal amplitudes, becomes minimum when the new origin coincides with the center of the unknown object. After a few transformations of the coordinate system with the new origin one may find the estimated object center and size [*Park et al.*, 1995]. The estimated object dimension is discretized into N small cells, as in Figure 3, and its polarization currents, $(\varepsilon_n - 1)u_n$, may be found by inverting (3), where I_n in (5) and a_m in (8) are used with $-M \leq m \leq M$. Here M is given in (7) with ρ_n representing the maximum radius of the estimated object, and the total number of the effective modes, P, becomes $2M + 1$. If $P > N$, one needs only the N dominant modal coefficients to obtain the N polarization currents. Replacing $(\varepsilon_n - 1)u_n$ in (3) by these polarization currents, one obtains $u^s(\boldsymbol{\rho}_n)$ and $u_n(\boldsymbol{\rho}_n) = u^s(\boldsymbol{\rho}_n) + u^i(\boldsymbol{\rho}_n)$, where $u^i(\boldsymbol{\rho}_n)$ is the given incident field at $\boldsymbol{\rho}_n$. The complex $(\varepsilon_n - 1)$ is then calculated by dividing $(\varepsilon_n - 1)u_n$ by u_n.

As the maximum radius of the object ρ_m becomes large, the number of cells N and the critical mode number M are proportional to ρ_m^2 and ρ_m, respectively, and N grows faster than M. If $N > P = 2M + 1$ for a large scatterer, one needs additional data, such as multiple incidences and multifrequency sources, in order to have the number of data points larger than N. The polarization currents $(\varepsilon_n - 1)u_n$ in (3), however, change for different incidences and frequencies of the source, so that the number of unknowns increases. Thus the measurements for additional sources are of little help, and the moment method inversion could not give the stable inversion.

3. Iterative Inversion by Using the Cost Function in the Spectral Domain

One may utilize the additional data points generated by using multiple incidences and frequencies of the source via the iterative inversion. The cost function may be defined as the summation of the squared magnitude

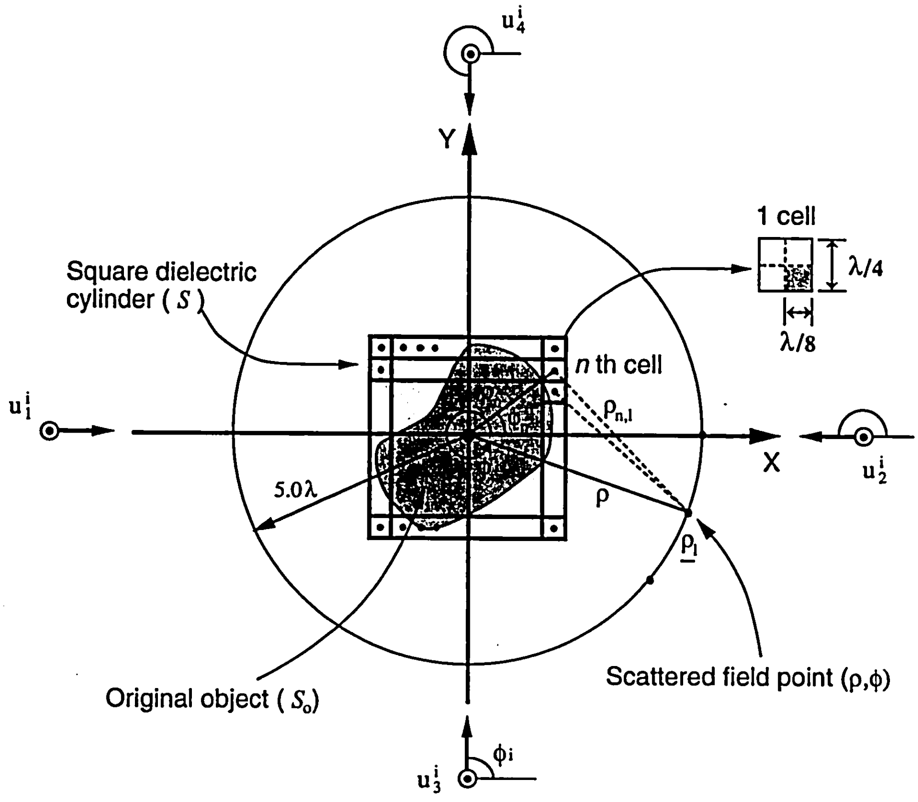


Figure 3. Plane wave incidence on an arbitrary object which is estimated by the square dielectric cylinder in the inversion.

of the difference fields between the measured fields and the fields calculated from the assumed set of dielectric profiles for the iteration. One then minimizes this cost function iteratively by updating the distribution of the complex permittivity profile until the original distribution of the complex permittivity is found.

The cost function f may be newly defined in terms of the spectral coefficients rather than the fields as

$$f = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=-M}^{M} |F_{mk}|^s \qquad (9)$$

$$F_{mk} = a_m(\rho;\ \phi_k^i) - a_m^c(\rho;\ \phi_k^i,\ \varepsilon_n;\ N),$$

where K is the total number of incident waves with its kth incident angle ϕ_k^i and a_m^c is the calculated angular spectral coefficient, which may be obtained from (3) and (5) as

$$a_m^c(\rho;\ \phi_k^i,\ \varepsilon_n;\ N) = -\frac{j\pi k_0 a}{2} J_1(k_0 a) H_m^{(2)}(k_0 \rho)$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_n - 1) u_n(\phi_k^i) J_m(k_0 \rho_n) e^{-jm\phi_n}. \qquad (10)$$

While the iterative inversion in the configuration domain needs the regularization procedure to stabilize the results [*Joachimowicz et al.*, 1991; *Garnero et al.*, 1991], the cost function defined in (9) in terms of the angular spectral modes up to $|m| \leq M$ already filters out the noise and does not need any additional measure of regularization.

In order to see the various limitations of the iterative inversion methods the cost functions defined in (9) are calculated as a function of the relative permittivities of the cells ε_n and the object size D. The cost functions for the fields scattered by a homogeneous circular cylinder of relative permittivity $\varepsilon = 2$ may be calculated as a function of the relative permittivity distribution ε_n, as shown in Figure 4a, by assuming that the measured fields are equal to the exact analytic solution for a plane wave incidence. Three cost functions in Figure 4a are for three different sizes of the object diameter D equal to 1λ, 2λ, and 4λ, where λ is the free space wavelength of the source. It shows that only one global minimum occurs at $\varepsilon_n = 2$ and many local minima for other values of ε_n depending on D. If D is fixed and ε of the object is changed, the calculated cost functions are

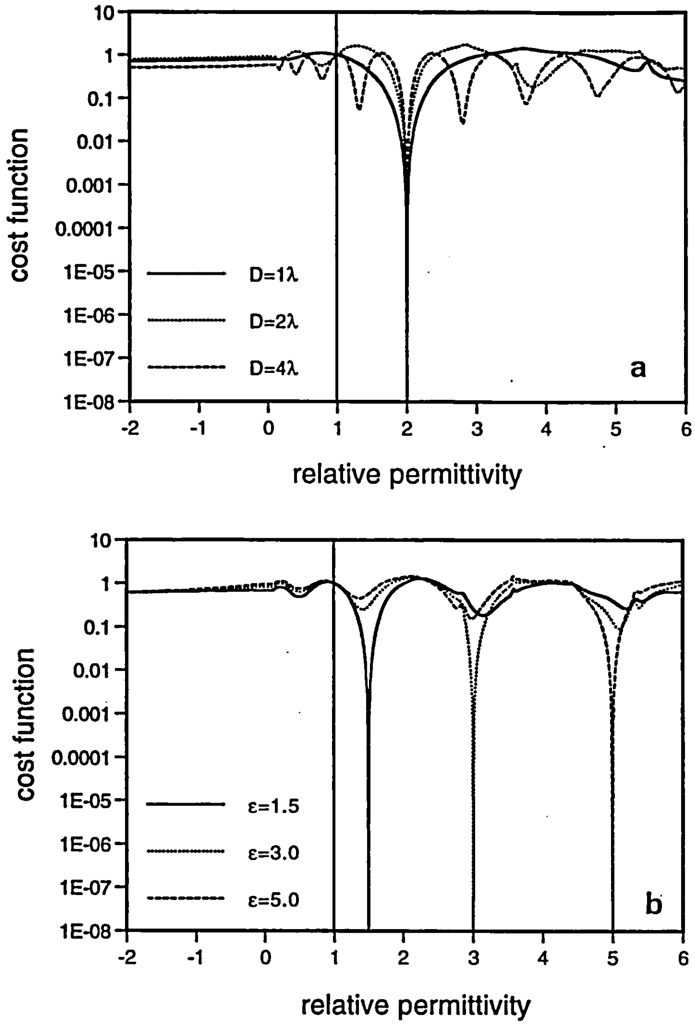


Figure 4. Cost function for a circular dielectric cylinder of (a) $\varepsilon = 2$ and its diameter D as parameter and (b) $D = 1\lambda$ and ε as parameter.

shown in Figure 4b, where the single global minimum occurs for each ε equal to 1.5, 3.0, and 5.0 and many other local minima.

In order to obtain the value of ε_n at the global minimum of the cost function one may use the LM algorithm, where its iterative updating rule minimizing the cost function is given by [*Dennis*, 1983]

$$\boldsymbol{\varepsilon}(i+1) = \boldsymbol{\varepsilon}(i) - [\mathbf{J}(i)^T\mathbf{J}(i) + \alpha\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{J}(i)^T\mathbf{F} \tag{11}$$

Here $\boldsymbol{\varepsilon}(i)$ is the column vector of ε_n calculated at the ith iterative step, $\mathbf{J}(i)$ is the Jacobian matrix describing the increment of the error function F_{mk} in (9) with respect to ε_n of the nth cell, $\mathbf{D}$ is the matrix having only diagonal terms of $\mathbf{J}(i)^T\mathbf{J}(i)$, $\mathbf{F}$ is the column vector having its elements F_{mk}, and the α is the Levenberg-Marquardt parameter regularizing the matrix inversion and improving the convergence rate of the calculation. This algorithm calculates the gradient of the cost function at $\boldsymbol{\varepsilon}(i)$ and gives $\boldsymbol{\varepsilon}(i+1)$ such that the cost function at $\boldsymbol{\varepsilon}(i+1)$ is decreased until the minimum of the cost function is found where its gradient becomes zero.

When the initial values of all ε_n are set to 1, the global minimum may be found at $\varepsilon = 2$ from Figure 4a by the LM algorithm for the diameter of the dielectric cylinder $D = 1\lambda$. For the other diameters larger than 1λ the LM algorithm finds the values of the nearest minimum from $\varepsilon_n = 1$, that is, $\varepsilon_n \approx 0.7$ for 2λ and 1.3 for 4λ. When D is fixed by 2λ, the initial value of $\varepsilon_n = 1$ makes the LM algorithm find the nearest minimum (global) at the original $\varepsilon = 1.5$, as shown in Figure 4b, but makes it impossible to find the other values of $\varepsilon = 3$ and $\varepsilon = 5$, since the iteration finds the nearest local minimum at the values of $\varepsilon \approx$ 1.3 and 1.45. It is interesting to observe the range of convergence [*Borup et al.*, 1992; *Joachimowicz et al.*, 1991; *Takenaka*, 1992], which turns out to be approximately the same as the criterion of the Born approximation [*Slaney et al.*, 1984],

$$(\sqrt{\varepsilon} - 1)D < (\lambda/2). \tag{12}$$

The values of ε obtained from the Born inversion [*Wang and Chew*, 1989] or the distorted Born iteration [*Chew and Wang*, 1990] may be used as the initial distribution of the LM algorithm, but the region of convergence is almost comparable to that in (12).

A source generating a multifrequency signal makes the depth of the local minima shallower than a single-frequency source but generates more local minima [*Park et al.*, 1994]. It does not improve, however, the region of convergence of the LM algorithm to the higher-contrast objects. One may extend the region of convergence by using the initial distribution obtained from the low-frequency moment method inversion and may obtain the higher-frequency iterative result by using the steepest-descent method [*Chew and Lin*, 1995].

The SA algorithm [*Metropolis et al.*, 1953; *Haneishi et al.*, 1990] may be used to reconstruct the higher-contrast object since it converges to the global minimum [*Garnero et al.*, 1991] of the cost function with the careful choice of cooling temperature T and Markov chain length L. At the ith step of this Monte Carlo like algorithm a small random displacement in $\varepsilon_n(i)$ gives a change in the cost function, Δf. If $\Delta f <$ 0, the displacement is accepted and the profile distribution with displaced relative dielectric constant is used for the next step. If $\Delta f > 0$, a probability $p(\Delta f) = \exp(-\Delta f/T)$ is defined, where p has values from 0 to 1 for the cooling temperature T varying from 0 to ∞. A random number r uniformly distributed in an interval (0, 1) is generated and compared with $p(\Delta f)$. If $r < p(\Delta f)$ and $i \leq L$, $\varepsilon_n(i)$ is retained and proceeded to the next step. If $r > p(\Delta f)$ and $i \leq L$, $\varepsilon_n(i)$ is rejected and a new set of $\varepsilon_n(i)$ is chosen. If $i > L$, T is lowered and this process repeated until the acceptable error bound in the cost function is met.

A more efficient hybrid algorithm combining the SA and LM algorithms (HSALM) may improve the long computing time of the SA algorithm. If the minimization by the LM algorithm traps in one of the local minima, HSALM switches LM to SA to find another permittivity distribution of lower cost function and switches to LM again to minimize the cost function to reach a deeper minimum and repeats the process until the global minimum is found.

4. Numerical Simulation, Data Points, and Noise

Three numerical simulations of the square dielectric cylinders are considered. The forward scattered fields are calculated by the moment method at the periphery of $\rho = 5\lambda$ by discretizing the scatterer into N cells of dimensions 0.125λ by 0.125λ for incident waves of up to four different incident angles. In the inversion the size of the unknown cells are chosen as $0.25\lambda \times 0.25\lambda$.

A homogeneous profile of size $1.0\lambda \times 1.0\lambda$ is reconstructed in Figure 5 by using the HSALM algorithm when 5% Gaussian noise is added to the scattered field. Results obtained by HSALM algorithm in the configuration domain with one incidence (Figure 5a) and two incidences (Figure 5b) of plane waves are compared with those of the angular spectral domain in Figures 5c and 5d. We have not used any a priori information such as the center and the size of the scatterer in the calculation except the range of relative dielectric constants $0 < \varepsilon < 10$ in the SA algorithm. Negative permittivities occur in the result of the configuration domain, and one needs more data points for acceptable reconstruction, as in Figure 5e. Angular spectral domain reconstruction with two incident waves in Figures 5d and 5f gives the acceptable reconstruction with much less data.

For this square cylinder the number of effective modes are calculated as $2M + 1 = 11$ via (7), whose spectrum with noise is given in Figure 2, where 11 modes are less than $N = 16$ unknowns. For the reconstruction of Figures 5a and 5c, 22 field points and 22 modes are used, respectively, for one wave incidence. With modes higher than the effective modes the angular-spectral iterative inversion of Figure 5c fails since 11 higher-order modes ($|m| > 5$) are used in addition to 11 effective modes. Even with 22 data points (with two incident waves), the configuration domain iterative inversion fails, as shown in Figure 5b, but reconstructs the cylinder closely with 44 data points (with four incident waves), as shown in Figure 5e. One may reconstruct the cylinder successfully, as shown in Figure 5f, with only 16 data points (8 modes $\times$ 2 incident waves) in the angular spectral domain.

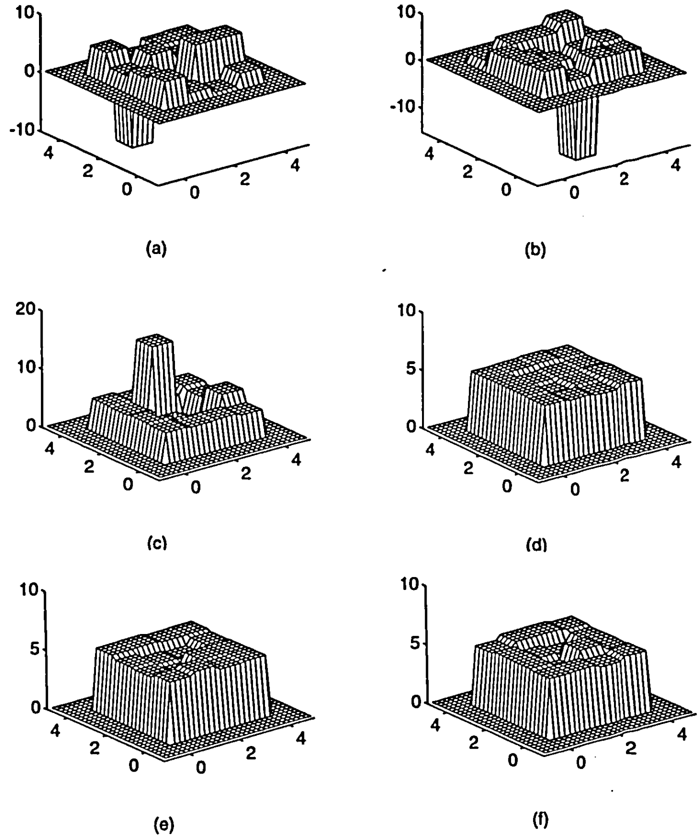


Figure 5. Reconstruction of a square cylinder of $1\lambda \times 1\lambda$ by the hybrid simulated annealing Levenberg-Marquardt (HSALM) algorithm with 5% Gaussian noise in the scattered fields. (a) The configuration domain with 22 field points and one incident wave, (b) the configuration domain with 11 field points and two incident waves, (c) the angular spectral domain with 22 spectral modes for one incident wave, (d) the angular spectral domain with 11 modes and two incident waves, (e) the configuration domain with 11 fields points and 4 incident waves, and (f) the angular spectral domain with 8 modes and two incident waves (16 data points). All scattered fields are calculated along the periphery of $\rho = 5\lambda$.

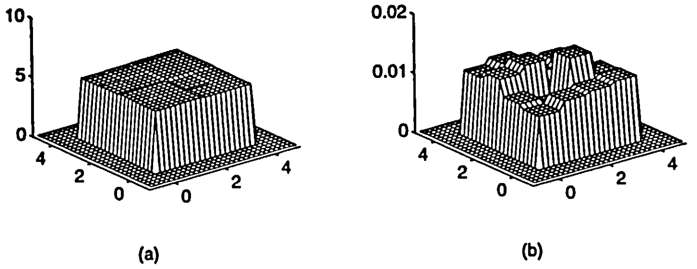


Figure 6. Reconstruction of $1\lambda \times 1\lambda$ square cylinder from the HSALM algorithm. (a) Relative permittivity reconstruction and (b) conductivity reconstruction.

The profile of the complex permittivity having a relative dielectric constant of 5 and conductivity of 0.01 Siemens/m is also reconstructed, as shown Figure 6, where the reconstruction of the conductivity is affected much more from the noise than the relative permittivity. An inhomogeneous larger-size object of $1.25\lambda \times 1.25\lambda$ having its relative permittivity distribution of 3, 5, and 7 is reconstructed in Figure 7 by the LM (Figure 7b), SA (Figure 7c), and HSALM (Figure 7d) algorithm, respectively, where the result of HSALM in Figure 7d is almost the perfect recovery of the original shape and profile. The result of the SA algorithm in Figure 7c gives a close approximation, but it needs more iteration to reach the global minimum. In terms of the computing (CPU) time for the reconstruction, HSALM needs about 0.0711 of the SA algorithm alone (8720 s) for this case with a DEC 3000 computer. For $5 \times 5 = 25$ unknowns, 13 effective modes with two incident waves, that is, 26 data points, are used in these reconstructions of Figure 7d.

Figure 8 shows how the cost function changes with the number of angular spectral modes (Figure 8a) and the noise present (Figure 8b). The cost function is calculated for a circular dielectric cylinder of diameter 2λ and a relative permittivity of 9. The cost function with 17 modes, which is the total number of effective modes, shows the distinctive global minimum at $\varepsilon = 9$ and overlaps with that of 31 modes, even in the presence of 5% Gaussian noise in the scattered fields, as shown Figure 8b. Very deep local minima indistinguishable from the global minimum exist with a 1 mode cost function. In the presence of noise, as shown in Figure 8b, the local minima of the cost function are deepened, and the global minimum is shallowed and shifted to the slightly different values of relative permittivity.

One may speculate that more data points larger than the effective modes do not improve the reconstruction by the iterative minimization even in the presence of noise in the scattered fields. In the presence of noise it is easier to trap in the local minimum, and the reconstructed distribution of permittivities may be deviated slightly.

5. Conclusion

Angular spectral representation of the scattered fields and the moment method are used to formulate the iterative inversion method in the angular spectral domain. This inversion is shown to be stabilized in the presence of noise in the measured scattered field by using only the effective modes without the higher-order modes that are exponentially small and noise-sensitive. The Levenberg-Marquardt iterative minimizing algorithm reconstructs complex permittivities of small and low-contrast objects since it is often trapped in the local minimum of the cost function if its initial distribution of permittivities are chosen as those of the background medium or the Born inversion. The simulated annealing algorithm and hybrid algorithm combining LM and SA minimize the cost function to reconstruct the complex permittivities of large and high-contrast objects since they are able to find the global minimum of the cost function. Numerical examples of the square cylinders of $1.25\lambda \times 1.25\lambda$ and relative permittivities up to 7 and of 1.0λ by 1.0λ and $\varepsilon = 5$ are reconstructed when 5% Gaussian noise

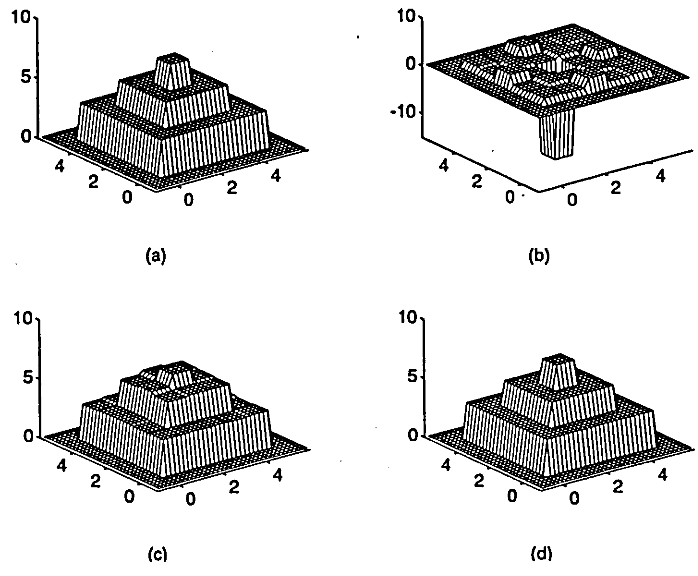


Figure 7. Reconstructed permittivity of $\varepsilon = 3$, 5, and 7 square cylinder with its size $1.25\lambda \times 1.25\lambda$ in (a) original profile and by (b) Levenberg-Marquardt algorithm, (c) simulated annealing algorithm, and (d) HSALM algorithm for 13 modes with two incident waves.

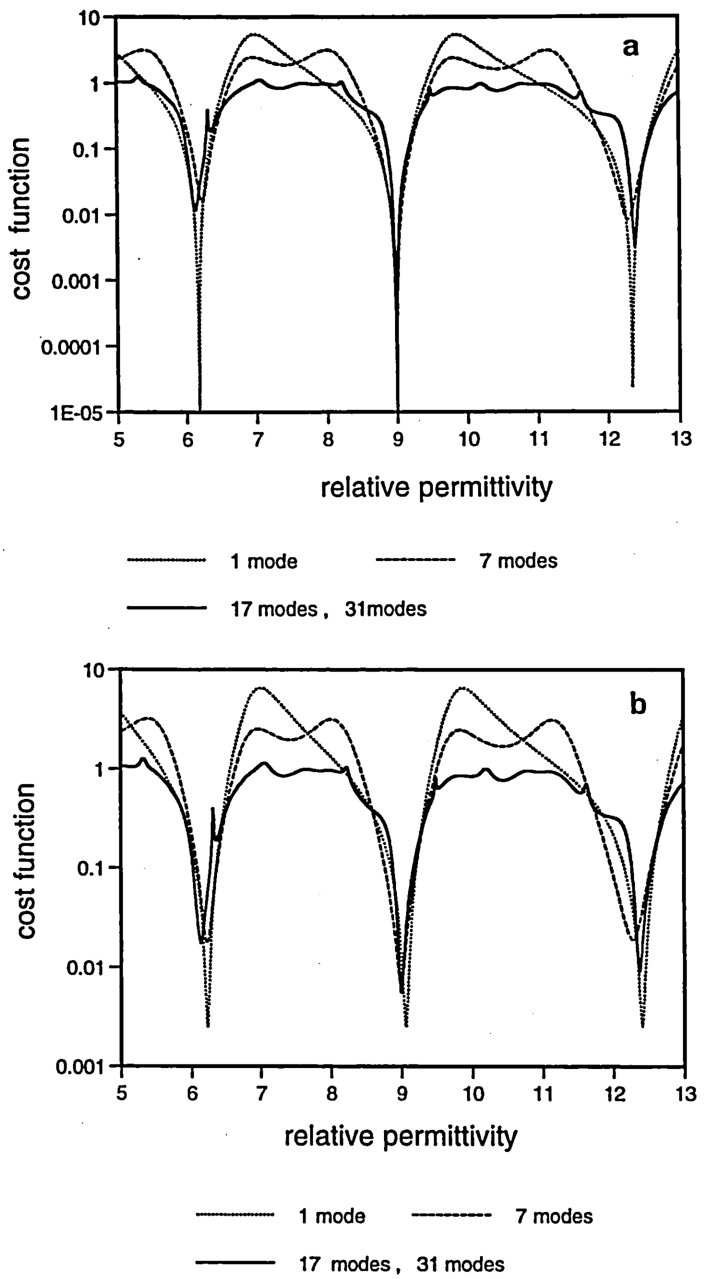


Figure 8. Cost function versus relative permittivity as a function of the number of angular spectral modes for a circular dielectric cylinder of $\varepsilon = 9$ and $D = 2\lambda$. (a) Without noise and (b) with 5% Gaussian noise in the scattered fields.

is present in the measured scattered fields. It is shown that N or larger number of the effective modes multiplied by the number of multiviews are needed to reconstruct the complex permittivities of an object of N unknown cells.

Acknowledgment. This work was submitted as part of a doctoral dissertation to KAIST.

References

Abramowitz, M., and I. A. Stegun, (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphics, and Mathematical Tables*, Dover, Mineola, N. Y., 1972.

Borup, D. T., S. A. Johnson, W. W. Kim, and M. J. Berggren, Nonperturbative diffraction tomography via Gauss-Newton iteration applied to the scattering integral equation, *Ultrason. Imaging*, *14*, 69–85, 1992.

Caorsi, S., G. L. Gragnani, and M. Pastorino, Two-dimensional microwave imaging by a numerical inverse scattering solution, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, *MTT-38*(8), 981–989, 1990.

Chew, W. C., *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, Van Nostrand Reinhold, New York 1990.

Chew, W. C., and J. H. Lin, A frequency-hopping approach for microwave imaging of large inhomogeneous bodies, *IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp.*, *3*, 1610–1613, 1995.

Chew, W. C., and Y. M. Wang, Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method, *IEEE Trans. Medical Imaging*, *9*(2), 218–246, 1990.

Dennis, J. E. Jr., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1983.

Devaney, A. J., A computer simulation study of diffraction tomography, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, *BME-30*(7), 377–386, 1983.

Devaney, A. J., Geophysical diffraction tomography, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, *GE-22*(1), 3–13, 1984.

Garnero, L., A. Franchogis, J. P. Hugonju, C. Pichot, and N. Joachimowicz, Microwave imaging-complex permittivity reconstruction by simulated annealing, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, *MTT-39*(11), 1801–1809, 1991.

Ghodgonkar, D. K., O. P. Gandhi, and M. J. Hagmann, Estimation of complex permittivities of three-dimensional inhomogeneous biological bodies, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, *MTT-31*, 442–446, 1983.

Hadamard, J., *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equation*, Yale Univ. Press, New Haven, Conn., 1923.

Haneishi, H., T. Masuda, N. Ohyama, T. Honda, and J. Tsujiuchi, Analysis of the cost function in simulated annealing for CT image reconstruction, *Appl. Opt.*, *29*, 259–265, 1990.

Joachimowicz, N., C. Pichot, J. P. Hugonin, Inverse scattering: An iterative numerical method for electromagnetic imaging, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, *39*(12), 1742–1752, 1991.

Johnson, S. A., T. H. Yoon, and J. W. Ra, Inverse scattering solutions of the scalar Helmholtz wave equation by a multiple source, moment methods, *Electron. Lett.*, *19*, 130–132, 1983.

Kim, J. H., and J. W. Ra, Multifrequency microwave imaging of a lossy dielectric cylinder in a lossy medium, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, *10*(1), 26–31, 1995.

Kim, S. Y., H. C. Choi, J. M. Lee, and J. W. Ra, Inverse scattering scheme based on the moment method in the spectral domain, I, Theory, *Ultrason. Imaging, 14*, 16–28, 1992a.

Kim, S. Y., H. C. Choi, J. M. Lee, and J. W. Ra, Inverse scattering scheme based on the moment method in the spectral domain, II, Numerical simulation, *Ultrason. Imaging, 14*, 29–39, 1992b.

Lee, J. M., S. Y. Kim, and J. W. Ra, A spectral inverse technique for reconstruction of complex permittivity profiles, *Electron. Lett., 24*, 556–558, 1988.

Lee, K. S., and J. W. Ra, Angular spectral inversion for reconstruction of complex permittivity profiles, *Microwave Opt. Technol. Lett., 5*(8), 1992.

Metropolis, N., A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller, Equation of state calculations by fast computing machines, *J. Chem. Phys., 21*, 1087–1092, 1953.

Miller, K., Least squares methods for ill-posed problems with a prescribed bound, *SIAM J. Math. Anal., 1*, 52–74, 1970.

Ney, M. M., A. M. Smith, and S. S. Stuchly, A solution of electro-magnetic imaging using pseudoinverse transformation, *IEEE Trans. Medical Imaging, 3*, 155–162, 1984.

Park, C. S., S. K. Park, and J. W. Ra, Microwave imaging in angular spectral domain based on the improved Newton's procedure, *Microwave Opt. Technol. Lett., 7*(1), 28–31, 1994.

Park, S. K., C. S. Park, and J. W. Ra, Iterative angular-mode inversion of a conducting cylinder, *Microwave and Opt. Technol. Lett., 10*(3), 1995.

Richmond, J. H., Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape, *IEEE Trans. Antennas Propag., AP-13*(5), 334–341, 1965.

Richmond, J. H., TE-wave scattering by dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape, *IEEE Trans. Antennas Propag., AP-14*, 460–464, 1966.

Slaney, M., A. C. Kak, and L. E. Larsen, Limitation of imaging with first-order diffraction tomography, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-32*(8), 860–874, 1984.

Takenaka, T., On a simple diffraction tomography technique based on a modified Newton-Kantorovich method, *Microwave Opt. Technol. Lett., 5*(2), 94–97, 1992.

Tikhonov, A. N., and V. Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, Washington, D. C., 1977.

Wang, Y. M., and W. C. Chew, An iterative solution of the two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem, *Int. J. Imaging Syst. Technol., 1*, 100–108, 1989.

Yoon, T. H., S. Y. Kim, and J. W. Ra, Reconstruction of distributed dielectric objects using low-frequency waves, *IEEE Geosci. Remote Sens. Symp. Dig., 2*, 3.1–3.4, 1982.

C.-S. Park, Department of Electronic Engineering, Sung Kyun Kwan University, Mail Code 440-746, Chunchun Dong, Jangan Gu, Suwon, KyungKi Do, Korea. (e-mail: chspark@yurim.skku.ac.kr)

S.-K. Park and J.-W. Ra, Department of Electrical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology, 373-1, Kusong Dong, Yusong Gu, Taejon, Korea 305-701. (e-mail: skpark@mwlab3.kaist.ac.kr; rawoong@eekaist.kaist.ac.kr.)

(Received September 28, 1995; revised June 4, 1996; accepted June 19, 1996.)

RECONSTRUCTION OF A LARGE AND HIGH-CONTRAST PENETRABLE OBJECT BY USING THE GENETIC AND LEVENBERG–MARQUARDT ALGORITHMS

Sang-Yong Yang,[1] Hong-Ki Choi,[1] and Jung-Woong Ra[1]
[1]Department of Electrical Engineering
Korea Advanced Institute of Science and Technology
373-1, Kusong-dong, Yusong-gu, Taejon, 305-701, Korea

Received 9 April 1997

ABSTRACT: *A large and high-contrast two-dimensional dielectric object is reconstructed from the measured scattered fields by using a hybrid optimization algorithm combining the genetic algorithm and the Levenberg–Marquardt algorithm. Ill-posedness is filtered out by using the effective angular modes excluding the evanescent modes, and multiple incidences of plane waves of multifrequencies are used to reconstruct a dielectric object of its size, 3 × 3 wavelengths, and its relative permittivity 4.0 in presence of 10% Gaussian noise in the scattered fields. Object size is enlarged by using the large discretized cells up to 0.5 wavelength divided by the square root of relative permittivity.* © *1997 John Wiley & Sons, Inc.* Microwave Opt Technol Lett 16: 17–21, 1997.

Key words: *high-contrast object imaging; large object imaging; iterative method; hybrid algorithm; genetic algorithm; effective angular mode; large cell division*

1. INTRODUCTION

Diffraction tomography [1] based on the Born approximation relates the permittivity distribution of a small and low-contrast penetrable object to the Fourier transform of its scattered fields. For a small and high-contrast penetrable object, the moment method inversion [2, 3] which discretizes the object into small cells much smaller than the wavelength gives the reconstruction of the polarization currents and the permittivity distributions of the object.

For a large but low-contrast penetrable object, the iterative inversion by using the minimization algorithm such as the gradient-based algorithm gives close reconstruction of the scatterer [4, 5] if the initial profile is chosen to be the same as the background medium. This algorithm is shown to fail in the reconstruction of the high-contrast object [6] because this algorithm makes the iteration process converge to the values of the local minima of the cost function, where the cost function is defined as the squared magnitude of the difference between the measured and the calculated scattered fields from iteratively chosen dielectric profiles over many field points. One may use a stochastic algorithm such as the simulated annealing algorithm [7] in this iterative inversion to find the global minimum of the cost function and reconstruct the large and high-contrast two-dimensional object [8] up to 1λ by 1λ and its relative permittivity of 7.0.

We show in this letter that another stochastic algorithm, i.e., the genetic algorithm (GA) [9, 10] combined with the Levenberg–Marquardt algorithm (LMA) [11] finds the global minimum of the cost function for the reconstruction of the two-dimensional large and high-contrast penetrable object. In order to reconstruct a larger penetrable object, one may enlarge the size of the discretized cells as much as possible. The errors involved in the calculation of the scattered fields are shown here to be tolerable if the size of the discretized cell is smaller than $0.5\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, where λ and ε_r are, respectively, the wavelength and the relative dielectric constant of the scatterer with respect to that of the background medium. This enlargement of the cell and the use of GA plus LMA enables us to reconstruct the two-dimensional penetrable scatterer up to a size of 3λ by 3λ and $\varepsilon_r = 4.0$ by using four incident waves with five frequencies and 27 angular modes for the scattered fields when 10% Gaussian noise is assumed in the measured scattered fields.

2. ITERATIVE INVERSION IN THE SPECTRAL DOMAIN WITH LARGER CELL DISCRETIZATION

When a plane wave u^i polarized along the z-axis is incident upon a two-dimensional dielectric cylinder of an arbitrary cross section with its relative permittivity distribution $\varepsilon_r(\rho, \phi)$ as shown in Figure 1, the scattered field u^s may be obtained [2] as

$$u^s(\rho, \phi) = k_0^2 \int\int_{S_0} \rho' \, d\rho' \, d\phi' [\varepsilon_r(\rho', \phi') - 1] \times u(\rho', \phi') G(\rho, \phi; \rho', \phi') \quad (1)$$

where k_0 is the free-space wavenumber, u is the total field inside the dielectric cylinder S_0, (ρ, ϕ) are the cylindrical coordinates, and G is the free-space two-dimensional Green's function given by [12]

$$G(\underline{\rho}, \underline{\rho}') = \frac{-j}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_0 \rho') H_m^{(2)}(k_0 \rho') e^{jm(\phi - \phi')}, \quad \rho > \rho' \quad (2)$$

for $e^{j\omega t}$ dependence. Here, J_m and $H_m^{(2)}$ are an mth-order Bessel function and Hankel function of the second kind, respectively.

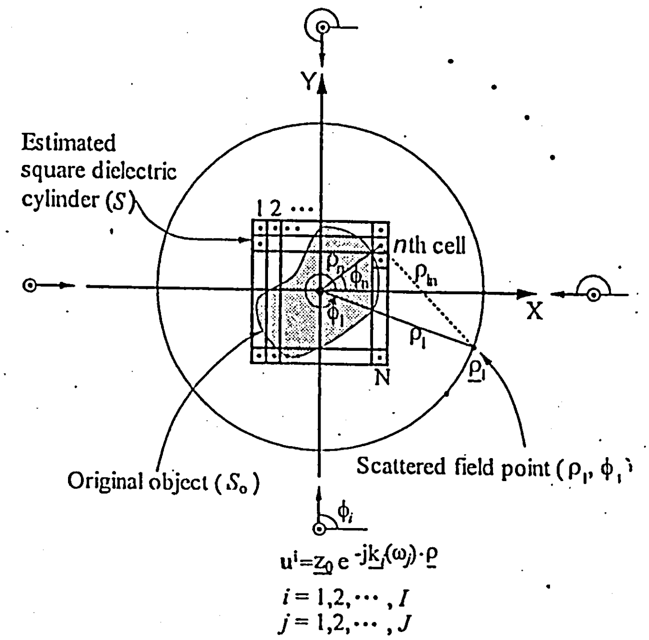


Figure 1 Geometry of inversion showing object points, observation points, and incident waves

For the inverse scattering, where $\varepsilon_r(\rho, \phi)$ is unknown and is to be found from the measured u^s, Eq. (1) may be linearized by using the method of moments [13] that discretizes the estimated cross section S including S_0 into cells smaller than $0.2\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, where λ is the free-space wavelength and ε_r is the relative permittivity of the cell. The integral in Eq. (1) is evaluated by taking the polarization current $k_0^2(\varepsilon_r - 1)u$ in each discretized cell as a constant, and by replacing the discretized rectangular cells into circular cells of the same area as [3]

$$u^s(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(\rho) e^{jm\phi} \tag{3a}$$

$$A_m(\rho) = -\frac{j\pi k_0 a}{2} J_1(k_0 a) H_m^{(2)}(k_0 \rho) \times \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_n - 1) u_n(\rho_n, \phi_n) J_m(k_0 \rho_n) e^{-jm\phi_n} \tag{3b}$$

where $A_m(\rho)$ are the mth coefficients of the angular spectral modes of the measurable scattered fields u^s at the given ρ, (ρ_n, ϕ_n), u_n, and ε_n are, respectively, the center, the total field, and the relative permittivity of the nth discretized cell, N is the total number of the discretized cells, and a is the radius of the replaced circular cell.

An iterative inversion may be employed to reconstruct a large and high-contrast object [8]. A cost function f may be defined in the angular spectral domain for multifrequency and multiple-incident waves as

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{m=-M}^{M} |A_m(\rho; \phi_i, \omega_j) - A_{mk}^{c}(\rho; \phi_i, \omega_j; \varepsilon_n^k, N)|^2 \tag{4}$$

where I, J, and $2M + 1$ are the total number of incident waves with incident angles ϕ_i, the total number of frequencies ω_j, and the total number of modes used in the iteration, respectively, and A_{mk}^c is the calculated angular spectral coefficient at the kth iteration calculated from the assumed kth profile distribution $\{\varepsilon_n^k\}$ via Eq. (3). A_m is obtained from the measured scattered field u_s, in Eq. (3a), by its Fourier transform in ϕ, and the reconstruction of ε_n is obtained by minimizing f in Eq. (4) until the kth distribution of $\{\varepsilon_n^k\}$ gives the global minimum of the cost function f.

Ill-posedness of the inversion due to the presence of noise in the scattered fields is filtered out by taking only the effective modes up to $\pm M$, where M is the smallest integer satisfying $M \geq ek_0\rho_m/2$, $e = 2.718$, and ρ_m is the estimated maximum radius of the object cross section [3]. Minimization of the cost function may be achieved by using the hybrid algorithm combining the deterministic LMA and the stochastic GA, as explained in the next section, until the global minimum of the cost function is reached.

One may enlarge the size of the cell and make the size of the object to be reconstructed larger. The iterative inversion is limited by the computer capability to calculate the forward scattered fields. The size of the matrix to calculate the total field u_n in u^s, or its spectral coefficients A_m in Eq. (3b), becomes $N \times N$ for given distribution of permittivities ε_n of N cells. This size of the matrix is limited approximately by 100×100 due to the capability of the modern computer calculating the inverse of this matrix, and it limits approximately the size of the square object by $2\lambda/\sqrt{\varepsilon_r} \times 2\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$ since the size of the cell is smaller than $0.2\lambda/\sqrt{\varepsilon_r} \times 0.2\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$ for the method of moments and N becomes 100, which means 10×10 cells. As the size of the cell is increased, larger than $0.2\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, the errors in the scattered fields calculated by the method of moments or equivalently in its spectral coefficients A_m^c are increased. Numerical simulations of Eq. (3b) show that the major error in this approximate calculation is due to the total field u inside the object in Eq. (1), which is taken outside the integral over the nth cell as a constraint u_n as in Eq. (3b).

One may show that the error of the approximate calculation increases very rapidly as the size of the cell is enlarged more than $0.5\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$. For a homogeneous circular dielectric cylinder, the exact solution of the total fields inside this cylinder is known [12] as

$$u(\rho, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (j)^{-l} c_l J_l(k_\varepsilon \rho) e^{jl\phi}, \quad \rho < d \tag{5a}$$

where

$$c_l = \frac{1}{J_l(k_\varepsilon d)} [J_l(k_0 d) + a_l H_l^{(2)}(k_0 d)], \tag{5b}$$

$$a_l = \frac{-J_l(k_0 d)}{H_l^{(2)}(k_0 d)} \times \left[\frac{\varepsilon_r J_l'(k_\varepsilon d)/\varepsilon_r k_\varepsilon d J_l(k_\varepsilon d) - J_l'(k_0 d)/k_0 d J_l(k_0 d)}{\varepsilon_r J_l'(k_\varepsilon d)/\varepsilon_r k_\varepsilon d J_l(k_\varepsilon d) - H^{(2)\prime}{}_l(k_0 d)/k_0 d H_l^{(2)}(k_0 d)} \right], \tag{5c}$$

k_ε is equal to $k_0\sqrt{\varepsilon_r}$, d is the radius of the cylinder, and ε_r is the relative permittivity of the cylinder. Substituting Eqs. (5) and (2), in which k_0 is replaced by a new parameter of the Green's function k, into Eq. (1), one may obtain the exact scattered fields u^s as

$$u^s_l(\rho,\phi) = -j\frac{\pi}{2}k_0^2(\varepsilon_r - 1)\sum_{m=-\infty}^{\infty}(j)^{-m}c_m H_m^{(2)}(k\rho)e^{jm\phi}$$

$$\times\int_0^d d\rho'\,\rho' J_m^*(k\rho')J_m(k_\varepsilon\rho') \quad (6)$$

where the integration over $d\phi'$ gives the Kronecker delta δ_{lm} and subscript l is changed into m. The integral over $d\rho'$ in Eq. (6) gives the delta function $(\delta(k - k_0\sqrt{\varepsilon_r})/k)$ as d becomes infinite, but a broadened delta-function-like spectrum at $k \simeq k_0\sqrt{\varepsilon_r}$ when d is finite [14]. One may show, by taking the two-dimensional Fourier transform of u in Eq. (5), that this integral in Eq. (6) corresponds to the spatial frequency spectrum of $u(\rho, \phi)$ which is a circle of $k = k_0\sqrt{\varepsilon_r}$ in its angular spatial spectral domain.

The approximation of larger cell discretization by taking $(\varepsilon_r - 1)u$ in Eq. (1) outside the integral as a constant in each discretized cell is equal to the sampling of $(\varepsilon_n - 1)u_n$ periodically by the period of cell size $2d$. This periodic sampling produces the aliasing effect known in the theory of communication, i.e., the original spectrum of u (circle of $k = k_0\sqrt{\varepsilon_r}$) repeats periodically in its spectral domain. As the size of the cell approaches $0.5\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, two nearby spectra overlap and the error in u^s increases very rapidly as shown in Figure 2, where the error is defined as the squared magnitude of the difference between the exact scattered field minus the approximate scattered field normalized by the squared magnitude of the exact scattered field. From this calculation, this error of 0.15 gives the rms deviation of about ± 0.1 of the original permittivities of the cell after the inversion. This approximation is also confirmed by plotting the normalized cost function for the discretization cells of various sizes from $0.155\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$ to $0.56\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, as shown in Figure 3, where the object is the square cylinder of $1.25\lambda \times 1.25\lambda$. The global minimum of the larger cell discretization lies in the same valley region of the almost exact cost function ($0.155\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$ discretization) near $\varepsilon_r = 5.0$ if the size of the discretized cell is smaller than $0.5\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, while the global minimum of the

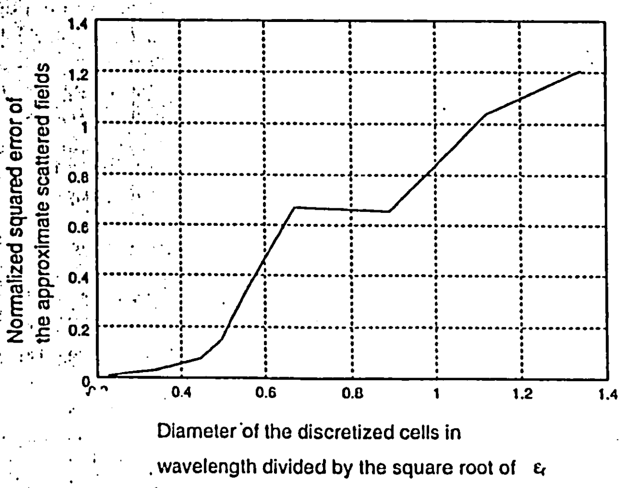


Figure 2 Normalized error is defined as the squared magnitude of the difference between the exact scattered field minus the approximate scattered field calculated by taking $(\varepsilon_n - 1)u_n$ outside the integral in Eq. (1) and normalized by exact scattered fields

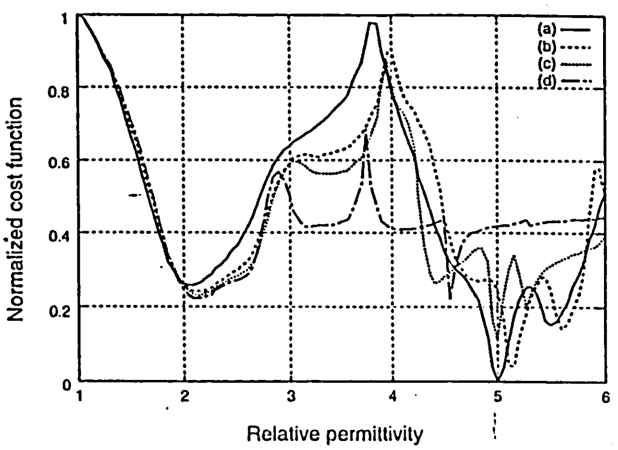


Figure 3 Normalized cost functions versus the relative permittivities for different sizes of the discretized cells: (a) $0.155\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, (b) $0.4\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, (c) $0.466\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, (d) $0.56\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$; the object is a homogeneous square dielectric cylinder of $\varepsilon_r = 5.0$ and its size is $1.25\lambda \times 1.25\lambda$

cell size corresponding to $0.56\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$ near $\varepsilon_r = 2.0$ is far off from $\varepsilon_r = 5.0$.

3. NUMERICALLY SIMULATED INVERSION BY USING THE GENETIC AND LEVENBERG–MARQUARDT ALGORITHMS

For a homogeneous square dielectric cylinder of $\varepsilon_r = 5.0$ and 1.25λ by 1.25λ, the cost function defined in Eq. (4) is calculated as a real line, as shown is Figure 3, by discretizing the square object into 18×18 cells of its size $0.155\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, and by calculating the scattered fields at ρ via the method of moments. The value of the cost function is normalized by the squared magnitude of A_m.

One global minimum exists at $\varepsilon_r = 5.0$, and two local minima exist near ε_r equal to 2.0 and 5.5. We may initiate the iterative inversion by setting the distribution of relative permittivities of the discretized cells ε_n into 1.0, corresponding to that of the background medium. If we use LMA for the optimization of the cost function with this initial setting, the gradient-based optimization of LMA gives $\varepsilon_n = 2.15$ for all the cells corresponding to the local minimum of the cost function where its value of the normalized cost function becomes 0.23. One may switch the LMA into GA, then, where GA generates J strings in which each string is composed of a randomly chosen distribution of ε_n of N cells. With these strings or distribution of ε_n for each string, one may calculate the value of the cost function, and choose strings having lower values of the cost function. Each chosen distribution of ε_n is binary coded, and three operations of reproduction, crossover between parent strings, and mutation generate new strings. This process is repeated until the value of the cost function becomes smaller than 0.23 of LMA. Having this new distribution of ε_n corresponding to a smaller value of cost function than that of LMA, we again switch GA into LMA and search for another minimum. Switching between GA and LMA is repeated until the global minimum of the cost function is found. The number of strings is chosen as N sufficiently large for this case, where N is the total number of the discretized cells.

Numerically simulated inversion shows a successful reconstruction of the two-dimensional homogeneous dielectric cylinder of ε_r equal to 4.0 with a size of $3\lambda \times 3\lambda$, as shown in

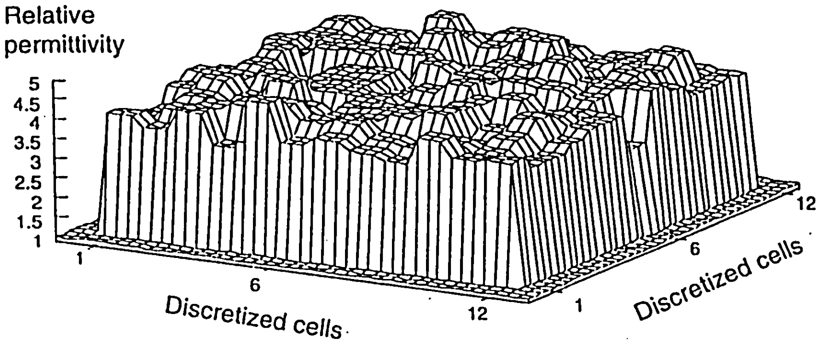


Figure 4 Reconstruction of the homogeneous dielectric cylinder of its size, $3\lambda \times 3\lambda$, and $\varepsilon_r = 4.0$ in the presence of 10% Gaussian noise in the scattered fields; rms error of the reconstructed permittivity distribution is 7.96%

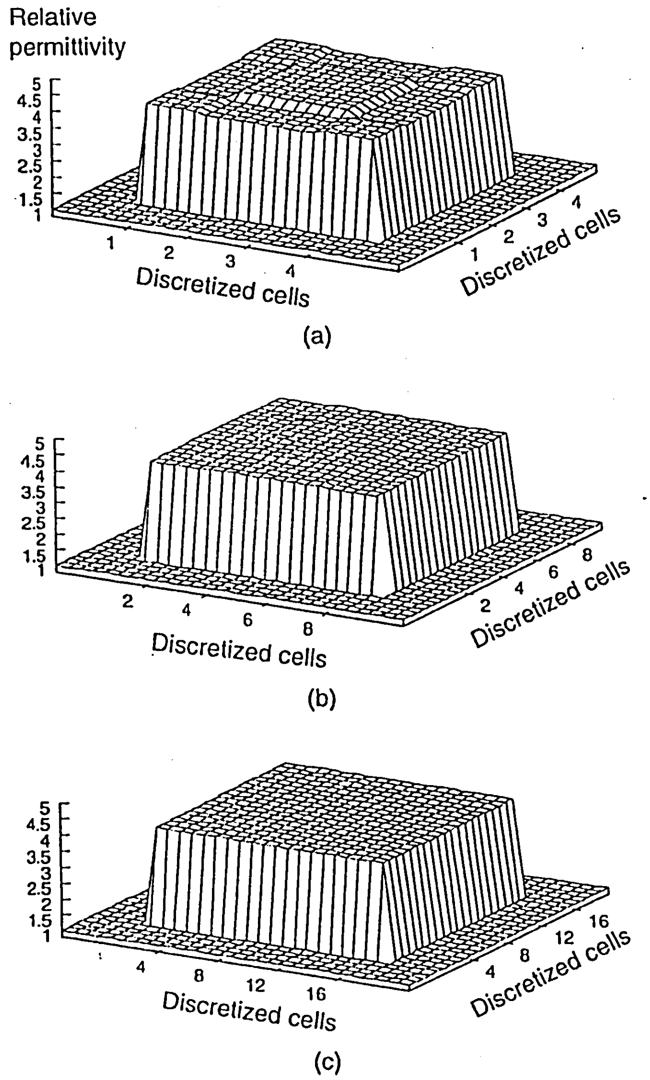


Figure 5 Reconstructions of the homogeneous dielectric cylinder of its size, $1\lambda \times 1\lambda$, and $\varepsilon_r = 4.0$ without Gaussian noise in the scattered fields; reconstruction (a) via GA + LMA by discretizing the object into 4×4 cells of its size, $0.5\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, and via LMA by discretizing the object into 8×8 cells of $0.25\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$ (b) and 16×16 cells of $0.125\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$ (c) by taking the result (a) as the initial profile

Figure 4. For this reconstruction, 10% Gaussian noise is added to the measured scattered fields, and the iterative inversion in the angular spectral domain with the hybrid algorithm combining LMA and GA is used. The cost function in Eq. (4) for this reconstruction is calculated by using 27 angular modes ($2M + 1$), four different incident plane waves (I), and five different frequencies (J) with 12×12 cells ($N = 144$) of size $0.5\lambda/\sqrt{\varepsilon_r} \times 0.5\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$. In this case, GA uses a population size of 140. The root mean-square error of this reconstruction becomes only 7.96%, which is smaller than the 10% Gaussian noise present in the measured scattered fields. When the noise corresponding to the measurement error is not present in the scattered fields, the hybrid algorithm with smaller cell discretization reconstructs the exact shape and the exact relative permittivity distribution of the given object, as shown in Figure 5(c). The hybrid algorithm with a larger cell discretization of $0.5\lambda/\sqrt{\varepsilon_r}$, however, reconstructs the object, as shown in Figure [illegible] One then uses this approximate reconstruction as an initial profile for an optimization with LMA only, and one may obtain the nearly exact reconstruction, as shown in Figure 5(b) and (c), where the size of the object and its relative permittivity are $1\lambda \times 1\lambda$ and $\varepsilon_r = 4.0$, respectively, and four different incident waves of single frequency are used.

REFERENCES

1. M. Slaney, A. C. Kak, and L. E. Larsen, "Limitation of Imaging with First-Order Diffraction Tomography," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. MTT-32, 1984, pp. 860–874.
2. J. M. Lee, S. Y. Kim, and J. W. Ra, "A Spectral Inversion Technique for Reconstruction of Complex Permittivity Profiles," *Electron. Lett.*, Vol. 24, 1988, pp. 556–558.
3. K. S. Lee and J. W. Ra, "Angular Spectral Inversion for Reconstruction of Complex Permittivity Profiles," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, Vol. 5, July 1992, pp. 359–361.
4. Y. M. Wang and W. C. Chew, "An Iterative Solution of the Two-Dimensional Electromagnetic Inverse Scattering Problem," *Int. J. Imaging Syst. Technol.*, Vol. 1, 1989, pp. 100–108.
5. M. Moghaddam and W. C. Chew, "Study of Some Practical Issues in Inversion with the Born Iterative Method Using Time-Domain Data," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 41, Feb. 1993, pp. 177–184.
6. C. S. Park, S. K. Park, and J. W. Ra, "Microwave Imaging in Angular Spectral Domain Based on the Improved Newton's Procedure," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, Vol. 7, Jan. 1994, pp. 28–31.
7. S. Kirkpatric, C. D. Gelatt, Jr., and M. P. Vecchi, "Optimization by Simulated Annealing," *Science*, Vol. 220, May 1983, pp. 671–680.

8. C. S. Park, S. K. Park, and J. W. Ra, "Moment Method Inversion of Two-Dimensional Complex Permittivity Profiles by Using Effective Modes with Multiple Sources in the Presence of Noise," *Radio Sci.*, Vol. 31, Nov.–Dec. 1996, pp. 1877–1886.
9. D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
10. C[illegible] Chiu and P.-T. Liu, "Image Reconstruction of a Perfectly Conducting Cylinder by the Genetic Algorithm," *Proc. Inst. Elec. Eng.—Microwave Antennas Propagat.*, Vol. 143, June 1996, pp. 249–253.
11. D. W. Marquardt, "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters," *J. SIAM*, Vol. 11, June 1963, pp. 431–441.
12. R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.
13. J. H. Richmond, "Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section Shape," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-13, May 1965, pp. 334–341.
14. P. M. Morse and M. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.

CCC 0895-2477/97

輻射科学研究会資料
RS98-17

Ｓバンド境界層風速レーダーの開発

Development of the Transportable S-Band Boundary Layer Radar

今井 克之1），芝野 儀三2），橋口 浩之3），
山本 衛3） ，佐藤 亨4） ，深尾 昌一郎3）

1）住友電気工業株式会社
2）芝野電波研究所
3）京都大学 超高層電波研究ｾﾝﾀｰ
4）京都大学 情報学研究科

1998年 12月 15日（火）
於 住友電気工業株式会社 本社 11F 110会議室

１．緒言

地球を覆う大気は，地表から順に対流圏・成層圏・中間圏・熱圏に大きく区分される。その中でも最下層の対流圏に於いて，特に地表面との摩擦や,地面からの放射・吸収の影響が直接及ぶ高度数ｋｍまでの層を、大気境界層（*Atmospheric Boundary Layer*）と呼ぶ。この大気境界層は社会生活に密接に関係した領域であり，この領域内の大気運動を観測することは，気象予測にとどまらず，例えば地球環境問題に関する研究，航空機に影響を及ぼすウィンドシアと呼ばれる局地的乱流の発生要因等を究明する上に於いても非常に重要である[1)]。

当社と京都大学超高層電波研究センターでは，これまでの大気運動の観測手段である鉄塔観測や音波レーダー（*Sodar*）に代わり，Ｌバンドの周波数（*1.3575GHz*）を用いた大気境界層レーダーを共同開発し，1997 年度から京都大学信楽ＭＵ観測所に設置して連続観測を行っている。

この度我々は，レーダーシステム全体を小型トラックに搭載することで移動観測を容易にする目的で，さらに高い周波数のＳバンド（*3.05GHz*）を用いてアンテナをより小型化した車載型Ｓバンド境界層レーダー（写真１）を開発した。

また本レーダーでは新しい試みとして,パルス圧縮技術を導入してS/ Nの向上を図っている。今回その初期観測に於いて所望の特性が得られたのでここに報告する。

２．原理

境界層レーダーの原理図を図１に示す。レーダーから上空に向けて放射されたパルス状の電波は，大気の乱れ（乱流）に伴う屈折率の揺らぎにより，僅かではあるが散乱され，さらに高度に対応した時間遅延を伴ってレーダーに戻るため，散乱波強度を時間の関数として測定することにより，高度別のデータ列を採取することが可能となる。乱流は大気の流れ（風）に乗って移動するので，散乱された電波はドップラー効果により，散乱点に於ける風速 V に比例した周波数変位（以下ドップラーシフト）を受ける。

ここで，ドップラーシフト Δf と視線方向風速（風速の電波放射方向成分） Vr の間には，次の関係式が成り立つ。

$$\Delta f = f_o \left(\frac{c + Vr}{c - Vr} - 1 \right) \qquad (2.1)$$

ここに，f_oはレーダー周波数，c は光速である。さらに視線方向風速 Vr は光速 c に比べ無視できるほど小さいため，(2.1)式を近似・変形して以下の如く視線方向風速 Vr を得る。

$$Vr = c\,\frac{\Delta f}{2 f_o} \qquad (2.2)$$

従って，レーダーから放射されるビームの方位を天頂に向けると，(2.2)式から風の鉛直成分 Vz が求まる。次に，ビーム方位を天頂から角度$\pm\theta$ だけ傾いた方向にビーム走査

して，それらの視線方向風速 $Vr(\theta)$ を測定することにより，ビーム走査範囲内での風の水平一様性を仮定して、風の水平成分 Vh を次式により求めることができる。

$$Vh = \frac{Vr(\theta) - Vr(-\theta)}{2\ sin\theta} \qquad (2.3)$$

以上の原理に基づき，各高度に於ける風向・風速の高度分布を観測することが可能となる。特に風速の鉛直成分は，他の観測手段では直接観測不可能であり，境界層レーダーの特筆すべき特徴の１つである[2)]。

風速検出の基礎となる散乱波はきわめて微弱であるうえに，周波数の増加と共に散乱レベルが低下していく現象が存在し，さらにアンテナの小型化，及び送信機の低出力化を行っている為に受信感度が十分に得られない。そこで本システムでは，『パルス圧縮』を用いて，S/N の向上を図っている。

パルス圧縮の概念図を図２に示す。サンプリング時間 t_i における受信電圧には高度 h_i から h_{i+N-1} の範囲からの散乱波成分が含まれている。今，送信パルスを時間 τ 毎に位相変調を行うと，これら散乱波成分にはその位相が係数 C_p $(p=0,1,\cdots,N-1)$ として乗じられることになる。この係数 C_p に適当な性質を持たせ，t_{i-p+1} おける受信電圧を組み合わせて各高度における散乱波成分を算出すると，散乱波成分は同位相で加算されるのに対し，雑音成分等の位相には相関性が無いので，得られる散乱波成分の S/N は向上する。この手法では，送信パルス全体のパルス幅は $N\tau$ であるのに対し，演算により全電力を時間の間に集中して送信するのと同等の効果が得られる。つまり，高度分解能を犠牲にすることなく S/N を向上することができる。このようにパルス圧縮を行うことにより，圧縮ビット数を N とすると，高度 h_N 以上の領域（*untruncated ranges*）に於いて N 倍，h_{N-1} 以下の領域（*truncated ranges*）の於いて，i 倍の S/N の向上が得られることになる。具体的な式の導出に関しては *Appendix* に示す（*Appendix* 参照）。

３．システム構成

Ｓバンド境界層レーダーの主要諸元を表１に，ブロックダイアグラムを図３に示す。本システムは，空中線・送受信装置，データ収集装置，及びデータ処理装置（本機ではＷＳを使用）から構成される。

３—１　空中線・送受信装置

空中線装置にはフェーズド・アレイ方式を採用し，小型且つ高速ビーム走査が大きな特徴である。

図４に示すとおり，*188* 個の素子アンテナを円形（直径約 *1m*）に配置し，サイドローブの抑制と共に，アンテナビームの対称性を実現している。通常，レーダーにおけるアンテナは送受共用であり，アンテナ系での損失は，S/N の大きな劣化を招く。そこで本レーダーでは，従来のマイクロストリップアンテナに比べ，放射効率の良いディスクアンテナを素子アンテナに用いることで，S/N の向上を図っている。

また *PIN* ダイオードを用いた *4* ビット反射型移相器により位相制御を行い，最短でパルス繰返し周期 *IPP*（$25\ \mu s$）毎の切り替え周期で，天頂及び東西南北（天頂角 $15°$）計 *5* 方向へのビーム走査を可能にしている。

切り替え周期の高速化は，各ビーム方位間でのデータの同時性向上の為である。また，

対向 *2* ビームのデータを用いることで気象学上重要な風速水平モーメントの鉛直フラックスが精度良く測定できる。
図５に上記アンテナの指向性の実測値，及び理論値を示す。
送受信装置はそれぞれ *16* 系統からなる。アクティブ・フェーズド・アレイ方式により送信機を複数に分散させている為，各送信機の小電力化を実現しており，アンテナ端での合成出力は約 *500W* である。受信系統はダブルスーパーヘテロダイン方式であり，雑音指数は *3.5dB* である。
空中線・送受信機における各種パラメータの設定，及びタイミング等の観測制御は，レーダーコントローラを介し，後述するデータ処理装置で行う。

３－２ データ収集装置

データ収集装置はダブルバッファを持つ *A/D* 変換器と，*8* 個の *DSP*（*Digital Signal Processor*）から成り，パルス圧縮の復号，コヒーレント積分等を分散処理している。積分処理されたデータはデータ処理装置に転送され，風速推定演算等を行う。

３－３ データ処理装置

データ処理装置では，観測制御，風速推定演算，データ保存，及び観測データのグラフィック表示等を並列処理する。風速推定演算では，*FFT*，インコヒーレント積分，ガウスフィッティングを行う。得られた観測データは，随時 *8mm* テープに保存される。グラフィック表示としては，クイックルック機能を有しており，風速スペクトルの等高線図，鳥瞰図等をリアルタイムに表示可能である。観測者は，観測パラメータや観測開始・終了時刻を指定するだけで，自動観測を行うことが可能である。

４．観測結果

Ｓバンド境界層レーダーの特性評価及び観測は，京都大学信楽ＭＵ観測所にて行った。図６に、同観測所内のＭＵレーダー（*Midlle and Upper atmosphere radar*）との同時観測による風速の高度プロファイルの比較を示す。
同図観測データは，*1998* 年 *1* 月 *15* 日の降雨時のデータであり、図中実線はＳバンド境界層レーダー，破線はＭＵレーダーによるものである。また同図横軸は風速を表し，正の風速はレーダーから遠ざかる方向，負の風速はレーダーに近づく方向を表している。
鉛直成分（*Vertical*）ではＭＵレーダーとＳバンド境界層レーダーとの間に大きな差異が見られるが，これはＳバンドの周波数領域では，大気乱流比べ降水粒子からの散乱を強く受けるためと考えられる。
一方水平風速（*Northward*，*Eastward*）ではＭＵレーダーによる観測データーが有効である高度 *1.6km* 以上の領域に於いて極めて良く一致しており，これらよりＳバンド境界層レーダーによる観測データの信頼性が証明された。
次に，パルス圧縮による効果について述べる。N ビットのパルス圧縮を行った場合，理論的には高度 $i \geqq N$ の領域では N 倍，$i \leqq N\text{-}1$ の領域では i 倍 *S/N* が向上することは先に述べた。そこでこれらの検証のため，*8* ビットのパルス圧縮と単一パルスを交互に切り替えて観測を行った。図７に北向きビーム方位における各観測モードのスペクトルを示す。図中散乱波の強度はグラデーションで表しているが，パルス圧縮の効果により，より高い高度まで検出できていることが分かる。さらにこれらを定量的に評価するため，図８に各観測モード間の *S/N* の *dB* 差を示す。図中実線が実測値であり，破線が理論値を示す。散乱強度の比較的強い低高度では理論曲線との一致が良く，またそれ以上の領域に於いても理論との差は± *1.5dB* 程度に収まっており，パルス圧縮による *S/N* の向上が十分に得られていることが分かる。

５．結言

車載型Ｓバンド境界層レーダーを開発し，その観測データ及びMUレーダーによるそれとの良い一致から，本システムが正常に動作していることが示された。また，パルス圧縮を行った場合には，単一パルスに対して理論通りの *S/N* 向上が認められ，境界層レーダーにおけるパルス圧縮技術の有用性が証明された。本レーダーは *1998* 年 *4* 月から，信楽MU観測所において連続観測を行っている。

参考文献

（１） *H.Hashiguchi , Development of an L-Band Clear-Air Doppler Radar and Its Application to Planetary Boundary Layer Observations over Equatorial Indonesia. ,Doctoral thesis , (Faculty of Engineering , Kyoto University) , PP.154 , 1995.*

（２）深尾，山本,橋口，芝野，今井，岩井，斉藤，岸本，磯村 ：アクティブ・フェーズド・アレイ方式による境界層風速レーダー，住友電気第152号PP. 168～172，1998.

（３） *E.Spano and O.Ghebrebrhan , Sequences of complementary codes for the optimum decoding of truncated range and high sidelobe supression factors for ST/MST radar systems , IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. ,34,330-345,1996.*

（４）深尾：車載型Ｓバンドレーダーの開発，文部省科学研究費補助金報告書，PP. 138 ， 1998

Appendix

図９－(a)に示すように１回だけの送信パルスを考えた場合，送信波 $V_T(t)$ は次式で表される。

$$V_T(t) = A_T \sum_{p=0}^{N-1} C_{p+1}\, e^{j\omega t}\, \Pi\left(\frac{t-(p+1/2)\tau}{\tau}\right) \qquad (A.1)$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1\ ; & -1/2 \leqq t \leqq 1/2 \\ 0\ ; & \text{elsewhere} \end{cases}$$

A_T　；　振幅

C_p $(1 \leqq p \leqq N)$　；　パルス位相変調コード列

である。ここで図９－(b)の如くＳ回送信を考えた場合は，(*A.1*)式より同様に以下の如く表すことができる。

$$V_T(t) = A_T \sum_{k=0}^{S-1} \sum_{p=0}^{N-1} C^k_{p+1}\, e^{j\omega t}\, \Pi\left(\frac{t-(p+1/2)\tau-kTr}{\tau}\right) \qquad (A.2)$$

C^k_p $(1 \leqq p \leqq N)$　；*No.k* パルスの位相変調コード列

まず初めに，*k* 番目の送信パルスに対して，散乱された受信波について考える。図 10 にサンプリング受信波の生成機構のモデルを示す。図中 *i* はサンプリングタイミングを表すが，これらが高度に対応することは明らかである。図 10 より，*k* 番目の送信パルスによる *i* 番目のサンプリング受信波は以下のように表せる。

$$v_{rk}(i) = \sum_{p=0}^{N-1} C^k_{N-p}\, d_k(i+p) \quad (1 \leqq i \leqq R\ ,\ 0 \leqq k \leqq S) \qquad (A.3)$$

ここで $d(i)$ は，高度 ri における散乱係数であり，Ｓバンド境界層レーダーに於いて求めるべき量である。上式を行列で表現し，

$$R = L\,(N\text{-}1) \tag{A.4}$$

を仮定すると，次式の如く変形できる。

$$\begin{pmatrix} [V^k_1] \\ [V^k_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ [V^k_N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & B_k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & A_k & B_k & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & A_k & B_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D^k_1] \\ [D^k_2] \\ \cdot \\ [D^k_L] \\ [D^k_{L+1}] \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

ここで 0 は，$(N\text{-}1) \times (N\text{-}1)$ の零行列，

$$A_k = \begin{pmatrix} C^k_N & C^k_{N-1} & \cdot & \cdot & C^k_2 \\ 0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & C^k_{N-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & C^k_N \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

$$B_k = \begin{pmatrix} C^k_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ C_2 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 0 \\ C^k_{N-1} & \cdot & \cdot & C^k_2 & C^k_1 \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

$$[V^k_m] = \begin{pmatrix} v_{rk}\,((m\text{-}1)(N\text{-}1)+1) \\ v_{rk}\,((m\text{-}1)(N\text{-}1)+2) \\ \vdots \\ v_{rk}\,((m\text{-}1)(N\text{-}1)+N\text{-}1) \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

$$[D^k_m] = \begin{pmatrix} d_k\,((m\text{-}1)(N\text{-}1)+1) \\ d_k\,((m\text{-}1)(N\text{-}1)+2) \\ \vdots \\ d_k\,((m\text{-}1)(N\text{-}1)+N\text{-}1) \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

次に，上式で得られた受信波に対し２段階の復号処理を行う。まずその第１段階では，$d_k(i)$ の推定値を $w_k(i)$ とし，以下の演算を行う。

$$w_k(i) = \sum_{m=1}^{i} C^{*k}_{m+N-i}\, v_{rk}(m) \qquad (1 \leqq i \leqq N\text{-}1) \qquad (A.10)$$

$$w_k(i) = \sum_{m=1}^{N} C^{*k}_{m}\, v_{rk}(m\text{-}N+i) \qquad (N \leqq i \leqq R) \qquad (A.11)$$

ここで，＊は複素共役を表す。*(A.10)*，*(A.11)* を行列式で表現すると，

$$\begin{pmatrix} [W^k_1] \\ [W^k_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ [W^k_L] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{*T}_k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ B^{*T}_k & A^{*T}_k & \cdot & & \cdot \\ 0 & B^{*T}_k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & B^{*T}_k & A^{*T}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [V^k_1] \\ [V^k_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ [V^k_L] \end{pmatrix} \qquad (A.12)$$

となる。但し，

$$[W^k_m] = \begin{pmatrix} w^k((m\text{-}1)(N\text{-}1)+1) \\ w^k((m\text{-}1)(N\text{-}1)+2) \\ \vdots \\ w^k((m\text{-}1)(N\text{-}1)+N\text{-}1) \end{pmatrix} \qquad (1 \leqq m \leqq L) \qquad (A.13)$$

であり，添字 *T* は転置行列を表す。
復号の第２段階では，符号化したパルスをＳ回送信し，*(A.12)* から得られる *W* の総和をとり，

$$\begin{pmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \\ \\ [W_L] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & SNI & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & SNI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D_1] \\ [D_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ [D_L] \end{pmatrix} \qquad (A.14)$$

但し，

$$M = \sum_{k=0}^{S-1} A^{*T}_k A_k \quad , \quad SNI = SN \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A.15)$$

である。

(A.15) より，サンプリングタイミング（高度） i が N 以上の領域 *(untruncated ranges)* では，推定値 $w(i)$ が散乱係数 $d(i)$ の SN 倍になっており，完全に復号できていることが分かる。また *N-1* 以下の領域（*truncated ranges*）に於いても，*Spano and Ghebrebrhan [1996]* の考案した符号系列 *(Complementary Code)* を用いることにより係数行列 M を対角化することができる。この場合次式で表されるだけ *S/N* の向上が期待できる。

$$S/N = 10 \log i \ \mathrm{dB} \qquad (1 \leqq i \leqq N-1) \qquad (A.16)$$

従来の符号系列では，この *N-1* 以下の領域は復号できないという問題があったが，*Spano and Ghebrebrhan[1996]* らの考案した符号系列を用いることにより，低高度でのパルス圧縮が可能となる[31]。

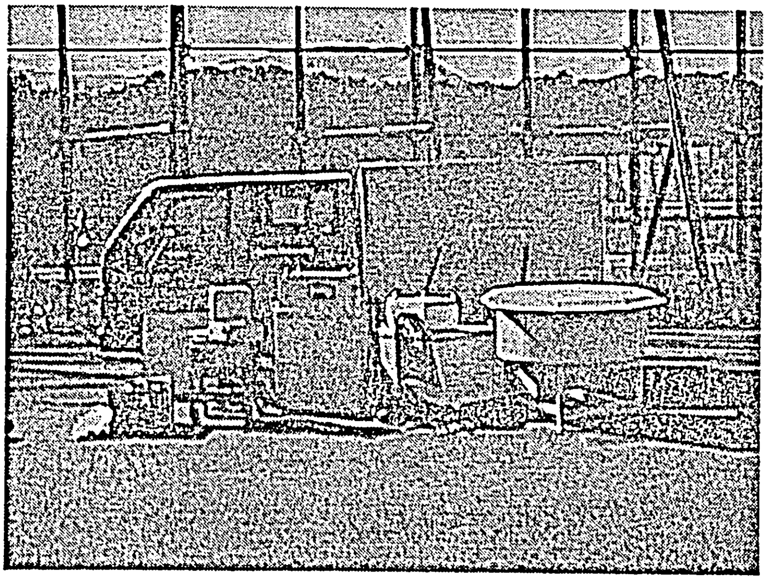


写真1　Sバンド境界層風速レーダーの概観

表１　Ｓバンド境界層レーダーの主要諸元

１．形式	ﾓﾉｽﾀﾃｨｯｸ・ﾊﾟﾙｽﾄﾞｯﾌﾟﾗｰ・ﾚｰﾀﾞｰ
２．周波数	3.05GHz
３．アンテナ	
（１）寸法	φ1m
（２）形式	平面ﾌｪｰｽﾞﾄﾞｱﾚｲｱﾝﾃﾅ
（３）偏波	直線
（４）利得	26 dBi
（５）ビーム半値角	6°
（６）ビーム方向	天頂，東，西，南，北（天頂角15°）
４．送信機	
（１）ピーク電力	500 W (max)
（２）平均電力	53.3 W (max)
（３）デューティ比	10.67 %以下
（４）パルス繰返し周期	25,50,100 μs 可変
（５）送信パルス幅	1/3,2/3,1 μs 可変
（６）パルス圧縮	(1),2,4,8 bit 可変
５．受信器	
（１）雑音指数	3.5 dB
（２）ダイナミックレンジ	65 dB
（３）フィルター帯域幅	0.5,0.75,1.5 MHz 可変
６．データ処理部	
（１）サンプリング周期	1/3,2/3,1 μs
（２）A/D変換	12 bit
（３）コヒーレント積分	任意
（４）FFT点数	2^n（≦256）
（５）インコヒーレント積分	任意

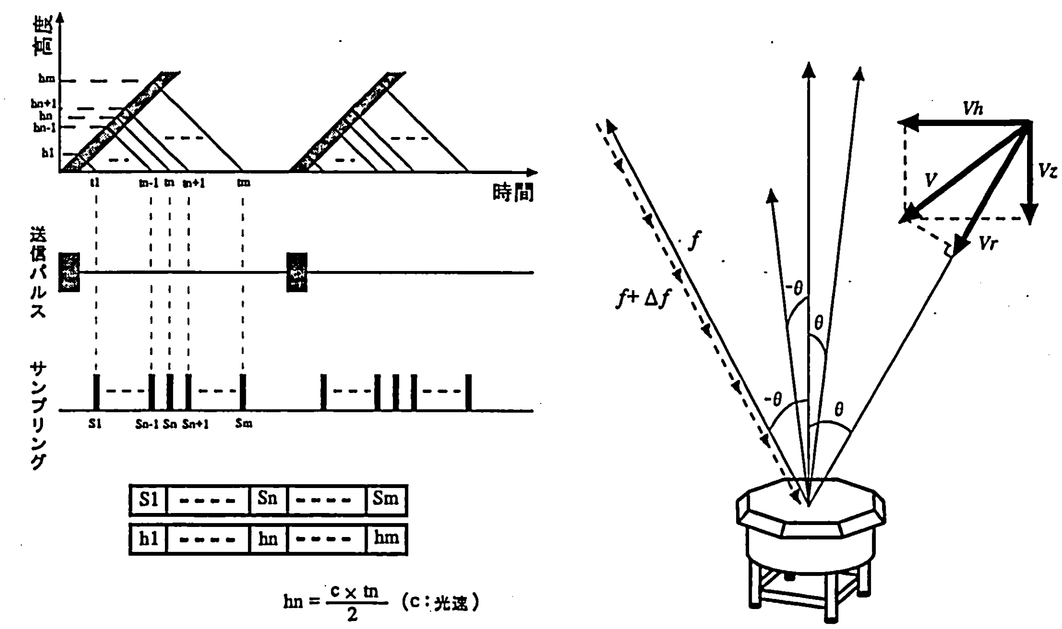


図１　境界層レーダーの原理

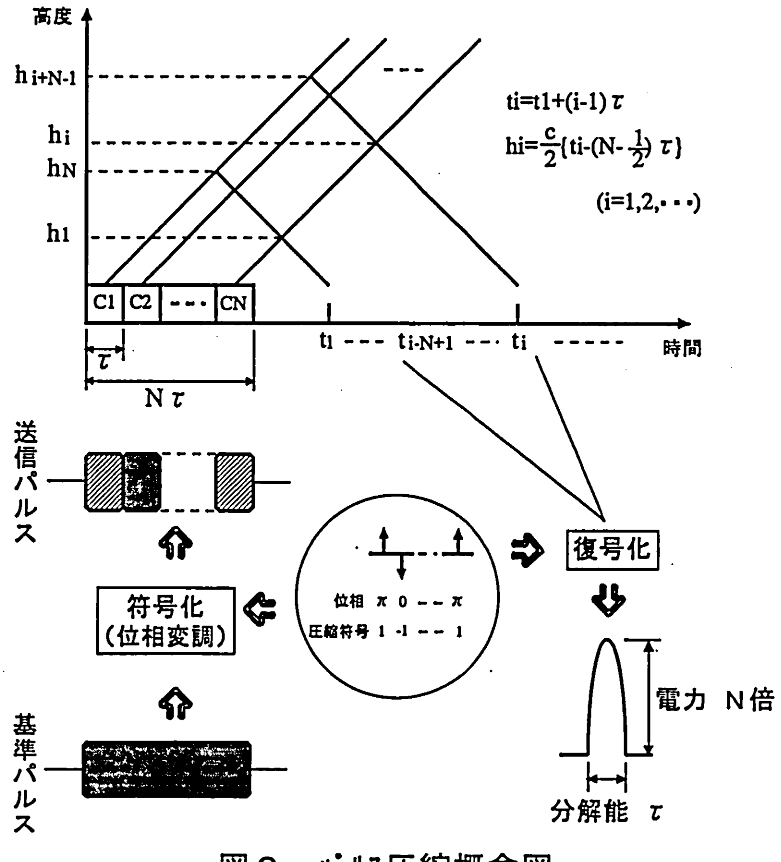


図２　ﾊﾟﾙｽ圧縮概念図

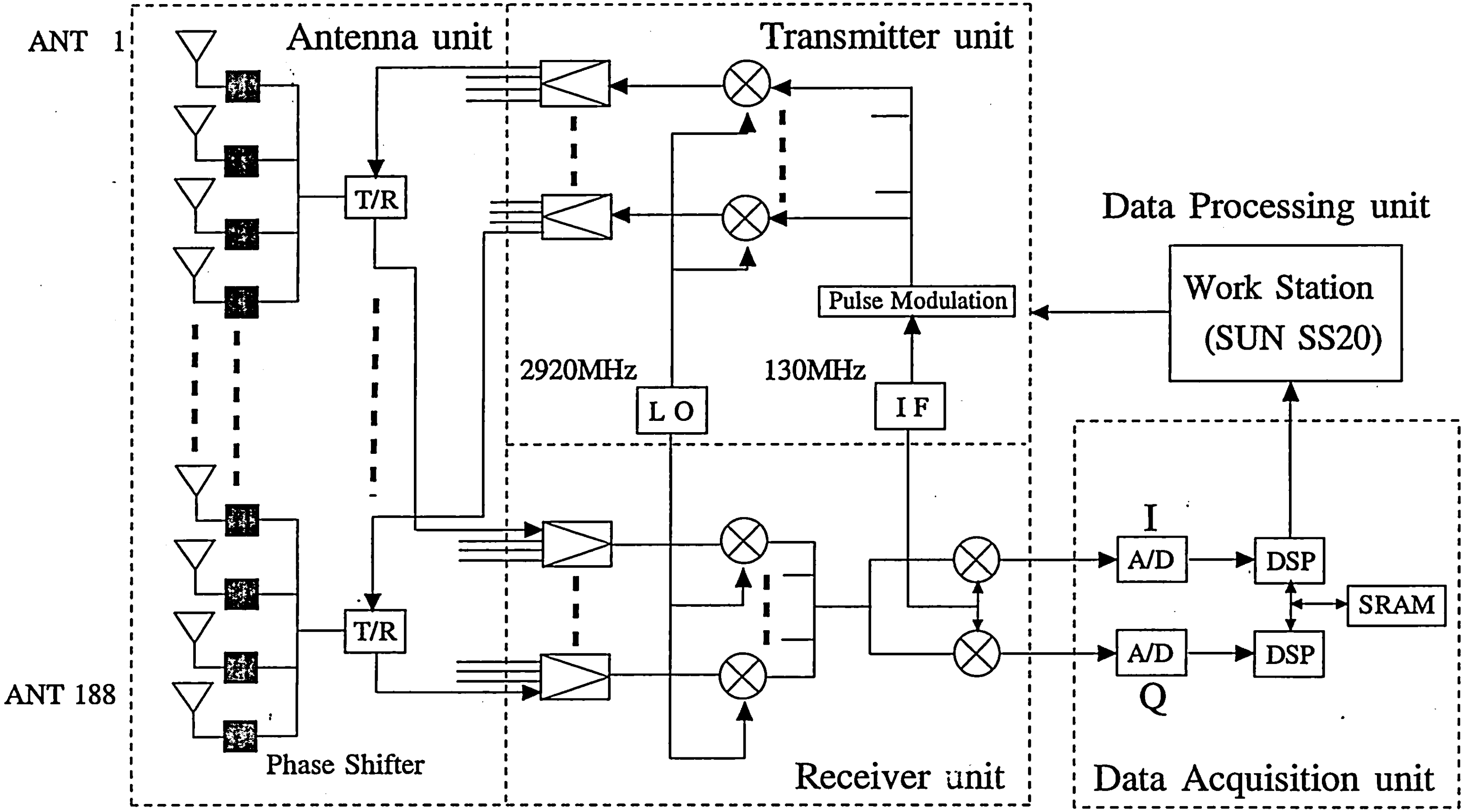


図３　Ｓバンド境界層レーダーのブロックダイアグラム

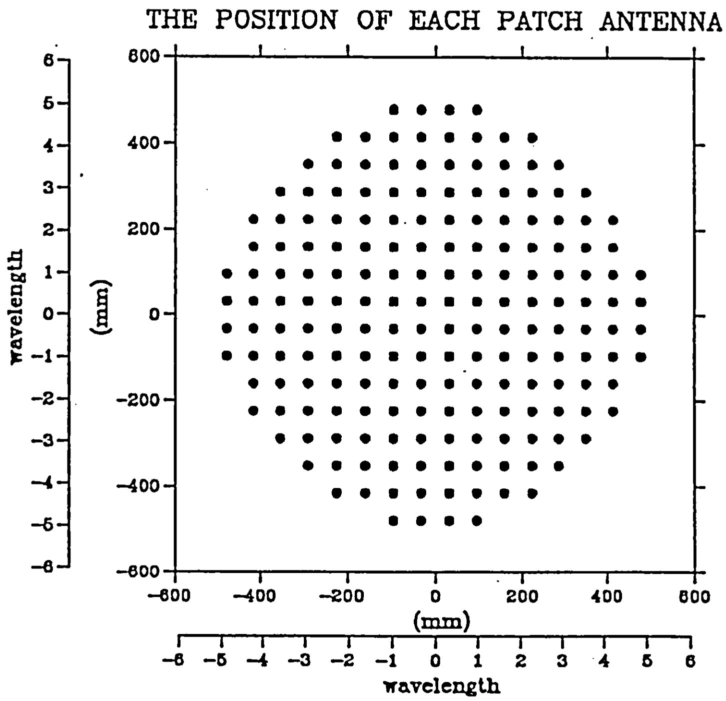


図４　アンテナ素子配置[4)]

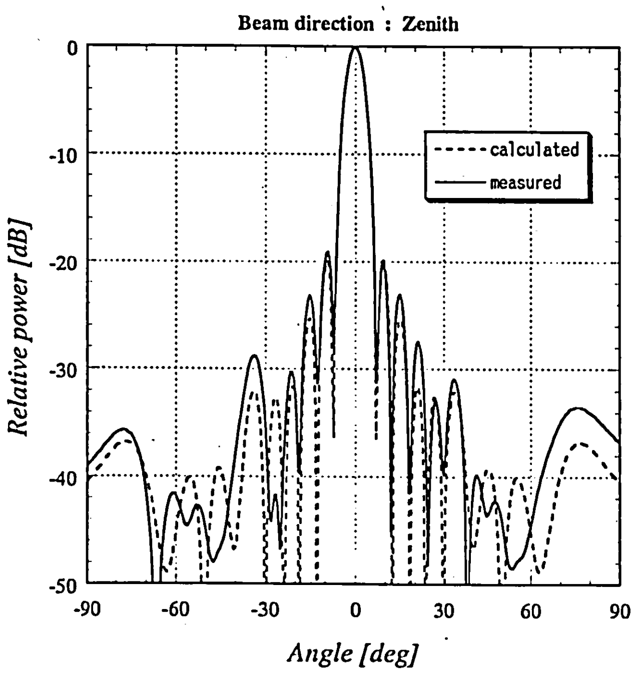


図５　アンテナ指向性

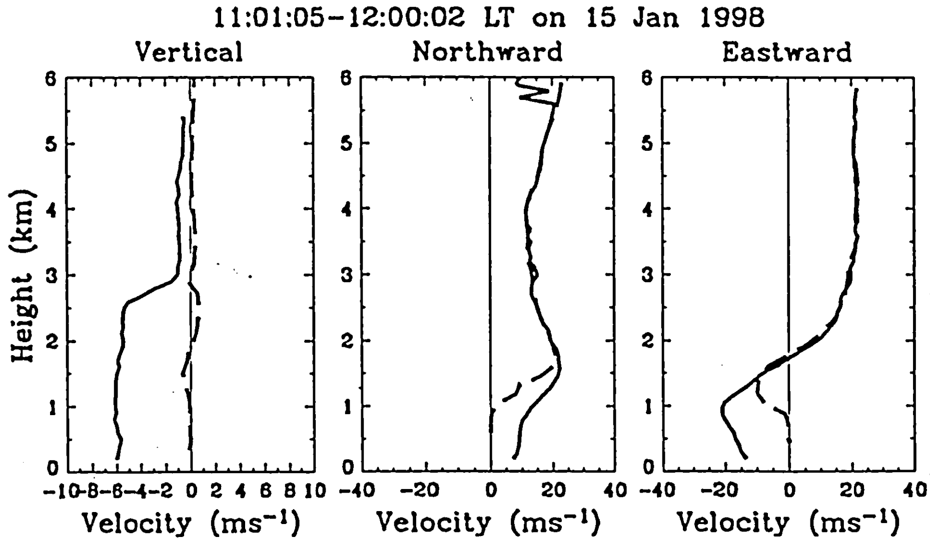


図６　Ｓバンド境界層レーダー（実線）と
ＭＵレーダー（破線）との風速高度
プロファイルの比較[4)]

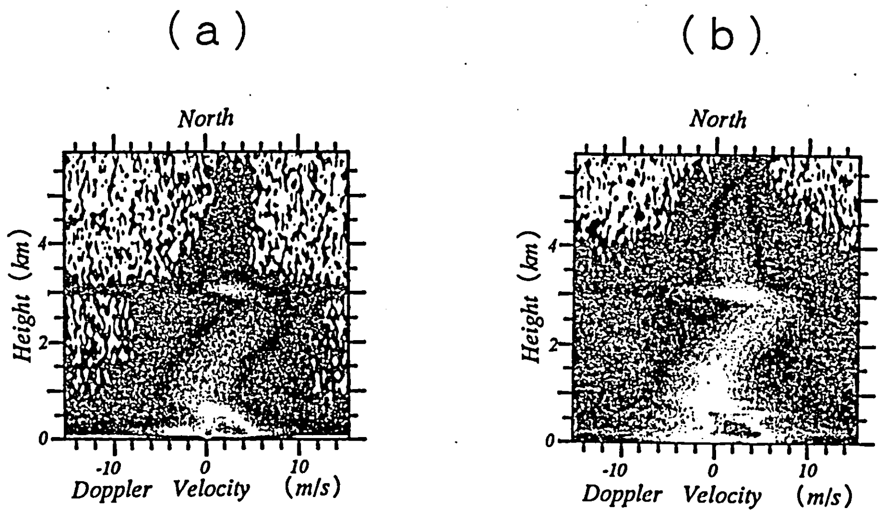


図７　ドップラースペクトル
*(a)*単一パルス *(b)*８ビットパルス圧縮

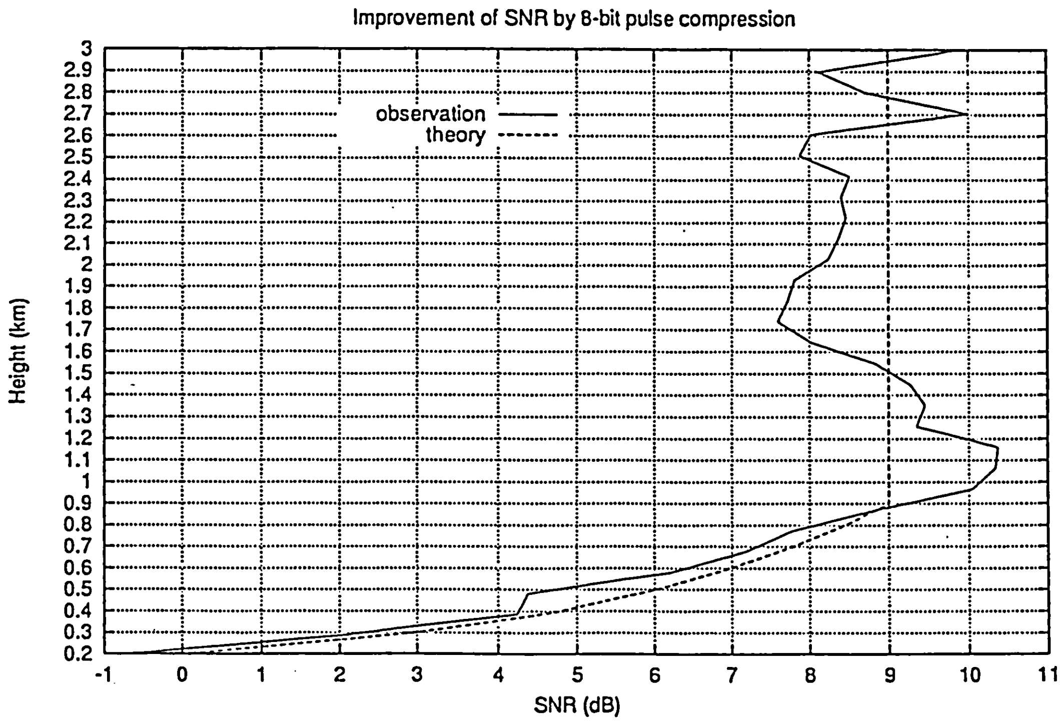


図８　単一パルス時の*S/N*に対する８ビット
パルス圧縮時の*S/N*の*dB*差[4)]

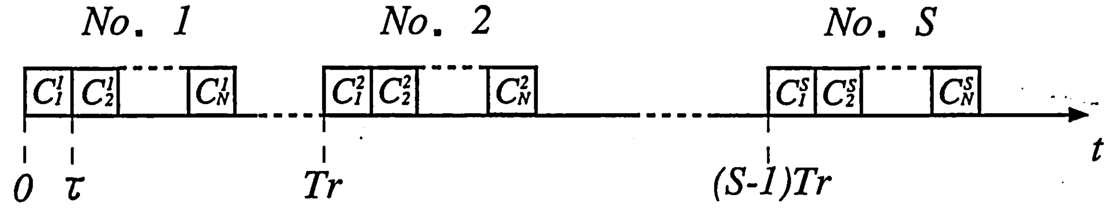


図９ 送信パルスの概略

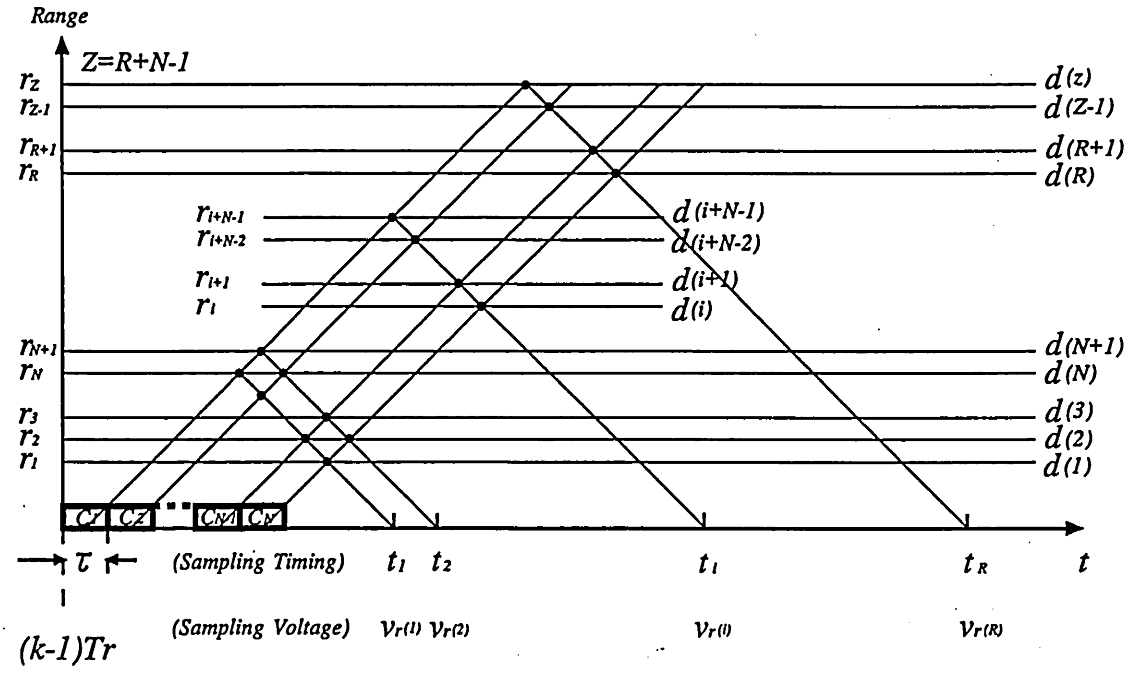


図１０ *No.i pulse* による *sampling* 受信波生成機構

輻射科学研究会資料
RS 98-18

多くの空間ソリトン間の相互作用

Interaction among Many Spatial Solitons

摂南大学工学部 大家重明
Setsunan University Shigeaki Ohke

北里大学医療衛生学部 梅田徳男
Kitasato University Tokuo Umeda

応用光電研究室 張 吉夫
Oyokoden Laboratory Yoshio Cho

1999年 3 月 1 9 日
輻射科学研究会
(於 摂南大学)

多くの空間ソリトン間の相互作用

Interaction among Many Spatial Solitons

大家重明 Shigeaki Ohke
梅田徳男 Tokuo Umeda
張 吉夫 Yoshio Cho

摂南大学工学部 Setsunan Univ.
北里大学医療衛生学部 Kitasato Univ.
応用光電研究室 Oyokoden Lab. Inc.

あらまし

本報告は、多数・空間ソリトンの基本的性質の探求と超高速光論理素子への応用を目指して、それらの間の相互作用と、可制御性に関して基礎的な検討を行ったものである。

ここでは、非線形媒質での光波伝搬に際して、ビーム伝搬法(BPM)を計算手法として用いており、まず、それの非線形光導波路への適用について述べる。次に、2次元 Kerr 媒質内の定常空間ソリトン、すなわち、ビームソリトンに対して交差伝搬や平行伝搬における種々の相互作用についてのシミュレーションの結果について述べる。また、デバイス応用の一例として、空間ソリトン交差時の光路シフト現象に着目し、その可制御性について検討を行う。

目　次

１．まえがき

2次元の光学非線形空間に存在する空間ソリトンについては、従来から、自己収束導波ビームや時間発展ソリトンからの類推で、おおよそのことがわかってきている。また、多くの高性能な光学非線形媒質の開発が進む一方で、フェムト秒光パルス技術も成熟しつつあり、そのパルスピークにおける超高強度光の多くの分野への適用が注目される。

このような背景のもとに、われわれは、多数・空間ソリトンの基本的性質の探求と超高速光論理素子への応用を目指して、まず、それらの間の相互作用と、可制御性に関して基礎的な検討をはじめたので報告する。

当面の基本的な問題として、

(1) 多入力、多出力論理を想定した場合の多数平行伝搬ビームについて、その相互安定性

(2) 多くの平行伝搬ビームを交差させた場合の相互作用安定性

(3) 制御光による可制御性

(4) それらのカオスとの関連性

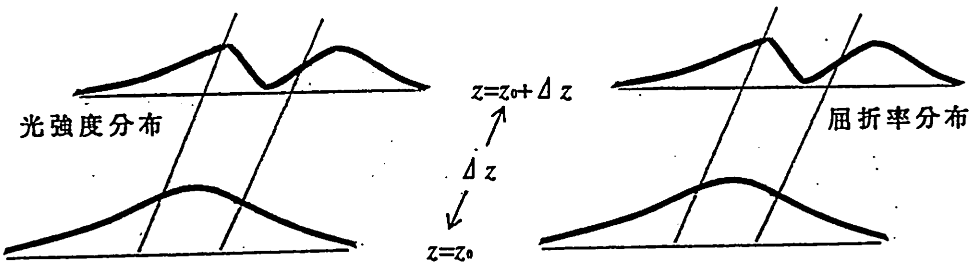
などがある。

本研究では、ビーム伝搬法(BPM)を計算手法として用いており、まず、それの非線形光導波路への適用について述べる。次に、2次元 Kerr 媒質内の定常空間ソリトン、すなわち、ビームソリトンに対してのシミュレーションの結果について述べる。

2．ビーム伝搬法(BPM)の非線形導波路への適用

近年、光波伝搬解析についてよく用いられる手法にビーム伝搬法(BPM)がある。この BPM は、任意の屈折率分布を有する光導波路においても固有値方程式を解くことなく、比較的簡単な計算工程により光波伝搬を扱える特長があり、現在では、非線形媒質中の光波伝搬の解析手法としても注目されている〔1〕。

本研究での計算手法は、非線形媒質中において、光波による屈折率変化及びその界分布が収束（距離に対する収束ではなく、時間に対する収束）するまで、その媒質中での伝搬過程（z 方向伝搬）を繰り返し BPM 計算するもので、通常、数回の反復により所望の精度の結果が得られる。図 1 にここで用いた空間ソリトン解析の手順を示す。



① 入射パワー波形($z=z_0$)、ゼロ光強度での屈折率分布仮定

↓

② $z=z_0$ における非線形媒質の屈折率がパワー分布に応じて変化する($n=n_0+n_2\cdot I$)とする（但し、n_0 は線形屈折率、n_2 は非線形屈折率、I は光強度）

↓

③ 微小区間 Δz ($z=z_0+\Delta z$)伝搬において、

↓ BPMにより、パワー分布を計算

④ $z=z_0+\Delta z$ での屈折率分布修正

↓

伝搬波形（パワー分布）

図 1　空間ソリトン計算フロー

本研究において、2次元 Kerr 媒質中の定常空間ソリトン、すなわち、ビームソリトンに対して、上述の微小区間繰り返しモード展開による BPM〔2〕〔3〕〔4〕を適用してシミュレーションを行った。

3. 多くの空間ソリトン間の相互作用

3.1 均質な非線形媒質中の定常伝搬モード

均質な非線形媒質中においては〔5〕〔6〕〔7〕、伝搬に垂直な断面内に構造をもたないので、スラブ状の光ビームを入射すれば、1次元閉じ込めが生じ、ペンシル状の光ビームを入射すれば、2次元閉じ込めが生ずるものと考えられる。ここでは従来検討されている1次元閉じ込めを考えることとし、次式のような非線形波動方程式を満たす電界分布 $E_t(x)$（伝搬方向に垂直な面内の）を求めることとする。

$$\left. \mathrm{d}^2 E_t(x) \middle/ \mathrm{d}x^2 \right. = \left\{\beta^2 - n^2(x)\cdot k^2\right\}E_t(x)$$

$$n(x) = n_0 + A\cdot\left|E_t(x)\right|^2 \tag{1}$$

但し、n_0 は線形屈折率、A は非線形定数、k は真空中の波数、$\beta = n_{eff}\cdot k$ である（n_{eff} は実効屈折率）。

非線形媒質の非線形屈折率の光強度依存が正である場合，(1)式に対して、

$$E_t(x) \propto \mathrm{sech}(\gamma\cdot x) \tag{2}$$

の解が見いだされる。このことは自己束縛現象 (self trapping phenomenon) として古くから知られており、2次元では、円筒座標系を用いて数値解が求められている〔8〕。その結果（文献〔8〕、Fig.1）はかなりの精度で(2)式の sech 解に一致することが確認された〔7〕。

(2)式の解は、(1)式の第2式を、$n(x) = n_0 + \Delta n\cdot\mathrm{sech}^2(\gamma\cdot x)$ と置くことを意味するが（Δn は最大屈折率変化を表す）、その結果、この非線形光導波路の実効屈折率は、$n_{eff} = (n_0^2 + n_0\cdot\Delta n)^{1/2}$ で与えられ、また、$\gamma = k\cdot(n_0\cdot\Delta n)^{1/2}$ となる。

実は、(1)式は、マクスウエル方程式で Kerr 媒質を扱い、「ゆっく

りと変化する包絡線電界 $[E_t(x)]$ 近似」を用いた場合に得られる空間についての非線形 Schrödinger 方程式

$$2i\beta\frac{\partial E_t(x)}{\partial z}+\frac{\partial^2 E_t(x)}{\partial x^2}=\left\{\beta^2-n^2(x)\cdot k^2\right\}E_t(x) \qquad (3)$$

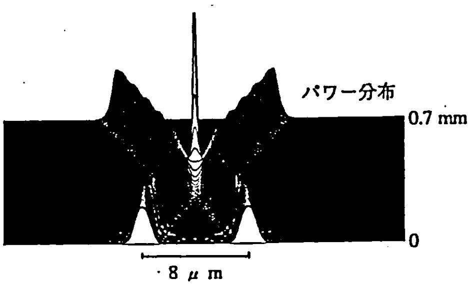
で、z 方向伝搬項（左辺第 1 項）を 0 とおいた場合に相当しており、(2)式の定常ソリトン解が得られる。以下には、z 方向伝搬項を 0 とおいたまま、先述のように BPM を適用することより、非定常な伝搬の場合も含めてシミュレーションを行っていることに相当する。

ここで取り扱う空間ソリトンは、1 次元閉じ込め（スラブ構造に対応）を有する場合である（実際の構造においては、2 次元閉じ込めが必要となるが、この場合も(2)式の結果が参考となる）。

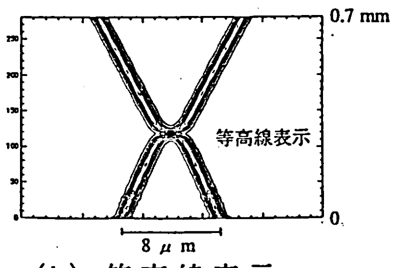
3.2　空間ソリトンの交差

まず、非線形媒質への光波の入射において、2 本のビームが入射断面から微小な角度傾いて入射し、交差する場合の伝搬の様子を示す。

図 2 (a)は、お互いのビームが8μm離れて同相で入射した場合の

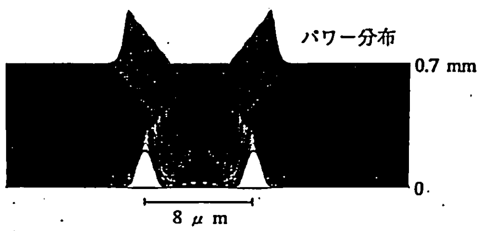


(a)光強度分布

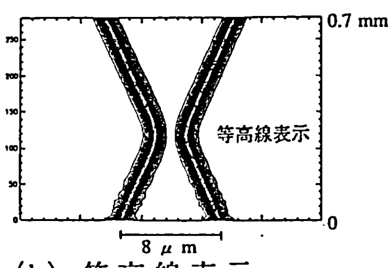


(b) 等高線表示

図 2　同相入射



(a)光強度分布



(b) 等高線表示

図 3　逆相入射

光強度分布である。図2(b)はその時の交差の模様を等高線表示で示したものである。図3(a)(b)は同様な2本のソリトンビームが逆相で交差する場合である。

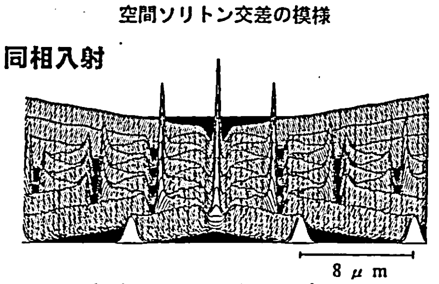
一般に、振幅の等しいソリトンの平行伝搬においては、同相のソリトン同士には引力が作用するようにみえ、逆相の場合は反発し、斥力が作用するようにみえることがわかっているが〔10〕、この例のような斜め交差伝搬においても同相及び逆相で類似の現象が見られる。

今、簡易的に、2本の平行ビームの逆相伝搬について考察してみる。この時、あたかもコア幅の広い導波路における1本の奇数次のモードの伝搬（例えば TE_1 モード）と同等と考えることができる。このように考えると、伝搬に際する個々の固有モードの寄与はすべて奇モードであるので（偶モードは寄与しない）、伝搬に際して再合成されるモードも界分布において必ず反転対称中心の存在する奇モードとなる。すなわち、二つの波形の中心では必ず界分布はゼロ、言いかえれば、パワー分布は中心でゼロであるような波形となり反発しているように見える。

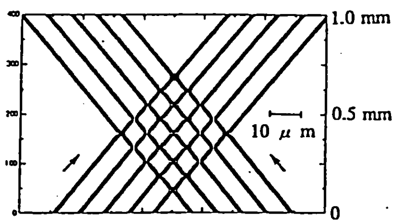
図3においては、反発し、交差しないのではなく、お互いのソリトンビームは図2と同じく交差後通り抜けているものと思われる。（同様に、同相伝搬では偶数次のモードの寄与のみで考察すればよい。）

続いて、多くの空間ソリトンの交差〔9〕について述べる。
図4は、左右から4本づつの平行ビームが同相で交差する場合の強度分布及び等高線表示である。この例では、この計算距離内(1mm)まででそれぞれのビームが交差の前後を除いて影響しあうことなく進んでいることがわかる。また、わずかではあるがソリトン交差により光路のシフトが起こっていることがわかる。この現象については後の**4.** において詳細に検討を行うこととする。

図5は、25本ずつの平行伝搬空間ソリトンの交差の模様の一例を等高線表示で示したものである（各ソリトン間は同相）。多数回の



(a) 光強度分布



(b) 等高線表示

図 4 空間ソリトン交差の模様

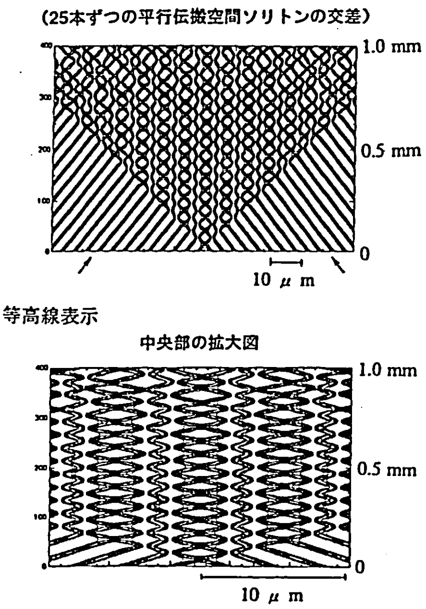


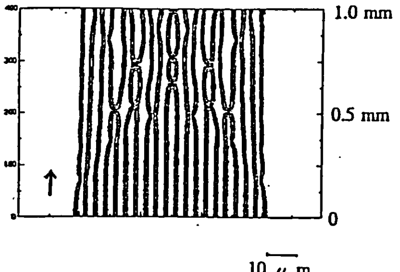
図 5 空間ソリトン交差の模様

衝突、反発を経るか、端部効果を受けるビームは不規則な振る舞いを見せはじめることがわかる。

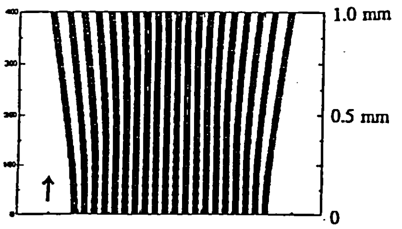
3.3 多くの平行伝搬ビーム

図6は多くの平行伝搬ビームの例である。入射断面に垂直な方向に20本のビームを3.2μmの等間隔で伝搬させたものである。図6(a)は同相入射、(b)は交互に逆相入射したものである。前述したように同相では引力が作用するため中央部のビームを中心に次第に交差する傾向があり、また逆相においては斥力のため次第に端部に向けて広がっていこうとする傾向が見られる。

図7は図6と同じ初期パワーで（同相）、ビーム間隔を1.8μmと狭くしたものである。さらに、同図(b)は(a)とビーム間隔は同じであるが入射光分布を一層狭くしたものである。初期の伝搬においては(~0.2mm)、周期的規則性が見られれる。そして、次のステップでは(0.2~0.4mm)、次第に統合分岐の過程を経る。さらに、伝搬すると(0.7mm~)、周期性がなくなりカオスが見られるようになる。このよ

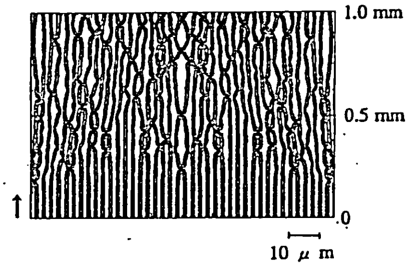


(a) 同相入射

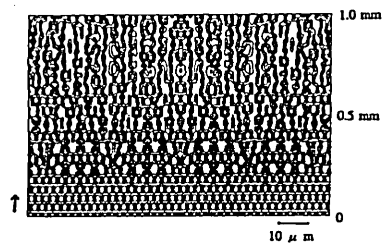


(b) 交互に逆相入射

図６　多くの平行伝搬ビーム



(a) ビーム間隔が図６より狭い



(b) 入射光分布が狭い

図７　多くの平行伝搬ビーム（同相）

うな傾向については種々のパラメータでビームがどのように変化していくのかさらなる検討を要すると思われる。

４．制御光による可制御性

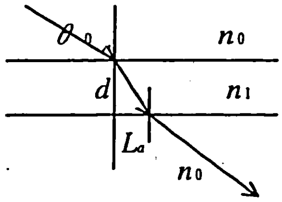
4.1　空間ソリトン交差による光路シフト

２本の空間ソリトン交差伝搬の例を図２、図３で示したが、このとき、それらの間の位相関係によらず光路のシフト現象が起こっている。これは、交差角に依存する現象であるが、定性的には、光波が屈折率の大きな媒質中へ入射する場合の屈折現象と同等と考えられる。このときのこの軸ずれ効果は片方のビームを制御光と考えると「光-光」スイッチとして利用可能である。

図８は光波が屈折率 n_0 の媒質から屈折率 n_1 の媒質を通過し、再び屈折率 n_0 の媒質へと入射したときの屈折現象について示したものである。このとき、屈折して出ていく距離 L は（(a)図での L_a に

相当）入射角 θ_0、屈折率 $n_0; n_1$、及びその幅 d を用いて、

$$L_a = \frac{n_0 d \sin\theta_0}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin\theta_0}} \qquad (4)$$



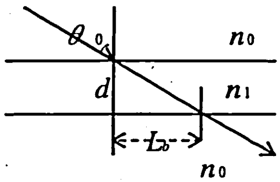
(a) 屈折

となる。一方、$n_1=n_0$のとき、 $L_b = d\tan\theta_0$ となる。

交差によるずれ δ はこの差に cos θ_0 を掛けて

$$\delta = (L_b - L_a)\cos\theta_0 = d\sin\theta_0 - \frac{n_0 d \sin\theta_0 \cos\theta_0}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta_0}} \qquad (5)$$

となる。



(b) 屈折せず

図 8 n_1の媒質への入射

今 2 本のビームの交差において片側ソリトンをこの屈折率 n_1 の媒質と同等と見立てると、もう 1 本のビームはそれにより(4)式に従って屈折するため光路シフトが起こると考えられる。

実際は交差するソリトンは **3.1** で述べたような sech² 形の分布をもつ。従って、それに対する屈折率分布も sech² 形であり、図 8 (a)の n_1 のような均一屈折率を有し得ない。この場合 n_1領域を図 9 のような均質な屈折率($n_1.n_2.n_3$・・)をもつ多層薄膜に分割して考察することが可能である。このとき、

$$L_0 = \Delta x \tan\theta_0$$

$$L_i = \frac{n_i L_{i-1} \Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 n_i^2 + L_{i-1}^2 (n_i^2 - n_{i-1}^2)}} \qquad (6)$$

という漸化式を得る。但し、L_0 は L に無関係であり、これより、(4)式に対応して、

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i \qquad (7)$$

が得られる。ゆえに、交差によるずれ δ は、

$$\delta = (L_b - L)\cos\theta_0 \qquad (8)$$

となる。

図10にソリトンの屈折率分布の一例を示す。n_0=3.53 とし、3.1 における $n(x) = n_0 + \Delta n \cdot \mathrm{sech}^2(\gamma \cdot x)$ を示したものである。図では Δn= 0.02, 0.05, 0.1 について示してある。

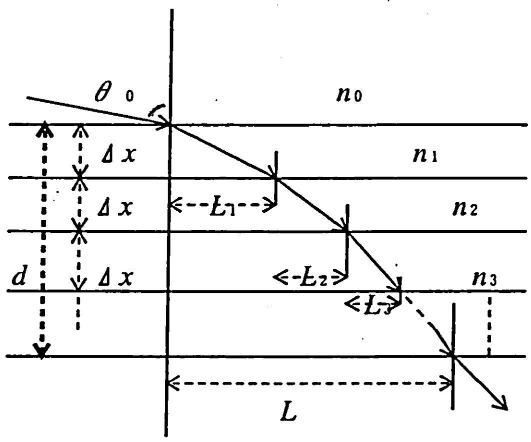


図9 均質な屈折率($n_1, n_2, n_3 \cdot\cdot$)をもつ多層薄膜への入射

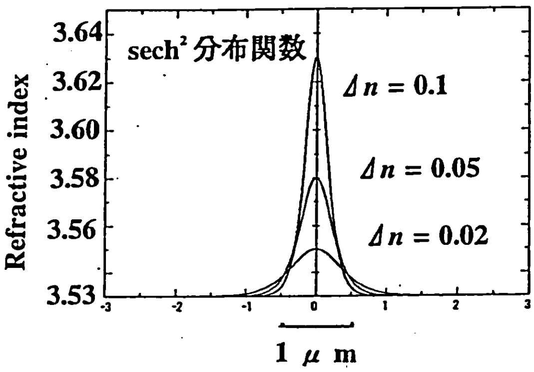


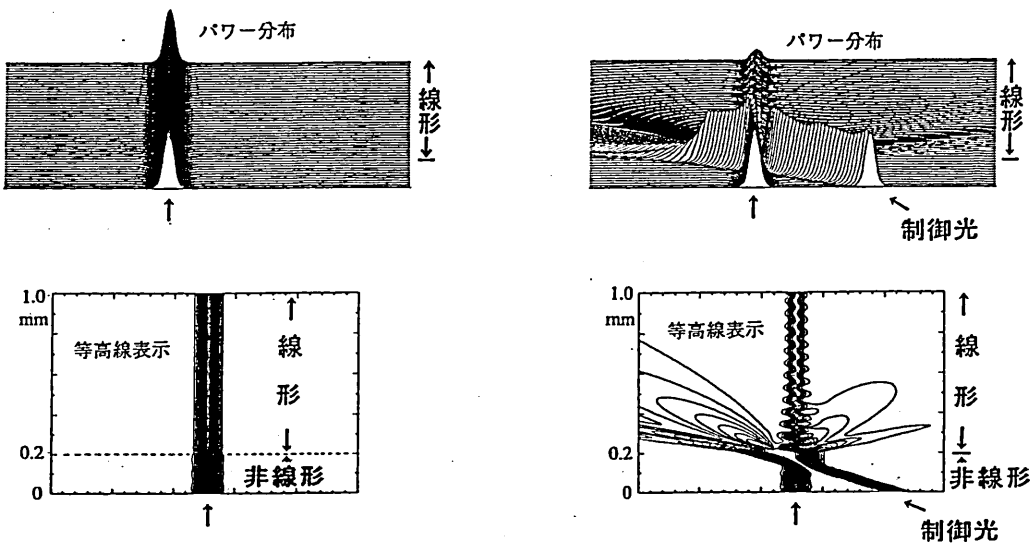
図10 ソリトンの屈折率分布

4.2 交差空間ソリトン間の相互作用

あまり離れていなくて適度な距離隔てられた2本の同相平行ビームには伝搬に際して、互いに引力が作用し、1つの尖鋭ビームとして結合される距離が存在する。そのとき、その後の導波路を線形導波路へと導くことにより、[AND]回路として利用できることが文献〔10〕に報告されている。この場合、2本のビームの結合距離は、ビームの隔てられた距離や初期入射条件等により大きな影響を受けることが予想され、デバイス設計が容易でないことが難点である。

これに対して、われわれは前述のビーム交差による光路シフト現象を利用するデバイスについて検討している。構成は図11(a)のようなもので文献〔10〕と同じく非線形領域に続いて、ある距離以降は線形導波路となっている。

図11(b)は、2本の空間ソリトン伝搬交差の模様の一例〔11〕である。ビームは図11(a)のように交差しなければ直進し、そのまま線



(a) 制御光なし　　　　(b) 制御光あり

図11 空間ソリトンの交差の模様

形導波路へと導かれる。(b)は右からのビームがそれに対して交差し（この例では交差角は約3度である）直進ビームの光路シフト現象をもたらす様子を示している。この例では交差後の光路シフトにより線形導波路へ導かれる光波が減少していることがわかる。また、右からのビーム（制御光）は線形領域に入ると導波構造がないため急速に減衰している。

図12は右からの制御光を２本としたものである。交差による軸ずれ光路シフトが２段にわたって起こり線形導波路へ導かれる光波はほとんどなくなっていることがわかる。

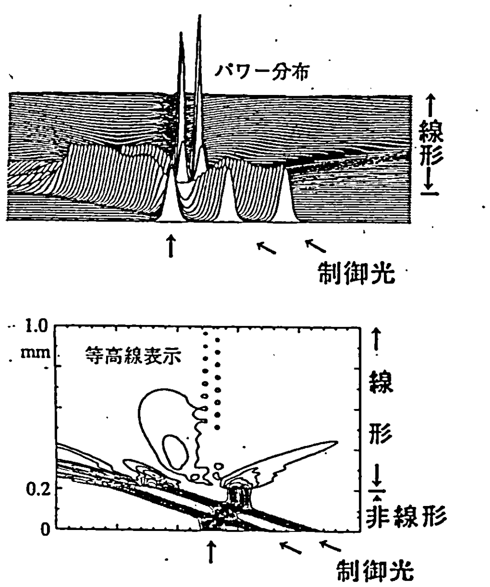


図12 ２本の制御光による光路シフト

これらの例では、制御光も同じ光強度分布を有するものを仮

定したが、次に、この非線形光波交差における光路シフトの制御光強度依存性および交差角依存性について検討する。

4.3 光路シフト現象の交差角並びに光強度依存性

空間ソリトン交差による軸ずれ光路シフトの現象は、一方のビームが片方のビーム（制御光）の占める空間のそれによる屈折率上昇領域を斜めに（ある交差角で）横断することによる屈折現象と考えることができる。厳密には、お互いのビームが影響を与えあい、制御光ビームによる屈折率上昇領域の位置もシフトするが、ここでは簡単のために、制御光とは、屈折率の高い一つの領域であるとし、(6)(7)式で与えられる屈折現象のみを考える。このとき、その領域の屈折率分布は図10に示したような$\Delta n\cdot\mathrm{sech}^2$の分布をもつ。

図13はΔn= 0.02, 0.05, 0.1 としたときの光路シフト量の交差角依存性を示したものである（この場合の光路シフト量は sech² の分布を多層分割し、4.1 で検討した(8)式のδを計算したものである）。これを見ると交差角にかなり影響され、交差角が小さいほど（角θ_0は90度に近づくほど）大きくなることがわかる。これは、簡易的には(5)式からも明らかで、$\theta_0=90°$のとき(5)式の値はd（制御光幅に相当）となる。また、制御光強度はΔnに反映されるが、Δnが大きくても（制御光が大となっても）光路シフト量にはそれほど影響を与えないことがわかる。むしろ、交差角が小さいのであれば、制御光は幅広いほどシフト量が大きいこととなる。

図14は、交差角を２度（一定）とし、同じく4.1 で検討した数式（$(L_b-L)\cdot\cos\theta_0$）からΔn（制御光強度）依存性を調べたものである。これを見れば、前述したように、制御光が大きければ光路シフト量が大きいということは成り立たず、ある制御光のとき最も光路シフト量が大きいことがわかる。しかし、制御光に対しては、ある光強度より大きければその強度依存性は比較的緩やかであるようである。またこの図中には実際に、交差角２度において空間ソリトンの交差のシミュレーションを行い算出した光路シフト量をも散発的に示し

ている。算出値に幅があるのは（特に、Δnが大きいとき）、制御光が伝搬に際して揺らぐので（入射条件による）、交差領域内でその影響を考慮したからである。また、交差シミュレーションにおいては、$\Delta n \fallingdotseq$ 0.035~0.04 付近で最大シフト量がもたらされていることがわかる。4.1 で検討した数式と空間ソリトンの交差シミュレーションの値については傾向は似ているものの最大シフト量をもたらすΔnの値などに誤差が生じている。これは、制御光の幅に対して入射光の幅を4.1 では仮定しなかったためであり、また、交差するこ

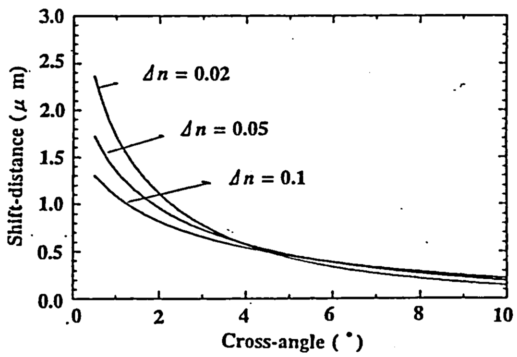


図13 光路シフト量の交差角依存性

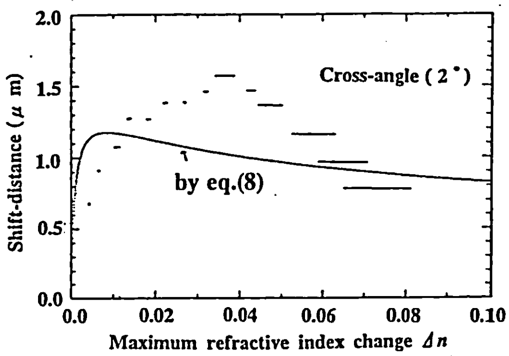
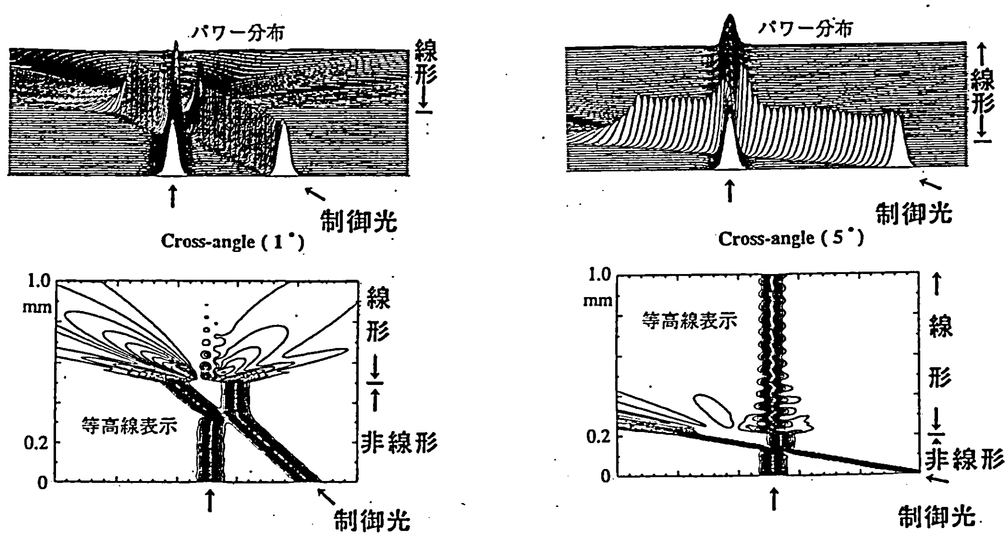


図14 光路シフト量の制御光強度依存性



(a) 交差角１度　　　　(b) 交差角５度

図15　交差角による光路シフトの差異

とにより、それぞれの光波が影響を及ぼし合い、交差領域内の屈折率が制御光自身のソリトンビームの形成する屈折率からずれが生じているためであると考えられる。

図15(a)(b)は交差角が1度、及び5度のときの空間ソリトン伝搬交差の例である。これらの例では、図11(b)と同等の制御光で、$\Delta n \fallingdotseq 0.02$であるが、交差後、(a)では、2 μm程度の光路シフトを生じており、線形導波路へ導かれる光波はほとんどないが、(b)では光路シフトは0.5 μm程度であり、かなりの光波がまだ線形導波路へ導かれていることがわかる。これらの結果は、図13の結果から予測される傾向とほぼ一致する。

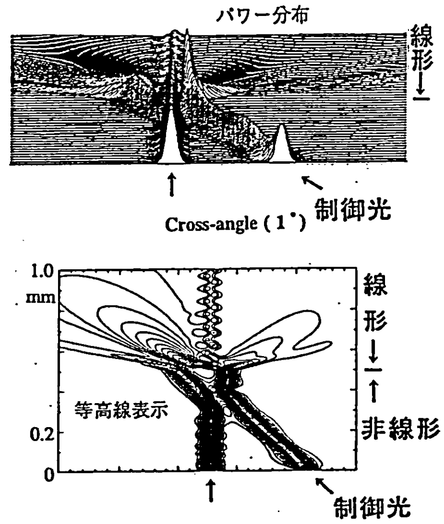


図16 交差角1度、制御光($\Delta n \fallingdotseq$ 0.01)

図16は交差角が1度のとき(図15(a)に相当)、制御光強度を小さくした場合($\Delta n \fallingdotseq$ 0.01)の例である。このように交差角が小さければ、小さい制御光でも、十分な光路シフトをもたらし得ることわかる。

5．むすび

非線形媒質中を伝搬する定常空間ソリトン(ビームソリトン)に対して微小区間繰り返しモード展開によるビーム伝搬法を適用してシミュレーションを行った。

ここでは、二つないし、多数の空間ソリトンの基本的性質の探求とそれらの間の相互作用について検討を行った。また、空間ソリトン交差における光路のシフト現象とそれを用いた「光－光」スイッ

チの可能性についても言及した。

光路シフトの現象は、制御光ソリトンの幅に依存するのであまり大きなシフト量は望めないが、数μmのシフトは可能であることがわかった。また、２本のビームの交差角は小さく、制御光ビームは幅広く、入射光ビームは逆に急峻であるほど入射光占有部のシフト比率が大きいことが予想される。ここでの検討は制御光ソリトンの幅に対して行い、入射光のソリトン幅については考慮していないが、入射光強度を変化して、光路シフト量がいかに変化するかをみればその影響は明らかになると思われる。これについては次の機会としたい。また、時間ソリトンとの関連、対比、さらにダイナミクスに関しても今後検討していく計画である。

参考文献

1. 岡本勝就, "光導波路の基礎"、 7,「ビーム伝搬法」、コロナ社, (1992).

2. 大家、梅田、張, "非線形クラッドを持つ光導波路デバイス"、電子情報通信学会技術研究報告 OPE-95-133, pp.79-84, (1996-1).

3. 大家、梅田、張, "非線形クラッドを持つ光導波路の導波特性"、輻射科学研究会資料 RS 96-6, (1996-7).

4. S.Ohke, T.Umeda, and Y.Cho, "Power-Limiting Action of Optical Waveguide Having Negative Nonlinear Claddings", Jpn.J.Appl.Phys.Vol.37, pp.L1312~L1314, (1998-11).

5. 大家、梅田、張, "導波構造をもつ（もたない）非線形媒質中の定常伝搬モード"、輻射科学研究会資料 RS 90-3, (1990-7).

6. 大家、梅田、張："導波構造を持たない非線形媒質中の定常伝搬モード", 1990年秋季応物予稿集 29a-P-10, (1990-9).

7. 大家、梅田、張："導波構造を持たない非線形媒質中の定常伝搬モードII", 1991年春季応物予稿集 28a-SF-6, (1991-3).

8. R.Y.Chiao, E.Garmire and C.H.Townes, "Self-trapping of optical beams", Phy.Rev.Lett., Vol.13,15 pp.479-482, (1964).

9. 大家、梅田、張："多くの空間ソリトン間の相互作用", 1998年秋季応物予稿集 15a-T-1, (1998-9).

10. Y.Silberberg, "Self-Induced Waveguides: Spatial Optical Solitons"; ("Anisotropic and Nonlinear Optical Waveguides", C.G.Someda, G.Stegeman, Editors: ELSEVIER), pp.143-157, (1992).

11. 大家、梅田、張："交差空間ソリトン間の相互作用", 1999年春季応物予稿集, 30p-A-19, 講演予定, (1999-3).

輻射科学研究会資料
RS98－19

Resonant modes of a concentric spherical cavity with conically stratified medium

Pirapaharan Kandasamy　　Nobuo Okamoto

(Graduate school of Kinki University)

平成11年3月19日

I . INTRODUCTION

An analysis on electromagnetic fields related to a conducting sphere or layered dielectric sphere can be performed analytically since a method of separation of variables can be applied to Maxwell`s equation and boundary conditions expressed in the spherical coordinate system. It is known that these results are being used well in the field of microwave and optical engineering. Similarly, a conical conducting horn is also an electromagnetic wave-guiding system which is analyzed by mode matching using the method of separation of variables in the spherical coordinate system. These wave-guiding systems are used as a taper or a horn antenna in microwave engineering field and their design techniques are also well established.

A circular coincal dielectric is also one of an electromagnetic wave-guiding system suitable for application of the spherical coordinate system since its boundary surface can be expressed by a single spherical coordinate system. Further, it is also used as a taper or a dielectric antenna in lightwave and microwave engineering.

However, a solution by the method of separation of variables for this wave-guiding system is not found yet except a perturbed approximate solution [1].

In a conical conducting wave-guiding system, it is not difficult to make the tangential components of electric field expressed in the form of a separation-of-variables as the spherical coordinates satisfy the boundary condition that the tangential components of electric field vanish on the conical conducting surface. However, a conical dielectric wave-guiding system is different from the previous one. Since the tangential components of electric field are expressed through the different radial functions in both side of the boundary, it is impossible to satisfy continuity of tangential component across the boundary. This is the general feature of the conically stratified medium for the electromagnetic field. In this sense, it can be said that the electromagnetic field problems in the conically stratified medium are non- separable in the radial direction. If we could obtain the complete orthonormal set of functions in radial direction, we can solve above boundary-valued problem using series expansion by such a set of functions. Unfortunately, such a set of functions is not yet found .

Recently, a method of solution for this problem is proposed, but not sufficient [2]. Another method is also proposed which uses the radial eigenfunctions defined in the exterior region of a small conducting sphere at the tip of the dielectric cone [3].

In this paper we present an analysis on the electromagnetic fields of a resonant cavity which is consisted of two concentric conducting spheres filled with a conically stratified medium.

Assuming rotationally symmetric that the electromagnetic fields are independent of azimuthal angle ϕ in the spherical coordinate system (r,θ,ϕ), we derive transmission equations of electromagnetic fields in the direction of zenith θ. Next we introduce expansion mode functions (eigenfunctions) in each dielectric regions which are the transverse electric type to θ (TE-to-θ, H-type) and a transverse magnetic type to θ (TM-to-θ, E-type). These expansion mode functions are so selected that the tangential field components satisfy the boundary conditions on the two conducting spheres. Expanding the electromagnetic fields by the mode functions, we derive the θ-transmission line equations from the transmission equations of electromagnetic fields. Determining the field components and applying boundary conditions at the interface of a dielectric layer, we derive the characteristic equations to determine the resonant frequency of the cavity. Finally, analyzing numerically the characteristic equations, we obtain resonant eigenfrequencies and electromagnetic eigenfields.

Ⅱ. FORMULATION OF THE PROBLEM

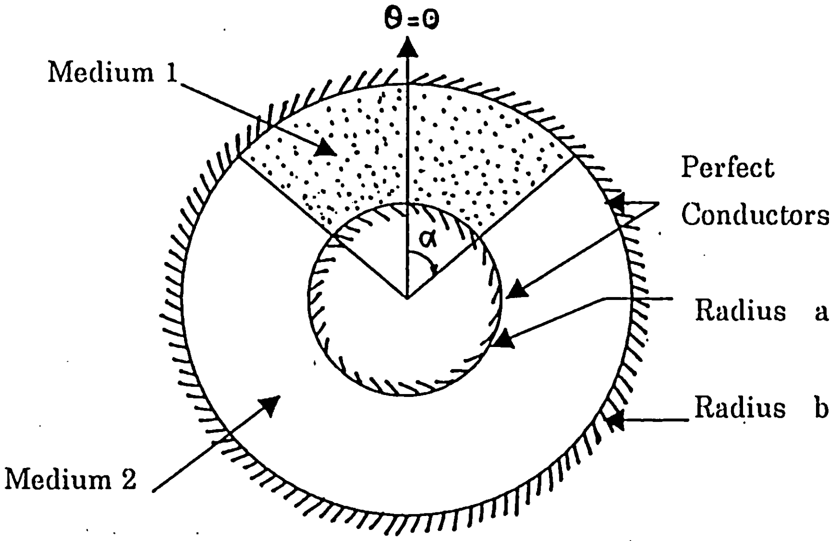


Fig.1. Schematic diagram of a concentric spherical cavity with conically stratified dielectric medium

The geometry of a cavity-resonator analyzed here, is shown in Fig.1. We use the spherical coordinate system for our analysis. The cavity is consisted of two concentric perfectly conducting spheres. The region bound by two spheres is filled with a conically stratified dielectric medium. In the spherical coordinate system, the phasor form of the Maxwell's equations in a source free region are given as follows:

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta H_\phi)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(H_\theta)}{\partial\phi}=j\omega\varepsilon E_r \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(H_r)}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}=j\omega\varepsilon E_\theta \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial(H_r)}{\partial\theta}=j\omega\varepsilon E_\phi \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_\phi)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(E_\theta)}{\partial\phi}=-j\omega\mu H_r \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(E_r)}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r}=-j\omega\mu H_\theta \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial(E_r)}{\partial\theta}=-j\omega\mu H_\phi \tag{2.6}$$

The time dependence $e^{j\omega t}$ is assumed and suppressed throughout. Assuming that the fields are independent of azimuthal angle ϕ, we can separate equations from (2.1) to (2.6) into two groups as follows:

E-group (TM-to-θ)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial(E_r)}{\partial\theta}=-j\omega\mu H_\phi\\
&\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta H_\phi)}{\partial\theta}=j\omega\varepsilon E_r\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}=-j\omega\varepsilon E_\theta
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

H-group (TM-to-θ)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial(H_r)}{\partial\theta}=j\omega\varepsilon E_\phi\\
&\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_\phi)}{\partial\theta}=-j\omega\mu H_r\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r}=j\omega\mu H_\theta
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

The field components of E-group are H_ϕ, E_r and E_θ, and those of H-group are E_ϕ, H_r and H_θ. Here we call E-group as transverse magnetic type to θ (TM-to-θ), and H-group as transverse electric type to θ (TE-to-θ). From equation (2.7), we obtain that

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial\theta}=j\omega\mu r^2\left(rH_\phi+\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon}\frac{\partial^2(rH_\phi)}{\partial r^2}\right)\\&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(r\sin\theta H_\phi)}{\partial\theta}=jr^2\omega\varepsilon E_r\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

The set of equations (2.9) is called θ-transmission field equations of TM-field [4], and from equation (2.8) we obtain that

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial(r^2H_r)}{\partial\theta}=-j\omega\varepsilon r^2\left(rE_\phi+\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon}\frac{\partial^2(rE_\phi)}{\partial r^2}\right)\\&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(r\sin\theta E_\phi)}{\partial\theta}=-jr^2\omega\mu H_r\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

The set of equations (2.10) is called θ-transmission field equations of TE-field [4]. Here we introduce the mode functions as follows:

E-mode functions: e_i^E and h_i^E (i=1,2,3,......)

$$\frac{\partial^2(h_i^E)}{\partial\rho^2}+\left(1-\frac{\mu_i(\mu_i+1)}{\rho^2}\right)h_i^E=0\tag{2.11}$$

where, $\rho=kr=\sqrt{\varepsilon_r}k_0r$, $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

$$\left.\frac{\partial h_i^E}{\partial \rho}\right|_{\substack{\rho=\rho_a \\ \rho=\rho_b}} = 0 \tag{2.12}$$

where, $\rho_a = k_0\sqrt{\varepsilon_r}a$ and $\rho_b = k_0\sqrt{\varepsilon_r}b$

$$\int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{h_i^E(\rho)h_j^E(\rho)}{\rho^2}d\rho = \delta_{ij} \quad \text{(orthonormal relation)} \tag{2.13}$$

We write

$$h_i^E = A_i^E \hat{B}_{\mu_i}(\rho) \tag{2.14}$$

where $\hat{B}_n(\rho)$ is the spherical Bessel function used by Debye and Schelkunoff [5]. It is related to ordinary spherical Bessel function by $\hat{B}_s(\rho) = \left(\frac{\pi\rho}{2}\right)^{1\backslash 2} H_{s+1/2}^{(1),(2)}(\rho)$. The constant A_i^E is determined by the normalization condition as follows:

$$\left(A_i^E\right)^2 = \frac{1}{\int_{\rho_a}^{\rho_b} \hat{B}_{\mu_i}^2(\rho)d\rho} = \frac{(2\mu_i+1)}{\left[\hat{B}_{\mu_i}(\rho)\frac{\partial}{\partial\mu_i}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\hat{B}_{\mu_i}(\rho)\right)\right]\right]_{\rho_a}^{\rho_b}} \tag{2.15}$$

$$e_i^E = -h_i^E \tag{2.16}$$

H-mode functions: e_i^H and h_i^H (i=1,2,3,......)

$$\frac{\partial^2(e_i^H)}{\partial\rho^2} + \left(1 - \frac{\nu_i(\nu_i+1)}{\rho^2}\right)e_i^H = 0 \tag{2.17}$$

$$\left.e_i^H\right|_{\substack{\rho=\rho_a \\ \rho=\rho_b}} = 0 \tag{2.18}$$

$$\int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{e_i^H(\rho) e_j^H(\rho)}{\rho^2} d\rho = \delta_{ij} \text{ (orthonormal relation)} \qquad (2.19)$$

$$e_i^H = A_i^H \hat{B}_{\nu_i}(\rho) \qquad (2.20)$$

$$\left(A_i^H\right)^2 = \frac{1}{\int_{\rho_a}^{\rho_b} \hat{B}_{\nu_i}^2(\rho) d\rho} = \frac{-(2\nu_i + 1)}{\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\hat{B}_{\nu_i}(\rho)\right) \frac{\partial}{\partial \nu_i}\left(\hat{B}_{\nu_i}(\rho)\right)\right]_{\rho_a}^{\rho_b}} \qquad (2.21)$$

$$h_i^H = e_i^H \qquad (2.22)$$

We expand the field by mode functions $\{e_i^E\}$and $\{h_i^E\}$. In equation (2.9), assuming that

$$\left.\begin{aligned} r^2 E_r &= \sum_i V_i^E(\theta) e_i^E(\rho) \\ r H_\phi &= \sum_i \frac{1}{\operatorname{Sin}\theta} I_i^E(\theta) h_i^E(\rho) \end{aligned}\right\}, \qquad (2.23)$$

we obtain

$$\left.\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial(V_i^E)}{\partial\theta} h_i^E &= -\frac{j}{\omega\varepsilon \sin\theta} \sum_i I_i^E \rho^2 \left(h_i^E + \frac{\partial^2(h_i^E)}{\partial\rho^2} \right) \\ \sum_i \frac{\partial(I_i^E h_i^E)}{\partial\theta} &= -j\omega\varepsilon \sin\theta \sum_i V_i^E h_i^E \end{aligned}\right\}. \qquad (2.24)$$

Using the orthonormal relation equation (2.13), we obtain

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta \frac{\partial(V_i^E)}{\partial\theta} &= -\frac{j\mu_i(\mu_i + 1)}{\omega\varepsilon} I_i^E \\ \frac{\partial(I_i^E)}{\partial\theta} &= -j\omega\varepsilon \sin\theta V_i^E \end{aligned}\right\}. \qquad (2.25)$$

From equation (2.25) we obtain the following equation

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(V_i^E)}{\partial\theta}\right)+\mu_i(\mu_i+1)V_i^E=0. \qquad (2.26)$$

Solutions of the equation (2.26) are expressed by the Legendre functions, as follows:

$$V_i^E=C_iL_{\mu_i}(\cos\theta) \qquad (2.27)$$

Similarly, in equation (2.10), assuming that

$$\left.\begin{aligned} r^2H_r &= \sum_i I_i^H(\theta)h_i^H(\rho) \\ rE_\phi &= \sum_i \frac{1}{\sin\theta}V_i^H(\theta)e_i^H(\rho) \end{aligned}\right\}, \qquad (2.28)$$

and using the orthonormal relation in equation (2.19), we obtain

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\frac{\partial(I_i^H)}{\partial\theta} &= -\frac{jv_i(v_i+1)}{\omega\mu}V_i^H \\ \frac{\partial(V_i^H)}{\partial\theta} &= -j\omega\mu\sin\theta I_i^H \end{aligned}\right\}. \qquad (2.29)$$

Equation (2.29) gives

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(I_i^H)}{\partial\theta}\right)+v_i(v_i+1)I_i^H=0. \qquad (2.30)$$

Solutions of equation (2.30) are also expressed by Legendre function as below.

$$I_i^H=D_iL_{v_i}(\cos\theta) \qquad (2.31)$$

Finally we express the electromagnetic fields by a series expansion of orthonormal mode functions, as follows:

TM-to-θ fields

$$E_r = -\frac{1}{r^2}\sum_i A_i^E C_i \hat{B}_{\mu_i}(\rho) L_{\mu_i}(\cos\theta) \tag{2.32}$$

$$H_\phi = \frac{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{r}\sum_i \frac{A_i^E C_i}{\mu_i(\mu_i+1)} \hat{B}_{\mu_i}(\rho)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(L_{\mu_i}(\cos\theta)\right) \tag{2.33}$$

$$E_\theta = -\frac{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}{r}\sum_i \frac{A_i^E C_i}{\mu_i(\mu_i+1)} \hat{B}_{\mu_i}'(\rho)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(L_{\mu_i}(\cos\theta)\right) \tag{2.34}$$

TE-to-θ fields

$$H_r = \frac{1}{r^2}\sum_i A_i^H D_i \hat{B}_{\nu_i}(\rho) L_{\nu_i}(\cos\theta) \tag{2.35}$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu_0}{r}\sum_i \frac{A_i^H D_i}{\nu_i(\nu_i+1)} \hat{B}_{\nu_i}(\rho)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(L_{\nu_i}(\cos\theta)\right) \tag{2.36}$$

$$H_\theta = \frac{k_0\sqrt{\varepsilon_r}}{r}\sum_i \frac{A_i^H D_i}{\nu_i(\nu_i+1)} \hat{B}_{\nu_i}'(\rho)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(L_{\nu_i}(\cos\theta)\right) \tag{2.37}$$

III. EVALUATION

In order to represent the forward and backward wave of propagation, it is necessary to use the spherical Hankel function of the first kind and second kind. The first kind and second kind functions are representing the backward and forward wave of propagation, respectively. Therefore we can write

$$A_l^E \hat{B}_{\mu_l}(\rho) = p_l^E \hat{H}_{\mu_l}^{(1)}(\rho) + q_l^E \hat{H}_{\mu_l}^{(2)}(\rho) = p_l^E \left[\hat{H}_{\mu_l}^{(1)}(\rho) + \lambda_l^E \hat{H}_{\mu_l}^{(2)}(\rho) \right] \tag{3.1}$$

$$A_l^H \hat{B}_{\nu_l}(\rho) = p_l^H \hat{H}_{\nu_l}^{(1)}(\rho) + q_l^H \hat{H}_{\nu_l}^{(2)}(\rho) = p_l^H \left[\hat{H}_{\nu_l}^{(1)}(\rho) + \lambda_l^H \hat{H}_{\nu_l}^{(2)}(\rho) \right] \tag{3.2}$$

and

$$\left.\begin{aligned} \left(p_l^E\right)^2 &= \frac{1}{\displaystyle\int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{\left(\hat{H}_{\mu_l}^{(1)}(\rho) + \lambda_l^E \hat{H}_{\mu_l}^{(2)}(\rho) \right)^2}{\rho^2} d\rho} \\ \left(p_l^H\right)^2 &= \frac{1}{\displaystyle\int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{\left(\hat{H}_{\nu_l}^{(1)}(\rho) + \lambda_l^H \hat{H}_{\nu_l}^{(2)}(\rho) \right)^2}{\rho^2} d\rho} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

By application of the boundary conditions, we obtain that

$$\hat{B}_{\mu_i}{}'(\rho)\bigg|_{\substack{\rho=\rho_a\\ \rho=\rho_b}} = 0 \Rightarrow \frac{\hat{H}^{(1)'}_{\mu_i}(\rho_a)}{\hat{H}^{(2)'}_{\mu_i}(\rho_a)} - \frac{\hat{H}^{(1)'}_{\mu_i}(\rho_b)}{\hat{H}^{(2)'}_{\mu_i}(\rho_b)} = 0 \tag{3.4}$$

for TM-field, and

$$\hat{B}_{\nu_i}(\rho)\bigg|_{\substack{\rho=\rho_a\\ \rho=\rho_b}} = 0 \Rightarrow \frac{\hat{H}^{(1)}_{\nu_i}(\rho_a)}{\hat{H}^{(2)}_{\nu_i}(\rho_a)} - \frac{\hat{H}^{(1)}_{\nu_i}(\rho_b)}{\hat{H}^{(2)}_{\nu_i}(\rho_b)} = 0 \tag{3.5}$$

for TE-field. Eigenvalues μ_i and ν_i can be calculated from equations (3.4) and (3.5). For the non-integer value of μ_i and ν_i, Legendre functions $P_{\mu_i}(\cos\theta)$ and $P_{\nu_i}(\cos\theta)$ are unbound at $\theta=\pi$ and $P_{\mu_i}(-\cos\theta)$ and $P_{\nu_i}(-\cos\theta)$ are unbound at $\theta=0$. To avoid that problem, we choose the Legendre function as below.

$$\left.\begin{array}{l}(0\le\theta\le\alpha)\Rightarrow P_{\mu_i(or)\nu_i}(\cos\theta)\\ (\alpha\le\theta\le\pi)\Rightarrow P_{\mu_i(or)\nu_i}(-\cos\theta)\end{array}\right\} \tag{3.6}$$

At the conical surface boundary of two media, the tangential component of electromagnetic field must be continuous. So we have that

$$E_r\Big|_{\substack{\varepsilon_r=\varepsilon_1\\ \theta=\alpha-0}} = E_r\Big|_{\substack{\varepsilon_r=\varepsilon_2\\ \theta=\alpha+0}}, \tag{3.7}$$

$$H_r\Big|_{\substack{\varepsilon_r=\varepsilon_1\\ \theta=\alpha-0}} = H_r\Big|_{\substack{\varepsilon_r=\varepsilon_2\\ \theta=\alpha+0}}, \tag{3.8}$$

$$E_\phi\Big|_{\substack{\varepsilon_r=\varepsilon_1\\ \theta=\alpha-0}} = E_\phi\Big|_{\substack{\varepsilon_r=\varepsilon_2\\ \theta=\alpha+0}} \tag{3.9}$$

and

$$H_\phi\Big|_{\substack{\varepsilon_r=\varepsilon_1\\ \theta=\alpha-0}} = H_\phi\Big|_{\substack{\varepsilon_r=\varepsilon_2\\ \theta=\alpha+0}} \tag{3.10}$$

By substituting for E_r in equation (3.7), we obtain the following expression.

$$\sum_i \frac{C_i^{(1)}}{r^2} p_i^{E(1)} \left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_i^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_i^{E(1)} \hat{H}^{(2)}_{\mu_i^{(1)}}(\rho^{(1)}) \right] P_{\mu_i^{(1)}}(\cos\alpha) = \sum_i \frac{C_i^{(2)}}{r^2} p_i^{E(2)} \left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{E(2)} \hat{H}^{(2)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) \right] P_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)$$

where $\rho^{(1)} = k_o\sqrt{\varepsilon_1}r$ and $\rho^{(2)} = k_o\sqrt{\varepsilon_2}r$. (3.11)

Multiplying both side of the equation (3.11) by $p_j^{E(1)} \left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_j^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_j^{E(1)} \hat{H}^{(2)}_{\mu_j^{(1)}}(\rho^{(1)}) \right]$ and integrating over the limit from $r = a$ to $r = b$, give the following expression:

$$C_j^{(1)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sum_i C_i^{(2)} p_j^{E(1)} p_i^{E(2)} \frac{P_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)}{P_{\mu_j^{(1)}}(\cos\alpha)} \int_{\rho_a^{(2)}}^{\rho_b^{(2)}} \frac{\left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{E(2)} \hat{H}^{(2)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) \right] \left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_j^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_j^{E(1)} \hat{H}^{(2)}_{\mu_j^{(1)}}(\rho^{(1)}) \right]}{\rho^{(2)^2}} d\rho^{(2)}$$

(3.12)

Similarly we obtain following expressions from equation (3.8),(3.9) and (3.10)

$$D_j^{(1)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sum_i D_i^{(2)} p_j^{H(1)} p_i^{H(2)} \frac{P_{\nu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)}{P_{\nu_j^{(1)}}(\cos\alpha)} \int_{\rho_a^{(2)}}^{\rho_b^{(2)}} \frac{\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{H(2)} \hat{H}^{(2)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) \right] \left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_j^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_j^{H(1)} \hat{H}^{(2)}_{\nu_j^{(1)}}(\rho^{(1)}) \right]}{\rho^{(2)^2}} d\rho^{(2)},$$

$$C_j^{(1)} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{3/2} \sum_i C_i^{(2)} p_j^{E(1)} p_i^{E(2)} \frac{\dfrac{P'_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\theta)\Big|_{\theta=\alpha}}{\mu_i^{(2)}(\mu_i^{(2)}+1)}}{\dfrac{P'_{\mu_j^{(1)}}(\cos\theta)\Big|_{\theta=\alpha}}{\mu_j^{(1)}(\mu_j^{(1)}+1)}} \int_{\rho_a^{(2)}}^{\rho_b^{(2)}} \frac{\left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{E(2)} \hat{H}^{(2)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]\left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_j^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_j^{E(1)} \hat{H}^{(2)}_{\mu_j^{(1)}}(\rho^{(1)})\right]}{\rho^{(2)^2}} d\rho^{(2)},$$

$$(3.14)$$

$$D_j^{(1)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sum_i D_i^{(2)} p_j^{H(1)} p_i^{H(2)} \frac{\dfrac{P'_{\nu_i^{(2)}}(-\cos\theta)\Big|_{\theta=\alpha}}{\nu_i^{(2)}(\nu_i^{(2)}+1)}}{\dfrac{P'_{\nu_j^{(1)}}(\cos\theta)\Big|_{\theta=\alpha}}{\nu_j^{(1)}(\nu_j^{(1)}+1)}} \int_{\rho_a^{(2)}}^{\rho_b^{(2)}} \frac{\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{H(2)} \hat{H}^{(2)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_j^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_j^{H(1)} \hat{H}^{(2)}_{\nu_j^{(1)}}(\rho^{(1)})\right]}{\rho^{(2)^2}} d\rho^{(2)}.$$

$$(3.15)$$

We obtain equation (3.16) from equations (3.12) and (3.14)

$$0 = \sum_i F_\mu^E[j,i] C_i^{(2)} P_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\alpha) \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_2 \dfrac{\left(\cos\alpha P_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\alpha) + P_{\mu_i^{(2)}-1}(-\cos\alpha)\right)}{(\mu_i^{(2)}+1) P_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)}}{\varepsilon_1 \dfrac{\left(\cos\alpha P_{\mu_j^{(1)}}(\cos\alpha) - P_{\mu_j^{(1)}-1}(\cos\alpha)\right)}{(\mu_j^{(1)}+1) P_{\mu_j^{(1)}}(\cos\alpha)}} \right\}. \tag{3.16}$$

Similarly from equations (3.13) and (3.15), we obtain

$$0=\sum_{i} F_{\nu}^{H}[j,i] D_{i}^{(2)} P_{\nu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)\left\{1-\frac{\dfrac{\left(\cos\alpha P_{\nu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)+P_{\nu_i^{(2)}-1}(-\cos\alpha)\right)}{(\nu_i^{(2)}+1)P_{\nu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)}}{\dfrac{\left(\cos\alpha P_{\nu_j^{(1)}}(\cos\alpha)-P_{\nu_j^{(1)}-1}(\cos\alpha)\right)}{(\nu_j^{(1)}+1)P_{\nu_j^{(1)}}(\cos\alpha)}}\right\} \tag{3.17}$$

where

$$\left.\begin{aligned}
F_{\mu}^{E}[j,i] &= p_j^{E(1)} p_i^{E(2)} \int_{\rho_a^{(2)}}^{\rho_b^{(2)}} \frac{\left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})+\lambda_i^{E(2)}\hat{H}^{(2)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]\left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_j^{(1)}}(\rho^{(1)})+\lambda_j^{E(1)}\hat{H}^{(2)}_{\mu_j^{(1)}}(\rho^{(1)})\right]}{\rho^{(2)^2}}\,d\rho^{(2)} \\
F_{\nu}^{H}[j,i] &= p_j^{H(1)} p_i^{H(2)} \int_{\rho_a^{(2)}}^{\rho_b^{(2)}} \frac{\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})+\lambda_i^{H(2)}\hat{H}^{(2)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_j^{(1)}}(\rho^{(1)})+\lambda_j^{H(1)}\hat{H}^{(2)}_{\nu_j^{(1)}}(\rho^{(1)})\right]}{\rho^{(2)^2}}\,d\rho^{(2)}
\end{aligned}\right\}. \tag{3.18}$$

Further, the identities

$$P_{\chi}'(\cos\theta)\Big|_{\theta=\alpha}=\frac{\chi}{\sin\alpha}\left[\cos\alpha P_{\chi}(\cos\alpha)-P_{\chi-1}(\cos\alpha)\right] \tag{3.19}$$

and

$$P_\chi'(-\cos\theta)\Big|_{\theta=\alpha} = \frac{\chi}{\sin\alpha}\left[\cos\alpha P_\chi(-\cos\alpha) + P_{\chi-1}(-\cos\alpha)\right] \qquad (3.20)$$

are also used to simplify the results.

By truncating the number of terms according to the required accuracy, we can write equation (3.16) in a matrix form:

$$R\cdot X = 0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & . & . & r_{1n} \\ r_{21} & & & & \\ . & & & & \\ . & & & r_{pq} & \\ r_{n1} & & & & r_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ . \\ . \\ x_p^{(2)} \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad (3.21)$$

where

$$x_p^{(2)} = C_p^{(2)} P_{\mu_p^{(2)}}(-\cos\alpha) \qquad (3.22)$$

$$x_p^{(1)} = C_p^{(1)} P_{\mu_p^{(1)}}(\cos\alpha) \qquad (3.23)$$

$$r_{pq} = F_\mu^E[p,q]\left\{1 - \frac{\varepsilon_2 \dfrac{\left(\cos\alpha P_{\mu_q^{(2)}}(-\cos\alpha) + P_{\mu_q^{(2)}-1}(-\cos\alpha)\right)}{(\mu_q^{(2)}+1)P_{\mu_q^{(2)}}(-\cos\alpha)}}{\varepsilon_1 \dfrac{\left(\cos\alpha P_{\mu_p^{(1)}}(\cos\alpha) - P_{\mu_p^{(1)}-1}(\cos\alpha)\right)}{(\mu_p^{(1)}+1)P_{\mu_p^{(1)}}(\cos\alpha)}}\right\} \qquad (3.24)$$

Similarly, equation (3.17) can also be written in a matrix form by truncating number of elements according to the required accuracy. That is:

$$S\cdot Y = 0 \qquad (3.25)$$

where

$$y_p^{(2)} = D_p^{(2)} P_{\nu_p^{(2)}}(-\cos\alpha) \qquad (3.26)$$

$$y_p^{(1)} = D_p^{(1)} P_{\nu_p^{(1)}}(\cos\alpha) \tag{3.27}$$

$$s_{pq} = F_\nu^H[p,q]\left\{1 - \frac{\dfrac{\left(\cos\alpha P_{\nu_q^{(2)}}(-\cos\alpha) + P_{\nu_q^{(2)}-1}(-\cos\alpha)\right)}{(\nu_q^{(2)}+1)P_{\nu_q^{(2)}}(-\cos\alpha)}}{\dfrac{\left(\cos\alpha P_{\nu_p^{(1)}}(\cos\alpha) - P_{\nu_p^{(1)}-1}(\cos\alpha)\right)}{(\nu_p^{(1)}+1)P_{\nu_p^{(1)}}(\cos\alpha)}}\right\} \tag{3.28}$$

From the condition for non-trivial solution of X and Y, we obtain that

$$\det[R] = 0 \tag{3.29}$$

and

$$\det[S] = 0 \tag{3.30}$$

From equation (3.29) , the resonant frequencies of TM-field in this cavity are determined. And from equation (3.30), the resonant frequencies of TE-field are also determined

Once we find the resonant frequency, then we can get the field expansion coefficients. Finally we can obtain the electromagnetic fields in terms of the field expansion coefficients, as follows:

$$E_r^{(1)} = -\frac{1}{r^2}\sum_i \frac{x_i^{(1)}}{P_{\mu_i^{(1)}}(\cos\alpha)}\, p_i^{E(1)}\left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_i^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_i^{E(1)}\,\hat{H}^{(2)}_{\mu_i^{(1)}}(\rho^{(1)})\right] P_{\mu_i^{(1)}}(\cos\theta) \tag{3.31}$$

$$E_\theta^{(1)} = -\frac{k_0\sqrt{\varepsilon_1}}{r}\sum_i \frac{x_i^{(1)}}{\mu_i^{(1)}\left(\mu_i^{(1)}+1\right)P_{\mu_i^{(1)}}(\cos\alpha)}\, p_i^{E(1)}\left[\hat{H}^{(1)\prime}_{\mu_i^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_i^{E(1)}\,\hat{H}^{(2)\prime}_{\mu_i^{(1)}}(\rho^{(1)})\right] P'_{\mu_i^{(1)}}(\cos\theta) \tag{3.32}$$

$$E_\phi^{(1)} = \frac{j\omega\mu_0}{r}\sum_i \frac{y_i^{(1)}}{\nu_i^{(1)}\left(\nu_i^{(1)}+1\right)P_{\nu_i^{(1)}}(\cos\alpha)}\, p_i^{H(1)}\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_i^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_i^{H(1)}\,\hat{H}^{(2)}_{\nu_i^{(1)}}(\rho^{(1)})\right] P'_{\nu_i^{(1)}}(\cos\theta) \tag{3.33}$$

$$H_r^{(1)} = \frac{1}{r^2}\sum_i \frac{y_i^{(1)}}{P_{\nu_i^{(1)}}(\cos\alpha)}\, p_i^{H(1)}\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_i^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_i^{H(1)}\,\hat{H}^{(2)}_{\nu_i^{(1)}}(\rho^{(1)})\right] P_{\nu_i^{(1)}}(\cos\theta) \tag{3.34}$$

$$H_\theta^{(1)} = \frac{k_0\sqrt{\varepsilon_1}}{r}\sum_i \frac{y_i^{(1)}}{\nu_i^{(1)}\left(\nu_i^{(1)}+1\right)P_{\nu_i^{(1)}}(\cos\alpha)}\, p_i^{H(1)}\left[\hat{H}^{(1)\prime}_{\nu_i^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_i^{H(1)}\,\hat{H}^{(2)\prime}_{\nu_i^{(1)}}(\rho^{(1)})\right] P'_{\nu_i^{(1)}}(\cos\theta) \tag{3.35}$$

$$H_\phi^{(1)} = \frac{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}{r}\sum_i \frac{x_i^{(1)}}{\mu_i^{(1)}\left(\mu_i^{(1)}+1\right)P_{\mu_i^{(1)}}(\cos\alpha)}\, p_i^{E(1)}\left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_i^{(1)}}(\rho^{(1)}) + \lambda_i^{E(1)}\,\hat{H}^{(2)}_{\mu_i^{(1)}}(\rho^{(1)})\right] P'_{\mu_i^{(1)}}(\cos\theta) \tag{3.36}$$

$$E_r^{(2)} = -\frac{1}{r^2}\sum_i \frac{x_i^{(2)}}{P_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)} p_i^{E(2)}\left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{E(2)}\hat{H}^{(2)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]P_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\theta) \tag{3.37}$$

$$E_\theta^{(2)} = -\frac{k_0\sqrt{\varepsilon_2}}{r}\sum_i \frac{x_i^{(2)}}{\mu_i^{(2)}\left(\mu_i^{(2)}+1\right)P_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)} p_i^{E(2)}\left[\hat{H}^{(1)\prime}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{E(2)}\hat{H}^{(2)\prime}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]P_{\mu_i^{(2)}}{}'(-\cos\theta) \tag{3.38}$$

$$E_\phi^{(2)} = \frac{j\omega\mu_0}{r}\sum_i \frac{y_i^{(2)}}{\nu_i^{(2)}\left(\nu_i^{(2)}+1\right)P_{\nu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)} p_i^{H(2)}\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{H(2)}\hat{H}^{(2)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]P_{\nu_i^{(2)}}{}'(-\cos\theta) \tag{3.39}$$

$$H_r^{(2)} = \frac{1}{r^2}\sum_i \frac{y_i^{(2)}}{P_{\nu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)} p_i^{H(2)}\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{H(2)}\hat{H}^{(2)}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]P_{\nu_i^{(2)}}(-\cos\theta) \tag{3.40}$$

$$H_\theta^{(2)} = \frac{k_0\sqrt{\varepsilon_2}}{r}\sum_i \frac{y_i^{(2)}}{\nu_i^{(2)}\left(\nu_i^{(2)}+1\right)P_{\nu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)} p_i^{H(2)}\left[\hat{H}^{(1)\prime}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{H(2)}\hat{H}^{(2)\prime}_{\nu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]P_{\nu_i^{(2)}}{}'(-\cos\theta) \tag{3.41}$$

$$H_\phi^{(2)} = \frac{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_2}{r}\sum_i \frac{x_i^{(2)}}{\mu_i^{(2)}\left(\mu_i^{(2)}+1\right)P_{\mu_i^{(2)}}(-\cos\alpha)} p_i^{E(2)}\left[\hat{H}^{(1)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)}) + \lambda_i^{E(2)}\hat{H}^{(2)}_{\mu_i^{(2)}}(\rho^{(2)})\right]P_{\mu_i^{(2)}}{}'(-\cos\theta) \tag{3.42}$$

Ⅳ. RESULTS

The eigenvalues μ_i and ν_i for TM- and TE- fields in each coincal region are obtained from equations (3.4) and (3.5), respectively. To evaluate the complex eigenvalues for TM- and TE- mode numerically, first we calculate the approximate solution of eigenvalues by contour mapping using Mathematica. Later a routine, which we write, computes eigenvalues to at least 12 digit of accuracy from the approximate solution. The results are shown in Fig.2 and Fig.3 for TM- and TE- fields, respectively.

By using the eigenvalues, we search for the frequencies in which the determinant of matrix R and S become zero. Here we use the first five eigenfunctions of each medium. The results are shown in Fig.4. and Fig.5. for TM- and TE-fields, respectively. Once we find the resonant frequencies with first five eigenfunctions in each medium, the computation is extended up to first 10 eigenfunctions in each medium in the close range of the previous results. Table.1 shows the accuracy of calculation with the number of eigenfunctions taken into account for computation of resonant frequencies.

Finally the field expansion coefficients are calculated at the resonant frequencies. Which are shown in Table.2 Table.3 for TM- and TE- fields, respectively.

The results are shown in terms of z .where

$$z = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, a \tag{4.1}$$

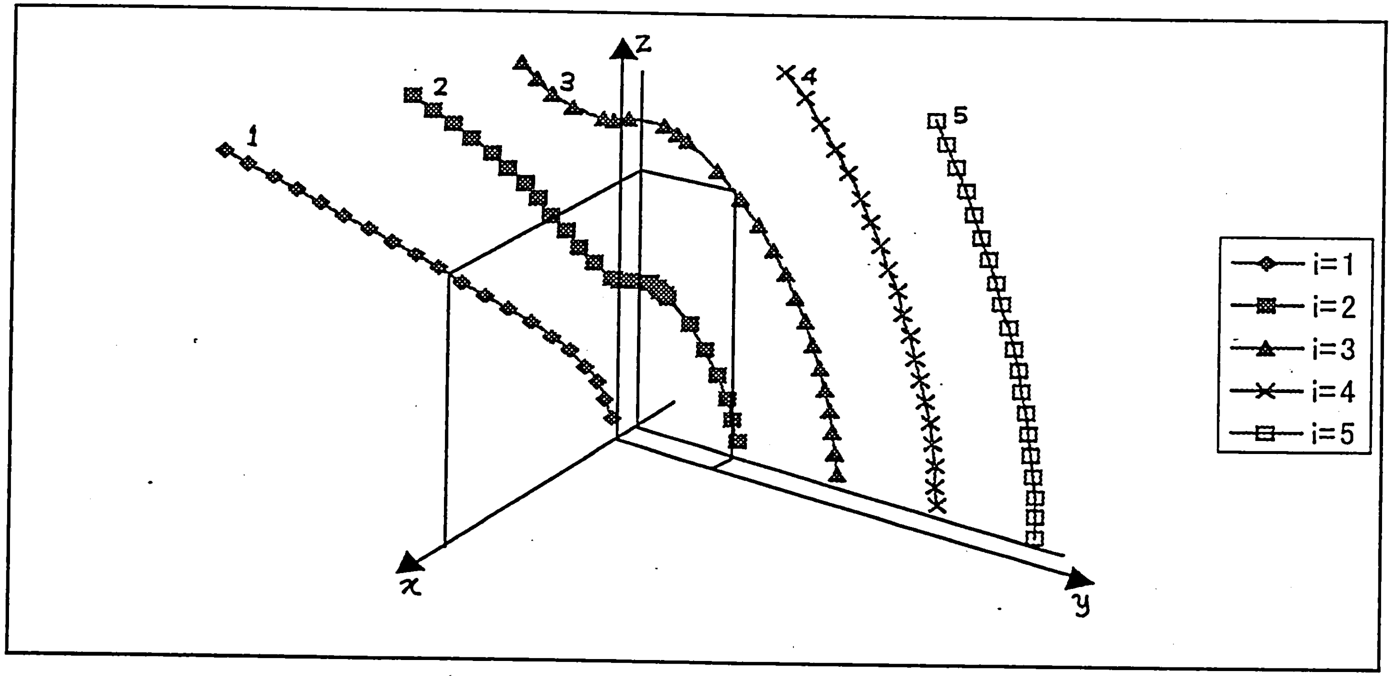


Fig.2. Solutions of $\left[\hat{H}^{(1)'}_{\mu_i}(z)+\lambda_i^E\,\hat{H}^{(2)'}_{\mu_i}(z)\right]_{\substack{z=k_0a\\ z=k_0b}} = 0$, (TM-field) when $b/a=5$.

x,y and z axes are representing Real μ_i ,Imaginary μ_i and k_0a respectively.

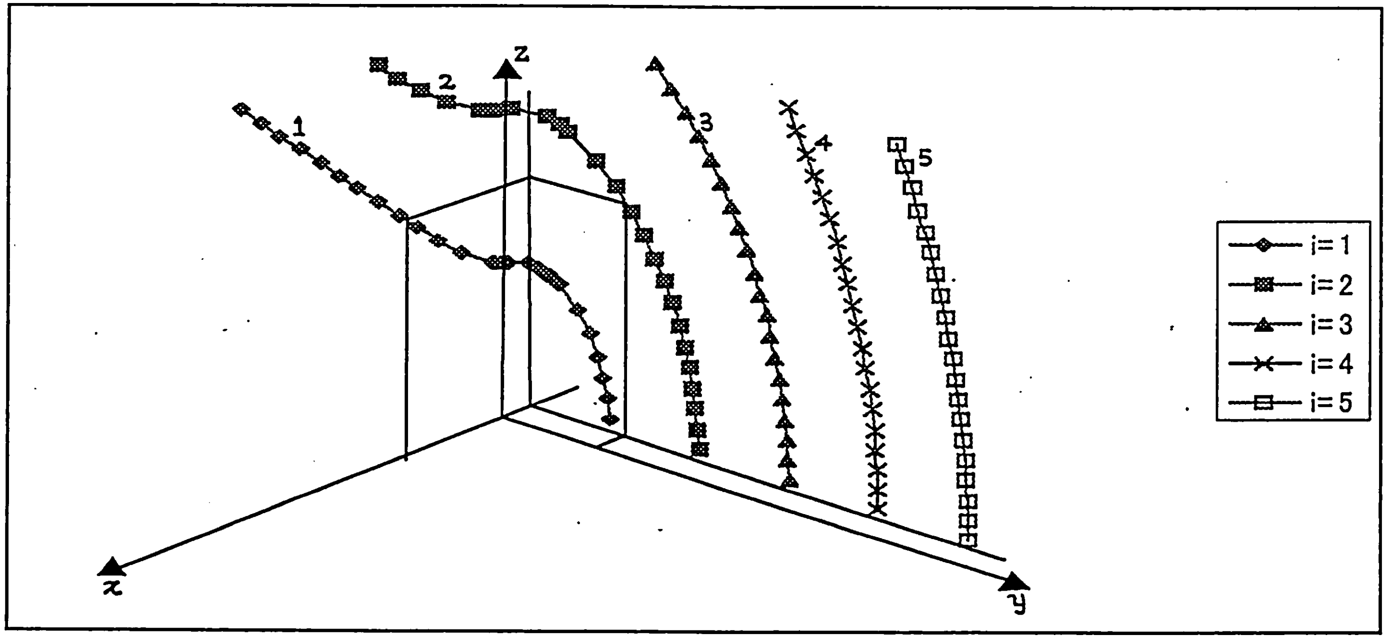


Fig.3. Solutions of $\left[\hat{H}^{(1)}_{\nu_i}(z)+\lambda_i^{H}\,\hat{H}^{(2)}_{\nu_i}(z)\right]_{\substack{z=k_0 a\\ z=k_0 b}} = 0$, (TE-field), when $b/a=5$.

x,y and z axes are representing Realν_i ,Imaginaryν_i and $k_0 a$ respectively

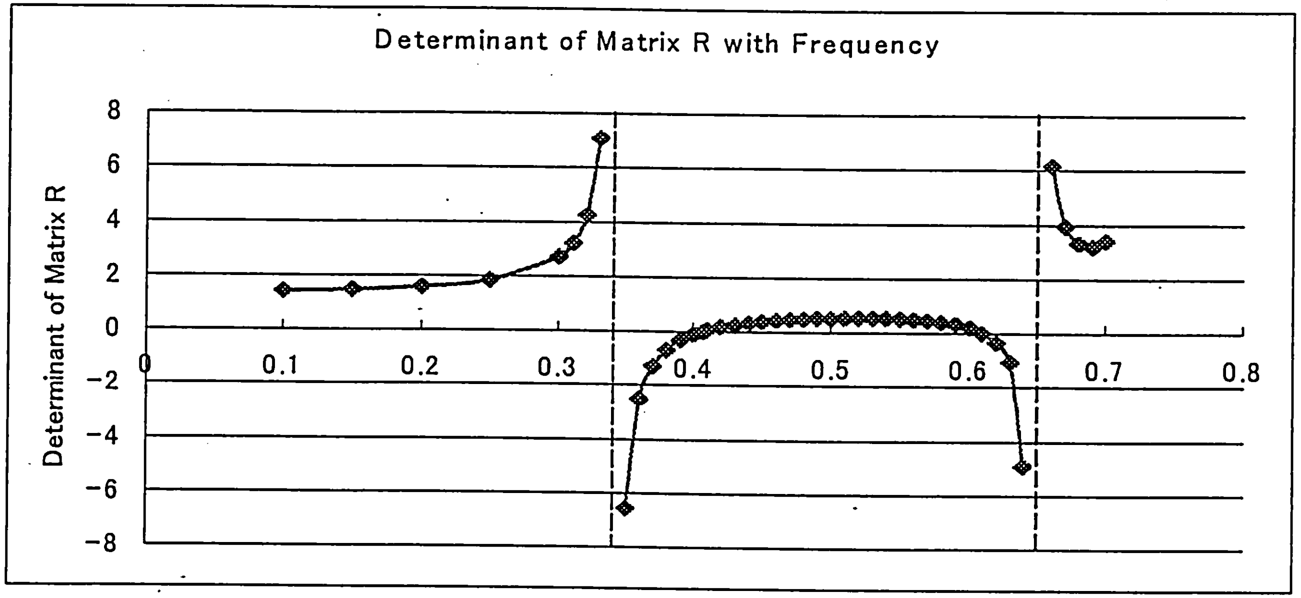


Fig.4. Determinant value of matrix R with varying frequency, when $b/a=5, \varepsilon_1=4$, $\varepsilon_2=1$ and $\alpha=\pi/4$.
x and y axes are representing k_0a and value of determinant respectively. (TM-field)

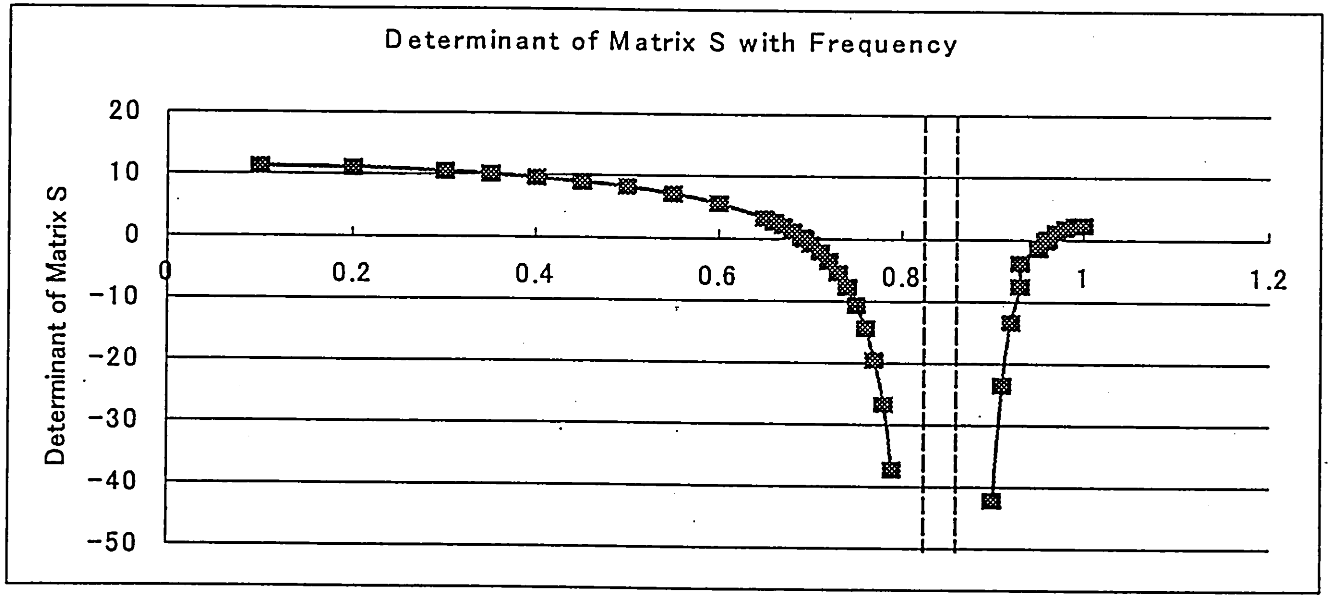


Fig.5. Determinant value of matrix S with varying frequency, when $b/a = 5, \varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 1$ and $\alpha = \pi/4$.

x and y axes are representing $k_0 a$ and value of determinant respectively. (TE-field)

We calculate the resonant frequency for 8 digits of accuracy by taking the first 5,8 and 10 eigenfunctions (N) of each medium for TM- and TE- fields. The results are shown in Table 1.

Table 1

N	TM-field resonant frequencies		TE-field resonant frequencies	
	$\left(z^E\right)_{\omega_1}$	$\left(z^E\right)_{\omega_2}$	$\left(z^H\right)_{\omega_1}$	$\left(z^H\right)_{\omega_2}$
5	0.40583643	0.61056769	0.69241738	0.95895273
8	0.40582723	0.61057278	0.69242081	0.95895320
10	0.40581563	0.61057086	0.69242090	0.95895321

It is clear from the above results that by taking first 10 eigenfunctions of each medium, we can calculate the resonant frequency about 6 digits of accuracy.

Table 2 shows the expansion coefficients at first two resonant frequencies for TM-field.

Table 2

i	Expansion coefficients at the first resonant frequency of TM-field		Expansion coefficients at the second resonant frequency of TM-field	
	$\left(\frac{x_i^{(1)}}{x_1^{(2)}}\right)_{\omega_1}$	$\left(\frac{x_i^{(2)}}{x_1^{(2)}}\right)_{\omega_1}$	$\left(\frac{x_i^{(1)}}{x_1^{(2)}}\right)_{\omega_2}$	$\left(\frac{x_i^{(2)}}{x_1^{(2)}}\right)_{\omega_2}$
1	0.396041	1.000000	0.766795	1.000000
2	0.678095	-0.460602	0.084078	-0.332106
3	0.101598	0.190908	0.044174	0.263579
4	-0.059422	-0.093324	-0.008450	-0.109106
5	-0.000340	0.015721	0.008675	0.048621
6	-0.028971	-0.036150	-0.000336	-0.016525
7	-0.024264	0.024825	-0.005322	0.012650
8	-0.027251	0.031226	-0.003800	0.001570
9	-0.037952	-0.045688	-0.004885	-0.006096
10	0.030720	0.034107	-0.006027	-0.007529

Table 3 shows the expansion coefficients at first two resonant frequencies for TE-field

Table 3

i	Expansion coefficients at the first resonant frequency of TE-field		Expansion coefficients at the second resonant frequency of TE-field	
	$\left(\dfrac{y_i^{(1)}}{y_1^{(2)}}\right)_{\omega_1}$	$\left(\dfrac{y_i^{(2)}}{y_1^{(2)}}\right)_{\omega_1}$	$\left(\dfrac{y_i^{(1)}}{y_1^{(2)}}\right)_{\omega_2}$	$\left(\dfrac{y_i^{(2)}}{y_1^{(2)}}\right)_{\omega_2}$
1	0.963628	1.000000	0.773568	1.000000
2	-0.404629	0.986569	0.110994	0.367136
3	0.109035	-0.445309	0.066588	0.274420
4	0.048778	0.185947	0.007297	-0.128430
5	0.023115	-0.080328	-0.003175	0.055851
6	-0.012770	0.038445	-0.000766	-0.023976
7	0.007269	-0.019818	0.000536	0.011221
8	-0.004581	-0.011266	0.000167	-0.005461
9	0.002916	0.006757	0.000164	0.002958
10	-0.001919	-0.004431	-0.000242	-0.002076

V. CONCLUSION

We presented an analysis of electromagnetic fields of a cavity formed by two concentric conducting spheres filled with a conically stratified medium. Formulating the field problem using θ-transmission field equations and radially expanding eigenfunctions, we obtained resonant eigenmodes to the first two and their respective fields in the series form. Number of required terms of the eigenfunctions for the field expansion to the accuracy of a part of one million was only 5. This means that the resonant mode in the cavity filled with a conically stratified medium can be expressed in terms of about 5 radially expanded eigenfunctions.

We are now prepairing for the analysis of electromagnetic fields in this cavity excited by a rotationally symmetric current source.

REFERENCES

[1] Allan W. Snyder, "Coupling of Modes on a Tapered Dielectric Cylinder," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol.MTT-18, No.7, PP.383-392, 1970.

[2] Yasumitsu MIYAZAKI, "Electromagnetic characteristics of a cone type tapered optical waveguide," 1996 IEICE GENERAL CONFERENCE C-17 (Japanese version)

[3] Abdolmajid Hadidi and Michael Hamid, "Eigenvalues of a Dielectric- Coated Conducting Cone," IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol.AP-35, No.3, PP.299-304, 1987.

[4] Nathan Marcuvitz, "Field Representations in Spherically Stratified Regions," Communications on Pure and Appiled Mathematics, Vol.4, No.2/3, pp.263-315, 1951.

[5] Donald C. Stinson, "Intermediate Mathematics of Electromagnetics," Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall. 1976.

輻射科学研究会資料
RS98-20

InGaAs DBR 発振器-パワー増幅器-グレーティング結合器集積化高出力半導体レーザ

上向井正裕 栖原敏明 西原浩
(大阪大学大学院 工学研究科)

N. Eriksson A. Larsson
(Chalmers Univ. Tech., Dept. Microelectron.)

平成 11 年 3 月 19 日

1. まえがき

化合物半導体基板上にレーザ発振器(MO)とパワー増幅器(PA)を集積化したモノリシックMOPAレーザは、小型で高出力な光源として、光通信や光計測、光ファイバー増幅器・固体レーザ・非線形デバイスのポンプ光源などへの応用が期待されている。これまでに分布ブラッグ反射型(DBR)レーザとテーパ型パワー増幅器からなる MOPA が報告されている[1]。しかしこれらの端面出射型デバイスの出力光は縦横異なる曲率の発散光であり、この出力光を平行または集光ビームとして利用するためには複雑な外部レンズ系が必要である。

グレーティング結合器(GO)は導波光を自由空間に任意の波面で出力することが可能であり、これを集積化すれば出力光を平行または集光ビームとして取り出せるので利用が容易になる。これまでのMOPAに用いられたDBRレーザや分布帰還型(DFB)レーザの作製には、2 度のエピタキシャル成長が必要であった。しかし表面グレーティングを用いたDBRレーザ[2]や表面GOを採用することにより再成長の必要がなくなり、光集積デバイス作製プロセスの大幅な簡略化が図れる。

本論文では 1 度のエピタキシャル成長で作製でき、その出力を平行ビームとして取り出せるグレーティング結合器集積化高出力半導体レーザ[3]について報告する。

2. デバイス構造

DBR 発振器(MO)、テーパ型パワー増幅器(PA)および平行出射型グレーティング結合器(GO)からなる高出力半導体レーザを図 1に示す。デバイスはリッジ構造の活性素子(MO 活性チャンネルとテーパ型 PA)と、プレーナ導波路上の受動素子(曲線表面 DBR と GO)から構成される。MO からの出力光がテーパ型 PA で増幅され広がりながら伝搬し、GO から外部に平行ビームとして出射される。また GO を適当に設計することにより、任意の波面を出力したり PA 内で生じる波面歪を補正する機能を付加することができる。

デバイスには、InGaAs-AlGaAs 分布屈折率分離閉じ込め(GRIN-SCH)単一歪量子井戸(SQW)導波路構造[4]を使用した。これはエッチストップ層と GO を高効率化するための多重反射層[4]を含む。また表面グレーティング素子は、コンタクト層、上部クラッド層をエッチング除去したプレーナ導波路上に作製する。図 2にエピタ

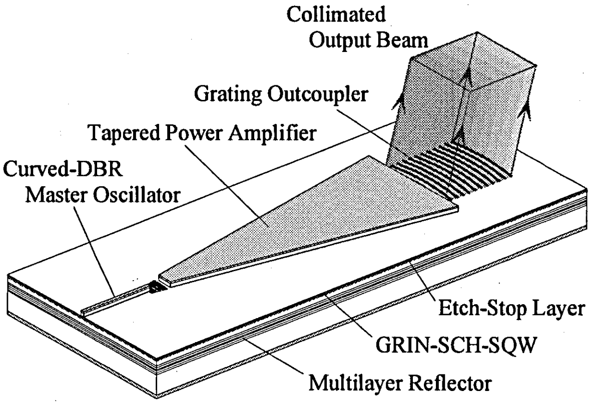


図1 DBR 発振器-パワー増幅器-グレーティング結合器集積化高出力半導体レーザ

キシャル構造と、リッジ導波路とグレーティング領域の境界近傍の断面構造を示す。

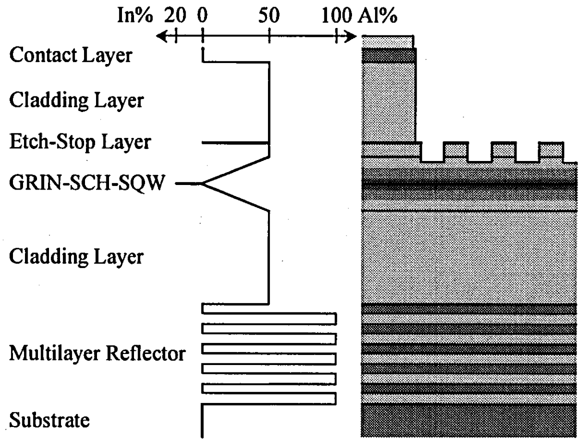


図2 GRIN-SCH-SQW 導波路/グレーティング構造

3. 各素子の設計

3.1 曲線 DBR 発振器(MO)

MO には、我々の提案した狭活性チャンネルと曲線表面グレーティングからなる DBR レーザ[2](図 3)を採用した。狭活性チャンネルは単一横モード発振を実現し、活性チャンネル端からの発散導波光は大きな広がり角を持つ。この大きな導波光広がりは、PA 内での利得飽和の緩和やデバイス長の短縮などの点で有利である。また発散導波光に対し高い反射率が得られるよう直線ではなく曲線の DBR グレーティングを採用し、作製の容易さからグレーティング次数を 3 次とした。

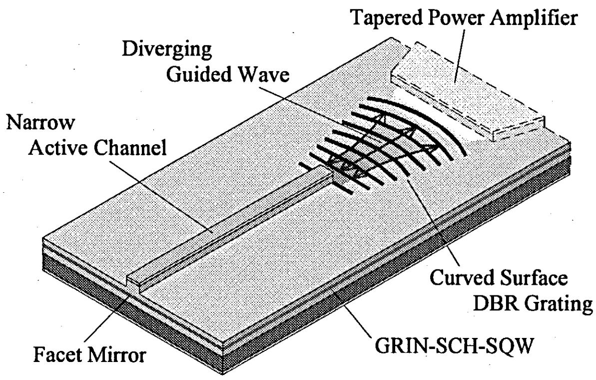


図3 曲線表面グレーティングを用いた DBR レーザ

発振波長 980 nm、活性チャンネル幅を 2.0 μm とすると、導波光広がり角(パワーの $1/e^2$ 全角)は 6.6°となる。グレーティング深さを 150 nm とすると 3 次の結合係数は 140 cm^{-1} と計算され、グレーティング領域の吸収損失は 76 cm^{-1}[5]と見積もられる。そこで理論反射率および透過率がそれぞれ 9%、75%となるよう、DBR 長を 24 μm と決定した。

3.2 パワー増幅器(PA)

PA の電極形状を最適化しデバイスの性能予測を行うために、理論シミュレーション[6]を行った。

(i) 解析モデル

PA 中で TE モードの導波光が増幅されながら伝搬する過程を、ビーム伝搬法(BPM)を用いて計算する。図 4に各素子の位置関係および座標軸を示す。導波路構造内の電界を $E(x,y,z) = E(x)E(y,z)$ として、PA 面内の分布 $E(y,z)$を求める。

利得飽和を考慮に入れた量子井戸導波路のモード利得分布$\gamma_m(y,z)$は、導波光パ

ワー密度 $P(y,z) = |E(y,z)|^2$ を用いて次式で表される。但し注入電流密度 J は PA 内で一定であると仮定した。

$$\gamma_m(y,z) = \frac{\Gamma g_0 \ln(J/J_0)}{1 + \dfrac{P(y,z)}{P_{sat}}} \tag{1}$$

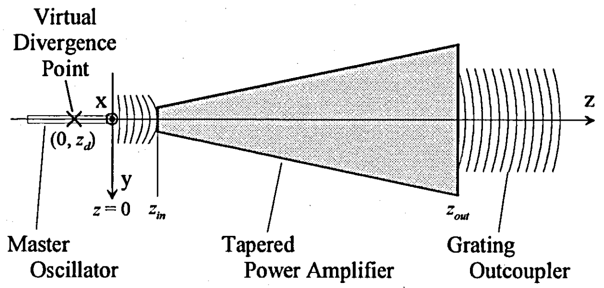


図4 各素子の位置関係

上式右辺の分子は非飽和利得の対数関数近似表現であり、g_0 は利得定数、Γ は閉じ込め係数、J_0 は透明化電流密度である。分母は導波光パワー増大による利得飽和を表しており、飽和光パワー密度 P_{sat} は $P \to \infty$ で $\gamma_m P = (\eta_i \hbar\omega/q)(J-J_0)$ であるべきなので次式のように表される。

$$P_{sat} = \left(\frac{\eta_i \hbar\omega}{q}\right) \frac{(J - J_0)}{\Gamma g_0 \ln(J/J_0)} \tag{2}$$

ここで $\hbar\omega$ は光子エネルギー、q は電荷素量、η_i は内部微分量子効率である。

また PA 内では、電気的発熱 Q_{elect}、光吸収による発熱 $Q_{abs}(y,z)$ および誘導放出による放熱 $Q_{stim}(y,z)$ があり、不均一な温度分布が生じる。ここで温度変化が z 方向に緩やかであるため、温度分布 $T(y,z)$ は近似的に総発熱量分布 $Q(y,z)$ と z 軸に平行な線熱源に対するインパルスレスポンス $f_T(y)$ のコンボリューションで求めることができる。

$$T(y,z) = f_T(y) * Q(y,z) = \int f_T(y-\tau) Q(\tau,z) d\tau \tag{3}$$

$$Q(y,z) = Q_{elect} + Q_{abs}(y,z) - Q_{stim}(y,z) \tag{4}$$

$$Q_{elect} = \left(\frac{\hbar\omega}{q} + V_d + \rho J\right) J \tag{5}$$

$$Q_{abs}(y,z) = \alpha_L P(y,z) \tag{6}$$

$$Q_{stim}(y,z) = \gamma_m(y,z) P(y,z) \tag{7}$$

ここで V_d はオフセット電圧、ρJ は直列抵抗による電圧降下、α_L は導波路吸収損失である。

このような利得分布と温度分布により導波路の屈折率も不均一となり、複素実効屈折率分布 $n_{eff}(y,z)$ は次式で与えられる。

$$n_{eff}(y,z) = n_{eff}^{(0)} + \frac{1}{2k_0}\left[\gamma_m(y,z)(j+b) - j\alpha_L\right] + \alpha_T T(y,z) \tag{8}$$

ここで $n_{eff}^{(0)}$ は透明化時の実効屈折率、k_0 は真空中の波数、$b(<0)$ はアンチガイディングファクター、α_T は温度係数である。

各 BPM ステップ間の光電界の変化は、dz をステップ幅、$\mathscr{F}$ を y に関するフーリエ

変換として次式で計算される。

$$E(y,z+dz)=\mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}\left[E(y,z)\right]A\right]B \tag{9}$$

$$A=\exp\left[-j\sqrt{k_0^2 n_{eff}^{(0)^2}-\eta^2}\,dz\right] \tag{10}$$

$$B=\exp\left[-jk_0\left(n_{eff}(y,z)-n_{eff}^{(0)}\right)dz\right] \tag{11}$$

ここで A は自由伝搬の効果を、B は PA 動作に伴う複素振幅変化を表している。ηは y 方向波数である。初期条件として $E(y,0)$を MO 活性チャンネル端での横方向モード分布をガウス分布で近似した分布で与え、式(9)を繰り返し適用することにより、各ステップの電界分布および PA 出力の光強度分布 $P_{out}(y)=|E(y、z_{out})|^2$を計算できる。

(ii) 出力波面解析

PA 出力光の波面は PA 内の不均一な屈折率分布によって歪みが生じ、MO の活性チャンネル端から発散する二次元球面波ではなく、図 4に示した仮想発散点(VDP)$(0,z_d)$からの二次元球面波に近いものとなる。PA 出力光波面の位相分布を$\Phi(y)$ = $\arg\{E(y,z_{out})\}$とし、$(0,z_d)$からの 2 次元球面波の $z = z_{out}$での位相分布を$\Phi_{z_d}(y)$とすると、仮想発散点は次式の荷重 RMS 波面差$\Delta\Phi_{RMS}(z_d)$を最小とする z_dを計算することで得られる。

$$\Delta\Phi_{RMS}(z_d)=\left\{\frac{\int P(y)\Delta\Phi_{z_d}(y)^2 dy}{\int P(y)dy}-\left(\frac{\int P(y)\Delta\Phi_{z_d}(y)dy}{\int P(y)dy}\right)^2\right\}^{1/2} \tag{12}$$

$$\Delta\Phi_{z_d}(y)=\Phi(y)-\Phi_{z_d}(y)$$

ここで$\Delta\Phi_{RMS}(z_d)$の最小値は PA 出力光の波面収差を表す。

(iii) シミュレーション結果

デバイス作製に使用したエピタキシャル基板に対して実測または推定したパラメータ(表 1)を用い、種々の PA 電極形状および動作条件について理論シミュレーションを行った。これから高出力・低収差の観点から総合的に良好な性能が得られる電極形状として、PA の長さおよび入力端幅、出力端幅をそれぞれ 2000 μm、20 μm、600 μm と決定した。このときの PA 出力端での光強度分布を、図 5に示す。PA 中の導波光は不均一な利得(光軸付近で小さく、端で大きい)のために受動導

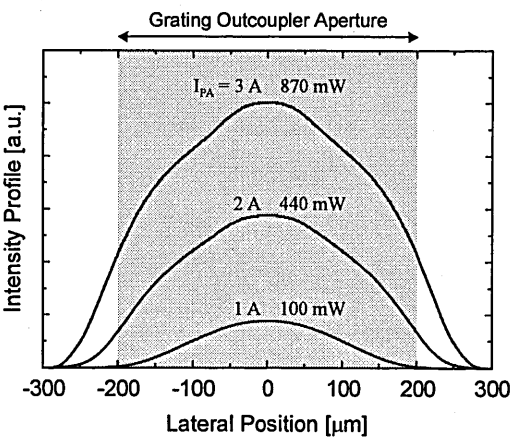


図5 PA 出力端での光強度分布

表1　理論シミュレーションに用いたPAパラメータ

Parameter	Symbol	Value	Unit
Wavelength	λ	980	nm
Effective refractive index	$n_{eff}^{(0)}$	3.34	
Effective gain factor	Γg_0	30.0	cm^{-1}
Transparency current density	J_0	58.7	A/cm^2
Internal differential quantum efficiency	η_i	0.87	
Internal loss in active region	α_L	5.27	cm^{-1}
Loss in DBR region	α_L	76	cm^{-1}
Offset voltage	V_d	0.2	V
Series resistance	ρ	1.5×10^4	Ω-μm^2
Antiguiding factor	b	−2.5	
Index thermal coefficient	α_T	2.4×10^{-4}	K^{-1}

波路伝搬時に比べて大きく広がり、PA 出力端での強度 $1/e^2$ 全幅は 400 μm 余りになることがわかった。PA への入力光パワー 10 mW、PA 注入電流2.0 - 3.0 A とすると、440 - 870 mW の PA 出力光パワーが予想される。

またシミュレーション結果から、VDP は主として熱レンズ効果により MO 活性チャンネル端(0,0)より PA から遠ざかる方向(z_d < 0)へ移動し、その移動距離 $|z_d|$ は PA 注入電流を増加すると増大することがわかった。そこでこの移動を見込んで適当に選んだ点(0,δ)から発散する二次元球面波を自由空間の平行ビームに無収差波面変換する GO を設計すれば、高い PA 注入電流の領域でも良好な平行ビーム出力が期待できる。このとき、GO から出力される 3 次元波面の RMS 波面収差は PA 出力波面と点(0,δ)から発散する二次元球面波との RMS 波面差に対応する。この RMS 波面差の PA 注入電流依存性を図 6に示す。通常のレンズにおいて RMS 波面収差が $(\lambda/2\pi)\Delta\Phi_{RMS}$ < 0.07λならば無収差と見なせるが、この判定基準は GO にも適用できると考えられる。これからδ = −75 μm の VDP 移動補正を行った GO を作製すれば、PA 注入電流 1.0 A から 3.0 A の範囲で、波面収差が無視できる良好な平行ビーム出力が得られることがわかった。

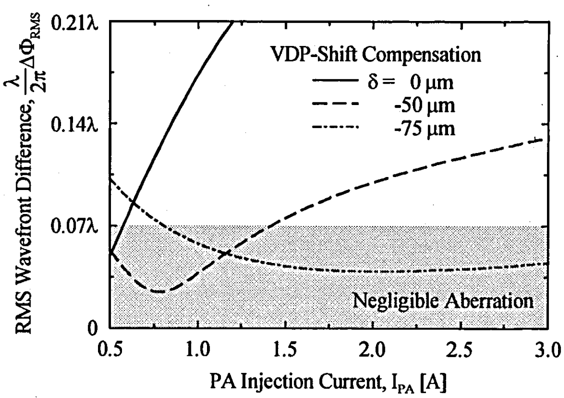


図6　RMS 波面差の PA 注入電流依存性

3.3 グレーティング結合器(GO)

PA 出力光を 1 次の回折により平行ビームとして外部に出射する開口 400 μm × 400 μm の GO の設計を行った。デバイス作製を

容易にするため、グレーティング深さを曲線 DBR グレーティングと同じ 150 nm とした。これから GO の放射損失係数α_{rad}および空気側への分配比 P_{air} は、多重反射層を考慮に入れそれぞれ 150 cm^{-1}、97%と計算された。グレーティング領域の吸収損失α_{abs}を 76 cm^{-1} と仮定すると、開口長 $L = 400$ μm の GO の空気側への結合効率は

$$\eta_{air} = \frac{\alpha_{rad}}{\alpha_{rad} + \alpha_{abs}} P_{air} \left[1 - \exp\left\{-(\alpha_{rad} + \alpha_{abs})L\right\}\right] \tag{13}$$

より 64%と計算された。PA 注入電流 3.0 A のとき、図 5の光強度分布のうち GO 開口内に入射する出力光パワーは 90%であるので、デバイス出力光パワーは 500 mW と見積もられる。なお上記数値の GO 設計では伝搬方向の実効開口長すなわち減衰長 $1/(\alpha_{rad}+\alpha_{abs})$は L よりもかなり小さいので、この方向の出力ビーム広がり角は L に対する回折限界値よりかなり大きくなる。この広がりは$\alpha_{rad}+\alpha_{abs}$ を小さな値にすれば低減できるが、現構造では比較的大きなα_{abs} の値で制限されるのでこの方向の広がり角を最小にするためのα_{rad}最適化は行わなかった。

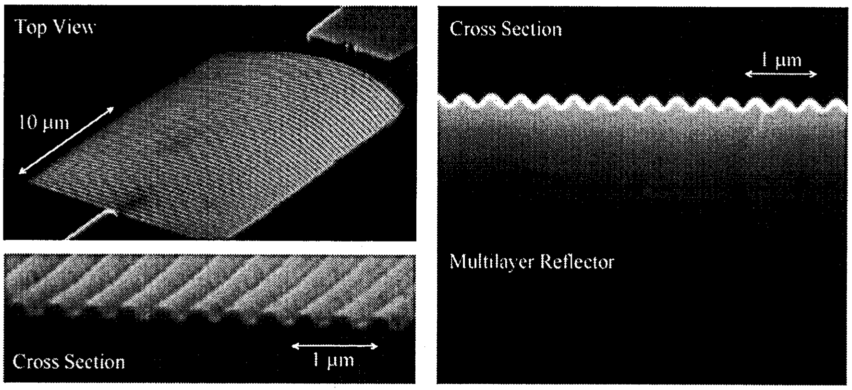
4. デバイス作製

作製したデバイスの仕様を表 2に示す。ここで GO に VDP 移動補正なしのデバイスと−50 μm の移動補正機能を付加したデバイスを作製した。

MOVPE 法により成長させた導波路に、MO 活性チャンネルとテーパ型 PA の電極パターンを蒸着により形成した。この電極をマスクとし、in situ モニタを用いた反応性イオンエッチング(RIE)によりリッジ構造を形成した。次に電子ビーム描画と 2 段階の RIE により 3 次の曲線 DBR(周期 450 nm)と 1 次の GO(周期 326 nm)のグレーティングパターンを作製した。曲線 DBR の周辺および断面の SEM 写真を図 7(a)に、GO の断面 SEM 写真を図 7(b)に示す。ボンディング用電極を形成後、基板を約 100 μm 厚にし裏面に n 側電極を形成した後、1.1×4 mm^2 のチップサイズに劈開し、ヒートシンクにはんだ付けした。作製したデバイスを図 8に示す。

表2　作製したデバイスの仕様

Master Oscillator	Wavelength: 980 nm　Active channel: 2.0 × 600 μm^2 DBR length: 24 μm　period: 450 nm (3rd-order)　depth: 150 nm Coupling coefficient: 140 cm^{-1}
Power Amplifier	Input width: 20 μm　Output width: 600 μm Amplifier length: 2000 μm
Grating Outcoupler	Aperture: 400×400 μm^2　Exit angle: 15° Focal length: 2226 / 2276 μm (int.), ∞ (ext.) Grating period: 326 nm (1st-order)　depth: 150 nm Radiation factor: 150 cm^{-1}　Directionality into air: 97 %
Chip Size	1.1 × 4 mm^2



(a) 曲線 DBR グレーティング　　(b) グレーティング結合器

図7　グレーティング素子の SEM 写真

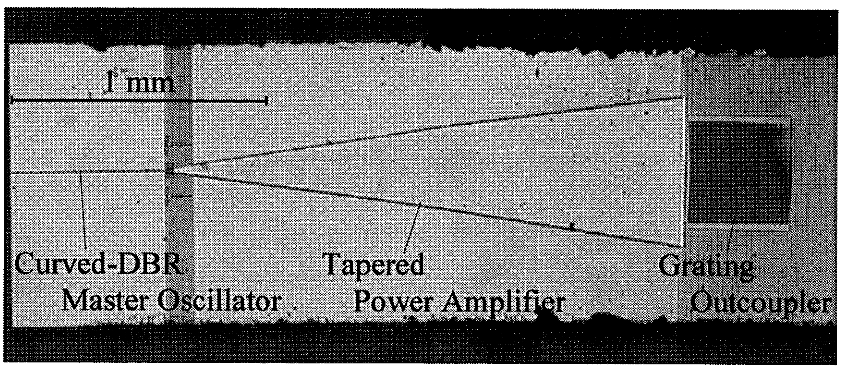


図8　作製したデバイス

5. 実験結果

5.1 発振器(MO)の特性

MO の出力光パワーを CW 動作で測定した。MO 劈開面側で測定した出力光パワーの MO 注入電流依存性とスペクトルを図 9に示す。しきい値(8.4 mA)から出力35 mWまで、波長 981 nm での安定な単一モード発振が得られた。

5.2 出力光のパワーとスペクトル

図 10に MO 注入電流をパラメータとしたときのデバイス出力光パワーの PA 注入電流依存性とスペクトル

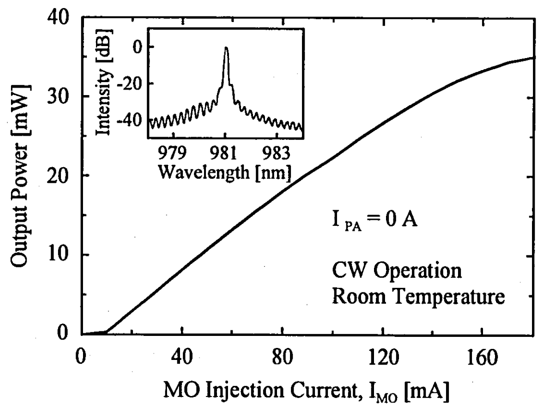


図9　DBR 発振器出力光パワーの注入電流依存性とスペクトル

を示す。MO 注入電流、PA 注入電流がそれぞれ 160 mA、3.0 A のとき、GO から 124 mW の出力ビームが得られた。また 0.5 A から 3.0 A までの PA 注入電流の増加とともに、982 nm から 985 nm の発振波長変化が観察された。これは PA での発熱による温度上昇のため、DBR のブラッグ波長が変化するからである。またデバイス出力ビームのサイドモード抑圧比は、MO 出力光のそれに近い 20 dB 以上であった。

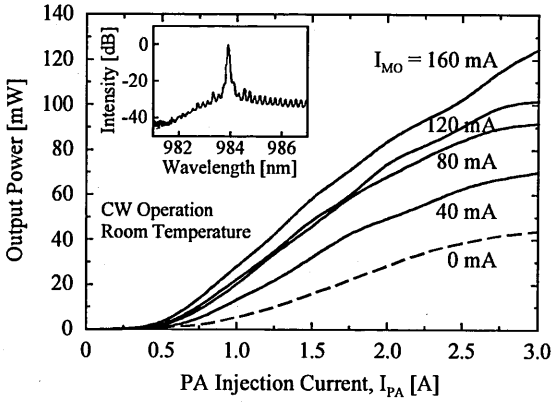


図10　デバイス出力光パワーの PA 注入電流依存性とスペクトル

5.3 近視野像

CCD カメラを用いて GO 面上の近視野像を観察した。図 11 に近視野像と横方向の光強度分布を示す。PA 注入電流変化とともに、図 5に示したシミュレーション結果にほぼ一致する光強度分布変化が観測された。また導波光伝搬方向の光強度分布は指数関数的に減少し、その減衰定数から

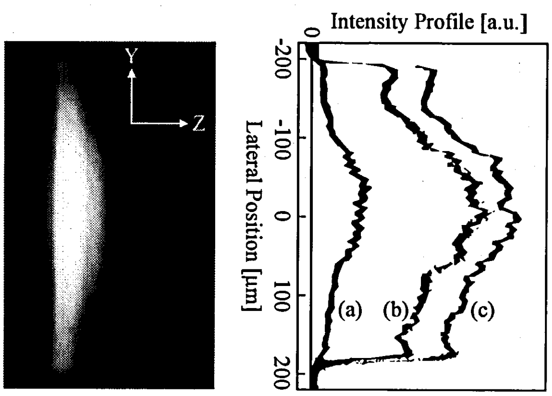


図11　近視野像と横方向光強度分布

($\alpha_{rad}+\alpha_{abs}$)は 250 cm^{-1}と測定された。この測定値を用いα_{rad}が設計値 150 cm^{-1}とすると、α_{abs}およびη_{air}はそれぞれ 100 cm^{-1}、58 %と見積もられる。また PA 出力光パワーの 90 %が GO 開口内に入射するとすると、PA 出力端での光パワーは 237 mW と見積もられる。得られた出力光パワーがシミュレーション結果と異なるのは、ヒートシンクによる放熱が不十分なため PA 内のモード利得が低下したことが原因であると考えられる。

5.4 遠視野像

MO 注入電流 40 mA のときの出力ビームの遠視野像を観測した。PA 注入電流 1.0 A のときの遠視野像と出射面垂直方向の光強度分布を図 12に示す。また出射面垂直方向の出力ビーム広がり角（1/e^2 全角）の PA 注入電流依存性を図 13に示す。VDP 移動補正なしのデバイスでは、PA 注入電流 1.0 A 以下のとき出射面垂直方向で理論回折限界値 0.28°に対し 0.29°のビーム広がり角が得られた。それ以上の PA 注入電流で

は、電流の増加とともに波面歪の増大によるビーム広がり角の増加が観測された。一方 GO に−50 μm の VDP 移動補正機能を付加したデバイスでは、PA 注入電流 2.0 A のとき最小ビーム広がり角 0.37°が得られた。また PA 注入電流 3.0A のとき、VDP 移動補正なしのデバイスでビーム広がり角が回折限界の 4.0 倍であったのに対し、VDP 移動補正ありのデバイスでは 1.6 倍であった。以上の結果から GO に VDP 移動を補正する機能を付加することで、PA 内で生じる波面歪の影響を低減できることを確認した。しかしながら、出射面垂直方向で良好な平行度が得られたのに対し、出射面平行方向には約 3°の広がりがあった。これは減衰定数(α_{rad}+α_{abs})の最適化が不十分なためであり、両方向ともに良好な平行度を得るためにはα_{abs}の低減やα_{rad}の最適設計などが必要である。

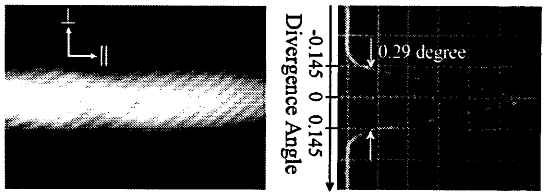


図12　出力ビームの遠視野像と光強度分布（出射面垂直方向）

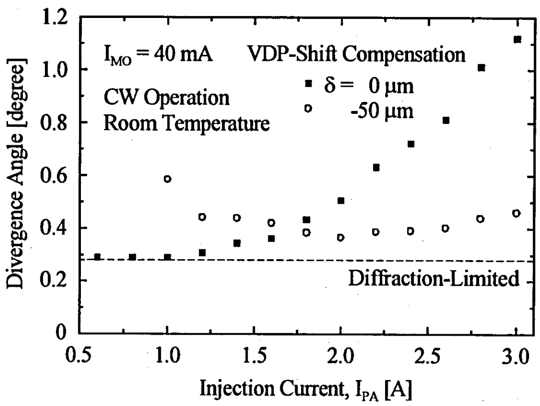


図13　デバイス出力ビーム広がり角（出射面垂直方向）の PA 注入電流依存性

6. むすび

DBR 発振器、テーパ型パワー増幅器、グレーティング結合器をモノリシック集積した高出力半導体レーザを提案した。ビーム伝搬法を用いた理論シミュレーションによるパワー増幅器の設計および波面歪補正機能を付加したグレーティング結合器の設計を行い、実際に光集積デバイスを作製し、評価した。CW 動作で波長 985 nm、最大出力 124 mW の安定単一モード出力が得られた。また平行出力ビームの出射面垂直方向ビーム広がり角の測定により、発散点移動補正機能をグレーティング結合器に付加することで高い PA 注入電流領域で波面歪の影響を低減できることを確認した。

[1] S. O'Brien et al., *IEEE J. Quantum Electron.*, **29**, 6, pp. 2052-2057, 1993.
[2] M. Uemukai et al., *Electron. Lett.*, **33**, 17, pp. 1464-1465, 1997.
[3] M. Uemukai et al., *IEEE Photon. Technol. Lett.*, **10**, 8, pp. 1097-1099, 1998.
[4] N. Eriksson et al., *IEEE J. Quantum Electron.*, **32**, 6, pp. 1038-1047, 1996.
[5] M. Hagberg et al., *IEEE J. Quantum Electron.*, **32**, 9, pp. 1596-1605, 1996.
[6] R. J. Lang et al., *IEEE J. Quantum Electron.*, **29**, 6, pp. 2044-2051, 1993.

輻射科学研究会資料
RS98-21

産業用大出力固体レーザの高ビーム品質化

安井公治

yasui@lap.crl.melco.co.jp
06-6497-7110
FAX06-6497-7288

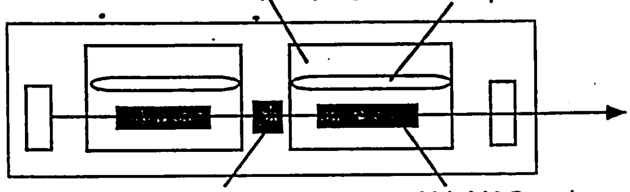
(三菱電機株式会社　先端技術総合研究所)

平成11年3月19日

MITSUBISHI Electric Corporation

高出力・高品質ビーム発生共振器技術：HIPER

HIPER: High-brightness Polarization-dependence-Erased Resonator.
- Advanced pumping module to ensure uniform pumping.
- Polarization dependent bifocusing compensation.



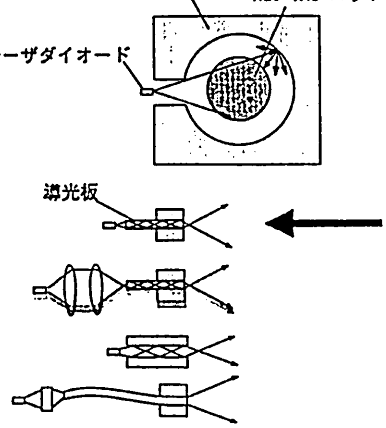
Related Publications:
(1) Koji Yasui, "High-brightness cw-500-W Nd:YAG rod laser," OSA TOPS on Advanced Solid-State Lasers 1996.
(2) Koji Yasui, "Efficient and stable operation of a high-brightness cw 500-W Nd: YAG rod laser," Appl.Opt. vol.35, pp.2566-2569,1996.
(3) Koji Yasui, Susumu Konno, Shuichi Fujikawa, and Kenji Yoshizawa, " Resonator technology for > 100W TEMoo mode operation in solid-state lasers," to be presented at Lase 99, 1999.

MITSUBISHI Electric Corporation

三菱独自の拡散反射集光器を用いた高効率LD励起方式

CIDER: Close-coupled Internal Diffusive Exciting Reflector

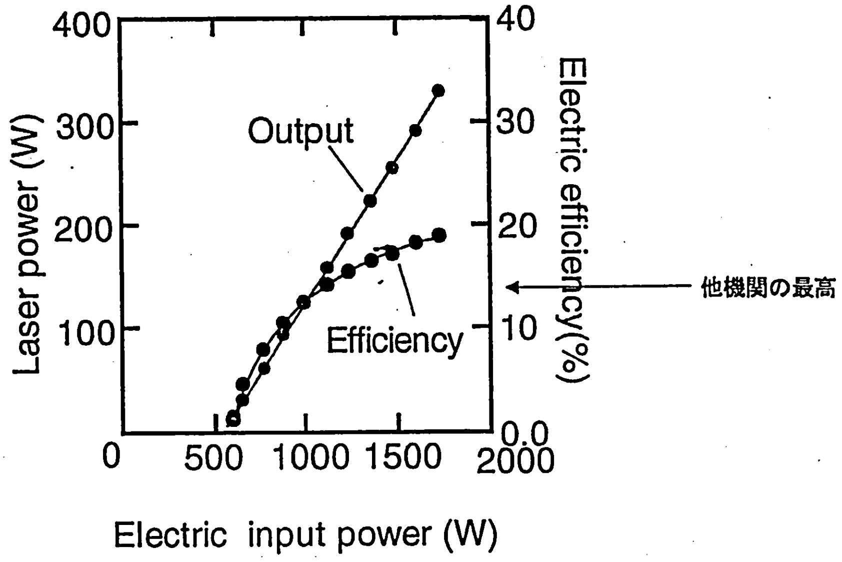
参考資料:
(1) Tetsuo Kojima and Koji Yasui , Post Deadline papers CLEO/Pacific Rim., PD2.2, 1995.
(2) Tetsuo Kojima and Koji Yasui, Appl.Opt. vol.36, pp.4981-4984, 1997.
(3) Shuichi Fujikawa, Tetsuo Kojima, and Koji Yasui, IEEE JQE, vol.3, pp.40-44, 1997
(4) S. Fujikawa, S. Konno, K. Yasui, and K. Yoshizawa, Advanced Solid-State Lasers,MA3,1999.



91-94年に
各種インターフェイスを提案済

MITSUBISHI Electric Corporation

高効率レーザダイオード(LD)励起技術：CIDER



Ref. S.Fujikawa, S. Konno, K. Yasui, and K. Yoshizawa, Advanced Solid-State Lasers, MA3, 1999.

MITSUBISHI Electric Corporation

高出力パルス紫外光(266nm)発生