

2006年度

# 輻射科学研究会資料集

RS06-01～RS06-18  
(May 2006～March 2007)

## 開催会場(月・日)

第1回: 龍谷大学, 瀬田キャンパス(5月10日)

RS06-01～RS06-04

第2回: 大阪電気通信大学, 寝屋川キャンパス(7月6日)

RS06-05～RS06-08

第3回: 立命館大学, びわこ・くさつキャンパス(10月3日)

RS06-09～RS06-10

第4回: 京都工藝繊維大学(12月6日)

RS06-11～RS06-14

第5回: 大阪電気通信大学, 寝屋川キャンパス(3月5日)

RS06-15～RS06-18

2007年6月1日発行

## 2007年度輻射科学研究会資料集目次

<平成18年5月10日>

- RS06-01 粟井郁雄、石田哲也（龍谷大学）  
“時間軸上で求めたエバネセント電磁界による共振器結合係数の高速計算”
- RS06-02 粟井郁雄、アルン・クマル・シャハ（龍谷大学）  
“広帯域BPFに利用可能なオープンリング共振器”
- RS06-03 山田逸成、木村和哉、斉藤光徳（龍谷大学）  
“アルカリエッチングしたSi基板を用いた静電引力式赤外波長可変フィルタ”
- RS06-04 北森文久、左貝潤一（立命館大学）  
“中心に低屈折率層をもつ1次元フォトリソニック結晶導波路における局在モード  
—ブラッグファイバに向けて—”

<平成18年7月6日>

- RS06-05 三好旦六、小川真人、土屋英昭（神戸大学）  
“ナノスケールデバイスシミュレーションの現状と課題”
- RS06-06 町田信也、古屋一仁（東京工業大学）  
“半導体中ホットエレクトロンのコヒーレント波動について  
—相反定理とシミュレーション、実証そして応用—”
- RS06-07 森 伸也（大阪大学）  
“極微細電子デバイスの量子輸送シミュレーション”
- RS06-08 西村哲也（三菱電機（株）先端技術総合研究所）  
“超高速フォトリソニックネットワーク用自己パルス発振半導体レーザー”

<平成18年10月3日>

- RS06-09 宮野公樹（京都大学）、杉山進（立命館大学）  
“シンクロトロン放射光LIGAプロセスによる微細加工技術”

RS06-10 小川浩二(立命館大学)

“SR光電子分光による1次元表面新物性の研究”

<平成18年12月6日>

RS06-11 田村安彦、中山純一(京都工芸繊維大学)

“不規則半平面によるTM平面波の散乱と回折

・ランダム波動場表現の導出と回折核の近似評価 - “

RS06-12 田村安彦、中山純一(京都工芸繊維大学)

“不規則半平面によるTM平面波の散乱と回折

・回折核の精密評価 - “

RS06-13 浅居 正充(近畿大学)、山北 次郎(岡山県立大学)

“螺旋導体分布の等価媒質定数に与えるクラスタ分布の影響

(Effective medium parameters of scattered helices depending

on cluster basis distributions)”

RS06-14 服部一裕、中山純一(京都工芸繊維大学)

“方形溝グレーティングによる平面波の散乱”

<平成19年3月5日>

RS06-15 松本正行、佐貫堅一、嶋田善行(大阪大学)

“光ファイバの非線形効果を利用した全光信号再生技術”

RS06-16 Katsumi Morishita and Akihiro Kaino

(Osaka Electro-Communication University)

“Residual Stress Effects on Post-Fabrication Resonance Wavelength

Adjustment of Long-Period Fiber Gratings by Heating”

RS06-17 森下克己、太田信之(大阪電気通信大学)

“溶融形光ファイバカブラの放電による波長無依存化”

RS06-18 崎田聡史、出口博之、辻幹男、眞弓貴一(同志社大学)

“2共振位相特性を用いた単層リフレクトアレーの高性能化に関する検討”

# 時間軸上で求めたエバネセント電磁界による 共振器結合係数の高速計算

Fast Calculation of Coupling Coefficient between Resonators  
by Evanescent Field in Time Domain

粟井 郁雄

石田 哲也

(龍谷大学理工学部電子情報学科)

2006年5月23日

於 龍谷大学

# 時間軸上で求めたエバネセント電磁界による 共振器結合係数の高速計算

栗井 郁雄<sup>†</sup> 石田 哲也<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> 龍谷大学 理工学部 電子情報学科 〒520-2194 滋賀県大津市瀬田大江町横谷 1-5

E-mail: <sup>†</sup> awai@rins.ryukoku.ac.jp, <sup>‡</sup> tetuya02@bridge.ocn.ne.jp

あらまし 共振器間結合係数の高速数値計算アルゴリズムを提案している。結合共振器はもとの共振周波数とあまり大きく変わらない値を持つため、結合状態を摂動法によって解析でき、対称的に配置された共振器の偶モード、奇モード励振を摂動状態と見なす事ができる。したがって、ある単一共振器における電磁界の分布から様々な共振器間隔に対する結合係数を求めることができる。FDTD法において、外部からガウス変調CW波で励振すると幅広い励振スペクトルから共振周波数が強く選択される。このとき、共振が安定した状態にすばやく収束するので計算時間の短縮を図ることができる。

キーワード 時間領域、共振器、摂動法、結合係数、エバネセント電磁界、FDTD法

## 1. 序論

共振器間の結合係数はマイクロ波バンドパスフィルター(BPF)の設計において重要なパラメータである。従来、この結合係数は、共振器が結合することにより二つに分かれた共振周波数から求められている。しかし、我々は近年、摂動法を用いることにより、新しい結合係数の表現を導出した。[1]~[3]

この新しい摂動法による結合係数の表現の重要な点は、結合係数がエネルギーで表現されていることである。エネルギーは周波数領域と時間領域のどちらでも表現することができる。したがって、時間領域における解析手法であるFDTD法を用いたとき、結合係数はフーリエ変換なしに、直接時間領域から計算することができる。我々はこの時間領域による結合係数の計算原理と具体的計算例を示し、従来の周波数法による結合係数の算出時間との比較を行う。

## 2. 摂動法

2つの共振器は図1(a)に示すように、鏡像

の関係に置かれて結合していると仮定する。

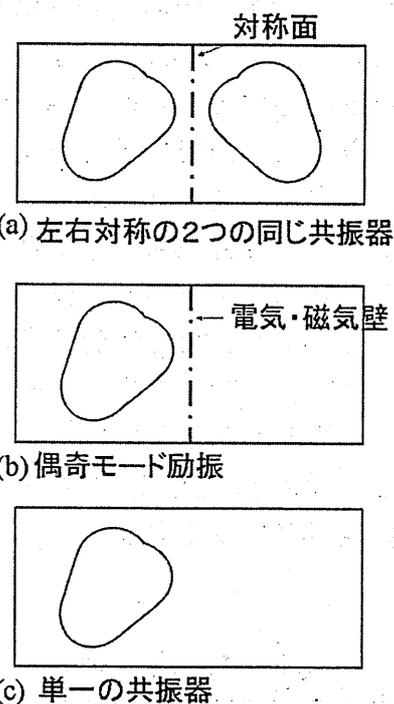


図1. 結合係数の計算に摂動法を用いる原理

共振器が鏡像の関係にあるということは、

2つの共振器は同じ構造で同じ共振周波数を持つということを前提としている。本手法においてこの鏡像の関係は結合係数を求めるうえで必要条件である。二つの共振器が鏡像関係にあれば、図 1(b)に示すように2つの共振器間の対称面を磁気壁または電気壁にすることにより、偶奇モード励振をそれぞれ別々に仮定することができる。

そして、電気壁、磁気壁を対称面に仮定することにより、それぞれの共振器を対称面で分割することになるので、解析領域は片方の共振器の空間のみでよいことになる。

対称面上では単一の共振器が作る電磁界はエバネセント界となっており振幅が非常に小さい。また、対称面に電気壁や磁気壁を設定したとき、その壁で生じる反射もエバネセントであり元の電磁界に与える影響は小さい。したがって、このように電気壁、磁気壁を設定することは、単一の共振器に擾動を与えた状態であると考えられることができる。つまり、図 1(c)に示すように単一の共振器のみで結合係数の計算ができることになる。実際、共振周波数は電気壁、磁気壁を設定する前と後では若干変化している。したがって、一般的な擾動法の理論が適応でき、共振器間の結合係数は積分の形で表すことができる。[4][5] 電気壁、磁気壁による共振周波数の変化は

$$\Delta\omega_{od} \cong \frac{-2j \int_{S_1} (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0^*) \cdot \mathbf{n} dS}{\int_{V_1} (\varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 + \mu |\mathbf{H}_0|^2) dv}, \quad (1)$$

$$\Delta\omega_{ev} \cong \frac{-2j \int_{S_2} (\mathbf{H}_0^* \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{n} dS}{\int_{V_2} (\varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 + \mu |\mathbf{H}_0|^2) dv}, \quad (2)$$

で表すことができる。ここで  $\mathbf{E}_0$  と  $\mathbf{H}_0$  は擾動を与える前、つまり単一の共振器が作る電磁界である。積分領域  $V_1$  や  $S_1$  は図 2 に示す。数式(1),(2)を従来の周波数表現の式に代入することにより結合係数は

$$\begin{aligned} k &= \frac{2|\omega_{ev} - \omega_{od}|}{\omega_{ev} + \omega_{od}} \cong \frac{|\Delta\omega_{ev} - \Delta\omega_{od}|}{\omega_0} \\ &= \frac{2j \int_{S_1} (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0^* - \mathbf{H}_0^* \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{n} dS}{2\omega_0 \int_{V_1} \varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 dv} \\ &= \frac{2|I_m \int_{S_1} (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0^*) \cdot \mathbf{n} dS|}{\omega_0 \int_{V_1} \varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 dv}. \end{aligned} \quad (3)$$

と書くことができる。ここで図 2 に示されている  $V_2$  の領域に着目すると、そこでは共振器のエバネセント界のみが存在し、その電磁界に対してマクスウェルの方程式が成立する。したがって

$$\nabla \cdot (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{E}_0^*) = j\omega_0 \varepsilon \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* - j\omega_0 \mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^*,$$

の関係が得られるのでガウスの定理を用いて数式(3)を変形し、これを代入して  $V_2$  の領域で積分すると結合係数は

$$k = \frac{2 \left| \int_{V_2} (\mu |\mathbf{H}_0|^2 - \varepsilon |\mathbf{E}_0|^2) dv \right|}{\int_{V_1} \varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 dv}. \quad (4)$$

と変換することができる。この式より結合係数は二つの領域の電磁界のエネルギーから求めることができることがわかる。

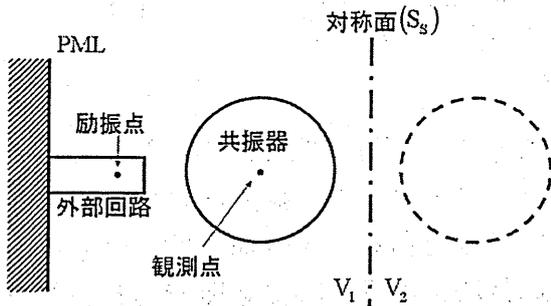


図2.  $f_0, E_0, H_0$  の計算構造

### 3. 時間領域による計算

時間領域において、結合係数はエネルギーの積分により算出することができる。数式(4)のエネルギーは普通、周波数領域で求められるが、下式に示すように時間領域における値の平均を取れば周波数領域の表現に等しいことがわかる

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \mu H(t)^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \mu \left| \frac{H e^{j\omega t} + H^* e^{-j\omega t}}{2} \right|^2 dt \\ &= \frac{\mu}{4T} \int_0^T (H \cdot H e^{j2\omega t} + 2H \cdot H^* + H^* \cdot H^* e^{-j2\omega t}) dt \\ &= \frac{\mu}{2} |H|^2. \end{aligned} \quad (5)$$

FDTD 法は時間領域において電磁界の変化を時間ステップごとに逐次計算していく手法である。したがって、電磁界が安定した状態で共振周波数の一周分分の電磁界の値を足し合わせることで、エネルギーの時間平均量を求めることができる。共振周波数は共振器の内部のある点の電界または磁界の振幅を観測することにより、その振幅がゼロになる時間を判断し、そのゼロとなる時間間隔の逆数から算出することがで

きる。

共振周波数や電磁界は図2の構造により算出する。その際、励振信号にはガウス変調 CW 波を用いる。

$$E(t) = A \sin \omega_c t \exp \left\{ -\frac{(t-T)^2}{T^2} \right\} \quad (6)$$

ここで  $\omega_c$  は励振パルスの中心周波数であり、 $\omega_r$  の近傍に設定するのが望ましい。 $T$  は励振パルスの周波数幅を決定する値である。普通  $T$  は  $\pi/10\omega_c$  から  $\pi/\omega_c$  の間に設定する。図2のように外部回路から共振器を励振することにより、数式(6)の持つ幅広い励振パルスの周波数帯域から共振周波数近傍の周波数帯域のみが共振器の高い外部 Q により選択される。

入力信号の時間変化と共振器内部の電磁界の振幅を図3に示す。

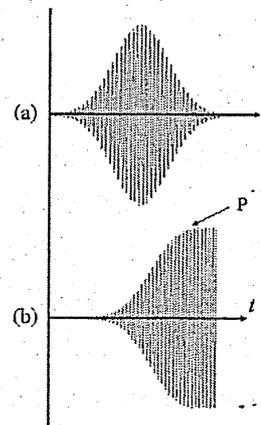


図3. 励振パルスの時間依存とその応答  
(a) 励振パルス (b) 共振器内部の電磁界

励振パルスが入力されてからしばらくは励振パルスの影響が強く現れているので、共振周波数の計算にこの時間帯を用いること

はできない。しかし、励振パルスが入力されてから数十周期たつと、励振パルスの影響は小さくなり共振器内部の電界または磁界は安定した周期で変化するようになる。そして、この時刻周辺で共振周波数や結合係数の計算を実行する。共振周波数は先に述べたように共振器内部の振幅の時間応答からゼロとなる時間を幾つか判断し、ゼロとなる時間間隔の逆数から求める。結合係数は、ある領域の電気、磁気のエネルギーの積分を先ほど求めた共振周波数の一周分積分することにより数式(4)から求めるところができる。

#### 4. 本手法の利点

FDTD 法を用いて本手法と従来の手法で求めた結合係数の比較を行う。比較の際に解析上の誤差をなくすために、解析領域のメッシュの区切り方は同じとする。こうすることにより、電磁界の計算精度は同じになるので、純粹に結合係数を算出する際の算方による誤差のみを論じることができずである。

まず計算時間の比較について述べる。本手法では共振周波数は非常に早く収束する。従来の様にフーリエ変換を用いて共振周波数を求めようとする、共振周波数の解析精度を上げるためには時間ステップを多く取り、周波数分解能をあげなければならない。したがって、解析に本手法では、共振周波数は非常に早く、例えば早ければ  $0.01 \mu \text{sec}$  で収束することを考えると、従来の方法に比べて、格段に早いと言える。具体的な数値例は後述する。結合係数は従来、数式(7)を使って二つに分かれた共振周波数から結合係数は計算される。

$$k = \frac{\delta f}{f_r} = \frac{2(f_h - f_l)}{f_h + f_l} \quad (7)$$

ここで  $f_h$ ,  $f_l$  は共振器が結合したことにより 2 つに分かれた共振周波数の高いほうと低いほうである。結合係数は、フィルターの比帯域幅の設計時に必要であることを考えると有効数字 2 桁以上の精度が必要である。例えば、結合係数が 0.01 で共振周波数が 2GHz であり、結合係数の計算精度が有効数字 2 桁であるとする。この時、結合係数の許される誤差は  $\pm 0.005$  であるので、周波数領域で計算するとき、周波数分解能  $\Delta f$  は 1MHz 以下でなければならない。FDTD 法で計算した結果をフーリエ変換したときの周波数分解能  $\Delta f$  と時間の関係は

$$\Delta f = \frac{1}{N \Delta t}$$

である。ここで  $N$  は全時間ステップ数であり、 $\Delta t$  は時間ステップである。したがって、 $N \Delta t$  だけの時間の経過が FDTD で計算される必要があることになる。この例では  $N \Delta t$  は、 $1.0 \mu \text{Sec}$  となる。そして、 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-12}$  とすると時間ステップ数は  $5 \times 10^5$  回となる。共振周波数を求めるときにも同じことが言えるので、周波数分解能  $\Delta f$  を 1MHz 以下としたい場合、時間ステップ数は  $5 \times 10^5$  回必要となる。これに対して本方法では早ければ  $0.01 \mu \text{sec}$  で収束するので、時間ステップ数は  $5 \times 10^3$  回しか必要としない。

本手法で共振周波数と結合係数を計算するとき、先に述べたように共振器と外部回路との結合は弱くしておく。このように外

部回路との結合を弱くすることにより、共振器内に取り込まれる周波数帯域が狭くなることになるので、余計な周波数スペクトルによる電磁界への影響が削減できる。

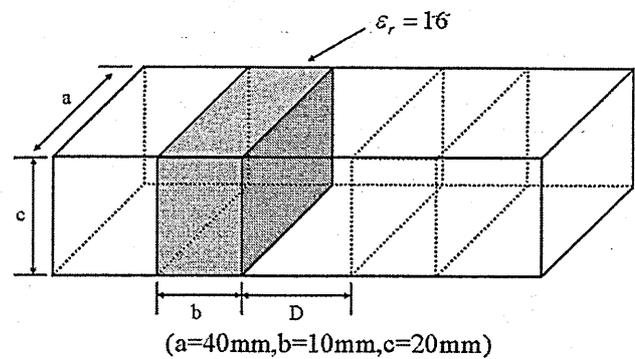
さらに、この手法の良い点は、一度電磁界を計算すると、その計算された電磁界を使って積分範囲を変化させるだけで、同じ共振器の様々な共振器間隔の結合係数を求め得る事である。電磁界の計算は一度でよいので、BPF 等設計時に最適な結合係数を非常に短時間で求めることが可能である。

本手法のもう一つの特徴は、電気結合と磁気結合をわけて求めることができるという点である。共振器の外側のエバネセント領域は、共振モードが E モードか H モードによって、電界か磁界のどちらかが主要な成分になることが知られている。したがって、共振器間の結合係数は共振モードによって電界、磁界による結合のどちらかが強くなっていると考えられる。本手法では、電界、磁界による結合を分離することができるので、E モードの結合なのか、H モードの結合なのか識別することもできる。また、ハイブリッドモードのような場合でも、電界、磁界のどちらの結合が強いかが判断することができる。

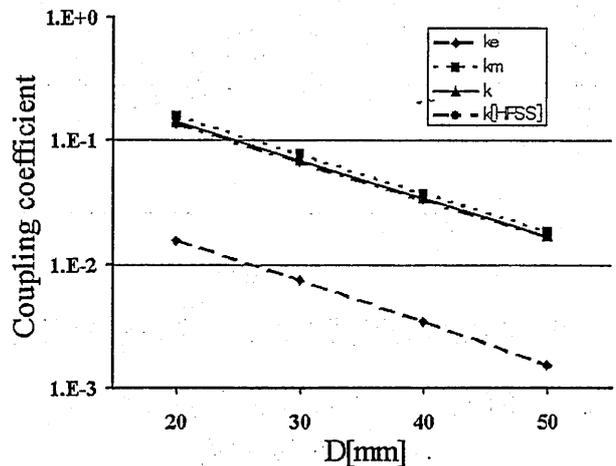
## 5. 解析例

幾つかの計算例を次に示す。図 4 は方形導波管に誘電体を詰めた誘電体共振器である。誘電体共振器の比誘電率は 16 であり、共振器単独の共振周波数は 1.58GHz である。励振は TE<sub>106</sub>モードで外部回路からを行う。図 4(b)は積分法で求めた結合係数である。HFSS を用いて式(7)から周波数法で求めた結合係数も比較のために記述する。外部回路から TE<sub>106</sub>モードで励振しているのを、

この誘電体共振器は TE<sub>106</sub>モードで共振しているはずである。励振モードが TE<sub>106</sub>モードであると考えると、その時のエバネセント領域では電界に比べ磁界エネルギーが強いはずであるので、磁気による結合が強く現れるはずである。図 4(b)の計算結果はこの予想に一致する。そして、同図から共振器間隔がどのような場合でも常に磁界による結合が電界による結合よりも強いことがわかる。



(a) 解析モデル

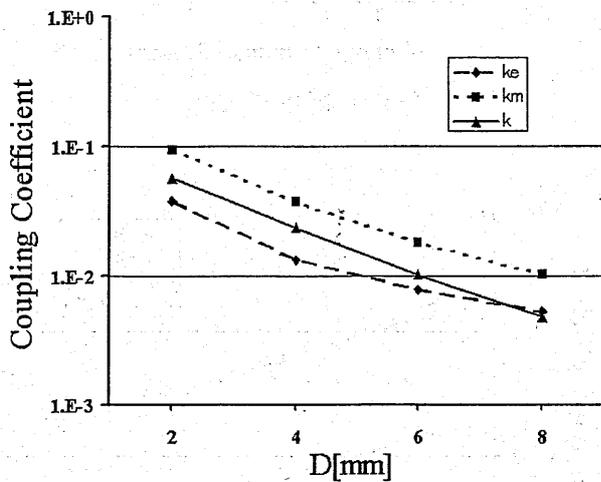
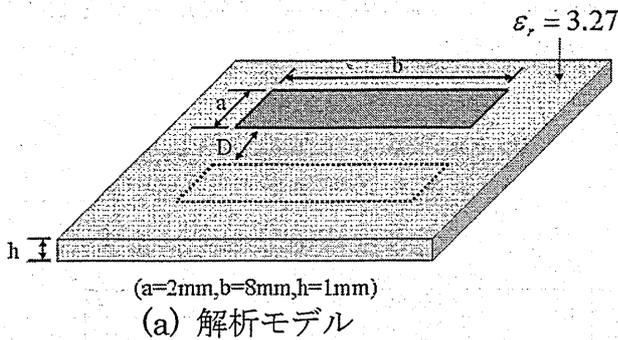


(b) 共振器間距離による結合係数の変化

図 4. 誘電体共振器の結合

次にマイクロストリップライン共振器の解析結果を図 5～図 7 に示す。図 5 は短冊

形のマイクロストリップライン共振器で、その共振器単独の共振周波数は 10.02GHz である。図 5(a)の解析モデルには外部回路は描かれていないが、これまでと同様に共振器の一方の終端を外部線路から励振する。ここでは最低次の 1/2 波長共振モードに着目する。



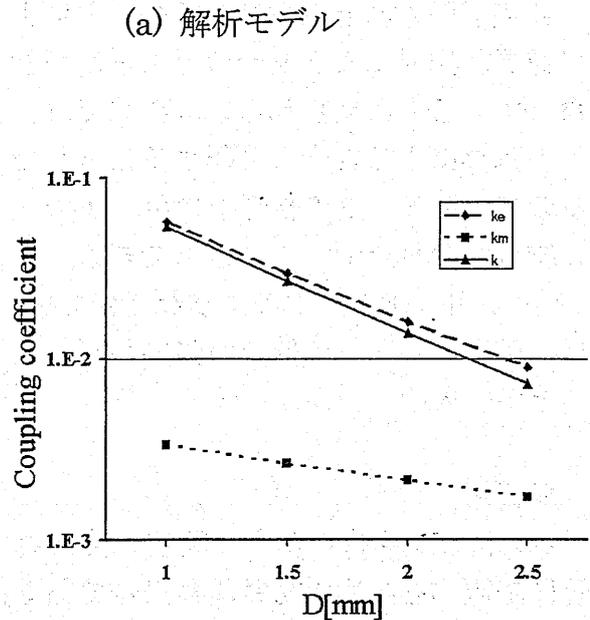
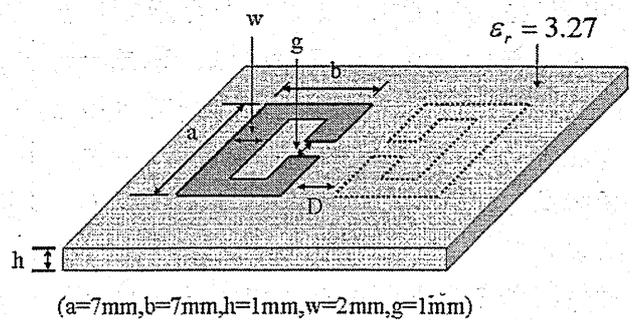
(b) 共振器間距離による結合係数の変化

図 5. マイクロストリップライン共振器の結合

このときの短冊形マイクロストリップライン共振器の電磁界は、共振器の二つの終端に電界が、共振器の中心部分に磁界が集中する。さらに電界は共振器の長手方向も広

がるので、隣り合うもう一つの共振器と電気結合しにくい。それを反映して図 5(b)では磁気結合が電気結合に比べてかなり大きくなっている。

図 6 にオープンリング共振器の解析モデルとその解析結果を示す。これまでと同様に外部回路から励振している。共振器単独の共振周波数は 5.36GHz である。



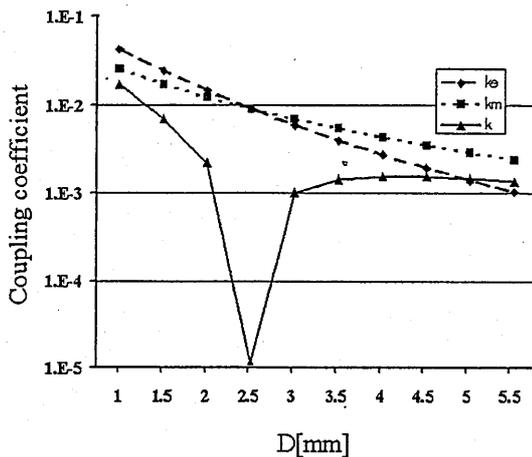
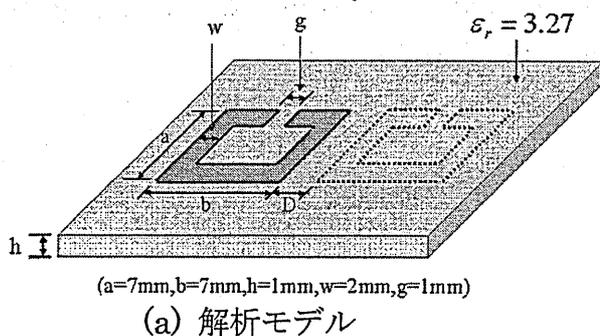
(b) 共振器間距離による結合係数の変化

図 6. オープンリング共振器のギャップ方向の結合

共振器の最低次モードの電界はオープンリングの終端であるギャップ部分に集中し、

磁界はリング線路の中心部分に集中する。したがって、図 6(a)のようにギャップを向かい合わせように二つの共振器を結合させると、その結合は電気結合が強いはずである。図 6(b)の解析結果を見ると、電気結合が強いことが見て取れる。

図 7 にオープンリングを横方向に結合させた場合の共振器間隔による結合係数の変化を示す。オープンリングの電磁界は先に述べた形になっている。したがって、横方向に結合させた場合、電気または磁気による結合の強さはほぼ同程度のはずである。



(b) 共振器間距離による結合係数の変化

図 7. オープンリング共振器の横方向の結合

共振器間隔が小さい場合、電気結合が磁気結合より大きい、間隔がある長さを超えるとその関係は逆転する。遠方では電界の減衰が磁界の減衰より大きいからである。電界と磁界のエネルギーが同じである時、数式(4)の分子がゼロとなるので、結合係数はゼロになる。したがって、共振器間隔に対する結合係数のグラフは図 7(b)に示すように、共振器間隔が長くなっていくと結合係数は徐々に小さくなっていくが、電気エネルギーと磁気エネルギーの大小が入れ替わる距離で一旦急激に減少し、その後共振器間隔に依存して徐々に減少していく。

次に結合係数を求める際の時間積分の周期依存性を示す。図 8 は図 4 の誘電体共振器の解析において、時間積分の周期が正しい値からずれたときの結合係数の変化を示している。この図からわかるように、時間積分を行う一周が僅かでもずれていると結合係数はある値に収束せず、振動する。図 4 の解析条件では、FDTD 法の時間ステップは 1.90526pSec となるので、共振器単独の共振周波数 1.58GHz から、時間積分を行う周期は時間ステップ数で表すと 332.07 ステップとなる。時間ステップは整数の値しかとれないので四捨五入すると 332 ステップになる。1 ステップが 1.90526pSec だから積分周期の 1 ステップのずれは、周波数のずれに直すと 4.7MHz になる。時間積分の周期は共振周波数から算出しているので、非常に高精度で共振周波数を求めなければならないことがわかる。しかし、今回提案しているように、外部回路と共振器を疎結合にし、外部から共振器を励振すると、励振してから数十周期で共振周波数は数百 kHz 以下の精度で収束する。したがって、FDTD 法を用いて、本手法で結合係数を算

出する場合、時間積分の周期がずれて結合係数がある値に収束せず振動する心配はない。

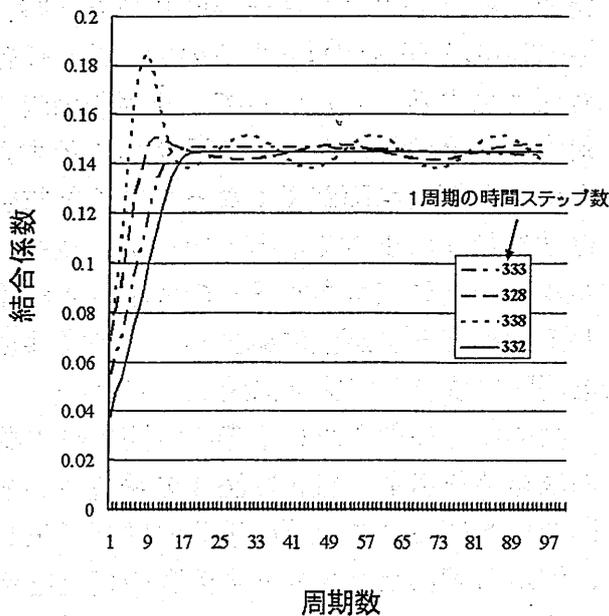


図 8. 結合係数の時間積分の周期依存性

## 6. まとめ

従来の共振周波数から結合係数を求めるのではなく、摂動法からエネルギー積分で結合係数を求める方法を示した。この手法は従来の手法に比べ素早く結合係数を算出できるので、BPF等の設計の際に非常に便利である。

## 参考文献

[1] I. Awai, S. Iwamura, H. Kubo and A. Sanada, "Perturbation Method for Calculation of Coupling Coefficient between Two Resonators", *Proc. of ISAP2005*, Seoul, Korea, pp.443-446, Aug. 2005.

[2] I. Awai, S. Iwamura, H. Kubo and A.

Sanada, "Separation of Coupling Coefficient between Resonators into Electric and Magnetic Contributions", *IEICE Trans. Electronics*, Vol. J88-C, No.12, pp. 1033-1039, Dec. 2005. (In Japanese)

[3] 粟井, 岩村, 久保, 真田, "共振器結合係数の電気及び磁氣的線分への分離", 信学論誌 C, Vol.J88-C, No.12, pp1033-1039, 2005.

[4] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, New York: McGraw-Hill, Inc., pp.317-319, 1961.

[5] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, Hoboken, NJ: J. Wiley & Sons, pp. 300-302, 2005.

# オープンリング共振器を用いた広帯域BPF

## Open Ring Resonators Applicable to Wide-band BPF

栗井 郁雄

アルン クマル シヤハ

(龍谷大学理工学部電子情報学科)

2006年5月23日

於 龍谷大学

# Open Ring Resonators Applicable to Wide-band BPF

Ikuo Awai and Arun Kumar Saha

Department of Electronics and Informatics, Ryukoku University

1-5 Yokotani, Seta-oecho, Otsu 520-2194 Japan

[awai@rins.ryukoku.ac.jp](mailto:awai@rins.ryukoku.ac.jp)

**Abstract** --- Open ring resonators are applied to a wide-band BPF. Their coupling is made quite strong by aligning them diagonally and also into broad-side coupled configuration. External Q is conveniently controlled by changing the tap position to the resonator from the external circuit, adjusting the circuit matching. The conventional insertion loss method still works for a BPF with several ten percent of specific bandwidth.

**Index Terms** --- Open ring resonator, BPF, broad band, coupling coefficient, external Q, insertion loss method.

## 1. INTRODUCTION

Wide-band band pass filters (BPFs) are attracting interest of microwave engineers relating to the ultra-wideband (UWB) communication systems [1], [2]. Among many design methods proposed so far, the conventional insertion loss method is still convenient and useful for a BPF of moderately wide bandwidth with several ten percent of fractional bandwidth.

Open ring resonators are known recently as important unit particles that are collected together to make a metamaterial with negative permeability [3]. Their another feature is a strong coupling between each other when two resonators are aligned properly. The coupled mode theory predicts that strong coupling is attained for the broad side coupling with the open gaps placed diagonally, resulting in cooperation of the electric and magnetic couplings.

Making use of the strong coupling, a BPF with wide bandwidth can be designed being based on the insertion loss method. Hence, we will show how we can control the coupling coefficient together with the external Q that governs the matching to the external circuit. A design example of a two stage BPF will also be shown.

## 2. ORIGIN OF STRONG COUPLING

One of the present authors clarified that the coupling coefficient of metal resonators is expressed by the difference of the magnetic and electric couplings [4] as

$$k = \frac{\int_V \mu H_1 \cdot H_2^* dv - \int_V \epsilon E_1 \cdot E_2^* dv}{\int_V \epsilon |E|^2 dv}, \quad (1)$$

using the coupled mode theory, where  $E_1$  and  $H_1$  are the EM fields of resonator 1 while  $E_2$  and  $H_2$  are those of resonator 2. Here, both resonators are assumed the same except that they are placed with some distance.

Microstrip resonators generally couple strongly when

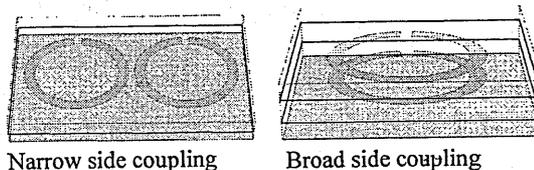


Fig.1 Coupling of microstrip resonators

they are put together facing the broad side each other as shown in Fig.1. The coupling increases further if one rotates the open ring resonators into the opposite direction as shown in Fig. 2. The reason is this: Figure

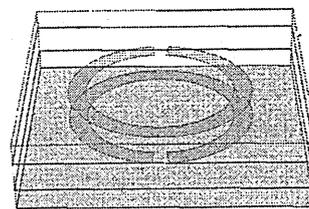


Fig.2 Coupling of 180° rotated open ring resonators

3(a) illustrates the electric field distribution of both resonators before coupling. The overlap integral in the numerator of 2<sup>nd</sup> term of Eq. (1) will be positive since the electric fields between two resonators point in the same

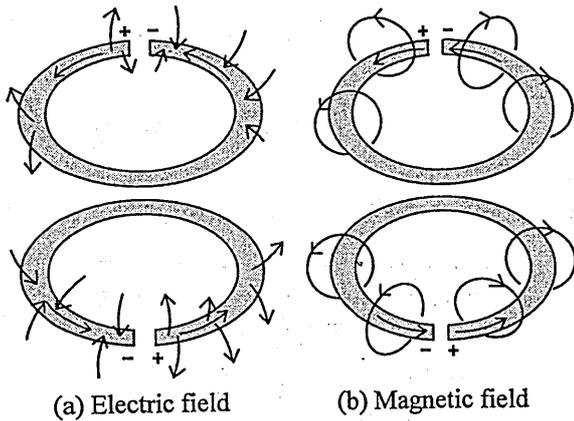


Fig. 3 EM field of  $180^\circ$  rotated open ring resonators before coupling

direction for each. But the direction of the magnetic fields between resonators are opposite for each, which gives the negative overlap integral for the numerator of 1<sup>st</sup> term of Eq. (1). Thus the absolute value of Eq. (1) takes maximum for  $180^\circ$  of the rotation angle, while it takes minimum for  $0^\circ$  of the rotation.

The polarities of both resonators are taken as shown in Fig. 3(a) for convenience's sake. If the polarity of one resonator is reversed, the direction of magnetic field for that resonator in Fig. 3(b) also becomes opposite as well as that of the electric field, and total coupling coefficient defined by Eq. (1) in has the opposite sign and the same magnitude. The sign of coupling coefficient does not affect the coupling characteristics.

### 3. RESONANT FREQUENCY

An open ring resonator is essentially a half-wavelength resonator with a loading capacitance at the open ends. But the capacitance does not increase much by reducing the open gap width. The resonant frequency is shown in Fig.4 as a function of the gap width. As long as one cannot obtain a significant effect by narrow gap, it would be recommended to use a rather large gap width.

The half-wavelength resonance makes the fundamental mode roughly at the frequency

$$f_1 = \frac{v_r}{2l}, \quad (2)$$

where  $v_r$  is the phase velocity of the propagating wave along the ring, and  $l$  is the total length of the resonator. The first spurious mode is from the one-wavelength resonance at

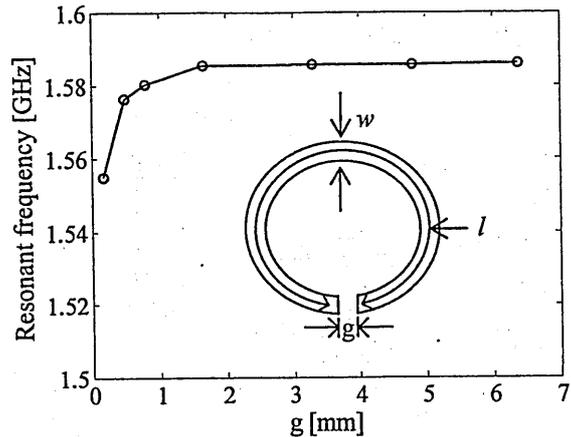


Fig. 4 Resonant frequency as functions of gap width  $g$  ( $l=59.52\text{mm}$ ,  $w=1\text{mm}$ , substrate thickness  $t=0.74\text{mm}$ ,  $\epsilon_r = 3.27$ )

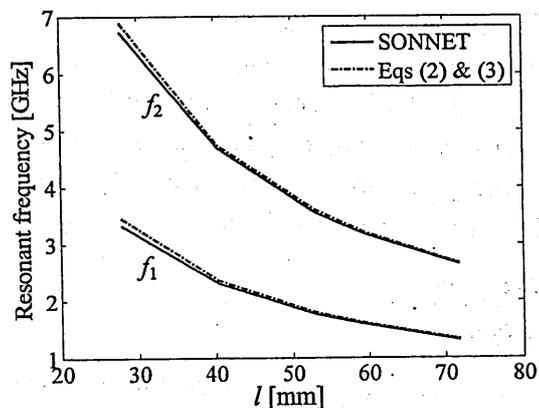


Fig. 5 Resonant frequency of fundamental and first spurious modes as functions of resonator length ( $l=59.52\text{ mm}$ ,  $w=1\text{mm}$ ,  $g=0.5\text{mm}$ )

$$f_2 = \frac{v_r}{l}. \quad (3)$$

The calculated result is shown in Fig. 5 versus the total length of the resonator, keeping the resonator width and the gap constant. Reflecting the effect of the edge capacitance, the frequencies are a little lower than the values calculated by Eqs (2) and (3).

### 4. COUPLING COEFFICIENT

Strong coupling is realized by the structure shown in Fig. 2. The variation of coupling coefficient is illustrated as function of the rotation angle  $\theta$  in Fig.6. It is assumed that a dielectric sheet with the same permittivity as the substrates is inserted between two resonators. The rotation angle  $\theta$  is defined in the insert of Fig. 6. Appreciable enhancement of coupling is observed by

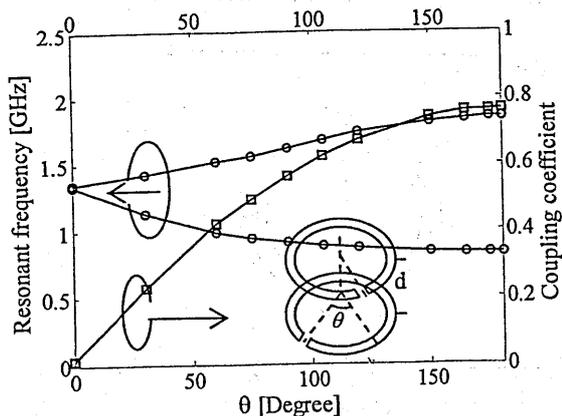


Fig. 6 Coupling coefficient versus rotation angle,  $\theta$  ( $l=59.52\text{mm}$ ,  $w=1\text{mm}$ ,  $g=0.5\text{mm}$ ,  $d=0.28\text{mm}$ ,  $t=0.74\text{mm}$ ,  $\epsilon_r=3.27$ )

rotation of the resonator more than 10 times compared with the no rotation alignment.

One can also control the coupling by varying the resonator distance  $d$  as shown in Figs. 7 and 8. They are for the  $0^\circ$  and  $180^\circ$  rotations, respectively. Both naturally give a stronger coupling for the smaller distances, though the latter shows a more significant increase. In fact, the coupling coefficient defined by

$$k = \frac{2(\omega_h - \omega_l)}{\omega_h + \omega_l} \quad (4)$$

even exceeds 1, and suggests the failure of the insertion loss method for the BPF design. But a BPF of broad passband could be fabricated relying on the strong coupling. The design example will be shown later.

### 5. EXTERNAL $Q$

In the insertion loss method, external  $Q$  of the resonators at the both ends of a BPF is adjusted to attain matching with the external circuits. Since the open ring resonator is a half wavelength resonator with open ends, the  $Q_e$  is theoretically obtained in the following way.

An open-ended half wavelength resonator is tap-fed as shown in Fig. 9. The input admittance at the feeding point is

$$Y_{in} = jY_r \left\{ \tan \frac{\omega}{v_r} \left( \frac{l}{2} - x \right) + \tan \frac{\omega}{v_r} \left( \frac{l}{2} + x \right) \right\}, \quad (5)$$

where  $Y_r$  is the characteristic admittance of the transmission line that makes the resonator and  $v_r$  is the corresponding phase velocity. Then, the external  $Q$  is

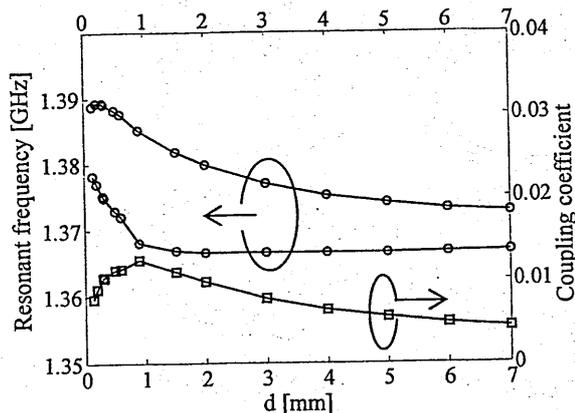


Fig. 7 Coupling coefficient versus resonator distance for no rotation ( $l=59.52\text{mm}$ ,  $w=1\text{mm}$ ,  $g=0.5\text{mm}$ ,  $\theta=0^\circ$ ,  $t=0.74\text{mm}$ ,  $\epsilon_r=3.27$ )

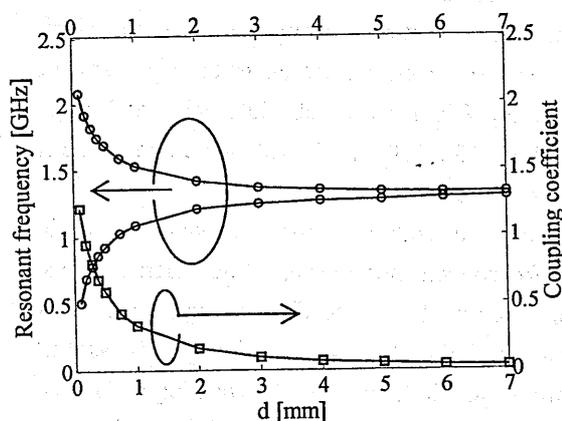


Fig. 8 Coupling coefficient versus resonator distance for  $180^\circ$  rotation ( $l=59.52\text{mm}$ ,  $w=1\text{mm}$ ,  $g=0.5\text{mm}$ ,  $\theta=180^\circ$ ,  $t=0.74\text{mm}$ ,  $\epsilon_r=3.27$ )

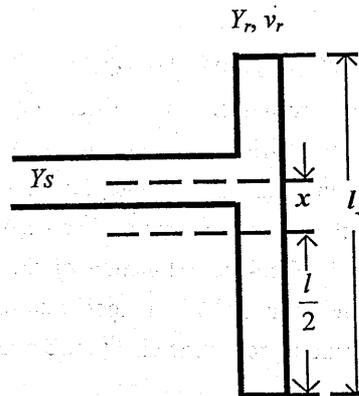


Fig. 9 Calculation of external  $Q$  of tapped  $\lambda/2$  resonator

calculated

$$Q_e = \frac{\omega_r}{2Y_s} \frac{dB_m}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_r} = \frac{Y_r \pi}{2Y_s} \csc^2 \frac{\pi x}{l}, \quad (6)$$

where  $\omega_r$  is the resonant angular frequency and  $B_m$  is the imaginary part of the input admittance.

The external Q will be infinite at  $x=0$  (center of the resonator). In other words, the external coupling is minimum when tapped at the center of the resonator, while it is maximum at the ends of the resonator as is expected.

Considering that the ring resonator is made by rolling the straight resonator shown in Fig. 9 into a circular ring, the same theory will be applied except a small capacitance effect at the ends. The angle from the center of the resonator as shown in the inset of Fig. 10 will be convenient to specify  $Q_e$ . The relation between  $x$  and  $\phi$  should be

$$\phi = 360 \times \frac{x}{l+g} \quad (7)$$

The theoretical value of external Q as a function tap angle  $\phi$  is shown in Fig. 10.

In order to confirm the validity of this theory, the external Q is also calculated from the relation between phase angle values of reflection coefficient and external Q which is given below

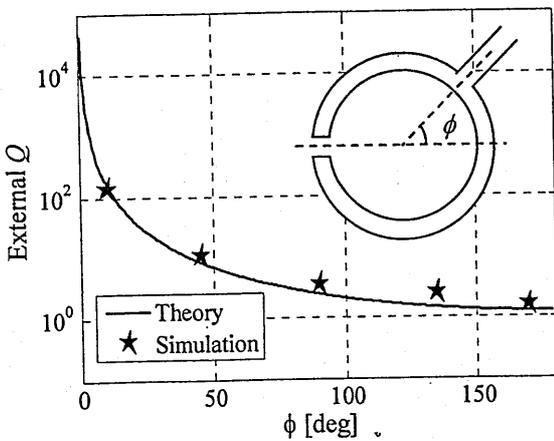


Fig. 10 External Q of open ring resonator as functions of excitation point from center

$$\angle S_{11} = -2 \tan^{-1} \left( \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q_e \right) \quad (8)$$

The phase angle values are simulated by SONNET and calculated values of external Q is shown in Fig.10 by star points and thereby confirms a good agreement between the theoretical calculations and simulated results.

## 6. AN EXAMPLE OF BPF DESIGN

For a 2 stage Butterworth type BPF, one will have

$g_0 = g_3 = 1, g_1 = g_2 = \sqrt{2}$ . The broader bandwidth of a BPF is attained by a larger coupling coefficient which automatically requires a smaller  $Q_e$  for circuit matching. So the simulated values of external Q as shown in Fig. 10 puts one in some restrictions in terms of bandwidth. The lowest possible value of external Q which can be obtained from simulation is 1.62 for the excitation angle of  $170^\circ$ .

Therefore, maximum possible bandwidth ( $w$ ) which can be obtainable is  $w = \frac{g_0 \cdot g_1 \cdot \omega_1}{Q_e} = 0.87$  and this value of bandwidth gives the coupling

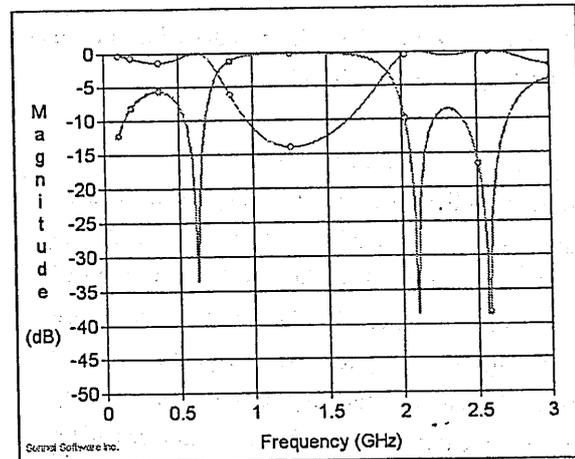


Fig. 11 Designed 2-stage broadband BPF

coefficient  $k = \frac{w}{\sqrt{g_1 \cdot g_2}} = 0.62$ . Now this value of

coupling coefficient can be obtained by two  $180^\circ$  rotated open ring resonators with 0.46 mm distance between those (Fig. 8). Outer and inner radius of the ring resonator is 10 mm and 9 mm respectively. The gap between two ends is 0.5 mm and resonator length is 59.52 mm which gives the central frequency  $f_0 (=1.30 \text{ GHz})$ . With all these parameters, the BPF is simulated by SONNET and result is displayed in Fig.11. From the simulation result, it is observed that fractional bandwidth is 94% with poor return loss. After adjusting the distance between the resonators to 0.28mm, which is commercially available, good return loss is

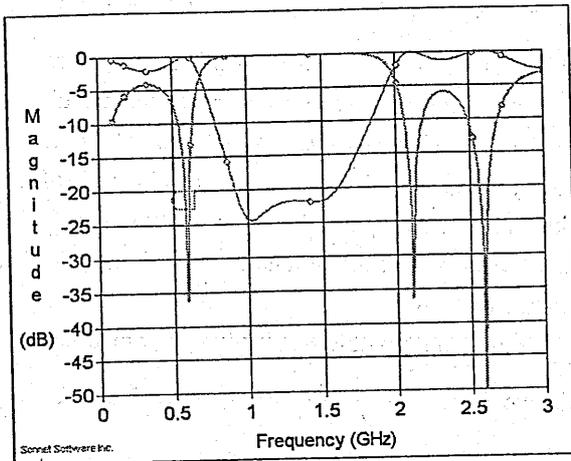


Fig. 12 Designed 2-stage broadband BPF after adjusting the resonator distance

obtained and same 94% fractional bandwidth, in this adjusted BPF, is observed (Fig. 12).

#### CONCLUSION

The strong coupling between two broadside-coupled open ring resonators is exploited to propose a design method of a broadband BPF. But the limited range of simulated values for external Q is an obstacle to utilize the full strength of coupling. The required value of external Q for circuit matching can be obtained by varying the excitation angle keeping the resonator distance constant. A good agreement is observed between the theoretical and simulated values of external Q. The proposed BPF is really very compact in size and easy to fabricate. Out-of-band properties of the designed BPF is not so improved. Further attention could be given to improve that.

#### REFERENCES

- [1] K. Li, D. Kurita, and T. Matsui, "An Ultra-Wideband Bandpass Filter Using Broadside-Coupled Microstrip-Coplanar Waveguide Structure", *2005 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, WE2F-1, June 2005.
- [2] H. Ishida and K. Araki, "Design and Analysis of UWB Band Pass Filter with Ring Filter", *2004 IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, vol. 3, pp.1307-1310, June 2004.
- [3] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins and W. J. Stewart, "Magnetism for conductors and enhanced

nonlinear phenomena", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.47, No.11, pp.2075-2084, Nov. 1999.

[4] I. Awai, "New Expressions for Coupling Coefficient between Resonators", *IEICE TRANS. ELECTRON.*, Vol.E88-C, No.12, pp2295-2301, Dec. 2005.

アルカリエッチングした Si 基板を用いた静電引力式  
赤外波長可変フィルタ

山田逸成、木村和哉、斉藤光徳

龍谷大学 理工学研究科 電子情報学専攻

2006 年 5 月 23 日

## 要約

2枚のアルカリエッチングしたSi基板を貼り合わせ、赤外用 Fabry-Perot フィルタを作製した。このフィルタに電圧を印加すると基板間に静電引力が働き、基板間隔が減少する。その結果、可変波長フィルタとして機能することができる。この駆動電圧を低減するためにアルカリエッチングで薄くした Si 基板の厚みは  $34\mu\text{m}$  であった。この基板を用いて作製したフィルタに直流電圧  $0\sim 20\text{V}$  印加した結果、干渉ピーク波長は  $7.9\mu\text{m}\sim 5.5\mu\text{m}$  の範囲で制御することができた。また、Si 基板を薄くすると、基板内で干渉が生じ、複雑なスペクトルになることも問題であった。この基板内の干渉を除去するために、2つの方法を提案した。1つは基板表面をあらして、基板内の干渉を抑えた。もう1つの方法は、Si 基板表面に無反射コーティングを施して抑えることができた。

## 1. はじめに

物質固有の光吸収を利用した材料分析やガス検知を行なうには、分光技術が必要である。現在の分光計測においては、プリズムや回折格子を利用した計測方法や、マイケルソン干渉計を利用したフーリエ変換法が一般的に用いられているが<sup>1,2)</sup>、それらの方法では機械的な駆動を要するため、小型化が難しいという問題点がある。

Fabry-Perot フィルタの透過波長を変える方法としては、基板間隔を変えたり、基板間の媒質の屈折率を変えたりすることが考えられる<sup>3)</sup>。基板の間隔を機械的駆動により制御しようとすると、モータが必要となり、小型・軽量にするのが困難になる。圧電アクチュエータで干渉層の間隔を変化するには高電圧( $\sim 1000\text{V}$ )を要するといった問題もある<sup>4)</sup>。フィルタを小型にする方法として干渉層に液晶を入れ、電圧の印加により、基板間の光路長を変化することも検討されているが<sup>5-7)</sup>、赤外域では液晶による吸収が存在することに加え、使用する赤外用の偏光子が非常に高価であることも問題となっている。MEMS 技術を応用した Fabry-Perot フィルタも提案されているが<sup>9,10)</sup>、作製工程が多く、時間を要するため、低コスト化が難しい。

これまで我々は優れた赤外光の透過特性と導電性、高屈折率(高反射率)、高弾性係数を有する2枚の Si 基板を  $5\mu\text{m}$  の微小球を介して貼り合わせ、静電引力式波長可変 Fabry-Perot フィルタを作製してきた<sup>11)</sup>。これは基板間に電圧をかけると、静電引力で干渉層の間隔が変化し、干渉ピーク波長が変化するものである。これまで電圧印加によって干渉ピーク波長の移動を確認してきたが、基板間隔を  $1\mu\text{m}$  変化するのに約  $70\text{V}$  の電圧が必要であった。この駆動電圧を低減するためには、基板を薄く撓みやすくすることが必要である。そこで、微細構造の形成やマイクロセンサ・マイクロマシンデバイスの製作などに利用されるアルカリエッチングを行ない、Si 基板を薄くし、駆動電圧の低減を試みた。Si 基板を薄く( $\sim 100\mu\text{m}$ )すると、基板強度の低下や、Si の基板厚が赤外光のコヒーレンス長(可干渉な光路長)より短くなるために、基板内で反射を繰り返す結果、干渉が生じ、複雑なスペクトルになるという問題もあった。ここでは、低電圧駆動 Fabry-Perot フィルタの作製に向けて、強度の向上、およびこの基板内干渉の抑制について検討を行なったので報告する。

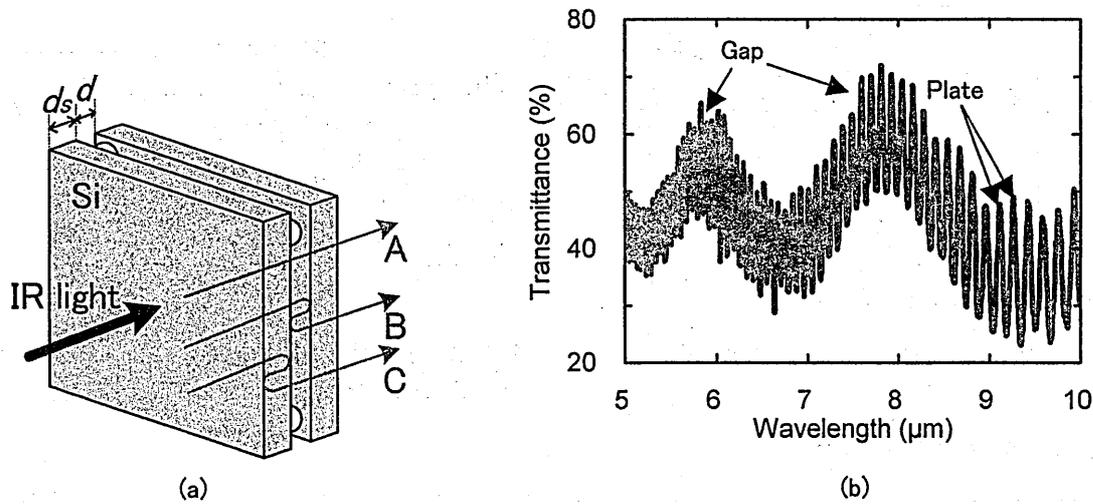


図1 (a) Fabry-Perotフィルタの構造。(b) Si薄板で作製したFabry-Perotフィルタの透過スペクトル(基板厚 $d_s=100\mu\text{m}$ 、基板間隔 $d=11.5\mu\text{m}$ )。

## 2. Si 薄板を使用した Fabry-Perot フィルタ

駆動電圧の低減に向けて、Si 基板を薄くし、撓みやすくすることを考えた。鏡面研磨した Si 基板(基板厚 $100\mu\text{m}$ 、大きき $20 \times 20\text{mm}^2$ )をスペーサを介して貼り合わせ Fabry-Perot フィルタを作製し(図 1(a))、フーリエ変換赤外分光法(FT-IR)で透過スペクトルを測定した。そのスペクトルを図 1(b)に示す。波長  $5.85\mu\text{m}$  と  $7.85\mu\text{m}$  の干渉ピークに加え、細かい周期のピークが確認された。これは図 1(a)に示す、Fabry-Perot フィルタを透過する光 A と、基板間で反射し透過する光 B との干渉光に加え、透過光 A と、基板内で反射して透過する光 C との干渉光が混合してスペクトルに現れている。中赤外域(波長  $2 \sim 20\mu\text{m}$ )の場合、基板を  $100\mu\text{m}$  以下まで薄くすると基板厚よりもコヒーレンス長が長くなるために基板内で干渉が生じる。ここで、 $m$  次の干渉ピークは

$$\lambda_m = \frac{2d}{m}, \quad \lambda_m' = \frac{2nd_s}{m} \quad (1)$$

として与えられる。この式で  $n$  は Si の屈折率である。例えば  $n=3.4$ 、基板厚  $d_s=100\mu\text{m}$  の時、ピーク波長  $\lambda_m'$  は  $m=100$  の時  $6.80\mu\text{m}$  であり、 $m=101$  の時、 $6.73\mu\text{m}$  と算出される。その結果、細かい周期のピークが現れる<sup>12)</sup>。この細かい周期のピークは電圧印加によってシフトしないため、単一波長を抽出するには不都合である。(1)式から以下の式が導かれ、干渉ピーク波長から基板間隔  $d$  を求めることができる。

$$d = \frac{\lambda_m \lambda_{m+1}}{2(\lambda_m - \lambda_{m+1})} \quad (2)$$

隣り合うピーク波長  $\lambda_m, \lambda_{m+1}$  は  $7.85\mu\text{m}$  と  $5.85\mu\text{m}$  なので、フィルタの基板間隔  $d$  は  $11.5\mu\text{m}$  となる。基板厚  $d_s$  も同様に計算することができる。

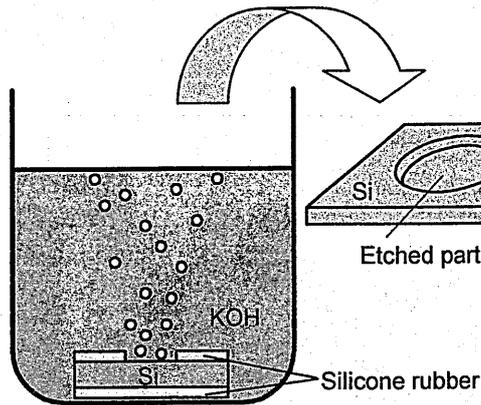


図2 アルカリエッチングの概念図。

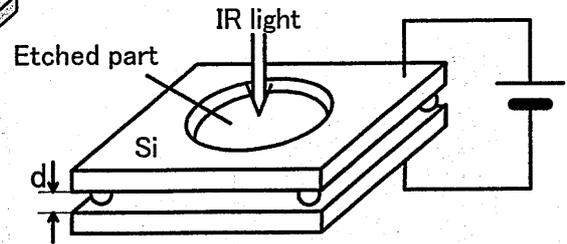


図3 エッチングした基板を用いた Fabry-Perot フィルタの構成図。

### 3. アルカリエッチングによる Si の薄板化

低電圧でフィルタを駆動するためには Si 基板を薄くする必要がある。基板を 100 $\mu\text{m}$  以下に機械研磨を行なうと基板強度の低下が避けられない。Si 基板の薄板化には微細加工などに用いられているアルカリエッチングで行なった。KOH のような強アルカリ溶液中に Si を浸すと Si が水酸基と反応して溶け出す。その反応式を(3)に示す<sup>13)</sup>。



Si 基板は n 型、抵抗率が 2~4  $\Omega\text{cm}$ 、厚さ 200 $\mu\text{m}$ 、大きさ 20 $\times$ 20 $\text{mm}^2$ 、そして結晶方位はエッチング後、比較的平坦な面を形成することができる(100)面の基板を使用した<sup>14,15)</sup>。基板強度の低下を抑えるために選択的に基板を薄くすることを考えた。Si 基板の片側の面は直径 13mm の穴をあけたシリコンゴム製のマスクを密着し、もう一方の面は全面にマスクを覆った。この状態で、KOH 水溶液中に入れ、中心部のみエッチングを行なった(図2)。このように縁を形成することでフィルタ強度を保持することができる。KOH 水溶液の濃度・温度はエッチング速度の観点から 8mol/l 約 80 $^\circ\text{C}$  とした<sup>14,15)</sup>。エッチングした 2 枚の Si 基板を図 3 に示すように貼り合わせてフィルタを作製した。

### 4. 基板内干渉の抑制

図 1(b)に示した基板内干渉の抑制は、2 つの方法で検討した。1 つは予め Si 基板表面をサンドペーパーで粗研磨した後に KOH 水溶液でエッチングを行なう方法である。もう 1 つは鏡面研磨し、エッチングした基板表面に無反射コーティングを施して、基板内干渉の除去を行なう方法である。このようにして処理した 2 枚の Si 基板を貼り合わせて Fabry-Perot フィルタを作製した。

#### 4.1. Si 基板の粗研磨エッチング

Si 基板の表面をあらす方法として、まず基板表面を#1000 のサンドペーパー(粒径 15 $\mu\text{m}$ )で 10~20 回程度粗研磨し、アルカリエッチングを行なった。鏡面研磨した Si 基板と、粗研磨した基板をそれぞれ 90 分間アルカリエッチングし、基板表面を共焦点レーザ顕微鏡で観測した写真を図 4 に示す。エッチング後の基板厚はそれぞれ 110 $\mu\text{m}$  であった。鏡面研磨した基板は、エッチング後もほぼ平坦な表面であるのに対し(図 4(a))、粗研磨した基板表面では 200~300 $\mu\text{m}$  周期の凹凸が見られた(図 4(b))。表面段差計(Tencor,

Alpha-Step 200)で、この表面の平均表面粗さ Ra を測定した。粗研磨後の Ra は  $0.20\mu\text{m}$  であったが、アルカリエッチング後は  $0.84\mu\text{m}$  と大幅に増加していた。鏡面研磨した基板をアルカリエッチングした平均表面粗さは  $0.11\mu\text{m}$  であった。

図 4(a)(b)の各基板を FT-IR で透過スペクトルを測定した。図 5 にその透過スペクトルを示している。鏡面研磨した Si 基板は鋭い干渉ピークが多数現れた。これは、エッチング後の基板表面が平坦であることと、Si 基板厚がコヒーレンス長よりも短くなったことがあげられる。一方、表面をあらした基板は凹凸による基板厚の変動により干渉が生じにくくなり、そのような干渉ピークは確認されなかった(図 5(b))。

エッチング時間を 0~120min に変化し、それぞれの Si 基板表面を共焦点レーザー顕微鏡で観測した。その顕微鏡写真を図 6 に示す。粗研磨直後の表面では  $20\sim 30\mu\text{m}$  幅の溝が形成されていたが、エッチングするにつれて球面状の凹凸に変化し、その大きさも大きくなる傾向が見られた。エッチング時間 120min では約  $300\sim 400\mu\text{m}$  まで広がった。

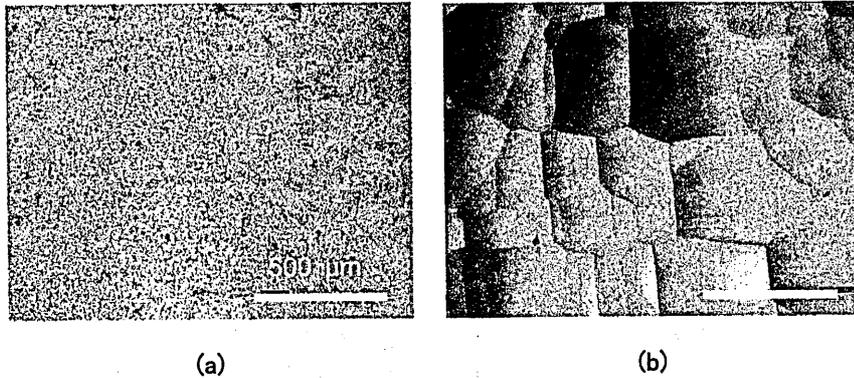


図 4 8M の KOH 水溶液中 ( $80^{\circ}\text{C}$ ) でエッチングした Si<100>表面の共焦点レーザー顕微鏡写真。(a)鏡面研磨した Si 基板をエッチング。(b)粗研磨後、エッチング。

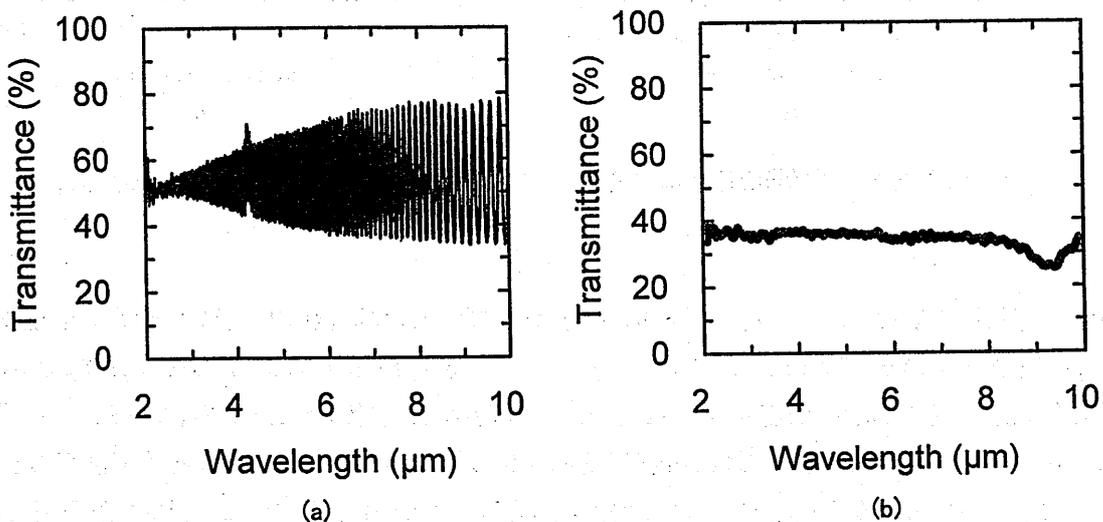


図 5 アルカリエッチング後の Si 基板の透過スペクトル(基板厚  $110\mu\text{m}$ )。 (a) 鏡面研磨した Si 基板をエッチング。(b)粗研磨後、エッチング。

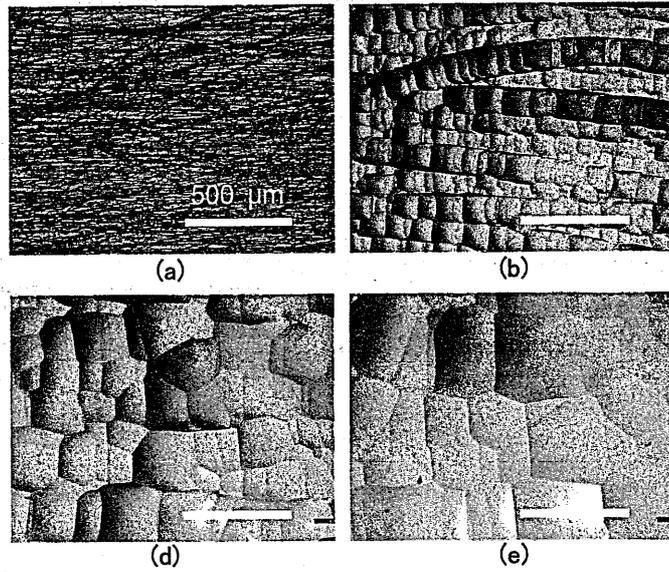


図 6 粗研磨し、アルカリエッチングした Si<100>表面の共焦点レーザー顕微鏡写真。エッチング時間は、(a)0、(b)30、(c)60、(d)120min である。

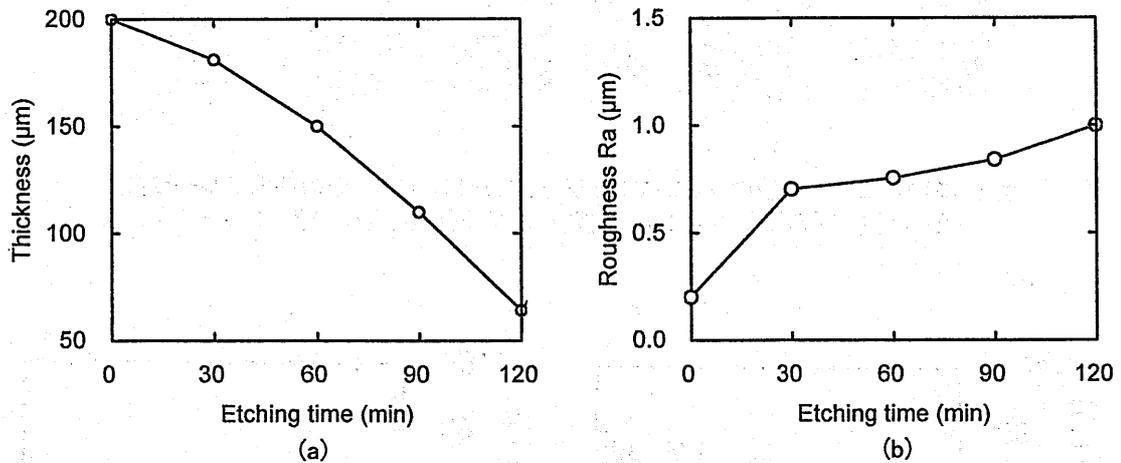


図 7 (a)エッチング時間と基板厚の関係。(b)エッチング時間と平均表面粗さ Ra の関係。

図 7(a)に基板厚の変化とエッチング時間の関係を示す。エッチング速度はエッチング時間の経過に従って、徐々に速くなっている。これは、はじめの約 1 時間は溶液温度が 80°C に達していないため、反応速度が遅いことにある。図 7(b)は平均表面粗さ Ra とエッチング時間との関係を示している。エッチング時間を長くすると、Ra は増加している。図 6 の顕微鏡写真と図 7(b)の結果からエッチングによる基板表面の形状変化を図 8 に示す。エッチングが進むにつれて粗さ周期  $a$  と溝深さ  $b$  が増加している。これは粗研磨によって様々な面が現れたためと考える。Si は結晶方位面によってエッチング速度が大きく変化する。このエッチング速度の違いが、このような凹凸を形成したと推測する。

FT-IR で図 6 に示した Si 基板の透過スペクトルを測定した。図 9(a)に透過スペクトルを示す。いずれの基

板においても図 5(a)で見られた基板内干渉によるピークは見られなかった。波長  $9\mu\text{m}$  あたりの透過率の減少は Si 基板に含まれる  $\text{SiO}_2$  の吸収によるものである。粗研磨直後の透過スペクトルでは短波長側に透過率の減少が見られた。粗研磨で形成された溝ピッチは  $10\sim 20\mu\text{m}$  程度であり、波長とほぼ同等の凹凸周期であったため、この減少は基板表面での散乱損失と考えられる。それに対し、アルカリエッチングした Si 基板の透過スペクトルは波長依存性が見られなかった。この要因は凹凸周期  $a$  が  $100\mu\text{m}$  以上であり、波長よりも大幅に長くなったためと考える。エッチング時間に対する波長  $4\mu\text{m}$  での透過率変化を図 9(b)に示す。エッチング時間の経過に伴い、透過率は増加している。エッチング時間を長くすると表面の凹凸周期が広がり、凸部が減少している。波長依存性もないことからエッチング時間における透過率の変化は凸部における屈折損失と考えられ、高い透過率を得るにはエッチング時間を可能な限り長くした方が良いことになる。120min エッチングを行なった結果、波長  $4\mu\text{m}$  での透過率は 39%であった。Fresnel の反射理論を考慮すると Si 基板の理論透過率は 54%であるので、約 15%の差は主に凸部の屈折損失と考える。

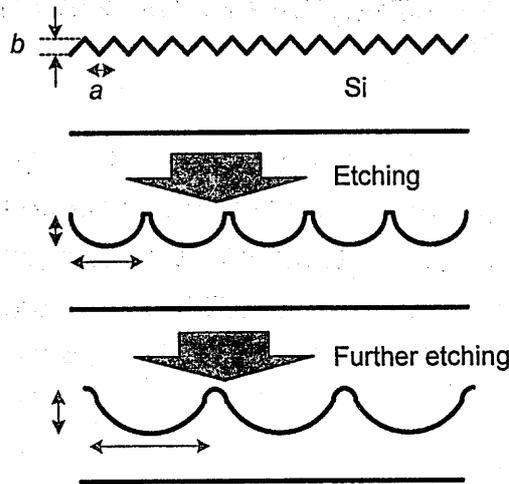


図 8 アルカリエッチングによる Si 基板表面の形状変化。

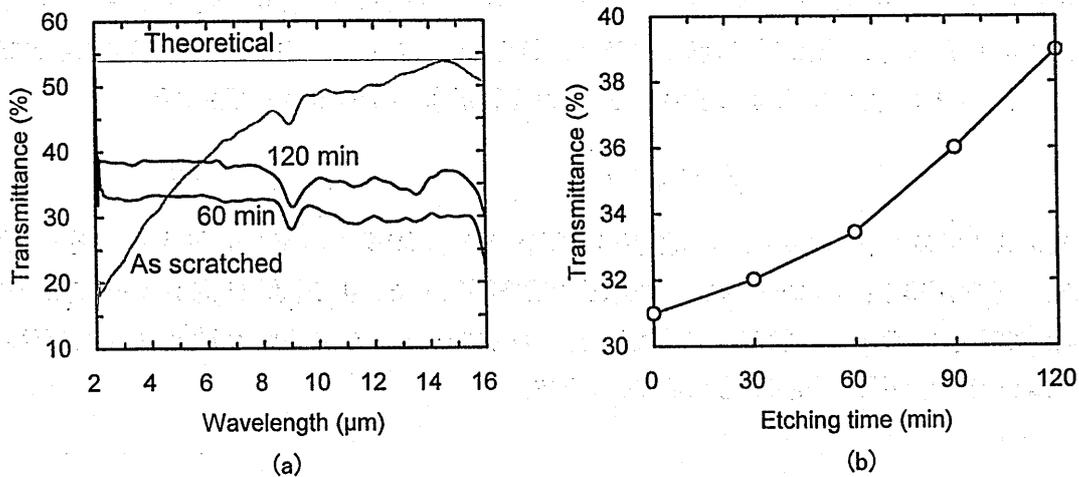


図 9 アルカリエッチングした Si 基板の透過スペクトル測定結果。(a) エッチング時間 0~120min の透過スペクトル。(b)波長  $4\mu\text{m}$  でのエッチング時間と透過率の関係。

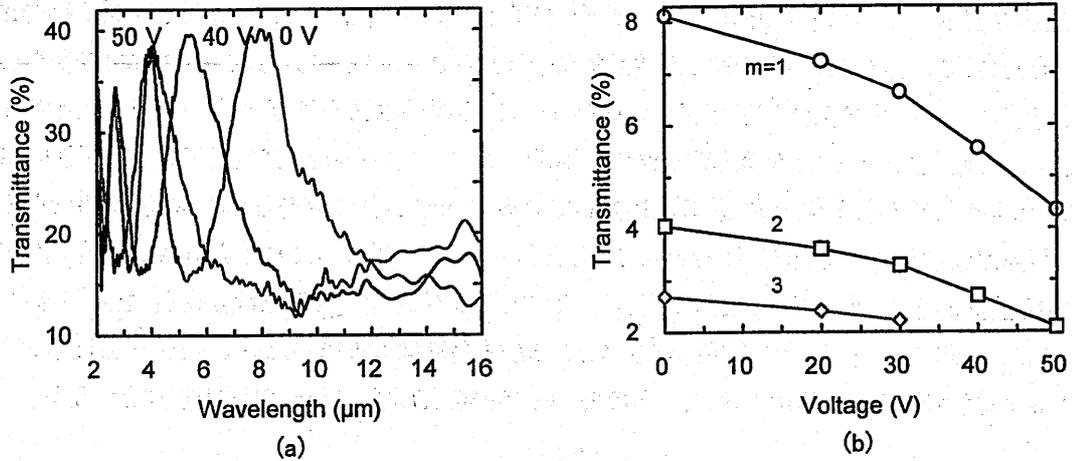


図10 表面をあらした Si 基板で作製した Fabry-Perot フィルタの透過スペクトル。(b) 干渉ピーク波長の電圧依存性。

この粗研磨し、アルカリエッチングを行なった Si 基板を使用して、図 3 に示した Fabry-Perot フィルタを作製した。Si 基板は 90min エッチングしたものをを使用した。このフィルタの基板間に 0~50V の直流電圧を印加し、FT-IR で透過スペクトルを調べた。透過スペクトルを図 10 に示す。図 1(b) や図 5(a) で見られた細かい周期のピークは見られなかった。干渉ピークは電圧印加によって短波長側にシフトし、 $m=1$  の干渉ピーク波長は  $8.1\mu\text{m}$  から  $4.2\mu\text{m}$  にシフトした。つまり、基板間隔は  $4.1\mu\text{m}$  から  $2.1\mu\text{m}$  に変化したことになる。ピーク透過率は 39% であった。

#### 4.2. 無反射コーティング

Si を光学デバイスに扱う際、屈折率が 3.4 と高いため、表面反射損失が 30% と大きくなるのが問題となる。高い反射率は Fabry-Perot フィルタにおいて基板間での干渉を高めるために必要であるが、フィルタ表面での反射損失はできる限り低減したい。一般的にこの損失を抑えるために無反射コーティングが行なわれる。無反射コーティングは基板表面での反射が抑えられるので、基板内干渉を抑えることができる。無反射コーティングに適した材料は以下の式で得られる屈折率  $n_1$  の材料が選択される。

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_s} \quad (4)$$

ここで  $n_0$  は空気の屈折率であり、 $n_s$  は基板の屈折率である。(4) 式に Si 基板の屈折率 3.4 を代入すると  $n_1$  は 1.8 という値が得られる。コーティング材料として屈折率 1.8 であり、透過波長域が  $0.4\sim 7\mu\text{m}$  である一酸化珪素 (SiO) をコーティング材料として使用した。無反射コーティングの膜厚  $d_f$  は  $d_f = \lambda_0 / 4n_1$  で与えられる。ここで  $\lambda_0$  は反射率が最も小さくなる波長である<sup>16,17)</sup>。

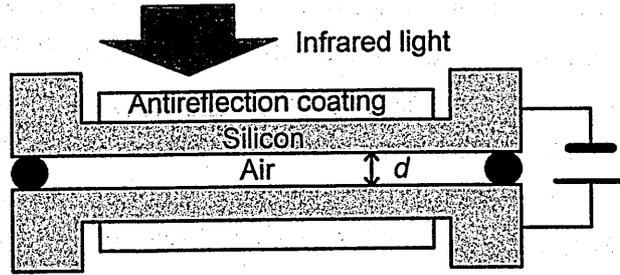


図 11 無反射コーティングした Fabry-Perot フィルタの構成図。

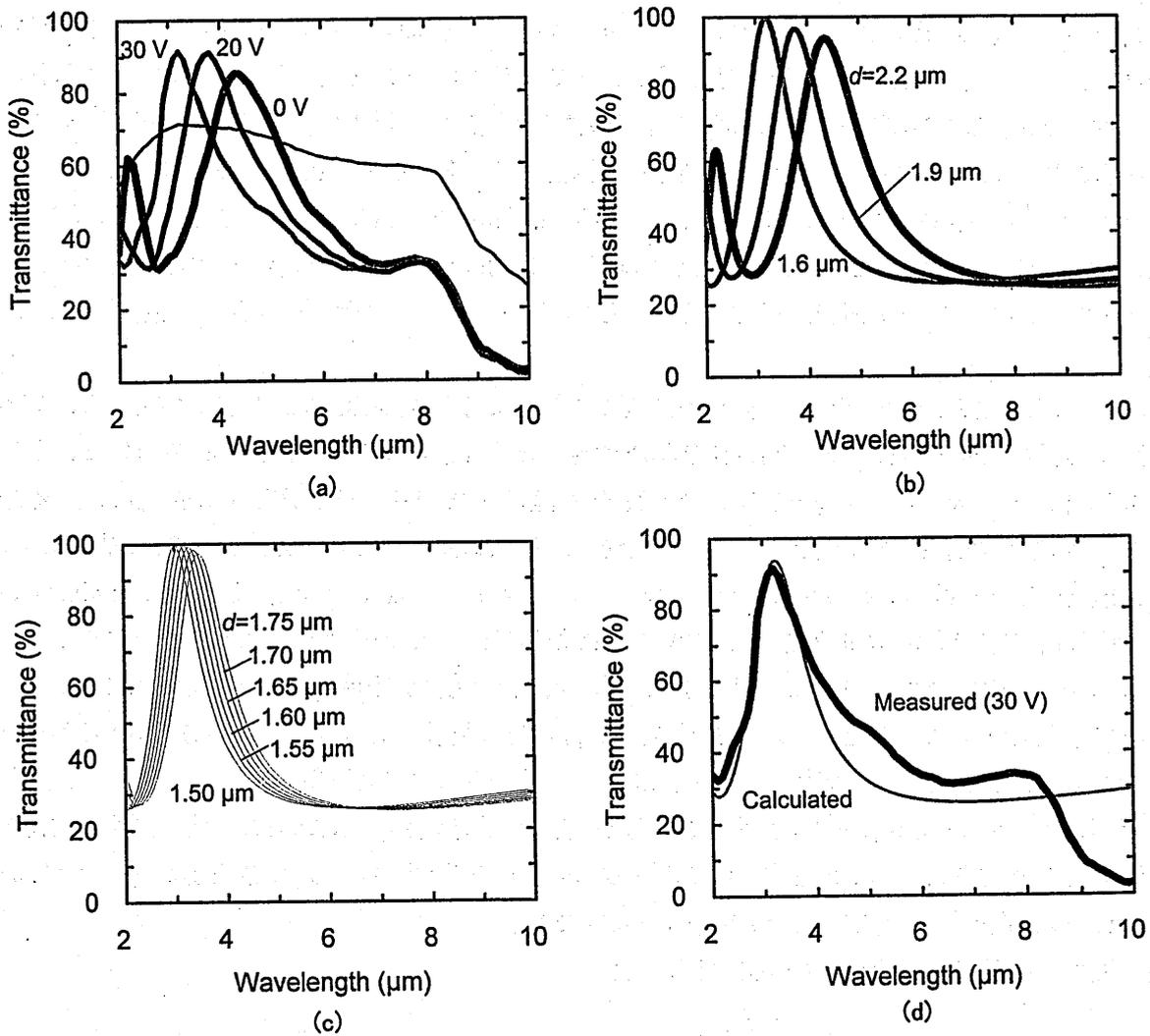


図 12 (a) SiO<sub>2</sub> をコーティングした Fabry-Perot フィルタの透過スペクトル(太線)の電圧変化。細線は SiO<sub>2</sub> をコーティングした Si 基板の透過スペクトル。(b) (a)のスペクトルを理論計算したグラフ。(c)基板間隔 1.50–1.75 $\mu\text{m}$  の理論スペクトル。(d) (c)のスペクトルを平均したグラフと 30V 印加時のスペクトル。

鏡面研磨し、アルカリエッチングした Si 基板の表面に真空蒸着法で SiO<sub>2</sub> をコーティングした。蒸着前にアルカリエッチングを 120min 行なった結果、基板厚は 68 $\mu\text{m}$  であった。エッチングした表面に約 0.5 $\mu\text{m}$  厚の SiO<sub>2</sub> 膜を蒸着し、図 11 に示すように蒸着した面が外側となるように貼り合わせ、Fabry-Perot フィルタを作製した。膜厚は水晶膜厚モニターを用いて制御した。蒸着した基板の透過スペクトルを図 12(a)(細線)に示

す。この膜による干渉ピークは波長  $3.3\mu\text{m}$  で、透過率は 70%であった。この値は Fresnel 反射を考慮した理論値とほぼ同等の値であった。この基板を使用した Fabry-Perot フィルタの透過スペクトルを図 12(a)太線に示す。電圧印加前(0V)では干渉ピークは波長  $4.4\mu\text{m}(m=1)$ と  $2.2\mu\text{m}(m=2)$ に現れた。波長  $10\mu\text{m}$  あたりの透過率の減少は  $\text{SiO}_2$  の吸収によるものである。このフィルタに電圧を 20V 印加すると、 $m=1$  の干渉ピークは  $3.8\mu\text{m}$  に移動し、更に 30V まであげると  $3.2\mu\text{m}$  まで移動した。基板間隔は  $2.2\mu\text{m}\sim 1.6\mu\text{m}$  の範囲で変化した。干渉ピークの透過率は電圧印加にかかわらず 85%以上であり、電圧印加によってピーク透過率は 91%にまで増加した。これは無反射コーティングの透過ピーク波長が  $3.0\sim 3.5\mu\text{m}$  に位置しているためである。

図 12(b)に基板間隔  $d$  を 2.2、1.9、 $1.6\mu\text{m}$  とした時のシミュレーション結果を示す。ここで無反射コーティング材料の屈折率を 1.8、膜厚は  $0.45\mu\text{m}$  としている。Si の光吸収や散乱は考慮していない。30V の電圧印加に相当する基板間隔  $d=1.6\mu\text{m}$  の透過率は波長  $3.2\mu\text{m}$  でほぼ 100%に達している。しかしながら実験値では 91%であった。この差は静電引力による Si 基板の歪みが透過率の減少に影響を与えたと考える。この基板の歪みにより、様々な波長の干渉光が混在したと推測した。そこで、基板間隔  $1.50\sim 1.75\mu\text{m}$  の干渉光をそれぞれ求め(図 12(c))、その平均値を計算し、実験値(30V)の透過率と比較した結果を図 12(d)に示す。ピーク部でほぼ一致することが確認された。つまり、基板間隔が  $1.50\sim 1.75\mu\text{m}$  の干渉光が混在したため、図 12(a)に示す 30V の干渉ピークが得られたと考える。その結果、干渉ピークの低下を招くこととなった。

$\text{SiO}_2$  は Si にとって無反射コーティング材料として適した材料であるが、波長  $8\mu\text{m}$  以降に大きな吸収を持っている。より長波長域の無反射コーティングを行なう場合、波長  $14\mu\text{m}$  まで透過する ZnS(屈折率 2.2)が用いられる。そこで 140min アルカリエッチングした後、ZnS を蒸着した Si 基板を上記同様に貼り合わせ、透過スペクトルを測定した。図 13 に透過スペクトルを示す。Si 基板の厚みは  $34\mu\text{m}$  であり、基板間隔は  $7.9\mu\text{m}$  であった。干渉ピークは  $7.9\mu\text{m}(m=2)$ 、 $5.2\mu\text{m}(m=3)$ 、 $3.9\mu\text{m}(m=4)$ 、 $3.1\mu\text{m}(m=5)$ 、 $2.6\mu\text{m}(m=6)$ 、 $2.2\mu\text{m}(m=7)$  の波長で現れた。このフィルタに電圧を 10V、20V 印加したところ、 $m=2$  の干渉ピークは  $6.9\mu\text{m}$ 、 $5.5\mu\text{m}$  に、 $m=3$  の干渉ピークは  $4.6\mu\text{m}$ 、 $3.7\mu\text{m}$  へと短波長へ移動した。最も高い干渉ピークの透過率は 89%(0V、 $3.9\mu\text{m}$ )であり、図 12(a)で示したピークよりも低い。これは最適な屈折率 1.8 から ZnS の屈折率(2.2)が外れているからである。電圧を 20V 印加すると最も高いピーク透過率は 76%(波長  $3.7\mu\text{m}$ )まで減少した。これは基板間隔が  $7.9\mu\text{m}$  から  $5.5\mu\text{m}$  まで減少しているため基板が大きく歪んでしまったことが大きな要因として考えられる。基板の歪みにかかわらず  $m=2$  のピーク透過率の変化が小さいのは、無反射コーティングした基板のピーク透過率が波長  $4.1\mu\text{m}$  に位置しているからである。

基板間に働く静電引力  $F(N)$ を以下の式で算出した。

$$F = \frac{\epsilon_0 S}{2d^2} V^2 \quad (5)$$

ここで、 $V$  は印加した電圧(V)であり、 $S$  は基板面積( $\text{mm}^2$ )、 $\epsilon_0$  は真空中の誘電率であり、 $8.854 \times 10^{-12}(\text{F/m})$  である。 $V=20\text{V}$ 、 $S=20 \times 20\text{mm}^2$ 、 $d=7.9\mu\text{m}$  として(5)式に代入し計算した結果、 $F=0.011\text{N}$  であった。これまで基板厚  $400\mu\text{m}$ 、基板面積  $S=25 \times 25\text{mm}^2$  の Si 基板を用いて、基板間隔  $d=7.4\mu\text{m}$  に作製したフィルタは基板間隔を  $1\mu\text{m}$  変化するのに静電引力  $0.25\text{N}$ (印加電圧  $V=70\text{V}$ )も要していた。今回アルカリエッチングにより  $1/10$  以下の引力で基板間隔を制御することができた。

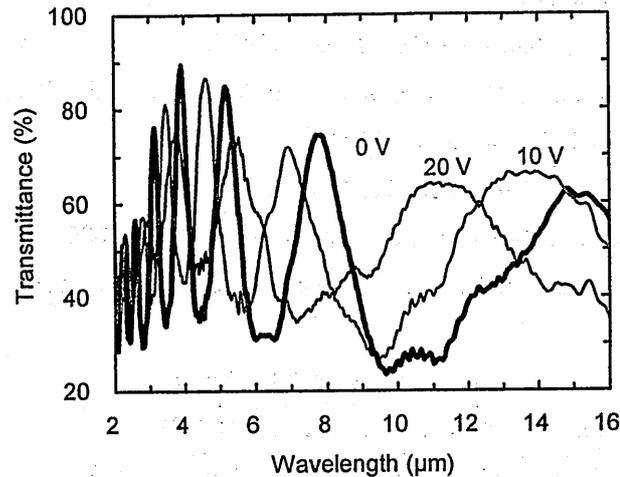


図 13 Si 基板に ZnS で無反射コーティングした Fabry-Perot フィルタの透過スペクトル(基板厚 34 $\mu$ m)。

## 5. 結論

波長可変 Fabry-Perot フィルタの低電圧化に向けて Si 基板のアルカリエッチングについて検討した。8mol/l の KOH 溶液を約 80 $^{\circ}$ C に加熱し、その溶液中に浸してエッチングした結果、基板厚 34 $\mu$ m の Si 基板を作製した。この基板を用いてフィルタを作製した結果、直流電圧 0~20V の印加によって次数  $m=2$  の干渉ピーク波長(基板間隔に相当)は 7.9~5.5 $\mu$ m の範囲で制御することができた。また、基板の中心部を選択的にエッチングすることで基板の強度を保ったまま低電圧で駆動できる干渉フィルタを作製することができた。

Si 基板を薄板化する際、問題となるフィルタ強度の低下や Si 基板内で生じる干渉の抑制についての改善も行なった。基板内干渉を抑制する方法として Si 基板の粗研磨エッチングと、基板表面への無反射コーティングの 2 方法について行なった。粗研磨エッチングは基板表面に適度な凹凸を形成し、基板内干渉を抑制することができた。この方法は処理が非常に容易という特徴を持っている。基板表面への無反射コーティングは、Si 基板表面に蒸着材料 SiO または ZnS の使用により基板内干渉を除去することができた。コーティング材料に SiO を用いたところ、波長域 3.2~4.4 $\mu$ m にわたって 85%以上の透過率が得られた。

以上のように、本研究では、Si 基板のアルカリエッチングと基板への粗研磨、または無反射コーティングによって機械的強度の問題、基板内干渉の問題を解決することができた。これより、小型かつ軽量の分光器の実用化が期待できる。

## 6. 参考文献

- 1) S. P. Davis, M. C. Abrams, and J. W. Brault, *Fourier Transform Spectrometry* (Academic Press, Arizona, 2001).
- 2) M. Saito and T. Kato, *Infrared Phys. Technol.* **48**, 53 (2006).
- 3) P. D. Atherton, N. K. Reay, J. Ring, and T. R. Hicks, *Opt. Eng.* **20**, 806 (1981).
- 4) J. T. Knudtson, D. S. Levy, and K. C. Herr, *Opt. Eng.* **35**, 2313 (1996).
- 5) G. D. Sharp, K. M. Johnson, and D. Doroski, *Opt. Lett.* **15**, 523 (1990).
- 6) K. Hirabayashi, H. Tsuda, and T. Kurokawa, *IEEE Photonics Technol. Lett.*, **3**, 213 (1991).

- 7) J. S. Patel, *Opt. Lett.* **17**, 456 (1992).
- 8) S. R. Mallinson, J. H. Jerman, *Electron. Lett.* **23**, 1041 (1987).
- 9) J. H. Jerman, D. J. Clift, and S. R. Mallinson, *Sens. Actuators, A* **29**, 151 (1991).
- 10) M. Saito and T. Yasuda, *Appl. Opt.* **42**, 2366 (2003).
- 11) M. Saito and H. Furukawa, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 4283 (2001).
- 12) M. Saito, S. Matsumoto, and Y. Sawai, *Jpn. J. Appl. Phys.* **44**, 6092 (2005).
- 13) Y. Abe, F. Kojima, O. Takenaka, A. Sakaida, M. Ito, and K. Inoue, *DENSO Technical Review*, **9**, 121 (2004),  
(in Japanese).
- 14) I. Zubel and M. Kramkowska, *Sens. Actuators, A* **93**, 138 (2001).
- 15) I. Zubel and M. Kramkowska, *Sens. Actuators, A* **115**, 549 (2004).
- 16) H. A. Macleod, *Thin-Film Optical Filters* (Adam Hilger Ltd, Bristol, 1985).
- 17) R. D. Hudson, Jr., *Infrared System Engineering* (John Wiley & Sons, New York, 1969).

中心に低屈折率層をもつ一次元フォトニック結晶導波路における局在モード  
—ブラッグファイバに向けて—

北森 文久\* 左貝 潤一

立命館大学 理工学部

E-mail:\*ro002024@se.ritsumeai.ac.jp

あらまし 本稿では、ブラッグファイバの研究を想定して、ブラッグファイバのクラッド部と同じ周期構造を成す一次元フォトニック結晶について述べる。中心に欠陥層を持つ一次元非周期構造フォトニック結晶における局在モードの欠陥層幅、屈折率の依存性を示す。この時、局在モード周波数による電界分布の対称性、反対称性の変化についても述べる。フォトニックバンドギャップの中心の周波数を用いた時、ブラッグファイバの4分の1波長積層条件時の電界分布の特性が一致することを示す。

Localized modes in one-dimensional photonic crystal waveguide  
with low refractive index layer at the central position  
—In preparation for a Bragg fiber—

Fumihisa KITAMORI\* Jun-ichi SAKAI

Faculty of Science & Engineering, Ritsumeikan University

E-mail:\*ro002024@se.ritsumeai.ac.jp

Abstract

This article describes characteristics of a one-dimensional photonic crystal whose cladding has the same periodic structure as that of a Bragg fiber. We show the dependence of the localized mode on the width and refractive index of the defect layer in one-dimensional photonic crystal which has the defect layer at the central position. We also show change between symmetry and antisymmetry in electric field distributions owing to the angular frequency of the localized mode. When the center frequency of the photonic band gap is used in the above structure, its electric field agrees with that of the Bragg fiber under the quarter-wave stack condition.

1. まえがき

現在使われている石英系光ファイバでは、すでに低損失を実現し、その損失値は理論限界に達している。そこで、新たな通信形態としてフォトニック結晶を用いたフォトニック結晶ファイバ(PCF: Photonic Crystal Fiber)[1]が注目されている。フォトニック結晶とは、屈折率の異なる2種類の物質を、光の半波長程度の周期で配列した人工的な結晶のことである。この屈折率の異なる2

種類の物質をうまく配列することで、光の分散関係にギャップが生じる。このギャップが、フォトニックバンドギャップ(PBG; Photonic Band Gap)と呼ばれる伝送阻止域である。PBGを光伝送路に応用したものがフォトニック結晶ファイバである。フォトニック結晶ファイバは、クラッドとコアの屈折率差を利用し、全反射を導波原理としたホーリーファイバ[2]と、クラッドの周期構造を利用し、PBGを導波原理としたフォトニックバンドギャップファイバ(PBF; Photonic Band-gap

Fiber)の二種類に分類できる。さらに、PBFは、クラッドに空孔をもつもの[3]とクラッドが高・低屈折率層の軸対称周期構造を成すブラッグファイバ[4]の二種類に分類できる。

ブラッグファイバの構造は、コア部が空気層、クラッド部が高・低の屈折率層を交互に繰り返された周期構造となっている。その導波原理は、クラッド部の周期構造によるブラッグ回折により、光をコア部に閉じ込めるものである。ブラッグファイバは、(i)極低損失、(ii)ほとんど無分散、(iii)曲げでの無放射損失、(iv)伝送波長帯の制約からの解放という性質をもち、究極の伝送路となる可能性をもつ。ブラッグファイバは長距離通信用伝送路だけでなく、光集積回路、高光パワ伝送路、自然放出抑圧用発光デバイスなどさまざまな分野に応用できる[5]。

ブラッグファイバは、現在二次元で考え、研究が進められている。本稿では、一次元で考えることによって、物理的な見解を深めることを目的としている。一次元周期構造フォトニック結晶の中心層に欠陥を加え、その欠陥層の幅、屈折率を変化させた時、電界分布がどのように変化するかを考察する。さらに、ブラッグファイバのQWS(Quarter-Wave Stack)条件[6][7]時の電界分布について、一次元非周期構造フォトニック結晶の電界分布と対応させて考察する。

以降、一次元フォトニック結晶の周期構造部は、QWS条件[6]を満たしたパラメータを用いる。QWS条件とは、

$$\kappa_a l_a = \kappa_b l_b = \pi/2 \quad (1)$$

の式を満たすことにより、ブラッグファイバのクラッド部において、効率良くブラッグ回折を生じさせる条件である。 $\kappa_j (=n_j k_0, j=a, b)$ はクラッド各層における波数、 $n_j$ は各層の屈折率、 $k_0 (=2\pi/\lambda_0)$ は真空中の波数、 $\lambda_0$ は真空中の波長、 $l_j (j=a, b)$ は各層の幅を示す。本稿では $\lambda_0 = 1.55[\mu\text{m}]$ として計算した。

## 2. フォトニックバンドギャップの発生要因

フォトニック結晶には、PBGと呼ばれる光を透過させない周波数帯が存在する。本章では、このPBGの発生する要因について述べる。Fig.1は、一次元周期構造のフォトニック結晶の構造を示す。

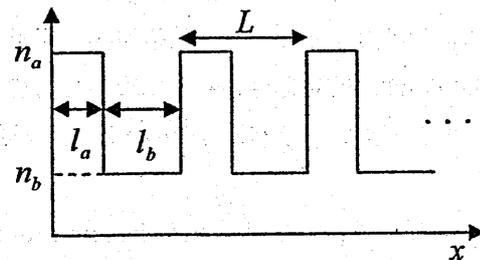


Fig.1 一次元周期フォトニック結晶の構造

$n_a, n_b$ : フォトニック結晶の各層の屈折率

$l_a, l_b$ : フォトニック結晶の各層の幅、 $L (=l_a + l_b)$ : 周期

Fig.2(a)は、Fig.1の構造で光を一次元周期構造フォトニック結晶の左端から、横軸 $x$ の正の方向に入射させた時の透過率を示す。横軸は、入射平面波の角周波数 $\omega$ を無次元化周波数

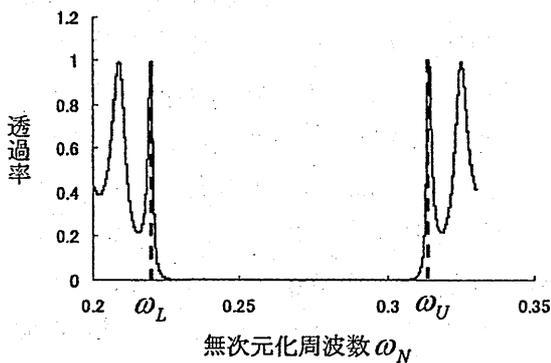
$$\omega_N = \omega L / 2\pi c \quad (2)$$

( $L$ : 周期、 $c$ : 真空中の光速)で示したものであり、縦軸の透過率(エネルギー透過率)は、振幅透過率の実部の自乗+振幅透過率の虚部の自乗によって求めている。Fig.2(b)は、Fig.2(a)に示すPBG端の周波数 $\omega_L, \omega_U$ を入射した時の電界分布である。Fig.2(b)の濃い網掛けは高屈折率層(A層)を示し、次の薄い網掛けは低屈折率層(B層)を示している。

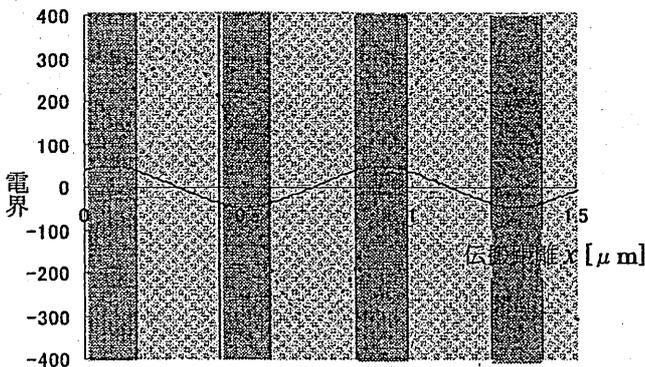
Fig.1の一次元周期構造フォトニック結晶に、光を横軸 $x$ の正の方向に入射させた時の電界分布は、Fig.2(b)に示すように定在波となる。これは、横軸の正の方向に進む波が、フォトニック結晶の周期構造により、ブラッグ回折が起こり、横軸の負の方向に進む波となる。さらに、この波が同様にブラッグ回折を起こし、 $x$ 軸の正の方向に進む波となる。このように右にも左にも進まない波、

つまり定在波となる。PBG 端の周波数の低い方 (Fig2(b)に示す $\omega_L$ ) を用いた時と、PBG 端の周波数の高い方 (Fig2(b)に示す $\omega_U$ ) を用いた時には、エネルギーが集中している位置が異なっていることがわかる。

この現象は、電磁気変分定理[8]によって説明できる。電磁気変分定理とは、低周波数モードは高 $n$ 領域にそのエネルギーが集中し、高周波数モードでは、低 $n$ 領域にそのエネルギーが集中するというものである。この定理により、PBG 端の低い方の周波数 $\omega_L$ を用いた場合は、 $n_a$ 層 (A層) に、PBG 端の高い方の周波数 $\omega_U$ を用いた場合は、 $n_b$ 層 (B層) にエネルギーが集中する。その結果、それぞれの場のエネルギー分布が異なる。バンドギャップは、このエネルギーの差によって生じる。



(a) 一次元周期構造フォトニック結晶の透過率



(b) PBG 端の周波数を用いた時の電界分布

実線: PBG 端の周波数が低い方 $\omega_L$ を用いた場合

破線: PBG 端の周波数が高い方 $\omega_U$ を用いた場合

Fig.2 一次元周期構造フォトニック結晶

$n_a = 2.5, n_b = 1.5, l_a = 0.155[\mu m], l_b = 0.258[\mu m]$

### 3. 一次元非周期フォトニック結晶の局在モード

周期構造内に、構造の乱れを作製することによって、PBG 内に固有の周波数を持ち、その構造の乱れの部分に光が局在するモードが現れる。このモードを局在モードと呼ぶ[9]。一次元周期フォトニック結晶の周期構造の乱れを、中心層の幅や、屈折率を変化させることによって作製する。

Fig.3 は、フォトニック結晶の中心層の幅と屈折率を、変化させた時の一次元非周期構造フォトニック結晶の構造を示したものである。本章では、 $n_c = n_b$ と考へ、フォトニック結晶の中心層の幅だけ変化させた場合を考慮する。

Fig.4(a)は Fig.3 の構造で $l_c = l_a + l_b, n_c = n_b$ として、光を入射させた時の透過率を示したものである。同図に示すように PBG 内に鋭いピークが、 $\omega_N = 0.289$ に現れる。このピークの周波数を持つ光を一次元非周期フォトニック結晶に入射した時の電界分布を示したものが、Fig.4(b)である。Fig.4(b)の横軸は、結晶格子と対応させやすいように、単位は伝搬距離を周期で割り、規格化したもの (格子定数) を示しており、フォトニック結晶の中心を 0 として示している。

図を見てわかるように、欠陥層に電界が集中しており、欠陥層から離れるにつれて電界が小さくなっている。透過率が 1 の場合の周波数を用いることにより、光が閉じ込められていないように思

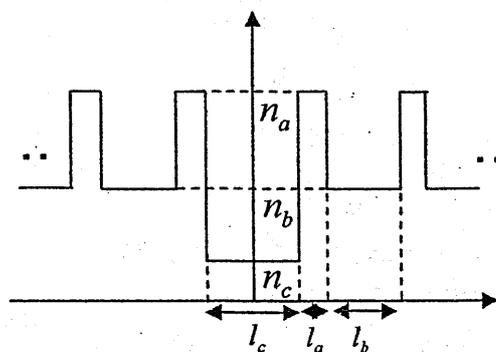
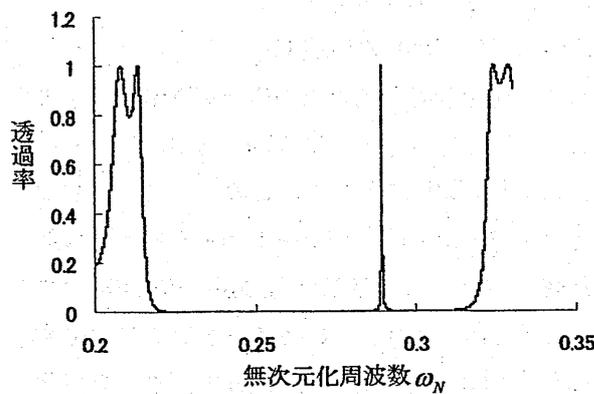


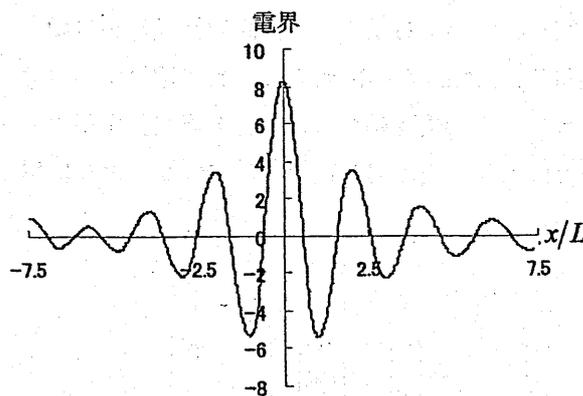
Fig.3 一次元非周期構造フォトニック結晶の構造

$l_c$ :欠陥層の幅、 $n_c$ :欠陥層の屈折率、 $L(=l_a + l_b)$ :周期

われるが、これは Fig.4(b)を見てわかるように、入射端(Fig.4(b)の  $x/L = -7.5$ )の振幅係数の絶対値と出射端(Fig.4(b)の  $x/L = 7.5$ )の振幅係数の絶対値が等しくなるためである。このため、欠陥層付近では電界分布が左右対称となる。つまり、欠陥層に光が閉じ込められていることになる。この局在モードが、二次元で考えているブラッグファイバの伝搬モードと対応していると考えられる。一次元においては、十分な光の閉じ込めは実現できず、二次元、三次元と次元をあげるにより、光の閉じ込めはよくなる。



(a) 透過率



(b) 電界分布

Fig.4 一次元非周期フォトニック結晶

欠陥層の幅:  $l_c = l_a + l_b = 0.413[\mu\text{m}]$

A層が15層、B層が14層積層

他のパラメータは Fig.2(b)と同じ

#### 4. 一次元非周期構造における局在モードの

##### 欠陥層幅依存性

一次元非周期構造フォトニック結晶において、中心部の欠陥層幅を変化させることにより、局在モードの出現周波数、電界分布がどのように変化するか考察する。欠陥層の屈折率は、周期構造における高・低屈折率に一致させた2つの場合を扱う。

Fig.5 は、一次元周期構造フォトニック結晶の屈折率の高い中心層 (A層) の幅のみを変化させた時の構造である。

Fig.6(a)は Fig.5 の欠陥層の幅  $l_c$  を変化させた時の局在モードの周波数の変化を示したものである。Fig.6(a)のパラメータは  $n_a = 2.5$ 、 $n_b = 1.5$ 、 $l_a = 0.155[\mu\text{m}]$ 、 $l_b = 0.258[\mu\text{m}]$  である。Fig.6(b)は Fig.3 において  $n_c = n_b$  とし、屈折率の低い中心層 (B層) の幅のみを変化させた時の局在モードの周波数の変化を示したものである。Fig.6(b)のパラメータは  $n_a = 2.5$ 、 $n_b = 1.5$ 、 $l_a = 0.155[\mu\text{m}]$ 、 $l_b = 0.258[\mu\text{m}]$  である。Fig.6(c)は Fig.6(a)、(b)に現れる電界分布形を示したものである。

Fig.6(a)、(b)を見てわかるように、欠陥層の幅が大きくなっていくにつれて、局在モードの周波数が小さくなる。そして、PBG から外れ、新たな局在モードが現れる。局在モードが現れる最も小さい欠陥層の幅は、Fig.6(a)では 0.40 付近(単位は格子定数)、Fig.6(b)では 0.65 付近(単位は格子定

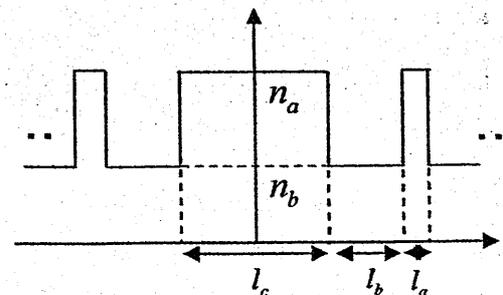
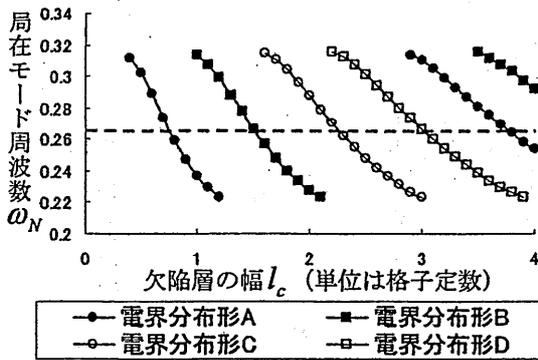


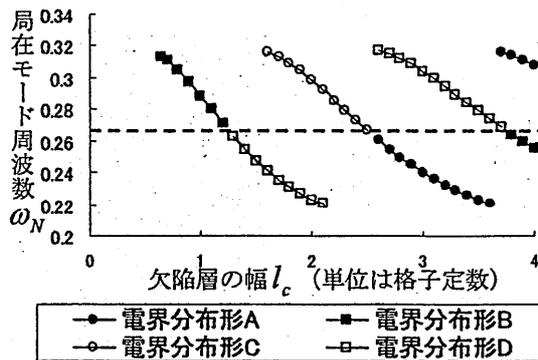
Fig.5 一次元非周期フォトニック結晶の構造  
(屈折率の高い中心層 (A層) の幅を変化)

数)である。言い換えると、Fig.6(a)では、欠陥層の幅は  $0.165[\mu\text{m}]$ 、Fig.6(b)では、欠陥層の幅は  $0.269[\mu\text{m}]$ 以上であると、局在モードが存在する。これらの局在モードが現れる最も小さい欠陥層の幅は、欠陥層に変化を与える前の層の幅 (Fig.6(a)

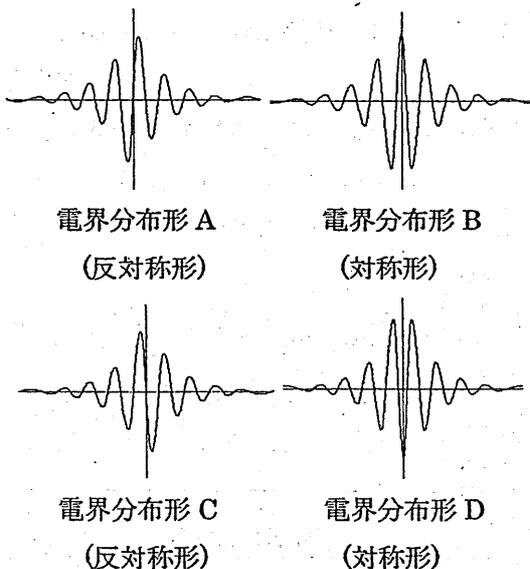
では  $0.155[\mu\text{m}]$ 、Fig.6(b)では  $0.258[\mu\text{m}]$ とほぼ同じである。つまり、周期構造を少しでも崩すと局在モードが現れる。Fig.6(a)では、無次元化周波数  $\omega_N$  が  $0.266$  付近の場合を、Fig.6(b)では、無次元化周波数  $\omega_N$  が  $0.266$  付近の場合を見ると、局在モードが繰り返し現れることがわかる。



(a) 欠陥層が高屈折率 (A層) の場合



(b) 欠陥層が低屈折率 (B層) の場合



(c) 電界分布形の分類

Fig.6 欠陥層の幅と電界分布形

Fig.6(a)の屈折率の高い層の幅を変化させた場合では、PBG 端で電界分布形の対称性は変化する。Fig.6(b)の屈折率の低い層の幅を変化させた場合では、PBG 端と PBG の中心で電界分布形の対称性が変化している。Fig.6(a)では、4種類の電界分布形が順に現れ、Fig.6(b)では、対称形と反対称形が交互に現れ、PBG の中心を境に横軸に対して対称な形に変化することがわかる。これも、電磁気変分定理によって説明することができる。PBG の中心の周波数よりも低い周波数を用いた場合と、PBG の中心の周波数よりも高い周波数を用いた場合では、電場の集中する層が変わるためだと考えられる。新たに現れる電界分布形の対称性の変化については、3章で述べたように透過率が1であるため、局在モード時の電界分布は対称性か、反対称性の形しかとらないことによって説明できる。

欠陥層が高屈折率 (A層) の場合では、無次元化周波数  $0.266$  付近 (PBG の中心) を用いた時、光が欠陥層に最も閉じ込められていた。欠陥層が低屈折率 (B層) の場合では、 $0.29$  または  $0.23$  の無次元化周波数を用いた時、欠陥層内の電界の大きさが最も大きい。つまり、同じ対称性の電界分布形が現れる範囲の中心の周波数  $\omega_c$  を用いた場合に、欠陥層内の電界の大きさが最も大きいということになる。ただし、同じ対称性の電界分布形が現れる範囲の中心の周波数  $\omega_c$  を用いた場合は、クラッド部での電界の大きさが大きく、光が欠陥層に最も閉じ込められているとは言えない。欠陥層が高屈折率、低屈折率の両方の場合において、無次元化周波数  $\omega_N = 0.266$  付近 (PBG の中心) を用いた時、光が欠陥層に最も閉じ込められ

ている。これは、 $n_a=2.5$ 、 $n_b=1.5$ 、 $l_a=0.155[\mu\text{m}]$ 、 $l_b=0.258[\mu\text{m}]$ という周期構造に対して、周波数 $\omega_c$ が、ブラッグ回折を最も効率良く起こしているためだと考えられる。Fig.6(a)と(b)を見比べると、欠陥層が高屈折率層(A層)の場合の方が欠陥層の幅による依存性が大きいことがわかる。

### 5. 一次元非周期構造における局在モードの欠陥層屈折率依存性

一次元非周期構造フォトニック結晶において、中心部の欠陥層屈折率を変化させることにより、局在モードの出現周波数、電界分布がどのように変化するか考察する。5.1では、Fig.3に示す構造で欠陥層の屈折率 $n_c$ を1.0とすることで、ブラッグファイバと同じ構造を考慮する。次に5.2では、欠陥層の幅を固定し、欠陥層の屈折率を1.0から2.5の間で変化させた構造について考察する。5.3では、一次元非周期構造におけるQWS条件時の電界分布について考察する。

#### 5.1 欠陥層の屈折率が1.0の場合

Fig.7では、欠陥層の屈折率 $n_c=1.0$ 、欠陥層の幅 $l_c=3.10[\mu\text{m}]$ とすることで、ブラッグファイバの構造と対応させている。Fig.7(a)は透過率を示している。この場合、PBGの中心付近の $\omega_N=0.266$ に局在モードが現れている。

Fig.7(b)では、電界分布と非周期構造のフォトニック結晶の格子を対応させたものを示している。 $\omega_N$ は無次元化周波数を示す。Fig.7(b)の横軸の白い部分は欠陥層を示し、濃い網掛けはA層を示し、薄い網掛けはB層を示している。Fig.7(b)に示す電界分布は、PBGの中心の付近の $\omega_N=0.266$ を用いているため、ブラッグ回折が効率良く起こり、光が欠陥層に最も閉じ込められている状態である。この状態については、5.3で詳しく述べる。

#### 5.2 欠陥層の屈折率と電界分布の関係

Fig.8はFig.3において、欠陥層の幅を固定し、その屈折率を1.0から2.5の間で変化させた時の局在モード周波数と電界分布形の関係を示したものである。Fig.8のパラメータは $n_a=2.5$ 、 $n_b=1.5$ 、 $l_a=0.155[\mu\text{m}]$ 、 $l_b=0.258[\mu\text{m}]$

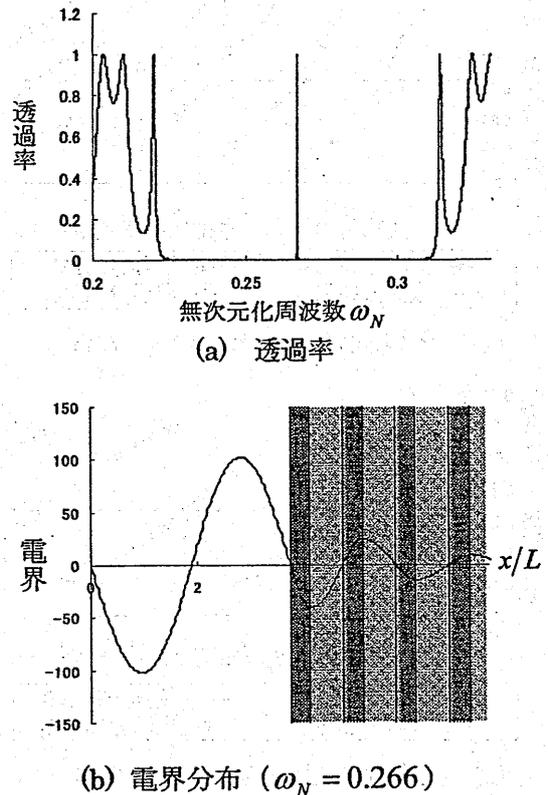


Fig.7 欠陥層の屈折率が $n_c=1.0$ の場合の電界分布

欠陥層の屈折率 $n_c=1.0$ 、欠陥層の幅 $l_c=3.10[\mu\text{m}]$

A層が30層、B層が30層積層

他のパラメータはFig.2(b)と同じ

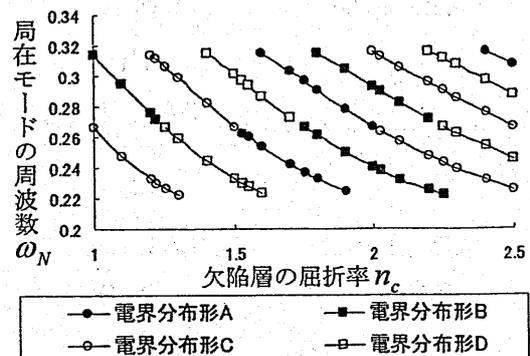


Fig.8 欠陥層の屈折率と電界分布形

$l_c = 3.10[\mu\text{m}]$ である。電界分布形の分類は、Fig.6(c)と同じものを示す。欠陥層の屈折率を高く変化させていくと、以下のような特徴が現れた

- ① 欠陥層の幅を変化させた時 (Fig.6(b)参照) と同様に、局在モード周波数が PBG のほぼ中心を境として、モード電界分布の対称性が変化している。
- ② 欠陥層の屈折率  $n_c$  が大きくなるにつれて、欠陥層における電界の山の数が多くなっている。つまり、高次モードが現れる
- ③ 欠陥層の屈折率  $n_c$  が 1.2、1.6、2.2 付近で、局在モードの現れる数が変わる
- ④ 欠陥層の屈折率  $n_c$  が低い方が、欠陥層での電界の大きさは大きい
- ⑤ 欠陥層の屈折率が  $n_c > n_b$  となると、コア電界よりクラッド電界の方が大きくなる局在モードが現れる

①については、PBG の中心を境に電磁気変分定理による電場の集まる層が変化するためだと考えられる。②、③については、屈折率の低い媒質に比べて、屈折率の高い媒質の方が、波長が短くなるため、周波数に影響がでる。この媒質中の周波数の変化によって、欠陥層内の山の数や、局在モードが現れる間隔が変化すると考えられる。④については、屈折率差が大きいほうが閉じ込めは良い[10]ためだと考えられる。⑤については、 $n_c > n_b$  となると、フレネルの公式により、欠陥層と第1A層の境界、第1B層と第2A層の境界での反射による位相変化が異なり、ブラッグ回折がもはや効率良く生じないためである。

### 5.3 一次元非周期構造における電界分布とブラッグファイバの QWS 条件時の電界分布の比較

ここでは、5.1で述べたように、局在モードの周波数  $\omega_N = 0.266$  を用いた時の電界分布につ

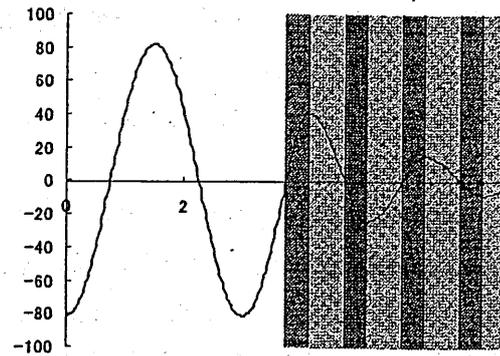


Fig.9 QWS 条件時の電界分布

$n_c = 1.25$ 、他のパラメータは Fig.7 と同じ

いて考察する。Fig.9 は、 $n_c = 1.25$  の  $\omega_N = 0.266$  を用いた時の電界分布を示したものである。

Fig.7(b)、Fig.9 を見てわかるように、A 層、B 層の周期構造部の電界は、B 層から A 層への境界で極値をとり、B 層から A 層への境界で 0 となる。これは、ブラッグファイバの QWS 条件時での電界分布の形と一致する[11]。他にも、 $n_c = 1.5$ 、1.75、2.0、2.25、2.5 で  $\omega_N = 0.266$  を用いた時、周期構造部では同じ特徴を持つ。つまり、一次元フォトニック結晶の場合、 $\omega_N$  が 0.266 付近 (PBG の中心) を用いた時に、QWS 条件時の電界分布の特徴と一致する。5 章までは、周期構造部において QWS 条件を満たした状態を考慮した。本章では、周期構造部において QWS 条件を満たし、局在モードの周波数  $\omega_N = 0.266$  を用いた時の、光が欠陥層に最も閉じ込められている状態を考慮している。電磁気変分定理を考えると、高くもなく低くもない周波数 (PBG の中心の周波数) は、高屈折率層と低屈折率層の境界に集まる。これらのことから、一次元で考えた時の PBG の中心の周波数を用いた場合と、二次元で考えた時の QWS 条件時の場合が対応することがわかった。

### 6. まとめ

一次元周期構造のフォトニック結晶の中心層に欠陥を与えることによって、一次元非周期構造を

作製すると、局在モードが発生し、その電界分布の対称性が変化することを示した。欠陥を与えることによって得られる。主な結果を列挙する。

- 一次元非周期構造フォトニック結晶における高屈折率の欠陥層の幅を変化させると、PBG 端を境に電界分布形が、対称形、反対称形と変化する
- 一次元非周期構造フォトニック結晶における低屈折率の欠陥層の幅を変化させると、PBG 端と PBG の中心を境に電界分布形が、対称形、反対称形と変化する
- PBG の中心の周波数を用いた時、欠陥層への光の閉じ込めが最も良い
- 欠陥層の幅のみを変化させた場合と欠陥層の屈折率のみを変化させた場合では、類似した特性を持つ
- PBG の中心の周波数を用いた時の電界分布と、ブラッグファイバの QWS 条件時の電界分布の特性が一致する

#### 参考文献

- [1] P. Russell, "Photonic Crystal Fibers," *Science*, 299 (2003) pp.358-362.
- [2] J. C. Knight et al., "All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding," *Opt. Lett.*, 21 (1996) pp.1547-1549
- [3] R. F. Cregan et al., "Single-mode photonic band gap guidance of light in air," *Science*, 285 (1999) pp.1537-1539
- [4] P. Yeh, A. Yariv, and E. Marom, "Theory of Bragg fiber," *J. Opt. Soc. Am.* 68 (1978) pp.1196-1201.
- [5] 左貝 潤一: "ミラーファイバの漸近展開に基づく伝搬特性の考察=新構造フォトニック結晶ファイバ=," 輻射科学研究会 RS03-15(2003.12)
- [6] J. Sakai, "Hybrid modes in a Bragg fiber: general properties and formulas under the quarter-wave stack condition," *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol.22 (2005) pp.2319-2330

- [7] 左貝 潤一: "ブラッグファイバの  $\lambda/4$  積層条件近傍におけるモード伝搬特性—円形金属導波管との類似点と相違点—," 信学技報 OPE2005-107 (2005.12)
- [8] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, J. N. Winn.: "フォトニック結晶—光の流れを型にはめ込む—," (コロナ社, 2000) 訳 藤井 壽崇, 井上 光輝
- [9] 迫田 和彰: "フォトニック結晶入門," (森北出版, 2004)
- [10] 河合 宏一, 左貝 潤一: "ブラッグファイバにおける TE・TM モードのコア内光パワ閉じ込め比," 信学技報 OPE2005-146 (2006.2)
- [11] 佐々木 純平, 左貝 潤一: "ブラッグファイバのハイブリッドモード伝搬特性," 信学技報 OPE2005-91 (2005.11)

# ナノスケールデバイスシミュレーションの 現状と課題

三好旦六 小川真人 土屋英昭

神戸大学工学部

於 大阪電気通信大学

2006年7月25日

## はじめに

最近、半導体デバイスの微細化の流れが急速ですが、これに伴って CAD に組み込まれている「ドリフト拡散モデル、エネルギー輸送モデル、モンテカルロ法」などの半古典論に基づくデバイスモデルの信頼性が揺らぎ始めています。実際、デバイスのナノスケールへの微細化が進むにつれて、従来の単純な半古典的輸送モデルではデバイス特性の予測が困難であり、量子輸送理論に立脚した量子力学的デバイスシミュレーションが重要であることが認識され始めています。

半導体結晶成長技術と微細加工技術の急速な進歩により、電子の平均自由行程と同程度の大きさのメソスコピック構造が比較的容易に得られるようになってきたことを背景として、筆者の研究室は15年ほど前から、メソスコピック系の物理とそのデバイス応用の研究を開始し、特に電子波デバイスの非線形・動的量子輸送モデルを中心に研究を進めました。当時、量子輸送モデルとしては、線形応答理論である久保公式が世界的によく知られていましたが、これに代わり、非線形電圧電流特性などの非平衡動作時の特性予測・再現に用いるため、新たに非平衡量子輸送モデルの開発が必要でした。そこで、今日では次世代の量子力学的デバイスシミュレータの中核技術要素に位置づけられている「非平衡グリーン関数法」や「量子補正を導入したモンテカルロ法」など先駆的なデバイスモデルの研究に着手し、ナノスケールデバイスに適用してきました。

「非平衡グリーン関数法」は誕生以来 40 年近くになる量子輸送モデルであり、摂動展開の次数を系統的に大きくとれば、正確にフォノン散乱や電子電子散乱効果を取り入れることが保証されている解析法です。その複雑さと膨大な計算量のために、適用は1次元の物理現象の解析に限られていました。しかし電子波のコヒーレンシーが動作を支配するナノスケールデバイスの場合には、グリーン関数の計算が簡単になるため、ポアソン方程式とセルフコンシステントに解くことが可能になり、現実のデバイスのバリスティック輸送解析に適用されるようになりました。もう一つの「量子補正を導入したモンテカルロ法」は、「量子補正ドリフト拡散モデル」と同様、量子力学的ボルツマン方程式(ウイグナー関数モデル)を基礎として発展したモデルですが、室温で動作させるデバイスの定量的な輸送解析には、現実的で有力な武器となっています。従来のモンテカルロ計算の資源を有効に活用しながら、量子効果を含むナノスケールデバイスのシミュレーションが可能です。

量子力学的デバイスシミュレータは、上記の「非平衡グリーン関数法」と「量子補正半古典モデル」の2つのモデルに集約されてきた感があります。現在、大学を中心に精力的に体系化が進められているところですが、これらの量子力学的デバイスシミュレータが広く技術者に普及し、ナノスケール MOS 素子、CNT 素子さらに分子デバイスなどのナノエレクトロニクスの進展に役立つためには、可視化の努力は勿論のこと、シミュレータの安定性や高速性についてさらに進化させていく必要があると考えています。

# ナノスケールデバイスシミュレーションの 現状と課題

神戸大学 工学部

三好旦六 小川真人 土屋英昭

## SEMICONDUCTOR NANOSTRUCTURE

Classification	Confinement <sup>(1)</sup>	Examples
Quantum Well (2D)	$x \sim \lambda^{(2)}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ MOSFET, HEMT</li> <li>▪ Quantum Hall Effect<sup>(3)</sup></li> <li>▪ Resonant Tunneling</li> <li>▪ Quantum Well Laser</li> </ul>
Quantum Wire (1D)	$x, y \sim \lambda$	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Quantized Conductance <math>2e^2/h</math></li> <li>▪ Nanowire</li> <li>▪ Quantum Wire Laser</li> </ul>
Quantum Box (0D)	$x, y, z \sim \lambda$	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Single Electron Transistor</li> <li>▪ Quantum Dot Laser</li> <li>▪ Quantum Bit (4)</li> </ul>

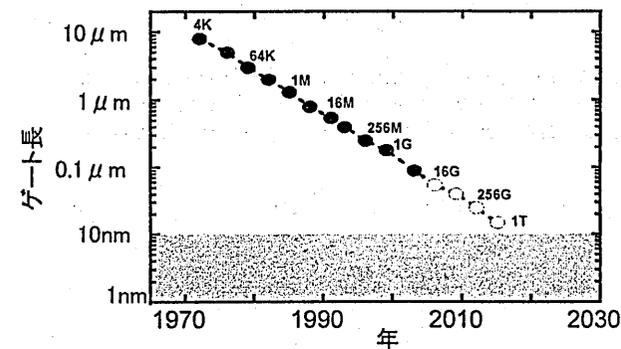
(1) physical confinement, potential confinement, (2) de Broglie wavelength =  $h/\sqrt{2mE}$  (~10nm)  
(3)  $h/e^2 = 25,813k\Omega$ , (4) Rabi oscillation of exciton

# ナノエレクトロニクス

ナノ構造中の電子波の制御とデバイスへの応用

- **メソスコピック**  
電子波の物理 (ランダウア1957) → 電子波干渉、AB効果 L<位相干渉長  
コンダクタンス量子化 L<平均自由行程(弾性散乱)
- **超格子**  
人工超格子 (江崎1969) → 量子構造トランジスタ(HEMT)  
量子構造半導体レーザー
- **LSI**  
ナノMOSFET (ポストスケーリング) → 超薄膜SOI、ダブルゲートMOS、FINFET
- **カーボンナノチューブ**  
CNT (飯島1991) → CNTFET、CNT単電子トランジスタ  
配線

## MOSTランジスタ



LSIの微細化 → 高速化、高集積化、低消費電力化  
比例縮小則 (定電界スケーリング則)

短チャネル効果

ポストスケーリング時代

量子力学的効果  
■ 量子閉じ込め  
■ トンネリング

量子力学的  
デバイスシミュレーション  
■ 量子輸送モデル  
■ 電子状態計算

新材料の導入  
(高配電、low-k、insink、ひずみSi、Ge)  
新構造の採用  
SOI、ダブルゲート、Fin

## Semi-Classical Transport Model

### ■ Velocity and Force

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{k}}, \quad \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

### ■ Boltzmann Transport Equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{\hbar} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f = \int d^3\mathbf{k}' \left[ \underset{\text{inscattering}}{W(\mathbf{k}', \mathbf{k})} f(\mathbf{k}') - \underset{\text{outscattering}}{W(\mathbf{k}, \mathbf{k}')} f(\mathbf{k}) \right]$$

$f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  is the distribution function of carriers, and  $W(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  in the scattering integral is the transition rate from the wavevector  $\mathbf{k}$  to  $\mathbf{k}'$ .

### ■ Carrier Density and Current Density

$$n(\mathbf{r}, t) = 2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -2e \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$$

## Semi-Classical Transport Model

(1) **Monte Carlo Method**  
computationally expensive

(2) **Full Hydrodynamic model**  
velocity overshoot

Static Approximation of Momentum Equation ( $\tau_m \ll \tau_w$ )

$$\mathbf{v} = \mu \mathbf{E} - \frac{\mu k_B}{en} \nabla_{\mathbf{r}} (nT), \quad \mu = \frac{e\tau_m(w)}{m^*}$$

(3) **Drift-Diffusion Model**  
transit time  $\gg \tau_w$ , carrier temperature=lattice temperature

(4) **Energy Balance Model**  
hot electron effects

## Moment Equations

### ■ Conservation Equations for Density, Momentum, and Energy

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (n\mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{e\mathbf{E}}{m^*} + \frac{1}{nm^*} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (nk_B T) = -\frac{\mathbf{v}}{\tau_m(w)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{n} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (n\mathbf{v}k_B T + n\mathbf{q} + n\mathbf{w}\mathbf{v}) = -\frac{w - w_0}{\tau_w(w)}$$

where  $w = m|\mathbf{v}|^2/2 + 3k_B T/2$  and  $\mathbf{q}$  is the heat flow vector.  $\tau_m$  and  $\tau_w$  are the relaxation times for momentum and energy, respectively, whose dependence on  $w$  is evaluated by the Monte Carlo simulation.

$$\frac{1}{\tau_m(w)} = -\frac{e\mathbf{E}}{m^* \mathbf{v}}, \quad \frac{1}{\tau_w(w)} = \frac{e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{w - w_0}$$

## Quantum Transport Model

(1) **Linear Response Theory**  
Kubo Formula 1958

(2) **Wigner Function (Quantum Boltzmann eq.)**  
Wigner 1932, Frenley 1987, Ferry 1987

(3) **Quantum Corrected Semiclassical Method**  
Ancona 1987, Ferry et al. 1992, Tsuchiya et al. 1999

(4) **Scattering Theory**  
Tsu & Esaki Model 1973,  
Landauer-Büttiker Formula 1988

(5) **Nonequilibrium Green's Function (NEGF)**  
Keldysh 1965, Kadanoff and Baym 1962, Caroli et al. 1971  
Henrickson et al. 1994, Lake et al. 1997, Svizhenko et al. 2002

# Density Matrix

$$\langle A \rangle = \sum_i P_i \langle \phi_i | A | \phi_i \rangle, \quad i\hbar \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = H \phi_i, \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + U(r)$$

## ■ Density matrix

$$\phi_i = \sum_m c_{mi} u_m$$

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i P_i \langle \phi_i | A | \phi_i \rangle = \sum_{m,n} \sum_i P_i c_{ni} c_{mi}^* \langle u_m | A | u_n \rangle \\ &= \sum_{m,n} \rho_{mn} A_{nm} = \text{Tr}(\rho A) \end{aligned}$$

## ■ Density matrix in the coordinate space

$$\rho(r, r', t) = \sum_i P_i \phi_i(r, t) \phi_i^*(r', t) = \sum_{m,n} u_n(r) \rho_{nm} u_m^*(r')$$

$$\langle A \rangle = \iint dr dr' A(r, r') \rho(r, r', t) = \sum_{m,n} \rho_{mn} A_{nm}$$

$$A(r, r') = \langle r | A | r' \rangle = \sum_{m,n} \langle r | u_n \rangle \langle u_n | A | u_m \rangle \langle u_m | r' \rangle = \sum_{m,n} u_n(r) A_{nm} u_m^*(r')$$

# Wigner Function

## ■ Liouville Equation of the Density Matrix

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H(r_1) - H^*(r_2)] \rho(r_1, r_2, t), \quad H(r) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla_r^2 + U(r)$$

## ■ Wigner distribution function

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{k}, t) = \int d^3r \rho\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}, t\right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

## ■ Quantum Boltzmann Equation (Wigner Formalism)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{m^*} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} f + \frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{R}, \mathbf{k} - \mathbf{k}') f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

$$V(\mathbf{R}, \mathbf{k} - \mathbf{k}') = i \int d^3r e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \left[ U\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) - U\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right]$$

## ■ Electron Density and Current Density

$$\langle A(\mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k A_w(\mathbf{R}, \mathbf{k}) f(\mathbf{R}, \mathbf{k})$$

$$n(\mathbf{R}) = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(\mathbf{R}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{J}(\mathbf{R}) = -2e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} f(\mathbf{R}, \mathbf{k})$$

# Quantum-Corrected Monte Carlo Method

## ■ Quantum Boltzmann equation (Wigner Formalism)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{m^*} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f - \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\hbar 4^{\alpha} (2\alpha+1)!} (\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{k}})^{2\alpha+1} U f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

## ■ Quantum-corrected Boltzmann transport equation ( $\alpha=1$ )

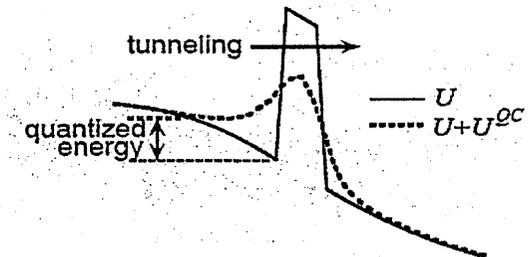
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=x,y,z} \frac{\hbar k_i}{m_i} \frac{\partial f}{\partial r_i} - \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{r}} (U + U^{qc}) \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

$$U_v^{qc}(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{12 m_x^v} \frac{\partial^2 \ln(n_v)}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{12 m_y^v} \frac{\partial^2 \ln(n_v)}{\partial y^2} - \frac{\hbar^2}{12 m_z^v} \frac{\partial^2 \ln(n_v)}{\partial z^2}$$

## ■ Equations of motion in free flight

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{r}} (U + U_v^{qc})$$

# Quantum Corrected Potential



# Quantum Hydrodynamic Model

## Conservation Equations for Density, Momentum, and Energy

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = 0 \quad (p_i = mu_i + p'_i)$$

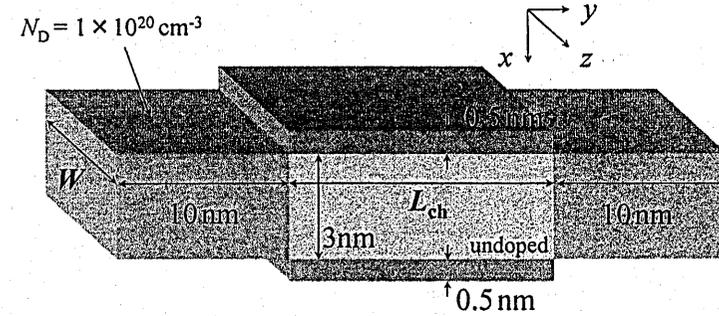
$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \Pi_j - P_{ij}) + n \frac{\partial V}{\partial x_j} = -\frac{\Pi_j}{\tau_m}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i w - u_j P_{ij} + q_i) + \frac{\Pi_j \partial V}{m \partial x_j} = -\frac{w - \frac{3}{2} n T_0}{\tau_w}$$

- Momentum density :  $\Pi_i = m n u_i$ , • Heat flow vector :  $q_i = -\kappa \partial T / \partial x_i$
- Stress tensor :  $P_{ij} = -\left\langle \frac{p_i p_j}{m} \right\rangle = -n T \delta_{ij} + \frac{\hbar^2 n}{12m} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \log n + O(\hbar^4)$
- Energy density :  $w = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{3}{2} n T + \frac{1}{2} m n u^2 + \frac{\hbar^2 n}{24m} \nabla^2 \log n + O(\hbar^4)$

C. Gardner, SIAM J. Appl. Math, 54 (1994)409

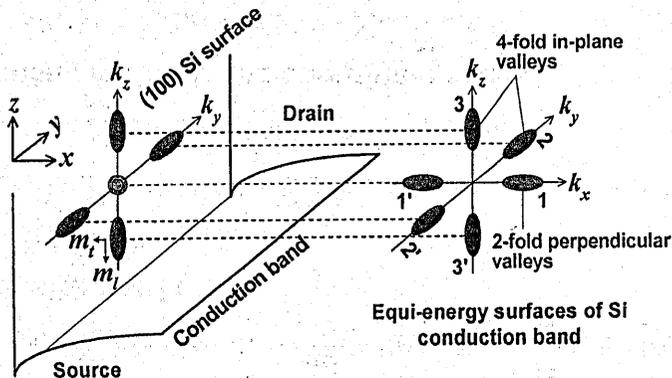
# DG-MOSFET MODEL



## SCATTERING PROCESS

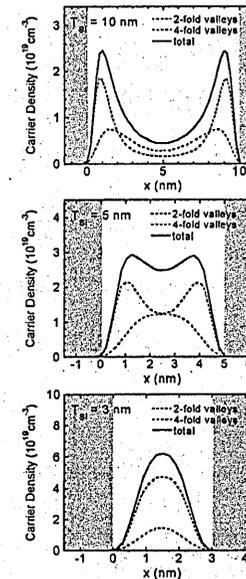
- Impurity scattering
- Interface roughness scattering
- Intravalley acoustic phonon scattering
- Intervalley phonon scattering (f-type, g-type)

# Ellipsoidal Multi-Valleys in Si Conduction Band

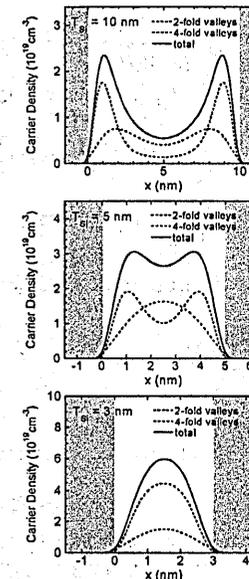


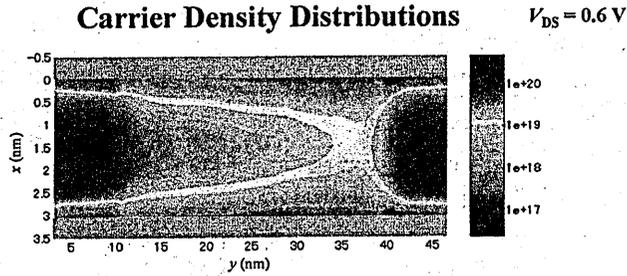
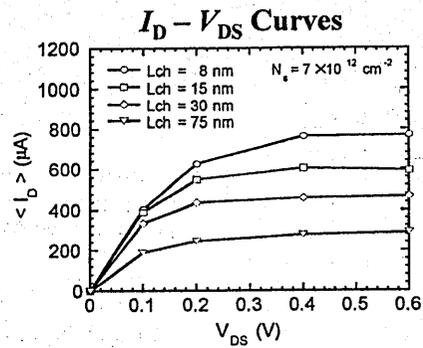
$V_G = 0.5 \text{ V}$   
 $V_{DS} = 0 \text{ V}$

## QMC法

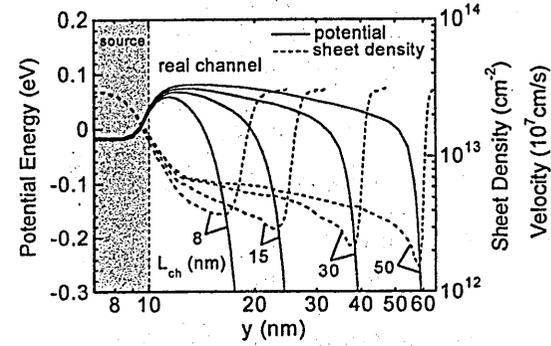


## S/P法

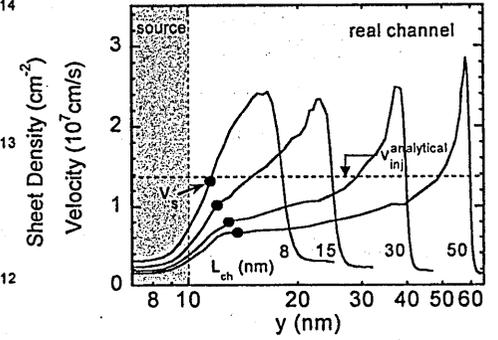




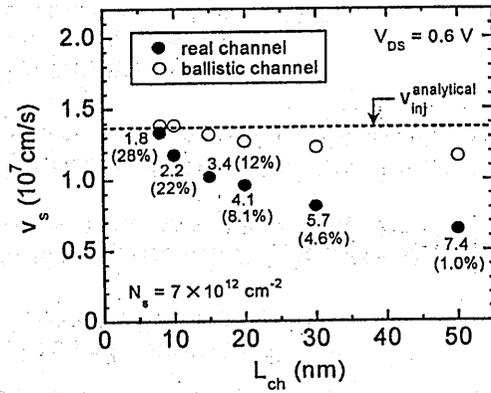
### Potential and Sheet Density



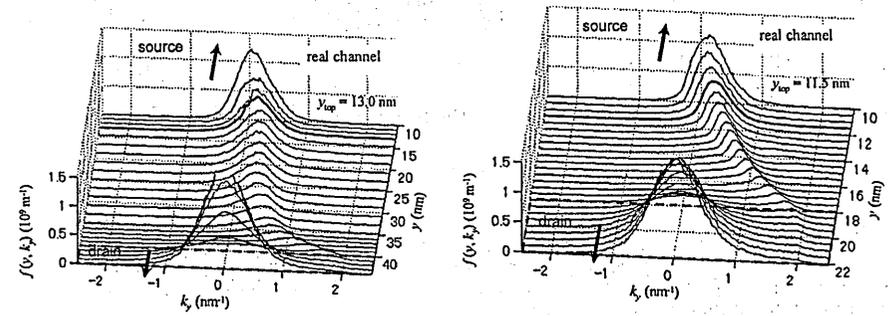
### Average Electron Velocity



## Average Electron Velocity at Potential Bottleneck Point



## Distribution Function in Momentum Space



# Quantum Transport Model

## (1) Linear Response Theory

Kubo Formula 1958

## (2) Wigner Function (Quantum Boltzmann eq.)

Wigner 1932, Frensley 1987, Ferry 1987

## (3) Quantum Corrected Semiclassical Method

Ancona 1987, Ferry et al. 1992, Tsuchiya et al. 1999

## (4) Scattering Theory

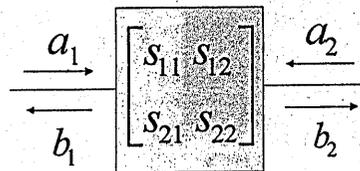
Tsu & Esaki Model 1973,  
Landauer-Büttiker Formula 1988

## (5) Nonequilibrium Green's Function (NEGF)

Keldysh 1965, Kadanoff and Baym 1962, Caroli et al. 1971  
Henrickson et al. 1994, Lake et al. 1997, Svizhenko et al. 2002

## S-matrix

$$T_{pq} = S_{pq} S_{pq}^+$$



### Electronic Wave

$$\varphi_i = a_i \exp(ikx) + b_i \exp(-ikx)$$

Probability Current  $J_x = \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$ ,  $\rho = \varphi^* \varphi$

$$J_x = \sum_i \frac{\hbar}{2mi} \left[ \varphi_i^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial x} \right]$$

$$= \sum_i v_i (|a_i|^2 - |b_i|^2), \quad v_i = \hbar k / m$$

$$J_x = \sum_i (|a_i|^2 - |b_i|^2)$$

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{v_i}} \{ a_i \exp(ikx) + b_i \exp(-ikx) \}$$

### Electromagnetic Wave

$$a_i = \frac{V_i + Z_i I_i}{2\sqrt{Z_i}}, \quad b_i = \frac{V_i - Z_i I_i}{2\sqrt{Z_i}}$$

$Z_i$ : outward impedance at  $i$ -th port

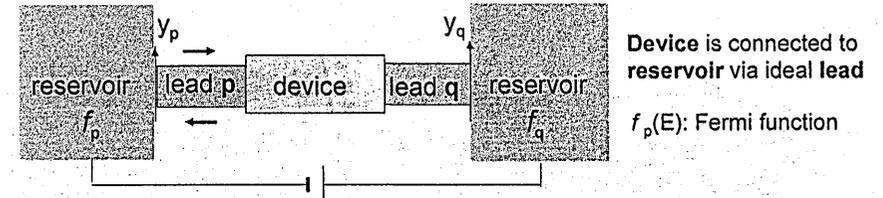
$$V_i = \sqrt{Z_i} (a_i + b_i), \quad I_i = (a_i - b_i) / \sqrt{Z_i}$$

$$\sum_i \text{Re}\{V_i I_i^*\} = \sum_i (|a_i|^2 - |b_i|^2)$$

### Unitarity $S^+ S = I = S S^+$

$$\sum_i (|a_i|^2 - |b_i|^2) = 0$$

# Scattering Theory



Device is connected to reservoir via ideal lead

$f_p(E)$ : Fermi function

### Landauer-Büttiker Formalism

$$I_p = \int i_p(E) dE$$

$$i_p = \frac{2e}{h} \sum_q [T_{qp} f_p - T_{pq} f_q] = \frac{2e}{h} \sum_q T_{pq} [f_p - f_q]$$

$T_{pq}$ : Total transmission probability  
(average T times the number of modes)

$$\sum_q T_{qp} = \sum_q T_{pq}$$

### Linear Response

$$I_p = \frac{2e}{h} \sum_q \int dE T_{pq}(E) [f_p(E) - f_q(E)]$$

$$\approx \frac{2e}{h} \sum_q \int dE T_{pq}(E) \frac{\partial f}{\partial E} (-eV_{pq})$$

$$= \sum_q G_{pq} V_{pq}$$

$$G_{pq} = \frac{2e^2}{h} \int T_{pq}(E) \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) dE \rightarrow \frac{2e^2}{h} T_{pq}(E_f)$$

Conductance is transmission

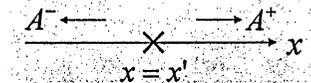
# Scattering Theory

### Green's function

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E - U_0 \right) G(x, x') = \delta(x - x')$$

$$G(x, x') = A^+ \exp[ik(x - x')] \quad (x > x')$$

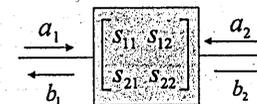
$$G(x, x') = A^- \exp[-ik(x - x')] \quad (x > x')$$



$$A^+ = A^- = \frac{i}{\hbar v}, \quad v = \frac{\hbar k}{m}, \quad k = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}$$

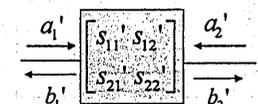
### Scattering matrix $S_{12} = \sqrt{v_2 / v_1} s_{12}$

(1) Probability current ( $SS^+ = I = S^+S$ )



$$G_{pq}^R = -\frac{i}{\hbar \sqrt{v_p v_q}} (\delta_{pq} + s_{pq})$$

(2) Wave amplitude



$$G_{pq}^R = \delta_{pq} A_p^- + s_{pq} A_p^+ = -\frac{i}{\hbar v_p} (\delta_{pq} + s_{pq})$$

# NEGF Method (Coherent Transport)

## Relation of S-matrix to the Green's function (Fisher-Lee relation)

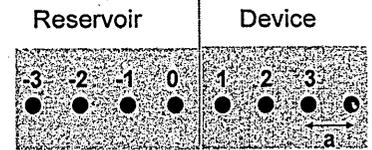
$$S_{pq} = -\delta_{pq} + i\hbar\sqrt{v_p v_q} G_{pq}^R \quad v_p : \text{velocity in lead } p$$

## Transmission probability

$$\begin{aligned} T_{pq} &= S_{pq} S_{pq}^+ \\ &= \hbar^2 v_p v_q G_{pq}^R G_{qp}^A \\ &= \Gamma_p G_{pq}^R \Gamma_q G_{qp}^A \quad \Gamma_p = \hbar v_p, \Gamma_q = \hbar v_q, G^A = G^{R+} \end{aligned}$$

D. S. Fisher & P. A. Lee, Phys. Rev. B 23, 6851 (1981).

$$H\varphi = E\varphi, \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$



## 1. Tight Binding Model (Finite Difference Method)

$$E\varphi_n = -t\varphi_{n-1} + D_n\varphi_n - t\varphi_{n+1}$$

$$t = -\frac{\hbar^2}{2m} a^2, \quad D_n = U_n + 2t$$

infinite dimensional matrix

$$E\{\varphi\} = [H]\{\varphi\}, \quad \{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix}$$

$$E \begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_R & \tau^+ \\ \tau & H_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} \dots & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & D_2 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & D_1 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & D_0 & -t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & D_1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & D_2 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

S. Datta, Electronic Transport in Mesoscopic Systems, Cambridge Univ. Press, 1995.

## 2. Truncation of Schrödinger Equation for "Open System"

$$\begin{aligned} [EI - H_R]\{\phi\} &= \tau^+ \{\psi\} \\ \rightarrow \{\phi\} &= \{\phi_\alpha\} + [g^R] \tau^+ \{\psi\}, \quad [EI - H_R + i\eta][g^R] = [I] \\ [EI - H_D]\{\psi\} &= \tau \{\phi\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [EI - H_D - \Sigma^R]\{\psi\} &= \{S\}, \quad [\Sigma^R] = \tau [g^R] \tau^+, \quad \{S\} = \tau \{\phi_\alpha\} \\ \rightarrow \{\psi\} &= [G^R] \{S\}, \quad [EI - H_D - \Sigma^R][G^R] = [I] \end{aligned}$$

## 3. Density Matrix $[\rho] = \sum f(\varepsilon_\alpha - \mu) \{\psi_\alpha\} \{\psi_\alpha\}^+$

$$\psi\psi^+ = G^R S S^+ G^{R+} = G^R \tau \{\phi_\alpha\} \{\phi_\alpha\}^+ \tau^+ G^{R+}$$

## 4. Current

$$\text{Trace}[\psi\psi^+] = \text{Trace}[\psi^+\psi] = \psi^+\psi$$

$$I \equiv (-q) \frac{d}{dt} \psi^+\psi \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot J, \quad \rho = \varphi^* \varphi \right)$$

## Density Matrix $\psi\psi^+ = G^R S S^+ G^{R+} = G^R \tau \{\phi_\alpha\} \{\phi_\alpha\}^+ \tau^+ G^{R+}$

$$\begin{aligned} [\rho] &= \sum_\alpha f(\varepsilon_\alpha - \mu) \{\psi_\alpha\} \{\psi_\alpha\}^+ \\ &= \int dE f(E - \mu) \sum_\alpha \delta(E - \varepsilon_\alpha) \{\psi_\alpha\} \{\psi_\alpha\}^+ \\ &= \int dE f(E - \mu) G^R \tau \left[ \sum_\alpha \delta(E - \varepsilon_\alpha) \{\phi_\alpha\} \{\phi_\alpha\}^+ \right] \tau^+ G^{R+} \\ &= \int \frac{dE}{2\pi} f(E - \mu) G^R \tau \alpha \tau^+ G^{R+} = \int \frac{dE}{2\pi} f(E - \mu) G^R \Gamma G^A = \int \frac{dE}{2\pi} f(E - \mu) A \\ &= -i \int \frac{dE}{2\pi} G^< \quad -iG_{LL}^< = f_1 G_{L1}^R \Gamma_{11} G_{1L}^A + f_2 G_{L2}^R \Gamma_{22} G_{2L}^A \end{aligned}$$

Electron density

$$n(r) = -2i \int \frac{dE}{2\pi} [G^<(r, r'; E)]_{r'=r} = 2 \int \frac{dE}{2\pi} [A_1 f_1 + A_2 f_2]_{r=r}$$

$G^<(r, t; r', t')$  : correlation function playing a role analogous to  $f(r, k, t)$  in Boltzmann theory

■ Current

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_R & \tau^+ \\ \tau & H_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix}$$

$$I = (-q) \frac{d}{dt} \psi^+ \psi = -\frac{q}{i\hbar} \text{Trace}[\psi^+ \tau \phi - \phi^+ \tau^+ \psi], \quad \{\phi\} = \{\phi_R\} + \{g^R\} \tau^+ \{\psi\}$$

Inflow    Outflow

Net current at terminal j

$$I_j = -\frac{2q}{h} \int dE \{ \text{Trace}[\Gamma_j A] f_j + i \text{Trace}[\Gamma_j G^<] \}$$

Inflow                      Outflow

$$A = A_1 + A_2, \quad G^< = -i(A_1 f_1 + A_2 f_2)$$

Current through the device

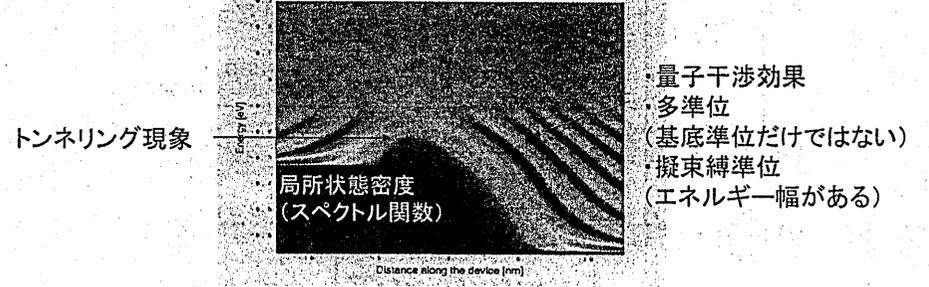
$$I = \frac{2q}{h} \int dE T(E) [f_1(E) - f_2(E)]$$

$$T(E) = \text{Trace}[\Gamma_1 A_2] = \text{Trace}[\Gamma_2 A_1]$$

$$= \text{Trace}[\Gamma_1 G^R \Gamma_2 G^A] = \text{Trace}[\Gamma_2 G^R \Gamma_1 G^A]$$

$$\Gamma_1 G_{IN}^R \Gamma_{NN} G_{NI}^A$$

NEGF法で表現される物理量と物理現象



$$A = G^R \Gamma G^{R+}$$

$$\Gamma = -2 \text{Im}(\Sigma)$$

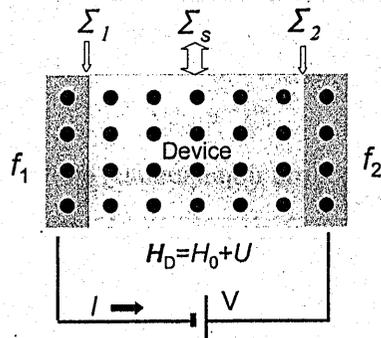
$$T = \Gamma^S G^R \Gamma^D G^{R+}$$

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} [A_S f(E - \mu_S) + A_D f(E - \mu_D)]$$

$$I = \frac{2q}{h} \int_0^{+\infty} T(E) [f(E - \mu_S) - f(E - \mu_D)] dE$$

from M. Ogawa of Kobe Univ.

NEGF Method (Non-coherent Transport)



Second quantized picture to consider Pauli exclusion principle in outflow and inflow

■ Keldysh Formalism

Systematic treatment of perturbations to a higher order

■ Haken-type Formalism

Lowest order treatment

Transport equation (Dyson's equation)

$$(E - H_D - \Sigma^R) G^R = I$$

$$G^< = G^R \Sigma^< G^A \quad G^A = G^{R+}$$

$$\rho = -i \int dE G^<(E) / 2\pi$$

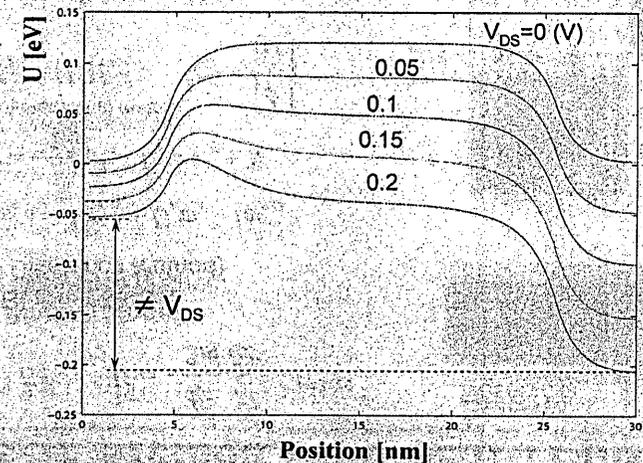
Poisson Equation

$$\rho \rightarrow U$$

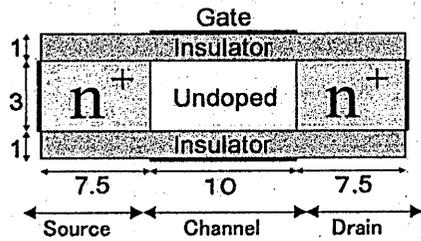
Net current at terminal j

$$I_j = -i \frac{2q}{h} \int dE (\text{Tr}[\Sigma_j^< A] - \text{Tr}[\Gamma_j G^<]), \quad \Sigma_j^< = -i f_j \Gamma_j$$

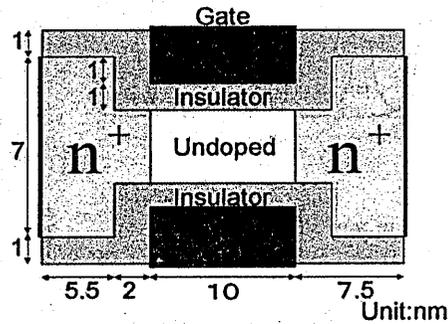
Neumann (floating) Boundary Condition



# DG-MOSFET MODEL

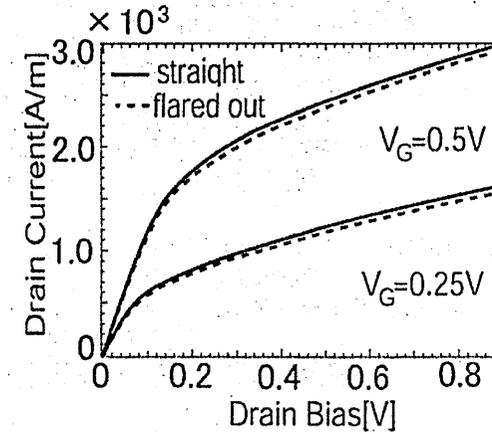


Uniform Contact



Flared-out Contact

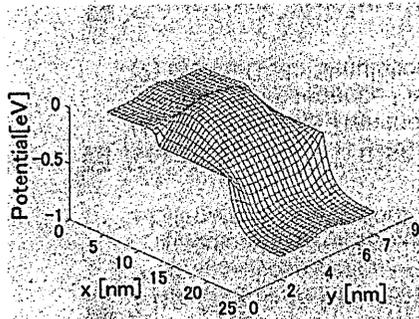
# $I_D - V_{DS}$ Curves



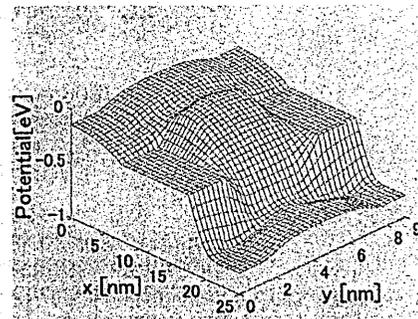
Short Channel Effects

- Saturation
- Subthreshold

# Potential Distribution

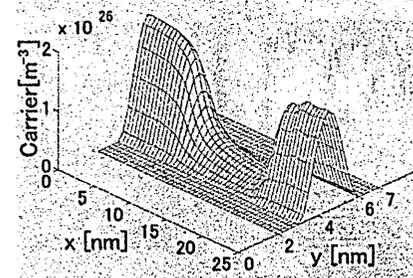


Uniform Contact

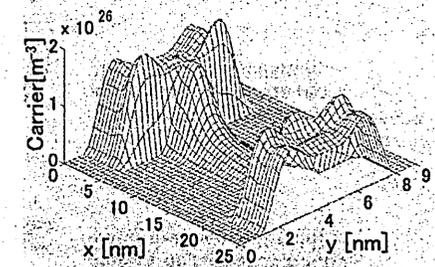


Flared-out Contact

# Electron Density Distribution



Uniform Contact



Flared-out Contact

# Noise Theory for Nanoscale Devices

## ■ The Noise is the Signal (R. Landauer, Nature, 658, 1998)

- Temporal correlation of electrons in transport (Coulomb interaction, Pauli exclusion principle)
- Ultimate device performance

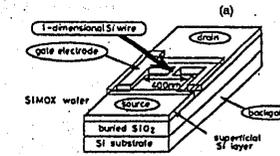
## ■ Semiclassical Noise Theory

- (1) Semiclassical Transport Model with Langevin forces (Impedance Field Method)
- (2) Monte Carlo Simulation

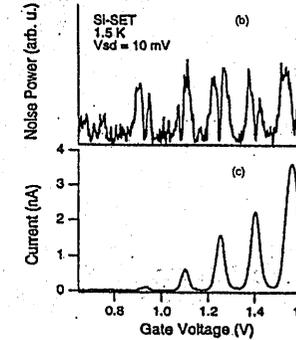
## ■ Quantum Mechanical Noise Theory

- (1) Quantum Corrected Monte Carlo Simulation
- (2) Quantum Corrected Hydrodynamic Model
- (3) Nonequilibrium Green's Function Model

# Shot-Noise in Si-SET



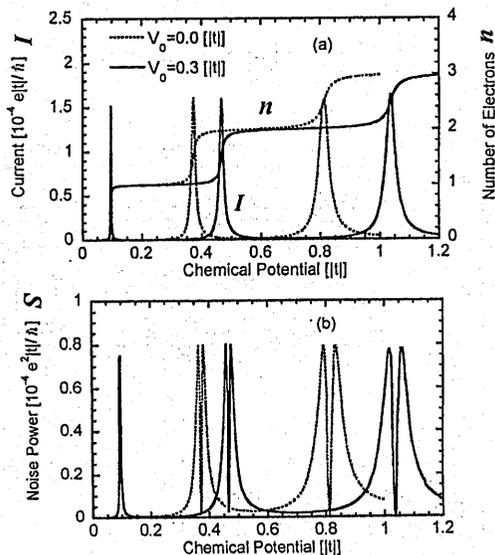
Si-SET on SIMOX wafer by pattern-dependent oxidation



Shot-noise is strongly suppressed to almost zero at the peaks of the Coulomb oscillations.

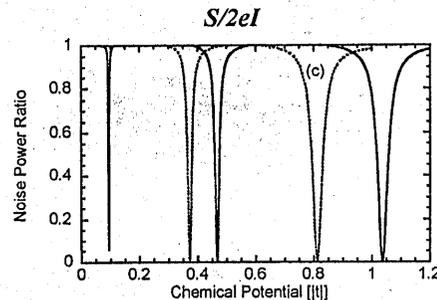
from K. Sasaki et al., Proc. Int. Workshop on Nano-Physics and Electronics, p. 81, 1997.

# Shot-Noise for Coulomb Oscillation



Shot noise suppression is caused by correlation of electrons in transport

■ Correlation mainly due to Pauli principle, not due to Coulomb interaction



# ナノスケールデバイスシミュレーション 今後の課題

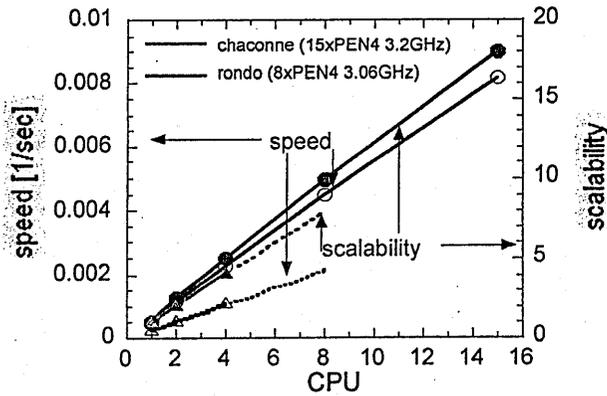
## 1) 量子補正モンテカルロ法の課題

- 3次元密度勾配計算  
ポアソンメッシュ内で十分な数の粒子の確保→「超粒子法」
- 並列計算による計算速度の向上
- ゲートトンネリング、界面ラフネス散乱のモデリング

## 2) 非平衡グリーン関数法の課題

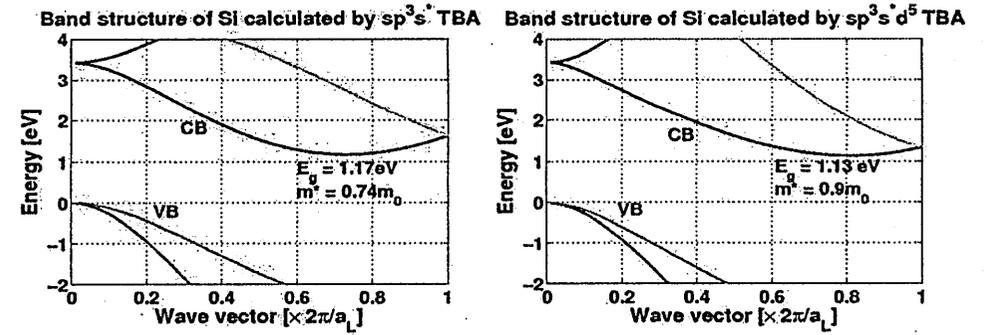
- 「実空間・モード空間展開法」(mode-coupling, valley-coupling)
- 並列計算による計算速度の向上
- 有効質量近似量子輸送モデルから原子スケール量子輸送モデル
  - 「経験的強束縛近似法 (Empirical TB)」による多バンド輸送モデル  $sp^3s^*(5 \text{ orbits})/sp^3s^*d^5(10 \text{ orbits})$
  - 「第一原理計算非平衡グリーン関数法 (DF-TB)」
- 散乱モデル (3次元、ラフネス散乱)

# Characteristics of Parallelization by MPI : full-2D Real Space NEGF

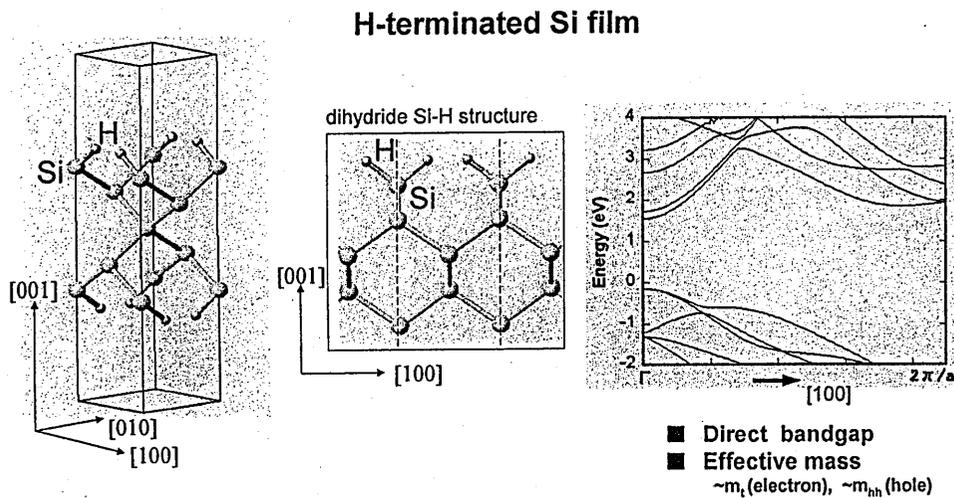


$T_1 = 2204.47$  vs  $3718.3$  [sec]      $T_{15} = 122.6$  [sec]

# Empirical Tight-Binding Approximation



# Electronic Wave Transport in Si Film



# Acknowledgment

- Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology
- NEDO / MIRAI
- Semiconductor Technology Academic Research Center (STARC)

## 輻射科学研究会講演資料

半導体中ホットエレクトロンのコヒーレント波動について  
－相反定理とシミュレーション、実証そして応用－

町田信也、古屋一仁

東京工業大学大学院理工学研究科

2006年7月25日

半導体中ホットエレクトロンの  
コヒーレント波動について  
—相反定理とシミュレーション、実証そして応用—

町田信也、古屋一仁

東京工業大学大学院理工学研究科



Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

背景: 電子波デバイス



Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

- 背景: 電子波デバイス、電子波回折観測
- 電子波デバイスの相反性
- 量子相反性による電子波回折観測実験の提案
- 半導体中の波面形状解析
- 回折電流値の数値シミュレーション
- まとめ



Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

集積回路の高速化は構成素子の微細化  
(2015年にはゲート長10nm)



量子効果の顕在化

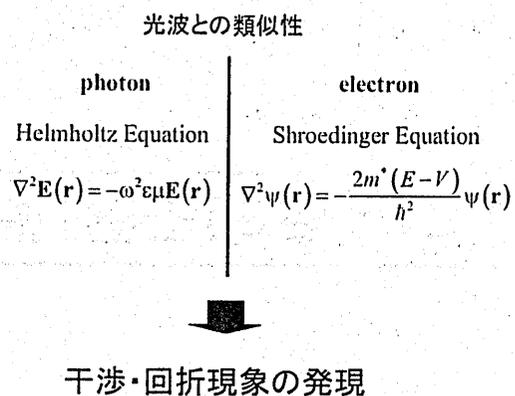


従来デバイス動作原理の見直し

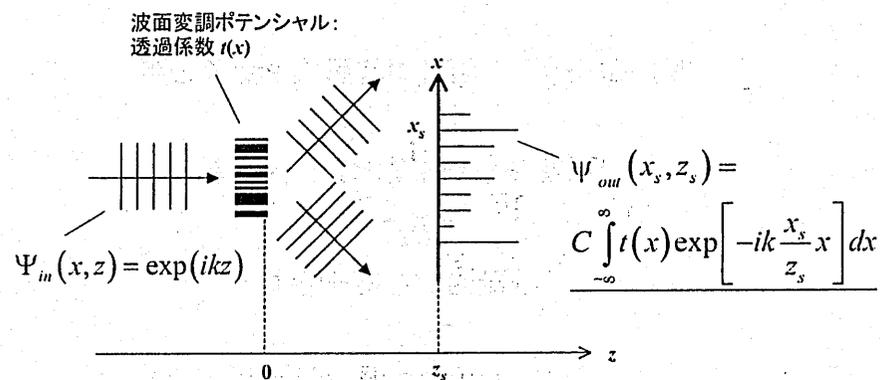
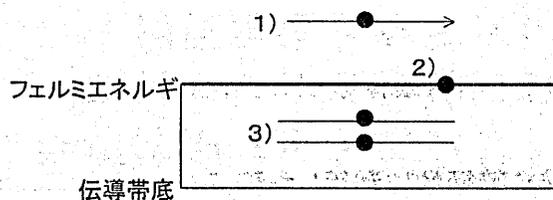
量子力学を積極的に利用した素子の研究



Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology



- 1) 非熱平衡電子(ホットエレクトロン)
- 2) 熱平衡電子(フェルミ面)
- 3) フェルミの海の電子



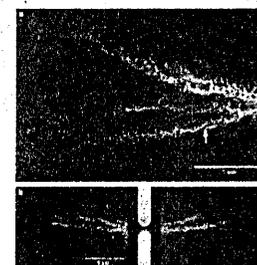
全ての周波数スペクトルを同時に計算

電子波面による並列計算機能の可能性



- 長い位相コヒーレンス長(10um@1.4K)
- 低いバイアス電圧に制限(~uV)

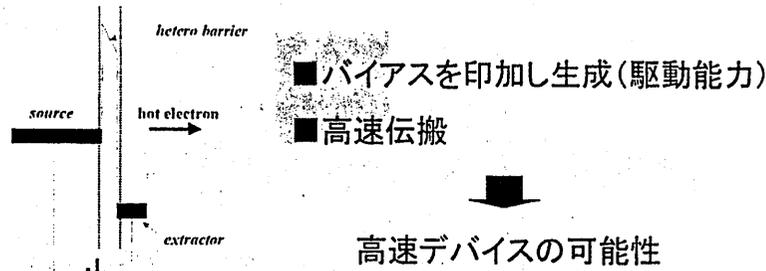
量子干渉のテストベッド、デバイスには不向き



Coherent branched flow in a two-dimensional electron gas  
 M. A. Topinka, B. J. LeRoy, B. T. Westervelt, S. E. J. Shaw, R. Plutschanski, E. J. Heller, K. D. Marincowski, & A. C. Gossard  
 NATURE [VOL. 410] 8 MARCH 2004

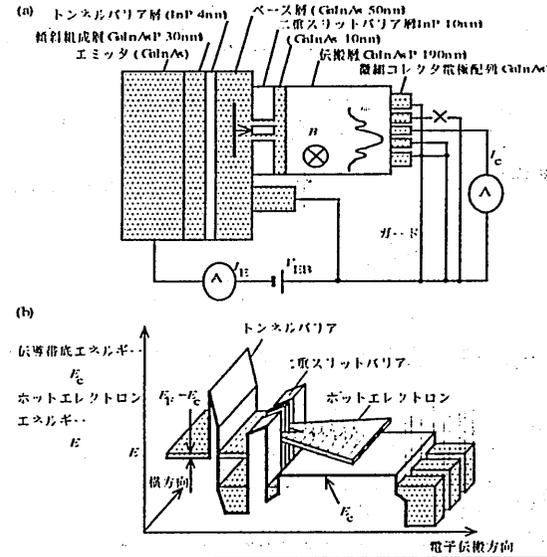


非熱平衡電子(ホットエレクトロン: HE)



HEの波面変換による高速並列計算機能

電子波デバイス



走査探針を用いたHEの波面現象観測 /RS06-06

検出器の条件

電子波長(数十nm)程度の分解能

最近の成果

超微細周期電極

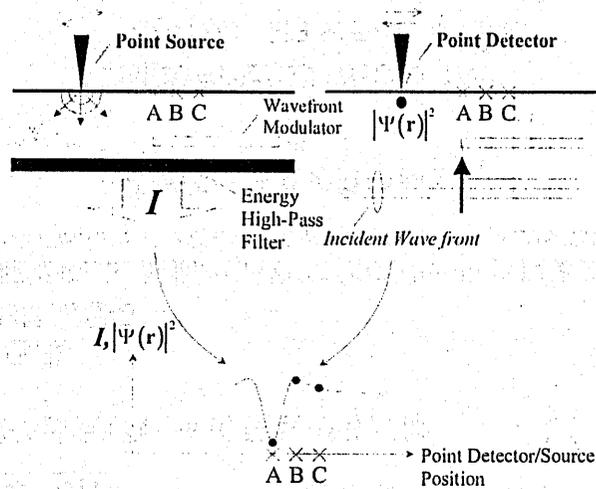
電極幅40nm、周期80nmでダブルスリット回折観測達成  
(K. Furiya et al., Phys. Rev. Lett., vol.91, no.21, pp.216803)

高空間分解能を持つ検出

走査探針を用いた検出法

- ・基本原理—電子波デバイスの相反性
- ・基本構成—弾道電子放出顕微鏡 (BEEM)

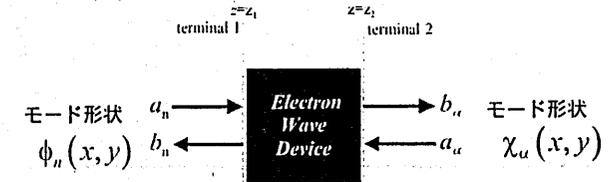
電子波デバイスの相反性



端子1から基本モードを入射した場合の端子2における回折パターン

$$\begin{aligned}
 |\Psi_2(x_2, y_2, z_2)|^2 &= \sum_{\alpha, \beta} \chi_\alpha(x_2, y_2) \chi_\beta(x_2, y_2) \frac{1}{\sqrt{v_\alpha v_\beta}} s_{\alpha 0} s_{0 \beta}^* \\
 &= \sum_{\alpha, \beta} \chi_\alpha(x_2, y_2) \chi_\beta(x_2, y_2) \frac{1}{\sqrt{v_\alpha v_\beta}} \text{Re}\{s_{0\alpha} s_{0\beta}^*\}
 \end{aligned}$$

S-行列による記述



$$\{b\} = [S]\{a\}$$

S-行列 [S]

$$\{a\} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{: 各モードの入射振幅}$$

$S_{nm}$  : 振幅1でモードnを入射したときのモードmの励起振幅

$$\{b\} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{: 各モードの励起振幅}$$

"相反性"

$$S_{nm} = S_{mn}$$

端子2から球面波を入射した端子1を流れる電流

球面波  $C \sum_{\alpha} -\frac{i}{\hbar v_{\alpha}} e^{-ik_{\alpha}(z-z_2)} \chi_{\alpha}(x, y) \chi_{\alpha}(x_2, y_2)$  が入射

エネルギーフィルタにより基本モードのみが端子1で励起される

$$\Psi_1(x, y, z) = C \sum_{\alpha} -\frac{i}{\hbar \sqrt{v_0} v_{\alpha}} s_{0\alpha} e^{-ik_0(z-z_2)} \phi_0(x, y) \chi_{\alpha}(x_2, y_2)$$

端子1を流れる電流

$$\begin{aligned}
 I_1(x_2, y_2) &= \iint j_z dx dy = \frac{|C|^2}{\hbar^2} \sum_{\alpha, \beta} \chi_{\alpha}(x_2, y_2) \chi_{\beta}(x_2, y_2) \frac{1}{\sqrt{v_{\alpha} v_{\beta}}} \text{Re}\{s_{0\alpha} s_{0\beta}^*\} \\
 &= \frac{|C|^2}{\hbar^2} |\Psi_2(x_2, y_2, z_2)|^2
 \end{aligned}$$

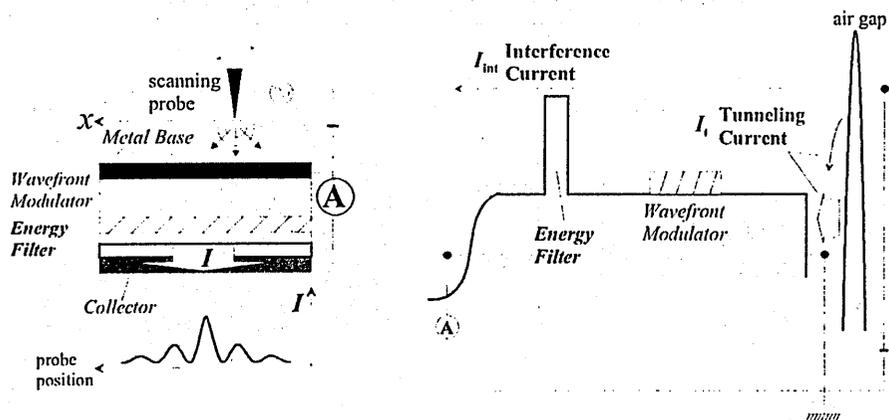
# 走査探針を用いた 電子波回折実験の提案



Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

## 走査探針を用いた電子波回折実験

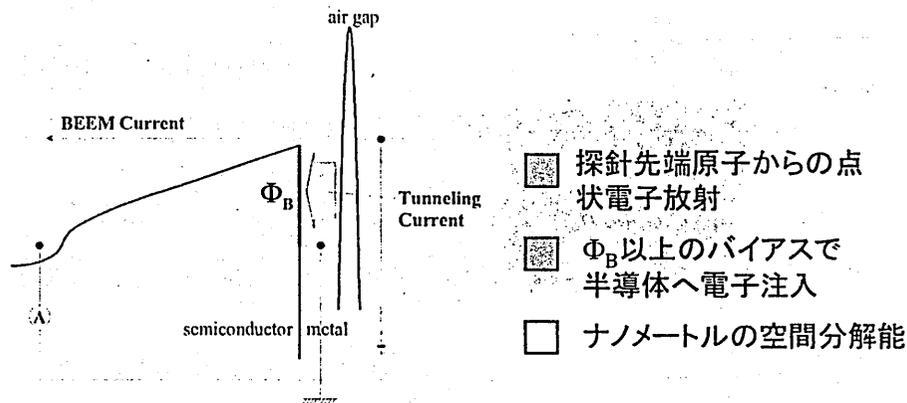
/RS06-06



Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

## 弾道電子放出顕微鏡 (BEEM)

~ BEEM Experimental Configuration ~



BEEM measures spatial variations of Schottky barrier height  $\Phi_B$

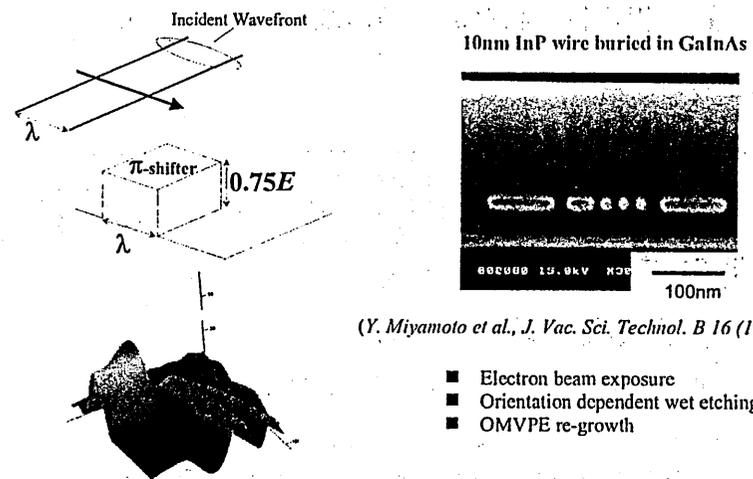


Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

## 位相シフタ

/RS06-06

"Phase Shifter" as an Interference Device



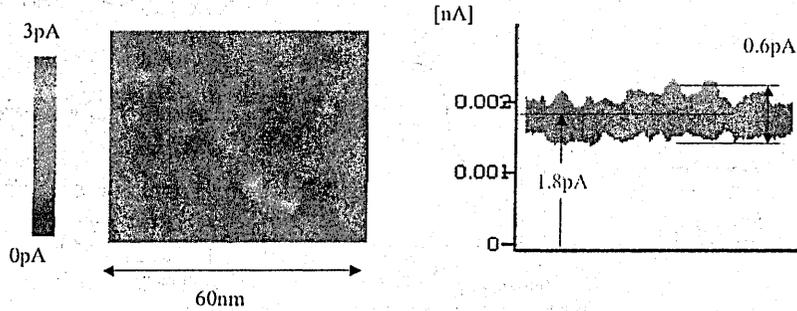
(Y. Miyamoto et al., J. Vac. Sci. Technol. B 16 (1998) 3894.)

- Electron beam exposure
- Orientation dependent wet etching
- OMVPE re-growth



Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

半導体注入電流の空間分布



ベース膜厚: 8nm トンネルバイアス: 1.2V トンネル電流: 0.5nA

半導体中の波面形状解析

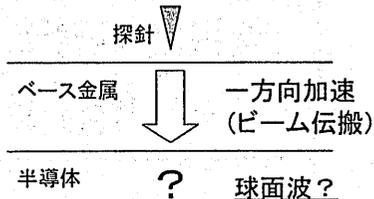
相反原理適用のための波面条件

相反性成立 — 半導体中で球面波が実現される必要

量子相反性を我々の実験構成で利用できるか？

ベース金属中

トンネル電圧による加速  
→ 平面波的伝搬？



半導体中

→ 球面波的伝搬？

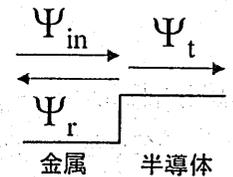
回折観測には半導体中での波動関数形状が重要

均一空間における三次元シュレディンガー方程式の解析

半導体中の波面形状解析

金属/半導体界面へ入射するベース金属中波動関数

$$\psi_{in}(\mathbf{r}) = \int d^2 k_{\parallel} c_{in}(\mathbf{k}_{\parallel}) e^{i[k_z(\mathbf{k}_{\parallel})z + \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}]}$$



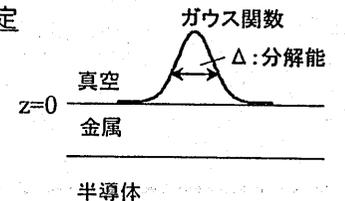
真空ギャップ/ベース金属界面の波動関数

ガウス関数  $e^{-(\rho/\sqrt{2}\Delta)^2} \propto \int d^2 k_{\parallel} e^{-(k_{\parallel}\Delta/\sqrt{2})^2} e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}}$

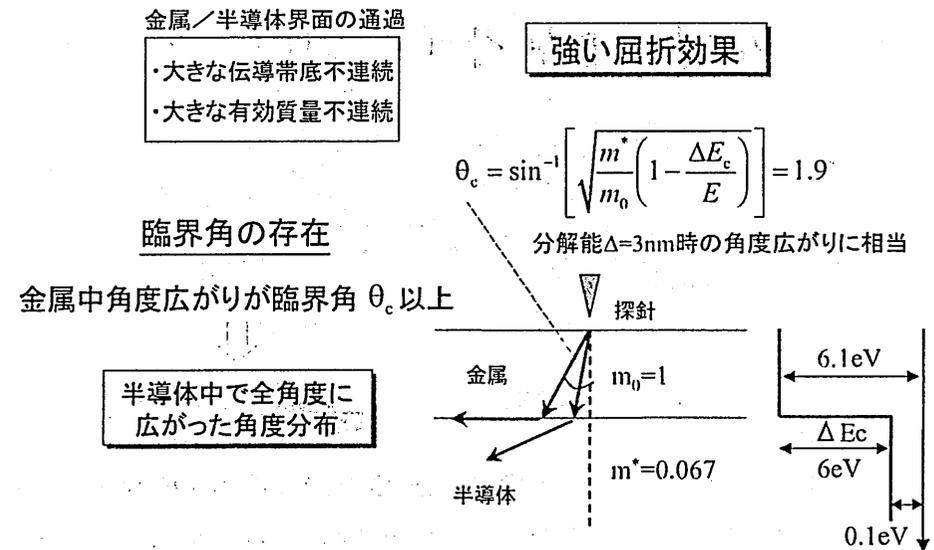
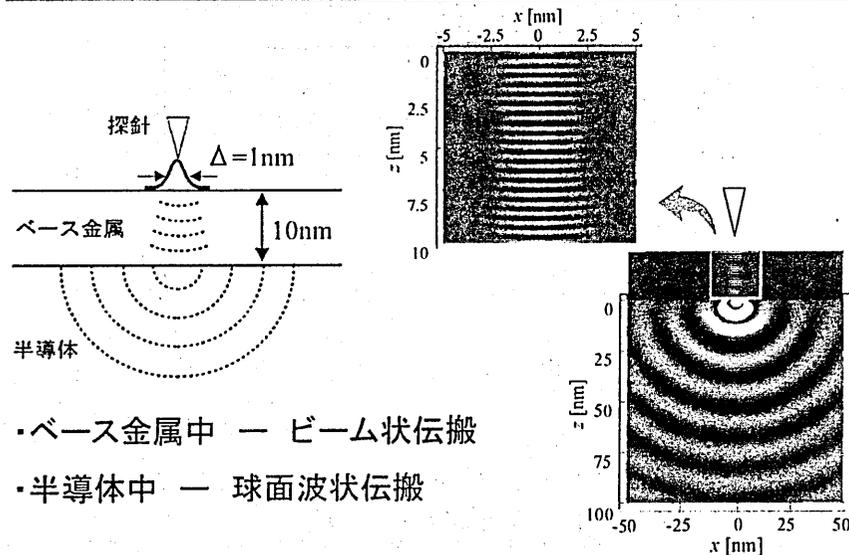
真空ギャップ/金属界面の境界条件より  $C_{in}$  決定

半導体中での波動関数

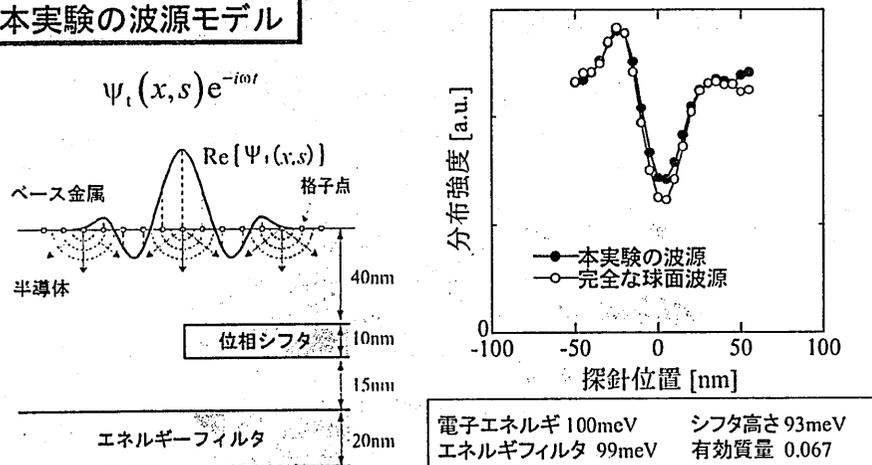
$$\psi_t(\mathbf{r}) = \int d^2 k_{\parallel} c_t(\mathbf{k}_{\parallel}) e^{i[k_z(\mathbf{k}_{\parallel})z + \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}]}$$



金属/半導体界面の境界条件より  $C_t$  決定



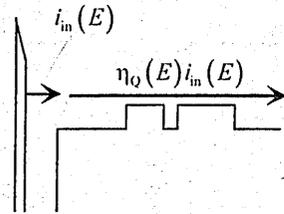
本実験の波源モデル



実験構造での波源はほぼ完全な球面波

回折電流の数値シミュレーション

$$I_c = \int \underbrace{\eta_Q(E)}_{\text{半導体中の量子転送効率}} \times \underbrace{i_{in}(E)}_{\text{半導体への注入電流}} dE$$



- $i_{in}(E)$  : ベル-カイザーモデル
- $\eta_Q(E)$  : 1バンド有効質量方程式のFDTD解析

2次のMur吸収境界条件

G. Mur, IEEE Trans. Electromagn. Comput., 23, 377, 1981.

吸収境界:  $\frac{\partial}{\partial x} \psi = -ik_x \psi$

$k_x = k \sqrt{1 - \frac{k_y^2 + k_z^2}{k^2}} \equiv \frac{\omega}{v_p} \left[ 1 - \frac{v_p^2}{2\omega^2} (k_y^2 + k_z^2) \right]$

$-i\omega \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \quad ik_y \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}, \quad ik_z \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}$

$v_p = \omega/k$  : 位相速度

$\psi = \exp(ik \cdot \mathbf{r})$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{v_p} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{v_p}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

定常解(単一エネルギー)解析に使用可能

シュレディンガー方程式の実部・虚部分離 (Vissher, Computers in Physics, Nov/Dec, pp.596, 1991)

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi \quad \Psi = R + iI \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{H}{h} I \quad \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{H}{h} R$$

時間の差分化

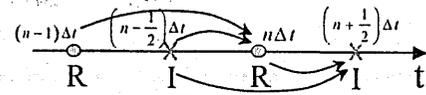
$$\frac{R^{n+1} - R^n}{\Delta t} = \frac{H}{h} I^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{etc}$$

空間の差分化

$$R_{i,j}^{n+1} = R_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{h} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{I_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2I_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + I_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{I_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2I_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + I_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right) + V_{i,j} I_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \quad \text{etc}$$

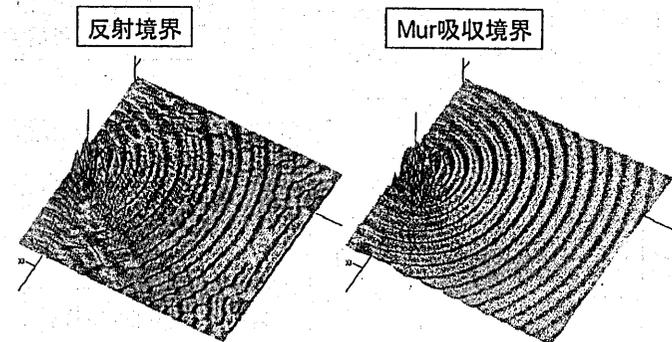
実部虚部を交互計算(リーブフロッグ)

安定条件



$$\frac{2h\Delta t}{m} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + \frac{V_{\max} \Delta t}{h} \leq 1$$

ポテンシャルがゼロの計算領域に点波源において境界条件を確認



Mur吸収境界適用時: 反射率1.6%

# 回折パターンのシミュレーション1

/RS06-06

空間格子点数: 300x300x100

空間格子点間隔:  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1\text{nm}$

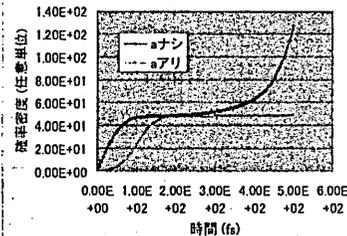
時間格子点間隔:  $\Delta t = 0.05\text{fs}$

## 波源の工夫

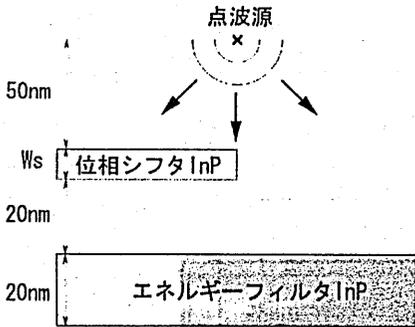
$$\psi = a(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\exp(i\omega t) \quad \hbar\omega = E$$

$a$ は振幅をなだらかに増加させる関数

高周波成分の発生を抑制



4000ステップで定常解



Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

# $\eta_Q(E)$ の解析1

/RS06-06

■ 最大電子エネルギーは $\Gamma$ -L間0.55eV (バレー間散乱の禁止)

■ 電子エネルギー0.55eVで $\pi$ 位相シフト

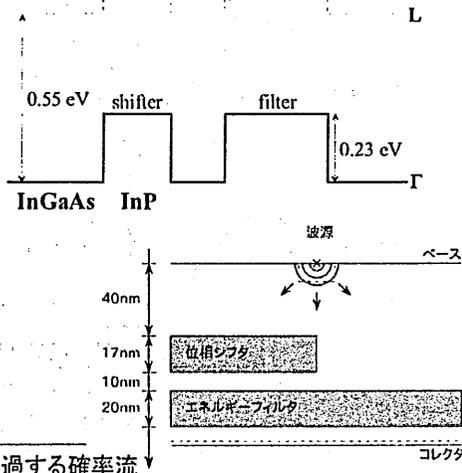
## 波源

$$\psi = a(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\exp(-i\omega t) \quad \hbar\omega = E$$

$a$ は振幅をなだらかに増加させる関数

## 転送効率の定義

転送効率 =  $\frac{\text{コレクタ面に流れ込む確率流}}{\text{波源を囲む直方体の半分を通過する確率流}}$

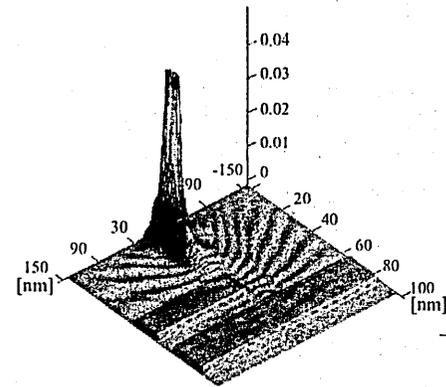


Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

# 回折パターンのシミュレーション2

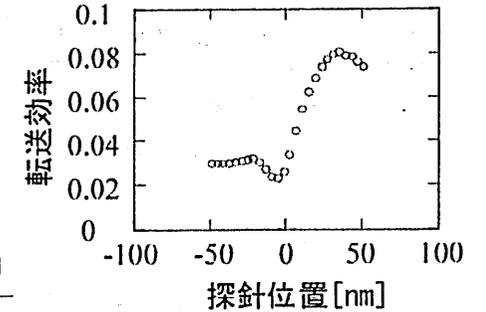
/RS06-06

## 典型的な波動関数形状



## 回折パターン

電子エネルギー=0.052eV+(エネルギーフィルタ)を仮定  
→位相シフト幅 $W_s=10\text{nm}$



回折パターンのシミュレーション成功  
問題点)シミュレーション時間長

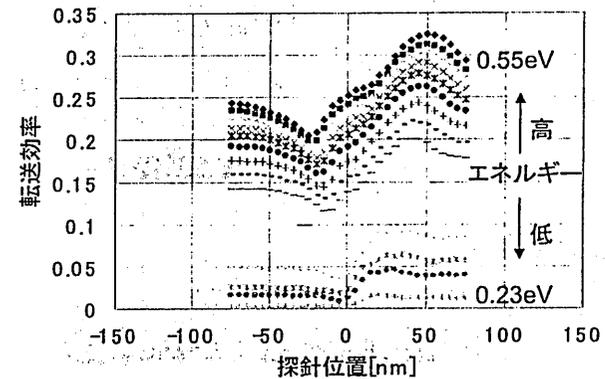


Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

# $\eta_Q(E)$ の解析2

/RS06-06

~量子転送効率のシミュレーション結果~



■ 高エネルギーで高い転送効率

■ Visibilityのエネルギー依存性殆どなし

0.23~0.55eV目一杯のエネルギー幅で  
実験は優位!

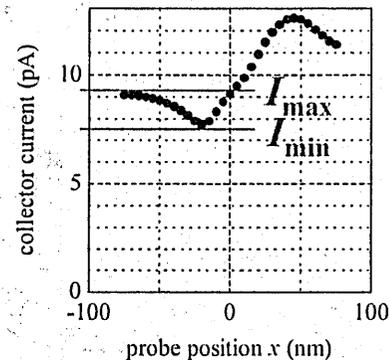
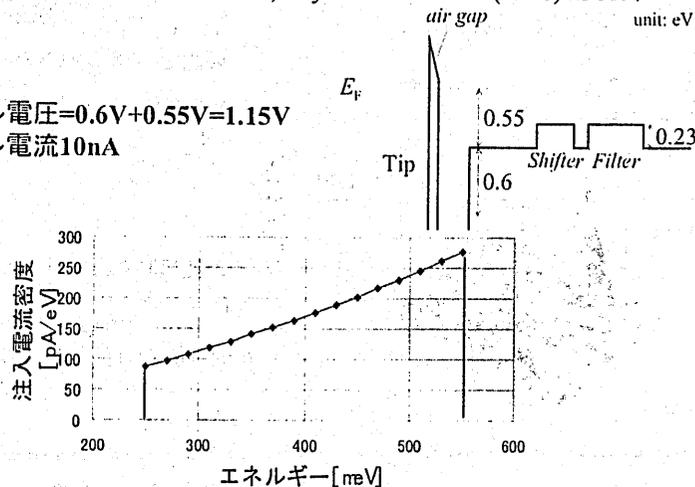


Department of Physical Electronics, Tokyo Institute of Technology

ベルーカイザーモデルによる解析

(L. D. Bell and W. J. Kaiser, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 2368.)

- トンネル電圧=0.6V+0.55V=1.15V
- トンネル電流10nA

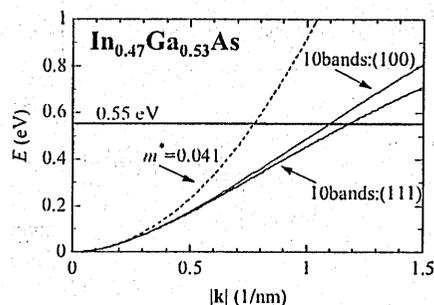


$I_{max} - I_{min} = 1.4 \text{ pA}$   
我々の現有技術で測定可能

回折電流=トンネル電流  
× 半導体注入効率 0.6%  
× 量子転送効率 20%

E-k関係の非放物線性、異方性の影響 /RS06-06

電子エネルギー0.55eVではE-k関係が等方的放物線特性から外れる



球面波伝搬への影響

同一エネルギーで7%の波数変動  
→ 等エネルギー面はほぼ球

→ 球面波状伝搬

回折電流量への影響 電子の有効質量が大きくなり、臨界角が広がる

→ 近似計算により回折電流は1.5倍に増加

回折コントラストへの影響 回折コントラストは最も高いエネルギー(0.55eV)のもので決定

→ 回折コントラストへの影響少ない

まとめ1

量子相反性に基づく走査探針を用いた  
ホットエレクトロン回折実験の提案と理論的基礎付け

- 電子波デバイスの相反性解明
- 半導体中におけるホットエレクトロンの波動関数形状の解析
  - ・ ベース金属/半導体界面における強い屈折効果により半導体中で全角度に広がった球面波が実現
  - ・ 量子相反性による高いコントラストの回折パターン出現

BEEM系までを含めた回折観測シナリオの確認

- 電子波回折実験の数値シミュレーターの開発



3次元シュレディンガー方程式のFDTD計算  
→計算時間に難あるがシミュレーション可能

- 電子波回折実験における信号電流を電子の波長広がり considering して厳密に計算



回折パターンの山谷電流差1.4pA(2.1pA:非放物線性)  
→我々現有装置の精度で観測可能



輻射科学研究会 RS06-07

**極微細電子デバイスの量子輸送シミュレーション**

強磁場中における半導体超格子の量子伝導  
エネルギー散逸と輸送について

森 伸也  
大阪大学大学院工学研究科

2006年7月25日 大阪大学

**ハリスソティック伝導**

Electron Path Scattering Centers

Long Channel MOSFET: Drift-diffusion Transport

Short Channel MOSFET: Ballistic Transport with almost no scattering

From Koshida  
*Appl. Surf. Sci.* 146, 371376 (1999)

From Gupta  
*IEEE Potentials* 21, 13 (2002)

**光学フォノン散乱の抑制**

結合量子ドット構造における光学フォノン散乱の抑制

(c)  $a_x, b_x$   
 $a_y, b_y$   
 $a_z, b_z$   
 $(-v)$

From Sakaki  
*JJAP* 28, L314 (1989)

実効的な結合量子ドット構造

光学フォノン散乱の抑制 → エネルギー散逸の抑制 → 輸送?

**発表内容**

- 半導体超格子について
  - Bloch振動とEsaki-Tsuモデル
  - 光学フォノン散乱の抑制
- 強磁場中におかれた超格子
  - 実験結果とモンテカルロシミュレーション
  - Ignatovモデルとエネルギー散逸について
  - Tsu-Döhlerモデルと非平衡グリーン関数法
  - 共鳴輸送現象
- 傾斜磁場下の超格子
  - 半古典的モデルに基づくカオスとの関係

**1次元強結合近似モデル**

1次元原子列

格子間隔 a エネルギー単位  $E_0$

エネルギー分散関係

$$E(k) = E_0 - 2t \cos ka$$

$(-\pi/a < k \leq \pi/a)$

格子間隔  $a \sim \text{\AA}$   
バンド幅  $\Delta \equiv 4t \sim eV$

**Bloch振動**

← 電界  $F$  を印加

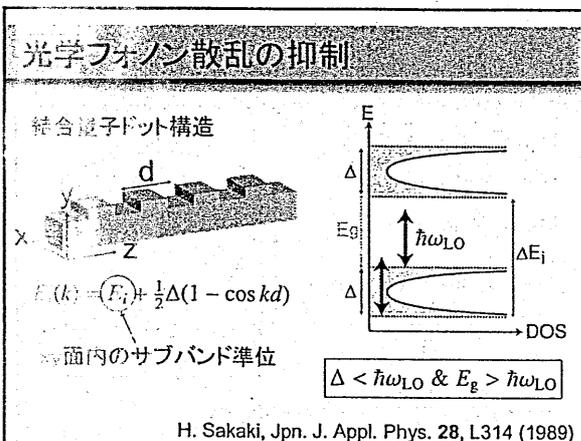
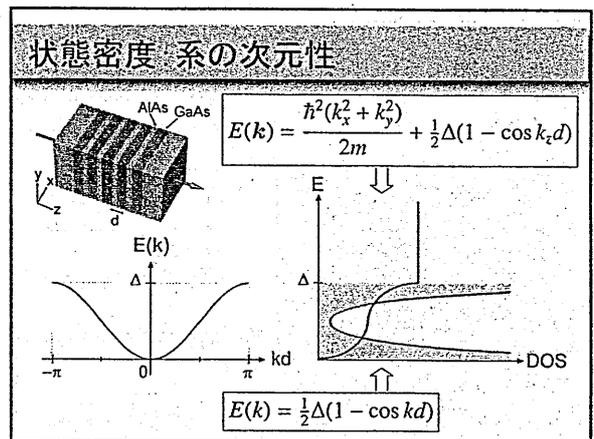
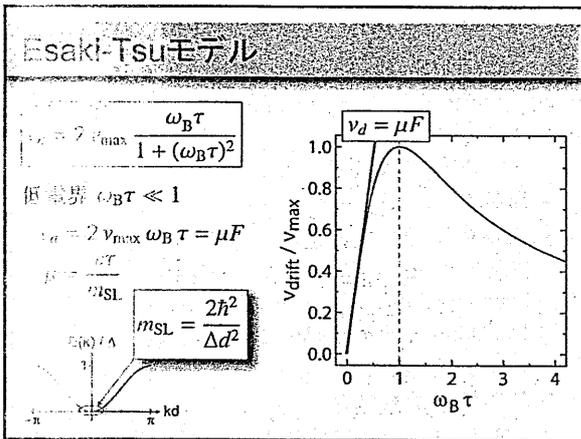
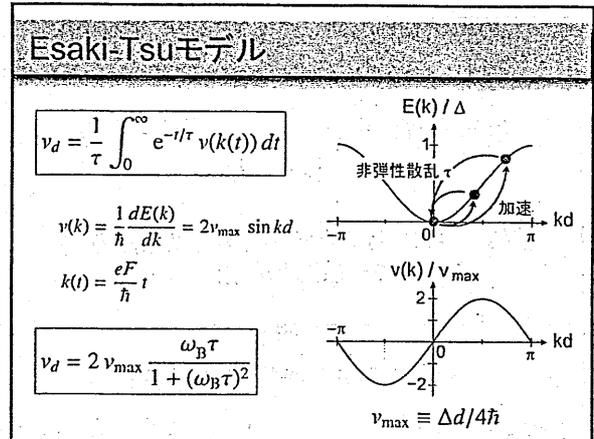
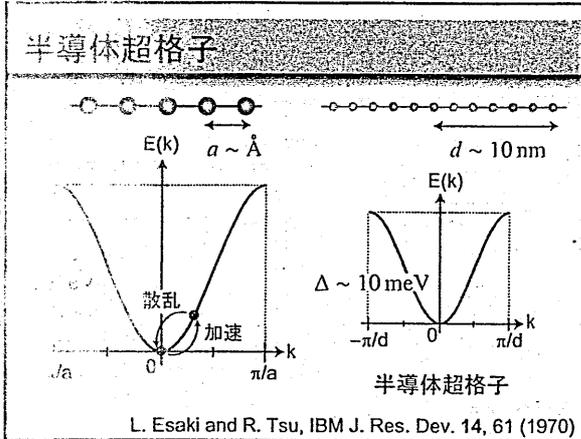
加速  $k(t) = k(0) + \frac{eF}{\hbar} t$

ブリュアン領域を1周する時間  $T$

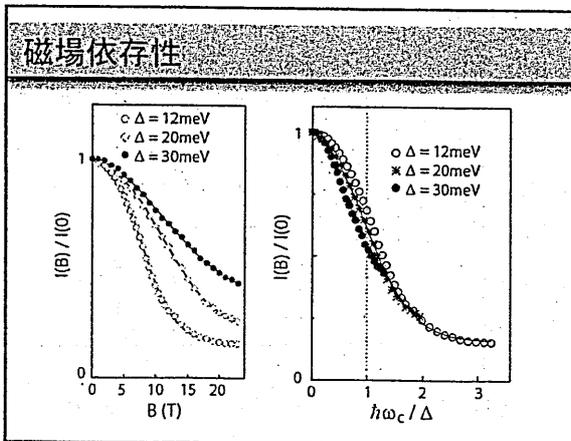
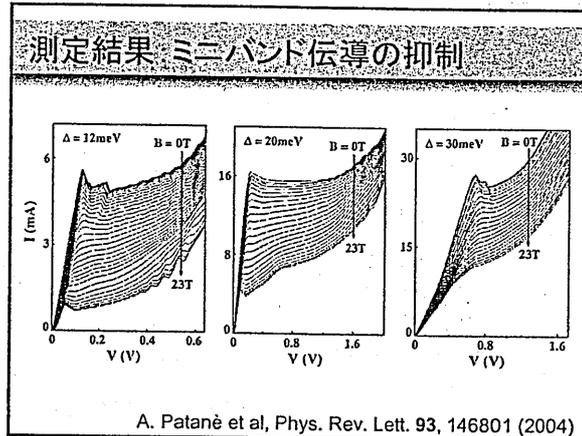
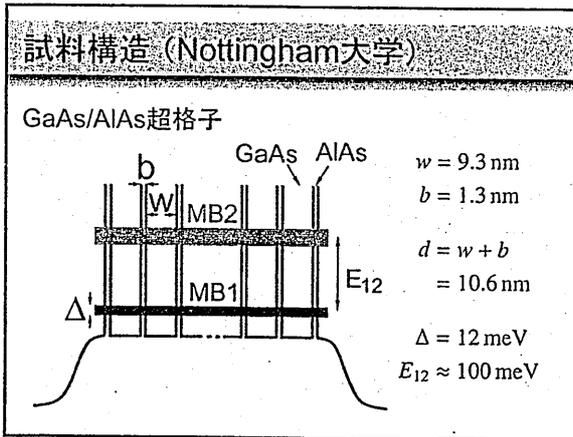
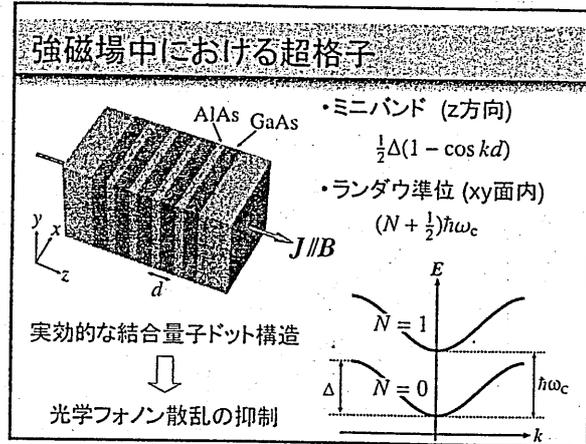
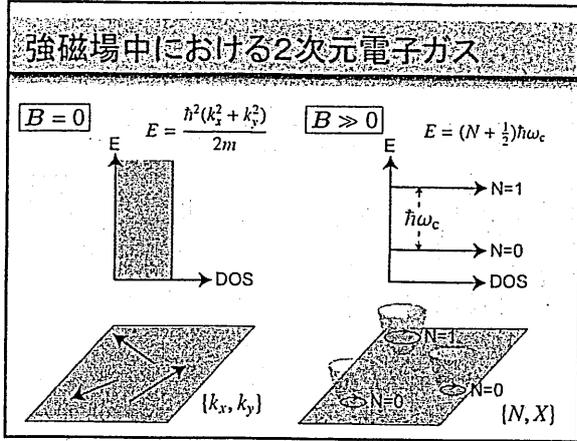
$$\frac{2\pi}{a} = \frac{eF}{\hbar} T$$

→  $\frac{2\pi}{T} = \frac{eFa}{\hbar} \equiv \omega_B$  : Bloch振動数

平川一彦 他, 応用物理 75, 702 (2006)



- ### 発表内容
- 半導体超格子について
    - Bloch振動とEsaki-Tsuモデル
    - 光学フォノン散乱の抑制
  - 強磁場中におかれた超格子
    - 実験結果とモンテカルロシミュレーション
    - Ignatovモデルとエネルギー散逸について
    - Tsu-Döhlerモデルと非平衡グリーン関数法
    - 共鳴輸送現象
  - 傾斜磁場下の超格子
    - 半古典的モデルに基づくカオスとの関係



### Monte Carloシミュレーション

■ 電子状態: ランダウ・ミニバンド状態  $\{NXk\}$

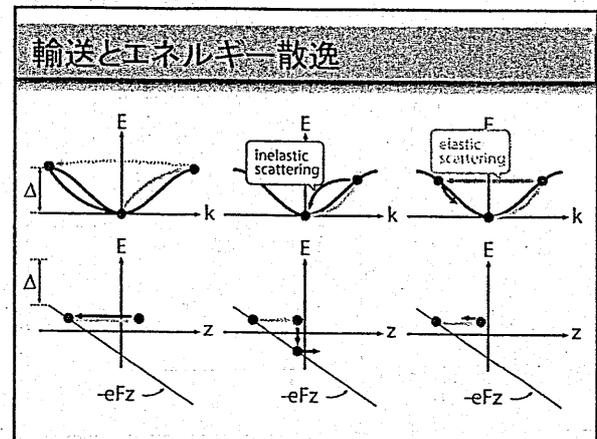
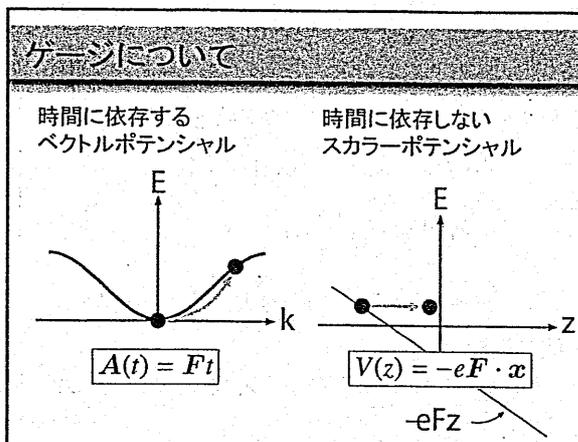
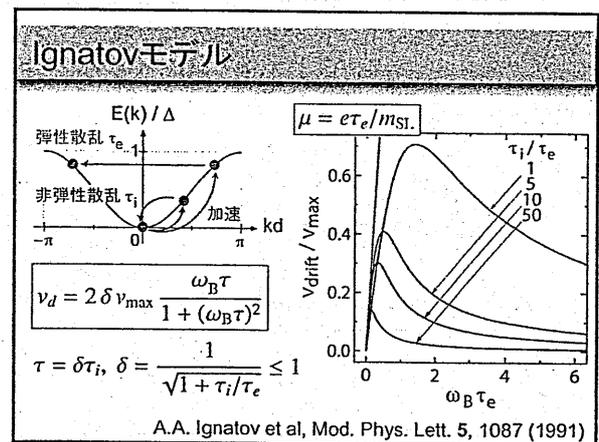
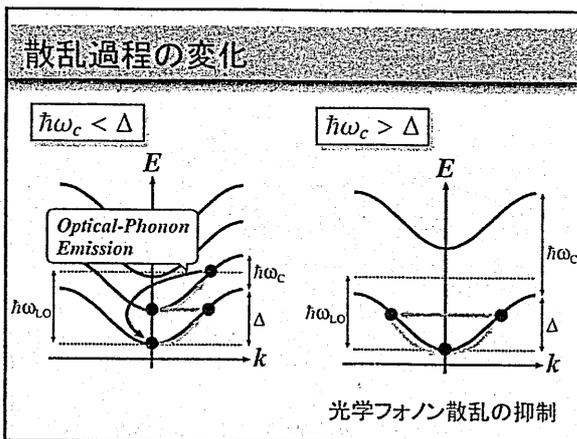
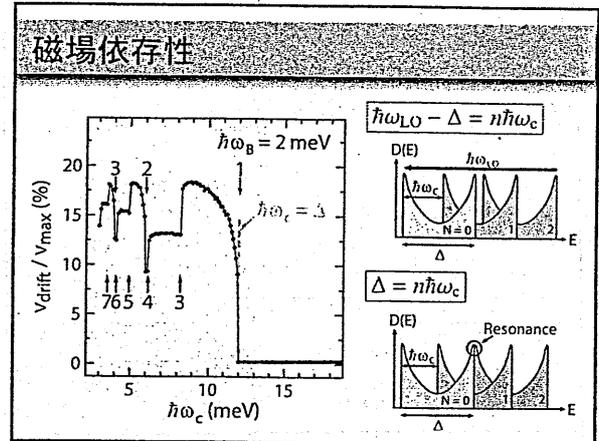
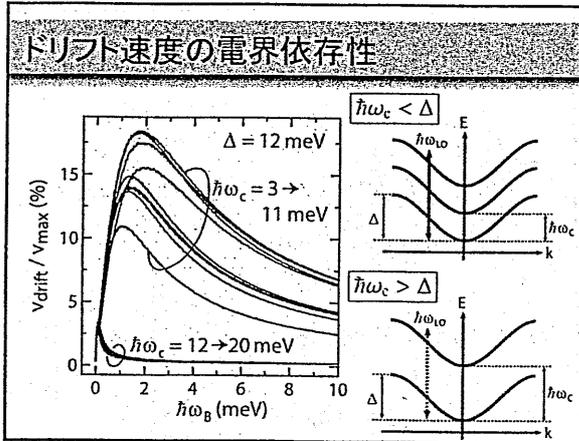
$$\Psi_{NXk}(x) = \phi_N(x - X) \exp\left(-i\frac{X}{\ell^2}y\right) u_k(z)$$

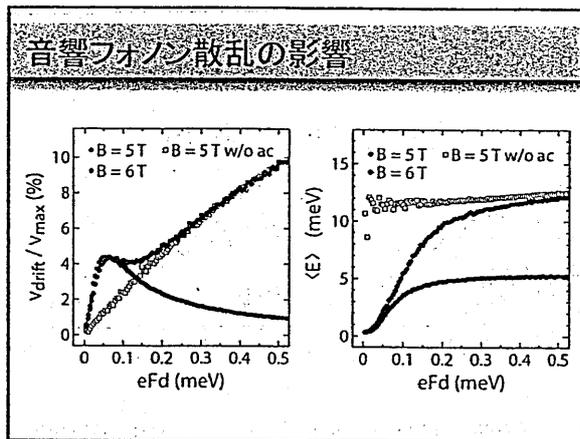
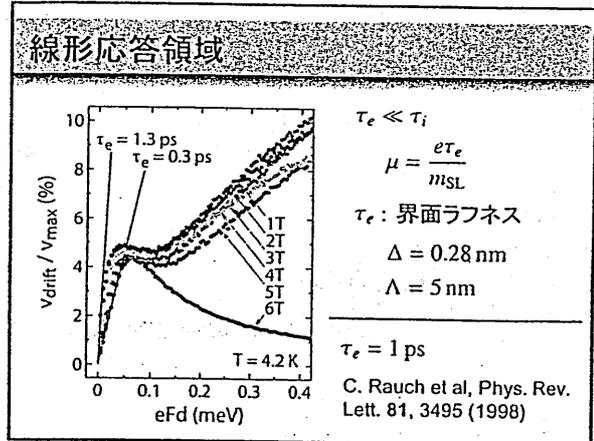
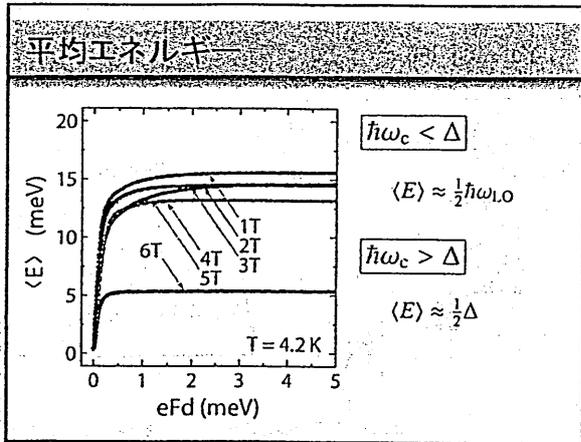
$$u_k(z) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_y u_0(z - yd) e^{iky}$$

$$E_{NXk} = E_{Nk} = (N + \frac{1}{2})\hbar\omega_c + \frac{1}{2}\Delta(1 - \cos kd)$$

■ 散乱過程

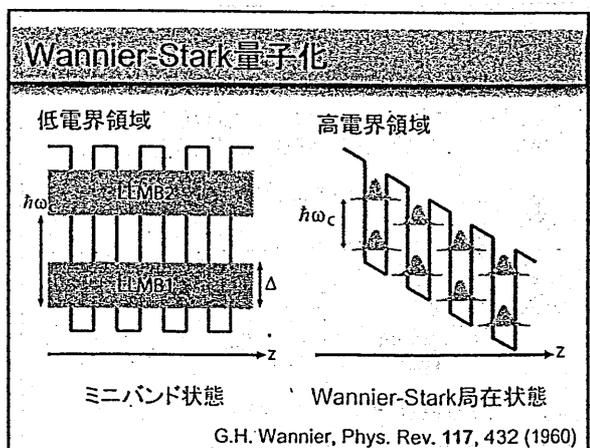
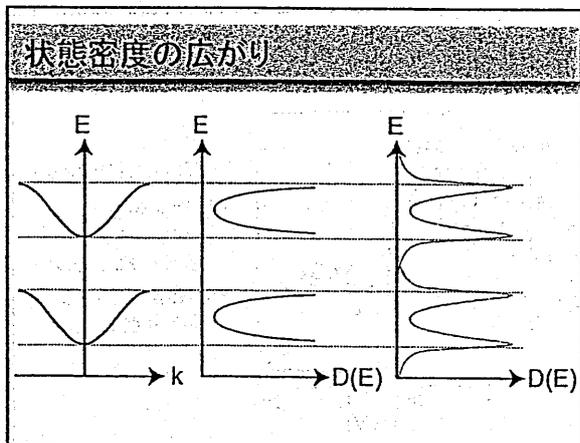
界面ラフネス, 極性光学フォノン, 音響フォノン (変形ポテンシャル, ピエゾ)

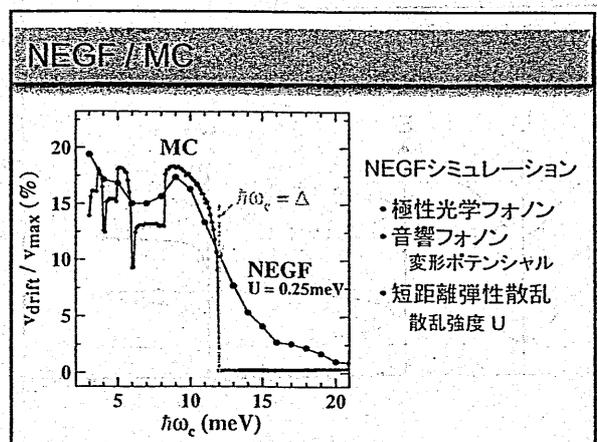
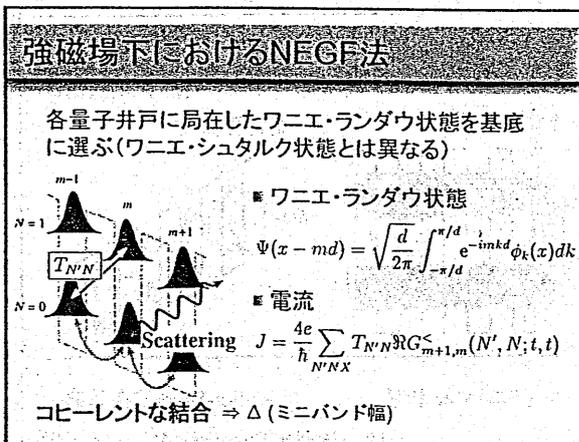
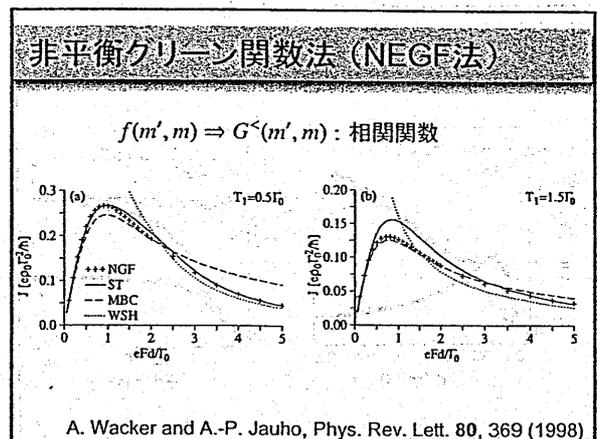
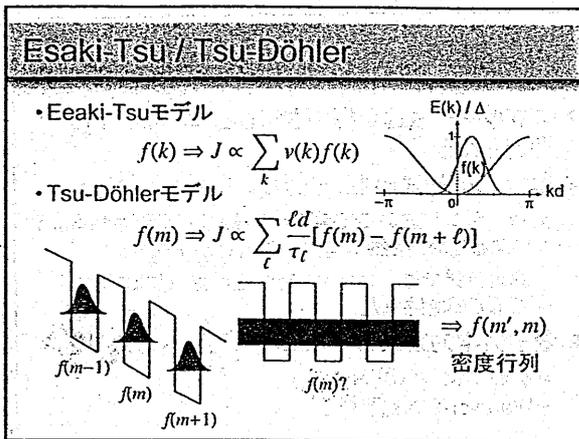
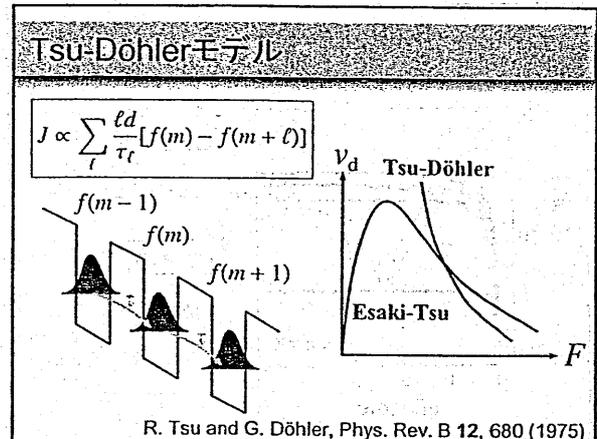
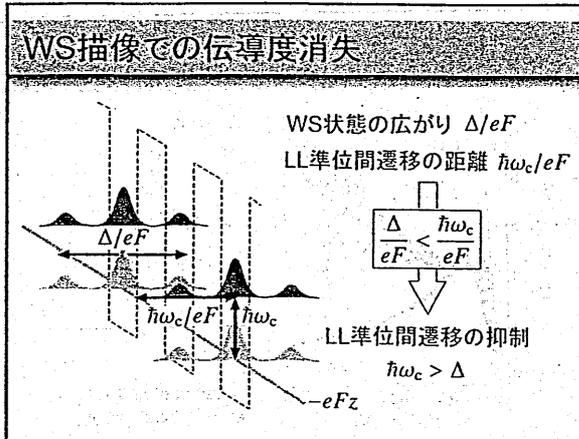


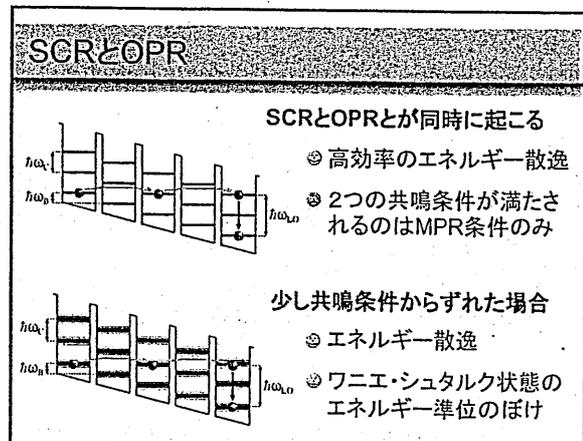
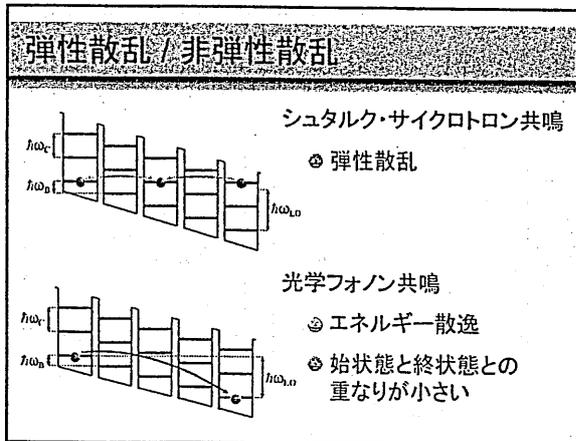
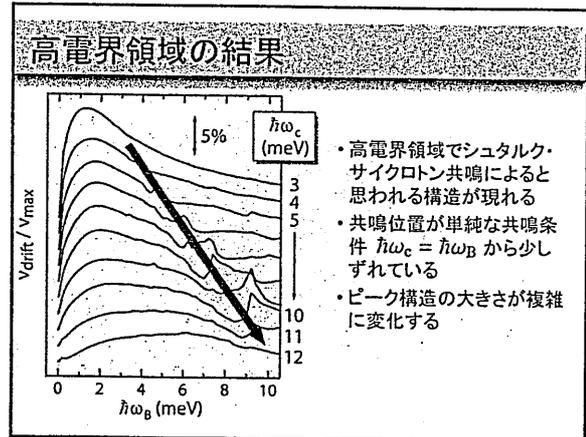
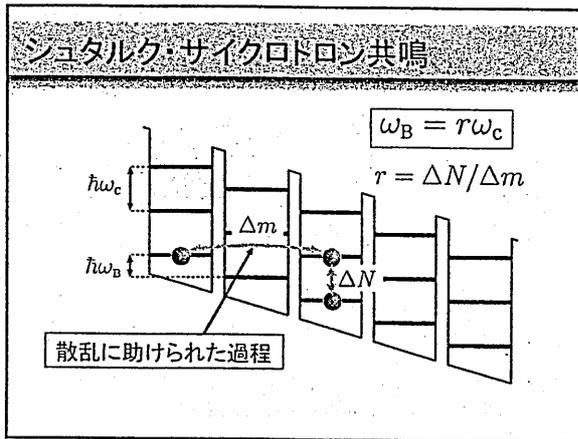
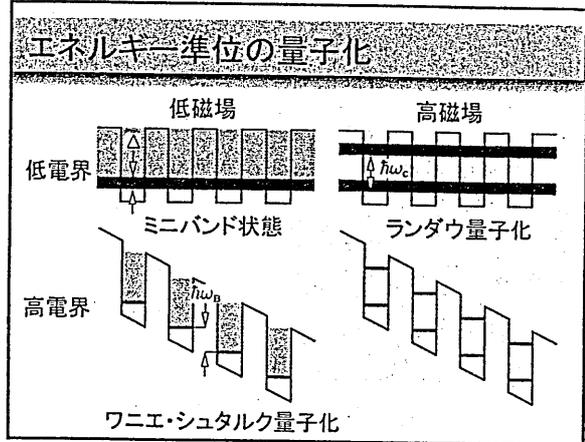
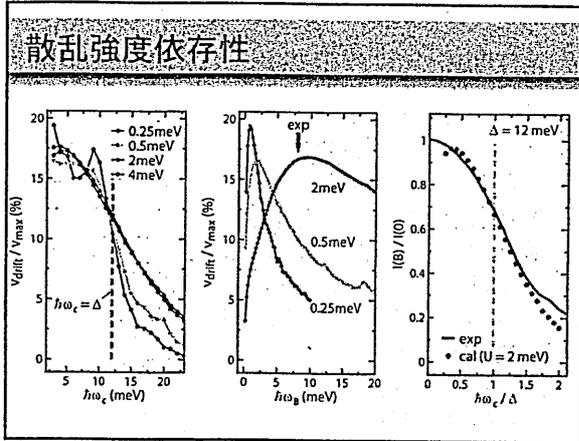


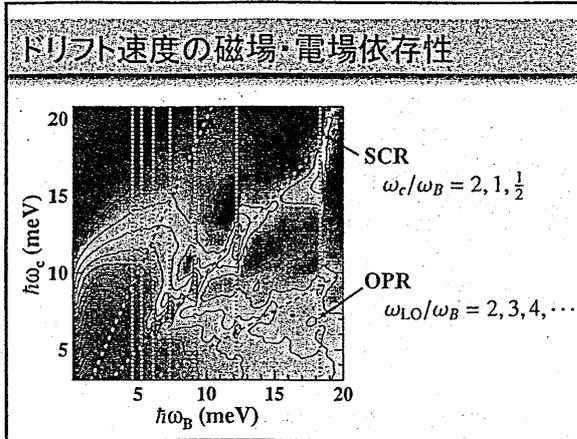
### 半古典的輸送モデルの限界

- エネルギー散逸が抑制されるとミニバンド輸送が抑制される
- ミニバンド輸送のモンテカルロシミュレーション
  - $\hbar\omega_c = \Delta$  において光学フォノン散乱が抑制されるようになるため、突然、ミニバンド伝導が消失する
  - 測定結果では、 $\hbar\omega_c = \Delta$  を中心に徐々にミニバンド伝導が抑制された
- 量子力学的効果のシミュレーションへの取り込み
  - 状態密度の広がり
  - Wannier-Stark量子化

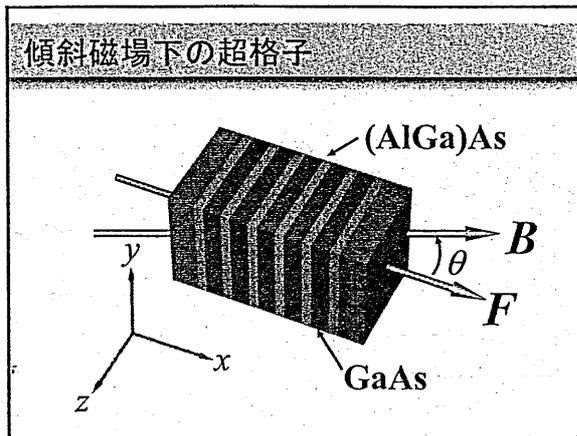








- ### 発表内容
- 半導体超格子について
    - Bloch振動とEsaki-Tsuモデル
    - 光学フォノン散乱の抑制
  - 強磁場中におかれた超格子
    - 実験結果とモンテカルロシミュレーション
    - Ignatovモデルとエネルギー散逸について
    - Tsu-Döhlerモデルと非平衡グリーン関数法
    - 共鳴輸送現象
  - 傾斜磁場下の超格子
    - 半古典的モデルに基づくカオスとの関係



### 傾斜磁場下における共鳴輸送

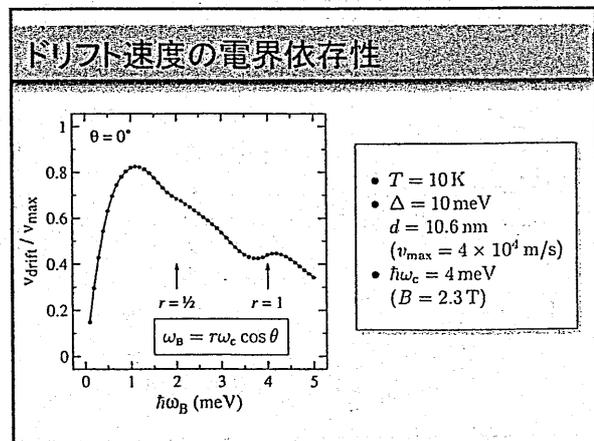
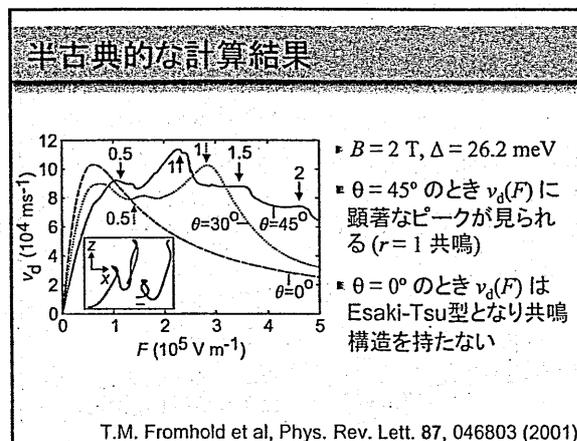
- 電場  $F \Rightarrow \omega_B = eFd/h$
- 磁場  $B \Rightarrow \omega_c = eB/m$
- 角度  $\theta$

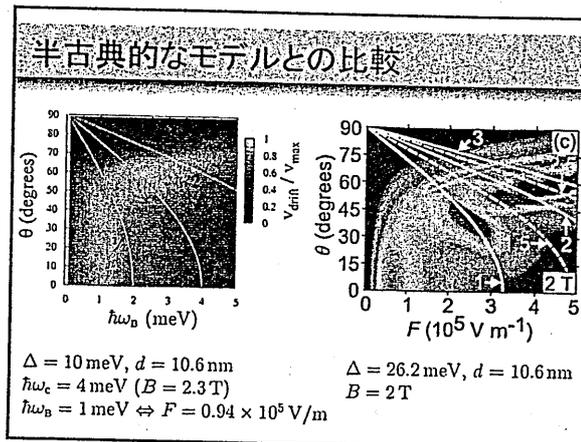
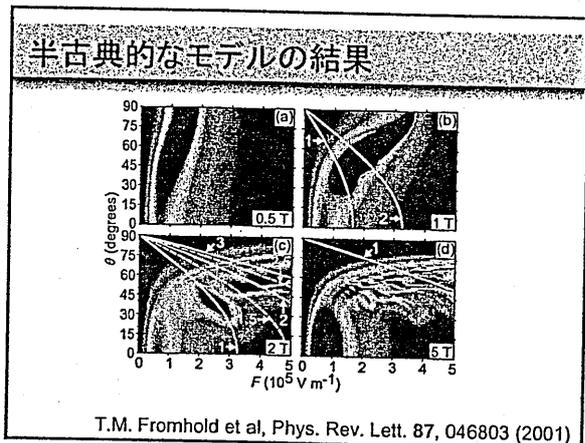
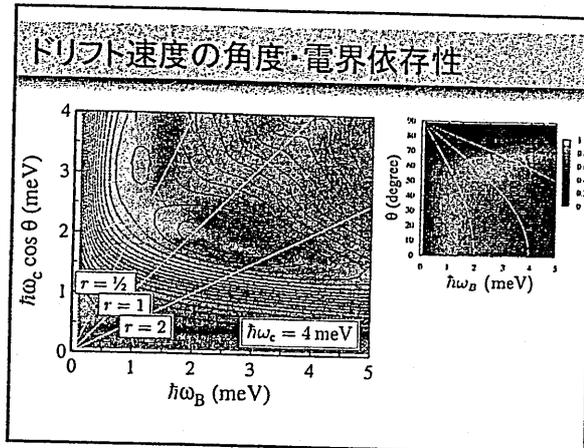
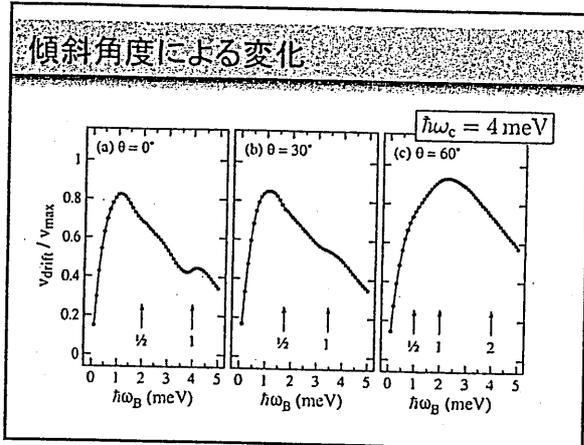
$r$  を整数もしくは有理数として、共鳴条件

$$\omega_B = r\omega_c \cos \theta$$

が満たされるとき、超格子の伝導度は共鳴的に増大する

- T.M. Fromhold et al, Phys. Rev. Lett. 87, 046803 (2001)
- T.M. Fromhold et al, Nature 428, 726 (2004)





- ### まとめ
- 半導体超格子について
    - Bloch振動とEsaki-Tsuモデル
    - 光学フォノン散乱の抑制
  - 強磁場中におかれた超格子
    - 実験結果とモンテカルロシミュレーション
    - Ignatovモデルとエネルギー散逸について
    - Tsu-Döhlerモデルと非平衡グリーン関数法
    - 共鳴輸送現象
  - 傾斜磁場下の超格子
    - 半古典的モデルに基づくカオスとの関係

- ### 参考文献
- D. Fowler, A. Patané, A. Ignatov, L. Eaves, M. Henini, N. Mori, D.K. Maude, and R. Airey, "Current flow and energy dissipation in low-dimensional semiconductor superlattices," *Appl. Phys. Lett.* 88, 052111 (2006)
  - S. Uno, N. Mori, K. Nakazato, N. Koshida, and H. Mizuta, "Theoretical investigation of electron-phonon interaction in one-dimensional silicon quantum dot array interconnected with silicon oxide layers," *Phys. Rev. B*, 72, 035337 (2005)
  - A. Patané, N. Mori, D. Fowler, L. Eaves, M. Henini, D.K. Maude, C. Hamaguchi, and R. Airey, "Magnetic-field-induced suppression of electronic conduction in a superlattice," *Phys. Rev. Lett.*, 93, 146801 (2004)
  - N. Mori, A. Patané, and L. Eaves, "Nonequilibrium Green's function approach to resonant transport in semiconductor superlattices," *Physica E*, 21, 717 (2004)
  - N. Mori, C. Hamaguchi, L. Eaves, and P.C. Main, "Numerical studies of miniband conduction in quasi-one-dimensional superlattices," *VLSI Design*, 13, 45 (2001)
  - 森伸也, 浜口智尋, 強磁場中における半導体超格子のワニエ・シュタルク効果, *固体物理*, 34, 351 (1999)

輻射科学研究会資料  
RS06-08

超高速フォトリックネットワーク用  
自己パルス発振半導体レーザ

Self-pulsating Laser Diode for All-optical Networks

西村哲也, 西川智志, 後藤田光伸, 徳田安紀

三菱電機株式会社 先端技術総合研究所,  
光産業技術振興協会

T. Nishimura, S. Nishikawa, M. Gotoda, and Y. Tokuda

Mitsubishi Electric Corporation,  
Optoelectronic Industry and Technology Development Association (OITDA)

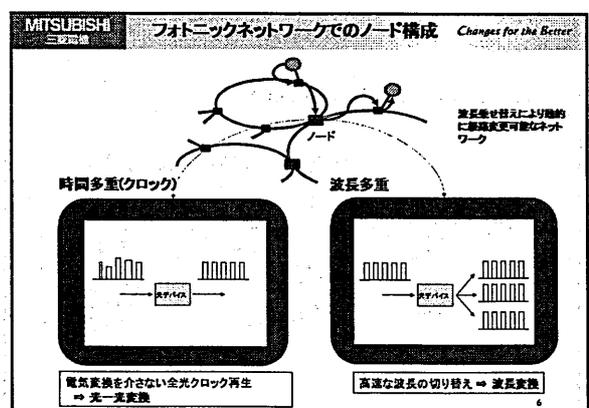
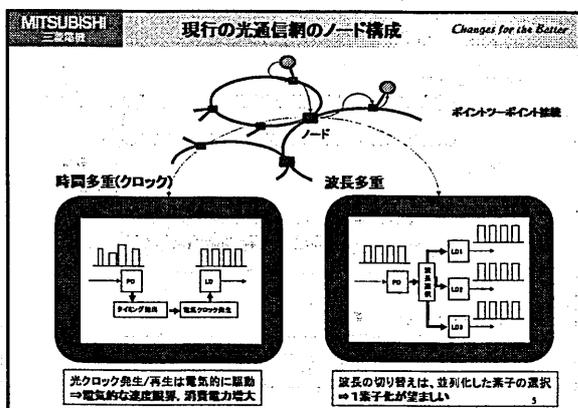
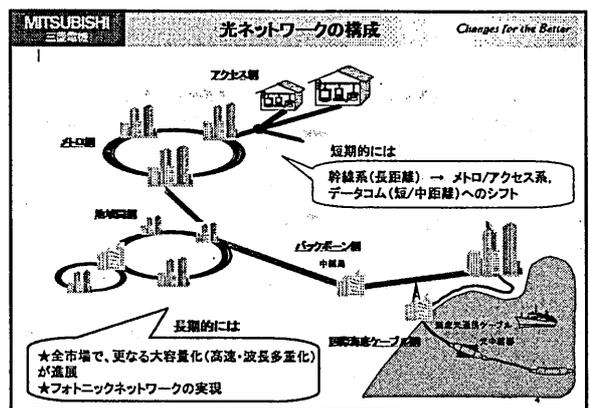
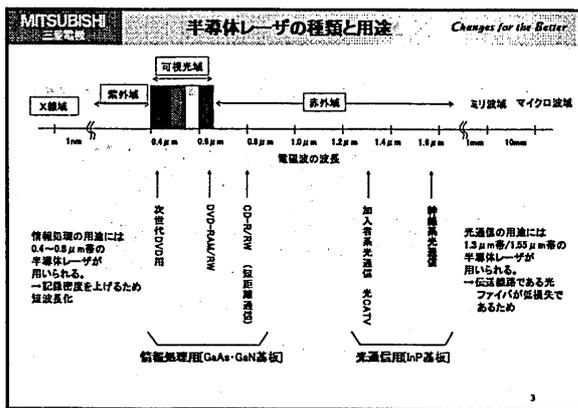
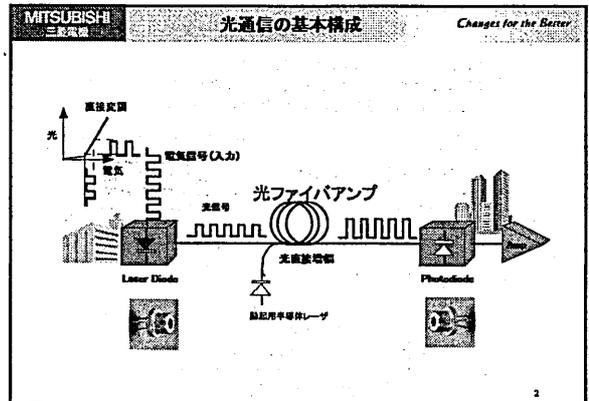
2006年7月25日  
於 大阪電気通信大学

MITSUBISHI 三菱電機 Changes for the Better

### 内 容

- ・光通信の動向とデバイス開発の目的
- ・自己パルス発振半導体レーザーの構造と動作原理
- ・自己パルス発振と注入同期動作
  - 発振モードの設計による異なる周波数帯での発振
  - 位相電流調整によるパルス発振周波数の制御
  - 注入同期特性
- ・干渉計と組み合わせた波長変換動作
- ・波長可変パルス発振
- ・まとめ

1



**MITSUBISHI** 三菱電機 **超高速フォトニックネットワーク** *Changes for the Better*

★通信容量を拡大: 時間多重と波長多重の併用  
 ★消費電力を低減: 高速化によりビット当りの電力抑制  
 ★全光信号処理: 電気系ルーティングのボトルネック解消

現在の光通信イメージ  $\rightarrow$  超高速フォトニックネットワークのイメージ

1~10Gbps, 1~32波長  $\rightarrow$  40~160Gbps, 16~256波長

波長多重 100x8波 時間多重

メトロ系 (40Gx100波) 幹線系 (160Gx256波)

現状システム

伝送容量 (Tbps) vs チャンネルあたりの容量 (Gbps)

**MITSUBISHI** 三菱電機 **フォトニックネットワークのノード機能** *Changes for the Better*

■光ノードに要求される基本機能

- ◆光3R
  - ◇タイミング再生 (re-timing)
  - ◇波形再生 (re-shaping)
  - ◇強度再生 (re-amplification)
- ◆光ゲートスイッチ
- ◆波長変換 (入力波長-出力波長の柔軟性)

**MITSUBISHI** 三菱電機 **ノード機能の実現手段** *Changes for the Better*

■光ノードの基本機能

- ◆光3R
  - ◇タイミング再生
  - ◇波形再生
  - ◇強度再生
- ◆光ゲートスイッチ
- ◆波長変換

■実現手段例

- 自己パルス発振レーザ (注入同期)
- 半導体マッパワング干渉計
- 波長可変パルスレーザ (注入同期)

**MITSUBISHI** 三菱電機 **光3R機能とゲート機能の構成** *Changes for the Better*

■自己パルス発振レーザと半導体マッパワング干渉計を組み合わせた全光波長変換

入力光 ( $\lambda_1, \omega_1$ )  $\rightarrow$  信号波形を整形, リタイミングする  $\rightarrow$  信号光 ( $\lambda_2, \omega_2$ )

注入同期光 ( $\lambda_1, \omega_1$ )  $\rightarrow$  光ゲートスイッチ  $\rightarrow$  信号光 ( $\lambda_1, \omega_1$ )

光3R (クロック再生) デバイス      光ゲートスイッチ

全光波長変換デバイス

**MITSUBISHI** 三菱電機 **波長変換機能の構成** *Changes for the Better*

■波長可変パルス発振レーザを用いた全光波長変換

入力光 ( $\lambda_1, \omega_1$ )  $\rightarrow$  波長を変える  $\rightarrow$  信号光 ( $\lambda_2, \omega_2$ )

注入同期光 ( $\lambda_1, \omega_1$ )  $\rightarrow$  注入同期光 ( $\lambda_1, \omega_1$ )  $\rightarrow$  注入同期光 ( $\lambda_1, \omega_1$ )

波長可変パルスレーザ      半導体マッパワング干渉計

**MITSUBISHI** 三菱電機 **半導体レーザの基本構造** *Changes for the Better*

<ファブリペロー型> レーザ光

へき開面      へき開面

<分布帰還(DBR)型> レーザ光

回折格子

<分布ブラッグ反射鏡(DBR)型> レーザ光

MITSUBISHI 三菱電機 **パルス発振レーザ(例)** Changes for the Better

■モードロック(Mode Locked) DBRレーザ

- 可動相速度によるモードロックパルス発生
- 出力パルス光の波長は固定(DBRで数nm可変)
- パルス発振周波数は共振器長で決定

■自己パルス発振(Self Pulsating) DFBレーザ

- DC駆動で持続的に自己パルス発振(ビート)
- 出力パルス光の波長は固定
- パルス発振周波数の可変範囲が広い

■波長可変パルスレーザ

- 波長可変LDを利用し、モード間の干渉によりパルス発生(ML)
- ML-LD やSP-DFBと同様に、注入同期によるクロック再生が可能
- 出力パルス光の波長は広範囲に可変

13

MITSUBISHI 三菱電機 **自己パルス発振レーザの構造** Changes for the Better

■素子構造

- 3電極DFBレーザ
- 前方DFB領域/透明導波路/後方DFB領域
- 透明導波路を介した結合共振器構造
- 前方DFBと後方DFBのブラッグ波長が異なるストップバンド幅(3~4nm)程度の離調
- 通常のDFBレーザと同様のプロセスで作製可能
- ◇リッジ導波路型
- ◇バットジョイント技術の利用
- ◇位相シフト効果の検討

代表的なデバイスパラメータ

Section	Parameter	Device A	Device B	Device C
前方DFB	長さ(μm)	300	300	300
	ブラッグ波長(nm)	1548	1548	1548
	位相シフト	None	1/4	3/4
位相調整領域	長さ(μm)	270	270	270
	長さ(μm)	300	300	300
後方DFB	ブラッグ波長(nm)	1549	1547	1546
	位相シフト	None	1/4	None

14

MITSUBISHI 三菱電機 **自己パルス発振レーザの動作原理** Changes for the Better

■3電極DFBレーザの自己パルス発振機構

	低周波数 (< 20 GHz)	高周波数 (20~100 GHz)	超高周波数 (> 100 GHz)
発振機構	Dispersive self Q-switching (DQS)	Beating type oscillation (BTO)	BTO (modified)
DFBストップバンド	前方DFB 後方DFB	前方DFB 後方DFB	位相シフト起因 結合共振器起因
文献	[1]	[2,3]	[4]

[1] B. Sartorius et al., IEEE J. Quantum Electron., 33, 211 (1997).  
 [2] M. Mohri et al., IEEE J. Select. Top. Quantum Electron., 7, 217 (2001).  
 [3] H.-J. Wunsche et al., IEEE J. Select. Top. Quantum Electron., 8, 857 (2002).  
 [4] M. Gotoda et al., Proc. of OFC2004, MF34.

15

MITSUBISHI 三菱電機 **低周波数パルス発振機構** Changes for the Better

■分散性自己Qスイッチング  
Dispersive self Q-switching (DQS)

- 自己パルス発振周波数: < 20 GHz

B. Sartorius et al., IEEE J. Quantum Electron., 33, 211 (1997).

16

MITSUBISHI 三菱電機 **高周波数パルス発振機構** Changes for the Better

■ビート型振動  
Beating type oscillation (BTO)

- 近接した2波長で同時にレーザ発振させる発振モード間の干渉により、出力光強度にビート(正弦波状に変調)
- モード間隔に相当する発振周波数 (ex. 40GHz=0.32nm)
- 発振周波数が位相調整電流により制御可能

17

MITSUBISHI 三菱電機 **超高周波数パルス発振機構** Changes for the Better

■ビート型振動

- 位相シフト導入による発振
- 結合共振器モードによる発振

18

**MITSUBISHI** 三菱電機 **自己パルス発振レーザの特徴** Changes for the Better

■特徴

- ◇自己パルス発振 (self-pulsating)
  - ・DC駆動で特長的に発振
  - ・パルス発振周波数は電氣的にチューニング可能
- ◇波長変換
- ◇タイミング再生 (re-timing)
  - ・注入同期 (クロックパルス再生)
- ◇波形再生 (re-shaping)
- ◇強度再生 (re-amplification)

19

**MITSUBISHI** 三菱電機 **10GHz (低周波数) 発振特性** Changes for the Better

■実験データ

光スペクトル

RFスペクトル

- 後方DFB励起条件: 活性層がほぼ透明化 (DBRミラーとして作用)
- 主発振モードを中心に数本のサイドモード (モード間隔: 10GHz)
- [⇒ 分散性自己Qスイッチングの特徴]

20

**MITSUBISHI** 三菱電機 **40GHz (高周波数) 発振特性** Changes for the Better

■実験データ

光スペクトル

RFスペクトル

パルス波形

- 前後DFB励起条件: ほぼ対称
- 波長1547nm付近に主要な2つの発振モード [⇒ ビート型振動の特徴]

21

**MITSUBISHI** 三菱電機 **275GHz (超高周波数) 発振特性** Changes for the Better

■位相シフト導入素子による超高周波数発振の実験データ

Light Power (dB)

Fourier Signal (a.u.)

- 275GHzのパルス発振周波数成分の確認 (波長間隔2.2nmに相当)

22

**MITSUBISHI** 三菱電機 **40GHzでの発振周波数制御** Changes for the Better

■位相電流調整による自己パルス発振周波数の制御

- ◇1547nm付近の2つの発振モードのビートを利用
- ・40GHz ( $\Delta\lambda \sim 0.3\text{nm}$ )でパルス発振
- ◇位相電流調整で25~43GHzの範囲で周波数が変化

Light Power (dB)

Frequency (GHz)

23

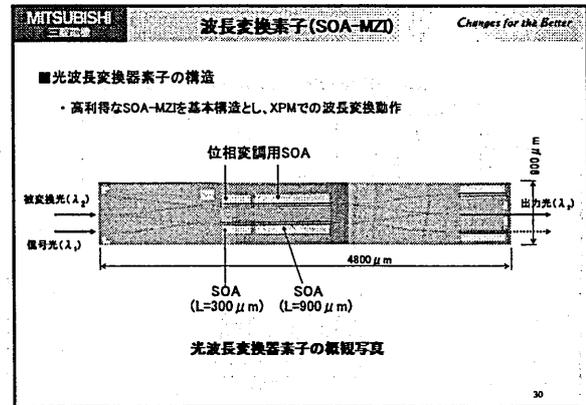
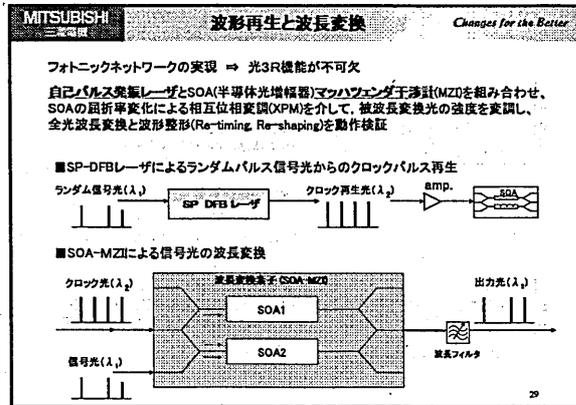
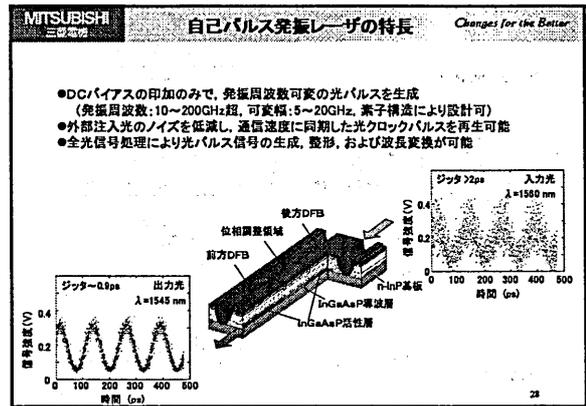
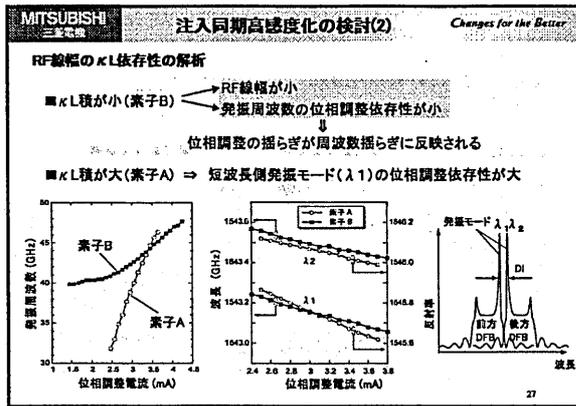
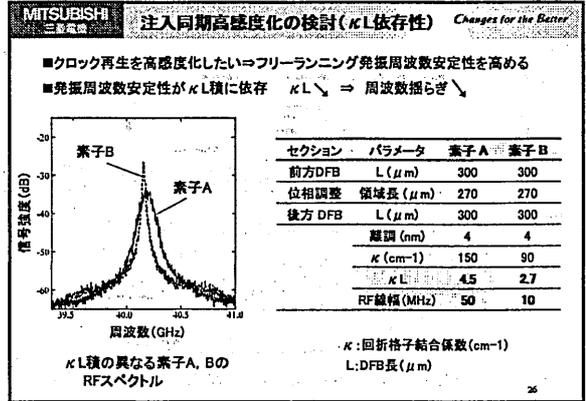
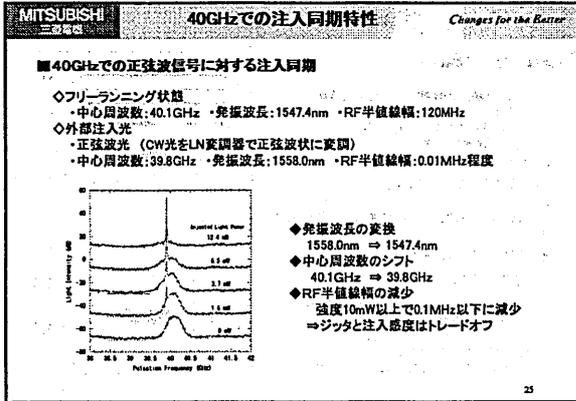
**MITSUBISHI** 三菱電機 **注入同期によるクロック再生** Changes for the Better

注入同期: 外部パルス光の繰返し周波数に同期してパルス発振する現象

RFスペクトルの模式図

注入同期実験系

24



**MITSUBISHI** 三菱電機 **10Gbpsでの波長変換動作** *Changes for the Better*

- ◆ 信号光( $\lambda_1$ )をSP-DFBLレーザに入力し、クロック光( $\lambda_2$ )を波長再生
- ◆ 信号光( $\lambda_1$ )とクロック再生光( $\lambda_2$ )をSOA-MZIに入力し波長変換

● SP-DFBLレーザとSOA-MZIを組み合わせ、10Gbpsの波長変換・波形再生を確認

**MITSUBISHI** 三菱電機 **波長可変パルス発振** *Changes for the Better*

■ 自己パルス発振レーザ

- ・DC駆動で持続的に自己パルス発振
- ・40Gbps以上の全光クロック再生素子
- ・出力パルス光の波長は固定
- ・波長変換が可能
- ・パルス発振周波数の可変範囲が広い

↓

出力波長数だけSP-DFBが必要

↓

出力波長の可変性とパルス発振の両立が望ましい

■ 波長可変パルスレーザ

- ◆ 波長可変光クロックパルス発生技術
- ・波長可変LDを利用したパルス発生手法
- ⇒ 原理検証に成功
- ・出力パルス光の波長が可変
- ・光クロック再生、波長変換機能
- ・パルス発振周波数の可変範囲は狭い

**MITSUBISHI** 三菱電機 **DBRバーニア型波長可変CWLレーザ** *Changes for the Better*

■ 広範囲の波長可変性

- バーニア型波長可変レーザ
  - ・チャープ回折格子を複数繰り返して、複数の反射ピーク(スーパーモード)
  - ・スーパーモード間隔を僅かに変えたDBRを活性層前後に配置
- 前後DBR領域への電流注入
  - ⇒ 屈折率低下
  - ⇒ 反射スペクトルは短波長シフト

前後のDBR波長シフト量は僅かでも、波長可変幅が拡大

**MITSUBISHI** 三菱電機 **波長可変特性(CW動作)** *Changes for the Better*

● 前後DBR電流で単一縦モードを選択し、CW発振

■ 発光出力特性

■ 発振波長特性

■ 発振波長制御

DBR電流制御による発振波長マップ  
( $I_f=30mA, I_r=0mA, T_c=25^\circ C$ )

30nm以上の波長可変性

発振スペクトル (APC)

50GHz-spacing X 65ch

**MITSUBISHI** 三菱電機 **パルス発振の考え方** *Changes for the Better*

◆ 複数モードの同時発振=光出力のパルス発振

出力光強度

分光スペクトル

波長 (nm)

出力光強度

周波数スペクトル

周波数 (GHz)

出力光強度

時間波形

時間 (ps)

**MITSUBISHI** 三菱電機 **波長可変パルス発振の原理** *Changes for the Better*

前後DBRの反射帯が重なる波長範囲内で複数のモードをレーザ発振させる (DC駆動によるパルス発振)

↓

前方DBRの駆動電流を変更

↓

前方DBRの反射スペクトルが小さくシフト

↓

前後DBRの反射帯の重なりにより選択される発振波長帯が大きくシフト (バーニア効果による広帯域波長可変)

**試作したLDの構造** Changes for the Better

**素子構造**

**素子設計**

	領域長
フロントDBR	210 μm
活性領域	900 μm
位相調整領域	150 μm
リアDBR	460 μm
total	1750 μm

●4電極DBRレーザ  
●バーニア型回折格子

スーパーモード間隔: フロント 4.8 nm, リア 5.8 nm  
回折格子結合係数:  $\kappa = 150 \text{ cm}^{-1}$   
DBR/位相領域:  $\lambda_g = 1.3 \mu\text{m}$ , InGaAsP bulk  
活性領域:  $\lambda_g = 1.55 \mu\text{m}$ , 圧縮空0.8% InGaAsP MQW

Left: 実効的な共振器長  
⇒ 縦モード間隔を規定

37

**波長可変パルス発振の動作検証** Changes for the Better

**素子単独でのパルス発振**

- 多モード発振(0.24nm間隔の縦モード)  
⇒ 高周波パルス発振 ~31GHz (異動共振器長を調整して、ビットレート選定に設定可能)
- 各スーパーモードを選択して発振  
⇒ 発振波長可変幅 > 20nm (原理上は 30nm以上可変, 狭帯域はDBR電流の調整・温度により可能)

出力光 (1535~1557nm)

発振スペクトル (リアDBRでスーパーモードを選択した例)

周波数スペクトル

38

**注入同期動作の実証** Changes for the Better

**信号光のクロック再生**

●外部入射光と異なる波長で光クロック再生

注入光 (1545nm) 出力光 (1551nm)

パルス発振と注入同期 (30.9GHz)

クロック再生パルス波形

SSB位相雑音から求めたrmsジッタ  
2.7ps (フリーランニング) ⇒ 0.77ps (注入同期)

39

**注入同期の入力波長依存性** Changes for the Better

**信号光の波長変換(入力波長可変)**

●注入光波長を変えた注入同期

注入光: 1545nm 出力光: 1551nm

注入光: 1560nm 出力光: 1551nm

注入同期前後のスペクトル: 注入光 (1545~1560nm) ⇒ 出力光 (1551nm)

40

**注入同期時の出力波長可変性** Changes for the Better

**信号光の波長変換(出力波長可変)**

●発振波長を変えた注入同期

注入光: 1560nm 出力光: 1551nm

注入光: 1541nm 出力光: 1541nm

注入同期前後のスペクトル: 注入光 (1560nm) ⇒ 出力光 (1541~1551nm)

注入光波長と出力光の波長差(最大):  $\pm 23 \text{ nm} \pm 24 \text{ nm}$   
注入光: 1534nm, 出力光: 1557nm  
注入光: 1558nm, 出力光: 1534nm

41

**まとめ** Changes for the Better

**クロック再生用の自己パルス発振半導体レーザ**

- SP-DFBRレーザで、DC駆動により低周波数~超高周波数のクロックパルスが発生
- 位相電流調整により発振周波数が可変
- 注入同期により信号クロックを再生
- 安定化・高感度化に向けて、位相調整の揺らぎの抑制が重要
- 干渉計と組み合わせ、波長変換動作、および、ジッタ低減を実証

**波長可変半導体レーザを用いた、広帯域波長可変パルス光源の原理実証**

- DBRレーザで、DC駆動による多モード発振を制御しパルスが発生
- バーニア効果により、20nm以上にわたる波長可変パルス発振を確認
- 注入同期により信号クロックを再生
- 信号光を広帯域に波長変換

光通信ノードでの多波長→多波長の全光波長変換が可能

42

平成 18 年 10 月 17 日

最近のマイクロ・ナノ微細加工技術と MEMS の産業応用

## LIGA プロセスによる微細加工技術

京都大学大学院マイクロエンジニアリング専攻  
ナノメディシン融合教育ユニット特任講師 宮野公樹

miyano@me.kyoto-u.ac.jp

## 講演概要

極めて背の高い(高アスペクト比)構造体には、マイクロデバイスの高密度・高効率化を飛躍的に高める可能性があります。その高アスペクト比構造体を製作する代表的技術が、放射光を利用する「LIGA(“りが”と読みます)プロセス」です。

講演の前半は、LIGAプロセスの原理と微細構造体の製作方法を説明します。そして、放射光の当て方を工夫することで生み出される様々な3次元構造体を紹介します。後半は、LIGAプロセスによる微細構造体を実用化するために解決すべき問題点を挙げ、その解決方法の一つとして始めた講演者の研究を紹介します。

## 1. LIGAプロセスとは？

LIGAプロセスの最大の特徴は、指向性が高いシンクロトロン放射(SR)光源を用いるため、高さが数百 $\mu\text{m}$ で幅が数 $\mu\text{m}$ 以下という極めて背の高い構造体の製作が可能であるということです。その手順を図1に示します。まず、レジストと呼ばれるアクリル板(PMMA)を貼り付けたシリコン基板にX線マスクを通して放射光を露光します(図1a)。すると、X線マスクの形状がレジストに転写されます。このレジストの放射光露光部は、PMMAの分子鎖が切れ分子量が減少しているため、現像液に浸すと溶解します(図1b)。未露光部は分子量が変わらないためそのまま残るので、最終的に、X線マスクのパターンと同一形状のレジストの微細構造体が作成できます(図1b)。その後、ニッケルメッキを行い(図1c)、シリコン基板から外すことによりニッケル製の微細構造体を得ます(図1d)。図2, 3に、LIGAプロセスによる様々な微細構造体を示します(いずれも立命館大学杉山研究室による)。

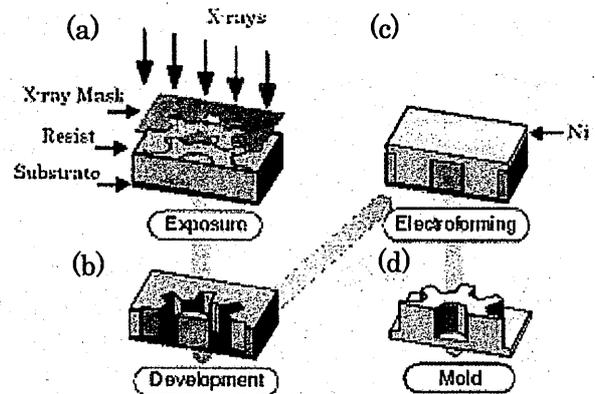


図1 LIGAプロセスの概要

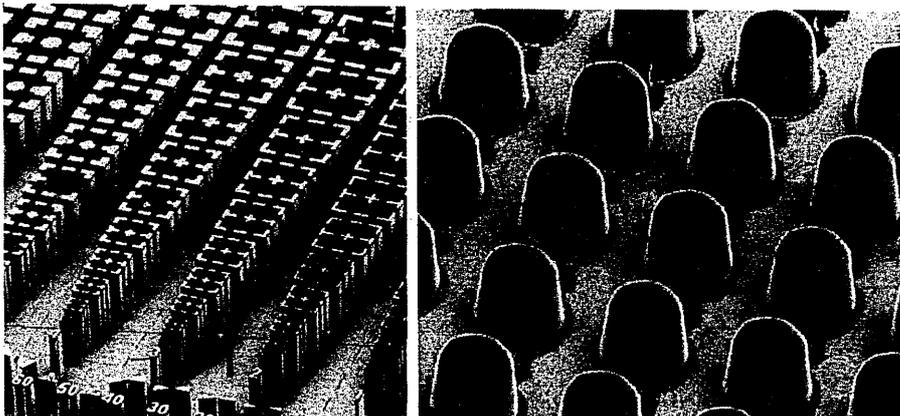


図2(左)

ニッケル製微細構造体。最小幅  
10 $\mu\text{m}$ 、高さ200 $\mu\text{m}$ 。

図3(右)

3次元球面を有するPMMA構造体。  
それぞれ幅約50 $\mu\text{m}$ 、高さ40 $\mu\text{m}$ 。

## 2. LIGAプロセスの実用化

LIGAプロセスによる微細構造体を実用するためには、製作コストを下げる、製作スピードを上げること、そして素材の種類を増やすことが重要です。このうち素材に関する問題が特に重要です。コストとスピードに関しては、お金と時間にゆとりがある研究(あるいは企業)なら問題ではありませんが、素材の少種は彼らでも解決できないからです。現在、LIGAプロセスによる微細構造体はニッケルが主流ですが、実用化を考えた場合、ニッケルでは強度的に不十分です。

そこで、講演者はLIGAプロセスにおける微細構造体の材料選択の幅を広げることを目的として研究を進めてきました。実験方法は、LIGAによる微細構造体を金型として用い、その金型に合金またはセラミックの粉末を充填し焼結させるものです。その結果、TiNi形状記憶合金、セラミック、そして複合材料のLIGA構造体を製作することに成功しました(図4~6参照)。この研究はLIGAプロセスのさらなる実用化に大いに貢献したといえます。講演では、各素材についての製作プロセスを詳細に紹介します。

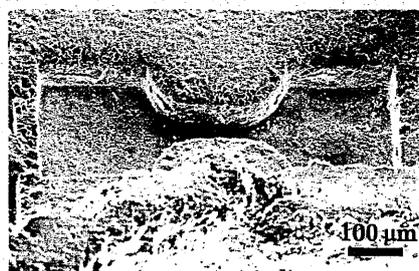
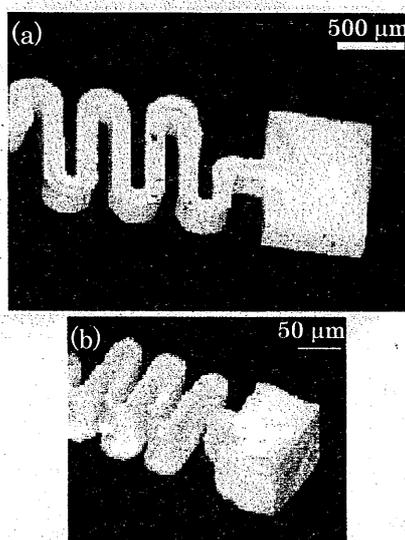
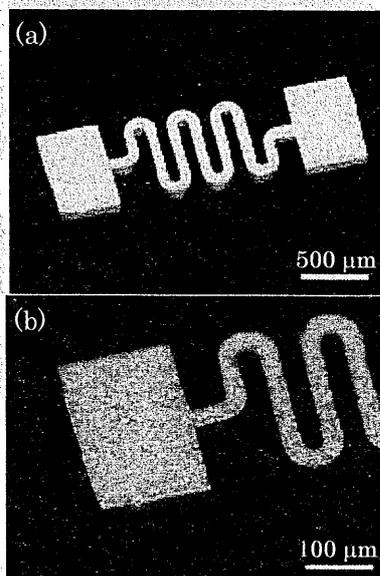


図4(左)

TiNi 形状記憶合金のマイクロばね

図5(中央)

Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> 製微細構造体. (b)は(a)の 1/3

図6(上)

TiC/Ti<sub>5</sub>Si<sub>3</sub> セラミック複合材のマイクロ引張り試験片形状微細構造体. 射出成形の金型として利用される.

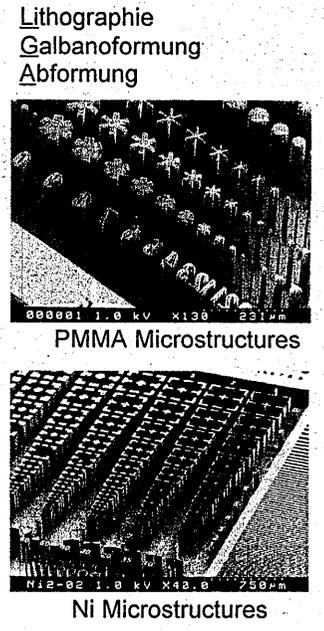
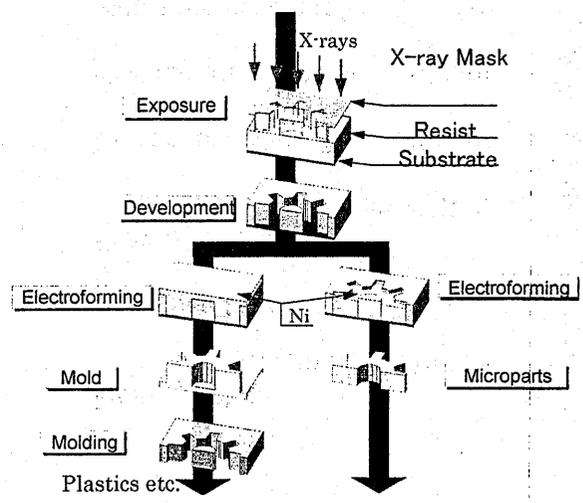
# LIGAプロセス

ドイツ生まれの30歳

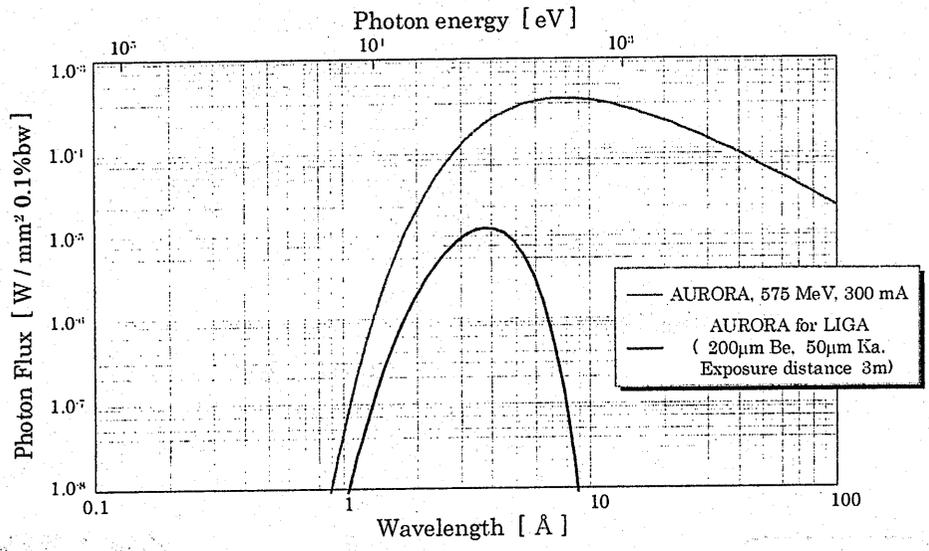
## LIGAプロセスによる微細加工とその応用 ～放射光を活用した三次元加工技術～

京都大学大学院マイクロエンジニアリング専攻  
ナノメディシン融合教育ユニット 特任講師 宮野公樹  
miyano@me.kyoto-u.ac.jp

\*本テキストには、著者がかつて所属していた立命館大学杉山研究室、および、現在共同研究を行っている京都大学田畑研究室の成果を使用しております。

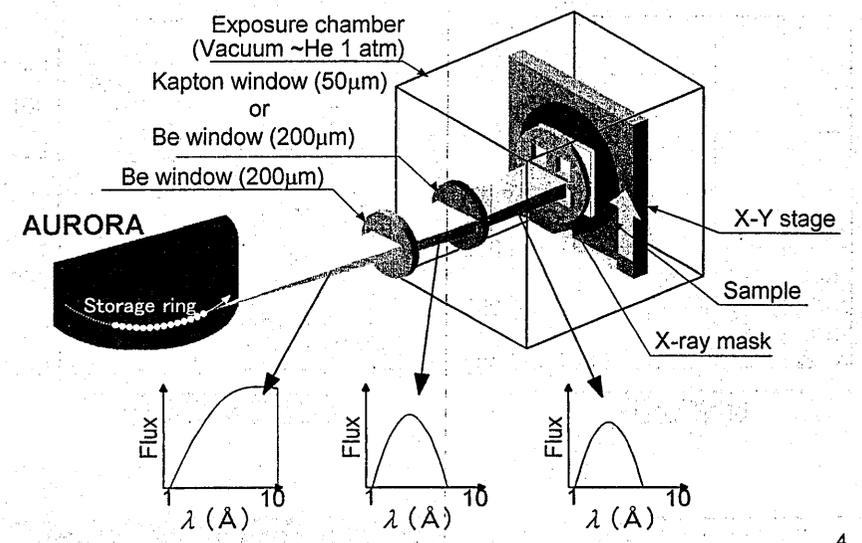


## AURORA Spectrum



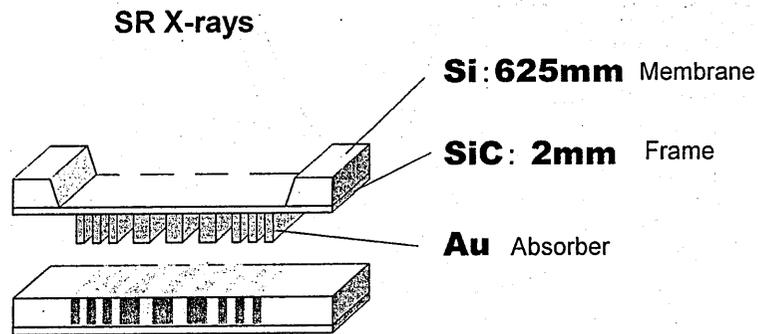
## X線照射装置

ステージの精度がキモ



# X線マスク

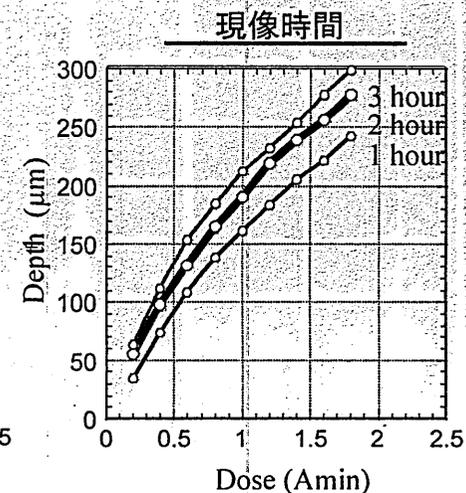
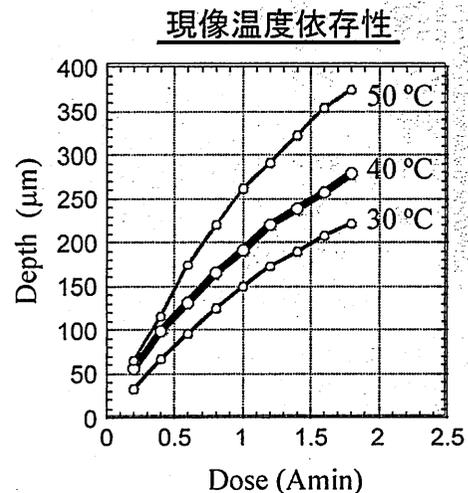
最も高価で効果



5

# 加工深さと現像・照射時間

最深1mmまでほったことあり

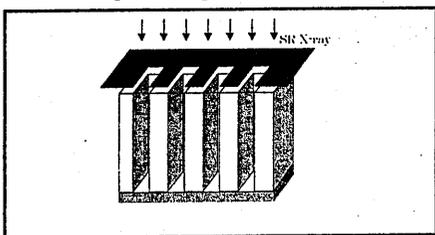


6

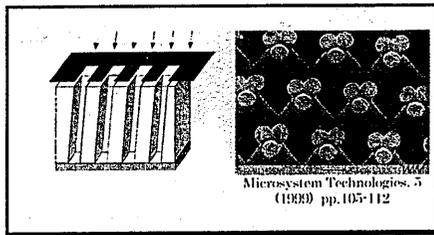
# 三次元リソ加工技術

これらを組み合わせて任意形状を

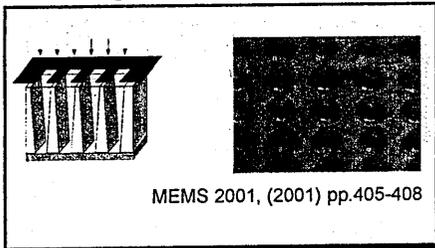
## Deep X-Ray Lithography



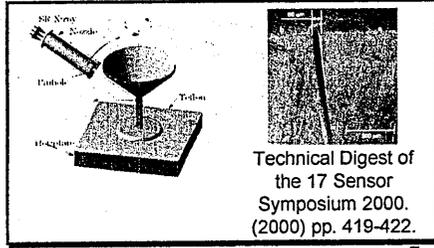
## Tilted X-Ray Exposure



## Moving Mask LIGA Process



## TIEGA

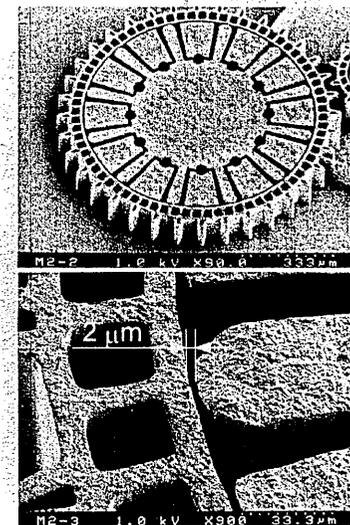


7

# Ni構造体

鍍金プロセスの重要性

- Mold structure : 120μm height PMMA
- Metal seed layer: 500 Å Ni
- Electroforming: Nickel sulfamate bath at 37°C
- Current density: 3A/dm<sup>2</sup>
- Ni Structure height: 100μm
- Maximum aspect ratio: 50

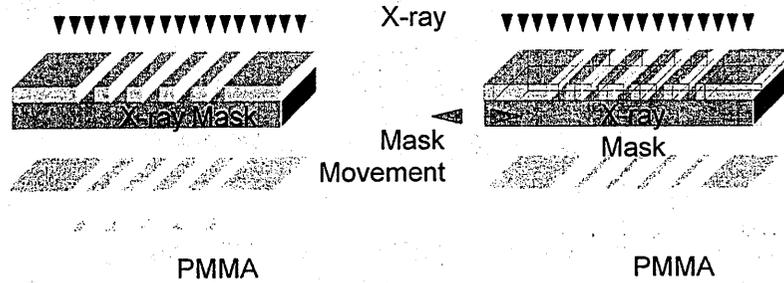


8

# ムービング・マスク法

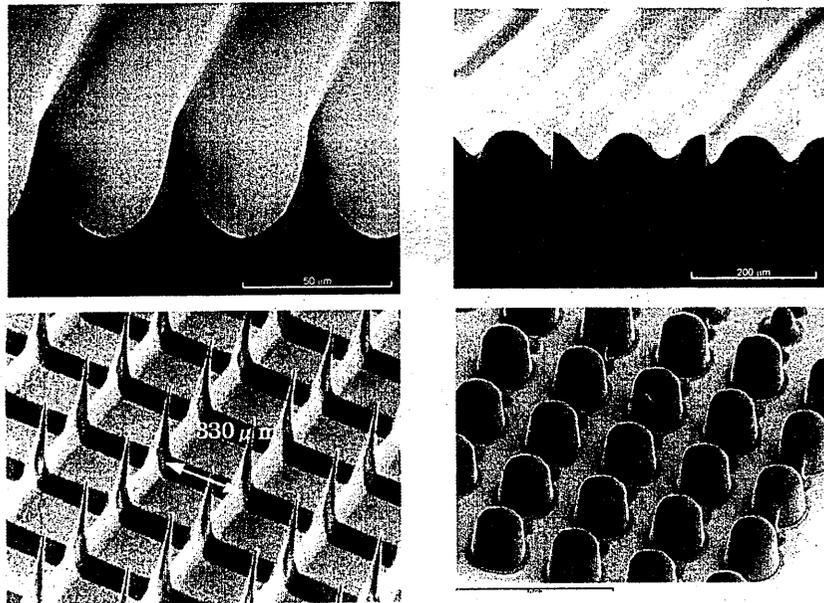
2.5次元形状構造体の製作可

## M<sup>2</sup>DXL: Moving Mask Deep X-Ray Lithography



## PCTによる構造例

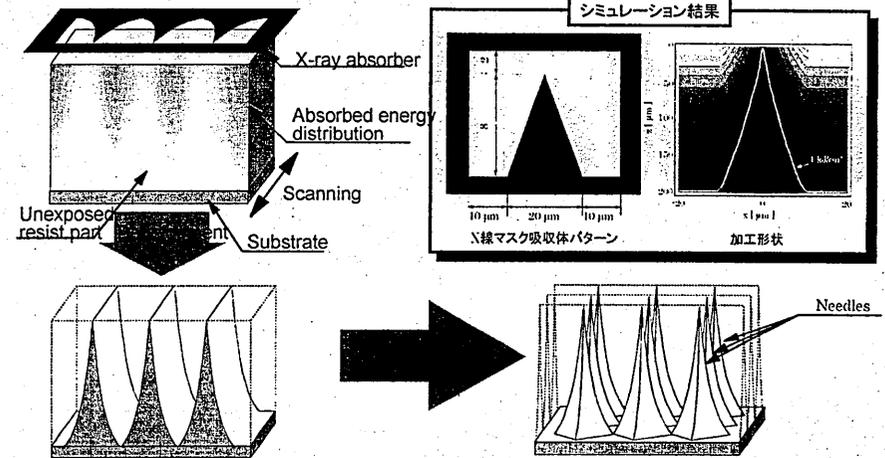
マスクの移動は1方向



# 基盤移動法

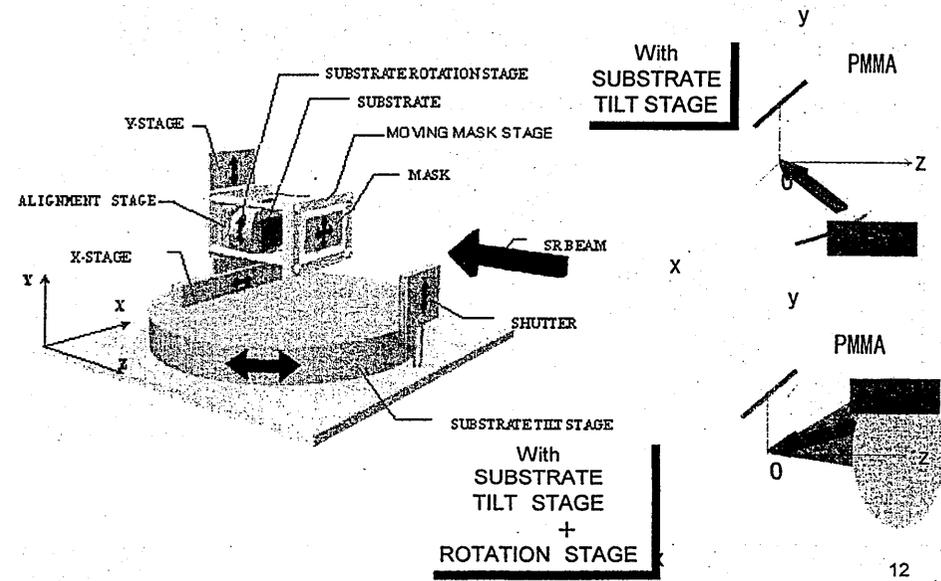
露光領域に分布をつける

## PCT Technique (Plane-Pattern to Cross-Section Transfer Technique)



## 6軸移動ステージ

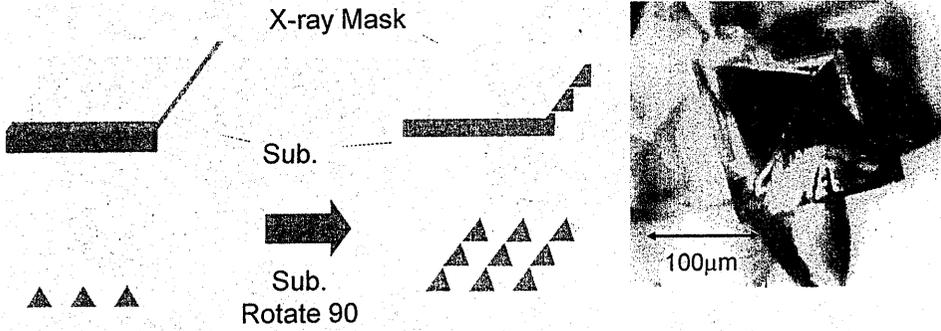
あらゆる方向から照射可能



# マイクロ・プリズム製作例

1枚のマスクで製作

1st Exp. 2nd Exp. 3rd Exp. 4th Exp.



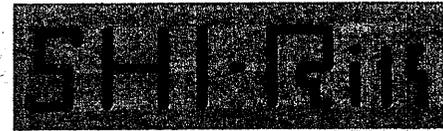
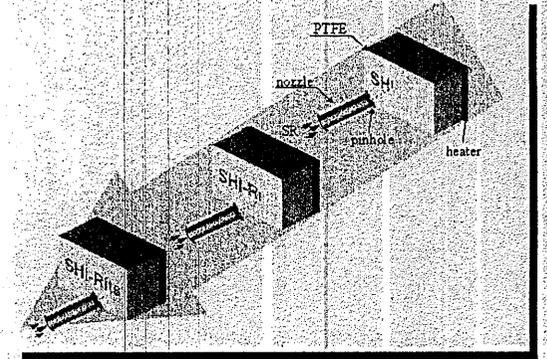
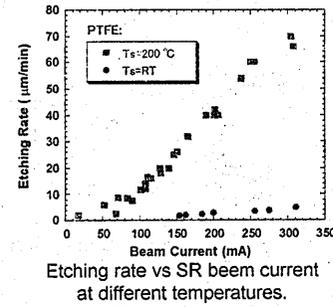
# 3次元リソ技術のまとめ

長所と短所

	通常の露光	傾斜露光	移動マスク・基盤	ドライエッチング (TIEGA)
アスペクト比	◎	○	X	◎
傾斜	X	◎	○	X
3次元曲面	X	X	◎	X
素材	PMMA	PMMA	PMMA	PTFE
露光雰囲気	He (Vacuum)	He (Vacuum)	He (Vacuum)	Vacuum (He)
基盤加熱	必要なし	必要なし	必要なし	必要

# TIEGA

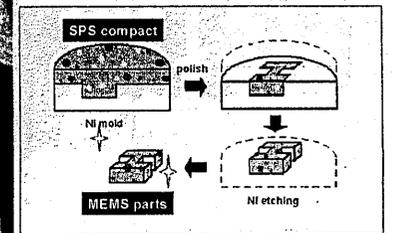
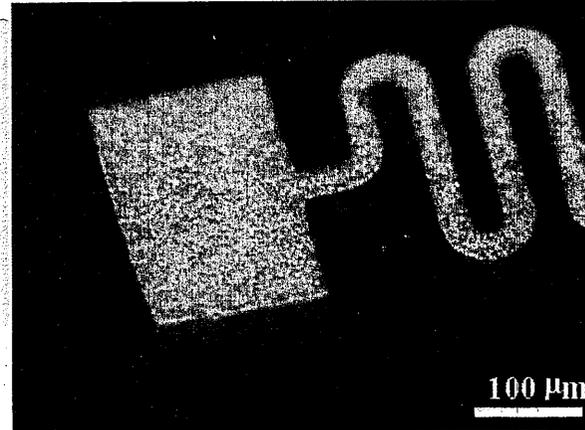
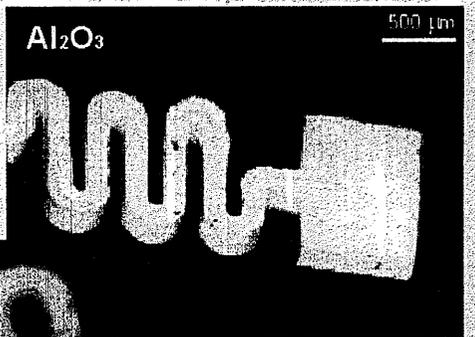
マスクなしで直接描画



T. Katoh, N. Nishi, M. Fukagawa, H. Ueno and S. Sugiyama, Sumitomo Heavy Industries, Ltd., Ritsumeikan University, IEEE MEMS Technical Digest 2000, Miyazaki, 2000.

# LIGA-SPS Process

Spark Plasma Sintering



SR光電子分光による1次元表面新物性の研究

**One-dimensional Surface New Properties**

**Studied by SR Photoelectron Spectroscopy**

小川 浩二

立命館大学 理工学部

**Koji Ogawa**

**Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University**

2006年10月17日

於 立命館大学びわこ・くさつキャンパス

# 講演内容

## SR光電子分光による一次元表面新物性の研究

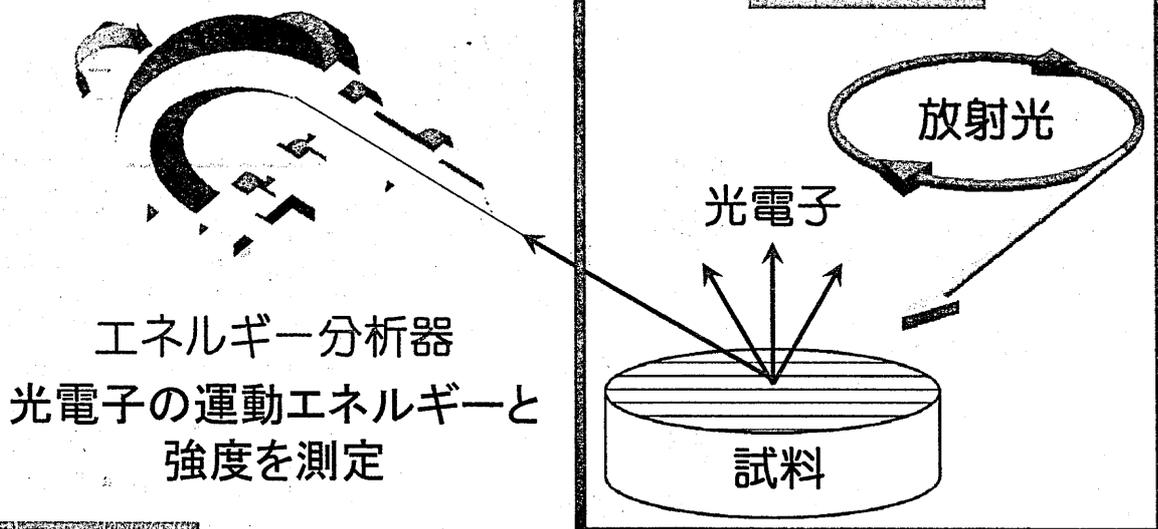
1. 放射光励起角度分解紫外光電子分光法
2. 一次元表面新物質と新物性
3. 研究例1: Ni(332)の表面電子状態
4. 研究例2: Ni(755)の一次元K原子鎖

## 放射光励起角度分解紫外光電子分光

Synchrotron-Radiation excited(SR-)  
Angle-Resolved(AR)

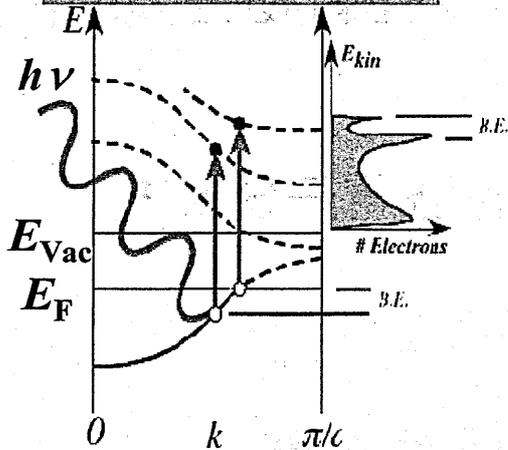
Ultraviolet Photoelectron Spectroscopy(UPS)

### ●SR-ARUPS測定の概略

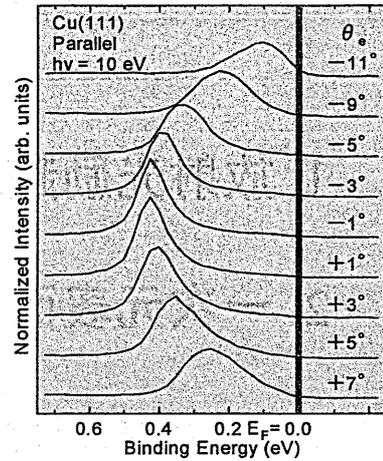


# 光電子放出過程とスペクトル

## 光電子放出過程



## 光電子スペクトル



## エネルギー保存則

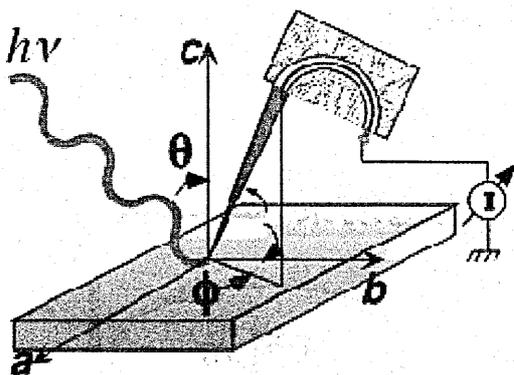
$$E_{\text{Kin}} = hv - E_{\text{Bin}} - \phi$$

- $E_{\text{Kin}}$  : 運動エネルギー
- $hv$  : 入射光エネルギー
- $E_{\text{Bin}}$  : 結合エネルギー
- $\phi$  : 仕事関数

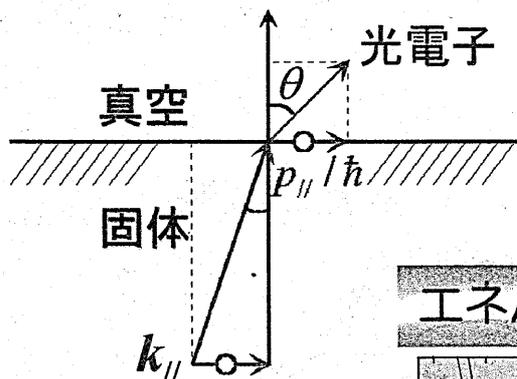
Namba Lab

# 角度分解測定

## 角度分解測定

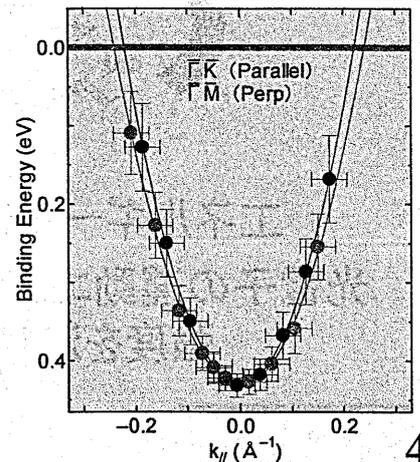


## 運動量保存則



$$k_{\parallel} = p_{\parallel} / \hbar = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_e E_{\text{Kin}}} \sin \theta$$

## エネルギーバンド



Namba Lab

# 放射光励起の主な利点

## ● 広範囲で連続波長・波長選択

・励起選択 (∵ピーク強度が波長依存)

・ $k_z$ 分散の決定 :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{表面準位の判定} \\ \text{三次元フェルミ面マッピング} \end{array} \right.$

## ● 直線偏光

・入射角依存性 : 軌道の対称性・励起準位選択

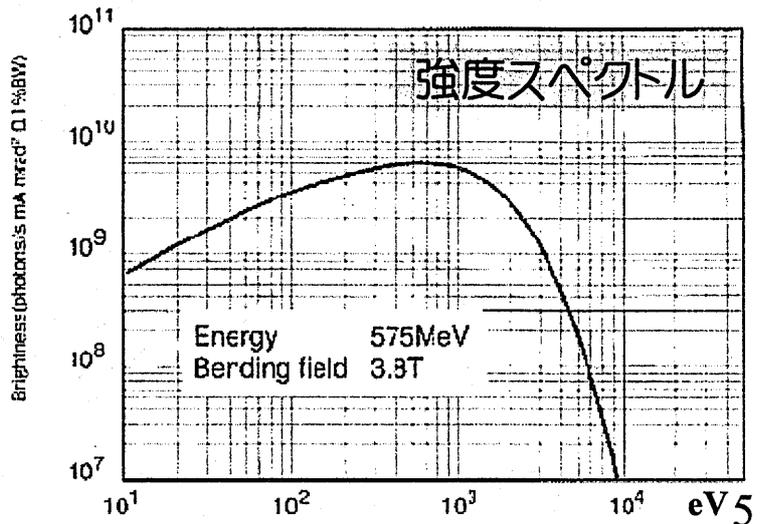
## ● 高強度

・微弱信号の検出

・S/N比向上 = 測定時間短縮

## ● 超高真空対応

・試料が汚染しにくい



# 放射光励起の主な利点

## ● 広範囲で連続波長・波長選択

・励起選択 (∵ピーク強度が波長依存)

・ $k_z$ 分散の決定 :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{表面準位の判定} \\ \text{三次元フェルミ面マッピング} \end{array} \right.$

## ● 直線偏光

・入射角依存性 : 軌道の対称性・励起準位選択

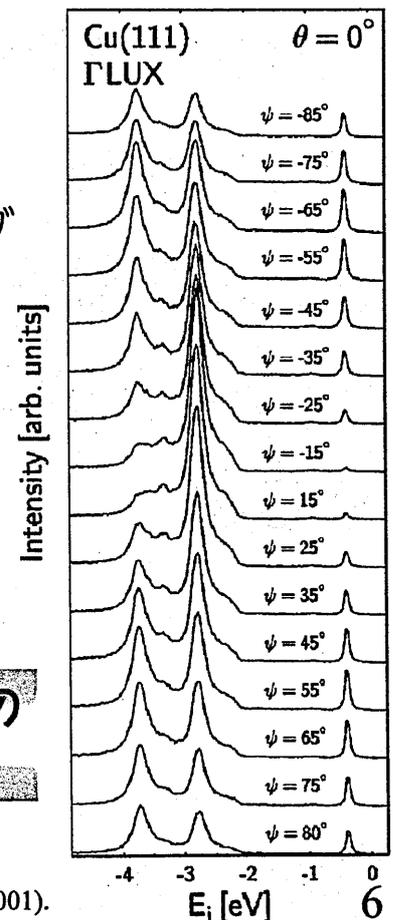
## ● 高強度

・微弱信号の検出

・S/N比向上 = 測定時間短縮

## ● 超高真空対応

・試料が汚染しにくい



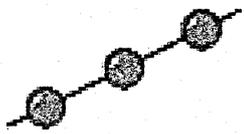
**Cu(111)表面状態の  
入射角 $\psi$ 依存性**

F. Pforte, *et al.*,

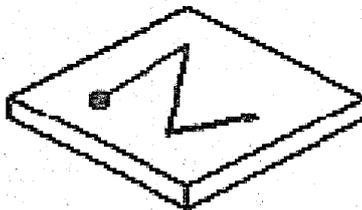
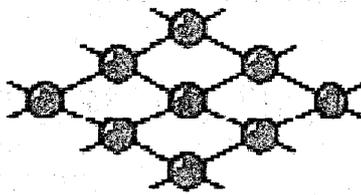
Phys. Rev. B, 63, 115405 (2001).

# 電子状態と次元

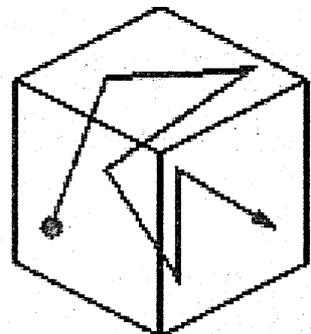
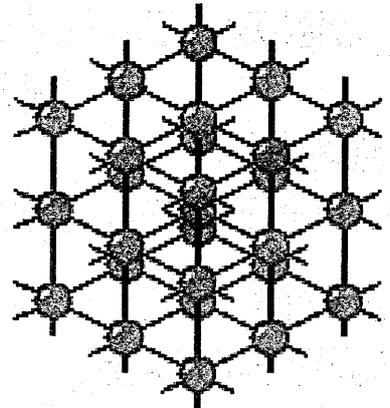
一次元



二次元



三次元

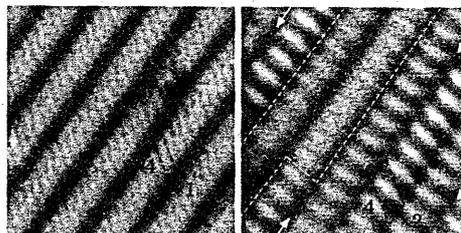
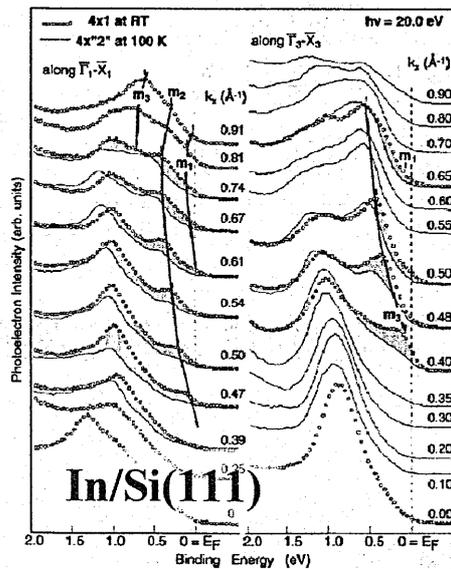


Namba Lab

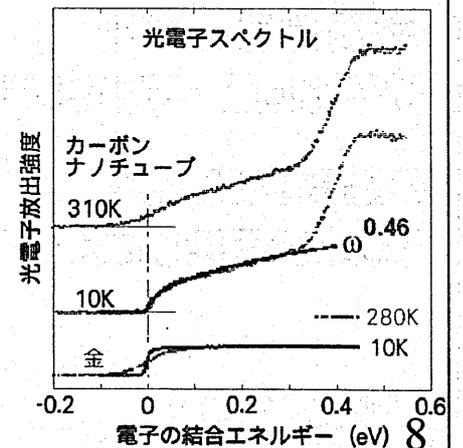
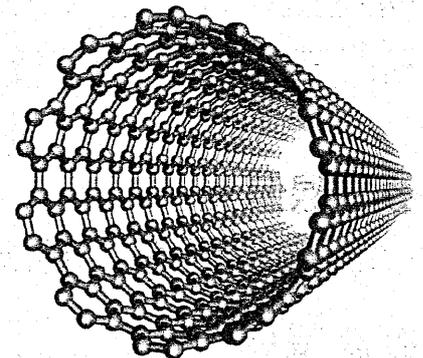
7

## 一次元電子状態の新奇性

- パイエルス転移
- 電荷密度波
- スピン・電荷分離
- フェルミ面消失
- 超伝導



カーボンナノチューブ

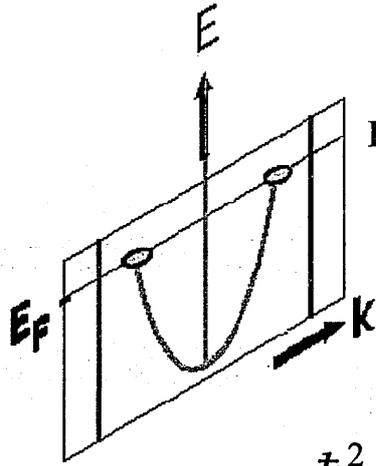


H. W. Yeom, et al., Phys. Rev. Lett. 82, 4898 (1999).

Namba Lab

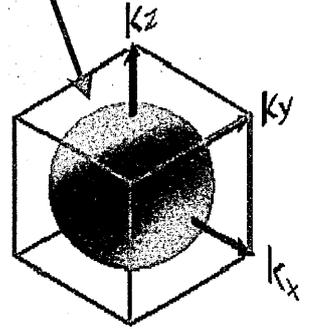
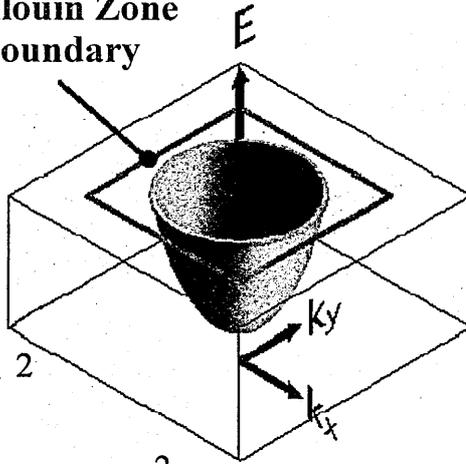
8

# 自由電子的なフェルミ面と次元



Brillouin Zone Boundary

フェルミ面



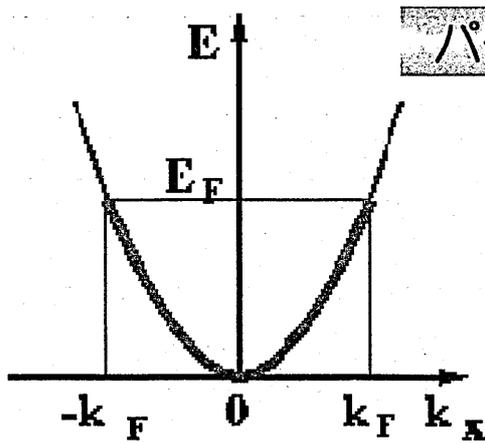
一次元  $E_{\text{Kin}} = \frac{\hbar^2}{2m_e} k^2$

二次元  $E_{\text{Kin}} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_x^2 + k_y^2)$

三次元  $E_{\text{Kin}} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$

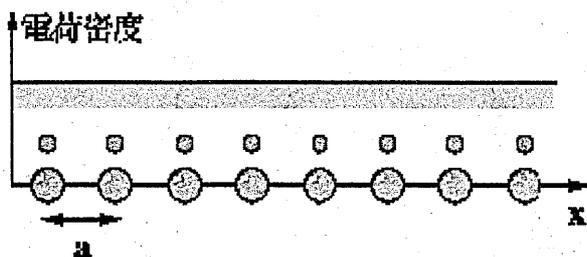
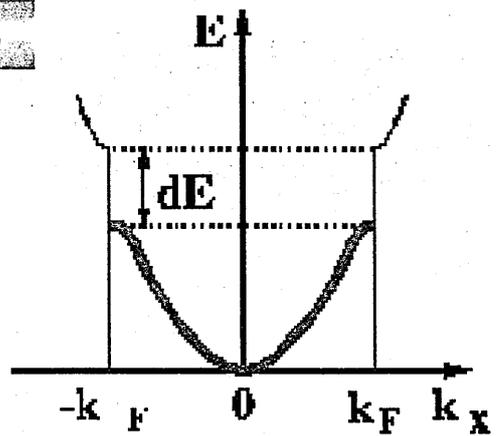
Nagamura Lab.

# パイエルス転移と電荷密度波

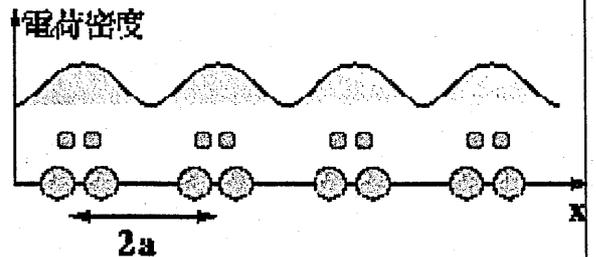


パイエルス転移

冷却



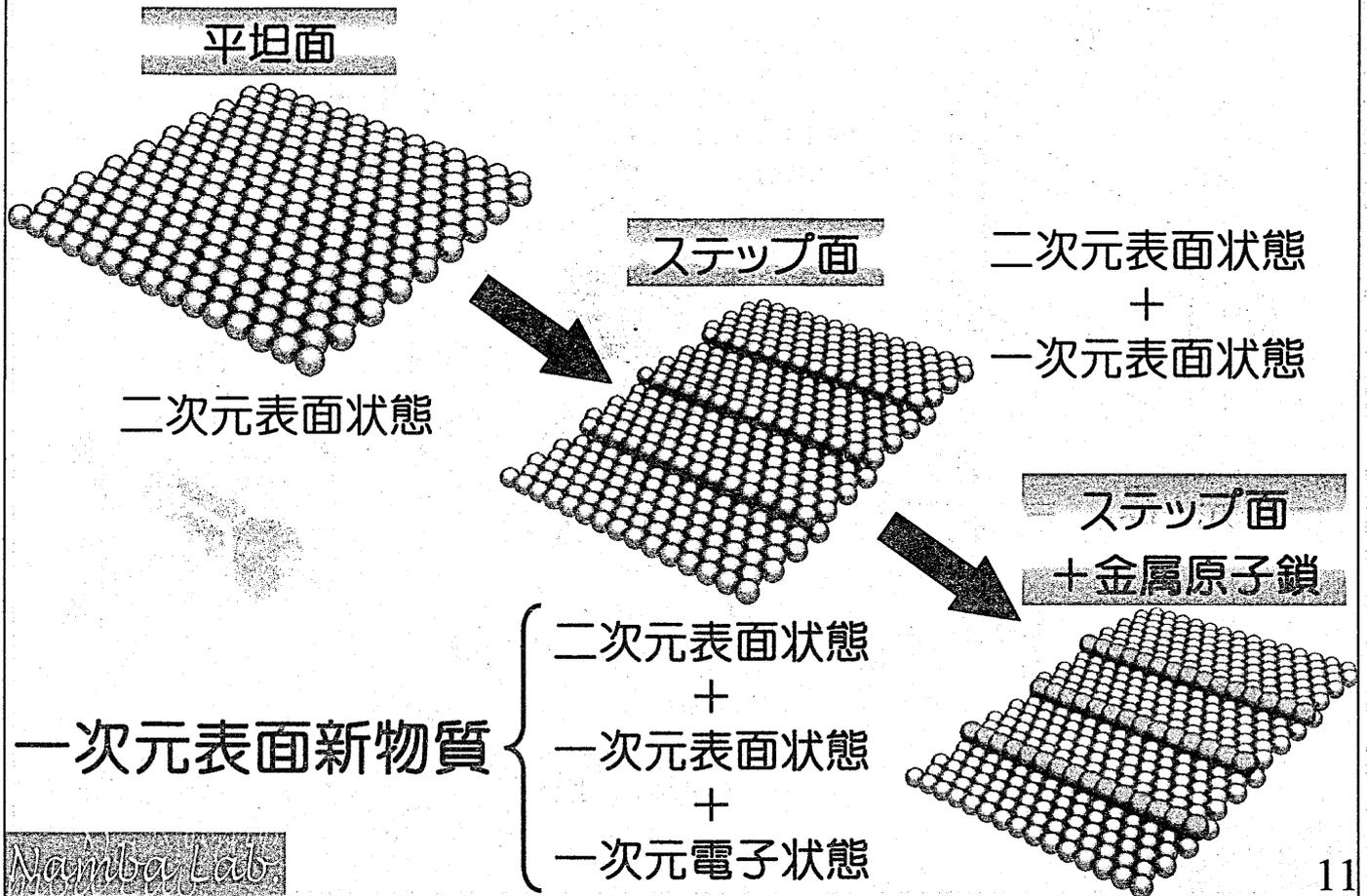
相転移前



相転移前

Nagamura Lab.

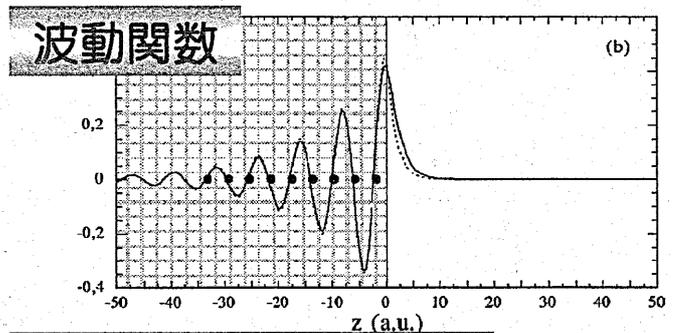
# 一次元表面新物質とは？



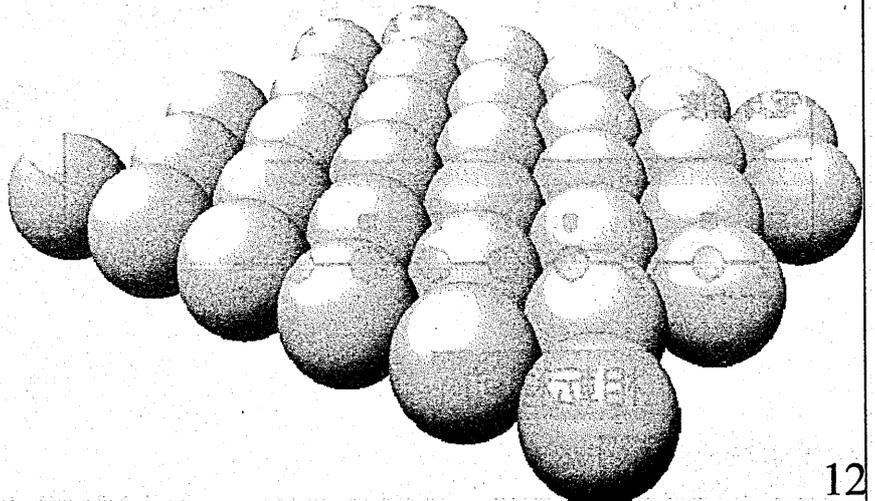
## 二次元表面電子状態

### ● Cu(111)表面電子状態

- ・表面近傍に局在化
- ・表面内で等方的



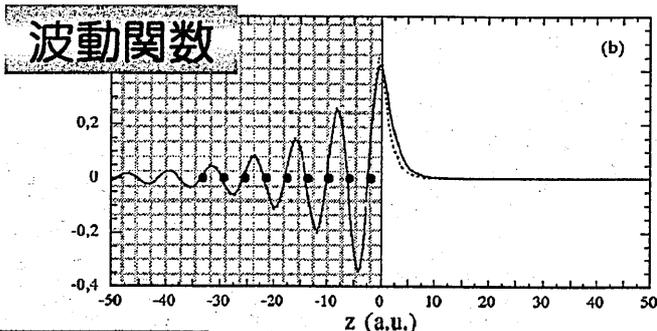
Cu(111)表面の模式図



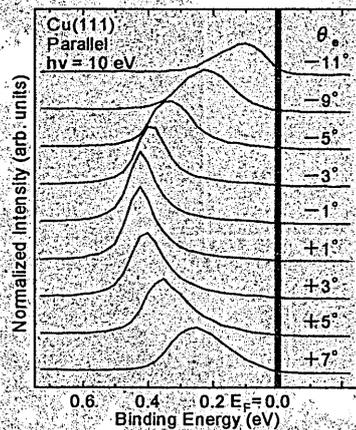
# 二次元表面電子状態

## ●Cu(111)表面電子状態

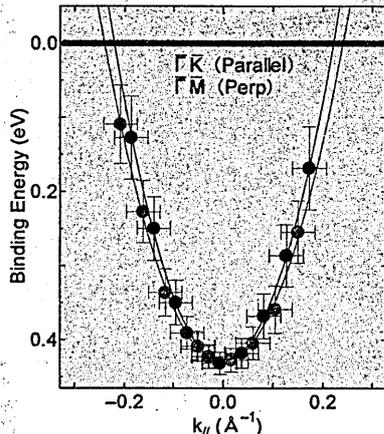
- 表面近傍に局在化
- 表面内で等方的



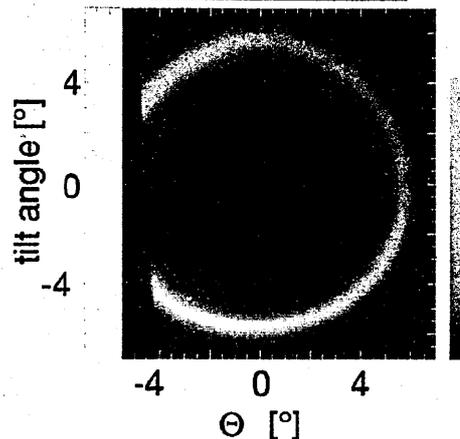
## 光電子スペクトル



## エネルギーバンド



## フェルミ面

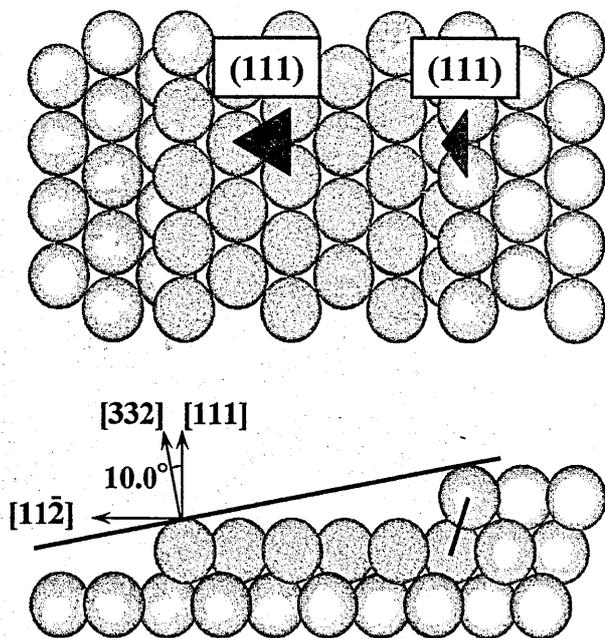


Namba Lab

F. Reinert, *et al.*, Phys. Rev. B63, 115415 (2001)

# Ni(755)ステップ面の表面電子状態

Ni(332)



- Cut from Monocrystalline Rod

- Mechanical polishing
- Orientation by Back Laue

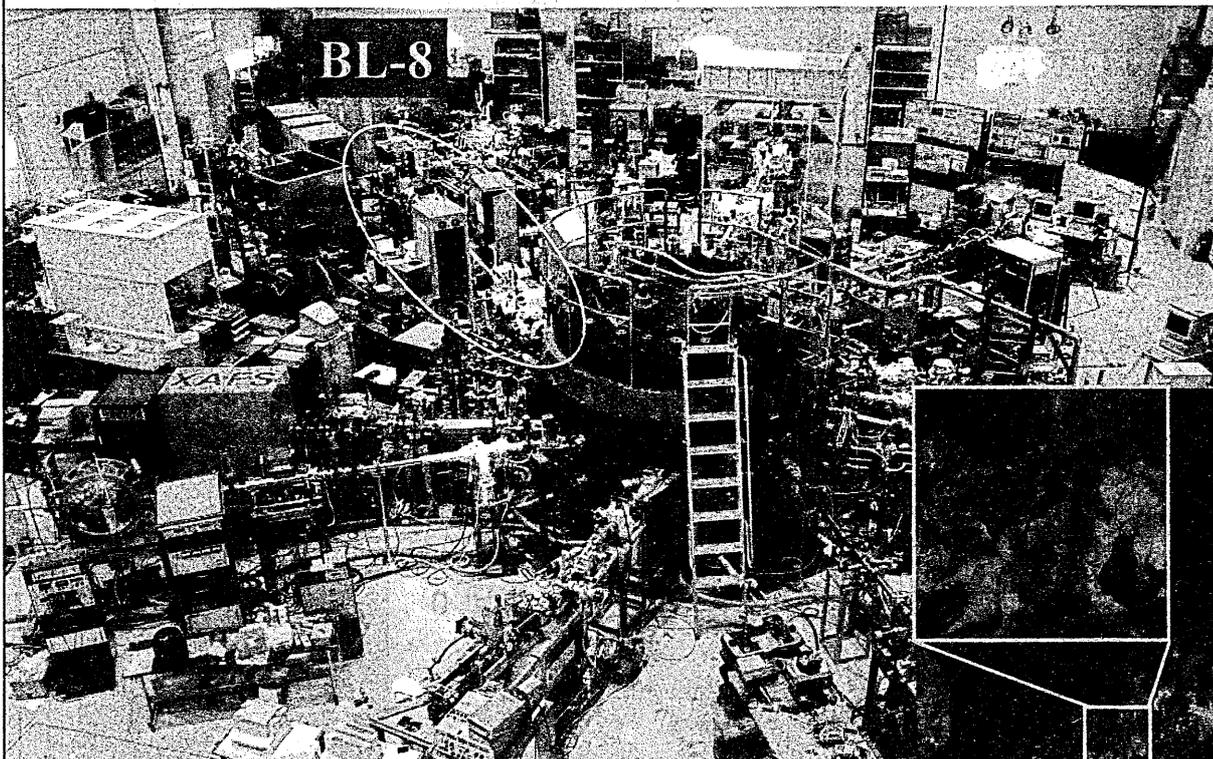
- Cleaning Condition in Vacuum

- Repeated cycles of
  - Ar<sup>+</sup> ion sputtering (0.5 kV)
  - Anneal (800 °C, 5 min.)

- Cleanliness by AES
- Surface Structure by LEED

Namba Lab

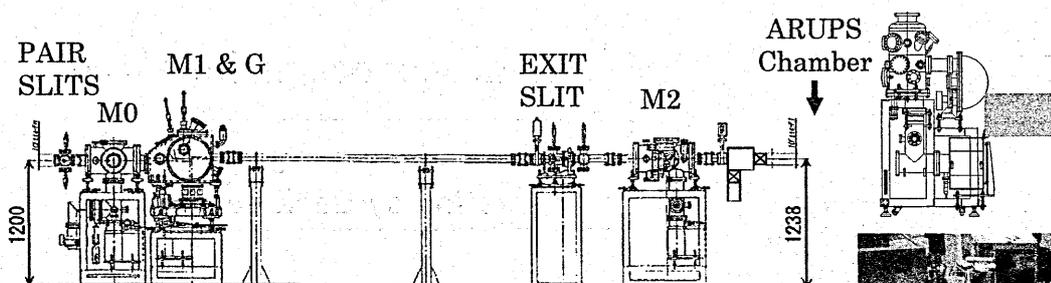
# AURORA & SORIS ビームライン (BL-8)



Aurora: Small Synchrotron Light Source

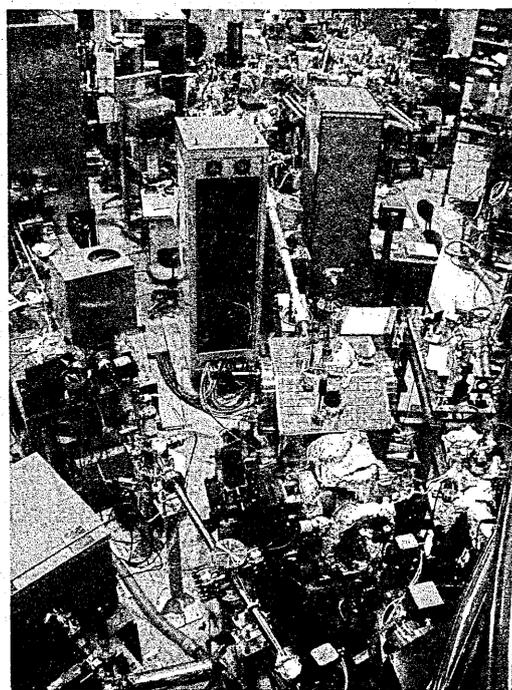
Namba Lab

# SORIS ビームライン (BL-8)



## Specification

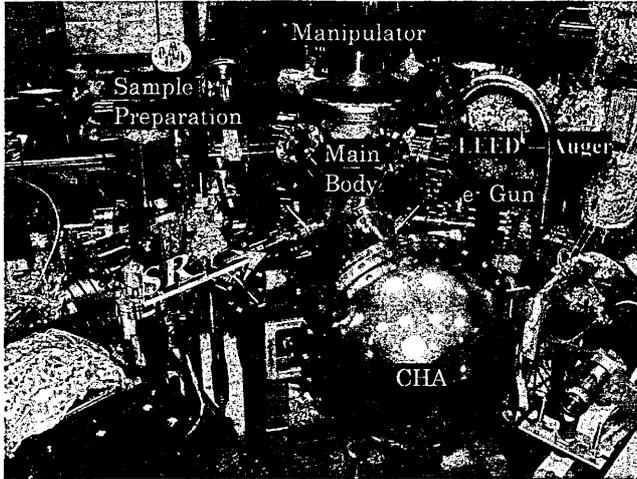
- Photon energy : 5–700 eV
- Resolution :  $E/\Delta E = 5000-1500$
- Photon flux :  $10^{10}-10^{11}$  photons/s/300 mA
- Beam size : SR = 10.5(H)–3(V) mrad<sup>2</sup>  
Target = 2(H)–1(V) mm<sup>2</sup>
- Mirror : M0 = cylindrical, Si,  
M1 = plane, quartz  
M2 = toroidal, quartz
- Grating : Varied-line-spacing plane grating  
(Hitachi, mechanically ruled,  
400 and 1800 lines/mm)
- Exit beam : In horizontal plane at 1238 mm  
high from the floor



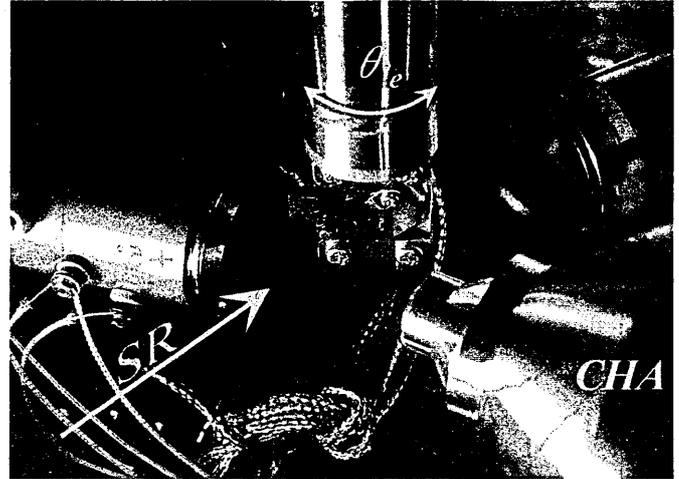
Namba Lab

# SR-ARUPS測定室

UPS Measurement Chamber



Inside of the Chamber



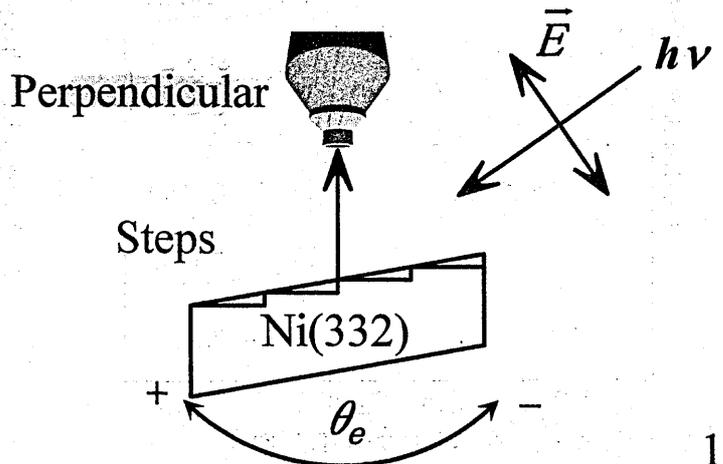
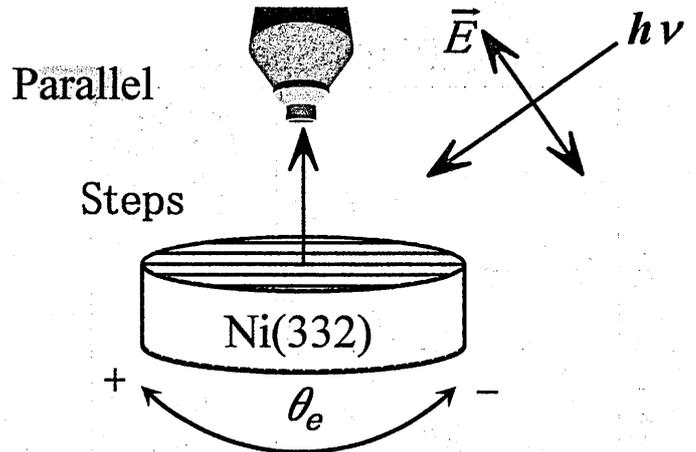
Acceptance Angle(CHA) :  $\Delta \theta = \pm 2^\circ$   
 Total Energy Resolution :  $\Delta E = 30 \text{ meV}$

## 分散と次元

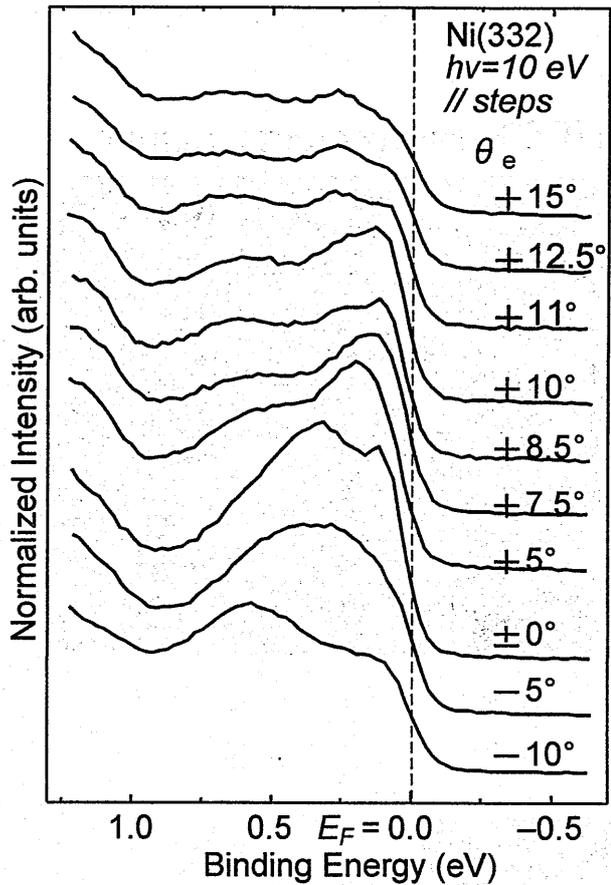
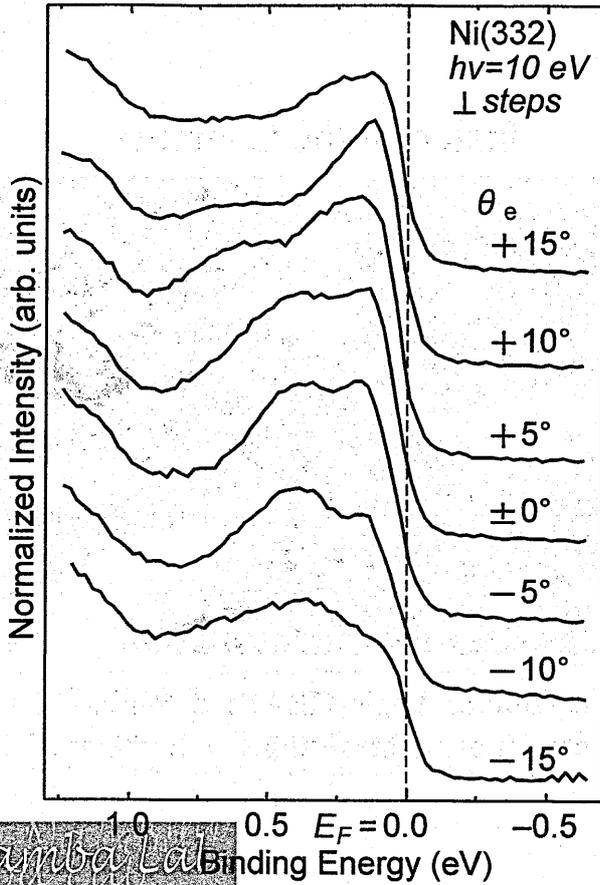
① Detect Peaks in ARUPS Spectra

② Determine the Dispersion  
 // &  $\perp$  Steps

Dispersion		
//Steps	$\perp$ Steps	Dimension
○	○	2D
○	×	1D
×	×	0D

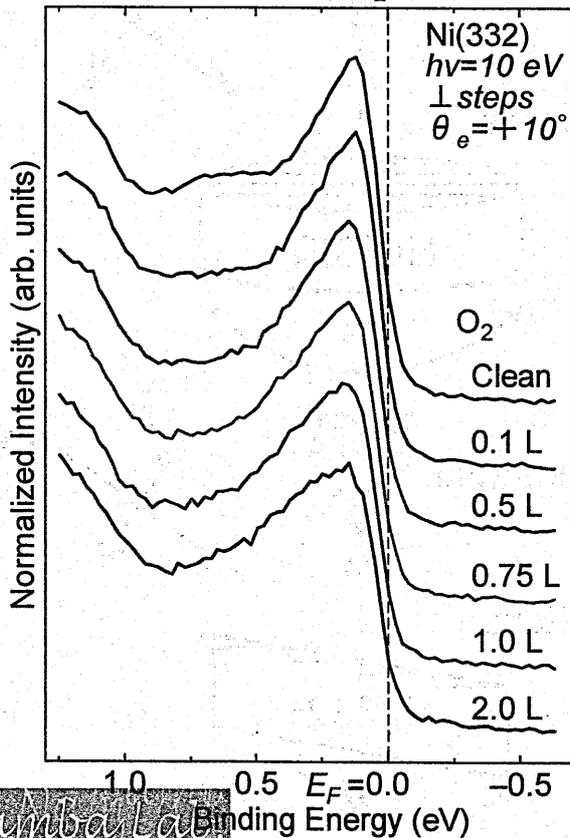


# Ni(755)のSR-ARUPSスペクトル

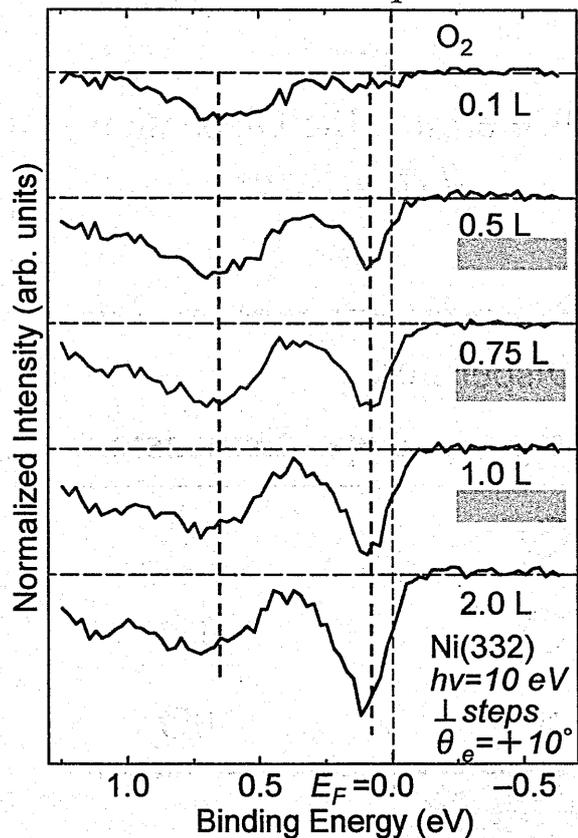


# O<sub>2</sub>吸着によるスペクトル形状の変化

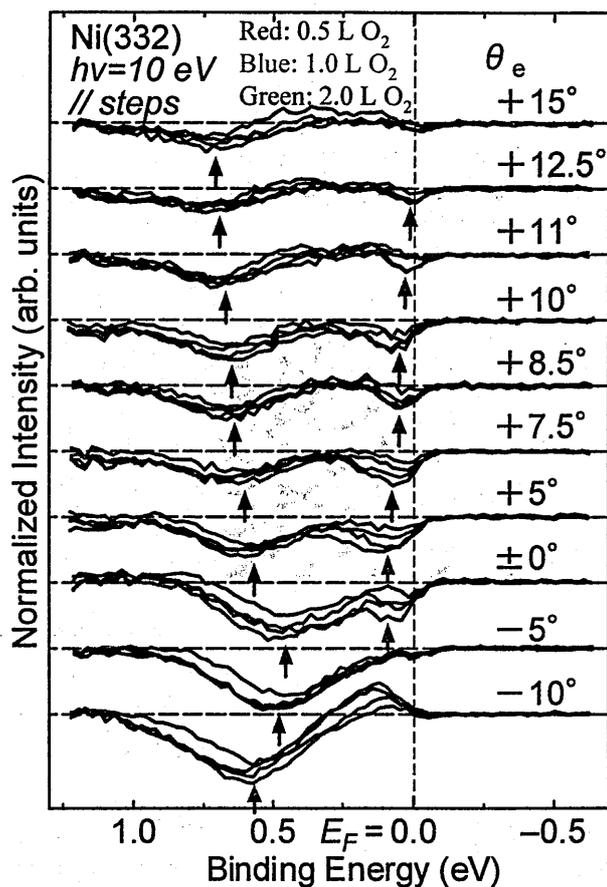
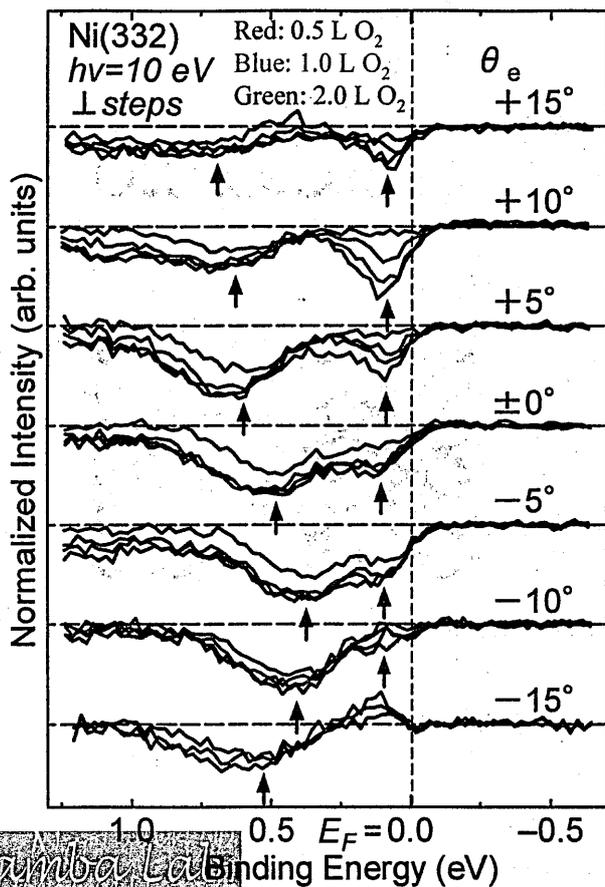
SR-ARUPS Spectra



Difference Spectra

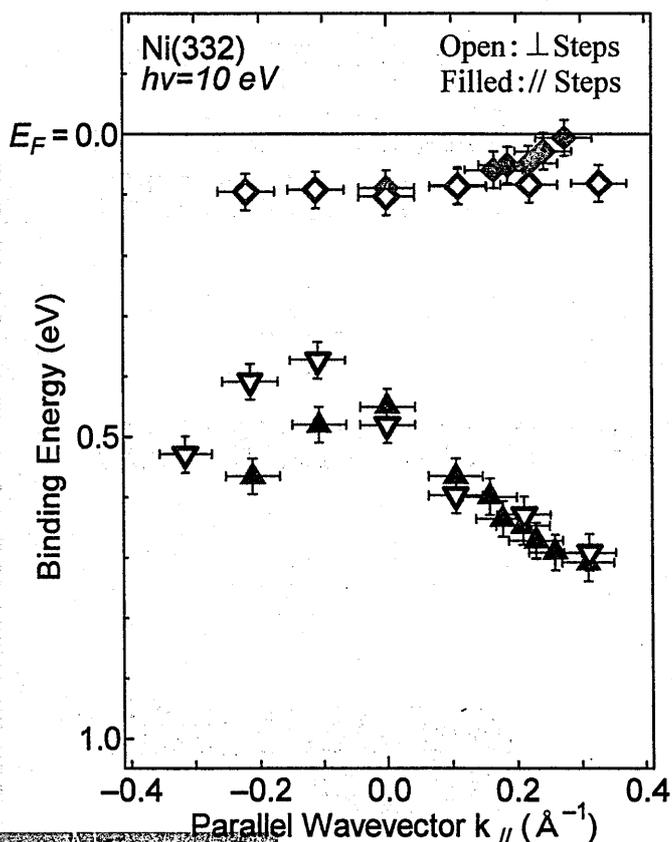


# Ni(755)の表面敏感成分



Nanyang Lab

# Ni(755)ステップ面の表面敏感成分



Dispersion

- $\perp$  Steps:  $\times$
- $//$  Steps:  $\circ$

➔ { Step-localized  
One-dimensional

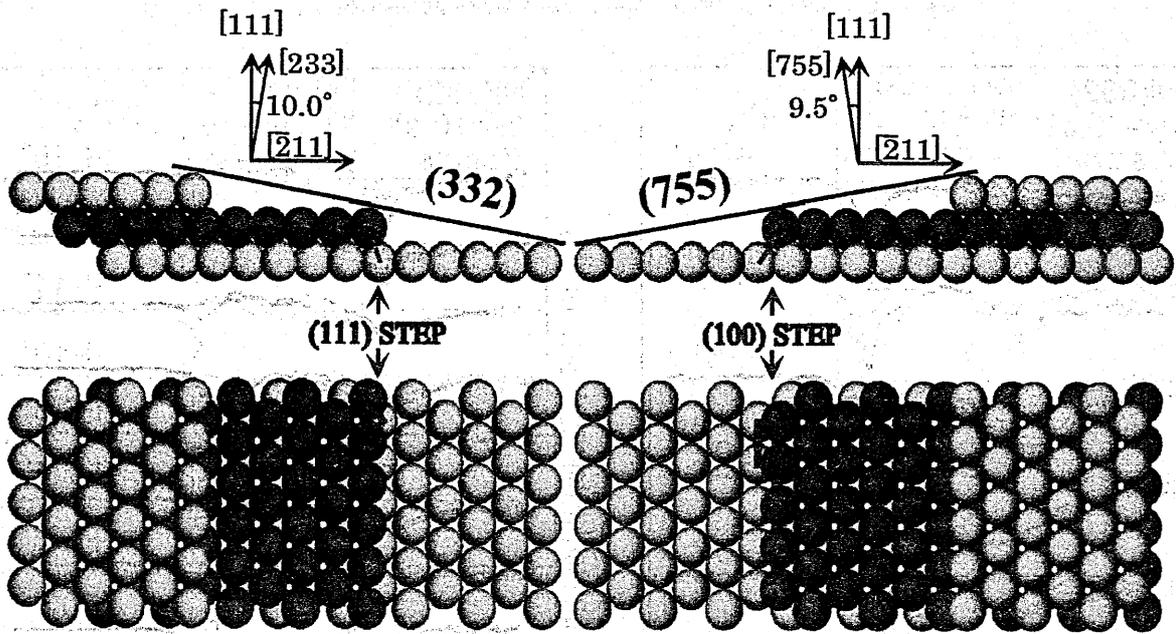
Dispersion

- $\perp$  Steps:  $\circ$
- $//$  Steps:  $\circ$

➔ { (111) Terrace-derived  
Two-dimensional

Nanyang Lab

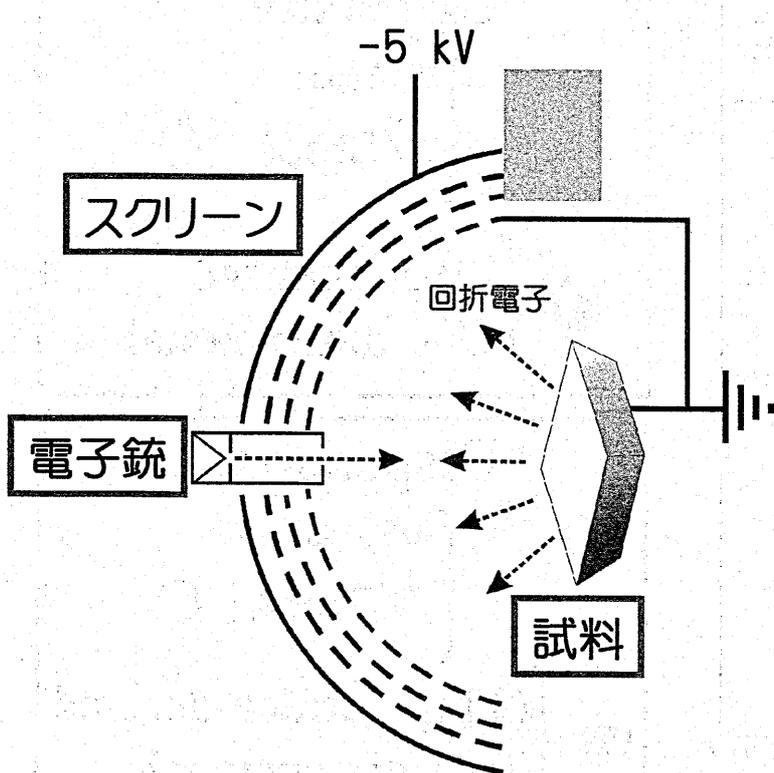
# Ball Model of Stepped Ni(332) & (755)



Substrate	<i>L</i>
Ni(332)	11.8 Å
Ni(755)	12.2 Å

Namba Lab

## 構造解析：低速電子回折(LEED)



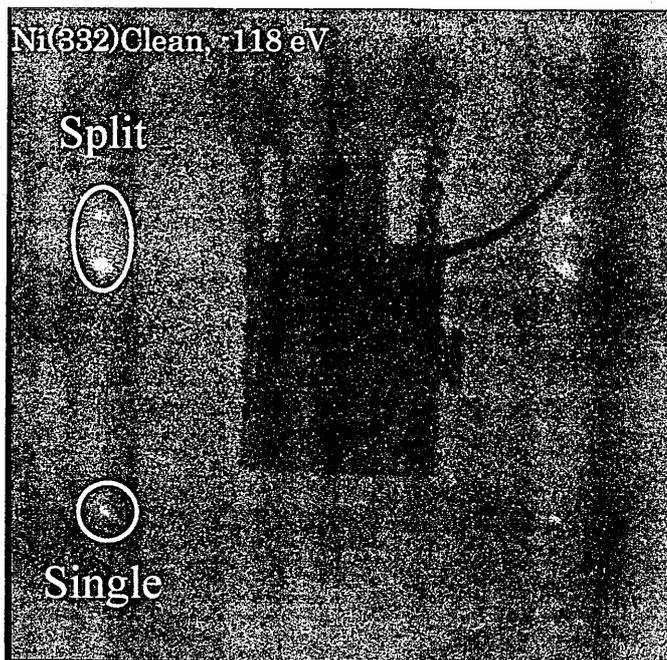
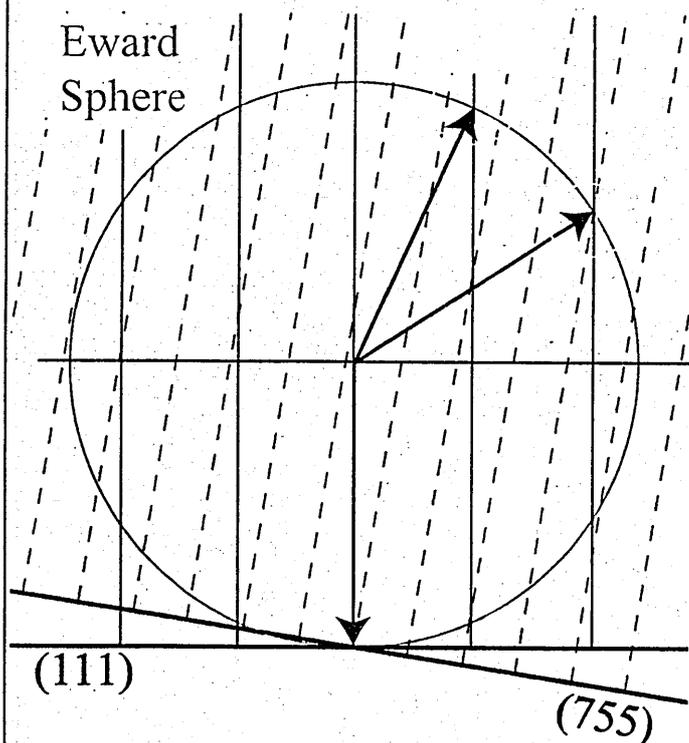
数十~百 eVの  
運動エネルギーを  
持った電子の回折

ド・ブローイ波長 ≒ 数 Å

表面の原子構造を  
強く反映

Namba Lab

# LEED Split Spots on Stepped Surfaces

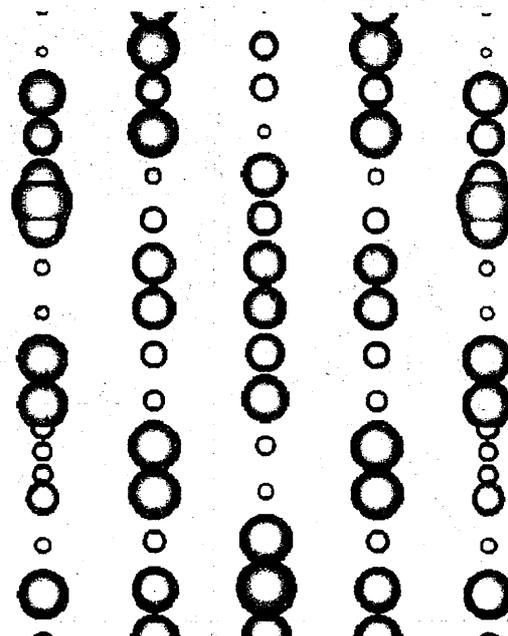
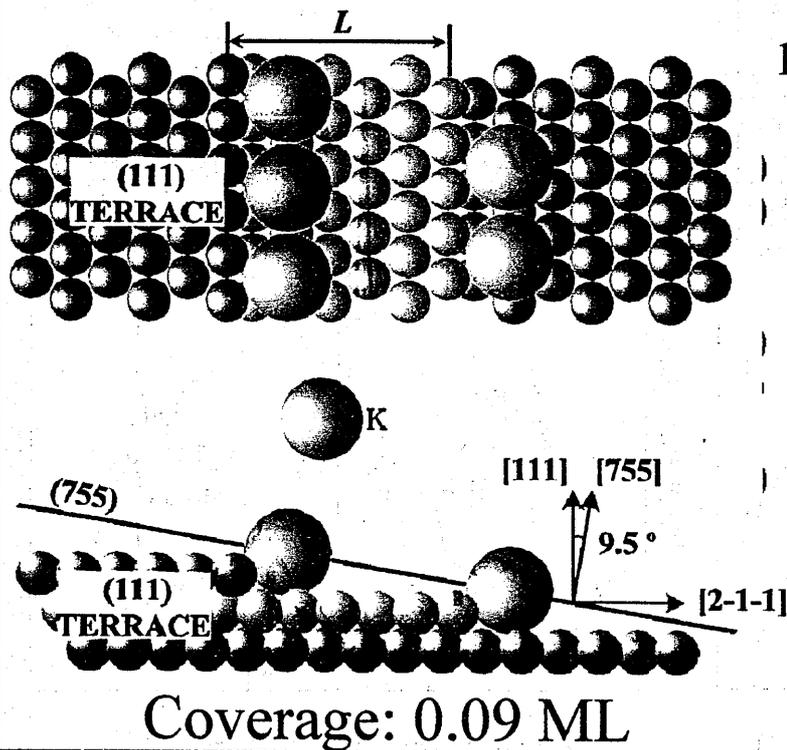


Namba Lab.

# Expected LEED Pattern for Atomic Chains

● Kinematically calculated LEED

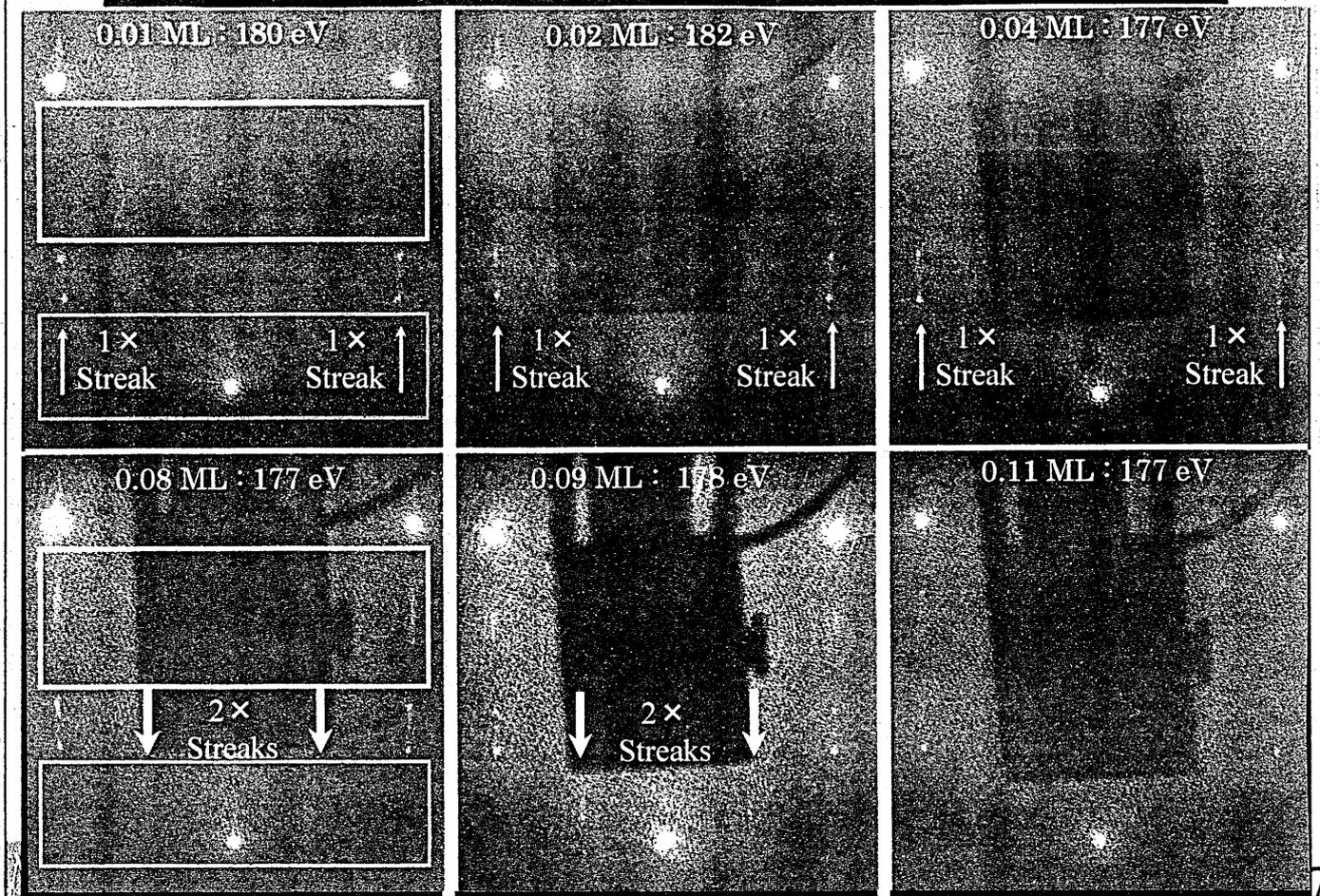
pattern for atomic chains



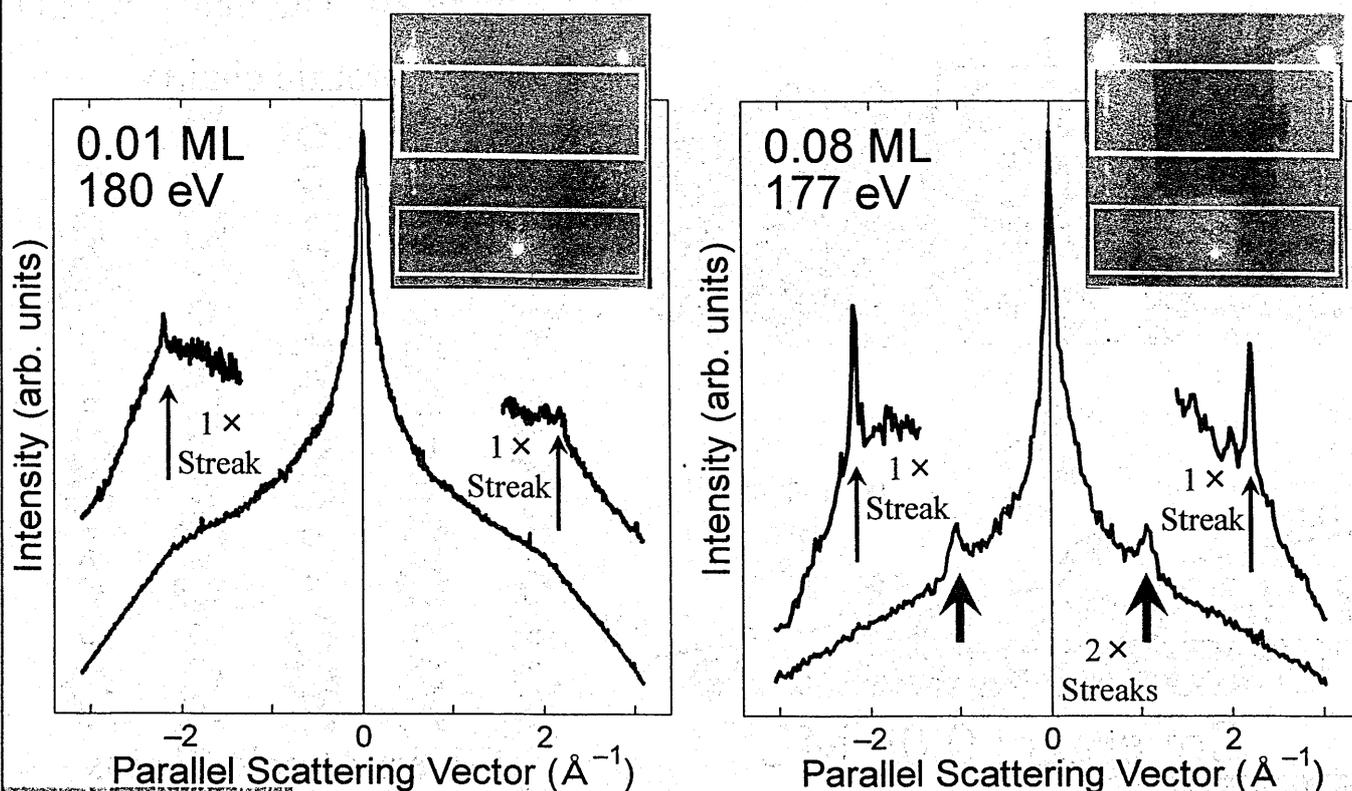
{ Silver: Atomic Chains  
Gold: Substrate

Namba Lab.

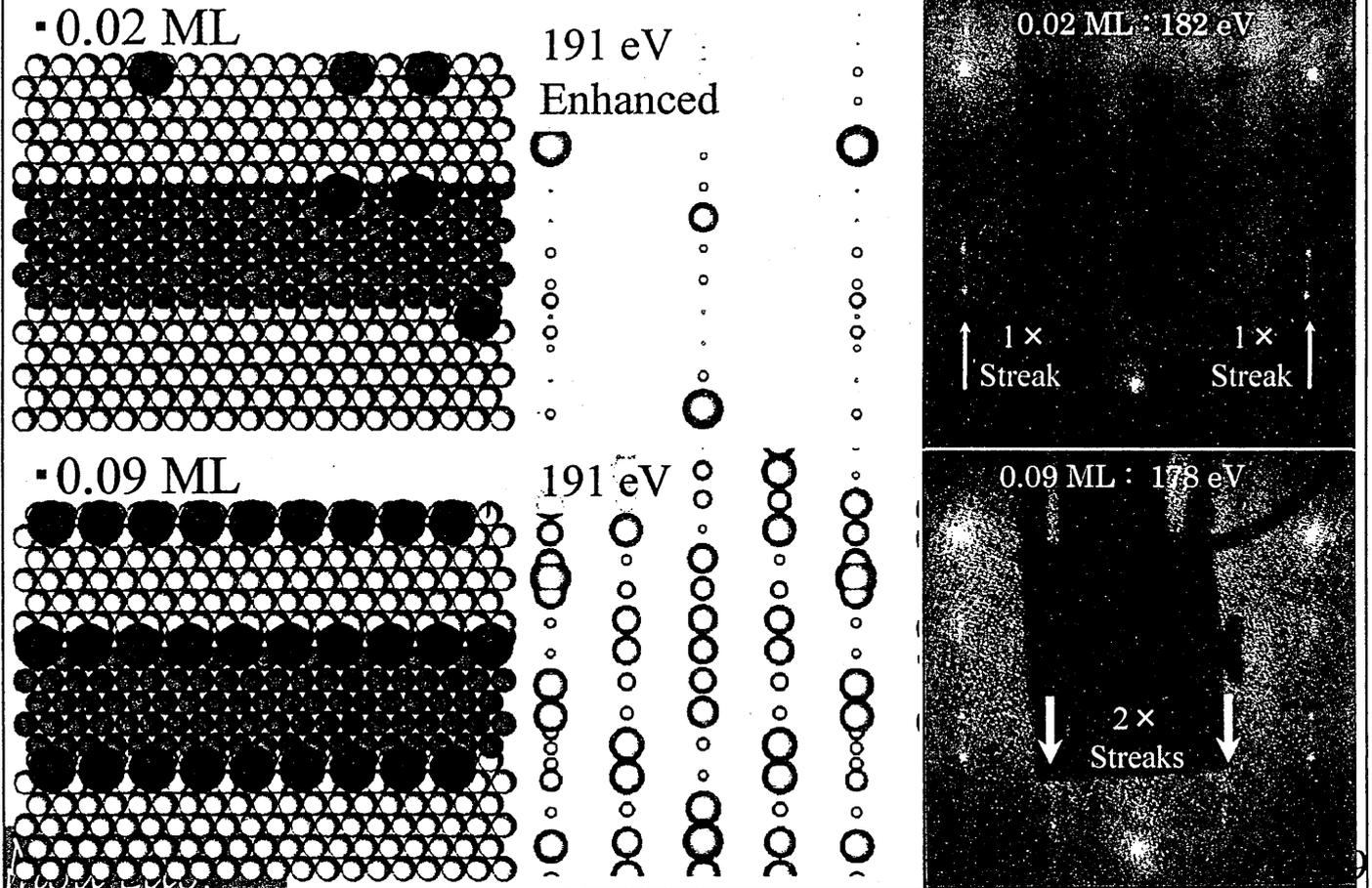
# LEED Patterns for K/Ni(755)



## Integrated Intensity of Streaks From LEED Patterns for K/Ni(755)



# Structure Model for K/Ni(755)



## まとめ

### Niステップ面: Ni(332)

- ・Niステップ面の表面電子状態をSR光電子分光で測定
  - 一次元的ステップ局在化状態
  - テラス由来の二次元状態

### K/Ni(755)

- ・Ni(755)ステップ面上に一次元K原子鎖が成長
- ・K原子鎖の表面電子状態をSR光電子分光で測定中

# 不規則半平面による TM 平面波の 散乱と回折

- ランダム波動場表現の導出と回折核の近似評価 -

田村安彦<sup>1</sup> 中山純一<sup>2</sup>

(京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科 電子システム工学部門)

1 ytamura@kit.ac.jp

2 nakayama@kit.ac.jp

2006年12月15日(金)

輻射科学研究会

(於 京都工芸繊維大学 1号館 3F 大学院会議室)

## 1 はじめに

不規則表面に対する波動散乱の研究は、ほとんど全てが不規則に変形した無限に広い平面境界を対象としている [1-6]。しかしながら、現実の散乱体は有限の大きさ (もしくは半無限構造) かつエッジやウェッジ等の鋭い端部を有する場合が少なくない。従って、不規則表面による波動散乱に端部が及ぼす影響を調べることは、電磁波や光による半導体材料 (端部を持つ有限サイズ) の非破壊測定、波浪海面上の標識や船舶の検出、切り立った崖や山脈等による電磁波の散乱、都市空間における粗い表面を持つビルディングによる電磁波の回折・散乱等の環境電磁工学、アンテナ表面の微小な凹凸による特性への影響等を検討する上で、実用上重要である。理論的には、不規則表面による散乱とエッジによる回折現象との相互作用に興味がある。また、端部のある不規則表面のもっとも簡単な例である不規則半平面や不規則ストリップに対する解が得られれば、GTD(Geometric Theory of Diffraction) 等の物理光学近似手法 [7] の基本解として用いることができ、複雑な形状である車・船舶・航空機等の散乱回折解析 [8] において表面のランダムなラフネスを考慮した解析が可能になるものと思われる。このような不規則性を備えた開境界表面による散乱回折問題は新しいクラスのランダム境界値問題であり、解析の必要性への認識がランダム系でない関連研究者の間で最近高まりつつある [9,10]。しかしながら、このようなランダム境界値問題は世界的に研究例がほとんどないのが現状である。我々は、不規則な凹凸を持つ半平面やストリップによる TE 平面波散乱問題を確率的手法、表面振動法及び Wiener-Hopf 法を併用して解析し、散乱特性を議論した [11-13]。一方、TM 平面波入射に対し同手法を適用すると、無限に広い不規則表面の場合 [14] と同様に 1 次振動解発散の困難を生じる [15]。

筆者は新しい定式化として、Wiener-伊藤展開による確率汎関数法 [16-18] と Wiener-Hopf 法 [19] の併用を提案している。まずは不規則表面による '衣を着た' 散乱と端部でのエッジ回折との '弱い' 相互作用を含んだ近似解を非一様確率場の Wiener-伊藤展開の形に求めている。展開係数である Wiener 核は観測点に依存しており、無限に広い不規則表面の場合の多重繰り込み Wiener 核と不規則半平面による散乱及び回折を記述する三種類の Fourier 積分により構成される。この解は観測点からエッジを無限距離引き離す極限で、無限に広い不規則表面による TM 波入射に対するランダム波動場の多重繰り込み Wiener 核を用いた Wiener-伊藤展開表現 [20] に移行する。よって無限に広い不規則表面の解に対する一つの合理的な拡張になる。しかしながら、Fourier 積分の積分核 (回折核) は不規則表面による多重散乱効果を含むため、実際の評価が容易でない。そこで、解の発散が生じない範囲で多重散乱効果を無視することにより、回折核を近似評価する。この場合、三種類の Fourier 積分は、鏡面反射波等の伝搬平面波成分を含む強い寄与である複素 Fresnel 積分、円筒波オーダーの弱い寄与である最急降下路に沿った積分及び分岐線に沿う積分を用いて書ける。散乱波に対し不規則表面の影響は、照射側では主に伝搬平面波成分に生じるという意味で強く、影側はエッジ回折波成分に対して起こるという意味で弱く現れる。得られた波動場の表現を用いて、コヒーレント及びインコヒーレント散乱の角度分布を種々のパラメータについて数値的に計算し、具体的に散乱特性の評価と議論を行なう。その結果、エッジからある程度離れると、影側のインコヒーレント散乱パターンに対し、逆鏡面反射方向近傍においてピークと随伴リップルを生じること、表面に近い LGA(Low Grazing Angle) において強度の増加を生じること、また照射側においてエッジからの距離がある範囲にあるとき散乱パターンがリップルを持ち、特に LGA で著しい。これらの現象は TE 波入射の場合には起こらない TM 波入射特有の新現象であり、不規則表面上の TM 導波表面波とエッジ回折波との結合に起因する。

本報告は学術論文 [21,22] もしくは学位論文 [23] 第 8 章 (及び関連する第 2,6 章の記述) の内容を修正しまとめたものである。波動場の時間因子を  $e^{-i2\pi f_i t}$  ( $f_i$  は周波数) として全ての記述から省略する。

## 2 不規則半平面による TM 平面波の回折と散乱問題の定式化

### 2.1 ランダム境界値問題

厚みが無限に薄く完全導体からなる 1 次元不規則半平面 (図 1) を Gauss 一様確率場  $f(T^x\omega)$  により記述する。

$$z = f(T^x\omega) \quad (x < l) \quad (1)$$

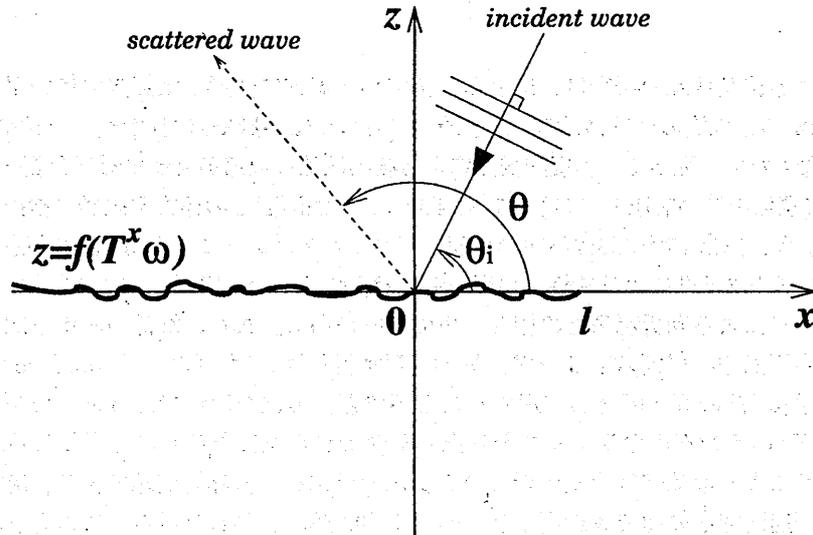


図1 一次元不規則半平面による TE 平面波の散乱と回折問題の直角座標系  $(x, z)$ 。不規則半平面は無限に薄く完全導体からなり、その不規則性は  $x$ -軸上の一様確率場  $f(T^x \omega)$  により記述される。 $\omega$  は見本空間  $\Omega$  内の一見本点である。 $\theta_i$  と  $\theta$  は各々入射角と散乱角を表す ( $|\theta_i|, |\theta| < \pi$ )。

$f(T^x \omega)$  は Wiener 積分 [24] でスペクトル表現されるとする。

$$f(T^x \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} F(\lambda) dB(\lambda, \omega) \quad (2)$$

ここで、 $\omega$  は見本空間  $\Omega$  中の一見本点、 $T^a$  は  $\Omega$  内の保測変換:  $T^0 \equiv I$  (恒等変換),  $T^{a+b} = T^a T^b$  ( $a, b \in \mathbf{R} \equiv (-\infty, \infty)$ ) を表す。 $dB(\lambda, \omega)$  は実  $\lambda$ -軸上の複素 Gauss ランダム測度 [24, 25] で以下の性質を持つ。

$$\begin{aligned} dB^*(\lambda, \omega) &= dB(-\lambda, \omega), & dB(\lambda, T^a \omega) &= e^{-i\lambda a} dB(\lambda, \omega) \\ \langle dB(\lambda, \omega) \rangle &= 0, & \langle dB(\lambda, \omega) dB^*(\lambda', \omega) \rangle &= \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\langle \cdot \rangle$  は事象  $\omega$  に関するアンサンブル平均、 $*$  は複素共役、 $\delta(\cdot)$  は Dirac デルタを表す。(2) 及び (3) から不規則表面の平均、分散及び相関関数は以下となる。

$$\langle z \rangle = 0, \quad \langle z^2 \rangle = \sigma^2 = R(0), \quad R(x) = \langle f(T^x \omega) \cdot f^*(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (4)$$

$|F(\lambda)|^2$  は不規則表面のスペクトル密度で  $\lambda$  に関し偶関数  $|F(-\lambda)|^2 = |F(\lambda)|^2$ 、 $\sigma (> 0)$  は RMS 粗さである。

## 2.2 ランダム境界値問題

全波動場  $\phi(x, z, \omega)$  は、二次元波動方程式:

$$(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2 + k^2) \phi(x, z, \omega) = 0 \quad (5)$$

完全導体からなる不規則表面上での Neumann 条件:  $\partial \phi(x, z, \omega) / \partial n = 0$  ( $\partial / \partial n$  は不規則表面上の外向き法線微分)、無限遠方での Sommerfeld の外向放射条件 [26] 及び波動方程式の解の一意性を保証するエッジ近傍でのエッジ条件 [27] を満たすランダム境界値問題の解である。

全波動場  $\phi(x, z, \omega)$  を入射 TM 平面波  $\phi_i(x, z)$  と不規則半平面による散乱場  $\phi_s(x, z, \omega)$  の和で書く。

$$\phi(x, z, \omega) = \phi_i(x, z) + \phi_s(x, z, \omega) \quad (6)$$

$$\phi_i(x, z) = e^{-i\lambda_0 x + \text{sgn}\theta_i \gamma(\lambda_0)z}, \quad \lambda_0 = k \cos \theta_i \quad (7)$$

ただし、 $\theta_i$  ( $|\theta_i| < \pi$ ) は入射角、 $k$  は自由空間中の波数、 $\text{sgn}(\cdot)$  は符号関数である。

$$\text{sgn} \mu = 1 \quad (\mu > 0), \quad -1 \quad (\mu < 0) \quad (8)$$

二価関数  $\gamma(s)$  は以下のように定義する。

$$\gamma(s) = 2\bar{\gamma}^+(s)\bar{\gamma}^-(s), \quad \bar{\gamma}^\pm(s) = 2^{-1/2} e^{-i\pi/4} \sqrt{k \pm s}, \quad \gamma(0) = -ik \quad (9)$$

ここで  $\bar{\gamma}^\pm(s)$  は  $\gamma(s)/2$  の分解関数である。その分岐線を分岐点  $s = k, -k$  から、各々  $k + i\infty, -k - i\infty$  に至る虚数軸に平行な直線とすれば、任意の  $s$  について  $\bar{\gamma}^+(-s) = \bar{\gamma}^-(s)$  が成り立ち、 $|\text{Im} s| < k_2$  なる  $s$  について  $\text{Re} \gamma(s) > 0$  が成り立つ。Re, Im は各々実部と虚部をとることを意味する。解析の都合上、波数  $k$  に媒質の微小損失を仮定し

$$k \equiv k_1 + ik_2 \quad (0 < k_2 \ll k_1) \quad (10)$$

とおく。このような複素波数  $k$  下で解析し最後に  $k_2 \rightarrow +0$  として本来の結果を得ることとする。さらに入射角を以下のように制限しておく。

$$|\theta_i| < \pi/2 \quad (11)$$

よって  $\text{Im} \lambda_0 = k_2 \cos \theta_i > 0$  である。

### 2.3 確率方程式の導出

一般の粗さに対する解を求めることは困難であるため、不規則表面の粗さが波長に比べて十分小さいかつ平均勾配が小さい場合 ( $|k|\sigma \ll 1, \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |F(\lambda)|^2 d\lambda \ll 1$ ) に有効な解を求める。そこで、厳密な境界条件ではなく、次の平均面  $x < l, z = \pm 0$  上での実効境界条件 [3] をモデル境界条件として用いる。

$$\left\{ -\frac{d}{dx} f(T^x \omega) \phi(x, z, \omega) + \phi'(x, z, \omega) + f(T^x \omega) \phi''(x, z, \omega) \right\} \Big|_{z=\pm 0} = 0 \quad (x < l) \quad (12)$$

ただし、 $\cdot \equiv \partial/\partial x, ' \equiv \partial/\partial z$  は  $\phi, \phi_s, \phi_i$  に作用するオペレータである。 $z$  について  $\phi(x, z, \omega), \phi'(x, z, \omega), \phi''(x, z, \omega), \phi(x, z, \omega)$  は  $z = 0$  において  $x < l$  で不連続、 $x > l$  で連続である。すなわち、 $x > l$  の境界条件として

$$\begin{aligned} \phi(x, +0, \omega) &= \phi(x, -0, \omega), & \phi'(x, +0, \omega) &= \phi'(x, -0, \omega) \\ \phi''(x, +0, \omega) &= \phi''(x, -0, \omega), & \phi(x, +0, \omega) &= \phi(x, -0, \omega) \end{aligned} \quad (13)$$

を考える。

散乱場  $\phi_s(x, z, \omega)$  は遠方  $|x| \rightarrow \infty$  での実効的な放射条件

$$\phi_s(x, z, \omega) = \begin{cases} O(e^{k_2 \cos \theta_i (x-l) - k_2 |\sin \theta_i z|}) & (x \rightarrow -\infty) \\ O(e^{-k_2 \sqrt{(x-l)^2 + z^2}}) & (x \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (14)$$

を満たす必要がある。また、 $\phi_s(x, z, \omega)$  は平坦面  $z = 0$  上で次の実効的なエッジ条件を満たすと仮定する。

$$\begin{aligned} \phi'_s(x, 0, \omega) &= O((x-l)^{-1/2}) & (x \rightarrow l+0) \\ \phi_s(x, +0, \omega) - \phi_s(x, -0, \omega) &= O((l-x)^{1/2}) & (x \rightarrow l-0) \end{aligned} \quad (15)$$

これは完全導体平滑半平面に対するエッジ条件そのものである。

## 2.4 $D^a$ -Fourier 変換による確率方程式の導出

無限に広い不規則表面やランダム媒質による散乱波動場は、確率論的な Floquet の定理の形、すなわち指数因子と一様確率場の積により記述できる [16,17]。一方、不規則半平面 (1) は一様確率場  $f(T^x\omega)$  が半分欠けた非一様確率場になっている。よって散乱場は無限に広い不規則表面の場合のように確率論的な Floquet の定理の形で直接書けない実空間での非一様確率場である。そこで  $D^a$ -Fourier 変換によりスペクトル領域での確率場の形を導く。一様確率場  $f(T^x\omega)$  が同時移動変換  $(x, \omega) \rightarrow (x+a, T^{-a}\omega)$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) に対し不変であることから (一般の) 非一様確率場  $\phi_s(x, z, \omega)$  に作用する移動オペレータ  $D^a$  [24,28] を次のように定義する。

$$D^a \phi_s(x, z, \omega) \equiv \phi_s(x+a, z, T^{-a}\omega) \quad (16)$$

$T^a$  が加法群であることから  $D^a$  も加法群をなす。すなわち  $D^0 \equiv I$  (恒等変換),  $D^a D^b = D^{a+b}$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) である。ここで、 $D^a$  を用いて  $D^a$ -Fourier 変換 [28] を次式で定義する。

$$\begin{aligned} e^{isx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isa} \{D^a \phi_s(x, z, \omega)\} da &= e^{isx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isa} \phi_s(x+a, z, T^{-a}\omega) da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{isa} \phi_s(a, z, T^{-a}\omega) da \equiv \Phi_s(z, T^x\omega|s) \end{aligned} \quad (17)$$

すなわち、ランダム関数に対して  $D^a$  を施しそのパラメータ  $a$  についての複素 Fourier 変換を取る形で定義する。(17) は複素波数パラメータ  $s$  を持つ  $x$ -軸上の一様確率場となっている。そこでそのような確率場を  $s$ -一様確率場と呼ぶことにする。(14) の条件から  $\Phi_s(z, T^x\omega|s)$  は複素  $s$ -平面上の帯状領域  $-k_2 < \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i$  で解析的な関数であることがわかるので、 $D^a$ -逆 Fourier 変換を次式で定義する。

$$\phi_s(x, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} e^{-isx} \Phi_s(z, T^x\omega|s) ds \quad (-k_2 < \tau < k_2 \cos \theta_i) \quad (18)$$

上式は拡張された確率論的な Floquet の形<sup>†</sup>、すなわち指数因子と  $s$ -一様確率場との積の線形和 (積分) となっている。(18) の非一様確率場の表現は一様ランダム媒質中の波動関数の表現 [28] として用いられている。 $\phi'_s(x, z, \omega), \phi''_s(x, z, \omega), \phi_s(x, z, \omega)$  の  $D^a$ -Fourier 変換対を各々  $\Phi'_s(z, T^x\omega|s), \Phi''_s(z, T^x\omega|s), \Phi_s(z, T^x\omega|s)$  と表記しておく。これらの  $s$ -一様確率場も複素  $s$ -平面上の帯状領域  $-k_2 < \text{Im } s < k_2 \cos \theta_i$  で解析的な関数である。

次に境界値  $\phi_s(x, +0, \omega), \phi_s(x, -0, \omega)$  に対し和と差の量を定義する。

$$j(x, \omega) = \phi_s(x, +0, \omega) - \phi_s(x, -0, \omega), \quad k(x, \omega) = \phi_s(x, +0, \omega) + \phi_s(x, -0, \omega) \quad (19)$$

$j(x, \omega)$  はその形から不規則表面上に誘起される平均面上での等価的な電流密度を表し、半平面での外側では零になる。一方、 $k(x, \omega)$  は同じく解析の便宜のための量であり、その物理的な意味は不明である。 $j, k$  を  $D^a$ -Fourier 変換すれば

$$J(T^x\omega|s) = \Phi_s(+0, T^x\omega|s) - \Phi_s(-0, T^x\omega|s) \quad (20)$$

$$K(T^x\omega|s) = \Phi_s(+0, T^x\omega|s) + \Phi_s(-0, T^x\omega|s) \quad (21)$$

を得る。 $J(T^x\omega|s)$  については  $(-\infty, l-x)$  での片側  $D^a$ -Fourier 変換を用いても表現でき、複素  $s$ -平面上の下半平面領域  $\text{Im } s < k_2 \cos \theta_i$  で解析的な関数となる。(15) より  $|s| \rightarrow \infty$  で次の漸近的振舞いを示すことがわかる。

$$e^{-is|} J(T^x\omega|s) = O(s^{-3/2}) \quad (\text{Im } s < k_2 \cos \theta_i) \quad (22)$$

一方、境界値  $\phi'_s(x, 0, \omega), \phi''_s(x, 0, \omega), \phi_s(x, 0, \omega)$  の  $(l-x, +\infty)$  での片側  $D^a$ -Fourier 変換を導入する。

$$e^{isx} \int_{l-x}^{\infty} e^{isa} D^a \begin{Bmatrix} \phi'_s(x, 0, \omega) \\ \phi''_s(x, 0, \omega) \\ \phi_s(x, 0, \omega) \end{Bmatrix} da = e^{is|} \begin{Bmatrix} w'(T^x\omega|s) \\ w''(T^x\omega|s) \\ w(T^x\omega|s) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

<sup>†</sup>  $D^a \{e^{-isx} \Phi_s(z, T^x\omega|s)\} = e^{-isa} \{e^{-isx} \Phi_s(z, T^x\omega|s)\}$  より  $e^{-isx} \Phi_s(z, T^x\omega|s)$  は  $D^a$  の固有関数である。

$w(T^x\omega|s), w'(T^x\omega|s), w''(T^x\omega|s)$  は複素  $s$ -平面上の上半平面領域  $\text{Im } s > -k_2$  で解析的な関数である。(15) より  $w'(T^x\omega|s)$  の  $|s| \rightarrow \infty$  での漸近的振舞いは以下ようになる。

$$w'(T^x\omega|s) = O(s^{-1/2}) \quad (\text{Im } s > -k_2) \quad (24)$$

従って、実効境界条件 (12) に関与する境界値  $\phi'_s(x, \pm 0, \omega), \phi''_s(x, \pm 0, \omega), \phi_s(x, \pm 0, \omega)$  の  $(-\infty, l-x)$  での片側  $D^a$ -Fourier 変換が

$$\begin{aligned} e^{isx} \int_{-\infty}^{l-x} e^{isa} D^a \begin{Bmatrix} \phi'_s(x, \pm 0, \omega) \\ \phi''_s(x, \pm 0, \omega) \\ \phi_s(x, \pm 0, \omega) \end{Bmatrix} da &= e^{isx} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{l-x}^{\infty} \right] e^{isa} D^a \begin{Bmatrix} \phi'_s(x, \pm 0, \omega) \\ \phi''_s(x, \pm 0, \omega) \\ \phi_s(x, \pm 0, \omega) \end{Bmatrix} da \\ &= \begin{Bmatrix} \Phi'_s(\pm 0, T^x\omega|s) - e^{isl} w'(T^x\omega|s) \\ \Phi''_s(\pm 0, T^x\omega|s) - e^{isl} w''(T^x\omega|s) \\ \Phi_s(\pm 0, T^x\omega|s) - e^{isl} w(T^x\omega|s) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

となることから、実効境界条件 (12) の  $(-\infty, l-x)$  の片側  $D^a$ -Fourier 変換より解くべき確率方程式を得る。

$$\begin{aligned} \{\Phi'_s(+0, T^x\omega|s) - \Phi'_s(-0, T^x\omega|s)\} - \frac{d}{dx} f(T^x\omega) \{\Phi_s(+0, T^x\omega|s) - \Phi_s(-0, T^x\omega|s)\} \\ + f(T^x\omega) \{\Phi''_s(+0, T^x\omega|s) - \Phi''_s(-0, T^x\omega|s)\} = 0 \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} 2 \left[ -\text{sgn } \theta_i \gamma(\lambda_0) + (-i\lambda_0) \frac{d}{dx} f(T^x\omega) - \{\gamma(\lambda_0)\}^2 f(T^x\omega) \right] \frac{-ie^{i(s-\lambda_0)l}}{s-\lambda_0} \\ = \{\Phi'_s(+0, T^x\omega|s) + \Phi'_s(-0, T^x\omega|s) - 2e^{isl} w'(T^x\omega|s)\} + B(T^x\omega|s) \end{aligned} \quad (26b)$$

ここで、(26b) の右辺の因子  $-ie^{i(s-\lambda_0)l}/(s-\lambda_0)$  は TM 入射平面波による励振因子である。励振因子は平均面  $z=0$  上での境界値  $\phi_i(x, 0) = e^{-i\lambda_0 x}$  に対する  $(-\infty, l-x)$  の片側  $D^a$ -Fourier 変換より得られる。従って  $|k| \rightarrow \infty$  に対しては次の置換

$$\frac{-ie^{i(s-\lambda_0)l}}{s-\lambda_0} \rightarrow 2\pi\delta(s-\lambda_0) \quad (27)$$

を行なえばよい。因子  $B(T^x\omega|s)$  は  $\phi''_s(x, 0, \omega), \phi_s(x, 0, \omega)$  に関連する未知境界値であり、二つの表現を持つ。一つは実効境界条件 (12) の左辺第一項と三項の和の  $(-\infty, l-x)$  での片側  $D^a$ -Fourier 変換

$$\begin{aligned} B(T^x\omega|s) &= e^{isx} \int_{-\infty}^{l-x} e^{isa} D^a \left[ -\frac{d}{dx} f(T^x\omega) \{\phi_s(x, +0, \omega) + \phi_s(x, -0, \omega)\} \right. \\ &\quad \left. + f(T^x\omega) \{\phi''_s(x, +0, \omega) + \phi''_s(x, -0, \omega)\} \right] da \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= e^{isx} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{l-x}^{\infty} \right] e^{isa} D^a \left[ -\frac{d}{dx} f(T^x\omega) \{\phi_s(x, +0, \omega) + \phi_s(x, -0, \omega)\} \right. \\ &\quad \left. + f(T^x\omega) \{\phi''_s(x, +0, \omega) + \phi''_s(x, -0, \omega)\} \right] da \\ &= -\frac{d}{dx} f(T^x\omega) \{\Phi_s(+0, T^x\omega|s) + \Phi_s(-0, T^x\omega|s) - 2e^{isl} w(T^x\omega|s)\} \\ &\quad + f(T^x\omega) \{\Phi''_s(+0, T^x\omega|s) + \Phi''_s(-0, T^x\omega|s) - 2e^{isl} w''(T^x\omega|s)\} \end{aligned} \quad (29)$$

で、もう一つは (18), (28) より得られる

$$\begin{aligned} B(T^x\omega|s) &= e^{isx} \int_{-\infty}^{l-x} e^{isa} D^a \left[ -\frac{d}{dx} f(T^x\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} e^{-is'x} \{\Phi_s(+0, T^x\omega|s') + \Phi_s(-0, T^x\omega|s')\} ds' \right. \\ &\quad \left. + f(T^x\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} e^{-is'x} \{\Phi''_s(+0, T^x\omega|s') + \Phi''_s(-0, T^x\omega|s')\} ds' \right] da \end{aligned} \quad (30)$$

である。

### 3 Wiener-Hopf 方程式

#### 3.1 Wiener-伊藤展開による一様確率場の表現

$s$ -一様確率場  $\Phi_s, J, K, w, w'$  は  $f(T^x\omega)$  の汎関数すなわち  $dB(\lambda, \omega)$  の汎関数であるから、分散有限の条件:  $\langle |\Phi_s|^2 \rangle, \langle |w'|^2 \rangle, \langle |w''|^2 \rangle, \langle |w|^2 \rangle, \langle |J|^2 \rangle, \langle |K|^2 \rangle < \infty$  下で Wiener-伊藤の展開定理により

$$\Phi_s(z, T^x\omega|s) = A_0^\pm(s)e^{-\gamma(s)|z|} + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} A_n^\pm(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \cdot e^{-\gamma(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)|z|-i(\lambda_1+\dots+\lambda_n)x} \hat{h}^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] \quad (31)$$

の形に書ける。 $e^{-isx}\Phi_s(z, T^x\omega|s)$  は散乱波が外向き平面波とエバネッセント波の和で書けること (Rayleigh の仮説 [29]) を示し、波動方程式 (41) と  $|z| \rightarrow \infty$  での外向き放射条件を満たす。同様に、 $w', w'', w, J, K$  については

$$\begin{pmatrix} w'(T^x\omega|s) \\ w''(T^x\omega|s) \\ w(T^x\omega|s) \\ J(T^x\omega|s) \\ K(T^x\omega|s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_0(s) \\ w''_0(s) \\ w_0(s) \\ J_0(s) \\ K_0(s) \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} w'_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \\ w''_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \\ w_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \\ J_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \\ K_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \end{pmatrix} e^{-i(\lambda_1+\dots+\lambda_n)x} \cdot \hat{h}^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] \quad (32)$$

以上の展開表現における  $A_n^\pm(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s), w'_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s), w''_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s), w_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s), J_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s), K_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s)$  は  $n$  次の Wiener 核であり、変数  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に関して対称である。 $w'_n, w''_n, w_n, J_n, K_n$  の解析性は  $w', w'', w, J, K$  に準ずると仮定する。

(31), (20), (21) 及び (32) より

$$J_0(s) = A_0^+(s) - A_0^-(s) \quad (33a)$$

$$J_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) = A_n^+(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) - A_n^-(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \quad (n \geq 2)$$

$$K_0(s) = A_0^+(s) + A_0^-(s) \quad (33b)$$

$$K_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) = A_n^+(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) + A_n^-(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \quad (n \geq 2)$$

を得る。(33a), (33b) を確率方程式 (26a), (26b) に代入し  $\hat{h}^{(n)}$  の直交性により自乗平均を計算すれば、Wiener 核が満たすべき連立階層方程式を得る。

0 次:

$$-\gamma(s)K_0(s) + \int_{-\infty}^{\infty} \{s(s+\lambda) - k^2\} F^*(\lambda) J_1(\lambda|s) d\lambda = 0 \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} & -\gamma(s)J_0(s) - 2e^{is\lambda} w'_0(s) - \int_{-\infty}^{\infty} \{s(s+\lambda) - k^2\} F^*(\lambda) K_1(\lambda|s) d\lambda - 2 \operatorname{sgn} \theta_i \gamma(\lambda_0) \frac{ie^{i(s-\lambda_0)\lambda}}{s-\lambda_0} \\ & - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda) e^{is\lambda} \{-i\lambda w_1(\lambda|s) + w''_1(\lambda|s)\} d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (34b)$$

1 次:

$$\begin{aligned} & -\gamma(s+\lambda_1)K_1(\lambda_1|s) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \{(s+\lambda_1)(s+\lambda_1+\lambda) - k^2\} F^*(\lambda) J_2(\lambda_1, \lambda|s) d\lambda \\ & + \{s(s+\lambda_1) - k^2\} F(\lambda_1) J_0(s) = 0 \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} & -\gamma(s+\lambda_1)J_1(\lambda_1|s) - 2e^{is\lambda} w'_1(\lambda_1|s) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \{(s+\lambda_1)(s+\lambda_1+\lambda) - k^2\} F^*(\lambda) K_2(\lambda_1, \lambda|s) d\lambda \\ & + \hat{B}_1(\lambda_1|s) - 2\{\lambda_0(\lambda_0+\lambda_1) - k^2\} F(\lambda_1) \frac{ie^{i(s-\lambda_0)\lambda}}{s-\lambda_0} \\ & - 4 \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda) e^{is\lambda} \{-i\lambda w_2(\lambda_1, \lambda|s) + w''_2(\lambda_1, \lambda|s)\} d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (35b)$$

$n$  次 ( $n \geq 2$ ):

$$\begin{aligned}
 & -\gamma(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)K_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n|s) \\
 & - (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} \{(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda) - k^2\} \\
 & \quad \cdot F^*(\lambda)J_{n+1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda|s) d\lambda \\
 & + S \left[ \{(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1})(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) - k^2\} F(\lambda_n)J_{n-1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}|s) \right] = 0 \quad (36a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)J_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n|s) - 2e^{isl}w'_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n|s) \\
 & - (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} \{(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda) - k^2\} \\
 & \quad \cdot F^*(\lambda)K_{n+1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda|s) d\lambda + S \left[ \hat{B}_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n|s) \right] \\
 & - 2(n+1) \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda)e^{isl} \{-i\lambda w_{n+1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda|s) + w''_{n+1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda|s)\} d\lambda = 0 \quad (36b)
 \end{aligned}$$

ここで、 $S[\cdot]$  は変数  $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$  に関する対称化のオペレータである。無限に広い不規則表面に対する階層方程式 [20] と同様に、連立階層方程式において異なる次数の Wiener 核間のカップリングは直接的には単一散乱過程として現れている。一つは  $(n-1)$  次から  $n$  次への上昇カップリングであり、もう一つは  $(n+1)$  次から  $n$  次への積分を介した下降カップリングである。故に  $n$  次 Wiener 核  $J_n, K_n$  は不規則表面による  $n$  重散乱を表す。すなわち  $A_n^+, A_n^-$  は部分波  $e^{-\gamma(s+\lambda_1+\cdots+\lambda_n)|z|-i(s+\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\hat{h}^{(n)}}[dB(\lambda_1, \omega), \cdots, dB(\lambda_n, \omega)]$  の  $n$  重散乱振幅を表す。さらには、 $n$  次 Wiener 核  $w'_n, w''_n, w_n$  はエッジ回折過程を表現していると考えられるが、 $w''_n, w_n$  と  $w'_n$  とは間接的な関係を持つのに過ぎない。連立階層方程式に現れる関数  $\hat{B}_n$  は

$$\hat{B}_1(\lambda_1|s) = \{s(s + \lambda_1) - k^2\} F(\lambda_1)K_0(s) - 2F(\lambda_1)e^{isl} \{i\lambda_1 w_0(s) + w''_0(s)\} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{B}_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n|s) & = \{(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1})(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) - k^2\} F(\lambda_n) \\
 & \cdot K_{n-1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}|s) - 2F(\lambda_n)e^{isl} \{i\lambda_n w_{n-1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}|s) + w''_{n-1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}|s)\} \quad (n \geq 2) \quad (38)
 \end{aligned}$$

で与えられる。これらは  $B(T^x \omega|s)$  の Wiener-伊藤展開表現における上昇カップリングを次数毎に取り出したものである。さらに、 $\hat{B}_n$  の別表現を示しておく。

$$\hat{B}_1(\lambda_1|s) = F(\lambda_1) \int_{-\infty}^l e^{isa} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} e^{-is'a} \{s'(s' + \lambda_1) - k^2\} K_0(s') ds' \right\} da \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{B}_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n|s) & = F(\lambda_n) \int_{-\infty}^l e^{isa} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} e^{-is'a} \left[ K_{n-1}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}|s') \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \cdot \{(s' + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1})(s' + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n) - k^2\} ds' \right] \right\} da \quad (n \geq 2) \quad (40)
 \end{aligned}$$

励振因子  $-ie^{i(s-\lambda_0)l}/(s-\lambda_0)$  が連立階層方程式の 0 次と 1 次オーダーのみに現れ、一般の  $n$  次オーダー ( $n \geq 2$ ) には見掛け上存在しないことに注意する。すぐ後に示すように高次オーダーの励振項は未知境界値  $\hat{B}_n$  に含まれている。

$J_n$  が得られれば Wiener 核  $A_n^\pm$  が求まる。

$$A_0^\pm(s) = \pm \frac{1}{2} J_0(s) + \frac{1}{2\gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda) \{s(s + \lambda) - k^2\} J_1(\lambda|s) d\lambda \quad (41)$$

$$A_1^\pm(\lambda_1|s) = \pm \frac{1}{2} J_1(\lambda_1|s) \quad (42)$$

$$+ \frac{1}{2\gamma(s + \lambda_1)} \left[ 2 \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda) \{(s + \lambda_1)(s + \lambda_1 + \lambda) - k^2\} J_2(\lambda_1, \lambda|s) d\lambda + \{s(s + \lambda_1) - k^2\} J_0(s) F(\lambda_1) \right]$$

$$A_n^\pm(\lambda_1, \cdots, \lambda_n|s) = \pm \frac{1}{2} J_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n|s) + \frac{1}{2\gamma(s + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)}$$

$$\left\{ S \left[ (n+1) \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda) \{(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n+\lambda)-k^2\} J_{n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda|s) d\lambda \right. \right. \\ \left. \left. + \{(s+\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)-k^2\} J_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}|s) F(\lambda_n) \right] \right\} \quad (n \geq 2) \quad (43)$$

### 3.2 未知境界値の評価と Wiener-Hopf 方程式

連立階層方程式 (34a)-(34b)-(36a)-(36b) から  $J_n$  (あるいは  $K_n$ ) を得るためには、未知境界値  $\hat{B}_n$  を具体的に評価する必要がある。しかしながら、(37),(38) からわかるように  $\hat{B}_n$  は  $K_{n-1}, w_{n-1}, w''_{n-1}$  によって記述される、あるいは (39),(40) からわかるように  $K_{n-1}$  に関する二重積分により導かれるため、 $J_n, K_n$  の具体的な表現の評価が必要になる。しかしながらそのような評価は TE 波入射の場合 [12, 23] よりもはるかに難しい。これは階層方程式が記述する不規則表面による複雑な散乱過程に対し、マクロ的に異なる物理プロセスであるエッジ回折過程が割り込むからである。その意味では例えばランダム薄膜の階層方程式 [23] と似た関係にあるが、平坦な境界面での単純な反射と屈折のプロセスとは異なり、エッジ回折過程はエッジからの距離の強い依存性があるため相互作用の意味ではより難度が上がっている。よって不規則半平面に対する階層方程式の合理的な解法はなお一層のこと明らかではないが、ここでは一つの近似解を段階を踏んで示す。

(ステップ1) 粗面散乱過程の評価 次のステップで評価する未知境界値  $\hat{B}_n$  を評価するのに必要な  $J_n, K_n$  の主要部を得るため、まずは連立階層方程式 (34a)-(34b)-(36a)-(36b) における粗面散乱過程を議論しよう。(34a)-(34b)-(36a)-(36b) 及び (37),(38) において  $w'_n = w''_n = w_n \equiv 0$  ( $n \geq 0$ ) とする。この操作はエッジ回折と多重散乱との'重い'相互作用を無視し、不規則表面が無限に広い場合の散乱過程のみを考慮することを意味する。これにより例えば、エッジ回折を中間状態に含むような多重散乱過程は考慮されない。多重繰り込み近似 (対角近似と無限次数の考慮) [20] を連立階層方程式に適用すれば  $J_n, K_n$  の多重繰り込み型近似関係式として

$$J_0(s) \simeq \operatorname{sgn} \theta_i \frac{-2ie^{i(s-\lambda_0)l}}{s-\lambda_0} \frac{\gamma(\lambda_0)}{\gamma(s)+M_N(s)} \quad (44a)$$

$$K_0(s) \simeq \frac{-2ie^{i(s-\lambda_0)l}}{s-\lambda_0} \frac{1}{\gamma(s)+M_N(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{s(s+\lambda)-k^2\} \{\lambda_0(\lambda_0+\lambda)-k^2\}}{\gamma(\lambda_0+\lambda)+M_N(\lambda_0+\lambda)} |F(\lambda)|^2 d\lambda \quad (44b)$$

$$J_1(\lambda_1|s) \simeq \frac{\{s(s+\lambda_1)-k^2\} F(\lambda_1) K_0(s)}{\gamma(s+\lambda_1)+M_N(s+\lambda_1)} + \{\lambda_0(\lambda_0+\lambda)-k^2\} F(\lambda_1) \frac{-2ie^{i(s-\lambda_0)l}}{s-\lambda_0} \quad (45a)$$

$$K_1(\lambda|s) \simeq \frac{\{s(s+\lambda_1)-k^2\} F(\lambda_1) J_0(s)}{\gamma(s+\lambda_1)+M_N(s+\lambda_1)} \quad (45b)$$

$$J_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \simeq \frac{S \left[ \{(s+\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)-k^2\} F(\lambda_n) K_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}|s) \right]}{\gamma(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)+M_N(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)} \quad (n \geq 2) \quad (46a)$$

$$K_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n|s) \simeq \frac{S \left[ \{(s+\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)-k^2\} F(\lambda_n) J_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}|s) \right]}{\gamma(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)+M_N(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)} \quad (n \geq 2) \quad (46b)$$

を得る。 $M_N(s)$  は多重繰り込みマスオペレータ

$$M_N(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{s(s+\lambda)-k^2\}^2 |F(\lambda)|^2}{\gamma(s+\lambda)+M_N(s+\lambda)} d\lambda \quad (47)$$

であり、不規則表面上の多重散乱効果 (無限回繰り込まれた二重散乱過程) を表す [20]。ここでは、 $M_N(s)$  は複素波数  $s$  に対して定義し、複素  $s$ -平面上の帯状領域  $|\text{Im } s| < k_2$  で解析的である。更に補助関数  $\hat{A}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)$  ( $n = 1, \dots$ ) を導入しておく。

$$A_0(\lambda_0) = \frac{\gamma(\lambda_0) - M_N(\lambda_0)}{\gamma(\lambda_0) + M_N(\lambda_0)} \equiv \frac{1 - Z_N(\lambda_0)}{1 + Z_N(\lambda_0)} \quad (48)$$

$$A_1(\lambda_1 | \lambda_0) = \frac{\{1 + A_0(\lambda_0)\} \{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda_1) - k^2\} F(\lambda_1)}{\gamma(\lambda_0 + \lambda_1) + M_N(\lambda_0 + \lambda_1)} \equiv \hat{A}_1(\lambda_1 | \lambda_0) \quad (49)$$

$$A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = \mathcal{S} [\hat{A}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)] \quad (50)$$

$$\hat{A}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = \frac{\{(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) - k^2\}}{\gamma(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) + M_N(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \times A_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} | \lambda_0) F(\lambda_n) \quad (n \geq 2) \quad (51)$$

ここで  $A_0(\lambda_0), A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)$  ( $n = 1, \dots$ ) は無限に広い不規則表面に対する Wiener 核 [20] である。 $Z_N(s)$  は等価表面インピーダンスである。

$$Z_N(s) \equiv \frac{M_N(s)}{\gamma(s)} \quad (52)$$

$M_N(s)$  の漸近形

$$M_N(s) \approx i|\sigma| \{\gamma(s)\}^2 \quad (|s| \rightarrow \infty) \quad (53)$$

より、等価表面インピーダンスは以下の漸近形を持つ。

$$\frac{Z_N(s)}{i|\sigma|\gamma(s)} \rightarrow 1 \quad (|s| \rightarrow \infty) \quad (54)$$

さらに、共振因子 (核関数)  $\Delta_N(s)$  を導入し以下で定義しておく。

$$\Delta_N(s) = \frac{\gamma(s) + M_N(s)}{2} \quad (55)$$

共振因子  $\Delta_N(s)$  は複素  $s$ -平面上の帯状領域  $|\text{Im } s| < k_2$  で解析的かつ非零である。(44a), (45a), (46a) で示す  $J_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) は複素  $s$ -平面上の帯状領域  $|\text{Im } s| < k_2$  で解析的であるため、複素  $s$ -平面上の下半平面領域  $\text{Im } s < \kappa_2 \cos \theta_i$  で解析的となるべき (真の)  $J_n$  の近似たりえないが、(44a)-(44b)-(46a)-(46b) は未知境界値評価のための一次近似としては有効である。

(ステップ 2) 未知境界値の評価  $K_n$  の主要部が得られたから、 $\hat{B}_n$  を (44a)-(46b) により計算すればよい。この評価は次のようにする。

$K_0(s)$  は平面波入射を表す  $s = \lambda_0$  における一位の極と、 $\gamma(s) + M_N(s)$  に関わる特異性<sup>†</sup>を持つ。よって、二重積分 (39) の  $s'$  に関する積分を極のみで評価することにより

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} e^{-is'a} \{s'(s'+\lambda_1) - k^2\} K_0(s') ds' \simeq -e^{-i\lambda_0 a} \{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda_1) - k^2\} \frac{2M_N(\lambda_0)}{\gamma(\lambda_0) + M_N(\lambda_0)}$$

が分かるから

$$\hat{B}_1(\lambda_1 | s) \simeq -\{A_0(\lambda_0) - 1\} \{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda_1) - k^2\} F(\lambda_1) \frac{ie^{i(s-\lambda_0)a}}{s - \lambda_0} \quad (56)$$

次に、 $K_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} | s)$  ( $n \geq 2$ ) は  $s = \lambda_0$  における一位の極と、 $\gamma(\cdot) + M_N(\cdot)$  に関わる特異性を持つから、同様に評価すれば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} e^{-is'a} \{(s' + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})(s' + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) - k^2\} K_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} | s') ds' \\ & \simeq e^{-i\lambda_0 a} \{(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) - k^2\} (\text{sgn } \theta_i)^{n-1} A_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} | \lambda_0) \end{aligned}$$

<sup>†</sup> $\gamma(s)$  の特異性は  $s = \pm k$  の分岐点と分岐線である。多重繰り込みマスオペレータ  $M_N(s)$  は単純な分岐点及び分岐線に分類できない '連続な分岐半平面' とも言うべき極めて特異な関数 [30] であり、その解析性等の性質の全容は未だ明らかではない [31]。また  $\gamma(s) + M_N(s)$  としての零点  $s_p$  の存在 (TM 導波表面波の存在) もある。これに関しては後で若干言及する。

となり

$$\hat{B}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) \simeq -2(\operatorname{sgn} \theta_i)^{n-1} \Delta_N(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \hat{A}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \frac{ie^{i(s-\lambda_0)l}}{s-\lambda_0} \quad (n \geq 2) \quad (57)$$

が求まる。(56),(57)には平面波を表す励振因子  $-ie^{i(s-\lambda_0)l}/(s-\lambda_0)$  が存在することがわかる。

(ステップ3) 多重繰り込み階層方程式と Wiener-Hopf 方程式 無擾動の散乱波動場は  $x > l, z = 0$  に対して消滅する [32] ので、その  $x$  に関する偏微分と  $z$  に関する二階の偏微分は  $x > l, z = 0$  に対し零になる。故に、微小粗さ  $|h|\sigma \ll 1$  では  $w_n'', w_n'$  は  $w_n$  と比較して十分小さい量と考えられる。そこで、連立階層方程式 (34b),(35b),(36b) において再度  $w_n'' = w_n' \equiv 0$  ( $n \geq 1$ ) とおく。これはエッジ回折と粗面散乱との別の'重い'相互作用を無視する近似である。例えば、不規則表面による多重散乱過程を中間状態とするような多重エッジ回折は考慮されない。さらに、近似評価 (45b),(46b) を適用すれば

0次:

$$-2\Delta_N(s)J_0(s) - 2w_0'(s) - 2\operatorname{sgn} \theta_i \gamma(\lambda_0) \frac{ie^{i(s-\lambda_0)l}}{s-\lambda_0} \approx 0 \quad (58)$$

1次:

$$-2\Delta_N(s+\lambda_1)J_1(\lambda_1 | s) - 2w_1'(\lambda_1 | s) + \hat{B}_1(\lambda_1 | s) - 2\{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda_1) - k^2\}F(\lambda_1) \frac{ie^{i(s-\lambda_0)l}}{s-\lambda_0} \approx 0 \quad (59)$$

$n$ 次 ( $n \geq 2$ ):

$$-2\Delta_N(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)J_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) - 2w_n'(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) + \mathcal{S}[\hat{B}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s)] \approx 0 \quad (60)$$

が得られる。(56),(57)で得られた  $\hat{B}_n$  の評価値を (59),(60)に代入し整理すれば、下降カップリングのない階層方程式 (多重繰り込み階層方程式) が得られる。

0次:

$$e^{isl}W_0(s) + \Delta_N(s)J_0(s) = 0 \quad (61a)$$

$$W_0(s) = w_0'(s) + \operatorname{sgn} \theta_i \{1 + A_0(\lambda_0)\} \Delta_N(\lambda_0) \frac{ie^{-i\lambda_0 l}}{s-\lambda_0} \quad (61b)$$

$n$ 次 ( $n \geq 1$ ):

$$e^{isl}W_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) + \Delta_N(s+\lambda_1+\dots+\lambda_n)J_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) = 0 \quad (62a)$$

$$W_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) = w_n'(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) + (\operatorname{sgn} \theta_i)^{n-1} A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \Delta_N(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \frac{ie^{-i\lambda_0 l}}{s-\lambda_0} \quad (62b)$$

$s$  について着目すれば、(61a)-(61b),(62a)-(62b) はいずれも次の形の関数方程式になっている。

$$e^{isl}W_c(s) + \Delta_N(s)J_c(s, \nu) = 0 \quad (63a)$$

$$W_c(s) = w_c'(s) + c\Delta_N(\nu) \frac{ie^{-i\nu l}}{s-\nu} \quad (\operatorname{Im} \nu = \operatorname{Im} \lambda_0) \quad (63b)$$

ただし、 $J_c(s, \nu), w_c'(s, \nu)$  は各々複素  $s$ -平面上の下半平面領域  $\operatorname{Im} s < k_2 \cos \theta_i$ 、上半平面領域  $\operatorname{Im} s > -k_2$  で解析的かつ、 $|s| \rightarrow \infty$  での以下の漸近的振舞い

$$e^{-isl}J_c(s, \nu) = O(s^{-3/2}) \quad (\operatorname{Im} s < k_2 \cos \theta_i), \quad w_c'(s, \nu) = O(s^{-1/2}) \quad (\operatorname{Im} s > -k_2) \quad (64)$$

を示すものとする。また、 $\nu, c$  は  $s$  に無関係な複素数パラメータである。従って、(63a)-(63b) は帯状領域  $-k_2 < \operatorname{Im} s < k_2 \cos \theta_i$  で成り立つ Wiener-Hopf 型の関数方程式となっている。(63a)-(63b) は等価表面インピーダンス  $Z_N(\nu)$  を持つ平滑半平面へ TM 平面波  $ce^{i\nu x + \gamma(\nu)|z|}$  が入射した場合の Wiener-Hopf 方程式 [9] に類似している。僅かに粗な不規則 Neumann 表面  $z = f(T^x \omega)$  はコヒーレント波に対しては  $Z_N(\cdot)$  を持つ平坦平面として働くのであるから、物理的には期待どおりである。

(ステップ4)  $A_n^\pm$  と  $J_n$  との近似関係式 多重繰り込み階層方程式 (61a)-(61b), (62a)-(62b) は近似 (44a)-(44a)-(46a)-(46b), (56), (57) の適用により得られたため、 $A_n^\pm$  と  $J_n$  との厳密な関係式 (41)-(43) についても同様な近似の適用により、実効的な近似関係式を求める。(62a), (62b) を (43) に適用して得られる近似関係式

$$A_n^\pm(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) \approx \pm \frac{1}{2} J_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) + \frac{1}{2} S \left[ \frac{\{(s + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})(s + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) - k^2\} J_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} | s) F(\lambda_n)}{\gamma(s + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) + M_N(s + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right]$$

において、 $J_{n-1}(\dots | s)$  が含む一位の極  $s = \lambda_0$  で  $J_{n-1}(\dots | s)$  の係数を近似評価\*すれば

$$A_n^\pm(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) \approx \pm \frac{1}{2} J_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) + \frac{1}{2} S \left[ \frac{\{(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) - k^2\} J_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} | s) F(\lambda_n)}{\gamma(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) + M_N(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \right] \quad (65)$$

( $n \geq 2$ )

を得る。同様に  $A_0^\pm, A_1^\pm$  と  $J_0, J_1$  との関係は以下となる。

$$A_0^\pm(s) \approx \pm \frac{1}{2} J_0(s) + \frac{1}{2\gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda) \{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda) - k^2\} J_1(\lambda | s) d\lambda \quad (66)$$

$$A_1^\pm(\lambda | s) \approx \pm \frac{1}{2} J_1(\lambda | s) + \frac{1}{2} \frac{\{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda_1) - k^2\} F(\lambda_1)}{\gamma(\lambda_0 + \lambda_1) + M_N(\lambda_0 + \lambda_1)} J_0(s) \quad (67)$$

(最終ステップ) Wiener-Hopf 方程式の解 Wiener-Hopf 方程式 (63a)-(63b) は Wiener-Hopf 法を用いて解かれる。まず、核関数 (共振因子)  $\Delta_N(s)$  を積分解する。

$$\Delta_N(s) = \Delta_N^+(s) \Delta_N^-(s), \quad \Delta_N^+(-s) = \Delta_N^-(s) \quad (68)$$

$\Delta_N(s)$  の解析性と漸近的性質 (54) より分解定理 [19] が適用できる†から、分解関数は次の厳密表現で書ける。

$$\Delta_N^\pm(s) = \bar{\gamma}^\pm(s) \cdot \sqrt{|\sigma|} \sqrt{k \pm s} \exp \left( \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\mu}^{\infty \mp i\mu} \frac{\log \left[ \frac{1 + Z_N(\tau)}{i|\sigma|\gamma(\tau)} \right]}{\tau - s} d\tau \right) \quad (69)$$

ただし  $|\text{Im } s| < \mu < k_2$  である。 $\Delta_N^+(s)$  と  $\Delta_N^-(s)$  の分岐線を分岐点  $s = k, -k$  から、各々  $k + i\infty, -k - i\infty$  に至る虚数軸に平行な直線とする。このとき  $\Delta_N^+(s)$  と  $\Delta_N^-(s)$  は各々複素  $s$ -上半平面  $\text{Im } s > -k_2$  と下半平面  $\text{Im } s < k_2$  で解析的である。さらに  $\Delta_N^+(-k), \Delta_N^-(k) \neq 0$  であることに注意する。(53), (69) より複素  $s$ -平面上の帯状領域  $|\text{Im } s| < k_2$  における  $\Delta_N^\pm(s)$  の漸近的性質は

$$\Delta_N^\pm(s) = O(s^1) \quad (|s| \rightarrow \infty) \quad (70)$$

与えられる。(63a) の核関数を分解した表現

$$e^{isl} W_c(s) + \Delta_N^+(s) \Delta_N^-(s) J_c(s, \nu) = 0 \quad (71)$$

の両辺に  $e^{-isl} / \Delta_N^+(s)$  を乗じ、両辺に  $c \Delta_N(\nu) i e^{-i\nu l} / \{\Delta_N^+(\nu)(s - \nu)\}$  を加え整理すると

$$e^{-isl} \Delta_N^-(s) J_c(s, \nu) + c \frac{\Delta_N(\nu) i e^{-i\nu l}}{\Delta_N^+(\nu) s - \nu} = - \frac{w'_c(s)}{\Delta_N^+(s)} - c \Delta_N(\nu) \frac{i e^{-i\nu l}}{s - \nu} \left\{ \frac{1}{\Delta_N^+(s)} - \frac{1}{\Delta_N^+(\nu)} \right\} \quad (72)$$

\*本報告での数値計算等議論のレベルでは、このような極による近似評価を用いなくとも統計量の計算は可能であることが判明している。結論から言えば、照射側の振舞いには影響はほとんどなく、影側のインコヒーレント強度に対し定量的な差異を生じる [33]。しかしながら、エッジ回折に関する評価において不規則表面による多重散乱効果を考慮した解析を行なう場合には、非物理的な多重極が生じることがわかっている [33]。これはおそらくは多重繰り込み近似に関わる極めて困難な問題であり、それを回避するために極による係数の'近似評価'が必要になるものと筆者は考えている。

†マスコペレータとして最も粗い近似である FSA [3] あるいは逐次マスコペレータ [20] を用いた場合は適用できない。

(72) の左辺と右辺は各々複素  $s$ -平面上の下半平面領域  $\text{Im } s < k_2 \cos \theta_i$ 、上半平面領域  $\text{Im } s > -k_2$  で解析的である。よって、(72) は全複素  $s$ -平面上で解析的な整関数を表す。(64) 及び (70) よりそのような整関数は  $|s| \rightarrow \infty$  で  $O(s^{-1/2})$  を示すから、Liouville の定理により全複素平面上で零以外にはありえない。よって、

$$J_c(s, \nu) = c \Delta_N(\nu) G(s, \nu) \quad (73)$$

を得る。ここで、 $G(s, \nu)$  は等価表面インピーダンス  $Z_N(\nu)$  を持つ平滑半平面による鏡面反射とエッジ回折を記述する回折核である。

$$G(s, \nu) = -\frac{ie^{i(s-\nu)l}}{\Delta_N^-(s)\Delta_N^+(\nu)(s-\nu)} \quad (74)$$

回折核  $G(s, \nu)$  の引数  $s, \nu$  は各々散乱と入射波動ベクトルの  $x$  成分に対応する。次の相反性を満たす。

$$G(-\nu, -s) = G(s, \nu) \quad (75)$$

$J_c$  あるいは  $G$  は帯状領域  $-k_2 < \text{Im } s < \text{Im } \nu = k_2 \cos \theta_i$  で  $0 < \text{Im } \nu < \text{Im } \lambda_0 < k_2$  について成り立つ。 $G$  は  $\nu \rightarrow 0, k$  でも意味を持つため  $0 \leq \text{Im } \nu \leq k_2$  で成り立ち、さらに相反性より  $|\text{Im } \nu| \leq k_2$  で成り立つ。よって制限 (11) は解除され  $|\theta_i| < \pi$  について成立する。

$\nu = \lambda_0, c = \text{sgn } \theta_i \{1 + A_0(\lambda_0)\}$  とおけば 0 次オーダー  $J_0$  が得られる。

$$J_0(s) = \text{sgn } \theta_i \{1 + A_0(\lambda_0)\} \Delta_N(\lambda_0) G(s, \lambda_0) \quad (76)$$

同様に、 $s \rightarrow s + \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \nu \rightarrow \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n$  と書換え、 $c = (\text{sgn } \theta_i)^{n-1} A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)$  とおくことで  $n$  次オーダー  $J_n$  ( $n \geq 1$ ) を得る。

$$J_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) = (\text{sgn } \theta_i)^{n-1} A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \cdot \Delta_N(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) G(s + \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \quad (77)$$

## 4 ランダム波動場の表現

### 4.1 ランダム波動場の表現 I

(65)-(67) と (76),(77) より、Wiener 核  $A_n^\pm$  が求まる。

$$A_0^\pm(s) = \text{sgn } z \text{sgn } \theta_i \frac{1 + A_0(\lambda_0)}{2} \Delta_N(\lambda_0) G(s, \lambda_0) + \frac{\gamma(\lambda_0)}{\gamma(\lambda_0) + M_N(\lambda_0)} \frac{1}{\gamma(s)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 \frac{\{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda) - k^2\}^2}{\gamma(\lambda_0 + \lambda) + M_N(\lambda_0 + \lambda)} \Delta_N(\lambda_0 + \lambda) G(s + \lambda, \lambda_0 + \lambda) d\lambda \quad (78)$$

$$A_1^\pm(\lambda_1 | s) = \text{sgn } z \frac{A_1(\lambda_1 | \lambda_0)}{2} \Delta_N(\lambda_0 + \lambda_1) G(s + \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1) + \text{sgn } \theta_i \frac{A_1(\lambda_1 | \lambda_0)}{2} \Delta_N(\lambda_0) G(s, \lambda_0) \quad (79)$$

$$A_n^\pm(\lambda_1, \dots, \lambda_n | s) = \text{sgn } z (\text{sgn } \theta_i)^{n-1} \frac{A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)}{2} \Delta_N(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot G(s + \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) + (\text{sgn } \theta_i)^n S \left[ \frac{\hat{A}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)}{2} \cdot \Delta_N(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) G(s + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) \right] \quad (n \geq 2) \quad (80)$$

よって  $s$ -一様確率場  $\Phi_s(z, T^x \omega | s)$  が定まった。 $D^a$ -逆 Fourier 変換により実空間での非一様確率場である散乱波動場が、次の Wiener-伊藤展開の形として得られる。

$$\phi_s(x, z, \omega) = a_0(x, z | \lambda_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} a_n(x, z; \lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \hat{h}^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] \quad (81)$$

$a_n(x, z; \lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)$  は観測点  $(x, z)$  に依存する変数  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に関し対称な  $n$  次の Wiener 核である。

$$a_0(x, z | \lambda_0) = \operatorname{sgn} z \operatorname{sgn} \theta_i \frac{1 + A_0(\lambda_0)}{2} g_1(x, z; \lambda_0) + \frac{\gamma(\lambda_0)}{\gamma(\lambda_0) + M_N(\lambda_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda) - k^2\}^2 |F(\lambda)|^2}{\gamma(\lambda_0 + \lambda) + M_N(\lambda_0 + \lambda)} g_3(x, z; -\lambda, \lambda_0 + \lambda) d\lambda \quad (82)$$

$$a_1(x, z; \lambda_1 | \lambda_0) = \operatorname{sgn} z \frac{A_1(\lambda_1 | \lambda_0)}{2} g_1(x, z; \lambda_0 + \lambda_1) + \operatorname{sgn} \theta_i \frac{A_1(\lambda_1 | \lambda_0)}{2} g_2(x, z; \lambda_1, \lambda_0) \quad (83)$$

$$a_n(x, z; \lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = \operatorname{sgn} z (\operatorname{sgn} \theta_i)^{n-1} \frac{A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)}{2} g_1(x, z; \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) + (\operatorname{sgn} \theta_i)^n \mathcal{S} \left[ \frac{\hat{A}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)}{2} g_2(x, z; \lambda_n, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) \right] \quad (n \geq 2) \quad (84)$$

$g_1(x, z; \lambda_i), g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i), g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  は以下の Fourier 積分として定義される。

$$g_1(x, z; \lambda_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} \Delta_N(\lambda_i) G(s, \lambda_i) e^{-\gamma(s)|z|-isx} ds \quad (85)$$

$$g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} \Delta_N(\lambda_i) G(s - \lambda_s, \lambda_i) e^{-\gamma(s)|z|-isx} ds \quad (86)$$

$$g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} \frac{\Delta_N(\lambda_i) G(s - \lambda_s, \lambda_i)}{\gamma(s)} e^{-\gamma(s)|z|-isx} ds \quad (87)$$

ただし、 $\mu = \operatorname{Im} s$  は  $|\mu| < k_2$  を満たすようにとる。これらは自明な性質

$$\begin{aligned} g_1(x, -z; \lambda_i) &= g_1(x, z; \lambda_i) \\ g_2(x, -z; \lambda_s, \lambda_i) &= g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i) \\ g_3(x, -z; \lambda_s, \lambda_i) &= g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i) \end{aligned} \quad (88)$$

を満たす。(74) と (85)-(87) 及び Cauchy の定理により  $x > l$  に対し

$$\begin{aligned} g_1(x, 0; \lambda_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} \Delta_N(\lambda_i) G(s, \lambda_i) e^{-isx} ds = 0 \\ g_2(x, 0; \lambda_s, \lambda_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} \Delta_N(\lambda_i) G(s - \lambda_s, \lambda_i) e^{-isx} ds = 0 \end{aligned}$$

である。よって (88) とあわせて、 $\operatorname{sgn} z g_1(x, z; \lambda_i)$  は  $z \rightarrow 0$  の時正しく消滅する。同じく  $x > l$  に対し

$$\begin{aligned} g_1''(x, 0; \lambda_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} \Delta_N(\lambda_i) G(s, \lambda_i) \{\gamma(s)\}^2 e^{-isx} ds = 0 \\ g_2''(x, 0; \lambda_s, \lambda_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} \Delta_N(\lambda_i) G(s - \lambda_s, \lambda_i) \{\gamma(s)\}^2 e^{-isx} ds = 0 \end{aligned}$$

$$g_1'(x, 0; \lambda_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} \Delta_N(\lambda_i) G(s, \lambda_i) (-is) e^{-isx} ds = 0$$

$$g_2'(x, 0; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\mu}^{\infty+i\mu} \Delta_N(\lambda_i) G(s - \lambda_s, \lambda_i) (-is) e^{-isx} ds = 0$$

となる。これらの関係は期待どおりに  $w_n'' = w_n \equiv 0$  ( $n \geq 1$ ) を示している。

(27), (74) より

$$\lim_{kl \rightarrow \infty} \Delta_N(\nu) G(s, \nu) = 2\pi \delta(s - \nu) \quad (89)$$

が得られる。これは無限に広い完全導体平滑平面からの鏡面反射を表す。よって  $|k| \rightarrow \infty$  では

$$\begin{aligned} g_1(x, z; \lambda_i) &\rightarrow e^{-\gamma(\lambda_i)|z|-i\lambda_i x} \\ g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i) &\rightarrow e^{-\gamma(\lambda_i + \lambda_s)|z|-i(\lambda_i + \lambda_s)x} \\ g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i) &\rightarrow e^{-\gamma(\lambda_i + \lambda_s)|z|-i(\lambda_i + \lambda_s)x} / \gamma(\lambda_i + \lambda_s) \end{aligned} \quad (90)$$

となるから、対応する散乱場は

$$\phi_s(x, z, \omega) \rightarrow \begin{cases} A_0(\lambda_0)e^{-i\lambda_0 x - \gamma(\lambda_0)|z|} + e^{-i\lambda_0 x} \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) & (\text{sgn } \theta_i \text{sgn } z > 0) \\ e^{-i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x - \gamma(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)|z|} \hat{h}^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] & \\ -e^{-i\lambda_0 x - \gamma(\lambda_0)|z|} = -\phi_i(x, z) & (\text{sgn } \theta_i \text{sgn } z < 0) \end{cases} \quad (91)$$

となる。(91)は、 $\text{sgn } \theta_i \text{sgn } z > 0$ では TM 平面波入射に対する無限に広い不規則表面による散乱場の多重繰り込み Wiener 核による Wiener-伊藤展開表現、 $z < 0$ では全波動場が零となる消滅定理を表す。よって、得られた近似解 (81) は (91) の合理的な一つの拡張となっている。

## 4.2 粗面散乱とエッジ回折の相互作用

不規則半平面による'散乱'と'回折'との相互作用を分類する(図2)。ここで言う'散乱'と'回折'とは各々、無限に広い不規則表面からの'衣を着た'( $n$ 重散乱を含む)散乱過程、及び等価表面インピーダンス  $Z_N(\lambda_i)$  を持つ平坦な平滑半平面による鏡面反射と単一エッジ回折を含んだ回折過程を意味する。Fourier 積分  $g_1(x, z; \lambda_i)$  に現れる積分核  $\Delta_N(\lambda_i)G(s, \lambda_i)$  は入射波  $\lambda_i$  に対し複素波数パラメータ  $s$  により導かれる方向への部分波  $e^{-\gamma(s)|z| - isx}$  の振幅を決める。0次オーダーは'回折'のみでプロセス(A)、1次オーダーを含めた高次オーダー  $c_n$  ( $n \geq 1$ )の第一項は'散乱'-'回折'のプロセス(B)に相当し、不規則表面での  $n$ 重散乱波が平坦な平滑半平面への等価的な入射波となって回折されることを表す。一方、Fourier 積分  $g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  に現れる積分核  $\Delta_N(\lambda_i)G(s - \lambda_s, \lambda_i)$  は入射波  $\lambda_i$  に対し部分波  $e^{-\gamma(s)|z| - isx}$  が波数  $s - \lambda_s$  を持つ部分波に変換された時の振幅を決める。つまり、入射波  $\lambda_i$  が'回折'により部分波  $s$  へと変化し、さらに不規則表面での'散乱'により部分波  $s - \lambda_s$  へと変換される過程を表現する。よって1次オーダーの第二項のみ'回折'-'散乱'のプロセス(C)に分類される。同様に2次オーダー以上の高次オーダーの第二項は'散乱'-'回折'-'散乱'のプロセス(D)に分類される。これらのプロセスは無限に広い不規則表面による'散乱'と平坦な平滑半平面による'回折'との"分離可能な"あるいは"弱い"相互作用を表し、一様な散乱過程に割り込む非一様な回折過程による不規則表面の(多重)散乱状態の分離とみなすことができる。しかしながら"分離不可能な"もしくは"重い"相互作用、例えば'回折'-'散乱'-'回折'のようなプロセスは現れていない。これはもちろん高次オーダーの境界値評価で用いた近似のためであると考えられる。

## 4.3 摂動解(巾展開表現に基づく解)

(91)に対応する摂動解 [15, 34] すなわち一様確率場の巾展開表現に基づく解表現は、全ての関連する式表現中で  $M_N(\cdot) \equiv 0$  とし、(81)で  $\hat{h}^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] \rightarrow dB(\lambda_1, \omega) \times \dots \times dB(\lambda_n, \omega)$  と置き換え、さらに  $a_0$  の第二項を無視することで得られる。以下に0次と1次摂動解を示す\*。

$$\phi_s^p(x, z, \omega) = a_0^p(x, z) + \int_{-\infty}^{\infty} a_1^p(x, z; \lambda_1, \dots, \lambda_n) dB(\lambda_1, \omega) \quad (92)$$

$$a_0^p(x, z) = \text{sgn } z \text{sgn } \theta_i g_1^p(x, z; \lambda_0) \quad (93)$$

$$a_1^p(x, z; \lambda_1) = \frac{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda_1) - k^2}{\gamma(\lambda_0 + \lambda_1)} F(\lambda_1) \{ \text{sgn } z g_1^p(x, z; \lambda_0 + \lambda_1) + \text{sgn } \theta_i g_2^p(x, z; \lambda_1, \lambda_0) \} \quad (94)$$

$$g_1^p(x, z; \lambda_i) = \frac{e^{-i\lambda_i l}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{FN}(s, \lambda_i) e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \quad (95)$$

$$g_2^p(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{FN}(s - \lambda_s, \lambda_i) e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \quad (96)$$

$$G_{FN}(s, \nu) \equiv e^{-i(s-\nu)l} \Delta_N(\nu)G(s, \nu) \Big|_{M_N \equiv 0} = \frac{i\bar{\gamma}^-(\nu)}{\bar{\gamma}^-(s)(s-\nu)} = -\frac{i\sqrt{k-\nu}}{\sqrt{k-s(s-\nu)}} \quad (97)$$

\*厳密には文献 [15, 34] で示した0次及び1次摂動解は、 $A_n^\pm$  と  $J_n$  を本来の厳密な関係式 (41)-(43) より求めた式である。ここでの摂動解は近似関係式 (65)-(67) による解であるが、定量的にはともかく定性的には分散の発散に関しては同じである。

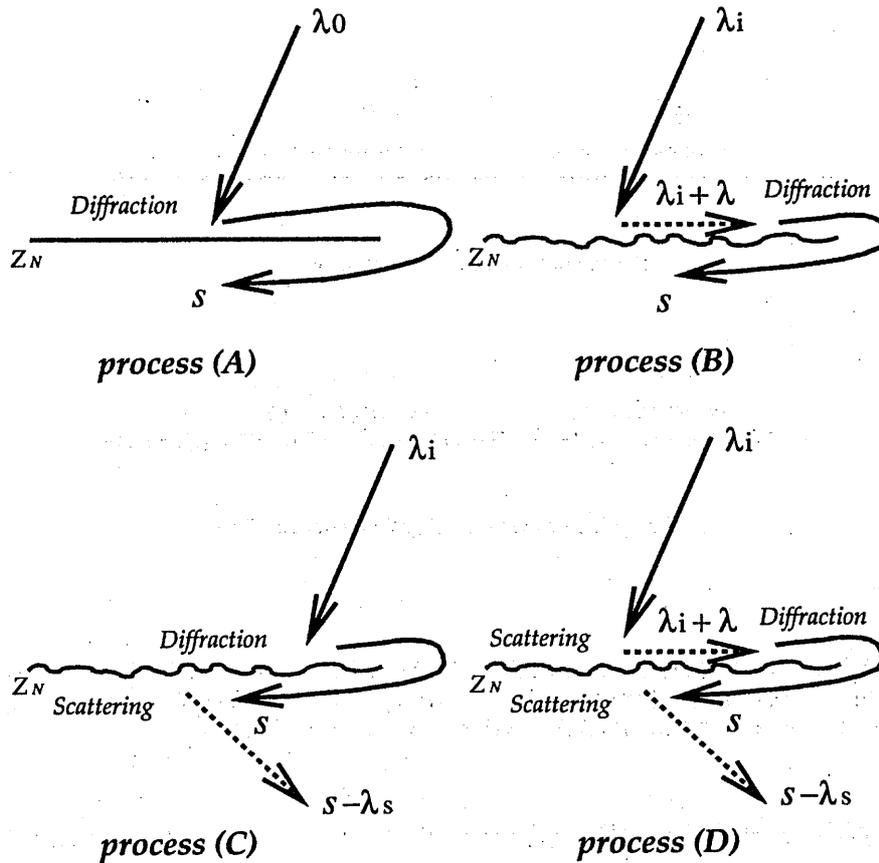


図 2 散乱と回折の相互作用。散乱は無限に広い不規則表面による一連の'衣を着た'散乱過程を、回折は等価表面インピーダンス  $Z_N$  を持つ平坦な平滑半平面による一連の回折過程を表す。(A) 回折のみ (無擾動半平面)、(B) 散乱-回折、(C) 散乱-回折-散乱、(D) 回折-散乱の 4 つがある。

ここで、肩の添字  $P$  は摂動解を意味する。(97) 右辺の分子の  $\sqrt{\cdot}$  の分岐の取り方は  $\bar{\gamma}(\cdot)$  と同じである。 $g_1^P(x, z; \lambda_i)$  はよく知られた完全導体半平面による散乱場を表す。(92) より (3) を用いてインコヒーレント波動場の分散を計算すれば

$$\begin{aligned} & \langle |\phi_s^P(x, z, \omega) - \langle \phi_s^P(x, z, \omega) \rangle|^2 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lambda_0(\lambda_0 + \lambda_1) - k^2|^2 |F(\lambda_1)|^2}{|\lambda_0 + \lambda_1 + k| |\lambda_0 + \lambda_1 - k|} |\text{sgn } z g_1^P(x, z; \lambda_0 + \lambda_1) + \text{sgn } \theta_i g_2^P(x, z; \lambda_1, \lambda_0)|^2 d\lambda_1 \end{aligned} \quad (98)$$

を得る。一般に  $\lambda_1 = -k - \lambda_0$  に対し  $\text{sgn } z g_1^P(x, z; \lambda_0 + \lambda_1) + \text{sgn } \theta_i g_2^P(x, z; \lambda_1, \lambda_0) \neq 0$  であるから、(98) の右辺の被積分関数は  $\lambda_1 = -k - \lambda_0$  において可積分でなくなり、分散は発散する。これは無限に広い不規則表面に対する TM 平面波入射及び電磁波入射の場合の摂動解の発散 [14] に対応する発散である。一方、本論文で得た近似解は'衣を着た'散乱効果として  $M_N(\cdot)$  を含んでおり、対応する分散は有限で与えられる。

## 5 回折核の近似評価

散乱と回折との相互作用を議論するため Fourier 積分  $g_1(x, z; \lambda_i), g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i), g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  を具体的に評価する。しかしその前に TM 波特有の事情を考慮する必要がある。

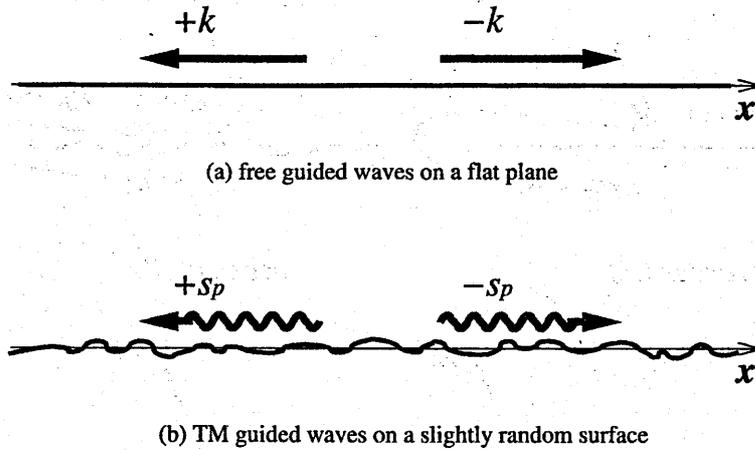


図 3 導波表面波の伝搬方向。(a) 平坦平面。Rayleigh 波数  $+k, -k$  を持つ自由伝搬波は各々、 $-x, +x$ -方向へ伝搬する。(b) 僅かに粗な表面。 $s_p$  ( $\text{Re } s_p > 0$ ) は分散方程式  $\Delta_N(s) = 0$  の複素根。複素波数  $+s_p, -s_p$  を持つ TM 導波表面波は各々、 $-x, +x$ -方向へ伝搬する。

### 5.1 僅かに粗な不規則表面上の TM 導波モード

僅かに粗な無限に広い不規則表面には複素の TM 導波モードが存在し、'衣を着た' 単一散乱による異常散乱 [20, 35, 36]、'衣を着た' 二重散乱による後方強調散乱 [20, 37, 38] を引き起こし、そして(おそらくは) '衣を着た' 多重散乱による波動の局在 [39-41] の原因となる。そのような TM 導波モードは二つの意味でエッジ回折と粗面散乱との相互作用に影響を及ぼしうる。一つは Wiener 核  $a_n$  ( $n \geq 1$ ) 中の Fourier 積分  $g_1, g_2, g_3$  への振幅係数としての無限不規則表面の Wiener 核  $A_n$  と、もう一つは回折核  $G(s; \nu)$  それ自身である。そこでまずは TM 導波モードの横方向の伝搬定数を決める分散方程式  $\Delta_N(s) = 0$  の複素根  $s$  について議論しなければならない。そのような複素根はおそらく 2 個存在するはずである。そこで複素根を  $s_p, -s_p$  と書けば、それらは不規則表面に沿った左向きと右向きに進行する導波モードを表す(図 3)。無摂動 ( $\sigma^2 = 0$ ) の場合、分散方程式  $\Delta_N(s)|_{\sigma^2=0} = \gamma(s)/2 = 0$  は二つの実数解  $s = k, -k$  を持ち、それらは Rayleigh 波数として平坦な平滑面上の自由伝搬モードを表す。よって表面が僅かに不規則になれば、 $M_N(s)$  が  $k|\sigma| \sim (k\sigma)^2$  なる微小量であるため、二つの複素根  $s = s_p, -s_p$  は Rayleigh 波数  $s = k, -k$  の近傍に存在するはずである。実際、共振因子は Rayleigh 波数の近傍で鋭いピークを持つ [20]。

### 5.2 ランダム波動場の表現 II

特異な複素関数である  $M_N(s)$  を含む分散方程式  $\Delta_N(s) = 0$  を解いて厳密な  $s_p, -s_p$  を得ることには数学上の難点がある [30] こと、また分解関数  $\Delta_N^\pm(s)$  の表現 (69) は数学的には厳密で正しいものの実際の計算には不向きである [9] こと、そして一般に  $M_N(s)$  を解析的領域以外の  $|\text{Im } s| > k_2$  なる複素数指数  $s$  に対して求めることは簡単でない [31, 42] ことを考慮し、本論文では  $M_N$  を無視した近似回折核

$$\Delta_N(\nu)G(s, \nu) \Big|_{M_N \rightarrow 0} = -e^{i(s-\nu)l} \frac{i\sqrt{k-\nu}}{\sqrt{k-s}(s-\nu)} = e^{i(s-\nu)l} G_{FN}(s, \nu) \quad (99)$$

を導入する。 $G_{FN}(s, \nu)$  は (97) で示された無摂動の回折核そのものである。この近似の意味するところは、不規則表面による '衣を着た' 多重散乱とエッジ回折との相互作用や TM 導波モードの伝搬とエッジ回折との相互作用等

を無視することである。例えば、TM 導波表面波がエッジに入射することで引き起こされるエッジ回折波等は考慮されない。おそらくは TM 導波モードの伝搬定数  $s_p$  の代用として Rayleigh 波数  $k$  が考慮され、その Rayleigh 波数  $k$  を持つ自由伝搬波により励振されるエッジ回折波が扱われることになるはずである。後で示すように、このような無振動回折核  $G_{FN}(s, \nu)$  を用いても、ランダム波動場の分散が発散することはない。 $k_2 = 0$  として以降  $k$  は実数波数とする。(99) を (85)-(87) に適用すれば

$$g_1(x, z; \lambda_i) = \frac{e^{-i\lambda_i l}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{FN}(s, \lambda_i) e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \quad (100)$$

$$g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{FN}(s - \lambda_s, \lambda_i) e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \quad (101)$$

$$g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{FN}(s - \lambda_s, \lambda_i)}{\gamma(s)} e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \quad (102)$$

と書換えられる。無振動回折核  $G_{FN}(s, \nu)$  を用いることにより、Fourier 積分  $g_1, g_2, g_3$  自体は不規則表面の統計的性質 (具体的には  $\sigma, \kappa$ ) に直接的には依存せず (パラメータ  $\lambda_s$  の意味では間接的に関与)、基本的に入射波  $\lambda_i$  と観測点  $(x, z)$  のみで定まることに注意されたい。

(99) より回折核  $G_{FN}(s, \nu)$  は

$$G_{FN}(s, \nu) \Big|_{\nu=k} = 0 \quad (103)$$

を満たすから、(100)-(102) より

$$g_1(x, z; k) = g_2(x, z; \lambda_s, k) = g_3(x, z; \lambda_s, k) = 0 \quad (104)$$

がわかる。これは水平入射  $\lambda_i = k$  に対し散乱が生じないことを意味する。

$g_1(x, z; \lambda_i)$  の評価 まず  $g_1$  を評価する。次の変数変換とエッジ  $(l, 0)$  を中心とする円筒座標系を導入する。

$$\begin{aligned} s &= -k \cos w \quad (s \in \mathbf{R}, w \in \mathbf{C}) \\ ds &= i\gamma(k \cos w) dw, \quad w = \cos^{-1}(-s/k) \\ x &= r \cos \theta + l, \quad z = r \sin \theta \quad (r > 0, -\pi \leq \theta \leq \pi) \end{aligned} \quad (105)$$

$r$  はエッジからの距離、 $\theta$  は散乱角を表す。ここでは逆余弦関数  $\cos^{-1}$  は次式で定義する。

$$\cos^{-1} \eta \equiv -i \log \{ \eta + i\sqrt{1+\eta}\sqrt{1-\eta} \} \quad (106)$$

(106) に現れる  $\sqrt{1+\eta}, \sqrt{1-\eta}$  の分岐の取り方は各々  $\bar{\gamma}^+(\cdot), \bar{\gamma}^-(\cdot)$  と同じである。また、 $\log$  は主値をとり分岐線を負の実軸とする<sup>†</sup>。定義 (106) より  $\cos^{-1} \cos \theta = |\theta|$  が成り立つ。集合  $C$  は複素  $w$ -平面上の経路:  $0 + i\infty \rightarrow 0 \rightarrow \pi \rightarrow \pi - i\infty$  である。変数変換により全複素  $s$ -平面は複素  $w$ -平面上で指数因子  $e^{i \cos w}, e^{i \cos(w-\pi)}$  の鞍部点である  $w = 0, \pi$  を通る最急降下路によって挟まれる領域  $D$  に写像される (図 4)。領域  $D$  の境界は変数変換 (105) により  $s$ -領域における二価関数  $\gamma(s)$  の分岐線周囲の二価性が一価性になったものである。この時複素  $w$ -平面では特異性ではなくなる<sup>†</sup>。(105) より指数因子は次式となる。

$$e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} = e^{ikr \cos(w-|\theta|)} \quad (107)$$

<sup>†</sup>よって、(106) の Fortran77 での表現は以下の様にすればよい ( $\sin^{-1}$  を優先した定義)。

$$\pi/2 + i \log^F \{ i(\eta + \sqrt{-i(\eta+1.0)}) \sqrt{i(\eta-1.0)} \}$$

ただし、 $\log^F(\cdot)$ 、 $\sqrt{\cdot}$  は Fortran の標準組み込み複素数関数の対数関数 ( $\log$ ) と平方根関数 ( $\text{sqrt}$ ) を表す。

<sup>†</sup>ただし、パラメータ  $\lambda$  で推移した  $\gamma(s+\lambda), \bar{\gamma}^\pm(s+\lambda)$  のような場合には  $w$ -平面上に写像された時は分岐線として残ってしまうことに注意する。

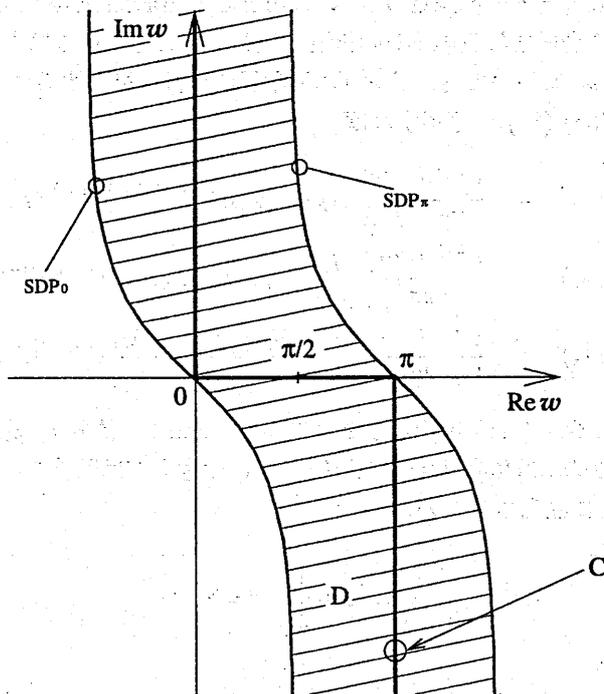


図 4 複素  $w$ -平面上の経路  $C$  と領域  $D$ 。変数変換  $s = -k \cos w$  により実  $s$ -軸は経路  $C$  (太線) に、全複素  $s$ -平面は領域  $D$  (斜線領域) に写像される。領域  $D$  を囲む二つの境界線は指数因子  $e^{i \cos w} (SDP_0), e^{i \cos(w-\pi)} (SDP_\pi)$  を通る最急降下路である。これらの境界線は各々分解関数  $\gamma^+(s), \gamma^-(s)$  の複素  $s$ -平面上の分岐線に対応している。

$g_1(x, z; \lambda_i)$  の評価 (105),(107) 及び次の恒等式

$$\frac{1}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \left( \frac{1}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} \right) \quad (\alpha \neq \pi \mp \beta) \tag{108}$$

と (107) を用いて  $g_1$  を角スペクトル表現 (Sommerfeld 積分) に書き換える。

$$g_1(x, z; \lambda_i) = \frac{ie^{-i\lambda_i l}}{4\pi} \int_C \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw - \frac{ie^{-i\lambda_i l}}{4\pi} \int_C \frac{1}{\cos \frac{w-\beta}{2}} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw \tag{109}$$

$$= e^{-i\lambda_i l} \hat{D}(kr; \beta, |\theta|) - e^{-i\lambda_i l} \hat{D}(kr; -\beta, |\theta|) \tag{110}$$

ただし、 $\beta \equiv \cos^{-1}(\lambda_i/k) \in C$  である。Fourier 積分表示 (100) では複素  $s$ -平面で見た場合、回折核を持つ平面波入射がもたらす一つの一位の極  $s = \lambda_i$  が、Sommerfeld 積分表示 (109) では複素  $w$ -平面で見て二つの一位の極  $w = \pi - \beta, -\pi + \beta$  に分離する。複素  $s$ -平面上の一つの極が複素  $w$ -平面での二つの極になる理由は、複素  $s$ -平面で見た場合は実  $s$ -軸への写影  $-\lambda_i$  がどちらも等しくなるからである (図 5)。表現 (110) における関数  $\hat{D}(kr; \beta, |\theta|)$  は次の Sommerfeld 積分で定義する。

$$\hat{D}(kr; \beta, |\theta|) = \frac{i}{4\pi} \int_C \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw \tag{111}$$

(111) を解析すれば [23, 44]

$$\hat{D}(kr; \beta, |\theta|) = D(kr, \beta + |\theta|) \tag{112}$$

を得る。関数  $D(kr, \alpha)$  を単一エッジ回折関数と呼ぶことにする。これは平滑半平面による鏡面反射とエッジによる単一回折を記述し、複素 Fresnel 積分  $F(\eta)$  [43] を用いて書ける。

$$D(kr, \alpha) = e^{-ikr \cos \alpha} F(\sqrt{2kr \cos(\alpha/2)}) \quad (\alpha \in D \cup -D) \tag{113}$$

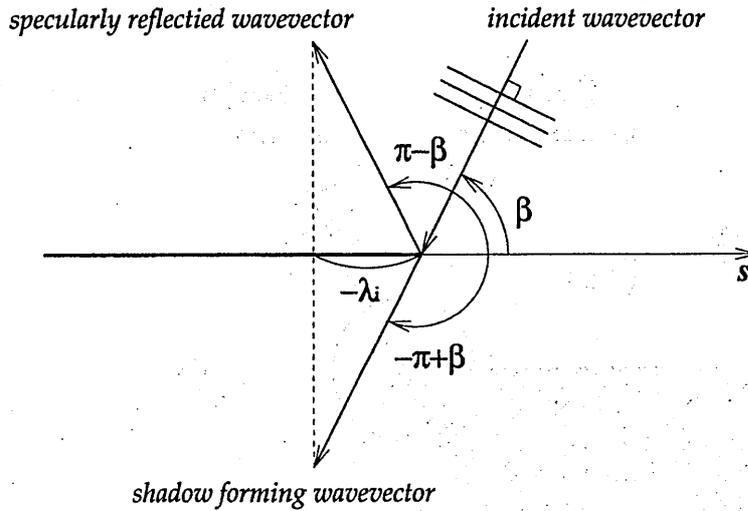


図5 複素  $s$ -平面で見た一位の極  $s = \lambda_i$  と複素  $w$ -平面で見た一位の極  $w = \pi - \beta, -\pi + \beta$ 。

$$F(\eta) = \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-i\pi/4} \int_{\eta}^{\infty+i0} e^{i\xi^2} d\xi \quad (114)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-i\pi/4} \int_0^{\eta} e^{i\xi^2} d\xi \quad (\eta \in C) \quad (115)$$

従って  $g_1(x, z; \lambda_i)$  は

$$g_1(x, z; \lambda_i) = e^{-i\lambda_i z} D(kr, |\theta| + \beta) - e^{-i\lambda_i z} D(kr, |\theta| - \beta) \quad (116)$$

として得られる。(116)の右辺第一項は平滑半平面から  $\theta = \text{sgn} \theta_i (\pi - \beta)$  方向へ放射される '鏡面反射波' を表し、第二項は  $\theta = -\text{sgn} \theta_i (\pi - \beta)$  方向へ伝搬する '影形成波' を表す (図6)†。  $D(kr, \alpha)$  の漸近形

$$D(kr, \alpha) = \begin{cases} \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{8\pi kr}} \sec \frac{\alpha}{2} \left( 1 + \frac{1}{4ikr} \sec^2 \frac{\alpha}{2} + \dots \right) & (\text{Re } e^{-i\pi/4} \cos \frac{\alpha}{2} > 0) \\ e^{-ikr \cos \alpha} + \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{8\pi kr}} \sec \frac{\alpha}{2} \left( 1 + \frac{1}{4ikr} \sec^2 \frac{\alpha}{2} + \dots \right) & (\text{Re } e^{-i\pi/4} \cos \frac{\alpha}{2} < 0) \end{cases} \quad (117)$$

より  $g_1(x, z; \lambda_i)$  は

$$g_1(x, z; \lambda_i) = \begin{cases} O(1) & (-k < \lambda_i < k \cos(\pi - |\theta|)) \\ O(1/\sqrt{kr}) & (\lambda_i < -k, k \cos(\pi - |\theta|) < \lambda_i) \end{cases} \quad (118)$$

なる距離依存性を持つ。この性質は照射側の振舞いを考える上で重要である。なお、単一エッジ関数  $D$  ( $F$  ではない) を計算する Fortran77 の関数サブルーチンプログラムは筆者により開発されている [23, 44]。

$g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  の評価 次に  $g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  を評価する。被積分関数は  $s = \lambda_s + \lambda_i$  での一位の極と  $\gamma^-(s - \lambda_s) \rightarrow \sqrt{k + \lambda_s - s}$  の分岐線の二つの主要な特異性を持つ。そこで極を分離するため、被積分関数を

$$G_{FN}(s - \lambda_s, \lambda_i) = G_{FN}(s, \lambda_i + \lambda_s) + G_I(s; \lambda_s, \lambda_i) \quad (119)$$

と書く。ここで  $G_I(s; \lambda_s, \lambda_i)$  は補助関数で

$$G_I(s; \lambda_s, \lambda_i) = G_{FN}(s - \lambda_s, \lambda_i) - G_{FN}(s, \lambda_i + \lambda_s) \quad (120)$$

と定義する。これは  $\lambda_s + \lambda_i \neq k$  なる場合には極の特異性を持たない。(119)を(101)に代入すれば

$$g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = g_1(x, z; \lambda_i + \lambda_s) + g_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i) \quad (121)$$

† $|\theta|$  の絶対値をはずさない表記においては  $\pi + \beta$  を与えると解釈する。

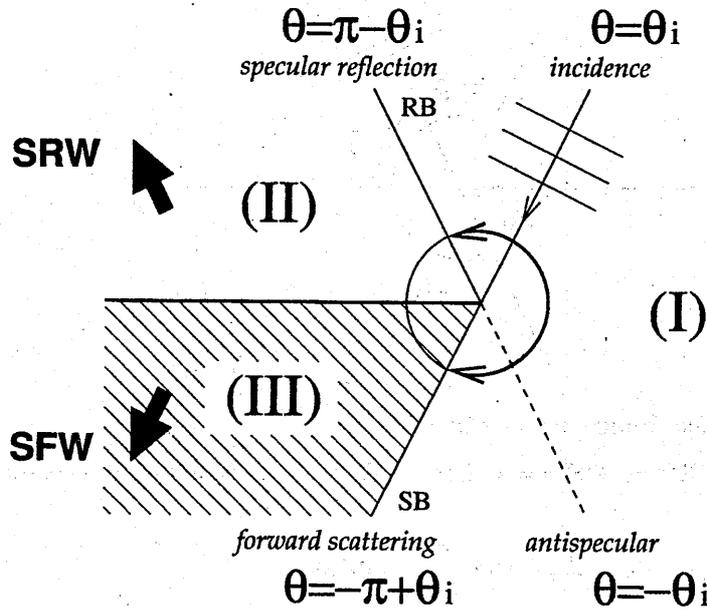


図6 平滑半平面に対する幾何光学的な領域分割 ( $\theta_i > 0^\circ$  とした図)。鏡面反射波 (Specular Reflected Wave, SRW) と影形成波 (Shadow Forming Wave, SFW) が半平面より放射される。RB と SB は各々反射境界 'reflection boundary' と影境界 'shadow boundary' を表す。  $-\pi + \theta_i < \theta < \pi - \theta_i$  なる領域 (I) ではエッジ回折波のみが観測される。SRW は  $\theta > \pi - \theta_i$  なる領域 (II) に存在する。SFW は  $\theta < -\pi + \theta_i$  なる領域 (III) で入射波を打ち消し影をつくる波である。

が得られる。ここで  $g_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  は新たな Fourier 積分

$$g_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_I(s; \lambda_s, \lambda_i) e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \quad (122)$$

である。定義 (120) より

$$G_I(s; 0, \lambda_i) = 0, \quad g_I(x, z; 0, \lambda_i) = 0 \quad (123)$$

が得られる。また、(104) と (121) より

$$g_I(x, z; \lambda_s, k) = -g_I(x, z; k + \lambda_s) \quad (124)$$

がわかる。よって以下  $\lambda_i \neq k$  として扱う。Fourier 積分  $g_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  を角スペクトル表現する。

$$g_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{ie^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l}}{2\pi} \int_C G_I(-k \cos w; \lambda_s, \lambda_i) e^{ikr \cos(w - |\theta|)} \gamma(k \cos w) dw \quad (125)$$

(125) の被積分関数は  $w = |\theta|$  に指数因子  $e^{ikr \cos(w - |\theta|)}$  の鞍部点、 $w = \theta_B(\lambda_s)$  での分岐点及び分岐線の特異性を持つ。  $\theta_B(\lambda)$  は以下で定義する。

$$\theta_B(\lambda) = \cos^{-1}(-1 - \lambda/k) \quad (126)$$

明かに  $\theta_B(\lambda) \in \mathbb{C}$  である。(125) を評価するため新たな積分路として  $p(\tau)$  と  $q(\tau)$  ( $\tau \in \mathbb{R}$ ) を導入する。

$$p(\tau) = |\theta| + 2 \sin^{-1} \left( 2^{-1/2} e^{-i\pi/4} \tau \right) \quad (127)$$

$$q(\tau) = |\theta| + \text{sgn}(\text{Re } \theta_B(\lambda_s) - |\theta|) \cos^{-1}(\cos(\theta_B(\lambda_s) - |\theta|) + i\tau^2) \quad (q(0) = \theta_B(\lambda_s)) \quad (128)$$

ただし  $\sin^{-1} \eta \equiv \pi/2 - \cos^{-1} \eta$  と定義した。  $p(\tau)$  は鞍部点  $w = |\theta|$  を通る最急降下路 (SDP) で、  $q(\tau)$  は分岐点を通る最急降下路 (BC) となっている (図7)。  $p(\tau), q(\tau)$  による積分路変更で (125) は以下ようになる。

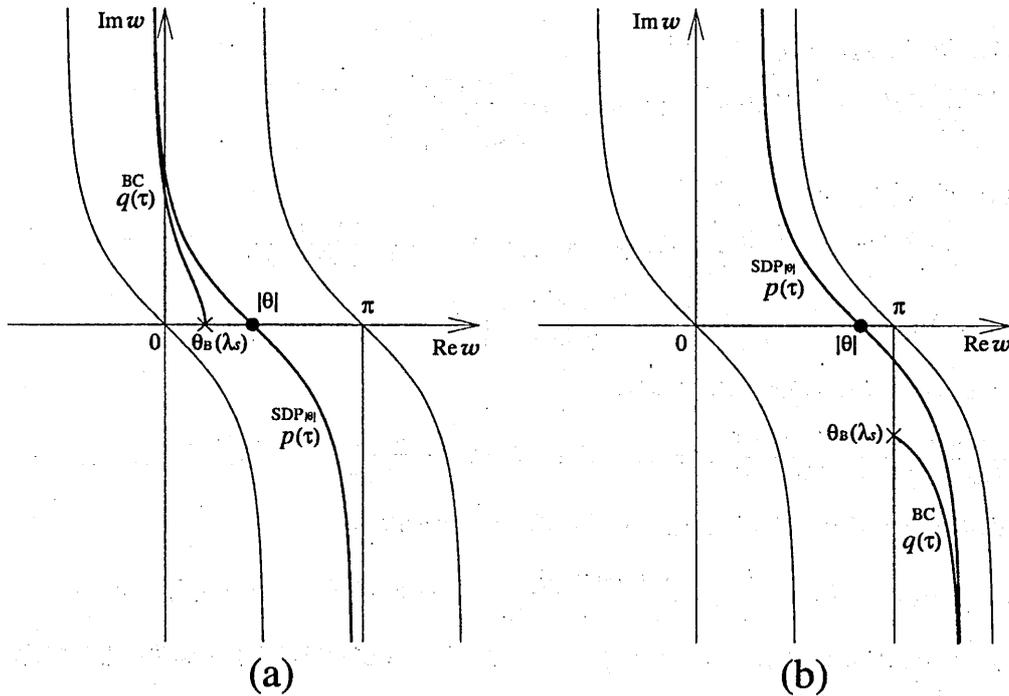


図 7  $p(\tau), q(\tau)$  によって記述される最急降下路 (SDP) と分岐線 (BC)。 (a)  $|\theta| = 80^\circ, \lambda_s/k = -1.8$  ( $|\theta| < \pi/2, \lambda_s < -k(1 + \cos|\theta|)$  を満たす)、 (b)  $|\theta| = 150^\circ, \lambda_s/k = 2, (|\theta| > \pi/2, \lambda_s > -k(1 + \sec|\theta|)$  を満たす)。  $p(\tau)$  の形状は複素  $w$ -平面上で鞍部点  $|\theta|$  の位置によらず不変で、  $0 \leq |\theta| < \pi$  に対し実  $w$ -軸上を平行移動する。  $q(\tau)$  は  $|\tau| \rightarrow \infty$  に対し  $p(\tau)$  に漸近する。

$$g_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = g_{\text{SDP}}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) + H(|\theta|, \lambda_s) g_{\text{BC}}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) \quad (129)$$

$$g_{\text{SDP}}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) = -e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{(1+i)k}{2\pi} e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} G_I(-k \cos p(\tau); \lambda_s, \lambda_i) \frac{\sin p(\tau)}{\cos \frac{p(\tau) - |\theta|}{2}} e^{-kr\tau^2} d\tau \quad (130)$$

$$g_{\text{BC}}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) = -e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{ik}{\pi} e^{ikr \cos(\theta_B(\lambda) - |\theta|)} \int_{-\infty}^{\infty} G_I(-k \cos q(\tau); \lambda_s, \lambda_i) \frac{\sin q(\tau)}{\sin(q(\tau) - |\theta|)} \tau e^{-kr\tau^2} d\tau \quad (131)$$

$$H(|\theta|, \lambda) = \begin{cases} 1 & -k \sec|\theta| < \lambda + k < -k \cos|\theta| & (|\theta| < \pi/2) \\ 1 & -k \sec|\theta| < \lambda + k, \lambda + k < -k \cos|\theta| & (|\theta| > \pi/2) \\ 0 & -k \sec|\theta| > \lambda + k, \lambda + k > -k \cos|\theta| & (|\theta| < \pi/2) \\ 0 & -k \sec|\theta| > \lambda + k > -k \cos|\theta| & (|\theta| > \pi/2) \end{cases} \quad (132)$$

関数  $H(|\theta|, \lambda)$  は分岐積分の寄与の有無を表す。(130) と (131) は  $kr > 1$  に対し被積分関数が大なる  $|\tau|$  で急激に減衰することが見込めるため、(122) や (125) と比較してはるかに数値計算に適した表現になっている。(123) より

$$g_{\text{SDP}}(kr, |\theta|; 0, \lambda_i) = g_{\text{BC}}(kr, |\theta|; 0, \lambda_i) = 0 \quad (133)$$

が成り立つ。

$g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  の評価  $g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  についても同様な手順で評価できる。ここでは結果のみ示しておく。

$$g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{g_1(x, z; \lambda_i + \lambda_s)}{\gamma(\lambda_i + \lambda_s)} + g_{I_0}(x, z; \lambda_s, \lambda_i) \quad (134)$$

$$g_{I_0}(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = g_{\text{SDP}_0}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) + H(|\theta|, \lambda_s) g_{\text{BC}_0}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) \quad (135)$$

ただし、

$$g_{SDP0}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) = e^{-i(\lambda_s + \lambda_i)l} \cdot \frac{(1+i)k}{2\pi} e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} G_{I_0}(-k \cos p(\tau); \lambda_s, \lambda_i) \frac{\sin p(\tau)}{\cos \frac{p(\tau) - |\theta|}{2}} e^{-kr\tau^2} d\tau \quad (136)$$

$$g_{BC0}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) = e^{-i(\lambda_s + \lambda_i)l} \cdot -\frac{ik}{\pi} e^{ikr \cos(\theta_B(\lambda_s) - |\theta|)} \int_{-\infty}^{\infty} G_{I_0}(-k \cos q(\tau); \lambda_s, \lambda_i) \frac{\sin q(\tau)}{\sin(q(\tau) - |\theta|)} \tau e^{-kr\tau^2} d\tau \quad (137)$$

$$G_{I_0}(s; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{G_{FN}(s - \lambda_s, \lambda_i)}{\gamma(s)} - \frac{G_{FN}(s, \lambda_i + \lambda_s)}{\gamma(\lambda_i + \lambda_s)} \quad (138)$$

である。(134) を  $a_0$  の右辺の積分に代入すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda) - k^2\}^2 |F(\lambda)|^2}{\gamma(\lambda_0 + \lambda) + M_N(\lambda_0 + \lambda)} g_3(x, z; -\lambda, \lambda_0 + \lambda) d\lambda = -\frac{M_N(\lambda_0)}{\gamma(\lambda_0)} g_1(x, z; \lambda_0) + g_{M_N}(x, z; \lambda_0) \quad (139)$$

(139) の第一項は  $M_N$  を含む項であり、 $g_{M_N}$  は観測点  $(x, z)$  の関数で

$$g_{M_N}(x, z; \lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda) - k^2\}^2}{\gamma(\lambda_0 + \lambda) + M_N(\lambda_0 + \lambda)} |F(\lambda)|^2 g_{I_0}(x, z; -\lambda, \lambda_0 + \lambda) d\lambda \quad (140)$$

となる。 $g_{I_0} \equiv -1$  とおけば再び  $M_N(\lambda_0)$  を得る。 $g_{M_N}$  は単一エッジ回折過程を中間状態として持つ特別な'衣を着た'二重散乱過程を表す。

以上より (82)-(84) はより簡潔な形に書ける。

$$a_0(x, z; \lambda_0) = \frac{\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i \gamma(\lambda_0) - M_N(\lambda_0)}{\gamma(\lambda_0) + M_N(\lambda_0)} g_1(x, z; \lambda_0) + \frac{\gamma(\lambda_0) g_M(x, z; \lambda_0)}{\gamma(\lambda_0) + M_N(\lambda_0)} \quad (141)$$

$$a_1(x, z; \lambda_1 | \lambda_0) = \frac{A_1(\lambda_1 | \lambda_0)}{2} \text{sgn } \theta_i \{(\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i + 1) g_1(x, z; \lambda_0 + \lambda_1) + g_I(x, z; \lambda_1, \lambda_0)\} \quad (142)$$

$$a_n(x, z; \lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) = (\text{sgn } \theta_i)^n \left\{ (\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i + 1) \frac{A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)}{2} g_1(x, z; \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) + S \left[ \frac{\hat{A}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)}{2} g_I(x, z; \lambda_n, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) \right] \right\} \quad (n \geq 2) \quad (143)$$

無摂動 ( $\sigma^2 = 0$ ) の場合は、 $a_0(x, z) = \text{sgn } z \text{sgn } \theta_i g_1(x, z; \lambda_0)$ ,  $a_n = 0$  ( $n \geq 1$ ) を得る。このとき全波動場は

$$\phi(x, z) = e^{-i\lambda_0 x + \text{sgn } \theta_i \gamma(\lambda_0) z} + \text{sgn } z \text{sgn } \theta_i g_1(x, z; \lambda_0) \quad (144)$$

と与えられ、これは TM 平面波入射に対する平坦な平滑半平面による波動場となる [32]。

### 5.3 波動場の漸近的性質

$g_I$  の物理的意味を理解するために、 $kr \rightarrow \infty$  における  $g_{SDP}$  と  $g_{BC}$  の漸近的振舞いを考察する。まずは主要な位相の振舞について考える。(130) で計算される  $g_{SDP}$  は主要な位相因子として  $e^{ikr}$  を持つから、エッジからの外向き円筒波的な波動を表している。同様に、(131) で得られる  $g_{BC}$  は主要な位相因子として  $e^{ikr \cos(\theta_B(\lambda_s) - |\theta|)}$  を持ち、これは  $|\theta| = \theta_B(\lambda_s)$  方向へ進行する平面波的な波動を表す。従ってこれら円筒波的波動と平面波的波動の間の干渉が起こりうる。(126), (132) より  $\theta_B(\lambda_s)$  が実数角になるような  $\lambda_s$  の範囲は

$$-2k < \lambda_s < -k(1 + \cos |\theta|) \quad (145)$$

となる。ここで (145) の上限  $\lambda_s = -k(1 + \cos |\theta|)$  が  $\theta_B(\lambda_s) = |\theta|$  となる鞍部点と分岐点と一致する条件である。非一様平面波の性質を見るため、分岐積分の有無を考慮に入れた  $H(|\theta|, \lambda_s) g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i)$  の振舞いを議論しよう。分岐積分の寄与が存在する領域は (132) より

$$0 < \theta_C(\lambda_s) < |\theta| < \pi \quad (146)$$

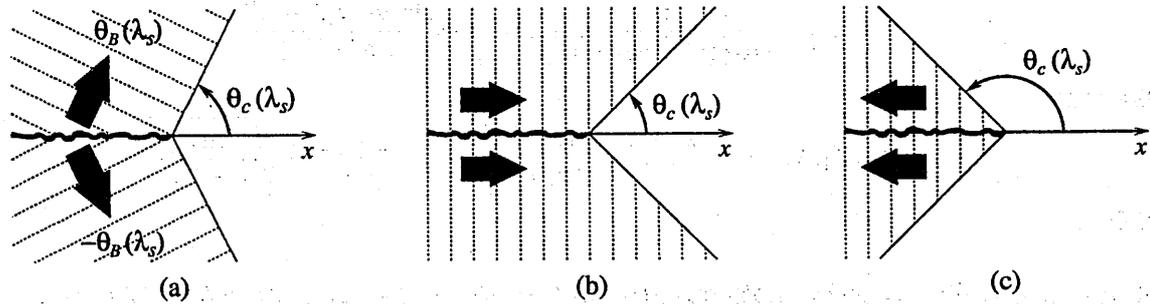


図8 非一様平面波  $H(|\theta|, \lambda_s)g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i)$  の分類。塗りつぶされた矢印は非一様平面波の伝搬方向、破線は等位相面を表す。(a)  $|k + \lambda_s| < k$  もしくは  $\theta_B(\lambda_s)$  が実数  $\theta_B(\lambda_s) = \theta_C(\lambda_s)$  になる場合は、伝搬波動を表し  $|\theta| = \theta_C(\lambda_s)$  となる境界線上のみ波動の減衰が通常の  $(kr)^{-1/2}$  ( $\lambda_i \neq k$ ) よりも遅く、 $(kr)^{-1/4}$  ( $\lambda_i \neq k$ ) となる。(b)  $\lambda_s < -2k$  もしくは  $\theta_B(\lambda_s)$  が正の純虚数になる場合は、右進行する非一様エバネッセント波を表す。(c)  $\lambda_s > 0$  もしくは  $\theta_B(\lambda_s) - \pi$  が負の純虚数になる場合は、左進行する非一様エバネッセント波を表す。

と書ける。ここで  $\theta_C(\lambda_s)$  は臨界角で

$$\theta_C(\lambda_s) = \begin{cases} \cos^{-1} \sec \theta_B(\lambda_s) & (|k + \lambda_s| > k) \\ \theta_B(\lambda_s) & (|k + \lambda_s| < k) \end{cases} \quad (147)$$

で定義する。すなわち、不規則表面によって支持される非一様平面波  $H(|\theta|, \lambda_s)g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i)$  は、図8で示される限られた領域でのみ観測される。 $\theta_C(\lambda_s) = \theta_B(\lambda_s)$  なる時 ( $k + \lambda_s < -k$ )、 $H(|\theta|, \lambda_s)g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i)$  は  $|\theta| = \theta_B(\lambda_s)$  方向へと伝搬する非一様平面波を表す。 $H(|\theta|, \lambda_s)g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i)$  は  $+x$ -方向へ進行する非一様なエバネッセント波を表し、 $|\theta| > \theta_C(\lambda_s)$  なる領域でのみ観測される。 $\theta_B(\lambda_s) - \pi$  が負の純虚数となる場合 ( $k + \lambda_s > k$ )、 $H(|\theta|, \lambda_s)g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i)$  は  $-x$ -方向へ進行する非一様なエバネッセント波となり、同じく  $|\theta| > \theta_C(\lambda_s)$  なる領域でのみ観測される<sup>†</sup>。次に振幅の振舞について考える。

**$g_{SDP}$  の漸近形**  $g_{SDP}$  に関しては  $\lambda_s + k + k \cos |\theta| \neq 0 \Leftrightarrow |\theta| \neq \theta_B(\lambda_s)$  に対して  $kr \rightarrow \infty$  での鞍部点法 [45] が適用できる。よってその漸近形は

$$g_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) \simeq \frac{e^{i(\pi/4 + kr)}}{\sqrt{8\pi kr}} \cdot e^{-i(\lambda_s + \lambda_i)l} \{-2k \sin |\theta| G_I(-k \cos |\theta|; \lambda_s, \lambda_i)\} \quad (148)$$

となる。エッジからの距離減衰特性  $(kr)^{-1/2}$  を持つ外向き円筒波を表す。 $|\theta| = \theta_B(\lambda_s)$  の場合の漸近形は、次の性質

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\cos p(\tau) - \cos |\theta|}{\tau} = 2^{1/2} e^{-i5\pi/4} \sin |\theta|$$

より

$$g_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) \simeq \frac{2^{-5/4} \Gamma(1/4) e^{i(9\pi/8 + kr)}}{\pi (kr)^{1/4}} \cdot e^{-i(\lambda_s + \lambda_i)l} \sqrt{\frac{\sin |\theta|}{1 - \lambda_i/k}} \quad (149)$$

となる。

**$g_{BC}$  の漸近形**  $g_{BC}$  については  $|\theta| \neq \theta_B(\lambda_s)$  に対しては同様に鞍部点法を適用すれば

$$g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) \simeq \frac{e^{ikr \cos(\theta_B(\lambda_s) - |\theta|)}}{\sqrt{8\pi kr}} \cdot \frac{e^{i3\pi/4} e^{-i(\lambda_s + \lambda_i)l}}{\sqrt{1 - \lambda_i/k}} \sqrt{\frac{8 \sin \theta_B(\lambda_s)}{\sin(\theta_B(\lambda_s) - |\theta|)}} \quad (150)$$

<sup>†</sup>実際には  $kr > 1$  ではエバネッセント波の寄与は非常に小さく数値計算において無視することも可能であろう。特に  $-x$ -方向へ進行する非一様エバネッセント波は  $+x$  方向へ進行するそれよりもはるかに小さな寄与となる。

となる。 $|\theta| = \theta_B(\lambda_s)$  の場合の漸近形は、 $q(\tau)$  の性質

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau}{\sqrt{\cos q(\tau) - \cos \theta_B(\lambda_s)}} = \sqrt{-i \frac{\sin(\theta_B(\lambda_s) - |\theta|)}{\sin \theta_B(\lambda_s)}}$$

を用いれば

$$g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) \simeq \frac{2^{-1/4} \Gamma(1/4) e^{i(11\pi/8 + kr)}}{\pi(kr)^{1/4}} \cdot e^{-i(\lambda_s + \lambda_i)l} \sqrt{\frac{\sin |\theta|}{1 - \lambda_i/k}} \quad (151)$$

となる†。

$g_{SDP}$  と  $g_{BC}$  との干渉 エッジからの距離減衰特性が  $(kr)^{-1/2}$  で、 $\theta_B(\lambda_s)$  が実数となる場合は  $|\theta| = \theta_B(\lambda_s)$  方向へ伝搬する非一様な平面波を、 $\theta_B(\lambda_s)$  が複素数となる場合は不規則表面上に生じる非一様なエバネッセント波となることを表す。また  $\lambda_s + k + k \cos |\theta| = 0$  となる伝搬方向の場合のみ、すなわち (147) で定義した臨界角と散乱角が一致する場合は、 $g_{SDP}, g_{BC} = O((kr)^{-1/4})$  となる。非一様なエバネッセント波となる場合は、指数関数的に急激に (振幅の減衰よりもはるかに早く) 減衰するため  $g_{SDP}$  による円筒波動的な波動との干渉はほとんど起こらない。一方、 $|\theta| = \theta_B(\lambda_s)$  方向へ伝搬する非一様な平面波となる場合は  $g_{SDP}$  による円筒波動的な波動と距離減衰特性が同じになるため、両者の干渉が起こりうる。 $g_{BC}$  においてこのような大きい距離減衰特性を生じる理由は、(131) の積分核  $G_I$  が内蔵する分解関数  $\tilde{\gamma}^-$  に由来する因子  $1/\sqrt{k \cos w - k \cos \theta_B(\lambda_s)}$  が分岐点で可積分特異性を持つためである。そのような可積分特異性は、完全導体表面上での左進行自由伝搬波である Rayleigh 波数  $k$  の平面波  $e^{-ikx}$  に由来し、自由伝搬波がエッジに入射して回折され、さらに不規則表面で散乱されると解釈できる。

散乱角  $\theta$  方向を考えると、散乱の Bragg ベクトル  $\lambda_s$  に関する部分波が  $g_{SDP}$  と  $g_{BC}$  との干渉の影響を受けうる  $\lambda_s$  の範囲は、 $\theta_B(\lambda_s)$  が実数となる場合すなわち (145) である。さらに鞍部点と分岐点が一致する上限  $\lambda_s = -k(1 + \cos |\theta|)$  では、上記のように  $g_{SDP}, g_{BC}$  は  $(kr)^{-1/4}$  オーダーの遅い減衰性を持つ。従って  $\lambda_s$  の関数と見なしたとき  $kr$  が十分大きい場合は、 $g_I$  は  $\lambda_s = -k(1 + \cos |\theta|)$  近傍でピークを持つように振舞うと予想される。よって円筒波動的波動と非一様な平面波との干渉及び境界でのピークと TM 導波モードが一致するときには、影側インコヒーレント散乱に大きな影響を及ぼしうる。加えて、左進行の自由伝搬モードに関するもう一つの寄与について言及しておく。 $\lambda_i + \lambda_s = k$  が成り立つ、すなわち (120) の極分離が破綻する場合でも後で示すように  $g_{SDP}, g_{BC}$  は  $\lambda_s$  の関数として有限値をとる。この場合は  $G_{FN}(s - k + \lambda_i, \lambda_i)$  が  $s = k$  で一位の極を持つため、 $g_{SDP}$  (及びあれば  $g_{BC}$ ) その特異性を考慮したまま評価しなければならない。よって  $|\theta| \rightarrow \pi$  となる時、鞍部点  $s = -k \cos |\theta| \rightarrow k$  は極に漸近し、 $g_I = g_{SDP} + g_{BC}$  は大きな振幅値を取りうる。実際には、数値的な検証では  $|g_I|$  は  $|\theta| = \pi$  で有限であることを示唆している。以上の事を総合すれば、 $|g_I|$  を  $\lambda_s$  の関数として見ると、大なる  $kr$  については  $-2k < \lambda_s < -k(1 + \cos |\theta|)$  ではリップルを、 $\lambda_s = -k(1 + \cos |\theta|)$  の近傍ではピークを、また  $|\theta| \simeq \pi$  では  $\lambda_s = k - \lambda_i$  に対しピークを持つことが予想される。これらは後の計算で実際に示す。

#### 5.4 無限に広い不規則表面によるランダム波動場との比較

近似回折核 (99) の下での  $kl \rightarrow \infty$  すなわち  $kr \rightarrow \infty, |\theta| \rightarrow \pi$  とするランダム波動場について考察する。(117), (148), (150) より

$$g_1(x, z; \lambda_i) \rightarrow -e^{-i\lambda_i x - \gamma(\lambda_i)|z|}, \quad g_{MN}, g_I \rightarrow 0$$

となるから、極限  $kl \rightarrow \infty$  下では

$$\begin{aligned} \phi_s(x, z, \omega) &= A_0(\lambda_0) e^{-i\lambda_0 x - \gamma(\lambda_0)|z|} + \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sgn } \theta_i)^n \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \\ &\quad \cdot e^{-i(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)x - \gamma(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)|z|} \hat{h}^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] \quad (\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i > 0) \\ \phi_s(x, z, \omega) &= -e^{-i\lambda_0 x + \gamma(\lambda_0)|z|} = -\phi_i(x, z) \quad (\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i < 0) \end{aligned}$$

である。これは (91) と一致する。

†  $\Gamma(s)$  は Gamma 関数  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \tau^{s-1} e^{-\tau} d\tau$  ( $\text{Re } s > 0$ ) である [46]。

## 5.5 回折核の評価

### 5.5.1 統計量

(6), (81), (141)-(143) と  $\hat{h}^{(n)}[\cdot]$  の直交性を用いれば、ランダム波動場に関する各種の統計量は直ちに得られる。散乱場を (129) と同じくコヒーレント (平均) 部分とインコヒーレント (変動) 部分に分離する。

コヒーレント波動場  $\phi_s(x, z, \omega)$  の平均よりコヒーレント波動場  $\phi_s^c(x, z)$  は

$$\begin{aligned}\phi_s^c(x, z) &= \langle \phi_s(x, z, \omega) \rangle = a_0(x, z | \lambda_0) \\ &= \begin{cases} A_0(\lambda_0)g_1(x, z; \lambda_0) + \frac{\gamma(\lambda_0)g_{MN}(x, z; \lambda_0)}{\gamma(\lambda_0) + M_N(\lambda_0)} & (\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i > 0) \\ -g_1(x, z; \lambda_0) + \frac{\gamma(\lambda_0)g_{MN}(x, z; \lambda_0)}{\gamma(\lambda_0) + M_N(\lambda_0)} & (\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (152)$$

因子  $\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i > 0$  及び  $\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i < 0$  は各々半平面について表 (照射側) と裏 (影側) を表す。照射側での不規則表面の影響は、平均面  $z = 0$  からの鏡面反射波及びエッジ回折波を含む  $g_1$  の意味で強く現れる。一方、影側での不規則表面の影響は、回折波としての  $g_{MN}$  の意味で弱く現れる。

### インコヒーレント波動場

$$\begin{aligned}\phi_s^{ic}(x, z, \omega) &= \phi_s(x, z, \omega) - \phi_s^c(x, z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} a_n(x, z; \lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \hat{h}^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] \\ &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sgn } \theta_i)^n \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) g_1(x, z; \lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \mathcal{S} \left[ \hat{A}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) g_I(x, z; \lambda_n, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) \right] \right\} \\ \quad \cdot \hat{h}^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] & (\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i > 0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sgn } \theta_i)^n \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{S} \left[ \hat{A}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0) g_I(x, z; \lambda_n, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) \right] \right\} \\ \quad \cdot \hat{h}^{(n)}[dB(\lambda_1, \omega), \dots, dB(\lambda_n, \omega)] & (\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (154)$$

これは全ての  $\omega$  について成り立つ。コヒーレント散乱と同じく照射側での不規則表面の影響は  $g_1$  の意味で強く現れる。一方、影側では回折波  $g_I$  に対してのみの意味で弱く現れる。これらのコヒーレント及びインコヒーレント散乱への大まかな意味での不規則表面の影響は、TE 波の場合と同じである。

インコヒーレント散乱強度  $\hat{h}^{(n)}[\dots]$  の直交性を利用して自乗平均を計算すれば散乱場の分散が得られる。

$$\langle |\phi_s^{ic}(x, z, \omega)|^2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} n! |a_n(x, z; \lambda_1, \dots, \lambda_n | \lambda_0)|^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \quad (155)$$

本章では 1 次の Wiener 核のみでインコヒーレント散乱を評価する。

$$\begin{aligned}\langle |\phi_s^{ic}(x, z, \omega)|^2 \rangle &\approx \int_{-\infty}^{\infty} |a_1(x, z; \lambda_1)|^2 d\lambda_1 \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |A_1(\lambda_1 | \lambda_0)|^2 \left| g_1(x, z; \lambda_0 + \lambda_1) + \frac{1}{2} g_I(x, z; \lambda_1, \lambda_0) \right|^2 d\lambda_1 & (\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i > 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A_1(\lambda_1 | \lambda_0)}{2} g_I(x, z; \lambda_1, \lambda_0) \right|^2 d\lambda_1 & (\text{sgn } z \text{sgn } \theta_i < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (156)$$

よって不規則表面の影響は、照射側では主に  $g_1$  すなわち伝搬平面波成分に対する意味で強く、影側では  $g_I$  つまりエッジ回折波成分に対する意味で弱く現れることがわかる。

## 6 数値計算と考察

具体的な数値計算のためスペクトル密度  $|F(\lambda)|^2$  を Gauss 型とする。

$$|F(\lambda)|^2 = \kappa \sigma^2 e^{-(\kappa\lambda)^2} / \sqrt{\pi} \quad (157)$$

ただし、 $\kappa$  は不規則表面の相関距離である。計算する統計量は入射強度で規格化したコヒーレント散乱強度  $I_s^c(r, \theta)$ 、インコヒーレント散乱強度  $I_s^{ic}(r, \theta)$ 、コヒーレント波動場強度  $I^c(r, \theta)$

$$\begin{aligned} I_s^c(r, \theta) &= \frac{|\phi_s^c(r \cos \theta + l, r \sin \theta)|^2}{|\phi_i(r \cos \theta + l, r \sin \theta)|^2}, & I_s^{ic}(r, \theta) &= \frac{\langle |\phi_s^{ic}(r \cos \theta + l, r \sin \theta, \omega)|^2 \rangle}{|\phi_i(r \cos \theta + l, r \sin \theta)|^2}, \\ I^c(r, \theta) &= \frac{|\phi^c(r \cos \theta + l, r \sin \theta)|^2}{|\phi_i(r \cos \theta + l, r \sin \theta)|^2} \end{aligned} \quad (158)$$

である。以下特にことわらない限り、表面粗さを  $k\sigma = \pi/10$  ( $\sigma = 0.05\Lambda$ 、以下波長を  $\Lambda$  とする)、相関距離を  $k\kappa = 1$  ( $\kappa \approx 0.16\Lambda$ )、入射角を  $\theta_i = 60^\circ$  に固定する。また、一部の数値計算に関しては比較のため TE 波入射の摂動解析 [13, 23] の結果も示しておく。

**近傍場での散乱強度** 図 9 にエッジからの距離を (a)  $r = 1\Lambda$ , (b)  $10\Lambda$  としたコヒーレント散乱強度  $I_s^c(r, \theta)$  及びインコヒーレント散乱強度  $I_s^{ic}(r, \theta)$  の角度分布を観測角 (散乱角)  $\theta$  の関数として計算した結果を示す。比較のために無摂動の規格化散乱強度  $I_s^0(r, \theta) \equiv |g_1(r \cos \theta_i + l, r \sin \theta_i; \lambda_0) / \phi_i(r \cos \theta_i + l, r \sin \theta_i)|^2$  も同時に示しておく。 $I_s^0$  は  $\theta = 0^\circ$  に関し対称で  $\theta = 0^\circ$  で完全に消滅する。 $I_s^0$  は主に鏡面反射波の存在する領域 (II)  $\theta > \pi - \theta_i = 120^\circ$  と、影形成波の存在する領域 (III)  $\theta < -\pi + \theta_i = -120^\circ$  で現れる。特に  $r = 10\Lambda$  に対してはリップルが見られる。そのようなリップルは、半平面からの SRW もしくは SFW と単一エッジ回折波との干渉によるものである。表面が不規則なれば、(a), (b) どちらにおいても照射側 ( $\theta > 0^\circ$ ) で  $I_s^c(r, \theta)$  は  $I_s^0(r, \theta)$  よりも減少する。これらは (152) は 0 次 Wiener 核  $A_0(\lambda_0)$  の寄与である。一方影側 ( $\theta < 0^\circ$ ) では照射側のような大きな変化は見られないが、TE 波の場合と比較すると影側において強度の減少度は若干大きい。影側での減少は  $g_M$  の寄与によるものであり、半平面側 ( $x < l$ ) での LGA ではエッジ回折を中継とする多重散乱の寄与は無視できない。インコヒーレント散乱については、同様に照射側で主に現れており、影側の  $\theta < -\theta_i = -60^\circ$  においても僅かながら存在する。照射側の領域 (I) では、 $I_s^{ic}$  は  $r = 1\Lambda$  でもそして特に  $r = 10\Lambda$  では明確にリップルを持つ。これらの結果は TE 波の場合とは明らかに異なっている。

**エッジからの距離依存性** 図 10 はエッジからの距離を  $r = 0.1\Lambda, 1\Lambda, 10\Lambda, 100\Lambda, 100\Lambda$  とした  $I_s^c(r, \theta)$  及び  $I_s^{ic}(r, \theta)$  の計算結果を示している。 $r = 0.1\Lambda$  以外の  $r$  については  $\theta > 120^\circ$  及び  $\theta < -120^\circ$  において  $I_s^c(r, \theta)$  は激しく振動するものの、変動の中心はほとんど距離  $kr$  に依存していない。 $-120^\circ < \theta < 120^\circ$  においては  $I_s^c(r, \theta)$  は  $(kr)^{-1}$  に比例して減少しており、エッジ回折による円筒波の寄与が支配的であることを示している。また水平散乱角  $\theta = 0^\circ$  ではほとんど消滅するものの零とはならない。これはエッジ回折を中間状態として含む特別な形の '衣を着た' 二重散乱  $g_M$  の寄与によるものである。しかし極めてエッジに近い  $r = 0.1\Lambda$  の場合でも  $I_s^c \approx -62\text{dB}$  と非常に小さい。よって空間側 ( $x > l$ ) の LGA では、エッジ回折を中継とする多重散乱の寄与は十分無視できる。インコヒーレント散乱については、照射側  $\theta > 0^\circ$  での大なる  $kr$  に対して、エッジ回折波が減衰することにより、伝搬平面波に基づく拡散散乱が顕在化していくことがわかる。照射側では  $\theta = 0^\circ$  極近傍まで散乱波が存在し、リップルを伴っている。 $\theta = 0^\circ$  の近傍まで散乱波が存在するのは、無限に広い不規則表面における異常散乱に対応していると考えられる。影側  $\theta < 0^\circ$  については、 $\theta = -\theta_i$  近傍でピークを持ち周囲に細かいリップルを伴っている。 $kr$  が大なればピークは鋭くなり  $\theta = -\theta_i$  により接近する。またリップルは非常に細くなるものの変動の範囲は縮小する。これらは TE 波の場合とは大きく異なっている。 $I_s^{ic}(r, \theta)$  は対数スケールとしては  $\theta > 120^\circ$  においてほとんど  $kr$  に依存していない。 $120^\circ > \theta > 0^\circ$  では  $kr$  が大なれば、ある値に収斂していく様が見られる。 $\theta = 0^\circ$  では完全に消滅する。 $I_s^{ic}$  は  $\theta \rightarrow -180^\circ$  となる半平面近傍では急激に増加する。それ以外の角度範囲  $-180^\circ < \theta < -60^\circ$ ,  $-60^\circ < 0^\circ$  ではほぼ  $(kr)^{-1}$  に比例して減少するから、円筒波により構成されていることがわかる。しかし、例外的に  $\theta \approx -60^\circ, \theta < -160^\circ$  に対しては明かに  $(kr)^{-1}$  よりも減衰が遅い。TE 波に

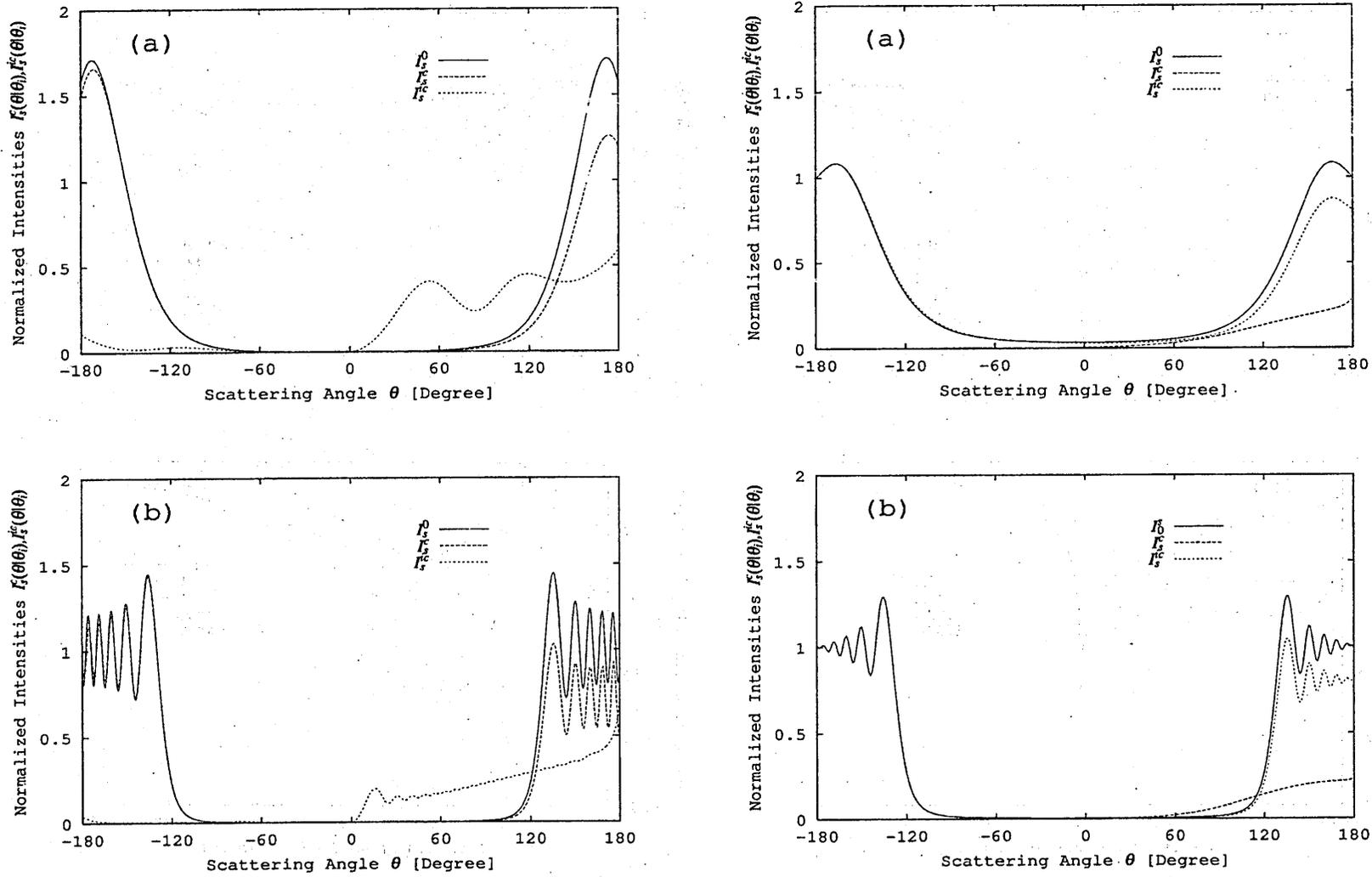


図 9  $\theta_i = 60^\circ, k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1$  に対する計算結果 (左側 TM, 右側 TE)。(a) エッジからの距離  $r = 1\lambda$ 、(b)  $r = 10\lambda$ 。TM, TE 共に無擾動の散乱強度  $I_s^0(r, \theta)$  は  $\theta = 0^\circ$  に関して対称である。 $I_s^0(r, \theta)$  は  $|\theta| > 120^\circ$  なる領域 I, III で主に現れ、TM では特に  $r = 10\lambda$  ではリップルを持つ。そのようなリップルは SRW (あるいは SFW) とエッジ回折波との干渉により生じる。表面が不規則なれば、コヒーレント散乱強度  $I_s^c$  は照射側で減少する。TE 波の場合と比較すると影側での影響がやや大きくなっている。また  $r = 1\lambda$  で比較すると全体的に強度が TE 波よりも大きい。インコヒーレント散乱強度  $I_s^i$  は主に照射側に拡散散乱として現れるが、TE 波の場合とは異なりリップルを伴って次第に増加する角度パターンとなっている。また影側の半平面近傍  $\theta < -150^\circ$  ではコヒーレント散乱及びインコヒーレント散乱の影響が TE 波の場合よりも大きく、特に後者が著しい。

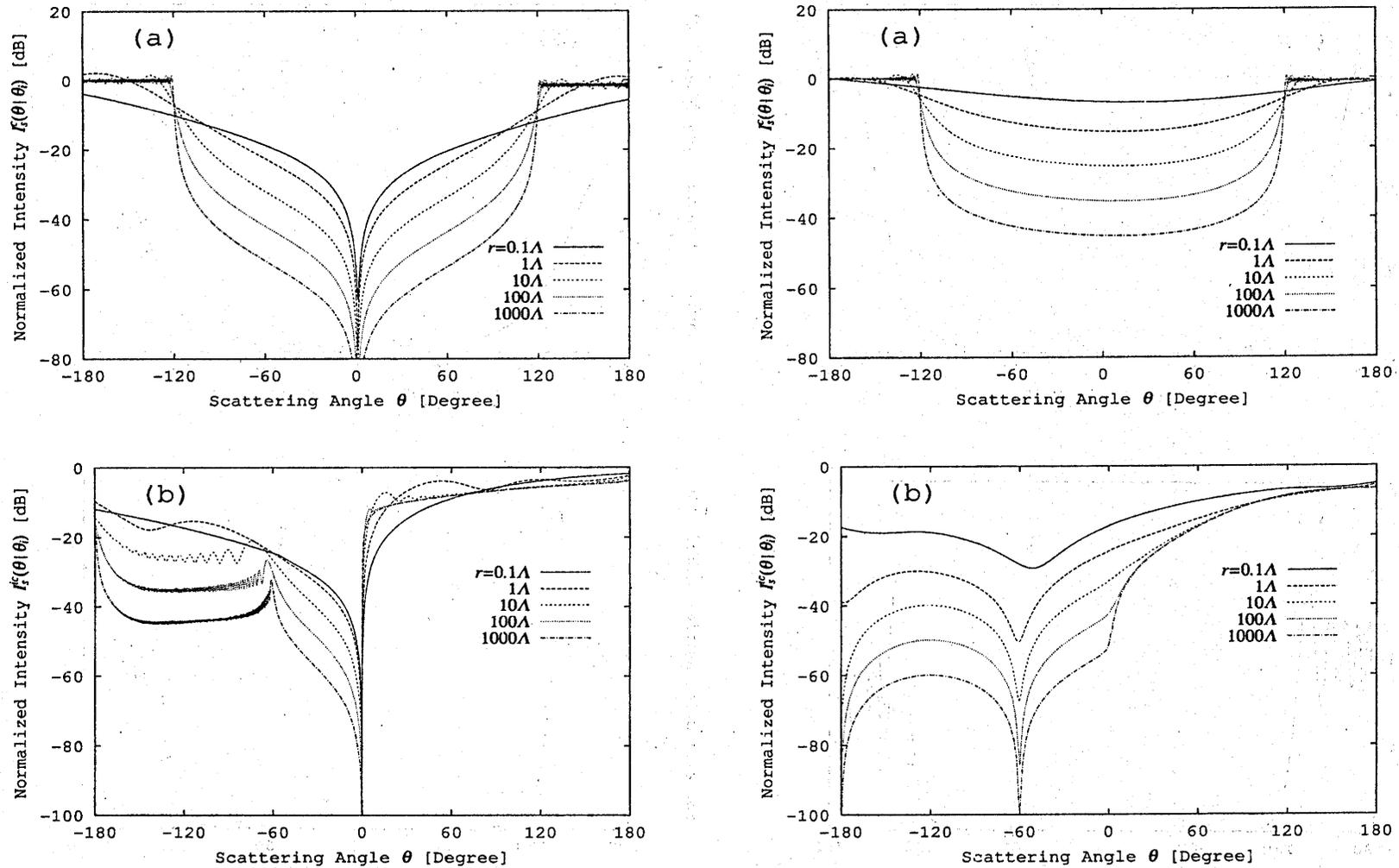


図 10  $\theta_i = 60^\circ, k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1$  に対する計算結果 (左側 TM, 右側 TE)。(a) コヒーレント散乱強度角度分布  $I_s^c$  は  $\theta = 0^\circ$  に関して非対称で主に照射側で減少する。 $r = 0.1A$  の場合を除き  $|\theta| < 120^\circ$  なる領域 I では  $I_s^c$  は  $(kr)^{-1}$  に比例して減少する。 $I_s^c$  は水平散乱角  $\theta = 0^\circ$  の近傍でほぼ消滅する (厳密に言えば零ではない。しかし非常にエッジに近い  $r = 0.1A$  の場合でさえも  $-62\text{dB}$  程度と極めて小さい)。 $|\theta| > 120^\circ$  なる領域 II, III では  $kr$  が大なるほど RB と SB が明確になる。また  $I_s^c$  のリップルは密になりその数が増える半面、その変動の振幅は小さくなっていく。(b) インコヒーレント散乱強度角度分布  $I_s^{ic}$  は  $\theta = 0^\circ$  において完全に消滅する。照射側では  $kr$  が大なるほど  $\theta \rightarrow 180^\circ$  に対し単調増加するリップルのないパターンに収斂していく。これは大まかには TE 波でも見られる性質であるが、図 9(b) にあるように領域 (I) に属する  $0^\circ < \theta < 120^\circ$  においてリップルが現れる点が異なる。影側では  $r = 0.1A$  の場合を除き  $I_s^{ic}$  は  $(kr)^{-1}$  に比例して減少する。鏡面反射と逆方向  $\theta = -\theta_i = -60^\circ$  の近傍には特徴的なピークが見られ、 $kr$  が大なるほど明確になりかつ  $\theta = -60^\circ$  に近づく。これは TE 波ではディップになるので大きく異なる点である。またその近傍から半平面側  $\theta < -60^\circ$  ではリップルを伴うパターンとなり、大なる  $kr$  では非常に激しく振動する。また不規則表面に近づく  $\theta \rightarrow -180^\circ$  と特に  $kr$  が大なるほど急激に増加する。これも TE 波とは逆の結果になっている。

おける  $\theta = -\theta_i$  でのディップは'回折'・'散乱'と'散乱'・'回折'との打ち消し合いで生じる [11,23]。一方 TM 波では逆にピークとなる。ディップを生じない理由自体は簡単である。これは、 $\lambda_s \neq 0$  について  $G_I(-\lambda_i; \lambda_s, \lambda_i) \neq 0$  となり、対応する二つのプロセスの打ち消し合いが起きないためである。しかしながら、ディップではなく逆にピークや散乱パターンにリップルを生じること、及び半平面近傍での強度の増加に関しては簡単なメカニズムでは説明できない。これらに関しては後で改めて議論する。

**相関距離依存性** 図 11 に不規則表面の相関距離  $k\kappa = 0.5, 1, 2, 4, 8, 16$  とした時の散乱強度の角度分布を示す ( $r = 1\Lambda, 100\Lambda$ )。  $I_s^c(r, \theta)$  については TE 波と比較すると  $k\kappa$  の依存性は小さい。  $I_s^c(r, \theta)$  について裏側 ( $\theta < 0^\circ$ ) での振舞いは、TE 波の場合よりも著しく  $k\kappa$  に依存している。  $k\kappa < 2$  では照射側の拡散散乱やリップルが著しくなる。また影側でも  $\theta = -\theta_i$  近傍のピークや随伴するリップルが顕著である。  $k\kappa > 2$  ではピークやリップルは消滅し、反射波の領域 ( $\theta > 120^\circ$ ) では拡散散乱が局在化するため散乱強度の増加が見られる。  $\theta \rightarrow -180^\circ$  においては  $k\kappa \leq 4$  までは  $I_s^c$  は増加するものの、  $k\kappa > 4$  では増加せず飽和する。

**表面粗さ依存性** 図 12 は表面粗さ  $\sigma = 0.0125\Lambda, 0.025\Lambda, 0.05\Lambda, 0.1\Lambda$  に対する散乱強度の角度分布である。  $\sigma = 0.1\Lambda$  を除き、  $I_s^c$  は大局的には  $\sigma^2$  に比例して増加する。また  $\sigma$  が大なれば照射側の領域 (I) の LGA におけるリップルは徐々に消滅していく。すなわち照射側の領域 (I) の LGA では、微小粗さにもかかわらず  $I_s^c$  は  $\sigma^2$  に関して強い非線型性を示している。これは (発散の問題を抜きにして) 摂動解析では得られない性質であるが、近似 (99) 下での  $g_I$  自体は  $\sigma$  の依存性を全く持たないため、1次 Wiener 核  $A_1$  の  $\sigma$  に関する (特に TM 導波モード近傍での) 非線形性 [39] が著しく顕在化した結果である。

**入射角依存性** 図 13 は入射角  $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  に対する散乱強度の角度分布である。コヒーレント散乱では SB と RB が、インコヒーレント散乱では  $\theta = -\theta_i$  近傍のピークが入射角に追従することがわかる。  $\theta = -\theta_i$  近傍のピークは  $\theta_i = 120^\circ$  で最大値をとる。影側半平面近傍の強度の増加は  $\theta_i < 90^\circ$  では顕著に生じ、  $\theta_i < 90^\circ$  では増加せず飽和している。一方、照射側 LGA での拡散散乱は  $\theta_i = 90^\circ$  で最も著しい。さらに全体として見れば、照射側でもっとも大きな値を示している。

**影側インコヒーレント散乱におけるピークとリップル** インコヒーレント散乱角度分布には、いくつかの興味深い特徴として照射側の LGA でのリップル、影側での鏡面反射と反対方向付近のピーク及び付随するリップル、そして影側での不規則半平面近傍での強度の上昇を生じることがわかった。これらは同じ計算パラメータに対する TE 波入射時には見られない現象である。そのメカニズムを議論するため、まず影側でのインコヒーレント散乱を支配する  $|g_I(r \cos \theta + l, r \sin \theta; \lambda, \lambda_0)|, |g_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda, \lambda_0)|, |g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda, \lambda_0)|$  及び  $|A_1(\lambda|\lambda_0)|$  の振舞いを図 14,15 に示す。(123),(133) に示したように、  $|g_{SDP}|, |g_I|$  は  $\lambda/k = 0$  で消滅する。また  $|g_{BC}(kr; \lambda, \lambda_0)|$  は予想どおり  $-2 < \lambda/k < -(1 + \cos|\theta|)$  なる範囲に現れる。これらは特に  $r = 1000\Lambda$  で著しい。よって  $\lambda/k \approx -(1 + \cos|\theta|) \approx -1.17$  を除いては  $|g_{SDP}|, |g_{BC}|$  は明かに  $(kr)^{-1}$  に比例して減少する。  $|g_I(k, r; \lambda, \lambda_0)|$  は  $-2 < \lambda/k < -(1 + \cos|\theta|)$  においてリップルを持ち、特に  $r = 1000\Lambda$  に対しては非常に激しく振動する。(b) を見ればわかるように、そのようなピーク  $\lambda/k \approx -(1 + \cos|\theta|)$  は入射角に追従し、また同時に円筒波的波動と非一様平面波との干渉によるリップルの存在範囲  $-2 < \lambda/k \approx -(1 + \cos|\theta|)$  も伸縮している。これらは前節で考察したとおりの振舞いである。そのような  $g_I$  に無限に広い不規則表面の散乱過程を表す 1次 Wiener 核  $A_1$  が重畳される。(c) は対応する  $|A_1|$  を示したものである。  $\lambda/k = -(1 + \cos\theta_i) = -1.5$  と  $\lambda/k = 1 - \cos\theta_i = 0.5$  で二つのスパイクが見られ、僅かに粗な不規則表面上の各々右と左進行の TM 導波モード ( $-s_{sp}, +s_s$ ) の存在を示唆している。  $k\kappa$  が小なれば、  $|A_1|$  は広帯域化し、スパイク自体はピーク値が低下するものの半幅が広がるため積分としての寄与は向上する。従って、これらの二つのスパイクはインコヒーレント散乱に大きな影響を及ぼしうる。図 15 は  $|A_1 g_I/2|$  を示したものである。(a)-(d) 全てに共通して現れる  $\lambda/k = -1.5, 0.5$  でのピークは  $|A_1|$  によるものである。(d) に示す  $\theta = -179^\circ$  の場合を除いては、後者よりも前者のスパイクの方がインコヒーレント散乱に寄与する。さらに (a),(b) では、散乱角  $\theta$  に応じた  $|g_I|$  のピークが各々  $\lambda/k \approx -1.87, -1.17$  に現れている。(c) は  $\theta = -\theta_i$  が成立するため、  $|A_1|$  と  $g_I$  のスパイクが (ほぼ) 重畳し、著しいピークとなって  $\theta \approx -\theta_i$

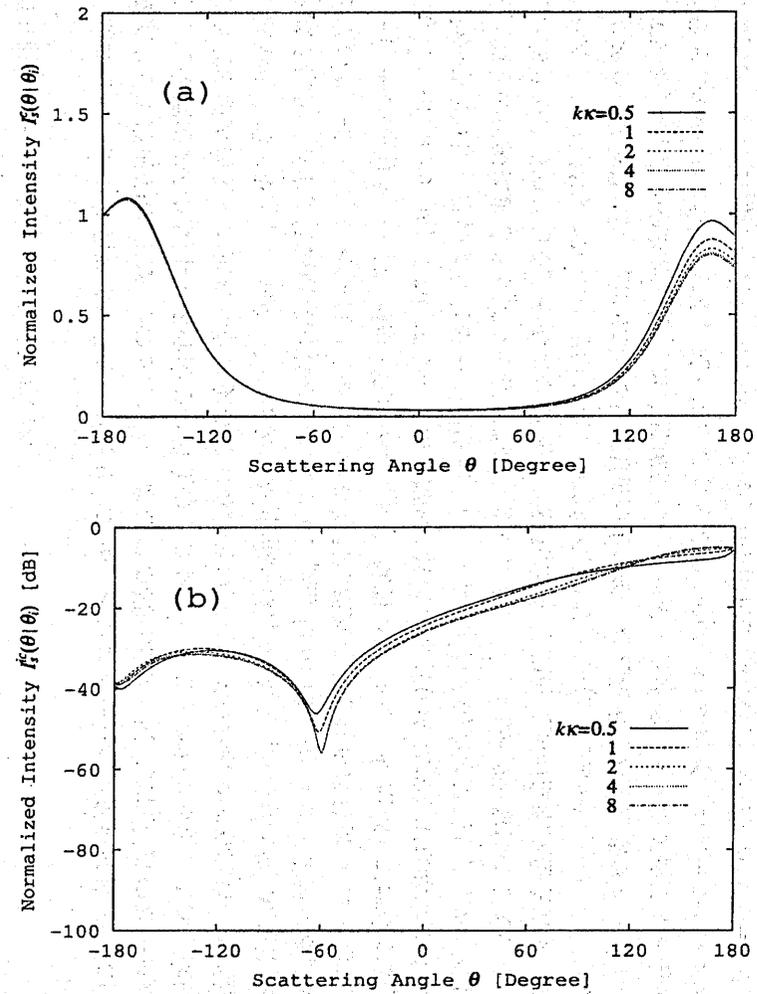
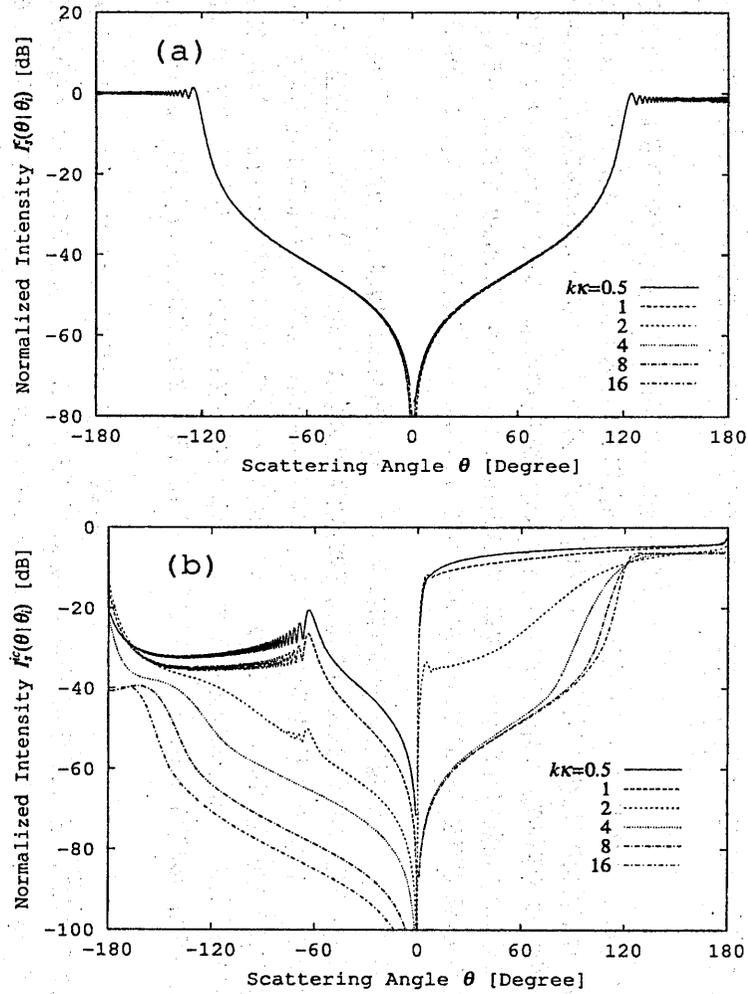


図 11 コヒーレント散乱とインコヒーレント散乱強度の相関距離  $\kappa$  の相違による変化 (左側 TM( $r = 100\Lambda$ ), 右側 TE( $r = 10\Lambda$ )). (a) コヒーレント散乱。dB 表示では  $\kappa$  によるパターンの変化はより一層目立たない。(b) インコヒーレント散乱。  $k\kappa < 2$  では照射側で拡散散乱と水平散乱角近傍でのリップルがはっきりと現れる。また影側では逆鏡面反射方向のピークとそれに伴うリップルが明瞭になる。一方  $k\kappa > 2$  では、照射側と影側の双方でそのようなピークとリップルが消滅する。  $k\kappa \leq 4$  では  $\theta \rightarrow -180^\circ$  に対し  $I_s^{ic}$  は増加するが、  $k\kappa > 4$  では飽和している。

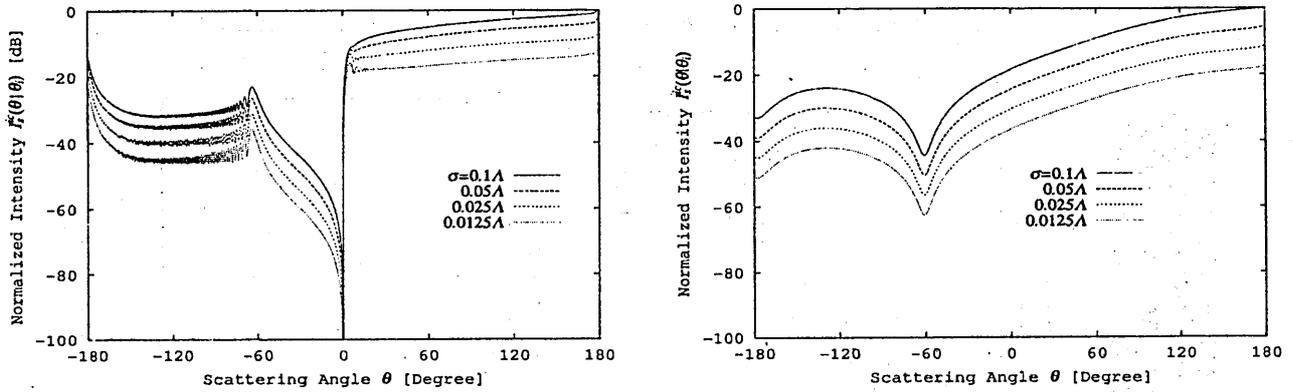


図 12 インコヒーレント散乱強度の表面粗さ  $\sigma$  の相違による変化 ( $\theta_i = 60^\circ, r = 100\lambda$ ) の計算結果 (左側 TM, 右側 TE)。TE では 1 次摂動解からなる  $I_s^{ic}$  は正確に  $\sigma^2$  に比例する。一方 TM では  $\sigma = 0.1\lambda$  を除き、全体として  $I_s^{ic}$  はほぼ  $\sigma^2$  に比例している。 $\sigma$  が大になれば、照射側の LGA(空間側)でのリップルは消滅していく。すなわちこの領域でのインコヒーレント散乱強度は  $\sigma^2$  に関して強い非線形性を示している。

でのインコヒーレント散乱が局所的に大きくなる。従って  $\theta \simeq -\theta_i$  が満たされる場合は、 $|A_1|$  によるスパイクと  $|g_I|$  のピークが重なり合い、インコヒーレント散乱により強い寄与をもたらす。同様に  $|A_1|$  によるスパイクと  $-2k < \lambda/k < -(1 + \cos|\theta|)$  に対する  $|g_I|$  のリップルが重畳すると、散乱角の微妙な変化によりリップルのピークないしはディップがピックアップされる。そのような部分波成分の総和(積分)の結果インコヒーレント散乱パターンは  $\theta \simeq -\theta_i$  でのピークと  $\theta < -\theta_i$  でのリップルを持つことになる。半平面近傍 ( $|\theta| \rightarrow \pi$ ) である (d)  $\theta = 179^\circ$  では、 $|A_1|$  と  $g_I$  のスパイクが重畳し、非常に大きな値を持つピークとなってインコヒーレント散乱に強い影響を及ぼす。これが影側の不規則半平面近傍でのインコヒーレント散乱強度の急激な増加をもたらす。従って影側のインコヒーレント散乱角度分布上で、鏡面反射と反対側でのピークと付随するリップルは、平坦な平滑平面上の左進行の自由伝搬波によって励振されたエッジ回折波が、不規則表面上の右進行の TM 導波表面波と結合することにより生じる。同様に、影側の不規則半平面近傍でのインコヒーレント散乱強度の急激な上昇は、左進行の自由伝搬波によって励振されたエッジ回折波が左進行の不規則表面上の TM 導波と結合することにより生じる。ゆえに不適當な粗さパラメータや観測点が選定された場合(例えば  $kr$  が小さすぎたり大きすぎたり)、そのような結合現象は起こらない場合がある(cf. 図 10,11,12)。 $\theta_i > 90^\circ$  の場合は、影側の不規則半平面近傍でのインコヒーレント散乱強度の増加は起こらなくなる。これは後者のカップリングをほとんど生じないからである。

**照射側インコヒーレント散乱におけるリップル** 次に照射側の LGA でリップルを生じるメカニズムについて議論する。図 16 に  $I_s^{ic}$  をもたらす  $|g_1(r \cos \theta + l, r \sin \theta; \lambda + \lambda_0) + g_I(r \cos \theta + l, r \sin \theta; \lambda + \lambda_0)|/2$  の振舞いを  $\lambda$  の関数として示す。(  $k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1, \theta_i = 60^\circ$  ( $\lambda_0 = 0.5k$ ),  $r = 10\lambda$ ) (a)  $\theta = 16^\circ$  において、(123) で予測されるように  $\lambda + \lambda_0 = k$  を満たす  $\lambda/k = 1 - \lambda_0/k = 0.5$  に対し  $|g_1(x, z; \lambda + \lambda_0)|$  は零点を持つ。さらに  $\lambda + \lambda_0 = -k$  を満たす  $\lambda/k = -1 - \lambda_0/k = -1.5$  で  $|g_1(x, z; \lambda + \lambda_0)|$  はピークを持つ。このような条件は入射角が  $|\theta_i| = \pi$  となるもう一つの水平入射  $e^{ikx}$  に対応する。 $\lambda + \lambda_0 \approx -k$  となる時の  $g_1(x, z; \lambda + \lambda_0)$  は (110), (113) より、おおよそ

$$\begin{aligned} g_1(r \cos \theta + l, r \sin \theta; \lambda + \lambda_0) \Big|_{\lambda + \lambda_0 \approx -k} &\approx e^{ikl} D(kr, |\theta| + \pi) - e^{ikl} D(kr, |\theta| - \pi) \\ &\approx e^{ikx} - 2e^{i(kr + kl + \pi/4)} \sec(|\theta|/2) / \sqrt{8\pi kr} \end{aligned} \quad (159)$$

となる。(159) の第一項は平坦な平滑平面上の右進行の自由伝搬波に一致する。よって (a) に示すように  $\lambda/k \simeq -1 - \lambda_0/k$  においては  $|g_1| \gg |g_I|$  が成り立ち、照射側の  $kr > 1$  においては  $g_1$  が拡散散乱の形でインコヒーレント散乱を支配する。(159) の第二項により  $kr$  が十分大きくない場合には両者が干渉するため、 $g_1(x, z; \lambda + \lambda_0)$  は

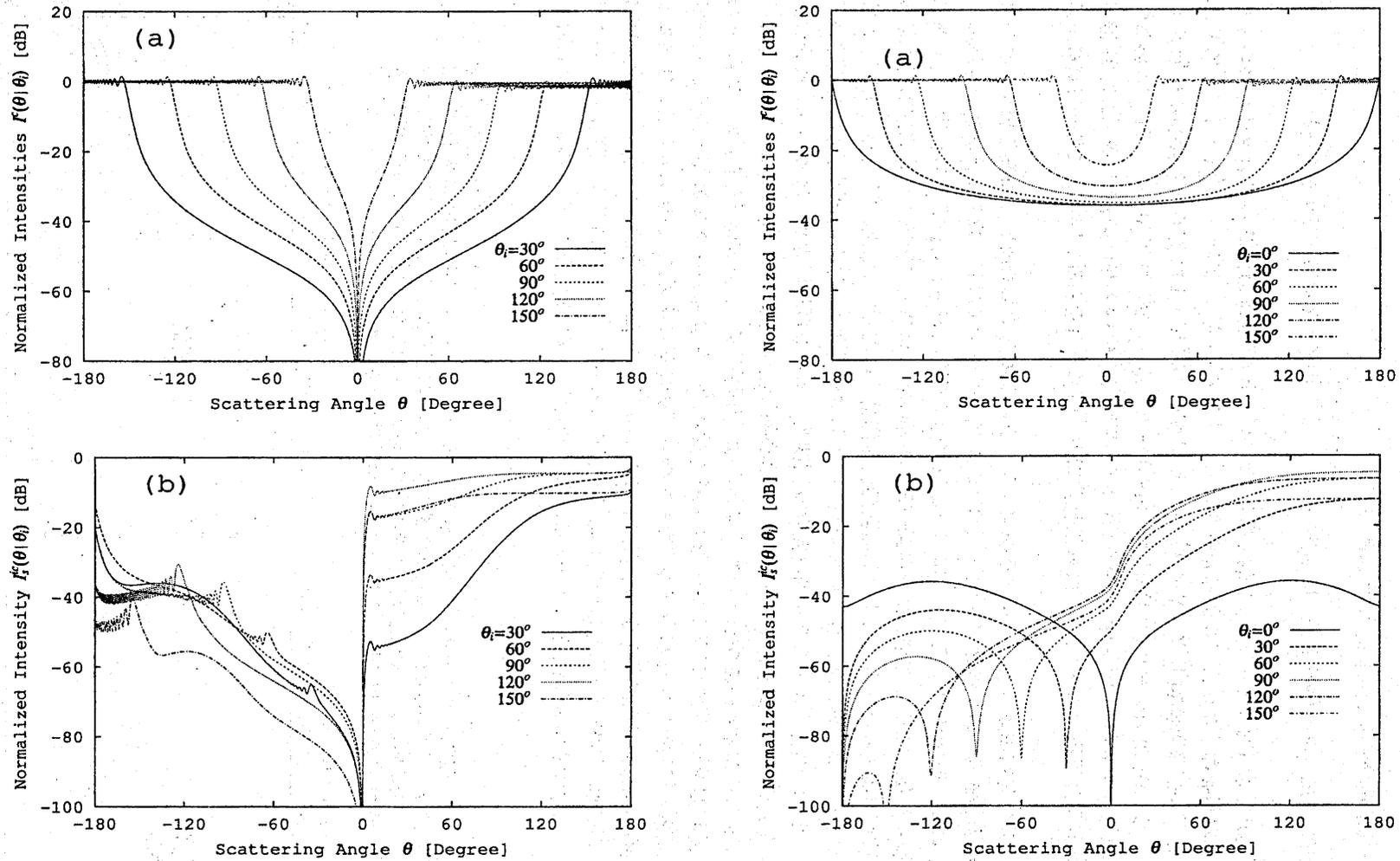


図 13 コヒーレント散乱とインコヒーレント散乱強度の入射角  $\theta_i$  の相違による変化 ( $r = 100\lambda$ ) (左側 TM, 右側 TE)。  $I_c^0$  の RB と SB 及び  $I_i^c$  の  $\theta = -\theta_i$  でのピーク (TM) ないしはディップ (TE) が入射角に追従している。 TM 波については、  $\theta_i = 120^\circ$  の時が  $\theta = -\theta_i$  でのピーク値が最も大きくなっている。  $\theta_i < 90^\circ$  では、  $\theta \rightarrow -180^\circ$  で  $I_i^c$  は増加するが、  $\theta_i > 90^\circ$  では飽和する。一方、  $\theta_i \geq 90^\circ$  の時、水平散乱角近傍の拡散散乱が最も顕著になる。特に  $I_i^c$  は照射側で全体的に最大となる。

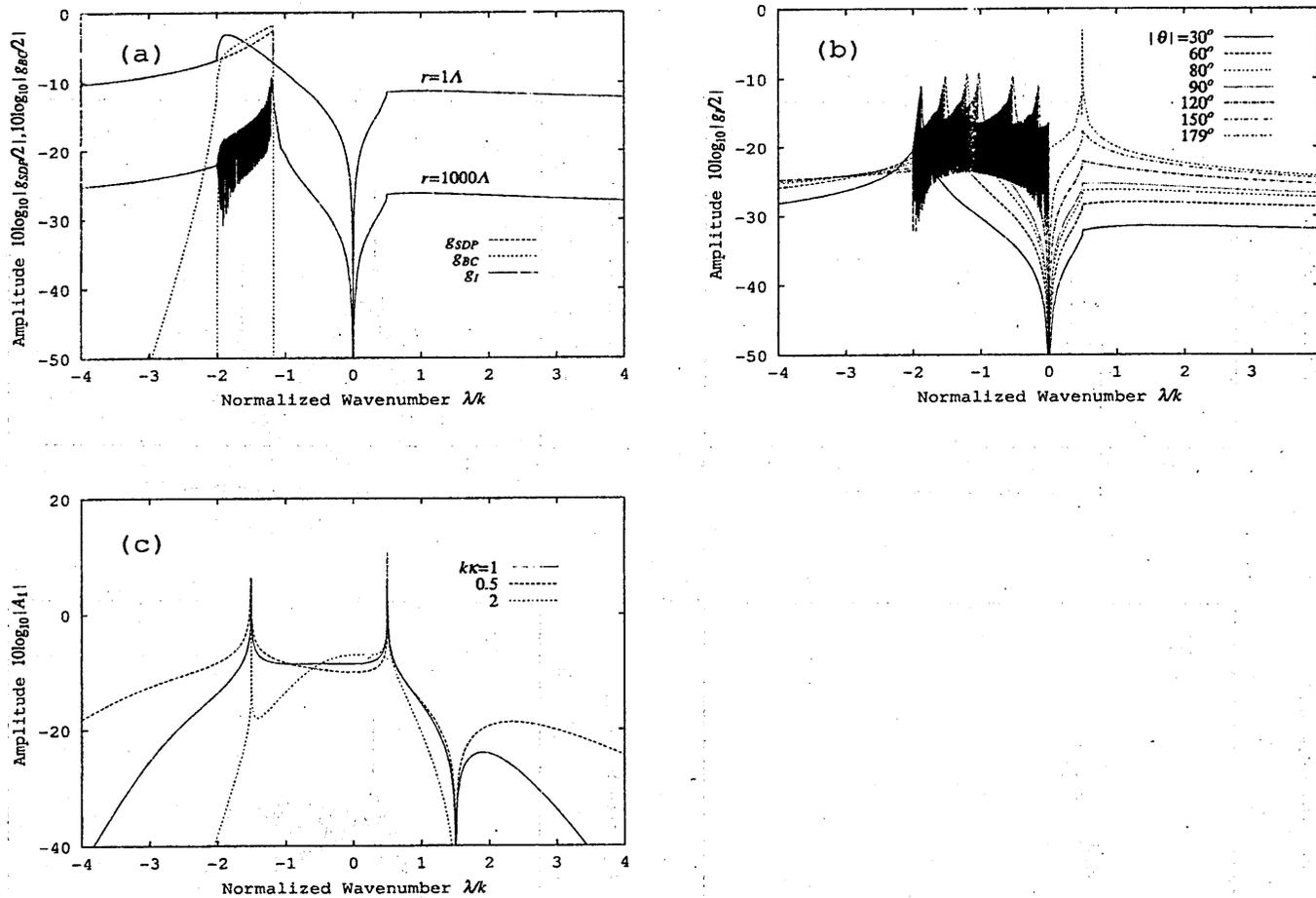


図 14 影側の 1 次インコヒーレント散乱を決定する  $|g_I(r \cos \theta + l, r \sin \theta; \lambda, \lambda_0)|, |g_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda, \lambda_0)|, |g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda, \lambda_0)|, |A_1(\lambda|\lambda_0)|$  の振舞い ( $\theta_i = 60^\circ$  (i.e.  $\lambda_0 = k$ ),  $k\sigma = \pi/10$ ,  $k\kappa = 1$ ). (a)  $|g_I|, |g_{SDP}|, |g_{BC}|$  ( $|\theta| = 80^\circ, r = 1A, 1000A$ ).  $|g_{SDP}|, |g_{BC}|$  and  $|g_I|$  は  $\lambda/k = 0$  において予想どおり消滅する。  $|g_{BC}(k, r; \lambda, \lambda_0)|$  は予想どおり主に  $-2 < \lambda/k < -(1 + \cos |\theta|) \approx -1.17$  の範囲に現れる (特に  $r = 1000A$ )。そのような範囲の  $\lambda$  に対し、  $|g_{BC}|$  と  $|g_{SDP}|$  は境界  $\lambda/k \approx -1.17$  の近傍を除いて明かに  $(kr)^{-1}$  に比例して減衰している。  $|g_{SDP}|, |g_{BC}|$  は  $\lambda/k = -(1 + \cos |\theta|)$  で不連続となっているが、  $|g_I| = |g_{SDP} + g_{BC}|$  は連続である。さらにそのような範囲の  $\lambda$  に対し、  $|g_I|$  は  $g_{SDP}$  と  $g_{BC}$  との干渉によるリップルを持つ。  $\lambda/k = -(1 + \cos |\theta|)$  近傍のピークは、平坦な平滑平面上の左進行の自由伝搬モードである Rayleigh 波数  $k$  の波動によるエッジ回折波の励振を示唆している。(b) いくつかの散乱角  $|\theta|$  に対する  $|g_I|$ 。リップルは  $-2 < \lambda/k < -(1 + \cos |\theta|)$  の範囲にのみ現れる。ピークは常に  $\lambda/k \approx -(1 + \cos |\theta|)$  に現れる。観測点が影側の不規則半平面に近づくとき (i.e.  $|\theta| = 179^\circ$ )、もう一つの左進行の自由伝搬モードの影響により特徴的なピークが  $\lambda = 1 - \lambda_0/k$  に現れる。  $\lambda/k = -(1 + \cos \theta_i) = -1.5$  と  $1 - \cos \theta_i = 0.5$  の近傍で二つのスパイクを持つ。これらは各々、僅かに粗な不規則表面上の右及び左進行の TM 導波モードの存在を示唆する。  $k\kappa$  が大なれば、これらの二つのスパイクは非常に鋭くなるが、  $|A_1|$  自体は原点  $\lambda = 0$  に集中する。  $A_1(\lambda|\lambda_0)$  は波数変換因子  $\lambda_0(\lambda_0 + \lambda) - k^2$  を分子に持つため、  $\lambda/k = k/\lambda_0 - \lambda_0/k = 1.5$  で零点を持つ。

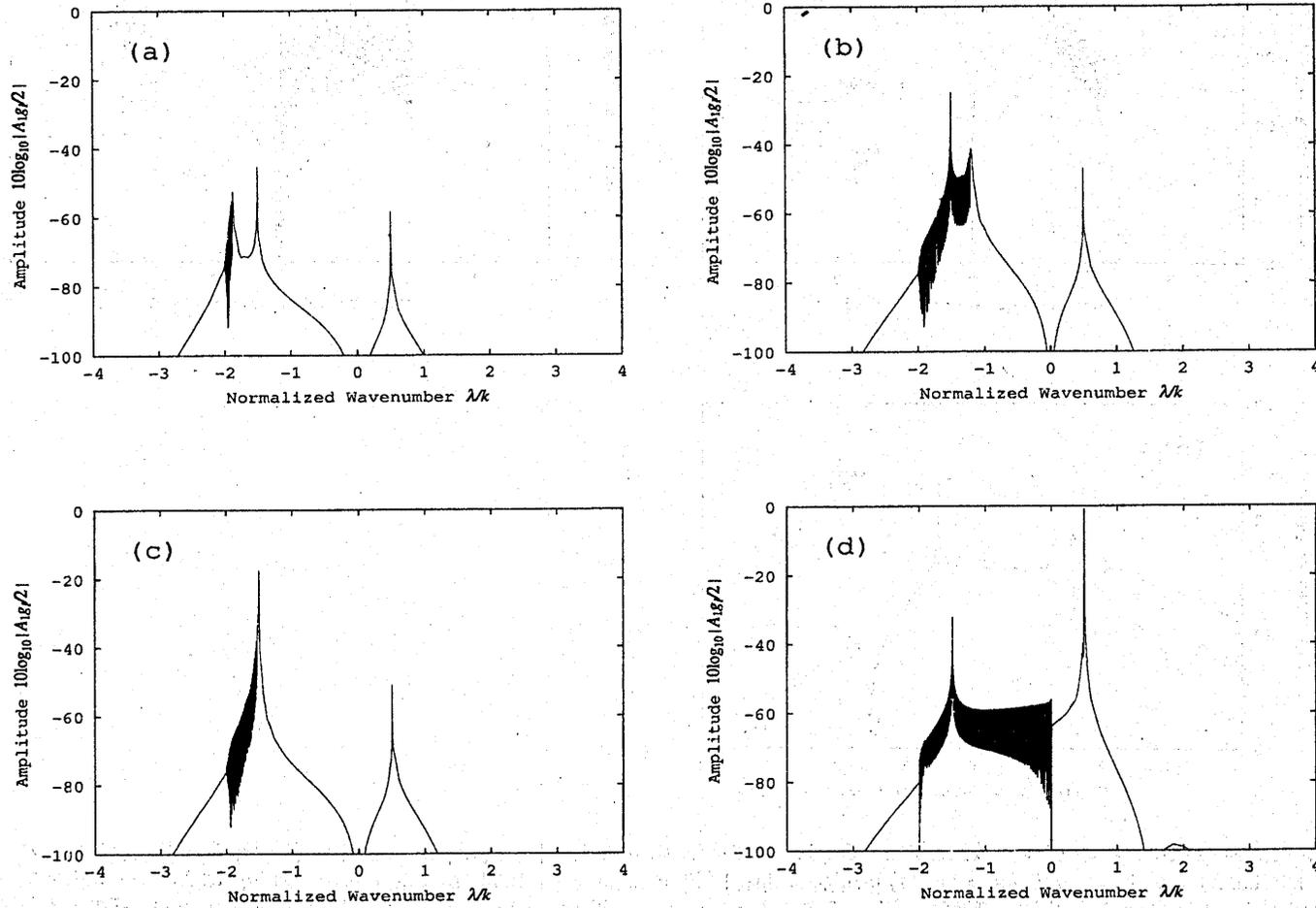


図 15 影側  $I_s^{ic}$  の被積分関数としての  $|A_1(\lambda)g_I(x, z; \lambda, \lambda_0)/2|$  の振舞い (図 14 のパラメータ)。 (a)  $|\theta| = 30^\circ$ , (b)  $|\theta| = 80^\circ$ , (c)  $|\theta| = 60^\circ$ , (d)  $|\theta| = 179^\circ$  のデータは図 14(c) の  $k\kappa = 1$  の  $|A_1|$  と図 14(b) の  $|g_I|$  の積より得られる。  $|A_1|$  からの寄与である二つのスパイクが  $\lambda/k = -(1 + \cos\theta_i) = -1.5, 1 - \cos\theta_i = 0.5$  に現れる。前者は後者と比較するとはるかに大きい寄与が大きい。 (a), (b) においては  $|g_I|$  に由来する別のスパイクが各々  $\lambda/k \approx -1.81, -1.17$  に現れている。よって  $|\theta| \approx |\theta_i|$  が成り立つとき (c),  $|A_1|$  と  $|g_I|$  からの二つのスパイクが重なり合い、影側インコヒーレントでのインコヒーレント散乱に強い影響を与え、積分の結果散乱のピークとなる。さらに  $|A_1|$  によるスパイクと  $|g_I|$  によるリップルが、影側インコヒーレント散乱における細かいリップルをもたらす。 (d) においても  $|A_1|$  と  $|g_I|$  からの二つのスパイクが重なり合い、不規則表面近傍の影側インコヒーレントでのインコヒーレント散乱への強い寄与となる。

観測点  $(x, z)$  とパラメータ  $\lambda$  に敏感に反応する。実際、 $\theta = 10^\circ \rightarrow 16^\circ \rightarrow 20^\circ$  と変化すると、 $|g_1|$  のピークの半値幅は広がる。領域 (II) の  $\theta = 150^\circ$  となる (b) では (118) に従って、 $g_1$  は  $-1 < (\lambda + \lambda_0)/k < \cos(\pi - |\theta|) \approx 0.866$  に対し伝搬平面波成分を持つことがわかる。よってそのような平面波成分の影響により、 $\theta \rightarrow 180^\circ$  の場合に  $I_s^{ic}$  が基本的には増加することになる。(c) より、照射側のインコヒーレント散乱では、 $g_1$  が支配的であることは明らかである。実際、拡散散乱を強く生じるような  $k\kappa \leq 2$  あるいは  $|\theta_i| > 10^\circ$  の場合は (156) の積分から  $g_I$  は省略可能であることが、いくつかの数値計算例からも支持されている。図 17 に  $I_s^{ic}$  を与える  $|A_1||g_1 + g_I/2|$  の詳細な振舞いを示す。(a) は  $|g_1 + g_I/2|$  を示しており、 $\theta = 10^\circ \rightarrow 16^\circ \rightarrow 20^\circ$  となるのに従ってピーク幅が広がる。しかし  $|A_1|$  を考慮した (b),(c) では、 $\theta = 10^\circ, 16^\circ, 20^\circ$  の中で  $\theta = 16^\circ$  に対する  $|A_1g_1|$  が最も大きく寄与することがわかる。これは影側で見られたような右進行の自由伝搬波と不規則表面上の右進行の TM 導波表面波との結合現象であり、照射側の領域 (I) の LGA においてリップルを生じる原因となる。ゆえに、 $k\sigma$  が大きくなるとエッジからの円筒波成分は振幅が減衰し位相回転が増大するため、 $|g_1|$  の振動は密にはなるものの振幅が縮小し、積分としての総和でそのようなリップルは消滅する。さらに、 $k\kappa$  が十分に大きいもしくは小さい場合は、各々不十分に狭帯域な積分もしくは十分に広帯域な積分により総和としての結合現象がほとんど生じなくなり、インコヒーレント散乱角度分布上のリップルは消滅する。また、 $k\sigma$  が大なれば  $|A_1|$  のスパイクの幅がより広がるため、同様に  $|g_1|$  が積分により平滑化され、結合現象の打ち消し合いが生じ、リップルが消滅することになる。領域 (II) の LGA におけるインコヒーレント散乱のリップルも同様なメカニズムで説明できる。既に図 16(b) に示したように (118) に従って  $g_1$  は  $-1 < (\lambda + \lambda_0)/k < \cos(\pi - |\theta|) \approx 0.866$  に対し伝搬平面波成分を持つことがわかる。よってそのような平面波成分の影響により、 $\theta \rightarrow 180^\circ$  の場合に  $I_s^{ic}$  が基本的には増加することになる。もちろん  $|A_1|$  のスパイクは積分より  $I_s^{ic}$  の角度分布上のリップルの意味で影響する。平面波成分が支配的な場合にはそれらの影響は小さいため、 $\theta \rightarrow 180^\circ$  に対しては角度分布上でリップルは埋没する。しかしながら  $g_1$  のエバネッセント波成分を励振するのに十分な程度に観測点が不規則半平面に近付く場合、 $|A_1|$  のスパイクは  $I_s^{ic}$  に再度影響を与える。(d),(e) を見れば、 $|A_1|$  のスパイクは  $\theta > 150^\circ$  では  $\lambda/k < -(1 + \cos \theta_i)$  に対応する  $g_1$  のエバネッセント波を、 $\theta > 170^\circ$  では  $\lambda/k > -1 + \cos \theta_i$  に対応する  $g_1$  のエバネッセント波を励振することがわかる。そして (d) に示したピークは (e) のそれよりも不規則表面近傍のインコヒーレント散乱に対し、より強い寄与を与える。そこで図 9(b) のインコヒーレントの計算で (156) の積分区間を強制的に  $[-k - \lambda_0, k - \lambda_0]$  として打ち切る、すなわち  $g_1$  のエバネッセント波の寄与を無視した計算結果を (f) に示す。明かに、 $\theta > 170^\circ$  における  $I_s^{ic}$  の増加は  $g_1$  のエバネッセント波の寄与からくることがわかる。すなわち不規則表面近傍でのインコヒーレント散乱の急激な増加は  $g_1$  が与えるエバネッセント波と不規則表面上の TM 導波表面波 (特に右進行の波動) との結合によるものである。

**影側半平面近傍のインコヒーレント波動** 図 12 を全コヒーレント散乱強度  $I^c(\theta|\theta_i)$  とインコヒーレント散乱強度  $I_s^{ic}(\theta|\theta_i)$  ( $\theta_i = 60^\circ, k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1, r = 10\lambda, 1000\lambda$ ) の比較のために示す。領域 (II) において入射波とコヒーレント散乱波との干渉縞を生じることがわかる。一方、領域 (III) においては、入射波と SFW が打ち消しあってコヒーレントなエッジ回折波のみが残るものの、全コヒーレント散乱としては'影'となる。よってインコヒーレント散乱波が顕在化する。特に  $\theta < -160^\circ$  でインコヒーレント散乱が全コヒーレント散乱を上まわる。(b) において、不規則半平面近傍では全波動場はインコヒーレント散乱が支配的になる。一般的には、僅かに粗な不規則表面からの僅かなインコヒーレント散乱波を検出するためには、圧倒的な入射波やコヒーレント波の影響を考慮しなければならない。しかし不規則半平面のそのような領域では'インコヒーレント波動場'そのものを直接的に、すなわち入射波に対する遮蔽や入射波を除去する信号処理等を用いずとも観測できることを示している。

## 7 むすび

本報告では、不規則な表面を持つ半平面による TM 平面波散乱を Wiener-伊藤表現を用いた確率汎関数法と Wiener-Hopf 法の併用により解析し、不規則表面による'衣を着た'散乱と端部でのエッジ回折との'弱い'相互作用を含んだ近似解を非一様確率場の Wiener-伊藤展開の形に求めた。展開係数である Wiener 核は観測点に依存

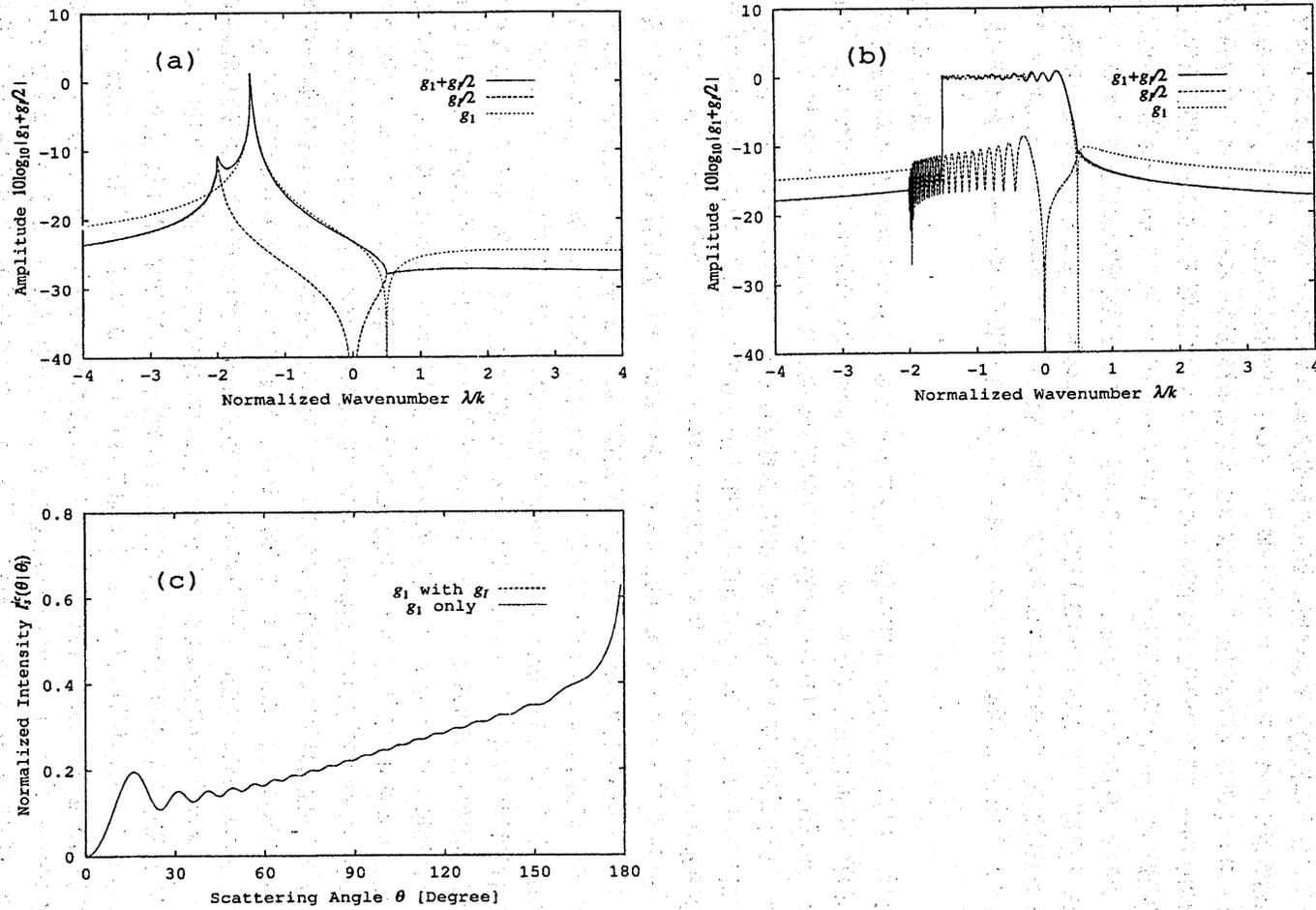


図 16 照射側の 1 次インコヒーレント散乱を決定する  $|g_1(r \cos \theta + l, r \sin \theta; \lambda + \lambda_0) + g_I(r \cos \theta + l, r \sin \theta; \lambda, \lambda_0)/2|, |g_1|, |g_I|$  の振舞い ( $\theta_i = 60^\circ$  (i.e.,  $\lambda_0 = k$ ),  $k\sigma = \pi/10$ ,  $k\kappa = 1$ )。 (a)  $\theta = 16^\circ, r = 10\lambda$  に対する  $|g_1|, |g_I/2|, |g_1 + g_I/2|$ 。予想どおり  $|g_1(x, z; \lambda + \lambda_0)|$  は  $\lambda + \lambda_0 = k$  が満たされる  $\lambda/k = -1 - \lambda_0/k = -1.5$  においてピークを持ち、 $\lambda + \lambda_0 = 0$  が満たされる  $\lambda/k = 1 - \lambda_0/k = 0.5$  で零点を持つ。 $\lambda/k \approx -1 - \lambda_0/k$  では  $|g_1| \gg |g_I|$  であるため、照射側でのインコヒーレント散乱は  $g_1$  が支配的である。 (b)  $\theta = 150^\circ$  の場合。予想どおり、 $-1.5 < \lambda/k < 1 - \lambda_0/k \approx 0.366$  に対し  $|g_1(x, z; \lambda + \lambda_0)|$  は伝搬平面波成分を持つ。このような平面波成分は照射側での拡散散乱を引き起こす。 (c) 図 9(b) に示した  $I_s^{ic}(\theta \geq 0^\circ)$  と  $g_I$  を省略した計算結果との比較。  $I_s^{ic}$  の二つの評価においてその差はほとんどない。

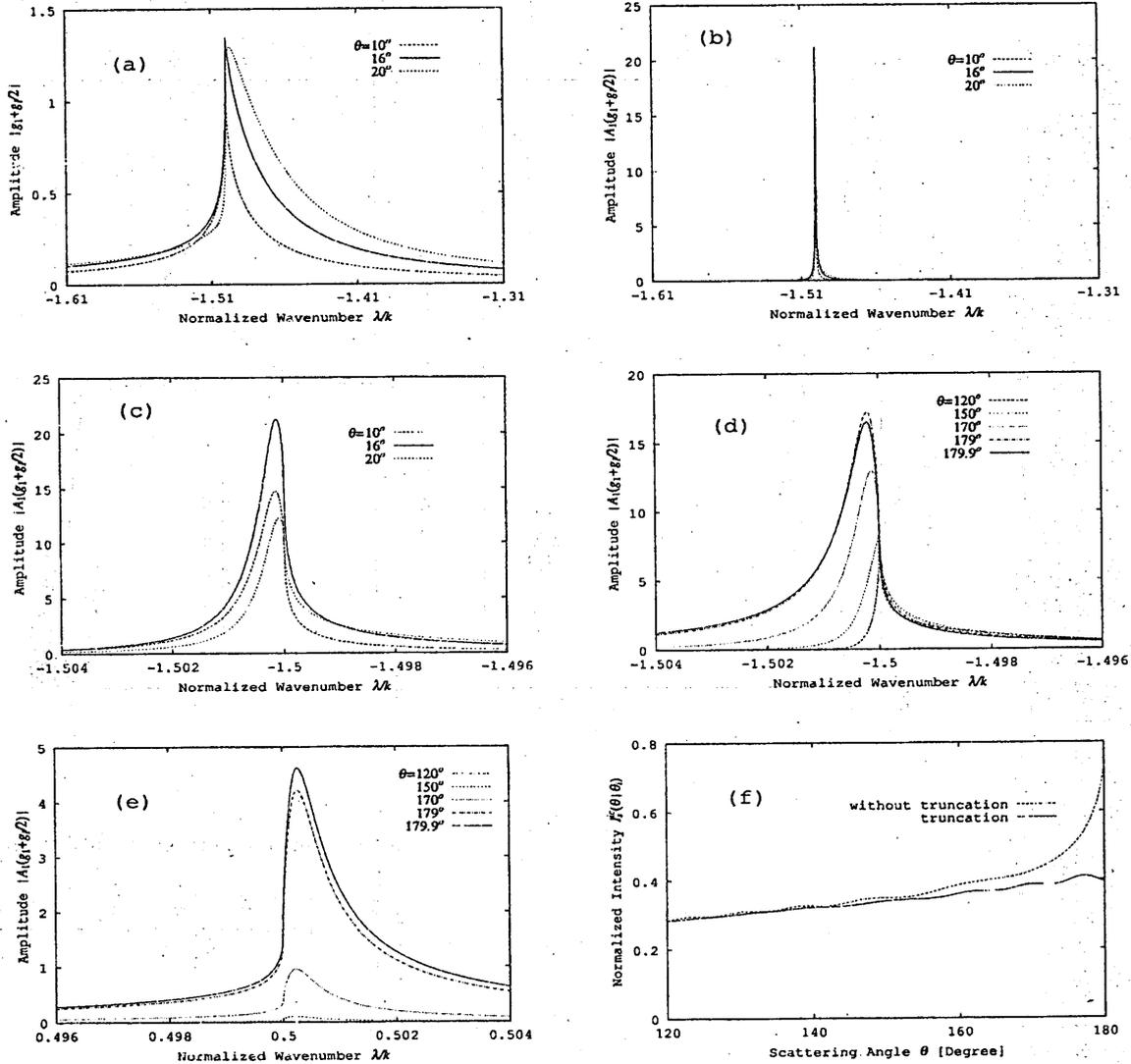


図 17 照射側の 1 次インコヒーレント散乱を決定する  $|g_1 + g_I/2|, |g_1|, |g_I|$  の振舞い ( $\theta_i = 60^\circ$  (i.e.,  $\lambda_0 = k$ ),  $k\sigma = \pi/10$ ,  $k\kappa = 1$ )。 (a) 図 9 の  $r = 10\lambda$  に対する  $I_s^{ic}$  の  $\theta \approx 16^\circ$  付近のリップルに対応する散乱角  $\theta = 10^\circ, 16^\circ, 20^\circ$  での  $|g_1(x, z; \lambda + \lambda_0) + g_I(x, z; \lambda, \lambda_0)/2|$  の拡大図。明かに、 $\theta = 20^\circ$  に対する  $|g_1|$  は  $\theta = 10^\circ, 16^\circ$  よりも大きな値をとる。 (b) (a) のデータにさらに  $|A_1(\lambda; \lambda_0)|$  を乗じたもの。  $\lambda/k \approx -1 - \lambda_0/k = -1.5$  に集中する。 (c) (b) をさらに拡大した図。明かに、 $\theta = 16^\circ$  に対する  $|(g_1 + g_I/2)A_1|$  が  $\theta = 10^\circ, 20^\circ$  の場合よりもインコヒーレント散乱に強い影響を与える。 (d) 右進行の TM 導波モードにかかわる  $\lambda/k \approx -1.5$  での  $|A_1| |g_1 + g_I/2|$  のピークの拡大図 ( $\theta = 120^\circ, 150^\circ, 170^\circ, 179^\circ, 179.9^\circ$ )。  $\lambda/k > -1.5$  では  $|A_1| |g_1 + g_I/2|$  はほとんど変化しない。しかし、 $\lambda/k < -1.5$  かつ  $\theta \rightarrow 180^\circ$  の場合は変化が大きい。 (e) (d) と同じ。ただし左進行の TM 導波モードにかかわる  $\lambda/k \approx 0.5$  でのもう一つのピークの拡大図。  $\theta < 150^\circ$  では  $|A_1| |g_1 + g_I/2|$  は非常に小さい。  $\theta > 170^\circ$  では急激に立ち上がる。 (f) 図 9(b) で示した  $r = 10\lambda$  に対する  $I_s^{ic}$  と、エバネッセント波の寄与を取り除いて評価した同じ  $I_s^{ic}$  の比較。  $\theta \rightarrow 180^\circ$  での  $I_s^{ic}$  の増加はエバネッセント波の寄与によるものである。

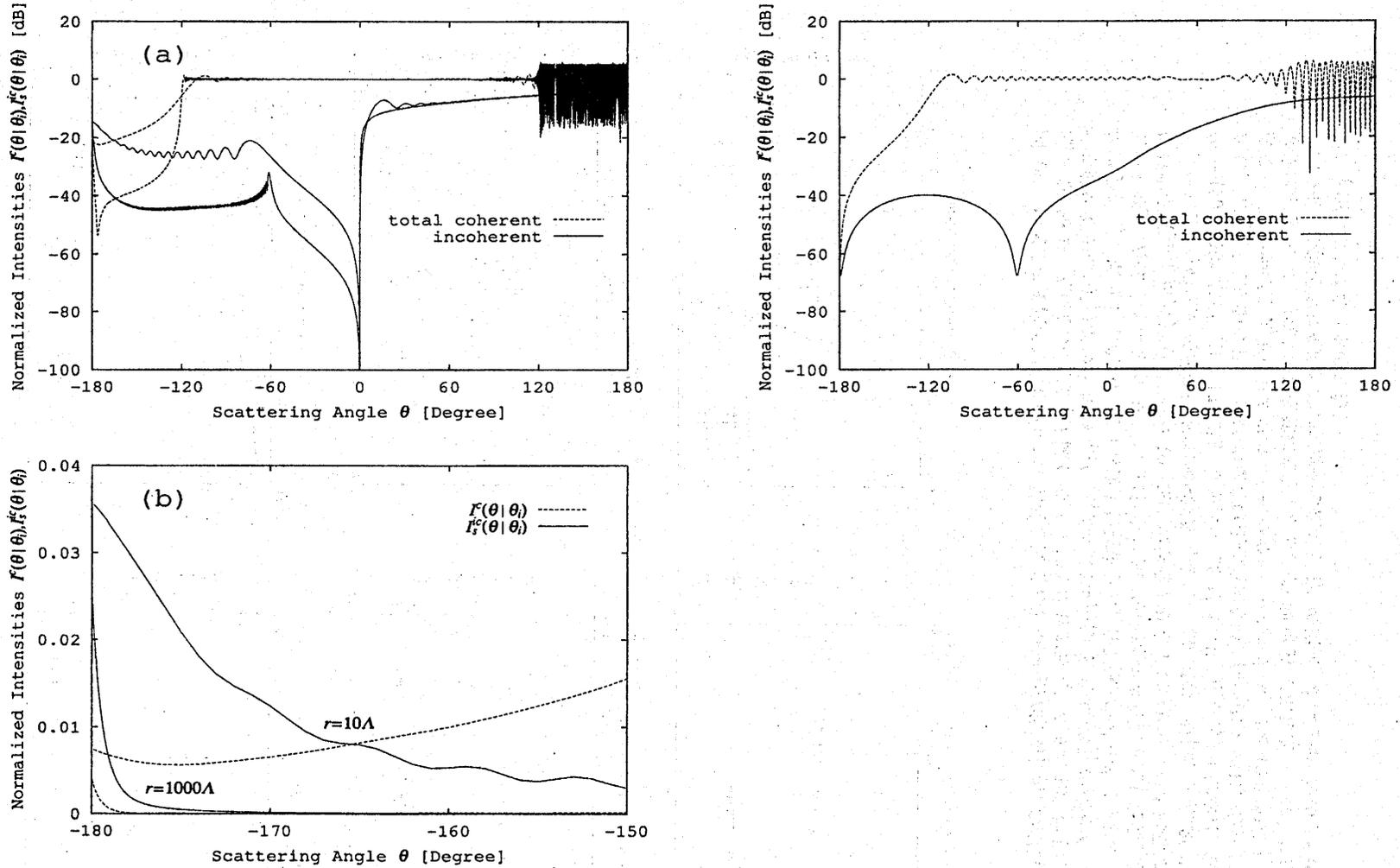


図 18 全コヒーレント散乱強度とインコヒーレント散乱強度 ( $\theta_i = 30^\circ, k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1, r = 10\Lambda, 1000\Lambda$ ) の計算結果 (左側)。比較のため TE 波入射の摂動解析結果 ( $k\kappa = 1, r = 10\Lambda$ ) も示す (右側)。(a)  $I^c$  と  $I_s^c$ 。領域 II ( $\theta > 120^\circ$ ) では、入射波とコヒーレント散乱波 (SRW) との干渉縞を生じる。一方、領域 III ( $\theta < -120^\circ$ ) では、入射波と不規則半平面からの影形成波 (SFW) とが打ち消しあってエッジからのコヒーレントな円筒波のみが残り、影となる。よってそのような領域  $\theta < -160^\circ$  ではインコヒーレント散乱が顕著になる。TE ではほぼ全域でインコヒーレント散乱強度は全コヒーレント散乱強度をはるかに下まわる。(b) (a) を領域  $\theta < -150^\circ$  で拡大しリニアスケール表示した図。不規則半平面近傍ではインコヒーレント波動場は全コヒーレント波動場を凌駕する。強度比  $I_s^{ic}/I^c$  ( $\theta = -179.9^\circ$ ) は  $r = 10\Lambda$  ではおよそ 4.79、 $r = 1000\Lambda$  では 6.32 となる。 $(I_s^{ic}/I^c$  は  $r = 10\Lambda$  では  $\theta = -179.1^\circ$  に対し最大値 4.92、 $r = 1000\Lambda$  では 171.2 に対し最大値 171.2 をとる。)

しており、無限に広い不規則表面の場合の多重繰り込み Wiener 核と不規則半平面による散乱及び回折を記述する三種類の Fourier 積分により構成される。Fourier 積分の積分核(回折核)は不規則表面による多重散乱効果を含むため評価が容易でないため、解の発散が生じない範囲で多重散乱効果を無視することで回折核を評価した。この場合、三種類の Fourier 積分は、一つは Fresnel 積分、残り二つは Fresnel 積分と最急降下路に沿った積分と分岐線に沿う積分も用いて書ける。よって TE 波の場合と同じく、散乱波に対し不規則表面の影響は、照射側では主に伝搬平面波成分に生じるという意味で強く、影側はエッジ回折波成分に対して起こるという意味で弱く現れることを指摘した。得られた波動場の表現を用いて、コヒーレント及びインコヒーレント散乱の角度分布を種々のパラメータについて数値的に計算し、具体的に散乱特性の評価と議論を行なった。その結果、エッジからある程度離れると、影側のインコヒーレント散乱パターンに対し、逆鏡面反射方向近傍においてピークとそれに伴うリップルを生じること、表面に近い LGA において強度の増加を生じること、また照射側においてエッジからの距離がある範囲にあるとき散乱パターンがリップルを持ち、特に LGA で著しいことがわかった。これらは不規則表面上の TM 導波表面波とエッジ回折波との結合現象を表している。

## 文献

- [1] A.Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, vol 1,2, New York: Academic(1978)
- [2] P.Beckmann and A.Sppichichino, *The scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, New York: Pergamon(1963)
- [3] F.G.Bass and I.M.Fuks, *Wave Scattering From Statistically Rough Surfaces*, New York: Pergamon(1979)
- [4] J.A.Ogilvy, *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces*, Bristol: Hilger(1991)
- [5] Voronovich A G, *Wave Scattering from Rough Surfaces (Springer Series on Wave Phenomena)* (Springer, Berlin, 1994)
- [6] Elfouhaily T M and Guerin C-A, Topical review: A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces, *Waves in random media* 14, R1-R40(2004)
- [7] 安藤真, 電磁波問題の基礎解析法(山下榮吉監修) 第7章 幾何光学的回折理論, 電子情報通信学会(1987)
- [8] R.C.Hansen (Editor), *Geometric Theory of Diffraction*, IEEE Press(1981)
- [9] T.B.A.Senior and J.L.Volakis, *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics*, IEE(1995)
- [10] 林嘉男, “近似境界条件を満たす開曲面誘電体板による散乱界の解析”, 電磁界理論研究会資料 EMT96-67 pp.109-118(1995)
- [11] J.Nakayama, Y.Tamura and T.Nishio, “Scattering and diffraction of a plane wave by a randomly rough half-plane”, *Waves in random media* 5 4 pp.443-459(1995)
- [12] Y.Tamura and J.Nakayama, “Scattering and diffraction of a plane wave from a randomly rough strip”, *Waves in random media* 6 pp.387-418(1996)
- [13] Y.Tamura, J.Nakayama and K.Komori, “Scattering and diffraction of a plane wave by a randomly rough half-plane: Evaluation of the second-order perturbation”, *IEICE Trans. Electro.* E80-C pp.1381-1387(1997)
- [14] S.O.Rice, “Reflection of electromagnetic waves from slightly random surfaces”, *Comm.Pure and Appl.Math.* 4 pp.351-378(1951)
- [15] 田村安彦, 中山純一, “ランダムストリップによる平面波の散乱 III(Neumann 条件の解に関する考察)”, 輻射科学研究会資料 RS94-10(1994)
- [16] 中山純一, 不規則表面による波動散乱理論, 京都大学 博士学位論文(1982)
- [17] H.Ogura and N.Takahashi, *Scattering, Radiation and Propagation over Two-dimensional Random Surface - Stochastic Functional Approach - Progress In Electromagnetics Research*, PIER 14 (1996)
- [18] 小倉久直, 電磁波問題解析の実際(山下榮吉編) 第5章 不規則表面による電磁波散乱の解析, 電子情報通信学会(1993)
- [19] B.Noble, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of the Partial Differential Equations* Oxford: Pergamon(1958)
- [20] Y.Tamura and J.Nakayama, “Mass operator for wave scattering from a slightly random surface”, *Waves in random media* 9 pp.341-368(1999)

- [21] Y.Tamura and J.Nakayama, "TM plane wave scattering and diffraction from a randomly rough half-plane: (part I) Derivation of the random wavefield representation", *Waves in Random and Complex Media* **16**, No. 1, pp.23-42(2006)
- [22] Y.Tamura and J.Nakayama, "TM plane wave scattering and diffraction from a randomly rough half-plane: (part II) An evaluation of the diffraction kernel", *Waves in Random and Complex Media* **16**, No. 1, pp.43-67(2006)
- [23] 田村安彦, 不規則表面とゆらぎのある薄膜による波動の散乱回折理論, 京都工芸繊維大学 博士学位論文 (2005)
- [24] 小倉久直, "物理・工学のための確率過程論", コロナ社 (1978)
- [25] J.Nakayama, "Scattering from a random-surface: Linear equations for coefficients of Wiener-H ermite expansion of the wave field", *Radio Sci.* **21** pp.707-712(1986)
- [26] A.Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*, New York: Academic(1947)
- [27] D.S.Jones, *The Theory of Electromagnetism*, Oxford: Pergamon(1964)
- [28] H.Ogura and J.Nakayama, "Initial-value problem of the one-dimensional wave propagation in a homogeneous random medium", *Phys. Rev. A* **11** pp.957-962(1975)
- [29] L.Rayleigh, "On the dynamical theory of gratings", *Proc. Roy. Soc.* **A79** p.399(1907)
- [30] J.Nakayama, "A note on the guided complex waves supported by a slightly random surface", *IECE Trans. E-66* pp.202-206(1983)
- [31] Y.Tamura, unpublished work(1999)
- [32] M.Born and E.Wolf, *Principles of Optics 4th edition* Pergamon(1970)
- [33] Y.Tamura, unpublished work(2001)
- [34] 田村安彦, 中山純一, "不規則半平面による TM 平面波の散乱と回折 I", 電磁界理論研究会資料 EMT00-33(2000)
- [35] J.Nakayama, H.Ogura and M.Sakata, "A probabilistic theory of electromagnetic scattering from a random rough surface 1, Horizontal polarization, 2, Vertical polarization" *Radio Sci.* **16** pp.831-847,847-53(1981)
- [36] J.Nakayama, "Anomalous scattering from a slightly random surface", *Radio Sci.* **17** pp.558-564(1982)
- [37] H.Ogura and N.Takahashi, "Scattering of waves from random rough surface -reciprocal theorem and backscattering enhancement", *Waves in random media* **5** pp.223-242(1995)
- [38] H.Ogura, T.Kawanishi, N.Takahashi and Z.L.Wang, "Scattering of electromagnetic waves from a slightly random surface -reciprocal theorem, cross-polarization and backscattering enhancement", *Waves in random media* **5** pp.461-495(1995)
- [39] 田村安彦, 中山純一, "不規則 Neumann 表面における波動の局在", 電磁界理論研究会資料 EMT99-131 pp.65-74(1999)
- [40] Y.Tamura and J.Nakayama, "An analytical expression of the incoherent wavefield on a slightly random Neumann surface: Wave localization", *Proc. PIERS'00(Cambridge)* p.70(2000)
- [41] 田村安彦, 中山純一, "不規則 Neumann 表面上のインコヒーレント波動場の計算", 電子情報通信学総合大会予稿集 CD-ROM C-1-26(2004)
- [42] 田村安彦, 中山純一, "僅かに粗な Dirichlet 不規則表面における複素モードについて", 電磁界理論研究会資料 EMT98-170 pp.49-56(1998)
- [43] M.Abramowitz and I.A.Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover(1958)
- [44] 田村安彦, ランダムなストリップによる波動散乱理論, 京都工芸繊維大学 修士学位論文 (1992)
- [45] L.B.Felsen and N.Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice Hall(1973)
- [46] 白井宏, 応用解析学入門 - 複素関数論・フーリエ解析・ラプラス変換 -, コロナ社 (2002)
- [47] Y.Tamura, unpublished work(1997)
- [48] Y.Tamura, unpublished work(1992)
- [49] Y.Tamura, unpublished work(2002)

# 不規則半平面による TM 平面波の 散乱と回折

- 回折核の精密評価 -

田村安彦<sup>1</sup> 中山純一<sup>2</sup>

(京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科 電子システム工学部門)

1 ytamura@kit.ac.jp

2 nakayama@kit.ac.jp

2006年12月15日(金)

輻射科学研究会

(於 京都工芸繊維大学 1号館 3F 大学院会議室)

## 1 はじめに

先の報告 [1] においては、TM 平面波入射に対する不規則半平面からの波動散乱回折を確率汎関数法と Wiener-Hopf 法の併用により解析し、そのランダム波動場の表現を示した。同時にランダム波動場を記述する Fourier 積分の積分核 (回折核) を、それが内蔵する不規則表面による多重散乱効果を見捨てることにより近似評価した。コヒーレント及びインコヒーレント散乱強度の角度分布を数値計算し、コヒーレント散乱では照射側では強度の減少を、影側の半平面側 LGA においても僅かながら減少することを示した。インコヒーレント散乱に関しては照射側ではエッジからある程度の距離範囲において空間側の LGA において散乱パターンに対しリップルを生じること、影側においてもエッジからある程度離れた場合、散乱パターン上で入射角で定まる散乱角の近傍においてピークとそれに伴うリップルを生じること、表面に近い範囲において強度が急劇に増加することが分かった。インコヒーレント散乱におけるこれらの特徴的な現象は、不規則表面上の TM 導波表面波との結合により生じることと議論した。

本報告では、ランダム波動場を記述する Fourier 積分の回折核を不規則表面による多重散乱効果を取り入れて精密に評価する試みについて種々議論を行なう。表記等は先の報告 [1] に倣うものとする。

本報告においては、時間因子を  $e^{-2\pi if_i t}$  として省略する。

## 2 ランダム波動場の表現 II

先の報告 [1] の (84), (85) で示した二つの Fourier 積分  $g_1, g_2$

$$g_1(x, z; \lambda_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_N(\lambda_i) G(s, \lambda_i) e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds \quad (1)$$

$$g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_N(\lambda_i) G(s - \lambda_s, \lambda_i) e^{-\gamma(s)|z| - isx} ds \quad (2)$$

を、回折核  $G$  が内蔵するマスオペレータ  $M_N(s)$  を含んだ形式で精密に評価しよう<sup>†</sup>。以下の議論では、具体的な数値計算のため不規則表面のスペクトル密度  $|F(\lambda)|^2$  を先の報告 [1] と同じく Gauss 型とする。数値計算ではパラメータを入射波長を  $\Lambda = 1$  (単位長) で規格化し、波数  $k = 2\pi$ , 粗さ  $k\sigma = \pi/10$  (i.e.  $\sigma = 0.05\Lambda$ )、相関距離  $k\kappa = 1$  (i.e.  $\kappa \approx 0.16\Lambda$ ) あるいは 2 とする。

### 2.1 分解関数 $\Delta_N^+(s), \Delta_N^-(s)$ の近似解析表現

先の報告 [1] の (68) で示した分解表現は数学的に厳密ではあるが、数値計算の観点からは実用的な表現とは言えない。そこで数値計算に適した表現を求めてみる。

インピーダンス半平面問題における分解関数 文献 [2] によると単位面積当たり  $R_e[\Omega]$  のインピーダンス半平面による平面波の回折・散乱の波動場表現において以下の解析的な核関数の積分解が存在する (表記はそのままを示す)。

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \bar{\eta} \right)^{-1} = K_+(\bar{\eta}, \lambda) K_-(\bar{\eta}, \lambda) = K_+(\bar{\eta}, \lambda) K_+(\bar{\eta}, -\lambda) \quad (3)$$

$$K_+(\bar{\eta}, \cos \alpha) = \frac{4}{\sqrt{\bar{\eta}}} \cos \frac{\alpha}{2} \left\{ \frac{\psi_\pi(3\pi/2 - \alpha - \theta) \psi_\pi(\pi/2 - \alpha + \theta)}{(\psi_\pi(\pi/2))^2} \right\}^2 \cdot \left\{ \left[ 1 + \sqrt{2} \cos \frac{\pi/2 - \alpha + \theta}{2} \right] \left[ 1 + \sqrt{2} \cos \frac{\pi/2 - \alpha - \theta}{2} \right] \right\}^{-1} \quad (4)$$

<sup>†</sup>  $g_3(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  については省略する。

$$\sin \theta = \frac{1}{\bar{\eta}} \quad (5)$$

ただし、 $\lambda = \cos \alpha$  ( $\lambda$ :規格化波数スペクトル変数、 $\alpha$ :角スペクトル変数)、 $\bar{\eta} = 2R_e/Z_0$  ( $\bar{\eta}$ :規格化インピーダンス、 $Z_0 \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ :真空の個有インピーダンス) である。(3) より  $\bar{\eta}$  に関する性質が分かる。

$$K_+(\bar{\eta} \rightarrow \infty, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}}}, \quad K_+(\bar{\eta} = 0, \lambda) = \sqrt{1-\lambda} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$\psi_\pi(\alpha)$  は Maliuzhinets の半平面関数<sup>†</sup>と呼ばれ、以下のように定義されている。

$$\psi_\pi(\alpha) = \exp \left\{ -\frac{1}{8\pi} \int_0^\alpha \left( \frac{\pi \sin u - 2\sqrt{2}\pi \sin(u/2) + 2u}{\cos u} \right) du \right\} \quad (6)$$

次の性質を持つ。

$$\begin{aligned} \psi_\pi(\alpha) &= \frac{\{\psi_\pi(\pi/2)\}^2 \cos(\alpha/4 - \pi/8)}{\psi_\pi(\alpha - \pi)} \\ \psi_\pi(-\alpha) &= \psi_\pi(\alpha) \\ \psi_\pi(\alpha^*) &= \psi_\pi^*(\alpha) \end{aligned}$$

**近似分解関数** 非解析的領域の複素数指数  $s$  に対してマスオペレータを求めることは、数値計算の手間と分岐現象の扱いの観点から難しい [3-5]。そこで

$$M_N(s) \approx M_N(\text{Re } s) \quad (7)$$

で近似、すなわち、実  $s$ -軸上のマスオペレータをそのまま複素  $s$ -平面へと拡張し、(12) で用いる。従って、核関数 (or 共振因子)  $\Delta_N(s)$  をそれが内蔵する mass operator を  $s$  について定数と見なし、

$$\lambda = s/k, \quad \bar{\eta} = \frac{k}{iM_N(s)}$$

と対応付けることで、形式的に (3),(4) の積分解を適用する。

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(s)}{2\Delta_N(s)} &= \frac{\gamma(s)}{\gamma(s) + M_N(s)} \\ &= \frac{k}{iM_N(s)} K_+ \left( \frac{k}{iM_N(s)}, \frac{s}{k} \right) K_- \left( \frac{k}{iM_N(s)}, \frac{s}{k} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

よって、 $\Delta_N(s)$  の分解関数  $\Delta_N^+(s)$ ,  $\Delta_N^-(s)$  は以下のように形式的に書ける。

$$\Delta_N^+(s) = \sqrt{\frac{k}{16i}} \{\psi_\pi(\pi/2)\}^4 \frac{\left\{ 1 + \sqrt{2} \cos \frac{\varpi(s) + \vartheta(s)}{2} \right\} \left\{ 1 + \sqrt{2} \cos \frac{\varpi(s) - \vartheta(s)}{2} \right\}}{\{\psi_\pi(\varpi(s) + \vartheta(s))\psi_\pi(\varpi(s) - \vartheta(s))\}^2} \quad (9)$$

$$\Delta_N^-(s) = \sqrt{\frac{k}{16i}} \{\psi_\pi(\pi/2)\}^4 \frac{\left\{ 1 + \sqrt{2} \sin \frac{\varpi(s) - \vartheta(s)}{2} \right\} \left\{ 1 + \sqrt{2} \sin \frac{\varpi(s) + \vartheta(s)}{2} \right\}}{\{\psi_\pi(\pi - \varpi(s) + \vartheta(s))\psi_\pi(\pi - \varpi(s) - \vartheta(s))\}^2} \quad (10)$$

ただし、

$$\varpi(s) = \arccos \left( \frac{s}{k} \right) \quad (11)$$

$$\vartheta(s) = \arccos 2 \left( \frac{iM_N(s)}{k} \right) \quad (12)$$

<sup>†</sup>なお、文献 [2] には付録として  $K_+(\bar{\eta}, \lambda)$  を計算する Fortran77 サブルーチンプログラムが示されている。このサブルーチンは分岐の取り方を誤っているため注意が必要である。しかし、半平面関数  $\psi_\pi(\alpha)$  の計算サブルーチンは妥当な結果を与えるようである。本報告では  $\psi_\pi(\alpha)$  の計算には若干修正改良して用いている。

である。この段階では逆  $\cos$  関数  $\arccos, \arccos 2$  の分岐の取り方が定まっていなため、関数  $\varpi(s), \vartheta(s)$  は数学的及び数値計算の意味で未確定で自由度がある。まず  $\varpi(s)$  に対しては  $M_N \equiv 0$  とした場合との対応付けから、先の報告 [1] の (105) で定義した  $\cos^{-1}$  とすればよい。すなわち分岐は  $1+i0 \rightarrow 1+i\infty, -1-i0 \rightarrow -1-i\infty$  となる直線である。次に  $\vartheta(s)$  に関しては例えば実数指数  $\lambda$  に対するのマスオペレータ  $M_N(\lambda)$  の値を複素  $\eta$ -平面で考えたときの挙動を考慮しなければならない。図 1 に (12) の引数  $iM_N(\lambda)/k$  の軌跡と  $\cos^{-1} \eta$  の分岐線を示す。明らかに分岐線  $-1-i0 \rightarrow -1-i\infty$  と交差する。実際このような分岐の取り方で計算すると図 2(a) のようになり実  $s$ -軸上の値にもかかわらず不連続を生じる。このため分岐線の取り方を  $1+i0 \rightarrow \infty+i0, -1-i0 \rightarrow -\infty-i0$  のようにとれば交差なくなり、図 2(b) に示すように連続になる。具体的には、逆  $\cos$  関数  $\arccos, \arccos 2$  は各々以下のように定義する。

$$\arccos(\eta) \equiv \pi/2 + i \log^F \left[ i \left\{ \eta + \sqrt{-i(\eta+1)} \sqrt{-i(\eta-1)} \right\} \right] \quad (13)$$

$$\arccos 2(\eta) \equiv -i \log^F \left[ \eta + i \sqrt{1-\eta^2} \right] \quad (14)$$

ここで、 $\log^F(\cdot)$  は Fortran の標準組み込み複素数指数の logarithm 関数、 $\sqrt{\cdot}$  は同じく Fortran の標準組み込み複素数指数の平方根関数を表し、その分岐線は負の実軸上 ( $|\arg \eta| = \pi$ ) にある。

図 3 に共振因子  $\Delta_N(s)$  とその分解関数の積  $\Delta_N^+(s)\Delta_N^-(s)$  との比較を示す。複素  $s$ -平面上の三つの経路  $\text{Im } s = 0, \text{Im } s = k/2, \text{Im } s = -k$  において両者は完全に一致しており、分解関数の表現 (9), (10) が有効であることが分かる。

## 2.2 Fourier 積分 $g_1$ の評価

**TM 導波モードの伝搬定数** 先の報告 [1] で言及した分散方程式  $\Delta_N(s) = 0$  の二つの複素根  $\pm s_p$  は不規則表面上の TM 導波表面波モードの横方向の伝搬定数を与える。

$$\begin{aligned} \Delta_N(s) = 0 &\longleftrightarrow s = \pm s_p \quad (\text{Re } s_p > k, \text{Im } s_p > 0) \\ \text{or} & \\ \Delta_N^+(s) = 0 &\leftrightarrow s = -s_p, \Delta_N^-(s) = 0 \leftrightarrow s = s_p \end{aligned} \quad (15)$$

先の報告 [1] で述べたように厳密に分散方程式を解くことは数学的困難があるが、マスオペレータを近似使用した (7) 場合には分散方程式を数値的に解くことができる。今回は、多次元の最小値検索アルゴリズムの一種である滑降シンプレックス法 [6] を適用し、共振因子  $|\Delta_N(s)|$  の最小値を複素  $s$ -平面上で数値的に検索、得られた数値根を複素根  $s_p$  とみなしている。表 1, 2 に数値例を示す。基本的には  $s_p$  は Rayleigh 波数  $k$  のわずかに外側に生じ、損失を示す正の虚数部を持つ。 $\sigma$  大あるいは  $\kappa$  小なる程 Rayleigh 波数から離れる。 $\sigma = 0.0125\Lambda, 0.025\Lambda$  では  $\text{Re } s_p = k$  となっており、うまく算定できていないと思われる。これは表面粗さが小さいためマスオペレータによる波数シフトが小さく、数値計算精度が低下しているためと考えられる。

**TM 導波表面波モードの分離** 積分評価における平面波の極の特異性となる TM 導波表面波モードを分離しよう。補助分解関数  $\delta_N^\pm(s)$  を導入する。

$$\delta_N^+(s) \equiv \frac{\Delta_N^+(s)}{s_p + s} \quad \delta_N^-(s) \equiv \frac{\Delta_N^-(s)}{s_p - s} \quad (16)$$

表 1 分散方程式の複素根 (TM 導波モードの横方向伝搬定数)  $\sigma$ -依存性

$\sigma/\Lambda$	$s_p/k$
0.0125	$1.0000000000000001 + i2.019609012956729 \times 10^{-6}$
0.025	$1.0000000000000000 + i3.316234538806067 \times 10^{-5}$
0.05	$1.000012458280491 + i4.016878527123227 \times 10^{-4}$
0.1	$1.000151305715322 + i1.896881891408115 \times 10^{-3}$

表 2. 分散方程式の複素根 (TM 導波モードの横方向伝搬定数)  $\kappa$ -依存性

$k\kappa$	$s_p/k$
0.5	$1.003992291238529 + i3.175181393566752 \times 10^{-3}$
1.0	$1.000012458280491 + i4.016878527123227 \times 10^{-4}$
2.0	$1.000002196144977 + i4.430403031733041 \times 10^{-5}$

対称性  $\delta_N^-(s) = \delta_N^+(s)$  を満たす。  $\delta_N^+(-s_p), \delta_N^-(s_p)$  の値は

$$\delta_N^+(-s_p) \equiv \lim_{s \rightarrow -s_p} \frac{\Delta_N^+(s)}{s_p + s} = \frac{d}{ds} \Delta_N^+(s) \Big|_{s=-s_p}, \quad \delta_N^-(s_p) \equiv \lim_{s \rightarrow s_p} \frac{\Delta_N^-(s)}{s_p - s} = -\frac{d}{ds} \Delta_N^-(s) \Big|_{s=s_p} \quad (17)$$

とする。よって回折核  $G(s, \lambda_i)$  は

$$\begin{aligned} \Delta_N(\lambda_i) G(s, \lambda_i) &= -ie^{i(s-\lambda_i)l} \frac{\Delta_N^-(\lambda_i)}{\Delta_N^-(s)(s-\lambda_i)} = -ie^{i(s-\lambda_i)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)(s_p - \lambda_i)}{\delta_N^-(s)(s_p - s)(s - \lambda_i)} \\ &= -ie^{i(s-\lambda_i)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s)} \left[ \frac{1}{s - \lambda_i} - \frac{1}{s - s_p} \right] \\ &= e^{i(s-\lambda_i)l} \left\{ -i \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s)(s - \lambda_i)} - \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} (-i) \frac{\delta_N^-(s_p)}{\delta_N^-(s)(s - s_p)} \right\} \\ &\equiv e^{i(s-\lambda_i)l} G_s(s, \lambda_i) - e^{i(s-\lambda_i)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} G_s(s, s_p) \end{aligned} \quad (18)$$

と書ける。ここで、 $G_s(\dots)$  は新たな積分核で唯一の平面波の極  $s = \nu$  を持つ。

$$G_s(s, \nu) = -i \frac{\delta_N^-(\nu)}{\delta_N^-(s)(s - \nu)} \quad (19)$$

$\nu$  は元の  $\lambda_i$  と同じく入射波動ベクトルの  $x$ -成分に対応するから、(18) は本来の入射  $\lambda_i$  と、左進行の TM 導波表面波の入射  $s_p$  とが分離されたと解釈できる。

従って、 $g_1$  は以下のように変形できる。

$$g_1(x, z; \lambda_i) = e^{-i\lambda_i l} \hat{g}_1(x, z; \lambda_i) - e^{-i\lambda_i l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_1(x, z; s_p) \quad (20)$$

$$\hat{g}_1(x, z; \nu) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_s(s, \nu) e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \quad (21)$$

よって、 $g_1$  の代わりに  $\hat{g}_1$  (基本回折積分) を評価すればよい。

基本回折積分  $\hat{g}_1$  の評価 再度、次の変数変換と座標変換

$$s = -k \cos w \quad (w \in \mathbb{C}), \quad ds = k \sin w dw = i\gamma(k \cos w) dw, \quad \begin{cases} x = l + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r > 0, |\theta| < \pi \quad (22)$$

$$e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} = e^{ikr \cos(w - |\theta|)}$$

及び恒等式 ( $\alpha \neq \pi \mp \beta$ )

$$\frac{1}{\cos \alpha + \cos \beta} = \begin{cases} \frac{1}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \left( \frac{1}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} \right) & (\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \neq 0) \\ \frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \left( \frac{1}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} \right) & (\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \neq 0) \end{cases} \quad (23)$$

を用いて、Fourier 積分表現 (21) を Sommerfeld 積分 (角スペクトル表現) に書き換える。以下では  $\beta = \cos^{-1}(\nu/k)$  とする。

$$\begin{aligned}
\hat{g}_1(x, z; \nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_s(s, \nu) e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \\
&= \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} -i \frac{\delta_N^-(k \cos \beta)}{\delta_N^+(-k \cos w)(-k)(\cos w + \cos \beta)} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} i \gamma(k \cos w) dw \\
&= \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta_N^-(k \cos \beta) \bar{\gamma}^+(k \cos w)}{\delta_N^+(k \cos w) \bar{\gamma}^-(k \cos \beta)} \left[ \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{w-\beta}{2}} \right] \\ \quad (\text{Re } \beta > \pi/2) \\ \frac{\delta_N^-(k \cos \beta) \bar{\gamma}^-(k \cos w)}{\delta_N^+(k \cos w) \bar{\gamma}^+(k \cos \beta)} \left[ \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{w-\beta}{2}} \right] \\ \quad (\text{Re } \beta < \pi/2) \end{array} \right\} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw \\
&= \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_m(w, \beta) \left[ \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{w-\beta}{2}} \right] \\ \quad (\text{Re } \beta > \pi/2) \\ \Gamma_p(w, \beta) \left[ \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{w-\beta}{2}} \right] \\ \quad (\text{Re } \beta < \pi/2) \end{array} \right\} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw \quad (24)
\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $\Gamma_{p,m}(w, \beta)$  (回折係数関数) は

$$\Gamma_p(w, \beta) = \frac{\delta_N^-(k \cos \beta) \bar{\gamma}^-(k \cos w)}{\delta_N^+(k \cos w) \bar{\gamma}^+(k \cos \beta)}, \quad \Gamma_m(w, \beta) = \frac{\delta_N^-(k \cos \beta) \bar{\gamma}^+(k \cos w)}{\delta_N^+(k \cos w) \bar{\gamma}^-(k \cos \beta)} \quad (25)$$

と定義する。(24) での  $\text{Re } \beta$  による場合分けは、回折係数関数  $\Gamma_{p,m}(w, \beta)$  の  $\beta$  に関する有限性を保つためであり、物理的な要請によるものではない。回折係数関数  $\Gamma_{p,m}(w, \beta)$  は以下の性質を持つ。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{p,m}(-w, \beta) &= \Gamma_{p,m}(w, \beta), & \Gamma_{p,m}(w, -\beta) &= \Gamma_{p,m}(w, \beta) \\
\Gamma_{p,m}(-w, -\beta) &= \Gamma_{p,m}(w, \beta), & \Gamma_{p,m}(\pi \pm \beta, \beta) &= 1
\end{aligned} \quad (26)$$

よって

$$\hat{g}_1(x, z; \nu) = \begin{cases} D_p(kr, |\theta|, \beta) + D_p(kr, |\theta|, -\beta) & (\text{Re } \beta > \pi/2) \\ D_m(kr, |\theta|, \beta) - D_m(kr, |\theta|, -\beta) & (\text{Re } \beta < \pi/2) \end{cases} \quad (27)$$

と書ける。ここで、関数  $D_{p,m}(kr, |\theta|, \beta)$  は次の Sommerfeld 積分である。

$$D_{p,m}(kr, |\theta|, \beta) = \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \Gamma_{p,m}(w, \beta) \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw \quad (28)$$

(28) の被積分関数は角スペクトル平面上の平面波の極  $w = \pi - \beta$  を持つから、それを分離するため性質 (26) を用いて  $\Gamma_{p,m}(w, \beta)$  を以下のように変形する。

$$\Gamma_{p,m}(w, \beta) \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} = \left( \Gamma_{p,m}(w, \beta) \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} \right) + \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} \quad (29)$$

(29) の右辺第一項は  $w = \pi - \beta$  においても有限となり、全く特異性を持たない。また、第二項は既に評価された単一エッジ回折関数の積分核そのものである。よって

$$\begin{aligned}
D_{p,m}(kr, |\theta|, \beta) &= \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\Gamma_{p,m}(w, \beta) - 1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw + \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw \\
&= I_{p,m}(kr, |\theta|, \beta) + D(kr, |\theta| + \beta) \quad (30)
\end{aligned}$$

と書く。 $I_{p,m}(kr, |\theta|, \beta)$  は被積分関数の指数因子の鞍部点  $w = |\theta|$  を通る最急降下路  $p(\tau)$  ( $\tau \in \mathbf{R}$ ) 上の積分に書き換える。

$$\begin{aligned} I_{p,m}(kr, |\theta|, \beta) &= \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\Gamma_{p,m}(w, \beta) - 1}{\cos \frac{w+\beta}{2}} e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw \\ &= \frac{(1+i)}{4\pi} e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_{p,m}(p(\tau), \beta) - 1}{\cos \frac{p(\tau)+\beta}{2}} \cdot \frac{\sin p(\tau)}{\cos \frac{p(\tau)-|\theta|}{2}} e^{-kr\tau^2} d\tau \end{aligned} \quad (31)$$

表現 (31) は数値積分に適した形になっている。また、被積分関数に特異性がないことから  $kr \rightarrow \infty$  に対する減衰オーダーは  $O((kr)^{-1/2})$  である。

図 5 に、 $|\theta|$ -依存性の数値計算例を示す。マスオペレータを考慮した精密評価とそれを無視した近似評価との差は小さい。

### 2.3 Fourier 積分 $g_2$ の評価

(18) より、 $g_2$  の積分核  $\Delta_N(\lambda_i)G(s - \lambda_s, \lambda_i)$  は

$$\Delta_N(\lambda_i)G(s - \lambda_s, \lambda_i) = e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} G_s(s - \lambda_s, \lambda_i) - e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} G_s(s - \lambda_s, s_p) \quad (32)$$

と変形できる。よって、 $g_1$  と同様に変形される。

$$g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \hat{g}_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i) - e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_2(x, z; \lambda_s, s_p) \quad (33)$$

$$\hat{g}_2(x, z; \lambda_s, \nu) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_s(s - \lambda_s, \nu) e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \quad (34)$$

よって、 $g_2$  の代わりに  $\hat{g}_2$  を評価する。 $G_s(s - \lambda_s, \nu)$  は  $s = \lambda_s + \nu$  に一位の平面波の極と  $\delta^-(s - \lambda_s)$  による分岐点  $s = k + \lambda_s$  及びその分岐線の二つの主要な特異性を持つ。そこで先の報告 [1] での  $g_2$  の解析と同じく極分離を行なう。

$$G_s(s - \lambda_s, \nu) = G_s(s, \lambda_s + \nu) + G_{I_s}(s; \lambda_s, \nu) \quad (35)$$

ここで、 $G_{I_s}(s; \lambda_s, \nu)$  は補助関数で

$$G_{I_s}(s; \lambda_s, \nu) = -i \left[ \frac{\delta_N^-(\nu)}{\delta_N^-(s - \lambda_s)} - \frac{\delta_N^-(\nu + \lambda_s)}{\delta_N^-(s)} \right] \frac{1}{s - (\nu + \lambda_s)} \quad (36)$$

と定義する。(36) はもはや極の特異性を持たない。従って (34) は

$$\hat{g}_2(x, z; \lambda_s, \nu) = \hat{g}_1(x, z; \lambda_s + \nu) + \hat{g}_I(x, z; \lambda_s, \nu) \quad (37)$$

と書ける。ここで  $\hat{g}_I$  は新たな Fourier 積分もしくは Sommerfeld 積分である。

$$\hat{g}_I(x, z; \lambda_s, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{I_s}(s; \lambda_s, \nu) e^{-\gamma(s)|z| - is(x-l)} ds \quad (38)$$

$$= \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} G_{I_s}(-k \cos w; \lambda_s, \nu) e^{ikr \cos(w-|\theta|)} dw \quad (39)$$

(39) の被積分関数は  $w = |\theta|$  に鞍部点、 $w = \theta_B(\lambda_s)$  での分岐点及び分岐線の特異性を持つ。(39) を先の報告 [1] と同じく、鞍部点を通る最急降下路  $p(\tau)$  と (存在する場合には) 分岐点を通る最急降下路  $q(\tau)$  へと積分路変更する。

$$\hat{g}_I(x, z; \lambda_s, \nu) = \hat{g}_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda_s, \nu) + H(|\theta|, \lambda_s) \hat{g}_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \nu) \quad (40)$$

$$\hat{g}_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda_s, \nu) = -\frac{(1+i)k}{2\pi} e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} G_{Is}(-k \cos p(\tau); \lambda_s, \nu) \frac{\sin p(\tau)}{\cos \frac{p(\tau) - |\theta|}{2}} e^{-k\tau r^2} d\tau \quad (41)$$

$$\hat{g}_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \nu) = -\frac{ik}{\pi} e^{ikr \cos(\theta_B(\lambda) - |\theta|)} \int_{-\infty}^{\infty} G_{Is}(-k \cos q(\tau); \lambda_s, \nu) \frac{\sin q(\tau)}{\sin(q(\tau) - |\theta|)} \tau e^{-k\tau r^2} d\tau. \quad (42)$$

$\hat{g}_{SDP}$  と  $\hat{g}_{BC}$  の位相因子や  $g_{BC}$  が観測される角度領域の話は近似回折核の評価と全く同じである。一方、 $kr \rightarrow \infty$  に対する減衰オーダーは、 $\hat{g}_{SDP}$  では  $O((kr)^{-1/2})$ 、 $\hat{g}_{BC}$  では  $O((kr)^{-1})$  である。従って、マスオペレータを無視した近似評価で見られたような  $O((kr)^{-1/4})$  の減衰現象 [1] は漸近形の意味ではもはや存在しない。(33),(37) より、次のように  $g_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i)$  及び  $g_{SDP}, g_{BC}$  をおく。

$$\begin{aligned} g_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i) &= e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \hat{g}_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i) - e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_I(x, z; \lambda_s, s_p) \\ &= e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \left\{ \hat{g}_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) - \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda_s, s_p) \right\} \\ &\quad + H(|\theta|, \lambda_s) e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \left\{ \hat{g}_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) - \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, s_p) \right\} \\ &\equiv g_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) + H(|\theta|, \lambda_s) g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda_s, \lambda_i) \end{aligned} \quad (43)$$

図 6 に  $|\theta| = 130^\circ, r = 1\Lambda, 10\Lambda, 100\Lambda, 1000\Lambda$  に対する  $g_{SDP}, g_{BC}$  の  $\lambda_s$  としての依存性を示す。 $g_{BC}$  の主要な位相因子  $e^{ikr \cos(\theta_B(\lambda_s) - |\theta|)}$  が伝搬する平面波を表す  $-2k < \lambda_s < -k - k \cos |\theta|$  においては、再び  $g_{SDP}, g_{BC}$  による干渉リップルを生じる。細かく減衰オーダーを見ると、 $g_{SDP}$  がほぼ  $O((kr)^{-1/2})$  であるのに対し、 $g_{BC}$  は  $kr$  が増す程減衰度が大きくなる傾向がある。これは近似評価と比較すると明らかである。おそらくは  $kr \rightarrow \infty$  では最終的に  $O((kr)^{-1})$  を示すと考えられるが、分岐点  $w = \theta_B(\lambda_s)$  近傍での挙動が積分変数  $\tau$  に対して複雑なものになっていると思われる。次に上限境界  $-k - k \cos |\theta|$  での振舞いは近似評価に比べると穏やかである。一方で、この境界と、もう一つの境界  $-2k$  と併せて  $|g_{SDP} + g_{BC}|$  が連続になっていない。これは不合理な結果であると考えられるが、現時点においては原因の特定には至っていない。

## 2.4 消滅定理の形の波動場表現

次の式変形により

$$\begin{aligned} & e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \hat{g}_1(x, z; \lambda_i + \lambda_s) - e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_1(x, z; \lambda_s + s_p) \\ &= e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \hat{g}_1(x, z; \lambda_i + \lambda_s) - e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i + \lambda_s)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_1(x, z; s_p) \\ &\quad + e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i + \lambda_s)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_1(x, z; s_p) - e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_1(x, z; \lambda_s + s_p) \\ &= g_1(x, z; \lambda_i + \lambda_s) + e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i + \lambda_s)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_1(x, z; s_p) - e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_1(x, z; \lambda_s + s_p) \\ &= g_1(x, z; \lambda_i + \lambda_s) + g_S(x, z; \lambda_s, \lambda_i | s_p) \end{aligned} \quad (44)$$

が導かれる。ここで、関数  $g_S(x, z; \lambda_s, \lambda_i | s_p)$  は

$$g_S(x, z; \lambda_s, \lambda_i | s_p) = e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i + \lambda_s)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_1(x, z; s_p) - e^{-i(\lambda_i + \lambda_s)l} \frac{\delta_N^-(\lambda_i)}{\delta_N^-(s_p)} \hat{g}_1(x, z; \lambda_s + s_p) \quad (45)$$

で定義する。これは各項の入射波に相当する引数を考えれば、TM 導波表面波が入射波となっている表現である。従って影側において消滅定理の形の波動場表現となるような  $g_2$  は

$$g_2(x, z; \lambda_s, \lambda_i) = g_1(x, z; \lambda_i + \lambda_s) + g_I(x, z; \lambda_s, \lambda_i) + g_S(x, z; \lambda_s, \lambda_i | s_p) \quad (46)$$

と書くことができる。よって、近似評価の場合の  $g_I$  が精密評価においては  $g_I + g_S$  で置き換わる。

図7に  $g_S$  及び  $g_I + g_S$  の計算結果を示す。 $g_S$  自体は不連続を生むような因子は無いため、計算結果もいくつかの点で急激な変化はするものの連続的である。 $-2k < \lambda_s < -k - k \cos |\theta|$  においては再び  $g_{SDP} + g_{BC}$  で見られる干渉リップルがより顕著に生じることが分かる。特に上限境界  $-k - k \cos |\theta|$  での距離減衰性は著しく遅くなっており、近似評価の場合の遅い減衰特性  $O((kr)^{-1/4})$  を代行する形になっている。これは右進行 TM 導波表面波がエッジに入射する現象を表すものと考えられる。また、 $k - \lambda_0$  において鋭いピークが現れ、 $O((kr)^{-1/2})$  なる距離減衰性を示すが、これは  $|\theta| \rightarrow 180^\circ$  に対する近似評価でも見られた左進行 TM 導波表面波がエッジに入射する現象に対応するものと考えられる。いずれにしても  $g_S$  が  $g_I$  を内蔵するのにもかかわらず、全て距離減衰性を持つ波動となっている。これは Rayleigh 波数  $k$  よりも波数の大きい TM 導波モード  $\text{Re } s_p > k$  によるものであるから平面波成分ではなく基本的にエッジ回折波のみとなっているためと考えられる。

### 3 インコヒーレント散乱強度

インコヒーレント散乱強度を計算した結果を図8に示す。照射側では近似評価と精密評価の差はほとんど見られない。一方、エッジ回折波のみである影側においては差が見られた。全体的に強度の減少を生じている。逆鏡面反射方向  $\theta = -\theta_i$  近傍では、特に  $r = 1\lambda, 10\lambda$  の結果において強度パターンの不自然に急激な変化が見られるが、これは  $g_{SDP} + g_{BC}$  の不連続によるものであり実際の物理現象を表していない可能性が高い。

### 4 むすび

本報告では、先の報告 [1] で示した不規則半平面への TM 平面波入射時の波動場の Wiener-伊藤展開表現から出発し、波動場を記述する二つの Fourier 積分を、その回折核に対し多重散乱効果を含んだ形で精密評価する試みを示した。その結果インコヒーレント散乱に関しては、照射側ではエッジ回折への多重散乱効果の影響は小さく、影側では強度の減少が見られることが分かった。

今後は、コヒーレント散乱の評価と鞍部点と分岐点を通る最急降下路上の積分に現れた不連続の不具合の修正等を行ない理論として完成させたい。また、現状の数値計算は非常に時間を要している。例えば、図8の  $k\kappa = 1, r = 1\lambda$  の179点の計算には Dual Opteron 250 のワークステーションを用いて  $169360.591[\text{sec}] \approx 47$  時間、 $r = 1000\lambda$  では同じく  $161102.880[\text{sec}] \approx 45$  時間を要している。特に後者は、激しく振動する部分を表示するためには遥かに多くの計算点が必要であるから高速な処理が必要であり、計算環境の整備及び積分の近似法の検討等の今後必要となるであろう。

### 文献

- [1] 田村安彦、中山純一，“不規則半平面による TM 平面波の散乱と回折 - ランダム波動場表現の導出と回折核の近似評価 -”，放射科学研究会資料 RS 06-11(2006)
- [2] T.B.A.Senior and J.L.Volakis, *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics*, IEE(1995)
- [3] 田村安彦、中山純一，“ランダム境界値問題における mass operator に関する考察 - 非線形積分方程式の数値解析と複素領域における解の分岐現象 -”，信学技報 (非線形問題) NLP97-175 pp.109-118(1998)
- [4] 田村安彦、中山純一，“ランダム境界値問題における複素多重繰り込み mass operator (Dirichlet 条件)”，電磁界理論研究会資料 EMT98-168 pp.29-37(1998)
- [5] Y.Tamura, unpublished work(1999)
- [6] W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling and B.P.Flannery, *NUMERICAL RECIPES in FORTRAN The Art of Scientific Computing 2nd Ed.*, Cambridge University Press(1994)
- [7] L.B.Felsen and N.Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice Hall(1973)

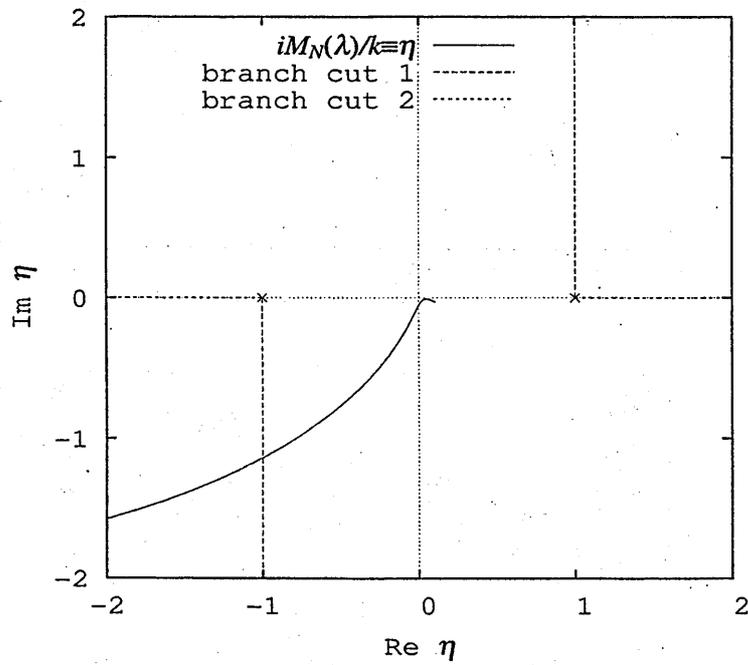


図1 複素  $\eta$ -平面上での多重繰り込みマスオペレータ  $iM_N(\lambda)/k \equiv \eta$  ( $k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1$ ) の軌跡と分岐線。  $\cos^{-1}$  で定義される分岐線 ( $\pm 1 \pm i0 \rightarrow \pm 1 \pm i\infty$ ) のうち分岐点  $-1 - i0$  による分岐線とマスオペレータの軌跡は交差する。分岐線を ( $\pm 1 \pm i0 \rightarrow \pm \infty \pm i0$ ) とすれば交差しなくなる。

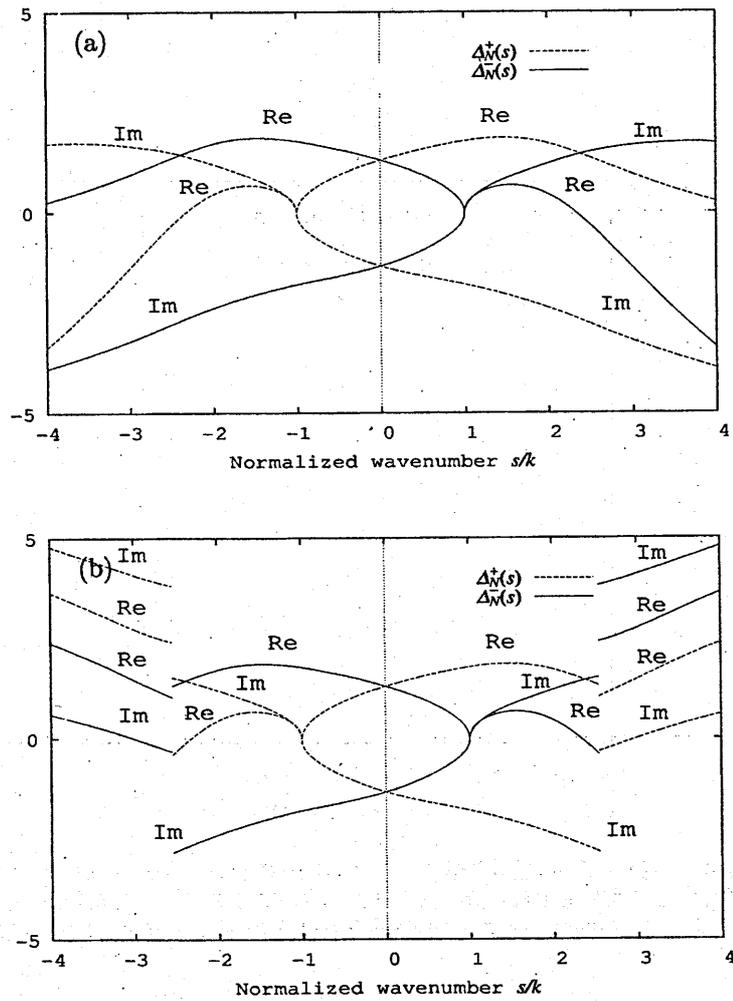


図2 実  $s$ -軸上の分解関数  $\Delta^+(s), \Delta_N^-(s)$  の  $\vartheta(s)$  の分岐取り方による相違 ( $k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1$ )。 (a)  $\arccos 2$  の分岐を  $1+i0 \rightarrow 1+i\infty, -1-i0 \rightarrow -1-i\infty$  にとった場合 (branch cut 1)、(b)  $\arccos 2$  の分岐を  $1+i0 \rightarrow \infty+i0, -1-i0 \rightarrow -\infty-i0$  にとった場合 (branch cut 2)。明らかに branch cut 1 では不連続を生じ適切ではない。

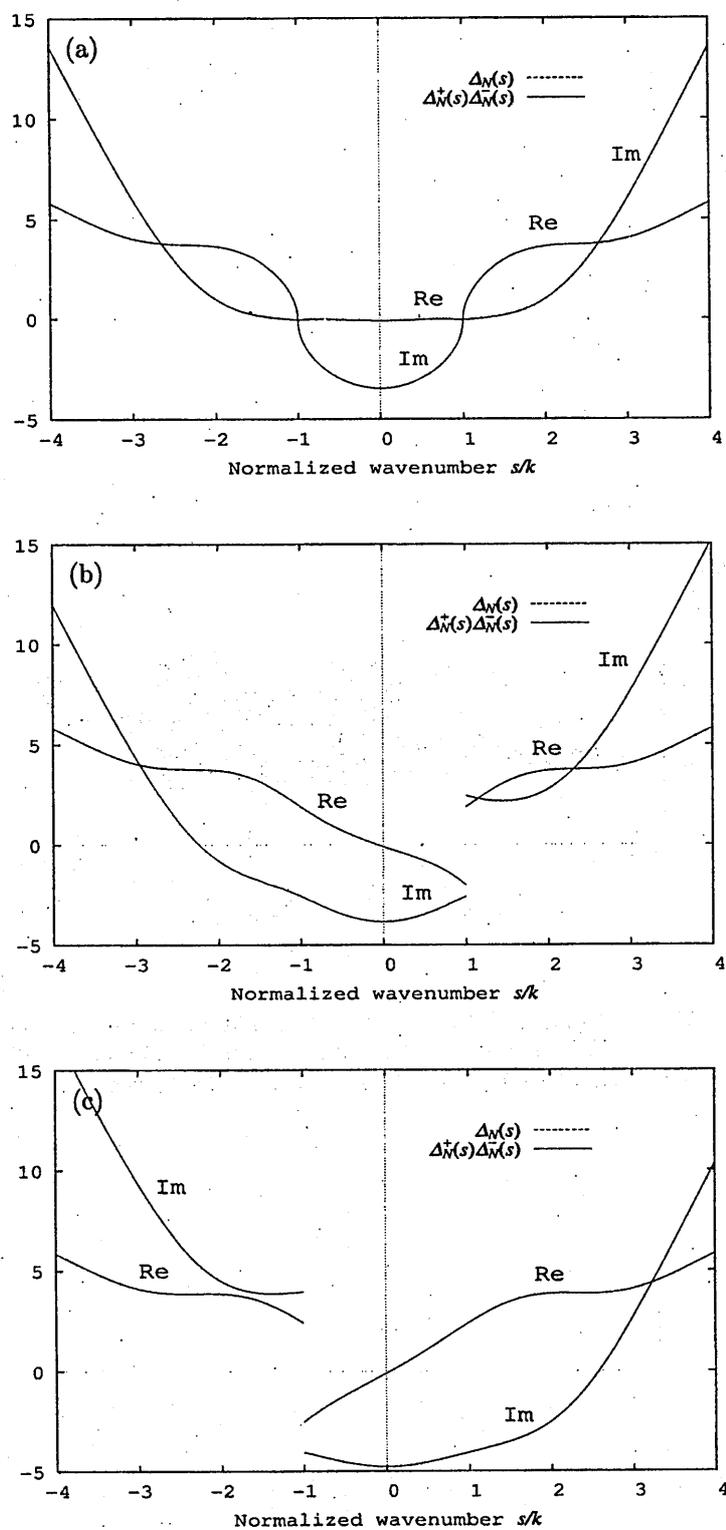


図3 共振因子  $\Delta_N(s)$  と分解関数の積  $\Delta_N^+(s)\Delta_N^-(s)$  との比較 ( $k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1$ )。 (a)  $\text{Im } s = 0$ , (b)  $\text{Im } s = k/2$ , (c)  $\text{Im } s = -k$ 。実部及び虚部ともに両者は完全に一致している。(b) の  $\text{Re } s = 1$  と (c) の  $\text{Re } s = -1$  におけるギャップは分岐線による段差である。

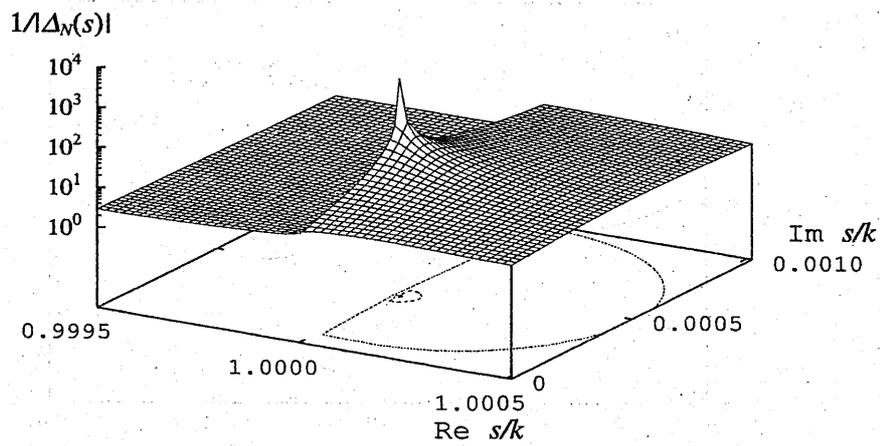


図4 共振因子  $1/|\Delta_N(s)|$  による複素  $s$ -平面上での TM 導波表面波の極  $s = +s_p$  の表示 ( $k\kappa = 1.0, k\sigma = \pi/10$ ) 複素極  $s_p = 1.000012458280491k + i4.016878527123227 \times 10^{-4}k$  を中心とする発散の特異性が見られる。分岐点  $s = k + i0$  から始まる段差は分岐線を表している。

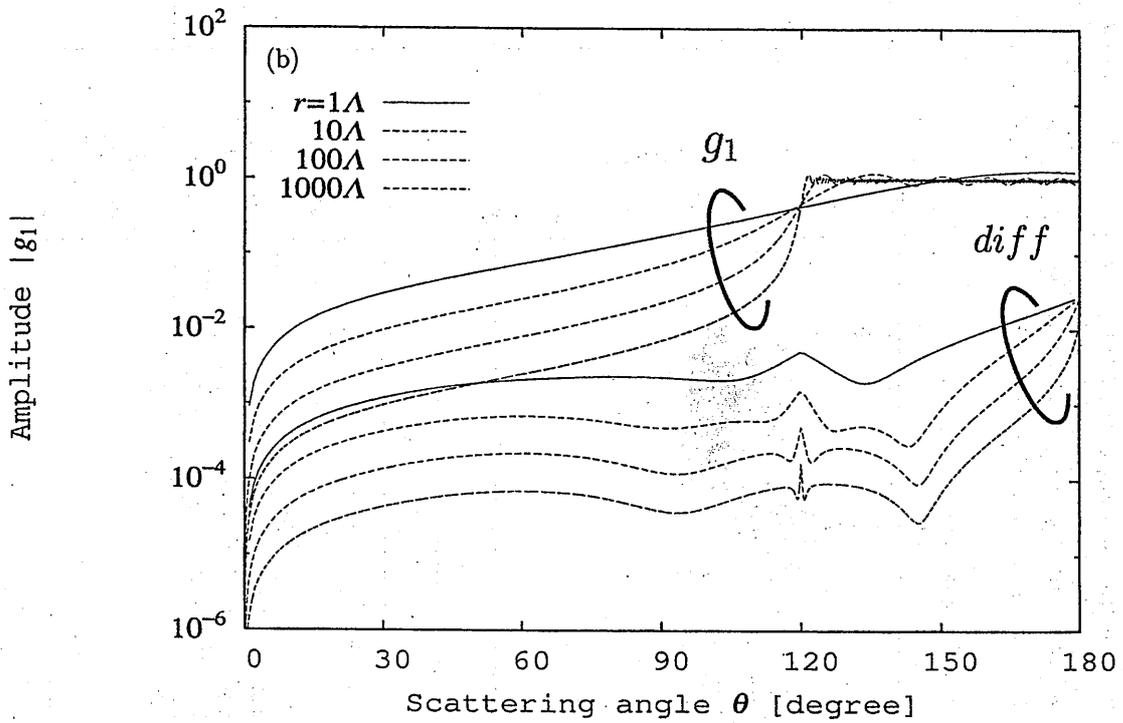
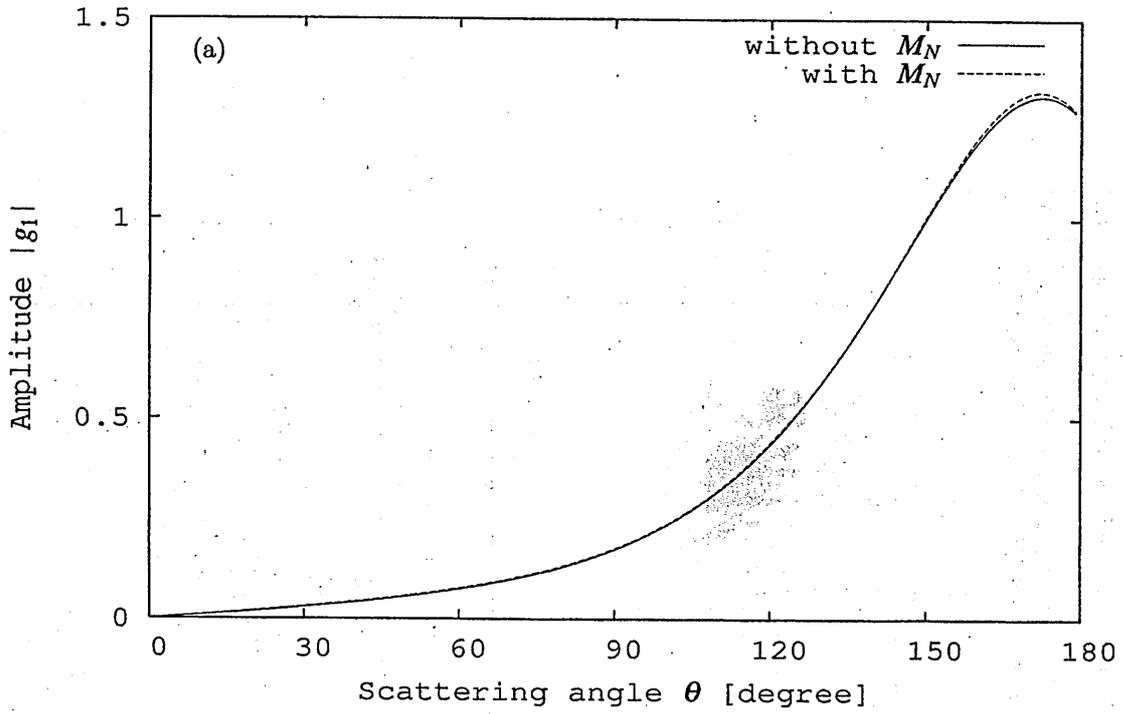


図5  $g_1$  の精密評価 ( $M_N$  あり) と近似評価 ( $M_N$  なし) の比較 ( $k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1, \theta_i = 60^\circ$ )。 (a)  $r = 1\Lambda$ 、(b)  $r = 1\Lambda, 10\Lambda, 100\Lambda, 1000\Lambda$  での精密評価の  $g_1$  及び近似評価との差  $diff \equiv |g_1(\text{精密}) - g_1(\text{近次})|$ 。(a)において  $\theta > 150^\circ$  でわずかに差が見られるものの両者の違いは小さい。(b)に示す差の表示を見ても明らかである。

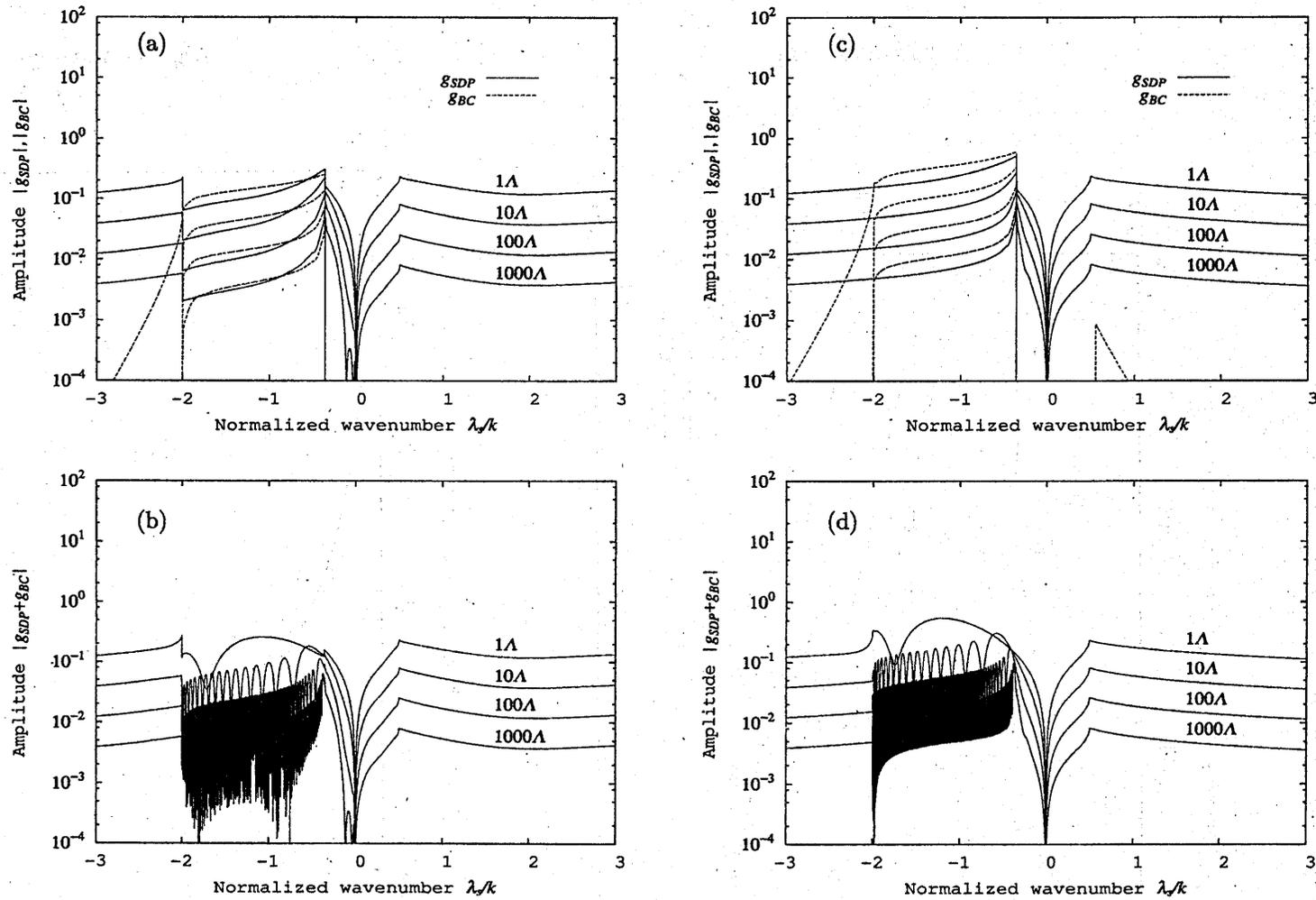


図 6  $g_{SDP}(kr, |\theta|; \lambda, \lambda_0), g_{BC}(kr, |\theta|; \lambda, \lambda_0), g_I(kr, |\theta|; \lambda, \lambda_0)$  の精密評価と近似評価 ( $k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1, \theta_i = 60^\circ, \theta = 130^\circ, r = 1\Lambda, 10\Lambda, 100\Lambda, 1000\Lambda$ )。 (a) 精密評価の  $g_{SDP}, g_{BC}$ , (b) 同じく  $g_{SDP} + g_{BC}$ , (c) 近似評価の  $g_{SDP}, g_{BC}$ , (d) 同じく  $g_{SDP} + g_{BC}$ 。  $g_{SDP}$  はどちらも境界  $\lambda = -k - k \cos |\theta| \approx -0.357k$  の近傍を除いて  $O((kr)^{-1/2})$  を示している。境界近傍では近似評価 (c) では  $O((kr)^{-1/4})$  を、精密評価では通常よりもおそい減衰性を示す。  $g_{BC}$  はどちらも  $\lambda < -k - k \cos |\theta|, \lambda > -k - k \sec |\theta|$  において存在するが、主に寄与するのは伝搬する非一様平面波となる  $-2k < \lambda < -k - k \cos |\theta|$  である。そこでの距離減衰性は近似評価では明らかに  $g_{SDP}$  と同じ  $O((kr)^{-1/2})$  を、精密評価では  $r$  が増すと次第に  $O((kr)^{-1})$  に近づく傾向が見られる。この領域では両者の和  $g_{SDP} + g_{BC}$  は干渉しリップルを生じる。境界においては  $g_{SDP}, g_{BC}$  は単独では不連続性を示すが、その和  $g_{SDP} + g_{BC}$  は近似評価 (d) においては連続になっており合理的である。しかし今回の精密評価の計算例では不連続になっており何らかの不具合を示唆している。

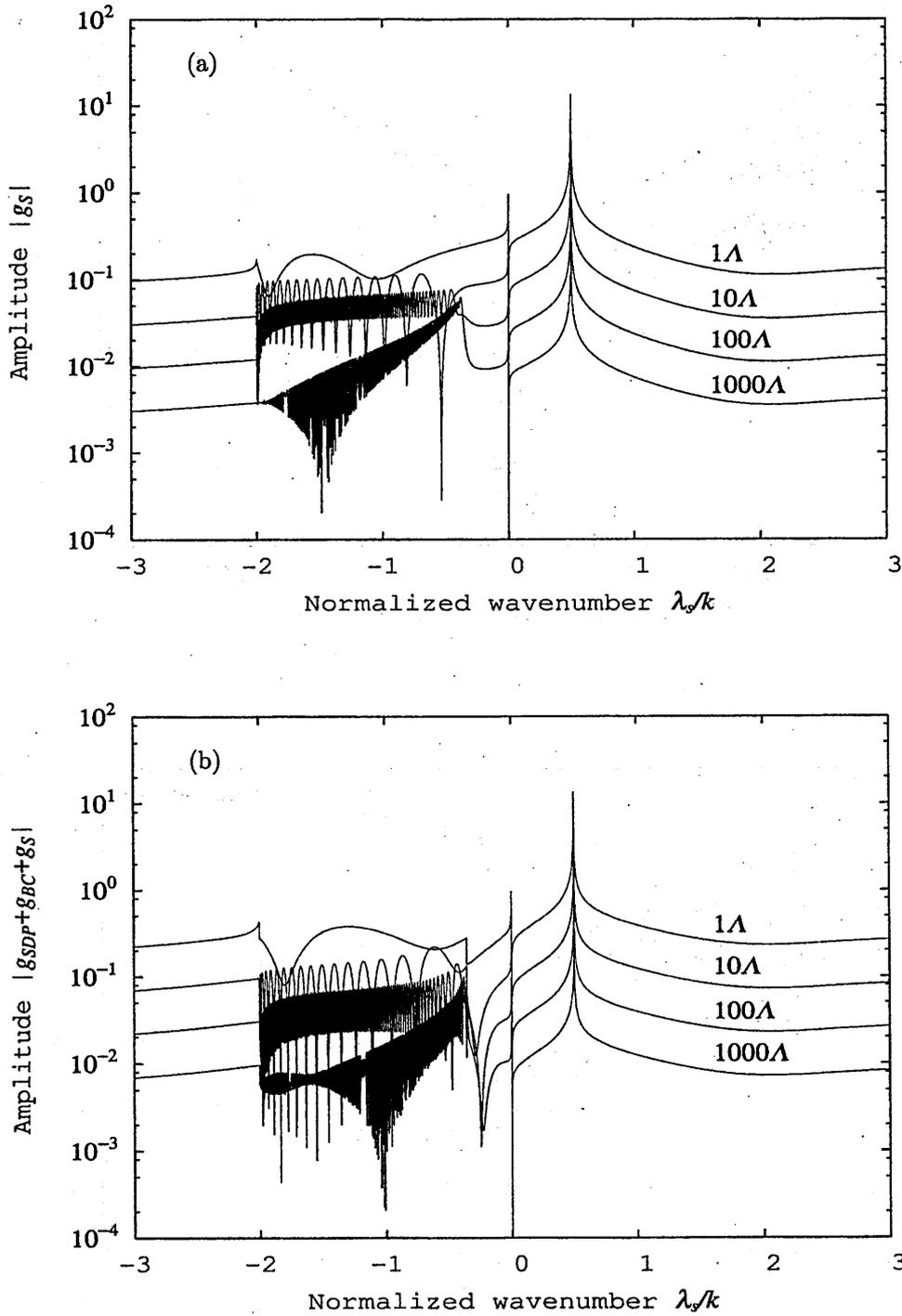


図7  $g_s(kr, |\theta|; \lambda, \lambda_0 |s_p), g_I(kr, |\theta|; \lambda, \lambda_0) = g_{SDP} + g_{BC} + g_s$  ( $k\sigma = \pi/10, k\kappa = 1, \theta_i = 60^\circ, \theta = 130^\circ, r = 1\Lambda, 10\Lambda, 100\Lambda, 1000\Lambda$ )。 (a) に示す  $g_s$  は  $\lambda = k - \lambda_0$  において特徴的なピークを持つ。これは左進行の TM 導波モードによるものと考えられるがその距離減衰性は  $O((kr)^{-1/2})$  を示している。また  $\lambda = 0$  では零となるがマイナス側の極近傍でもピークが生じている。これについては現時点では不明である。また、 $g_s$  自体で  $-2k < \lambda < -k - k \cos |\theta|$  において干渉リップルを生じておりここでの距離減衰特性はその他の領域とは異なっている。特に境界  $\lambda = -k - k \cos |\theta|$  の近傍は著しく距離減衰性が遅く大まかには  $O((kr)^{-1/4})$  を示す傾向にある。(b) に示す  $g_I$  は  $g_s$  の寄与を強く反映することが分かるが、特に  $-2k < \lambda < -k - k \cos |\theta|$  においてその上限境界での  $r$  が大きいときのピークと干渉リップルが近似評価におけるそれ (図 6(d)) に近い状態になっている。しかし反面、境界での不連続性が特に  $r$  が小さいときに顕在化する。

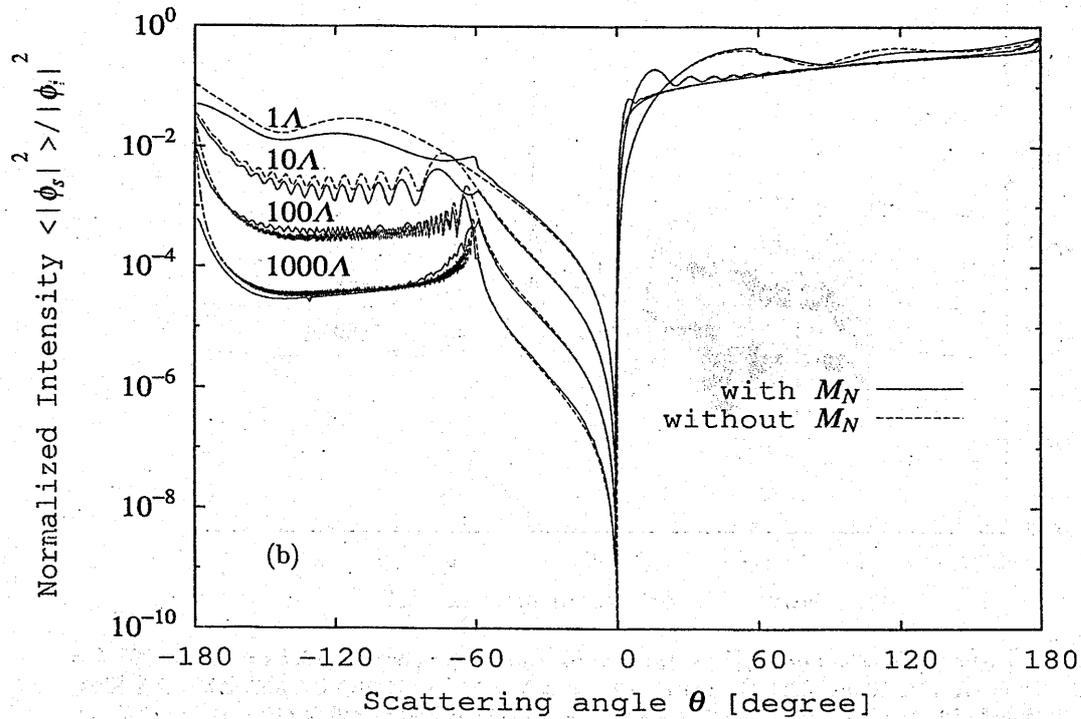
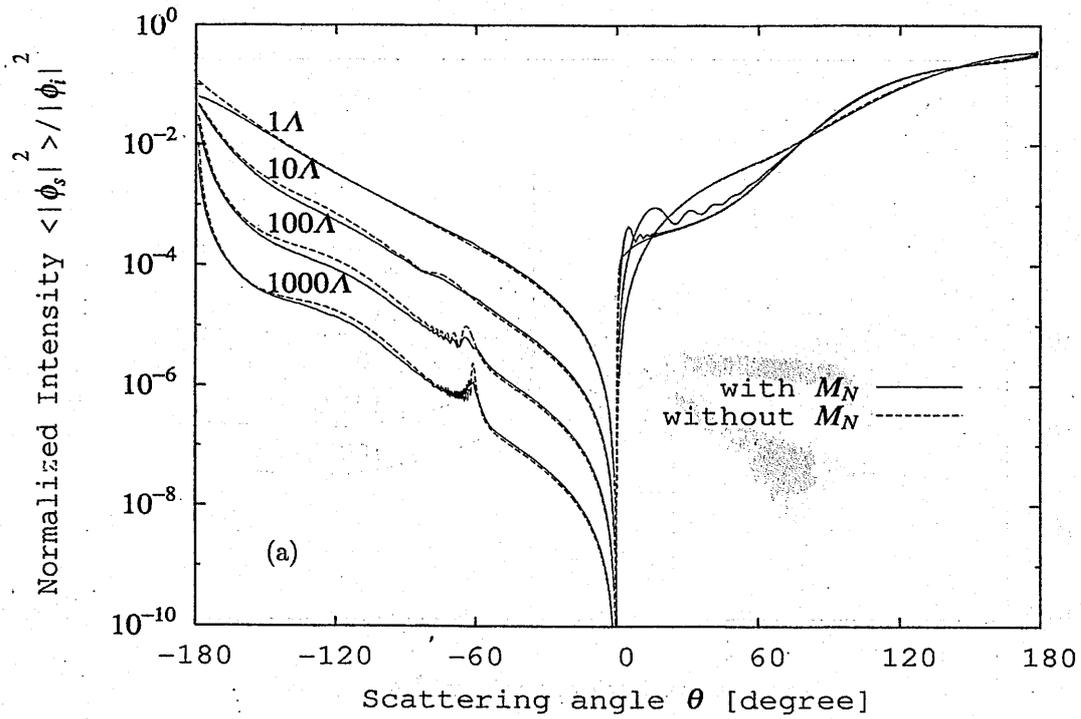


図 8 規格化インコヒーレント散乱強度の精密評価と近似評価の比較 ( $k\sigma = \pi/10, \theta_i = 60^\circ, \theta = 130^\circ, r = 1\Lambda, 10\Lambda, 100\Lambda, 1000\Lambda$ )。 (a)  $k\kappa = 2$ , (b)  $k\kappa = 1$ 。精密評価の計算点は 179 個のため、 $r = 100\Lambda, 1000\Lambda$  は明らかに計算点不足である。照射側では  $r = 1\Lambda$  を除き精密評価と近似評価の違いはほとんど見られない。一方、影側においては全体的に精密評価の方が強度の減少を示している。しかしながら、(a) での  $r = 1\Lambda$  及び (b) での  $r = 1\Lambda, 10\Lambda$  では逆鏡面反射方向  $\theta = -60^\circ$  近傍における  $g_I$  の不連続性の影響が大きく顕在化している。

螺旋導体分布の等価媒質定数に与えるクラスタ分布の影響

*Effective medium parameters of scattered helices depending on  
cluster basis distributions*

浅居 正充

近畿大学 生物理工学部

*Masamitsu Asai*

*Kinki University*

山北 次郎

岡山県立大学 情報工学部

*Jiro Yamakita*

*Okayama Prefecture University*

2006年12月15日

於 京都工芸繊維大学

## Abstract

Effective medium parameters for cluster basis distributions of conducting helices in free space are calculated by quasi-static Lorentz approach combined with the method of moments with thin-wire approximation.

## 1 Introduction

Artificially-constructed materials such as chiral media composed of electrically small conducting helices as the analogues of chiral molecules [1]-[2] and double negative materials made of e.g. thin metallic wires with resonant metallic rings [3] etc. have been of interest in recent years. In theoretical research work, they have been considered not only as continuum characterized by constitutive equations but also as aggregations of particles with structural parameters. Considering the particles' structures helps to design the particles and the mixing conditions and to explain detailed phenomena. As for the chiral media, the method of determination of effective medium parameters based on the structural parameters of inclusions and mixing manner such as quasi-static Lorentz approach [4], methods of calculation of polarizability of inclusions by thin-wire moment method (MoM) [5] and scattering cross sections [6], the method of multiple scattering for randomly-distributed particles [7], methods of inverse scattering [8], [9] etc. have been reported. Direct analyses of the whole structures made of hundreds of helices have also been tried [10]. Such brute force approach also would help to a certain extent to know phenomena of the real structures which experimental measurements hardly give, although the whole physical dimensions and numbers of particles are limited to some extent because of the tough requirements of computer resources. Researchers on carbon microcoils (CMC) have been interested in such media because of the fine absorption properties of CMC at frequencies of tens through hundreds GHz [11]-[13]. The bulk of CMC synthesized for a large amount is usually composed of racemic mixture of coils and in experiments of absorption they are often embedded into polymethylmethacrylate (PMMA) beads or PMMA foams where CMC is distributed in the forms of clusters of coils. Even if they are scattered in a continuum of host medium without beads or foams, possibility of clusters formed in the host medium is to be admitted more or less.

In this work, effective medium parameters of media realized by homogeneous distributions of randomly-oriented clusters of identical perfectly-conducting helices in free space are analyzed by quasi-static Lorentz approach. Currents on wires of a cluster of helices

are calculated by the method of moments (MoM) with thin wire approximation utilizing Numerical Electromagnetics Code 2 (NEC2) to obtain the polarizability. Sizes and spacings of clusters should be small compared to a wavelength for quasi-static approximation. NEC2 was developed at the Lawrence Livermore National Laboratory in 1981 [14]. This is a public domain computer code and has been widely used for analyses of antennas, fields from cellular phones, power transmission systems etc. [15]-[16] and the calculated results have shown good agreements with the measured ones. To apply public domain codes like NEC2 to artificial materials such as chiral media would give engineers practical informations about the usage of it even at least as an auxiliary tool and has not been tried for the cases of cluster basis distributions of helices. In the numerical calculations, cases of skew pairs of helices as the simplest type of clusters, sphere cases and flux cases are treated along with those of separate cases i.e. non-cluster cases.

## 2 Geometry of the clusters

Perfectly-conducting right or left-handed wire helices considered in this work are assumed to have dimensional parameters of number of turns  $N_t$ , radius  $a$ , pitch  $P$  and wire radius  $W$ . Media realized by homogeneous distributions of randomly-oriented identical clusters of perfectly-conducting helices in free space are considered (Figures 1 through 3). Mixing density of helices is expressed by number density  $D_n$  (number of helices per  $m^3$ ), metal volume fraction  $D_v$  (%) and cylinder volume fraction  $D_c$  (%), and as for the clusters, number density  $D_{cls-n}$  and envelope volume fraction  $D_{env}$ . Each cluster is assumed to be composed of identical perfectly-conducting wire helices. The effects of cohesion of helices are supposed to be electromagnetic coupling between them. The simplest model of a particle with coupling between helices is assumed as a skew pair of helices (Figure 1) with skew angle  $\theta_s$  and distance  $d$ . Two more kinds of models treated in this work are spherical and bundle ones.  $N$  helices in the spherical clusters are randomly oriented. An individual region is assumed for each helix which is expressed by a circumscribed sphere. It is assumed that the maximum number of the individual spheres are distributed in an external spherical region with radius  $R$  on condition that the distances between them are longer than a wire gauge (Figure 2). In the bundle clusters, helices are randomly tilted from the basic geometry of two dimensional periodic array of helices oriented perpendicular to the direction of the periodicity. The maximum tilt angle  $\theta_m$  is assumed (Figure 3).

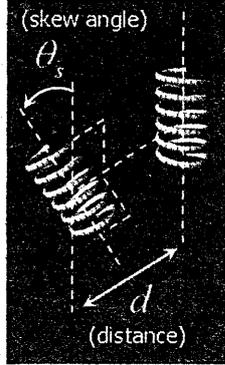


Figure 1: A skew pair of helices

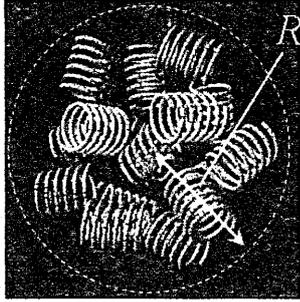


Figure 2: Spherical cluster

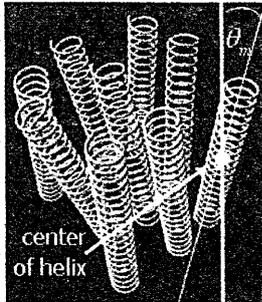


Figure 3: Bundle cluster

### 3 The method of analysis

Time harmonic dependence  $\exp(j\omega t)$  is assumed, and the permittivity and the permeability in free space are denoted by  $\epsilon_0$  and  $\mu_0$  respectively hereafter. Effective relative permittivity  $\epsilon_{eff} = \epsilon'_{eff} + j\epsilon''_{eff}$ , effective relative permeability  $\mu_{eff} = \mu'_{eff} + j\mu''_{eff}$  and effective chirality (Lindell-Sihvola notation)  $\kappa_{eff} = \kappa'_{eff} + j\kappa''_{eff}$  are assumed for the effective medium realized by homogeneous distributions of randomly-oriented clusters of helices. They are defined in the macroscopic constitutive relations between the average electric and magnetic flux densities and the fields  $D$ ,  $B$ ,  $E$  and  $H$  respectively:

$$D = \epsilon_0 \epsilon_{eff} E - j\kappa_{eff} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} H, \quad (1)$$

$$B = \mu_0 \mu_{eff} H + j\kappa_{eff} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E \quad (2)$$

where the effective medium is assumed to be reciprocal. Flux densities can be expressed by electric and magnetic polarizations  $P_{ee}$ ,  $P_{em}$ ,  $P_{me}$  and  $P_{mm}$ :

$$D = \epsilon_0 E + P_{ee} + P_{em}, \quad B = \mu_0 H + P_{me} + P_{mm}. \quad (3)$$

$P_{ij} = D_{cls-n} p_{ij}$  ( $i, j = e$  or  $m$ ) denotes electric ( $i = e$ ) or magnetic ( $i = m$ ) polarization i.e. dipole moment density of  $D_{cls-n}$  clusters per  $m^3$  due to electric ( $j = e$ ) or magnetic ( $j = m$ ) field.  $p_{ij}$  ( $i, j = e$  or  $m$ ) denotes dipole moment of a single cluster and is related to the Lorentzian fields  $E_L$  or  $H_L$  as exciting fields by a polarizability tensor  $\bar{\alpha}_{ij}$ :

$$p_{ie} = \bar{\alpha}_{ie} E_L, \quad E_L = E + (P_{ee} + P_{em})/3\epsilon_0, \quad (4)$$

$$p_{im} = \bar{\alpha}_{im} H_L, \quad H_L = H + (P_{me} + P_{mm})/3\mu_0. \quad (5)$$

Dipole moments  $p_{ej}$  and  $p_{mj}$  of a cluster of helices excited by  $E_L$  ( $j = e$ ) and  $H_L$  ( $j = m$ ) can be obtained from the currents  $J(r)$  on the wires of helices:

$$p_{ej} = \frac{1}{j\omega} \int J(r) dv, \quad p_{mj} = \frac{1}{2} \int r \times J(r) dv \quad (6)$$

where  $j = e$  or  $m$ . The elements of the  $3 \times 3$  polarizability tensors can be obtained from Eq.(4) through Eq.(6). In this paper, scalar polarizabilities for isotropic media realized by randomly-oriented clusters are obtained by taking the averages of diagonal elements of the tensors, discarding the off-diagonal ones as in [5]. These polarizabilities are used to determine the effective medium parameters from the Lorentz-Lorentz formulae [4] derived from Eq.(1) through Eq.(5). Calculations of Eq.(6) in the Cartesian coordinate for the excitations of field components  $E_L = (E_x, E_y, E_z)$  and  $H_L = (H_x, H_y, H_z)$  are performed in the following procedure as in [5],[17]. The contribution by  $E_x$  e.g. can be obtained by taking the average of the contributions

of incidence of  $x$ -polarized waves (electric vector is oriented in  $+x$  direction) propagating in  $+y$  and  $-y$  directions. This can also be obtained by the average of the contributions of  $x$ -polarized waves propagating in  $\pm z$  directions. Actually the average of both of them is adopted. The contribution of  $E_i$  in general is obtained by taking the average of the contributions of  $i$ -polarized waves propagating in  $\pm j$  and  $\pm k$  directions where  $i, j, k$  correspond to different characters of  $x, y$  and  $z$ . For the  $i, j$  and  $k$  with the same meaning, the contribution of  $H_i$  is obtained by taking the average of half of the difference of the contributions of  $j$ -polarized waves propagating in  $\pm k$  directions and that of  $k$ -polarized waves propagating in  $\pm j$  directions. In this case, if  $(i, j, k)$  is either of  $(x, y, z), (y, z, x)$  and  $(z, x, y)$ , the difference of the contributions of bilateral waves should be obtained by subtracting those of positive directions from the negative ones, and otherwise vice versa. The size of a cluster should be less than around one tenth of a wavelength for a certain accuracy of solutions [17]. The currents on the wires of helices in Eq.(6) are calculated utilizing NEC2 code where a sample of the cluster model is assumed to be located so the center of it comes to be the origin of the coordinate. For thin-wire approximation in the moment method of NEC2, only axial components of currents on the wire surfaces (not on the axes) are considered neglecting the circumferential variation and transverse currents.

## 4 Numerical results

In the following calculations, perfectly-conducting left-handed helices in free space with dimensions  $a=0.6604$  mm,  $W=0.077$  mm are assumed to compose clusters. Angles of the rotations of helices with respect to their axes and orientations of the axes in the bunches are given by the quasi-random numbers based on uniform distribution.  $N_{seg}$  basis functions are used for one turn of a helix in MoM. Figures 4 and 5 shows the rotation angles and axial ratios of the linearly-polarized plane waves transmitted normally through a lossless isotropic chiral slab with thickness of 9 mm which is composed of homogeneous distribution of randomly-oriented separate helices (non-cluster case) with  $N_t=3, P=0.529$  mm and  $N_{seg}=30$ , where the effective medium parameters are determined by the present analysis. Results are compared with other literature [6] based on the Bohren's formula [18] for different metal volume fractions  $D_v=0.2, 0.4$  and  $0.8$  % ( $D_n=9.85, 19.7$  and  $39.4$  ( $\times 10^6/m^3$ ) respectively). Results agree with each other in the graphical representation. This could be a partial check of the calculations. Figures 6 through 9 show the effective

medium parameters for homogeneous distributions of randomly-oriented skew pairs of helices (Figure 1) with  $N_t=7, P=0.320$  mm,  $d=1.7$  mm,  $N_{seg}=30$  and  $D_n=5 \times 10^6/m^3$  ( $D_v=0.271$  %,  $D_c=2.05$  %) for different skew angles  $\theta_s=0, 30, 60$  and  $90^\circ$ . Figures 10 and 11 show the cases of weaker coupling with  $d=3.0$  mm only for  $\kappa_{eff}$  with other conditions same as the previous ones. These results show that the difference between the frequencies of resonance peaks strongly depend on the skew angles and distances i.e. strength of the electromagnetic coupling. Figures 12 and 13 show the cases of spherical clusters (Figure 2) with  $N_t=6, P=0.320$  mm,  $N_{seg}=30$  and  $D_n=2 \times 10^6/m^3$  ( $D_v=0.093$  %,  $D_c=0.709$  %) for different sizes of spheres  $R=4.08$  mm ( $N=13$ ),  $R=3.5$  mm ( $N=6$ ) and  $R=3.0$  mm ( $N=3$ ) with the case of separate helices ( $N=1$ ). It can be seen that larger size of sphere (larger number of helices) broaden the frequency range where resonance peaks appear, and each of the curves looks like the sum of the cases of skew pairs of different skew angles. Figures 14 through 16 show the cases of bundle clusters (Figure 3) with  $N_t=20, P=0.5$  mm,  $N_{seg}=20$  and  $D_n=3 \times 10^6/m^3$  ( $D_v=0.467$  %,  $D_c=5.2$  %). The cases of  $\theta_m=0^\circ$  (Figures 14 and 15) shows that the resonant frequency goes higher with increase of the number of array. Figure 16 for the cases of  $3 \times 3$  array shows that the increase of dispersion of the tilt angles broaden the frequency range covering the resonance peaks.

These values shown above at the vicinity of or higher than the resonant frequency given by the wire length of a single helix (half wavelength) are less accurate than those at lower frequencies because of the limitation of the quasi-static approximation and the method of excitation.

## 5 Conclusion

Effective parameters of media realized by distributions of clusters of conducting helices in free space are analysed by quasi-static Lorentz approach. Currents on the wires are calculated by the method of moments utilizing NEC2 code. Unconventional use of such programs requires direct manipulation of the codes to make it fit the actual work. Comparing the numerical results with those of other codes such as Richmond's one is necessary. Solutions obtained in this work at lower frequencies are more accurate than those at higher ones, showing the possibility of analysis of carbon micro coils mixtured on cluster basis whose interactions with electromagnetic waves at low frequencies have been of interest.

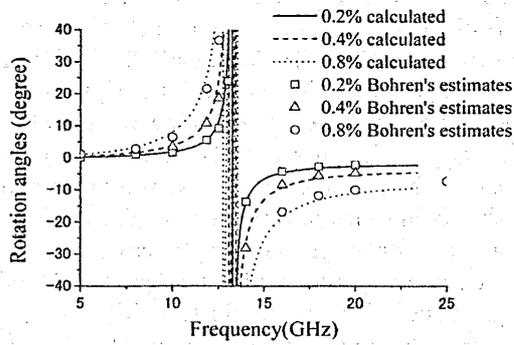


Figure 4: Comparison with the Bohren's estimates

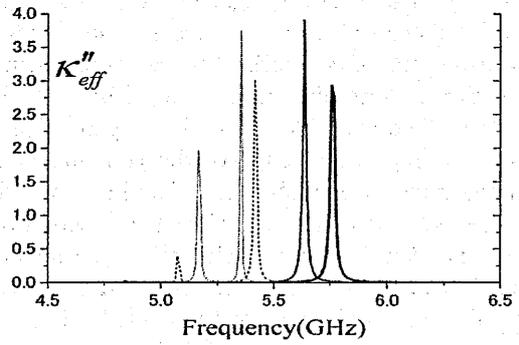


Figure 7: Imaginary part of effective chirality of skew cases for  $d=1.7$  mm

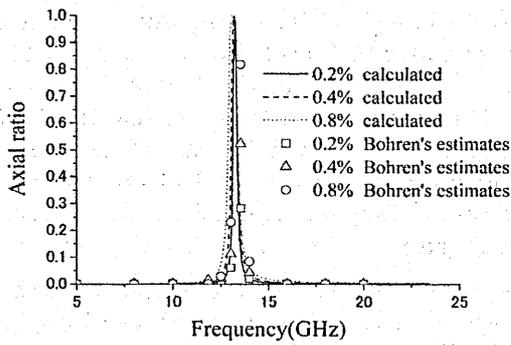


Figure 5: Comparison with the Bohren's estimates

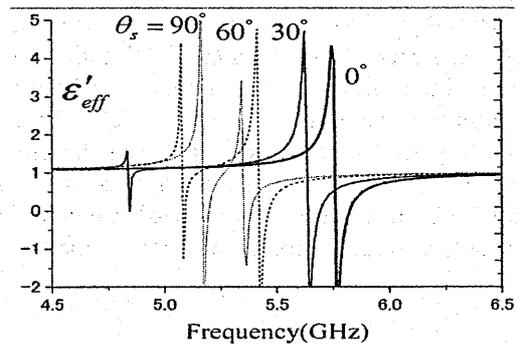


Figure 8: Real part of effective permittivity of skew cases for  $d=1.7$  mm

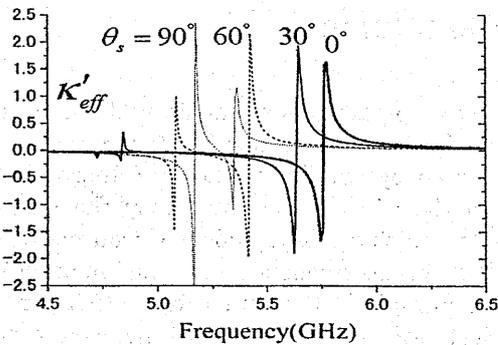


Figure 6: Real part of effective chirality of skew cases for  $d=1.7$  mm

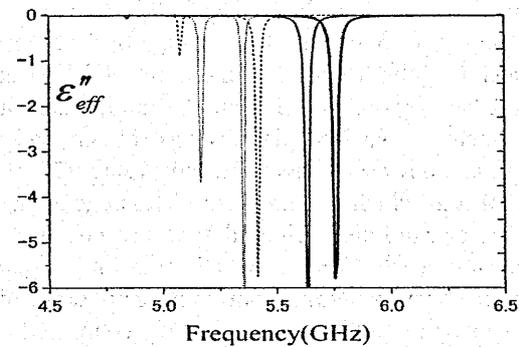


Figure 9: Imaginary part of effective permittivity of skew cases for  $d=1.7$  mm

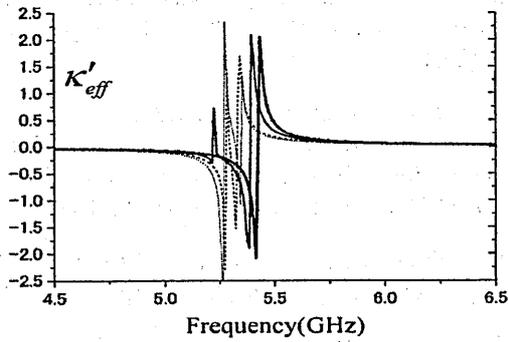


Figure 10: Real part of effective chirality of skew cases for  $d=3.0$  mm

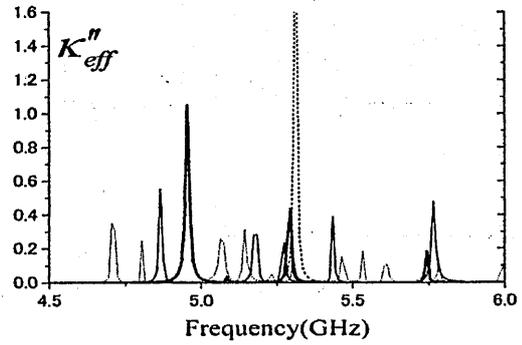


Figure 13: Imaginary part of the effective chirality for spherical cases

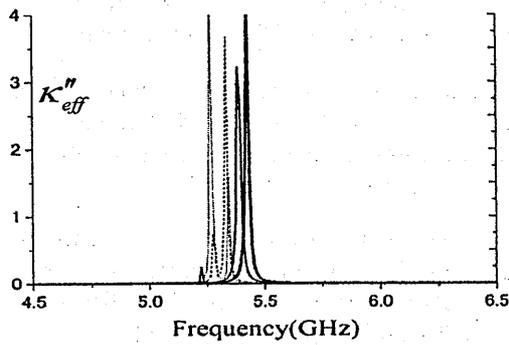


Figure 11: Imaginary part of effective chirality of skew cases for  $d=3.0$  mm

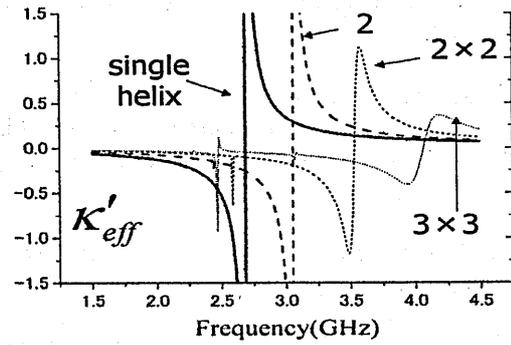


Figure 14: Real part of the effective chirality of bundle cases for  $\theta_m = 0^\circ$

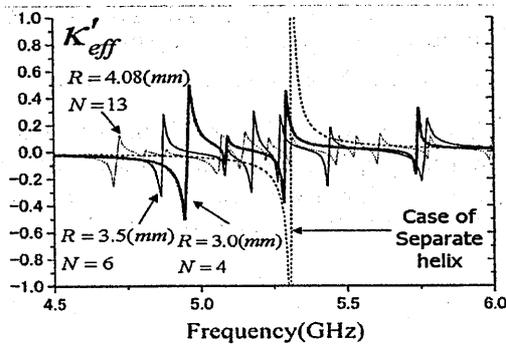


Figure 12: Real part of the effective chirality for spherical cases

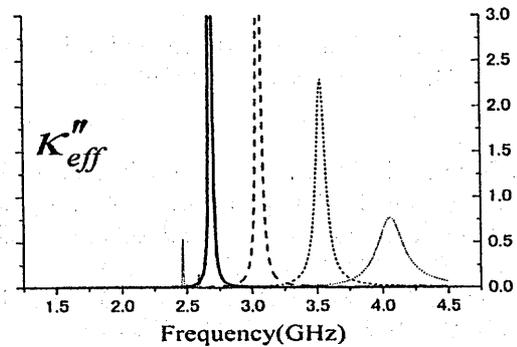


Figure 15: Imaginary part of the effective chirality of bundle cases for  $\theta_m = 0^\circ$

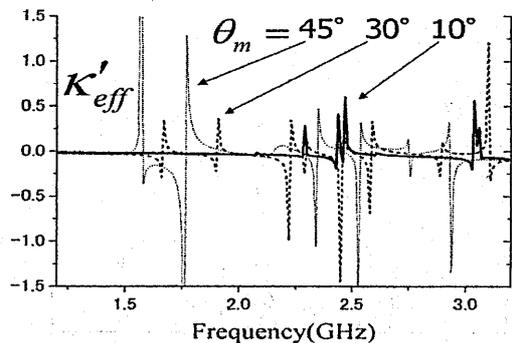


Figure 16: Real part of the effective chirality of bundle cases for 3×3 array

## References

- [1] S. R. Buxton and S. M. Roberts, "Guide to organic stereochemistry", Addison Wesley Longman, 1996.
- [2] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov and A. J. Viitanen, "Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media", Artech House (1994) pp. 1-18, 193-243.
- [3] *IEEE Trans. Antennas Propag., Special Issue on Metamaterials*, **51** [10] (2003).
- [4] A. H. Sihvola and I. V. Lindell, "Analysis on chiral mixtures", *J. Electro. Waves and Applic.*, **6** [5/6] pp. 553-572 (1992).
- [5] C. R. Brewitt-Taylor, P. G. Lederer F. C. Smith and S. Haq, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **47** [4] (1999).
- [6] F. Guerin, P. Bannelier, M. Labeyrie, J. Ganne and P. Guillon, *J. Phys. D*, **28** (1995).
- [7] Y. Nanbu, T. Matsuoka and M. Tateiba, "The effective constitutive parameters of a random medium containing small chiral spheres", *IEEJ Trans. FM*, **123** [3] pp. 259-264 (2003).  
南部幸久, 松岡剛志, 立居場光正, "多数のキララル球から構成されるランダム媒質の等価構成定数", 電気学会論文誌 A, **123** [3] pp. 259-264 (2003).
- [8] K. W. Whites, "Full-wave computation of constitutive parameters for lossless composite chiral materials", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **43** [4] pp. 376-384 (1995).
- [9] A. B. Monvel and D. Shepelsky, "A frequency-domain inverse problem for a dispersive stratified chiral medium", *J. Math. Phys.*, **41** [9] pp. 6116-6129 (2000).
- [10] M. Asai and J. Yamakita, "NEC2-based study on plane wave response of chiral or racemic mixture of conducting helices", *Papers of Technical Meeting on E.M.T.*, **EMT-04** pp.19-24 (2004).
- [11] S. Motojima, M. Kawaguchi, K. Nozaki and H. Iwanaga, *Appl. Phys. Lett.*, **56** [4] pp.321- (1995).
- [12] S. Motojima, *Papers of Technical Meeting on E.M.T.*, **EMT-03-83** pp.65- (2003).
- [13] M. Asai, J. Yamakita, K. Matsumoto and H. Wakabayashi, "On electromagnetic chirality of helix-loaded materials", *Materials Integration*, **17** [7] pp. 27-33 (2004).  
浅居正充, 山北次郎, 松本恵治, 若林秀昭, "らせん構造物質の電磁気学的キラリティ", マテリアルインテグレーション, **17** [7] pp. 27-33 (2004).
- [14] G. J. Burke and A. J. Poggio, "Numerical electromagnetics code (NEC)- Method of moments, Part I - III", Lawrence Livermore National Laboratory, Report **UCID-18834** (1981).
- [15] H. Saitoh, M. Omiya and K. Itoh, "Estimations and evaluations of radiation patterns of personal handy phone systems by NEC2", *IEICE Trans. B-II*, **J78-B-II** [7] pp. 503-510 (1995).
- [16] P. J. Moore, H. D. M. Razip and V. S. H. Chong, "The application of NEC2 in predicting the radiated field from transmission tower arcing faults", *Proc. 14th PSCC*, Session 24, pp. 1-7 (2002).
- [17] A. Ishimaru, S. Lee, Y. Kuga and V. Jandhyala, "Generalized constitutive relations for metamaterials based on the quasi-static Lorentz theory", *IEEE Trans. Antennas Propag., Special Issue on Metamaterials*, **51** [10] pp. 2550-2557 (2003).
- [18] C. F. Bohren, R. Luebbers, H. S. Langdon and F. Hunsberger, "Microwave-absorbing chiral composites: Is chirality essential or accidental?", *Appl. Opt.*, **31** [30] pp. 6403-6407 (1992).

輻射科学研究会資料

資料番号	RS 06-14
------	----------

# 欠陥のある方形溝グレーティングからの 平面波の散乱

服部一裕<sup>1</sup> 中山純一<sup>2</sup>

(京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科)

1 kazuhirin@nifty.com

2 nakayama@kit.ac.jp

2006年12月15日(金)

輻射科学研究会

(於 京都工芸繊維大学 1号館 3F 大学院会議室)

## 1 はじめに

エレクトロニクスの領域では、メモリーチップやLCD電極のように矩形のラインを平行に配置した素子が数多くあり、そうした周期構造の欠陥が重大な問題となっている。欠陥のある周期構造のモデルとして、本研究では次頁の図に示しているような周期的に配置された方形溝グレーティングに一つだけ欠陥がある表面を考える。そのような表面からの散乱は、欠陥の測定や検査の光学的方法を検討する上で重要である。

方形溝が一つある場合や方形溝が有限個ある場合、欠陥が無い周期的な方形溝グレーティングからの散乱や回折については多くの研究がされている [1-8]。しかしながら、グレーティングに欠陥がある場合の散乱問題はほとんど研究されていない。

本研究では、位置が既知である単一の欠陥を持つ次元の方形溝グレーティングからの平面波の散乱を扱う。表面は完全導体で、方形溝が周期的に配置されており、欠陥の場所には溝が無い。モード展開法 [9] を用いて、溝の中の波動場を振幅を未知数とした導波モードで記述する。導波モードの振幅は、欠陥が無くグレーティングが完全に周期的である場合の解である“ベース成分”と欠陥があることによる“摂動成分”との和で書いている。先ず、第1ステップとして欠陥が無い場合の“ベース成分”を求める関係式を求める。第2ステップとして、“ベース成分”を用いて“摂動成分”を求めるための関係式を導出する。

全散乱断面積と散乱振幅の減少分の関係を表した光学定理の新しい表現を導く。TE平面波入射について、散乱特性を近似的に評価するため、導波モードのベース成分だけで散乱波の振幅を表した“単一散乱近似”を導入する。次に、無限和の表現について打ち切り次数を導入して、ベース成分と摂動成分を数値的に求め、これらから散乱断面積などを計算しグラフに示している。また、TM平面波入射について、散乱に対する対角項の影響のみを考慮した“対角近似”を導入して散乱波の振幅を求め、散乱断面積などを計算している。

## 2 問題の定式化

### 2.1 単一欠陥のある方形溝グレーティング

周期的方形溝で  $x = 0$  においてのみ溝が形成されていない欠陥のあるグレーティングを考える (次頁の図参照)。このような単一欠陥のあるグレーティング形状を以下の様に記述する。

$$z = f(x) = -d \left[ \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) - u(x|w) \right]. \quad (1)$$

ここで、 $L$  は周期、 $w$  および  $d$  はそれぞれ溝の深さと幅である。

$u(x|w)$  は一つの方形溝で以下の様に定義する。

$$u(x|w) = \begin{cases} 1, & |x| \leq w/2, \\ 0, & |x| > w/2. \end{cases} \quad (2)$$

このような方形溝は直交性を持っている。

$$u(x-gL|w)u(x-g'L|w) = \delta_{gg'}u(x-gL|w), \quad (g, g' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3)$$

ここで、 $\delta_{gg'}$  は Kronecker のデルタである。 $u(x|w)$  の Fourier 変換は以下の様になる。

$$U(q) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x|w)e^{-iqx} dx = 2 \frac{\sin(qw/2)}{qw} w. \quad (4)$$

この方形溝の Fourier 変換は後で散乱波を求める際に利用する。

グレーティングの周期  $L$  と溝の幅  $w$  を用いて  $k_L$ ,  $k_w$  を次のように定義する.

$$k_w = \frac{\pi}{w}, \quad k_L = \frac{2\pi}{L}. \quad (5)$$

また, 補助関数として  $s_m(q)$  および  $c_m(q)$  を以下の様に定める.

$$s_m(q) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x|w) \sin(mk_w(x+w/2)) e^{-iqx} dx \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2i} [U(q-mk_w) e^{im\pi/2} - U(q+mk_w) e^{-im\pi/2}], \quad (7)$$

$$c_m(q) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x|w) \cos(mk_w(x+\frac{w}{2})) e^{-iqx} dx, \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} [U(q-mk_w) e^{i\frac{m\pi}{2}} + U(q+mk_w) e^{-i\frac{m\pi}{2}}]. \quad (9)$$

ここで,  $m$  は整数である. 図 1 に  $m=1, 4, 7$  のとき ( $w=1.3\lambda$ ) の  $s_m(q)$  の振舞いを示す. ここで,  $\lambda$  は波長である.  $s_m(q)$  は奇数の  $m$  に関して実の偶関数, 偶数の  $m$  に関して虚の奇関数となる.  $s_m(q)$  は  $|q|$  が大きくなると  $s_m(q) \sim 1/q^2$  のように減衰する. この補助関数  $s_m(q)$  は  $x$  軸上の移動  $mL$  に対して位相の変化  $e^{-iqmL}$  を生じる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) \sin(mk_w(x+w/2-gL)) e^{-iqx} dx = e^{-iqgL} s_m(q). \quad (10)$$

入射する平面波の  $y$  成分 (TE 波の時は電界, TM 波の時は磁界) を  $\Psi(x, z)$  とする.  $\Psi(x, z)$  は  $z > f(x)$  の領域で Helmholtz 方程式を満たす.

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \Psi(x, z) = 0. \quad (11)$$

ここで,  $k = 2\pi/\lambda$  は波数である. 表面は完全導体であるとする. このとき, 波動場  $\Psi(x, z)$  は表面上  $z = f(x)$  で, TE 波入射のとき Dirichlet 条件, TM 波入射のとき Neumann 条件を満たす.

$$TE : \Psi(x, z)|_{z=f(x)} = 0, \quad (12)$$

$$TM : \frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=f(x)} = 0. \quad (13)$$

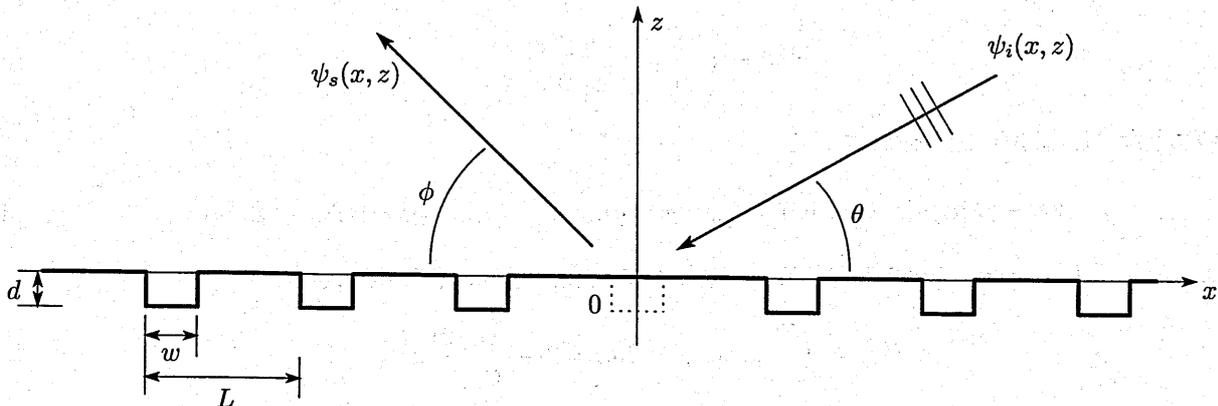
表面に対して入射する平面波  $\psi_i(x, z)$  を以下のように書く.

$$\psi_i(x, z) = e^{ipx} e^{-i\beta_0(p)z}, \quad p = -k \cos \theta, \quad (14)$$

$$\beta_m(p) = \beta_0(p + mk_L) = \sqrt{k^2 - (p + k_L m)^2}, \quad (15)$$

$$Im[\beta_m(p)] \geq 0, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (16)$$

ここで,  $\theta$  は入射角,  $Im$  は複素数の虚部である.



Geometry of the problem. A groove is not formed at  $x = 0$

## 2.2 完全に周期的な方形溝グレーティングからの回折

先ず、グレーティングに欠陥が無く完全に周期的な方形溝グレーティングからの回折波を求める。欠陥の無い方形溝グレーティング  $f_p(x)$  を以下のように書き表す。

$$z = f_p(x) = -d \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w). \quad (17)$$

領域  $z \geq 0$  に対して、波動場の  $y$  成分  $\hat{\Psi}_1(x, z)$  を入射波  $\psi_i(x, z)$  と表面の周期性によって回折される回折波  $\psi_d(x, z)$  の和で書く。

$$\hat{\Psi}_1(x, z) = e^{ipx} e^{-i\beta_0(p)z} + \psi_d(x, z), \quad (18)$$

$$\psi_d(x, z) = e^{ipx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ink_L x + i\beta_n(p)z}. \quad (19)$$

ここで、 $A_n$  は  $n$  次の回折波の振幅である。一方、モード展開法 [9] により、溝の内部の波動場の  $y$  成分  $\hat{\Psi}_2(x, z)$  は導波モードの和で書き表せる。

$$TE: \hat{\Psi}_2(x, z) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^s \sin(mk_w(x+w/2-gL)) \frac{\sin(\gamma_m(z+d))}{\gamma_m}, \quad (20)$$

$$TM: \hat{\Psi}_2(x, z) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^c \cos(mk_w(x+\frac{w}{2}-gL)) \cos(\gamma_m(z+d)), \quad (21)$$

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{w}\right)^2}. \quad (22)$$

ここで、 $Q_m^s$ 、 $Q_m^c$  は導波モードの振幅で、これをベース成分と呼ぶことにする。 $\gamma_m$  は  $m$  次の導波モードの伝搬定数である。TE 波入射の場合、導波モードの次数は  $m=1$  から始まることに注意する。

ここで、完全に周期的な場合のエネルギー保存則を導出しておく。恒等式  $Im[\text{div} \hat{\Psi}_1 \text{grad} \hat{\Psi}_1^*] = 0$  と  $\hat{\Psi}_1 \text{grad} \hat{\Psi}_1^*$  が周期  $L$  に関して周期関数であることより、 $z > 0$  の領域に対して以下の関係式を得る。

$$Im \left[ \int_{-L/2}^{L/2} \hat{\Psi}_1(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \hat{\Psi}_1^*(x, z) dx \right] = 0. \quad (23)$$

(18) を (23) に代入して、

$$\beta_0(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re[\beta_n(p)] |A_n|^2, \quad (24)$$

を得る。これは良く知られたエネルギー保存則である。ここで、 $Re$  は複素数の実部、 $Re[\beta_n(p)] |A_n|^2$  は  $m$  次回折波の電力である。エネルギー保存則は後に計算例をグラフで示す。

## 2.3 完全に周期的な場合の解

ここでは  $z=0$  における電界・磁界の連続性から  $A_n$  および  $Q_m^s$ 、 $Q_m^c$  を求めよう。

[TE 波入射]

$\hat{\Psi}_1(x, 0) = \hat{\Psi}_2(x, 0)$  から、以下の関係式を得る。

$$e^{ipx} \left[ 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ink_L x} \right] = \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^s \sin(mk_w(x+w/2-gL)) \frac{\sin(\gamma_m d)}{\gamma_m}. \quad (25)$$

$e^{-ink_L x}$  を掛けて一周期  $L$  に関して積分すると

$$A_n = -\delta_{n0} + \frac{1}{L} \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^s \frac{\sin(\gamma_m d)}{\gamma_m} s_l(p+nk_L). \quad (26)$$

次に,  $\sum_{g \neq 0} u(x-gL|w)[\partial \hat{\Psi}_1 / \partial z - \partial \hat{\Psi}_2 / \partial z]_{z=0} = 0$  から,

$$\begin{aligned} & \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipx} \times \left[ -i\beta_0(p) + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(p) A_n e^{ink_L x} \right] \\ &= \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^s \sin(mk_w(x+w/2-gL)) \cos(\gamma_m d). \end{aligned} \quad (27)$$

を得る.  $u(x-gL|w) \times \sin(mk_w(x+w/2-gL))$  を乗じて Fourier 変換することにより,

$$i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(p) A_n s_l(-p-nk_L) = i\beta_0(p) s_m(-p) + \frac{wQ_m^s}{2} \cos(\gamma_m d). \quad (28)$$

を得る. (26) および (28) から  $A_n$  と  $Q_m^s$  を決定することができる. 垂直方向からの入射  $\theta = 90^\circ$  ( $p = 0$ ) に対しては  $Q_m^s$  が偶数の  $m = 2, 4, 6, \dots$  に対してゼロとなる. (28) の右辺の  $s_m(0)$  が偶数の  $m$  に対してゼロとなるため,  $\beta_n(0) A_n s_m(-nk_L)$  と  $\beta_{-n}(0) A_{-n} s_m(nk_L)$  が相殺するためである. この点については後で議論する.

[TM 波入射]

$[\partial \hat{\Psi}_1 / \partial z - \partial \hat{\Psi}_2 / \partial z]_{z=0} = 0$  から, 以下の関係式を得る.

$$\begin{aligned} & e^{ipx} \left[ -i\beta_0(p) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\beta_n(p) A_n e^{ink_L x} \right] \\ &= - \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m Q_m^c \cos(mk_w(x+\frac{w}{2}-gL)) \sin(\gamma_m d). \end{aligned} \quad (29)$$

$e^{-ink_L x}$  を乗じて一周期  $L$  について積分すると

$$i\beta_n(p) L A_n + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m Q_m^c \sin(\gamma_m d) c_m(p+nk_L) = i\beta_0(p) L \delta_{n0}. \quad (30)$$

次に,  $\sum_{g \neq 0} u(x-gL|w)[\hat{\Psi}_1(x,0) - \hat{\Psi}_2(x,0)] = 0$ , から,

$$\begin{aligned} & \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipx} \left[ 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ink_L x} \right] \\ &= \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^c \cos(mk_w(x+\frac{w}{2}-gL)) \cos(\gamma_m d). \end{aligned} \quad (31)$$

を得る.  $u(x-gL|w) \times \cos(mk_w(x+w/2-gL))$  を乗じて Fourier 変換することにより,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n c_m(-p-nk_L) - \frac{wQ_m^c}{2} \cos(\gamma_m d)(1+\delta_{m0}) = c_m(-p), \quad (32)$$

を得る. (30) と (32) から,  $A_n$  および  $Q_m^c$  を決定することができる.

次節では, このようにして求めた  $\hat{\Psi}_1(x, z)$  および  $\hat{\Psi}_2(x, z)$  を用いて散乱波動場を求める.

## 2.4 単一欠陥のある方形溝グレーティングからの散乱

散乱波は周期的なグレーティングに欠陥が存在することによって発生する。ここでは、そのような散乱波を完全に周期的な場合の回折波からの摂動として表す。すなわち、 $z > 0$  の領域に対して

$$\Psi_1(x, z) = \hat{\Psi}_1(x, z) + \psi_s(x, z), \quad (33)$$

$$\psi_s(x, z) = e^{ipx} \int_{-\infty}^{\infty} a(s) e^{isx + i\beta_0(p+s)z} ds, \quad (34)$$

と書く。ここで、 $\psi_s(x, z)$  は欠陥による散乱波、 $a(s)$  は散乱波の振幅である。散乱波  $\psi_s(x, z)$  は単一の欠陥によって散乱された波動場なので  $\psi_s(x, z)$  は放射条件を満たす。すなわち、 $\psi_s \sim e^{ikr}/\sqrt{r}$  ( $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ) であり、 $r \rightarrow \infty$  の無限遠方で減衰する。この性質は後で用いる。

一方、溝の中の波動場  $\Psi_2(x, z)$  は、グレーティングが完全に周期的な場合の導波モードと、欠陥が存在することによる摂動項  $\psi_g(x, z)$  の和で書く。

$$\Psi_2(x, z) = \hat{\Psi}_2(x, z) + \psi_g(x, z), \quad (35)$$

$$TE: \psi_g(x, z) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=1}^{\infty} q_m^{(g)} \sin(mk_w(x+w/2-gL)) \frac{\sin(\gamma_m(z+d))}{\gamma_m} - u(x|w) \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^s \sin(mk_w(x+w/2)) \frac{\sin(\gamma_m(z+d))}{\gamma_m}, \quad (36)$$

$$TM: \psi_g(x, z) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=0}^{\infty} q_m^{(g)} \cos(mk_w(x+\frac{w}{2}-gL)) \cos(\gamma_m(z+d)) - u(x|w) \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^c \cos(mk_w(x+\frac{w}{2})) \cos(\gamma_m(z+d)). \quad (37)$$

ここで、 $q_m^{(g)}$  は  $g$  番目の溝の中の  $m$  次の導波モードの摂動分の振幅である。ゼロ番目  $g=0$  には溝が無いので、全ての  $m$  に対して  $q_m^{(0)} \equiv 0$  となる。

## 2.5 光学定理と散乱断面積

ここでは単一欠陥がグレーティングに存在する場合の光学定理を導く。散乱波  $\psi_s(x, z)$  が  $(x^2 + z^2)^{-1/4}$  に比例して減衰するので、 $\hat{\Psi}_1 \text{grad} \psi_s^*$  および  $\psi_s \text{grad} \hat{\Psi}_1^*$ 、 $\psi_s \text{grad} \psi_s^*$  も  $|x| \rightarrow \infty$  の無限遠方でゼロとなる。さらに、 $\hat{\Psi}_1 \text{grad} \hat{\Psi}_1^*$  が  $x$  について周期  $L$  の周期関数であることと、恒等式  $Im[\text{div}(\hat{\Psi}_1 + \psi_s) \text{grad}(\hat{\Psi}_1 + \psi_s)^*] = 0$  より、 $z > 0$  領域について以下のように導くことができる。

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} Im \left[ \int_{-(N+\frac{1}{2})L}^{(N+\frac{1}{2})L} \Psi_1(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \Psi_1^*(x, z) dx \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} Im \left[ \int_{-(N+\frac{1}{2})L}^{(N+\frac{1}{2})L} \hat{\Psi}_1(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_s^*(x, z) + \psi_s(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \hat{\Psi}_1^*(x, z) + \psi_s(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \psi_s^*(x, z) dx \right] = 0. \quad (38) \end{aligned}$$

ここで、(23) を適用した。

(18) および (19)、(34) を (38) に代入して、グレーティングに単一欠陥がある場合についての新しい光学定理の表現を得る。すなわち、

$$P_c = \Phi_s, \quad (39)$$

$$P_c = -\frac{2}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Re[\beta_m^*(p)] Re[a(k_L m) A_m^*], \quad (40)$$

$$\Phi_s = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} Re[\beta_0(p+s)] |a(s)|^2 ds. \quad (41)$$

ここで、 $P_c$  は散乱振幅の減少に関係する量、 $\Phi_s$  は全散乱断面積である。光学定理 (39) によって数値計算の精度を見積もることが可能である。また、この光学定理は前方散乱定理の拡張になっている [10, 11]。全散乱断面積は次のように書き直すことができる。

$$\frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[\beta_0(p+s)] |a(s)|^2 ds = \frac{L}{2\pi} \int_0^\pi \sigma(\phi|\theta) d\phi. \quad (42)$$

ここで、 $\phi$  は散乱角、 $\sigma(\phi|\theta)$  は一周あたり散乱断面積で次のように書ける。

$$\sigma(\phi|\theta) = \frac{2\pi k \sin^2 \phi |a(-k \cos \phi - p)|^2}{L}. \quad (43)$$

散乱断面積は無次元である。

## 2.6 散乱波動場と単一散乱近似

ここでは、グレーティングに単一欠陥がある場合について、 $a(s)$  および  $q_m^{(g)}$  を決定する。 $z=0$  における電界と磁界の連続性から  $a(s)$  および  $q_m^{(g)}$  を求めるための関係式を導出する。

[TE 波入射]

$\Psi_1(x, 0) = \Psi_2(x, 0)$  は則ち  $\psi_s(x, 0) = \psi_g(x, 0)$  であるので、

$$e^{ipx} \int_{-\infty}^{\infty} a(s) e^{isx} ds = \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=1}^{\infty} q_m^{(g)} \sin(mk_w(x+w/2-gL)) \frac{\sin(\gamma_m d)}{\gamma_m} - u(x|w) \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^s \sin(mk_w(x+w/2)) \frac{\sin(\gamma_m d)}{\gamma_m}. \quad (44)$$

となる。 $e^{-i(p+s')x/2\pi}$  を乗じてから Fourier 変換することにより、散乱波の振幅  $a(s)$  は次のように表される。

$$a(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} s_m(p+s) \frac{\sin(\gamma_m d)}{\gamma_m} \left[ \sum_{g=-\infty}^{\infty} e^{-isgL} q_m^{(g)} - Q_m^s \right]. \quad (45)$$

溝の深さ  $d$  が、グレーティングの溝の中で導波モードが共振しない程度の深さであれば、上式の中の 1 次の導波モード  $m=1$  に関する項が支配的となる。しかしながら、溝の中で共振が起こる、則ち、深さ  $d$  が  $\sin(\gamma_1 d) = 0$  を満たす値であると、上式の中の  $m$  についての和は  $m=2$  から始まることとなり、散乱特性はかなり異なる。そのような場合には、導波モード  $m=2$  に関する項が散乱に与える影響が大きくなる。こうした散乱特性については後で述べる。

一方、 $\sum_{g \neq 0} u(x-gL|w) [\partial \Psi_1 / \partial z - \partial \Psi_2 / \partial z]_{z=0} = 0$  より、 $\sum_{g \neq 0} u(x-gL|w) [\partial \psi_s / \partial z - \partial \psi_g / \partial z]_{z=0} = 0$  となる。これより、

$$\begin{aligned} \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipx} \int_{-\infty}^{\infty} i\beta_0(p+s) a(s) e^{isx} ds - u(x|w) e^{ipx} \int_{-\infty}^{\infty} i\beta_0(p+s) a(s) e^{isx} ds \\ = \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) e^{ipgL} \sum_{m=1}^{\infty} q_m^{(g)} \sin(mk_w(x+w/2-gL)) \cos(\gamma_m d), \end{aligned} \quad (46)$$

を得る。 $u(x-gL|w) \times \sin(mk_w(x+w/2-gL))$  を乗じて Fourier 変換をとることにより次式を得る。

$$i(1-\delta_{g0}) \int_{-\infty}^{\infty} \beta_0(p+s) s_m(-p-s) e^{isgL} a(s) ds = \frac{w}{2} \cos(\gamma_m d) q_m^{(g)}. \quad (47)$$

(45) を (47) に代入して、欠陥による摂動分を表す項  $q_m^{(g)}$  を求める関係式を次のように得る。

$$\sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{g'=-\infty}^{\infty} C_{mg}(m', g') q_{m'}^{(g')} = \sum_{m'=1}^{\infty} Q_{m'}^s \left[ C_{mg}(m', 0) + \delta_{g0} \delta_{mm'} \frac{w}{2} \cos(\gamma_m d) \right]. \quad (48)$$

ここで、 $Q_m^s$  は (26) および (28) から導出したベース成分である。また、 $C_{mg}(m', g')$  は次のように与えられる。

$$C_{mg}(m', g') = (1 - \delta_{g0}) \frac{i \sin(\gamma_{m'} d)}{2\pi \gamma_{m'}} e^{-ip(g-g')L} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_0(s') s_m(-s') s_{m'}(s') e^{is'(g-g')L} ds' - \delta_{gg'} \delta_{mm'} \frac{w}{2} \cos(\gamma_m d). \quad (49)$$

この式の中の積分は、被積分関数が  $|s'| \rightarrow \infty$  のとき  $1/s'^3$  に比例して減衰するため容易に数値計算することができる。ここで、 $C_{mg}(m', g')$  は  $g'$  番目の溝の中の  $m'$  次の導波モードと  $g$  番目の溝の中の  $m$  次の導波モードとのカップリングを表している。 $C_{mg}(m', g')$  は入射波の  $x$  方向の波数成分  $p$  を含まない。(48) を解いて欠陥による摂動分の項  $q_m^{(g)}$  を求めるため  $C_{mg}(m', g')$  を数値的に計算し、求めた  $q_m^{(g)}$  から散乱波の振幅  $a(s)$  を計算する。

一方、もし欠陥の影響による摂動分  $q_m^{(g)}$  が小さければ、散乱波の振幅は近似的にベース成分  $Q_m^s$  のみから求めることが考えられる。このようにして求めた散乱波の振幅を  $\hat{a}(s)$  は (45) から次のようになる。

$$\hat{a}(s) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} s_m(p+s) \frac{\sin(\gamma_m d)}{\gamma_m} Q_m^s. \quad (50)$$

こうして求めた散乱波の解を「単一散乱近似」と呼ぶことにする。 $\hat{a}(s)$  は隣接する溝とのカップリングの影響を表している  $q_m^{(g)}$  を無視してベース成分  $Q_m^s$  のみで近似している。後の数値計算で、単一散乱近似  $\hat{a}(s)$  とカップリングの影響まで考慮した解とを数値的に比較する。

#### [TM 波入射]

次に、TM 波入射の場合について散乱波の振幅  $a(s)$  を求める。TE 波入射の場合と同様、 $z=0$  における電界と磁界の連続性より  $a(s)$  と  $q_m^{(g)}$  の関係式を導く。

$[\partial\Psi_1/\partial z - \partial\Psi_2/\partial z]_{z=0} = 0$  は  $[\partial\psi_s/\partial z - \partial\psi_g/\partial z]_{z=0} = 0$  と書き換えることができ、

$$e^{ipx} \int_{-\infty}^{\infty} i\beta_0(p+s)a(s)e^{isx} ds = -\sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w)e^{ipgL} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m q_m^{(g)} \cos(mk_w(x+\frac{w}{2}-gL)) \sin(\gamma_m d) + u(x|w) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m Q_m^c \cos(mk_w(x+\frac{w}{2})) \sin(\gamma_m d), \quad (51)$$

を得る。 $e^{-i(p+s')x/2\pi}$  を乗じて Fourier 変換をとることにより

$$i\beta_0(p+s)a(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m c_m(p+s) \sin(\gamma_m d) \left[ Q_m^c - \sum_{g=-\infty}^{\infty} e^{-isgL} q_m^{(g)} \right], \quad (52)$$

を得る。

一方、 $\sum_{g \neq 0} u(x-gL|w)[\Psi_1(x,0) - \Psi_2(x,0)] = 0$  は  $\sum_{g \neq 0} u(x-gL|w)[\psi_s(x,0) - \psi_g(x,0)] = 0$  と書き換えられる。つまり、

$$\left[ \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w) - u(x|w) \right] e^{ipx} \int_{-\infty}^{\infty} a(s)e^{isx} ds = \sum_{g=-\infty}^{\infty} u(x-gL|w)e^{ipgL} \sum_{m=0}^{\infty} q_m^{(g)} \cos(mk_w(x+\frac{w}{2}-gL)) \cos(\gamma_m d), \quad (53)$$

である。 $u(x-gL|w) \times \cos(mk_w(x+w/2-gL))$  を乗じて Fourier 変換をとることにより、

$$i(1-\delta_{g0}) \int_{-\infty}^{\infty} c_m(-p-s)e^{isgL} a(s) ds = \frac{w}{2} q_m^{(g)} \cos(\gamma_m d)(1+\delta_{m0}), \quad (54)$$

を得る。(54) を (45) に代入して次式を得る。

$$i\beta_0(p+s)a(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m c_m(p+s) \sin(\gamma_m d) \times \left( Q_m^c - \sum_{g=-\infty}^{\infty} e^{-isgL} \frac{1-\delta_{g0}}{\frac{w}{2} \cos(\gamma_m d)(1+\delta_{m0})} \int_{-\infty}^{\infty} c_m(-p-s')e^{is'gL} a(s') ds' \right). \quad (55)$$

$g$  について和を取り、周期関数  $e^{isgL}$  とデルタパルス列の関係式

$$\sum_{g=-\infty}^{\infty} e^{isgL} = k_L \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(s - lk_L), \quad (56)$$

を用いて、散乱波の振幅  $a(s)$  を求めるための関係式を次のように得る.

$$\begin{aligned} i\beta_0(p+s)a(s) + k_L \sum_{l=-\infty}^{\infty} M(s, s+lk_L|p)a(s+lk_L) \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m}{2\pi} c_m(p+s) \sin(\gamma_m d) Q_m^c + \int_{-\infty}^{\infty} M(s, s'|p)a(s')ds'. \end{aligned} \quad (57)$$

ここで、 $M(s, s'|p)$  はマスオペレータで、2回散乱の効果を表している。マスオペレータは次のように書ける。

$$M(s, s'|p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m \sin(\gamma_m d)}{\pi w(1+\delta_{m0}) \cos(\gamma_m d)} c_m(p+s) c_m(-p-s'). \quad (58)$$

(57) は無限個の未知の項を含む  $a(s)$  についての積分方程式であり、この積分方程式 (57) を解く解法は定かではない。しかしながら、ここでは右辺第2項の積分項を無視し、左辺第2項の和について対角項 ( $l=0$ ) のみを評価することで  $a(s)$  を求めてみる。則ち、

$$a(s) = \frac{1}{i\beta_0(p+s) + k_L M(s, s|p)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m}{2\pi} c_m(p+s) \sin(\gamma_m d) Q_m^c, \quad (59)$$

となる。ここで、 $1/(i\beta_0(p+s) + k_L M(s, s|p))$  は共振因子である。

### 3 数値計算例

#### 3.1 TE 波入射

ここでは周期が  $L = 2\lambda$  の場合についての数値計算結果を示す。

(48) は無限個の未知数  $q_m^{(g)}$  に関する線型方程式であるので考慮する範囲を限定した打ち切り次数を採用して解くこととする。ここで、回折波の次数  $n$  に関する打ち切り次数  $N_d$  および、溝の中の導波モードの次数  $m$  に関する打ち切り、考慮する溝の数  $g$  に関する打ち切り次数  $N_g$  を導入する。つまり、 $A_n$ ,  $Q_m^s$ ,  $q_m^{(g)}$  を (26) および (28) の中の和で次のように置いている。また、 $n = -N_d$  と  $N_d$  の間の溝のみを考えている。

$$\begin{aligned} A_n &= 0, & |n| > N_d, \\ Q_m^s &= 0, & l > N_m, \\ q_m^{(g)} &= 0, & |g| > N_g, \quad m > N_m. \end{aligned} \quad (60)$$

本論文では、各打ち切り次数を次のように置いている。

$$N_d = 7, \quad N_m = 15, \quad N_g = 7. \quad (61)$$

則ち、 $[A_m]$  は  $(2N_d + 1)$  列のベクトル、 $[Q_m^s]$  は  $N_m$  列のベクトル、そして  $[q_m^{(g)}]$  は  $(N_m) \times (2N_g + 1)$  の行列として以下の数値計算を行っている。(48) を解いて振動項  $q_m^{(g)}$  を求めるため、ベース成分  $Q_m^s$  および積分  $C_{mg}(m', g')$  を数値計算している。そして、散乱波の振幅  $a(s)$  を求めて光学定理と散乱断面積を計算している。数値計算による。

まず、欠陥が無く完全に周期的な場合について考える。図2に入射角  $\theta$  を変えたときの回折波の相対電力を示す。溝の幅は  $w = 1.3\lambda$ 、溝の深さは左の図が  $d = 0.1\lambda$ 、右の図が  $d = 0.542\lambda$  である。入射波の電力は1に規格化している。'(0)'の線は0次の Floquet モードの電力を示す。則ち、 $Re[\beta_0(p)]|A_0|^2/\beta_0(p)$  である。同じ

く、'(1)'の線は1次のFloquetモード、等々である。これらの数値計算では、入射電力と回折波の電力の和の誤差は常に $10^{-14}$ より小さくなっている。このことから、完全に周期的な場合では、打ち切り次数 $N_d$ および $N_m$ は十分であると考えられる。深さが $d = 0.1\lambda$ の場合、0次回折波の電力が比較的大きいが、深さが $d = 0.542\lambda$ の場合、則ち、 $\sin(\gamma_1 d) = 0$ を満たす場合では、入射角 $\theta$ が $30^\circ$ から $70^\circ$ の間では、-2次および-3次の回折波の電力が大きくなり0次の電力は減少している。

次に、単一欠陥がある場合について、溝の数を $N_g$ で打ち切って光学定理を計算する。図3に入射角 $\theta$ を変えたときの全散乱断面積 $\Phi$ と散乱振幅の減少分 $P_c$ を溝の幅 $w = 0.7\lambda, 1.0\lambda, 1.3\lambda$ について計算したものを示す。溝の深さは左の図が $d = 0.1\lambda$ 、右の図が $d = 0.542\lambda$ である。全散乱断面積は実線、散乱振幅の減少分は点線で描かれている。両方の図からわかるように、3つの溝の幅について、全散乱断面積 $\Phi$ は散乱振幅の減少分 $P_c$ と一致しているが、これらの相対誤差 $Err^{opt} = |(\Phi - P_c)/P_c|$ が大きくなる場合がある。溝の深さ $d = 0.1\lambda$ の場合では、誤差 $Err^{opt}$ は0.01以下であるが、1次のFloquetモードが現れて-3次のFloquetモードが消える角度である入射角 $\theta$ が $60^\circ$ 付近になると、誤差が0.02程度になる。溝の深さ $d = 0.542\lambda$ の場合では、誤差 $Err^{opt}$ は0.02以下であるが、1次のFloquetモードが現れて-3次のFloquetモードが消える角度である入射角 $\theta$ が $60^\circ$ 付近になると、誤差が0.1程度に、また、2次のFloquetモードが現れて-2次のFloquetモードが消える角度である入射角 $\theta$ が $60^\circ$ 付近になると、誤差が0.2程度になる。入射角が $\theta < 20^\circ$ の場合には、誤差 $Err^{opt}$ はどちらの溝の深さの場合でも0.1程度に増加している。これらの数値計算結果より、(48)の打ち切りは比較的合理的な解であるとは言えるが、いくつかの場合で十分では無いと考えられる。(48)の有効な近似解法の検討が望まれるところである。

図4は散乱断面積 $\sigma(\phi|\theta)$ を溝の幅 $w = 0.7\lambda, 1.0\lambda, 1.3\lambda$ について計算したものを示す。溝の深さは $d = 0.1\lambda$ 、入射角は $\theta = 60^\circ$ である。散乱断面積は幅 $w$ の溝のスペクトルである、(45)中の $s_m(q)$ の影響を大きく受けている。

図5は散乱断面積 $\sigma(\phi|\theta)$ を比較的溝の幅が小さい( $w = 0.1\lambda$ および $w = 0.5\lambda$ )場合について計算したものを示す。入射角は $\theta = 60^\circ$ である。計算は2つの溝の深さ $d = 0.1\lambda$ および $0.2\lambda$ について行っている。 $w = 0.1\lambda$ 、則ち、半波長よりも溝の幅がかなり小さい場合は、溝の中のすべての導波モードがカットオフとなるため、溝の深さ $d$ が異なっても散乱断面積の差異は小さくなっている。図6は散乱断面積 $\sigma(\phi|\theta)$ を入射角 $\theta = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ について計算したものを示す。溝の幅は $w = 1.3\lambda$ 、深さは左の図が $d = 0.1\lambda$ 、右の図が $0.542\lambda$ である。 $d = 0.1\lambda$ の場合、鏡面反射方向の散乱が強くなっていることがわかる。しかしながら、溝の中で共振が起こる深さ $d = 0.542\lambda$ の場合、散乱断面積の $\phi = 90^\circ$ に対して対称に見える。これは溝の中の共振状態は溝の深さ $d$ および溝の幅 $w$ に依存し、入射角 $\theta$ には無関係であることに由来すると考えられる。これらの場合では、(45)中の2次の導波モード(主に $s_2(p+s)$ )に関する項が大きくなっている。 $\theta = 90^\circ$ の場合、垂直入射の時はベース成分の $Q_2^2$ がゼロとなり3次の導波モードに関する項が散乱特性を決定するため、散乱断面積は小さくなっている。図7は散乱断面積 $\sigma(\phi|\theta)$ を溝の深さ $d = 0.1\lambda, 0.271\lambda, 0.542\lambda$ について計算したものを示す。溝の幅は $w = 1.3\lambda$ 、入射角は $\theta = 60^\circ$ である。 $d = 0.1\lambda$ および $0.271\lambda$ の場合、散乱断面積は溝の深さ $d$ が大きくなるにつれて増加し、鏡面反射方向の散乱が比較的強いが、 $d = 0.542\lambda$ の場合、鏡面反射方向に関しては $d = 0.271\lambda$ の場合よりも散乱断面積が小さい。

図8では単一散乱近似(50)の精度を検討している。溝の深さが $d = 0.1\lambda$ (左図)と $0.542\lambda$ (右図)について数値計算解と単一散乱近似を比較している。溝の幅は $w = 1.3\lambda$ 、入射角は $\theta = 60^\circ$ である。 $d = 0.1\lambda$ の場合、単一散乱近似(50)は隣接する溝のモードのカップリングの効果である $q_m^{(g)}$ を考慮した数値計算解におおよそ一致しているが、 $d = 0.542\lambda$ の場合、隣接する溝のモードのカップリングの効果である $q_m^{(g)}$ に由来するリップルが散乱断面積に出ているため精度がよくない。このことから、TE平面波入射の場合では溝の深さが小さければ隣接する溝のモードのカップリングの影響はあまり大きくないと考えることができる。

### 3.2 TM波入射

次に、TM平面波入射の場合について周期が $L = 2\lambda$ のときの数値計算例を示す。

TE 平面波入射の場合と同じく、回折波の打ち切り次数  $N_d$ 、および溝の中の導波モードの打ち切り次数  $N_m$  を導入する (対角近似を採用しているため溝の数の打ち切り次数は無い)。つまり、 $A_n$ 、 $Q_m^s$  を (30) および (32) の中の和で次のように置いている。

$$\begin{aligned} A_n &= 0, & |n| > N_d, \\ Q_m^c &= 0, & m > N_m. \end{aligned} \quad (62)$$

本論文では、各打ち切り次数を次のように置いている。

$$N_d = 7, N_m = 15. \quad (63)$$

図 9 に入射角  $\theta$  を変えたときの回折波の相対電力を示す。溝の深さは  $d = 0.1\lambda$ 、溝の幅は左の図が  $w = 0.7\lambda$ 、右の図が  $w = 1.3\lambda$  である。入射波の電力は 1 に規格化している。これらの数値計算では、入射電力と回折波の電力の和の誤差は常に  $10^{-8}$  より小さくなっている。周期  $L$  は  $2\lambda$  なので、入射角  $60^\circ$  で  $-3$  次の Floquet モードが消えて 1 次の Floquet モードが現れる。この入射角付近で回折波の電力は急激に変化している。

次に、単一欠陥のある場合について、散乱特性に寄与する共振因子の振舞い、および、多重散乱を考慮した対角近似解と単一散乱のみで解いた解の比較を行う。

図 10 に共振因子  $1/(i\beta_0(p+s)+M(s,s|p))$  の振舞いを示す。溝の深さは  $d = 0.1\lambda$  および  $0.2\lambda$ 、幅は  $w = 1.3\lambda$  である。波数  $-k$  と  $k$  の領域のすぐ外側に鋭いピークが存在するが、対角近似を採用すれば散乱特性に特異性は現れない。これらのピークの値もマスオペレータ  $M(s,s|p)$  によって有限の値に留まっている。

図 11 では対角近似 (59) の精度を検討している。 $d = 0.1\lambda$ 、 $w = 1.0\lambda$  (左図) と  $d = 0.2\lambda$ 、 $w = 1.3\lambda$  (右図) について単一散乱の解と対角近似を比較している。入射角は  $\theta = 45^\circ$  である。単一散乱の解では水平方向への散乱が発散していることがわかる。対角近似を採用することにより、こうした発散を抑えることができている。 $d = 0.2\lambda$  の場合は、単一散乱の解と対角近似とで散乱断面積がかなり異なっている。

図 12 は散乱断面積  $\sigma(\phi|\theta)$  を溝の幅  $w = 0.7\lambda$ 、 $1.0\lambda$ 、 $1.3\lambda$  について計算したものを示す。溝の深さは  $d = 0.1\lambda$ 、入射角は  $\theta = 45^\circ$  である。TE 波入射の場合と同様、散乱断面積は幅  $w$  の溝のスペクトルである、(59) 中の  $c_m(q)$  の影響を大きく受けている。

図 13 は散乱断面積  $\sigma(\phi|\theta)$  をグレーティングの周期  $L = 2.0\lambda$ 、 $3.0\lambda$  について計算したものを示す。溝の幅は  $w = 1.3\lambda$ 、溝の深さは  $d = 0.1\lambda$ 、入射角は  $\theta = 45^\circ$  である。散乱断面積の特性においては溝の幅の影響が大きく、周期  $L$  が変化しても散乱パターンのディップの現れる散乱角は同じであることがわかる。

図 14 は散乱断面積  $\sigma(\phi|\theta)$  を入射角  $\theta = 59^\circ$  および  $\theta = 60^\circ$  について計算したものを示す。溝の幅は  $1.0\lambda$ 、溝の深さは  $d = 0.1\lambda$  である。入射角の差は僅か  $1^\circ$  であるが、散乱断面積の特性は大きく異なっている。これは、入射角  $\theta = 60^\circ$  近傍で Wood's Anomaly が起こっており、 $-3$  次の回折波が消えて  $+1$  次の回折波が現れることによって入射角の僅かの変化でも散乱特性が大きく異なっていると考えられる。

次に、光学定理を計算する。図 15 に入射角  $\theta$  を変えたときの全散乱断面積  $\Phi_s$  と散乱振幅の減少分  $P_c$  を計算したものを示す。溝の深さは  $d = 0.1\lambda$ 、溝の幅は  $1.3\lambda$  である。全散乱断面積は点線、散乱振幅の減少分は実線で描かれている。定性的には入射角の変化に対して同じ特性を示しているが、今回採用した対角近似では  $\Phi_s$  と  $P_c$  にかなりの差があることがわかる。解の精度を上げていくためには、対角項以外の項の評価など別のアプローチが必要になってくると考えられる。

## 4 むすび

位置が既知である単一の欠陥を持つ方形溝グレーティングについて検討した。TE 平面波および TM 平面波入射に対して、欠陥のある方形溝グレーティングの上方の波動場を欠陥が無い場合からの摂動として記述した。境界条件から波動場を決定するための 2 組の関係式を導いた。また、全散乱断面積と散乱振幅の減少分の関係を表した新しい光学定理の表現を求めた。TE 平面波入射に対しては、欠陥が無いグレーティングの場合の解であるベース成分のみで欠陥のある場合の散乱波を記述する単一散乱近似を提案した。TM 平面波入射に対しては、散乱に対する対角項の影響のみを考慮した対角近似を導入して散乱特性を解析した。

TE 波入射については、散乱断面積は溝の形状のスペクトルによって決定されることがわかった。溝の中の導波モードが共振する場合、斜め方向からの入射の場合でも散乱断面積は鉛直方向に対してほぼ対称になることがわかった。また、溝の深さが小さい場合には単一散乱近似は比較的よく合っていることがわかった。無限和の表現について打ち切り次数を導入し、光学定理を計算したが、いくつかの場合で誤差が大きくなることがわかった。精度を上げる近似解法の検討が必要であると考えられる。

TM 波入射については、対角近似を導入することで散乱波の水平方向の発散を防ぐことができているが、光学定理の計算結果からみると、現在の解法は精度があまり良いとは言えないため、対角項以外の評価などのアプローチが必要であると考えられる。

今回の議論は単一欠陥の場合に限られていた。今後は、欠陥が2つ以上ある(位置は既知)グレーティングのモデルを検討していきたい。また、ランダムに欠陥が存在する場合で、欠陥の存在確率がわかっている場合についても検討して行きたい。そうしたランダムな欠陥を持つグレーティングからの散乱は理論的にも興味深い。こうしたケースについて今後研究を進めて行きたい。

## 文献

- [1] A.Hessel and A.A.Oliner, "A new theory of Wood's anomalies on optical gratings," *Applied Optics*, vol.4, no.10, pp1275-1297, 1965.
- [2] P.Sheng, R.S.Stepleman and P.N.Sanda, "Exact eigenfunctions for square-wave gratings: Application to diffraction and surface-plasmon calculations," *Physical Review B*, vol.26, no.6, pp2907-2917, 1982.
- [3] J.A.Sanchez-Gil and A.Maradudin, "Dynamic near-field calculations of surface-plasmon polariton pulses resonantly scattered at sub-micron metal defects," *Optics Express*, vol.12, no.5, pp883-894, 2004.
- [4] R.Sato and H.Shirai, "Electromagnetic plane wave scattering by a loaded trough on a ground plane," *IEICE Trans Electron.*, vol.E77-C, no.12, pp1983-1989, 1994.
- [5] R.Sato and H.Shirai, "Electromagnetic plane wave scattering by a gap on a ground plane," *IEICE Trans Electron.*, vol.J80-C-I, no.5, pp179-185, 1997 (in Japanese).
- [6] R.A.Depine and D.C.Skigin, "Scattering from metallic surface having finite number of rectangular grooves," *J.Opt. Soc. Am.*, vol.A11, no.11, pp2844-2850, 1994.
- [7] N.Bruce, "Control of the backscattered intensity in random rectangular-groove surfaces with variations in the groove depth," *Applied Optics*, vol.44, no.5, pp784-791, 2005
- [8] H.Sekiguchi and H.Shirai, "Electromagnetic scattering analysis for crack depth estimation," *IEICE Trans Electron.*, vol.E86-C, no.11, pp2224-2229, 2003.
- [9] R.Petit, ed., *Electromagnetic theory of gratings*, Springer, Berlin, 1980.
- [10] C.Bohren and D.Huffman, *Absorption and scattering of light by small particles*, Wiley, New York, 1983.
- [11] A.Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media*, IEEE Press, New York, 1997.
- [12] K.Hattori and J.Nakayama, "Scattering of TM plane wave from periodic grating with single defect," *PIERS2005*, Hangzhou, China.
- [13] K.Hattori and J.Nakayama, "Scattering of TM plane wave from periodic grating with single defect," *PIERS2006*, Tokyo, Japan.

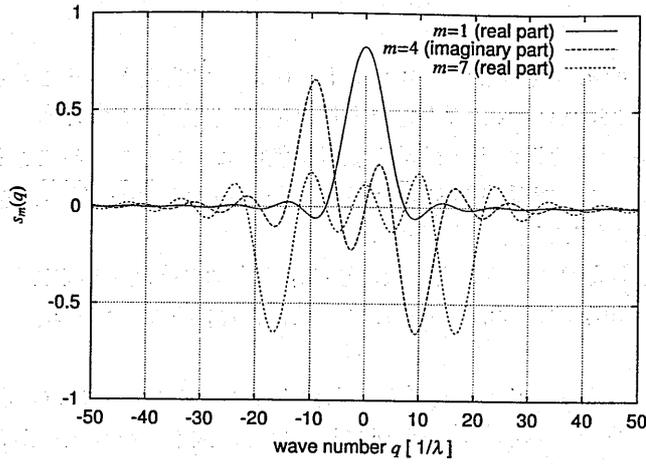


Figure 1 Auxiliary function  $s_m(q)$  against wave number  $q$  for  $m = 1, 4, 7$  with width  $w = 1.3\lambda$ ,  $\lambda$  is wavelength.

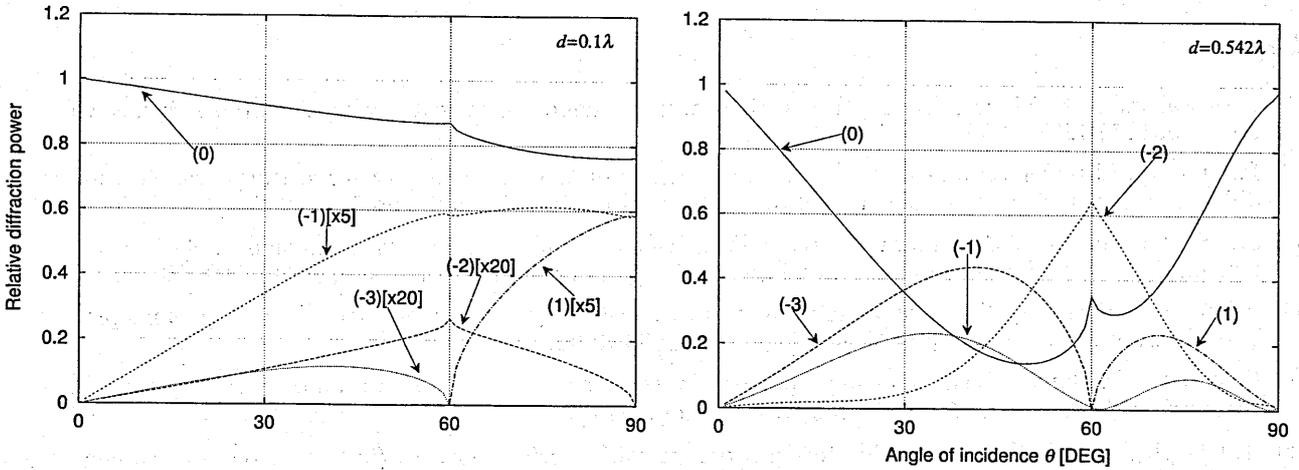


Figure 2 Relative diffraction power against the angle of incidence  $\theta$  for depths  $d = 0.1\lambda$ (left figure),  $0.542\lambda$ (right figure) with period  $L = 2\lambda$  and width  $w = 1.3\lambda$ ,  $\lambda$  is wavelength. Power of incident wave is normalized to 1. In the left figure for  $d = 0.1\lambda$ , '[x5]' means that values are multiplied by 5 and '[x20]' means that values are multiplied by 20.

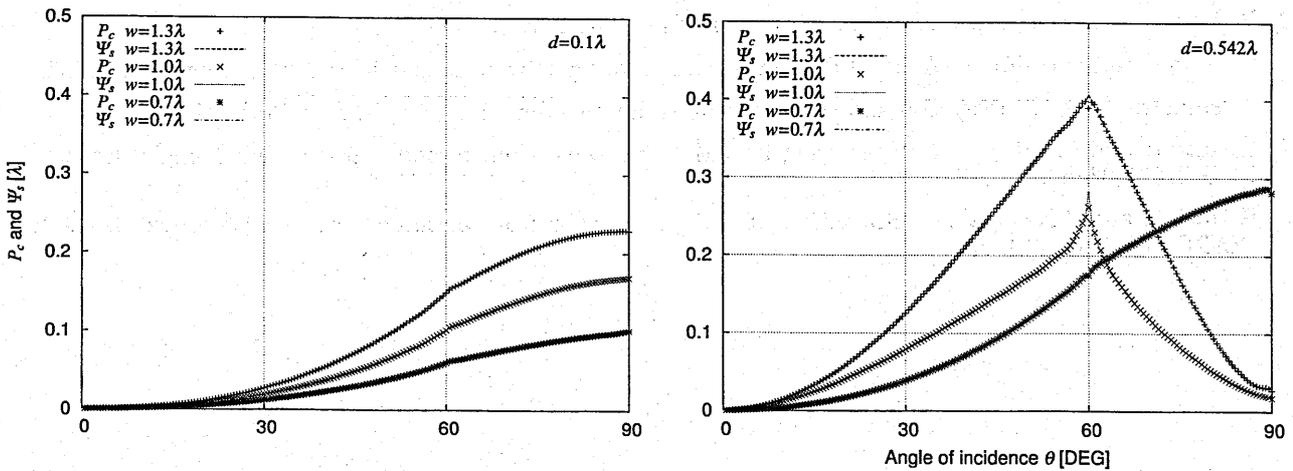


Figure 3 Optical theorem against the angle of incidence  $\theta$  for widths  $w = 0.7\lambda, 1.0\lambda, 1.3\lambda$  with period  $L = 2\lambda$ , depth  $d = 0.1\lambda$ (left figure) and  $d = 0.542\lambda$ (right figure),  $\lambda$  is wavelength. Total scattering cross section  $\Phi_s$  is drawn with line, while the reduction of scattering amplitude  $P_c$  is shown with dots.

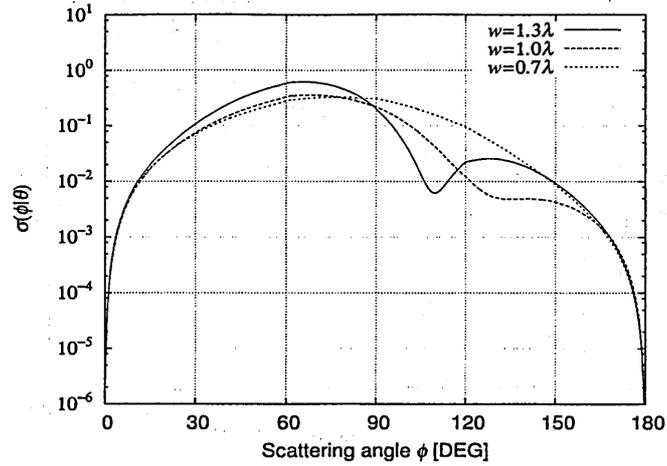


图 4 Differential scattering cross section  $\sigma(\phi|\theta)$  for widths  $w = 0.7\lambda, 1.0\lambda, 1.3\lambda$  with period  $L = 2\lambda$ , and depth  $d = 0.1\lambda$ , angle of incidence  $\theta = 60^\circ$ ,  $\lambda$  is wavelength.

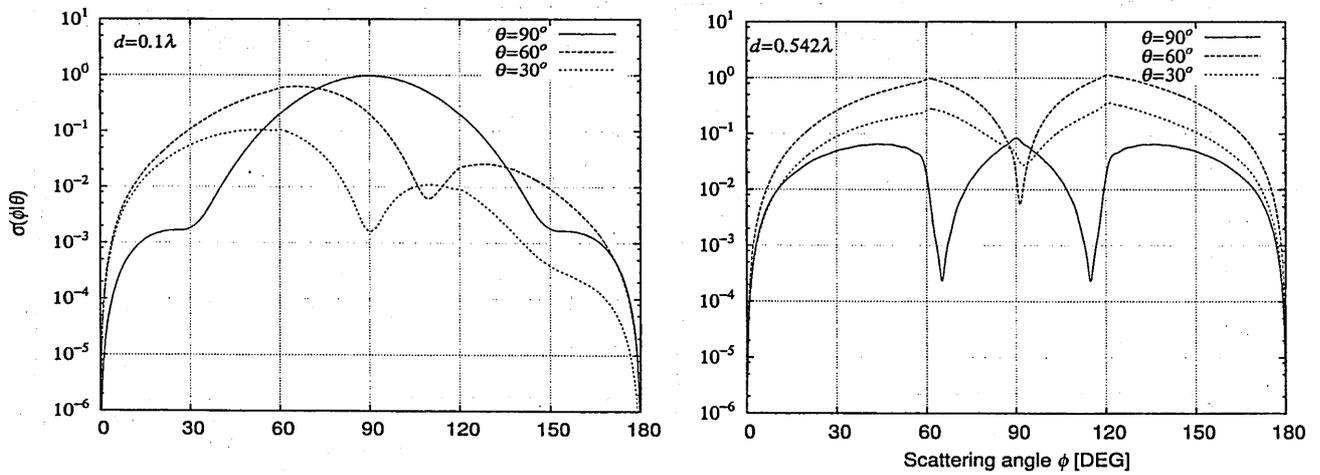


图 5 Differential scattering cross section  $\sigma(\phi|\theta)$  for angles of incidence  $\theta = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$  with period  $L = 2\lambda$ , width  $w = 1.3\lambda$ , depth  $d = 0.1\lambda$  (left figure) and  $0.542\lambda$  (right figure),  $\lambda$  is wavelength.

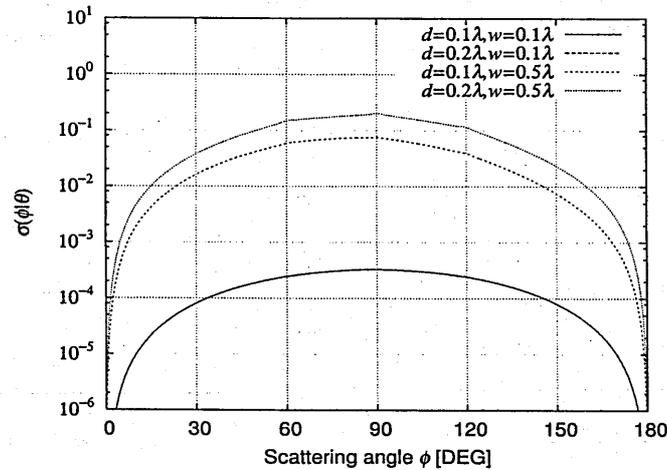


图 6 Differential scattering cross section  $\sigma(\phi|\theta)$  when the widths of the groove are relatively small ( $w = 0.1\lambda$  and  $0.5\lambda$ ) with period  $L = 2\lambda$ , angle of incidence  $\theta = 60^\circ$  and depths  $d = 0.1\lambda$  and  $0.2\lambda$ ,  $\lambda$  is wavelength.

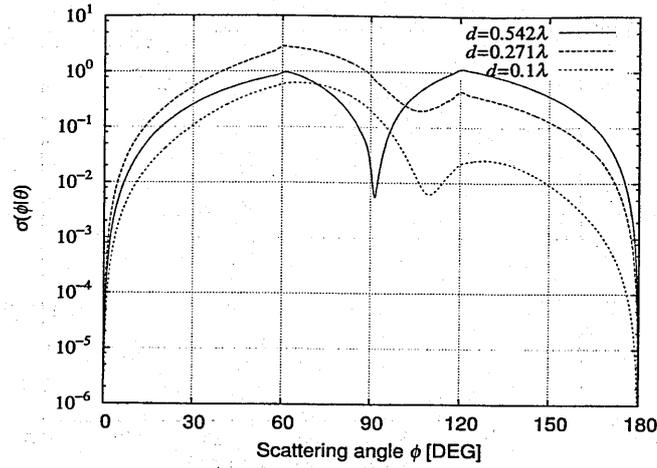


图 7 Differential scattering cross section  $\sigma(\phi|\theta)$  for depths  $d = 0.1\lambda, 0.271\lambda, 0.542\lambda$  with period  $L = 2\lambda$ , and width  $w = 1.3\lambda$  and angle of incidence  $\theta = 60^\circ$ ,  $\lambda$  is wavelength.

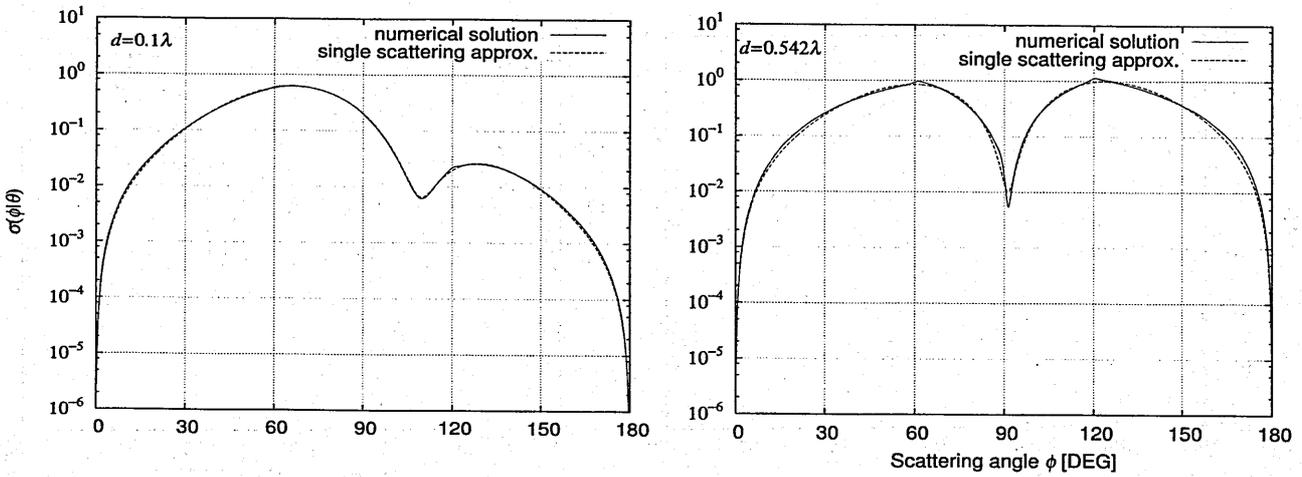


图 8 Comparison of numerical solution with the single scattering approximation for depths  $d = 0.1\lambda$ (left figure) and  $0.542\lambda$ (right figure), for period  $L = 2\lambda$ , width  $w = 1.3\lambda$  and angle of incidence  $\theta = 60^\circ$ ,  $\lambda$  is wavelength. The approximation is shown in dotted lines.

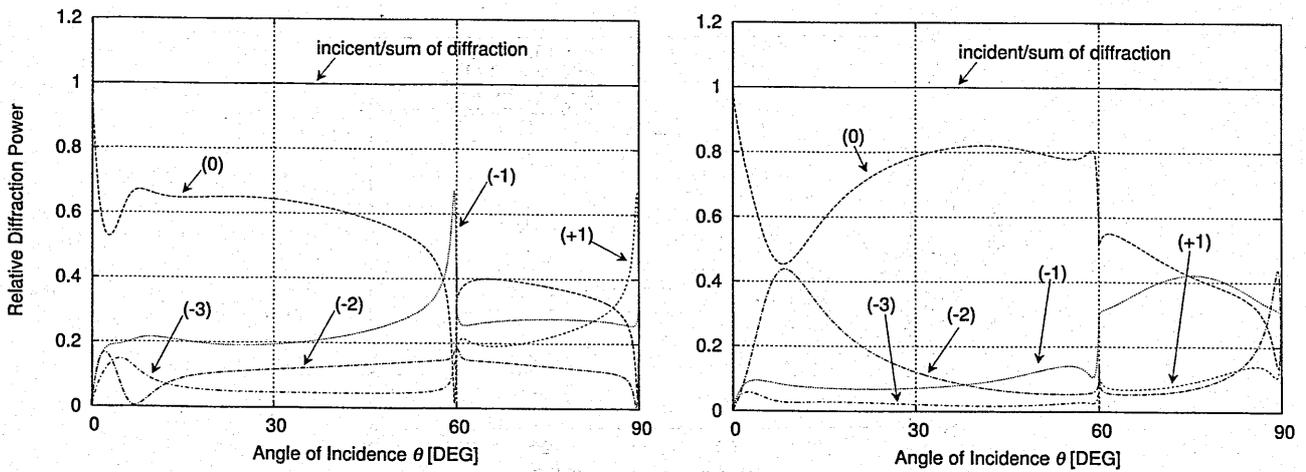


图 9 Relative diffraction power against the angle of incidence  $\theta$  for widths  $w = 0.7\lambda$ (left figure) and  $w = 1.3\lambda$ (right figure), with period  $L = 2\lambda$  and depth  $d = 0.1\lambda$ ,  $\lambda$  is wavelength. Power of incident wave is normalized to 1.

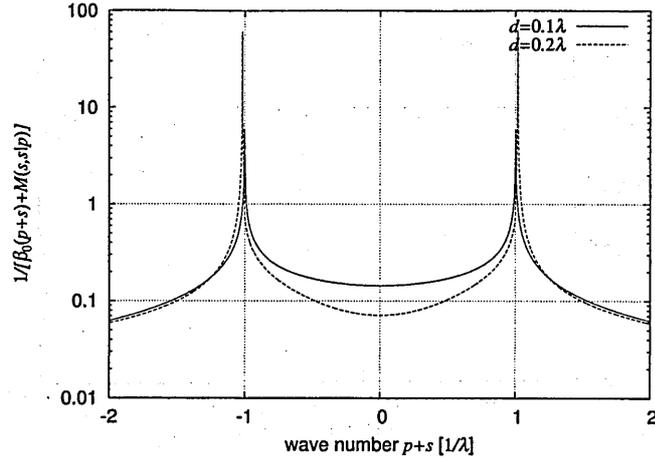


Figure 10 Resonance factor  $1/(\beta_0(p+s) + M(s, s|p))$  against wave number  $p+s$  for depths  $d = 0.1\lambda$  and  $d = 0.2\lambda$  with period  $L = 2\lambda$  and width  $w = 1.3\lambda$ ,  $\lambda$  is wavelength.

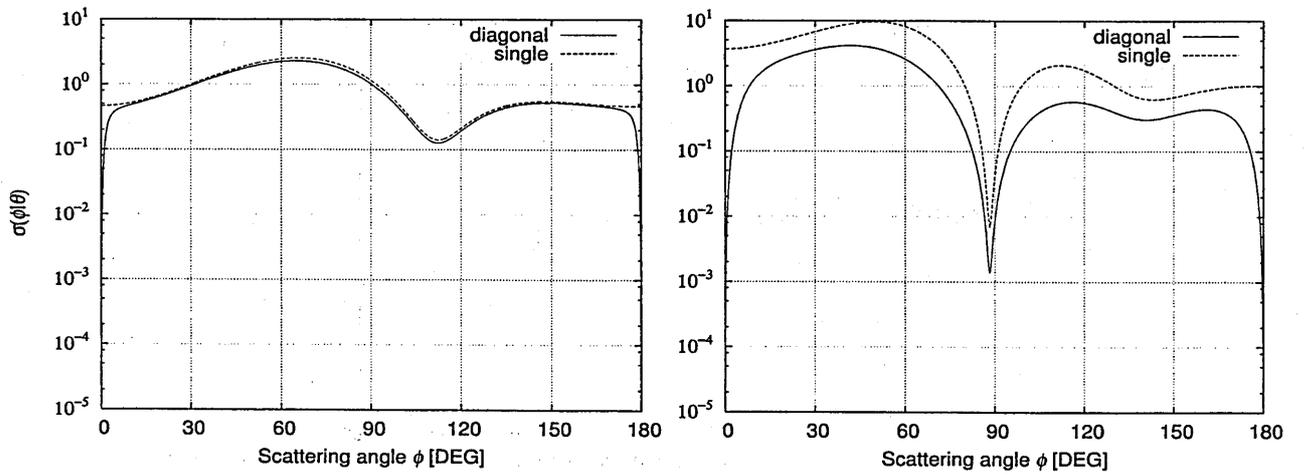


Figure 11 Comparison of the diagonal approximation with the single scattering solution for depth  $d = 0.1\lambda$  and width  $w = 1.0\lambda$  (left figure) and  $d = 0.2\lambda$  and  $w = 1.3\lambda$  (right figure), with period  $L = 2\lambda$  and angle of incidence  $\theta = 45^\circ$ ,  $\lambda$  is wavelength. The diagonal approximation is shown in solid lines and the single scattering solution is shown in dotted lines.

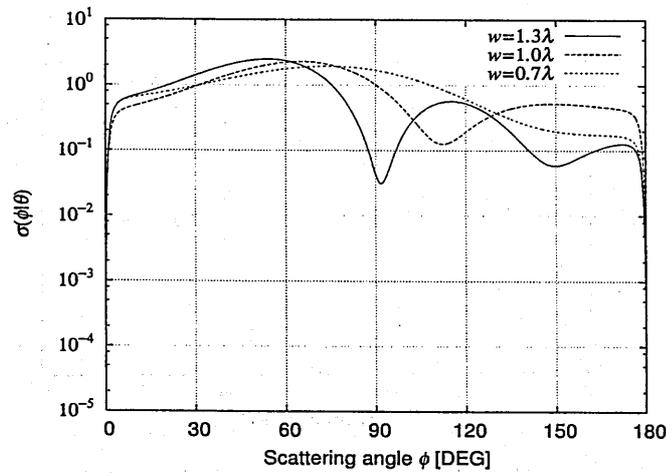


Figure 12 Differential scattering cross section  $\sigma(\phi|\theta)$  for widths  $w = 1.3\lambda$ ,  $1.0\lambda$ ,  $0.7\lambda$  with period  $L = 2\lambda$ , depth  $d = 0.1\lambda$  and angle of incidence  $\theta = 45^\circ$ ,  $\lambda$  is wavelength.

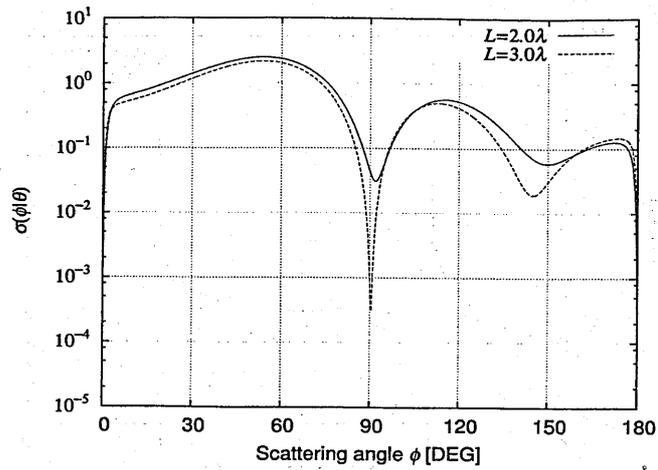


Figure 13 Differential scattering cross section  $\sigma(\phi|\theta)$  for periods  $L = 2.0\lambda$  and  $3.0\lambda$ , with width  $w = 1.3\lambda$ , depth  $d = 0.1\lambda$  and angle of incidence  $\theta = 45^\circ$ ,  $\lambda$  is wavelength.

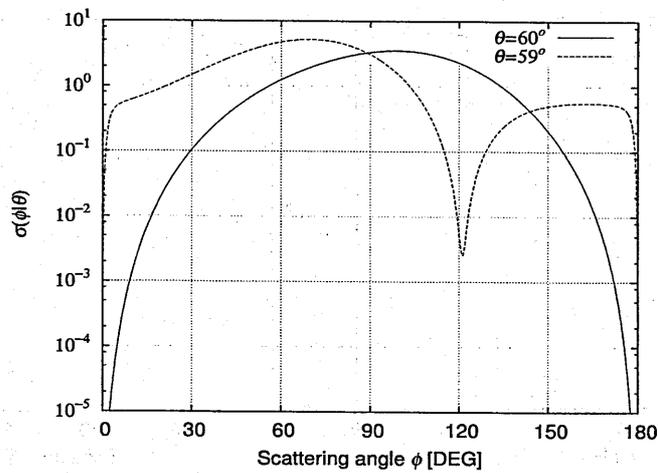


Figure 14 Differential scattering cross section  $\sigma(\phi|\theta)$  for angles of incidence  $\theta = 60^\circ$  and  $\theta = 59^\circ$  with period  $L = 2\lambda$ , depth  $d = 0.1\lambda$  and width  $w = 1.0\lambda$ ,  $\lambda$  is wavelength.

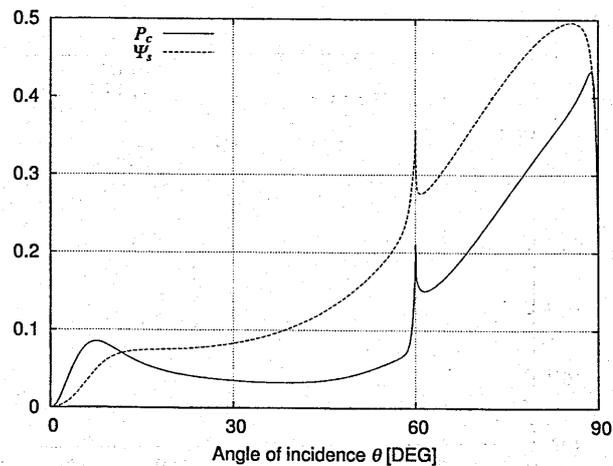


Figure 15 Optical theorem against the angle of incidence  $\theta$  with period  $L = 2\lambda$ , depth  $d = 0.1\lambda$  and width  $w = 1.3\lambda$ ,  $\lambda$  is wavelength.

光ファイバの非線形効果を利用した全光信号再生技術

All-Optical Signal Regeneration Using Fiber Nonlinearities

松本正行、佐貫堅一、嶋田善行

大阪大学大学院工学研究科

2007年3月15日

於 大阪電気通信大学

## 1. まえがき

現状の光ファイバ通信ネットワークにおいては、ネットワーク内での信号経路切り換え、信号の多重化および多重分離、信号再生などの処理は光／電気および電気／光変換を介した電気領域で行われる。電気領域で処理できる信号速度は現状ではせいぜい数十 Gb/s であり、また、光／電気変換に伴って光信号の位相情報が失われる。このことは、ネットワーク内での電気信号処理が、光ファイバ通信ネットワークの潜在的な超高速性、トランスペアレント性、および柔軟性を十分に活かすことを妨げる要因となっていることを意味している。この問題を解決するための方法として、電気信号処理を全光信号処理に置き換えることが注目されており、活発な研究が展開されている。

長距離伝送において重要な全光信号処理の一つに光信号再生がある。光信号再生は、伝送ファイバやネットワーク素子の種々の分散性や非線形性に起因する信号波形歪みならびに増幅器雑音の累積の除去を光領域で行う方法であり、大規模な全光ネットワークを実現するために欠くことのできない信号処理である。光信号再生器は、振幅増幅 (reamplification) と波形整形 (reshaping) 機能からなる 2R 型再生器と、それにタイミング再生 (retiming) 機能を付加した 3R 型再生器に分類できる。いずれの再生器においても、しきい値処理を含む波形整形機能を光領域で実現するためには非線形光学効果の利用が必須である。また、ほとんどの 3R 型再生器におけるタイミング再生は、入力信号と同期させて生成したジッタのないクロックパルス列を入力信号パルスによってオン／オフすることで実現されており、そのスイッチング動作を実現するために光非線形性の利用が必要になる。光領域において非線形性を示す材料としては、半導体光増幅器をはじめとする半導体デバイスと光ファイバが代表的である。そのうちの光ファイバは、集積性に欠けるもののフェムト秒オーダーの非線形応答時間を持ち、数百 Gb/s を超える速度の信号処理に応用できる。また、最近ではコアに高濃度の  $\text{GeO}_2$  を添加した実効コア断面積が小さな高非線形シリカファイバ (非線形係数  $\gamma$  が 20/W/km 程度) [1] に加えて、大きな非線形性を有するガラス材料と空孔ファイバ構造を組み合わせた高非線形ファイバ ( $\gamma$  が数百/W/km 以上) [2] も開発されており、必要なファイバ長の縮小に向けた取り組みが精力的に行われている。

本論文では、ファイバ中の自己位相変調 (SPM) を利用した強度変調 (OOK) 信号の 2R 再生と、ファイバ中の四光波混合 (FWM) を利用した差動位相変調 (DPSK) 信号の位相維持振幅再生について、筆者らの研究の結果を述べる。

## 2. ファイバ中の自己位相変調を利用した全光 2R 再生

図1に高非線形ファイバ (HNLF) 中の SPM による信号電力依存スペクトル拡がりや狭帯域フィルタリングを原理とする全光 2R 信号再生器の構成を示す。再生器は、光増幅器、正常分散の HNLF、およびスペクトル切出しのための光フィルタ (OBPF) から構成される。入力パルスは増幅された後、正常分散の HNLF に入力され、スペクトル幅が大きく広げられる。入力パルスの振幅の変動は、出力においては主としてスペクトル幅の変動となって現れ、スペクトルの電力密度は大きくは変動しない。その

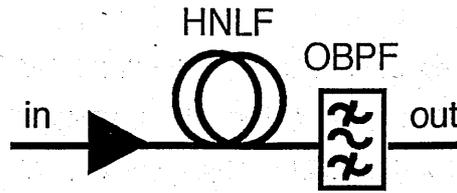


図1 ファイバ中の自己位相変調を利用した 2R 再生器

ため、広がったスペクトルの一部を OBPF によって切り出せば、エネルギーが安定化された出力パルスを取り出すことができる。また、OBPF の中心波長を入力信号波長からずらしておくと、低電力の雑音は出力されずに再生器によって除去される。この再生器を用いることによって簡単な構成でロバストな高速信号再生動作を実現できる [3]。これまでに、同期振幅変調によるタイミング再生を併用した 40Gb/s、100 万 km 周回伝送実験(信号のQ値は 19dB 以上、再生器間隔は 400km) [4] や、160Gb/s の信号再生実験 [5] が報告されている。

このタイプの再生器の問題点は、信号再生に伴って信号波長が変換されてしまうことである。入出力の波長を同一とするためには、図1の再生器構成を2段縦続接続し、一旦波長変換された信号を元の波長に戻す必要がある。筆者らは最近、非線形ファイバを双方向で利用することにより、1本の HNLF で波長変換のない 2R 信号再生器を実現することを試み、その有効性を確認した [6,7]。

図2に双方向伝搬型の 2R 再生器を示す。信号はサーキュレータを介して正常分散の HNLF に入力され、スペクトルが広げられた後その一部が OBPF1 によって切出される。OBPF1 の出力はサーキュレータを通して再び HNLF に入力され、HNLF を逆方向に伝搬する。先ほどと同様にスペクトルが広げられ、その一部が OBPF2 によって切出されて再生器出力信号となる。この構成によると、出力波長  $\lambda_3$  は一段構成の場合と比べてより広い範囲の値に設定することができる。 $\lambda_3 = \lambda_1$  とすることもでき、波長変換を伴わない信号再生が実現される。2段構成による再生効果の増強も期待できる。また、HNLF が1本で済むので、装置サイズやコストの低減が可能になる。

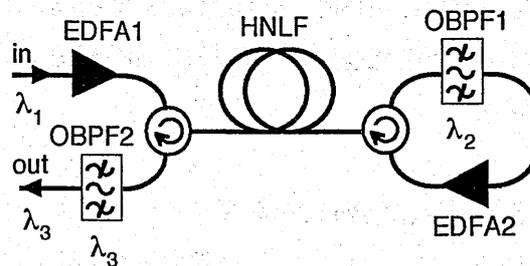


図2 双方向伝搬型 2R 再生器

図2に示す双方向伝搬型 2R 再生器による信号再生実験を行った。光源として、波長 1548.5nm、繰返し周波数 10GHz のモード同期半導体レーザを用いた。パルス列は LiNbO<sub>3</sub> 変調器によって変調

された後、帯域幅 1nm の光バンドパスフィルタにより帯域制限される。OBPF 後のパルス幅は 4.3ps である。この実験では、LiNbO<sub>3</sub> 変調器へのドライブ電圧を最適値からずらすことによって消光比を故意に劣化させた信号を再生器に入力し、どの程度消光比が回復されるかを測定することで、再生器の雑音除去の強さを調べた。用いた HNLF の分散、分散スロープ、非線形係数、損失の値、および長さは、それぞれ、 $-0.35\text{ps/nm/km}@1548.5\text{nm}$ 、 $0.03\text{ps/nm}^2/\text{km}$ 、 $16.2/\text{W/km}$ 、 $0.52\text{dB/km}$ 、および  $1,800\text{m}$  である。また、スペクトル切出しのための OBPF の帯域幅は 1nm である。さらに、この実験では図2に示す構成において入力側のサーキュレータをアイソレータと 3dB カプラの組み合わせで代用した。

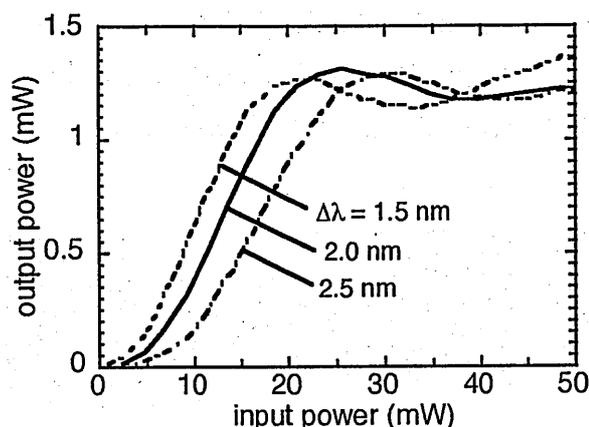


図3 一段目の信号再生における出力電力と入力電力の関係。ここでは信号に変調を加えていない。

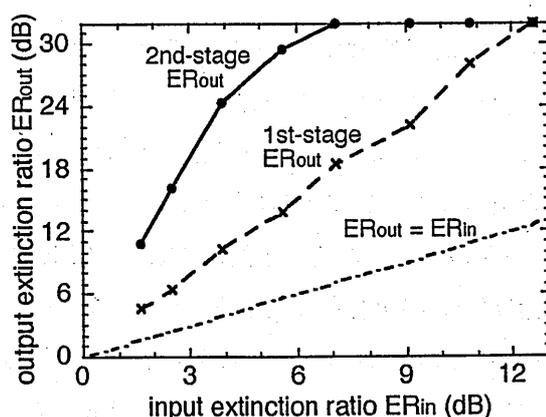


図4 一段目および二段めの出力における消光比と入力信号の消光比の関係。上側の水平軸上の点は消光比が 32dB 以上であることを示す。

図3は一段目の信号再生における出力電力(OBPF1 の出力)と入力電力の関係である。OBPF1 の中心波長の信号波長からのずれ  $\Delta\lambda$  を、1.5、2.0、2.5 nm の3通りに変えている。 $\Delta\lambda$  が大きいほど低

入力信号電力時の出力信号の立ち上がりが遅く、スペースレベルの雑音除去効果が大いことがわかる。しかしながら、 $\Delta\lambda$  が大きいほど、マークレベルの出力を得るために必要なスペクトル広がりが大きくなるため必要な入力信号電力が大きくなる。図4は消光比を劣化させた信号を入力した場合の一段目および二段目出力の消光比である。二段目のスペクトル切出し波長(OBPF2 の中心波長)は、入力信号波長と等しい値に選んだ。また、消光比の値は帯域が 50GHz のサンプリングオシロスコープで観測したアイパターンから計算した。入力信号の消光比が 10dB 程度以上であれば、一段目の再生によって消光比は 15dB 以上改善される。二段目出力では消光比はさらに改善され、入力時の消光比が 6dB の場合、出力信号の消光比は約 30dB となる。なお、一段目、二段目の再生における HNLF への入力信号電力は消光比の改善がほぼ最大になるように選んでいる。図5は、入力信号の消光比が 2.5dB の場合の再生器入出力における信号波形である。以上の結果より、双方向伝搬型 2R 再生器のスペースレベルの雑音除去能力を確認することができた。

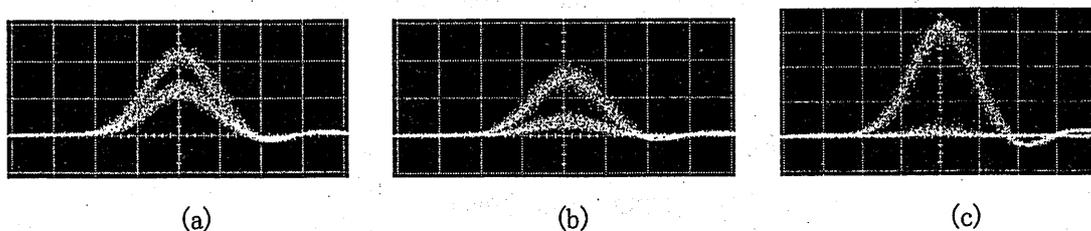


図5 (a)入力信号、(b)一段目出力信号、(c)二段目出力信号、のアイパターン。入力信号の消光比は 2.6dB である。横軸:5ps/div。

次に、図6のセットアップを用いて高速信号の周回伝送/再生実験を行なった。ここでは、光源として繰返し周波数 10GHz のファイバリングレーザを用い、データ変調した後に光時分割多重化(OTDM)装置を通すことによって 80Gb/s 信号を生成した。パルス幅は 2.5ps である。本実験では、受信側でのクロック抽出の都合上、本来の 80Gb/s 信号ではなく、8 つの 10Gb/s トリビュタリのうち連続する 4 つまたは 2 つのトリビュタリのみを ON とする擬似 80Gb/s (実質は 40Gb/s または 20Gb/s) 信号を用いた。これにより、受信端での多重分離に必要な 10GHz クロックが容易に抽出できる。一方、パルス幅やトリビュタリ間隔は 80Gb/s 相当であるため、80Gb/s における信号再生の基本動作を検証することができる。図7にサンプリングオシロスコープによって観測した擬似 80Gb/s 信号(4 × 10Gb/s)の波形を示す。周回伝送路は、標準単一モードファイバ(SMF:50km)と平均分散をゼロとするための分散補償ファイバ(DCF:約 6km)からなる。周回伝送路中のポラライザ(POL)は、伝送中の信号偏波状態を安定化するためのものである。温度等の変動による偏波状態の変化は緩やかであり、POL の直前に挿入した偏波コントローラ(PC)のセッティングは、周回中の信号電力が最大になるように手動で調節している。双方向伝搬型 2R 再生器は周回ループ内の伝送ファイバ前に置いている。伝送後の信号は、半導体モード同期レーザからの短クロックパルス列で駆動された非線形ル



イリー逆散乱による悪影響は見られなかった。

### 3. 位相保持振幅再生による DPSK 信号の伝送特性改善

最近、DPSK などの位相変調信号が、OOK 信号よりも、受信感度、非線形劣化への耐性、帯域制限効果への耐性等の点で優れていることが認識されつつある。また、周波数利用効率向上を目的とする多値符号化を行うためにも位相変調方式の採用が必須である。将来の光ネットワークにおいては、位相変調信号が OOK 信号に加えて用いられることになると予想される。全光再生などの信号処理においても、位相変調信号を対象とした処理が必要になる。DPSK 信号の全光再生の研究は、ここ数年報告例が増えてきている [8-12]。筆者らは、ファイバ中の FWM の飽和を利用した振幅安定化による DPSK 信号の伝送特性改善を検討してきた [13-15]。

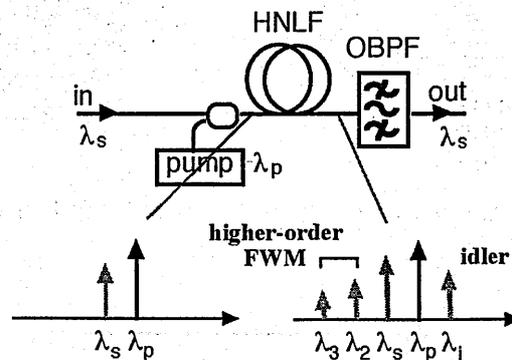


図9 ファイバ中の四光波混合 (FWM)

図9に、FWM を利用した全光 2R 信号再生器の構成と、非線形ファイバ入出力におけるスペクトルの略図を示す。ファイバ出力における FWM 成分のいずれかを OBPF によって取り出し、出力光として用いる。いずれの波長成分を出力光として用いる場合も、入力パルスエネルギーが大きくなると、ポンプデプレッションおよびより高次の FWM 成分への電力の移行のために出力エネルギーが飽和し、振幅制限効果が得られ、信号振幅が安定化(再生)される [16]。一方、信号光の搬送波位相については、例えば2次の高次 FWM 成分を出力信号として用いる場合は、出力の複素振幅は入力複素振幅の2乗となるため、バイナリーの位相情報(ゼロまたは $\pi$ )は完全に消失する。また、アイドラー成分や3次の FWM 成分を用いる場合は、ポンプ光の位相揺らぎが出力信号に転写されるため、出力信号の位相が乱れる。ここでは、入力信号と同じ波長成分を出力信号として用いる構成を採用して実験を行った。なお、この振幅再生においては、入力信号の位相雑音が積極的に除去されるわけではない。しかし、振幅雑音を除去することは、振幅揺らぎが伝送路の非線形性を介して作り出す位相雑音 [17] を抑制するので、長距離伝送特性が改善される。

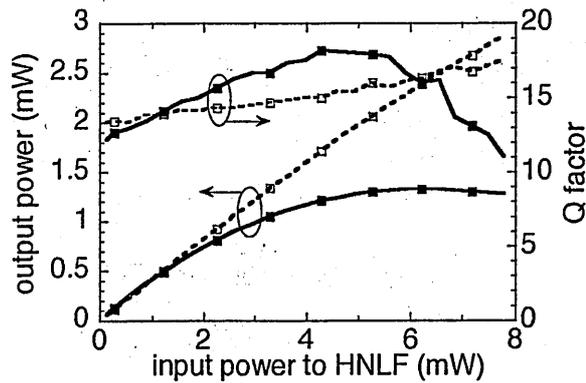


図10 FWM の飽和を利用した振幅再生器(振幅安定化器)の出力信号電力(左側の縦軸)および出力信号のQ 値(右側の縦軸)と入力信号電力の関係。点線は再生器中のポンプ光が OFF の場合。実線は再生器中のポンプ光が ON の場合。

図10に、FWM型振幅再生器の入出力特性の測定結果を示す。信号波長、信号パルス幅、およびパルスの繰返し周波数は、それぞれ、1558nm、6.8ps、および10GHzである。本実験で用いたHNLFの分散、分散スロープ、非線形係数、損失の値、および長さは、それぞれ、0.05ps/nm/km@1558nm、0.026ps/nm<sup>2</sup>/km、12/W/km、0.78dB/km、および1,500mである。また、ポンプ光の波長と電力は1561nm および15mWである。図10には、ポンプをオンにした場合(実線)とオフの場合(破線)の出力電力と出力パルスのQ 値が描かれている。Q 値は、検波後のパルスピーク値の平均値 $\mu$ とばらつきの標準偏差 $\sigma$ の比 $Q = \mu / \sigma$ で定義される量であり、信号の品質(雑音の少なさ)を示す。図10より、出力信号電力の飽和に伴って振幅雑音が低減され、Q 値が大きくなることからわかる。

次に、周回伝送実験を行い、FWM の飽和を利用した振幅再生が DPSK 伝送特性を改善することを検証した。周回伝送実験系を図11に示す。光源として、隣接パルス間の位相が安定に保たれる10GHz モード同期半導体レーザを用い、LiNbO<sub>3</sub> 変調器により位相変調を加えた。光信号対雑音比(OSNR)を調節するためにASE 雑音を加えた後、OBPFを通すことによってパルス幅を広げると同時に帯域外の雑音を除去した。パルス幅は6.8psである。伝送ファイバは、分散の符号が正負の非ゼロ分散シフトファイバ(長さ2km、分散の絶対値 $\sim$ 3ps/nm/km)を交互に接続した高密度分散マネジメントファイバ(スパン長40km)[18]を用いた。受信端では1ビット遅延干渉計(DI)を通した後、バランス検波を行いBERを測定した。FWMの飽和を利用した振幅再生器を光源の直後(図11の点Aの箇所)または周回伝送路内(図11の点Bの箇所)に挿入し、再生器内のポンプ光をONまたはOFFとして振幅再生の効果を測定した。

図12は、振幅再生器を光源の直後に置いた場合の200km(5周)伝送後のBERと伝送信号電力の関係である。光源のOSNRは21.5dB(雑音帯域幅0.1nm)である。再生器内のポンプ光をONとし振幅再生(振幅雑音除去)効果を働かせることによりBERが下がることがわかる。本測定においてBERが下がるのが伝送信号電力が大きいときであること、および、振幅揺らぎが伝送路の非線形性を介して作り出す位相雑音(非線形位相雑音)は伝送信号電力が大きい場合に顕著になるという性質があ

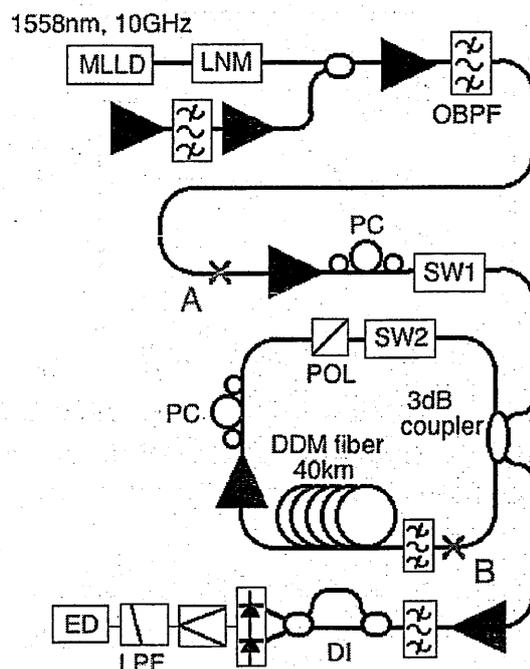


図11 10Gb/s 短パルスDPSK 周回伝送実験系。FWMの飽和を利用した振幅再生器(振幅安定化器)は、送信機直後(点A)または周回伝送路内(点B)の位置に挿入される。

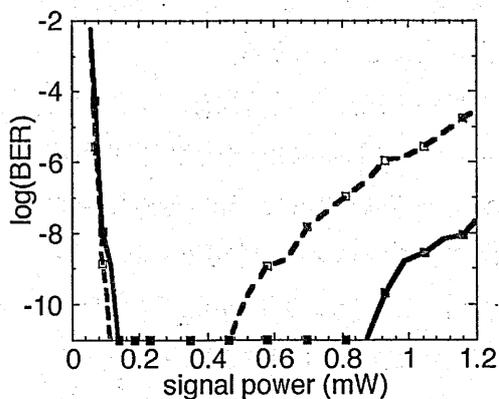


図12 送信機直後(点A)に振幅再生器を挿入した場合のBERと伝送信号電力の関係。破線:再生器内のポンプ光がOFFの場合、実線:再生器内のポンプ光がONの場合。

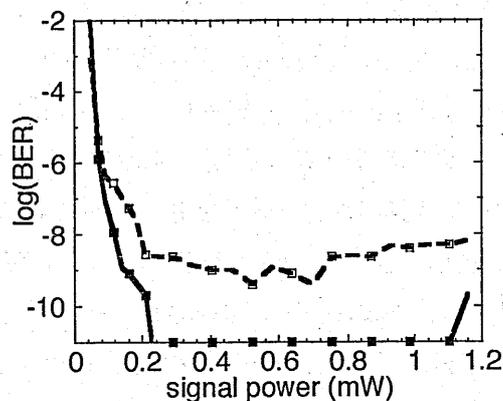


図13 周回伝送路内(点B)に振幅再生器を挿入した場合のBERと伝送信号電力の関係。破線:再生器内のポンプ光がOFFの場合、実線:再生器内のポンプ光がONの場合。

ること、から、FWMの飽和を利用した振幅再生器がDPSK伝送における非線形位相雑音を低減する効果があることが確認できる。また、図13は、振幅再生器を周回伝送路内に置いた場合の200km(5周)伝送後のBERと伝送信号電力の関係である。この測定においては光源のOSNRは25.7dBであ

る。無エラー伝送を達成するためには、図12の場合よりも OSNR を高く設定する必要がある。これは、周回伝送路中に振幅再生器を挿入する場合、周回毎(増幅スパン毎)に HNLFF が挿入されることになるので、振幅雑音からくる非線形雑音の影響がより強く現れるためである。振幅再生器の効果を十分に得るためには、できるだけ完全に振幅安定化を行い、再生器後に振幅揺らぎが残らないようにする必要がある。しかしながら、図13と図12を比較すると、周回伝送路中に振幅再生器を挿入した場合のほうが、より広い伝送信号電力範囲において低い BER が保たれる傾向があることがわかる。

#### 4. まとめ

本報告では、ファイバ中の自己位相変調効果を利用した OOK 信号の2R再生と、四光波混合の飽和を利用した DPSK 信号の位相維持振幅再生の実験結果について述べた。双方向伝搬型の構成を採用することによって、1本の高非線形ファイバのみを用いて波長変換のない再生効果の強い 2R 再生を実現できることを示した。擬似 80Gb/s 信号伝送実験を行い、本構成の再生器を用いることで伝送距離が2倍程度以上延長されることを示した。

また、FWM の飽和に基づく振幅再生は、DPSK などの位相変調信号の振幅揺らぎを過剰な位相雑音を付加することなく抑制する効果をもち、長距離伝送の際に問題になる非線形位相雑音を低減させることを確認した。

今後、前者についてはより高速な信号の再生を実現すること、後者については振幅再生器の最適化を行い伝送特性向上の効果をより高めることが課題である。

#### 参考文献

- [1] M. Onishi, T. Okuno, T. Kashiwada, S. Ishikawa, N. Akasaka, and M. Nishimura: "Highly nonlinear dispersion shifted fiber and its application to broadband wavelength converter," 23rd European Conference on Optical Communications (ECOC1997), vol.2, pp.115-118 (1997).
- [2] P. Petropoulos, H. Ebendorff-Heidepriem, V. Finazzi, R. C. Moore, K. Frampton, D. J. Richardson, and T. M. Monro: "Highly nonlinear and anomalously dispersive lead silicate glass holey fibers," Opt. Express, 11, pp. 3568-3573 (2003).
- [3] P. V. Mamyshev, "All-optical data regeneration based on self-phase modulation effect," 1998 European Conference on Optical Communications, 475 (1998).
- [4] G. Raybon, Y. Su, J. Leuthold, R. -J. Essiambre, T. Her, C. Joergensen, P. Steinvurzed, K. Dreyer, and K. Feder, "40 Gbit/s pseudo-linear transmission over one million kilometers," 2002 Optical Fiber Communication Conference, FD10 (2002).
- [5] S. Watanabe, F. Futami, R. Okabe, Y. Takita, S. Feber, R. Ludwig, C. Schubert, C. Schmidt, and H. G. Weber, "160 Gbit/s optical 3R-regenerator in a fiber transmission experiment," 2003 Optical Fiber Communication Conference, PD16 (2003).
- [6] M. Matsumoto, "Efficient all-optical 2R regeneration using self-phase modulation in

- bidirectional fiber configuration", *Opt. Express*, 14, pp. 11018-11023 (2006).
- [7] M. Matsumoto, Y. Shimada, and H. Sakaguchi, "Wavelength-shift-free SPM-based 2R regeneration by bidirectional use of a highly nonlinear fiber", 2007 Optical Fiber Communication Conference, OME5 (2007).
  - [8] K. Croussore, I. Kim, C. Kim, Y. Han, and G. Li, "Phase-and-amplitude regeneration of differential phase-shift keyed signals using a phase-sensitive amplifier," *Opt. Express* 14, 2085-2094 (2006).
  - [9] I. Kang, C. Dorrer, L. Zhang, M. Rasras, L. Buhl, A. Bhardwaj, S. Cabot, M. Dinu, X. Liu, M. Cappuzzo, L. Gomez, A. Wong-Foy, Y. F. Chen, S. Patel, D. T. Neilson, J. Jaques, and C. R. Giles, "Regenerative all optical wavelength conversion of 40-Gb/s DPSK signals using a semiconductor optical amplifier Mach-Zehnder interferometer," 31st European Conference on Optical Communications (ECOC2005), Th 4.3.3 (2005).
  - [10] P. Vorreau, A. Marculescu, J. Wang, G. Böttger, B. Sartorius, C. Bornholdt, J. Slovak, M. Schlak, C. Schmidt, S. Tsadka, W. Freude, and J. Leuthold, "Cascadability and regenerative properties of SOA all-optical DPSK wavelength converters," *IEEE Photon. Technol. Lett.* 18, pp.1970-1972 (2006).
  - [11] V. S. Grigoryan, M. Shin, P. Devgan, and P. Kumar, "Mechanism of SOA-based regenerative amplification of phase-noise degraded DPSK signals," *Electron. Lett.* 41, pp. 1021-1022 (2005).
  - [12] K. Cvecek, K. Sponsel, G. Onishchukov, B. Schmauss, and G. Leuchs, "2R-regeneration of a RZ-DPSK signal using a nonlinear amplifying loop mirror," *IEEE Photon. Technol. Lett.* 19, pp.146-148 (2007).
  - [13] M. Matsumoto, "Regeneration of RZ-DPSK signals by fiber-based all-optical regenerators," *IEEE Photon. Technol. Lett.* 17, pp.1055-1057 (2005).
  - [14] M. Matsumoto, "Performance improvement of phase-shift-keying signal transmission by means of optical limiters using four-wave mixing in fibers," *J. Lightwave Technol.* 23, pp.2696-2701 (2005).
  - [15] M. Matsumoto, "Nonlinear phase noise reduction of DPSK signals by an all-optical amplitude limiter using FWM in a fiber," 2006 European Conference on Optical Communication, Tu 1.3.5 (2006).
  - [16] K. Inoue, "Optical level equalisation based on gain saturation in fibre optical parametric amplifier," *Electron. Lett.* 36, pp.1016-1017 (2000).
  - [17] J. P. Gordon and L. F. Mollenauer, "Phase noise in photonic communications systems using linear amplifiers," *Opt. Lett.* 15, 1351-1353 (1990).
  - [18] H. Toda, S. Kobayashi, and I. Akiyoshi, "Reduction of pulse-to-pulse interaction of optical RZ pulses in dispersion managed fiber," 2002 Asia-Pacific Optical and Wireless Communications, paper 4906-54 (2002).

Residual Stress Effects on Post-Fabrication Resonance  
Wavelength Adjustment of Long-Period Fiber  
Gratings by Heating

長周期ファイバグレーティング製作後の加熱による  
ピーク損失波長調節における残留応力の影響

Katsumi Morishita and Akihiro Kaino

森下克己 海野彰弘

Osaka Electro-Communication University  
大阪電気通信大学

大阪電気通信大学 情報通信工学部 光・エレクトロニクス学科  
〒572-8530 大阪府寝屋川市初町 18-8  
e-mail: morisita@isc.osakac.ac.jp

2007年3月15日  
於 大阪電気通信大学

# Residual Stress Effects on Post-Fabrication Resonance Wavelength Adjustment of Long-Period Fiber Gratings by Heating

## 長周期ファイバグレーティング製作後の加熱によるピーク損失波長調節における残留応力の影響

Katsumi Morishita and Akihiro Kaino

森下克己

海野彰弘

Osaka Electro-Communication University

大阪電気通信大学

### 1. Introduction

Fiber gratings have been used in a wide variety of optical communication and sensing applications. It is very important for practical use to change and adjust their transmission characteristics. The glass structure change is a simple and widely applicable method to modify refractive index, and was utilized to control the index difference of dispersive fibers [1, 2] and to fabricate mode-field transformers [3] and long-period gratings (LPGs) in a conventional silica fiber [4] and a pure silica holey fiber [5].

It was shown that resonance wavelengths of LPGs were able to be adjusted by the glass structure rearrangement induced by heating [6]. However the resonance wavelengths were not able to be moved to shorter wavelengths, and the peak losses sometimes changed rapidly and drastically at the beginning of heating. The rapid and large change was an obstacle to trimming resonance wavelengths by heating, and was thought to be caused by the residual stress in the used fiber. A resonance wavelength shifted by 1.2 nm to shorter wavelengths owing to heating at 800 °C for 1 hour, and the shift to shorter wavelengths was explained by the relaxation of residual stress [7]. However it has not been shown clearly that the blue shift of resonance wavelengths and the rapid and large change of peak losses arise from the residual stress relaxation.

In this paper, we have studied the influence of residual stress on the post-heating changes of the transmission characteristics of LPGs in order to indicate the cause of the blue shift of resonance wavelengths, expand the trimming wavelength range, and suppress the peak loss change. A conventional silica fiber is preheated before fabricating an LPG to remove the residual stress induced by the fiber drawing process. The LPGs written in the silica fibers

un-preheated and preheated are heated to modify the transmission characteristics, and the post-heating changes of the resonance wavelengths and the peak losses are examined in detail comparing both experimental results.

### 2. Refractive Index Modification by the Glass Structure Change

The refractive index modification generated by the glass structure change results from the structural relaxation. Fig. 1 shows a schematic diagram of volume-temperature variation of a glass for heat treatments [8]. When a glass is maintained at a constant temperature, the volume changes with time until it reaches a certain equilibrium glass structure. The temperature that corresponds to the equilibrium glass structure is called the fictive temperature. The light gray line indicates an equilibrium volume-temperature curve. When temperature drops slowly, the glass structure changes along the equilibrium curve with temperature, and the viscosity of the glass increases. Finally the glass cannot trace the equilibrium curve because of the high viscosity, and then the glass structure is frozen at a certain temperature.

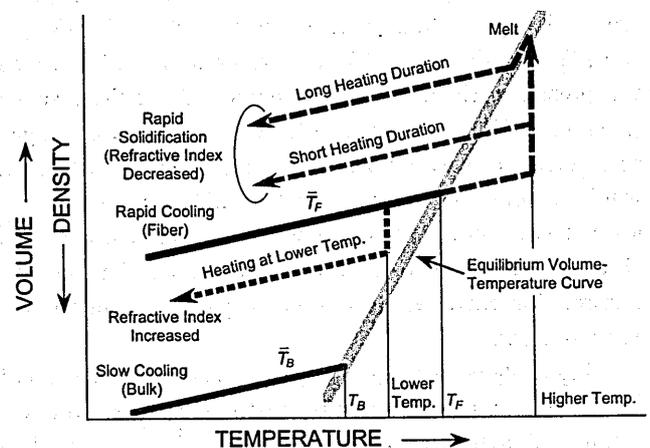


Fig. 1 Schematic diagram of volume-temperature variation of a glass for heat treatments.

K. Morishita is with Osaka Electro-Communication University, 18-8, Hatsu-cho, Neyagawa, Osaka 572-8530 Japan (e-mail: morishita@isc.osakac.ac.jp).

A. Kaino is currently with Okaya Seiritsu Engineering Co., Ltd., Nakaikegami, Ohtaku, Tokyo 146-0081 Japan.

The bulk glass is cooled slowly in the manufacturing process, and it stops following the equilibrium curve at a low temperature  $T_B$  as shown by the dark gray line. In the fiber drawing process, the fiber glass is cooled faster than the bulk glass and the glass structure is frozen at a higher temperature  $T_F$  than  $T_B$ . The density and the refractive index become lower than those of the bulk glass, and the glass structure of the drawn fiber is the same as the equilibrium glass structure at  $T_F$ , and the fictive temperature of the drawn fiber is expressed by  $\bar{T}_F$  as shown in Fig. 1. The fictive temperature of the bulk silica glass  $\bar{T}_B$  is around 1200 °C and is generally about the glass transition temperature. The  $\bar{T}_F$  of silica fibers, which varies with radial position, is around 1600 °C [9-12].

In the LPG fabrication, a drawn fiber is heated locally to above the melting temperature, and then the molten glass is cooled rapidly. The refractive index is decreased by rapid solidification as indicated by the broken lines. The index reduction can be adjusted by heating temperature and heating time. In case of heating at a lower temperature than  $T_F$ , the fiber glass approaches the equilibrium state with increasing the density. Then the fiber is cooled to room temperature, and the refractive index is increased as shown by the dotted line. In this paper, LPGs are written in a standard silica fiber (Corning SMF-28) by rapid solidification induced by arc discharge, and are heated at a lower temperature than  $T_F$  to modify the transmission characteristics.

### 3. Influence of Residual Stress on Trimming Resonance Wavelengths by Heating LPGs

The single mode fiber SMF-28 is preheated by a ceramic heater of length 22 mm to remove the residual stress caused by the fiber drawing process. Since the heater is short and the temperature is not uniform in the heater, the clamped ceramic heater is shifted manually by 0.5 mm along the fiber after heating at 1000 °C during 1 minute and then this procedure is repeated 30 times to release the residual stress over the fiber part to be inscribed an LPG. The fiber fixed on a translation stage is heated locally by arc discharge, then is moved by the grating period and is heated again. This process is repeated until a peak loss rises above 20 dB, and an LPG is fabricated. LPGs are written in the un-preheated and preheated fibers by arc discharge. Since the residual stress of a fiber with pure silica core and fluorine-doped silica cladding was almost removed by heating at 900 °C within 10 minutes [13], we execute heating experiments at a lower temperature 800 °C by use of the ceramic heater to observe clearly the residual stress effects on changing the transmission characteristics by heating LPGs written in the SMF-28 fiber.

Fig. 2 shows the changes of the transmission spectra of the LPGs inscribed in the un-preheated and preheated fibers before and after heating at 800 °C. The LPGs are written with the discharge current and time of 38 mA and 80 ms for the electrode spacing of 1 mm. The equivalent index

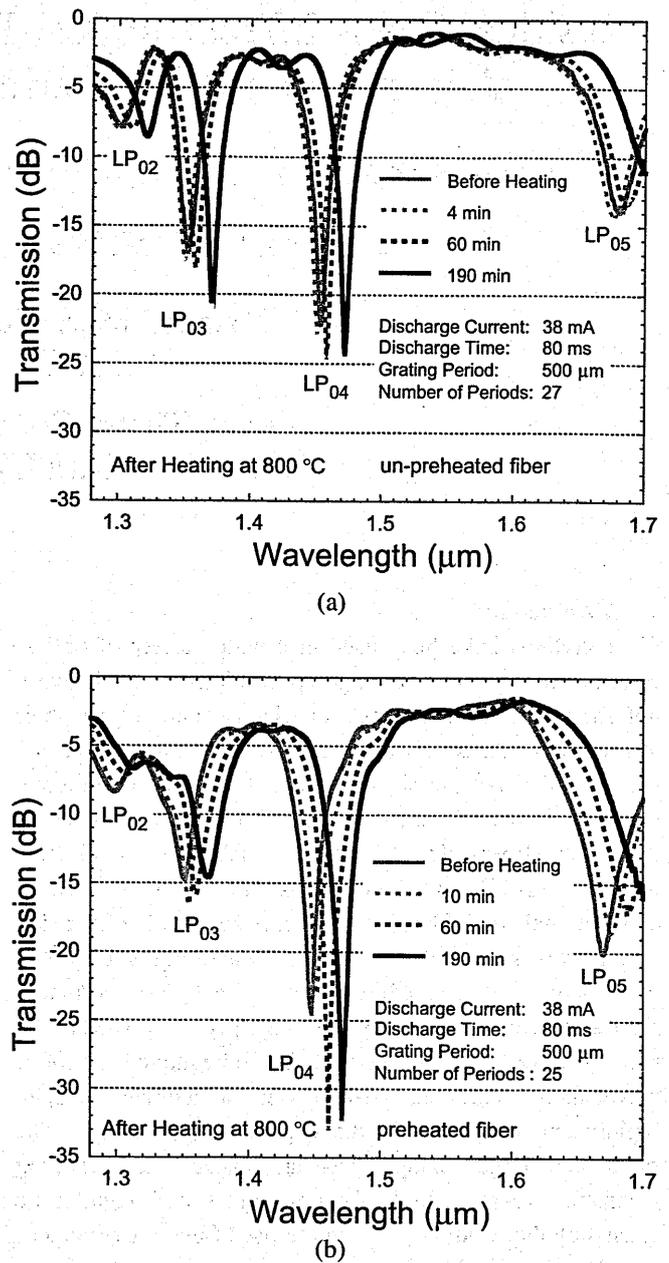


Fig. 2 Changes of the transmission spectra of the LPGs written in the fibers (a) un-preheated and (b) preheated against heating time at 800 °C.

changes of the LPGs with 32 and 36 periods written by 9 mA for 2 s and 11.5 mA for 0.4 s were estimated to be  $7 \times 10^{-4}$  and  $2.45 \times 10^{-4}$  [7, 14]. Since the resonance shown in Fig. 2 becomes stronger at the smaller number of periods, the index changes induced by 38 mA for 80 ms are believed to be more than  $7 \times 10^{-4}$ . It was reported that the spread of index change was about 1 mm long for the electrode spacing of 2 mm, and the region of index change became narrower with decreasing the spacing [4]. Therefore the length of index change is presumably less than 1 mm for the electrode spacing of 1 mm. The local temperature of the fiber during the arc exposure depended on the discharge current and time, and was estimated to be about 1600 °C for 9 mA and 1 s and the variation of the temperature against the discharge current was about 60 °C/mA for the discharge time of 1 s [15]. Considering the temperature slope of 60 °C/mA and

that the fiber is bent sometimes owing to the unexpected stress, the fiber temperature induced by 38 mA for 80 ms is thought to be higher than silica glass melting temperature ( $\sim 1700^\circ\text{C}$ ).

The post-heating transmission spectra of the LPGs are recorded after taking them out from the heater and cooling them to room temperature in air. Then the LPGs are return to the heater for a longer heating time. Heating time is the accumulated total time. The loss peaks are generated by coupling from the  $LP_{01}$  core mode to the  $LP_{02}$ ,  $LP_{03}$ ,  $LP_{04}$ , and  $LP_{05}$  cladding modes, and are designated by  $LP_{02}$ ,  $LP_{03}$ ,  $LP_{04}$ , and  $LP_{05}$ . The resonance wavelengths before heating the LPG for the un-preheated fiber are longer than those for the preheated fiber as shown in Fig. 2(a) and (b), and the resonance wavelength differences are 4 nm for  $LP_{02}$ , 1 nm for  $LP_{03}$ , 5 nm for  $LP_{04}$ , and 11 nm for  $LP_{05}$ . After heating at  $800^\circ\text{C}$ , the resonance wavelengths for the un-preheated fiber shift to shorter wavelengths at heating time of 4 minutes, and move to longer wavelengths at 60 and 190 minutes as shown in Fig. 2(a). However the LPG in the preheated fiber exhibits the red shift of resonance wavelengths from the beginning of heating without the blue shift as shown in Fig. 2(b).

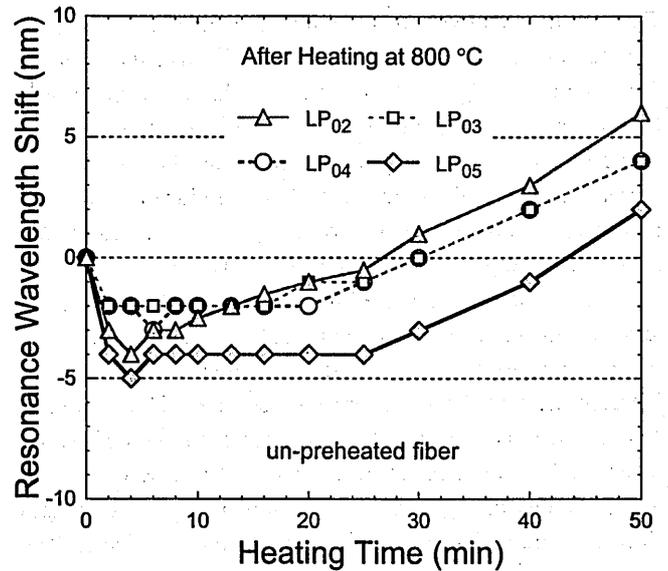
The residual stress in fibers results from a superposition of thermal stress caused by a difference in thermal expansion coefficients between core and cladding and mechanical stress induced by a difference in viscosities of the two regions. It was indicated that mechanical stress was relaxed by the  $\text{CO}_2$  laser irradiation and the remaining stress in the core was solely thermal stress and no significant quenching stress remained at the surface of the fibers [16]. The residual stress of a pure silica core/fluorine-doped silica cladding fiber was released by heating at  $900^\circ\text{C}$  for 10 min, and the index difference between the core and the cladding was increased [13].

Since the SMF-28 used here is a Ge-doped silica core/pure silica cladding fiber, the mechanical stress caused by fiber drawing is compressive in the core, and the core index is increased by the mechanical stress. Therefore the core-cladding index difference is decreased by the stress relaxation induced by preheating, and the effective index difference between the core mode  $LP_{01}$  and the cladding mode  $LP_{0m}$ ,  $(n_{01} - n_{0m})$ , is reduced. The resonance wavelengths before heating the LPG for the un-preheated fiber become longer than those for the preheated fiber, because the resonance wavelength  $\lambda_{res}$  is determined by the phase matching condition

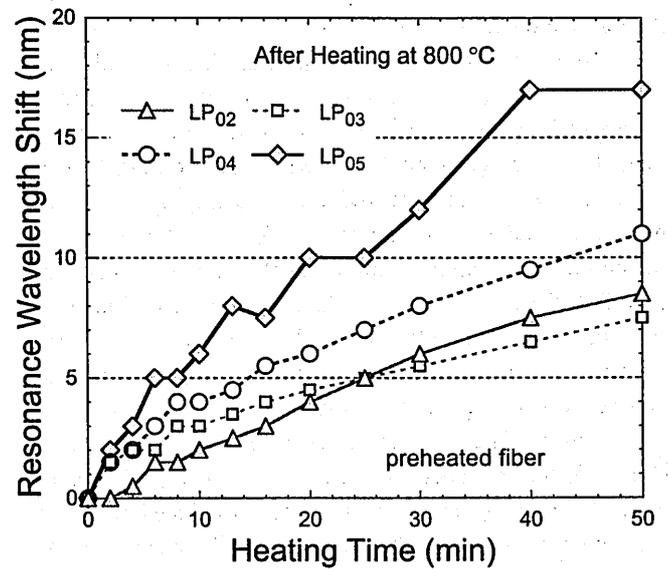
$$\lambda_{res} = (n_{01} - n_{0m})\Lambda \quad (1)$$

where  $\Lambda$  is the grating period.

Fig. 3 shows the post-heating resonance wavelength shifts of the loss peaks generated by the  $LP_{02}$ ,  $LP_{03}$ ,  $LP_{04}$ , and  $LP_{05}$  cladding modes against heating time until 50 minutes at  $800^\circ\text{C}$ . The resonance wavelengths move rapidly to the blue wavelength side at the early stage of heating as shown in Fig. 3(a), then become steady and begin to grow gradually and all resonance wavelengths increase



(a)



(b)

Fig. 3 Resonance wavelength shifts of the LPGs written in the fibers (a) un-preheated and (b) preheated against heating time until 50 minutes at  $800^\circ\text{C}$ .

after a heating time of 25 minutes. On the other hand, the resonance wavelengths for the preheated fiber shift to longer wavelengths without moving to shorter wavelengths as shown in Fig. 3(b). It follows from these results that the residual stress relaxation causes the resonance wavelengths to shift to shorter wavelengths and the mechanical stress is almost released by heating for about 25 minutes at  $800^\circ\text{C}$ . The resonance wavelength of the  $LP_{02}$  mode for the preheated fiber does not grow within 2 minutes. We consider that a little mechanical stress still remains in the preheated fiber and is completely relaxed by heating at  $800^\circ\text{C}$  for about 2 minutes.

Since the heating temperature  $800^\circ\text{C}$  is believed to be lower than the fictive temperature of the silica fibers [9-12], the refractive indices of the core and the cladding increase with heating time at  $800^\circ\text{C}$  as shown by the dotted line in

Fig. 1. The effective indices of the core and cladding modes are increased, and the increase of the effective index of the core mode is bigger than those of the cladding modes because of their larger power fraction outside the fiber [6]. Therefore the effective index difference,  $(n_{01} - n_{0m})$ , is increased by the glass structure change induced by heating at 800 °C, and the resonance wavelengths are shifted toward longer wavelengths with heating time. The refractive index and the density are increased by heating the fiber at a lower temperature than its fictive temperature, and the length of the grating period becomes shorter owing to the density increase after cooling to room temperature. The shrinkage of the period causes the blue shift, but the blue shift is not observed for the stress-released fiber. It can be concluded that the index change brings about much larger wavelength shift than the period change induced by the shrinkage. The change of  $(n_{01} - n_{0m})$  corresponding to the wavelength shift of 5 nm is evaluated at  $10^{-5}$  using the phase matching condition (1), and the index change is thought to be more than or comparable to  $10^{-5}$ .

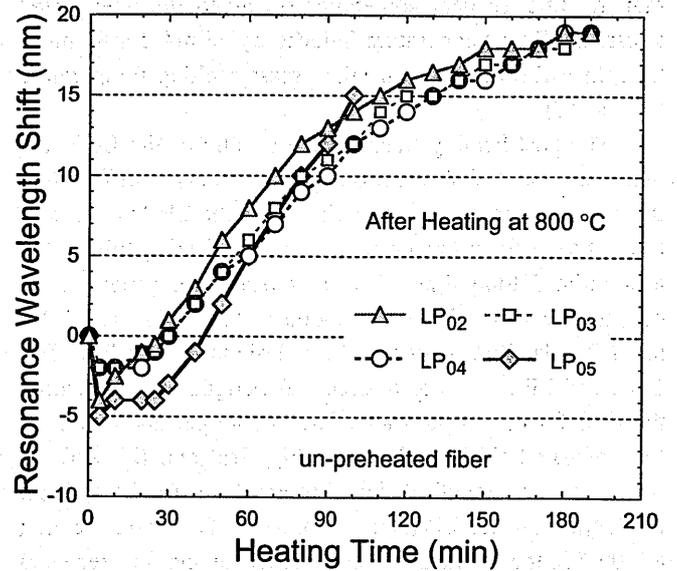
These results make it clear that the residual stress relaxation shifts resonance wavelengths to shorter wavelengths quickly and the glass structure change moves them to longer wavelengths slowly. Considering that the resonance wavelength moved more quickly at the higher heating temperature and no blue shift was observed in case of the post-fabrication trimming at the higher temperatures of 900, 1000 and 1100 °C [6], the relaxation rate of the glass structure drops rapidly with the decrease in heating temperature, and the effects of the residual stress relaxation appear more strongly at the early stage of heating at a lower temperature. Therefore the resonance wavelengths can be shifted further to shorter wavelengths by heating LPGs at a lower temperature and/or using a stress-induced fiber, and the trimming wavelength range can be broadened on the short wavelength side.

Fig. 4 shows the post-heating resonance wavelength shifts of the loss peaks induced by the LP<sub>02</sub>, LP<sub>03</sub>, LP<sub>04</sub>, and LP<sub>05</sub> cladding modes against heating time until 190 minutes at 800 °C. The resonance wavelengths of the LP<sub>05</sub> mode for the un-preheated and preheated fibers increase beyond the measurement range, 1.7 mm, at heating times of 110 and 120 minutes, and are not shown in Fig. 4. As shown in Fig. 4(b), the resonance wavelengths for the preheated fiber initially increase rapidly, and the increase rates decrease as heating time advances. The reason for such resonance wavelength variations is that the fictive temperature initially changes rapidly and approaches the equilibrium value.

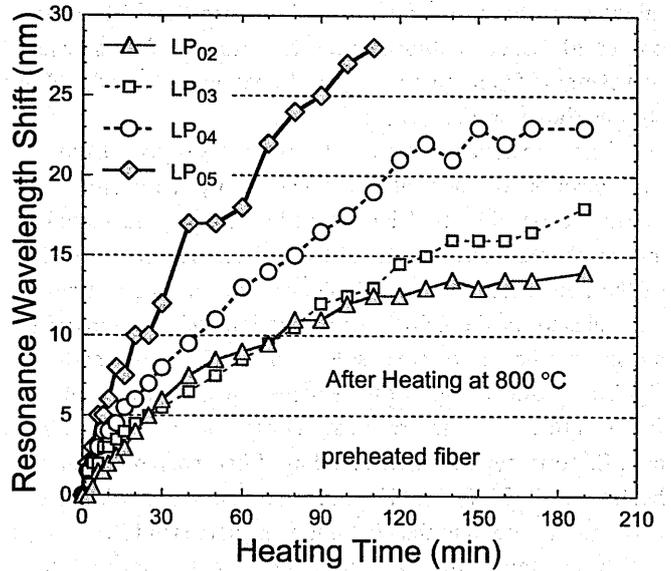
When the fiber glass with the fictive temperature of  $\bar{T}_f$  is rapidly taken to the temperature  $T_H$ , the fictive temperature of the fiber glass,  $\bar{T}(t)$ , changes as follows [8]:

$$\frac{d\bar{T}(t)}{dt} = A(T_H - \bar{T}(t)) \quad (2)$$

where  $A$  is the reciprocal of the viscosity and a function of  $T_H$  and  $\bar{T}(t)$ . Since  $|T_H - \bar{T}(t)|$  is largest at the beginning of



(a)



(b)

Fig. 4 Resonance wavelength shifts of the LPGs written in the fibers (a) un-preheated and (b) preheated against heating time until 190 minutes at 800 °C.

heating and the fictive temperature  $\bar{T}(t)$  approaches the equilibrium value  $T_H$ , the fictive temperature  $\bar{T}(t)$  initially changes rapidly, and the rate of change decreases with heating time. The resonance wavelengths become almost steady at about 190 minutes, and the shift is larger for the higher cladding mode. Since the heating temperature 800 °C is lower than the fictive temperature of the preheated fiber, the refractive indices of the core and cladding increase and their increase rates become smaller with heating time. Therefore it seems that the glass structure in the part not exposed to the discharge almost reaches the equilibrium state at 190 minutes.

However, as shown in Fig. 4(a), the resonance wavelengths for the un-preheated fiber still increase at 190 minutes. The fictive temperature of the preheated fiber is reduced by preheating at 1000 °C as shown by the dotted

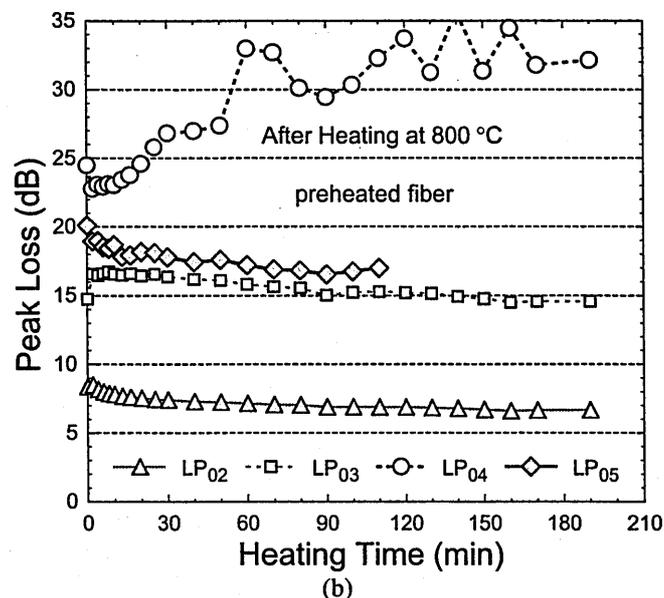
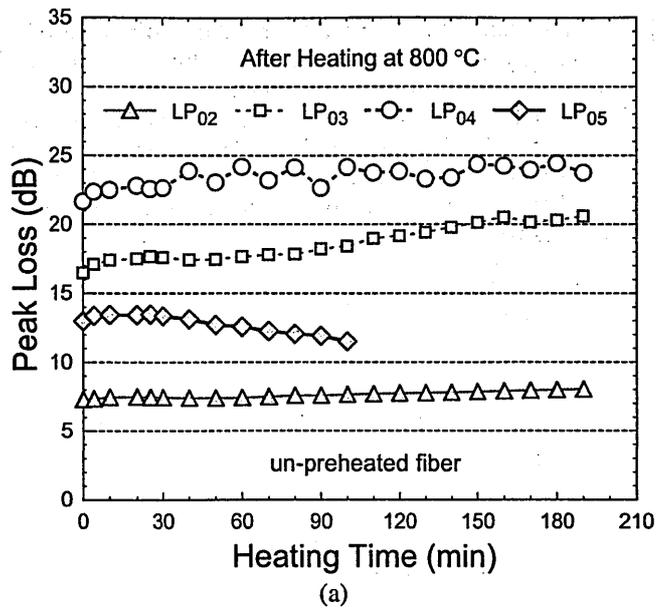


Fig. 5 Changes of the peak losses of the LPGs written in the fibers (a) un-preheated and (b) preheated against heating time at 800 °C.

line in Fig. 1, and becomes lower than that of the un-preheated fiber. Therefore it takes more than 190 minutes for the glass structure of the un-preheated fiber to reach the equilibrium state at 800 °C. The resonance wavelength of the LP<sub>02</sub> mode for the un-preheated fiber is shifted more than that for the preheated fiber. We consider that the maximum shifts of the resonance wavelengths are decreased by preheating and the resonance wavelengths for the un-preheated fiber are increased further by heating longer than 190 minutes.

Fig. 5 shows the peak losses of the LPGs written in the fibers un-preheated and preheated against heating time at 800 °C. The large fluctuations of the peak losses above about 25 dB for the LP<sub>04</sub> mode are caused by measuring limit of the optical spectrum analyzer. For the un-preheated fiber shown in Fig. 5(a), the peak losses initially increase with heating time and become steady at about 25 minutes for a while, then begin to change gradually again. The

initial change in 25 minutes is a little more rapid than that after 25 minutes and is thought to be due to the residual stress relaxation based on the results shown in Fig. 3(a).

For the preheated fiber shown in Fig. 5(b), the peak losses change rapidly within 2 minutes and then vary gradually. The rapid changes are believed to be caused by the residual stress relaxation considering the observation on the unmoving resonance wavelength of the LP<sub>02</sub> mode within 2 minutes shown in Fig. 3(b). The mechanical stress may not be completely relaxed in spite of preheating. The peak losses are determined by the form of the index reduction generated by arc discharge. When the LPG is heated, the form of the index reduction is deformed by the residual stress relaxation and the rearrangement of the glass structure, and the peak losses vary.

The peak losses were reduced rapidly and drastically by up to 7 dB at the beginning of heating [6], but the peak losses shown in Fig. 5 do not change largely. The rapid changes of the peak losses depend on contribution of the residual stress to the form of the index reduction, i.e. coupling coefficients between the core and the cladding modes. We consider that the residual stress happens to contribute a little to the peak loss changes in the present experiments. Since the residual stress relaxation proceeds faster than the glass structure changes, the rapid and large changes of peak losses would be removed by preheating, and resonance wavelengths could be adjusted without significant peak loss changes, though the trimming wavelength range becomes narrow.

#### 4. Conclusions

We investigated the residual stress effects on post-fabrication resonance wavelength trimming of long-period fiber gratings by heating. A single mode fiber was preheated before inscribing an LPG to remove the residual stress caused by the fiber drawing process. The LPGs written in the un-preheated and preheated fibers were heated to change resonance wavelengths, and the post-heating changes of the resonance wavelengths and the peak losses were studied in detail.

It becomes evident that the residual stress relaxation shifts resonance wavelengths to shorter wavelengths rapidly and the glass structure rearrangement moves them to longer wavelengths slowly. The residual stress relaxation is a main factor of the transmission change of LPGs at the beginning of heating, and then the glass structure rearrangement becomes principal and the resonance wavelength variations decrease with heating time. The relaxation rate of the glass structure falls rapidly as heating temperature decreases, and the effects of the residual stress relaxation appear more strongly at the early stage of heating at a lower temperature. The resonance wavelengths can be shifted further to the short wavelength side by heating LPGs at a lower temperature and/or using a stress-induced fiber, and the adjustable wavelength range can be expanded on the short wavelength side. The residual stress relaxation before

writing LPGs would remove the rapid and large peak loss changes, and we could adjust resonance wavelengths without significant peak loss changes, though the trimming range becomes narrow.

#### References

- [1] J. Nishimura and K. Morishita, "Control of spectral characteristics of dispersive optical fibers by annealing," *J. Lightwave Technol.*, vol. 15, no. 2, pp. 294-298, Feb. 1997.
- [2] J. Nishimura and K. Morishita, "Changing multimode dispersive fibers into single-mode fibers by annealing and guided mode analysis of annealed fibers," *J. Lightwave Technol.*, vol. 16, no. 6, pp. 990-997, June 1998.
- [3] J. Nishimura and K. Morishita, "Mode-field expansion and reduction in dispersive fibers by local heat treatments," *IEEE J. Select. Topics Quantum Electron.*, vol. 5, no. 5, pp. 1260-1265, Sept./Oct. 1999.
- [4] K. Morishita, S. F. Yuan, Y. Miyake and T. Fujihara, "Refractive index variations and long-period fiber gratings made by the glass structure change," *IEICE Trans. Electron.*, vol. E86-C, no. 8, pp. 1749-1758, Aug. 2003.
- [5] K. Morishita and Y. Miyake, "Fabrication and resonance wavelengths of long-period gratings written in a pure silica photonic crystal fiber by the glass structure change," *J. Lightwave Technol.*, vol. 22, no. 2, pp. 625-630, Feb. 2004.
- [6] K. Morishita and A. Kaino, "Adjusting resonance wavelengths of long-period fiber gratings by the glass structure change," *Appl. Opt.*, vol. 44, no. 24, pp. 5018-5023, Aug. 2005.
- [7] G. Humbert and A. Malki, "Electric-arc-induced gratings in non-hydrogenated fibres: fabrication and high-temperature characterizations," *J. Opt. A*, vol. 4, no. 2, pp. 194-198, Feb. 2002.
- [8] T. S. Izumitani, *Optical Glass*, American Institute of Physics, ch. 1, New York, 1986.
- [9] S. Sakaguchi and S. Todoroki, "Viscosity of silica core optical fiber," *J. Non-Cryst. Solids*, vol. 244, pp. 232-237, 1999.
- [10] S. Sakaguchi and S. Todoroki, "Rayleigh scattering of silica glass and silica fibers with heat treatment," *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 37, Suppl. 37-1, pp. 56-58, 1998.
- [11] Y. -L. Peng, A. Agarwal, M. Tomozawa, and T. A. Blanchet, "Radial distribution of fictive temperatures in silica optical fibers," *J. Non-Cryst. Solids*, vol. 217, pp. 272-277, 1997.
- [12] D. -L. Kim, M. Tomozawa, S. Dubois, and G. Orcel, "Fictive temperature measurement of single-mode optical-fiber core and cladding," *J. Lightwave Technol.*, vol. 19, no. 8, pp. 1155-1158, Aug. 2001.
- [13] S. Ishikawa, H. Kanamori, T. Kohgo, M. Nishimura, and H. Yokota, "New mode-field conversion technique in optical fiber using thermal relaxation of residual stress," *Tech. Dig. Conf. Optic. Fiber Commun./Int. Conf. Integrated Optics Optic. Fiber Commun.* paper TuB4, San Jose, USA, Feb. 1993.
- [14] P. Palai, M. N. Satyanarayan, M. Das, K. Thyagarajan, and B. P. Pal, "Characterization and simulation of long period gratings fabricated using electric discharge," *Opt. Commun.*, vol. 193, pp. 181-185, June 2001.
- [15] Y. Mohanna, "Electric arc temperature estimation of a fibre splicer," *Inst. Elect. Eng. Proc. Optoelectron.*, vol. 142, no. 6, pp. 313-315, Dec. 1995.
- [16] B. H. Kim, Y. Park, T. -J. Ahn, D. Y. Kim, B. H. Lee, Y. Chung, U. C. Paek, and W. -T. Han, "Residual stress relaxation in the core of the optical fiber by CO<sub>2</sub> laser irradiation," *Opt. Lett.*, vol. 26, no. 21, pp. 1657-1659, Nov. 2001.

17

# 熔融形光ファイバカプラの放電による 波長無依存化

†森下 克己      ††太田 信之

大阪電気通信大学

大阪電気通信大学 大学院 工学研究科 電子通信工学専攻

〒572-8530 寝屋川市初町18-8

E-mail: †morisita@isc.osakac.ac.jp, ††m06703@isc.osakac.ac.jp

2007年3月15日

於 大阪電気通信大学

# 熔融形光ファイバカプラの放電による 波長無依存化

森下 克己      太田 信之

大阪電気通信大学

## 1. はじめに

光ファイバは軽量で低損失、大容量であり高い信頼性を特徴としている。そのため光通信や計測の分野でよく用いられている。ファイバ形光デバイスは低損失で光ファイバとの接続が容易なために、様々な光システムの構築に用いられており、中でも光ファイバカプラは最もよく用いられている。光ファイバカプラは通常波長依存性をもっているが、広帯域で使用するためには波長依存性を少なくすることが必要である。波長無依存カプラは、通常のカプラとして利用されているだけでなく、波長多重通信用の合分波器を構築しているカプラ、光デバイスの検査や監視用カプラ、様々な波長で利用可能なカプラとして、色々な分野の光システムに利用されている。

これまでに、波長の依存性を抑える4種類の方法が提案されている。導波モードの構造的な対称性を利用して波長依存性をなくす光ファイバY分岐<sup>(1)</sup>、コアとクラッド間の屈折率差に波長依存性をもたせ、波長による導波モードの界分布変化を抑えた分散性光ファイバカプラ<sup>(2)(3)</sup>、2つのカプラを縦続接続することで互いの波長依存性をうち消すようにした縦続接続光ファイバカプラ<sup>(4)(5)</sup>、外径や屈折率分布の異なる2本の光ファイバを用いて導波モード間に位相不整合状態を起こさせ広帯域化を図る異種光ファイバカプラ<sup>(6)</sup>の4種類である。しかし、光ファイバY分岐では1/2の結合に限られ、分散性光ファイバカプラは特殊なファイバを使用しなければならず製作も困難である。縦続接続光ファイバカプラでは適切な位相差を与えるのが困難である。異種光ファイバカプラは、一方の光ファイバをテーパ状にしたり、エッチングしたりして細くした後に熔融延伸法でカプラを製作しているが、テーパやエッチング工程が煩雑であり、異なる径の光ファイバを使うために、製作に多少の困難を伴う。

本研究では、熔融形カプラを製作後、熔融部を不均一に放電加熱することにより位相不整合を起こさせ波長依存性を減少させる方法を提案し<sup>(8)</sup>、その有効性を調べた。

## 2. 放電による波長無依存化

光ファイバカプラにおける電力の移行は、モード結合方程式を用いて表すことができる。電力 $P_0$ を光ファイバに入力したとき、入力光ファイバからの出力電力 $P_1$ と結合光ファイバからの出力電力 $P_2$ は次式のように表される。

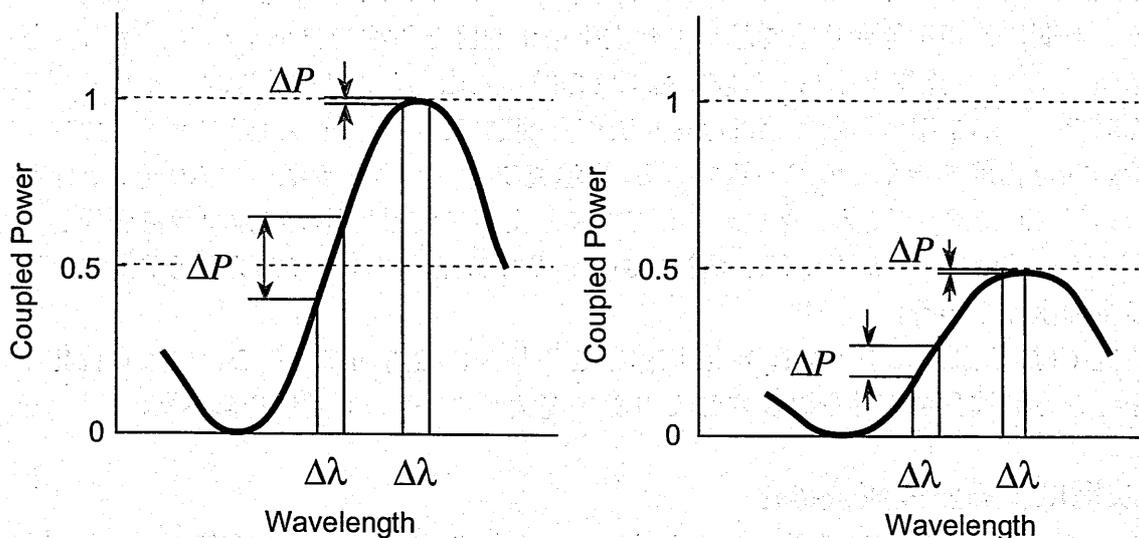
$$P_1(L) = P_0 \left( \cos^2 KL + \frac{\Delta\beta^2}{4K^2} \sin^2 KL \right) \quad (1)$$

$$P_2(L) = P_0 \frac{C^2}{K^2} \sin^2 KL \quad (2)$$

ただし、 $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ 、 $K = \sqrt{\Delta\beta^2 + 4C^2} / 2$  で、 $\beta_1$ と $\beta_2$ は結合部における各光ファイバの導波モードの伝搬定数、 $C$ は結合係数、 $L$ はカプラの結合部の長さである。

通常の光ファイバカプラは同じ光ファイバでできているために、すべての波長で導波モード間に位相整合( $\beta_1 = \beta_2$ )がとれており、完全に光を移行させることができる。光ファイバの外径や屈折率分布の異なるものを用いれば、導波モード間に位相不整合( $\beta_1 \neq \beta_2$ )が生じ、光の移行量は減少するが、広帯域化される。図1は位相整合及び不整合状態の結合電力 $P_2$ と波長との関係を示した模式図である<sup>6)</sup>。図1(a)に示すように、2本の同じ光ファイバを用いた標準的な光ファイバカプラは、波長が変化すると結合電力は0%~100%まで変化する。波長幅 $\Delta\lambda$ に対する結合電力の変化量 $\Delta P$ は、50%付近では最も大きく、0%または100%付近では最も小さくなる。図1(b)に示すように、一方の導波モードの伝搬定数を変えて位相不整合状態にすれば、波長の影響を受けにくい部分を適当な結合電力付近にもってこることができ、波長変化の少ないカプラができる。

これまでは位相不整合状態にするために、外径や屈折率分布の異なる光ファイバを使用することが考えられたが、入出力端における接続上の問題のために利用されていない。接続上の問題を解決するためには、1本の光ファイバのみ一部分をテーパ<sup>6)</sup>やエッチングにより細くする方法が提案され、利用されている。しかしながら、径の異なる光ファイバを用いてカプラを作るには多少の困難を伴い、またエッチングでは化学的な処理をしなければならず煩雑な作業を必要とする。本研究では、製作した熔融形光ファイバカプラの熔融部を放電により不均一に加熱・急冷し、一方の光ファイバの屈折率をより多く低下させ



(a) 標準的な光ファイバカプラ(位相整合) (b) 異種光ファイバカプラ(位相不整合)

図1 光ファイバカプラの波長特性

て位相不整合にし、波長無依存化を行う。

ガラスは熱処理することによって、ガラス構造が変化し屈折率も変わる。図2は熱処理によるガラスの体積・温度変化を示している<sup>9)</sup>。ガラス構造の変化により起こされる屈折率変化は、ガラスの構造緩和により起きる。ガラスを一定の温度で加熱し続けると、ガラス構造及び体積は加熱温度に応じた平衡状態になる。ガラス構造の平衡状態に対応する温度のことを仮想温度と呼んでいる。青色の線は平衡状態の体積と温度の関係を示しているので、平衡容積・温度曲線と呼ばれている。

ゆっくりとガラスの温度を下げると、ガラス構造は平衡曲線に沿って変化し、しだいにガラスの粘性が増加する。そして、ガラスは粘性増加によりついには平衡曲線に沿うことができなくなり、その時のガラス構造を保持したまま固化する。光ファイバの線引き工程では、バルク状ガラスよりも速く光ファイバは冷やされるので、高い温度 $T_F$ で平衡曲線を離れ固化する。そのために、線引き後のファイバガラスの密度と屈折率はバルク状ガラスよりも小さくなる。黒の実線で示されている線引きされた光ファイバのガラス構造は、温度 $T_F$ における平衡状態のガラス構造と同じであるので、ファイバガラスの仮想温度を $\bar{T}_F$ と表す。線引き後の光ファイバを熔融温度以上で部分的に加熱すると、粘性は低くなるのでガラスは急速に平衡状態に近づく。その後急冷すると、破線で示すように速く固化し、密度および屈折率は減少する。加熱時間が短いと、平衡状態になるまでに冷やされ、屈折率減少は小さくなり、加熱時間が長いと大きくなる。屈折率減少は加熱温度と加熱時間により調節することができる。本論文では、アーク放電による急加熱・急冷で屈折率を部分的に減少させる。

波長依存性を少なくするために熔融形光ファイバカプラの結合部を放電により不均一に加熱・急冷する。図3に放電による加熱の様子を示す。製作した光ファイバカプラの熔融部を電極間の中心付近に、電極に対して直角になるように固定する。徐々に熔融部を放電のスパークに近づけ、カプラの結合に変化が現れると移動を停止する。停止位置で出力電力を監視しながら放電を繰り返し、位相不整合状態にして光ファイバカプラの波長依存性を小さくする。

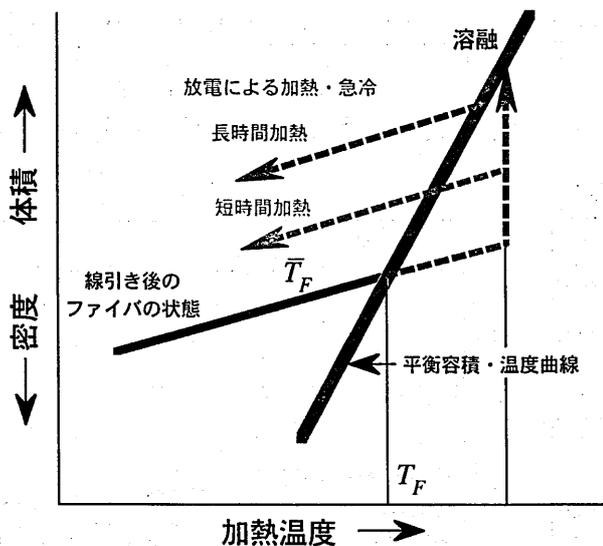


図2 熱処理に対するガラス構造変化

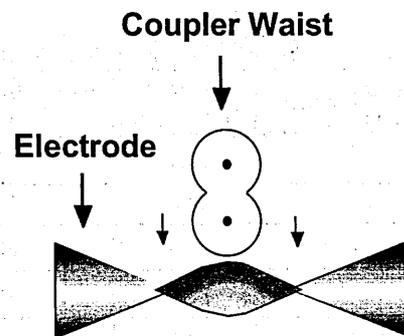


図3 光ファイバカプラ結合部の放電加熱

### 3. 実験結果

提案した手法の有効性や問題点を調べるために、結合部の状態が大きく異なる2種類の熔融形光ファイバカプラを製作し実験を行った。製作したカプラの熔融部を放電により不均一に加熱・急冷することによって、出力電力の変化を調べた。カプラの製作においては、2本の光ファイバを平行に接触して並べ、ヒーターで加熱熔融して延伸を行う。熔融部を延伸させながら2本の光ファイバからの出力電力を測定し、適当な出力電力となった時点で熔融延伸を停止する。

図4はヒーターの温度を1500℃にして熔融延伸したときのカプラの製作時間と出力電力の関係を示す。波長1.31μmの光を入力して、出力電力を測定している。製作時間550秒までは、ヒーター温度の上昇と2本の光ファイバの融着を行い、550秒から光ファイバを延伸してる。750秒付近から電力が移行し始め、結合電力が最大となったときに延伸を止めた。延伸距離は18.84mmとなった。図中の写真はカプラ熔融部の断面形状を示し、縦幅が19.8μm、横幅が37.7μmで、融着の比較的弱いカプラとなっている。

次に製作したカプラの熔融部を放電加熱し、波長特性の変化を調べた。放電電流100mA、放電時間5msの設定で熔融部を放電加熱した。図5は放電回数に対する分岐比( $P_2/P_1$ )の波長変化を示している。熔融部を電極に近づけ変化が現れてから8回放電し、8回目までの分岐比を示している。放電を行うことにより、徐々に結合電力が減少するととも

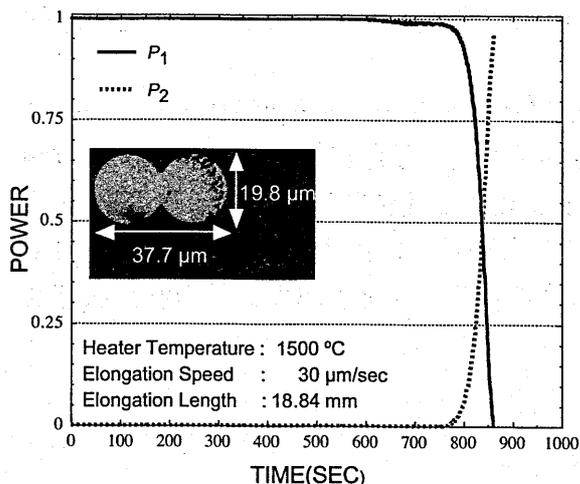


図4 出力電力と製作時間の関係

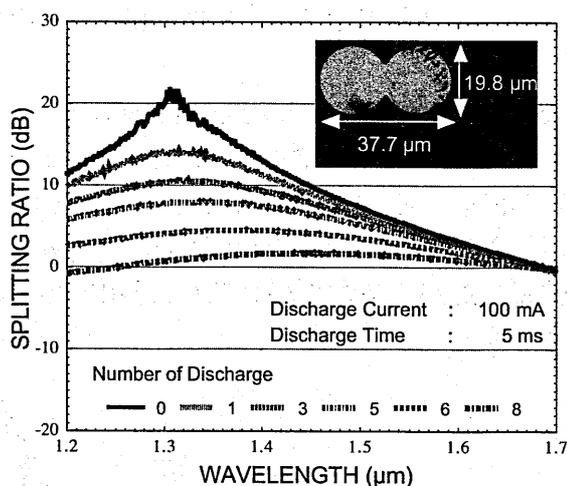


図5 放電による波長に対する分岐比の変化

表1 放電回数に対する帯域幅の変化

Number of Discharge	peak (dB)	variation (dB) (1.2-1.7 μm)	wavelength range for 0.5 dB change (nm)
0	21.7	22.1	10
1	14.2	14.6	40
3	10.7	10.8	62
5	7.9	8.1	119
6	4.5	4.8	162
8	1.7	1.9	214

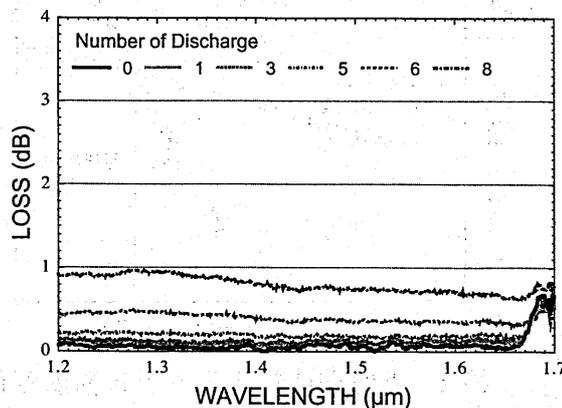


図6 放電による波長に対する損失の変化

に、分岐比ピークが長波長側に移動し、波長依存性も小さくなっている。熔融部において、両光ファイバの伝搬定数差が放電回数を増やすにしたがって大きくなり、結合電力の最大値が小さくなったものと思われる。また、放電回数を増やすと屈折率変化量も大きくなっていると考えられ、図2の短時間加熱に対応していると思われる。

表1には放電回数に対する分岐比のピーク、波長1.2~1.7 μmにおける分岐比変動、分岐比0.5 dB変化の帯域幅を示す。放電の回数を増やすにしたがって、分岐比のピーク（結合電力ピーク）は低下し、21.7 dBあったものが8回の放電で1.7 dBにまで下がった。また、波長範囲1.2~1.7 μmにおける分岐比の変化は22.1 dBあったものが1.9 dBと非常に小さくなり、0.5 dB変動の帯域幅も無放電時の10 nmが放電8回目で214 nmまで広がった。

図6は放電回数に対するの損失変化を示している。損失は無放電時と比較すると放電5回目までは放電1回につき約0.05 dBずつ増加していたが、6回目以降は1回の放電で約0.3 dBと急に大きくなった。損失は波長1.3 μmあたりで最大1 dBとなったが、1.45~1.67 μm付近では約0.7 dBに抑えることができた。

図7はヒーターの温度を1560 °Cにして熔融延伸したときのカプラの製作時間と出力電力の関係を示す。波長1.31 μmの光を入力して、出力電力を測定している。製作時間550秒までは、ヒーター温度の上昇と2本の光ファイバの融着を行い、550秒から光ファイバ

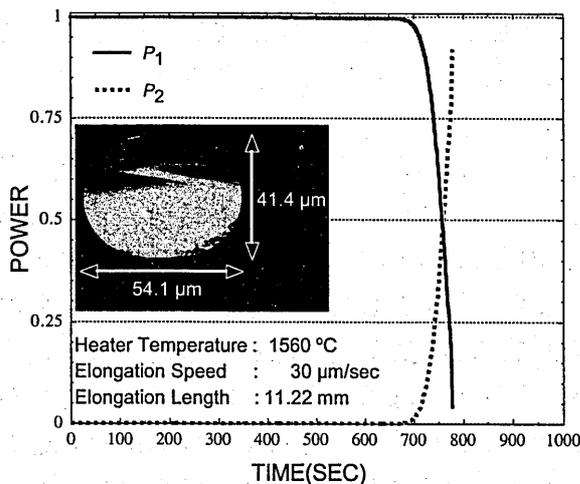


図7 出力電力と製作時間の関係

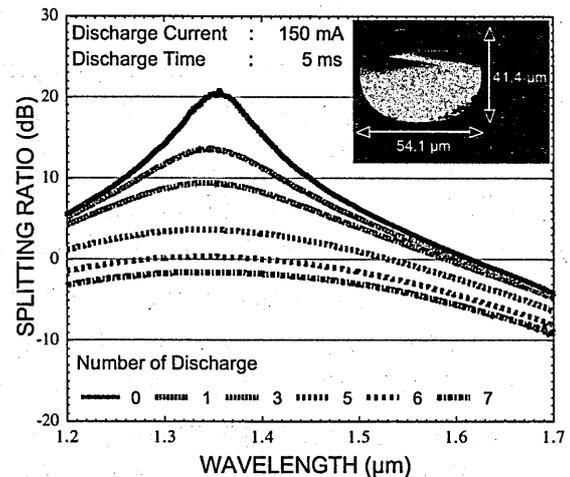


図8 放電による波長に対する分岐比の変化

表2 放電回数に対する帯域幅の変化

Number of Discharge	peak (dB)	variation (dB) (1.2-1.7 μm)	wavelength range for 0.5 dB change (nm)
0	20.9	25.7	14
1	13.6	18.0	51
3	9.4	14.1	70
5	3.6	10.0	121
6	0.3	8.7	150
7	-1.6	7.7	184

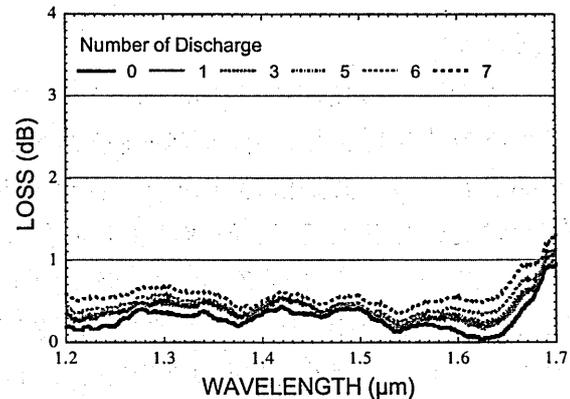


図9 放電による波長に対する損失の変化

を延伸して、700秒付近から電力が移行し始め、結合電力が最大となる少し前に延伸を止めた。延伸距離は11.22 mmとなった。図中の写真はカプラ溶融部の断面形状を示し、縦幅が54.1  $\mu\text{m}$ 、横幅が41.1  $\mu\text{m}$ で、融着の比較的強いカプラとなっている。結合が強くなったために、電力移行開始の時間は早くなり、延伸距離も短くなっている。

次に製作したカプラの溶融部を放電加熱し、波長特性の変化を調べた。放電電流150 mA、放電時間5 msの設定で溶融部を放電加熱した。図8は放電回数に対する分岐比 ( $P_2/P_1$ ) の波長変化を示している。結合が最大となる少し前に延伸を停止しているため、結合電力が最大となる波長は1.31  $\mu\text{m}$ より長波長側に移っている。溶融部を電極に近づけ変化が現れてから7回放電し、7回目までの分岐比を示している。放電を行うことにより、徐々に分岐比ピークは減少するが、結合の弱いカプラとは異なりピーク波長は移動せずにピークが広くなり、波長依存性も小さくなっている。

表2には放電回数に対する分岐比のピーク、波長1.2～1.7  $\mu\text{m}$ における分岐比変動、分岐比0.5 dB変化の帯域幅を示す。放電の回数を増やすにしたがって、分岐比のピーク(結合電力ピーク)は低下し、20.9 dBあったものが7回の放電で-1.6 dBにまで下がった。また、波長範囲1.2～1.7  $\mu\text{m}$ における分岐比の変化は25.7 dBあったものが7.7 dBと小さくなり、0.5 dB変動の帯域幅も無放電時の14 nmが放電7回目で184 nmまで広がった。しかし、結合の弱いカプラと比べると帯域幅は狭く、波長依存性は少し大きくなった。

図9は放電回数に対するの損失変化を示している。損失は無放電時と比較すると放電7回目までは放電1回につき約0.05～0.1 dBずつ増加していた。損失は波長1.3  $\mu\text{m}$ あたりで最大0.7 dBとなったが、全体的に約0.6 dBに抑えることができた。結合の弱いカプラと比べると、放電による損失は抑えられている。

結合の弱いカプラと強いカプラを比べると、結合の弱いカプラでは放電により伝搬定数差 $\Delta\beta$ が大きくなって、結合係数 $C$ は減少し、全体として $K(=\sqrt{\Delta\beta^2+4C^2}/2)$ が小さくなったために分岐比ピークが長波長側に移動したと思われる。一方、結合の強いカプラでは、放電により $\Delta\beta$ は増加するが $C$ の減少は少なく、全体として $K$ の値は変化せず、分岐比ピークは移動しなかったと考えられる。結合係数 $C$ は波長が長くなるにしたがって増大し、 $\Delta\beta$ は逆に減少するので分岐比のピーク幅はより広くなる。また、結合の弱いカプラの結合部断面は眼鏡形で融着部が小さいために、波長が長くなっても電磁界の広がりには結合の強いカプラよりも少なく、結合係数 $C$ の波長変化は小さいので、より広帯域化されたものと思われる。

#### 4. まとめ

本研究では、溶融形カプラの溶融部を不均一に放電加熱することにより波長依存性を減少させる方法を提案し、その有効性を調べた。結合の弱いカプラと強いカプラを製作し、放電加熱を行って波長依存性を減少させる効果と損失増加について調べた。

結合の弱いカプラでは、放電により波長範囲1.2～1.7  $\mu\text{m}$ における分岐比の変化を22.1 dBから1.9 dBへと小さくでき、0.5 dB変動の帯域幅も10 nmから214 nmへと広げることができた。結合の強いカプラでは波長範囲1.2～1.7  $\mu\text{m}$ の分岐比変化を25.7 dBから7.7 dBへと小さくでき、0.5 dB変動の帯域幅も14 nmから184 nmまでに広げることができた。結合の弱いカプラの場合は、分岐比のピーク波長は放電により長波長側へ移動するが、分岐

比の変化は小さくなり、結合の強いカプラと比べて広帯域となる傾向があることが分かった。今後の課題として、より低損失化を図るために最適なカプラの断面形状、放電電流や放電時間を調べる必要がある。

## 参考文献

- (1) J. D. Minelly and C. D. Hussey, "Single-mode fiber Y-junction beam-splitter," *Electron. Lett.*, vol. 23, no. 20, pp. 1087-1088 (Sept. 1987).
- (2) K. Morishita, "Optical fiber devices using dispersive materials," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 7, no. 1, pp. 198-201 (Jan. 1989)
- (3) K. Morishita and S. Yutani, "Wavelength-insensitive couplers made of annealed dispersive fibers," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 17, no. 11, pp. 2356-2360 (Nov. 1999).
- (4) K. Morishita and T. Tahara, "Wavelength-insensitive couplers in the form of all-fiber Mach-Zehnder interferometer," *Electron. Lett.*, vol. 27, no. 13, pp. 1200-1202 (June 1991).
- (5) F. Gonthier, D. Ricard, S. Lacroix and J. Bures, "Wavelength-flattened 2×2 splitters made of identical single-mode fibers," *Opt. Lett.*, vol. 16, no. 15, pp. 1201-1203 (Aug. 1991).
- (6) D. B. Mortimore, "Wavelength-flattened fused couplers," *Electron. Lett.*, vol. 21, no. 17, pp. 742-743 (Aug. 1985).
- (7) R. G. Lamont, K. O. Hill, and D. C. Johnson, "Fabrication of fused twin biconical taper single-mode fiber splitters: effect of unequal cladding diameters," in *OFC/OFS Technical Digest'85*, San Diego, USA, Feb. 1985, Paper TUQ22, pp. 78-79.
- (8) K. Morishita and D. Yamamoto, "Fused fiber couplers wavelength-flattened by arc discharge," in *Proc. Workshop on Fibers and Optical Passive Components*, Mondello, Italy, June 2005, pp. 187-191.
- (9) 泉谷徹郎, "光学ガラス", 共立出版, 1章, 1987.

2共振位相特性を用いた  
単層リフレクタレーの高性能化に関する検討

Study on High-Performance Single-Layer Reflectarray using  
Dual-Resonance Phase Properties

崎田聡史 出口博之 辻 幹男 眞弓貴一

同志社大学 工学部

S. Sakita, H. Deguchi, M. Tsuji, and K. Mayumi

Department of Electronics, Doshisha University

2007年3月15日

於 大阪電気通信大学

## 1 はじめに

金属反射板と2次元配列したストリップ導体で構成されたマイクロストリップ・リフレクトアレー [1] は、一次放射器から空間給電された球面波を金属板およびアレー素子によって平面波に変換しようとするもので、高利得な特性が容易に得られ [2]、位相による指向性合成を行えばビーム成形も可能である [3]。最近では、平面構造の特徴を生かして、ミリ波アンテナ [4] や衛星搭載用展開アンテナ [5] への応用も検討されている。

リフレクトアレーの着想は、フェーズドアレーを給電回路から励振するかわりに空間給電しようということであり、初期の研究では、共振素子にスタブを設けて移相器のように励振位相を調整していたが、共振点から離れた周波数における地導体からの反射波等の影響による著しい放射特性の劣化が問題であった [6, 7, 8]。これに対し、導体板を付けた周期構造アレーの素子形状を変えれば様々な反射位相が実現できることから、スタブのない単純な方形や線状のマイクロストリップ素子を2次元に配列したリフレクトアレーが提案されている [9, 10]。また、素子の形状を変化させるのではなく、導体素子自身の厚みを変化させることで反射位相量を調整したリフレクトアレーも提案されている [11]。同一寸法の素子を周期配列したリフレクトアレーにおいては、各素子の反射位相は無窮周期アレー [12, 13] や周波数選択膜 [14, 15] の解析法を適用すれば求められるが、位相による指向性合成を行う場合、素子毎にわずかに形状を変化させて  $0^\circ \sim 360^\circ$  の範囲で反射位相量を得ることが必要となる。実際には、各素子の反射位相の周波数特性は素子毎に大きく変化し、中心周波数以外では素子間の位相関係が保たれずに狭帯域な特性となる欠点を持っている。それゆえ十分な帯域を得るために、アレーを多層化することが一般的であった [16, 17]。一方、単層構造でも素子配列をうまく選べば、比較的良好な特性が得られることも報告されているが [18]、各素子による反射位相が、 $0^\circ \sim 360^\circ$  の範囲を完全に満たすことができないため、周期的位相誤差が生じ、不要放射が生じるという問題があった。

そこで本稿では、単層構造でありながら  $0^\circ \sim 360^\circ$  の反射位相量を得る形状として、2つの共振素子を組み合わせるものを1つの単位セルとみなした新たな配列構成法を提案し、所望の反射位相の周波数特性を持たせるための素子形状と配列について検討している [19, 20, 21]。そして、この提案素子の有効性を反射位相特性の数値計算および実験によって検証した後、放射方向をアレー面に垂直にしたオフセット給電リフレクトアレーアンテナを設計、試作して、広帯域にわたって良好な放射特性が得られることを実験的に確かめている。

## 2 従来のリフレクトアレー

本章では、まずリフレクトアレーの動作原理について述べ、次に、リフレクトアレーの広帯域化に関わる事柄として、光路長によって決まる位相特性、ならびに共振素子の位相特性について各々説明する。そして、従来の単共振素子によるリフレクトアレーの特性について述べるとともに、その問題点を明らかにしていく。

### 2.1 リフレクトアレーの動作原理

パラボラアンテナは図1(a)に示すように、一次放射器から空間給電された球面波を、反射鏡により放射方向に直交する面で位相をそろえ、平面波を放射するものであり、幾何光学における光路長一定の条件より鏡面形状を定め、開口面の位相分布を制御している。これに対し、リフレクトアレーは反射鏡のかわりに図1(b)に示すように、平面導体板と隙間 $h$ の面上に2次元周期配列された共振素子とで構成される。共振素子としては種々の形状のものが検討されているが、入射波に対する反射波の位相は共振周波数の上下の周波数で大きく変化している[9]。これは共振素子の長さを調整して共振周波数を変化させれば、ある周波数で見た場合には反射波の位相が制御できることを意味しており、電氣的に球面波を平面波に変換できる基になっている。したがって、リフレクトアレー開口面上の位相分布をうまく制御すれば、主ビームの方向を任意方向に向けることやビーム成形なども行え、しかも平面上に形状の異なる素子を配列するだけであるので、その構成上、大きさ、重量、コストの点で従来の反射鏡アンテナより優れている点が多い。リフレクトアレーの設計において重要な点は、反射位相を正確に導出することであるが、形状の異なる素子を周期配列した場合、その中の1つの素子の反射位相量を決めることは困難である。そこで位相量は無限周期均一長アレーを考え、それからの反射位相量で近似することにする。位相量の導出のための解析法については、次章で述べる。

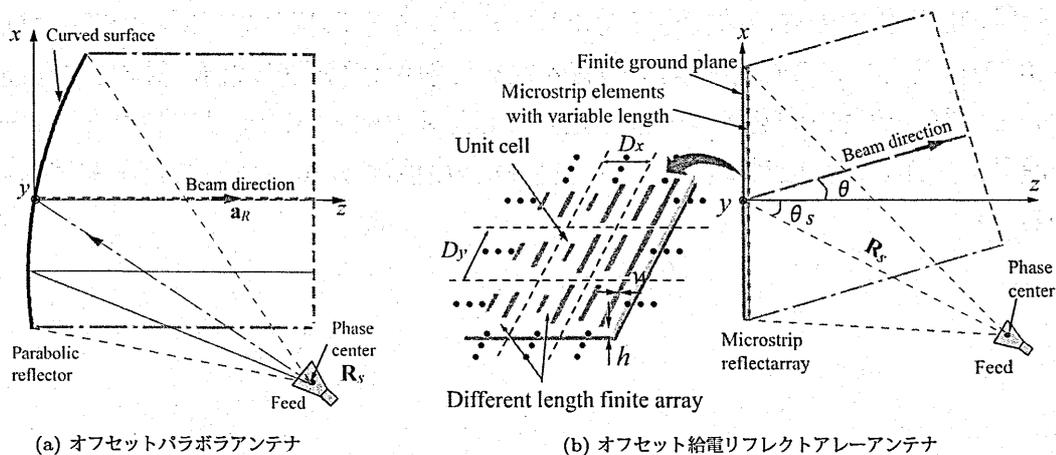


図1 アンテナ構成の比較

図2にオフセットリフレクタレーアンテナの座標系を示す。一次放射器の位相中心の位置ベクトルを  $\mathbf{R}_s = (x_s, y_s, z_s)$ , 位相中心からセル  $i$  の中心点への位置ベクトルを  $\mathbf{R}_i$ , 主ビーム方向の単位ベクトルを  $\mathbf{a}_R$  とする。いま, 一次放射器からの一次パターンを球面波とみなし, リフレクタレーの反射位相を  $\bar{\Phi}_i(f)$  とおくと, 波源  $\mathbf{R}_s$  から開口面 (原点を通る面にとる) までの光路長は,  $-k(|\mathbf{R}_i| - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}_R) + \bar{\Phi}_i(f)$  である ( $k$  は自由空間波数)。開口面位相分布を一様にするためには, この光路長を全ての素子において一定値となるよう反射位相  $\bar{\Phi}_i(f)$  を次式のように調整すればよい。

$$\bar{\Phi}_i(f) = k(|\mathbf{R}_i| - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}_R) + 2\pi N + \Phi_{const}(f) \quad (1)$$

ただし,  $\Phi_{const}$  はリフレクタレー素子に依らない定数,  $\mathbf{r}_i$  はセル  $i$  の中心点の位置ベクトルを示す。リフレクタレー素子の設計にあたっては, この理想的な周波数特性  $\bar{\Phi}_i(f)$  と実際の素子の反射位相の周波数特性  $\Phi_i(f)$  との差

$$\Delta\Phi_i(f) = \Phi_i(f) - \bar{\Phi}_i(f) \quad (2)$$

を全てのセルにおいて十分小さくしなければいけない。この差が大きくなると, 開口面上で位相誤差が生じ, 利得低下, 不要ローブを引き起こすことになる。

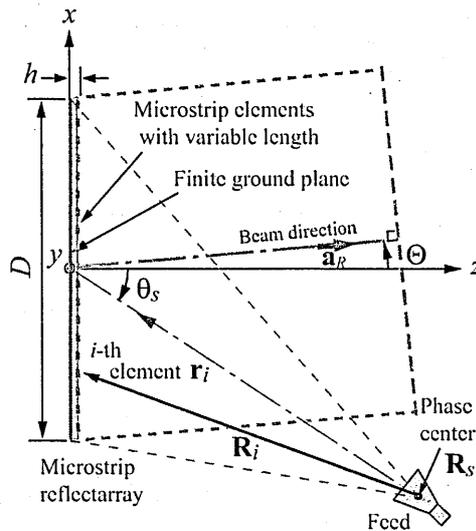


図2 オフセットリフレクタレーアンテナの座標系

## 2.2 所望の反射位相特性

幾何光学近似によって得られる位相特性あるいは光路長は、リフレクタレーと一次放射器の距離  $R_s$ 、放射方向  $\theta$  などの関数になっているため、これらが変化したときの周波数特性について説明する。図3は開口面上の  $y = 0$  mm における所望の反射位相を示したもので、リフレクタレーの開口径  $D = 16\lambda_0$  ( $\lambda_0$  は波長,  $f_0$  は周波数), オフセット角  $\theta_s = 30^\circ$  とし、リフレクタレーと一次放射器の位相中心までの距離  $R_s = 10\lambda_0, 20\lambda_0$  と放射方向  $\theta = 0^\circ, 30^\circ$  の組み合わせ4ケースについて式(1)より計算している。ただし、プロットした位相は、中心周波数  $f_0$  での開口中心の位相で規格化したものである。放射方向  $\theta$  とオフセット角  $\theta_s$  が等しい  $\theta = 30^\circ$  の場合、反射の法則に従う方向に主ビームを形成し、位相分布が緩やかに変化している。一方、放射方向  $\theta = 0^\circ$  の場合、主ビーム方向は鏡面反射方向とは異なり、開口面上で大きな位相変化が必要となるが、いずれにしても、同図に示すような反射位相特性を持つ素子配列が実現できれば、所定の方向に主ビームをもたせた放射パターンが得られることになる。

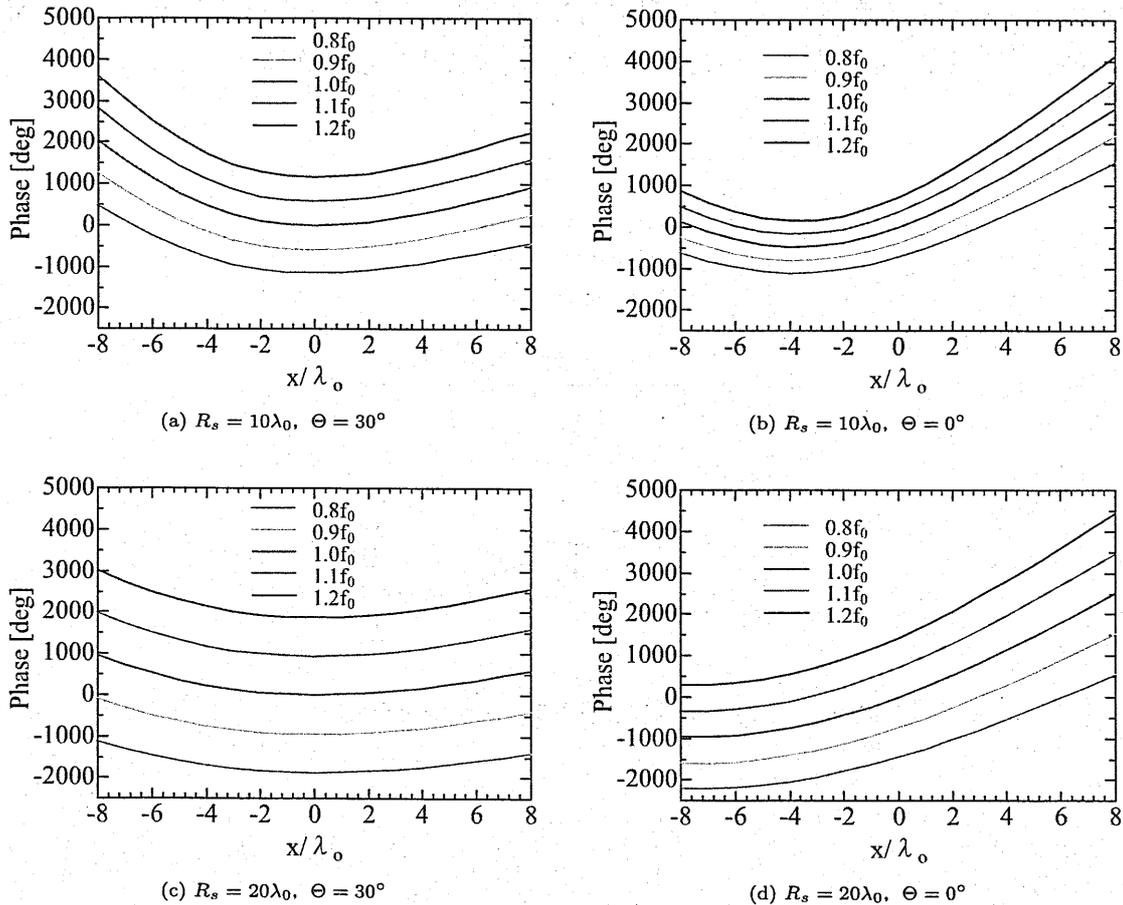


図3 開口面 ( $y = 0$ ) における所望の反射位相特性

また、これらの図では、周波数の変化によって位相特性が単に平行移動した形に見えるが、図4に示すように中心周波数  $f_0$  の位相分布との差としてプロットすると、中心周波数  $f_0$  から離れるほど位相分布の差が大きくなっていくことがわかる。これらの結果のうち、一次放射器をリフレクタレーから離れた  $R_s = 20\lambda_0$  で、放射方向  $\Theta = 30^\circ$  の場合、位相分布の差が最も小さい。このような場合には、実際の素子の反射位相特性として平行移動するよう特性をもたせるだけでも広帯域な特性が期待できる。このとき、開口中心で位相分布の周波数による差異も小さいことから、アレー開口径が小さいほど特性は広帯域になっていくことが予想できる。

また、放射方向  $\Theta = 0^\circ$  における周波数による位相分布の変化から、開口面位相誤差の分布を見積もると一次傾斜の特性となることがわかる。これは、主ビーム方向がシフトし、そのシフト量が中心周波数から離れるほど大きくなることを意味している。

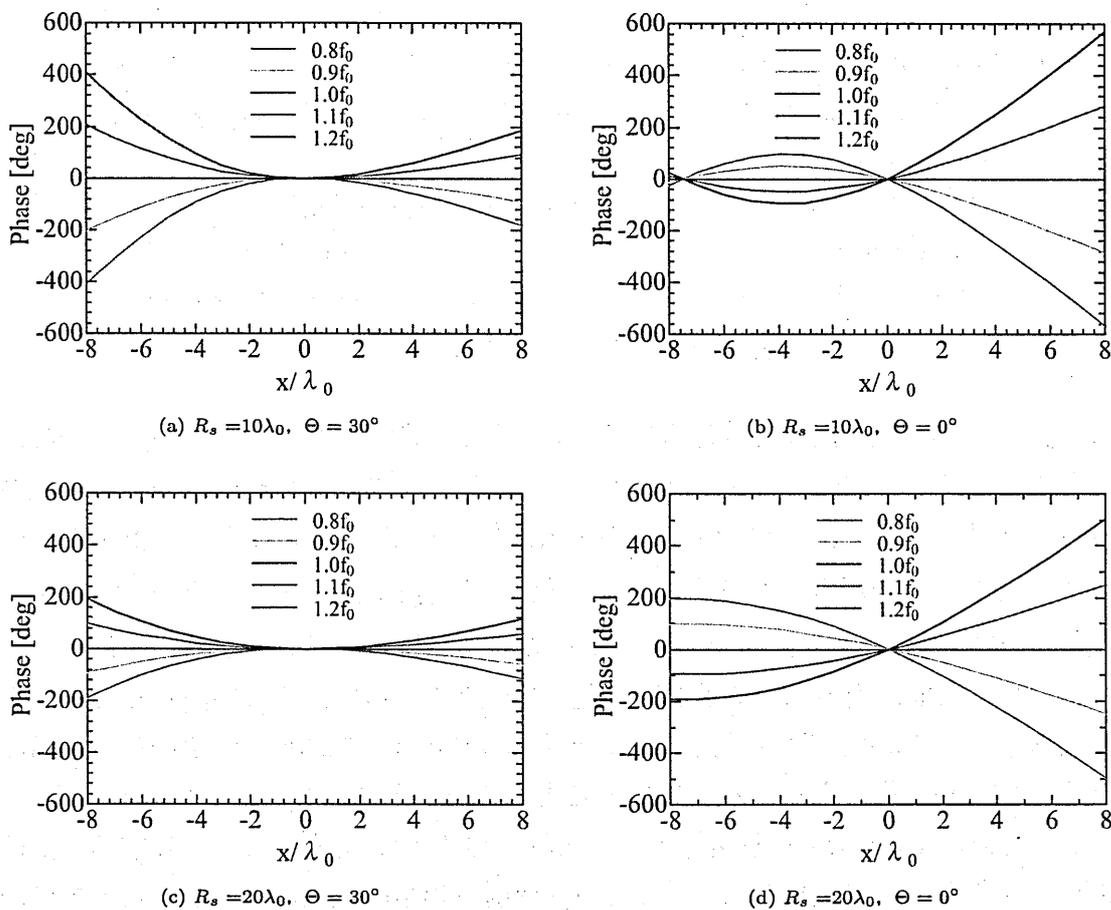


図4 中心周波数の特性で規格化した所望の反射位相特性

### 2.3 単共振素子による反射位相特性

従来のリフレクタレーの設計では、図5(a)に示すようなマイクロストリップ素子が利用されてきた。文献[18]では、素子を密に並べることで素子間の結合を強め、位相特性の変化を抑え、図5(b)に示すように通常の配列に比べ周波数特性を緩やかにして、平行移動した特性に近づけようというものである。このときの各パラメーターは  $x$  方向周期  $d_x = 1$  mm,  $y$  方向周期  $d_y = 16$  mm, 厚み (地導体と素子の間隔)  $h = 4$  mm である。しかしながら、単共振の素子では平行移動した特性にも限界があり、なおかつ、 $360^\circ$  の範囲にわたる反射位相量も得られていないことがわかる。

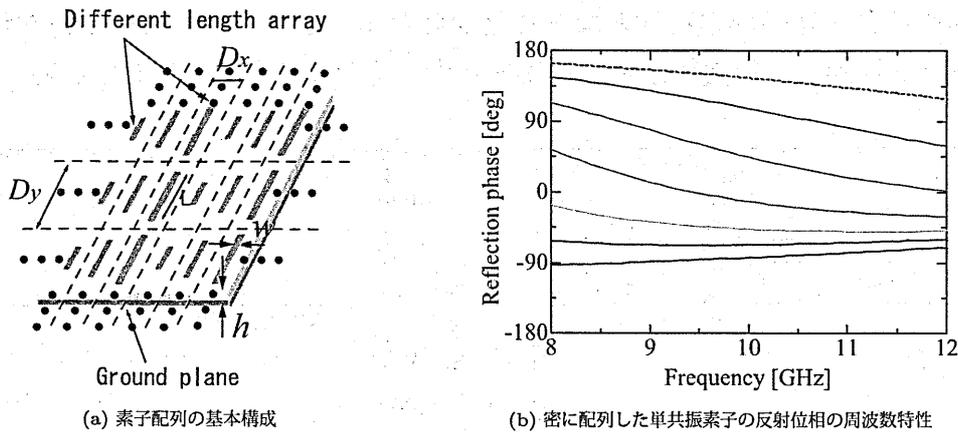


図5 従来のリフレクタレーの例

次に、図5(b)の特性を用いて放射方向  $\Theta_s = 0^\circ$  として設計したリフレクタレーの例を図6に示す。ただし、開口形状を  $199 \times 176$  mm, リフレクタレー中心から一次放射器の位相中心までの距離  $R_s = 400$  mm, 中心周波数  $f_0 = 10$  GHz, オフセット角  $\theta_s = 30^\circ$  とした。そして、一次パターンを  $\frac{e^{-jkR_i}}{R_i} \cos^3 \theta$  として計算した放射パターンを図7に示す。前節で述べたように、中心周波数  $f_0$  以外においてわずかであるがビームシフトが見られる。また、鏡面反射方向である  $30^\circ$  方向のローブも見られ、その要因として、図5(b)に示したように、中心周波数  $f_0$  付近での反射位相の範囲が約  $230^\circ$  しかないこと、高域側ではさらに位相量の範囲が狭くなっていることがあげられる。

そこで、反射位相量の範囲が放射特性に及ぼす影響について調べることにする。そのため、開口寸法ならびに周波数を同じ値にとり、反射位相量の範囲のみを変えたときの放射パターンの計算値を図8に示す。いずれも大きな利得低下を引き起こすまでには至っていないが、反射位相量の範囲が狭くなるに従って、鏡面反射方向のサイドローブが高くなっていくことがわかる。反射位相特性が平行移動した特性を用いることで十分な利得を広帯域にわたって達成できるものの、不要ローブ抑圧のためには  $360^\circ$  全てをカバーする反射位相量の実現が望ましいといえる。このような特性を単層構造のリフレクタレーで得るためには、これまででない新しいタイプの素子を検討する必要がある。

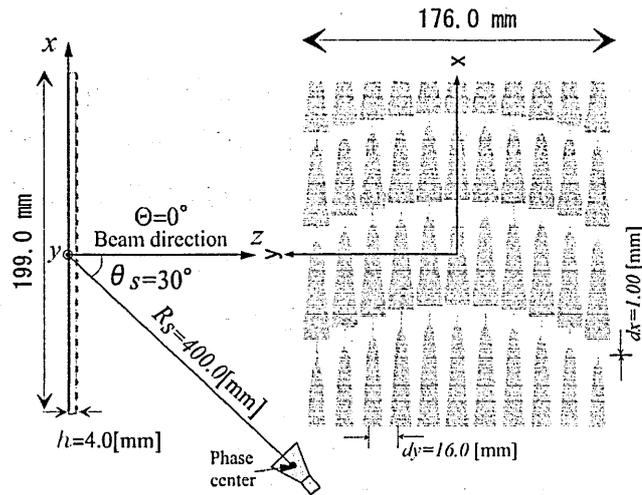


図6 従来のオフセット給電単層リフレクトアレーアンテナの例

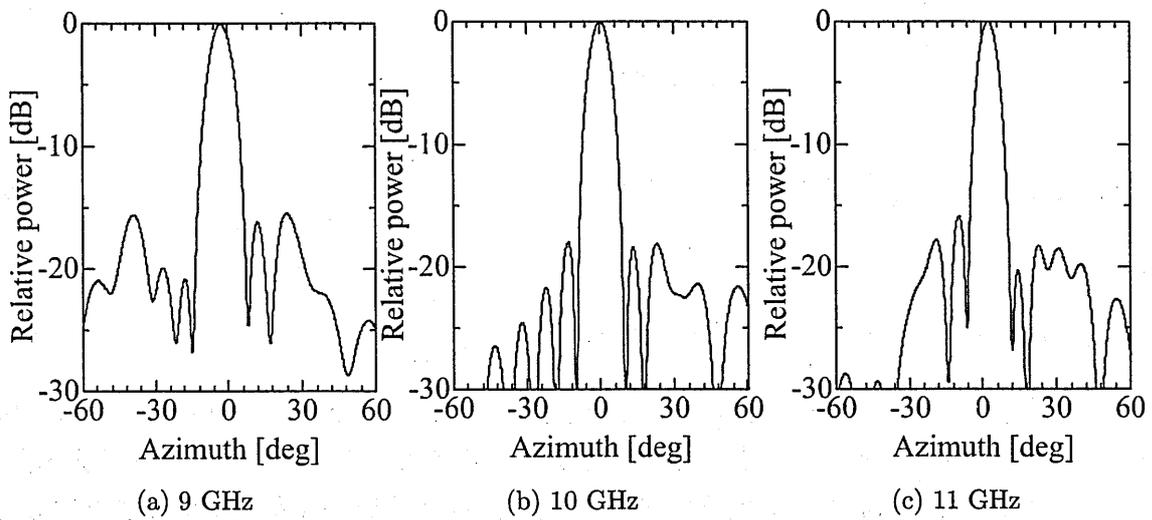


図7 放射パターンの計算値

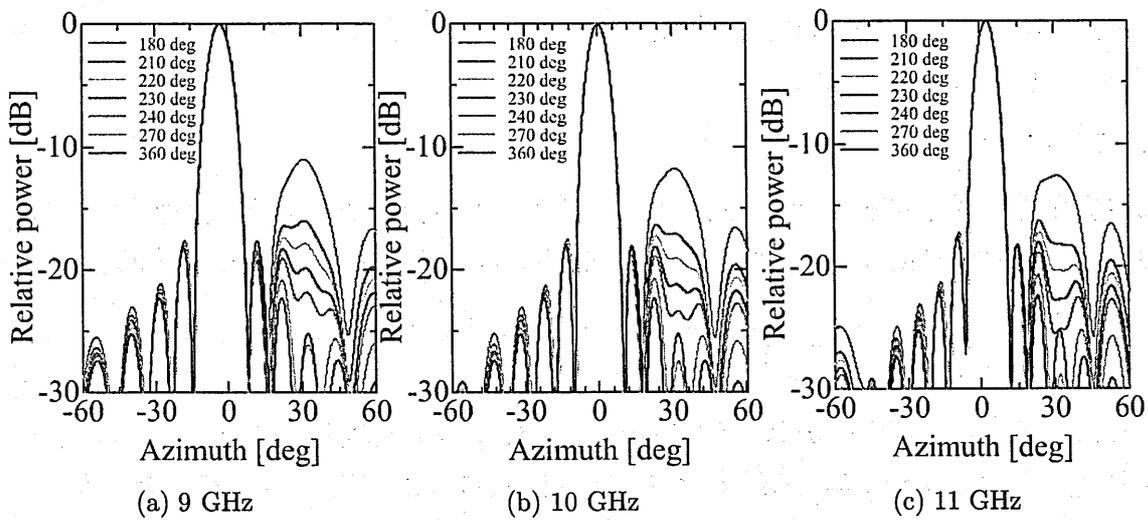


図8 位相誤差を与えた放射パターンの計算例

### 3 解析法

反射位相の解析は、図9に示すようにアレーが共振素子の無限周期配列によって構成されていると考えて周期境界条件を適用し、Floquetモードで散乱電磁界を展開する[14, 15, 22]. 入射波により共振素子上に誘起される電流  $\mathbf{J}$  は、Floquet 定理より次のようになる。

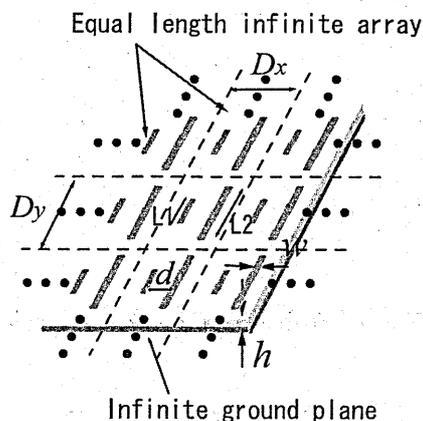


図9 無限リフレクトアレー

$$\mathbf{J}(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{J}}(k_{xp}, k_{yq}) e^{jk_{xp}x} e^{jk_{yq}y} \quad (3)$$

ここで、

$$k_{xp} = k_0 \sin \theta \cos \phi + \frac{2\pi p}{d_x}, \quad k_{yq} = k_0 \sin \theta \sin \phi + \frac{2\pi q}{d_y} \quad (4)$$

ただし、 $\tilde{\mathbf{J}}(k_{xp}, k_{yq})$  は電流  $\mathbf{J}(x, y)$  のフーリエ変換を表し、 $p, q$  は Floquet モードの次数 ( $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ ),  $k_0$  は自由空間波数,  $\theta, \phi$  は入射波のアレーに対する入射角,  $d_x, d_y$  はそれぞれ  $x$  方向,  $y$  方向の配列周期である。周期境界条件を適用することによって、無限周期構造の散乱問題を共振素子配列の一周期に対する問題として扱うことができる。その散乱電磁界は共振素子(導体)の電流分布から計算できることから、電流分布の解析に帰着する。いま、導体の厚みを無視し、導体に損失がないとすると、導体素子の存在する  $z = 0$  の  $xy$  平面上で、

$$\mathbf{E}_t^{(i)} + \mathbf{E}_t^{(s)} = 0 \quad (5)$$

なる境界条件が成立する。 $\mathbf{E}_t^{(i)}, \mathbf{E}_t^{(s)}$  はそれぞれ入射電界と散乱電界の接線成分である。これより、次の電界積分方程式 (Electric Field Integral Equation, EFIE) が得られる。

$$-\begin{bmatrix} E_x^{(i)}(x, y) \\ E_y^{(i)}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{G}_{xx} & \tilde{G}_{yx} \\ \tilde{G}_{xy} & \tilde{G}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \end{bmatrix} e^{-jk_{xp}x} e^{-jk_{yq}y} \quad (6)$$

ただし、 $E_x^{(i)}(x, y), E_y^{(i)}(x, y)$  は入射電界の  $x$  成分,  $y$  成分を表し、 $\tilde{G}_{xx}, \tilde{G}_{yx}, \tilde{G}_{xy}, \tilde{G}_{yy}$  および  $\tilde{J}_x, \tilde{J}_y$  は、フーリエ変換されたグリーン関数および  $x$  方向,  $y$  方向電流である。式(6)において、共振素子の電流分布が未知数であり、モーメント法によって解くことができる。

さて、モーメント法では、1つの共振素子の電流分布  $J$  を正規直交関数系で展開し、積分方程式を数値的に解くことによって電流分布  $J$  の展開係数を決定する。そのため、電流分布  $J$  を表す基底関数  $B$  の選択が重要となる。基底関数には全領域基底関数と部分領域基底関数があり、前者は素子形状全体を定義域とするため、比較的単純な形状に適用でき [14, 23, 22]、後者は素子形状を分割した各領域を定義域とするため任意形状に適用できる [14, 24, 25]。ここでは、図 10(a) に示すように一周期に相当する単位セルを格子状に  $N \times M$  グリッドに分割し、同図 (b) のように各サブセルに部分領域基底関数を定義する。これより、未知電流分布  $J$  は、展開係数  $I_x, I_y$  と基底関数  $B_x, B_y$  を用いて、

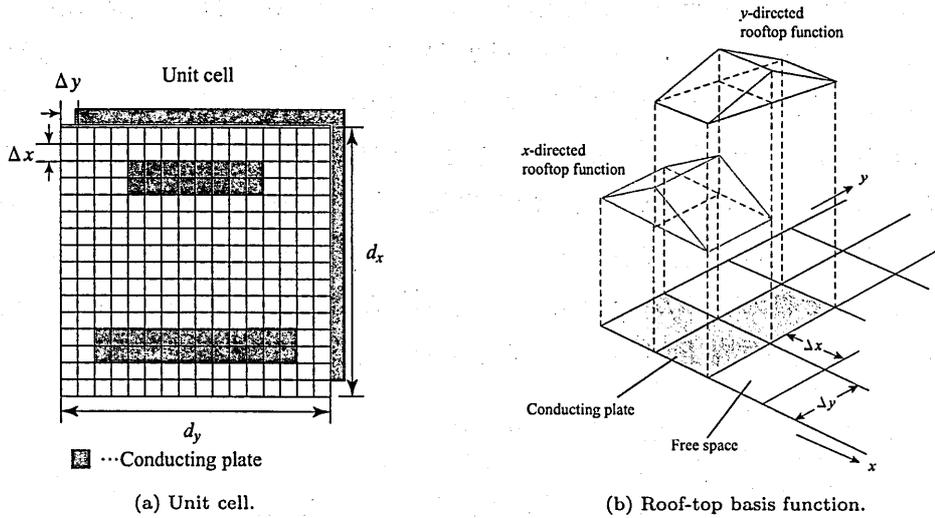


図 10 モーメント法による反射位相の解析

$$J_x(x, y) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} I_x(n, m) B_x(n, m) \quad (7)$$

$$J_y(x, y) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} I_y(n, m) B_y(n, m) \quad (8)$$

のように展開して表すことにする。ただし、roof-top 型部分領域基底関数  $B_x, B_y$  は、次式で与えられる。

$$B_x(n, m) = \Lambda_x\left(n + \frac{1}{2}\right) \Xi_x(m) \quad (9)$$

$$B_y(n, m) = \Xi_y(n) \Lambda_y\left(m + \frac{1}{2}\right) \quad (10)$$

ここで、

$$\Lambda_x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-n\Delta x|}{\Delta x}, & |x-n\Delta x| < \Delta x \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (11)$$

$$\Xi_x(m) = \begin{cases} 1, & |y-m\Delta y| < \frac{\Delta y}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (12)$$

また,  $\Xi_y(n)$ ,  $\Lambda_y(m)$  についても同様に記述できる. EFIE を解くためにガラーキン法を適用すると, 最終的に電流の展開係数  $I_x$ ,  $I_y$  を未知数とする次のようなマトリクス方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \end{bmatrix} \quad (13)$$

以後, 簡単のため, 上式を  $[V] = [Z][I]$  と表すことにする.  $[V]$  は入射波に関する列ベクトル,  $[Z][I]$  は散乱電界に関するもので,  $[I]$  は未知電流値からなる列ベクトルである. また, 行列  $[Z]$  の大きさは素子形状を構成するサブセルの総数によって決まる. 電流分布を正確に求めるには Floquet モードの無限和を計算する必要があるが, 実際の計算では, 電流値の収束を確認して有限の Floquet モード数で打ち切っている. そして, 求めた電流分布から反射係数にあたる散乱行列要素  $S_{11}$  を求め, 反射位相量を算出する.

次に, リフレクタレーによる放射界は, 図 2 に示すように一次放射器から吹き付けられた入射波  $\mathbf{E}^{inc}$  より, 開口面振幅分布, ならびに素子の反射位相  $\Phi_i^{ref}$  を求め, 得られた開口面電界分布  $\mathbf{E}_a$  より開口面法を用いて計算できる. いま, リフレクタレーを単位セルに分割し, それぞれのセルが入射波  $\mathbf{E}^{inc}$  に比例した大きさを励振されるものとみなすと, 開口面法より放射界  $\mathbf{E}(\theta, \phi)$  は次式で求めることができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta, \phi) &= \frac{jk\eta e^{-jkR}}{4\pi R} \int_S \mathbf{E}_a e^{jk(x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi)} dS \\ &= \frac{jk\eta e^{-jkR}}{4\pi R} \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{E}_i^{inc} e^{\Phi_i^{ref}} \right) e^{jk(x_i \sin \theta \cos \phi + y_i \sin \theta \sin \phi)} \end{aligned} \quad (14)$$

## 4 提案するリフレクタレー素子

### 4.1 2共振素子による反射位相特性

反射位相の範囲を  $360^\circ$  までカバーするために、リフレクタレー素子として、図 11(a) のように異なる素子長からなる2つのマイクロストリップ導体を単位セルとして周期配列した構造を提案する。同図 (b) は、このような素子からなる無限リフレクタレー (図 9 参照) の反射位相の周波数特性の計算値を示したもので、一例として、入射角  $30^\circ$ 、ストリップ導体素子長  $L_1 = 15 \text{ mm}$ 、 $L_2 = 12 \text{ mm}$ 、素子幅  $w = 1 \text{ mm}$ 、支持基板の比誘電率  $\epsilon_r = 1.07$ 、支持基板の厚さ  $h = 2 \text{ mm}$ 、 $x$  方向周期  $d_x = 16 \text{ mm}$ 、 $y$  方向周期  $d_y = 16 \text{ mm}$ 、2共振素子の間隔  $d = 5 \text{ mm}$  として求めている。この例では、反射位相の範囲は  $180^\circ \sim$

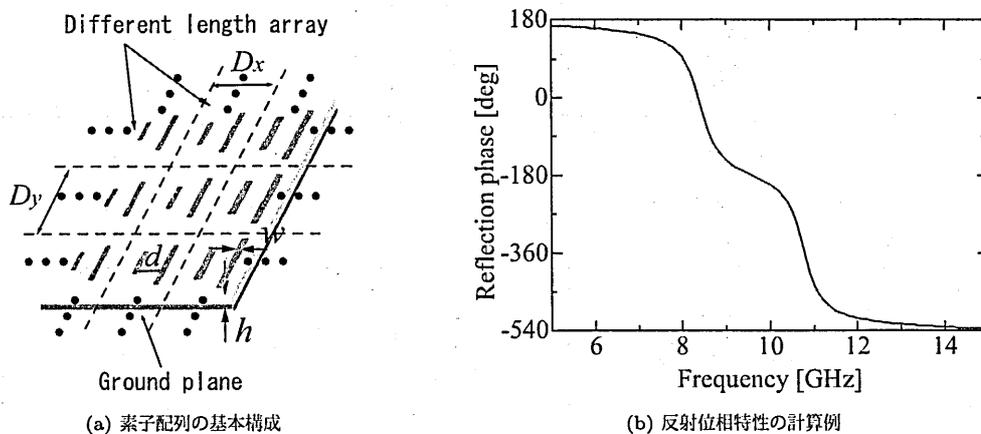


図 11 提案する 2 共振素子

$-540^\circ$  となって、 $360^\circ$  以上の範囲をカバーできることになるが、2段の共振カーブのような変化となり、広帯域化に適した平行移動した特性を持たせることが困難になってしまう。そこで、リフレクタレーを構成する種々のパラメータを変化させ、線形的なカーブを持った位相特性を求め、その後  $L_1$ 、 $L_2$  の組み合わせを変えて平行移動した特性を得ることにする。

各パラメータの検討として、まず支持基板の厚さ  $h$  を変化させたときの位相特性を図 12(a) に示す。その他のパラメータは図 11(b) と同じ値である。また、入射角は以降、すべて  $30^\circ$  とする。図 12(a) より、厚さ  $h$  が厚くなるほど位相特性のカーブが滑らかになっていき、位相特性が平行移動するよう素子を選び易くなるが、長い方の素子長  $L_1$  が  $y$  方向周期  $d_y$  より長いものが必要となり解が存在しなくなってしまう。厚さ  $h$  の決定に際しては、このような点を考慮する必要がある。

次に、 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $w$ 、 $\epsilon_r$ 、 $d_x$ 、 $d_y$  は同じ値にとり、支持基板の厚さ  $h = 3 \text{ mm}$  として、2共振素子の間隔  $d$  を変化させたときの反射位相特性を図 12(b) に示す。2共振素子の間隔を広げていくと、低域側の特性にはほとんど変化がないが、高域側の特性が滑らかになることがわかる。したがって、同図の  $d = 7 \text{ mm}$  を採用するという事は、2共振素子も等間隔に配列すればよいということになる。

ところで、反射位相の計算においては、すでに述べたように各セルを等間隔メッシュに分ける方法を用いている。そのため、これまでの検討とパラメータが異なるが、 $y$ 方向周期  $d_y = 8.0, 9.6, 12.0, 16.0$  [mm] とし、素子長  $L_1 = 7.5$  mm,  $L_2 = 6.0$  mm で一定となるようにパラメータを選ぶことにする。このとき、 $w = 0.75$  mm,  $\epsilon_r = 1.07$ ,  $h = 3$  mm,  $d_x = 6$  mm,  $d = 2.25$  mm とし、 $y$ 方向周期  $d_y$  の値を変化させたときの反射位相特性を図 12(c) に示す。 $d_y$  の値を小さくすると、 $L_1, L_2$  のとり得る範囲も狭くなってしまふ。

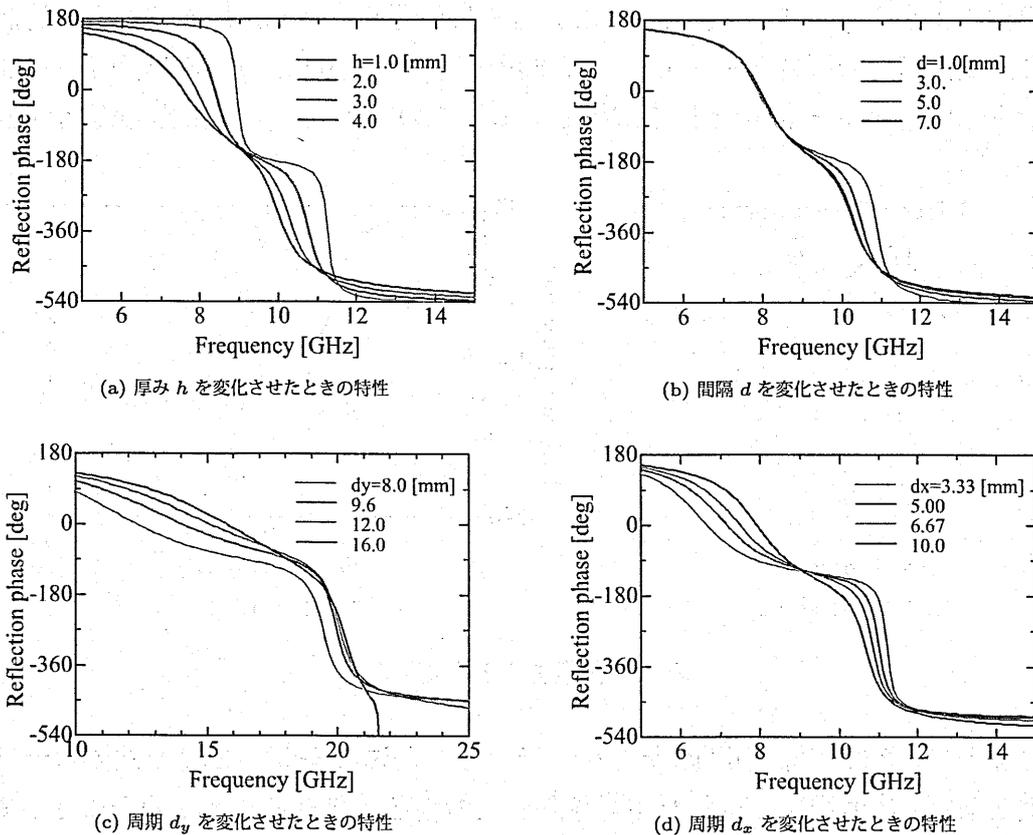


図 12 各パラメータによる反射位相特性の変化

最後に、 $L_1 = 15$  mm,  $L_2 = 12$  mm,  $w = 0.625$  mm,  $\epsilon_r = 1.07$ ,  $h = 3$  mm,  $d_y = 16$  mm とし、 $x$ 方向周期  $d_x$  を変化させたときの反射位相特性を図 12(d) に示す。単共振素子のときと同様に素子を密に並べた配列にすると、低域側の共振付近における位相特性は緩やかになるが、高域側の共振付近の位相変化は急な傾きを持つようになる。逆に素子を疎に配列させると、低域側の共振付近における位相特性は急になるが、高域側の共振付近の位相変化は緩やかになる。線形的な位相特性を得るためには、 $d_x$  を適切な値に決める必要がある。

なお、 $d_x, d_y$  の決定にあたっては、次のようなグレーティングローブが発生しない条件も考慮しなければいけない。

$$\lambda \geq d_x(1 + \sin \theta_s), \quad \lambda \geq d_y \cos \theta_s \quad (15)$$

## 4.2 2共振素子の設計例

支持基板としてスチレンボード (比誘電率  $\epsilon_r = 1.07$ ) を選び, 入射角  $30^\circ$ , 素子幅  $w = 0.625$  mm, 支持基板の厚さ  $h = 3$  mm,  $x$  方向周期  $d_x = 10$  mm,  $y$  方向周期  $d_y = 16$  mm, 2 共振素子の間隔  $d = 4.38$  mm とし, 素子長の組み合わせを変化させたときの反射位相の周波数特性を図 13(a) に示す. 同図に  $L_1, L_2$  の値も示している. 図 13(b) は同図 (a) を基に,  $L_1 = 9.5$  mm,  $L_2 = 7.25$  mm のときの位相特性を基準としてそれぞれ差をとり, 中心周波数  $f_0 = 15$  GHz で位相が  $0^\circ$  となるように規格化したものである. 基準となる位相特性からのずれは,  $-20^\circ \sim 20^\circ$  と比較的小さく, 広帯域にわたり  $360^\circ$  の位相範囲を実現し, かつほぼ平行移動した特性も得られることがわかる.

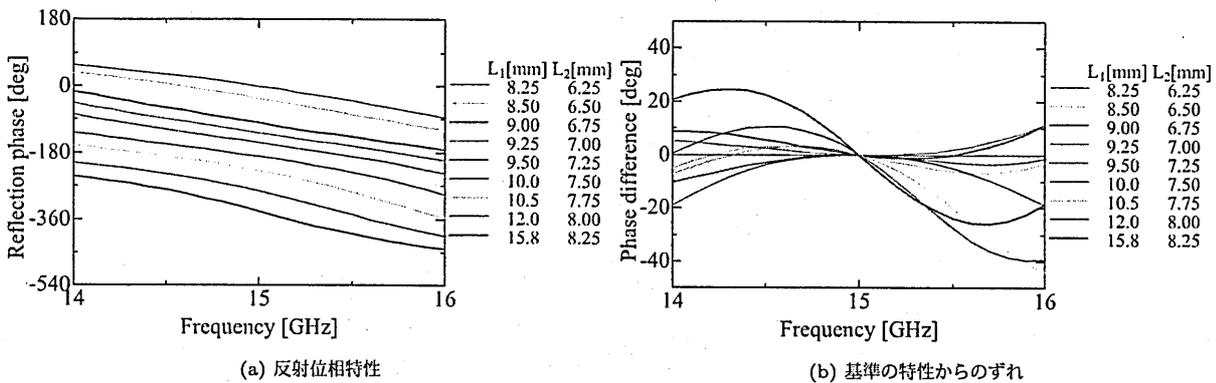


図 13 反射位相の周波数特性

## 4.3 反射位相特性の実験

図 14 に試作したリフレクタレーの一部分の写真を示す. このとき, 各パラメータは, 入射角  $30^\circ$ , 素子幅  $w = 0.625$  mm, 支持基板の比誘電率  $\epsilon_r = 1.07$ , 厚さ  $h = 3$  mm,  $x$  方向周期  $d_x = 10$  mm,  $y$  方向周期  $d_y = 16$  mm, 2 共振素子の間隔  $d = 4.38$  mm, 素子長  $L_1 = 9.5$  mm,  $L_2 = 7.5$  mm である. 厚さ  $35 \mu\text{m}$  の銅箔が片面に貼ってあるポリイミド誘電体フィルム (厚さ  $50 \mu\text{m}$ ) をエッチングすることにより共振素子を製作しており, 支持基板の裏面に銅箔シートを付けて地導体としている. 測定は入射角, 反射角ともに  $30^\circ$  で行った. 図 15 に測定値と計算値の比較を示す. アレー面と同じ位置に金属板を置いたときの反射位相を基準として位相を図示している. スチレンボードへの貼り付けや製作誤差による影響があるものの, 両者はよく一致しており, 良好な 2 共振位相特性が得られている.

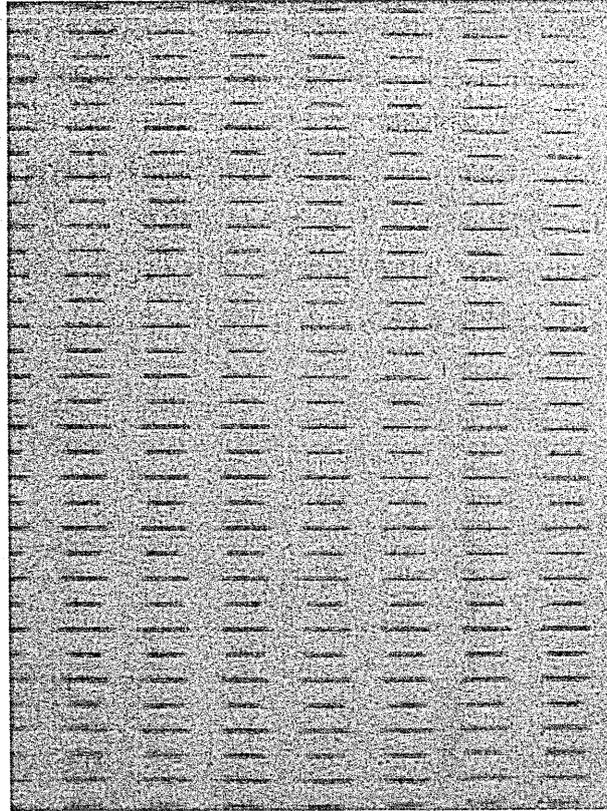


図 14 試作したリフレクタレーの写真

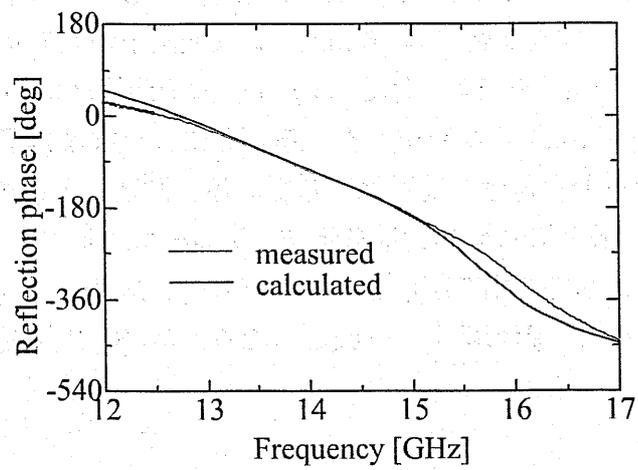


図 15 反射位相特性の測定値と計算値との比較

## 5 設計例および実験評価

### 5.1 素子長の設計

4章で決定した  $x$  方向周期  $d_x$ ,  $y$  方向周期  $d_y$ , 厚さ  $h$  を用いてリフレクタレーを設計する。その際、開口面上の全ての点においてモーメント法を用いて反射位相を求めようとすると計算に時間がかかりすぎる。また、3章で述べたように、各セルを等間隔メッシュに分割して反射位相を計算しているため、素子長  $L_1$ ,  $L_2$  を任意に選ぶことができない。そこで、所定の位相特性をもつ  $L_1$ ,  $L_2$  を離散的に求め、それらをサンプル点として内挿し、アレーの各位置において所望の反射位相を満足する  $L_1$ ,  $L_2$  を決定していく。

まず、パラメータ  $d_x$ ,  $d_y$ ,  $h$  を与え、周波数  $f$ , 入射角  $\theta$ ,  $\phi$  を固定したパラメータとすると、反射位相  $\Phi$  は、素子長  $L_1$ ,  $L_2$  の関数として、

$$\Phi = \Phi(L_1, L_2) \quad (16)$$

の形で表される。一例として、図 13(a) で示した素子長  $L_1$ ,  $L_2$  と反射位相  $\Phi$  との関係を図 16 にプロットしている。ただし、周波数  $f = 15$  GHz, 入射角  $30^\circ$  である。図 16(a) は

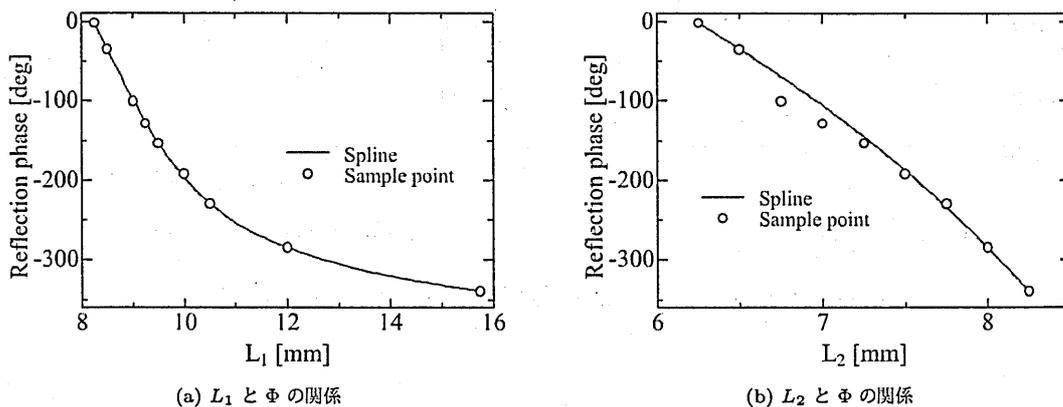


図 16 反射位相特性および素子長の内挿

$L_1$  と  $\Phi$  の関係、同図 (b) は  $L_2$  と  $\Phi$  の関係を示したもので、等間隔メッシュによる解析のため、各々のサンプル点が滑らかな曲線を描くように並んでいないが、3次スプライン関数を用いることで滑らかな曲線を描くよう補間を行った。図 16 より、 $\Phi$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  の内一つを与えれば他のパラメータを決めることができる。したがって、所望の反射位相の値を与えれば、 $L_1$ ,  $L_2$  の組み合わせが求まることになる。

反射位相は入射角  $\theta$  の関数でもあるため、素子の数だけ式 (16) を求めなければならない。そこで、式 (16) をさらに

$$\Phi = \Phi(\theta, L_1, L_2) \quad (17)$$

と拡張し、入射角も考慮して補間を行う。各セルにおいて入射角が異なるため、サンプル点として  $30^\circ$  入射のときと同じ  $L_1$ ,  $L_2$  の値において  $15^\circ$  から  $45^\circ$  まで  $5^\circ$  間隔で計算し、その結果を基に 3 次スプライン関数で補間を行えば、式 (17) が得られる。図 17 は、入射

角が  $20^\circ$ ,  $40^\circ$  のときの  $L_1$  と  $\Phi$  の関係,  $L_2$  と  $\Phi$  の関係を各々示したもので, いずれの図においても滑らかに補間されていることが確認できる. 次節では, このようにして得られたチャートを使ってリフレクタレーの設計を行う.

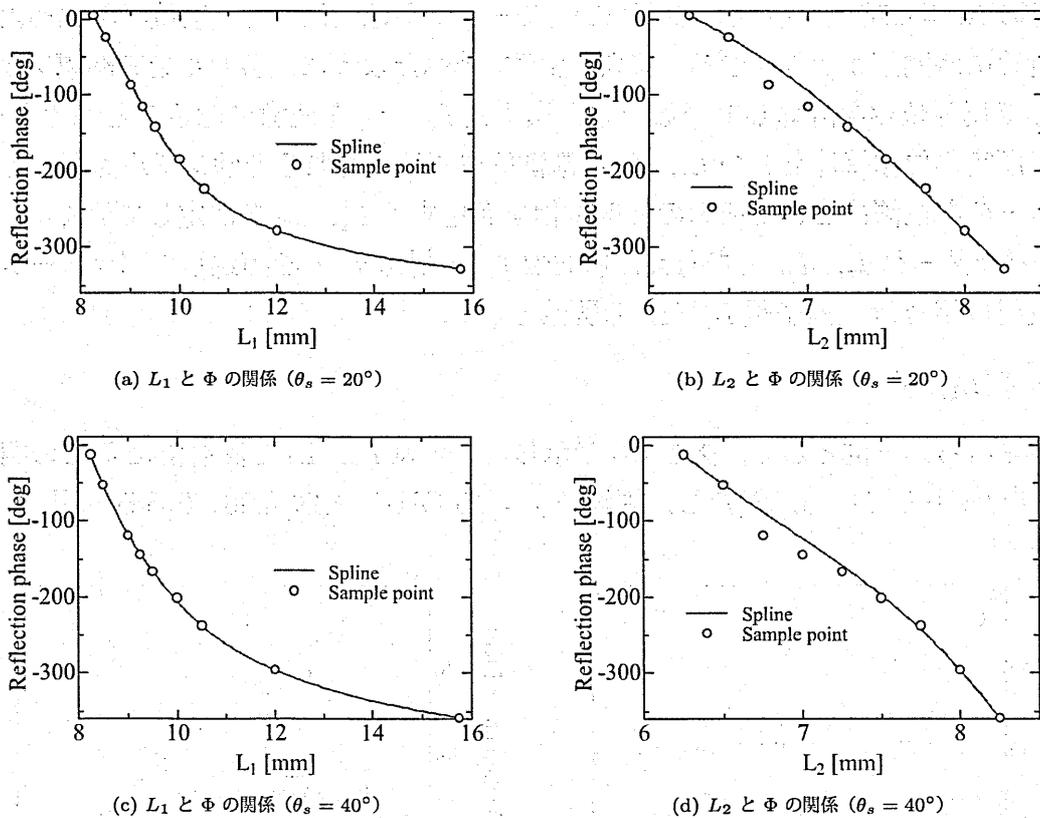


図 17 入射角も考慮した反射位相特性および素子長の内挿

## 5.2 リフレクタレーアンテナの設計例

支持基板としてスチレンボードを用い, 5.1 節で示した近似関数を用いてリフレクタレーの設計を行う. 開口寸法は  $190 \times 176 \text{ mm}$  ( $9.5\lambda_0 \times 8.8\lambda_0$ ), オフセット角  $\theta_s = 30^\circ$ , 放射方向  $\Theta = 0^\circ$  とし, 一次放射器によるブロッキングが生じないようにリフレクタレーと一次放射器の位相中心との距離  $R_s = 400 \text{ mm}$  とした. 中心周波数を  $f_0 = 15 \text{ GHz}$  とし, 図 13 より設計した結果を図 18 に示す. 放射方向を  $\Theta = 0^\circ$  として鏡面反射方向とは異なる方向に設定しているため, 位相が  $360^\circ$  ずつ変化する毎に不連続な素子長となって干渉縞のように見える.

図 19 に放射パターンの計算値を示す. 中心周波数以外において若干のビームシフトがみられるものの, 不要ローブと主ビームとの差が  $15 \text{ dB}$  以上と良好な放射特性が得られている. また, 利得低下は  $20\%$  の帯域内で  $0.75 \text{ dB}$  と比較的小さいことを数値計算によって確認している.

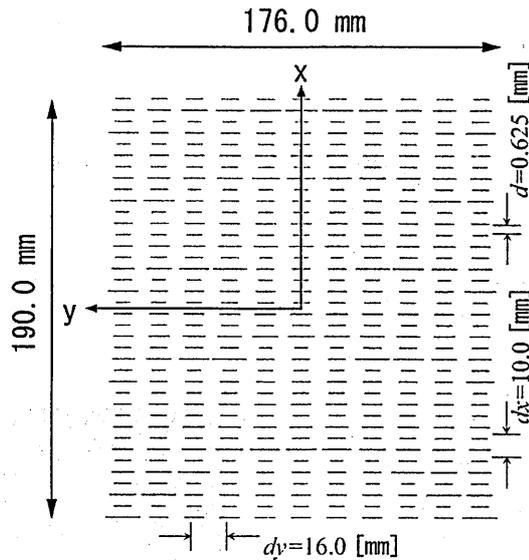


図 18 リフレクタレーの設計例

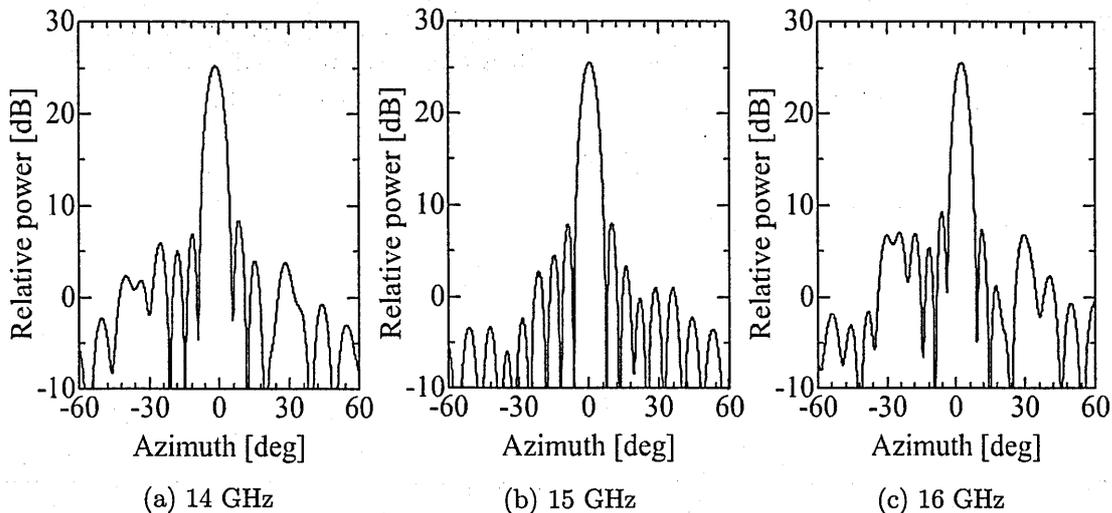
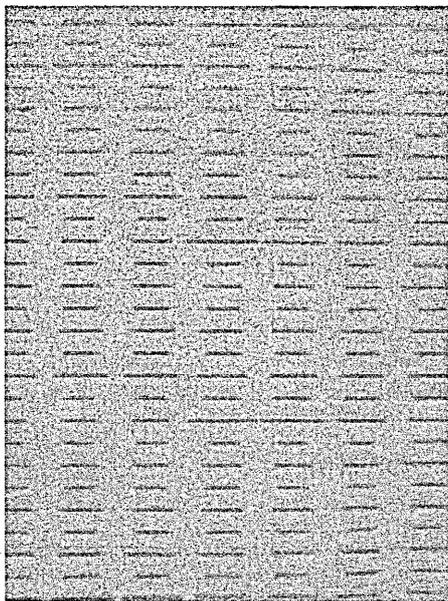


図 19 設計したリフレクタレーアンテナの放射パターンの計算値

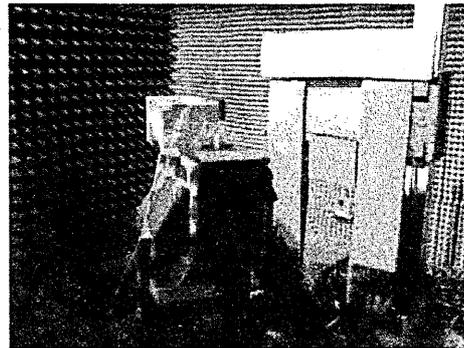
### 5.3 放射パターンの実験的検証

図 18 の設計結果から試作したリフレクタレーの一部分の写真を図 20(a) に示す。厚さ  $25 \mu\text{m}$  の誘電体フィルム上の銅箔 (厚さ  $35 \mu\text{m}$ ) をエッチングし、厚さ  $h = 3 \text{ mm}$  のスチレンボードに貼り付けることにより構成した。実験は図 20(b) に示す測定系で行い、リフレクタレーを回転させ、固定した標準ホーンにより放射界を受信した。なお、一次放射器にも標準ホーンを用いている。

図 21 に 14 GHz, 15 GHz, 16 GHz における放射パターンの測定値と計算値との比較を示す。中心周波数 15 GHz において主ビームの両サイドにローブが見られるが、 $-15 \text{ dB}$  以下と比較的低いレベルに抑えられている。また、14 GHz, 16 GHz においても不要ローブが同様に抑えられていることが確認できる。



(a) 試作したリフレクタレー



(b) 放射パターンの測定系

図 20 実験

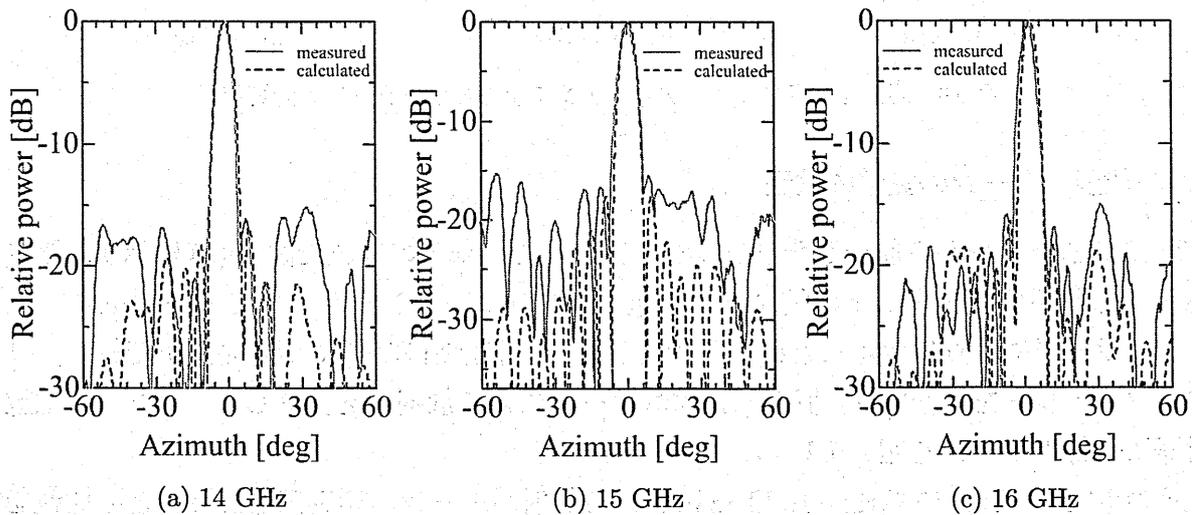


図 21 放射パターンの測定値と計算値との比較

## 6 むすび

オフセット単層リフレクタレーアンテナの設計にあたって、リフレクタレーを構成する各パラメータ、ならびに2共振素子の素子長の組み合わせをうまく選べば、良好な反射位相の周波数特性が得られることを明らかにした。提案する2共振素子を用いることで $360^\circ$ の範囲で反射位相量を得ることができ、その結果、不要ローブを抑圧できることを示した。リフレクタレーアンテナを設計、試作し、放射特性の数値的ならびに実験的評価によって提案するリフレクタレーが広帯域にわたって動作することを示し、本法の妥当性を検証した。今後は各パラメータを最適化して、より高性能な特性を目指していきたい。

なお、本研究の一部は、日本学術振興会科学研究補助金基盤研究(C) (課題番号18560393)にて行った。

## 参考文献

- [1] J. Huang, "Microstrip reflectarray," *IEEE Int. Symp. Antennas Propagat.*, vol. 2, pp. 612–615, June 1991.
- [2] D. C. Chang and M. C. Huang, "Microstrip reflectarray antenna with offset feed," *Electron. Lett.*, vol. 28, pp. 1489–1491, July 1992.
- [3] D. M. Pozar, S. D. Targonski and R. Pokuls, "A shaped-beam microstrip patch reflectarray," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 47, no. 7, pp. 1167–1173, July 1999.
- [4] D. M. Pozar and S. D. Targonski and H. D. Syrigos, "Design of millimeter wave microstrip reflectarrays," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, no. 2, pp. 287–296, Feb. 1997.
- [5] J. Huang and V. A. Faria and H. Fang, "Improvement of the three-meter Ka-band inflatable reflectarray antenna," *IEEE Int. Symp. Antennas Propagat.*, vol. 1, pp. 122–125, July 2001.
- [6] M. Patel and J. Thraves, "Design and development of a low cost, electronically steerable, X - band reflectarray using planar dipoles," *Proc. of Military Microwaves*, London, U.K., pp. 174–179, 1994.
- [7] D. C. Chang and M. C. Huang, "Multiple-polarization microstrip reflectarray antenna with high efficiency and low cross-polarization," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, no. 8, pp. 829–834, Aug. 1995.
- [8] R. D. Javor, X. D. Wu and K. Chang, "Design and performance of a microstrip reflectarray antenna," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, no. 9, pp. 932–939, Sept. 1995.
- [9] D. M. Pozar and T. A. Metzler, "Analysis of a reflectarray antenna using microstrip patches of variable size," *Electron. Lett.*, vol. 29, pp. 657–658, 1993.
- [10] H. Deguchi, N. Takagi, M. Tsuji and H. Shigesawa, "Microstrip reflectarray with offset feed for improving effective aperture area," *IEEE Int. Symp. Antennas Propagat.*, vol. 3, pp. 290–293, June 2003.
- [11] John P. Gianvittorio, Yahya Rahmat-Sammi, "Reconfigurable Patch Antennas for Steerable Reflectarray Applications," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 54, no. 5, pp. 1388–1392, May 2006.
- [12] H. K. Schuman, D. R. Pelug and L. D. Thompson, "Infinite planar arrays of arbitrarily bent thin wire radiators," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, pp. 364–377, April 1984.
- [13] D. M. Pozar and D. H. Schaubert, "Analysis of an infinite array of rectangular microstrip patches with idealized probe feeds," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, no. 10, pp. 1101–1107, Oct. 1984.
- [14] T. K. Wu, *Frequency selective surface and grid array*, New York, Wiley, 1995.

- [15] B. A. Munk, *Frequency selective surfaces – Theory and design*, New York, Wiley, 2000.
- [16] C. Han, C. Rodenbeck, J. Huang and K. Chang, “A C/Ka dual frequency dual layer circularly polarized reflectarray antenna with microstrip ring elements,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, no. 11, pp. 2871–2876, Nov. 2004.
- [17] J. A. Encinar and J. A. Zornoza, “Three-layer printed reflectarrays for contoured beam space applications,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, no. 5, pp. 1138–1148, May 2004.
- [18] 井戸川貴志, 出口博之, 辻 幹男, 繁澤 宏, 高木信雄, “単層マイクロストリップオフセットリフレクタレーの簡易設計,” *信学論 (C)*, vol. J89-C, no. 5, pp. 321–328, 2006.
- [19] 崎田聡史, 出口博之, 辻 幹男, “2共振素子を用いた単層リフレクタレーの広帯域化に関する検討,” *信学ソ大*, B-1-52, Sep. 2006.
- [20] 崎田聡史, 出口博之, 辻 幹男, “複数共振による位相特性を用いた単層リフレクタレーの設計,” *電磁界理論研究会*, EMT-06-139, 2006.
- [21] 崎田聡史, 出口博之, 辻 幹男, “2共振素子を用いた単層リフレクタレーの設計,” *信学全大*, B-1-183, Mar. 2007.
- [22] J. J. H. Wang, *Generalized moment methods in electromagnetics*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [23] C. C. Chen, “Scattering by a two-dimensional periodic array of conducting plates,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-18, no. 5, pp. 660–665, Sep. 1970.
- [24] R. Mittra, C. H. Chan and T. Cwik, “Techniques for analyzing frequency selective surfaces - a review,” *IEEE Proc.*, vol. 76, no. 12, pp. 1593–1615, Dec. 1988.
- [25] C. H. Chan and R. Mittra, “On the analysis of frequency-selective surfaces using subdomain functions,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-38, no. 1, pp. 40–50, Jan. 1990.

発行 財団法人 輻射科学研究会  
連絡先 佐藤 亨  
事務局 京都大学大学院情報学研究科通信情報システム専攻  
〒606-8501 京都市左京区吉田本町